



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Diseño de Banco de Filtros para Codificador de la Voz

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero en Telecomunicaciones

P R E S E N T A

Miguel Ángel Meza Pérez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Bohumil Pšenička



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017

Índice general

Índice de figuras	III
1. Introducción	1
2. Procesamiento Digital de Señales	3
2.1. Señales y Sistemas	3
2.1.1. Señales	3
2.1.2. Sistemas de Tiempo Discreto	4
2.1.2.1. Causalidad	4
2.1.2.2. Sistemas sin Memoria	5
2.1.2.3. Estabilidad	5
2.1.2.4. Sistema Lineal	6
2.1.2.5. Sistema Invariante en el Tiempo	6
2.1.3. Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo	7
2.2. Digital Signal Processor	7
2.3. Señales Digitales: Conversión Análogo - Digital	8
2.3.1. Muestreo Periódico Ideal	9
2.3.2. Retención	13
2.3.3. Cuantización	14
2.3.4. Codificación	15
2.4. Transformada Discreta de Fourier	16
2.4.1. Definición de Fasor y sus propiedades	16
2.4.2. Obtención de las ecuaciones de análisis y de síntesis	17
2.5. Transformada Z	19
2.5.1. Región de Convergencia de Z	19
2.6. Muestreo de Filtros	20
2.6.1. Transformada Z Bilineal	21
3. Procesamiento Digital de Tasa Múltiple	23
3.1. Submuestreo por un Factor M	23
3.2. Sobremuestreo por un Factor L	30
3.3. Conversión de la Tasa de Muestreo por un Factor Racional	33
3.4. Sistema Variante con el Tiempo	34

4. Filtros Digitales	35
4.1. Filtros Digitales con la Respuesta Finita al Impulso Unitario	35
4.1.1. Forma Directa	36
4.1.2. Diseño del Filtro FIR	37
4.2. Filtros Digitales con la Respuesta Infinita al Impulso Unitario	39
4.2.1. Estructura en Cascada y Paralela de un Filtro Digital	42
5. Filtros con Capacitores Conmutados	44
5.1. Capacitor Conmutado	44
5.2. Transformación de Circuitos	45
5.3. Estructura Fleischer - Laker	49
6. Banco de Filtros Digitales	54
6.1. Bancos de Análisis y de Síntesis	54
6.2. Codificación en sub-bandas de la señal de voz	55
6.3. Reconstrucción Perfecta en un Banco QMF	57
6.3.1. Aliasing	57
6.3.2. Distorsiones en Amplitud y Fase	59
6.3.3. Reconstrucción Perfecta	60
6.3.4. Elección de los filtros	60
6.3.5. Banco QMF con filtros FIR	61
6.3.6. Codificador de Voz de Cuatro Canales	68
7. Conclusiones	75
Bibliografía	77

Índice de figuras

2.1. Representación de un Sistema en Diagrama a Bloques	4
2.2. Sistema Básico de Procesamiento de Señales. Imagen obtenida [3]	7
2.3. Conversión de una señal analógica a la señal discreta en el tiempo y en la amplitud	9
2.4. Espectro de la señal $x(t)$	10
2.5. Espectro de la Señal Muestreada cuando el Teorema de Nyquist se cumple	12
2.6. Filtro paso bajas ideal	12
2.7. Recuperación de la señal despues del proceso de muestreo	13
2.8. Muestreo utilizando un retenedor de orden cero. Imagen obtenida de [10]	13
2.9. Pulso rectangular y espectro del pulso	14
2.10. Cuantizador Escalar	15
2.11. Región de Convergencia de s y z	20
3.1. Representación del Bloque de Submuestreo o Down-Sampler	24
3.2. Señal $x(t)$ y $x[n]$	24
3.3. Secuencia $x[n]$ y Secuencia Decimada o Submuestreada $x_D[n]$	25
3.4. Espectro de la señal $x[n]$ (arriba); Espectro de la señal con muestras descartadas igualadas a cero (en medio); Señal decimada (abajo). Imagen obtenida de [1]	27
3.5. Espectro de la señal $x[n]$ (arriba); Espectro de la señal decimada por $M = 2$ (abajo); Señal decimada por $M = 4$ (derecha)	28
3.6. Señal $x(t)$ (arriba); Señal $x[n]$ (enmedio); Espectro de la señal (abajo) .	29
3.7. Señal $x[n]$ decimada por un factor $M = 2$ con muestras impares igualadas a cero (arriba); Espectro de la señal (abajo)	29
3.8. Señal $x[n]$ decimada por un factor $M = 2$ (arriba); Espectro de la señal (abajo)	30
3.9. Representación del Bloque de Sobremuestreo o Up-Sampler	30
3.10. Señal $x(t)$ y $x[n]$ muestreada a 125[Hz]	31
3.11. Secuencia $x[n]$ y Secuencia Interpolada o Sobremuestreada $x_U[n]$	32
3.12. Espectro de la señal $x[n]$ (arriba); Señal interpolada (abajo). Imagen obtenida de [1]	33
3.13. Conexión en Cascada del Bloque de Submuestreo y Sobremuestreo	33
4.1. Estructura Transversal Directa del Filtro FIR	36
4.2. Primera Forma Canónica del Filtro FIR	37

4.3. Plantilla del Filtro Paso Bajas Normalizado	38
4.4. Plantilla del Filtro Paso Altas Normalizado	38
4.5. Plantilla del Filtro Paso Banda Normalizado	38
4.6. Plantilla del Filtro Supresor de Banda Normalizado	39
4.7. Estructura del Filtro IIR no Canónica o Estructura Directa I	40
4.8. Estructura del Filtro Digital IIR Segunda Forma Canónica o Estructura Directa II	41
4.9. Estructura del Filtro Digital IIR Forma Canónica	42
4.10. Estructura del Filtro Digital en Cascada y Paralela	43
5.1. Capacitor conmutado (Izquierda) y Resistor (Derecha)	44
5.2. Bipuerto (Izquierdo) y Bipuerto con Capacitor Conmutado (Derecho)	45
5.3. Sin interruptores (Izquierdo), Tiempo Par (Centro) y Tiempo Impar (Derecho)	46
5.4. Circuito Integrador)	47
5.5. Circuito Integrador: con Capacitores Conmutados (Izquierda); con Nodos (Derecha)	48
5.6. Estructura Fleisher-Laker con Capacitores Conmutados	51
5.7. Respuesta en Frecuencia del Filtro Paso Bajas Digital Butterworth orden 2	52
5.8. Respuesta en Frecuencia del Filtro Paso-Bajas	53
6.1. Bancos de Filtros de Análisis y Síntesis de M Canales	55
6.2. División de una señal en sub-bandas	56
6.3. Codificador de Voz de dos Canales (Quadrature Mirror Filter) con etapa de Procesamiento	56
6.4. Codificador de Voz de dos Canales (Quadrature Mirror Filter)	57
6.5. Respuesta en Frecuencia de los Filtros del Banco QMF	62
6.6. Simulación del Codificador de dos Canales QMF en Simulink	62
6.7. Señales Sub-banda Decimadas por un factor 2	63
6.8. Señales Sub-banda Interpoladas por un factor 2	64
6.9. Señal original $x[n]$ y reconstruida $\hat{x}[n]$	64
6.10. Distorsión $d[n]$ en el Banco QMF de reconstrucción perfecta	66
6.11. Simulación del Codificador de dos Canales sin Filtros con condición de reconstrucción perfecta	67
6.12. Reconstrucción de la señal	68
6.13. Distorsión $D[n]$	68
6.14. Banco de Análisis del Codificador de Cuatro Canales	70
6.15. Banco de Síntesis del Codificador de Cuatro Canales	71
6.16. Codificador de Cuatro Canales	71
6.17. Señal original $x[n]$ y reconstruida $\hat{x}[n]$	72
6.18. Distorsión $d[n]$ en el Banco de Cuatro Canales con reconstrucción perfecta	73
6.19. Banco de Síntesis del Codificador de Cuatro Canales sin filtros de reconstrucción perfecta	73
6.20. Señal original $x[n]$ y reconstruida $\hat{x}[n]$ en sistema sin filtros de reconstrucción perfecta	74
6.21. Distorsión $D[n]$	74

Introducción

El procesamiento digital de señales ha sido parte fundamental en el desarrollo de las comunicaciones electrónicas. Toda señal digital necesita ser procesada al enviarse al canal de transmisión o al recibirse de este. El avance de los sistemas digitales fue esencial en el desarrollo de computadoras y, poco después, para la interconexión de ellas y formar las redes de datos. Muchos de los sistemas analógicos ya han migrado a los digitales. Como es el caso de la televisión analógica a la digital, enlaces punto a punto vía microondas, medios de almacenamiento magnéticos a digitales, entre muchos otros. En otros casos hay sistemas que conviven junto con sistemas digitales, tal como la PSTN (Public Switched Telephony Network) con Internet. Aunque la tendencia es migrar a la telefonía VoIP, pues ofrece mayor calidad y convive con otros servicios de la red de conmutación de paquetes.

En la telefonía analógica, al descolgar la bocina del teléfono escuchábamos el tono de marcado y podíamos digitar el número y realizar la llamada. Cuando la comunicación era dentro de la misma central telefónica únicamente se cerraba un circuito para conectar al transmisor y receptor. Sin embargo, si ambos teléfonos se encontraban en distintas centrales era necesario utilizar un *enlace troncal* entre dichas centrales. Este enlace E1/T1 es digital, de aquí una de las necesidades de pasar la voz a digital. El ancho de banda de la voz es de 4kHz, si se muestrea a 8kHz (Teorema de Muestreo) codificado con 8 bits, obtenemos un bit rate de 64kbps, por ejemplo, para un E1 hay 32 canales (31 canales de voz y 1 de señalización) la capacidad del canal sería de 2.048Mbps. Este es solo un ejemplo del uso cotidiano de los sistemas digitales.

De aquí la importancia del estudio de sistemas digitales y procesamiento digital de señales. En esta tesis vamos a trabajar con una de las señales más importantes en telecomunicaciones: la voz. El objetivo de la tesis es diseñar y simular el banco de filtros de cuatro canales para el codificador de la voz de tal manera que se obtenga una reconstrucción perfecta de la señal de salida.

El diseño propuesto consiste en implementar el sistema de cuatro canales usando bancos Quadrature Mirror Filter (banco de dos canales). Para ello, primero se analizará el filtro de dos canales (QMF) para después implementarlos en cascada.

A lo largo del análisis del banco de dos canales, se verá que al pasar la señal por el sistema completo será afectada por los filtros de análisis y síntesis y por las operaciones de decimación e interpolación. Por ello los filtros de síntesis tendrán que ser diseñados de tal manera que cancelen el aliasing y los errores de amplitud y fase.

En este trabajo se pretende dar al lector las herramientas necesarias para comprender y analizar las señales discretas. Las matemáticas necesarias para el análisis de señales incluyen elementos como la Transformada Z y la Transformada Discreta de Fourier. Así, esta Tesis está dividida en cinco partes: el estudio de los conceptos básicos de procesamiento digital de señales; análisis de sistemas multitasas; filtros digitales; filtros con capacitores conmutados; y finalmente, bancos de filtros digitales. En el último capítulo de la tesis se analizan los bancos de filtros, las condiciones necesarias para eliminar los errores, ya mencionados, para obtener una reconstrucción perfecta. Finalizando con el diseño y análisis de un codificador de dos canales para después simular el codificador de cuatro canales. Además, en ambos casos se simula la reconstrucción perfecta y la reconstrucción sin eliminar los errores.

Al final del desarrollo del filtro de dos y cuatro canales se observará que se logra la reconstrucción de las señales de manera satisfactoria. Los filtros obtenidos pueden ser implementados en un DSP o FPGA, para fines de estudio se usó Matlab y Simulink como herramientas de diseño y simulación. El estudio de los capacitores conmutados se anexa como una opción para el diseño de filtros digitales en sustitución de filtros activos, pues estos reducen el consumo de energía y podrían ser integrados en un chip. Con el fin de simular la respuesta en frecuencia de los filtros se usó Maple y la librería PraCan.

Procesamiento Digital de Señales

Este capítulo tiene como objetivo repasar los conceptos básicos del procesamiento digital de señales: se inicia con la definición de señal y sistema lineal invariante en el tiempo, se continua con el estudio del proceso de conversión de una señal analógica a una señal discreta en el tiempo, ya que este tipo de señales son procesadas por el DSP.

La otra parte que se repasará son las herramientas matemáticas necesarias para el análisis de los sistemas y señales, tal como la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto y la Transformada Z. Este capítulo finaliza con el muestreo de filtros, enfatizando el Método de Aproximación de Tustin o Transformada Bilineal.

2.1. Señales y Sistemas

2.1.1. Señales

Una señal es un fenómeno que varía y que puede ser medido. En la mayoría de los casos la forma de medir a la señal es mediante una cantidad física. Por ejemplo medir variaciones eléctricas, las medidas de voltaje pueden ser modeladas por funciones, estas al depender del tiempo son llamadas señales. Una señal eléctrica puede ser producida, por ejemplo, por un micrófono (señal de voz), por un transductor (sensor de temperatura, presión, etc.), puede ser generada por un oscilador o incluso es ruido.

Así como las señales pueden conocerse a priori, en el caso de una señal generada por un oscilador, también pueden ser desconocidas, tal como la señal de voz. De esta manera las señales son clasificadas en dos tipos: determinísticas y aleatorias. Una señal determinística es conocida en cualquier instante de tiempo y puede ser modelada por una función matemática, por el contrario, una señal aleatoria no puede ser expresada de la misma manera. Una señal aleatoria es caracterizada por probabilidades y estadísticas.

Además de esta clasificación, son divididas en señales de potencia y de energía:

- Señales de Potencia:
 - Señales Aleatorias
 - Señales Periódicas
- Señales de Energía:
 - Señales Determinísticas no Periódicas

2.1.2. Sistemas de Tiempo Discreto

Un sistema se define matemáticamente como una transformación u operador que mapea una secuencia de entrada, denotada por $x[n]$, a una secuencia de salida $y[n]$ [10]. Desde luego, esta definición es válida para sistemas continuos cuya notación sería $x(t)$ y $y(t)$, para la señal de entrada y salida respectivamente. La transformación puede ser expresada como:

$$y[n] = T\{x[n]\} \quad (2.1)$$

$$x[n] \rightarrow y[n] \quad (2.2)$$

Las expresiones (2.1) y (2.2) son equivalentes, en diagrama de bloques puede ser representado por la Figura 2.1. Un sistema es caracterizado por su *Función de Transferencia*, en el dominio de la frecuencia. Un sistema puede estar formado por subsistemas conectados en: casacada, cuando las funciones de transferencia se multiplican; en paralelo, cuando las funciones se suman; y pueden tener realimentación.

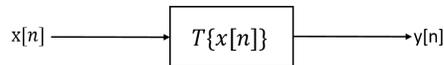


Figura 2.1: Representación de un Sistema en Diagrama a Bloques

Los sistemas tienen algunas propiedades y restricciones de interés: la linealidad, invariancia en el tiempo, causalidad, estabilidad y sistema sin memoria. A continuación se describe cada una de estas propiedades, enfatizando las dos primeras pues son las que dan origen al concepto de *sistema lineal invariante en el tiempo*.

2.1.2.1. Causalidad

Se dice que un sistema es causal si su salida no depende de sus valores en el futuro y solo depende de los valores de la entrada en el momento presente y/o pasado, también se llama no anticipativo ya que la salida del sistema no puede anticipar valores futuros de

la entrada [1][8]. Matemáticamente, un sistema es causal si para cada valor n en $n = n_0$ de la secuencia de salida $y[n]$, depende solo de la secuencia de entrada $x[n]$ valuada en $n \leq n_0$ [10]. Esto es, la señal de salida $y[n]$ depende solo de la entrada $x[n]$ y de las señales retrasadas $x[n-1], \dots, x[n-k]$ y no depende de las señales $x[n+1], \dots, x[n+k]$ [4].

O bien, se dice que el sistema es causal si $h[n] = 0 \forall n < 0$ y por lo tanto:

$$y[n] = \sum_{-\infty}^n x[k]h[n-k] = \sum_0^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (2.3)$$

2.1.2.2. Sistemas sin Memoria

Se dice que un sistema no tiene memoria si la salida $y[n]$ para $n = k$ depende solo de la entrada $x[n]$ valuada para $n = k$. Un sistema con memoria es aquel que almacena energía y que de alguna manera, la salida no solo depende del valor de entrada para el cual se da la salida. Por ejemplo, un sistema sin memoria es el voltaje $v_R(t)$ en un resistor R al hacerle pasar una corriente $i(t)$ (2.4), mientras que un sistema con memoria puede ser un circuito que involucre capacitores, inductores o ambos (2.5)(2.6).

$$v_R(t) = Ri(t) \quad (2.4)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

$$v_L(t) = LD_t[i(t)] \quad (2.6)$$

Un sistema causal es un sistema sin memoria.

2.1.2.3. Estabilidad

En palabras sencillas, un sistema es estable si para una entrada acotada tiene una salida acotada que no diverge. Una definición formal [10][8], establece que un sistema con entrada - salida acotadas (*Bounded Input-Output, BIBO*) si y sólo si cada secuencia acotada $x[n]$ produce una secuencia de salida acotada $y[n]$.

Se dice que la entrada es acotada si existe un B_x tal que: $|x[n]| \leq B_x < \infty \forall n$, de manera similar la salida esta acotada si existe B_y tal que: $|y[n]| \leq B_y < \infty \forall n$.

Considerando que la señal $x[n]$ esta limitada en amplitud, esto es: $|x[n]| < M \forall n$. Si aplicamos esta entrada al sistema, la respuesta puede ser obtenida por la suma de convolución (sistema LTI) [10] de la función de poderación y la entrada:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \quad (2.7)$$

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \quad (2.8)$$

Como la entrada $x[n]$ es limitada en magnitud, implica que $|x[n-k]| < M \quad \forall \quad n, k$. Entonces:

$$|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \quad \forall \quad n \quad (2.9)$$

De la ecuación (2.9) podemos decir que si la respuesta al pulso unitario es absolutamente sumable (2.10), entonces $y[n]$ está limitada en magnitud y por lo tanto el sistema es estable, esta es una condición suficiente, y además necesaria, que garantiza la estabilidad de un sistema LTI discreto [10].

En sistemas continuos, el sistema es estable si es integrable [10][4]. De manera equivalente, en sistemas discretos:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (2.10)$$

2.1.2.4. Sistema Lineal

Un sistema es lineal si cumple el principio de superposición. Para ello debe cumplir la propiedad de aditividad y la de escalamiento u homogeneidad. Consideremos que se tiene un sistema $T\{\}$ y que cuando las respuestas del sistema son $y_1[n]$, $y_2[n]$ las entradas son $x_1[n]$, $x_2[n]$, respectivamente, y que a_i es una constante, entonces para la propiedad de aditividad tenemos (2.11) y para el escalamiento (2.12).

$$y_1[n] + y_2[n] = T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} \quad (2.11)$$

$$ay[n] = aT\{x[n]\} = T\{ax[n]\} \quad (2.12)$$

Combinando ambas propiedades obtenemos el principio de superposición que se resume en la ecuación (2.13):

$$y[n] = T\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1T\{x_1[n]\} + a_2T\{x_2[n]\} \quad (2.13)$$

2.1.2.5. Sistema Invariante en el Tiempo

Un sistema es invariante en el tiempo si su comportamiento es fijo en el tiempo, en otras palabras, si $y[n]$ es la salida de un sistema cuando la entrada es $x[n]$ entonces

$y[n - k]$, para k entero, es la salida cuando se aplica $x[n - k]$. Con frecuencia esta propiedad se puede referir a un sistema invariante al corrimiento o desplazamiento, es decir, si la entrada esta desplazada en k la salida tendrá ese mismo desplazamiento.

2.1.3. Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo

Cuando un sistema cumple la propiedad de linealidad e invariancia en el tiempo se dice que es un sistema LTI (Sistema Lineal Invariante en el Tiempo). Los sistemas LTI son de importancia pues son caracterizados por la respuesta al pulso unitario y por la suma de convolución. Es posible obtener la respuesta de un sistema para cualquier entrada conociendo la función de ponderación $h[n]$ (4.5).

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] \longleftrightarrow X[z]H[z] \quad (2.14)$$

2.2. Digital Signal Processor

El DSP o Digital Signal Processor es el sistema que se encarga de realizar el procesamiento de una señal digital. Un sistema básico de procesamiento de señales es el que se muestra en la Figura 2.2.

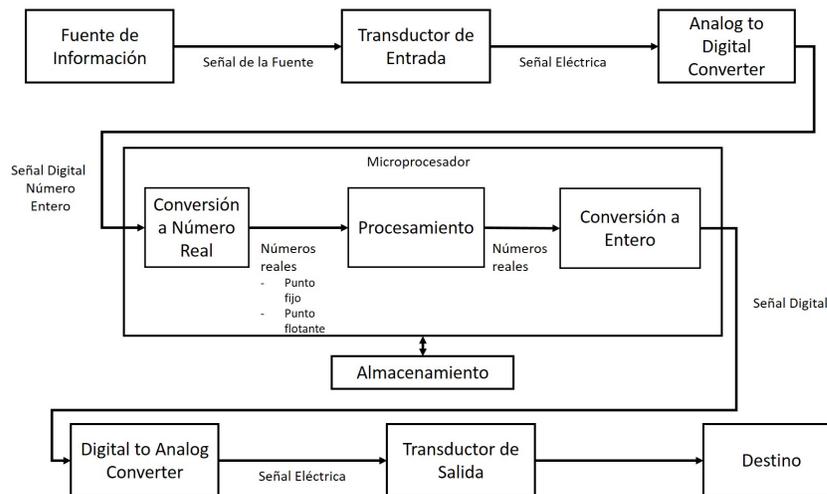


Figura 2.2: Sistema Básico de Procesamiento de Señales. Imagen obtenida [3]

El primer bloque corresponde a la Fuente de Información, por ejemplo una persona que habla, en tal caso la señal de información es la voz. Y siguiendo el sistema, la señal

es convertida a una señal eléctrica utilizando un transductor de entrada como puede ser un micrófono. La señal de información es traducida a otro tipo de señal que puede ser manipulada por el sistema de procesado.

La señal de voz es una señal analógica y aleatoria, para procesarla es necesario convertirla a una señal digital. El proceso de conversión AD será detallado en el siguiente apartado. Una vez que se cuenta con la señal digital (número entero) esta entra al Microprocesador, dentro de él la señal binaria es convertida a número real, es procesada y de nuevo es convertida de real a entero.

Una vez que se tiene la señal digital es convertida a señal analógica y de nuevo se tiene una tensión eléctrica. Finalmente, la señal es convertida a una forma útil al destinatario.

