



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS**

**L**as autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del jefe de la División de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona que le entregó las notas. Las inasistencias serán computadas por las autoridades de la División, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo de 80% de asistencias.

Pedimos a los asistentes recoger su constancia el día de la clausura. Estas se retendrán por el periodo de un año, pasado este tiempo la DECFI no se hará responsable de este documento.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece la División están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados, constituyendo verdaderos seminarios.

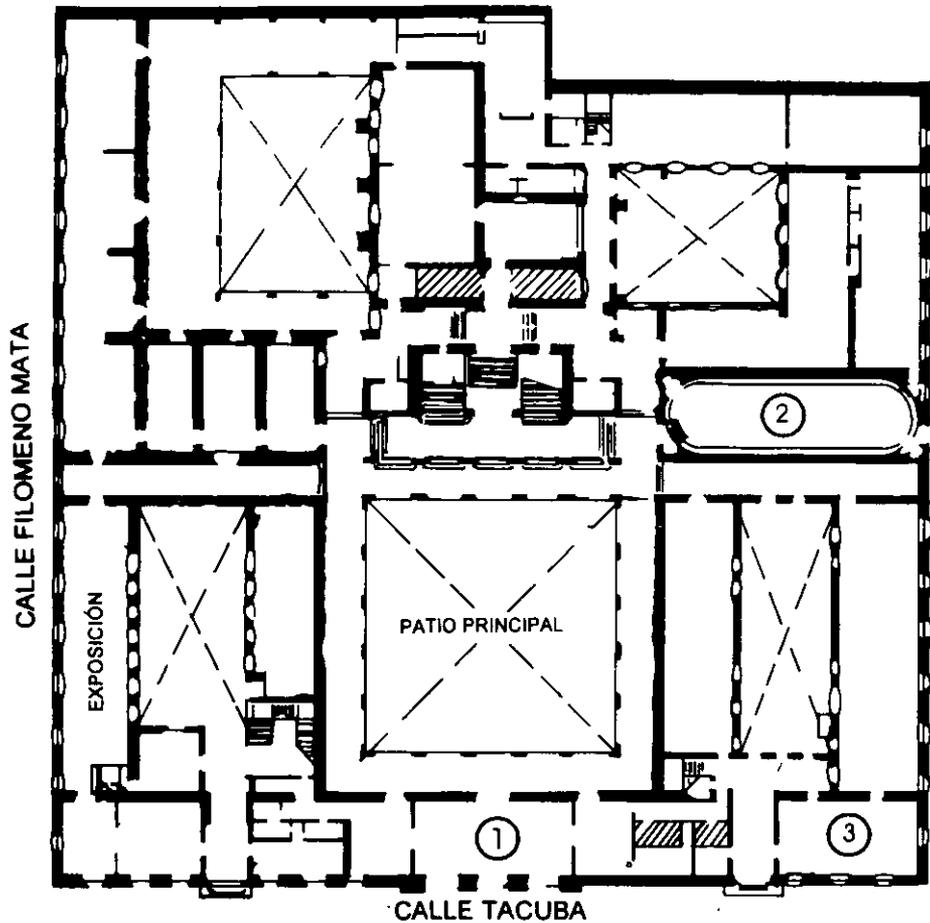
Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso, información que servirá para integrar un directorio de asistentes, que se entregará oportunamente.

Con el objeto de mejorar los servicios que la División de Educación Continua ofrece, al final del curso deberán entregar la evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos.

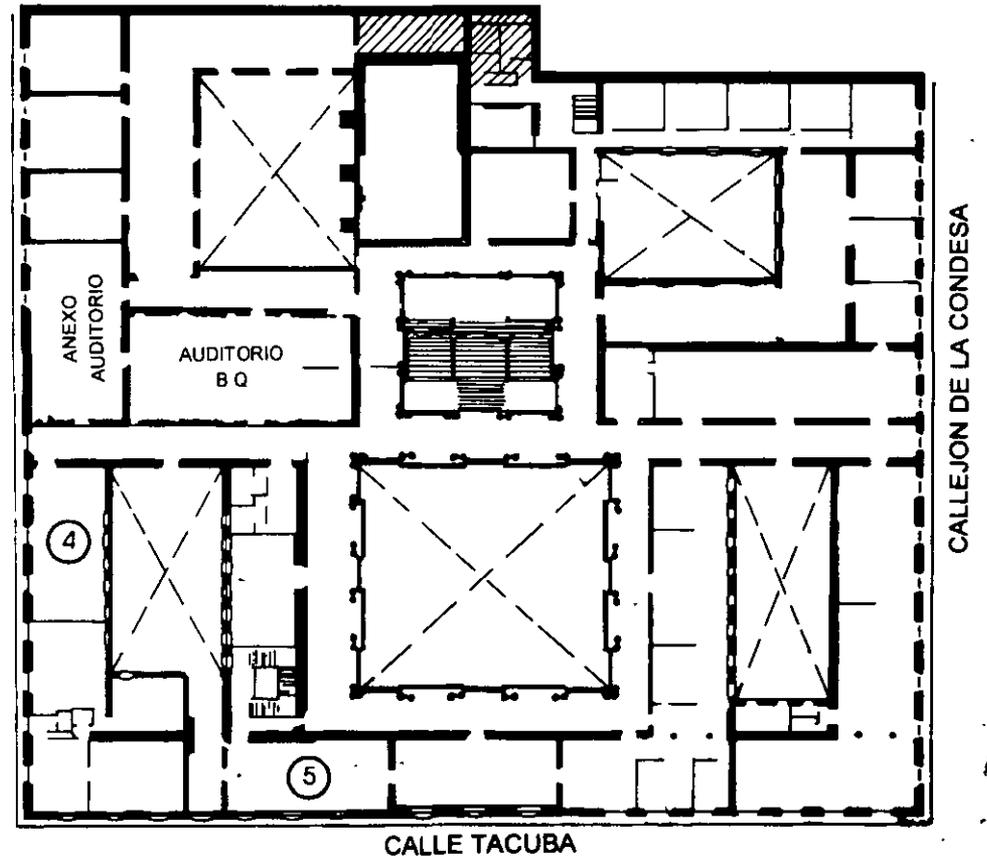
Se recomienda llenar dicha evaluación conforme los profesores impartan sus clases, a efecto de no llenar en la última sesión las evaluaciones y con esto sean más fehacientes sus apreciaciones.

**Atentamente  
División de Educación Continua.**

# PALACIO DE MINERIA

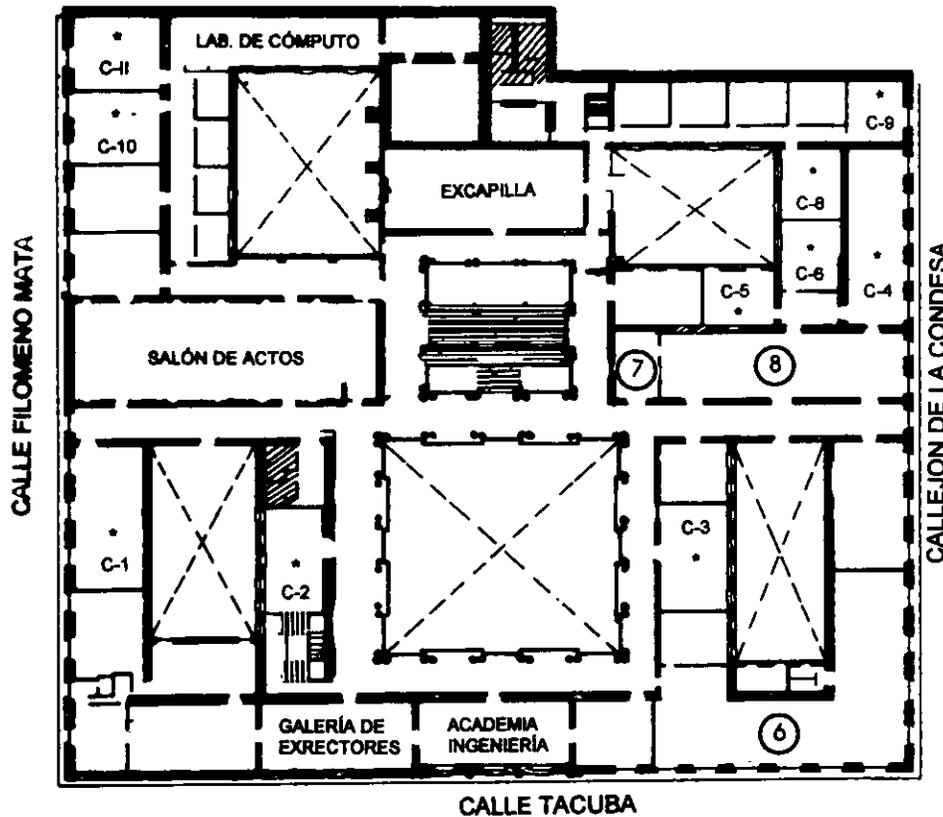


**PLANTA BAJA**



**MEZZANINNE**

# PALACIO DE MINERÍA



**1er. PISO**

## GUÍA DE LOCALIZACIÓN

1. ACCESO
2. BIBLIOTECA HISTÓRICA
3. LIBRERÍA UNAM
4. CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN "ING. BRUNO MASCANZONI"
5. PROGRAMA DE APOYO A LA TITULACIÓN
6. OFICINAS GENERALES
7. ENTREGA DE MATERIAL Y CONTROL DE ASISTENCIA
8. SALA DE DESCANSO

SANITARIOS

\* AULAS



DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERÍA U.N.A.M.  
CURSOS ABIERTOS

DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA





**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANAISIS ESTRUCTURAL**

### **TEMA**

## **ANÁLISIS DE EFECTOS DINAMICOS**

**EXPOSITOR: M. EN I. JOSE LUIS TRIGOS SUAREZ  
PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DEL 2001**

**DIPLOMADO DE ACTUALIZACION EN PROYECTO Y CONSTRUCCION  
DE ESTRUCTURAS 1999**

**MODULO I ANALISIS ESTRUCTURAL**

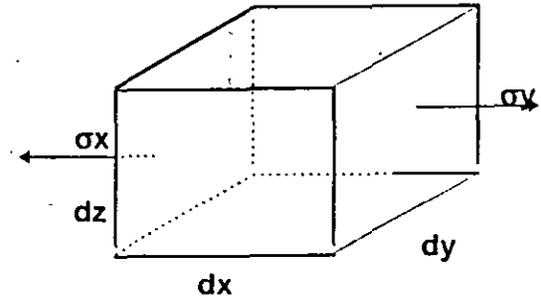
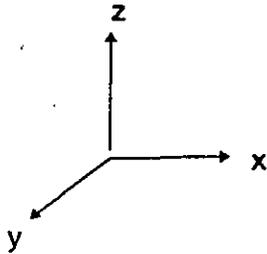
**Contenido**

Energía Elástica de Deformación por Esfuerzo Normal. ....	1
Principio de Superposición .....	14
Ecuaciones Generales de Superposición .....	17
Ecuaciones Generales de Superposición en Análisis de Estructuras. ....	18
Indeterminadas de Grado n	
Ejemplos que Ilustran el Uso de las Ecuaciones Generales de Superposición. ....	20
Generalización de la Energía de Deformación .....	29
Teorema de Castigliano .....	31
Teorema del Trabajo Mínimo .....	38
Métodos Matriciales de Análisis Estructural .....	41
Métodos de Fuerzas y Deformaciones	
Aplicaciones de Métodos Matriciales a Armaduras Planas .....	53
Métodos Energéticos y Métodos de las Flexibilidades .....	59
Introducción .....	60
Energía de Deformación .....	62
Métodos Generales de Análisis .....	75
Propiedades de las Matrices de Flexibilidades y de Rigideces .....	81
Métodos de las Flexibilidades .....	85
Interacción Estática Suelo - Estructura y Diseño Estructural de Cimentaciones ....	134
Interacción Suelo - Estructura en Cimentaciones Someras .....	136
Interacción Suelo - Estructura en Cimentaciones .....	150
Propiedades de los Materiales que forman la Estructura y el Terreno de .....	156
Cimentación	
Aplicaciones .....	158

Conclusiones .....	167
Un Método para el Análisis Tridimensional de la Interacción Suelo - Estructura .....	170
Análisis Estructural .....	171
Hundimientos del Terreno de Cimentación .....	172
Compatibilidad de Deformaciones .....	173
Ejemplo Ilustrativo .....	174
Conclusiones .....	178
Método Mixto de Flexibilidad y Rigideces: Análisis de Efectos Dinámicos .....	182
Características .....	183
Definiciones .....	184
Planteamiento General .....	189
Determinación de Deformaciones en los Suelos .....	198
Deformaciones Permisibles .....	200
Estado Límite de Servicio .....	201
Incrementos de Esfuerzo en la Masa de Suelo Ocasionados por una Carga Repartida Aplicada en la Superficie .....	202
Cimientos Sujetos a Carga Vertical y Momento .....	203
Fórmulas para Deformaciones Elásticas .....	205
Análisis Sísmico de Cimentaciones .....	218 ←
Dinámica de Suelos: Vibraciones .....	232
Vibraciones Estacionarias .....	236
Vibraciones Debida a Rotación .....	239
Vibración de un Estrato de Suelo .....	240
Amortiguamiento .....	254
Análisis Estructural (Complemento) .....	260
Análisis de Pilotes Sujetos a Solicitaciones Dinámicas .....	270
Desplazamientos Horizontales del Suelo y Pilote .....	271
Propiedades Dinámicas del Suelo .....	272

Análisis de Pilotes sujetos a Cargas Laterales .....	273
Conclusiones .....	278
Análisis Estructural por el Método de Elementos Finitos Utilizando El Programa SAP90 .....	281
Requerimientos del Sistema y Procedimientos para Ejecutar el Programa .....	282
Terminología del SAP90 .....	286
Modelado con SAP90 .....	289
Análisis Estático y Dinámico .....	296
Estructura del Archivo de Datos de SAP90 .....	300
Archivos de Salida de SAP90 .....	303
Estructura del Programa SAP90 .....	304
Detalles de las Operaciones del Archivo de Datos de SAP90 .....	307
SAPLOT .....	332
Ejemplo .....	335

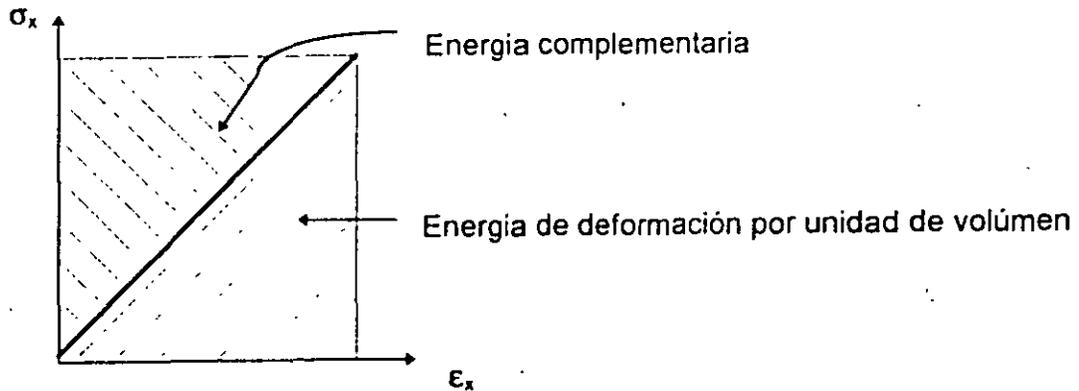
## Energía Elástica de Deformación por Esfuerzo Normal



$U$  = energía elástica interna

$$dU = \underbrace{1/2 \sigma_x dy dz}_{\text{Fza. promedio}} \times \underbrace{\epsilon_x dx}_{\text{Distancia}} = 1/2 \sigma_x \epsilon_x dx dy dz (1)$$

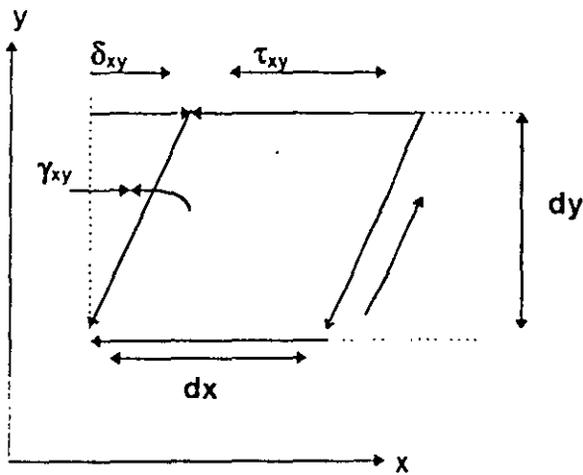
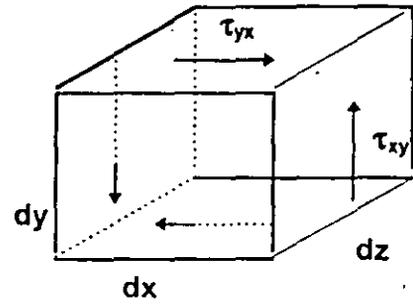
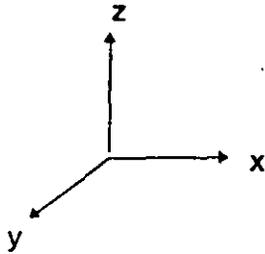
TRABAJO



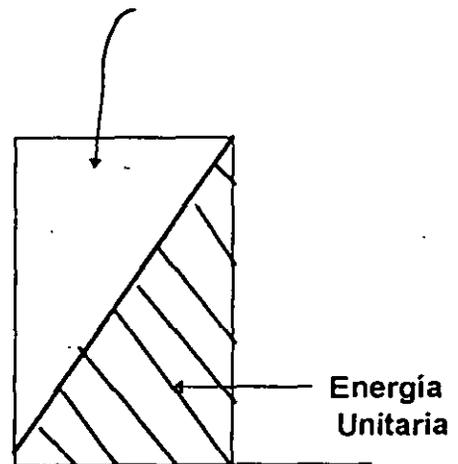
Para un cuerpo elástico perfecto no hay disipación de energía y el trabajo hecho por un elemento es almacenado como energía de deformación interna recuperable de ( 1 ) la densidad de energía.

$$\frac{dU}{dV} = U_0 = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2} \quad (2)$$

**Energía elástica de deformación por esfuerzo cortante.**



Densidad de energía complementaria

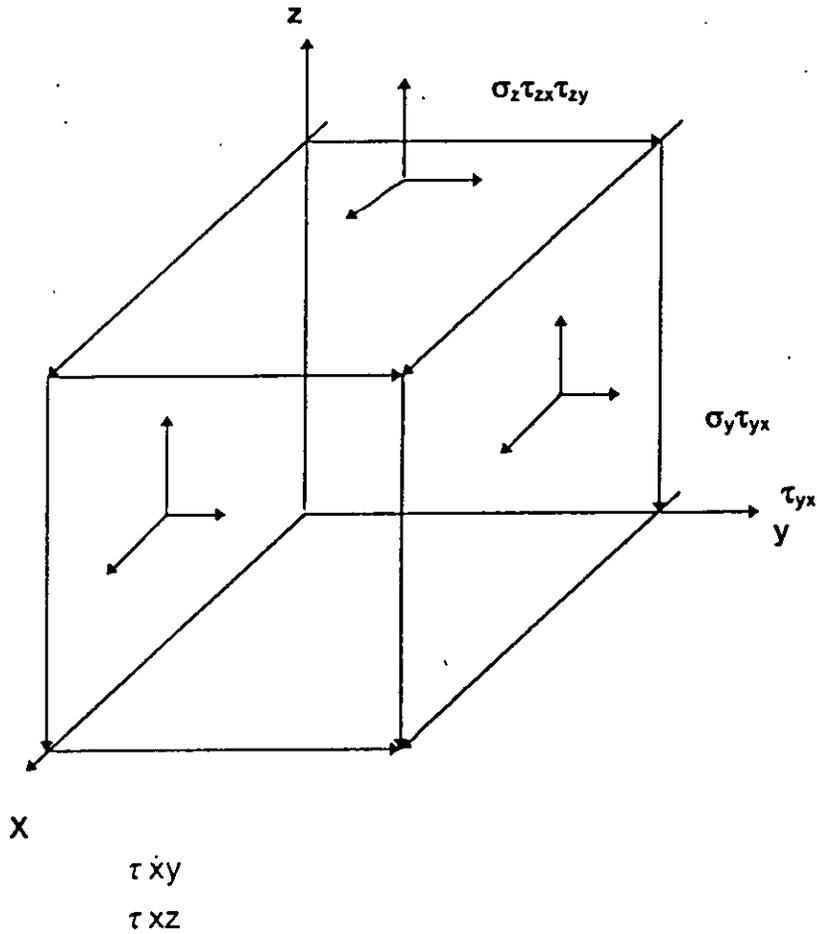


$$dV_{\text{CORTE}} = 1/2 \tau_{xy} dx dz \times \gamma_{xy} dy = 1/2 \tau_{xy} \gamma_{xy} dx dy dz \quad (3)$$

La densidad de energía por esfuerzo constante es :

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_{\text{corte}} = 1/2 \tau_{xy} \gamma_{xy} \quad (4)$$

Aceptando el principio de superposición para un estado multiaxial de esfuerzos.  
 La densidad de energía de deformación es:  $[\sigma_{ij}]$



$$\frac{dU}{dV} = U_0 = 1/2 \sigma_x \epsilon_x + 1/2 \sigma_y \epsilon_y + 1/2 \sigma_z \epsilon_z + 1/2 \tau_{xy} \gamma_{xy} + 1/2 \tau_{xz} \gamma_{xz} + 1/2 \tau_{yz} \gamma_{yz} \quad (5)$$

Expresando ( 5 ) matricialmente se obtiene

$$U_0 = 1/2 \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = 1/2 [\sigma] \{\epsilon\} \quad (6)$$

Sustituyendo en (5) la ley generalizada de Hooke (7)

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \gamma \frac{\sigma_y}{E} - \gamma \frac{\sigma_z}{E} \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\epsilon_y = -\gamma \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \gamma \frac{\sigma_z}{E} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\epsilon_z = -\gamma \frac{\sigma_x}{E} - \gamma \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

(7)

Se obtiene :

$$U_0 = 1/2 E (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\gamma}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + 1/2 G (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (8)$$

Para materiales elásticos lineales homogéneos e isotrópicos se puede obtener una expresión similar a (8) en términos de las deformaciones en lugar de los esfuerzos, la energía total se obtiene de :

$$U = \iiint_V U_0 \, dx \, dy \, dz \quad (9)$$

La ecuación (5), es importante al establecer las leyes de plasticidad y (8) es importante en análisis de esfuerzos por métodos energéticos.

Sustituyendo (6) en (9) se obtiene :

$$U = 1/2 \iiint_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dv$$

$$= 1/2 \iiint_V [\sigma] \{\epsilon\} dx dy dz \quad (10)$$

Para barras axialmente cargadas, con flexión y cortante (10) queda:

$$U = 1/2 \iiint_V (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (11)$$

Para materiales elásticos lineales:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (12)$$

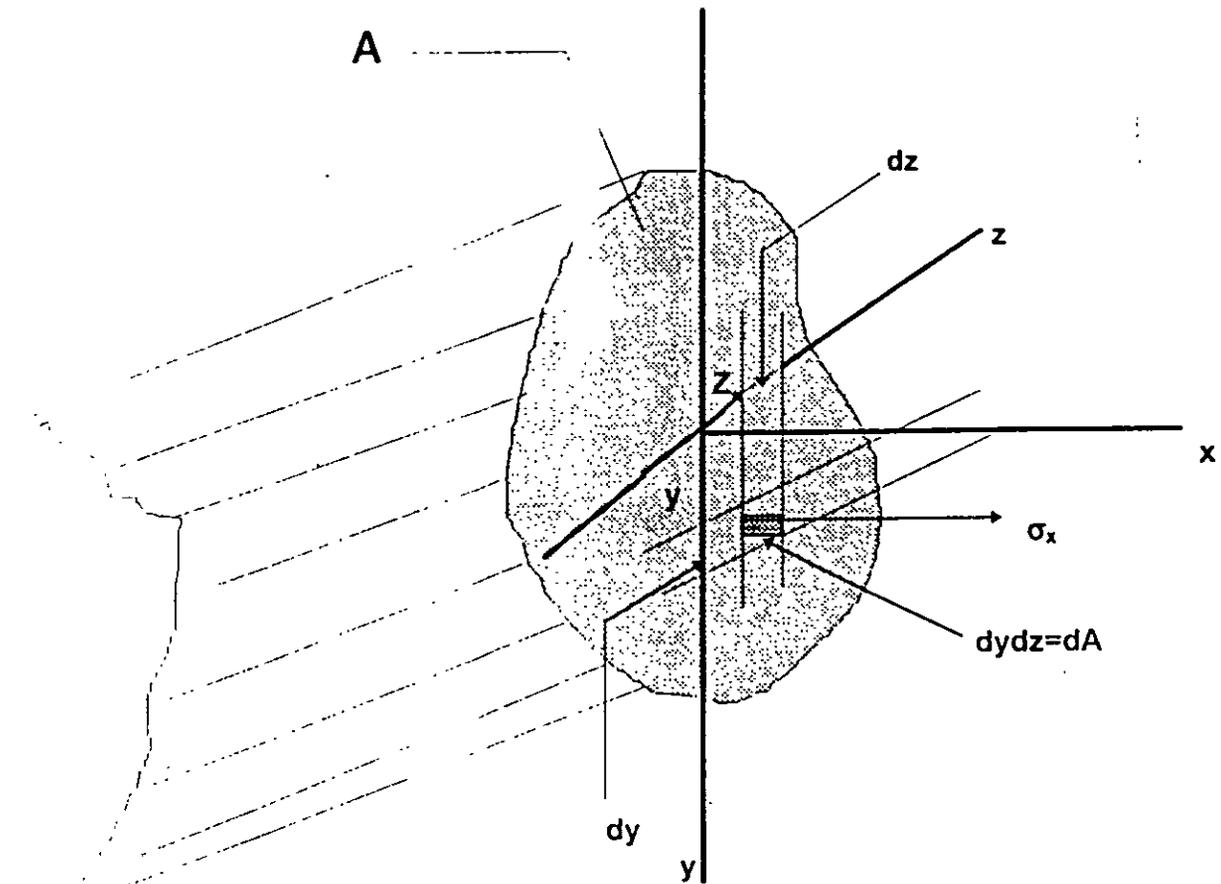
de (12) y (11) se obtiene que :

$$U = \underbrace{\iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dx dy dz}_{\text{Para carga axial, y flexión en vigas}} + \underbrace{\iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dx dy dz}_{\text{Para cortante en vigas}} \quad (13)$$

### Energía de deformación para barras cargadas axialmente

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{CARGA AXIAL}{SECCION TRANSVERSAL}, \quad A = \iint_A dy dz \quad \text{-----}(14)$$

N y A son funciones de " x " únicamente.



Por lo tanto (13) se reduce a:

$$U_N = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \iiint \frac{N^2}{2A^2E} dx dy dz = \int \frac{N^2}{2A^2E} \left[ \iint_A dy dz \right] dx \Rightarrow \int \frac{N^2}{2EA} dx$$

$$U_N = \int \frac{N^2}{2EA} dx \quad (15)$$

Energía de deformación en flexión en este caso

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y \quad (16)$$

De (16) y (13) se obtiene:

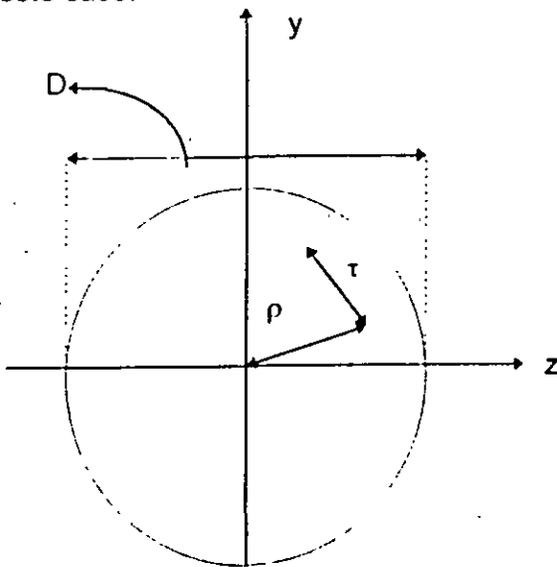
$$U_M = \iiint \frac{\sigma_x^2}{2E} dv = \iiint \frac{1}{2E} \left( -\frac{My}{I} \right)^2 dx dy dz$$

$$= \int \frac{M^2}{2EI^2} \left[ \iint y^2 dy dz \right] dx = \int_L \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$U_M = \int_L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (17)$$

Energía de deformación para secciones circulares en torsión.

Para este caso:



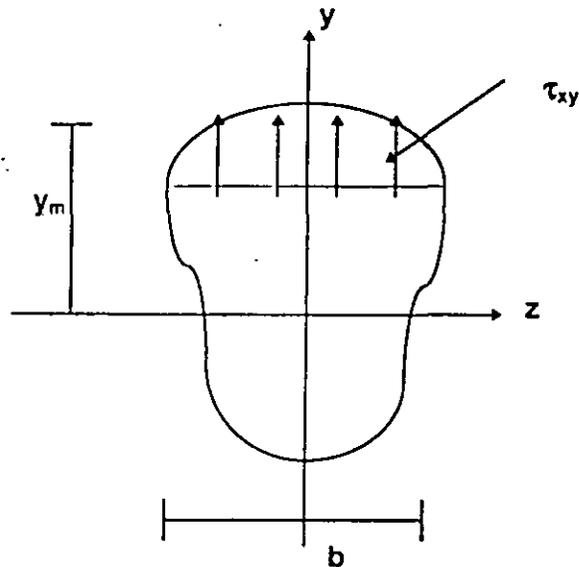
$$\tau = \frac{M_\tau}{J} \rho \quad (18)$$

Substituyendo (18) en (13):

$$U_\tau = \iiint_V \frac{\tau^2}{2G} dx dy dz = \iiint \frac{1}{2G} \left( \frac{M_\tau}{J} \rho \right)^2 dx dy dz = \int \frac{M_\tau^2}{2GJ^2} \left[ \iint \rho^2 dy dz \right] dx$$

$$U_\tau = \int \frac{M_\tau^2}{2GJ} dx$$

Energía de deformación por cortante



En este caso  $\tau_{xy} = \frac{VQ_y y^m}{bI}$

V= Cortante en la sección

$Q_y y^m = \int y^m y da =$  momento estático de y a ym

b= Ancho a la altura y de los ejes centroidales xy

I = Momento de inercia de la sección.

Substituyendo (20) en (13)

$$U_v = \iiint \frac{1}{2G} \left( \frac{VQ_y y^m}{bI} \right)^2 dx dy dz = \int \frac{V^2}{2GI^2} \left[ \iint \left( \frac{Q_y y^m}{b} \right)^2 dy dz \right] dx$$

$$U_v = \int_L \frac{V^2}{2GI^2} \left[ \iint_A \left( \frac{Q_y y^m}{b} \right)^2 dy dz \right] dx \quad (21)$$

La expresión total de la energía de deformación será:

$$U = U_n + U_m + U_t + U_v \text{ o sea :}$$

$$V = \int \left\{ \frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{M_t^2}{2GJ} + \frac{V^2}{2GI^2} \left[ \iiint \left( \frac{Q_y^{ym}}{b} \right)^2 dydz \right] \right\} dx \quad (22)$$

### Desplazamientos

El principio de conservación de energía ( la energía no puede ser creada ni destruida ), puede adoptarse para calcular deformaciones en sistemas elásticos debidos a las cargas aplicadas. La primera ley de la Termodinámica expresa este principio como:

$$\text{Trabajo realizado} = \text{Cambio de Energía}$$

Para un proceso adiabático ( no se agrega o subtrae calor al sistema ) y cuando no se genera calor en el sistema, y cuando las fuerzas aplicadas se aplican en forma estática ( las fuerzas se aplican tan lentamente que se desprecia la energía cinética  $\frac{1}{2} mv^2$  ), el caso especial de esta ley para sistemas conservativos se reduce a :

$$W_e = U$$

Donde:  $W_e$  = trabajo hecho por las fuerzas externas durante el proceso de carga.  
 $U$  = Energía total de deformación almacenada en el sistema.

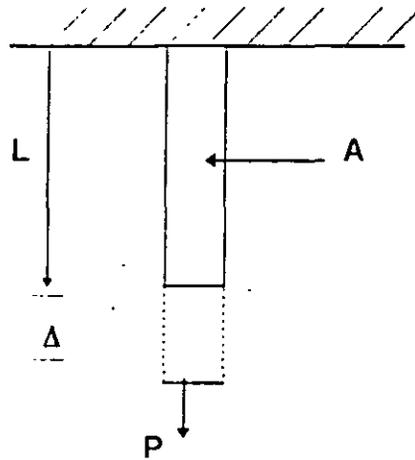
Similar a decir que la suma del trabajo externo  $W_e$  y el interno  $W_i$  deben ser cero:

$$W_e + W_i = 0$$

$U = - W_i$ , las deformaciones siempre se oponen a las fuerzas internas. Es importante considerar la aplicación gradual de las cargas de cero a su valor total, por lo tanto  $W_e$  será  $\frac{1}{2}$  Fuerza total por el desplazamiento.

Ejemplos:

a) Determine la deflexión de la viga mostrada.



$$W_e = 1/2 P \Delta$$

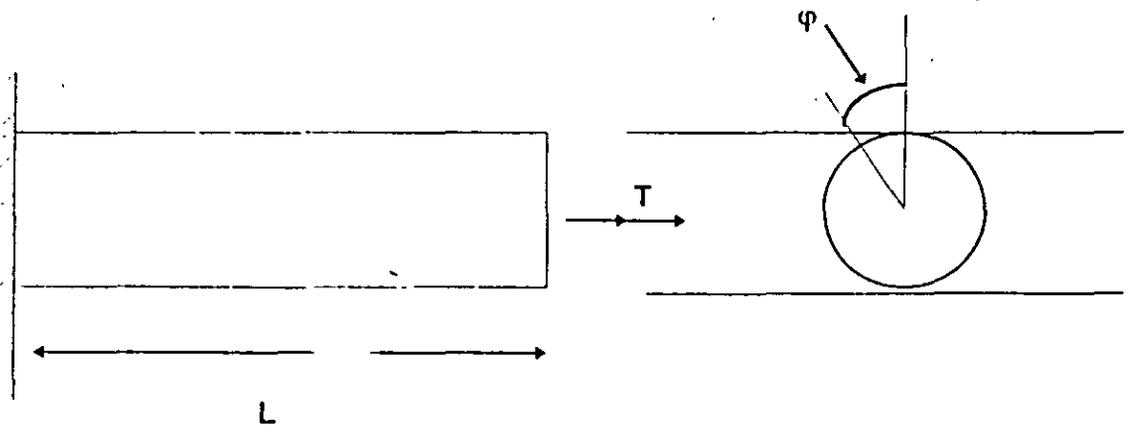
y de (22)

$$U = \frac{1}{2EA} \int N^2 dx = \frac{P^2}{2EA} \int_0^L dx = \frac{P^2 L}{2EA}$$

$$\text{DE (23): } \frac{1}{2} P \Delta = \frac{P^2 L}{2EA}$$

$$\Delta = PL / AE \quad \text{Ley de Hooke}$$

b) Determine la rotación en el extremo de una flecha de sección circular.



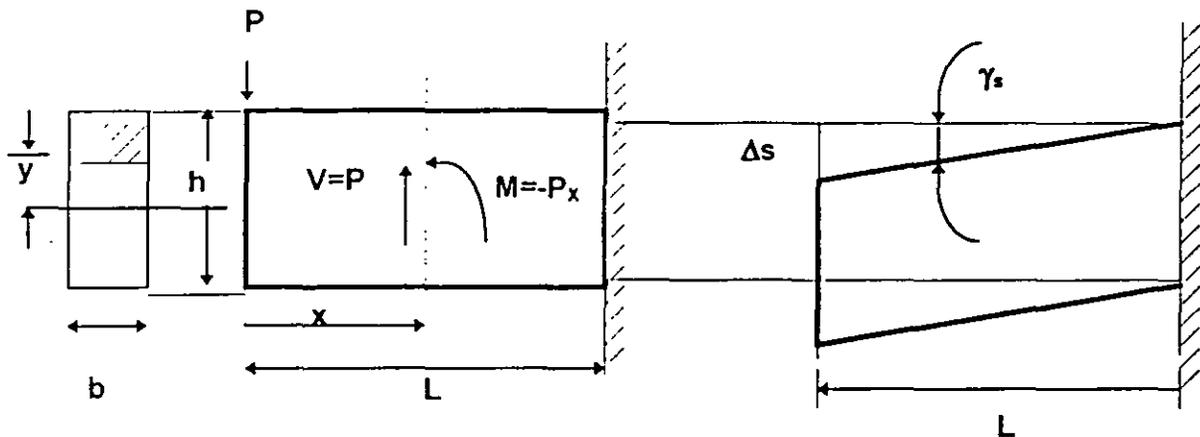
El trabajo externo  $W_e = 1/2 T \phi$  y el interno de (22):

$$U = \frac{T^2}{2GJ} \int_0^L dx = \frac{T^2 L}{2GJ} \text{ de (23)}$$

$$\frac{1}{2} T \phi = \frac{T^2 L}{2GJ} \Rightarrow \phi = \frac{TL}{GJ}$$

que coincide con los valores de los textos de Mecánica de materiales.

c) Determinar la deflexión máxima en la viga mostrada considerando el efecto del cortante y de flexión.



Trabajo externo  $W_e = \frac{1}{2} P \Delta s$ , la energía interna consta de dos partes una debida a los esfuerzos de flexión y otra a los esfuerzos de corte (17) y (13).

$$U_{\text{flexion}} = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-Px)^2 dx = \frac{PL^3}{6EI}$$

El esfuerzo de corte:  $\tau = \frac{VQy r^m}{bl} = \frac{P}{2I} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$  que sustituido en la segunda parte de (13) se obtiene:

$$U_{\text{corte}} = \iiint \frac{\tau^2}{2G} dx dy dz = \frac{1}{2G} \int_0^L \left\{ \frac{P}{2I} \left[ \frac{h^2}{2} - y^2 \right] \right\}^2 L b dy$$

$$= \frac{P^2 L b}{8 G I^2} \times \frac{h^3}{30} = \frac{P^2 L b h^3}{240 G} \left( \frac{12}{b h^3} \right)^2 = \frac{3 P^2 L}{5 A G}$$

donde  $A = bh$  sección transversal. Entonces:

$$W_e = U = U_{\text{FLEXION}} + U_{\text{CORTE}}$$

$$\frac{P \Delta}{2} = \frac{P^2 L^3}{6 E I} + \frac{3 P^2 L}{5 A G} \text{ de donde:}$$

$$\Delta = \underbrace{\frac{P L^3}{3 E I}}_{\text{FLEXION}} + \underbrace{\frac{6 P L}{5 A G}}_{\text{CORTE}} \quad (24)$$

El término debido al cortante se puede interpretar:

$$\tau_{av} = \frac{P}{A} = \frac{V}{A} \quad \text{Cortante promedio.}$$

Puesto que  $\tau$  varía parabólicamente  $6/5$  representa un factor de corrección numérico, por lo tanto:

$$\Delta_{\text{CORTE}} = \gamma J_s = \alpha \frac{\tau_{av}}{G} L = \alpha \frac{P L}{A G} = \frac{6 P L}{5 A G}$$

El valor  $\alpha$  depende de la forma de la sección en general, puede variar con  $x$  de (24)

$$\Delta = \frac{P L^3}{3 E I} \left( 1 + \frac{3 E}{10 G} \frac{h^2}{L^2} \right) \quad (25)$$

Suponiendo acero estructural:

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \nu) \doteq 2.5$$

Y la ecuación (25) queda:

$$\Delta = \left( 1 + 0.75 \frac{h^2}{L^2} \right) \Delta_{\text{FLEXION}} \quad (26)$$

De (26) se observa que para una viga corta sea  $h = L$  la deflexión total es  $\Delta = 1.75 \Delta_{\text{flexión}}$  por lo cual la deformación de corte es muy importante para una viga flexible es  $L = 10 h$ .

$$\Delta = \left( 1 + 0.75 \frac{h^2}{(10h)^2} \right) \text{FLEXION}$$

$$\Delta = 1.0075 \Delta_{\text{FLEXION}}$$

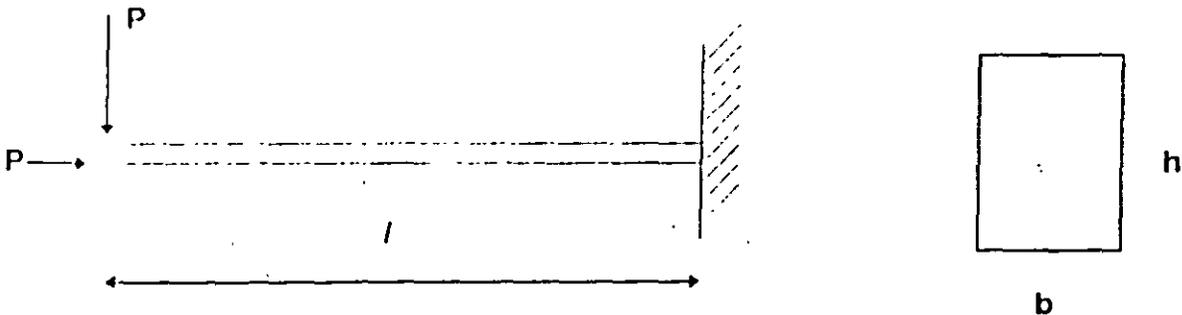
La deflexión debida al corte se puede despreciar, no siempre es posible considerar lo anterior.

Comparando las expresiones (1.1.b.1C) (1.1.6.2C) y (1.1.6.2c) para un claro igual a 5.00 m. y un peralte  $h=30$  cm se obtiene:

$U_v = 0.00286 U_M$ $U_N = 0.0009 U_M$	(a)
--	-----

En la mayoría de los problemas estructurales elásticos lineales, la energía de deformación debida a la carga normal  $N$  y cortante  $V$  es despreciable respecto a la energía de deformación debida al momento flexionante  $M$ .

Cuando existe momento torsionante  $M_T$  (vigas en balcón, etc. ), su energía de deformación es considerable y debe tomarse en cuenta su valor.

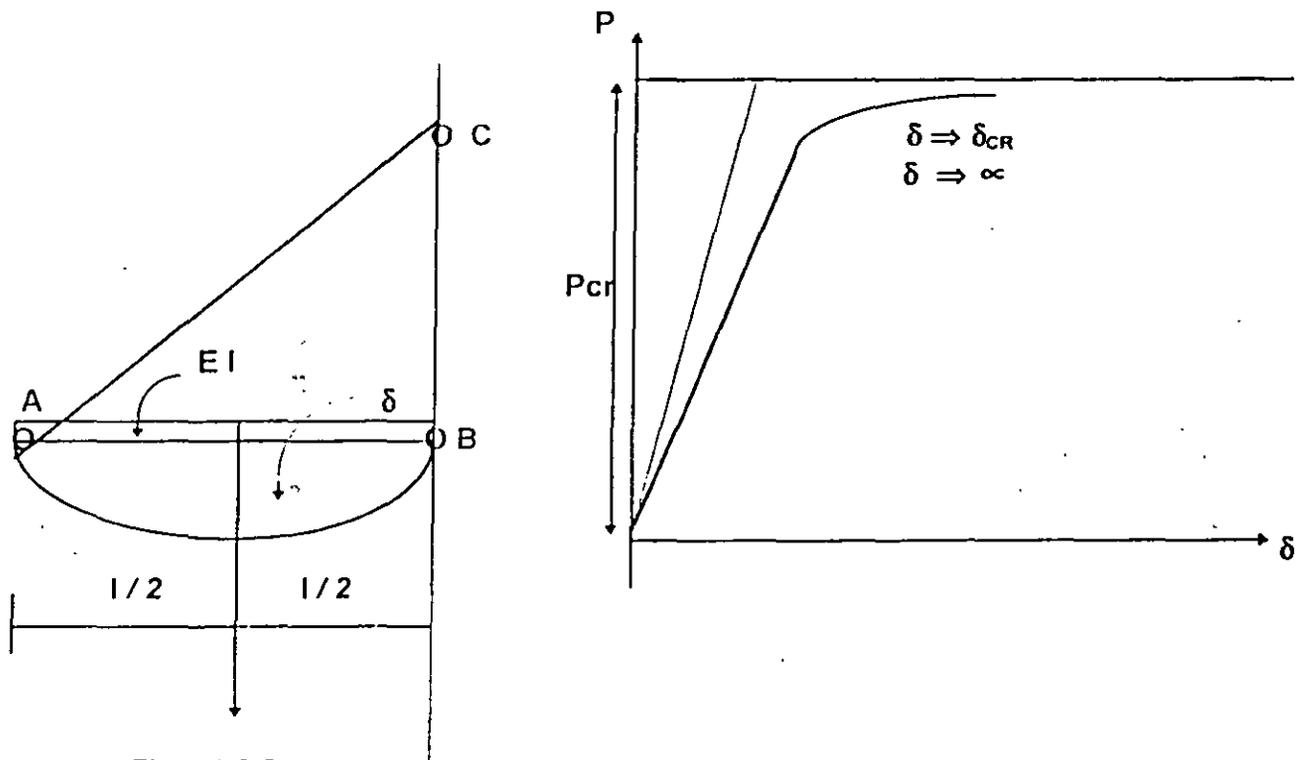


## 1.2 Principio de Superposición

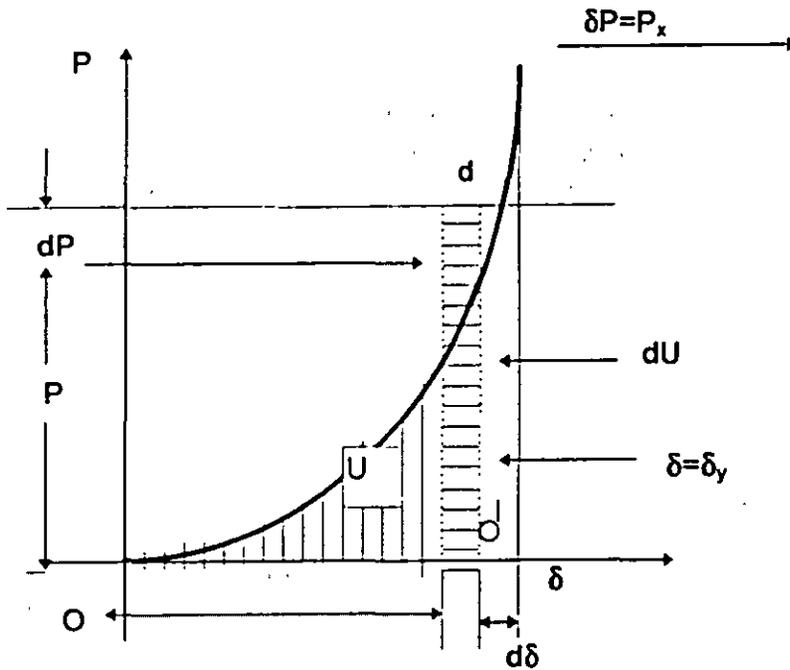
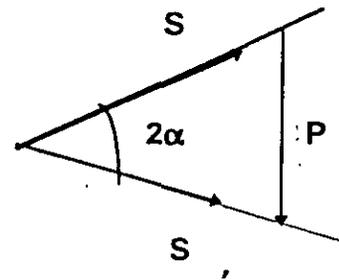
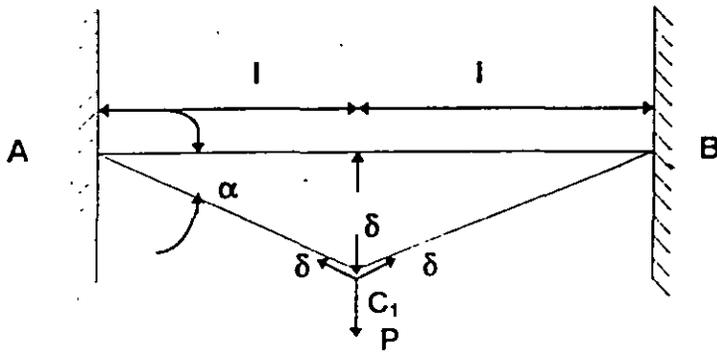
### 1.2.1- Introducción

En los sistemas de cargas en los que las deflexiones son funciones lineales de las cargas, se puede obtener la deflexión en un punto cualquiera, mediante la suma de las deflexiones producidas individualmente en dicho punto por cada una de las cargas

### 1.2.2- Casos en que no rige el principio.



Otro ejemplo en el cual el principio de superposición no rige, sería el sistema mostrado en la fig. 1.2.2 b, formado por dos barras articuladas, bajo la acción de pequeñas deformaciones ( $\tan \alpha \cong \alpha$ ).



pequeñas deformaciones:  $\alpha = \frac{\delta}{l}$  12.2b

Equilibrio:  $S = \frac{P}{2\alpha}$  12.2c

Compatibilidad geométrica: la deformación axial unitaria es:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(l^2 + \delta^2)} - l}{l} \cong \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{l^2} \quad 1.2.2d$$

Ley de Hooke

$$\varepsilon = \frac{\delta}{AE} \quad 1.2.2e$$

de 1.2.2 c, d y e se obtiene:

$$\delta = l \sqrt[3]{\frac{P}{AE}}, \quad P = \frac{\delta^3 AE}{l^3} \quad \dots \dots \dots 1.2.2f$$

De nuevo se observa que la deflexión no es función lineal de P aunque el material cumple enteramente con la ley de Hooke y la relación entre  $\delta$  y  $P$  es representada por la curva de la figura 1.2.2.b. El área o a b representa el trabajo efectuado por  $P$  durante la deflexión  $\delta$  y es igual a la energía de deformación almacenada en las barras AC y CB, la cual es igual a :

$$U = \int_0^{\delta} P d\delta = \frac{AE}{l^3} \int_0^{\delta} \delta^3 d\delta = \frac{AE \delta^4}{4 l^3} \quad 1.2.2g$$

$$\text{ó} \quad U = \frac{\ell P^{4/3}}{4 \sqrt[3]{AE}} \quad 1.2.2h.$$

Es muy importante observar que en los ejemplos anteriores no es función de segundo grado de  $\delta$  o  $P$ , como se obtiene en los casos que el principio de superposición rige.

En los ejemplos anteriores, se observa que la acción de las fuerzas exteriores es considerablemente afectada por las pequeñas deformaciones del sistema, en el primer ejemplo hay una flexión adicional  $S\delta$  a la compresión  $S$  y la barra trabaja en flexocompresión.

## 1.2.3 Ecuaciones generales de superposición

### 1.2.3.1 Introducción \*<sup>1</sup>

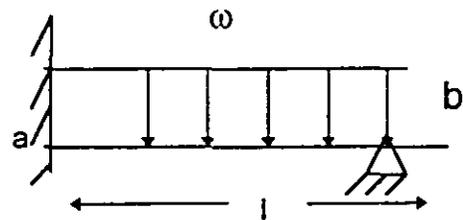
El análisis de esfuerzos en estructuras estáticamente indeterminadas no solamente hay que considerar la geometría y estática, si no también las propiedades elásticas tales como módulo de elasticidad, momento de inercia, etc. Generalmente para llegar al dimensionamiento final de la estructura, se suponen dimensiones preliminares de los miembros y se efectúa su análisis correspondiente, ciclo que puede repetirse en algunos casos hasta llegar al diseño final. En general los esfuerzos desarrollados en estructuras hiperestáticas son debidos no solo a las cargas, si no también a cambios de temperatura, asentamiento de apoyos, errores de fabricación, etc.

Es importante observar que la estructura esté en condiciones de equilibrio estable. Con el propósito de ilustrar el uso de las ecuaciones generales de superposición de causas y efectos, consideramos el siguiente ejemplo, viga con carga uniforme  $\omega$ .

Empotrada en a y libremente apoyada en b.

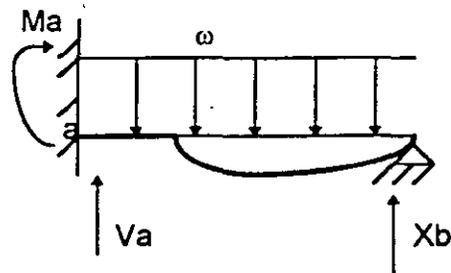
Estructura actual.

$\Delta_b$  = Deflexión de el punto b en la estructura debida a todas las causas.



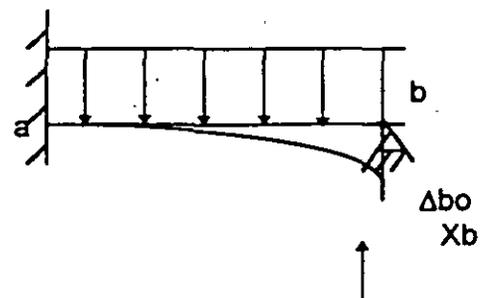
Estructura primaria

Selección de redundante,  $X_b$



Condición de equilibrio  $X_b = 0$

$\Delta_{b0}$  = Deflexión en dirección de la redundante con  $X_b = 0$



\*<sup>1</sup> En ambos métodos de rigidez y flexibilidad debe regir el principio de superposición

$\Delta_{bb}$  = Deflexión en dirección de la redundante  
debida a con



$\delta_{bb}$  = Deflexión en dirección de la redundante  
debido a una fuerza unitaria



La ecuación de superposición, si el principio es válido

$$\Delta_b = \Delta_{b0} + \Delta_{bb} = \Delta_{b0} + X_b \delta_{bb} = 0 \quad (a)$$

de donde :

$$X_b = - \frac{\Delta_{b0}}{\delta_{bb}}$$

(  $\delta_{bb}$  :  $\delta_{bb}$  es llamado coeficiente de flexibilidad )

### 1.2.3.2 Ecuaciones generales de superposición en análisis de estructuras indeterminadas de grado n.

Suponiendo que la estructura es hiperestática de grado n, se seleccionan las redundantes  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , en una forma tal que la estructura primaria en condición de equilibrio.

$X_i = 0$  sea estable o isostática, aceptando la siguiente notación:

$\Delta_i$  = Deflexión total del punto i debida a todas las cargas y efectos.

$\Delta_{i0}$  = Deflexión del punto i en dirección de la redundante  $X_i$  en condiciones de equilibrio estable isostático  $X_i = 0$ .

$\Delta_{it}$  = Deflexión del punto i debida a un cambio de temperatura T.

$\Delta_{ia}$  = Deflexión del punto i debida a asentamientos de apoyo.

$\Delta_{ie}$  = Deflexiones en el punto  $i$  debido a errores de fabricación.

$\delta_{i1}$  = Deflexión en el punto  $i$  debida a la condición  $X_1 = 1$ .

$\delta_{i2}$  = Deflexión en el punto  $i$  debida a la condición  $X_2 = 1$ .

.....

.....

$\delta_{in}$  = Deflexión en el punto  $i$  debido a la condición  $X_n = 1$ .

Cualquier redundante puede suponerse que actúa arbitrariamente en cierto sentido. Cualquier deflexión del punto de aplicación de la redundante deberá ser medida a lo largo de su línea de acción y será positiva cuando el sentido es el mismo que el supuesto para la redundante.

Por lo tanto usando la notación y convención de signos mencionada, las ecuaciones generales de superposición en sistemas estructurales coplanares y espaciales son:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{10} + \Delta_{1T} + \Delta_{1A} + \Delta_{1E} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \dots + X_n\delta_{1n} \\ \Delta_2 &= \Delta_{20} + \Delta_{2T} + \Delta_{2A} + \Delta_{2E} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \dots + X_n\delta_{2n} \\ &\dots \\ \Delta_n &= \Delta_{n0} + \Delta_{nT} + \Delta_{nA} + \Delta_{nE} + X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \dots + X_n\delta_{nn} \end{aligned} \quad (a)$$

Expresando (a) matricialmente se tiene

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta_1 - \Delta_{10} - \Delta_{1T} - \Delta_{1A} - \Delta_{1E}) \\ (\Delta_2 - \Delta_{20} - \Delta_{2T} - \Delta_{2A} - \Delta_{2E}) \\ \dots \\ (\Delta_n - \Delta_{n0} - \Delta_{nT} - \Delta_{nA} - \Delta_{nE}) \end{bmatrix} \quad (b)$$

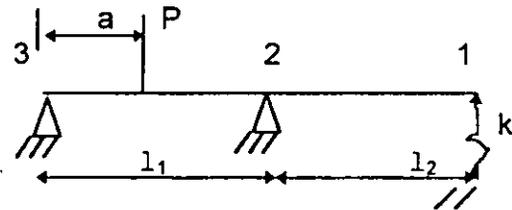
### 1.2.3.3 Ejemplos que ilustran el uso de las ecuaciones <sup>de</sup> superposición.

Antes de estudiar los ejemplos es conveniente observar lo siguiente:

- 1.- Nunca seleccionar como redundante una reacción estáticamente determinada, ello conduciría a una estructura primaria en equilibrio inestable en condición  $X_i = 0$ .
- 2.- El sentido positivo de la redundante se puede seleccionar arbitrariamente, y su deflexión será positiva si tiene el mismo sentido.
- 3.- Debe observarse que  $A_i$ , deflexión total del punto de aplicación de la redundante  $X_i$  debida a todas las causas es casi siempre cero.

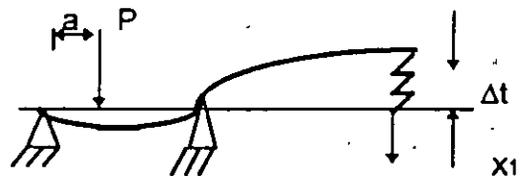
Estructura actual

$k'$  Constante elástica resorte (L / F)

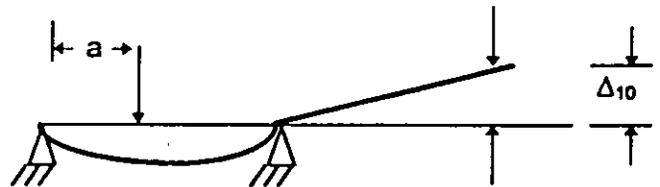


Estructura primaria

$A_1 = X_{i1}$  (c)



Condición  $X_1 = 0$



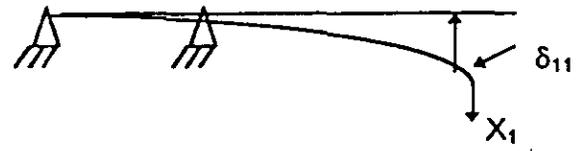
Condición  $X_1 = 1$

De Ec. (a) se tiene

$$A_1 = A_{10} - X_1 S_{11} \quad (d)$$

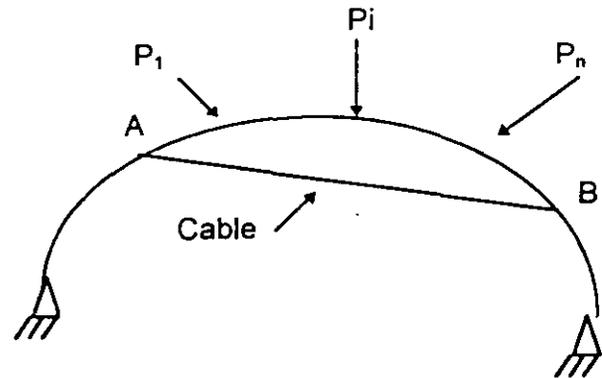
de (c) y (d) se obtiene

$$\underline{X_1 = A_{10} / S_{11} + k - 1} \quad (e)$$



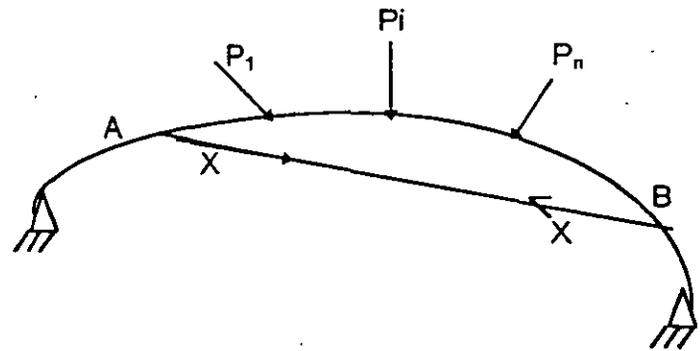
Estructura actual:

Arco coplanar con tiran<sup>e</sup> AB bajo un sistema de cargas  $P_n$

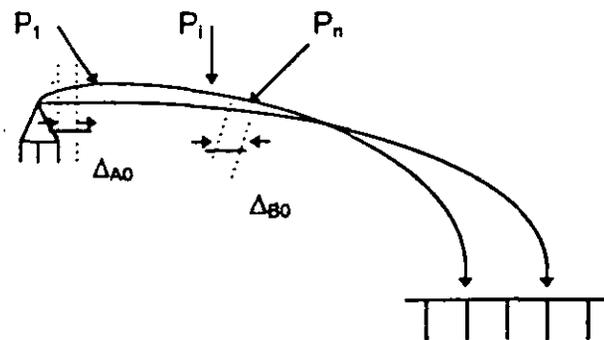


Estructura primaria:

Selección como redundante la tensión en el cable, X.



Condición  $X=0$

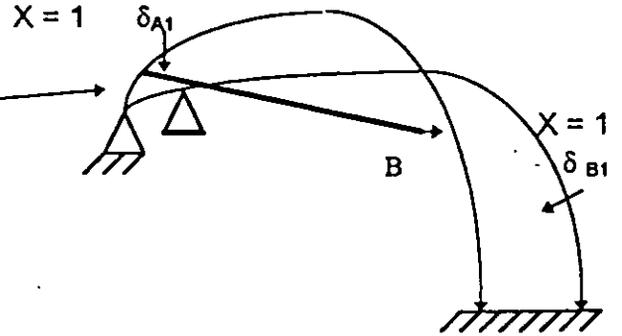


Condición  $X=1$

$$\Delta_{AB} = \Delta_{A0} + \Delta_{B0} \quad (f)$$

$$\Delta_A = \Delta_{A0} + X\delta_{A1} \quad (g)$$

$$\Delta_B = \Delta_{B0} + X\delta_{B1} \quad (h)$$

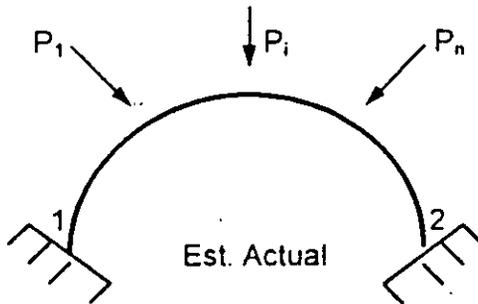


Sumando (g) y (h)

$$\Delta_A + \Delta_B = \Delta_{A0} + \Delta_{B0} + X(\delta_{A1} + \delta_{B1}) = 0$$

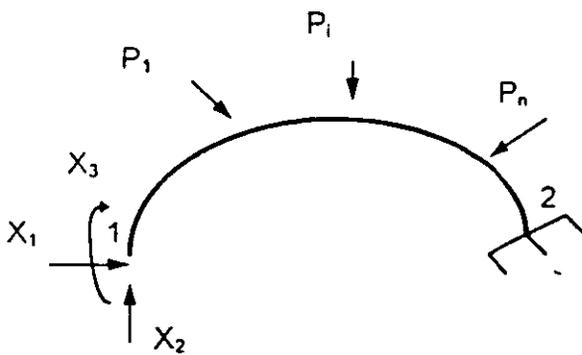
De donde despejando la redundante  $X$  se tiene

$$X = - \frac{\Delta_{A0} + \Delta_{B0}}{\delta_{A1} + \delta_{B1}} \quad (i)$$



BARRA PLANA EMPOTRADA

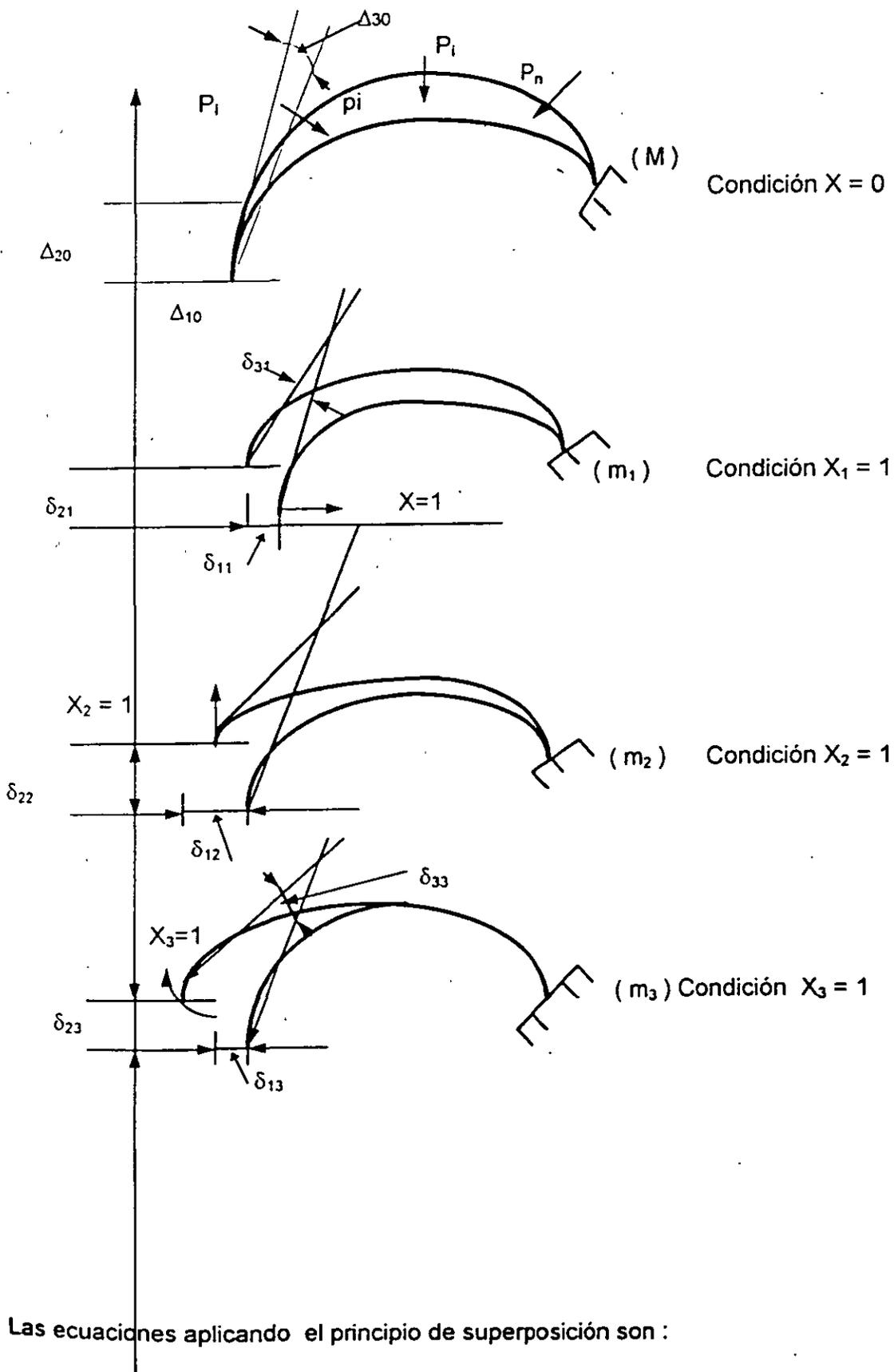
Problema hiperestático de Orden 3



ESTRUCTURA PRIMARIA

Selección de redundantes

$X_1, X_2, X_3$  y condición de empotramiento  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$



$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= \Delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} \\
 \Delta_2 &= \Delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} \\
 \Delta_3 &= \Delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33}
 \end{aligned} \quad (j)$$

Expresando (j) en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} \quad (k)$$

Aplicando el teorema de Castigliano y la expresión de la energía de deformación por flexión, los coeficientes de flexibilidad son igual a

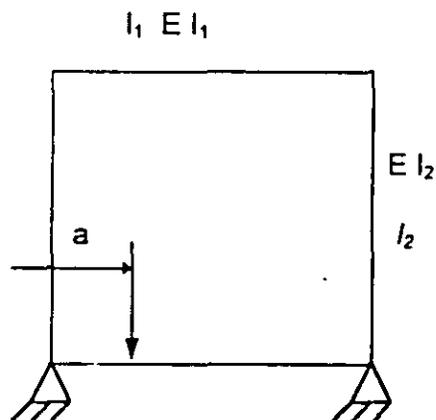
$$\Delta_{10} = \int \frac{Mm_1}{EI} ds, \Delta_{20} = \int \frac{Mm_2}{EI} ds, \Delta_{30} = \int \frac{Mm_3}{EI} ds$$

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2 ds}{EI}, \delta_{12} = \int \frac{m_1 m_2 ds}{EI}, \delta_{33} = \int \frac{m_3^2 ds}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \left[ \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds \right], \delta_{13} = \delta_{31} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \delta_{23} = \delta_{32} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds$$

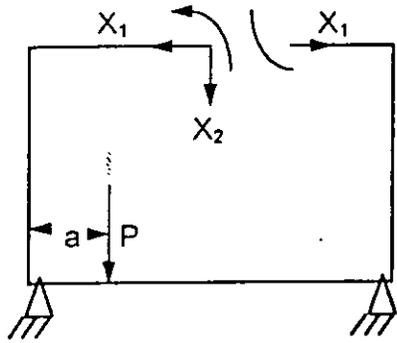
Marco continuo rectangular bajo la acción de una carga p

Estructura actual



$$\begin{matrix} X_3 & X_3 \uparrow & X_2 \\ & & \uparrow \end{matrix}$$

## ESTRUCTURA PRIMARIA



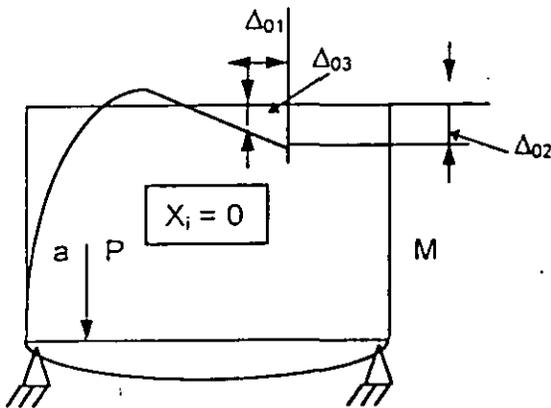
Selección de redundantes

En este caso las ecuaciones de superposición son:

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} = 0$$

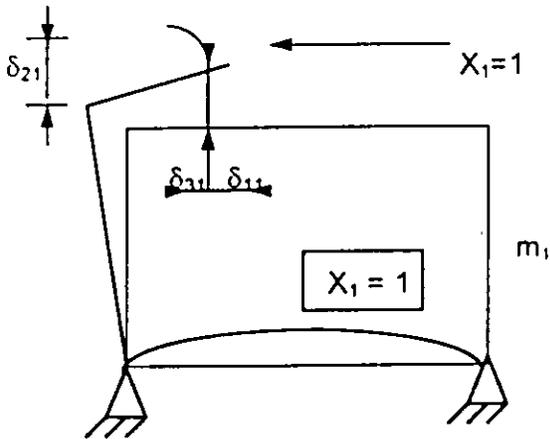
$$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} = 0 \quad (n)$$

$$\Delta_3 = \Delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} = 0$$

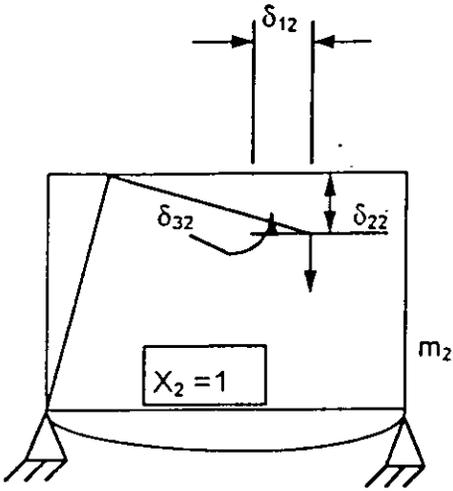


ó

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} \quad (h)$$

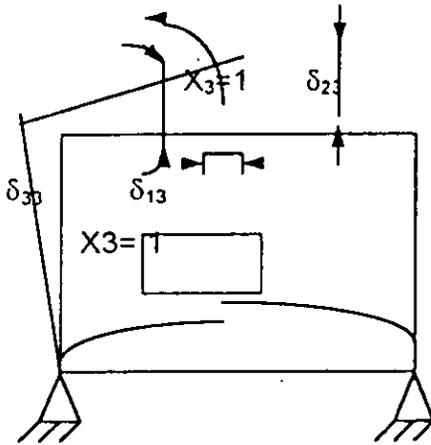


Del teorema de Castigliano y la energía elástica de deformación se obtienen los coeficientes de flexibilidades  $\delta_{ij}$  y  $\Delta_{0i}$



$$D_{01} = \int \frac{M m_1}{EI} ds, \quad D_{02} = \int \frac{M m_2}{EI} ds, \quad D_{03} = \int \frac{M m_3}{EI} ds$$

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2 ds}{EI}, \quad \delta_{22} = \int \frac{m_2^2 ds}{EI}, \quad \delta_{33} = \int \frac{m_3^2 ds}{EI}$$

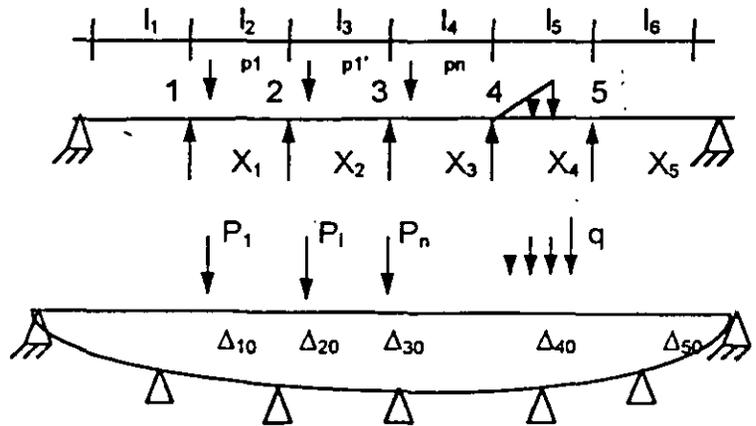


$$\delta_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds, \quad \delta_{13} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \quad \delta_{23} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} > \delta_{13} = \delta_{31}, \quad \delta_{23} = \delta_{32}$$

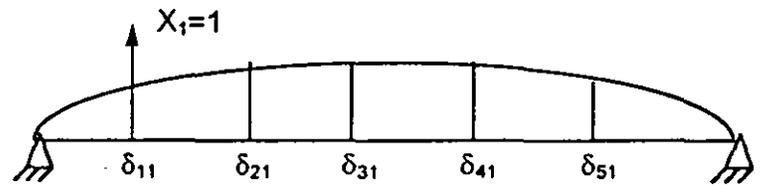
## Viga continua de 7 apoyos

### ESTRUCTURA ACTUAL Y PRIMARIA

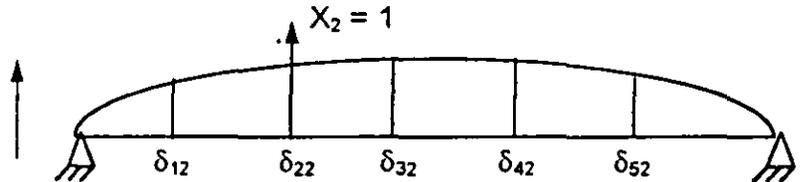


Condición  $X_1 = 0$

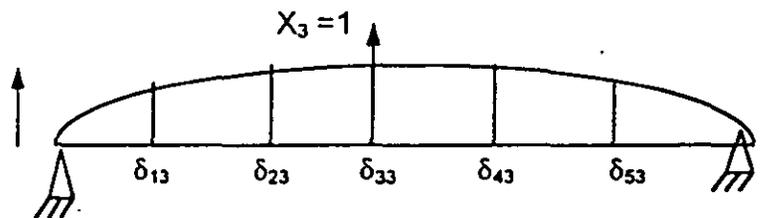
Condición  $X_1 = 1$



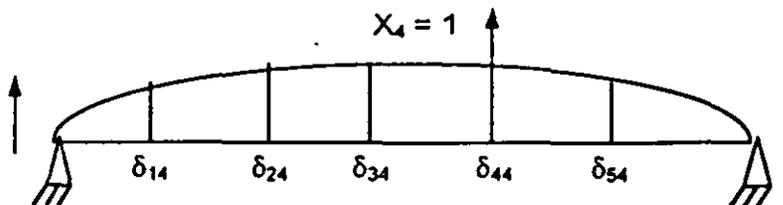
Condición  $X_2 = 1$



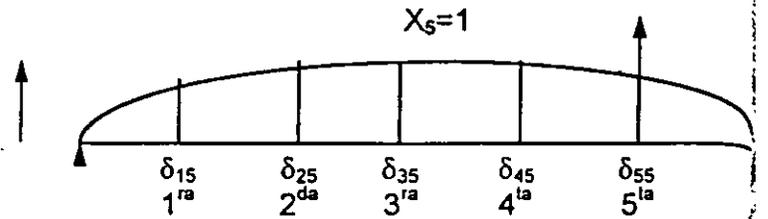
Condición  $X_3 = 1$



Condición  $X_4 = 1$



Condición  $X_5 = 1$



ECUACION

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} = 0$$

$$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + X_5\delta_{25} = 0$$

$$\Delta_3 = \Delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + X_5\delta_{35} = 0$$

$$\Delta_4 = \Delta_{40} + X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} = 0$$

$$\Delta_5 = \Delta_{50} + X_1\delta_{51} + X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} = 0$$

$$-[\delta_{ij}]\{X_j\} + \{\Delta_{j_0}\} = 0$$

### 1.3 Generalización de la energía de deformación

La energía de deformación de una barra elástica puede representarse como una función de segundo grado de la carga o la deformación.

La misma conclusión es válida para cualquier estructura dentro del régimen elástico, siempre y cuando el principio de superposición pueda aplicarse, en la Fig. 1.3.1 suponiendo que las fuerzas se aplican simultáneamente e incrementan gradualmente hasta su valor final.

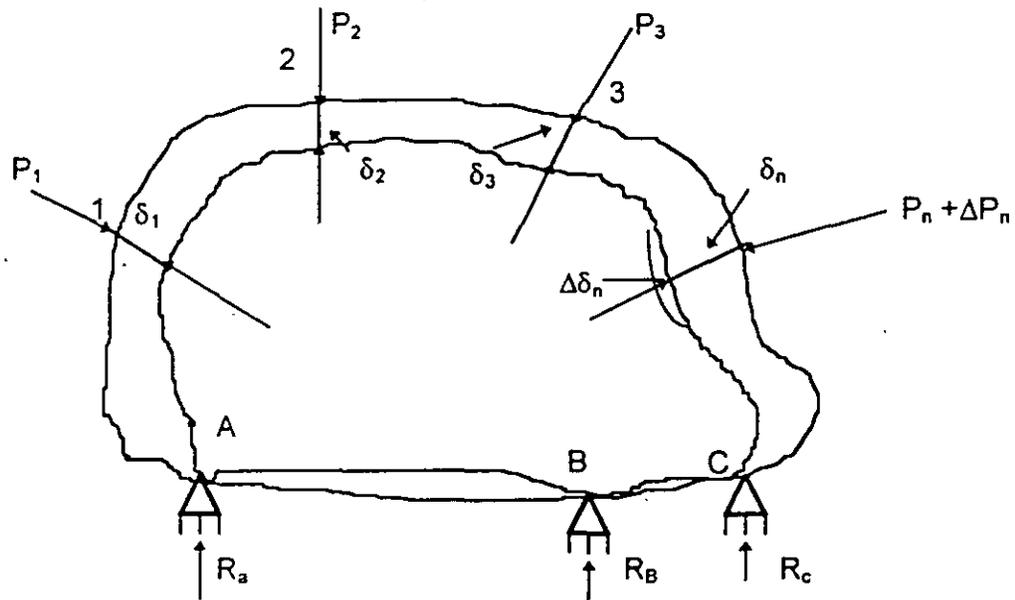


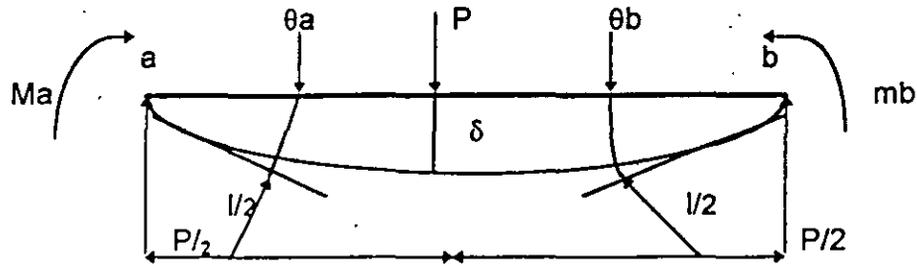
Fig. 1.3.1

El principio de superposición rige, los desplazamientos serán funciones lineales de las cargas. El trabajo elástico de todas

Las fuerzas externas es igual a la energía interna de deformación almacenada en el cuerpo elástico de la figura 1.3.1 y será

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \delta_i = \frac{1}{2} (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \dots + P_n \delta_n) \quad (1.3.1)$$

1.3.1 Ejemplo, viga libremente apoyada cargada como se indica en la fig. 1.3.1a



La energía de deformación es:

$$U = \frac{1}{2}(P\delta + Ma\theta_a + Mb\theta_b) \quad (a)$$

De la curva elástica de la viga se demuestra que :

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{Pl}{48EI} + \frac{Mal^2}{16EI} + \frac{Mbl^2}{16EI} \\ \theta_a &= \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{Mal}{3EI} + \frac{Mbl}{6EI} \\ \theta_b &= \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{Mal}{6EI} + \frac{Mbl}{3EI} \end{aligned} \right\} (b)$$

Substituye (b) en (a) se obtiene:

$$U = \frac{l^3}{96EI} \left( P^2 + \frac{6}{l} PMa + \frac{6}{l} PMb + \frac{16}{l^2} Ma^2 + \frac{16}{l^2} Mb^2 + \frac{16}{l^2} MaMb \right) \dots (c)$$

en (c) se observa que U es una función de segundo grado de las fuerzas y momentos P, Ma y Mb.

Tarea

En el ejemplo de la viga de la fig. 1.3.1 a demostrar:

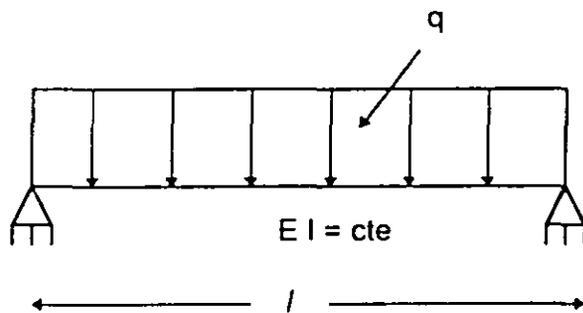
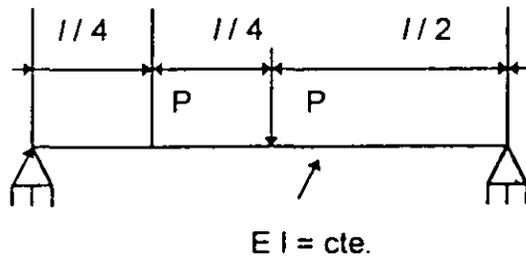
$$a) \frac{\partial u}{\partial P} = \delta, \frac{\partial U}{\partial MA} = \theta_a, \frac{\partial U}{\partial Mb} = \theta_b$$

b) De (a) y (b) obtener U en función de los desplazamientos  $\delta$ ,  $\theta_a$ ,  $\theta_b$

c) Demostrar que:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = P, \frac{\partial U}{\partial \theta_a} = M_a, \frac{\partial U}{\partial \theta_b} = M_b$$

Calcular la energía de deformación de las siguientes vigas de sección transversal



### 1.4 Teorema de Castigliano

Suponiendo que el principio de superposición rige y que U se expresa en función de las fuerzas externas se tiene que: LA DERIVADA DE LA ENERGIA DE DEFORMACION CON RESPECTO A UNA DE LAS FUERZAS O MOMENTOS EXTERNOS DA EL DESPLAZAMIENTO O EL GIRO DE LA FUERZA O MOMENTO CORRESPONDIENTE

$$\frac{\partial u}{\partial P_n} = \delta_n \quad (1.4.1)$$

Considerando el cuerpo elástico bajo la aplicación de  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Durante la aplicación de  $P_i$  se producen deformaciones y se almacena cierta energía de deformación dentro del cuerpo ( Fig. 1.3.1 ). Si subsecuentemente a  $P_n$  se aplica un incremento  $\Delta P_n$ , la energía  $U$  incrementará.

$$U + \Delta U = U + \frac{\partial U}{\partial P_n} \Delta P_n. \quad (14.2)$$

Si en vez de aplicar  $\Delta P_n$  después de las cargas se aplica antes se tiene:

$$U + \Delta U = U + \Delta P_n (\delta n + \Delta \delta n) = U + \Delta P_n \delta n \quad (14.3)$$

igualando ( 1.4.2. ) con ( 1.4.3. ) se demuestra ( 1.4.1. )

### 1.4.1 Ejemplos de aplicación

La variación de  $M(x)$  es

$$M = Ma - Px \quad (a)$$

La energía de deformación por flexión

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \dots (b)$$

Del teorema de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta\alpha = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} ds$$

$$\delta\alpha = \int_0^l \frac{Mm}{EI} ds \dots (c)$$

sustituyendo (a) en (c)

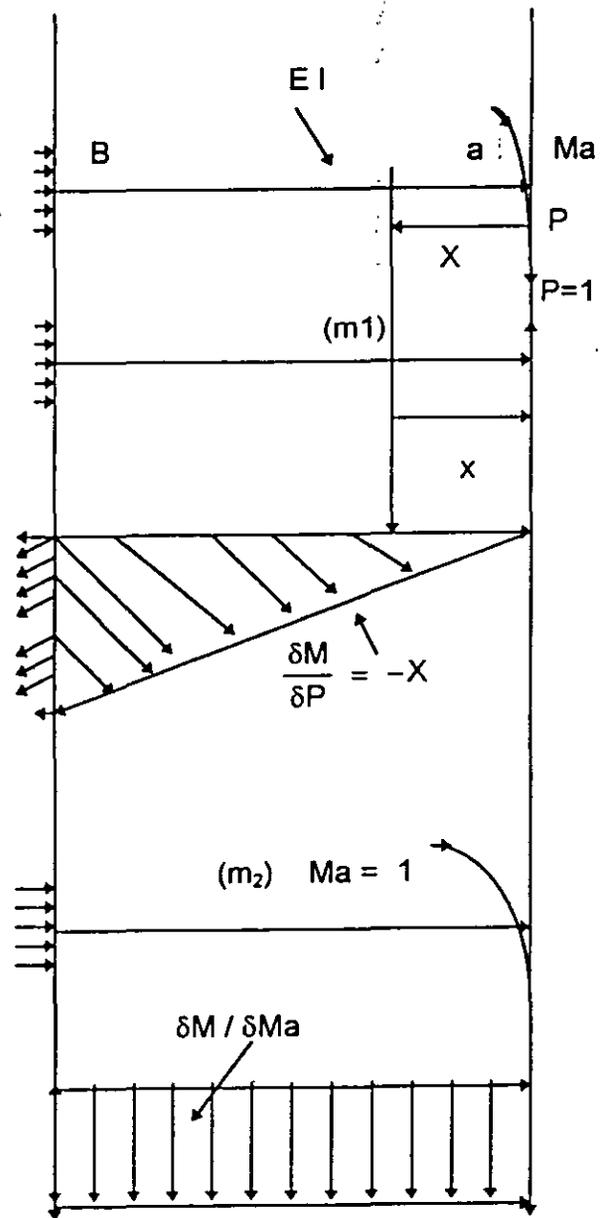
$$\delta\alpha = \frac{1}{EI} \int_0^l (Ma - Px)(-x) dx$$

$$\delta\alpha = \frac{pl^3}{EI} - \frac{Mal^2}{2EI} \dots (d)$$

De nuevo del teorema de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial Ma} = \theta\alpha = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Ma} dx = \int_0^l \frac{Mm_2}{EI} dx \dots (e)$$

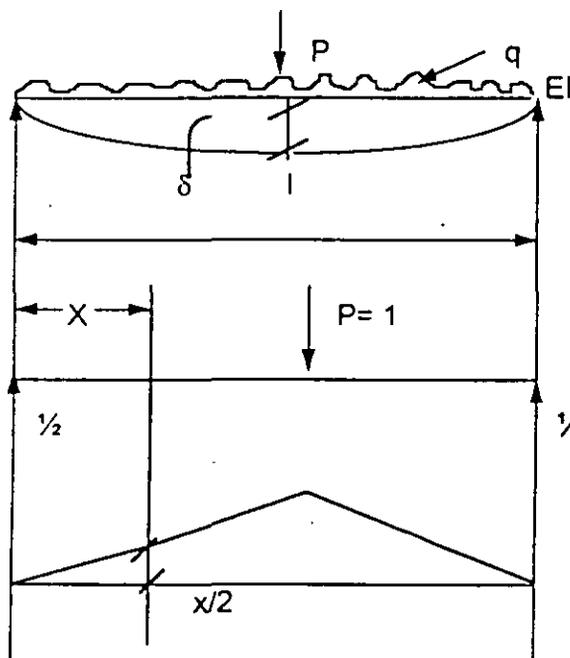
Substituyendo (a) en (e) se obtiene



$$\theta\alpha = \frac{1}{EI} \int_0^l (Ma - Px)(1) dx = \frac{Mal}{EI} - \frac{Pl^2}{2EI}$$

En el ejemplo anterior no se calculó en función de las fuerzas externas, sino se utilizó la energía de deformación por flexión y se derivó bajo el signo integral.

Es importante observar que las derivadas corresponden a la variación de momento flexionante debido a causas unitarias  $P$  y  $Ma$ .



$$M = \frac{P}{2}X + \frac{ql}{2}X - \frac{qx^2}{2} \quad (f)$$

$$m = x/2 \quad (g)$$

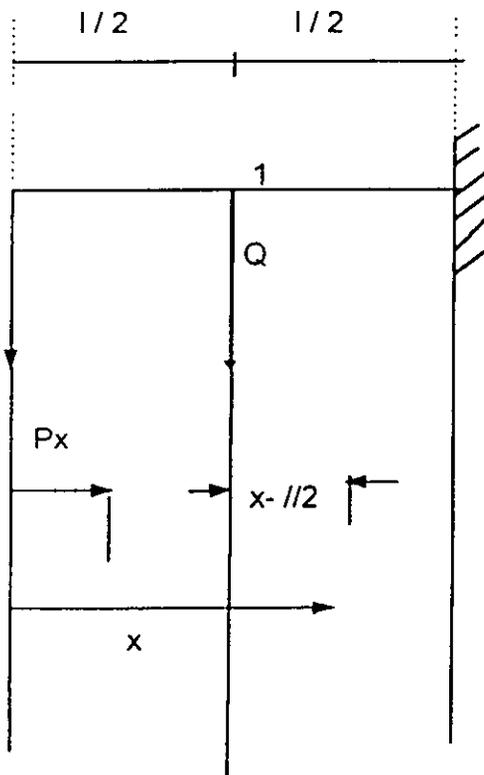
De la energía de deformación por flexión y el teorema de Castigliano.

$$\delta = 2 \int \frac{Mm}{EI} dx \quad (h)$$

Substituyendo (f) y (g) en (h) se obtiene:

$$\delta = 2/EI \int_0^{l/2} \left( \frac{P}{2}X + \frac{ql}{2}X - \frac{qX^2}{2} \right) \left( \frac{X}{2} \right) dx = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \quad (h)$$

En los casos en los cuales es necesario determinar los desplazamientos en un lugar donde no hay fuerzas o momentos, se agrega al sistema actual de fuerzas, una fuerza ficticia de magnitud infinitesimal, tal que no afecta al sistema actual de fuerzas y se obtiene el desplazamiento derivado con:



$$M = Ma - Px \quad 0 \leq x \leq l/2$$

$$M = Ma - Px - Q(x - l/2)$$

$$\text{Para } l/2 \leq x \leq l$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = m = - \left( x - \frac{l}{2} \right)$$

$$U = \int \frac{M' dx}{2EI} = (\text{energía de deformación por flexión})$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \delta_1 = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} dx = - \int_{l/2}^l \frac{1}{EI} (Ma - Px)(x - l/2) dx$$

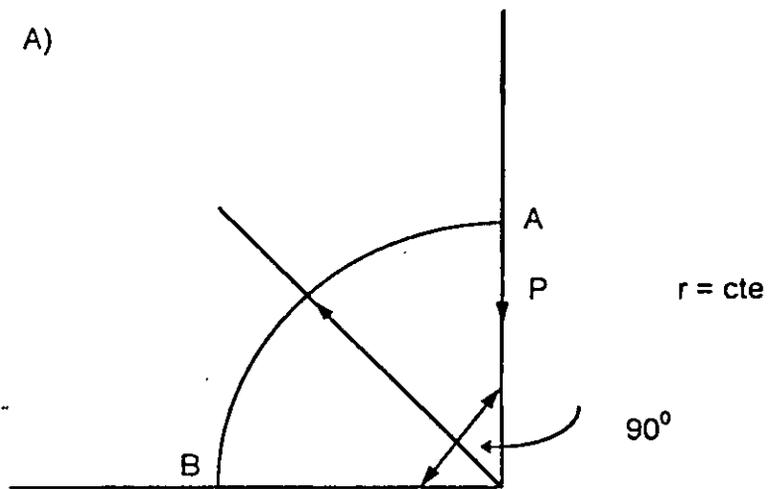
En conclusión se observa que la derivación del teorema de Castigliano, fue basada en el principio de superposición.

De allí que la energía de deformación U debe ser una función de segundo grado de las fuerzas actuales. Si el principio de superposición no rige y U no es función de segundo grado de las fuerzas, el Teorema de Castigliano no es aplicable, lo anterior se ilustró mediante ejemplos.

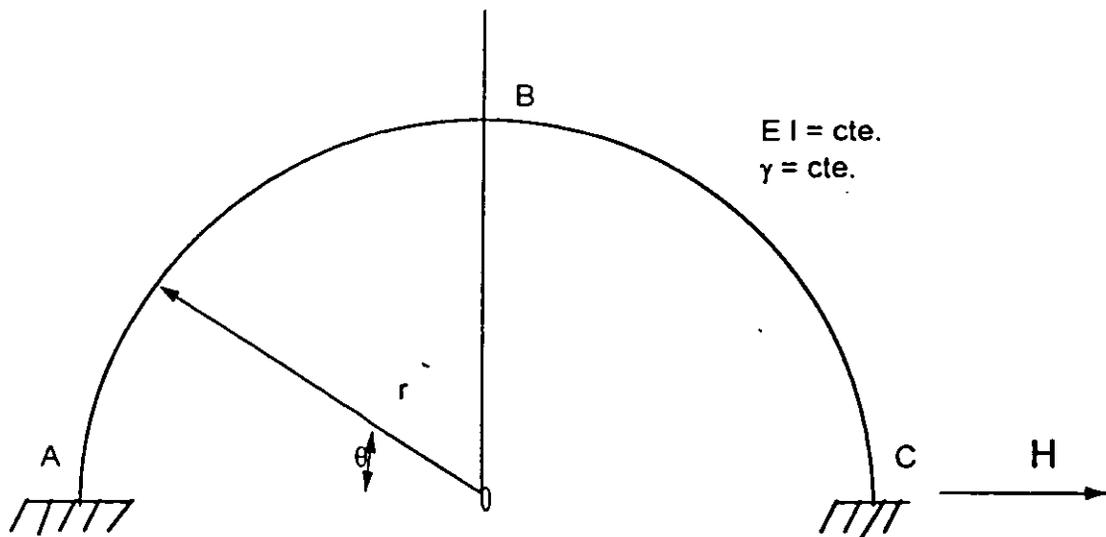
Ejemplos de tarea

a) Utilizando el teorema de Castigliano determinar los ángulos en los extremos de una viga libremente apoyada con carga uniforme  $q$ , claro  $l$ , y rigidez flexionante  $EI = \text{Constante}$

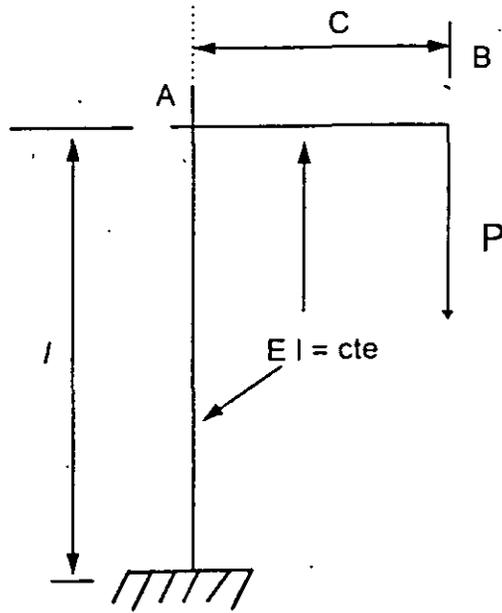
b) Determinar los desplazamientos horizontales y vertical de la viga curva mostrada en A.



c) Determinar el desplazamiento horizontal en c y el vertical en B en la estructura mostrada.



d) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de A y B en la estructura mostrada.



## 1.5 Teorema del trabajo mínimo

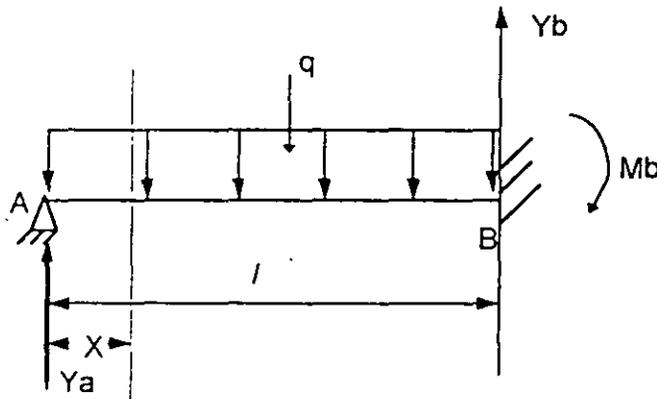
Se han considerado aplicaciones del teorema de Castigliano a sistemas de fuerzas estáticamente determinados.

Aplicándolo a sistemas estáticamente indeterminados se concluye que la derivada de la energía de deformación con respecto a cualquier redundante deberá ser cero si su acción es la de prevenir desplazamientos en su punto de aplicación, de allí que las magnitudes de las acciones redundantes en sistemas hiperestáticos serán tal sistema en dicho punto será máxima o mínima, lo anterior es el método del trabajo mínimo para calcular redundantes. En una estructura hiperestática de grado "n" se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0, \dots, \frac{\partial U}{\partial X_n} = 0 \quad (1.5.1)$$

### 1.5.1 Ejemplos

a) Viga empotrada en un extremo con carga uniforme ( grado n=1 )



La energía de deformación del sistema es:

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

Del teorema del trabajo mínimo

$$\frac{\partial U}{\partial Y_a} = 0 = \frac{\partial}{\partial Y_a} \left[ \int \frac{M^2 dx}{2EI} \right] = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial Y_a} dx \dots (b)$$

$$M = Y_a X - \frac{qx^2}{2} \quad (c)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Y_a} = X \quad (d)$$

Sustituyendo (c) y (d) en (b) se tiene

$$\int_0^l \left( Y_a X - \frac{qx^2}{2} \right) dx X = \frac{l^3}{3} Y_a - \frac{ql^2}{8} = 0$$

de donde

$$Y_a = 3 / 8 ql$$

En el sistema se tienen 3 reacciones  $Y_a$   $Y_b$   $Y_c$  y 3 ecuaciones dos de estática y una del teorema de Castigliano.

En el ejemplo anterior, se considera como redundante  $M_b$  se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial M_b} = \frac{\partial}{\partial M_b} \left[ \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \right] = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_b} dx = 0 \quad (f)$$

el momento flector es

$$M = \left( \frac{ql}{2} - \frac{M_b}{l} \right) X - \frac{qx^2}{2} \quad (g)$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_b} = -\frac{X}{l} \quad (h)$$

Sustituyendo (g) y (h) en (f) se tiene

$$\int_0^l \left[ \left( \frac{ql}{2} - \frac{Mb}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2} \right] \frac{x}{l} dx = 0 \quad (i)$$

Integrando (i) y despejando Mb se obtiene

$$Mb = \frac{ql^2}{8} \quad (j)$$

# MÉTODOS MATRICIALES DE ANALISIS ESTRUCTURAL

## 2.1 Métodos de fuerzas y deformaciones

En los métodos de análisis de sistemas estáticamente indeterminados, primero se seleccionan las redundantes, y sus magnitudes se determinan mediante el teorema del trabajo mínimo, considerando la energía de deformación del sistema. Este procedimiento general es llamado el Método de Fuerzas.

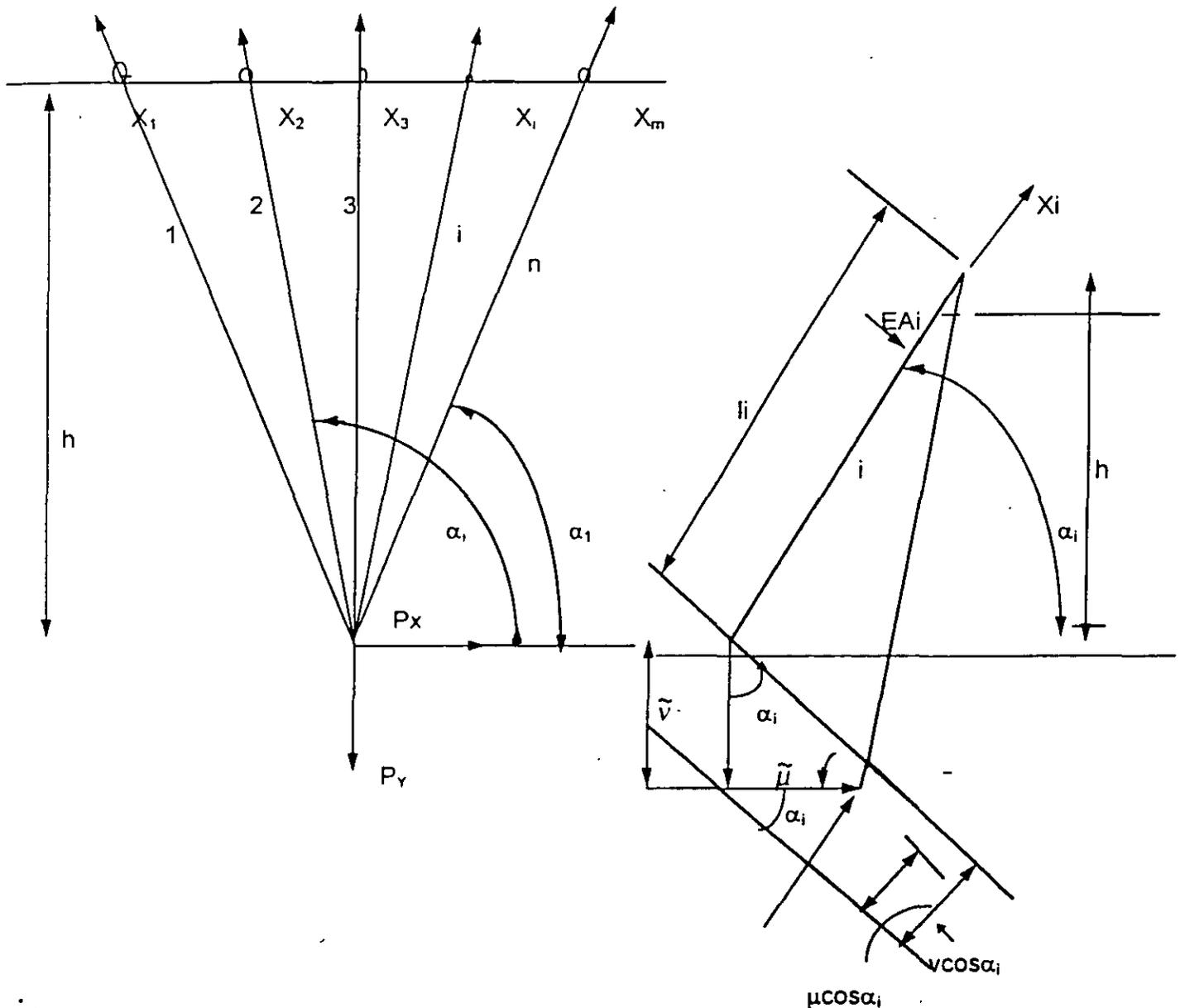


Fig. 2.1. (Para ilustrar en un mismo ejemplo)

La distinción entre los dos métodos, consideremos la estructura estáticamente indeterminada coplanar mostrada en la fig 2.1 bajo la acción de dos fuerzas aplicadas con n barras, el número de redundantes  $X_1, X_2, \dots, X_{n-2}$ , se determina la energía de deformación del sistema en función de las fuerzas y usando el teorema del trabajo mínimo se obtienen las ecuaciones necesarias.

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0, \dots, \frac{\partial U}{\partial X_{n-2}} = 0 \quad (a)$$

Lo anterior es el método de las fuerzas. Para resolver el mismo problema, Navier<sup>2</sup> sugirió el método de desplazamientos. La deformación del sistema de la fig. 2.1 estará completamente determinado si conocemos las componentes horizontales y verticales u y v respectivamente. Suponiendo que los desplazamientos son pequeños.

La deformación axial de cualquier barra i será

$$\Delta l_i = U \text{sen} \alpha_i - \mu \text{cos} \alpha_i \quad (b)$$

y de la ley de Hooke su fuerza axial corresponde será

$$X_i = \frac{E A_i}{l_i} (U \text{sen} \alpha_i - \mu \text{cos} \alpha_i) \quad (c)$$

de la figura 2.1.

$$l_i = \frac{h}{\text{sen} \alpha_i} \quad (d)$$

sustituyendo (d) en (c) se obtiene

$$X_i = \frac{E A_i}{h} (U \text{sen} \alpha_i - \mu \text{cos} \alpha_i) \text{sen} \alpha_i \dots \dots (e)$$

De las condiciones de equilibrio se obtiene

---

<sup>2</sup>"Navier" resume des lecons "2de., p.345  
Paris, 1833

$$\sum_{i=1}^n X_i \cos \alpha_i = P_x$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \sin \alpha_i = P_y$$

sustituyendo ( e ) en ( f ) y ( g ) se obtiene:

$$U \sum_{i=1}^n A_i \sin^2 \alpha_i \cos i - \mu \sum_{i=1}^n A_i \cos^2 \alpha_i \sin \alpha_i = \frac{P_x h}{E} \dots (i)$$

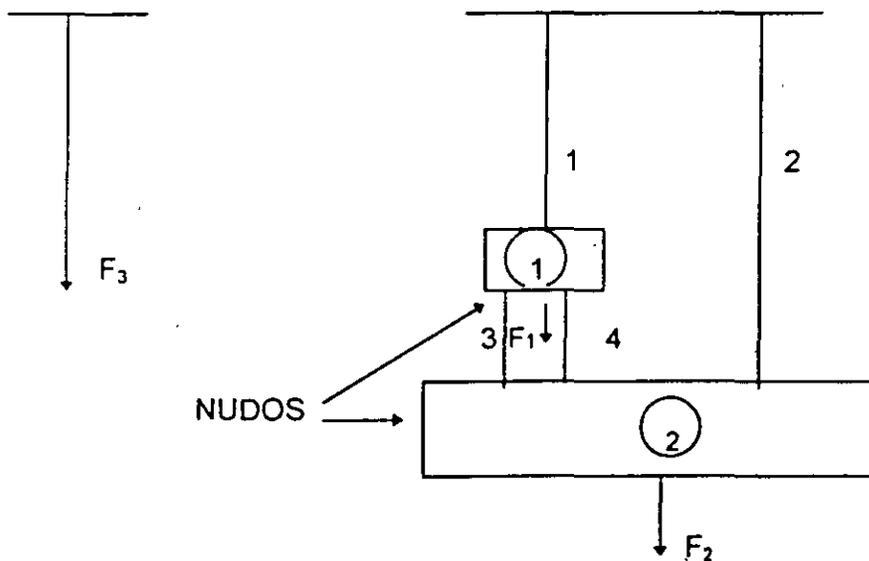
$$U \sum_{i=1}^n A_i \sin^3 \alpha_i - \mu \sum_{i=1}^n A_i \sin^2 \alpha_i \cos \alpha_i = \frac{P_y h}{E} \dots (j)$$

de ( i ) y ( j ) se determinan u y v las cuales substituidas en ( e ) obtenemos la fuerza  $X_i$  en cualquier barra del sistema. Se observa en este caso que la consideración de las deformaciones directas del sistema resulta en una simplificación substancial, especialmente si el número de barras n es grande, puesto que sólo tenemos que resolver dos ecuaciones con dos incognitas que son las deformaciones u y v. En el caso del método de las fuerzas tendremos que resolver n - 2 ecuaciones con n-2 incognitas. Es conveniente observar que el método de las deformaciones involucro 3 etapas básicas que son:

Ecuación ( b ) : Compatibilidad geométrica de deformaciones, u, v y  $A l$ .

Ecuación ( e ) : Ley de Hooke

Ecuación ( f ) y ( g ) : Equilibrio



Barras

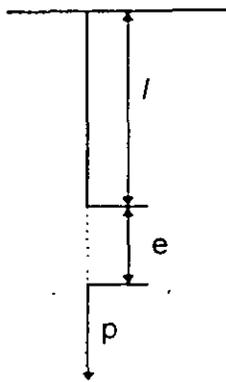
nb = número de barras = 4

nN = número de nudos = 2

k = fuerzas axiales ( P )

e = alargamiento ( S )

$$\text{Rigidez de barra } k_i = \frac{p}{e} = \frac{\text{fuerza axial}}{\text{alargamiento}} = \frac{E A_i}{l_i}$$



A) Continuidad

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \{ \text{Deformacion o alargamiento de las 4 barras} \}$$

{ + alargamiento }  
{ - acortamiento }

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \{ \text{desplazamientos nodales} \} \begin{Bmatrix} + \downarrow \\ - \uparrow \end{Bmatrix}$$

de la figuras

$$e_1 = d_1$$

$$e_2 = + d_2$$

$$e_3 = - d_1 + d_2$$

$$e_4 = - d_1 + d_2$$

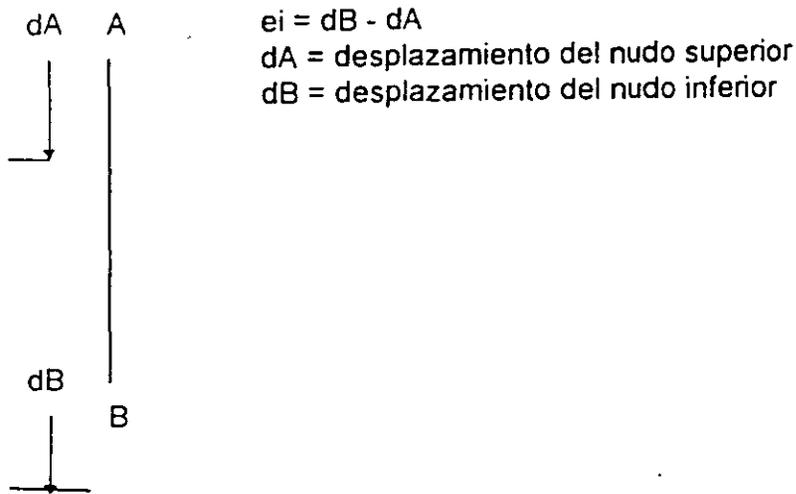
$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{e\} = [a]\{d\} \dots \dots \dots (1)$$

donde

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \text{ matriz de continuidad}$$

Observar que para una barra i cualquiera



B) Ley de Hooke

$$\text{Sea } \{k\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}$$

Fuerzas axiales en las barras + tensión, - compresión

$$p_1 = k_1 e_1$$

$$p_2 = k_2 e_2$$

$$p_3 = k_3 e_3$$

$$p_4 = k_4 e_4$$

$$k_i = \frac{EA_i}{l_i} \text{ rigidez barra } i$$

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}, \quad \text{ó } \{p\} = [k] \{e\} \quad (2)$$

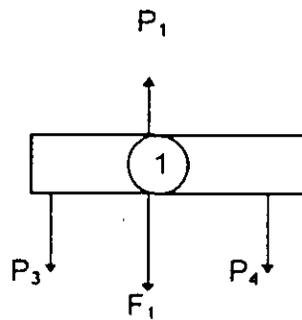
$$\{p\} = [k] \{e\}$$

[ k ] matriz de rigidez de las barras

c) Equilibrio;  $\sum f_y = 0$  en cada nudo

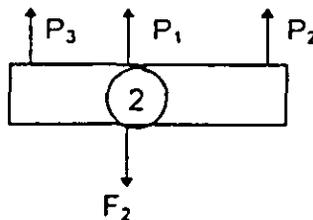
$$\text{Sea: } \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Nudo 1



$$F_1 = p_1 + 0 - p_3 - p_4$$

Nudo 2



$$F_2 = 0 + P_2 + P_3 + P_4$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} \text{ o } \{F\} = [a]^T \{P\}$$

donde:  $[a]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  matriz de equilibrio

observar: matriz de equilibrio es la transpuesta de la matriz de continuidad.

Solución del problema anterior por el método de desplazamientos ( rigideces ).

Incógnitas:  $\{e\}, \{d\}, \{p\}$

Datos:  $[a], [a]^T, [k], \{F\}$

Substitución ( 1 ) en ( 2 )

$$\{p\} = [k] [a] \{d\} \dots \dots \dots (4)$$

Substitución ( 4 ) en ( 3 )

$$\{F\} = [a]^T [k] [a] \{d\} \dots \dots \dots (5)$$

o

$$\{F\} = [k] \{d\} \dots \dots \dots (5a)$$

La matriz  $[a]^T [k] [a]$  es cuadrada

Ejemplo; Suponiendo

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1 \text{ ton./cm.}$$

$$F_1 = 10 \text{ ton. y } F_2 = 5 \text{ ton.}$$

$$[K] = [a]^T [k] [a]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observar que [k] es simétrica de ( 5a )

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{despejando } \{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \text{ cm} \\ 7 \text{ cm} \end{Bmatrix} \text{ sustituyendo en (1)}$$

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ sustituyendo en (2)}$$

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Comprobación de equilibrio: de ( 3 )

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \text{ ton.} \\ 5 \text{ ton.} \end{Bmatrix}$$

Método de las fuerzas ( flexibilidad )

Usando los tres principios fundamentales en el orden inverso Equilibrio, Ley de Hooke y Continuidad.

a) Equilibrio

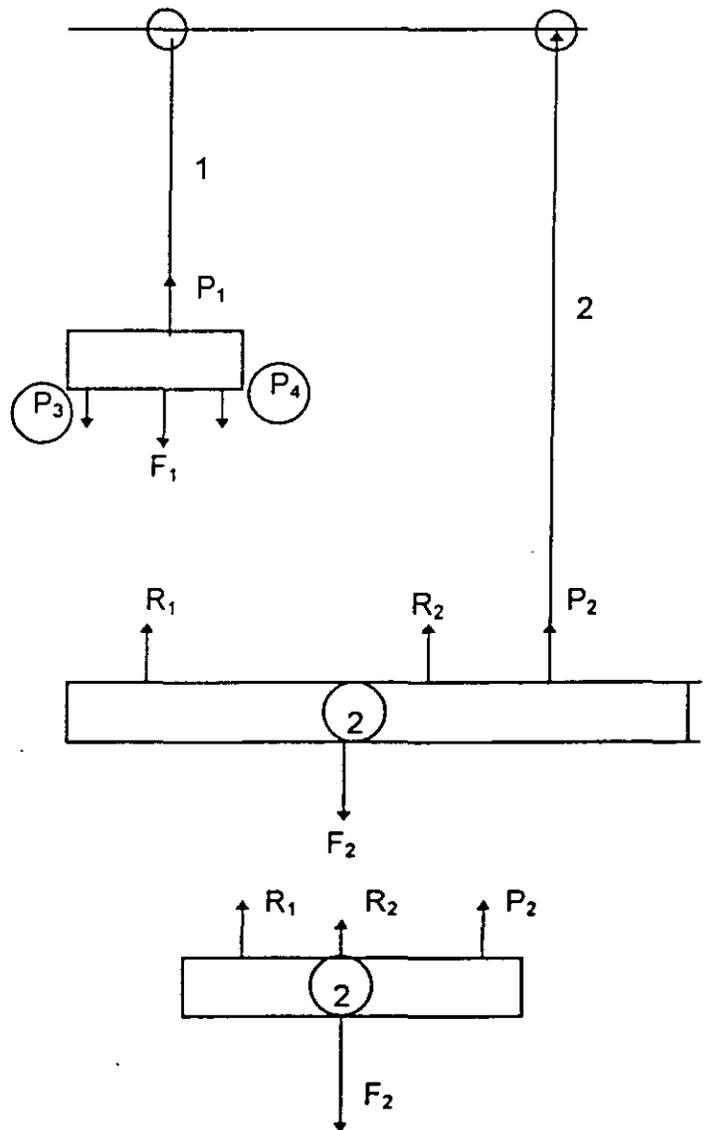
$$F_1 = P_1 - R_1 - R_2$$

$$F_2 = P_2 + R_1 + R_2$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -P_1 \\ -P_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} [P_0] \\ [R] \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = [a_o^T \ a_r^T] \begin{Bmatrix} P_o \\ R \end{Bmatrix}$$

$$= a_o^T P_o + a_r^T R$$



despejando a  $P_0$

$$\{P_0\} = [a_0^T]^{-1} \{F\} - [a_0^T]^{-1} [a_R^T] \{R\}$$

en nuestro ejemplo

$$[a_0^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \therefore [a_0^T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{P_0\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{F\} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \{R\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{F\} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \{R\}$$

o bien

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$

además se tiene  $P_3 = R_1$ ,  $P_4 = R_2$

Por lo tanto

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{bo} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{br} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots a$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 = F_1 & + R_1 & + R_2 \\ P_2 = & F_2 - R_1 & - R_2 \\ P_3 = & R_1 & \\ P_4 = & & R_2 \end{Bmatrix}$$

( a ) se puede escribir

$$\{P\} = [b_0] \{F\} + [b_R] \{R\} \dots b$$

$$b_0 = \begin{bmatrix} (a_0^T)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_R = \begin{bmatrix} (-a_0^T)^{-1} & a_R^T \\ & I \end{bmatrix}$$

Ley de Hooke

$$\{P\} = [k]\{e\}$$

$$\{e\} = [k]^{-1}\{p\} \dots c$$

$$\{f\} = [k]^{-1} \text{ flex}$$

sustituyendo (b) en (c)

$$\{e\} = [f] [b_0] \{F\} + [f] [b_R] \{R\} \dots d$$

CONTINUIDAD.- Considerando los desplazamientos relativos de llamados

$$\mu_1, \mu_2 \quad \{\mu\} = \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix}$$

$$d_1 = e_1$$

$$d_2 = e_2$$

$$\mu_1 = e_1 - e_2 + e_3$$

$$\mu_2 = e_1 - e_2 + e_4$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} \quad \text{pero} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [b_0]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [b_R]^T$$

Por lo tanto

$$\{d\} = [b_0^T] \{e\} \dots e$$

$$\{\mu\} = [b_R^T] \{e\} \dots f$$

( Los valores de ( ) deberan anularse ) sustituimos d en f

$$\{\mu\} = [b_R^T][F][b_0] \{F\} + [b_R^T][f^-][b_R] \{R\}$$

como  $\{\mu\} = 0$  se despeja  $\{R\}$

$$\{R\} = -[b_R^T f b_R]^{-1} [b_R^T f b_0] \{F\}$$

(h) nos da los redundante  $\{R\}$  sustitución (h) en (b) se obtiene  $\{P\}$

$$\{p\} = h_0 F - b_R (b_R^T f b_R)^{-1} (b_R^T f h_0) F$$

$$= [h_0 - b_R (b_R^T f b_R)^{-1} b_R^T f h_0] \{F\} = [b] \{F\} \dots i$$

sustituimos ( i ) se obtiene  $\{e\}$

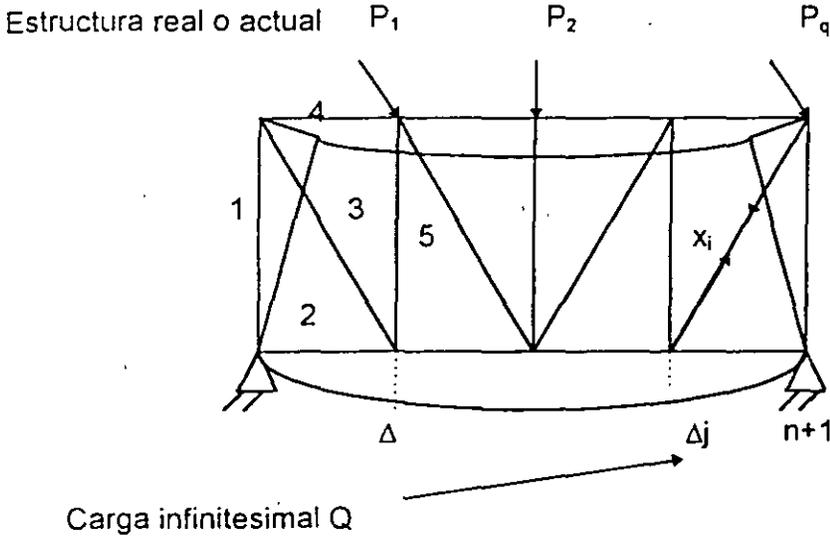
$$(j) \{c\} = [f] [b] \{F\}$$

sustituyendo ( 1 ) en ( e ) se obtiene

$$\{d\} = [b_0^T] [f] [b] \{F\}$$

## 2.5 Aplicaciones de métodos matriciales a armaduras planas.

Para ilustrar el uso de métodos matriciales en el análisis de armaduras articuladas en los nudos, comenzaremos un problema de deflexiones. En la figura 2.3.1. se tiene una armadura con miembros sujeta a sistema externo de cargas, y se requiere determinar la flexión vertical del nudo  $j$  debida al sistema de cargas. Si  $X_i$  representa las fuerzas axiales en la estructura real las fuerzas axiales en la estructura bajo la condición de carga unitaria en  $j$ :



Condición  $Q = 1$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = 1$$

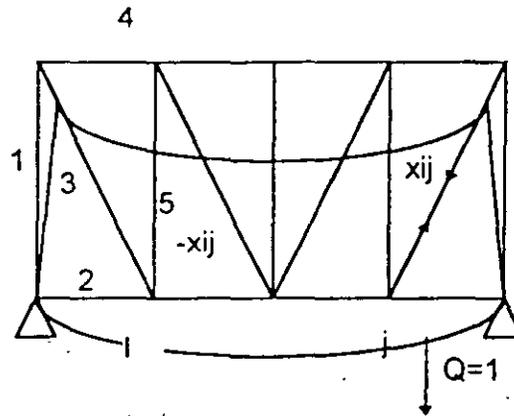


Fig. 2.3.1

Del teorema de Castigliano y la energía de deformación por carga normal se tiene

$$U = \sum_{i=1}^m \frac{x_i^2 l_i}{2AE} \dots \dots \dots (a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \Delta i = \sum_{i=1}^m \frac{x_i x_{ij} l_i}{EA_i} = \sum_{i=1}^m x_i x_{ij} \rho_i \dots \dots \dots (b)$$

donde  $\rho_i = \frac{l_i}{EA_i}$

es el factor de flexibilidad de la barra i.

