FACULTAD DE INGENIERIA U. N. A. M.

ANALISIS ESTRUCTURAL I

PROBLEMAS RESUELTOS

G-600901

AUTOR: FRANCISCO CHACON G.

NOVIEMBRE, 1978

INTRODUCCION

El objeto de este trabajo es proporcionar al estudiante que cursa la materia Análisis Estructural I, una ayuda en la solución de problemas tipo que se presentan a lo largo de dicho curso.

Los problemas resueltos y los propuestos no son de gran dificultad, son problemas -- simples en los que se trata de proporcionar al estudiante el procedimiento de solución a cada problema en particular. En cada capítulo se hace un resumen y no una explicación amplia de la teoría de cada método.

El contenido está apegado al programa de la materia de Análisis Estructural I que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M. Cuenta con 67 problemas resueltos y con 68 problemas propuestos cuyos resultados se proporcionan.

Este trabajo se llevó a cabo por iniciativa de la Sección de Estructuras de esta Facultad. En el colaboró en el cumplimiento del Servicio Social y Prácticas de Desarrollo Regional - el Pasante de Ingeniería Civil Francisco Chacón García, bajo la dirección del Ingeniero Mauricio Nanes Golub, profesor titular de la materia.

CONTENIDO.

G-600901

NOTACIONES.

- A : AREA.
- E : MODULO DE ELASTICIDAD.
- G : MODULO DE ELASTICIDAD AL CORTANTE.
- I : MOMENTO DE INERCIA.
- k : RIGIDEZ ABSOLUTA.
- M : MOMENTO FLEXIONANTE.
- M_p : MOMENTO FLEXIONANTE REAL.
- M_q : MOMENTO FLEXIONANTE VIRTUAL.
- N : FUERZA NORMAL.
- Ⓟ : SISTEMA REAL DE CARGAS.
- Ⓠ : SISTEMA VIRTUAL DE CARGAS.
- R : REDUNDANTES.
- T : MOMENTO TORSIONANTE.
- U : ENERGIA DE DEFORMACION.
- V : FUERZA CORTANTE.
- W : TRABAJO.
- W_e : TRABAJO EXTERNO.
- W_{ve} : TRABAJO VIRTUAL EXTERNO.
- W_{vi} : TRABAJO VIRTUAL INTERNO.
- Δ : DESPLAZAMIENTO REAL.
- Δ_{vi} : DESPLAZAMIENTO VERTICAL EN "i"
- Δ_{H} : DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN "i"
- Δ_{10} : DEFORMACION SEGUN EL EJE y.
- Δ_{20} : DEFORMACION SEGUN EL EJE x.
- Δ_{30} : GIRO DEBIDO A CARGAS EXTERNAS.
- δ : DESPLAZAMIENTO VIRTUAL.
- η : HUNDIMIENTO.
- θ_i : GIRO EN "i".
- μ : COEFICIENTE DE POISSON.
- ϵ : DEFORMACION UNITARIA.
- σ : ESFUERZO.

1.- ENERGIA DE DEFORMACION

RESUMEN:

EN CUERPOS ELASTICOS SE TIENE QUE:

TRABAJO EXTERNO = ENERGIA DE DEFORMACION

$$W_e = U$$

$$U = \frac{1}{2}\int_L \sigma\, \epsilon\, d\epsilon$$

LA ENERGIA DE DEFORMACION DEBIDA A CARGAS AXIALES ES:

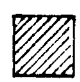
$$\boxed{U_a = \frac{1}{2}\int_L \frac{N^2}{AE}\, dx}$$

LA ENERGIA DE DEFORMACION DEBIDA A FLEXION ES:

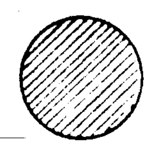
$$\boxed{U_b = \frac{1}{2}\int_L \frac{M^2}{EI}\, dx}$$

LA ENERGIA DE DEFORMACION DEBIDA A CORTANTE ES:

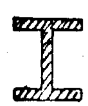
$$\boxed{U_s = \frac{1}{2}\, C\int_L \frac{V^2}{GA}\, dx}$$



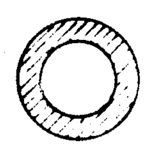
$C = 1.2$



$C = 1.1$



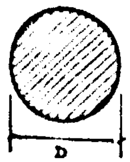
$C = 1.0$



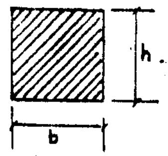
$C = 2$

LA ENERGIA DE DEFORMACION DEBIDA A TORSION ES:

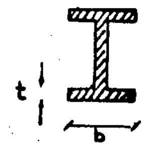
$$\boxed{U_t = \frac{1}{2}\int_L \frac{T^2}{G J_m}\, dx}$$



$$J_m = \frac{\pi D^4}{32}$$



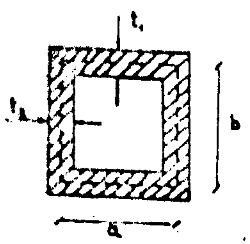
$$J_m \cong \frac{b^3 h^3}{3.6(h^2+b^2)}$$



$$J_m = \Sigma \frac{1}{3} t^3 b$$

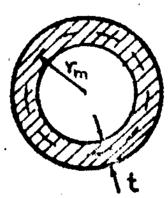
PARA SECCIONES HUECAS:

$$J_m = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}}$$



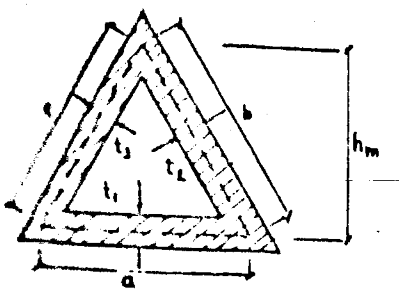
$A = ab$

$$\oint \frac{ds}{t} = 2\left(\frac{a}{t_1}\right) + 2\left(\frac{b}{t_2}\right)$$



$A = \pi r_m^2$

$$\oint \frac{ds}{t} = \frac{2\pi r_m}{t}$$

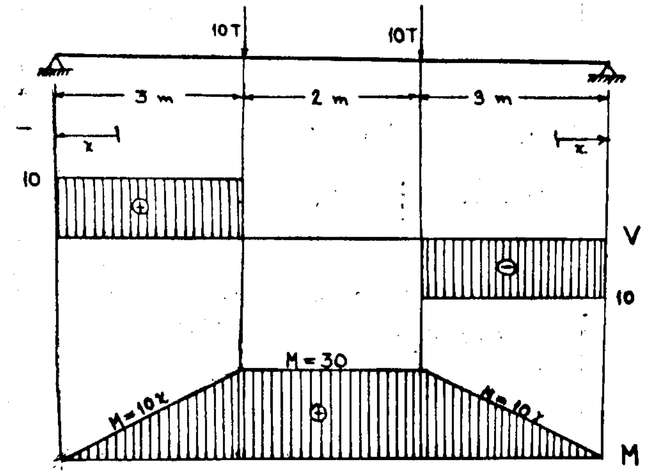


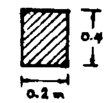
$$A = \frac{1}{2} a h_m$$

$$\oint \frac{ds}{t} = \frac{a}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{c}{t_3}$$

PROBLEMA No. 1.

OBTENER LA ENERGIA DE DEFORMACION DEBIDA A FLEXION Y CORTANTE DE LA SIGUIENTE VIGA, Y CALCULAR LA RELACION $\frac{U_b}{U_s}$





$$U_b = \frac{1}{2}\int_L \frac{M^2}{EI}\, dx \quad ; \quad U_s = \frac{1}{2} C \int_L \frac{V^2}{GA}\, dx \qquad \text{(A)}$$

$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12}(0.2)(0.4)^3 = 0.00106 \ m^4$; $C = 1.2$

$A = (0.2)(0.4) = 0.08 \ m^2$

SUBSTITUYENDO EN (A)

$$U_b = \frac{1}{2E(0.00106)}\left[\int_0^3 (10x)^2 dx + \int_3^5 (30)^2 dx + \int_0^3 (10x)^2 dx\right]$$

$$U_b = \frac{12.8 \times 10^5}{E} \ \text{T-m}$$

$\int^3 (-10)^2 dx$

$$U_s = \frac{1.2}{2G(0.08)}\left[\int_0^3 (10)^2 dx + \int_5^8 (-10)^2 dx\right]$$

$$U_s = \frac{4500}{G} \ \text{T-m}$$

CALCULO DE LA RELACION $\frac{U_b}{U_s}$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \text{se toma } \nu = 0.15$$

$$\Rightarrow G = \frac{E}{2.3} \qquad \therefore \qquad \frac{G}{E} = \frac{1}{2.3}$$

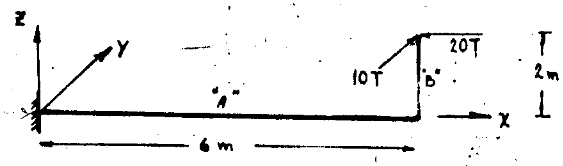
o sea que:

$$\frac{U_b}{U_s} = \frac{120\,G \times 10^5}{4500\,E} = \frac{120}{4500}\left(\frac{1}{2.3}\right) \times 10^5$$

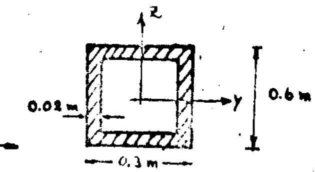
$$\boxed{\frac{U_b}{U_s} = 164}$$

LO ANTERIOR INDICA, QUE LA ENERGIA DE DEFORMACION DEBIDA A FLEXION ES 164 VECES LA ENERGIA DE DEFORMACION DEBIDA A CORTANTE. POR LO TANTO, PARA FINES DE CALCULO, SE PUEDE DESPRECIAR U_s

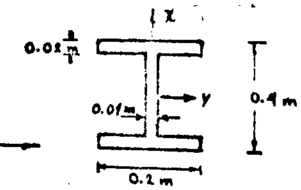
PROBLEMA No. 2. ENCONTRAR LA ENERGIA DE DEFORMACION TOTAL DE LA SIGUIENTE ESTRUCTURA. NO CONSIDERAR LA ENERGIA DE DEFORMACION DEBIDA A CORTANTE.



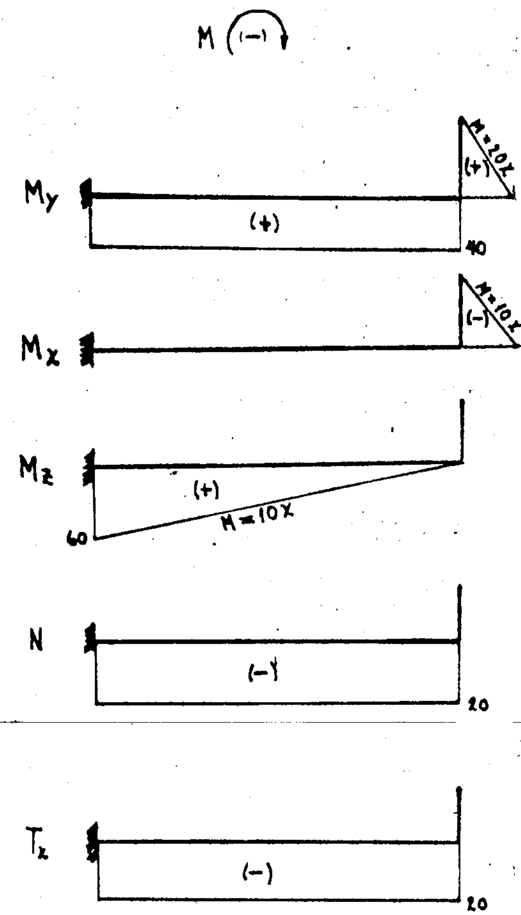
SECCION "A"



SECCION "B"



$E = 2 \times 10^6$ kg/cm²
$G = 0.8 \times 10^6$ kg/cm²



$$U = U_a + U_b + U_t \qquad \text{(I)}$$

$$U_a = \frac{1}{2}\int_L \frac{N^2}{A_A E}\,dx$$

$$= \frac{1}{2A_A E}\int_0^6 (20)^2\,dx$$

$$= \frac{1200}{A_A E} \qquad (1)$$

$\therefore A_A$ = area de la seccion "A" como hay flexion en las tres direcciones:

I_{Bx} = Momento de inercia de la seccion "B", según el eje x

I_{Ay} = Momento de inercia de la seccion "A", según el eje Y

etc.

$$U_{bx} = \frac{1}{2}\int_L \frac{M_x^2}{EI_x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{(10x)^2}{EI_{Bx}} = \frac{133.33}{EI_{Bx}} \qquad (2)$$

$$U_{by} = \frac{1}{2}\int_L \frac{M_y^2}{EI_y}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{(20x)^2}{EI_{By}}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^6 \frac{(40)^2}{EI_{Ay}}\,dx$$

$$= \frac{533.33}{EI_{By}} + \frac{4800}{EI_{Ay}} \qquad (3)$$

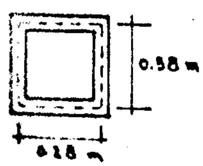
$$U_{Az} = \frac{1}{2}\int_L \frac{M_z^2}{EI_z}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^6 \frac{(10x)^2\,dx}{EI_{Az}} = \frac{3600}{EI_{Az}} \qquad (4)$$

$$U_t = \frac{1}{2}\int_L \frac{T^2}{GJ_m}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^6 \frac{(20)^2}{GJ_m}\,dx = \frac{1200}{GJ_m} \qquad (5)$$

haciendo el cálculo de los momentos de inercia se obtiene.

$I_{Bx} = 2667$ cm^4 $\quad I_{Ay} = 16\times10^4$ cm^4 $\quad A_A = 344$ cm^2

$I_{By} = 32794$ cm^4 $\quad I_{Az} = 52979$



$A = 28(58) = 1620$ cm^2

$\oint \frac{ds}{t} = 2\left(\frac{28}{2}\right) + 2\left(\frac{58}{2}\right) = 86$

$J_m = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4(1620)^2}{86} = 123\times10^3$ cm^4

substituyendo los valores anteriores en (1), (2), (3), (4), (5) se obtiene:

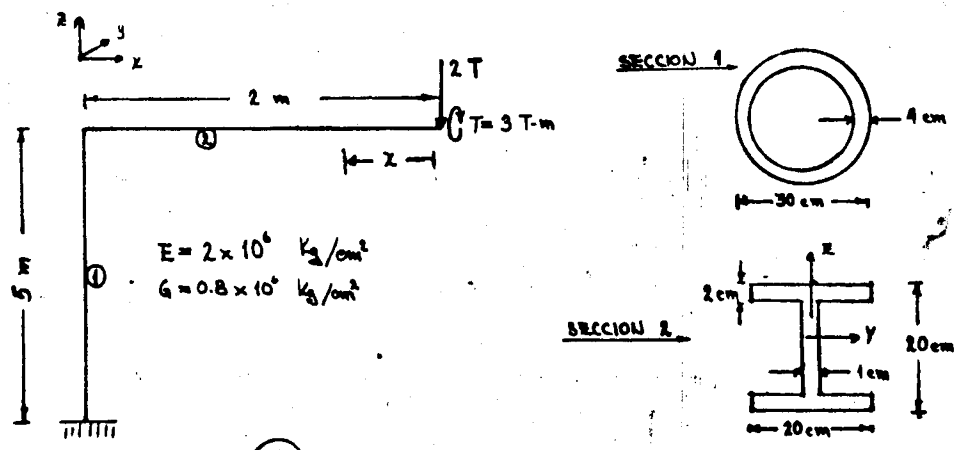
$U_a = 1.75\times10^{-3}$ T-m ; $U_b = 0.823$ T-m ; $U_t = 122\times10^{-3}$ T-m

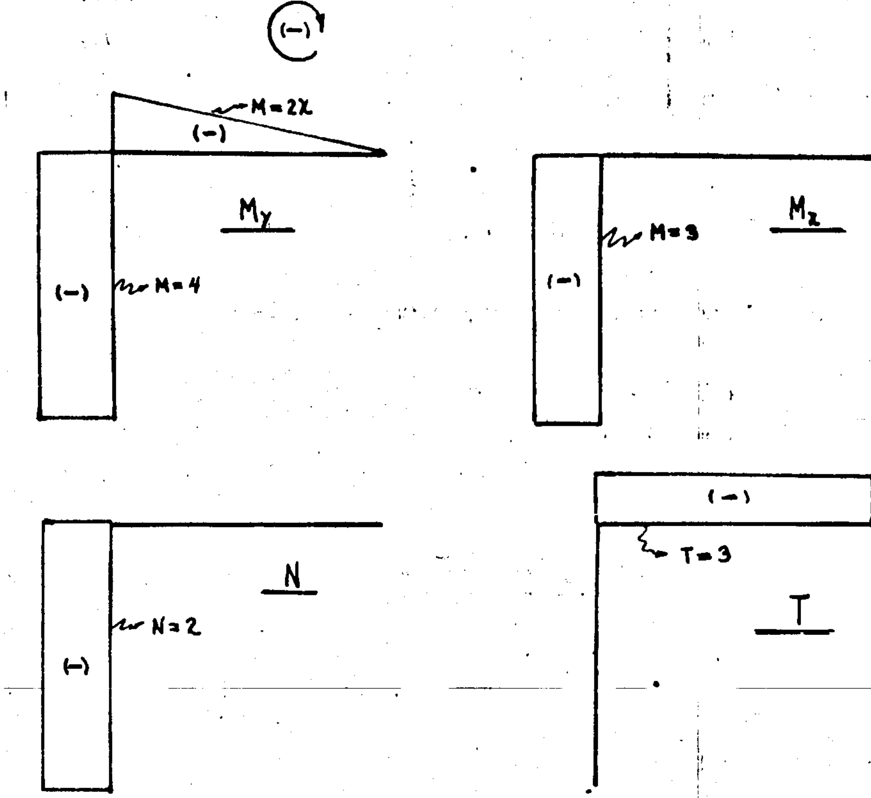
y substituyendo en la ecuacion (I)

$$U = (1.75 + 823 + 122)\times10^{-3}$$

$$U = 0.95 \text{ T-m}$$

PROBLEMA No. 3. ENCONTRAR LA ENERGIA DE DEFORMACION TOTAL DE LA FIGURA SIGUIENTE Y PARA LAS SECCIONES INDICADAS. NO CONSIDERAR U_s.





$$U = U_a + U_b + U_t \quad \text{———} (1)$$

$$U_a = \frac{1}{2}\int_L \frac{N^2}{AE}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{(2)^2}{A_1 E}\,dx = \frac{10}{A_1 E} \quad \text{———} (2)$$

$$U_b = \frac{1}{2}\int_L \frac{M^2}{EI}\,dx \quad \left\{ \begin{array}{l} U_{by} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{(2x)^2}{EI_{2y}}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{(4)^2}{EI_{1y}}\,dx = \frac{32}{6EI_{2y}} + \frac{40}{EI_{1y}} \\ U_{bz} = \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{(3)^2}{EI_{1z}}\,dx = \frac{22.5}{EI_{1z}} \end{array} \right. \quad \text{———} (3)$$

$$U_t = \frac{1}{2}\int_L \frac{T^2}{GJ_m}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{(3)^2}{GJ_{m_2}}\,dx = \frac{9}{GJ_{m2}} \quad \text{———} (4)$$

HACIENDO EL CALCULO DE LOS MOMENTOS DE INERCIA SE OBTIENE :

$$\left. \begin{array}{l} I_{1y} = 28\,260 \text{ cm}^4 \\ I_{2y} = 6\,848 \text{ cm}^4 \\ I_{1y} = I_{1z} = 28\,260 \text{ cm}^4 \end{array} \right\} \quad \text{———} (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = 0.785(D^2 - d^2) = 327 \text{ cm}^2 \\ \text{seccion } I \\ J_{m_2} = \Sigma \frac{1}{3} t^3 b = \frac{1}{3}\left[(2)^3(20)(2) + (1)^3(16)\right] = 112 \text{ cm}^4 \end{array} \right\} \quad \text{———} (5)$$

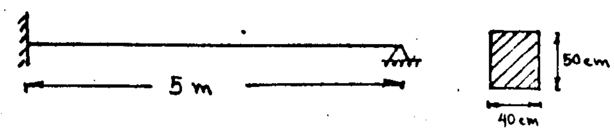
SUBSTITUYENDO LOS VALORES DE (5) EN (2), (3), (4), Y FINALMENTE EN (1) SE OBTIENE :

$$U_a = 1.53 \times 10^{-5} \quad T\text{-}m$$
$$U_b = 1,498 \times 10^{-5} \quad T\text{-}m$$
$$U_t \doteq 1.0 \quad T\text{-}m$$

$$\Rightarrow \underline{U \doteq 1.015 \quad T\text{-}m}$$

PROBLEMA No. 4.

CALCULAR LA ENERGIA DE DEFORMACION DEBIDA A CARGAS AXIALES EN UNA BARRA CUYA TEMPERATURA AUMENTA 20°.



Datos :

$\Delta t = 20°$

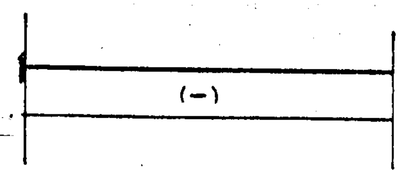
$\alpha = 0.0000117$

$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma = E\epsilon$$
$$N = EA\epsilon \quad \text{— — — — —} (1)$$
$$\Delta = \alpha \Delta t L$$
$$\therefore \frac{\Delta}{L} = \epsilon = \alpha \Delta t = 0.0000117(20) = 0.000234$$

SUBSTITUYENDO EN (1)

$$N = 2 \times 10^6 \times 2000 \times 0.000234 = 936 \ T$$



D.F.N.

936

$$U_a = \frac{1}{2}\int_L \frac{N^2}{AE}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{(936)^2}{2000 \times 2 \times 10^6}\,dx$$

$$\Rightarrow \underline{U_a = 0.547 \quad T\text{-}m}$$

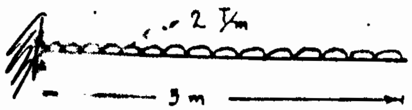
PROBLEMAS PROPUESTOS.

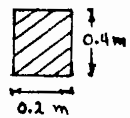
1.- ENCONTRAR LA ENERGIA DE DEFORMACION TOTAL "U" PARA LA VIGA SIGUIENTE.

Datos:

$E = 10^5$ Kg/cm²

$G = 8 \times 10^4$ Kg/cm²

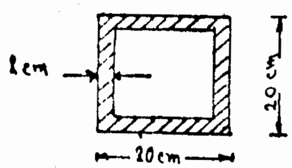




Solucion:

$U = 0.296$ T-m

2.- USANDO LAS MISMAS CONDICIONES DEL PROBLEMA No 3, (Pag 1.-7) EXCEPTO LA FORMA DE LA SECCION 2, — ENCONTRAR LA ENERGIA TOTAL DE DEFORMACION "U".



Datos:

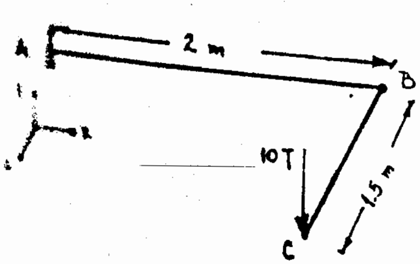
$E = 2 \times 10^6$ Kg/cm²

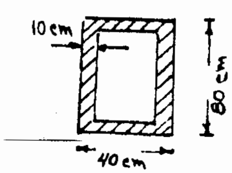
$G = 0.8 \times 10^6$ Kg/cm²

Solucion:

$U = 0.024$ T-m

3.- CALCULAR LA ENERGIA DE DEFORMACION PARA LAS CONDICIONES INDICADAS EN LA FIGURA.





DATOS:

$E = 2 \times 10^6$ Kg/cm²

$G = 0.8 \times 10^6$ Kg/cm²

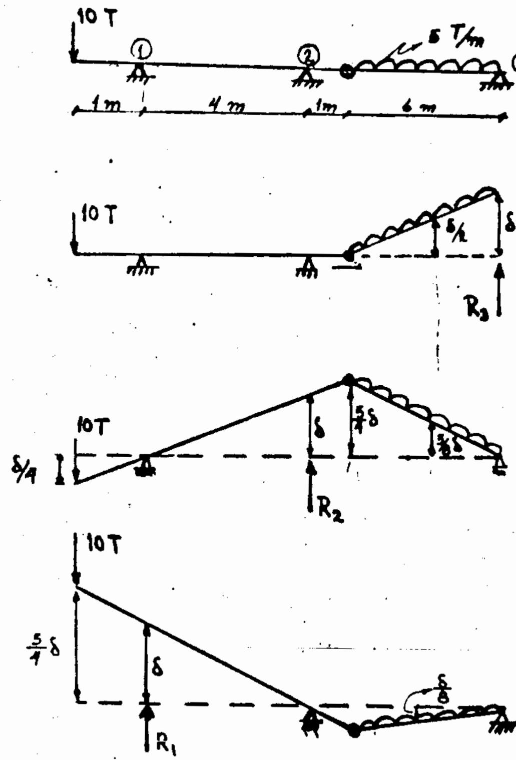
SOLUCION:

$U = 3.817 \times 10^{-3}$ T-m

2.- APLICACION DEL PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES AL CALCULO DE ELEMENTOS MECANICOS.

NOTA: ESTE METODO SOLO SE APLICA A ESTRUCTURAS ISOSTATICAS, CONSIDERANDOLAS RIGIDAS.

PROBLEMA No. 1.- Encontrar R_1, R_2, R_3, APLICANDO EL PRINCIPIO DE DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES.



δ = desplazamiento virtual

SE SUPONE QUE EL APOYO ③ SE DESPLAZA δ, ENTONCES:

$$W = R_3\delta - (5 \times 6)\frac{\delta}{2}$$

COMO DEBE EXISTIR EQUILIBRIO

$$W = 0 \Rightarrow R_3\delta - (5 \times 6)\frac{\delta}{2} = 0$$

$$\therefore \ R_3 = 15\ T$$

SI ② SE DESPLAZA δ

$$W = R_2\delta + 10\left(\frac{\delta}{4}\right) - 5 \times 6 \times \frac{5}{8}\delta$$

$$W = 0 \Rightarrow R_2\delta + \frac{10\delta}{4} - \frac{150\delta}{8} = 0$$

$$\therefore \ R_2 = 16.25\ T$$

SI ① SE DESPLAZA δ

$$W = R_1\delta - 10 \times \frac{5}{4}\delta + (5 \times 6)\frac{\delta}{8}$$

$$W = 0 \Rightarrow R_1\delta - 12.5\,\delta + 3.75\,\delta = 0$$

$$\therefore \ R_1 = 8.75\ T$$

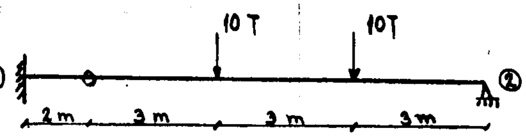
Comprobacion:

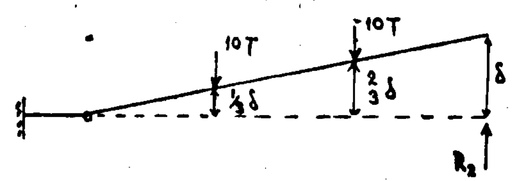
$\Sigma F_y = 0$

$$10 + (5 \times 6) - (15 + 16.25 + 8.75) = 0$$

PROBLEMA No 2.

ENCONTRAR R_1, R_2 y M_1 APLICANDO EL PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES.





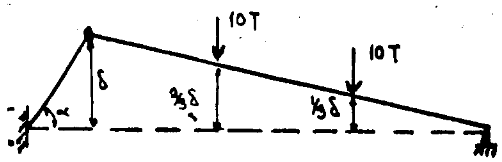
SI DESPLAZAMOS ②

$W = R_2\delta - 10\left(\frac{\delta}{3}\right) - 10\left(\frac{2\delta}{3}\right)$

$W = 0$ Hay equilibrio

$\Rightarrow R_2\delta - 3.33\delta - 6.66\delta = 0$

$\therefore \underline{R_2 = 10\ T}$



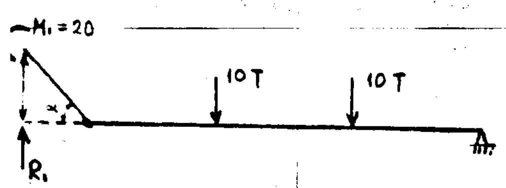
DESPLAZANDO LA ARTICULACION:

$W = M_1\alpha - 10 \times \frac{2}{3}\delta - 10 \times \frac{\delta}{3}$

$\alpha = \frac{\delta}{2}$

$W = 0 \Rightarrow M_1\frac{\delta}{2} - 6.66\delta - 3.33\delta = 0$

$\therefore \underline{M_1 = 20\ T\text{-}m}$



DESPLAZANDO ①

$W = -20\alpha + R_1\delta$

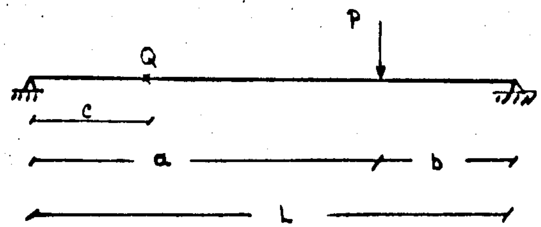
$\alpha = \frac{\delta}{2}$

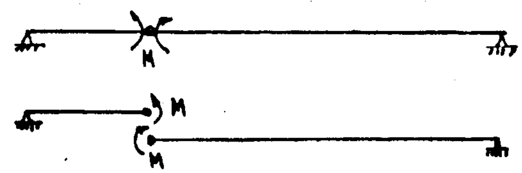
$W = 0 \Rightarrow -20\frac{\delta}{2} + R_1\delta = 0$

$\therefore \underline{R_1 = 10\ T}$

PROBLEMA No. 3.

CALCULAR EL MOMENTO EN EL PUNTO "Q" POR MEDIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES.



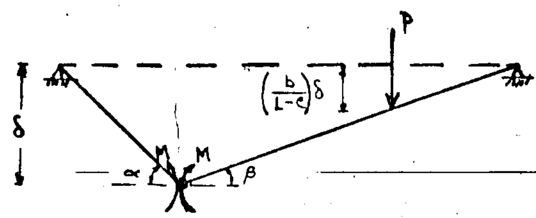


INTRODUCIENDO UNA ARTICULACION EN "Q"

$W = -M\alpha - M\beta + P \times \frac{b}{L-c} \times \delta$

$\alpha = \frac{\delta}{c}$

$\beta = \frac{\delta}{L-c}$



COMO DEBE EXISTIR EL EQUILIBRIO SE TIENE QUE:

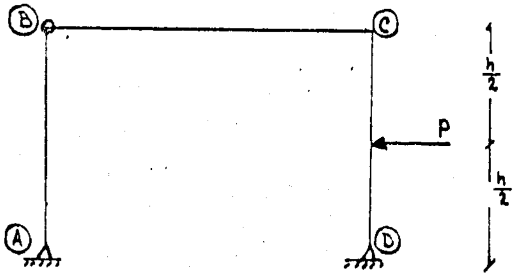
$W = 0$

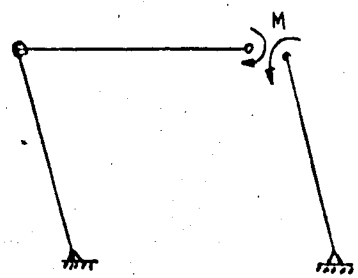
$\Rightarrow -M\frac{\delta}{c} - M\frac{\delta}{L-c} + P \times \frac{b}{L-c}\delta = 0$

$\therefore \underline{M = \frac{Pbc}{L}}$

PROBLEMA No 4. CALCULAR EN EL SIGUIENTE MARCO EL MOMENTO EN EL PUNTO "C"

como en el problema anterior introducimos una articulación en el punto de interes.





$W = M\alpha + P \times \delta/2 =$

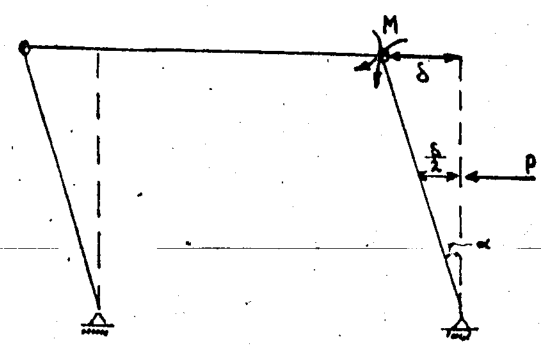
$\alpha = \frac{\delta}{h}$

$\Rightarrow W = M\frac{\delta}{h} + P\frac{\delta}{2}$

como debe existir equilibrio $W = 0$

$\Rightarrow M\frac{\delta}{h} + P\frac{\delta}{2} = 0$

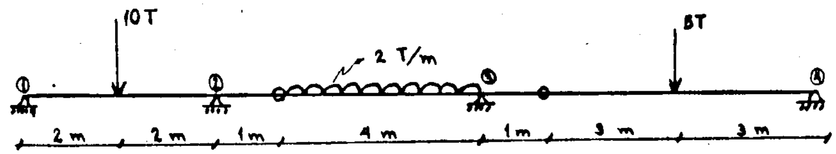
$\therefore \; M = -\frac{Ph}{2}$



el signo negativo indica que el sentido del momento es contrario al supuesto.

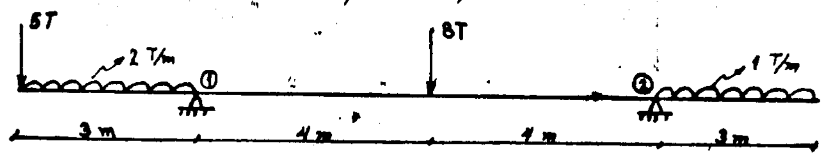
PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- CALCULAR LAS REACCIONES DE LA SIGUIENTE VIGA, APLICANDO EL PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES.



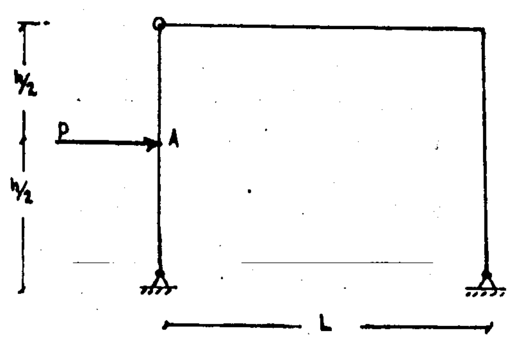
Solución: $R_1 = 4.156$ T $R_3 = 7.125$ T
$R_2 = 9.219$ T $R_4 = 2.5$ T

2.- CALCULAR LAS REACCIONES DE LA VIGA POR DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES.



Solución: $R_1 = 17.44$ T ; $R_2 = 4.55$ T

3.- CALCULAR EL MOMENTO QUE SE PRODUCE EN 'A'



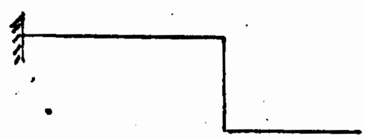
Solución.

$M_A = \frac{Ph}{2}$

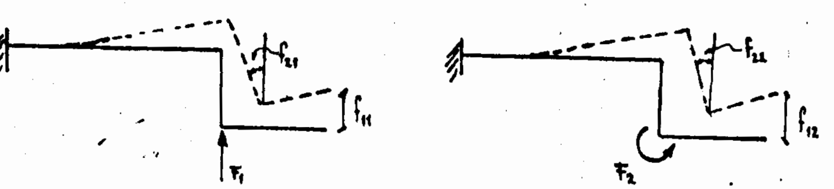
3.-PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL.

TEOREMA RECIPROCO DE MAXWELL

SUPONGAMOS LA ESTRUCTURA ADJUNTA :



SI APLICAMOS DOS SISTEMAS DE CARGA F_1 y F_2 A DICHA ESTRUCTURA OBTENEMOS :



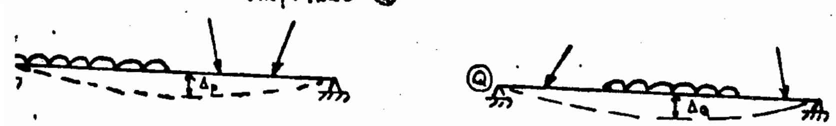
f_{11} = DEFORMACION EN LA DIRECCION UNO DEBIDA AL SISTEMA DE FUERZAS UNO.
f_{21} = " " DOS " " " UNO.
f_{12} = " " UNO " " " DOS.
f_{22} = " " DOS " " " DOS.

EL TEOREMA RECIPROCO DE MAXWELL NOS EXPLICA QUE :

$$\boxed{f_{12} = f_{21}}$$

TEOREMA DE BETTI

SE CONSIDERA LA SIGUIENTE ESTRUCTURA CON UN SISTEMA DE CARGAS REALES Ⓟ Y UN SISTEMA DE CARGAS VIRTUALES Ⓠ



SEGUN BETTI SE TIENE QUE : $W_e = Ⓟ\Delta Q = Ⓠ\Delta P$

$$W_i = W_e$$

$$\underline{W_{vi} = W_{ve}}$$

EN DONDE :

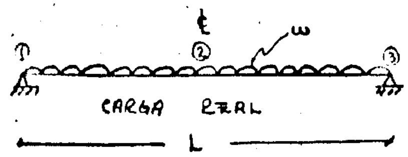
$$W_{vi} = \int \frac{N_P N_Q}{AE} dx + \int \frac{M_P M_Q}{EI} dx + C\int \frac{V_P V_Q}{GA} dx + \int \frac{T_P T_Q}{G J_m} dx$$

$$\underline{W_{ve} = Ⓠ\Delta P}$$

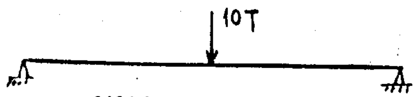
TABLA A2

	RECTANGULO	TRIANGULO	TRAPECIO	PARABOLA DE 2º GRADO	PAR. DE 2º GRADO	PAR. DE 2º GRADO	TRIANGULO
RECTANGULO	sik	$\frac{1}{2}sik$	$\frac{1}{2}si(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}sik_m$	$\frac{2}{3}sik$	$\frac{1}{3}sik$	$\frac{1}{2}sik$
TRIANGULO	$\frac{1}{2}sik$	$\frac{1}{3}sik$	$\frac{1}{6}si(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}sik_m$	$\frac{5}{12}sik$	$\frac{1}{4}sik$	$\frac{1}{6}s(1+\alpha)ik$
TRIANGULO	$\frac{1}{2}sik$	$\frac{1}{6}sik$	$\frac{1}{6}si(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}sik_m$	$\frac{1}{4}sik$	$\frac{1}{12}sik$	$\frac{1}{6}s(1+b)ik$
TRAPECIO	$\frac{1}{2}s(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}s(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}s\{2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2\}$	$\frac{1}{3}s(i_1+i_2)k_m$	$\frac{1}{12}s(3i_1+5i_2)k$	$\frac{1}{12}s(i_1+3i_2)k$	$\frac{1}{6}sk\{(1+b)i_1+(1+\alpha)i_2\}$
PAR. DE 2º GRADO	$\frac{2}{3}si_mk$	$\frac{1}{3}si_mk$	$\frac{1}{3}si_m(k_1+k_2)$	$\frac{8}{15}si_mk_m$	$\frac{7}{15}si_mk$	$\frac{1}{5}si_mk$	$\frac{1}{3}s(1+\alpha b)i_mk$
PAR. DE 2º GRADO	$\frac{2}{3}sik$	$\frac{5}{12}sik$	$\frac{1}{12}si(3k_1+5k_2)$	$\frac{7}{15}sik_m$	$\frac{8}{15}sik$	$\frac{3}{10}sik$	$\frac{1}{12}s(5-b-b^2)ik$
PAR. DE 2º GRADO	$\frac{2}{3}sik$	$\frac{1}{4}sik$	$\frac{1}{12}si(5k_1+3k_2)$	$\frac{7}{15}sik_m$	$\frac{11}{30}sik$	$\frac{2}{15}sik$	$\frac{1}{12}s(5-\alpha-\alpha^2)ik$
PAR. DE 2º GRADO	$\frac{1}{3}sik$	$\frac{1}{4}sik$	$\frac{1}{12}si(k_1+3k_2)$	$\frac{1}{5}sik_m$	$\frac{3}{10}sik$	$\frac{1}{5}sik$	$\frac{1}{12}s(1+\alpha+\alpha^2)ik$
PAR. DE 2º GRADO	$\frac{1}{3}sik$	$\frac{1}{12}sik$	$\frac{1}{12}si(3k_1+k_2)$	$\frac{1}{5}sik_m$	$\frac{2}{15}sik$	$\frac{1}{30}sik$	$\frac{1}{12}s(1+b+b^2)ik$
TRIANGULO	$\frac{1}{2}sik$	$\frac{1}{6}s(1+\alpha)ik$	$\frac{1}{6}si\{(1+b)k_1+(1+\alpha)k_2\}$	$\frac{1}{3}s(1+\alpha b)ik_m$	$\frac{1}{12}s(5-b-b^2)ik$	$\frac{1}{12}s(1+\alpha+\alpha^2)ik$	$\frac{1}{3}sik$

PROBLEMA No 1. ENCONTRAR Δ_{V2} DE LA SIGUIENTE VIGA APLICANDO EL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL.



EI = CONSTANTE



APLICANDO UNA FUERZA VIRTUAL DE 10 T EN EL PUNTO DE INTERES:

$0 < x < \frac{L}{2}$ $\qquad M_p = \frac{\omega L}{2}x - \frac{\omega x^2}{2}$; $\qquad M_q = 5x$

$W_{ve} = 10 \times \Delta_{V2}$; CONSIDERANDO SOLO FLEXION: $W_{vi} = \int_L \frac{M_p M_q}{EI} dx$

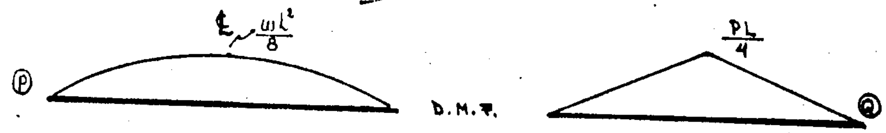
$$W_{vi} = \int_0^{L/2} \frac{(\frac{1}{2}\omega L x - \frac{1}{2}\omega x^2)5x}{EI} dx + \int_{L/2}^{L} \frac{(\frac{1}{2}\omega L x - \frac{1}{2}\omega x^2)5x}{EI} dx$$

$$W_{vi} = \frac{25}{192} \frac{\omega L^4}{EI}$$

APLICANDO EL TEOREMA DE BETTI SE TIENE:

$$W_{vi} = W_{ve} \Rightarrow 10\,\Delta_{V2} = \frac{25}{192}\frac{\omega L^4}{EI} \quad \therefore \quad \Delta_{V2} = \frac{5}{384}\frac{\omega L^4}{EI}$$

OTRA FORMA DE SOLUCION ES USANDO LAS TABLAS DE INTEGRACION DE LA HOJA ANTERIOR:



USANDO LA COLUMNA 7 Y EL RENGLON 5 SE OBTIENE:

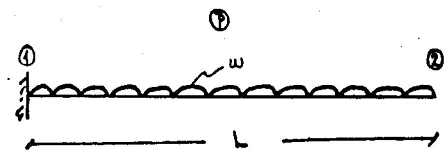
$$W_{vi} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)\frac{\omega L^2}{8}\frac{PL}{4}\right] \qquad \alpha s = \beta s = \frac{1}{2}s \ ; \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

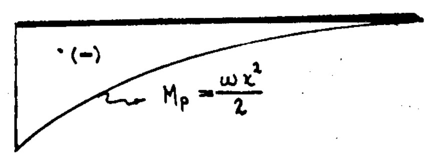
$$\Rightarrow W_{vi} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}L(1+0.25)\frac{10\,\omega L^3}{32}\right] = \frac{1}{EI} \times \frac{12.5\,\omega L^4}{96}$$

SEGUN BETTI: $\qquad W_{ve} = W_{vi}$

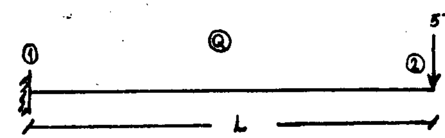
$$\Rightarrow 10\,\Delta_{V2} = \frac{1}{EI} \times \frac{12.5\,\omega L^4}{96} \quad \therefore \quad \Delta_{V2} = \frac{5}{384}\frac{\omega L^4}{EI}$$

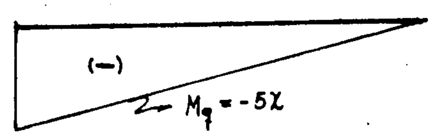
PROBLEMA No 2.- ENCONTRAR Δ_{V2} DE LA SIGUIENTE VI...





APLICANDO UNA CARGA VIRTUAL DE ... EN EL PUNTO DE INTERES:





CONSIDERANDO SOLO FLEXION.

$$W_{vi} = \int_L \frac{M_p M_q}{EI} dx \qquad EI = c$$

$$\Rightarrow W_{vi} = \int \frac{(-\frac{1}{2}\omega x^2)(-5x)}{EI} dx = \frac{5\omega L^4}{8EI}$$

$$W_{ve} = 5\,\Delta_{V2}$$

SEGUN BETTI: $\qquad W_{vi} = W_{ve}$

$$\Rightarrow \frac{5\omega L^4}{8EI} = 5\,\Delta_{V2} \quad \therefore \quad \Delta_{V2} = \frac{\omega L^4}{8EI}$$

USANDO TABLAS DE INTEGRACION, LAS CUALES ESTAN EN FUNCION ... LOS DIAGRAMAS DE MOMENTOS. SE USA EL RENGLON 2 Y LA COLUM... 6, PARA ESTE CASO.

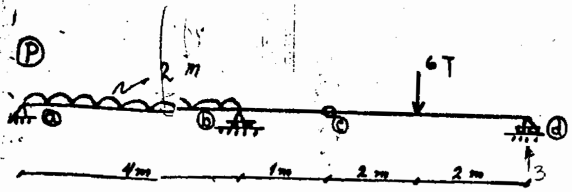
$W_{ve} = 5\,\Delta_{V2}$; $\qquad W_{vi} = \frac{1}{EI} \times \frac{L}{4}\left(\frac{\omega L^2}{2}\right)5L = \frac{5\omega L^4}{8EI}$

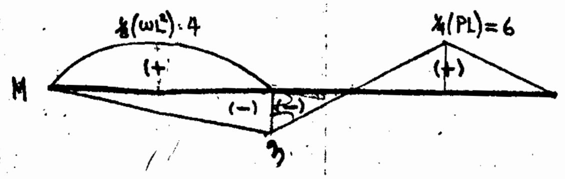
$W_{ve} = W_{vi} \Rightarrow 5\Delta_{V2} = \frac{5\omega L^4}{8EI}$

$$\Delta_{V2} = \frac{\omega L^4}{8EI}$$

PROBLEM No. 3. CALCULAR θ_c y Δv_c DE LA SIGUIENTE VIGA.

