UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

INTRODUCCION AL COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES

SERIES DE EJERCICIOS DE ESTADO DE ESFUERZOS

AGUSTIN DEMENEGHI COLINA
HECTOR SANGINES GARCIA

DIVISION DE INGENIERIA CIVIL, TOPOGRAFICA Y GEODESICA
DEPARTAMENTO DE GEOTECNIA

FI/DICTG/85-050

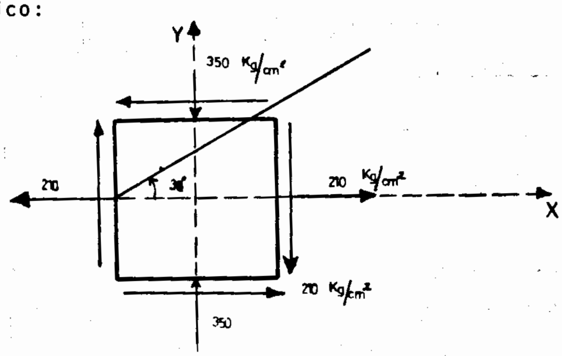
Se presentan en esta Serie de Ejercicios de Estado de Esfuerzo ejemplos sencillos de aplicación de la teoría de esfuerzo, los cuales ilustran fenómenos que son de utilidad para el mejor comportamiento de las obras de ingeniería civil. La aplicación de estos ejercicios puede ser de utilidad para las áreas de Estructuras, Geotecnia e Hidráulica.

PROBLEMA No. 1

En el elemento diferencial mostrado en la figura, actúan los esfuerzos que se indican. Hallar los siguientes valores.

a) Esfuerzos normal y cortante en el plano inclinado mostrado en la figura.
b) Magnitud, dirección y sentido de los esfuerzos principales.
c) Magnitud, dirección y sentido de los esfuerzos cortantes máximos y sus esfuerzos normales asociados.
d) Muestre gráficamente los resultados obtenidos.

Resolver el problema por dos métodos analíticos y por un método gráfico:



Solución:

I. Método analítico: Fórmulas Algebraicas.

El tensor esfuerzo vale:

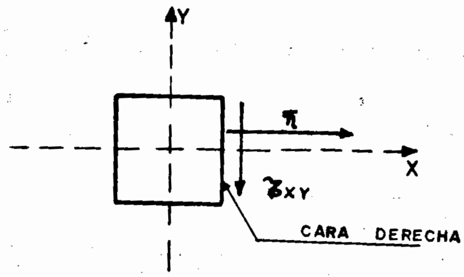
$$S = \begin{bmatrix} 210 & -210 \\ -210 & -350 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \text{kg/cm}^2$$

El signo positivo de σ_x se debe a que este esfuerzo normal es de tensión.

El signo negativo de σ_y se debe a que este esfuerzo es de compresión.

El signo de τ_{xy} se obtiene de la siguiente forma:

Tomemos la cara derecha del elemento; el vector normal a esta cara que va de adentro hacia afuera del elemento tiene el mismo sentido que el sentido positivo del eje x, por lo tanto se trata de cara positiva. Dicho en otras palabras, la parte exterior de esta cara ve hacia la parte positiva del eje x, tratándose entonces de una cara positiva. (Ver figura).



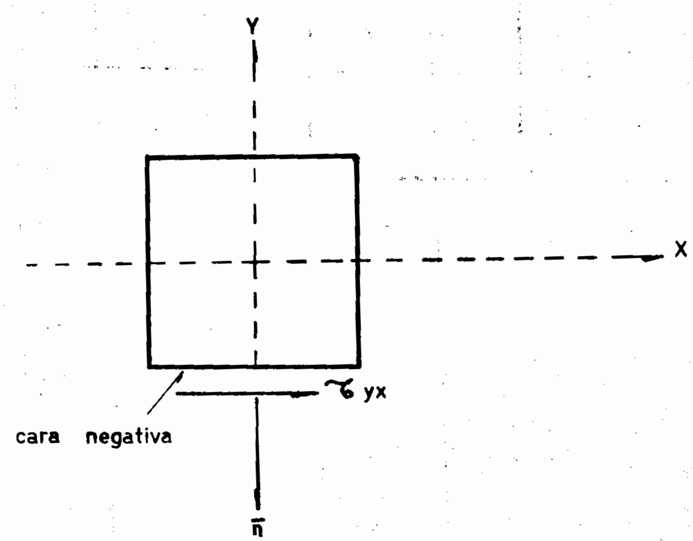
El sentido del esfuerzo cortante es negativo porque va en contra del sentido positivo del eje " y ", por lo tanto el esfuerzo cortante tiene un signo parcial negativo.

El signo definitivo del esfuerzo cortante se obtiene utilizando la regla de los signos de la multiplicación algebraica:

Más (cara positiva) por menos (signo parcial negativo del esfuerzo cortante) igual a menos.

Por lo tanto el esfuerzo cortante τ_{xy} tiene un signo definitivo negativo, el cual es el que debe ponerse en el tensor esfuerzo.

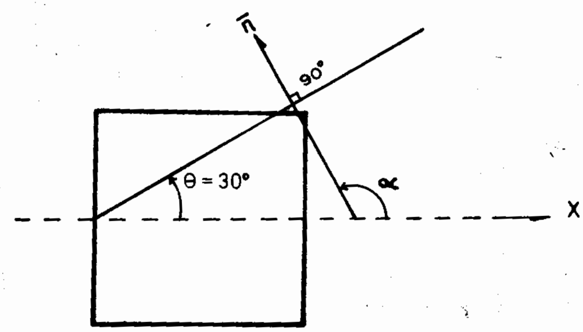
Determinaremos ahora el signo de τ_{yx} . Tomemos la cara inferior la cual es cara negativa. El esfuerzo cortante en esta cara tiene un signo parcial positivo, porque su sentido coincide con el sentido positivo del eje "x". Por lo tanto el signo definitivo es: **menos** por más igual a menos



Para hallar el esfuerzo normal en el plano inclinado a 30°se utiliza la siguiente expresión:

$$\sigma_\alpha=\sigma_x \cos^2\alpha+\sigma_y \operatorname{sen}^2\alpha + 2\,\tau_{xy} \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \text{ -------} \qquad (1)$$

Para obtener "α" se procede de la siguiente manera: El valor de "α" es el ángulo que forma el vector normal al plano con respecto a la dirección positiva del eje de las "x".



En este caso "α" es igual a 30°+ 90°= 120°.

$$\sigma_{120^\circ} = 210 \cos^2 120^\circ + (-350) \operatorname{sen}^2 120^\circ + 2\,(-210) \operatorname{sen} 120 \cos 120$$

$$\sigma_{120^\circ} = -\ 28.12 \text{ kg/cm}^2$$

Este esfuerzo dado su signo negativo es de compresión.