Si se desean calcular las n deflexiones verticales de nudos seleccionados debemos calcular los valores Xij para una fuerza vertical unitaria aplicada en cada uno de los nudos. Supongamos que han sido calculados y que acomodamos los números de influencia en la forma de una matriz de orden m x n como sigue:

$$[X_{ij}] = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{m1} & X_{m2} & \dots & X_{mn} \end{bmatrix}$$

*armadura*

c) Se denomina matriz de geometría de la ~~armada~~ *armadura* acomodando los factores de flexibilidad en forma de una matriz diagonal de orden m x m.

(d)

$$[\rho_i] = \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 \dots \dots & 0 \\ 0 & \rho_{22} & 0 \dots \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots \dots & \rho_m \end{bmatrix}$$

la cual es llamada matriz de flexibilidad de la armadura.

Finalmente, suponiendo que las fuerzas axiales Xi producidas por el sistema de cargas han sido calculadas y son arregladas en la forma de una matriz vector columna.

$$(e) = [X_i] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}$$

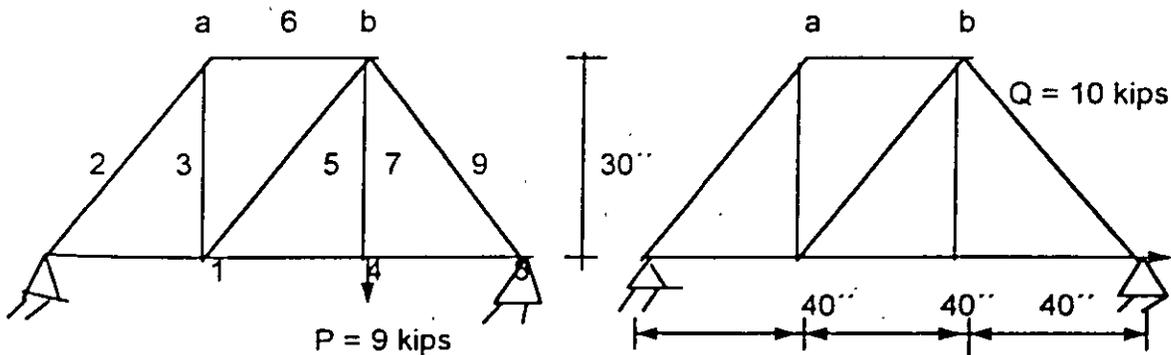
la cual es llamada matriz de carga. Ahora de acuerdo con las reglas de multiplicación de matrices las m ecuaciones ( b ) pueden expresarse matricialmente.

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & \dots & X_{m1} \\ X_{12} & X_{22} & \dots & X_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} & \dots & X_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \quad (f)$$

o sea con notación inicial

$$[\Delta_j] = [X_{ij}] [P_i] [X_i] \quad \dots\dots(g)$$

Como un ejemplo numérico, se considera la armadura mostrada en la fig. 2.3.2 la cual tiene m= 9 miembros. Supongase que se requiere determinar la deflexión vertical de los nudos superiores a y b, bajo la acción de dos condiciones separadas de carga como se indica. La numeración de los miembros se muestra en la figura, así como sus dimensiones. Cada barra tiene una sección transversal  $A_I = 1 \text{ pul}^2$  y un módulo de elasticidad  $E = 30 \times 10^3$



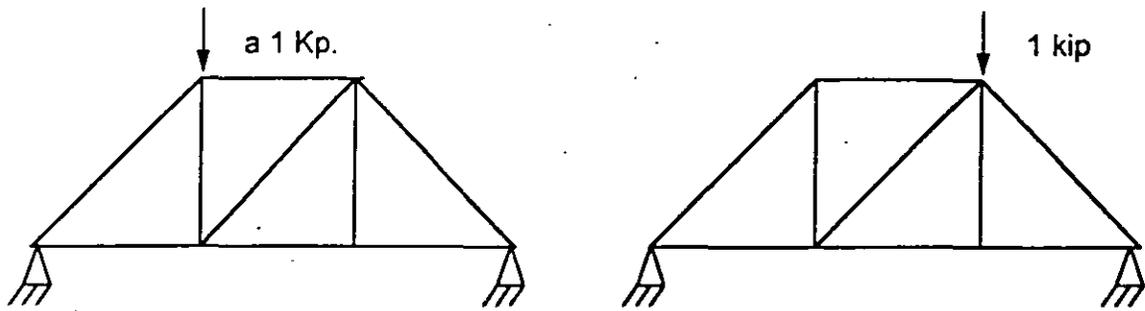


fig 2.3.2

El procedimiento a seguir es el siguiente:

Sustituyendo ( h ), ( i ) y ( j ) en ( g ) se obtiene

$$[\Delta i] = [Xij][pi][Xi]$$

$$[\Delta i] = \frac{10}{9E} \begin{bmatrix} 8 & -10 & -3 & 4 & 5 & -8 & 0 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 3 & 8 & -5 & -4 & 0 & 8 & -10 \end{bmatrix} X \dots\dots (g)$$

$$X^I \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \dots\dots (k)$$

$$= \frac{10}{9E} \begin{bmatrix} 32 & -50 & -9 & 16 & 25 & -32 & 0 & 16 & -25 \\ 16 & -25 & 9 & 32 & -25 & -16 & 0 & 32 & -50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ 5 & 0 \\ 4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots (l)$$

$$= \frac{1}{9} E \begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & .0 & 3 & 1 & 8 & 0 & .0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & .0 & 2 & 3 & 7 & 0 & .0 & 2 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta a p & \Delta b p \\ \Delta a g & \Delta b g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & .0 & 3 & 1 & 8 & 0 & .0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & .0 & 2 & 3 & 7 & 0 & .0 & 2 & 9 & 6 \end{bmatrix} \dots (m)$$

a) Se calculan las fuerzas axiales en los nueve miembros bajo las dos condiciones de carga obteniendo la matriz de fuerzas

$$[X_i] = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ -5 & 0 \\ -4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \dots (k)$$

b) Similarmente se calculan las fuerzas axiales debido a las condiciones de fuerzas verticales en los puntos a y b respectivamente obteniendo la matriz.

$$[X_{ij}] = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -10 & -5 \\ -3 & 3 \\ 4 & 8 \\ 5 & -5 \\ -8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 8 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} \dots (i)$$

c ) Se calculan los coeficientes de flexibilidad obteniendo la matriz de flexibilidad escrita diagonalmente.

$$[\rho_i] = \frac{10}{E} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \dots (i)$$



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

### **TEMA**

**METODOS ENERGÉTICOS Y METODOS DE LAS  
FLEXIBILIDADES, PLANTEAMIENTO MATRICIAL**

**EXPOSITOR: DR. JOSE LUIS CAMBA CASTAÑEDA  
PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DEL 2001**

# METODOS ENERGETICOS Y METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

## Planteamiento matricial

1.- INTRODUCCION.

2.- ENERGÍA DE DEFORMACIÓN.

Trabajo real

Trabajo virtual

Matriz de flexibilidad no ensamblada

Matriz de flexibilidad ensamblada

Teorema recíproco de Maxwell-Betti

3.- METODOS GENERALES DE ANALISIS.

Método de las flexibilidades

Método de las rigideces

4.- PROPIEDADES DE LAS MATRICES DE FLEXIBILIDADES Y RIGIDECES.

5.- SOLUCION MATRICIAL GENERALIZADA DEL METODO DE LAS FLEXIBILIDADES.

# ANALISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

## 1.- INTRODUCCION.

El análisis estructural tiene como objetivo calcular el estado de esfuerzos y deformaciones en cualquier punto de una estructura.

Para el análisis de una estructura se tendrán como datos la geometría y las cargas que actúan sobre ella, calculándose las fuerzas internas y los desplazamientos.

En todo proceso de análisis estructural, deben considerarse los tres conceptos fundamentales:

### 1.1 Concepto de equilibrio.

Toda estructura sometida a un sistema de fuerzas externas, deberá estar en equilibrio con las fuerzas internas en todos y cada uno de los miembros de dicha estructura, siendo las expresiones vectoriales que cumplan esa condición:

$$\sum_{i=1}^n \{F_i\} = \{0\} \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \{F_i\} \{r_i\} + \sum_{i=1}^n \{M_i\} = \{0\} \quad (1.2)$$

en las cuales:

$M_i$  y  $F_i$  son los vectores que indican los pares y fuerzas actuando en la estructura y  $r_i$  los vectores de posición con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

Estas ecuaciones de equilibrio se pueden expresar escalaramente como sigue:

en un plano

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$\sum M_i = 0$$

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$\sum F_{iz} = 0$$

en el espacio:

$$\sum M_{ix} = 0$$

$$\sum M_{iy} = 0$$

$$\sum M_{iz} = 0$$

### 1.2.- Concepto continuidad (o compatibilidad)

Al aplicar las fuerzas externas, la estructura se deforma pero conserva las características de continuidad iniciales, siendo los desplazamientos finales compatibles con las condiciones de deformación de los apoyos.

El concepto de continuidad o compatibilidad establece que los desplazamientos son funciones continuas y derivables, por lo tanto una vez conocidos los desplazamientos se pueden conocer las deformaciones. Expresado en ecuaciones, se tendría:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{du}{dx} & \gamma_{xy} &= \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} & u, v \text{ y } w \text{ las 3} \\ & & & & \text{componentes de} \\ \epsilon_y &= \frac{dv}{dy} & \gamma_{xz} &= \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} & \text{desplazamiento.} \\ \epsilon_z &= \frac{dw}{dz} & \gamma_{yz} &= \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \end{aligned}$$

En forma matricial:

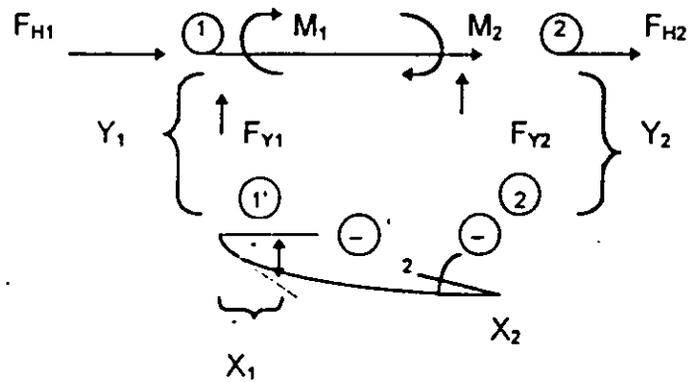
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

$\{\epsilon\} = [e] \{\sigma\}$  ;  $[e]$  = matriz cuadrada simétrica que representa la flexibilidad del elemento.

### 1.3.- Relaciones fuerza desplazamiento.

En el análisis estructural es indispensable para cualquier estructura de geometría dada conocer las relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos.

Si llamamos  $\{F\}$  al vector de fuerzas y  $\{D\}$  el vector desplazamientos, sus componentes serán de acuerdo con la fig. 1 1



$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{Y1} \\ F_{H1} \\ M_1 \\ F_{Y2} \\ F_{H2} \\ M_2 \end{Bmatrix}; \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ X_1 \\ (-)'_1 \\ Y_2 \\ X_2 \\ (-)'_2 \end{Bmatrix}$$

y la relación entre ellos será:  $\{F\} = [K] \{D\}$  (1.4)

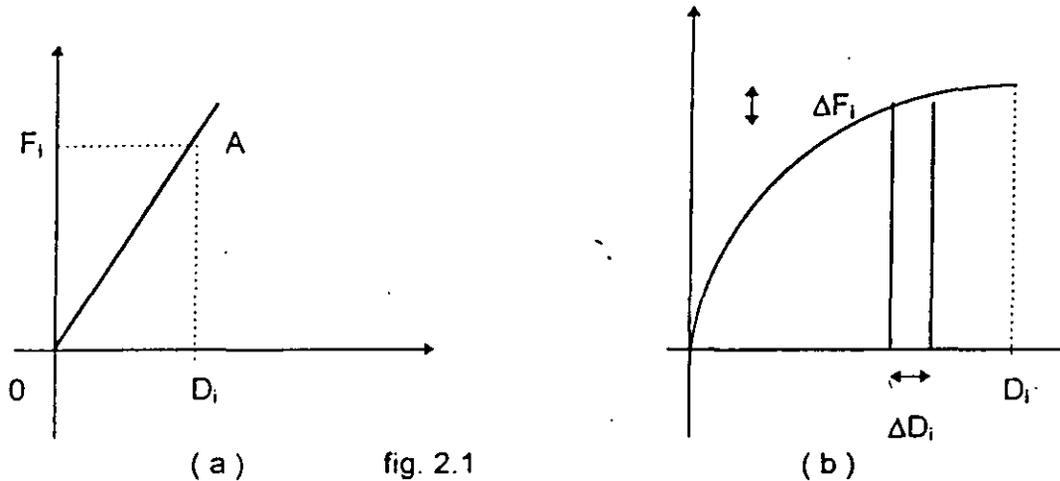
La matriz  $[K]$  se determina a partir de la geometría de la estructura y de las características mecánicas del material.

Si la variación entre ellas es lineal, la matriz  $[K]$  es una constante, y las estructuras que cumplen esta condición se les llama lineales ( Ley de Hooke ) es aplicable el principio de superposición de efectos.

## 2.- ENERGIA DE DEFORMACION.

Si una fuerza  $F_i$  se aplica a una estructura produce un desplazamiento  $D_i$  en la dirección en que se aplica la fuerza, ésta efectúa su trabajo, que se manifiesta por un incremento de la energía cinética de la masa, si ésta adquiere una aceleración o bien, en energía potencial si modifica su posición respecto al campo gravitacional.

Un sistema de fuerzas externo provoca un estado de deformación en una estructura, realizando un trabajo cada una de las fuerzas aplicadas que se permanece en la estructura bajo la forma de energía de deformación o energía interna. Si el sistema es perfectamente elástico el fenómeno es reversible (fig.2.1b).



El trabajo hecho por un incremento de carga será:  $W = F_1 \Delta D_i$

El trabajo total efectuado será:

$$W = \int_0^{D_i} F d\Delta \quad (2.1)$$

Cuando se trata de un material elástico lineal, el trabajo hecho por la fuerza  $F_1$  es:

$$W = \frac{1}{2} F_1 D_i$$

Cuando un sistema de fuerzas se aplica gradualmente a la estructura y provocando desplazamientos en la dirección de las fuerzas aplicadas, el trabajo total externo o la energía de deformación será:  $W = U = 1/2 (F_1 D_1 + F_2 D_2 + \dots + F_n D_n) = 1/2 \sum F_i D_i$  (2.2)

La ecuación anterior puede escribirse como:

$$[W] = \frac{1}{2} \{F\}^T_{n \times 1} \{D\}_{n \times 1} \quad (2.3)$$

En la cual  $\{F\}^T$  es el transpuesto del vector  $\{F\}$  que representa las fuerzas.

El área que se encuentra en la parte superior de la curva OA se le llama energía complementaria de deformación.

La expresión de igualdad del trabajo externo  $W$  y la energía de deformación o energía interna  $U$ , puede utilizarse para calcular deflexiones.

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma \epsilon dl' \quad (\text{Ref. 1}) \quad (2.4)$$

Cuando se trata de una sola fuerza virtual aplicada para calar el desplazamiento  $D_j$  en la coordenada  $j$ , la ecuación anterior se escribe:

$$I x D_j = \int \{ \sigma_{ij} \}^T \{ \epsilon \} dv \quad (2.11)$$

$$D_j = \int \{ \sigma_{ij} \}^T \{ \epsilon \} dv \quad (2.12)$$

siendo  $\{ \sigma_{ij} \}$  los esfuerzos virtuales correspondientes a la fuerza virtual unitaria en  $j$  y  $\{ \epsilon \}$  la deformación real debida a la carga real.

Las expresiones del trabajo virtual en axial, flexión, cortante y torsión se indican a continuación.

Tipo de deformación	Componente de la fuerza virtual	Componente del desplazamiento real	Trabajo virtual interno
Axial	$p$	$dL = \frac{P}{AE} dx$	$\int p \frac{P}{AE} dx \quad (2.13)$
Flexión	$m$	$d\Phi = \frac{M}{EI} dx$	$\int m \frac{M}{EI} dx \quad (2.14)$
Cortante	$v$	$dy = \frac{V}{AG} dx$	$\int cv \frac{V}{AG} dx \quad (2.15)$
Torsión	$t$	$d\beta = \frac{T}{GJ} dx$	$\int t \frac{T}{GJ} dx \quad (2.16)$

De la tabla anterior, para evaluar la integral de flexión  $m M / EI dx$ , para elementos de sección transversal constante se utiliza para los casos más comunes de cargas, la multiplicación directa de diagramas de momentos flexionantes.

Cálculo de deflexiones por el método de los trabajos virtuales.

### 1) Armaduras

En armaduras, la expresión para el cálculo de deflexiones es:

$$D_j = \sum_{i=1}^m \int p \frac{P_i}{AE} dx \quad (2.17)$$

$$\text{Axial: } U_a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{P^2 L}{AE} \quad (2.5)$$

$$\text{Flexión: } U_f = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx \quad (2.6)$$

$$\text{Cortante: } U_v = \frac{1}{2} C \int \frac{V^2}{AG} dx \quad (2.7)$$

$$\text{Torsión: } U_t = \frac{1}{2} \int \frac{T^2}{GJ} dx \quad (2.8)$$

$$\Sigma = U_a + U_t + U_v + U_f \quad (2.9)$$

## 2.1.- Teorema de los trabajos virtuales.

El nombre de virtual, se deriva del hecho de que un sistema ficticio ( virtual ) de fuerzas en equilibrio o un pequeño desplazamiento virtual se aplica a una estructura, relacionándolo con fuerzas o desplazamientos reales.

El método de los desplazamientos virtuales consiste en aplicar desplazamientos ficticios (virtuales) de cuerpo rígido en una estructura y calcular las reacciones reales, mediante el método energético.

Una variante sería la de calcular desplazamientos reales a través de fuerzas virtuales, como se indica a continuación.

Si en una estructura real, en equilibrio y deformada bajo un sistema de fuerzas reales aplicadas y llamando  $\epsilon$  la deformación actual en cualquier punto y sus correspondientes desplazamientos en los puntos  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , se introduce un sistema de fuerzas virtuales  $F_1, F_2, \dots, F_n$  en las coordenadas  $1, 2, \dots, n$ , provocando esfuerzos  $\sigma$  en esos puntos.

El principio del trabajo virtual establece que el producto de los desplazamientos reales y las fuerzas virtuales correspondientes es igual al producto de los desplazamientos internos y las fuerzas internas virtuales correspondientes, por lo tanto:

$$F_i D_i = \int \{ \sigma \}^T \{ \epsilon \} dv$$

en la cual:

$\sigma$  = esfuerzos debidos a fuerzas virtuales F

$\epsilon$  = deformaciones reales compatibles con desplazamientos reales {D}

Un resultado igual se logrará si multiplicamos matrices tales que:

$$D_j = \{p\}^T m \times 1 \{f_M\} m \times m \{p\} m \times 1 \quad (2.18)$$

en la cual:

$\{p\}^T$  es la transpuesta de la matriz  $\{p\}$ , siendo esta última las fuerzas en los elementos debidas a una carga virtual unitaria actuando en la coordenada correspondiente.

$\{p\}$  son las fuerzas en los elementos debidas a las cargas reales.

$$y \quad [f_M] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{A_1 E_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{A_2 E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_n}{A_n E_n} \end{bmatrix}$$

siendo los elementos de la diagonal principal la flexibilidad por deformación axial de los elementos aislados. A esta matriz se le conoce como la matriz de flexibilidades de la estructura no ensamblada. (ref. 2)

Cuando se desea calcular las deflexiones en diferentes puntos de la estructura, la carga virtual deberá aplicarse por separado en cada una de las coordenadas deseadas y que corresponde al conjunto de fuerzas determinadas, la ecuación tendrá la forma:

$$[D]_{n \times p} = [P]_{m \times n}^T [f_M]_{m \times m} [P]_{m \times p} \quad (2.20)$$

$P$  = fuerza en un elemento debido a la carga virtual actuando en las coordenadas. Los elementos de la matriz  $\{p\}$  son las fuerzas debidas a cargas unitarias aplicadas en las coordenadas correspondientes.

$$f_M = \text{la flexibilidad del elemento} = \frac{L}{AE}$$

$p$  = fuerza en un elemento debido a la carga real. Cada columna de la matriz  $\{p\}$  son las fuerzas correspondientes a un caso de carga.

$m$  = número de elementos.

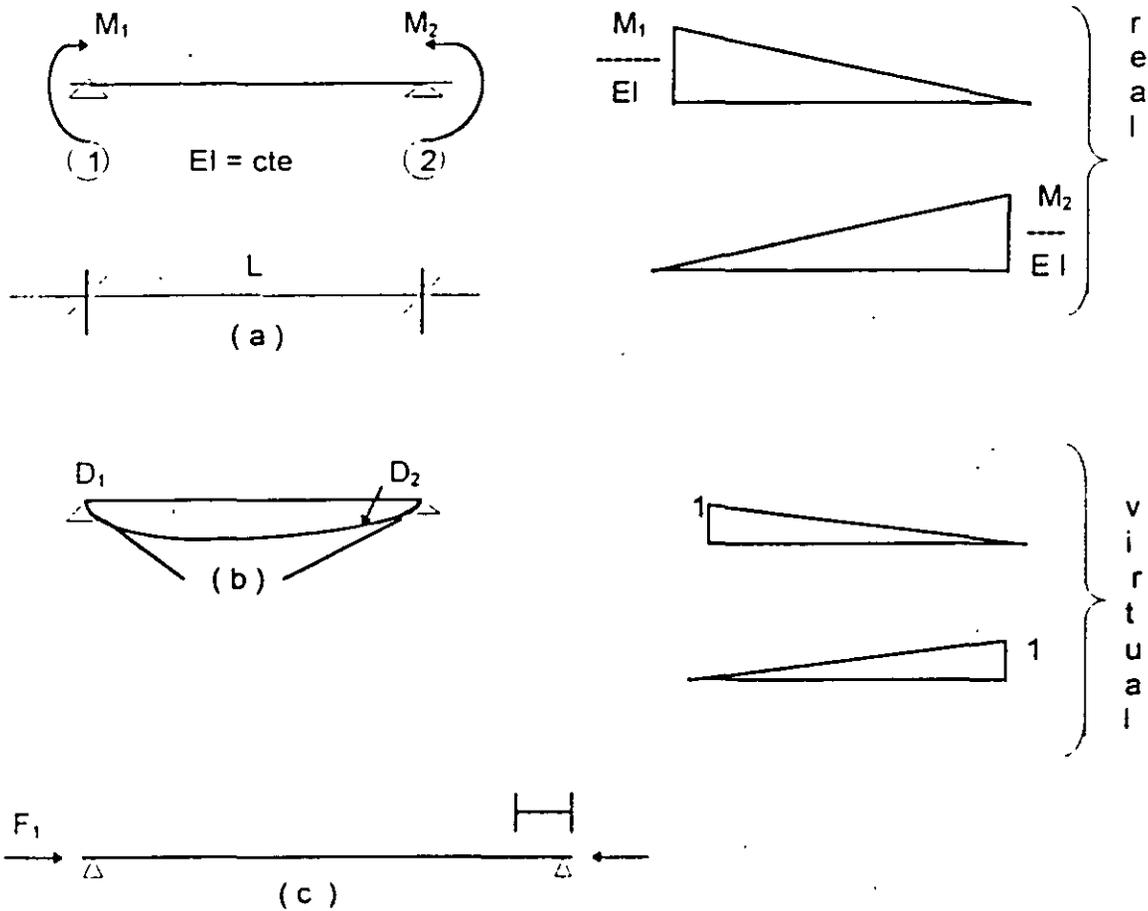
$n$  = número de coordenadas en las cuales se desea conocer el desplazamiento.

$p$  = número de casos de carga.

El ejemplo No. 1 muestra la aplicación del cálculo de deformaciones en armaduras por trabajos virtuales.

2.2.2.- Cálculo de deflexiones por trabajos virtuales en vigas y marcos.

En una estructura formada por varios miembros y sujeta a una carga cualesquiera en un miembro, de tal forma que los momentos extremos internos sean  $M_1$ ,  $M_2$ . Si se quieren calcular los desplazamientos en un extremo, se aplicaran momentos virtuales unitarios en los extremos para calcular los giros debidos a flexión.



Nota.- si se considera efectos de axial:

$$[f_M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3EI} & \frac{1}{6EJ} & 0 \\ \frac{1}{6EI} & \frac{1}{3EJ} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{AE} \end{bmatrix} L$$

Por trabajos virtuales la contribución de desplazamientos por flexión en j será:

$$D_j = \int m \frac{M}{EI} dx = \frac{L}{6EI} (2M_1 m_1 + M_1 m_2 + M_2 m_1 + 2M_2 m_2)$$

y expresándolo matricialmente:

$$\Delta D_j = \{m u\}^T [f_M] \{M\} \quad \text{en la cual:} \quad 2.21$$

$$\{m u\}_j = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \quad \{M\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

$$[f_M] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{en la cual:} \quad 2.21 A$$

Los elementos de  $[f_M]$  son los giros izquierda y derecha debidos a momentos unitarios en un extremo de la viga. En forma semejante a la mencionada en armaduras,  $[f_M]$  es la matriz de flexibilidad en flexión del elemento.

El desplazamiento en J será la sumatoria de todos los elementos:

$$D_j = \sum_{i=1}^m \{m u\}_{2m \times 1}^T [f_M]_{2m \times 2m} \{M\}_{2m \times 1} \quad 2.22$$

en la cual:

$$\{m u\}_j = \begin{Bmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{Bmatrix}; \quad M = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{Bmatrix}; \quad [f_M] = \begin{bmatrix} [f_{M_1}] & 0 & 0 \\ 0 & [f_{M_2}] & 0 \\ 0 & 0 & [f_{M_n}] \end{bmatrix} \quad 2.23$$

A la matriz  $[f_M]$  que contiene las matrices de flexibilidades separadas de todos los miembros se le llama matriz de flexibilidades no ensamblada.

Cuando se requiere conocer los desplazamientos de n coordenadas, la carga virtual unitaria debe aplicarse en cada una de las coordenadas separadamente para determinar los momentos en los extremos, arreglándolos en tal forma que:

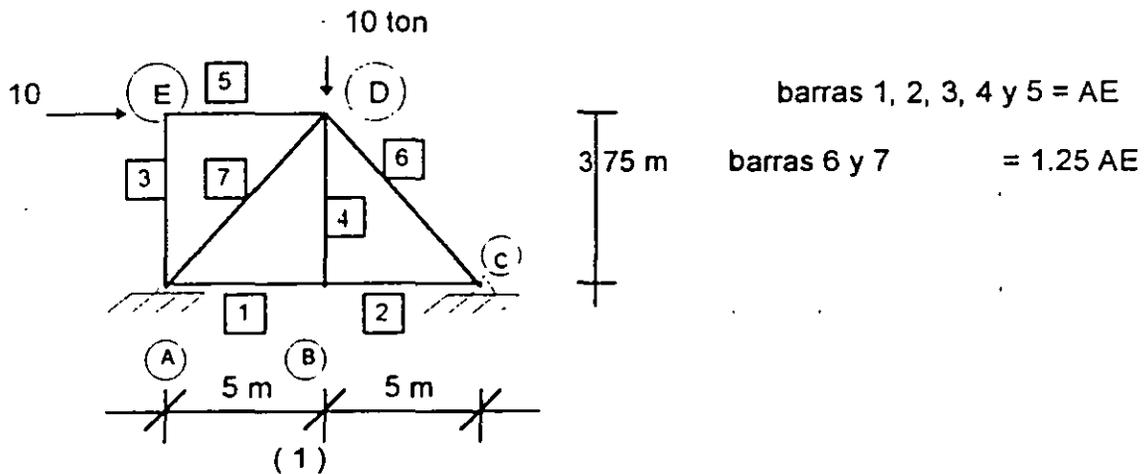
$$[m]_{2m \times n} = \begin{bmatrix} -\{m\}_{11} & \{m\}_{12} & \{m\}_{1n} \\ \{m\}_{21} & \{m\}_{22} & \{m\}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \{m\}_{m1} & \{m\}_{m2} & \{m\}_{mn} \end{bmatrix}$$

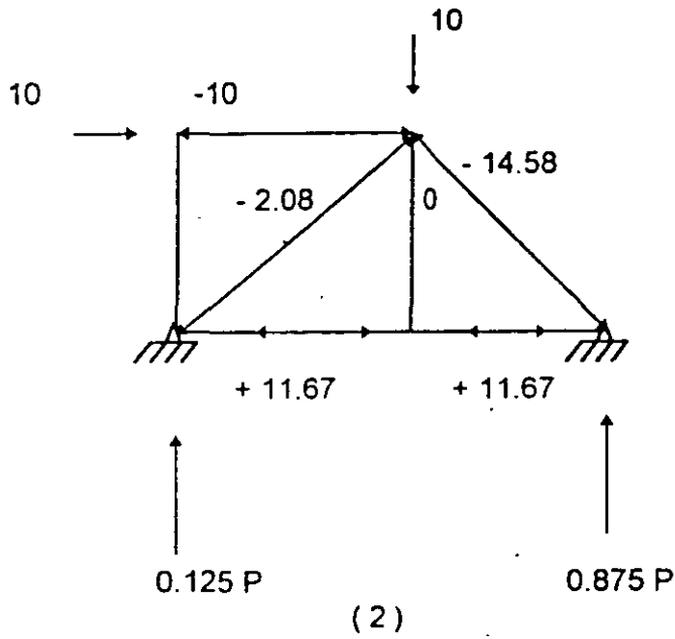
en la cual los elementos de cada submatriz son los momentos extremos en los elementos. El primer subíndice indica el momento y el segundo la coordenada en la cual se aplica el momento unitario.

Cuando se trata de varios casos de carga, los desplazamientos se calcularán:

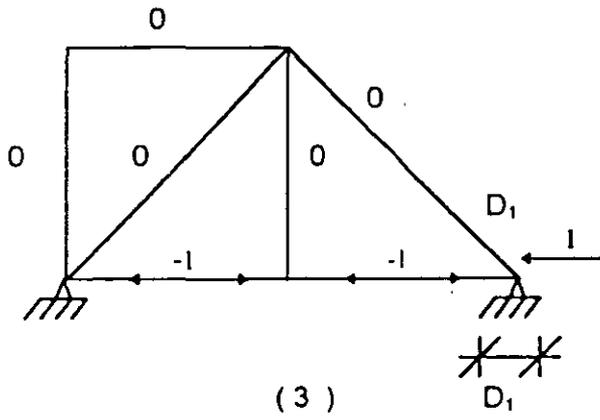
$$[D]_{n \times p} = [m \times u]_{2m \times n}^T [f_M]_{2m \times 2m} [M]_{2m \times p} \quad 2.24$$

Ejemplo No. 1. Calcular el desplazamiento horizontal en el punto C y el movimiento relativo entre los nudos B y E de la armadura siguiente:

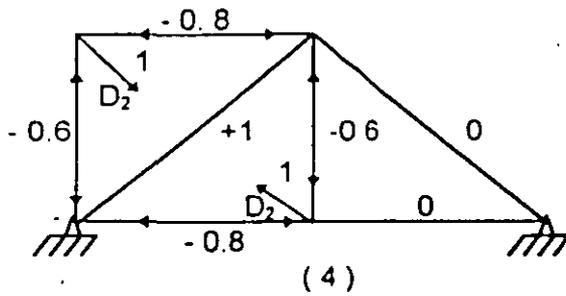




$$[P]_{7 \times 1} = \begin{Bmatrix} 11.67 \\ 11.67 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ -14.58 \\ -2.08 \end{Bmatrix}$$



$$[P]_{7 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & -0.8 \\ -1 & 0 \\ 0 & -0.6 \\ 0 & -0.6 \\ 0 & -0.8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[f_M]_{7 \times 7} = \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[D]_{2 \times 1} = [P]_{7 \times 2}^T [f_M] [P]_{7 \times 1} = \frac{1}{AE} \begin{Bmatrix} -116.5 \\ 17 \end{Bmatrix}$$

### Matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura.

Esta matriz puede determinarse a partir de las flexibilidades de cada uno de los elementos usando la ecuación 2.24. Los elementos de la matriz de flexibilidades puesto que los desplazamientos en las coordenadas correspondientes debidos a una fuerza (o momento) unitaria actuando separadamente en cada una de esas coordenadas, la carga real y la carga virtual son las mismas, por lo que la ecuación 2.24 quedará:

$$[f] = \sum_{s=1}^4 [mu]_s^T [f_M]_s [mu]_s \quad 2.25$$

en la cual  $[f]$  es la matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura y el subíndice  $s$  se refiere a las cuatro causas que pueden provocar deformación: flexión, axial, cortante y torsión.

Cuando solo se considera flexión la ec. 2.25, quedaria:

$$[f]_{n \times n} = [mu]_{2m \times n}^T [f_M]_{2m \times 2m} [mu]_{2m \times 1} \quad 2.26$$

en la cual:

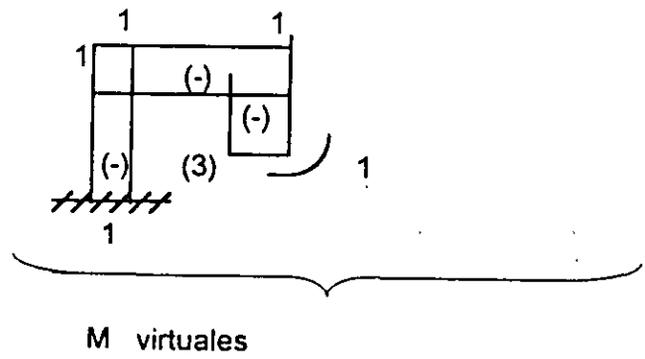
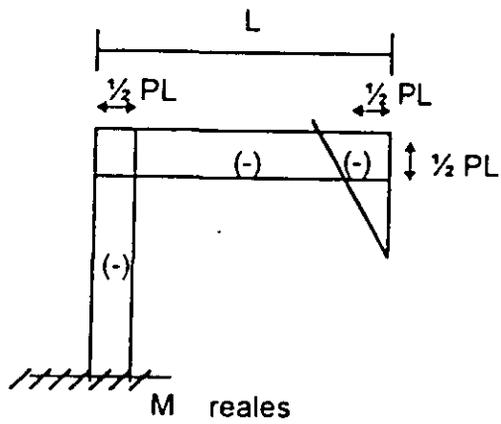
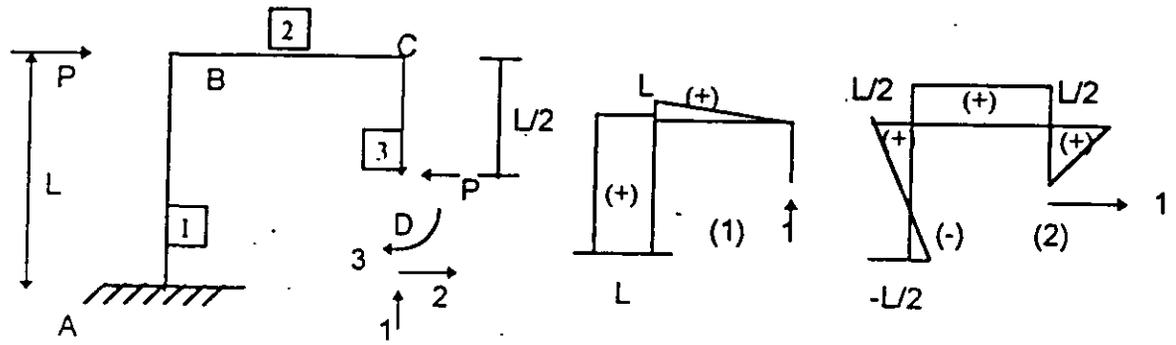
$m$  = número de elementos  
 $n$  = de coordenadas

El ejemplo 2. En al marco indicado se pide.

a) Calcular los desplazamientos en D, debidos a flexión.

b) Calcular la matriz de flexibilidad.

a)  $EI = \text{cte.}$



$$[m u]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} L & -L/2 & -1 \\ -L & -L/2 & 1 \\ L & L/2 & -1 \\ 0 & -L/2 & 1 \\ 0 & L/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M]_{6 \times 1} = PL \begin{Bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[f_M]_{6 \times 6} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{D\}_{3 \times 1} = [m u]_{6 \times 1}^T [f_M]_{6 \times 6} [M]_{6 \times 1} = \frac{PL^3}{EI} \begin{Bmatrix} -0.75 \\ -0.29 \\ +1.12 / L \end{Bmatrix}$$

b) Cálculo de la matriz de flexibilidad

$$[F]_{3 \times 3} = [m u]_{6 \times 3}^T [f_M]_{6 \times 6} [m u]_{6 \times 3}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} L & -L/2 & -1 \\ L & L/2 & -1 \\ L & L/2 & -1 \\ 0 & -L/2 & -1 \\ 0 & -L/2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & -L/2 & -1 \\ -L & -L/2 & 1 \\ L & L/2 & -1 \\ 0 & -L/2 & - \\ 0 & L/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 8L^2 & 15L^2 & -9L \\ 15L^2 & 2.25L & -3.75L \\ -9L & -3.75L & 15 \end{bmatrix}$$

### 2.3 Teorema recíproco de Maxwell-Betti.

Si un sistema de fuerzas  $F_1, F_2, \dots, F_n$  se aplica a una estructura en las coordenadas  $1, 2, \dots, n$  provocan desplazamientos  $D_1 F, D_2 F, \dots, D_n F$ . Manteniendo el sistema de fuerzas  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , se aplica otro sistema de fuerzas  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , provocarán desplazamientos  $D_1 Q, D_2 Q, \dots, D_n Q$ , y además desplazamientos  $D_1 F, D_2 F, \dots, D_n F$  en los puntos donde actúa el sistema  $F_1, F_2, \dots, F_n$ .

El trabajo externo total será:

$$W_{F+Q} = \frac{1}{2} F_i D_i F + \frac{1}{2} F_i D_i Q + \frac{1}{2} Q_i D_i Q \quad (2.27)$$

invirtiendo:

$$W_{Q+F} = \frac{1}{2} \sum Q_i D_i Q + \frac{1}{2} \sum Q_i D_i F + \frac{1}{2} \sum F_i D_i F \quad (2.28)$$

como  $W_{F+Q} = W_{Q+F}$ :

$$\frac{1}{2} \sum F_i D_i Q = \frac{1}{2} \sum Q_i D_i F \quad (2.29)$$

Esta ecuación es el teorema recíproco de Betti cuyo enunciado sería que el trabajo externo hecho por un sistema de fuerzas  $F_i$  a través de desplazamientos debidos al sistema  $Q_j$  es igual al trabajo externo hecho por el sistema de fuerzas  $Q_j$  a través de desplazamientos provocados por el sistema  $F_i$ .

El teorema de Maxwell, consiste en aplicar el principio anterior a las deflexiones y haciendo que  $F_i = 1$  en la coordenada  $i$  en el sistema de fuerzas  $F$  y  $Q_j = 1$  en la coordenada  $j$ :

$$D_i Q = D_j F$$

$$\text{que se puede escribir como } f_{ij} = f_{ji} \quad (2.30)$$

Estos desplazamientos se les llama coeficientes de flexibilidad como se vió en los ejemplos 1 y 2 y para una estructura de "n" coordenadas, estos coeficientes se arreglarán para formar una matriz de flexibilidades. Esta matriz deberá ser simétrica debido al teorema recíproco de Maxwell-Betti.

### 3. MÉTODOS GENERALES DE ANALISIS.

Existen básicamente dos métodos generales, para la resolución de estructuras hiperestáticas principalmente y que son el método de las flexibilidades ( ó de las fuerzas ) y el método de las rigideces ( ó de los desplazamientos ) que se describen en los párrafos siguientes.

Más adelante se analizan con detalle cada uno de estos métodos.

#### 3.1 Método de las flexibilidades.

En el inciso 2.2 al hablar de cálculo de deflexiones, se introdujo el concepto de matriz de flexibilidades de una estructura. A continuación se definirá el método de las flexibilidades.

En este método las incógnitas son las fuerzas redundantes que se calculan superponiendo desplazamientos de estructuras isostáticas y planteando las ecuaciones para resolver las incógnitas con base en la compatibilidad de deformaciones de la estructura.

Las ecuaciones de compatibilidad son del tipo:

$$\{ D \} + [ f ] \{ F \} = \{ 0 \}; \quad (3.1)$$

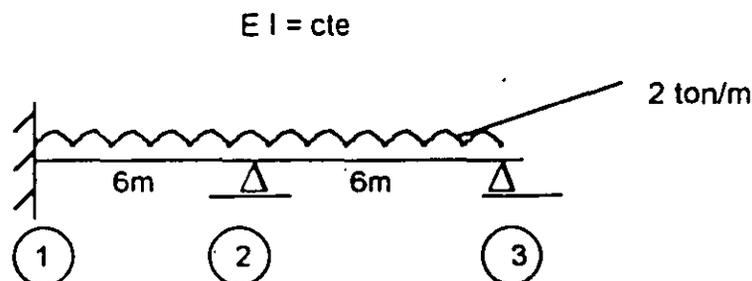
en la cual:

D = vector columna de los desplazamientos debidos a cargas externas.

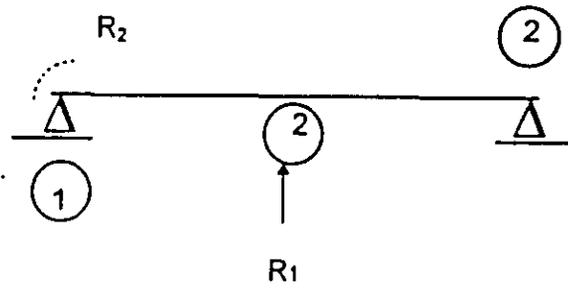
F = vector de las fuerzas redundantes.

f = matriz de flexibilidades. Sus elementos representan desplazamientos debidos a fuerzas unitarias.

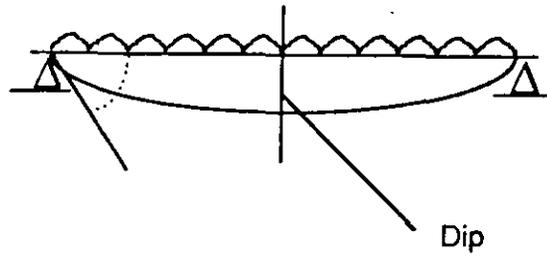
Ejemplo No.3 Calcular las reacciones resolviendo por el Método de las flexibilidades.



a) Estructura Primaria



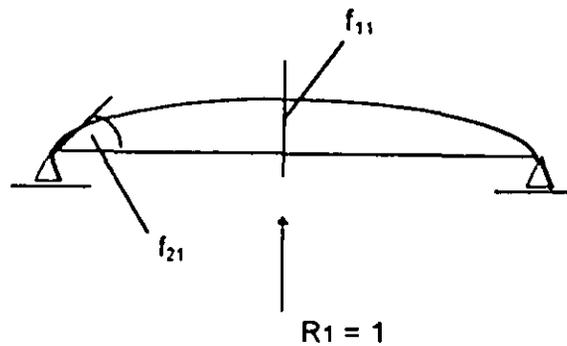
b) Desplazamientos debidos a las cargas.



$$D = \begin{Bmatrix} -\frac{540}{EI} \\ -\frac{144}{EI} \end{Bmatrix}$$

c) Desplazamientos debidos a  $R_1 = 1$

$$[F] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{36}{EI} & \frac{9}{EI} \\ \frac{9}{EI} & \frac{4}{EI} \end{bmatrix}$$



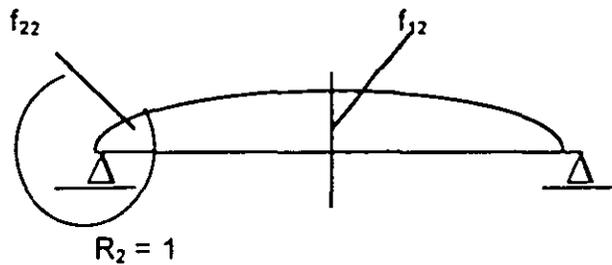
Ecuación de Compatibilidad de deformaciones:

$$\{D\} + [F] \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

d) Desplazamientos debidos a  $R_2 = 1$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = [F]^{-1} \{-D\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13.71 \\ 5.14 \end{Bmatrix} \text{ ton.}$$



La secuela de cálculo será entonces:

- 1) Determinar el grado de hiperestaticidad.
- 2) Plantear la estructura primaria isostática.
- 3) Determinar los desplazamientos debidos a las cargas en los puntos liberados.
- 4) Determinar los desplazamientos debidos a cada una de las redundantes supuestas con valores unitarios, que son los coeficientes de flexibilidad.
- 5) Sumar los desplazamientos debidos a las cargas y a cada redundante con base en condiciones de compatibilidad de deformaciones.

### 3.2 METODO DE LAS RIGIDECES.

En este método, las incógnitas son los desplazamientos nodales y los elementos mecánicos se calculan superponiendo una estructura a la cual se restringen los desplazamientos nodales calculando las fuerzas que provocan estas restricciones.

Posteriormente se van permitiendo uno a uno los desplazamientos en los nudos, calculando los coeficientes de rigidez correspondientes.

Finalmente con base en ecuaciones de equilibrio se calculan los desplazamientos y con estos se determinan los elementos mecánicos por superposición.

Las ecuaciones de equilibrio son de la forma:

$$\{ F \} + [ K ] \{ D \} = \{ 0 \} \quad (3.2)$$

en la cual:

$\{ F \}$  = vector columna que depende de las cargas externas

$[ K ]$  = matriz de rigideces cuyos elementos representan fuerzas ( ó momentos ) debidas a desplazamientos unitarios.

No depende de las cargas.

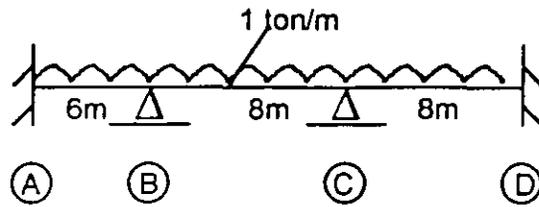
$\{ D \}$  = vector que representa las incógnitas que son los desplazamientos.

La secuela de cálculo será:

- 1) Encontrar el número de desplazamientos nodales posibles.
- 2) Fijar los desplazamientos posibles calculando las fuerzas nodales de fijación correspondientes
- 3) Ir permitiendo desplazarse uno a uno los desplazamientos unitarios inicialmente impedidos, calculando las fuerzas correspondientes (coeficientes de rigidez).
- 4) Con base en las ecuaciones de equilibrio, calcular los desplazamientos.
- 5) Los elementos mecánicos se obtendrán de superponer la estructura impedida de desplazarse en (2) con las correspondientes liberadas una a una.

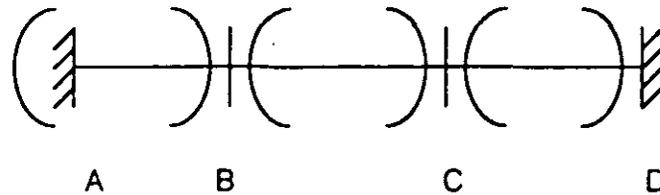
A continuación el ejemplo 4 muestra la aplicación de este método.

Ejemplo No. 4 Calcular reacciones por el método de las rigideces.



1) Incógnitas  $\Theta_b$  y  $\Theta_c$ .

2) fuerzas nodales de fijación.



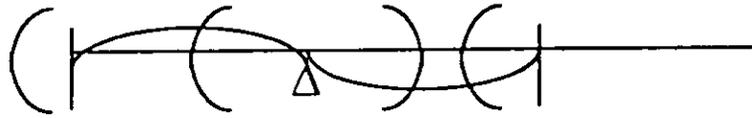
$$M_{Ab} = -3 \quad M_{Ba} = +3$$

$$M_{Bc} = -M_{cB} = +M_{cD} = -M_{Dc} = -5.33 \text{ ton}$$

3.1)  $\Theta_b = +1$

$$K_{bb} = \frac{4 - EI}{6} \quad K_{bc} = \frac{4E - I}{8} \quad K_{cb} = \frac{2E - I^2}{8}$$

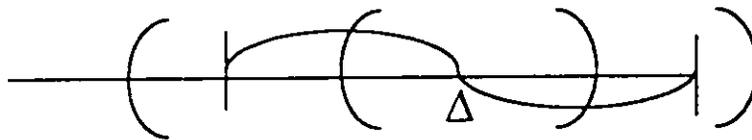
$$[K] = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bc} \\ K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} \quad K_{bb} = \frac{2EI}{6}$$



$$K_{AB} = \frac{2EI}{6}$$

$$3.2) \Theta_c = +1$$

$$K_{BC} = \frac{2EI}{8} \quad K_{BE} = \frac{4EI}{8} \quad K_{EC} = \frac{2EI}{8} \quad K_{EE} = \frac{4EI}{8}$$



4) Ecuación de equilibrio:  $\sum M_i = 0$

$$\{F\} = [K] \{D\}$$

$$\begin{Bmatrix} -2.33 \\ 0 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{4}{6} + \frac{4}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{4}{8} + \frac{4}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = [K]^{-1} \{ -F \} = \begin{Bmatrix} \frac{2.11}{EI} \\ -0.53 \end{Bmatrix}$$

#### 4. PROPIEDADES DE LAS MATRICES DE FLEXIBILIDADES Y DE RIGIDECES.

La relación entre la matriz de flexibilidad y la de rigidez se establecerá a través del siguiente ejemplo ( Figura 1a ).

Los desplazamientos  $\{ D \}$  se pueden expresar en términos de desplazamientos de cada una de las fuerzas actuando y superponiendo; Figura (1.b).

$$D_1 = f_{11} F_1 + f_{12} F_2 + \dots + f_{1n} F_n$$

$$D_2 = f_{21} F_1 + f_{22} F_2 + \dots + f_{2n} F_n$$

⋮

⋮

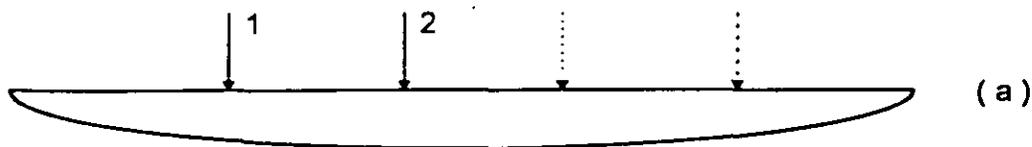
$$D_n = f_{n1} F_1 + f_{n2} F_2 + \dots + f_{nm} F_n$$

$$[f]_{n \times n} \{ F \}_{n \times 1} = \{ D \}_{n \times 1} \quad (4.1)$$

resolviendo 4.1:

$$\{ F \}_{n \times 1} = [f]^{-1}_{n \times n} \{ D \}_{n \times 1} \quad (4.2)$$

La ecuación 4.2 puede usarse para determinar las fuerzas formando los elementos de la matriz de rigidez de la misma estructura.



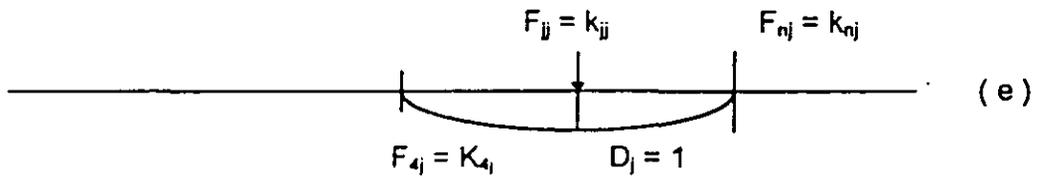
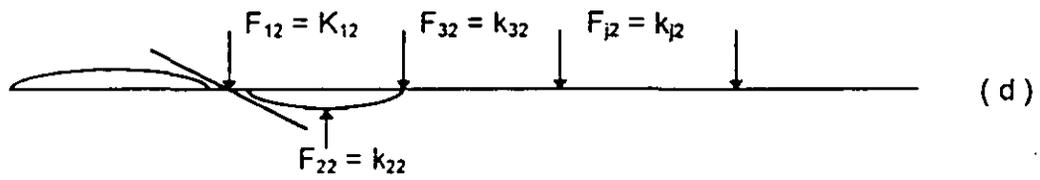
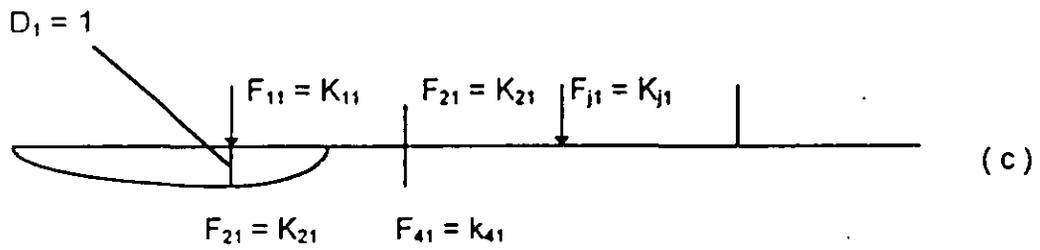
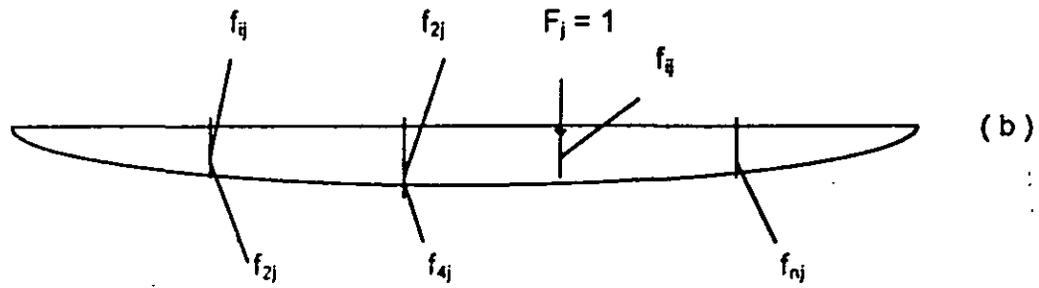


FIG. 6.1

Si la estructura es deformada por fuerzas  $F_{11}, F_{21}, \dots, F_{n1}$ , a través de coordenadas tales que el desplazamiento  $D_1 = 1$ , mientras que  $D_2 = D_3 = \dots D_n = 0$  (Figura 1c)

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{n1} \end{Bmatrix} = [f]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En forma similar, las fuerzas requeridas para conservar la estructura deformada tal que  $D_2 = 1$ , mientras que  $D_1 = D_3 = \dots D_n = 0$  (Figura 1d)

$$\begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \\ F_{32} \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{n2} \end{Bmatrix} = [f]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En el caso general, si  $D_j = 1$ , mientras todos los otros desplazamientos son cero, las ecuaciones serán:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \vdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \vdots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ F_{n1} & F_{n2} & \vdots & F_{nn} \end{bmatrix} = [f]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

siendo las fuerzas  $F_{ij}$  de la izquierda en esta ecuación los elementos de la matriz de rigideces, por lo tanto:

$$[K] = [f]^{-1} \quad \text{ó}$$

$$[K]^{-1} = [f] \quad (4.3)$$

La matriz de rigideces es la inversa de la de flexibilidades y viceversa, teniendo el mismo sistema de coordenadas para fuerzas y desplazamientos.

Sin embargo en el análisis por flexibilidad se transforma la estructura en isostática y el sistema de coordenadas representan la localización y dirección de las restricciones y en cambio en rigideces, se agregan fuerzas para restringir desplazamientos de nudos, siendo su sistema de coordenadas la localización y dirección de los desplazamientos incógnitas; por lo tanto la inversa de la matriz de flexibilidad utilizada en el método de las fuerzas es una matriz, en la cual los elementos son coeficientes de rigidez, pero no los que se utilizan en el análisis del método de rigidez y viceversa.

#### *Propiedades de Simetría.*

Como se demostró en el teorema recíproco de Maxwell-Betti y con relación a la matriz de flexibilidades, hace que esta matriz sea *simétrica*. Como la ecuación 4.3 indica que la matriz de rigideces es la inversa de la matriz de flexibilidades, será *también simétrica*, es decir que los coeficientes de la matriz de rigideces serán entonces:

$$K_{ij} = K_{ji} \quad (4.4)$$

Otra propiedad importante es que los coeficientes de la diagonal principal  $f_{ii}$  ó  $K_{ii}$  *deben ser positivos* ya que para el cálculo de  $f_{ii}$  el desplazamiento ocurrirá en la coordenada "i" debida a una fuerza unitaria en "i", teniendo ambos la misma dirección y en forma semejante para  $K_{ii}$ , la fuerza necesaria en la coordenada "i" que provoca un desplazamiento unitario en "i", tendrán la misma dirección.

Si en la ecuación ( 2.3 ) se sustituyen los desplazamientos expresados en la ecuación 4.1, se tiene:

$$[W]_{...} = \frac{1}{2} \{F\}'_{...} [f]_{...} \{F\} \quad (4.5)$$

y por otro lado, substituyendo la ecuación ( 3.2 ) de nuevo en la ( 4.1 )

$$[W]_{...} = \frac{1}{2} \{D\}' [K] \{D\} [f] [K] \quad (4.6)$$

De las ecuaciones ( 4.5 ) y ( 4.6 ), los miembros de la derecha tienen forma cuadrática de las variables F ó D y ésta es positivamente definida si tiene valores positivos para cualquier valor no nulo de la variable y será cero si F ó D son cero.

Por lo anterior, las ecuaciones 4.5 y 4.6 representan el trabajo externo de fuerzas a través de desplazamientos y esta cantidad debe ser positiva en una estructura estable, deduciendo que en esa forma cuadrática, las matrices  $[f]$  y  $[K]$  son *matrices positivamente definidas*, siendo los determinantes de  $[f]$  y  $[K]$  mayores que cero.

### Selección del método de las flexibilidades ó de las rigideces.

Para seleccionar cualquiera de los dos métodos generales, es necesario haberse familiarizado con ellos, para poder decidir en cada caso cual sería de aplicación más sencilla.

Sin embargo se pueden adelantar algunos comentarios:

1. El número de incógnitas es en general mayor en el método de las rigideces que en flexibilidades, pero la formulación de las ecuaciones es más sencilla y de más fácil aplicación para programas de computadora, debido principalmente a la dificultad de programar la estructura primaria.
2. Cuando el trabajo se hace con calculadoras y para sistemas relativamente pequeños, la selección dependerá de comparar el grado de hiperestaticidad en flexibilidades con el número de grados de libertad en rigideces.

### 5. METODO DE LAS FLEXIBILIDADES.

En el inciso 3 se describió este método. A continuación se analizan en detalle la aplicación de matrices para su resolución.

#### 5.1 Matriz de transformación de fuerzas.

En una estructura estáticamente determinada cada una de las fuerzas internas de sus elementos puede expresarse en función de las fuerzas externas nodales, por medio de la ecuación de equilibrio:

$$p_1 = b_{11} F_1 + b_{12} F_2 + \dots + b_{1n} F_n$$

$$p_2 = b_{21} F_1 + b_{22} F_2 + \dots + b_{2n} F_n$$

:

:

$$p_m = b_{m1} F_1 + b_{m2} F_2 + \dots + b_{mn} F_n$$

en la cual "p" son las fuerzas internas y "F" el conjunto del sistema de cargas aplicadas a la estructura.

No existe relación entre los subíndices de F y p.

En forma matricial:

$$\{p\} = [b] \{F\} \quad (5.1)$$

en la cual

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$[b]$  es la matriz de transformación de fuerzas que relaciona las fuerzas internas con las externas.

La matriz  $[b]$  es una matriz rectangular y el elemento  $b_{ij}$  representa el valor de la componente de  $p_i$  de la fuerza interna, producida por la fuerza externa  $F_j$  de valor unitario.

Cuando la estructura es hiperestática, las fuerzas internas no pueden determinarse en función de las cargas externas aplicando solamente ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, haciendo la estructura isostática, que llamaremos primaria, suprimiendo las redundantes, como se hace en el método de las flexibilidades, se considera la estructura primaria sujeta primeramente a las cargas reales aplicadas y posteriormente a las redundantes. En esta forma, se pueden expresar las fuerzas internas de los elementos en función de las cargas externas  $F$  y de las redundantes ó hiperestáticas  $R$ , como sigue:

$$\{p\} = [b_r] F + [b_n] R \quad (5.3)$$

ó utilizando la propiedad de subdivisión de matrices:

$$\{p\} = [b_r \mid b_n] \begin{Bmatrix} F \\ \dots \\ R \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

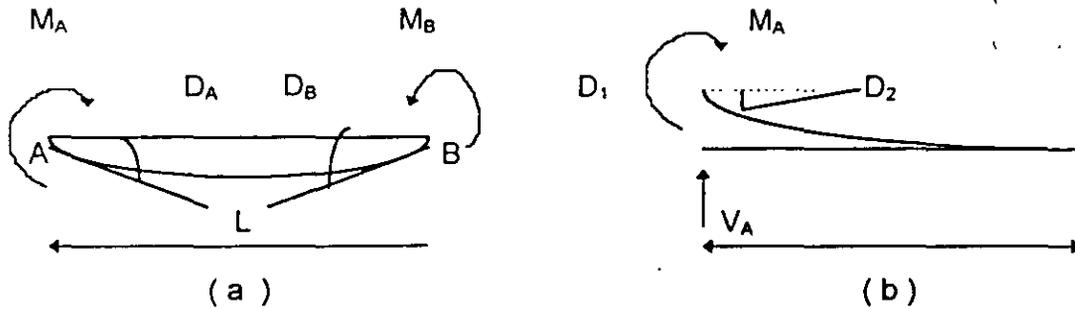
En la cual:

$[b_r]$  = Matriz de transformación de fuerzas externas en la que cada columna representa los valores de "p" producidos por las fuerzas externas unitarias aplicadas a la estructura primaria con redundantes nulas.

$[b_n]$  = Matriz de transformación de fuerzas redundantes en la que cada columna representa los valores de "p" producidos por redundantes unitarias aplicadas a la estructura primaria con fuerzas externas nulas.

## 5.2 Solución Matricial generalizada por el método de las flexibilidades.

Considerando un elemento aislado, despreciando los efectos de fuerza axial



$$[f_u] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix}$$

Los vectores de fuerzas internas y deformaciones se pueden expresar :

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} ;$$

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_A \\ D_B \end{Bmatrix}$$

quedando cada componente del vector desplazamiento con la misma componente del vector carga.

La matriz de flexibilidades de la barra será como se indicó anteriormente:

$$[f_w] \doteq \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

y la relación con las deformaciones es :

$$\{Q\} = [f_w] \{p\} \quad (5.5)$$

Los vectores de fuerzas internas y deformaciones quedarán como sigue:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} D_r \\ D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix}$$

Los subíndices se refieren a la designación de cada elemento en que se ha descompuesto la estructura.

En la ecuación ( 5.4 ) se puede ver por el principio de contragradencia, tal y como se verá para el cálculo de los desplazamientos; que:

$$\begin{Bmatrix} D_r \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [D_r]^T \\ \vdots \\ [D_n]^T \end{Bmatrix} \{ \rho \} \quad (5.6)$$

Siendo  $D_r$  los desplazamientos debidos a  $\{ F \}$  y  $D_n$  los desplazamientos debidos a las redundantes  $\{ R \}$ , obteniéndose:

$$\{ D_r \} = [b_r]^T \{ \rho \} \quad (5.7)$$

$$\{ D_n \} = [b_n]^T \{ \rho \} \quad (5.8)$$

Para calcular las redundantes, se substituye el valor  $\{ p \}$  de la ecuación de equilibrio ( 5.3 ) en la ecuación que relaciona deformaciones y fuerzas, expresada en la ecuación ( 5.5):

$$\{ \rho \} = [f_w] \{ p \} = [f_w] [b_r] \{ F \} + [f_w] [b_n] \{ R \} \quad (5.9)$$

Por último, si substituímos el valor de las deformaciones obtenidas en ( 5.9 ), en la ecuación de continuidad ( 5.8 ), se tendrá:

$$\{ D_n \} = [b_n]^T \{ \rho \}$$

$$= [b_r]^T [f_w] [b_r] \{ F \} + [b_r]^T [f_w] [b_r] \{ R \} \quad (5.10)$$

y debido al principio de compatibilidad de deformaciones, las discontinuidades impuestas para obtener la estructura primaria isostática no existen realmente, los valores de  $\{ D_a \}$  deben ser nulos:

$$[b_r]^T [f_w] [b_r] \{ F \} + [b_r]^T [f_w] [b_r] \{ R \} = 0 \quad (5.11)$$

Ecuación que permite calcular los valores de las redundantes.

El producto de las tres primeras matrices del primer miembro de la ecuación ( 5.11 ) y que están premultiplicando al vector F, representan la aplicación del principio de trabajos virtuales tal y como se expuso anteriormente en la ecuación ( 2.18 ). Este primer término da como resultado un vector de  $nR \times 1$  y representa los desplazamientos debidos a las fuerzas aplicadas a la estructura.

En forma semejante, las tres primeras matrices del segundo término ( 5.11 ) y que están premultiplicando a las redundantes, representan la matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura, tal y como se expresó en la ecuación ( 2.25 ). Esta matriz será siempre cuadrada, simétrica, no singular y de orden  $nR \times nR$ .

Este segundo término del primer miembro de la ecuación ( 5.11 ) representa físicamente los desplazamientos debidos a las redundantes.

La forma más general de la ecuación ( 5.11 ) se escribe de la manera siguiente:

$$[b_r]^T [f_w] [b_r] \{ F \} + [b_r]^T [f_w] [b_r] \{ R \} = \{ D_a \} \quad (5.12)$$

El vector  $D_a$  indica los desplazamientos reales que ocurren en las coordenadas seleccionadas en la estructura primaria, siendo iguales a cero generalmente en la práctica ó iguales a los desplazamientos reales impuestos  $D_a$ , como serían asentamientos de apoyos, giros, efectos de temperatura, resortes elásticos, etc.

De la ecuación ( 5.11 ):

$$R = - [f]^{-1} [b_r]^T [f_w] [b_r] \{ F \} \quad (5.18)$$

Con las redundantes R obtenidas, aplicando el principio de superposición se obtienen los elementos mecánicos:

$$\{ p \} = [b_r] \{ F \} + [b_r] \{ R \} \quad (5.3)$$

Las ecuaciones anteriores son válidas para cualquier tipo de estructuras: armaduras, vigas, marcos, etc., tomando las flexibilidades correspondientes de axial, flexión, etc.

Para el caso de armaduras, es conveniente aplicar la ecuación equilibrio:

$$\{p\} = [b_F] \{F\} = \{p_0\}$$

siendo  $\{p_0\}$  el vector de fuerzas internas en las barras debidas a fuerzas externas  $\{F\}$  aplicada en la estructura primaria, quedando la ecuación 5.11

$$[b_R]^T [f_M] \{p_0\} + [b_R]^T [f_M] \{b_R\} \{R\} = 0 \quad (5.20)$$

ecuaciones en las cuales no será necesario calcular  $[b_F]$

Para calcular los desplazamientos, la ecuación 5.3 puede escribirse:

$$\{p\} = [b_F M b_R] \left\{ \frac{F}{R} \right\} \quad (5.4)$$

$$\begin{Bmatrix} D_F \\ D_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_F^T \\ b_R^T \end{bmatrix} \{p\} \quad (5.21)$$

En la cual:  $\{D_F\} =$  desplazamientos debidos a  $\{F\}$

$\{D_R\} =$  desplazamientos debidos a las redundantes

Por el principio de contragradencia:

$$\{D_F\} = [b_F]^T \{p\} \quad (5.22)$$

$$\{D_R\} = [b_R]^T \{p\} \quad (5.23)$$

Pero por continuidad o compatibilidad, dado que los elementos de la estructura no están realmente "cortados", los valores de  $D_R$  deben ser nulos.

Por otro lado como:

$$\{p\} = [f_M] \{p\} \quad (5.24)$$

que es la ley de Hooke al revés, sustituyendo en 5.22

$$\{D\} = [b_F]^T \{p\} = [b_F]^T [f_M] \{p\} \quad (5.25)$$

Esta ecuación permite calcular los desplazamientos aplicando una fuerza unitaria en la estructura primaria isostática.

### 5.21 Caso de fuerzas aplicadas en los elementos

La solución matricial generalizada requiere que las fuerzas estén aplicadas en los nudos, lo cual supone que en el caso de vigas y marcos que el momento flexionante entre nudos varía linealmente y que los desplazamientos entre nudos son nulos.

Sin embargo como en la práctica las cargas se aplican en cualquier punto, habrá que trasladarlas a los nudos previamente seleccionados, calculando además los desplazamientos locales debidos a estas cargas en los nudos externos del elemento considerado.

Las deformaciones locales deben tomar en cuenta las condiciones de frontera, establecidas para cada barra, cuando se subdivide la estructura en elementos. La expresión para obtener los desplazamientos según el sistema de redundantes basada en el teorema de trabajos virtuales, será:

$$\{D_i\} = [b_R]^T \{D\}$$

en la cual  $\{D\}$  es el vector de desplazamientos impuesto a cada elemento debido a las cargas aplicadas sobre él.

## 5.3 RESUMEN DE APLICACION DEL METODO DE LAS FLEXIBILIDADES

### 5.31 Estructuras isostáticas

a) Las fuerzas internas se obtienen con la aplicación de la ecuación de equilibrio:

$$\{p\} = [b_F] \{F\}$$

b) Los desplazamientos nodales se calcularán:

$$\{D\} = [b_F]^T [f_M] [b_F] \{F\} = [f] \{F\}$$

(Nota.- En el caso de vigas o marcos cargados en los elementos deberán trasladarse las cargas a los nudos).

El ejemplo No. 5 muestra la aplicación del método a una armadura isostática.

### 5.32.- Estructuras hiperestáticas.

a) Definir la estructura primaria y por lo tanto especificar cuales son las redundantes

- b) Calcular vectores de fuerzas y la matriz de transformación de redundantes  $[b_R]$  y la asociada a las cargas  $[b_F]$ .
- c) Calcular la matriz de flexibilidad no ensamblada en los elementos  $[f_M]$
- d) Calcular el producto  $[b_R]^T [f_M] [b_F]$  que es la matriz de flexib. asociada a las cargas.
- e) Calcular la matriz de flexibilidades ensamblada de la estructura

$$[f_{R \times R}] = [b_R]^T [f_M] [b_R]$$

- f) Plantear y resolver las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones:

$$D_A = [D_{XF}] \{F\} + [D_{RR}] R = D_X \text{ ó } 0$$

- g) Si se desea calcular los desplazamientos.

$$D_A = [b_F]^T [f_M] \{P\}$$

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de la secuela mencionada.

#### 5.4 Variante propuesta para el cálculo de la matriz de flexibilidades en el caso de flexión (ref. 3)

En el caso en vigas y marcos, la matriz de flexibilidades de cada elemento está formada por cuatro términos, como se vió en la ecuación 2.21A

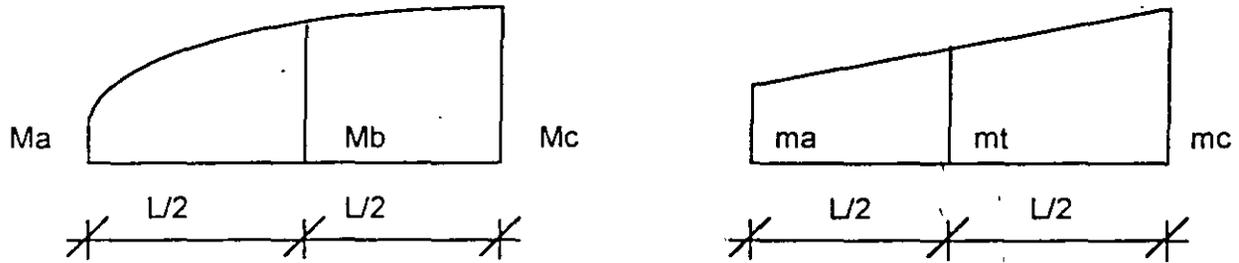
$$[f_M] = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para lograr que la matriz de flexibilidades sea diagonal, como sucede en el caso de las armaduras, debido a la forma de multiplicación del producto:

$$\int m \frac{M}{EI} dx$$

si en una estructura de n elementos, se llama  $\{p\}$  a las fuerzas internas, y definimos tres ordenadas por elemento, en tal forma:

que  $p_i = \begin{Bmatrix} M_a \\ M_b \\ M_c \end{Bmatrix}$ , sean los momentos flexionantes de acuerdo con la Fig. 3.1



Integrando un polinomio de grado 2, de la forma  $Y = Ax^2 + Bx + C$ , la integral será una función lineal de las ordenadas  $Y_a, Y_b$  y  $Y_c$ .

En el caso de carga uniformemente repartida la variación de  $M$  será parabólica y como la variación de  $m$  siempre es lineal, la integración del producto  $m M$  será:

$$[f_M]_i = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21B)$$

que es semejante a la fórmula de Simpson. (Ref. 5), esta matriz será de la misma forma si se integra el producto  $M$  lineal multiplicado por  $m$ .

Se puede también diagonalizar la matriz de flexibilidad para el caso de variación de  $M$  en tercer o cuarto grado, integrando la ecuación de una cónica de 3° ó 4° grado, debido a la variación lineal de  $m$ .

Por tratarse de matrices diagonales, la ecuación 3.10 se puede almacenar en un vector de la forma:

$$\{f_M\}_i = \frac{L}{6EI} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.21C)$$

La ecuación 2.21C, presenta ventajas importantes con relación a la matriz de flexibilidades en flexión de la forma (2.21A):

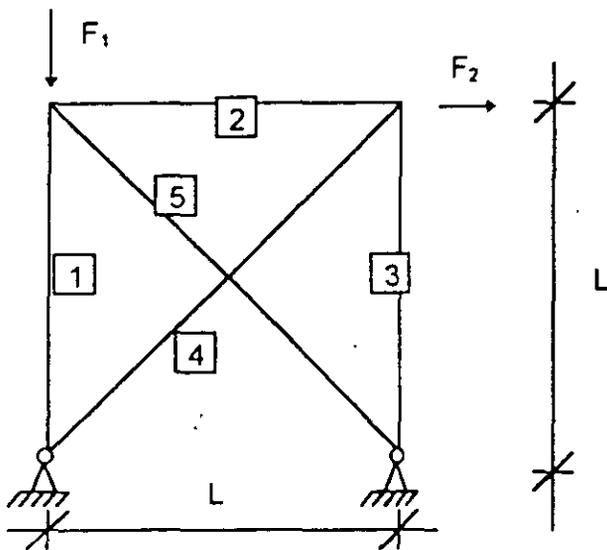
- a) La matriz es diagonal, por lo tanto de más fácil manejo operativo, a pesar de tener un renglón más.

- b) En el caso de cargas uniformemente repartidas, utilizando la matriz diagonal, no necesario pasar las cargas a los nudos y luego transponerlas como se indicó en pag. 35, simplificándose en forma considerable el trabajo.

El ejemplo No. 12 muestra la forma de aplicar la secuela de cálculo así como la variante mencionada, para resolver un marco rígido mediante el método de las flexibilidades.

### EJEMPLO No. 5

Calcular las fuerzas en las barras resolviendo por flexibilidades y los desplazamientos correspondientes en la dirección de  $F_1$  y  $F_2$ .



$$\frac{L}{AE} = \text{constante}$$

- 1.- La armadura es isostática
- 2.- La ecuación de equilibrio es

$$\{p\} = [b_F] \{F\}$$

Cálculo de  $b_F$  :

$$[b_F]_{5 \times 2} = \begin{matrix} F_1=1 & F_2=1 \\ \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} ;$$

Cálculo de  $\{F\}$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ 0 \\ -F_2 \\ \sqrt{2}F_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

3.- Cálculo de desplazamientos

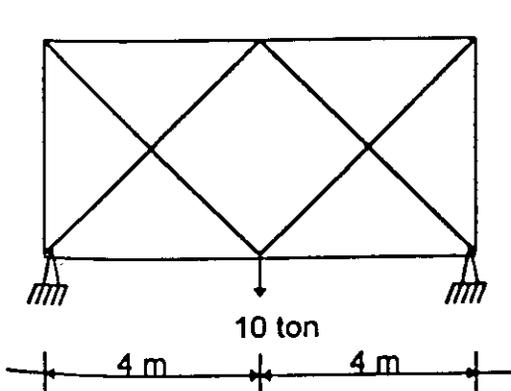
$$\{D\} = \underbrace{[b_F]^T [f_m] [b_F]}_{[f]} \{F\} \quad ; \quad [f_m]_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_1/E \\ 3/F_2 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo No. 6

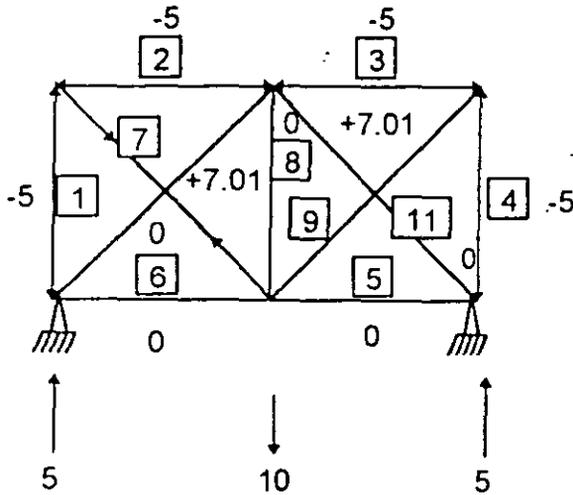
Resolver la armadura por flexibilidades.



$AE = \text{cte.}$

Solución:

1.- La estructura es hiperestática en 2º grado y la estructura primaria seleccionada será la siguiente:

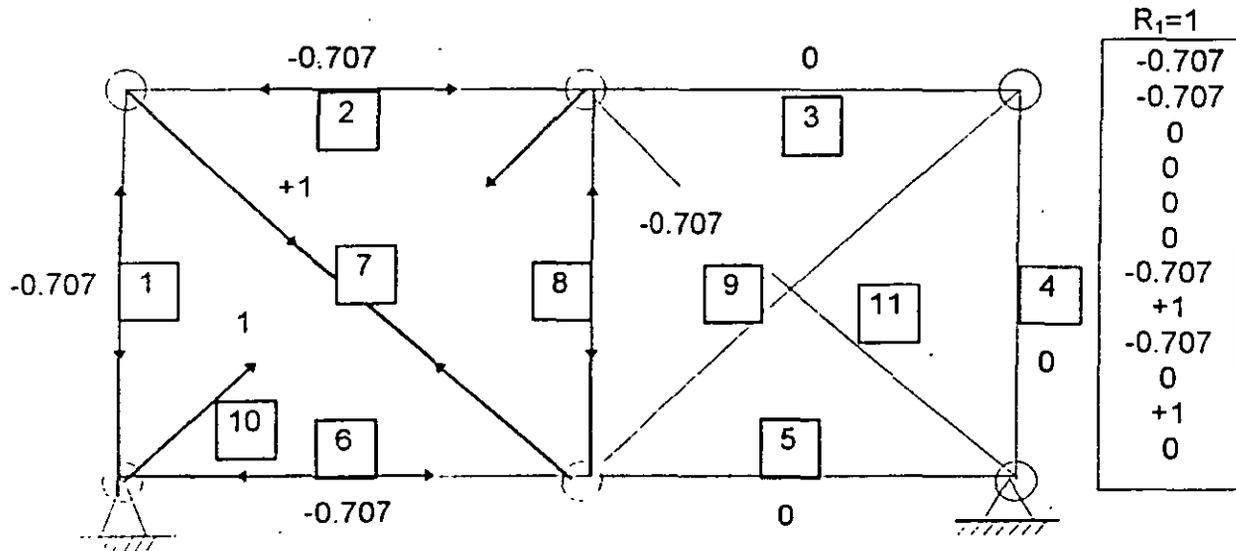


El vector de fuerzas internas  
 $P_0 = [D_F] \{F\}$

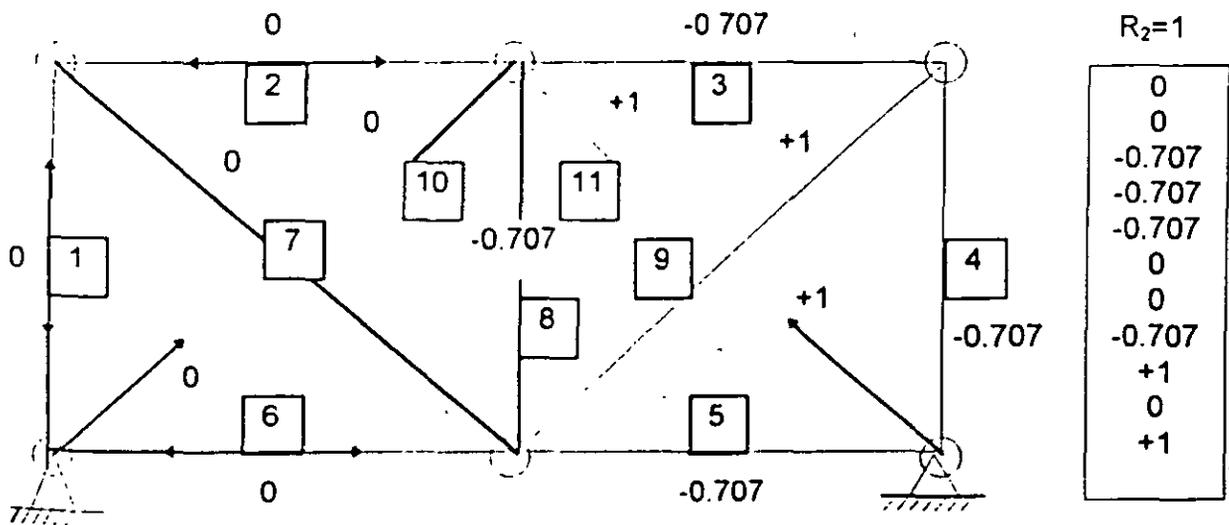
$$\text{El vector } \begin{Bmatrix} P_0 \\ 11 \times 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ +7.01 \\ 0 \\ +7.01 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Obtención de  $[b_R]_{9 \times 2}$

1ª columna de  $[b_R]$



2ª columna de  $[b_R]$





$$[f] [p_0] = \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4 & -5 & -20 \\ 4 & -5 & -20 \\ 4 & -5 & -20 \\ 4 & -5 & -20 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5.65 & +7.07 & +40 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5.65 & +7.07 & +40 \\ 5.65 & 0 & 0 \\ 5.65 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[b_R]^T [f] [p_0] = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & -0.707 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{[f_i] \{p_0\}}_{D \times F} = \begin{Bmatrix} 68.28 \\ 68.28 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{AE}$$

Ahora calculando el producto  $[b_v]^T [f_{N1}] [b_R]$

$$[f_M]_{11 \times 11} [b_R]_{11 \times 2} = \begin{bmatrix} 4 & -0.707 & 0 \\ 4 & -0.707 & 0 \\ 4 & 0 & -0.707 \\ 4 & 0 & -0.707 \\ 4 & 0 & -0.707 \\ 4 & -0.707 & 0 \\ 5.65 & +1 & 0 \\ 4 & -0.707 & -0.707 \\ 5.65 & 0 & 1 \\ 5.65 & +1 & 0 \\ 5.65 & 0 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.83 & 0 \\ -2.83 & 0 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ -2.83 & 0 \\ +5.65 & 0 \\ -2.83 & -2.83 \\ 0 & 5.65 \\ 5.65 & 0 \\ 0 & 5.65 \end{bmatrix}$$

$$[f] = [b_R]^T [f_M] [b_R] = \begin{bmatrix} -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & -0.707 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & -0.707 & -0.707 & 0 & 0 & -0.707 & +1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.83 & 0 \\ -2.83 & 0 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ 0 & -2.83 \\ -2.83 & 0 \\ +5.65 & 0 \\ -2.83 & -2.83 \\ 0 & 5.65 \\ 5.65 & 0 \\ 0 & 5.65 \end{bmatrix}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} 19.32 & 2 \\ 2 & 19.32 \end{bmatrix} \frac{1}{AE}$$

La ecuación de compatibilidad de deformación será:

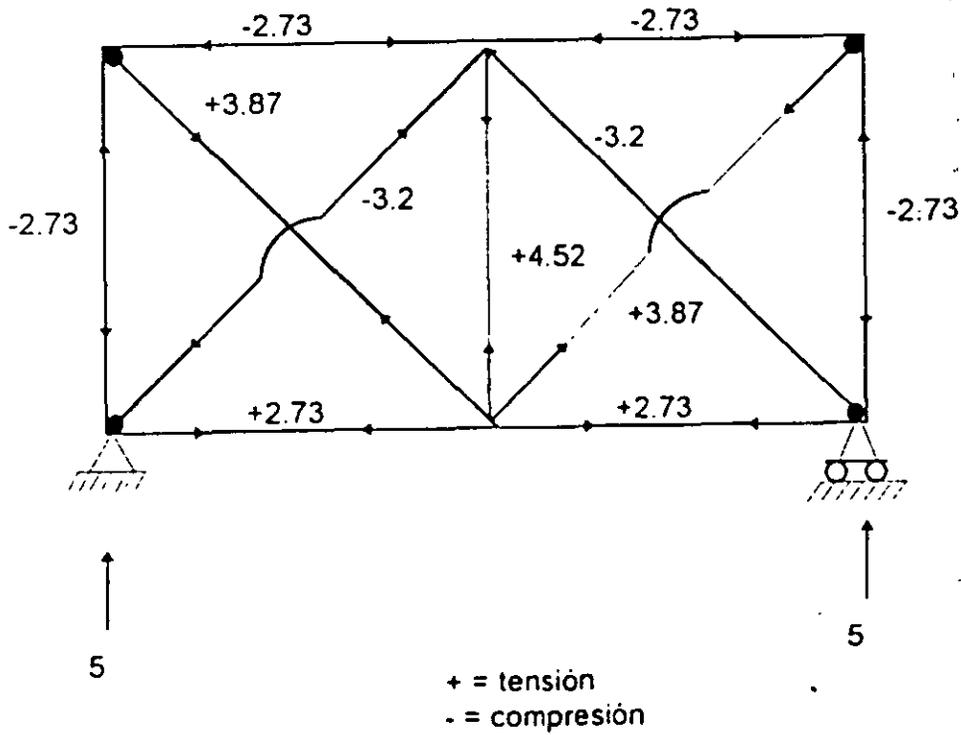
$$\{D \times F\} + \{f\} \{R\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 68.28 \\ 68.28 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{AE} + \begin{bmatrix} 19.32 & 2 \\ 2 & 19.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \{0\}; \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.2 \\ 3.2 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas de las barras serán:

$$\{p\} = \{p_0\} + [b_R] \{R\} = \{0\}$$

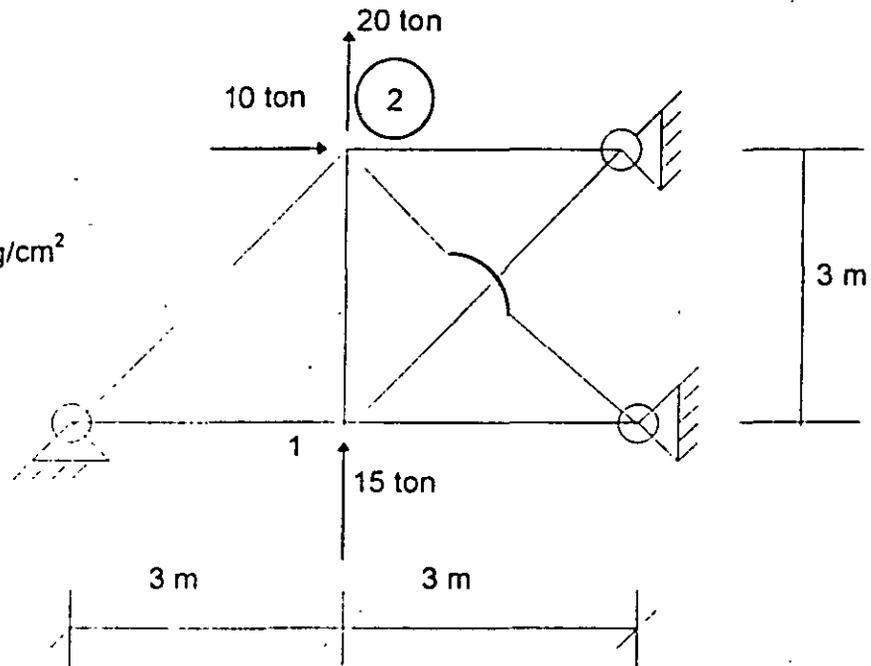
$$\begin{Bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 7.07 \\ 0 \\ 7.07 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.707 & 0 \\ -0.707 & 0 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ 0 & -0.707 \\ -0.707 & 0 \\ +1 & 0 \\ -0.707 & -0.707 \\ 0 & +1 \\ +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -3.2 \\ -3.2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.73 \\ -2.73 \\ -2.73 \\ -2.73 \\ +2.73 \\ +2.73 \\ +3.81 \\ +4.52 \\ +3.81 \\ -3.2 \\ -3.2 \end{Bmatrix}$$



Fuerzas finales en las barras [ ton ]

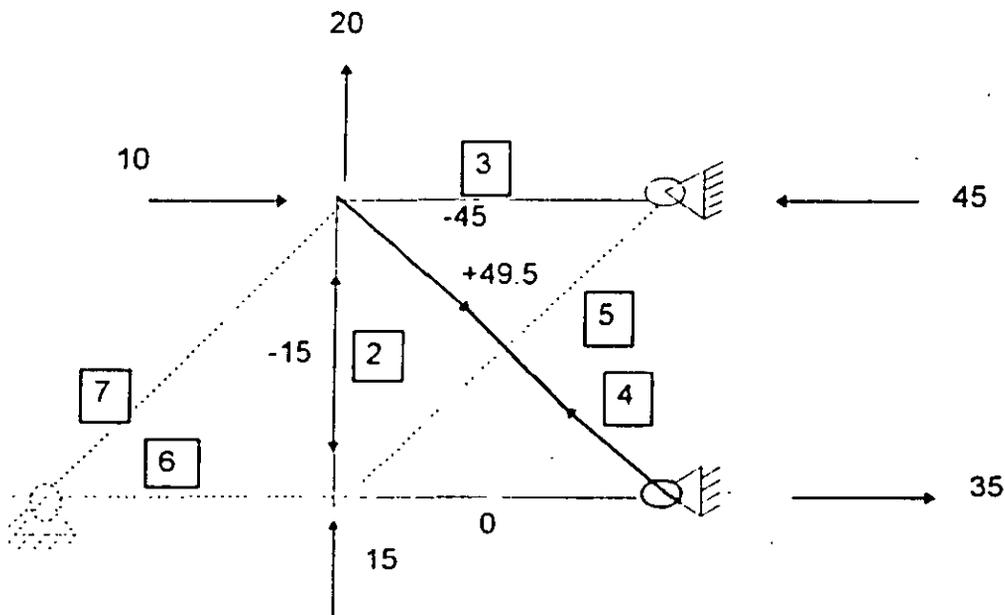
Ejemplo No. 7.- Resolver la armadura por flexibilidades y calcular P, [D<sub>1x</sub> D<sub>2y</sub>]

A = 30 cm<sup>2</sup>  
E = 2.1 X 10<sup>6</sup> kg/cm<sup>2</sup>



Solución: 1) CALCULO DE FUERZAS

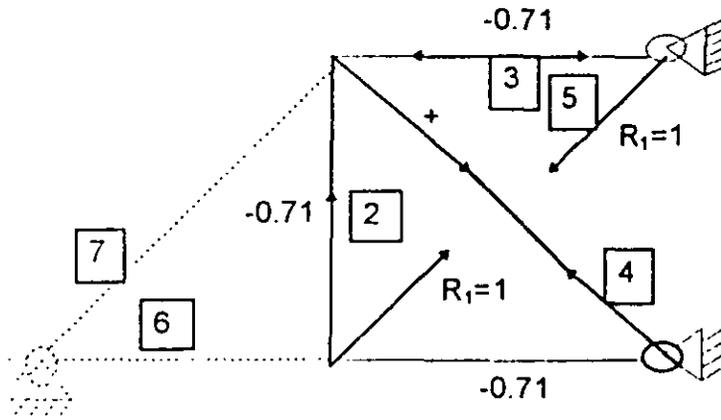
La estructura es hiperestática en tercer grado y se relacionará en tercer grado y se seleccionará la siguiente estructura primaria.



$$\text{Cálculo de } p_o = \begin{Bmatrix} 0 \\ -15 \\ -45 \\ +49.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Obtención de  $[b_R]$ ;

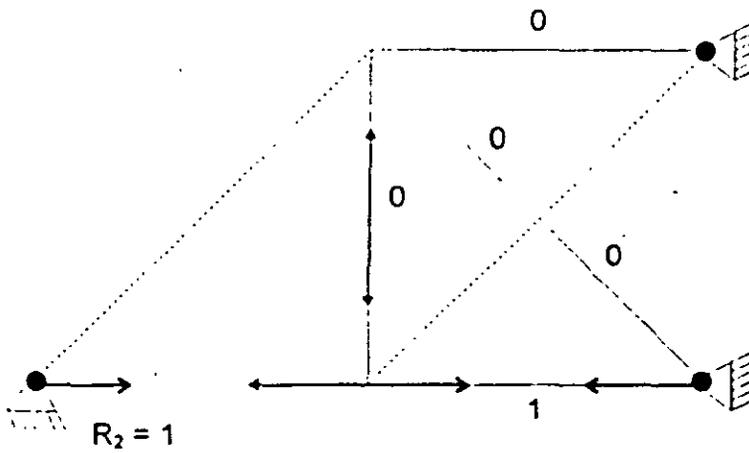
1) 1ª columna de  $[b_R]$



$$R_1 = 1$$

-0.71
-0.71
-0.71
+1
+1
0
0

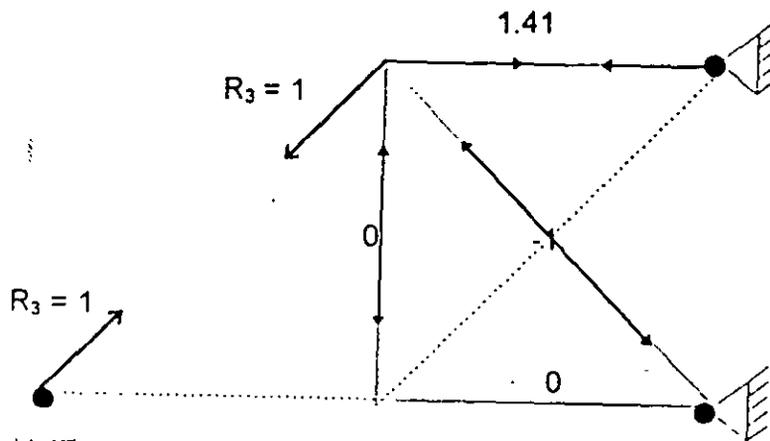
2ª columna de  $[b_R]$ ;



$$R_2 = 1$$

1
0
0
0
0
0
1
0

3ª columna de  $[b_R]$ ;



$$R_3 = 1$$

0
0
+1.41
-1
0
0
1

$$[b_R] = \begin{bmatrix} -0.71 & 1 & 0 \\ -0.71 & 0 & 0 \\ -0.71 & 0 & +1.41 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de  $[f]$  :

$$[f_M] = \frac{1}{\Delta E} \begin{bmatrix} 3 & & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & 3 & & & & 0 & \\ & & & 4.24 & & & & \\ & & & & 4.24 & & & \\ & & 0 & & & 3 & & \\ & & & & & & 3 & \\ & & & & & & & 4.24 \end{bmatrix}$$

$$[f] = [b_R]^T [f_M] [b_R] = \frac{1}{\Delta E} \begin{bmatrix} 13.01 & -2.13 & -7.24 \\ -2.13 & 6 & 0 \\ -7.24 & 0 & 14.44 \end{bmatrix}$$

Calculando ahora :

$$[b_R]^T [f] \{p_o\} = \frac{1}{AE} \begin{Bmatrix} 342.18 \\ 0 \\ +400 \end{Bmatrix}$$

La ecuación de compatibilidad de deformaciones será :

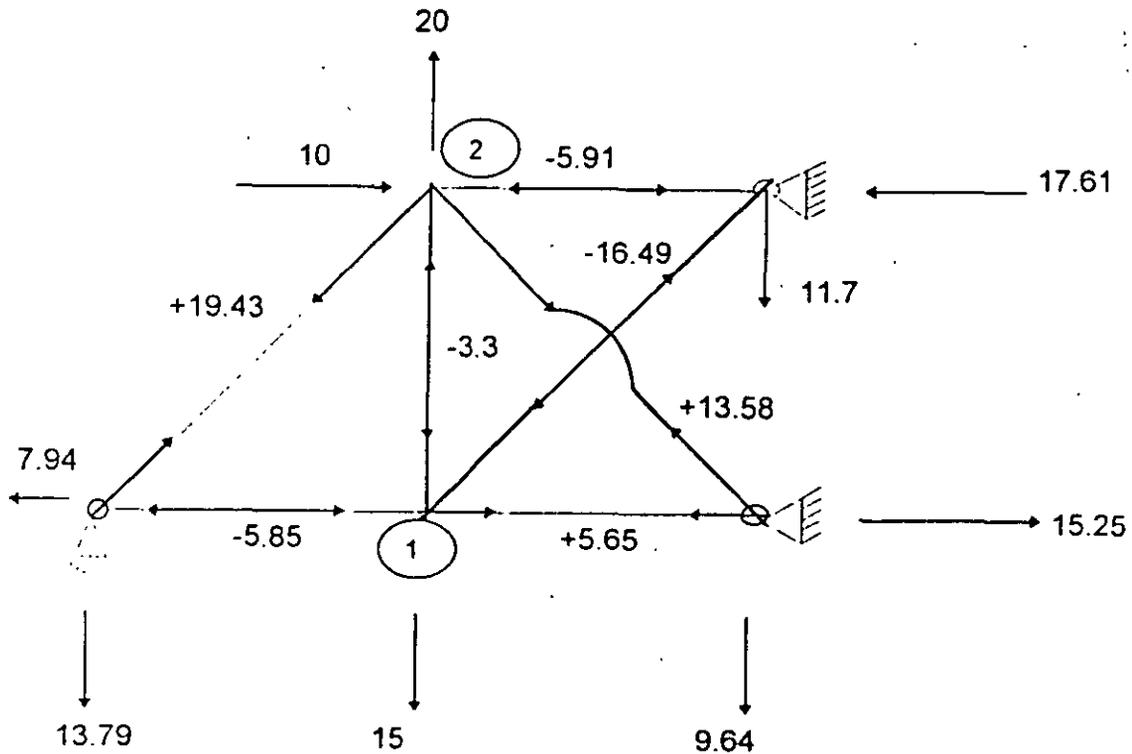
$$\{D_{x1}\} + [f] \{R\} = \{0\}$$

$$\frac{1}{AE} \begin{Bmatrix} 342.18 \\ 0 \\ +400 \end{Bmatrix} + \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 13.01 & -2.13 & -7.24 \\ -2.13 & 6 & 0 \\ -7.24 & 0 & 14.44 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16.94 \\ -5.85 \\ +19.43 \end{Bmatrix} \text{ ton.}$$

Los valores de las fuerzas en las barras será :

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -15 \\ -45 \\ +49.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} +5.65 \\ 11.70 \\ 39.09 \\ -35.92 \\ -16.49 \\ -5.85 \\ 19.43 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +5.65 \\ -3.30 \\ -5.91 \\ +13.58 \\ -16.49 \\ -5.85 \\ +19.43 \end{Bmatrix}$$



## 2) CALCULO DE DESPLAZAMIENTOS

Como se obtuvo directamente  $\{ p_o \}$  del equilibrio de la armadura bajo las cargas, se tendrá que calcular  $[ b_F ]$

$$[ b_F ] = \begin{array}{c} F_{x1}=1 \quad F_{y1}=1 \quad F_{x2}=1 \quad F_{y2}=1 \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & +1.41 & +1.41 & +1.41 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

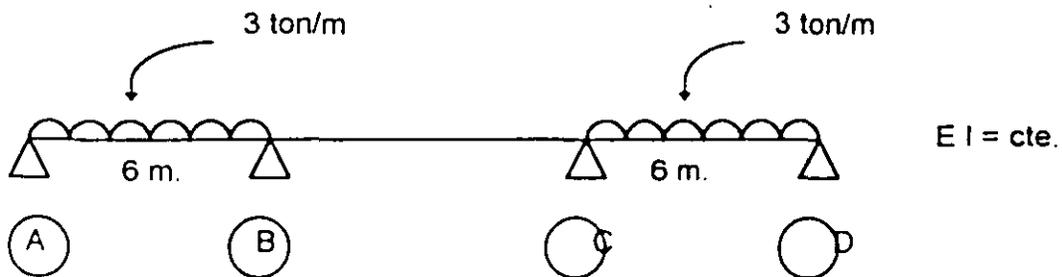
$$\text{Como } \{D\} = [b_F]^T [f]\{p\}$$

$$D_{1x} = \{-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \begin{Bmatrix} +16.95 \\ -9.90 \\ -17.73 \\ +57.57 \\ -69.91 \\ -17.55 \\ +82.38 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{AE} = \frac{16.95}{AE} = 0.00027m$$

$$D_{2y} = \{0 \ 0 \ -1 \ +1.41 \ 0 \ 0 \ 0\} \begin{Bmatrix} -17.73 \\ +57.57 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{AE} = \frac{98.90}{AE} = 0.00157m$$

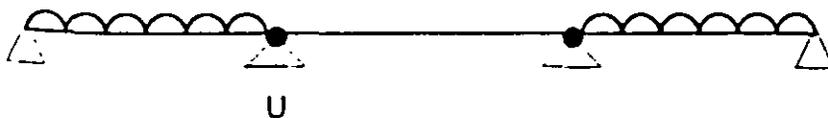
Ejemplo N° .- 8

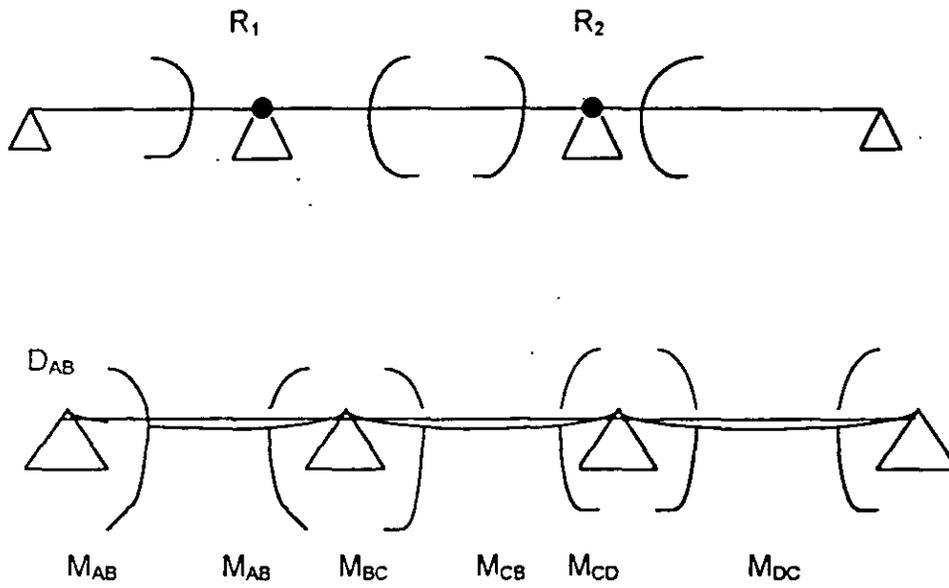
Resolver la viga siguiente por el método de la flexibilidad:



Solución -

El grado de hiperestaticidad es dos y se seleccionará la siguiente estructura primaria:



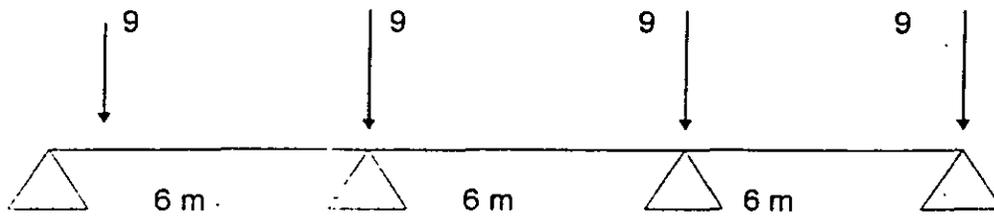


Los vectores de fuerzas correspondientes y desplazamientos será :

$$F = \begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{Bmatrix} \quad D = \begin{Bmatrix} D_{AB} \\ D_{BA} \\ D_{BC} \\ D_{CB} \\ D_{CD} \\ D_{DC} \end{Bmatrix}$$

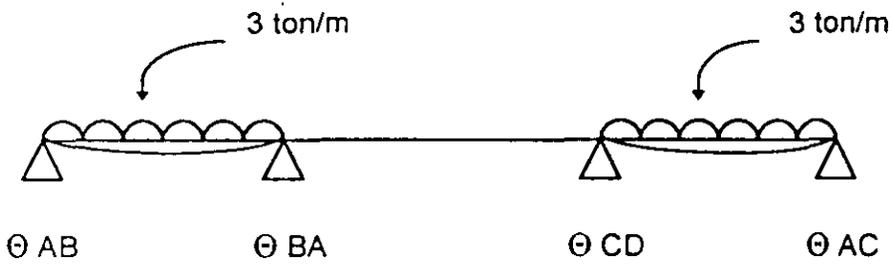
Como el sistema de fuerzas no está aplicado en los nudos, habrá que trasladarlo a los apoyos y calcular los giros en los extremos de las barras.

$$F = \int m \frac{M}{EI} dx$$



El vector de carga será :

$$F = \begin{Bmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \\ -9 \end{Bmatrix}$$



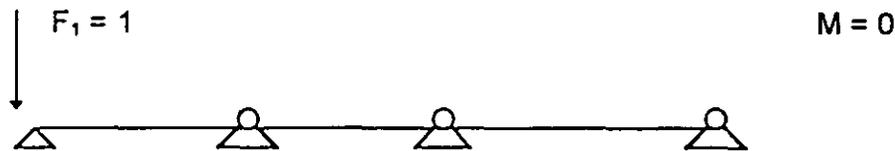
$$\Theta_{AB} = \Theta_{BC} = \Theta_{CD} = \Theta_{DC} = \frac{1}{3} L^2 K = \frac{27}{EI}$$

El vector desplazamiento será :

$$\{D_1\} = \begin{Bmatrix} 27 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \\ 27 \\ 27 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

Cálculo de matrices de transformación de fuerzas.

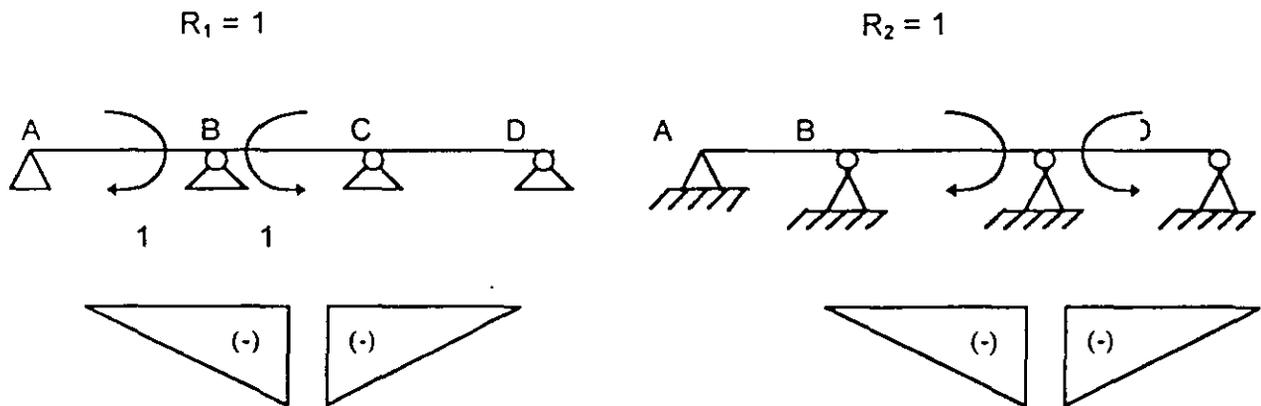
Trazando los diagramas de momentos debidos a fuerzas unitarias y redundantes unitarias:



Para las condiciones  $F_2 = 1$ ,  $F_3 = 1$  y  $F_4 = 1$  tampoco producen momentos flexionales, por lo tanto la matriz  $[b_F]$  será:

$$[b_F] = 0$$

Cálculo de  $[b_R]$



La matriz de transformación de redundantes será:

$$[b_R]_{6,2} = \begin{matrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{matrix} \begin{matrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de  $[f_M]$

La matriz de flexibilidades no ensamblada será:

$$[f_M] = \begin{bmatrix} [f_{AB}] & 0 & 0 \\ 0 & [f_{BC}] & 0 \\ 0 & 0 & [f_{CD}] \end{bmatrix} = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

El producto  $[b_R]^T [f_M] [b_F] = 0$

Cálculo del producto  $[b_R]^T [f_M] [b_R]$ , que es la matriz de flexibilidades ensamblada

$$[f] = [b_R]^T [f_M] [b_R] = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos debidos a las cargas en las barras, referidas al sistema general serán:

$$\{D_1\} = [b_R] \{D\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{27}{EI} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Por lo cual los desplazamientos totales debidos a las cargas serán:

$$\{DxF\} = [f_F] \{F\} + [D_1] = 0 + \frac{27}{EI} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \frac{27}{EI} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

y la ecuación de compatibilidad de deformaciones será:

$$\{DxF\} + [f] \{R\} = \{0\}$$

$$\frac{27}{EI} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{de donde:} \quad \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.4 \\ 5.4 \end{Bmatrix} \text{ ton-m}$$

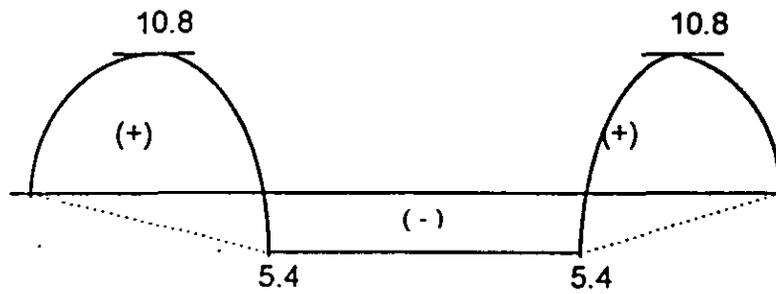
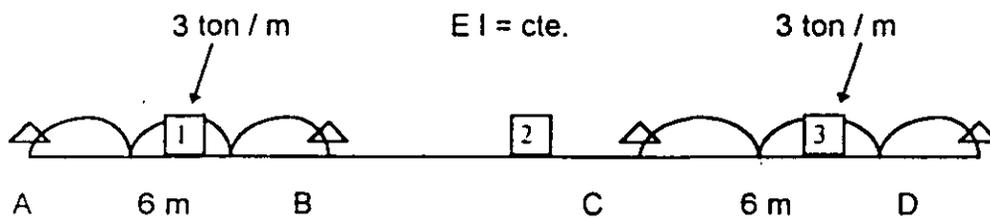


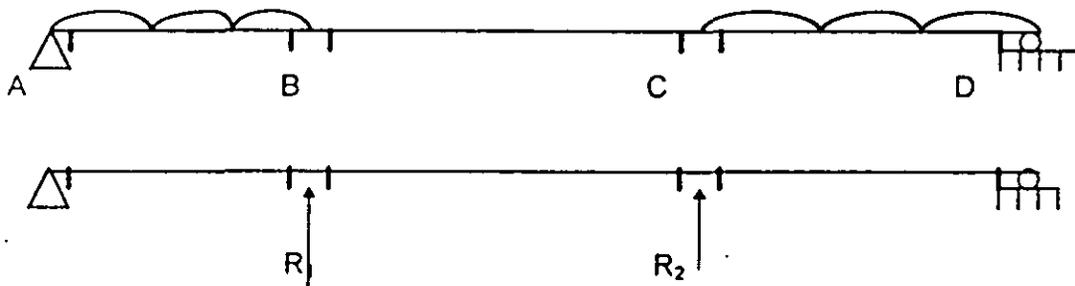
Diagrama de momentos flexionantes ( ton-m )

Ejemplo No 9.- Resolver la misma viga del ejemplo anterior por flexibilidades, utilizando otra estructura primaria.



Solución:

1) Grado de hiperestaticidad = 2 y se selecciona la siguiente estructura primaria

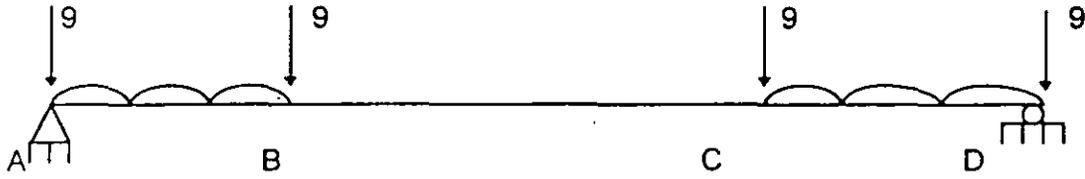


Los vectores de fuerza y desplazamiento serán:

$$F = \begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{Bmatrix} ; D = \begin{Bmatrix} D_{AB} \\ D_{BA} \\ D_{BC} \\ D_{CB} \\ D_{CD} \\ D_{DC} \end{Bmatrix}$$

Como el sistema de fuerzas externas no está aplicado en los nudos, habrá que trasladarlo a los apoyos y calcular los giros en los extremos de la barra.

Igual que en el ejemplo anterior



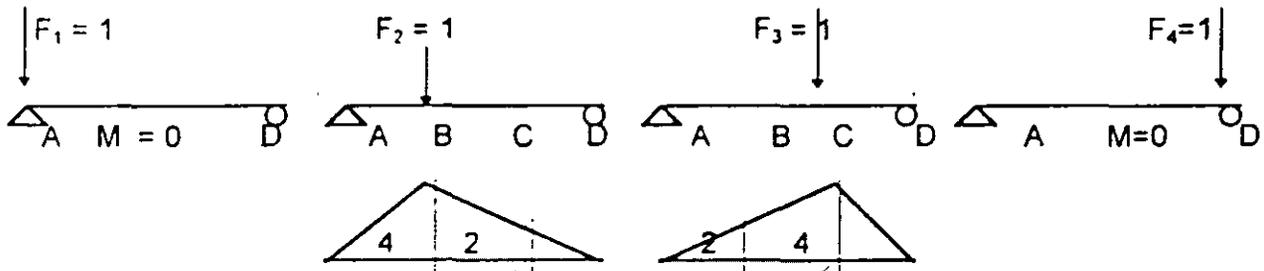
El vector de carga será:

$$\begin{Bmatrix} F \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{Bmatrix} \quad \text{Y } \Theta_{AB} = \Theta_{BC} = \Theta_{CD} = \Theta_{DC} = \frac{27}{EI}$$

( Valores ya calculados )

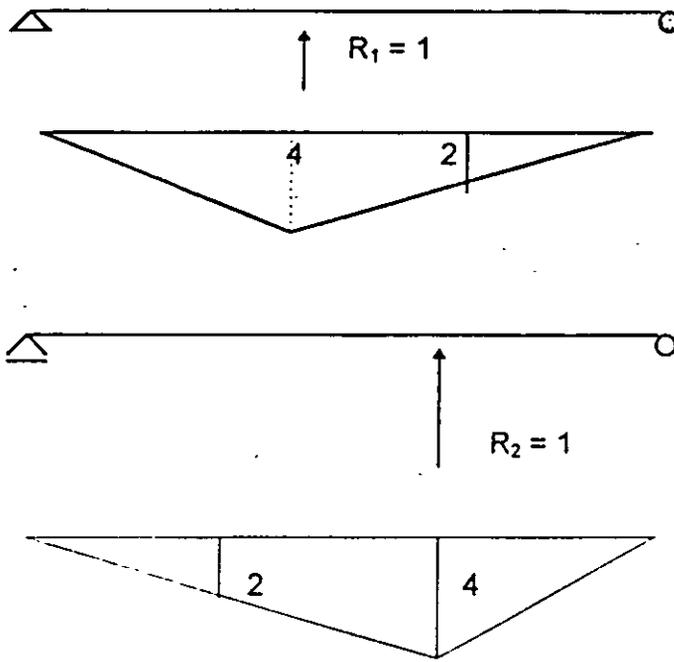
$$D = \begin{Bmatrix} 27 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \\ 27 \\ 27 \end{Bmatrix}$$

Cálculo de las matrices de transformación de fuerzas.



$$[b_F] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [f_M] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cálculo del [ b<sub>R</sub> ]



$$R_1=1 \quad R_2=1$$

$$[b_R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -2 \\ -4 & -2 \\ -2 & -4 \\ -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo de  $\{f_F\} = [b_R]^T \{f_w\} \quad [b_F]$

$$[f_F] = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 & 96 & 84 & 0 \\ 0 & 84 & 96 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ Los desplazamientos debidos a las cargas serán : los nodales + debidos cargas repartidas.

$$[f_F] \{F\} + [b_R]^T \{D_1\} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 & 96 & 84 & 0 \\ 0 & 84 & 96 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \\ -9 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 27 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \\ 27 \\ 27 \end{Bmatrix} =$$

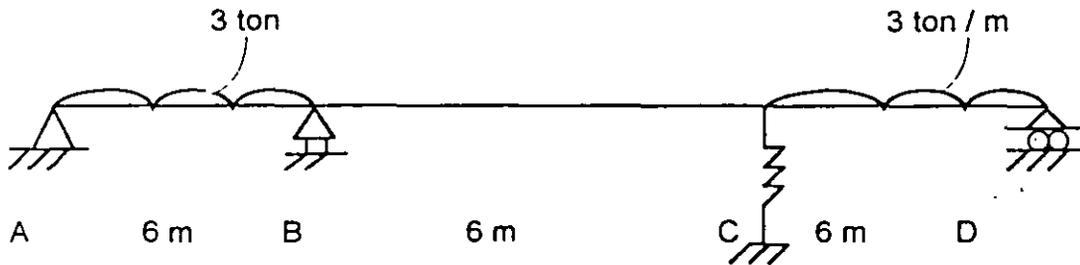
$$\frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -1620 \\ -1620 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -162 \\ -162 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -1782 \\ -1782 \end{Bmatrix}$$

$$[f] = [b_R]^T [f_{st}] [b_R] = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 96 & 84 \\ 84 & 96 \end{bmatrix}$$

La ecuación de compatibilidad de deformaciones será :

$$\begin{aligned} \{D_{xF}\} + \{D_{xR}\} &= \{0\} \\ \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -1782 \\ -1782 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 96 & 84 \\ 84 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} &= \{0\} \\ \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 9.90 \\ 9.90 \end{Bmatrix} \text{ ton.} \end{aligned}$$

Ejemplo N° 10.- Resolver la viga de los dos ejemplos anteriores, sabiendo que en C hay un apoyo elástico.



$$K \text{ resorte} = \frac{EI}{2D}$$

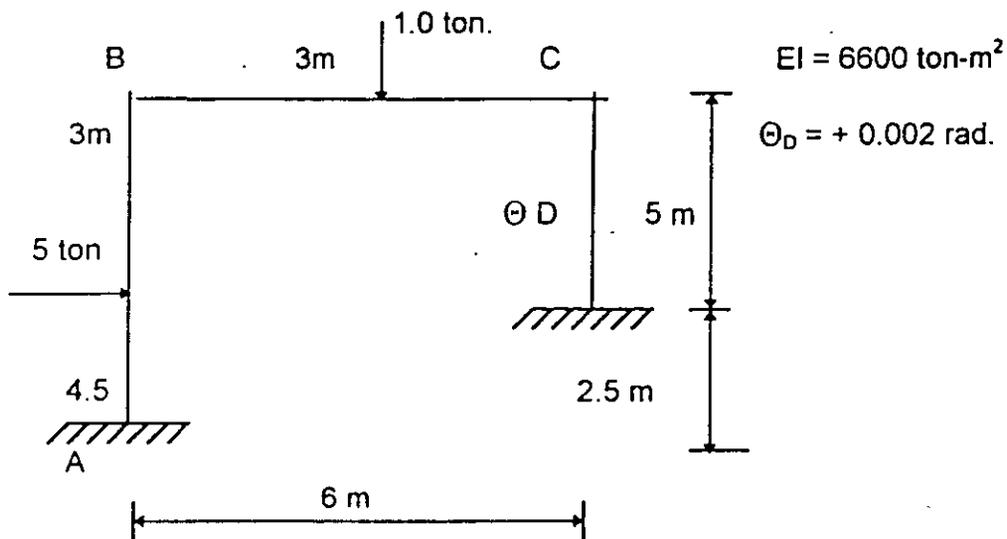
Solución:

1) Los cálculos serán idénticos a los del ejemplo, salvo las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones que serán:

$$\begin{aligned} \{D_{xF}\} + \{D_{xR}\} &= \begin{Bmatrix} \Delta B \\ \Delta C \end{Bmatrix} \\ \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -1782 \\ -1782 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 96 & 84 \\ 84 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -0 \\ -\frac{R_2}{k_{res}} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 13.98 \\ 5.24 \end{Bmatrix} \text{ ton} \end{aligned}$$

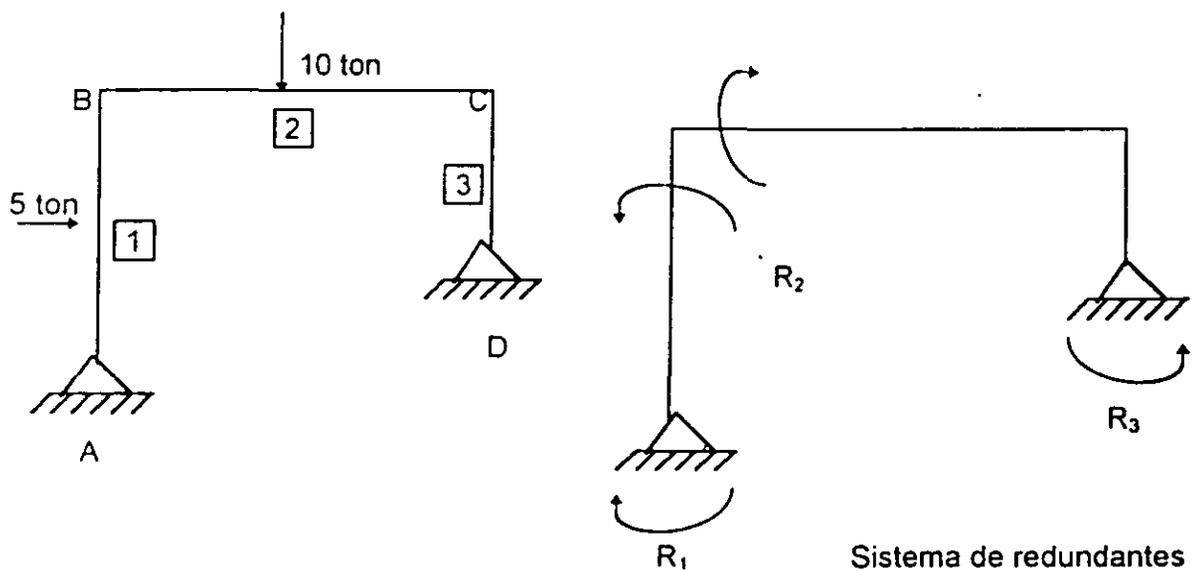
Ejemplo No. 11

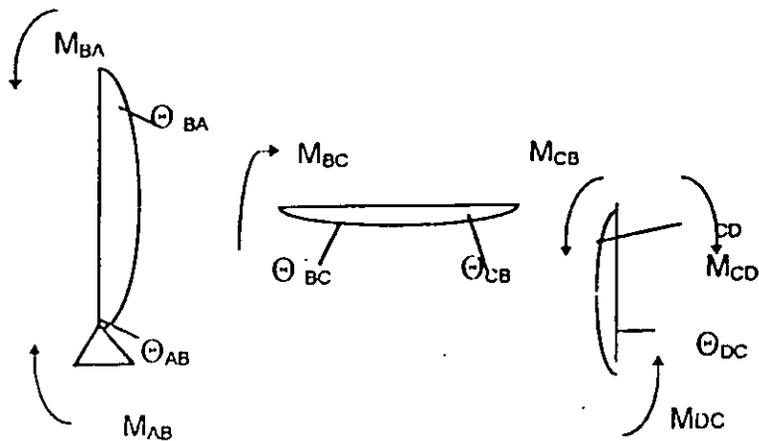
Resolver por flexibilidades considerando efectos de flexión y calcular los desplazamientos de los nudos.