2.3. Señales Digitales: Conversión Analógico - Digital

En los sistemas de comunicaciones, ya sea que utilicen medios guiados o no guiados, el mayor problema al que se enfrentan es el ruido. Por ejemplo, en la radiodifusión AM se utiliza una señal senoidal de alta potencia como portadora mientras que la señal de información modula en amplitud a la portadora, el resultado en el dominio del tiempo es una señal modulada en amplitud. En el dominio de la frecuencia, la señal es trasladada en suma y diferencia de la frecuencia del mensaje con la portadora. En el canal de comunicación (espectro radioeléctrico) la señal es degradada por el ruido y para el caso de la modulación AM la amplitud es la que se ve afectada. Los receptores no reciben una copia exacta del transmisor, lo único que pueden hacer es amplificar la señal y filtrarla.

Aunque otras modulaciones son más robustas, como el caso de la Modulación en Frecuencia, no es posible obtener una copia exacta del mensaje transmitido. El problema es que se esta transmitiendo una señal analógica, es decir, una señal continua en el tiempo y en la amplitud. Además la señal transmitida es totalmente desconocida para el receptor pues es una señal aleatoria.

Un sistema digital cuenta con un conjunto finito de señales por ello en el receptor es menos probable cometer un error al decidir que señal fue transmitida. Una vez que se tiene la información digitalizada en banda base (secuencia binaria), cada bit o grupo de bits modulan a un señal de radiofrecuencia. La señal de RF modulada corresponde a un símbolo, y cada símbolo puede tener uno o más bits. Desde luego, antes de la transmitir, los datos son procesados según el tipo de información, además el sistema de comunicación digital codifica la información para detectar y/o corregir errores (codificador de fuente y de canal).

La modulación digital puede modificar uno o todos los parámetros de una señal

senoidal: amplitud, frecuencia y fase. La ventaja de transmitir con sistemas digitales es que se pueden obtener copias exactas de la señales transmitidas, porque son conocidas, además un símbolo puede contener muchos bits de información, tal como en el caso de la modulación 64QAM en el que se cuenta con 6 bits por símbolo y 64 posibles símbolos. La principal desventaja del sistema digital es que entre mayor sea la tasa de transmisión mayor será en ancho de banda requerido.

Es importante conocer cómo surge la información digital pues es el material con el que trabajaremos, enseguida se describe matemáticamente el proceso de conversión de analógico a señal digital. De igual manera se analiza la condición para recuperar la señal analógica a partir de la discreta. La conversión digital a analógica va más allá de lo que se realiza en esta tesis.

2.3.1. Muestreo Periódico Ideal

Para transformar una señal $x(t)$ continua en el tiempo y en la amplitud a una señal discreta (discreta en el tiempo y amplitud) se requieren dos procesos: el muestreo y la cuantización, Figura 2.3. La conversión de analógico a digital (secuencia binaria) se requieren, además del muestreo y la cuantización, las etapas de retención y codificación, estas operaciones se realizan en un bloque llamado ADC, Analog to Digital Converter.

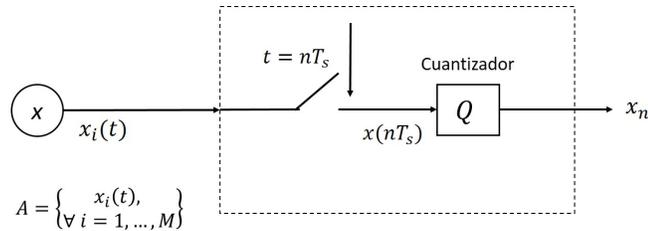


Figura 2.3: Conversión de una señal analógica a la señal discreta en el tiempo y en la amplitud

El muestreo es una operación en el que se toman muestras de una señal continua. Las muestras son tomadas de manera regular en un determinado tiempo, a este tiempo se llama periodo de muestreo T_s (time sample) en segundos. El inverso de este tiempo es la frecuencia de muestreo f_s (frequency sample).

$$f_s = \frac{1}{T_s} \tag{2.15}$$

Primeramente, analizaremos al muestreo como *Ideal* pues consideraremos que para realizarlo utilizamos un tren de impulsos. Dada una señal $x(t)$ con ancho de banda B [Hz], su transformada de Fourier es $X(f)$ con $X(f) = 0$ para $|f| \geq B$. Se toman muestras en los instantes $t = nT_s, \quad \forall \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$. En el dominio del tiempo,

el muestreo es una multiplicación de la señal de información $x(t)$ por la señal del tren de impulsos $s(t)$ (2.16) [10]:

$$s(t) = T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \quad (2.16)$$

$$y(t) = x(t)s(t) \quad (2.17)$$

$$= x(t) \left[T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \right]$$

$$y(t) = T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT_s)$$

La señal muestreada es (2.18) y tiene las muestras de la original en los tiempos $t = kT_s$:

$$y(t) = T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s) \quad (2.18)$$

La señal $y(t)$ es discreta en el tiempo pero continua en amplitud, el paso siguiente es la cuantización, pero antes analizamos el efecto en la frecuencia, para ello consideremos que la señal $x(t)$ tiene el espectro de la Figura 2.4.

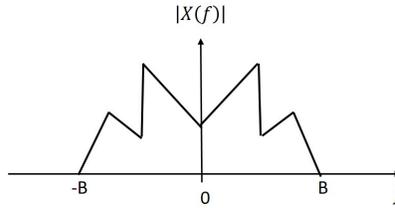


Figura 2.4: Espectro de la señal $x(t)$

Entonces las transformadas de Fourier de las señales son:

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \quad (2.19)$$

$$s(t) \leftrightarrow S(f) \quad (2.20)$$

La transformada de Fourier de una señal coseno es:

$$\cos(2\pi f_0 k) \leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

y una señal periódica puede ser representada como una serie exponencial de Fourier, entonces la señal $s(t)$ es:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi \frac{t}{T_s} k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi t f_s k}$$

Donde:

$$C_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} s(t) e^{-j2\pi t f_s k} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} T_s \delta(t) e^{-j2\pi t f_s k} dt = 1$$

Entonces la señal $s(t)$:

$$s(t) = T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1 \times e^{j2\pi t f_s k}$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi t f_s k} \quad (2.21)$$

De la ecuación (2.17) se tiene (2.18) y:

$$y(t) = x(t) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi t f_s k} \right] \quad (2.22)$$

Desarrollando la ecuación (2.22) se tiene que:

$$y(t) = x(t) \left[1 + e^{-j2\pi t f_s} + e^{j2\pi t f_s} + e^{-j4\pi t f_s} + e^{j4\pi t f_s} + e^{-j6\pi t f_s} + e^{j6\pi t f_s} + \dots \right] \quad (2.23)$$

Recordando que:

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad (2.24)$$

Sutituyendo (2.24) en (2.23) se tiene:

$$y(t) = x(t) + 2x(t) \cos(2\pi f_s t) + 2x(t) \cos(4\pi f_s t) + 2x(t) \cos(6\pi f_s t) + \dots \quad (2.25)$$

Si pasamos la ecuación (2.25) al dominio de la frecuencia:

$$Y(f) = X(f) + \left[X(f + f_s) + X(f - f_s) \right] + \left[X(f + 2f_s) + X(f - 2f_s) \right] + \left[X(f + 3f_s) + \dots \right] \quad (2.26)$$

Expresando la ecuación (2.26) como suma, finalmente tenemos:

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_s) \quad (2.27)$$

La transformada de la señal muestreada corresponde a trasladar el espectro de la señal original a multiples enteros positivos y negativos de la frecuencia de muestreo [10]. La señal tiene un ancho de banda infinito y para evitar un traslape del espectro, la frecuencia de muestreo debe ser cuando menos $2B$. El Teorema de Nyquist se resume en (2.28) y el espectro $Y(f)$ se ilustra en la Figura 2.5.

$$f_s \geq 2B \quad (2.28)$$

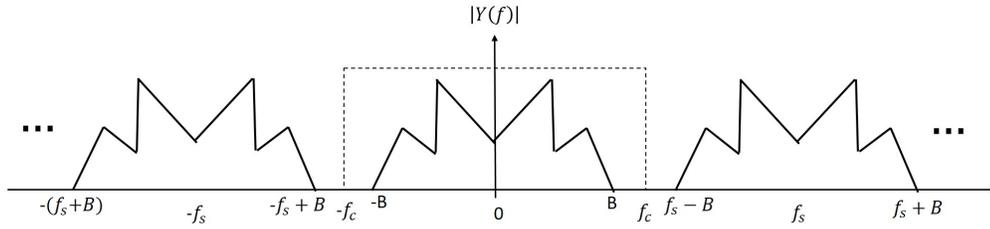


Figura 2.5: Espectro de la Señal Muestreada cuando el Teorema de Nyquist se cumple

De la Figura 2.5 se puede observar que para recuperar la señal original se pasa $y(t)$ por un filtro paso bajas ideal con frecuencia de corte f_c tal que $B < f_c < f_s - B$. Entonces la función de transferencia del filtro ideal paso bajas es (2.29) y en el tiempo (2.30).

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq f_c \\ 0 & |f| > f_c \end{cases} \quad (2.29)$$

$$h(t) = 2f_c \frac{\sin(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} = 2f_c \text{sinc}(2f_c t) \quad (2.30)$$

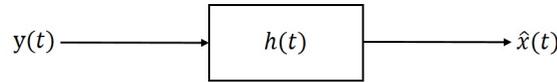


Figura 2.6: Filtro paso bajas ideal

Para el caso del muestreo ideal y, además, considerando que el filtro es ideal, la frecuencia de corte del filtro paso bajas es igual a la frecuencia máxima de la señal continua $x(t)$, es decir, $f_c = B$. Para fines prácticos, la frecuencia de corte del filtro paso bajas debe ser ligeramente mayor y la frecuencia de muestreo debe cumplir $f_s > 2B$.

De la Figura 2.6 la señal a la salida del filtro:

$$\hat{x}(t) = y(t) * h(t) \quad (2.31)$$

sustituyendo (2.18) y (2.30) en (2.31)

$$\hat{x}(t) = \left[T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s) \right] * 2f_c \text{sinc}(2f_c t)$$

De esta manera obtenemos la Fórmula Cardinal de Interpolación:

$$\hat{x}(t) = 2f_c T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \text{sinc}(2f_c [t - kT_s]) \quad (2.32)$$

Si se cumple (2.28) y $B < f_c < f_s - B$, entonces $x(t) = \hat{x}(t)$ y se ha recuperado la señal original. Figura 2.7.

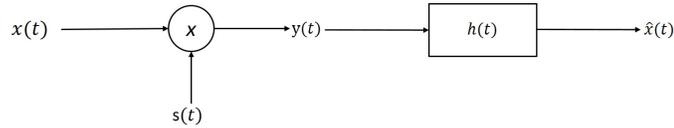


Figura 2.7: Recuperación de la señal después del proceso de muestreo

2.3.2. Retención

Para el caso del muestreo real, la teoría es similar pero no podemos usar un tren de impulsos pues no es posible construir un generador con tiempos de bajada y subida nulos, la electrónica tiene sus limitantes. El uso de un tren de impulsos es útil para explicar el Teorema de Muestreo, para el caso del muestreo real se utiliza un retenedor de orden cero. Dicho retenedor puede ser un tren de pulsos rectangulares con duración T_s . La señal de muestreo toma valores de la amplitud periódicamente manteniendo cada valor T_s segundos hasta tomar el siguiente valor de amplitud de la onda, Figura 2.8 [10]. Para recuperar la señal muestreada con el tren de pulsos rectangulares se utiliza un filtro paso bajas, sin embargo, la señal no se recupera totalmente pues el espectro de la señal muestreada es una función sinc con ancho de banda infinito, Figura 2.9. No se entrará en detalle acerca de como debe ser el filtro reconstructor pues para los fines de esta tesis no se requiere.

$$\hat{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) q(t - nT_s) \quad (2.33)$$

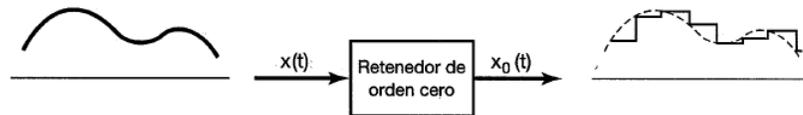


Figura 2.8: Muestreo utilizando un retenedor de orden cero. Imagen obtenida de [10]

El pulso rectangular en el dominio de la frecuencia:

$$q(f) = T_s \text{sinc}(T_s f) e^{-j\pi T_s f} \quad (2.34)$$

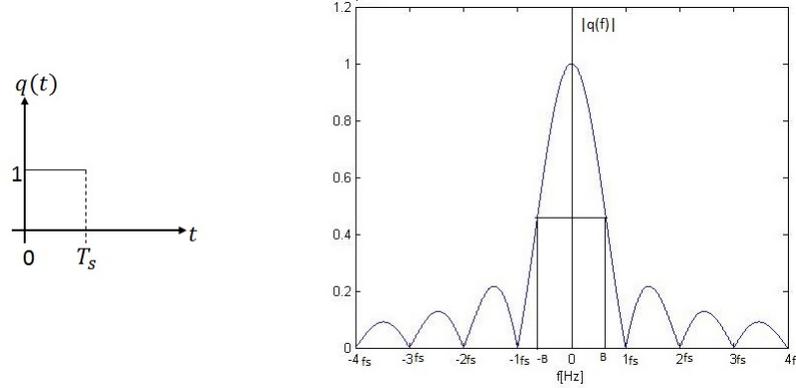


Figura 2.9: Pulso rectangular y espectro del pulso

2.3.3. Cuantización

La señal es discreta en el tiempo pero sigue siendo continua en amplitud, el objetivo del cuantizador es asignar un valor discreto a cada muestra. En este apartado unicamente se mostrará como ejemplo a un cuantizador escalar y uniforme, desde luego, existen cuantizadores vectoriales y no uniformes, siendo estos últimos cuantizadores óptimos.

Sea Q el cuantizador escalar, Q es un mapeo del eje de los reales a un conjunto C :

$$C = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}; \quad y_i \in \mathbb{R} \quad \forall \quad i = 1, \dots, N$$

$$y_1 < y_2 < y_3 \dots < y_N$$

Y asociado a C se tienen las regiones R_i que forman una partición;

$$R_i = \{x : Q(x) = y_i\} \quad \forall \quad i = 1, \dots, N$$

Y se cumple:

$$\bigcup_{i=1}^N R_i = \mathbb{R} \quad | \quad R_i \cap R_j = \phi \quad \forall \quad i \neq j, \quad i = 1, \dots, N$$

Donde y_i es el centroide del cuantizador y $Q(x)$ sigue la función (2.35). El esquema

de la Figura 2.10 muestra el proceso de cuantización.

$$Q(x) = \begin{cases} y_1 & x_0 \leq x \leq x_1 \\ y_2 & x_1 < x \leq x_2 \\ y_3 & x_2 < x \leq x_3 \\ \vdots & \\ y_N & x_{N-1} < x \leq x_N \end{cases} \quad (2.35)$$

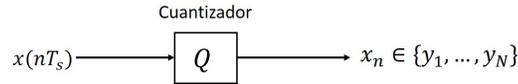


Figura 2.10: Cuantizador Escalar

2.3.4. Codificación

Cada centroide del cuantizador tiene asociado un número binario, entonces si la fuente X genera un número binario cada T_s segundos y cada nivel de cuantización tiene m bits, la tasa de transmisión es:

$$R = \frac{m}{T_s} = mf_s[\text{bps}] \quad (2.36)$$

Evidentemente, existe un error al momento de cuantizar pues las amplitudes de las muestras, no necesariamente caen en un centroide. Este error se mide con la relación señal a ruido de cuantización $SNR_{Q[dB]}$. Por ejemplo, considerando la potencia de la señal calculada con voltaje RMS, la $SNR_{Q[dB]}$ se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$SNR_{Q_{dB}} = 1.76 + 6m \quad (2.37)$$

La relación señal a ruido de cuantización depende del número de bits por nivel de cuantización, es decir, si tenemos N niveles de cuantización, los bits requeridos para codificar cada nivel son:

$$m = \log_2(N)[\text{bits/nivel}] \quad (2.38)$$

y al aumentar el número de niveles aumenta el número de bits y con ello el paso de cuantización (distancia entre entre niveles consecutivos) disminuye. Hasta aquí tenemos una señal digital, en un sistema de comunicaciones digitales lo siguiente sería un PCM, *Codificador de Pulsos Multinivel*. En esta tesis, se trabajará con señales discretas.

2.4. Transformada Discreta de Fourier

2.4.1. Definición de Fasor y sus propiedades

Para definir la Transformada Discreta de Fourier es conveniente repasar el concepto de fasor y mostrar algunas propiedades [2] que serán útiles, ya quedará escrita en términos de fasores (2.39).

Un fasor se suele utilizar en el análisis senoidal permanente, está formado por su magnitud y fase:

$$Ae^{j\frac{2\pi}{N}n} \quad (2.39)$$

donde la magnitud del fasor (2.39) es A , la fase $\phi = \frac{2\pi}{N}n$ y N es la cantidad de muestras de la señal. Si a la fase de (2.39) se le agrega una variable n se vuelve una función de n y si $A = 1$ el recorrido del fasor queda determinado por dicha variable (2.40) y se tiene lo siguiente:

$$f(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}n} \quad \forall n = 1, \dots, N-1 \quad (2.40)$$

Nulidad del recorrido frente a la suma:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n} = 0 \quad (2.41)$$

Oscilación, o espacio muestral, de longitud N :

$$e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.42)$$

Nulidad de la cantidad de giros frente a la suma:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \begin{cases} N & k = 0 \\ 0 & k = 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = N\delta(k) \quad (2.44)$$

Periodicidad:

$$e^{j\alpha 2\pi} = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z} \quad (2.45)$$

Periodicidad temporal. Recordando que N es la cantidad de muestras de la señal:

$$\begin{aligned} e^{jk\frac{2\pi}{N}(N+n)} &= e^{jk\frac{2\pi}{N}n} e^{jk\frac{2\pi}{N}N} \\ &= e^{jk\frac{2\pi}{N}n} e^{jk2\pi} \\ &= e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Periodicidad angular:

$$\begin{aligned} e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} &= e^{jk\frac{2\pi}{N}n} e^{jN\frac{2\pi}{N}n} \\ &= e^{jk\frac{2\pi}{N}n} e^{j2\pi n} \\ &= e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ortogonalidad. Dados los fasores:

$$A = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad (2.48)$$

$$B = e^{jm\frac{2\pi}{N}n} \quad (2.49)$$

Si el producto interno entre dos fasores es igual a cero se dice que los fasores son ortogonales. La suma del fador A (2.48) multiplicado con el conjugado de B (2.49) debe ser cero.

$$\langle A, B \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} e^{-jm\frac{2\pi}{N}n} \quad (2.50)$$

$$\langle A, B \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\frac{2\pi}{N}n} \quad (2.51)$$

De (2.44) podemos escribir:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\frac{2\pi}{N}n} = N\delta(k-m) \quad (2.52)$$

2.4.2. Obtención de las ecuaciones de análisis y de síntesis

Sea $x[n]$ una secuencia periódica, con período N . En el dominio del tiempo la señal se puede expresar como:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\delta(n-k) \quad (2.53)$$

Las muestras que conforman la señal $x[n] = [x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]]$, puede escribirse como una combinación lineal de los fasores que forman el dominio frecuencial:

$$x[n] = \alpha \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad \forall \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.54)$$

$$F = e^{-j\gamma\frac{2\pi}{N}n} \quad (2.55)$$

Para determinar el espectro $X[k]$ de la señal y la constante α , multiplicamos ambos miembros de la ecuación (2.54) por (2.55):

$$x[n]e^{-j\gamma\frac{2\pi}{N}n} = \left(\alpha \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \right) e^{-j\gamma\frac{2\pi}{N}n}$$

Sumando los recorridos de n :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\gamma\frac{2\pi}{N}n} = \alpha \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(k-\gamma)\frac{2\pi}{N}n}$$

Aplicando la propiedad conmutativa de la suma:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\gamma\frac{2\pi}{N}n} = \alpha \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-\gamma)\frac{2\pi}{N}n}$$

Aplicando la propiedad de ortogonalidad (2.52) a la segunda suma del segundo miembro:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\gamma\frac{2\pi}{N}n} = \alpha \sum_{k=0}^{N-1} X[k]N\delta(k-\gamma)$$

Y la suma será cero hasta que $k = \gamma$, entonces se puede reescribir como:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\gamma\frac{2\pi}{N}n} = \alpha X[\gamma]N$$

Sustituyendo $\alpha = 1/N$ y haciendo un cambio de variable de γ a k , se obtiene la ecuación de análisis (2.56) y la ecuación de síntesis (2.57):

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad (2.56)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad (2.57)$$

Donde los términos $X[k]$ de (2.57) son los fasores o entidades que modifican las oscilaciones en amplitud y fase.

Las ecuaciones anteriores se compactan al hacer el cambio de variable (2.58)

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (2.58)$$

Las ecuaciones de análisis (2.59) y síntesis (2.60) [8] quedan como se muestra:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} \quad (2.59)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-nk} \quad (2.60)$$

2.5. Transformada Z

Así como las ecuaciones diferenciales pueden resolverse utilizando la transformada de Laplace, las ecuaciones en diferencias pueden ser resueltas utilizando la transformada Z. Para definir la Transformada Z supongamos una señal $x(t)$ continua en el tiempo y amplitud. Además es una señal de energía, la señal es muestreada como se explico anteriormente. La señal $x(t)$ se multiplica por un tren de impulsos unitarios (2.61).

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (2.61)$$

La señal muestreada es (2.62):

$$x_{T_s}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (2.62)$$

Aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación (2.62):

$$\mathcal{L}\{x_{T_s}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)\right\} \quad (2.63)$$

Introduciendo la Transformada de Laplace a la suma:

$$\mathcal{L}\{x_{T_s}(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s)\mathcal{L}\{\delta(t - nT_s)\} \quad (2.64)$$

La transformada se aplica al impulso desplazado:

$$\mathcal{L}\{x_{T_s}(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s)e^{-nT_s s} \quad (2.65)$$

Haciendo $z = \exp(T_s s)$ y como T_s , periodo de muestreo, es constante lo podemos ocultar:

$$\mathcal{L}\{x_{T_s}(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.66)$$

La Transforma Z de una señal discreta es igual a la Transformada de Laplace de la señal muestreada:

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.67)$$

2.5.1. Región de Convergencia de Z

Del cambio de variable $z = e^s$, donde s es el dominio de la frecuencia de la transformada de Laplace, y $s = \sigma + j\omega$, sustituyendo para z :

$$z = e^{\sigma} e^{j\omega} \quad (2.68)$$

En la Transformada de Laplace s es un número complejo en la forma binómica, mientras que para la Transformada Z z esta en términos de la Fórmula de Euler. Entonces $z = f(\sigma, \omega)$ y la graficaremos para $z = f(r, \phi)$, es decir, como función del argumento y módulo de z . La región de convergencia para un sistema causal, con $\sigma = 0$ y acotando la frecuencia angular a $|f_s|$, se muestra en la Figura 2.11.

