UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS ESTRUCTURAL II

ING. JULIO E. DAMY RIOS

Principios Fundamentales.

a).- Continuidad

$$e = a\ d$$

b).- Ley de Hooke

$$p = k\ e$$

c).- Equilibrio

$$F = a^T\ p$$

Solución de Estructuras.

Método de los desplazamientos o de las rigideces.
(Continuidad —— Ley de Hooke —— Equilibrio)

$$F = a^T\ p = a^T\ k\ e = a^T\ k\ a\ d$$

$$F = K\ d\ ;\ K = a^T\ k\ a$$

Solución:

$$d = K^{-1}\ F$$

$$e = a\ d = a\ K^{-1}\ F$$

$$p = k\ e = k\ a\ K^{-1}\ F$$

Si la estructura es isostática, a^T es no singular, por consiguiente:

$$p = (a^T)^{-1}\ F$$

$$e = (k)^{-1}\ p$$

$$d = (a)^{-1}\ e$$

Si la estructura es hiperestática estable, la matriz a^T se puede particionar.

$$\left[a^T\right] = \left[a_o^T \mid a_1^T\right]$$

a_o^T debe ser una matriz cuadrada no singular, que define la estructura primaria o isostática.

$$F = \left[a_o^T \mid a_1^T\right]\begin{bmatrix} p_o \\ \hline p_1 \end{bmatrix}$$

p_o = fuerzas en las barras que forman la estructura primaria.

p_1 = fuerzas en las barras sobrantes.

Método de las fuerzas o método de las flexibidades.
Equilibrio:

$$\left[p\right] = \left[b_o \mid b_1\right]\begin{bmatrix} F \\ \hline R \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} p_o \\ \hline p_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} b_{oo} & b_{10} \\ \hline 0 & b_{11} \end{array}\right]\begin{bmatrix} F \\ \hline R \end{bmatrix}$$

Ley de Hooke:

$$\left[e\right] = \left[f\right]\left[p\right]$$

$$f = k^{-1}$$

Continuidad:

$$\begin{bmatrix} d \\ \hline u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_o^T \\ \hline b_1^T \end{bmatrix}\left[e\right]$$

Relaciones de b_{oo}, b_{10}, a :

$$b_{oo} = (a_o^T)^{-1}$$

$$b_{10} = -\ b_{oo}\ a_1^T\ b_{11}$$

b_{11} depende de R

Las redundantes (R) se obtienen de la condición de que: $u = 0$:

$$u = b_1^T e = b_1^T f p = b_1^T f (b_0 F + b_1 R)$$

$$\underline{R = -(b_1^T f b_1)^{-1} b_1^T f b_0 F}$$

$$p = \left[b_0 - b_1 (b_1^T f b_1)^{-1} b_1^T f b_0 \right] F$$

$$e = f p = f b F$$

$$d = b_0^T e = b_0^T f b F$$

Notas:

a).- Si: $p = b F$

Por el principio de contragradiencia:

$$d = b^T e$$

$$d = b^T f b F$$

b).- Se demuestra que:

$$b_0^T f b = b^T f b = K^{-1}$$

$(K)^{-1}$ = matriz de flexibilidades de la estructura.

Demostraciones

1).- $a^T b_0 = I$; $a^T b_1 = 0$

Por la ecuación de equilibrio:

$$p = b_0 F + b_1 R$$

Premultiplicando por a^T:

$$a^T p = a^T b_0 F + a^T b_1 R$$

Pero: $a^T p = F$

$$F = a^T b_0 F + a^T b_1 R$$

La ecuación anterior se debe cumplir para cualquier F y cualquier R

$$a^T b_0 = I$$

$$a^T b_1 = 0 \qquad \text{l.q.q.d.}$$

2).- $b_{00} = (a_0^T)^{-1}$

Por el teorema (1)

$$\left[a^T \right] \left[b_0 \right] = \left[a_0^T \;\vdots\; a_1^T \right] \begin{bmatrix} b_{00} \\ 0 \end{bmatrix} = I$$

$$a_0^T b_{00} = I$$

La matriz a_0^T es cuadrada, por lo tanto:

$$\underline{b_{00} = (a_0^T)^{-1} \qquad \text{l.q.q.d.}}$$

3).- $b_{10} = - b_{00} a_1^T b_{11}$

Por el teorema (1)

$$\left[a^T \right] \left[b_1 \right] = \left[a_0^T \;\vdots\; a_1^T \right] \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{11} \end{bmatrix} = 0$$

$$a_0^T b_{10} + a_1^T b_{11} = 0$$

Despejando a b_{10} :

$$b_{10} = - (a_0^T)^{-1} a_1^T b_{11}$$

Pero por (2)

$$b_{10} = -\,b_{00}\, a_1^T\, b_{11} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

4).- $b_0^T f\, b = b^T f\, b = b^T f\, b_0 = K^{-1}$

Recordemos que: $b = b_0 - b_1\,(b_1^T f\, b_1)^{-1}\, b_1^T f\, b_0$ **por consiguiente:**

$$b^T f\, b = \left[b_0 - b_1\,(b_1^T f\, b_1)^{-1}\, b_1^T f\, b_0\right]^T f\, b =$$

$$= b_0 f\, b - \underbrace{b_0^T f\, b_1\,(b_1^T f\, b_1)^{-1}\, b_1^T f\, b}_{0}$$

$$b_0 f\, b_1\,(b_1^T f\, b_1)^{-1}\, b_1^T f\, b_0 - b_0 f\, b_1\, \underbrace{(b_1^T f\, b_1)^{-1}\, b_1^T f\, b_1}_{I}$$

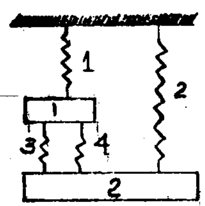
$$(b_1^T f\, b_1)^{-1}\, b_1^T f\, b_0$$

$$\therefore\ -\,b_0^T f\, b_1\,(b_1^T f\, b_1)^{-1}\, b_1^T f\, b_0 = 0 \qquad \text{l.q.q.d.}$$

La matriz K^{-1} **es simétrica, por consiguiente:**

$$K^{-1} = (K^{-1})^T \quad \therefore\quad b_0^T f\, b = (b_0^T f\, b)^T = b^T f\, b_0$$

Ejemplos:



$$F = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$k_j = 1$ T/cm.

$j = 1, 2, 3, 4$

a).- Método de las rigideces

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ;\ k = I$$

$$a^T k\, a = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = K$$

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$d = K^{-1} F = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ cm.}$$

$$e = a\, d = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ cm.}$$

$$p = k\, e = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ Ton.}$$

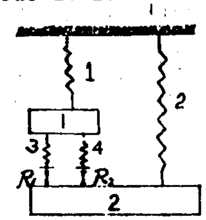
Solución para cualquier F

$$d = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

$$e = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

b).- Método de las flexibilidades



$$b_0 = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \qquad b_1 = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$b_1^T\, f\, b_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(b_1^T\, f\, b_1')^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$b_1\, (b_1^T\, f\, b_1)^{-1}\, b_1^T\, f\, b_0 = 1/5 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b = b_0 - b_1\, (b_1^T\, f\, b_1)^{-1}\, b_1^T\, f\, b_0 = 1/5 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore p = b\, F$$

$$d = b_0^T\, f\, b\, F$$

$$b_0^T\, f\, b = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} = K^{-1}$$

Resumen (2)

I.- Armaduras

1.- Vectores fuerza y desplazamiento

a).- armadura plana

$$F_j = \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix} \quad ; \quad d_j = \begin{bmatrix} d_{jx} \\ d_{jy} \end{bmatrix}$$

b).- armadura en el espacio

$$F_j = \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{jz} \end{bmatrix} \quad ; \quad d_j = \begin{bmatrix} d_{jx} \\ d_{jy} \\ d_{jz} \end{bmatrix}$$

2.- Matriz de continuidad (a)

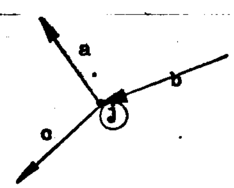
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & Ⓐ & Ⓑ & \end{array} \\ (a) = i & \begin{bmatrix} — & -u_i & +u_i & — \end{bmatrix} \end{array}$$

Barra i con extemos en los nudos (A) y (B)

$$u_i = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \theta , \cos \theta \end{bmatrix} \quad ó \quad u_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \end{bmatrix}$$

3.- Matriz de equilibrio $[a^T]$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ [a^T] = j & \begin{bmatrix} -u_a^T & +u_b^T & -u_c^T \end{bmatrix} \end{array}$$

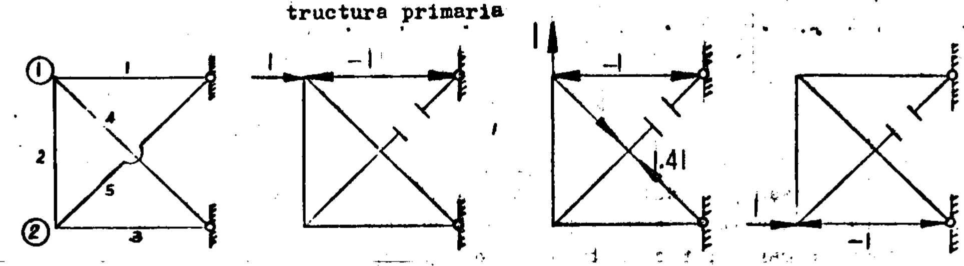


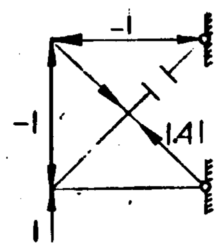
Si entra al nudo +
Si sale del nudo -

Nudo (j) concurren barras a, b, c, ...

II.- Interpretación física de algunas matrices en el método de las fuerzas

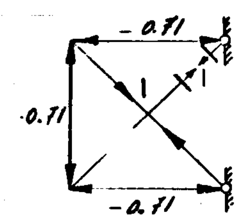
b_o = fuerzas en las barras producidas por fuerzas unitarias aplicadas en la estructura primaria





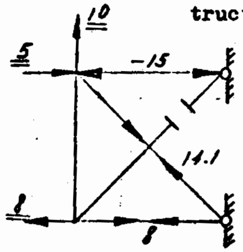
$$b_o = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1.41 & 0 & 1.41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b_1 = fuerzas en las barras producidas por redundantes unitarios aplicados en la estructura primaria



$$b_1 = \begin{bmatrix} -0.71 \\ -0.71 \\ -0.71 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} ;$$

$b_0 F$ = fuerzas en las barras producidas por las fuerzas $[F]$ aplicadas en la estructura primaria.



$$F = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad b_0 F = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ +8 \\ 14.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

III.- Casos particulares de $[a_0^T]$

Si la estructura es una armadura, que se puede resolver la estructura primaria por el método de los nudos, es posible que la matriz sea triangular interior.

Posteriormente veremos que para algunas estructuras es posible hacer que $[a_0^T]$ sea triangular inferior ó superior. (Ver ejemplo)

IV.- Obtención directa de las reacciones y efecto de desplazamiento en los apoyos.

Sean $[P]$ las reacciones y $[d_A]$ los desplazamientos de los apoyos (en general $d_A = 0$) si consideramos a estos como nudos, en el método de los desplazamientos, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F \\ \hline P \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{21} \\ \hline K_{12} & K_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} d \\ \hline d_A \end{bmatrix}$$

$$(K_{11} = K_{21}^T)$$

O bien:

$$F = K_{11}\, d + K_{21}\, d_A$$

$$F - K_{21}\, d_A = K_{11}\, d \qquad d = K_{11}^{-1} F_{at}$$

$$P = K_{12}\, d + K_{22}\, d_A$$

O bien:

$$P = K_{12} K_{11}^{-1} F + \left[K_{22} - K_{12} K_{11}^{-1} K_{21}\right] d_A$$

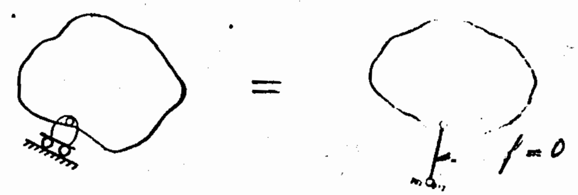
Observe que si $F = 0$

$$P = \tilde{K}\, d_A$$

donde $\tilde{K} = K_{22} - K_{12} K_{11}^{-1} K_{21}$ es la contracción de la matriz $[K]$

Cuando un apoyo no es completo (tiene algun grado de libertad) se puede substituir por un sistema de barras de rigidez infinita (flexibilidad nula) que se apoyen en apoyos completos.

Ejemplo:



Si el apoyo es completo no es necesario ni se debe hacer esta substitución.

V.- Apéndice

1.- Inversión de una matriz triangular inferior

Sea L una matriz triangular inferior y M su inversa, es muy facil demostrar el siguiente algoritmo para obt[illegible]mentos de M.

$$m_{ii} = (l_{ii})^{-1} \quad ([illegible]$$

$$m_{ij} = -(l_{jj})^{-1} \sum_{r} l_{[illegible]}$$

$$m_{ij} = 0 \quad (i \quad [illegible]$$

2.- J. Robinson ha publicado dos artículos:

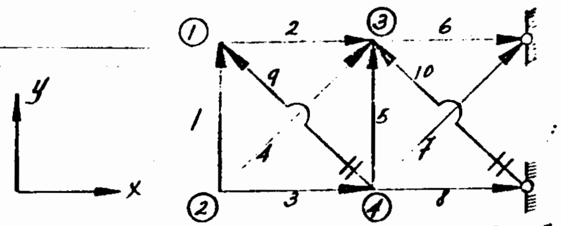
"Automatic Selection of Redundancies in the Matrix Force Method: The Rank Technique"
Car. Aeron Space J; 11: 9-12 (1965)

"Dissertation on the Rank Technique and its Application" J Roy Aeron Soc., 69:280-283 (1965)

en los cuales desarrolla un método bastante ingenioso, basado en la eliminación de Jordan, para elegir las redundantes y obtener $\left[a_o^T\right]$; el método es aplicable a cualquier tipo de estructura.

VI.- Ejemplos

1.- Matriz $\left[a_o^T\right]$ triangular inferior:



$\left[a^T\right] =$

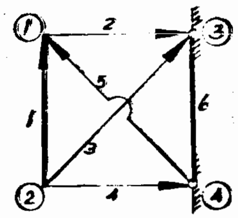
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	-1	0	0	0	0	0	0	-0.71	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0.71	0
2	0	0	-1	-0.71	0	0	0	0	0	0
	-1	0	0	-0.71	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0.71	0	-1	0	0	0	-0.71
	0	0	0	0.71	1	0	0	0	0	0.71
4	0	0	1	0	0	0	-0.71	-1	0.71	0
	0	0	0	0	-1	0	-0.71	0	-0.71	0

Obtengamos $\left[a_o^T\right]$ con el algoritmo de la inversión de matrices triangular inferior trabajando con submatrices de 2 x 2.

$\left[a_o^T\right]^{-1} = \left[b_{og}\right] =$

0	1	0	0	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0	0	
0	1	-1	1	0	0	0	0
0	-1.41	0	-1.41	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
-1	-1	0	-1	-1	0	0	0
0	-1.41	0	-1.41	0	-1.41	0	-1.41
0	1	-1	1	0	1	-1	1

2.- Desplazamientos en los apoyos y obtención de reacciones



$$d_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{cm.}$$

$$d_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{cm.}$$

$k_j = 1$ Ton/cm.

$a =$

0	1	0	-1	0	0	0	0
-1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	-0.71	-0.71	0.71	0.71	0	0
0	0	-1	0	0	0	1	0
-0.71	0.71	0	0	0	0	0.71	-0.71
0	0	0	0	0	1	0	-1

Calculemos a^T k a:

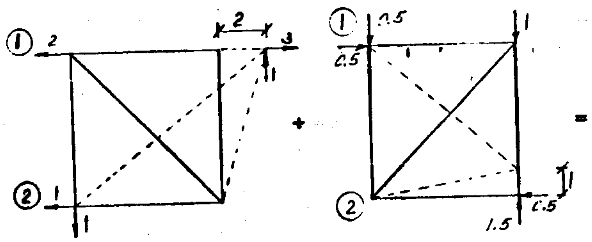
$a^T k a = K =$

1.5	-0.5	0	0	-1	0	-0.5	0.5
-0.5	1.5	0	-1	0	0	0.5	-0.5
0	0	1.5	0.5	-0.5	-0.5	-1	0
0	-1	0.5	1.5	-0.5	-0.5	0	0
-1	0	-0.5	-0.5	1.5	0.5	0	0
0	0	-0.5	-0.5	0.5	1.5	0	-1
-0.5	0.5	-1	0	0	0	1.5	-0.5
0.5	-0.5	0	0	0	-1	-0.5	0

$$= \begin{bmatrix} K_{11} & \vdots & K_{12} \\ K_{21} & \vdots & K_{22} \end{bmatrix}$$

$$d_A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad -K_{21}\, d_A = \begin{bmatrix} +1.5 \\ +0.5 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Observe que:



$= +K_{21}\, d_A$

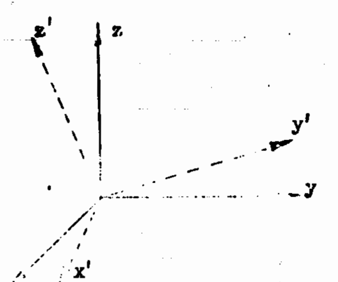
$$F_{ex} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.5 \\ 0.5 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

I.- Generalización de vectores fuerza y desplazamiento.

	$[F]$	$[d]$
Armadura plana	$\begin{bmatrix} Fx \\ Fy \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$
Armadura en el espacio	$\begin{bmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$
Marco plano	$\begin{bmatrix} Fx \\ Fy \\ Mz \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ \theta z \end{bmatrix}$
Marco en el espacio	$\begin{bmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \\ Mx \\ My \\ Mz \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \theta x \\ \theta y \\ \theta z \end{bmatrix}$
Malla plana	$\begin{bmatrix} Fz \\ Mx \\ My \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} dz \\ \theta x \\ \theta y \end{bmatrix}$

II.- Transformación de coordenadas.

a).- Rotación
(Espacio tridimensional)



La rotación queda definida con la matriz Λ_3

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} \text{Cos } \alpha_{x'} & \text{[illegible]} & \\ \text{Cos } \alpha_{y'} & \text{Cos [illegible]} & \\ \text{Cos } \alpha_{z'} & \text{Cos [illegible]} & \text{[illegible]} \end{bmatrix}$$

α, β, γ = Angulos que forman los ejes X', Y', Z', con los ejes X, Y, Z.

(Λ_3 es ortogonal; $\Lambda_3^T = \Lambda_3^{-1}$)

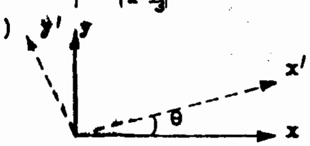
$$[F'] = [T]\,[F]$$

Donde: V' = Vector referido al sistema X, Y, Z (6 componentes)

V = Vector referido al sistema X, Y, Z (6 componentes)

$$T = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_3 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_3 \end{array}\right] = \text{matriz de transformación } (6 \times 6)$$

(Plano)



$$[F'] = [T]\,[F]\text{, etc.}$$

Donde:

$$T = \left[\begin{array}{cc|c} \text{Cos } \theta & \text{Sen } \theta & 0 \\ -\text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta & \\ \hline 0 & & 1 \end{array}\right]$$

O bien: $= \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$

F, d, V = Vectores con tres componentes (Fx, Fy [illegible]

III.- Transformación de rigideces

Si: $F' = T\,F$

Se sigue que: $d = T^T d'$ (por contragradiencia)

Si $[k]$ es la matriz de rigidez para $[F]$ y $[d]$

$$F = k\,d$$

Se puede obtener $[k']$ (matriz de rigidez para F' y $[d']$)

$$F = k\,d = k\,T^T d'$$

$$T\,F = T\,k\,T^T d'$$

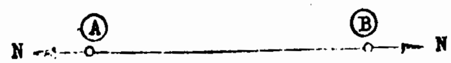
$$F' = (T\,k\,T^T)\,d'$$

$$\therefore\; k' = T\,k\,T^T$$

Aplicaciones:

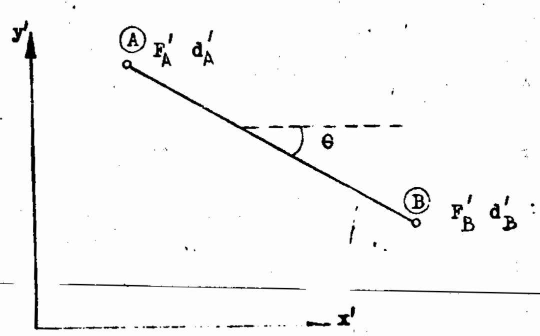
a).- Barras de armaduras

Sistema F, d:



$$F = [N];\quad d = [e];\quad k = [EA/L]$$

Sistema F', d'



$$F' = \begin{bmatrix} F_{x'A} \\ F_{y'A} \\ F_{x'B} \\ F_{y'B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F'_A \\ \hline F'_B \end{bmatrix}$$

$$d' = \begin{bmatrix} d_{x'A} \\ d_{y'A} \\ d_{x'B} \\ d_{y'B} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} d'_A \\ \hline d'_B \end{bmatrix}$$

Matriz T: (Por estática)

$$T = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ +\operatorname{Sen}\theta \\ +\cos\theta \\ -\operatorname{Sen}\theta \end{bmatrix}$$

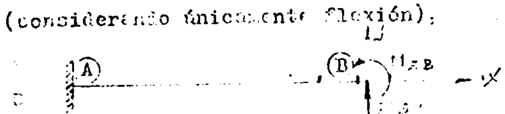
$$k' = T\,k\,T^T$$

$$k' = EA/L \left[\begin{array}{cc|cc} c^2 & -cs & -c^2 & cs \\ -cs & s^2 & cs & s^2 \\ \hline -c^2 & cs & c^2 & -cs \\ cs & -s^2 & -cs & s^2 \end{array}\right]$$

Si $\theta = 0^\circ$

$$k' = EA/L \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

b).- Vigas (considerando únicamente flexión):

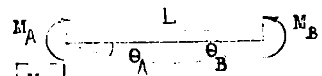


Sistema F, d:

$$F = \begin{bmatrix} F_{y} \\ M_{zB} \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} d_{yB} \\ \theta_{zB} \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \text{ (Ver apéndice)}$$

Sistema F, d:



$$F' = \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} \text{(momentos Flex.)}; \quad d' = \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

Matriz T: (Por estática)

$$T = \begin{bmatrix} L & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k' = EI/L \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Nota: Observese que los ángulos θ_A y θ_B se miden a partir de la linea A - B , se considera que A y B no se desplazan relativamente.