El esfuerzo cortante se obtiene utilizando la siguiente expresión:

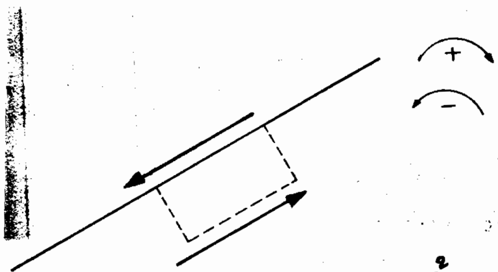
$$\tau_{\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \text{sen } \alpha \ \cos \alpha + \tau_{xy} (\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) --- \qquad (2)$$

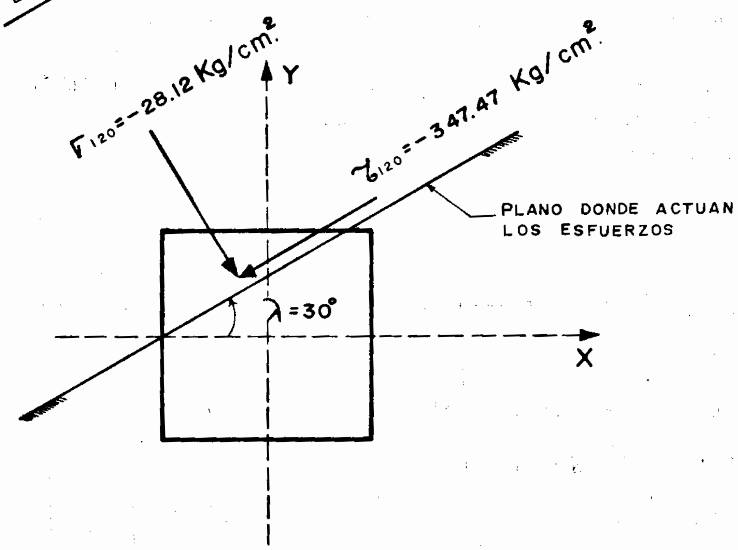
Sustituyendo valores:

$$\tau_{120°} = (210-(-350)\ \text{sen} 120° + (-210)(\text{sen}^2 120 - \cos^2 120)$$

$$\tau_{120°} = -\ 347.47 \text{ kg/cm}^2$$

Para interpretar el signo de este esfuerzo cortante bastará asociar a éste un elemento diferencial hacia la cara interna del plano y establecer el esfuerzo cortante paralelo de sentido contrario que actúa en la cara opuesta; dado que el signo es negativo el par de cortantes producirá un giro en el sentido contrario de las manecillas del reloj.





b) Para hallar la magnitud de los esfuerzos principales, se utiliza la siguiente expresión:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{--------} \quad (3)$$

Donde σ_1 es el esfuerzo principal mayor y σ_2 es el esfuerzo principal menor.

Por lo tanto:

$$\sigma_1 = \frac{210 + (-350)}{2} + \sqrt{\left(\frac{210-(-350)}{2}\right)^2 + (-210)^2}$$

$$\sigma_1 = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{210 + (-350)}{2} - \sqrt{\left(\frac{210-(-350)}{2}\right) + (210)^2}$$

$$\sigma_2 = -420 \text{ kg/cm}^2$$

Como podrá observarse el esfuerzo principal mayor es de tensión, y el esfuerzo principal menor es de compresión.

Para calcular la dirección de los esfuerzos principales se utiliza la siguiente expresión, la cual da el ángulo del plano del esfuerzo principal:

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_n - \sigma_x}{\tau_{xy}} \quad \text{--------} \quad (4)$$

Donde σ_n es el esfuerzo principal del cual queremos conocer su dirección.

Como queremos conocer el ángulo α, despejando tenemos:

$$\alpha = \text{ang tan } \frac{\sigma_n - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

Por lo tanto:

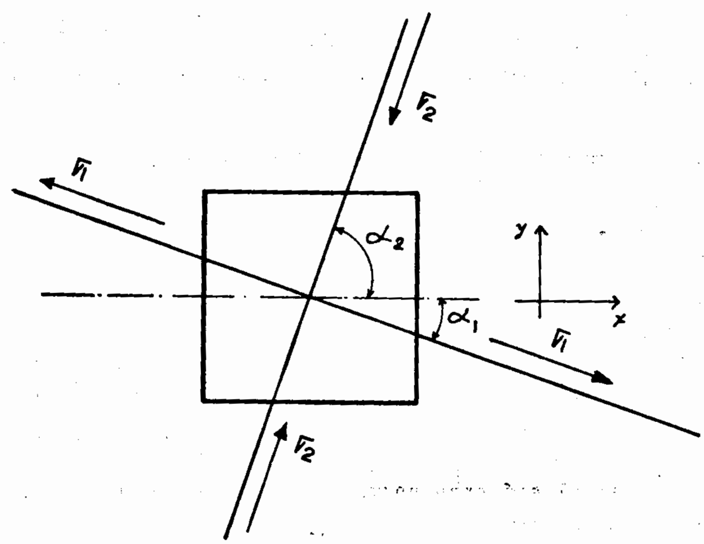
$$\alpha_1 = \text{ang tan } \frac{280 - 210}{-210} = \text{ang tan } - 0.333$$

$$\alpha_1 = - 18.43°$$

$$\alpha_2 = \text{ang tan } \frac{- 420\text{-}210}{-210} = \text{ang tan } 3$$

$$\alpha_2 = 71.56°$$

En la siguiente figura se muestran gráficamente los resultados:



c) Para determinar el ángulo del vector normal al plano de máximo cortante, se utiliza la ecuación:

$$\tan 2\alpha = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \qquad \text{----------} \qquad (5)$$

Sustituyendo valores obtenemos:

$$\tan 2\alpha_{\tau max} = \frac{-350 - 210}{2(-210)} = 1.33$$

$$2\alpha_{\tau max} = \text{ang tan } 1.33$$

$$2\alpha_{\tau max_1} = 53.13°$$

$$\alpha_{\tau max_1} = \frac{53.13°}{2} = 26.56°$$

$$2\alpha_{\tau max_2} = 53.13 + 180 = 233.13°$$

$$\alpha_{\tau max_2} = \frac{233.13°}{2} = 116.56°$$

Para calcular el esfuerzo cortante máximo, con la ecuación (2) obtenemos:

$$\tau max_1 = (210 - (-350) \text{ sen } 26.56° \cos 26.56 + (-210)(\text{sen}^2 26.56 - \cos^2 26.56)$$

$$\tau max_1 = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau max_2 = (210 - (-350) (\text{sen } 116.56° \cos 116.56 + (-210)(\text{sen}^2 116.56° - \cos^2 116.56)$$

$$\tau max_2 = -350 \text{ kg/cm}^2$$

Para calcular el esfuerzo normal asociado al esfuerzo cortante, utilizamos la ecuación (1)

II.- Método analítico: Procedimiento matricial.

El tensor esfuerzo vale:

$$S = \begin{bmatrix} 210 & -210 \\ -210 & -350 \end{bmatrix}$$

El vector esfuerzo es:

$$\bar{S} = S(\bar{n}) \qquad (6)$$

Donde ñ es el vector unitario normal al plano; en este caso:

$$\bar{n} = i \cos\alpha + j \operatorname{sen}\alpha$$

$$\alpha = 120°$$

Por lo tanto:

$$\bar{n} = 0.5\, i + 0.866\, j$$

Sustituyendo en (6)

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 210 & -210 \\ -210 & -350 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.866 \end{bmatrix}$$

$$\bar{S} = -\ 286.86\, i\ -\ 198.10\, j.$$

El esfuerzo normal vale

$$\sigma_n = \bar{s} \cdot \bar{n} \text{ ----------} \qquad (7)$$

Entonces:

$$\sigma_n = -\ 28.12 \text{ kg/cm}^2$$

La magnitud de σ_n es igual a menos 28.12 kg/cm², lo que significa que es un esfuerzo de compresión.