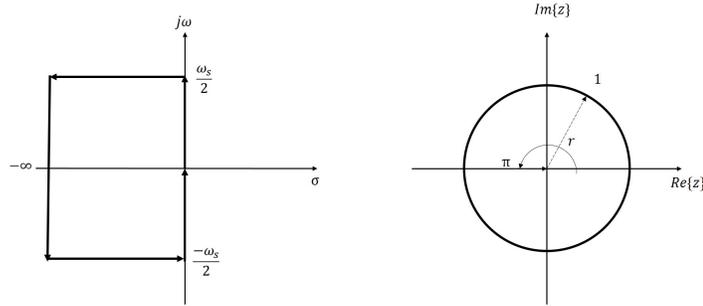


Figura 2.11: Región de Convergencia de s y z

2.6. Muestreo de Filtros

Los sistemas analógicos están definidos por la función de transferencia $H(s)$, mientras que los sistemas digitales son representados por la función de transferencia $H(z)$.

$$H(s) = \frac{A_0 + A_1s + A_2s^2 + \dots + A_ns^n}{B_0 + B_1s + B_2s^2 + \dots + B_ns^n} \quad (2.69)$$

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}}{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nz^{-n}} \quad (2.70)$$

Ambas funciones de transferencia tienen el mismo orden y para obtener $H(z)$ se aplica la Transformada Z a la función $H(s)$. La relación entre ambos dominios queda definida por la ecuación (2.71).

$$z = e^{sT_s} \quad (2.71)$$

Entonces, el muestreador ideal es (2.72):

$$s = \frac{1}{T_s} \ln(z) \quad (2.72)$$

Existen muchos métodos para muestrear los filtros analógicos, por ejemplo: la aproximación rectangular hacia adelante, la aproximación rectangular hacia atrás (ambas son aproximaciones de Euler), la aproximación Newton-Cotes y la bilineal o Tustin. En este apartado nos concentraremos en Método de Muestreo de Tustin que corresponde a la Transformada Z Bilineal.

2.6.1. Transformada Z Bilineal

La relación entre el dominio s y z esta determinada por (2.72), llamado el muestreador ideal. Basandonos en el muestreador ideal podemos obtener una aproximación, la transformación bilineal es la mejor. En (2.72) podemos sustituir el logaritmo natural de z por una serie (2.73) [4]. Entonces obtenemos la ecuación (2.74).

$$\ln(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{2n+1} \quad (2.73)$$

$$s = \frac{2}{T_s} \left[\left(\frac{z-1}{z+1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right] \quad (2.74)$$

En la ecuación (2.74) se observa que la serie converge cerca de $z = 1$ por lo que se pueden despreciar todos los términos menos el primero. Entonces la transformada bilineal queda como (4.12) y (2.76).

$$s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \quad (2.75)$$

$$s = c \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \quad (2.76)$$

Donde c es:

$$c = \cot \left(\frac{\pi f_c}{f_s} \right) \quad (2.77)$$

f_c es la frecuencia de corte y f_s es la de muestreo.

Otra forma de obtener la Transformada Bilineal es usando el método trapezoidal de integración numérica. Si consideramos un filtro lineal analógico [7] con función de transferencia de primer orden (2.78) y modelado por la ecuación diferencial (2.79).

$$H(s) = \frac{b}{s+a} \quad (2.78)$$

$$D_t[y(t)] + ay(t) = bx(t) \quad (2.79)$$

Aplicando el método de integración trapezoidal para resolver $y(t)$:

$$y(t) = \int_0^t y'(\tau) d\tau + y(t_0) \quad (2.80)$$

Valuando la aproximación de la integral en $t = nT$ y $t_0 = nT - T$, y la ecuación diferencial (2.79) para $t = nT$:

$$y(nT) = \frac{T}{2} [y'(nT) + y'(nT - T)] + y(nT - T) \quad (2.81)$$

$$y'(nT) = -ay(nT) + bx(nT) \quad (2.82)$$

Sutituyendo (2.82) en (2.81) y considerando $y(n) = y(nT)$, $x(n) = x(nT)$, obtenemos la ecuación en diferencias (2.83):

$$y(nT) = \frac{T}{2} [-ay(nT) + bx(nT) - ay(nT - T) + bx(nT - T)] + y(nT - T)$$

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right) y(n) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right) y(n - 1) = \frac{bT}{2} [x(n) + x(n - 1)] \quad (2.83)$$

Aplicando la transformada Z a la ecuación en diferencias (2.83) obtenemos:

$$\left[\left(1 + \frac{aT}{2}\right) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right) z^{-1}\right] Y(z) = \frac{bT}{2} (1 + z^{-1})X(z) \quad (2.84)$$

Entonces la función de transferencia $H(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(bT/2)(1 + z^{-1})}{(1 + aT/2) - (1 - aT/2)z^{-1}}$$

Multiplicando por 2/2:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{bT(1 + z^{-1})}{(2 + aT) - (2 - aT)z^{-1}}$$

Multiplicando por T^{-1}/T^{-1} :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b(1 + z^{-1})}{\left(\frac{2}{T} + a\right) - \left(\frac{2}{T} - a\right)z^{-1}}$$

Multiplicando por $(1 + z^{-1})^{-1}/(1 + z^{-1})^{-1}$:

$$H(z) = \frac{b}{\frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + a} \quad (2.85)$$

Comparando la función de transferencia (2.78) con (2.85):

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) = \frac{2}{T} \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right) \quad (2.86)$$

Procesamiento Digital de Tasa Múltiple

Los sistemas digitales procesan datos, todos estos datos están referenciados a la frecuencia con la cual fueron muestreados. Por ejemplo, consideremos una señal de audio limitada en banda a 20[kHz], para cumplir con el Teorema de Nyquist (2.28) la frecuencia f_s debe ser cuando menos de 40[kHz], sin embargo en la práctica suele ser superior, tal como un CD de audio o MP3 donde la frecuencia es de 44.1[kHz]. Para obtener el bitrate es necesario conocer el número de bits con el que se van a codificar las muestras, por ejemplo a 8, 16, 20, 24 bits/muestra, por mencionar algunos.

Los sistemas de TV Digital utilizan 48[kHz] para muestrear el audio. Si queremos utilizar material proveniente de un CD de Audio será necesario convertir la información muestreada en 44.1[kHz] a 48[kHz]. En realidad, existen dos maneras para realizar esta conversión: la primera forma consiste en convertir la señal discreta a analógica, utilizando un DAC, y remuestreando con la nueva frecuencia utilizando un ADC. Este primer método no tiene restricciones respecto al factor de conversión, pues se puede elegir cualquier otra frecuencia. Aunque, sea un proceso *sencillo* no es adecuado ya que los convertidores AD/DA cometen errores y se pierde información en el proceso. El segundo método, y que es el que se utilizará, consiste en realizar la conversión en el dominio discreto utilizando las operaciones de submuestro y sobremuestreo, ambos son aplicados en un factor entero pero conectados en cascada pueden generar un factor racional.

3.1. Submuestreo por un Factor M

El proceso de submuestro por un factor M , entero y $M > 1$, en una señal discreta $x[n]$ se llama decimación y es representado por el bloque de la Figura 3.1, la señal de salida es $x_D[n]$. Esta operación consiste en tomar las muestras múltiples de M de la secuencia y eliminar las restantes. Por cada M muestras de la secuencia original se elige una y se eliminan $M - 1$. Normalmente, la decimación tiene una etapa previa de filtrado [7].

La secuencia de salida puede ser escrita como:

$$x_D[n] = x[nM] \quad | \quad M > 1, \quad \forall \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.1)$$

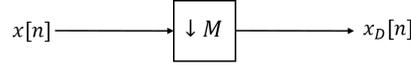


Figura 3.1: Representación del Bloque de Submuestreo o Down-Sampler

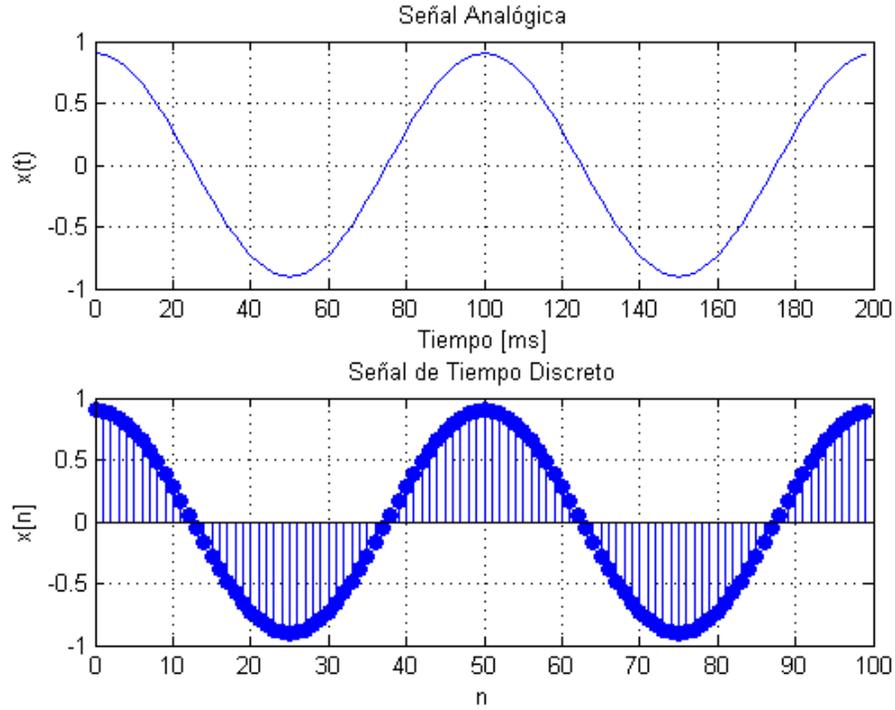


Figura 3.2: Señal $x(t)$ y $x[n]$

El down-sampler, o *sampling rate compressor* [8], reduce la frecuencia de muestreo en un factor $1/M$ o, equivalentemente, aumenta el período de muestreo en un factor M . Para analizar el submuestreo en el dominio del tiempo discreto, consideremos una señal de prueba (3.2), la cual es simulada durante 200[ms] y es muestreada a una frecuencia de $1/T_s = f_s = 500[\text{Hz}]$ cumpliendo el Teorema de Nyquist, y su tasa de muestreo es de 500[muestras \times Hz]. Las señales se observan en la Figura 3.2.

$$x(t) = \frac{9}{10} \cos(2\pi 10[\text{Hz}]t) \quad (3.2)$$

La secuencia obtenida al muestrear la señal continua es (3.3). Al aplicar el submuestreo para $M = 4$ se obtiene una nueva secuencia (3.4). El efecto del submuestreo en el

dominio del tiempo discreto se ilustra en la Figura 3.3[12].

$$x[n] = \left[\frac{9}{10} \cos(2\pi 10[\text{Hz}] \times n \times T_s) \right] \quad \forall \quad n = 0, \dots, 99 \quad (3.3)$$

$$x[n] = [0.9000, 0.8929, 0.8717, 0.8368, 0.7887, 0.7281, 0.6561, 0.5737, 0.4822, \dots]$$

$$x_D[n] = \left[\frac{9}{10} \cos(2\pi 10[\text{Hz}] \times nM \times T_s) \right] \quad (3.4)$$

$$x[n] = [0.9000, 0.7887, 0.4822, 0.0565, -0.3832, -0.7281, \dots, 0.0565, 0.4822, 0.7887]$$

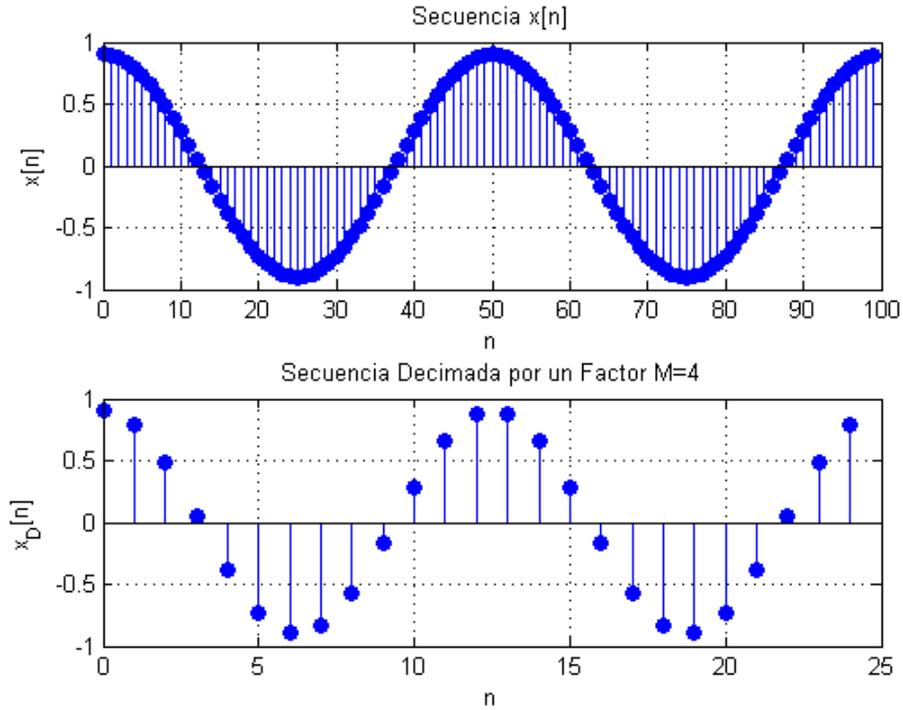


Figura 3.3: Secuencia $x[n]$ y Secuencia Decimada o Submuestreada $x_D[n]$

En la Figura 3.3 se observa que la señal decimada tiene la misma forma que la señal muestreada pero con menos muestras.

En el dominio de la frecuencia la relación entrada-salida del down-sampler se obtiene aplicando la Transformada Z a la expresión (3.1), pero antes vamos a definir una secuencia intermedia $x_{int}[n]$ (3.6) [8] de manera que la señal submuestreada se reescriba como (3.5).

$$x_D[n] = x_{int}[n] = x[Mn] \quad (3.5)$$

$$x_{int}[n] = \begin{cases} x[n] & n = 0, \pm M, \pm 2M, \pm 3M, \dots \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.6)$$

La secuencia intermedia puede expresarse como el re-muestreo de la señal $x[n]$ (3.7):

$$x_{int}[n] = x[n]\delta_M[n] \quad (3.7)$$

El tren de impulsos desplazados cada M muestras de $x[n]$ es:

$$\delta_M[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n - rM) \quad (3.8)$$

Y escribiendo el tren de impulsos como serie exponencial de Fourier (3.10):

$$\delta_M[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j2\pi nk/M} \quad (3.9)$$

Sustituyendo la ecuación (3.10) en 3.7 obtenemos:

$$x_{int}[n] = x[n] \left[\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j2\pi nk/M} \right] \quad (3.10)$$

$$x_{int}[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n] e^{j2\pi nk/M} \quad (3.11)$$

Aplicando la transformada Z a la expresión (3.12):

$$X_{int}(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(z e^{-j2\pi k/M} \right) \quad (3.12)$$

$$X_{int}(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(z e^{W_M^k} \right) \quad (3.13)$$

Para $z = e^s$, con $\sigma = 0$, la respuesta en frecuencia es:

$$X_{int}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X \left(e^{j(\omega - \frac{2\pi k}{M})} \right) \quad (3.14)$$

La respuesta en frecuencia muestra que el espectro de la señal es la suma de M réplicas del espectro de la señal original espaciada $2\pi/M$, en el dominio del tiempo, el eje del dominio se ajusta con $k = Mn$ [8].

Obteniendo la transformada Z y sustituyendo k en (3.5):

$$X_D(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_{int}[k] z^{-\frac{1}{M}k} \quad (3.15)$$

$$X_D(z) = X_{int} \left(z^{1/M} \right) \quad (3.16)$$

Comparando (3.14) y (3.16), obtenemos la transformada del decimador:

$$X_D(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{1/M} W_M^k\right) \quad (3.17)$$

$$X_D(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j\frac{\omega-2\pi k}{M}}\right) \quad (3.18)$$

EL efecto que causa la decimación en el dominio de la frecuencia es el estiramiento del espectro de la señal original. El espectro crece M veces, debido a esto el ancho de banda de la señal original debe limitarse para evitar interferencia intersimbólica. La Figura 3.4 ilustra el efecto en la frecuencia.

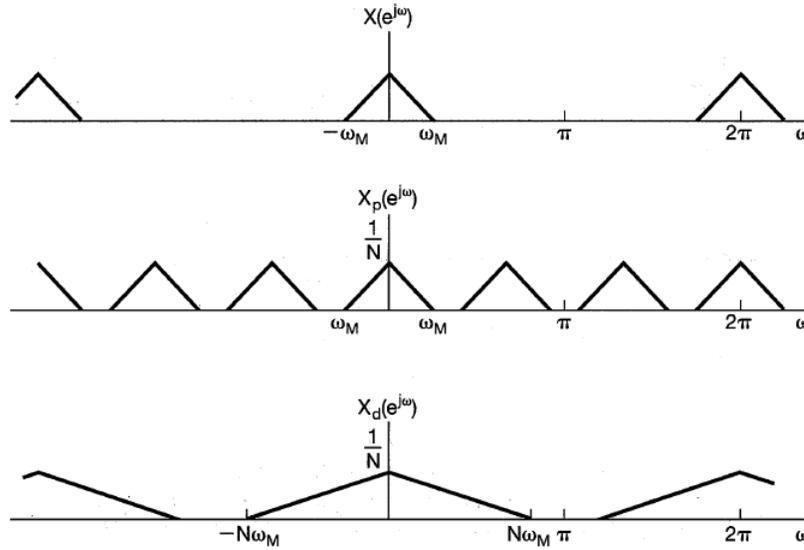


Figura 3.4: Espectro de la señal $x[n]$ (arriba); Espectro de la señal con muestras descartadas igualadas a cero (en medio); Señal decimada (abajo). Imagen obtenida de [1]

Tomemos una señal $x[n]$, se decima por un factor de $M = 2$, esto es $x[2n]$, en el dominio de la frecuencia ocurre lo siguiente:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[2n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} 2n} \sum_{n=0}^{N-1} x[2n] e^{-jk \frac{2\pi n}{N/2}} \quad (3.19)$$

El número de muestras en la frecuencia ahora es $N/2$. La decimación en frecuencia implica que los espectros de las señales se juntan. Haciendo lo mismo para un factor $M = 4$, obtenemos que el número de muestras es $N/4$. Entre mayor sea el factor de decimación podrá crecer tanto hasta que los espectros se encimen y causen interferencia intersimbólica. Figura 3.5.

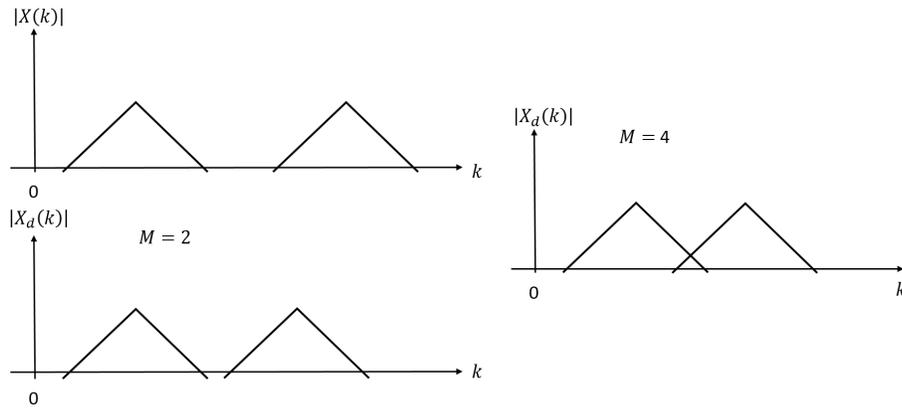


Figura 3.5: Espectro de la señal $x[n]$ (arriba); Espectro de la señal decimada por $M = 2$ (abajo); Señal decimada por $M = 4$ (derecha)

Ahora observemos el efecto de la decimación en el tiempo y la frecuencia, para ello consideremos la señal de la ecuación (3.2) pero con frecuencia $f_0 = 50\text{Hz}$. La señal en el dominio continuo, discreto y de la frecuencia se muestra en la Figura 3.6. Lo que sigue es decimar la señal $x[n]$ por un factor de $M = 2$, pero en este paso solo vamos a igualar a cero las muestras impares y obtener el espectro de la señal, Figura 3.7. Como se observa en el espectro de la señal se ha creado una imagen del espectro original porque unicamente igualamos a cero las muestras que deben eliminarse en el proceso de submuestreo.

Para completar la decimación se eliminan las muestras igualadas a cero y se obtiene el espectro de la señal, Figura 3.8. La decimación en la frecuencia implica que los espectros de las señales se juntan.