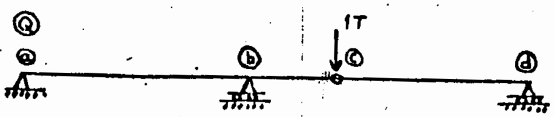
Ⓟ





APLICANDO LA CARGA VIRTUAL EN EL PUNTO "c"

Ⓠ



$$W_{ve} = 1 \times \Delta v_c$$

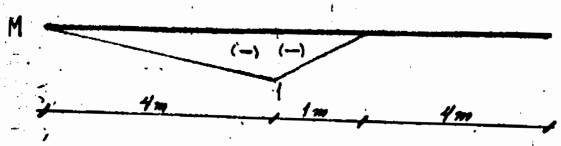
usando las tablas se tiene :

$$W_{vi} = \frac{1}{EI}\left[\underset{\substack{R.2\\C.2}}{\tfrac{1}{3}(1)(-3)(-1)} + \underset{\substack{R.2\\C.2}}{\tfrac{1}{3}(4)(-3)(-1)} + \underset{\substack{R.2\\C.4}}{\tfrac{1}{3}(4)(-1)(4)}\right]$$

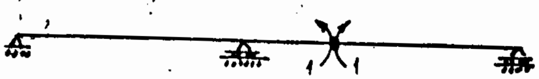
$$W_{vi} = -\frac{0.3}{EI} \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} R. = \text{RENGLON} \\ C. = \text{COLUMNA} \end{array}\right\} \text{DE LA TABLA}$$

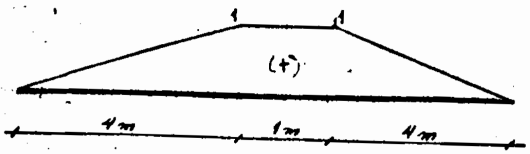
y como $W_{ve} = W_{vi}$

$$\Rightarrow \quad \Delta v_c = -\frac{0.3}{EI} \uparrow$$



AHORA APLICAMOS UN MOMENTO VIRTUAL EN EL MISMO PUNTO





EL ANGULO θ_c SEGUN LA ELASTICA ES :

$$W_{ve} = 1\alpha + 1\beta = 1\theta_c$$

$$EIW_{vi} = \underset{\substack{R.3\\C.7}}{\tfrac{1}{6}(4)(1+\tfrac{3}{4})(1)(6)} + \underset{\substack{R.3\\C.1}}{\tfrac{1}{2}(1)(1)(-3)} + \underset{\substack{R.2\\C.2}}{\tfrac{1}{3}(4)(1)(-3)} + \underset{\substack{R.2\\C.4}}{\tfrac{1}{3}(4)(1)(4)}$$

$$EIW_{vi} = 5{,}83$$

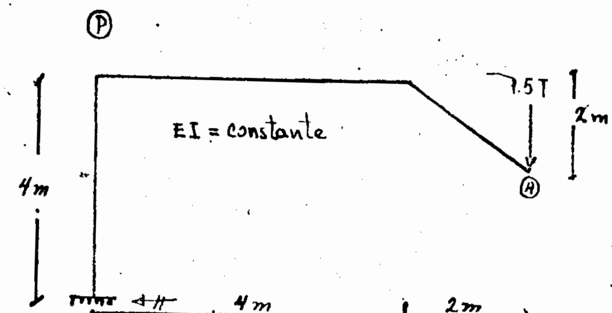
como :

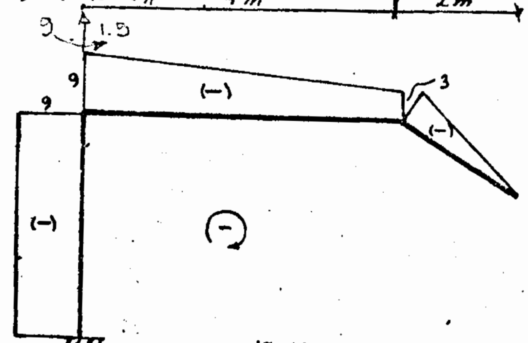
$$W_{ve} = W_{vi} \quad \Rightarrow \quad \theta_c = \frac{5.83}{EI}$$

3.-5

PROBLEMA No. 4.- CALCULAR Δv_A DEL SIGUIENTE MARCO

Ⓟ

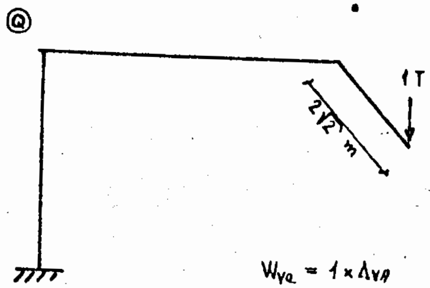


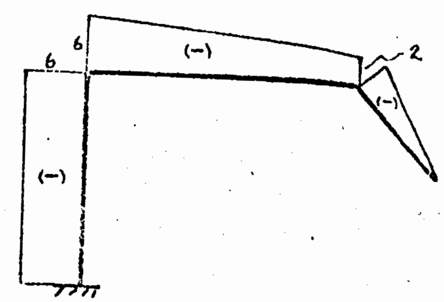


$$-9 + 1.5x \qquad X_0 = -9 \qquad X_4 = -3$$

APLICANDO UNA CARGA VIRTUAL EN EL PUNTO "A"

Ⓠ





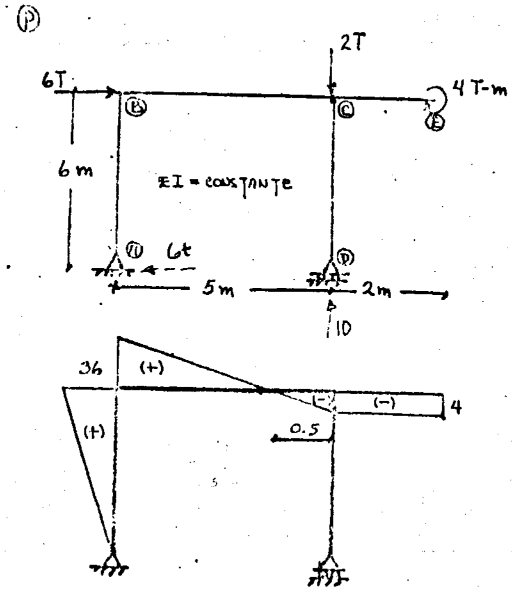
$$W_{ve} = 1 \times \Delta v_A$$

$$EI\,W_{vi} = \underset{\substack{R.2\\C.2}}{\tfrac{1}{3}(2\sqrt{2})(3)(2)} + \underset{\substack{R.4\\C.3}}{\tfrac{1}{6}(4)\left[2(9)(6) + (3)(6) + (9)(2) + (2)(3)(2)\right]} + \underset{\substack{R.1\\C.1}}{(4)(9)(6)} = 325{,}6$$

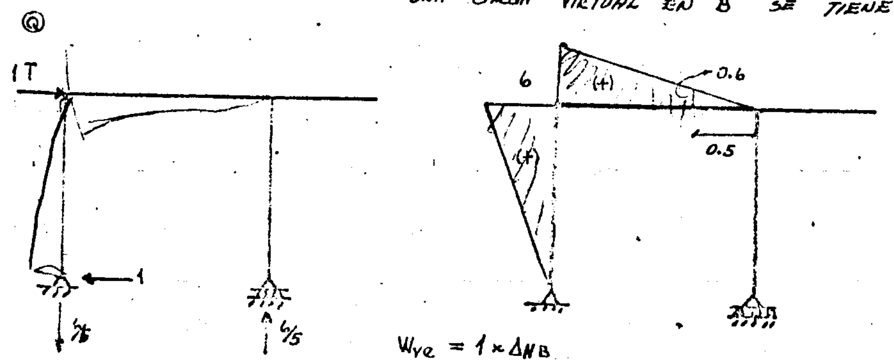
$$W_{ve} = W_{vi} \quad \Rightarrow \quad \Delta v_A = \frac{325.65}{EI}$$

3.-6

PROBLEMA No. 5.- CALCULAR Δ_{HB}, Δ_{VE} y Δ_{HD} DEL SIGUIENTE MARCO.



APLICANDO UNA CARGA VIRTUAL EN "B" SE TIENE:



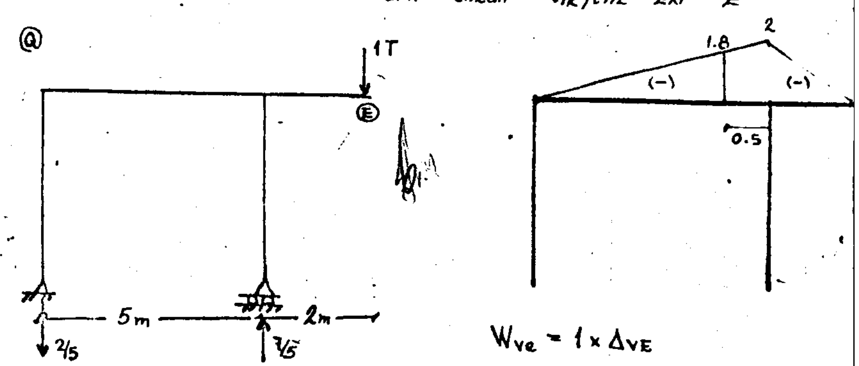
$W_{ve} = 1 \times \Delta_{HB}$

$$EI\,W_{vi} = \underset{\substack{R.3\\C.2}}{\tfrac{1}{6}(0.5)(0.6)(-4)} + \underset{\substack{R.4\\C.2}}{\tfrac{1}{6}(4.5)(0.6+2\times6)(36)} + \underset{\substack{R.2\\C.2}}{\tfrac{1}{3}(6)(36)(6)} = 626$$

COMO: $W_{ve} = W_{vi}$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{HB} = \frac{626}{EI}$$

APLICANDO UNA CARGA VIRTUAL EN "E"

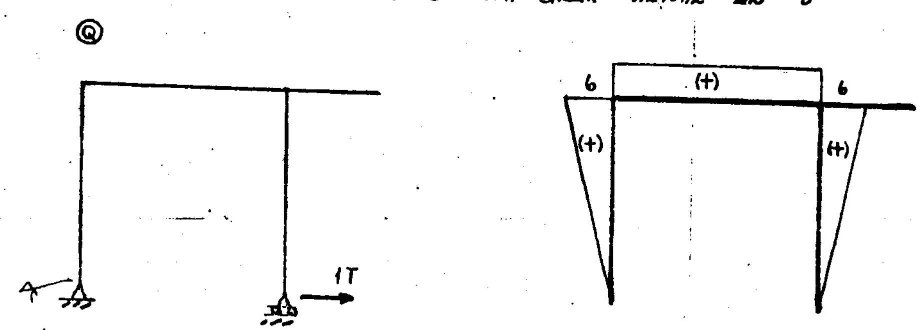


$W_{ve} = 1 \times \Delta_{VE}$

$$EI\,W_{vi} = \underset{\substack{R.2\\C.1}}{\tfrac{1}{2}(2)(4)(2)} + \underset{\substack{R.2\\C.3}}{\tfrac{1}{6}(0.5)(4)(1.8+2\times2)} - \underset{\substack{R.3\\C.2}}{\tfrac{1}{6}(4.5)(36)(1.8)} =$$

$$W_{ve} = W_{vi} \quad \Rightarrow \quad \Delta_{VE} = \frac{39}{EI} \uparrow$$

APLICANDO UNA CARGA VIRTUAL EN "D"



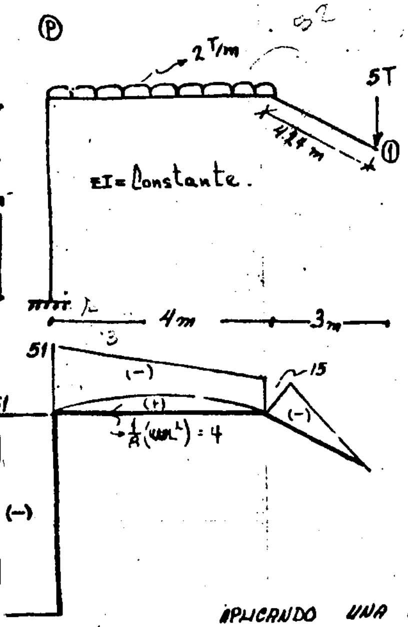
$W_{ve} = 1 \times \Delta_{HD}$

$$EI\,W_{vi} = \underset{\substack{R.2\\C.2}}{-\tfrac{1}{2}(0.5)(6)(4)} + \underset{\substack{R.2\\C.1}}{\tfrac{1}{2}(4.5)(6)(36)} + \underset{\substack{R.2\\C.2}}{\tfrac{1}{3}(6)(36)(6)} = 912$$

$$W_{ve} = W_{vi} \quad \Rightarrow \quad \Delta_{HD} = \frac{912}{EI}$$

PROBLEMA N. 6   ENCONTRAR Δv_1 DEL SIGUIENTE MARCO.

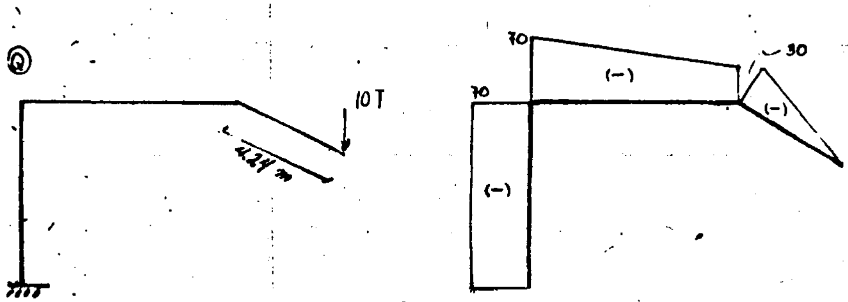
Ⓟ



APLICANDO UNA CARGA VIRTUAL EN ①

$$W_{ve} = 10\,\Delta v_1$$

Ⓠ



$$EI\,W_{vi} = \tfrac{1}{3}(4.24)(30)(15) + \tfrac{4}{6}\left[(2)(15)(30) + (51)(30) + (15)(70) + 2(51)(70)\right] -$$

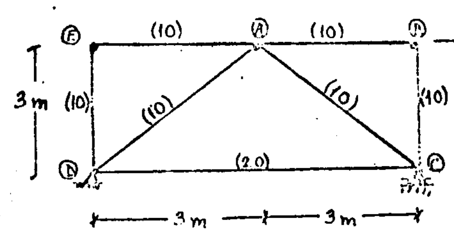
$$-\tfrac{1}{3}(4)(30+70)(4) + (5)(51)(70) = 25{,}025$$

R.2 C.2 R.4 C.3 R.4 C.4 R.1 C.1

$W_{ve} = W_{vi}$ ⟹ $\Delta v_1 = \dfrac{2502.5}{EI}$

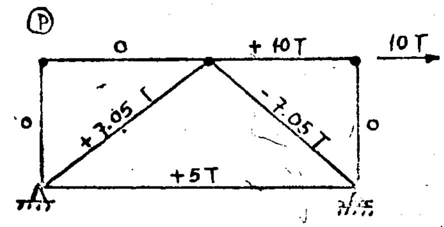
PROBLEMA N. 7.   CALCULAR Δv_A DE LA SIGUIENTE ARMADURA. LAS AREAS DE CADA BARRA APARECEN ENTRE PARENTESIS.

A (cm²)
TENSION (+)
COMPRESION (−)



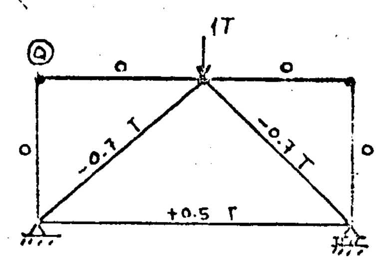
SE CALCULAN LAS FUERZAS EN TODAS LAS BARRAS EN LA ESTRUCTURA REAL

Ⓟ



SE APLICA LA CARGA VIRTUAL EN EL PUNTO DE INTERES Y SE CALCULAN LAS FUERZAS EN LAS BARRAS.

Ⓠ



$$W_{vi} = \int \frac{N_P N_Q}{AE}\,dx = \sum \frac{N_P N_Q}{AE} L$$

BARRA	A	L	N_P	N_Q	$\frac{N_P N_Q}{A} L$
AB	10	300	10	0	0
BC	10	300	0	0	0
AE	10	300	0	0	0
ED	10	300	0	0	0
AD	10	424	+7.05	−0.7	−2.092
AC	10	424	−7.05	−0.7	+2.092
CD	20	300	+5	+0.5	75
					Σ 75.0

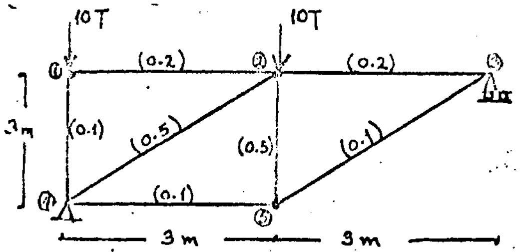
$W_{ve} = 1 \times \Delta v_A$

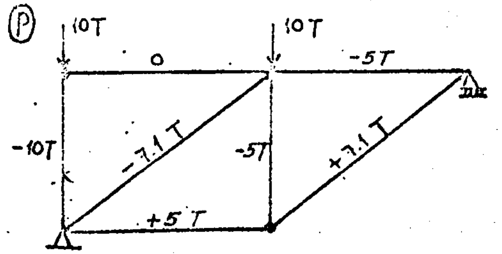
$W_{vi} = \dfrac{75}{E}$

$W_{ve} = W_{vi}$

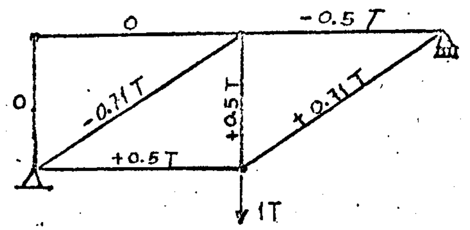
$\Delta v_A = \dfrac{75.0}{E}$

PROBLEMA No. 3.? CALCULAR ΔV5 DE LA SIGUIENTE ARMADURA. EL AREA, EN m^2, DE CADA BARRA APARECEN ENTRE PARENTESIS.





SE CALCULAN LAS FUERZAS EN LAS BARRAS.



SE APLICA LA CARGA VIRTUAL EN ⑤ Y SE CALCULAN LAS FUERZAS EN LAS BARRAS.

$$W_{Vi} = \sum \frac{N_P N_Q}{AE} L$$

$$W_{Ve} = 1 \times \Delta_{V5}$$

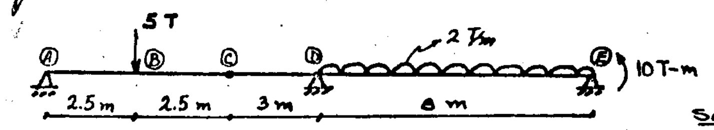
$$W_{Vi} = \frac{353.1}{E}$$

$$W_{Ve} = W_{Vi}$$

$$\Rightarrow \Delta_{V5} = \frac{353.1}{E}$$

BARRA	A	L	Np	Nq	$\frac{N_P N_Q}{A} L$
1-2	0.2	3	0	0	0.0
2-3	0.2	3	-5	-0.5	37.5
4-5	0.1	3	+5	+0.5	75.0
4-1	0.1	3	-10	0	0.0
5-2	0.5	3	-5	+0.5	-15.0
4-2	0.5	4.23	-7.1	-0.71	42.6
5-3	0.1	4.23	+7.1	+0.71	213.0
					Σ 353.1

1.- CALCULAR Δ_{VB}, Δ_{VC}, θ_D y θ_E



EI= constante.

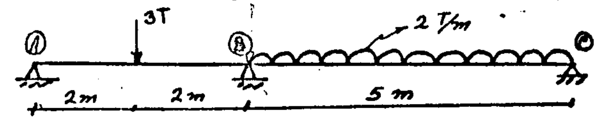
SOLUCION:

$\Delta_{VB} = \frac{29.8}{EI}$ ↑

$\Delta_{VC} = \frac{85.5}{EI}$ ↑

$\theta_D = -\frac{36}{EI}$

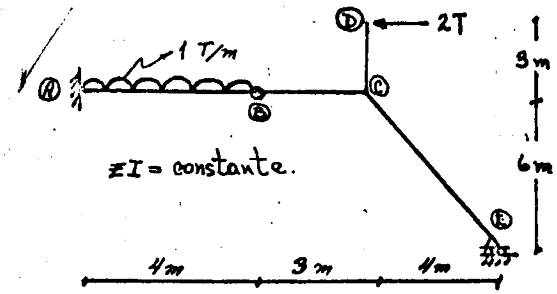
$\theta_E = \frac{59.3}{EI}$



EI= constante.

2.- CALCULAR EL RELATIVO θ_B

Solucion: $\theta_B = \frac{13.42}{EI}$



EI= constante.

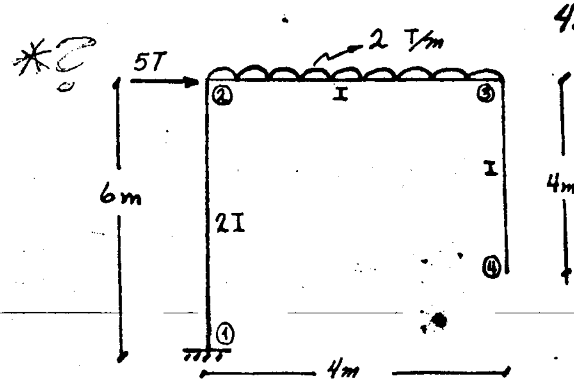
3.- CALCULAR Δ_{HD}, Δ_{VC}, y θ_E

SOLUCION:

$\Delta_{HD} = \frac{57.1}{EI}$; $\theta_D = \frac{22}{EI}$

$\Delta_{VC} = \frac{33.15}{EI}$; $\theta_E = \frac{3.5}{EI}$

4.- CALCULAR Δ_{V4} y Δ_{H2}

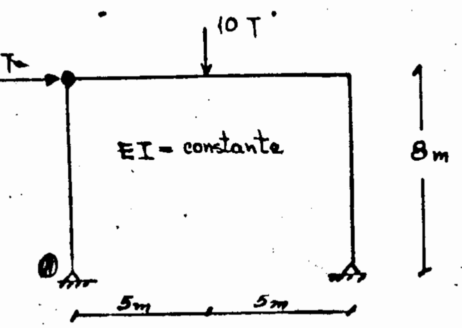


SOLUCION:

$\Delta_{V4} = \frac{436}{EI}$

$\Delta_{H2} = \frac{324}{EI}$

5.- CALCULAR Δ_H y θ_A

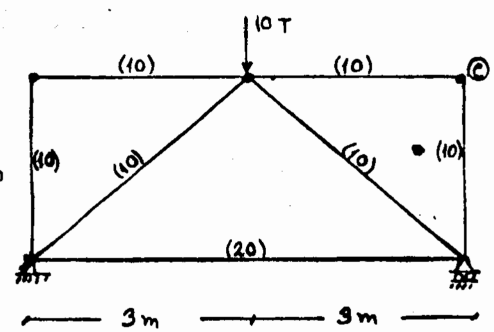


SOLUCION:

$$\Delta_H = \frac{9100}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{177.5}{EI}$$

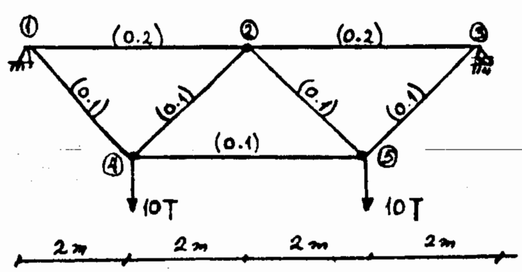
6.- CALCULAR Δ_{HC} DE LA SIGUIENTE ARMADURA. LAS AREAS DE CADA BARRA (cm^2) APARECEN ENTRE PARENTESIS.



SOLUCION:

$$\Delta_{HC} = \frac{75}{E}$$

7.- CALCULAR Δ_{V4} y Δ_{H3} DE LA ARMADURA SIGUIENTE. LAS AREAS ESTAN EN m^2



SOLUCION:

$$\Delta_{V4} = \frac{972}{E}$$

$$\Delta_{H3} = \frac{400}{E}$$

4.- HIPERESTATICIDAD DE LAS ESTRUCTURAS.

h_s = HIPERESTATICIDAD ESTATICA.

I_c = INDETERMINACION CINEMATICA

ESTRUCTURAS PLANAS:

$$h_s = 3(b - n + 1) - r + R$$

$$I_c = 3n - c' + r$$

ARMADURAS:

$$h_s = b + c' - 2n$$

$$I_c = 2n' + c''$$

en donde:

- b: BARRAS.
- n: NUDOS.
- r: RELAJACIONES ADICIONALES A LAS DE LOS SOPORTES.
- R: No. DE REACCIONES EXCEDENTES AL No. DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO.
- c': No. TOTAL DE REACCIONES. O RESTRICCIONES A DESPLAZAMIENTOS.
- n': NUDOS LIBRES (NO SOPORTES)
- c'': DESPLAZAMIENTOS DESCONOCIDOS EN LOS SOPORTES.

NOTAS:

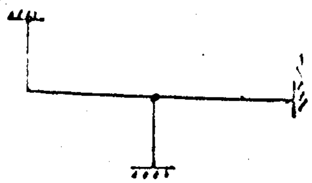
1.- EN LAS ARMADURAS NO SE CONSIDERAN GIROS EN LOS SOPORTES.

2.- PARA MARCOS TRIDIMENSIONALES EL COEFICIENTE 3 CAMBIA A 6

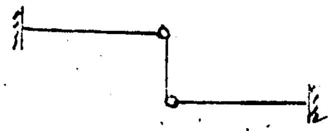
3.- PARA ARMADURAS TRIDIMENSIONALES EL COEFICIENTE 2 CAMBIA A 3.

PROBLEMA 1.- Calcular h_s y I_c para las siguientes Estructuras Planas:-

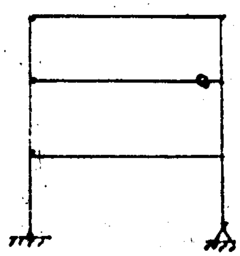
Aplicando las formulas obtenemos :-



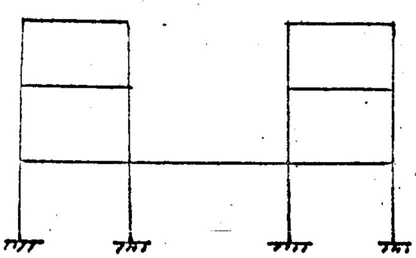
$h_s = 3(4-5+1) - 0 + 6 = 6$
$I_c = 3(5) - 9 + 0 = 6$



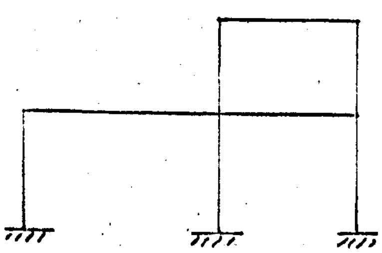
$h_s = 3(3-4+1) - 2 + 3 = 1$
$I_c = 3(4) - 6 + 2 = 8$



$h_s = 3(10-9+1) - 1 + 2 = 7$
$I_c = 3(9) - 5 + 1 = 23$



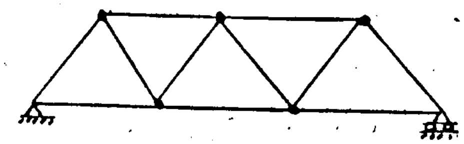
$h_s = 3(19-16+1) - 0 + 9 = 21$
$I_c = 3(16) - 12 + 0 = 36$



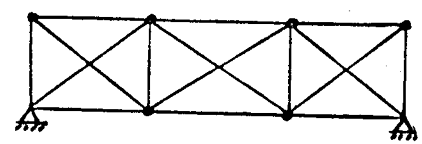
$h_s = 3(8-8+1) - 0 + 6 = 9$
$I_c = 3(8) - 9 + 0 = 15$

PROBLEMA 2.- Calcular h_s, I_c en las armaduras siguientes:.

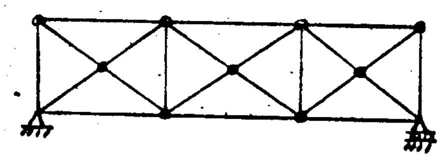
Aplicando las formulas se tiene:



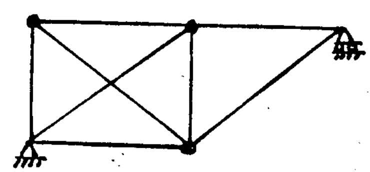
$h_s = 11 + 3 - 2(7) = 0$
$I_c = 2(5) + 1 = 11$



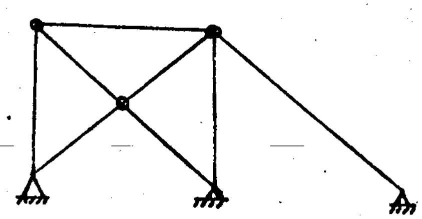
$h_s = 16 + 4 - 2(8) = 4$
$I_c = 2(6) + 0 = 12$



$h_s = 22 + 3 - 2(11) = 3$
$I_c = 2(9) + 1 = 19$



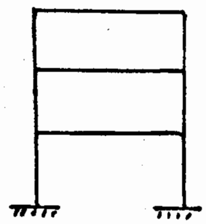
$h_s = 8 + 3 - 2(5) = 1$
$I_c = 2(3) + 1 = 7$



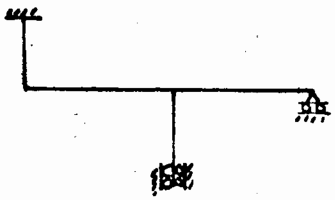
$h_s = 8 + 6 - 2(6) = 2$
$I_c = 2(3) + 0 = 6$

PROBLEMAS PROPUESTOS :

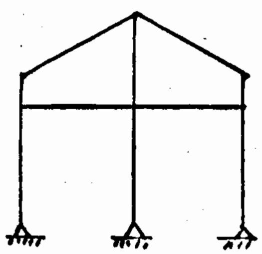
1.- Calcular h_s y I_c de las Estructuras planas sig.:



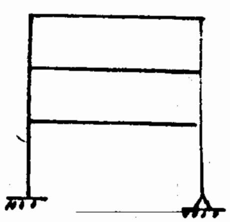
Solución :
$h_s = 9$
$I_c = 18$



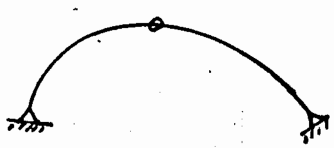
Solución :
$h_s = 3$
$I_c = 9$



Solución :
$h_s = 9$
$I_c = 21$

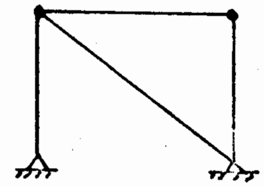


Solución :
$h_s = 8$
$I_c = 19$

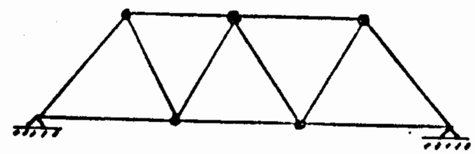


Solución :
$h_s = 0$
$I_c = 6$

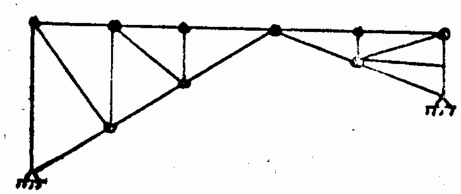
2.- Calcular h_s y I_c de las armaduras siguientes:-



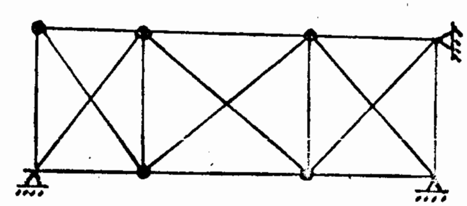
Solución :
$h_s = 0$
$I_c = 4$



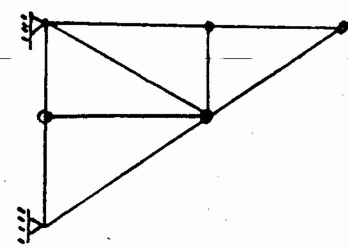
Solución :
$h_s = 1$
$I_c = 10$



Solución :
$h_s = 0$
$I_c = 20$



Solución :
$h_s = 6$
$I_c = 10$



Solución :
$h_s = 1$
$I_c = 8$

5.- METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

EL METODO DE LAS FLEXIBILIDADES NOS SIRVE PARA RESOLVER ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS. LAS INCOGNITAS EN ESTE METODO SON FUERZAS.- SU PROCEDIMIENTO ES EL SIGUIENTE:

1.) SUPRIMASE EL NUMERO NECESARIO DE REDUNDANTES PARA HACER QUE LA ESTRUCTURA SEA ESTATICAMENTE DETERMINADA Y ESTABLE. SUPRIMASE TAMBIEN EL SISTEMA DE CARGAS APLICADAS (ESTRUCTURA PRIMARIA).

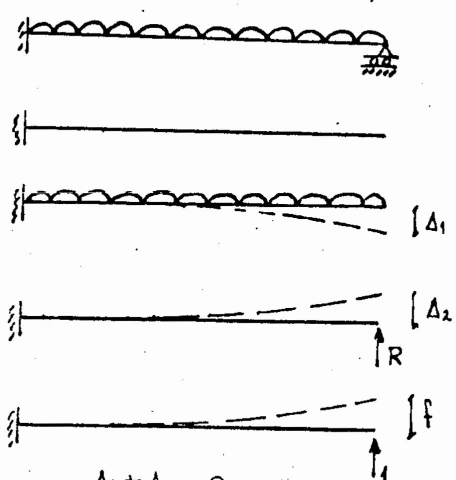
2.) APLIQUESE EL SISTEMA DE CARGAS A LA ESTRUCTURA PRIMARIA (SOLUCION PARTICULAR).

3.) APLIQUENSE LAS REDUNDANTES COMO UNITARIAS, PARA EVALUAR FLEXIBILIDADES, A LA ESTRUCTURA PRIMARIA (SOLUCION COMPLEMENTARIA).

4.) CORRELACIONE LAS DEFORMACIONES PRODUCIDAS POR LA SOLUCION PARTICULAR Y LA SOLUCION COMPLEMENTARIA (ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD).

5.) RESUELVA EL SISTEMA DE ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD, LO CUAL NOS PROPORCIONARA LA SOLUCION FINAL.

ILUSTRACION:



ESTRUCTURA REAL.

PASO 1.- ESTRUCTURA PRIMARIA.

PASO 2.- Δ_1 SOLUCION PARTICULAR.

PASO 3.- Δ_2 SOLUCION COMPLEMENTARIA.

R

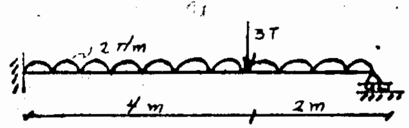
f

1

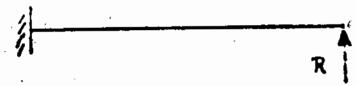
PASO 4.- $\Delta_1 + \Delta_2 = 0$

$\Delta_1 + Rf = 0$ ECUACION DE COMPATIBILIDAD.

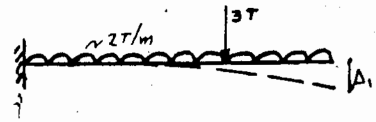
Problema 1.- Calcular las redundantes de la viga siguiente:

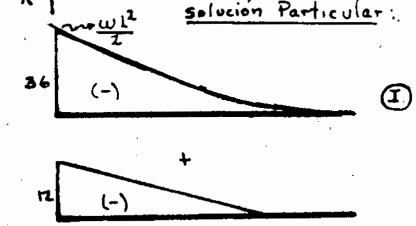


Estructura Primaria.

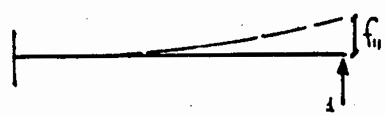


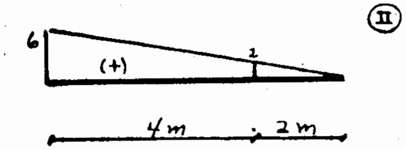
Solución Particular:





Solución complementaria.





$\Delta_1 + f_{11} R = 0$ Ecuaciones de compatibilidad.

Cálculo de Δ_1: $W_{ve} = W_{vi}$

(I) Real con II virtual.

$$(EI)\,1\cdot\Delta_1 = -\frac{1}{4}(6)(36)(6) - \frac{1}{6}(4)(12)(2+2\times6)$$

R.2 C.6   R.2 C.3

$$\Delta_1 = -\frac{436}{EI}$$

Cálculo de f_{11}: II Real con II virtual

$$(EI)\,1\cdot f_{11} = \frac{1}{3}(6)(6)(6)$$

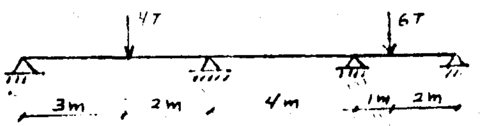
R.2 C.2

$$f_{11} = \frac{72}{EI}$$

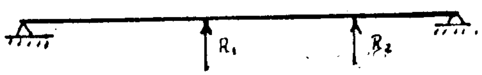
Substituyendo en la ecuación de compatibilidad, se obtiene:

$$-\frac{436}{EI} + \frac{72}{EI}R = 0 \quad \therefore \quad \underline{R = 6.05\ T}$$

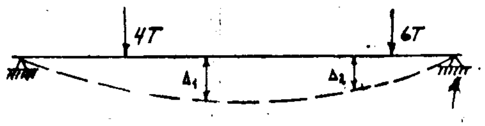
Problema 2.- Calcular las redundantes de la viga siguiente:

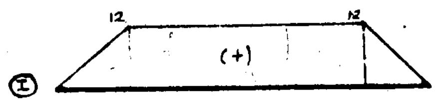


Estructura primaria:

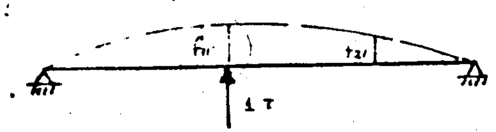


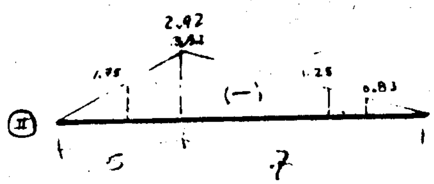
Solución Particular.

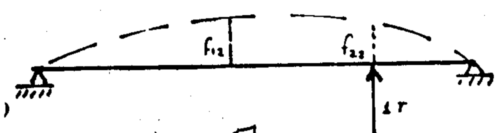


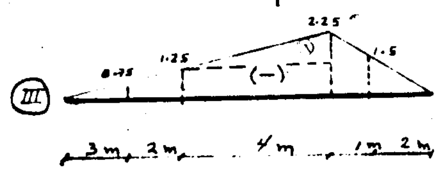


Solución complementaria.









$$\Delta_1 + f_{11}R_1 + f_{12}R_2 = 0$$
$$\Delta_2 + f_{21}R_1 + f_{22}R_2 = 0$$

Ecs. de compatibilidad.

Cálculo de deformaciones:-

Δ_1: I Real con II virtual

$$(EI)\,\Delta_1 = -\underset{R.2\ C.2}{\tfrac{1}{3}(3)(12)(1.75)} - \underset{R.1\ C.3}{\tfrac{1}{2}(2)(12)(1.75+2.92)} - \underset{R.1\ C.3}{\tfrac{1}{2}(4)(12)(1.25+2.92)} -$$
$$- \underset{R.1\ C.3}{\tfrac{1}{2}(1)(12)(0.83+1.25)} - \underset{R.2\ C.2}{\tfrac{1}{3}(2)(12)(0.83)}$$

$$\Delta_1 = -\frac{196.3}{EI}$$

Δ_2: I Real con III virtual

$$(EI)\,\Delta_2 = -\underset{R.2\ C.2}{\tfrac{1}{3}(3)(12)(0.75)} - \underset{R.1\ C.3}{\tfrac{1}{2}(2)(12)(1.25+0.75)} - \underset{R.1\ C.3}{\tfrac{1}{2}(4)(12)(2.25+1.25)} -$$
$$- \underset{R.1\ C.3}{\tfrac{1}{2}(1)(12)(2.25+1.5)} - \underset{R.2\ C.2}{\tfrac{1}{3}(2)(12)(1.5)}$$

$$\Delta_2 = -\frac{151.5}{EI}$$

f_{11}: II Real con II virtual

$$(EI)\,f_{11} = \underset{R.2\ C.2}{\tfrac{1}{3}(5)(2.92)(2.92)} + \underset{R.2\ C.2}{\tfrac{1}{3}(7)(2.92)(2.92)}$$

$$f_{11} = \frac{34}{EI}$$

f_{22}: III Real con III virtual

$$(EI)\,f_{22} = \underset{R.2\ C.2}{\tfrac{1}{3}(2.25)(2.25)} + \underset{R.2\ C.2}{\tfrac{1}{3}(3)(2.25)(2.25)}$$

$$f_{22} = \frac{20.3}{EI}$$

$f_{12} = f_{21}$: II Real con III virtual

$$(EI)\,f_{12} = \underset{R.2\ C.2}{\tfrac{1}{3}(5)(1.25)(2.92)} + \underset{R.3\ C.2}{\tfrac{1}{6}(4)(1)(1.67)} + \underset{R.1\ C.2}{\tfrac{1}{2}(4)(1)(1.25)} +$$
$$+ \underset{R.1\ C.2}{\tfrac{1}{2}(4)(1.25)(1.67)} + \underset{R.1\ C.1}{(4)(1.25)(1.25)} + \underset{R.2\ C.2}{\tfrac{1}{3}(3)(2.25)(1.25)}$$

$$f_{12} = \frac{23}{EI}$$

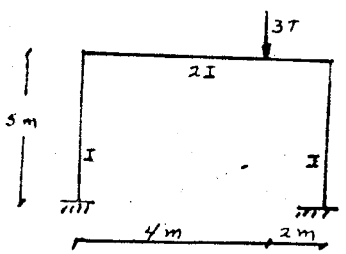
Substituyendo en las ecs. de compatibilidad:-

$$-196.3 + 34R_1 + 23R_2 = 0$$
$$-151.5 + 23R_1 + 20.3R_2 = 0$$

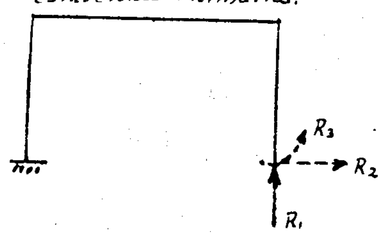
Resolviendo el sistema anterior, se tiene:

$$R_1 = 3T$$
$$R_2 = 4T$$

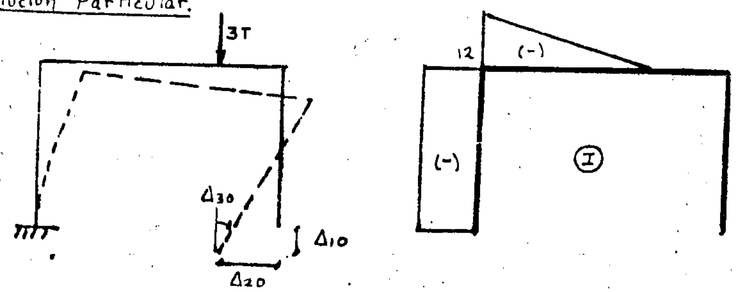
PROBLEMA 3.- Calcular las redundantes del marco siguiente:



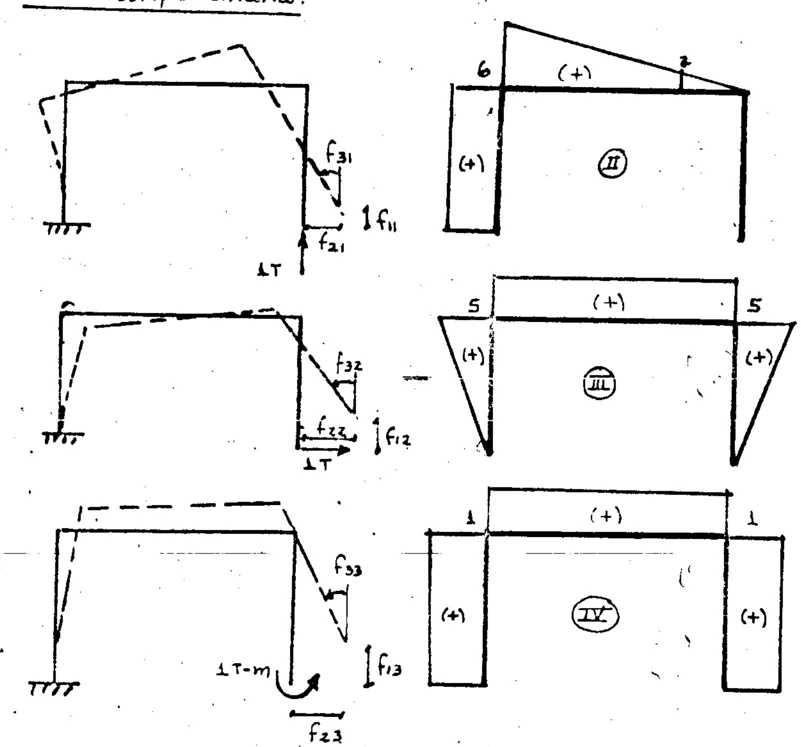
estructura Primaria.



Solución Particular.



Solución complementaria.



$$\Delta_{10}+f_{11}R_1+f_{12}R_2+f_{13}R_3=0$$
$$\Delta_{20}+f_{21}R_1+f_{22}R_2+f_{23}R_3=0$$
$$\Delta_{30}+f_{31}R_1+f_{32}R_2+f_{33}R_3=0$$

ecuaciones de compatibilidad.

Δ_{10} : I Real con II Virtual.

$$(EI)\Delta_{10}=-\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{6}\underbrace{(4)(12)(2+2\times6)}_{R.2\ c.3}-\underbrace{5(12)(6)}_{R.1\ c.1} \qquad \Delta_{10}=-\frac{416}{EI}$$

Δ_{20} : I Real con III Virtual.

$$(EI)\Delta_{20}=-\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\underbrace{(4)(12)(5)}_{R.2\ c.1}-\tfrac{1}{2}\underbrace{(5)(5)(12)}_{R.2\ c.1} \qquad \Delta_{20}=-\frac{210}{EI}$$

Δ_{30} : I Real con IV Virtual.

$$(EI)\Delta_{30}=-\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\underbrace{(4)(12)(1)}_{R.2\ c.1}-\underbrace{5(12)(1)}_{R.1\ c.1} \qquad \Delta_{30}=-\frac{72}{EI}$$

f_{11} : II Real con II Virtual

$$(EI)f_{11}=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{3}\underbrace{(6)(6)(6)}_{R.2\ c.2}+\underbrace{5(6)(6)}_{R.1\ c.1} \qquad f_{11}=\frac{216}{EI}$$

f_{22}: III Real con III Virtual.

$$(EI)f_{22}=\tfrac{1}{2}\underbrace{(6)(5)(5)}_{R.1\ c.1}+\tfrac{1}{3}\underbrace{(5)(5)(5)}_{R.2\ c.2}+\tfrac{1}{3}\underbrace{(5)(5)(5)}_{R.2\ c.2} \qquad f_{22}=\frac{158.3}{EI}$$

f_{33}: IV Real con IV Virtual.

$$(EI)f_{33}=\tfrac{1}{2}\underbrace{(4)(1)(1)}_{R.1\ c.1}+2\Big[\underbrace{(5)(1)(1)}_{R.1\ c.1}\Big] \qquad f_{33}=\frac{13}{EI}$$

$f_{21}=f_{12}$: II Real con III Virtual

$$(EI)f_{21}=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\underbrace{(6)(6)(5)}_{R.1\ c.2}+\tfrac{1}{2}\underbrace{(5)(5)(6)}_{R.1\ c.2} \qquad f_{21}=\frac{120}{EI}$$

$f_{31}=f_{13}$: II Real con IV Virtual

$$(EI)f_{31}=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\underbrace{(6)(6)(1)}_{R.1\ c.2}+\underbrace{5(6)(1)}_{R.1\ c.1} \qquad f_{31}=\frac{39}{EI}$$

$f_{32}=f_{23}$: III Real con IV Virtual.

$$(EI)f_{32}=\tfrac{1}{2}\times\underbrace{(6)(5)(1)}_{R.1\ c.1}+2\Big[\tfrac{1}{2}\underbrace{(5)(5)(1)}_{R.1\ c.2}\Big] \qquad f_{32}=\frac{40}{EI}$$

Substituyendo en las ecuaciones de compatibilidad

$$-416 + 216 R_1 + 120 R_2 + 39 R_3 = 0$$

$$-210 + 120 R_1 + 158.3 R_2 + 40 R_3 = 0$$

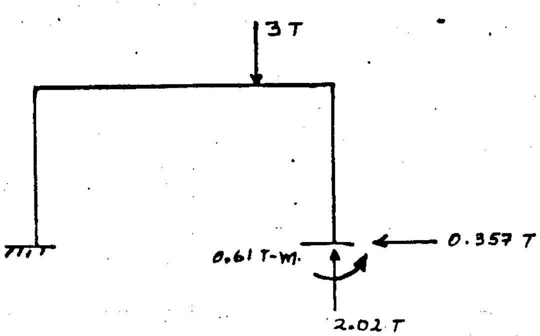
$$-72 + 39 R_1 + 40 R_2 + 13 R_3 = 0$$

Resolviendo éste sistema de ecuaciones, se tiene:

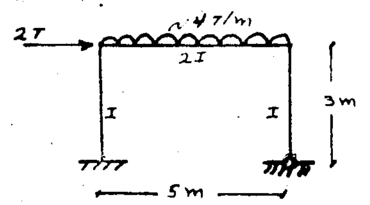
$R_1 = 2.02\ T$

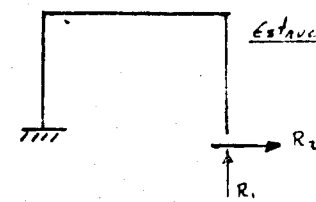
$R_2 = -0.357\ T$ (sentido contrario al supuesto).