Para obtener el vector del esfuerzo normal multiplicamos su magnitud por el vector unitario.

$$\bar{\sigma}_n = \sigma_n\ (\bar{n}) \text{ ---------} \qquad (8)$$

$$\bar{\sigma}_n = -28.12\,(-0.5\,i + 0.866\,j)$$

$$\bar{\sigma}_n = 14.06i - 24.35j$$

Sabemos que el vector esfuerzo está compuesto por dos componentes que son el vector esfuerzo normal y el vector esfuerzo cortante:

$$\bar{S} = \sigma_n + \tau_n$$

Despejando obtenemos:

$$\bar{\tau}_n = \bar{S} - \bar{\sigma}_n \qquad (9)$$

entonces:

$$\bar{\tau}_n = (-286.86\,i - 198.10j) - (14.06\,i - 24.35\,j)$$

$$\bar{\tau}_n = -300.92\,i - 173.75\,j$$

Por lo que su magnitud en valor absoluto es:

$$\tau_n = 347.47\ \text{kg/cm}^2$$

La dirección y el sentido del esfuerzo cortante están dados en forma vectorial (Ec. 9)

III.- Método Gráfico: Circulo de Mohr.

Para el trazo del círculo de Mohr se procede de la siguiente forma:

a) Se determina el radio del círculo de Mohr:

$$R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+(\tau_{xy})^2}$$

b) Se determina el centro del círculo de Mohr el cual es:

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},\ 0$$

c) Se conocen los puntos:

$(\sigma_x, + \tau_{xy})$ y $(\sigma_y, - \tau_{xy})$

d) Se une el centro del círculo con ambos puntos, obteniendo el diámetro de la circunferencia.

e) Se traza la circunferencia.

Hasta aquí obtenemos el círculo de Mohr. Ahora para conocer lo que se nos pide, tenemos que auxiliarnos con el procedimiento del polo de los esfuerzos, que a continuación se describe.

a) A partir del punto $(\sigma_x, + \tau_{xy})$ se traza una recta vertical debido a que el esfuerzo σ_x está actuando en un plano vertical.

b) A partir del punto $(\sigma_y, - \tau_{xy})$ se traza una recta horizontal debido a que el esfuerzo σ_y está actuando en un plano horizontal.

c) Las dos rectas trazadas en el plano de Mohr se intersectan en un punto sobre la circunferencia. A ese punto se le llama polo de los esfuerzos.

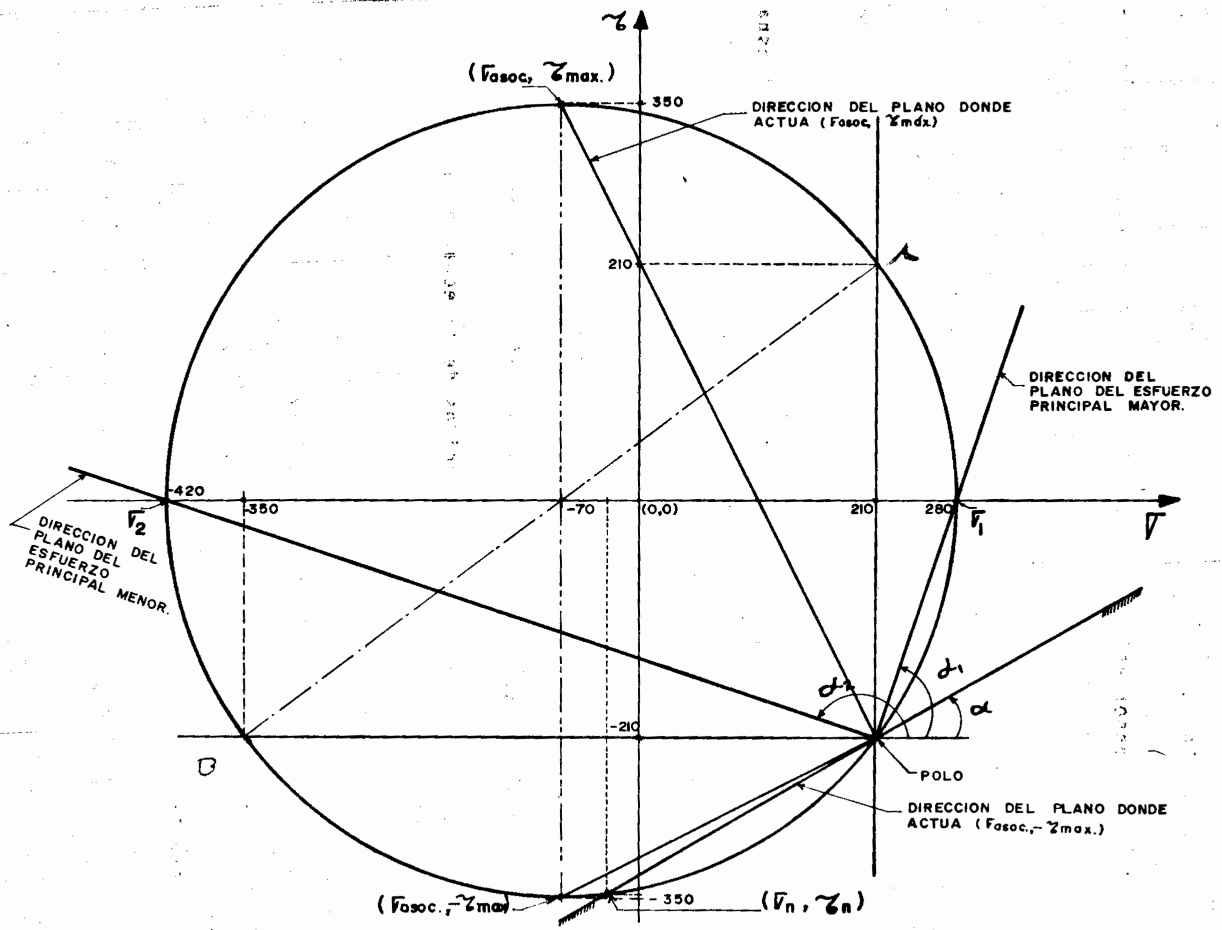
d) A partir del polo se traza una paralela al plano donde están actuando los esfuerzos.

e) En el punto donde cruza la paralela con la circunferencia nos dan los esfuerzos normal y cortante.

f) Los esfuerzos principales se obtienen en los puntos donde la circunferencia intercepta el eje de las abscisas. Para obtener la dirección de los esfuerzos principales, se une con una recta el polo con los puntos de los esfuerzos principales.

g) Para obtener los puntos donde se encuentran los esfuerzos cortantes máximos a partir de los esfuerzos principales se traza una recta a 45^0 y en los puntos donde se intersectan con la circunferencia son los puntos de los esfuerzos cortantes máximos:

$$S = \begin{bmatrix} 210 & -210 \\ -210 & -350 \end{bmatrix} \qquad c = \frac{210 + (-350)}{2} = -70 \quad kg/cm^2$$



(σasoc, τmax.)
350
DIRECCION DEL PLANO DONDE ACTUA (σasoc, τmax)
210
DIRECCION DEL PLANO DEL ESFUERZO PRINCIPAL MAYOR.
-420
σ2
-350
-70
(0,0)
210
280
σ1
σ
DIRECCION DEL PLANO DEL ESFUERZO PRINCIPAL MENOR.
-210
POLO
DIRECCION DEL PLANO DONDE ACTUA (σasoc., -τmax.)
(σasoc., -τmax)
-350
(σn, τn)

PROBLEMA No. 2

Dado el tensor esfuerzo de un elemento diferencial, hallar la dirección y magnitud de los esfuerzos principales.