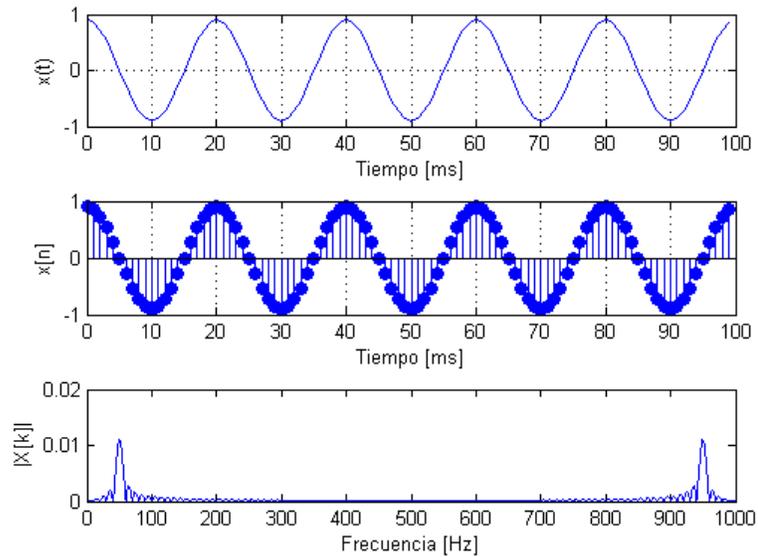


Figura 3.6: Señal $x(t)$ (arriba); Señal $x[n]$ (enmedio); Espectro de la señal (abajo)

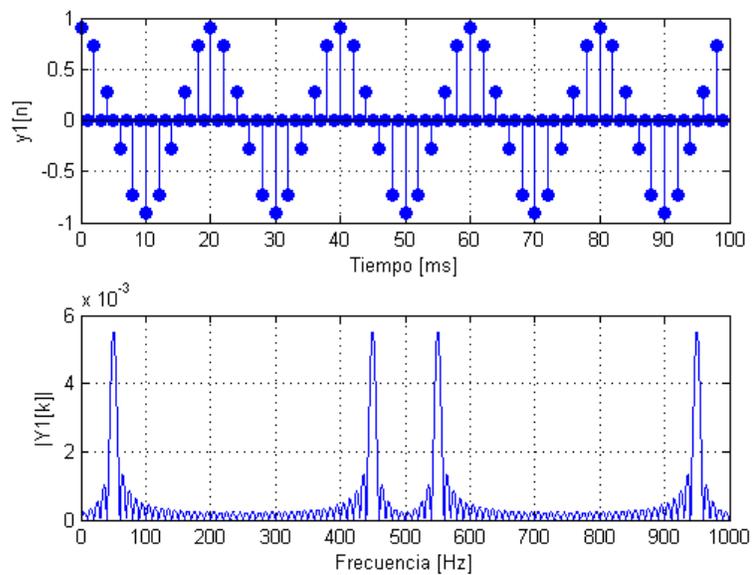


Figura 3.7: Señal $x[n]$ decimada por un factor $M = 2$ con muestras impares igualadas a cero (arriba); Espectro de la señal (abajo)

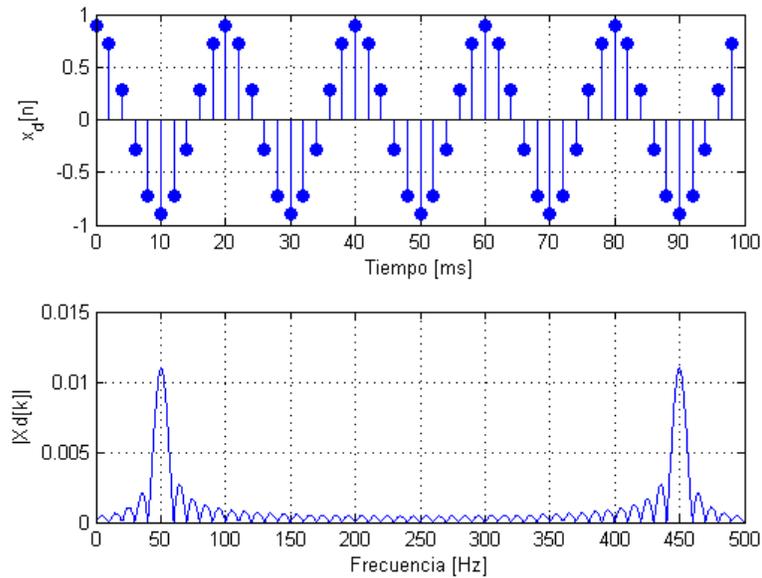


Figura 3.8: Señal $x[n]$ decimada por un factor $M = 2$ (arriba); Espectro de la señal (abajo)

3.2. Sobremuestreo por un Factor L

El proceso de sobremuestreo por un factor L , entero y $L > 1$, en una señal discreta $x[n]$ es llamado interpolación y es representado por el bloque de la Figura 3.9, la señal de salida es $x_U[n]$. Esta operación consiste en insertar muestras de valor 0 cada L muestras de $x[n]$, aunque en la práctica suelen sustituirse los ceros por valores apropiados.

La secuencia de salida se define como sigue:

$$x_U[n] = \begin{cases} x[n/L] & n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.20)$$

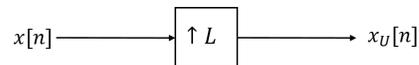


Figura 3.9: Representación del Bloque de Sobremuestreo o Up-Sampler

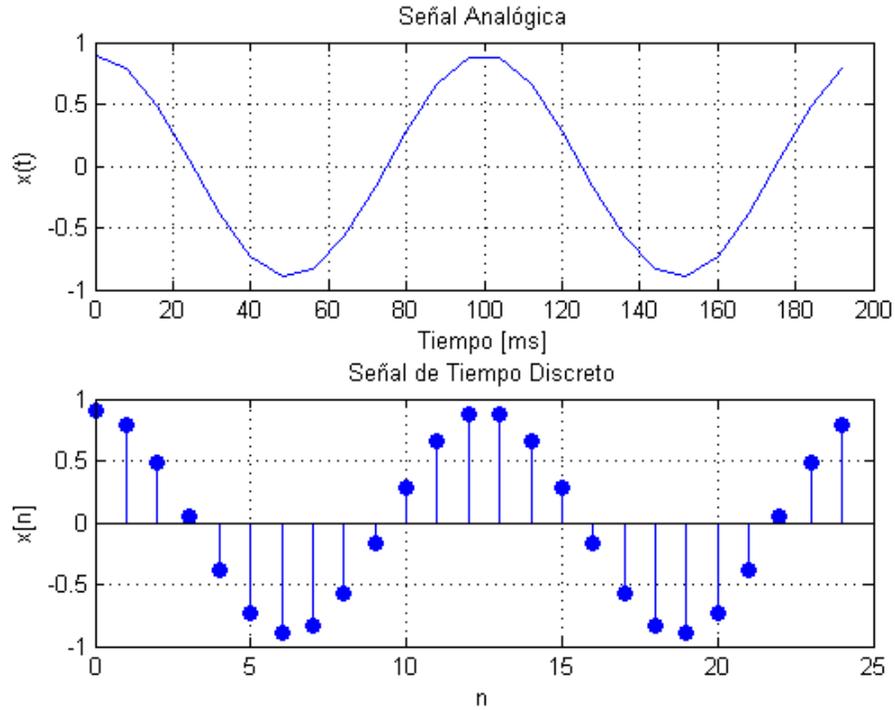


Figura 3.10: Señal $x(t)$ y $x[n]$ muestreada a 125[Hz]

El up-sampler reduce el período de muestreo en un factor $1/L$ o, dicho de otra manera, aumenta la frecuencia de muestreo en un factor L . Para observar el efecto del sobremuestreo en el dominio del tiempo discreto, consideremos la señal (3.2), la cual es simulada durante 200[ms] y es muestreada ahora a una frecuencia de $1/T_s = fs = 125[\text{Hz}]$ cumpliendo el Teorema de Nyquist, y su tasa de muestreo es de 125[muestras \times Hz]. Las señales se observan en la Figura 3.10 [12].

La secuencia de entrada $x[n]$ es (3.3) pero ahora para $T_s = 5[\text{ms}]$, cuando se le aplica el sobremuestreo para $L = 4$ obtenemos la secuencia (3.21). El efecto del sobremuestreo en el dominio del tiempo discreto se ilustra en la Figura 3.11.

$$x[n] = [0.9000, 0.7887, 0.4822, 0.0565, -0.3832, -0.7281, -0.8929, -0.8368, \dots, 0.7887]$$

$$x_U[n] = \left[\frac{9}{10} \cos \left(2\pi 10[\text{Hz}] \times n \frac{1}{L} \times T_s \right) \right] \quad (3.21)$$

$$x[n] = [0.9000, 0, 0, 0, 0.7887, 0, 0, 0, 0.4822, 0, 0, 0, 0.0565, \dots, 0, 0, 0, 0.7887]$$

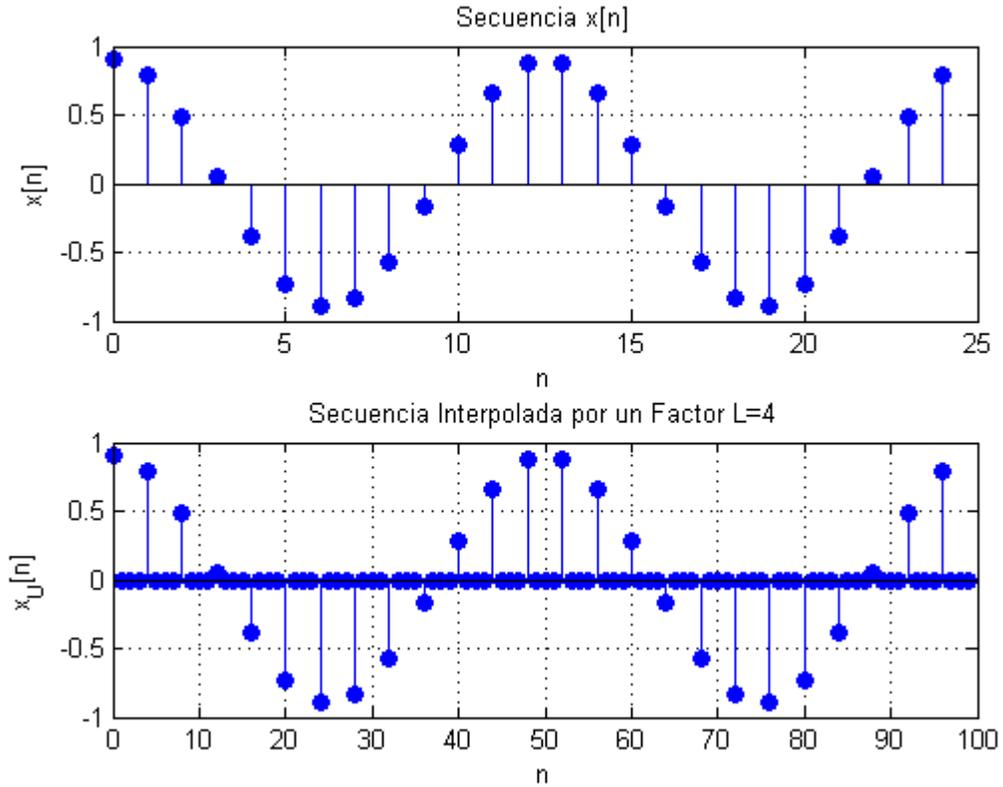


Figura 3.11: Secuencia $x[n]$ y Secuencia Interpolada o Sobremuestreada $x_u[n]$

Cabe destacar que tanto el up-sampler como el down-sampler re indexean el eje del tiempo. En la Figura 3.11, el período de muestreo es reducido y por ello las muestras se ven encimadas, podría limitarse el número de muestras a graficar pero de esta manera se enfatiza que la frecuencia de muestreo aumentó.

La relación entrada - salida del up-sampler estada dada por la ecuación (3.20), en términos de la Transformada Z:

$$X_U[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n/L]z^{-n}$$

Haciendo $m = n/L$ y cambiando n por m :

$$X_U[z] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-Lm}$$

$$X_U[z] = X[z^L] \quad (3.22)$$

El efecto que provoca el sobremuestreo en la frecuencia se ilustra mejor en la Figura 3.12.

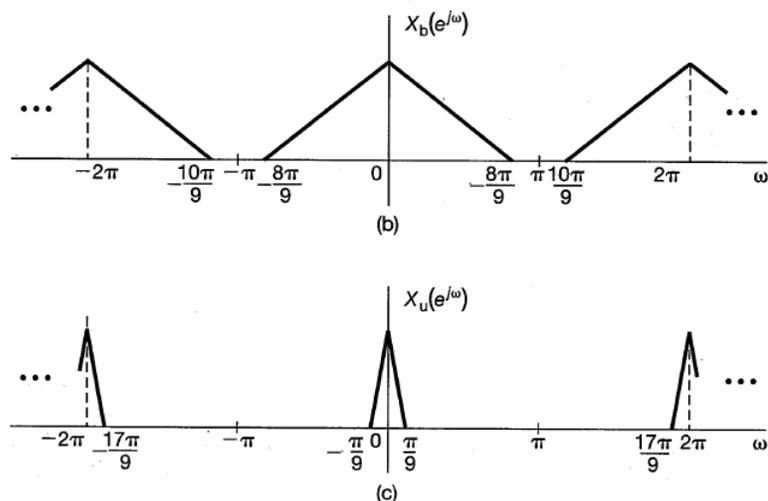


Figura 3.12: Espectro de la señal $x[n]$ (arriba); Señal interpolada (abajo). Imagen obtenida de [1]

3.3. Conversión de la Tasa de Muestreo por un Factor Racional

Consideremos ahora el caso general como la conversión de tasa de muestreo por un factor racional L/M , esto es logrado conectando en cascada los bloques de submuestreo por M y después el de sobremuestreo por L . Figura 3.13. Cada bloque de submuestreo y sobremuestreo llevan su correspondiente filtro para limitar el ancho de banda.

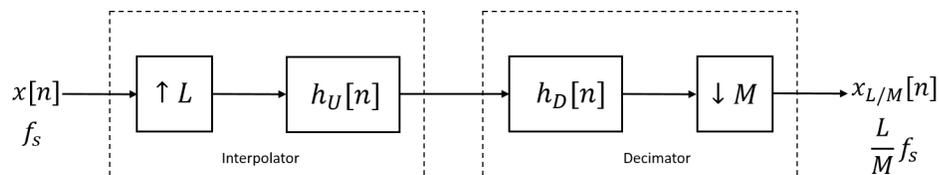


Figura 3.13: Conexión en Cascada del Bloque de Submuestreo y Sobremuestreo

3.4. Sistema Variante con el Tiempo

Las operaciones submuestreo y sobremuestreo son sistemas lineales pero son variantes en el tiempo, la salida del sistema presenta un retardo, *delay*, respecto a la entrada.

El submuestreo queda definido por la ecuación (3.1), para una entrada $x_1[n] = x[n - n_0]$ la salida sería:

$$X_{D_1}[n] = x_1[Mn] = x[Mn - n_0]$$

Pero de (3.1) se obtiene:

$$X_D[n - n_0] = x[M(n - n_0)] = x[Mn - Mn_0] \neq X_{D_1}[n]$$

El sistema presenta un retardo en la salida, por lo que varía en el tiempo.

Para el caso del sobremuestreo por un factor L seguimos el mismo procedimiento. El sobremuestreo queda definido por la ecuación (3.20), consirando la salida $x_{U_1}[n]$ dada por la entrada $x_1[n] = [n - n_0]$ es dado por:

$$X_{U_1}[n] = x_1 \left[\frac{n}{L} \right] = x \left[\frac{n}{L} - n_0 \right]$$

Pero de (3.20) se obtiene:

$$X_U[n - n_0] = x \left[\frac{1}{L}(n - n_0) \right] = x \left[\frac{1}{L}n - \frac{1}{L}n_0 \right] \neq X_{U_1}[n]$$

Y se puede observar que el sistema es variante con el tiempo.

Filtros Digitales

Los sistemas discretos lineales invariantes en el tiempo pueden ser caracterizados por la ecuación en diferencias de coeficientes constantes (4.1) y por la función de transferencia del sistema (4.2).

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k y[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \quad (4.1)$$

$$H[z] = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (4.2)$$

La función de transferencia es la relación entre la salida y la entrada del sistema en el dominio de la Transformada Z. De esta función se puede conocer la respuesta en frecuencia del sistema y los polos y ceros, determinados por los parámetros a_k y b_k .

La ecuación característica del sistema (4.1) puede ser realizada fácilmente mediante retardadores, sumadores y multiplicadores. En este capítulo se explicarán las estructuras más simples para implementar los sistemas discretos de acuerdo al tipo de respuesta al impulso: FIR e IIR.

4.1. Filtros Digitales con la Respuesta Finita al Impulso Unitario

Un filtro de Respuesta Finita al Impulso Unitario, *Finite Impulse Response*, es un sistema no recursivo pues obtiene la respuesta $y[n]$ utilizando M muestras. El filtro FIR es caracterizado por la ecuación en diferencias (4.3) y por la función de transferencia (4.4) [4][8]:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x[n-k] \quad (4.3)$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k} \quad (4.4)$$

Para implimentarlo existen varias estructuras, como la forma directa y la estructura en celosia. En este apartado nos centraremos únicamente en la primera estructura mencionada.

4.1.1. Forma Directa

De la ecuación (4.3) se obtiene la estructura directa o, equivalentemente, por la convolución de la secuencia de entrada y la función $h[n]$, obtenida al aplicar la transformada Z inversa a la función de transferencia, (4.5).

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n - k] = h[n] * x[n] \quad (4.5)$$

Evidentemente se observa que los coeficientes b_k de (4.3) son iguales a las muestras de la respuesta al impulso, entonces podemos definir $h[n]$ como (4.6):

$$h[n] = \begin{cases} b_k & 0 \leq k \leq M - 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.6)$$

La estructura transversal del filtro FIR se muestra en la Figura 4.1 y se observa que los valores de los multiplicadores corresponden a los coeficientes de $y[n]$. La salida de la estructura es una combinación lineal ponderada de valores pasados de la entrada (retardados) y valores actuales [7].

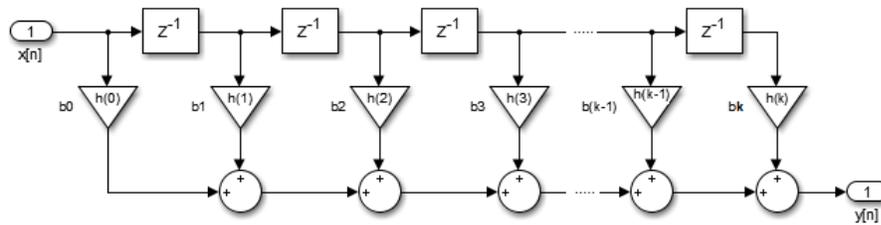


Figura 4.1: Estructura Transversal Directa del Filtro FIR

Otra forma de realizar esta estructura es utilizando la primera forma canónica, esta es obtenida aplicando los siguientes pasos [4]:

1. Cambiar los nodos por sumadores y sumadores por nodos
2. Cambiar la dirección de los amplificadores y de las flechas

- Se cambia la entrada de la estructura por la salida $y[n]$ y la salida de la estructura por la entrada $x[n]$

Aplicando las instrucciones anteriores a la estructura directa, Figura 4.1, se obtiene la estructura de la primera forma canónica que se muestra a continuación.

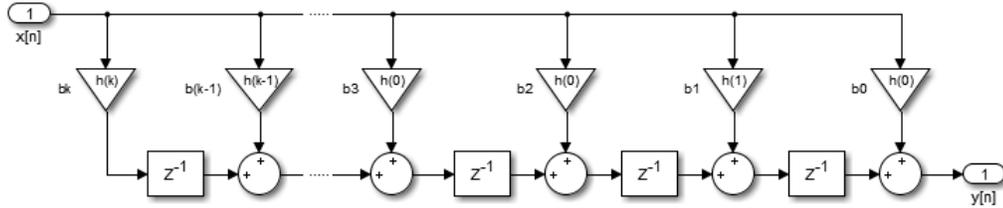


Figura 4.2: Primera Forma Canónica del Filtro FIR

Los filtros digitales de respuesta finita al impulso unitario son estables y más exactos que los filtros IIR. Y la fase de la función de transferencia es lineal. Sin embargo, la mayor desventaja es que requiere de muchos elementos para cumplir con la plantilla deseada y entre mayor sea el orden del filtro será mayor el retraso de la salida con la entrada.

4.1.2. Diseño del Filtro FIR

Para diseñar un filtro FIR basta conocer el orden del filtro, el tipo de filtro y los coeficientes de los multiplicadores. La plantilla nos indica los límites de integración para calcular los coeficientes del filtro. La integral que define los coeficientes del filtro es (4.7).

$$C_m = C_{-m} = \frac{2}{f_m} \int_0^{f_m/2} A(f) \cos(2\pi f T m) df \quad (4.7)$$

Si la curva de transferencia se normaliza, el periodo de muestreo es $T = 1/2\pi$ y la frecuencia de muestreo es $f = 2\pi$. Las ecuaciones para calcular los coeficientes de los tipos de filtros se enlistan a continuación.

Para el filtro paso bajas utilizamos la ecuación (4.8). La plantilla se muestra en la Figura 4.3.

$$C_m = C_{-m} = \frac{1}{\pi} \int_0^{0.8} \cos(mf) df \quad (4.8)$$

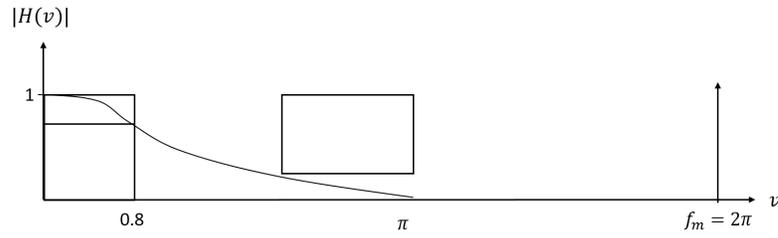


Figura 4.3: Plantilla del Filtro Paso Bajas Normalizado

Para el filtro paso altas utilizamos la ecuación (4.9). La plantilla se muestra en la Figura 4.4.

$$C_m = C_{-m} = \frac{1}{\pi} \int_{0.8}^{\pi} \cos(mf) df \quad (4.9)$$

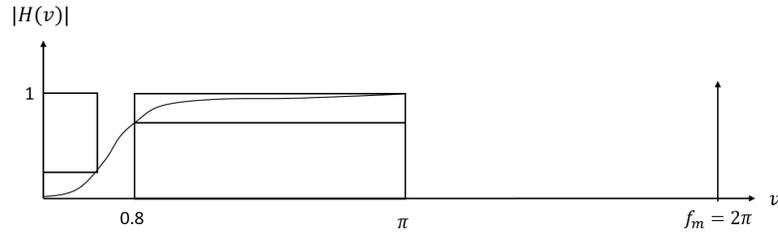


Figura 4.4: Plantilla del Filtro Paso Altas Normalizado

Para el filtro paso banda se tiene la ecuación (4.10). La plantilla se muestra en la Figura 4.5.

$$C_m = C_{-m} = \frac{1}{\pi} \int_{0.8}^{1.2} \cos(mf) df \quad (4.10)$$

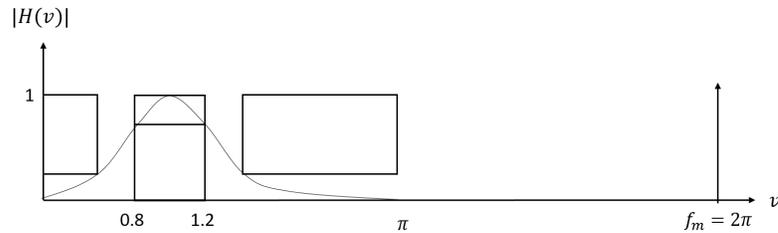


Figura 4.5: Plantilla del Filtro Paso Banda Normalizado

El filtro supresor de paso banda utiliza la combinación del paso bajas y el paso altas, la ecuación para calcular los coeficientes es (4.11). La plantilla se muestra en la

Figura 4.6.

$$C_m = C_{-m} = \frac{1}{\pi} \int_0^{0.8} \cos(mf)df + \frac{1}{\pi} \int_{1.2}^{\pi} \cos(mf)df \quad (4.11)$$

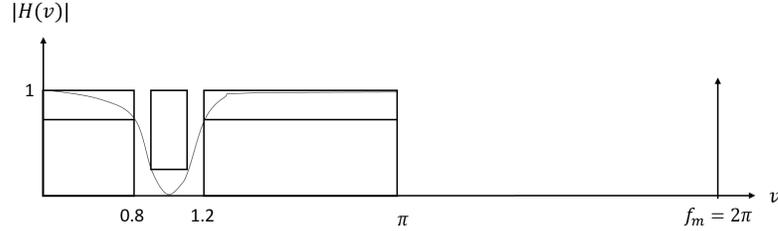


Figura 4.6: Plantilla del Filtro Supresor de Banda Normalizado

4.2. Filtros Digitales con la Respuesta Infinita al Impulso Unitario

Los filtros de Respuesta Infinita al Impulso Unitario o *Infinite Impulse Response*, son resultado de aplicar un muestreador a la función de transferencia de un sistema analógico. Como se detalló en el capítulo 2, existen varios métodos para realizar dicho muestreo pero aquí se utilizará la Transformada Bilineal, definida por la ecuación (4.12)

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \quad (4.12)$$

Si tenemos un filtro analógico $H(s)$, para obtener su versión en el dominio de Z , basta sustituir a s como se muestra a continuación:

$$H_D(z) = H_A(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)} \quad (4.13)$$

Obteniendo la estructura general descrita por la ecuación (4.2), a su vez, esta puede ser descompuesta por dos ecuaciones, una que determine los polos y otra para los ceros del sistema. Entonces puede ser representada por (4.14), que corresponde a colocar dos sistemas $H_1(z)$ y $H_2(z)$ en cascada. A partir de la ecuación $H(z)$ se obtiene la estructura directa no canónica de la Figura 4.7.

