

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO



FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISIÓN DE INGENIERÍA
MECÁNICA E INDUSTRIAL

TESIS

**"Desarrollo de
un código numérico
para el estudio de
flujos en Aguas Someras"**

Que para obtener el Título de

INGENIERO MECÁNICO

PRESENTA:

JUAN CHRISTIAN LÓPEZ

LÓPEZ

Director: Dr. Martín Salinas Vázquez

Ciudad Universitaria, Mayo 2010



Agradecimientos

A Dios

Por la vida tan maravillosa que me ha dado, permitiéndome vivir experiencias hermosas, dándome los mejores padres, gozando de buena salud, poniendo en mi camino personas maravillosas y permitir que el hombre inventara el básquetbol para mí.

A mis pilares, los primeros en confiar en mí, mis padres:

Guadalupe López Hernández

Juan López Méndez

Una infinita gratitud por la confianza, honradez, respeto y sacrificios incondicionales en los que he vivido a lo largo de mi vida y que han permitido hacer de mis sueños un proyecto de vida y han hecho de mi un hombre cabal. Les brindo esta tesis como un abrazo interminable, compartiendo uno de los más importantes triunfos que he tenido y tendré gracias a ustedes.

En resumen, gracias por los regañones, los desvelos, los sacrificios, las alegrías, los abrazos, el cariño, los castigos... valieron la pena ¡nos lo ganamos padres!

A mi hermana

Cuando mi mamá me dijo que iba a tener un hermano yo quería un niño, pero gracias a Dios fue una princesa, que vino a llenar el único vacío que pude haber tenido en la vida.

Jazmín: espero con mi esfuerzo haber logrado motivarte a que continúes con tus metas, te agradezco la dicha de que seas mi hermana, que has estado a mi lado siempre apoyándome, que compartas conmigo este momento y que estamos tan conectados.

A mi novia y su familia

Letty que me has brindado tanto amor y cariño, impulsándome a terminar mis estudios y en todas las cosas que he realizado. A sus padres que me ofrecieron su ayuda incondicional, me motivaron y confiaron en mí.

A mi tutor

Martín por la amistad que me ofreció desde que lo conocí, también por su apoyo, ayuda y todos los conocimientos y buenos ejemplos que me brindo.

A todos mis amigos

A todos los que conocí en el transcurso de mi carrera y pasamos momentos muy agradables, a ellos que confiaron en mí.

A la UNAM y la Facultad de Ingeniería

Que me recibió con las puertas abiertas y me dieron las herramientas necesarias para mi desarrollo personal y profesional. Fue un orgullo estudiar aquí, gracias porque me he sentido un orgulloso puma y lo seré toda la vida.

ÍNDICE GENERAL

<i>Resumen</i>	1
<i>Objetivos</i>	1
Capítulo 1	2
<i>Introducción</i>	2
1.1 Descripción general de ríos en ingeniería.....	2
1.2 Dinámica de ríos.....	2
1.3 Control de inundación y mitigación.....	3
1.4 Importancia de las simulaciones computacionales en análisis de ríos en ingeniería.....	3
1.5 Las ecuaciones de aguas someras	5
1.6 Flujo en canal abierto	6
1.6.1 Flujo uniforme en canales.....	7
1.6.2 Flujo de variación gradual.....	9
1.6.3 Flujo de variación rápida y salto hidráulico	11
Capítulo 2	12
<i>Ecuaciones de Aguas Someras o Saint Venan</i>	12
2.1 Ecuaciones de transporte	12
2.2 Ecuación de continuidad.....	12
2.3 Ecuación dinámica (conservación de cantidad de movimiento).....	12
2.4 Ecuaciones de Reynolds 3D.....	13
2.5 Ecuaciones de Reynolds en 2D.....	15
2.6 Ecuación de continuidad.....	16
2.7 Ecuación dinámica.....	17
2.8 El modelo de $k-\varepsilon$ promediado en la vertical (Modelo de turbulencia).....	22
Capítulo 3	25
<i>Método de solución</i>	25
3.1 Método TVD – MacCormack.....	25
3.2 Ecuaciones que gobiernan	25
3.3. Coeficiente de fricción	26
3.4 Coeficiente de Manning.....	26
3.5 Solución del método.....	27
3.6 Algoritmo de paso de tiempo adaptable	28
3.7 Modelación de obstáculos o zonas secas	29

3.8 Condiciones de frontera para las Ecuaciones de Aguas Someras.....	30
Capítulo 4	34
<i>Simulación Numérica y Resultados</i>	34
4.1 Introducción.....	34
4.2 Canal abierto rectangular con estrechamiento gradual	34
4.2.1 Solución para flujo subcrítico sin cambio de régimen.....	37
Detalles numéricos.....	37
Resultados de alturas	37
Resultados de velocidad	39
Resultados de alturas	40
Resultados de velocidad	41
4.2.2 Solución para cambio de régimen de flujo subcrítico a supercrítico	42
Resultados de alturas	43
Resultados de velocidad	45
Resultados del número de Froude	46
4.3 Flujo sobre un tope.....	47
4.3.1 Solución del problema planteado	48
Detalles numéricos.....	48
Resultados de alturas	49
Resultados de velocidad	50
4.3.2 Flujo supercrítico sobre un tope	52
4.3.2.1 Solución del problema planteado.....	52
Resultados de alturas	53
Resultados de velocidad	53
4.4 Flujo subcrítico a través de una construcción.....	54
4.4.1 Solución del problema planteado	55
Detalles numéricos.....	55
Resultados de alturas	56
Resultados de velocidad	57
4.5 Flujo alrededor de una obstrucción	59
Resultados de alturas	60
Resultados de velocidades	61
4.6 Flujo alrededor de un obstáculo largo.....	63

Resultado de alturas.....	64
Resultados de velocidad.....	66
4.7 Salto hidráulico detrás de una compuerta.....	68
Resultado de alturas.....	69
Resultados de velocidad.....	70
4.8 Flujo en un río	72
Resultado de alturas.....	73
Resultado de velocidades.....	74
Comparación de resultados.....	75
Capítulo 5	76
<i>Conclusiones</i>	76
<i>Bibliografía</i>	78

Resumen

En el presente trabajo se realizó un programa en Fortran para poder resolver las ecuaciones de Aguas Someras, mediante simulaciones numéricas. Fue importante haber desarrollado este proyecto porque se obtuvo un Programa con el cual se pueden resolver problemas de Mecánica de Fluidos referidos a flujos de poca profundidad como pueden ser flujo en canal abierto, ríos o estuarios.

La parte de la ingeniería que obtiene un mayor beneficio es la hidráulica, porque para realizar proyectos grandes la mejor forma de obtener datos confiables era construyendo un modelo a escala, para poder realizar experimentos y cálculos; ahora con la ayuda de algún programa se realizan simulaciones sin tener que construir el modelo, esto implica que el proyecto se realiza en un menor tiempo y sin tener que invertir en la construcción del modelo.

El programa se centró en la modelización numérica de flujos superficiales. Dichos flujos se caracterizan por un comportamiento fuertemente bidimensional, que generalmente viene impuesto por una separación de escalas horizontales y verticales. Esta separación de escalas permite realizar ciertas simplificaciones a las ecuaciones de Navier-Stokes mediante un promediado vertical; para poder obtener las ecuaciones bidimensionales para Aguas Someras.

Para tener confiabilidad en el programa se tuvo que validar. Esta validación se realizó mediante la comparación de resultados de algunos ejercicios específicos, los cuales ya han sido resueltos con anterioridad y sus soluciones sirvieron como datos de referencia. De esta manera los resultados tuvieron que ser iguales o muy aproximados a los de referencia, para verificar el correcto funcionamiento del programa.

Por último se plantean las conclusiones del trabajo realizado.

Objetivos

Generar un programa con el cual se puedan realizar simulaciones numéricas de las Ecuaciones de Aguas Someras (aguas poco profundas).

Resolver algunos ejercicios de Mecánica de Fluidos que estén relacionados con las Ecuaciones de Aguas Someras.

Validar el programa resolviendo algunos ejercicios para poder comparar los resultados obtenidos en nuestro programa contra resultados que se consideren confiables para la Mecánica de Fluidos.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Descripción general de ríos en ingeniería

El origen de la ingeniería de ríos se remonta a tiempos antiguos. Según los registros históricos, los chinos empezaron a construir diques a lo largo del río amarillo alrededor de seis mil años atrás. Aproximadamente alrededor del mismo periodo, sistemas de riego y estructuras de control de inundación eran construidas en Mesopotamia, y también unos diez siglos más tarde en Egipto. Durante el periodo del renacimiento, la observación del flujo de agua y el transporte de sedimento se llevo a cabo por el artista e ingeniero Italiano Leonardo da Vinci (1452-1529). Desde entonces, científicos e ingenieros han realizado un gran número de estudios de ríos, y se han construido presas, diques, puentes, instalaciones de navegación e instalaciones de suministro de agua a lo largo del río.

1.2 Dinámica de ríos

El estudio sobre el flujo, transporte de sedimentos y procesos de evolución en canales comenzó hace siglos, pero la dinámica de los ríos surgió como una distinta disciplina de la ciencia y tecnología, sólo después de que M. P. DuBoys estableció una fórmula para el transporte de sedimentos en 1879 y H. Rouse propuso una función para la distribución vertical de la suspensión de sedimentos en 1937. La dinámica de ríos se ocupa de flujo en ríos y problema de sedimentos, tal como flujo turbulento en canales fluviales, movimiento del fondo rugoso (sedimentos de fondo), solución de sedimentos, transporte, deposición y erosión. La dinámica de ríos también incorpora el estudio de procesos fluviales, incluyendo un patrón de las clasificaciones de los ríos, leyes de evolución de canales y la teoría de regímenes. Proporciona principios físicos y análisis de métodos para ríos en ingeniería.

1.3 Control de inundación y mitigación

La inundación es uno de los desastres más grandes por causa de ríos. Un sistema de un río está usualmente en balance “hasta cierto punto” con sus condiciones hidrológicas y geológicas de su cuenca. Cuando la cantidad de escurrimiento generada a partir de las tierras altas debido de la lluvia abrumadora supera la capacidad de transporte y almacenamiento del sistema fluvial, el flujo se derrama o rompe los diques e inunda las áreas cercanas. Debido a miles de años luchando contra amenazas de inundaciones, los humanos tienen que desarrollar algunas tecnologías de control de inundaciones, tal como diques, áreas de almacenamiento y estructuras de desvío. Los diques son unas de las principales medidas para el control de inundaciones en muchos ríos. Áreas para almacenamiento de inundaciones tal como embalses, lagos, estanques de detección y planicies de inundaciones, ayudan a detener la velocidad de propagación de la inundación y el pico de inundación. Áreas de desvío o canales son usualmente designados para efectos de emergencia cuando la inundación amenaza la seguridad de la columna vertebral de la estructura y las áreas clave.

1.4 Importancia de las simulaciones computacionales en análisis de ríos en ingeniería.

El flujo en ríos y transporte de sedimentos se encuentra entre lo más complejo y lo menos entendible para procesos o fenómeno de la naturaleza. Es muy difícil encontrar solución analítica para ríos en ingeniería y es muy tedioso el obtener una solución numérica con la ayuda de la alta velocidad de las computadoras. Por tanto después de 1970 algunos problemas de ríos de ingeniería tuvieron que resolverse a través de un campo de investigación y en laboratorios con modelos físicos (también llamados modelos a escala). Con el siguiente avance tecnológico en computadoras, los modelos computacionales han sido muy importantes y son ampliamente aplicables a problemas de la vida cotidiana. Modelos de 1-D han sido usados con términos cortos y largos para las simulaciones de flujo y transporte de sedimento en ríos, embalses y estuarios. Modelos de 2-D y 3-D se han usado para predecir con mayor detalle los procesos morfo-dinámicos bajo condiciones de flujos complejos en condiciones de curva, canales trenzados y puentes con pilares, y estructuras de tomas de agua.

Modelos físicos y simulaciones computacionales son las 2 herramientas más usadas en los análisis de ríos en ingeniería, ambos sistemas tienen sus ventajas y desventajas. Los modelos físicos pueden proporcionar resultados directamente visibles, pero son muy caros y consumen demasiado tiempo, porque el flujo, el transporte de sedimento y el proceso de cambio en las capas en los ríos, son muy complicados, es difícil asegurar la similitud entre el modelo físico y los prototipos. Los errores pueden surgir de las distorsiones del modelo a escala y de las variaciones en el entorno del experimento tal como la temperatura.

Las simulaciones computacionales dan directas predicciones de tamaño real sin ninguna distorsión en la escala y es rentable. Sin embargo, la fiabilidad de las simulaciones computacionales, depende de qué tan bien el proceso físico es descrito matemáticamente por las ecuaciones que lo gobiernan, las condiciones de frontera y las fórmulas empíricas. La precisión que rigen a las ecuaciones diferenciales se discretizan utilizando sistemas numéricos, la eficiencia de las ecuaciones algebraicas discretizadas se resuelven directamente o por métodos de solución de iteraciones.

El proceso de solución numérica debe estar correctamente codificado utilizando lenguajes de programación. Si la descripción matemática no es razonable, la discretización numérica es incorrecta y la solución del método será ineficiente, de esta manera el código habrá calculado errores y los resultados de todo el modelo numérico no serán confiables. Muchas fórmulas empíricas se usan para cerrar los problemas matemáticos, porque la aplicación de los sistemas numéricos están de alguna manera limitados.

Antes de que el modelo numérico pueda ser aplicado a un proyecto de la vida real, el código tiene que ser validado. La validación se hace comparando los resultados con una solución analítica, sino se comparan los resultados con datos que se hayan medido en los modelos o datos que se obtuvieron en laboratorio. Entonces para resolver un problema de ingeniería correctamente es necesaria la integración de los campos de investigación, los modelos físicos y de simulaciones numéricas.

El campo de investigación es la primera cosa que se hace para la comprensión total del problema. Proporciona la información necesaria como hidrología y de sedimentos en el dominio de estudio y condiciones de frontera, que se requiere de ambos modelos físicos y numéricos. También se proporcionan datos de calibración física y modelos computacionales. Si el tramo de estudio no es largo se puede elegir como analizar el problema, puede ser entre el modelo físico o el modelo computacional. El método más efectivo es usar el modelo físico para el estudio de pocos escenarios y recoger suficientes datos para calibrar los modelos computacionales, y después utilizar el modelo calibrado para el análisis de más escenarios. Si el alcance del estudio es demasiado largo, el modelo numérico 1-D se usa a menudo a todo su alcance; para proporcionar condiciones de frontera para modelos numéricos 2-D y 3-D, así como modelos físicos para análisis detallados.

1.5 Las ecuaciones de aguas someras

El comportamiento de un flujo viscoso está gobernado por las ecuaciones de Navier Stokes. Estas ecuaciones fueron deducidas en 1821 por Claude Navier y años más tarde, de modo independiente, por George Stokes en 1845.

Las ecuaciones de Navier Stokes forman un sistema hiperbólico de leyes de conservación no lineales y debido a su complejidad, no poseen solución analítica. Esto ha hecho recomendable la obtención de ecuaciones, a partir de ellas imponiendo diversas hipótesis para poder simplificar, a ecuaciones en dos dimensiones conocidas como ecuaciones de aguas someras o de Saint Venant.

Estas ecuaciones describen el comportamiento de un flujo en zonas poco profundas. A pesar de las fuertes hipótesis empleadas en su obtención, al resolverlas se obtienen resultados muy aproximados a la realidad, incluso en casos en los que no se cumplen algunas de esas hipótesis. En particular, la versión para flujos unidimensionales de estas ecuaciones simplificadas es de uso habitual en el estudio de canales abiertos.

- Flujo en canales y ríos
- Flujo de marea
- Corrientes marinas
- Avance de un frente de onda.

Pese a su notable simplificación respecto a las de Navier Stokes, ni siquiera las ecuaciones unidimensionales de Saint Venant tienen solución analítica sino que se han de resolver por métodos de aproximación. Pero para esto se tuvo que esperar para que existieran grandes avances en las herramientas de cálculos para que las ecuaciones de aguas someras tuvieran una mayor utilización. Las ecuaciones de aguas someras se revisaran en el capítulo 2.

1.6 Flujo en canal abierto

El flujo en un canal abierto es uniforme si la profundidad del flujo (y por lo tanto la velocidad promedio) se mantienen constantes. De otra manera, el flujo es no uniforme o variado, si la profundidad varía con la distancia en la dirección del flujo.

El flujo en canal abierto puede ser laminar, de transición o turbulento, esto depende del valor del número de Reynolds expresado como:

$$Re = \frac{\rho V R_h}{\mu} = \frac{V R_h}{\nu} \quad (1.1)$$

Donde V es la velocidad promedio del líquido, ν es la viscosidad cinemática y R_h es el radio hidráulico definido como la razón entre el área de la sección transversal del flujo A_c y el perímetro mojado p :

$$R_h = \frac{A_c}{p}(\text{m}) \quad (1.2)$$

El flujo en canal abierto se clasifica como subcrítico o tranquilo, crítico y supercrítico o rápido, esto depende del valor del número de Froude, éste es adimensional y se define como:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g L_c}} = \frac{V}{\sqrt{g y}} \quad (1.3)$$

Donde g es la aceleración gravitacional, V es la velocidad promedio del líquido en la sección transversal y L_c es la longitud característica, la cual se toma como la profundidad del flujo “ y ” para canales rectangulares anchos.

El número de Froude es el parámetro más importante que gobierna el tipo del flujo en canales abiertos, ya que por lo general el número de $Re \gg 1$ para canales reales ($10^6 - 10^9$). El flujo se clasifica como:

$Fr < 1$ Flujo subcrítico o tranquilo

$Fr = 1$ Flujo crítico

$Fr > 1$ Flujo supercrítico o rápido

Cuando el flujo es crítico, $Fr = 1$ y la velocidad promedio del flujo es $V = \sqrt{gy_c}$, donde y_c es la profundidad crítica en un canal rectangular.

$$y_c = \left(\frac{\dot{V}^2}{gb^2} \right)^{1/3} \quad (1.4)$$

Donde $\dot{V} = A_c V = Ac\sqrt{gy_c}$

La profundidad del líquido es $y > y_c$ para flujos subcríticos y $y < y_c$ para flujos supercríticos.

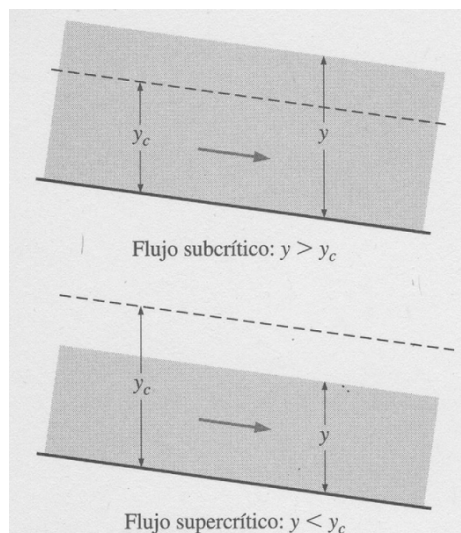


Figura 1.1 Definición de flujo subcrítico y supercrítico referido a la profundidad crítica [2].

1.6.1 Flujo uniforme en canales

La profundidad del flujo en flujos uniformes se le llama profundidad normal y_n y a la velocidad promedio del flujo, velocidad de flujo uniforme V_o . El flujo permanece uniforme mientras la pendiente, la sección transversal y la rugosidad de la superficie del canal no tengan algún cambio (Figura 1.2). Cuando la pendiente del fondo aumenta, la velocidad del flujo aumenta y la profundidad del flujo disminuye.

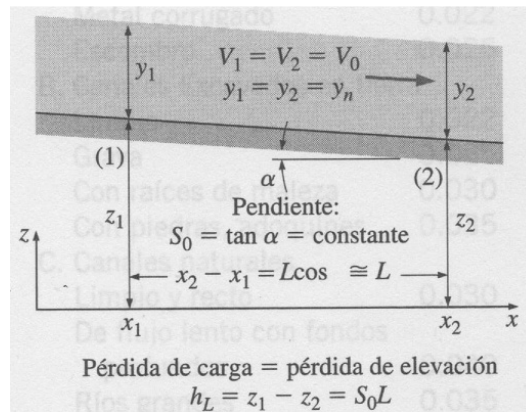


Figura 1.2 En un flujo uniforme, la profundidad del flujo, la velocidad del flujo promedio V , y la pendiente del fondo S_0 permanecen constantes, y la pérdida de carga es igual a la pérdida elevación, $h_L = z_1 - z_2 = S_0L = S_0 [2]$.

El flujo en canales abiertos se conduce por la gravedad y por lo tanto un canal típico está ligeramente cuesta abajo. La pendiente del fondo del canal se expresa de la siguiente manera:

$$S_0 = \tan \alpha = \frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1} \tag{1.5}$$

Donde α es el ángulo en el fondo del canal respecto a la horizontal. En general, la pendiente del fondo S_0 es muy pequeña y por lo tanto el fondo del canal es casi horizontal.

En el diseño de sistemas de canales abiertos, la pendiente del fondo se seleccionan de tal manera que provee una caída adecuada de elevación para vencer la pérdida de carga de fricción y en consecuencia el flujo se mantiene a una razón de flujo deseada. Por lo tanto, hay una conexión cercana entre la pérdida de carga y la pendiente del fondo y por ello tiene sentido expresar la pérdida de carga como la pendiente. Esto se hace cuando se define una pendiente de fricción como:

$$S_f = \frac{h_L}{L} \tag{1.6}$$

En el caso de flujo en canal abierto de pendiente S_0 , sección transversal A_c , y el factor de fricción f constantes, se alcanza la velocidad final y en consecuencia el flujo uniforme se establece como la pérdida de la carga y se iguala a la caída de elevación.

$$h_L = f \frac{L V^2}{D_h 2g} \quad \text{o} \quad S_0L = f \frac{L V_0^2}{R_h 8g} \tag{1.7}$$

Entonces en un flujo uniforme $h_L = S_0 L$ y $D_h = 4R_h$. Cuando se resuelve la segunda relación para V_0 , la velocidad del flujo uniforme y la razón de flujo se determinan de la siguiente manera:

$$V_0 = C\sqrt{S_0 R_h} \quad y \quad \dot{V} = CA_c\sqrt{S_0 R_h} \quad (1.8)$$

Donde el coeficiente de Chezy es una cantidad dimensional y su valor varía desde $30 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ para canales pequeños con superficies rugosas hasta $90 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ para canales largos con superficies lisas.

$$C = \sqrt{8g/f} \quad (1.9)$$

El coeficiente de Chezy puede determinarse de manera directa con la ecuación anterior, pero primero se tiene que determinar el factor de fricción f con ayuda del diagrama de Moody. Desde que surgieron las ecuaciones de Chezy, numerosos investigadores han realizado esfuerzos considerables para desarrollar las relaciones empíricas para la velocidad promedio y el flujo volumétrico más simples.

Por lo tanto la ecuación de Chezy puede expresarse de la siguiente manera:

$$C = \frac{a}{n} R_h^{1/6} \quad (1.10)$$

Donde n es el coeficiente de Manning, cuyo valor depende de la rugosidad de la superficie del canal, a es una constante dimensional cuyo valor es de $1 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$.

1.6.2 Flujo de variación gradual

El flujo de variación gradual es un flujo estacionario no uniforme con una variación gradual en la profundidad y en la velocidad del flujo (pendientes pequeñas y sin cambios bruscos), una superficie libre que siempre se mantiene suave (sin discontinuidades). Por este motivo se puede formular la variación de la profundidad del flujo a lo largo del canal con ayuda de la ley de la conservación de la masa y el principio de conservación de energía. La relación deseada para la razón de cambio de la profundidad del flujo en variación gradual en un canal abierto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} \quad (1.11)$$

La determinación del signo del denominador $1 - Fr^2$ es fácil; éste es positivo para flujos subcríticos ($Fr < 1$), y negativo para flujos supercríticos ($Fr > 1$). Pero el signo del numerador depende de las magnitudes relativas de S_0 y S_f .

Clasificación de perfiles en flujos gradualmente variados

Cada perfil de superficie se clasifica por una letra la cual define la pendiente del canal y por un número que indica la profundidad del flujo relativa a la profundidad crítica y_c y la profundidad normal y_n . La pendiente del canal puede ser suave (M), crítica (C), pronunciada (S), horizontal (H) y adversa (A). Se dice que la pendiente del canal es suave si $y_n > y_c$, pronunciada si $y_n < y_c$, crítica si $y_n = y_c$, horizontal si $S_0 = 0$ y adversa si $S_0 < 0$.

Se anexa tabla con la clasificación de los perfiles de flujos gradualmente variados [2].

Clasificación de perfiles en flujos gradualmente variados						
Pendiente del canal	Notación del perfil	Profundidad de flujo	Número de Froude	Pendiente del perfil	Perfil de superficie	
Suave (M) $y_c < y_n$ $S_0 < S_c$	M1	$y > y_n$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$		
	M2	$y_c < y < y_n$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} < 0$		
	M3	$y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$		
Pronunciada (S) $y_c > y_n$ $S_0 < S_c$	S1	$y > y_c$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$		
	S2	$y_n < y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} < 0$		
	S3	$y < y_n$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$		
Crítica (C) $y_c = y_n$ $S_0 < S_c$	C1	$y > y_c$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$		
	C3	$y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$		
Horizontal (H) $y_n \rightarrow \infty$ $S_0 = 0$	H2	$y > y_c$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} < 0$		
	H3	$y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$		
Adversa (A) $S_0 < 0$ y_n : no existe	A2	$y > y_c$	$Fr < 1$	$\frac{dy}{dx} < 0$		
	A3	$y < y_c$	$Fr > 1$	$\frac{dy}{dx} > 0$		

1.6.3 Flujo de variación rápida y salto hidráulico

Si en un flujo en canal abierto cambia su profundidad de manera evidente en una distancia relativamente pequeña en la dirección del flujo, se le llama flujo de variación rápida. Estos flujos ocurren en compuertas de desagüe, vertederos de pared delgada o gruesa, cascadas y en zonas en donde se extiende o contrae la sección de transición del canal.

Por lo regular los flujos de variación rápida son muy complicados por el hecho de que implica importantes efectos multidimensionales y transitorios, flujos en recirculación y separación de flujos. Por lo que, este tipo de flujos se estudian de manera experimental o numérica.

El flujo en canales inclinados puede ser supercrítico y éste puede cambiar a subcrítico si el canal no puede mantener un flujo supercrítico debido a una disminución de la pendiente del canal o porque incrementan los efectos de la fricción. Cuando el flujo pasa de un régimen supercrítico a un subcrítico se origina un salto hidráulico. Un salto hidráulico implica considerables mezclas y agitaciones, y por consiguiente se obtiene una cantidad considerable de disipación de energía mecánica.