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución.

Los esfuerzos principales son aquellos que actúan en planos donde los esfuerzos cortantes son nulos.

Debido a que en este caso estamos tratando un problema en el espacio, tenemos, tres planos en los que no existen esfuerzos cortantes por lo que tenemos 3 esfuerzos principales; nuestro problema se convierte en resolver una ecuación de tercer grado con una incógnita.

$$-\sigma_n^3 + \sigma_n^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma_n(-\sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)$$
$$+(\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}) = 0 \text{--------------} (10)$$

A cada uno de los términos conocidos de la ecuación se les llama invariantes de la ecuación a saber.

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = -\sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz}$$

Por lo que la ecuación queda:

$$-\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n + I_3 = 0 \quad \text{----------------} \quad (11)$$

Sustituyendo valores nos queda:

$$I_1 = (3+0+0) = 3$$

$$I_2 = -(3)(0)-(3)(0)-(0)(0)+(1)^2+(1)^2+(2)^2 = +6$$

$$I_3 = (3)(0)(0)+2(1)(1)(2)-(1)^2(0)-(1)^2(0)-(2)^2 3 = -8$$

Entonces:

$$-\sigma^3 \; +3\sigma_n{}^2+(+6)\sigma_n+(-8)=0$$

$$-\sigma^3 \; +3\sigma_n{}^2+6\sigma_n-8=0$$

Resolviendo la ecuación se obtienen los siguientes esfuerzos principales:

$\sigma_1 = 4\ Kg/cm^2 =$ Esfuerzo principal mayor.

$\sigma_2 = 1\ Kg/cm^2 =$ Esfuerzo principal intermedio.

$\sigma_3 = -2\ Kg/cm^2 =$ Esfuerzo principal menor.

Los esfuerzos principales actúan en tres planos perpendiculares entre sí; para encontrar la dirección de cada uno de los esfuerzos principales, procedemos a obtener los cosenos directores de cada uno de los esfuerzos principales.

Como se trata de un problema en el espacio cada esfuerzo principal tiene tres cosenos directores, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, y $\cos\gamma$, los cuáles se calculan a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\sigma_x-\sigma_n)\cos\alpha+\tau_{xy}\cos\beta+\tau_{xz}\cos\gamma=0 \text{ ---------------- } (12)$$

$$\tau_{xy}\cos\alpha+(\sigma_y-\sigma_n)\cos\beta+\tau_{yz}\cos\gamma=0 \text{ ---------- } (13)$$

$$\tau_{xz}\cos\alpha+\tau_{yz}\cos\beta+(\sigma_z-\sigma_n)\cos\gamma=0 \text{ --------- } (14)$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \text{ ------------------- } (15)$$

Donde: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz} y τ_{yz}, son los datos del tensor esfuerzo, σ_n es el valor del esfuerzo principal del que queremos obtener su dirección.

Con esto estamos en posibilidades de calcular la dirección del esfuerzo principal mayor (σ_1) ; sustituyendo valores en el sistema de ecuaciones, tenemos:

$$(3-4)\cos\alpha_1+1\cos\beta_1+1\cos\gamma_1=0 \text{ --------- } (a)$$

$$1\cos\alpha_1+(0-4)\cos\beta_1+2\cos\gamma_1=0 \text{ --------- } (b)$$

$$1\cos\alpha_1+2\cos\beta_1+(0-4)\cos\gamma_1=0 \text{ ----------- } (c)$$

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1 \text{ --------------- } (d)$$

Sumando (a) y (c):

$$3\cos\beta_1-3\cos\gamma_1=0$$

$$\cos\beta_1=\cos\gamma_1 \text{ ----- } (e)$$

Sustituyendo (e) en (b)

$$\cos\alpha_1-4\cos\beta_1+2\cos\beta_1=0$$

$$2\cos\beta_1=\cos\alpha_1 \text{ ----------- } (f)$$

Sustituyendo (e) y (f) en (d)

$$4\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_1 = 1$$

$$6\cos^2\beta_1 = 1$$

$$\cos^2\beta_1 = \frac{1}{6}$$

$$\cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{--------(9)}$$

Sustituyendo (9) en (e) y (f) .

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \cos\alpha_1 \therefore \cos\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{6}},$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

Por lo tanto la dirección de σ_1 está dada por:

$$\cos\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{6}} \; ; \; \cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \; ; \; \cos\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

De manera análoga.

Procedemos a calcular el esfuerzo principal medio (σ_2); sustituyendo valores en el sistema de ecuaciones tenemos:

$$(3-1)\cos\alpha_2 + 1\cos\beta_2 + 1\cos\tau_2 = 0 \quad \text{----------(a)}$$

$$1\cos\alpha_2 + (0-1)\cos\beta_2 + 2\cos\gamma_2 = 0 \quad \text{------(b)}$$

$$1\cos\alpha_2 + 2\cos\beta_2 + (0-1)\cos\gamma_2 = 0 \quad \text{-----(c)}$$

$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1 \quad \text{----(d)}$$

Resolviendo el sistema tenemos:

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Que son los cosenos directores de σ_2

Para encontrar la dirección del esfuerzo principal menor (σ_3) procedemos de la misma manera.

Para σ_3 =-2 kg/cm^2 tenemos:

$$(3-(-2)) \cos \alpha_3 + 1 \cos \beta_3 + 1 \cos \gamma_3 = 0 \text{ ------------- (a)}$$

$$1 \cos \alpha_3 + (0-(-2)) \cos \beta_3 + 2 \cos \gamma_3 = 0 \text{ ------------ (b)}$$

$$1 \cos \alpha_3 + 2 \cos \beta_3 + (0-(-2)) \cos \gamma_3 = 0 \text{ ------------ (c)}$$

$$\cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1 \text{ ---------------------- (d)}$$

Resolviendo el sistema tenemos

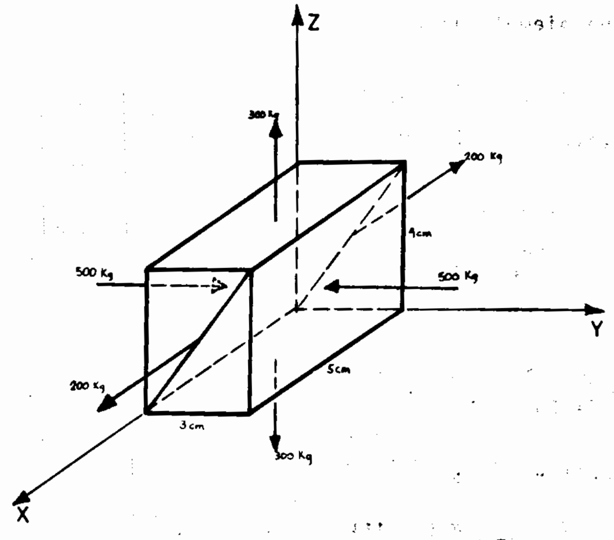
$$\cos \alpha_3 = 0; \ \cos \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ y \ \cos \gamma_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Que son los cosenos directores de σ_3 .