IV.- Ensamble de la matriz K .

Se ha visto que la matriz K (rigidez ensamblada de la estructura), se obtiene:

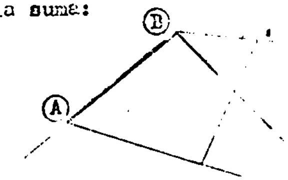
$$K = a^T \, k \, a$$

donde:

$$F = a^T \, p$$
$$e = a \, d$$

Obsérvese que $[a']$ es semejante a la ... $[p]$, $[e]$ se transforma al sistema F', d'.
Hay dos formas de obtener K sin afectar ... rectamente.

1).- Regla de la suma:

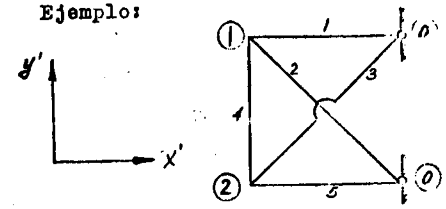


Consideremos la barra A - B de una estru... acoplada referida al sistema global x', ...

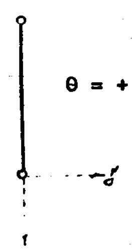
$$[k'] = \begin{bmatrix} k'_{AA} & \ldots \\ k'_{\ldots} & \ldots \end{bmatrix}$$

$$[K] = \sum_{j=1}^{j=b} \ldots$$

Ejemplo:



Barra 1 - 2 (4)

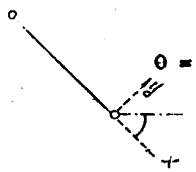


Barra ①-⓪ (1)

$\theta = 0^{\circ}$

$$k'_1 = EA/L \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} \quad 1 & & \quad 0 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \\ 0 \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Barra ①-⓪ (2)



$\theta = 45^{\circ}$

$$k'_2 = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} \quad 1 & & \quad 0 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \\ 0 \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & +1/2 & -1/2 \\ \hline -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \end{array} EA/L$$

Barra ⓪-② (3)

$\theta = -45^{\circ}$

$$k'_3 = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} \quad 0 & & \quad 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ \hline -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \end{array} EA/L$$

Barra ②-⓪ (5)

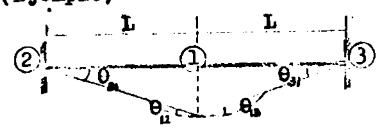
$\theta = 0^{\circ}$

$$k'_5 = EA/L \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} \quad 2 & & \quad 0 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ \\ 0 \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$K = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} \quad 1 & & \quad 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cc|cc} 0+1+1/2 & 0+0-1/2 & 0 & 0 \\ 0+0-1/2 & 1+0+1/2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0+1/2+1 & 0+1/2+0 \\ 0 & -1 & 0+1/2+0 & 1+1/2+0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$K = EA/L \left[\begin{array}{cc|cc} 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 & 3/2 \end{array}\right]$$

2).- Generalización de a^T
(Ejemplo)



EI = cte.

Se quiere obtener $[K']$, considerando solo el desplazamiento vertical $[\Delta]$ en ① producido por una carga $[P]$, usemos la rigidez a flexión en función de momentos.

Sistema F, d:

$$F = \begin{bmatrix} M_{21} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{31} \end{bmatrix} ; \quad d = \begin{bmatrix} \theta_{21} \\ \theta_{12} \\ \theta_{13} \\ \theta_{31} \end{bmatrix}$$

$$K = EI/L \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & & \\ -2 & 4 & & \\ \hline & & 4 & -2 \\ & & -2 & 4 \end{array}\right]$$

Sistema F', d':

$$F' = \begin{bmatrix} P \end{bmatrix} \; ; \quad d' = \begin{bmatrix} \Delta \end{bmatrix}$$

Matriz T (a^T generalizada)

$$T = 1/L \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$K' = T\ K\ T^T$ (K' matriz ensamblada)

$$K' = EI/L^3 \begin{bmatrix} 24 \end{bmatrix}$$

V.- Apendice

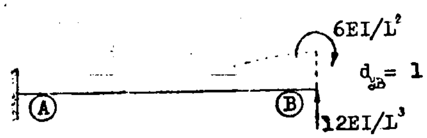
1).- Interpretación de K

$$F = K\ d$$

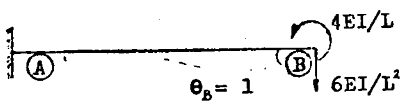
$$\text{Si: } d = I$$

$$F = K$$

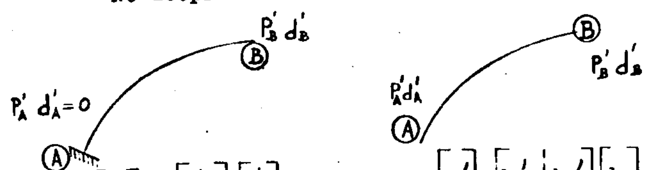
Por consiguiente $[K]$ son las **fuerzas** que hay que **aplicar para producir** desplazamientos unitarios; ejemplo:



$$K = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$



...ación entre rigideces "no acopladas" y rigideces "acopladas"



$$[p'_B] = [k'_{BB}]\,[d'_B] \qquad [k'_{BB}] = [f_{BB}]^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{c} p'_A \\ \hdashline p'_B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} k'_{AA} & k'_{AB} \\ \hdashline k'_{BA} & k'_{BB} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} d_A \\ \hdashline d_B \end{array}\right]$$

Por estática: (Ver apéndice)

$$\left[\begin{array}{c} p_A \\ \hdashline p_B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -H_{BA} \\ \hdashline I \end{array}\right][p_B]$$

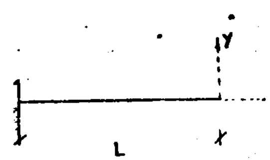
Por consiguiente:

$$\left[\begin{array}{c:c} k'_{AA} & k'_{AB} \\ \hdashline k'_{BA} & k'_{BB} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -H_{BA} \\ \hdashline I \end{array}\right][k_{BB}]\left[\begin{array}{c:c} -H^T_{BA} & I \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c:c} k'_{AA} & k'_{AB} \\ \hdashline k'_{BA} & k'_{BB} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} H_{BA}\,k_{BB}\,H^T_{BA} & -H_{BA}\,k_{BB} \\ \hdashline -k_{BB}\,H^T_{BA} & k_{BB} \end{array}\right]$$

Para una viga recta de sección constante, considerando los efectos de flexión, fuerza normal y cortante:

$$f_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI}(1+c) & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$



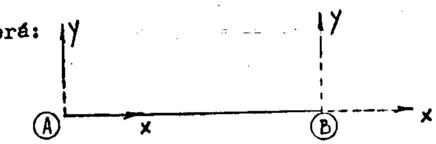
$$c = 6(1+u)\,(\rho/L)^2\,k_{forma}$$

$$(\rho = \sqrt{I/A}\ ;\ k_{forma} = A/A_{corte})$$

Invirtiendo a f_{BB}, se obtiene a k_{BB}

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & \frac{-6EI}{L^2(1+4c)} \\ 0 & \frac{-6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{4EI\,(1+c)}{L\,(1+4c)} \end{bmatrix}$$

La matriz acoplada será:



$$\begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \frac{EA}{L} & & & & \text{SIMETRICA} & \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & & & & \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} & & & \\ \hdashline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{GA}{L} & & \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3(1+4c)} & \frac{-6EI}{L^2(1+4c)} & 0 & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} & 0 & \frac{-6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} \end{array}\right]$$

Conociendo la matriz acoplada de las barras que forman una estructura, bastará aplicar la regla de la suma para obtener la matriz de rigidez de la estructura K' (matriz de rigidez ensamblada)

Nota: para pasar de coordenadas locales a globales, recuerde que:

$$k' = T\,k\,T^T$$

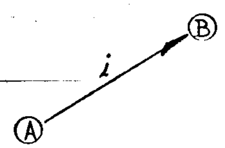
O bien:

$$k'_{BB} = T\,k_{BB}\,T^T$$

$$k'_{AA} = T\,k_{AA}\,T^T \quad \text{etc.}$$

II.- Matriz de continuidad para marcos planos

a).- Alternativa 1



$$[a] = (i)\;\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{cc} A & B \\ \left[\begin{array}{cc} T^T & 0 \\ 0 & T^T \end{array}\right] \end{array}$$

$[a]$ (6b x 3n)

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & & & & \\ & k_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & k_b \end{bmatrix}$$

ki = rigidez acoplada de la barra i

$$[K'] = [a^T][k][a]$$

Solución:

$$d' = K'^{-1}\,F'$$

$$e = a\,d'$$

$p = k\,e$ (Obteniendose p y p , en coordenadas locales, de cada barra)

b).- Alternativa 2

$$[a] = (i)\;\begin{array}{cc} A & B \\ \left[\begin{array}{cc} -H^T_{BA}\,T & T^T \end{array}\right] \end{array}$$

$[a]$ (3b x 3n)

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{BB1} & & & & \\ & k_{BB2} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & k_{BBb} \end{bmatrix}$$

k_{BBi} = matriz de rigidez "no acoplada" de la barra i.

$$K' = a^T\,k\,a$$

Solución:

$$d' = (K')^{-1}\,F'$$

$$e = a\,d'$$

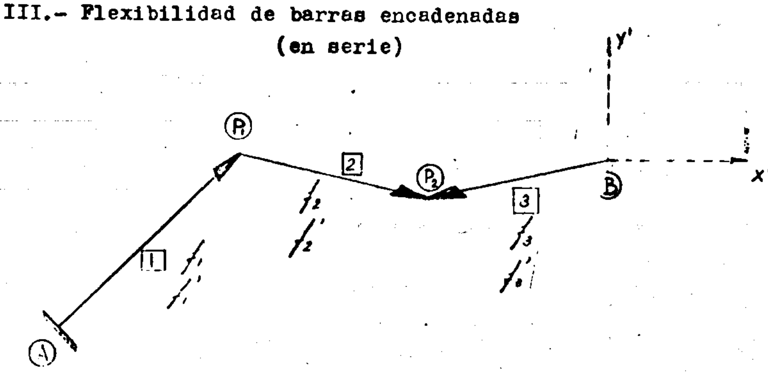
$p = k\,e$ Obteniendose sólo p_B , en coordenadas locales, de cada barra; p_A se obtiene por estática:

$$p_A = -H_{BA}\,p_B$$

$$H_{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(barra recta)}$$

(Coordenadas locales)

III.- Flexibilidad de barras encadenadas (en serie)



Por definición:

$$\underline{\underline{d'_B = f_{BB}\ p'_B}}$$

$$f_{BB} = H'^{T}_{BP_3}\ f'_3\ H'_{BP_3} + H'^{T}_{BP_2}\ f'_2\ H'_{BP_2} + H'^{T}_{BP_1}\ f'_1\ H'_{BP_1}$$

Nota: Si se tienen dos sistemas F, d y F', d' las relaciones entre sus flexibilidades son las siguientes:

Si: $F = A\ F'$

$d' = A^T\ d$ (por contragradiencia)

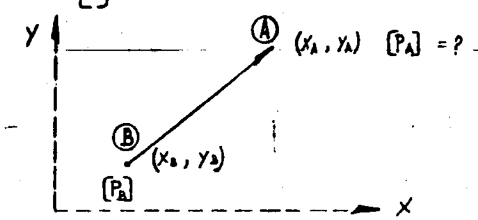
$f' = A^T\ f\ A$

Por consiguiente: $(F = T^T\ F')$

$$f' = T\ f\ T^T$$

Apendice:

I.- Matriz $\boxed{H}$ de transporte de fuerzas.



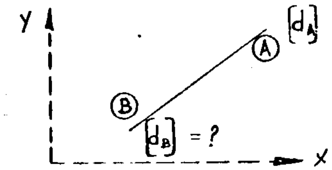
Aplicada $[P_B]$ en B se quiere transportar a A: por estática:

$$\begin{bmatrix} P_{Ax} \\ P_{Ay} \\ M_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (y_A - y_B) & -(x_A - x_B) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{Bx} \\ P_{By} \\ M_{Bz} \end{bmatrix}$$

H_{BA} = Matriz para transportar fuerzas de B a A

Nota: Observe que $H_{BA} = (H_{AB})^{-1}$

II.- Matriz $[H^T]$ de transporte de desplazamientos:



Supongamos que a A se le da un desplazamiento $[d_A]$, cuanto vale $[d_B]$ si la barra $\overline{AB}$ se considera rígida, por geometría:

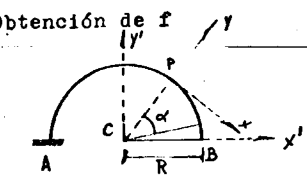
$$\begin{bmatrix} d_{Bx} \\ d_{By} \\ \theta_{Bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (y_A - y_B) \\ 0 & 1 & -(x_A - x_B) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{Ax} \\ d_{Ay} \\ \theta_{Az} \end{bmatrix}$$

H^T_{BA} = Matriz para transportar desplazamientos de A, B

Nota: Este resultado se puede obtener directamente aplicando el principio de contragradiencia a la formulación anterior.

Ejemplos:

I.- Obtención de f



E = cte
G = cte
Sección = constante

Conviene obtener f_{cc}, suponiendo que C este unido rígidamente a B

$$f_{BB} = H^T_{BC}\ f_{cc}\ H_{BC}$$

f_{cc} es más fácil de calcular que f_{BB}, por ser C el centro de la circunferencia.

$$f_{cc} = \int_L H'^T_{cP}\ T\ \phi\ T^T\ H'_{cP}\ ds$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ R\,\mathrm{sen}\,\alpha & -R\cos\alpha & 1 \end{bmatrix} ; \quad T = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \mathrm{sen}\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x' = R\,\mathrm{sen}\,\alpha$ $\qquad \theta = 90 - \alpha$

$y' = R\cos\alpha$

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & \\ & \frac{1}{GA_c} & \\ & & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \qquad A_c = \frac{A}{k_{forma}} \qquad G = \frac{E}{2(1+u)}$$

$$T^T H_{cp} = \begin{bmatrix} s & -c & 0 \\ c & s & 0 \\ Rs & -Rc & 1 \end{bmatrix} ; \quad H_{cp} T^T = \begin{bmatrix} s & c & Rs \\ -c & s & -Rc \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi\,(T^T H_{cp}) = \begin{bmatrix} \frac{s}{EA} & \frac{-c}{EA} & 0 \\ \frac{c}{GA_c} & \frac{s}{GA_c} & 0 \\ \frac{Rs}{EI} & \frac{-Rc}{EI} & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}$$

$$(H_{cp}^T\,T)\,(\phi\,T^T H_{cp}) = \begin{bmatrix} \left[\frac{s^2}{EA} + \frac{c^2}{GA_c} + \frac{R^2 s^2}{EI}\right] & & \\ \left[\frac{-cs}{EA} + \frac{cs}{GA_c} - \frac{Rcs}{EI}\right] & \left[\frac{c^2}{EA} + \frac{s^2}{GA_c} + \frac{R^2 c^2}{EI}\right] & \\ \left[\frac{Rs}{EI}\right] & \left[\frac{-Rc}{EI}\right] & \left[\frac{1}{EI}\right] \end{bmatrix}$$

$$d\,s = R\,d\alpha$$

Obtengamos las integrales que figuren:

$$\int_0^{\pi} s^2\,d\alpha = \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,2\alpha}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int c^2\,d\alpha = \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\cos 2}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} c\,s\,d\alpha = \left[\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{2}\right]_0^{\pi} = 0 \; ; \quad \int_0^{\pi} s\,d\alpha = 2 \; ; \quad \int c\,d\alpha = 0$$

$$f_{cc} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\pi R}{2EA} + \frac{\pi R}{2GA_c} + \frac{\pi R}{2EI}\right] & & \text{Simétrica} \\ 0 & \left[\frac{\pi R}{2EA} + \frac{\pi R}{2GA_c} + \frac{\pi R^3}{2EI}\right] & \\ \left[\frac{2R^2}{EI}\right] & 0 & \left[\frac{\pi R}{EI}\right] \end{bmatrix}$$

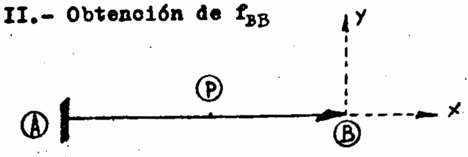
Obtengamos f_{BB}:

$$H_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & R & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_{cc}\,H_{BC} = \begin{bmatrix} \frac{\pi R}{2}\left[\frac{1}{EA} + \frac{1}{GA_c} + \frac{R^2}{EI}\right] & \left[\frac{2R^3}{EI}\right] & \left[\frac{2R^2}{EI}\right] \\ 0 & \frac{\pi R}{2}\left[\frac{1}{EA} + \frac{1}{GA_c} + \frac{R^2}{EI}\right] & 0 \\ \left[\frac{2R^2}{EI}\right] & \left[\frac{\pi R^2}{EI}\right] & \left[\frac{\pi R}{EI}\right] \end{bmatrix}$$

$$H_{BC}^T\,(f_{cc}\,H_{BC}) = f_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{\pi R}{2}\left[\frac{1}{EA}+\frac{1}{GA_c}+\frac{R^2}{EI}\right] & \left[\frac{2R^3}{EI}\right] & \left[\frac{2R^2}{EI}\right] \\ \left[\frac{2R^3}{EI}\right] & \frac{\pi R}{2}\left[\frac{1}{EA}+\frac{1}{GA_c}+\frac{3R^2}{EI}\right] & \left[\frac{\pi R^2}{EI}\right] \\ \left[\frac{2R^2}{EI}\right] & \left[\frac{\pi R^2}{EI}\right] & \left[\frac{\pi R}{EI}\right] \end{bmatrix}$$

II.- Obtención de f_{BB}



E = cte.

G = cte.