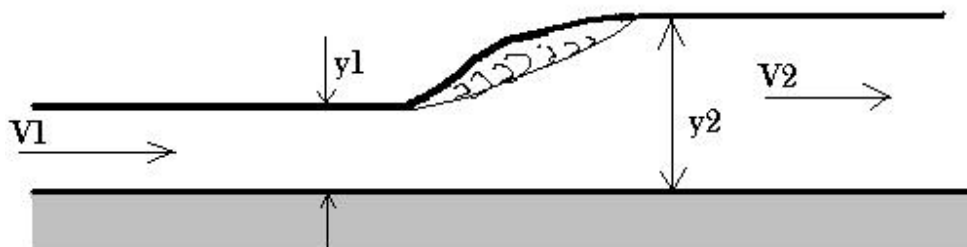


Figura 1.3 Representación de un salto hidráulico.

Capítulo 2

Ecuaciones de Aguas Someras o Saint Vernan.

2.1 Ecuaciones de transporte

Las ecuaciones con las que se va a trabajar en esta tesis son las de Aguas Someras, teniendo en consideración el término turbulento. Para su deducción se tienen que integrar las ecuaciones de Navier Stokes, que gobiernan el comportamiento de un fluido viscoso en 3 dimensiones. En estas ecuaciones se considera flujo incompresible, esto significa que son flujos en los cuales la densidad no varía a lo largo del fluido y es independiente de la presión.

Para obtener las ecuaciones de Aguas Someras se utiliza la ecuación de continuidad y la ecuación dinámica (conservación de la cantidad de movimiento). Donde u , v y w , son las componentes del vector velocidad \mathbf{u} y x , y , z representan el sistema cartesiano.

Para un flujo incompresible con viscosidad constante se tiene:

2.2 Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.1)$$

2.3 Ecuación dinámica (conservación de cantidad de movimiento)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \quad (2.4)$$

Donde F_x , F_y , F_z representan la fuerza por unidad de masa F ; p es la presión; ρ es la densidad; $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática; μ es la viscosidad dinámica.

Si a cada una de las ecuaciones dinámicas le sumamos la ecuación de continuidad y utilizamos ∇ para la divergencia y ∇^2 para el laplaciano, entonces el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot u \mathbf{u} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot v \mathbf{u} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot w \mathbf{u} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \quad (2.8)$$

2.4 Ecuaciones de Reynolds 3D

Las ecuaciones de Reynolds 3D gobiernan el movimiento de un flujo incompresible en régimen turbulento. Para obtener estas ecuaciones se sustituye en las ecuaciones de Navier Stokes, la velocidad y la presión por su valor promedio más los términos de fluctuación, por ejemplo:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad p = \bar{p} + p' \quad (2.9)$$

Calculando el promedio temporal de cada ecuación y sustituyendo en las ecuaciones (2.6)-(2.8), se obtiene:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0. \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u} - \nabla \cdot \overline{u' \mathbf{u}'} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v} \bar{\mathbf{u}} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \bar{v} - \nabla \cdot \overline{v' \mathbf{u}'} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{\mathbf{u}} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 \bar{w} - \nabla \cdot \overline{w' \mathbf{u}'} \quad (2.13)$$

Estas ecuaciones poseen los mismos términos que las ecuaciones (2.6)-(2.8), sin embargo se anexan algunos términos en la parte derecha de cada ecuación; si desarrollamos esta parte se obtienen las ecuaciones de Reynolds 3D:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \nabla^2 \bar{u} - \left[\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right] \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v} \bar{\mathbf{u}} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \nabla^2 \bar{v} - \left[\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right] \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{\mathbf{u}} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 \bar{w} - \left[\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right] \quad (2.16)$$

Si a las ecuaciones anteriores se les sustituye la expresión de las Tensiones de Reynolds, toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + v \nabla^2 \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} \left[v_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} k \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[v_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[v_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Donde v_t es la viscosidad cinemática turbulenta y k es la energía turbulenta por unidad de masa, definida como:

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (2.18)$$

Reordenando y agrupando los términos del segundo miembro se obtiene

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} + v \nabla^2 \bar{u} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} \quad (2.19)$$

Si se realiza la misma operación en las ecuaciones (2.15) y (2.16) se convierten en

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v} \bar{\mathbf{u}} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial y} + v \nabla^2 \bar{v} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{v} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{\mathbf{u}} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} + v \nabla^2 \bar{w} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{w} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z} \quad (2.21)$$

Al ser constante v para cada fluido se puede escribir $v \nabla^2 \bar{u}_i$ como $\nabla \cdot v \nabla \bar{u}_i$ y de esta manera se puede agrupar la viscosidad molecular con la turbulenta. Y nos queda

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{\mathbf{u}} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} + \nabla \cdot (v + v_t) \nabla \bar{u} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v} \bar{\mathbf{u}} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial y} + \nabla \cdot (v + v_t) \nabla \bar{v} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial y} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{\mathbf{u}} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} + \nabla \cdot (v + v_t) \nabla \bar{w} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial z} \quad (2.24)$$

Para poder simplificar las ecuaciones se toma en cuenta lo siguiente:

- Los términos que contienen las derivadas parciales de k respecto a x , y , z , son incluidas en las derivadas de la presión, esto es porque las derivadas parciales de k , proceden de las Tensiones de Reynolds. Estas tensiones actúan, como la presión, perpendicular a la cara del volumen de control.
- Se considera despreciable la viscosidad molecular v , ya que la viscosidad turbulenta v_t es mucho mayor.

Tras estas simplificaciones las ecuaciones quedan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{u} \bar{u} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{v} \bar{u} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{v} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{w} \bar{u} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{w} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (2.27)$$

Estas ecuaciones son muy parecidas a las ecuaciones de Navier Stokes (2.5)-(2.8) con la diferencia en que los valores instantáneos de la velocidad y de la presión fueron sustituidos por sus promedios temporales, la viscosidad se sustituyó por la viscosidad turbulenta y se añadió un nuevo sumando al término fuente en las tres ecuaciones.

2.5 Ecuaciones de Reynolds en 2D

Para obtener las ecuaciones de Reynolds en 2D se partió de las ecuaciones 3D y las cuales se integraron en la vertical (eje z), esto es con la finalidad de tener unas ecuaciones un poco más sencillas de resolver. Estas ecuaciones satisfacen a muchos flujos de la naturaleza, en donde las dimensiones horizontales son claramente predominantes a la dimensión vertical.

Se consideran dimensiones horizontales a x, y, la dimensión z se considera positiva hacia arriba, pero para obtener las ecuaciones 2D se realizan las siguientes hipótesis:

- a) La pendiente del fondo es pequeña; esto significa que el valor medido de la profundidad en la dirección vertical y la dirección perpendicular al fondo es prácticamente la misma.
- b) La curvatura de las líneas de corriente es pequeña, por este motivo la distribución de presiones puede considerarse hidrostática.
- c) El movimiento principal de las partículas ocurre en planos horizontales.
- d) La distribución en la vertical de las componentes en "x" e "y" de la velocidad (\bar{u}, \bar{v}) , es prácticamente uniforme. Esto permite, que al integrar respecto al eje z, sustituir \bar{u} y \bar{v} por sus valores promedios.
- e) Las fuerzas de masa que actúan son la gravedad en dirección vertical y la fuerza de Coriolis, en el plano horizontal, por lo que $F = (f\bar{v}, -f\bar{u}, -g)^T$, siendo

$$f = 2\Omega \sin \phi$$

Donde Ω es la velocidad angular de la Tierra y ϕ la latitud.

- f) La aceleración vertical de las particular se considera despreciables frente a la gravedad, g.
- g) La pérdida de energía por fricción en los contornos, en flujos no permanentes, puede evaluarse mediante fórmulas empíricas válidas para flujo permanente, como las de Chezy o Manning.

h) Se considera despreciables la variación de v_t con la profundidad.

$$v_t = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

2.6 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad (2.1) se expresa como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Si se integra con respecto al eje z , entre el fondo (z_b) y la superficie libre (z_s) queda

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dz + \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dz + \bar{w}(z_s) - \bar{w}(z_b) = 0. \quad (2.28)$$

Se aplica la regla de Leibnitz a los dos primeros sumandos de la ecuación anterior

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz - \bar{u}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (2.29)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{v} dz - \bar{v}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} + \bar{v}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (2.30)$$

El tercer sumando $\bar{w}(z_s)$, es la velocidad en la dirección z de los puntos de la superficie, entonces es la derivada total de $z_s(x, y, t)$

$$\bar{w}(z_s) = \frac{dz_s}{dt} = \frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{u}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} + \bar{v}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} \quad (2.31)$$

Tomando en cuenta que $\frac{\partial z_b}{\partial t} = 0$, $\bar{w}(z_b)$ vale

$$\bar{w}(z_b) = \frac{dz_b}{dt} = \bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \bar{v}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (2.32)$$

Los promedios verticales de \bar{u} y \bar{v} se denotan por \hat{u} y \hat{v}

$$\hat{u} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz, \quad \hat{v} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{z_s} \bar{v} dz, \quad (2.33)$$

Como la profundidad es $h = z_s - z_b$. Y como la distancia del fondo no varía con respecto a t , se puede escribir

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = \frac{\partial(z_b + h)}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.34)$$

Por último, si se sustituye de (2.28) – (2.31) en (2.27), considerando (2.32) – (2.33) y simplificando, podemos obtener el promedio en la vertical de la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = 0. \quad (2.35)$$

2.7 Ecuación dinámica

Tomando en cuenta la ecuación de continuidad (2.1) y aplicando la hipótesis e), las ecuaciones (2.24) – (2.26) se escriben de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = f\bar{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -f\bar{u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{v} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{w} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (2.38)$$

La primer parte de la ecuación (2.38) representa la aceleración vertical del fluido $\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}\right)$, la cual se puede simplificar con ayuda de las hipótesis c) y f). En la segunda parte de la ecuación (2.38) se puede desprestigiar el gradiente de la componente vertical de la velocidad $(\nabla \bar{w})$, también la derivada respecto a z del vector velocidad $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)$, entonces la ecuación (2.38) quedaría de la siguiente forma:

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0. \quad (2.39)$$

Si se integra la ecuación anterior respecto al eje z, entre la superficie libre z_s y una altura cualquiera z y se considera que la presión atmosférica es nula, obtenemos:

$$\bar{p} = \rho g(z_s - z) \quad (2.40)$$

Y si a esta ecuación la derivamos respecto a “x” y luego respecto a “y”

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -g \frac{\partial z_s}{\partial x} \quad (2.41)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = -g \frac{\partial z_s}{\partial y} \quad (2.42)$$

Si se multiplica la ecuación de continuidad (2.1) por \bar{u} , y luego se suma con la ecuación (2.35), considerando (2.40), resulta

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{w})}{\partial z} = f\bar{v} - g \frac{\partial z_s}{\partial x} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (2.43)$$

Si se realizan las mismas operaciones para la ecuación (2.37), nos queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} \\ = -f\bar{u} - g \frac{\partial z_s}{\partial y} + \nabla \cdot v_t \nabla \bar{v} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ahora se integra la ecuación (2.42) en el eje z , utilizando la Regla de Leibnitz a la primera parte de la ecuación.

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} \right) dz = \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz - \bar{u}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial t} + \bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}^2 dz - \bar{u}^2(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x} \\ + \bar{u}^2(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}\bar{v} dz - \bar{u}(z_s)\bar{v}(z_s) \frac{\partial z_s}{\partial y} \\ + \bar{u}(z_b)\bar{v}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial y} + \bar{u}(z_s)\bar{w}(z_s) - \bar{u}(z_b)\bar{w}(z_b) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Donde el término $\bar{u}(z_b) \frac{\partial z_b}{\partial t}$ es nulo; sustituyendo (2.31) – (2.32) en (2.44) y haciendo las simplificaciones necesarias, la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} \right) dz = \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}\bar{v} dz \end{aligned} \quad (2.46)$$

Tomando en cuenta la hipótesis d) se pueden hacer las integrales de \bar{u}^2 y $\bar{u}\bar{v}$, sustituyendo (\bar{u}, \bar{v}) por sus valores promedios (\hat{u}, \hat{v}) definidos en la ecuaciones (2.33). Como la distribución de estas variables no es exactamente uniforme, los valores temporales (\bar{u}, \bar{v}) , se descomponen así:

$$\bar{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}'', \quad \bar{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}'' \quad (2.47)$$

De tal manera se dice que

$$\int_{z_b}^{z_s} \bar{u}^2 dz = \hat{u}^2 h, \quad \int_{z_b}^{z_s} \bar{u}\bar{v} dz = \hat{u}\hat{v}h, \quad (2.48)$$

De tal manera que (2.45) queda así

$$\int_{z_b}^{z_s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{w})}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial(\hat{u}h)}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{u}^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{u}\hat{v}h)}{\partial y} \quad (2.49)$$

Ahora se trabaja con la segunda parte de la ecuación (2.43). Se integran los dos primeros términos respecto al eje z, con lo que

$$\int_{z_b}^{z_s} \left(f\bar{v} - g \frac{\partial z_s}{\partial x} \right) dz = f\hat{v}h - g \frac{\partial z_s}{\partial x} h = f\hat{v}h - gh \left(\frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (2.50)$$

Para integrar los dos sumandos restantes de (2.43) se desarrollan y reagrupan en tres términos, de esta forma

$$\begin{aligned} & \int_{z_b}^{z_s} \left(\nabla \cdot v_t \nabla \bar{u} + \nabla \cdot v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dz = \\ & \underbrace{\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(2v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) dz}_{D1} + \underbrace{\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y} \left[v_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] dz}_{D2} \\ & \quad + \underbrace{\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z} \left[v_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right] dz}_{D3} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Los términos D1 y D2 se calculan aplicando la regla de Leibnitz

$$D1 = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} 2v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dz - 2 \left[v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right]_{z=z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x} + 2 \left[v_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right]_{z=z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} D2 = & \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} v_t \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) dz - \left[v_t \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right]_{z=z_s} \frac{\partial z_s}{\partial y} \\ & + \left[v_t \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right]_{z=z_b} \frac{\partial z_b}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Partiendo de la hipótesis h) se puede decir que v_t no varía con la profundidad y que se aproxima \bar{u} y \bar{v} por sus valores promedio \hat{u} y \hat{v} . De este modo las expresiones entre corchetes de (2.52) coinciden, así como las de (2.53). Teniendo en cuenta que la lámina de agua es aproximadamente paralela al fondo, por lo que

$$\frac{\partial z_s}{\partial x} \approx \frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_s}{\partial y} \approx \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (2.54)$$

Entonces se puede escribir

$$D1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(2v_t h \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) \quad (2.55)$$

$$D2 = \frac{\partial}{\partial y} \left(v_t h \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) \right) \quad (2.56)$$

Ahora se calcula D3

$$D3 = \left[v_t \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right]_{z=zs} - \left[v_t \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right]_{z=zb} \quad (2.57)$$

De esta ecuación se desprecia el primer sumando de cada término esto por la hipótesis c). Si escribimos la viscosidad cinemática en función de la dinámica se obtiene

$$D3 = \frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial z} (zs) - \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} (zb) \right) = \frac{1}{\rho} (\tau_{s2} - \tau_{b2}) \quad (2.58)$$

Los términos son las componentes en la dirección “x” de la tensión tangencial que actúa sobre la superficie libre y el fondo respectivamente.

Entonces la ecuaciones (2.43), integrada en el eje z, queda así

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\hat{u}h)}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{u}^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{u}\hat{v}h)}{\partial y} \\ = f\hat{v}h - gh \left(\frac{\partial zb}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(2v_t h \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_t h \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) \right) + \frac{1}{\rho} (\tau_{sx} - \tau_{bx}) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Si se realiza el mismo procedimiento anterior a la ecuación (2.44), obtenemos la siguiente ecuación.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\hat{v}h)}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{u}\hat{v}h)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{v}^2h)}{\partial y} \\ = -f\hat{u}h - gh \left(\frac{\partial zb}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_t h \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(2v_t h \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} (\tau_{sy} - \tau_{by}) \end{aligned} \quad (2.60)$$

A estas ecuaciones (2.59) – (2.60), se le pueden realizar ciertas modificaciones

- a) Se eliminan de las variables u y v los símbolos $\hat{}$ por lo que ahora representaran el promedio en la vertical en la media temporal de las componentes de velocidad.
- b) Las tensiones tangenciales de la superficie τ_{sx} y τ_{sy} suelen ser despreciables, excepto que la superficie de agua expuesta al viento sea demasiado grande, en estos casos se pueden representar por diversas expresiones.
- c) Se denominan pendientes geométricas según “x” o “y”.

$$S_{0x} = \frac{\partial z_b}{\partial x}, S_{0y} = \frac{\partial z_b}{\partial y}$$

Positiva si desciende en el sentido de las “x”, y negativa en el caso contrario.

- d) Se define la pendiente de fricción en el fondo en el sentido de las “x” o “y”, relacionadas con el formula de Chezy y el coeficiente de Manning.

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}},$$

- e) Se engloban bajo el término S_t las siguientes expresiones

$$S_{t1} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2v_t h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_t h \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$$

$$S_{t2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v_t h \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2v_t h \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

- f) Se pasan al primer miembro los términos que contienen las derivadas parciales de h .

Entonces las ecuaciones resultantes que se obtienen son:

$$\underbrace{\frac{\partial(hu)}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)}_{II} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} \tag{2.61}$$

$$= \underbrace{f v h}_{III} + \underbrace{\frac{\tau_{sx}}{\rho}}_{IV} + \underbrace{gh(S_{0x} - S_{fx})}_V + \underbrace{S_{t1}}_{VI}$$

$$\underbrace{\frac{\partial(hv)}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(hv^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)}_{II} \tag{2.62}$$

$$= \underbrace{-f u h}_{III} + \underbrace{\frac{\tau_{sy}}{\rho}}_{IV} + \underbrace{gh(S_{0y} - S_{fy})}_V + \underbrace{S_{t2}}_{VI}$$

En donde I es el término temporal, II son los términos convectivos, III son los términos de Coriolis, IV es la influencia del viento, V son los términos de las pendientes geométricas y VI son los términos turbulentos.

2.8 El modelo de k - ε promediado en la vertical (Modelo de turbulencia)

El modelo de k - ε promediado en la vertical es una adaptación obtenida en 1978 por Rastogi y Rodi, éste parte de un modelo tridimensional de Launder y Spalding.

El modelo se obtiene integrando en el eje z , las ecuaciones que definen los parámetros k y ε , energía cinética turbulenta y tasa de disipación turbulenta, respectivamente. Sus autores asumen que el estado de turbulencia promediado en la vertical está representado por las variables \tilde{k} y $\tilde{\varepsilon}$, que relacionan los esfuerzos turbulentos a través de las siguientes ecuaciones.

$$\frac{\tilde{\tau}_{ij}}{\rho} = \tilde{\nu}_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \tilde{k} \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2 \quad (2.63)$$

$$\tilde{\nu}_t = c_\mu \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (2.64)$$

Los valores de \tilde{k} y $\tilde{\varepsilon}$ se obtienen con las ecuaciones de transporte siguientes:

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{k}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial y} \right) + P_h + P_{kV} - \tilde{\varepsilon} \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} \right) + \underbrace{c1_\varepsilon \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} P_h}_{IV} + \underbrace{P_{\varepsilon V}}_V - \underbrace{c2_\varepsilon \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}}}_{VI} \quad (2.66)$$

Donde

$$P_h = \tilde{\nu}_t \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.67)$$

Los términos fuente P_{kV} y $P_{\varepsilon V}$ son las producciones de \tilde{k} y $\tilde{\varepsilon}$ debidas a los gradientes de velocidad verticales; la principal aportación de estas variables, es que provienen de los gradientes de velocidad cerca del fondo, por la interacción en esta región se produce energía turbulenta, la cual se añade con el término P_h .

El modelo con el que se trabajo es bidimensional, en éste la velocidad esta variando horizontalmente, por lo que los sumando I-VI, se pueden definir físicamente como:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} I \\ \text{Variación} \\ \text{temporal} \\ \text{de } \tilde{\kappa} \text{ o } \tilde{\varepsilon} \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} II \\ \text{Transporte} \\ \text{por} \\ \text{convección} \end{array} \right\} \\
 = \left. \begin{array}{l} III \\ \text{Transporte} \\ \text{por} \\ \text{difusión} \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} IV \\ \text{Generación} \\ \text{por gradiente} \\ \text{de velocidad} \end{array} \right\} \\
 + \left. \begin{array}{l} V \\ \text{Generación} \\ \text{por esfuerzo} \\ \text{del fondo} \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} VI \\ \text{Destrucción} \\ \text{de energía} \\ \text{turbulenta} \end{array} \right\} \quad (2.68)
 \end{aligned}$$

Rastogi y Rodi relacionan P_{kV} y $P_{\varepsilon V}$ con los esfuerzos en el fondo por medio de la velocidad de fricción U^* con las siguientes ecuaciones.

$$P_{kV} = c_k \frac{U^{*3}}{h} \quad (2.69)$$

$$P_{\varepsilon V} = c_\varepsilon \frac{U^{*4}}{h^2} \quad (2.70)$$

La velocidad de fricción se relaciona con la velocidad media $U = \sqrt{u^2 + v^2}$ y con la ecuación de Chezy.

$$U^* = \frac{\sqrt{gn}U}{h^{1/6}} \quad (2.71)$$

Los valores de las constantes c_k y c_ε se determinaron a partir de la tasa de disipación de energía y la inyección del trazador, resultando

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{C_f}} \quad (2.72)$$

$$c_\varepsilon = c_{\varepsilon T} \frac{c_{2\varepsilon}}{C_f^{3/4}} \sqrt{c_\mu} \quad (2.73)$$

El coeficiente de fricción C_f puede obtenerse con U^* y U si se utiliza la ecuación (2.71).

$$C_f = \frac{U^{*2}}{U^2} = \frac{gn^2}{h^{1/3}} \quad (2.74)$$

El coeficiente $c_{\varepsilon T}$ se determina con la siguiente fórmula.

$$c_{\varepsilon T} = \frac{1}{(e^* \sigma_t)^{1/2}} \quad (2.75)$$

Para canales anchos de laboratorio el valor de $c_{\epsilon}r$ puede ser de 3.6; σ_t es el número de Prandtl-Schmidt y varia entre valores de 0.5–0.7; e^* es la difusividad, una variable adimensional la cual tambien se puede obtener experimentalmente con ayuda de la inyección del trazador.

Los coeficientes restantes se presentan en la tabla 2.1

Tabla 2.1 Constantes del Modelo k - ϵ promediado en la vertical

c_{μ}	$c1_{\epsilon}$	$c2_{\epsilon}$	σ_k	σ_{ϵ}
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Capítulo 3

Método de solución

3.1 Método TVD – MacCormack

Existen varios métodos con los cuales se pueden resolver las ecuaciones de aguas someras desarrolladas en el capítulo anterior, pero en esta tesis se utilizó el Método TVD–MacCormack que es una combinación aritmética de primer y segundo orden.

Este es un método que describe eficientemente la solución de las ecuaciones de aguas someras, tiene como base el método MacCormack que es un sistema predictor–corrector y a éste se le anexa un simple paso TVD con el fin de suavizar (disminuir) las oscilaciones en las regiones donde se presenten gradientes altos, haciendo que la precisión de segundo orden se mantenga.

La discretización de las ecuaciones de aguas someras en su forma conservativa o no conservativa conducen al mismo sistema de diferencias finitas, cuando el término fuente es discretizado de la misma manera. La forma no conservativa tiene propiedades de conservación y el tiempo en el que se realizan los cálculos es menor, pero presenta problemas de conservación en las zonas donde hay cambios drásticos de altura. Por este motivo trabajamos con la forma conservativa de las ecuaciones de aguas someras.

El paso de tiempo se determina adaptable, basado en el instante máximo del número de Courant a través de todo dominio. La capa de fricción se encuentra incluida de forma implícita o explícita en el algoritmo computacional según la profundidad del agua.

3.2 Ecuaciones que gobiernan

Las ecuaciones que se utilizan en este método son las siguientes, estas no toman en cuenta las fuerzas de Coriolis, del viento y las viscosas.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial qx}{\partial x} + \frac{\partial qy}{\partial y} = 0 \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial qx}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{\beta qx^2}{H} + \frac{g\eta^2}{2} + gh\eta \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\beta qxqy}{H} \right)}{\partial y} \\ = g\eta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{gqx\sqrt{qx^2 + qy^2}}{H^2 C^2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial qy}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{\beta qx qy}{H} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\beta qy^2}{H} + \frac{g\eta^2}{2} + gh\eta \right)}{\partial y} = g\eta \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{gqy\sqrt{qx^2 + qy^2}}{H^2 C^2} \tag{3.3}$$

Donde t es el tiempo; η es la superficie de agua por encima de la altura de referencia; qx y qy son la descarga por unidad de longitud en las direcciones “ x ” e “ y ”, respectivamente $qx = uH$ y $qy = vH$; β es el factor de corrección del perfil de velocidad vertical no uniforme, lo cual equivale a 1.0 para una distribución de velocidad uniforme y 1.016 para la distribución de velocidad elevada a la séptima potencia; $H(= h + \eta)$ es la altura total de la columna de agua, con h siendo la altura de la columna de agua de referencia; g es la aceleración debido a la gravedad; C es el valor de la rugosidad de Chezy.

Para poder evaluar la rugosidad de Chezy utilizamos las siguientes formulas:

3.3. Coeficiente de fricción

$$C_f = \frac{2g}{C^2} \tag{3.4}$$

C_f es el coeficiente de fricción; g es la aceleración de la gravedad; C el valor de Chezy.

3.4 Coeficiente de Manning

$$n = \frac{h^{1/6}}{C} \tag{3.5}$$

El coeficiente de rugosidad es n ; h es la altura del fluido; C el valor de Chezy.

Las ecuaciones (3.1)-(3.3) están referidas de forma diferente como lo muestra la figura 3.1.

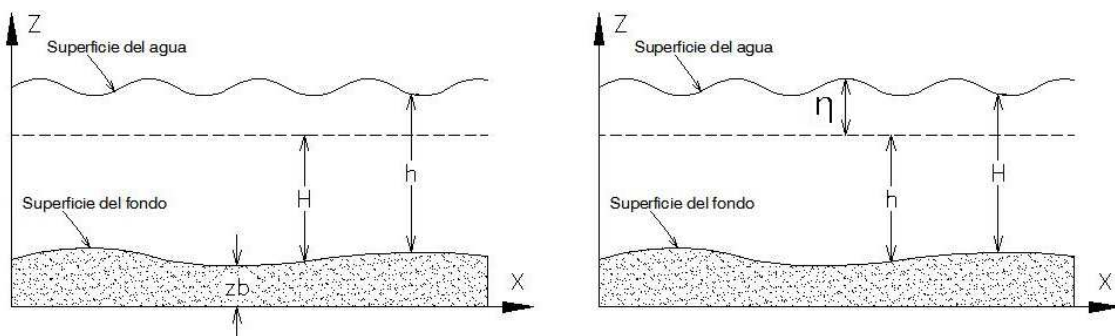


Figura 3.1 La primera imagen muestra como se miden las variables para las ecuaciones desarrolladas en el capítulo 2 y en la segunda imagen se representa como se miden las variables para el método TVD – MacCormack.