PROBLEMA No. 3

Hallar los esfuerzos normal y cortante en el plano ABCD de la figura.

Indicar gráficamente los resultados.



Solución:

Para encontrar los esfuerzos normal y cortante en un plano cualesquiera podemos hacer los cálculos con vectores.

Como primer paso hay que identificar el plano en donde se desean calcular los esfuerzos con el fin de obtener un vector unitario normal a dicho plano.

Para nuestro ejemplo el plano está formado por los puntos A(5,3,4), B(0,3,4), C(0,0,0) y D(5,0,0), con lo cual formamos los vectores $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CD}$.

Sabemos que, por medio del producto vectorial entre dos vectores coplanares, obtenemos un vector normal a ellos.

Para que el vector normal sea un vector unitario es necesario dividir dicho vector entre su módulo.

Para nuestro ejemplo elegiremos los vectores $\overline{CB}$ y $\overline{CD}$.

$$\overline{CB} = (0,3,4) - (0,0,0) = (0,3,4)$$

$$\overline{CD} = (5,0,0) - (0,0,0) = (5,0,0)$$

El producto vectorial es igual a:

$$\overline{CB} \times \overline{CD} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} = o +20j+ok-(15k+o +oj)$$

$$\overline{CB} \times \overline{CD} = 20j - 15k$$

El vector unitario es:

$$\overline{n} = \frac{\overline{CB} \times \overline{CD}}{|\overline{CB} \times \overline{CD}|} = \frac{20j - 15k}{\sqrt{20^2 + (-15)^2}}$$

$$\overline{n} = \frac{20}{25}j - \frac{15}{25} k = 0.8j - 0.6 k.$$

Como segundo paso hay que obtener el tensor esfuerzo; para lo cual procedemos de la siguiente forma:

1. En el elemento diferencial están actuando solamente fuerzas normales en la dirección de los ejes coordenados, o en los planos yz, xz, xy; por lo que en el plano yz está actuando una fuerza de 200 kg. de tensión, en el plano xz está actuando una fuerza de 500 kg. de compresión y en el plano xy está actuando una fuerza de 300 kg. de tensión.

$$\bar{S}_n = (S)\ (\bar{n})$$

Obtenemos:

$$\bar{S}_n = \begin{bmatrix} 16.66 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8 \\ -0.6 \end{bmatrix} =$$

$$\bar{S}_n = (0,\ -20,\ -12).$$

2. Con el vector esfuerzo ($\bar{S}_n$) calculamos el esfuerzo normal (σ_n) por medio del producto escalar entre el vector esfuerzo y el vector unitario.

$$\sigma_n = \bar{S}_n \cdot \bar{n}$$

$$\sigma_n = (0,\ -20,\ -12)\cdot(0, 0.8,\ -0.6) =$$

$$\sigma_n = -8.80\ \mathrm{Kg/cm^2}$$

Para obtener la dirección del esfuerzo normal multiplicamos a éste por el vector unitario.

$$\bar{\sigma}_n = \sigma_n\ (\bar{n})$$

$$\bar{\sigma}_n = -8.8\ (0, 0.8,\ -0.6) = 0i - 7.04j + 5.28k$$

$$\bar{\sigma}_n = -7.04j + 5.28\ k$$

Sabemos que el vector esfuerzo esta compuesto de dos componentes; el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante, por lo que:

$$\vec{S}_n = \vec{\sigma}_n + \vec{\tau}_n$$

El signo positivo se aplicará a las fuerzas de tensión y el signo negativo a las fuerzas de compresión.

2. Para obtener los esfuerzos que actúan en el elemento diferencial, hay que dividir la fuerza entre el área en la que actúa En este caso, las áreas en las que están actuando las fuerzas son las siguientes:

La fuerza de 200 Kg. actúa en un área de 3x4=12 cm^2
La fuerza de 500 Kg. actúa en un área de 4x5=20 cm^2
La fuerza de 300 Kg. actúa en un área de 3x5=15 cm^2
por lo que:

$$\sigma_x = \frac{200}{12} = 16.67 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{-500}{20} = -25 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_z = \frac{300}{15} = 20 \text{ Kg/cm}^2$$

Como no existen fuerzas cortantes, tampoco existen esfuerzos cortantes.

3. Con los esfuerzos obtenidos procedemos a formar el tensor esfuerzo.

$$S = \begin{bmatrix} 16.67 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenidos el vector unitario y el tensor esfuerzo, estamos en posibilidad de calcular los esfuerzos normal y cortante.

Para el esfuerzo normal procedemos de la siguiente manera:

1. Primero calculamos el vector esfuerzo ($\bar{s}$) por medio de la multiplicación del tensor esfuerzo (S) por el vector unitario ($\bar{n}$).

Despejando el esfuerzo cortante tenemos

$$\bar{\tau}_n = \bar{S}_n - \bar{\sigma}_n$$

$$\bar{\tau}_n = (0, -20,-12) - (0,-7.04, 5.28)$$

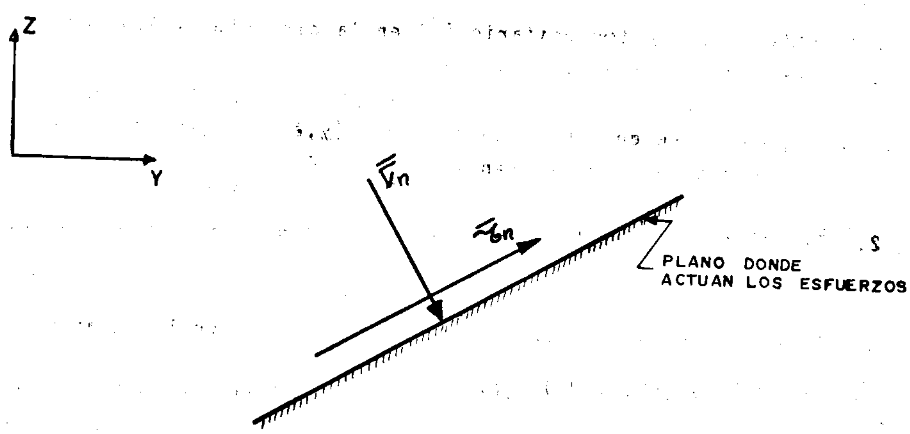
$$\bar{\tau}_n \quad (0, -12.96,-17.28) = 12.96j - 17.28k$$

Con lo cual conocemos su magnitud, dirección y sentido para conocer explicitamente su magnaitud encontramos el módulo del vector esfuerzo cortante.

$$\tau_n = |\bar{\tau}_n| = \sqrt{(-12.96)^2 + (-17.28)^2}$$

$$\tau_n = 21.60 \text{ Kg/cm}^2$$

Los resultados se indican gráficamente a continuación:



PROBLEMA No. 4

Dado el tensor esfuerzo, determinar las componentes del vector esfuerzo que actúa en el punto $P(0,1,\sqrt{3})$ de un plano que es tangente en P a la superficie cilíndrica.

$$y^2 + z^2 = 4$$

$$S = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

El vector esfuerzo está dado por la multiplicación del tensor esfuerzo (S) y el vector unitario (ñ).

$$\bar{S}_n = S\,(\bar{n}).$$

El tensor esfuerzo es conocido, debido a que es dato del problema

Para obtener el vector unitario $(\bar{n})$ en la dirección solicitada, se procede de la siguiente manera:

1. El punto P se encuentra en el plano (y,z) al mismo tiempo forma parte de la circunferencia $y^2 + z^2 = 4$

2. Por el punto P se traza ~~un~~ plano tangente a la circunferencia $y^2 + z^2 = 4$

3. El vector normal a dicho plano está formado por los puntos $O(0,0,0)$ y $P(0,1,\sqrt{3})$ $\quad \overline{OP} = (0,1,\sqrt{3})-(0,0,0)=(0,1,\sqrt{3})$.