Sección constante

$$H_{BP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \end{bmatrix} ; \quad T = I \; ; \; \phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & \\ & \frac{1}{GA_c} & \\ & & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}$$

$$H_{BP}^T\,\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{GA_c} & \frac{-x}{EI} \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}$$

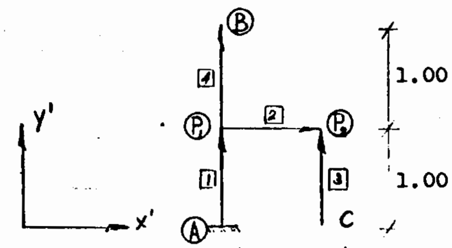
$$(H_{BP}\phi)\,H_{BP} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \left[\frac{1}{GA}+\frac{x^2}{EI}\right] & -\frac{x}{EI} \\ 0 & -\frac{x}{EI} & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}$$

Integrado: $\displaystyle\int_{x=-L}^{x=0}$ $\quad ds = dx$

$$f_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{L^3}{3EI}+\frac{L}{GA_c}\right) & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

Nota: $\frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{GA_c} = \frac{L^3}{3EI}\left[1 + \frac{3EI}{GA_c L^2}\right] =$

III.- Obtención de f_{BB} f_{cc} f_{Bc} f_{cB} :



$f_{BB} = f_4' + H_{BP_2}^T f_1' H_{BP_2}$

$f_{cc} = H_{cP_1}^T f_3' H_{cP_1} + H_{cP_2}^T f_2' H_{cP_1} + H_{cP_2}^T f_1'$

$f_{Bc} = H_{BP_2}^T f_{P_2}' H_{cP_2}$

$f_{cB} = f_{Bc}^T$

Obtención de f_i (flexibilidad en

$\frac{L}{EA} = \frac{1}{2 \times 10^7 \times 0.01} =$ 0.5 x 10

$\frac{L}{3EI} = \frac{1}{3 \times 2 \times 10^7 \times 2 \times 10^{-4}} =$ 0

$\frac{L}{2EI} = \frac{1}{2 \times 2 \times 10^7 \times 2 \times 10^{-4}} =$

$\frac{L}{EI} = \frac{1}{2 \times 10^7 \times 2 \times 10^{-4}} =$ 0.25

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.83 & 1.25 \\ 0 & 1.25 & 2.5 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Obtención de f'_i (flexibilidad en coordenadas globales)

a).- Barras $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$\theta = -90°$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f'_1 = f'_3 = f'_4 = \begin{bmatrix} 0.83 & 0 & -1.25 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ -1.25 & 0 & 2.5 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

b).- Barra $\boxed{2}$

$$f'_2 = f_2 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.83 & 1.25 \\ 0 & 1.25 & 2.5 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Obtención de las matrices de transporte:

$$H_{BP_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1.0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ +1.0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{CP_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1.00 & 1.00 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtención de f_{BB} :

$$H^T_{BP_2} f'_1 = \begin{bmatrix} 2.08 & 0 & -3.75 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 1.25 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$(H^T_{BP_2} f'_1) H_{BP_2} = \begin{bmatrix} 5.83 & 0 & -3.75 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ -3.75 & 0 & 2.50 \end{bmatrix}$$

$$f_{BB} = \begin{bmatrix} 6.66 & 0 & -5.00 \\ 0 & 0.10 & 0 \\ -5.00 & 0 & 5.00 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Obtención de f_{cc} :

$$H^T_{CP_1} f'_3 = \begin{bmatrix} -0.42 & 0 & 1.25 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ -1.25 & 0 & 2.50 \end{bmatrix} ; \quad (H^T_{CP_1} f'_3) H_{CP_1} = \begin{bmatrix} 0.83 & 0 & 1.25 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 1.25 & 0 & 2.50 \end{bmatrix}$$

$$H^T_{CP_1} f'_2 = \begin{bmatrix} 0.05 & 1.25 & 2.50 \\ 0 & 0.83 & 1.25 \\ 0 & 1.25 & 2.5 \end{bmatrix} ; \quad (H^T_{CP_1} f'_2) H_{CP_1} = \begin{bmatrix} 2.55 & 1.25 & 2.50 \\ 1.25 & 0.83 & 1.25 \\ 2.50 & 1.25 & 2.50 \end{bmatrix}$$

$$H^T_{CP_2} f'_1 = \begin{bmatrix} -0.42 & 0 & 1.25 \\ -1.25 & 0.05 & 2.50 \\ -1.25 & 0 & 2.5 \end{bmatrix} ; \quad (H^T_{CP_2} f'_1) H_{CP_2} = \begin{bmatrix} 0.83 & 1.25 & 1.25 \\ 1.25 & 2.55 & 2.50 \\ 1.25 & 2.5 & 2.50 \end{bmatrix}$$

$$f_{cc} = \begin{bmatrix} 4.21 & 2.50 & 5.0 \\ 2.50 & 3.43 & 3.75 \\ 5.0 & 3.75 & 7.50 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Obtención de f_{BC}:

$$f'_{B_2P_2} = f'_1$$

$$H^T_{BP_2} f'_1 = \begin{bmatrix} 2.08 & 0 & -2.50 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ -1.25 & 0 & 2.50 \end{bmatrix} ; \quad f_{BC} = (H^T_{BP_2} f'_1)\, H_{CP_2}$$

$$f_{BC} = \begin{bmatrix} -0.42 & -2.50 & -2.50 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 1.25 & 2.50 & 2.50 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Recordemos que:

$$\begin{bmatrix} d'_B \\ d'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_{BB} & f'_{BC} \\ f'_{CB} & f_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p'_B \\ p'_C \end{bmatrix} \quad (\text{Si: } d'_A = 0)$$

O bien: $\quad d' = [\gamma]\, p'$

Obtengamos: $\quad [\gamma]^{-1}$

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 6.66 & 0 & -5.00 & -0.42 & -2.50 & -2.50 \\ 0 & 0.10 & 0 & 0 & 0.05 & 0 \\ -5.00 & 0 & 5.00 & 1.25 & 2.50 & 2.50 \\ -0.42 & 0 & 1.25 & 4.21 & 2.50 & 5.0 \\ -2.50 & 0.05 & 2.50 & 2.50 & 3.43 & 3.75 \\ -2.50 & 0 & 2.50 & 5.0 & 3.75 & 7.50 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

$$[\gamma]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} k'_{BB} & k'_{BC} \\ \hline k'_{CB} & k'_{CC} \end{array}\right]$$

$$[\gamma]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.217 & -0.067 & 1.055 & -1.230 & 0.133 & 0.808 \\ -0.067 & 10.224 & 0.081 & 0.133 & -0.447 & 0.086 \\ 1.055 & 0.081 & 1.253 & -0.904 & 0.162 & 0.618 \\ -1.230 & 0.133 & -0.904 & 2.460 & -0.266 & 1.615 \\ 0.133 & -0.447 & -0.162 & -0.266 & 0.895 & -0.171 \\ 0.808 & 0.086 & 0.618 & -1.615 & -0.171 & 1.360 \end{bmatrix} \times 10$$

Obtengamos la matriz de rigidez "acoplada", esto es cuando $d'_A \neq 0$; $d'_B \neq 0$; $d'_C \neq 0$

Por estática:

$$\begin{bmatrix} p'_A \\ p'_B \\ p'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H'_{BA} & -H'_{CA} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p'_B \\ p'_C \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} k'_{AA} & k'_{AB} & k'_{AC} \\ \hline k_{BA} & k_{BB} & k_{BC} \\ k_{CA} & k_{CB} & k_{CC} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} -H'_{BA} & -H_{CA} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} k'_{BB} & k'_{BC} \\ k'_{CB} & k'_{CC} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} -H^T_{BA} & I & 0 \\ -H & 0 & I \end{array}\right] =$$

$$\therefore = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} (H'_{BA} k'_{BB} H'^T_{BA} + H'_{CA} k'_{CC} H'^T_{CA} + \\ H'_{CA} k'_{CB} H'^T_{BA} + H'_{BA} k'_{BC} H^T_{CA}) \end{matrix} & -H'_{BA} k'_{BB} - H'_{CA} k_{CB} & -H'_{BA} k'_{BC} - H'_{CA} k'_{CC} \\ \hline -k'_{BB} H'^T_{BA} - k'_{BC} H'^T_{CA} & k'_{BB} & k'_{BC} \\ -k'_{CB} H'^T_{BA} - k_{CC} H'^T_{CA} & k'_{CB} & k'_{CC} \end{array}\right]$$

Generalización de la fórmula dada en la hoja 24

SOLEC 19:00 034 10/16/70

MATRIZ A

.66600000E+01	.00000000E+00	-.50000000E+01	-.42000000E+00
-.25000000E+01	-.25000000E+01	.00000000E+00	.10000000E+00
.00000000E+00	.00000000E+00	.50000000E-01	.00000000E+00
-.50000000E+01	.00000000E+00	.50000000E+01	.12500000E+01
.25000000E+01	.25000000E+01	-.42000000E+00	.00000000E+00
.12500000E+01	.42100000E+01	.25000000E+01	.50000000E+01
-.25000000E+01	.50000000E-01	.25000000E+01	.25000000E+01
.34300000E+01	.37500000E+01	-.25000000E+01	.00000000E+00
.25000000E+01	.50000000E+01	.37500000E+01	.75000000E+01

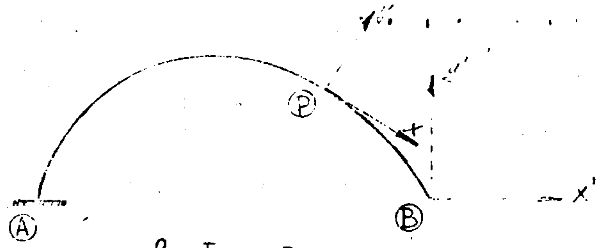
MATRIZ (A) (-1)

.12174584E+01	-.66563716E-01	.10545104E+01	-.12300975E+01
.13312743E+00	.80781727E+00	-.66563715E-01	.10223654E+02
.80941477E-01	.13312743E+00	-.44730816E+00	.85734063E-01
.10545104E+01	.80941476E-01	.12526551E+01	-.90420154E+00
-.16188295E+00	.61769426E+00	-.12300975E+01	.13312743E+00
-.90420153E+00	.24601949E+01	-.26625486E+00	-.16156345E+01
.13312743E+00	-.44730816E+00	-.16188295E+00	-.26625486E+00
.89461633E+00	-.17146813E+00	.80781726E+00	.85734063E-01
.61769425E+00	-.16156345E+01	-.17146813E+00	.13595314E+01

ANALISIS ESTRUCTURAL II.

Resumen (5)

I.- Flexibilidades de barras curvas de sección variable:



$$f'_{BB} = \int_L H'^T_{BP}\, T\, \phi\, T^T H'_{BP}\, ds$$

donde:

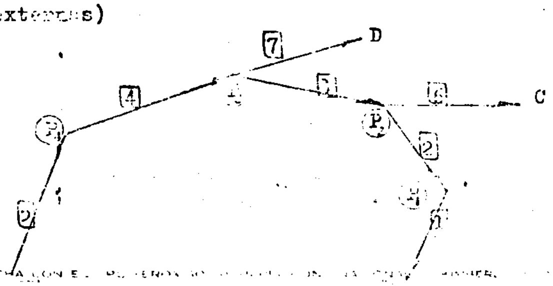
$$H'_{BP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y'_P & -x'_P & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{Sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{Sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & \\ & \frac{1}{GA_c} & \\ & & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}; \qquad \left(A_c = \frac{A}{k_{forma}}\right)$$

II.- Flexibilidades y rigideces de árboles

Consideremos un elemento con 4 nudos (4 puntos donde se pueden aplicar fuerzas externas)



La matriz k' ("acoplada") tendrá los siguientes elementos:

$$k' = \left[\begin{array}{c|cccc} k'_{AA} & k'_{AB} & k'_{AC} & k'_{AD} \\ \hline & k'_{BB} & k'_{BC} & k'_{BD} \\ & & k'_{CC} & k'_{CD} \\ & & & k'_{DD} \end{array}\right]$$ Considerando empotrado a Ⓐ

Para obtener esta matriz habra que invertir a la matriz γ

$$\gamma = \begin{bmatrix} f'_{BB} & f'_{BC} & f'_{BD} \\ & f'_{CC} & f'_{CD} \\ & & f'_{DD} \end{bmatrix}$$

donde: $f'_{BB} = f'_1 + H'^T_{BP_1} f'_2 H_{BP_1} + H'^T_{BP_2} f_3 H'_{BP_2} + H'^T_{BP_3} f'_4 H'_{BP_3} + H'^T_{BP_4} f'_5 H_{BP_4}$

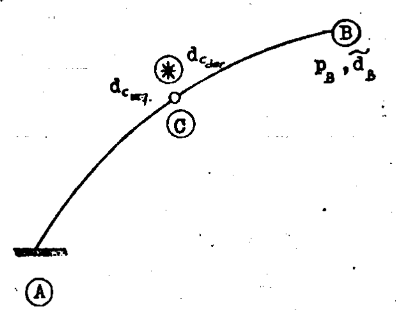
$f'_{CC} = f'_6 + H'^T_{CP_2} f'_4 H'_{CP_2} + H'^T_{CP_3} f'_4 H_{CP_3} + H'^T_{CP_4} f_8 H_{CP_4}$

$f'_{BC} = H'^T_{BP_2} f'_{P_2P_2} H'_{CP_2}$

donde: $f'_{P_2P_2} = f'_3 + H'^T_{P_2P_3} f'_4 H'_{P_2P_3} + H'^T_{P_2P_4} f'_5 H_{P_2P_4}$

Nota: Con elementos de n nudos las matrices de rigideces acopladas serán de dimensión (n x n) y se podrá aplicar la regla de la suma para ensamblar la matriz K', utilizando las rigideces acopladas en coordenadas globales.

III.- Rigideces de barras con discontinuidades (Releases)



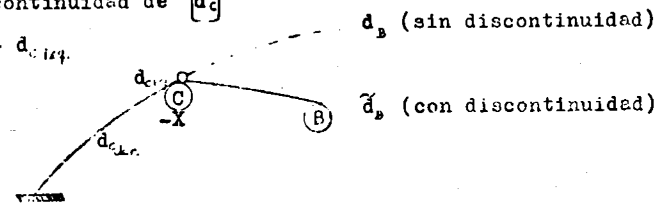
✱ discontinuidad en algunos componentes del desplazamiento; por ejemplo: giro o si se trata de una articulación.

Se desea obtener $\widetilde{k}_{BB}$ tal que

$$p_B = \widetilde{k}_{BB}\,\widetilde{d}_B$$

Sea $[X]$ la discontinuidad de $[d_c]$

$$X = d_{c\,der.} - d_{c\,izq.}$$



$$d_B = \widetilde{d}_B + H_{BC}^T\ (-X)$$

$$p_B = k_{BB}\ d_B = k_{BB}\ (\widetilde{d}_B - H_{BC}^T\ X)$$

En la discontinuidad se tiene que:

$$\Lambda\, p_c = \Lambda\ H_{BC}\ p_B = 0$$

donde Λ es una matriz que define la discontinuidad en C

Ejemplos: a).- Articulación ―o― $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$p_{c_z} = 0$ (Momento flexionante en C = 0)

b).- Discontinuidad y ―||― $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$p_{c_y} = 0$ (Fuerza cortante en C = 0)

Observe que: $X = \Lambda^T\ x$

donde x = Parte no nula de X

(Si se trata de una articulación:)

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix};\quad x = [x_1]$$

$$p_B = k_{BB}\,(\widetilde{d}_B - H_{BC}^T\ \Lambda^T x) \qquad \ldots (5.1)$$

pero $\Lambda\, H_{BC}\, p_B = \Lambda\, H_{BC}\, k_{BB}\,\widetilde{d}_B - \Lambda\, H_{BC}\, k_{BB}\, H_{BC}^T\ \Lambda^T\, x = 0$

$$x = (\Lambda\ H_{BC}\, k_{BB}\, H_{BC}^T\ \Lambda^T)^{-1}\,\Lambda\ H_{BC}\, k_{BB}\,\widetilde{d}_B$$

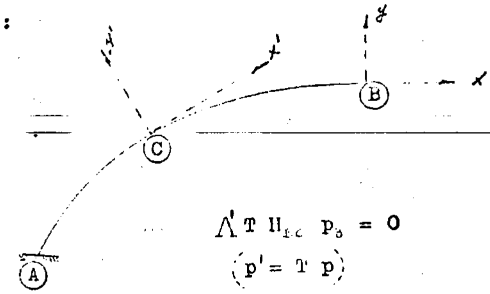
Sustituyendo en (5.1)

$$p_B = \underbrace{k_{BB}\left[I - H_{BC}^T\ \Lambda^T\,(\Lambda\, H_{BC}\, k_{BB}\, H_{BC}^T\ \Lambda^T)^{-1}\Lambda\ H_{BC}\, k_{BB}\right]}_{=\ \widetilde{k}_{BB}}\widetilde{d}_B$$

Por consiguiente:

$$\widetilde{k}_{BB} = k_{BB}\,[I - A] \qquad A = H_{BC}^T\ \Lambda^T(\Lambda\ H_{BC}\, k_{BB}\, H_{BC}^T\ \Lambda^T)^{-1}\,\Lambda\, H_{BC}\, k_{BB}$$

Nota: Si la discontinuidad en C esta referida a un sistema x', y' se tiene:



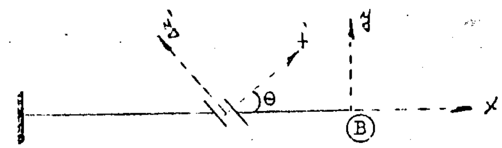
$$\Lambda'\, T\, H_{BC}\ p_B = 0$$

$$(p' = T\ p)$$

En este caso:

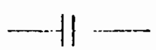
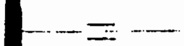
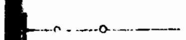
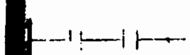
$$A = H_{BC}^T - T^T\ \Lambda'^T\,(\Lambda'\ T\ H_{BC}\, k_{BB}\, H_{BC}\, T^T \Lambda'^T)^{-1}\,\Lambda'^T H_{BC}\, k_{BB}$$

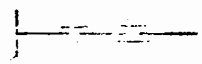
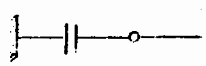
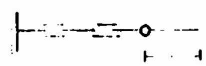
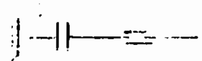
Ejemplo:



$$\Lambda' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

.- Rigideces de miembros rectos de sección uniforme con discontinuidad

Discontinuidad	$\widetilde{k}_{BB}$
	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3\varphi(\alpha)} & -\frac{3EI}{L^2\varphi(\alpha)} \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2\varphi(\alpha)} & \frac{3EI}{L\varphi(\alpha)} \end{bmatrix}$ $\alpha = a/L$ $\varphi(\alpha) = 1+c-3\alpha+3\alpha^2$
	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} \end{bmatrix} = \widetilde{k}_{AA}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} \\ 0 & & \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{k}_{AA}$
	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} \end{bmatrix} = \widetilde{k}_{AA}$

Discontinuidad	k_{BB}
	IGUAL CASO (3)
	$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{k}_{AA}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{CASO (1)} & \\ 0 & & \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} \end{bmatrix} = \widetilde{k}_{AA}$

APENDICE

I.- Demostración de que $\widetilde{k}_{BB}$ es singular

Se sabe que: $\widetilde{k}_{BB} = k_{BB}(I-A)$

Observe que:

$$A \cdot A = H^T_{cC}\,\Lambda\,(\,\Lambda H_{Bc} k_{BB} H^T_{Bc} \Lambda^T)^{-1} \Lambda H_{Bc} k_{BB} H^T_{Bc} \Lambda (\quad)^{-1} \Lambda H_{Bc} k_{BB}$$

$$A \cdot A = A$$

Premultipliquemos por A

$$A^{-1} A A = A^{-1} A$$

$$\therefore A = I$$

a).- Si A no es la identidad A^{-1} no existe pues su existencia contradice el hecho de que $A \neq I$, por lo tanto A es singular.

b).- A es la identidad. (no singular)

Si usamos la alternativa (a)

$$B = \left[I - A \right] \neq 0$$

pero: $$B\, B = \left[I - A \right] \left[I - A \right] = I - 2A + A^2$$
$$= I - 2A + A = I - A = B$$

Por consiguiente para $[B]$ se tienen las siguientes alternativas

c).- $[B]$ no es la identidad por lo tanto es singular y también $[k_{BB}]$

d).- $[B]$ es la identidad, lo que es imposible porque sería el caso de que no hubiera discontinuidad

$$k_{BB} = \tilde{k}_{BB}$$

Si usamos la alternativa (b)

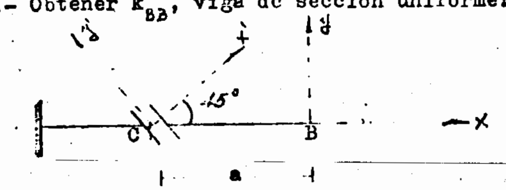
$$A = I \;\therefore\; I - A = 0 \;\therefore\; \tilde{k}_{BB} = 0 \;*$$

$\tilde{k}_{BB}$ evidentemente que será singular.

Caso de que la discontinuidad sea total $\Lambda = I$.