3.5 Solución del método

La representación de las ecuaciones en su forma vectorial es la siguiente:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (3.6)$$

Donde

$$U = (\eta, qx, qy) \quad (3.7)$$

$$F = \begin{pmatrix} qx \\ \frac{\beta qx^2}{H} + \frac{g\eta^2}{2} + gh\eta \\ \frac{\beta qxqy}{H} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$G = \begin{pmatrix} qy \\ \frac{\beta qxqy}{H} \\ \frac{\beta qy^2}{H} + \frac{g\eta^2}{2} + gh\eta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$S = \begin{pmatrix} g\eta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{gqx\sqrt{qx^2 + qy^2}}{H^2 C^2} \\ g\eta \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{gqy\sqrt{qx^2 + qy^2}}{H^2 C^2} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

F y G representan los términos del flujo y S es el término fuente.

Para resolver la ecuación (3.6) se utilizó el método TVD – MacCormack con la adición de un término TVD, el cual es el paso corrector que elimina o disminuye las oscilaciones en donde existen grandes gradientes. En el sistema completo se utilizan 2 ecuaciones para el cálculo de cada paso de tiempo.

$$U_i^{\bar{n}+1} = U_i^n - (F_i^n - F_{i-1}^n) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} + S^n \cdot \Delta t \quad (3.11)$$

$$U_i^{n+1} = 0.5 \cdot \left[U_i^{\bar{n}+1} + U_i^n - (F_{i+1}^{\bar{n}+1} - F_i^{\bar{n}+1}) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} + S^n \cdot \Delta t \right] + TVD_i \quad (3.12)$$

Donde los superíndices y subíndices se refieren al término temporal y espacial respectivamente y

$$TVD_i = [G(r_i^+) + G(r_{i+1}^-)] \cdot \Delta U_{i+1/2}^n - [G(r_{i-1}^+) + G(r_i^-)] \cdot \Delta U_{i-1/2}^n \quad (3.13)$$

En el que

$$\Delta U_{i+1/2}^n = U_{i+1}^n - U_i^n \quad (3.14)$$

$$\Delta U_{i-1/2}^n = U_i^n - U_{i-1}^n \quad (3.15)$$

$$r_i^+ = \frac{\Delta \eta_{i-1/2}^n \cdot \Delta \eta_{i+1/2}^n + \Delta q x_{i-1/2}^n \cdot \Delta q x_{i+1/2}^n + \Delta q y_{i-1/2}^n \cdot \Delta q y_{i+1/2}^n}{\Delta \eta_{i+1/2}^n \cdot \Delta \eta_{i+1/2}^n + \Delta q x_{i+1/2}^n \cdot \Delta q x_{i+1/2}^n + \Delta q y_{i+1/2}^n \cdot \Delta q y_{i+1/2}^n} \quad (3.16)$$

$$r_i^- = \frac{\Delta \eta_{i-1/2}^n \cdot \Delta \eta_{i+1/2}^n + \Delta q x_{i-1/2}^n \cdot \Delta q x_{i+1/2}^n + \Delta q y_{i-1/2}^n \cdot \Delta q y_{i+1/2}^n}{\Delta \eta_{i-1/2}^n \cdot \Delta \eta_{i-1/2}^n + \Delta q x_{i-1/2}^n \cdot \Delta q x_{i-1/2}^n + \Delta q y_{i-1/2}^n \cdot \Delta q y_{i-1/2}^n} \quad (3.17)$$

La función $G(\cdot)$ en la ecuación (3.13) está definida como

$$G(x) = 0.5 \cdot C \cdot [1 - \phi(x)] \quad (3.18)$$

Donde el límite de la función del flujo se da como

$$\phi(x) = \max[0, \min(2x, 1)] \quad (3.19)$$

Y la variable C es

$$C = \begin{cases} Cr \cdot (1 - Cr) & Cr \leq 0.5 \\ 0.25 & Cr > 0.5 \end{cases} \quad (3.20)$$

Con Cr iniciando en el número local de Courant definido como:

$$Cr = \frac{(|qx/H| + \sqrt{gH})\Delta t}{\Delta x} \quad (3.21)$$

Un beneficio de utilizar el sistema predictor–corrector es que el término fuente se puede tratar de una manera más sencilla y todo el sistema tiene segundo orden de exactitud, tanto en el tiempo como en el espacio.

3.6 Algoritmo de paso de tiempo adaptable

El paso de tiempo máximo está sujeto a la restricción de estabilidad dada por la condición del conocido Courant-Friedrich-levy (CFL). Con el fin de acelerar el cálculo, el paso de tiempo es ajustado dinámicamente de acuerdo al número máximo de Courant, dado como:

$$\Delta t = Cr_{preset} \cdot \frac{\Delta x}{\max\left(\frac{\sqrt{qx^2 + qy^2}}{H} + \sqrt{gH}\right)} \quad (3.22)$$

Donde $C_{r_{preset}}$ es la cantidad presente y $\max(\)$ denota el valor máximo a través del dominio entero computacional. Es esperado que el paso de tiempo automáticamente sea pequeño cuando el flujo cambie rápidamente y viceversa.

Finalmente los términos viscosos, son agregados por medio de la obtención de la viscosidad turbulenta. Ésta es obtenida por el modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ (ecuaciones en el capítulo 2).

3.7 Modelación de obstáculos o zonas secas

Si bien el presente modelo permite la utilización de coordenadas curvilíneas generalizadas, y por lo tanto geometrías complejas. En algunas ocasiones se pueden presentar zonas donde la distorsión de la malla produce la formación de inestabilidades. Igualmente se pueden presentar obstrucciones dentro del flujo (por ejemplo: islas y pilotes) o si se quiere estudiar la inundación de zonas secas. Para tal motivo se ha hecho una extrapolación de un método llamado “fronteras inmersas” [12], utilizado en la dinámica de gases. Este método, permite diferenciar una zona “húmeda”, donde el agua fluye, de una zona “seca”, donde no hay agua. La diferenciación se obtiene a partir de una bandera que vale 1 para zonas húmedas y 0 para zonas secas. Cuando una celda tiene valor de bandera 0, las ecuaciones no se resuelven en ésta y se impide el flujo de agua de una zona húmeda a una zona seca.

En el caso de obstrucciones como pilotes o islas, que permanecen en todo el transcurso de la simulación, ningún cambio en la distribución de las banderas se tiene que realizar. Sin embargo, en el caso de inundaciones de zonas secas o del secado de zonas húmedas, la distribución de las banderas debe de ser dinámica y modificarse continuamente.

En estos casos, la zona seca se diferencia de una húmeda si la elevación de la superficie libre es menor (o mayor) a una altura de referencia:

$$\begin{aligned} H_i &\geq H_{crit}; && \text{Zona Húmeda} \\ H_i &< H_{crit}; && \text{Zona Seca} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Cuando la elevación de la superficie libre del agua en una celda, H_i , es inferior a H_{crit} , automáticamente la bandera toma el valor de cero. Cuando una celda adyacente a otra con bandera cero tenga dos veces el valor de H_{crit} , ambas celdas toman el valor de H_{crit} y la bandera toma un valor de uno. El procedimiento anterior asegura la conservación de masa.

Una forma de evitar el comportamiento escalonado del flujo debido a la obstrucción de ciertas celdas, ver Figura 3.2, es a partir de la utilización de interpolaciones de diferentes órdenes que evitan este comportamiento [12].

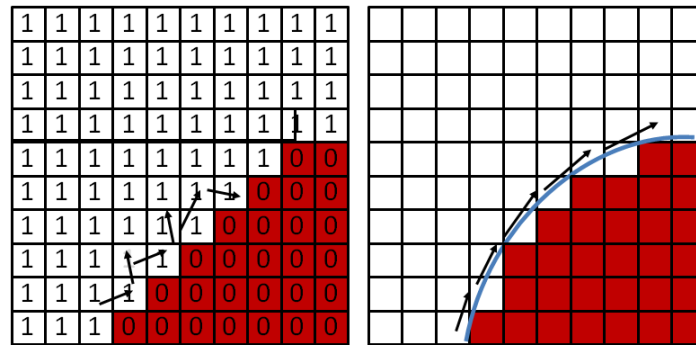


Figura 3.2 Fronteras inmersas y la formación de un comportamiento escalonado (izquierda). Utilización de interpolaciones (derecha).

3.8 Condiciones de frontera para las Ecuaciones de Aguas Someras

Considerando un flujo sin fricción, las ecuaciones de Aguas Someras se pueden escribir como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \tag{3.24}$$

Donde A y B son los jacobianos de los flujos (def de A y B). Para cualquier punto en el espacio (x,y,t), se puede comprobar que, considerando dos superficies $t=\varphi(x,y)$, se satisface la relación:

$$\left| \mathbf{I} - \mathbf{A} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| = 0 \tag{3.25}$$

Donde I es la matriz identidad. Estas superficies están definidas en el espacio de fases y son una extensión bi-dimensional de las líneas características en una dimensión. Ambas superficies son las fronteras del dominio de influencia de la solución (líneas bi-características). Una relación diferencial puede estar definida a lo largo de estas superficies, permitiendo que la solución sea totalmente determinada a partir de las condiciones iniciales. La primera superficie, superficie- χ es una línea y a su alrededor se forma un cono superficie- θ , que abre concéntricamente a la superficie- χ , a velocidad ($c = \sqrt{gh}$).

El objetivo de este estudio es encontrar el valor de las condiciones de frontera a partir de conocer de antemano que se conocen sus valores para un tiempo anterior. Para esto se utilizan las relaciones diferenciales:

$$-\sin X \frac{du}{dt} + \cos X \frac{dv}{dt} = -\frac{2}{t} \frac{\partial c}{\partial X} \quad (3.26)$$

$$\cos \theta \frac{du}{dt} + \sin \theta \frac{dv}{dt} + 2 \frac{dc}{dt} = \frac{\sin \theta}{t} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{t} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (3.27)$$

A lo largo de estas superficies. El sistema de ecuaciones diferenciales está bien puesto, well posed, si:

1. Una relación del tipo ecuación 3.26 está definida a lo largo de la superficie- χ y dos ecuaciones 3.27 a lo largo de una superficie- θ , para dos ángulos, θ y $\theta+\pi$.
2. Tres relaciones para la ecuación 3.27 están definidas a lo largo de la superficie- θ para tres diferentes ángulos θ_1, θ_2 , y θ_3

Esta segunda condición se utilizará, para obtener las condiciones de frontera. Si se definen 3 ángulos, θ_1, θ_2 , y θ_3 . Siendo $\theta_4 = \theta_1 + 2\pi$. Integrando la ecuación 3.27 entre los ángulos $[\theta_1, \theta_2]$, $[\theta_2, \theta_3]$ y $[\theta_3, \theta_4]$. Se crean tres ecuaciones del tipo:

$$\begin{aligned} & (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k) \frac{du}{dt} + (\cos \theta_k - \cos \theta_{k+1}) \frac{dv}{dt} + 2(\theta_{k+1} - \theta_k) \frac{dc}{dt} \\ & = \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \left(\frac{\sin \theta}{t} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{t} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) d\theta \end{aligned} \quad (3.28)$$

Donde están $k=1,2,3$. Las diferenciales son eliminadas integrando la ecuación con respecto al tiempo entre $t=0$ y Δt :

$$\begin{aligned} & (\sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k)(u - u_A) + (\cos \theta_k - \cos \theta_{k+1})(v - v_A) \\ & + 2(\theta_{k+1} - \theta_k)(c - c_A) \\ & = \int_0^{\Delta t} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \left(\frac{\sin \theta}{t} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{t} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) d\theta dt \end{aligned} \quad (3.29)$$

El lado derecho es estimado a partir de expresar las derivadas con respecto a θ en función de "x" y "y":

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Obteniendo

$$\alpha k u + \beta k v + \gamma k c = \delta_k \tag{3.31}$$

Donde los coeficientes son:

$$\begin{aligned} \alpha k &= \sin \theta_{k+1} - \sin \theta_k \\ \beta k &= \cos \theta_k - \cos \theta_{k+1} \\ \gamma k &= 2(\theta_{k+1} - \theta_k) \\ \delta_k &= \alpha k u_A + \beta k v_A + \gamma k c_A \end{aligned} \tag{3.32}$$

A partir de lo anteriormente mencionado, se pueden definir dos series de condiciones de frontera, uno para flujo subsónico y otro para flujos supersónico. A partir, de conocer la velocidad de las ondas, dadas por u , $u+c$, y $u-c$. Donde u es la velocidad del fluido en una dirección dada y c es la velocidad de las ondas gravitacionales, antes definida.

Teniendo el flujo de la figura 3.3

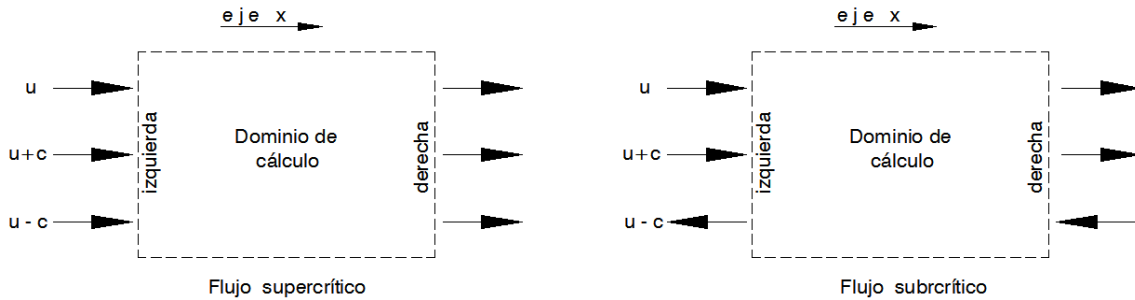


Figura 3.3 Representación de las condiciones de frontera a) Para flujo supercrítico y b) Para flujo subcrítico

En la frontera izquierda (observar figura 3.3), se tiene una entrada. Si el flujo es supercrítico, las tres ondas entran al dominio y la condición de frontera consiste en fijar ambos gastos y la altura de la superficie libre. Si el flujo es subcrítico, se fijan ambos gastos y la altura de la superficie crítica se calcula de:

$$H = (2u_0 - u_2 - u_1) / 2\pi + (v_1 - v_2) / 2\pi + ((c_1 - c_2) / 2)^2 / g \tag{3.33}$$

Donde los valores son tomados en la frontera en cuestión. Los subíndices indican:

$$u_0 = u(1,j), u_1 = 0.5(u(1,j) + u(1,j-1)) \text{ y } u_2 = 0.5(u(1,j) + u(1,j+1)). \tag{3.34}$$

De la misma forma para las otras variables.

$$v_0 = v(1,j), v_1 = 0.5(v(1,j) + v(1,j-1)) \text{ y } v_2 = 0.5(v(1,j) + v(1,j+1)). \tag{3.35}$$

En el caso de la frontera derecha (observar 3.3), si la frontera es supercrítica se calculan las tres variables de las variables internas:

$$v_a = (u_2 - u_1)/2 + (v_2 + v_1)/2 + \pi(c_2 - c_1)/4. \quad (3.36)$$

$$u_a = (u_1 + u_2 + 2u_3)/4 + (v_2 - v_1)/2 + \pi(c_2 + c_1 - 3c_0)/8. \quad (3.37)$$

$$c_a = (u_1 + u_2 - 2u_3)/2 + \pi + (v_2 - v_1)/2 + \pi + \pi(c_2 + c_1 + 2c_0)/4. \quad (3.38)$$

Si el flujo es subcrítico, se fija la altura de la superficie libre y se calcula las variables restantes de las variables internas:

$$v_a = (-u_2 + u_1)/2 + (v_2 + v_1)/2 + \pi(3c_2 + c_1 - 4c_0)/2. \quad (3.39)$$

$$u_a = (u_2 + u_1)/2 + (-v_2 + v_1)/2 + \pi(c_2 + c_1 - c_0)/2. \quad (3.40)$$

Capítulo 4

Simulación Numérica y Resultados

4.1 Introducción

En este capítulo se realizaron varias simulaciones numéricas de flujos poco profundos, con el fin de poder validar el programa en el que se realizaron dichas simulaciones. Para poder hacer la validación se tuvieron que resolver ejercicios para saber que los datos que obtuvieron eran correctos, estos datos se procesaron en un programa (Tecplot 360) para poder tener una visualización de los resultados.

Se comenzó resolviendo ejercicios sencillos con flujo subcrítico y supercrítico, después se efectuaron simulaciones más complejas con la finalidad de poder ver el alcance del programa, la simulación más completa que se realizó fue la de una sección de un río real; esta sección abarca a los ríos: Mezcalapa, Samaria y Carrizal, que se encuentran en el límite entre los estados de Chiapas y Tabasco.



Figura 4.1 Imagen de los ríos que se simularon

4.2 Canal abierto rectangular con estrechamiento gradual

El problema que se resolvió fue el de un canal abierto rectangular de 3.048 [m] de ancho que se estrecha gradualmente a 2.43 [m], mediante una contracción de 15.24 [m] de largo, construida con paredes rectas en un fondo horizontal. Si el gasto es de 2.83 [m³/s] y la profundidad del flujo es de 1.52 [m] en el lado de aguas arriba de la sección de transición. Se determinó el perfil a la salida del canal [1].

Este problema se resolvió analíticamente de la siguiente manera:

Con los datos proporcionados se calcula la energía total del flujo, esta energía se mantiene constante a través de la contracción debido a que las pérdidas de energía son despreciables.

$$E = h + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad E = 1.52 + \frac{2.83^2}{2 * 9.81 * (3.048 * 1.52)^2} \quad E = 1.54[m]$$

Con esta energía se calcularon las alturas que se podrían tener a la entrada y a la salida del canal. En la entrada obtenemos que:

$$1.54 = h + \frac{2.83^2}{2g(b * h)^2}$$

El ancho del canal a la entrada es $b=3.048$ [m] y las soluciones obtenidas son $h_1 = 0.17$ y $h_2 = 1.52$, h_2 es la altura que se tiene a la entrada del canal. Para obtener la altura a la salida se cálculo de la misma forma.

$$1.54 = h + \frac{2.83^2}{2g(b * h)^2}$$

Con un ancho de 2.43 [m] a la salida, se obtuvo que $h_1 = 1.50$ y $h_2 = 0.23$. Con estos resultados se plantearon 2 soluciones, que el flujo no sufra un cambio de régimen y que cambie de régimen de subcrítico a supercrítico.

En la primera solución el flujo como no cambio de régimen la altura de la entrada fue de 1.52 [m] y a la salida fue 1.50 [m], la variación en las alturas es casi nula, conservando el flujo subcrítico. (Observar figura 4.2)

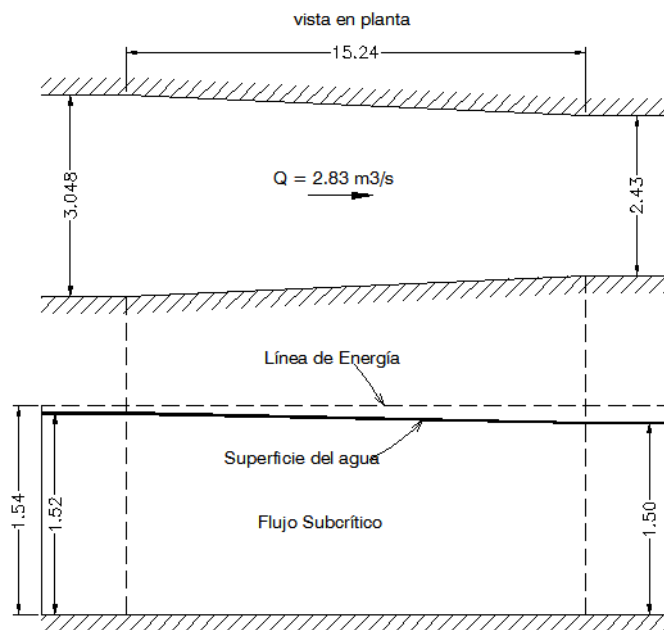


Figura 4.2 Principio de la energía aplicado a una contracción en un canal con régimen Subcrítico

Para la segunda solución se tuvo que incrementar la contracción para que ocurriera un cambio de régimen, de esta manera los resultados aptos fueron: a la entrada, el flujo tendría una altura de 1.52 [m] y a la salida disminuiría hasta 0.23 [m]. (Observar figura 4.3)

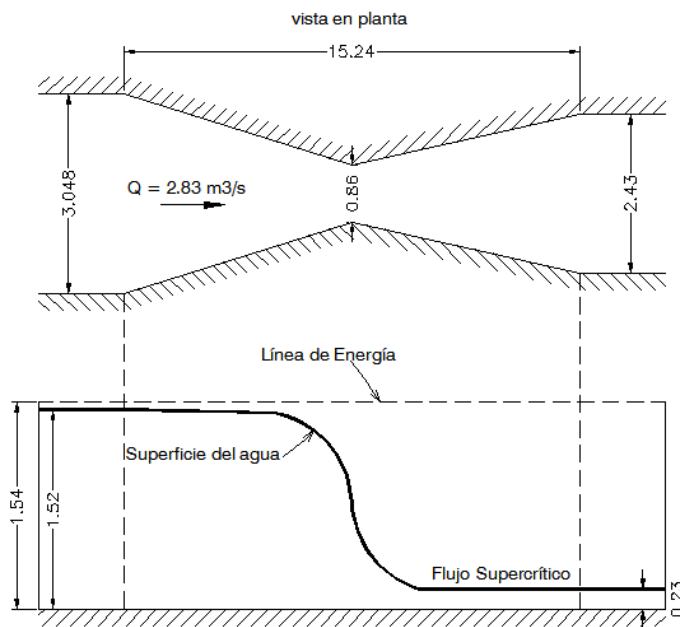


Figura 4.3 Principio de la energía aplicado a una contracción en un canal con un cambio de régimen de Subcrítico a Supercrítico.

4.2.1 Solución para flujo subcrítico sin cambio de régimen

Detalles numéricos

Para poder realizar la simulación se tuvo que hacer la reducción en el canal, para conseguir esta configuración, se crearon en el código bloques: de color rojo (1) es por donde puede fluir el flujo y azul (0) para sólidos, donde no se permite el paso del flujo. (Observar figura 4.4)



Figura 4.4 Representación de los bloques de fluido y sólido.

Esta simulación se realizó en dos dimensiones (en coordenadas cartesianas) y se calcula la altura (eje z), para poder tener interpretaciones en tres dimensiones. La discretización de esta configuración se ejecutó con una malla con 21.0 [m] de longitud y 3.448 [m] de ancho, esta malla se discretizó en 200 x 200, formando celdas de un tamaño de 0.105 [m] x 0.0172 [m] (Observar figura 4.5)

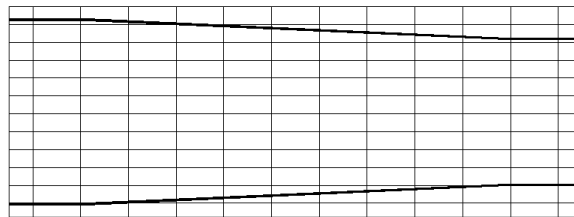


Figura 4.5 Representación de la malla utilizada

Para resolver el ejercicio se plantearon en la entrada del canal, los gasto por unidad de ancho en x , y ; en este caso fue de 0.928 [m²/s] en “ x ” y de 0.0 en “ y ”, también se estableció una altura de referencia, para que se calcule la altura en la superficie libre y sumando estas dos alturas se obtuvo la altura total. En la salida se determinó la altura total que fue de 1.50 [m], de esta forma lo que se calculó fueron las descargas en ambas direcciones.

Resultados de alturas

Para este caso se realizaron dos simulaciones sin términos viscosos turbulentos y con $n=0.005$, la primera fue con fricción muy pequeña para tratar de obtener los mismos resultados de la solución analítica (TVD = 0.1), ya que estos resultados no consideraron pérdidas por fricción. En la segunda simulación utilizamos una fricción normal (TVD = 0.5).

a) Simulación con TVD = 0.1

Los resultados que se obtuvieron para las alturas se presentan en la figura 4.6

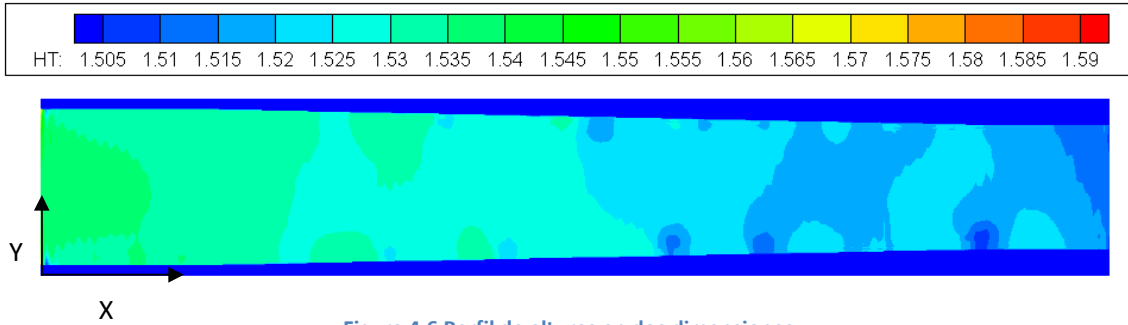


Figura 4.6 Perfil de alturas en dos dimensiones

Se observó en la figura anterior, que en la entrada la altura tiene un valor promedio 1.55 [m] y ésta va disminuyendo hasta un valor de 1.50 [m] a la salida. También se observa que existen zonas donde hay disminución de alturas drásticamente, esto es por la creación de algunos remolinos cerca de la pared.

La figura 4.6 representa los resultados en dos dimensiones, pero se comentó que la altura en la superficie libre se va calculando para obtener la altura total, de esta forma se logró tener una representación en tres dimensiones. (Observar figura 4.7) Esta imagen mostró cómo va disminuyendo la altura y se perciben los pequeños vórtices cerca de las paredes.