4. Para que el vector normal sea unitario , dicho vector se divide entre su módulo a saber

$$\bar{n} = \frac{\overline{OP}}{|\overline{OP}|} = \frac{(0,1,\sqrt{3})}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}} = \frac{0,\ 1,\sqrt{3})}{2} = \frac{1}{2}\ (J+\sqrt{3}\,k).$$

Por lo tanto:

$$\bar{S}_n = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \frac{1}{2}$$

$$\overline{Sn} = \frac{1}{2}\ (5i + 6j + 2\sqrt{3}\ k)$$

Las componentes del vector esfuerzo son el esfuerzo normal ($\bar{\sigma}_n$) y el esfuerzo cortante ($\bar{\tau}_n$)

Por lo que

$$\bar{S}_n = \bar{\sigma}_n + \bar{\tau}_n$$

Sabemos que:

$$\sigma_n = \bar{S}_n \cdot \bar{n} \qquad \bar{\tau}_n = \bar{S}_n - \bar{\sigma}_n$$

y

$$\bar{\sigma}_n = \sigma_n\ (\bar{n}) \qquad \tau_n = |\bar{\tau}_n|$$

Sustituyendo valores tenemos:

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(5_i + 6j + 2\sqrt{3}\ k)\cdot\frac{1}{2}(0i+1j+\sqrt{3}\ k)$$

$$\sigma_n = 3\ \ kg/cm^2$$

$$\bar{\sigma}_n = \frac{3}{2}\,(0,1,\ \sqrt{3}\,)$$

$$\sigma_n = \frac{3j}{2} + \frac{3\sqrt{3}\,k}{2} = 0i + 1.5j + 2.598\ k$$

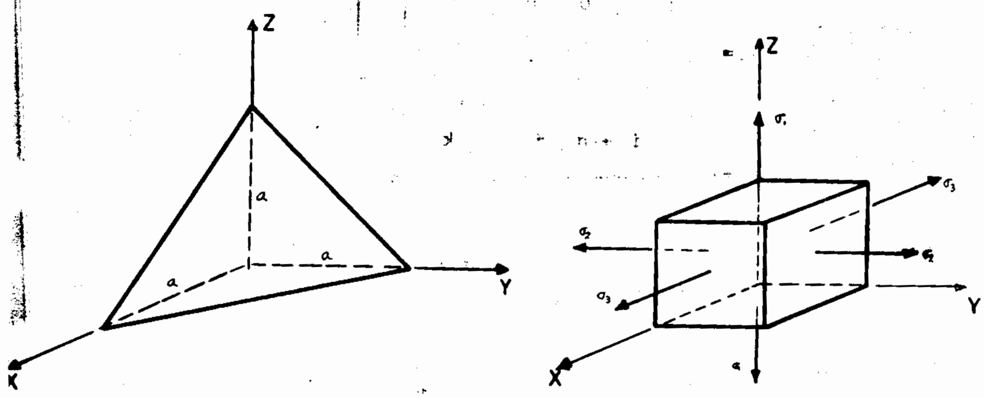
$$\bar{\tau}_n = \frac{1}{2}\,(5i + 6j + 2\sqrt{3}\ k) - (0i + 1.5\,j + 2.60\ k)$$

$$\bar{\tau}_n = 2.5i + 1.5j - 0.867\ k$$

$$\tau_n = 3.041\ \mathrm{Kg/cm^2}$$

PROBLEMA No. 5

Dado un elemento en el espacio sujeto a σ_1, σ_2 , σ_3 , hallar las magnitudes de los esfuerzos normal y cortante en el plano octaédrico.



Solución:

El tensor esfuerzo está dado por:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

El plano octaédrico es un plano cuya normal forma ángulos iguales con las tres direcciones de los ejes coordenados.

Por lo tanto el vector normal está dado por:

$$\bar{e} = i + j + k;$$

Y el vector normal unitario es:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (i + j + k)$$

Como ya conocemos el tensor esfuerzo y el vector unitario, estamos en condiciones de poder resolver el problema.

a). Por fórmulas.

$$\bar{S}_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$\bar{S}_n = \frac{\sigma_1 i + \sigma_2 j + \sigma_3 k}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 i}{\sqrt{3}} + \frac{\sigma_2 j}{\sqrt{3}} + \frac{\sigma_3 k}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} i + \frac{j}{\sqrt{3}} + \frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1}{3} + \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{3} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \left[\frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{j}{\sqrt{3}} + \frac{k}{\sqrt{3}} \right]$$

$$\bar{\sigma}_n = \frac{1}{3\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(i + j + k)$$

$$\bar{\sigma}_* = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3\sqrt{3}} i + \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3\sqrt{3}} j + \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3\sqrt{3}} k$$

$$\bar{\tau} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} i + \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}} j + \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}} k - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3\sqrt{3}} i + \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3\sqrt{3}} j + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3\sqrt{3}} k \right)$$

$$= \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} i - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3\sqrt{3}} i = \frac{3\sigma_1 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3\sqrt{3}} i$$

$$; \quad \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}} j - \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3\sqrt{3}}\right) j = \frac{3\sigma_2-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}{3\sqrt{3}} = \frac{-\sigma_1-\sigma_3+2\sigma_2}{3\sqrt{3}} j \; ;$$

$$\frac{\sigma_3}{\sqrt{3}} k - \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3\sqrt{3}}\right) k = \frac{3\sigma_3 \; \sigma_1 \; \sigma_2 \; \sigma_3}{3\sqrt{3}} = -\frac{\sigma_1-\sigma_2+2\sigma_3}{3\sqrt{3}}$$

$$\bar{\tau}_n = \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad (2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3)\; i + (-\sigma_1+2\sigma_2-\sigma_3)\; j + (-\sigma_1-\sigma_2+2\sigma_3)\; k$$

para hallar la magnitud se utiliza el teorema de Pitágoras:

$$\tau_n^2 = s_n^2 - \sigma_n$$

$$\tau_n^2 = \left|\bar{\tau}_n\right|^2$$

$$s_n^2 = \left|\bar{s}_n\right|^2$$

$$\sigma_n^2 = \left|\bar{\sigma}_n\right|^2$$

$$\bar{s}_n = \frac{\sigma_1+\sigma_2^{\,2}+\sigma_3^{\,2}}{3}$$

$$s_n^{\;2} = \frac{\sigma_1^{\,2} \;\; \sigma_2 \;\; \sigma_3^{\,2}}{3}$$

$$\sigma_n^{\;2} = \frac{1}{9} \; (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

$$\tau_n^{\;2} = \frac{1}{3} \; (\sigma_1^{\,2}+\sigma_2^{\,2}+\sigma_3^{\,2}) - \frac{1}{9} (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

$$\tau_n^{\;2} = \frac{1}{3} \; (\sigma_1^{\,2}+\sigma_2^{\,2}+\sigma_3^{\,2}) - \frac{1}{9} \; (\sigma_1^{\,2}+\sigma_2^{\,2}+\sigma_3^{\,2}+2\sigma_1\sigma_2+2\sigma_1\sigma_3+$$

$$+2\sigma_2\sigma_3)$$

$$\tau_n^{\ 2} = \frac{1}{9}\ (2\sigma_1^{\ 2}+2\sigma_2^{\ 2}+2\sigma_3^{\ 2}-2\sigma_1\sigma_2-2\sigma_2\sigma_3-2\sigma_1\sigma_3)$$