Ejemplos:

I.- Obtener $\tilde{k}_{BB}$, viga de sección uniforme:



$$\theta = +45^{\circ}$$

$$H_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & +1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \;;\; \Lambda' T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda' T H_{BC} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & +1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda' T H_{BC} k_{BB} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & +1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & \frac{-6EI}{L^2(1+4c)} \\ 0 & & \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-EA}{\sqrt{2}\,L} & \frac{+12EI}{\sqrt{2}\,L^3(1+4c)} & \frac{-6EI}{\sqrt{2}\,L^2(1+4c)} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda' T H_{BC} k_{BB} (\Lambda' T H_{BC})^T = \left(\frac{EA}{2L} + \frac{6EI}{L^3(1+4c)} \right)$$

$$(\quad)^{-1} = \frac{1}{\frac{EA}{2L} + \frac{6EI}{L^3(1+4c)}}$$

$$(\quad)^{-1} \Lambda' T H_{BC} k_{BB} = (\quad)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-EA}{\sqrt{2}\,L} & \frac{+12EI}{\sqrt{2}\,L^3(1+4c)} & \frac{-6EI}{\sqrt{2}\,L^2(1+4c)} \end{bmatrix}$$

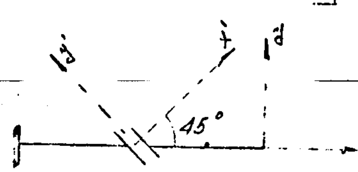
$$(\Lambda' T H_{BC})^T (\quad)^{-1} \Lambda' T H_{BC} k_{BB} = A$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{+EA}{2\,L} & \frac{-6EI}{L^3(1+4c)} & \frac{+3EI}{L^2(1+4c)} \\ \frac{-EA}{2\,L} & \frac{+6EI}{L^3(1+4c)} & \frac{-3EI}{L^2(1+4c)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^3(1+4c)} & \frac{+6EI}{L^3(1+4c)} & \frac{-3EI}{L^2(1+4c)} \\ \frac{+EA}{2\,L} & \frac{EA}{2\,L} & \frac{+3EI}{L^2(1+4c)} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{2\,L} + \frac{6EI}{L^3(1+4c)} \end{bmatrix} \frac{1}{\frac{EA}{2\,L} + \frac{6EI}{L^3(1+4c)}}$$

$$[-A] = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L\,(1+4c)}\,\frac{EA}{L} & \frac{+6EI}{L\,(1+4c)}\,\frac{EA}{L} & \frac{-3EI}{L\,(1+4c)}\,\frac{EA}{L} \\ & \frac{6EI}{L\,(1+4c)}\,\frac{EA}{L} & \frac{36E\,I}{L\,(1+4c)}\,\frac{-6EI}{L\,(1+4c)}\,\frac{EA}{2\,L}\,\frac{+6EI}{L\,(1+4c)} \\ \text{simétrico} & & \frac{-18E\,I}{L\,(1+4c)}\,\frac{+4EI(1+c)}{L(1+4c)}\,\frac{EA}{2\,L}\,\frac{+6EI}{L\,(1+4c)} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \frac{1}{\frac{EA}{2\,L} + \frac{6EI}{L^3(1+4c)}}$$



La expresión de **k** para
Se puede simplificar:

$$= \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3(1+\beta)} & \frac{+12EI}{L^2(1+\beta)} & \frac{-6EI}{L^2(1+\beta)} \\ \frac{+12EI}{L^3(1+\beta)} & \frac{12EI}{L^3(1+\beta)} & \frac{-6EI}{L^2(1+\beta)} \\ \frac{-6EI}{L^2(1+\beta)} & \frac{-6EI}{L^2(1+\beta)} & \frac{EI}{L}\left\{4\,(1+c) - \frac{3\beta}{1+\beta}\right\} \end{bmatrix} \frac{1}{(1+4c)}.$$

donde:

$$\beta = \frac{12}{(1+4c)}\left(\frac{\rho}{L}\right)^2 \;; \qquad \rho = \sqrt{\frac{I}{A}}\,.$$

Observese que si se desprecia el efecto de fuerza normal ($A = \infty$), se tiene:

$$\rho = 0 \quad ; \quad \beta = 0$$

Si también se desprecia el efecto de la **fuerza cortante**: $c = 0$
Se obtiene:

$$k_{25} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{12}{L^2} & \frac{-6}{L} \\ \frac{12}{L^2} & \frac{12}{L^2} & \frac{-6}{L} \\ \frac{-6}{L} & \frac{-6}{L} & 4 \end{bmatrix}$$

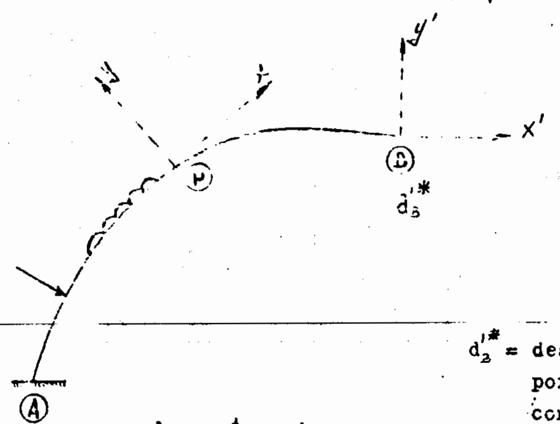
ANALISIS

ESTRUCTURAL II

RESUMEN 6

Resumen (6)

I.- Desplazamientos producidos por cargas intermedias.



$d_B'^{*}$ = desplazamiento en B producido por las cargas intermedias — considerando empotrado a A

$$de = \phi \, p_p \, ds$$

$$d\,d_B'^{*} = H_{BP}'^{T} \, T \, \phi \, p_p \, ds \; ; \; p_p = T^{T} p_p'$$

$$\boxed{d_B^{*} = \int_L H_{BP}'^{T} \, T \, \phi \, T^{T} \, p_p \, ds} \qquad (6.1)$$

p_p' = elementos mecánicos en P referidos a coordenadas globales

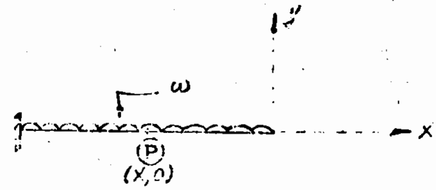
$$d_B'^{*} = \int_L H_{BP}'^{T} \, T \, \phi \, p_p \, ds \quad \ldots\ldots (6.2)$$

p_p = elementos mecánicos en P referidos a coordenadas locales

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & & \\ & \frac{1}{GA_c} & \\ & & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \; ; \quad H_{BP}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (y_p' - y_B') \\ 0 & 1 & -(x_p' - x_B') \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

(1)



$$H_{BP}'^{T} = H_{BP}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad d_B^{*} = \int_{x=-L}^{x=0} H_{BP}^{T} \, \phi \, p_p \, ds$$

$$ds = dx$$

$$T = I$$

$$p_p = p_p' = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega x \\ \frac{-\omega x^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$H_{BP}^{T} \phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{GA_c} & \frac{-x}{EI} \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \; ; \quad H_{BP}^{T} \phi \, p_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega x}{GA_c} + \frac{\omega x^3}{2EI} \\ \frac{-\omega x^2}{2EI} \end{bmatrix}$$

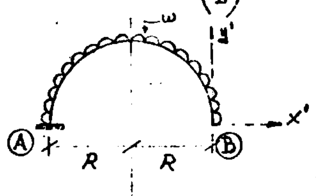
$$d_B^{*} = d_B'^{*} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\omega L^2}{2GA_c} - \frac{\omega L^4}{8EI} \\ \frac{-\omega L^3}{6EI} \end{bmatrix}$$

O bien:

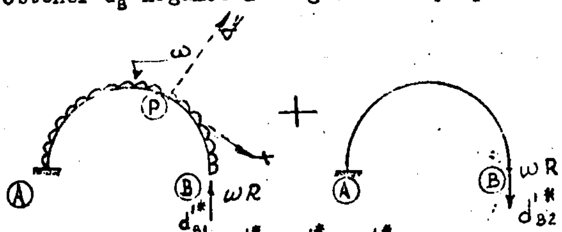
$$d_B^{*} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\omega L^4}{8EI}\left(1 + \frac{4c}{3}\right) \\ \frac{-\omega L^3}{6EI} \end{bmatrix}$$

donde: $c = 6\,(1+\mu)\left(\frac{\rho}{L}\right)^2 k_{forma} = \frac{3EI}{GA_c L^2}$

2

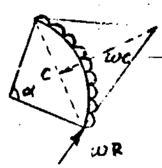


Para obtener $d_B'^*$ hagamos la siguiente superposición de fuerzas:

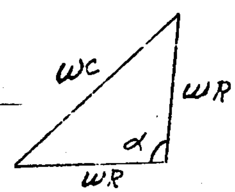


$$\underline{d_B'^* = d_{B1}'^* + d_{B2}'^*}$$

a).- Obtención de $d_{B1}'^*$



c = cuerda



$$p_p = \begin{bmatrix} -\omega R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(en coordenadas locales)}$$

Utilezemos la fórmula (6.2) $(ds = R\,d\alpha)$

$$T = \begin{bmatrix} \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \text{sen}\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad H_{BP}'^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & R\,\text{sen}\,\alpha \\ 0 & 1 & R(1-\cos\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{BP}'^T\,T = \begin{bmatrix} s & c & R\,\text{sen}\,\alpha \\ -c & s & R(1-\cos\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

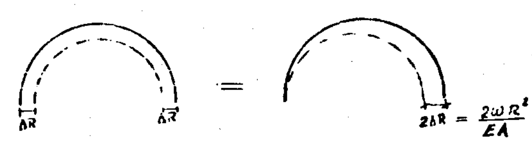
$$H_{BP}'^T\,T\,\phi = \begin{bmatrix} \frac{s}{EA} & \frac{c}{GA_c} & \frac{R\,s}{EI} \\ \frac{-c}{EA} & \frac{s}{GA_c} & \frac{R(1-c)}{EI} \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}$$

$$H\quad T\quad p = \begin{bmatrix} \frac{-\omega R\,\text{sen}\,\alpha}{EA} \\ \frac{-\omega R\cos\alpha}{EA} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d_{B1}'^* = \int_0^{\pi} H_{BP}'^T\,T\,\phi\,p_p\,ds$$

$$d_{B1}'^* = \begin{bmatrix} \frac{-2\omega R^2}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nota: Este resultado es obvio porque el arco esta trabajando a solo fuerza normal, por consiguiente solo sufrirá un acortemiento su radio, igual a: $\frac{\omega R}{EA} \cdot R = \frac{\omega R^2}{EA} = \Delta R$



b).- Obtención de d'^{*}_{B2}

$$d'^{*}_{B2} = \left[f_{BB} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega R \\ 0 \end{bmatrix}$$

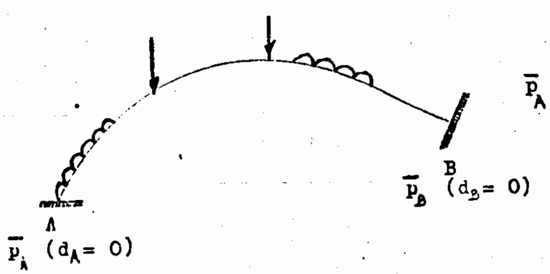
Utilizemos el valor de f_{BB}

$$d'^{*}_{B2} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2\omega R^4}{EI} \\ -\dfrac{\pi \omega R^2}{2} \left(\dfrac{1}{EA} + \dfrac{1}{GA_c} + \dfrac{3\, R^2}{EI} \right) \\ -\dfrac{\pi \omega R^3}{EI} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

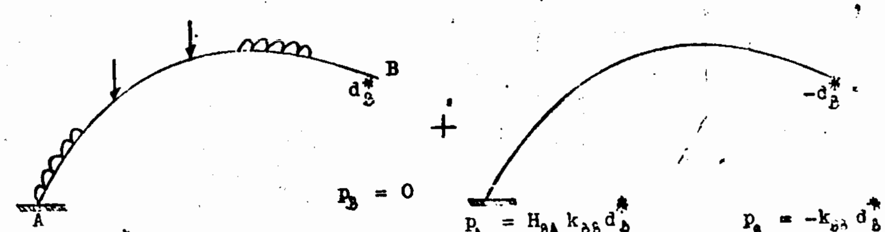
$$d^{*}_{B} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2\omega R^2}{EA} - \dfrac{2\omega R^4}{EI} \\ -\dfrac{\pi \omega R^2}{2} \left(\dfrac{1}{EA} + \dfrac{1}{GA_c} + \dfrac{3\, R^2}{EI} \right) \\ -\dfrac{\pi \omega R^3}{EI} \end{bmatrix}$$

II.- Fuerzas de fijación



$\bar{p}_A, \bar{p}_B$ = reacciones en (A) y (B), considerando empotrados a (A) y (B)

Para obtener $\bar{p}_A$ y $\bar{p}_B$ usemos la siguiente superposición:



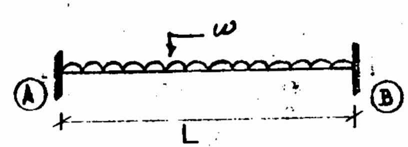
$p_A = p_A^*$ $\qquad p_B = 0$ $\qquad p_A = H_{BA} k_{BB} d_B^*$ $\qquad p_B = -k_{BB} d_B^*$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{p}_A &= p_A^* + H_{BA} k_{BB} d_B^* \\ \bar{p}_B &= -k_{BB} d_B^* \end{aligned}}$$

p_A^* = Reacción en (A) considerando suelto a (B) (cantiliver)

Ejemplos:

(1)



Usando los resultados de los ejemplos anteriores

$$d_B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{\omega L^4}{8EI}\left(1 + \dfrac{4}{3} c\right) \\ -\dfrac{\omega L^3}{6EI} \end{bmatrix}$$

$$k_{BB} = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{12EI}{L^3(1+4c)} & \dfrac{-6EI}{L^2(1+4c)} \\ 0 & \dfrac{-6EI}{L^2(1+4c)} & \dfrac{4EI(1+c)}{L\,(1+4c)} \end{bmatrix} ;$$

$$k_{BB}\, d_B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}\,\omega L \left(\frac{1+4c/3}{1+4c}\right) + \frac{\omega L}{(1+4c)} \\ +\frac{3}{4}\,\omega L^2 \left(\frac{1+4c/3}{1+4c}\right) - \frac{2}{3} \quad L\,\frac{(1+c)}{(1+4c)} \end{bmatrix}$$

Simplificando:

$$k_{BB}\, d_B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\omega L}{2} \\ \frac{+\omega L^2}{12} \end{bmatrix}$$

Por estática, se tiene:

$$p_A^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega L \\ \frac{+\omega L^2}{2} \end{bmatrix}$$

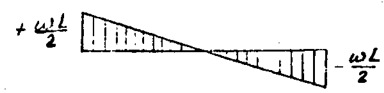
Obtengamos $H_{BA}\, k_{BB}\, d_B^*$

$$H_{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix}$$

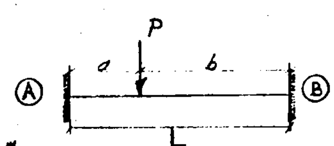
$$H_{BA}\, k_{BB}\, d_B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\omega L}{2} \\ -\frac{5}{12}\,\omega L^2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{p}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{+\omega L}{2} \\ \frac{+\omega L^2}{12} \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{p}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{+\omega L}{2} \\ \frac{-\omega L^2}{12} \end{bmatrix}$$

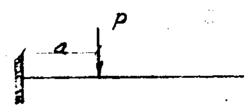
Resultado que es interesante, porque no se ve afectado pór el trabaj de la fuerza cortante, lo cual es evidente porque el diagrama de T es antisimétrico y se anula al ser integrado.



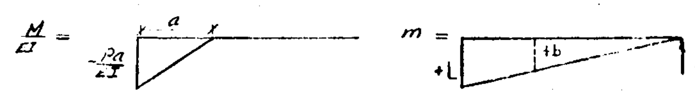
2



a).- Obtengamos d_B^*

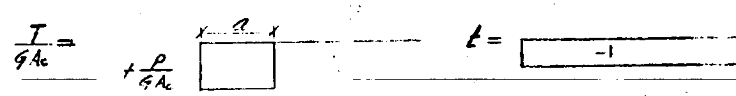


Utilizemos las ecuaciones del trabajo virtual, obtención de d_{Bj}^*



$$\int \frac{Mm}{EI}\, ds = \frac{1}{6}\; a \left(\frac{-Pa}{EI}\right)\left(+\,2\,L + b\right)$$

$$= \frac{-Pa^2}{6EI}\,(2\,L + b)$$



$$\int \frac{Tt}{GA_c} = -\frac{Pa}{GA_c}$$

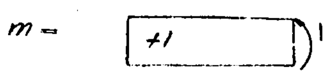
$$d^*_{By} = -\frac{Pa^2}{6EI}(2L+b) - \frac{Pa}{GA_c}$$

Simplificando:

$$d^*_{By} = -\frac{Pa^2}{6EI}\left[2L(1+cL/a)+b\right]$$

$$\left(c = \frac{3EI}{GA_c L^2}\right)$$

Obtención de d^*_{3z} (= θ^*_{Bz})



$t = 0$

$$\int \frac{Mm}{EI}\,ds = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$d^*_{Bz} = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$d^*_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{Pa^2}{6EI}\quad 2L(1+cL/a)+b \\ -\frac{Pa^2}{2EI} \end{bmatrix}$$

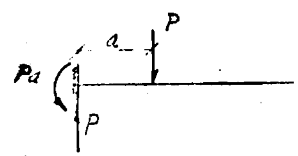
b).- Obtengamos $k_{33}\, d^*_B$ (simplificando)

$$k_{BB}\, d^*_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-Pa}{L(1+4c)}\left[1+4c+\frac{ab-b^2}{L^2}\right] \\ \frac{+Pa^2 b}{L^2(1+4c)}\left[1+2cL/a\right] \end{bmatrix}$$

c).- Obtengamos $H_{BA}\, k_{BB}\, d^*_B$

$$H_{BA}\, k_{BB}\, d^*_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-Pa}{L(1+4c)}\left[1+4c+\frac{ab-b^2}{L^2}\right] \\ \frac{Pab^2}{L^2(1+4c)}\left[1+2cL-\frac{L^2}{b^2}(1+4c)\right] \end{bmatrix}$$

d).- Por estática



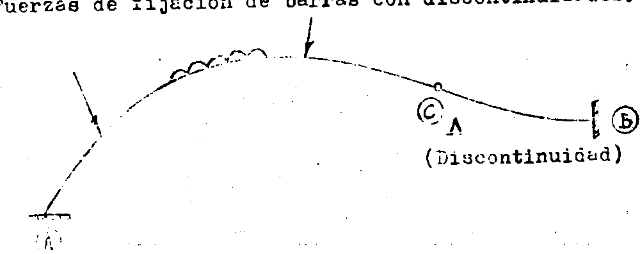
$$p^*_A = \begin{bmatrix} 0 \\ +P \\ +Pa \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{Pb}{L(1+4c)}\left[1+4c+\frac{ab-a^2}{L^2}\right] \\ +\frac{Pab^2}{L^2(1+4c)}\left[1+\frac{2cL}{b}\right] \end{bmatrix} ; \quad \bar{p}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{Pa}{L(1+4c)}\left[1+4c+\frac{ab-b^2}{L^2}\right] \\ -\frac{Pa^2 b}{L^2(1+4c)}\left[1+\frac{2cL}{a}\right] \end{bmatrix}$$

Nota: Observese que cuando $a = b = L/2$
(Diagrama de T antisimétrico)

$$\bar{p}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{P}{2} \\ +\frac{PL}{8} \end{bmatrix} ; \quad \bar{p}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \end{bmatrix}$$

III.- Fuerzas de fijación de barras con discontinuidades.