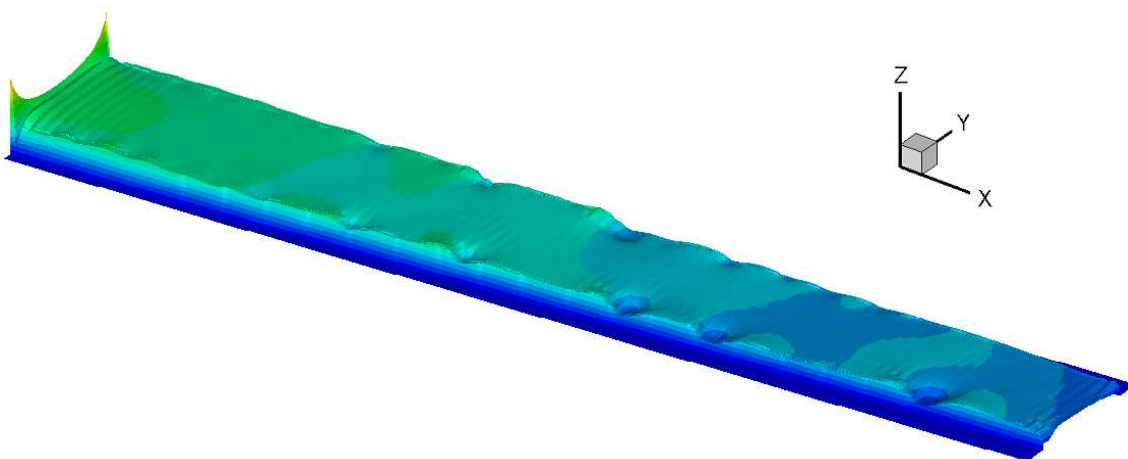


Figura 4.7 Representación de las alturas en tres dimensiones

Los valores de las alturas fueron muy cercanos a los valores analíticos, esto fue porque casi no consideramos pérdidas (Observar tabla 4.1), de lo contrario entre más pérdidas se calculan la diferencia entre las alturas aumentará, como veremos más adelante.

Tabla 4.1 Comparación de resultados

Resultados analíticos	Resultados de nuestro código
Altura a la entrada 1.52 [m]	Altura a la entrada 1.55 [m]
Altura a la salida 1.50 [m]	Altura a la salida 1.50 [m]

Resultados de velocidad

El perfil de velocidad que se obtuvo fue aceptable porque a la entrada del canal se tuvo una velocidad aproximada de 0.6 [m/s] y está va aumentando conforme va disminuyendo el área transversal del canal; a la salida se obtuvo una velocidad promedio de 0.85 [m/s] (Observar figura 4.8).

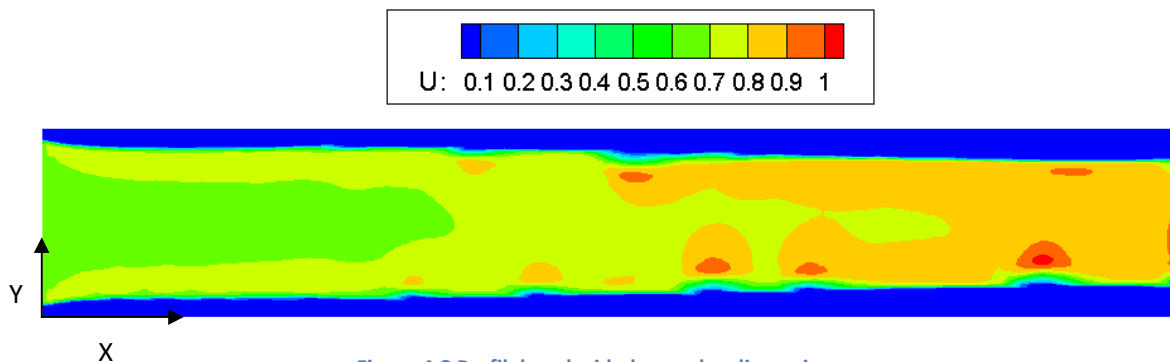


Figura 4.8 Perfil de velocidades en dos dimensiones

En esta imagen de dos dimensiones se pudo ver que hay zonas donde hay velocidades mayores, por ejemplo de 1 [m/s], esto es porque se crean pequeños vórtices, en estas zonas aumenta más la velocidad y también hay velocidades negativas de -0.02 [m/s].

En la representación en tres dimensiones, se logró ver que en donde se crean los pequeños vórtices es donde está el aumento y disminución de velocidades (Observar figura 4.9).

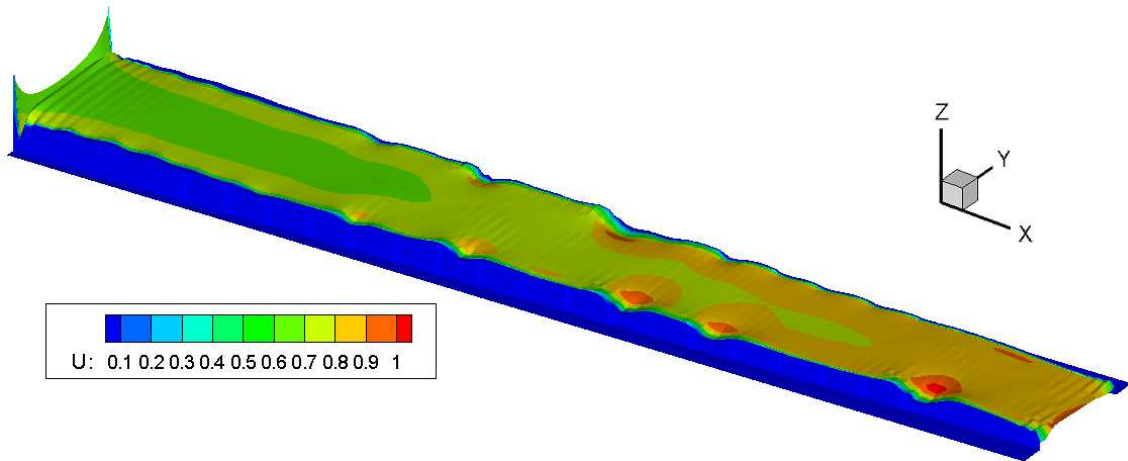


Figura 4.9 Perfil de velocidades en tres dimensiones

b) Simulación con TVD =0.5

Resultados de alturas

Los resultados que se obtuvieron en esta simulación se presentan en la figura 4.10, en estos resultados se vio que la altura fue disminuyendo gradualmente, esto fue de una altura en la entrada de 1.56 [m], a una altura de 1.49 [m] a la salida. Se sigue presentando vórtices cerca de la pared, por consiguiente hay disminución un poco bruscas en esta zona.

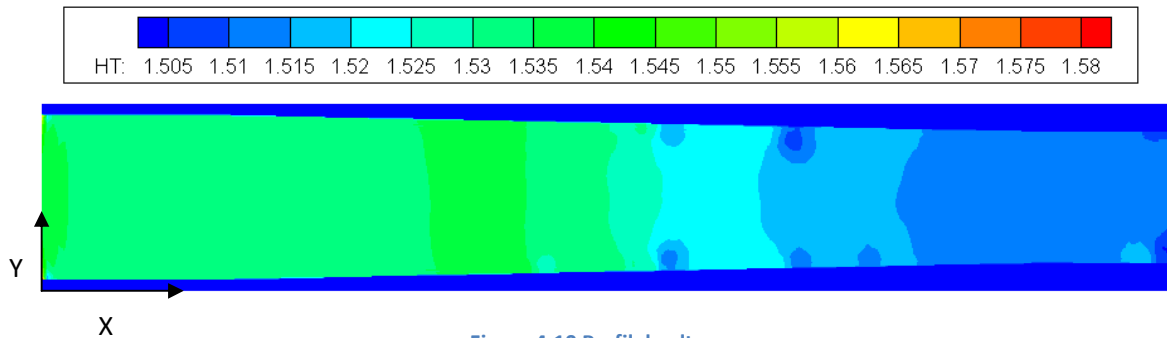


Figura 4.10 Perfil de alturas

También se pudo obtener la representación en tres dimensiones, en la figura 4.11 se vio que la altura va disminuyendo muy gradualmente y la disminución considerable se ve entre las distancias de 11.6 [m] a 14.4 [m] en la dirección de “x”.

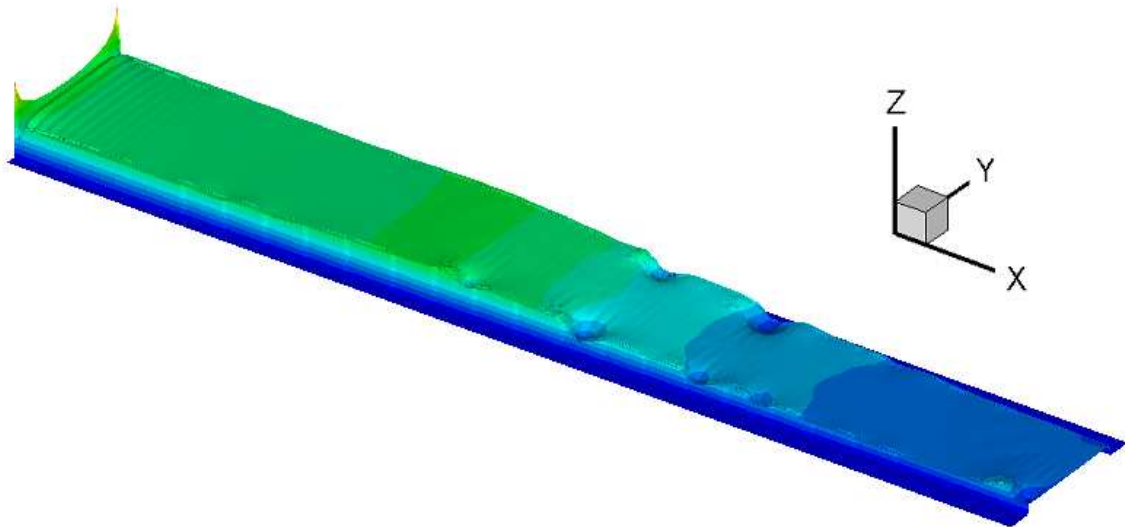


Figura 4.11 Perfil de alturas en tres dimensiones

Los valores obtenidos variaron, fueron un poco distintos a los que teníamos con un TVD=0.1, pero se consideran más confiables estos (TVD=0.5), porque estamos considerando las pérdidas necesarias, por esta razón el salto de alturas entre la entrada y la salida es de 0.07 [m] y no de 0.02 [m].

Tabla 4.2 Comparación de resultados

Resultados analíticos	Resultados TVD = 0.1	Resultados TVD = 0.5
Altura a la entrada 1.52 [m]	Altura a la entrada 1.55 [m]	Altura a la entrada 1.56 [m]
Altura a la salida 1.50 [m]	Altura a la salida 1.50 [m]	Altura a la salida 1.49 [m]

Resultados de velocidad

Los resultados de velocidad no varían mucho en comparación con la simulación anterior, pero se pudo observar mejor como va aumentando la velocidad, esto es porque entre más reducimos el canal, la velocidad va aumentando (Observar figura 4.12). En la entrada del canal la velocidad sigue siendo de 0.6 [m/s], a la mitad la velocidad es aproximadamente de 0.7 [m/s] y al final del canal es de 0.95 [m/s].

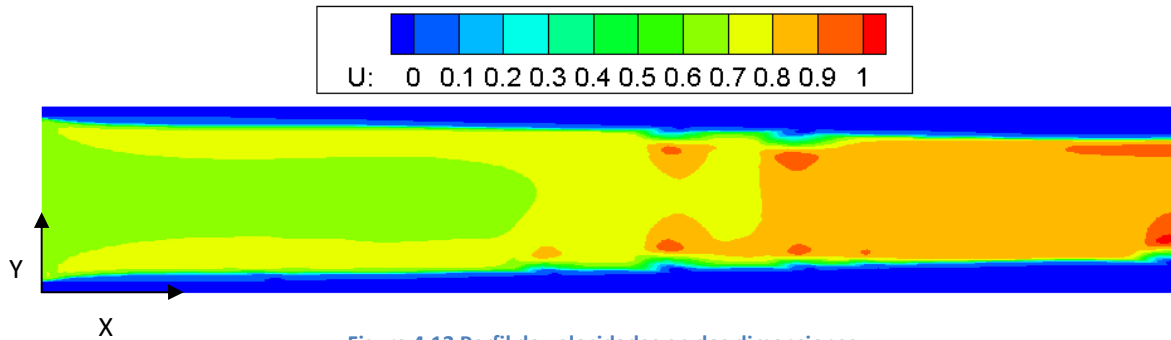


Figura 4.12 Perfil de velocidades en dos dimensiones

En la figura 4.11 se siguen presentando vórtices los cuales están en la zona donde la disminución de las alturas es mayor (Observar figura 4.13), en estos vórtices se alcanzan velocidades máximas y mínimas de 1.03 y -0.1 respectivamente en la dirección “x”.

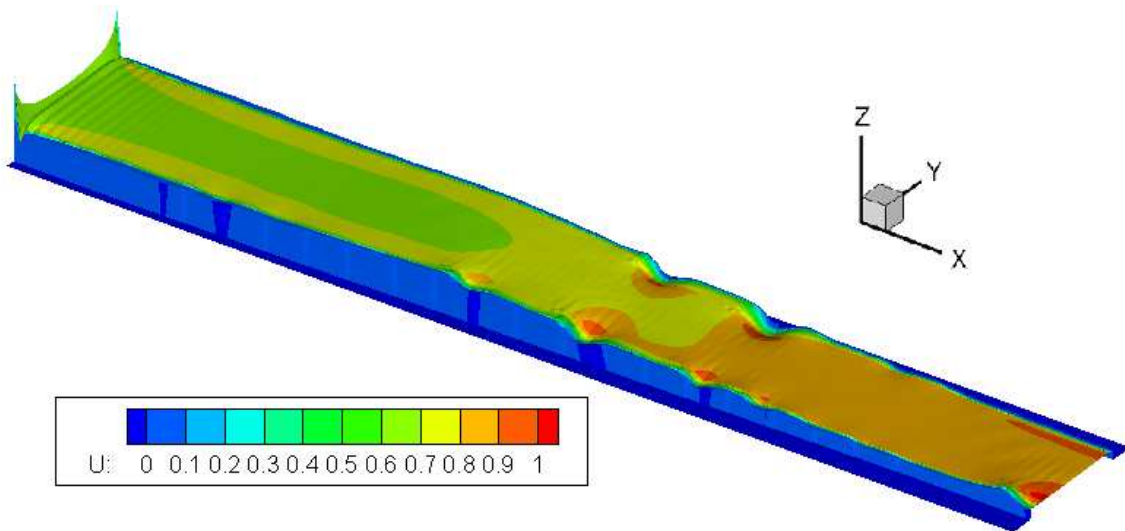


Figura 4.13 Perfil de velocidades en tres dimensiones

4.2.2 Solución para cambio de régimen de flujo subcrítico a supercrítico

Para poder realizar esta simulación se tuvo que modificar la contracción en el canal; la modificación que se realizó fue la de reducir más el área transversal hasta que ocurra el cambio de régimen y después se aumentó el área transversal (Observar figura 4.14), efecto similar a lo que sucede en una tobera convergente – divergente para flujos compresibles. La configuración se creó con ayuda de los bloques rojos y azules (fluido y sólido).



Figura 4.14 Configuración para la simulación de cambio de régimen

Como en la simulación anterior, ésta se realizó en dos dimensiones (en coordenadas cartesianas), calculándose la altura (eje z), para poder tener interpretaciones en tres dimensiones. La discretización de esta configuración se ejecutó con una malla con 21.0 [m] de longitud y 3.448 [m] de ancho, esta malla se fraccionó en 200 x 200, formando celdas de un tamaño de 0.105 [m] x 0.0172 [m] (Observar figura 4.15).

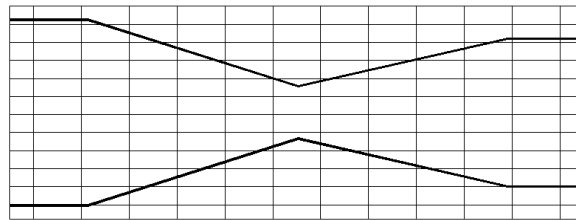


Figura 4.15 Representación de la malla utilizada

Para resolver la simulación planteamos en la entrada del canal, los gasto por unidad de ancho en x , y ; en este caso fue de 0.928 [m²/s] en “ x ” y de 0.0 en “ y ”, también se estableció una altura de referencia, para que se calcule la altura en la superficie libre y sumando estas dos alturas se obtuvo la altura total. En la salida se determinó la altura total que fue de 0.23 [m], de esta forma lo que se calculó fueron las descargas en ambas direcciones.

Resultados de alturas

En esta sección presentamos los resultados de alturas, de velocidades y en este caso también se calculó el número de Froude en todo el dominio, ya que es muy importante saber en qué zona se produce el cambio o si no hay cambio de régimen.

En los resultados de alturas se pudo observar que en la entrada del canal la altura aumenta de 1.50 [m] a 1.60 [m] y ésta va disminuyendo, el salto en alturas se presenta en donde se encuentra la mayor reducción del canal y a la salida estableció una altura de 0.30 [m]. La altura calculada analíticamente es de 0.23 [m], ésta no considera nada de pérdidas por fricción. (Observar figura 4.16)

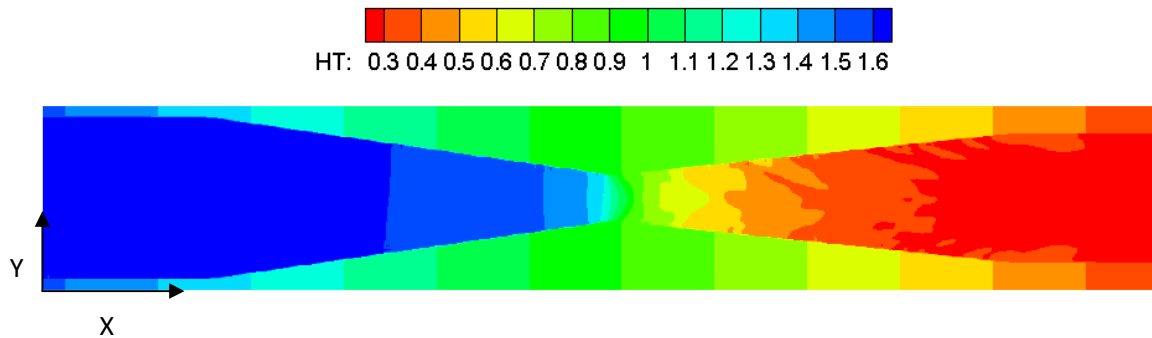


Figura 4.16 Perfil de alturas en dos dimensiones

Con ayuda de los datos obtenidos en el cálculo de la superficie libre se obtuvieron datos de las alturas totales, y con éstas se pudo hacer una representación en tres dimensiones (Observar figura 4.17).

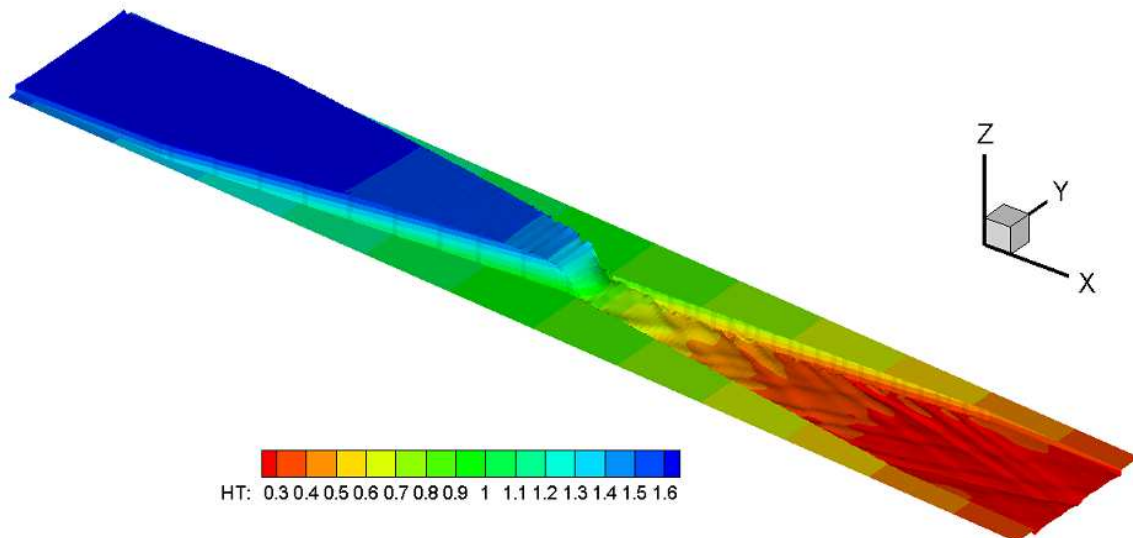


Figura 4.17 Representación de las alturas totales en tres dimensiones.

En la representación en tres dimensiones es mucho más fácil observar como el fluido mantiene una altura casi constante, el gran cambio se da en la sección donde se reduce el canal, esta sección comprende de los 9 [m] a los 13 [m] en la dirección de "x", son 4 [m] en donde la altura se reduce 0.90 [m], después de los 13 [m] en la dirección "x", la altura sólo desciende 0.30 [m] más.

Resultados de velocidad

El perfil de velocidad que se obtuvo se presenta en la figura 4.18, la velocidad de entrada calculada analíticamente es aproximadamente de 0.60 [m/s], que es el rango que se ve en los resultados; la velocidad se va aumentando, en donde se encuentra la mayor reducción del canal, la velocidad es de 3[m/s] y después de la reducción, la velocidad sigue aumentando hasta alcanzar una velocidad máxima de 5.15 [m/s].

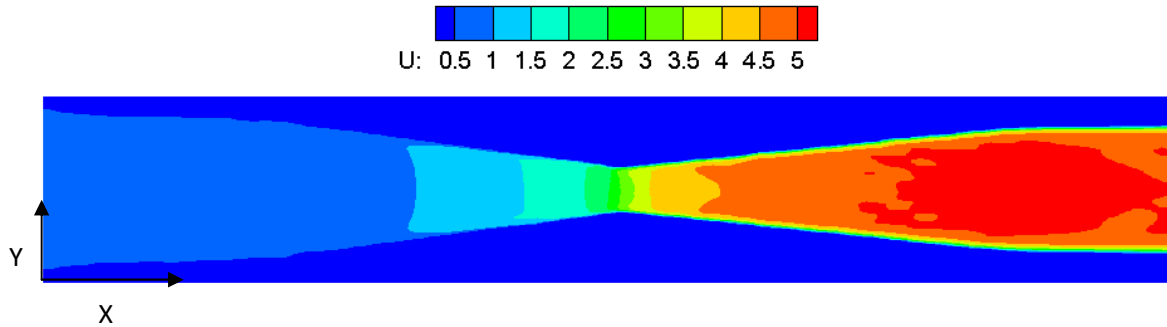


Figura 4.18 Perfil de velocidades en dos dimensiones

Estos resultados eran de esperarse porque en el momento que se reduce el área transversal del canal, la velocidad debe de aumentar y si esperábamos un cambio de régimen la velocidad debe aumentar demasiado. Se obtuvo una representación en tres dimensiones del perfil de velocidad (Observar figura 4.19), se pudo observa que el gran cambio de velocidades se presenta en la misma sección donde la diferencia de alturas es mayor.

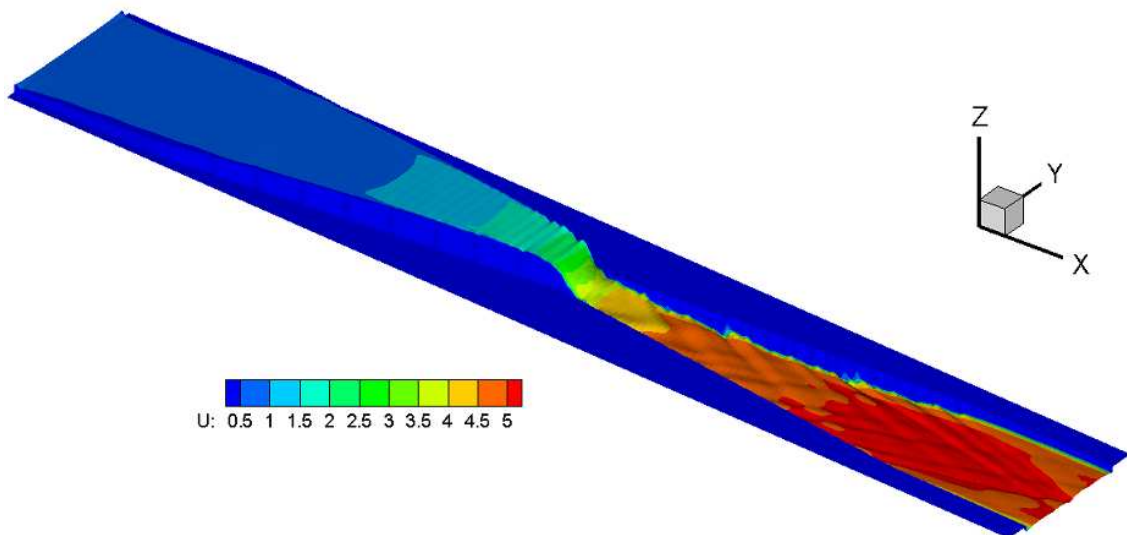


Figura 4.19 Perfil de velocidades en tres dimensiones.

También se puede observar que en la sección final del canal es donde se alcanzan las mayores velocidades y se visualiza que el fluido sale en forma de triángulos, los cuales se forman por la gran velocidad con la que el fluido choca con las paredes creando ondas superficiales.

Resultados del número de Froude

Para que ocurra un cambio de régimen, el número de froude tiene que pasar de un flujo subcrítico ($Fr < 1$) a supercrítico ($Fr > 1$) o viceversa. Para este caso se obtuvo que el número de froude comenzó con un valor aproximado de 0.2 en la entrada del canal y alcanzó un máximo 3.8 a la salida como se puede observar en la figura 4.20.

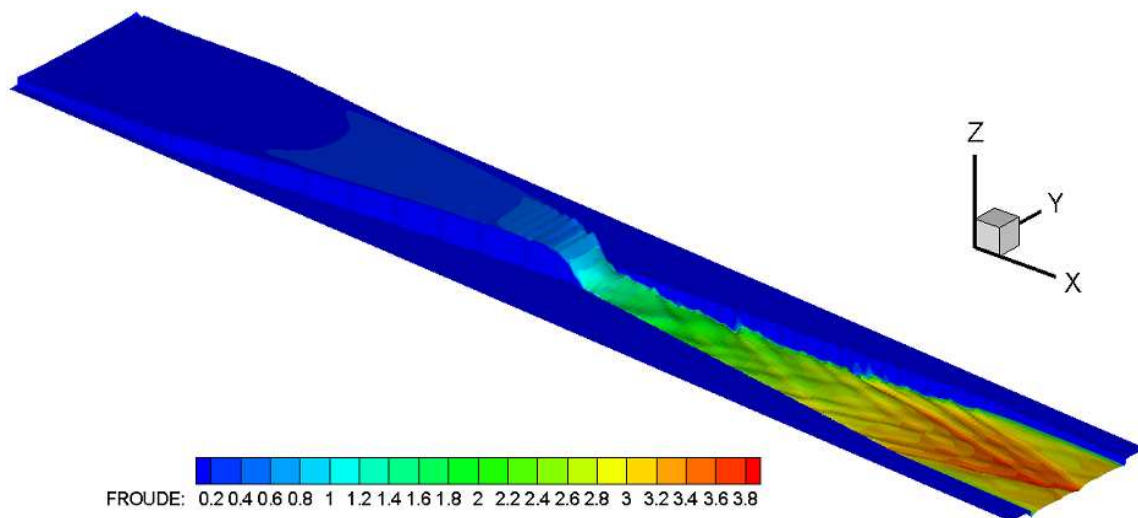


Figura 4.20 Representación del número de froude en tres dimensiones

De los resultados se visualizó que en realidad el cambio de régimen se presentó por la reducción del canal ya que en esta zona es donde se presenta un número de froude igual a uno, flujo crítico. En la figura 4.21 se hizo una ampliación a la zona donde es más estrecho el canal para poder ver mejor como va cambiando el número de froude en dicha zona, pasando por un froude igual a uno que equivale a un color azul cielo.