Solución.

La estructura es hiperestática en tercer grado y se seleccionará la siguiente estructura primaria:

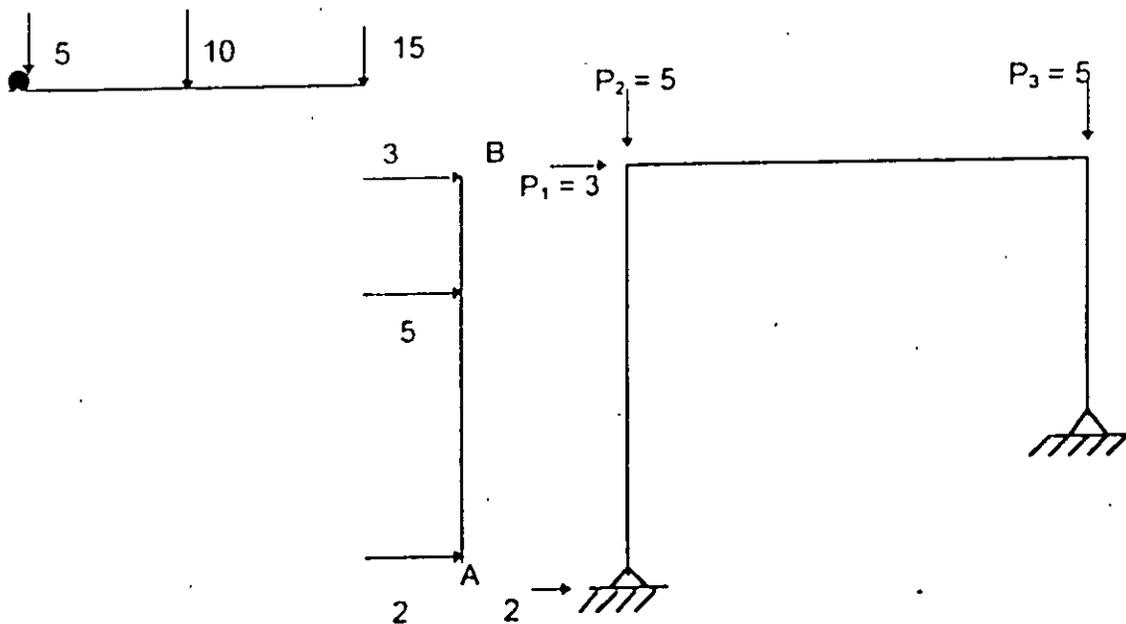




Los vectores de fuerzas internas y desplazamientos serán:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ M_{DC} \end{Bmatrix} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} D_{AB} \\ D_{BA} \\ D_{BC} \\ D_{CB} \\ D_{CD} \\ D_{DC} \end{Bmatrix}$$

Como el sistema de fuerzas externas no está aplicado en los nudos, habrá que trasladarlos a los apoyos; para hacerlo se aplicarán las ecuaciones de estática.



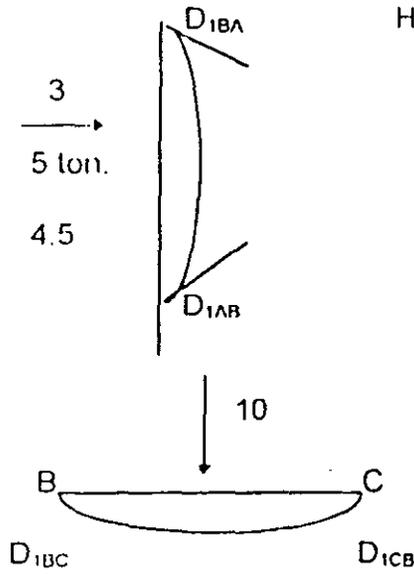
El vector de carga será:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

Además del sistema externo de cargas por estar aplicado en las barras impone deformaciones que se calculan con la expresión de trabajo virtuales.

$$\Theta_F = \int m \frac{M}{EI} dx$$

Haciendo uso de las tablas para multiplicar diagramas



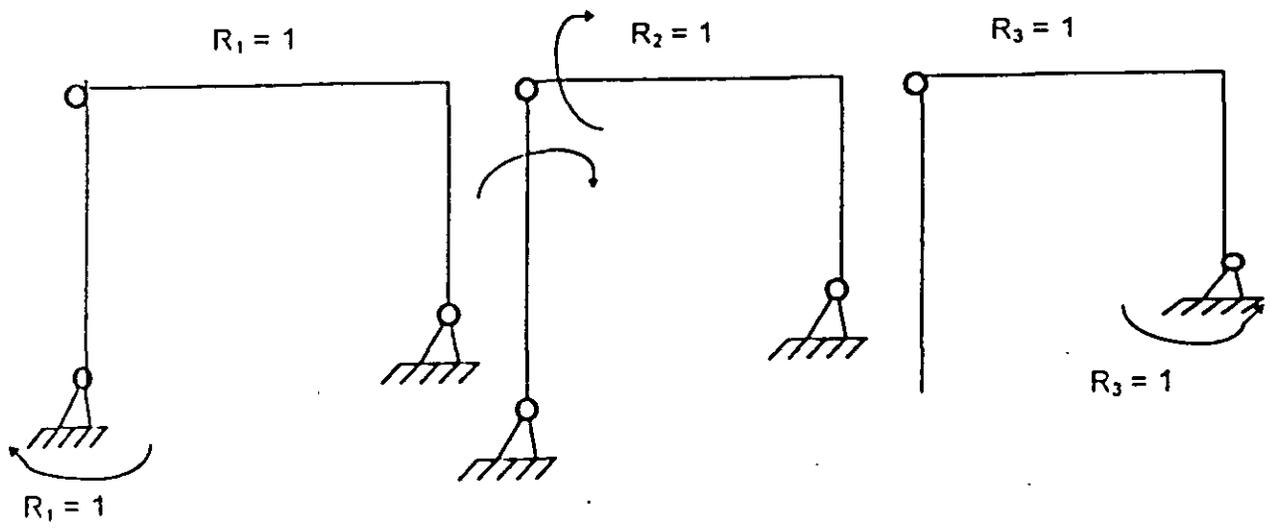
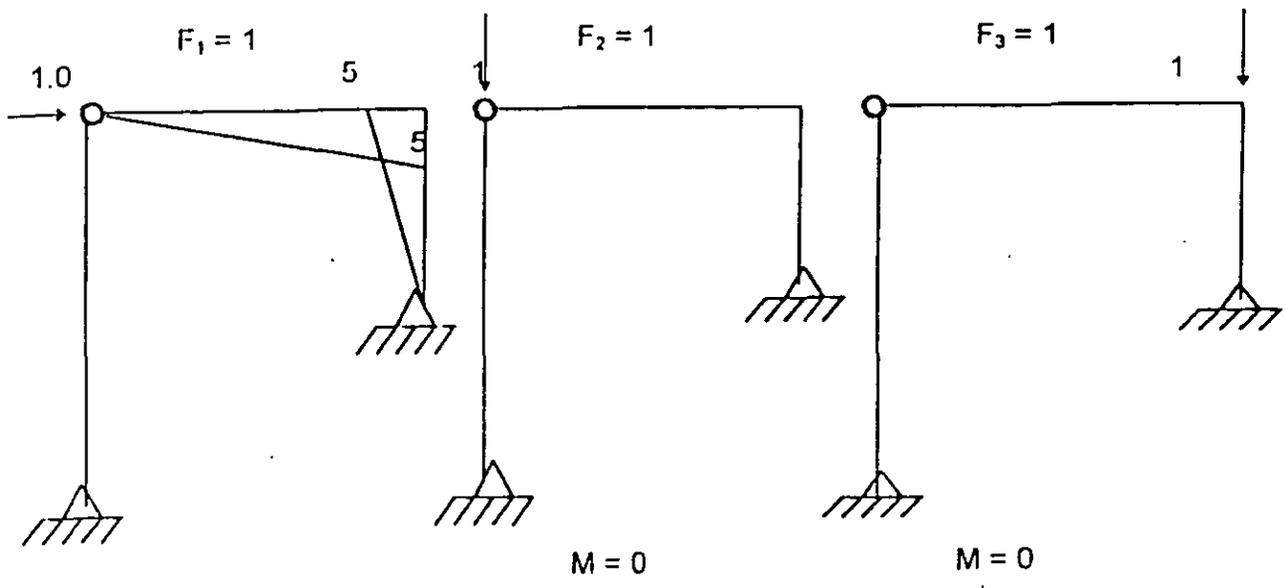
$$D_{1AB} = \frac{15.75}{EI}$$

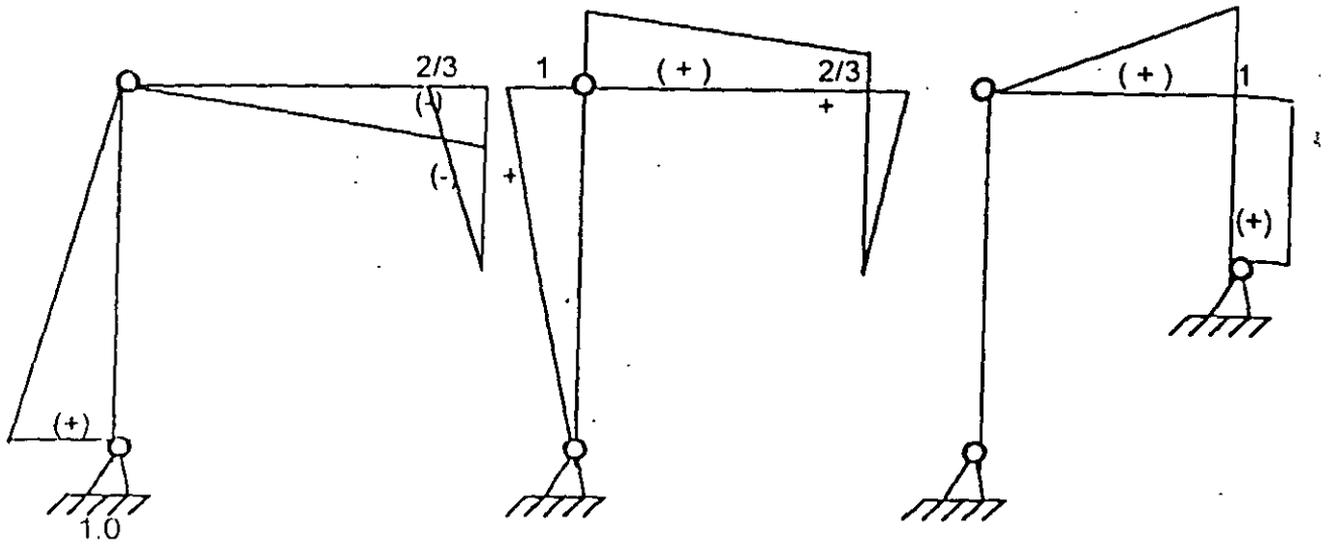
$$D_{1AB} = \frac{18}{EI}$$

$$D_{1BC} = D_{1CB} = \frac{22.5}{EI}$$

$$\therefore D_1 = \begin{Bmatrix} 15.75 \\ 18 \\ 22.5 \\ 22.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

Para poder calcular las matrices de transformación de fuerzas, se calcularán los diagramas debidos a fuerzas externas unitarias y los de redundancia unitarias.





La matriz de transformación de carga será:

$$P'' = [b_F] \{P\}$$

$$F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \quad F_3 = 1$$

$M_{LW}$	0	0	0
$M_{R1}$	0	0	0
$M_{RW}$	0	0	0
$M_{LW}$	-5	0	0
$M_{RW}$	-5	0	0
$M_{LW}$	0	0	0

$$\therefore [b_o] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación de redundantes:

	$R_1$	$R_2$	$R_3$	
$M_{AB}$	1	0	0	$\therefore [b_R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 1 \\ -2/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$M_{BA}$	0	1	0	
$M_{BC}$	0	1	0	
$M_{CB}$	-2/3	2/3	1	
$M_{CD}$	-2/3	2/3	1	
$M_{DC}$	0	0	1	

Cálculo de  $[f_M]$

La matriz no ensamblada de la estructura será:

$$[f_M] = \begin{bmatrix} [f_{AB}] & & \\ & [f_{BC}] & \\ & & [f_{CD}] \end{bmatrix} = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 15 & 7.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.5 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Cálculo del producto  $[b_R]^T [f_M] [b_R] = [f]$

$$[b_R]^T [f] [b_R] = \begin{bmatrix} 73.33 & 0 & 0 \\ -103.33 & 0 & 0 \\ 135 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{1}{6EI}$$

Cálculo del producto  $[b_R]^T [f_M] [b_R]$ , que es la matriz de flexibilidad ensamblada.

$$[f] = \begin{bmatrix} 24.78 & -62.78 & -18 \\ -62.78 & 44.78 & 24 \\ -18 & 24 & 42 \end{bmatrix} \times \frac{1}{6EI}$$

A los desplazamientos producidos por el sistema de carga en los nudos, deberá sumarse el efecto de las cargas aplicadas en las barras y que referido al sistema general, mediante la ecuación:

$$\{D_i\} = [b_n]\{D\} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 55.50 \\ 22.50 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto los desplazamientos totales debidos al sistema de carga externa será:

$$\begin{aligned} \{D_{xp}\} &= [f_p]\{F\} + \{D_i\} \\ &= \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 73.33 & 0 & 0 \\ -103.33 & 0 & 0 \\ -135 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 55.50 \\ 22.50 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 36.67 \\ -51.67 \\ -67.50 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 55.50 \\ 22.50 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 37.42 \\ 3.91 \\ -45.00 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Las ecuaciones de compatibilidad de deformación serán:

$$\begin{aligned} \{D_{xp}\} + [f]\{R\} &= \{0\} \\ \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 37.42 \\ 3.97 \\ -45.00 \end{Bmatrix} + \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 24.78 & -6.28 & -18 \\ -6.28 & 44.78 & +24 \\ -18 & +24 & 42 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.002 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -7.60 \\ -3.21 \\ +3.20 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

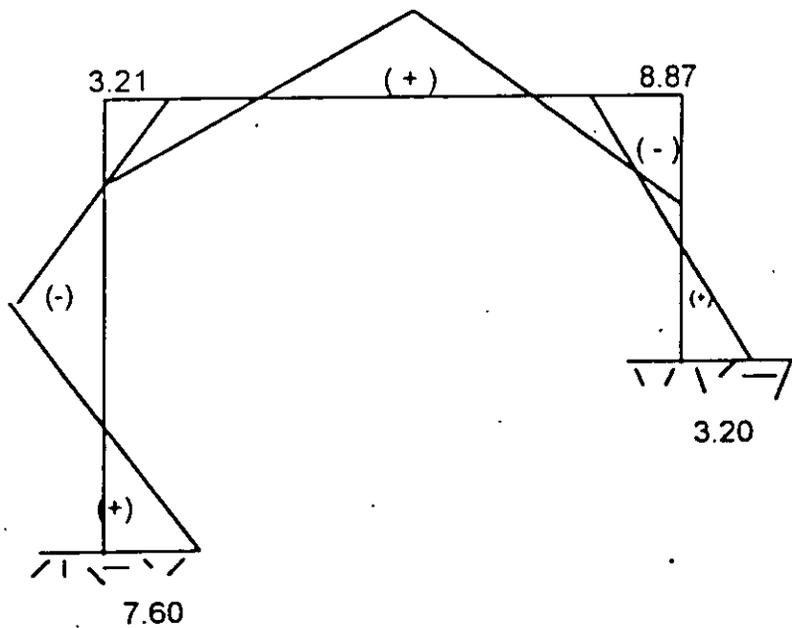
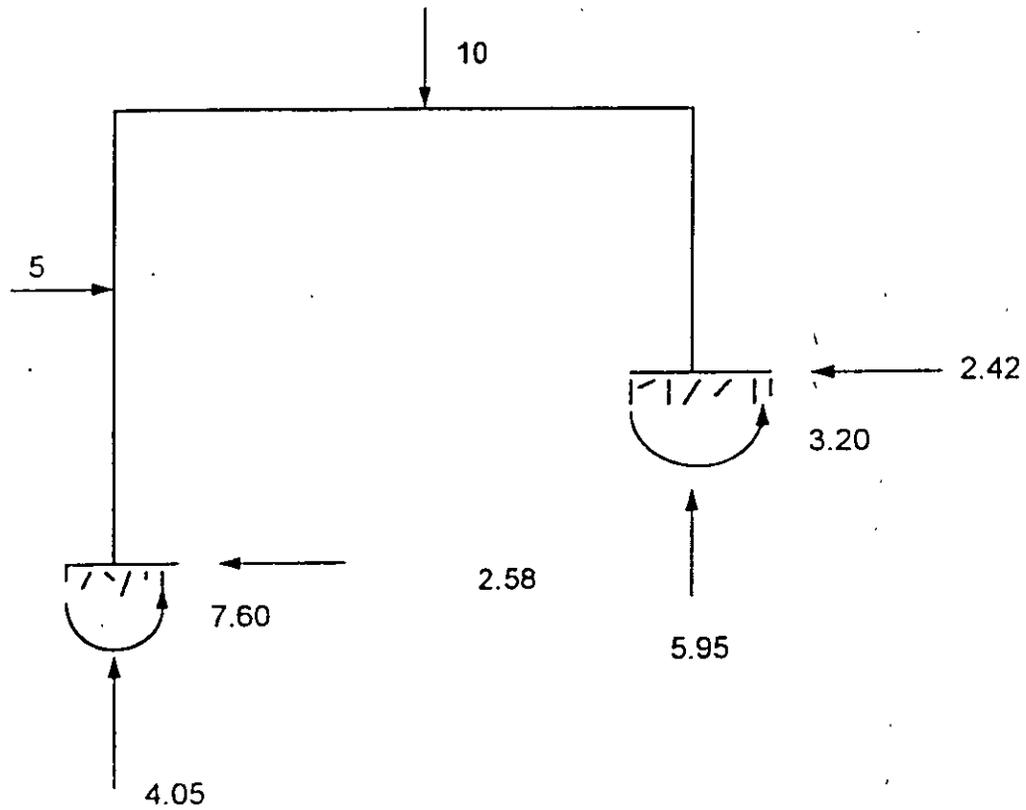


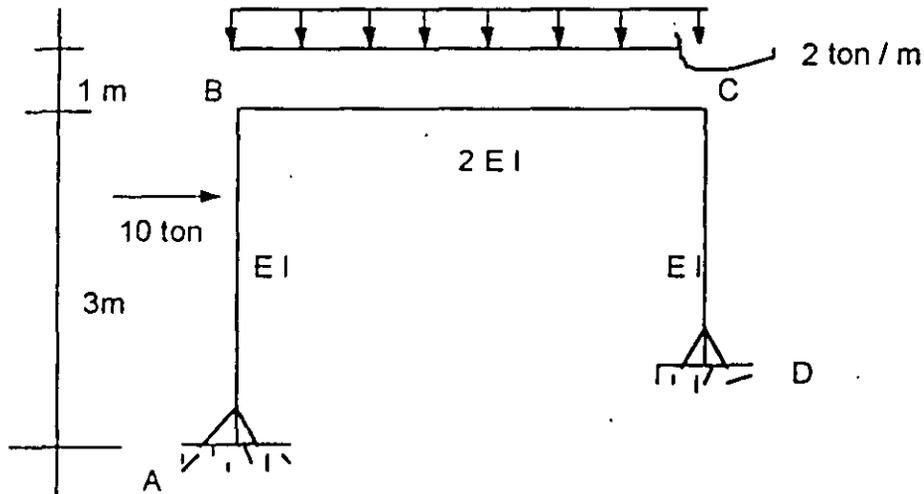
Diagrama de momentos finales las fuerzas internas se obtienen calculando por superposición los efectos debidos a cargas externas y por redundantes:

$$\{P\} = [b_r]\{F\} + [b_r]\{R\}$$

Ejemplo No.12

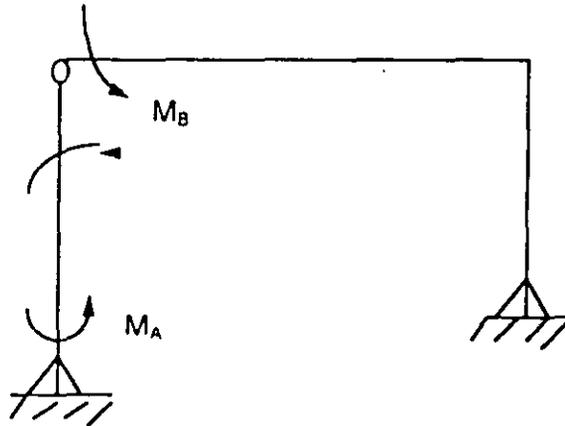
Analizar el marco siguiente utilizando el método de las flexibilidades.

- 1) Sin diagonalizar la matriz de flexibilidades.
- 2) Diagonalizándola ( variante propuesta ).



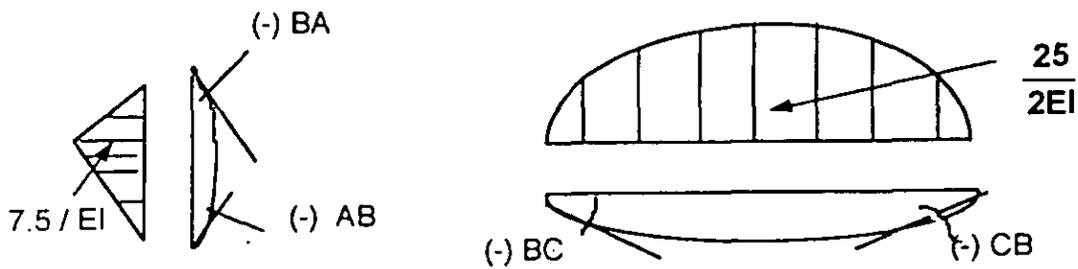
ALTERNATIVA 1

La estructura es hiperestática en segundo grado y se elegirá la siguiente estructura primaria, isotática



Estructura isostática y sistema de redundantes.

Como el sistema de cargas no se encuentra aplicado en los nudos, habrá que calcular las deformaciones angulares en los extremos y se trasladarán las cargas a los nudos.

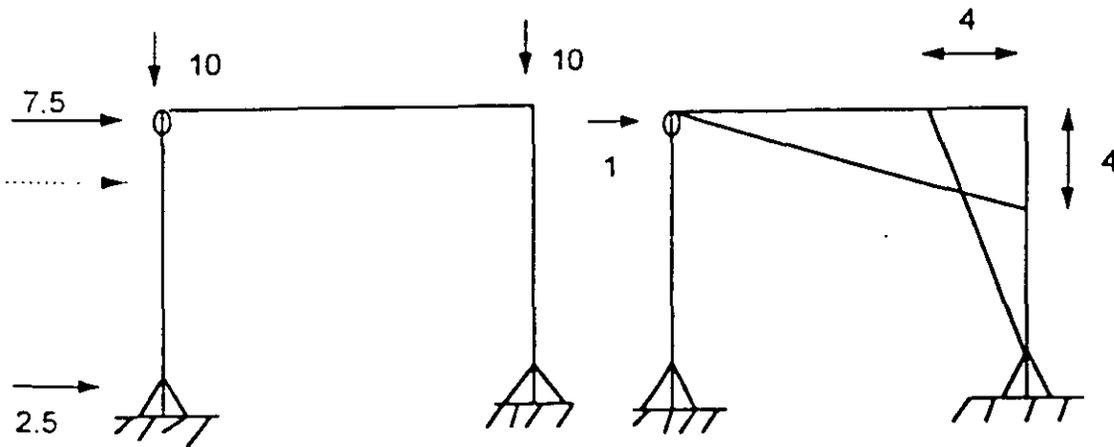


Por el método de trabajos virtuales:

$$D = \begin{Bmatrix} \Theta_{AB} \\ \Theta_{BA} \\ \Theta_{BC} \\ \Theta_{CB} \\ \Theta_{CD} \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 6.25 \\ 8.75 \\ 41.66 \\ 41.66 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Los signos positivos indican que el sentido supuesto a los momentos virtuales aplicados fueron del mismo sentido que los desplazamientos.

El sistema de fuerza equivalente aplicado en los nudos se presenta en la figura, provocando efectos de flexión solo la fuerza de 7.5 ton.



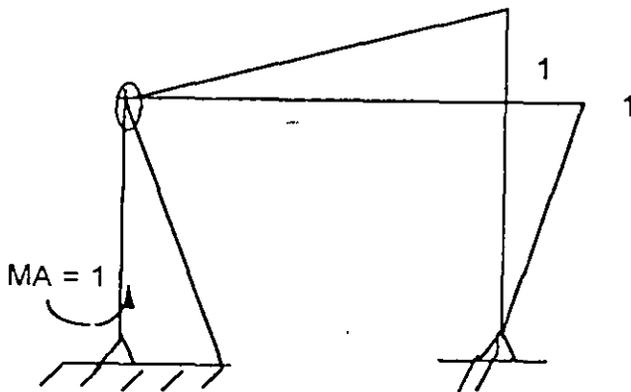
Sistemas de cargas equivalentes y diagramas de momentos

La matriz de transformación de fuerzas será:

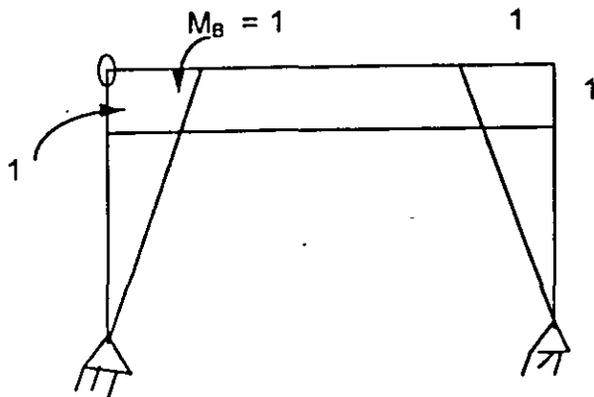
$$[b_F] = \begin{bmatrix} F1=0 & F2=1 & F3=1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; F = \begin{Bmatrix} 7.5 \\ -5 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

$$[b_F]\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \\ -30 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calculando ahora la matriz de redundantes  $b_R$



$$[b_R] = \begin{matrix} RA = 1 & RB = 1 \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



La matriz de flexibilidad no ensamblada de la estructura será:

$$f_M = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 8 & 4 & & & & \\ 4 & 8 & & & & \\ & & 10 & 5 & & \\ & & 5 & 10 & & \\ & & & & 8 & 4 \\ & & & & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidades ensambladas será:

$$[f] = [b_R]^T [f_M] [b_R] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & 46 \end{bmatrix}$$

Refiriendo los desplazamientos angulares debidos a las cargas intermedias, al sistema general de coordenadas mediante la ecuación:

$$D_1 = [b_R]^T \left\{ D \right\} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 6.25 \\ 8.75 \\ 41.66 \\ 41.66 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 35.41 \\ -92.07 \end{bmatrix}$$

Finalmente, calculando el primer término de la ecuación de compatibilidad de deformaciones (3.8) y sumándole los desplazamientos debidos a las cargas intermedias se tendrá:

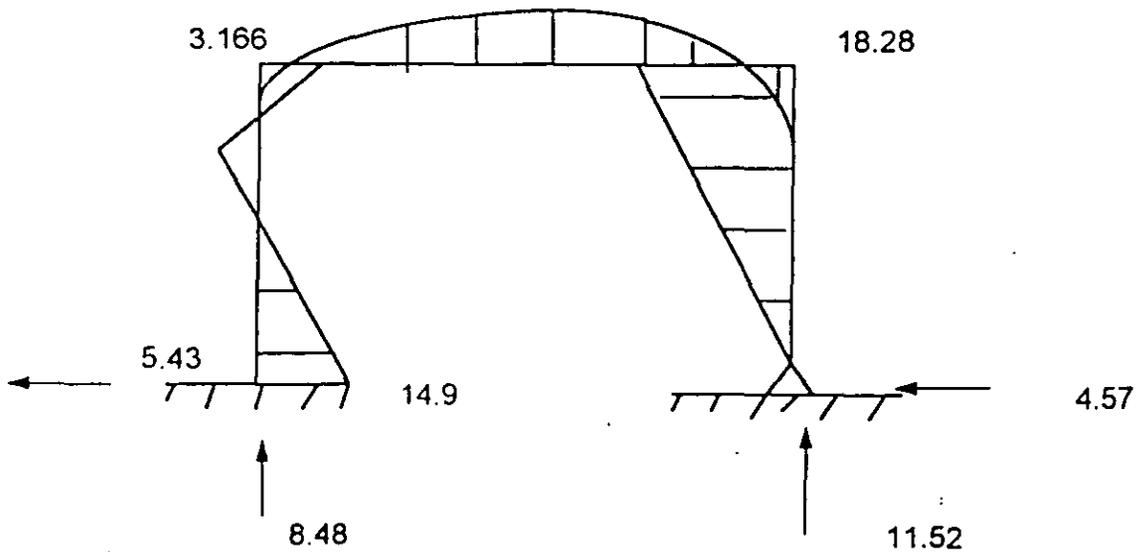
$$[b_r]^T [f_w] [b_r] \{F\} + [b_r]^T \{D\} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -90 \\ +115 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 35.41 \\ -92.09 \end{Bmatrix}$$

El segundo miembro de la ecuación ( 3.8 ) será:

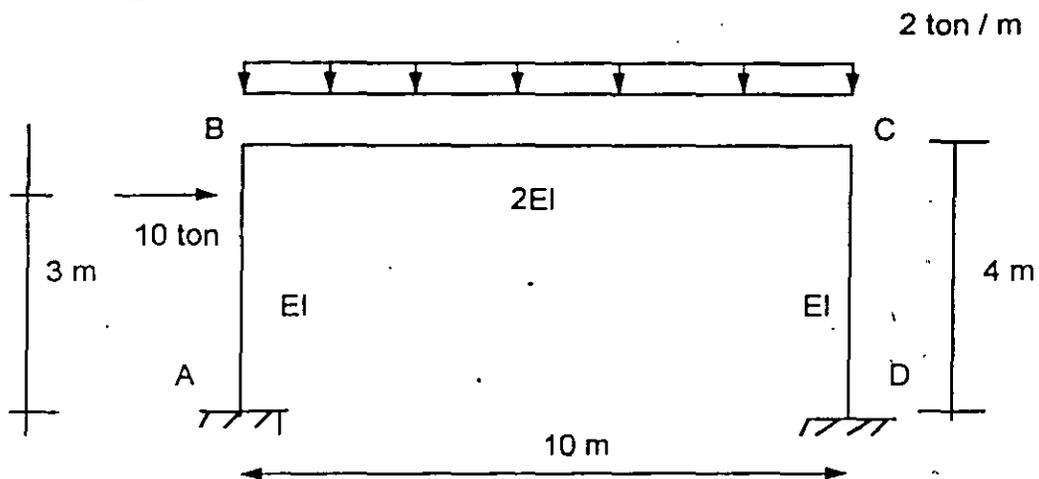
$$[b_r]^T [f_w] [b_r] \begin{Bmatrix} MA \\ MB \end{Bmatrix} = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & 46 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} MA \\ MB \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto:

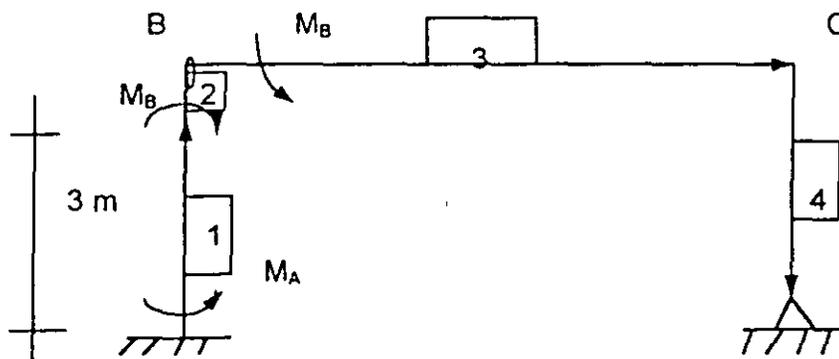
$$\frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -54.59 \\ +22.91 \end{Bmatrix} + \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & 46 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} MA \\ MB \end{Bmatrix} = \{0\}; \begin{cases} MA = 3.166 \text{ ton-m} \\ MB = 14.9 \text{ ton-m} \end{cases}$$



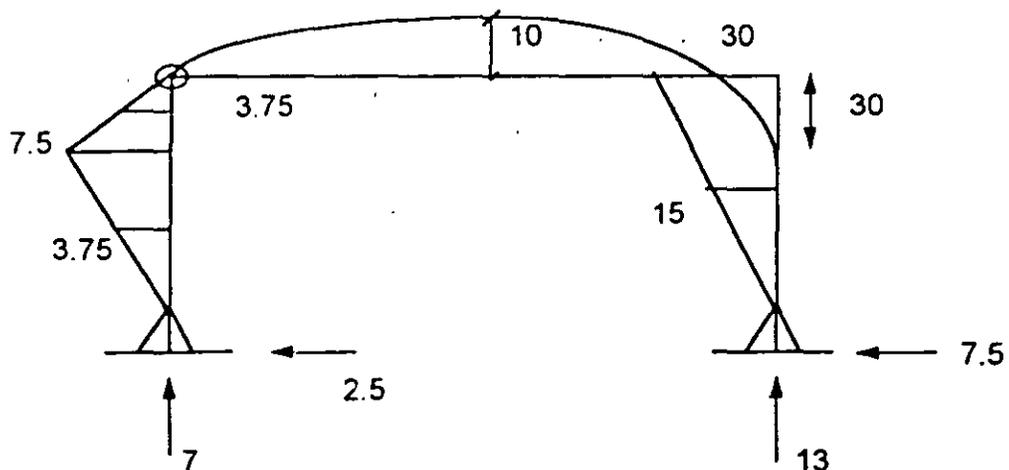
ALTERNATIVA 2



Seleccionando la misma estructura isostática que el caso 1: y debido a la presencia de la carga concentrada, se tendrán 4 elementos:



Resolviendo la estructura isostática y calculando los momentos en los extremos y al centro de cada elemento, se obtiene el vector de cargas.



$$P_o = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3.75 \\ 7.5 \\ \text{-----} \\ 7.5 \\ 3.75 \\ 0 \\ \text{-----} \\ 0 \\ +10 \\ -30 \\ \text{-----} \\ -30 \\ -15 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

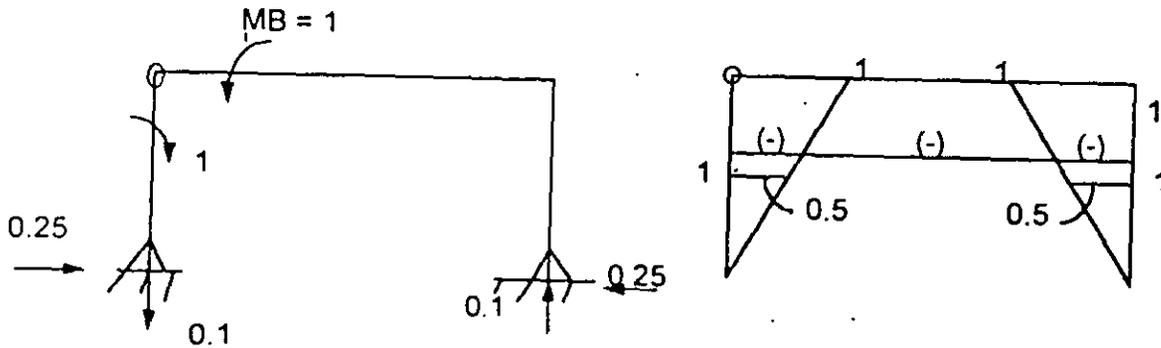
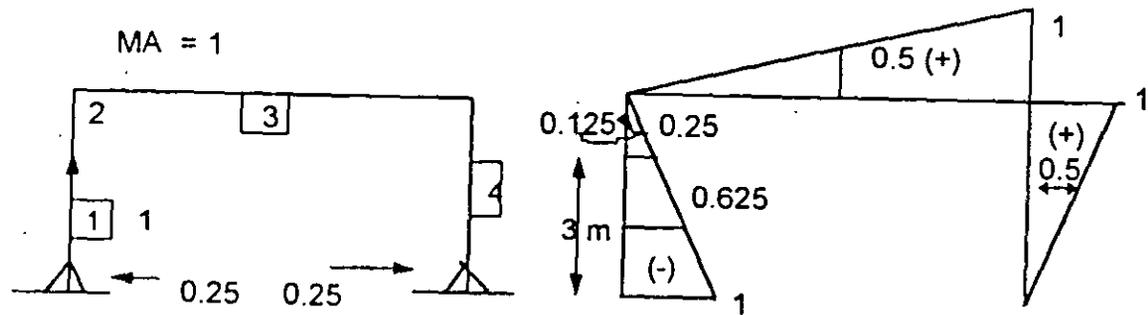
1

2

3

4

Obtención de las redundantes [  $b_R$  ]



$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 R1 = 1 & R2 = 2 \\
 \begin{bmatrix}
 -1 & 0 \\
 -0.625 & -0.375 \\
 -0.25 & -0.75 \\
 \text{-----} & \text{-----} \\
 -0.25 & -0.75 \\
 -0.125 & -0.875 \\
 0 & -1 \\
 \text{-----} & \text{-----} \\
 0 & -1 \\
 0.5 & -1 \\
 1.0 & -1 \\
 \text{-----} & \text{-----} \\
 1 & -1 \\
 0.5 & -0.5 \\
 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Es evidente que para calcular  $P^o$  y  $b_R$ , se puede prescindir del trazo de diagramas de momentos.

La matriz de flexibilidad no ensamblada, de acuerdo con la ecuación 3.11, es una matriz diagonal:

$$[f_M] = \frac{1}{6EI} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 3 \\ \dots \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ \dots \\ 5 \\ 20 \\ 5 \\ \dots \\ 4 \\ 16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Nota: El elemento 3 aparece dividido entre 2 porque la inercia de la viga es 2I

La matriz de flexibilidad ensamblada será:

$$[f] = [b_r]^T [f_u] [b_r] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & 46 \end{bmatrix}$$

Calculando ahora el producto:

$$[b_r]^T [f_u] \{ P_o \} = \frac{1}{6EI} \begin{Bmatrix} -325.54 \\ 137.5 \end{Bmatrix}$$

Las ecuaciones de compatibilidad serán:

$$\frac{1}{6EI} \begin{Bmatrix} -325.54 \\ 137.50 \end{Bmatrix} + \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 26 & -19 \\ -19 & +26 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} MA \\ MB \end{Bmatrix} = 0$$

De donde MA = 14.91 tm y MB = 3.16 tm

### Comentarios:

- 1) Las operaciones matriciales son mas rápidas en esta segunda alternativa, debido a la diagonalización de la matriz de flexibilidades no ensamblada, como sucede en el caso de armaduras.
- 2) El resultado es directo sin necesidad de usar matrices d transformación de coordenadas locales a generales como en la alternativa 1.

### REFERENCIAS

- 1- Ghali A, Neville M, " Structural Analysis ", Intext Educational Publisher, Scraton. 1972
- 2.- Yuan-Yu hsieh " Teoría de Estructuras " Prentice Hall International, Madrid 1982
- 3.- Damy R. Julio, " Curso Análisis Estructural "DEPFI, Facultad de Ingeniería, UNAM, Mexico, D.F.
- 4.- H.H. West " Análisis de Estructuras " Compañía Editorial Continental, S.A. México. 1984.
- 5.- W.A. Granville "Cálculo Diferencial e Integral " Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana 1952.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

### **TEMA**

## **INTERACCION ESTATICA SUELO – ESTRUCTURAS Y DISEÑO ESTRUCTURAL DE CIMENTACIONES**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMENEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DEL 2001**

# INTERACCION ESTATICA SUELO-ESTRUCTURA Y DISEÑO ESTRUCTURAL DE CIMENTACIONES

Agustín Deméneghi Colina

Profesor del Departamento de Geotecnia, Facultad de Ingeniería, UNAM

**RESUMEN:** Se presenta una breve descripción de los métodos de interacción estática suelo-estructura que se han desarrollado en la República Mexicana hasta la fecha. Se comenta sobre la necesidad de tomar en cuenta la variación de las propiedades de los materiales que forman la estructura y el terreno de cimentación. Se presentan algunas aplicaciones de la interacción estática suelo-estructura.

## 1. INTRODUCCION.

La cimentación de estructuras sobre suelos de mediana a alta compresibilidad plantea el problema de determinar los hundimientos totales diferenciales, así como los elementos mecánicos ( momento flexionante , fuerza cortante y fuerza normal ), tanto en la estructura, ocasionada por los hundimientos del terreno de cimentación. Estos valores dependen por un lado de la compresibilidad del subsuelo y por otro lado de la rigidez de la estructura . Tomando en cuenta que con frecuencia en los análisis estructurales se considera a la estructura empotrada o articulada en su cimentación, o si se trata de una losa de apoyo se supone una presión de contacto uniforme, o que el cálculo de hundimientos del terreno de cimentación se realiza considerando la estructura de cimentación totalmente flexible, lo cual suele distar bastante de la realidad, se ve clara la necesidad de desarrollar métodos que tomen en cuenta los efectos de los hundimientos y que, al mismo tiempo, permitan calcular los valores de estos últimos. A estas técnicas es lo que se denomina interacción estática suelo-estructura.

Por lo tanto, el propósito de la interacción estática suelo-estructura es llevar a cabo un análisis estructural tomando en cuenta el efecto de la rigidez del terreno de cimentación. La interacción suelo-estructura proporciona los diagramas de hundimientos diferenciales y de reacción del terreno de cimentación ( véanse las fig. 11 y 12 ), lo que permite determinar los diagramas de momento flexionante y fuerza cortante en la estructura de cimentación, considerando la influencia de la rigidez del suelo de cimentación, lo que conduce a un diseño racional de dicha subestructura. Algunos procedimientos de interacción consideran también el efecto de la superestructura, con lo que se conoce además el efecto de la rigidez del terreno en los elementos mecánicos de toda la estructura.

En este trabajo se presenta una breve descripción de los métodos de interacción estática que se han desarrollado hasta la fecha en la república Mexicana, así como algunas de sus aplicaciones: El lector que tenga interés en estudiar al detalle uno de los procedimientos de interacción puede consultar las referencias que se incluyen al final del texto.

Las características de la compresibilidad de los sedimentos del subsuelo de la ciudad de México ha dado lugar a que se desarrollen un buen número de métodos de interacción

suelo-estructura, teniendo la mayoría de ellos una buena dosis de mérito. Se puede afirmar que nuestro país es inclusive uno de los pioneros en este campo de estudio.

En el inciso 2 se trata el problema de la interacción suelo estructura en cimentaciones someras, mientras que en el inciso 3 contiene algunas técnicas para cimentaciones profundas. En el inciso 4 se comenta sobre la importancia de considerar en la forma más realista posible las propiedades mecánicas a los materiales de estructura y terreno de cimentación. El inciso 5 trata de ciertas aplicaciones de la interacción estática suelo-estructura. Finalmente, en el inciso 6 se presentan las conclusiones de este trabajo.

Cabe aclarar que no en todas las cimentaciones surge el problema de considerar la rigidez del suelo. Por ejemplo, para niveles de carga medianos y suelos muy rígidos, los hundimientos del suelo son muy pequeños y no se requiere tomarlos en cuenta en el análisis estructural. En el diseño estructural de zapatas de dimensiones usuales, la diferencia entre una reacción uniforme y la reacción real es pequeña y queda cubierta por los factores de seguridad empleados para el diseño estructural. En consecuencia, la interacción se aplica sobre todo a estructuras cimentadas sobre suelos de mediana a alta compresibilidad, en los que los asentamientos diferenciales tienen importancia en el comportamiento de dichas estructuras..

## 2. INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA EN CIMENTACIONES SOMERAS

### 2.1 Métodos de interacción suelo-estructura

Existen varios métodos para llevar a cabo la interacción estática suelo-estructura. A continuación describimos brevemente algunos de ellos.

En 1956, Samuel Chamecki, profesor de ingeniería estructural de la Universidad de Paraná, en Brasil, presenta uno de los primeros procedimientos para tomar en cuenta en forma racional la interacción suelo-estructura, aplicable a vigas y a marcos estructurales ( Chamecki, 1956 ). trata el caso de una viga con tres apoyos, desplantada en un suelo con estrato de arcilla compresible, resuelve el problema utilizando unos coeficientes de transferencia de carga ( que equivalen a la matriz de rigideces de la estructura ) en la viga, y considerando una arcilla normalmente consolidada, en la que se conoce su índice de compresibilidad. Estableciendo la compatibilidad de deformaciones entre viga y suelo, resuelve el problema en forma explícita. A continuación trata el caso de marcos estructurales, y debido a que las relaciones esfuerzo-deformación unitaria en los suelos son no lineales, propone un procedimiento iterativo para la solución del problema, usando los coeficientes de transferencia de carga en la estructura y calculando los hundimientos del suelo por procedimientos usuales. Los valores de los asentamientos en las aproximaciones sucesivas oscilan alrededor de un valor medio y tienden a él. Para evitar un gran número de iteraciones, se aplica una corrección después de la primera iteración, calculando las cargas en las columnas con un promedio de los asentamientos obtenidos. En la mayoría de los casos prácticos no hay necesidad de correcciones adicionales para alcanzar la convergencia del procedimiento ( Chamecki, 1956 ).

Otro procedimiento es el de Flores Victoria ( 1968 ), en el que para resolver el problema de la interacción suelo-estructura se establece la siguiente ecuación ~~matricial~~  
*matricial*

$$\underline{K} \underline{\delta} = \underline{P} + \underline{E}_c \underline{P}_c - \underline{E} \underline{Q} \quad (1)$$

donde:

$\underline{K}$  = matriz rigidez del conjunto superestructura cimentación.

$\underline{\delta}$  = vector de asentamientos de los nudos de la cimentación, los cuales deben ser iguales a los de las bases de las columnas inferiores de la superestructura.

$\underline{E}_c$  = matriz de transmisión de peso propio de trabes a cargas en nudos.

$\underline{P}_c$  = cargas debidas al peso propio de trabes.

$\underline{E}$  = matriz de transmisión de cargas del suelo a los nudos de la cimentación.

$\underline{Q}$  = cargas que la cimentación aplica al suelo.

Los movimientos del suelo están dados por

$$\underline{F}_s \underline{Q}_s = \underline{\delta}_s \quad (2)$$

donde:

$\underline{Q}_s$  = cargas aplicadas al suelo.

$\underline{F}_s$  = matriz de flexibilidad del suelo, que es función no lineal de  $\underline{Q}_s$ .

$\underline{\delta}_s$  = vector de movimientos verticales de la superficie del suelo.

Suponiendo que la cimentación no se despegas del suelo, las cargas  $\underline{Q}$  sobre la cimentación deben ser iguales a las cargas  $\underline{Q}_s$ . Los hundimientos  $\underline{\delta}$  de la cimentación deben ser iguales a los del suelo, por lo que la ec. 2 puede escribirse

$$\underline{F}_s \underline{Q} = \underline{\delta}$$

En la superestructura y cimentación de la ec. 1 debe tenerse

$$\underline{K} \underline{\delta} = \underline{P}_T - \underline{E} \underline{Q} \quad (3)$$

donde

$$\underline{P}_T = \underline{P} + \underline{E}_c \underline{P}_c$$

Son las cargas del edificio sobre los nudos de la cimentación, junto con su peso propio. Las ecs. 2 y 3 dan un planteamiento que en forma directa permite obtener como solución los asentamientos  $\underline{\delta}$  del suelo y cimentación juntos, así como las fuerzas de contacto  $\underline{Q}$ . Para ello se requieren como datos las matrices  $\underline{K}$  y  $\underline{E}$ , y el vector  $\underline{P}_T$ , junto con las propiedades del suelo, localización y tamaño de las áreas rectangulares asociadas a

cada  $\underline{Q}$ . Para conocer momentos, cortantes, fuerzas normales en columnas, etc, faltará calcular el efecto que producen  $\underline{\delta}$  y  $\underline{Q}$  en el edificio y sumarlo con el efecto de las cargas verticales  $\underline{P}$  y  $\underline{P}_c$ .

La solución del problema se lleva a cabo sustituyendo la ec. 2 en la ec. 3

$$\underline{K} \underline{E}_s \underline{Q} = \underline{P}_T - \underline{E} \underline{Q}$$

de donde

$$(\underline{E} + \underline{K} \underline{E}_s) \underline{Q} = \underline{P}_T$$

Finalmente

$$\underline{Q} = (\underline{E} + \underline{K} \underline{E}_s)^{-1} \underline{P}_T$$

Conociendo  $\underline{Q}$ , con la ec. 2 se obtiene  $\underline{\delta}$ . No es posible despejar  $\underline{\delta}$  de la ec 3 porque no existe la inversa de  $\underline{K}$ .

Flores Victoria señala que la matriz  $\underline{E}_s$  es función no lineal de  $\underline{Q}$ , lo que no permite resolver el problema directamente, sino que se requiere acudir a métodos iterativos.

Operando con las ecuaciones matriciales anteriores, el método iterativo tiene la interpretación física de aplicar una distribución de presiones al suelo  $Q^{(n)}$ , y calcular asentamientos del suelo, con esos asentamientos determinar el estado de cargas que deben tener la estructura como reacción del suelo. Esa reacción se vuelve a aplicar al suelo, y así sucesivamente, hasta lograr la convergencia; esta interpretación es debida a Chamocki (1956).

De acuerdo con Flores Victoria (1968), este procedimiento es divergente para suelos compresibles, como el de la Ciudad de México, o para cimentaciones excesivamente rígidas. Esto lleva a usar un criterio de interpolación para lograr y acelerar la convergencia, el cual se basa en el concepto físico de permitir que  $Q^{(n)}$  se modifique en un porcentaje razonable en cada ciclo, y difiera de  $Q^{(n-1)}$ .

El método de Flores Victoria se aplica con un programa de computadora, el cual proporciona los elementos mecánicos correspondientes.

En un trabajo posterior (Flores Victoria y Esteva, 1970) presentan además un procedimiento simplificado en el que se considera lo siguiente:

- El suelo es un medio elástico lineal semiinfinito.
- Cimentación rectangular con una red ortogonal de trabes
- No se toma en cuenta la rigidez de la superestructura

Para las condiciones mencionadas, y empleando valores normalizados, los autores proporcionan los valores de los asentamientos de la estructura y de las reacciones del terreno sobre la misma. Estos resultados los presentan en forma tabular.

Los resultados del trabajo de Flores Victoria y Esteva (1970) son los que se emplean en las Normas Técnicas complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones del

Reglamento de construcciones para el Distrito Federal de 1976 y el manual de Diseño de Obras Civiles de la Comisión Federal de electricidad de 1980. Sin embargo, en las primeras no se incluye el calculo de la magnitud de las reacciones del suelo de cimentación.

Para tomar en cuenta el comportamiento no lineal del suelo, Damy et al ( 1977 ) presentan un método incremental, que consiste en suponer que el vector de cargas se aplica gradualmente al conjunto en incrementos, siendo los incrementos suficientemente pequeños para que el sistema responda linealmente, con rigideces iguales a los valores tangentes que corresponden al estado de esfuerzos existentes al iniciar la aplicación de los incrementos. Al aplicar el último incremento deben satisfacerse las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones entre estructuras y suelo.

Por su parte, Esteva et al ( 1977 ) proponen dos procedimientos de interacción. El primero es a base de aproximaciones sucesivas, y consiste en suponer inicialmente que <sup>la</sup> ~~a~~ distribución de presiones en el terreno es igual a la de las cargas aplicadas sobre el sistema estructural; con las reacciones y la correspondiente matriz secante de flexibilidades del suelo se obtiene una estimación de los desplazamientos del suelo, y una estimación de las deformaciones de la estructura, empleando matrices secantes de rigideces de la estructura y de flexibilidades del suelo. El proceso se repite un número de veces tal que los valores de los desplazamientos del suelo sean suficientemente parecidos en dos estimaciones sucesivas. El segundo método es un procedimiento incremental aproximado, que consiste en aplicar gradualmente la carga total en incrementos; en cada incremento se efectúa un ciclo semejante al del procedimiento de aproximaciones comentado antes, el resultado de dicho ciclo iterativo se toma como punto de partida para la aplicación de otro incremento de carga. Los autores proponen dos criterios alternativos: en el primero se logra el equilibrio al final de cada ciclo, pero no se logra la compatibilidad entre las deformaciones de la estructura y las del suelo; en el segundo se alcanza dicha compatibilidad, pero a costa de un desequilibrio: Por lo anterior, en ambos casos debe hacerse una corrección en el siguiente ciclo ( Esteva et al, 1977 ).

El Dr. Leonardo Zeevaert ( 1973, 1980, 1983 ) ha trabajado profusamente en el desarrollo de métodos de interacción suelo-estructura. El método que utiliza consiste en formar la ecuación matricial de asentamientos o hundimientos ( EMA ), que relaciona los asentamientos del suelo en función de cargas aplicadas en la superficie:

$$\delta = \underline{D} \underline{q}$$

donde:

$\delta$  = vector de asentamientos en el contacto cimentación suelo.

$\underline{D}$  =matriz de asentamientos ocasionados por presiones unitarias.

$\underline{q}$  = vector de cargas aplicadas en el contacto cimentación-suelo.

Para la formación de la matriz  $\underline{D}$  se emplea el concepto de valor de influencia, que es el esfuerzo ocasionado por una presión unitaria en la superficie, lo que facilita de manera importante la determinación de los elementos de la matriz  $\underline{D}$ .

A continuación se forma la ecuación matricial de interacción ( EMI) , que relaciona las deformaciones de la estructura con las cargas que le transmite el suelo:

$$\underline{S} \underline{X} = \underline{\Delta}$$

donde:

$\underline{S}$  = matriz de flexibilidades del suelo

$\underline{X}$  = vector de cargas del suelo sobre la estructura

$\underline{\Delta}$  = vector de deformaciones de la estructura

La interacción de la estructura de cimentación con el suelo depende del valor de módulo de cimentación por área tributaria  $K_i$ , definido como el cociente de la carga sobre el suelo ( en unidades de fuerza ) entre la deformación que produce. Debe notarse en la ecuación EMI que los valores del vector de deformaciones de la estructura  $\underline{\Delta}$  son función del módulo  $K$  por área tributaria ( Zeevaert 1980 ). Si los valores de  $k$  fuesen independientes entre si, la ecuación matricial EMI daría los resultados definitivos de las reacciones incógnitas. Sin embargo, la hipótesis anterior no es exacta porque la masa del suelo debe considerarse como un medio continuo, donde los valores de  $K_i$  para los diferentes puntos considerados no son independientes entre si y dependen de la distribución de esfuerzos de contacto con la estructura de cimentación. La interacción correcta entre la estructura de cimentación y la masa del suelo se obtiene utilizando las reacciones  $X_i$  obtenidas por EMI, en la ecuación matricial de hundimientos EMA, obteniéndose los desplazamientos verticales  $\delta_i$  que proporcionan valores del módulo de cimentación iguales a los usados en la ecuación matricial de interacción EMI,  $K_i = X_i / \delta_i$ . Si los valores encontrados en esta forma no concuerdan con los utilizados inicialmente, no se tendrá la interacción correcta, ya que los módulos de cimentación no fueron correctamente elegidos, por lo cual será necesario utilizar la ecuación matricial EMA para conciliar este problema: Así pues, se deduce que las ecuaciones matriciales EMA y EMI quedan ligadas por los valores de  $K_i$ , los cuales son únicos para la solución de cada problema en particular y dependen de la distribución de las reacciones del suelo sobre la estructura de cimentación, rigidez de ésta y la de posición de las cargas que actúan sobre ella ( Zeevaert, 1980 ).

Es posible hallar una matriz única de interacción para resolver el problema sin realizar iteraciones y obtener los resultados más precisos ( Zeevaert, 1983 ). La nueva ecuación matricial se denomina ecuación matricial de interacción suelo-estructura ( EMISE ), mediante el empleo de la cual no se necesitan iteraciones para resolver el problema de interacción.

El procedimiento de Zeevaert ( 1980 ) se puede aplicar a cimentaciones compensadas, tomando en cuenta el efecto de las condiciones hidráulica en la interacción suelo-estructura.

Otro procedimiento de interacción estática suelo-estructura es el que propone Deméneghi ( 1979, 1983, 1985 ), el cual considera a las reacciones del terreno como un sistema de cargas sobre la estructura, asemejándolas durante el proceso de análisis como incógnitas. El análisis estructural se lleva a cabo empleando el método de rigideces, pero el problema no se puede resolver en esta etapa porque sobran incógnitas, ya que se están agregando al vector de cargas las reacciones del suelo que no se conocen: las ecuaciones faltantes las proporciona el análisis de hundimientos del

terreno de cimentación, en el que se obtienen las deformaciones del suelo en función de las cargas sobre el mismo ( estas cargas son iguales y de sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura, por la tercera ley de Newton ), en esta etapa se hace uso del concepto de valores de influencia de Zeevaert ( 1980 ), lo que facilita la determinación de los hundimientos del suelo en función de las cargas sobre el mismo ( recuérdese que las cargas sobre el suelo no se conocen ). Las deformaciones del suelo se sustituyen en las ecuaciones obtenidas inicialmente con el método de rigideces, lo que permite resolver el problema en forma directa, sin necesidad de iteraciones. Con este procedimiento se obtienen los diagramas de deformaciones y de reacciones del suelo, en el contacto entre este y la estructura de cimentación. Este procedimiento tiene la ventaja de que se puede tomar en cuenta el número de pisos que se desee de la superestructura, así como de que se puede programar en una computadora con relativa facilidad.

El método de Sánchez Martínez y Enriquez ( 1982 ) se emplea en cimentaciones someras y consiste en realizar un análisis del conjunto suelo-estructura como un sistema estructural único que se resuelve utilizando el método general de las rigideces. Cabe aclarar que es un método no iterativo.

El procedimiento consiste en considerar al suelo sustituido por una serie de resortes, en los que el módulo de reacción o la constante de cada resorte depende de toda la masa del suelo, es decir, no se consideran los resortes independientes entre sí, como se verá más adelante.

Se establece primero la matriz de rigideces de la estructura a partir de I de sus miembros.

Las reacciones del suelo se toman en cuenta a través de resortes que se conectan con la cimentación de la estructura.

A continuación se obtiene la matriz de rigideces del suelo. Esta se determina dando desplazamientos verticales con valor unitario a cada uno de los resortes que lo idealizan y calculando las fuerzas que aparecen por este efecto en todos ellos. Al dar un desplazamiento unitario en un resorte aparecen fuerzas no solo en el propio resorte, sino también en todos los demás, ya que ellos deben considerarse ligados de alguna forma por pertenecer a un medio continuo. Lo mismo sucede al aplicar sucesivamente desplazamientos unitarios en los demás resortes. El cálculo de la matriz de rigideces del suelo es en general laborioso y algo complicado; sin embargo, se puede determinar dicha matriz en forma indirecta, teniendo en cuenta que la matriz de rigideces es la inversa de la de flexibilidades.

Las expresiones generales que se usan son:

$$\delta = S^{-1} A \quad (4)$$

donde:

$\delta$  = vector de desplazamientos desconocidos

$\underline{A}$  = vector de acciones

$\underline{S}_T^{-1}$  = Inversa de la matriz de rigideces del sistema

Además

$$\underline{S}_T = \underline{S}_E + \underline{S}_s$$

siendo

$\underline{S}_E$  = matriz de rigideces de la estructura

$\underline{S}_s$  = matriz de rigideces del suelo

La matriz de rigideces se obtiene en función de las de sus  $i$  miembros, como es usual en el análisis estructural usando computadoras.

La matriz de flexibilidades del suelo puede calcularse fácilmente determinando los hundimientos del terreno debidos a la aplicación de fuerzas unitarias. Sánchez Martínez y Enríquez emplean el procedimiento de Zeevaert ( 1980 ) para alcanzar este propósito. Llamando  $\underline{F}_s$  a la matriz de flexibilidades, la matriz de rigideces del suelo vale

$$\underline{S}_s = \underline{F}_s^{-1}$$

La matriz global del sistema estructura-suelo vale

$$\underline{S}_T = \underline{S}_E + \underline{S}_s$$

Aplicando la ec 4 se determinan los desplazamientos de la estructura y del suelo.

Los elementos mecánicos en los miembros se hallan a partir de sus matrices de rigidez, mientras que las fuerzas en el suelo se obtienen empleando la matriz de rigideces del suelo.

Para utilizar el procedimiento anterior los autores han desarrollado un programa de computadora.

El método Sánchez Martínez y Enríquez es general, como lo es el método de las rigideces del análisis estructural en que se basa. Se puede considerar no solo la estructura de cimentación, sino también la superestructura total del edificio, sin más limitaciones que la capacidad de la computadora que se emplee.

También el procedimiento se puede aplicar a la solución de estructuras de retículas de cimentación, constituidas por traves horizontales en dos sentidos perpendiculares: el área de cimentación se divide en una serie de áreas tributarias que corresponden a las columnas y se considera en el centro de cada una de ellas los resortes que idealizan al terreno, y con cuyo comportamiento se establece la matriz de flexibilidades del suelo.

Los autores comentan que el problema podría atacarse utilizando algunos de los programas conocidos de análisis estructural, tomando del programa la matriz de rigideces de la estructura en estudio, modificándola para incluir los términos que

representan el comportamiento del suelo e insertando nuevamente en el programa la matriz corregida.

Una propuesta de colaboración geotecnista estructurista en el cálculo de interacción suelo-estructura es la que presentan Ellsteiny Granados ( 1988 ), que deja a cada especialista la labor que le corresponde. El ingeniero de geotecnia obtiene la matriz de deformaciones del suelo en función de las características geométricas del proyecto y de un vector cualquiera de cargas bajadas por las columnas; la matriz de influencias en el suelo es invariable, así como el conjunto de curvas de compresibilidad; al variar el vector de cargas cambian los asentamientos, pero el nuevo cálculo se lleva a cabo con las mismas matrices de características del subsuelo. La estructura se representa mediante una parrilla de contratrabes, con las cargas y reacciones perpendiculares a su plano; su rigidez es la propia de las contratrabes de la subestructura, más un cierto incremento calculado o estimado de la contribución de la estructura a tal rigidez. Se conocen las cargas en las columnas y con ellas se calculan los asentamientos  $S_i$  del suelo, suponiendo una rigidez nula de la estructura; de tal manera que pueden calcularse las constantes  $K_i$  de unos resortes virtuales localizados bajo los nudos de la parrilla; estos resortes son de Winkler en apariencia, pero en realidad están relacionados entre si al tomar en cuenta la influencia de los asentamientos del suelo en los valores de  $K_i$ . Con la ayuda de un programa de computadora se aplican las cargas sobre la estructura, colocándose los resortes virtuales bajo los nudos para proveer las reacciones. El análisis arroja como resultado las fuerzas en los resortes contra los nudos,  $R_i$ , y sus deformaciones  $s_i$ ; se especifica la diferencia máxima permisible entre  $s_i$  ( suelo ) y  $s_i$  ( resorte ), por ejemplo 5%; si no se cumple esta diferencia, hay que calcular nuevos asentamientos  $s_i$ , utilizando un nuevo vector de presiones determinado con los valores de las reacciones  $R_i$  y con ellos establecer los nuevos valores de las constantes  $K_i$ , iterando para obtener las nuevas deformaciones de los resortes  $s_i$ , y así hallar las diferencias  $s_i - s_i$ . El proceso debe ser rápidamente convergente para la mayoría de los casos, obteniéndose finalmente la configuración real de asentamientos por efecto de la rigidez de la estructura. El geotecnista proporciona al estructurista los archivo de datos con las matrices de propiedades del suelo y coeficientes de influencia, para que éste pueda llevar a cabo las iteraciones necesarias entre estructura y suelo ( Ellstein y Granados, 1989 ).

Un enfoque novedoso que trata la interacción suelo-estructura en sus etapas de análisis y diseño ( Moreno, 1990 ) comprende una serie de opciones como considerar las características del suelo a partir del módulo de cimentación, características de la estructura, determinación de los elementos mecánicos ( deflexiones, momento flexionante, giros, fuerza cortante  $Q$ , presentando éstos en forma de gráficas en pantalla o en impresora a escala. La ventaja de este enfoque es que se simplifica la presentación de resultados, y que comprende en forma integral las etapas de análisis y diseño de la estructura de cimentación, ahorrando considerable tiempo al ingeniero que realiza el cálculo correspondiente ( Moreno, 1990 ).

La interacción suelo-estructura se puede atacar utilizando el método del elemento finito ( Zienkiewicz , 1977 ) en el terreno de cimentación. El inconveniente de esta técnica es que es muy alto, y usualmente se requiere el uso de computadoras de gran capacidad.

## 2.2. Interacción suelo-estructura considerando el asentamiento y el giro de zapatas aisladas.

El método de rigideces del análisis estructural establece que se debe satisfacer el equilibrio de momentos flexionantes en los nudos y el equilibrio de fuerzas cortantes en los ejes de las barras de la estructura. Esta condición se puede poner en forma matricial de la siguiente forma

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}_0 + \underline{P}_c = 0 \quad (5)$$

El significado de las cantidades de la ec 5 se presenta en los siguientes párrafos.

$\underline{K}$  es la matriz de rigideces de la estructura, dada por la suma de las matrices de rigidez de cada una de las barras, es decir

$$\underline{K} = \sum \underline{K}_i \quad (6)$$

donde  $\underline{K}_i$  es la matriz de rigidez de cada barra. A manera de ejemplo, en una barra con apoyos continuos ( fig. 1 ), la matriz de rigidez vale

$$\underline{K}_i = \begin{bmatrix} \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s \\ 4EI/L & 2EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ 2EI/L & 4EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix} \quad (7)$$

$\underline{\delta}$  es el vector de desplazamientos de la estructura, y esta formado por los desplazamientos angulares ( giros ) de los nudos de la estructura y los desplazamientos lineales de los ejes de la estructura.

$\underline{P}_0$  es el vector de carga de empotramiento, formado por los momentos y cortantes de empotramiento que transmiten las barras sobre los nudos de la estructura.

$\underline{P}_c$  es el vector de cargas externas concentradas, formado por los momentos concentrados sobre los nudos de la estructura y las fuerzas concentradas que actúan sobre los ejes de la estructura.

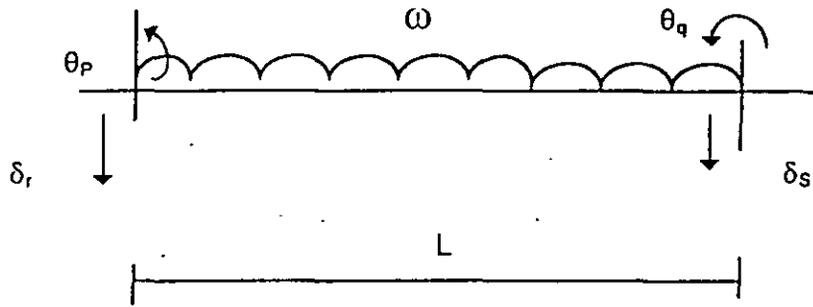


FIG.1 GRADOS DE LIBERTAD DE UNA BARRA

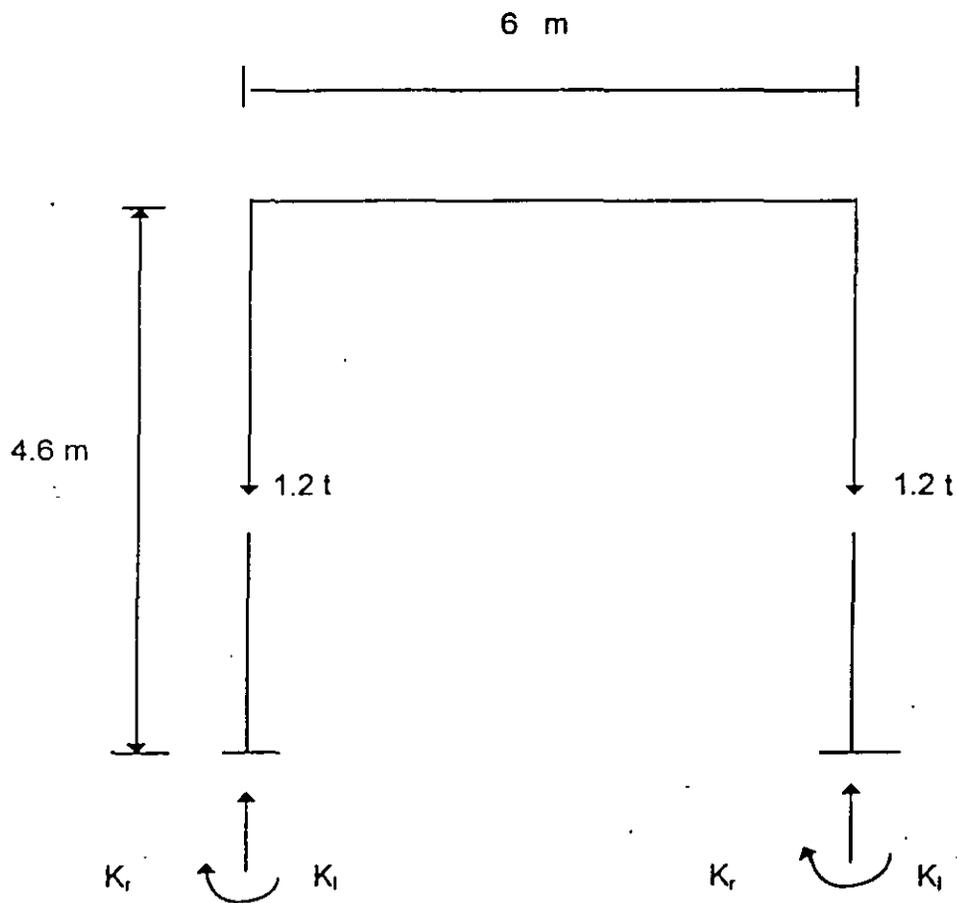


FIG 2 CARACTERISTICAS DE LA ESTRUCTURA

Cuando una estructura a base de zapatas aisladas sufre desplazamientos debidos a la deformabilidad del terreno de cimentación se generan en la cimentación acciones que se pueden determinar usando los conceptos rigidez angular  $K_r$  y rigidez lineal  $K_l$  del terreno de cimentación. Se define la rigidez angular como el cociente del momento  $M$  que actúa sobre una zapata y el giro en radianes  $\theta$  que sufre esta zapata:

$$K_r = M / \theta \quad (8)$$

La rigidez lineal se define como el cociente entre la carga vertical  $Q$  que actúa sobre una zapata y el desplazamiento vertical  $\delta$  que sufre la zapata:

$$K_l = Q / \delta \quad (9)$$

Los valores de  $K_r$  y  $K_l$  dependen de las propiedades de deformación del suelo.

De las ecs 8 y 9 se obtienen en el momento y la carga vertical debidas a la reacción del suelo sobre la estructura:

$$M = K_r \theta \quad (10)$$

$$Q = K_l \theta \quad (11)$$

Conociendo los valores de  $K_r$  y  $K_l$  de un suelo, se pueden calcular los giros y los desplazamientos verticales que sufre una estructura cimentada sobre zapatas aisladas, si a la deformabilidad del terreno se pueden incorporar, con relativa facilidad, en el vector de cargas concentradas sobre la estructura  $P_c$ .

Este procedimiento lo vamos a ilustrar mediante un ejemplo muy sencillo, como el mostrado en la fig 2, en el que vemos que las cargas sobre la estructura son la repartida de 1.54 t/m, las concentradas sobre las columnas de 1.2 t y las debidas a la rigidez angular y lineal de las zapatas de cimentación. En la estructura:

Módulo de elasticidad del concreto	2 214 000 t / m <sup>2</sup>
Momento de inercia de las columnas	0.000675 m <sup>4</sup>
Momento de inercia de las trabes	0.0054 m <sup>4</sup>

En el terreno de cimentación

$$K_l = 1880 \text{ t / m} \quad K_r = 720 \text{ t.m / rad}$$

A continuación presentamos el análisis detallado de la estructura.

Iniciamos numerando las barras y los grados de libertad de la estructura, los cuales se muestran en la fig 3. Las cargas sobre la estructura, correspondientes a los grados de libertad definidos, se aprecian en la fig 4. Con estos datos podemos formar las cantidades que aparecen en la ecuación matricial 5.

a) Vector de desplazamientos

El vector de desplazamientos vale ( fig 3 )

$$\underline{\delta} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix}$$

b) Matriz de rigideces

para formar la matriz de rigideces de la estructura usamos la ec 6. Empezamos por visualizar los grados de libertad de cada barra

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$
1	$\theta_5$	$\theta_3$	-	-
2	$\theta_6$	$\theta_4$	-	-
3	$\theta_5$	$\theta_6$	$\delta_1$	$\delta_3$

A continuación, aplicando la ec 6 formamos la matriz de rigidez de cada barra:

$$\underline{K}_1 = \begin{bmatrix} \theta_5 & \theta_3 \\ 1299.52 & 649.76 \\ 649.76 & 1299.52 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_5 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{K}_2 = \begin{bmatrix} \theta_6 & \theta_4 \\ 1299.52 & 649.76 \\ 649.76 & 1299.52 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_6 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{K}_3 = \begin{bmatrix} \theta_5 & \theta_6 & \delta_1 & \delta_2 \\ 7970.4 & 3985.2 & -1992.6 & 1992.6 \\ 3985.2 & 7970.4 & -1992.6 & 1992.6 \\ -1992.6 & -1992.6 & 664.2 & -664.2 \\ 1992.6 & 1992.6 & -664.2 & 664.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}$$

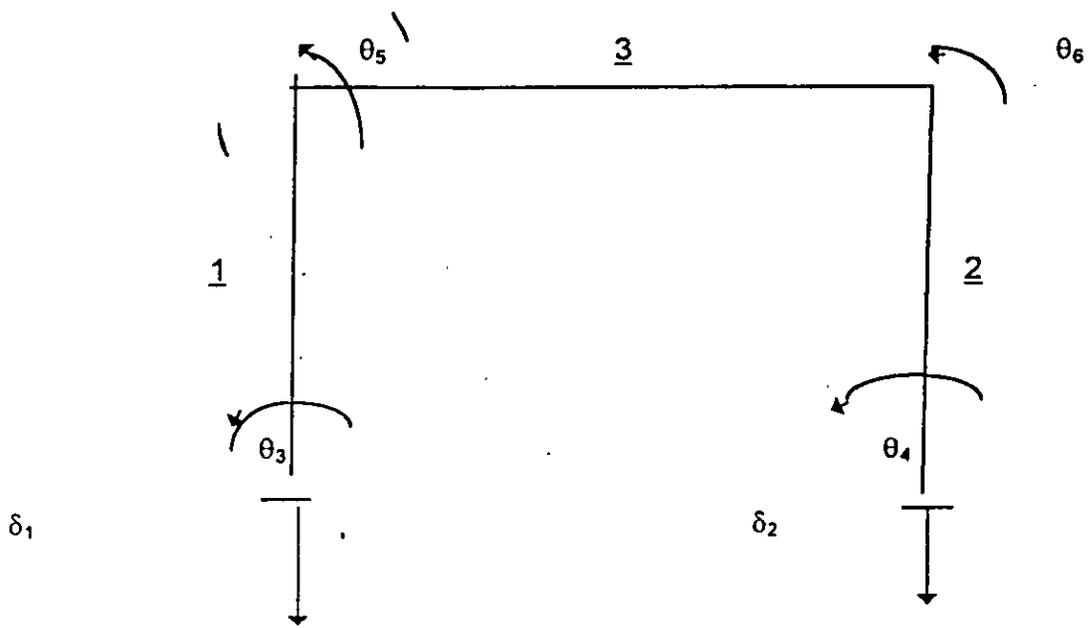


FIG 3 NUMERACION Y GRADOS DE LIBERTAD DE LA ESTRUCTURA

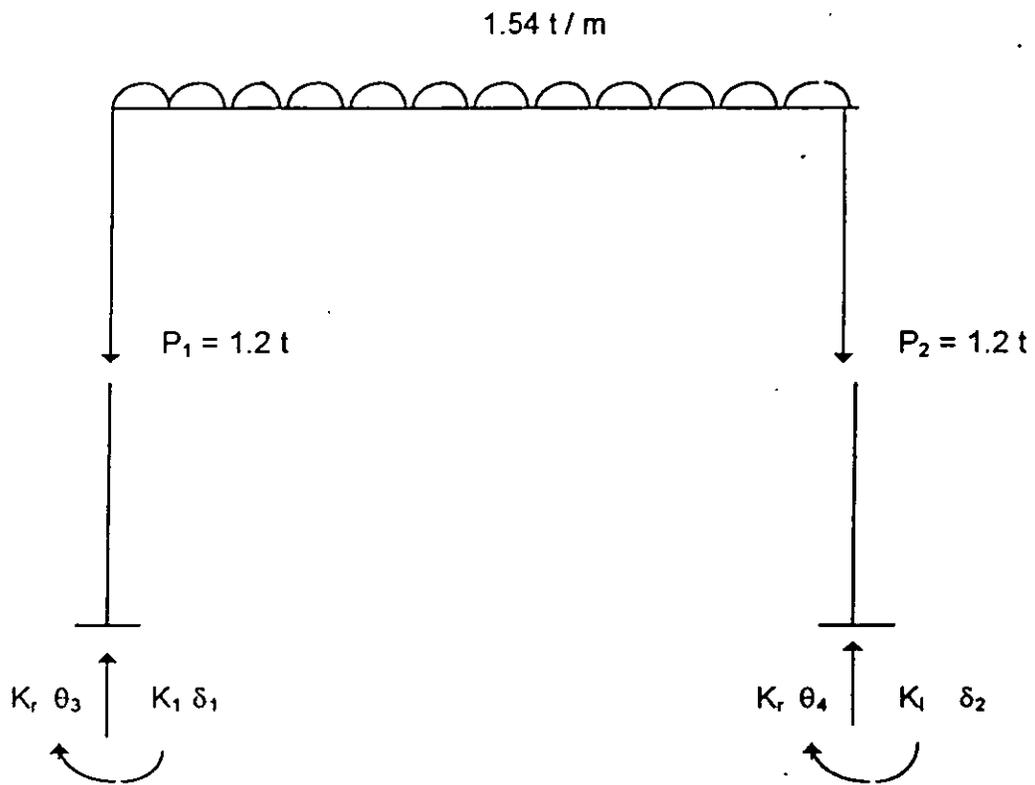


FIG 4 SISTEMA DE CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA

$$K = \sum K_i = K_1 + K_2 + K_3$$

	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	
$\underline{K} =$	664.2	-664.2	0	0	-1992.6	-1992.6	$\delta_1$ $\delta_2$ $\theta_3$ $\theta_4$ $\theta_5$ $\theta_6$
	-664.2	664.2	0	0	1992.6	1992.6	
	0	0	1299.52	0	649.76	0	
	0	0	0	1299.52	0	649.76	
	-1992.6	1992.6	649.76	0	9269.92	3985.2	
	-1992.6	1992.6	0	649.76	3985.2	9269.92	

c) Vector de cargas de empotramiento

$$\underline{P}_c = \begin{Bmatrix} -wL/2 \\ -wL/2 \\ 0 \\ 0 \\ wL^2/12 \\ -wL^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.62 \\ -4.62 \\ 0 \\ 0 \\ 4.62 \\ -4.62 \end{Bmatrix}$$

d) Vector de cargas concentradas

$$\underline{P}_c = \begin{Bmatrix} -1.2 + 1880 \delta_1 \\ -1.2 + 1880 \delta_2 \\ 720 \theta_3 \\ 720 \theta_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo valores en la ec 5

$$664.2 \delta_1 - 664.2 \delta_2 - 1992.6 \theta_5 - 1992.6 \theta_6 - 4.62 - 1.2 + 1880 \delta_1 = 0$$

$$-664.2 \delta_1 + 664.2 \delta_2 + 1992.6 \theta_5 - 1992.6 \theta_6 - 4.62 - 1.2 + 1880 \delta_2 = 0$$

$$1299.52 \theta_3 + 649.76 \theta_5 + 0 + 720 \theta_3 = 0$$

$$1299.52 \theta_4 + 649.76 \theta_6 + 0 + 720 \theta_4 = 0$$

$$-1992.6 \delta_1 + 1992.6 \delta_2 + 649.76 \theta_3 + 9269.92 \theta_5 + 3985.2 \theta_6 + 4.62 + 0 = 0$$

$$-1992.6 \delta_1 + 1992.6 \delta_2 + 649.76 \theta_4 + 3985.2 \theta_5 + 9269.92 \theta_6 - 4.62 + 0 = 0$$

Por simetría

$$\delta_1 = \delta_2, \theta_3 = -\theta_4, \theta_5 = -\theta_6$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} -5.82 + 1880 \delta_1 &= 0 \\ 2019.52 \theta_3 + 649.76 \theta_5 &= 0 \\ 649.76 \theta_3 + 5284.72 \theta_5 + 4.62 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.003096 \text{ m} \\ \theta_3 &= 0.0002929 \\ \theta_5 &= -0.0009102 \end{aligned}$$

El momento que llega a la cimentación se puede obtener multiplicando el giro respectivo por su rigidez angular

$$M_3 = K_r \theta_3 = 720 (0.0002929) = 0.211 \text{ t.m}$$

La carga vertical sobre la zapata es igual al desplazamiento vertical por la rigidez lineal

$$P_1 = K_l \delta_1 = 1880 (0.003096) = 5.82 \text{ t}$$

También se pueden hallar las acciones que transmite la estructura a la zapata, empleando las siguientes expresiones, que proporcionan los elementos mecánicos que transmite una barra sobre el nudo

$$M_p = M_{sp} + 4 EI \theta_p / L + 2 EI \theta_q / L - 6 EI \delta_r / L^2 + 6 EI \delta_s / L^2 \quad (12)$$

$$M_q = M_{sq} + 2 EI \theta_p / L + 4 EI \theta_q / L - 6 EI \delta_r / L^2 + 6 EI \delta_s / L^2 \quad (13)$$

$$V_r = V_{er} - 6 EI \theta_p / L^2 - 6 EI \theta_q / L^2 + 12 EI \delta_r / L^3 - 12 EI \delta_s / L^3 \quad (14)$$

$$V_s = V_{es} + 6 EI \theta_p / L^2 + 6 EI \theta_q / L^2 - 12 EI \delta_r / L^3 + 12 EI \delta_s / L^3 \quad (15)$$

donde  $M_{ep}$ ,  $M_{eq}$  y  $V_{es}$  son los momentos y cortantes de empotramiento de barra sobre nudo.

Sustituyendo valores en las expresiones anteriores, para la barra 1 se halla el momento sobre la zapata ( ec 13 )

$$M_q = M_B = -0.211 \text{ t.m}$$

Con la barra 3 se obtiene el cortante sobre el nudo de la izquierda ec ( 14 )

$$V_1 = 4.62 \text{ t}$$

La carga vertical sobre la zapata será la suma del cortante anterior y de la carga concentrada de 1.2 t. En consecuencia, la carga vertical sobre la zapata vale

$$\Sigma Q = 5.82 \text{ t}$$

El momento y la carga vertical sobre la zapata se emplean para la revisión de estabilidad por mecánica de suelos y para el diseño estructural de la zapata.

### 3 INTERACCION SUELO-ESTRUCTURA EN CIMENTACIONES PROFUNDAS

#### 3.1 Cimentaciones profundas sometidas a cargas verticales

Para el caso de cimentaciones profundas Zeevaert ( 1980 ) trata los dos siguientes casos:

I. Cimentaciones en que la punta de los pilotes o pilas queda firmemente apoyada en un depósito de muy baja compresibilidad y gran espesor ( fig 5 ).

II. Cimentaciones en que la punta de los pilotes o pilas queda firmemente apoyada en un estrato resistente de espesor limitado de baja compresibilidad, pero bajo el cual se localizan estratos compresibles ( fig 6 ).

El caso I se puede resolver considerando que cada pilote tiene un módulo de reacción  $K_i$  constante e independiente de los demás pilotes. Así, el problema se reduce al de una cimentación apoyada sobre resortes ( uno por cada pilote ), en que la constante de cada resorte es independiente del resto de los resortes. Además, si todos los pilotes tienen la misma sección y longitud, su número es igual en cada línea, y se considera un valor del módulo de deformación constante para el estrato resistente de apoyo de la punta de los pilotes, entonces  $K_i$  es igual para todos los pilotes ( Zeevaert, 1980 ).

Cuando existe un depósito compresible subyaciendo al estrato resistente de apoyo ( caso II. Fig 6 ), el valor de  $K_i$  no se puede considerar constante para cualquier punto, ya que en este caso interviene la deformación de los estratos compresibles que suprayacen al estrato resistente donde apoyan los pilotes. Por lo tanto, será necesario emplear el procedimiento indicado en el inciso 2.1, es decir, determinar las ecuaciones matriciales EMA y EMI, con la consideración adicional de que el módulo de cimentación  $K_i$  hay que tomar en cuenta la deformación del estrato de apoyo del pilote ( Zeevaert, 1980 )

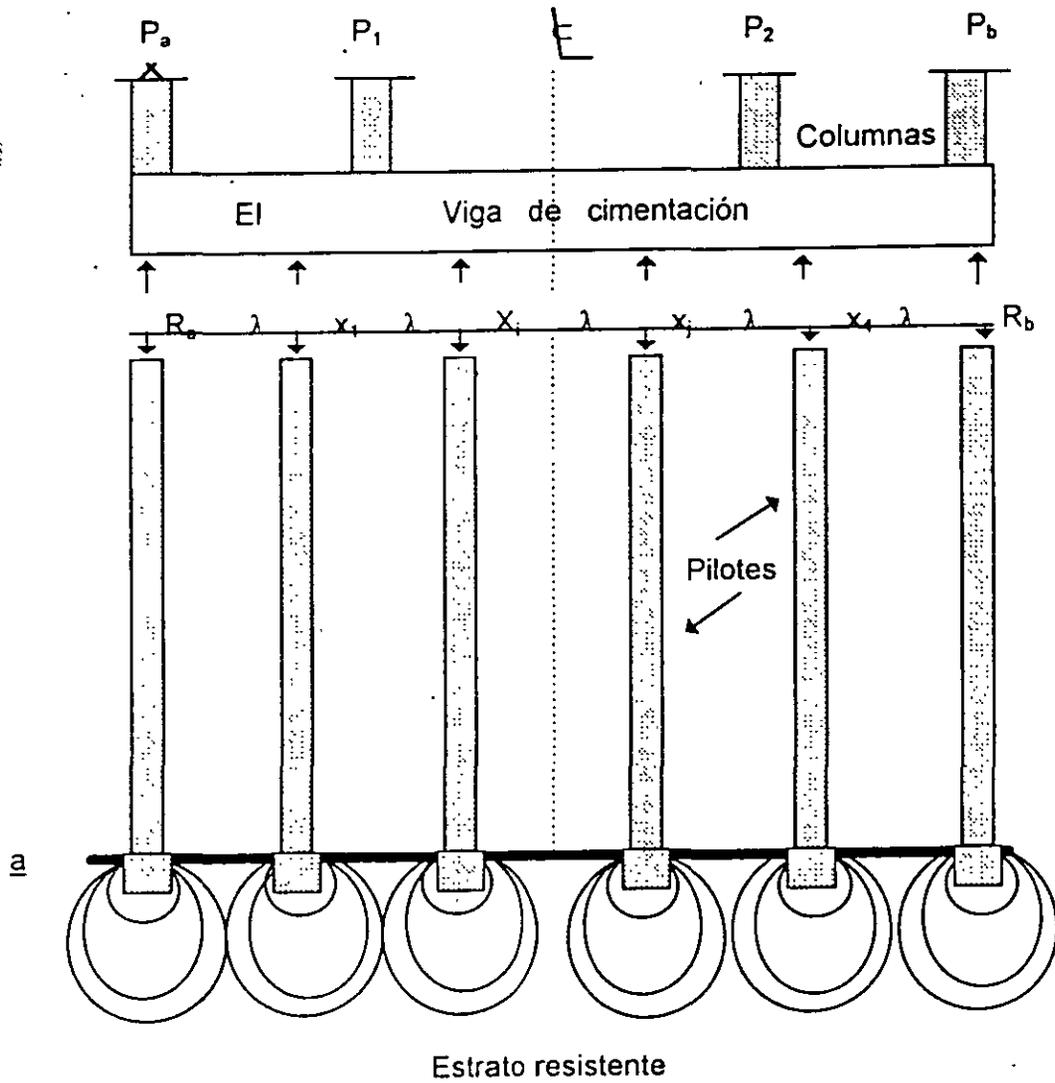


FIG 5 CIMENTACION CON PILOTES. CASO I  
(ZEEVAERT, 1980)

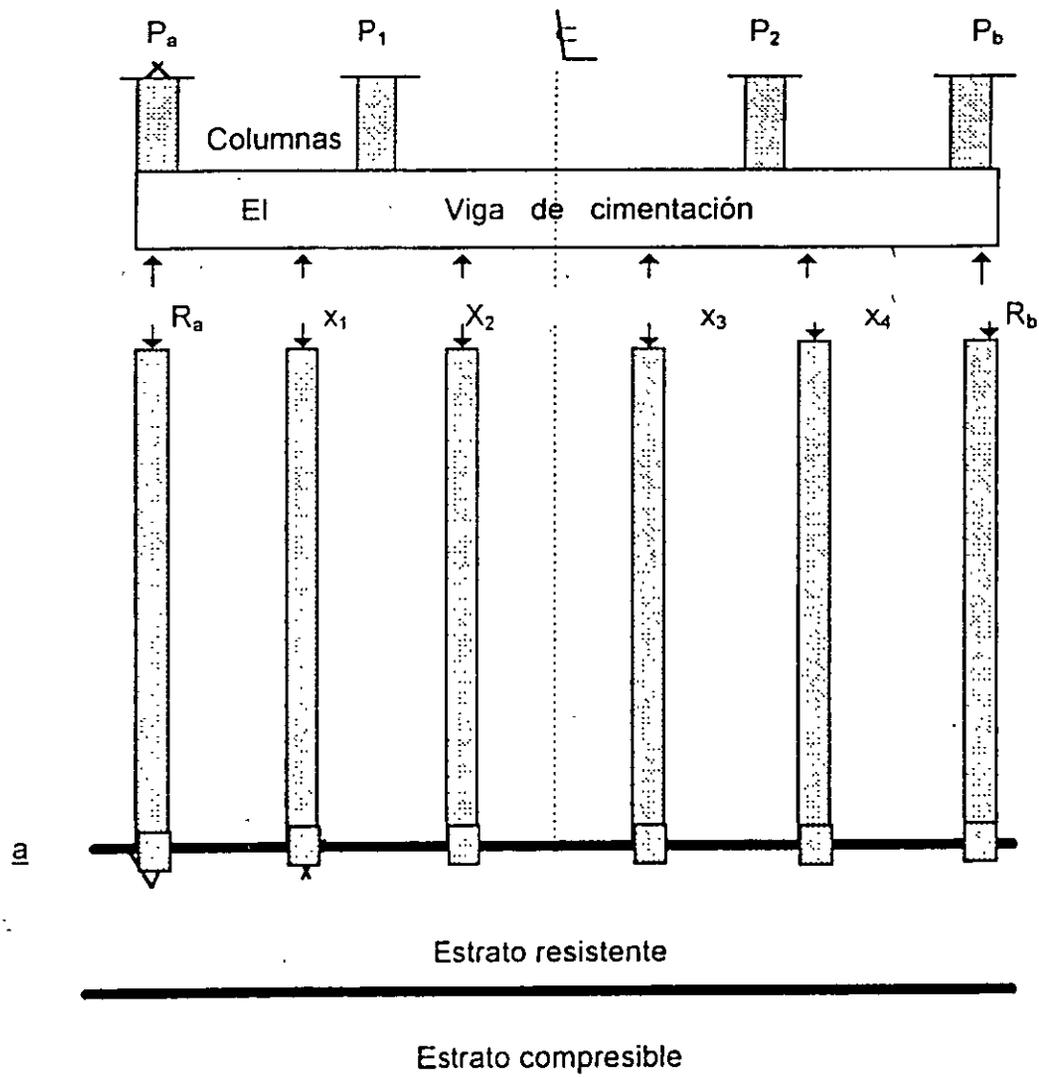


FIG 6 CIMIENTACION CON PILOTES. CASO II  
(ZEEVAERT, 1980)

### 3.2 Pilas o pilotes sujetos a cargas laterales

La construcción de estructuras marinas fuera de la costa ( offshore structures ) requiere el uso de cimentaciones profundas a base de pilas o pilotes, y ha propiciado el desarrollo de métodos de análisis para estos elementos. Sobre todo cuando están sometidos a fuerzas laterales debidas a atraque de embarcaciones o efectos de oleaje. Uno de los primeros trabajos en este sentido es el de Matlock y Reese ( 1961 ), en el que establecen que para una solución racional de la interacción suelo-estructura es necesario que tanto las condiciones de equilibrio estático como la compatibilidad de deformaciones se deben cumplir en todas las partes del sistema estructura-suelo. Usualmente tratan la estructura y los pilotes como elementos linealmente elásticos, pero comentan que las características del suelo son marcadas no linealmente; la solución al problema se alcanza mediante repetidos cálculos con la teoría de la elasticidad, con los valores de la rigidez del suelo ajustándolos a cada iteración.

Las características fuerza-deformación del suelo se tratan con una familia de curvas del tipo " p-y" , como las mostradas en la fig 7, las cuales se obtienen a partir de las propiedades de cada suelo.

Matlock y Reese ( 1961 ) consideran al pilote como una viga, en la que se debe de cumplir la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^4}{dx^4} = p \quad ( 16 )$$

En el suelo se requiere un módulo secante de deformación  $E_s$  ( correspondiente al nivel de esfuerzo con el que se esté trabajando ), el cual está dado por

$$E_s = -p / y \quad ( 17 )$$

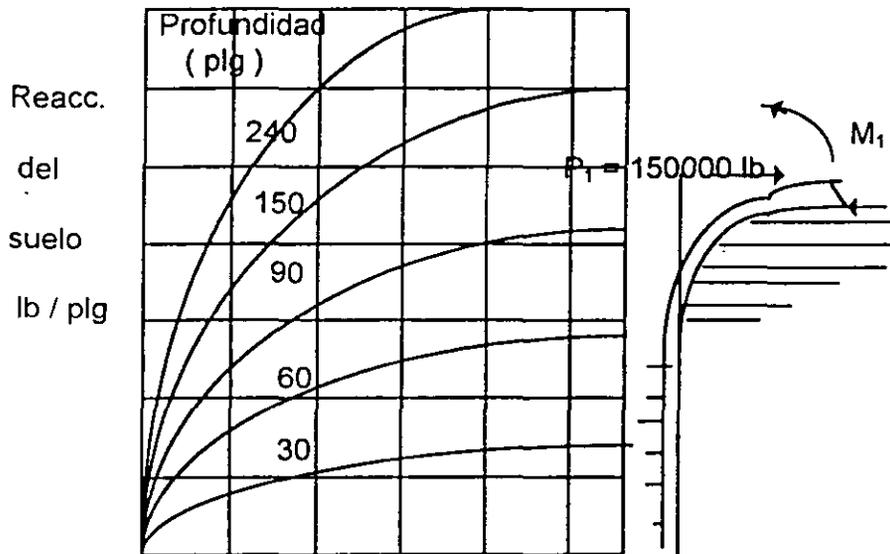
donde p es la reacción del suelo sobre el pilote, por unidad de longitud ( t/m, por ejemplo ), y " y " es el desplazamiento lateral del pilote. Combinando las ecs 16 y 17 se obtiene la siguiente expresión

$$d^4 y / dx^4 + ( E_s / EI ) y = 0 \quad ( 18 )$$

La solución de la ec 18 se lleva a cabo con dos procedimientos. El primero consiste en suponer que  $E_s$  es proporcional a la profundidad  $E_s = k X$ . Mediante sucesivas soluciones de la ecuación diferencial se va logrando que la elástica de viga se asemeje lo más posible a la curva p-y determinada a partir de las propiedades del suelo. Esto es necesario debido a las característica no lineales de deformación del suelo. Estas solución se lleva a cabo con el auxilio de tablas y gráficas construidas ex-profeso para el caso.

El segundo procedimiento se emplea cuando se encuentran variaciones importantes en las propiedades del suelo, y cuando se requiere tomar en cuenta cambios en la rigidez del pilote, para lo cual se requiere el empleo de una computadora. Mediante soluciones sucesivas de la ecuación diferencial del pilote, haciendo repetidas referencias a la curva p-y del suelo, la computadora determina cada tramo elegido del pilote el valor del módulo de deformación del suelo que satisface las condiciones de compatibilidad y de equilibrio entre suelo, pilote y superestructura. Se toman en cuenta variaciones en las condiciones

de apoyo del pilote y el efecto de la posible socavación que se pudiera presentar en la parte superior del pilote. En la fig 8 se presentan los resultados de la aplicación de los métodos usados por Matlock y Reese ( 1961 ).



y, deflexion lateral del pilote, plg

FIG 7 CURVAS TÍPICAS p-y , DETERMINADAS PARA EL SUELO A DIFERENTES PROFUNDIDADES ( MATLOCK Y REESE, 1961 )

Momento flexionante,  $10^6$  plg.lb

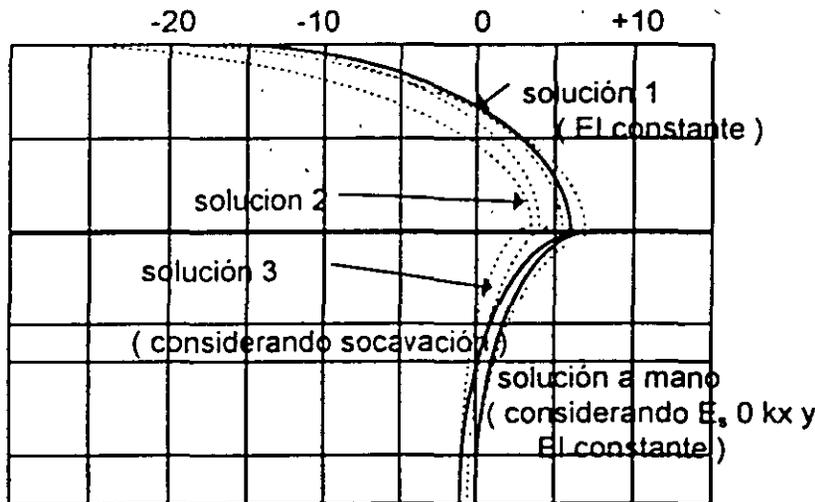


FIG 8 COMPARACION DE DIAGRAMAS DE MOMENTO FLEXIONANTE, DE LA SOLUCION A MANO CON: (a) SOLUCION 1, CON COMPUTADORA, AJUSTANDO LOS VALORES DE  $E_s$  CON LA PROFUNDIDAD, y (b) SOLUCION 2, TOMANDO ADEMAS EN CUENTA LA VARIACION DE LA RIGIDEZ DEL PILOTE CON LA PROFUNDIDAD (MATLOCK Y REESE, 1961)

Debido a las cargas laterales sobre los pilotes , en la parte superior se alcanza con frecuencia el rango de comportamiento plástico del suelo en las curvas p-y, razón por la cual se han desarrollado los métodos para tomar en cuenta el comportamiento del suelo

cerca de la falla, tanto para arcillas blandas ( Matlock, 1970 ), como para arenas ( Reese et al, 1974 ). En ambos casos se ha comparado los resultados de las teorías con mediciones de campo y de laboratorio, obteniéndose en general acercamientos bastante satisfactorios a la realidad, sobre todo para fines prácticos.

También se ha empleado el método del elemento finito para tomar en cuenta, entre otros efectos, el desplazamiento relativo que puede ocurrir entre pilote y suelo durante la deformación lateral del elemento ( Yegian y Wright, 1973 ). También se puede tomar en cuenta la influencia de dos o de tres pilotes cercanos entre si ( Yegian y Wright, 1973 ); el número de pilotes a considerar es pequeño, dada la gran cantidad de elementos que se tendrían que trazar para un número mayor de pilotes.

Por su parte, Zeevaert ( 1980 ) presenta un método muy completo para el análisis de pilas o pilotes sujetos a cargas laterales. Considera cinco casos principales de análisis de una pila o pilote:

- i. Pilote libre de girar en sus extremos
- II. Pilote empotrado en la estructura de cimentación y libre de girar en al punta
- III. Pilote libre de girar en la cabeza y empotrado en la base
- IV. Pilote empotrado en ambos extremos con giro en la base
- V. Restricción parcial del giro en los extremos de una pila

Para la solución de estos problemas se emplea la Ecuación Matricial de Interacción Horizontal ( HEMI ), la cual depende de las condiciones de apoyo y de las características estructurales del pilote. Por otra parte, se obtiene la Ecuación Matricial de Desplazamientos Horizontales ( HEMA), la cual es función de las propiedades de deformación del suelo, considerando la influencia entre las diferentes reacciones del suelo considerando la influencia entre las diferentes reacciones del suelo sobre el pilote con la masa de suelo, para lo que se emplea el módulo horizontal de cimentación  $K_i$ , definido de manera análoga a como se hizo en el inciso 2.1 de este trabajo. El procedimiento de Zeevaert ( 1980) para pilas o pilotes sometidos a cargas laterales es similar al descrito en el inciso 2.1, en el que se varían los valores de  $K_i$  mediante iteraciones hasta que se cumple la condición de compatibilidad de deformaciones entre pilote y suelo.

También se pueden combinar las matrices HEMI y HEMA, para hallar la matriz HEMISE, que permite resolver el problema de la interacción suelo-pilote sin necesidad de recurrir a iteraciones ( Zeevaert, 1980). En las figs 9 y 10 se presenta la aplicación sometida a una carga lateral de 10 t.

La publicación del Manual de Diseño y Construcción de Pilas y Pilotes ( 1983 ), de la Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, contiene los valores de coeficientes de reacción horizontal  $K_s$  dados por Terzaghi ( 1955), para suelos sin y con cohesión, así como un procedimiento aproximado, tomado de la Sociedad Geotécnica Canadiense ( 1978 ), que proporciona en forma gráfica las magnitudes de la flexión y del momento flexionante en función de la profundidad a lo largo del pilote., haciendo uso de la rigidez relativa del sistema pilote - suelo

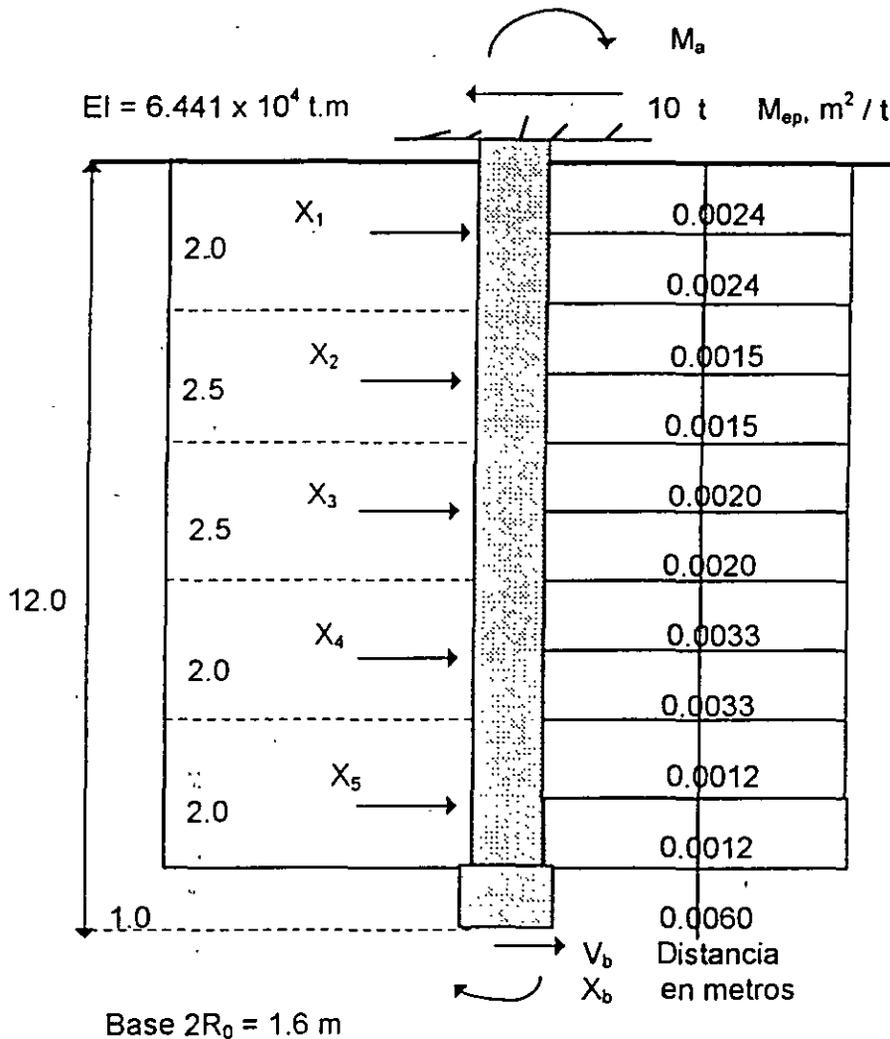


FIG 9 PILA SUJETA A FUERZA HORIZONTALES (ZEEVAERT, 1980)

#### 4. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES QUE FORMAN LA ESTRUCTURA Y EL TERRENO DE CIMENTACION

Como se ha podido observar en los incisos anteriores, al trabajar con la interacción suelo - estructura se toma en cuenta tanto la estructura como el terreno de cimentación, por lo que es necesario conocer las propiedades de ambos medios.

En estructuras de concreto reforzado se acepta el módulo de elasticidad del concreto tiende a disminuir con el tiempo. Así Flores Victoria ( 1968 ) señala que en edificios de concreto, el módulo de elasticidad puede tomarse del orden de  $3000 \sqrt{f_c}$  al tener en cuenta que los asentamientos totales suceden a largo plazo. Nótese que este valor es bastante inferior al  $10000 \sqrt{f_c}$  que usualmente se toma para cálculos a corto plazo.

Por su parte, Ellstein y Granados ( 1988 ) comentan que la magnitud de los asentamientos que determinan corresponde al 100 % de consolidación primaria, misma que tardará un cierto tiempo en ocurrir. Las deformaciones de la estructura no son

instantáneas sino diferidas y por tanto las propiedades elásticas de los materiales estructurales no son las medidas de los materiales estructurales no son las medidas con las pruebas rápidas usuales; para el caso del concreto armado en la ciudad de México, el componente diferido puede ser tomado en cuenta por un factor menor de uno, probablemente del orden de 0.2 ó 0.25 ( Ellstein y Granados, 1988 ).

Puede observarse que en general existe coincidencia en señalar que el módulo de elasticidad del concreto se debe reducir en forma importante cuando se lleva a cabo la interacción suelo - estructura a largo plazo. La variación de los módulos de deformación es todavía más importante en el terreno de cimentación, sobre todo si se trata de suelos plásticos saturados, en los que la deformabilidad depende no sólo del nivel de esfuerzos sino también en forma importante del tiempo. En consecuencia, los módulos de deformación deben seleccionarse acordes con ambos factores: nivel de esfuerzos y tiempo.

El hecho de que el suelo tenga un comportamiento no lineal ha sido tomado en cuenta por la mayoría de los investigadores de la interacción suelo - estructura. Así, Chamecki ( 1956 ) trabaja con el índice de compresibilidad en una arcilla normalmente consolidada, al cual toma como una constante. Además, señala que el módulo de deformación de un suelo es función del estado de esfuerzo, siendo la derivada de la curva esfuerzo - deformación unitaria, con respecto al esfuerzo. Debido a que las relaciones esfuerzo - deformación en los suelos son no lineales, Chamecki ( 1956 ) propone un método iterativo para la resolución de la interacción suelo - estructura.  $\delta$  en  $\text{cm} \times 10^{-1}$

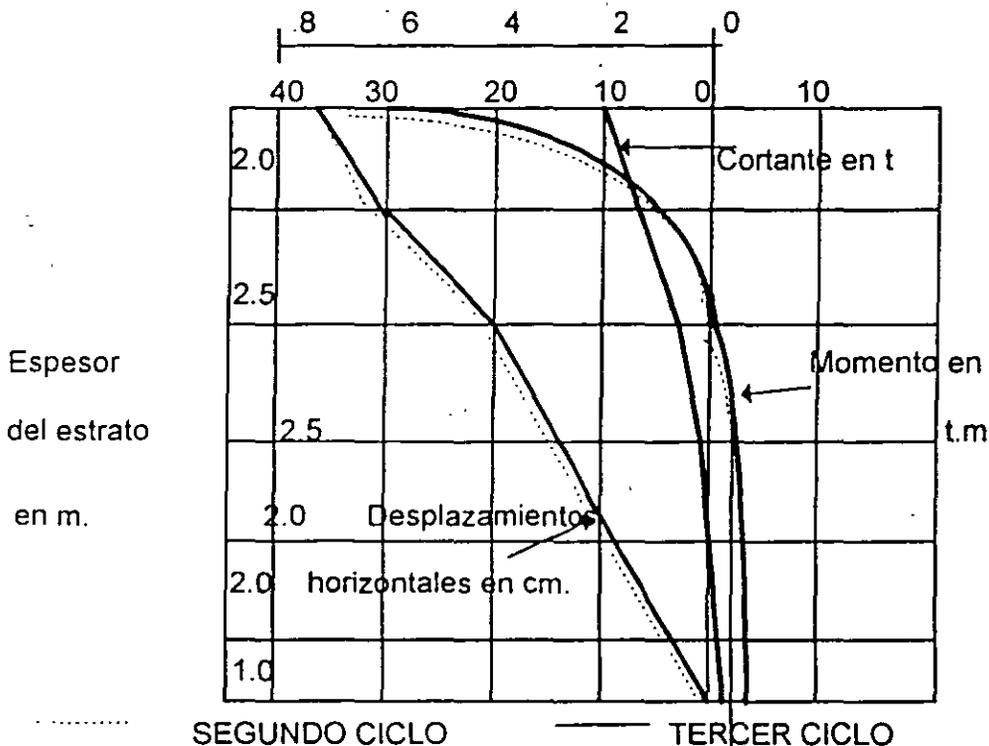


FIG 10 CORTANTES Y MOMENTOS FLEXIONANTES, Y DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES DE LA PILA ( ZEEVAERT, 1980 )

Varios autores toman en cuenta el comportamiento no lineal de los suelos, proponiendo métodos iterativos para considerar este efecto ( Flores Victoria, 1968; Flores Victoria y Esteva, 1970 ), en los que utilizan criterios para acelerar la convergencia de los métodos.

El comportamiento no lineal del terreno de cimentación es considerado por Damy et al ( 1977 ) y Esteva et al ( 1977 ), al utilizar matrices secantes de rigideces en la estructura y de flexibilidades en el suelo, para cada iteración.

Zeevaert ( 1980 ) señala que las reacciones efectivas en la orilla de la cimentación pueden resultar altas, lo que origina un flujo viscoplástico, y consecuentemente un relajamiento del esfuerzo de reacción bajo deformación constante en esos lugares. El esfuerzo límite efectivo o respuesta máxima que puede admitirse en condiciones estáticas en la orilla de la cimentación es igual a la resistencia de material, cuando se inicia un flujo viscoplástico incipiente ( sin necesariamente alcanzar la capacidad de carga última en el borde de la cimentación ). En suelos de alta sensibilidad podría establecerse la condición de que el esfuerzo máximo en el borde de la cimentación, en condiciones estáticas, no rebase el esfuerzo crítico ( o de preconsolidación ) correspondiente al quiebre de la curva de compresibilidad ( Zeevaert, 1980 ).

En pilotes sujetos a cargas laterales el suelo alcanza niveles de esfuerzo cercanos a la falla: véanse las curvas p - y de la figura 7.

Inclusive, existen técnicas para tomar en cuenta el comportamiento plástico del terreno en estado de falla, tanto para suelos cohesivos ( Matclok, 1970 ) como para suelos friccionantes ( Reese et al, 1974 ).

## 5. APLICACIONES

Presentamos en este inciso algunas de las aplicaciones de la interacción estática suelo - estructura.

En la fig. 11 se presenta una estructura reticular con una cimentación a base de una zapata corrida. ( Pozas, 1980 ). Empleando interacción suelo - estructura se obtiene los resultados mostrados en la fig. 12. Es interesante comparar estos resultados con los obtenidos suponiendo una reacción uniforme, los cuales se muestran en la fig. 13. Como se puede observar los momentos en todos los nudos de la estructura difieren comparado ambos casos. En el nudo central inferior el momento con reacción uniforme es 31 % mayor que el que se obtiene tomando en cuenta la interacción suelo - estructura. En el nudo inferior izquierdo el momento es 320 % mayor con el primero que con el segundo método. Aun en la estructura se deja sentir el efecto de la rigidez de la estructura: el momento sobre el nudo de la izquierda del primer piso, debido a la columna inferior, cambia inclusive de sentido ( figs. 12 y 13 ). En resumen, los momentos flexionantes determinados con reacción uniforme difieren de los momentos obtenidos tomando en cuenta la interacción, tanto en la superestructura como en la subestructura. Esta variación ocurre tanto en la magnitud como en el sentido de los momentos, pues en uno de los nudos estos llegan a cambiar de signo, tal como puede verse comparando las figs. 12 y 13.

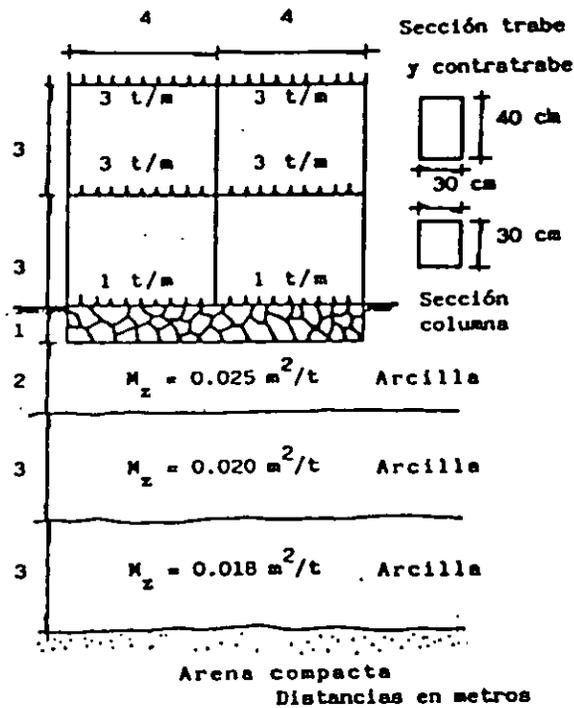


FIG 11 ESTRUCTURA RETICULAR (POZAS, 1980)

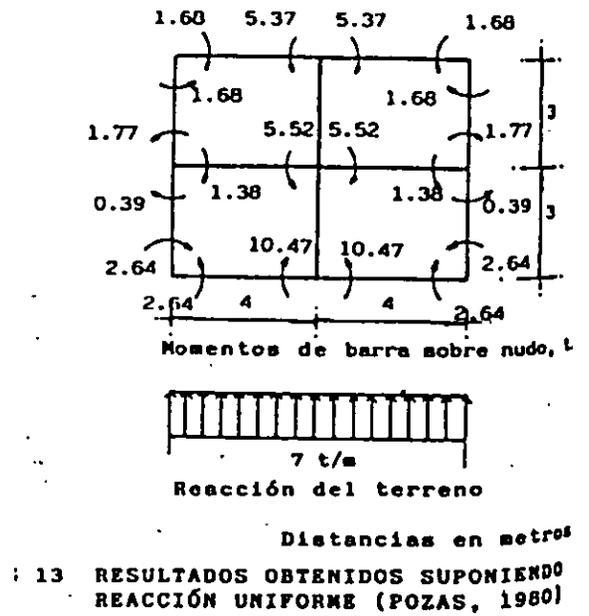
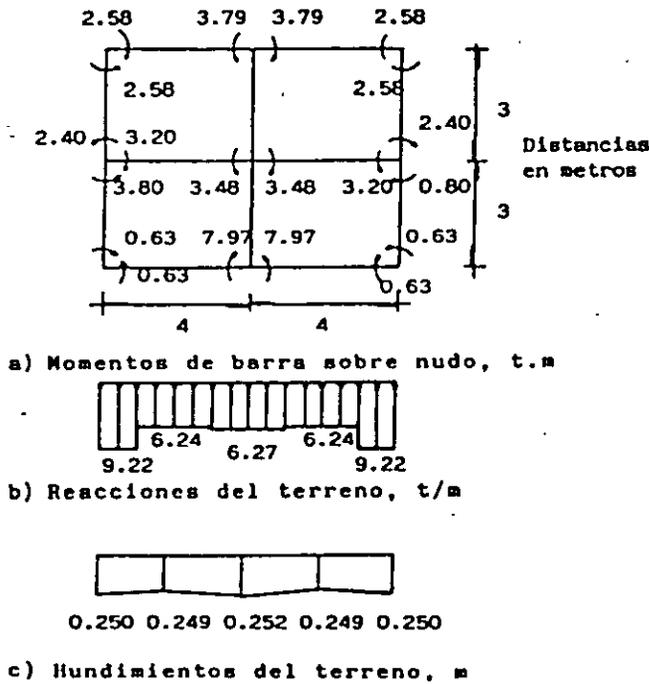


FIG 13 RESULTADOS OBTENIDOS SUPONIENDO REACCIÓN UNIFORME (POZAS, 1980)

FIG 12 RESULTADOS OBTENIDOS UTILIZANDO INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA (POZAS, 1980)

Otro caso real de aplicación de la interacción suelo - estructura es el correspondiente a zapatas corridas que se emplean para tomar fuerzas laterales debidas a sismo a través de muros de cortante que se unen a las zapatas en diferentes tramos. En la fig. 14 se muestran los resultados de un análisis de interacción suelo - viga flotante para una zapata de concreto reforzado. El módulo de elasticidad del concreto utilizado fue de  $1,581,000 \text{ t/m}^2$  y los momentos de inercia en los diferentes tramos se indican en la fig. 14. También pueden observarse las cargas que actúan en la zapata, así como la estratigrafía y propiedades del subsuelo. En la misma figura están graficados los diagramas de reacciones y de hundimientos del terreno, sirviendo el primero de ellos para la determinación de los elementos mecánicos y del diseño estructural de la zapata y el segundo para el conocimiento de los asentamientos totales y diferenciales de la cimentación ( Deméngi, 1990 ). Puede observarse que en el contacto del terreno de cimentación con las zapatas se presentan, teóricamente, esfuerzos de tensión, es decir, se obtienen reacciones negativas, fenómeno debido a los momentos que transmiten los muros de cortante a la cimentación en uno de los extremos de las zapatas.

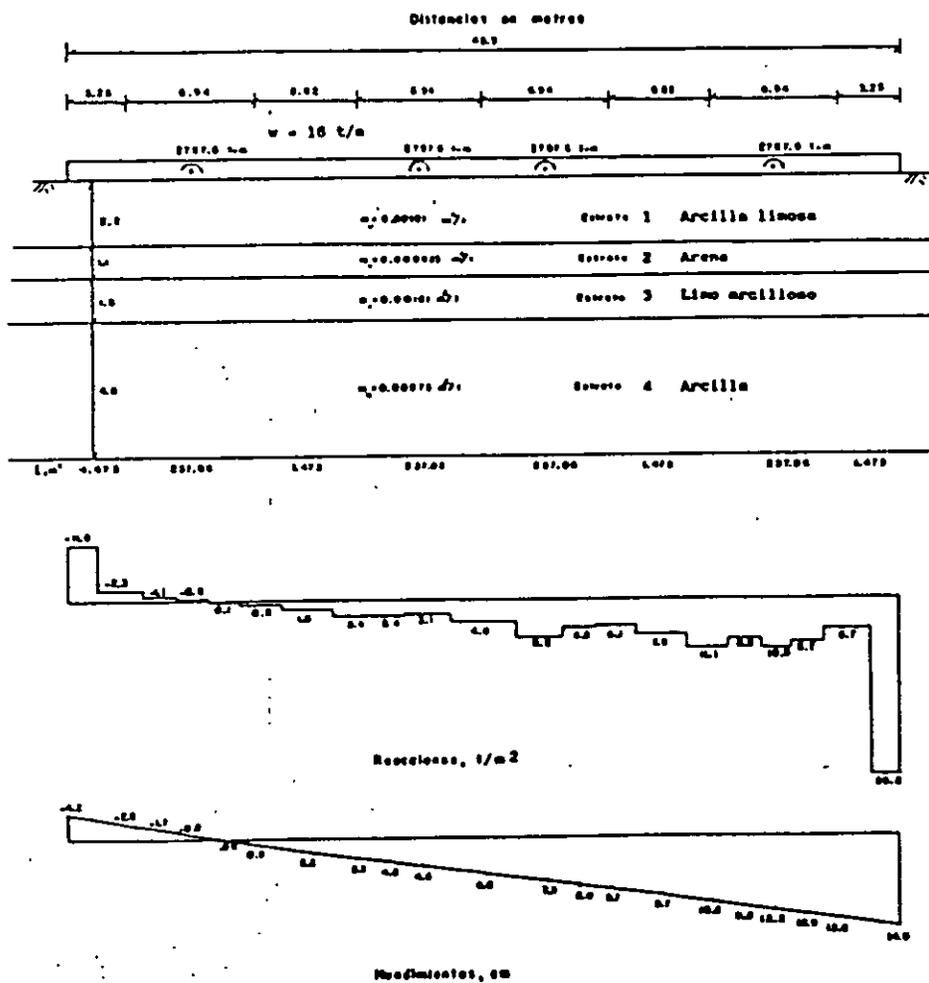


FIG. 14. RESULTADOS DEL ANALISIS DE INTERACCION SUELO-VIGA FLOTANTE

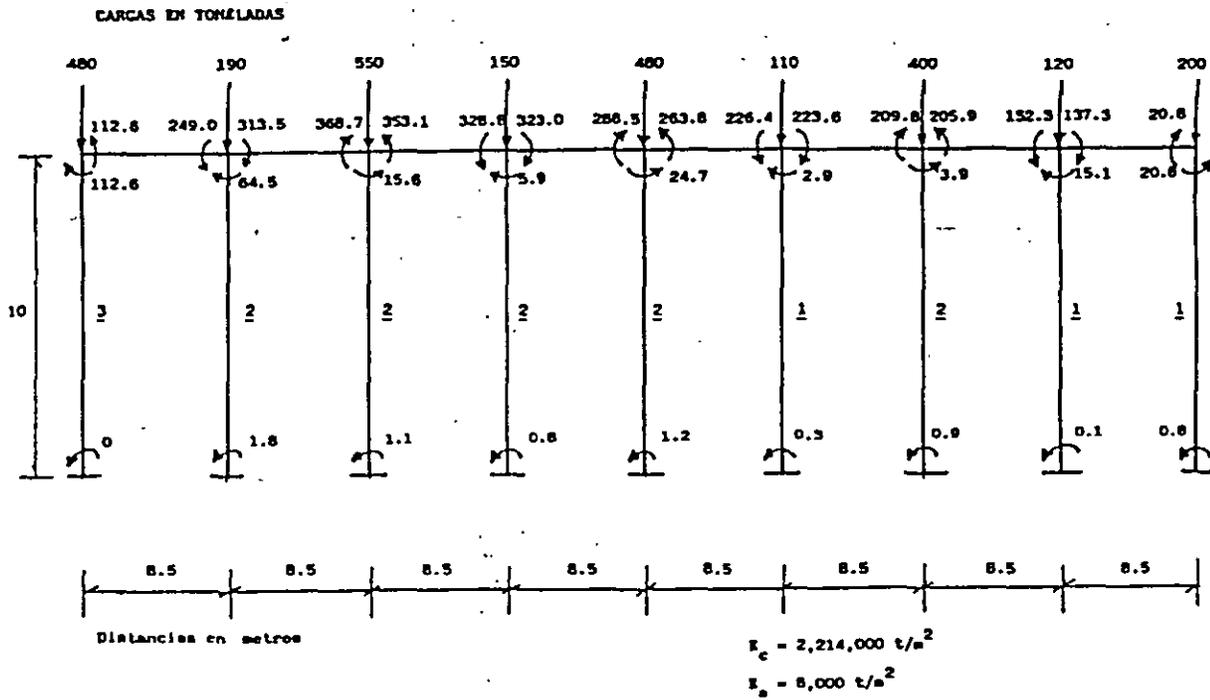
Otro ejemplo de interacción suelo - estructura consiste en el análisis de un marco estructural en el que se considera que sus apoyos tienen una rigidez al desplazamiento vertical y otra al giro; es decir, se considera por ejemplo un marco estructural cimentado en zapatas aisladas que pueden sufrir tanto un hundimiento vertical como un giro. En este sentido, este análisis es un poco más general que los análisis convencionales que suponen que los apoyos del marco estructural están empotrados o articulados en el terreno de cimentación. La forma de llevar a cabo el análisis de interacción suelo - estructura para este caso se presentó en el inciso 2.2 de este trabajo. En la fig. 15 se presenta la aplicación esta técnica a una estructura real, la cual está formada por una trabe de concreto reforzado de 0.5 m de ancho y de 2 m de peralte, apoyada sobre unas pilas de cimentación de concreto reforzado de diámetros de 1.12, 1.48 y 1.74 m. Las cargas que actúan sobre el marco se indican en la fig. 15. Las pilas tienen los siguientes diámetros.