$R_3 = 0.61\ T\text{-}m.$



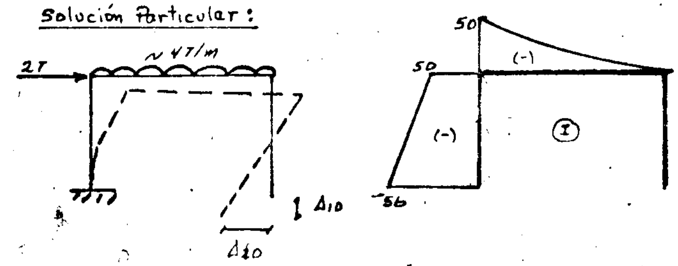
PROBLEMA 4.- Calcular las Redundantes del marco siguiente:



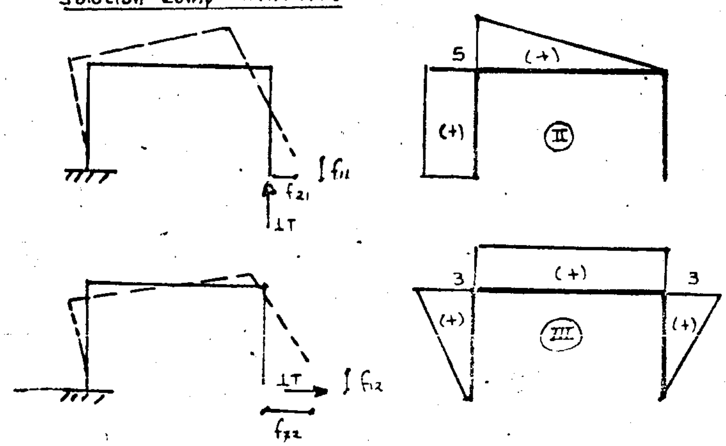


Estructura Primaria

Solución Particular:



Solución complementaria.



$$\Delta_{10} + f_{11} R_1 + f_{12} R_2 = 0$$

$$\Delta_{20} + f_{21} R_1 + f_{22} R_2 = 0$$

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

Δ_{10}: I Real con II Virtual.

$$(EI)\Delta_{10} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\underset{R.2\ C.6}{(5)(50)(5)} - \frac{1}{2}\underset{R.1\ C.3}{(3)(5)(50+56)} \qquad \Delta_{10} = -\frac{951}{EI}$$

Δ_{20}: I Real con III Virtual.

$$(EI)\Delta_{20} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\underset{R.1\ C.6}{(5)(3)(50)} - \frac{1}{6}\underset{R.3\ C.3}{(3)(3)(2\times 50+56)} \qquad \Delta_{20} = -\frac{359}{EI}$$

f_{11}: II Real con II Virtual.

$$(EI)f_{11} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\underset{R.2\ C.2}{(5)(5)(5)} + \underset{R.1\ C.1}{3(5)(5)} \qquad f_{11} = \frac{95.8}{EI}$$

f_{22}: III Real con III Virtual.

$$(EI)f_{22} = \frac{1}{3}\underset{R.2\ C.2}{(3)(3)(3)} + \frac{1}{2}\underset{R.1\ C.1}{(5)(3)(3)} + \frac{1}{3}\underset{R.2\ C.2}{(3)(3)(3)} \qquad f_{22} = \frac{40.5}{EI}$$

$f_{12} = f_{21}$

f_{12}: III Real con II Virtual.

$$(EI)f_{12} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\underset{R.1\ C.2}{(5)(3)(5)} + \frac{1}{2}\underset{R.1\ C.2}{(3)(3)(5)} \qquad f_{12} = \frac{41.25}{EI}$$

Substituyendo en las ecuaciones de compatibilidad:

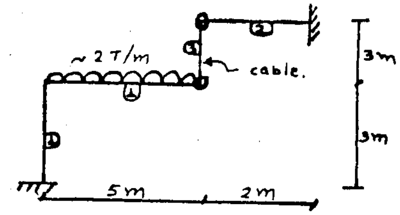
$$-951 + 95.8\,R_1 + 41.25\,R_2 = 0$$
$$-359 + 41.25\,R_1 + 40.50\,R_2 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene:

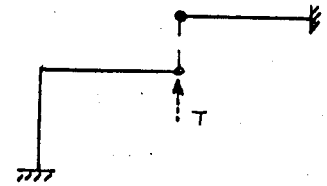
$R_1 = 10.9\ T$

$R_2 = -2.2\ T$

PROBLEMA 5.- Calcular la Redundante de la estructura siguiente:

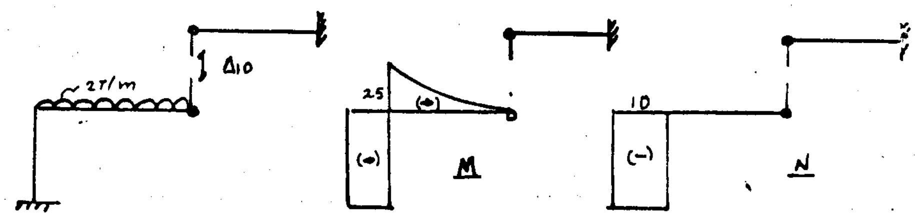


$I_1 = 3.12\times 10^{-3}\ m^4$
$A_1 = 0.15\ m^2$
$I_2 = 0.675\times 10^{-3}\ m^4$
$A_2 = 0.09\ m^2$
$I_3 =$ despreciable
$A_3 = 10^{-3}\ m^2$

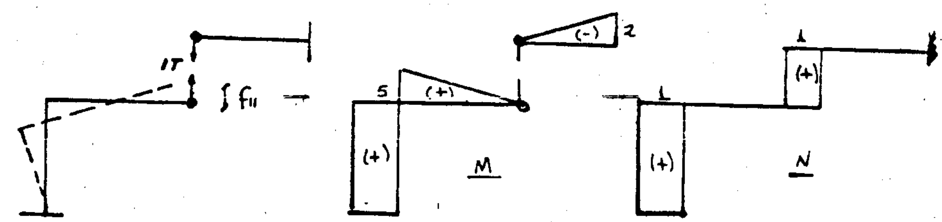


Estructura Primaria

Solución Particular. I



Solución Complementaria. II



$$\Delta_{10} + f_{11}\,T = 0 \qquad \text{Ecuación de compatibilidad.}$$

I Real con II Virtual

$$\Delta_{10} = -\frac{1}{4}\underbrace{\frac{(5)(25)(5)}{I_1}}_{R.2\ C.6} - \underbrace{\frac{3(25)(5)}{I_1}}_{R.1\ C.1} - \frac{3(10)(1)}{A_1}$$

$$\Delta_{10} = -\frac{171,200}{E}$$

f_{11} : II Real con II Virtual

$$f_{11} = \frac{1}{3}\underbrace{\frac{(5)(5)(5)}{I_1}}_{R.2\ C.2} + \underbrace{\frac{3(5)(5)}{I_1}}_{R.1\ C.1} + \frac{1}{3}\underbrace{\frac{(2)(2)(2)}{I_2}}_{R.2\ C.2} + \frac{3(1)(1)}{A_3} + \frac{3(1)(1)}{A_1}$$

$$f_{11} = \frac{41,140}{E}$$

Substituyendo en la ecuación de compatibilidad :

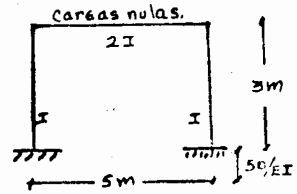
$$-171,200 + 41,140\,T = 0$$

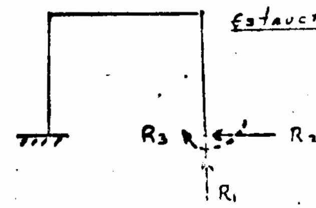
$$\therefore$$

$$\boxed{T = 4.12 \text{ Toneladas.}}$$

PROBLEMA No. 6.- ENCONTRAR LAS REDUNDANTES DEL SIGUIENTE MARCO SUPONIENDO QUE EL EMPOTRAMIENTO DERECHO TIENE UNA DEFLEXION VERTICAL — DE 50/EI.

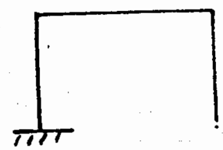
Cargas nulas.





Estructura Primaria

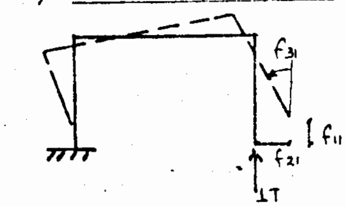
Solución Particular.

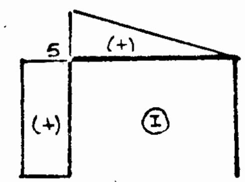


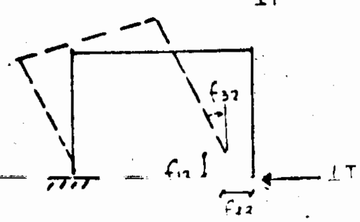
$\Delta_{10} = 0$; $\Delta_{20} = 0$; $\Delta_{30} = 0$

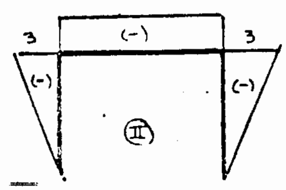
PORQUE NO HAY FUERZAS EXTERNAS QUE PRODUZCAN DESPLAZAMIENTOS.

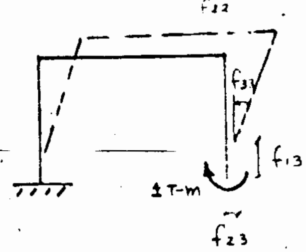
Solución complementaria.

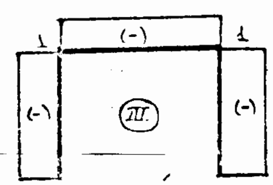












$$\Delta_{10} + f_{11}R_1 + f_{12}R_2 + f_{13}R_3 = -50/EI$$
$$\Delta_{20} + f_{21}R_1 + f_{22}R_2 + f_{23}R_3 = 0$$
$$\Delta_{30} + f_{31}R_1 + f_{32}R_2 + f_{33}R_3 = 0$$

Ecuaciones de Compatibilidad.

f_{11}: <u>I Real con I Virtual</u>

$$(EI)f_{11} = \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{3}\underbrace{(5)(5)(5)}_{R.2\ C.2} + \underbrace{3(5)(5)}_{R.1\ C.1} \qquad f_{11} = \frac{95.83}{EI}$$

$f_{21} = f_{12}$: <u>I Real con II Virtual</u>

$$(EI)f_{21} = -\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\underbrace{(5)(5)(3)}_{R.1\ C.2} - \tfrac{1}{2}\underbrace{(3)(5)(3)}_{R.1\ C.2} \qquad f_{21} = -\frac{41.3}{EI}$$

$f_{31} = f_{13}$: <u>I Real con III Virtual</u>

$$(EI)f_{31} = -\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\underbrace{(5)(5)(1)}_{R.1\ C.2} - \underbrace{3(5)(1)}_{R.1\ C.1} \qquad f_{31} = -\frac{21.25}{EI}$$

f_{22}: <u>II Real con II Virtual</u>

$$(EI)f_{22} = \tfrac{1}{2}\underbrace{(5)(3)(3)}_{R.1\ C.1} + \tfrac{1}{3}\underbrace{(3)(3)(3)}_{R.2\ C.2}\times 2 \qquad f_{22} = \frac{40.5}{EI}$$

$f_{23} = f_{32}$: <u>II Real con III Virtual</u>

$$(EI)f_{23} = \tfrac{1}{2}\underbrace{(5)(3)(1)}_{R.1\ C.1} + \tfrac{1}{2}\underbrace{(3)(3)(1)}_{R.1\ C.2}\times 2 \qquad f_{23} = \frac{16.5}{EI}$$

f_{33}: <u>III Real con III Virtual</u>

$$(EI)f_{33} = \tfrac{1}{2}\underbrace{(5)(1)(1)}_{R.1\ C.2} + \underbrace{3(1)(1)(2)}_{R.1\ C.1} \qquad f_{33} = \frac{8.5}{EI}$$

Substituyendo en las ecuaciones de compatibilidad:

$$1/EI\,(95.83\,R_1 - 41.3\,R_2 - 21.25\,R_3) = -60/EI$$
$$-41.3\,R_1 + 40.5\,R_2 + 16.5\,R_3 = 0$$
$$-21.25\,R_1 + 16.5\,R_2 + 8.5\,R_3 = 0$$

Resolviendo este sistema de ecs. se tiene:

$R_1 = -1.12\ T$

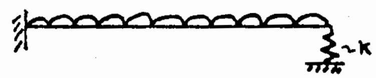
$R_2 = 0$

$R_3 = -2.76\ T\text{-}m$

<u>Problema 7.-</u> Encontrar las ecuaciones de compatibilidad para la siguiente viga, considerando:

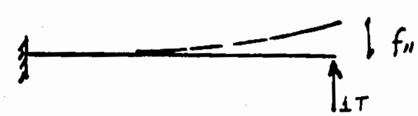
a) K es infinitamente Rigido
b) K no es completamente Rigido.

K: constante de proporcionalidad del Resorte.



<u>Estructura Primaria.</u>

<u>Solución Particular.</u>



<u>Solución complementaria.</u>

a) Resorte Rígido $\qquad \Delta_{10} + f_{11}R_1 = 0$

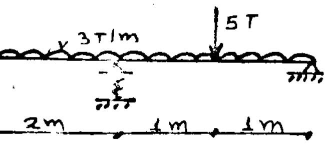
b) Resorte no Rígido $\qquad R_1 = K\Delta$, $\quad \Delta = R_1/K$

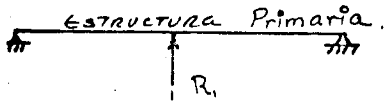
$$\Delta_{10} + f_{11}R_1 = -R_1/K$$

PROBLEMA 8.- Encontrar la Redundante de la Viga mostrada, considerando los casos siguientes:

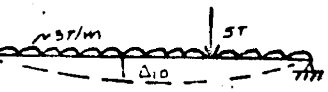
a) $K = \infty$ (rígido)

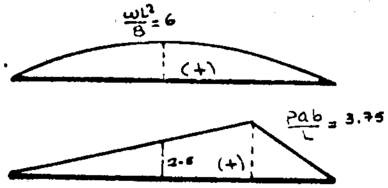
b) $K = EI/20$





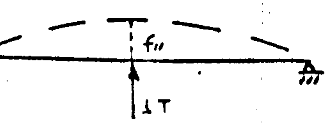
olución Particular.

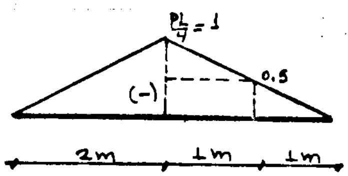




(I)

Solución complementaria





(II)

a) $\Delta_{10} + f_{11} R_1 = 0$

b) $\Delta_{10} + f_{11} R_1 = R_1/K$

Ecuaciones de compatibilidad.

Δ_{10}: I Real con II Virtual

$$(EI)\Delta_{10} = -\underbrace{\tfrac{1}{3}(4)(1+0.5\times0.5)(1)(6)}_{R.5\ C.7} - \underbrace{\tfrac{1}{3}(1)(0.5)(3.75)}_{R.2\ C.2} -$$

$$-\underbrace{\tfrac{1}{3}(2)(1)(2.5)}_{R.2\ C.2} - \underbrace{\tfrac{1}{2}(1)(0.5)(2.5+3.75)}_{R.1\ C.3} -$$

$$-\underbrace{\tfrac{1}{6}(1)(0.5)(2\times2.5+3.75)}_{R.3\ C.3}$$

$$\Delta_{10} = -\frac{14.70}{EI}$$

f_{11}: II Real con II Virtual

$$(EI)f_{11} = \underbrace{\tfrac{1}{3}(4)(1)(1)}_{R.10\ C.7} \qquad f_{11} = \frac{1.33}{EI}$$

Substituyendo en las ecuaciones de compatibilidad:

a) $-14.7 + 1.33 R_1 = 0$

$$\underline{R_1 = 11.05\ T}$$

b) $R_1 = K\Delta$

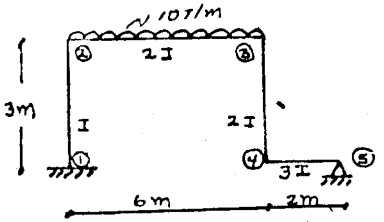
$\Delta = R_1/K = \dfrac{20R_1}{EI}$

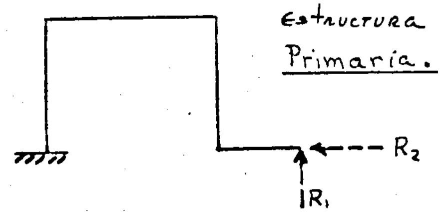
$-14.7 + 1.33 R_1 = -20R_1$

deben tener el mismo signo.

$$\underline{R_1 = 0.69\ T}$$

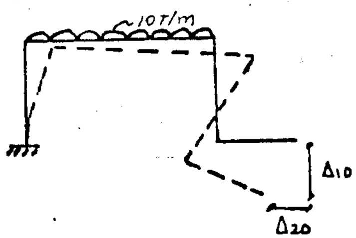
PROBLEMA 9.- Calcular las Redundantes del marco siguiente y encontrar Δ_{V4} :

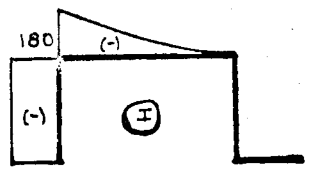




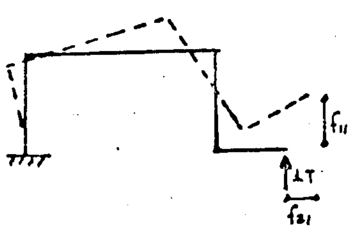
Estructura Primaria.

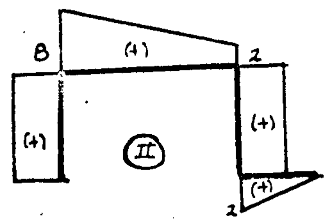
Solución Particular.

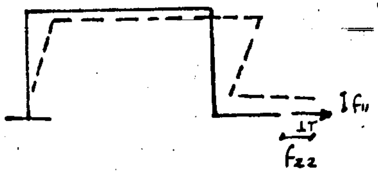


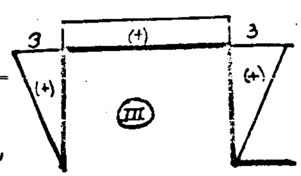


Solución Complementaria.









$$\Delta_{10} + f_{11}R_1 + f_{12}R_2 = 0$$
$$\Delta_{20} + f_{21}R_1 + f_{22}R_2 = 0$$

Ecuaciones de compatibilidad.

Δ_{10}: I Real con II Virtual.

$$(EI)\Delta_{10} = -\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{12}(6)(180)(2+3\times8) - 180(3)(8) \qquad \therefore\ \Delta_{10} = -\frac{5490}{EI}$$

R.4 C.6 R.1 C.1.

Δ_{20}: I Real con III Virtual.

$$(EI)\Delta_{20} = -\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{3}(6)(3)(180) - \tfrac{1}{2}(3)(3)(180) \qquad \Delta_{20} = -\frac{1350}{EI}$$

R.1 C.6 R.1 C.2.

f_{11}: II Real con II Virtual

$$(EI)f_{11} = \tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{3}(2)(2)(2) + \tfrac{1}{2}(3)(2)(2) + 3(8)(8) +$$

R.2 C.2 R.1 C.1 R.1. C.1

$$+ \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{6}(6)\left[(2)(2)(2)+2(8)+2(8)+2(8)(8)\right] \qquad f_{11} = \frac{283}{EI}$$

R.4 C.3

f_{22}: III Real con III Virtual.

$$(EI)f_{22} = \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{3}(3)(3)(3) + \tfrac{1}{2}(6)(3)(3) + \tfrac{1}{3}(3)(3)(3) \qquad f_{22} = \frac{40.5}{EI}$$

R.2 C.2 R.1 C.1 R.2 C.2

$f_{21} = f_{12}$ II Real con III Virtual.

$$(EI)f_{21} = \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}(3)(3)(2) + \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}(6)(3)(2+8) +$$

R.2 C.1 R.1 C.3

$$+ \tfrac{1}{2}(3)(3)(8) \qquad f_{21} = \frac{85.5}{EI}$$

R.2 C.1

Substituyendo en las ecs. de compatibilidad:

$$-5490 + 283R_1 + 85.5R_2 = 0$$
$$-1350 + 85.5R_1 + 40.5R_2 = 0$$

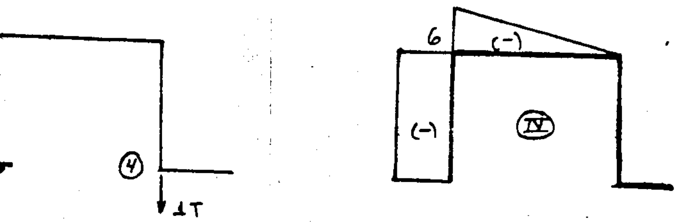
La solución del sistema de ecuaciones es:

$R_1 = 25.4\ T$

$R_2 = -21\ T$

Cálculo de Δ_{V4}:

Se utiliza la estructura primaria.



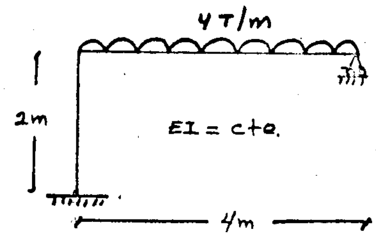
$$(EI)\,\Delta_{V4} = \mathrm{IV}\left[\,\mathrm{I} + \mathrm{II}\,R_1 + \mathrm{III}\,R_2\,\right]$$

$$(EI)\,\Delta_{V4} = \underbrace{\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{4}(6)(6)(180)}_{R.2\ C.6} + \underbrace{6(3)(180)}_{R.1\ C.1} - \underbrace{\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{6}(6)(6)(2+2\times 8)(25.4)}_{R.2\ C.3} -$$

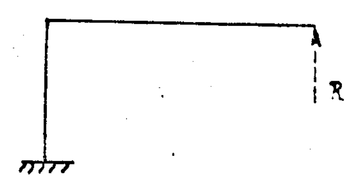
$$- \underbrace{6(3)(8)(25.4)}_{R.1\ C.1} - \underbrace{\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}(6)(3)(6)(-21)}_{R.1\ C.2} - \underbrace{\tfrac{1}{6}(6)(3)(3)(-21)}_{R.1\ C.2}$$

$$\Delta_{V4} = \frac{156}{EI}$$

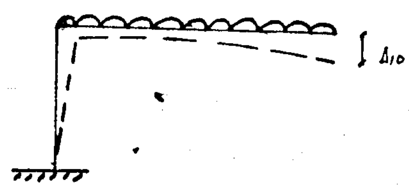
PROBLEMA 10.- Calcular la Redundante y ΔH de la estructura siguiente:

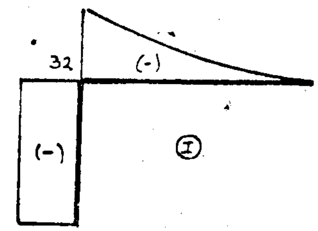


Estructura Primaria.

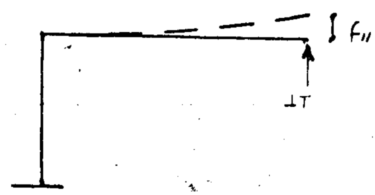


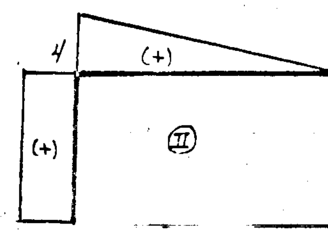
Solución Particular.





Solución complementaria.





$$\Delta_{10} + f_{11}\,R_1 = 0 \qquad \text{Ec. de compatibilidad.}$$

Δ_{10}: I Real con II Virtual

$$(EI)\,\Delta_{10} = \underbrace{-\tfrac{1}{4}(4)(32)(4)}_{R.2\ C.6} \underbrace{- 2(32)(4)}_{R.1\ C.1} \qquad \Delta_{10} = -\frac{384}{EI}$$

f_{11}: II Real con II Virtual.

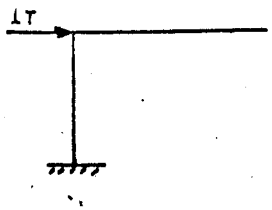
$$(EI) f_{11} = \frac{1}{3}(4)(4)(4) + 2(4)(4) \qquad f_{11} = \frac{53.3}{EI}$$

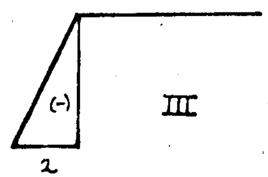
Substituyendo en la ec. de compatibilidad:

$$-384 + 53.3 R_1 = 0 \quad \therefore \quad \underline{R_1 = 7.2\ T}$$

Cálculo de ΔH:

Utilizamos la estructura primaria:



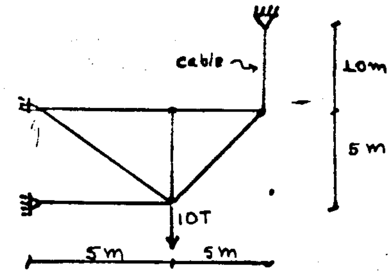


$$(EI)\,\Delta H = III\,[\,I + II\,R_1\,]$$

$$(EI)\,\Delta H = \underset{R.1\ C.2}{\frac{1}{2}(2)(2)(32)} - \underset{R.1\ C.2}{\frac{1}{2}(2)(2)(4)(7.2)}$$

$$\Delta H = \frac{6.4}{EI} \rightarrow$$

Problema 11.- Resolver la siguiente armadura.



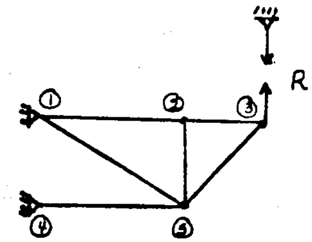
$h_s = b + R - 2j = 7 + 6 - 2(6) = 1$

por lo tanto sólo hay una Redundante.

compresión (-)

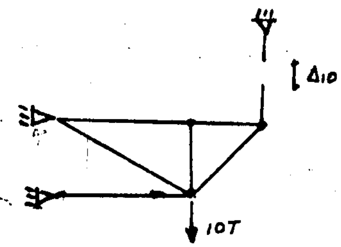
Tensión (+)

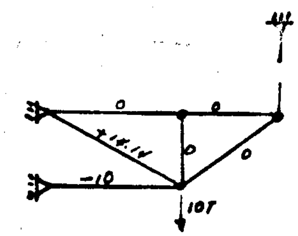
Estructura Primaria.



Nota: La estructura deformada no se dibuja y sólo se pone el sentido supuesto de la deformación.

Solución Particular.

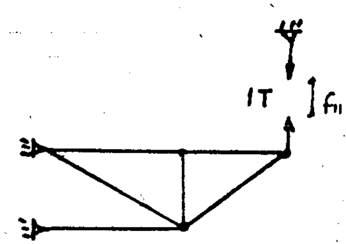


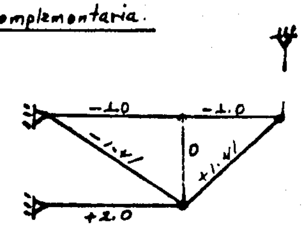


(I)

(N)

Solución complementaria.





(I)

(Y_1)

$$\Delta_{10} + f_{11} R = 0 \qquad \text{Ecuación de compatibilidad.}$$

$W_{ve} = W_{vi}$

$$W_{ve} = \Sigma \frac{N n}{A E} L$$

$[F] = [N] + [n]\, R$ (Fzas. Reales en las barras).

arra	N	n	A	L (cm)	$\frac{Nn}{A}L$	$\frac{nn}{A}L$	nR	$F = N + nR$
1-2	0	-1	5	500	0	100	-3.75	-3.75
2-3	0	-1	5	500	0	100	-3.75	-3.75
4-5	-10	2	5	500	-2000	400	7.50	-2.50
2-5	0	0	10	500	0	0	0	0
1-5	14.14	-1.41	10	710	-1414	141	-5.28	7.86
3-5	0	1.41	10	710	0	141	5.28	5.28
				Σ	-3414	882		

Las áreas de las barras son datos y estan en cm^2. Las últimas dos columnas se calculan después de valuar R.

Δ_{10}: I Real con II Virtual.

$$1 \cdot \Delta_{10} = \Sigma \frac{N n}{A E} L \qquad \Delta_{10} = -\frac{3414}{E}$$

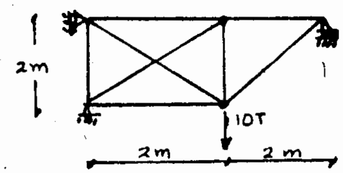
f_{11}: II Real con II Virtual.

$$1 \cdot f_{11} = \Sigma \frac{n n}{A E} L \qquad f_{11} = \frac{882}{E}$$

Substituyendo en la ecuación de compatibilidad:

$$-3414 + 882\, R = 0 \qquad \therefore \quad \underline{R = 3.95\ T}$$

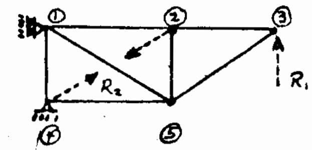
PROBLEMA 12.- Resolver la Armadura siguiente y cálcular Δ_{VS}:



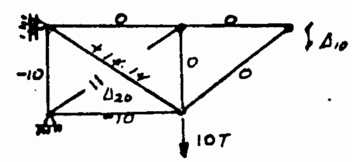
$h_s = b + R - 2j = 8 + 4 - 2(6) = 2$

por lo tanto hay dos Redundantes.

Estructura Primaria

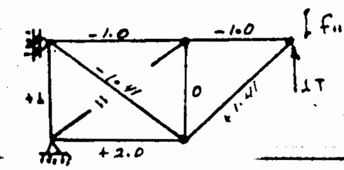


Solución Particular.

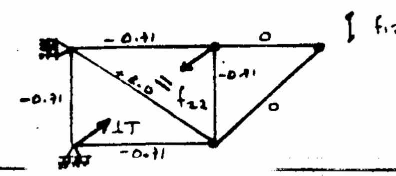


(I) (N)

Solución complementaria



(II) (n_1)



(III) (n_2)

$$\Delta_{10} + f_{11} R_1 + f_{12} R_2 = 0$$
$$\Delta_{20} + f_{21} R_1 + f_{22} R_2 = 0$$

Ecuaciones de compatibilidad.

$F = N + n_1 R_1 + n_2 R_2$

Barra	N	L	NL	n_1	$N n_1 L$	n_2	$N n_2 L$	$n_1 L$	$n_1 n_1 L$	$n_1 n_2 L$	$n_2 L$	$n_2 n_2 L$	F
1-2	0	2	0	-1	0	-0.71	0	-2	2	1.41	-1.41	1	0
2-3	0	2	0	-1	0	0	0	-2	2	0	0	0	-3.32
4-5	-10	2	-20	2	-40	-0.71	14.14	4	8	-2.84	-1.41	1	0
1-4	-10	2	-20	1	-20	-0.71	14.14	2	2	-1.41	-1.41	1	-3.32
2-5	0	2	0	0	0	-0.71	0	0	0	0	-1.41	1	3.32
1-5	14.14	2.8	40	-1.41	-56	1	40	-4	5.6	-4.0	2.82	2.82	4.78
2-4	0	2.8	0	0	0	1	0	0	0	0	2.82	2.82	-4.65
3-5	0	2.8	0	1.41	0	0	0	4	5.6	0	0	0	4.65
				Σ	-116		68.28		25.2	-6.84		9.64	

Δ_{10}: <u>I Real con II Virtual.</u>

$$1 \cdot \Delta_{10} = \Sigma \frac{N n_1}{AE} L \qquad \Delta_{10} = -\frac{116}{AE}$$

Δ_{20}: <u>I Real con III Virtual.</u>

$$1 \cdot \Delta_{20} = \Sigma \frac{N n_2}{AE} L \qquad \Delta_{20} = \frac{68.28}{AE}$$

f_{11}: <u>II Real con II Virtual</u>

$$1 \cdot f_{11} = \Sigma \frac{n_1 n_1}{AE} L \qquad f_{11} = \frac{25.2}{AE}$$

f_{21}: <u>II Real con III Virtual.</u>

$$1 \cdot f_{21} = \Sigma \frac{n_1 n_2}{AE} L \qquad f_{21} = -\frac{6.84}{AE}$$

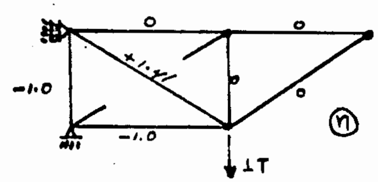
f_{22}: <u>III Real con III Virtual</u> $f_{22} =$

$$1 \cdot f_{22} = \Sigma \frac{n_2 n_2}{AE} L \qquad f_{22} = \frac{9.64}{AE}$$

Subsituyendo en las ecs. de compatibilidad:

$$-116 + 25.2 R_1 - 6.84 R_2 = 0$$
$$68.28 - 6.84 R_1 + 9.64 R_2 = 0$$

cuya solución es: $R_1 = 3.32\ T$, $R_2 = -4.65\ T$



Para calcular Δ_{VS} se integra la armadura original (F) con la armadura virtual que resulta de aplicar una fuerza virtual en el punto de interes a la estructura primaria.

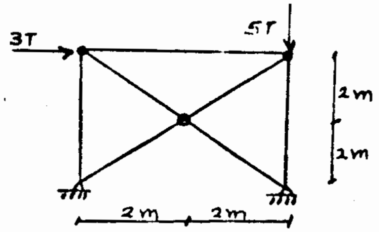
Barra	F	n	L	FnL
1-2	0	0	2	0
2-3	-3.32	0	2	0
4-5	0	-1	2	0
1-4	-3.32	-1	2	6.64
2-5	3.32	0	2	0
1-5	4.78	1.41	2.8	19.12
2-4	-4.65	0	2.8	0
3-5	4.65	0	2.8	0
			Σ	25.76

$$W_{ve} = W_{vi}$$

$$1 \cdot \Delta_{VS} = \Sigma \frac{F n}{AE} L$$

$$\Delta_{VS} = \frac{25.76}{AE}$$

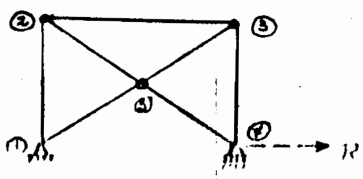
PROBLEMA 13.- Resolver la siguiente armadura :-

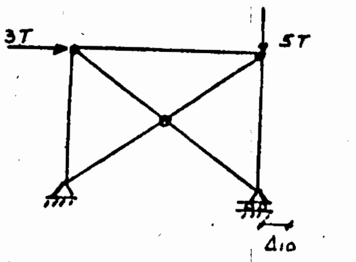


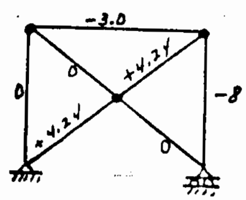
$h_s = b + R - 2j = 7 + 4 - 2(5) = 1$

por lo tanto, sólo hay una redundante.

Estructura primaria.



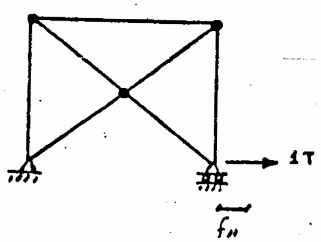


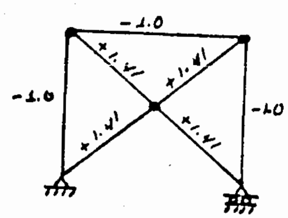


I

N

Solución complementaria.





II

n

$\Delta_{10} + f_{11} R = 0$ Ec. de compatibilidad.

Barra	N	n	L	NnL	nnL	F = N + nR
2-3	-3	-1	4	+12	4	-0.76
2-1	0	-1	4	0	4	2.24
3-4	-8	-1	4	+32	4	-5.76
2-5	0	1.41	2.83	0	5.66	-3.18
3-5	+4.24	1.41	2.83	+16.96	5.66	1.06
1-5	+4.24	1.41	2.83	+16.96	5.66	1.06
4-5	0	1.41	2.83	0	5.66	-3.18
			Σ	77.90	34.64	

Δ_{10}: I Real con II Virtual.

$\Delta_{10} = \Sigma \frac{Nn}{AE} L$ $\Delta_{10} = \frac{77.9}{AE}$

f_{11}: II Real con II Virtual.

$f_{11} = \Sigma \frac{nn}{AE} L$ $f_{11} = \frac{34.64}{AE}$

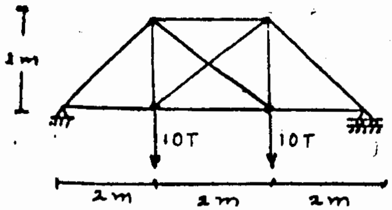
Substituyendo en la ec. de compatibilidad:

$77.9 + 34.64 R = 0$

$\therefore \underline{R = -2.24\,T}$

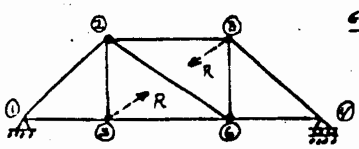
el signo menos indica, que R va en sentido contrario al supuesto.

PROBLEMA 14.- Resolver la armadura siguiente y calcular Δ_{VS}



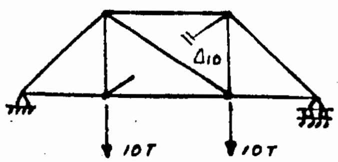
$$h_s = b + R - 2j = 10 + 3 - 2(6) = 1$$

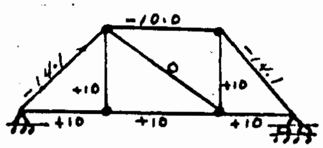
sólo hay una Redundante.



Estructura Primaria

Solución Particular.

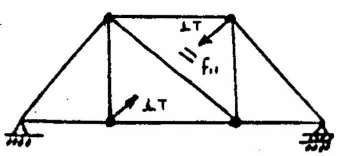


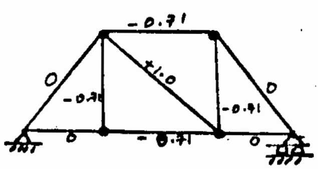


I

N

Solución complementaria.





II

n

$$\Delta_{10} + f_{11} R = 0$$ Ec. de compatibilidad.

Barra	N	η	L	$N\eta L$	$\eta\eta L$	ηR	$F = N + \eta R$
2-3	-10	-0.71	2	14.2	1.01	-2.09	-12.09
1-5	10	0	2	0	0	0	10
5-6	10	-0.71	2	-14.2	1.01	-2.09	7.91
6-4	10	0	2	0	0	0	10
2-5	10	-0.71	2	-14.2	1.01	-2.09	7.91
3-6	10	-0.71	2	-14.2	1.01	-2.09	7.91
1-2	-14.1	0	2.84	0	0	0	-14.1
5-3	0	1	2.84	0	2.83	2.95	2.95
3-4	-14.1	0	2.84	0	0	0	-14.1
2-6	0	1	2.84	0	2.83	2.95	2.95
			Σ	-28.4	9.60		

Δ_{10}: I Real con II Virtual.

$$\Delta_{10} = \Sigma \frac{N\eta}{AE} L \qquad \Delta_{10} = -\frac{28.4}{AE}$$

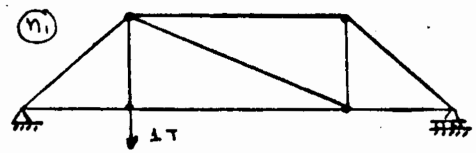
f_{11}: II Real con I Virtual.

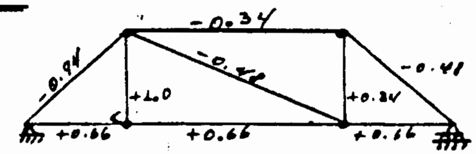
$$f_{11} = \Sigma \frac{\eta\eta}{AE} L \qquad f_{11} = \frac{9.6}{AE}$$

Substituyendo en la ec. de compatibilidad, se tiene:

$R = 2.95\,T$

n_1





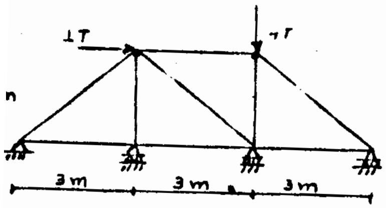
Barra	F	η_1	L	$F\eta_1 L$
2-3	-12.09	-0.34	2	8.22
1-5	10	0.66	2	13.20
5-6	7.91	0.66	2	10.44
6-4	10	0.34	2	6.80
2-5	7.91	1.0	2	15.82
3-6	7.91	0.34	2	5.38
1-2	-14.1	-0.94	2.83	37.50
5-3	2.95	0	2.83	0
3-4	-14.1	-0.48	2.83	19.15
2-6	2.95	-0.48	2.83	-4.0
			Σ	112.50

$$W_{ve} = W_{vi}$$

$$1 \cdot \Delta_{VS} = \Sigma \frac{F\eta_1}{AE} L$$

$$\Delta_{VS} = \frac{112.5}{AE}$$

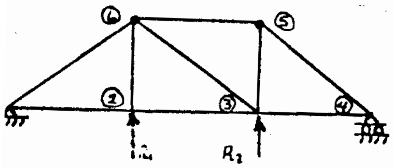
Problema 15. Resolver la siguiente armadura:



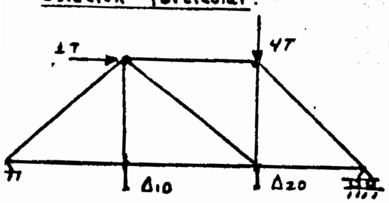
$h_s = b + R - 2j = 9 + 5 - 2(6) = 2$

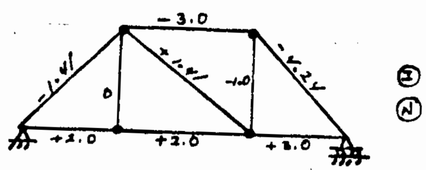
existen dos redundantes.

Estructura Primaria.

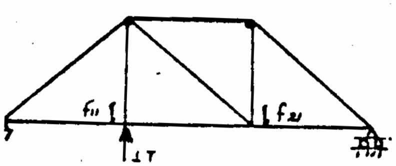


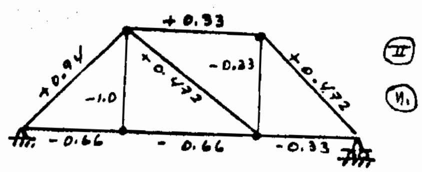
Solución Particular.

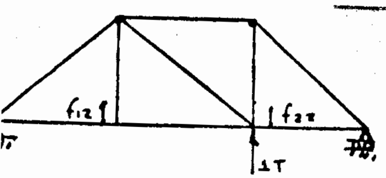


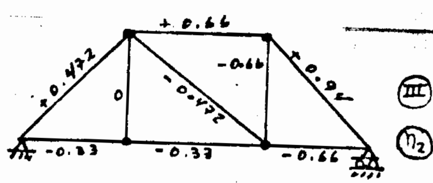


Solución complementaria.









$\Delta_{10} + f_{11} R_1 + f_{12} R_2 = 0$

$\Delta_{20} + f_{21} R_1 + f_{22} R_2 = 0$

Ecuaciones de compatibilidad.

Barra	N	n_1	n_2	L	$N n_1 L$	$N n_2 L$	$n_1 n_1 L$	$n_1 n_2 L$	$n_2 n_2 L$
1-2	2	-0.66	-0.33	3	-3.96	-1.98	1.30	0.65	3.26
2-3	2	-0.66	-0.33	3	-3.96	-1.98	1.30	0.65	3.26
3-4	3	-0.33	-0.66	3	-2.97	-5.94	3.26	0.66	1.30
6-5	-3	0.33	0.66	3	-2.97	-5.94	3.26	0.65	1.30
6-2	0	-1.00	0	3	0	0	3.00	0	0
5-3	-1	-0.33	-0.66	3	0.99	1.98	3.26	0.65	1.30
1-6	-1.41	+0.94	0.472	4.25	-5.64	-2.83	3.75	1.87	0.93
6-3	1.41	0.472	-0.472	4.25	2.83	-2.83	0.93	-0.93	0.43
5-4	-4.24	0.472	0.94	4.25	-8.50	-16.92	0.93	1.87	1.87
				Σ	-24.17	-38.42	+20.99	+6.05	+14.15

Δ_{10}: I real con II Virtual

$$\Delta_{10} = \Sigma \frac{N n_1}{AE} L \qquad \Delta_{10} = -\frac{24.17}{AE}$$

Δ_{20}: I real con III Virtual.

$$\Delta_{20} = \Sigma \frac{N n_2}{AE} L \qquad \Delta_{20} = -\frac{38.42}{AE}$$

f_{11}: II Real con II Virtual

$$f_{11} = \Sigma \frac{n_1 n_1}{AE} L \qquad f_{11} = \frac{21}{AE}$$

f_{12}: II Real con III Virtual

$$f_{12} = \Sigma \frac{n_1 n_2}{AE} L \qquad f_{12} = \frac{6.05}{AE}$$

f_{22}: III Real con III Virtual

$$f_{22} = \Sigma \frac{n_2 n_2}{AE} L \qquad f_{22} = \frac{14.15}{AE}$$

Substituyendo en las ecs. de compatibilidad:

$$-24.17 + 21 R_1 + 6.05 R_2 = 0$$

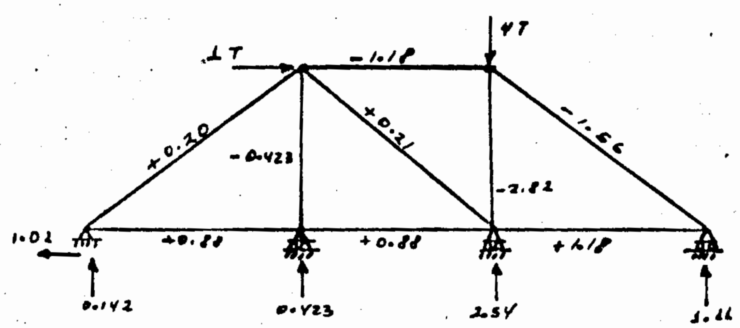
$$-38.42 + 6.05 R_1 + 14.15 R_2 = 0$$

cuya solución es: $R_1 = 0.423\ T$

$R_2 = 2.54\ T$

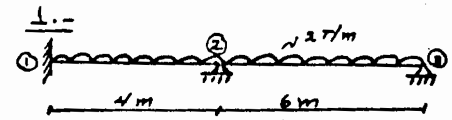
$F = N + n_1 R_1 + n_2 R_2$

Barra	N	$n_1 R_1$	$n_2 R_2$	F
1-2	2	-0.278	-0.84	+0.88
2-3	2	-0.278	-0.84	+0.88
3-4	3	-0.139	-1.68	+1.18
6-5	-3	0.139	1.68	-1.18
6-2	0	-0.423	0	-0.423
5-3	-1	-0.139	-1.68	-2.82
1-6	-1.41	0.397	1.20	+0.20
6-3	1.41	0.200	-1.20	+0.21
5-4	-4.24	0.200	2.48	-1.56



Resolver las vigas siguientes por Flexibilidad

1.-



EI = cte.

Solución:

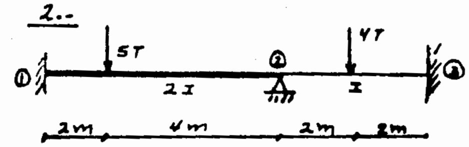
$M_1 = 12.3$ T-m.

$R_1 = 9.93$ T.

$R_2 = 3.50$ T.

$R_3 = 6.80$ T.

2.-



Solución:

$M_1 = -4.55$ T-

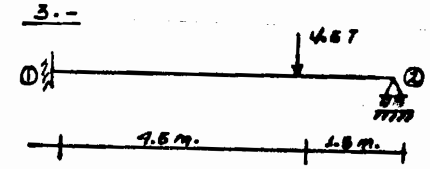
$R_1 = 3.74$ T

$R_2 = 3.3$ T

$R_3 = 1.96$ T

$M_3 = 1.95$ T-m

3.-



EI = cte

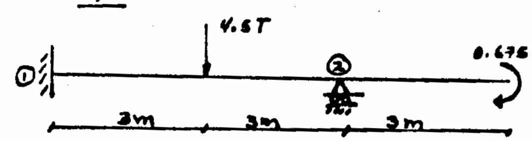
Solución:

$M_1 = -3.21$ T-m

$R_1 = 1.66$ T

$R_2 = 2.84$ T

4.-



EI = CTE.

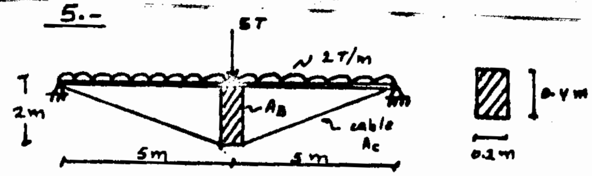
Solución:

$M_1 = -4.7$ T

$R_1 = 2.92$ T

$R_2 = 1.58$ T

5.-



$A_B = 50 \text{ cm}^2$

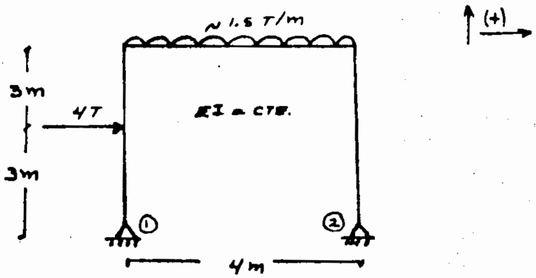
$A_c = 20 \text{ cm}^2$

Solución:

$F_B = 11.5$ T

Resolver por Flexibilidades las Estructuras siguientes :-

1.-



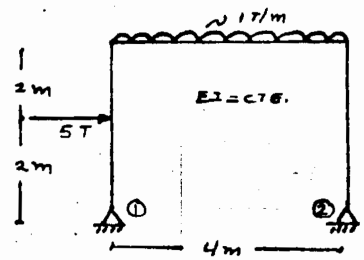
Solución :

$R_{H_1} = -2.64\ T$

$R_{H_2} = -1.35\ T$

$R_{V2} = 6\ T$

2.-



Solución :

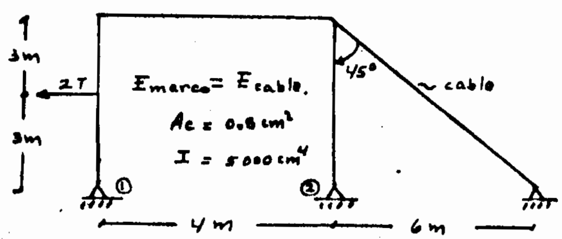
$R_{H_1} = -3.36\ T$

$R_{V1} = -0.5\ T$

$R_{H2} = -1.64\ T$

$R_{V2} = 4.5\ T$

3.-



Solución :

$R_{H_1} = 1\ T$

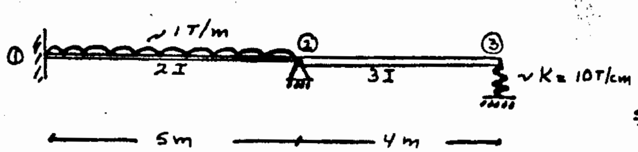
$R_{V1} = 0.086\ T$

$R_{H2} = 0.12\ T$

$R_{V2} = 0.86\ T$

$T = 1.335T$ (Tensión)

4.-



$E = 2 \times 10^6\ kg/cm^2$

$I = 2 \times 10^5\ cm^4$

Solución :

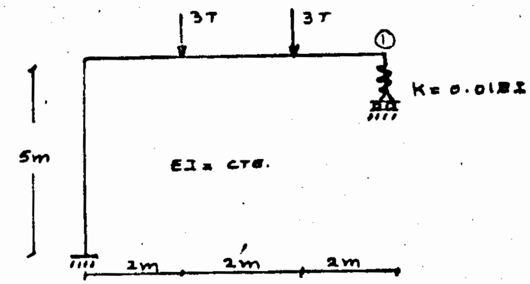
$M_1 = -2.51$ T-M

$R_1 = 2.76\ T$

$R_2 = 2.54\ T$

$R_3 = -0.30\ T$

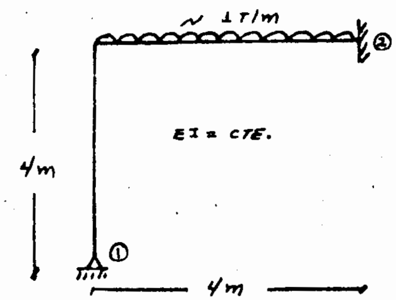
5.-



Solución :

$R_1 = 1.94\ T$

6.-



Solución :

$R_{H1} = 0.144\ T$

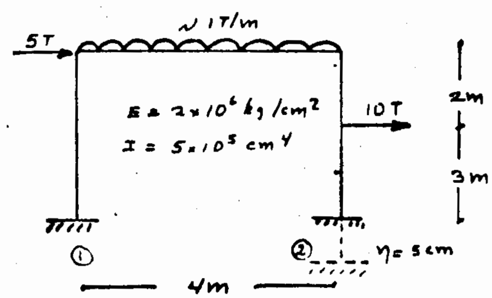
$R_{V1} = 1.72\ T$

$R_{H2} = -0.144\ T$

$R_{V2} = 2.28\ T$

$M_2 = 1.7$ T-m.