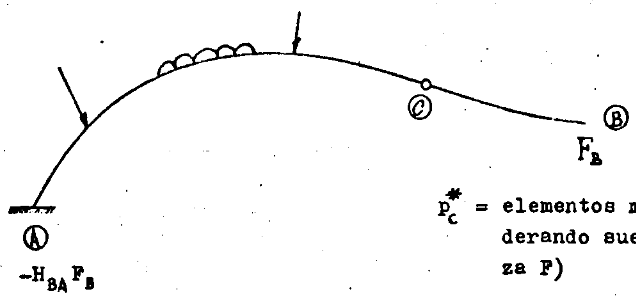


a).- Obtengamos d_B^* sin considerar la discontinuidad en C.

b). Consideremos en B una fuerza F_B que cumpla con el equilibrio en C

($\Lambda p_c = 0$), o sea que:

$$\Lambda (p_c^* + H_{BC} F_B) = 0 \text{------} (6.3)$$



p_c^* = elementos mecánicos en C considerando suelto a B (sin la fuerza F)

La fuerza F_B no esta determinada por (6.3), hay muchos valores que la satisfacen, por ejemplo:

$$F_B = -H_{CB} \Lambda^T \Lambda \, p_c^* \text{ -----} (6.4)$$

En efecto, sustituyendo en (6.3)

$$\Lambda (I - H_{BC} H_{CB} \Lambda^T \Lambda) \, p_c^* = (\Lambda - \Lambda \Lambda^T \Lambda) \, p_c^* = 0$$

Porque: $\Lambda \Lambda^T \Lambda = \Lambda$

La fuerza F_B, produce en B un desplazamiento $f_{BB} F_B$, por lo que el dezplazamiento total en B sera:

$$\tilde{d}_B^* = d_B^* + f_{BB} F_B$$

c).- Obtención de p_B :

$\tilde{k}_{BB}$ = rigidez modificada en B.

$$\bar{p}_B = -\tilde{k}_{BB} \, \tilde{d}_B^* + F_B$$

$$p_B = -\tilde{k}_{BB} \tilde{d}_B^* - \tilde{k}_{BB} f_{BB} F_B + F_B$$

$$\boxed{\bar{p}_B = -\tilde{k}_{BB} d_B^* + (I - \tilde{k}_{BB} f_{BB}) F_B} \text{....} (6.5)$$

O bien sustituyendo a (6.4) en (6.5)

$$\bar{p}_B = -\tilde{k}_{BB} d_B^* - (I - \tilde{k}_{BB} f_{BB}) H_{CB} \Lambda^T \Lambda \, p_c^* \qquad (6.6)$$

Recordando que:

$$\tilde{k}_{BB} = k_{BB} \left[I - A \right] = \left[I - D \right] k_{BB}$$

donde:

$$A = H_{BC}^T \Lambda^T (\Lambda H_{BC} k_{BB} H_{BC} \Lambda^T)^{-1} \Lambda H_{BC} k_{BB}$$

$$D = k_{BB} H_{BC}^T \Lambda^T (\Lambda H_{BC} k_{BB} H_{BC}^T \Lambda^T)^{-1} \Lambda H_{BC}$$

(Ver resumen (5))

y sustituyendo en (6.6) y simplificando

$$\bar{p}_B = -k_{BB} \left[(I - A) \, d_B^* + H_{BC}^T \Lambda^T (\Lambda H_{BC} k_{BB} H_{BC}^T \Lambda^T)^{-1} \Lambda p_c^* \right] \qquad (6.7)$$

d).- Por estática:

$$\bar{p}_A = p_A^* - H_{BA} \bar{p}_B \text{ ....} (6.8)$$

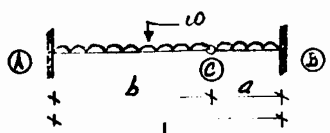
Sustituyendo (6.6) en (6.8)

$$\overline{p}_A = p_A^* + H_{BA}\left[\tilde{k}_{CB}\, d_B^* + (I - \tilde{k}_{BB} f_{BB})\, H_{CB}\Lambda^T \Lambda\, p_C^*\right] \quad \text{- - - - - - (6.9)}$$

O sustituyendo (6.7) en (6.8)

$$\overline{p}_A = p_A^* + H_{BA} k_{BB}\left[(I - A)\, d_B^* + H_{BC}^T \Lambda^T (\Lambda H_{BC} k_{BB} H_{BC}\Lambda^T)^{-1} \Lambda\, p_C^*\right] \quad \text{- - - (6.10)}$$

Ejemplos:

① 

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a).- Obtención de d_B^* (ejemplo anterior)

$$d_B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\omega L^4}{8EI}(1+4c/3) \\ \frac{-\omega L^3}{6EI} \end{bmatrix}$$

b).- Obtención de $\tilde{k}_{BB}$ (Tabla en el resumen (5))

$$\tilde{k}_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3\psi(\alpha)} & \frac{-3EI\alpha}{L^2\psi(\alpha)} \\ 0 & \frac{-3EI\alpha}{L^2\psi(\alpha)} & \frac{3EI\alpha^2}{L\psi(\alpha)} \end{bmatrix}; \qquad \alpha = a/L$$

$$\psi(\alpha) = 1+c-3\alpha+3\alpha^2$$

c).- Obtención de p_A^* y p_C^* (Por estática)

$$p_A^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega L \\ +\frac{\omega L^2}{2} \end{bmatrix}; \qquad p_C^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega a \\ -\frac{\omega a^2}{2} \end{bmatrix}$$

Reacción en Ⓐ   Elementos mecánicos en Ⓒ

d).- Apliquemos la ecuación (6.6) para obtener $\overline{p}_B$:

$$-\tilde{k}_{BB}\, d_B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega L}{8\psi(\alpha)}\left[3+4c-4\frac{a}{L}\right] \\ \frac{-\omega a L}{8\psi(\alpha)}\left[3+4c-4\frac{a}{L}\right] \end{bmatrix}$$

$$f_{BB} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI}(1+c) & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}_{BB} f_{BB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\left(1+c-\frac{3a}{2L}\right)}{\psi(\alpha)} & \frac{3}{2L\psi(\alpha)}\left(1-\frac{2a}{L}\right) \\ 0 & \frac{-a}{\psi(\alpha)}\left(1+c-\frac{3a}{2L}\right) & \frac{-3a}{2L\psi(\alpha)}\left(1-\frac{2a}{L}\right) \end{bmatrix}$$

$$I - \tilde{k}_{BB} f_{BB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3a}{2L\psi(\alpha)}\left(1-\frac{2a}{L}\right) & \frac{-3}{2L\psi(\alpha)}\left(1-\frac{2a}{L}\right) \\ 0 & \frac{a}{\psi(\alpha)}\left(1+c-\frac{3a}{2L}\right) & \frac{1}{\psi(\alpha)}\left(1+c-\frac{3a}{2L}\right) \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^T \Lambda\, p_C^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\omega a^2}{2} \end{bmatrix}; \qquad H_{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{bmatrix}$$

$$-H_{CB}\, \Lambda^T \Lambda\, p_C^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +\frac{\omega a^2}{2} \end{bmatrix} \quad (= F_B)$$

$$-\left(I-\widetilde{k}_{BB}f_{BB}\right)H_{CB}\,\Lambda^{T}\Lambda\;p_{c}^{*}=\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{3\omega a^{2}}{4L\psi(\alpha)}\,\left(1-\dfrac{2a}{L}\right)\\ \dfrac{\omega a^{2}}{2\psi(\alpha)}\,\left(1+c-\dfrac{3a}{2L}\right)\end{bmatrix}$$

$$\overline{p}_{B}=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{\omega L}{8\psi(\alpha)}\left[3+4c-4\alpha-6\alpha^{2}+12\alpha^{3}\right]\\ -\dfrac{\omega L^{2}\alpha}{8\psi(\alpha)}\left[+3+4c-4\alpha(2+c)+6\alpha^{2}\right]\end{bmatrix}$$

Obtengamos $\overline{p}_{A}$ utilizando (6.8)

$$-H_{BA}\,\overline{p}_{B}=\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{\omega L}{8\psi(\alpha)}\;3+4c-4\alpha-6\alpha^{2}+12\alpha^{3}\\ \dfrac{\omega L^{2}}{8\psi(\alpha)}\;3+4c-\alpha(7+4c)+2\;(1+2c)+6\alpha^{3}\end{bmatrix}$$

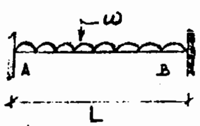
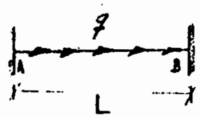
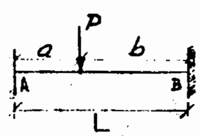
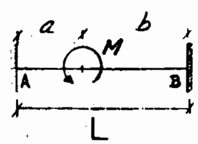
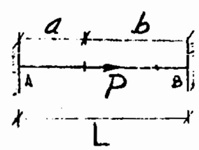
$$\overline{p}_{A}=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{\omega L}{8\psi(\alpha)}\;5+4c-20\alpha+30\alpha^{2}-12\alpha^{3}\\ \dfrac{\omega L^{2}}{8\psi(\alpha)}\;1+\alpha(4c-5)+2\alpha^{2}(5-2c)-6\alpha^{3}\end{bmatrix}$$

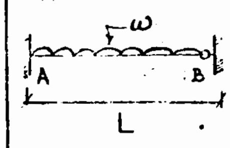
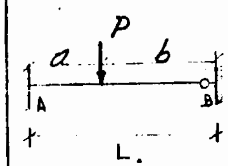
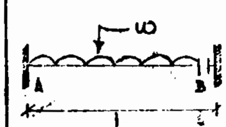
ANALISIS ESTRUCTURAL II

RESUMEN 7

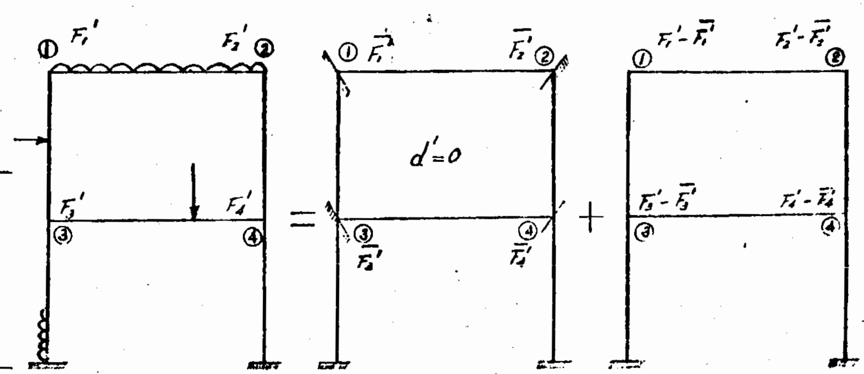
Resumen (7)

I.- Tabla de fuerzas de fijación (Barras rectas de sección cte.)

Carga	$\bar{P}_A$	$\bar{P}_B$
	$\begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{\omega L}{2} \\ +\frac{\omega L^2}{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{\omega L}{2} \\ -\frac{\omega L^2}{12} \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
	0 $\frac{Pb}{L(1+4c)}\left\{1+4c+\frac{ab-a^2}{L^2}\right\}$ $\frac{Pab^2}{L^2(1+4c)}\left\{1+\frac{2cL}{b}\right\}$	0 $\frac{Pa}{L(1+4c)}\left\{1+4c+\frac{ab-b^2}{L^2}\right\}$ $-\frac{Pa^2 b}{L^2(1+4c)}\left\{1+\frac{2cL}{a}\right\}$
	0 $\frac{6Mab}{L^3(1+4c)}$ $-\frac{Mb}{L(1+4c)}\left\{1+4c-\frac{3a}{L}\right\}$	0 $-\frac{6Mab}{L^3(1+4c)}$ $-\frac{Ma}{L(1+4c)}\left\{1+4c-\frac{3b}{L}\right\}$
	$\begin{bmatrix} -\frac{Pb}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{Pa}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Carga	$\bar{P}_A$	$\bar{P}_B$
	0 $\frac{5\omega L}{8}\left(\frac{1+\frac{4c}{5}}{1+c}\right)$ $\frac{\omega L^2}{8(1+c)}$	0 $\frac{3\omega L}{8}\left(\frac{1+\frac{4c}{3}}{1+c}\right)$ 0
	0 $\frac{Pb}{L(1+c)}\left\{\frac{a(L+b)}{2L^2}+1+c\right\}$ $+\frac{Pab(L+b)}{2L^2(1+c)}$	0 $\frac{Pa}{L(1+c)}\left\{\frac{a(2L+b)}{2L^2}+c\right\}$ 0
	$\begin{bmatrix} 0 \\ +\omega L \\ +\frac{\omega L^2}{3} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +\frac{\omega L^2}{6} \end{bmatrix}$

II.- Fuerzas efectivas producidas por fuerzas en las barras.



$\overline{F}'_j$ = Suma de fuerzas de fijación de las barras que concurren a (j) (en coordenadas globales)

F'_j = Fuerzas en el nudo (j)

Los desplazamientos finales se obtendrán:

$$F' - \overline{F}' = K' d'$$

O bien:

$$F'_{ex} = K' d' \qquad F'_{ex} = F' - \overline{F}'$$

La solución será:

$$d' = (K')^{-1} F'_{ex}$$

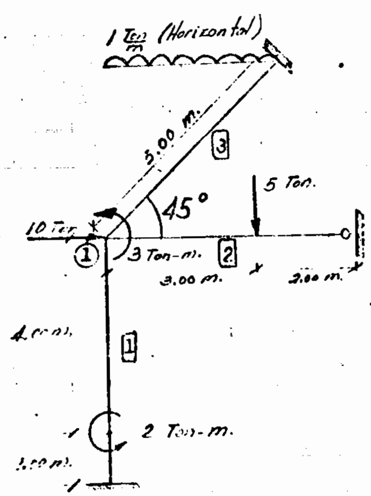
$$e = ad'$$

$$p_{B(l)} = k_{BB(l)} e_{(l)} + \overline{p}_{B(l)}$$

$$p_{A(l)} = -H_{BA(l)} k_{BB(l)} e_{(l)} + \overline{p}_{A(l)}$$

donde: $\overline{p}_{A(l)}, \overline{p}_{B(l)}$ = fuerzas de fijación en la barra (1), en coordenadas locales.

Ejemplo: (Por simplificación consideremos una estructura de un solo nudo)



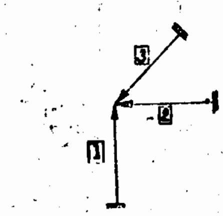
Las tres barras son de igual sección:

$$E = 2x10^5 \text{ kg/cm}^2$$
$$I = 10^5 \text{ cm}^4$$
$$A = 100 \text{ cm}^2$$
$$C = 0.1$$

Por consiguiente:

$$k_{BB} = \begin{bmatrix} 4.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.137 & -0.343 \\ 0 & -0.343 & 1.142 \end{bmatrix} x10^3 \quad \text{(Ton, m)}$$

Orientemos las barras en la forma siguiente:

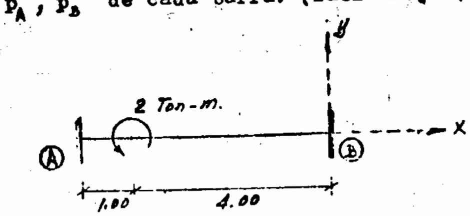


Obtengamos $\tilde{k}_{BB}$ de la barra $\boxed{2}$ (Tabla del resumen (5)

$$(\alpha = 1.0) \quad \tilde{k}_{BB_2} = \begin{bmatrix} 4.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.044 & -0.219 \\ 0 & -0.219 & 1.093 \end{bmatrix} x\ 10^3$$

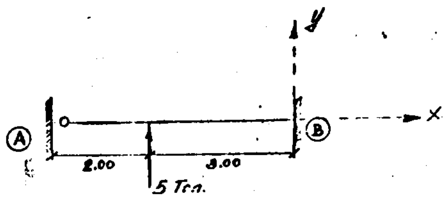
a).- Obtengamos $\overline{p}_A$, $\overline{p}_B$ de cada barra: (Tabla hoja (1))

<u>Barra 1</u>



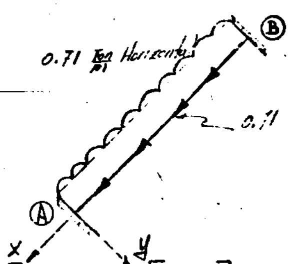
$$\bar{P}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.27 \\ -0.91 \end{bmatrix}; \qquad \bar{P}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.27 \\ +0.29 \end{bmatrix}$$

Barra 2



$$\bar{P}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.24 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \bar{P}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.76 \\ +3.82 \end{bmatrix}$$

Barra 3

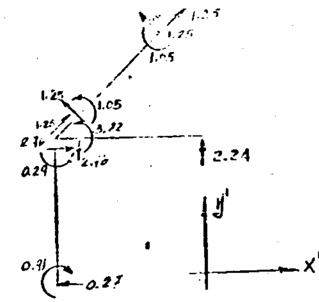


$\left\{1.25 = \frac{1}{2}(0.71)(3.55)\right\}$

$$\bar{P}_A = \begin{bmatrix} -1.250 \\ -1.25 \\ -1.05 \end{bmatrix}; \qquad \bar{P}_B = \begin{bmatrix} -1.25 \\ -1.25 \\ +1.05 \end{bmatrix}$$

Nota: $\begin{cases} \dfrac{\omega L^2}{12} = \omega L \dfrac{L}{12} = W \dfrac{L}{12} \\ \dfrac{L}{2} = \dfrac{1}{2}\omega L = \dfrac{1}{2} W \end{cases}$

En resumen:



b).- Obtengamos $\bar{F}'$ (en coordenadas globales)

$$\bar{F}' = \begin{bmatrix} +0.27 \\ +4.53 \\ +5.16 \end{bmatrix} \quad \text{(Obtenidas por estatica elemental)}$$

c).- Obtengamos F'_{ex}

$$F' = \begin{bmatrix} +10 \\ 0 \\ +3 \end{bmatrix}; \qquad -\bar{F}' = \begin{bmatrix} -0.27 \\ -4.53 \\ -5.16 \end{bmatrix}$$

$$F'_{ex} = \begin{bmatrix} +9.73 \\ -4.53 \\ -2.16 \end{bmatrix}$$

d).- Obtengamos K $(= a^T k a)$ (ó usando la regla la suma, que en este caso son equivalentes)

$$a = \begin{bmatrix} T_1^T \\ T_2^T \\ T_3^T \end{bmatrix}; \qquad T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} -0.71 & +0.71 & 0 \\ -0.71 & -0.71 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota:

$$T = \begin{bmatrix} X_{x'} & Y_{x'} & 0 \\ X_{y'} & Y_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

donde X, Y son vectores unitarios paralelos a los ejes x, y.

$$k = \begin{bmatrix} k_{BB} & & \\ & \widetilde{k}_{BB} & \\ & & k_{BB} \end{bmatrix}$$

(Ver hoja (67) para los valores de k_{BB} y $\widetilde{k}_{BB}$)
Efectuando multiplicaciones:

$$K' = \begin{bmatrix} 6.205 & 1.932 & +0.100 \\ 1.932 & 6.112 & +0.462 \\ +0.100 & 0.462 & +3.377 \end{bmatrix} \times 10^{3}$$

e).- Obtengamos d' , resolviendo el sistema $F'_{ex} = k'd'$

$$d' = \begin{bmatrix} 1.991 \\ -1.331 \\ -0.516 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

f).- Obtengamos e (= ad')

$$e = \begin{bmatrix} -1.331 \\ -1.991 \\ -0.516 \\ \hline -1.991 \\ +1.331 \\ -0.516 \\ \hline -0.467 \\ +2.340 \\ -0.516 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

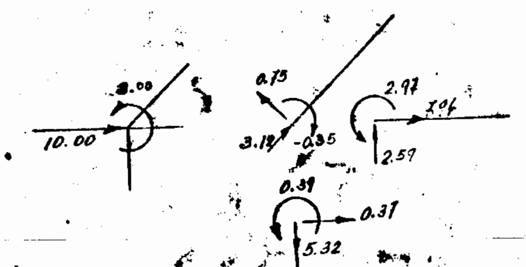
g).- Obtengamos p_B: ($p_B = ke + \overline{p}_B$)

$$p_{B_1} = \begin{bmatrix} -5.324 \\ -0.097 \\ +0.095 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.27 \\ +0.29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.324 \\ -0.367 \\ +0.385 \end{bmatrix}$$

$$p_{B_2} = \begin{bmatrix} -7.964 \\ +0.172 \\ -0.855 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2.76 \\ +3.82 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.964 \\ -2.588 \\ +2.965 \end{bmatrix}$$

$$p_{B_3} = \begin{bmatrix} -1.868 \\ +0.497 \\ -1.398 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.25 \\ -1.25 \\ +1.050 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.118 \\ -0.753 \\ -0.348 \end{bmatrix}$$

Comprobación: (Equilibrio)



$\sum F_x = 10.00$
$\sum F_y = 0$
$\sum M = 3.01$

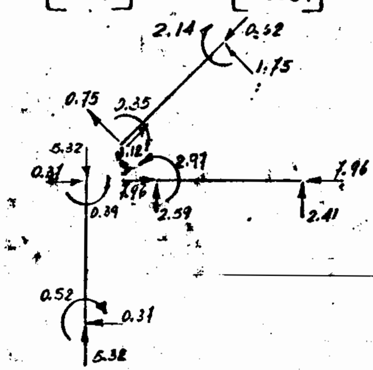
h).- Obtengamos p_A: ($p_A = -H_{BA}\, ke + \overline{p}_A$)

$$H_{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$ (Para todas las barras)

$$p_{A_1} = \begin{bmatrix}+5.324\\+0.097\\+0.390\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\+0.270\\-0.910\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}+5.324\\+0.367\\-0.520\end{bmatrix}$$

$$p_{A_2} = \begin{bmatrix}+7.964\\-0.172\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\-2.240\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}+7.964\\-2.412\\0\end{bmatrix}$$

$$p_{A_3} = \begin{bmatrix}+1.868\\-0.497\\-1.087\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1.250\\-1.250\\-1.050\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}+0.618\\-1.747\\-2.137\end{bmatrix}$$