Pila	Diámetro, m
<u>1</u>	1.12
<u>2</u>	1.48
<u>3</u>	1.74

El terreno de cimentación es una toba de origen volcánico que se encuentra al poniente de la ciudad de México, que tiene un módulo de deformación del orden de 8,000 a 10,000  $\text{t/m}^2$ . El material comprendido entre la trabe superior y el nivel de desplante de las pilas es un relleno suelto cuya rigidez se desprecia para fines de análisis.

En la fig. 15 se muestran los momentos flexionantes en los módulos de elasticidad del concreto reforzado de 2,214,000  $\text{t/m}^2$  y un módulo de elasticidad del terreno de cimentación de 8,000  $\text{t/m}^2$ . Se pueden observar las altas magnitudes de las fuerzas cortantes y en la fig. 17 las de las fuerzas normales en las pilas. Nótese la fuerte redistribución de cargas debido a la interacción suelo - estructura. Así, en la parte central de la estructura de la carga en un nudo es de 150 t, mientras que por el efecto combinado de rigidez de estructura y suelo la carga en la pila que está bajo el nudo aumenta hasta 302 t ( fig. 17 ); en el nudo vecino la carga concentrada es de 480 t, mientras que la carga en la pila de abajo disminuye a 350 t. Un fenómeno similar se presenta en el resto del marco.

Con el propósito de observar la influencia de un aumento en la rigidez del terreno y una disminución en la rigidez de la estructura, se llevó a cabo un segundo análisis incrementando el módulo de elasticidad del suelo del concreto a 1,265,000  $\text{t/m}^2$ . Los resultados se muestran en las figuras 18 a 20, para los momentos flexionantes, fuerzas cortantes y fuerzas normales, respectivamente. Como era de esperarse, la redistribución de carga es menor; así, en la fig. 20, en el nudo donde la carga concentrada es de 150 t, en la pila aumenta a 253 t 8 en el primer análisis aumenta hasta 302 t. ). En el nudo vecino la carga concentrada de 480 t disminuye a 389 t. ( en el primer análisis disminuyó a 359 t.). De todas formas, el efecto de la interacción suelo -estructura en este caso también es importante.



MOMENTO FLEXIONANTE EN t.m

FIGURA 15

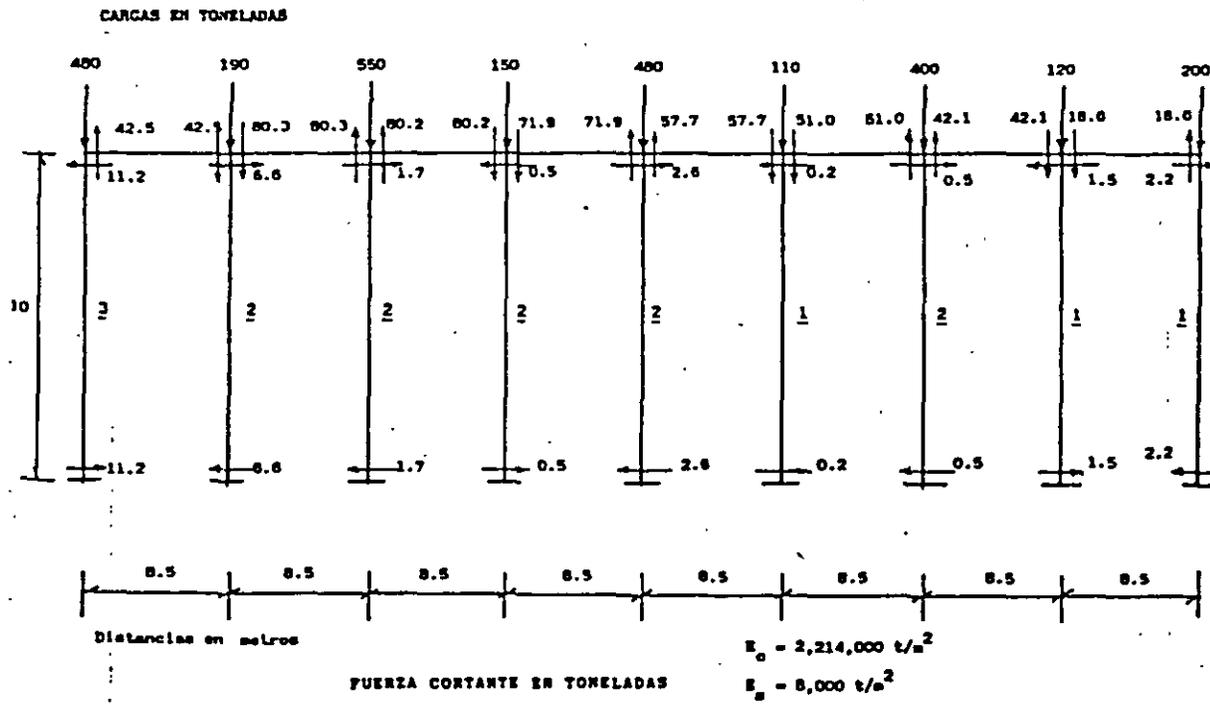


FIGURA 16

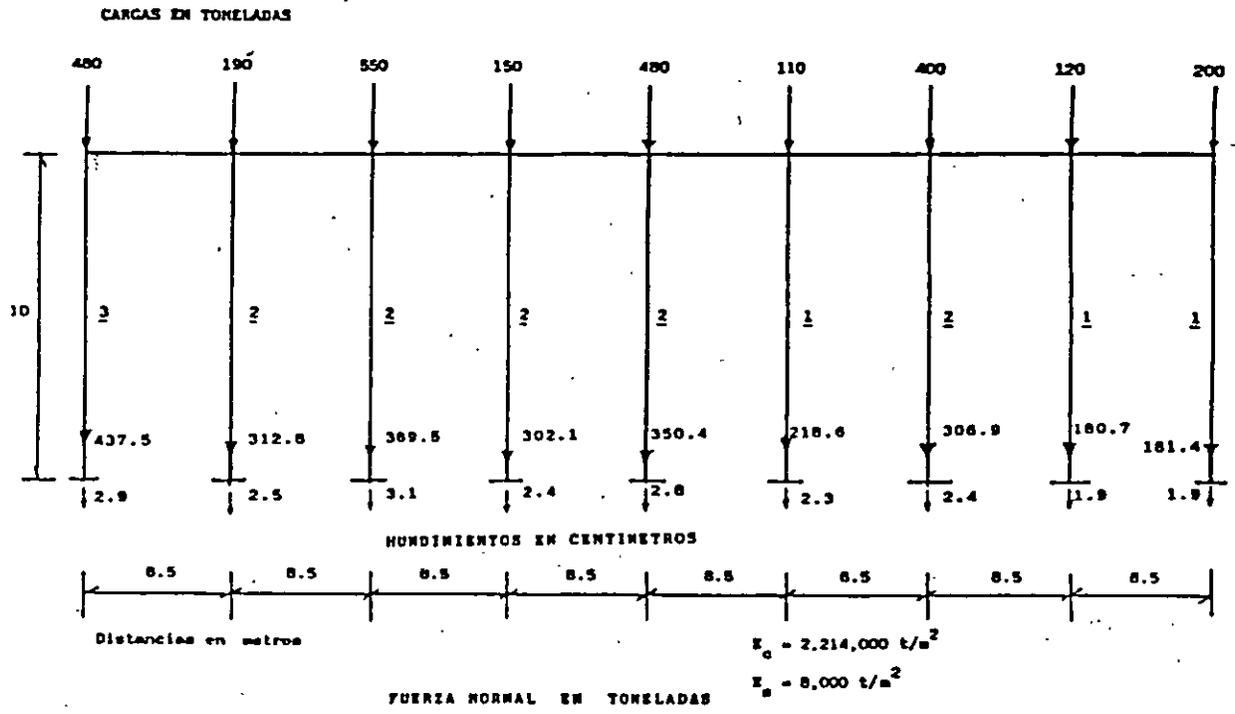


FIGURA 17

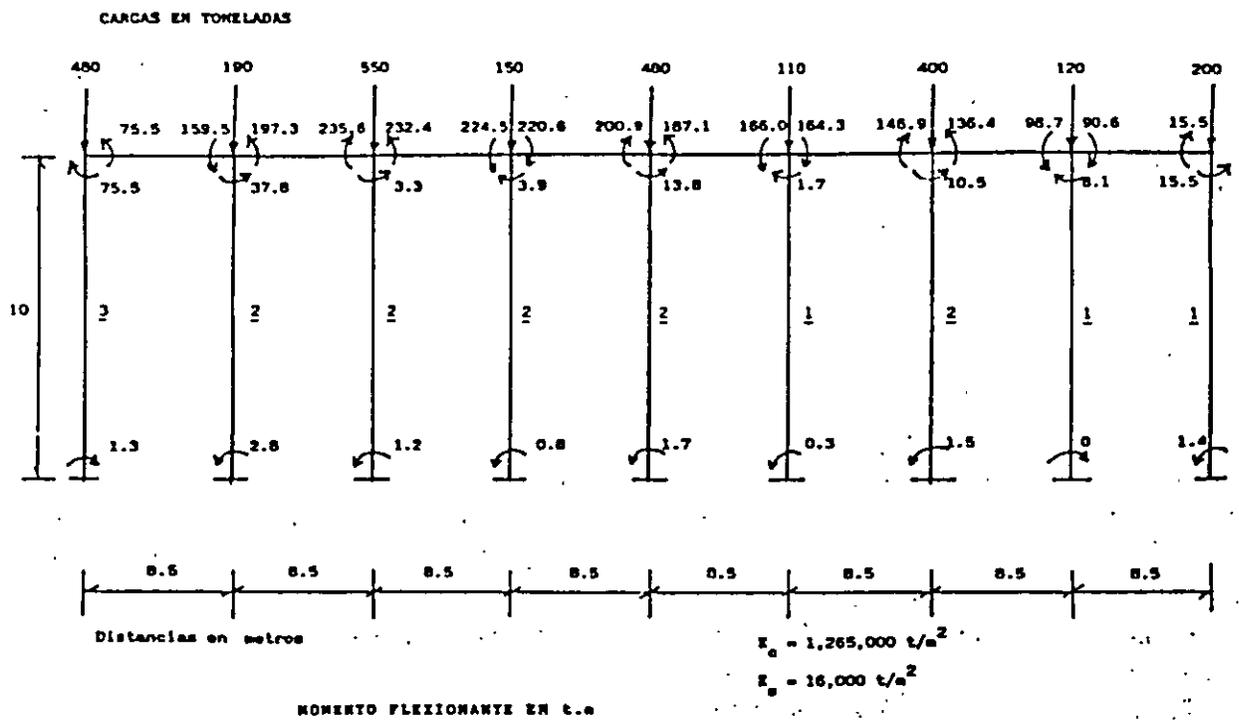


FIGURA 18

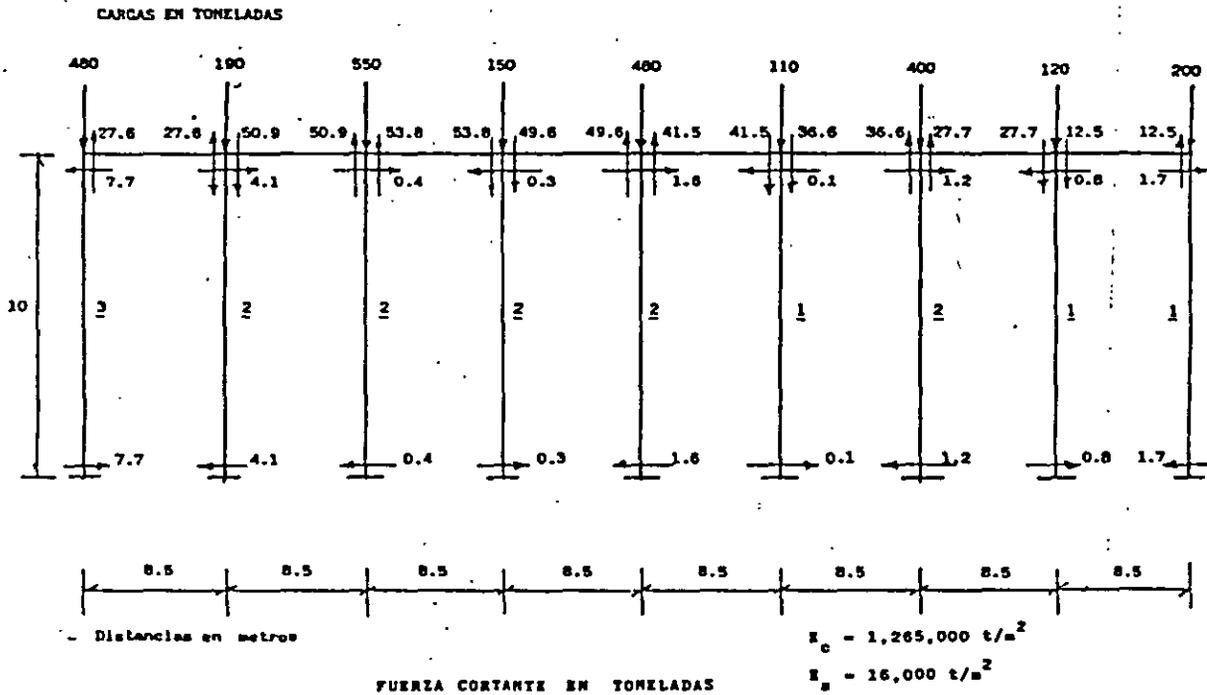


FIGURA 19

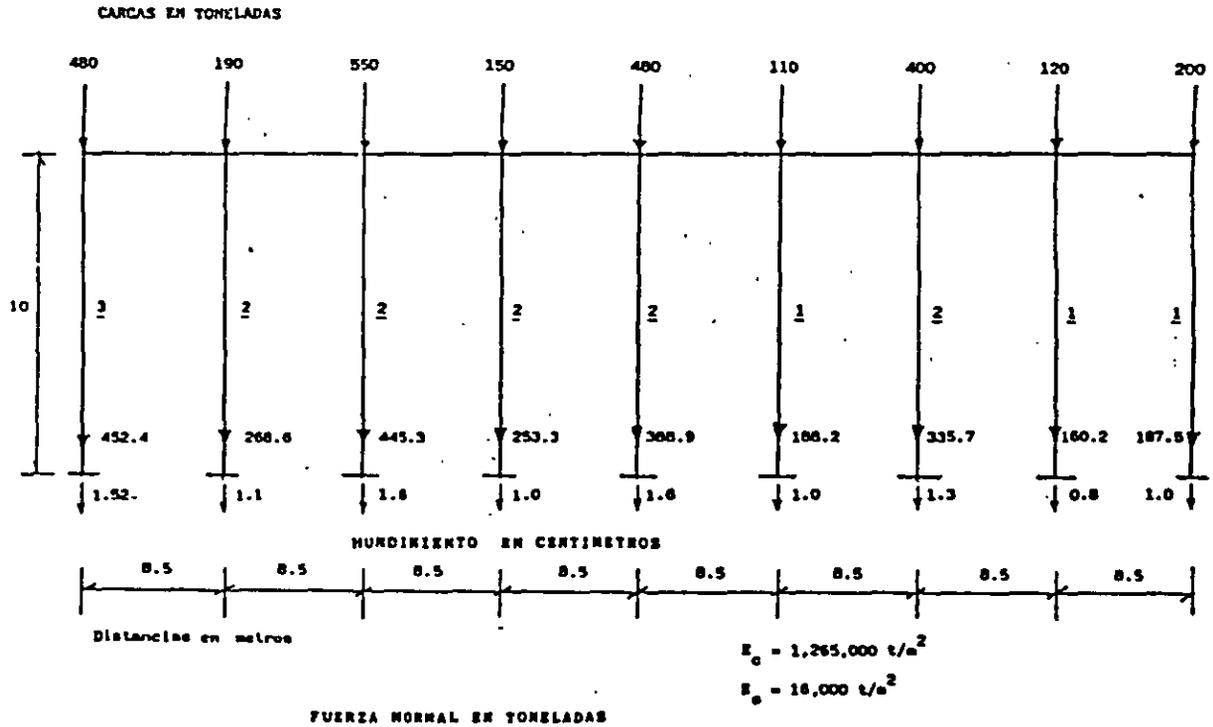
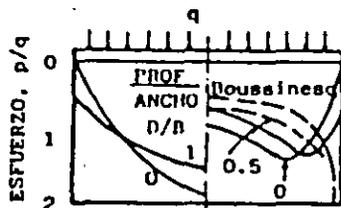


FIGURA 20

Se han llevado a cabo mediciones en campo, en las cimentaciones reales, para verificar la validez de los análisis de interacción suelo - estructura. Mayerhof ( 1979 ) presenta los resultados que se escriben en los siguientes párrafos.

Las observaciones indican que en zapatas rígidas uniformemente, con la excepción de arena suelta, la presión de contacto es mayor en la esquina y menor en el centro, como era de esperar de acuerdo a la teoría ( fig. 21; Meyerhof, 1979 ) . Las mediciones anteriores también han mostrado que la heterogeneidad local de las propiedades del suelo cerca de la base tiene una influencia considerable en la distribución de la presión de contacto (sobre todo se deja sentir el efecto de la falta de confinamiento del suelo cerca de los extremos de la zapata ). Por otro lado, las mediciones indican que el máximo momento flexionante puede ser hasta 30 % mayor que el obtenido con el método de análisis convencional.

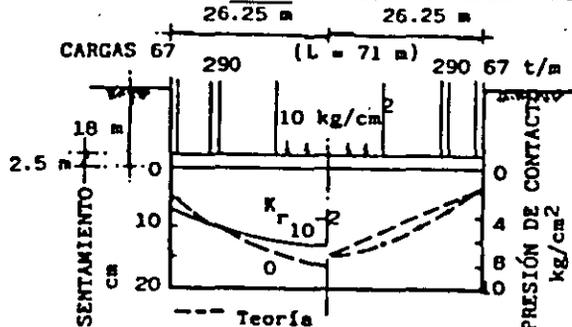
En la fig. 22 y 23 se presentan resultados ( Meyerhof, 1979 ) de mediciones en estructuras reales de gran tamaño ( en el primer caso se trata de un edificio de 52 pisos y en el segundo de otro de 15 pisos ). El análisis de las dos figuras permite afirmar que los valores teóricos determinados empleando los métodos de interacción suelo - estructura, es decir, considerando la rigidez de la estructura, son muy similares a los valores medidos en el campo (asentamiento, presión de contacto, momento flexionante y fuerza cortante ).



a) Arena    b) Arena compacta y arcilla rígida

FIG 21 PRESIÓN DE CONTACTO SOBRE ZAPATAS RÍGIDAS CARGADAS UNIFORMEMENTE SOBRE ARENA Y ARCILLA (MEYERHOF, 1979)

REFERENCIA: FOCHT et al (1978) 52 PISOS + SÓTANO

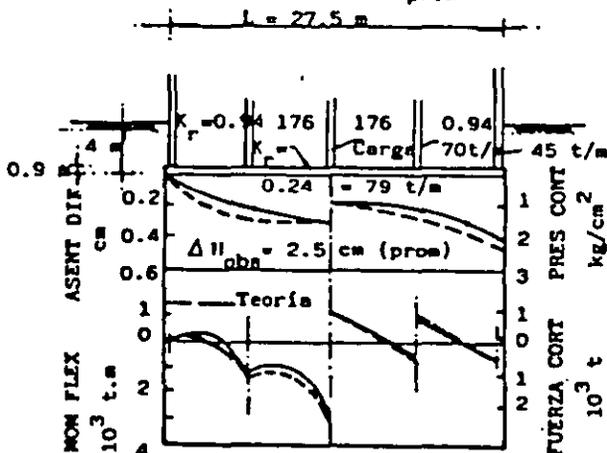


Arcilla arenosa muy preconsolidada  $v = 20\%$   
 $I_p = 40\%$   $c_u = 1.5 \text{ kg/cm}^2$

FIG 22 ASENTAMIENTO Y PRESIÓN DE CONTACTO PARA LOSAS SEMIRRÍGIDAS SOBRE ARCILLA (MEYERHOF, 1979)

REFERENCIA: EDEN et al (1973)

EDIFICIO DE 15 PISOS + SÓTANO ( $B_{\text{proa}} = 18 \text{ m}$ )



Arcilla poco preconsolidada  $v = 45\%$   $I_p = 25\%$

FIG 23 ASENTAMIENTOS, PRESIÓN DE CONTACTO, MOMENTO FLEXIONANTE y FUERZA CORTANTE PARA LOSAS RÍGIDAS SOBRE ARCILLA (MEYERHOF, 1979)

## 6. CONCLUSIONES

En relación con la interacción estática suelo - estructura se puede concluir lo siguiente:

a) Existe un buen número de métodos que tratan el problema, En términos generales, la mayoría de ellos determinan las deformaciones del terreno de cimentación utilizando la matriz de flexibilidades del suelo. En cambio, en el análisis de la estructura, algunos procedimientos emplean la matriz de rigideces, mientras que otros usan la matriz de flexibilidades de la estructura. Cabe aclarar que prácticamente todos los métodos resuelven el problema, es decir, todos ellos obtienen los diagramas de asentamientos diferenciales del suelo y de reacciones del mismo, tomando en cuenta la rigidez de la estructura de cimentación. Inclusive, algunos de los procedimientos toman en cuenta el efecto de la superestructura ( con todos sus pisos ) en el análisis de interacción.

b) La mayoría de los procedimientos de interacción se presentan en forma bidimensional, en el plano ( quizá por facilidad de exposición ), pero se pueden extender en forma relativamente sencilla a tres dimensiones. El principal inconveniente de tratar el problema en el espacio es que el número de operaciones es elevado, lo cual cae fuera del alcance de la mayoría de las oficinas del cálculo estructural o de mecánica de suelos.

c) La solución del problema de interacción se puede realizar haciendo un análisis de la estructura y un análisis de deformaciones del suelo, y llevando a cabo después una combinación adecuada de ambos, que de hecho es lo que hacen la mayoría de los métodos presentados en los incisos anteriores. Se observa que el ingeniero de cimentaciones, al dedicarse a la interacción suelo -estructura, debe manejar en la forma más clara posible sus conceptos de análisis estructural y de mecánica de suelos.

d) Dada la gran cantidad de operaciones a realizar, la resolución de un problema de interacción suelo - estructura se lleva a cabo en general con el auxilio de programas de computadora, los cuales, actualmente, se pueden correr en una microcomputadora (o PC ), con las que se cuenta en la s oficinas de cálculo.

e) Un aspecto importante de la interacción suelo - estructura es el relativo a las propiedades de la estructura y el suelo. En la estructura el módulo de elasticidad del concreto, para fines de cálculo, disminuye con el tiempo. En el terreno de cimentación, la deformabilidad es función del nivel de esfuerzos, ya que el comportamiento de los suelos es no lineal. Además, en los sedimentos plásticos saturados la deformabilidad del suelo depende del tiempo. Por lo tanto, en los cálculos de interacción se debe tomar en cuenta en forma apropiada en cambio de las propiedades de los suelos con las variables mencionadas. Inclusive, en los extremos de una estructura de cimentación, o en pilotes sujetos a cargas laterales, el suelo alcanza niveles de esfuerzo cercanos a la falla, por lo que hay que considerar en estos casos el comportamiento plástico del terreno. Por lo anterior, conviene trabajar con los módulos secantes de deformación del suelo, acordes con el nivel de esfuerzos y, en caso de suelos finos saturados, con el tiempo.

f) Algunos procedimientos emplean el módulo de reacción  $K$  en la interacción suelo - estructura. Dado que  $K$  depende de las propiedades del suelo, es válido expuestos en el inciso ( e ) anterior respecto a la variabilidad de las propiedades de los suelos. Pero, además en una cimentación continua el módulo  $K$  depende de la reacción del suelo y de las deformaciones de la cimentación, por lo que no se conoce a priori, sino que solo con

iteraciones es posible determinar su valor. En consecuencia, en cimentaciones continuas no es posible asignar valores de K en función del tipo de suelo, como se pretende hacer en ocasiones en la práctica.

g) En cimentaciones a base de zapatas aisladas, cuando no existe influencia de un cimiento sobre otro, ya sea por el tipo de terreno o por que estén las zapatas suficientemente separadas, se puede realizar la interacción suelo - estructura considerando módulos de reacción al desplazamiento vertical y al giro. En el inciso 2.2 se presentó un procedimiento que resuelve este caso, considerando las reacciones del suelo como cargas sobre la estructura.

h) La comparación de resultados entre considerar una reacción uniforme y tomar en cuenta la interacción suelo - estructura exhibe diferencias notables en los diagramas de hundimientos diferenciales, reacción del terreno y elementos mecánicos ( momento flexionante y fuerza cortante ), en la mayoría de los casos. Se puede presentar inclusive en algunos casos cambio de sentido en los momentos flexionantes de la estructura de cimentación o de la superestructura.

i) En cambio, la comparación entre observaciones de campo en estructuras reales con los métodos que toman en cuenta la rigidez de la estructura de cimentación, ha dado resultados promisorios, pues los valores determinados con los métodos de interacción son similares a los valores medidos en campo.

## 7. REFERENCIAS

Chamecki, S ( 1956 ), " Structural rigidity in calculating settlements " Journal of the Soils Mech Found Division, Proc ASCE, Vol 88 No SMI, enero

Damy, J.Esteva, L y Guerra, ( 1977 ), "Métodos incrementales en el análisis de cimentaciones continuas sobre terreno compresible", Memoria del 1er Congreso Nacional sobre Ing. Estructural, Soc. Mex de Ing. Estructural, México, D,F

Manual de Diseño de obras Civiles. C.2.2 Diseño Estructural de Cimentaciones 1980 ). Comisión Federal de Electricidad.

Matlock, H ( 1970 ). "Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay" Proceedings of the Fifth Int Conf of Soil Mech and Found Eng. Paris, pp 17 -22, july

Meyerhof,G.G ( 1979 ), "Soil - structure interaction and foundations " Memorias del VI Congreso Panamericano de Mec. De Suelos e Ing. De Cimentaciones. Vol. I, pp 109 - 140, Lima Perú.

Reese, Ic. Cox, W. R y Koop, F.D. ( 1974 ). "Analysis of laterally loaded piles in sand". Sixth Annual Offshore Technology Conf. Houston, Tex, may.

Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos ( 1983 ). Manual de Diseño y Construcción de Pilas y Pilotes. México. ( Elaborado por el Instituto de Ingeniería y Sólum )

Yegian, M y Wright, S. G ( 1973 )." Lateral soil resistance - Displacement relationships for pile foundations in soft clays ".Fifht Annual Offshore Technology Conf.Houston, Tex, april - may.

Zeevaert, L ( 1983 ), Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions.Van Nostrand Reinhold, New York.

Zeevaert, L ( 1980 ).Interacción Suelo - Estructura de Cimentación. Limusa

Zeevaert, L ( 1983 ), Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions.2nd edition, Van Nostrand Reinhold, New York.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

### **TEMA**

## **UN METODO PARA EL ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL DE LA INTERACCION ESTATICA SUELO - ESTRUCTURA**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMENEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DEL 2001**

# UN METODO PARA EL ANALISIS TRIDIMENSIONAL DE LA INTERACCION ESTATICA SUELO-ESTRUCTURA

Agustín Deméneghi

Facultad de Ingeniería, UNAM. México

## **RESUMEN**

Se presenta un procedimiento para el análisis de interacción estática suelo-estructura en tres dimensiones, el cual toma en cuenta toda la estructura y todos los estratos del subsuelo. Esta técnica permite además de conocer los elementos mecánicos en cualquier nudo de la estructura, incluyendo desde luego la estructura de cimentación. con el propósito de ilustrar el empleo del método, se presenta un ejemplo sencillo de aplicación resuelto paso a paso.

## **ABSTRACT**

A method for the dimensional analysis of static soil-structure interaction is presented, in which the whole structure and all the subsoil strata are considered. With this technique we can determine the mechanical elements in each node of the structure, including the substructure. A simple illustrative example is presented for the explanation of the method.

## **1. INTRODUCCION**

Se han desarrollado hasta la fecha técnicas de interacción estática suelo-estructura bastante útiles la mayoría de ellas; sin embargo, muchos de estos métodos están elaborados para aplicarse únicamente en dos dimensiones, de manera que el análisis de una estructura se realiza en un plano, lo cual hace que se pierda la visualización del fenómeno tridimensional. Se puede intentar hacer análisis en dos direcciones ortogonales y superponer los efectos, para representar el fenómeno tridimensional, pero aun así el procedimiento es aproximado, y además no es posible conocer los elementos mecánicos en las vigas intermedias de la estructura de cimentación. Por lo tanto, es necesario desarrollar procedimientos que tomen en cuenta el efecto tridimensional en la interacción suelo-estructura.

En este artículo se presenta un método de interacción tridimensional que toma en cuenta toda la estructura y todos los estratos del subsuelo.

La técnica de interacción que se propone (Deméneghi 1983) consiste en considerar las reacciones del terreno de cimentación como cargas sobre la estructura, manejándolas como incógnitas. Después se calculan los hundimientos del suelo en función de las cargas sobre él (éstas cargas iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones, por la tercera ley de Newton). Finalmente se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo, lo que equivale a igualar los desplazamientos entre ambos medios; con esto se resuelve el problema, ya que se obtienen los hundimientos del suelo y las reacciones sobre la estructura. Como previamente se realizó el análisis estructural, es posible determinar además los giros en

los nudos de la estructura. con estos resultados se pueden calcular los elementos mecánicos en toda la estructura, incluyendo desde luego a la estructura de cimentación.

## 2. ANALISIS ESTRUCTURAL

Para fines de interacción es conveniente utilizar el método de rigideces del análisis estructural, en el que la ecuación general de equilibrio de una estructura está dada por (Beaufait et al 1970)

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}_e + \underline{P}_c$$

donde

$$\begin{aligned} \underline{K} &= \text{matriz de rigideces de la estructura} \\ \underline{\delta} &= \text{vector de desplazamientos} \\ \underline{P}_e &= \text{vector de cargas de empotramiento} \\ \underline{P}_c &= \text{vector de cargas concentradas} \end{aligned}$$

La matriz de rigideces de la estructura se puede obtener mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura. Para la determinación de los vectores de empotramiento en las vigas de la estructura de cimentación, debido a la reacción del terreno, consideramos una carga repartida de un extremo hasta la mitad de una barra y otra carga repartida de la mitad hasta el otro extremo de la barra. La convención de signos utilizada es la siguiente: los giros se consideran positivos en sentido antihorario y los desplazamientos lineales son positivos si van hacia abajo en una barra horizontal (o hacia la izquierda en barra vertical). Los momentos flexionantes son positivos en sentido horario, y las fuerzas cortantes son positivas si van hacia arriba en barra horizontal (o hacia la derecha en barra vertical). A continuación presentamos las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento para las siguientes condiciones de apoyo:

a) Barra con una articulación a la izquierda y un apoyo continuo a la derecha (fig. 1)

La matriz de rigidez está dada por:

$$\underline{K}_m = \begin{bmatrix} \theta_q & \delta_r & \delta_s \\ 3EI/L & -3EI/L^2 & 3EI/L^2 \\ -3EI/L^2 & 3EI/L^3 & -3EI/L^3 \\ 3EI/L^2 & -3EI/L^3 & 3EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix} \quad (2)$$

El vector de cargas de empotramiento vale

$$\underline{P}_{em} = \begin{bmatrix} -wL^2/8 + (7/128)L^2 r_r + (9/128)L^2 r_s \\ -3wL/8 + (41/128)L r_r + (7/128)L r_s \\ -5wL/8 + (23/128)L r_r + (57/128)L r_s \end{bmatrix} \quad (3)$$

b) Barra con una articulación a la derecha y un apoyo continuo a la izquierda (fig. 2)

La matriz de rigidez está dada por:

$$K_m = \begin{bmatrix} \theta_q & \delta_r & \delta_s \\ 3EI/L & -3EI/L^2 & 3EI/L^2 \\ -3EI/L^2 & 3EI/L^3 & -3EI/L^3 \\ 3EI/L^2 & -3EI/L^3 & 3EI/L^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \delta_r \\ \delta_s \end{matrix} \quad (4)$$

El vector de carga de empotramiento vale

$$P_{em} = \begin{bmatrix} wL^2/8 - (9/128)L^2 r_r - (7/128)L^2 r_s \\ -5wL/8 + (57/128)L r_r + (23/128)L r_s \\ -3wL/8 + (7/128)L r_r + (41/128)L r_s \end{bmatrix} \quad (5)$$

La matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento para una barra con dos apoyos continuos se obtiene en forma similar a la de las barras anteriores (véase Beaufait *et al* 1970).

Como indicamos antes, la matriz de rigideces de toda la estructura es la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras de la estructura. El vector de cargas de empotramiento de toda la estructura se obtiene sumando los vectores de cargas de empotramiento de todas y cada una de las barras. el vector de cargas concentradas se determina asignando a cada grado de libertad la carga concentrada que actúa sobre él. con esto se realiza el análisis estructural de toda la estructura.

Por falta de espacio no presentamos las expresiones para la determinación de los elementos mecánicos, pero, a manera de ejemplo, para una barra con una articulación a la izquierda y un apoyo continuo a la derecha (fig. 1)

$$M_q = -wL^2/8 + (7/128)L^2 r_r + (9/128)L^2 r_s + (3EI/L)\theta_q - (3EI/L^2)\delta_r + (3EI/L^2)\delta_s \quad (6)$$

$$V_r = -3wL/8 + (41/128)L r_r + (7/128)L r_s - (3EI/L^2)\theta_q + (3EI/L^3)\delta_r - (3EI/L^3)\delta_s \quad (7)$$

### 3. HUNDIMIENTOS DEL TERRENO DE CIMENTACION

En este inciso consideramos las cargas que transmite la estructura sobre el terreno de apoyo, las que son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura, por la tercera ley de Newton. Calculemos los asentamientos del terreno en función

de estas cargas; consideremos una reacción  $r_k$  actuando en la superficie (fig. 3); la presión vertical vale  $r_k d_k / a_k$ , donde  $d_k$  y  $a_k$  son la longitud y el área en las que actúa la carga, respectivamente. La deformación del estrato de espesor  $H_{ij}$ , debida a la carga  $r_k$  vale

$$\delta_{ijk} = M_{zij} H_{ij} \sigma_{zij}$$

Pero  $\sigma_{zij} = l_{ijk} r_k d_k / a_k$

donde  $l_{ijk}$  es el valor de influencia, el cual está dado por el esfuerzo normal vertical en el punto  $ij$ , producido por una presión unitaria actuando en el área  $a_k$  (Zeevaert 1973).

$M_{zij}$  módulo lineal de deformación, el cual se define como el cociente de la deformación unitaria que la ocasiona.

En consecuencia  $\delta_{ijk} = M_{zij} H_{ij} l_{ijk} r_k d_k / a_k$

La deformación del estrato, debida a todas las cargas vale

$$\delta_{ij} = M_{zij} H_{ij} \sum_{k=1}^{n_r} l_{ijk} r_k d_k / a_k$$

donde  $n_r$  = número total de cargas  $r_k$

El asentamiento bajo el punto  $i$  vale

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{n_e} M_{zij} H_{ij} \sum_{k=1}^{n_r} l_{ijk} r_k d_k / a_k$$

donde  $n_e$  = número total de estratos.

En la ec. 8 los hundimientos del terreno quedan en función de las cargas  $r_k$ .

#### 4. COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES

En esta etapa se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo de cimentación, lo que equivale a considerar que tanto los desplazamientos de la estructura como los del terreno son iguales, es decir, que el suelo no se despegue de la estructura. Analíticamente esto se alcanza sustituyendo los valores dados por la ec. 8 en la ec. 1. De esta manera desaparecen como incógnitas los giros en los nudos y las reacciones del terreno. Es fácil ver que el número de ecuaciones es el mismo que el de las incógnitas, con lo que se puede resolver el sistema de ecuaciones y despejar los giros y las reacciones. Empleando la ec.8, ya conocidas las reacciones, se pueden determinar también los hundimientos del terreno de apoyo.

## 5. EJEMPLO ILUSTRATIVO.

Presentamos en este inciso un ejemplo muy sencillo resuelto paso a paso, con el propósito de que el lector visualice las etapas requeridas para el análisis de interacción.

Se pide determinar las reacciones y los hundimientos del terreno, para la estructura mostrada en la fig. 4, cuya cimentación es a base una losa corrida. Se piden también los elementos mecánicos. La estratigrafía y propiedades del subsuelo se muestran en la fig.5.

### a) Análisis estructural

Primeramente numeramos las barras y los grados de libertad de la estructura, como se indica en la fig.6. Dada la simetría de la estructura, presentamos a continuación los de la barra 1 (articulación a la izquierda) y la barra 7 (articulación a la derecha). Cabe aclarar que se desprecian los efectos de torsión en las barras.

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$
1	---	$\theta_{10}$	$\delta_1$	$\delta_2$
7	$\theta_{10}$	---	$\delta_2$	$\delta_3$

A continuación hallaremos las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento de las barras 1 y 7. Las demás matrices y vectores se obtiene en forma similar. Aplicando la ec. 2 para la barra 1:

$$\underline{K}_1 = \begin{bmatrix} \theta_{10} & \delta_1 & \delta_2 \\ 1786.898 & -415.558 & 415.558 \\ -415.558 & 96.641 & -96.641 \\ 415.558 & -96.641 & 96.641 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{10} \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix}$$

Aplicando la ec.4 para la barra 3

$$\underline{K}_7 = \begin{bmatrix} \theta_{10} & \delta_2 & \delta_3 \\ 1786.898 & -415.558 & 415.558 \\ -415.558 & 96.641 & -96.641 \\ 415.558 & -96.641 & 96.641 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_{10} \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

La matriz de rigideces de toda la estructura es la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras de la estructura (el rango de cada matriz se toma de 15 por 15). A manera de ejemplo se presenta a continuación la matriz de rigidez de la estructura para los primeros 5 grados de libertad.

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \dots \\ 193.282 & -96.641 & 0 & -96.641 & 0 & \dots & \delta_1 \\ -96.641 & 214.937 & -96.641 & 0 & -21.655 & \dots & \delta_2 \\ 0 & -96.641 & 193.282 & 0 & 0 & \dots & \delta_3 \\ -96.641 & 0 & 0 & 214.937 & -21.655 & \dots & \delta_4 \\ 0 & -21.655 & 0 & -21.655 & 86.620 & \dots & \delta_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

El vector de desplazamientos, para los primeros cinco grados de libertad, vale

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Determinemos a continuación el vector de cargas de empotramiento. Aplicando la ec. 3 para la barra 1:

$$\underline{P}_{e1} = \begin{bmatrix} -1.849 + 1.011r_1 + 1.3r_2 \\ -1.29 + 1.377r_1 + 0.2352r_2 \\ -2.15 + 0.7727r_1 + 1.9148r_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{GL} \\ 10 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

GL = grado de libertad

Aplicando la ec. 5 para la barra 3:

$$\underline{P}_{e3} = \begin{bmatrix} 1.849 - 1.3r_2 - 1.011r_3 \\ -2.15 + 1.915r_2 + 0.7727r_3 \\ -1.29 + 0.2352r_2 + 1.3773r_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{GL} \\ 10 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Como ejemplo presentamos a continuación el vector de cargas de empotramiento de la estructura para los primeros 5 grados de libertad.

$$\underline{P}_e = \begin{bmatrix} -2.25 + 2.7546 r_1 + 0.2352 r_2 + 0.2352 r_4 \\ -6.88 + 0.7727 r_1 + 5.2069 r_2 + 0.7727 r_3 + 0.2352 r_5 \\ -2.58 + 0.2352 r_2 + 2.7546 r_3 + 0.2352 r_6 \\ -6.88 + 0.7727 r_1 + 5.2069 r_4 + 0.2352 r_5 + 0.7727 r_7 \\ -17.2 + 0.7727 r_2 + 0.7727 r_4 + 7.6592 r_5 + 0.7727 r_6 + 0.7727 r_8 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{GL} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \quad 4$$

GL = grado de libertad

El vector de cargas concentradas, para los primeros 5 grados de libertad, esta dado por:

$$\underline{P}_c = \begin{bmatrix} -9.6 \\ 0 \\ -9.6 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{GL} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$$

Sustituyendo valores en la ec. 1, y tomando en cuenta que, por simetría:

$$\begin{aligned} \delta_1 = \delta_3 = \delta_7 = \delta_9 & & \delta_2 = \delta_4 = \delta_6 = \delta_8 \\ r_1 = r_3 = r_7 = r_9 & & r_2 = r_4 = r_6 = r_8 \\ \theta_{10} = \theta_{11} = \theta_{12} = \theta_{13} = \theta_{14} = \theta_{15} = 0 \end{aligned}$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones (que representan el equilibrio de cortantes o de momentos en el grado de libertad correspondiente):

Grado de libertad 1

$$193.28 \delta_1 + 193.28 \delta_2 + 2.7546 r_1 + 0.4704 r_2 - 2.58 - 9.6 = 0 \quad (\text{a})$$

Grado de libertad 2

$$-193.28 \delta_1 + 214.937 \delta_2 - 21.655 \delta_3 + 1.5454 r_1 + 5.2069 r_2 + 0.2352 r_5 - 6.88 = 0 \quad (\text{b})$$

Grado de libertad 5

$$- 86.62 \delta_2 + 86.62 \delta_5 + 3.0896 r_2 + 7.6592 r_5 - 17.2 = 0 \quad (c)$$

b) Análisis de deformaciones del terreno de cimentación Haciendo  $i = 1$  en la ec. 8

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \sum_{j=1}^2 M_{z=1j} H_{1j} \sum_{k=1}^9 I_{1jk} r_k d_k / a_k \\ &= M_{z=11} H_1 (I_{111} d_1 r_1 / a_1 + I_{112} d_2 r_2 / a_2 + \dots + I_{119} d_9 r_9 / a_9) \\ &+ M_{z=12} H_2 (I_{121} d_1 r_1 / a_1 + I_{122} d_2 r_2 / a_2 + \dots + I_{129} d_9 r_9 / a_9) \quad (d) \end{aligned}$$

Como se indico en el inciso 3, el valor de influencia  $I_{1jk}$  representa el esfuerzo en el punto 1j debido a una presión unitaria colocada en el área k. Calculemos como ejemplo un valor de influencia, digamos en  $I_{115}$ . en la fig. 7 se muestra la planta del área 5 y del punto 1. Colocamos una presión unitaria en el área 5 y calculamos el esfuerzo bajo el punto 1, a la mitad del estrato 1, es decir, a una profundidad de 1.2 m. Aplicando la ecuación de Boussinesq, se obtiene un esfuerzo vertical de 0.002988. Los demás valores de influencia se obtiene en forma similar. Sustituyendo valores en la ec. (d).

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.0154 (2.4) [0.2271(4.3r_1) / 4.6225 + 0.009375 (6.45r_2) / 9.245 \\ &+ 0.0001528 (4.3r_3) / 4.6225 + 0.009375 (6.45r_4) / 9.245 \\ &+ 0.002988 (8.6r_5) / 18.49 + 0.0001625 (6.45r_6) / 9.245 \\ &+ 0.0001528 (4.3r_7) / 4.6225 + 0.0001625 (6.45r_8) / 9.245 \\ &+ 0.0002824 (4.3r_9) / 4.6225 \\ &+ 0.0222 (2.0) [0.1139 (4.3r_1) / 4.6225 + 0.04407 (6.45r_2) / 9.245 \\ &+ 0.002284 (4.3r_3) / 4.6225 + 0.04407 (6.45r_4) / 9.245 \\ &+ 0.028026 (8.6r_5) / 18.49 + 0.002638 (6.45r_6) / 9.245 \\ &+ 0.0022836 (4.3r_7) / 4.6225 + 0.002638 (6.45r_8) / 9.245 \\ &+ 0.0005157 (4.3r_9) / 4.6225] \end{aligned}$$

Sabemos por simetría

$$r_1 = r_3 = r_7 = r_9 \quad r_2 = r_4 = r_6 = r_8$$

Sustituyendo valores y haciendo operaciones

$$\delta_1 = 0.012733 r_1 + 0.0033854 r_2 + 0.00063012 r_5 \quad (e)$$

En forma análoga se obtienen  $\delta_2$  y  $\delta_5$

$$\delta_2 = 0.0036877 r_1 + 0.020326 r_2 + 0.0021424 r_5 \quad (f)$$

$$\delta_5 = 0.0028714 r_1 + 0.010629 r_2 + 0.025023 r_5 \quad (g)$$

c) Compatibilidad de deformaciones

La compatibilidad de deformaciones entre la estructura y el terreno de cimentación se logra sustituyendo las ecs. (e), (f) y (g) en las ecs. (a), (b) y (c); así, se obtiene:

Grado de libertad 1

$$4.5029 r_1 - 2.8039 r_2 - 0.2923 r_5 - 12.18 = 0 \quad (a')$$

Grado de libertad 2

$$-0.1852 r_1 + 8.6912 r_2 + 0.03202 r_5 - 6.88 = 0 \quad (b')$$

Grado de libertad 5

$$-0.07071 r_1 + 2.2496 r_2 + 9.6411 r_5 - 17.2 = 0 \quad (c')$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$r_1 = 3.343 \text{ t/m} \quad r_2 = 0.8569 \text{ t/m} \quad r_5 = 1.609 \text{ t/m}$$

Los hundimientos del terreno de cimentación se obtienen sustituyendo los valores de las reacciones en las ecs. (e), (f) y (g)

$$\delta_1 = 0.0465 \text{ m} \quad \delta_2 = 0.0332 \text{ m} \quad \delta_5 = 0.0590 \text{ m}$$

Para ilustrar la determinación de elementos mecánicos, utilizamos para la barra 1 las ecs. 6 y 7

$$M_{10} = -2.88 \text{ t.m} \quad V_1 = 4.8 \text{ t}$$

## 6. CONCLUSIONES

Como se puede apreciar en los incisos anteriores, es posible en forma relativamente sencilla llevar a cabo el análisis de interacción suelo-estructura en el espacio, sin necesidad de hacer iteraciones. Además se toma en cuenta toda la estructura y todos los estratos del subsuelo. Uno de los aspectos importantes es que para aplicar esta técnica en la práctica profesional, es necesario elaborar programas de computadora, los cuales utilizan grandes cantidades de memoria, ya que en tres dimensiones el número de grados de libertad es mucho mayor que el que se utiliza en análisis bidimensional

## REFERENCIAS

- Beaufait, F W, Rowan, W H, Hoadley, P G y Hackett, R M, Computer Methods of Structural Analysis, Prentice-Hall, 1970
- Deméneghi, A, "Interacción suelo-estructura". Rev Ingeniería. Vol LIII, No 4, pp 80-90, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1983
- Zeevaert, L, Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions, Van Nostrand Reinhold, 1973

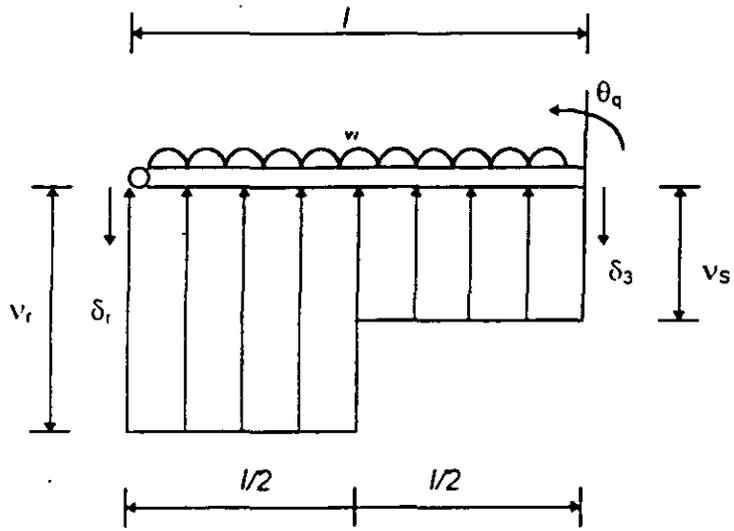


Figura 1. Barra articulada a la izquierda

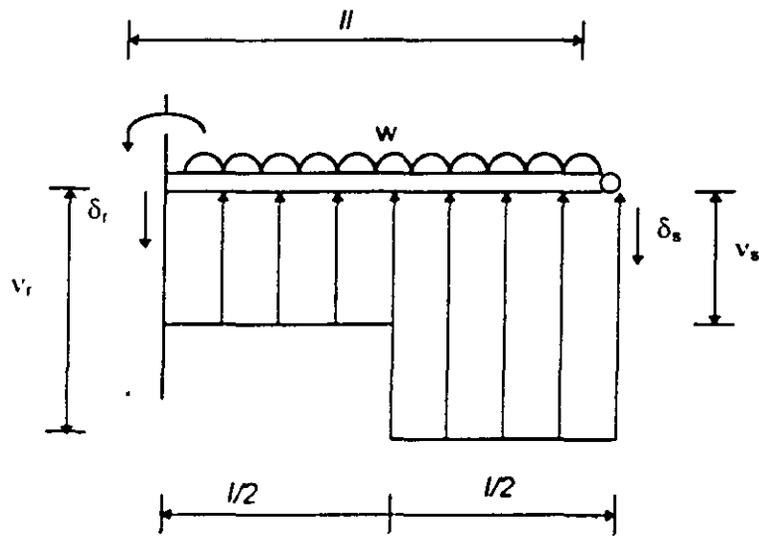


Figura 2. Barra articulada a la derecha

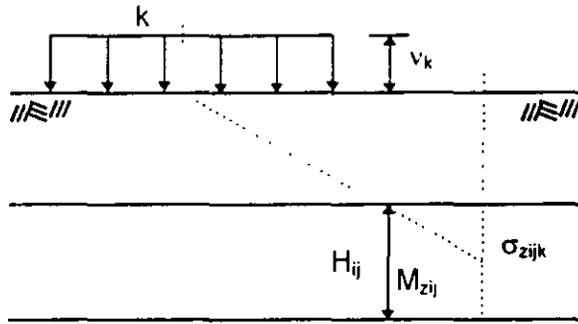


Figura 3. Cálculo de los hundimientos del terreno

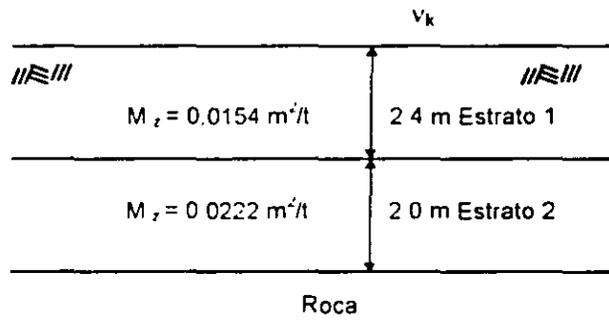


Figura 5. Estratigrafía y propiedades

(Ejemplo)

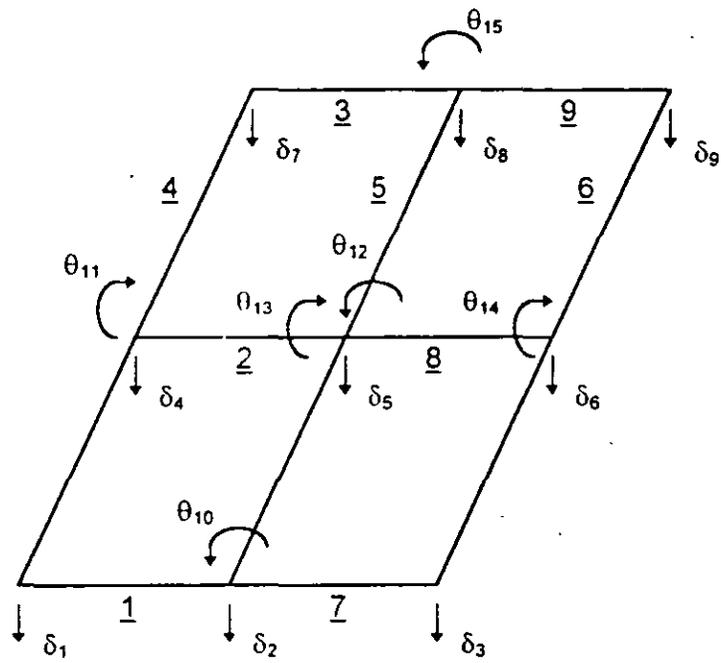


Figura 6. Numeracion de barras y grados de libertad

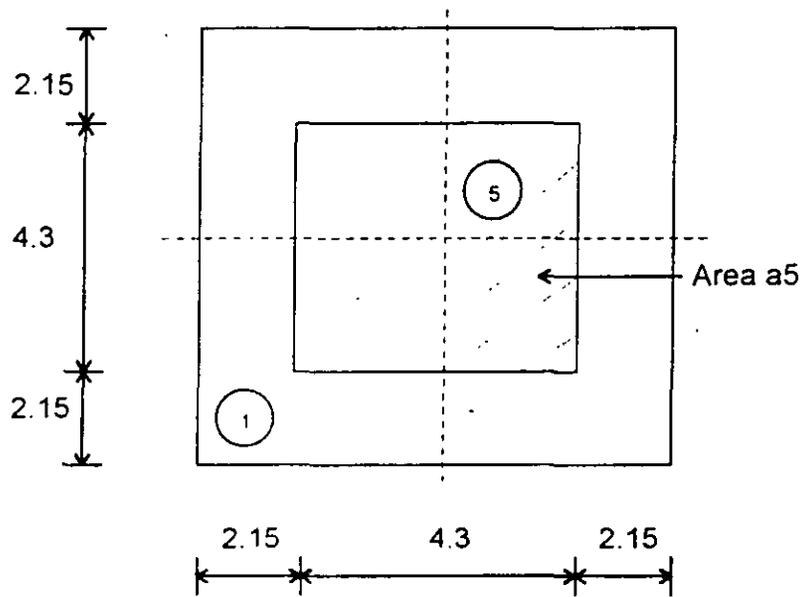


FIGURA 7. Determinación de los valores de influencia



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

### **TEMA**

## **METODO MIXTO DE FLEXIBILIDAD Y RIGIDECES ANÁLISIS DE EFECTOS DINAMICOS**

**EXPOSITOR: DR. JOSE LUIS CAMBA CASTAÑEDA  
AUTOR: ING. JULIO DAMY RIOS +  
PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DEL 2001**

## 1. INTRODUCCION.

El análisis estructural, a través del método de rigideces, resuelve el problema del análisis de sistemas estructurales, mediante la solución de la ecuación general  $\{F\} = [k] \{d\}$ , en donde el tamaño de la matriz de rigideces de la estructura  $[k]$ , mantiene una relación directa con el número de grados de libertad angular y lineal del sistema estructural.

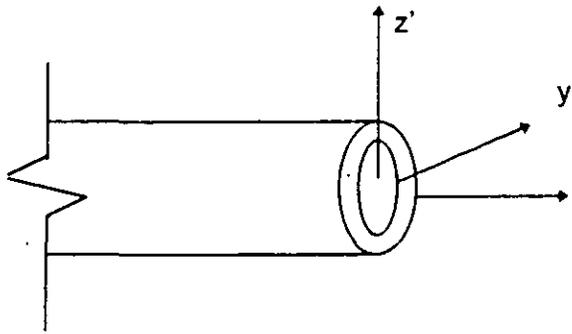
En un planteamiento tradicional, el análisis estructural concibe como nudos de una estructura a todos aquellos puntos en que concurren dos o más elementos de la misma.

Es posible, a través de un planteamiento más elaborado reducir el número de nudos de una estructura si sólo se consideran como tales a los puntos en que concurren tres o más elementos de esta, lo cual reduce considerablemente el tamaño de la matriz de rigideces de la estructura  $[k]$ , siendo esto ventajoso desde el punto de vista de la solución matemática y sobre todo de la aplicación de computadores al análisis estructural.

Este planteamiento es de interés particular cuando se aplica al análisis estructural del sistema de tuberías en dos o tres dimensiones, debido a que en estos sistemas estructurales existe por lo general un número suficientemente grande de puntos en que concurren solamente dos tramos de tubería (quebres), como para pensar en un tratamiento especial para ellos, sin considerarlos como nudos.

## 2. CARACTERISTICAS

- 1.- NUDO.- Se considerarán como nudos sólo aquellos puntos de la estructura en que concurren tres o más tramos de barra y a los apoyos incompletos.
- 2.- TRAMO DE BARRA.- Se llamará así al tramo recto comprendido entre dos quiebres adyacentes a una barra.
- 3.- BARRA.- Se entenderá por barra, a la parte de tubería comprendida entre dos nudos.
- 4.- SECCION TRANSVERSAL.- La Sección Transversal de cada barra, será un anillo circular constante en toda su longitud.

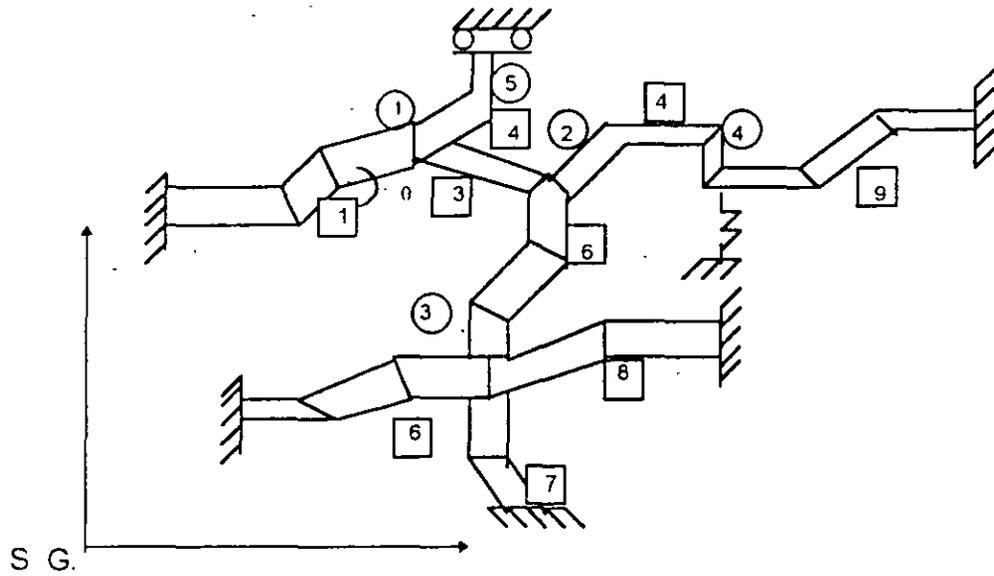


$$\begin{aligned} I_{x'} &= J \\ I_{y'} &= I_{z_1} = Y \\ A_{c_1} &= A_{c_2} = A_c \end{aligned}$$

FIGURA 1. Propiedades de la sección transversal y ejes locales de referencia (S. L.)

### 3. DEFINICIONES

A).- Para análisis en dos dimensiones.



○ Nudo

□ Barra

FIGURA 2 - Tubería en el plano  
Nótese que en un nudo pueden concurrir barras con diferentes sección transversal

S.G. = Sistema global de referencia.

A.1).- Matriz de transformación de coordenadas T para un tramo de barra.

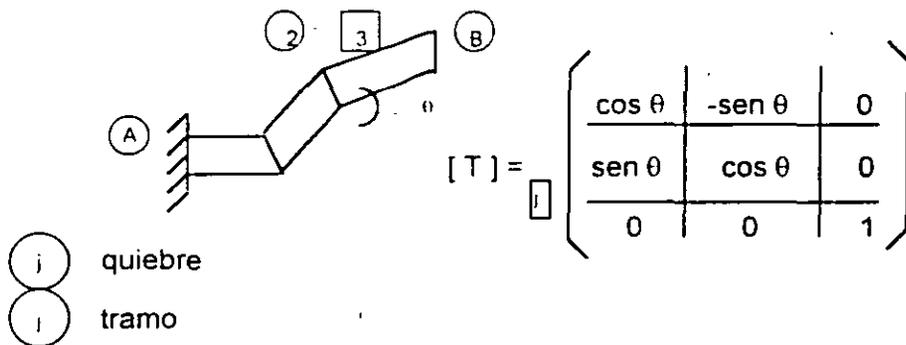


FIGURA 3.- Tramos de barra y ángulo  $\theta$  para la barra 1 de la figura 2.

donde  $\theta$  = inclinación del tramo de barra  $j$  referido al eje positivo en el S.G. medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

A.2.)- Matriz de transporte entre los puntos  $(B)$  y  $(j)$  referidos al S.G.

$$[H_{Bj}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(Y_B - Y_j) & (X_B - X_j) & 0 \end{pmatrix}$$

Referido al tramo  $[3]$  de la barra 1 (fig. 3), B es el nudo  $(1)$  y  $j$  es el quiebre  $(2)$

Nótese que para el tramo adyacente a un nudo, la matriz de transporte  $[H_{Bj}]$  toma la forma de la matriz identidad  $[Y]$ .

A.3 ) Matriz de flexibilidad del tramo  $[j]$  en su extremo  $(j)$  referido al S.L. de referencia. (ver Fig 1)

$$[f_{BB}] [j] = \begin{pmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3(1+C)}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{pmatrix}$$

(en S.L.)

donde :  $C = G (1+P) \frac{l}{AcL}$

P = Módulo de Poisson del material.

Ac = Area de cortante de la sección transversal.

**B).- Para análisis en tres dimensiones.**

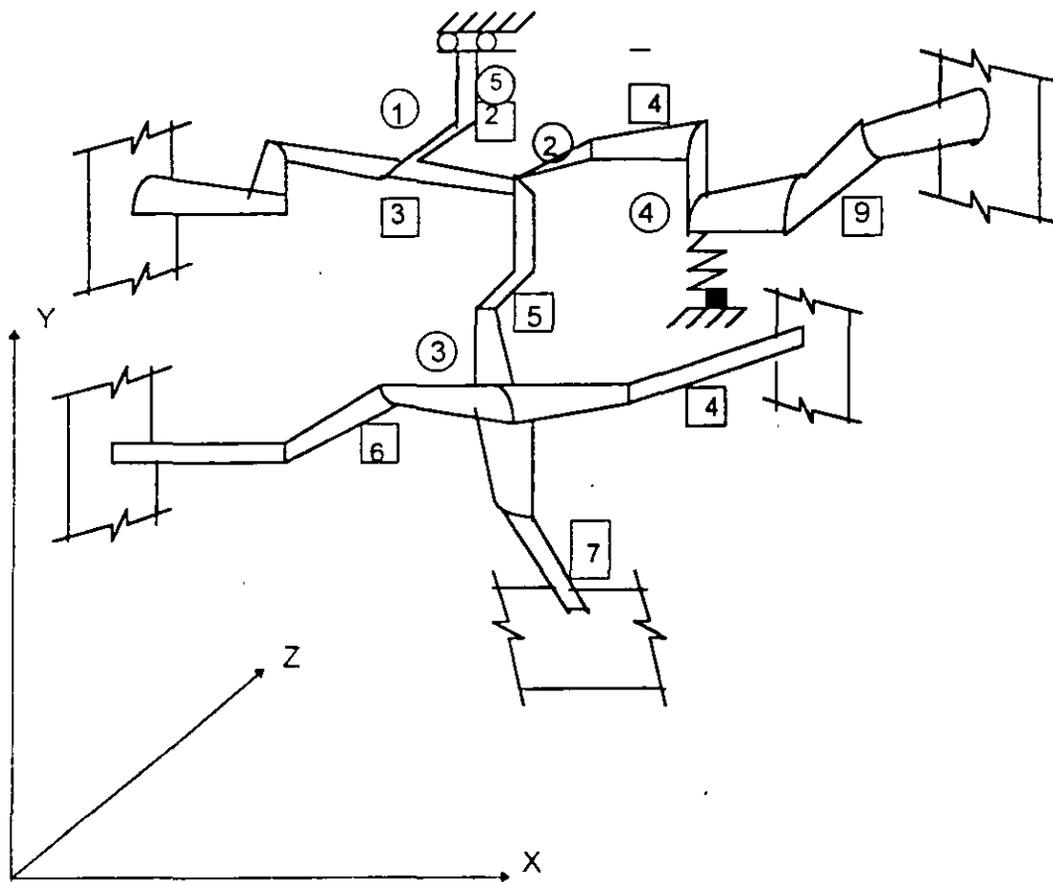


FIGURA 4.- Tubería en el espacio  
Nótese que en el nudo pueden concurrir barras con diferente sección transversal.

① nudo

① barra

S.G. Sistema global de referencia.

B.1.)- Matriz de transformación de coordenadas [ T ] para un tramo de barra.

$$[T]_{ij} = \begin{pmatrix} \wedge_3 & 0 \\ 0 & \wedge_3 \end{pmatrix}$$

donde:  $[\wedge_3] =$

$$\begin{pmatrix} Cx' x & Cy' x & Cz' x \\ Cx' y & Cy' y & Cz' y \\ Cx' z & Cy' z & Cz' z \end{pmatrix}$$

En la matriz  $[\wedge_3]$  los elementos de las columnas 1,2 y 3 son los cosenos directores de  $x'$ ,  $y'$  y  $z'$  respectivamente, del tramo  $ij$  en la barra  $i$  en el S.L., con el respecto al S.G. (fig. 1 y fig. 4).

B.2.)- Matriz de transporte entre los puntos B y j referidos al S.G.

$$[H_{Bj}] = \begin{pmatrix} [I] & 0 \\ [h] & [I] \end{pmatrix}$$

donde  $[h] =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -(Z_B - Z_j) & (Y_B - Y_j) \\ (Z_B - Z_j) & 0 & -(X_B - X_j) \\ -(Y_B - Y_j) & (X_B - X_j) & 0 \end{pmatrix}$$

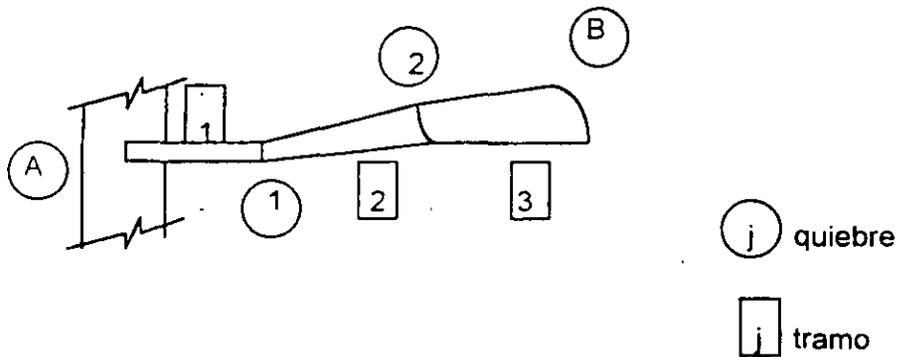


FIGURA 5.- Tramos de barra y quiebres para la barra  $ij$  de la figura 4 (para el tramo  $ij$ , B es el nudo  $3$  y j es el quiebre  $1$ )

Nótese que para el tramo adyacente a un nudo, la matriz de transporte [ H<sub>Bj</sub> ] toma la forma de la matriz identidad [ Y ].

B.3).- Matriz de Flexibilidad del tramo [ j ] en su extremo ( j ) referido al S.L. de referencia (ver fig. 1)

$$\text{donde } C = G(1 + P) \frac{1}{AcL^2}$$

P = Módulo de Poisson del material

Ac = Area de cortante de la sección transversal.

$$G = \frac{E}{2(1+p)}$$

[ f' <sub>BB</sub> ] [ j ] =

$\frac{L}{EA}$	0	0	0	0	0
0	$\frac{L^3(1+C)}{3EI}$	0	0	0	$\frac{L^2}{2EI}$
0	0	$\frac{L^3(1+C)}{3EI}$	0	$-\frac{L^2}{2EI}$	0
0	0	0	$\frac{L}{GJ}$	0	0
0	0	$-\frac{L^2}{2EI}$	0	$\frac{L}{EI}$	0
0	$\frac{L^2}{2EI}$	0	0	0	$\frac{L}{EI}$

( en S.L. )

## 4. PLANTEAMIENTO GENERAL

La solución de la ecuación general planteada en el análisis estructural a través del método de rigideces

$$\{F\} = [k] \{d\} \quad \dots (1)$$

comprende las siguientes etapas.

- A - Formación de la matriz de rigideces [k]
- B.- Cálculo del vector de fuerzas {F}
- C - Obtención del vector de desplazamientos mediante la solución de la ecuación general (1):
- D - Obtención de los elementos mecánicos en los extremos de cada barra, calculados a partir del vector de desplazamiento {d}.

Se tratarán aquí solamente los puntos A y B. Los puntos C y D corresponden a un planteamiento tradicional del análisis estructural.

### A.- Formación de la matriz de rigideces [k]

#### 1).- Formación de la matriz [k] en forma topológica

Se entiende por forma topológica de la matriz K a la representación matricial de la relación que guardan los extremos de las barras con los nudos de la estructura.

La matriz topológica [k] para las estructuras de las figuras 2 y 4 es idéntica y tiene la siguiente forma, si el extremo B de las barras coincide con el nudo 1, 4 o 3.

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{BB}]_1 + [K_{BB}]_2 & & & & \\ +[K_{BB}]_3 & [K_{BA}]_3 & & & \\ & & 0 & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & [K_{BA}]_2 \\ [K_{AB}]_3 & [K_{AA}]_3 + [K_{AA}]_4 & & & \\ +[K_{AA}]_5 & & [K_{AB}]_5 & & [K_{AB}]_4 & 0 \\ 0 & & & & & & 0 \\ & [K_{BA}]_5 & [K_{BB}]_6 + [K_{BB}]_7 & & & & 0 \\ +[K_{BB}]_8 & & & & & & \\ 0 & & & & & & & 0 \\ & [K_{BA}]_4 & & & & & [K_{BB}]_4 + [K_{BB}]_9 & 0 \\ [K_{AB}]_2 & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & [K_{AA}]_2 \end{bmatrix}$$

(en S.G.)

Nótese que puede pensarse en una reordenación de la nomenclatura de los nudos a fin de obtener un menor ancho de banda de la matriz  $[k]$ , lo cual es conveniente desde el punto de vista de la aplicación de computadores.

2) - Obtención de las matrices  $[K_{AA}]$ ,  $[K_{AB}]$ , y  $[K_{BB}]$  para cada barra en S.G.

Estas matrices están relacionadas entre si através de las siguientes expresiones:

$$[K_{AA}] = [H_{BA}] [K_{BB}] [H_{BA}]^T$$

$$[K_{AB}] = -[H_{BA}] [K_{BB}]$$

$$[K_{BA}] = -[K_{BB}] [H_{BA}]^T$$

donde A y B son los extremos de la barra (ver figura 3 y 5).

Por lo que sólo será necesario calcular  $[K_{BB}]$  de cada barra, y aplicar las expresiones anteriores para calcular  $[K_{AA}]$ ,  $[K_{AB}]$  y  $[K_{BA}]$ .

Para calcular  $[K_{BB}]$  se procede de la manera siguiente:

Recuerde que  $[K_{BB}] = [f_{BB}]^{-1}$ , por lo que el problema se reduce a calcular  $[f_{BB}]$  en S.G., la cual se obtiene a partir de la siguiente expresión: ( Ver figuras 3 y 5 ).

$$[f_{BB}]_j = \sum_{j=1}^{N_{\text{c tramos}}} [H_{Bj}]^T [f_{BB}]_j [H_{Bj}]$$

(en S.G.)

donde  $[H_{Bj}]$  y  $[f_{BB}]_j$  se encuentran referidas al S.G. de referencia.

La matriz de flexibilidad del tramo  $_j$  en el extremo B, referida al S.G. puede calcularse con la siguiente expresión.

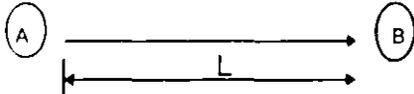
$$[f_{BB}]_{[j]} = [T]_{[j]} [f'_{BB}]_{[j]} [T]_{[j]}^T$$

(en S.G.)

### 3).- Tratamiento de apoyos incompletos.

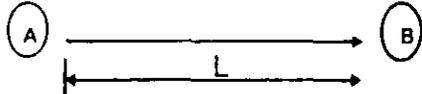
Un apoyo incompleto puede no ser considerado como nodo, si se emplean las rigideces modificadas del tramo de barra que ocurre en él.

A continuación se enlistan las matrices de rigideces modificadas para dos casos de interés práctico:



$$[K'_{AB}] = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(en S.L.)



$$[K'_{BB}] = [K'_{AA}] = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} \end{pmatrix}$$

(en S.L.)

$$[K'_{BB}] = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{pmatrix} \quad [K'_{AB}] = [K'_{BA}] = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI}{L} \end{pmatrix}$$

(en S.L.)

Para obtener  $[k]$  en S.G. se emplea la siguiente expresión:

$$[k] = [T] [k'] [T]^T$$

Con  $[T]$  tal como fue definido en III

### B.- Cálculo del vector de fuerzas $\{F\}$

Las cargas que pueden presentarse en un sistema de tuberías como el de las figuras 2 y 4, son las siguientes:

1.- Fuerzas externas aplicadas en:

- los nudos de la estructura
- los quiebres de las barras
- los tramos de cada barra

Considérese la barra 1 de la fig 2, cargada como se muestra en la figura 6

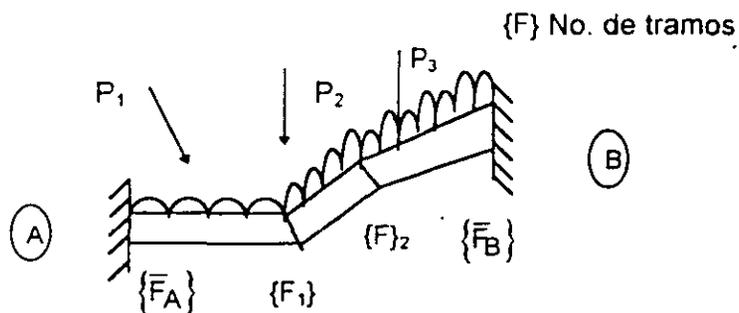
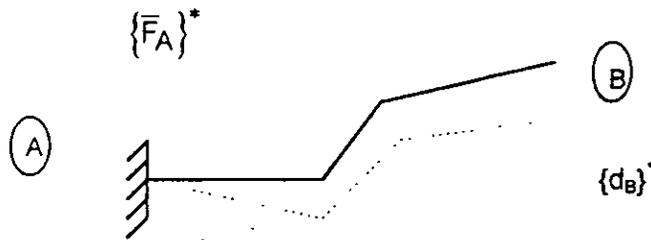


FIG. 6.- Barra 1 cargada y fuerzas de fijación  $\{F_A\}$  y  $\{F_B\}$



{F<sub>j</sub>} = Fuerzas quiebre  
 - Fuerzas fijación.

FIG. 7.- Barra  $\square$  en cantiliver.

Las fuerzas de fijación en el extremo B de la barra  $\square$  se obtienen a partir de la siguiente expresión:

$$\{\bar{F}_B\} = - [K_{BB}] \{d_B^*\}$$

donde  $\{d_B^*\}$  es la matriz de desplazamientos del extremo B considerando a la barra en cantiliver ( ver fig. 7 ) y se calcula con la siguiente expresión:

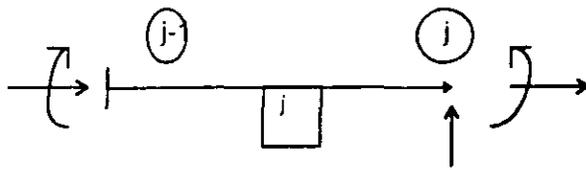
$$\{d_B^*\} = \sum_{j=1}^{\text{No. tramos}} [H_{Bj}] [\tilde{r}_j] \{F_j\}$$

En la expresión anterior,  $\{F_j\}$  es el vector resultante de restar las fuerzas externas aplicadas en el quiebre  $\bigcirc$  (  $\{F\}_1, \dots, \{F\}_{\text{No. tramos}}$  en la figura 6 ) menos las fuerzas de fijación producidas por las cargas externas aplicadas en los tramos adyacentes al quiebre  $\bigcirc$  ambas referidas al S.G.

El vector  $\{F_j\}$ , tiene la forma siguiente para el caso de sistemas de tuberías en dos o tres dimensiones.

$$\{F_j\} = \begin{Bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} \quad (\text{S.F. 2D})$$

$$\{F_j\} = \begin{Bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{jz} \\ M_{jx} \\ M_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} \quad (\text{S.G. 3D})$$



Convención positiva del vector  $\{F_j\}$ .

La matriz  $[H_{Bj}]$  se aplica tal como fue definida en III.

La matriz  $[\tilde{f}_j]$  es la matriz de flexibilidades del segmento de barra comprendido entre el extremo origen  $(A)$  y el quiebre  $(j)$  respecto al extremo destino  $(j)$  y está definida mediante la siguiente fórmula de recurrencia.

$$[\tilde{f}_{j+1}] = [f_{j+1}] + [H_{(j+1)(j)}]^T [\tilde{f}_j] [H_{(j+1)(j)}]$$

$$1 \leq j \leq (\text{No. tramos} - 1)$$

en donde  $[H_{(j+1)(j)}]$  se aplica tal como fue definida en III y  $[f_{j+1}]$  se obtiene por un procedimiento similar al descrito en A.2.

Nótese que en la ecuación anterior se tiene que:

$$[\tilde{f}_1] = [f_{BB}]_{[1]} \quad \text{y} \quad [\tilde{f}_{\text{No. tramos}}] = [f_{BB}]_{[i]}$$

Mediante el procedimiento descrito, se obtiene  $\{d_B^*\}$  se calcula  $\{\bar{F}_B\}$  y se le suman las fuerzas de fijación en el extremo  $(B)$  de la barra  $[i]$  producidas por las cargas aplicadas en el tramo adyacente a él, obteniéndose así el vector  $\{\bar{F}_B\}$  definitivo.

Una vez conocido el vector de fuerzas  $\{\bar{F}_B\}$  de la barra  $[i]$  se calcula con el vector de fuerzas  $\{\bar{F}_A\}$  de la misma barra con la siguiente expresión:

$$\{\bar{F}_A\} = \{\bar{F}_A\}^* - [H_{BA}] \{\bar{F}_B\}$$

donde:  $\{\bar{F}_A\}^*$  es el vector de fuerzas en el extremo  $(A)$  de la barra  $[i]$  producido por las cargas actuantes en ella considerándola en contiliver, (ver fig. 7) y  $[H_{BA}]$  se aplica tal como fue definida en III.

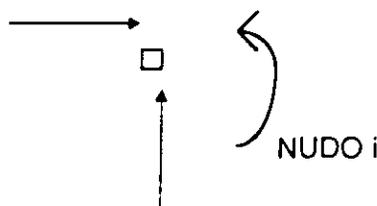
Los vectores de fuerzas  $\{\bar{F}_A\}$  y  $\{\bar{F}_B\}$  si obtenidos constituyen el estado I de cargas (fuerza de fijación).

Al aplicar vectores de carga en sentido contrario a los del estado I, y sumar los que concurren en un nudo más el vector de cargas aplicado en el mismo, se constituye el estado II de cargas.

La forma Topológica del vector de cargas  $\{F\}$  en la ecuación (1) para las estructuras de las figuras 2 y 4, siendo nudos destino el ①, ③ o ④, es la siguiente:

$$\{F\} = \begin{pmatrix} \bar{F}_B\}_1 + \bar{F}_B\}_2 + \bar{F}_B\}_3 + \{F\}_1 \\ \hline \bar{F}_A\}_3 + \bar{F}_A\}_4 + \bar{F}_A\}_5 + \{F_A\}_2 \\ \hline \bar{F}_B\}_5 + \bar{F}_B\}_6 + \bar{F}_B\}_7 + \bar{F}_B\}_8 + \{F\}_3 \\ \hline \bar{F}_B\}_4 + \bar{F}_B\}_9 + \{F\}_4 \end{pmatrix}$$

Convención positiva para los componentes del vector  $\{F\}$ .



Estamos ahora en posibilidad de resolver la ecuación general  $\{F\} = [K]\{d\}$  y obtener los desplazamientos de los nudos de la estructura y calcular a partir de ellos los elementos mecánicos que se generan en los extremos de las barras (inciso IV.C), lo cual puede hacerse a través de un planteamiento tradicional de análisis estructural.

A los elementos mecánicos así obtenidos, se les suman los vectores de fuerzas de fijación que constituyen el estado I de cargas para obtener los elementos mecánicos definitivos en los extremos de cada barra de la estructura.

## 2.- Fuerzas Producidas por Cambios de Temperatura

Es aplicable todo lo estipulado en B.1, pero ahora el problema es más sencillo, ya que la única diferencia con lo visto allá, es que la matriz  $d$  ahora se calcula de la manera siguiente:

$\alpha$  = Coeficiente de lineal del material

$\Delta t$  = Cambio de temperatura

Para  $\alpha = \text{cte.}$

$\Delta t = \text{cte.}$

$$\{d^*_B\} = \left\{ \begin{array}{l} d \dot{x}_B = \alpha \Delta t (x_B - x_A) \\ d \dot{y}_B = \alpha \Delta t (y_B - x_A) \\ \emptyset \dot{z}_B = 0 \end{array} \right\}$$

(S.G. 2D)

$$d = \left\{ \begin{array}{l} d \dot{x}_B = \alpha \Delta t (x_B - x_A) \\ d \dot{y}_B = \alpha \Delta t (y_B - x_A) \\ d \dot{z}_B = \alpha \Delta t (z_B - z_A) \\ \emptyset \dot{x}_B = 0 \\ \emptyset \dot{y}_B = 0 \\ \emptyset \dot{z}_B = 0 \end{array} \right\}$$

(S.G. 3D)

Para  $\alpha = \text{cte}$

$(\Delta t)_j = \text{variable para cada tramo } [j]$

$$\{d^*_B\} = \left\{ \begin{array}{l} d \dot{x}_B = \sum_{j=1}^{\text{No tramos}} \Delta t [j] (\Delta x) [j] \\ d \dot{y}_B = \sum_{j=1}^{\text{No tramos}} \Delta t [j] (\Delta y) [j] \\ \emptyset \dot{z}_B = 0 \end{array} \right\}$$

(S.G. 2D)

$$\{d^*B\} = \left\{ \begin{array}{l} d \dot{x}_B = \sum_{j=1}^{\text{No tramos}} \alpha \Delta t [j] (\Delta X) [j] \quad \emptyset \dot{x}_B = 0 \\ d \dot{y}_B = \sum_{j=1}^{\text{No tramos}} \alpha \Delta t [j] (\Delta Y) [j] \quad \emptyset \dot{y}_B = 0 \\ d \dot{z}_B = \sum_{j=1}^{\text{No tramos}} \alpha \Delta t [j] (\Delta Z) [j] \quad \emptyset \dot{z}_B = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{S.G. 3D})$$

### 3.- Fuerzas producidas por desplazamientos impuestos a los apoyos

Es aplicable también ahora todo lo estipulado en B.1. y el problema resulta ser más sencillo que los planteados en B.1 y B.2. puesto que ahora  $\{\bar{F}_B\}$  se calcula directamente a partir de la siguiente expresión:

$$\{\bar{F}_B\} = \{K_{BA}\} \{\bar{d}_A\}$$

donde  $\{\bar{d}_A\}$  es el vector de desplazamientos impuestos a la estructura en el apoyo A.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

### **TEMA**

## **ANÁLISIS DE DEFORMACIÓN DE SUELOS**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMENEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERÍA  
FEBRERO DEL 2001**

### 3 . ANALISIS DE DEFORMACIONES EN LOS SUELOS

AGUSTIN DEMENEGHI COLINA

#### 3 . 1 Determinación de deformaciones en los suelos.

##### 3.1.1 Deformación de un suelo en el campo.

Para ilustrar la forma de determinar las deformaciones del terreno de cimentación, consideremos un elemento que por peso propio está sometido al estado de esfuerzos mostrado en la fig. 3 . 1a .

Consideremos que este estado de esfuerzos se puede sustituir por una presión de confinamiento equivalente al esfuerzo normal en el plano octaédrico  $p_o$  , dada por el promedio de los tres esfuerzos normales

$$p_o = ( 1 / 3 ) ( p_z + p_x + p_y ) \quad ( 3 . 1 )$$

Supongamos que las presiones horizontales  $p_x$  y  $p_y$  son iguales entre sí y proporcionales a la presión vertical  $p_x$ .

$$p_x = p_y = k_o p_x$$

donde  $k_o$  es el coeficiente de presión en reposos del suelo.

Sustituyendo en la ec. 3 . 1.

$$p_o = ( 1 + 2 k_o ) p_x / 3 \quad ( 3 . 2 )$$

La fig. 3 . 1 muestra al elemento de suelo sometido a una presión de confinamiento equivalente  $p_o$

Supongamos ahora que se construye una cimentación y ésta ocasiona incrementos de esfuerzo normal  $\sigma_z$  ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  en el elemento ( fig 3 . 2 ).

Estos incrementos de esfuerzo producen deformaciones verticales y horizontales en el elemento. En cimentaciones es usual que la deformación que interesa al ingeniero sea la deformación vertical  $\delta_z$  del elemento. Existen varios métodos para determinar esta deformación; uno de ellos trata del empleo de la ley de Hooke, que consiste en lo siguiente:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= [ \sigma_z - \nu ( \sigma_x + \sigma_y ) ] / E \\ \delta_x &= \epsilon_x H \end{aligned}$$

donde :  $\epsilon_x$  = deformación unitaria del elemento  
 $E$  = módulo de elasticidad del material  
 $\nu$  = *relación de Poisson*  
 $H$  = espesor del elemento

Los esfuerzos  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  se pueden obtener con la teoría de Boussinesq, empleando las ecuaciones que se presentan en el inciso 3 . 4 de este capítulo.

### 3 . 1 . 2 Propiedades de deformación de los suelos.

En los suelos ocurren diversos tipos de deformaciones : elástica, plástica, elastoplástica, viscosa, etc. Por lo que el valor de  $E$  se tiene que tomar de acuerdo con el tipo de suelo y el fenómeno que se esté estudiando. Cabe aclarar que, dado que las relaciones esfuerzo - deformación en los suelos son no lineales, conviene con frecuencia trabajar con el módulo secante de deformación para determinar el valor de  $E$  correspondiente, utilizando niveles de esfuerzo lo más cercanos a la realidad.

A continuación veremos la forma de determinar los diferentes valores de  $E$ .

La determinación de las propiedades de deformación para el análisis de movimientos en una cimentación, se puede ilustrar considerando un elemento de suelo en una prueba de compresión triaxial, sometido al estado de esfuerzos que se muestra en la fig. 3 . 3 ; consideremos adicionalmente que se trata de una arcilla saturada. Suponiendo que la probeta de suelo tiene un esfuerzo de confinamiento  $p_c$  y un esfuerzo desviador  $\sigma_r$  iniciales, primeramente se reduce el esfuerzo  $\sigma_r$  a cero ( para representar la descarga por excavación, decremento de carga, etc.), con lo que se obtiene el módulo de rebote elástico  $E_c$  del suelo ( fig. 3 . 4 ). A continuación, manteniendo aplicado el confinamiento  $p_c$ , se vuelve a aplicar el esfuerzo  $\sigma_r$ , con lo que se determina el módulo de compresión  $E_{rc}$  ( fig. 3 . 4 ). Aplicando un esfuerzo de compresión  $\sigma_z$  se presentará un asentamiento adicional debido al incremento neto de carga  $\sigma_n = \sigma_z - \sigma_r$ , donde  $\sigma_z$  es el esfuerzo normal debido a la carga total de la estructura; a esta deformación se le puede denominar asentamiento por compresión; el módulo de deformación correspondiente será  $E_c$  ( fig 3 . 4 ). Tenemos entonces tres módulos de deformación, a saber :

$$E_o = \sigma_r / \epsilon_c$$

$$E_{rc} = \sigma_r / \epsilon_c$$

$$E_c = \sigma_n / \epsilon_c$$

Dependiendo del tipo de deformación que se esté determinando, se emplea alguno de los módulos  $E_o$ ,  $E_{rc}$  o  $E_c$  en la ley de Hooke de la ecuación 3 . 3.

Finalmente, y dado que el suelo es una arcilla saturada, manteniendo el esfuerzo  $\sigma_x$  constante se presentará una deformación a largo plazo  $\epsilon_v$  ( fig 3 . 4 ).

Vemos entonces que las propiedades de deformación para una cimentación se pueden determinar todas ellas en una prueba de compresión triaxial. Sin embargo, este tipo de ensaye resulta difícil de realizar en arcillas saturadas, debido fundamentalmente a que la deformación

diferida  $\epsilon_v$ , toma mucho tiempo en esta prueba; por esta razón, las deformaciones debidas al incremento neto de carga, entre las que se encuentra la deformación a largo plazo, se determinan a partir de los resultados de una prueba de consolidación. Además, se ha observado que los módulos  $E_c$  y  $E_{rc}$  se pueden obtener a partir de una prueba de compresión no confinada, debido a que el esfuerzo efectivo cambia poco al ser extraída una muestra de arcilla saturada del terreno natural, es decir, se hace la consideración de que el esfuerzo efectivo en una prueba descompresión no confinada es aproximadamente igual al esfuerzo efectivo de campo. Con el módulo  $E_c$  se obtiene la componente elástica de la deformación debida al incremento neto de carga.

En resumen, la expansión por descarga y el asentamiento por recompresión se determinan con los módulos de rebote elástico y de recompresión respectivamente, ambos obtenidos en una prueba de compresión no confinada. Con el módulo de rebote elástico se determina además la componente elástica de la deformación debido al incremento neto de presión de la cimentación. La componente plástica de la deformación instantánea, y la deformación diferida, ocasionadas por el incremento neto de carga de la cimentación, se determinan a partir de los resultados de una prueba de consolidación.

Las propiedades de deformación para la determinación de movimientos de la cimentación debidos a acciones sísmicas se obtienen a partir de ensayos de tipo dinámico como el péndulo de torsión ( Zeevaert 1973 ), la columna resonante ( Jaime et al 1987 ), etc.

En suelos friccionantes se sigue un procedimiento similar al de las arcillas, con la diferencia de que el efecto de la presión confinamiento es mayor y que el efecto del tiempo es mucho menor en estos materiales. Para suelos granulares existen procedimientos que toman en cuenta en forma explícita el efecto del confinamiento y que la relación esfuerzo - deformación en ellos es del tipo no lineal; una de estas técnicas se presenta en el inciso 3.7 de este capítulo ( Deméneghi 1989 ).

### 3.2 Deformaciones permisibles

Las deformaciones calculadas deben compararse con las deformaciones permisibles de una cimentación, las cuales deben determinarse para cada estructura en particular. Por ejemplo, el asentamiento total y los asentamientos diferenciales de una cimentación dependen de la opinión de las siguientes personas involucradas en el diseño de la cimentación ( Zeevaert 1991 ).

- a) Propietario del inmueble
- b) Inquilino
- c) Ingeniero estructurista
- d) Arquitecto
- e) Autoridad municipal
- f) Compañía de seguros
- g) Opinión pública

Por lo tanto, con el concurso de opinión de las personas mencionadas, se llegan a definir los movimientos permisibles de una cimentación.

Sin embargo, para que el lector se dé una idea de los asentamientos permisibles, y únicamente para fines de anteproyecto se presentan los valores de la tabla 3 . 1 ( Sowers 1962 ).

### 3 . 3 Estados límite de servicio

Los reglamentos de construcción especifican los diferentes movimientos que se deben revisar en una cimentación, los cuales dependen de cada caso particular. Por ejemplo, las Normas de cimentaciones del Distrito Federal establecen que para una cimentación compensada se deben revisar los estados límites de servicio que se indican a continuación. Cabe aclarar que este criterio se puede aplicar en general a cimentaciones superficiales, profundas, etc. Con las modalidades propias de cada cimentación.

#### a) Desplazamientos instantáneos del suelo de cimentación.

Los desplazamientos instantáneos en suelos finos saturados se pueden calcular utilizando la ley de Hooke ( ec. 3 . 3 ), considerando que la deformación del suelo ocurre a volumen aproximadamente constante. Véase el ejemplo 6 . 1, donde se trata el cálculo de expansiones y asentamientos por recompresión, considerándolos como movimientos instantáneos.

Los suelos granulares, debido a su permeabilidad relativamente alta, experimenta movimientos instantáneos de magnitud alta comparados con los desplazamientos diferidos. La determinación de deformaciones en suelos granulares se puede ver en los ejemplos 3 . 1 , 5 . 4 y 5 . 5

#### b) Deformaciones transitorias y permanentes del terreno de cimentación.

Las propiedades de deformación para la determinación de deformaciones transitorias de la cimentación debidas a acciones sísmicas se obtienen a partir de ensayos de tipo dinámico como el péndulo de torsión ( Zeevaert 1973 ), la columna resonante ( Jaime et al ), etc.

En la obtención de las deformaciones permanentes de un suelo ocasionadas por un sismo, el fenómeno de la repetición de carga es importante; por lo tanto, deben determinarse, en muestras en el laboratorio, las deformaciones permanentes acumuladas por la repetición de cargas. En forma aproximada y únicamente para fines de anteproyecto, se pueden emplear las siguientes expresiones

$$\delta_{PN} = \delta_p ( 1 + \log N )$$

donde

$\delta_{PN}$  = deformación permanente debida a N repeticiones de carga

$\delta_p$  = deformación permanente correspondiente a la primera aplicación de carga

N = número de repeticiones de carga

a = coeficiente que depende del tipo de suelo. Para suelos granulares  $a \cong 0.25$

log = logaritmo decimal ( base 10 )

c) Asentamiento diferido debido al incremento neto de carga

Considerando que la presión efectiva en una arcilla saturada no cambia en forma importante por una excavación, el asentamiento a largo plazo se calcula entonces empleando el incremento neto de carga, el cual es el resultado de sustraer de la presión o carga total transmitida al suelo por una subestructura o un elemento de ella, la presión o carga total previamente existente en el suelo al nivel de desplante ( RCDF 1976 ). Además, si el terreno de cimentación consistente en arcilla, el asentamiento debido a cedencia lateral de suelo es usualmente pequeño en comparación con el asentamiento total; por esta razón, aun el asentamiento de cimentaciones en estratos de gran espesor de arcilla puede ser evaluado por métodos basados en deformación unidimensional ( Terzaghi y Peck 1967, art. 41 ) ; es decir, para calcular los asentamientos diferidos únicamente hay que utilizar el esfuerzo normal vertical  $\sigma_x$ .

En el ejemplo 6 . 1 se presenta la valuación del asentamiento a largo plazo en una cimentación compensada. Cabe aclarar que si se desea obtener adicionalmente la evolución del hundimiento, se puede emplear la teoría de la consolidación de Terzaghi - Zeevaert que considera adicionalmente la componente de deformación de viscosidad intergranular ( consolidación secundaria ); véase para esto Zeevaert ( 1985 ).

3 . 4 Incrementos es esfuerzo en la masa de suelo ocasionados por una carga repartida aplicada en la superficie

3 . 4 . 1 Carga uniforme

A continuación se presentan las expresiones para determinar los esfuerzos normales verticales bajo la esquina de un rectángulo sometido a una carga uniforme q aplicada en la superficie ( fig 3 . 5 ).

Para  $\sigma_x$  ( Damy 1985)

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} \right) \frac{xyz}{A} + \text{angtan} \frac{xy}{zA} \right] \quad (3.6)$$

Para  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  ( Dashko y Kagan 1980 )

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(x^2 + z^2)A} - \text{angtan} \frac{zA}{xy} + (1 - 2\nu) \left( \text{angtan} \frac{y}{x} - \text{angtan} \frac{yA}{xz} \right) \right) \right] \quad (3.7)$$

$$\sigma_v = \frac{q}{2\pi} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(y^2 + z^2)A} - \operatorname{arctan} \frac{zA}{xy} + (1 - 2\nu) \left( \operatorname{arctan} \frac{x}{y} - \operatorname{arctan} \frac{xA}{yz} \right) \right) \right] \quad (3.8)$$

$$A = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (3.9)$$

### 3.4.2 Carga triangular.

Cuando la carga que se aplica en la superficie es de tipo triangular ( fig. 3.6 ), se pueden utilizar las fórmulas de Hamilton Gray ( Juárez Badillo y Rico 1980 ).

Bajo el punto A

$$\sigma_{zA} = [pl / (2\pi B)] \left( \frac{Z\sqrt{L^2 + B^2 + Z^2}}{L^2 + Z^2} - \frac{Z}{\sqrt{L^2 + Z^2}} + (B/L) \operatorname{arcsen} \frac{BL}{\sqrt{(B^2 L^2 + B^2 Z^2 + L^2 Z^2 + Z^4)}} \right) \quad (3.10)$$

Bajo el punto B

$$\sigma_{zB} = [pl / (2\pi B)] \left( \frac{Z}{\sqrt{(L^2 + Z^2)}} - \frac{Z'}{(B^2 + Z^2)\sqrt{(B^2 + L^2 + Z^2)}} \right) \quad (3.11)$$

donde L es la longitud de la carga triangular.

### 3.5 Cimientos sujetos a carga vertical y momento.

#### 3.5 Reacción del terreno trapecial.

En numerosas ocasiones en la práctica un cimiento se ve sometido a carga vertical y momento. Por ejemplo, una columna le trasmite usualmente a una zapata aislada carga vertical y momento. El efecto de un sismo se traduce en fuerzas cortantes y momentos al nivel de cimentación; así, un edificio alto desplantado sobre una losa de apoyo o un cajón de cimentación, en una región sísmica trasmite al terreno de cimentación un fuerte momento de volteo, el cual ocasiona deformaciones en dicho terreno que pueden llegar a ser muy importantes. Por lo tanto, se hace necesario determinar las deformaciones del suelo ocasionadas por una fuerza vertical y un momento de volteo, tema que trataremos en este inciso

Consideremos un cimiento sometido al sistema de cargas de la fig. 3.7, y supongamos que la reacción del terreno es la suma de una reacción uniforme debida a la carga Q, y a una reacción debida al momento M.

La reacción uniforme se obtiene del cociente  $Q / A$ , siendo  $A$  el área del cimiento, mientras que la reacción provocada por el momento se obtiene en forma aproximada utilizando la fórmula de la escuadria:  $\Delta\sigma = (M / I)$ . Observemos que la reacción del suelo se calcula entonces con la siguiente expresión:

$$\sigma = Q / A \pm (M / I) y$$

donde

$I$  = momento de inercia de la planta de la cimentación

$y$  = distancia del centroide del área de la cimentación a la fibra donde se esté calculando el esfuerzo

En los puntos extremos  $A$  y  $B$  del cimiento los esfuerzos se calculan:

$$\sigma_a = Q / A + (M / I) B / 2 \quad (3.12)$$

$$\sigma_b = Q / A - (M / I) B / 2 \quad (3.13)$$

Si el cimiento es rectangular de ancho  $B$  y longitud  $L$

$$\sigma_a = Q / BL + 6M / L B^2 \quad (3.14)$$

$$\sigma_b = Q / BL - 6M / L B^2 \quad (3.15)$$

Por la tercera ley de Newton, la carga sobre el terreno es la de la fig. 3.7, pero con sentido de arriba hacia abajo (fig. 3.8).

Por lo tanto, para determinar las deformaciones del suelo provocadas por un cimiento con carga vertical y momento, es necesario determinar el estado de esfuerzo dentro de la masa de suelo ocasionado por la carga de tipo trapecial de la fig. 3.8.

Cuando solo se desea determinar el esfuerzo normal vertical en la masa de suelo, el problema se puede dividir en el de una carga rectangular  $\sigma_b$  y de una carga triangular  $\sigma_a$  (fig. 3.8). El esfuerzo normal ocasionado por la primera se calcula con la fórmula de Damy (ec. 3.6), mientras que para la carga triangular se puede emplear las fórmulas de Hamilton Gray (fig. 3.7, ecs. 3.10 y 3.11).

Cuando se requiere conocer además del esfuerzo normal vertical  $\sigma_x$ , los esfuerzos normales horizontales  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , el problema se puede resolver dividiendo la carga trapecial en un número  $n$  de cargas uniformes como se ilustra en la fig. 3.9. Los esfuerzos buscados se obtienen aplicando las ecs. 3.6 a 3.9, para cada una de las cargas uniformes en las que se dividió la carga trapecial.

### 3.5.2 Reacción Triangular

Cuando el momento de volteo es alto, puede ocurrir que se presenten en un extremo esfuerzos teóricos de tensión entre cimiento y terreno ( fig. 3.10 ). En la realidad la resistencia a la tensión entre estos dos materiales es prácticamente nula, por lo que no existe dicha zona de tensión. Por lo anterior, se requiere determinar la reacción del terreno ignorando esta zona de tensión.

Supongamos una reacción triangular como la indicada en la fig. 3.11.  
Por equilibrio de fuerzas verticales :

$$\sigma_a C / 2 = Q = \text{Area del triángulo} \quad (3.16)$$

Tomando momentos con respecto a un eje que pasa por el punto A :

$$\Sigma M_A = - Q C / 3 + Q B / 2 - M = 0$$

$$\therefore C = 1.5 B - 3 M / Q \quad (3.17)$$

De la ec 3.16  $\sigma_a = 2Q / C$  (3.18)

En consecuencia, dado un cimiento en el que las cargas Q y M ocasionan esfuerzos teóricos de tensión en el contacto entre terreno y suelo, la reacción de este, suponiéndola triangular ( fig. 3.11 ), se obtiene utilizando la ec 3.17 para determinar la distancia C, y la ec. 3.16 para obtener el esfuerzo  $\sigma_a$ .

Los esfuerzos en el interior del medio elástico, ocasionados por la carga triangular se hallan empleando las ecs. 3.10 y 3.11 del inciso 3.4.2 anterior.

### 3.6 Fórmulas para deformaciones elásticas.

#### 3.6.1 Rectángulo cargado.

Las deformaciones instantáneas en los suelos se pueden calcular de manera aproximada utilizando las expresiones que proporciona la teoría de la elasticidad.

El asentamiento de la superficie de un medio semiinfinito, homogéneo e isótropo, bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniformemente repartida q, está dado por ( Terzaghi 1943 )

$$\delta = \left[ q(1 - \nu^2) / (\pi E) \right] \left( L \ln \frac{B + \sqrt{(B^2 + L^2)}}{L} + B \ln \frac{L + \sqrt{(L^2 + B^2)}}{B} \right) \text{-----} (3.19)$$

donde.

B = ancho del rectángulo  
 L = longitud del rectángulo  
 E = módulo de elasticidad del medio  
 F = relación de Poisson del medio

Cuando el medio elástico tiene un espesor D, el asentamiento bajo la esquina de un rectángulo sometido a carga uniforme q está dado por ( Juárez Badillo y Rico 1980 ).

$$\delta = \left[ \frac{q(1-\nu^2)}{\pi E} \right] \left[ L \ln \frac{(B + \sqrt{L^2 + B^2})}{L(B+A)} + B \ln \frac{(L + \sqrt{(L^2 + B^2)\sqrt{B^2 + Z^2}})}{B(L+A)} \right] \\ + \frac{q}{2\pi E} (1-\nu-2\nu^2) z \operatorname{angtan} \frac{LB}{zA} \quad (3.20)$$

$$A = \sqrt{(L^2 + B^2 + Z^2)} \quad (3.21)$$

Cuando existe un medio estratificado como el de la fig. 3. 12, formado por n estratos de propiedades elásticas E y  $\nu$ , el asentamiento de la superficie se puede calcular utilizando la ley de Hooke para cada estrato:

$$\epsilon_x = (1/E) [ \sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y) ] \quad (3.22)$$

donde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  son los esfuerzos normales vertical y horizontales ocasionados por la carga aplicada en la superficie del medio, y  $\epsilon_x$  es la deformación unitaria del estrato. La deformación, en unidades de longitud, del estrato está dada por :

$$\delta = \epsilon_x H \quad (3.23)$$

donde H es el espesor del estrato

La deformación de la superficie será la suma de las deformaciones de cada estrato.

### 3.6.2 Círculo cargado

En un círculo de radio R sometido a carga uniforme q en su superficie, el asentamiento bajo el centro está dado por ( Zeevaert 1973 ).

$$\delta = [ \pi (1-\nu^2) R q ] / 2 E \quad (3.24)$$

El giro del círculo ocasionado por un momento M vale ( Richardt et al 1970 )

$$\theta = [ 3 (1-\nu) M ] / 8 G R^3 \quad (3.25)$$

en que  $G = E / 2 ( 1 + \nu )$  ( 3 . 26 )

Con las expresiones anteriores se pueden obtener las rigideces lineal y angular de un cimiento de planta circular. La rigidez lineal se define como la carga vertical entre el asentamiento que se produce :

$$K_1 = Q / \delta = 2 E R / ( 1 - \nu^2 ) \quad ( 3 . 27 )$$

La rigidez angular se define como el cociente del momento entre el giro que produce :

$$K_0 = M / \theta = 8 G R^3 ( 1 - \nu ) \quad ( 3 . 28 )$$

### 3 . 6 . 3 Giro de un rectángulo sometido a momento.

El giro de un rectángulo sujeto a un momento  $M$  ( fig. 3 . 13 ) se puede calcular determinando la carga de tipo trapezoidal ( ecs. 3 . 14 y 3 . 15 ) o triangular ( ecs. 3 . 17 y 3 . 18 ) que actúa sobre el terreno. A continuación se divide la carga en un número  $n$  de cargas uniformes ( fig. 8 ) y se determinan los esfuerzos normales  $\sigma_z$  ,  $\sigma_r$  y  $\sigma_v$  con las ecs. 3 . 6 a 3 . 9, a la mitad de cada uno de los estratos del subsuelo.

La deformación unitaria de cada estrato se obtiene aplicando la ley de Hooke ( ec. 3 . 22 ) y la deformación en unidades de longitud utilizando la ec. 3 . 23. Esta operación se realiza bajo los puntos A y B de la fig. 8, con lo que se determina, mediante la suma de las deformaciones de cada estrato, la deformación en la superficie. Con estos resultados se puede calcular el giro del rectángulo sometido a momento. En el ejemplo 6 . 1 se presenta una aplicación de este procedimiento.

En forma simplificada, se puede usar el siguiente artificio: se obtiene el momento de inercia del rectángulo  $I_r$  en el sentido que se está analizando, y se obtiene el radio equivalente a un círculo ( Normas de Sismo 1987 ) :

$$R = ( 4 I_r / \pi )^{1/4} \quad ( 3 . 29 )$$

Con el radio equivalente  $R$  se emplea la ec. 3 . 25 para determinar el giro de la cimentación de planta rectangular.

Esfuerzos bajo el centro de un círculo sometido a una sobrecarga uniformemente repartida  $q$  ( Yoder 1959 )

$$\sigma_z = q [ 1 - z^3 / ( R^2 + z^2 )^{3/2} ]$$

$$\sigma_r = ( q / 2 ) [ 1 + 2\nu - 2 ( 1 + \nu ) z / ( R^2 + z^2 )^{1/2} + z^3 / ( R^2 + z^2 )^{3/2} ]$$

$R$  = radio del círculo

Fórmula de Fröhlich para la determinación del giro de un cimiento corrido, apoyado sobre un medio elástico semiinfinito ( Zeevaert 1973 )

$$\theta = \text{angtan} [ 16 ( 1 - \nu^2 ) M' / ( \pi E B^2 ) ]$$

E = módulo de elasticidad

$\nu$  = relación de Poisson

B = ancho del cimiento

M' = momento por unidad de longitud

La fórmula de Fröhlich se recomienda cuando la longitud del cimiento es mayor o igual que tres veces el ancho del mismo.

Desplazamiento lateral producido por una fuerza lateral ( horizontal )

$$\delta_h = \frac{(7 - 8\nu)Q_h}{32(1 - \nu)GR}$$

R = radio del círculo.

TABLA 3.1

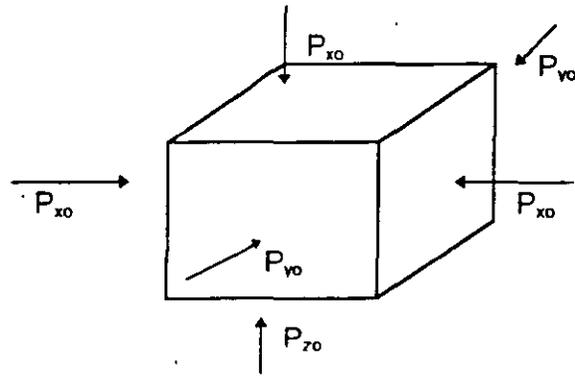
### ASENTAMIENTOS PERMISIBLES

Asentamiento total permisible de la Cimentación de una estructura, de tal forma que no se presente daño funcional en las siguientes instalaciones o elementos :

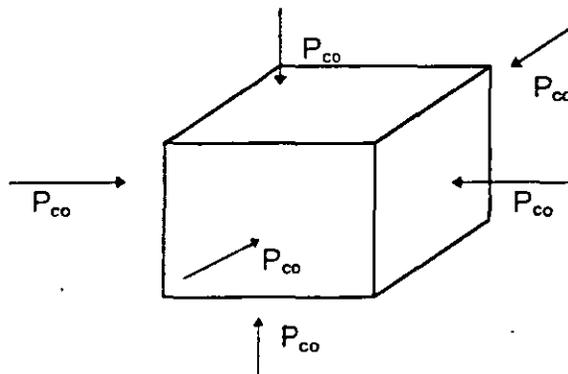
<i>Obras de drenaje</i>	15 a 30 cm.
Accesos a la estructura	30 a 60 cm.
Muròs de mampostería	2.5 a 5 cm.
Marcos estructurales de concreto o acero	5 a 10 cm.
Losas o cajones de cimentación	7.5 a 30 cm.

Los valores mayores son para asentamientos en terrenos de cimentación homogéneos y estructuras de buena calidad en construcción. Los valores menores son para asentamientos en terrenos de cimentación con estratigrafía errática y estructuras de regular calidad de construcción.