7.-



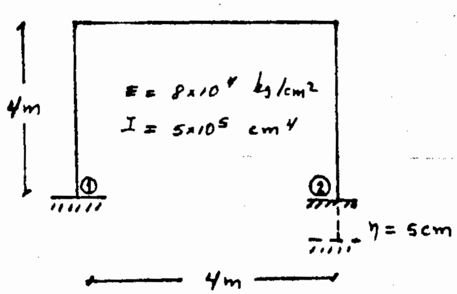
Solución :

$R_{H2} = -11\ T$

$R_{V2} = -104\ T$

$M_2 = 246$ T-m

8.-

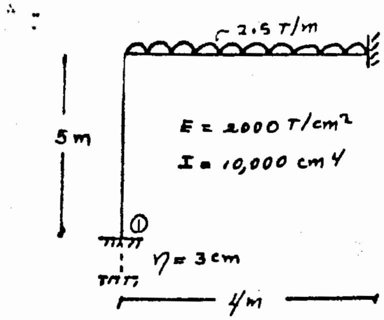


Solución :

$R_{V1} = 5.4\ T$

$R_{V2} = -5.4\ T$

$M_2 = -10.8$ T-m



Solución:

$R_{H1} = -2.51\ T$

$R_{V1} = -2.24\ T$

$M_1 = -4.01\ T\text{-}m$

10.- Encontrar Δ_H del problema 4 pagina 5-8.

Solución:

$$\Delta_H = \frac{7.9}{EI}$$

11.- Encontrar Δ_H del problema 3 pagina 5-5.

Solución:

$$\Delta_H = -\frac{1.68}{EI}$$

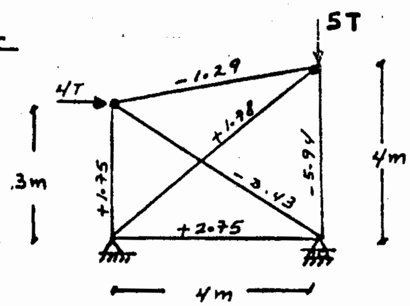
12.- Encontrar Δ_H del problema 6 página 5-12.

Solución:

$$\Delta_H = \frac{5.04}{EI}$$

Resolver las armaduras siguientes por flexibilidades.

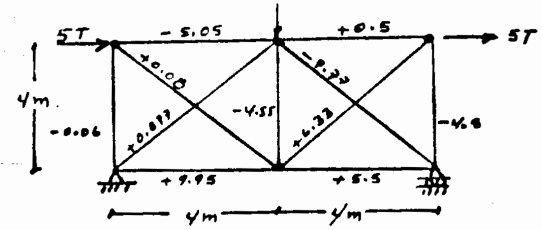
1.-



AE = CTE.

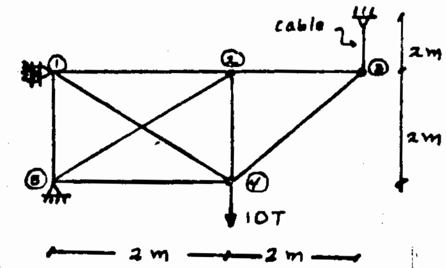
Los resultados se apuntan en la misma figura.

2.-



AE = CTE.

3.-



AE = CTE.

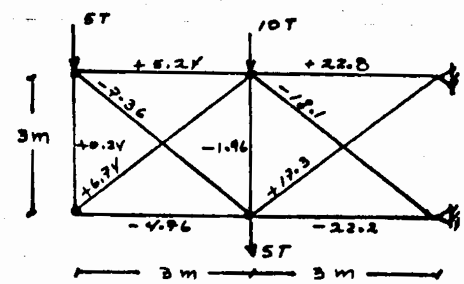
$A_c = 0.5A$

Solución:

$T_c = 2.8\ T$

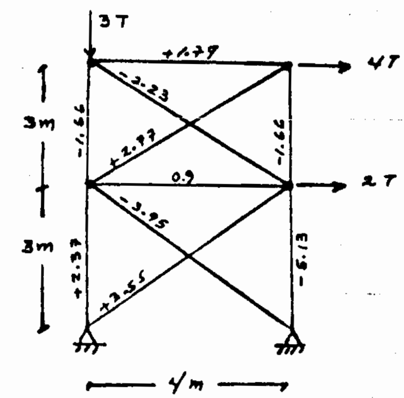
$F_{25} = -5.1\ T$

4.-



AE = CTE.

5.-



AE = CTE.

6.-METODO GENERAL DE RIGIDECES.

PROCEDIMIENTO DEL METODO DE RIGIDECES

1.- DEFINIR UNA ESTRUCTURA CINEMATICAMENTE DETERMINADA ($I_c = 0$), EN LA QUE NO ACTUAN LAS CARGAS EXTERNAS (ESTRUCTURA PRIMARIA)
2.- APLICAR LAS CARGAS EXTERNAS A LA ESTRUCTURA PRIMARIA, CON LO CUAL SE OBTIENEN FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO (SOLUCION PARTICULAR).
3.- FORZAR EL EQUILIBRIO DE LA ESTRUCTURA Y OBTENER SUS RIGIDECES RESPECTIVAS (SOLUCION COMPLEMENTARIA).
4.- DETERMINAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO.
5.- RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO.
6.- CON LOS VALORES OBTENIDOS AL RESOLVER LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO, SE CALCULAN LOS MOMENTOS REALES DE LA ESTRUCTURA ORIGINAL.

MPlo:

Estructura Real

so 1

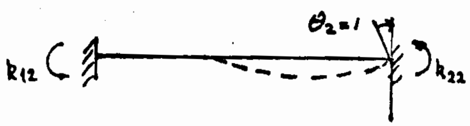
Estructura Primaria $h_c = 0$

aso 2

Solución Particular

aso 3

Solución Complementaria



aso 4

$$M_{20} + M = 0$$

$$M_{20} + k_{22}\theta_2 = 0 \quad \text{Ecuación de equilibrio}$$

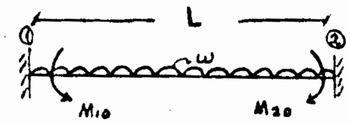
PASO 6 Momentos reales ya conocido θ_2

$$M_{12} = M_{10} + k_{12}\theta_2$$

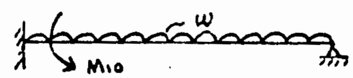
$$M_{21} = 0 \quad (\text{apoyo libre})$$

Comentarios al paso 2

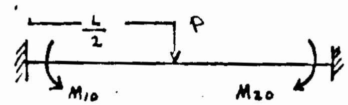
LOS M_{10}, M_{20}, etc. SE LLAMAN MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO Y SUS VALORES YA HAN SIDO CALCULADOS PARA DIFERENTES TIPOS DE CARGA.- A CONTINUACION SE PRESENTAN ALGUNOS CASOS.



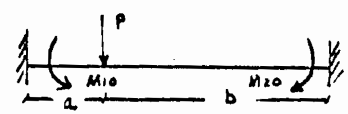
$$M_{10} = M_{20} = \frac{wL^2}{12}$$



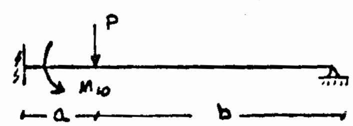
$$M_{10} = \frac{wL^2}{8}$$



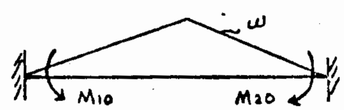
$$M_{10} = M_{20} = \frac{PL}{8}$$



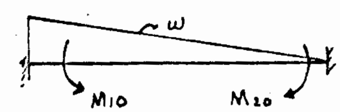
$$M_{10} = \frac{Pab^2}{L^2} \; ; \quad M_{20} = \frac{Pa^2b}{L^2}$$



$$M_{10} = \frac{Pab}{2L^2}(b + L)$$



$$M_{10} = M_{20} = \frac{5wL^2}{96}$$



$$M_{10} = \frac{wL^2}{20} \; ; \quad M_{20} = \frac{wL^2}{30}$$

* Ref: 1.- "TABLES AND FORMULES FOR FIXED END MOMENTS" de PAUL ROGERS, UNSAR -1953
2.- MANUAL MONTERREY
3.- MANUAL "AISC"

COMENTARIOS AL PASO 3

a) MATRIZ DE RIGIDECES DE UN MIEMBRO.

SI SE CONSIDERA UN MIEMBRO $\overline{AB}$ DE UN MARCO PLANO Y SE APLICAN VALORES UNITARIOS DE CADA DESPLAZAMIENTO, RESTRINGIENDO LOS DEMAS, SE OBTIENE UNA MATRIZ CUADRADA DE ORDEN SEIS, QUE REPRESENTA LOS VALORES DE LAS SEIS RESTRICCIONES QUE CORRESPONDEN A CADA UNO DE LOS SEIS POSIBLES DESPLAZAMIENTOS UNITARIOS. ESTA MATRIZ ASI FORMADA, SE DENOMINA "MATRIZ DE RIGIDECES" DEL MIEMBRO $\overline{AB}$ Y ES FUNCION DEL SISTEMA DE EJES DE REFERENCIA QUE SE ELIJA PARA DESCRIBIR LAS FUERZAS Y LOS DESPLAZAMIENTOS EN EL EXTREMO DEL MIEMBRO $\overline{AB}$.

EN EL EJEMPLO QUE SE DA A CONTINUACION, EL SISTEMA DE EJES ESCOGIDO REPRESENTA LO SIGUIENTE: LA DIRECCION (1) Y LA (3) REPRESENTAN LOS GIROS EN LOS PUNTOS (1) y (2) RESPECTIVAMENTE; LA DIRECCION (5) y (6) REPRESENTAN DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES Y LA DIRECCION (2) y (4) NOS INDICAN DESPLAZAMIENTOS VERTICALES.

EL PROCEDIMIENTO DEL EJEMPLO ES SUPONER UNA DEFORMACION EN UNA DIRECCION Y CALCULAR LAS RIGIDECES DEL MIEMBRO DEBIDO A ESA DEFORMACION.- POR EJEMPLO, SE SUPUSO QUE HUBO UN GIRO $u_1 = 1$ EN EL PUNTO (1), A PARTIR DE ELLO SE CALCULO k_{11}, k_{31}, k_{21} y k_{41}.- DESPUES SE SUPUSIERON DEFORMACIONES EN LAS OTRAS DIRECCIONES Y SE CALCULO LA MATRIZ DE RIGIDECES PARA ESE MIEMBRO Y SU RESPECTIVO SISTEMA DE EJES.
LA MATRIZ DE RIGIDECES RESULTA SIEMPRE CUADRADA Y SIMETRICA.

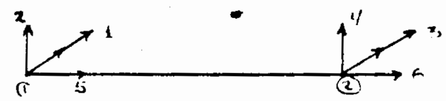
k_{11} : RIGIDEZ EN (1) DEBIDO A UN DESPLAZAMIENTO EN LA DIRECCION UNO.

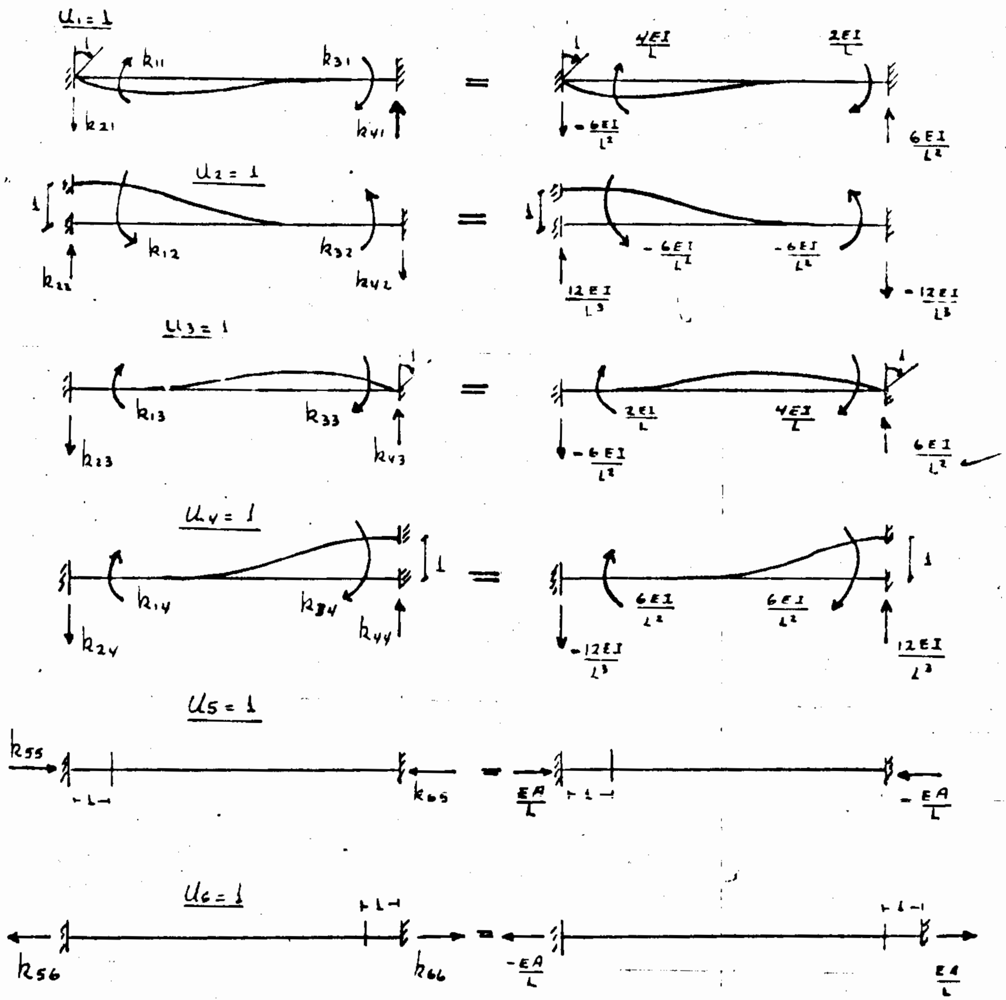
k_{21} : RIGIDEZ EN LA DIRECCION DOS DEBIDA A UNA DEFORMACION EN LA DIRECCION UNO.

k_{34} : RIGIDEZ EN LA DIRECCION TRES DEBIDO A UNA DEFORMACION EN LA DIRECCION CUATRO

ETC. ......

EJEMPLO: encontrar la matriz de rigideces considerando el siguiente sistema de referencia.





La matriz K_M será:

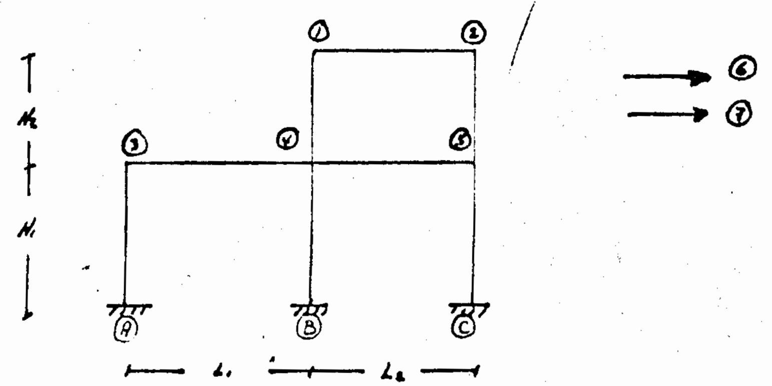
$$
K_M = \begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\
k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\
k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\
k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\
k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\
k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66}
\end{bmatrix}
$$

$$
K_M = \begin{bmatrix}
\frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\
-\frac{6EI}{L} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 \\
\frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\
\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L}
\end{bmatrix}
$$

Que es una matriz simétrica de orden 6 x 6

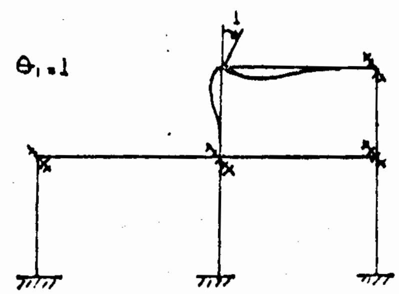
b).- Matriz de rigideces total de una estructura.

Supongamos la siguiente estructura.

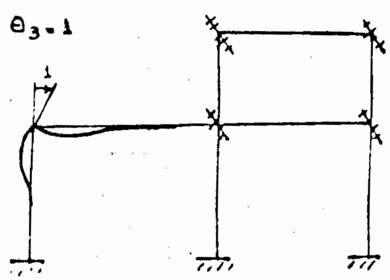


Despreciando deformaciones axiales se tienen siete incógnitas, las cuales son: los giros en los puntos ① a ⑤ y los desplazamientos lineales de ⑥ y ⑦. Por lo tanto la matriz de rigideces total resulta de 7 x 7

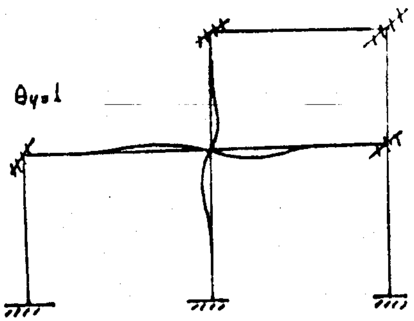
Si $\theta_1 = 1$



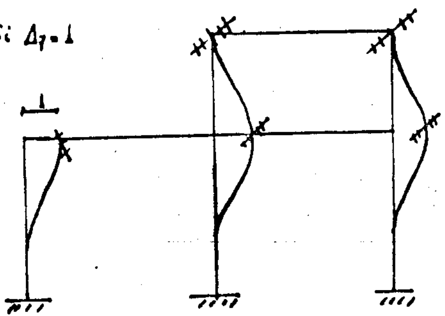
Si $\theta_3 = 1$



Si $\theta_4 = 1$



Si $\Delta_7 = 1$

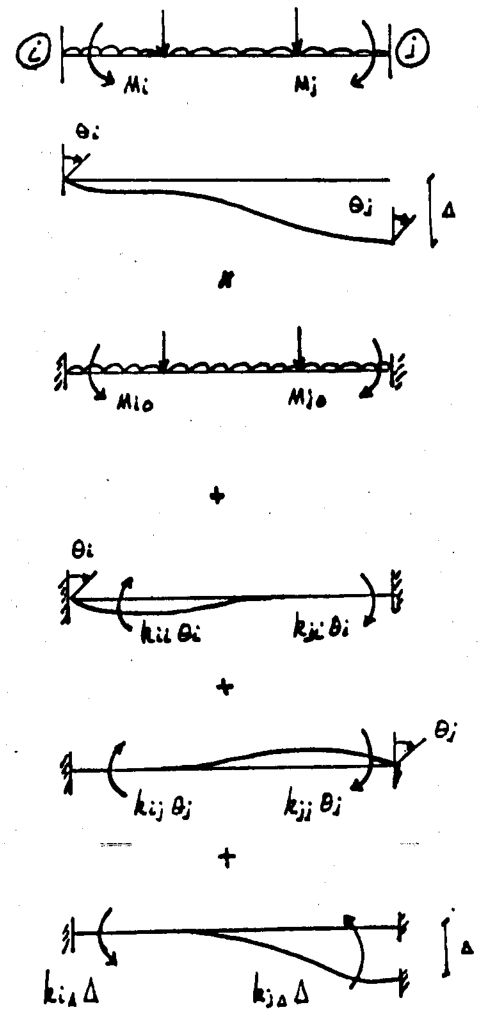


EN FORMA ANALOGA SE VAN DANDO LOS DEMAS DESPLAZAMIENTOS, HASTA OBTENER LA MATRIZ DE RIGIDECES.- LA MATRIZ DE RIGIDECES TOTAL QUEDARIA:

$$
K_M = \begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & 0 & k_{16} & k_{17} \\
k_{21} & k_{22} & 0 & 0 & k_{25} & k_{26} & k_{27} \\
0 & 0 & k_{33} & k_{34} & 0 & 0 & k_{37} \\
k_{41} & 0 & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} \\
0 & k_{52} & 0 & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} \\
k_{61} & k_{62} & 0 & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} \\
k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77}
\end{bmatrix}
$$

COMENTARIOS AL PUNTO 6.

UNA VEZ OBTENIDOS LOS DESPLAZAMIENTOS SE CALCULAN LOS ELEMENTOS MECANICOS COMO SIGUE:



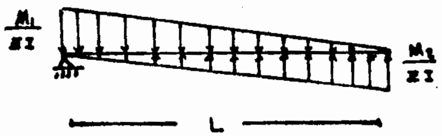
Momentos Reales:

$$M_i = M_{io} + k_{ii}\theta_i + k_{ij}\theta_j + k_{i\Delta}\Delta$$

$$M_j = M_{jo} + k_{ji}\theta_i + k_{jj}\theta_j + k_{j\Delta}\Delta$$

CALCULO DE RIGIDECES ANGULARES

a) MIEMBRO DOBLEMENTE EMPOTRADO.



$$\Sigma M_{①} = 0 \qquad \frac{M_1}{EI}\,\frac{L}{2}\,\frac{L}{3} - \frac{M_2}{EI}\,\frac{L}{2}\,\frac{2}{3}L = 0$$

$$\underline{M_2 = \frac{1}{2} M_1}$$

factor de Transporte = 1/2

EL CORTANTE EN ① DE LA VIGA CONJUGADA ES IGUAL A θ_1 DE LA VIGA REAL.

$$\theta_1 = \frac{1}{EI}\left(M_1 \frac{L}{2} - M_2 \frac{L}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{M_1 L}{4EI} = \theta_1 \qquad \therefore \quad M_1 = \frac{4EI\theta_1}{L}$$

SI $\theta_1 = 1$ $\quad M_1 = k_{11}$ (RIGIDEZ ANGULAR ABSOLUTA)

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_{11} = \frac{4EI}{L}}$$

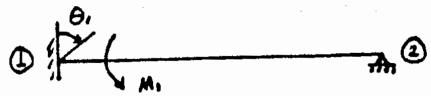
CÓMO EL FACTOR DE TRANSPORTE ES ½ OBTENEMOS:

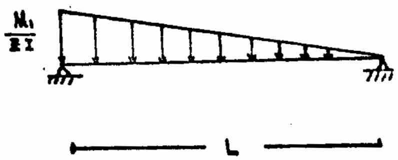
$$\boxed{k_{21} = \frac{2EI}{L}}$$

k_{11} : RIGIDEZ EN ① DEBIDA AL MOMENTO M_1

k_{21} : RIGIDEZ EN ② DEBIDA AL MOMENTO M_1

b) MIEMBRO SIMPLEMENTE APOYADO EN UN EXTREMO.-





VIGA CONJUGADA

EL CORTANTE EN ① DE LA VIGA CONJUGADA ES IGUAL A θ_1 :

$$\Sigma M_{②} = 0 \qquad \theta_1 = \frac{1}{EI}\left(M_1 \frac{L}{2}\,\frac{2}{3}L\,\frac{1}{L}\right)$$

$$\theta_1 = \frac{M_1 L}{3EI}$$

$$M_1 = \frac{3EI\theta_1}{L}$$

SI $\theta_1 = 1$ $\quad M_1 = k_{11}$ (RIGIDEZ ABSOLUTA)

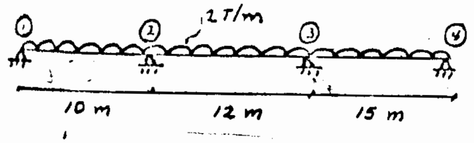
$$\boxed{k_{11} = \frac{3EI}{L}}$$

CONVENCION DE SIGNOS.

LA CONVENCION DE SIGNOS QUE SE USARA EN TODA LA DISCUSION SERA :

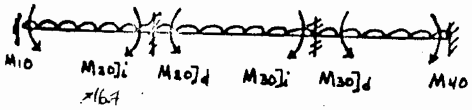
EL MOMENTO Y EL GIRO EN EL SENTIDO DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ SON POSITIVOS.

PROBLEMA 1. Solucionar la siguiente viga:



$EI = 436 \times 10^2 \; T-m^2$

Estructura Primaria



Solución Particular.

Solución complementaria.

$[M] + [K][\theta] = 0$ Ecuación de equilibrio.

$$\left.\begin{aligned}
\bar{M}_{10} + k_{11}\theta_1 + k_{12}\theta_2 &= 0 \\
\bar{M}_{20} + k_{21}\theta_1 + k_{22}\theta_2 + k_{23}\theta_3 &= 0 \\
\bar{M}_{30} + k_{32}\theta_2 + k_{33}\theta_3 + k_{34}\theta_4 &= 0 \\
\bar{M}_{40} + k_{43}\theta_3 + k_{44}\theta_4 &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

$\bar{M}$ se llama "momento de desequilibrio" y es igual a la suma de los momentos en cada empotramiento a la derecha y a la izquierda.

$M_{10} = -\dfrac{\omega L_1^2}{12} = -16.7$

$M_{20}]_i = +16.7$

$M_{20}]_d = -\dfrac{\omega L_2^2}{12} = -24$

$\bar{M}_{20} = -7.3$

$M_{30}]_i = +24$

$M_{30}]_d = -\dfrac{\omega L_3^2}{12} = -37.5$

$\bar{M}_{30} = -13.5$

$M_{40} = +37.5$

$k_{11} = \dfrac{4EI}{L_1} = 17,440$

$k_{22}]_i = \dfrac{4EI}{L_1} = 17,440$

$k_{22}]_d = \dfrac{4EI}{L_2} = 14,533$

$k_{22} = 31,973$

$k_{33}]_i = 14,533$

$k_{33}]_d = \dfrac{4EI}{L_3} = 11,626$

$k_{33} = 26,154$

$k_{44} = 11,626$

$k_{12} = k_{21} = \dfrac{2EI}{L_1} = 8,720$; $k_{23} = k_{32} = \dfrac{2EI}{L_2} = 7,250$; $k_{34} = k_{43} = \dfrac{2EI}{L_3} = 5,813$

Substituyendo estos valores en las ecuaciones (A) se tiene:

$$\begin{aligned}
-16.7 &+ 17,440\,\theta_1 + 8720\,\theta_2 + 0 + 0 = 0 \\
-7.3 &+ 8720\,\theta_1 + 31973\,\theta_2 + 7250\,\theta_3 + 0 = 0 \\
-13.5 &+ 0 + 7250\,\theta_2 + 26,154\,\theta_3 + 5813\,\theta_4 = 0 \\
37.5 &+ 0 + 0 + 5813\,\theta_3 + 11626\,\theta_4 = 0
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, se tiene:

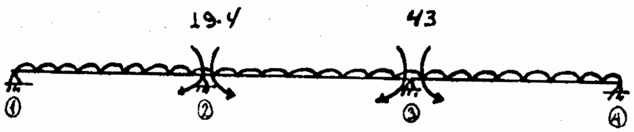
$\theta_1 = 0.00118$ $\qquad \theta_3 = 0.00153$

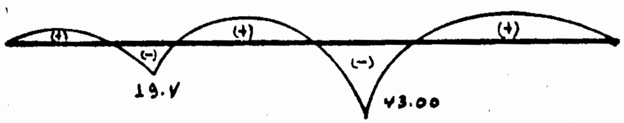
$\theta_2 = -0.00044$ $\qquad \theta_4 = -0.0040$

Momentos Reales:

$$M_{12} = M_{1o} + k_{11}\theta_1 + k_{12}\theta_2$$
$$M_{21} = M_{2o}]_i + k_{21}\theta_1 + k_{22}]_i\,\theta_2$$
$$M_{23} = M_{2o}]_d + k_{22}]_d\,\theta_2 + k_{23}\theta_3$$
$$M_{32} = M_{3o}]_i + k_{32}\theta_2 + k_{33}]_i\,\theta_3$$
$$M_{34} = M_{3o}]_d + k_{33}]_d\,\theta_3 + k_{34}\theta_4$$
$$M_{43} = M_{4o} + k_{43}\theta_3 + k_{44}\theta_4$$

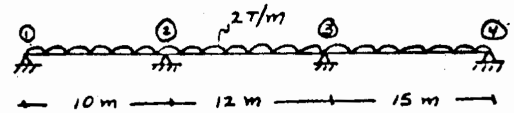
$M_{12} = 0$
$M_{21} = 19.37$ T-m
$M_{23} = -19.37$ "
$M_{32} = 43$ "
$M_{34} = -43$ "
$M_{43} = 0$.





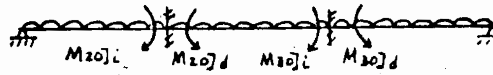
PROBLEMA No. 2

RESOLVER EL PROBLEMA No 1, APLICANDO EL CASO "b" DE LA PAGINA 6.-10

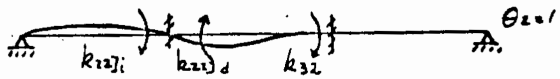


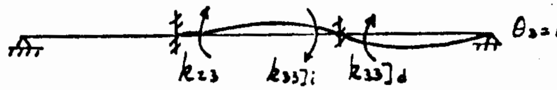
$EI = 436 \times 10^2$ T-m²

Solución Particular.



Solución Complementaria.





$$\left.\begin{array}{l}\bar{M}_{2o} + k_{22}\theta_2 + k_{23}\theta_3 = 0\\ \bar{M}_{3o} + k_{32}\theta_2 + k_{33}\theta_3 = 0\end{array}\right\}$$ Ecuaciones de equilibrio.

$M_{2o}]_i = \dfrac{wL_1^2}{8} = 25$ $\qquad \bar{M}_{2o} = +1$

$M_{2o}]_d = -\dfrac{wL_2^2}{12} = -24$

$M_{3o}]_i = +24$ $\qquad \bar{M}_{3o} = -32.25$

$M_{3o}]_d = -\dfrac{wL_3^2}{8} = -56.25$

$k_{22}]_i = \dfrac{3EI}{L_1} = 130.8 \times 10^2$ $\qquad k_{22} = 276 \times 10^2$

$k_{22}]_d = \dfrac{4EI}{L_2} = 145.5 \times 10^2$

$k_{33}]_i = 145.5 \times 10^2$ $\qquad k_{33} = 232.6 \times 10^2$

$k_{33}]_d = \dfrac{3EI}{L_3} = 87.1 \times 10^2$

$k_{23} = k_{32} = \dfrac{2EI}{L_2} = 72.75 \times 10^2$

Substituyendo en las ecuaciones de equilibrio:

$$1 + 276\times10^2\,\theta_2 + 72.75\times10^2\,\theta_3 = 0$$
$$-32.35 + 72.75\times10^2\,\theta_2 + 232.6\times10^2\,\theta_3 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene:

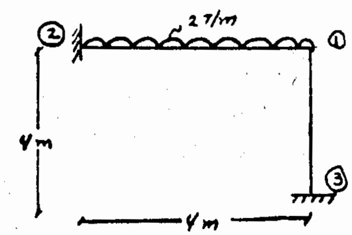
$\theta_2 = -0.00044$ radianes.

$\theta_3 = 0.00153$ "

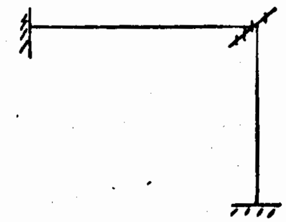
Momentos Reales:

$M_{21} = M_{20}]_i + k_{22}]_i\,\theta_2$	$M_{21} = 19.37$ T-m
$M_{23} = M_{20}]_d + k_{22}]_d\,\theta_2 + k_{23}\,\theta_3$	$M_{23} = -19.37$ "
$M_{32} = M_{30}]_i + k_{32}\,\theta_2 + k_{33}]_i\,\theta_3$	$M_{32} = 43$ "
$M_{34} = M_{30}]_d + k_{33}]_d\,\theta_3$	$M_{34} = -43$ "

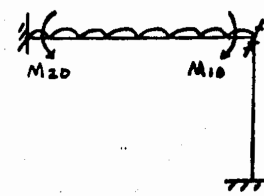
PROBLEMA No. 3.- RESOLVER POR RIGIDECES EL MARCO SIGUIENTE:



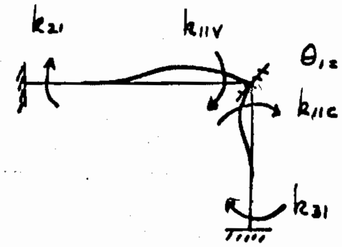
$EI = 213.2\times10^2$ T-m^2



Estructura Primaria $h_e = 0$



Solución Particular.



Solución Complementaria

k_{11v} : Viga

k_{11c} : Columna.

$\bar{M}_{10} + k_{11}\,\theta_1 = 0$ Ec. de equilibrio

$M_{10} = \frac{wL^2}{12} = 2.67$

$M_{20} = -2.67$

$k_{1v} = \frac{4EI}{L} = 213 \times 10^2$

$k_{11} = 426 \times 10^2$

$k_{1c} = 213 \times 10^2$

$k_{21} = \frac{2EI}{L} = 106.5 \times 10^2$

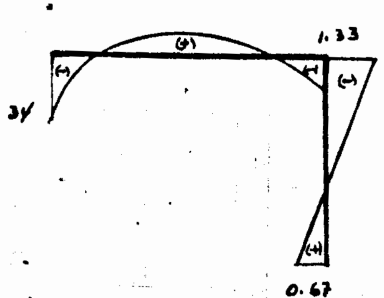
$k_{31} = 106.5 \times 10^2$

Substituyendo en la ecuación de equilibrio:

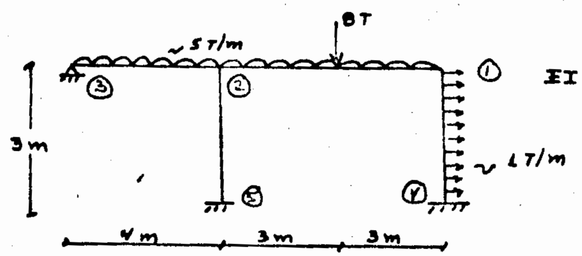
$2.67 + 426 \times 10^2\, \theta_1 = 0 \quad \therefore \quad \theta_1 = -0.0000625$

cálculo de los momentos reales:

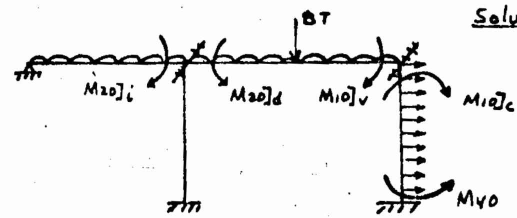
$M_{12} = M_{10} + k_{1v}\,\theta_1$	$M_{12} = 1.33$ T-m
$M_{13} = k_{1c}\,\theta_1$	$M_{13} = -1.33$ "
$M_{21} = M_{20} + k_{21}\,\theta_1$	$M_{21} = -3.34$ "
$M_{31} = k_{31}\,\theta_1$	$M_{31} = -0.67$ "



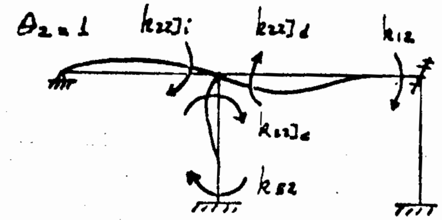
PROBLEMA No. 4.- RESOLVER POR RIGIDECES EL MARCO SIGUIENTE.

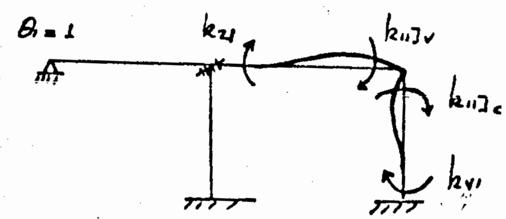


Solución Particular.



Solución Complementaria.





$\bar{M}_{10} + k_{11}\,\theta_1 + k_{12}\,\theta_2 = 0$

$\bar{M}_{20} + k_{21}\,\theta_1 + k_{22}\,\theta_2 = 0$

ecuaciones de equilibrio.

$M_{10}]_v = \frac{\omega L^2}{12} + \frac{PL}{8} = +21$

$\bar{M}_{10} = 21.75$

$M_{10}]_c = \frac{\omega L^2}{12} = 0.75$

$M_{20}]_i = \frac{\omega L^2}{8} = 10$

$\bar{M}_{20} = -11$

21.75 + 3

$M_{20}]_d = -\frac{\omega L^2}{12} - \frac{PL}{8} = -21$

$M_{40} = -\frac{\omega L^2}{12} = -0.75$

$k_{11}]_v = \frac{4EI}{L} = 6,666$

$k_{11}]_c = \frac{4EI}{L} = 13,333$

$k_{11} = 20,000$

$k_{22}]_i = \frac{3EI}{L} = 7500$

$k_{22}]_d = \frac{4EI}{L} = 6,666$

$k_{22} = 27,500$

$k_{22}]_c = \frac{4EI}{L} = 13,333$

$k_{12} = \frac{2EI}{L} = 3,333$

$k_{52} = \frac{2EI}{L} = 6,666$

$k_{41} = \frac{2EI}{L} = 6,666$

Substituyendo en las ecuaciones de equilibrio:

$$21.75 + 20,000\,\theta_1 + 3,333\,\theta_2 = 0$$
$$-11.00 + 3,333\,\theta_1 + 27,500\,\theta_2 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene:

$$\theta_1 = -0.00118$$
$$\theta_2 = 0.00054$$

Cálculo de los momentos reales:

$M_{12} = M_{10}]_v + k_{11}]_v\,\theta_1 + k_{12}\,\theta_2$ — $M_{12} = 14.95$ T-m

$M_{14} = M_{10}]_c + k_{11}]_c\,\theta_1$ — $M_{14} = -14.95$ "

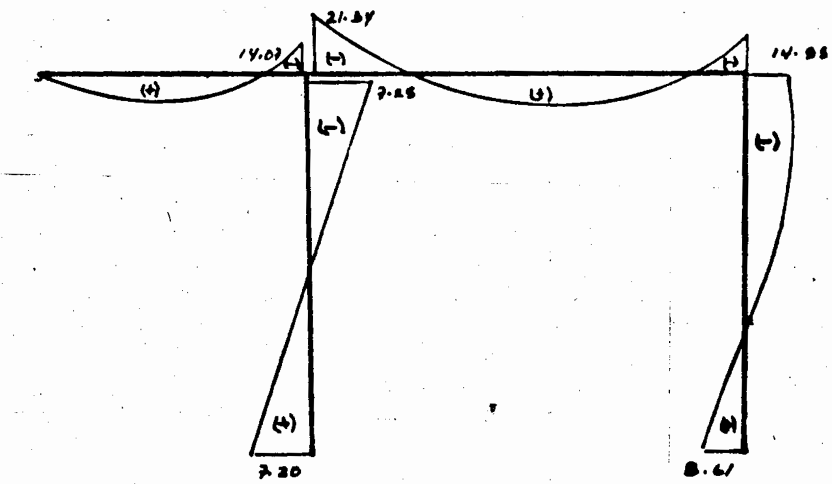
$M_{21} = M_{20}]_d + k_{21}\,\theta_1 + k_{22}]_d\,\theta_2$ — $M_{21} = -21.34$ "

$M_{23} = M_{20}]_i + k_{22}]_i\,\theta_2$ — $M_{23} = 14.07$ "

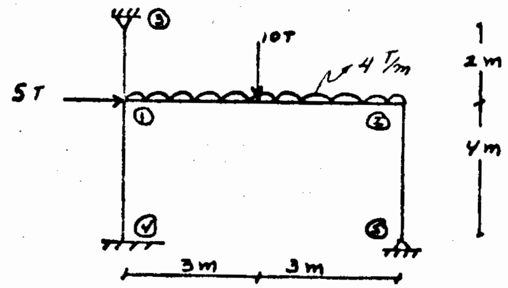
$M_{25} = k_{22}]_c\,\theta_2$ — $M_{25} = 7.25$ "

$M_{52} = k_{52}\,\theta_2$ — $M_{52} = 7.86$ "

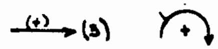
$M_{41} = k_{41}\,\theta_1$ — $M_{41} = -3.60$ "



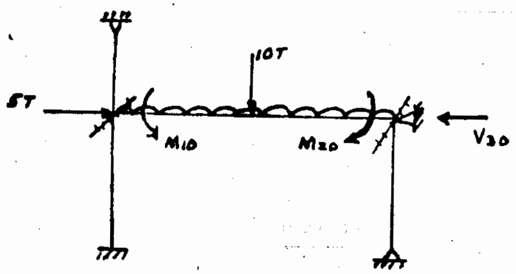
PROBLEMA No. 5.- RESOLVER POR RIGIDECES EL MARCO SIGUIENTE:



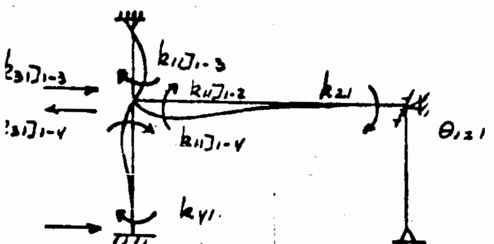
$EI = 10{,}000 \text{ T-m}^2$



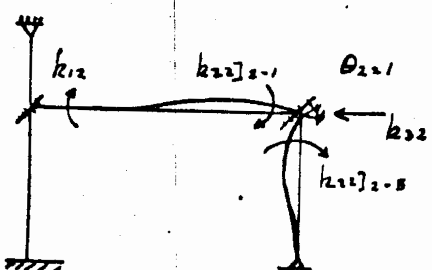
EN ESTE CASO EXISTE UN DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL Y POR LO TANTO EXISTIRAN DETERMINADAS RIGIDECES QUE SE OPONDRAN A DICHO DESPLAZAMIENTO.

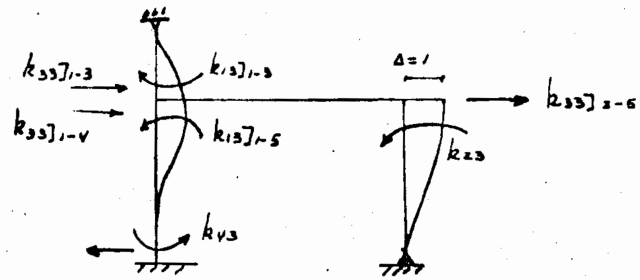


Solución Particular.



Solución Complementaria.





$$M_{10} + k_{11}\theta_1 + k_{12}\theta_2 + k_{13}\Delta = 0$$
$$M_{20} + k_{21}\theta_1 + k_{22}\theta_2 + k_{23}\Delta = 0$$
$$V_{30} + k_{31}\theta_1 + k_{32}\theta_2 + k_{33}\Delta = 0$$

ecuaciones de equilibrio.

$$M_{10} = -\frac{wL^2}{12} - \frac{PL}{8} = -19.5$$

$$M_{20} = +19.5$$

$$V_{30} = -5$$

$$k_{11}]_{1-2} = \frac{4EI}{L} = 6{,}666$$

$$k_{11}]_{1-3} = \frac{3EI}{L} = 15{,}000 \qquad k_{11} = 31{,}667$$

$$k_{11}]_{1-4} = \frac{4EI}{L} = 10{,}000$$

$$k_{22}]_{2-1} = \frac{4EI}{L} = 6{,}667$$

$$k_{22} = 14{,}167$$

$$k_{22}]_{2-5} = \frac{3EI}{L} = 7{,}500$$

$$k_{31}]_{1-3} = \frac{3EI}{L^2} = 7500$$

$$k_{31} = 3750$$

$$k_{31}]_{1-4} = -\frac{6EI}{L^2} = -3750$$

$$k_{33}]_{1-3} = \frac{3EI}{L^3} = 3750$$

$$k_{33}]_{1-4} = \frac{12EI}{L^3} = 1875 \qquad k_{33} = 6100$$

$$k_{33}]_{2-5} = \frac{3EI}{L^3} = 470$$

$k_{23} = -\frac{3EI}{L^2} = -1875$

Substituyendo en las ecuaciones de equilibrio:

$$-19.5 + 31{,}667\,\theta_1 + 3333\,\theta_2 + 3750\,\Delta = 0$$
$$19.5 + 3333\,\theta_1 + 14167\,\theta_2 - 1875\,\Delta = 0$$
$$-5 + 3750\,\theta_1 - 1875\,\theta_2 + 6100\,\Delta = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene:

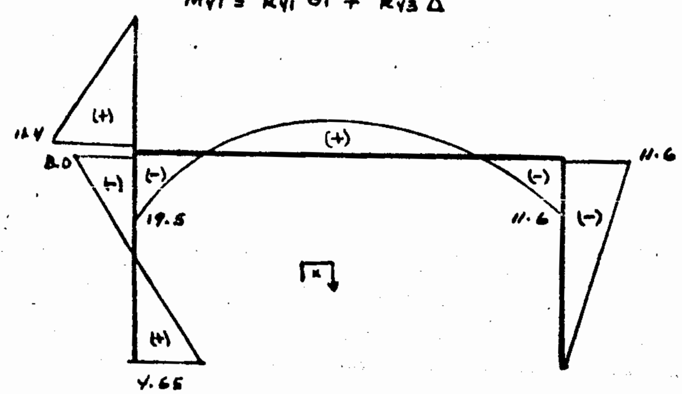
$\theta_1 = 0.00081$

$\theta_2 = -0.0016$

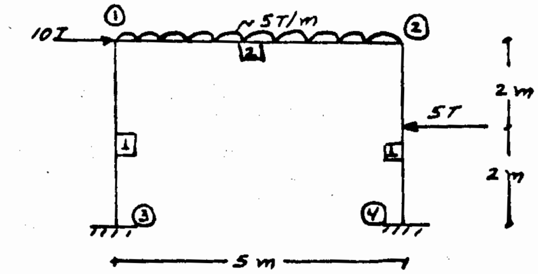
$\Delta = -0.000157$

Momentos Reales:

$M_{12} = M_{10} + k_{11}]_{1-2}\,\theta_1 + k_{12}\,\theta_2$	$M_{12} = -19.5$ T-m
$M_{13} = k_{11}]_{1-3}\,\theta_1 + k_{13}]_{1-3}\,\Delta$	$M_{13} = 11.4$ "
$M_{14} = k_{11}]_{1-4}\,\theta_1 + k_{13}]_{1-3}\,\Delta$	$M_{14} = 8.0$ "
$M_{21} = M_{20} + k_{21}\,\theta_1 + k_{22}]_{2-1}\,\theta_2$	$M_{21} = 11.6$ "
$M_{25} = k_{22}]_{2-5}\,\theta_2 + k_{23}\,\Delta$	$M_{25} = -11.6$ "
$M_{41} = k_{41}\,\theta_1 + k_{43}\,\Delta$	$M_{41} = 4.65$ "

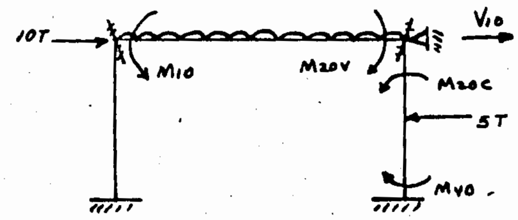


6.-23

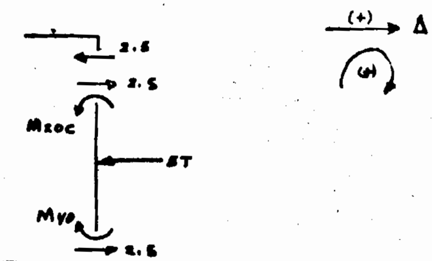


$EI_1 = 40{,}000$ T-m²
$EI_2 = 60{,}000$ T-m²

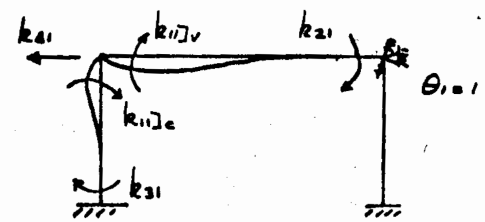
INCOGNITAS: θ_1, θ_2 y Δ

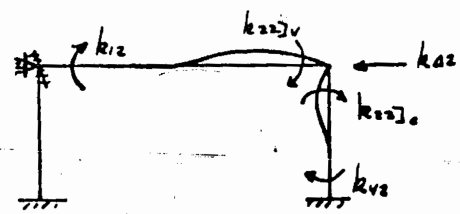


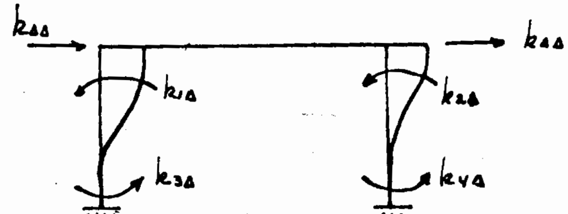
Solución Particular.



Solución Complementaria.