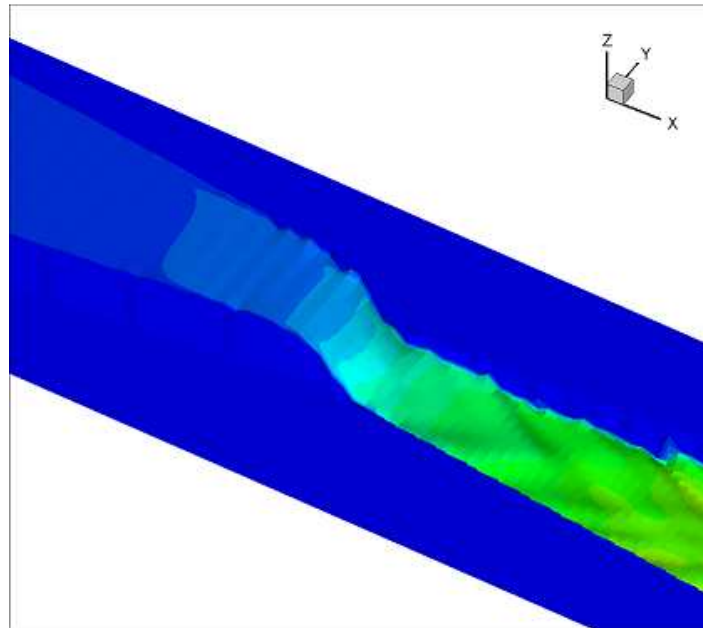


Figura 4.21 Ampliación de la zona donde se presenta el cambio de régimen.

4.3 Flujo sobre un tope

Una corriente de agua fluye a 1.0 [m/s] en un canal de 5 [m] de ancho, el calado del canal es de 1 [m] y se aproxima a una elevación de 0.10 [m] de altura. Se calculó el calado sobre el tope [7].

Este problema se resolvió analíticamente de la siguiente manera:

Se calculó el número de froude para saber qué tipo de régimen tiene el flujo, con la velocidad, la gravedad y la altura a la entrada del canal.

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}} = \frac{1.0}{\sqrt{9.81 * 1.0}} \quad Fr = 0.319 \text{ régimen lento}$$

La profundidad crítica se calculó de la siguiente manera:

$$y_c = \left(\frac{y^3 V^3}{g} \right)^{1/3} = \left(\frac{1^3 1^3}{9.81} \right)^{1/3} = 0.34 \text{ [m]}$$

Como se tenía régimen lento, el nivel del agua debe de disminuir sobre el tope y se calculó la energía total del flujo a la entrada y encima del tope $\Delta h = 0.1$ [m].

$$E_1 = h + \frac{V^2}{2g} \quad E = 1.0 + \frac{1.5^2}{2 * 9.81} = 1.114[m] \quad E_2 = E_1 - \Delta h = 1.014 [m]$$

La profundidad del flujo sobre el tope se determinó a partir de:

$$y_2^3 - 1.014y_2^2 + 0.05 = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtuvieron tres raíces: $y_1 = -0.2027$; $y_2 = 0.257$; $y_3 = 0.9597$, la primera se descarta porque no es físicamente posible, la segunda se no se toma en cuenta porque es menor que la profundidad crítica, entonces la tercera es la solución del problema. La altura sobre el tope fue la siguiente:

$$\text{Altura sobre el tope} = 1.114 - 0.9597 - 0.1 = 0.064 [m]$$

En esta solución no considera los efectos de la fricción; en solución numérica se espera que la altura sea un poco mayor, porque en nuestro caso sí consideramos pérdidas por fricción.

4.3.1 Solución del problema planteado

Detalles numéricos

Para realizar esta simulación se creó un tope en el fondo del canal como se muestra en la figura 4.22 a), el tope se creó a la mitad del dominio en la dirección “x”, en esta zona se redujo la altura de referencia 0.10 [m] (Observar figura 4.22 b)).

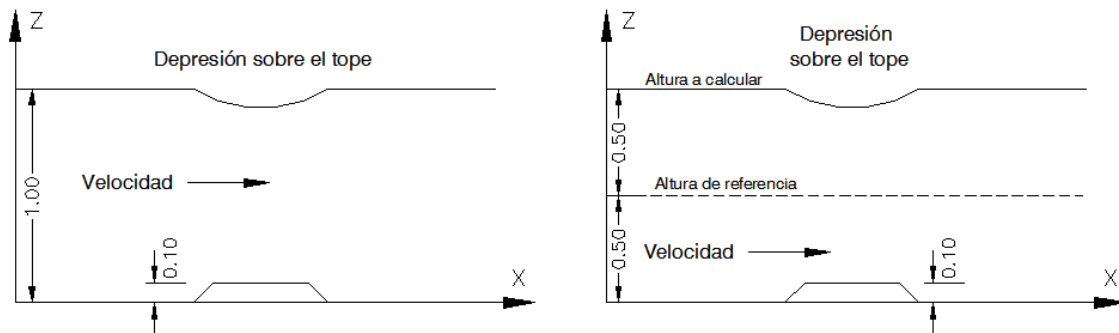


Figura 4.22 a) Corte longitudinal de la configuración simulada, b) Representación de las alturas en el corte longitudinal.

La simulación se realizó en dos dimensiones (en coordenadas cartesianas) y se calcula la altura (eje z), para poder tener interpretaciones en tres dimensiones. La discretización se llevo a cabo con una malla de 20 [m] en la dirección de “x” y 5 [m] en la dirección de “y”; esta malla se fraccionó en 200 x 200, formando celdas de un tamaño de 0.1 [m] x 0.025 [m].

Como el flujo era subcrítico se tuvo que fijar en la entrada del canal los gastos por unidad de ancho en x, y ; para esta configuración se fijó que en “ x ” era de 1 [m²/s] y de 0.0 en “ y ”, la altura de referencia se estableció en 0.5 [m] y a la salida determinó la altura total de 1 [m], de esta manera se obtuvieron las descargas en ambas direcciones.

Resultados de alturas

Los resultados que se obtuvieron se presentan en la figura 4.23, en donde observamos como la altura permaneció constante hasta la zona donde se encontraba el tope, en esta parte la altura disminuyó de 1.01 [m] a 0.91 [m], creando de esta forma la depresión sobre el tope.

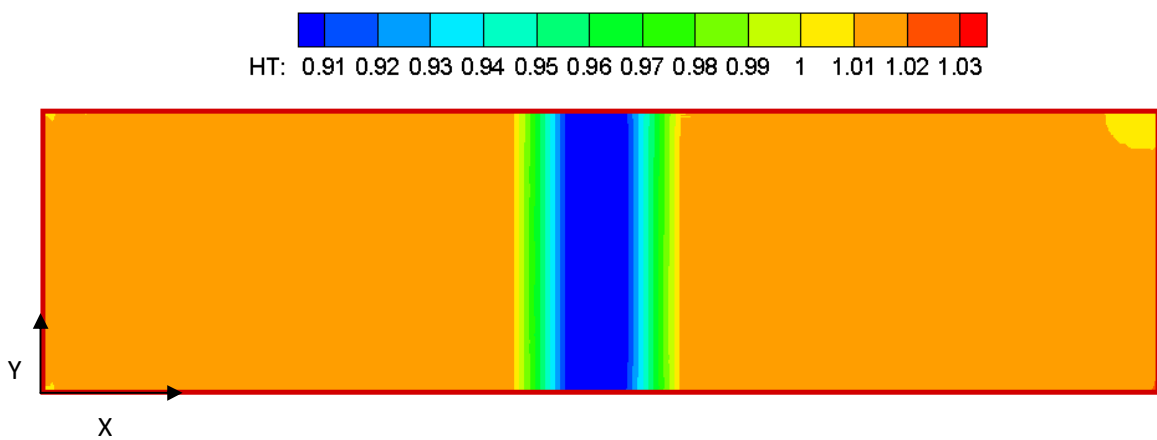


Figura 4.23 Perfil de velocidades en dos dimensiones.

Con los datos que se obtuvieron se realizó una representación en tres dimensiones, en la cual se pudo ver con mayor facilidad como la altura se mantiene, disminuye encima del tope y vuelve a aumentar donde termina el tope (observar figura 4.24).

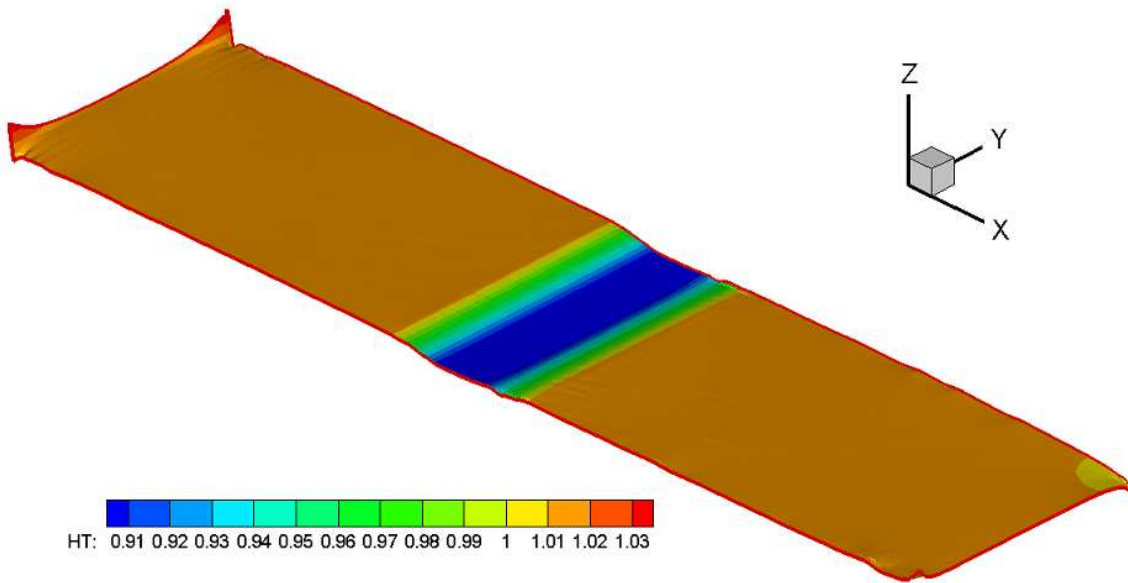


Figura 4.24 Representación de las alturas totales en tres dimensiones.

Tabla 4.3 Comparación de resultados

Resultados analíticos	Resultados de nuestro código
Altura a la entrada 1.0 [m]	Altura a la entrada 1.01 [m]
Altura encima del tope 0.936 [m]	Altura encima del tope 0.91 [m]
Altura a la salida 1.0 [m]	Altura a la salida 1.01 [m]

Con esta comparación se logró observar que la simulación fue satisfactoria refiriéndose a las alturas, porque sí esperábamos que la diferencia de alturas fuera mayor que la calculada analíticamente, entre más pérdidas tengamos la diferencia entre las alturas será mayor.

Resultados de velocidad

El perfil de velocidades que se obtuvo se puede ver en la figura 4.25. La velocidad que se maneja en el ejercicio fue de 1.0 [m/s] a la entrada y a la salida del canal, en los resultados se consiguió una velocidad un poco menor y encima del tope aumento la velocidad, esto es porque el flujo se comprimió entre el tope en el fondo y la superficie libre del fluido, ésta disminuyó su altura encima del tope.

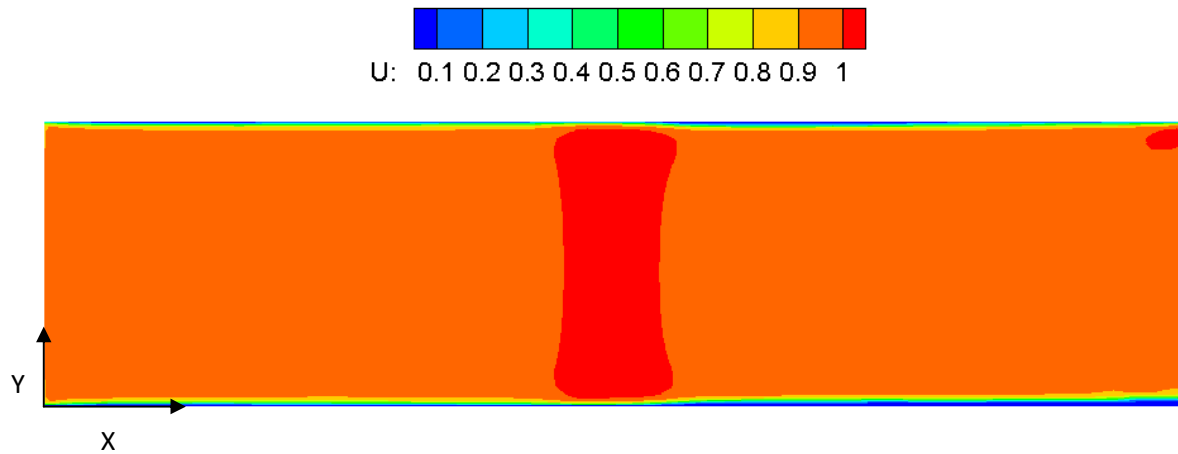


Figura 4.25 Perfil de velocidades en dos dimensiones

Con los resultados obtenidos se realizó una representación en tres dimensiones, en la cual se nota que en la disminución de la altura, es donde la velocidad sufre un pequeño incremento de 0.1 [m/s] (Observar imagen 4.26).

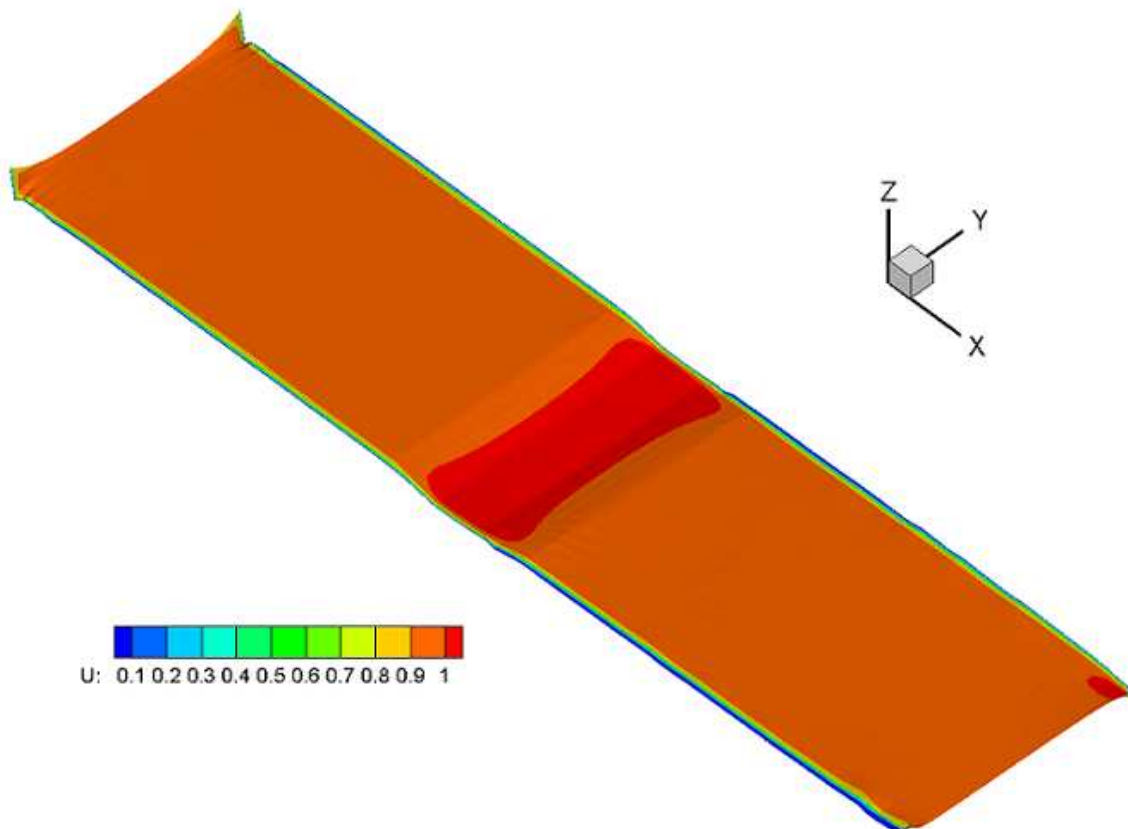


Figura 4.26 Representación de las velocidades en tres dimensiones.

Tabla 4.4 Comparación de resultados

Resultados analíticos	Resultados de nuestro código
Velocidad a la entrada 1.0 [m/s]	Velocidad a la entrada 0.9 [m/s]
Velocidad encima del tope 1.04 [m/s]	Velocidad encima del tope 1.0 [m/s]
Velocidad a la salida 1.0 [m/s]	Velocidad a la salida 0.9 [m/s]

La diferencia entre las velocidades no es muy grande y en este caso notamos que la velocidad sí esta variando como se cálculo analíticamente, de esta manera se concluyó que el código está trabajando correctamente.

4.3.2 Flujo supercrítico sobre un tope

Como otra forma de comprobación se realizó una simulación manejando la misma configuración, sólo se cambió el tipo de régimen, de subcrítico a supercrítico. Cuando se maneja flujo supercrítico lo que ocurre es un pequeño aumento de altura sobre el tope, esto es lo que manejan distintos autores [2, 3, 7].

En este caso se utilizó una velocidad de 25 [m/s], para que se tuviera un régimen rápido, esto se comprobó calculando el número de Froude.

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}} = \frac{25.0}{\sqrt{9.81 * 1.0}} \quad Fr = 7.98 \text{ régimen rápido}$$

4.3.2.1 Solución del problema planteado

Se utilizó la misma configuración del ejercicio anterior, lo único que varió fue la velocidad a la entrada (ver figura 4.27).

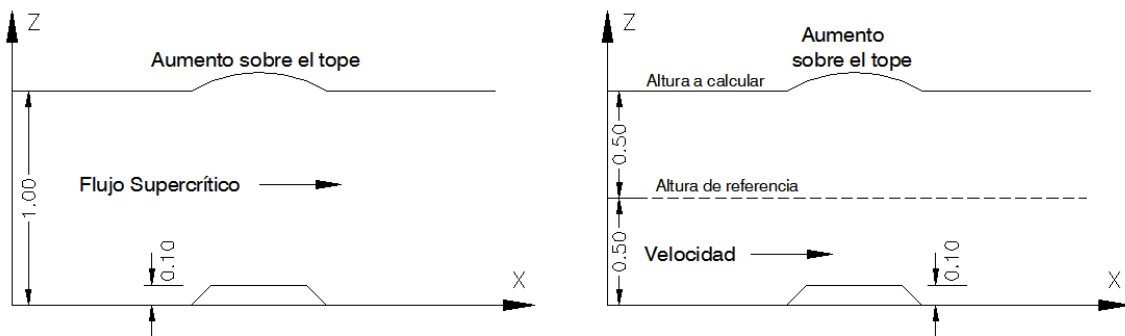


Figura 4.27 a) Corte longitudinal de la configuración simulada, b) Representación de las alturas en el corte longitudinal.

La simulación se realizó en dos dimensiones (en coordenadas cartesianas) y se calcula la altura (eje z), para poder tener interpretaciones en tres dimensiones. La discretización se llevo a cabo con una malla de 20 [m] en la dirección de “x” y 5 [m] en la dirección de “y”; esta malla se fraccionó en 200 x 200, formando celdas de un tamaño de 0.1 [m] x 0.025 [m].

Como el flujo fue supercrítico se tuvo que fijar en la entrada del canal los gastos por unidad de ancho en x, y; para esta configuración se fijó que en “x” era de 25 [m²/s] y de 0.0 en “y”, la altura también se estableció a la entrada y fue de 1 [m], a la salida no se precisó ninguna variable, de esta forma se obtuvieron las descargas en “x”, “y” y las alturas finales.

Resultados de alturas

El perfil de alturas que se obtuvo para esta simulación se presenta en la figura 4.28, la cual es la representación de los datos obtenidos en tres dimensiones, en ella se pudo visualizar de una mejor manera, cómo es que se incrementó la altura encima del tope, el aumento fue de 0.09 [m].

De esta manera se pudo establecer que el código sí está funcionando de una forma correcta, ya que al hacer un cambio de régimen, también cambia lo que ocurre encima del tope.

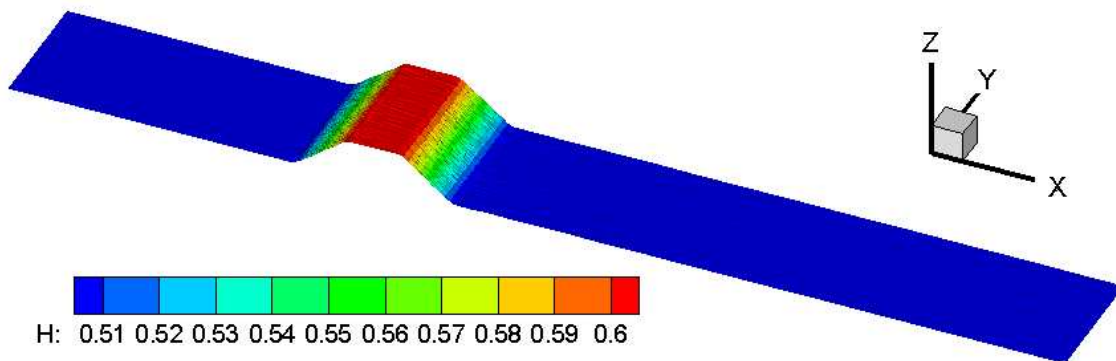


Figura 4.28 Perfil de alturas en tres dimensiones.

Resultados de velocidad

El perfil que se logró obtener para la velocidad se presenta en la figura 4.29, que es la representación que se realizó en tres dimensiones, se pudo ver que en la velocidad no hubo gran variación, a la entrada se estableció una velocidad de 25 [m/s] y en los resultados se obtuvo 24.98, sólo hubo una pequeña disminución al chocar con el tope.

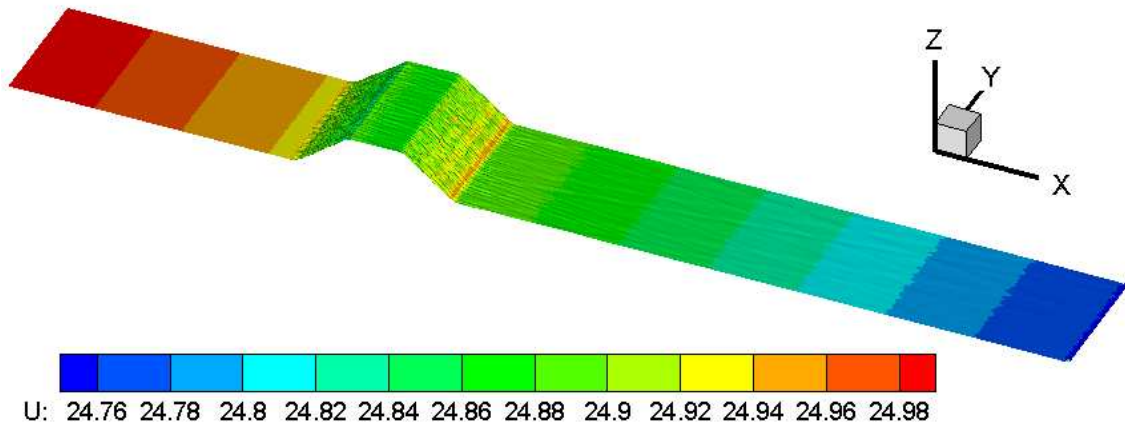


Figura 4.29 Representación del perfil de velocidades en tres dimensiones.

En la figura también se observa que como el flujo va a gran velocidad al encontrarse con el tope, el flujo sufre muchos choques, lo que hace que tengamos movimiento en la superficie libre. La velocidad al final del canal fue de 24.76 [m/s], que se comparó con la velocidad de la entrada, la velocidad no sufrió gran cambio.

4.4 Flujo subcrítico a través de una construcción

Este problema consistió en flujo subcrítico a través de una construcción. Una corriente que conduce un caudal de 1415.84 [m³/s] en nivel decreciente fluye a través de una construcción simétrica con una abertura de tipo I (Observar imagen 4.30), con una longitud de 9.14 [m] la cual reduce el ancho normal del conducto de agua de 121.92 [m] a 91.00 [m], si la profundidad normal promedio en la sección no contraída es de 6.1 [m], se cálculo la altura de remanso por la construcción. El coeficiente de rugosidad del canal es de $n=0.035$ [1].

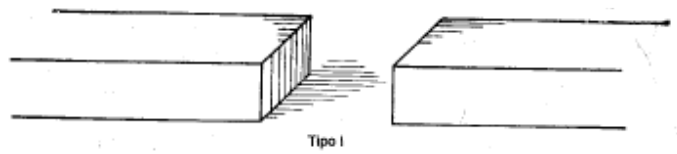


Figura 4.30 Construcción con abertura tipo I [1]

La solución de este ejercicio se presenta en [1] y el resultado es de 0.68 [m], la solución de este problema se realizó con ayuda de tablas, la ecuación de Manning y suposiciones.

4.4.1 Solución del problema planteado

Detalles numéricos

Para resolver el problema se tuvo que insertar construcciones en la configuración del flujo, la representación de las construcciones se realizaron con ayuda de las banderas entre flujo y sólido (Observar figura 4.31 a). En la figura 4.31 b) se manifestaron las medidas que se utilizaron en la simulación.

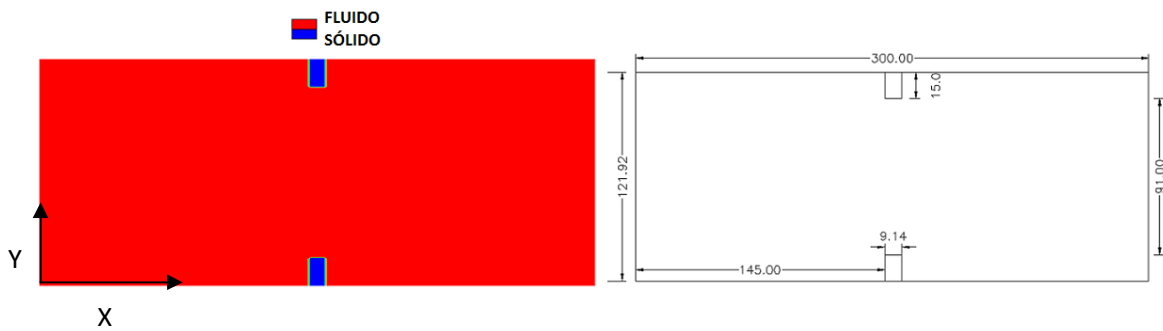


Figura 4.31 Representación de: a) los bloques utilizados en la simulación (sólidos y fluido). b) Las medidas utilizadas en la simulación.