Tomado de Sowers ( 1962 )



a) Estado de presión inicial



b) Presión de confinamiento equivalente

$$P_{co} = (1 + 2k_o) P_{z0} / 3$$

FIG. 3 1 PRESION DE CONFINAMIENTO

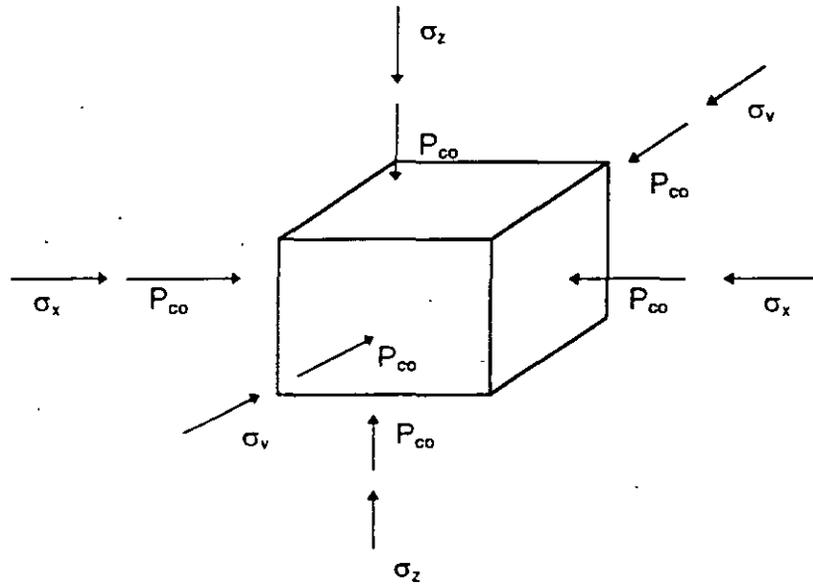


FIG. 3.2 INCREMENTOS DE ESFUERZO  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  SOBRE EL ELEMENTO

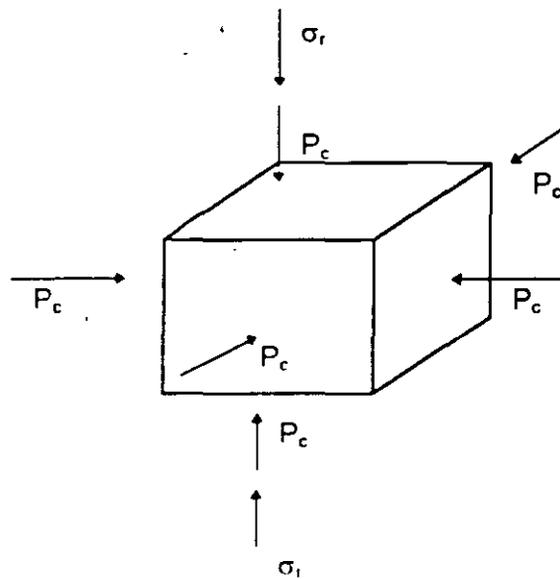
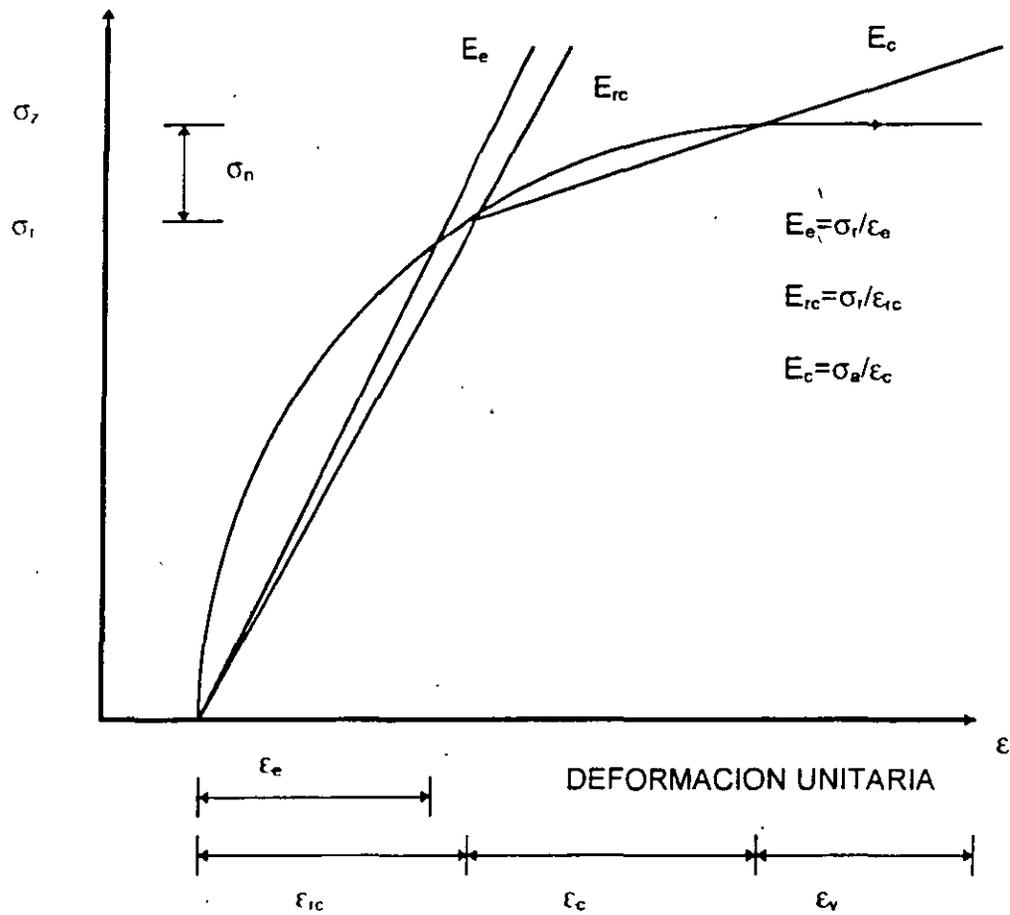


FIG 3.3 ELEMENTO DE SUELO EN UNA PRUEBA DE COMPRESION TRIAXIAL



DETERMINACIÓN DE MÓDULOS DE DEFORMACIÓN

FIG. 3.4

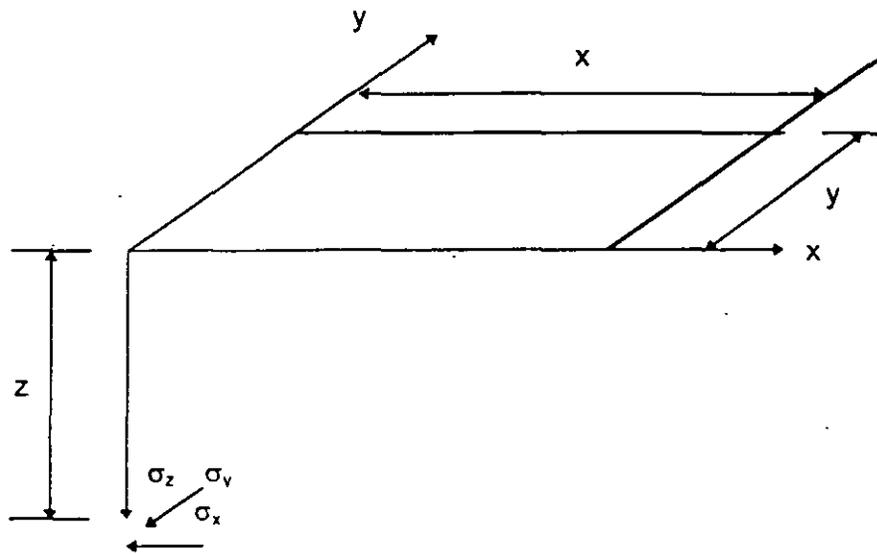


FIG. 3.5 INCREMENTOS DE ESFUERZO NORMAL BAJO LA ESQUINA DE RECTANGULO CARGADO, EN UN MDEIO SEMI-INFINITO

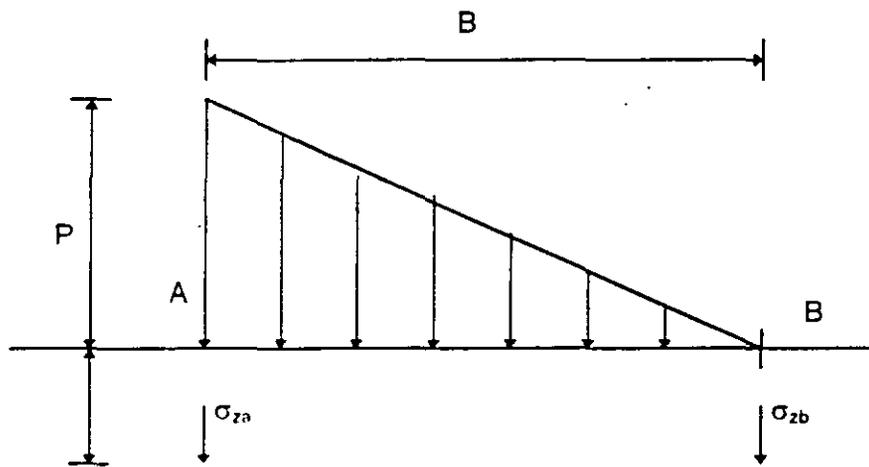


FIG. 3.6 ESFUERZOS NORMALES OCASIONADOS POR UNA CARGA TRIANGULAR

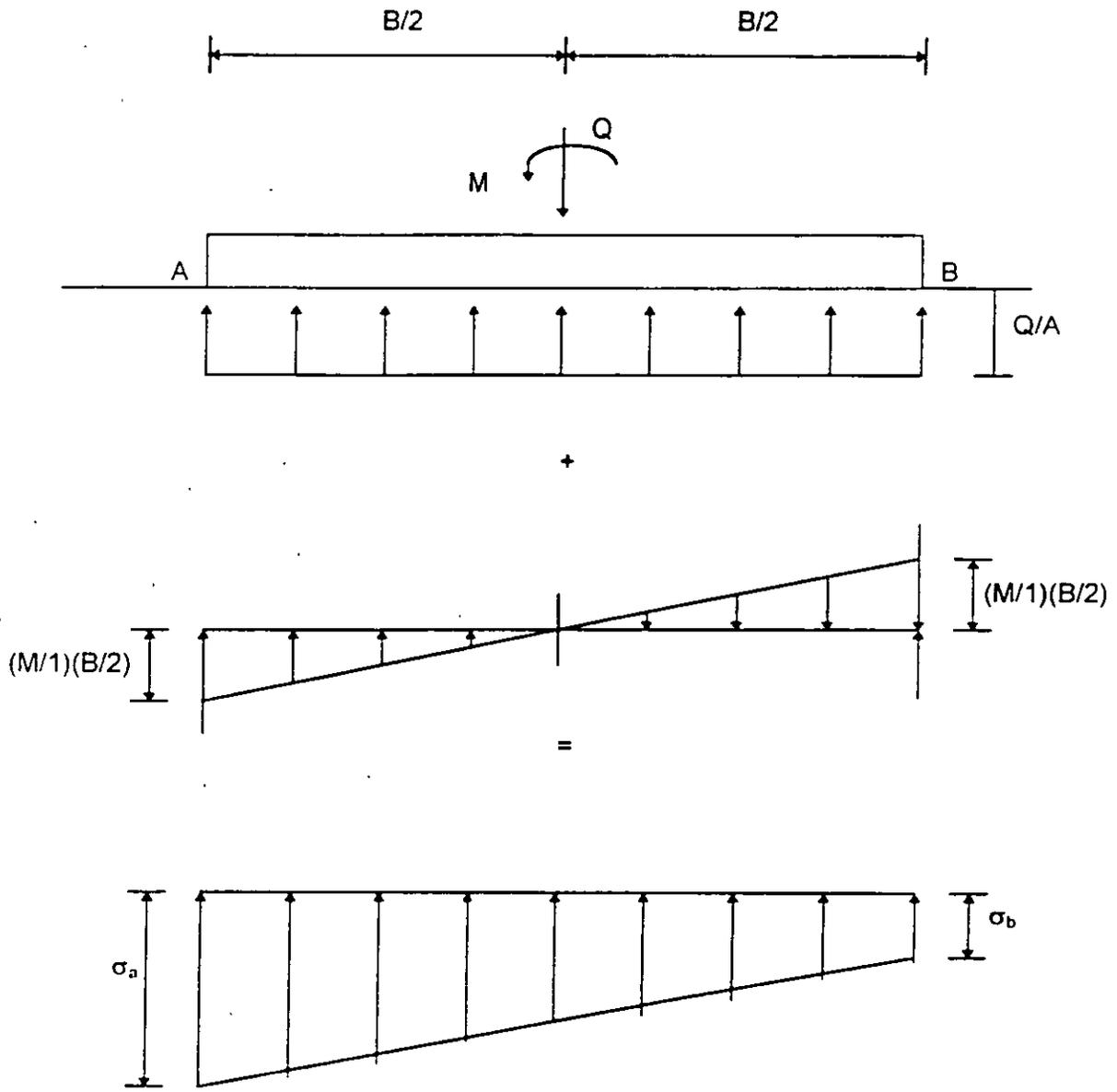


FIG. 3.7 REACCION DEL TERRENO. CIMIENTO SOMETIDO A CARGA VERTICAL Y MOMENTO

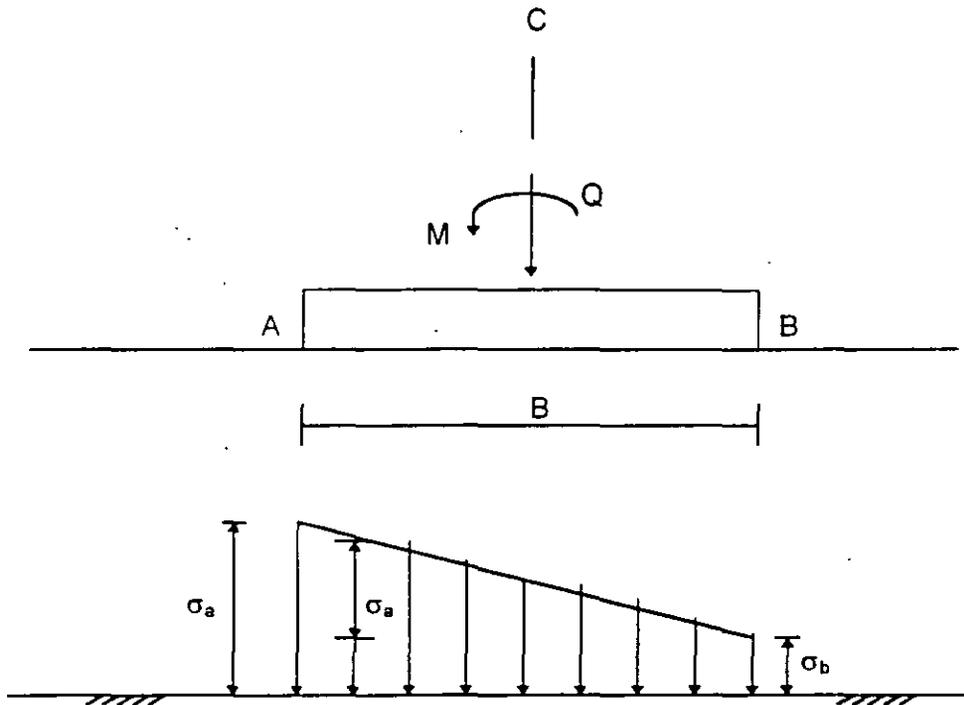


FIG. 3.8 CARGA SOBRE EL TERRENO

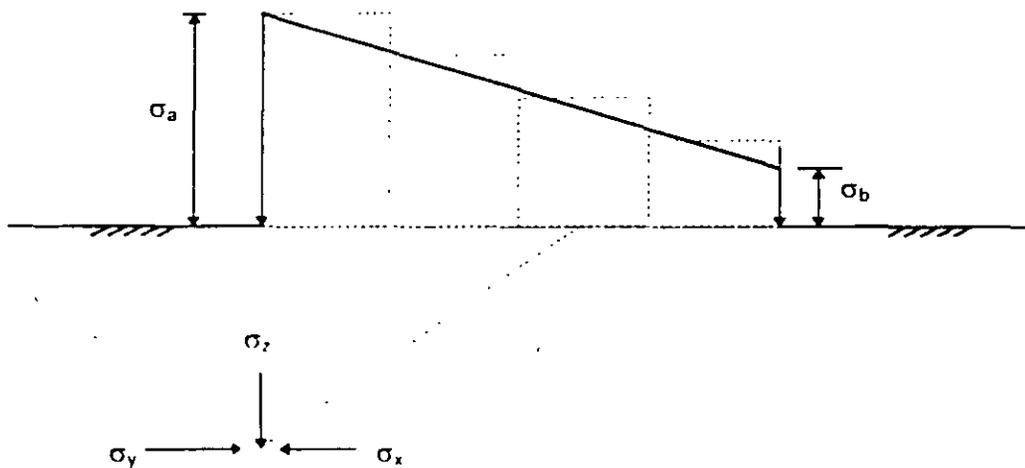


FIG. 3.9 CARGA TRAPEZIAL DIVIDIDA EN UN NUMERO  $n$  DE CARGAS UNIFORMES

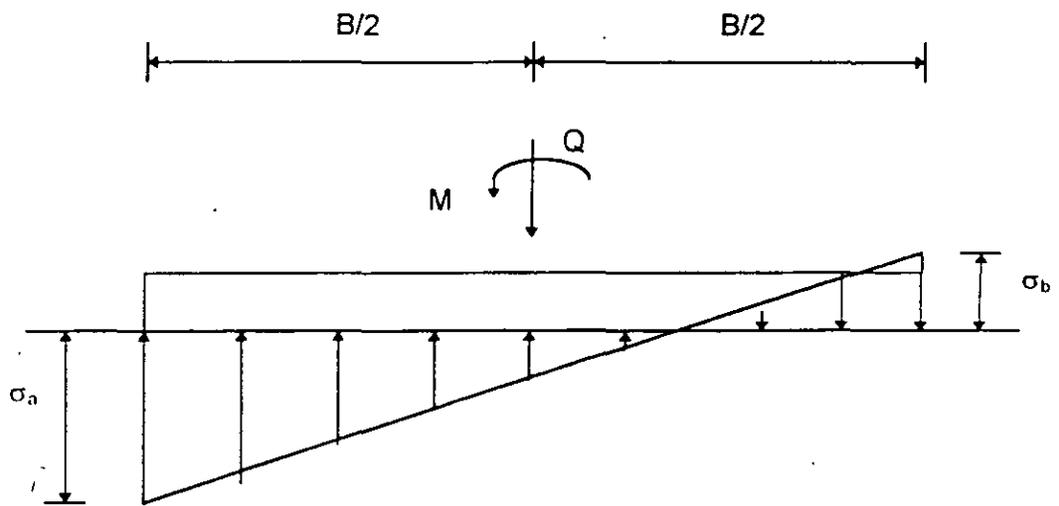


FIG. 3.10 ESFUERZOS TEORICOS DE TENSION EN EL CONTACTO CIMIENTO- SUELO

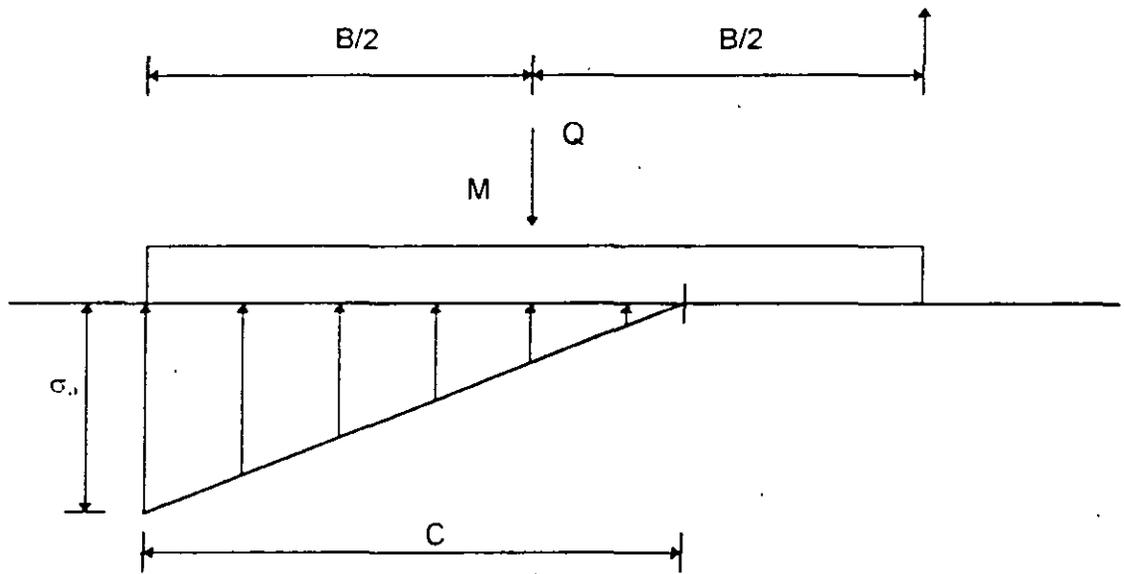


FIG. 3.11 REACCION DEL TERRENO TRIANGULAR

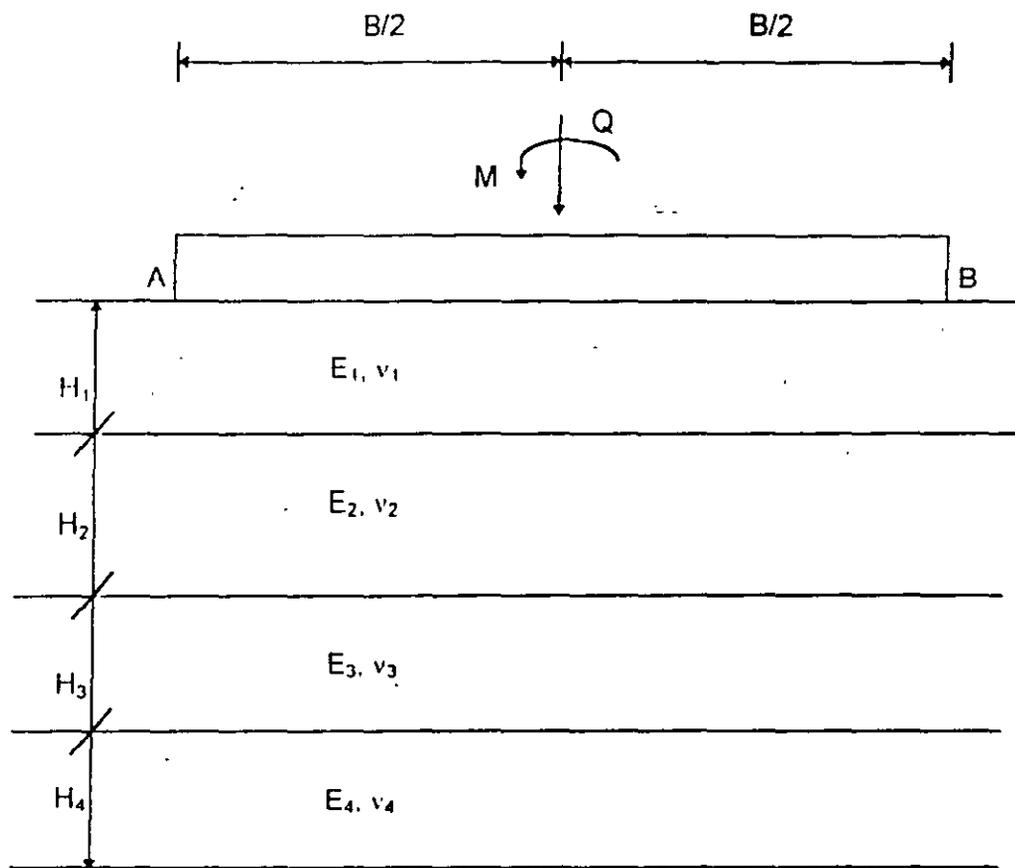


FIG. 3.12 MEDIO ESTRATIFICADO

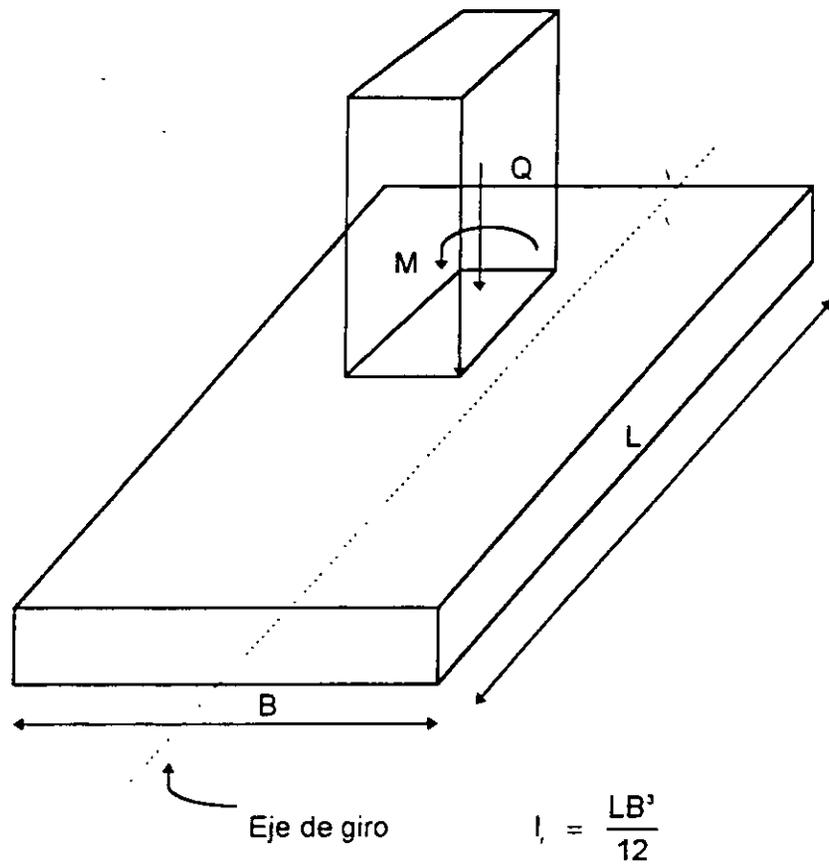


FIG 3 13 GIRO DE UN RECTANGULO



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

### **TEMA**

## **ANÁLISIS SISMICO DE CIMENTACIONES**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMENEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DEL 2001**

## ANÁLISIS SISMICO DE CIMENTACIONES

Agustin Deméneghi Colina

Cuando se realiza el análisis sísmico de una cimentación, es usual que se cuente con un coeficiente sísmico para la región en cuestión, dado por el código del Estado donde se construirá la estructura correspondiente. Con este coeficiente sísmico se procede al análisis y diseño de la estructura, incluyendo desde luego en este al de la estructura de cimentación.

Sin embargo, cuando el subsuelo del sitio está formado por sedimentos de consistencia blanda, se presenta un fenómeno de amplificación de las ondas sísmicas que llegan al lugar, el cual consiste en que, en la base constituida por terreno firme, se presenta una cierta aceleración, mientras que en la superficie del suelo blando, la aceleración puede ser varias veces mayor que la del terreno firme (figura 1).

El comportamiento anterior se debe a que ocurre, por lo menos en forma parcial, la resonancia del suelo blando. Para ilustrar este fenómeno consideremos un sistema de un grado de libertad como el mostrado en la figura 2, en el que la base se somete a un movimiento dado por:

$$x_0 = a\Omega \sin \Omega t$$

La velocidad de la base vale  $\dot{x}_0 = a\Omega \cos \Omega t$

y la aceleración  $\ddot{x}_0 = -a\Omega^2 \sin \Omega t$

La respuesta de la masa está dada por (Newmark y Rosenblueth 1976)

Desplazamiento relativo  $y = aB_d \sin(\Omega t - \phi)$

Velocidad relativa  $\dot{y} = aB_d \cos(\Omega t - \phi)$

Aceleración relativa  $\ddot{y} = aB_d \cos(\Omega t - \phi)$

En las expresiones anteriores

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)\right]^2}}$$

$$\phi = \text{ang tan} \frac{2 \zeta \frac{\Omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2}$$

$\omega_1$  es la frecuencia circular del sistema  $\omega_1 = \sqrt{K/M}$

Los desplazamientos absolutos están dados por:

$$\text{Desplazamiento: } x = x_o + y$$

$$\text{Velocidad: } \dot{x} = \dot{x}_o + \dot{y}$$

$$\text{Aceleración: } \ddot{x} = \ddot{x}_o + \ddot{y}$$

Definimos el factor de amplificación de la aceleración como el cociente entre la máxima aceleración absoluta de la masa y la máxima aceleración de la base:

$$f_a = \max x / \max x_o$$

En la fig 3 se muestra la variación de  $f_a$  con el cociente  $T_1 / T$ , para amortiguamientos de 2 y 10 % del amortiguamiento crítico.

Recordemos que los periodos están dados por

$$T_1 = 2 \pi / \omega_1 \text{ ( masa que vibra ) } \quad y \quad T = 2 \pi / \Omega \text{ ( base )}$$

Se observa en la figura 3 que la amplificación de la aceleración depende del cociente  $T_1 / T$  y del amortiguamiento. La máxima amplificación se presenta cuando  $T_1 / T$ ; al aumentar el amortiguamiento decrece el factor  $f_a$ . Para  $T_1 / T \rightarrow \infty$  la amplificación de la aceleración es nula.

Un fenómeno similar sucede en el suelo blando, en el que éste hace las veces de la masa del ejemplo anterior. Consideremos un estrato de espesor H como el indicado en la figura 1, y supongamos que el desplazamiento de la base rígida está dado por

$$X_o(t) = C \exp(i \Omega t) = (\cos \Omega t + i \sen \Omega t); i = \sqrt{-1}$$

lo que implica que la base tiene un movimiento armónico de frecuencia  $\Omega$ .

La solución del movimiento cuando existe amortiguamiento cae en el campo de los números complejos, lo que conduce a que haya un cambio tanto en la amplitud como en la fase del movimiento. Definiendo la función de amplificación  $f_a = A(\Omega)$  como valor absoluto del cociente de la máxima aceleración en la superficie del estrato entre la máxima aceleración en la base rígida, se obtiene (Roesset 1969)

$$A(\Omega) = 1 / \sqrt{(\cosh^2 \alpha \cos^2 \beta + \sinh^2 \alpha) \sin^2 \beta} \quad (1)$$

donde

$$\alpha = H\Omega \sqrt{\sqrt{\left\{ \left[ 1 + (\eta\Omega / G)^2 - 1 \right] / \left[ 1 + (\eta\Omega / G)^2 \right] \right\}}} / \sqrt{2} C_s \quad (2)$$

$$\beta = H\Omega \sqrt{\sqrt{\left\{ \left[ 1 + (\eta\Omega / G)^2 + 1 \right] / \left[ 1 + (\eta\Omega / G)^2 \right] \right\}}} / \sqrt{2} C_s \quad (3)$$

donde :  $C_s = \sqrt{G / \rho}$  = velocidad de la onda de cortante en el suelo blando.

$\eta$  = amortiguamiento del suelo blando

$\Omega$  = frecuencia circular natural de la base rígida

H = espesor del suelo blando

G = módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo blando

$\rho$  = masa específica del suelo blando

La respuesta depende de la hipótesis que se haga respecto al amortiguamiento. Se puede considerar que la viscosidad es inversamente proporcional a la frecuencia, de tal modo que  $\eta\Omega / G = 2 \zeta$  sea una constante. Aplicando las ecuaciones 1 a 3 se obtiene la respuesta del estrato.

Las frecuencias correspondientes a los modos naturales de vibrar del estrato se hallan con las siguientes expresiones

$\omega_n$  = frecuencia circular del modo " n " de vibrar.

$$\omega_n = (2n - 1) \pi \sqrt{(G / \rho)} / 2 H = (2n - 1) \pi C_s / 2H$$

Para pequeños valores de  $(\eta \Omega / G)$ , la función de amplificación, para los modos naturales de vibrar, vale aproximadamente (Roesset 1969) :

$$A(\omega_n) = 4 / (2n - 1) \pi (2 \zeta) \quad (5)$$

$\zeta$  = fracción del amortiguamiento crítico.

En la figura 4 se muestra la variación de la función de amplificación con la frecuencia de vibración de la base firme, para un estrato de espesor  $H = 30.5$  m, con una velocidad de la onda cortante en el suelo blando  $C_s = 229$  m/s y un peso volumétrico del suelo  $\gamma = 2$  t / m<sup>3</sup>.

La función de amplificación se obtiene empleando las ecuaciones 1 a 3, considerando que  $\eta \Omega / G = 2 \zeta$

Vemos que la máxima respuesta se presenta cuando el terreno firme vibra con una frecuencia igual a la frecuencia correspondiente al primer modo de vibrar del estrato blando. Esto significa que si la frecuencia dominante de las ondas sísmicas que arriban a un sitio coincide o está cercana a la frecuencia del primer modo de vibrar de un estrato de suelo blando, la aceleración en la superficie de éste puede ser varias veces superior a la aceleración en el terreno firme. En este ejemplo la amplificación de la aceleración es de 3.18, para un amortiguamiento del suelo blando de 20 % del crítico.

En forma aproximada se pueden calcular las frecuencias de vibración y los valores correspondientes a los " picos " de la función de amplificación ( figura 4 ), empleando las ecuaciones 4 y 5. En la tabla 1 se presentan los resultados para los primeros cinco modos de vibrar, considerando un amortiguamiento del 20 % del amortiguamiento crítico.

TABLA 1  
VALORES APROXIMADOS DE LA FUNCION AMPLIFICACION  $A(\omega_n)$

n	$\omega_n$	f	$T_{sn}$	$A(\omega_n)$
1	11.78	1.875	0.533	3.183
2	35.34	5.625	0.178	1.061
3	58.90	9.375	0.107	0.637
4	82.47	13.125	0.076	0.455
5	106.3	16.875	0.059	0.354

$$\omega_n = (2n - 1) \pi C_s / 2 H$$

$$f = \omega_n / 2 \pi$$

$$A(\omega_n) = 4 / (2n - 1) \pi (2 \zeta)$$

$$T_{sn} = 2\pi / \omega_n$$

Desafortunadamente, no se puede controlar la frecuencia dominante de vibración de las ondas sísmicas que llegan a un sitio, en todo caso, es conveniente observar las frecuencias dominantes de los temblores que llegan a una localidad, para reconocer los estratos en los que se puede presentar el fenómeno de amplificación de aceleración que hemos comentado en los párrafos anteriores.

El razonamiento anterior es válido también en términos de los períodos de vibración de ondas y suelo blando. Vemos que la máxima respuesta de aceleración se presenta cuando el período de vibración de la base firme coincide con el período natural del primer modo de vibrar, siendo esta respuesta de 3.18 en nuestro ejemplo ( figura 4 ). Es decir, la aceleración en la superficie del terreno blando será 3.18 veces mayor que la aceleración en la base, si el amortiguamiento del suelo es de 20%. Vemos entonces que la aceleración en la superficie del suelo blando depende fundamentalmente del cociente  $T_{s1} / T$ , donde  $T_{s1}$  es el período natural de vibración del estrato blando y " T " es el período dominante de vibración de las ondas sísmicas.

Para un estrato de suelo homogéneo ( figura 1 ), los períodos de vibración están dados por

$$T_{sn} = 4H \sqrt{(\rho / G) / (2n - 1)}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

donde  $\rho$  = masa específica del suelo.  
 $G$  = módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo.

El primer modo de vibrar, o modo fundamental, se obtiene para  $n = 1$ :  $T_{s1} = 4H \sqrt{(\rho / G)}$

Para la estimación del período natural de vibración de un suelo estratificado véase Zeevaert ( 1973, 1980 ).

El período de vibración de la estructura se halla con los métodos usuales del análisis estructural. Sin embargo, cuando el terreno de cimentación está formado por un suelo blando, es importante considerar además el efecto de balanceo y de traslación horizontal de la cimentación. Así, el período de vibración acoplado de una estructura vale ( Normas de Sismo 1987 ).

$$T_1 = \sqrt{T_o^2 + T_x^2 + T_r^2}$$

donde

$T_o$  = período fundamental que tendría la estructura si se apoyara sobre una base rígida ( este período se debe a la flexibilidad propia de la estructura ).

$T_x$  = período natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base sólo pudiera trasladarse en la dirección que se analiza.

$T_r$  = período natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base sólo pudiera girar con respecto a un eje horizontal que pasara por el centroide de la superficie de desplante de la estructura y fuera perpendicular a la dirección que se analiza.

Para el cálculo de los períodos de vibración anteriores, véase el Apéndice de las Normas de Sismo ( inciso A7, interacción suelo - estructura ).

Una vez que se conocen los períodos de vibración del suelo  $T_{s1}$  y de la estructura  $T_1$ , se puede emplear el espectro de respuesta sísmica de Zeevaert ( 1980 ) para la determinación del factor de amplificación  $f_a$  ( figura 5 ), definido como el cociente de la máxima aceleración en

el centro de gravedad de la estructura entre la máxima aceleración en la superficie del terreno blando.

Vemos en el espectro que la máxima respuesta se obtiene cuando  $T_1 / T_{s1}$ . Por lo visto anteriormente, no se puede evitar la amplificación de la aceleración de un suelo blando, pero si es factible evitar que coincidan el periodo natural de vibración del suelo con el periodo natural de vibración de una estructura.

La aceleración en la superficie del terreno la proporciona, en la Ciudad de México, el Reglamento de Construcciones en las Normas de Sismo. Así, en el inciso 3 de éstas se señala que " la ordenada del espectro de aceleraciones para diseño sísmico " a " , expresada como fracción de la aceleración de la gravedad, está dada por la siguiente expresión :

$$a = ( 1 + 3 T / T_s ) C / 4 , , \text{ si } T \text{ es menor que } T_s$$

La aceleración en la superficie del suelo se obtiene haciendo  $T = 0$  en esta expresión ( pues para  $T = 0$  la estructura vibra igual que la superficie del terreno ), por lo tanto  $a = C_s = C / 4$  en la superficie.

Las aceleraciones para las diferentes zonas estratigráficas del Distrito Federal se presentan a continuación ( artículo 206 del Reglamento ) :

Zona	Coefficiente Sísmico c	Coefficiente $C_s$ (superficie)	Aceleración (superficie) $\text{cm} / \text{s}^2$
I	0.16	0.04	39
II	0.32	0.08	78
III	0.40	0.10	98

Vemos entonces que, por ejemplo, en la zona III la aceleración de diseño de la superficie del terreno es de  $98 \text{ cm} / \text{s}^2$ .

También se puede utilizar el siguiente criterio para hallar " c " (Normas de Sismo, Apéndice) : en sitios en que se conozca el periodo dominante del terreno  $T_{s1}$ , y que se hallen en las partes sombreadas de la figura 3.1 ( de esas Normas ), también se adoptará  $c = 0.4$  para estructuras del grupo B, y  $0.6$  para las del A ; fuera de las partes sombreadas se adoptará

$$c = 1.6 T_{s1} / ( 4 + T_{s1}^2 )$$

Vemos que el coeficiente sísmico depende del periodo de vibración dominante del suelo  $T_{s1}$  .. Considerando que el coeficiente sísmico en la superficie  $c_s = c / 4$  y que la aceleración en la superficie, en  $\text{cm} / \text{s}^2$  , es igual a  $c_s$  por 980, en la figura 6 se presenta la variación de esta aceleración en función del periodo  $T_{s1}$

## EJEMPLO

Determinar la respuesta de aceleración de un edificio sobre un estrato de suelo blando, con las siguientes características :

$$\text{Masa} = 217.5 \text{ t.s}^2 / \text{m}$$

$$\text{Peso} = 2133 \text{ t}$$

$$\text{Periodo de la estructura } T_o = 0.3 \text{ seg}$$

$$\text{Amortiguamiento en la estructura } \xi_o = 5 \%$$

$$\text{Periodo por rotación } T_r = 0.76 \text{ s.}$$

$$\text{Amortiguamiento en el terreno de cimentación } \xi_r = 15 \%$$

$$\text{Periodo por traslación } T_x = 0.22 \text{ s.}$$

$$\text{Periodo del terreno de cimentación } T_{s1} = 2.4 \text{ s}$$

El periodo acoplado de la estructura vale

$$T_1 = \sqrt{T_o^2 + T_x^2 + T_r^2}$$

Obtenemos el cociente  $T_1 / T_{s1} = 0.35$

Para entrar en el espectro de la figura 5 necesitamos el amortiguamiento acoplado del sistema, el cual está dado por (Zeevaert 1980) :

$$\xi_1 = \sqrt{1 - g_1}$$

$$g_1 = g_o g_r (T_1)^2 / (g_o T_r^2 + g_r T_o^2)$$

$$\text{donde } T_1 = \sqrt{(T_o^2 + T_x^2)} = 0.817 \text{ s}$$

$$g_o = 1 - \xi_o^2 = 0.9975$$

$$g_r = 1 - \xi_r^2 = 0.9775$$

$$\text{Sustituyendo } g_1 = 0.98 \quad \xi_1 = 0.141$$

Es decir el sistema tiene un amortiguamiento de 14.1 %.

Entrando al espectro para diseño sísmico ( figura 5, Zeevaert 1980 ), se obtiene un factor de amplificación  $f_s = 1.9$ .

Considerando una aceleración en la superficie de  $98 \text{ cm} / \text{s}^2$ , la aceleración en el centro de gravedad de la estructura está dado por  $(98) (1.9) = 186 \text{ cm} / \text{s}^2$ .

## REFERENCIAS.

Newark, N M y Rosenbleuth, E, Fundamentos de Ingeniería Sísmica, Diana, 1976.

Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo (RCDF), 1987.

Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, 1986.

Roesset, J M, " Fundamentals of soil amplification ", Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1969.

Zeevaert, L, Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions, Van Nostrand Reinhold, 1973.

Zeevaert, L, Interacción Suelo-Estructura de Cimentación, Limusa, 1980.

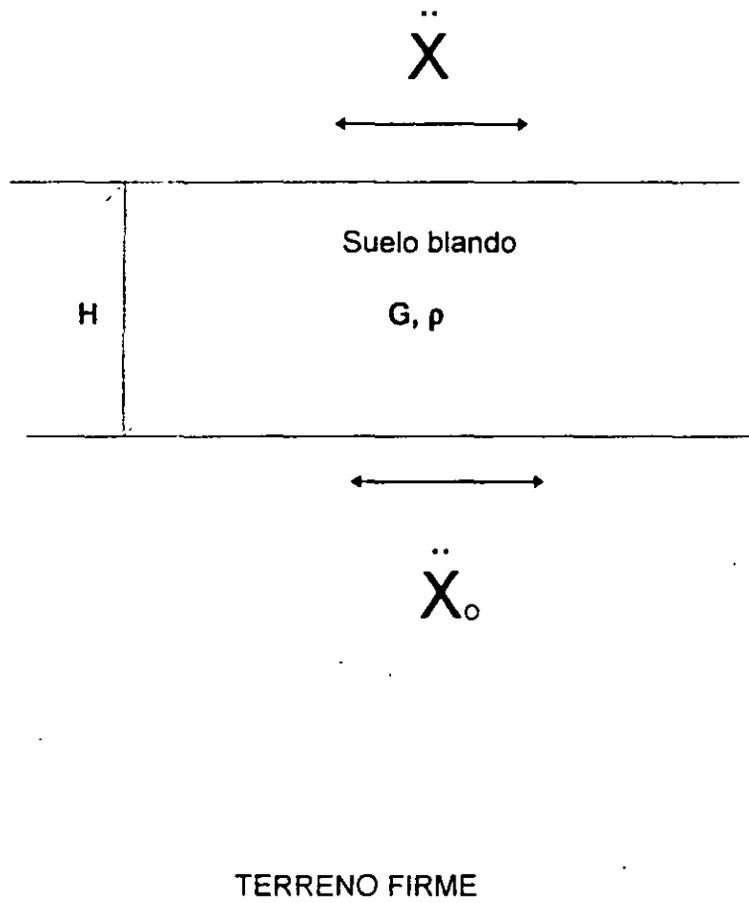


FIGURA 1

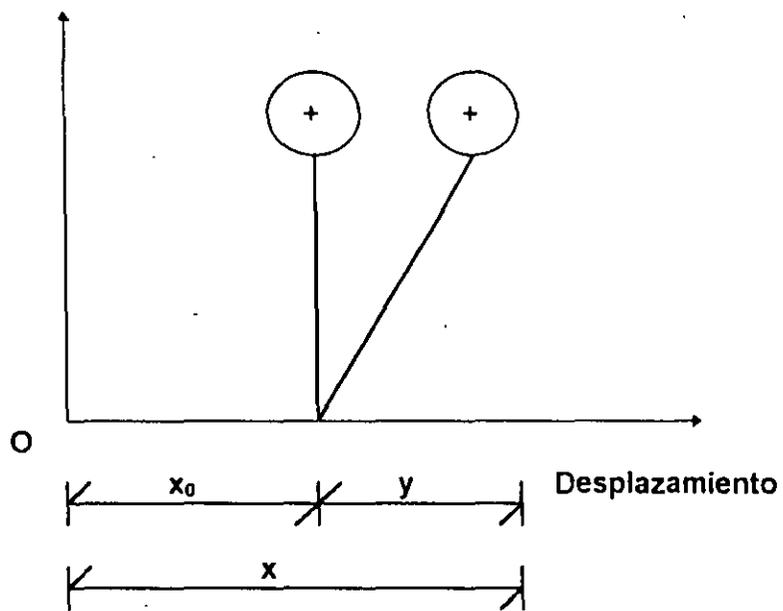
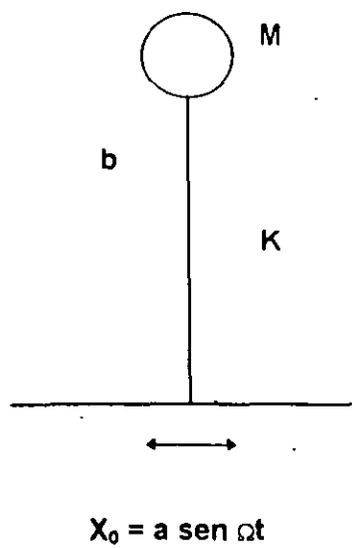


FIG. 2

### VARIACION DEL FACTOR DE AMPLIFICACION

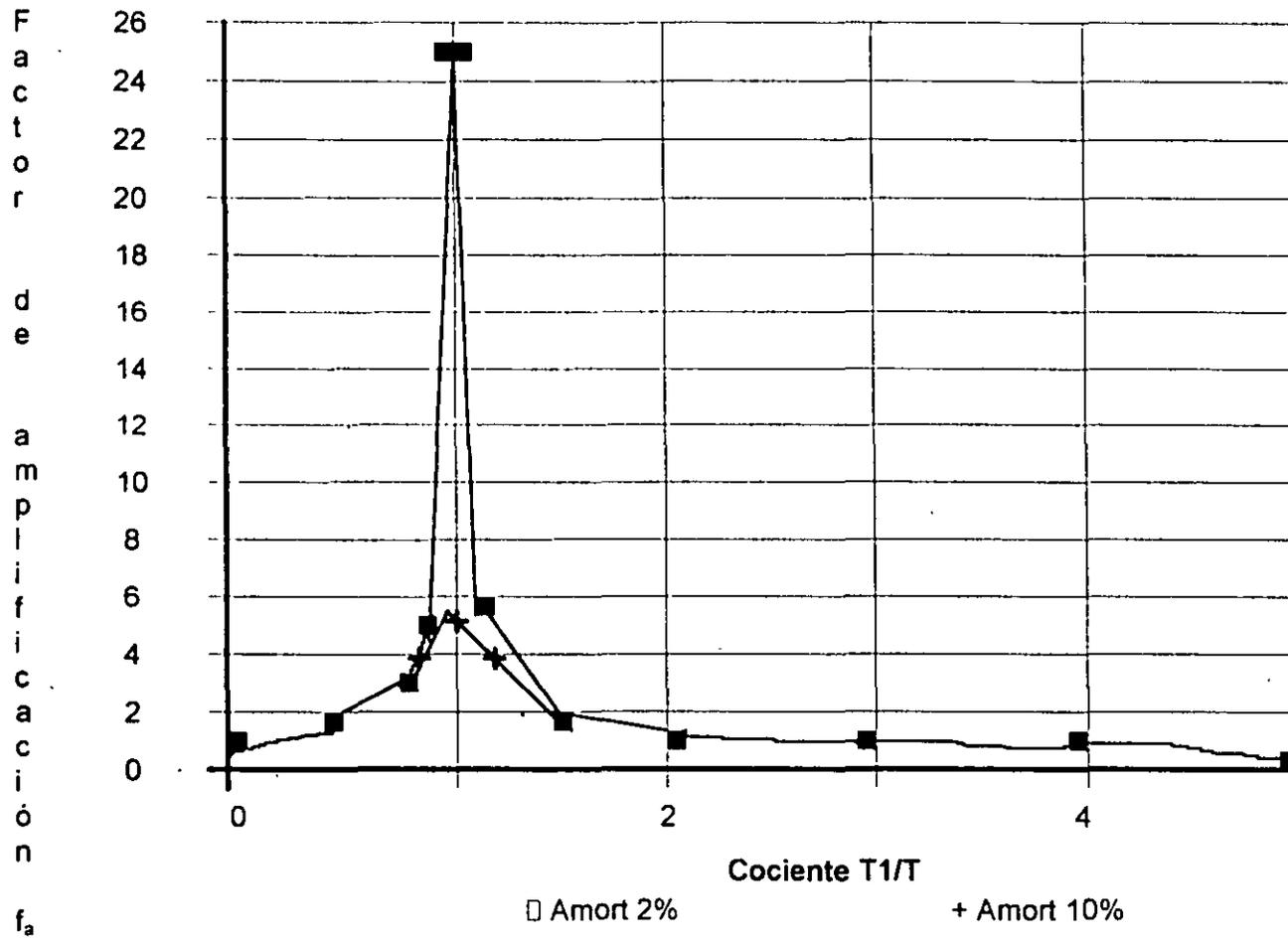


FIGURA 3

VARIACIÓN DEL FACTOR DE AMPLIACIÓN  
AMORTIGUAMIENTO 20 % DEL CRITICO

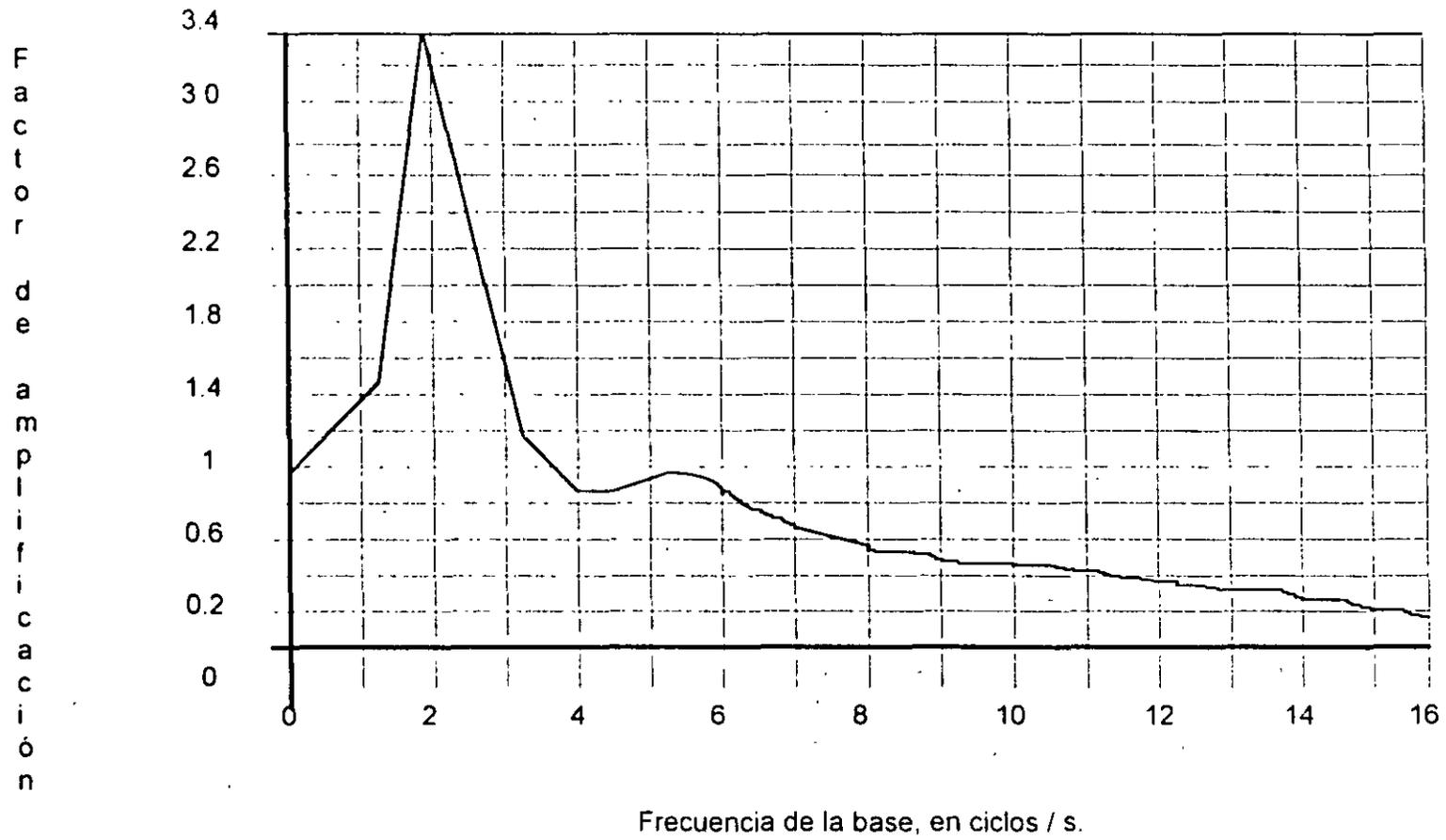
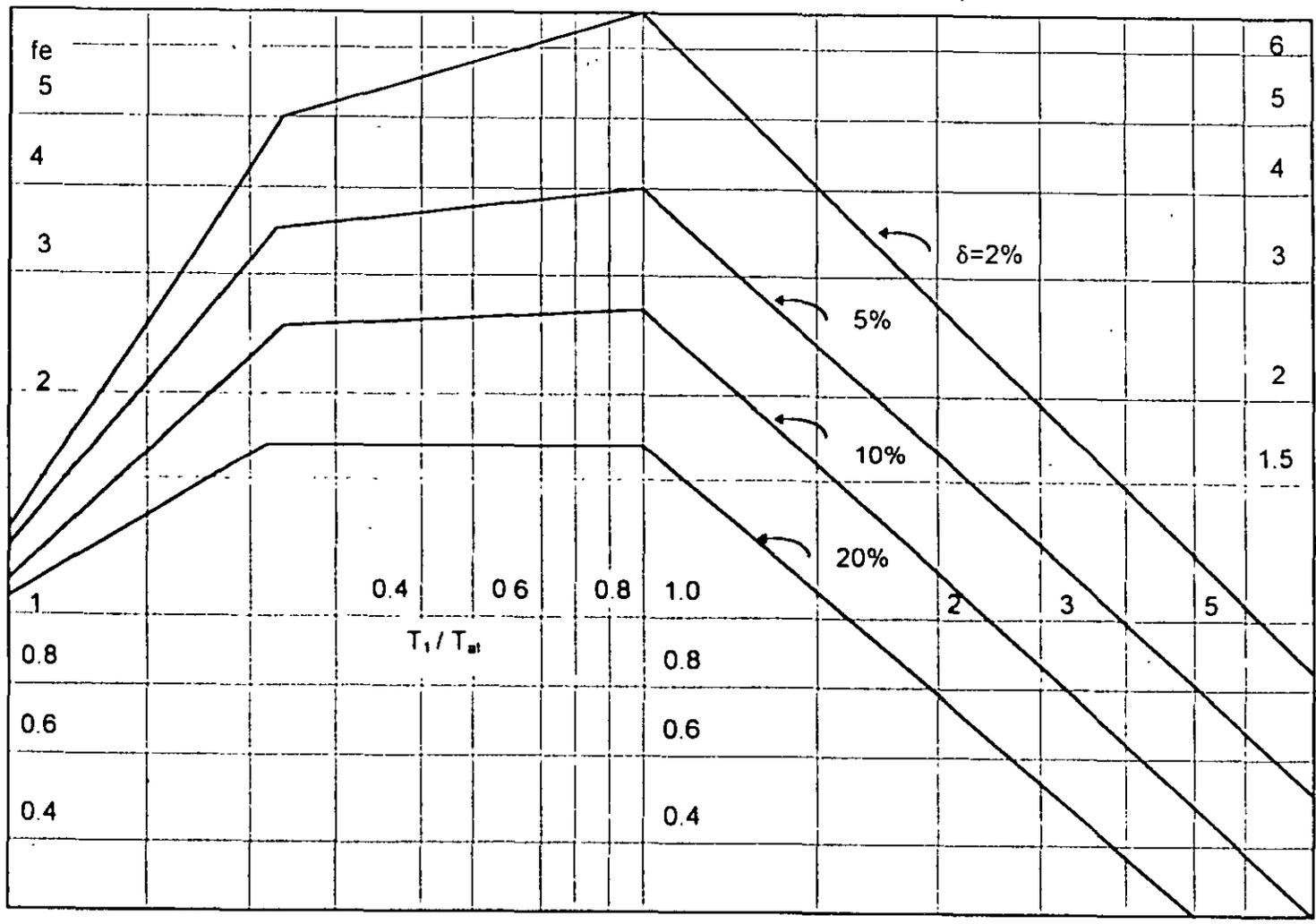


FIGURA 4



Espectro envolvente para diseño sismico. (Zeevaert 1980)  
 FIG. 5

# ESPECTRO DE RESPUESTA DEL TERRENO

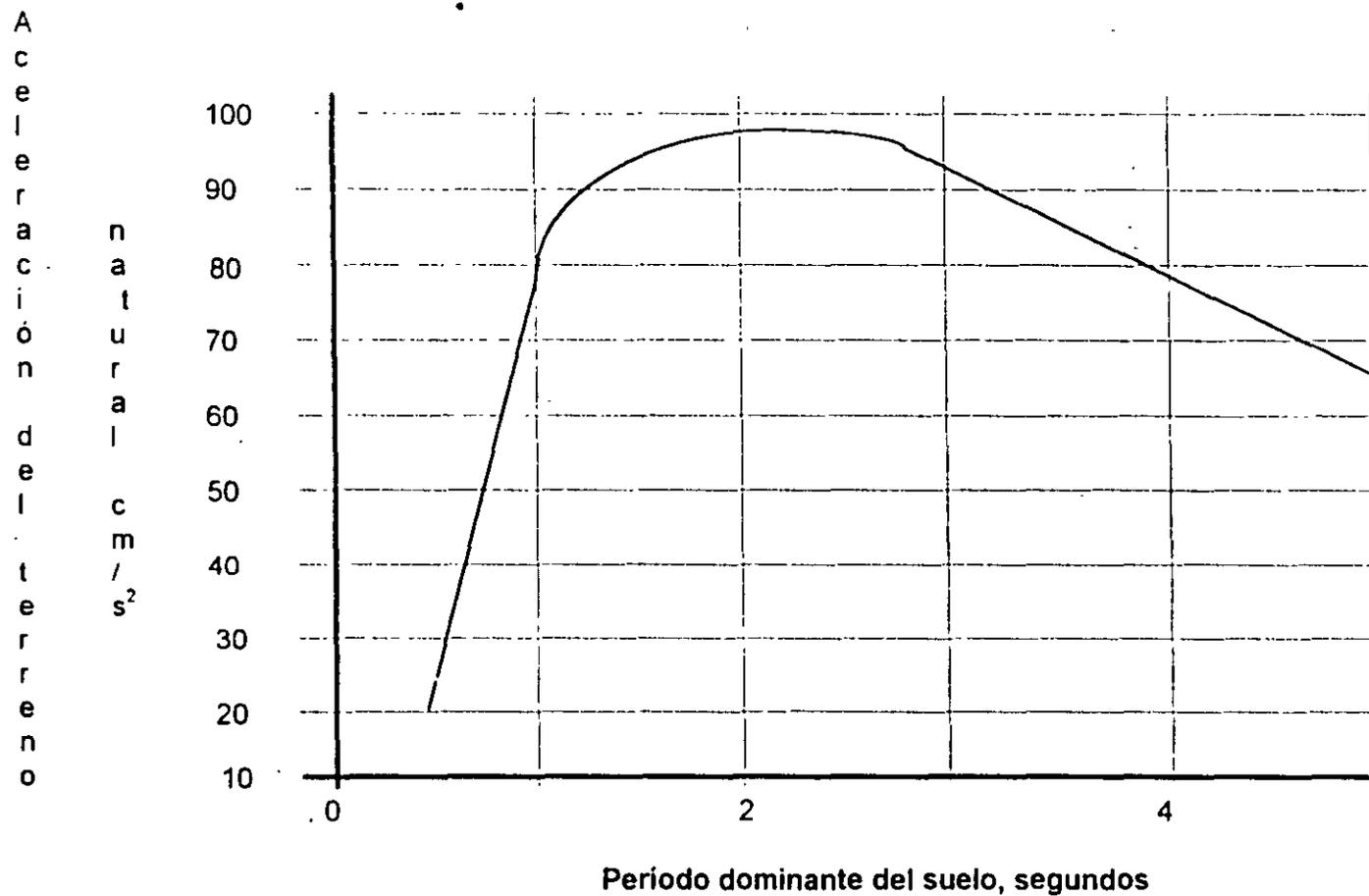


FIGURA 6



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

### **TEMA**

## **DINAMICA DE SUELOS**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMENEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DEL 2001**

## DINAMICA DE SUELOS

### VIBRACIONES

Agustin Deménegui Colina  
Héctor Sanginés García

#### Vibraciones libres

Consideremos un sistema de un grado de libertad, como el mostrado en la fig. 1. Se trata de un cuerpo de masa  $M$  unido a una base firme mediante una barra de cierta rigidez. La rigidez  $K$  se define como el cociente de la fuerza horizontal aplicada en el centro de gravedad del cuerpo, dividida entre el desplazamiento horizontal que produce dicha fuerza, es decir :

$$k = p / \delta$$

El amortiguamiento  $c$  toma en cuenta las pérdidas de energía que se producen durante el movimiento (fundamentalmente por fricción interna en el sistema). Se ha observado experimentalmente que la pérdida de energía se puede representar mediante una fuerza que se opone al movimiento, la cual es proporcional a la velocidad del cuerpo; esta fuerza vale  $c \dot{x}$ .

Por el principio de D'Alambert, la fuerza de inercia es igual al producto  $M \ddot{x}$ , pero tiene sentido contrario a la aceleración. Esta fuerza de inercia se agrega al equilibrio dinámico del cuerpo.

El fenómeno físico que estamos estudiando consiste en dar inicialmente un desplazamiento horizontal  $\delta_0$  al cuerpo, para después soltarlo y dejarlo vibrar libremente.

El equilibrio dinámico de fuerzas en el cuerpo da lugar a la siguiente ecuación

$$M \ddot{x} + c \dot{x} + Kx = 0 \quad (1)$$

$$M \ddot{x} + Kx = 0 \quad (2)$$

La ec. 2 es una ecuación diferencial homogénea de segundo orden. Su ecuación diferencial característica es

$$M\lambda^2 + K\lambda^0 = 0 \quad M\lambda^2 + K = 0 \quad (3)$$

La solución de la ecuación característica es:

---

\* Profesor del Departamento de Geotecnia  
\*\* Jefe del Departamento de Geotecnia.  
División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

$$\lambda_1 = \sqrt{-K/M} = \sqrt{K/M} i$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{-K/M} = -\sqrt{K/M} i$$

Denominemos a  $\sqrt{K/M} = \omega =$  frecuencia circular natural del sistema.

Cuando las raíces de una ecuación característica son complejas, la solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden está dada por:

$$x = C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \operatorname{sen} bt$$

donde "a" es la parte real y "b" la parte imaginaria del número complejo. Por lo tanto

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t \quad (4)$$

$$x = -C_1 \omega \operatorname{sen} \omega t + C_2 \omega \cos \omega t \quad (5)$$

De acuerdo con las condiciones iniciales, para  $t = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ . Sustituyendo en la ec. 5

$$0 = C_2 \omega (1) \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\therefore x = C_1 \cos \omega t$$

Para  $t = 0$ ,  $x = \delta_0$ . Sustituyendo en la ec. 4

$$\therefore \delta_0 = C_1 \quad x = \delta_0 \cos \omega t \quad (6)$$

En la figura 2 se muestra la variación de  $x$  en función del tiempo  $t$ .

Se define el periodo  $T$  como el tiempo en que la masa pasa por el mismo punto, con el mismo sentido del movimiento. De la figura 2 se observa que

$$\omega T = 2\pi \quad \therefore T = 2\pi / \omega$$

$$\text{Pero } \omega = \sqrt{K/M} \quad \therefore T = 2\pi \sqrt{M/K} \quad (7)$$

$T$  se conoce también como el periodo natural de vibración del sistema de un grado de libertad.

La velocidad se halla derivando la ec. 6

$$\dot{x} = -\omega \delta_0 \operatorname{sen} \omega t \quad (8)$$

La aceleración se halla derivando la ec. 8

$$x = -\omega^2 \delta_0 \cos \omega t = -\omega^2 x \quad (9)$$

Vemos que la aceleración es igual al desplazamiento multiplicado por el cuadrado de  $\omega$ , con signo contrario.

### Vibraciones libres amortiguadas

Consideremos ahora que si hay pérdida de energía en el sistema, es decir, que existe amortiguamiento :  $C \neq 0$ . El movimiento queda representado por la ec. 1

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = 0 \quad (1)$$

La ecuación característica es

$$M\lambda^2 + C\lambda + K = 0 \quad (10)$$

Las raíces de la ec. 10 son

$$\lambda_1 = -C/2M + \sqrt{\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - K/M}$$

$$\lambda_2 = -C/2M - \sqrt{\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - K/M}$$

Las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  pueden ser reales o complejas, dependiendo del valor del radical  $\sqrt{\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - K/M}$ .

Se distinguen tres casos.

#### Caso 1 Dos raíces reales diferentes

Si las raíces son reales:  $(c/2M)^2 - k/m > 0$ . La solución de la ec. 1 está dada por :

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (11)$$

En este caso el sistema no vibra, sino que la masa después de haber sido desplazada una distancia  $\delta_0$  regresa a su posición inicial. Este fenómeno se presenta cuando el amortiguamiento  $C$  es alto.

### Caso I I. Una raíz real

Se presenta cuando  $(c / 2M)^2 - k / m = 0$ . Sólo existe una raíz real que vale  $\lambda = -C / 2M$

La solución de la ec. 1 es

$$x = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

$$x = C_1 \lambda e^{\lambda t} + C_2 (t \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t})$$

De acuerdo con las condiciones iniciales, para  $t = 0$ ,  $x = \delta_0$ , por lo tanto :  $C_1 = \delta_0$

Para  $t = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ , por lo tanto

$$0 = C_1 \lambda + C_2 \qquad C_2 = -\lambda \delta_0$$

Por lo tanto , la solución de la ec 1 es

$$x = \delta_0 e^{-\lambda t} (1 - \lambda t)$$

$$x = \delta_0 e^{-(C/2M)t} [1 + (c/2M)t] \qquad (12)$$

En la fig 3 se muestra la variación de  $x$  en función del tiempo.

### Caso I I I. Dos raíces complejas

Ahora  $(c / 2M)^2 - k / m < 0$ , y

$$\lambda_1 = -C / 2M + \sqrt{K / M - (C / 2M)^2} i$$

$$\lambda_2 = -C / 2M - \sqrt{K / M - (C / 2M)^2} i$$

Cuando las raíces de una ecuación característica son complejas, la solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden está dada por :

$$x = C_1 e^{at} \cos bt + C_2 e^{at} \sin bt \qquad (13)$$

donde " a " es la parte real y " b " es la parte imaginaria del número complejo. Por lo tanto

$$a = -C / 2M, \quad y \quad b = \sqrt{K / M - (C / 2M)^2}$$

Derivando de la ec 13

$$\dot{x} = e^{at} (-C_1 b \sin bt + C_2 b \cos bt) + a e^{at} (C_1 \cos bt + C_2 \sin bt) \qquad (14)$$

Para  $t = 0$ ,  $x = \delta_0$ , por lo tanto, de la ec. 13.  $C_1 = \delta_0$ .

Para  $t = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ . Sustituyendo en la ec. 14:  $C_2 = -a \delta_0 / b$   
Sustituyendo en la ec. 13

$$x = \delta_0 e^{at} [ \cos bt - ( a / b ) \text{sen } bt ] \quad ( 15 )$$

$$\text{Pero } a = -C / 2M, \text{ y } b = \sqrt{K / M - (C / 2M)^2}$$

$$\text{Hagamos } \zeta = C / C_{\text{crit}} = c / 2\sqrt{MK}$$

Al coeficiente  $\zeta = -C / C_{\text{crit}}$  lo denominaremos porcentaje del amortiguamiento crítico:

$$\zeta = C / C_{\text{crit}} = c / 2\sqrt{MK}$$

Por otra parte  $\omega = \sqrt{K / M}$ , por lo tanto,  $\zeta \omega = C / 2 M$ .

Sustituyendo en la ec. 15

$$x = \delta_0 e^{-\zeta \omega t} \left[ \cos \omega \sqrt{1 - \zeta^2} t + (\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}) \text{sen } \omega \sqrt{1 - \zeta^2} t \right] \quad ( 16 )$$

La fig. 4 muestra la variación de  $x$  en función del tiempo.

### Vibraciones Estacionarias

Se denominan movimientos estacionarios cuando la acción sobre el sistema es de tipo armónico

#### a) Vibraciones Forzadas

Consideremos un cuerpo como el de la fig 1, que se somete a una fuerza estacionaria dada por  $F = F_0 \text{sen } \Omega t$ . La ecuación de equilibrio dinámico queda

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_0 \text{sen } \omega t \quad ( 17 )$$

La respuesta de la masa está dada por ( Newmark y Rosenblueth 1976 )

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F_0 \sin \omega t \quad (17)$$

$$x = \frac{F_0}{K} \frac{\sin(\Omega t - \phi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2}} \quad (18)$$

$\omega_1$  es la frecuencia circular del sistema  $\omega_1 = \sqrt{K/M}$

Consideremos ahora un sistema de un grado de libertad como el mostrado en la fig. 5, en el que la base se somete a un movimiento dado por

$$X_0 = a \sin \Omega t \quad (20)$$

La velocidad de la base vale  $\dot{x} = a \Omega \cos \Omega t \quad (20')$

Y la aceleración  $\ddot{x}_0 = -a \Omega^2 \sin \Omega t \quad (20'')$

La ecuación de equilibrio dinámico está dada por

$$M\ddot{x} + C\dot{y} + Ky = 0$$

Pero de la fig. 5  $x = x_0 + y$

$$\therefore M(\ddot{x} + \ddot{y}) + C\dot{y} + Ky = 0$$

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = -M\ddot{x}_0 \quad (21)$$

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = a \Omega^2 M \sin \Omega t \quad (22)$$

Vemos que la ec. 22 es similar a la ec. 17. Por lo tanto, se puede emplear la misma solución de la ec. 17, con

$$F_0 \sin \Omega t = a \Omega^2 M \sin \Omega t$$

Con este cambio de variable, la respuesta de la masa está dada por

Desplazamiento Relativo  $y = a B_r \sin(\Omega t - \phi) \quad (23)$

Velocidad Relativa  $\dot{y} = a \Omega B_v \cos(\Omega t - \phi) \quad (23')$

relativa  $\ddot{y} = -a \Omega^2 B_a \sin(\Omega t - \phi) \quad (23'')$

Aceleración

En las expresiones anteriores

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2}\right)^2 + \left[2\zeta \frac{1}{\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)}\right]^2}} \quad (24)$$

$$\phi = \text{angtan} \frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} \quad (25)$$

$\omega_1$  es la frecuencia circular del sistema  $\omega_1 = \sqrt{K/M}$

Los desplazamientos absolutos están dados por

$$\text{Desplazamiento} \quad x = x_o + y \quad (26)$$

$$\text{Velocidad} \quad \dot{x} = \dot{x}_o + \dot{y} \quad (27)$$

$$\text{Aceleración} \quad \ddot{x} = \ddot{x}_o + \ddot{y} \quad (28)$$

Definamos el factor de amplificación de la aceleración como el cociente entre la máxima aceleración absoluta de la masa y la máxima aceleración de la base:

$$f_a = \max |\ddot{x}| / \max |\ddot{x}_o| \quad (29)$$

$$\text{Es decir} \quad f_a = \max |\text{sen } \Omega t + B_d \text{sen}(\Omega t - \phi)| \quad (30)$$

En la fig 6 se muestra la variación de  $f_a$  con el cociente  $T_1 / T$ , para amortiguamientos de 2 y 10 % del amortiguamiento crítico

Recordemos que los periodos están dados por

$$T_1 = 2\pi / \omega_1 \text{ ( masa que vibra ) } \quad \text{y} \quad T = 2\pi / \Omega \text{ ( base )}$$

Se observa en la fig. 6 que la amplificación de la aceleración depende del cociente  $T_1 / T$  y del amortiguamiento. La máxima amplificación se presenta cuando  $T_1 / T = 1$ ; al aumentar el

amortiguamiento decrece el factor  $f_a$ . Para  $T_1 / T \rightarrow \infty$  la amplificación de la aceleración nula.

### Vibración debida a rotación

Consideremos una masa como lo indica en la fig. 7, vibrando libremente. La fuerza de inercia vale  $F = M \ddot{x}$ .

De la figura  $\dot{x} = \theta H$ ,  $\ddot{x} = \theta \ddot{H}$  Por lo tanto  $F = M \theta \ddot{H}$

El momento de volteo al nivel de cimentación, debido a la inercia de la masa vale

$$O_T = FH = M \theta H^2 = MH^2 \theta$$

Supongamos ahora que la cimentación está sometida a un momento estacionario dado por  $O_T = O_{T_0} \sin \Omega t$ . En el diagrama de cuerpo libre de la cimentación ( fig 8 ) se muestran los momentos que actúan sobre ella. El equilibrio de momentos indica que

$$MH^2 \ddot{\theta} + C \dot{\theta} + K_r \theta = O_{T_0} \sin \Omega t \quad (31)$$

La ecuación dinámica obtenida para un sistema de un grado de libertad sometido a una fuerza vertical estacionaria es ( ec 17 ) .

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = F_0 \sin \Omega t \quad (32)$$

Las ecs 31 y 32 son similares. por lo que para hallar la solución de la ec. 31 podemos emplear la solución de la ec. 32, cambiando  $M$  por  $MH^2$  y  $F_0$  por  $O_{T_0}$ . Por lo tanto, la solución de la ec. 31 es

$$\theta = \frac{O_{T_0}}{K_r} \frac{\sin(\Omega t - \alpha)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad (33)$$

$$\text{donde} \quad \alpha = \arctan \frac{2\zeta \omega \Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (34)$$

$$\omega = \sqrt{K_r / MH^2} = \sqrt{K_r / M} / H \quad (35)$$

$$\zeta = C / C_{crit} = c / 2 \sqrt{K_r MH^2} = C / 2H \sqrt{K_r M} \quad (36)$$

Por lo anterior, el periodo natural de vibración por rotación de una masa está dado por

$$T_{TTTY_i} = 2\pi \sqrt{MH^2 / K_i} = 2\pi H \sqrt{M / K_i} \quad (37)$$

$$o \quad T_i = 2\pi \sqrt{WH^2 / K_i} \quad (38)$$

### Vibración de un estrato de suelo

Un fenómeno similar al de vibración de un sistema de un grado de libertad sucede en un estrato de suelo blando, en el que éste hace las veces de la masa del sistema de un grado de libertad.

Consideremos un estrato de suelo de espesor H, como el indicado en la fig. 9. El estudio de la vibración de este estrato se lleva a cabo estableciendo las ecuaciones de equilibrio dinámico de un elemento de suelo ( fig. 10 ), considerando una onda de cortante que viaja en dirección vertical, las fuerzas que actúan sobre el elemento son ( Roesset 1969 )

Fuerza de inercia  $\rho \delta^2 u / \delta t^2$

Fuerza debida a la perdida de energia  $\eta \delta^2 u / \delta t \delta z^2$

Aplicando la segunda ley de Newton al elemento

$$-\tau_{zx} dx dz + (\tau_{zx} + \delta \tau_{zx} / \delta z) dx dz + \eta \delta^3 u / \delta t \delta z^2 dx dz = (\rho \delta^2 u / \delta t^2) dx dz \quad (39)$$

$$\text{Es decir} \quad \rho \delta^2 u / \delta t^2 = \delta \tau_{zx} / \delta z + \eta \delta^3 u / \delta t \delta z^2 \quad (40)$$

Por la ley de Hooke  $\gamma_{zx} = (1/g) \tau_{zx}$

$$y \quad \gamma_{zx} = \delta w / \delta x + \delta u / \delta z \quad \text{con} \quad \delta w / \delta x = 0$$

$$\therefore \quad \gamma_{zx} = \delta u / \delta z$$

Sustituyendo valores en la ec 40

$$\rho \delta^2 u / \delta t^2 = G \delta^2 u / \delta z^2 + \eta \delta^3 u / \delta t \delta z^2 \quad (41)$$

Para hallar el movimiento de estrato de espesor H se tiene que resolver una ecuación diferencial parcial de segundo orden ( ec. 41 ).

Supongamos que el desplazamiento de la base rigida esta dado por

$$X_0(t) = C \exp(i\Omega t) = C (\cos \Omega t + i \sen \Omega t) \quad (42)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

lo que implica que la base tiene un movimiento armónico de frecuencia  $\Omega$ .

La solución del movimiento cuando existe amortiguamiento cae en el campo de los números complejos, lo que conduce a que haya un cambio tanto en la amplitud como en la fase del movimiento. Definiendo la función de amplificación  $f_a = A(\Omega)$  como el valor absoluto del cociente de la máxima aceleración en la superficie del estrato entre la máxima aceleración en la base rígida, se obtienen (Roesset 1969)

$$A(\Omega) = 1 / \sqrt{\cosh^2 \alpha \cos^2 \beta + \sinh^2 \alpha \sin^2 \beta} \quad (43)$$

donde

$$\alpha = H \Omega \sqrt{\left[1 + (\eta \Omega / G) - 1\right] / \left[1 + (\eta \Omega / G)\right]} / \sqrt{2 C_s} \quad (44)$$

$$\beta = H \Omega \sqrt{\left[1 + (\eta \Omega / G) + 1\right] / \left[1 + (\eta \Omega / G)\right]} / \sqrt{2 C_s} \quad (45)$$

donde  $C_s = \sqrt{G / \rho}$  = velocidad de la onda de cortante en el suelo blando  
 $\eta$  = amortiguamiento del suelo blando  
 $\Omega$  = frecuencia circular natural de la base rígida  
 $H$  = espesor del suelo blando  
 $G$  = módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo blando  
 $\rho$  = masa específica del suelo blando

La respuesta depende de la hipótesis que se haga respecto al amortiguamiento. se puede considerar que la viscosidad es inversamente proporcional a la frecuencia, de tal modo que  $\eta \Omega / G = 2 \xi$  sea una constante. Aplicando las ecs 43 a 45 se obtiene la respuesta del estrato.

Las frecuencias correspondientes a los modos naturales de vibrar del estrato se hallan con las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \omega_n &= \text{frecuencia circular del modo } n \text{ de vibrar} \\ \omega_n &= (2n - 1) \pi \sqrt{G / \rho} / 2H = (2n - 1) \pi C_s / 2H \end{aligned} \quad (46)$$

Para pequeños valores de  $(\eta \Omega / G)$ , la función de amplificación, para los modos naturales de vibrar, vale aproximadamente (Roesset 1969).

$$A(\omega_n) = 4 / (2n - 1) \pi (2 \xi) \quad (47)$$

$\xi$  = fracción de amortiguamiento crítico

En la fig. 11 se muestra la variación de la función de amplificación con la frecuencia de vibración de la base firme, para un estrato de espesor  $H = 30.5$  m, con una velocidad de la onda de cortante en el suelo blando  $C_s = 229$  m/s y un peso volumétrico del suelo  $\gamma = 2$  t/m<sup>3</sup>. La función de amplificación se obtiene empleando las ecs 43 a 45, considerando que  $\eta \Omega / G = 2 \xi$ .

Vemos que la máxima respuesta se presenta cuando el terreno firme vibra con una frecuencia igual a la frecuencia correspondiente al primer modo de vibrar del estrato blando. Esto significa que si la frecuencia dominante de las ondas sísmicas que arriban a un sitio coincide o está cercana a la frecuencia del primer modo de vibrar de un estrato de suelo blando, la aceleración en la superficie de éste puede ser varias veces superior a la aceleración en el terreno firme. En este ejemplo la amplificación de la aceleración es de 3.18, para un amortiguamiento del suelo blando de 20% del crítico.

En forma aproximada se pueden calcular las frecuencias de vibración y los valores correspondientes a los "picos" de la función de amplificación ( fig 11 ), empleando las ecs. 46 y 47. En la tabla 1 se presentan los resultados para los primeros cinco modos de vibrar, considerando un amortiguamiento del 20% del amortiguamiento crítico.

TABLA 1

VALORES APROXIMADOS DE LA FUNCIÓN DE AMPLIFICACIÓN  $A(\omega_n)$

n	$\omega_n$ s <sup>-1</sup>	f ciclos/s	$T_{sn}$ s	$A(\omega_n)$
1	11.78	1.875	0.533	3.183
2	35.34	5.625	0.178	1.061
3	58.90	9.375	0.107	0.637
4	82.47	13.125	0.076	0.455
5	106.03	16.875	0.059	0.354

$$\omega_n = (2n - 2) \pi C_s / 2H \quad A(\omega_n) = 4 / (2n - 1) \pi (2\xi)$$

$$f = \omega_n / 2\pi \quad T_{sn} = 2\pi / \omega_n$$

Desafortunadamente, no se puede controlar la frecuencia dominante de vibración de las ondas sísmicas que llegan a un sitio, en todo caso, es conveniente observar las frecuencias dominantes de los temblores que llegan a una localidad, para reconocer los estratos en los que se puede presentar el fenómeno de amplificación de aceleración que hemos comentado en los párrafos anteriores.

El razonamiento anterior es válido también en términos de los periodos de vibración de ondas y suelo blando. Vemos que la máxima respuesta de aceleración se presenta cuando el periodo de vibración de la base firme coincide con el periodo natural del primer modo de vibrar, siendo

esta respuesta de 3.18 en nuestro ejemplo ( fig. 11 ). Es decir, la aceleración en la superficie del terreno blando será 3.18 veces mayor que la aceleración en la base, si el amortiguamiento del suelo es de 20%. Vemos entonces que la aceleración en la superficie del suelo blando depende fundamentalmente del cociente  $T_{sn} / T$ , donde  $T_{sn}$  es el periodo natural de vibración del estrato blando y  $T$  es el periodo dominante de vibración de las ondas sísmicas. Para un estrato de suelo homogéneo ( fig. 9 ), los periodos de vibración están dados por

$$T_{sn} = 4 H \sqrt{\rho / G} / (2n - 1) \quad (48)$$

$n = 1, 2, \dots$

donde  $\rho$  = masa específica del suelo  
 $G$  = módulo de rigidez al cortante dinámico del suelo

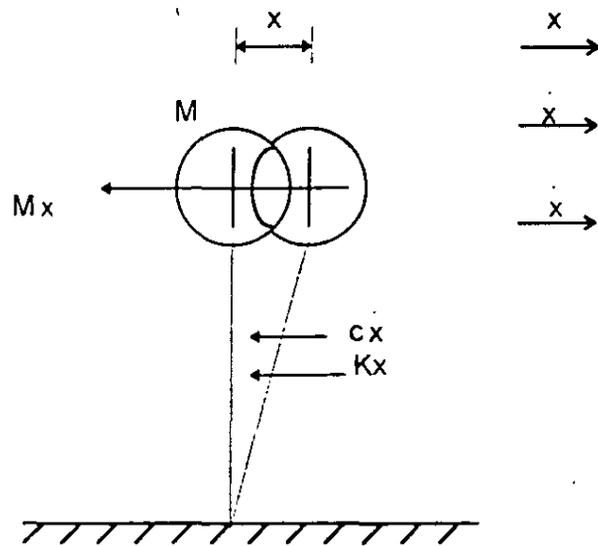
El primer modo de vibrar, o modo fundamental, se obtiene para  $n = 1$ :

$$T_{s1} = 4 H \sqrt{\rho / G} \quad (49)$$

#### REFERENCIAS

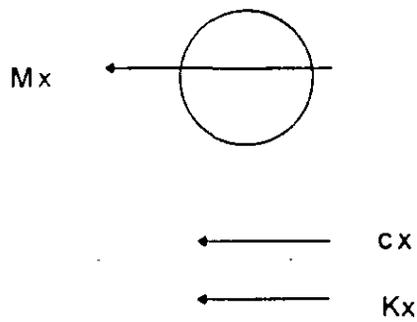
Newmark, N M y Rosenblueth, E. Fundamentos de Ingeniería Sísmica, Diana, 1976

Roesset, J M, " Fundamentals of soils amplification ", Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1969



VIBRACION LIBRE DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD

(a)

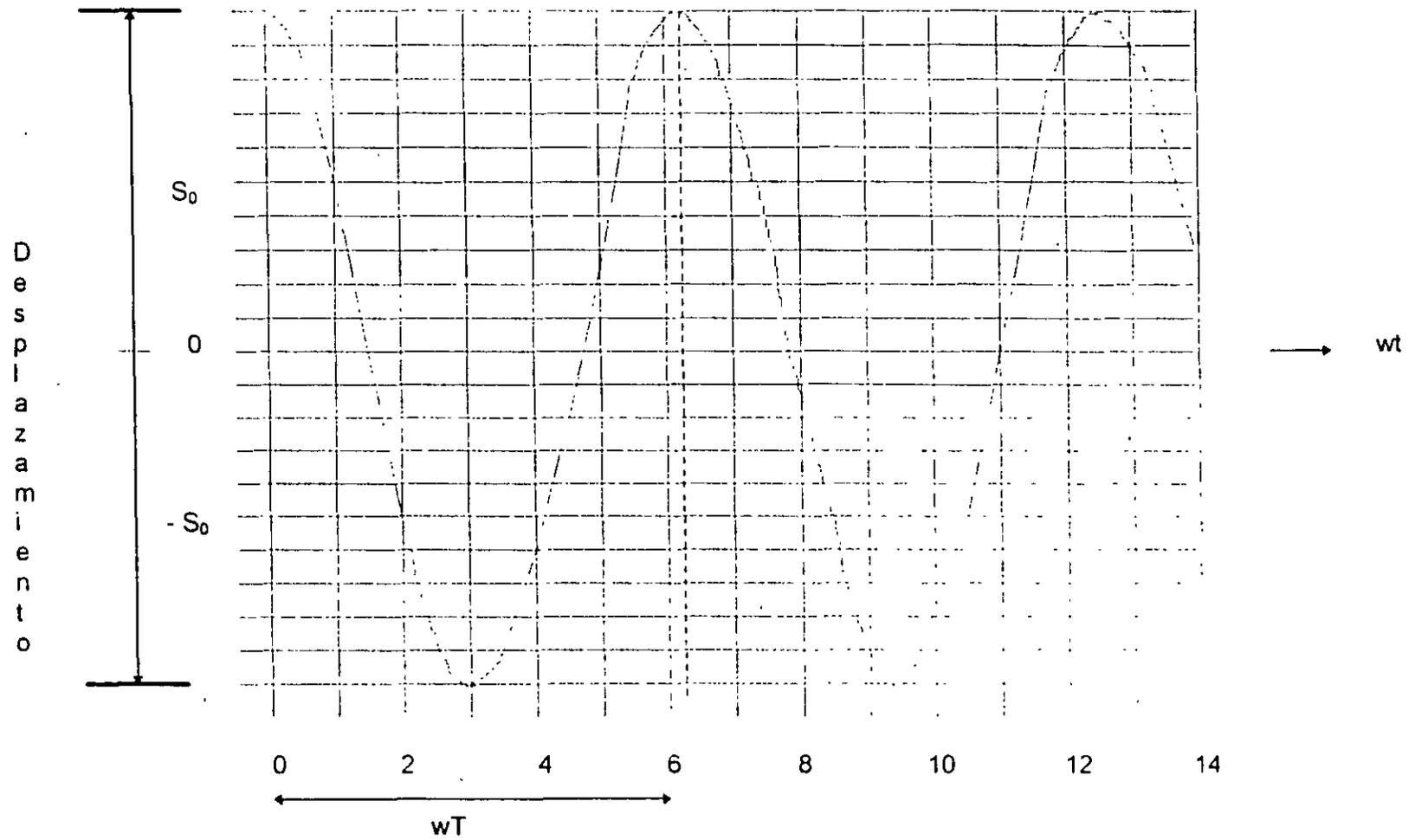


FUERZAS QUE ACTUAN EN EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE LA MASA

(B)

FIGURA 1

# VIBRACION LIBRE SIN AMORTIGUAMIENTO



$w, t$  radianes ;  $T =$  Período ;  $S_0 =$  amplitud

FIGURA 2

# MOVIMIENTO PARA AMORTIGUAMIENTO CRITICO

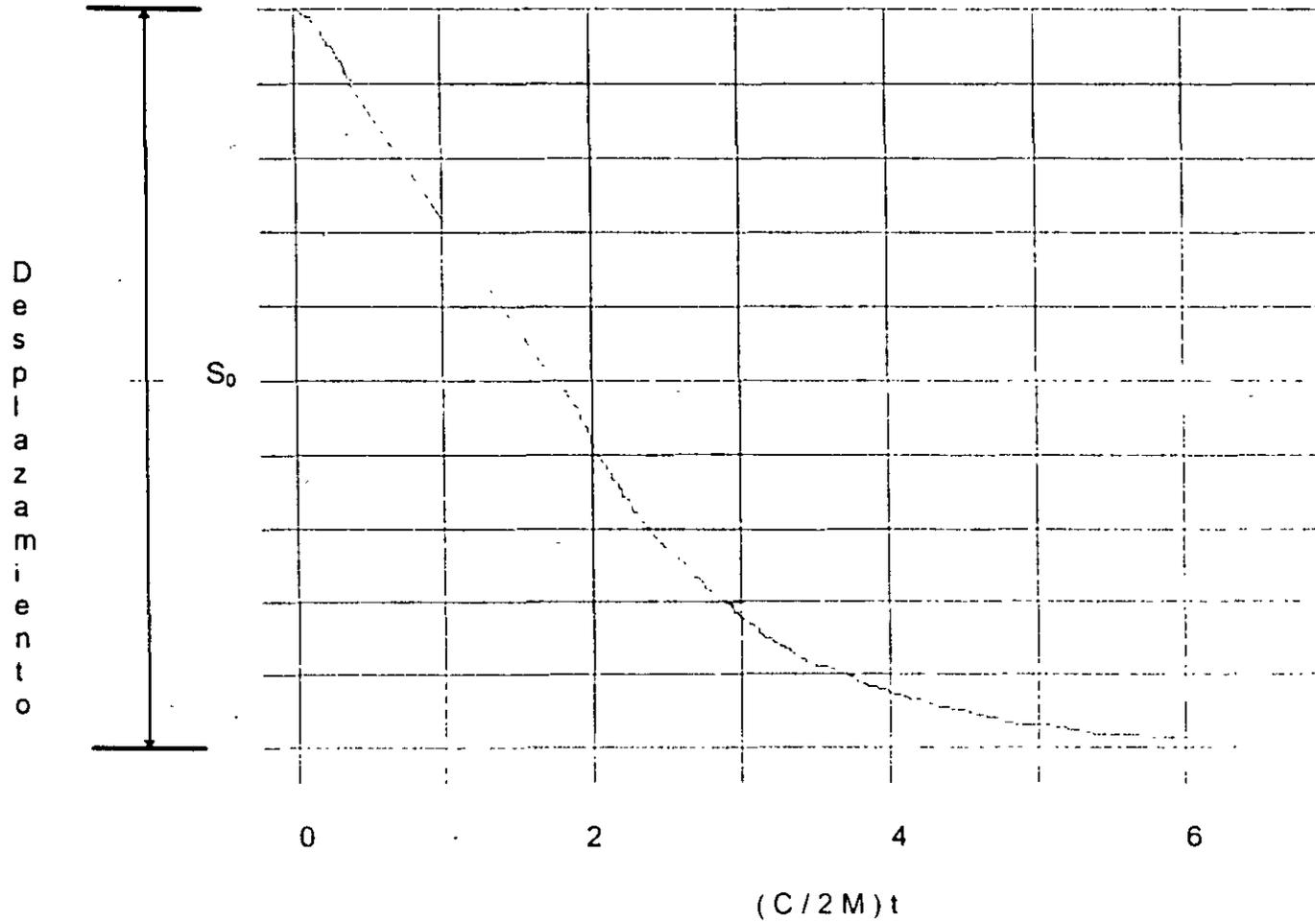
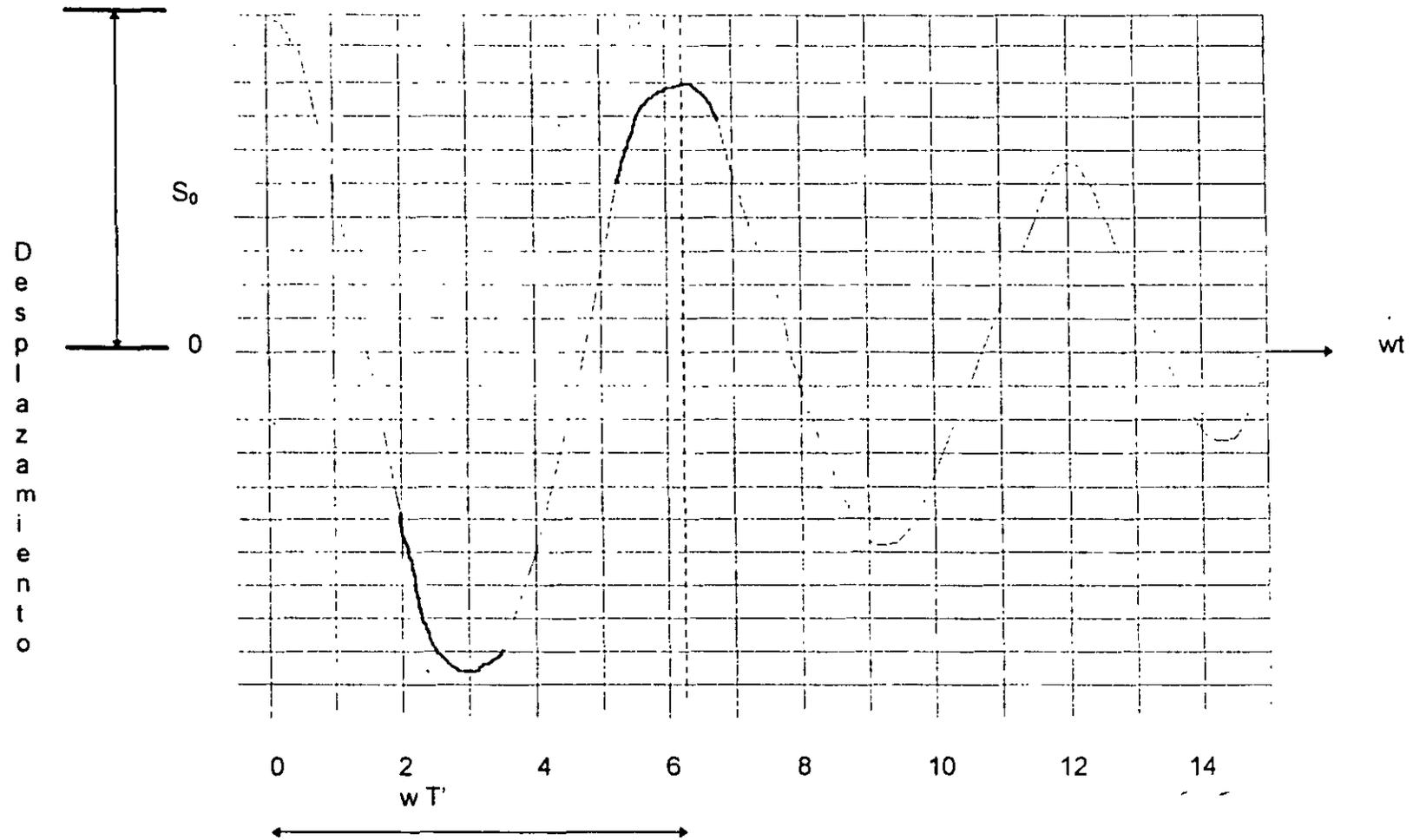


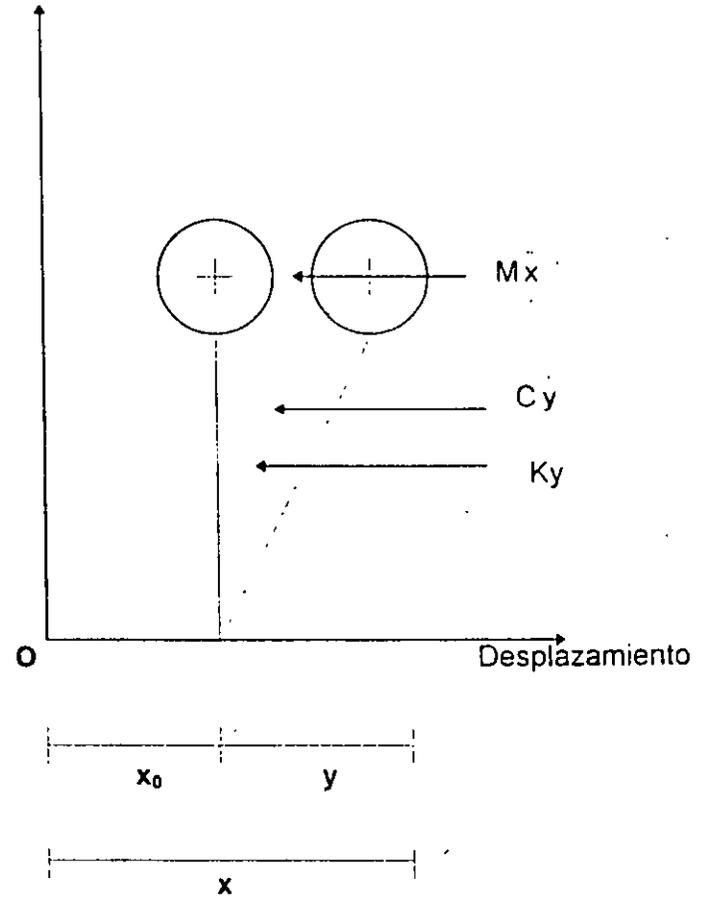
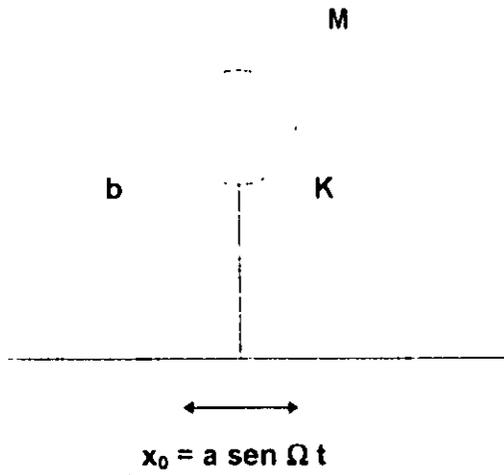
FIGURA 3

# VIBRACION LIBRE CON AMORTIGUAMIENTO



$w, t$  radianes ;  $T'$  = Periodo ;  $S_0$  = amplitud

FIGURA 4



MOVIMIENTO ESTACIONARIO DE LA BASE

FIGURA 5

### VARIACION DEL FACTOR DE AMPLIFICACION

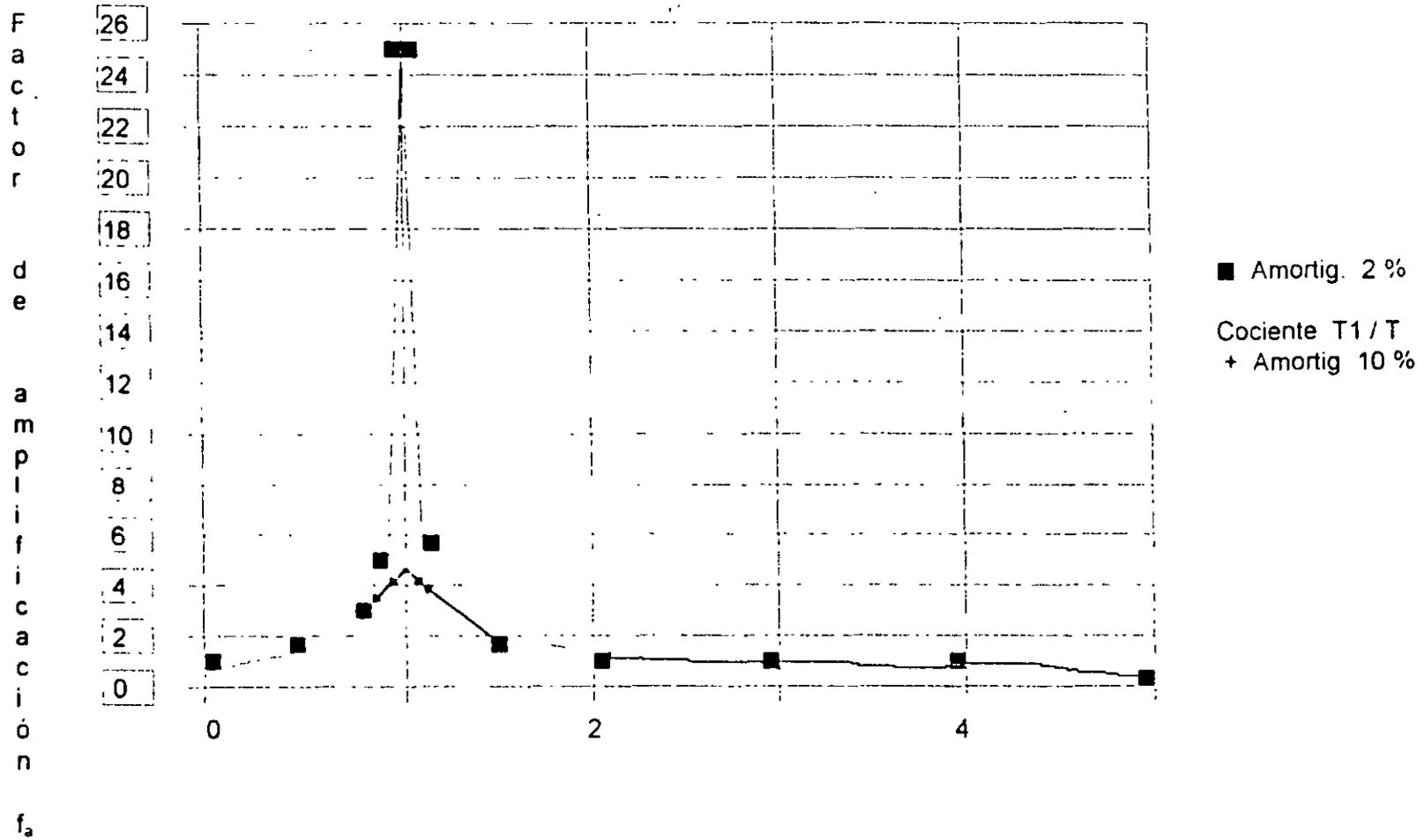
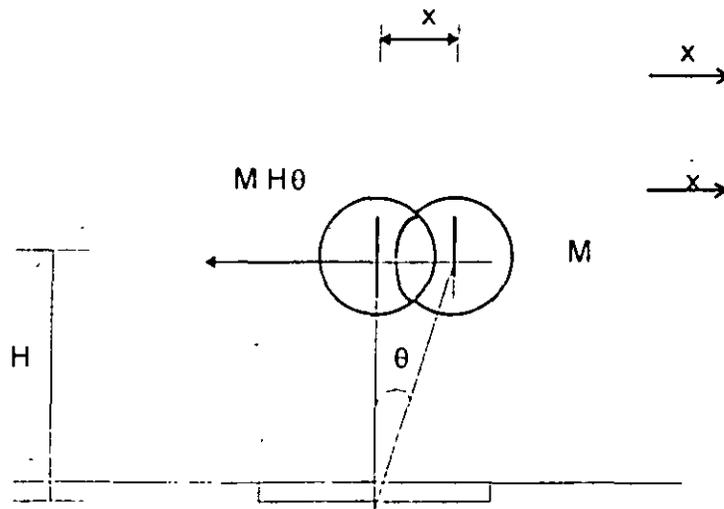


FIGURA 6



ROTACION DE UNA MASA DE UN GRADO DE LIBERTAD

FIGURA 7

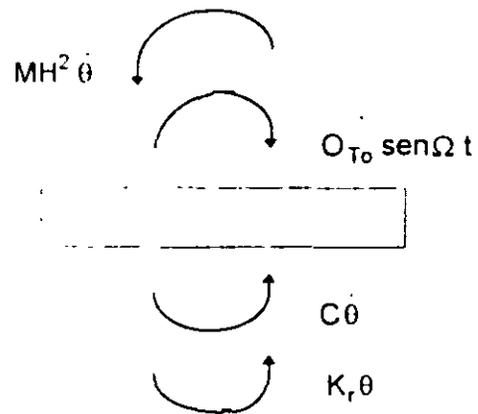
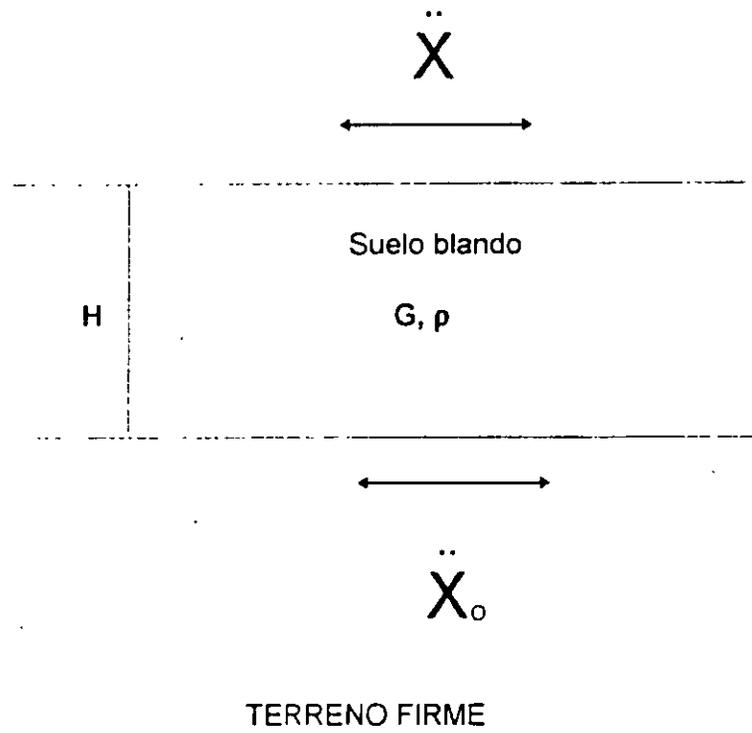


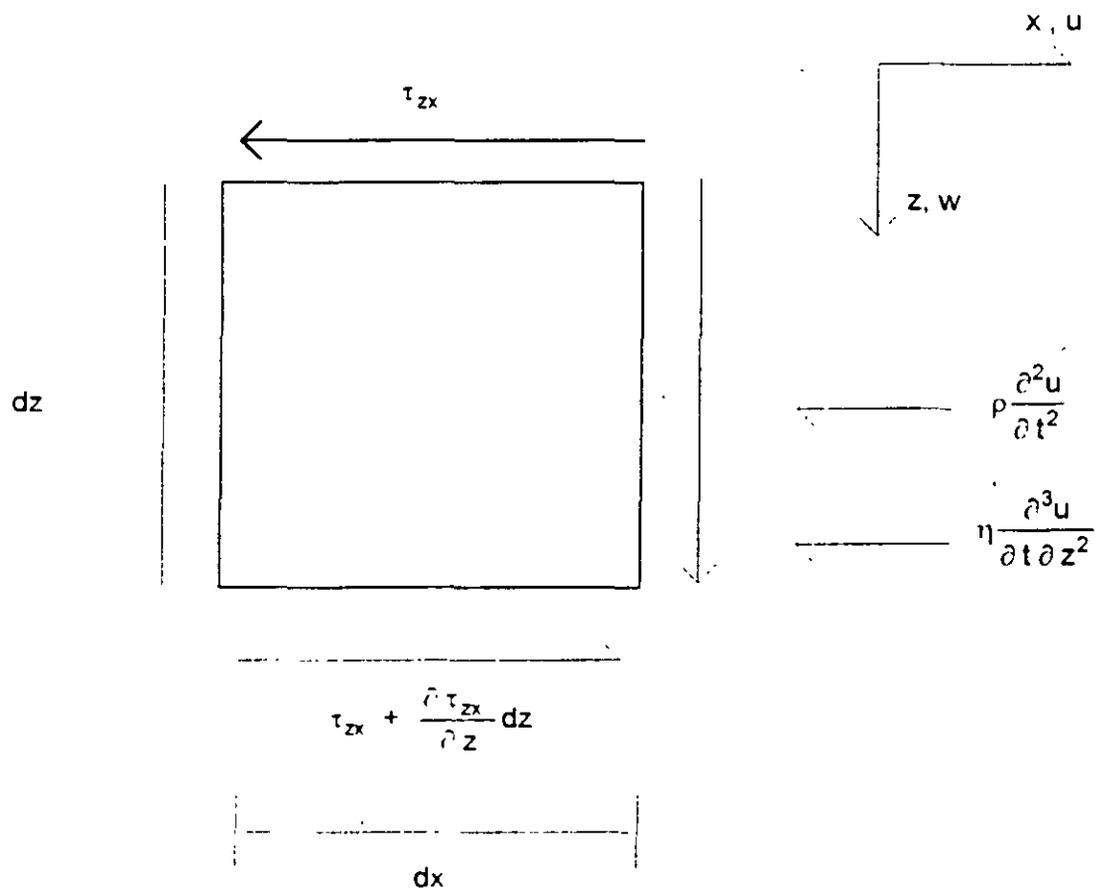
DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE LA CIMENTACION

FIGURA 8



ESTRATO BLANDO DE ESPESOR H

FIGURA 9



EQUILIBRIO DINAMICO DEL ELEMENTO

FIGURA 10

# VIBRACION LIBRE SIN AMORTIGUAMIENTO AMORTIGUAMIENTO 20 % DEL CRITICO

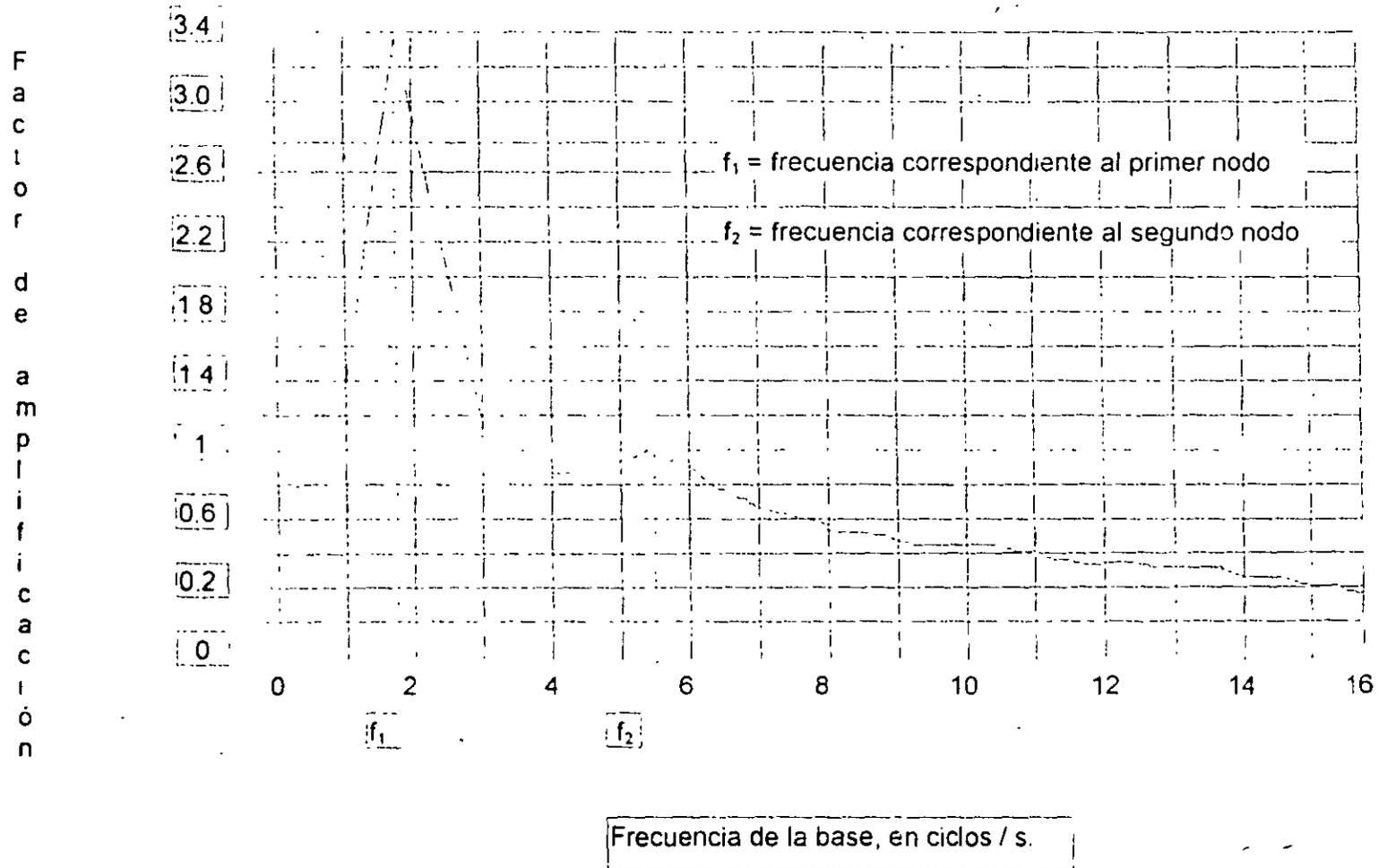


FIGURA 11



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

### **TEMA**

## **DINAMICA DE SUELOS ( VIBRACIONES )**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMENEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DEL 2001**

# DINAMICA DE SUELOS

## VIBRACIONES

Agustín Deménegui Colina  
Héctor Sanginés García

### Amortiguamiento ( Kolsky 1963 )

Durante la vibración de un sólido, se produce cierta pérdida de energía por calor, lo que se conoce en términos generales como fricción interna en el sistema.

La forma más directa de definir la fricción interna es determinando el cociente de la energía disipada durante un ciclo de esfuerzos  $\Delta W$  entre la energía elástica  $W$  almacenada cuando la deformación unitaria es máxima. A este valor se denomina " amortiguamiento específico " o " pérdida específica de energía ", y se ha observado que depende de la amplitud y de la velocidad del esfuerzo en el ciclo, y a menudo de la historia de cargas del espécimen.

En general se acepta que las fuerzas de restitución son proporcionales a la amplitud de la vibración y que las fuerzas disipativas de energía son proporcionales a la velocidad. Cuando esto se cumple, la relación de amplitudes positivas entre los ciclos consecutivos es constante, y el logaritmo natural de esta relación,  $\Delta'$ , se toma como una medida de la fricción interna.

Demostremos continuación que  $\Delta'$  es igual a la mitad de la pérdida específica de energía cuando el amortiguamiento es bajo. De la fig 1

$$\Delta' = \ln ( x_a / x_b )$$

1. El desplazamiento está dado por la ec 16

$$x = \zeta_0 e^{-\zeta \omega t} \left[ \cos \omega \sqrt{1 - \zeta^2} t + \left( \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \text{sen } \omega \sqrt{1 - \zeta^2} t \right] \quad ( 16 )$$

$$\text{Para } t = t_a \quad x_a = \delta_0 e^{-\zeta \omega t_a}$$

$$\text{Para } t = t_b \quad x_b = \delta_0 e^{-\zeta \omega (t_b + 2\pi / \omega)}$$

$$x_a / x_b = e^{2\zeta}$$

---

Profesor del Departamento de Geotecnia  
\*\* Jefe del Departamento de Geotecnia  
División de Ingeniería Civil Topográfica y Geodésica

Pero  $\zeta = c / 2 \sqrt{MK}$  Y  $\omega = \sqrt{K / M}$

$\therefore \lambda_a / \lambda_b = e^{\pi c / M \omega}$

$\Delta' = \ln(\lambda_a / \lambda_b) = \pi c / M \omega = \pi c \omega / K$

Por otra parte  $\frac{\Delta W}{W} = \frac{x_a^2 - x_b^2}{x_a^2} = \frac{x_a - x_b}{x_a}$

Pero  $x_b \equiv x_a$

$-x_a x_b + x_b^2 \equiv x_a^2 + x_b^2 = 2 x_a^2, \quad x_b (x_a + x_b) \equiv 2 x_a^2$

$\frac{x_a + x_b}{x_a^2} \equiv \frac{2}{x_b}$

Sustituyendo

$\frac{\Delta W}{W} = \frac{2(x_a - x_b)}{x_a} \equiv 2 \ln \left( \frac{x_a}{x_b} \right) = 2 \Delta'$

Por lo tanto, en vibraciones libres con amortiguamiento pequeño, el amortiguamiento específico  $\Delta'$ . Por otra parte, en una vibración forzada, para amortiguamiento pequeño la forma de la curva desplazamiento - frecuencia es muy aguda, mientras que para amortiguamiento grande la curva es mucho más tendida. Si denominamos  $\Delta N$  a la diferencia entre la frecuencia correspondiente a la mitad del "pico" del lado izquierdo, y  $N$  a la frecuencia de resonancia, el cociente  $\Delta N / N$  es una medida de la fricción interna, y se puede demostrar que

$\frac{\Delta N}{N} = \sqrt{3} \Delta' / \pi$

En efecto, en una vibración forzada, el desplazamiento está dado por

$$x = \frac{F_0}{K} \frac{\text{sen}(\Omega t - \phi)}{\sqrt{\left[1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right]^2 + \left(2 \zeta \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2}} \quad (18)$$

$$\phi = \text{ang tan} \frac{2 \zeta \frac{\Omega}{\omega_1}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} \quad (19)$$

$\omega_1$  es la frecuencia circular del sistema

$\omega_1 = \sqrt{K / M}$

$$\max x = \frac{F_0}{K} \frac{1}{2\zeta} \quad \text{pero } \zeta = C / 2 \sqrt{K / M}$$

$$\max x = F_0 / C \omega_1$$

La mitad del máximo de  $x$  vale  $F_0 / 2 C \omega_1$ . Por lo tanto, haciendo  $x = F_0 / 2 C \omega_1$  en la ec. 18, obtenemos:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2} = 2 C \omega_1 / K$$

$$\left(k - k \frac{\Delta^2}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(2\zeta K \frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 = 4 C^2 + \omega_1^2$$

$$\text{Pero } \omega_1^2 = K / M$$

$$\therefore (K - M \Omega^2)^2 + (C \Omega)^2 = 4 C^2 \omega_1^2$$

Despejemos los valores de  $\Omega^2$  de esta ecuación

$$(M \Omega^2)^2 + (C^2 - 2MK) \Omega^2 + K^2 - 4C^2 \omega_1^2 = 0$$

$$\Omega^2 = \frac{-(C^2 - 2MK) \pm \sqrt{(C^2 - 2KM)^2 - 4M^2(K^2 - 4C^2 \omega_1^2)}}{2M^2}$$

$$\Omega^2 = \frac{K}{M} - \frac{C^2}{2M^2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{C^2}{4M^2} - \frac{K}{M} + \frac{K}{2M}\right)(C^2 - 2KM) - K^2 + 4C^2 \omega_1^2}}{M}$$

$$\text{Pero } \omega_1^2 = K / M - C^2 / 4M^2$$

$$\Omega^2 = \frac{K}{M} - \frac{C^2}{2M^2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{KC^2}{2M} - 3C^2 \omega_1^2 - 2K^2 + 2KM \omega_1^2\right)}}{M}$$

$$\Omega^2 = \frac{K}{M} - \frac{C^2}{2M^2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{KC^2}{2M} + 3C^2\omega_1^2 - 2K^2 + 2KM\left(\frac{K}{M} - \frac{C^2}{4M^2}\right)\right)}}{M}$$

$$\Omega^2 = \frac{K}{M} - \frac{C^2}{2M^2} \pm \frac{\sqrt{3} C \omega_1}{M}$$

Denominando  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  a las dos raíces de  $\Omega$

$$\Omega^2 - \Omega_3^2 = \frac{2\sqrt{3} C \omega_1}{M}$$

Como se comentó antes,  $\Delta N = \Omega_2 - \Omega_3$  y  $N = \omega_1$ , por lo tanto

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Omega_2 - \Omega_3}{\omega_1} = \frac{(\Omega_2 - \Omega_3)(\Omega_2 + \Omega_3)}{\omega_1(\Omega_2 + \Omega_3)}$$

Para los valores bajos de amortiguamiento  $\Omega_2 + \Omega_3$

$$\frac{\Delta N}{N} \cong \frac{\Omega^2 - \Omega_3^2}{2\omega_1} = \frac{\sqrt{3} C}{M\omega_1} = \frac{\sqrt{3} \Delta'}{\pi}$$

## Propagación de una onda de cortante en un sólido viscoelástico (Kolsky 1963)

### Modelo de Voight

Voight consideró que las componentes de esfuerzo en un sólido son la suma de dos términos: el primero proporcional a la deformación unitaria y el segundo proporcional a la velocidad de la deformación unitaria. En un material isotrópico y elástico, las ecuaciones que relacionan los esfuerzos y las deformaciones serán ahora

$$\sigma_x = \lambda \Delta + 2G \epsilon_x + \lambda' (\partial \epsilon_x / \partial t)$$

⋮

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} + \eta (\partial \gamma_{yz} / \partial t)$$

⋮

Estas ecuaciones conducen a relaciones similares a aquellas obtenidas para un sólido elástico, pero el operador  $\lambda + \lambda' (\partial / \partial t)$  toma el lugar de  $\lambda$ , y  $G + \eta (\partial / \partial t)$  toma el lugar de  $G$ . La ecuación para los desplazamientos horizontales es la siguiente:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + G \nabla^2 u$$

Haciendo las sustituciones anteriores

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[ (\lambda + G) + (\lambda' + \eta) \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial \Delta}{\partial x} + (G + \eta \frac{\partial}{\partial t}) \nabla^2$$

En una onda de cortante exclusivamente

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \nabla^2 u + \eta \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

Si consideramos una onda de cortante que se propaga en dirección vertical con movimiento de partículas en dirección horizontal:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2}$$

Referencia

Kolsky, H, Stress Waves in Solids , Dover , 1963

# VIBRACION LIBRE CON AMORTIGUAMIENTO

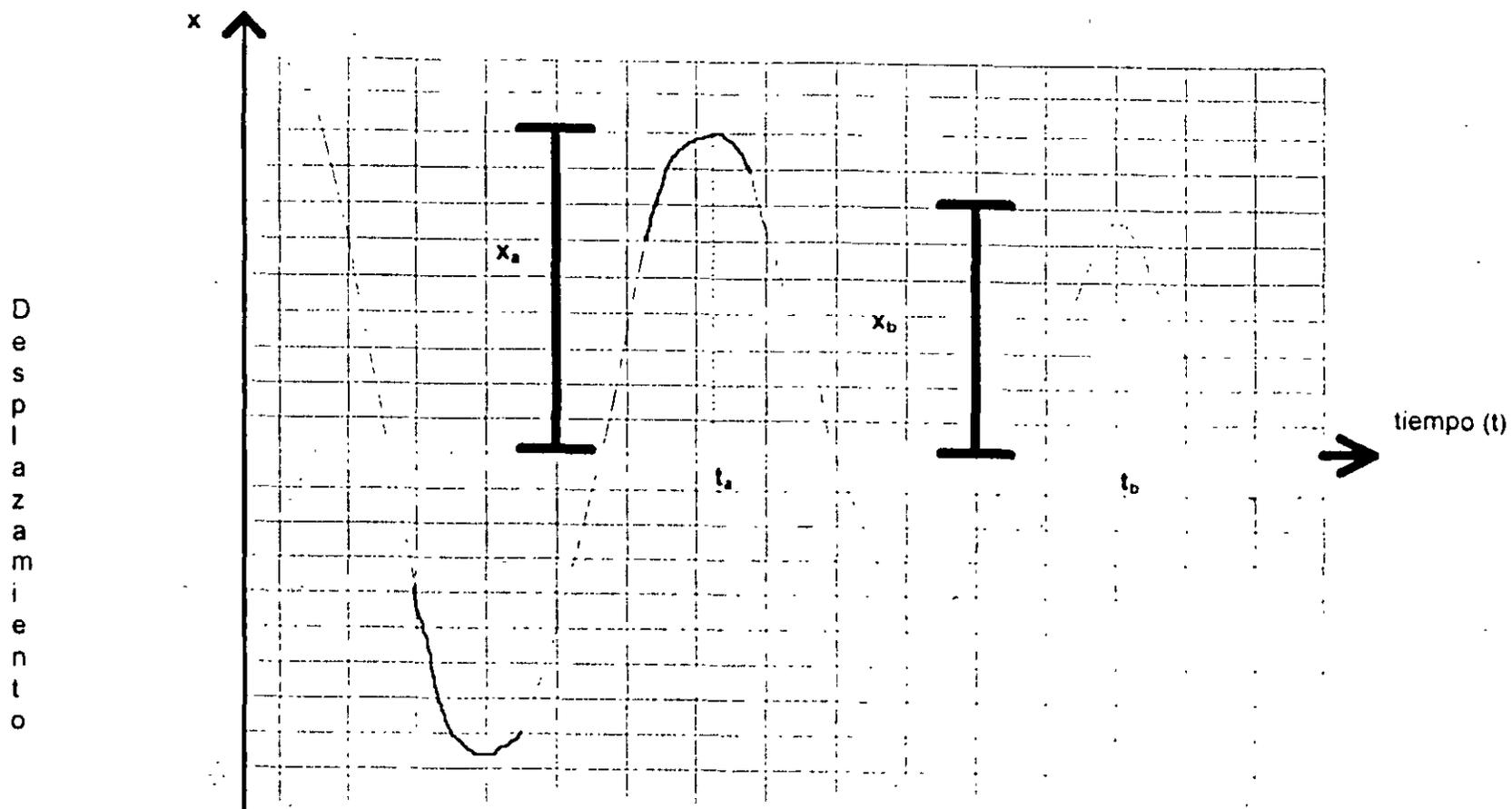


FIGURA 1

# **Diplomado de actualización en PROYECTO Y CONSTRUCCION DE ESTRUCTURAS**

## **MODULO I ANALISIS ESTRUCTURAL**

**TEMA: ANALISIS ESTRUCTURAL  
(COMPLEMENTO)**

**PROFESOR: M. en I. Agustín Deméneghi Colina**



## 2. ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Para fines de interacción es conveniente utilizar el método de rigideces del análisis estructural, en el que la ecuación general de equilibrio de una estructura está dada por

(Beaufait *et al* 1970)

$$K\delta + P_e + P_c = 0 \quad (1)$$

donde

$K$  = matriz de rigideces de la estructura

$\delta$  = vector de desplazamientos

$P_e$  = vector de cargas de empotramiento

$P_c$  = vector de cargas concentradas

La matriz de rigideces de la estructura se puede obtener mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura. Para ilustrar el procedimiento de interacción en tres dimensiones, consideramos una retícula de barras horizontales ortogonales entre sí, aun cuando esta técnica se puede hacer extensiva a barras inclinadas.

Sea un sistema ortogonal x-y en un plano horizontal. Veamos primeramente la obtención de la matriz de rigidez en dirección y (fig. 1). La convención de signos utilizada, en una barra horizontal, es la siguiente: los giros se consideran positivos en sentido antihorario, los desplazamientos verticales son positivos si van hacia abajo y los desplazamientos horizontales son positivos si van hacia la izquierda (fig. 1a). Los momentos flexionantes son positivos en sentido horario, las fuerzas cortantes verticales son positivas si van hacia la derecha (fig. 1b). A continuación presentamos la matriz de rigidez y los vectores de empotramiento para una barra en estas condiciones (barra m):

$$K_m = \begin{matrix} & \theta_r & \theta_a & \delta_r & \delta_v & \delta_u & \delta_v & \theta_a & \theta_b \\ \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2EI/L & 4EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L & -AE/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -AE/L & AE/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI/L & -GI/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GI/L & GI/L & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \theta_r \\ \theta_a \\ \delta_r \\ \delta_v \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{matrix} \end{matrix}$$

(2)

Tabla A7.1 \*\* Valores de  $K_x$ ,  $K_r$  y  $K_y$

En la zona II

Profundidad de desplante (1)	$K_x$	$K_r$ (2)	$K_y$ Losa	$K_y$ Zapata
$\leq 1$ m	11GR <sub>x</sub>	7GR <sub>r</sub> <sup>3</sup>	20GR <sub>x</sub>	12GR <sub>x</sub>
$\geq 3$ m	16GR <sub>x</sub>	11GR <sub>r</sub> <sup>3</sup>	29GR <sub>x</sub>	20GR <sub>x</sub>

En la zona III

Profundidad de desplante (1)	$K_x$	$K_r$			$K_y$
		Sobre el terreno	Sobre pilotes de fricción (3)	Sobre pilotes de punta (4)	
$\leq 1$ m	7GR <sub>x</sub>	6GR <sub>r</sub> <sup>3</sup>	7GR <sub>r</sub> <sup>3</sup>	$6GR^3 r + \frac{1}{1/43GR^3 + 1/K_p}$	12GR <sub>x</sub>
$\geq 3$ m	8GR <sub>x</sub>	9GR <sub>r</sub> <sup>3</sup>	11GR <sub>r</sub> <sup>3</sup>	$9GR^3 r + \frac{1}{1/43GR^3 + 1/K_p}$	16GR <sub>x</sub>

1. Para profundidades de desplante intermedias entra 1 y 3 m interpólese linealmente entre los valores de la tabla.
2. Para estructuras cimentadas sobre pilotes o pilas en la zona II supóngase  $K_r$  infinita.
3. Si éstos son capaces de resistir por adherencia con el suelo circundante, al menos la mitad del peso bruto de la construcción incluyendo el de sus cimientos. Cuando tiene menos de esta capacidad, interpólese linealmente entre los valores consignados en la tabla.
4.  $K_p$  se calculará teniendo en cuenta los pilotes de punta que contribuyan al resistir el momento de volteo, calculando la rigidez de estos elementos ante fuerza axial como si su punta no se desplazara verticalmente.

\*\* Tomado de la Gaceta Oficial del Departamento del D. F., 5 de noviembre 1987

TABLA 3.1  
RELACIÓN DE POISSON ( Zeevaert 1973 )

Tipo de suelo	Relación de Poisson
Polvo volcánico suelto	0.3
Limos compactos, sedimento eólicos finos. Sedimentos volcánicos semicompactos. Aluviones finos	0.3 a 0.25
Arena, limos compactos, suelos aluviales. Sedimentos compactos bien graduados	0.25
Arena con grava. Sedimentos aluviales compactos, cementados y bien graduados	0.25

Valores aproximados de los módulos de deformación de una arcilla ( módulo  $E_{ep}$  tomados de Bowles 1968 ):

Consistencia	$E_r$ kg/cm <sup>2</sup>	$E_{ep}$ kg/cm <sup>2</sup>	$E_{vp}$ kg/cm <sup>2</sup>
Muy blanda	6-45	4-30	2-15
Blanda	30-60	20-40	10-20
Media	60-120	40-80	20-45
Firme	100-180	70-120	40-70
Dura	150-250	100-170	60-100

En la arcilla de la ciudad de México, los modulos tiene los siguientes valores apropiados:  $E_e = 50 \text{ kg/cm}^2$ ,  $E_{ep} = 35 \text{ kg/cm}^2$  y  $E_{vp} = 20 \text{ kg/cm}^2$ .

Se observa experimentalmente que, con los suelos friccionantes, el módulo  $E_{ep}$  varia en función de confinamiento, de acuerdo con la siguiente expresión.