6.-24

$M_{10v} = -\frac{\omega L^2}{12} = -10.42$

$M_{20v} = +10.42$

$\bar{M}_{20} = 7.92$

$M_{20c} = -\frac{PL}{8} = -2.5$

$M_{40} = +2.5$

$\bar{V}_0 = 2.5 - 10 = -7.5$

$k_{11}]_c = \frac{4EI_1}{L} = 40,000$

$k_{11} = 88,000$

$k_{11}]_v = \frac{4EI_2}{L} = 48,000$

$k_{22}]_v = \frac{4EI_2}{L} = 48,000$

$k_{22} = 88,000$

$k_{22}]_c = \frac{4EI_1}{L} = 40,000$

$k_{12} = k_{21} = \frac{1}{2} k_{22}]_v = 24,000$

$k_{31} = \frac{1}{2} k_{11}]_c = 20,000$

$k_{42} = \frac{1}{2} k_{22}]_c = 20,000$

$k_{\Delta 1} = k_{\Delta 2} = -\frac{6EI_1}{L^2} = -15,000$

$k_{1\Delta} = k_{2\Delta} = k_{3\Delta} = k_{4\Delta} = -\frac{6EI_1}{L^2} = -15,000$

$k_{\Delta\Delta} = 2\left[\frac{12EI_1}{L^3}\right] = 7500$

Substituyendo en las ecuaciones de equilibrio:

$$\bar{M}_{10} + k_{11}\theta_1 + k_{12}\theta_2 + k_{1\Delta}\Delta = 0$$
$$\bar{M}_{20} + k_{21}\theta_1 + k_{22}\theta_2 + k_{2\Delta}\Delta = 0$$
$$\bar{V}_0 + k_{\Delta 1}\theta_1 + k_{\Delta 2}\theta_2 + k_{\Delta\Delta}\Delta = 0$$

$$-10.42 + 88,000\,\theta_1 + 24,000\,\theta_2 - 15,000\,\Delta = 0$$
$$7.92 + 24,000\,\theta_1 + 88,000\,\theta_2 - 15,000\,\Delta = 0$$
$$-7.5 - 15,000\,\theta_1 - 15,000\,\theta_2 + 15,000\,\Delta = 0$$

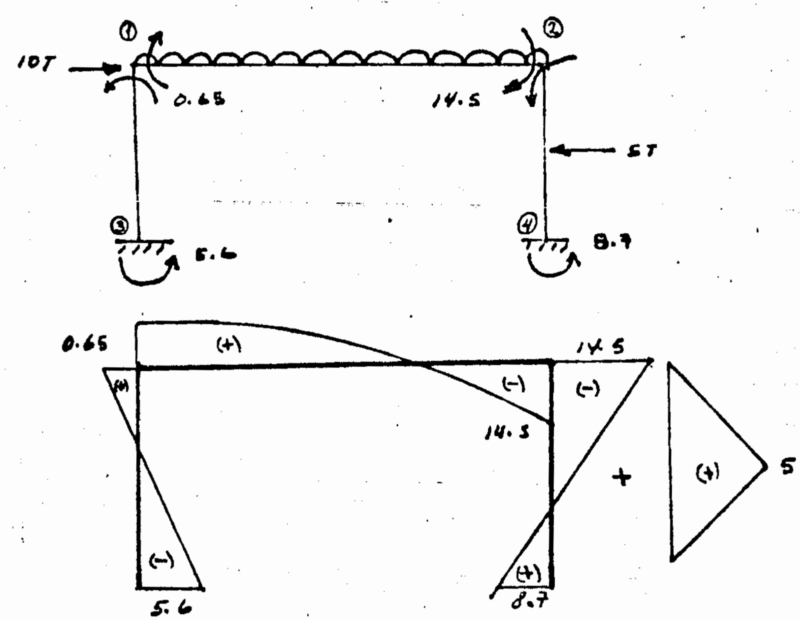
Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene:

$\theta_1 = 0.00025$
$\theta_2 = -0.00004$
$\Delta = 0.00071$

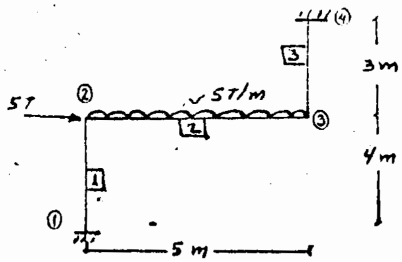
cálculo de los momentos reales:

$M_{13} = k_{11}]_c\,\theta_1 + k_{1\Delta}\Delta$
$M_{12} = M_{10v} + k_{11}]_v\,\theta_1 + k_{12}\theta_2$
$M_{31} = k_{31}\theta_1 + k_{3\Delta}\Delta$
$M_{21} = M_{20v} + k_{21}\theta_1 + k_{22}]_v\,\theta_2$
$M_{24} = M_{20c} + k_{22}]_c\,\theta_2 + k_{2\Delta}\Delta$
$M_{42} = M_{40} + k_{42}\theta_2 + k_{4\Delta}\Delta$

$M_{13} = -0.65$ T-m
$M_{12} = 0.65$ "
$M_{31} = -5.6$ "
$M_{21} = 14.5$ "
$M_{24} = -14.5$ "
$M_{42} = -8.7$ "

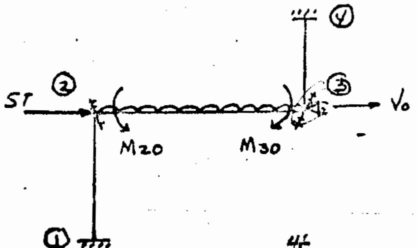


PROBLEMA 7.- TRAZAR EL DIAGRAMA DE MOMENTOS.

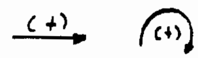


Barra	EI
1	40,000
2	60,000
3	30,000

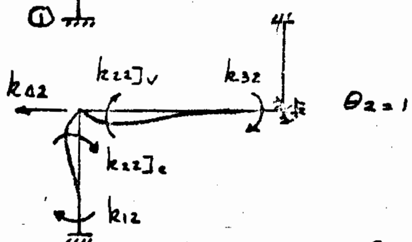
INCOGNITAS : θ_2, θ_3 y Δ

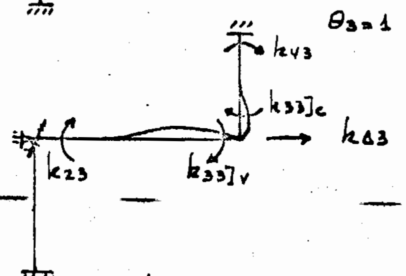


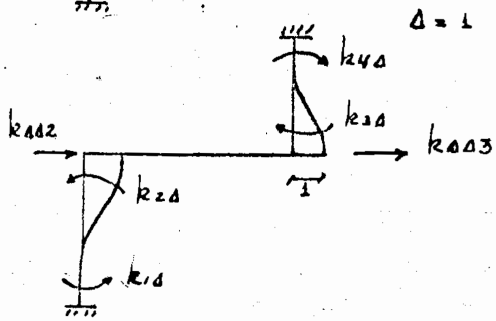
Solución Particular



Solución Complementaria.







$$\bar{M}_{20} + k_{22}\theta_2 + k_{23}\theta_3 + k_{2\Delta}\Delta = 0$$
$$\bar{M}_{30} + k_{32}\theta_2 + k_{33}\theta_3 + k_{3\Delta}\Delta = 0$$
$$\bar{V}_o + k_{\Delta 2}\theta_2 + k_{\Delta 3}\theta_3 + k_{\Delta\Delta}\Delta = 0$$

ecuaciones de equilibrio

$$\bar{M}_{20} = -\frac{wL^2}{12} = -10.4$$

$$M_{30} = +10.4$$

$$\bar{V}_o = -5$$

$$k_{22} = k_{22}]_v + k_{22}]_c = \frac{4EI_2}{L_2} + \frac{4EI_1}{L_1} = 88,000$$

$$k_{33} = k_{33}]_v + k_{33}]_c = \frac{4EI_2}{L_2} + \frac{4EI_1}{L_1} = 88,000$$

$$k_{32} = \frac{1}{2}\,k_{22}]_v = 24,000$$

$$k_{12} = \frac{1}{2}\,k_{22}]_c = 20,000$$

$$k_{23} = \frac{1}{2}\,k_{33}]_v = 24,000$$

$$k_{43} = \frac{1}{2}\,k_{33}]_c = 20,000$$

$$k_{1\Delta} = k_{2\Delta} = -\frac{6EI_1}{L_1^2} = -15,000$$

$$k_{3\Delta} = k_{4\Delta} = \frac{6EI_3}{L_3^2} = 20,000$$

$$k_{\Delta 2} = -\frac{6EI_1}{L_1^2} = -15,000$$

$$k_{\Delta 3} = \frac{6EI_3}{L_3^2} = 20,000$$

$$k_{\Delta\Delta 2} = \frac{12EI_1}{L_1^3} = 7,500$$

$$k_{\Delta\Delta 3} = \frac{12EI_3}{L_3^3} = 13,333$$

Substituyendo en las ecuaciones de equilibrio:

$$-10.4 + 88000\,\theta_2 + 24000\,\theta_3 - 15000\,\Delta = 0$$

$$10.4 + 24000\,\theta_2 + 88000\,\theta_3 + 20000\,\Delta = 0$$

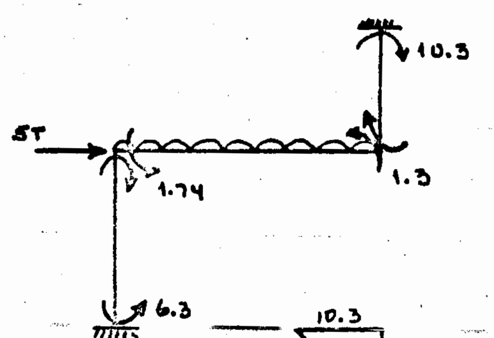
$$-5 - 15000\,\theta_2 + 20000\,\theta_3 + 20800\,\Delta = 0$$

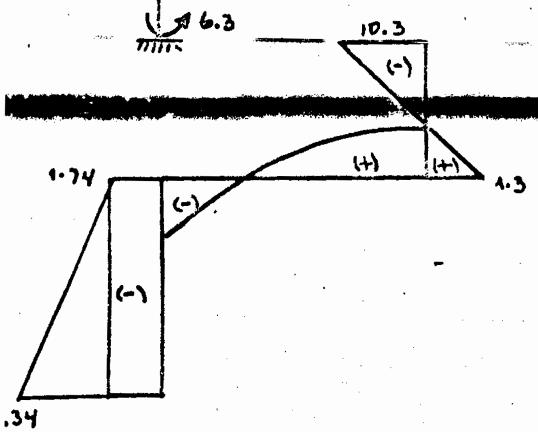
LA SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES ES:

$\theta_2 = 0.000402 \qquad \theta_3 = -0.000445 \qquad \Delta = 0.000957$

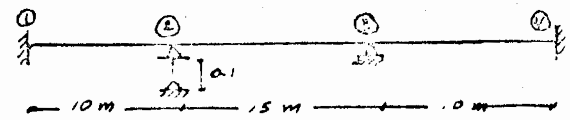
MENTOS REALES

$M_{21} = k_{22}]_c\,\theta_2 + k_{2\Delta}\,\Delta$	$M_{21} = 1.74$ T-m
$M_{23} = M_{20} + k_{22}]_v\,\theta_2 + k_{23}\theta_3$	$M_{23} = -1.74$ "
$M_{32} = M_{30} + k_{32}\,\theta_2 + k_{33}]_v\,\theta_3$	$M_{32} = -1.3$ "
$M_{34} = k_{33}]_c\,\theta_3 + k_{3\Delta}\,\Delta$	$M_{34} = 1.3$ "
$M_{12} = k_{12}\,\theta_2 + k_{1\Delta}\,\Delta$	$M_{12} = -6.3$ "
$M_{43} = k_{43}\,\theta_3 + k_{4\Delta}\,\Delta$	$M_{43} = 10.3$ "





PROBLEMA 8.- TRAZAR EL DIAGRAMA DE MOMENTOS:-

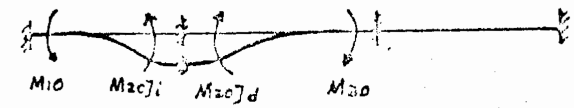


Desplazamiento forzado = 0.1 m

EI = 10,000 T-m²

Incognitas: θ_2 y θ_3

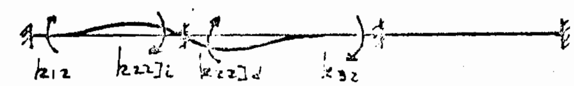
Solución Particular.



$\Delta = 0.1$ m

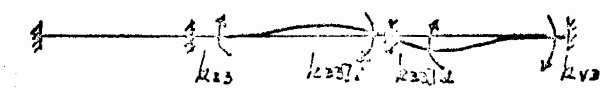
(+)

Solución Complementaria



$\theta_2 = 1$

$\theta_3 = 1$



$M_{10} = -\frac{6EI}{L^2}\Delta = -60$

$M_{20}]_i = +60$

$\bar{M}_{20}]_d = M_{30} = \frac{6EI}{L^2}\Delta = 26.7$ $\qquad \bar{M}_{20} = -33.3$

$k_{22}]_i = \frac{4EI}{L} = 4{,}000$

$k_{22}]_d = \frac{4EI}{L} =$ [illegible] $\qquad k_{22} = 6{,}660$

$k_{33}]_i = \frac{4EI}{L} = 2{,}660$

$k_{33}]_d = \frac{4EI}{L} = 4{,}000$ $\qquad k_{33} = 6{,}660$

$k_{12} = \frac{1}{2}\,k_{22}]_i = 2000$

$k_{32} = \frac{1}{2}\,k_{22}]_d = 1330$

$k_{23} = \frac{1}{2}\, k_{33}]_i = 1330$

$k_{43} = \frac{1}{2}\, k_{33}]_d = 2000$

Substituyendo en las ecuaciones de equilibrio:

$\bar{M}_{20} + k_{22}\,\theta_2 + k_{23}\,\theta_3 = 0$

$\bar{M}_{30} + k_{32}\,\theta_2 + k_{33}\,\theta_3 = 0$

$-33.3 + 6660\,\theta_2 + 1330\,\theta_3 = 0$

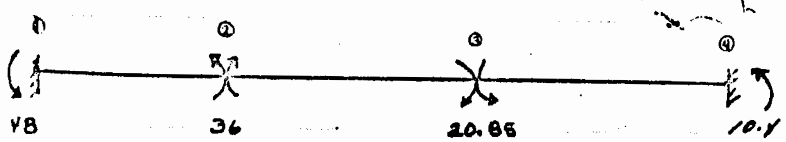
$26.7 + 1330\,\theta_2 + 6660\,\theta_3 = 0$

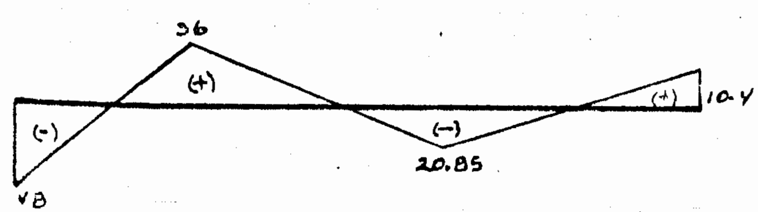
cuya solución es: $\theta_2 = 0.006$

$\underline{\theta_3 = -0.0052}$

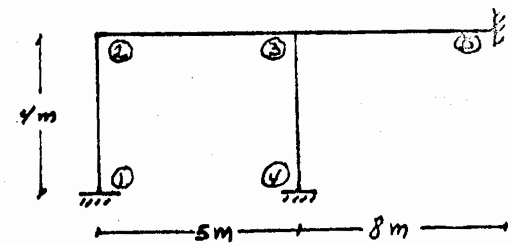
Momentos Reales:

$M_{21} = M_{20}]_i + k_{22}]_i\,\theta_2$	$M_{21} = -36$ T-m
$M_{23} = M_{20}]_d + k_{22}]_d\,\theta_2 + k_{23}\theta_3$	$M_{23} = 36$ "
$M_{32} = M_{30} + k_{32}\theta_2 + k_{33}]_i\,\theta_3$	$M_{32} = 20.85$ "
$M_{34} = k_{33}]_d\,\theta_3$	$M_{34} = -20.86$ "
$M_{12} = M_{10} + k_{12}\,\theta_2$	$M_{12} = -48$ "
$M_{43} = k_{43}\,\theta_3$	$M_{43} = -10.4$ "





PROBLEMA 9.- TRAZAR el DIAGRAMA DE MOMENTOS:-

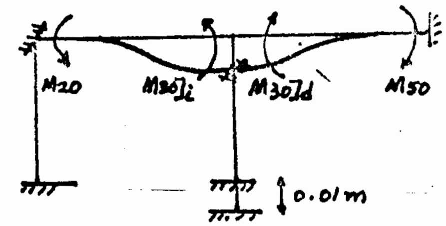


Existe un desplazamiento vertical igual a 0.01 m. en 4

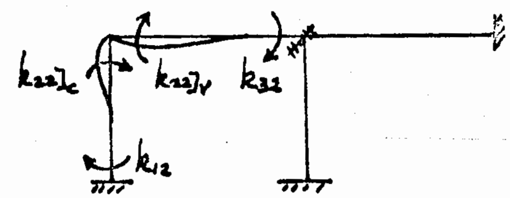
$EI = 2\times10^4$ T-m²

$\eta_4 = 0.01$ m

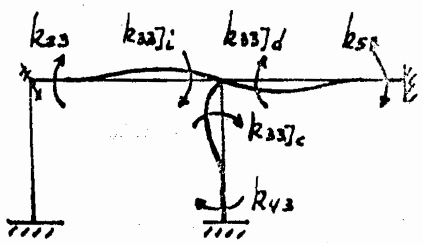
Solución Particular:



Solución complementaria:



$\theta_2 = 1$



$\theta_3 = 1$

$\bar{M}_{20} + k_{22}\theta_2 + k_{23}\theta_3 = 0$ $\bar{M}_{30} + k_{32}\theta_2 + k_{33}\theta_3 = 0$	Ecuaciones de equilibrio.

$M_{20} = -\frac{6EI}{L^2}\Delta = -48$

$M_{30}]_i = M_{20} = -48$

$\bar{M}_{30} = -29.2$

$M_{30}]_d = \frac{6EI}{L^2}\Delta = 18.8$

$M_{50} = M_{30}]_d = 18.8$

$k_{22}]_v = \frac{4EI}{L} = 16{,}000$

$k_{22} = \cancel{16{,}000}\ 36{,}000$

$k_{22}]_c = \frac{4EI}{L} = 20{,}000$

$k_{33}]_i = \frac{4EI}{L} = 16{,}000$

$k_{33}]_d = \frac{4EI}{L} = 10{,}000$

$k_{33} = 46{,}000$

$k_{33}]_c = \frac{4EI}{L} = 20{,}000$

$k_{12} = \frac{1}{2}\,k_{22}]_c = 10{,}000$

$k_{32} = \frac{1}{2}\,k_{22}]_v = 8{,}000$

$k_{43} = \frac{1}{2}\,k_{33}]_c = 10{,}000$

$k_{53} = \frac{1}{2}\,k_{33}]_d = 5{,}000$

substituyendo en las ecuaciones de equilibrio:

$-48 + 36{,}000\,\theta_2 + 8{,}000\,\theta_3 = 0$

$-29.2 + 8{,}000\,\theta_2 + 46{,}000\,\theta_3 = 0$

cuya solución es:

$\theta_2 = 0.00125$

$\theta_3 = 0.00042$

Cálculo de los momentos reales:

$M_{21} = k_{22}]_c\,\theta_2$

$M_{23} = M_{20} + k_{22}]_v\,\theta_2 + k_{23}\theta_3$

$M_{34} = k_{33}]_c\,\theta_3$

$M_{32} = M_{30}]_i + k_{32}\theta_2 + k_{33}]_i\,\theta_3$

$M_{35} = M_{30}]_d + k_{33}]_d\,\theta_3$

$M_{12} = k_{12}\theta_2$

$M_{43} = k_{43}\theta_3$

$M_{53} = M_{50} + k_{53}\theta_3$

$M_{21} = 24.6$ T-m

$M_{23} = -24.6$ "

$M_{34} = 8.4$ "

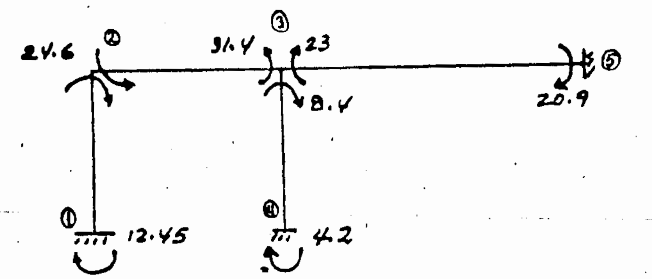
$M_{32} = -31.4$ "

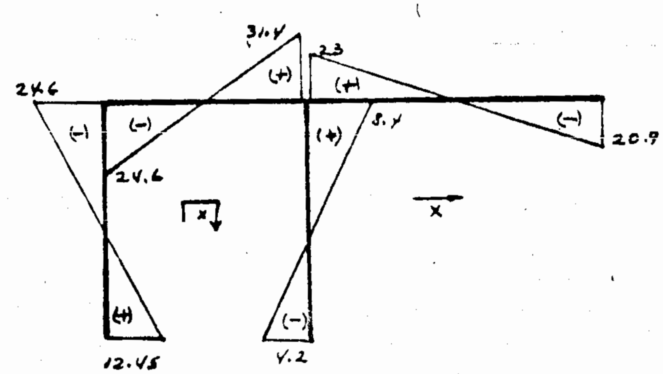
$M_{35} = 23$ "

$M_{12} = 12.45$ "

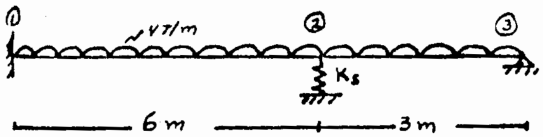
$M_{43} = 4.2$ "

$M_{53} = 20.9$ "





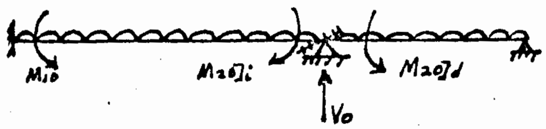
Problema 10.– Resolver por Rigideces la viga siguiente:



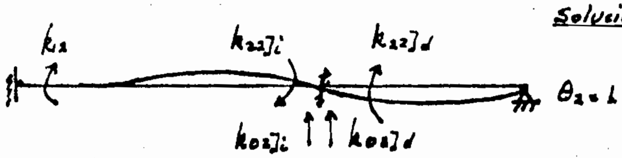
$EI = 1 \times 10^4 \; T\text{-}m^2$

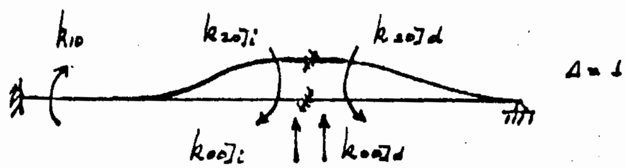
$K_s = 0.1\, EI$

Solución Particular



Solución Complementaria.





$$\bar{M}_{20} + k_{22}\theta_2 + k_{20}\Delta = 0$$
$$V_0 + k_{02}\,\theta_2 + (k_{00}\Delta + k_s\Delta) = 0$$

Ecuaciones de equilibrio.

Nota: SIEMPRE QUE EXISTA UN RESORTE ELASTICO, LA RIGIDEZ DEL RESORTE SE INCLUYE EN LA DIAGONAL PRINCIPAL CORRESPONDIENTE DE LA MATRIZ DE RIGIDECES Y SIEMPRE CON SIGNO POSITIVO.

EN ESTE EJEMPLO $+k_s\Delta$ SE INCLUYE EN LA DIAGONAL PRINCIPAL CORRESPONDIENTE COMO SE MUESTRA EN LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO.

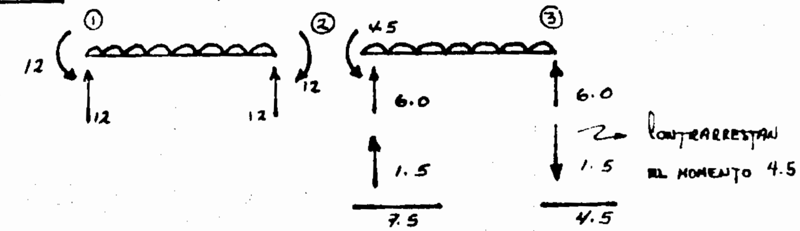
$M_{20}]_d = -\dfrac{wL^2}{8} = -4.5$

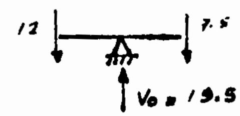
$\bar{M}_{20} = 7.5$

$M_{20}]_i = \dfrac{wL^2}{12} = 12$

$M_{10} = -\dfrac{wL^2}{12} = -12$

Cálculo de Vo: Se descompone la viga de la solución particular:





$k_{22}]_i = \dfrac{4EI}{L} = 6667$

$k_{22} = 16{,}667$

$k_{22}]_d = \dfrac{3EI}{L} = 10\,000$

$k_{20}]_i = \dfrac{6EI}{L^2} = 1670$

$k_{20} = -1{,}667$

$k_{20}]_d = -\dfrac{3EI}{L^2} = -3333$

$k_{02}]_i = \dfrac{6EI}{L^2} = 1670$

$k_{02} = -1{,}667$

$k_{02}]_d = -\dfrac{3EI}{L^2} = -3333$

$k_{00}]_i = \dfrac{12EI}{L^3} = 555$

$k_{00} = 1{,}666$

$k_{00}]_d = \dfrac{3EI}{L^3} = 1111$

$k_{12} = \frac{1}{2}\, k_{22}]_i = 3333$

$k_{10} = \frac{1}{2}\, k_{20}]_i = 1670$

Substituyendo en las ecuaciones de equilibrio:

$$7.5 + 16,667\,\theta_2 - 1667\,\Delta = 0$$

$$19.5 - 1667\,\theta_2 + (1,666+1000)\Delta = 0$$

cuya solución es:

$$\theta_2 = -0.00126$$

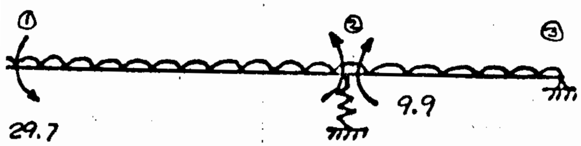
$$\Delta = -0.0081$$

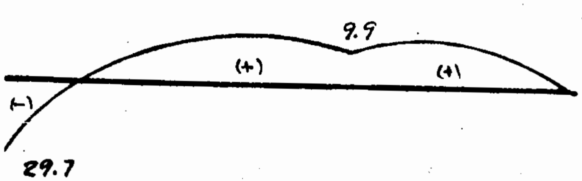
Calculo de los momentos Reales:

$M_{21} = M_{20}]_i + k_{22}]_i\,\theta_2 + k_{20}]_i\,\Delta$ $\qquad M_{21} = -9.9$ T-m

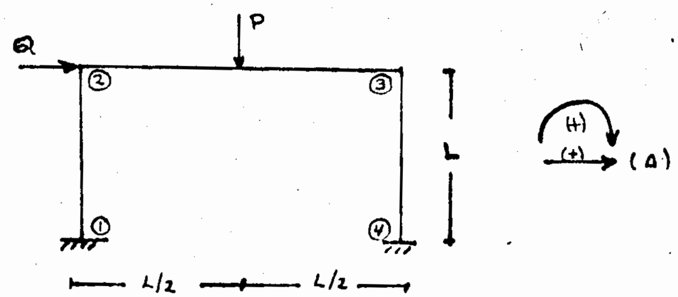
$M_{23} = M_{20}]_d + k_{22}]_d\,\theta_2 + k_{20}]_d\,\Delta$ $\qquad M_{23} = +9.9$ "

$M_{12} = M_{10} + k_{12}\,\theta_2 + k_{10}\,\Delta$ $\qquad M_{12} = -29.7$ "

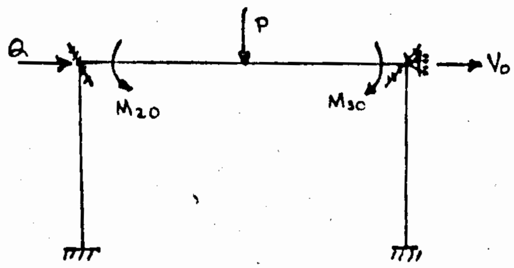




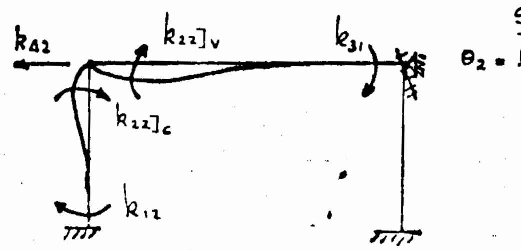
PROBLEMA 11.2 Plantear las ecuaciones de equilibrio por el método de las rigideces para el siguiente marco:

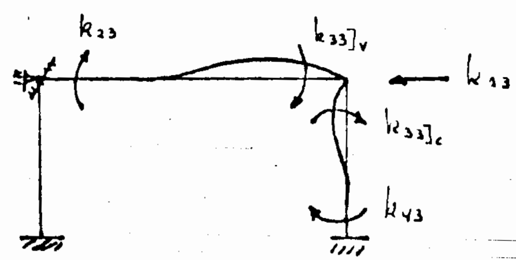


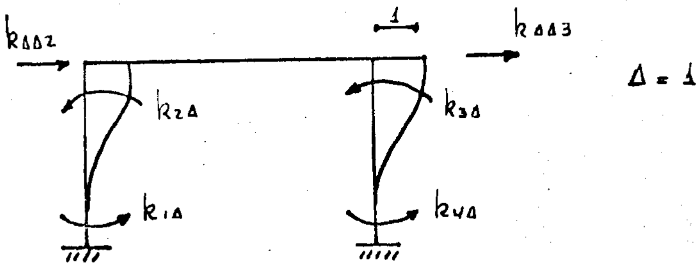
Solución Particular.



Solución complementaria.







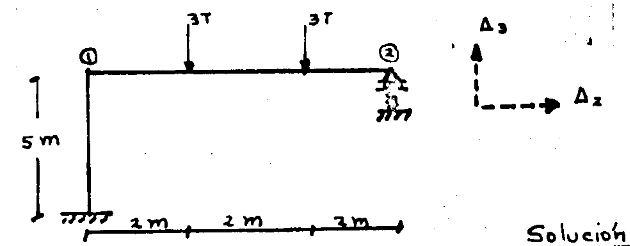
Las ecuaciones de equilibrio serán:

$$\bar{M}_{20} + k_{22}\theta_2 + k_{23}\theta_3 + k_{2\Delta}\Delta = 0$$

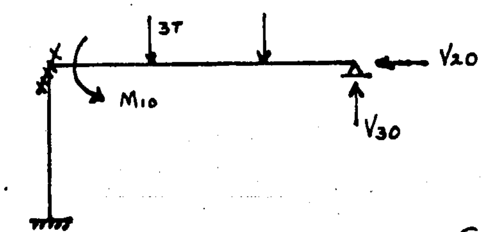
$$\bar{M}_{30} + k_{32}\theta_2 + k_{33}\theta_3 + k_{3\Delta}\Delta = 0$$

$$\bar{V}_0 + k_{\Delta 2}\theta_2 + k_{\Delta 3}\theta_3 + k_{\Delta\Delta}\Delta = 0$$

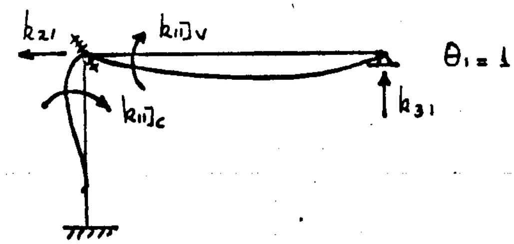
PROBLEMA 12.- Plantear las ecuaciones de equilibrio para el marco siguiente:

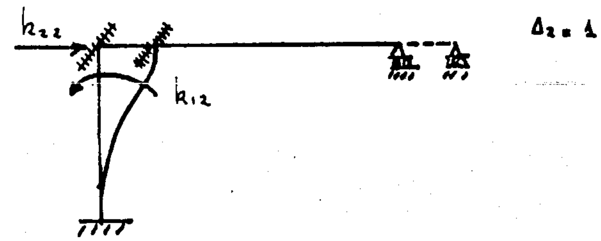


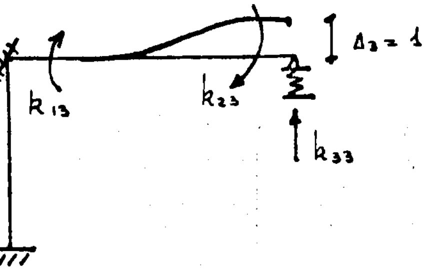
Solución Particular.



Solución Complementaria:







Las ecuaciones de equilibrio serán :

$$M_{10} + k_{11}\theta_1 + k_{12}\Delta_2 + k_{13}\Delta_3 = 0$$

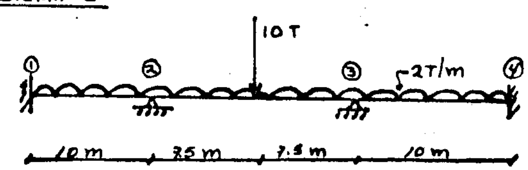
$$V_{20} + k_{21}\theta_1 + k_{22}\Delta_2 = 0$$

$$V_{30} + k_{31}\theta_1 + k_{33}\Delta_3 + \underbrace{k_R\,\Delta_3}_{\text{resorte.}} = 0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS.

Resolver las estructuras siguientes por el método General de Rigideces.-

PROBLEMA 1

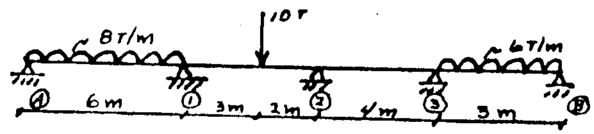


EI = 10,000 T-m²

Solución :

$M_{12} = -1.77$ T-m
$M_{21} = 46.6$ "
$M_{23} = -46.6$ "

PROBLEMA 2.

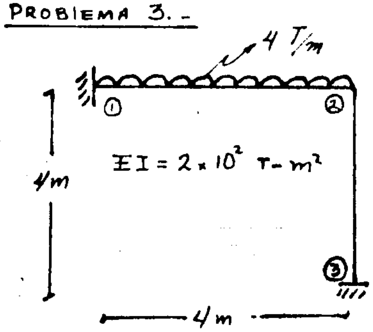


EI = 68 x 10² T-m²

Solución :

$M_{1A} = +23.9$ T-m
$M_{12} = -23.9$ "
$M_{21} = 2.08$ "
$M_{23} = -2.08$ "
$M_{32} = 3.50$ "
$M_{3B} = -3.50$ "

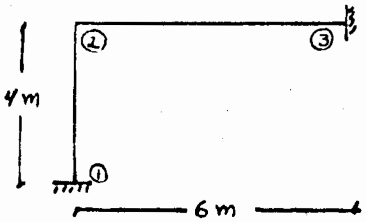
PROBLEMA 3.-



Solución :

$M_{12} = -6.67$ T-m
$M_{21} = 2.67$ "
$M_{23} = -2.67$ "
$M_{32} = -1.33$ "

Problema 4.



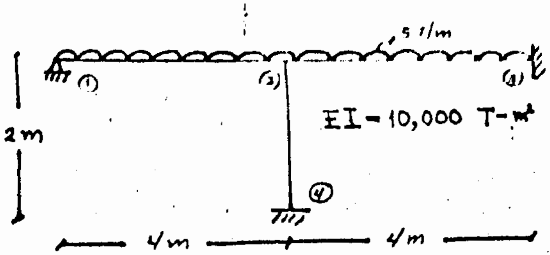
Desplazamiento forzado en ① igual a 0.1 m ↓.

$EI = 10{,}000\ T\text{-}m^2$

Solución :-

$M_{21} = -100$ T-m
$M_{23} = 100$ "
$M_{32} = 133$ "
$M_{12} = -50$ "

Problema 5.



Desplazamiento forzado en (4) igual a 0.01 m ↓

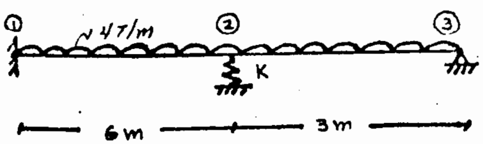
$EI = 10{,}000\ T\text{-}m^2$

Solución :

$M_{21} = -13$ T-m
$M_{24} = -12$ "
$M_{23} = 25$ "
$M_{32} = 41$ "
$M_{42} = -6$ "

Problema 6.-

a) $K = 0.1\,EI$
b) $K = \infty$

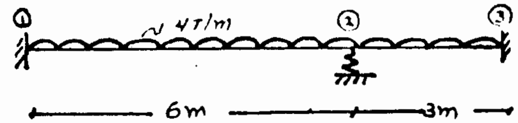


Solución :

a) $M_{21} = -9.9$ T-m
$M_{23} = 9.9$ "

b) $M_{21} = 9.0$ T-m
$M_{23} = -9.0$ "

Problema 7.

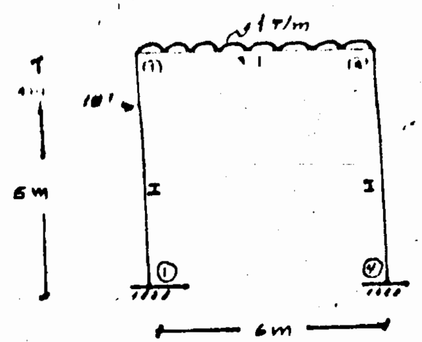


$EI = 4 \times 10^2\ T\text{-}m^2$
$K = 0.1\,EI$

Solución :

$M_{21} = -5.21$ T-m
$M_{23} = 5.21$ "

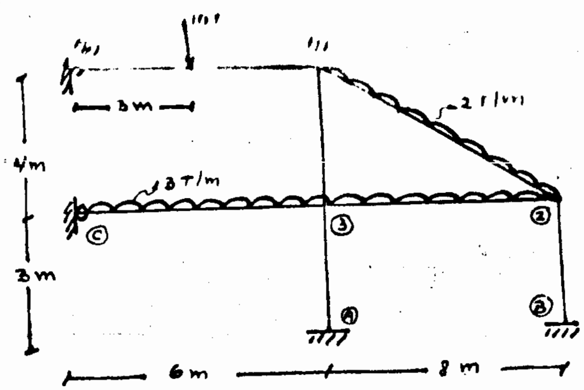
Problema 8.-



Solución :

[illegible]
[illegible]
$M_{14} = 1.6$ "
$M_{32} = 11.27$ "
$M_{34} = -11.27$ "
$M_{43} = -12.27$ "

Problema 9.



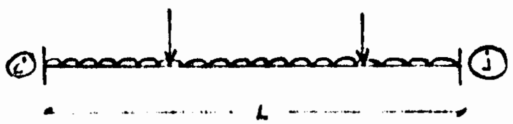
Solución :

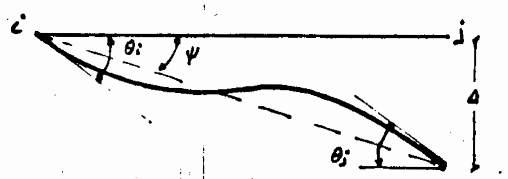
$M_{1...}$ [illegible]
$M_{12} = -19.48$ "
$M_{13} =$ [illegible] "
$M_{21} = 7.76$ "
$M_{2B} = -17.52$ "
$M_{23} = 9.76$ "
$M_{32} = -18.97$ "
$M_{3A} = 41.88$ "
$M_{3C} = 14.21$ "
$M_{31} = 2.48$ "

7.- METODO PENDIENTE - DEFLEXION.

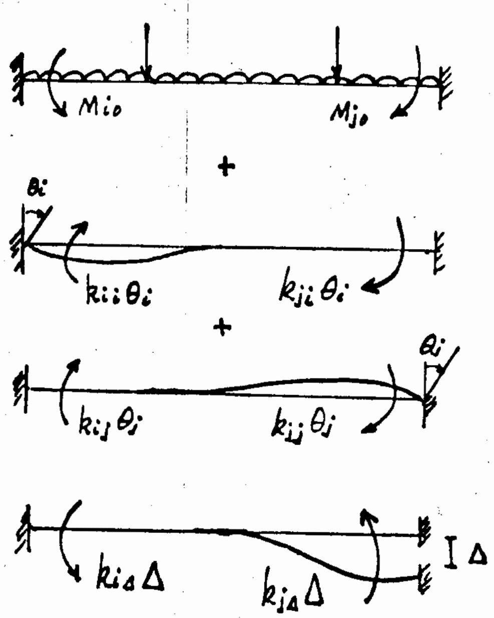
LAS ECUACIONES QUE SE USAN EN ESTE METODO NO CONSIDERAN EFECTOS DE FUERZA CORTANTE NI DE FUERZA NORMAL, SOLAMENTE EFECTOS POR FLEXION.

a) Caso para extremos empotrados.





(VIGA DEFORMADA).



$$M_i = M_{io} + k_{ii}\,\theta_i + k_{ij}\,\theta_j + k_{i\Delta}\,\Delta$$

$$M_i = M_{io} + \frac{4EI}{L}\,\theta_i + \frac{2EI}{L}\,\theta_j + \left(-\frac{6EI}{L^2}\right)\Delta \qquad (1)$$

$$M_j = M_{jo} + k_{ji}\,\theta_i + k_{jj}\,\theta_j + k_{j\Delta}\,\Delta$$

$$M_j = M_{jo} + \frac{2EI}{L}\,\theta_i + \frac{4EI}{L}\,\theta_j - \frac{6EI}{L^2}\,\Delta \qquad (2)$$

DE LA FIGURA SE OBSERVA QUE: $\psi = \frac{\Delta}{L}$ $\therefore$ $\Delta = \psi L$

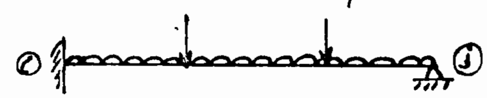
SUBSTITUYENDO EN (1) Y (2) SE OBTIENE:

$$\boxed{\begin{aligned} M_{ij} &= M_{io} + \frac{2EI}{L}\left(2\theta_i + \theta_j \pm 3\psi\right) \\ M_{ji} &= M_{jo} + 2EI\left(\theta_i + 2\theta_j \pm 3\psi\right) \end{aligned}} \qquad (I)$$

LAS ECUACIONES ANTERIORES DETERMINAN LOS MOMENTOS REALES UNA VEZ CONOCIDOS LOS DESPLAZAMIENTOS.

EL SIGNO $\pm$ ESTA EN FUNCION DEL DESPLAZAMIENTO ψ.- SE USARA POSITIVO CUANDO ψ GIRE EN SENTIDO CONTRARIO A LAS MANECILLAS DEL RELOJ Y NEGATIVO EN CASO CONTRARIO.

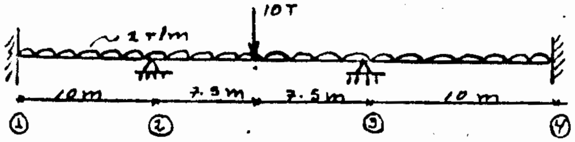
b) Caso para extremo articulado.



SE SIGUE EL MISMO PROCEDIMIENTO QUE EN EL CASO a) Y SE OBTIENE LA SIGUIENTE ECUACION:

$$\boxed{M_i = M_{io} + \frac{2EI}{L}\left(1.5\,\theta_i \pm 1.5\,\psi\right)} \qquad (II)$$

DE LA VIGA SIGUIENTE.



$EI = 10\,000 \quad T\text{-}m^2$

$$\Sigma M_2 = 0 \Rightarrow M_{21} + M_{23} = 0$$
$$\Sigma M_3 = 0 \Rightarrow M_{32} + M_{34} = 0 \quad \text{———— (A)}$$

APLICANDO LA ECUACION (I):

$$M_{ij} = M_{io} + \frac{2EI}{L}(2\theta_i + \theta_j \pm 3\psi)$$

EN ESTE CASO TENEMOS QUE $\psi = 0$

$$\Rightarrow M_{ij} = M_{io} + \frac{2EI}{L}(2\theta_i + \theta_j)$$

M_{io} : SON MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO.

$$M_{21} = \frac{\omega L^2}{12} + \frac{2(10\,000)}{10}(2\theta_2 + 0)$$

$$M_{21} = 16.6 + 4000\,\theta_2$$

$$M_{23} = -\frac{\omega L^2}{12} + \frac{2(10\,000)}{15}(2\theta_2 + \theta_3)$$

$$M_{23} = -56.25 + 2{,}666\,\theta_2 + 1{,}333\,\theta_3$$

$$M_{32} = \frac{\omega L^2}{12} + \frac{2(10\,000)}{15}(2\theta_3 + \theta_2)$$

$$M_{32} = 56.25 + 1{,}333\,\theta_2 + 2{,}666\,\theta_3$$

$$M_{34} = -\frac{\omega L^2}{12} + \frac{2(10\,000)}{10}(2\theta_3 + 0)$$

$$M_{34} = -16.6 + 4000\,\theta_3$$

SUSTITUYENDO EN LAS ECUACIONES "A" SE OBTIENE:

$$\Sigma M_2 = 0 \Rightarrow 16.6 + 4000\,\theta_2 - 56.25 + 2666\,\theta_2 + 1333\,\theta_3 = 0$$

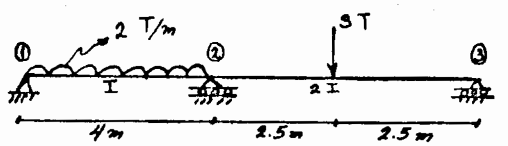
$$\Sigma M_3 = 0 \Rightarrow 56.25 + 1333\,\theta_2 + 2666\,\theta_3 - 16.6 + 4000\,\theta_3 = 0$$

POR TANTO LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO SERAN:

$$-39.6 + 6666\,\theta_2 + 1333\,\theta_3 = 0$$
$$39.6 + 1333\,\theta_2 + 6666\,\theta_3 = 0$$

UNA VEZ ENCONTRADOS θ_2 Y θ_3 SE APLICAN LAS ECUACIONES (I) Y SE OBTIENEN LOS VALORES DE LOS MOMENTOS REALES, SUBSTITUYENDO LOS VALORES DE θ_2 y θ_3 OBTENIDOS EN LAS EXPRESIONES DE MOMENTOS DE LA PAGINA ANTERIOR.

PROBLEMA No. 2.- PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE LA VIGA SIGUIENTE.



E = CONSTANTE.

$$\Sigma M_2 = 0 \Rightarrow M_{21} + M_{23} = 0 \text{ ——— } (A)$$

APLICANDO LA ECUACION (II)

$$M_i = M_{io} + \frac{2EI}{L}\left(1.5\,\theta_i \pm 1.5\,\psi\right) \text{ ——— } (1)$$

$$M_{21} = 4 + \frac{2EI}{4}\left(1.5\,\theta_2 + 0\right)$$

$$M_{21} = 4 + 0.75\,EI\,\theta_2$$

$$M_{23} = 2.8 + \frac{2EI}{5}\left(1.5\,\theta_2 + 0\right)$$

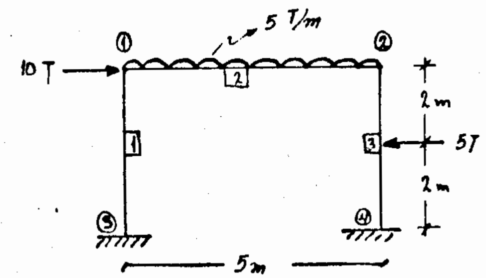
$$M_{23} = 2.8 + 0.6\,EI\,\theta_2$$

SUBSTITUYENDO EN LA ECUACION (1):

$$4 + 0.75\,EI\,\theta_2 + 2.8 + 0.6\,EI\,\theta_2 = 0$$

$$\underline{6.8 + 1.35\,EI\,\theta_2 = 0}$$

PROBLEMA No. 3.- PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DEL MARCO SIGUIENTE:



MIEMBRO	EI	2EI/L
1	40 000	20 000
2	60 000	24 000
3	40 000	20 000

ANALISIS DE LA FUERZA CORTANTE.

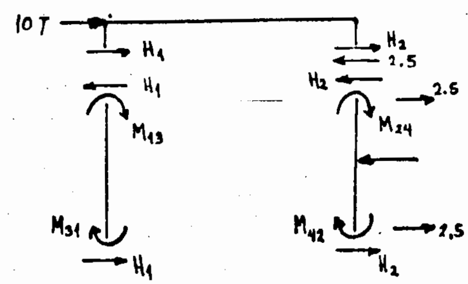


FIGURA 1.

$$\left.\begin{array}{lll} \Sigma M_1 = 0 & \Rightarrow & M_{13} + M_{12} = 0 \\ \Sigma M_2 = 0 & \Rightarrow & M_{21} + M_{24} = 0 \\ \Sigma F_x = 0 & \Rightarrow & 10 + H_1 + H_2 - 2.5 = 0 \end{array}\right\} \text{ ——— } (A)$$

APLICANDO LAS ECUACIONES PENDIENTE - DEFLEXION SE OBTIENE:

$$M_{13} = 20\,000\left(2\theta_1 - 3\,\psi_{13}\right)$$

$$M_{12} = -10.42 + 24\,000\left(2\theta_1 + \theta_2\right)$$

$$M_{21} = 10.42 + 24\,000\left(2\theta_2 + \theta_1\right)$$

$$M_{24} = -2.5 + 20\,000\left(2\theta_2 - 3\,\psi_{24}\right)$$

$$M_{42} = 2.5 + 20\,000\left(\theta_2 - 3\,\psi_{42}\right)$$

$$M_{31} = 20\,000\left(\theta_1 - 3\,\psi_{31}\right)$$

... SE OBTIENE:

$$H_1 = \frac{M_{13} + M_{31}}{4} \quad ; \quad H_2 = \frac{M_{24} + M_{42}}{4}$$

$$\psi_{13} = \psi_{31} \quad ; \quad \psi_{24} = \psi_{42}$$

$$H_1 = 15000\,\theta_1 - 30000\,\psi_{31}$$

$$H_2 = 15000\,\theta_2 - 30000\,\psi_{24}$$

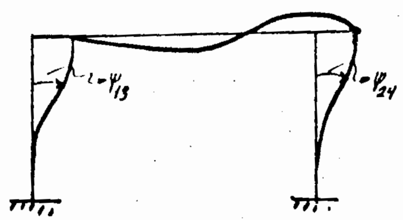
APLICANDO LAS ECUACIONES (A):

$$\Sigma M_1 = 0 \; ; \quad -10.42 + 88000\theta_1 + 24000\theta_2 - 60000\,\psi_{13} = 0$$

$$\Sigma M_2 = 0 \; ; \quad 7.92 + 24000\theta_1 + 88000\theta_2 - 60000\,\psi_{24} = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \; ; \quad 7.5 + 15000\,\theta_1 + 15000\,\theta_2 - 30000(\psi_{13} + \psi_{24}) = 0$$

EN ESTE CASO SE TIENE:



$$\psi_{13} = \psi_{24} = \frac{\Delta}{L} = \frac{\Delta}{4}$$

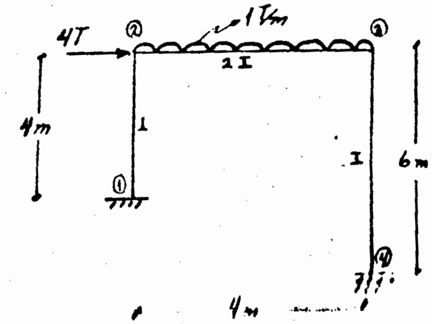
LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO SERAN ENTONCES:

$$-10.42 + 88000\,\theta_1 + 24000\,\theta_2 - 15000\,\Delta = 0$$

$$7.92 + 24000\,\theta_1 + 88000\,\theta_2 - 15000\,\Delta = 0$$

$$(-1) \quad 7.5 + 15000\,\theta_1 + 15000\,\theta_2 - 15000\,\Delta = 0$$

PROBLEMA NO. 4.- PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBR DEL MARCO SIGUIENTE:



E = CONSTANTE.