Esta simulación se realizó en dos dimensiones (en coordenadas cartesianas), calculándose la altura (eje z), para poder tener interpretaciones en tres dimensiones. La discretización de esta configuración se ejecutó con una malla con 300 [m] de longitud y 121.92 [m] de ancho, esta malla se fraccionó en 200 x 200, formando celdas de un tamaño de 1.5 [m] x 0.61 [m] (Observar figura 4.32).

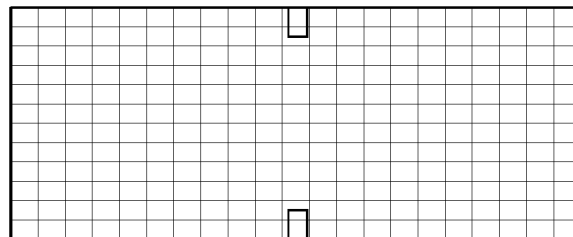


Figura 4.32 Representación de la malla utilizada

Para resolver la simulación planteó en la entrada del canal, los gasto por unidad de ancho en x , y ; en este caso fue de 11.61 [m²/s] en “ x ” y de 0.0 en “ y ”, también se estableció una altura de referencia, para que se calcule la altura en la superficie libre y sumando estas dos alturas se obtuvo la altura total. En la salida se determinó la altura total la cual fue de 6.5 [m], de esta forma lo que se calculó fueron las descargas en ambas direcciones.

Resultados de alturas

Los resultados que se obtuvieron se presentan en la figura 4.33 que es el perfil de alturas, en la imagen se puede apreciar la altura que se tiene a la entrada, también se puede visualizar que en la zona donde están las construcciones la altura se incrementa como se esperaba, y la altura a la salida es muy aproximada.

Tabla 4.5 Comparación de resultados

Datos propuestos	Resultados de nuestro código
Altura a la entrada 6.10 [m]	Altura a la entrada 6.0 [m]
Altura encima del tope 6.78 [m]	Altura encima del tope 6.60 [m]
Altura a la salida 6.50 [m]	Altura a la salida 6.40 [m]

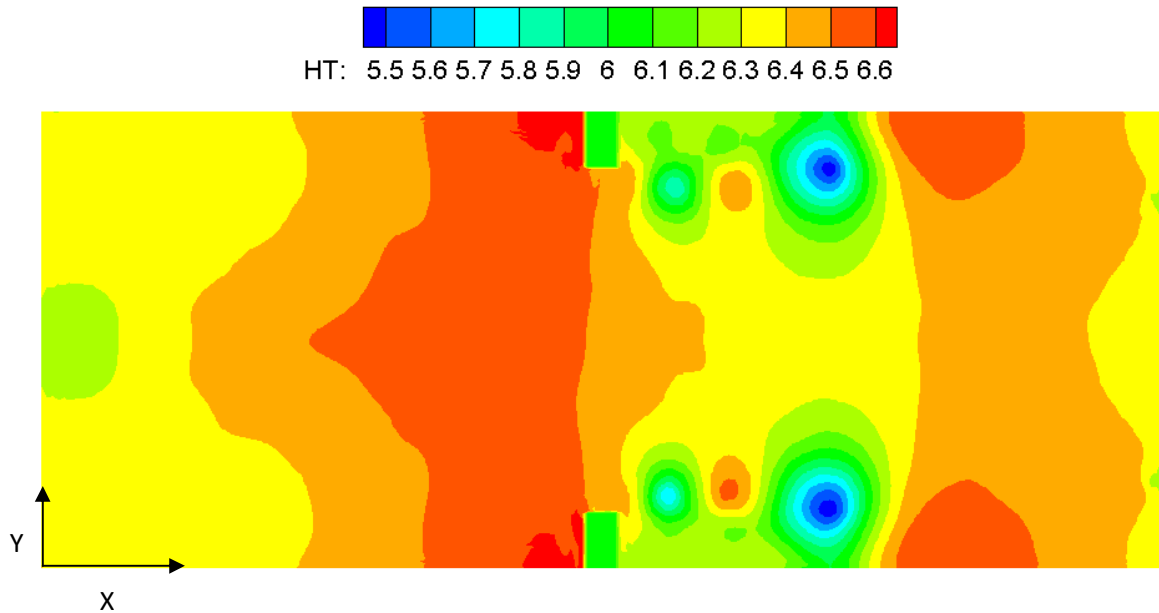


Figura 4.33 Perfil de alturas en dos dimensiones.

En la figura 4.32 también se presentan zonas donde hay alturas que disminuyen a 5.5 [m], esto es porque después de las construcciones cerca de las paredes se crean vórtices y en el centro del canal la altura es mucho mayor, esto se pudo apreciar mejor en la representación en tres dimensiones (Observar figura 4.34).

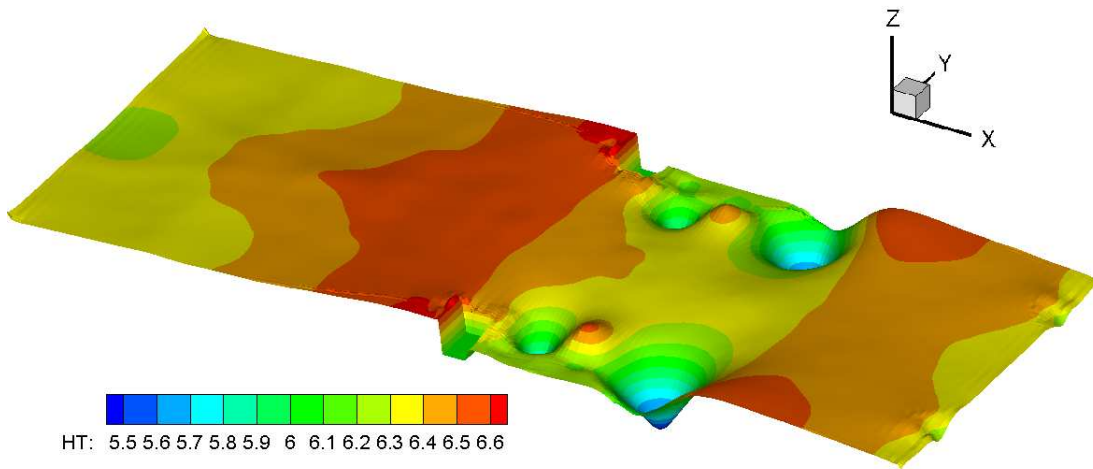


Figura 4.34 Perfil de alturas en tres dimensiones.

Los resultados referidos a las alturas fueron muy cercanos a los que se plantearon al inicio del problema; la solución del problema fue: que en las construcciones la altura se incremento 0.68 [m] y en nuestros resultados se obtuvo un incremento de altura de 0.60 [m], considerando que el primer valor también es una aproximación se concluyó que los resultados obtenidos estuvieron muy cercanos a este valor.

Resultados de velocidad

El perfil de velocidad que se obtuvo por la simulación se presenta en la figura 4.35, en esta figura se pudo observar que la velocidad a la entrada fue de 1.5 [m/s], en la zona donde están las construcciones el canal se reduce, por este motivo la velocidad aumenta en esta sección a 3 [m/s], al final del canal la velocidad disminuyó a 2.5 [m/s].

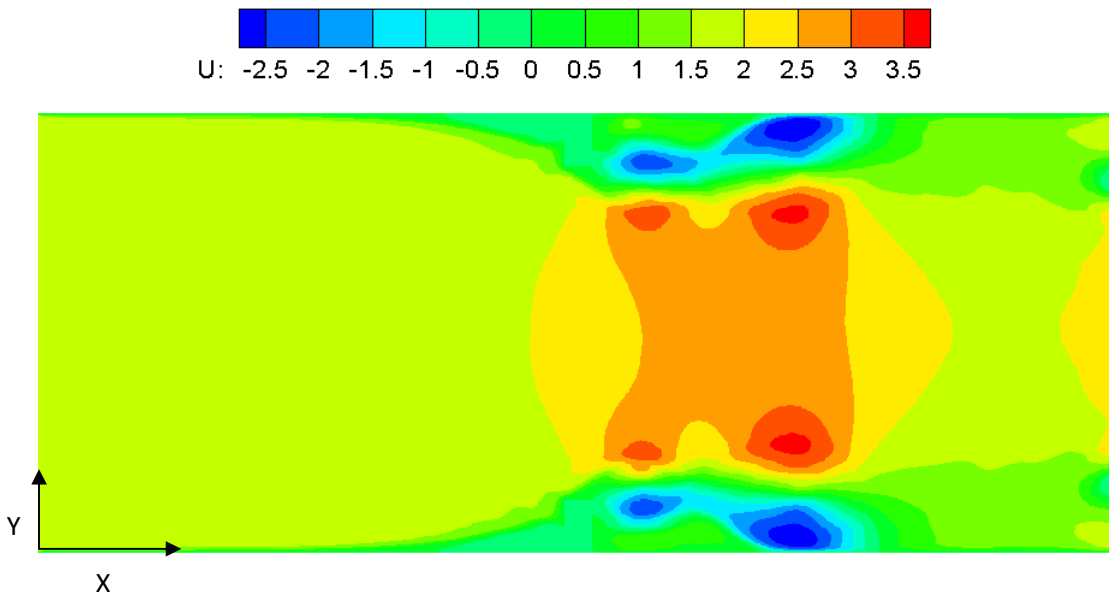


Figura 4.35 Perfil de velocidades en dos dimensiones.

En la figura 4.35 se pudo visualizar que se tuvo velocidades negativas, esto fue porque atrás de las construcciones se crearon remolinos, éstos tienen de un lado velocidades positivas y del otro lado negativas. Los vórtices se observan mejor en la figura 4.36 que es la representación del perfil de velocidades en tres dimensiones.

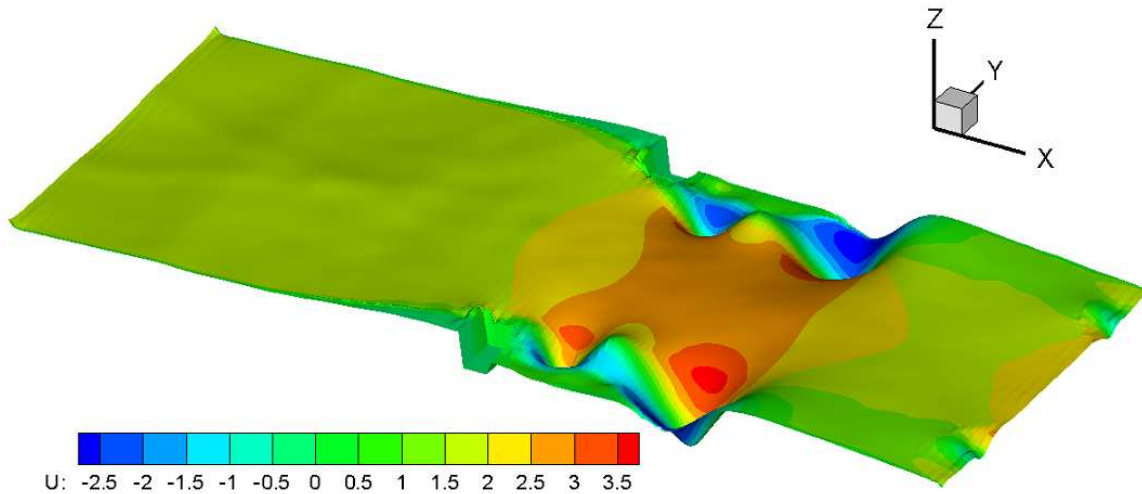


Figura 4.36 Representación en tres dimensiones del perfil de velocidades.

La creación de los remolinos se pudieron observar a partir de la velocidad, los vectores de velocidad detrás de las construcciones se visualizan en la figura 4.37. Se crearon 2 vórtices muy grandes detrás de la construcción, los cuales son los que más se ven en la figura 4.35, pero también se ven vórtices pequeños cerca de las paredes antes y después de la construcción (Observar figura 4.37).

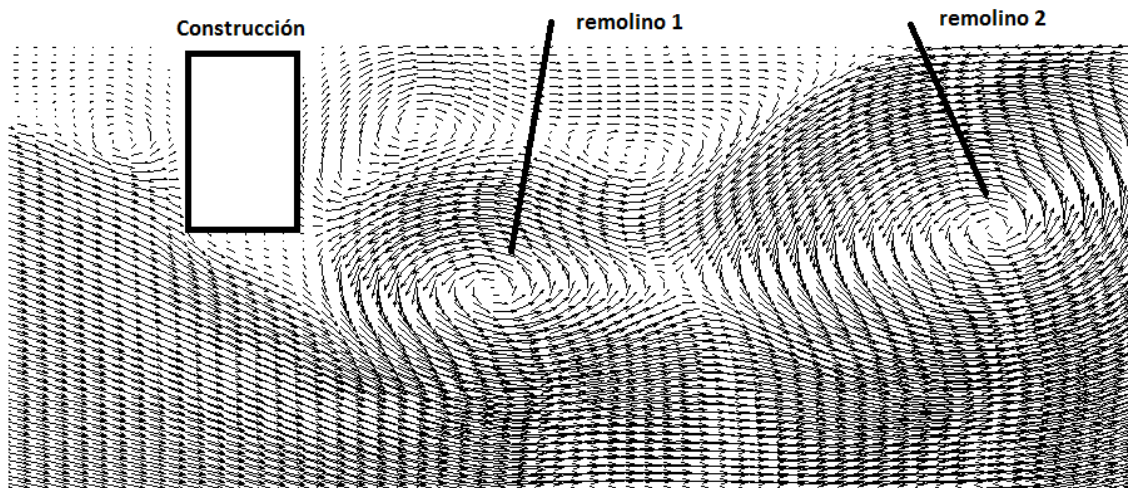


Figura 4.37 Vectores de velocidad detrás de la construcción.

A pesar de que la velocidad a la entrada del canal fue menor a la que plantea en el problema, los resultados de la velocidad se comportaron correctamente, aumentando y disminuyendo en las zonas donde se esperaba que ocurrieran estos cambios.

4.5 Flujo alrededor de una obstrucción

Una corriente fluye en un canal el cual tiene una longitud de 25 [m] y un ancho de 5 [m], el fluido va a una velocidad de 1 [m/s] y tiene una altura de 1 [m]. En dicho flujo se encuentra una columna a la mitad del canal como se puede observar en la figura 4.38. La columna es circular con un diámetro de 1.41 [m] y se construyó en el código con ayuda del bloqueo antes mencionado.

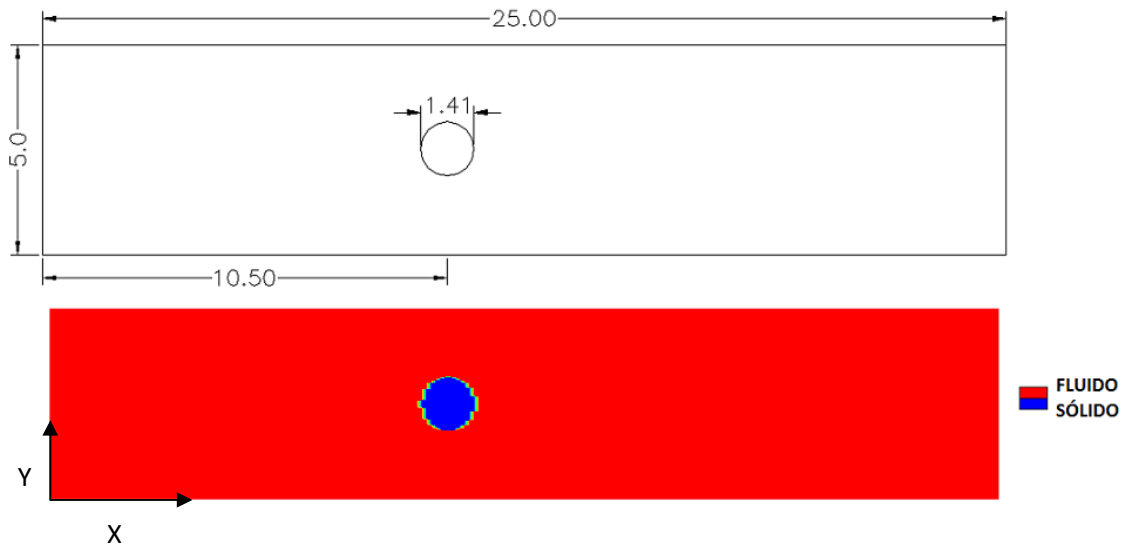


Figura 4.38 Representación de: a) Las medidas utilizadas en la simulación b) Los bloques utilizados en la simulación (sólidos y fluido).

Esta simulación se realizó en dos dimensiones (en coordenadas cartesianas), calculándose la altura (eje z), para poder tener interpretaciones en tres dimensiones. La discretización de esta configuración se ejecutó con una malla con 25 [m] de longitud y 5 [m] de ancho, esta malla se fraccionó en 200 x 200, formando celdas de un tamaño de 0.125 [m] x 0.025 [m] (observar figura 4.39).

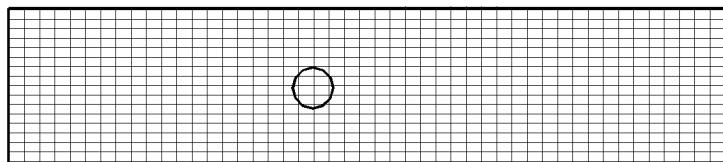


Figura 4.39 Representación de la malla utilizada en la simulación.

Para la solución del problema se planteó a la entrada del canal, los gastos por unidad de ancho en x , y ; en este caso fue de 1 [m²/s] en “ x ” y de 0.0 en “ y ”, también se estableció una altura de referencia, para que se calcule la altura en la superficie libre y sumando estas dos alturas se obtuvo la altura total. En la salida se determinó la altura total la cual fue de 1 [m], de esta forma lo que se calculó fueron las descargas en ambas direcciones.

Resultados de alturas

El perfil de alturas que se obtuvo para esta simulación se presenta en la figura 4.40. En esta figura se pudo observar que la altura a la entrada del canal fue mayor a la que se planteó en el problema, la altura de 1 [m] sólo se fijó como condición de frontera.

La altura que se obtuvo en la simulación a la entrada del canal fue de 1.35 [m], después el flujo choca con la columna, en esta zona alrededor de la columna la altura sufre una pequeña disminución, detrás de la columna se generan remolinos, en los remolinos la altura disminuye hasta 1.20 [m]. Estos remolinos se generaron de manera asimétrica, el primero va dando lugar a que se vaya formando el segundo y así sucesivamente.

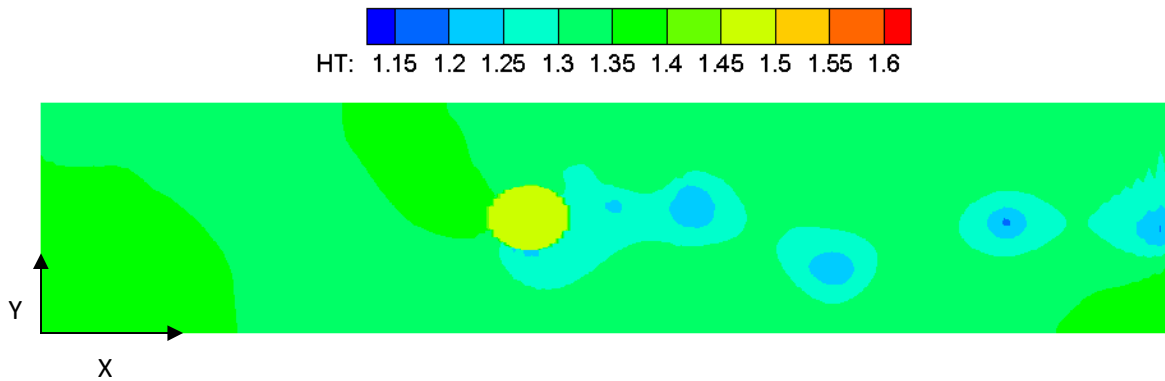


Figura 4.40 Perfil de alturas en dos dimensiones.

Con ayuda de estas alturas que se calcularon se pudo obtener una visualización en tres dimensiones, la cual sirvió de mucho porque se pueden observar mejor los vórtices que se generan detrás de la columna y también fue importante prestar atención como el flujo al chocar con la columna aumenta la altura en frente de ella, pero el flujo que pasa por un lado de la columna disminuye su altura, conservando la altura de 1.35 [m] en el resto del canal, excepto en los vórtices, aquí la altura es menor (observar figura 4.41).

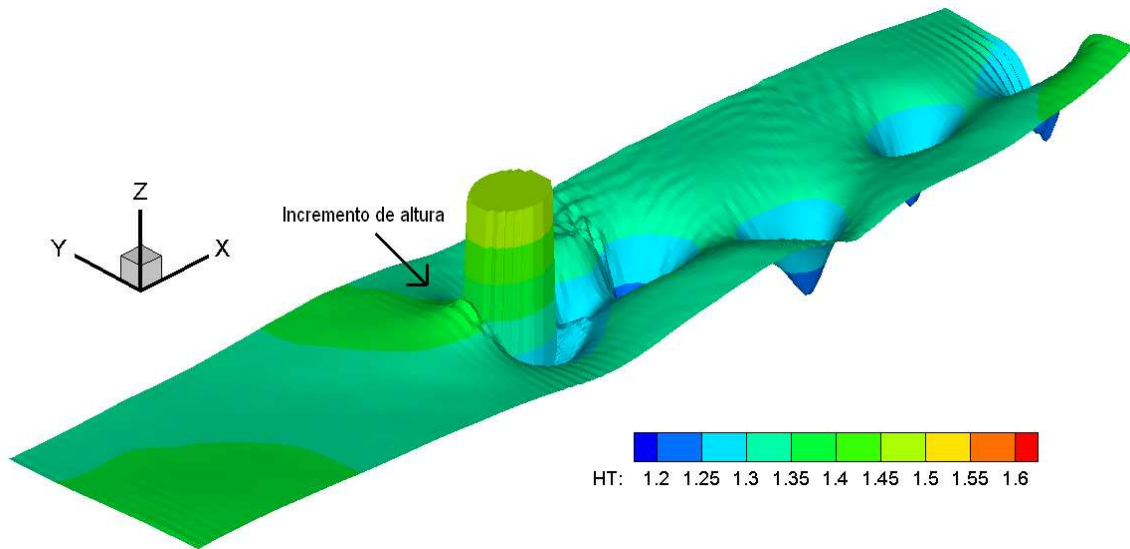


Figura 4.41 Perfil de alturas en tres dimensiones.

Los datos que se obtuvieron de las alturas no se pudieron comparar exactamente con valores de referencia, pero si se sabía que detrás de la columna, se tenían que formar vórtices, en el centro del vórtice la altura disminuye hasta 0.1 [m], entonces el código sí funcionó de una forma correcta. La importancia de ver que tan grandes pueden ser los vórtices es por la necesidad de saber que en ningún momento se tendrá problemas con el canal por la creación de estos vórtices.

Resultados de velocidades

Los resultados que se obtuvieron de la simulación se representaron en la figura 4.42, en ella se pudo observar que la velocidad de entrada fue de 0.8 [m/s], la velocidad aumenta en la zona donde el flujo es comprimido por la columna, detrás de la construcción se observa que existen velocidades positivas (color amarillo) y negativas (color azul), esto es por los remolinos que se crearon.

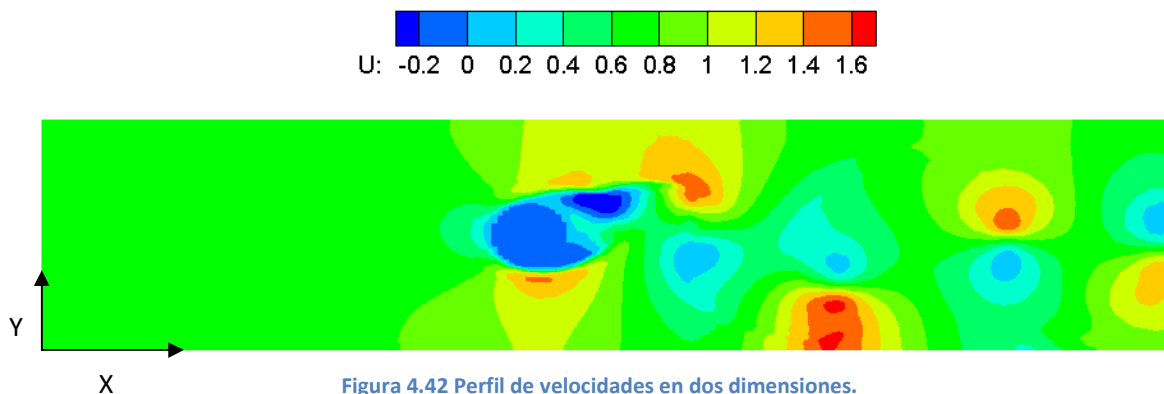


Figura 4.42 Perfil de velocidades en dos dimensiones.

Es muy importante observar que es lo que ocurre con las velocidades cerca de la columna. Se pudo visualizar en la figura 4.43 que las velocidades en frente de la columna fueron disminuyendo hasta el punto donde el flujo casi no se mueve, en la parte de arriba de la figura 4.43 se observó que las velocidades aumentaron, esto fue porque se reduce el área transversal por donde fluye el flujo; en la parte de atrás de la columna tenemos velocidades negativas por la aparición de los vórtices.

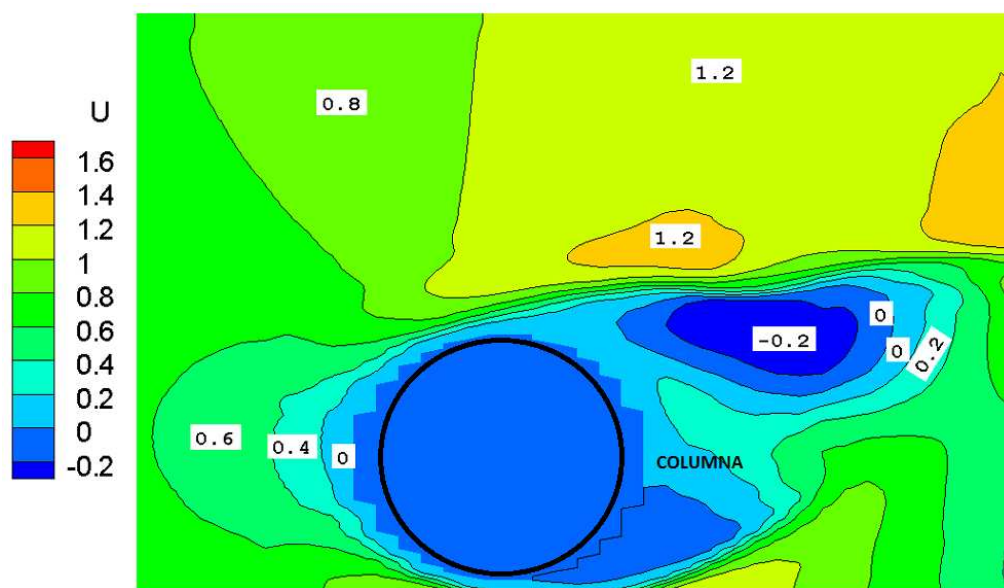


Figura 4.43 Perfil de velocidades cerca de la columna.