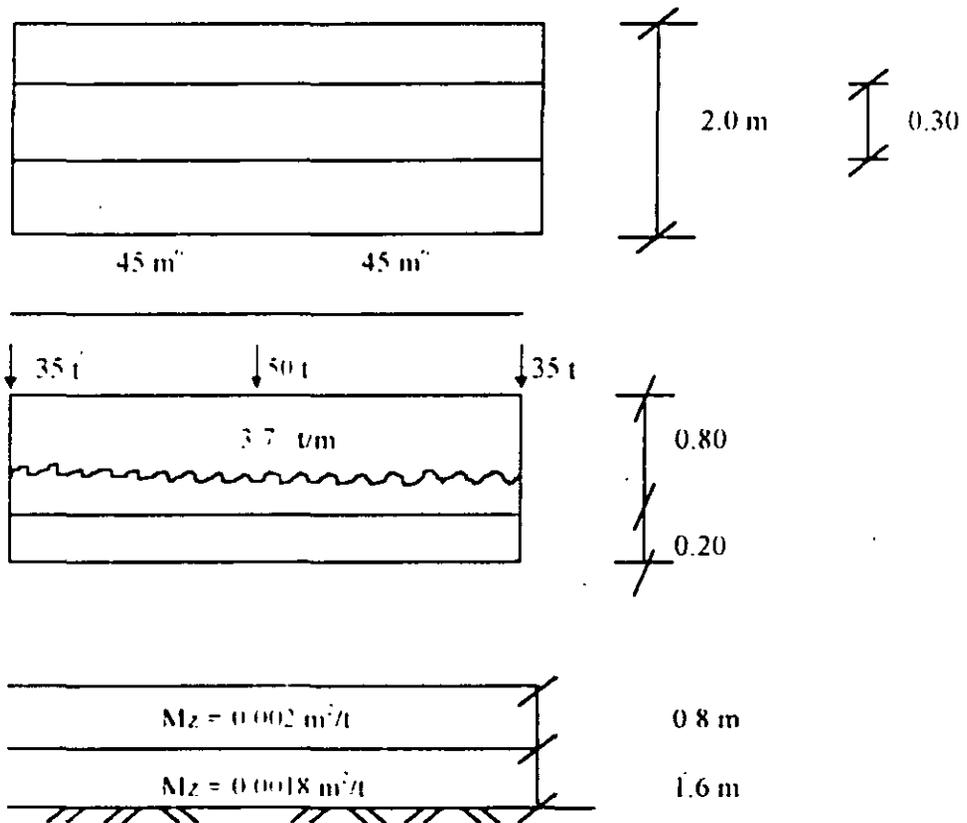
$$E_e = K P_e^{0.5} \quad (3.5)$$

En la tabla 3.2 se presentan valores aproximados del coeficiente K, en función de la capacidad de un suelo friccionante

TABLA 3.2  
VALORES APROXIMADOS DEL COEFICIENTE "K" ( cc 3.5 )  
EN SUELOS FRICCIONANTES

Estado	Densidad relativa	N	q <sub>d</sub> ono kg/cm <sup>2</sup>	K ( t/m <sup>2</sup> ) <sup>0.5</sup>	K ( kg/cm <sup>2</sup> ) <sup>0.5</sup>
Muy suelto	< 0.2	< 4	< 20	< 350	< 110
Suelto	0.2-0.4	4-10	20-40	350-600	110-190
Medianamente compacto	0.4-0.6	10-30	40-120	600-1700	190-540
Compacto	0.6-0.8	30-50	120-400	1700-2500	540-790
Muy compacto	> 0.8	> 50	> 400	> 2500	> 790

EJEMPLOS DE INTERACCIÓN ESTÁTICA  
SUELO-ESTRUCTURA

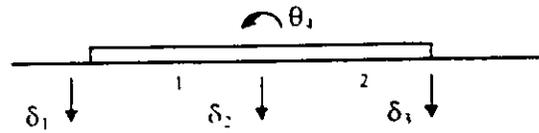


$$I_c = 1/12 \cdot 0.30 \cdot (1.0)^3 + 1/3 \cdot (2.0) \cdot (0.2)^3 = 0.025 + 0.0053$$

$$I_c = 0.0303 \text{ m}^4$$

$$E = 8000 \quad = 1.130.000 \text{ t/m}^2$$

$$EI = 34.280 \text{ t m}^2$$



$$\underline{K}_1 = \begin{bmatrix} \theta_1 & \delta_1 & \delta_2 \\ 25710 & -6427.5 & 6427.5 \\ -6427.5 & 1606.88 & -1606.88 \\ 6427.5 & -1606.88 & 1606.88 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix}$$

$$\underline{K}_2 = \begin{bmatrix} \theta_2 & \delta_2 & \delta_1 \\ 25710 & -6427.5 & 6427.5 \\ -6427.5 & 1606.88 & -1606.88 \\ 6427.5 & -1606.88 & 1606.88 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \end{matrix}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_1 \\ 1606.88 & -1606.88 & 0 \\ -1606.88 & 3213.75 & -1606.88 \\ 0 & -1606.88 & 1606.88 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \end{matrix}$$

$$\underline{P}^e_1 = \begin{Bmatrix} -7.4 + 0.875r_1 + 1.125r_2 \\ -5.55 + 1.2812r_1 + 0.2188r_2 \\ -9.25 + 0.7188r_2 + 1.7812r_3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \delta_1 \\ \delta_1 \end{matrix}$$

$$\underline{P}^e_2 = \begin{Bmatrix} 7.4 + -1.125r_2 + 0.875r_3 \\ -9.25 + 1.7812r_2 + 0.7188r_3 \\ -5.55 + 0.2188r_2 + 1.2812r_3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \end{matrix}$$

$$\underline{P}^c = \left\{ \begin{array}{l} -5.55 + 1.2812r_1 + 0.2188r_2 \\ -18.5 + 0.7188r_1 + 3.5624r_2 + 0.7188r_3 \\ -5.55 + 0.2188r_2 + 1.7812r_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{array}$$

$$\underline{K}\delta + \underline{P}^c + \underline{P}^c = 0$$

Por simetría  $\delta_1 = \delta_3$  ,  $r_1 = r_3$

$$1606.88 \delta S_1 - 1606.88 \delta S_2 - 5.55 + 1.2812r_1 + 0.2188r_2 - 35 = 0 \quad (1)$$

$$-1606.88 \delta_1 + 3213.75 \delta_2 - 1606.88 \delta_3$$

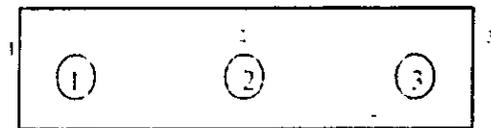
$$-18.5 + 0.7188r_1 + 3.5624r_2 + 0.7188r_3 - 50 = 0 \quad (2)$$

$$-3213.75 \delta_1 + 3213.75 \delta_2 + 1.4376r_1 + 3.5624r_2 - 68.5 = 0 \quad (2')$$

$$\delta \underline{S} = \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} -35 \\ -50 \\ -35 \end{array} \right\}$$

b) Teorema de cimentación

$$\delta_i = \sum_{j=1}^m M_{z_{ij}} H_i \sum_{k=1}^n I_{ijk} \Delta_k / a_k$$



$$I_{1,1} = 0.4878$$

$$I_{112} = 0.0007821$$

$$I_{2,1} = 0.0007368$$

$$I_{212} = 0.9757$$

$$I_{3,1} = 0.00000784$$

$$I_{312} = 0.0007821$$

$$I_{1,2} = 0.2964$$

$$I_{122} = 0.02385$$

$$I_{2,2} = 0.02162$$

$$I_{222} = 0.5927$$

$$I_{321} = 0.0004415$$

$$I_{322} = 0.02385$$

PUNTO,	ESTRATO,	CARGA,	VALOR DE INFLUENCIA
1	1	1	0.04878484
1	1	2	7.820726E-04
1	1	3	7.838011E-06
1	2	1	0.2963525
1	2	2	2.385181E-02
1	2	3	4.414916E-04
2	1	1	7.368624E-04
2	1	2	0.9756968
2	1	3	7.368624E-04
2	2	1	2.162087E-02
2	2	2	0.592705
2	2	3	2.162087E-02
3	1	1	7.838011E-06
3	1	2	7.820726E-04
3	1	3	0.4878484
3	2	1	4.414916E-04
3	2	2	2.385181E-02
3	2	3	0.2963525

$$I_{113} = 0.000007838$$

$$I_{213} = 0.0007368$$

$$I_{313} = 0.4878$$

$$I_{123} = 0.02429$$

$$I_{223} = 0.02162$$

$$I_{323} = 0.2964$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \sum_{j=1}^2 M_{z0j} H_1 \sum_{k=1}^3 I_{jk} r_k / a_k \\ &= \sum_{j=1}^2 M_{z0j} H_1 ( I_{1j1} r_1 / a_1 + I_{1j2} r_2 / a_2 + I_{1j3} r_3 / a_3 ) \\ &= M_{z11} H_1 ( I_{111} r_1 / a_1 + I_{112} r_2 / a_2 + I_{113} r_3 / a_3 ) \\ &\quad + M_{z12} H_2 ( I_{121} r_1 / a_1 + I_{122} r_2 / a_2 + I_{123} r_3 / a_3 ) \end{aligned}$$

$$\delta_2 = Mz_{21} H_1 ( I_{211} r_1 / a_1 + I_{212} r_2 / a_2 + I_{213} r_3 / a_3 )$$

$$+ Mz_{22} H_2 ( I_{221} r_1 / a_1 + I_{222} r_2 / a_2 + I_{223} r_3 / a_3 )$$

$$\delta_1 = 0.002 ( 0.8 ) ( 0.4878 \cdot (2) r_1 / 4 + 0.0007821 \cdot (4) r_2 / 8 + 0.0007899 (2) r_3 / 4 )$$

$$+ 0.0018 ( 1.6 ) ( 0.2964 \cdot (2) r_1 / 4 + 0.02385 \cdot (4) r_2 / 8 + 0.02429 (2) r_3 / 4 )$$

$$\delta_1 = 0.0008171 r_1 + 0.00003497 r_2 + 0.00003561 r_3$$

$$\delta_2 = 0.002 ( 0.8 ) ( 0.0007368 \cdot (2) r_1 / 4 + 0.9757 (4) r_2 / 8 + 0.0007368 \cdot (2) r_3 / 4 )$$

$$+ 0.0018 ( 1.6 ) ( 0.02162 \cdot (2) r_1 / 4 + 0.5927 \cdot (4) r_2 / 8 + 0.02162 \cdot (2) r_3 / 4 )$$

$$\delta_2 = 0.00003172 r_1 + 0.001634 r_2 + 0.00003172 r_3$$

$$r_1 = r_3$$

$$\delta_1 = 0.0008527 r_1 + 0.00003497 r_2$$

$$\delta_2 = 0.00006344 r_1 + 0.001634 r_2$$

Sust. en las ecuaciones 1 y 2

$$1606.88 ( 0.0008527 r_1 + 0.00003497 r_2 )$$

$$-1606.88 ( 0.00006344 r_1 + 0.001634 r_2 )$$

$$-5.55 + 1.2812 r_1 + 0.2188 r_2 - 35 = 0$$

$$2.5495 r_1 - 2.3506 r_2 - 40.55 = 0 \quad (1'')$$

$$-3213.75 ( 0.0008527 r_1 + 0.00003497 r_2 )$$

$$+3213.75 ( 0.00006344 r_1 + 0.001634 r_2 )$$

$$+1.4376 r_1 + 3.5624 r_2 - 68.5 = 0$$

$$-1.0989 r_1 + 8.7013 r_2 - 68.5 = 0 \quad (2'')$$

$$\text{De } 1'') \quad r_1 = \frac{2.3506 r_2 + 40.55}{2.5495}$$

$$\text{Sust en 2}^{\circ} \quad -1.0132 r_2 - 17.4781 + 8.7013 r_2 - 68.5 = 0$$

$$r_2 = 11.1833 \text{ t/m}, \quad r_1 = 226.2159 \text{ t/m}$$

$$\delta_1 = 0.02274 \text{ m}, \quad \delta_2 = 0.01994 \text{ m}$$

### MATRIZ DE FLEXIBILIDADES

1	1	8.419154E-04
1	2	1.084323E-05
1	3	1.380348E-07
2	1	1.008317E-05
2	2	1.683831E-03
2	3	1.008317E-05
3	1	1.380348E-07
3	2	1.084323E-05
3	3	8.419154E-04

### MÉTODO ITERATIVO ( CON $K_{vi}$ )

$$\underline{K} \underline{S} + \underline{P}^c + \underline{P}^e = 0.$$

$$\underline{P}^c = \begin{Bmatrix} -5.55 \\ -18.5 \\ -5.55 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

$$\underline{P}^e = \begin{Bmatrix} K_{v1} \delta_1 \\ K_{v2} \delta_2 \\ K_{v3} \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2253.28 S_1 - 35 \\ 2356.57 S_2 - 50 \\ 2253.28 S_3 - 35 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Sea } n = r_2 = r_1 = 50 + 70 + 3 \cdot 7(8) / 8 = 18.7 \text{ t/m}$$

$$\delta_1 = 0.016598 \text{ m}, \quad \delta_2 = 0.03174 \text{ / m}$$

$$K_{v1} = Q_{v1} / \delta_1 = 18.7(2) / 0.016598 = 2253.28 \text{ t/m}$$

$$Kv_2 = Qv_2 / \delta_2 = 18.7 (4) / 0.031741 = 2356.57 \text{ t/m}$$

$$1606.88 \delta_1 - 1606.88 \delta_2 + (-5.55) + 2253.28 Kv_1 \delta_1 - 35 = 0$$

$$(1606.88 + Kv_1) \delta_1 = 1606.88 \delta_2 + 5.55 + 35$$

$$\delta_2 = (1606.8 + Kv_1) S_1 - 40.55 / 1606.88$$

$$-1606.88 \delta_1 + 3213.75 \delta_2 - 1606.88 \delta_1 - 18.5 + 2356.57 Kv_2 \delta_2 - 50 = 0$$

$$-3213.76 \delta_1 + 3213.76 \delta_1 + 2 Kv_1 \delta_1 - 81.1 - 68.5 +$$

$$+ Kv_2 (1606.88 + Kv_1) \delta_1 - 40.55 / 1606.88 = 0$$

$$2 Kv_1 S_1 - 149.6 + Kv_2 / 1606.88 (1606.88 \delta_1 + Kv_1 \delta_1 - 40.55) = 0$$

$$4506.56 \delta_1 - 149.6 + 2356.57 \delta_1 + 3304.55 \delta_1 - 59.4686 = 0$$

$$\delta_1 = 0.020562 \text{ m}$$

$$\delta_2 = 0.024161 \text{ m}$$

$$Kv_1 = r_1 d_1 / \delta_1, \quad r_1 = Kv_1 \delta_1 / d_1, \quad r_2 = Kv_2 \delta_2 / d_2, \quad Kv_2 = r_2 d_2 / \delta_2$$

$$r_1 = 23.1660 \text{ t/m}, \quad r_2 = 14.2343 \text{ t/m}$$

Suelo

$$\delta_1 = 0.020250 \text{ m}, \quad \delta_2 = 0.024728 \text{ m}$$

$$Kv_1 = 2288.04 \text{ t/m}, \quad Kv_2 = 3202.58 \text{ t/m}$$

Estructura

$$4576.0 \delta_1 - 149.6 + 2302.58 \delta_1 + 3278.59 \delta_1 - 58.1062 = 0$$

$$\delta_1 = 0.020449 \text{ m}$$

$$\delta_2 = 0.024331 \text{ m}$$

$$r_1 = 23.3937 \text{ t/m}, \quad r_2 = 14.0060 \text{ t/m}$$



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA  
"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

### **TEMA**

## **ANÁLISIS DE PILOTES SUJETOS A SOLICITACIONES DINAMICAS**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMENEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DEL 2001**

# ANÁLISIS DE PILOTES SUJETOS A SOLICITACIONES DINÁMICAS

Agustín Deménegui Colin  
Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.

## 1. INTRODUCCIÓN

Durante la ocurrencia de un sismo, un edificio cimentado sobre pilotes se ve sujeto a una serie de efectos ocasionados por el movimiento telúrico. Entre las principales acciones se cuentan el momento de volteo y la fuerza horizontal sobre la estructura, ambos debidos al efecto dinámico del fenómeno, fig. 1.

La determinación del momento de volteo  $M_T$  y la fuerza horizontal  $V_T$  sísmicos se puede efectuar por el análisis estático o por el análisis dinámico, tratados con amplitud en la literatura del diseño estructural.

Zeevaert (1973) presenta un método para la obtención de las solicitaciones  $M_T$  y  $V_T$ , que tiene la ventaja de que toma en cuenta en forma integral el efecto del subsuelo y el de la estructura. Este procedimiento se lleva a cabo en condiciones dinámicas, lo cual es otra ventaja adicional del mismo.

Desde luego, es claro que los análisis dinámicos son recomendables sobre los análisis estáticos, dado que presentan de una manera más realista el fenómeno, aun cuando su aplicación en la práctica resulta en ocasiones laboriosa. Por otro lado, los análisis estáticos, aun cuando son de menor precisión, son de manejo más simplificado.

El momento de volteo  $M_T$  ocasiona un incremento de carga en los pilotes de un extremo de la cimentación y un decremento de carga en el otro extremo. En ocasiones, se valúa este incremento (positivo y negativo) por medio de la fórmula de la escuadria.

La fuerza horizontal  $V_T$  provoca un desplazamiento horizontal de la estructura con respecto al subsuelo y genera en cada pilote fuerzas cortantes y momentos flexionantes a lo largo de toda la pieza.

En este trabajo sólo estudiaremos el efecto de la fuerza cortante  $V_T$ . En los siguientes incisos comentaremos sobre los desplazamientos relativos entre pilote y suelo, lo que ocasiona una reacción repartida a lo largo de todo el pilote. En el inciso 3 trataremos sobre las propiedades del suelo que es necesario conocer, las cuales deberán ser obviamente dinámicas. En el inciso 4 presentaremos un método para determinar las reacciones del subsuelo provocadas por la acción de una fuerza cortante en la cabeza del pilote; conociendo estas reacciones se pueden determinar los desplazamientos relativos entre pilote y suelo, y obtener los diagramas de momento flexionante y fuerza cortante, a lo largo de todo el pilote, con lo cual se puede efectuar el diseño estructural del mismo. En la parte final de este artículo presentaremos las conclusiones derivadas de este estudio.

## 2. DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES DEL SUELO Y PILOTE.

Como indicamos anteriormente, la fuerza sísmica horizontal  $V_T$  ocasiona en la cabeza de un pilote una fuerza cortante que se puede valorar dividiendo la fuerza total  $V_T$  entre el número total de pilotes. De esta manera, se obtiene la fuerza cortante en la cabeza de un pilote individual, que denominaremos  $V_n$  (fig. 2).

Debido al sismo se presenta un movimiento horizontal del suelo con respecto a un plano de referencia A - A', denominaremos  $\delta_p$  (fig. 3a); este desplazamiento se puede determinar utilizando el método propuesto por Zeevaert (1973). Por efecto de la fuerza cortante  $V_n$ , el pilote experimenta un desplazamiento horizontal  $\delta_p$ , con respecto al mismo plano de referencia A - A' (fig. 3a). En estas condiciones, se presenta entre el suelo y el pilote un desplazamiento relativo  $\delta_s - \delta_p = \delta$ , tal como se indica en la figura 3a (Zeevaert 1973), el cual ocasiona una reacción repartida del suelo del suelo sobre el pilote (fig. 3b).

El desplazamiento horizontal relativo entre suelo u pilote depende de la magnitud de la fuerza cortante en la cabeza de la pieza  $V_n$ , de la rigidez del pilote y de la rigidez del suelo.

La valuación de  $V_n$  la comentamos anteriormente. La rigidez del pilote está dada por el producto  $E I$ , siendo  $E$  el módulo de elasticidad del material que forma el pilote y que para el caso de pilotes de concreto se puede obtener como  $E = 10000 \sqrt{f'_c}$ , en  $\text{kg. / cm}^2$ , siendo  $f'_c$  la resistencia en compresión no confinada del concreto a los 20 días de fabricado, en  $\text{kg / cm}^2$ .  $I$  es el momento de inercia de la sección de un pilote, supuesto de tipo prismático o cilíndrico, es decir, de sección constante en toda su longitud.

La rigidez del suelo debe valorarse en condiciones dinámicas. Sabemos que la deformación de un estrato de suelo de espesor y está dada por

$$\delta = M_v e \Delta_p \text{-----}(1)$$

Siendo :

$M_c$  = módulo longitudinal de deformación del suelo

$\Delta_p$  = esfuerzo promedio aplicado a la mitad del estrato.

Desde luego, el módulo  $M_v$  debe ser el módulo longitudinal dinámico de deformación, el cual está relacionado con el módulo cortante de rigidez  $G$  de acuerdo con la siguiente expresión :

$$M_v = \frac{2(1 + \nu)}{G} \text{-----}(2)$$

en donde  $\nu$  = módulo de Poisson

Para el caso de suelos finos saturados sujetos a una sollicitación dinámica ( lo que ocurre en un sismo ), se puede considerar  $\nu = 0.5$ , alcanzando  $M_v$  el valor :

$$M_v = \frac{1}{3G} \text{-----} (3)$$

En términos generales, en dinámica de suelos ha resultado de mayor facilidad la determinación en la práctica del módulo cortante  $G$ , para después emplear las Ecs. 2 ó 3 para valuar el módulo longitudinal  $M_v$ .

En el siguiente inciso veremos la forma de obtener el valor del módulo cortante  $G$  en condicionales dinámicas.

### 3. PROPIEDADES DINAMICAS DEL SUELO

Para fines de análisis de pilotes sujetos a cargas laterales por sismo, interesa conocer principalmente dos propiedades del suelo; el módulo cortante de rigidez  $G$  y la relación de Poisson  $\nu$ .

En general, el módulo cortante  $G$  se puede determinar en el campo y en el laboratorio. Dentro de las pruebas de campo se pueden mencionar el ensaye geofísico, la prueba del vibrador de superficie y un cierto tipo de prueba de placa de carga y descarga. Parece ser que la principal limitación de estas pruebas es el rango de las deformaciones que se alcanzan, ya que se hace necesario que se llegue a deformaciones unitarias en el rango de 0.1 a 0.01 % en el campo ( intervalo usual de deformaciones ocasionadas por el sismo) ( Wilson 1972 ).

Las pruebas de laboratorio empleadas son la prueba triaxial cíclica, la prueba de corte cíclico y la prueba de la columna de torsión. Aparentemente, esta última es el ensaye más realista para la determinación de  $G$ , aunque es de difícil ejecución ( Wilson 1972 ).

Las pruebas de laboratorio empleadas son la prueba triaxial cíclica, la prueba de corte cíclico y la prueba de corte columna de torsión. Aparentemente, esta última es el ensaye más realista para la determinación de  $G$ , aunque es de difícil ejecución ( Wilson 1972 ).

La determinación del módulo  $G$  por medio del péndulo de torsión ha dado buenos resultados en la práctica de la ingeniería. Esta prueba consiste en hacer una pequeña modificación a la cámara triaxial convencional, la cual se emplea para someter una muestra de suelo a diferentes esfuerzos de confinamiento. Al espécimen de suelo se le da una pequeña torsión ( en un plano horizontal ), permitiendo que el sistema vibre libremente, moviendo debido a la respuesta elástica de los elementos del suelo. De esta manera se puede hallar el módulo de cortante  $G$  ( Zeevaert 1973 ).

Los resultados de pruebas con el péndulo de torsión indican que  $G$  aumenta con el confinamiento, tanto en suelos cohesivos como en suelos no cohesivos; en estos materiales

parece necesario determinar la variación causada por la amplitud usada en las pruebas y por método de aplicación del esfuerzo de confinamiento ( Zeevaert 1973 ).

Por lo que respecta al módulo de Poisson  $\nu$ , se puede emplear un valor de 0.25 para materiales granulares parcialmente saturados y un valor de 0.42 a 0.45 como límite para suelos cohesivos no consolidados ( Zeevaert 1973 ).

#### 4 . ANÁLISIS DE PILOTES SUJETOS A CARGAS LATERALES

La determinación de la propiedades dinámicas de un suelo es de gran importancia para valuar los efectos de un sismo sobre un pilote. De igual importancia es la posibilidad de poder manejar los datos de propiedades mecánicas para efectuar el análisis de los pilotes. De otra manera, ¿ de qué sirve obtener las propiedades dinámicas de un suelo con gran precisión - suponiendo que logremos esto - si después no sabremos cómo utilizarlas y conocer el efecto que tienen sobre un pilote ?.

En este inciso trataremos la manera de llevar a cabo el análisis de un pilote sujeto a una carga lateral, que puede ser debida a un sismo. Como comentamos en el Inciso 2, al ser cargado un pilote con una fuerza horizontal  $V_n$  en su cabeza, se produce una reacción del suelo por el desplazamiento relativo  $\delta$  entre el suelo y pilote ( Fig. 3 ). Nos interesa conocer la distribución de esta reacción para valuar el diagrama de momento flexionante y el diagrama de fuerza cortante en el pilote.

El diagrama de presión de suelo sobre pilote está limitado por una línea continua ( Fig. 3b ). pero para fines de análisis lo podemos sustituir por cargas repartidas en tramos de longitud  $d$ , ( Fig 4a ), es obvio que a mayor precisión que se desee se tendrá que disminuir la longitud "  $d$  " de tramo y aumentar el número "  $n$  " de tramos

En la fig. 4b se muestra la elástica del pilote, causante de la reacción del suelo. La posición original se refiere a la posición de desplazamiento relativo nulo entre pilote y terreno.

La fig 4b muestra las propiedades dinámicas del suelo en cada uno de los tramos, a saber del módulo cortante de rigidez  $G$  y la Relación de Poisson  $\nu$ .

El procedimiento que se propone para el análisis de la interacción suelo - pilote consiste en términos generales en lo siguiente manejar las reacciones  $r_i$  del suelo ( Fig. 4a ) como incógnitas y mediante el análisis estructural del pilote hallar los desplazamientos del suelo  $\delta_i$  ( Fig 4b ) en función de las reacciones, con esto obtenemos un sistema de ecuaciones en el tenemos como incógnitas los desplazamientos del suelo  $\delta_i$  y las reacciones  $r_i$ . A continuación determinamos los desplazamientos  $\delta_i$  en función de las reacciones  $r_i$  mediante el cálculo de deformaciones en el suelo, obteniendo otro sistema de ecuaciones en el que los desplazamientos  $\delta_i$  quedan en función de las reacciones  $r_i$ . Sustituyendo este último sistema en el obtenido con la aplicación del análisis estructural quedan únicamente como incógnitas las reacciones  $r_i$ ; resolvemos el sistema y hallamos las  $r_i$ . Como tenemos los  $\delta_i$  en función de las  $r_i$ , también podremos obtenerlos. De manera, al final de la aplicación de este procedimiento se conocen los desplazamientos  $\delta_i$  y las reacciones  $r_i$  ( Deméneghi 1979 )

Vemos el desarrollo al detalle de lo expuesto en el párrafo anterior. Empezaremos con el análisis estructural del pilote, continuaremos con el cálculo de las deformaciones del suelo y terminaremos con el establecimiento de la compatibilidad de desplazamientos.

#### 4.1 Análisis estructural del pilote

El análisis estructural se puede realizar utilizando el método de la viga conjugada para todo el pilote ( Flores Ojeda 1980 ).

En nuestro caso, nos interesa determinar los desplazamientos  $\delta_i$  del pilote en función de las reacciones  $r_i$  y de la rigidez de la pieza ( Fig. 4 ). Nos conviene trabajar con una sola reacción  $r_i$  y después tomar en cuenta el efecto de todas las  $r_i$ . En la Fig. 5a se muestra el intervalo de pilote del nudo 1 al nudo  $j$ ; en una posición intermedia se encuentra la reacción  $r_i$ . En la Fig. 5b está indicada la viga conjugada para esta condición de carga, en la cual:

$$A'_1 = \frac{1}{3} d_i \frac{r_i d_i^2}{2EI} = \frac{1}{EI} r_i \frac{1}{6} d_i^3$$

$$A'_2 = l_{ji} \frac{r_i d_i^2}{2EI} = \frac{1}{EI} r_i \frac{1}{2} d_i^2 l_{ji}$$

$$A'_3 = \frac{1}{2} l_{ji} \frac{r_i d_i}{EI} = \frac{1}{EI} r_i \frac{1}{2} d_i l_{ji}^2$$

Designemos como:

$$A_i = \frac{1}{6} d_i^3 \quad (4)$$

$$B_{ji} = \frac{1}{2} d_i^2 l_{ji} \quad (5)$$

$$C_{ji} = \frac{1}{2} d_i l_{ji}^2 \quad (6)$$

Por lo tanto:

$$A'_1 = \frac{r_i}{EI} A_i, \quad A'_2 = \frac{r_i}{EI} B_{ji}, \quad A'_3 = \frac{r_i}{EI} C_{ji}$$

Tomemos momentos en la viga conjugada con respecto al nudo  $j$ :

$$-0_1 l_j + \delta_1 - \delta_j - A_1 \left( l_j + \frac{1}{4} d_1 \right) - A_2 \frac{l_j}{2} - A_3 \frac{l_j}{3} = 0$$

Es decir

$$0_1 l_j - \delta_1 + \delta_j + \frac{1}{EI} r_i \left\{ A_1 \left( l_j + \frac{1}{4} d_1 \right) + \frac{B_{ji} l_j}{2} + \frac{C_{ji} l_j}{3} \right\} = 0$$

$$\text{Hagamos: } D_{ji} = A_1 \left( l_j + \frac{1}{4} d_1 \right) + \frac{B_{ji} l_j}{2} + \frac{C_{ji} l_j}{3} \quad (7)$$

Por lo tanto:

$$0_1 l_j - \delta_1 + \delta_j + \frac{1}{EI} r_i D_{ji} = 0$$

De manera análoga, para una reacción colocada en el tramo  $j$ :

$$0_1 l_j - \delta_1 + \delta_j + \frac{1}{64EI} A_j d_j r_j = 0$$

Para todas las reacciones  $r_i$  en el intervalo 1- $j$ :

$$0_1 l_j - \delta_1 + \delta_j + \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^{j-1} D_{ji} r_i + \frac{1}{64EI} A_j d_j r_j = 0$$

en donde  $0_1$  es el giro en el nudo-1 debido a la totalidad de las reacciones.

Multiplicando ambos miembros de esta última ecuación por  $E I$ :

$$EI(0_1 l_j - EI\delta_1 + EI\delta_j) + \sum_{i=1}^{j-1} D_{ji} r_i + \frac{1}{64} A_j d_j r_j = 0 \quad (8)$$

$2 \leq j \leq n-1$

Para la reacción  $r_1$ ,  $1_1 = 0$  y  $1_j = l_j - d_1$   $i = 1$

Para el resto de las reacciones  $r_i$ ,

$$l_j = l_i - \left( l_i + \frac{d_i}{2} \right) \quad (10)$$

$$2 \leq i \leq n$$

En forma similar obtenemos para el nudo  $n$  lo siguiente:

$$EI \ln \theta_1 - EI \delta_1 + EI \delta_n + \sum_{i=1}^{n-1} D_{ni} r_i + \frac{1}{4} A_n d_n r_n = 0 \quad (11)$$

j = n

La condición de equilibrio de fuerzas en toda la viga conjugada permite establecer la siguiente expresión:

$$\frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n \{A_i + B_{ji} + C_{ji}\} r_i + \theta_1 - \theta_n = 0$$

Pero  $\theta_n = 0$ , dado que consideramos que el pilote está empotrado en su cabeza, por lo tanto:

$$EI \theta_1 + \sum_{i=1}^n \{A_i + B_{ji} + C_{ji}\} r_i = 0 \quad (12)$$

j = n

En el pilote debe haber equilibrio de fuerzas

$$\sum_{i=1}^n d_i r_i = V_n \quad (13)$$

Cabe aclarar que las expresiones 8, 11, 12 y 13 son válidas para pilotes de tipo prismático o cilíndrico, es decir, para pilotes de sección constante en toda su longitud. También recordamos que se considera que el pilote está empotrado en su cabeza (nudo n).

En resumen, para el análisis estructural del pilote empleamos las Ecs. 8, 11, 12 y 13, con lo que tenemos como incógnitas el giro en el nudo 1,  $\theta_1$ , los desplazamientos  $\delta$ , y las reacciones  $r_i$ . Lo que falta ahora es obtener los  $\delta$ , en función de las  $r_i$ , con un análisis de deformaciones del suelo, lo cual efectuará en el siguiente inciso.

#### 4.2 Deformaciones del suelo

Como se comentó en el inciso 3, en el campo o laboratorio se obtienen el módulo cortante  $G$  y el de Poisson  $\nu$ . Empleando la Ec. 2 podemos conocer el módulo longitudinal de deformación  $M_v$ .

halledmos ahora las deformaciones del suelo en función de las reacciones: la deformación del "cuadro"  $i, j$  debida a una reacción aplicada en  $k$  valdrá

$$\alpha_{ij, k} = M_{v, ij} e_j (\Delta T)_{ij, k}$$

en donde:

$$\alpha_{ij, k} = \text{deformaciones del "cuadro" } i, j \text{ debida a una reacción colocada en } k$$

$Mv_{ij}$  = módulo longitudinal de deformación del cuadro i, j

$e_j$  = espesor del "estrato vertical" j

$(\Delta T)_{ijk}$  = incremento de esfuerzo normal horizontal en el cuadro i, j debido a la presión  $r_k / b$  en el contacto pilote - suelo

b = ancho ( o diámetro ) del pilote

Pero:

$$(\Delta T)_{ijk} = I_{ijk} \frac{r_k}{b}$$

siendo

$I_{ijk}$  = valor de influencia en el cuadro i, j debido a una presión unitaria colocada en k.

El valor de  $I_{ijk}$  se puede determinar calculando el esfuerzo que ocasiona una presión unitaria colocada en el tramo k sobre el cuadro i, j ( Zeevaert 1973 ).

Con lo anterior, la deformación del cuadro i, j debida a todas las reacciones  $r_k$  será:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{b} Mv_{ij} e_j \sum_{k=1}^n I_{ijk} r_k$$

El desplazamiento horizontal del nudo i valdrá

$$\delta_i = \sum_{j=1}^p \delta_{ij}$$

siendo: p = número de "estratos verticales" del subsuelo

Por tanto:

$$\delta_i = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^p Mv_{ij} e_j \sum_{k=1}^n I_{ijk} r_k \quad (14)$$

En esta ecuación, los desplazamientos  $\delta_i$  del suelo quedan en función de las reacciones  $r_k$ .

### 4.3 Compatibilidad de desplazamientos

En las expresiones obtenidas del análisis estructural del pilote ( Ecs. 8 y 11) aparecen como incógnitas los desplazamientos  $\delta_i$  de la pieza. Estos desplazamientos deben ser iguales a los

obtenidos con la Ec. 14, para que haya compatibilidad entre desplazamientos del pilote y desplazamientos del suelo. Por lo tanto, hay que sustituir los valores hallados con la Ec. 14 en las Ecs. 8 y 11; de esta manera, desaparecen como incógnitas los desplazamientos  $\delta_i$  y quedan por determinar solamente el giro en el nudo 1,  $\theta_1$ , y las reacciones  $r_i$ .

La Ec. 8 se aplica a los nudos 2 a  $n-1$ ; contamos además con las Ecs. 11, 12 y 13; por consiguiente disponemos de  $n+1$  ecuaciones, número igual al de valores desconocidos, por lo que resolviendo el sistema de ecuaciones establecido conocemos el giro  $\theta_1$  y las reacciones  $r_i$ . Sustituyendo estos valores en la Ec. 14 determinamos los desplazamientos  $\delta_i$  del suelo ( y del pilote ).

El problema ha quedado resuelto, pues obtenemos los valores de interés práctico para el ingeniero: el giro en el extremo libre del pilote (  $\theta_1$  ), las reacciones del suelo  $r_i$  y los desplazamientos horizontales relativos del pilote con respecto al suelo  $\delta_i$ . Con las  $r_i$  podemos obtener el diagrama de fuerza cortante en el pilote, con lo que podemos diseñarlo estructuralmente.

## 5. CONCLUSIONES

- a) Se ha presentado un procedimiento para el análisis del pilote en un suelo estratificado, sujeto a cargas laterales, las cuales pueden ser debidas a un sismo.
- b) El método tiene la ventaja de que es relativamente sencillo de aplicar: el análisis estructural se efectúa utilizando únicamente el método de la viga conjugada.
- c) La determinación de los desplazamientos relativos entre suelo y pilote, tomando en cuenta la rigidez de la pieza estructural, se lleva a cabo considerando la influencia de las reacciones del suelo en cualquier punto de la masa, mediante el concepto de valores de influencia propuestos por Zeevaert ( 1973 ).
- d) Estableciendo la compatibilidad de deformaciones del pilote y deformaciones del suelo, se puede resolver el problema sin recurrir a iteraciones.
- e) Lo anterior se consigue empleando las Ecs. 4 a 13 en la estructura y la Ec. 14 en el suelo. Estas expresiones quedan en forma de algoritmos y pueden ser programadas para que genere y resuelva una computadora electrónica.
- f) La precisión del método se aumenta incrementando el número  $n$  y disminuyendo la longitud  $l$  de los tramos.
- g) desde luego, la aproximación del análisis depende de los datos con los que sea alimentado. En este sentido, la determinación de las propiedades dinámicas del suelo en el campo o en el laboratorio es de gran importancia.
- h) Resulta conveniente la instrumentación en el campo de pilotes sujetos a cargas laterales, así como el uso de modelos en el laboratorio, para calibrar los métodos de análisis y diseño que se emplean.

- i) La principal aplicación del análisis de pilotes sujetos a cargas laterales estriba en la determinación del desplazamiento relativo entre suelo y pilote y en la obtención del diagrama de reacción del suelo sobre el pilote. Con este último resultado se pueden calcular el diagrama de fuerza cortante y el diagrama de momento flexionante, y a partir de éstos poder efectuar el diseño estructural del pilote.
- j) Cabe aclarar que el procedimiento es válido para pilotes de sección constante en toda su longitud. En el caso de que estos miembros sean de sección variable, se pueden desarrollar ecuaciones semejantes a las de aquí presentadas, tomando en cuenta la variación de  $E I$  a lo largo del pilote.

## RECONOCIMIENTO

Una buena parte de los conceptos tratados en los incisos 1 a 3 de este trabajo se deben a los conocimientos adquiridos en la excelente clase de Cimentaciones en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM, motivo por el cual expreso mi reconocimiento al Dr. Leonardo Zeevaert, profesor de esta materia.

## REFERENCIAS

Deméneghi A., "Un método para el análisis conjunto de la estructura y el suelo", Rev. Ingeniería, Nueva Época, Vol. XLIX, No. 3, pp 56-64, 1969

Flores Ojeda M., Comunicación personal, 1980

Zeevaert L. *Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions*, Chap. XII, Van Nostrand Reinhold, 1973

Wilson S.D., Conferencia sustentada en la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, UNAM., 1972



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

### **TEMA**

## **ANÁLISIS ESTRUCTURAL POR EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO EL PROGRAMA SAP 2000**

**EXPOSITOR: M. EN I. OCTAVIO GARCIA DOMÍNGUEZ  
M. EN C. ORLANDO RAMÍREZ DOMÍNGUEZ BOSCAN  
PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DEL 2001**

## I. INTRODUCCIÓN

El programa SAP90 es un programa de propósito general de elementos finitos y representa el trabajo de investigación realizado en la Universidad de California en Berkeley por el Prof. Edward Wilson durante los pasados 25 años.

El desarrollo del programa ha sido realizado usando en ambiente ANSI Fortran 77, lo cual garantiza su portabilidad desde el nivel de computadoras personales a grandes super computadoras.

Esta versión del programa es una versión estudiantil y está diseñada para trabajar en ambiente MS-DOS. La capacidad máxima del problema a resolver está restringida a 100 juntas. La versión comercial está diseñada para resolver problemas mas grandes. Todas las operaciones numéricas son ejecutadas en doble precisión.

El programa tiene opciones de realizar análisis estático y dinámico, las cuales pueden ser activadas al mismo tiempo en la misma ejecución. Las combinaciones de carga pueden incluir resultados de ambos análisis.

Los datos son suministrados al programa en un formato libre y existe la opción de generación de juntas y elementos por conveniencia. El programa tiene capacidad de generar gráficos de la estructura no deformada y deformada para la verificación de los datos geométricos y para el estudio del comportamiento estructural del sistema.

La librería de elementos finitos consiste de cuatro elementos: un elemento FRAME tridimensional, prismático o no prismático un elemento SHELL tridimensional, un elemento ASOLID bidimensional y un elemento SOLID tridimensional. Los elementos viga y armadura bidimensionales, membrana, flexión de placas, axisimetrico y de esfuerzo plano están disponibles como subconjuntos de esos elementos. Todas las opciones necesarias de geometría y de carga asociadas con los elementos están incorporadas en el programa. Un elemento de frontera en la forma de resortes en los apoyos también está incluido.

Las opciones de carga permiten condiciones de gravedad, térmicas o de presfuerzo además de las cargas nodales usuales en forma de fuerzas o desplazamientos especificados. La carga dinámica puede ser de la forma de aceleración de base, espectro de respuesta o cargas o aceleraciones variables con el tiempo

## **II.- REQUERIMIENTOS DEL SISTEMA Y PROCEDIMIENTOS PARA EJECUTAR EL PROGRAMA**

### **A . Instalación, configuración y pruebas**

Las versiones regulares del programa SAP90, requieren que la computadora donde se instale tenga al menos 640 Kb. en memoria RAM, un coprocesador matemático y disco duro. La versión PLUS del programa requiere una computadora con un procesador 80386, un coprocesador matemático 80387, al menos 2Mb de memoria RAM y por supuesto disco duro. Además se requiere de una impresora para utilizar los programas de graficación.

Los discos del programa contienen los programas ejecutables, archivos de ejemplos y una base de datos para secciones de acero.

Se recomienda que antes de realizar la instalación de los programas en la computadora, se respalden los discos originales y se trabaje con la copia.

La instalación del programa inicia copiando todos los discos del programa a un espacio de trabajo ( subdirectorio ) del disco duro. En esos archivos se encuentra la base de datos para secciones de acero con los nombres:

**AISC.MET  
AISC.DAT**

Estos archivos contienen información en dos diferentes unidades, en metros y pulgadas respectivamente. Para hacer uso de la base de datos se selecciona uno de los dos archivos, dependiendo de las unidades con que trabajemos y se copia a otro llamado:

**AISC.DAT**

Este es el archivo que consulta internamente el programa para utilizar la base de datos.

Existe además un programa auxiliar llamado **SETUP.EXE** que permite asignar un nombre dentro del programa que se imprimirá como parte de la portada en las salidas de resultados, así mismo se puede seleccionar el tipo de monitor e impresora que se utilizaran y especificar los programas de graficación.

Respecto a la configuración del sistema, SAP90 requiere que el archivo **CONFIG.SYS** tenga la especificación **FILES=15** o mas

Para realizar la verificación del programa, se recomienda ejecutar algunos de los ejemplos de prueba con su solución que se anexan en los discos originales.

El programa SAP90 podemos encontrarlo en dos versiones:

- **Versión estudiantil.** No requiere dispositivo de seguridad para su uso, por lo que está limitada a estructuras que requieren menos de 100 nudos para la generación de su geometría.
- **Versión profesional.** Requiere de un dispositivo o candado de seguridad para ejecutar, el cual se coloca en la entrada para impresora del CPU.

### **B . Preparación de un archivo para SAP90**

Para realizar el análisis de una estructura con SAP90, es necesario tener un pleno conocimiento de las hipótesis del programa, lo cual nos permitirá modelar de manera adecuada nuestro problema real.

La preparación del archivo de datos se puede llevar a cabo de dos maneras distintas :

- Mediante un editor ASCII como el EDIT del MSDOS.
- Utilizando el programa interactivo SAPIN que se ejecuta desde windows

El archivo de datos puede tener cualquier nombre válido en MSDOS pero sin extensión, como los ejemplos que se incluyen en los discos originales del programa para el análisis de diversas estructuras.

### **C . Ejecución del programa SAP90**

Supongamos que tenemos creado el archivo para analizar una estructura. Para ejecutar el programa tenemos que estar en el directorio de trabajo o que el programa a ejecutarse se encuentre en el PATH o ruta de la computadora.

La corrida de computadora del programa se realiza en dos fases:

- Fase de revisión de datos
- Fase de solución

Para la fase de revisión de datos tecleamos :

```
C:\>SAP90 < enter >
```

Después de esta instrucción aparece una pantalla con el nombre y algunos datos propios del programa.

Antes de introducir el archivo de datos, es necesario teclear < enter > y aparecerá un mensaje que pide el nombre del archivo. Una vez que lo escribimos, se teclaea nuevamente < enter > para que empiece primeramente el análisis de la información contenida en dicho archivo. En esta fase de revisión aparecerán una serie de mensajes que indican el avance en la revisión de los módulos de datos que contiene el archivo. Los datos de los módulos son leídos y analizados para verificar que cumplen con los formatos establecidos y se crea un archivo de salida ASCII llamado con el mismo nombre del archivo original, pero con extensión .SAP. p ejem. **EJERCICIO.SAP**. Este archivo es una copia de los datos introducidos al programa y los almacena en forma tabular, lo cual permite hacer revisiones para corregir posibles errores. Se recomienda editar y revisar minuciosamente este archivo antes de continuar con la ejecución del programa.

Si en esta etapa no hubo o se han corregido los errores se continua con la **fase de solución**, que consiste en ejecutar el comando **GO**, que contiene una serie de programas que se ejecutarán en la secuencia previamente establecida en el archivo de datos de la estructura que se analiza. De igual manera que en la fase de revisión, después de teclear el comando :

**C:\>GO < enter >**

aparecerán una serie de mensaje que indican el grado de avance de la solución.

#### **D . Como guardar la imagen de la pantalla**

Cuando se realizan análisis de estructuras complejas, el tiempo de computadora puede ser considerable, por lo que resultaría impráctico estar frente al monitor para observar si se envía algún mensaje en pantalla. Para evitar esto se recomienda activar el modo de impresión de pantalla tecleando las siguientes teclas :

**Ctrl + PrtSc**

De esta manera cualquier mensaje en pantalla, se enviará a la impresora.

#### **E . Limpieza del disco duro**

Después de una corrida de computadora con SAP90 se crean una serie de archivos auxiliares en la solución que consumen gran cantidad de memoria. Estos archivos se utilizan principalmente para graficación de resultados. Una vez que se ha terminado con el análisis de la estructura o simplemente porque se requiere hacer espacio en disco duro, se pueden utilizar tres comandos que eliminan de forma automática esos archivos que no necesitamos. Estos comandos se describen a continuación :

- **JUNK .**

Borra todos los archivos creados por SAP90 excepto el archivo de datos, los archivos de resultados ( ASCII ) y aquellos archivos intermedios requeridos para graficación

- **EATOUT**

Borra los archivos de resultados ( ASCII )

- **EAT**

Borra los archivos intermedios para graficación dejando el archivo de datos y los de resultados ( ASCII )

## **F . Utilización de los programas interactivos para graficación**

El programa SAP90 tiene un programa para graficación de datos de entrada y resultados llamado SAPLOT.

SAPLOT puede utilizarse después de la primera etapa de ejecución, es decir, para revisar gráficamente los datos de entrada o después de la solución para dibujar configuraciones deformadas, modos de vibrar y fuerzas o esfuerzos en los elementos estructurales, entre otros.

### **III. TERMINOLOGÍA DE SAP90**

La preparación de los datos para un problema de análisis estructural envuelve básicamente los pasos siguientes:

1. Descripción de la geometría de la estructura.
2. Descripción de las propiedades de materiales y secciones de los miembros.
3. Definición de las condiciones de carga estáticas y/o dinámicas para las cuales se va a analizar la estructura.

#### **A. Juntas y Elementos.**

La geometría básica de la estructura se establece colocando juntas (o nodos) y miembros sobre la misma. Cada junta posee un número de identificación único y se ubica en el espacio por medio de coordenadas asociadas a un sistema de coordenadas globales tridimensionales.

La geometría estructural se completa conectando las juntas predefinidas con elementos estructurales que son de un tipo específico: viga, armadura, cascarón, placas, etc. A cada elemento se le asigna un número de identificación único.

Las cargas pueden ser aplicadas como cargas concentradas actuando sobre juntas específicas o como cargas distribuidas (incluyendo cargas térmicas) actuando sobre los elementos.

#### **B. Sistemas de coordenadas local y global.**

Para la definición de todos los datos de entrada y salida asociados con las juntas, se usa un sistema de coordenadas cartesiano, tridimensional "X-Y-Z", el cual se conoce como el sistema de coordenadas global.

Los siguientes datos de entrada son preparados con respecto al eje de coordenadas global:

- Coordenadas de juntas
- Restricciones de juntas (condiciones de apoyo)
- Resortes de apoyo
- Cargas en juntas
- Desplazamientos especificados en juntas.

Los siguientes resultados están referidos al sistema global de coordenadas:

- Desplazamientos en juntas
- Reacciones de juntas

Para los datos asociados con cada elemento, se usa un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional "1-2-3". Este sistema de coordenadas es diferente para cada elemento y se conoce como el sistema de coordenadas local del elemento.

Los siguientes datos deben prepararse con respecto al sistema local de coordenadas:

- Material y propiedades de la sección transversal de cada elemento
- Cargas sobre elementos

Los siguientes resultados están referidos al sistema de coordenadas local:

- Fuerzas y esfuerzos en los elementos

### C. Grados de Libertad.

Cada junta de un modelo estructural tridimensional tiene seis componentes de desplazamiento: desplazamientos en las direcciones globales X, Y y Z, y rotaciones alrededor de los mismos ejes. Las direcciones asociadas con esos seis componentes de desplazamiento se conocen como grados de libertad de la junta. Los grados de libertad se nombrarán como UX, UY, UZ, RX, RY y RZ respectivamente a lo largo de estas páginas.

Si el desplazamiento de una junta a lo largo de cualquiera de los seis grados de libertad es cero, como en un apoyo, entonces ese grado de libertad es conocido como un grado de libertad inactivo. los grados de libertad en los cuales no se conocen los desplazamientos se llaman grados de libertad activos.

Generalmente el desplazamiento en un GDL inactivo es conocido, y el objeto del análisis es encontrar la reacción en esa dirección. Para un grado de libertad activo, usualmente se conoce la carga aplicada (podría ser cero), y el propósito del análisis es encontrar los desplazamientos correspondientes.

El usuario debería ser capaz de identificar los grados de libertad nulos examinando los tipos de elementos que llegan a una junta particular. La tabla III-1 define las componentes de rigidez asociadas con cada tipo de elemento.

Tipo de Elemento	UX	UY	UZ	RX	RY	RZ
Viga 2D (plano X-Y)	0	0	1	1	1	0
Viga 2D (plano Y-Z)	1	0	0	0	1	1
Viga 2D (plano Z-X)	0	1	0	1	0	1
Viga 3D	0	0	0	0	0	0
Armadura 3D	0	0	0	1	1	1
Cascarón 3D	0	0	0	0	0	0
ASOLID (plano X-Y)	0	0	1	1	1	1
ASOLID (plano Y-Z)	1	0	0	1	1	1

ASOLID (plano Z-X)	0	1	0	1	1	1
Sólido	0	0	0	1	1	1

donde 1 = no existe rigidez y 0 = existe rigidez

Tabla III-1. Términos de Rigidez para diferentes tipos de elementos

#### D. Condiciones de Carga y Combinaciones de Carga

Las condiciones de carga son las cargas independientes para las cuales la estructura es analizada explícitamente.

Las combinaciones de carga son cargas formadas por combinaciones lineales de las condiciones independientes de carga.

#### E. Unidades

SAP90 no cuenta con un tipo definido de unidades. El usuario debe preparar los datos en un sistema consistente de unidades. Los resultados del programa estarán de acuerdo con el mismo sistema de unidades.

Las unidades fundamentales necesarias para un análisis estructural son: longitud (L), tiempo (T), masa (M) y temperatura (H). El usuario puede escoger unidades arbitrarias para cada una de esas cantidades. Las cantidades derivadas tendrán unidades consistentes con estas.

## **IV.- MODELADO CON SAP90**

En esta parte se describe de manera general algunas herramientas que utiliza SAP90 para la generación del modelo analítico.

### **A . Generación de coordenadas de nudos**

La base de SAP90 para construir un modelo matemático es el elemento nudo en tres dimensiones, es decir, un nudo es el elemento más pequeño del cual parte la generación de elementos que definen la geometría propia de la estructura.

En estructuras complejas la generación de una malla tridimensional de nudos que define la geometría de un modelo resulta difícil y tardada de construir. Para esto, se ha implementado en SAP90 una serie de herramientas que permiten generar nudos de manera rápida y eficiente, las cuales se presentan a continuación :

- **Generación lineal.**

Con este tipo de generación se crean nudos intermedios entre dos nudos extremos definidos previamente. El espaciamiento entre nudos puede ser equidistante o con un incremento o decremento en sus espacios a lo largo de la línea recta.

- **Generación en cuadrilátero**

Para esta generación se crea una malla bidimensional de nudos definida por sus cuatro esquinas. El espaciamiento es equidistante en ambas direcciones de la malla.

- **Generación frontal**

Este tipo de generación permite construir una malla de nudos en forma rectangular o de paralelogramo. El espaciamiento entre nudos no necesariamente puede ser equidistante. Esta opción de generación se utiliza frecuentemente en la modelación de edificios para la localización en planta de las columnas .

- **Generación Lagrangiana**

Esta opción permite la generación de nudos sobre una superficie compleja en el espacio, para lo cual se requieren definir todos los nudos que forman las caras de la superficie. Las coordenadas de los nudos generados se obtienen mediante el promedio de los nudos que los rodean.

- **Generación cilíndrica y esférica**

Este tipo de generación permite crear nudos a lo largo de una circunferencia. El plano que contiene al círculo puede tener una orientación arbitraria en el espacio. Si esta generación se utiliza de manera repetida, es conveniente transformar las coordenadas de los nudos a una forma esférica. También se pueden obtener generaciones helicoidales o en espiral.

### **B . Condiciones de restricción en nudos que trabajan como apoyos.**

Los nudos que sirven de apoyo a una estructura pueden tener cualquier condición de restricción, es decir, que podemos modelar empotramientos, articulaciones o apoyos con rigideces elásticas ya sea lineales o rotacionales. Lo anterior se logra restringiendo los grados de libertad de un nudo ( restricción total ) o asignando un valor de rigidez elástica en la dirección deseada ( restricción parcial ). De esta forma, se obtendrán fuerzas o reacciones en dirección de las restricciones parciales o totales.

### **C . Nudos con desplazamientos dependientes**

Cuando dos o más desplazamientos se consideran iguales en un modelo estructural, es recomendable indicarlo, ya que además de simplificar los resultados se obtiene una reducción en el número de ecuaciones de equilibrio que forman la matriz de rigidez global de la estructura.

En el análisis sísmico de " edificios regulares " comúnmente se supone que sus niveles se comportan como diafragmas infinitamente rígidos. Esta hipótesis es aceptable para estos casos, ya que la fuerza sísmica se distribuye de manera uniforme en toda la longitud de las trabes. Este tipo de comportamiento puede modelarse adecuadamente asignando desplazamientos dependientes de un grado de libertad en particular. Por ejemplo, en la figura 4.1.a se presenta un marco plano de un edificio en el cual se desprecian las deformaciones axiales en sus trabes, por lo que el desplazamiento en dirección " x " para un nivel en particular, será igual en todos los nudos.

El definir nudos con desplazamientos dependientes, también permite trabajar con modelos separados y después unirlos para su análisis. ( subestructuras )

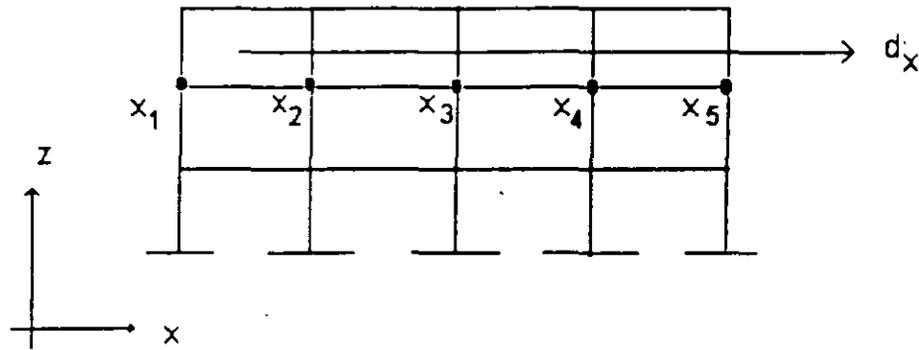


Fig. 4.1. Desplazamientos dependientes.

#### D . Tipos de elementos.

SAP90 maneja cuatro tipos de elementos :

- **FRAME**
- **SHELL**
- **ASOLID**
- **SOLID**

#### Elemento FRAME .

Este elemento permite modelar estructuras de marcos y armaduras en el plano y en el espacio. El elemento básico es un elemento prismático tridimensional que incluye efectos de flexión biaxial, torsión, deformación axial y deformaciones por cortante biaxial. Se puede incluir variaciones lineales, parabólicas y cúbicas del momento de inercia mayor a lo largo de la longitud del elemento. También se permiten asignar zonas rígidas en los extremos de los elementos para considerar la reducción de la longitud debida a las dimensiones propias de la sección transversal de los miembros.

Si los momentos de inercia, las áreas de cortante y la inercia torsional son cero, nuestro elemento se convierte en un elemento armadura biarticulado en sus extremos.

Se pueden proporcionar diversos tipos de cargas sobre la longitud de los elementos :

- Cargas uniformes*
- Cargas puntuales*
- Cargas gravitacionales*
- Cargas por efectos térmicos*

Para el caso de estructuras con ciertas características de geométricas, existen comandos para la generación de elementos que facilitan la construcción del modelo.

Las fuerzas resultantes del análisis son obtenidas en los extremos del elemento ( en la cara del apoyo ) y en otros puntos de control de su longitud, pero se puede asignar un número de puntos equidistantes donde se requiere obtener dichas fuerzas. Estos valores están referenciados al sistema local del elemento.

## **Elemento SHELL**

Este elemento se utiliza para modelar:

*Estructuras de pared delgada ( cascarones ) tridimensionales*  
*Sistemas de membranas en el plano y tridimensionales*  
*Sistemas de placas sujetas a flexión, planas y tridimensionales*

La formulación de este elemento de 4 nudos es una combinación del comportamiento de membrana y de placa con flexión.

La membrana es una formulación isoparamétrica que incluye rigidez traslacional y rigidez rotacional perpendicular al plano donde se define.

El comportamiento de placa a flexión incluye componentes de rigidez rotacional fuera del plano de la placa y componentes de rigidez traslacional perpendicular al plano. En esta formulación no se toman en cuenta las deformaciones por cortante.

Las cargas en los elementos se presentan en forma de presión normal, fuerzas por temperatura y cargas gravitacionales.

Los esfuerzos o fuerzas resultantes y momentos se obtienen en cada nudo del elemento referidos al sistema local. Un error aproximado en los resultados puede estimarse obteniendo la diferencia en los valores de los elementos que concurren a un nudo. De este análisis se tendrá una indicación de la aproximación en los resultados, que puede servir de base para la selección de una malla mas fina.

Existe también la opción de usar elementos triangulares, pero solo se recomienda para transiciones ya que el esfuerzo obtenido es pobre.

## **Elemento ASOLID**

Este elemento se utiliza para modelar :

*Estructuras tridimensionales con deformación plana*  
*Estructuras en dos dimensiones sujetas a un estado de esfuerzo plano*  
*Estructuras tridimensionales con cargas axisimétricas.*

El elemento debe ser plano y paralelo a los planos formados por los ejes globales principales (X-Y, X-Z, Y-Z ).

La formulación de este elemento permite definirlo con 3 y hasta 9 nudos, para cuando se requiere hacer transiciones, pero se recomienda utilizar el elemento de 9 nudos.

Las cargas en los elementos pueden ser debido a efectos térmicos, gradientes de presiones y gravitacionales. Para los sólidos axisimétricos es posible aplicar cargas radiales debidas a velocidades angulares constantes. Pueden asignarse propiedades de materiales anisotrópicos.

Pueden obtenerse aproximaciones del error en los resultados, de manera similar a como se hace en los elementos shell.

### **Elemento SOLID.**

Este elemento definido por 8 nudos se utiliza para modelar estructuras sólidas tridimensionales.

Pueden asignarse propiedades de materiales anisotrópicos. Las cargas en los elementos pueden ser debido a efectos térmicos, gradientes de presiones y gravitacionales.

### **E . Diafragmas de piso rígidos**

La mayoría de los edificios de concreto se caracterizan por tener sistemas de piso ( o losa ) con alta rigidez en su plano. Esta condición permite hacer simplificaciones en el análisis de edificios principalmente sujetos a sismos, ya que permite modelar su sistema de piso como diafragmas infinitamente rígidos, reduciéndose el orden de la matriz de rigidez de la estructura.

A pesar de que SAP90 es un programa general de estructuras, tiene la opción de modelar el comportamiento de diafragmas rígidos de manera automática. Para este caso el diafragma debe ser paralelo al plano X-Y.

Los nudos contenidos en el plano del diafragma no tienen desplazamientos relativos entre si y están restringidos ( nudos dependientes) al desplazamiento de un nudo maestro que define el comportamiento del diafragma. En el análisis de edificios la ubicación del nudo maestro, generalmente se asignan a la ubicación del centro de masa del nivel.

Cuando se utiliza la opción de diafragma rígido, solo pueden conectarse elementos FRAME a los nudos dependientes y por el contrario, no se les permite asignar un valor de masa.

#### **F . Cargas producidas por un gradiente de presión.**

Estas fuerzas se producen principalmente en estructuras sujetas a cargas de fluidos, donde existen filtraciones, presión de poro, gradientes de presión ,etc.

SAP90 tiene la opción en la que se puede definir la distribución de presiones dentro del cuerpo de la estructura. Esto se hace asignando valores escalares de presión a los nudos del modelo estructural . Estos valores se obtienen típicamente de un análisis de red de flujo.

#### **G . Gráficas**

Para visualizar los resultados de un análisis, SAP90 posee un módulo llamado SAPLOT que muestra las siguientes características de una estructura :

Geometría original

Cargas

Configuración deformada resultante de un análisis estático

Formas modales

Diagramas de elementos mecánicos ( FRAME )

Graficación de esfuerzos para elementos SHELL, ASOLID Y SOLID

Para facilidad de despliegue SAPLOT posee algunas herramientas para observar a la estructura desde cualquier posición.

La impresión fuera de pantalla de cualquier resultado, se puede direccionar a la impresora en tamaño carta o doble carta, incluso hacia un archivo con formato AutoCad.

## V. ANÁLISIS ESTÁTICO Y DINÁMICO

La siguiente es una descripción breve de las opciones de análisis estático y dinámico de SAP90.

### A. Análisis Estático

El análisis estático de una estructura envuelve la solución de el sistema de ecuaciones lineales representado por:

$$KU = R$$

donde: K es la matriz de rigideces,  
U es el vector de desplazamientos resultantes  
y R es el vector de cargas aplicadas.

La estructura puede ser analizada para mas de una condición de carga en una misma ejecución.

Las cargas estáticas en las juntas pueden ser en la forma de cargas nodales o momentos concentrados.

Las cargas estáticas en los elementos pueden tomar cualquiera de las siguientes formas:

Para los elementos viga (FRAME):

- Cargas de Gravedad
- Cargas uniformemente distribuidas sobre el claro
- Cargas puntuales en el claro
- Cargas trapezoidales en el claro
- Cargas térmicas, incluyendo gradientes térmicos a través del ancho o profundidad del elemento
- Cargas de presfuerzo, de cables de post-tensado.

Para los elementos cascarón (SHELL).

- Cargas de gravedad
- Cargas de presión de superficie
- Cargas térmicas, sin incluir gradientes a través del espesor del cascarón

Para los elementos sólidos (SOLID y ASOLID):

- Cargas de gravedad

- Cargas de gradiente de presiones
- Cargas térmicas

La opción de análisis de régimen permanente (steady-state) no puede estar activa en un ejecución de análisis estático; sin embargo, un análisis de valores propios y un análisis de espectro de respuesta o un análisis de historia en el tiempo puede realizarse simultáneamente con un análisis estático en la misma ejecución.

## B. Análisis Dinámico.

Las opciones de análisis dinámico de SAP90 incluyen las siguientes:

- Análisis de régimen permanente (steady-state)
- Análisis de valores propios (Eigenvalues)
- Análisis de vectores de Ritz
- Análisis de espectro de respuesta (sismico)
- Análisis de historia en el tiempo

### B.1. Análisis de régimen permanente.

Un tipo muy común de carga es de la forma  $R = \text{sen}(\omega t)F$ , donde  $\omega$  es la frecuencia circular de la excitación, de modo que  $R$  varía con respecto al tiempo; sin embargo, la distribución espacial de la carga no varía como una función del tiempo. Para el caso de cero amortiguamiento, las ecuaciones de equilibrio para el sistema estructural son de la siguiente forma:

$$KU + MW = R = \text{sen}(\omega t)F$$

donde  $K$  es la matriz de rigideces y  $M$  es la matriz de masa diagonal. La solución de régimen permanente de esta ecuación requiere que los desplazamientos de las juntas  $U$  y las aceleraciones  $W$  sean de la siguiente forma:

$$U = \text{sen}(\omega t)A$$

$$W = -\omega^2 \text{sen}(\omega t)A$$

Por lo tanto, la amplitud de la respuesta  $A$  viene dada por la solución del siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$[K - \omega^2 M]A = F$$

Es de interés hacer notar que la solución para cargas estáticas no es nada más que la solución de esta ecuación con frecuencia cero. La frecuencia de la carga es expresada en ciclos por segundo.

los desplazamientos impresos por el programa son los valores de A (desplazamientos máximos) que varían como  $\sin(\omega t)$ . Las fuerzas en los miembros son también valores máximos variando como  $\sin(\omega t)$ .

## B.2. Análisis de Valores Propios

El análisis sísmico por el método del espectro de respuesta o análisis de historia en el tiempo usando el método de superposición modal requiere la determinación de los modos de vibración no amortiguados y las frecuencias del sistema.

Esto envuelve la solución del problema de valores propios generalizado

$$K\Phi = M\Phi\Omega^2$$

donde K es la matriz de rigideces

M es la matriz de masa diagonal

$\Omega^2$  es la matriz diagonal de valores propios

$\Phi$  es la matriz de los vectores propios correspondientes

SAP90 resuelve este problema para los  $n$  menores valores propios y sus correspondientes vectores propios usando un algoritmo de iteración del subespacio acelerado.

## B.3. Análisis de Vectores de Ritz.

Investigaciones recientes indican que las formas modales de vibración libre exactas no son la mejor base para un análisis dinámico de superposición modal de estructuras sometidas a cargas dinámicas. Se ha demostrado que los análisis dinámicos basados en un conjunto único de vectores de Ritz da resultados más exactos que usando el mismo número de vectores propios

La razón por la cual los vectores de Ritz dan excelentes resultados es porque ellos son generados tomando en cuenta la distribución espacial de la carga dinámica, mientras que el uso de las formas modales exactas desprecia esta importante información. El primer vector de Ritz es el vector de desplazamientos obtenido de un análisis estático usando la distribución espacial del vector de cargas dinámicas como dato. Los otros vectores se generan de una relación de recurrencia en la cual la matriz de masa es multiplicada por el vector de Ritz previamente obtenido u usada como el vector de carga para la solución estática. Por lo tanto, luego que la matriz de rigideces es triangularizada, es solo necesario resolver estáticamente para un vector de carga por cada vector de Ritz requerido.

#### B.4. Análisis del Espectro de Respuesta (Sismico)

Las ecuaciones de equilibrio dinámico asociadas con la respuesta de una estructura a movimientos del terreno viene dada por:

$$KU + CV + MW = MW_g$$

donde **K** es la matriz de rigideces

**C** es la matriz de amortiguamiento

**M** es la matriz de masa diagonal

**Wg** es la aceleración del terreno

y **U**, **V** y **W** son los desplazamientos, velocidades y aceleraciones estructurales, respectivamente.

SAP90 resuelve este sistema de ecuaciones usando el método de superposición modal basado en el espectro de respuesta. La aceleración del terreno es dada como una curva de espectro de respuesta digitalizada de aceleraciones espectrales contra periodo.

La excitación del terreno puede ocurrir simultáneamente en tres direcciones X, Y y Z. Para obtener los máximos desplazamientos y fuerzas (o esfuerzos) en los miembros, las respuestas modales asociadas con una dirección particular de excitación son calculadas primero y luego combinadas usando la técnica de la combinación cuadrática completa (CQC) La respuesta total es entonces calculada sumando las respuestas de las tres direcciones usando el método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS).

Para modelar estructuras sometidas a cargas dinámicas dadas por espectros de respuesta, la dirección positiva del eje Z debe apuntar hacia arriba.

#### B.5 Análisis de Respuesta Dinámica de Historias en el Tiempo.

En general la carga que actúa sobre una estructura es una función arbitraria de espacio y tiempo. En forma matricial, puede ser escrita como **R(s,t)**. Para todos los tipos de carga **R(s,t)** puede ser escrita como una suma finita de series de vectores de carga espacial **F<sub>i</sub>(s)** y funciones de tiempo **T<sub>i</sub>(t)** O en forma matricial:

$$R(s,t) = SF_i(s) * T_i(t)$$

Para el programa SAP90 los vectores espaciales **F<sub>i</sub>(s)** pueden definirse como las condiciones de carga estática, o en caso de aceleraciones de base como una función de la matriz de masas. Las funciones **T<sub>i</sub>(t)** pueden ser funciones arbitrarias de tiempo o funciones periódicas como aquellas producidas por viento u oleaje.

## VI. ESTRUCTURA DEL ARCHIVO DE DATOS DE SAP90

El archivo de datos de SAP90 está organizado en 21 distintos bloques de datos por medio de líneas de separación únicas (excepto en el caso de la línea de título, donde no existe separador). El separador identifica el bloque de datos y es siempre la primera línea del bloque de datos. La línea del separador puede ser escrita en mayúsculas o minúsculas pero debe comenzar en la columna 1. Los datos asociados con el bloque de datos van inmediatamente después de la línea del separador.

Los 21 bloques de datos se muestran en la tabla VII-1. Algunos de ellos son obligatorios; sin embargo, la existencia de muchos de los bloques en el archivo de datos depende del problema que está siendo analizado. El orden en que los bloques aparecen en el archivo no es importante; sin embargo la línea de título debe ser la primera línea del archivo.

BLOQUE DE DATOS	DESCRIPCIÓN	OBLIGATORIO
1. Línea de Título	Información del trabajo	Si
2. SYSTEM	Información de control del trabajo	Si
3. JOINTS	Coordenadas de las Juntas	Si
4. RESTRAINTS	Restricciones de Juntas	Si <sup>1</sup>
5. SPRINGS	Resortes de Apoyo	No
6. MASSES	Masas en las Juntas	No
7. POTENTIAL	Temperaturas y Presiones en Juntas	No
8. CONSTRAINTS	Relaciones de GDL de Juntas	No
9. FRAME	Datos de Elementos Viga	Si <sup>2</sup>
10. SHELL	Datos de Elementos Cascarón	Si <sup>2</sup>
11. ASOLID	Datos de Elementos ASOLID	Si <sup>2</sup>
12. SÓLID	Datos de Elementos Sólidos	Si <sup>2</sup>
13. LOADS	Cargas Aplicadas en las Juntas	No
14. DISPLACEMENTS	Desplazamientos aplicados en las juntas	No
15. PRESTRESS	Cargas de Presforzado en Vigas	No
16. PDELTA	Control para Análisis P-Delta	No
17. SPEC	Datos del espectro de Respuesta	No
18. TIMEH	Datos de Historia en el Tiempo	No
19. COMBO	Datos para Combinaciones de Cargas	No
20. ENVELOPE	Datos para Combinaciones de Envolvente	No
21. SELECT	Solicitud de Salida Selectiva	No

1 Este bloque de datos puede ser omitido si la estructura está totalmente soportada por resortes

2 Al menos uno de estos cuatro bloques debe estar presente en el archivo de datos

Tabla VII-1. Bloques de datos de SAP90

## **B. Formato Libre.**

Todos los datos de entrada de SAP90 se preparan en formato libre. En otras palabras, los datos en una línea específica no tienen que corresponder con columnas preestablecidas. Los datos son suministrados como una lista de ítems separados por una coma o por uno o más blancos. Los ítems pueden ser números o caracteres alfanuméricos.

El formato libre puede ser de dos formas:

- Una lista de datos precedidos por un identificador y un signo igual:

XI=2000,4501

- Una lista de datos sin un identificador que los preceda:

20,45,5

Una línea de datos típica puede ser una combinación de los dos anteriores, como,

20,45,5 XI=1200,1500 AV=15,25

## **C. Comentarios**

Cualquier línea, excepto la primera, que tenga la letra C en la primera columna y un blanco en la columna 2 es tratada como una línea de comentario e ignorada por el programa. Dos puntos (:) indican el fin de la información en una línea. Cualquier información a la derecha de los dos puntos es también ignorada por el programa.

## **D. Continuación de Línea**

Cada línea de datos puede contener hasta 500 caracteres. Estos pueden ser suministrados en una sola línea en el archivo de datos, o la línea puede ser dividida en varias líneas de texto de menor longitud. El carácter backslash (\) en una línea particular de texto indica que la siguiente línea es una continuación de aquella. Se permiten múltiples líneas de continuación, pero la suma de todas las columnas a la izquierda del backslash (\) en cada línea de texto no debe exceder de 500 caracteres.

## **E. Operaciones Aritméticas.**

Instrucciones aritméticas simples son permitidas cuando se suministran números reales en los campos de formato libre. Pueden usarse los siguientes operadores

- + para la suma
- para la resta
- / para la división
- \* para la multiplicación

## VII. ARCHIVOS DE SALIDA DE SAP90

Después de una corrida de computadora completa, aparecerán una serie de archivos de resultados en formato ASCII con el nombre archivo del problema mas una extensión que depende de las opciones utilizadas en análisis. Si suponemos que nuestro archivo de datos se designa como EJEMPLO, a continuación se muestran los nombres de archivos que pueden presentarse :

EJEMPLO.SAP  
EJEMPLO.EQN  
EJEMPLO.EIG  
EJEMPLO.RIT  
EJEMPLO.SPC  
EJEMPLO.SOL  
EJEMPLO.F3F  
EJEMPLO.F4F  
EJEMPLO.F5F  
EJEMPLO.F8F  
EJEMPLO.FEF  
EJEMPLO.ERR

El contenido de estos archivos se describe a continuación:

NOMBRE	CONTENIDO
EJEMPLO.SAP	Datos de entrada en forma tabular
EJEMPLO.EQN	Ecuaciones que forman la matriz de rigidez
EJEMPLO.EIG	Frecuencias y parámetros modales.( eigenvectores)
EJEMPLO.RIT	Frecuencias y parámetros modales ( Vectores de Ritz )
EJEMPLO.SPC	Factores del análisis modal espectral
EJEMPLO.SOL	Desplazamientos de los nudos y reacciones
EJEMPLO.F3F	Fuerzas en los elementos FRAME
EJEMPLO.F4F	Fuerzas en los elementos SHELL
EJEMPLO.F5F	Esfuerzos en los elementos ASOLID
EJEMPLO.F8F	Esfuerzos en los elementos SOLID
EJEMPLO.FEF	Fuerzas en los nudos
EJEMPLO.ERR	Errores y advertencias detectadas durante las corridas

## VIII. ESTRUCTURA DEL PROGRAMA SAP90

### A. Módulos del Programa SAP90

El programa de análisis estructural es una combinación de módulos que son ejecutados en una secuencia predefinida. Los módulos están ligados por medio de una serie de archivos internos que constituyen una base de datos. Cada módulo realiza una serie de operaciones y actualiza la base de datos durante el proceso.

Los programas incluidos en el paquete completo de SAP90, y las funciones asociadas con cada programa se presentan en la tabla VIII-I. Algunos de los programas crean archivos de salida. Los nombres de los archivos de salida asociados también se muestra en la tabla.

<b>MODULO DE PROGRAMA</b>	<b>FUNCIÓN DEL MODULO</b>	<b>ARCHIVO CREADO</b>
1. SAP90	Lee, Chequea y Tabula Todos los Datos	EXAMPLE.SAP
2. FRAME	Formulación de la Matriz de Rigideces del Elemento Viga	
3. SHELL	Formulación de la Matriz de Rigideces del Elemento Cascarón	
4. ASOLID	Formulación de la Matriz de Rigideces de Elemento ASOLID	
5. SOLID	Formulación de la Matriz de Rigideces del Elemento SOLID	
6. SOLVE	Ensamblaje y Reducción de Rigideces y Cargas	
7. EIGEN	Análisis de Valores Propios (Eigenvalues)	EXAMPLE.EIG
8. RITZ	Análisis de Vectores de Ritz	EXAMPLE.RIT
9. SPEC	Factores de Análisis Espectral	EXAMPLE.SPC
10. TIMEH	Análisis de Historias en el Tiempo	
11. JOINTF	Salida de Formas Modales, Desplazamientos de Juntas y Reacciones	EXAMPLE.SOL
12. ELEMF	Salida de Fuerzas en las Juntas de los Elementos	EXAMPLE.FEF
13. FRAMEF	Salida de Fuerzas en Elementos Viga	EXAMPLE.F3F
14. SHELLF	Salida de Fuerzas en los Elementos Cascarón	EXAMPLE.F4F
15. ASOLIDF	Salida de Esfuerzos en los Elementos ASOLID	EXAMPLE.F5F
16. SOLIDF	Salida de Esfuerzos en Elementos SOLID	EXAMPLE.F8F
17. SAPLOT	Salidas Gráficas	
18. SAPTIME	Salidas Gráficas y Creación de Salida para Análisis de Historias en el Tiempo	EXAMPLE.HST

Tabla IX-I. Módulos de SAP90

## **B. El Comando GO**

El módulo de SAP90 lee el archivo de datos y chequea todos los datos por compatibilidad. Si no se encuentran errores, el módulo de SAP90 creará un archivo por lotes GO.BAT, el cual activará el resto de los módulos de SAP90 que son necesarios para un análisis en particular.

El archivo GO.BAT se activa luego de la ejecución de SAP90 como sigue:

```
C:>GO <CR>
```

## **C. Secuencia de Ejecución.**

El programa de análisis estructural SAP90 requiere que las operaciones analíticas se realicen en una secuencia predeterminada rigurosa. El módulo SAP90 siempre es ejecutado primero. Una ejecución sin errores de este módulo creará el archivo GO.BAT. Para una ejecución normal el archivo de lotes GO.BAT contendrá algunos o todos de los siguientes comandos en la siguiente secuencia:

```
OPTIMIZE  
FRAME  
SHELL  
ASOLID  
SOLID  
SOLVE  
EIGEN  
RITZ  
SPEC  
TIMEH  
JOINTF  
ELEMF  
FRAMEF  
SHELLF  
ASOLIDF  
SOLIDF
```

Para el modo de ejecución reiniciar (restart), el archivo GO.BAT contendrá algunos o todos de los siguientes comandos:

```
SPEC  
TIMEH  
JOINTF  
ELEMF  
FRAMEF
```

SHELLF  
ASOLIDF  
SOLIDF

#### **D. La Opción Reiniciar (RESTART).**

La opción reiniciar de SAP90 permite al usuario cambiar ciertos bloques de datos, y obtener resultados asociados con los datos de entrada cambiados sin realizar las fases de ensamblaje y solución del programa.

El modo de análisis de reinicio solo los siguientes bloques de datos pueden ser cambiados o añadidos

- Línea del título
- SYSTEM
- SPEC
- TIMEH
- COMBO
- ENVELOPE
- SELECT

## **IX. DETALLES DE LAS OPCIONES DEL ARCHIVO DE DATOS DE SAP90**

Como se describió en el capítulo VII, el archivo de datos de SAP90 está organizado en bloques de datos. Solamente se necesita preparar los datos asociados con los bloques de datos que son pertinentes a la estructura que está siendo analizada.

Cada bloque de datos, a su vez, está subdividido en una o mas secciones de datos y las secciones de datos están formadas por líneas de datos. En algunos casos, las líneas de datos en una sección de datos están agrupadas en múltiples conjuntos de datos. Si alguna línea de datos no es necesaria para una estructura en particular, el usuario puede simplemente obviar la lista de datos asociada.

### **1. Línea de Título.**

Prepare una línea de datos de hasta 70 caracteres para el título de la salida. Esta información aparecerá en cada página de los archivos de salida creados por SAP90. Esta línea debe ser la primera en el archivo de datos.

### **2. Bloque de datos SYSTEM.**

Este bloque de datos define información de control asociada con el análisis estructural. Este bloque de datos es obligatorio.

#### **FORMATO**

##### **a. Separador**

Coloque una línea para el separador en la siguiente forma:

SYSTEM

##### **b. Información de Control.**

A continuación del separador SYSTEM coloque una línea de datos en la forma siguiente>

R=ropt L=nld C=ncyc V=nfq T=tol P=per W=wopt Z=nritz N=nid

#### **EJEMPLO**

SYSTEM

V=10 L=3

## DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
ropt	[0]	Marcadores de Reinicio: =0 Modo de ejecución normal =1 Modo de reinicio =2 Reinicio después de un análisis de transferencia de calor
nld	[0]	Número de condiciones de carga
ncyc	[0]	Frecuencia de la carga para análisis de régimen permanente
nfq	[0]	Número de valores propios a calcular
tol	[.0001]	Tolerancia de convergencia para análisis de valores propios
per	[0]	Período de corte para análisis de valores propios
wopt	[0]	Bandera de supresión de advertencia =0 Mostrar todas las advertencias =1 Suprima todas las advertencias
nritz	[0]	Número de vectores de Ritz a calcular
nid	[9999]	máximo número de identificación de juntas.

### 3. Bloque de datos JOINTS

Este bloque de datos define las juntas que describen la geometría del modelo estructural con sus coordenadas asociadas. Este bloque de datos es obligatorio.

#### FORMATO

##### a. Separador

JOINTS

##### b. Datos de Juntas

En esta sección de datos coloque tantas líneas como se necesite para definir las juntas de la estructura. Finalice esta sección con una línea en blanco. Prepare las líneas de datos en la forma siguiente>

jid X=x Y=y Z=z G=g1,g2,i,r Q=q1,q2,q3,q4,i<sub>n</sub>j<sub>n</sub> F=f,n<sub>i</sub>,n<sub>j</sub>,i<sub>n</sub>j<sub>n</sub> L=l,n<sub>i</sub>,n<sub>j</sub>  
A=c1,c2,c3,n<sub>c</sub>,i<sub>c</sub>,a S=s

#### EJEMPLO

JOINTS

25 X=20 Y=20 Z=20 S=12  
5 X=10 Y=10 Z=0 G=5,25,2

## DESCRIPCIÓN

### Identificación de Juntas y Coordenadas

Variable	Defecto	Descripción
jid		Número de identificación de la junta
x	{pv}	Coordenada global X de la junta jid
y	{pv}	Coordenada global Y de la junta jid
z	{pv}	Coordenada global Z de la junta jid

### Generación Lineal

g1		Junta 1. Generación lineal
g2		Junta 2. Generación lineal
i	[1]	Incremento de número de junta
r	[1]	Relación de el último espacio al primer espacio para espaciamiento diferente de juntas

### Generación Cuadrilateral

q1		Junta 1. Generación Cuadrilateral
q2		Junta 2. Generación Cuadrilateral
q3		Junta 3. Generación Cuadrilateral
q4		Junta 4. Generación Cuadrilateral
i <sub>n</sub>		Incremento del número de juntas, sobre el eje i
j <sub>n</sub>		Incremento del número de juntas, sobre el eje j

### Generación Frontal y Lagrangiana

f		Número de junta origen para generación frontal
l		Número de junta original para generación Lagrangiana
n <sub>i</sub>		Número de juntas en la dirección i, sin incluir la junta origen
n <sub>j</sub>		Número de juntas en la dirección j, sin incluir la junta origen
i <sub>n</sub>		Incremento del número de juntas sobre el eje i
j <sub>n</sub>		Incremento del número de juntas sobre el eje j

### Generación Cilíndrica

c1		Junta 1. Generación cilíndrica
c2		Junta 2. Generación cilíndrica
c3		Junta 3. Generación cilíndrica
n <sub>c</sub>		Número de juntas cilíndricas adicionales a generar
i <sub>c</sub>		Incremento de número de junta para generación cilíndrica de juntas
a		Incremento de ángulo, grados (debe ser menor de 90)

## Factor de Escala

s [pv] Factor de escala para coordenadas de junta

### 4. Bloque de datos RESTRAINTS

Cada junta del modelo estructural tiene seis componentes de desplazamiento, tres traslaciones globales UX, UY y UZ y tres rotaciones globales RX, RY y RZ. las direcciones asociadas con esos seis componentes de desplazamiento se conocen como grados de libertad de la junta.

Las especificaciones de restricción de una junta consiste de un conjunto de seis números (o códigos), cada uno correspondiente a cada grado de libertad de la junta. cada uno de esos números puede tener un valor de 0 o 1.

Este bloque de datos es obligatorio a menos que el modelo esté completamente apoyado en resortes.

### FORMATO

#### a. Separador.

### RESTRAINTS

#### b. Datos de restricción.

En esta sección de datos coloque tantas líneas como necesite para definir los grados de libertad inactivos del sistema

j1 j2 inc R= $r_{ux}, r_{uy}, r_{uz}, r_{rx}, r_{ry}, r_{rz}$

### EJEMPLO

15 25 5 R=1,1,1,1,1,1

## DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
j1		Primer número de junta
j2	[j1]	Ultimo número de junta
inc	[1]	Incremento en el número de junta
$r_{ux}$		Código de restricción de traslación en X
$r_{uy}$		Código de restricción de traslación en Y
$r_{uz}$		Código de restricción de traslación en Z
$r_{rx}$		Código de restricción de rotación alrededor de X
$r_{ry}$		Código de restricción de rotación alrededor de Y
$r_{rz}$		Código de restricción de rotación alrededor de Z

### 5. Bloque de Datos SPRING.

Cualquiera de los seis grados de libertad de una junta de la estructura puede tener condiciones de apoyo traslacionales o rotacionales de resorte. Este bloque de datos define la ubicación de dichos resortes de apoyo y sus valores asociados. No se permite colocar resortes en la dirección de grados de libertad restringidos.

### FORMATO

#### a. Separador.

SPRINGS

#### b. Datos del Resorte.

En esta sección coloque tantas líneas como necesite para definir los grados de libertad del sistema que estén soportados por resortes

j1 j2 inc K= $k_{ux}, k_{uy}, k_{uz}, k_{rx}, k_{ry}, k_{rz}$

### EJEMPLO

SPRINGS

5 25 5 K=1000,0,0,0,0,0

## DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
j1		Primer número de junta
j2	[j1]	Número de junta final
incr	[1]	Incremento en número de juntas
k <sub>ux</sub>		Constante traslacional de resorte en X
k <sub>uy</sub>		Constante traslacional del resorte en Y
k <sub>uz</sub>		Constante traslacional del resorte en Z
k <sub>rx</sub>		Constante rotacional del resorte en X
k <sub>ry</sub>		Constante rotacional del resorte en Y
k <sub>rz</sub>		Constante rotacional del resorte en Z

### 6. Bloque de datos MASSES.

En el modo de análisis dinámico, puede ser necesario colocar masas nodales concentradas (y sus correspondientes momentos de inercia de masas) en las juntas. Cualquiera de los seis grados de libertad de cualquiera de las juntas de una estructura pueden tener valores de masas traslacionales o rotacionales. Este bloque de datos define la ubicación de dichas masas y sus valores correspondientes. La información de este bloque de datos solo es usada por el programa en el modo de análisis dinámico. No se permiten valores de masa en la dirección de grados de libertad restringidos.

### FORMATO

#### a. Separador.

MASSES

#### b. Datos de masas.

j1 j2 inc M=mux,muy,muz,mrx,mry,mrz

### EJEMPLO

MASSES

5 25 5 M=1,1,0,0,0,1200

## DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
j1		Primer número de junta
j2	[j1]	Número de junta final
incr	[1]	Incremento en número de juntas
m <sub>ux</sub>		Masa traslacional en X
m <sub>uy</sub>		Masa traslacional en Y
m <sub>uz</sub>		Masa traslacional en Z
m <sub>rx</sub>		Momento de Inercia de masas respecto al eje X
m <sub>ry</sub>		Momento de Inercia de masas respecto al eje Y
m <sub>rz</sub>		Momento de Inercia de masas respecto al eje Z

### 7. Bloque de Datos POTENTIAL.

Este bloque de datos sirve para especificar valores de temperatura o presión en juntas para un análisis estructural.

Los valores de temperaturas en las juntas son usados si se requiere un análisis térmico. Las propiedades de los elementos y los correspondientes valores de temperatura en juntas son usados para generar los vectores de cargas térmicas del elemento.

Los valores de presión en juntas son usados por los elementos SHELL, SOLID y ASOLID para calcular los vectores de cargas de presiones.

Este bloque de datos solo es necesario si se va a efectuar un análisis térmico o de presiones.

### FORMATO

#### a. Separador

POTENTIAL

#### b. Datos de Potencial

j1 j2 inc T=t1,t2 P=p1,p2 W=w,z

### EJEMPLO

POTENTIAL

12 18 2 T=96,126 P=10,20

## DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
j1		Numero de la junta inicial
j2	[j1]	Número de la junta final
inc	[1]	Incremento en el número de junta

### Especificaciones de Temperatura

t1	[0]	Valor de temperatura en la junta j1
t2	[t1]	Valor de temperatura en la junta j2

### Especificaciones de Presión

p1	[0]	Valor de presión en la junta j1
p2	[p1]	Valor de presión en la junta j2
w		Peso unitario del fluido (peso/unidad de volumen)
z		Coordenada Z global de la superficie de fluido

## 8. Bloque de Datos CONSTRAINTS

Los datos definidos en este bloque de datos se usa para reducir el número de ecuaciones en el sistema a ser resuelto, cuando se conoce que los desplazamientos en ciertos grados de libertad son iguales a los desplazamientos en otros grados de libertad.

### FORMATO

#### a. Separador.

### CONSTRAINTS

#### b. Datos

j1 j2 inc C= $C_{ux}, C_{uy}, C_{uz}, C_{rx}, C_{ry}, C_{rz}$  I= $i_{ux}, i_{uy}, i_{uz}, i_{rx}, i_{ry}, i_{rz}$

### EJEMPLO

#### CONSTRAINTS

21 31 1 C=20,0,0,0,0,0

## DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
j1		Primer número de junta
j2	[j1]	Número de junta final
incr	[1]	Incremento en número de juntas

Número de Juntas Independientes para:

$C_{ux}$	Traslación X de la junta dependiente
$C_{uy}$	Traslación Y de la junta dependiente
$C_{uz}$	Traslación Z de la junta dependiente
$C_{rx}$	Rotación X de la junta dependiente
$C_{ry}$	Rotación Y de la junta dependiente
$C_{rz}$	Rotación Z de la junta dependiente

Incrementos de Números de juntas independientes para:

$i_{ux}$	Junta $C_{ux}$
$i_{uy}$	Junta $C_{uy}$
$i_{uz}$	Junta $C_{uz}$
$i_{rx}$	Junta $C_{rx}$
$i_{ry}$	Junta $C_{ry}$
$i_{rz}$	Junta $C_{rz}$

## 9. Bloque de Datos FRAME

Este bloque de datos define las propiedades, ubicaciones y cargas asociadas con los elementos FRAME (viga) tridimensional que existen en el modelo. Cualquier elemento de viga o armadura en dos dimensiones o elemento de armadura en tres dimensiones puede ser considerado como un caso especial de este elemento general.

### FORMATO

#### a. Separador

FRAME

#### b. Información de control del bloque de datos FRAME

Coloque una línea de datos para la información de control en la siguiente forma:

NM=npro NL=nbsl NSEC=nsec  $X=x_1, x_2, \dots, x_{nld}$   $Y=y_1, y_2, \dots, y_{nld}$   $Z=z_1, z_2, \dots, z_{nld}$   
 $T=t_1, t_2, \dots, t_{nld}$   $P=pr_1, pr_2, \dots, pr_{nld}$

### c. Datos de Materiales y Propiedades de Secciones.

Coloque npro líneas de datos para definir las npro tipos de propiedades.

np A=a J=j I=I<sub>33</sub>, I<sub>22</sub> AS=a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub> E=e G=g W=w M=m Tc=alpha

### d. Datos de Carga en el claro.

Coloque nbsl líneas de datos en esta sección, una por cada uno de los nbsl patrones de carga en el claro.

ns WL=w<sub>1</sub>, w<sub>2</sub>, w<sub>3</sub> WG=w<sub>x</sub>, w<sub>y</sub>, w<sub>z</sub> T=t<sub>1</sub>, t<sub>2</sub>, t<sub>3</sub> PLD=d<sub>1</sub>, p<sub>1</sub>, f<sub>1</sub>, d<sub>2</sub>, p<sub>2</sub>, f<sub>2</sub>, ..., d<sub>4</sub>, p<sub>4</sub>, f<sub>4</sub>  
 TRAP=c<sub>1</sub>, u<sub>1</sub>, v<sub>1</sub>, c<sub>2</sub>, u<sub>2</sub>, v<sub>2</sub>, c<sub>3</sub>, u<sub>3</sub>, v<sub>3</sub>, c<sub>4</sub>, u<sub>4</sub>, v<sub>4</sub>

### e. Datos de ubicación de los elementos FRAME.

En esta sección provea tantas líneas como sea necesario para definir todos los elementos FRAME en el modelo. Finalice esta sección con una línea en blanco.

nel j, j, M=msp<sub>i</sub>, msp<sub>j</sub>, i<sub>var</sub> LP=n<sub>1</sub>, n<sub>2</sub> LR=r<sub>1</sub>, r<sub>2</sub>, r<sub>3</sub>, r<sub>4</sub>, r<sub>5</sub>, r<sub>6</sub> RE=r<sub>i</sub>, r<sub>j</sub> RZ=z  
 MS=m<sub>i</sub>, m<sub>j</sub> NSL=I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, ..., I<sub>nld</sub> G=n<sub>g</sub>, n<sub>inc</sub>, g<sub>1</sub>, g<sub>2</sub>, g<sub>3</sub>, g<sub>4</sub>

## DESCRIPCIÓN.

### Información de Control

Variable	Defecto	Descripción
npro	[1]	Número de tipos de propiedades
nbsl	[0]	Número de patrones de carga en el claro
nsec	[0]	Número de secciones para salida de resultados de fuerzas
x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> , ...	[0]	Multiplicadores gravitacionales en dirección X
y <sub>1</sub> , y <sub>2</sub> , ...	[0]	Multiplicadores gravitacionales en dirección Y
z <sub>1</sub> , z <sub>2</sub> , ...	[0]	Multiplicadores gravitacionales en dirección Z
t <sub>1</sub> , t <sub>2</sub> , ...	[0]	Multiplicadores de temperatura
pr <sub>1</sub> , pr <sub>2</sub> , ...	[0]	Multiplicadores de cargas de presfuerzo

### Datos de Propiedades de Materiales y secciones.

np		Número de identificación de las propiedades
a	[0]	Área
j	[0]	Constante torsional

$i_{33}, i_{22}$	[0]	Momentos de inercia
$a_2, a_3$	[0]	Áreas de corte
$e$	[pv]	Módulo de elasticidad
$g$	[e/2.6]	Módulo de corte
$w$	[0]	Peso por unidad de longitud
$m$	[0]	Masa por unidad de longitud
$\alpha$	[0]	Coefficiente de expansión térmica del material (unidades L/L/H)

#### Datos de Cargas en el claro.

$ns$		Número de identificación de la carga en el claro
$w_1$	[0]	Carga uniforme en la dirección 1 - Fuerza/longitud
$w_2$		carga uniforme en la dirección 2 - Fuerza/longitud
$w_3$		Carga uniforme en la dirección 3 - Fuerza/Longitud
$w_x$	[0]	Carga uniforme en la dirección X - Proyección en X de Fuerza/Longitud
$w_y$	[0]	Carga uniforme en la dirección Y - Proyección en Y de Fuerza/Longitud
$w_z$	[0]	Carga uniforme en la dirección Z - Proyección en Z de Fuerza/Longitud
$t_1$	[0]	Incremento de temperatura en la línea central del elemento
$t_2$		Gradiente de temperatura en la dirección 2
$t_3$		gradiente de temperatura en la dirección 3
$d_1$		Distancia del extremo I de $p_1$ y $f_1$
$p_1$		$p_1$ es la primera carga desde I en la dirección 2
$f_1$		$f_1$ es la primera carga desde Y en la dirección 3
$c_1$		Distancia desde el extremo I de $u_1$ y $v_1$
$u_1$		$u_1$ es la intensidad de carga en la dirección 2 a una distancia $c_1$ del extremo I
$v_1$		$v_1$ es la intensidad de carga en la dirección 3 a una distancia $c_1$ del extremo I.

#### Datos de Ubicación de los Elementos FRAME

$nel$		Número de identificación del elemento
$j_i$		Número de la junta en el extremo I.
$j_j$		Número de junta en el extremo j.
$m_{spi}$	[pv]	Número de identificación de propiedades en el extremo I.
$m_{spj}$	[mspi]	Número de identificación de propiedades en el extremo J.
$i_{var}$	[2]	Variación de $e^*I_{33}$ a lo largo de la longitud de elemento: =1 Lineal =2 Parabólica =3 Cúbica
$n_1, n_2$	[pv]	Números de junta para definir el eje local en la dirección 3

$r_1$	[0]	Código de liberación de la restricción de momento respecto al eje 3. Extremo I.
$r_2$		Código de liberación de la restricción de momento respecto al eje 3. Extremo J.
$r_3$		Código de liberación de la restricción de fuerza axial.
$r_4$		Código de liberación de la restricción de momento respecto al eje 2. Extremo I.
$r_5$		Código de liberación de la restricción de momento respecto al eje 2. Extremo J.
$r_6$		Código de liberación de la restricción de momento torsional
$r_i, r_j$	[0]	Zona rígida en los extremos I y J, respectivamente
$z$	[pv]	Factor de reducción de zona rígida
$m_i, m_j$	[pv]	Junta maestra para los extremos I y J, respectivamente
$l_1, l_2, \dots$	[0]	Patrones de carga en el claro de la viga para las condiciones de carga $l_1$ a $l_{nld}$
$n_g$	[0]	Número de elementos adicionales a generar
$ninc$		Incremento para el número de identificación del elemento
$g_1$		Incremento del número de la junta en el extremo I
$g_2$		Incremento del número de la junta en el extremo J.
$g_3$		Incremento en el número de la junta maestra en el extremo I.
$g_4$		Incremento en el número de la junta maestra en el extremo J.

## 10. Bloque de Datos SHELL

Este bloque de datos define las propiedades, ubicaciones y cargas asociados con el elemento general tridimensional SHELL de 4 nodos. Los elementos membrana y de flexión de placas son considerados casos especiales de este elemento general.

### FORMATO.

#### a. Separador.

SHELL

#### b. Información de Control.

Colocar una línea de datos para la información de control del bloque SHELL de la siguiente manera:

NM=nmat O=iout

X= $x_1, x_2, \dots, x_{nld}$  Y= $y_1, y_2, \dots, y_{nld}$  Z= $z_1, z_2, \dots, z_{nld}$

T= $t_1, t_2, \dots, t_{nld}$  P= $p_1, p_2, \dots, p_{nld}$

### c. Datos de Propiedades del Material

Colocar nmat líneas de datos en esta sección para definir los nmat tipos de material en la siguiente forma:

nm E=e U=u W=w M=m TA=alpha

### d. Datos de ubicación de los elementos SHELL.

En esta sección de datos, provea tantas líneas de datos como sean necesarias para definir las ubicaciones de todos los elementos SHELL en el modelo. Finalice esta sección con una línea en blanco.

nel JQ= $j_1, j_2, j_3, j_4$  ETYPE=et M=mat TZ=tz TH= $th_1, th_2$  LP=n G= $g_1, g_2$

## DESCRIPCIÓN

### Información de Control

Variable	Defecto	Descripción
nmat	[1]	Número de tipos de material
iout	[0]	Control de salida: =0 Resultantes de fuerzas y momentos =1 Esfuerzos de superficie superiores e inferiores
$x_1, x_2, \dots$	[0]	Multiplicadores gravitacionales en dirección X
$y_1, y_2, \dots$	[0]	Multiplicadores gravitacionales en dirección Y
$z_1, z_2, \dots$	[0]	Multiplicadores gravitacionales en dirección Z
$t_1, t_2, \dots$	[0]	Multiplicadores de temperatura
$p_1, p_2, \dots$	[0]	Multiplicadores de presión

### Datos de Propiedades del Material

nm		Número de identificación del material
e	[pv]	Módulo de elasticidad
u	[pv]	Relación de Poisson
w	[0]	Peso por unidad de volumen
m	[0]	Masa por unidad de volumen
alpha	[0]	Coefficiente de expansión térmica (unidades L/L/H)

### Datos de Ubicación de Elementos SHELL

nel		Número de identificación del elemento
$j_1, j_2, \dots$		Números de las juntas del elemento

et	[pv]	Tipo de elemento =0 Cascarón (membrana + flexión) =1 Solo comportamiento de membrana =2 Solo comportamiento de flexión de placa
mat	[pv]	Tipo de material del elemento
tz	[0]	Temperatura referencia de cero esfuerzo
th <sub>1</sub>	[pv]	Espesor del elemento membrana
th <sub>2</sub>	[pv]	Espesor del elemento de flexión
n	[0]	Control para la dirección del eje local del elemento
g <sub>1</sub> ,g <sub>2</sub>		Parámetros para la generación de elementos

## 11. Bloque de datos ASOLID

Este bloque de datos define las propiedades, ubicación y cargas asociadas con el elemento formado de 3 a 9 nudos. Cabe recordar que estos elementos deben ser paralelos a los planos formados por los ejes principales.

### FORMATO

#### a. Separador.

ASOLID

#### b. Información de control para el elemento ASOLID

En esta sección se coloque una línea con los datos que se indican a continuación :

NM=nmat ETYPE=et MAXN=ntm  
 X=x1,x2,... x<sub>nld</sub> Y=y1,y2,...y<sub>nld</sub> Z=z1,z2,...z<sub>nld</sub>  
 T=t1,t2,...t<sub>nld</sub> P=p1,p2,...p<sub>nld</sub> R=r1,r2,...r<sub>nld</sub>

#### c. Propiedades de los materiales

En esta sección se proporcionan "nmat" grupos de datos. Cada grupo de datos consta de dos líneas con la siguiente infirmación

##### i ) Primera línea

nm NUMT=nt W=w M=m B=b

ii) Propiedades de los materiales que dependen de la temperatura

$$T=t \quad E=e_r, e_a, e_t \quad U=u_1, u_2, u_3 \quad G=g_r \quad A=a_r, a_a, a_t$$

c. Localización de los elementos ASOLID

En esta sección proporcione tantas líneas de datos como sean necesarias para definir el modelo. Finalice la introducción de estos datos con una línea en blanco. Los datos requeridos se deben preparar de la siguiente forma :

$$\begin{aligned} \text{nel} \quad \text{JN} &= j_1, j_2, j_3, \dots, j_9 \quad \text{JQ} = j_1, j_3, j_7, j_9 \quad \text{JS} = j_i, j_j, j_k \\ \text{M} &= \text{mat} \quad \text{TZ} = \text{tz} \quad \text{TH} = \text{th} \quad \text{G} = g_1, g_2 \quad \text{LP} = \text{n} \end{aligned}$$

DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
nmat	1	Num de tipos de materiales
et	0	Tipo de elemento =0 Axisimétrico =1 Deformación plana =2 Esfuerzo plano
ntm	1	Num. máximo de temperaturas en cualquier tipo de material
x1,x2,...	0	Multiplicadores gravitacionales en dirección " X" para las "nld" condiciones de carga
y1,y2,...	0	Multiplicadores gravitacionales en dirección " Y" para las "nld" condiciones de carga
z1,z2,...	0	Multiplicadores gravitacionales en dirección " Z" para las "nld" condiciones de carga
t1,t2,...	0	Multiplicadores de temperaturas para las "nld" condiciones de carga
p1,p2,...	0	Multiplicadores de presiones para las "nld" condiciones de carga
r1,r2,...	0	Valores de velocidad angular para las "nld" condiciones de carga.
nm		Identificador del número de material
nt	1	Num de temperaturas para las que se especifican las propiedades dependientes de este tipo de material.
w	0	Peso por unidad de volumen
m	0	Masa por unidad de volumen
b	0	Ángulo de referencia de las propiedades del material en grados

t	0	Temperatura asociada con la propiedad del material especificado en esta línea de datos.
er,es,et	0	Módulo de elasticidad en las direcciones r,s y t respectivamente.
u1,u2,u3	0	Relación de poisson en las direcciones r,s, y t respectivamente.
grs	$e_r / (2 + 2u_1)$	Módulo de cortante en el plano r-s
ar,as,at	0	Coefficiente de expansión térmica en las direcciones r,s y t respectivamente .
nel		Num del identificador del elemento
j1,j2,...		Nums de nudos del elemento, para la opción JN
j1,j3,...		Nums de nudos del elemento, para la opción JQ ( elemento de 4 nudos )
ji,jj,...		Nums de nudos del elemento, para la opción JS ( definición de una malla regular )
mat	pv	Tipo de material del elemento
tz	0	Temperatura de referencia para esfuerzo cero.
th	pv	Espesor del elemento
g1,g2		Parámetros de generación de elementos
n	2	Identificador del plano donde se localiza el elemento

## 12. Bloque de datos SOLID

Este bloque de datos define las propiedades, localización y las cargas asociadas al elemento tridimensional SOLID formado por 8 nudos. Los datos se preparan en el siguiente formato :

### FORMATO

#### a. Separador

SOLID

#### b. Control de información para el elemento SOLID

Se proporciona una línea de datos con la siguiente información

NM= nmat MAXN=ntm  
 X=x1,x2,... x<sub>nld</sub> Y=y1,y2, ..y<sub>nld</sub> Z=z1,z2,...z<sub>nld</sub>  
 T=t1,t2,...t<sub>nld</sub> P=p1,p2,...p<sub>nld</sub>

### c. Propiedades de los materiales

En esta sección se proporcionan "nmat" grupos de datos. Cada grupo de datos consta de dos líneas con la siguiente información.

#### i) Primera línea

nm NUMT=nt W=w M=m

#### ii) Propiedades de los materiales que dependen de la temperatura

T=t E=e<sub>x</sub>, e<sub>y</sub>, e<sub>z</sub> U=u<sub>1</sub>, u<sub>2</sub>, ..., u<sub>15</sub> G=g<sub>xy</sub>, g<sub>yz</sub>, g<sub>zx</sub> A=a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>

### c. Localización de los elementos SOLID

En esta sección proporcione tantas líneas de datos como sean necesarias para definir el modelo. Finalice la introducción de estos datos con una línea en blanco. Los datos requeridos se deben preparar de la siguiente forma :

nel JQ=j<sub>1</sub>, j<sub>2</sub>, j<sub>3</sub>, ..., j<sub>8</sub> JR=j<sub>1</sub>, j<sub>2</sub>, j<sub>3</sub>, j<sub>4</sub>  
M=mat TZ=tz I=i G=g<sub>1</sub>, g<sub>2</sub>, g<sub>3</sub>

### DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
nmat	1	Numero de tipos de materiales
ntm	1	Num. máximo de temperaturas en cualquier tipo de material
x1, x2, ...	0	Multiplicadores gravitacionales en dirección " X " para las "nld" condiciones de carga
y1, y2, ...	0	Multiplicadores gravitacionales en dirección " Y " para las "nld" condiciones de carga
z1, z2, ...	0	Multiplicadores gravitacionales en dirección " Z " para las "nld" condiciones de carga
t1, t2, ...	0	Multiplicadores de temperaturas para las "nld" condiciones de carga
p1, p2, ...	0	Multiplicadores de presiones para las "nld" condiciones de carga
nm		Identificador del número de material
nt	1	Num de temperaturas para las que se especifican la propiedades dependientes de este tipo de material.

w	0	Peso por unidad de volúmen
m	0	Masa por unidad de volúmen
t	0	Temperatura asociada con la propiedad del material especificado en esta línea de datos.
ex,ey,ez	0	Módulo de elasticidad en las direcciones x,y y z respectivamente.
u1,u2,...	0	Relación de poisson
gxy,gyz,...	0	Módulo de cortante en los planos X-Y, Y-Z y Z-X respectivamente
a1,a2,...	0	Coefficiente de expansión térmica .
nel		Num del identificador del elemento
j1,j2,....		Numero de nudos del elemento, para la opción JQ( definición general del elemento )
ji,jj,...		Numero de nudos del elemento, para la opción JR( definición de un elemento regular )
mat	pv	Tipo de material del elemento
tz	0	Temperatura de referencia para el esfuerzo cero.
i	pv	Bandera para suprimir modos de flexión incompatibles.
g1,g2,g3		Parámetros para la generación de elementos.

### 13. Bloque de datos LOADS

Una estructura pueden estar sujeta a cargas concentradas en sus nudos ( fuerzas o momentos ). Esta sección define los nudos cargados de acuerdo con las " nld " condiciones de carga que hayan sido especificadas. Las cargas deberán estar aplicadas en nudos con grados de libertad no restringidos.

Omita esta sección si no existen nudos cargados.

A continuación se indica el formato de los datos requeridos:

#### FORMATO

##### a. Separador

#### LOADS

##### b. Datos

Utilice tantas líneas de datos sea necesario para definir los nudos cargados que especifican las " nld " condiciones de carga. Finalice esta sección de datos con una línea en blanco. Los datos deberán prepararse de la siguiente forma :

j1    j2    inc    F=fx,fy,fz,mx,my,mz

## EJEMPLO

### LOADS

13 25 2 L=2 F=20,30,0,

## DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
j1		Número del primer nudo en la generación
j2	j1	Número del último nudo en la generación
inc	1	Incremento en el número de nudo
l	pv	Número de condición de carga
fx		Fuerza aplicada en la dirección X
fy		Fuerza aplicada en la dirección Y
fz		Fuerza aplicada en la dirección Z
mx		Momento aplicado alrededor del eje X
my		Momento aplicado alrededor del eje Y
mz		Momento aplicado alrededor del eje Z

## 14. Bloque de datos DISPLACEMENTS

En una estructura es posible además de aplicar cargas, aplicar desplazamientos traslacionales y rotacionales en los nudos. Estos desplazamientos no deben ser aplicados en grados de libertad restringidos. Esta opción solo se permite cuando se realiza un análisis estático.

Es posible manejar cargas puntuales y desplazamientos en los nudos de una estructura, siempre y cuando no se especifiquen a los mismos grados de libertad.

Omita esta sección si no se tienen desplazamientos asignados a los nudos.

## FORMATO

### a. Separador

DISPLACEMENTS

### b. Datos

Proporcione cuantas líneas sean necesarias para asignar los desplazamientos a la estructura. Finalice esta sección con una línea en blanco.

j1 j2 inc U=ux,uy,uz,rx,ry,rz

## EJEMPLO

DISPLACEMENTS

13 25 2 U=1,0,1,0,0,0

## DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
j1		Número del primer nudo en la generación
j2	j1	Número del último nudo en la generación
inc	1	Incremento en el número de nudo
ux		Desplazamiento aplicado en la dirección X
uy		Desplazamiento aplicado en la dirección Y
uz		Desplazamiento aplicado en la dirección Z
rx		Rotación aplicada alrededor del eje global X
ry		Rotación aplicada alrededor del eje global Y
rz		Rotación aplicada alrededor del eje global Z

## 15. Bloque de datos PRESTRESS

Esta opción permite modelar elementos estructurales ( vigas ) sometidos a cargas producidas por cables de presfuerzo. Para sumar estos efectos a las condiciones de cargas básicas, es necesario activar los multiplicadores de presfuerzo que aparecen en el bloque de datos FRAME. Omita esta sección si no se utiliza.

## FORMATO

### a. Separador

## PRESTRESS

### b. Datos.

Utilice tantas líneas como sea necesario para definir la geometría de los cables de presfuerzo en las vigas. Finalice esta sección con una línea en blanco. Prepare los datos como se indican a continuación.

nb1 nb2 ninc D=di,dc,dj T=t

## EJEMPLO

## PRESTRESS

1 10 1 D=0.25,0.5,0.5 T=100

## DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
nb1		Primer número de elemento FRAME
nb2	nb1	Ultimo número de elemento
ninc	1	Incremento en el número de elemento
di		Distancia del eje neutro de la sección al punto por donde sale el cable de presfuerzo en el extremo "i"
dc		Distancia del eje neutro de la sección al punto por donde pasa el cable de presfuerzo en el centro del claro
dj		Distancia del eje neutro de la sección al punto por donde sale el cable de presfuerzo en el extremo "j"
t		Tensión del presfuerzo

## 16. Bloque de datos SPEC

En esta sección se definen los datos asociados con el espectro de respuesta para realizar un análisis dinámico. Los resultados de este análisis definen la condición de carga dinámica.

Omita esta sección si no se pretende realizar un análisis dinámico de la estructura.

Este bloque de datos requiere que se haya especificado cualquiera de las dos variables "nfq" o "nriz" en el bloque de datos SYSTEM, las cuales indican el número de modos de vibrar que se consideran en el análisis de la estructura.

## FORMATO.

### a. Separador

SPEC

### b. Información de control

Prepare una línea en la siguiente forma:

A=a S=s D=d

### c. Datos de la curva del espectro

Utilice cuantas líneas sean necesarias para definir la curva del espectro de respuesta. Finalice esta sección con una línea en blanco. Prepare una línea de datos de la siguiente forma:

tp s1 s2 sz

## EJEMPLO.

SPEC

A=45 S=9.81 D=0.05

## DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
a	0.0	Angulo de la excitación en grados
s	1.0	Factor de escala para los valores del espectro de respuesta
d	0.0	Relación de amortiguamiento estructural.
tp		Periodo
s1		Valor del espectro en la dirección 1
s2	0	Valor del espectro en la dirección 2
sz	0	Valor del espectro en la dirección z ( vertical )

## 17. Bloque de datos COMBO

En esta sección se definen las combinaciones de cargas para la estructura, las cuales se obtienen mediante combinaciones lineales de las condiciones de carga básicas, definidas previamente ( nld ).

Si no se especifican combinaciones de cargas, se obtendrán los resultados correspondientes a las condiciones de carga solamente.

Omitase esta sección si no se desea realizar alguna combinación de cargas.

### FORMATO

#### a. Separador

COMBO

#### b. Datos de la combinación

Se deben proporcionar tantas líneas como sean necesarias para definir las combinaciones de carga requeridas.

K      C=c1,c2,c3,...,cnld      D=d

### EJEMPLO

COMBO

1      C=1.4,1.7,0  
2      C=1.4,1.5,1.1  
3      C=1.1,1.1,0      D=1.1

### DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
K		Identificador del número de combinación
c1,c2,....		Multiplicadores para las condiciones de carga estáticas.
d		Multiplicador para la condición de carga dinámica .

## 17. Bloque de datos ENVELOPE

En esta sección permite obtener envolventes para las condiciones de carga estática y dinámica con casos de cargas móviles analizados con el módulo de SAP90 para analizar puentes. También puede utilizarse de manera simple para cargas estáticas y dinámicas.

Cada envolvente obtiene un valor de fuerza máximo y mínimo en los elementos ( FRAME ) de una estructura. Esta opción no se utiliza para los elementos SHELL, ASOLID y SOLID. Omite esta sección si no se desea obtener una envolvente de cargas.

### FORMATO.

#### a. Separador

ENVELOPE

#### b. Datos de las envolventes de cargas

Utilice una línea de datos para cada envolvente requerida en la siguiente forma :

i.  $C=c_1,c_2,\dots,c_{nld}$        $D=d$        $B=b_1,b_2,\dots,b_{nc}$

### EJEMPLO.

ENVELOPE

1       $C=1$        $D=1$   
2       $C=1,1$   
3       $C=1,-1$

### DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
i		Número del identificador para la envolvente
$c_1,c_2,\dots$	0	Multiplicadores para las condiciones de carga estáticas
d	0	Multiplicadores para la condición de carga dinámica
$b_1,b_2,\dots$	0	Multiplicadores para los casos de cargas móviles de puentes

## 19. Bloque de datos SELECT

Cuando se analizan grandes estructuras los archivos de resultados que se obtienen también grandes, sin embargo en ocasiones no toda esa información es relevante.

El comando SELECT permite seleccionar solo la información que es de interés de acuerdo con los fines que se persiguen en un análisis.

### FORMATO

#### a. Separador

SELECT

#### b. Datos

Utilice tantas líneas como sean necesarias para definir los datos que imprimirán en el archivo de salida. Prepare la información como se indica a continuación:

NT=nt      ID=i1,i2,inc      SW=isw

### EJEMPLO

Para producir solo la salida de los desplazamientos 11 a 37

NT=1      ID=11,37      SW=1

Para producir solo la salida de las fuerzas en los miembros ( FRAME ) 25 a 45

NT=5      ID=25,45

### DESCRIPCIÓN

Variable	Defecto	Descripción
nt	pv	Tipo de selección
i1		Primer nudo o número de elemento
i2	i1	Ultimo nudo o número de elemento
inc	1	Incremento en el número de nudo o elemento
isw	pv	Bandera =0 Excluye nudo o elemento de la serie =1 Incluye nudo o elemento de la serie



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

**TEMA**

**SAPLOT**

**PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DEL 2001**

# SAPLOT

## I. INTRODUCCION.

SAPLOT es un postprocesador interactivo y gráfico para el programa de Análisis Estructural SAP90.

El programa tiene opciones para dibujar vistas en dos y tres dimensiones mostrando alguno de los siguientes gráficos:

1. Geometría Estructural no Deformada
2. Cargas Aplicadas
3. Formas Deformadas y Modales
4. Diagramas de Momento y Fuerza en los Elementos Viga.
5. Contornos de Esfuerzo en Elementos Finitos
6. Lineas de Influencia para Elementos Viga

El modelo puede ser visto desde cualquier dirección arbitraria. El usuario localiza un punto arbitrario con respecto al sistema de coordenadas global X-Y-Z de SAP90. Este punto es llamado el punto de control visual. La vista es colocada en la dirección apuntando desde el punto de control hacia el origen global de SAP90. La ubicación de ojo del usuario se asume que esta en el infinito.

Una vez que se ha colocado la dirección de visualización, el usuario puede rotar la vista especificando cual de los ejes globales de SAP90 (X, Y, Z, -X, -Y, -Z) tiene que aparecer verticalmente hacia arriba en la pantalla.

## II. EJECUCION, PROCEDIMIENTOS y DETALLES DEL SISTEMA.

### A. Ejecución del Programa SAPLOT.

Supongamos que los datos para SAP90, asociados con la estructura a analizar, han sido preparados y archivados en un archivo de datos llamado EXAMPLE. La ejecución de SAP90 con estos datos creará una serie de archivos intermedios en el disco (de la forma EXAMPLE.???)

Para obtener graficos de geometria sin deformar y de cargas, los archivos EXAMPLE.SYS, .XYZ, .ID, .JID, .MAT, .P?, .T3 y .POT son necesarios. Estos archivos son creados por la ejecución de SAP90 con el archivo de datos EXAMPLE y residen en el disco antes de ejecutar el comando GO.

Para ver los gráficos de formas deformadas estáticas, es necesario el archivo EXAMPLE.U además de los nombrados anteriormente. Este archivo es creado durante la ejecución de un análisis estático y es necesario para recuperar los vectores de desplazamiento.

Para obtener los graficos de las formas modales, se necesita el archivo EXAMPLE.VEC además de los mencionados anteriormente. Este archivo es creado por un análisis de valores propios y es necesario para recuperar los vectores propios.

Para los diagramas de fuerzas o esfuerzos en los elementos se necesitan los archivos EXAMPLE.S3, EXAMPLE.S4, EXAMPLE.S5 y EXAMPLE.S8 para los elementos FRAME, SHELL, ASOLID y SOLID respectivamente.

Formas deformadas estáticas, formas modales, diagramas de fuerza/esfuerzo de los elementos y líneas de influencia solo pueden ser graficados luego de la ejecución del comando GO.