ANALISIS DE LA FUERZA CORTANTE:

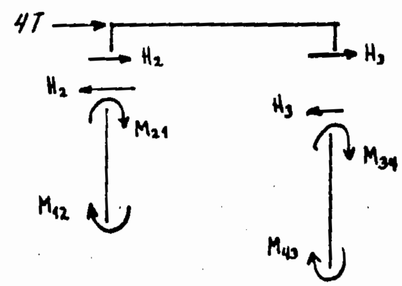


FIGURA 1

$$\Sigma M_2 = 0 \Rightarrow M_{21} + M_{23} = 0$$

$$\Sigma M_3 = 0 \Rightarrow M_{32} + M_{34} = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 4 + H_2 + H_3 = 0$$

APLICANDO LAS ECUACIONES PENDIENTE – DEFLEXION SE OBTIENE:

$$M_{12} = \frac{2EI}{4}(\theta_2 - 3\psi_{12})$$

$$M_{21} = \frac{2EI}{4}(2\theta_2 - 3\psi_{21})$$

$$M_{23} = -1.33 + \frac{4EI}{4}(2\theta_2 + \theta_3)$$

$$M_{32} = 1.33 + \frac{4EI}{4}(2\theta_3 + \theta_2)$$

$$M_{34} = \frac{2EI}{6}\left(2\theta_3 - 3\psi_{34}\right)$$

$$M_{43} = \frac{2EI}{6}\left(\theta_3 - 3\psi_{43}\right)$$

DE LA FIGURA 1, SE TIENE:

$$H_2 = \frac{M_{12} + M_{21}}{4} \qquad H_3 = \frac{M_{43} + M_{34}}{6}$$

$$\psi_{12} = \psi_{21} = \frac{\Delta}{4} \qquad \psi_{34} = \psi_{43} = \frac{\Delta}{6}$$

$$H_2 = \frac{3EI\theta_2}{8} - \frac{3EI\psi_{12}}{4}$$

$$H_3 = \frac{EI\theta_3}{6} - \frac{EI\psi_{34}}{3}$$

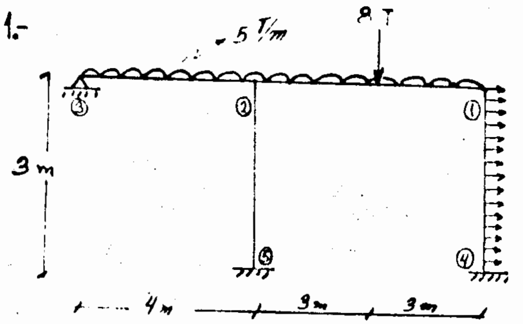
SUBSTITUYENDO EN (A) SE ENCUENTRAN LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO:

$$-1.33 + 3EI\theta_2 + EI\theta_3 - 0.375EI\Delta = 0$$
$$1.33 + EI\theta_2 + 2.66EI\theta_3 - 0.16EI\Delta = 0$$
$$(-1) \quad 4 + 0.375EI\theta_2 + 0.16EI\theta_3 - 0.24EI\Delta = 0$$

PROBLEMAS PROPUESTOS.

PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE LAS ESTRUCTURAS MOSTRADAS A CONTINUACION:

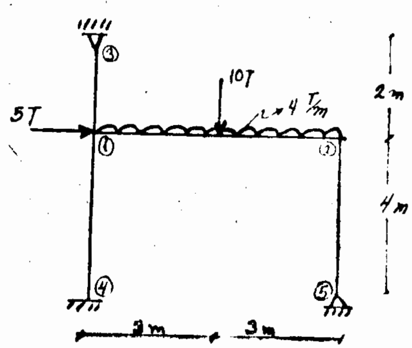
1.-



$EI = 10000 \ T\text{-}m^2$

Solución:

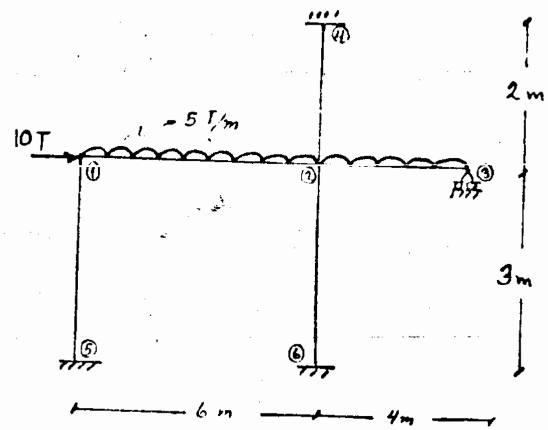
$$-11 + 3333\,\theta_1 + 27500\,\theta_2 = 0$$
$$21.75 + 20000\,\theta_1 + 3333\,\theta_2 = 0$$



2.- $EI = 10000 \ T\text{-}m^2$

Solución:

$$-19.5 + 31666\,\theta_1 + 3333\,\theta_2 - 3750\,\Delta = 0$$
$$19.5 + 3333\,\theta_1 + 14166\,\theta_2 - 1875\,\Delta = 0$$
$$-5 - 3750\,\theta_1 - 1875\,\theta_2 + 6094\,\Delta = 0$$



3.- $EI_{(2\text{-}4)} = 10000 \ T\text{-}m^2$

$EI_{(1\text{-}3)} = 20000 \ T\text{-}m^2$

$EI_{(1\text{-}2)} = 20000 \ T\text{-}m^2$

$EI_{(1\text{-}5)} = EI_{(2\text{-}6)} = 10000 \ T\text{-}m^2$

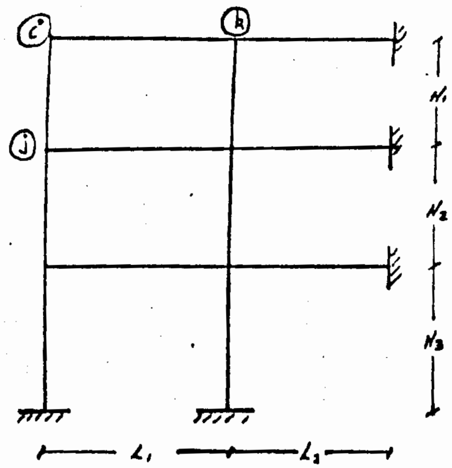
Solución:

$$-15 + 26666\,\theta_1 + 6666\,\theta_2 - 6666\,\Delta = 0$$
$$5 + 6666\,\theta_1 + [illegible]\,\theta_2 + 8335\,\Delta = 0$$
$$-10 - 6666\,\theta_1 + 8335\,\theta_2 - 23.888\,\Delta = 0$$

8.- METODO DE CROSS.

a) ESTRUCTURAS SIN DESPLAZAMIENTOS LATERALES.

SE CONSIDERA LA SIGUIENTE ESTRUCTURA.



SI SE CONSIDERAN SOLO GIROS SE TIENE:

NUDO i

$$M_{ik} = M_{io}]_{ik} + \frac{4EI}{L_1}\theta_i \qquad (1)$$

$$M_{ij} = M_{io}]_{ij} + \frac{4EI}{H_1}\theta_i \qquad (2)$$

$$\Sigma M_i = 0 \Rightarrow \bar{M}_{io} + \theta_i\left(\frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{H_1}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \theta_i = -\frac{\bar{M}_{io}}{\left(\frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{H_1}\right)} \qquad (3)$$

SUBSTITUYENDO (3) EN (1) Y (2) RESPECTIVAMENTE SE TIENE QUE:

EN (1) $$M_{ik} = M_{io}]_{ik} - \frac{4EI/L_1}{\left(\frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{H_1}\right)}\bar{M}_{io}$$

EN (2) $$M_{ij} = M_{io}]_{ij} - \frac{4EI/H_1}{\left(\frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{H_1}\right)}\bar{M}_{io}$$

Y GENERALIZANDO SE TIENE QUE:

$$\boxed{\begin{array}{l} M_{ij} = M_{io}]_{ij} - \left[\dfrac{\left(\frac{4EI}{L}\right)_{ij}}{\sum\left(\frac{4EI}{L}\right)}\right]\bar{M}_{io} \\ M_{ji} = M_{jo}]_{ji} + \frac{1}{2}M_{io} \end{array}}$$

$M_{ij} = M_{io}]_{ij} + F.D.\ \bar{M}_{io}$ F.D = FACTOR DE DISTRIBUCION

$M_{ji} = M_{jo}]_{ji} + F.T.\ M_{io}$ F.T = FACTOR DE TRANSPORTE.

CON ESTE METODO LA SOLUCION DE LA ESTRUCTURA SE REALIZA EN FORMA INTERATIVA Y SE PUEDE DETENER EL PROCESO AL OBTENER LA PRECISION DESEADA.

LOS MOMENTOS Y LOS GIROS EN LA DIRECCION DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ SERAN POSITIVOS.

PROCEDIMIENTO.

1.- SE OBTIENEN LAS FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO (F.E).

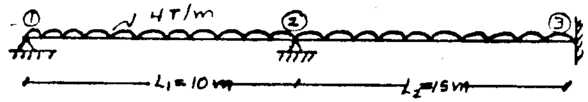
2.- SE CALCULAN LAS RIGIDECES RELATIVAS DE TODOS LOS MIEMBROS.

3.- SE OBTIENE EL FACTOR DE DISTRIBUCION PARA CADA UNO DE LOS MIEMBROS (F.D).

4.- SE DISTRIBUYEN LAS FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO DE LOS NUDOS EN TODOS LOS MIEMBROS QUE CONCURREN A DICHO NUDO, SEGUN SU FACTOR DE DISTRIBUCION CORRESPONDIENTE. DEBE TENERSE EN CUENTA QUE DESPUES DE DISTRIBUIR SE DEBE TRANSPORTAR AL EXTREMO OPUESTO DE CADA MIEMBRO SEGUN EL FACTOR DE TRANSPORTE CORRESPONDIENTE.

5.- EL PROCESO DEBE TERMINARSE SEGUN LA APROXIMACION QUE SE DESEE.

PROBLEMA 1.- Dibujar los momentos flexionantes de la viga siguiente:



$EI = CTE.$

Barra	Rigidez Relativa	F.D.	F.T
2-1	$3EI/L_1$; $3/L_1 = 0.300$	0.53	0
2-3	$4EI/L_2$; $4/L_2 = 0.267$	0.47	1/2
	Σ 0.567		

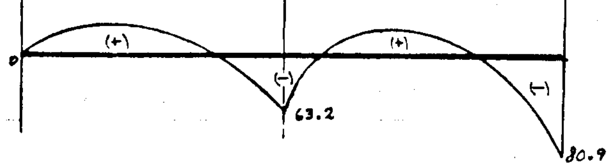
Como $EI = CTE.$, en la rigidez relativa se puede suprimir el termino EI.

Momentos de empotramiento:

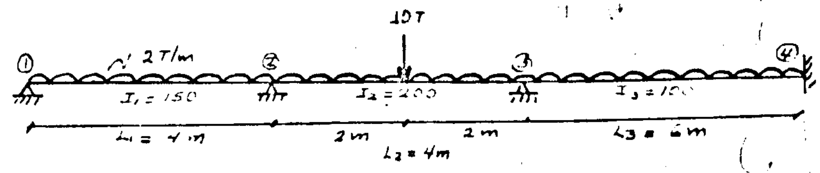
$$M_{20}]_i = \frac{\omega L_1^2}{8} = 50$$

$$M_{20}]_d = -\frac{\omega L_2^2}{12} = -75 \qquad M_{30} = \frac{\omega L_2^2}{12} = +75$$

	①	②	②	③
F.D.		0.53	0.47	
F.T.	← 0			1/2 →
F.E.		+50.00	-75.00	+75.00
		+13.20	+11.80 →	+5.90
		+63.20	-63.20	+80.90



PROBLEMA 2.- Encontrar el diagrama de momentos flexionantes.



E = C

BARRA	RIGIDEZ RELATIVA	F.D.	F.T.
NUDO 2			
2-1	$3I_1/L_1 = 112.5$	0.36	0
2-3	$4I_2/L_2 = 200.0$	0.64	1/2
	Σ 312.5		
NUDO 3			
3-2	$I_2/L_2 = 50.00$	0.75	1/2
3-4	$I_3/L_3 = 16.70$	0.25	1/2
	Σ 66.70		

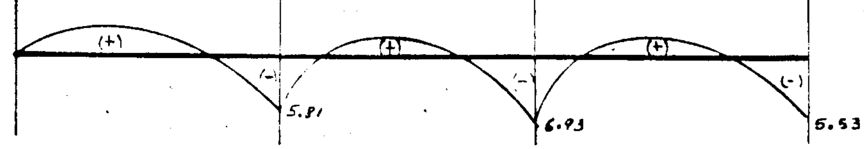
MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO:

$$M_{20}]_i = \frac{\omega L_1^2}{8} = 4 \qquad M_{30}]_d = -\frac{\omega L_3^2}{12} = -$$

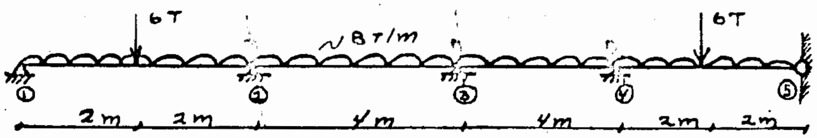
$$M_{20}]_d = -\frac{\omega L_2^2}{12} - \frac{PL_2}{8} = -7.66 \qquad M_{40} = +6$$

$$M_{30}]_i = +7.66$$

	①	②	②	③	③	④
F.D.		0.36	0.64	0.75	0.25	
F.T.	← 0		1/2		1/2	
F.E.		+4.00	-7.66	+7.66	-6.00	+6.00
		+1.31	+2.35 →	+1.17		
			-1.25 ←	-2.50	-0.83 →	-0.42
		+0.45	+0.80 →	+0.40		
			-0.15 ←	-0.30	-0.10 →	-0.05
		+0.05	+0.07	+6.93	-6.93	+5.63
		+5.81	-5.81			



PROBLEMA 3.- Dibujar el diagrama de momentos flexionantes.



EI = cte.
L = cte.

BARRA	RIGIDEZ RELATIVA		F.D.	F.T.
NUDO 2				
2-1	3EI/L ;	3.00	0.43	0
2-3	4EI/L ;	4.00	0.57	1/2
		Σ 7.00		
NUDO 3				
3-2	4EI/L ;	1.00	0.50	1/2
3-4	4EI/L ;	1.00	0.50	1/2
		Σ 2.00		
NUDO 4				
4-3	4EI/L ;	4.00	0.57	1/2
4-5	3EI/L ;	3.00	0.43	0
		Σ 7.00		

MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO :

$$M_{21}]_0 = \frac{\omega L^2}{8} + \frac{3}{16} PL = 20.5$$

$$M_{23}]_0 = -\frac{\omega L^2}{12} = -10.66$$

$$M_{32}]_0 = \frac{\omega L^2}{12} = 10.66$$

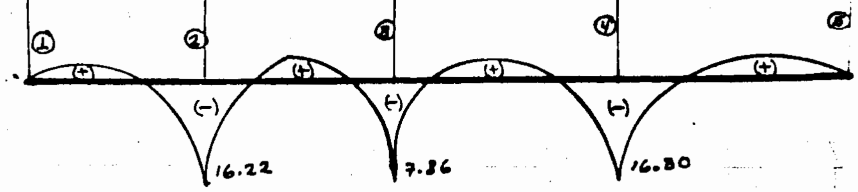
$$M_{34}]_0 = -\frac{\omega L^2}{12} = -10.66$$

$$M_{43}]_0 = \frac{\omega L^2}{12} = 10.66$$

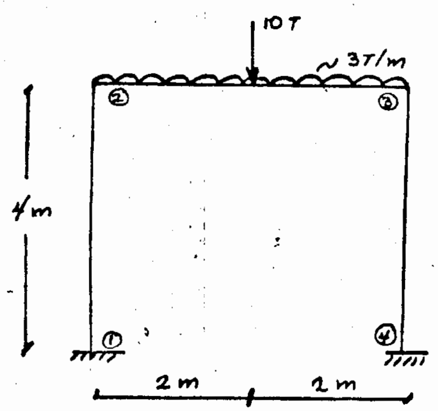
$$M_{45}]_0 = -\frac{\omega L^2}{8} - \frac{3}{16} PL = -20.5$$

② ③ ④ Secuencia de distribución

	(1)	(2)		(3)		(4)		(5)
F.D.		0.43	0.57	0.50	0.50	0.57	0.43	
F.T.			1/2			1/2		
F.E.		+20.50	-10.66	+10.66	-10.66	+10.66	-20.50	
		-4.23	-5.60 →	-2.80				
			+0.70 ←	+1.40	+1.40 →	+0.70		
					+2.60 ←	+5.20	+3.93	
		-0.31	-0.40 →	-0.20				
			-0.60 ←	-1.20	-1.20 →	-0.60		
					+0.17 ←	+0.34	+0.26	
		+0.26	+0.34 →	+0.17		+16.30	-16.30	
		+16.22	-16.22	-0.17	-0.17			
				+7.86	-7.86			



PROBLEMA 4.- DIBUJAR EL DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES.



$EI = CTE.$

$L = CTE.$

POR SIMETRÍA GEOMÉTRICA Y DE CARGA NO HAY DESPLAZAMIENTO LATERAL.

BARRA	RIGIDEZ RELATIVA		F.D.	F.T.
NUDO 2				
2-1	$4EI/L$;	1.00	0.50	1/2
2-3	$4EI/L$;	1.00	0.50	1/2
		Σ 2.00		
NUDO 3				
3-2	$4EI/L$;	1.00	0.50	1/2
3-4	$4EI/L$;	1.00	0.50	1/2
		Σ 2.00		

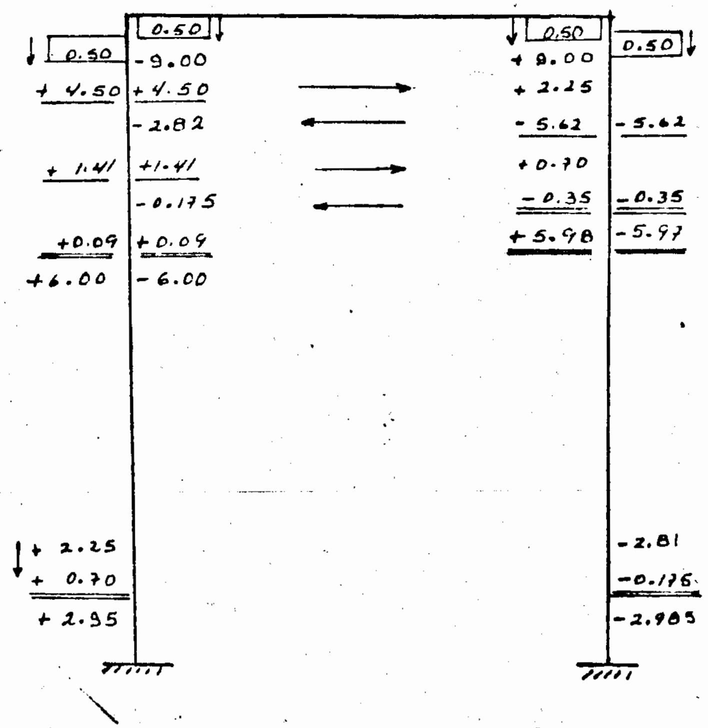
MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO :

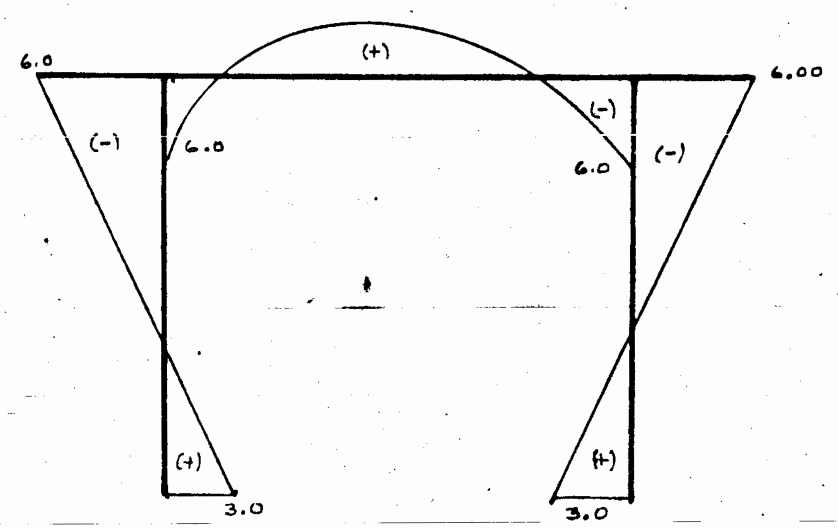
$$M_{23}]_0 = -\frac{\omega L^2}{12} - \frac{PL}{8} = -9.0$$

$$M_{32}]_0 = \frac{\omega L^2}{12} + \frac{PL}{8} = 9.0$$

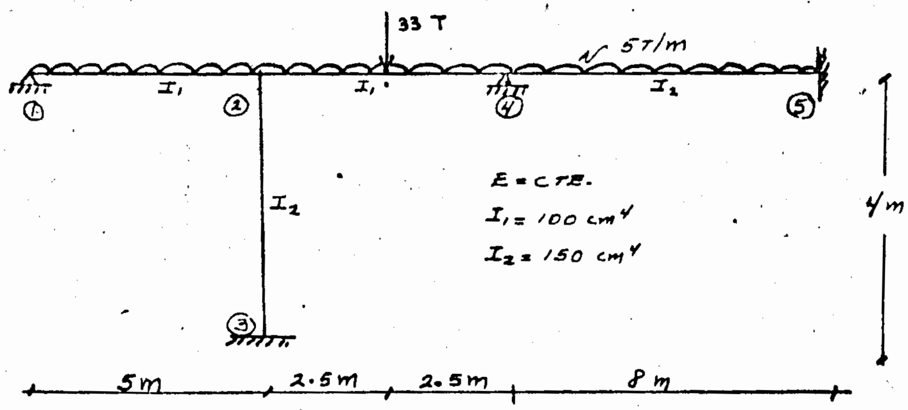
$$M_{21}]_0 = M_{12}]_0 = 0$$

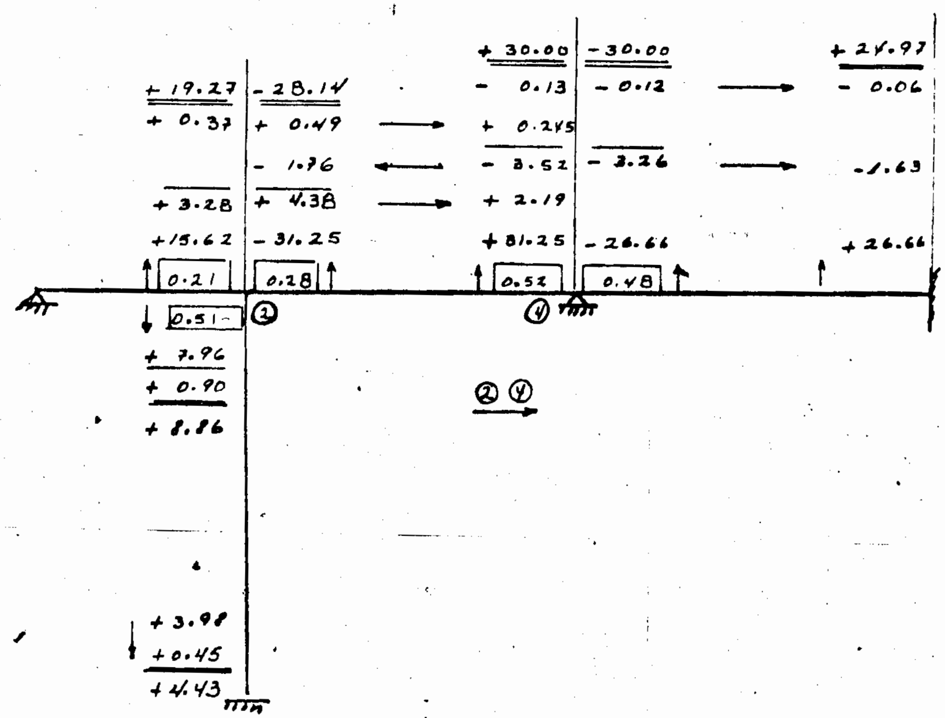
$$M_{34}]_0 = M_{43}]_0 = 0$$





1. **PROBLEMA 5.-** ENCONTRAR el DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES.





BARRA	RIGIDEZ RELATIVA	F.D.	F.T.
NUDO 2			
2-1	$3I_1/L$ = 60.00	0.207	0
2-4	$4I_1/L$ = 80.00	0.277	1/2
2-3	$4I_2/L$ = 150.00	0.516	1/2
	Σ 290.00		
NUDO 4			
4-2	I_1/L = 80.00	0.517	1/2
4-5	I_2/L = 75.00	0.483	1/2
	Σ 155.00		

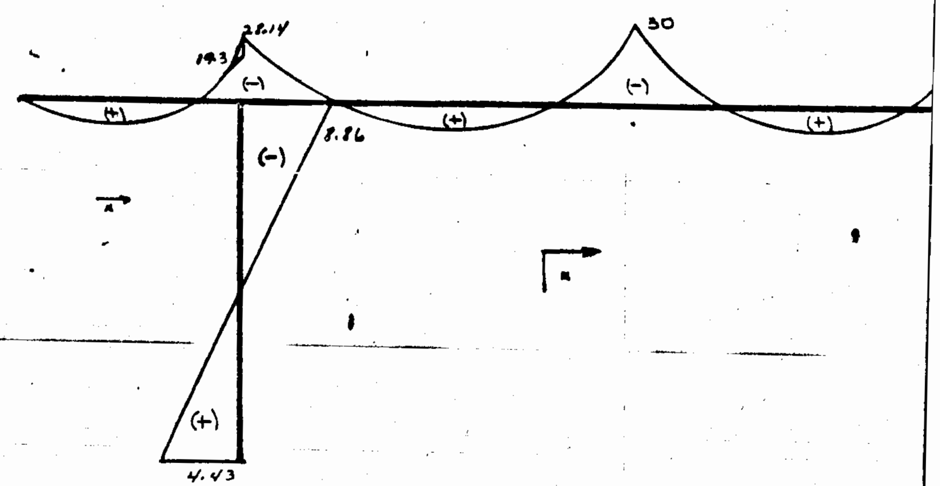
MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO:

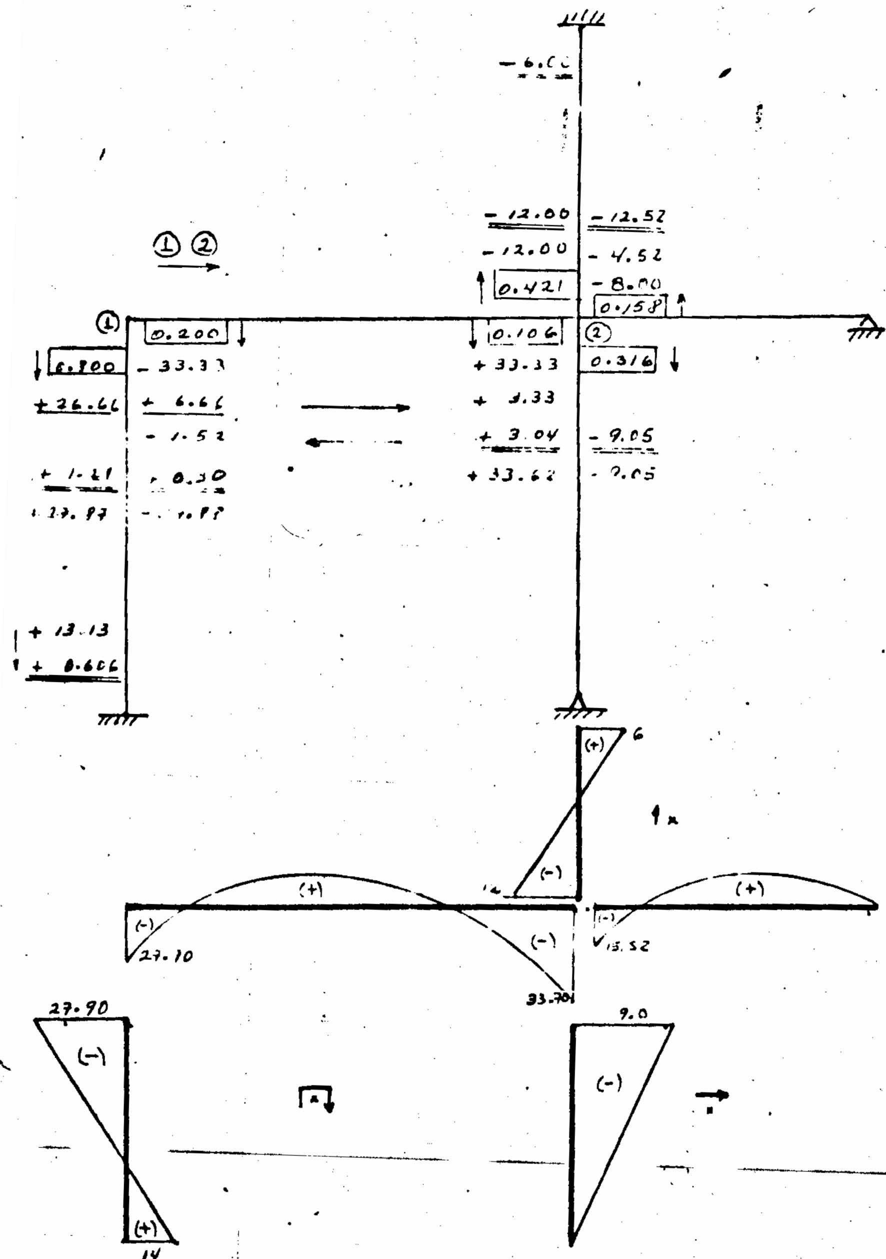
$$M_{21}]_0 = \frac{wL^2}{8} = 15.625$$

$$M_{24}]_0 = -\frac{wL^2}{12} - \frac{PL}{8} = -31.25$$

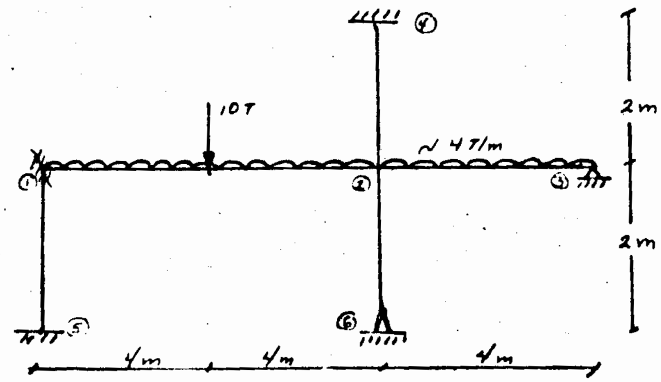
$$M_{42}]_0 = 31.25$$

$$M_{45}]_0 = -\frac{wL^2}{12} = -26.66$$





PROBLEMA 6.- TRAZAR EL DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES.



EI = CTE.

BARRA	RIGIDEZ RELATIVA.	F.D.	F.T.
NUDO 2			
2-1	4/L = 0.500	0.106	1/2
2-3	3/L = 0.750	0.158	0
2-4	4/L = 2.000	0.421	1/2
2-6	3/L = 1.500	0.316	0
	Σ 4.750		
NUDO 1			
1-2	1/L = 0.125	0.20	1/2
1-5	1/L = 0.500	0.80	1/2
	Σ 0.625		

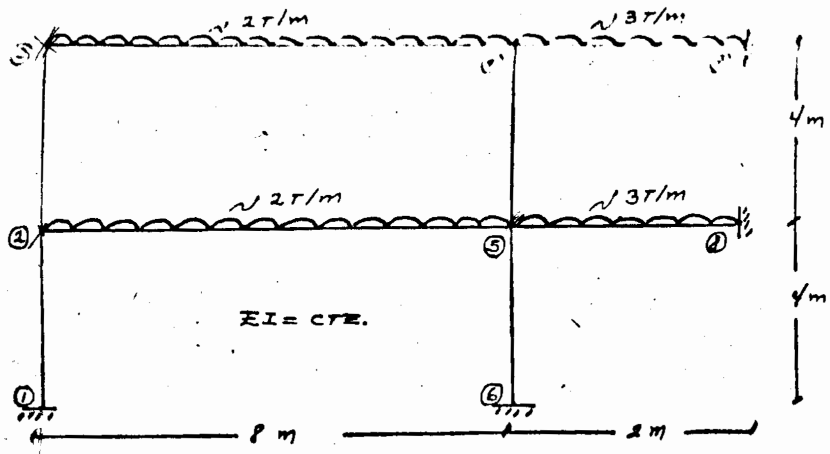
MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO:

$$M_{10} = -\frac{\omega L^2}{12} - \frac{PL}{8} = -33.33$$

$$M_{20}]_i = 33.33$$

$$M_{20}]_d = -\frac{\omega L^2}{8} = -8.00$$

PROBLEMA 7.- TRAZAR EL DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES :-



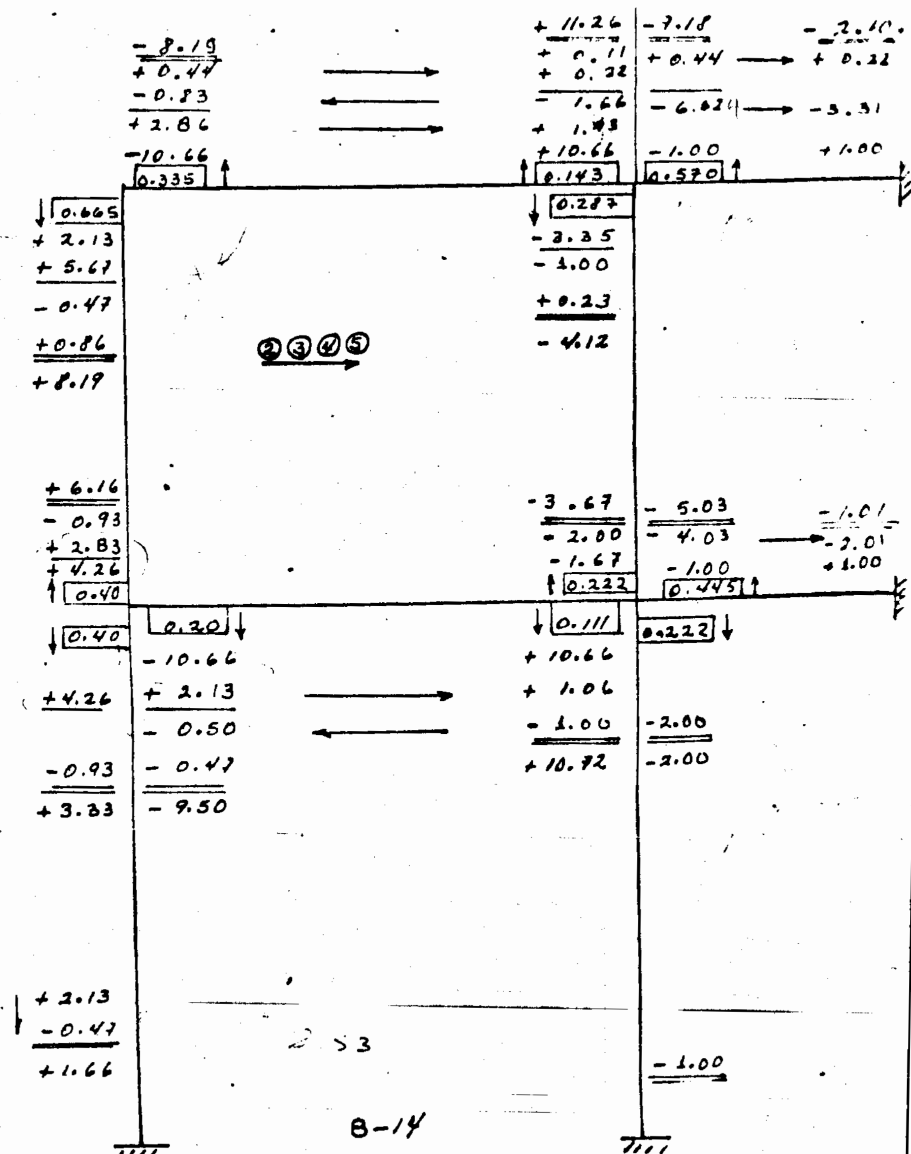
BARRA	RIGIDEZ RELATIVA	F. D.	F. T.
NUDO 2			
2-1	1/L = 0.250	0.4	1/2
2-3	1/L = 0.250	0.4	1/2
2-5	1/L = 0.125	0.2	1/2
	Σ 0.625		
NUDO 3			
3-2	1/L = 0.250	0.665	1/2
3-4	1/L = 0.125	0.335	1/2
	Σ 0.375		
NUDO 4			
4-3	1/L = 0.125	0.143	1/2
4-7	1/L = 0.500	0.570	1/2
4-5	1/L = 0.250	0.287	1/2
	Σ 0.875		
NUDO 5			
5-2	1/L = 0.125	0.111	1/2
5-4	1/L = 0.250	0.222	1/2
5-8	1/L = 0.500	0.445	1/2
5-6	1/L = 0.250	0.222	1/2
	Σ 1.125		

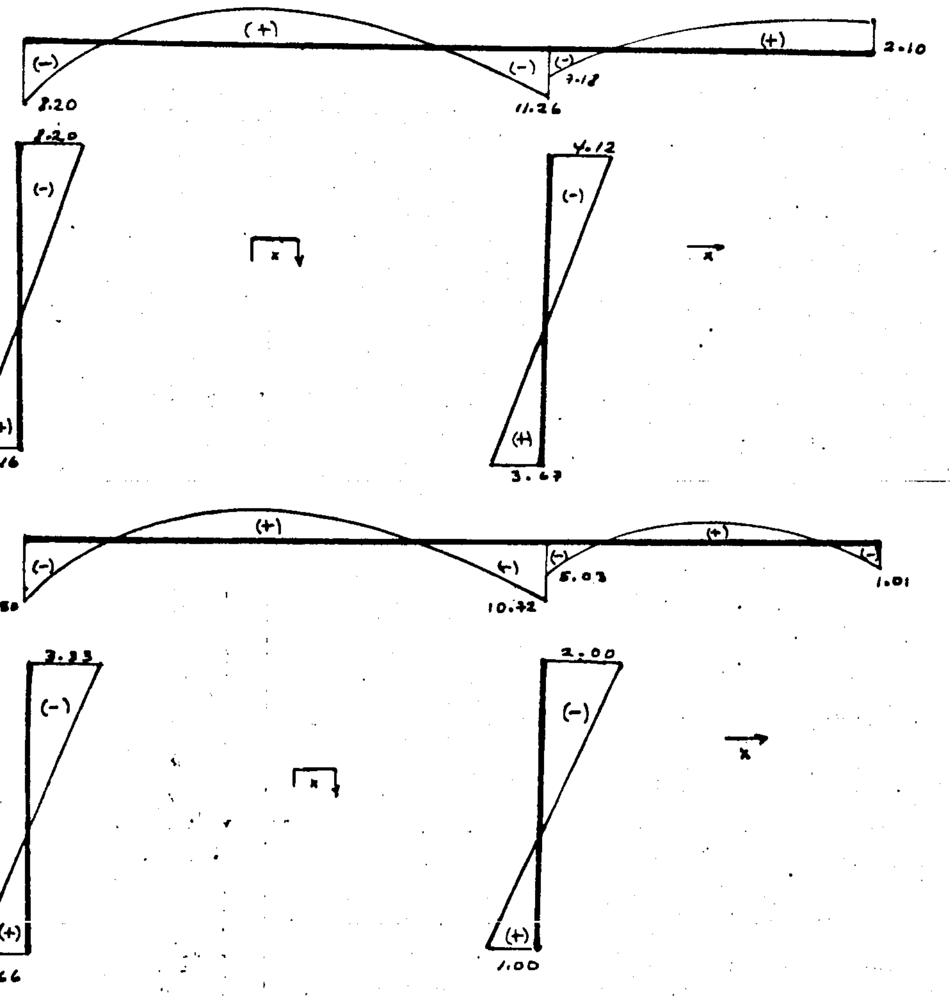
MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO :-

$M_{20} = -\frac{\omega L^2}{12} = -10.66$ $M_{30} = 10.66$

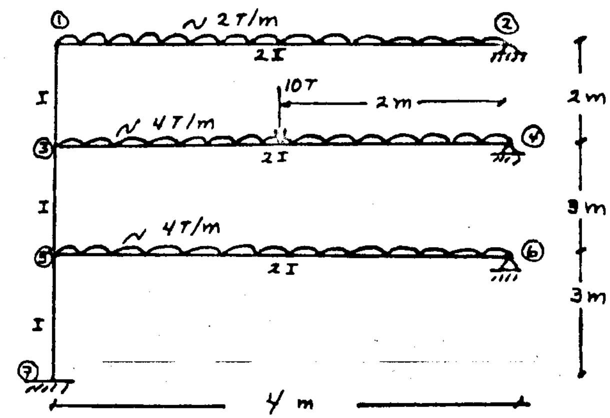
$M_{40}]_i = M_{50}]_i = 10.66$

$M_{40}]_d = M_{50}]_d = -\frac{\omega L^2}{12} = -1.00$ $M_{80} = M_{70} = 1.00$





PROBLEMA 8.- TRAZAR El DIAGRAMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES.



$E = CTE.$

$I = 100\ m^4$

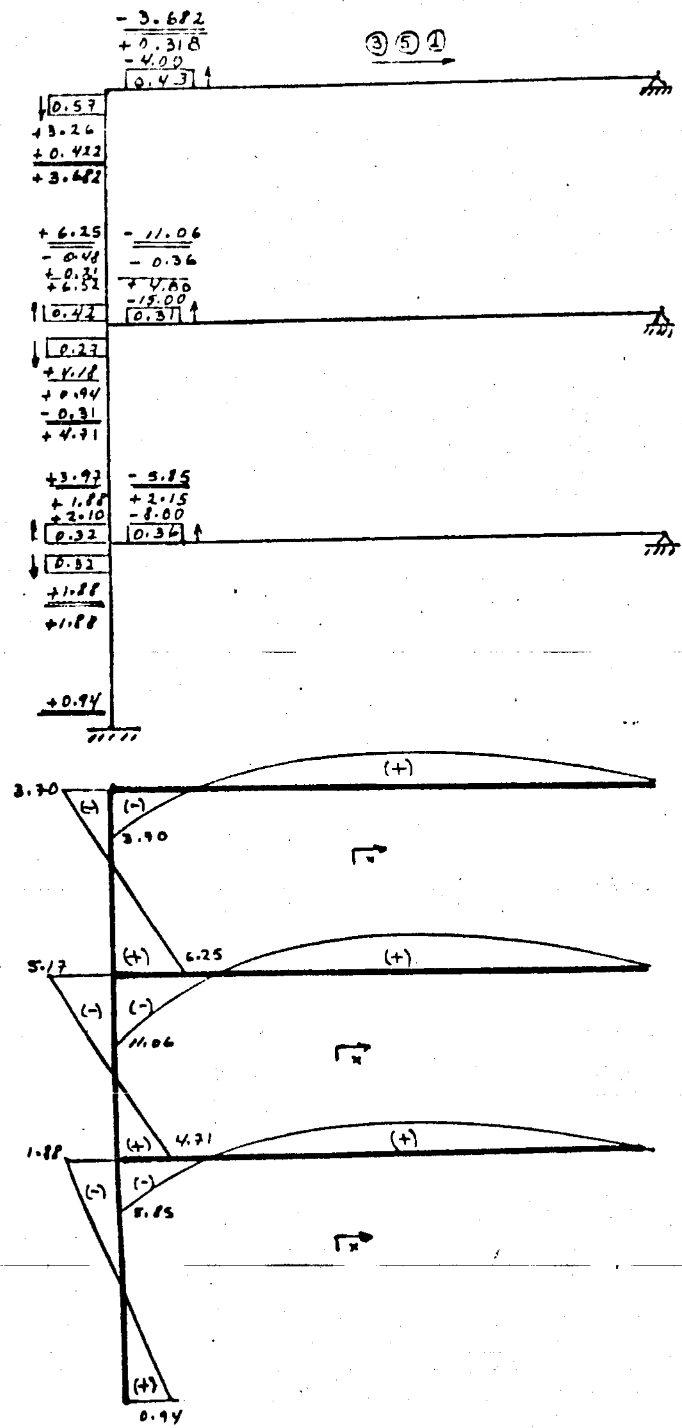
BARRA	RIGIDEZ RELATIVA	F.D.	F.T.
NUDO 1			
1-2	$3 \cdot 2I/L = 150.00$	0.43	0
1-3	$4I/L = 200.00$	0.57	1/2
	Σ 350.00		
NUDO 3			
3-4	$3 \cdot 2I/L = 150.00$	0.31	
3-5	$4I/L = 133.33$	0.27	1/2
3-1	$4I/L = 200.00$	0.42	1/2
	Σ 483.33		
NUDO 5			
5-3	$4I/L = 133.33$	0.32	1/2
5-7	$4I/L = 133.33$	0.32	1/2
5-6	$3 \cdot 2I/L = 150.00$	0.36	
	Σ 416.66		

MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO:

$$M_{10} = -\frac{\omega L^2}{8} = -4.00$$

$$M_{30} = -\frac{\omega L^2}{12} - \frac{3}{16} PL = -1.55$$

$$M_{50} = -\frac{\omega L^2}{8} = -8.00$$



b) Estructuras con desplazamientos laterales.

PROCEDIMIENTO:

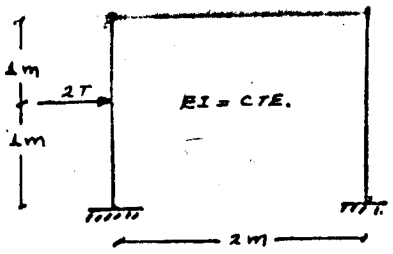
1er. PASO: SUPONER QUE LA ESTRUCTURA NO SE DESPLAZA LATERALMENTE Y HACER EL PRIMER CICLO DE DISTRIBUCION. CALCULAR LA(S) FUERZA(S) QUE RESTRINGEN EL (LOS) DESPLAZAMIENTO(S) LATERAL(ES).

2o. PASO: SE SUPONE UN DESPLAZAMIENTO LATERAL A CUALQUIERA, UNO A LA VEZ, RESTRINGIENDO TODOS LOS GIROS.- SE PERMITEN LOS GIROS EN LOS NUDOS HACIENDO LA SEGUNDA DISTRIBUCION DE MOMENTOS.- SE CALCULAN LOS MOMENTOS RESULTANTES Y LA FUERZA EN EL CABEZAL (F_2) QUE PRODUCE EL DESPLAZAMIENTO SUPUESTO.

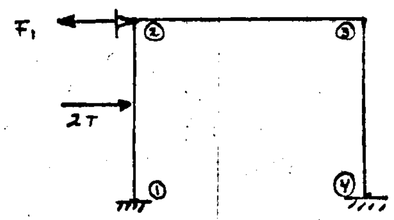
3er. PASO: COMO LA FUERZA F_1 QUE IMPIDIO EL DESPLAZAMIENTO EN EL PRIMER PASO SERA DIFERENTE QUE LA FUERZA F_2 CALCULADA EN EL SEGUNDO PASO, LOS RESULTADOS DEL SEGUNDO PASO SE DEBEN MULTIPLICAR POR EL FACTOR DE CORRECCION F_1/F_2

4o. PASO: SE SUMAN LOS RESULTADOS DEL PRIMER PASO CON LOS DEL TERCER PASO, Y ESTA SERA LA SOLUCION FINAL.

PROBLEMA 9.- Resolver por CROSS el marco siguiente:.



1er Paso.