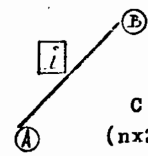
Tratamiento matricial general:

a).- $\bar{F} = C\,\bar{p}$

donde: $\bar{F} = \begin{bmatrix}\bar{F}_1\\ \bar{F}_2\\ \bar{F}_3\\ \vdots\\ \bar{F}_n\end{bmatrix}$; $\bar{p} = \begin{bmatrix}\bar{p}_{A_1}\\ \bar{p}_{B_1}\\ \bar{p}_{A_2}\\ \bar{p}_{B_2}\\ \vdots\\ \bar{p}_{A_b}\\ \bar{p}_{B_b}\end{bmatrix}$

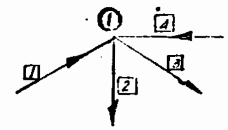
n = No. de nudos

b = No. de barras



$$C = \text{Nudos}\ (n\times 2b) \qquad \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \left[\begin{array}{ccc} \cdots & T & \cdots \\ \cdots & & T \end{array}\right]$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{barra } \boxed{i}}$$

O bien la siguiente regla:



$$\bar{F}_1 = T_1\,\bar{p}_{B_1} + T_2\,\bar{p}_{A_2} + T_3\,\bar{p}_{A_3} + T_4\,\bar{p}$$

b).- $\boxed{\tilde{p} = \bar{p} + D\,k\,e}$

donde:

$$\tilde{p} = \begin{bmatrix}p_{A_1}\\ p_{B_1}\\ p_{A_2}\\ p_{B_2}\\ \vdots\\ p_{A_b}\\ p_{B_b}\end{bmatrix} \quad \text{(fuerzas finales en las barras)}$$

$$D = \text{barra } \boxed{i}\ (2b\times b) \qquad \begin{array}{c} \\ \\ A \\ B \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ 0 & 0 & H_{BA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & & \end{array}\right]$$

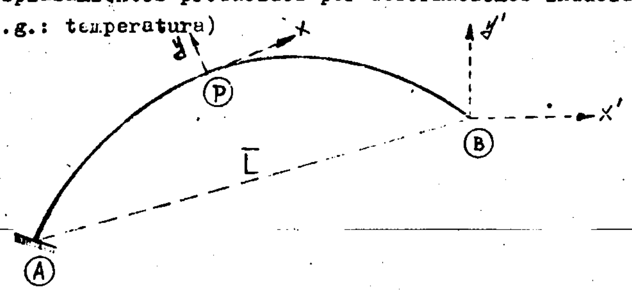
(column $\boxed{i}$)

Ejemplo: (El ejemplo anterior)

$$C = ① \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & T_1 & 0' & T_2 & 0 & T_3 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \boxed{1} \qquad & \qquad \boxed{2} \qquad & \qquad \boxed{3} \end{array} \end{array}$$

$$D = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \boxed{3} \end{array} & \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} -H_{BA_1} \\ I \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} -H_{BA_2} \\ I \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} -H_{BA_3} \\ I \end{matrix} \end{array}\right] \\ & \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \quad \boxed{2} & \quad \boxed{3} \end{array} \end{array}$$

III.- Desplazamientos producidos por deformaciones inducidas (v.g.: temperatura)



$_Td'_B$ = desplazamiento en (B) producido por deformaciones inducidas (de)

$$_Td'_B = \int_L H'^T_{BP} \ T \ de$$

Si se trata de una dilatación producida por un cambio de temperatura θ

$$de = \alpha \theta ds \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

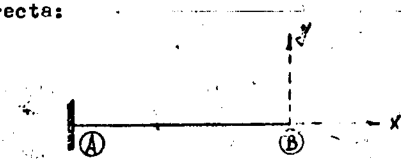
donde: α = coeficiente de dilatación, constante en la sección.
θ = incremento en temperatura, constante en la sección.

Si α y θ son constantes a lo largo de la barra

$$_Td'_B = \alpha\theta \begin{bmatrix} L_{x'} \\ L_{y'} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$L_{x'} L_{y'}$ = proyecciones del vector $\overline{L}$ (A - B), con respecto a x', y'.

Si la barra es recta:



$$_Td'_B = \alpha \theta L \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

IV.- <u>Fuerzas efectivas producidas por deformaciones inducidas.</u>

a).- Deformaciones (e) en las barras $\boxed{e = a\,d' - {_T}d_B}$

b).- Fuerzas en las barras
$$\boxed{\begin{array}{l} p = k\,e \\ p = k\,a\,d' - k\,{_T}d_B \end{array}}$$

Por equilibrio

$$F' = a^T p = a^T k\,a\,d' - a^T k\,{_T}d_b$$

$$\boxed{F' + a^T k\,{_T}d_B = F'_{ex}}$$

Si $F' = 0$, se tiene la siguiente solución:

$$\begin{cases} d' = (a^T k\, a)^{-1} a^T k\; {}_T d_b \\ e = \left[a\, (a^T k\, a)^{-1} a^T k \;-\; I \right] {}_T d_b \\ p = k \left[a\, (a^T k\, a)^{-1} a^T k - I \right] {}_T d_B \end{cases}$$

Observe que si la estructura es isostática, la matriz [a] es cuadrado y no singular, por lo tanto:

$$(a^T k\, a)^{-1} = a^{-1} k^{-1} (a^T)^{-1}$$

$$\left[a\, (a^T k\, a)^{-1} a^T k - I \right] = 0$$

O sea que las deformaciones inducidas no causan esfuerzos en las estructuras isostáticas, aunque si producen desplazamientos.

Ejemplo: (Ejemplo hoja 66)

Supongamos: (Temperatura) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0.000015/^\circ C \\ \theta = 20^\circ C \end{array} \right\}$ Para todas las barras

Por lo tanto: $\quad {}_T d_B = \begin{bmatrix} 0.0015 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (m) (Para todas las barras)

a).- Fuerzas efectivas:

$${}_T d_B = \begin{bmatrix} 0.0015 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0.0015 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0.0015 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad k\,{}_T d_B = \begin{bmatrix} 6.0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 6.0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 6.0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F'_{e} = a^T (k\,{}_T d_B) = \begin{bmatrix} -10.25 \\ +1.75 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b).- Obtengamos d'; $d' = (k')^{-1} F'_{e}$, (ó resolviendo el sistema)

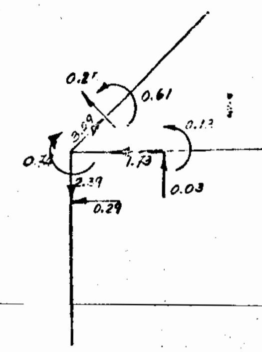
$$d' = \begin{bmatrix} -1.932 \\ +0.902 \\ -0.067 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

c).- Obtengamos e $(= a\, d' - {}_T d_B)$

$$a\, d' = \begin{bmatrix} +0.902 \\ +1.932 \\ -0.067 \\ +1.932 \\ -0.902 \\ -0.067 \\ +0.728 \\ -2.000 \\ -0.067 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad e = \begin{bmatrix} -0.598 \\ +1.932 \\ -0.067 \\ +0.432 \\ -0.902 \\ -0.067 \\ -0.772 \\ -2.000 \\ -0.067 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

d).- Obtengamos p $(= p_B)$: $\quad (p = k\, e)$

$$p = \begin{bmatrix} -2.39 \\ +0.29 \\ -0.74 \\ +1.73 \\ -0.03 \\ +0.13 \\ -3.09 \\ -0.25 \\ +0.61 \end{bmatrix}$$



Ejemplo: (Ejemplo hoja (66))

La barra [1] tiene una deformación previa (por error de fábrica) igual a

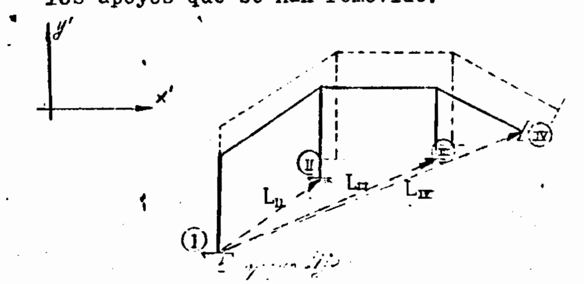
$$ {}_{T}d_{B_1} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.001 \\ 0.0005 \end{bmatrix} $$

Obtener las fuerzas efectivas, producidas por esta deformación inducida.

$$ k_T d_B = \begin{bmatrix} +4.000 \\ -0.034 \\ +0.228 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad F'_{ex} = \begin{bmatrix} -0.034 \\ -4.000 \\ +0.228 \end{bmatrix} $$

V.- Simplificación de los efectos por temperatura, cuando α y θ son iguales para todas las barras.

Consideramos una estructura cualquiera con α y θ iguales para todas las barras, soltemos todos los apoyos que le impidan dilatarse libremente, sea (I) el apoyo fijo y (II), (III) y (IV) los apoyos que se han removido.



Estructura dilatada (homóloga a la estructura original)

Los desplazamientos de los apoyos serán:

$$ {}_{T}d'_{I} = 0;\ {}_{T}d'_{II} = \alpha\theta \begin{bmatrix} L_{II\,x'} \\ L_{II\,y'} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}_{T}d_{III} = \alpha\theta \begin{bmatrix} L_{III\,x'} \\ L_{III\,y'} \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}_{T}d_{IV} = \alpha\theta \begin{bmatrix} L_{IV\,x'} \\ L_{IV\,y'} \\ 0 \end{bmatrix} ; $$

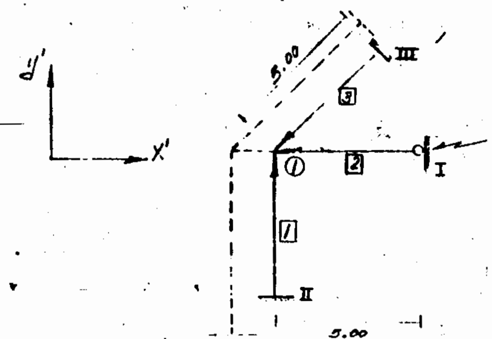
$$ \text{donde:} \quad \left\{ \begin{aligned} L_{i\,x'} &= x'_i - x'_I \\ L_{i\,y'} &= y'_i - y'_I \end{aligned} \right\} $$

El problema es equivalente a una estructura cuyos apoyos han sufrido desplazamientos iguales y de signo contrario a los que se obtienen al dilatarse libremente la estructura. (Ver inciso IV del Resumen (2))

$$ \left\{ F'_{ex} = -K_{12}\, d'_A \right\} $$

Ejemplo: (Ejemplo hoja (78))

$$ \left\{ \begin{aligned} \alpha &= 0.000015/°C \\ \theta &= 20°C \end{aligned} \right. $$



$$ L_{II} = \begin{bmatrix} -5.00 \\ -5.00 \end{bmatrix} \qquad L_{III} = \begin{bmatrix} -1.465 \\ +3.535 \end{bmatrix} $$

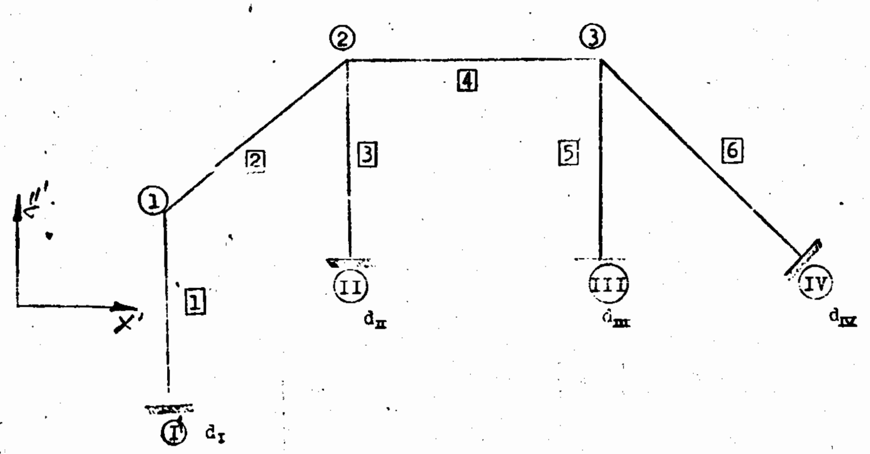
Obtengamos ${}_{T}d'_{I}, {}_{T}d'_{II}, {}_{T}d'_{III}$

$$ {}_{T}d'_{I} = 0\ ;\ {}_{T}d'_{II} = \begin{bmatrix} -0.00150 \\ -0.00150 \\ 0 \end{bmatrix} ; \qquad {}_{T}d'_{III} = \begin{bmatrix} -0.00044 \\ +0.00106 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Resolvamos la estructura con los siguientes desplazamientos en los apoyos:

$$d = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +0.00150 \\ +0.00150 \\ 0 \\ +0.00044 \\ -0.00106 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathrm{I} \\ \\ \\ \mathrm{II} \\ \\ \\ \mathrm{III} \\ \\ \end{array}$$

Nota:
Para la obtención de las fuerzas en los apoyos efectivas, producidas por desplazamientos, no es necesario usar el procedimiento indicado en el inciso IV del Resumen (2), que consistía en considerar a los apoyos como nudos; basta con obtener las fuerzas de fijación en las barras vecinas a los apoyos, producidas por los desplazamientos de estos, a continuación damos un ejemplo.



Las fuerzas de fijación en las barras 1, 3, 5 y 6 serán:

Barra 1 $\begin{cases} \bar{P}_{A_1} = k_{AA}\, d_I \\ \bar{P}_{B_1} = k_{BA}\, d_I \end{cases}$; Barra 3 $\begin{cases} \bar{P}_{A_3} = k_{AA}\, d_{II} \\ \bar{P}_{B_3} = k_{BA}\, d_{II} \end{cases}$

Barra 5 $\begin{matrix} \bar{P}_{A_5} = k_{AA}\, d_{III} \\ P_{B_5} = k_{BA}\, d_{III} \end{matrix}$; Barra 6 $\begin{cases} \bar{P}_{A_6} = k_{AA}\, d_{IV} \\ \bar{P}_{B_6} = k_{BA}\, d_{IV} \end{cases}$

d_I, d_{II}, d_{III}, d_{IV}, en coordenadas locales, esto es:

$$d_I = T_1^T\, d_I' \; ; \; d_{II} = T_3^T\, d_{II}'$$
$$d_{III} = T_5^T\, d_{III}' \; ; \; d_{IV} = T_6^T\, d_{IV}'$$

Por lo tanto las fuerzas efectivas (F_{ex}') en los nudos ①, ② y ③, serán:

$$F_{ex}' = \begin{bmatrix} -T_1\, \bar{P}_{B_1} \\ -T_3\, \bar{P}_{B_3} \\ -T_5\, \bar{P}_{A_5} - T_6\, \bar{P}_{B_6} \end{bmatrix} \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

Apliquemos este procedimiento a nuestro ejemplo.

a).- Obtención de d_{II} d_{III}

$$d_{II} = T_1^T\, d_{II}' = \begin{bmatrix} +0.00150 \\ -0.00150 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d_{III} = T_3^T\, d_{III}' = \begin{bmatrix} +0.000438 \\ +0.001060 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b).- Fuerzas de fijación en las barras [1] y [3]

Barras [1] [3]

$$k_{BA} = -k_{BB}\,H^{T}_{BA} = \begin{bmatrix} -4.00 & 0 & 0 \\ 0 & -0.137 & -0.343 \\ 0 & +0.343 & +0.573 \end{bmatrix} \times 10^{2}$$

$$k_{AA} = H_{BA}\,k_{BB}\,H^{T}_{BA} = \begin{bmatrix} 4.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0.137 & +0.343 \\ 0 & +0.343 & 1.142 \end{bmatrix} \times 10^{2}$$

Barra [1] $\left\{ \bar{P}_{A_1} = k_{AA}\,d_{x} = \begin{bmatrix} +6.000 \\ -0.205 \\ -0.514 \end{bmatrix} ; \quad \bar{P}_{B_1} = k_{BA}\,d_{x} = \begin{bmatrix} -6.00 \\ +0.205 \\ +0.514 \end{bmatrix} \right.$

Barra [3] $\left\{ \bar{P}_{A_3} = k_{AA}\,d_{x} = \begin{bmatrix} +1.752 \\ +0.145 \\ +0.365 \end{bmatrix} ; \quad \bar{P}_{B_3} = k_{BA}\,d_{x} = \begin{bmatrix} -1.752 \\ -0.145 \\ +0.365 \end{bmatrix} \right.$

c).- Obtención F'_{ex}

$$F'_{ex} = \left[-T_1 \bar{P}_{B_1} - T_3\,\bar{P}_{B_3} \right]$$

$$F'_{ex} = \begin{bmatrix} -0.930 \\ +4.660 \\ +0.149 \end{bmatrix}$$

d).- Obtengamos $[d']$ $\quad d' = (K')^{-1}\,F'_{ex}$

$$d' = \begin{bmatrix} -0.430 \\ +0.903 \\ -0.067 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

Obsérvese que los valores de $[d']$ no son iguales a los obtenidos en la hoja ([illegible]) porque falta sumar el desplazamiento de 1 cuando se dilató libremente, que es igual a

$$\begin{bmatrix} -1.500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10$$ que sumado al anterior

nos da: $\begin{bmatrix} -1.930 \\ +0.903 \\ -0.067 \end{bmatrix}$ que es el mismo valor que el obtenido en la hoja (77)

e).- Obtengamos $[e]$ $(= a\,d')$

$$e = \begin{bmatrix} +0.903 \\ +0.430 \\ -0.067 \\ \hdashline +0.430 \\ -0.903 \\ -0.067 \\ \hdashline -0.334 \\ -0.942 \\ -0.067 \end{bmatrix}$$

f).- Obtengamos $k\,e$:

$$k\,e = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} +3.61 \\ +0.08 \\ -0.22 \\ \hdashline +1.72 \\ -0.03 \\ +0.13 \\ \hdashline -1.34 \\ -0.11 \\ +0.25 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \\ \boxed{3} \end{array} \end{array}$$

g).- Obtengamos p_B $(= k_{23}e + \bar{p})$

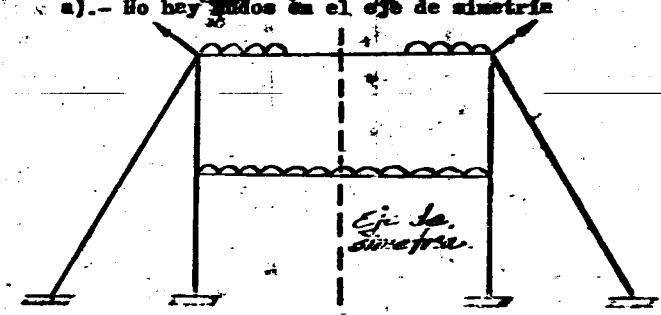
$$p_B = \begin{bmatrix} -2.\text{[illegible]} \\ +0.29 \\ -0.73 \\ +1.72 \\ -0.03 \\ +0.13 \\ -3.09 \\ -0.26 \\ +0.61 \end{bmatrix}$$

Iguales resultados a los obtenidos en la hoja (77)

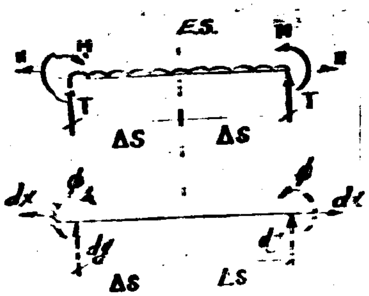
VI.- <u>Simplificación cuando una estructura es simétrica en geometría.</u>
(Marcos planos)

1).- Carga simétrica

a).- No hay nudos en el eje de simetría



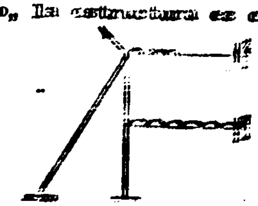
Por simetría: (reflexión)



Si $\Delta s \to 0$
Por equilibrio
$T = 0$

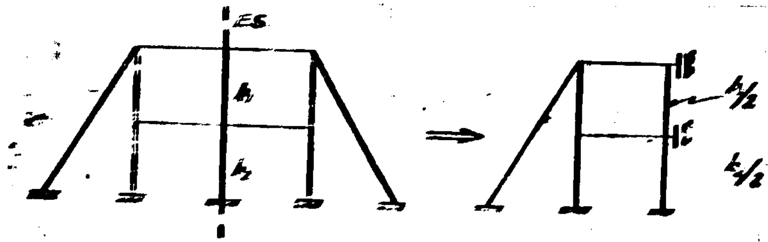
Si $\Delta s \to 0$
Por continuidad
$d_x = 0$
$\phi = 0$

Por lo tanto, la estructura es equivalente a:

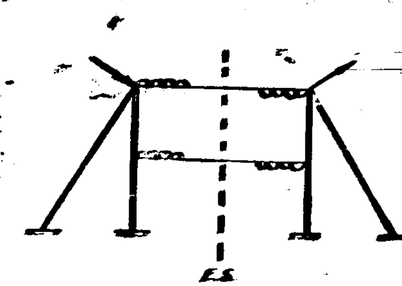


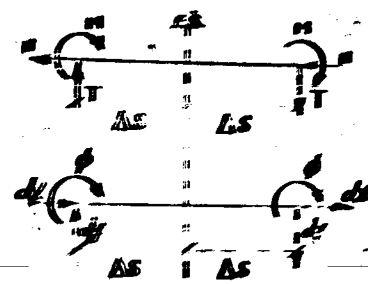
$(\phi = d_x = 0)$

b).- Hay nudos (barras) en el eje de simetría



2).- Carga antisimétrica:

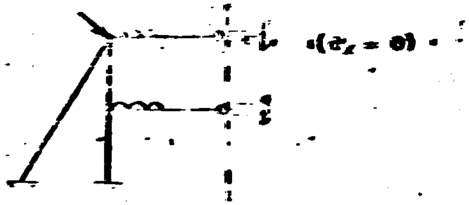




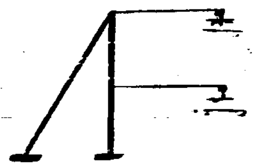
Por antisimetría (antireflexión)
Si $\Delta s \to 0$
Por equilibrio:
$N = 0$
$M = 0$

Si $\Delta s \to 0$
Por continuidad
$d_y = 0$

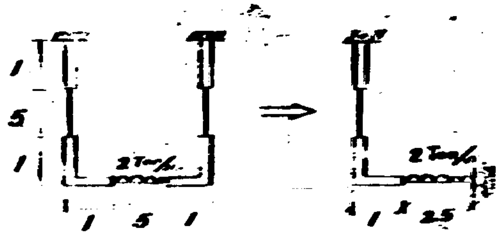
Por lo tanto la estructura es equivalente a:



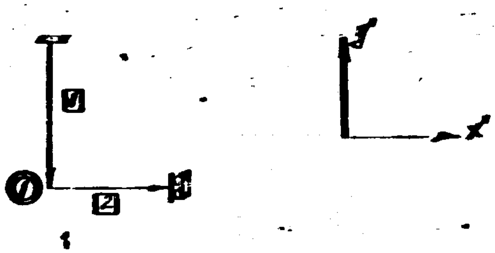
o bien:



Si hay barras en el eje se toma la mitad de su rigidez, como en el caso anterior.
Ejemplo:



Orientemos las barras:



a).- Rigideces de las barras (k)

$$k_{33_1} = \begin{bmatrix} 0.400 & 0 & 0 \\ 0 & 0.151 & -0.668 \\ 0 & -0.668 & 2.730 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$k_{33_2} = \begin{bmatrix} 0.800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.800 \end{bmatrix} \times 10^5$$

(Ver tabla hoja 43 del resumen (5))

$$k_{33_2} = H_{33} k_{33} H^T_{33} = \begin{bmatrix} 0.800 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.800 \end{bmatrix} \times 10^5$$

b).- Obtengamos K' (con la regla de la suma)

$$k'_{33_1} = \begin{bmatrix} 0.151 & 0 & -0.668 \\ 0 & 0.400 & 0 \\ -0.668 & 0 & 2.730 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$k'_{33_2} = k_{33_2}$$

$$K' = \begin{bmatrix} 0.951 & 0 & -0.668 \\ & 0.400 & 0 \\ -0.668 & 0 & 3.530 \end{bmatrix} \times 10^5$$

c).- Las fuerzas efectivas y las de fijación son las mismas que las del nudo C en el problema original (Ver tabla al principio de este resumen)

$$F'_{ef} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -9.167 \end{bmatrix}$$

d).- Resolviendo el sistema $k'd' = F'$ se obtiene:

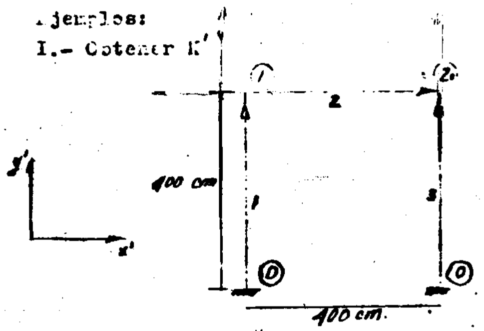
$$d' = \begin{bmatrix} -2.01 \\ -12.50 \\ -2.98 \end{bmatrix} \times 10^{5}$$

ANALISIS ESTRUCTURAL

EJEMPLOS

Ejemplos:

I.- Obtener K'



$E = 2.1x10 \quad kg/cm$

$I = 2x10^4 \quad cm^4$

$A = 100 \quad cm^2$

$\mu = 0.4$

$k_{Forma} = 1.2$

$$\rho = \sqrt{20000/100} = 14.1 \text{ cm}$$

$$c = 6(1+\mu)\left(\frac{\rho}{L}\right)^2 k_{Forma} = 6x1.4x\left(\frac{14.1}{400}\right)^2 x1.2 = 0.012$$

$$\frac{EA}{L} = \frac{2.1x10^6 x100}{400} = 5.25x10^5 \text{ kg/cm}$$

$$\frac{12EI}{L^3(1+4c)} = \frac{12x2.1x10^6 x2x10^4}{400^3 \ x\ (1.05)} = 0.075x10^5 \text{ kg/cm}$$

$$\frac{6EI}{L^2(1+4c)} = \frac{6x2.1x10^6 x2x10^4}{400^2 \ x\ (1.05)} = 15.00x10^5 \text{ kg}$$

$$\frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} = \frac{4x2.1x10^6 x2x10^4(1.01)}{400 \quad (1.05)} = 4040x10^5 \text{ kg-cm}$$

$$\frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} = \frac{2x2.1x10^6 x2x10^4 x(0.98)}{400 \quad (1.05)} = 1960x10^5 \text{ kg-cm}$$

Regla de la suma

Barra $\boxed{1}$ (0 - 1) y Barra $\boxed{3}$ (0 - 2)

$$\theta = -90^o \quad ; \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} 5.25 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0.075 & 15 & & \text{Simetrica} & \\ 0 & 15 & 4040 & & & \\ -5.25 & 0 & 0 & 5.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.075 & -15 & 0 & 0.075 & -15 \\ 0 & 15 & 1960 & 0 & -15 & 4040 \end{bmatrix} x10^5$$

$$k'_{ij} = T\, k_{ij}\, T^T \quad \text{etc.}$$

$$k = \begin{array}{c} \\ 0 \\ \\ \\ 1 \\ 2 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0.075 & 0 & -15 & -0.075 & 0 & -15 \\ 0 & 5.25 & 0 & 0 & -5.25 & 0 \\ -15 & 0 & 4040 & 15 & 0 & 1960 \\ -0.075 & 0 & 15 & 0.075 & 0 & 15 \\ 0 & -5.25 & 0 & 0 & 5.25 & 0 \\ -15 & 0 & 1960 & 15 & 0 & 4040 \end{bmatrix} x10^5$$

$$\begin{array}{cc} \quad 0 \quad & \quad 1,\ 2 \end{array}$$

Barra $\boxed{2}$ (1 — 2):

$\theta = 0^o \ ; \ T = I$

$$k = k' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \\ 2 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 5.25 & 0 & 0 & -5.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.075 & 15 & 0 & -0.075 & 15 \\ 0 & 15 & 4040 & 0 & -15 & 1960 \\ -5.25 & 0 & 0 & 5.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.075 & -15 & 0 & 0.075 & -15 \\ 0 & 15 & 1960 & 0 & -15 & 4040 \end{bmatrix} x10$$

$$\begin{array}{cc} \quad 1 \quad & \quad 2 \end{array}$$

$$H \quad f_2' \; H_{B,2} = \begin{bmatrix} \left(\frac{L}{EA}+\frac{L^3}{2EI}\right) & \frac{L^3}{2EI}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \frac{L^2}{\sqrt{2}EI} \\ \frac{L^3}{2EI}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \frac{L^3}{EI}\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \frac{L^2}{2EI}\left(1+\sqrt{2}\right) \\ \frac{L^2}{\sqrt{2}EI} & \frac{L^2}{2EI}\left(1+\sqrt{2}\right) & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

Barra $\boxed{1}$: $\theta = -90^{o}$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

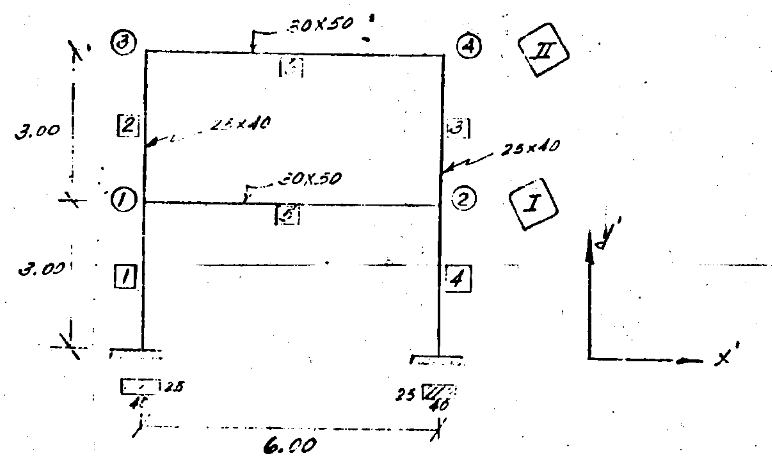
$$f_1' = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & 0 & -\frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L}{EA} & 0 \\ -\frac{L^2}{2EI} & 0 & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \; ; \quad H_{B,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{L}{\sqrt{2}} & L\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{B,1}^{T} \; f_1' \; H_{B,1} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{EI}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \frac{L^3}{2\sqrt{2}EI} & \frac{L^2}{EI}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right) \\ \frac{L^3}{2\sqrt{2}EI} & \left[\frac{L}{EA}+\frac{L^3}{EI}\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)\right] & \frac{L^2}{EI}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{L^2}{EI}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right) & \frac{L^2}{EI}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

$$f_{BB} = \begin{bmatrix} \left[\frac{L}{2EA}+\frac{L^3}{EI}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] & \left[\frac{-L}{2EA}+\frac{L^3}{EI}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] & \frac{L^2}{2EI}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}-1\right) \\ \left[\frac{-L}{2EA}+\frac{L^3}{EI}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] & \left[\frac{3L}{2EA}+\frac{L^3}{EI}\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right] & \frac{L^2}{2EI}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+3\right) \\ \frac{L^2}{2EI}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}-1\right) & \frac{L^2}{2EI}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+3\right) & \frac{3L}{EI} \end{bmatrix}$$

Ejemplos de análisis dinámico de estructuras

Ejemplo 1: Obtener los periodos y modos de vibrar (vibración libre



Datos: $W_1 = W_2 = 30$ ton.

$E = 147000$ kg / cm^2 ($f_c' = 210$ kg/cm^2)

$\mu = 0.25$

Hagamos las siguientes alternativas.

1) Análisis dinámico completo.

a) Obtención de $\boxed{K}$ (12x12), usando la regla de la suma:

Trabes: $\boxed{5}$ y $\boxed{6}$

$$I = \frac{30\times50^3}{12} = 3.125\times10^5\ \text{cm}^4;\quad A = 30\times50 = 1500\ \text{cm}^2$$

$$I/A = 208\ \text{cm}^2;\quad c = 6\times1.25\times\frac{208}{600^2}\times1.2 = 0.0052$$

$$\frac{12EI}{L^3(1+4c)} = \frac{12\times1.47\times10^6\times3.125\times10^{-3}}{6.00^3\times1.0208} = 249.0\ \text{ton/m}$$

$$\frac{6EI}{L^2(1+4c)} = \frac{6\times1.47\times10^6\times3.125\times10^{-3}}{6.00^2\times1.0208} = 750.0\ \text{ton}$$

$$\frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} = \frac{4\times1.47\times10^6\times3.125\times10^{-3}\times1.0052}{6.00\times1.0208} = 2980.0\ \text{ton/m}$$

$$\frac{EA}{L} = \frac{1.47\times10^6\times1500\times10^{-4}}{6} = 36750.0\ \text{ton/m.}$$

$$\frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} = 1470$$

$$k'_{BB_{(5)}} = k'_{BB_{(6)}} = \begin{bmatrix} 36750.0 & 0 & 0 \\ 0 & 249 & -750 \\ 0 & -750 & +2980 \end{bmatrix}$$

Columnas $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$

$$I = \frac{25\times40^3}{12} = 1.33\times10^5\ \text{cm}^4;\quad A = 1000\ \text{cm}^2$$

$$I/A = 133.3;\quad c = 6\times1.25\times\frac{133.3}{300^2}\times1.2 = 0.0133$$

$$\frac{12EI}{L^3(1+4c)} = \frac{12\times1.47\times1.333\times10^3}{3.00^3\times1.0532} = 824$$

$$\frac{6EI}{L^2(1+4c)} = 1236$$

$$\frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} = \frac{4\times1.47\times1.33\times10^3\times1.0133}{3\times1.0532} = 2520$$

$$\frac{EA}{L} = 49000.0$$

$$\frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} = 1210.0$$

$$k'_{BB_{(1)}} = k_{BB_{(1)}} = \begin{bmatrix} 824 & 0 & 1236 \\ 0 & 49000 & 0 \\ 1236 & 0 & 2520 \end{bmatrix}$$

Aplicando la regla de la suma:

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad\quad 1 \quad\quad & \quad\quad 2 \quad\quad & \quad\quad 3 \quad\quad & \quad\quad 4 \quad\quad \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 37574 & 0 & 0 & -36750 & 0 & 0 & -824 & 0 & -1236 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49249 & 750 & 0 & -249 & 750 & 0 & -49000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 750 & 8020 & 0 & -750 & 1470 & 1236 & 0 & 1210 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -36750 & 0 & 0 & 37574 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -824 & 0 & -1236 \\ 0 & -249 & -750 & 0 & 49249 & -750 & 0 & 0 & 0 & 0 & -49000 & 0 \\ 0 & 750 & 1470 & 0 & -750 & 8020 & 0 & 0 & 0 & 1236 & 0 & 1210 \\ \hline -824 & 0 & 1236 & 0 & 0 & 0 & 37574 & 0 & 1236 & -36750 & 0 & 0 \\ 0 & -49000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49249 & 750 & 0 & -249 & 750 \\ -1236 & 0 & 1210 & 0 & 0 & 0 & 1236 & 750 & 5500 & 0 & -750 & 1470 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -824 & 0 & 1236 & -36750 & 0 & 0 & 37574 & 0 & 1236 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -49000 & 0 & 0 & -249 & -750 & 0 & 49249 & -750 \\ 0 & 0 & 0 & -1236 & 0 & 1210 & 0 & 750 & 1470 & 1236 & -750 & 5500 \end{array}\right] \end{array}$$

b) Obtención de $\widetilde{k}$ (permutando k) tal que:

$$\begin{bmatrix} F_{x'} \\ F_{y'} \\ \hline u \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \widetilde{K}_{11} & \widetilde{K}_{12} \\ \hline \widetilde{K}_{21} & \widetilde{K}_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} d_{x'} \\ d_{y'} \\ \hline \phi \end{bmatrix}$$

$$
K = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
\multicolumn{4}{c|}{d_x'} & \multicolumn{4}{c|}{d_y'} & \multicolumn{4}{c}{\psi} \\
\text{[illegible]} & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1236 & 0 \\
\text{[illegible]} & \text{[illegible]} & 0 & \text{[illegible]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1236 \\
-824 & 0 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1236 & 0 & 1236 & 0 \\
0 & -824 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1236 & 0 & 1236 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 92249 & -249 & -41000 & 0 & 750 & 750 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -249 & 92249 & 0 & -41000 & -750 & -750 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -41000 & 0 & 41249 & -249 & 0 & 0 & 750 & 750 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -41000 & -249 & 41249 & 0 & 0 & -750 & -750 \\
\hline
0 & 0 & 1236 & 0 & 750 & -750 & 0 & 0 & \text{[illegible]} & 1410 & 1210 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1236 & 750 & -750 & 0 & 0 & 1410 & \text{[illegible]} & 0 & 1210 \\
-1236 & 0 & 1236 & 0 & 0 & 0 & 750 & -750 & 1210 & 0 & 5500 & 1410 \\
0 & -1236 & 0 & 1236 & 0 & 0 & 750 & -750 & 0 & 1210 & 1410 & 5500
\end{array}\right]
$$

La ecuación característica será:

$$
\left[\begin{array}{c|c} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ \hline \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22} \end{array}\right]
\begin{bmatrix} d_x' \\ d_y' \\ \phi \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} \omega^2 m d_x' \\ \omega^2 m d_y' \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Por lo tanto se puede contraer (eliminando a ϕ)

$$
\underbrace{\left[\tilde{K}_{11} - \tilde{K}_{12}\, \tilde{K}_{22}^{-1}\, \tilde{K}_{21}\right]}_{\tilde{\tilde{K}}}
\begin{bmatrix} d_x' \\ d_y' \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} \omega^2 m d_x' \\ \omega^2 m d_y' \end{bmatrix}
$$

c) Obtengamos: $\tilde{\tilde{K}} = \tilde{K}_{11} - \tilde{K}_{12}\, \tilde{K}_{22}^{-1}\, \tilde{K}_{21}$

$$
\tilde{\tilde{K}} = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
\multicolumn{4}{c|}{d_x'} & \multicolumn{4}{c}{d_y'} \\
38085 & -36661 & -563 & -65.8 & -17.3 & 17.3 & 136.0 & -136.0 \\
-36661 & 38085 & -65.8 & -563 & -17.3 & 17.3 & 136.0 & -136.0 \\
-563 & -65.8 & 37158 & -36666 & -82.6 & 82.6 & -118.7 & 118.7 \\
-65.8 & -563 & -36666 & 37158 & -82.6 & 82.6 & -118.7 & 118.7 \\
\hline
-17.3 & -17.3 & -82.6 & -82.6 & 98128 & -128 & -48979 & -21.0 \\
17.3 & 17.3 & 82.6 & 82.6 & -128 & 98128 & -21.0 & -48979 \\
136.0 & 136.0 & -118.7 & -118.7 & -48979 & -21.0 & 49084 & -83.9 \\
-136.0 & -136.0 & 118.7 & 118.7 & -21.0 & -48979 & -83.9 & 49084
\end{array}\right]
$$

Nota: Observe que las líneas de $\tilde{K}_{22}^{-1}$ son los giros producidos por pares unitarios, sin desplazamientos, por lo que se puede aplicar Cros ó Kani (modificados) para efectuar su inversión, ó simplemente aplicar el método de Gauss - Seidel.

d) Obtengamos los períodos y modos naturales, con la ecuación:

$$
\left[\tilde{\tilde{K}}\right]\left[d'\right] = \omega^2 \left[M\right]\left[d'\right]
$$

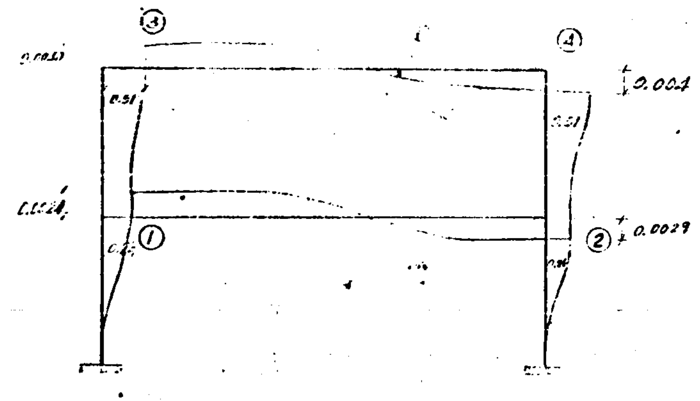
donde: $d' = \left[\begin{array}{c} d_x' \\ \hline d_y' \end{array}\right]$; $\quad M = \left[\begin{array}{c|c} m & 0 \\ \hline 0 & m \end{array}\right]$

$$
m_i = 1/2 \ \frac{W_i}{g} = 1/2 \left(\frac{30}{9.8}\right) = 1.53 \ \frac{T\text{-}s^2}{m}
$$

$$
\left[M\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
1.53 & & & & & & & \\
 & 1.53 & & & & & & \\
 & & 1.53 & & & & & \\
 & & & 1.53 & & & & \\
\hline
 & & & & 1.53 & & & \\
 & & & & & 1.53 & & \\
 & & & & & & 1.53 & \\
 & & & & & & & 1.53
\end{array}\right]
$$