Desde el directorio donde los archivos intermedios de SAP90 estan almacenados, entre el comando:

**SAPLOT <CR>**



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MÓDULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

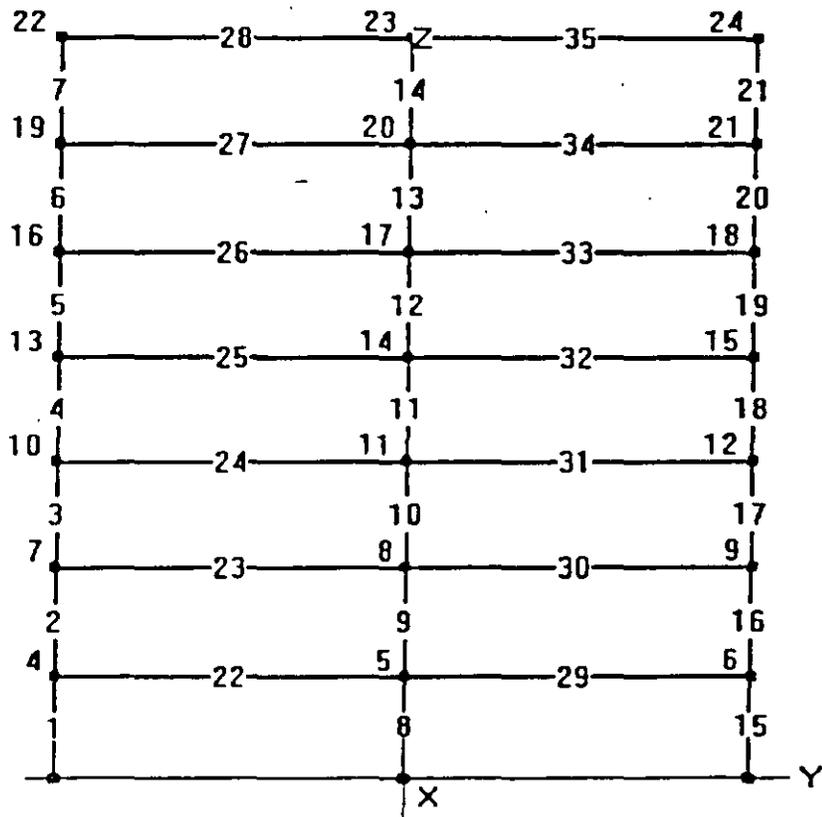
**TEMA**

**EJEMPLOS**

**PALACIO DE MINERÍA  
FEBRERO DEL 2001**

# EJEMPLOS

# FRAME



FRAME - EXAMPLE 1a - TWO-DIMENSIONAL FRAME

C FRAME HAS TWO BAYS AND SEVEN STORIES

C UNITS ARE KIP INCHES

SYSTEM

L=2 V=7 : 2 STATIC LOAD CONDITIONS, 7 EIGENVALUES

JOINTS

1	Y=-360	Z= 0.0	X=0.0 : LEFT FOUNDATION JOINT
7	Y=-360	Z= 324	G=1,7,3
22	Y=-360	Z=1104	G=7,22,3 : TOP LEFT JOINT
2	Y= 0.0	Z= 0.0	
8	Y= 0.0	Z= 324	G=2,8,3
23	Y= 0.0	Z=1104	G=8,23,3
3	Y= 360	Z= 0.0	: RIGHT FOUNDATION JOINT
9	Y= 360	Z= 324	G=3,9,3
24	Y= 360	Z=1104	G=9,24,3 : TOP RIGHT JOINT

RESTRAINTS

1,24,1 R=1,0,0,0,1,1 : TWO-DIMENSIONAL PROBLEM IN Y-Z PLANE

1,3,1 R=1,1,1,1,1,1 : FIX FOUNDATION JOINTS

CONSTRAINTS

5,23,3 C=0,4 I=0,3 : SET AXIAL DEFORMATIONS IN BEAMS TO ZERO

6,24,3 C=0,4 I=0,3

MASSSES : STORY MASSES IN LATERAL (Y) DIRECTION

4,22,3 M=0,.49

FRAME

NM=7 NL=1 : 7 SECTION PROPERTIES, 1 SPAN LOADING CONFIGURATION

1 I=2150 A=51.17 E=29500

2 I=2670 A=62.10 E=29500

3 I=3230 A=72.30 E=29500

4 I=3910 A=84.40 E=29500

5 I=3330 A=50.00 E=29500

6 I=4020 A=50.00 E=29500

7 I=5120 A=50.00 E=29500

1 WL=0,-0.1/12 PLD=120 0,-20.0,0 0,240 0,-20 0,0.0

C COLUMNS

1, 1,4 G=2,1,3,3 M=3 LP=3

4,10,13 G=1,1,3,3 M=2

6,16,19 G=1,1,3,3 M=1

8, 2,5 G=2,1,3,3 M=4

11,11,14 G=1,1,3,3 M=3

13,17,20 G=1,1,3,3 M=2

15, 3,6 G=2,1,3,3 M=3

18,12,15 G=1,1,3,3 M=2

20,18,21 G=1,1,3,3 M=1

C BEAMS

C SPAN LOADING IS STATIC LOAD CONDITION 1

22, 4,5 G=1,1,3,3 M=7 NSL=1

24,10,11 G=1,1,3,3 M=6 NSL=1

26,16,17 G=2,1,3,3 M=5 NSL=1

29, 5,6 G=1,1,3,3 M=7 NSL=1

31,11,12 G=1,1,3,3 M=6 NSL=1

33,17,18 G=2,1,3,3 M=5 NSL=1

LOADS : LATERAL (Y) JOINT LOADS AS LOAD CONDITION 2

22 F=0,20 L=2

19 F=0,15

16 F=0,12.5

13 F=0,10

10 F=0,7.5

7 F=0,5

4 F=0,2.5

SPEC : SEISMIC RESPONSE SPECTRUM IN LATERAL (Y) DIRECTION

A=0 S=386.4 D=.05 : ANGLE, SCALE, DAMPING

C PERIOD DIRECTION 1 DIRECTION 2 Z-DIRECTION

C ACCELERATION ACCELERATION ACCELERATION

.0769 0.0 .505311 0.0

.0795 0.0 .519598 0.0

.08 0.0 .520045 0.0

.0833 0.0 .518093 0.0

.0870 0.0 .493366 0.0

.0909 0.0 .477599 0.0

.0951 0.0 .527825 0.0

.0952 0.0 .530631 0.0

.1000 0.0 .581609 0.0

.1053 0.0 .564412 0.0

.1111 0.0 .523663 0.0

.1176 0.0 .572438 0.0

.1190 0.0 .588211 0.0

.1250 0.0 .627807 0.0

.1333 0.0 .665413 0.0

.1429 0.0 .636531 0.0

.1538 0.0 .905796 0.0

.1602 0.0 .804605 0.0

.1667 0.0 .787220 0.0

.1818 0.0 .943909 0.0

.2000 0.0 1.005620 0.0

.2222	0.0	.746135	0.0
.2420	0.0	.704753	0.0
.2500	0.0	.798052	0.0
.2857	0.0	.718264	0.0
.3333	0.0	.880624	0.0
.4000	0.0	.882996	0.0
.4313	0.0	.921167	0.0
.5000	0.0	1.046620	0.0
.6667	0.0	.641750	0.0
1.0000	0.0	.482251	0.0
1.2730	0.0	.258617	0.0
2.0000	0.0	.160189	0.0

#### COMBO

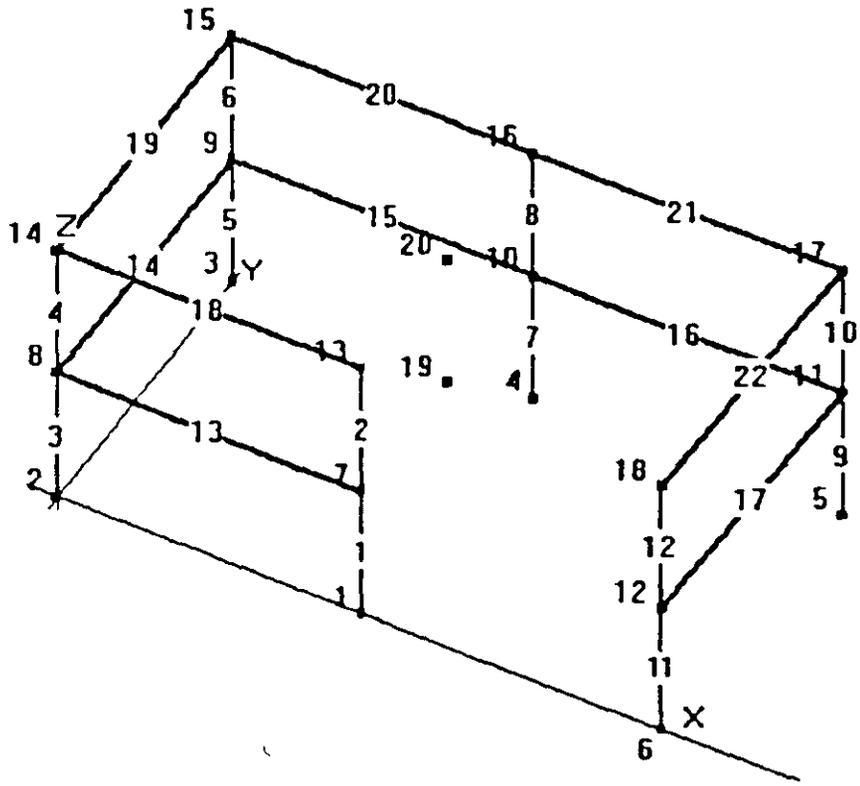
1 C=1 :STATIC SPAN LOADS ONLY  
 2 C=0,1 :STATIC LATERAL LOADS ONLY  
 3 C=0,0 D=1 :DYNAMIC LOADS ONLY  
 4 C=1,1 :STATIC LOADS COMBINED  
 5 C=1,0 D=1 :STATIC SPAN LOADS COMBINED WITH DYNAMIC LOADS  
 6 C=1,0 D=-1 :STATIC SPAN LOADS COMBINED WITH REVERSED DYNAMIC L

#### SELECT

NT=1 ID=1,22,3 SW=1 :OUTPUT DISPLACEMENTS ALONG ONE COLUMN LINE  
 NT=2 ID=1,3,1 :OUTPUT REACTIONS AT BASE  
 NT=3 ID=1,22,3 :OUTPUT EIGENVECTORS ALONG ONE COLUMN LINE  
 NT=5 ID=1,15,7 :OUTPUT FORCES IN BASE COLUMNS  
 NT=5 ID=22,29,7 :OUTPUT FORCES IN FIRST STORY BEAMS

□

BUILDING



BUILDING - EXAMPLE 8 - THREE-DIMENSIONAL BUILDING SYSTEM

V=6 :SIX MODES USED IN ANALYSIS

RESTRAINTS

1, 6,1 R=1,1,1,1,1,1 :FIX BASE  
 7,18,1 R=1,1,0,0,0,1 :FIX DOF ASSIGNED TO MASTER JOINT  
 19,20,1 R=0,0,1,1,1,0 :FIX MASTER JOINT DOF NOT ASSIGNED  
 :TO THEM

JOINT

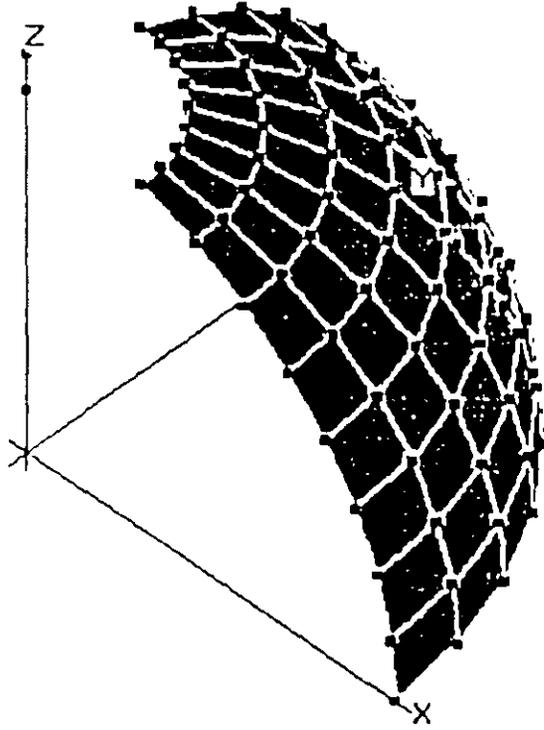
1	X=25.0	Y= 0.0	Z= 0.0	
2	X= 0.0	Y= 0.0	Z= 0.0	
3	X= 0.0	Y=25.0	Z= 0.0	
5	X=50.0	Y=25.0	Z= 0.0	G=3,5,1
6	X=50.0	Y= 0.0	Z= 0.0	
13	X=25.0	Y= 0.0	Z=25.0	G=1,13,6
14	X= 0.0	Y= 0.0	Z=25.0	G=2,14,6
15	X= 0.0	Y=25.0	Z=25.0	G=3,15,6
16	X=25.0	Y=25.0	Z=25.0	G=4,16,6
17	X=50.0	Y=25.0	Z=25.0	G=5,17,6
18	X=50.0	Y= 0.0	Z=25.0	G=6,18,6
19	X=25.0	Y=12.5	Z=12.5	
20	X=25.0	Y=12.5	Z=25.0	

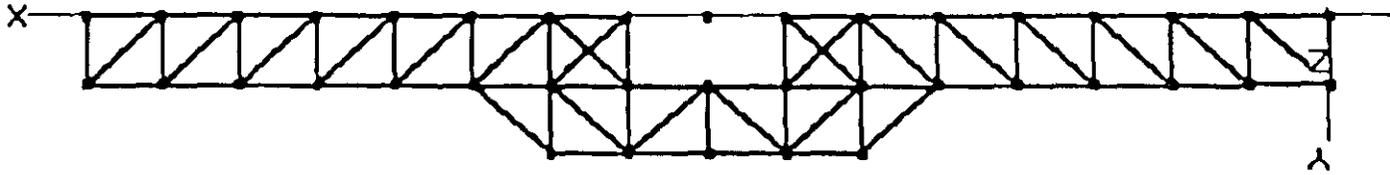
FRAME

NM=2

1	A=2.0	I=0.6667,0.1667	E=432000	:BEAMS
2	A=2.25	I=0.4219,0.4219	E=432000	:COLUMNS
1, 1, 7	M=2	LP=3,0	MS=0,19	
3, 2, 8			MS=0,19	
5, 3, 9			MS=0,19	
7, 4, 10			MS=0,19	
9, 5, 11			MS=0,19	
11, 6, 12			MS=0,19	
2, 7, 13			MS=19,20	
4, 8, 14			MS=19,20	
6, 9, 15			MS=19,20	
8, 10, 16			MS=19,20	
10, 11, 17			MS=19,20	
12, 12, 18			MS=19,20	
13, 7, 8	M=1	LP=2,0	MS=19,19	
14, 8, 9		LP=3,0	MS=19,19	
15, 9, 10		LP=2,0	MS=19,19	
16, 10, 11		LP=2,0	MS=19,19	
17, 11, 12		LP=3,0	MS=19,19	
18, 13, 14		LP=2,0	MS=20,20	

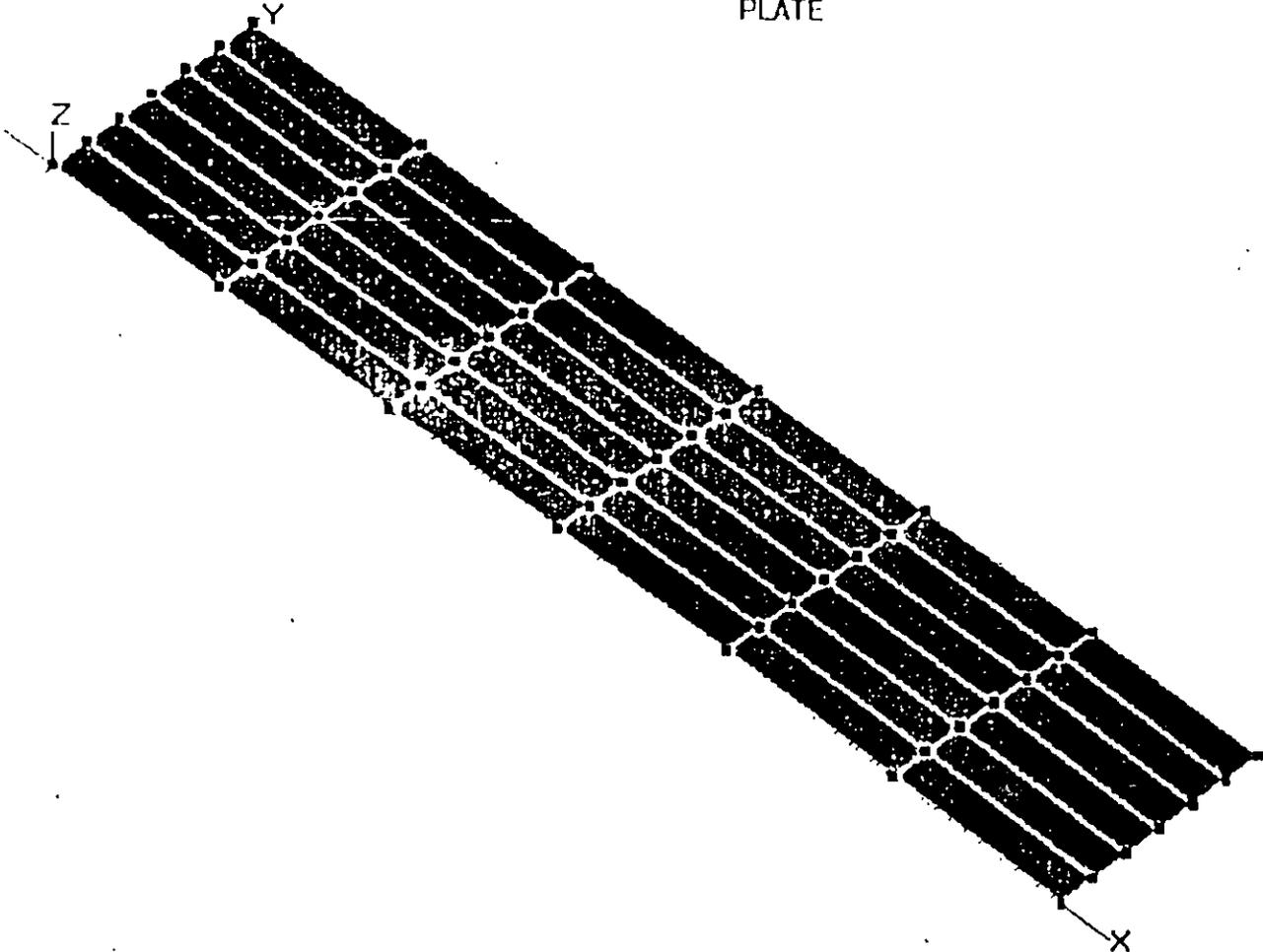
# SHELL





TRUSS

PLATE



SHELL - EXAMPLE 18 - HEMISPHERICAL SHELL UNDER POINT LOADS  
C 8 X 8 MESH USED ON QUADRANT  
SYSTEM

L=1

JOINTS :USE CYLINDRICAL GENERATION

1 X=0 Y=0 Z=10 :EXTRA JOINT  
2 X=0 Y=0 Z=11 :EXTRA JOINT  
3 X=10.000 Y=0 Z=0.000 A=1,2,3,8,1,11.25  
12 X= 9.877 Y=0 Z=1.564 A=1,2,12,8,1,11.25  
21 X= 9.511 Y=0 Z=3.090 A=1,2,21,8,1,11.25  
30 X= 8.910 Y=0 Z=4.540 A=1,2,30,8,1,11.25  
39 X= 8.090 Y=0 Z=5.878 A=1,2,39,8,1,11.25  
48 X= 7.071 Y=0 Z=7.071 A=1,2,48,8,1,11.25  
57 X= 5.878 Y=0 Z=8.090 A=1,2,57,8,1,11.25  
66 X= 4.540 Y=0 Z=8.910 A=1,2,66,8,1,11.25  
75 X= 3.090 Y=0 Z=9.511 A=1,2,75,8,1,11.25

RESTRAINTS

1 2 1 R=1,1,1,1,1,1 :FIX EXTRA JOINTS  
3 75 9 R=0,1,0,1,0,1 :SYMMETRY  
11 83 9 R=1,0,0,0,1,1 :SYMMETRY  
7 R=0,0,1,0,0,0 :SYMMETRICAL Z SUPPORT FOR STABILITY

SHELL

NM=1

1 E=6.825E7 U=.3

1 JQ=3,4,12,13 M=1 TH=.04 G=8,8

LOADS

3 L=1 F=1

11 L=1 F=0,-1

E

19,14,15	LP=3,0	MS=20,20
20,15,16	LP=2,0	MS=20,20
21,16,17	LP=2,0	MS=20,20
22,17,18	LP=3,0	MS=20,20

**MASSES**

19,20,1 M=3.88,3.88,0,0,0,1011. :MASSES AT MASTER JOINTS

**SPEC**

S=32.2 A=30 D=0.05 :SPECTRUM DEFINED AT 30 DEGREES TO BUILDING AXES

0	.400	.400
0.100	.581	.581
0.125	.628	.628
0.167	.787	.787
0.182	.9439	.9439
0.200	1.0056	1.0056
0.250	0.7980	0.7980
0.333	0.8806	0.8806
0.431	0.9212	0.9212
0.500	1.0466	1.0466
0.667	.6418	.6418
1.000	.4822	.4822
1.273	.2586	.2586
2.000	.1602	.1602
10.00	.0102	.0102
100 0	.0	.0

□

RCPLTSHL - EXAMPLE 14 - RECTANGULAR PLATE USING SHELL ELEMENTS

C QUARTER PLATE MODELED USING 6 x 6 MESH

C THIS DATA SET MODELS CLAMPED BOUNDARY CONDITIONS

C PLATE IS 2 x 10

SYSTEM

L=2

JOINTS

1 X=0 Y=0 Z=0

7 X=5 Y=0 Z=0

43 X=0 Y=1 Z=0

49 X=5 Y=1 Z=0 Q=1,7,43,49,1,7

RESTRAINTS

1 49 1 R=1,1,0,0,0,1 :MEMBRANE DOF RESTRAINED

1 7 1 R=1,1,1,1,1,1 :CLAMPED EDGE

1 43 7 R=1,1,1,1,1,1 :CLAMPED EDGE

7 49 7 R=1,1,0,0,1,1 :SYMMETRY

43 49 1 R=1,1,0,1,0,1 :SYMMETRY

SHELL

NM=1 Z=0,1 :UNIFORM LOAD IS LOAD CONDITION 2 APPLIED IN Z - DIRECTION

1 E=1.7472E7 U=.3 W=1

1 JQ=1,2,8,9 ETYPE=2 M=1 TH=.0001 G=6,6

LOADS

49 L=1 F=0,0,1E-4 :CONCENTRATED LOAD IS LOAD CONDITION 1

E



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA  
"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

### **TEMA**

### **METODO DE LA FLEXIBILIDADES (ANEXO)**

**EXPOSITOR: ING. ALFONSO ALMAZAN JARAMILLO  
PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DEL 2001**

A. UNTES N.º 75

APUNTE  
N.º 75

**APUNTES DE**

# **ANALISIS ESTRUCTURAL I**

**José Luis Camba C.  
Francisco Chacón G.  
Francisco Pérez A.**



FACULTAD DE INGENIERIA

CAJA  
75

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



G-611073

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
FACULTAD DE INGENIERIA  
DIVISION DE INGENIERIA CIVIL, TOPOGRAFICA Y GEODESICA  
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS**

G-611073

INDICE GENERAL

	Pag.
1. Conceptos Introdutorios	1
2. Métodos aproximados	8
3. Trabajo y Energía	17
4. Estabilidad y Grado de Indeterminación	49
5. Método de las Flexibilidades	55
6. Método de las Rigideces	79
7. Método de Cross	101
8. Método de Kani	117
9. Introducción al Análisis Plástico	129

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE  
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

APUNTES DE  
ANALISIS ESTRUCTURAL I

1982

I

## INTRODUCCION

Estos apuntes tienen por objeto ayudar a los alumnos que cursan la asignatura "Análisis Estructural I" en el aprendizaje de los temas incluidos en el programa vigente de esta materia; contienen tanto los aspectos teóricos de estos temas, como ejemplos de aplicación de los mismos.

Se pretende que estos apuntes sean revisados periódicamente con el objeto de adaptarlos a los cambios que presente el programa de la asignatura mencionada.

Estos apuntes fueron elaborados por los profesores:

Ing. José Luis Camba Castañeda  
Ing. Francisco Chacón García  
Ing. Francisco Pérez Arellano

México, D.F., abril de 1982

Ing. José Luis Camba Castañeda  
Coordinador de Análisis Estructural I

## INDICE GENERAL

	Pag.
1. <i>Conceptos Introdutorios</i>	1
2. <i>Métodos Aproximados</i>	8
3. <i>Trabajo y Energía</i>	27
4. <i>Estabilidad y Grado de Indeterminación</i>	89
5. <i>Método de las Flexibilidades</i>	97
6. <i>Método de las Rigideces</i>	143
7. <i>Método de Cross</i>	185
8. <i>Método de Kani</i>	217
9. <i>Introducción al Análisis Plástico</i>	238

## CAPITULO 1

## CONCEPTOS INTRODUCTORIOS EN ANALISIS ESTRUCTURAL

## CONCEPTOS INTRODUCTORIOS EN ANALISIS ESTRUCTURAL

El objetivo del análisis estructural consiste en calcular las fuerzas internas y las deflexiones en un punto cualquiera de una estructura.

En el análisis estructural deben tomarse en cuenta las siguientes condiciones:

- 1.- Equilibrio entre fuerzas internas y externas en todos los elementos de la estructura.
- 2.- Compatibilidad de deformaciones de todos los elementos estructurales.
- 3.- Relación fuerza-desplazamiento.

### 1.- EQUILIBRIO ENTRE FUERZAS INTERNAS Y EXTERNAS

Una estructura, sujeta a un sistema de acciones externas de finido, estará en equilibrio si las reacciones de la misma cumplen las condiciones de equilibrio, que se expresan como:

En el espacio:

$$\begin{array}{ll} \sum F_x = 0 & \sum M_x = 0 \\ \sum F_y = 0 & \sum M_y = 0 \\ \sum F_z = 0 & \sum M_z = 0 \end{array}$$

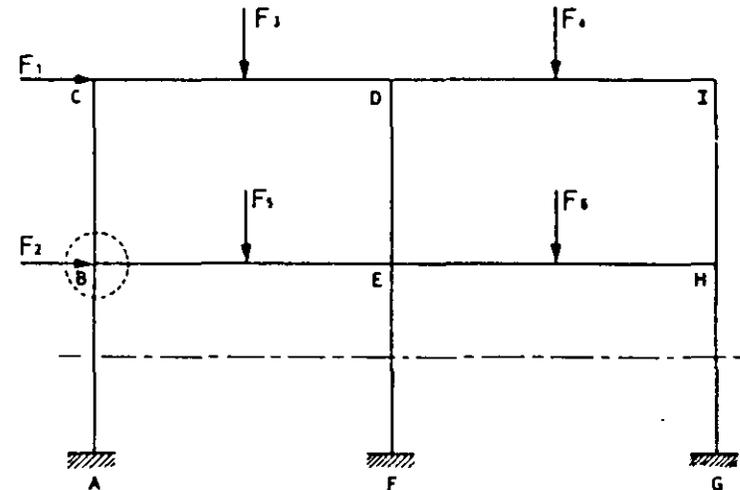
Cuando se trate de estructuras planas:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M = 0$$

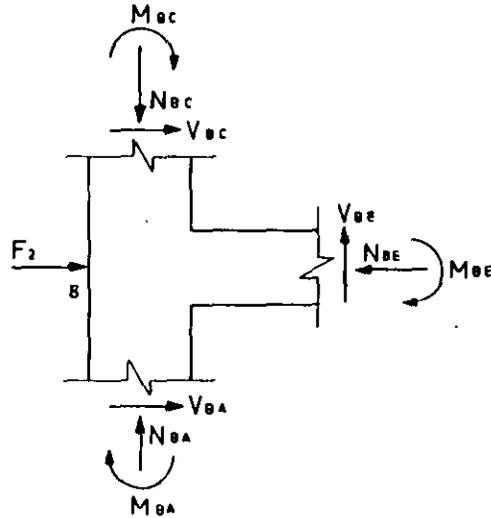
De esta forma, si se cumplen las condiciones mencionadas, bajo la acción del sistema de fuerzas externo y el sistema de reacciones, la estructura está en equilibrio. Los elementos que forman la estructura estarán sujetos a fuerzas internas que se desarrollen en ellos, provocadas por el sistema de fuerzas externo aplicado.

Si se hacen diagramas de cuerpos libres, al aislar una parte de la estructura haciendo uno o varios cortes, deberán estar también en equilibrio.

Si por ejemplo, en la estructura mostrada a continuación se aísla el nudo indicado, sobre el cual actúan las fuerzas externas  $F_2$  así como las

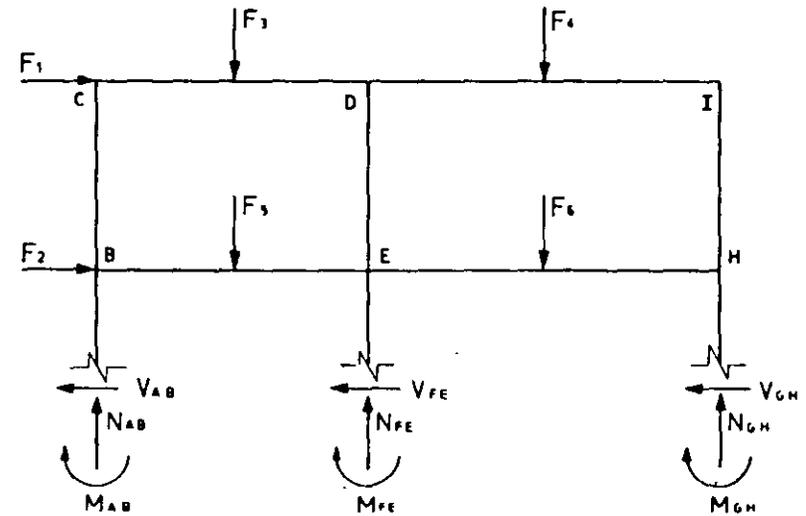


fuerzas internas desarrolladas en los planos de corte, éste nudo deberá estar en equilibrio, porque forma parte de una estructura en equilibrio, y por lo tanto, podrán aplicársele las ecuaciones generales de equilibrio; a este sistema en equilibrio, se le llamará equilibrio nodal.



Así mismo, al hacer un corte en un entrepiso, deberá estar en equilibrio la parte aislada por el corte, ya que pertenece a una estructura que está en equilibrio.

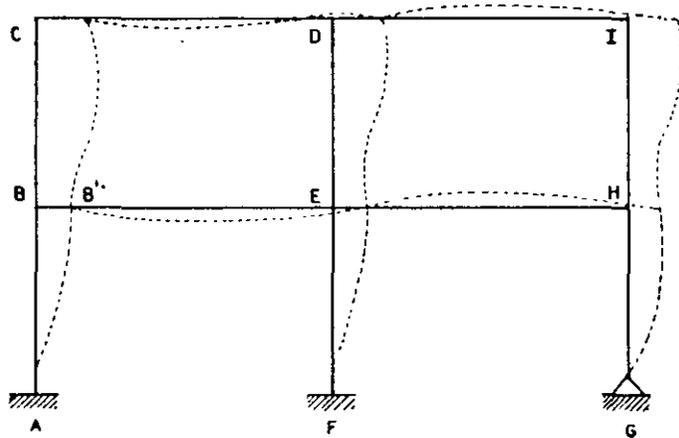
Así por ejemplo, si en la estructura anterior se corta en el plano indicado, la estructura aislada permanece en equilibrio; a este sistema se le llama equilibrio de entrepiso.



Por lo tanto, si una estructura está en equilibrio, cualquier elemento que se aisle también lo estará, siendo necesario para que esto se cumpla, que en los planos de corte se considere la o las acciones internas que la estructura ejerce sobre el elemento que se aisló.

## 2.- COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES

Al aplicar un sistema de fuerzas a una estructura, ésta se deforma, pero conserva las condiciones de continuidad iniciales. Así mismo, los desplazamientos finales en la estructura deberán ser compatibles con las condiciones de deformación de los diferentes tipos de apoyos.



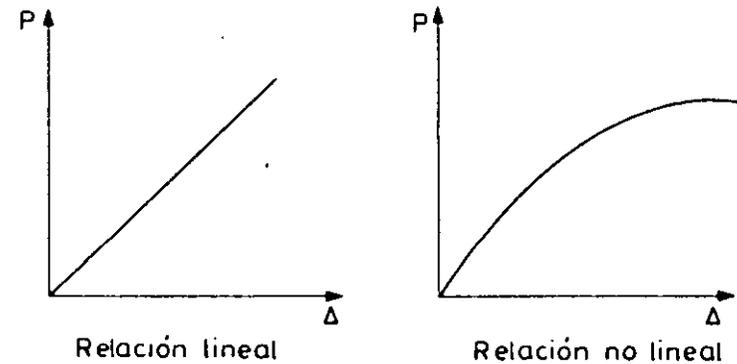
En la estructura de la figura, el nudo B al pasar a la posición B', se desplaza y gira; si se trata de una estructura en el espacio, podrá tener tres componentes de desplazamiento lineal y tres giros. En el caso de un nudo en el plano, los desplazamientos serán: dos componentes de desplazamiento lineal y un giro.

La condición de compatibilidad con las condiciones de apoyo, serán por ejemplo, en el caso de la figura, que los apoyos A y F por ser empotramientos, impiden toda posibilidad de desplazamiento lineal y de giro; en cambio para el apoyo G, por ser un apoyo articulado, no permitirá desplazamientos lineales pero sí el giro del mismo.

### 3. - RELACION FUERZA-DESPLAZAMIENTO

De acuerdo con los objetivos mencionados del análisis estructural, es necesario conocer para una estructura de geometría definida, la relación que existe entre las fuerzas y los desplazamientos.

Si se observa la siguiente gráfica, se deduce que la relación entre fuerzas y desplazamientos puede ser lineal o no serlo.



En general, se supone la hipótesis de que la relación entre fuerzas y desplazamientos es lineal, por lo que se puede aplicar a las estructuras el principio de superposición.

Dicho principio establece, que los efectos que produce un sistema de fuerzas aplicado a una estructura, son equivalentes a la suma de los efectos producidos por cada una de las fuerzas del sistema actuando independientemente.

Las condiciones que debe cumplir una estructura para que se le aplique el principio de superposición son:

- a) Que exista proporcionalidad entre esfuerzo y deformaciones, es decir, que se cumpla la ley de Hooke.
- b) Que no haya interacción entre efectos debidos a fuerzas axiales y momentos flexionantes (efectos de esbeltez).
- c) Que las deformaciones en la estructura sean relativamente pequeñas, evitando así que se afecten en forma importante el sistema de fuerzas internas y de reacciones.

Si la estructura en estudio cumple con las tres condiciones mencionadas, se trata de una estructura con comportamiento elástico y lineal.

## CAPITULO 2

### MÉTODOS APROXIMADOS PARA DISEÑOS PRELIMINARES

- A. MÉTODO DE BOWMAN
- B. MÉTODO DEL VOLADIZO
- C. MÉTODO DEL PORTAL
- D. MÉTODO DEL FACTOR

## MÉTODOS APROXIMADOS PARA DISEÑOS PRELIMINARES

## MÉTODO DE BOWMAN

Después de estudiar un gran número de marcos resueltos por métodos exactos, se ha propuesto un método aproximado que se basa en las siguientes hipótesis:

a) Los puntos de inflexión en las vigas exteriores se encuentran a 0.55 de su claro, a partir de su extremo exterior. En las vigas interiores su punto de inflexión está al centro del claro, excepto en la cruzja central cuando el número de éstos es impar, o en las dos centrales si es par. En ellos los puntos de inflexión de las vigas estará forzada por condiciones de simetría y de equilibrio.

b) En las columnas del primer entrepiso los puntos de inflexión están a 0.60 de su altura a partir de la base.

En marcos de dos o más, tres o más, cuatro o más entrepisos, respectivamente, los puntos de inflexión en las columnas de los entrepisos último, penúltimo y antepenúltimo, respectivamente, se encuentran a 0.65, 0.60 y 0.55 de la altura correspondiente a partir del extremo superior.

En edificios de cinco o más entrepisos, los puntos de inflexión en columnas para las cuales no se ha especificado la posición, se encuentran al centro de su altura. Esto se ilustra en la Fig. 1.

c) La fuerza cortante de cada entrepiso se distribuye en la forma siguiente.

En el primer entrepiso:

Una fuerza cortante igual a:

$$V_c = \frac{N-0.5}{N+1.0} V$$

Esta se distribuye entre las columnas proporcionalmente a sus rigideces.

La fuerza cortante  $V_i = V - V_c$  se distribuye entre las cruzjas proporcionalmente a la rigidez de la viga que la limita en la parte superior. La cortante de cada cruzja se distribuye en partes iguales entre las dos columnas que la limitan.

En pisos superiores: La fuerza cortante  $V_c = \frac{N-2}{N+1} V$  se distribuye directamente entre las columnas.

La cortante  $V_i = V - V_c$  se distribuye entre las cruzjas como se hizo para la planta baja.

$V$  = fuerza cortante por entrepiso.

$N$  = cruzjas del marco en el entrepiso considerado.

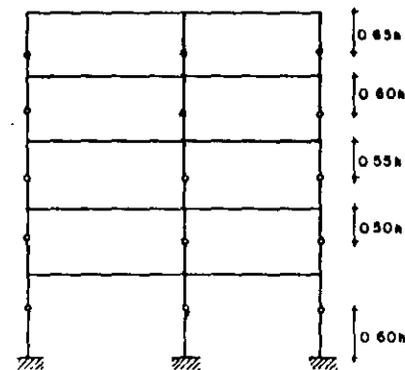
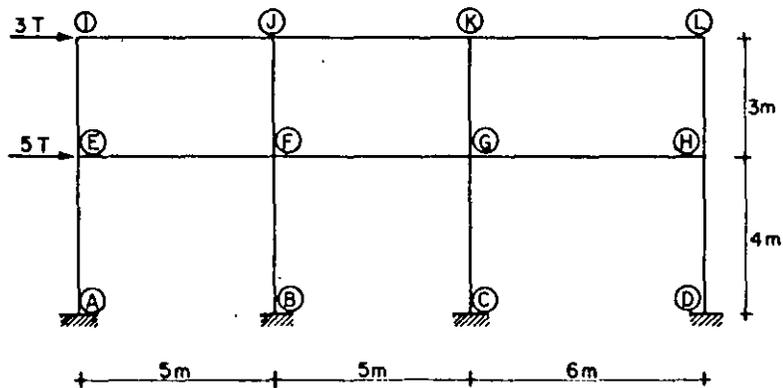


Figura 1  
Puntos de inflexión en los  
diferentes entrepisos

Enseguida se presenta un ejemplo numérico para mejor comprensión del método antes expuesto.

Se tiene un marco el cual consta de tres crujeas distribuidas como se muestra en la figura, dicho marco es de dos niveles y está sometido a dos cargas horizontales en el 1o. y 2o. nivel de  $5T$  y  $3T$  respectivamente. Determinar los momentos que se generan en los nudos debidos a las fuerzas actuantes.

$EI = \text{constante.}$



Para el 1er. entrepiso el cortante  $V=8$   
y el cortante para las columnas es

$$V_c = \frac{N-0.5}{N+1} V = \frac{3-0.5}{3+1} 8 = 5$$

Para cada columna es  $\frac{5}{4} = 1.25$

Para el segundo entrepiso  $V=3$

Para esas columnas

$$V_c = \frac{N-2}{N+1} V = \frac{3-2}{3+1} (3) = 0.75$$

Y el cortante por columna es  $\frac{0.75}{4} = 0.1875$

Para el primer nivel el cortante en vigas es

$$V_v = 8 - 5 = 3$$

Y el cortante en cada viga es  $\frac{3}{3} = 1.0$

Esa fuerza se divide entre las dos columnas inferiores igualmente o sea  $\frac{1.0}{2} = 0.5$

Lo mismo se hace para el segundo nivel

$$V_v = 3 - 0.75 = 2.25$$

Para cada viga  $\frac{2.25}{3} = 0.75$

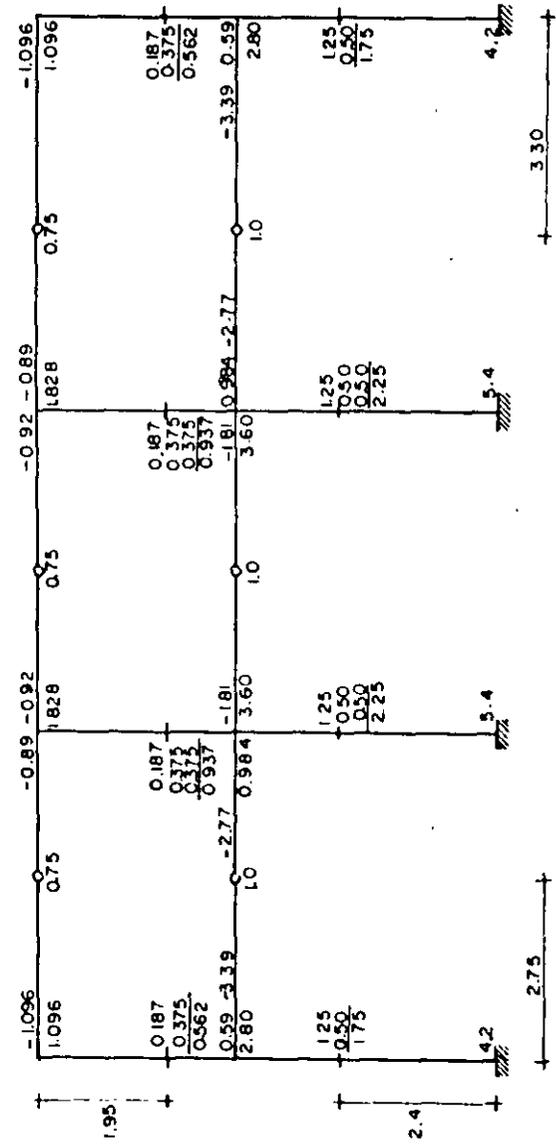
Se reparte entre las columnas inferiores vecinas

$$\frac{0.75}{2} = 0.375$$

Para encontrar los momentos se multiplicarán las fuerzas cortantes por sus respectivos brazos en las columnas

Por ejemplo  $1.75 (1.6) = 2.80$   
 $0.5625 (1.05) = 0.59$

Equilibramos los momentos en las columnas con los de las vigas valiéndonos de que conocemos los puntos de inflexión de las vigas.



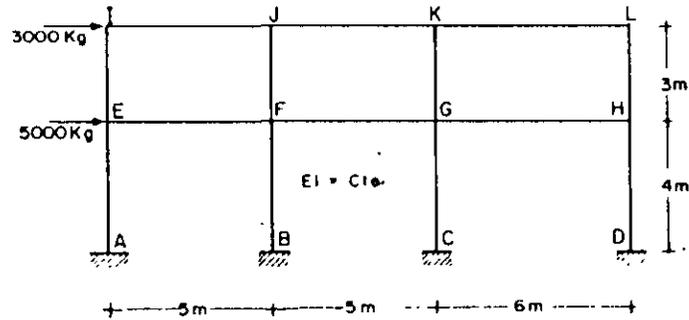
## MÉTODO DEL VOLADIZO

Se hacen las siguientes hipótesis:

- Hay un punto de inflexión en el centro de cada viga.
- Hay un punto de inflexión en el centro de cada columna.
- La intensidad del esfuerzo axial en cada columna de un piso es

proporcional a la distancia horizontal desde esa columna al centro de gravedad de todas las columnas del piso que se considera.

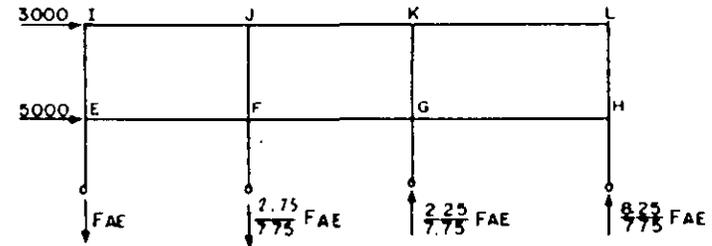
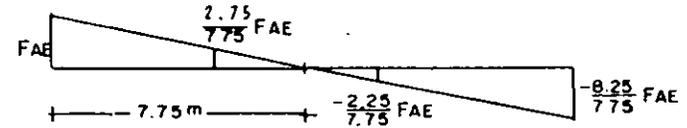
Apliquemos este método al siguiente ejemplo:



Cálculo de las fuerzas axiales en las columnas.

Como todas las columnas tienen la misma sección, el centro de gravedad de las columnas se determina.

$$4X = 5 + 10 + 16 \quad X = 31/4 = 7.75 \text{ m a partir de AEI}$$



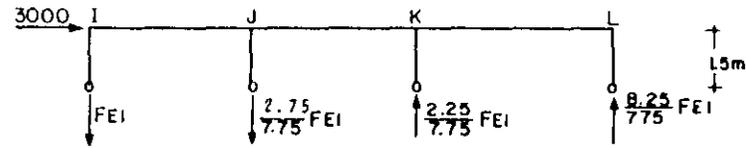
Si tomamos momentos respecto al punto de inflexión de la columna DII.

$$\sum M = 0 \quad 5(3000) + 2(5000) - 16F_{AE} - \frac{2.75}{7.75} F_{AE} (11) + \frac{2.25}{7.75} F_{AE} (6) = 0$$

$$F_{AE} = 1376.55$$

$$F_{BF} = 488.45 \quad F_{CG} = 399.64 \quad F_{DH} = 1465.36$$

Para el siguiente nivel las fuerzas axiales están distribuidas de -  
igual manera que para el primer nivel.



Tomando suma de momentos con respecto a la articulación en el  
eje L.

$$EM = 0 \quad 3000(1.5) - 16F_{AE} - \frac{2.75}{7.75} F_{AE}(11) + \frac{2.25}{7.75} F_{AE}(6) = 0$$

$$F_{EI} = 247.78 \quad F_{FJ} = 87.92 \quad F_{OK_1} = 71.93 \quad F_{HL} = 113.76$$

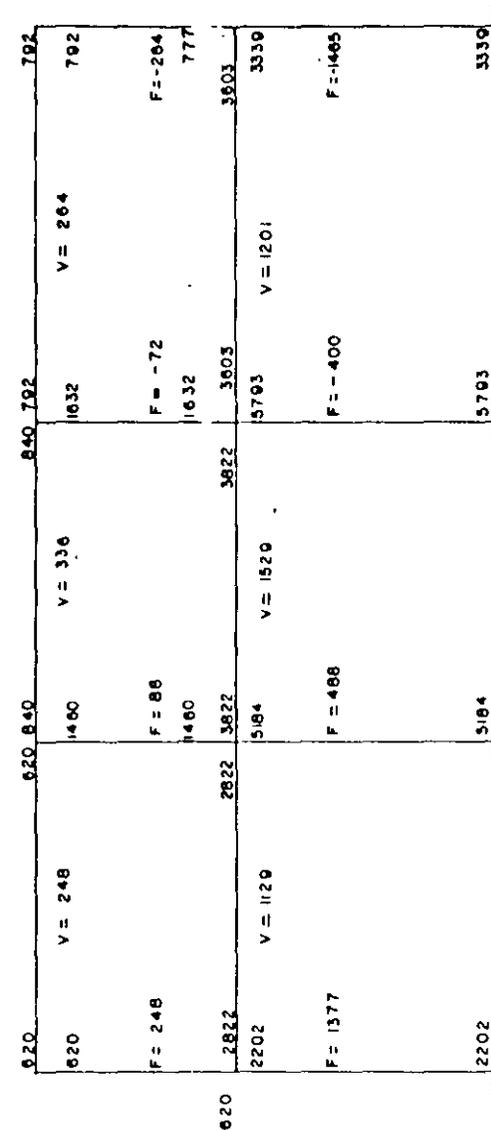
Las fuerzas cortantes en las vigas se obtienen a partir de las --  
fuerzas axiales en las columnas de los diferentes nudos.

Por ejemplo en el nudo H.

$$V_{HG} = F_{DH} - F_{HL} = 1437.28 - 258.71 = 1178.57$$

Para el nudo E

$$V_{EF} = 1350.17 - 243.03 = 1107.14$$



Momentos en las vigas. - Como el momento en el centro de cada viga es nulo, el correspondiente a sus extremos será igual al cortante en la viga por la mitad de su longitud.

Momentos en las columnas. - Se determinan en las cabezas de éstas descendiendo hacia la base.

#### METODO DEL PORTAL

Este método se basa en las siguientes hipótesis:

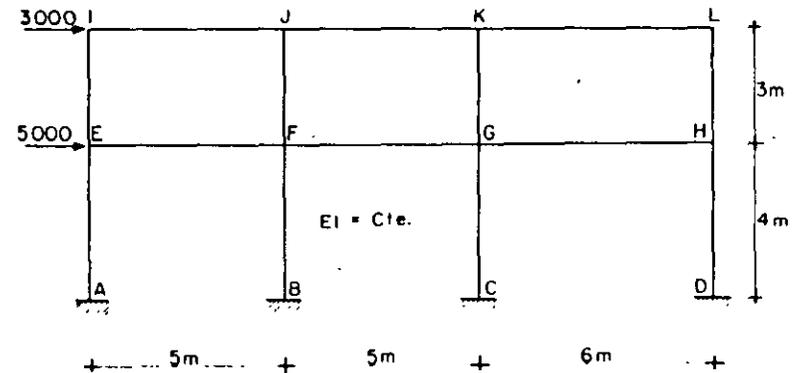
- Los puntos de inflexión de vigas y de columnas se encuentran en sus puntos medios.
  - La fuerza cortante en cada una de las columnas exteriores de un piso es igual a la mitad de la que corresponde a cada columna interior.
- De esta manera el problema se transforma en una isostática.

Resumen de la secuencia de cálculo:

- Se determina la fuerza cortante en cada entrepiso.
- Usando la hipótesis (b) se determina la fuerza cortante en cada columna.
- Considerando la hipótesis (a) se determinan los momentos flexionantes en los extremos de las columnas.
- Determinense los momentos en los extremos de todas las vigas equilibrando los momentos de las columnas en cada extremo. Se necesita empezar en nudos con una sola viga y considerar que los momentos en los extremos de una misma viga son iguales.

5. Obténganse las fuerzas cortantes en las vigas a partir de los momentos de sus extremos.

6. Determinense las fuerzas axiales en las columnas a partir de las cortantes de las vigas.



El cortante en el primer entrepiso vale

$$V_c = 2666.6 \text{ columnas interiores}$$

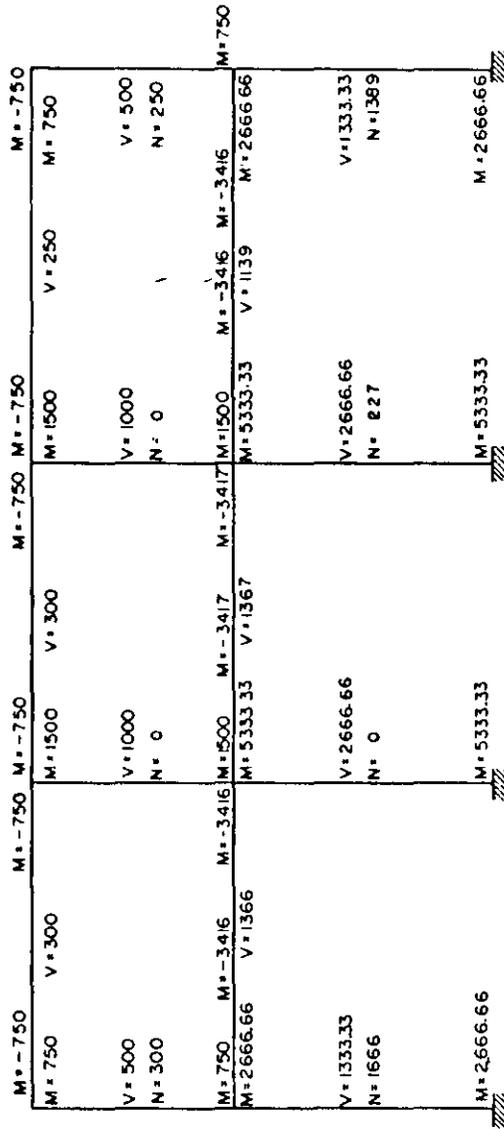
$$V_c = 1333.3 \text{ columnas exteriores}$$

El cortante en el segundo entrepiso vale  $V = 3000 \text{ kg}$

$$V_c = 1000 \text{ columnas interiores}$$

$$V_c = 500 \text{ columnas exteriores}$$

Con los valores anteriores se calculan los momentos en las columnas y por equilibrio el de las trabes.



METODO DEL FACTOR

Se basa en las ecuaciones pendiente-deformación haciendo modificaciones bajo las siguientes hipótesis:

- a). - Para el cálculo de los desplazamientos lineales y angulares en un piso, se considera que el valor  $\psi$  en dos entrepisos consecutivos es igual.  $\psi$  es la diferencia de desplazamiento laterales de dos niveles consecutivos dividida entre la altura del entrepiso.
- b). - El giro de un nudo y de los extremos opuestos de todas las barras que concurren al mismo son iguales.

Este método se aplica siguiendo los seis pasos siguientes:

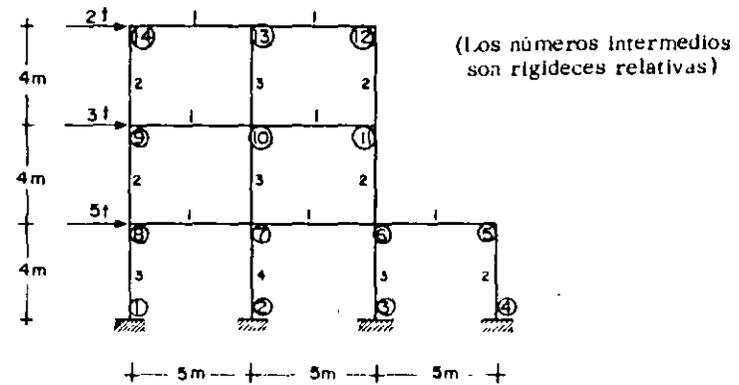
1. - En cada nudo se calcula el factor  $v$  de las vigas  $v = \frac{\sum K_c}{\sum K_c + \sum K_v}$ ,  $\sum K_c$  es la suma de los valores  $K = 12EI/L^3$  de las columnas que concurren al nudo, y  $\sum K_v$  es la suma de los valores  $K$  para todos los elementos del nudo.
2. - En cada nudo se calcula el factor  $C$  de las columnas  $C = 1 - v$ , siendo  $v$  el factor de viga del paso 1. En las bases de las columnas empotradas del primer piso se considera  $C = 1,0$ .
3. - Hay un número, obtenido en 1 y 2,  $v$  y  $C$  en cada extremo de todos los elementos del marco. A cada uno de dichos números se le suma la mitad del correspondiente al otro extremo del elemento.
4. - Se multiplica cada suma hallada en el paso 3 por el valor de  $K$  del elemento al que corresponde dicha suma. Para las columnas, a este producto se le llama factor de momento de columna,  $C$ , para las vigas, factor de momento de viga  $V$ .

5. - Los factores de momento de columna C, hallados en el paso 4 son los valores relativos aproximados de los momentos en los extremos de la columna para el piso correspondiente.

Por la estática se ve que la suma de los momentos en los extremos de las columnas en un piso determinado, es igual al cortante horizontal total en ese piso multiplicado por la altura del piso. Por lo cual, los factores de momentos en los extremos de las columnas, por proporción directa, en cada piso.

6. - Los factores de momento de viga V, hallados en el paso 4 son los valores relativos aproximados de los momentos en los extremos de las vigas para cada nudo. La suma de los momentos en los extremos de las vigas en cada nudo es igual, por la estática, a la suma de los momentos en los extremos de las columnas en ese nudo, que pueden obtenerse en el paso 5. Por lo cual, los factores de momento de viga V se pueden transformar en momentos en los extremos de éstas, por proporción directa en cada nudo.

Veamos como ejemplo el siguiente marco.



Cálculo de los factores de viga de los nudos

Por ejemplo para el nudo (10)

$$v = \frac{\sum K_c}{\sum K}$$

$\sum K_c$  = suma de rigideces de las columnas

$$\sum K_c = 3 + 3 + 6$$

$$v_{10} = 6/8 = 0.75$$

También para el nudo (7)

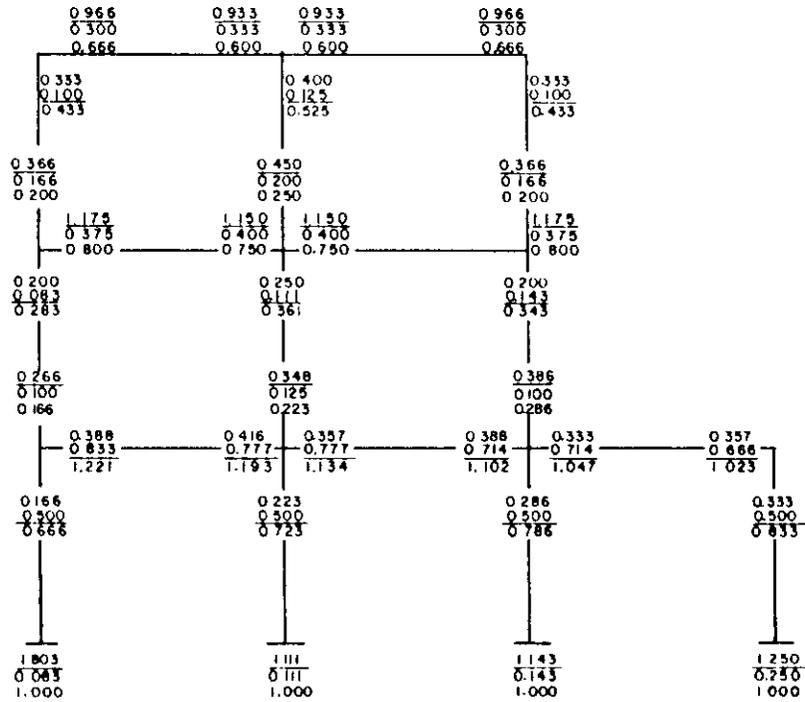
$$\sum K_c = 3 + 4 \quad \sum K = 9 \quad v_7 = 7/9 = 0.777$$

Cálculo de factores de columna por ejemplo nudos (7) y (10)

$$C = 1 - v$$

$$C = 1 - 0.777 = 0.223$$

$$C = 1 - 0.75 = 0.25$$



Se han anotado los factores de vigas y columnas y a cada uno de dichos números se le ha sumado la mitad del correspondiente al otro extremo del elemento.

Cálculo de Momentos

Por ejemplo primer entrepiso

$$M = Vh = 10(5) = 50 \text{ T-m.}$$

Este momento se distribuye en las columnas proporcionalmente a sus rigideces.

$$M_{ij} = \frac{M C}{\sum C}$$

$$22\,536 = \sum C$$

En el primer entrepiso

$$22.536 = 3249 + 4.444 + 3429 + 2.50 + 1666 + 2.358 + 2.892 + 1998$$

$$M_{16} = \frac{3249}{22.536} (50) = 7.208$$

$$M_{27} = \frac{4.444}{22.536} (50) = 9.859$$

$$M_{61} = \frac{1.998}{22.536} (50) = 4.430$$

$$M_{72} = 6.416$$

$$M_{36} = 7.607$$

$$M_{64} = 3.696$$

$$M_{63} = 5.231$$

$$M_{45} = 5.546$$

Para el nivel 2º

$$M = 5(4) = 20 \quad 4.683 = \sum C$$

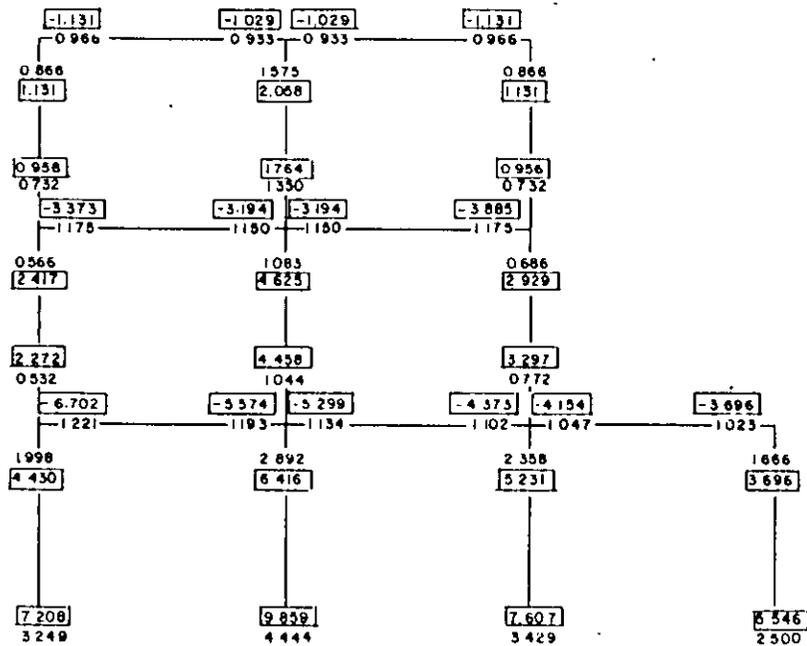
Para el nivel 3º.

$$M = 2(4) = 8 \quad 6.121 = \sum C$$

Los momentos en las vigas serán proporcionales a sus rigideces

Se anotan los factores de Momentos de columnas y vigas  
y los Momentos

$$C \text{ y } V \text{ y } M_{ij} = \left[ C / \sum C \right] M$$



CAPITULO 3  
TRABAJO Y ENERGIA

- A. PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES
- B. PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

## 2.1 TRABAJO Y ENERGIA

Si un sistema de fuerzas externas, se aplica a un cuerpo, este se deformará hasta que se presente el equilibrio entre las fuerzas externas aplicadas y las fuerzas internas del cuerpo. En consecuencia, el sistema de fuerzas externas realiza un trabajo. Este trabajo se almacena en el cuerpo y es a lo que se llama "energía de deformación del cuerpo".

El trabajo realizado por el sistema de fuerzas externas, se puede transformar en energía de deformación y/o energía cinética del cuerpo. Si las fuerzas se aplican gradual y lentamente, a un cuerpo elástico, el trabajo exterior se transforma completamente en energía de deformación.

La energía de deformación o energía interna de un cuerpo elástico es por lo tanto, la suma de todo el trabajo transmitido por el sistema para deformarlo con respecto a su estado natural. La energía de deformación almacenada se transforma en trabajo cuando el sistema de fuerzas es retirado. Si el cuerpo es perfectamente elástico recuperará exactamente su forma inicial. En los sistemas elásticos se despreclarán las pérdidas de energía por calor.

La energía de deformación depende de las características de la curva carga-deformación del cuerpo. Así, por ejemplo, en la Fig. 1 el área sombreada nos representa la energía de deformación de un cuerpo con comportamiento elástico lineal. El área sombreada en la Fig. 2 nos representa la energía de deformación de un cuerpo con com

portamiento elástico no lineal.

Para el caso de la Fig. 1 la carga P se aplica gradualmente y por lo tanto la deformación aumenta gradualmente. El trabajo desarrollado por la fuerza P es:

$$W = \int p \cdot d\delta = \text{energía de deformación}$$

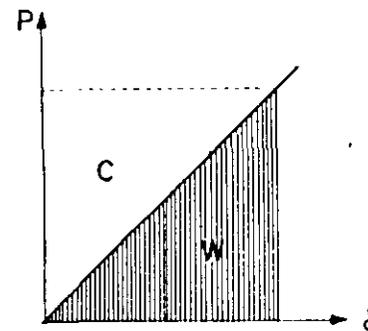


fig.1.- Energía de Deformación  
Caso Lineal

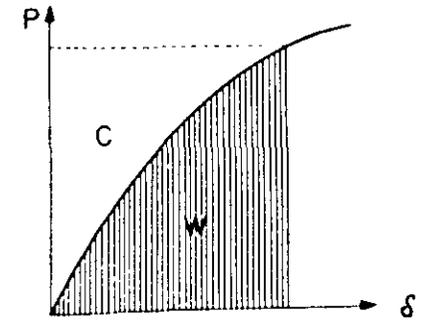


fig 2.- Energía de Deformación  
Caso no Lineal

El área no sombreada marcada con C en las Figs. 1 y 2, se denomina "energía complementaria de deformación" y se calcula con la integral

$$C = \int \delta \cdot dp = \text{energía complementaria de deformación}$$

18 A

La energía de deformación, puede aparecer debido a fuerzas axiales, de flexión; de cortante y de torsión. Estas fuerzas pueden presentarse aisladas o en determinadas combinaciones. En seguida se obtendrán las expresiones para la energía de deformación debido a los efectos antes mencionados, los cuales se consideran que actúan uno a la vez.

a) Efecto de Fuerza Normal.

Considérese la barra mostrada en la Fig. 3, la cual tiene su área transversal constante.

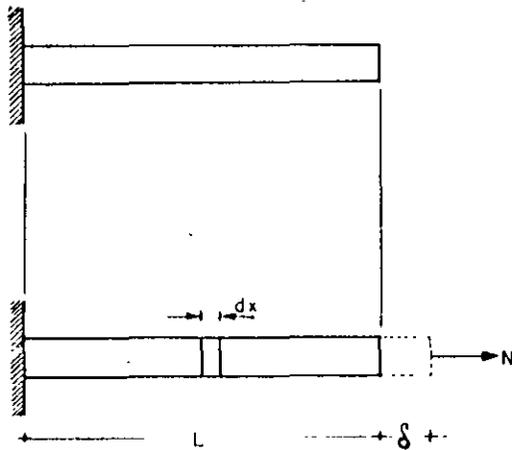


fig. 3

La aplicación gradual de la carga normal N produce la deformación  $\delta$ . En la longitud dx el trabajo interno efectuado es:

$$dw = \frac{N}{2} \epsilon dx$$

pero

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{AE}$$

entonces

$$dw = \frac{N}{2} \frac{N}{AE} dx$$

el trabajo total en la longitud L, será

$$W = \int_0^L \frac{N^2}{2AE} dx$$

debido a que el trabajo efectuado es igual a la energía de deformación interna, entonces:

$$U_n = \int_0^L \frac{N^2}{2AE} dx$$

donde  $U_n$  es la energía de deformación interna debida a cargas axiales.

b) Efecto de Momento Flexionante.

Considérese que en el tramo de viga mostrado en la Fig. 4 - actúan fuerzas que producen flexión en él mismo.

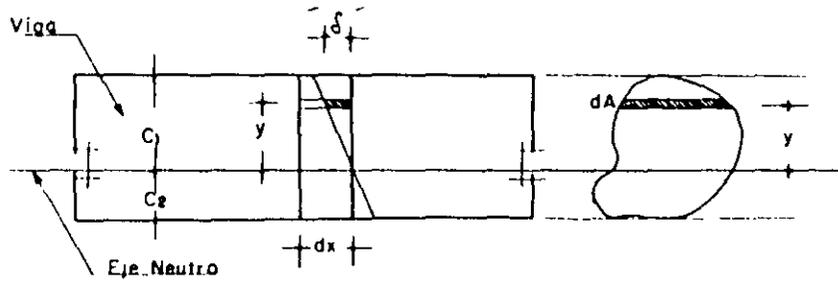


fig. 4

Una fibra situada a una distancia "y" del eje neutro tendrá como deformación en la longitud dx

$$\delta = \epsilon dx$$

pero

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{My}{EI}$$

entonces

$$\delta = \frac{My}{EI} dx$$

Debido a que las fuerzas que producen flexión se aplican gradualmente, el valor de la fuerza promedio que actúa en el área dA, es:

$$dF = \frac{1}{2} \sigma dA$$

entonces

$$dF = \frac{1}{2} \frac{My}{I} dA$$

El trabajo efectuado en la fibra analizada es:

$$dw = \int dF$$

o sea:

$$dw = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2 y^2}{EI} dx dA$$

y el trabajo para todas las fibras en la longitud dx será.

$$dw = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx \int_{c_2}^{c_1} y^2 \cdot dA$$

$$dw = \frac{M^2}{2EI} dx$$

El trabajo total en toda la viga será:

$$W = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

por lo tanto

$$U_0 = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

donde  $U_0$  es la energía de deformación interna debida a momento flexionante.

c) Efecto de Fuerza Cortante.

Considérese que en el tramo de viga mostrada en la Fig. 5 - actúan fuerzas que producen esfuerzos de cortante en él mismo. En la figura se exagera la deformación de la fibra mostrada.

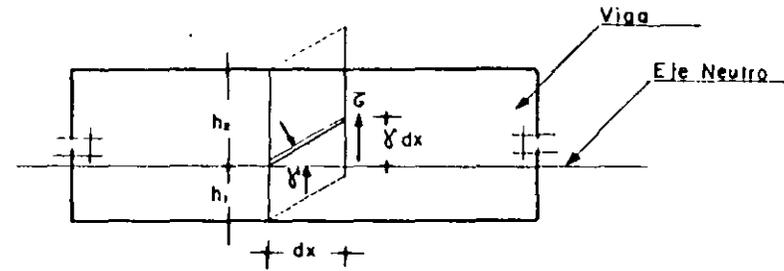


fig. 5

El trabajo debido a la fuerza cortante es:

$$dw = \frac{1}{2} (\zeta dA) (\gamma dx)$$

pero

$$\zeta = \frac{VQ}{Ib}$$

y

$$\gamma = \frac{\zeta}{G} = \frac{VQ}{G I b}$$

donde  $Q$  es el momento estático con respecto al eje neutro y  $b$  es el ancho de la sección, entonces:

$$dw = \frac{V^2 Q^2}{2GI^2 b} dx dA$$

El trabajo que se efectúa en la longitud  $dx$ , es:

$$dw = \frac{V^2 dx}{2GA} \cdot \frac{A}{I^2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{Q^2}{b^2} dA$$

si:

$$C = \frac{A}{I^2} \int_{h_1}^{h_2} \frac{Q^2}{b^2} dA$$

entonces:

$$dw = \frac{CV^2}{2GA} dx$$

El trabajo efectuado en toda la viga será:

$$W = \int_0^L \frac{CV^2}{2GA} dx$$

por lo tanto:

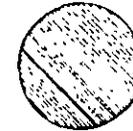
$$U_s = \int_0^L \frac{CV^2 dx}{2GA}$$

donde  $U_s$  es la energía de deformación interna debida a fuerzas cortantes.

La constante  $C$  es el llamado factor de forma y depende de la forma de la sección transversal. Algunos valores de  $C$  se dan enseguida.



$$C = 1.2$$



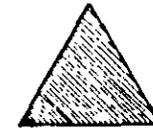
$$C = 1.11$$



$$C = 1.5$$



$$C = \frac{\text{A sección}}{\text{Alma}}$$



$$C = 1.2$$

d) Efecto de Momento Torsionante.

La viga mostrada en la Fig. 6 está sujeta a un momento torsionante  $T$  aplicado en un extremo de la misma.

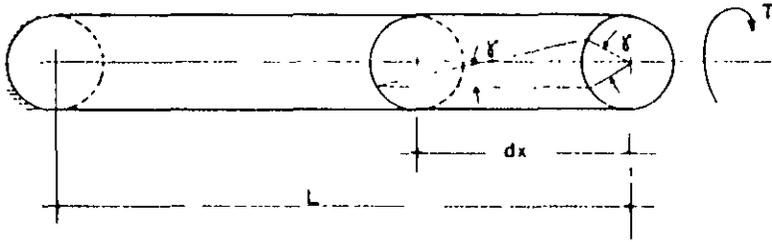


fig. 6

El trabajo efectuado en el segmento  $dx$  es:

$$dw = \frac{1}{2} T \gamma$$

pero

$$\gamma = \frac{T dx}{G J}$$

entonces

$$dw = \frac{T^2 dx}{2 G J}$$

para todo el elemento el trabajo será:

$$W = \int_0^L \frac{T^2 dx}{2 G J}$$

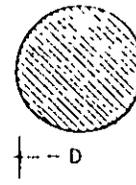
por lo tanto

$$U_t = \int_0^L \frac{T^2 dx}{2 G J}$$

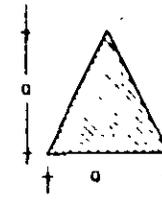
donde  $U_t$  es la energía de deformación interna debida a fuerzas de torsión y  $J$  es el momento polar de inercia para una sección circular.

Valores de  $J$  para diferentes secciones transversales se dan a continuación.

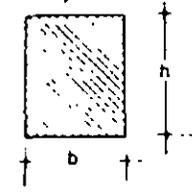
#### Secciones llenas



$$J = \frac{\pi D^4}{32}$$



$$J = 0,02 a^4$$

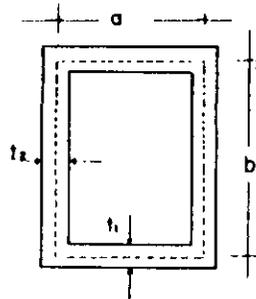


$$J = \frac{b^3 h^3}{3.6(h^2 + b^2)}$$

Secciones Huecas

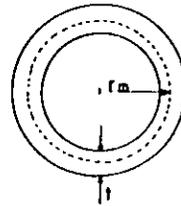
Expresión General:

$$J = \frac{4 A^2}{\int \frac{ds}{t}}$$



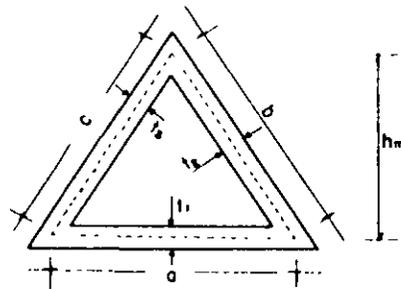
$$A = ab$$

$$\int \frac{ds}{t} = \left( \frac{a}{t_1} + \frac{b}{t_2} \right) 2$$



$$A = \pi r_m^2$$

$$\int \frac{ds}{t} = \frac{2\pi r_m}{t}$$



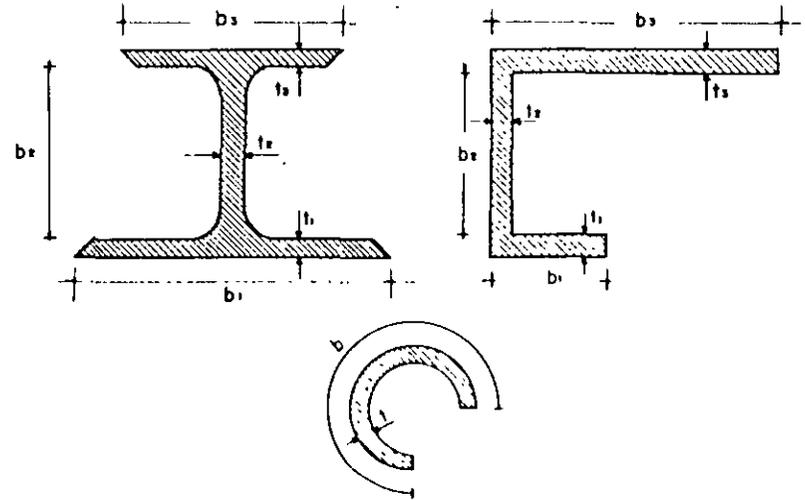
$$A = \frac{1}{2} ah_m$$

$$\int \frac{ds}{t} = \frac{a}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{c}{t_3}$$

Secciones Abiertas

Expresión General:

$$J = \sum \frac{bl^3}{3}$$



En el caso general de un elemento sujeto a los elementos mecánicos citados anteriormente, se obtiene que la energía de deformación total es:

$$U = U_n + U_b + U_a + U_t$$

o sea:

$$U = \int_L \frac{N^2 dx}{2AE} + \int_L \frac{M^2 dx}{2EI} + \int_L \frac{CV^2 dx}{2GA} + \int_L \frac{T^2 dx}{2GJ}$$

La expresión anterior puede usarse también para vigas ligeramente curvas. La limitación para su uso se presenta cuando el radio de curvatura es menor que cinco veces la dimensión mayor de la sección transversal.

## 2.2 PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES

Este principio constituye la base para la aplicación del principio de los trabajos virtuales que se verá en el siguiente inciso.

Se entenderá por desplazamiento virtual aquel desplazamiento hipotético de uno o varios puntos de un cuerpo rígido en equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de geometría del cuerpo no se alteran debido a dicho desplazamiento, el cual puede ser de magnitud pequeña o infinitesimal. Dichos desplazamientos son producidos por un sistema de cargas diferente al aplicado al cuerpo rígido en equilibrio. Por lo tanto, el sistema de cargas original se mueve cuando se produce el desplazamiento virtual. El producto de cada carga del sistema original por su desplazamiento virtual respectivo producirá entonces "un trabajo virtual".

Para demostrar el principio de los desplazamientos virtuales

se usará la Fig. 7, en la cual se muestra un cuerpo rígido en equilibrio bajo el sistema de cargas dado.

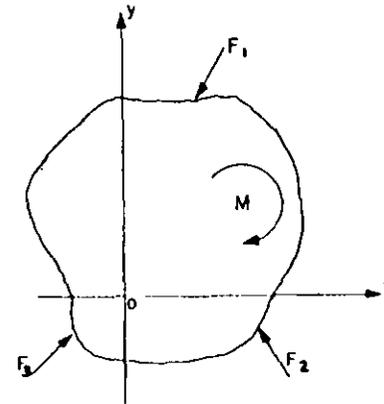


Fig 7

Si el cuerpo rígido está en equilibrio debe cumplirse que

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M + \sum F_x Y + \sum F_y X = 0$$

Si el cuerpo se traslada una distancia pequeña  $\delta$ , cuyas componentes son  $\delta x$  y  $\delta y$  se efectuará un trabajo que será (Fig. 8)

$$W = \sum F_x \cdot \delta x + \sum F_y \cdot \delta y$$

o sea

$$W = \delta x \sum F_x + \delta y \sum F_y$$

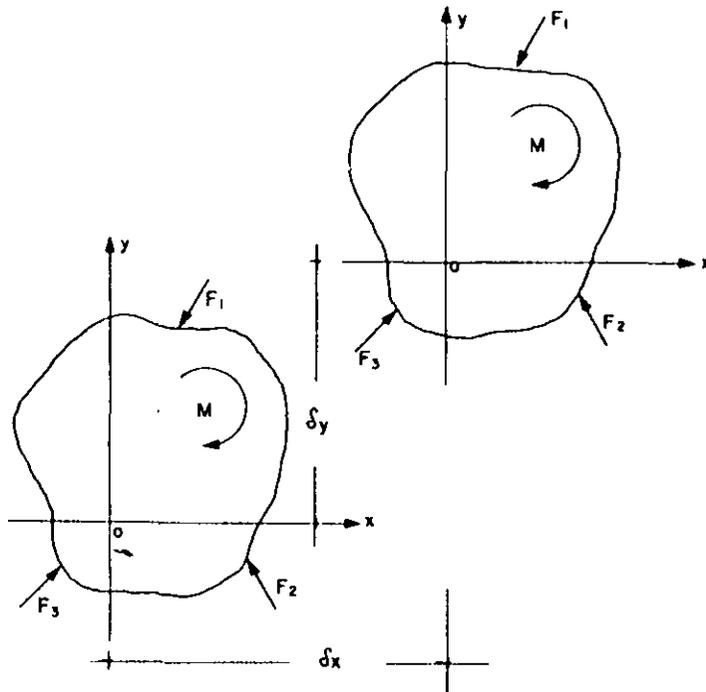


fig. 8

ya que  $\delta x$  y  $\delta y$  son constantes en todos los puntos del cuerpo.

Debido a las condiciones de equilibrio  $\sum F_x = 0$  y  $\sum F_y = 0$ , se tiene que:

$$W = \delta x \sum F_x + \delta y \sum F_y = 0$$

Si el cuerpo ya trasladado, sufre una rotación pequeña  $\alpha$  con respecto al origen O, las componentes del desplazamiento de cualquier punto serán  $\alpha y$  paralela al eje 'x', y  $\alpha x$  paralela al eje 'y'. El trabajo efectuado por el sistema de cargas será:

$$W = \sum M \alpha + \sum F_x \cdot \alpha y + \sum F_y \cdot \alpha x$$

o sea:

$$W = \alpha (\sum M + \sum F_x \cdot y + \sum F_y \cdot x)$$

ya que  $\alpha$  es constante en todos los puntos. Debido a las condiciones de equilibrio

$$\sum M + \sum F_x \cdot y + \sum F_y \cdot x = 0$$

se tiene que

$$W = \alpha (\sum M + \sum F_x \cdot Y + \sum F_y \cdot X) = 0$$

Ya que cualquier movimiento de un cuerpo puede descomponerse en un giro y una traslación y se vio que en ambos casos el trabajo efectuado vale cero, se puede enunciar que:

"Si a un cuerpo rígido en equilibrio bajo un sistema de fuerzas dado se le desplaza virtualmente, el trabajo efectuado por este sistema durante el desplazamiento virtual es cero".

### 2.3 PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL.

Considérese el cuerpo deformable que se muestra en la Fig. 9, el cual se encuentra en equilibrio bajo el sistema de fuerzas dado.

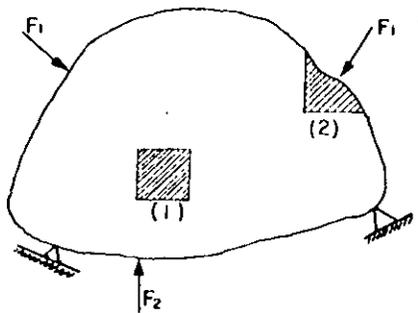


fig. 9

Los segmentos (1) y (2) de la figura anterior se muestran como cuerpos libres en la Fig. 10.

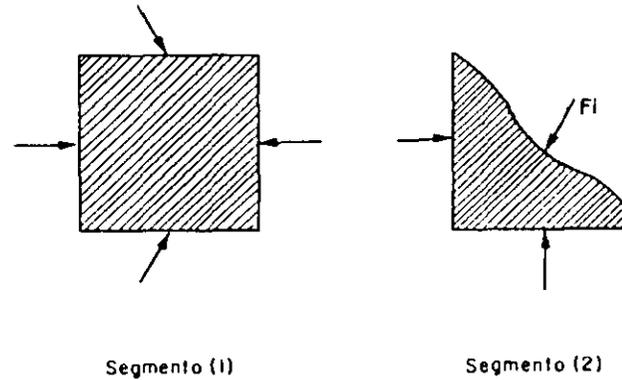


fig 10

El segmento (1) es un segmento interno y está sujeto a fuerzas internas en todos sus lados. El segmento (2) es un segmento de borde y está sujeto a una fuerza externa  $F_i$  en uno de sus lados y a fuerzas internas en los otros.

Si se supone un desplazamiento virtual del cuerpo producido por una acción diferente al sistema de fuerzas dado, las fuerzas externas e internas se moverán y por lo mismo efectuarán un trabajo virtual. Por lo anterior, cualquier segmento del cuerpo deformable sufrirá un giro, una traslación y una deformación virtual. Si se representa por

dWe al trabajo desarrollado por las fuerzas externas en el segmento se tiene que:

$$dWe = dW_{RT} + dW_i$$

donde:  $dW_{RT}$  es el trabajo virtual de rotación y traslación del segmento tratado como un cuerpo rígido y  $dW_i$  es el trabajo virtual de deformación del segmento.

Por el principio de los desplazamientos virtuales se sabe que:

$$dW_{RT} = 0$$

por lo tanto

$$dWe = dW_i$$

El trabajo desarrollado en todo el cuerpo será:

$$W_e = W_i$$

donde  $W_i$  es la energía de deformación interna virtual del cuerpo y  $W_e$  representa el trabajo virtual total debido al sistema de fuerzas externas  $F$ , ya que el trabajo desarrollado por las fuerzas intersegmentales se anula.

Por lo visto anteriormente se puede enunciar que:

"Si una estructura deformable en equilibrio bajo un sistema de fuerzas dado, se sujeta a un desplazamiento virtual debido a una --

fuerza adicional, el trabajo virtual producido por las fuerzas externas, es igual al trabajo de deformación de las fuerzas internas".

#### 2.4 TEOREMA DE BETTI

Considérese el cuerpo elástico mostrado en la Fig. II en el que se aplican dos sistemas de cargas a la vez, los cuales aparecen por separado.

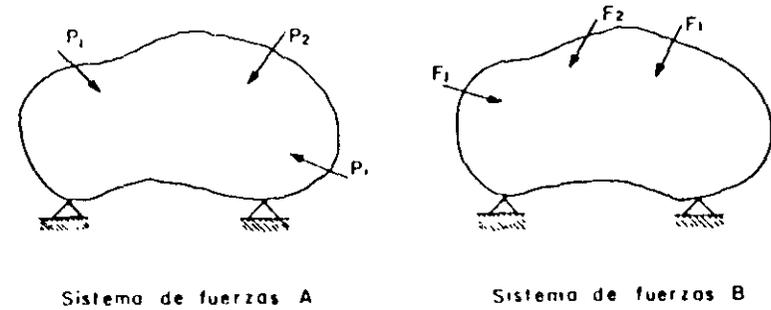


fig II

Si se aplica el principio de la superposición de efectos se puede hacer el siguiente análisis.

Si se aplica gradualmente primero el sistema A y luego el sistema B, el trabajo efectuado por dichos sistemas de fuerza será:

$$W = \frac{1}{2} P_i \delta_i + \frac{1}{2} F_j \delta_j + P_i \delta_{ij}$$

donde,

$\delta_i$  son los desplazamientos producidos por las fuerzas  $P_i$

$\delta_j$  son los desplazamientos producidos por las fuerzas  $F_j$

$\delta_{ij}$  son los desplazamientos en la dirección de las fuerzas  $P_i$  debidos a la aplicación de las fuerzas  $F_j$

Si ahora se aplica gradualmente el sistema B y luego el sistema A, el trabajo efectuado por dichos sistemas de fuerzas será:

$$W = \frac{1}{2} F_j \delta_j + \frac{1}{2} P_i \delta_i + F_j \delta_{ji}$$

donde

$\delta_{ji}$  son los desplazamientos en la dirección de las fuerzas  $F_j$  debido a la aplicación de las fuerzas  $P_i$

Debido a que el orden de aplicación de los sistemas de fuerzas no afecta al trabajo externo total, las expresiones obtenidas arriba se pueden igualar:

$$\frac{1}{2} P_i \delta_i + \frac{1}{2} F_j \delta_j + P_i \delta_{ij} = \frac{1}{2} F_j \delta_j + \frac{1}{2} P_i \delta_i + F_j \delta_{ji}$$

de donde:

$$P_i \delta_{ij} = F_j \delta_{ji}$$

que es el teorema de Betti, el cual puede enunciarse como sigue:

"El trabajo que realiza un sistema de fuerza A debido a los desplazamientos que en sus puntos de aplicación le produce un sistema de fuerzas B, es igual al trabajo que realiza el sistema de fuerzas B debido a los desplazamientos que en sus puntos de aplicación le produce el sistema de fuerzas A".

Un enfoque más simple puede darse observando la viga mostrada en la Fig. 12, en la cual se aplican simultáneamente las fuerzas  $P_A$  y  $P_B$ .

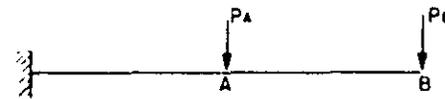


fig. 12

Considérese que se aplica gradualmente primero la fuerza  $P_A$  la cual produce los desplazamientos mostrados en la Fig. 13.

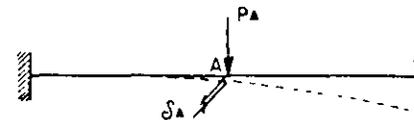


fig. 13

29 A

Considérese ahora, que se aplica gradualmente la fuerza  $P_B$

con  $P_A$  en posición como se ve en la Fig. 14.

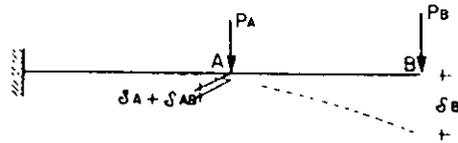


fig.14

El trabajo total de las fuerzas aplicadas es:

$$W = \frac{1}{2} P_A \delta_A + \frac{1}{2} P_B \delta_B + P_A \delta_{AB}$$

Si se invierte el orden de aplicación de las cargas, se tiene - que:

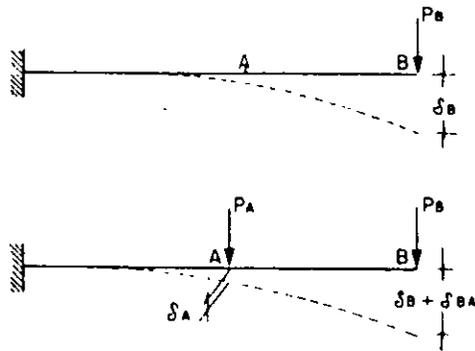


fig.15

El trabajo total de las fuerzas aplicadas es:

$$W = \frac{1}{2} P_B \delta_B + \frac{1}{2} P_A \delta_A + P_B \delta_{BA}$$

por lo tanto, igualando las expresiones del trabajo total, se tiene:

$$\frac{1}{2} P_A \delta_A + \frac{1}{2} P_B \delta_B + P_A \delta_{AB} = \frac{1}{2} P_B \delta_B + \frac{1}{2} P_A \delta_A + P_B \delta_{BA}$$

de donde:

$$P_A \delta_{AB} = P_B \delta_{BA}$$

### 2.5 TEOREMA DE MAXWEL.

Considérese el marco mostrado en la Fig. 16 al cual se le aplica una carga  $P_A$  en el punto A y después, al mismo marco se le aplica una carga  $P_B$  en el punto B.

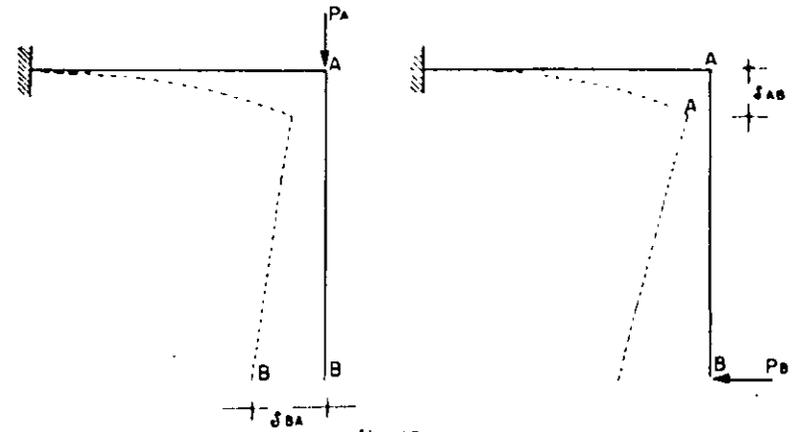


fig.16

según la Fig. 16  $\delta_{BA}$  es el desplazamiento producido por  $P_A$  y tiene la dirección de  $P_B$ .

Y  $\delta_{AB}$  es el desplazamiento producido por  $P_B$  y tiene la dirección de  $P_A$ .

Por el teorema de Betti se tiene:

$$P_A \delta_{AB} = P_B \delta_{BA}$$

Según Maxwell si  $P_A$  es igual a  $P_B$ , se tiene:

$$\delta_{AB} = \delta_{BA}$$

por lo tanto, puede enunciarse que:

"El desplazamiento en un punto A (en la dirección de la fuerza aplicada en A) debido a la aplicación de una fuerza  $P$  en un punto B, es igual al desplazamiento en el punto B (en la dirección de la fuerza aplicada en B) debido a la aplicación de una fuerza  $P$  en el punto A".

El teorema anterior también es válido para el caso de rotaciones o de combinaciones entre desplazamiento lineal y rotaciones. Un caso como el que se muestra en la Fig. 17 aclarará lo anterior.

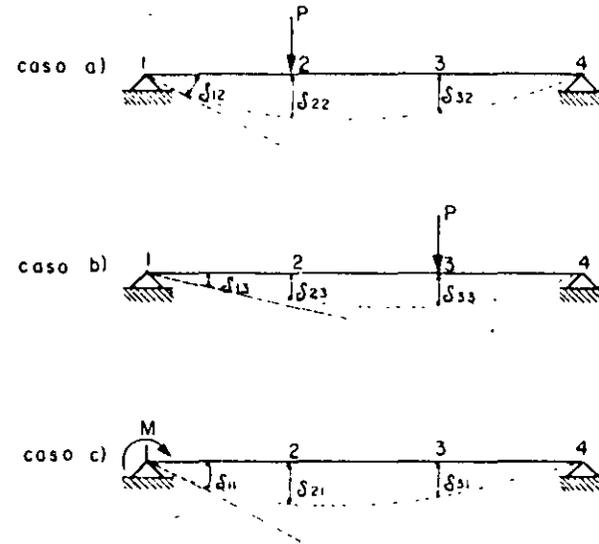


fig. 17

En los casos a) y b) se tiene

$$P \delta_{23} = P \delta_{32}$$

entonces

$$\delta_{23} = \delta_{32}$$

En los casos a) y c) se tiene

$$P \delta_{21} = M \delta_{12}$$

si  $P$  y  $M$  tienen la misma magnitud, entonces

$$\delta_{21} = \delta_{12}$$

En los casos b) y c) se tiene

$$P\delta_{31} = M\delta_{13}$$

si  $P$  y  $M$  tienen la misma magnitud, entonces:

$$\delta_{31} = \delta_{13}$$

## 2.6 METODO DEL TRABAJO VIRTUAL.

Es un método muy versátil para calcular desplazamientos en las estructuras. Estos desplazamientos pueden ser debidos a cargas de cualquier tipo, cambios de temperatura, contracciones en el material estructural o errores de fabricación.

La expresión básica para el método del trabajo virtual ya se vio anteriormente y es:

Trabajo virtual externo = Trabajo virtual interno

$$W_e = W_i$$

En la ecuación anterior se puede expresar el primer término como el producto de una carga conocida por el desplazamiento buscado. El segundo término se puede expresar en función de los elementos mecánicos de la estructura, lo cual se hará enseguida.

Considérese la armadura mostrada en la Fig. 18 la cual está sujeta a un sistema de cargas  $P$ , y en la cual se desea calcular el desplazamiento vertical  $\delta_{VA}$  en el punto  $A$ .

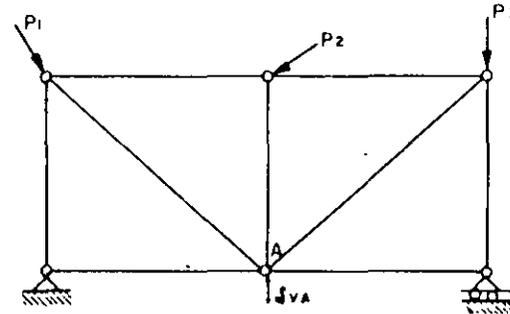


fig. 18

Considérese ahora la misma armadura sujeta a una carga  $F$  en el punto  $A$  en la dirección de  $\delta_{VA}$ .

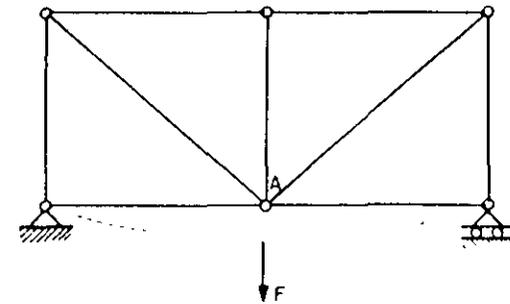


fig 19

Si se denominan como  $N$  las fuerzas axiales en los elementos debidas al sistema de cargas  $P$ , y como  $n$  a las fuerzas axiales en los elementos debidas a la carga  $F$ , se tiene, según Betti que:

$$W_e = \frac{1}{2} F \delta v_a$$

$$W_i = \frac{1}{2} \sum N \left( \frac{nL}{AE} \right)$$

donde el término con paréntesis es el alargamiento o acortamiento de cada elemento de la estructura debido a la aplicación de la carga  $F$ . Por lo tanto

$$\frac{1}{2} F \delta v_a = \frac{1}{2} \sum \frac{NnL}{AE}$$

Si se da a  $F$  el valor unitario (puede ser cualquier valor) se tendrá que

$$\delta v_a = \sum \frac{NnL}{AE}$$

En forma semejante se pueden establecer las expresiones del trabajo virtual interno para los demás elementos mecánicos y se obtiene:

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx \quad (\text{flexión})$$

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{CVY}{GA} dx \quad (\text{cortante})$$

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{Tt}{GJ} dx \quad (\text{torsión})$$

## 2.7 PRIMER TEOREMA DE CASTIGLIANO

Este teorema sirve para determinar desplazamientos en cualquier dirección en una estructura.

Considérese la Fig. 20 mostrada en la cual las fuerzas  $P$  y  $Q$  se aplican gradual y simultáneamente.

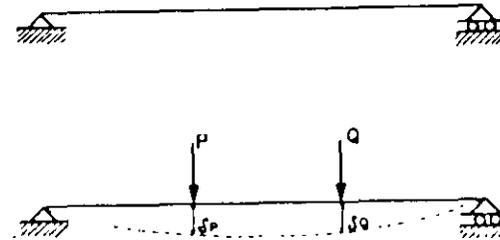


fig 20

El trabajo efectuado por  $P$  y  $Q$  es:

$$W = \frac{P \delta p}{2} + \frac{Q \delta q}{2} \quad \text{-----(a)}$$

Si se aumenta la fuerza  $P$  en  $dP$  (Fig. 21) con  $P$  y  $Q$  en posición, el incremento del trabajo o energía de deformación interna es:

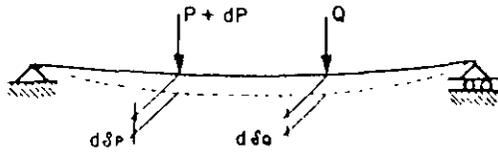


fig. 21

$$dW = \left[ \frac{P + (P + dP)}{2} \right] d\delta_p + Q d\delta_o$$

Si se deprecian los productos diferenciales se tiene

$$dW = P d\delta_p + Q d\delta_o \text{ ---- (b)}$$

También se puede valorar  $dW$  de la forma siguiente: considérese que se aplican  $P + dP$  y  $Q$  gradual y simultáneamente, entonces el trabajo total efectuado es:

$$W_T = \left( \frac{P + dP}{2} \right) (\delta_p + d\delta_p) + \frac{Q}{2} (\delta_o + d\delta_o)$$

despreciando los productos diferenciales

$$W_T = \frac{P \delta_p}{2} + \frac{Q \delta_o}{2} + \frac{\delta_p dP}{2} + \frac{P d\delta_p}{2} + \frac{Q d\delta_o}{2} \text{ ---- (c)}$$

pero

$$W_T = W + dW$$

o sea

$$dW = W_T - W$$

y de las ecuaciones (a) y (c) se obtiene

$$dW = \frac{\delta_p dP}{2} + \frac{P d\delta_p}{2} + \frac{Q d\delta_o}{2}$$

si se sustituye (b) en la expresión anterior

$$dW = \frac{\delta_p dP}{2} + \frac{dW}{2}$$

o sea

$$dW = \delta_p dP$$

de donde

$$\delta_p = \frac{dW}{dP}$$

que puede escribirse como

$$\delta P = \frac{\partial W}{\partial P}$$

Por todo lo anterior puede enunciarse que:

"La derivada parcial de la energía total de deformación con respecto a una fuerza P, es igual al desplazamiento (producido por el sistema de fuerzas dado) medido en la dirección de la fuerza P"

El teorema anterior puede resumirse en las expresiones siguientes:

$$\delta P = \frac{\partial W}{\partial P} \quad (\text{lineal})$$

$$\delta \theta = \frac{\partial W}{\partial M} \quad (\text{rotación})$$

$$\delta P = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{N^2 dx}{2AE} = \int N \left( \frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{dx}{AE} \quad (\text{axial})$$

$$\delta P = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int M \left( \frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} \quad (\text{flexión})$$

$$\delta P = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{CV^2 dx}{2GA} = \int CV \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right) \frac{dx}{GA} \quad (\text{cortante})$$

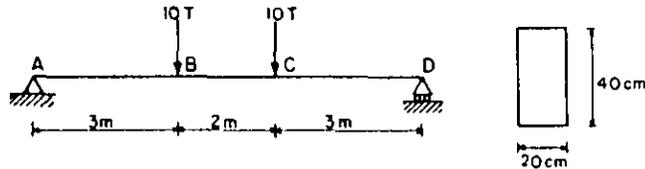
$$\delta P = \frac{\partial}{\partial P} \int \frac{T^2 dx}{2GJ} = \int T \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right) \frac{dx}{GJ} \quad (\text{torsión})$$

VALORES DE  $\int M_i M_k dL$

	1	2	3	4	5	6	7
1		$L^2 k$	$\frac{1}{2} L^2 k$	$\frac{1}{3} L^2 k$	$\frac{2}{3} L^2 k$	$\frac{1}{3} L^2 k$	$\frac{1}{2} L^2 k$
2		$\frac{1}{2} L^2 k$	$\frac{1}{3} L^2 k$	$\frac{1}{5} L^2 k$	$\frac{2}{15} L^2 k$	$\frac{1}{4} L^2 k$	$\frac{1}{6} L^2 k$
3		$\frac{1}{2} L^2 k$	$\frac{1}{3} L^2 k$	$\frac{1}{5} L^2 k$	$\frac{2}{15} L^2 k$	$\frac{1}{4} L^2 k$	$\frac{1}{6} L^2 k$
4		$\frac{1}{2} L^2 k (1+12\beta)$	$\frac{1}{6} L^2 k (2+9\beta)$	$\frac{1}{6} L^2 k (2+9\beta)$	$\frac{1}{3} L^2 k (1+\beta)$	$\frac{1}{12} L^2 k (13+5\beta)$	$\frac{1}{6} L^2 k \{ (1+\beta)^2 + (1+\beta)^2 \}$
5		$\frac{2}{3} L^2 k$	$\frac{1}{3} L^2 k$	$\frac{6}{15} L^2 k$	$\frac{7}{15} L^2 k$	$\frac{1}{6} L^2 k$	$\frac{1}{3} L^2 k (1+\beta)$
6		$\frac{2}{3} L^3 k$	$\frac{5}{12} L^3 k$	$\frac{7}{15} L^3 k$	$\frac{7}{15} L^3 k$	$\frac{3}{10} L^3 k$	$\frac{1}{12} L^3 (15-b-\delta)$
7		$\frac{2}{3} L^3 k$	$\frac{1}{4} L^3 k$	$\frac{7}{15} L^3 k$	$\frac{7}{15} L^3 k$	$\frac{2}{15} L^3 k$	$\frac{1}{12} L^3 (15-a-\delta^2)$
8		$\frac{1}{3} L^3 k$	$\frac{1}{4} L^3 k$	$\frac{1}{12} L^3 k (1+3\beta)$	$\frac{1}{5} L^3 k$	$\frac{1}{5} L^3 k$	$\frac{1}{12} L^3 (1+a+\delta^2)$
9		$\frac{1}{3} L^3 k$	$\frac{1}{12} L^3 k$	$\frac{1}{12} L^3 k (13+\beta+2\beta^2)$	$\frac{1}{5} L^3 k$	$\frac{2}{15} L^3 k$	$\frac{1}{12} L^3 (1+b+\delta^2)$
10		$\frac{1}{2} L^3 k$	$\frac{1}{6} L^3 k$	$\frac{1}{6} L^3 k \{ (1+\beta)(1+\beta) + (1+\beta)(1+\beta) \}$	$\frac{1}{3} L^3 k$	$\frac{1}{12} L^3 k$	$\frac{1}{3} L^3 k$

EJEMPLOS  
ENERGIA DE DEFORMACION

Problema 1.- Obtener la energía de deformación debida a flexión y cortante de la siguiente viga, y calcular la relación  $u_b/u_s$



Por equilibrio se tiene:  $R_A = R_D = 10 \text{ Tn}$

La ecuación de momentos es

$$M = 10x \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right| + 10(3+x) \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right| - 10x \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right|^2 + 10(5+x) \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right| - 10(2+x) \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right| - 10x \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right|^3$$

$$M = 10x \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right|^3 + 30 \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right|^2 + 30 - 10x \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right|^3$$

La ecuación de cortante es

$$V = 10 \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right|^3 + 0 \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right|^2 - 10 \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right|^3$$

La energía de deformación se valda como

$$u_b = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx; \quad u_s = \frac{1}{2} C \int \frac{V^2}{GA} dx \quad \dots (A)$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.2)(0.4)^3}{12} = 0.00107 \text{ m}^4; \quad A = 0.2(0.4) = 0.08 \text{ m}^2;$$

Sustituyendo en (A)

$$u_b = \frac{1}{2E(0.00107)} \left[ \int_0^3 (10x)^2 dx + \int_3^5 (30)^2 dx + \int_5^8 (30 - 10x)^2 dx \right]$$

$$u_b = \frac{16.82 \times 10^5}{E} \text{ T} \cdot \text{m}$$

La energía de deformación por cortante es

$$u_s = \frac{1}{2} \frac{C}{G(0.08)} \left[ \int_0^3 (10)^2 dx + \int_3^5 (-10)^2 dx \right]; \quad C = 1.2$$

$$u_s = \frac{4500}{G} \text{ T} \cdot \text{m}$$

Cálculo de la relación  $u_b/u_s$

Se tiene  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ ; tomando  $\mu = 0.15$

$$G = \frac{E}{2.3}; \quad \frac{G}{E} = \frac{1}{2.3}$$

o sea que:

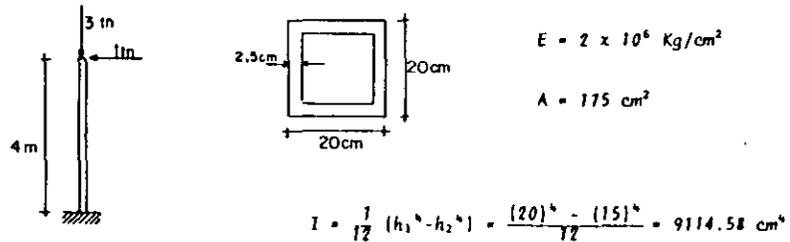
$$\frac{u_b}{u_s} = \frac{16.82 \times 10^5 \times (G)}{4500 \times (E)} = \frac{16.82}{4500} \left( \frac{1}{2.3} \right) \times 10^5$$

$$u_b/u_s = 162.512$$

Lo anterior indica, que la energía de deformación debida a flexión es 162.51 veces la energía de deformación debida a cortante. Por lo tanto, para fines de cálculo, se puede despreciar  $u_s$

Problema 2.- Una columna está sometida a una fuerza horizontal de 1 ton. y otra vertical de 3 ton. como se muestra en la figura.

Sin considerar peso propio, determine la energía de deformación de la estructura.



La energía total es  $U = U_n + U_b$

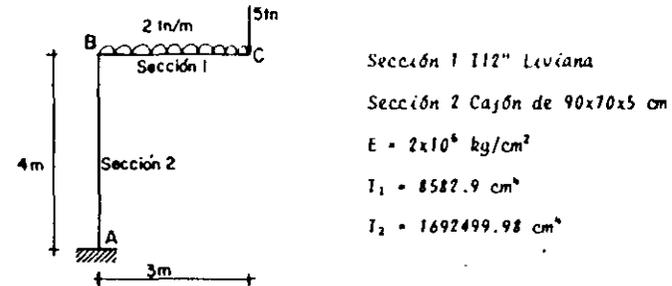
$$U_n = \frac{P\Delta}{2} ; \Delta = \frac{PL}{AE} ; U_n = \frac{P^2L}{2AE}$$

$$U_n = \frac{(3000)^2 (400)}{2 \times 2 \times 10^6 \times 175} = 5.143 \text{ kg-cm}$$

$$U_b = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^{400} \frac{(1000x)^2}{EI} dx = \frac{x^3 \times 10^6}{6EI} \Big|_0^{400} = 585.14 \text{ kg-cm}$$

$$U_b = 585.14 + 5.143 = 590.28 \text{ kg-cm}$$

Problema 3.- Determinar la energía de deformación de la siguiente estructura.



Cálculo de momentos

$$M_{CB} = \frac{wX^2}{2} + 5X = \frac{20X^2}{2} + 5000X$$

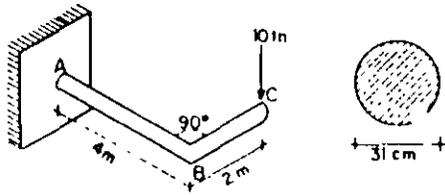
$$M_{BA} = 2.4 \times 10^6 \text{ kg-cm}$$

La energía de deformación es

$$U_b = \int_0^{300} \left( \frac{20X^2}{2} + 5000X \right)^2 \frac{dX}{2EI} + \int_0^{400} \frac{(2.4 \times 10^6)^2}{2EI} dx$$

$$U_b = 7320.52 + 340.32 = 7660.84 \text{ kg-cm}$$

Problema 4.- Calcular la energía de deformación para la siguiente figura.



$$\mu = 0.333$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$I = \frac{\pi R^4}{4} = 4.533 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = 90666 \text{ cm}^4$$

La energía de deformación vale.  $u = u_b + u_T$

$$u = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx + \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$$

Cálculo de M y T

$$M_{BA} = -10x \text{ [kg] origen en B}$$

$$M_{CB} = -10x \text{ [kg] origen en C}$$

$$u_b = \int_0^4 \frac{[-10x]^2 dx}{2EI} + \int_0^2 \frac{[-10x]^2 dx}{2EI} = \frac{10^2 \times 4^3}{6EI} + \frac{10^2 \times 2^3}{6EI} = \frac{1200}{EI}$$

$$u_T = \int_0^2 \frac{(20)^2}{2GJ} dx = \frac{800}{GJ}$$

$$\therefore u = \frac{1200}{EI} + \frac{800}{GJ} \text{ energía de deformación total}$$

$$EI = 2.1 \times 10^6 \times 45.333 \times 10^3 = 9520 \text{ ton-m}^2$$

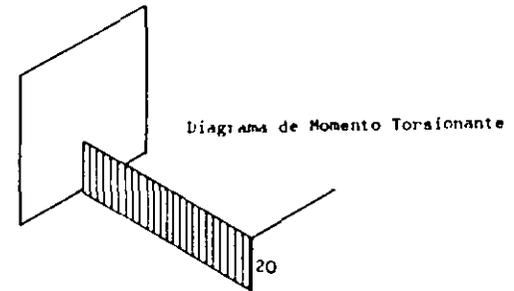
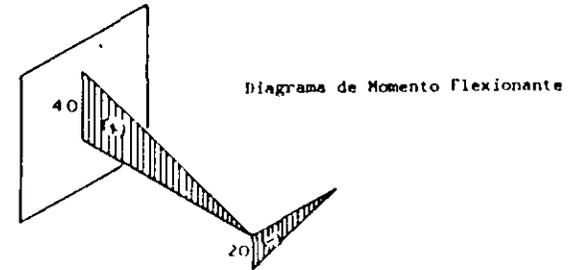
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2.1 \times 10^6}{2(1+0.333)} = 0.78 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$GJ = 7.08 \times 10^{10} \text{ kg-cm}^2 = 7080 \text{ ton-m}^2$$

Sustituyendo

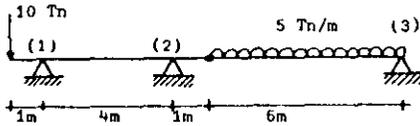
$$u = \frac{1200}{9520} + \frac{800}{7080} = 0.24 \text{ ton-m}$$

En las siguientes figuras se muestran los diagramas de momento flexionante y torsión.



PRINCIPIO DE LOS DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES AL CALCULO DE ELEMENTOS MECANICOS.

Problema 1.- Encontrar  $R_1, R_2, R_3$ , aplicando el principio de desplazamientos virtuales.



$\delta$  = desplazamiento virtual

Se supone que el apoyo (3) se desplaza  $\delta$ , entonces:

$$W = R_3 \delta - (5 \times 6) \delta / 2 = 0$$

$$R_3 = 15 \text{ ton.}$$

Si (2) se desplaza  $\delta$

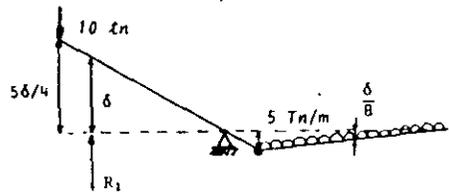
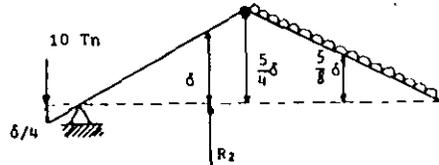
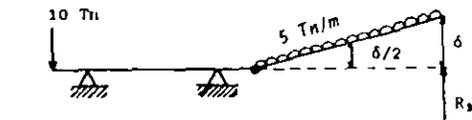
$$W = R_2 \delta + 10 \frac{\delta}{4} - \frac{150}{8} \delta = 0$$

$$R_2 = 16.25 \text{ ton.}$$

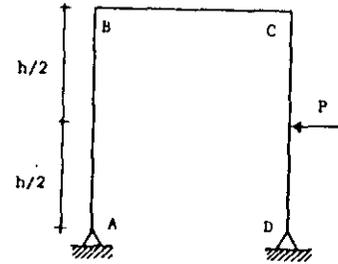
Si (1) se desplaza  $\delta$

$$W = R_1 \delta - 10 \times \frac{5}{4} \delta + (5 \times 6) \frac{\delta}{8} = 0$$

$$R_1 = 8.75 \text{ ton.}$$



Problema 2.- Calcular en el siguiente marco el momento en el punto "C".



Introduciendo una articulación en el punto de interés

$$W = M \alpha + [P] \delta / 2$$

$$\alpha = \delta / h$$

Sustituyendo en W

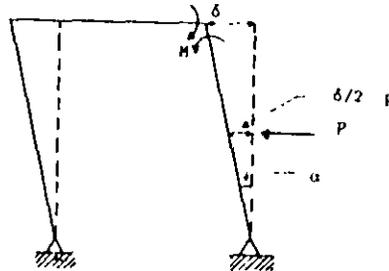
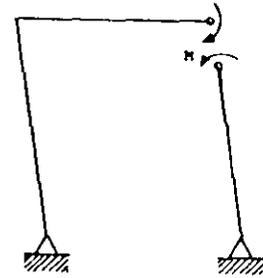
$$W = M \delta / h + P \delta / 2$$

Como debe existir equilibrio  $W = 0$

$$M \delta / h + P \delta / 2 = 0$$

$$M = - Ph / 2$$

El signo negativo indica que el sentido del momento es contrario al supuesto

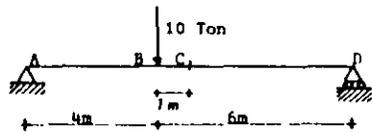


APLICACION DEL TEOREMA DE CASTIGLIANO AL CALCULO DE DESPLAZAMIENTOS.

"La derivada parcial de la Energía de Deformación, respecto a una carga P, es igual al valor del desplazamiento bajo el punto de aplicación y en la dirección de P".

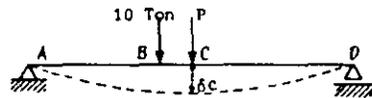
$$\delta_i = \frac{\partial M}{\partial P_i} \quad \dots (1) \quad (\text{desplazamiento})$$

Problema 1.- Calcular la flecha del punto c en la viga mostrada.



$$\delta_c = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

Se puede suponer



P es ficticia y sirve para hacer la derivación parcial y posteriormente se le da su valor nulo

Cálculo de momentos:

Tramo A-B

$$M = (6 + P/2)X = 6X + (P/2)X$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{X}{2}; \quad (M) \frac{\partial M}{\partial P} = 3X^2 + \frac{PX^2}{4}$$

Tramo B-C (origen en A)

$$M = (6 + P/2)X - 10(X-4) = 6X + (P/2)X - 10X + 40$$

$$M = (P/2)X - 4X + 40$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{X}{2}; \quad (M) \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{PX^2}{4} - 2X^2 + 20X$$

Tramo D-C (origen en D)

$$M = (4 + P/2)X = (P/2)X + 4X$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{X}{2}; \quad (M) \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{PX^2}{4} + 2X^2$$

Integrando las ecuaciones de momentos y sabiendo que P = 0 se tiene

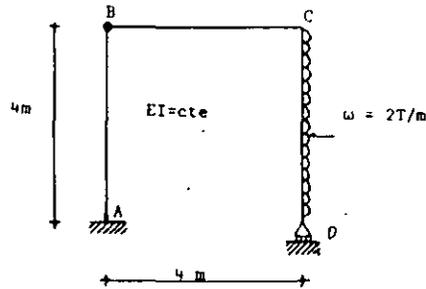
$$\delta = \int_0^4 \frac{3X^2}{EI} dx + \int_4^6 \frac{[-2X^2 + 20X]}{EI} dx + \int_0^6 \frac{2X^2}{EI} dx =$$

$$= \frac{X^3}{EI} \Big|_0^4 + \left[ \frac{-(2/3)X^3 + 10X^2}{EI} \right]_4^6 + \frac{2X^3}{3EI} \Big|_0^6 =$$

$$= \left[ 64 + \left[ \frac{-83.33 + 250 + 47.67 - 160}{EI} \right] + 83.33 \right] \frac{1}{EI}$$

$$\therefore \delta = \frac{196.67}{EI}$$

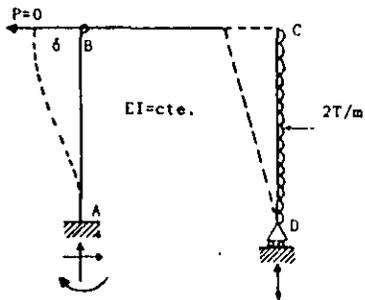
Problema 2.- Determinar el desplazamiento horizontal del nudo B de la estructura mostrada



Se considerará únicamente efectos de flexión

$$\delta_{HB} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

Supóngase la siguiente condición



El valor que se le a dado a P, es arbitrario y una vez que se ha derivado respecto a P se le da dicho valor.

Cálculo de las reacciones y momentos en el marco.

$$\sum M_A = R_D (4) - P(4) - 2(4)(2) ; R_D = \frac{P+4}{1} = A_y$$

$$\sum F_x = A_x - P - 2(4) ; A_x = P+8$$

$$\sum M_B = M_A - A_x(4) ; M_A + 4(P+8) = \frac{4P+32}{1} = M_A$$

Momentos

Tramo A-B (origen A)

$$M = 4P + 32 - [P+8]X = P(4-X) - 8X + 32$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = 4-X ; M \frac{\partial M}{\partial P} = 8X^2 - 64X + 128 + P(X^2 - 8X + 16)$$

Tramo B-C (origen B)

$$M = [P+4]X - PX + 4X ; \frac{\partial M}{\partial P} = X$$

$$M \frac{\partial M}{\partial P} = 4X^2 + PX^2$$

Tramo C-D (origen C)

$$M = [P+4]4 - PX - X^2 = P(4-X) - X^2 + 16$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = 4-X ; M \frac{\partial M}{\partial P} = X^3 - 4X^2 - 16X + 64 + P(X^2 - 8X + 16)$$

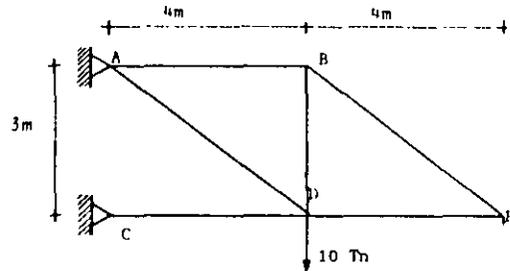
Integrando las ecuaciones de momentos y sabiendo que  $P=0$

$$[EI] \delta_{HB} = \int_0^4 (8X^2 - 64X + 128) dx + \int_0^4 4X^2 dx + \int_0^4 (X^3 - 4X^2 - 16X + 64) dx$$

$$= \left[ \frac{8X^3}{3} - \frac{64X^2}{2} + 128X + \frac{4}{3}X^3 + \frac{X^4}{4} - \frac{4}{3}X^3 - \frac{16X^2}{2} + 64X \right]_0^4$$

$$= \left[ \frac{X^4}{4} + \frac{8}{3}X^3 - 40X^2 + 192X \right]_0^4 ; \delta_{HB} = \frac{302.67}{EI}$$

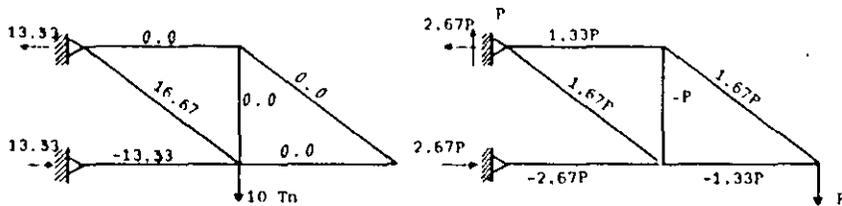
Problema 3.- Calcular el desplazamiento para la armadura mostrada en el punto "E"



Isostática

Se establecen las fuerzas axiales en las barras en función de una carga "P" aplicada en (E) y después derivar respecto a ella.

Se tendrán que resolver las 2 armaduras siguientes y después particularizar el valor de "P",



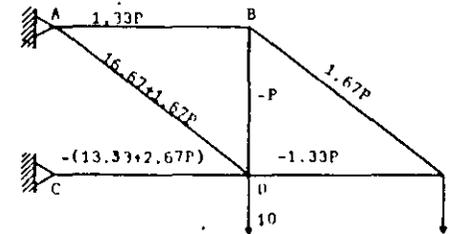
Para el caso de armaduras, las fuerzas axiales se consideran que son constantes para cada una de las barras, en ese caso la integral

$$\delta i = \sum \frac{N}{AE} \left[ \frac{\partial N}{\partial P} \right] dx$$

se convierte en suma de integrales para cada barra, los cuales se pueden sumar como:

$$\delta i = \sum \frac{N}{AE} \left[ \frac{\partial N}{\partial P} \right] L \quad \dots (1)$$

Por superposición de efectos de las dos armaduras anteriores, se tiene



Para aplicar la expresión (1) es conveniente disponer de una tabla como sigue

Barra	1	2	3	4	5	6
	L	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$\frac{\partial N}{\partial P} \cdot L$
AB	4	1.33P	1.33	0.0	0.0	0.0
BE	5	1.67P	1.67	0.0	0.0	0.0
AD	5	16.67 + 1.67P	1.67	27.84	139.2	
BD	3	-P	-1	0.0	0.0	
CD	4	-13.33 - 2.67P	-2.67	35.59	142.36	
DE	4	-1.33P	-1.33	0.0	0.0	
						281.56

En la columna (5) se debe considerar el valor real de "P" que en este

caso vale 0 tn.

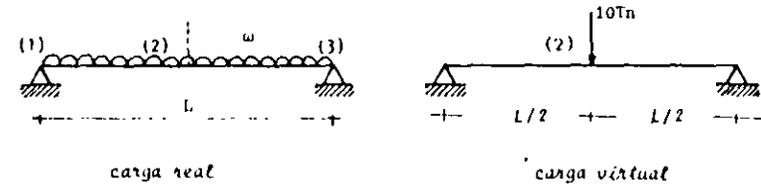
Por lo tanto, el desplazamiento buscado será

$$\delta_{VI} = \frac{2.81156}{AE} \text{ hacia abajo}$$

El signo de la sumatoria está asociado a la dirección en que se supuso "p"

### PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL.

Problema 1.- Encontrar  $\Delta v_2$  de la siguiente viga aplicando el principio del trabajo virtual.



Aplicando una fuerza virtual de 10 tn. en el punto de interés:

Cálculo de momentos en el punto de interés

$$M_R = \frac{\omega l}{2} x - \frac{\omega x^2}{2}; M_V = 5x; 0 \leq x \leq L/2$$

El trabajo externo desarrollado es:  $\omega v_e = \frac{1}{2}(10)\Delta v_2$

El trabajo virtual interno debido a flexión es:

$$\omega v_i = \int \frac{M_R M_V}{2EI} dx$$

$$\omega v_i = \int_0^{L/2} \frac{[1/2 \omega l x - 1/2 \omega x^2] 5x}{2EI} dx + \int_{L/2}^L \frac{[1/2 \omega l x - 1/2 \omega x^2] 5x}{2EI} dx$$

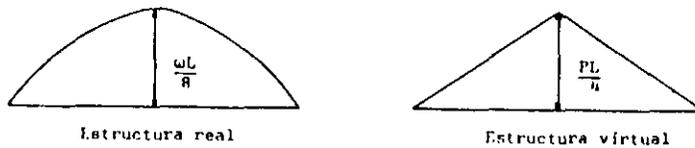
$$\omega v_i = \frac{12.5}{192} \frac{\omega L^4}{EI} \text{ Trabajo interno}$$

Aplicando el teorema de Betti se tiene

$$\omega_{vi} = \omega_{ve}; \quad 5\Delta v_2 = \frac{12.5 \omega l^4}{192 EI}; \quad \Delta v_2 = \frac{5 \omega l^4}{384 EI}$$

Otra forma de solución es usando las tablas de integración.

Los diagramas de momentos para cada una de las cargas son.



Usando la columna 7 y renglón 5 de la tabla de integración.

$$\omega_{vi} = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{3} L (1+\alpha\beta) \frac{\omega l^2}{8} - \frac{PL}{4} \right]; \quad \alpha_5 = \beta_5 = 1/2; \quad \alpha = \beta = 1/2$$

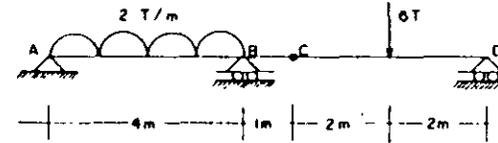
$$\omega_{vi} = \frac{1}{2EI} \left[ 0.333 L (1 + 0.25) 0.313 \omega l^2 \right] = \frac{1}{2EI} \times \frac{12.5}{96} \omega l^4$$

Según Betti  $\omega_{ve} = \omega_{vi}$

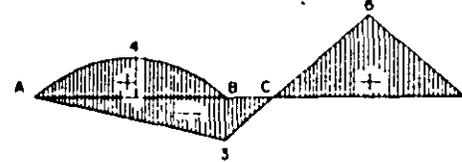
$$\frac{10}{7} \Delta v_2 = \frac{1}{2EI} \frac{12.5}{96} \omega l^4; \quad \Delta v_2 = \frac{5}{384} \frac{\omega l^4}{EI}$$

En los siguientes ejercicios se suprimirá el factor 1/2 que aparece en las expresiones de  $\omega_{vi}$  y  $\omega_{ve}$ .

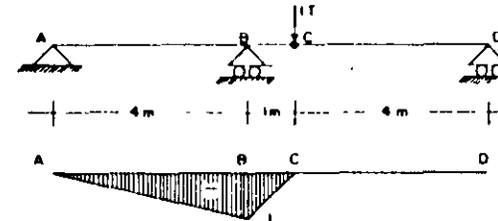
Problema 2.- Determina el giro relativo y el desplazamiento vertical en el punto C.



El diagrama de momentos es el siguiente



Aplicando una carga virtual en el punto C



$$\omega_{ve} = 1 \Delta v_c$$

Usando las tablas para el cálculo de  $w_{vi}$

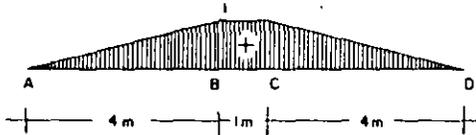
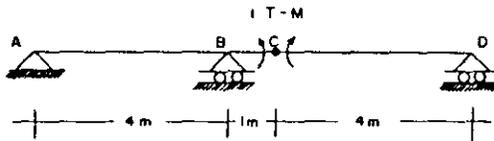
$$w_{vi} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} (1) (-3) (-1) + \frac{1}{3} (4) (-3) (-1) + \frac{1}{3} (4) (-1) (4) \right] = -\frac{0.33}{EI}$$

R2 · C2      R2 · C2      R2 · C4

R2 = renglón 2      C2 = columna 2 ----- etc.