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (4.14)$$

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (4.15)$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (4.16)$$

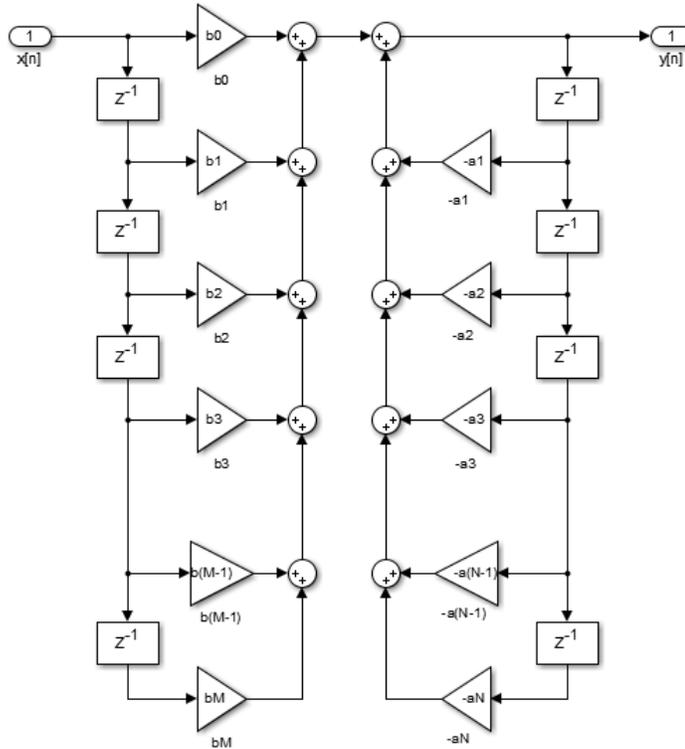


Figura 4.7: Estructura del Filtro IIR no Canónica o Estructura Directa I

La estructura anterior es no canónica porque posee $M + N$ retardadores, la estructura canónica posee tantos elementos de retardo como lo indique el orden de la función de transferencia [4]. En la Figura 4.8 se ilustra la realización del filtro IIR en segunda forma directa.

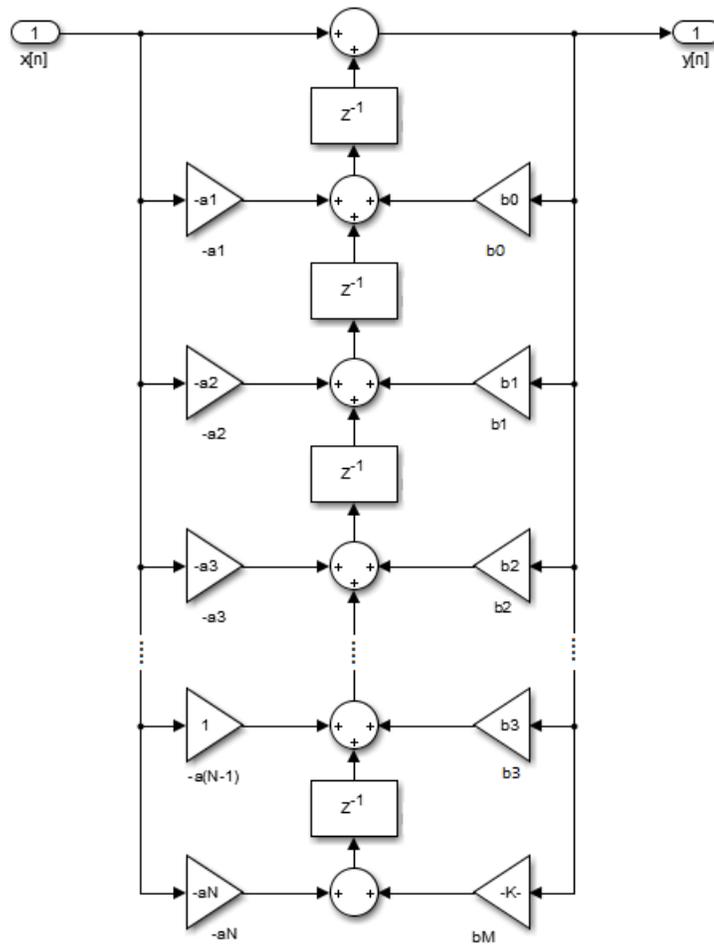


Figura 4.9: Estructura del Filtro Digital IIR Forma Canónica

Notése que en la estructura anterior se deben efectuar menos sumas que en el la Estructura Directa II.

4.2.1. Estructura en Cascada y Paralela de un Filtro Digital

Un filtro digital es un sistema discreto y puede ser representado por subsistemas, ya sea en cascada (que corresponde a una multiplicación de funciones de transferencia) o subsistemas en paralelo (en este caso es la suma de funciones de transferencia). Para formar cualquiera de los dos tipos de estructura es necesario modificar la función de transferencia del filtro digital y expresarlo ya sea como suma (4.17) o como producto (4.18).

$$H(z) = \sum_{n=0}^N H_n(z) \tag{4.17}$$

$$H(z) = \prod_{n=0}^N H_n(z) \quad (4.18)$$

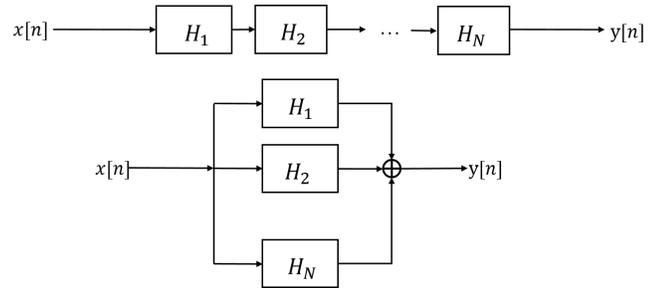


Figura 4.10: Estructura del Filtro Digital en Cascada y Paralela

Filtros con Capacitores Conmutados

En este capítulo se analiza el comportamiento de los capacitores conmutados y su equivalencia con un resistor. Más adelante se dan ejemplos de cómo sustituir un resistor por un capacitor conmutado en filtros digitales sencillos.

5.1. Capacitor Conmutado

Consideremos los circuitos de la Figura 5.1. El circuito del lado izquierdo posee un capacitor y dos interruptores que tienen la función de transferir la carga almacenada en C . Cuando $S1$ está cerrado y $S2$ abierto (tiempo par) el capacitor se carga con el voltaje v_{in} y adquiere una carga Q_{in} , cuando los interruptores están colocados en forma opuesta (tiempo impar) se descargan en la salida con una carga Q_{out} . Al hacer que los interruptores $S1$ y $S2$ cambien su posición simultáneamente se crea una variación de carga entre las terminales de entrada y salida del circuito. Dicha variación de carga está determinada por la ecuación (5.1)

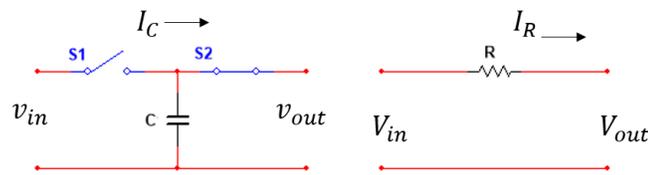


Figura 5.1: Capacitor conmutado (Izquierda) y Resistor (Derecha)

$$\Delta Q = Q_{in} - Q_{out} = v_{in}C - v_{out}C = C\Delta v \quad (5.1)$$

La transferencia de carga entre la entrada y la salida se realiza en un tiempo T_s que depende directamente de la frecuencia a la que se conmuten los interruptores $S1$ y

S2. Por otro lado, la corriente eléctrica en un capacitor es directamente proporcional a la variación del voltaje con respecto al tiempo por la capacitancia (5.2), como en el circuito en cuestión, por lo que la corriente I_C es (5.3).

$$i_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt} \quad (5.2)$$

$$I_C = C \frac{\Delta v}{T_s} \quad (5.3)$$

La corriente en el circuito del lado derecho de la Figura 5.1 se obtiene directamente de la Ley de Ohm y se calcula con la ecuación (5.4). Los voltajes de entrada y salida de ambos circuitos son iguales por lo tanto $\Delta V = \Delta v$ y si $I_R = I_C$ se obtiene (5.5). De esta última ecuación vemos que una resistencia puede ser sustituida por un capacitor conmutando a una frecuencia f_s .

$$I_R = \frac{V_{in} - V_{out}}{R} = \frac{\Delta V}{R} \quad (5.4)$$

$$C = \frac{T_s}{R} = \frac{1}{Rf_s} \quad (5.5)$$

Si fijamos el valor del capacitor de la ecuación (5.5) vemos que la resistencia es inversamente proporcional a la frecuencia f_s , a medida que f_s aumente la resistencia incrementará, en consecuencia f_s debe ser lo suficientemente grande para poder modelar un capacitor conmutado como resistencia [4][9].

5.2. Transformación de Circuitos

Para obtener el circuito equivalente con capacitores conmutados de un circuito, que tenga resistores, basta sustituir el capacitor del valor indicado con interruptores activos. El filtro con capacitores conmutados a implementar utilizará la estructura Fleischer - Laker, a manera de ejemplo se explica con se obtienen las funciones de transferencia de un circuito con capacitores y resistores, y otro con amplificador operacional.

Tomemos como ejemplo el bipuerto de la Figura 5.2 del lado izquierdo y su versión con capacitores conmutados en el lado derecho.



Figura 5.2: Bipuerto (Izquierdo) y Bipuerto con Capacitor Conmutado (Derecho)

Al igual que un circuito eléctrico común es caracterizado por la función de transferencia en el dominio s , los circuitos con capacitores conmutados puede ser caracterizados

por la función de transferencia en el dominio z . Dicha función de transferencia se obtiene de la matriz de capacitancias del circuito. Para construir la matriz de capacitancias se consideran 3 estados del circuito con capacitores conmutados:

- Circuito sin interruptores
- Tiempo par
- Tiempo impar

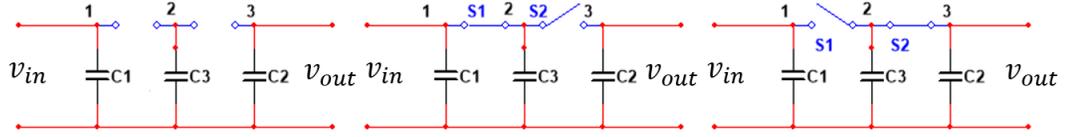


Figura 5.3: Sin interruptores (Izquierdo), Tiempo Par (Centro) y Tiempo Impar (Derecho)

El circuito tiene 3 nodos, entonces la matriz tiene 6 renglones y 6 columnas, 3 para el tiempo par y 3 para el impar. Los renglones se toman como eje de la corriente y las columnas como el eje del voltaje. La matriz se compone de 4 submatrices: PP , PI , IP e II . La primera letra de cada elemento de la matriz indica si el reglón es par o impar, la segunda letra indica si la columna es par o impar (5.6).

$$\begin{bmatrix} PP_{11} & PP_{12} & PP_{13} & PI_{11} & PI_{12} & PI_{13} \\ PP_{21} & PP_{22} & PP_{23} & PI_{21} & PI_{22} & PI_{23} \\ PP_{31} & PP_{32} & PP_{33} & PI_{31} & PI_{32} & PI_{33} \\ IP_{11} & IP_{12} & IP_{13} & II_{11} & II_{12} & II_{13} \\ IP_{21} & IP_{22} & IP_{23} & II_{21} & II_{22} & II_{23} \\ IP_{31} & IP_{32} & IP_{33} & II_{31} & II_{32} & II_{33} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

La primer submatriz, PP , se llena sin considerar los interruptores del circuito; el primer elemento PP_{11} corresponde al primer capacitor entre el nodo 1 y 1, el segundo PP_{12} entre el 1 y 2, y se sigue como lo indican los subíndices de la submatriz formada los elementos PP_{nm} de (5.6). Esta submatriz se copia a los elementos II . Se multiplica $-z^{-1/2}$ por PP y esta nueva matriz se copia en PI e IP . La matriz de capacitancias del circuito de la Figura 5.3 queda como sigue:

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & -C_1 z^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 & 0 & -C_3 z^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & 0 & -C_2 z^{-1/2} \\ -C_1 z^{-1/2} & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -C_3 z^{-1/2} & 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & -C_2 z^{-1/2} & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Para reducir la matriz del circuito se consideran los tiempos par e impar. De la Figura 5.3, se observa que en el tiempo par los nodos 1 y 2 se conectan, para el tiempo impar

los nodos 2 y 3 son los que se conectan. Entonces los renglones 1 y 2 pares se suman para el tiempo par y los renglones 2 y 3 impares se suman para el tiempo impar; las columnas 1 y 2 pares se suman para el tiempo par y las columnas 2 y 3 impares se suman para el tiempo impar (5.8). Realizando la sustitución se obtiene (5.17).

$$\begin{bmatrix} PP_{11} + PP_{12} + PP_{21} + PP_{22} & PP_{13} + PP_{23} & PI_{11} + PI_{21} & PI_{12} + PI_{13} + PI_{22} + PI_{23} \\ PP_{31} + PP_{32} & PP_{33} & PI_{31} & PI_{32} + PI_{33} \\ IP_{11} + IP_{12} & IP_{13} & II_{11} & II_{12} + II_{13} \\ IP_{21} + IP_{22} + IP_{31} + IP_{32} & IP_{23} + IP_{33} & II_{21} + II_{31} & II_{22} + II_{23} + II_{32} + II_{33} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\begin{bmatrix} C_1 + C_3 & 0 & -C_1 z^{-1/2} & -C_3 z^{-1/2} \\ 0 & C_2 & 0 & -C_2 z^{-1/2} \\ -C_1 z^{-1/2} & 0 & C_1 & 0 \\ -C_3 z^{-1/2} & -C_2 z^{-1/2} & 0 & C_3 + C_2 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

La función de transferencia queda definida por la relación voltaje de salida entre entrada, como se ve en la ecuación (5.18). Sustituyendo los cofactores en la ecuación (5.18) obtenemos la función de transferencia del circuito con capacitores conmutados (5.13)

$$H(z) = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{\text{cof}(PP_{13})}{\text{cof}(PP_{11})} \quad (5.10)$$

$$\text{cof}(PP_{11}) = \begin{vmatrix} C_2 & 0 & -C_2 z^{-1/2} \\ 0 & C_1 & 0 \\ -C_2 z^{-1/2} & 0 & C_3 + C_2 \end{vmatrix} = C_1 C_2 (C_3 + C_2) - C_1 C_2^2 z^{-1} \quad (5.11)$$

$$\text{cof}(PP_{13}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -C_2 z^{-1/2} \\ -C_1 z^{-1/2} & C_1 & 0 \\ -C_3 z^{-1/2} & 0 & C_3 + C_2 \end{vmatrix} = -C_1 C_2 C_3 z^{-1} \quad (5.12)$$

$$H(z) = \frac{-z^{-1}}{1 + \frac{C_2}{C_3} - \frac{C_2}{C_3} z^{-1}} \quad (5.13)$$

Ahora consideremos un circuito eléctrico con amplificador operacional. En la Figura 5.4 se muestra un integrador, sustituiremos la resistencia R por un capacitor conmutado.

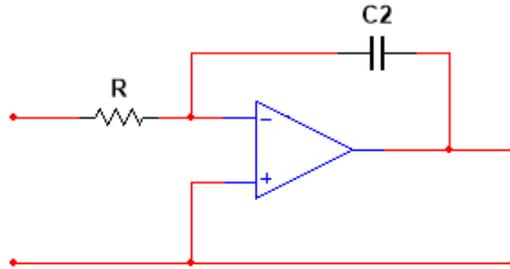


Figura 5.4: Circuito Integrador)

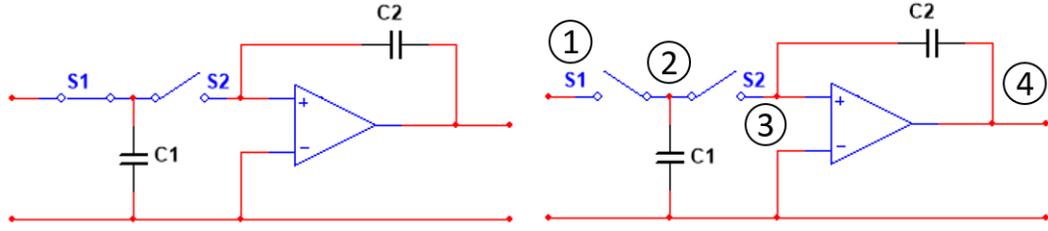


Figura 5.5: Circuito Integrador: con Capacitores Conmutados (Izquierda); con Nodos (Derecha)

El circuito con capacitores conmutados se ilustra en la Figura 5.5, en esta misma figura se definen los nodos del circuito para construir la matriz. El circuito tiene 4 nodos, la matriz tiene 8 renglones y 8 columnas, 4 para el tiempo par y 4 para el impar. La matriz se compone de 4 submatrices: PP , PI , IP e II (5.14).

$$\begin{bmatrix} PP_{11} & PP_{12} & PP_{13} & PP_{14} & PI_{11} & PI_{12} & PI_{13} & PI_{14} \\ PP_{21} & PP_{22} & PP_{23} & PP_{24} & PI_{21} & PI_{22} & PI_{23} & PI_{24} \\ PP_{31} & PP_{32} & PP_{33} & PP_{34} & PI_{31} & PI_{32} & PI_{33} & PI_{34} \\ PP_{41} & PP_{42} & PP_{43} & PP_{44} & PI_{41} & PI_{42} & PI_{43} & PI_{44} \\ IP_{11} & IP_{12} & IP_{13} & IP_{14} & II_{11} & II_{12} & II_{13} & II_{14} \\ IP_{21} & IP_{22} & IP_{23} & IP_{24} & II_{21} & II_{22} & II_{23} & II_{24} \\ IP_{31} & IP_{32} & IP_{33} & IP_{34} & II_{31} & II_{32} & II_{33} & II_{34} \\ IP_{41} & IP_{42} & IP_{43} & IP_{44} & II_{41} & II_{42} & II_{43} & II_{44} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Utilizando el método descrito en el ejemplo anterior se procede a llenar la matriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & -C_1 z^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & -C_2 & 0 & 0 & -C_2 z^{-1/2} & C_2 z^{-1/2} \\ 0 & 0 & -C_2 & C_2 & 0 & 0 & C_2 z^{-1/2} & -C_2 z^{-1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_1 z^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_2 z^{-1/2} & C_2 z^{-1/2} & 0 & 0 & C_2 & -C_2 \\ 0 & 0 & C_2 z^{-1/2} & -C_2 z^{-1/2} & 0 & 0 & -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Para reducir la matriz se consideran los tiempos par e impar y además se hacen algunas consideraciones para el amplificador operacional. La impedancia al final del circuito es muy grande por lo tanto la corriente puede considerarse nula, entonces los renglones (correspondientes a la corriente) 4 par y 4 impar se suprimen. Como la impedancia de entrada al amplificador operacional es idealmente infinita el voltaje $V_3 = 0$ y las

columnas (correspondientes al voltaje) 3 par y 3 impar pueden eliminarse (5.16).

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 & -C_1z^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & -C_2 & 0 & 0 & C_2z^{-1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_1z^{-1/2} & 0 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_2z^{-1/2} & 0 & 0 & -C_2 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

De la Figura 5.5, se observa que en el tiempo par los nodos 1 y 2 se conectan por lo que las columnas pares 1 y 2 se suman. Para el tiempo impar el nodo 2 se conecta a tierra y $V_2 = 0$ e $I_1, I_2 = 0$, por lo que la columna 2 impar se suprime, los renglones 2 y 3 impares se suman y se eliminan el renglón y columna 1 impar (5.17).