En la figura 4.44 se pudo observar que en la sección donde se encuentran los remolinos es donde existían las mayores y menores velocidades, lo que ocurre es que si se presta atención en un remolino, se puede apreciar que de un lado la velocidad está avanzando pero existe una velocidad pequeña, la cual hace que parte del fluido se regrese; el fluido que no se regresa es el que permite la formación del siguiente vórtice. Analizando los resultados se logró concluir que la simulación trabajó de una forma correcta.

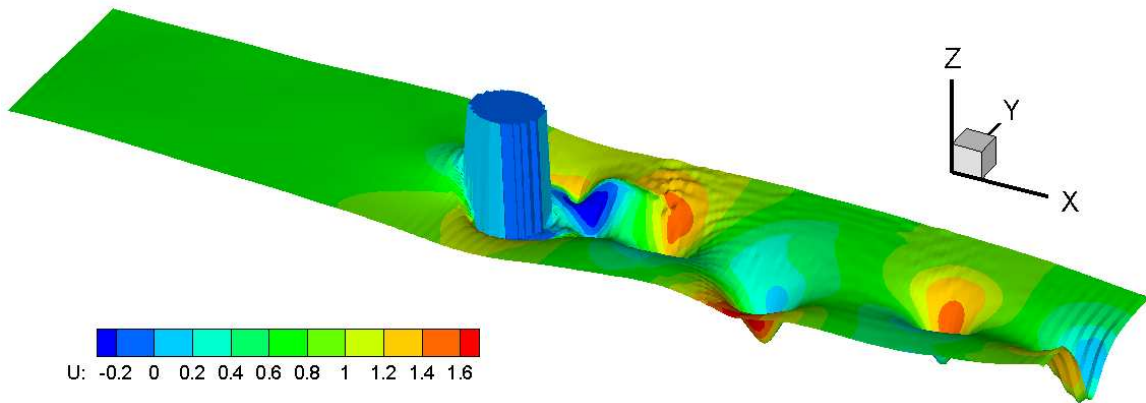


Figura 4.44 Perfil de velocidades en tres dimensiones.

4.6 Flujo alrededor de un obstáculo largo

Una corriente fluye en un canal, el cual tiene una longitud de 25 [m] y un ancho de 5 [m], el fluido va a una velocidad de 1 [m/s] y tiene una altura de 1 [m]. Dicho fluido se encuentra una construcción a la mitad del canal como se puede visualizar en la figura 4.45. La construcción tiene una longitud de 5 [m], con un ancho de 1 [m], la construcción posee un perfil circular al inicio y al final, esta construcción se representó en el código con ayuda de los bloques de sólido y fluido (observar figura 4.45).

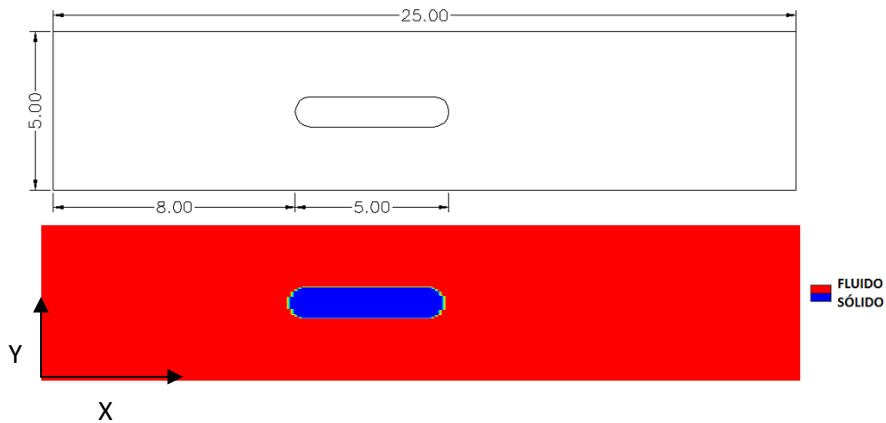


Figura 4.45 Representación de: a) Las medidas utilizadas en la simulación b) Los bloques utilizados en la simulación (sólidos y fluido).

Esta simulación se realizó en dos dimensiones (en coordenadas cartesianas), calculándose la altura (eje z), para poder tener interpretaciones en tres dimensiones. La discretización de esta configuración se ejecutó con una malla con 25 [m] de longitud y 5 [m] de ancho, esta malla se fraccionó en 200 x 200, formando celdas de un tamaño de 0.125 [m] x 0.025 [m] (observar figura 4.46).

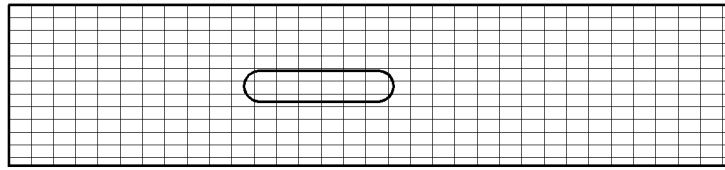


Figura 4.46 Representación de la malla utilizada.

Para la solución del problema se planteó a la entrada del canal, los gastos por unidad de ancho en x , y ; en este caso fue de $1 \text{ [m}^2/\text{s]}$ en “ x ” y de 0.0 en “ y ”, también se fijó una altura de referencia, para que se calcule la altura en la superficie libre y sumando estas dos alturas se obtuvo la altura total. En la salida se estableció la altura total que es de 1 [m] , para que se calculen las descargas en ambas direcciones.

Resultado de alturas

Los resultados de las alturas que se obtuvieron se presentan en la figura 4.47. La altura que se obtuvo en la entrada del canal fue distinta a la que se planteó en la condición de frontera a la entrada ($1 \text{ [m}^2/\text{s}]$).

De la figura 4.47 se observó que la altura a la entrada es de 1.30 [m] , la altura disminuyó 0.05 [m] desde el inicio de la construcción hasta el final y detrás de la construcción la altura regresa a 1.30 [m] , se crearon vórtices, por este motivo hay zonas donde la altura desciende hasta 1.25 [m] .

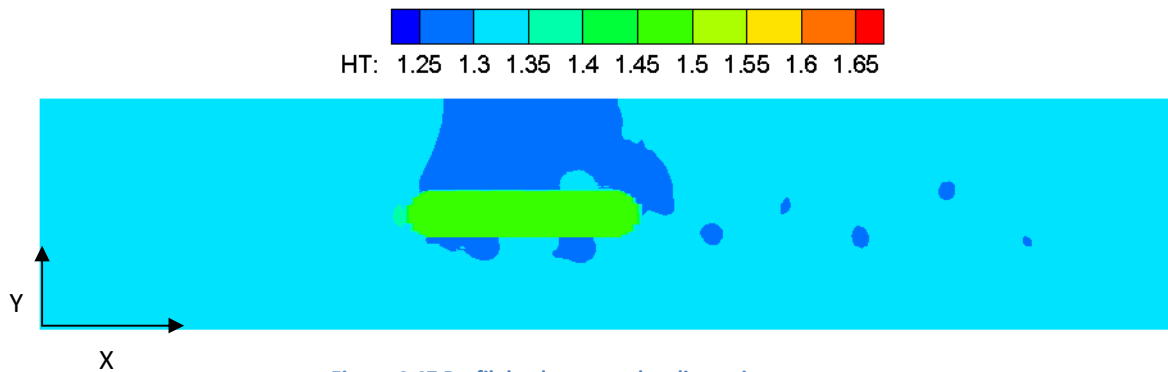


Figura 4.47 Perfil de alturas en dos dimensiones.

Los vórtices que se crean detrás de la construcción se observaron mejor en la figura 4.48, en ella se vio como los remolinos se van creando de manera asimétrica, éstos se van desvaneciendo entre más alejados están de la construcción.

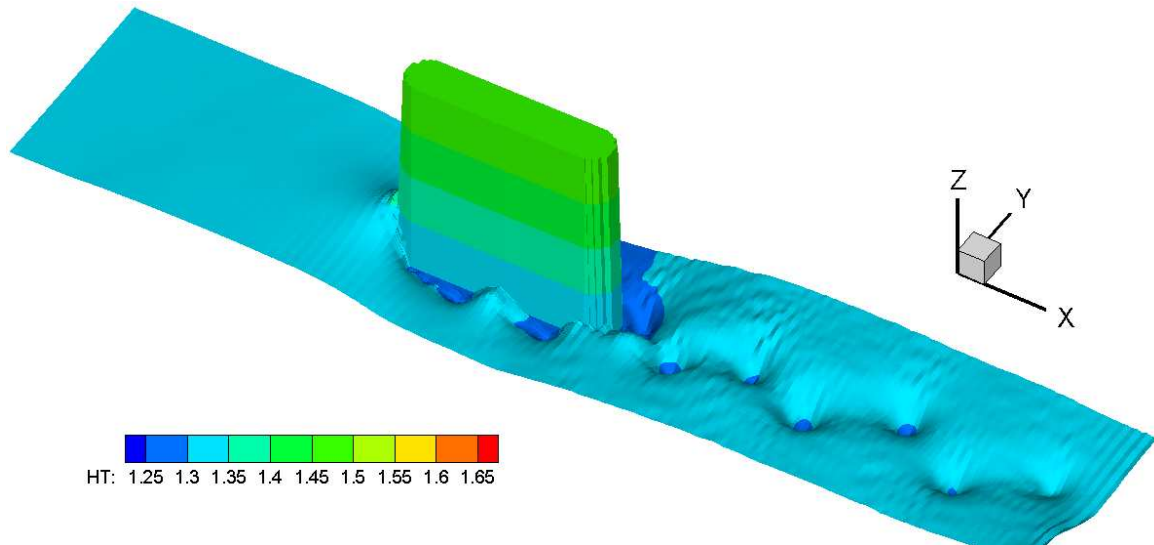
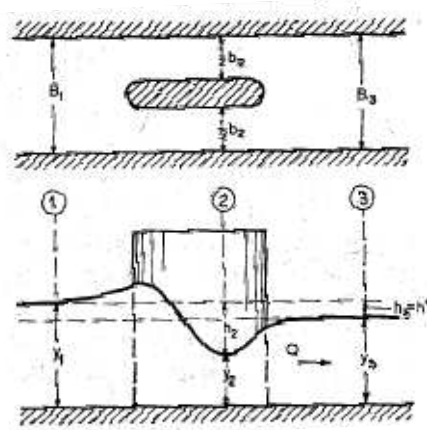


Figura 4.48 Perfil de alturas en tres dimensiones.

Los resultados de las alturas que se obtuvieron de la simulación se compararon satisfactoriamente con un autor [1], los perfiles se compararon y se muestran en la figura 4.49. En esta figura se puede observar que el flujo lleva una altura y_1 , la cual aumenta un poco cuando el flujo choca contra la construcción, en la zona de la construcción el tirante disminuye a una altura y_2 y después de la construcción el tirante aumenta a una altura y_3 , que es lo que precisamente se puede apreciar en la comparación de resultados (figura 4.49).



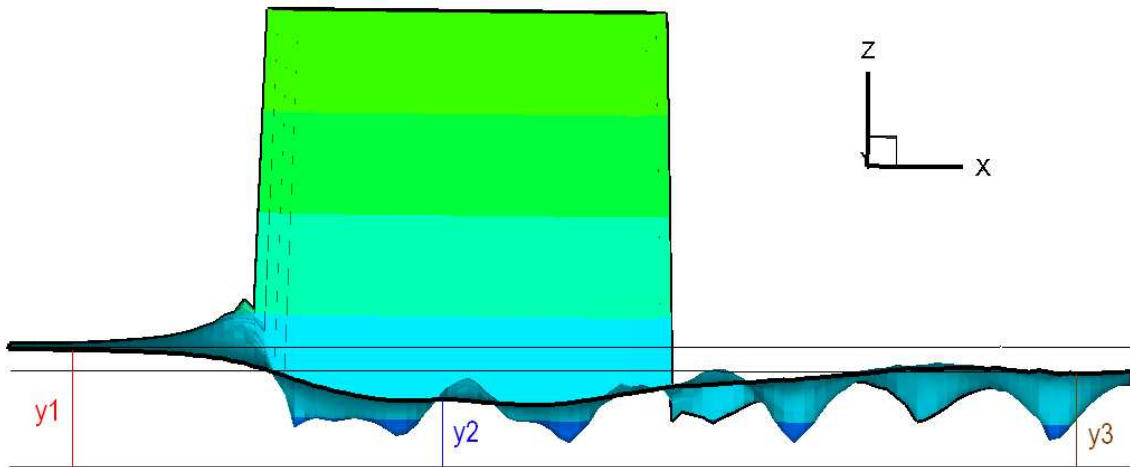


Figura 4.49 Comparación de resultados entre el autor [1] y los resultados del código.

Resultados de velocidad

Los resultados de la velocidad que se obtuvieron por la simulación se presentaron en la figura 4.50, en esta figura se pudo observar todo el perfil de velocidades en el canal, la velocidad de entrada, las velocidades positivas y negativas que se generaron por los remolinos que se forman detrás de la construcción.

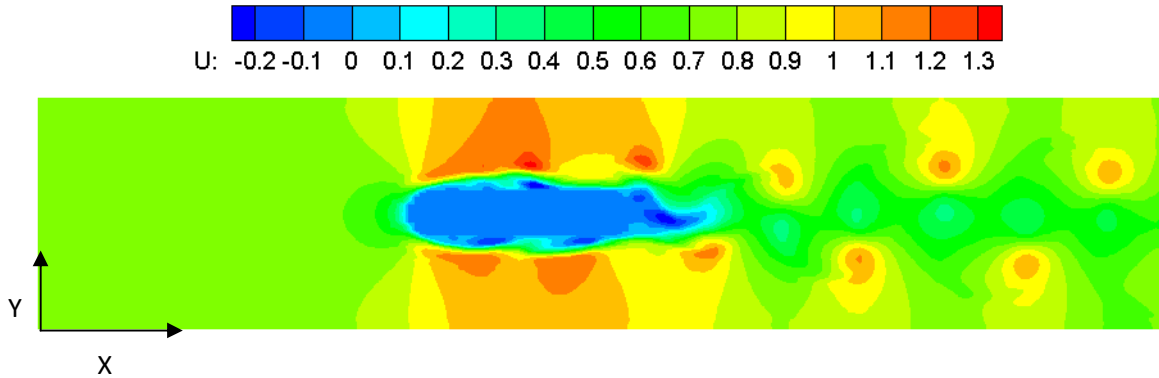


Figura 4.50 Perfil de velocidades en dos dimensiones.

En la figura 4.51 se pudo visualizar los valores que se consiguieron de la velocidad en una zona de gran importancia, la cual es donde está la construcción. Se logró observar que la velocidad va disminuyendo gradualmente en frente de la construcción hasta ser casi nula; en la zona donde se reduce el área transversal por donde fluye el flujo, la velocidad aumenta de 0.8 a 1.3 [m/s] y muy cerca de la columna se encuentran velocidades negativas por pequeñas zonas de recirculación.

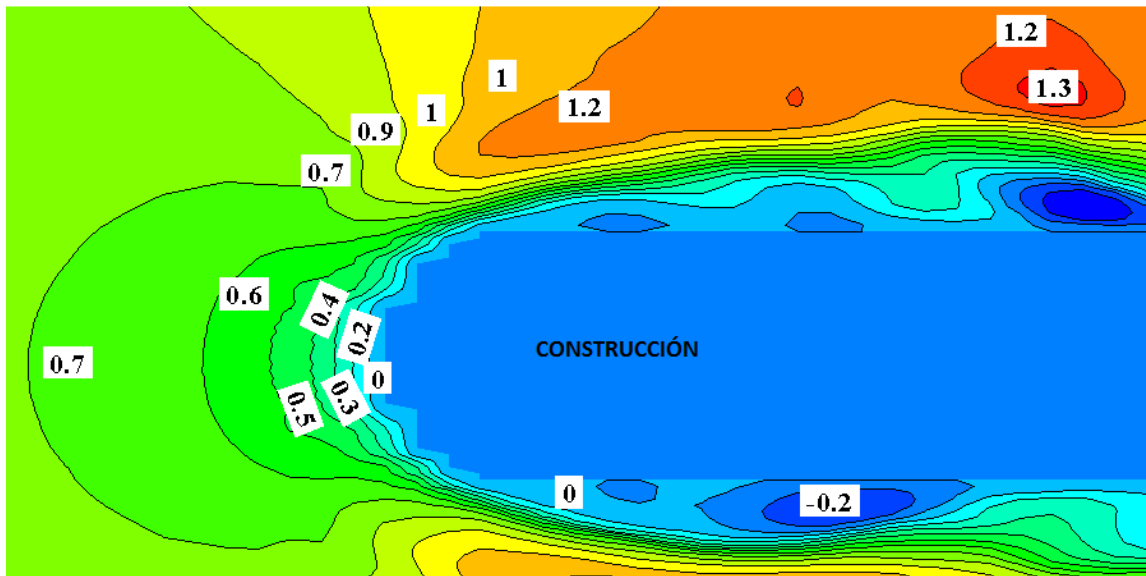


Figura 4.51 Perfil de velocidades cerca de la construcción.

En la figura 4.52 se visualizó que en la sección donde está la construcción el flujo se acelera, detrás de la construcción el flujo disminuye un poco su velocidad y como se crean vórtices, hay zonas del vórtice donde existen velocidades grandes y pequeñas.

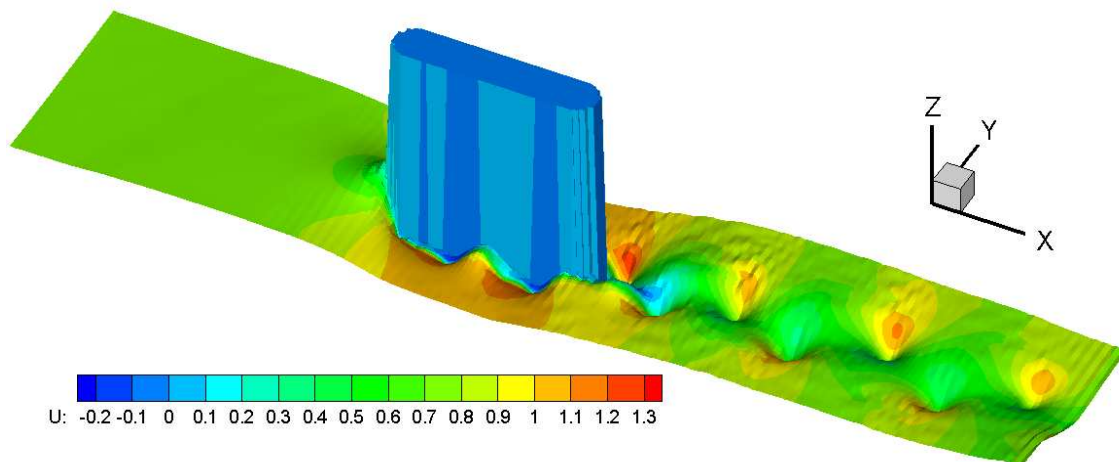


Figura 4.52 Perfil de velocidades en tres dimensiones.

La forma de validar los resultados obtenidos fue comparando los resultados obtenidos por el código con pruebas experimentales [13], en este caso se compararon los vórtices de Von Karman que se crean detrás de un obstáculo, en la figura 4.53 se presentaron las figuras que se compararon.

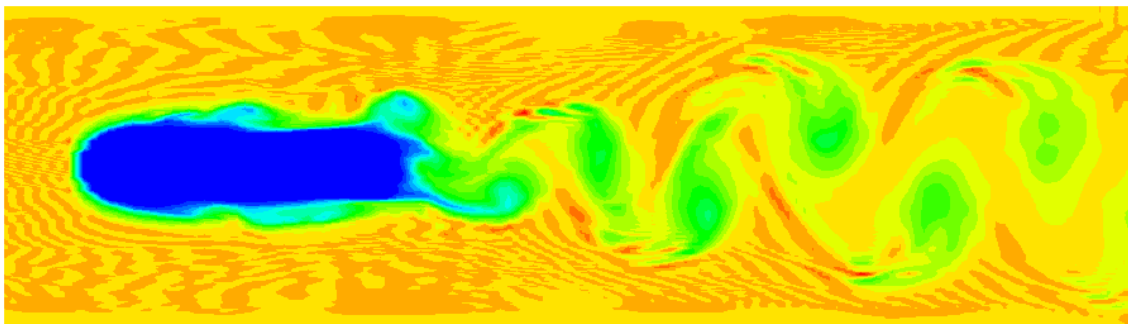
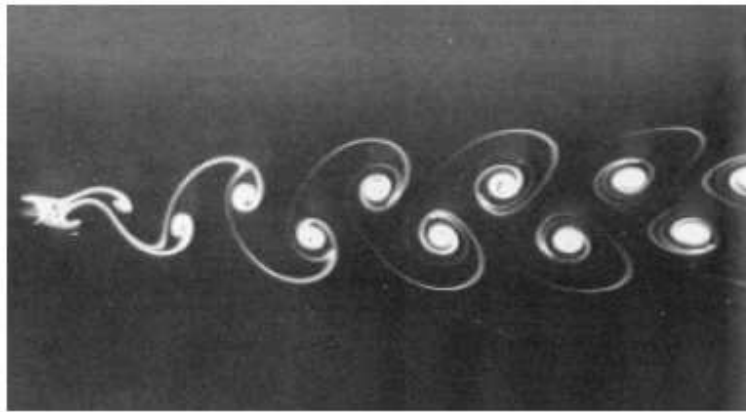


Figura 4.53 Comparación de los vórtices de Von Karman. La primera figura muestra la calle de vórtices detrás de un flujo uniforme [13] y la segunda muestra los resultados obtenidos por la simulación.

Con las comparaciones que se realizaron se logró dar validez a los datos que obtuvieron de esta simulación ya que los resultados de velocidad y alturas cumplieron satisfactoriamente lo que se esperaba.

4.7 Salto hidráulico detrás de una compuerta

En este caso se realizó una simulación con un flujo a través de una compuerta. Ésta es una estructura hidráulica de control empleada para regular una descarga, después de la compuerta se creó un salto hidráulico (observar figura 4.54).

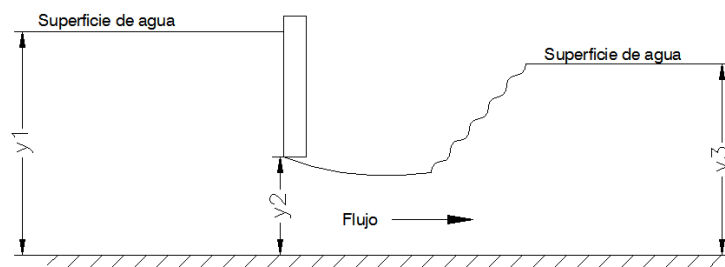


Figura 4.54 Flujo a través de una compuerta deslizante con salto hidráulico.

Para esta simulación se trabajó con un canal de 10 [m] de longitud y 1 [m] de ancho, la compuerta deslizante se encuentra ubicada a la mitad del canal, la velocidad a la entrada del canal es de 2.5 [m/s].

Esta simulación se realizó en dos dimensiones (en coordenadas cartesianas), calculándose la altura (eje z), para poder tener interpretaciones en tres dimensiones. La discretización de esta configuración se ejecutó con una malla con 10 [m] de longitud y 1 [m] de ancho, esta malla se fraccionó en 200 x 200, formando celdas de un tamaño de 0.05 [m] x 0.005 [m].

Para la solución del problema se planteó a la entrada del canal, los gastos por unidad de ancho en x, y; en este caso fue de 1 [m²/s] en “x” y de 0.0 en “y”, también se fijó una altura de referencia, para que se calcule la altura en la superficie libre y sumando estas dos alturas se obtuvo la altura total. La compuerta se modeló estableciendo la altura del flujo a un valor dado, en este caso fue 1 [m].

Resultado de alturas

En este caso el perfil de alturas que se obtuvo se muestra en la figura 4.55. En los resultados se vio que la altura a la entrada fue de 1.05 [m], la compuerta deslizante se encuentra a la mitad, en esta zona la altura desciende hasta 0.55 [m] y la altura a la salida fue de 1 [m].

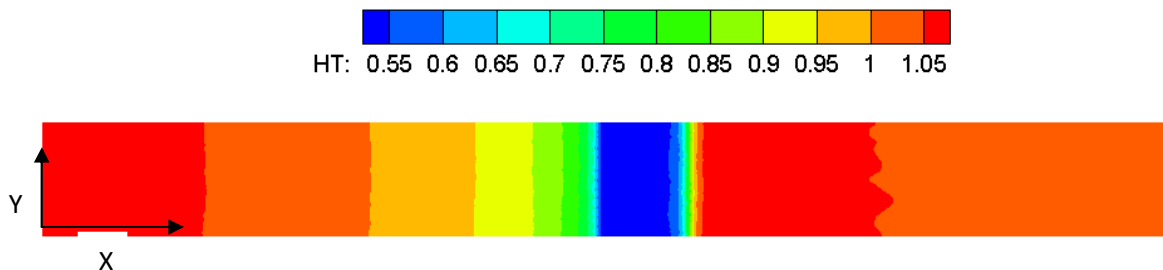


Figura 4.55 Perfil de alturas en dos dimensiones.

Con los resultados de las alturas también se logró tener una interpretación de tres dimensiones la cual se presenta en la figura 4.56. En esta figura es mucho más fácil observar como con ayuda de la compuerta bajamos la altura del flujo y esta se mantiene una distancia de 0.65 [m], después de esta zona se obtuvo un salto hidráulico, porque en una pequeña distancia en la dirección “x” se aumentó bruscamente la altura.