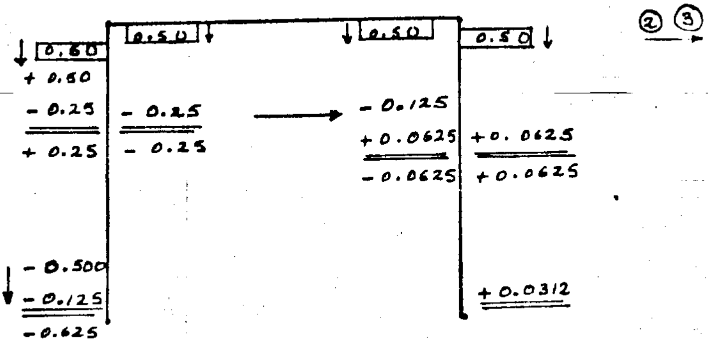


BARRA	RIGIDEZ RELATIVA	F.D.
NUDO 2		
2-1	1/L = 0.50	0.50
2-3	1/L = 0.50	0.50
	Σ 1.00	
NUDO 3		
3-2	1/L = 0.50	0.50
3-4	1/L = 0.50	0.50
	Σ 1.00	

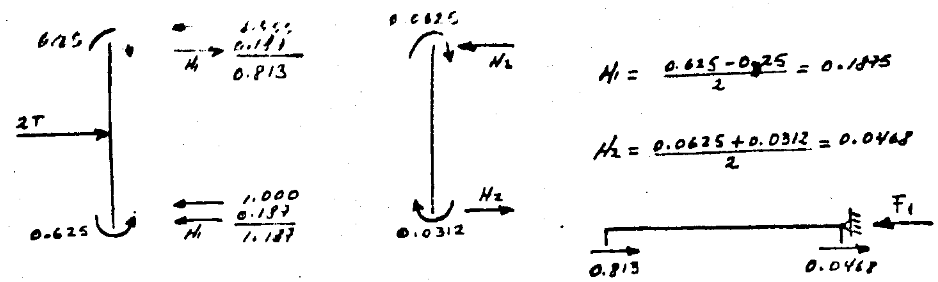
MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO:

$$M_{2O} = \frac{PL}{8} = 0.5$$

$$M_{1O} = -0.5$$



CALCULO DE LA FUERZA F_1 QUE IMPIDIO EL DESPLAZAMIENTO.-



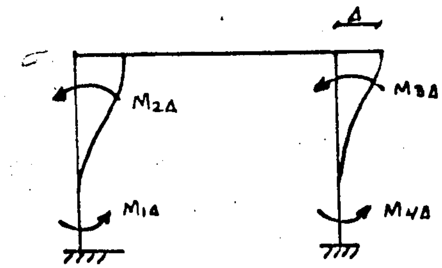
$$H_1 = \frac{0.625-0.25}{2} = 0.1875$$

$$H_2 = \frac{0.0625+0.0312}{2} = 0.0468$$

$F_1 = 0.86 = 0.813+0.0468$

2º Paso.-

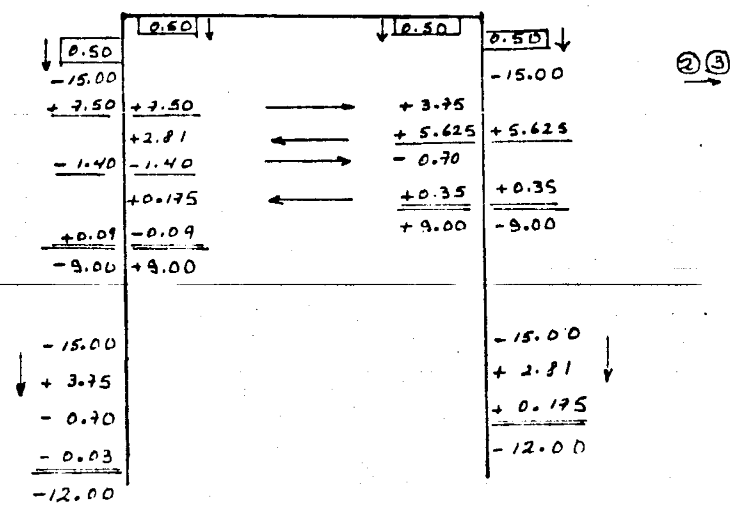
Supongamos que $\Delta = 10/EI$

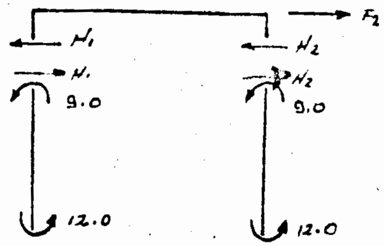


$M_{1\Delta} = M_{2\Delta} = M_{3\Delta} = M_{4\Delta}$

$$M_{1\Delta} = -\frac{6EI}{L^2}\,\Delta$$

$M_{1\Delta} = -15$





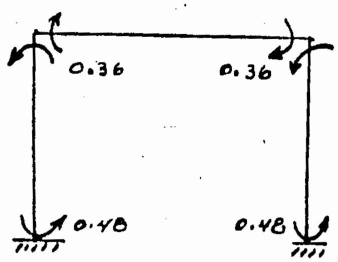
$$H_1 = H_2 = \frac{9+12}{2} = 10.5$$

$$F_2 = H_1 + H_2$$

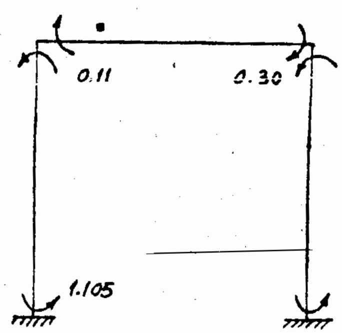
$$\underline{F_2 = 21\ T}$$

3º PASO.- EL FACTOR DE CORRECCIÓN SERA: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{0.86}{21} = 0.04$

LOS MOMENTOS CALCULADOS EN EL PASO 2º SERAN FINALMENTE:

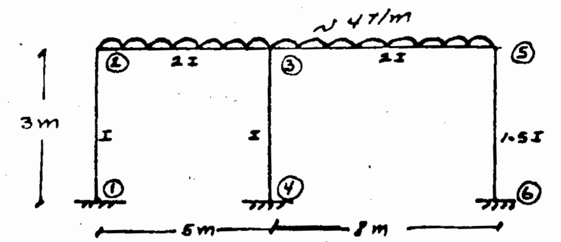


4º PASO.- SE SUMAN ALGEBRAICAMENTE LOS MOMENTOS CALCULADOS EN EL 1º PASO Y EN EL 3º PASO.- QUE NOS PROPORCIONA LA SOLUCIÓN FINAL.



no checan las reacciones

PROBLEMA 10.- RESOLVER POR CROSS EL MARCO SIGUIENTE.-



E = CTE.
$I = 100\ m^4$

1º.- PASO:-

BARRA	RIGIDEZ RELATIVA.	F.D.
NUDO 2		
2-1	I/L = 33.33	0.454
2-3	$2I/L$ = 40.00	0.546
	Σ 73.33	
NUDO 3		
3-2	$2I/L$ = 40.00	0.406
3-4	I/L = 33.33	0.338
3-5	$2I/L$ = 25.00	0.256
	Σ 98.33	
NUDO 5		
5-3	$2I/L$ = 25.00	0.33
5-6	$1.5I/L$ = 50.00	0.67
	Σ 75.00	

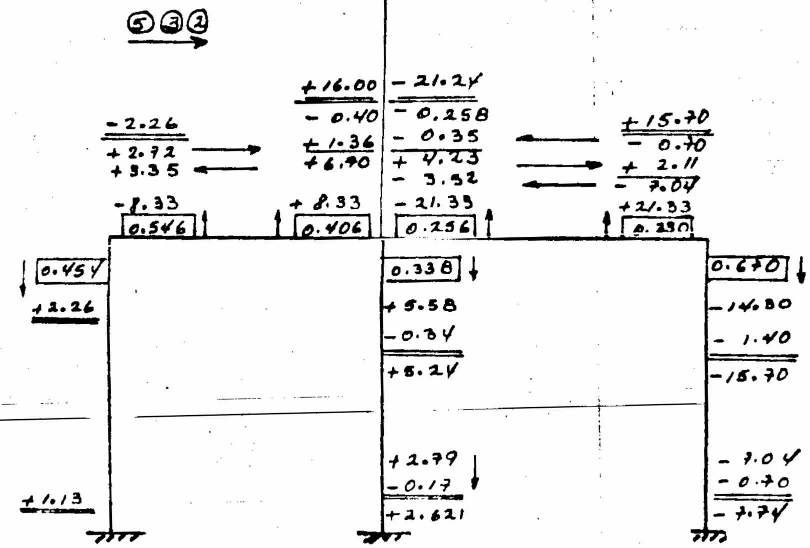
MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

$$M_{20} = -\frac{wL^2}{12} = -8.33$$

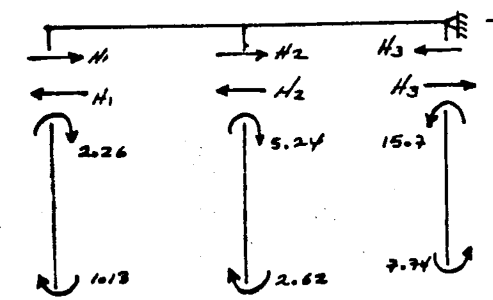
$$M_{30}]_i = 8.33$$

$$M_{30}]_d = -\frac{wL^2}{12} = -21.33$$

$$M_{50} = +21.33$$



CÁLCULO DE LA FUERZA F_1 QUE IMPIDIÓ EL DESPLAZAMIENTO :-



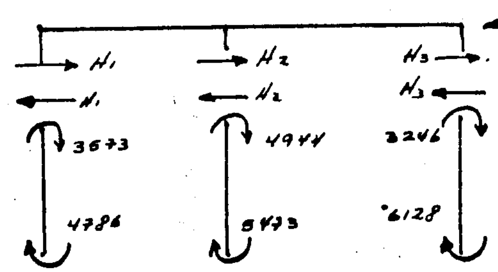
$$H_1 = \frac{2.26 + 1.13}{3} = 1.13$$

$$H_2 = \frac{5.24 + 2.62}{3} = 2.62$$

$$H_3 = \frac{15.7 + 7.74}{3} = 7.81$$

$$\underline{F_1 = 4.02\ T}$$

CÁLCULO DE LA FUERZA F_2 QUE PRODUJO EL DESPLAZAMIENTO Δ :



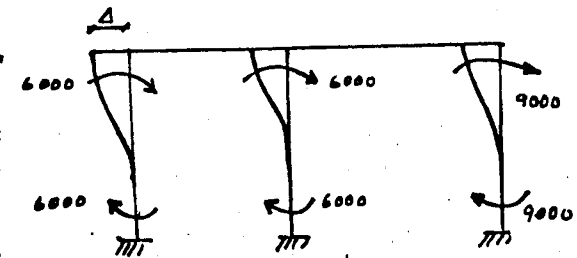
$$H_1 = \frac{3573 + 4786}{3} = 2573$$

$$H_2 = \frac{4944 + 5473}{3} = 3472$$

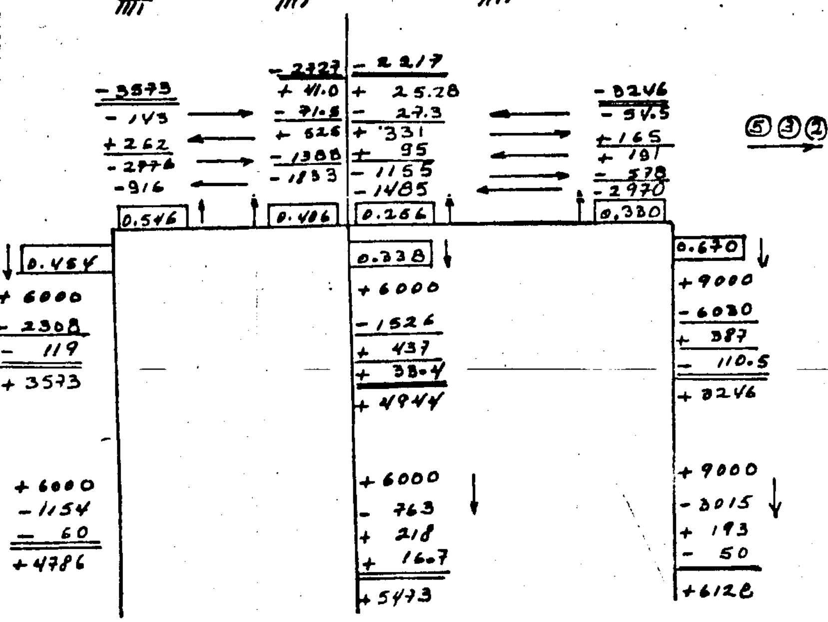
$$H_3 = \frac{3246 + 6128}{3} = 3124$$

$$\underline{F_2 = 9349\ T}$$

2º PASO.- SUPONER $\Delta = 30/E$

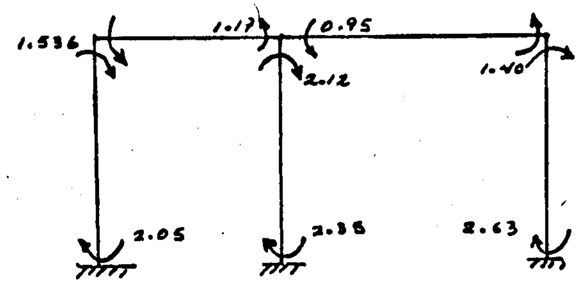


$$M = \frac{6EI}{L^2}\ \Delta = 60I$$

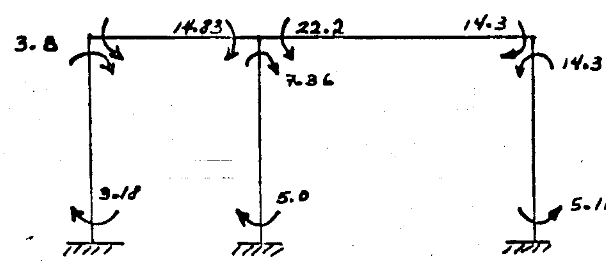


3º PASO EL FACTOR DE CORRECCIÓN SERÁ : $\frac{F_1}{F_2} = \frac{4.02}{9349} = 0.00043$

LOS MOMENTOS CALCULADOS EN EL PASO 2º SERÁN :



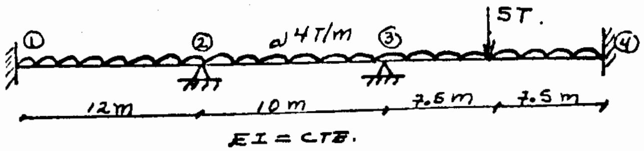
4º PASO.- SUMANDO ALGEBRAICAMENTE LOS MOMENTOS CALCULADOS EN LOS PASOS 1º Y 3º OBTENEMOS LA SOLUCIÓN FINAL.



PROBLEMAS PROPUESTOS.

RESOLVER LAS ESTRUCTURAS SIGUIENTES MEDIANTE CROSS.

1.-



solución:

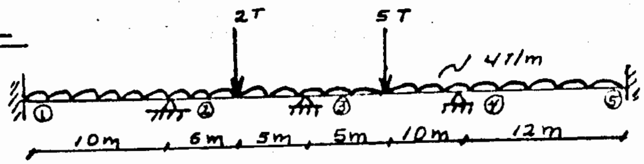
$M_1 = 55$ T-m

$M_2 = 33.2$ "

$M_3 = 60.5$ "

$M_4 = 96.3$ "

2.-



solución:

$M_1 = 37.3$ T-m

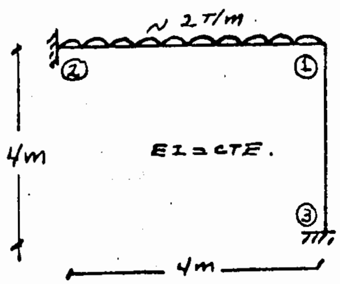
$M_2 = 26.2$ "

$M_3 = 70.3$ "

$M_4 = 73$ "

$M_5 = 35.5$ "

3.-



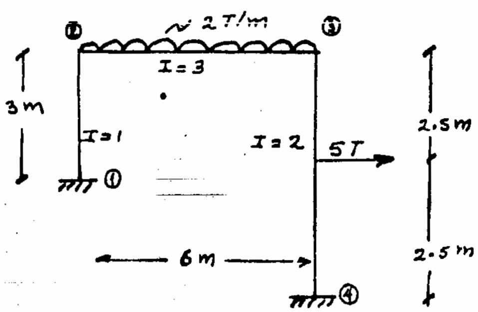
solución:

$M_1 = 1.33$ T-m

$M_2 = 3.33$ "

$M_3 = 0.67$ "

4.-



solución:

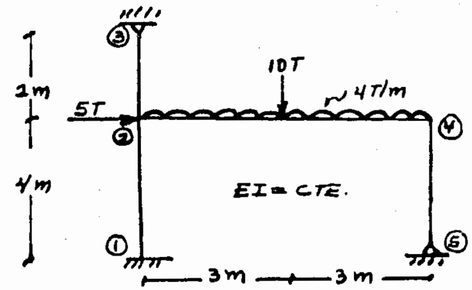
$M_1 = 1.336$ T-m

$M_2 = 1.208$ "

$M_3 = 4.15$ "

$M_4 = 8.16$ "

5.-



solución:

$M_1 = 4.65$ T-

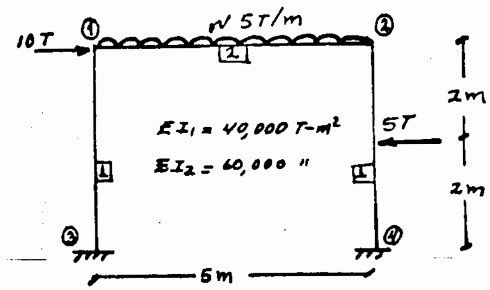
$M_{21} = 8.0$

$M_{23} = 11.4$

$M_{24} = 19.5$

$M_4 = 11.6$

6.-



solución:

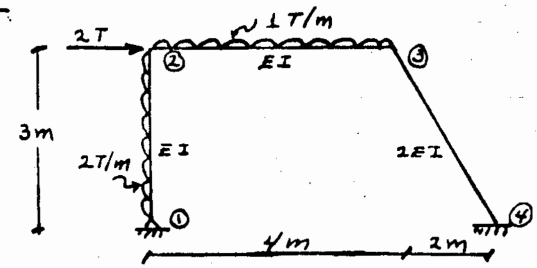
$M_1 = 0.65$ T-

$M_2 = 14.5$

$M_3 = 5.6$

$M_4 = 8.7$

7.-



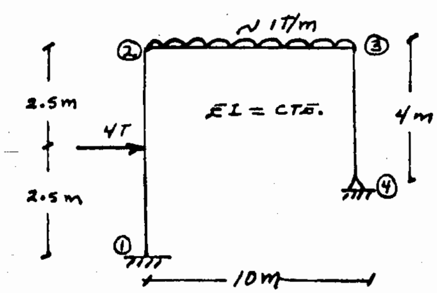
solución:

$M_2 = 0.20$ T-

$M_3 = 3.74$

$M_4 = 5.1$

8.-

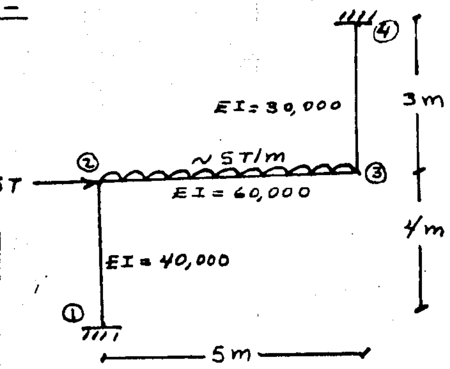


solución:

$M_1 = 4.33$ T-m

$M_2 = 5.02$ "

$M_3 = 8.42$ "



Solución :

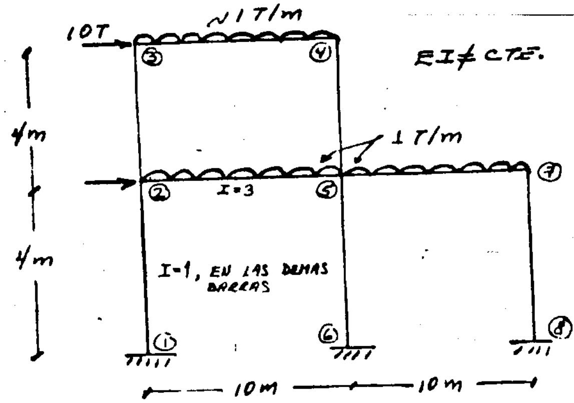
$M_1 = 1.4$ T-m

$M_2 = 5.5$ "

$M_3 = 5.0$ "

$M_4 = 0.4$ "

0.-



(+)

SOLUCION :

$M_1 = -23.13$ T-m

$M_{21} = -14.28$ "

$M_{23} = -8.30$ "

$M_{25} = 22.58$ "

$M_{32} = -1.12$ "

$M_{31} = 1.12$ "

$M_{43} = 7.68$ "

$M_{45} = -9.68$ "

$M_{52} = 35.55$ "

$M_{54} = -17.51$ "

$M_{56} = -18.24$ "

$M_{57} = 0.20$ "

$M_{75} = 17.10$ "

$M_{78} = -17.10$ "

$M_6 = -25.13$ "

$M_8 = -27.60$ "

9.- METODO DE KANI

LAS ECUACIONES SIGUIENTES CONSTITUYEN LA BASE DEL LLAMADO METODO DE KANI:

$$m_{ij} = -\frac{k}{2\Sigma k}\left[\bar{M}_{io} + \Sigma m_{ji} + \Sigma \mu_{ij}\right] \quad (1)$$

$$\mu_{ij} = -\frac{k}{\frac{2}{3}\Sigma k}\left[\frac{Vh}{3} + \Sigma(m_{ij} + m_{ji})\right] \quad (2)$$

EN DONDE :

$m_{ij} = \frac{2EI}{L}\theta_i$; CONTRIBUCION ANGULAR DEL EXTREMO CERCANO.

$m_{ji} = \frac{2EI}{L}\theta_j$; CONTRIBUCION ANGULAR DEL EXTREMO LEJANO.

$\bar{M}_{io}$ = MOMENTO DE DESEQUILIBRIO EN EL NUDO "i"

$\mu_{ij} = -\frac{6EI}{L^2}\Delta$; CONTRIBUCION POR DESPLAZAMIENTO LINEAL TRANSVERSAL RELATIVO ENTRE LOS EXTREMOS DE LA BARRA.

$\frac{k}{2\Sigma k}$; FACTOR DE DISTRIBUCION ANGULAR.

$\frac{k}{\frac{2}{3}\Sigma k}$; FACTOR DE DISTRIBUCION LINEAL.

$\frac{Vh}{3}$; MOMENTO DE ENTREPISO.

EL MOMENTO REAL EN EL EXTREMO DE UNA BARRA SERA IGUAL A :

$$M_{ij} = M_{io} + \frac{2EI}{L}(2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij})$$

$$M_{ij} = M_{io} + 2m_{ij} + m_{ji} + \mu_{ij} \quad (3)$$

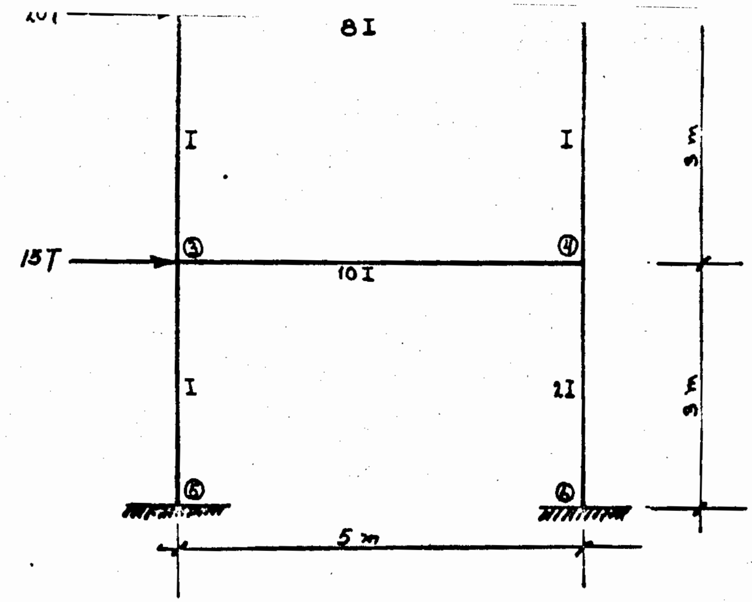
1.- OBTENCION DE LOS FACTORES DE DISTRIBUCION ANGULAR Y LINEAL DE TODOS LOS NUDOS Y COLUMNAS.

2.- CALCULO DE LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO, Y A - PARTIR DE LOS CUALES CALCULAMOS LOS MOMENTOS DE DESEQUILIBRIO EN LOS NUDOS.

3.- SE DETERMINA LA FUERZA CORTANTE EN CADA ENTREPISO, COMO LA SUMA DE FUERZAS HORIZONTALES ARRIBA DEL PISO ANALIZADO.- A PARTIR DE ESTOS VALORES, SE CALCULARA EL MOMENTO DE ENTREPISO $Vh/3$ Y LA SUMA DE LOS MOMENTOS DE ENTREPISO.

4.- CALCULO DE LAS CONTRIBUCIONES ANGULARES Y LINEALES MEDIANTE LAS FORMULAS (1) y (2) RESPECTIVAMENTE, LAS CUALES SE APLICAN VARIAS VECES HASTA LOGRAR QUE EN DOS CICLOS CONSECUTIVOS LOS VALORES OBTENIDOS SEAN PRACTICAMENTE IGUALES.

5.- LOS MOMENTOS FINALES EN LOS EXTREMOS DE LAS BARRAS SE OBTIENEN A PARTIR DE LA FORMULA (3)



1o. PASO : CALCULO DE LOS FACTORES DE DISTRIBUCION:

ANGULARES:

BARRA.	RIGIDEZ RELATIVA.	F.D.
1-2	8/5 = 1.6	0.415
1-3	1/3 = 0.33	0.085
	Σ 1.93	
	2 × 1.93 = 3.86	
2-1	8/5 = 1.60	0.415
2-4	1/3 = 0.33	0.085
	Σ 1.93	
	2 × 1.93 = 3.86	
3-1	1/3 = 0.33	0.062
3-4	10/5 = 2.00	0.376
3-5	1/3 = 0.33	0.062
	Σ 2.66	
	2 × 2.66 = 5.32	
4-2	1/3 = 0.33	0.055
4-3	10/5 = 2.00	0.335
4-6	2/3 = 0.66	0.110
	Σ 3.00	
	2 × 3 = 6.00	

LINEALES:

ENTREPISO I	RIGIDEZ RELATIVA.	F.D.
3-5	$1/3 = 0.33$	0.5
4-6	$2/3 = 0.66$	1.0
	Σ 1.00	
	$2/3 \times 1 = 0.666$	
ENTREPISO II		
1-3	$1/3 = 0.33$	0.75
2-4	$1/3 = 0.33$	0.75
	Σ 0.66	
	$2/3 \times 0.66 = 0.443$	

o.- PASO.- CALCULO DE MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO:

en este caso valen cero.

1o. PASO.- OBTENCION DE LOS MOMENTOS DE ENTREPISO:

ENTREPISO	$1/3(Vh)$
2	$1/3(20 \times 3) = 20$
1	$1/3(35 \times 3) = 35$

4o. PASO.- SE SIGUE EL SIGUIENTE ORDEN:

a) SE DISTRIBUYE EL VALOR $Vh/3$ ENTRE LAS COLUMNAS DE CADA ENTREPISO

COLUMNA	$-\mu_{ij}$
3-5	$-35(0.5) = -17.5$
4-6	$-35(1) = -35$
1-3	$-20(0.75) = -15$
2-4	$-20(0.75) = -15$

b) SE CALCULA LA CONTRIBUCION ANGULAR EN CADA NUDO.

BARRA $\quad m_{ij}$

NUDO 1

$\Sigma m_{ji} = 0$

$\Sigma \mu_{ij} = -15$

APLICANDO LA FORMULA (1)

1-2 $\longrightarrow$ $m_{12} = -0.415(-15) = 6.22$

1-3 $\longrightarrow$ $m_{13} = -0.085(-15) = 1.27$

NUDO 2.

$\Sigma m_{ji} = 6.22$

$\Sigma \mu_{ij} = -15$

2-1 $\longrightarrow$ $m_{21} = -0.415(6.22-15) = 3.64$

2-4 $\longrightarrow$ $m_{24} = -0.085(-8.78) = 0.74$

NUDO 3

$\Sigma m_{ji} = 1.27$

$\Sigma \mu_{ij} = -15 - 17.5 = -32.5$

3-1 $\longrightarrow$ $m_{31} = -0.062(1.27-32.5) = 1.93$

3-4 $\longrightarrow$ $m_{34} = -0.376(-31.23) = 11.74$

3-5 $\longrightarrow$ $m_{35} = -0.062(-31.23) = 1.93$

NUDO 4.

$\Sigma m_{ji} = 0.74 + 11.74 = 12.48$

$\Sigma \mu_{ij} = -15 - 35 = -50$

4-2 $\longrightarrow$ $m_{42} = -0.056(12.48-50) = 2.06$

4-3 $\longrightarrow$ $m_{43} = -0.335(-37.52) = 12.56$

4-6 $\longrightarrow$ $m_{46} = -0.110(-37.52) = 4.12$

BARRA $\quad \mu_{ij}$

ENTREPISO I

$\Sigma m_{ij} = 1.93 + 4.12 = 6.05$

$\Sigma m_{ji} = 0$

$1/3(Vh) = 35$

aplicando la formula (2)

3-5 $\longrightarrow$ $\mu_{35} = -0.5(35 + 6.05) = -20.52$

4-6 $\longrightarrow$ $\mu_{46} = -[illegible](41.05) = -[illegible]$

EN LA MISMA FORMA SE CALCULAN LOS μ_{ij} PARA EL ENTREPISO II REGRESANDO DESPUES A CALCULAR LAS m_{ij} Y ASI SUCESIVAMENTE.

LOS MOMENTOS FINALES SE CALCULAN APLICANDO LA FORMULA (3); POR EJEMPLO:

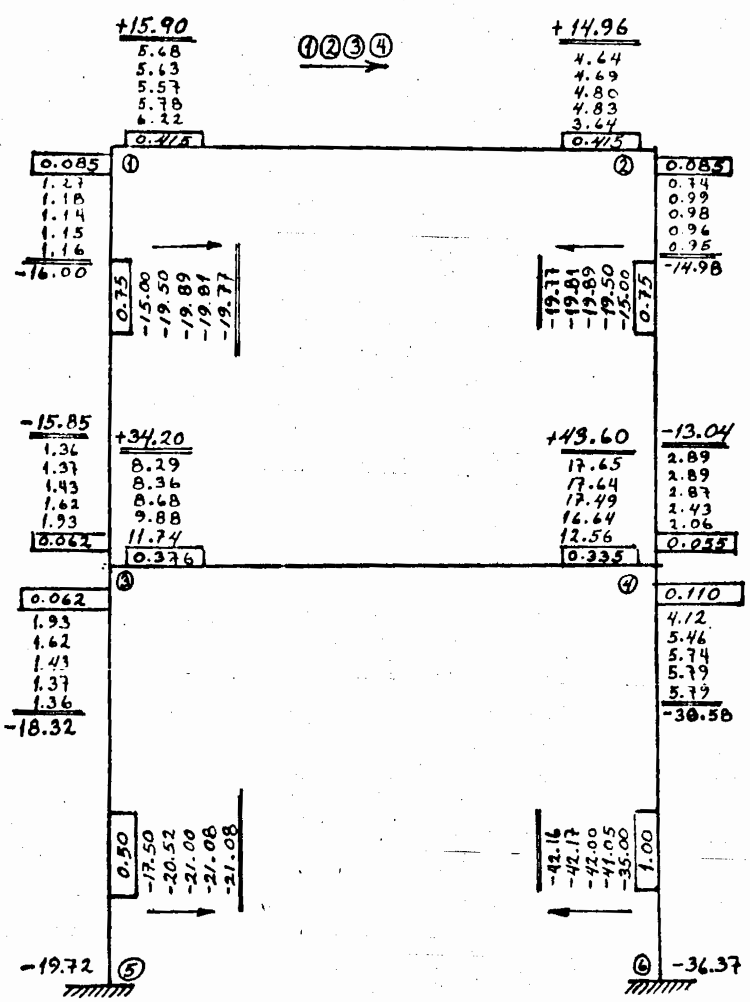
$M_{12} = 0 + 2([illegible]) + [illegible]$

$M_{13} = 0 + 2(1.[illegible]) + 1.36 - [illegible]$

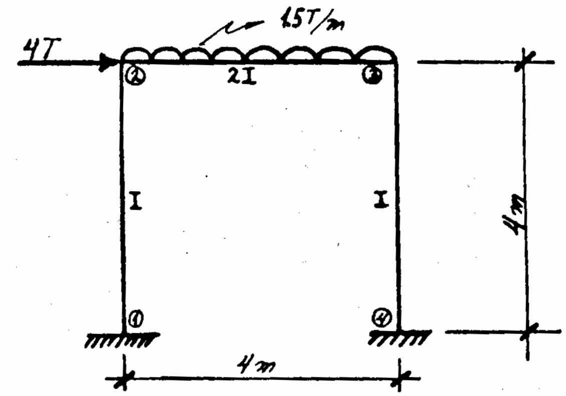
$M_{21} = 0 + 2(4.64) + 5.68 + 0 = 14.96$

$M_{24} = 0 + 2(0.75) + 2.89 - 19.77 = -14.98$

ETC.



PROBLEMA 2.- RESOLVER POR KANI EL MARCO SIGUIENTE:



FACTORES DE DISTRIBUCION.

ANGULARES:

BARRA.	RIGIDEZ RELATIVA	F. D.
2-1	1/4 = 0.25	0.166
2-3	2/4 = 0.50	0.333
	Σ 0.75	
	2 × 0.75 = 1.50	
3-2	2/4 = 0.50	0.333
3-4	1/4 = 0.25	0.166
	Σ 0.75	
	2 × 0.75 = 1.50	

LINEALES:

2-1	$6EI/L^2$; 1/4 = 0.25	0.75
3-4	$6EI/L^2$; 1/4 = 0.25	0.75
	Σ 0.50	
	3/3 × 0.50 = 0.333	

MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO:

$$M_{20} = -\frac{wL^2}{12} = -2$$

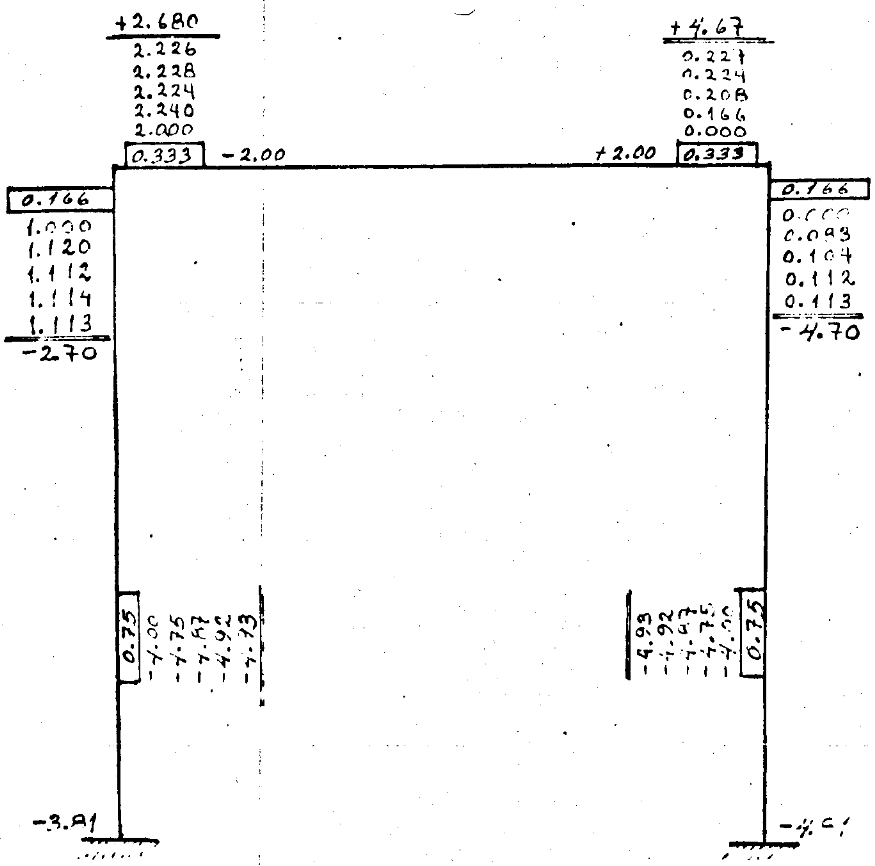
$$M_{30} = +2$$

MOMENTO DE ENTREPISO:

$$\frac{Vh}{3} = \frac{4(4)}{3} = 5.33$$

PROBLEMA 3.- RESOLVER POR KANI EL PROBLEMA 10, PAG. B-22.

APLICANDO EL PROCEDIMIENTO DEL PROBLEMA 1 SE OBTIENE:



LOS FACTORES DE DISTRIBUCION ANGULAR SERAN LOS DEL PROBLEMA 10, PAG. 6.-22, MULTIPLICADOS POR 0.5

BARRA	FACTOR DE DISTRIBUCION
2-1	0.454 (0.5) = 0.227
2-3	0.546 (0.5) = 0.273
3-2	0.406 (0.5) = 0.203
3-4	0.338 (0.5) = 0.169
3-5	0.256 (0.5) = 0.128
5-3	0.333 (0.5) = 0.166
5-6	0.666 (0.5) = 0.333

F.D. LINEALES.

BARRA	RIGIDEZ RELATIVA	F.D.
2-1	1/L = 33.33	0.43
3-4	1/L = 33.33	0.43
5-6	1.5/L = 50.00	0.64
	Σ 116.66	
	2/3 (116.66) = 78.00	

MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO.

$M_{20} = -8.33$

$M_{30}]_i = 8.33$

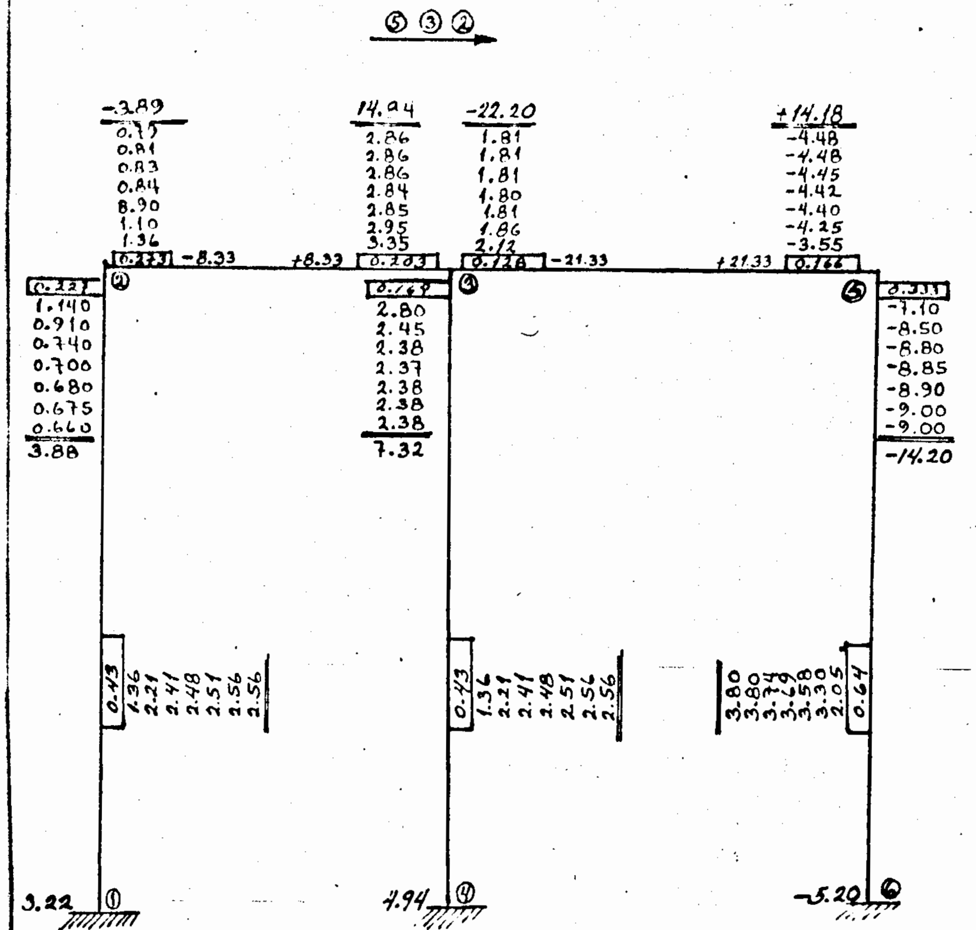
$M_{30}]_d = -21.33$

$M_{50} = +21.33$

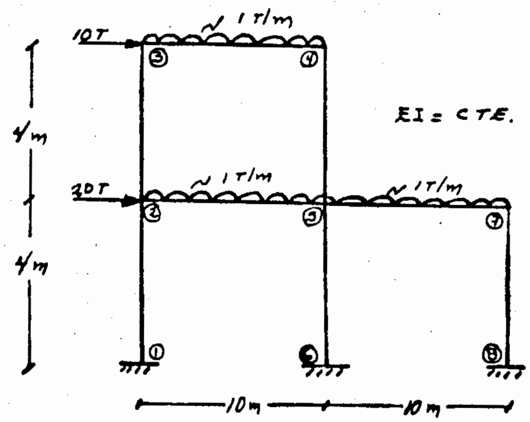
MOMENTOS DE ENTREPISO $\frac{1}{3} Vh = 0$

POR NO HABER CARGAS LATERALES.

EL PROCESO ITERATIVO LO INICIAREMOS CALCULANDO LAS CONTRIBUCIONES ANGULARES PRIMERO, Y DESPUES LAS LINEALES.



PROBLEMA 4.- Resolver por Kani el marco siguiente:



ANGULAR

BARRA	RIGIDEZ RELATIVA	F. D.
2-1	1/4 = 0.25	0.208
2-3	1/4 = 0.25	0.208
2-5	1/10 = 0.10	0.084
	Σ 0.60	
	2×0.60 = 1.20	
3-2	1/4 = 0.25	0.357
3-4	1/10 = 0.10	0.143
	Σ 0.35	
	2×0.35 = 0.70	
4-3	1/10 = 0.10	0.143
4-5	1/4 = 0.25	0.357
	Σ 0.35	
	2×0.35 = 0.70	
5-2	1/10 = 0.10	0.0715
5-7	1/10 = 0.10	0.0715
5-4	1/4 = 0.25	0.179
5-6	1/4 = 0.25	0.179
	Σ 0.70	
	2×0.70 = 1.40	
7-5	1/10 = 0.10	0.143
7-8	1/4 = 0.25	0.357
	Σ 0.35	
	2×0.35 = 0.70	

LINEAL

BARRA	RIGIDEZ RELATIVA	F. D.
2-1	1/4 = 0.25	0.50
5-6	1/4 = 0.25	0.50
7-8	1/4 = 0.25	0.50
	Σ 0.75	
	2/3 × 0.75 = 0.50	
3-2	1/4 = 0.25	0.75
4-5	1/4 = 0.25	0.75
	Σ 0.50	
	2/3 × 0.50 = 0.333	

MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO:

$$M_{20} = M_{50}]_d = M_{30} = -\frac{wL^2}{12} = -8.33 \text{ T-}$$

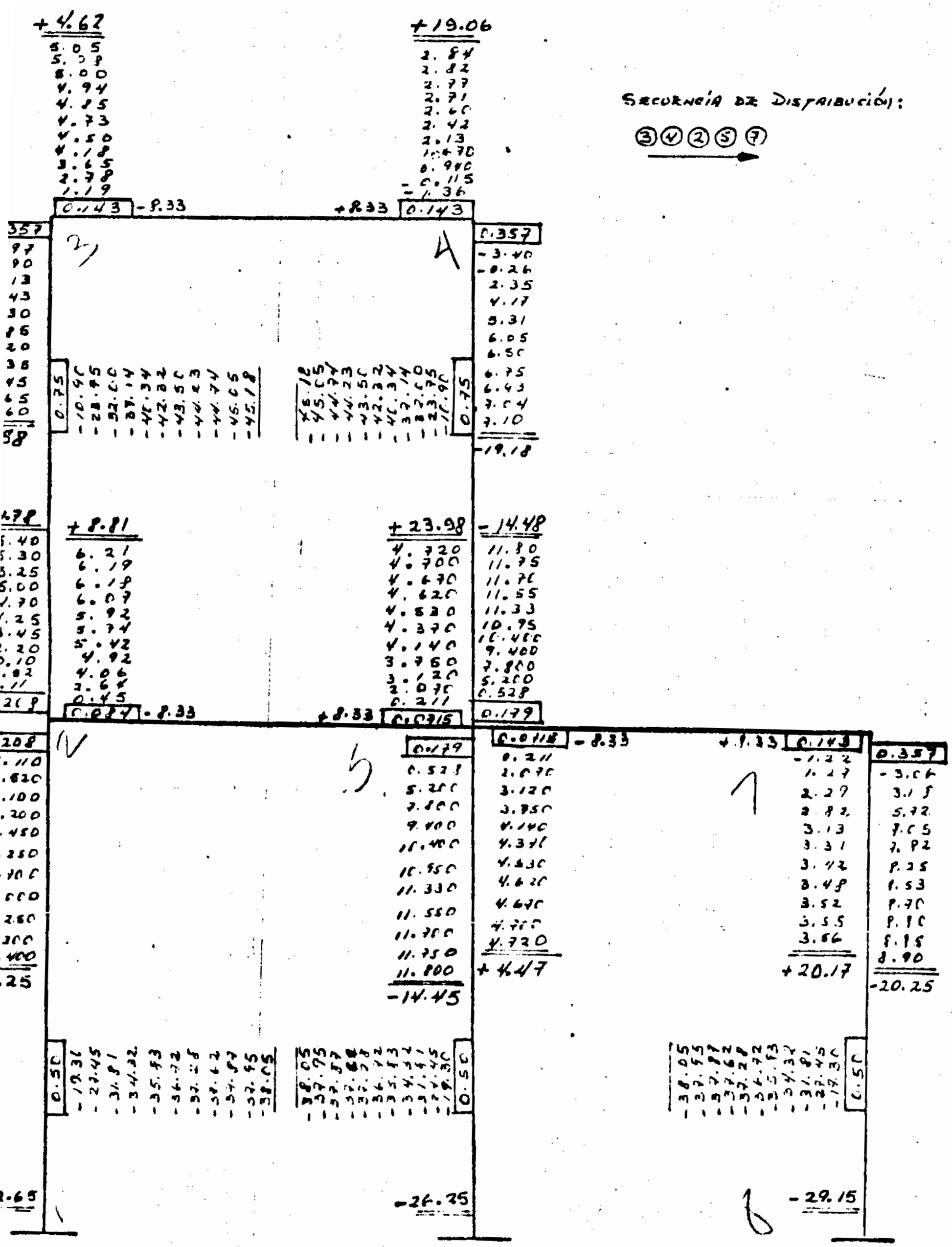
$$M_{50}]_i = M_{70} = M_{40} = 8.33 \text{ T-m}$$

MOMENTOS DE ENTREPISO:

$$\frac{Vh}{3} = \frac{10\times 4}{3} = 13.33 \text{ T-m}$$

$$\frac{Vh}{3} = \frac{30\times 4}{3} = 40.00 \text{ T-m}$$

La Distribución se inició con contribuciones angulares primero.

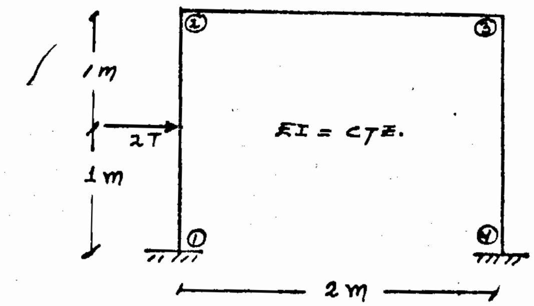


Secuencia de Distribución: ③④②⑤⑦

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resolver por el método de Kani, las estructuras siguientes :-

1.-



SOLUCION :

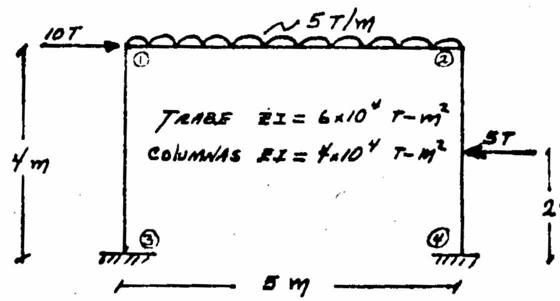
$M_1 = 1.10$ T-m

$M_2 = 0.11$ "

$M_3 = 0.36$ "

$M_4 = 0.45$ "

2.-



SOLUCION :

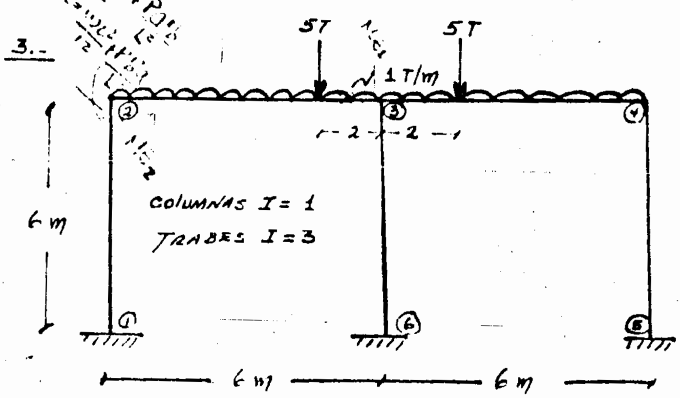
$M_1 = 0.66$ T-m

$M_2 = 14.60$ "

$M_3 = 5.60$ "

$M_4 = 8.70$ "

3.-



SOLUCION :

$M_1 = 0.653$ T-m

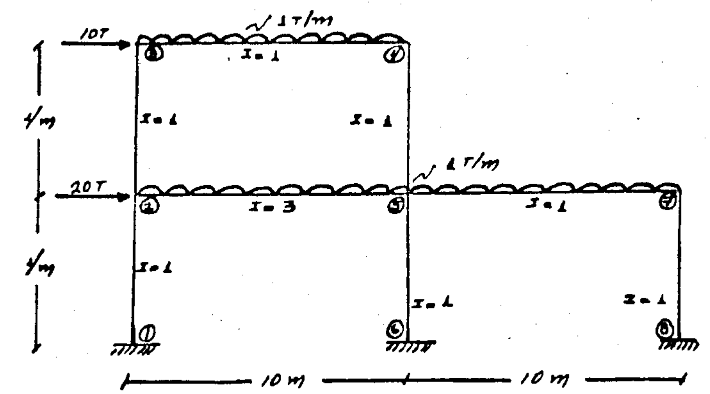
$M_2 = 1.306$ "

$M_3 = 3.40$ "

$M_4 = 1.306$ "

$M_5 = 0.653$ "

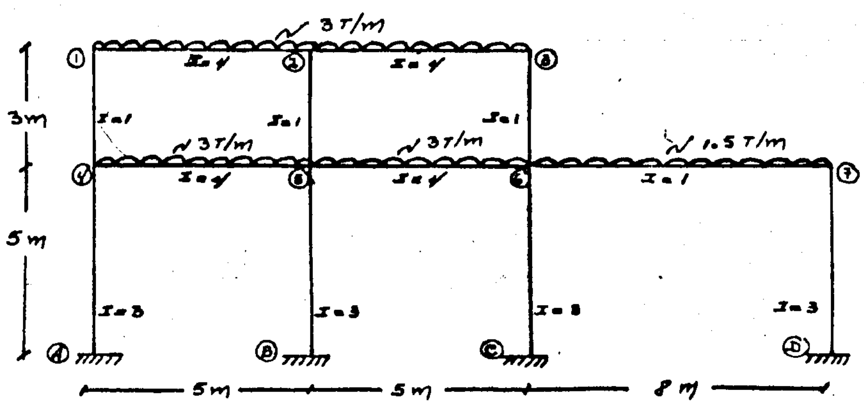
4.-



Solucion:

$M_1 = -23.13$ T-m
$M_6 = -25.13$ "
$M_8 = -24.60$ "
$M_{21} = -14.28$ "
$M_{23} = -8.30$ "
$M_{25} = 22.68$ "
$M_3 = \pm 1.12$ "
$M_4 = \pm 9.68$ "
$M_{52} = 38.55$ "
$M_{54} = -17.51$ "
$M_{56} = -18.24$ "
$M_{57} = 0.20$ "
$M_7 = \pm 17.10$ "

5.-



Solución:

$M_A = 1.891$ T-m	$M_{7D} = 6.547$ T-m
$M_B = 0.702$ "	$M_{7C} = 6.54$ T-m.
$M_C = 1.523$ "	$M_3 = 1.87$ T-m
$M_D = 2.767$ "	$M_1 = 1.935$ T-m.
$M_{4A} = 2.769$ "	ETC.
$M_{5B} = 0.585$ "	
$M_{6C} = 2.033$ "	

10.- METODOS APROXIMADOS.