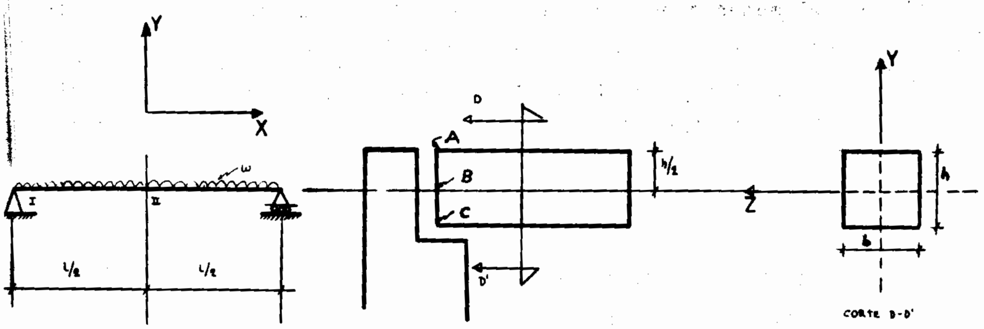
$$\tau_n^{\ 2} = \frac{1}{9}(\sigma_1^{\ 2}-2\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^{\ 2}+\sigma_1^{\ 2}-2\sigma_1\sigma_3+\sigma_3^{\ 2}+\sigma_2^{2}-2\sigma_2\sigma_3+\sigma_3^{2}$$

$$\tau_n^{\ 2} = \frac{1}{9}\quad (\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2$$

$$\tau_n = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2}$$

PROBLEMA No. 6

Encontrar los tensores esfuerzos en las secciones I y II en los diferentes puntos A, B y C de la viga mostrada:



El problema consiste en encontrar:

$$S=\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Como se trata de un problema en el plano xy; las componentes τ_{xz}, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{zy} y σ_z , valen cero, por lo tanto:

$$S=\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Donde σ_x y σ_y son los esfuerzos normales y τ_{xy} τ_{yx} son los esfuerzos cortantes.

Para encontrar el esfuerzo normal σ_x nos auxiliamos con la fórmula de la escuadría.

$$\sigma_x(\frac{M}{I})y$$

Donde:

M. Es el momento flexionante de la viga; lo encontramos a partir del diagrama de momentos de la viga.

I. Es el momento de inercia de toda la sección transversal de la viga con respecto al eje neutro .

Y. Es la distancia desde el eje neutro de la viga viga hasta el punto de la sección donde se desea calcular el esfuerzo normal.

Para el esfuerzo normal , lo calculamos a través de la fórmula

$\sigma y = \frac{Fy}{A}$; Donde F_y es la fuerza vertical y A es el área.

Para los esfuerzos cortantes nos auxiliamos de la siguiente fórmula:

$$\tau_{yx} = \frac{VQ}{Ib}$$

Donde:

V. Es la fuerza cortante en una sección transversal, lo encontramos a partir del diagrama de fuerza cortante.

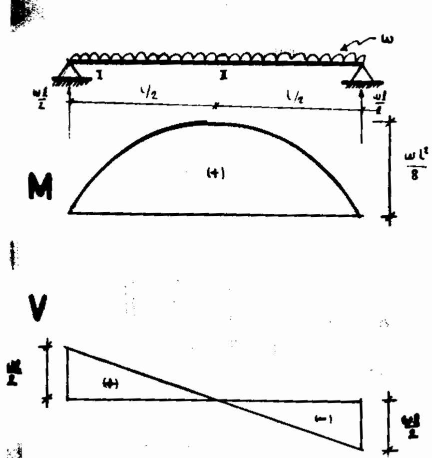
I. Es el momento de inercia.

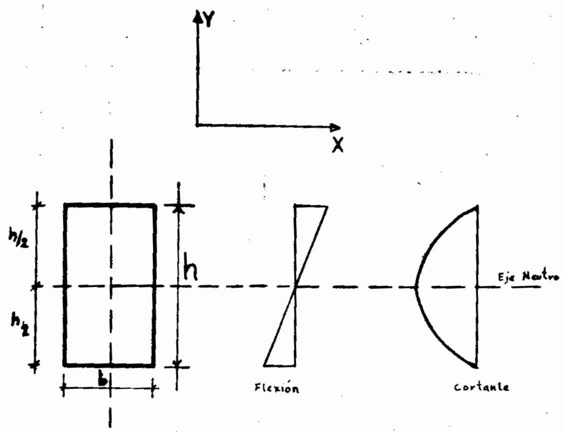
Q. Es el momento estático del área parcial de la sección recta que queda arriba de una sección transversal.

b. Es el ancho de la viga.

Ahora procedemos a calcular cada una de las componentes.

1) Diagramas de momento flexionante y de fuerza cortante.





Para la sección I

Punto A:

σ_x	σ_y	τ_{yx}
$M = 0$	$F_y = -\omega\ell$	$V = \frac{\omega\ell^2}{2}$
$I = \frac{bh^3}{12}$	$A = \ell b$	$Q = 0$
$y = \frac{h}{2}$	$\therefore\ \sigma_y = \frac{-\omega\ell}{\ell b}$	$I = \frac{bh^3}{12}$
		b
$\therefore\ \sigma_x = 0$	$\sigma_y = -\frac{\omega}{b}$	$\tau_{xy} = 0$

$$S_{I_A} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\omega}{b} \end{bmatrix}$$

PUNTO B

σ_x	σ_y	τ_{xy}
$M = \frac{\omega \ell^2}{8}$	$F \doteq 0$	$V = 0$
$I = \frac{b\ h^3}{12}$	$A = b\ell$	$Q = \frac{b\ h}{2}\ \frac{h}{4} = \frac{b\ h^2}{8}$
		$I = \frac{b\ h^3}{12}$
$y = 0$	$\sigma_y = 0$	b
		$\tau_{xy} = 0$

$$S_{II_b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PUNTO C.

σ_x	σ_y	τ_{yx}
$M = \frac{\omega \ell^2}{8}$	$F = 0$	$V = 0$
$I = \frac{b\ h^3}{12}$	$A = b\ell$	$Q = 0$
$y = -\frac{h}{2}$		$I = \frac{b\ h^3}{12}$
		b
$\sigma_x = +\frac{3}{4}\ \frac{\omega \ell^2}{bh^2}$	$\sigma_y = 0$	$\tau_{yx} = 0$

$$S_{II_c} = \begin{bmatrix} +\frac{3}{4}\ \frac{\omega \ell^2}{bh^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-Para la sección II.