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & C_2z^{-1/2} \\ -C_1z^{-1/2} & C_2z^{-1/2} & -C_2 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

La función de transferencia queda definida por la ecuación (5.18). Sustituyendo los cofactores en la ecuación anterior obtenemos la función de transferencia del circuito con capacitores conmutados (5.21).

$$H(z) = \frac{v_4}{v_1} = \frac{\text{cof}(C_{14})}{\text{cof}(C_{11})} \quad (5.18)$$

$$\text{cof}(C_{11}) = \begin{vmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & C_2z^{-1/2} \\ -C_1z^{-1/2} & C_2z^{-1/2} & -C_2 \end{vmatrix} = C_2^2(1 - z^{-1/2}) \quad (5.19)$$

$$\text{cof}(C_{14}) = \begin{vmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & C_2z^{-1/2} \\ -C_1z^{-1/2} & C_2z^{-1/2} & -C_2 \end{vmatrix} = -C_1C_2z^{-1} \quad (5.20)$$

$$H(z) = \frac{-z^{-1}}{\frac{C_2}{C_1}(1 - z^{-1})} \quad (5.21)$$

5.3. Estructura Fleischer - Laker

La estructura Fleischer - Laker o bicuadrática en z es un filtro con función de transferencia de la forma:

$$H(z) = g \frac{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad (5.22)$$

Cuando la ganancia g se factoriza para dejar al numerador y denominador normalizados. De otra forma la ecuación tomará la siguiente forma:

$$H(z) = \frac{g + ez^{-1} + dz^{-2}}{1 + az^{-1} + bz^{-2}} \quad (5.23)$$

La estructura Fleischer-Laker es una topología muy utilizada debido a su versatilidad y libertad de diseño, además de que es un filtro activo muy estable y con ancho de banda constante al variar la frecuencia. La topología Fleischer-Laker SC biquad se muestra en la Figura 5.6, la función de transferencia puede obtenerse con el método ya empleado pero para fines prácticos utilizaremos la librería PraCan para Maple. Entonces al punto $T1$ la función de transferencia es (5.24) y al punto $T2$ es (5.25).

$$H(z)_{T1} = \frac{[I(C + E) - G(F + B)] + [H(F + B) + B + G - JC - E(1 + J)]z^{-1} + [EJ - BH]z^{-2}}{D(F + B) + [A(C + E) - DF - 2DB]z^{-1} + [DB - AE]z^{-2}} \quad (5.24)$$

$$H(z) = \frac{DI + (AG - DI - DJ)z^{-1} + (DJ - AH)z^{-2}}{D(F + B) + [A(C + E) - DF - 2DB]z^{-1} + (DB - AE)z^{-2}} \quad (5.25)$$

Es posible simplificar las funciones de transferencia haciendo constantes a algunas de las variables de las funciones. En este trabajo solo utilizaremos (5.25), para fines prácticos hacemos la siguiente asignación $A = B = D = 1$ obteniendo la ecuación siguiente al punto $T2$:

$$H(z) = \frac{I + (G - I - J)z^{-1} + (J - H)z^{-2}}{F + 1 + [C + E - F - 2]z^{-1} + (1 - E)z^{-2}} \quad (5.26)$$

Al igualar cada término de la ecuación (5.26) a (5.23), puede notarse que F debe ser cero para que se cumpla la igualdad, por lo tanto se tiene un circuito tipo F. Los valores de cada variable pueden calcularse con las siguientes expresiones:

$$A = B = D = 1 \quad (5.27)$$

$$C = 1 + a + b \quad (5.28)$$

$$E = 1 - b \quad (5.29)$$

$$F = 0 \quad (5.30)$$

$$G = 2g + e \quad (5.31)$$

$$H = g - d \quad (5.32)$$

$$I = J = g \quad (5.33)$$

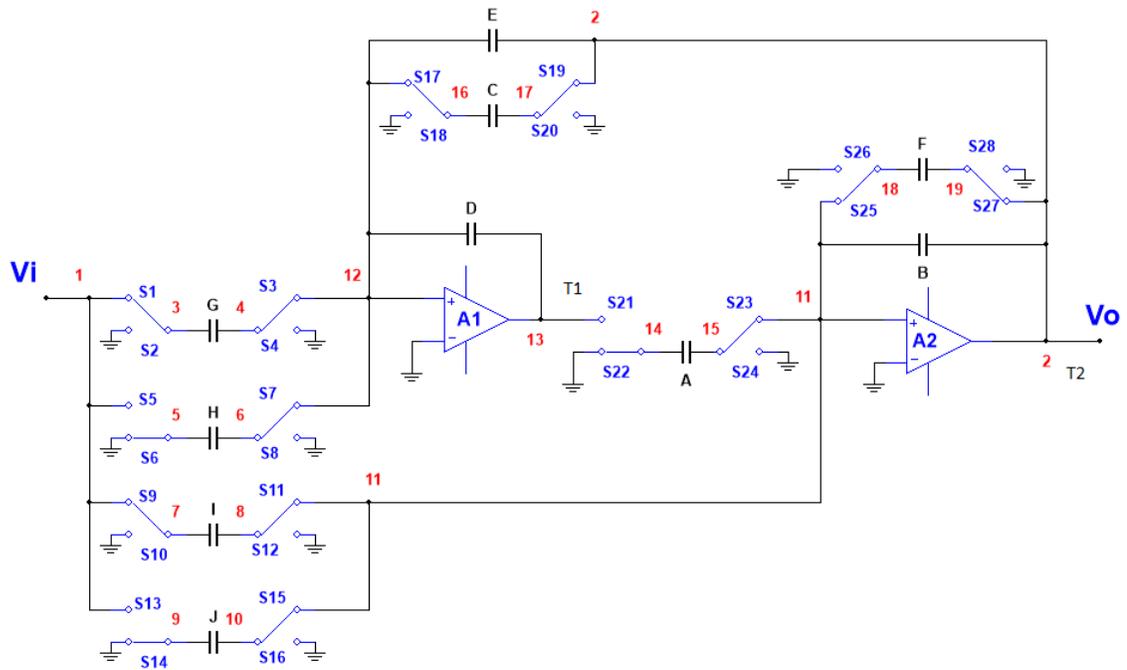


Figura 5.6: Estructura Fleischer-Laker con Capacitores Conmutados

Ejemplo: Obtener el circuito del filtro con capacitores conmutados para un filtro digital paso bajas Butterworth de segundo orden con frecuencia de corte normalizada de 0.5.

Para resolverlo utilizaremos las herramientas MATLAB y MAPLE con la librería PraCan. Para obtener la función de transferencia del filtro digital utilizamos la siguiente instrucción:

$$[a, b] = \text{butter}(n, Wn)$$

donde a y b son vector de coeficientes del numerador y denominador, respectivamente, de $H(z)$; n es el orden del filtro y Wn es la frecuencia de corte normalizada.

$$[a, b] = \text{butter}(2, 0.5)$$

$a =$

$$0.2929 \quad 0.5858 \quad 0.2929$$

$b =$

$$1.0000 \quad -0.0000 \quad 0.1716$$

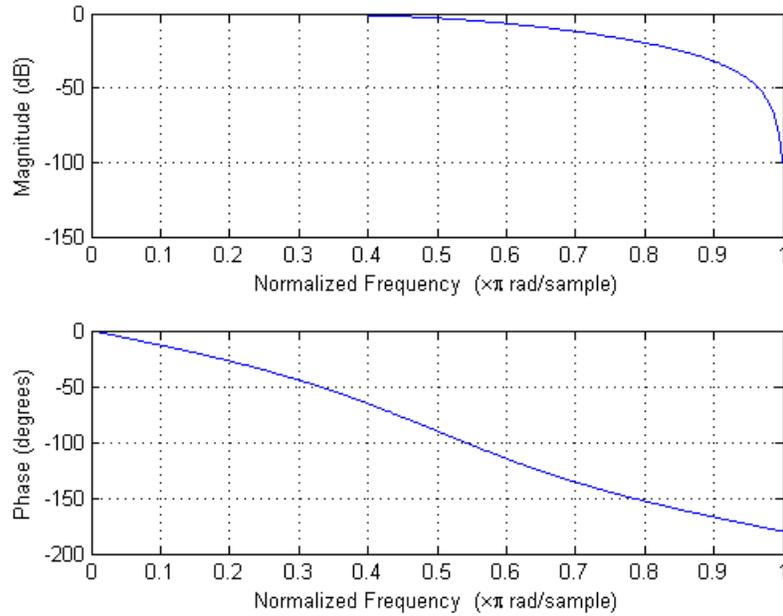


Figura 5.7: Respuesta en Frecuencia del Filtro Paso Bajas Digital Butterworth orden 2

Con las siguientes instrucciones podemos observar como será la curva de respuesta en frecuencia, Figura 5.7:

```
freqz(a,b);
dataIn = randn(1000,1);
dataOut = filter(b,a,dataIn);
```

Para convertir el circuito a la versión con capacitores conmutados con la estructura Fleischer-Laker haremos uso de las expresiones (5.23) y (5.27) a (5.3). Los coeficientes de los capacitores son los siguientes:

$$A = B = D = 1 \quad (5.34)$$

$$C = 1.1716 \quad (5.35)$$

$$E = 0.8284 \quad (5.36)$$

$$F = 0 \quad (5.37)$$

$$G = 1.1716 \quad (5.38)$$

$$H = 0 \quad (5.39)$$

$$I = J = 0.2929 \quad (5.40)$$

Al realizar la simulación en Maple, obtenemos la siguiente gráfica, Figura 5.8.

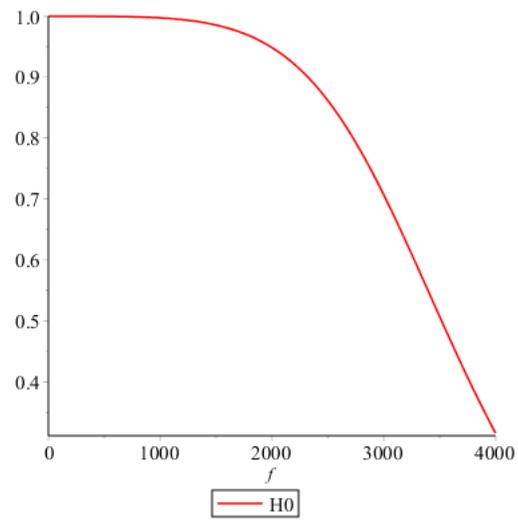


Figura 5.8: Respuesta en Frecuencia del Filtro Paso-Bajas

Banco de Filtros Digitales

Una de las aplicaciones del cambio de frecuencia de muestreo es la codificación de voz. Dicha operación va acompañada de una etapa de filtrado. Es posible dividir a la señal original en varias subseñales, cada una de estas nuevas señales posee una determinada parte de la información espectral de la original. De tal manera que cada parte de la señal sea procesada de manera sepada.

Un banco de filtros se utiliza basicamente para descomponer una señal en dos o más señales. Por ejemplo, para la codificación de voz, compresión de imagenes, filtros adaptativos o procesamiento de señales e imagenes [4]. De igual manera, pueden utilizarse para unir dos o más señales, por ejemplo para transmitir varias señales en el mismo canal de comunicación.

Los bancos de filtros son divididos en dos: de análisis, que consiste en un conjunto de filtros acomodados en paralelo y divide a la señal en sub-bandas; y de síntesis que es un conjunto de filtros en paralelo cuyo propósito es sumar las señales a la salida de cada filtro para obtener la señal sintetizada [4][9].

En este trabajo haremos uso de ambos tipos, bancos de filtros de análisis espectral y de síntesis de la señal.

A lo largo del capítulo estudiaremos algunos conceptos básicos para diseñar esos filtros, los errores que generan: aliasing, la distorsión de amplitud y fase. Así como la condición para obtener una reconstrucción perfecta.

6.1. Bancos de Análisis y de Síntesis

Un banco de filtros digitales es un conjunto de filtros con una entrada o salida común. Un banco de análisis esta formado por M filtros de análisis $H_k(z)$, este divide a una señal $x[n]$ en M señales sub-banda $x_k[n]$, Figura (6.1)(a). Un banco de síntesis

es un conjunto de M filtros de síntesis $F_k(z)$, que son los que combinan las señales de M sub-bandas $y_k[n]$ en una señal $\hat{x}[n]$, Figura (6.1)(b).

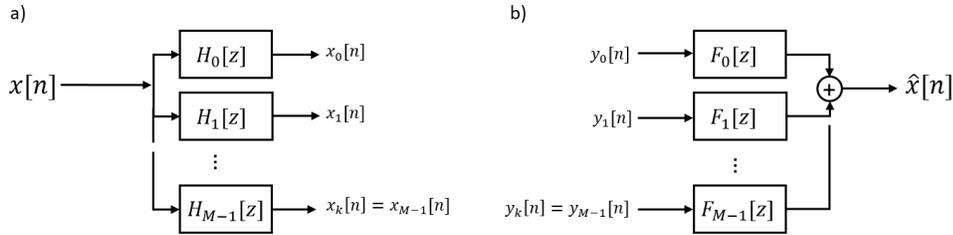


Figura 6.1: Bancos de Filtros de Análisis y Síntesis de M Canales

Existen dos grupos de bancos de filtros uniformes: Bancos de dos canales (Quadrature Mirror Filter Bank) y los Bancos Multi-Canales (para $M > 2$). El número de canales depende del número de señales en que se dividirá la señal.

El banco de filtros multi-canales divide a la señal en M señales diferentes con M canales, sin importar si M es par o impar, mientras que el banco QMF separa a la señal en dos 2 señales a través de dos canales. Los bancos de filtros QMF pueden ser usados para crear bancos Multi-Canales cuando M es potencia de 2.

El banco de filtros de cuatro canales puede generarse utilizando bancos QMF. En este caso, la señal original es dividida por un QMF para obtener dos bandas. Después de que la señal es decimada y filtrada se vuelve a dividir en dos bandas usando otro QMF en cada sub-banda, de nuevo es decimada y filtrada. De aquí se obtienen los cuatro canales para decimar. La parte de síntesis de la señal sigue la misma lógica.

6.2. Codificación en sub-bandas de la señal de voz

Un canal de voz estándar tiene un ancho de banda de 4kHz, sin embargo no todas las señales están limitadas en banda. La mayoría de las señales tienen un rango de frecuencias dominantes en donde se concentra la mayor cantidad de información de la señal. Tomemos con ejemplo el espectro de la señal de la Figura (6.2)(a). La información básica de la señal original está en la parte del espectro con bajas frecuencias. Esta porción de información es suficiente para realizar una aproximación de la señal original. La información localizada en las frecuencias altas complementa la aproximación.

Una porción, no despreciable, de la señal que se encuentre en altas frecuencias no permitirá algún tipo de compresión de la señal. De igual manera, esta información no permitiría submuestrear a $x[n]$ sin causar solapamiento en la frecuencia.

Una posible solución a este problema es dividir la señal. Por ejemplo, en dos bandas

utilizando un banco de análisis con una respuesta en frecuencia como la que se ve en la Figura (6.2)(b), obteniendo dos señales sub-banda $x_0[n]$ y $x_1[n]$, donde se observa que $x_1[n]$ tiene menos infomarción que $x_0[n]$ y puede codificarse con menos bits.

La codificación de sub-banda consiste en dividir una señal en dos o más señales sub-bandas, submuestrear cada señal y codificarla con un determinado número de bits por muestra, dependiendo de la cantidad de infomarción que contenga.

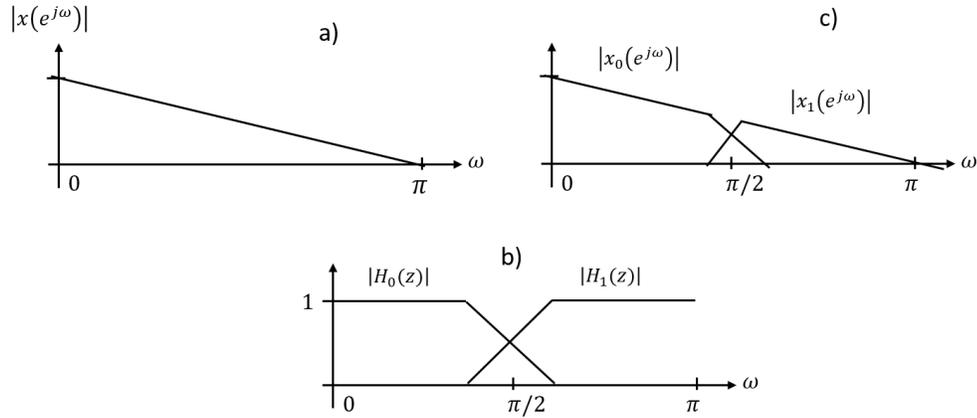


Figura 6.2: División de una señal en sub-bandas

Para reconstruir la señal original utilizamos bloques de sobremuestreo o interpoladores, que restaurarán la frecuencia de muestreo original. Sabemos que este proceso genera imágenes en la frecuencia, para eliminarlas se utiliza un banco de síntesis. En la Figura (6.4) se muestra el proceso completo utilizando un banco de dos canales.

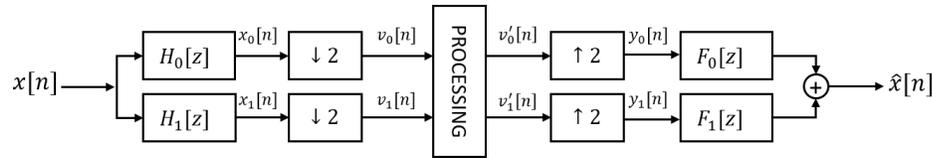


Figura 6.3: Codificador de Voz de dos Canales (Quadrature Mirror Filter) con etapa de Procesamiento

En general, el espectro de la señal puede ser dividida en M sub-bandas. Las señales sub-banda pueden comprimirse más que la señal original. En el caso del codificador de dos canales, la señales son decimadas por un factor $M = 2$, es decir, solo se toma una muestra de cada dos. Para el caso general, las M señales sub-banda son submuestreadas por un factor M , dicho de otra manera, de cada M muestras se toma solo una en cada canal.

En el caso del codificador de dos canales o Quadrature Mirror Filter Bank, mos-

trado en la Figura anterior. La señal original $x[n]$ es filtrada por el banco de análisis, compuesto por el filtro paso bajas $H_0(z)$ y el paso altas $H_1(z)$. Cada señal sub-banda $x_1[n]$ y $x_2[n]$ es limitada en banda por la mitad del total de ancho de banda de la señal original. Posteriormente, las señales son submuestreadas por un factor de dos para obtener las señales $v_0[n]$ y $v_1[n]$. Estas nuevas señales son codificadas de tal manera que las características principales de la original no se vean alteradas. Del lado del receptor, las señales recibidas son decodificadas para producir las señales $v_0[n]$ y $v_1[n]$ que serán pasadas por los interpoladores. Las señales interpoladas $y_0[n]$ y $y_1[n]$ son pasadas a través del banco de síntesis. Este banco está formado por el filtro paso bajas $F_0(z)$ y el filtro paso altas $F_1(z)$. De esta manera se obtiene la señal reconstruida $\hat{x}[n]$.

La señal $\hat{x}[n]$ no es completamente igual a $x[n]$ debido a tres errores que generan los bancos de filtros: aliasing, distorsiones de fase y amplitud. En el caso del codificador de voz, se pretende diseñar un sistema de tal manera que nuestros oídos no puedan notar los errores generados al reconstruir la señal a partir de la reducción del número de bits por muestra al comprimir la señal original.

6.3. Reconstrucción Perfecta en un Banco QMF

El banco de filtros de dos canales (6.4), divide el ancho de banda de la señal en dos. Las señales decimadas $v_k[n]$ ya pueden utilizarse en la etapa de procesamiento. Normalmente, en este paso son almacenadas o transmitidas al canal. Del lado del receptor se obtienen las señales $v'_k[n]$, que representan una aproximación de de las originales, $v_k[n]$, codificadas. El error de decodificación o de cuatificación sub-banda, $v_k[N] - v'_k[N]$, es una distorsión no lineal. Este error no puede corregirse por lo que no es posible recuperar las señales sub-banda correctamente. Para este trabajo asumiremos $v'_k[n] = v_k[n]$, pues no existe esa etapa de procesamiento.

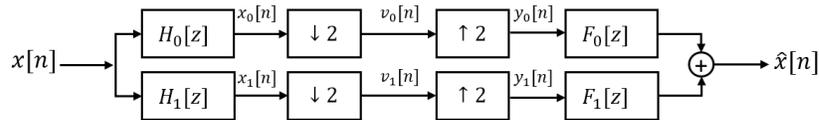


Figura 6.4: Codificador de Voz de dos Canales (Quadrature Mirror Filter)

6.3.1. Aliasing

Para obtener una expresión de la señal reconstruida vamos a analizar que sucede en cada parte del codificador de dos canales. Todas las expresiones quedarán en términos de la Transformada Z. En el banco de análisis las señales sub-banda que se obtienen al

pasar la señal original por los filtros son:

$$X_k(z) = H_k(z)X(z) \quad \forall \quad k = 0, 1 \quad (6.1)$$

Y decimando cada una obtenemos:

$$V_k(z) = \frac{1}{2} \left[X_k(z^{1/2}) + X_k(-z^{1/2}) \right] \quad \forall \quad k = 0, 1 \quad (6.2)$$

El segundo término de la ecuación anterior representa el aliasing. En el banco de síntesis con $v'_k[n] = v_k[n]$, sin error de cuantificación, las señales interpoladas son:

$$Y_k(z) = V_k(z^2) = \frac{1}{2} \left[X_k(z) + X_k(-z) \right] \quad \forall \quad k = 0, 1 \quad (6.3)$$

$$Y_k(z) = \frac{1}{2} \left[H_k(z)X(z) + H_k(-z)X(-z) \right] \quad \forall \quad k = 0, 1 \quad (6.4)$$

Aplicando los filtros de reconstrucción:

$$\hat{X}(z) = F_0(z)Y_0(z) + F_1(z)Y_1(z) \quad (6.5)$$

Al sustituir $Y_k(z)$ en la señal reconstruida obtenemos la ecuación (6.7)

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2}F_0(z) \left[H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z) \right] + \frac{1}{2}F_1(z) \left[H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z) \right] \quad (6.6)$$

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2} \left[F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) \right] X(z) + \frac{1}{2} \left[F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) \right] X(-z) \quad (6.7)$$

El segundo término de la función de reconstrucción se debe al aliasing generado en el banco de análisis. Definiendo dos funciones es posible compactar la expresión a (6.8). Donde (6.9) es la distorsión de la función de transferencia y (6.10) el error de aliasing.

$$\hat{X}(z) = D(z)X(z) + A(z)X(-z) \quad (6.8)$$

$$D(z) = \frac{1}{2} \left[F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) \right] \quad (6.9)$$

$$A(z) = \frac{1}{2} \left[F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) \right] \quad (6.10)$$

En una determinada sub-banda del banco de síntesis pueden aparecer componentes de la señal que pertenecen a una banda distinta. Si la respuesta en frecuencia de los filtros se enciman es posible que la energía de una sub-señal pase a otra banda. Una forma de evitar esto es utilizando filtros con una pendiente de transición muy alta. Desafortunadamente la construcción de esos filtros es compleja y costosa. Una forma

de eliminar el aliasing es eligiendo los filtros adecuados en el banco de síntesis de tal manera que sea cancelado, esto es $A(z) = 0$ (6.11).

$$\frac{1}{2} [F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z)] = 0 \quad (6.11)$$

Que implica,

$$\frac{F_0(z)}{F_1(z)} = -\frac{H_1(-z)}{H_0(-z)} \quad (6.12)$$

Existen diversas soluciones para cumplir con la condición, utilizaremos las siguientes relaciones:

$$F_0(z) = H_1(-z) \quad F_1(z) = -H_0(-z) \quad (6.13)$$

Dados los filtros del banco de análisis es posible cancelar el aliasing eligiendo los filtros adecuados en el banco de síntesis. Por lo que el objetivo del codificador de dos canales no es evitar el aliasing, sino permitirlo para luego eliminarlo.

Si el aliasing es cancelado, la relación entre las señales de entrada y salida del banco QMF es:

$$\hat{X}(z) = D(z)X(z) \quad (6.14)$$

$$T(z) = D(z) = \frac{\hat{X}(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} [F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z)] \quad (6.15)$$

Y la función de transferencia del banco queda determinada por esta ecuación la cual es LTI y representa la distorsión causada por el sistema.

6.3.2. Distorsiones en Amplitud y Fase

Asumiendo que la función $A(z) = 0$, tenemos un sistema libre de aliasing y la relación entre la señal original y reconstruida queda dada por la función de transferencia (6.15). Sustituyendo $z = e^{j\omega}$ en la función de distorsión, tenemos:

$$T(e^{j\omega}) = |T(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)} \quad (6.16)$$

Entonces la ecuación (6.14) queda como:

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = |T(e^{j\omega})|X(e^{j\omega})e^{j\phi(\omega)} \quad (6.17)$$

De la ecuación (6.17) podemos ver que a menos que la función $T(z)$ sea un filtro que deje pasar todo, la señal reconstruida $\hat{X}(z)$ sufrirá una distorsión en amplitud. De igual manera, a menos que $T(z)$ tenga fase lineal, la fase de $\hat{X}(z)$ también será distorsionada.