LOS METODOS APROXIMADOS SON MUY UTILES CUANDO SE DESEA HACER UN ANALISIS PRELIMINAR DE UNA ESTRUCTURA.- EN GENERAL, ESTOS METODOS NO SON SATISFACTORIOS PARA UN ANALISIS DEFINITIVO.

EN LA APLICACION DE ESTOS METODOS CONSIDERAREMOS LA ESTRUCTURA SIGUIENTE, EN LA CUAL SE DAN SUS RIGIDECES RELATIVAS.

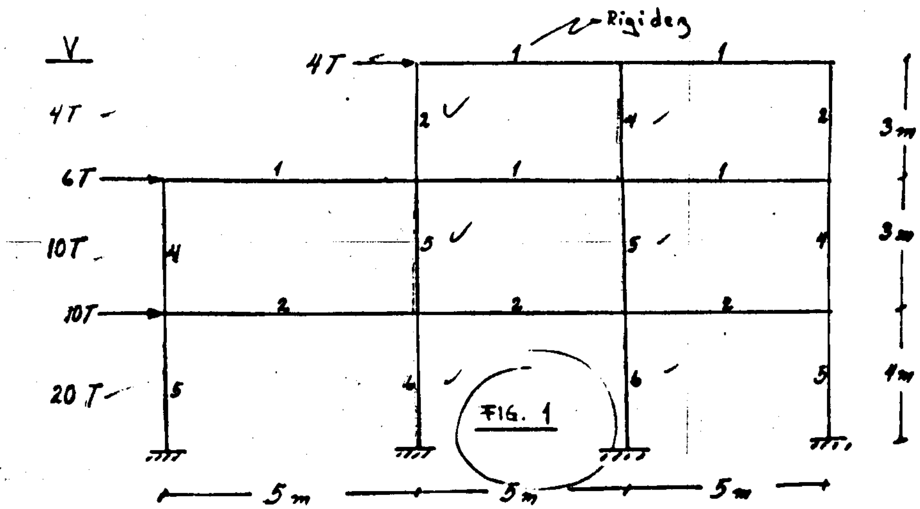


FIG. 1

a) METODO DEL VOLADIZO

LAS HIPOTESIS EN QUE SE BASA ESTE METODO SON:

a). LOS PUNTOS DE INFLEXION DE TRABES Y COLUMNAS SE ENCUENTRAN EN SUS PUNTOS MEDIOS.

b). LA FUERZA AXIAL DE CADA COLUMNA EN UN MISMO ENTREPISO ES PROPORCIONAL A SU SECCION TRANSVERSAL Y A SU DISTANCIA AL CENTRO DE GRAVEDAD DE LAS COLUMNAS EN EL ENTREPISO CONSIDERADO. ES COMUN SUPONER QUE LAS COLUMNAS TIENEN SECCIONES IGUALES Y A PARTIR DE ESTO LA FUERZA AXIAL EN CADA COLUMNA ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A SU DISTANCIA AL CENTRO DE GRAVEDAD DEL MARCO.

EJEMPLO: RESOLVER LA ESTRUCTURA ANTERIOR POR EL METODO DEL VOLADIZO.

PROCEDIMIENTO:

1.- DETERMINAR LOS MOMENTOS DE LAS FUERZAS EXTERIORES CON RESPECTO A SECCIONES HORIZONTALES QUE PASAN POR LOS PUNTOS DE INFLEXION DE LAS COLUMNAS EN CADA ENTREPISO.

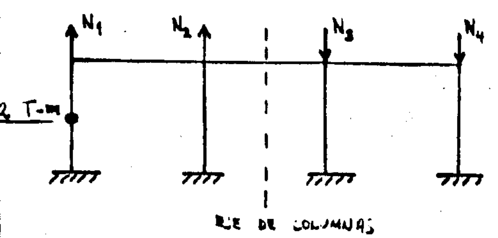
2.- LAS FUERZAS AXIALES SE CALCULAN EN FUNCION DE LOS MOMENTOS CALCULADOS EN EL PASO ANTERIOR Y ESTARAN EN FUNCION DE LA DISTANCIA DE CADA COLUMNA AL CENTRO DE GRAVEDAD DEL ENTREPISO.

3.- CON LAS FUERZAS AXIALES DE LAS COLUMNAS, DETERMINAMOS LOS CORTANTES EN LAS TRABES.- Y POR ULTIMO OBTENEMOS LOS MOMENTOS EN TRABES Y COLUMNAS TENIENDO EN CONSIDERACION LA HIPOTESIS 1.

CONSIDEREMOS EL PRIMER ENTREPISO DE LA ESTRUCTURA; SU MOMENTO CON RESPECTO A SU PUNTO DE INFLEXION, SERA IGUAL A LA SUMA DE LOS MOMENTOS CON RESPECTO A ESE PUNTO, DE LOS QUE PRODUZCAN TODAS LAS FUERZAS LATERALES DE LA ESTRUCTURA

$$M = 4(8) + 6(5) + 10(2) = 82 \text{ T-m}$$

LAS FUERZAS AXIALES SERAN:



$$N_1 = -N_4 \quad y \quad N_2 = -N_3$$

DEBIDO A QUE SUS DISTANCIAS AL EJE SON IGUALES.

$$7.5N_1 + 7.5N_4 + 2.5N_2 + 2.5N_3 = 82$$

$$15N_1 + 5N_2 = 82 \qquad (1)$$

$$\frac{N_1}{7.5} = \frac{N_2}{2.5} \qquad N_1 = 3N_2$$

SUBSTITUYENDO EN (1) SE OBTIENE:

$$N_2 = 1.64 \text{ T} \quad ; \quad N_1 = 4.92 \text{ T}$$

$N_3 = -N_2$ (−) COMPRESION

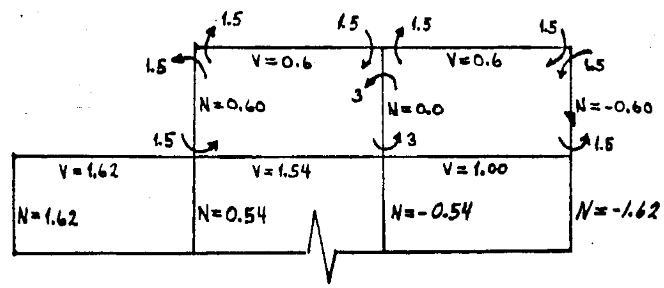
$N_4 = -N_1$ (+) TENSION

EN IGUAL FORMA CALCULAMOS LAS FUERZAS AXIALES PARA LOS ENTREPISOS RESTANTES.- SUMANDO ALGEBRAICAMENTE LAS FUERZAS AXIALES EN CADA NUDO, ENCONTRAMOS LAS CORTANTES EN LAS TRABES.

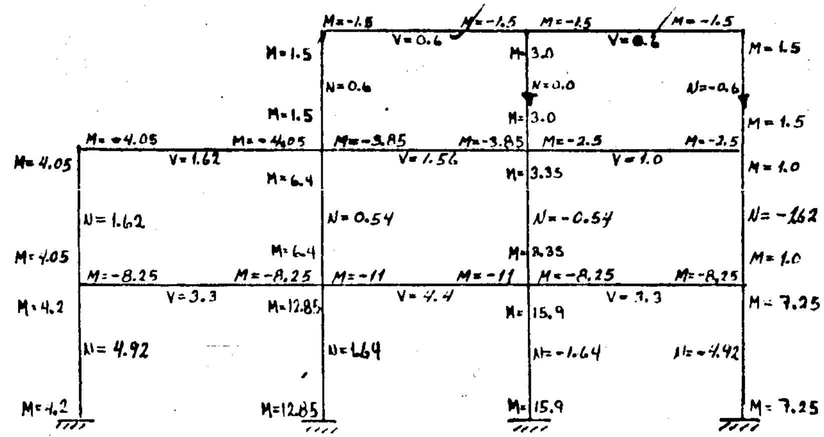
LOS MOMENTOS EN LAS TRABES Y COLUMNAS SE ENCUENTRAN APLICANDO LA HIPOTESIS 1. EMPEZANDO POR NUDOS DONDE SOLO SE TENGA UNA COLUMNA Y TOMANDO EN CUENTA QUE LOS MOMENTOS SON IGUALES EN LOS EXTREMOS DE CADA TRABE Y DE CADA COLUMNA.

POR EJEMPLO, EN EL ULTIMO ENTREPISO SE ENCONTRO QUE:

$$M = 0.6 \times 2.5 = 1.5$$



LA SOLUCION FINAL DE LA ESTRUCTURA ES:



b).- METODO DEL PORTAL.

LAS HIPOTESIS EN QUE SE BASAN SON:

1).- LOS PUNTOS DE INFLEXION DE TRABES Y DE COLUMNAS SE ENCUENTRAN EN SUS PUNTOS MEDIOS.

2).- LA FUERZA CORTANTE EN CADA UNA DE LAS COLUMNAS EXTERIORES DE UN PISO ES IGUAL A LA MITAD DE LA FUERZA CORTANTE QUE CORRESPONDE A CADA COLUMNA INTERIOR.

EJEMPLO: APLICAR ESTE METODO A LA ESTRUCTURA DE LA FIG 1.

PROCEDIMIENTO:

a) CALCULAR LA FUERZA CORTANTE EN CADA ENTREPISO.

entrepiso 1: $V = 20\,T$

POR LA HIPOTESIS 2, SE TIENE QUE LA RIGIDEZ DE LAS COLUMNAS INTERIORES TIENEN QUE SER EL DOBLE DE LAS EXTERIORES, POR LO TANTO TENEMOS:

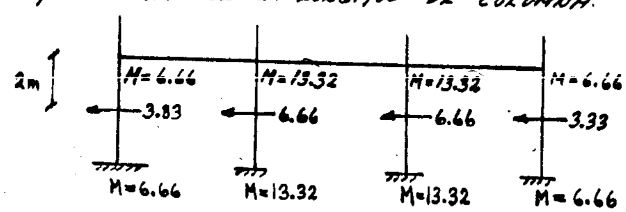
$$\Sigma \text{ RIGIDEZ} = 6$$

COLUMNA EXTERIOR $V = \frac{1}{6}(20) = 3.33\ T$

COLUMNA INTERIOR $V = 2(3.33) = 6.66\ T$

b) OBTENER LOS MOMENTOS EN LAS COLUMNAS Y A PARTIR DE ESTOS OBTENER LOS DE LAS TRABES. PARA ELLO SE DEBE COMENZAR EN NUDOS CON UNA SOLA TRABE Y TENER EN CUENTA QUE LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DE UNA MISMA TRABE SON IGUALES.

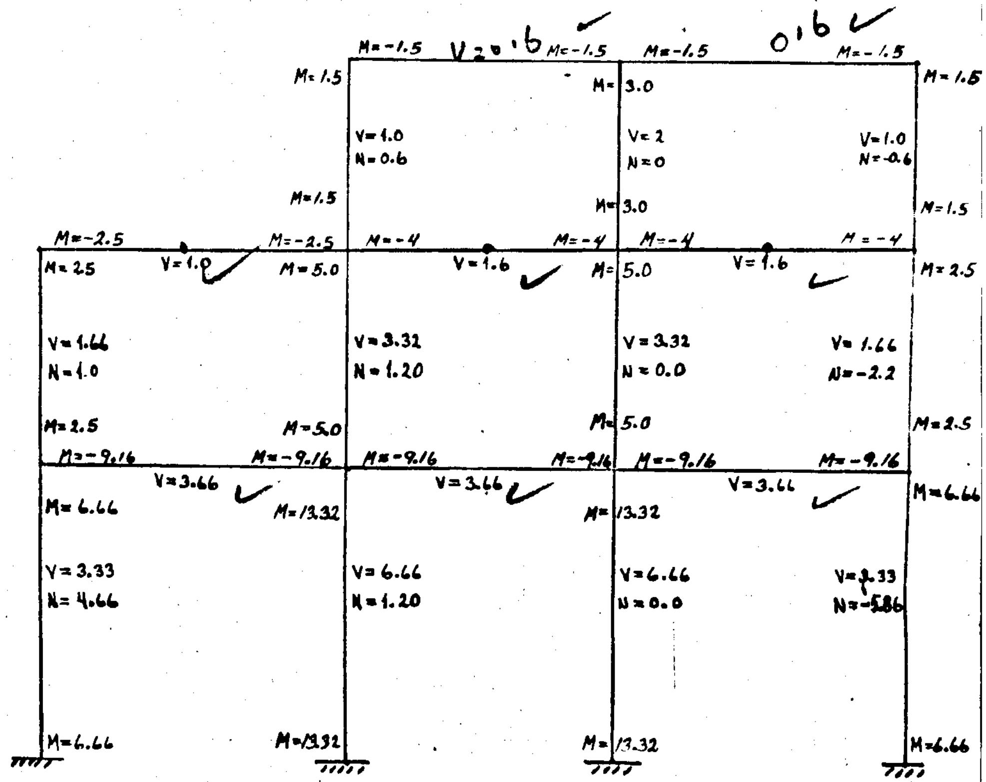
LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DE LAS COLUMNAS SE OBTIENEN POR EL PRODUCTO DE LA FUERZA CORTANTE EN EL PUNTO DE INFLEXION (PASO a) Y LA MITAD DE LA LONGITUD DE COLUMNA.



$$M = 3.33 \times 2 = 6.66$$

c) OBTENER LAS CORTANTES EN LAS TRABES A PARTIR DE SUS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS. A PARTIR DE ESTO, OBTENER LAS FUERZAS AXIALES EN LAS COLUMNAS.

LA SOLUCION FINAL DE LA ESTRUCTURA ES:



$$\frac{2.5+2.5}{5.0} = 1.0 \qquad 3.33$$

$$\frac{4+4}{5} = \frac{8}{5}$$

C.- METODO DEL FACTOR.

EL DESARROLLO DE ESTE METODO SE BASA EN EL PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES PENDIENTE - DEFORMACION.

PROCEDIMIENTO:

1.- CALCULAR EL "FACTOR DE TRABE" G_n EN CADA NUDO:

$$G_n = \frac{\Sigma K_c}{\Sigma K}$$

en donde : ΣK_c = SUMA DE RIGIDECES DE LAS COLUMNAS QUE CONCURREN AL NUDO.

ΣK = SUMA DE RIGIDECES DE TODOS LOS MIEMBROS QUE CONCURREN AL NUDO.

2.- CALCULAR EL "FACTOR DE COLUMNA" C_n EN CADA NUDO:

$$C_n = 1 - G_n$$

3.- OBTENER PARA CADA TRABE Y COLUMNA QUE LLEGAN AL NUDO, EL VALOR DE LA SUMA DE SU FACTOR MAS LA MITAD DEL FACTOR CORRESPONDIENTE AL EXTREMO OPUESTO DE LA MISMA PIEZA:

TRABE : $(G + G'/2)$

COLUMNA : $(C + C'/2)$

LOS VALORES ANTERIORES LOS MULTIPLICAMOS POR SU RIGIDEZ RESPECTIVA:

$$(G + G'/2)\, K_T$$

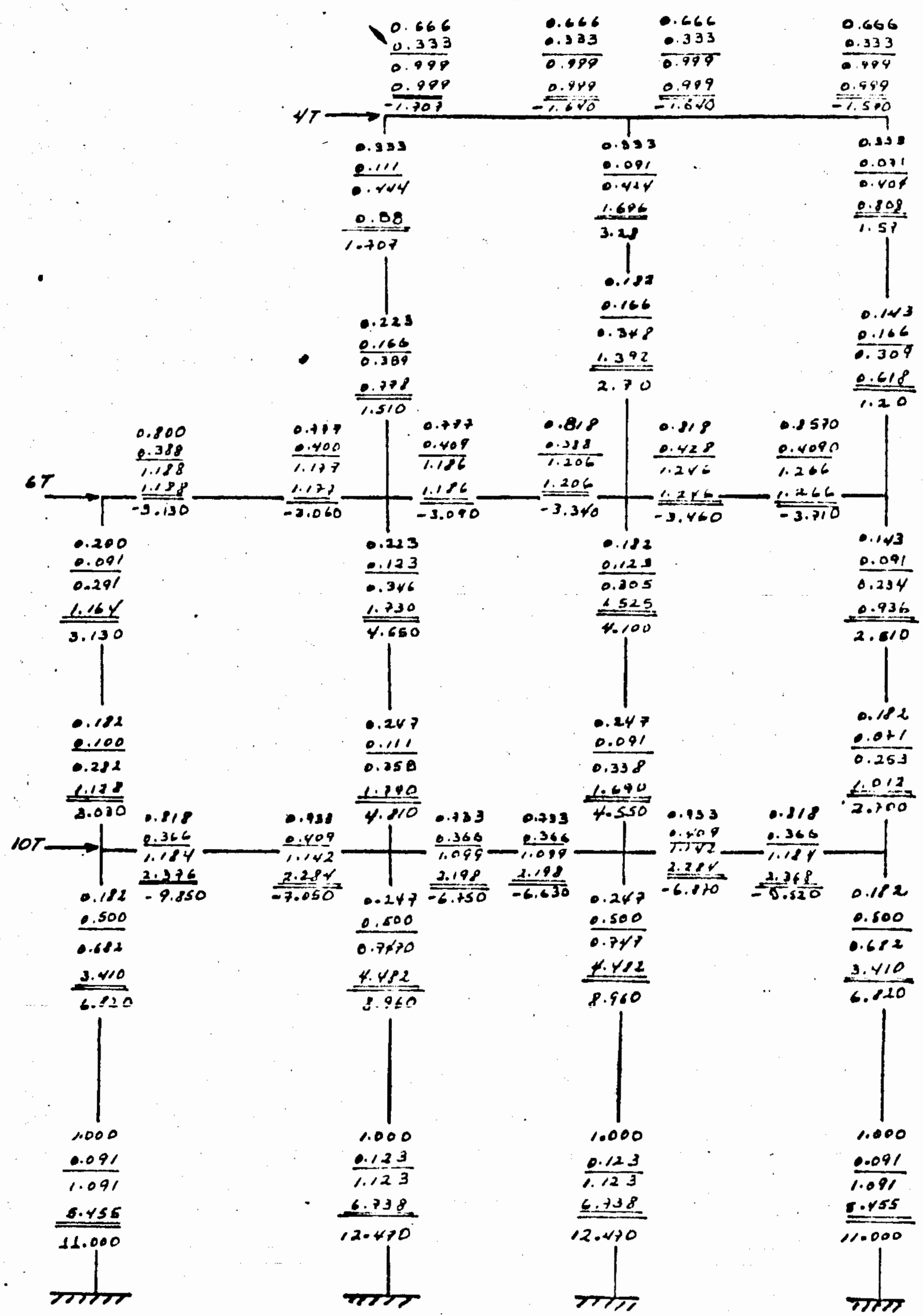
$$(C + C'/2)\, K_c$$

4.- LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DE LAS COLUMNAS DE CADA ENTREPISO, SERAN PROPORCIONALES A LOS VALORES DE $(C + C'/2) K_c$ PARA CADA EXTREMO DE CADA COLUMNA.

LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DE LAS TRABES, SERAN PROPORCIONALES A LOS VALORES DE $(G + G'/2) K_T$ CORRESPONDIENTE.

EJEMPLO: ANALIZAR LA ESTRUCTURA DE LA FIG. 1 POR ESTE METODO.

LA SOLUCION FINAL SE DA PRIMERO Y LUEGO SE HACEN LOS COMENTARIOS A LA SOLUCION.



ANÁLISIS DEL PRIMER NIVEL :- (NUDO DEL EXTREMO IZQUIERDO)

$$G = \frac{\Sigma K_c}{\Sigma K} = \frac{9}{11} = 0.818$$

$$C = 1 - G = 1 - 0.818 = 0.182$$

LO ANTERIOR SE PONE EN EL PRIMER RENGLON. EN EL SEGUNDO RENGLON PONEMOS $C'/2$ Y $G'/2$ RESPECTIVAMENTE:

$$\tfrac{1}{2} G' = \tfrac{1}{2}(0.733) = 0.366$$

$$\tfrac{1}{2} C' = \tfrac{1}{2}(0.200) = 0.100 \quad (\text{arriba})$$

$$\tfrac{1}{2} C' = \tfrac{1}{2}(1.00) = 0.500 \quad (\text{abajo})$$

EN EL TERCER RENGLON COLOCAMOS $G + \tfrac{1}{2}G'$ Y $C + \tfrac{1}{2}C'$.

EN EL CUARTO RENGLON Y SOBRE LA DOBLE RAYA, SE COLOCA EL VALOR

$$(G + \tfrac{1}{2}G')K_T \quad y \quad (C + \tfrac{1}{2}C')K_c :$$

$$(1.184)2 = 2.376 \quad (\text{TRABE})$$

$$(0.682)5 = 3.410 \quad (\text{COLUMNA ABAJO})$$

$$(0.282)4 = 1.128 \quad (\text{COLUMNA ARRIBA})$$

EL ULTIMO RENGLON ES EL VALOR DEL MOMENTO, EL CUAL SE OBTIENE EN LA FORMA SIGUIENTE:

MOMENTOS EN LAS COLUMNAS DEL PRIMER ENTREPISO:

$$Vh = 20(4) = 80 \text{ T-m}$$

$$\Sigma K(c + \tfrac{1}{2}c') = 40.17 \quad (\text{de todo el entrepiso})$$

COLUMNA EXTREMA IZQUIERDA:

arriba $M = \frac{3.41}{39.75} \times 80 = 6.82$

abajo $M = \frac{5.455}{39.75} \times 80 = 11.00$

LOS MOMENTOS EN LAS TRABES SE CALCULAN DISTRIBUYENDO LA SUMA DE LOS MOMENTOS DE LAS COLUMNAS EN CADA NUDO, PROPORCIONALMENTE AL VALOR $K(G + \tfrac{1}{2}G')$ DE CADA TRABE.

POR EJEMPLO: ANALIZAMOS AL NUDO CENTRAL IZQUIERDO DEL PRIMER NIVEL:

$$\Sigma M_{columnas} = 4.81 + 8.96 = 13.77 \text{ T-m}$$

$$\Sigma K(G + \tfrac{1}{2}G') = 2.284 + 2.198 = 4.482$$

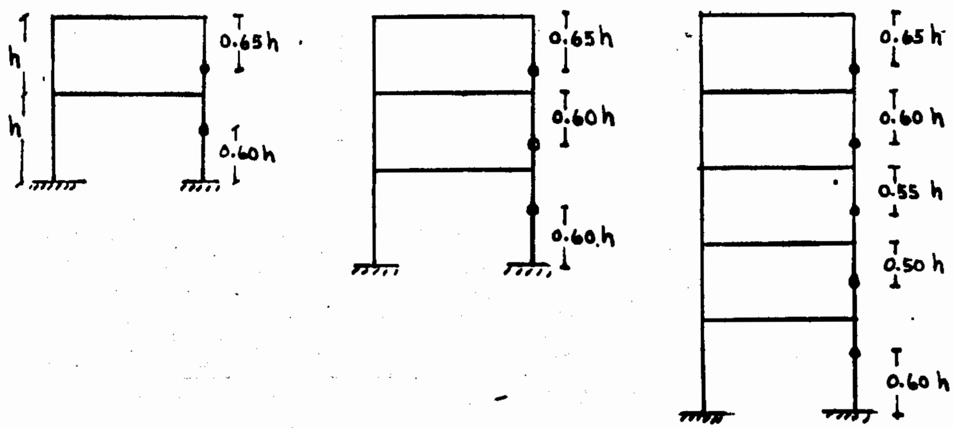
TRABE IZQUIERDA $M = \frac{2.284}{4.482}(13.77) = -7.05$ T-m

TRABE DERECHA $M = \frac{2.198}{4.482}(13.77) = -6.75$ T-m

LAS HIPOTESIS DE ESTE METODO SON:

1.- LAS COLUMNAS DEL PRIMER ENTREPISO TIENEN SU PUNTO DE INFLEXION A 0.60 DE SU ALTURA A PARTIR DE LA BASE.
EN MARCOS DE DOS O MAS ENTREPISOS, LOS PUNTOS DE INFLEXION DE LAS COLUMNAS DE LOS ENTREPISOS ULTIMO, PENULTIMO Y ANTEPENULTIMO SE ENCUENTRAN RESPECTIVAMENTE A 0.65, 0.60 Y 0.55 DE LA ALTURA CORRESPONDIENTE, A PARTIR DEL EXTREMO SUPERIOR.- EN LOS DEMAS CASOS LOS PUNTOS DE INFLEXION ESTARAN A LA MITAD DE LA ALTURA DE LA COLUMNA CORRESPONDIENTE.

Ejemplos:



2.- LOS PUNTOS DE INFLEXION EN LAS TRABES EXTERIORES SE ENCUENTRAN A 0.55 DE SU CLARO, A PARTIR DE SU EXTREMO EXTERIOR. EN TRABES INTERIORES, EL PUNTO DE INFLEXION SE ENCUENTRA AL CENTRO DEL CLARO, EXCEPTO EN LA CRUJIA CENTRAL CUANDO EL NUMERO DE CRUJIAS ES IMPAR, O EN LAS DOS CENTRALES SI ES PAR.- EN ESTAS CRUJIAS LA POSICION DE PUNTOS DE INFLEXION EN LAS TRABES ESTA FORZADA POR CONDICIONES DE SIMETRIA Y EQUILIBRIO.

3.- LA FUERZA CORTANTE EN CADA ENTREPISO SE DISTRIBUYE COMO SIGUE:

Primer entrepiso:

$$V_c = \frac{N-0.5}{N+1} V$$

En entrepisos superiores:

$$V_c = \frac{N-2}{N+1} V$$

∴ V_c = FUERZA CORTANTE TOTAL EN UN ENTREPISO, LA CUAL SE DISTRIBUYE ENTRE LAS COLUMNAS PROPORCIONALMENTE A SUS RIGIDECES.

N = NUMERO DE CRUJIAS DEL MARCO EN EL ENTREPISO CONSIDERADO

4.- LA FUERZA CORTANTE $V_t = V - V_c$ SE DISTRIBUYE ENTRE LAS CRUJIAS PROPORCIONALMENTE A LA RIGIDEZ DE LA TRABE QUE LA LIMITA EN LA PARTE SUPERIOR.- LA CORTANTE DE CADA CRUJIA SE DISTRIBUYE EN PARTES IGUALES ENTRE LAS DOS COLUMNAS QUE LA LIMITAN.

PROCEDIMIENTO:

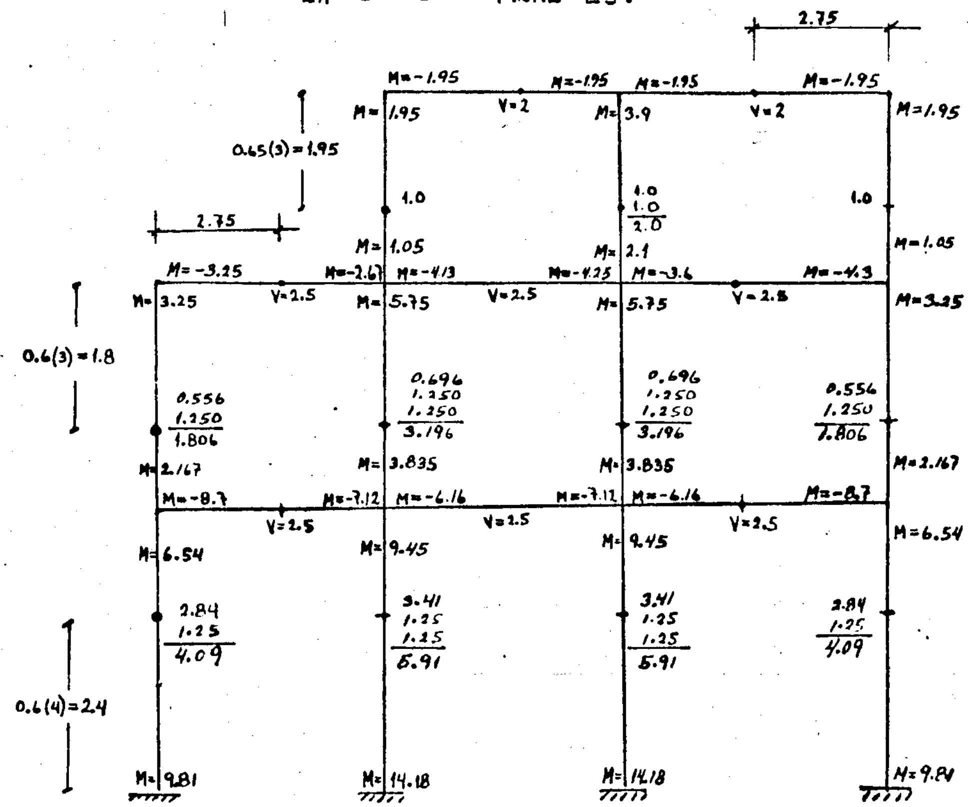
a) ENCUENTRESE LA FUERZA CORTANTE EN CADA COLUMNA DE CADA ENTREPISO APLICANDO LAS HIPOTESIS 3 y 4.

b) DETERMINAR LOS MOMENTOS EN LOS EXTREMOS DE LAS COLUMNAS HACIENDO EL PRODUCTO DE SU FUERZA CORTANTE POR LA DISTANCIA DE SU EXTREMO A SU PUNTO DE INFLEXION.

c) LOS MOMENTOS EN LAS TRABES SE CALCULAN SEGUN SE INDICA EN EL EJEMPLO SIGUIENTE.

Ejemplo: RESOLVER LA ESTRUCTURA DE LA FIG. 1 POR EL METODO DE BOWMAN.

LA SOLUCION FINAL ES:



PRIMER ENTREPISO

$$V_c = \frac{N-0.5}{N+1} V = \frac{3-0.5}{3+1}(20) = 12.5 \ T$$

$$\Sigma K_c = 22$$

IZQUIERDA - DERECHA.

1a. Columna. $V = \frac{5}{22}(12.5) = 2.84 \ T$

2a. Columna. $V = \frac{6}{22}(12.5) = 3.41 \ T$

LA 4a. Y 3a. COLUMNA SON IGUALES A LA 1a. Y 2a. RESPECTIVAMENTE, POR SER IGUAL SU RIGIDEZ.

1a. CRUJIA:

$$V_t = V - V_c = 20 - 12.5 = 7.5\ T$$

$$\Sigma K_T = 6$$

$$V = \frac{2}{6}(7.5) = 2.5\ T$$

LA MITAD DEL VALOR ANTERIOR $\frac{2.5}{2} = 1.25$ LE CORRESPONDE A CADA COLUMNA QUE LIMITAN CADA CRUJIA.

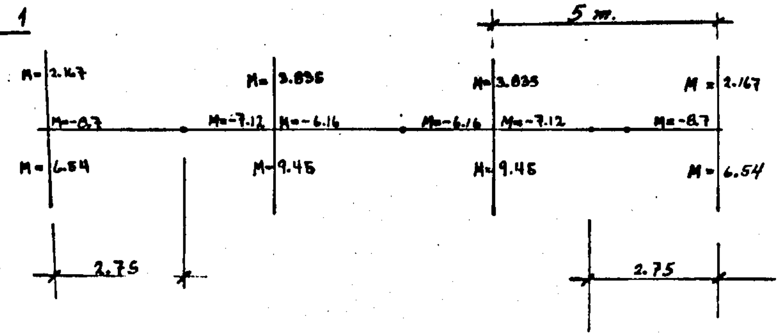
EN IGUAL FORMA CALCULAMOS LOS DEMAS ENTREPISOS, TOMANDO EN CUENTA QUE PARA PISOS SUPERIORES

$$V_c = \frac{N-2}{N+1} V$$

LOS MOMENTOS EN LAS TRABES SE CALCULAN COMO SIGUE:

EN NUDOS EN QUE SOLO CONCURRA UNA TRABE, EL MOMENTO DE ESTA SERA LA SUMA ALGEBRAICA DE LOS MOMENTOS DE LOS OTROS MIEMBROS QUE CONCURREN AL NUDO.- CUANDO ESTE CASO NO SE PRESENTE TENDREMOS:

NIVEL 1



NUDO INTERIOR:

$$\frac{M_2}{d}(L-d) = M_1$$

$$V'(L-d) = M_1$$

V' = CORTANTE DE LA TRABE

(L-d) = DISTANCIA AL PUNTO DE INFLEXION.

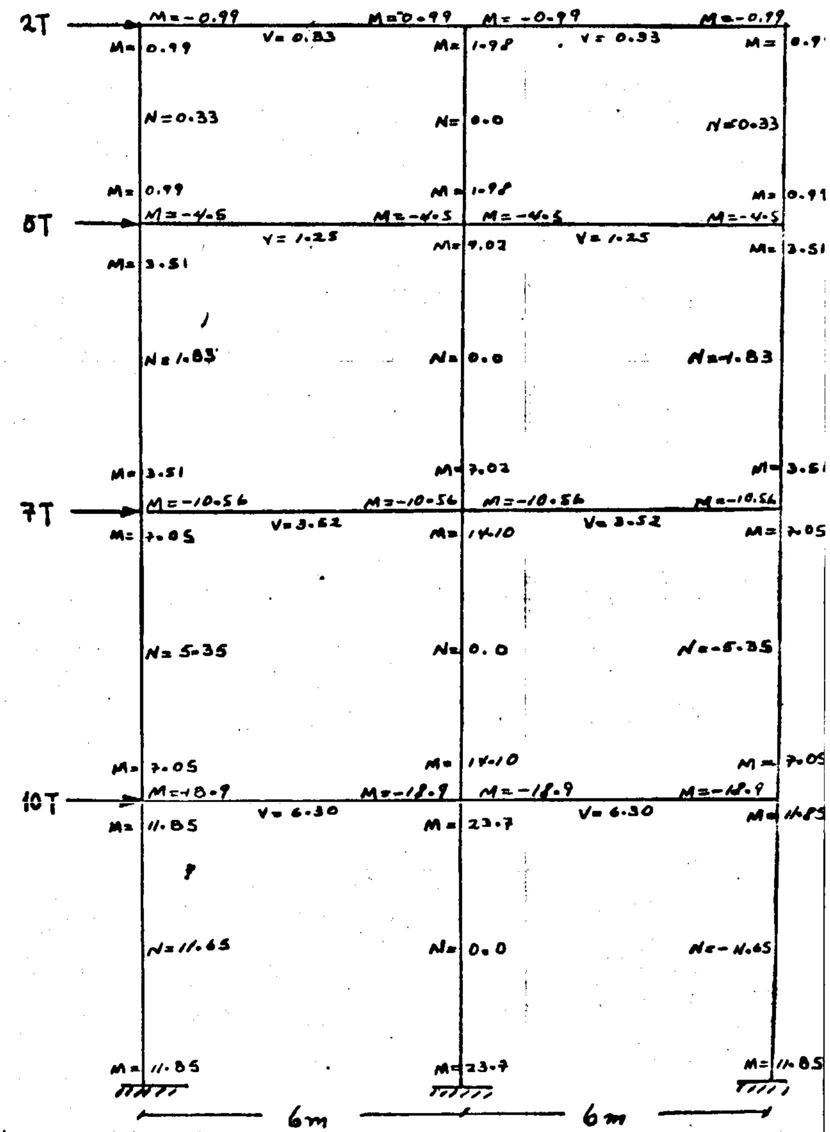
$$\frac{-8.7}{2.75}(5-2.75) = M_1$$

$$\Rightarrow M_1 = -7.12$$

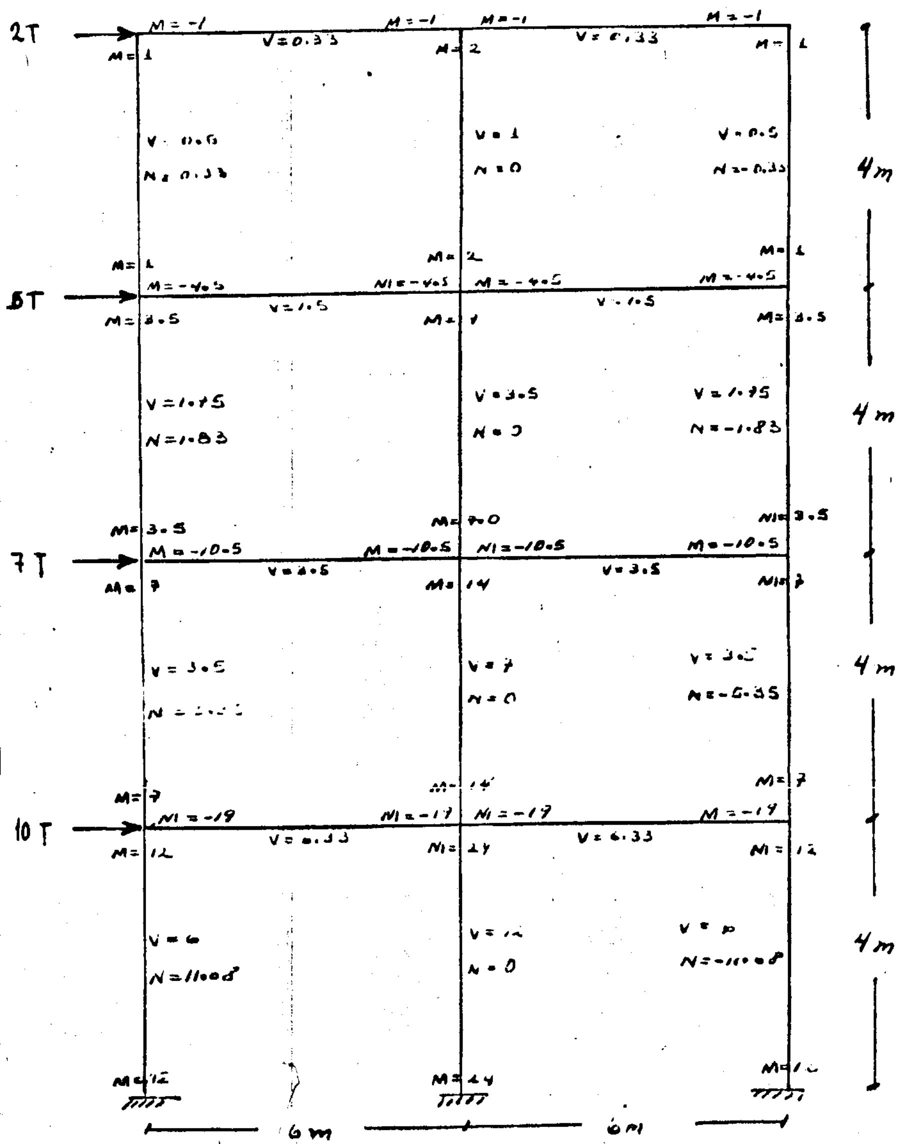
PROBLEMAS PROPUESTOS.

REVISAR LA ESTRUCTURA MOSTRADA POR EL METODO ... SE INDICA. LAS RIGIDECES EN TODAS LAS TRABES ... TODAS LAS COLUMNAS SON RESPECTIVAMENTE 2 ...

PROBLEMA 1.- METODO DEL VOLADIZO.

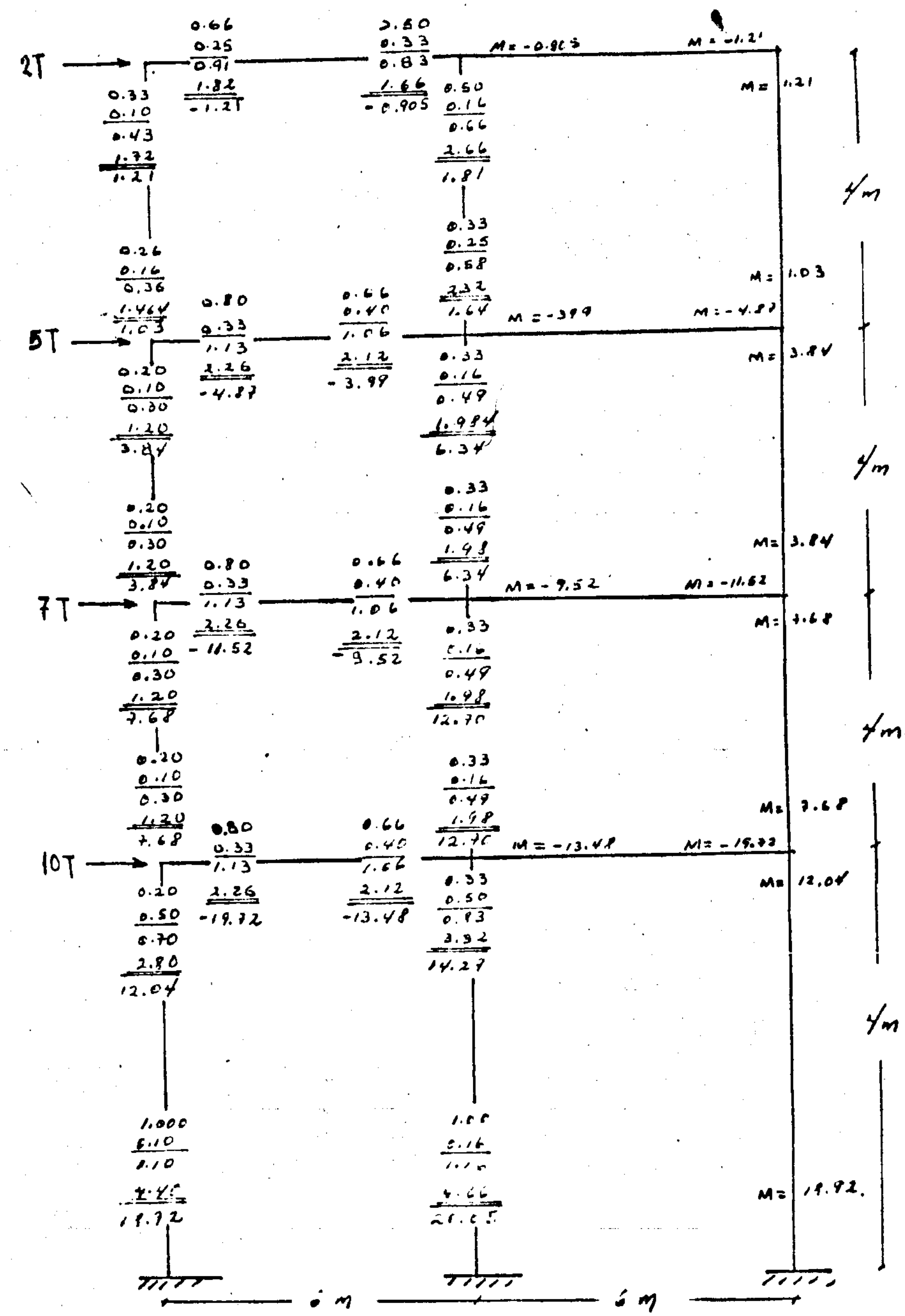


PROBLEMA 2.- METODO DEL PORTAL.

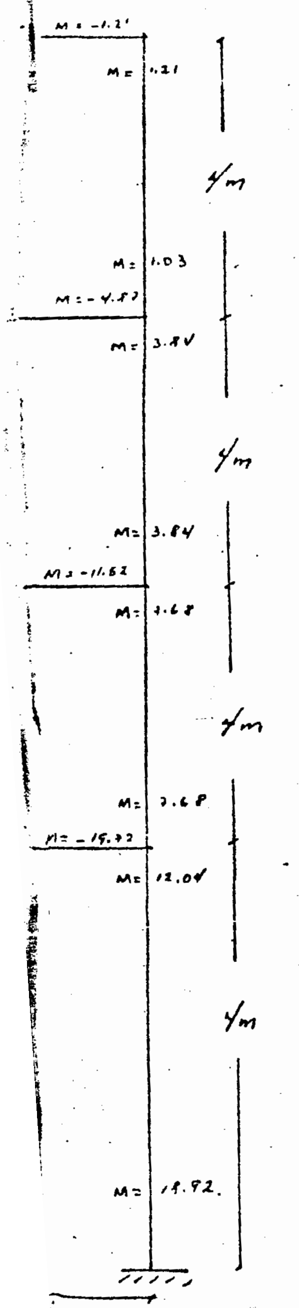


10.-14

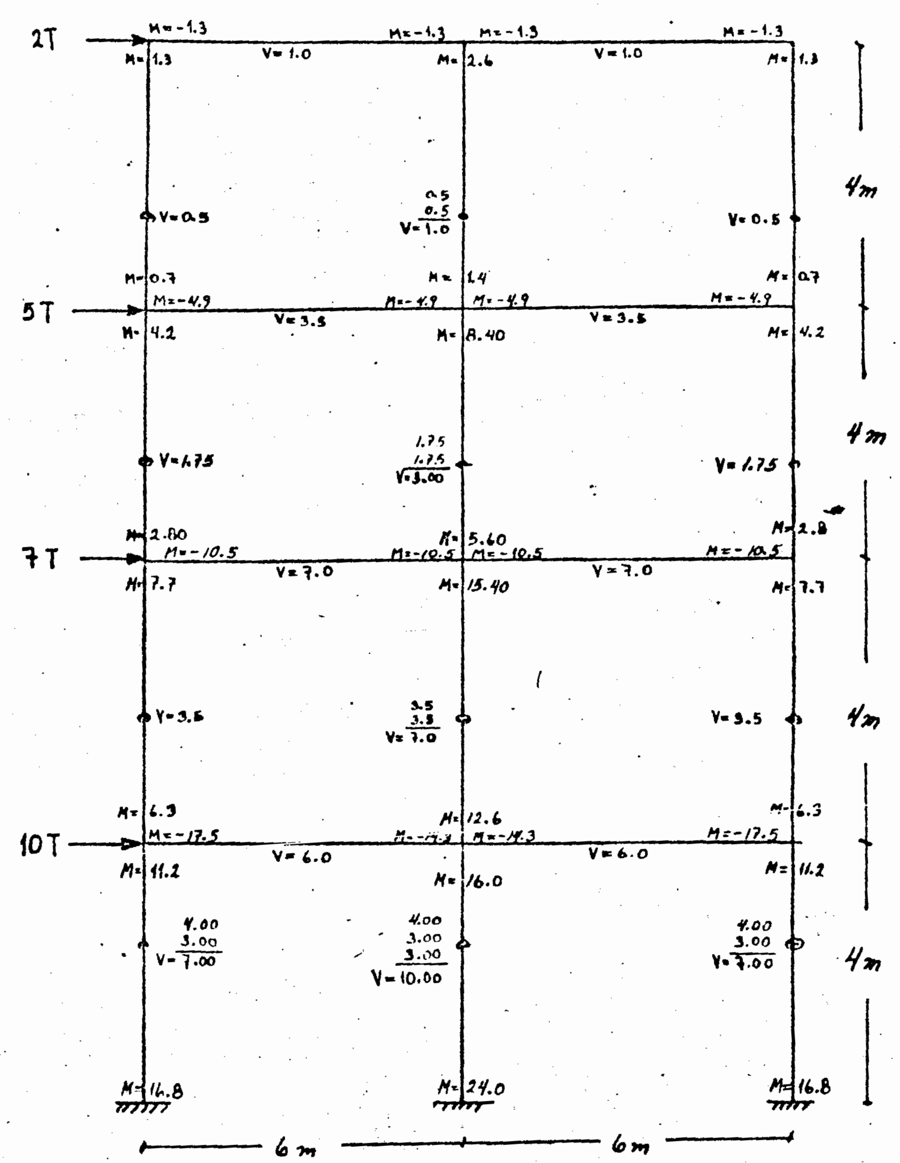
PROBLEMA 3.- METODO DEL FACTOR.



10.-15



PROBLEMA 4.- METODO DE BOWMAN.



10-16