PUNTO A:

σ_x	σ_y	τ_{yx}
$M = \frac{\omega \ell^2}{8}$	$F = \omega \ell$	$V = 0$
$I = \frac{b\ h^3}{12}$	$A = \ell b$	$Q = 0$
$y = +\frac{h}{2}$	$\sigma_y = \frac{-\omega \ell}{\ell b} = \frac{-\omega}{b}$	$I = \frac{b\ h^3}{12}$
		b
		$\tau_{yx} = 0$

$$\sigma_x = \left[\frac{\frac{\omega \ell^2}{8}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{b\ h^3}{12}\right)}\right] = \frac{12\omega \ell^2}{16bh^2}$$

$$\sigma_x = \frac{3}{4}\,\frac{\omega \ell^2}{bh^2}$$

$$\overset{=}{S}_{II_A} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4}\,\frac{\omega \ell^2}{b\ h^2} & 0 \\ -\ 0 & -\frac{\omega}{b} \end{bmatrix}$$

PUNTO B.

σ_x	τ_y	τ_{yx}
$M \doteq 0$	$F \doteq 0$	$V = \frac{\omega\ell}{2}$
$I = \frac{bh^3}{12}$	$A = \ell b$	$Q = \frac{b\ h}{2}\left(\frac{h}{4}\right) = \frac{bh^2}{8}$
$y = 0$	0	
$\therefore \sigma_x = 0$	$\therefore \sigma_y = 0$	$I = \frac{b\ h^3}{12}$
		b
		$\tau_{yx} = \dfrac{\left(\frac{\omega\ell}{2}\right)\left(\frac{b\ h^2}{8}\right)}{\left(\frac{bh}{12}\right)\ h}$

$$S_{1_b} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4}\ \frac{\omega\ell}{bh} \\ \frac{3}{4}\ \frac{\omega\ell}{bh} & 0 \end{bmatrix}$$

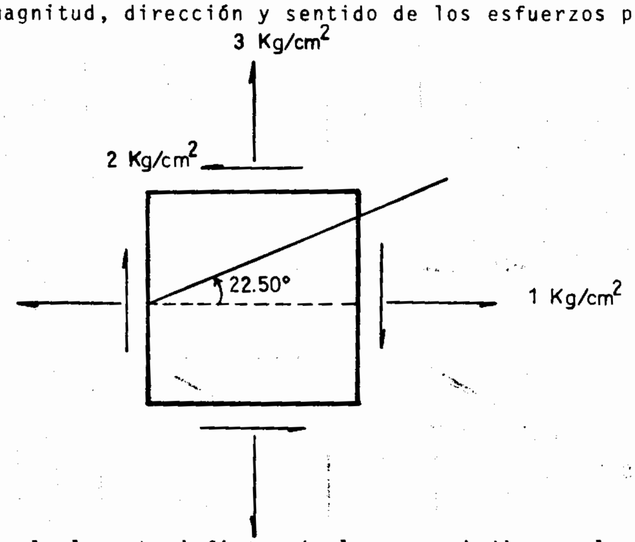
PUNTO C.

σ_x	σ_y	τ_{yx}
$M = 0$	$F = 0$	$V = \frac{\omega\ell}{2}$
$I = \frac{b\ h^3}{12}$	$A = \ell b$	$Q = bh(0) = 0$
$y = \frac{-h}{2}$	$\therefore \sigma_y = 0$	$I = \frac{b\ h^3}{12}$
$\therefore\ _x = 0$		b
		$\tau_{yx} = 0$

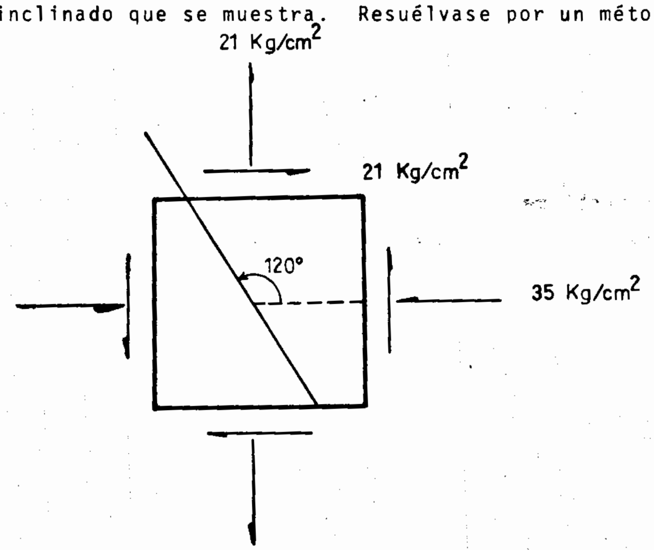
$$S_{1_c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Problemas para resolver esfuerzos.

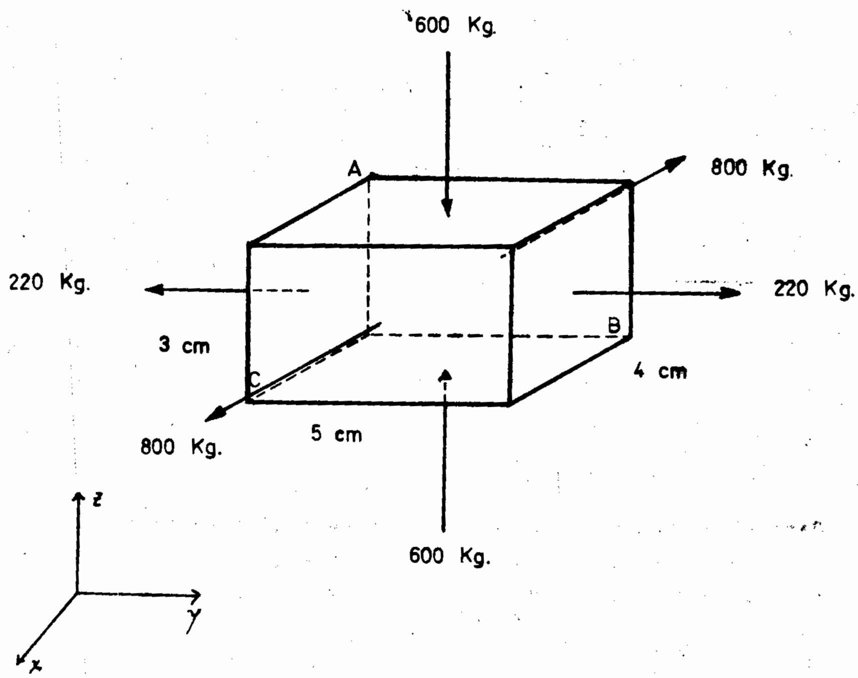
1. Sea el estado de esfuerzo de un elemento como se muestra en la figura. Hallar los esfuerzos normal y cortante en un plano inclinado a 22.5° con respecto a la horizontal, así como la magnitud, dirección y sentido de los esfuerzos principales.



2. Para el elemento infinitesimal que se indica en la figura, hállese los esfuerzos normal y cortante que actúan en el plano inclinado que se muestra. Resuélvase por un método gráfico.



3. Determinar los esfuerzos normal y cortante en el plano ABC de la figura indicar de manera gráfica los resultados en forma clara.



4. Del problema anterior encontrar la magnitud, dirección y sentido de los esfuerzos principales.