6.3.3. Reconstrucción Perfecta

Si el banco de dos canales esta libre de aliasing, distorsión en amplitud y fase, es de reconstrucción perfecta. La función de distorsión debe tener la siguiente forma:

$$\hat{X}(z) = cz^{-n_0}X(z) \quad \hat{x}[n] = cx[n - n_0] \quad c \neq 0 \quad (6.18)$$

que nos indica que la señal reconstruida es una versión escalada y desplazada en el tiempo de la señal original.

Entonces para que la señal reconstruida sea perfecta la ecuación (6.15) debe cumplir lo siguiente:

$$F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) = 2z^{-n_0} \quad (6.19)$$

La constante $c = 2$ de la ecuación (6.18) hace que las funciones $\hat{X}(z)$ y $X(z)$ sean iguales. Esta constante alterará los filtros de síntesis como se verá en la siguiente parte.

6.3.4. Elección de los filtros

Para el caso del filtro de dos canales, el ancho de banda de la señal de entrada debe ser dividida en 2 partes iguales. En los bancos de análisis y síntesis deben existir un filtro paso-bajas y otro paso-altas. El aliasing será cancelado eligiendo los filtros del banco de síntesis adecuados, de acuerdo a los calculados en el banco de análisis.

Primero se elige un filtro $H_0(z)$ (paso-bajas), el filtro paso altas se obtiene con:

$$H_1(z) = H_0(-z) \quad (6.20)$$

Sustituyendo la ecuación (6.20) en las relaciones (6.13) obtenemos:

$$F_0(z) = H_1(-z) = H_0(z) \quad F_1(z) = -H_0(-z) = -H_1(z) \quad (6.21)$$

Tomando en cuenta la ecuación (6.18) y la condición (6.19), es necesario añadir la constante $c = 2$ de modo que los filtros del banco de síntesis quedan de la siguiente manera:

$$F_0(z) = 2H_1(-z) = 2H_0(z) \quad F_1(z) = -2H_0(-z) = -2H_1(z) \quad (6.22)$$

La ecuación (6.20) implica que $|H_1(e^{j\omega})| = |H_0(e^{j(\pi-\omega)})|$, la cual asegura que $H_1(z)$ es un filtro paso altas si $H_0(z)$ es paso bajas.

Se definen las funciones $P_0(z)$ y $P_1(z)$ como:

$$P_0(z) = F_0(z)H_0(z) \quad (6.23)$$

$$P_1(z) = F_1(z)H_1(z) \quad (6.24)$$

Y la función de distorsión $T(z)$ es:

$$T(z) = H_0^2(z) - H_0^2(-z) = P_0(z) - P_0(-z) \quad (6.25)$$

6.3.5. Banco QMF con filtros FIR

Suponga que tenemos el filtro digital paso bajas de primer orden descrito por la ecuación en diferencias (6.26). Aplicando la transformada Z obtenemos la función de transferencia del filtro.

$$y[n] = \frac{1}{2} [x[n] + x[n-1]] \quad (6.26)$$

$$H_0(z) = H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} (1 + z^{-1}) \quad (6.27)$$

La función característica se obtiene al sustituir $z = e^{j\omega}$ en $H_0(z)$:

$$H_0(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} (1 + e^{-j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{2}} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6.28)$$

De donde se ve que el módulo de la función de transferencia es una función coseno $M_0(\omega)$. La fase de la función es $\phi_0(\omega)$:

$$|H_0(e^{j\omega})| = M_0(\omega) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \phi_0(\omega) = -\frac{\omega}{2} \quad (6.29)$$

La ecuación (6.27) es el filtro paso bajas del banco de análisis. El filtro paso altas $H_1(z)$ se obtiene utilizando la expresión (6.20):

$$H_1(z) = H_0(-z) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{-z}\right) = \frac{1}{2} (1 - z^{-1}) \quad (6.30)$$

Sustituyendo $z = e^{j\omega}$ obtenemos:

$$H_1(z) = \frac{1}{2} (1 - e^{-j\omega}) = e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2})} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6.31)$$

De igual manera, el módulo de $H_1(z)$ esta dado por una función seno y la fase por $\phi_1(\omega)$:

$$|H_1(e^{j\omega})| = M_1(\omega) = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \phi_1(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} \quad (6.32)$$

Los filtros del banco de síntesis se obtienen de las relaciones (6.22):

$$F_0(z) = 2H_0(z) = 1 + z^{-1} \quad (6.33)$$

$$H_1(z) = -2H_1(z) = -1 + z^{-1} \quad (6.34)$$

Las funciones características se obtienen facilmente usando los espectros de los filtros del banco de análisis:

$$F_0(e^{j\omega}) = 2e^{-j\frac{\omega}{2}} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6.35)$$

$$F_1(e^{j\omega}) = -2e^{j(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2})} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6.36)$$

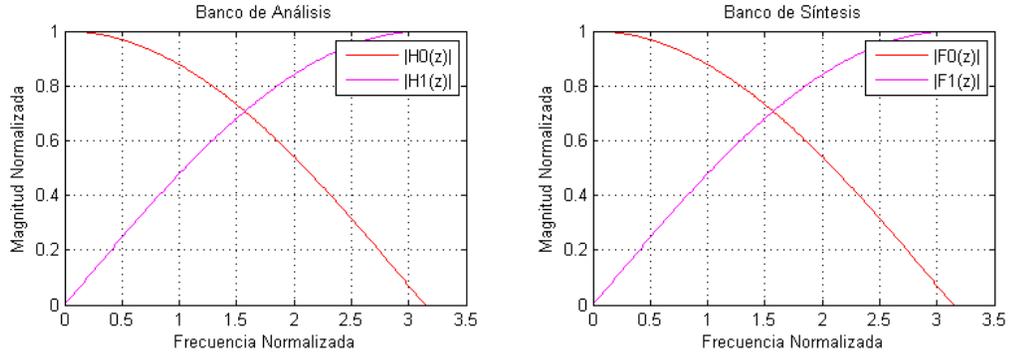


Figura 6.5: Respuesta en Frecuencia de los Filtros del Banco QMF

A continuación se realizará la simulación de todo el sistema con los coeficientes de los filtros ya calculados. Para ello utilizaremos Simulink, los datos serán obtenidos por los visores y después almacenados en estructuras para graficar las señales de entrada y salida. La Figura 6.6 muestra el sistema ya armado.

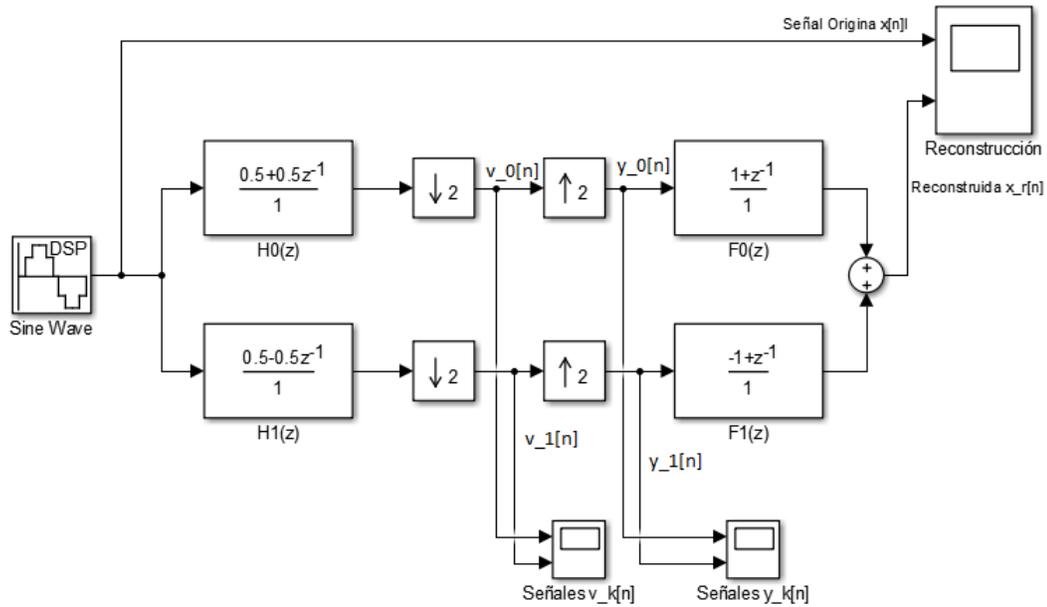


Figura 6.6: Simulación del Codificador de dos Canales QMF en Simulink

Las señales sub-banda $x_k[n]$ son obtenidas a la salida de cada filtro de análisis, después del bloque de submuestreo en cada canal son obtenidas las señales $v_k[n]$ que se muestran en la Figura 6.7. Como estas señales no se almacenan ni transmiten entran directamente a los interpoladores, las señales resultantes se muestran en la Figura 6.8.

De la ecuación (6.18), vemos que las señales de entrada $x[n]$ y la $\hat{x}[n]$ están desplazadas en el tiempo por una constante n_0 . Al sustituir los filtros en la ecuación (6.19) obtenemos:

$$\frac{1}{2}(1+z^{-1})(1+z^{-1}) + \frac{1}{2}(-1+z^{-1})(1-z^{-1}) = cz^{-n_0} \quad (6.37)$$

$$\frac{1}{2}(1+2z^{-1}+z^{-2}) + \frac{1}{2}(-1+2z^{-1}-z^{-2}) = \frac{1}{2}(4z^{-1}) = 2z^{-1} \quad (6.38)$$

De nuevo se ve que $c = 2$ que es la constante que cancela al 2 del denominador de la función de distorsión para lograr la reconstrucción perfecta. Y $n_0 = 1$ es el desplazamiento que hay entre la señal original y la reconstruida. La Figura 6.9 muestra este desplazamiento en el tiempo.

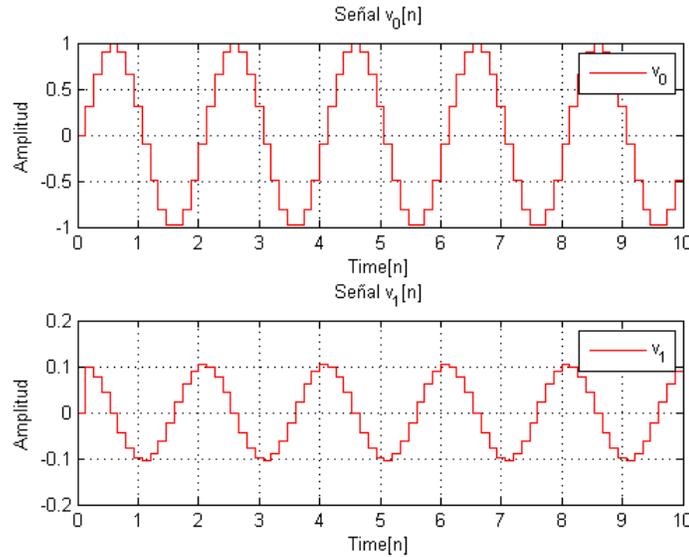


Figura 6.7: Señales Sub-banda Decimadas por un factor 2

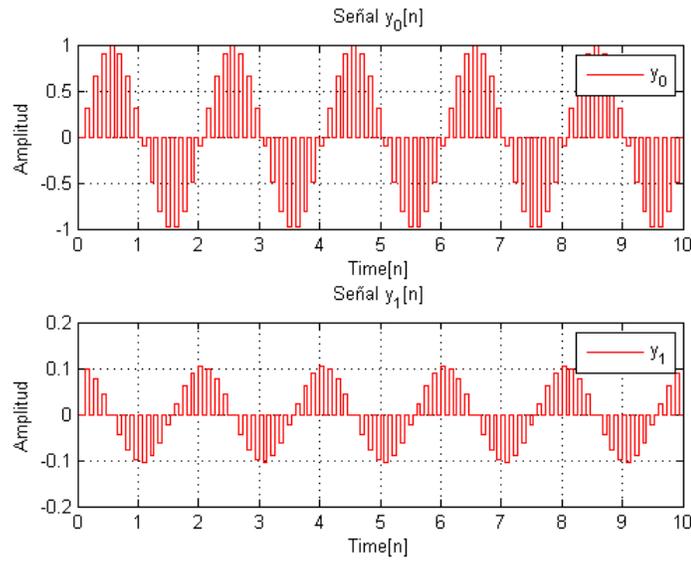


Figura 6.8: Señales Sub-banda Interpoladas por un factor 2

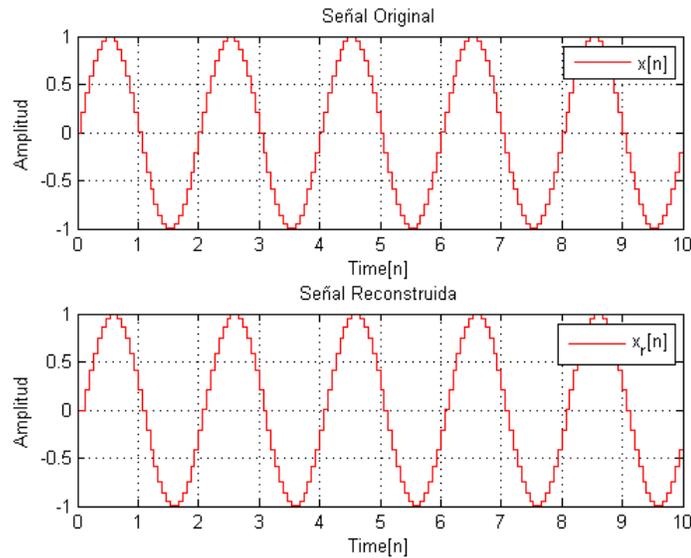


Figura 6.9: Señal original $x[n]$ y reconstruida $\hat{x}[n]$

Una forma sencilla de saber si las señales original y reconstruida son iguales es obteniendo la diferencia de dichas señales, como se hace con la distorsión por decodificación. La señal $d[n]$ (6.39) es la diferencia entre las señales. Si ambas señales son exactamente iguales la diferencia será cero de lo contrario existirá una distorsión. Utilizaremos esta operación para cuantizar el error que se genera en la reconstrucción

en todos los casos.

$$d[n] = x[n] - \hat{x}[n - 1] \quad (6.39)$$

Recordemos que la señal de salida esta desplazada en el tiempo, $n_0 = 1$, por ello a la señal original le restamos la versión desplazada. Utilizando la siguiente instrucción en Matlab obtenemos el vector $d[n]$, cuyo resultado debería ser un vector de ceros.

```
>> d=x_t(1:150) - x_r(2:151)
```

```
d =
```

```
1.0e-15 *
```

```
Columns 1 through 6
```

```
0    0.027755575615629    0    0    -0.111022302462516    0
```

```
Columns 7 through 12
```

```
0.111022302462516    0    0    0.111022302462516    0
0
```

```
Columns 13 through 18
```

```
0.111022302462516  -0.055511151231258  -0.027755575615629
0.011442377452220    0    0
```

```
Columns 19 through 24
```

```
0    0.111022302462516    0    0    0    0.111022302462516
...
```

El vector es casi cero, para observar mejor la distorsión podemos graficar las muestras contenidas en el vector, Figura 6.10. Como se ve en la Figura, la distorsión es prácticamente nula.

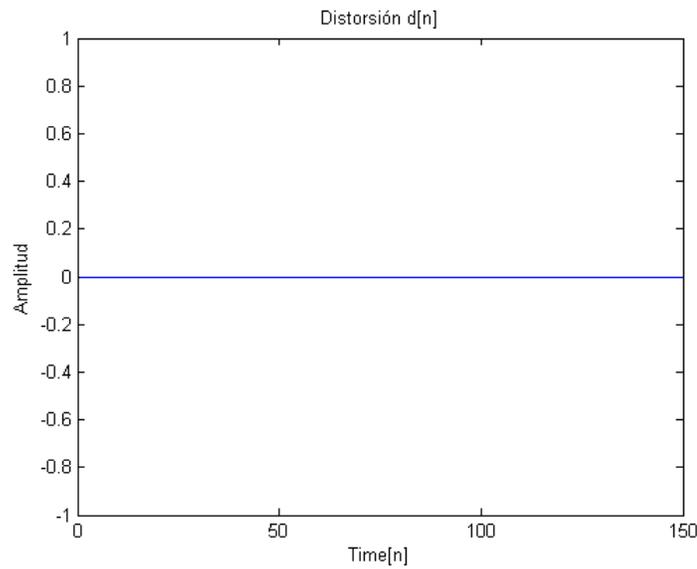


Figura 6.10: Distorsión $d[n]$ en el Banco QMF de reconstrucción perfecta

Si el aliasing y los errores de fase y amplitud no son corregidos los filtros del banco de análisis y síntesis deberían ser iguales; un paso-bajas y paso-altas con frecuencia de corte de 0.5, pues no se están eligiendo de manera que eliminen dichos errores. Utilizando Matlab podemos obtener dichos filtros, que son exactamente iguales a los obtenidos en el banco de análisis del sistema de reconstrucción perfecta.

```
>> [a b]=butter(1,0.5,'low')
```

```
a =
```

```
0.5000    0.5000
```

```
b =
```

```
1.0000   -0.0000
```

```
>> [a b]=butter(1,0.5,'high')
```

```
a =
```

```
0.5000   -0.5000
```

```
b =
```

1.0000 -0.0000

Los filtros de los bancos de análisis y síntesis quedan como sigue:

$$H_0(z) = 0.5 + 0.5z^{-1} \tag{6.40}$$

$$H_1(z) = 0.5 - 0.5z^{-1} \tag{6.41}$$

$$F_0(z) = 0.5 + 0.5z^{-1} \tag{6.42}$$

$$F_1(z) = 0.5 - 0.5z^{-1} \tag{6.43}$$

El sistema completo se muestra en la Figura 6.11. Las señal reconstruída para la entrada dada se observa en la Figura 6.12. Puede apreciarse que la señal no pudo ser reconstruída exactamente, esta distorsionada.

Como se realizó con el sistema anterior, podemos calcular la distorsión con una diferencia entre las señales de entrada y salida del sistema. En este caso el vector resultante debe tener elementos distintos o iguales a cero.

$$D[n] = x[n] - \hat{x}[n - 1] \tag{6.44}$$

Evidentemente, la diferencia entre la señales no es nula así que no es necesario mostrar valores del vector. En la Figura 6.13 se muestra la gráfica de la señal resultante, la señal reconstruída difiere de la señal de entrada.

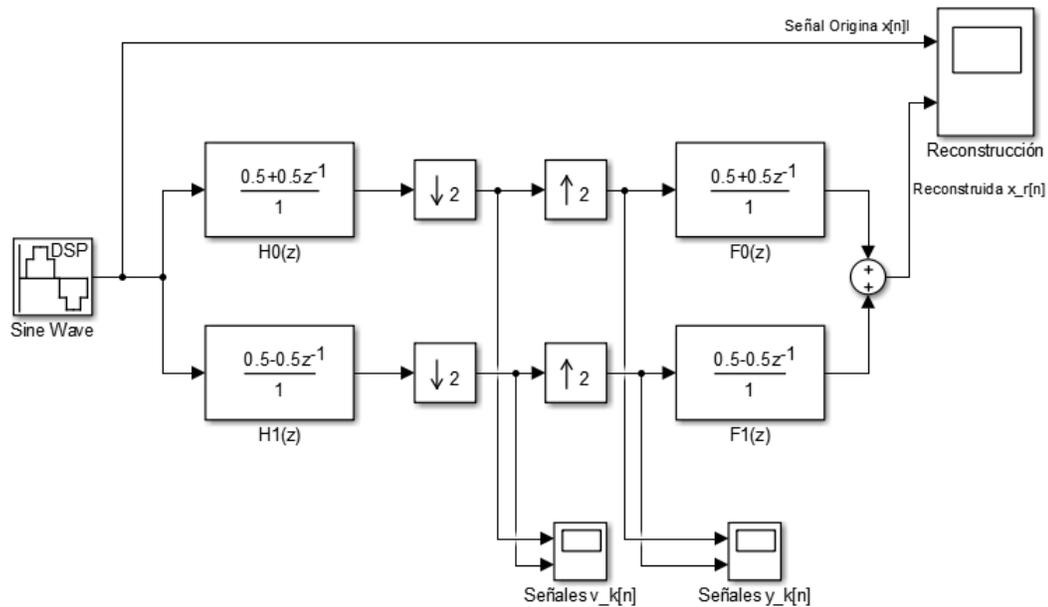


Figura 6.11: Simulación del Codificador de dos Canales sin Filtros con condición de reconstrucción perfecta

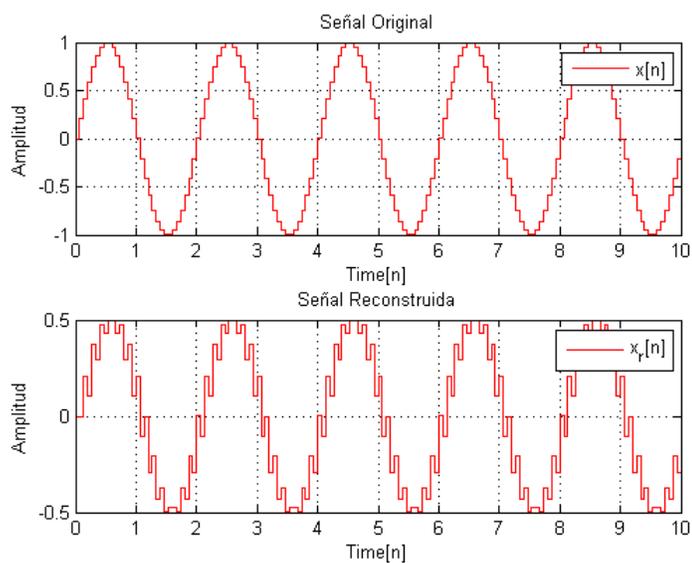


Figura 6.12: Reconstrucción de la señal

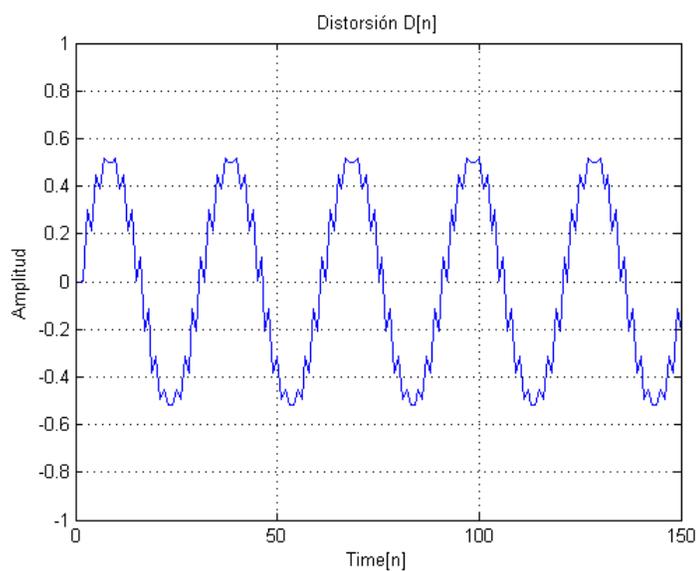


Figura 6.13: Distorsión $D[n]$

6.3.6. Codificador de Voz de Cuatro Canales

Para este sistema vamos a utilizar filtros Chebyshev de tercer orden. El proceso es semejante al usado para el codificador de dos canales. Primero obtendremos el filtro

paso bajas $H_1(z)$ con la instrucción:

```
>> [a b]=cheby1(3,0.01,0.5,'low')
```

a =

```
0.3428    1.0285    1.0285    0.3428
```

b =

```
1.0000    1.0037    0.6347    0.1043
```

Utilizando (6.20) y las relaciones para la reconstrucción perfecta obtenemos los filtros $H_1(z)$, $F_0(z)$ y $F_1(z)$.