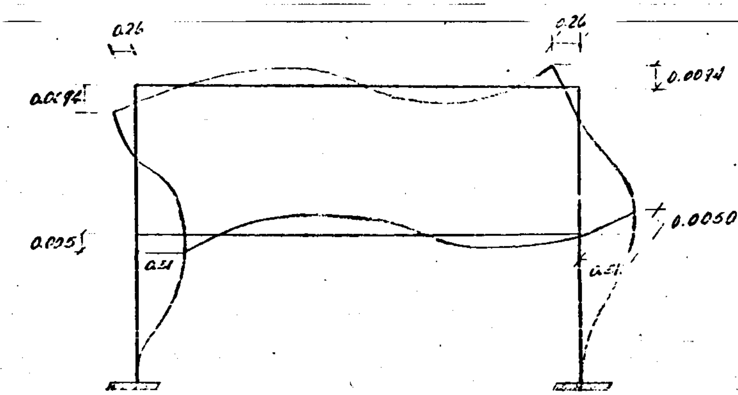
```
ADIN        11:48      034 11/24/70

PROGRAMA PARA LA OBTENCION DE PERIODOS Y MODOS NATURA-
LES DE VIBRAR. PROGRAMADO POR J. DAMY,R., MEXICO NOVIEMBRE DE 1970

MATRIZ K
  .38085000E+06 -.36661000E+05 -.56300000E+03 -.65800000E+02
 -.17300000E+02  .17300000E+02  .13600000E+03 -.13600000E+03
  .38085000E+05 -.65800000E+02 -.56300000E+03 -.17300000E+02
  .17300000E+02  .13600000E+03 -.13600000E+03  .37158000E+05
 -.36660000E+05 -.82600000E+02  .82600000E+02 -.11870000E+03
  .11870000E+03  .37158000E+05 -.82600000E+02  .82600000E+02
 -.11870000E+03  .11870000E+03  .98128000E+05 -.12800000E+03
 -.48979000E+05 -.21000000E+02  .98128000E+05 -.21000000E+02
 -.48979000E+05  .49084000E+05 -.83900000E+02  .49084000E+05
 ASAS
  .15300000E+01  .15300000E+01  .15300000E+01  .15300000E+01
  .15300000E+01  .15300000E+01  .15300000E+01  .15300000E+01

MODO  1
OMEGA =  10.66051200  PERIODO =     .58938871
  .25623737E+00  .25623737E+00  .51099425E+00  .51099425E+00
  .29466487E-02 -.29466486E-02  .39979469E-02 -.39979469E-02

MODO  2
OMEGA =  33.67011100  PERIODO =     .18661017
  .51096589E+00  .51096589E+00 -.25612073E+00 -.25612073E+00
 -.50193496E-02  .50193496E-02 -.93926081E-02  .93926080E-02

MODO  3
OMEGA =  110.60265000  PERIODO =     .05680863
  .59273579E-09  .59857214E-09 -.83033499E-09 +.83031192E-09
  .30054070E+00  .30054064E+00  .48628462E+00  .48628453E+00

MODO  4
OMEGA =  111.30092000  PERIODO =     .05645223
 -.72833551E-02 -.72833551E-02  .91885201E-02  .91885201E-02
 -.30022755E+00  .30022759E+00 -.48633659E+00  .48633667E+00

MODO  5
OMEGA =  219.33793000  PERIODO =     .02864614
  .22869770E+00 -.22869771E+00  .52392246E+00 -.52392246E+00
  .21103940E-13 -.21103940E-13  .39491379E-13 -.39491378E-13

MODO  6
OMEGA =  221.34915000  PERIODO =     .02838586
  .52392246E+00 -.52392246E+00 -.22869770E+00  .2R869771E+00
 -.11766490E-11  .11766492E-11 -.19060459E-11  .19060462E-11

MODO  7
OMEGA =  289.56096000  PERIODO =     .02169901
  .46862398E-09  .46862254E-09  .40160199E-10 .39996558E-10
  .48628428E+00  .48628487E+00 -.30054049E+00 -.30054086E+00

MODO  8
OMEGA =  289.78019000  PERIODO =     .02168259
 -.77499100E-03 -.77499100E-03 -.67084765E-04 -.67084765E-04
  .48644342E+00 -.48644283E+00 -.30028316E+00  .30028279E+00
```

1er modo



$T_1 = 0.589$ seg

2º modo



$T_2 = 0.187$ seg

Se obtuvo: (Utilizando el servicio de tiempo compartido de G E)

$\omega_1 = 10.66$ 1/s; $T_1 = 0.589$ seg.
$\omega_2 = 33.67$ $T_2 = 0.187$
$\omega_3 = 110.60$ $T_3 = 0.057$
$\omega_4 = 111.30$ $T_4 = 0.056$
$\omega_5 = 219.34$ $T_5 = 0.029$
$\omega_6 = 221.35$ $T_6 = 0.028$
$\omega_7 = 289.56$ $T_7 = 0.022$
$\omega_8 = 289.78$ $T_8 = 0.022$

2) Análisis dinámico, sin considerar acortamiento en trabes
En este caso la matriz $\left[\tilde{\tilde{X}}\right]$ se modifica de acuerdo con lo visto en el Resumen (8) obteniéndose la matriz $\left[K^{III}\right]$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \Delta_1 & \Delta_2 & dy_1' & dy_2' & dy_3' & dy_4' \end{array} \\ \left[K^{III}\right] = & \left[\begin{array}{cc|cccc} 2848 & -1257.6 & -34.6 & 34.6 & 272 & -272 \\ -1257.6 & 984 & -34.6 & 34.6 & 272 & -272 \\ \hline & & 98128 & -128 & -48979 & -21 \\ & \text{Simétrica} & & 98128 & -21 & -48979 \\ & & & \text{Simétrica} & 49084 & -83.8 \\ & & & & & 49084 \end{array}\right] \end{array}$$

donde: $\Delta_1 = dx_1' = dx_2$; $\Delta_2 = dx_3' = dx_4'$

La matriz de masas M será:

$$M = \left[\begin{array}{cc|cccc} 3.06 & & & & & \\ & 3.06 & & & & \\ \hline & & 1.53 & & & \\ & & & 1.53 & & \\ & & & & 1.53 & \\ & & & & & 1.53 \end{array}\right]$$

Obteniendose:

$\omega_1 = 10.66$ 1/s ; $T_1 = 0.589$ seg
$\omega_2 = 33.67$ $T_2 = 0.187$
$\omega_3 = 110.60$ $T_3 = 0.057$
$\omega_4 = 111.30$ $T_4 = 0.056$
$\omega_5 = 289.56$ $T_5 = 0.022$
$\omega_6 = 289.78$ $T_6 = 0.022$

Observe que los modos 1º, 2º, 3º y 4º son iguales al caso anterior y que los modos 5º y 6º son iguales al 7º y 8º del caso anterior.

3) <u>Análisis dinámico, sin considerar acortamiento en trabes y columnas.</u>
En este caso la matriz de rigidez $\left[K^{IV}\right]$ será:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \Delta_1 & \Delta_2 \end{array} \\ \left[K^{IV}\right] = & \left[\begin{array}{cc} 2848 & -1257.6 \\ -1257.6 & 984 \end{array}\right] \end{array} \qquad dy_1' = dy_2' = dy_3' = dy_4' = 0$$

$\Delta_1 = dx_1' = dx_2'$
$\Delta_2 = dx_3' = dx_4'$

```
MATRIZ K
 .28480000E+04  -.12576000E+04  -.34600000E+02   .34600000E+02
 .27200000E+03  -.27200000E+03   .98400000E+03  -.16520000E+03
 .16520000E+03  -.23740000E+03   .23740000E+03   .98128000E+05
-.12800000E+03  -.48979000E+05  -.21000000E+02   .98128000[illegible]5
-.21000000E+02  -.48979000E+05   .49084000E+05  -.83900000E+02
 .49084000E+05
MASAS
 .30600000E+01   .30600000E+01   .15300000E+01   .15300000E+01
 .15300000E+01   .15300000E+01

MODO  1
OMEGA =  10.66050900  PERIODO =     .58938884
 .25623737E+00   .51099425E+00   .29466487E-02  -.29466486E-02
 .39979469E-02  -.39979469E-02

MODO  2
OMEGA =  33.67011000  PERIODO =     .18661018
 .51096589E+00  -.25612072E+00  -.50193496E-02   .50193496E-02
-.93926081E-02   .93926080E-02

MODO  3
OMEGA =  110.60265000  PERIODO =    .05680863
 .60344747E-09  -.82412281E-09   .30054070E+00   .30054064E+00
 .48628462E+00   .48628453E+00

MODO  4
OMEGA =  111.30092000  PERIODO =    .05645223
-.72833551E-02   .91885200E-02  -.30022755E+00   .30022759E+00
-.48633659E+00   .48633667E+00

MODO  5
OMEGA =  289.56096000  PERIODO =    .02169901
 .46912016E-09   .40092534E-10   .48628428E+00   .48628487E+00
-.30540049E+00  -.30054086E+00

MODO  6
OMEGA =  289.78019000  PERIODO =    .02168259
-.77499100E-03  -.67084765E-04   .48644342E+00  -.48644283E+00
-.30028316E+00   .30028279E+00
```

La matriz de masas $\left[M\right]$ será:

$$M = \begin{bmatrix} 3.06 & \\ & 3.06 \end{bmatrix}$$

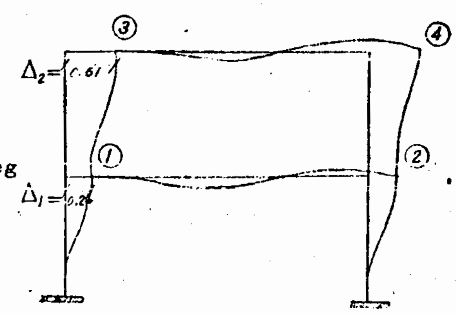
Se obtiene: $\omega_1 = 10.71$ 1/s; T = 0.587 seg

$\omega_2 = 33.73$ 1/s; T = 0.186 seg

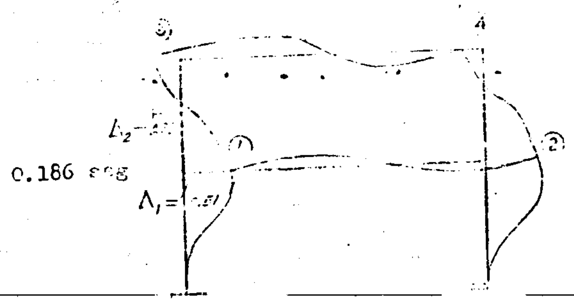
```
Matriz K
 .28[illegible]0000E+04  -.12576000E+04   .98400000E+03
Masas
 .30600000E+01   .30600000E+01

Modo  1
Omega =  10.70541900  Período =      .58691633
 .25711735E+00   .51057620E+00

Modo  2
Omega =  33.72953600  Período =      .18628140
 .51057620E+00  -.25711735E+00
```

1er modo

T_1 = 0.507 seg



2º modo



Obsérvese que son muy parecidos a los dos primeros modos de los casos anteriores.

Nota: En los tres casos anteriores, para obtener el valor de $[\phi]$, se usará la expresión:

$$[\phi] = \left[-\widetilde{K}_{22}^{-1}\,\widetilde{K}_{21}\right]\begin{bmatrix} d_{x}' \\ d_{\theta}' \end{bmatrix}$$

(Ver hojas 98, 99, 100 y 101)

donde $\widetilde{K}_{22}^{-1}$:

$$\widetilde{K}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3470 & -0.2694 & -0.3362 & 0.1491 \\ & 1.3470 & 0.1491 & -0.3362 \\ & & 2.0472 & -0.5800 \\ \text{Simétrico} & & & 2.0472 \end{bmatrix}$$

Obtención directa de la matriz $[K^M]$

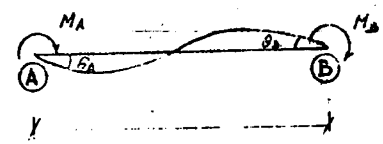
La matriz K^M se puede obtener directamente contrayendo una matriz K, que se obtiene:

$$K = a^T\,k\,a$$

donde k son las rigideces de las barras sin considerar acortamiento, referidos a los momentos extremos M_A, M_B

La matriz k en función de M_A y M_B, para una barra recta de sección uniforme, es:

$EI = cte.$



$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} & \dfrac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} \\ \dfrac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} & \dfrac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

Para la deducción de esta matriz, véase los Resumenes (3) y (4)

Para nuestro ejemplo:

Barras $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$; Ver hojas (96, 97, 98 y 99)

$$k = \begin{bmatrix} 2520 & 1210 \\ 1210 & 2520 \end{bmatrix}$$

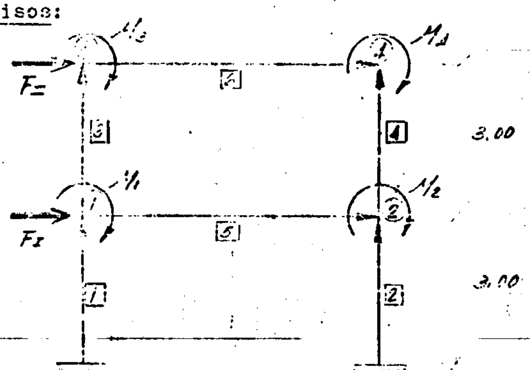
Barras $\boxed{5}$, $\boxed{6}$

$$k = \begin{bmatrix} 2980 & 1470 \\ 1470 & 2980 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & & & & & \\ & k_2 & & & & \\ & & k_3 & & & \\ & & & k_4 & & \\ & & & & k_5 & \\ & & & & & k_6 \end{bmatrix}$$

La matriz a^T se obtendrá planteando el equilibrio de los nudos y de los pisos:



$$\begin{bmatrix} F \\ F \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.33 & -0.33 & -0.33 & -0.33 & 0.33 & 0.33 & 0.33 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.33 & -0.33 & -0.33 & -0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[a^T]} \begin{bmatrix} M_{A1} \\ M_{B1} \\ M_{A2} \\ M_{B2} \\ M_{A3} \\ M_{B3} \\ M_{A4} \\ M_{B4} \\ M_{A5} \\ M_{B5} \\ M_{A6} \\ M_{B6} \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto $a^T\ k\ a$, se obtiene K :

$$a^T\ k\ a = [K] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \Delta_I & \Delta_{II} & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cccc} 3296 & -1648 & 0 & 0 & 1236 & 1236 \\ -1648 & 1648 & -1236 & -1236 & -1236 & -1236 \\ \hdashline 0 & -1236 & 8020 & 1470 & 1210 & 0 \\ 0 & -1236 & 1470 & 8020 & 0 & 1210 \\ 1236 & -1236 & 1210 & 0 & 5500 & 1470 \\ 1236 & -1236 & 0 & 1210 & 1470 & 5500 \end{array}\right] \end{array}$$

Nota: Esta matriz puede obtenerse directamente de la matriz $\tilde{K}$ (hoja 98 y 99); por ejemplo:

$$3296 = 38398+38398-36750-36750$$
$$-1648 = -824-824$$

etc...

La matriz K se puede particionar y obtenerse la siguiente ecuación característica:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ \phi \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M\Delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que se puede eliminar a ϕ, obteniendose:

$$\left[K_{11} - K_{12}\, K_{22}^{-1}\, K_{21}\right] \Delta = \omega^2 M \Delta$$

Es obvio que:

$$[K^{II}] = K_{11} - K_{12}\, K_{22}^{-1} K_{21}$$

Observese que $K_{22} = \tilde{K}_{22}$

Cuando la matriz K_{21} tiene menos columnas que K_{22} no conviene invertir esta última para obtener K^{II}, ya que $K_{22}^{-1} K_{21}$ tiene por elementos a las raices del siguiente sistema de ecuaciones:

$$K_{22}\, X = K_{21}$$
$$X = K_{22}^{-1} K_{21}$$

Efectuando a^T k a , se obtiene:

$$[K] = \left[\begin{array}{cc:cc} 1648 & -824 & 0 & 1236 \\ -824 & 824 & -1236 & -1236 \\ \hdashline 0 & -1236 & 9540 & 1210 \\ 1236 & -1236 & 1210 & 7070 \end{array}\right]$$

Obtengamos $K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}$:

$$K_{12} K_{22}^{-1} K_{21} = \begin{bmatrix} 223 & -194 \\ -194 & 330 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1425 & -630 \\ -630 & 494 \end{bmatrix}$$

* Barras $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$ $\quad \frac{3EI}{L(1+c)} = \frac{3x1.47x10\ x3125x10}{3.00\ x\ 1.0208} = 4500$

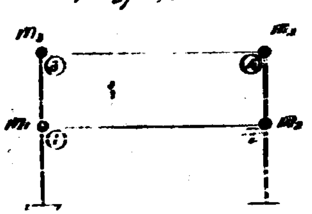
(Note: c = 4x0.0052 = 0.0208)

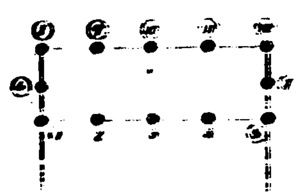
Observese que: $[K] \approx 1/2\ [K^{II}]$ y las masas son la mitad de las masas de la alternativa (3), por lo tanto los períodos y los modos son los mismos.

Conclusiones:

Para efectuar el análisis dinámico de una estructura ha sido necesario discretizar a las masas, considerándolas concentradas en los "nudos", porque las matrices de rigideces de las estructuras, están referidas a ellos. Si se desea una mejor aproximación al análisis dinámico de una estructura cualquiera, bastará aumentar el número de "nudos" y por consiguiente el número de masas concentradas.

1ª aproximación. 2ª aproximación.





Este tratamiento es conveniente cuando se quiere considerar la inercia rotacional de las barras, que puede ser considerable en barras largas.

en nuestro ejemplo la obtención de $K_{II}^{-1} K_{I}$ se reduce a resolver el sistema

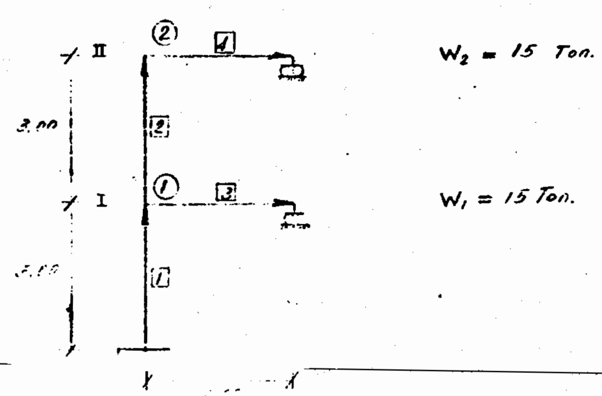
$$\begin{bmatrix} 8020 & 1470 & 1210 & 0 \\ 1470 & 8020 & 0 & 1210 \\ 1210 & 0 & 5500 & 1470 \\ 0 & 1210 & 1470 & 5500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1236 \\ 0 & -1236 \\ 1236 & -1236 \\ 1236 & -1236 \end{bmatrix}$$

este procedimiento simplifica bastante el problema de la contracción de K, cuando se trata de marcos con muchos nudos y pocos niveles.

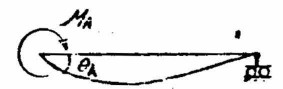
<u>Simplificación por la simetría de la estructura.</u>

Con las alternativas (1) y (2) (exacta y sin acortamiento en trabes, respectivamente) <u>no se puede</u> llevar a cabo ninguna simplificación por la simetría de la estructura ya que solo los modos 1, 2, 4, 8 (en la alternativa (1)) son completamente antisimétricos, los modos 3, 5, 6, 7 son simétricos y antisimétricos en forma simultanea (Ver hoja 100 A).

Con la alternativa (3) (sin acortamiento en trabes y columnas) si se puede efectuar simplificaciones, ya que los modos corresponden siempre a condiciones antisimétricas. En nuestro ejemplo consideraríamos la siguiente estructura:



La matriz k (en función de M_A y M_B) para las barras $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$ son:



$$M_A = \left[\frac{3EI}{L(1+c)}\right] \theta_A$$

$$k_{3,4} = \frac{3EI}{L(1+c)} \quad *$$

La matriz $\left[a^T\right]$ será:

$$\begin{bmatrix} F_I \\ F_{II} \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.33 & -0.33 & 0.33 & 0.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.33 & -0.33 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\left[a^T\right]} \begin{bmatrix} M_{A1} \\ M_{B1} \\ M_{A2} \\ M_{B2} \\ M_{A3} \\ M_{B3} \end{bmatrix}$$

La matriz $\left[k\right]$ será:

$$\left[k\right] = \begin{bmatrix} 2520 & 1210 & & & & \\ 1210 & 2520 & & & & \\ & & 2520 & 1210 & & \\ & & 1210 & 2520 & & \\ & & & & 4500 & \\ & & & & & 4500 \end{bmatrix}$$