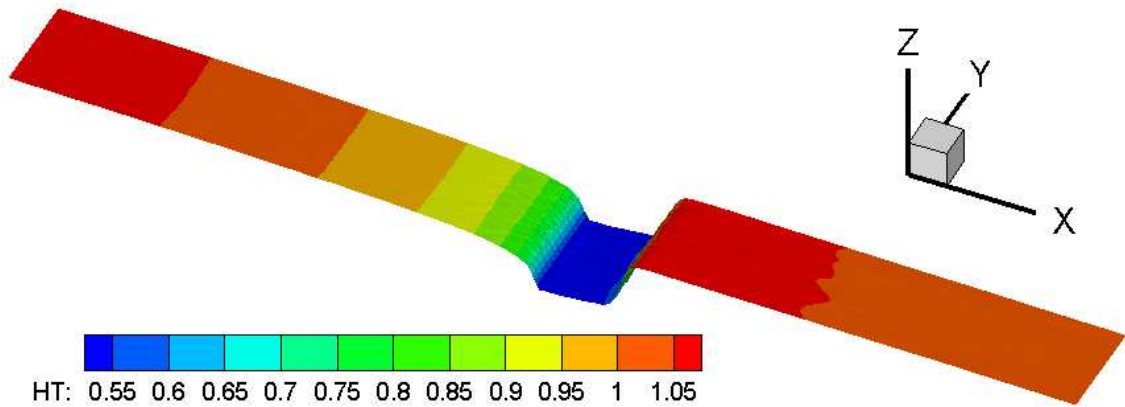


Figura 4.56 Perfil de alturas en tres dimensiones.

El objetivo de este problema fue realizar una simulación de un salto hidráulico, para conseguir el salto hidráulico se utilizó una compuerta deslizante para que el flujo disminuyera su tirante y después incrementara su tirante bruscamente, en una zona de transición.

Resultados de velocidad

Con los resultados que se obtuvieron se realizó un perfil de velocidades, el cual se presenta en la figura 4.57. La velocidad en la entrada del canal fue de 2.4 [m/s], la cual va aumentando gradualmente hasta donde se encuentra la compuerta, después de ella la velocidad aumenta hasta 4.4 [m/s] y a la salida del canal la velocidad fue de 2.2 [m/s].

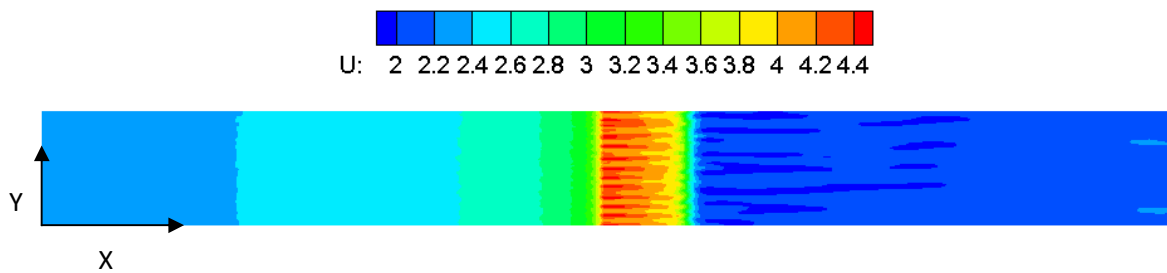


Figura 4.57 Perfil de velocidades en dos dimensiones.

En la figura 4.58 se presenta el perfil de velocidades en tres dimensiones en ella se puede observar que entre menor es la altura el flujo se acelera más, las mayores velocidades se alcanzaron después de la compuerta.

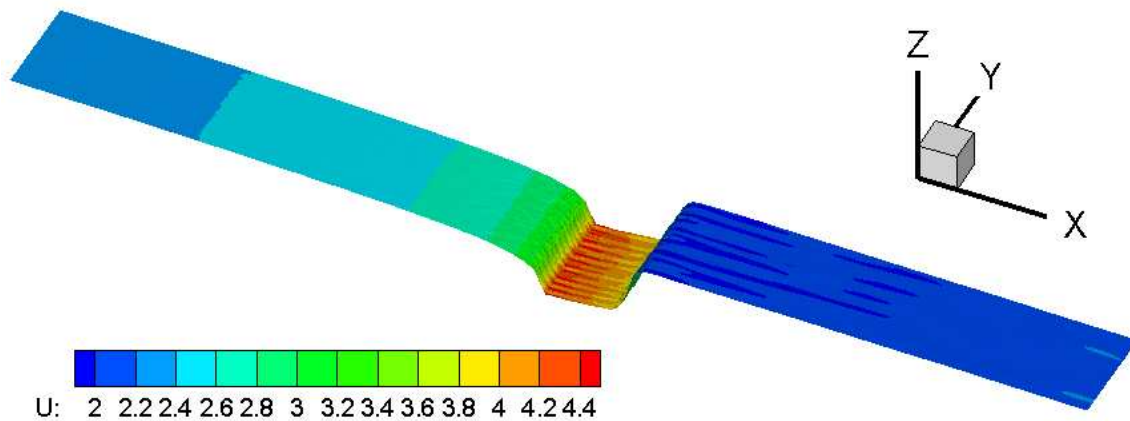


Figura 4.58 Perfil de velocidad en tres dimensiones.

Para poder realizar la simulación de un salto hidráulico tiene que ver un cambio de régimen, en este caso el flujo entra al canal con flujo subcrítico, cambia a flujo supercrítico atrás de la compuerta y así se mantiene 0.65 [m], después sufre otro cambio de régimen a subcrítico y así sale el flujo del canal.

En la figura 4.59 se presentan los resultados del número de Froude para verificar que sí está cambiando de régimen el flujo. En la figura se pudo observar que en la entrada del canal el número de froude es de 0.7, poco antes de la compuerta el flujo cambia de régimen aumentando hasta un froude de 2 y después de esta zona el flujo regresa a un froude de 0.7.

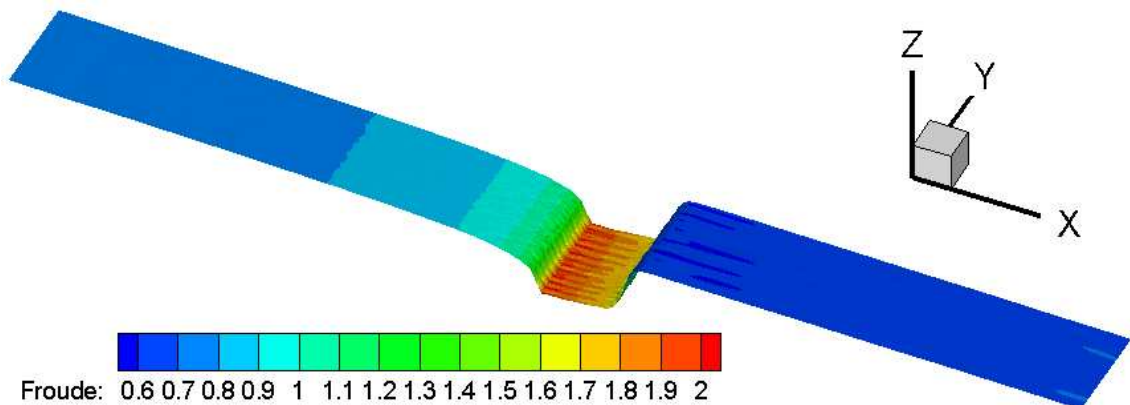


Figura 4.59 Visualización del número de Froude.

Para comparar los resultados obtenidos de la simulación se presenta la figura 4.60, en ella se puede observar cómo se comportan las tres variables, las cuales son: altura, velocidad y el número de froude.

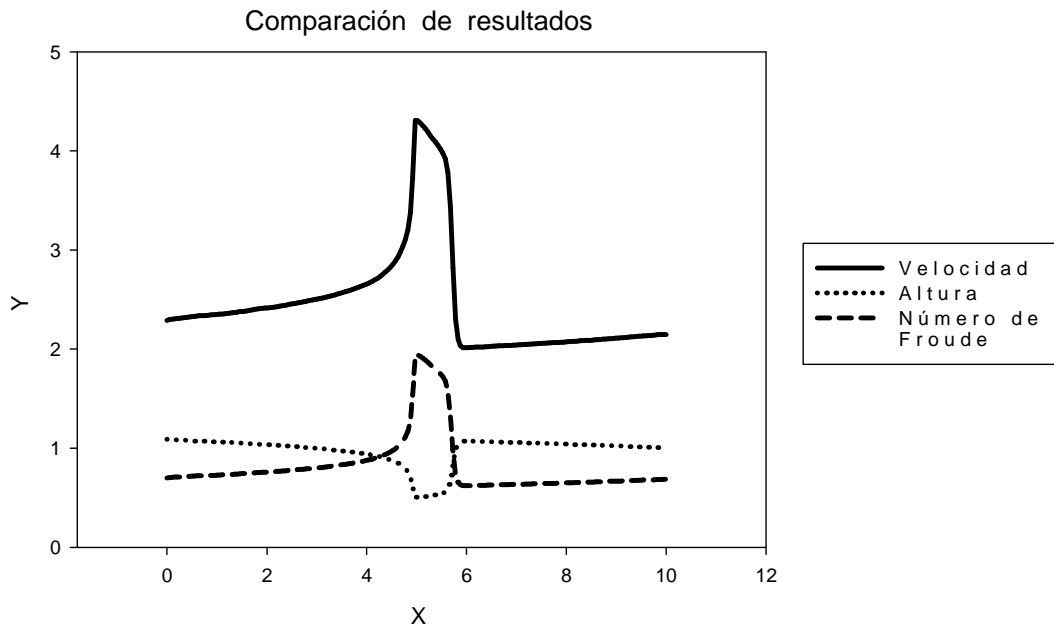


Figura 4.60 Gráfica de comparación de los resultados obtenidos por el código.

4.8 Flujo en un río

Por último se realizó una simulación de una sección de un río, esta sección abarca a los ríos: Mezcalapa, Samaria y Carrizal, que se encuentran en el límite entre los estados de Chiapas y Tabasco.

La simulación que se realizó consistió en que el río Mezcalapa se bifurca en Samaria y Carrizal, esta simulación comprendió una zona de 6.8 [km] en la dirección "x", y 6.1 [km] en la dirección "y", la forma del río se realizó con polinomios de orden superior y con ayuda de los bloques sólido y fluido (Observar figura 4.61).

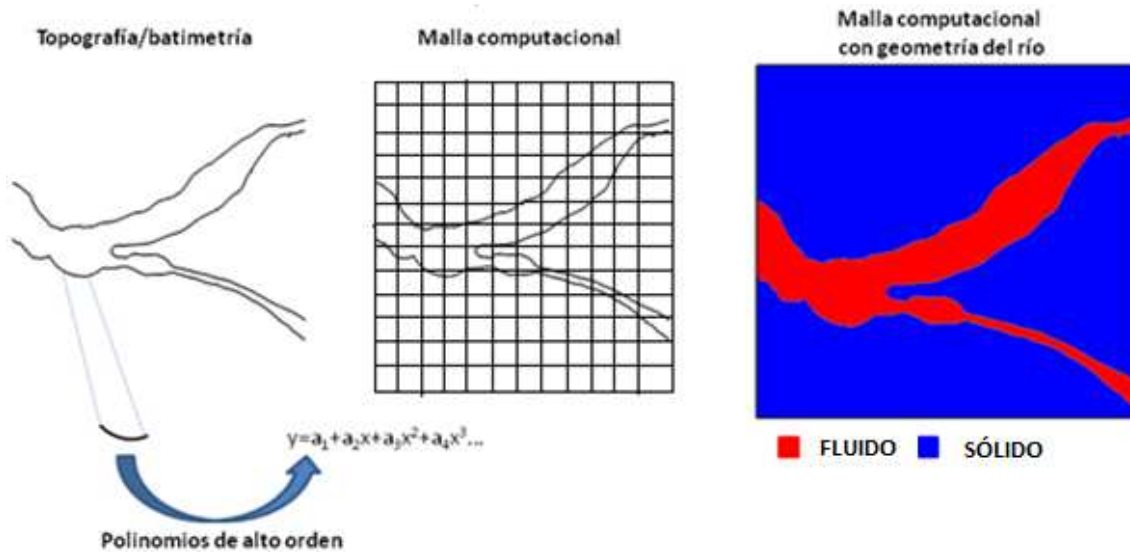


Figura 4.61 Generación de la batimetría del río en el código.

Esta simulación se realizó en dos dimensiones (en coordenadas cartesianas), calculándose la altura (eje z), para poder tener interpretaciones en tres dimensiones. La discretización de esta configuración se ejecutó con una malla computacional de 6.8 [km] de longitud y 6.1 [km] de ancho, esta malla se fraccionó en 500 x 750, formando celdas de un tamaño de 13.6 [m] x 8.13 [m].

Para la solución del problema se planteó a la entrada del canal, el gasto en este caso fue de 3300 [m³/s], la velocidad fue de 0.9496 [m/s], también se fijó una altura de referencia, para que se calcule la altura en la superficie libre y sumando estas dos alturas se obtuvo la altura total. En la salida se estableció la altura total de 6 [m], para que se calculen la descarga en ambas direcciones.

Resultado de alturas

Los resultados obtenidos de las alturas se presentan en la figura 4.62 a), estos resultados fueron multiplicados por una constante para poder visualizar mejor las alturas, también se pudo observar que la altura se mantiene en todo el dominio y se percibe el movimiento que se crea en la superficie libre. En la figura 4.62 b) se presentan los vectores de velocidad en zonas de recirculación.

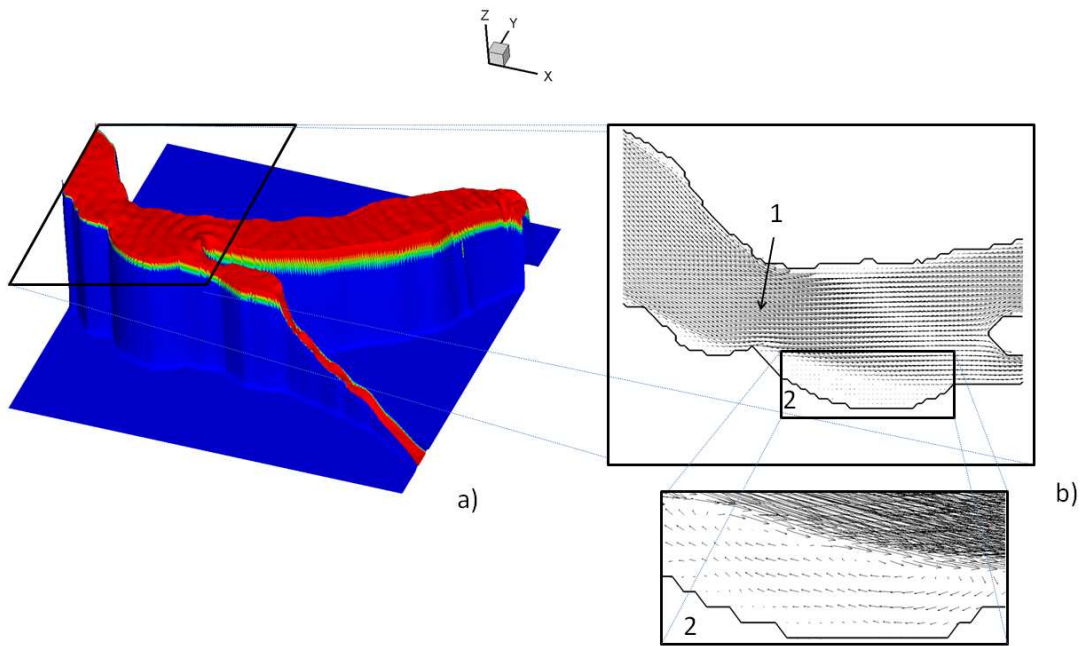


Figura 4.62 a) Representación de las alturas en tres dimensiones b) Zonas de recirculación.

Resultado de velocidades

Los resultados que se obtuvieron de las velocidades se presentan en la figura 4.63.

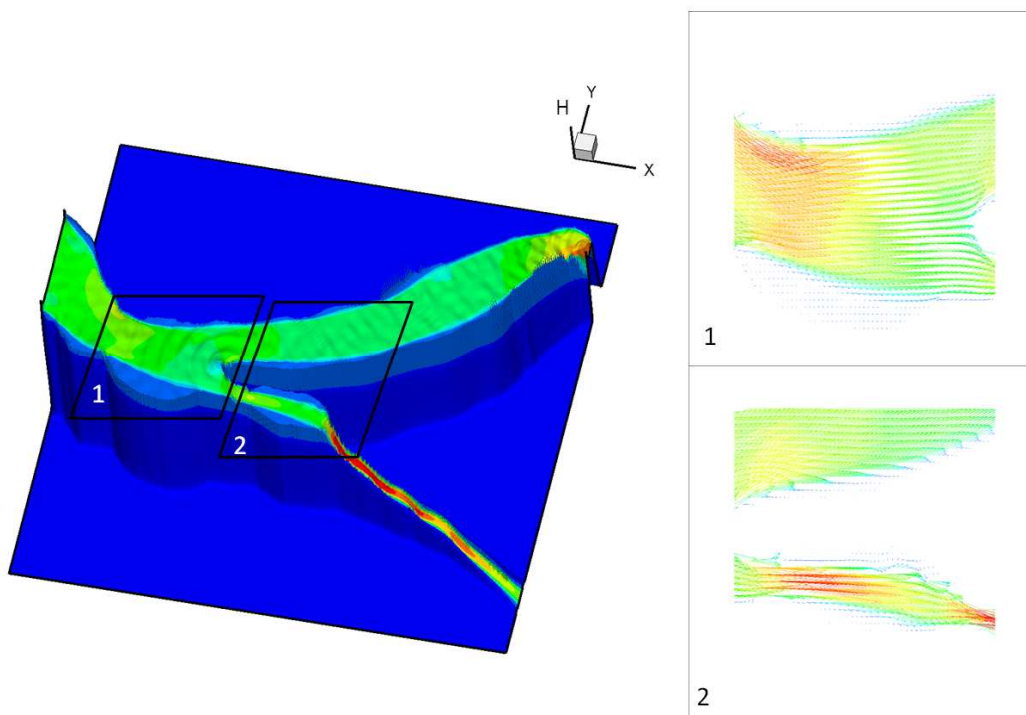


Figura 4.63 Perfil de velocidades en tres dimensiones.

La velocidad aproximada de la entrada del río es de 3.0 [m/s], sin embargo alcanza una velocidad de 6.0 [m/s] en donde se reduce el área transversal en la sección del río Carrizal, que es el área de estudio más importante porque este río es el que atraviesa la ciudad de Villahermosa Tabasco.

En la figura anterior se observan dos recuadros donde se presentan los vectores de velocidad, la zona 1 es una ampliación para observar que es lo que ocurre con la velocidad antes de la bifurcación y en la zona 2 se visualiza lo que ocurre con la velocidad después de la bifurcación.

Comparación de resultados

Los resultados de nuestro modelo bidimensional se compararon con un modelo tridimensional [11], los resultados mostraron gran similitud (Observar figura 4.64).

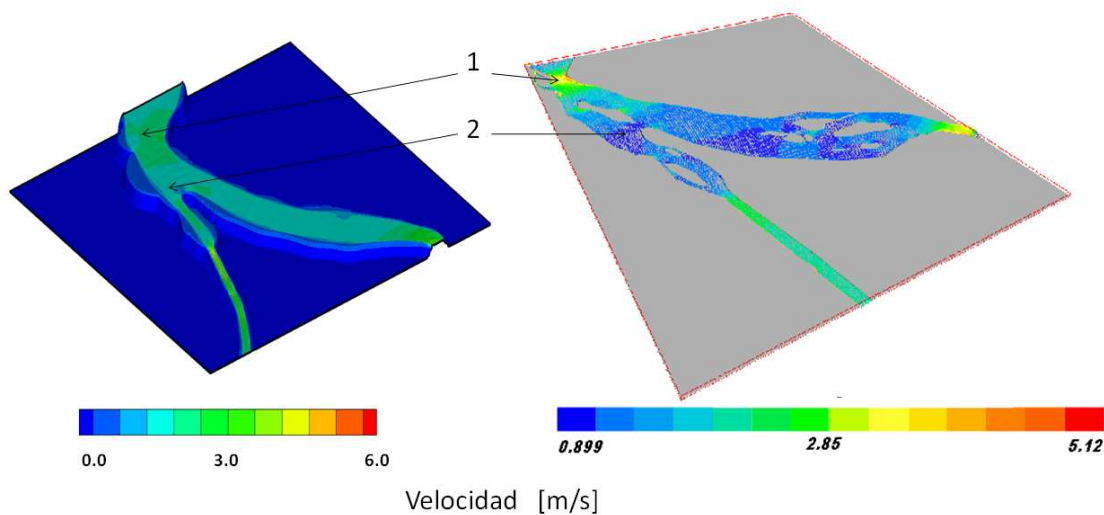


Figura 4.64 Comparación de resultados entre un modelo bidimensional con un tridimensional.

La pequeña variación entre las velocidades se asumió que fue porque en la simulación no se consideró ninguna isla antes de la bifurcación y en el modelo tridimensional sí se consideraron. Con estos resultados se puede concluir que el código realizó la simulación correctamente, si se quisiera aproximar más a los valores experimentales tendríamos que realizar la simulación con las islas y realizar la malla computacional más fina.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se trabajó en el desarrollo de un código con el cual se pudiera realizar simulaciones numéricas de flujos poco profundos, el código se desarrolló en Fortran realizando varias subrutinas las cuales resolvían las ecuaciones de aguas someras mediante un método de diferencias finitas, presentadas en el capítulo 3, el código utilizó el método de turbulencia $k-\epsilon$ promediado en la vertical.

Una vez terminado el código se realizaron varias simulaciones con el objetivo de validar el programa, su validación se realizó mediante la comparación de resultados. En el capítulo 4 se desarrollaron distintos tipos de ejercicios, los cuales fueron analizados detenidamente y comparados con soluciones de libros o datos experimentales para saber si los resultados que se obtuvieron eran confiables.

Los ejercicios que se simularon fueron los siguientes

1. Reducción del área transversal en un canal sin cambio de régimen y con cambio de régimen [1].
2. Flujo con un tope en el fondo con flujo subcrítico y flujo supercrítico [7].
3. Flujo subcrítico a través de una construcción tipo I [1].
4. Flujo subcrítico a través de una columna.
5. Flujo subcrítico a través de una construcción con un perfil circular al inicio y al final de ella.
6. Flujo a través de una compuerta deslizante para obtener un salto hidráulico.
7. La bifurcación del río Mezcalapa en Samaria y Carrizal.

Los resultados que se obtuvieron en todas las simulaciones fueron de alturas y velocidades (en ambas direcciones), en las simulaciones que había cambio de régimen también se obtenía el número de froude para corroborar el cambio de régimen. Para poder visualizar los resultados se utilizó el programa Tecplot 360, con ayuda de éste se pudo crear figuras con las cuales fue más fácil hacer la comparación de resultados.

Todas las simulaciones fueron comparadas con distintos autores o con datos experimentales y en todas se obtuvieron resultados satisfactorios como se demostró en el capítulo 4. La comparación más importante fue la bifurcación del río Mezcalapa ya que nuestro modelo bidimensional se comparó con un modelo tridimensional simulado en Phoenix.

Al haber validado el código se puede concluir que contamos con un programa con el cual se pueden simular problemas de Mecánica de Fluidos relacionados con flujos fuertemente bidimensionales sin la necesidad de pagar una licencia de algún programa industrial como Phoenics, Fluent, Flow 3D, etc. con el código se ahorra en la inversión de la compra de un programa industrial.

En estos momentos es muy importante desarrollar los proyectos en un menor tiempo y a un menor costo, con el código se podría realizar proyectos apoyándose con los modelos a escala para validar los resultados y en dado caso que el modelo a escala ya exista se compararían los resultados y cualquier modificación en el proyecto se podría realizar en el código, éste lo resolvería en poco tiempo, de esta forma se ahorra en tiempo y en costos.

El programa se convierte en una herramienta muy útil para flujos complejos en canales abiertos, secciones de ríos o en presas y lo único complicado es realizar la batimetría y la topografía de lo que se vaya a simular, esto se realiza con ayuda de los bloques de sólido y fluido para restringir por donde puede fluir el flujo.

Trabajo a futuro

Con este trabajo se logró contribuir al estudio de las ecuaciones de aguas someras, para flujos subcrítico y supercrítico, sin embargo para generar un mayor conocimiento en flujos poco profundos se podrían realizar algunos trabajos a futuro.

Los trabajos que propongo como trabajos a futuro pueden ser los siguientes:

- a. Simulación completa de un río o un canal colocando estructuras para el control de flujo, por ejemplo, presas, compuertas de descarga y vertedores.
- b. Paralelizar el código con el objetivo de poder realizar una simulación al mismo tiempo pero en distintos procesadores, de esta forma el tiempo de cálculo se reduce significativamente.
- c. Incorporar al código subrutinas con las cuales se puedan realizar simulaciones de ríos o canales con transporte de energía, con el fin de poder visualizar la disipación de temperaturas en un flujo.
- d. Incorporar al código subrutinas con las cuales se puedan realizar simulaciones de ríos o canales con transporte sedimento.

Bibliografía

- [1] Ven Te Chow. *“Hidráulica de canales abiertos”*, McGraw Hill, 1994 pp. 47-49, 466-494.
- [2] Yunus A. Cengel y John M. Cimbala. *“Mecánica de fluidos fundamentos y aplicaciones”*, McGraw Hill, 2006
- [3] R. W. Fox y A. T. McDonald. *“Introducción a la mecánica de fluidos”*, 2ª edición, 1983, pp. 609-680.
- [4] Dongfang Liang, Binliang Lin y Roger A. Falconer. *“Simulation of rapidly varying flow using an efficient TVD–MacCormack scheme”*, International Journal for numerical methods in fluids, *Fluids* 2007; 53: 811–826.
- [5] Moisés Berezowsky Verduzco. *“Análisis de flujos turbulentos a superficie libre (modelos de Turbulencia)”*, series del Instituto de Ingeniería 564, abril 1994.
- [6] Marqués Fe Jaime Miguel. *“Aplicación del método de volúmenes finitos a la resolución numérica de las ecuaciones de aguas someras con incorporación de los esfuerzos debidos a la turbulencia”*, Coruña 2005.
- [7] Frank M. White. *“Fluid Mechanics”*, McGraw Hill, 5ta. Edición, 2003 pp. 601-731.
- [8] Villegas Gardea Humberto. *“Hidráulica de canales”*, Fundación ICA, 2da. Edición, México 1995.
- [9] Humbert Chanson. *“The Hydraulics of open channel: an introduction”*, 2ª edición, 2004.
- [10] Weiming Wu. *“Computational river dynamics”*, Taylor & Francis, 2007.
- [11] Sánchez J.A, Vicente W., Salinas-Vázquez M., Osnaya J. y Gracia J. (2009), *“Numerical simulation of flow in the bifurcation of the Mezcalapa river”* , International Workshop on Environmental Hydraulics, Valencia, España.
- [12] De la Lama M. *“Estudio numérico de cuerpos complejos inmersos en un flujo compresible”* Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, 2009.
- [13] Pierre Y. Julien. *“River Mechanics”*, Cambridge, 2002
- [14] Van Dyke Milton. *“An álbum of fluid motion”*, Department of mechanical engineering Stanford California, 1998.