$$H_0(z) = \frac{0.3428 + 1.0285z^{-1} + 1.0285z^{-2} + 0.3428z^{-3}}{1.0000 + 1.0037z^{-1} + 0.6347z^{-2} + 0.1043z^{-3}} \quad (6.45)$$

$$H_1(z) = \frac{0.3428 - 1.0285z^{-1} + 1.0285z^{-2} - 0.3428z^{-3}}{1.0000 - 1.0037z^{-1} + 0.6347z^{-2} - 0.1043z^{-3}} \quad (6.46)$$

$$F_0(z) = \frac{0.6856 + 2.057z^{-1} + 2.057z^{-2} + 0.6856z^{-3}}{1.0000 + 1.0037z^{-1} + 0.6347z^{-2} + 0.1043z^{-3}} \quad (6.47)$$

$$F_1(z) = \frac{-0.6856 + 2.057z^{-1} - 2.057z^{-2} + 0.6856z^{-3}}{1.0000 - 1.0037z^{-1} + 0.6347z^{-2} - 0.1043z^{-3}} \quad (6.48)$$

Los filtros H_{00} y H_{10} son filtros paso bajas con frecuencias de corte normalizada de 0.25 y 0.75. Los filtros H_{01} y H_{11} son paso altas con frecuencias de corte normalizada de 0.25 y 0.75. En este caso los filtros H_{01} y H_{10} son filtros paso altas y paso bajas, respectivamente, y no paso banda pues los primeros filtros limitaron a la señal en frecuencia. Los filtros del lado del banco de síntesis se obtienen con las relaciones ya conocidas.

```
>> [a b]=cheby1(3,0.01,0.25,'low')
```

a =

```
0.1005    0.3015    0.3015    0.1005
```

b =

```
1.0000   -0.6005    0.4883   -0.0839
```

```
>> [a b]=cheby1(3,0.01,0.75,'low')
```

a =

0.6329 1.8988 1.8988 0.6329

b =

1.0000 2.0987 1.5663 0.3984

$$H_{00}(z) = \frac{0.1005 + 0.3015z^{-1} + 0.3015z^{-2} + 0.1005z^{-3}}{1.0000 - 0.6005z^{-1} + 0.4883z^{-2} - 0.0839z^{-3}} \quad (6.49)$$

$$H_{01}(z) = \frac{0.6329 - 1.8988z^{-1} + 1.8988z^{-2} - 0.6329z^{-3}}{1.0000 - 2.0987z^{-1} + 1.5663z^{-2} - 0.3984z^{-3}} \quad (6.50)$$

$$H_{10}(z) = \frac{0.6329 + 1.8988z^{-1} + 1.8988z^{-2} + 0.6329z^{-3}}{1.0000 + 2.0987z^{-1} + 1.5663z^{-2} + 0.3984z^{-3}} \quad (6.51)$$

$$H_{11}(z) = \frac{0.1005 - 0.3015z^{-1} + 0.3015z^{-2} - 0.1005z^{-3}}{1.0000 + 0.6005z^{-1} + 0.4883z^{-2} + 0.0839z^{-3}} \quad (6.52)$$

$$F_{00}(z) = \frac{0.2010 + 0.6030z^{-1} + 0.6030z^{-2} + 0.2010z^{-3}}{1.0000 - 0.6005z^{-1} + 0.4883z^{-2} - 0.0839z^{-3}} \quad (6.53)$$

$$F_{01}(z) = \frac{-1.2658 + 3.7976z^{-1} - 3.7976z^{-2} + 1.2658z^{-3}}{1.0000 - 2.0987z^{-1} + 1.5663z^{-2} - 0.3984z^{-3}} \quad (6.54)$$

$$F_{10}(z) = \frac{1.2658 + 1.7976z^{-1} + 3.7976z^{-2} + 1.2658z^{-3}}{1.0000 + 2.0987z^{-1} + 1.5663z^{-2} + 0.3984z^{-3}} \quad (6.55)$$

$$F_{11}(z) = \frac{-0.2010 + 0.6030z^{-1} - 0.6030z^{-2} + 0.2010z^{-3}}{1.0000 + 0.6005z^{-1} + 0.4883z^{-2} + 0.0839z^{-3}} \quad (6.56)$$

El codificador de voz de cuatro canales se muestra en la Figura 6.16. Los bloques de análisis y síntesis se muestran en las Figuras 6.14 y 6.15. La señal de prueba es una suma de señales senoidales, la reconstrucción se observa en la Figura 6.17.

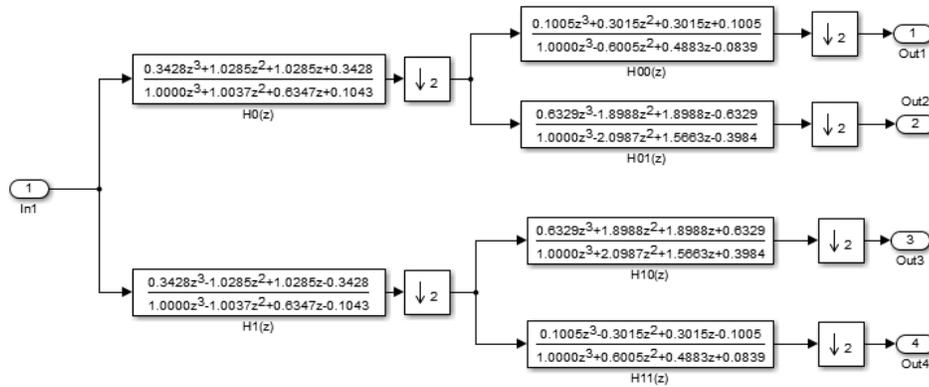


Figura 6.14: Banco de Análisis del Codificador de Cuatro Canales

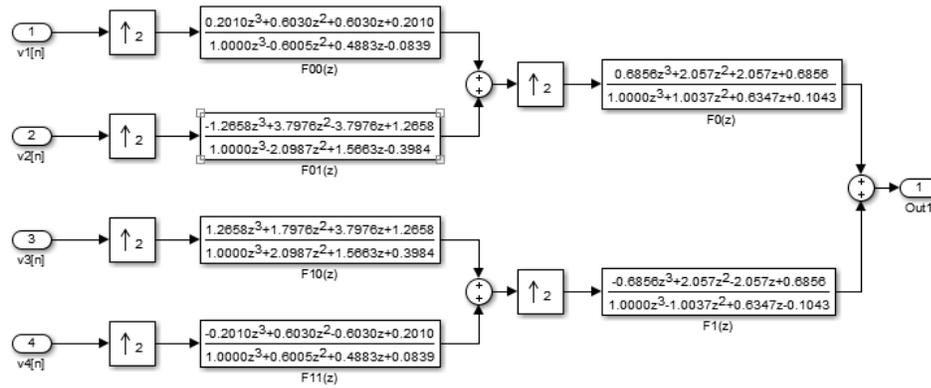


Figura 6.15: Banco de Síntesis del Codificador de Cuatro Canales

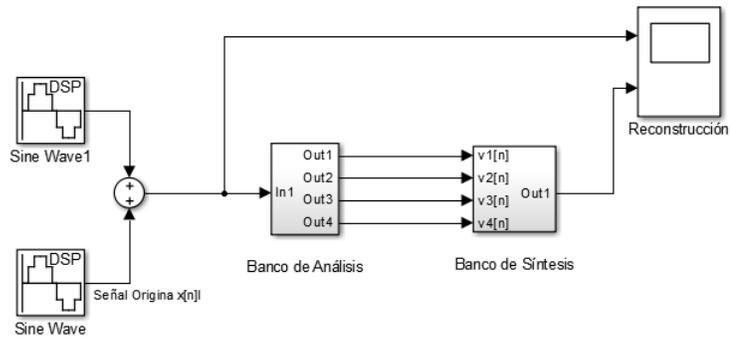


Figura 6.16: Codificador de Cuatro Canales

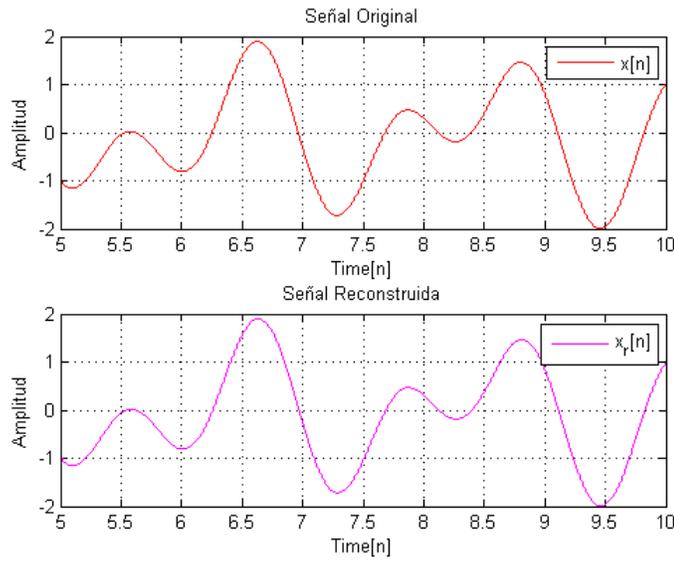


Figura 6.17: Señal original $x[n]$ y reconstruida $\hat{x}[n]$

Las señales de la Figura 6.17, se ven iguales. Vamos a calcular la diferencia entre ellas, sin olvidar que se tienen dos unidades de desplazamiento por tener conectados dos bancos en paralelo con otro en cascada. La gráfica de la señal resultante se observa en la Figura 6.18.

$$d[n] = x[n] - \hat{x}[n - 2] \quad (6.57)$$

Para observar mejor la distorsión graficamos el vector resultante, Figura 6.18. Se observa una señal constante en la amplitud en el valor cero, agregando unos marcadores a la gráfica se observa que los valores son muy parecidos pero la distorsión no es completamente nula. Sin embargo, recordemos que se trata de un sistema codificador de voz, la diferencia entre las señales reconstruida y original pueden despreciarse.

Si elegimos los filtros adecuados en la parte de síntesis para cancelar el aliasing y los errores de amplitud y fase obtendremos una reconstrucción perfecta. Por otro lado, si ignoramos las condiciones que deben cumplir los filtros no obtendremos una reconstrucción perfecta. Para visualizar la recuperación de una señal dada con un sistema sin reconstrucción perfecta, únicamente hay que hacer iguales los Filtros F a los filtros H , lo demás queda igual. En la Figura 6.19, podemos observar como quedan los filtros en la parte de síntesis.

La reconstrucción de la señal se observa en la Figura 6.20. La señal se parece a la de entrada pero con menor amplitud. Calculemos la diferencia entre las señales, recordando que esta vez existe un desplazamiento adicional por tener bancos conectados en cascada.

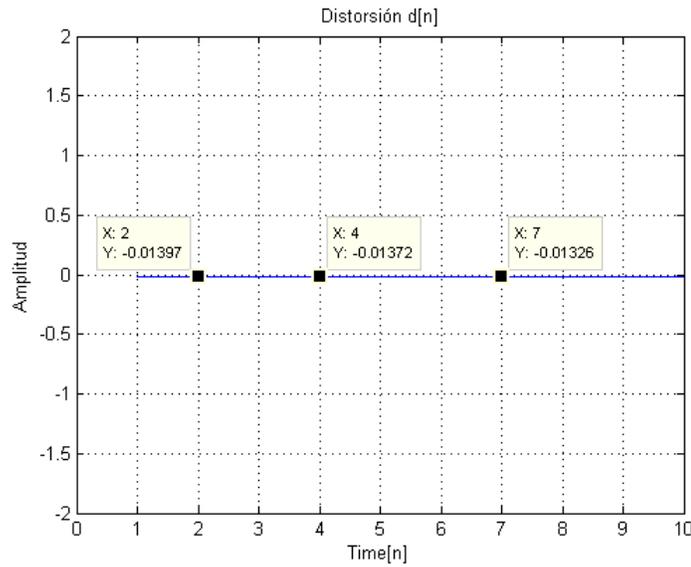


Figura 6.18: Distorsión $d[n]$ en el Banco de Cuatro Canales con reconstrucción perfecta

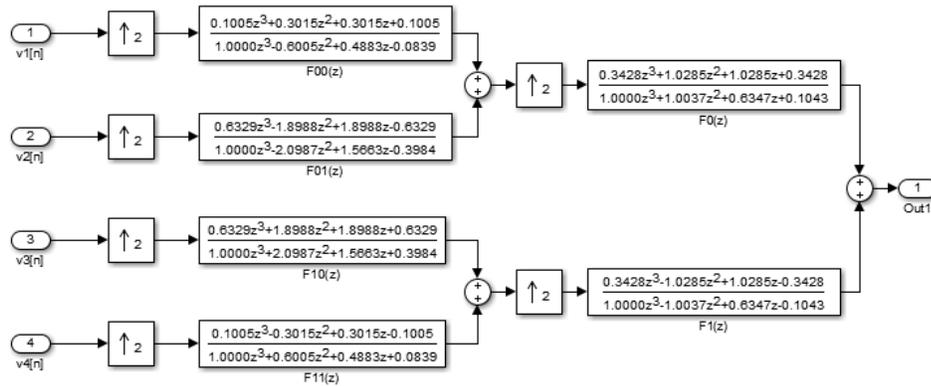


Figura 6.19: Banco de Síntesis del Codificador de Cuatro Canales sin filtros de reconstrucción perfecta

$$D[n] = x[n] - \hat{x}[n - 2] \tag{6.58}$$

Para observar mejor la distorsión graficamos el vector resultante. En la Figura 6.21 se observa que existe distorsión en la señal reconstruida. Eligiendo los filtros adecuados en el banco de síntesis podemos obtener una reconstrucción próxima a la perfecta.

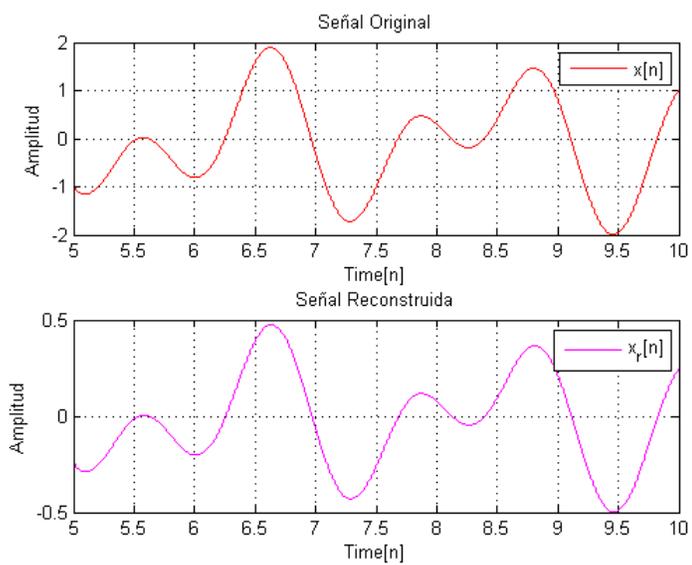


Figura 6.20: Señal original $x[n]$ y reconstruida $\hat{x}[n]$ en sistema sin filtros de reconstrucción perfecta

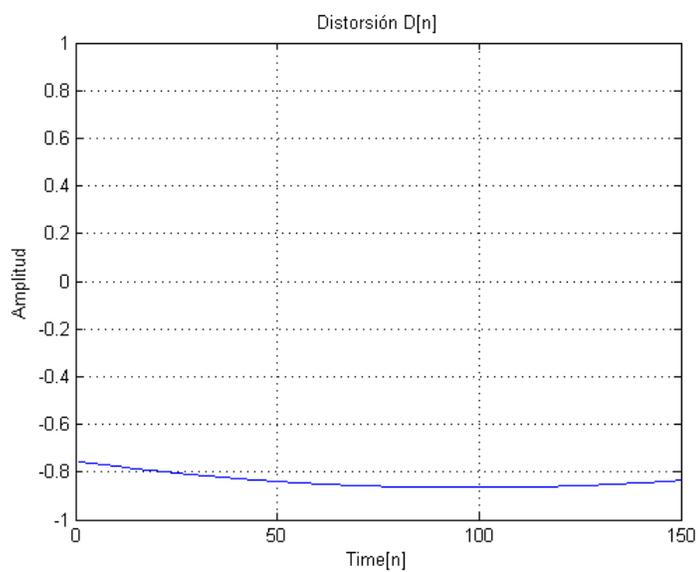


Figura 6.21: Distorsión $D[n]$

Conclusiones

En este trabajo se diseñó el codificador de cuatro canales utilizando como base el banco Quadrature Mirror Filter (banco de dos canales). Con el análisis teórico del banco QMF se observó que la señal a la salida de los filtros de reconstrucción es formada por la suma de la señal multiplicada por una función de distorsión y de la señal multiplicada por el aliasing. Con ayuda de estas funciones fue posible determinar las condiciones necesarias para obtener la reconstrucción perfecta.

Se realizó una simulación del banco QMF utilizando los filtros diseñados para cancelar los errores. La señal reconstruída es igual a la de entrada, sin embargo, dicha señal presenta un desplazamiento en el tiempo como se había predicho en la teoría. Además se realizó una simulación ignorando las condiciones de reconstrucción perfecta, esto con el fin de poder observar la distorsión que genera el codificador.

Como no se realizó procesamiento adicional a las señales sub-banda decimadas, el delay presentado es el que genera el sistema. Si existiese alguna etapa de procesamiento o transmisión el delay sería mayor y tendría que ser considerado al diseñar el codificador.

Los filtros del codificador de voz de dos canales se realizaron con filtros FIR de primer orden, para simplificar el análisis. Además, la obtención de las respuestas en frecuencia de dichos filtros fue más sencilla. Para el caso del codificador de cuatro canales, el proceso fue similar, pero esta vez los filtros fueron Chebyshev I de tercer orden y obtenidos con Matlab. Estos filtros son de tipo IIR, no siempre son estables y la fase tampoco lo es. La señal reconstruída en este caso es un poco diferente, matemáticamente, sin embargo, el banco se diseñó para codificar la voz y esta distorsión es despreciable. Para medir, de alguna manera la calidad del codificador, se debe utilizar una medida subjetiva: el resultado de la opinión media (Media Opinion Score); en este caso solo se realizó una diferencia de señales para determinar que tan bien quedó reconstruída la señal de salida.

Aunque existen diversas formas de implementar el codificador, por ejemplo en un DSP o FPGA, para fines de esta tesis se utilizó Simulink y Maltlab. La simulación de los bloques de decimación e interpolación pueden hacerse directamente en un *script* de

Matlab, al igual que los filtros digitales. Se utilizó la herramienta, de Matlab, Simulink por ser didáctica pues cada parte del sistema puede representarse por bloques, además permite ahorrar la codificación de cada filtro digital.

Los filtros digitales pueden ser implementados utilizando la estructura Fleischer-Laker de capacitores conmutados. La ventaja de usarlos es la reducción de consumo de potencia y la integración de ellos como chip. Dicha implementación requiere un análisis profundo en la teoría de capacitores conmutados. Por otro lado, la codificación sub-banda puede analizarse con la Discrete Wavelet Transform, muy utilizada en compresión de datos en Internet, compresión de video, reconocimiento de objetos y análisis numérico. Tanto el estudio de la DWT y de los filtros digitales con capacitores conmutados va más allá del alcance de esta Tesis.

Finalmente, este trabajo puede mejorarse implementando los filtros en un DSP , como lo es el TMS320C6713, así podrá servir de apoyo para la enseñanza de procesamiento de señales en lugar de solo realizar simulaciones en Matlab. Además sería interesante poder visualizar cada señal procesada por el DSP, esto podría realizarse utilizando el software Code Composer Studio y Matlab.

Bibliografía

- [1] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. H. N. G. M. H. (1998). *Señales y Sistemas*. Prentice Hall Hispanoamerica, México, 2nd edition. [III](#), [III](#), [5](#), [27](#), [33](#)
- [2] Alberto, I. C. M. (2012). *Procesamiento Digital de Señales (Notas de clase)*. [16](#)
- [3] Alberto, I. C. M. (2014). *Tecnologías para el Procesamiento Digital de Señales (Notas de clase)*. [III](#), [7](#)
- [4] Bohumil Pšenička, M. A. R. (1996). *Filtrado de Señales Analógicas y Digitales (Filtros Pasivos, Activos y Digitales)*. UNAM-UPM, México, 1st edition. [5](#), [6](#), [21](#), [35](#), [36](#), [40](#), [45](#), [54](#)
- [5] García-Ugalde, P. and Jiménez-Salinas (2011). *Z Transformation by Pascal Matrix and its Applications in the Design of IIR Filters*. Journal of Applied Research and Technology Vol. 9, No. 3.
- [6] Grant, P. (1996). *Multirate Signal Processing*. Electronics and Communication Engineering Journal.
- [7] John G. Proakis, D. G. M. (1996). *Digital Signal Processing Principles, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, New Jersey, 3rd edition. [21](#), [23](#), [36](#)
- [8] Mitra, S. K. (1998). *Digital Signal Processing A Computer-Based Approach*. McGraw-Hill. [5](#), [18](#), [24](#), [25](#), [26](#), [35](#)
- [9] Náhlík, Hospodka, S. and Pšenička (2013). *Implementation of a Two-Channel Maximally Decimated Filter Bank using Capacitor Circuits*. Radioengineering Vol. 22, No. 1. [45](#), [54](#)
- [10] Oppenheim, A. V. and Schaffer, R. W. (1989). *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, New Jersey. [III](#), [4](#), [5](#), [6](#), [10](#), [11](#), [13](#)
- [11] Pšenička, B. (2015). *Realization of SC filters from analog LC circuits*. Circuits and Systems, Scientific Research Publishing.
- [12] Weeks, M. (2011). *Digital Signal Processing using Matlab and Wavelets*. Jones and Bartlett Publishers, Massachusetts, 2nd edition. [25](#), [31](#)