Como  $w_{ve} = w_{vi}$ ;  $\Delta_{ve} = -\frac{0.3}{EI}$  +

Ahora se aplicará un momento virtual en el mismo punto



Usando las tablas de integración:

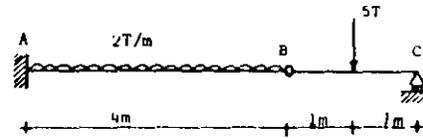
$$EI w_{ve} = \frac{1}{6} (4) (1+0.5) (1) (6) + \frac{1}{2} (1) (1) (-3) + \frac{1}{3} (4) (1) (-3) + \frac{1}{3} (4) (1) (4)$$

R3 · C7      R3 · C1      R2 · C2      R2 · C4

$$EI w_{ve} = 5.83; \theta_c = \frac{5.83}{EI}$$

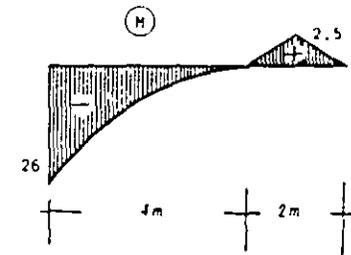
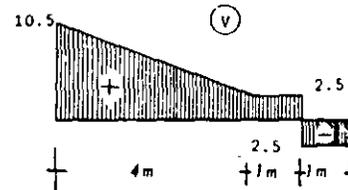
Problema 3.- Para la viga que se muestra enseguida, determinar:

- El desplazamiento vertical del punto B tomando en cuenta únicamente flexión
- Desplazamiento vertical del punto B considerando los efectos de flexión y cortante
- Calcular el giro a la izquierda de la articulación considerando los efectos por flexión

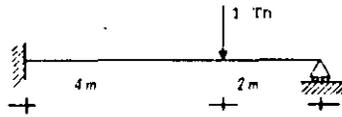


I 12" Liviana  
 $EI = 179.64 \times 10^6 \text{ kg-cm}^2$

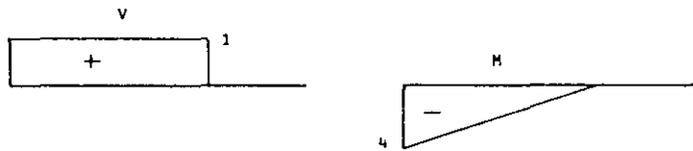
Los diagramas de fuerza cortante y momento son:



Aplicando una carga virtual en el punto B



Los diagramas de cortante y momento son:



a). - Integrando la ecuación de momentos

$$\Delta v_{B_1} = \int_0^4 \frac{M \cdot m}{EI} dx = \int_0^4 \frac{[2.5x + x^2]}{EI} \cdot x dx$$

$$= \left[ \frac{2.5x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right] \frac{1}{EI} = \frac{117.33 \times 10^9}{EI} \text{ kg.cm}^3;$$

$$EI = 179.64 \times 10^9 \text{ kg.cm}^2 ; \Delta v_B = \frac{117.33 \times 10^9}{179.64 \times 10^9} = 6.531 \text{ cm}$$

b). -  $\Delta v_{B_2} = \int_0^4 \frac{V v dx}{CAG} = \frac{C}{2} (4) (10.5 + 2.5) 1 = \frac{26}{AG} \text{ C}$

$C = 2.7$   
 $A = 59.74 \text{ cm}^2$   
 $G = 770\,000 \text{ kg/cm}^2 ; AG = 46.0 (10)^3 \text{ ton}$

$$\Delta v_{B_2} = 0.152 \text{ cm}$$

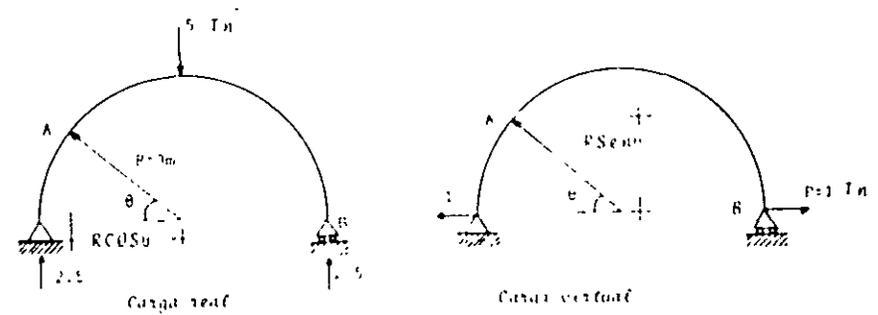
El desplazamiento total es  $\Delta v_{B_1} + \Delta v_{B_2} = 6.68 \text{ cm}$

c). - Suponiendo un momento unitario en B

$$\alpha = \int_0^4 \frac{[2.5x + x^2]}{EI} (1) dx = \frac{41.33}{EI} = 0.023 \text{ rad}$$

$$\alpha = 1.318^\circ$$

Problema 4.- Obtener el desplazamiento horizontal del nudo B



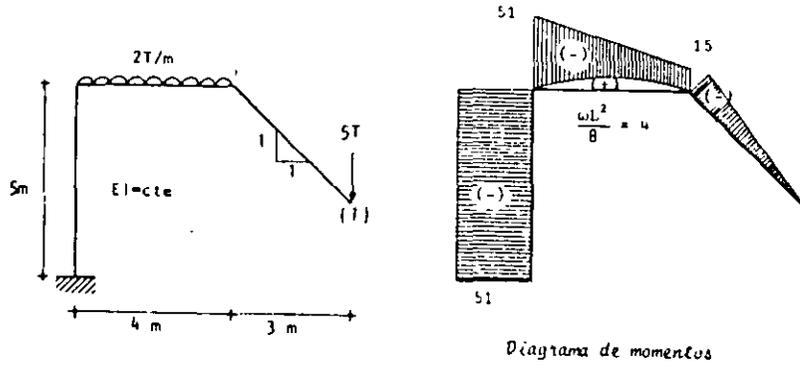
Tomando momentos en el punto A

$$M_A = 2.5 [R - R \cos \theta] ; \quad u_A = 1 \text{ sen} \theta [R] ; \quad dx = R d\theta$$

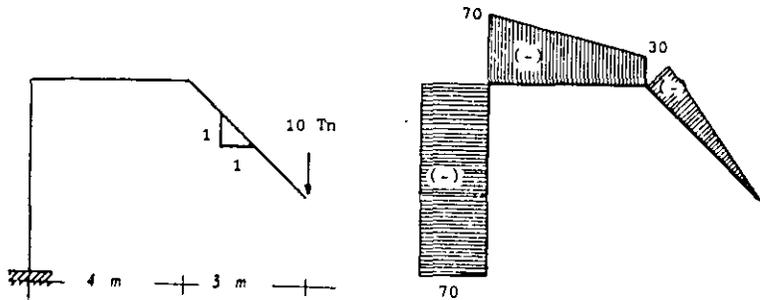
$$\Delta_{HB} = 2 \cdot \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} M_A m_A dx = \frac{2}{EI} \int_0^{\pi/2} 5R^2 (1 - \cos \theta) \text{ sen} \theta d\theta$$

$$\Delta_{HB} = -\frac{5 R^4}{EI} \int_0^{\pi/2} (\sin^4 \theta - \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta = \frac{67.5}{EI}$$

Problema 5.- Determine el desplazamiento vertical en el punto (1) del siguiente marco



Aplicando una carga virtual de 10 t en (1):  $w_{ve} = 10\delta v_1$



$$EI w_{ve} = \frac{1}{2} (4.24)(30)(15) + \frac{1}{6} \left[ (2)(15)(30) + 15(70) + 2(51)(70) + (51)(30) \right]$$

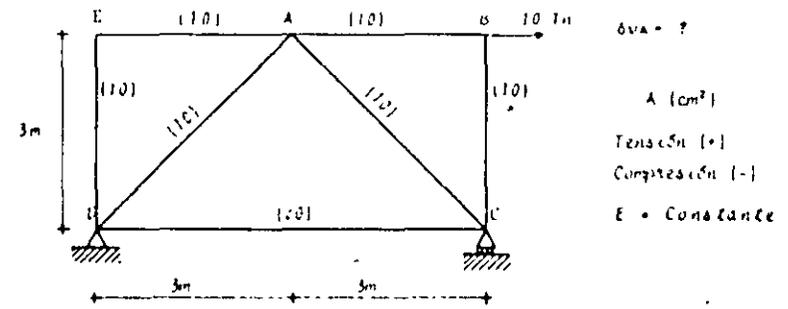
$R2 \cdot C2 \qquad R4 \cdot C3$

$$= (1/3) + (30 \cdot 70)(4) + 5(51)(70) + 25032$$

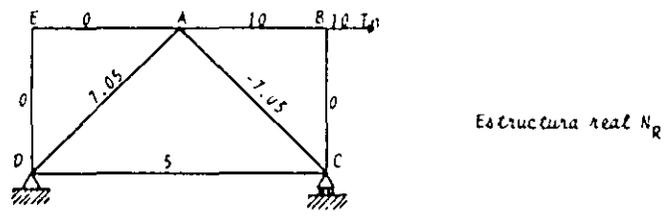
$R4 \cdot C4 \qquad R1 \cdot C1$

Carga  $w_{ve} = w_{vi}$ ,  $\delta v_1 = \frac{2502.5}{EI}$

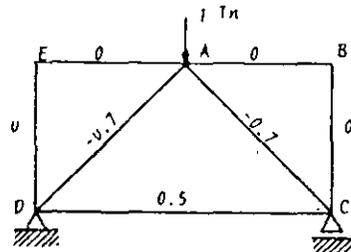
Problema 6.- Calcular el desplazamiento vertical en la siguiente armadura. Las áreas de cada barra aparecen entre paréntesis.



Se calculan las fuerzas en todas las barras en la estructura real.



Se aplica una carga virtual en el punto de interés y se calculan las fuerzas en las barras.



Estructura virtual  $N_v$

El trabajo interno desarrollado en cada barra es

$$w_{vi} = \int \frac{N_R N_v}{AE} dx = \sum \frac{N_R N_v}{AE} L$$

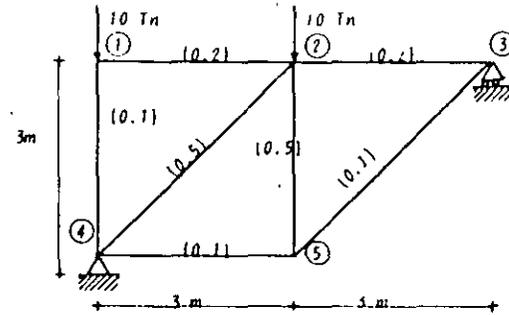
Para facilitar el cálculo se elabora la siguiente tabla

Barra	A	L	$N_R$	$N_v$	$\frac{N_R N_v}{A} L$
AB	10	300	10	0	0
BC	10	300	0	0	0
AE	10	300	0	0	0
ED	10	300	0	0	0
AD	10	424	7.05	-0.7	-2092
AC	10	424	-7.05	-0.7	2092
CD	20	600	5	0.5	75

$$\Sigma = 75.0$$

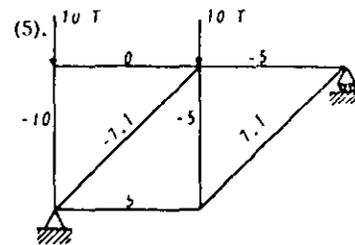
Como  $w_{ve} = w_{vi}$ ;  $\Delta v_A = \frac{75.0}{E}$

Problema 7.- Calcular el desplazamiento vertical del nudo 5 en la siguiente armadura. El área, en  $m^2$ , de cada barra aparecen entre paréntesis.

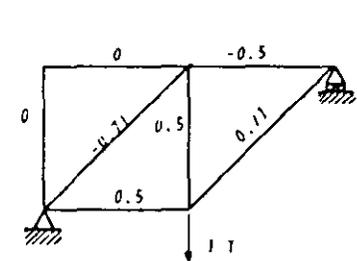


$E = \text{constante}$

Se calculan las fuerzas en las barras que componen la armadura, tanto para condiciones reales como para la carga virtual aplicada en el nudo 5



Estructura Real  $N_R$



Estructura Virtual  $N_v$

El trabajo interno desarrollado  $w_{vi}$  es igual a

$$w_{vi} = \sum \frac{N_R N_v}{AE} L \quad ; \quad w_{ve} = 1 \times \Delta v_5$$

se forma la siguiente tabla para el cálculo de  $\Delta v_i$

Barra	A	L	$N_R$	$N_v$	$\frac{N_R N_v l}{A}$
1-2	0.2	3	0	0	0.0
2-3	0.2	3	-5	-0.5	37.5
4-5	0.1	3	5	0.5	75.0
4-1	0.1	3	-10	0	0.0
5-2	0.5	3	-5	0.5	-15.0
4-2	0.5	4.23	-7.1	-0.71	42.6
5-3	0.1	4.23	7.1	0.71	213.0

$\Delta v_s = 353.10$

Si  $\Delta v_e = \Delta v_i$  ;  $\Delta v_s = \frac{353.1}{E}$

## CAPITULO 4

### ESTABILIDAD Y GRADO DE INDETERMINACION DE ESTRUCTURAS

ESTABILIDAD Y GRADO DE INDETERMINACION DE ESTRUCTURAS

La estabilidad y el grado de indeterminación de las estructuras se determina por el número y la disposición de sus apoyos, elementos y uniones. Puede hacerse por simple observación o por medio de fórmulas.

Las estructuras estables para casos particulares de carga, pero inestables para condiciones generales de carga son desde luego inestables (fig. 1).

Si las incógnitas de reacción son menores a 3 no se satisface el equilibrio y el sistema es inestable.

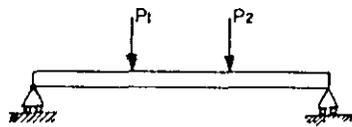


fig 1

En la fig. 1 no se cumple equilibrio horizontal para un sistema cualquiera de cargas. También las incógnitas de reacciones son menores que tres.

Para que haya equilibrio estable en un cuerpo, como mínimo se requieren tres elementos de reacción. fig. 2.



fig 2

Se puede concluir que una estructura estáticamente determinada, es aquella cuyas reacciones se pueden calcular a partir de las ecuaciones de equili

brío estático.

Se puede tener una estructura geoméricamente inestable, o sea aquella que tenga el número suficiente de reacciones para lograr la estabilidad pero colocadas incorrectamente fig. 3.



fig 3

Por último, si el número de incógnitas de reacción es mayor que tres el sistema es estáticamente indeterminado. Será estable si no hay inestabilidad geométrica, siendo el exceso de incógnitas el grado de indeterminación (fig. 4).

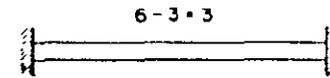


fig 4

Vigas

Si en una viga estable y estáticamente determinada se coloca un dispositivo de unión (articulación interna), ésta se hará inestable. Como la articulación colocada no tiene capacidad de resistir un momento esto implica imponer una condición al sistema actuante de fuerzas, esto es que el momento será nulo en la articulación,  $M = 0$  (fig. 5)

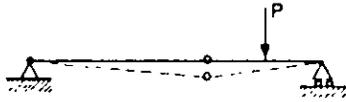


fig 5

Para hacer estable una de estas estructuras, será necesario colocar por lo menos un elemento adicional de reacción (fig. 6).

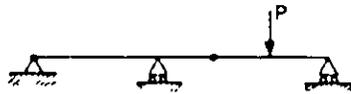


fig 6

Establezcamos un criterio para calcular el grado de indeterminación y estabilidad de las vigas.

- a)- si  $r < C + 3$ , la viga es inestable
- b)- si  $r = C + 3$ , la viga es estáticamente determinada siempre y cuando no exista, inestabilidad geométrica.
- c)- si  $r > C + 3$ , la viga es estáticamente indeterminada.

donde:

$r$  = número de elementos de reacción

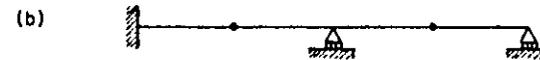
$C$  = número de condiciones adicionales.

Ejemplos:



$$2 + 3 > 4$$

inestable



$$2 + 3 = 5$$

estáticamente determinada



$$1 + 3 < 5$$

estáticamente indeterminada

**Armaduras**

En una armadura el número total de incógnitas será el número de barras más el número de elementos de reacción. Cada nudo tiene dos ecuaciones de equilibrio

Establezcamos un criterio para determinar la estabilidad y grado de indeterminación.

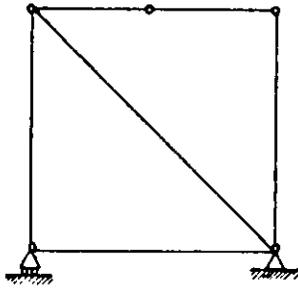
a). - si  $b + r < 2j$ , el sistema es inestable

b). - si  $b + r = 2j$ , el sistema es estáticamente determinado siempre y cuando sea estable

c). - si  $b + r > 2j$ , el sistema es estáticamente indeterminado--

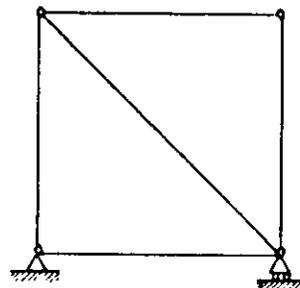
donde:  $b$  = número de barras;  $r$  = reacciones;  $j$  = nudos

Ejemplos:



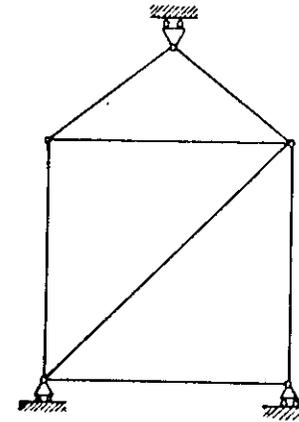
$6 + 3 < 10$

inestable



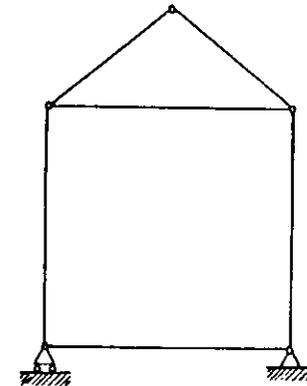
$5 + 3 = 8$

estáticamente determinada y estable



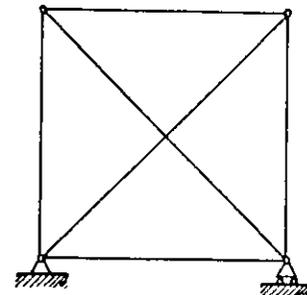
$7 + 3 = 10$

inestable  
no hay equilibrio horizontal.



$6 + 3 < 10$

inestable

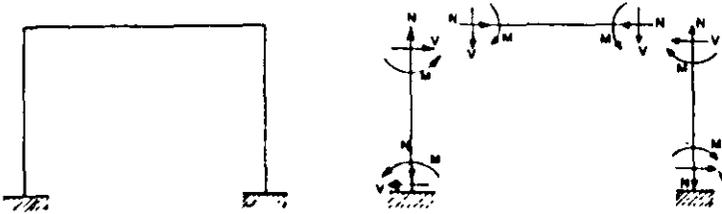


$6 + 3 > 8$

estable e indeterminada de 1º grado

## : Marcos

Un marco puede separarse en varios elementos.  
(columnas y vigas).



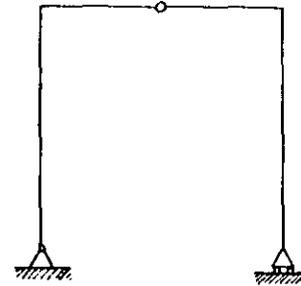
En una sección de un elemento existen tres magnitudes desconocidas (N, V y M). Si se conocen estas cantidades en una sección, pueden determinarse las correspondientes a otra sección cualquiera.

Si se considera:  $b$  = número total de elementos  $r$  = el número de elemento de reacciones, entonces el número total, de incógnitas independientes en un marco será  $(3b + r)$

Se puede establecer que:

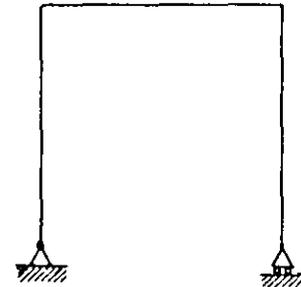
- si  $3b + r < 3j + C$ , el marco es inestable
- si  $3b + r = 3j + C$ , el marco es estáticamente determinado siempre que sea a la vez estable.
- si  $3b + r > 3j + C$  el marco es estáticamente indeterminado

## Ejemplos:



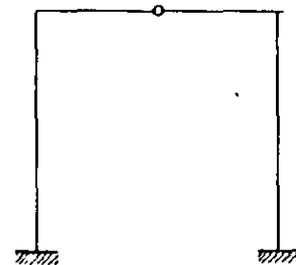
$$3(4) + 3 < 15 + 1$$

inestable



$$3(3) + 3 = 3(4)$$

estáticamente determinado



$$3(4) + 6 > 5(3) + 1$$

indeterminado de 2° grado

## MÉTODO DE LAS FLEXIBILIDADES

## 1. - INTRODUCCION

El método de las flexibilidades (llamado también de las fuerzas) es básicamente la superposición de desplazamientos en términos de estructuras estáticamente determinadas. Las fuerzas o momentos que son las incógnitas, se determinan a partir de desplazamientos conocidos con base en las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones, que son aquellas ecuaciones que garantizan los desplazamientos finales como compatibles con las condiciones de apoyo originales de la estructura.

La viga mostrada en la figura 1, es hiperestática en primer grado, ya que hay 3 reacciones verticales y sólo se pueden usar dos ecuaciones de estática para resolverla.

CAPITULO 5  
MÉTODO DE LAS FLEXIBILIDADES

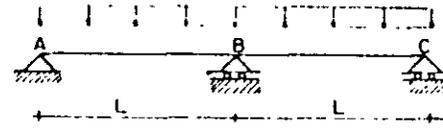


Fig. 1

Aplicando la definición del método de las flexibilidades para resolverlas, se escogerá como incógnita la reacción vertical en el apoyo central, lo cual nos lleva a considerar una estructura isostática que llamaremos estructura primaria (fig. 2).

Dado que en la viga original la flecha en el apoyo central debe ser nula, lo cual implica considerar que la flecha debida a las

cargas en ese punto deberá ser igual y de sentido contrario a la flecha debida a la reacción:

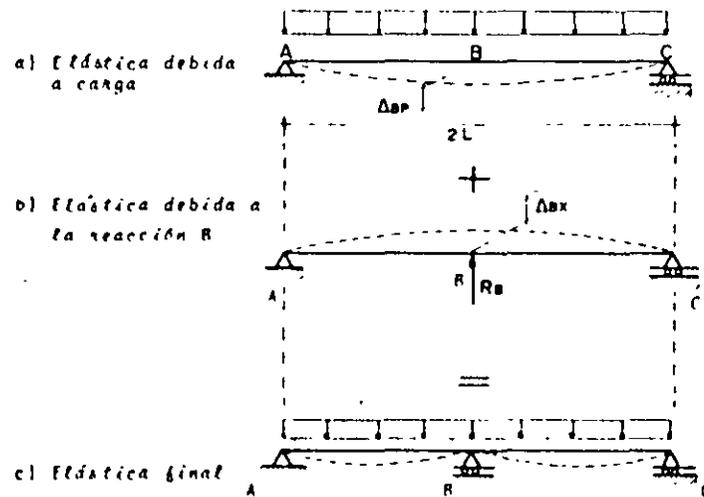


Fig. 2

La ecuación  $\Delta_{ap} + \Delta_{ax} = 0$ , es una ecuación de compatibilidad de desplazamientos, porque garantiza el desplazamiento final como compatible con las condiciones de apoyo originales de la estructura.

De la ecuación de compatibilidad se calcula el valor de la incógnita y el resto de la estructura podrá resolverse aplicando las ecuaciones de Estática.

Para una estructura con  $n$  redundantes, los desplazamientos deberán ser calculados para  $(n + 1)$  sistemas de cargas:

- Un análisis para el sistema de cargas y
- $n$  análisis para efectos de cada redundante.

La satisfacción de compatibilidad involucra un conjunto de  $n$  ecuaciones lineales, donde cada ecuación expresa una condición del desplazamiento final de la estructura cargada.

Cualquiera de las componentes de los desplazamientos para la estructura primaria son medida de la flexibilidad de la estructura, es decir, que la estructura es más flexible cuanto mayores sean los valores de los desplazamientos.

## II. - SOLUCION PARTICULAR Y COMPLEMENTARIA

Como se mencionó en la Introducción, en el método de las flexibilidades, la solución de una estructura hiperestática se logra mediante la superposición de desplazamientos de estructuras isostáticas, que se les puede llamar estructuras primarias.

La estructura primaria no es única ya que depende de la selección que se haga de las incógnitas o redundantes y la mejor de ellas será la que involucre el mínimo de trabajo numérico. Para obtener la estructura primaria, se hace la supresión de apoyos, o la transformación de un tipo de apoyo en otro más simple, o por una ruptura de la elástica de la estructura, que puede ser angular, lateral o longitudinal.

Para aclarar lo anterior, veamos la estructura siguiente. (fig. 3)

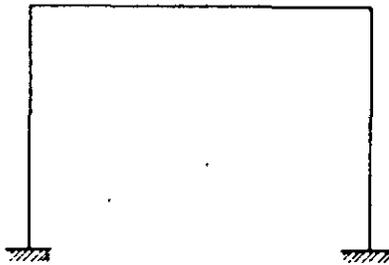


Fig. 3

Es una estructura hiperestática en tercer grado y dependiendo de la selección de incógnitas, podría haber entre otras, las siguientes estructuras primarias:

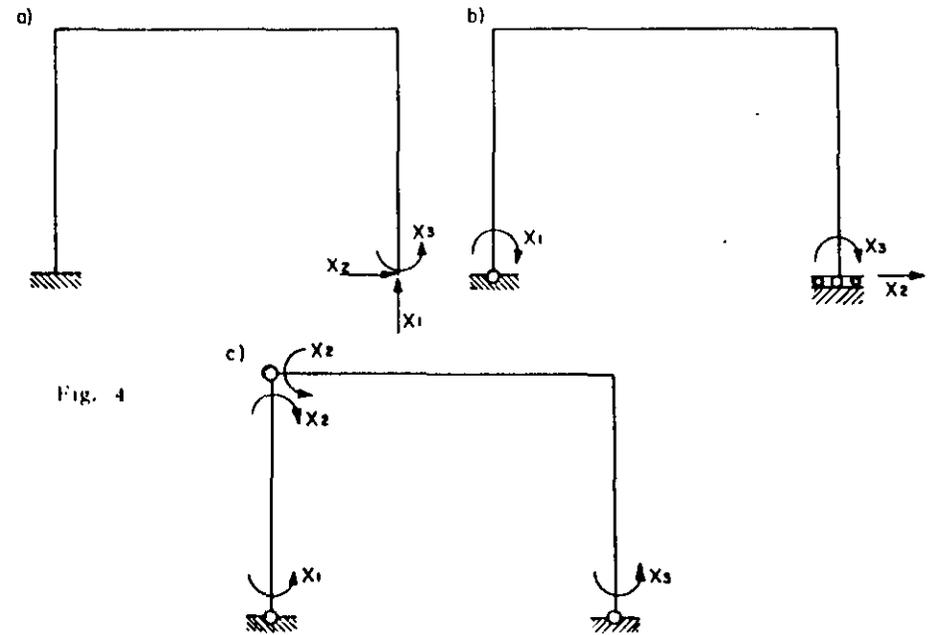


Fig. 4

Se hace notar que las condiciones que tienen estas estructuras primarias o cualesquiera otras deben ser estabilidad e isostaticidad.

Se le llamará solución particular a la estructura primaria sobre la que actúan las fuerzas externas y solución complementaria a la estructura primaria sobre la cual actúan cada una de las redundantes o incógnitas.

III. CALCULO DE LAS FLEXIBILIDADES

Para ilustrar el cálculo de las flexibilidades y la formulación de las ecuaciones de compatibilidad, se resolverá la estructura siguiente:

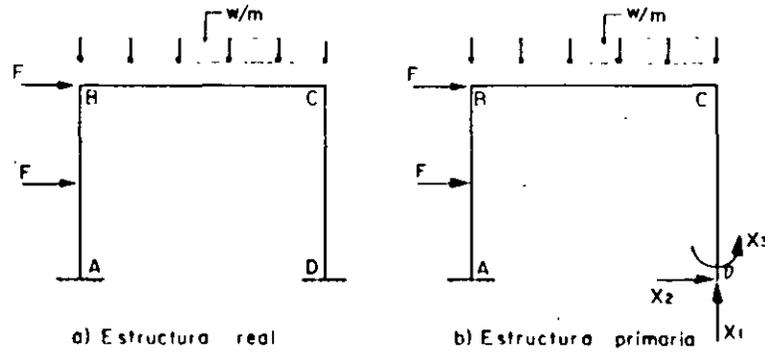


Fig. 5

De acuerdo con la estructura primaria, las incógnitas serán las reacciones vertical y horizontal en D y el momento en D.

Por lo tanto, la estructura real se podrá descomponer en la suma de las siguientes estructuras primarias con los efectos indicados en la fig. 6.

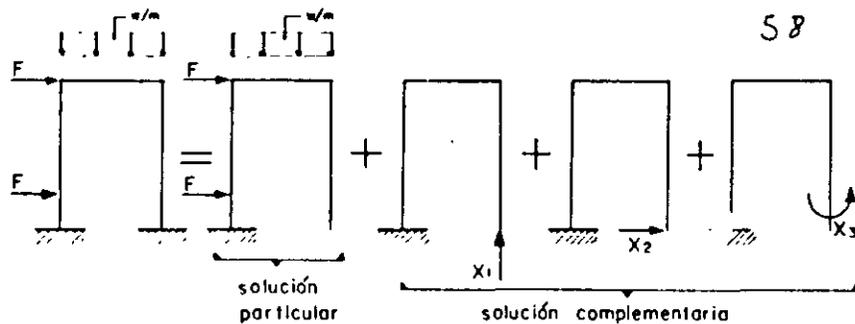


Fig. 6

La base de la compatibilidad en la estructura real será que el desplazamiento vertical, horizontal y el giro en D son nulos.

La representación gráfica de dichos desplazamientos se muestra a continuación Fig. 7:

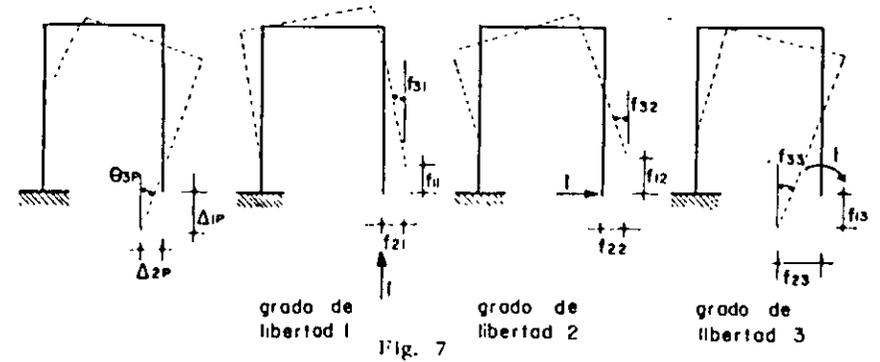


Fig. 7

El primer subíndice indica la correspondencia con el grado de libertad y el segundo la causa que provoca el desplazamiento. Por ejemplo,

$f_{23}$  indica el desplazamiento horizontal debido al momento que es la causa 3.

Las ecuaciones de compatibilidad se escribirán como sigue:

a) El desplazamiento vertical en D es nulo:

$$\Delta_{1P} + f_{11} X_1 + f_{12} X_2 + f_{13} X_3 = 0$$

b) El desplazamiento horizontal en D es nulo:

$$\Delta_{2P} + f_{21} X_1 + f_{22} X_2 + f_{23} X_3 = 0$$

c) El giro en D es nulo:

$$\Theta_{3P} + f_{31} X_1 + f_{32} X_2 + f_{33} X_3 = 0$$

Del sistema anterior de ecuaciones lineales, se obtendrá el valor de las incógnitas  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$ . Si alguno de los valores obtenidos resulta con signo negativo, significa que actúa en dirección contraria a la su puesta.

Es conveniente definir el efecto de las fuerzas redundantes de la estructura primaria en términos de los desplazamientos producidos por fuerzas (o causas) unitarias correspondientes a las redundantes.

Por ejemplo,  $f_{ij}$  corresponde al grado de libertad  $i$  debido a una causa (fuerza o momento) unitaria aplicada en  $j$ . A este valor  $f_{ij}$  se le llama coeficiente de flexibilidad.

Los coeficientes de flexibilidad, son entonces desplazamientos debidos a causas unitarias y dependen de la geometría y propiedades elásticas de la estructura primaria y son independientes del sistema de cargas real de la estructura real.

Así, por ejemplo, en la estructura anterior  $f_{11}$  y  $f_{12}$  son coeficientes de flexibilidad lineales y  $f_{13}$  es un coeficiente de flexibilidad angular. (fig. 7)

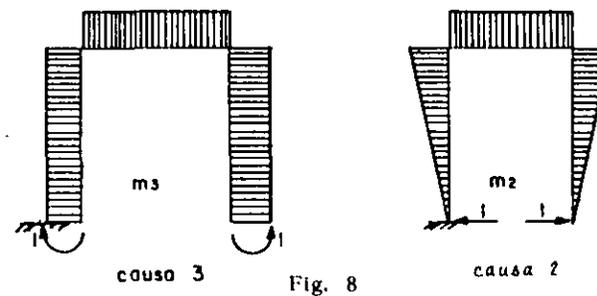
Expresando el sistema de ecuaciones del ejemplo resuelto en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \Theta_{3P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = 0$$

Los coeficientes de flexibilidad así arreglados forman la matriz de flexibilidades, la cual es siempre simétrica, debido al teorema recíproco de Maxwell-Betti y es una matriz cuadrada cuya diagonal principal es siempre positiva.

Los coeficientes de flexibilidad pueden obtenerse por cualquier método; sin embargo el más recomendable es el de trabajos virtuales.

Por ejemplo, para obtener el valor de  $f_{23}$  sería: (Fig. 8) el desplazamiento horizontal debido al momento unitario.



$$f_{23} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx$$

en forma general :  $f_{ij} = \int \frac{m_i m_j}{EI} dx ;$

La integral anterior se resuelve rápidamente para los casos más comunes mediante el uso de tablas.

La secuencia de cálculo, para la aplicación del método de las flexibilidades, puede resumirse como sigue:

- 1) Determinar el grado de hiperestaticidad  $n$  de la estructura.
- 2) Seleccionar las  $n$  incógnitas o redundantes y por lo tanto la estructura primaria correspondiente.
- 3) Resolver las  $n + 1$  estructuras, calculando los desplazamientos debidos a las cargas y a cada una de las redundantes.
- 4) Plantear las  $n$  ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos y resolver el sistema, obteniendo así el valor de cada una de las incógnitas.
- 5) Obtención de los diagramas de elementos mecánicos.

#### IV. ARMADURAS

En el análisis de armaduras hiperestáticas, al aplicar el método de las flexibilidades para el cálculo de las fuerzas en las barras, el problema se puede presentar según que el grado de hiperestaticidad sea externo, interno o ambos.

Por ejemplo en la armadura de la figura 9, el grado de hiperestaticidad es uno, y proviene de un apoyo, o sea externo:

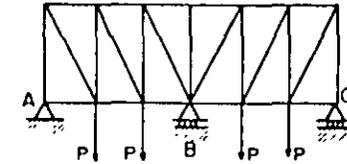
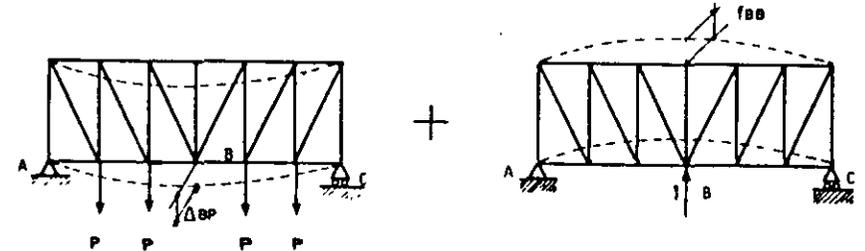


Fig. 9

La ecuación de compatibilidad sería, suponiendo como incógnita, la reacción central, que la deformación vertical en ese punto es nula. Las fuerzas en las barras se obtendrían, una vez calculado el valor de la incógnita, sumando algebraicamente las fuerzas debidas a la estructura primaria sometida a las cargas externas y al efecto de la redundante. Fig. 10



$$\Delta_{BP} + f_{BB} X_B = 0$$

Fig. 10

Los coeficientes de flexibilidad debidos a efectos axiales, se determinan mediante la expresi3n:

$$f_{ij} = \sum \frac{n_i n_j}{AE} L_i$$

Cuando la hiperestaticidad en las armaduras es de origen interno como en el caso de la Fig. (11)

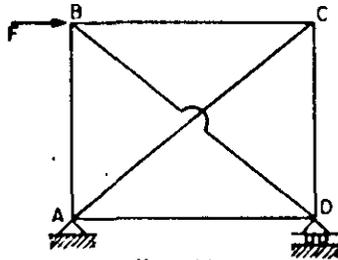


Fig. 11

la estructura primaria se formar3 "cortando" una de las barras y el problema se reduce a aplicar una ecuaci3n de compatibilidad del miembro liberado o sea:

$$\Delta_{1P} + f_{11} X_1 = 0$$

61

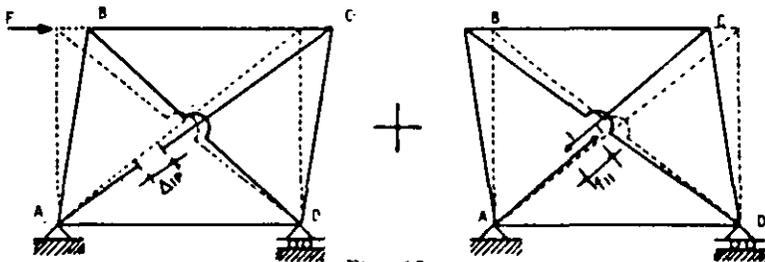


Fig. 12

Para la obtenci3n de los valores de  $\Delta_{1P}$  y  $f_{11}$ , lo m3s conveniente es el uso de tablas semejantes a las que se utilizaron para calcular desplazamientos por el m3todo de trabajos virtuales en armaduras.

Barra	P	p	L	A	$\sum \frac{P p L}{AE}$	$\sum \frac{p p L}{AE}$	$F = P + p X_1$
AB							
BC							
CD							
DA							
DB							
AC							
$\Sigma$					$\Delta_{1P}$	$f_{11}$	

Las fuerzas en las barras ser3n la suma de efectos de la estructura primaria bajo las cargas y bajo cada una de las redundantes, en este caso solamente una.

Cuando se presente el caso de hiperestaticidad interna y externa simult3neamente se superpondr3n los efectos de ambas.

Es importante se3alar que el grado de hiperestaticidad que interesa es el total de ambos: externo e interno. Sin embargo, se hizo hincapi3 en la distinci3n entre ambos para proceder al an3lisis.

#### V. ESTRUCTURAS CON ASENTAMIENTOS DE APOYOS

Cuando las estructuras presentan hundimientos diferenciales debidos a asentamientos de sus apoyos, la resoluci3n de las mismas mediante

el método de las flexibilidades, se hace escogiendo como redundantes las fuerzas existentes en los puntos en que se presentan los asentamientos, debido a que de esta forma, bastará con igualar en la ecuación de compatibilidad el valor del desplazamiento vertical al valor del asentamiento, en lugar de igualar a cero (fig. 13).

El signo que deberá darse al desplazamiento del segundo miembro de la ecuación de compatibilidad y que corresponde al valor del asentamiento diferencial quedará definido por el sentido con el que fue su puesto la fuerza en el apoyo; si coincide con el sentido de la fuerza será positivo y en caso contrario negativo.

En la Fig. 13 es evidente que en la ecuación de compatibilidad de desplazamientos verticales, deberá igualarse a  $-\Delta$ :

$$f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + f_{13}X_3 = -\Delta$$

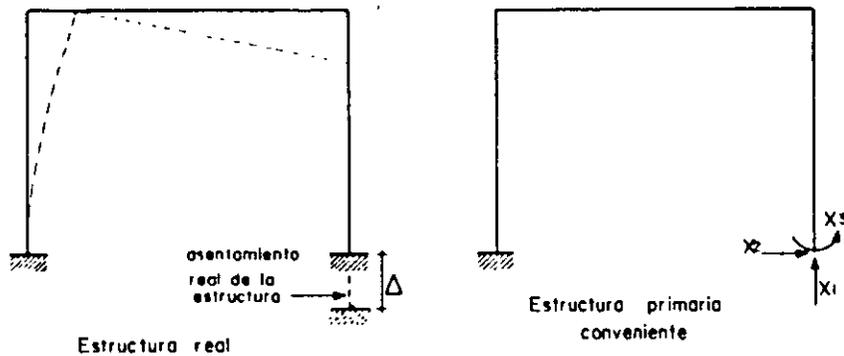


Fig. 13

El caso de rotaciones de los apoyos, deberá tratarse en forma semejante, planteando la ecuación de compatibilidad con base en que el giro en el apoyo es igual a la rotación del mismo, aplicando la misma regla que se dió para los signos.

#### VI. ESTRUCTURAS SOBRE APOYOS ELÁSTICOS

Cuando las estructuras están apoyadas en tal forma que no se limita totalmente el desplazamiento, pero que si presentan oposición al desplazamiento libre en esos puntos, se les llama apoyos elásticos.

La restricción que tienen es proporcional al desplazamiento provocado y su valor es:

$$F = K \cdot \Delta \quad (\text{Ley de Hooke})$$

en la cual K se le llama constante de proporcionalidad del apoyo. Dichas constantes, tienen unidades de fuerza entre desplazamiento.

Los apoyos elásticos se representan como sigue:

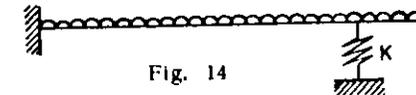
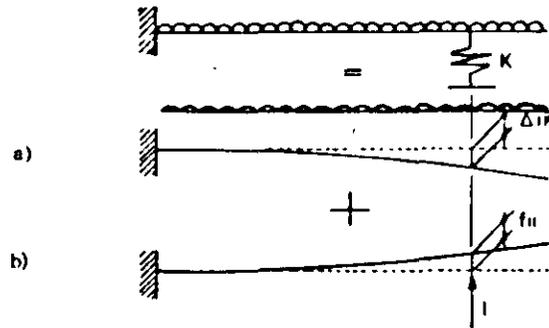


Fig. 14

Cuando las estructuras están sobre apoyos elásticos, es conveniente que las redundantes sean las fuerzas en los resortes, en tal forma que al plantear las ecuaciones de compatibilidad, los desplazamientos en los resortes sean iguales a la fuerza en el resorte dividido entre la constante de rigidez del mismo. El signo de este segundo miembro será negativo, ya que la fuerza aplicada del resorte a la estructura es de sentido contrario a su desplazamiento, provocando un trabajo negativo.

En la figura 14, la ecuación de compatibilidad se escribiría de acuerdo con la figura 15.



Donde

K = constante del resorte

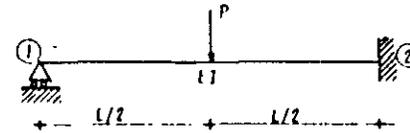
$$\Delta_{IP} + f_{11} X_1 = - \frac{X_1}{K}$$

Fig. 15

EJEMPLOS

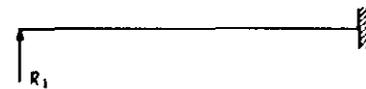
METODO DE FLEXIBILIDADES.

Problema No. 1. Obtener el diagrama de momentos de la siguiente viga.

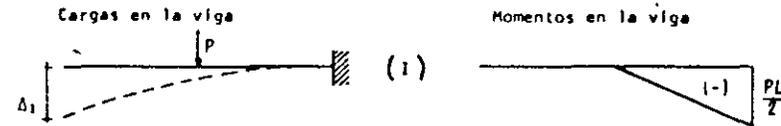


La estructura es de un grado de indeterminación, por lo que se tomará el apoyo en (1) como redundante.

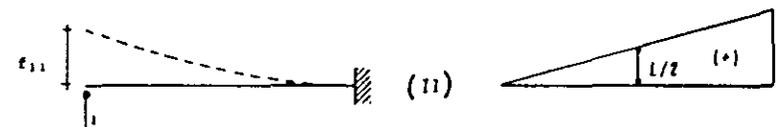
Estructura primaria.



Solución particular.



Solución complementaria.



Ecuación de compatibilidad.

$$\Delta_1 + f_{11}R_1 = 0$$

Cálculo de  $\Delta_1$  u  $f_{11}$  (por tablas)

Cálculo de  $\Delta_1$ : (I) real con (II) virtual

R2 . C3 (renglón 2, columna 3)

$$EI (I)\Delta_1 = \frac{1}{8} \text{Si} (K_1 + 2K_2) = \frac{1}{8} \frac{L}{2} \frac{PL}{2} \left(\frac{L}{2} + 2L\right)$$

$$\Delta_1 = \frac{5PL^3}{48EI}$$

Cálculo de  $f_{11}$ : (II) real con (II) virtual

R2 . C2 (renglón 2, columna 2)

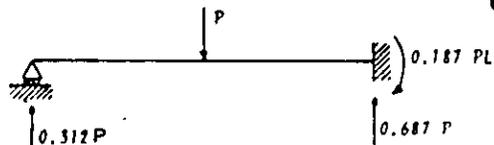
$$EI (II) f_{11} = \frac{1}{3} \text{Si} K = \frac{1}{3} L (II) L$$

$$f_{11} = \frac{1}{3} \frac{L^3}{EI}$$

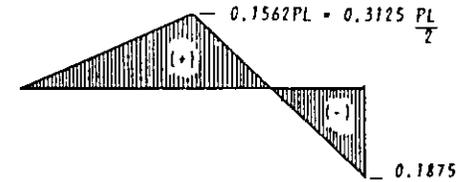
Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad se obtiene:

$$-\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{L^3}{3EI} R_1 = 0 ; \quad R_1 = 0.3125P$$

Las reacciones en la viga son

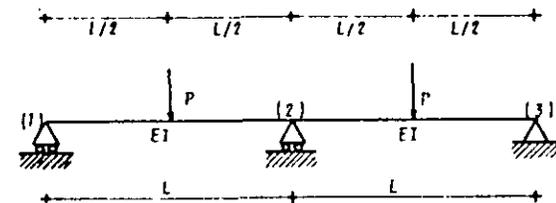


El diagrama de momentos es el siguiente:



En los ejemplos siguientes únicamente se anotará para el cálculo de desplazamientos el número de renglón y columna correspondiente a la tabla.

Problema No. 2. Determinar en la viga siguiente el diagrama de momentos flexionantes.



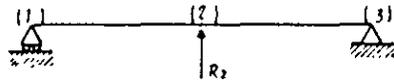
Su grado de indeterminación es uno.

$$r > C + 3$$

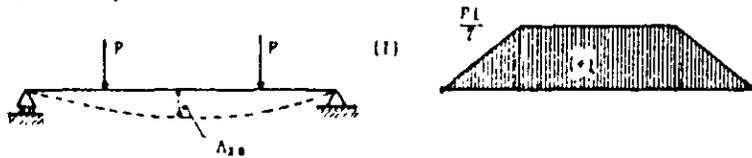
$$4 > 3$$

Eligiremos como redundante el apoyo (2)

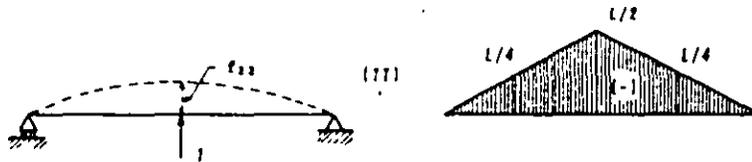
Estructura primaria



Solución particular.



Solución complementaria



Ecuación de compatibilidad =  $\Delta_{20} + f_{22} R_2 = 0$

Cálculo de deformaciones  $\Delta_{20}$  y  $f_{22}$  (por tablas)

Cálculo de  $\Delta_{20}$ , (I) real con (II) virtual

$$(EI)\Delta_{20} (I) = 2(R_2 \cdot C_2) + (R_1 \cdot C_3)2 = \frac{1}{3} s c k l^2 + \frac{1}{2} s c (k_1 + k_2)2$$

$$(EI)\Delta_{20} = 2 \left[ -\frac{1}{3} \frac{l}{2} \frac{l}{4} \frac{PL}{2} - \frac{1}{2} \frac{l}{2} \frac{PL}{2} \left( \frac{l}{4} + \frac{l}{2} \right) \right]$$

$$\Delta_{20} = -0.2292 PL^3/EI$$

Cálculo de  $f_{22}$ , (II) real con (II) virtual

$$R_2 \cdot C_7 ; (EI)f_{22} = \frac{1}{3} s c k = \frac{1}{3} 2L \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}$$

$$f_{22} = L^3/6EI$$

Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad.

$$-0.2292 PL^3 + L^3/6(R_2) = 0 ; \underline{R_2 = 1.375P}$$

Reacciones en la viga.

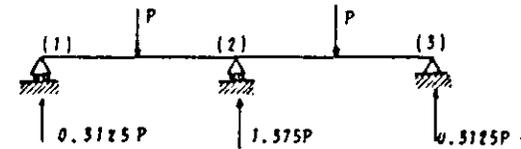
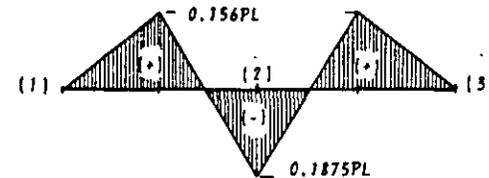
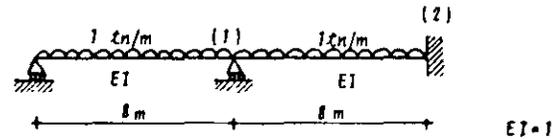


Diagrama de momentos flexionantes

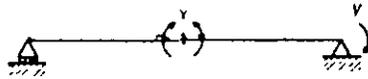


Problema 3.- Determinar las reacciones y el diagrama de fuerza cortante y momentos de la viga mostrada, la cual esta sujeta a una carga uniformemente distribuida.



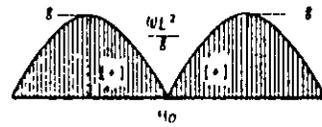
El grado de hiperestaticidad es = 2

Estructura primaria

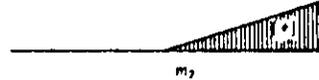
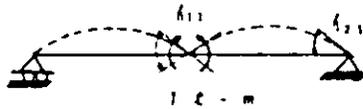


X, Y son momentos unitarios para producir los giros  $f_1$  u  $f_2$

Solución particular



Solución complementaria



Ecuaciones de compatibilidad

$$f_{01} + f_{11} X + f_{12} Y = 0$$

$$f_{02} + f_{21} X + f_{22} Y = 0$$

Cálculo de los giros  $f_{01}, f_{02}, f_{11}, f_{21} = f_{12}, f_{22}$ .

$$f_{01} = M_0 m_1 = 2(R5 \cdot C2) = 2\left(\frac{1}{3} S \sin k\right) = \frac{2}{3} (8 \cdot 8 (-1)) = -42.667$$

$$f_{02} = M_0 m_2 = (R5 \cdot C2) = \frac{1}{3} S \sin k = \frac{1}{3} (8 \cdot 8 (-1)) = -21.333$$

$$f_{11} = m_1 m_1 = (R10 \cdot C7) = \frac{1}{3} S i k = \frac{1}{3} (16 (-1) (-1)) = 5.333$$

$$f_{21} = f_{12} = m_1 m_2 = (R3 \cdot C2) = \frac{1}{6} S i k = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot (-1) (1) = -1.333$$

$$f_{22} = m_2 m_2 = (R2 \cdot C2) = \frac{1}{3} S i k = \frac{1}{3} (8 (1) (1)) = 2.666$$

Sustituyendo en las ecuaciones de compatibilidad

$$-42.667 + 5.333X - 1.333Y = 0$$

$$-21.333 - 1.333X + 2.666Y = 0$$

Resolviendo el sistema anterior

$$X = 6.85 \text{ t-m}; Y = -4.57 \text{ t-m};$$

Reacciones en la viga

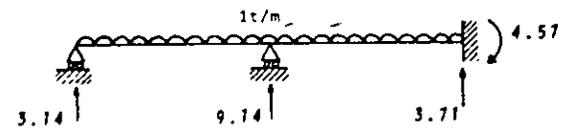
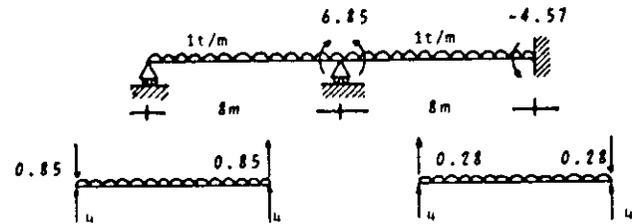


Diagrama de fuerza cortante

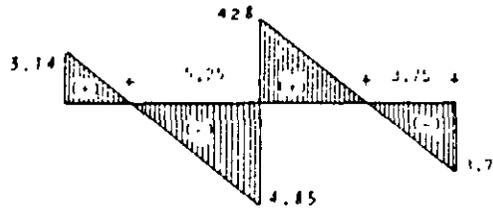
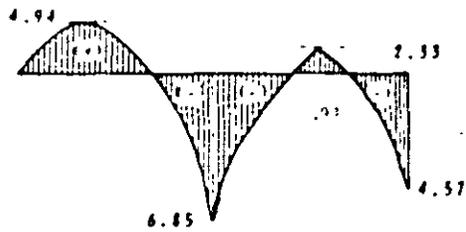
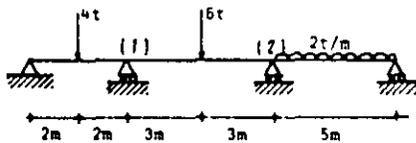


Diagrama de momentos



Problema 4. Obtener las reacciones y diagramas de fuerza cortante y momentos para la viga continua que se muestra.



$ET = 1$

El grado de hiperestaticidad es  $n = 2$  ( $q_1, p_2$ )

Se aplicarán momentos unitarios en los apoyos (1) y (2)

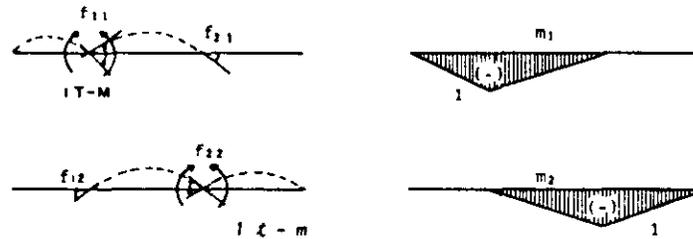
Estructura primaria



Solución particular



Solución complementaria



Ecuaciones de compatibilidad

$$f_{01} + f_{11}X + f_{12}Y = 0$$

$$f_{02} + f_{21}X + f_{22}Y = 0$$

Cálculo de los giros  $f_{01}, f_{02}, f_{11}, f_{21}=f_{12}, f_{22}$ .

$$f_{01} = \theta_{0m1} = R2.C7 + P3.C7 = \frac{1}{6} S(1 + \alpha) \delta + \frac{1}{6} S(1 + B) \delta K$$

$$f_{01} = \frac{1}{6} [4] [1+5] [-1] [4] + \frac{1}{6} [6] [1+0.5] [-1] [9] = -17.50$$

$$f_{02} = \theta_{0m2} = R10.C7 + R3.C4 = \frac{1}{6} S(1+\alpha) K \delta + \frac{1}{3} S \delta K m$$

$$f_{02} = \frac{1}{6} \times 6 [1+0.5] [-1] [9] + \frac{1}{3} S [-1] 6.25 = -23.92$$

$$f_{11} = \theta_{1m1} = R10.C7 + \frac{1}{3} S \delta K = \frac{1}{3} 10 \times [-1] [-1] = 3.33$$

$$f_{21} = f_{12} = \theta_{1m2} = R3.C7 - \frac{1}{6} S \delta K = \frac{1}{6} \times 6 [-1] [-1] = 1$$

$$f_{22} = \theta_{2m2} = R10.C7 + \frac{1}{3} S \delta K = \frac{1}{3} [11] [-1] [-1] = 3.67$$

Sustituyendo en las ecuaciones de compatibilidad.

$$-17.50 + 3.33x + v = 0$$

$$-23.92 + x + 3.67v = 0$$

Resolviendo el sistema anterior

$$x = 3.587 \text{ t/m}, v = 5.544 \text{ t/m}$$

Reacciones en la viga

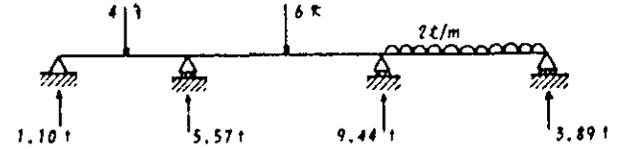
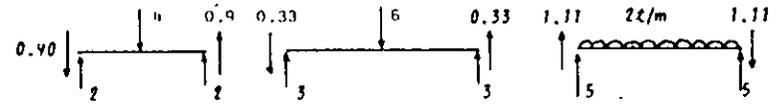
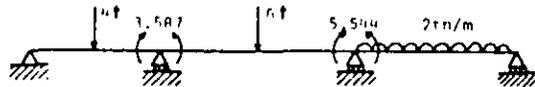


Diagrama de fuerza cortante

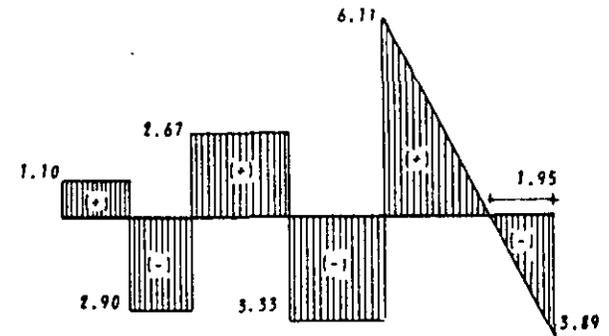
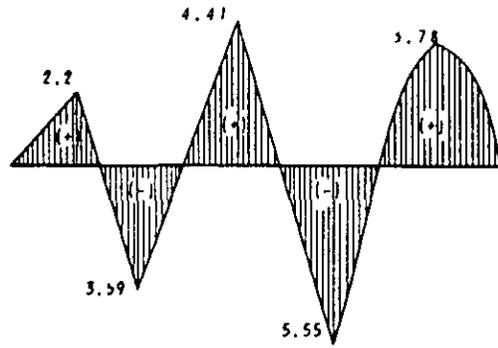
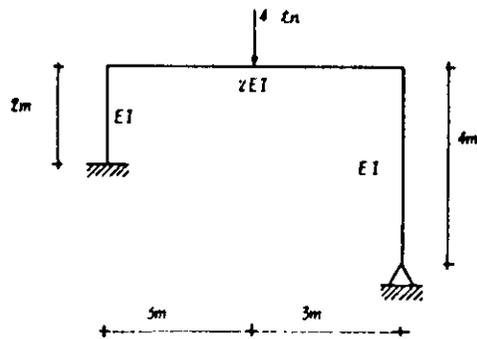


Diagrama de Momentos

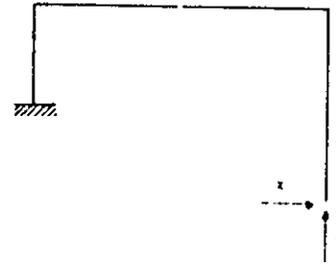


Problema 5. Obtener las reacciones y diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del siguiente marco.



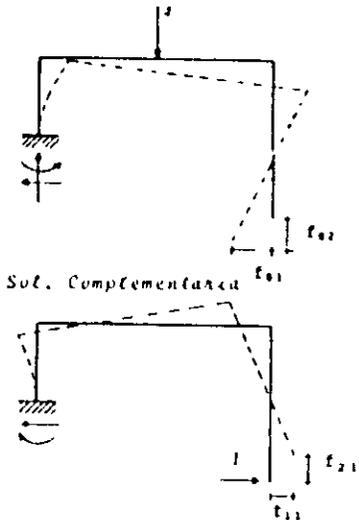
El número de redundantes en el marco es  $n = 2$

Se elegirán como redundantes las reacciones en la articulación; por lo tanto la estructura equivalente es como se muestra enseguida

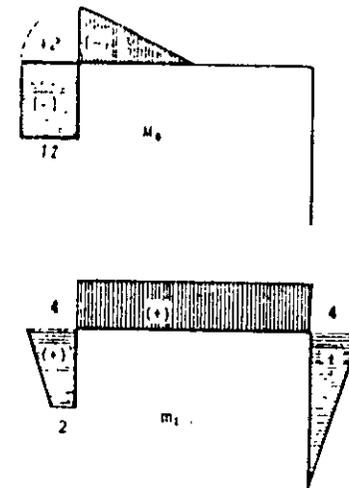


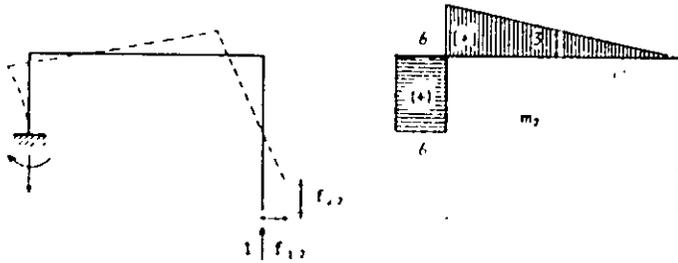
Estructura Primaria

Solución particular



Sol. Complementaria





Ecuaciones de compatibilidad

$$f_{11} + f_{11}X + f_{12}Y = 0$$

$$f_{22} + f_{21}X + f_{22}Y = 0$$

Cálculo de los desplazamientos  $f_{11}, f_{12}, f_{11}, f_{22}, f_{12} = f_{21}$

Por producto de diagramas

$$f_{11} = \frac{M_1 m_1}{EI} = R_1 C_3 + R_3 C_1 = \frac{1}{2} s_i (k_1 + k_2) + \frac{1}{2} s_i x$$

$$f_{12} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \times 7 \times 12 \right) (2 \times 4) - \frac{1}{2EI} \left( \frac{1}{2} \times 3 \times 12 \times 4 \right) = -\frac{108}{EI}$$

$$f_{22} = \frac{M_2 m_2}{EI} = R_1 C_1 + R_2 C_3 + s_i x + \frac{1}{6} s_i (k_1 + 2k_2)$$

$$f_{22} = \frac{2(6)(-12)}{EI} - \frac{1}{2EI} \left( \frac{1}{6} \times 3(12)(12 \times 3) \right) = -\frac{189}{EI}$$

$$f_{11} = \frac{m_1 m_2}{EI} = R_4 C_3 + R_1 C_1 + R_2 C_2 = \frac{1}{6} S(2i_1 k_1 + 2i_2 k_2 + i_1 k_2 + i_2 k_1) + s_i x + \frac{1}{3} s_i x$$

$$f_{11} = \frac{2}{6EI} [7(7)(7) + 2(4)(4) + (2)(7) + 4(7)] + \frac{6(4)(4)}{2EI} + \frac{4}{3} \frac{(4)(4)}{EI} = \frac{88}{EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{m_2 m_1}{EI} = R_1 C_3 + R_3 C_1 = \frac{1}{2} s_i (k_1 + k_2) + \frac{1}{2} s_i x$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{2}{2} \frac{(6)(2 \times 4)}{EI} + \frac{6}{2} \frac{(6)(4)}{2EI} = \frac{72}{EI}$$

$$f_{22} = \frac{m_2 m_2}{EI} = R_1 C_1 + R_2 C_2 = s_i x + \frac{1}{3} s_i x$$

$$f_{22} = \frac{2}{EI} (6)(6) + \frac{6}{3} \frac{(6)(6)}{2EI} = \frac{108}{EI}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de compatibilidad

$$-\frac{108}{EI} + \frac{88}{EI} X + \frac{72}{EI} Y = 0$$

$$-\frac{189}{EI} + \frac{72}{EI} X + \frac{108}{EI} Y = 0$$

Resolviendo el sistema anterior

$$X = -0.45 \text{ ton}, \quad Y = 2.05 \text{ ton.}$$

Reacciones en el marco

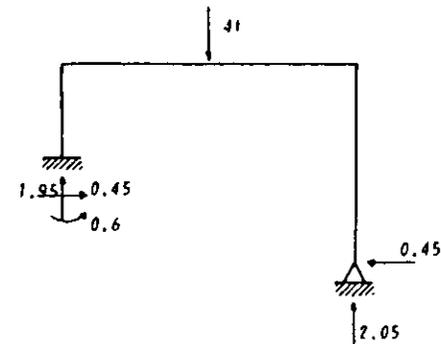


Diagrama de fuerza cortante

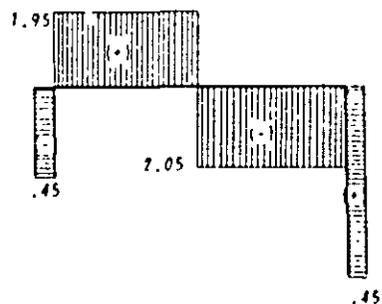
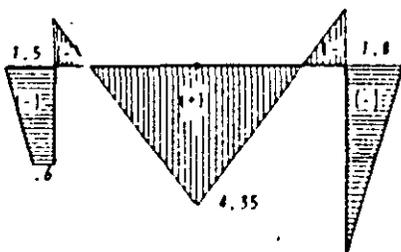
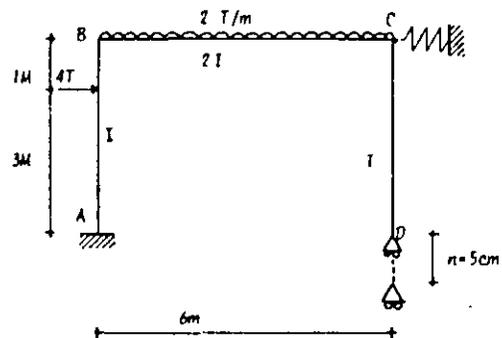


Diagrama de momentos



Problema 6. Calcular las reacciones y dibujar los diagramas de fuerza cortante y momentos flexionantes del marco mostrado en la figura, el cual está restringido lateralmente por un resorte en el nudo C; a su vez el apoyo D tiene un desplazamiento vertical de  $n = 5 \text{ cm}$ . Las dimensiones están indicadas en la misma figura.



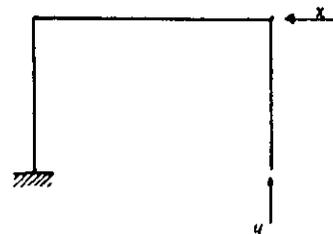
$$K = 1 \text{ tn/cm (del resorte)}$$

$$E = 2.10 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$I = 10^4 \text{ cm}^4$$

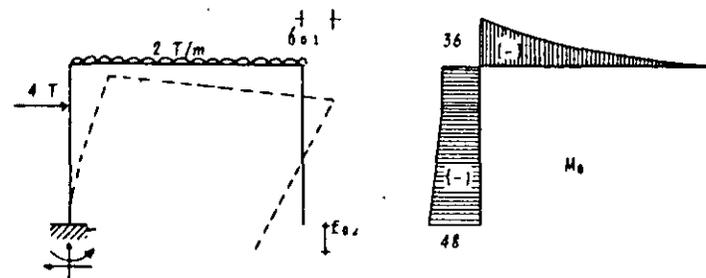
El grado de indeterminación del marco es  $n=2$ ; se toman los nudos C y D como redundantes por existir movimientos en ellos.

Estructura primaria



X y Y son las redundantes elegidas en los nudos C y D respectivamente

Solución particular



$$EI f_{21} = f_{12} \cdot m_1 \cdot m_2 = R1.C2 + \frac{1}{3} s k \cdot \frac{4}{2} (6)(4) = 48$$

Sustituyendo en las ecuaciones de compatibilidad

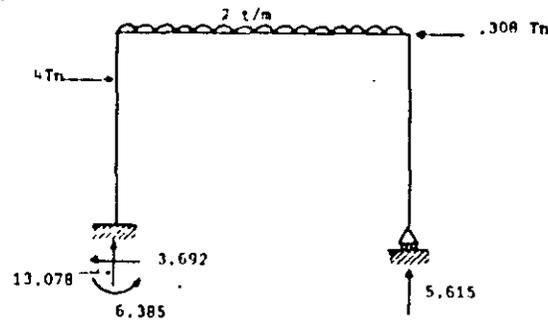
$$-\frac{312}{EI} + \frac{21,333}{EI} X + \frac{48}{EI} V = -X(10^{-2}); \quad EI = (2.1 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}) (10^6 cm^4)$$

$$-\frac{1134}{EI} + \frac{48}{EI} X + \frac{180}{EI} V = -5(10^{-2}); \quad EI = 2.1 \times 10^{10} kg \cdot cm^2 = 2100 t \cdot m^2$$

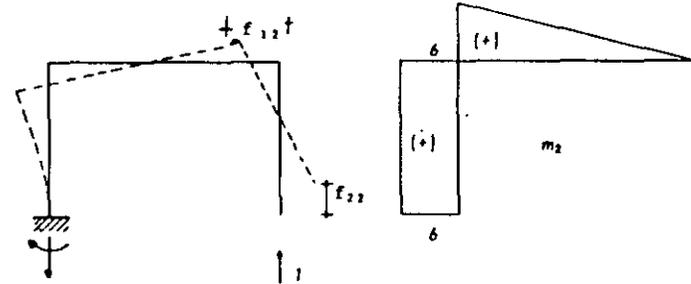
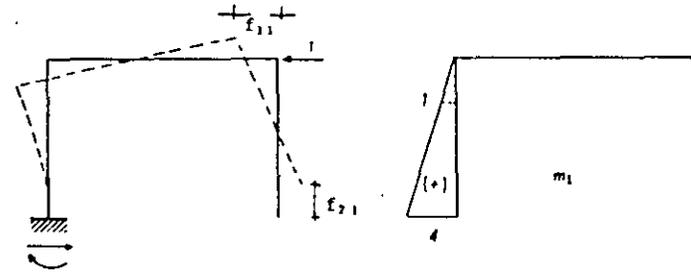
Resolviendo el sistema anterior

$$X = 0.308 \text{ tn} \quad V = 5.615 \text{ tn}$$

Cálculo de reacciones



Solución complementaria.



Ecuaciones de compatibilidad

$$f_{01} + f_{11}X + f_{12}V = -X/1 (10^{-2})m$$

$$f_{02} + f_{21}X + f_{22}V = -5 (10^{-2}) m$$

Cálculo de los desplazamientos  $f_{01}, f_{02}, f_{11}, f_{22}, f_{12} = f_{21}$  (por tablas)

$$f_{01} = M_0 m_1 = R4.C3 + R3.C1 = \frac{1}{6} S(2i_1 k_1 + 2i_2 k_2 + i_1 K_2 + i_2 K_1) + \frac{1}{2} S i K$$

$$EI f_{01} = \frac{1}{6} 3(2(1)(-36) + 2(4)(-48) + (1)(-48) + (4)(-36)) + \frac{1}{2} (1)(1)(-36) = -342$$

$$f_{02} = M_0 m_2 = R4.C1 + R1.C1 + R8.C2 = \frac{1}{2} S(i_1 + i_2) K + s i k + \frac{1}{4} S i K$$

$$EI f_{02} = \frac{3}{2} [-48 - 36]6 + 1(6)(-36) + \frac{6}{4} \frac{(-36)(6)}{2} = -1134$$

$$EI f_{11} = m_1 \cdot m_1 = R7.C2 = \frac{1}{3} s i k + \frac{4}{3} (4)(4) = 21,333$$

$$EI f_{22} = m_2 m_2 = R1.C1 + R2.C2 = s i k + \frac{1}{3} s i k + 4(6)(6) + \frac{6}{3} \frac{(6)(6)}{2} = 180$$

Diagrama de fuerza cortante

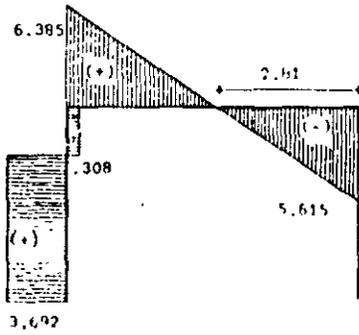
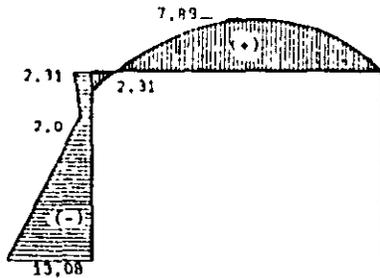
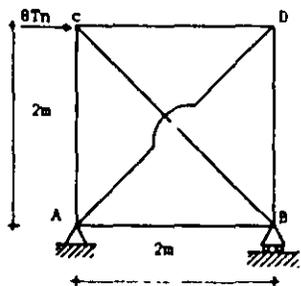


Diagrama de momentos



Problema 7. Calcular las fuerzas axiales de la armadura siguiente.



Las reacciones en los apoyos son  
 $A_x = 87n (+)$ ;  $A_y = 87n (+)$ ;  $B_y = 87n (+)$

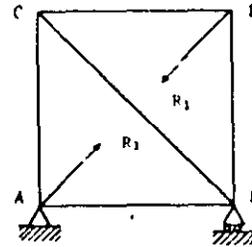
Grado de indeterminación  
 $6 + 3 > 2(4) \quad 9 > 8$

Por lo tanto hay una redundante

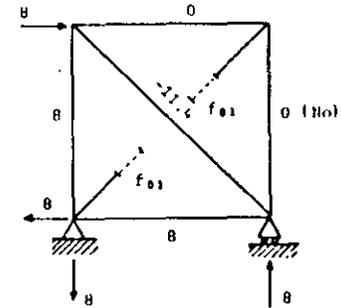
Convención de signos

Tensión (+) ; Compresión (-)

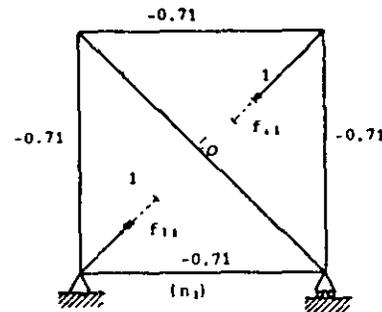
Estructura primaria



Solución particular



Solución complementaria



Nota: Las fuerzas internas en la armadura para cada una de las condiciones de carga, pueden obtenerse por algún método analítico (por nudos o secciones) o gráfico.

A continuación se construye una tabla de cálculo

Barra	N	n	L	NnL	nnL	nR	$\Sigma N + nR$
AB	8	-0.7	2	-11.2	0.98	-4	4
CD	0	-0.7	2	0	0.98	-4	-4
AC	8	-0.7	2	-11.2	0.98	-4	4
BD	0	-0.7	2	0	0.98	-4	-4
AD	---	1	2.85	0	2.85	5.7	5.7
CB	-11.4	1	2.85	-32.5	2.85	5.7	-5.7
			$\Sigma$	-54.9	9.62		

La ecuación de compatibilidad es

$$f_{01} + f_{11}R = 0$$

$$f_{01} = \sum \frac{N_0 n_1}{AE} L ; f_{11} = \sum \frac{n_1^2 n_1}{AE} L$$

$$\text{Estado final } f = N + nR$$

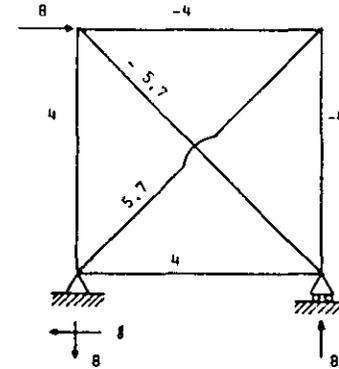
De la tabla se tiene

$$f_{01} = \frac{-54.9}{AE} ; f_{11} = \frac{9.62}{AE}$$

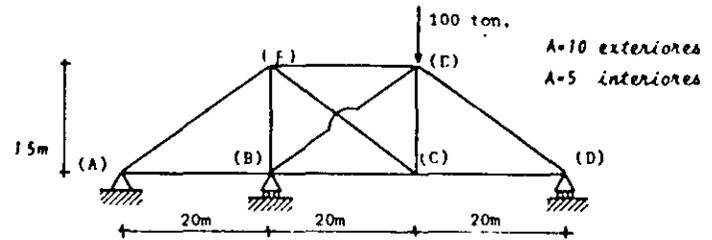
Sustituyendo en la ecuación de compatibilidad

$$-\frac{54.9}{AE} + \frac{9.62}{AE} R = 0 ; R = 5.7 \text{ tn.}$$

Reacciones en la armadura :-



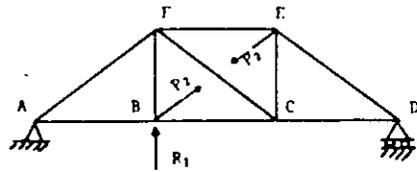
Problema 8. La armadura que se muestra a continuación, está sujeta a una carga vertical de 100 ton. Determine por el método de flexibilidades, las reacciones y fuerzas internas que actúan en las barras.



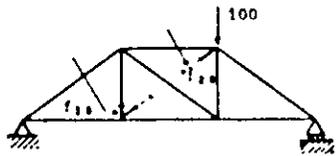
$$\text{Grado de indeterminación } \therefore = 10 + 4 > 2(6) \therefore 14 > 12$$

Por lo tanto existen 2 redundantes.

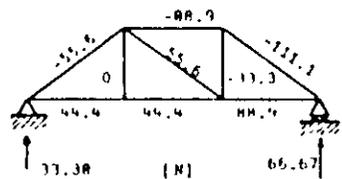
Estructura Primaria



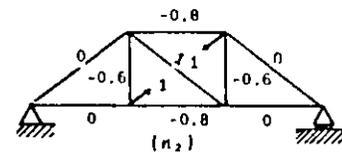
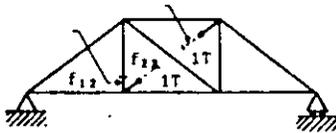
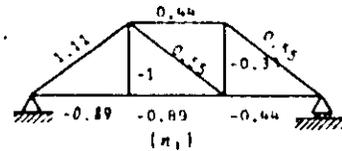
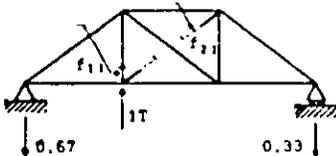
Solución particular



Se eligieron como redundante las reacciones de la barra BE y el apoyo B



Solución Complementaria



Ecuaciones de Compatibilidad

$$f_{10} + f_{11}R_1 + f_{12}P_2 = 0$$

$$f_{20} + f_{21}R_1 + f_{22}P_2 = 0$$

Calculo de los desplazamientos  $f_{10}, f_{20}, f_{11}, f_{21}, f_{12}, f_{22}$

$$f_{10} = 1 \cdot \frac{N n_1}{AE} L \quad f_{20} = 1 \cdot \frac{n_2 n_2}{AE} L$$

$$f_{20} = 1 \cdot \frac{n_2 n_2}{AE} L \quad f_{12} = f_{21} = 1 \cdot \frac{n_1 n_2}{AE} L$$

$$f_{11} = 1 \cdot \frac{n_1 n_1}{AE} L$$

Los cálculos como las áreas y longitudes de las barras se muestran en la tabla siguiente:

Barra	N	$n_1$	$n_2$	L	A	$\frac{N n_1}{A}$	$\frac{N n_2}{A}$	$\frac{n_1 n_1}{A}$	$\frac{n_2 n_2}{A}$	$\frac{n_1 n_2}{A}$
AB	44.4	-0.89	0	20	10	-79.0	0	1.6	0	0
BC	44.4	-0.89	-0.8	20	10	-79.0	-71.2	1.6	1.28	1.4
CD	88.9	-0.44	0	20	10	-78.2	0	0.4	0	0
EF	-88.9	0.44	-0.8	20	10	-78.2	142.2	0.4	1.28	-0.7
BF	0	-1.0	-0.6	15	5	0	0	3.0	1.08	1.8
CE	-33.3	-0.33	-0.6	15	5	33.3	59.9	0.3	1.08	0.6
AF	-55.6	1.11	0	25	10	-154.3	0	3.1	0	0
CF	55.6	0.55	1	25	5	154.3	278.0	1.5	5	2.8
DE	-111.1	0.55	0	25	10	-154.3	0	0.8	0	0
EB	0	0	1	25	5	0	0	0	5	0
<b>E</b>						<b>-435.4</b>	<b>409.1</b>	<b>12.7</b>	<b>47.2</b>	<b>5.9</b>

Sustituyendo los valores de los desplazamientos en las ecuaciones de compatibilidad, tenemos:

$$-435.4 + 12.7R_1 + 5.9P_2 = 0$$

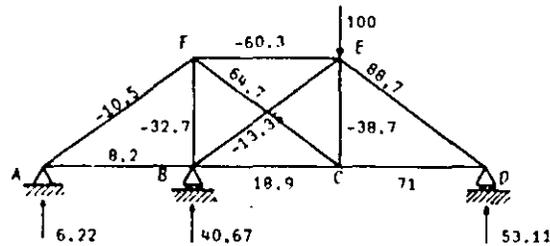
$$409.1 + 5.9R_1 + 47.2P_2 = 0$$

Cuya solución es:  $R_1 = 40.67 \text{ ton.}$ ,  $P_2 = -13.35 \text{ ton.}$

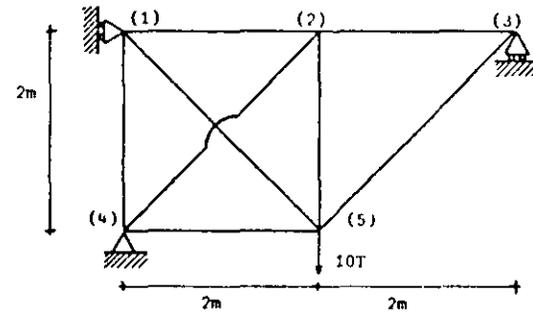
Multiplicando las fuerzas en las barras para los diferentes estados de carga  $n_1$  y  $n_2$  por las reacciones calculadas  $R_1$  u  $P_2$  respectivamente, se obtiene la siguiente tabla.

BARRA	$n_1 R_1$	$n_2 P_2$	$F = N(n_1 R_1 + n_2 P_2)$
AB	-36.2	0	8.2
BC	-36.2	10.7	18.9
CD	-17.9	0	71.0
FF	17.9	10.7	-60.3
BF	40.67	8.0	-32.7
CE	-13.4	8.0	-38.7
AF	45.1	0	-10.5
CF	22.4	-13.35	64.7
DE	22.4	0	-88.7
EB	0	-13.35	-13.35

Las reacciones finales en la armadura son las anotadas en la figura

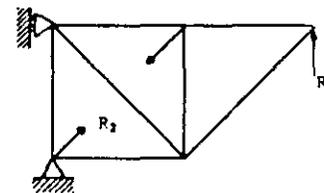


Problema 9. Calcular las reacciones en los apoyos y determinar el desplazamiento del nudo 5 [8v5].

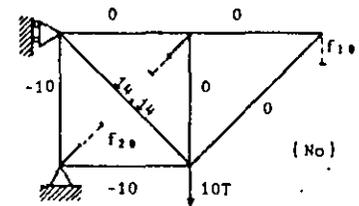


Grado de indeterminación = 2       $8 + 4 > 2(5)$        $12 > 10$

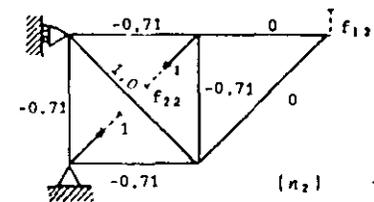
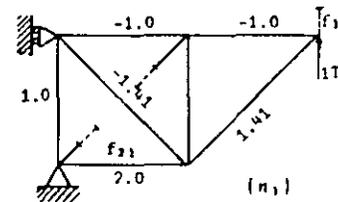
Estructura primaria



Solución particular



Solución complementaria



Ecuaciones de compatibilidad

$$f_{10} + f_{11}R_1 + f_{12}R_2 = 0$$

$$f_{20} + f_{21}R_1 + f_{22}R_2 = 0$$

Los desplazamientos se calculan en la siguiente tabla

BARRA	$N_0$	$n_1$	$n_2$	$L$	$n_1 n_1 L$	$n_2 n_2 L$	$n_1 n_2 L$	$n_1 n_1 L$	$n_2 n_2 L$
1-2	0	-1	-0.71	2	0	0	2	1.41	1
2-3	0	-1	0	2	0	0	2	0	0
4-5	-10	2	-0.71	2	-40	14.14	8	-2.84	1
1-4	-10	1	0.71	2	20	14.14	2	-1.41	1
2-5	0	0	-0.71	2	0	0	0	0	1
1-5	14.14	-1.41	1	2.8	-39.6	40	-5.6	-4.0	2.82
2-4	0	0	1	2.8	0	0	0	0	2.82
3-5	0	1.41	0	2.8	0	0	5.6	0	0
$\Sigma$					-116	68.28	25.2	-6.84	9.64

De la tabla anterior se tiene

$$f_{10} = \frac{N_0 n_1 L}{AE} = -\frac{116}{AE}$$

$$f_{21} = \frac{n_1 n_1 L}{AE} = -\frac{6.84}{AE}$$

$$f_{20} = \frac{N_0 n_2 L}{AE} = \frac{68.28}{AE}$$

$$f_{22} = \frac{n_2 n_2 L}{AE} = \frac{9.64}{AE}$$

$$f_{11} = \frac{n_1 n_1 L}{AE} = \frac{25.2}{AE}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de compatibilidad

$$-116 + 25.2R_1 - 6.84R_2 = 0$$

$$68.28 - 6.84R_1 + 9.64R_2 = 0$$

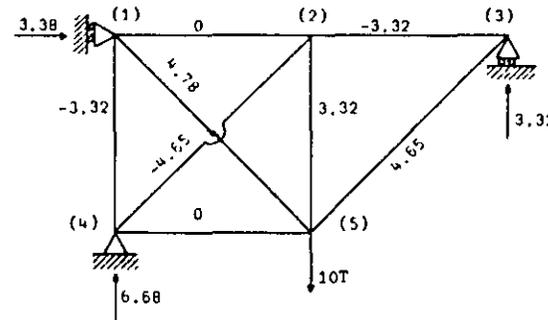
Resolviendo el sistema:  $R_1 = 3.32T$ ;  $R_2 = 4.65T$

Las fuerzas finales que actúan en cada barra se obtiene por superposición de efectos, dada por la ecuación  $F = N_0 + n_1 R_1 + n_2 R_2$

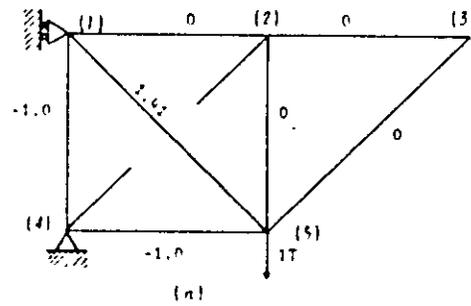
Así, para las reacciones finales tenemos

BARRA	$n_1 R_1$	$n_2 R_2$	$N_0$	$F$
1-2	-3.32	3.32	0	0
2-3	-3.32	0	0	-3.32
4-5	6.64	3.32	-10	0
1-4	3.32	3.32	-10	-3.32
2-5	0	3.32	0	3.32
1-5	-4.65	-4.65	14.14	4.78
2-4	0	-4.65	0	-4.65
3-5	-4.65	0	0	4.65

Estado final



Para calcular  $\delta_{vs}$  se integra la armadura original (F) con la armadura virtual que resulta de aplicar una fuerza virtual en el punto de interés a la estructura primaria.



HARRA	F	n	L	F <sub>n</sub> L
1-2	0	0	2	0
2-3	-3.32	0	2	0
4-5	0	-1	2	0
1-4	-3.32	-1	2	6.64
2-5	3.32	0	2	0
1-5	4.78	1.41	2.8	19.12
2-4	-4.65	0	2.8	0
3-5	4.65	0	2.8	0
			∑	25.76

Como  $W_{vs} = 1 \text{ v}$

$$1 \delta_{vs} = \sum \frac{F_n}{AE} L$$

$$\delta_{vs} = \frac{25.76}{AE}$$



FACULTAD DE INGENIERIA

MÉTODOS DE LAS RIGIDEZES

Las incógnitas en este método son los desplazamientos de los nudos (los nudos son los apoyos, extremos libres en voladizos o en los puntos donde concurren dos o más miembros).

Los desplazamientos de los nudos son el número de grados de libertad o el grado de indeterminación cinemática de la estructura; por ejemplo, la Fig. 1 muestra un marco que tiene 7 grados de libertad si se consideran acortamientos o alargamientos de los miembros, o sólo 4 si no se consideran acortamientos o alargamientos.

CAPITULO 6  
MÉTODOS DE LAS RIGIDEZES

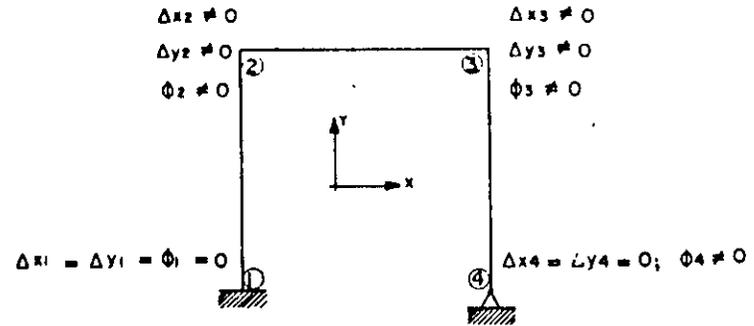


fig. 1

Al no considerarse los acortamientos o alargamientos de los miembros

$$\Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta, \quad \phi_4 \neq 0, \quad \phi_3 \neq 0, \quad \phi_2 \neq 0, \quad \Delta y_2 = \Delta y_3 = 0$$

G-611073

El método requiere de las acciones de empotramiento, por lo cual consideremos algunos casos.


$M_o = \frac{M}{L} (4La - 3a^2 - L^2), M_i = \frac{M}{L} (2La - 3a^2)$	$M_o = \frac{M}{2L} (2L^2 + 3a^2 - 6aL)$
	$M = \frac{w}{8L} \{ a^4 - (b+c)^4 + 2L^2 c(2b+c) \}$
	$M_i = \frac{w}{L} \left\{ \frac{(a+c)^3 - a^3}{3} - \frac{(a+c)^2 - a^2}{4} \right\}$
$M_o = \frac{w}{L} \left\{ L^2 \frac{(a+c)^2 - a^2}{2} - 2L \left[ \frac{(a+c)^3 - a^3}{3} \right] + \frac{(a+c)^2 - a^2}{4} \right\}$	

El primer paso del método es restringir todos los desplazamientos de junta desconocidos. Esto nos conduce a vigas doblemente empotradas por lo cual hay que conocer las reacciones en vigas doblemente empotradas.

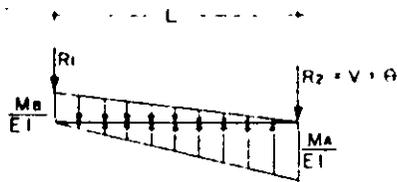
En este método se utilizan acciones producidas por desplazamientos unitarios, estas son translaciones o rotaciones unitarias, y las acciones serán fuerzas o momentos.

Las acciones causadas por desplazamientos unitarios se conocen como "rigideces".

Rigidez de un elemento doblemente empotrado.



Por el método de la viga conjugada:



$$\sum M_A = 0$$

$$-\frac{M_B L}{2EI} \cdot \frac{2}{3}L + \frac{M_A L}{2EI} \cdot \frac{1}{3}L = 0$$

$$M_B = \frac{M_A}{2}; \quad \boxed{M_A = 2M_B}$$

Al provocar un giro unitario en el extremo A con  $M_A$  se genera  $M_B = \frac{M_A}{2}$ , es decir existe un factor de transporte de 1/2.

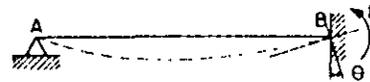
El cortante en A es el valor del giro en ese punto:  $R_2 = \theta$

$$\sum M_B = 0 \quad L \frac{M_B}{2EI} \frac{L}{3} - L \frac{M_A}{2EI} \frac{2}{3}L + LR_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{M_A L^2}{2EI} \frac{2}{3} - \frac{M_A}{2EI} \frac{2}{3}L^2 + R_2 L = 0 \rightarrow -\frac{M_A L^2}{4EI} + R_2 L = 0$$

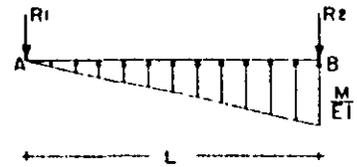
$$R_2 = \frac{M_A L}{4EI}; \quad M_A = \frac{4EI}{L} \theta; \quad \theta = 1 \quad M_A = \frac{4EI}{L}; \quad M_B = \frac{2EI}{L}$$

Veamos la rigidez del siguiente elemento.



M = rigidez angular

Nuevamente por viga conjugada:



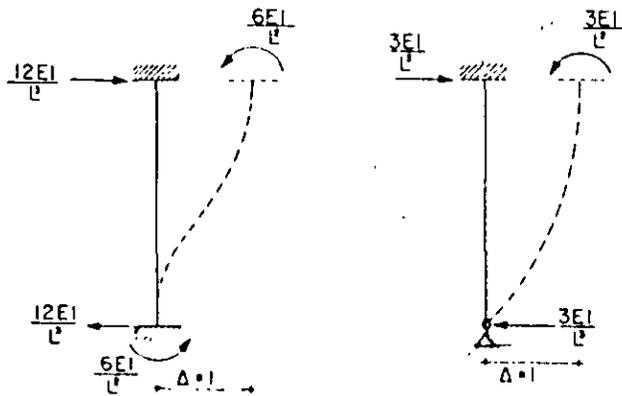
$R_2 = \theta$

$$\sum M_A = 0 \quad LR_2 - \frac{ML}{2EI} \frac{2}{3}L = 0$$

$$R_2 = \frac{ML}{3EI}; \quad M = \frac{3EI\theta}{L}$$

$$\text{Si } \theta = 1, \quad M = \frac{3EI}{L}$$

Y para las translaciones-

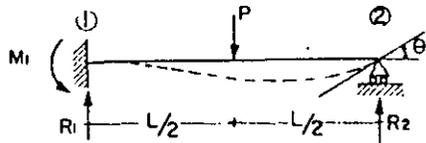


A estos elementos se les conoce como rigideces lineales.

Basándonos en los conceptos anteriores analicemos una estructura por este método. El método es aplicable a estructuras linealmente elásticas con pequeños desplazamientos.

Las incógnitas son los desplazamientos, por lo cual éstas coinciden con el grado de libertad.

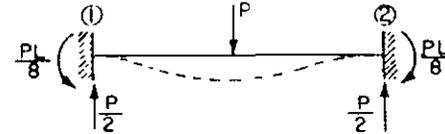
Para expresar claramente los conceptos consideremos la estructura siguiente:



Su grado de libertad es 1, ya que el extremo

2 gira un ángulo  $\theta$ ; la translación horizontal no se considera ya que se desprecian los alargamientos o acortamientos axiales.

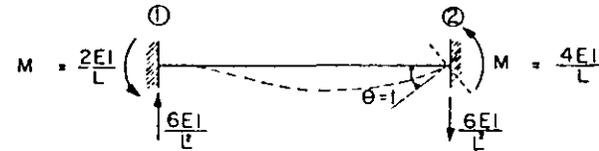
1) Se obtiene una estructura cinemáticamente determinada, o sea - que se eliminan los desplazamientos.



A esta etapa se le conoce como solución particular

2) El extremo 2 en el cual se ha restringido la rotación sí gira, como ocurre realmente, por lo tanto habrá que suponer una condición de carga que considere el giro real del nudo 2.

Por comodidad se da un valor unitario al desplazamiento desconocido.



M es la rigidez angular

A esta etapa se le conoce como solución complementario

3). Ahora planteamos la ecuación de equilibrio (superposición de etapas).

$$\frac{PL}{8} - \frac{4EI}{L} \theta = 0 \quad \theta = \frac{PL^2}{32EI}$$

$$R_1 = \frac{P}{2} + \frac{6EI}{L} \theta$$

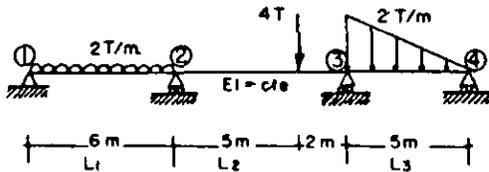
$$R_1 = \frac{P}{2} + \frac{6EI}{L} \frac{PL^2}{32EI} = \frac{P}{2} + \frac{6}{32} P = 0.6875 P$$

$$R_1 = 0.6875 P = \frac{11}{16} P$$

$$M_1 = -\frac{PL}{8} - \frac{2EI}{L} \frac{PL^2}{32EI} = -0.1875 PL$$

$$M_1 = -0.1875 PL$$

Consideremos la siguiente estructura

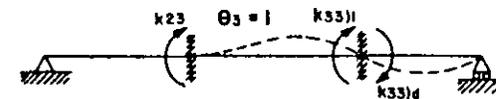
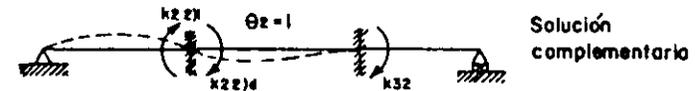
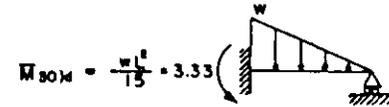
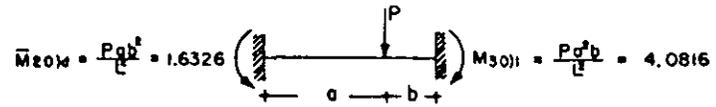
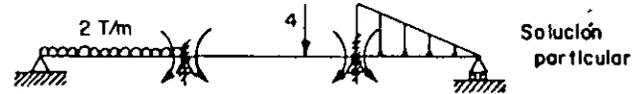


Tiene cuatro grados de libertad, pero si no fijamos

los nudos 1 y 4 encontramos las incógnitas  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , con las cuales es

suficiente para determinar los momentos en los nudos 2 y 3.

Se deberán considerar para las barras 1-2 y 3-4 los momentos de empotramiento y las rigideces correspondientes



$$k_{22|1} = \frac{3EI}{L_1} = 0.5EI$$

$$k_{22} = 1.071 EI$$

$$k_{32} = \frac{2EI}{L_2} = 0.2857EI$$

$$k_{33|1} = \frac{4EI}{L_2} = 0.5714EI$$

$$k_{33} = 1.171EI$$

$$k_{22|4} = \frac{4EI}{L_2} = 0.5714EI$$

$$k_{23} = \frac{2EI}{L_2} = 0.2857EI$$

$$k_{33|4} = \frac{3EI}{L_3} = 0.6EI$$

Hagamos la superposición o ecuación de equilibrio:

$$\bar{M}_{20} + k_{22}\theta_2 + k_{23}\theta_3 = 0$$

$$\bar{H}_{30} + k_{32}\theta_2 + k_{33}\theta_3 = 0$$

$$7.3674 + 1.07148EI\theta_2 + 0.2857EI\theta_3 = 0$$

$$0.7486 + 0.2857EI\theta_2 + 1.1714EI\theta_3 = 0$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones tenemos:

$$\theta_2 = -\frac{7.17249}{EI} \quad \text{y} \quad \theta_3 = \frac{1.11027}{EI}$$

El signo (-) de  $\theta_2$  significa que el sentido del giro es contrario al supuesto.

Momentos reales:

$$M_{21} = \bar{M}_{20} + k_{22}\theta_2$$

$$M_{21} = 9 + 0.5(-7.17249) = 5.41375$$

$$M_{23} = \bar{M}_{20}d + k_{22}d\theta_2 + k_{23}\theta_3$$

$$M_{23} = -1.6326 + 0.5714(-7.17249) + 0.2857(1.11027) = -5.41375$$

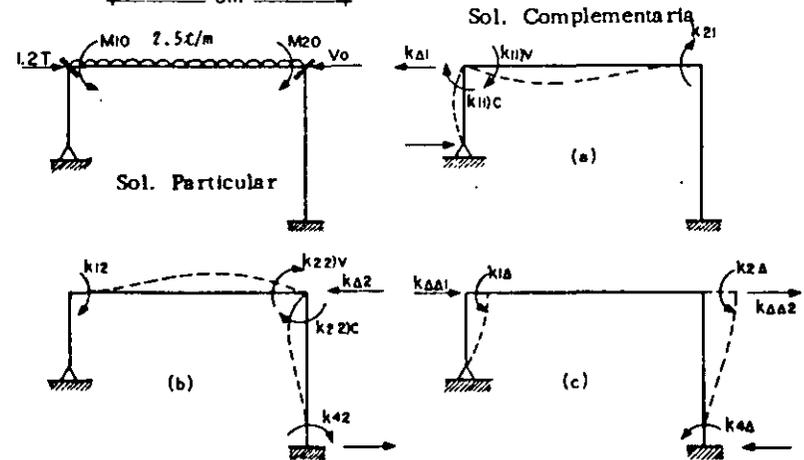
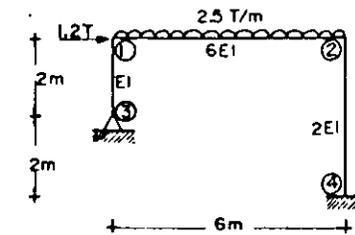
$$M_{32} = \bar{H}_{30} + k_{32}\theta_2 + k_{33}\theta_3$$

$$M_{32} = 4.0816 + 0.2857(-7.17249) + 0.5714(1.11027) = 2.6668$$

$$M_{34} = \bar{H}_{30}d + k_{33}d\theta_3$$

$$M_{34} = -3.333 + 0.6(1.11027) = -2.667$$

Considerando ahora el siguiente marco:



$$M_{10} = -\frac{\omega L^2}{12} = -7.5 \quad M_{20} = 7.5$$

$$K_{11}C = \frac{3EI}{L} = 1.5EI \quad K_{11}V = \frac{4EI}{6} (6) = 4EI \quad K_{11} = 5.5EI$$

$$K_{21}V = \frac{4EI(6)}{6} = 4EI \quad K_{21}C = \frac{4EI(2)}{4} = 2EI \quad K_{21} = 6EI$$

$$K_{\Delta 1} = -\frac{3EI}{L} = -0.75EI$$

$$K_{\Delta 2} = -\frac{6EI(2)}{4} = -0.75EI$$

$$K_{1\Delta} = -\frac{3EI}{L} = -0.75EI$$

$$K_{2\Delta} = K_{\Delta 2} = -\frac{6EI(2)}{4} = -0.75EI$$

$$K_{\Delta\Delta_1} = \frac{3EI}{4L} = 0.0469EI$$

$$K_{\Delta\Delta_2} = \frac{12EI(2)}{4L^3} = 0.375EI$$

$$K_{\Delta\Delta} = 0.4219EI$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{2E(6)}{6} = \frac{2EI}{6}$$

Ecuaciones de equilibrio

$$M_{10} + K_{11}\theta_1 + K_{12}\theta_2 + K_1\Delta = 0$$

$$M_{20} + K_{21}\theta_1 + K_{22}\theta_2 + K_2\Delta = 0$$

$$V_0 + K_{\Delta 1}\theta_1 + K_{\Delta 2}\theta_2 + K_{\Delta\Delta}\Delta = 0$$

Sustituyendo valores

$$5.50EI\theta_1 + 2EI\theta_2 - 0.75EI\Delta = 7.5$$

$$2EI\theta_1 + 6EI\theta_2 - 0.75EI\Delta = -7.5$$

$$-0.75EI\theta_1 - 0.75EI\theta_2 + 0.4219EI\Delta = 1.2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\theta_1 = 2.290908/EI$$

$$\theta_2 = -1.745456/EI$$

$$\Delta = 2.145456/EI$$

Momentos reales en el marco

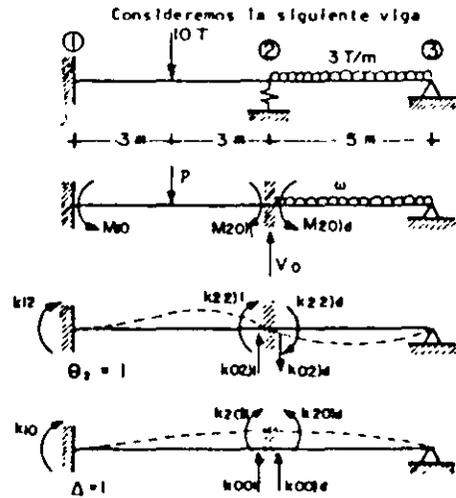
$$M_{12} = K_{11}\theta_1 + K_1\Delta = 1.82Tm$$

$$M_{12} = M_{10} + K_{11}\theta_1 + K_{12}\theta_2 = -1.82Tm$$

$$M_{21} = M_{20} + K_{21}\theta_1 + K_{22}\theta_2 = -5.04Tm$$

$$M_{20} = K_{22}\theta_2 + K_2\Delta = -5.09Tm$$

$$M_{\Delta 2} = K_{\Delta 2}\theta_2 + K_{\Delta\Delta}\Delta = -3.35Tm$$



$EI = \text{cte.}$   
 $k_s = 0.3EI$

$M_{10} = -\frac{PL}{8} = -\frac{10 \times 6}{8} = -7.5$

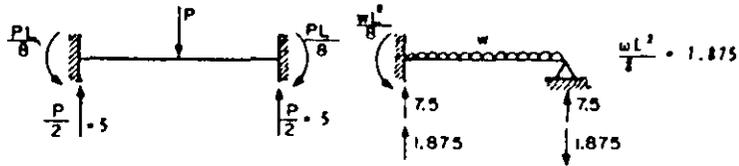
$M_{20)1} = 7.5$

$M_{20)d} = -\frac{wL^2}{8} = -\frac{3 \times 5^2}{8} = -9.375$

Ecuaciones de Equilibrio (superposición)

$M_{20} + k_{22}\theta_2 + k_{20}\Delta = 0$

$V_0 + k_{02}\theta_2 + (k_{00} + k_s)\Delta = 0$



$V_0 = 5 + 7.5 + 1.875 = 14.375$

$k_{22)1} = \frac{4EI}{L} = 0.666EI$

$k_{12} = \frac{2EI}{L} = 0.333EI$

$k_{22)d} = \frac{3EI}{L} = 0.6EI$

$k_{02)1} = \frac{k_{12} + k_{22)1}}{L} = \frac{6EI}{L^2} = 0.1666EI$

$k_{02)d} = -\frac{k_{22)d}}{L^2} = -0.12EI$

$k_{10} = k_{20)1} = \frac{6EI}{L^2} = 0.1666EI$

$K_{20)d} = -\frac{3EI}{L} = -0.12EI$

$K_{00)1} = \frac{12EI}{L^3} = 0.05555EI$     $K_{00)d} = \frac{3EI}{L^3} = 0.024EI$

$-1.875 + 1.2666\theta_2 + 0.04666EI\Delta = 0$

$14.375 + 0.04666\theta_2 + 0.37955\Delta = 0$

$$\begin{bmatrix} 1.2666 & 0.04666 \\ 0.04666 & 0.37955 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.875 \\ -14.375 \end{bmatrix}$$

$\theta_2 = 2.88865104/EI; \Delta = -38.22895871/EI$

$M_{12} = M_{10} + K_{12}\theta_2 + K_{10}\Delta = -7.5 + 0.333(2.888651) + 0.1666(-38.2289)$

$M_{12} = -12.9084 \text{ T-M}$

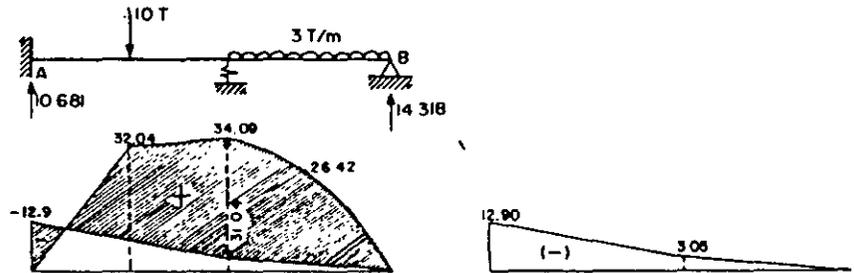
$M_{21} = M_{20)1} + K_{21}\theta_2 + K_{20)1}\Delta = 7.5 + 0.666(2.888651) +$

$+ 0.1666(-38.22895) = 3.0543 \text{ T-M}$

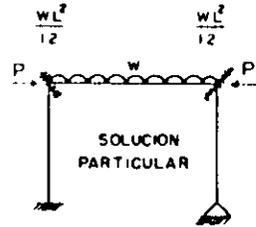
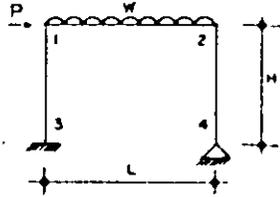
$M_{33} = M_{30)1} + K_{30)1}\theta_2 + K_{30)d}\Delta = -9.375 + 0.6(2.888651) - 0.12(-38.2289)$

$M_{33} = -3.0543 \text{ T-M}$

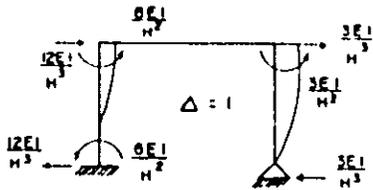
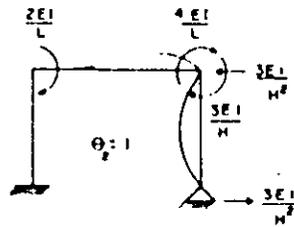
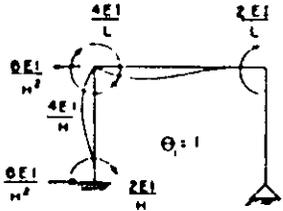
El diagrama de momentos será



Se pueden expresar matricialmente las ecuaciones de equilibrio  
 Por ejemplo



SOLUCION COMPLEMENTARIA



$$\begin{aligned}
 K_{11} &= \frac{4EI}{H} + \frac{4EI}{L} & K_{12} &= \frac{2EI}{L} & K_{1\Delta} &= -\frac{6EI}{H^2} \\
 K_{22} &= \frac{4EI}{L} + \frac{3EI}{H} & K_{21} &= \frac{2EI}{L} & K_{2\Delta} &= -\frac{3EI}{H^2} \\
 K_{\Delta\Delta} &= \frac{12EI}{H^3} + \frac{3EI}{H^3} & K_{\Delta 1} &= -\frac{6EI}{H^2} & K_{\Delta 2} &= -\frac{3EI}{H^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_1 + K_{11}\theta_1 + K_{12}\theta_2 + K_{1\Delta}\Delta &= 0 \\
 M_2 + K_{21}\theta_1 + K_{22}\theta_2 + K_{2\Delta}\Delta &= 0 \\
 P + K_{\Delta 1}\theta_1 + K_{\Delta 2}\theta_2 + K_{\Delta\Delta}\Delta &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{1\Delta} \\ K_{21} & K_{22} & K_{2\Delta} \\ K_{\Delta 1} & K_{\Delta 2} & K_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_1 \\ -M_2 \\ -P \end{bmatrix}$$

$$K d = F$$

$K$  = Matriz de rigidez  $\left\{ \begin{array}{l} \text{cuadrada} \\ \text{simétrica} \\ \text{diagonal positiva} \end{array} \right.$   
 $K_{ij} = K_{ji}$

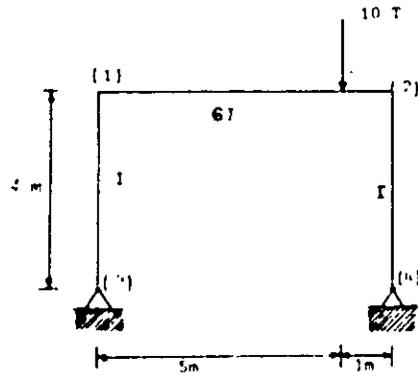
La matriz de rigidez,  $[k]$  es aquella que multiplicada por el vector de desplazamientos  $\{d\}$  proporcionará el vector de fuerzas  $\{F\}$ .

EJEMPLOS

MÉTODO DE LAS RIGIDEZES.

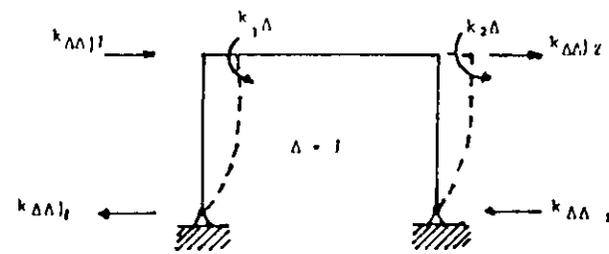
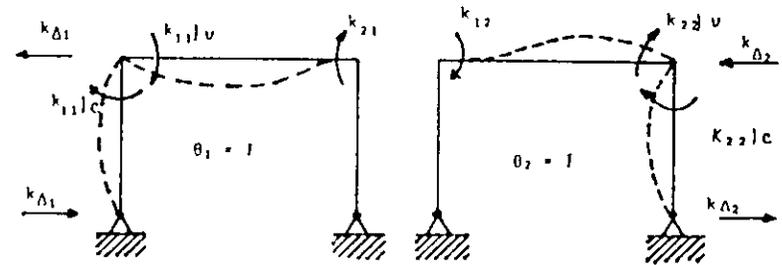
Problema 1.

Resolver el siguiente marco por el método de rigideces

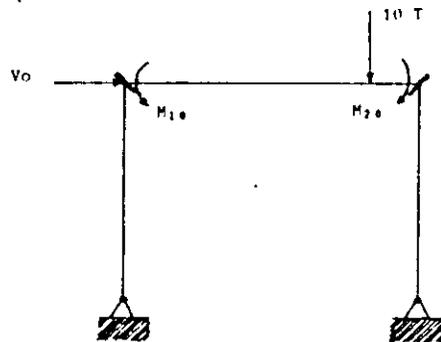


Incógnitas:  
 $\theta_1, \theta_2, \Delta$

Solución complementaria



Solución particular



Los momentos de empotramiento en los nudos 1 y 2 son:

$$M_{10} = \frac{P a b^2}{l^2} = \frac{10(5)(11)^2}{8^2} = 1.388 \text{ T-m}$$

$$M_{20} = \frac{P a^2 b}{l^2} = \frac{10(5)^2(11)}{8^2} = 6.944 \text{ T-m}$$

Los valores de las rigideces en los nudos para los diferentes estados de deformación supuestos, son:

$$k_{11}v = \frac{4EI}{6} (6) = 4EI;$$

$$k_{11}c = \frac{3EI}{4} = 0.75 EI$$

$$k_{21} = \frac{2EI}{6} (6) = 2EI;$$

$$k_{\Lambda 1} = -\frac{3EI}{4^2} = -0.188 EI$$

$$k_{12} = \frac{2EI}{6} (6) = 2EI;$$

$$k_{\Lambda 2} = -\frac{3EI}{4^2} = -0.188 EI$$

$$k_{22}v = \frac{4EI}{6} (6) = 4EI;$$

$$k_{22}c = \frac{3EI}{4} = 0.75 EI$$

$$k_{1\Lambda} = -\frac{3EI}{4^2} = -0.188 EI;$$

$$k_{2\Lambda} = -\frac{3EI}{4^2} = -0.188 EI$$

$$k_{\Lambda\Lambda}1 = \frac{3EI}{4^3} = 0.047 EI;$$

$$k_{\Lambda\Lambda}2 = \frac{3EI}{4^3} = 0.047 EI$$

$$V_0 = 0$$

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$M_{10} + k_{11} O_1 + k_{12} O_2 + k_{1\Lambda} \Lambda = 0$$

$$M_{20} + k_{21} O_1 + k_{22} O_2 + k_{2\Lambda} \Lambda = 0$$

$$V_0 + k_{\Lambda 1} O_1 + k_{\Lambda 2} O_2 + k_{\Lambda\Lambda} \Lambda = 0$$

Sustituyendo valores

$$-1.388 + (4 + 0.75) EI O_1 + 2EI O_2 - 0.188 EI \Lambda = 0$$

$$6.944 + 2EI O_1 + (4 + 0.75) EI O_2 - 0.188 EI \Lambda = 0$$

$$0 - 0.188 EI O_1 - 0.188 EI O_2 + (0.047) 2EI \Lambda = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior.

$$O_1 = 1.052/EI ; O_2 = -1.978/EI ; \Delta = -1.872/EI$$

Una vez determinados los giros y desplazamientos en el marco, se calcularán los momentos reales en dicho marco.

$$M_{10} = k_{11}O_1 + k_{12}\Delta = 0.75 EI \frac{1.052}{EI} - \{0.188EI\} \frac{-1.872}{EI} = 1.136$$

$$M_{12} = M_{10} + k_{13}O_2 + k_{14}O_1 = -1.388 + 4EI \frac{1.052}{EI} + 2EI \frac{-1.978}{EI} = -1.136$$

$$M_{21} = M_{20} + k_{21}O_1 + k_{22}O_2 = 6.944 + 2EI \frac{1.052}{EI} + 4EI \frac{-1.978}{EI} = 1.136$$

$$M_{22} = k_{23}O_2 + k_{24}\Delta = 0.75 EI \frac{-1.978}{EI} - 0.188 EI \frac{-1.872}{EI} = -1.136$$

Las reacciones y diagramas de momento, fuerza cortante y normal se determinan como sigue.

Reacciones en el marco

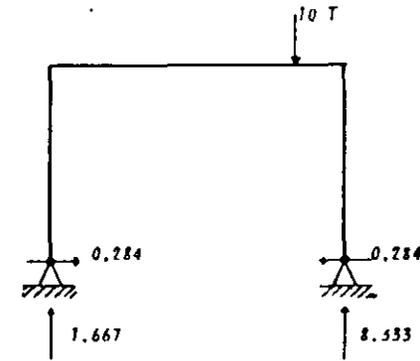


Diagrama de fuerza normal

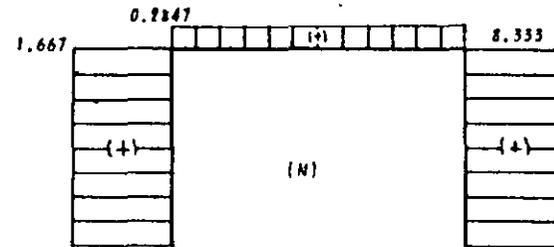


Diagrama de Fuerza Cortante

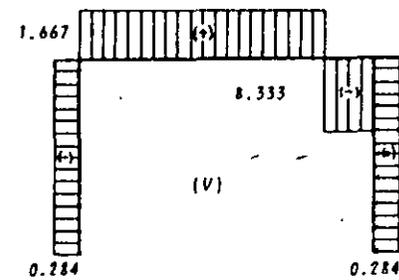
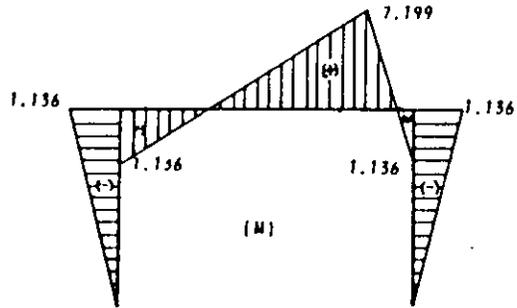
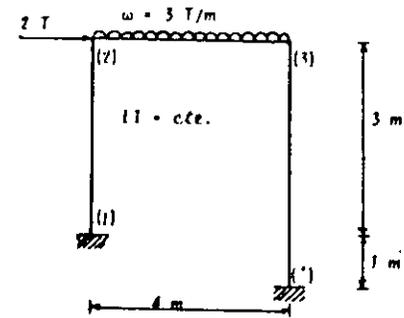


Diagrama de Momentos.

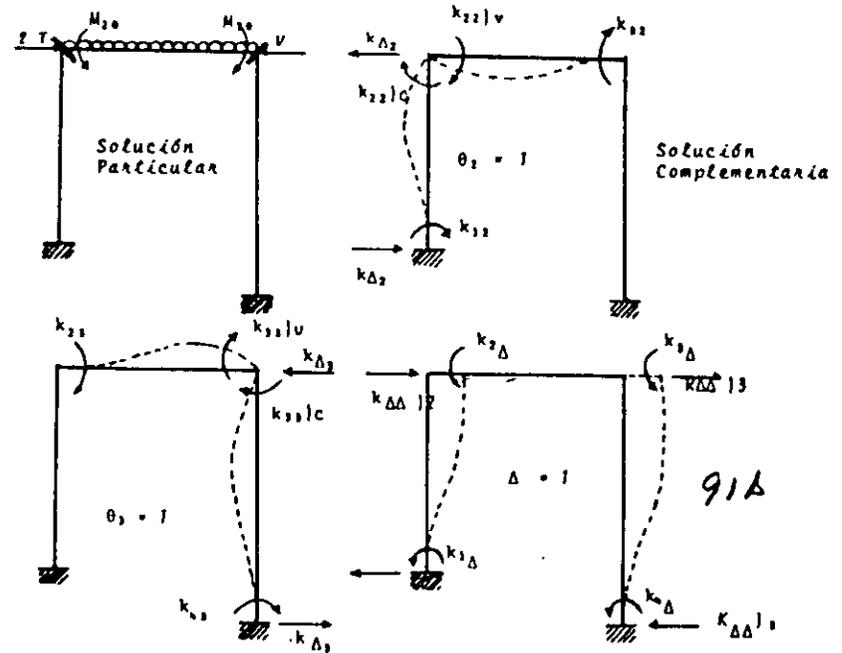


Problema 2.

Utilizando el método de las rigideces, resolver el siguiente marco el cual está sujeto a una carga lateral de  $2T$  y carga distribuida de  $3T/m$  como se muestra en la figura.



El grado de indeterminación cinemática es  $G = 3$  ( $\theta_2, \theta_3, \Delta$ )



Los momentos de empotramiento en los nudos 2 y 3 son:

$$M_{20} = \frac{wL^2}{12} = -\frac{3[4]^2}{12} = -4 \text{ T}\cdot\text{m}; \quad M_{30} = 4 \text{ T}\cdot\text{m} \quad V = 2.0 \text{ T.}$$

Las rigideces en los nudos para los diferentes estados de deformación supuestos, son:

$$k_{22}(v) = \frac{4EI}{4} = EI; \quad k_{22}(c) = \frac{4EI}{3} = 1.333EI$$

$$k_{12} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI; \quad k_{12} = \frac{2EI}{3} = 0.667EI$$

$$k_{11}(v) = \frac{4EI}{4} = EI; \quad k_{11}(c) = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$k_{21} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI; \quad k_{21} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI$$

$$k_{2A} = \frac{6EI}{[3]^2} = 0.667EI; \quad k_{1A} = \frac{6EI}{[4]^2} = 0.375EI$$

$$k_{1A} = \frac{6EI}{[3]^2} = 0.667EI; \quad k_{2A} = \frac{6EI}{[4]^2} = 0.375EI$$

Las fuerzas  $k_{A2}$  y  $k_{A3}$  son pares de fuerzas equilibrantes las cuales se valúan de la siguiente manera:

$$k_{A2} = -\frac{k_{22}(c) + k_{21}}{L} = -\frac{4EI/3 + 2EI/3}{3} = -\frac{6EI}{9} = -0.667EI$$

$$k_{A1} = -\frac{k_{12}(c) + k_{21}}{L} = -\frac{4EI/4 + 2EI/4}{4} = -0.375EI$$

$$k_{AA}(2) = \frac{12EI}{[3]^3} = 0.444EI; \quad k_{AA}(3) = \frac{12EI}{[4]^3} = 0.188EI$$

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$M_{20} + k_{22}O_2 + k_{21}O_1 + k_{2A}A = 0$$

$$M_{30} + k_{12}O_2 + k_{11}O_1 + k_{1A}A = 0$$

$$V + k_{A2}O_2 + k_{A1}O_1 + k_{AA}A = 0$$

Sustituyendo valores:

$$-4 + (1+1.333)EI O_2 + 0.5EI O_1 - 0.667EI A = 0$$

$$4 + 0.5EI O_2 + (1+1)EI O_1 - 0.375EI A = 0$$

$$-2 - 0.667O_2 = 0.375EI O_1 + [0.444 + 0.188]EI A = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior:

$$O_2 = 3.861/EI; \quad O_1 = -1.810/EI; \quad A = 6.159/EI$$

Cálculo de los momentos reales en el marco:

$$M_{12} = k_{12}O_2 - k_{1A}A = 0.667EI \frac{3.861}{EI} - 0.667EI \frac{6.159}{EI} = -1.533$$

$$M_{21} = k_{22}(c)O_2 - k_{2A}A = 1.333EI \frac{3.861}{EI} - 0.667EI \frac{6.159}{EI} = 1.039$$

$$M_{20} = -M_{20} + k_{22}(v)O_2 + k_{21}O_1 = -4 + EI \frac{3.861}{EI} + 0.5EI \frac{-1.81}{EI} = -1.039$$

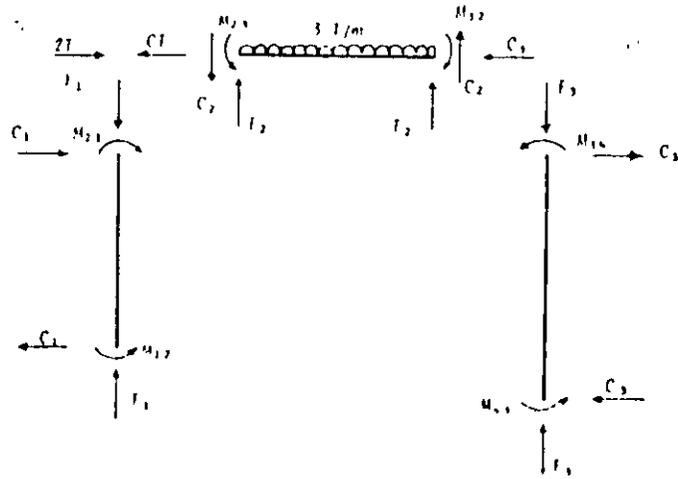
$$M_{32} = M_{30} + k_{12}O_1 + [k_{11}(v)O_1 + EI \frac{-1.81}{EI}] = 4 + 0.5EI \frac{3.861}{EI} + EI \frac{-1.81}{EI} = 4.121$$

$$M_{10} = k_{11}(c)O_1 - k_{1A}A = EI \frac{-1.81}{EI} - 0.375 \frac{6.159}{EI} = -4.121$$

$$M_{2A} = k_{2A}O_2 - k_{2A}A = 0.5EI \frac{-1.81}{EI} - 0.375 EI \frac{6.159}{EI} = -3.215$$

Las reacciones y diagramas de momentos, fuerza cortante y normal

son como se muestra a continuación



Reacciones en el marco

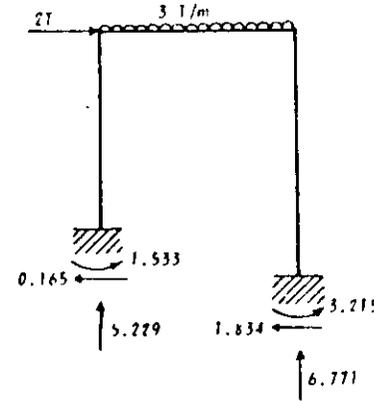
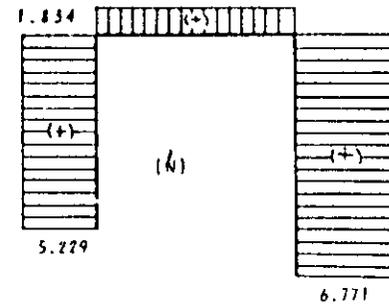


Diagrama de Fuerza Normal



Doble

$$C_1 = \frac{M_{21} \cdot M_{12}}{L} = \frac{1.232 \cdot 1.515}{3} = -0.165 \quad \text{[Por equilibrio]}$$

$$C_2 = \frac{M_{21} \cdot M_{12}}{L} = \frac{1.232 \cdot 4.121}{3} = 0.771$$

$$C_3 = \frac{M_{13} \cdot M_{32}}{L} = \frac{4.121 \cdot 3.217}{3} = 1.834$$

$$F = \frac{qL}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 6 \text{ Ton}$$

$$F_1 = F_2 - C_2 = 6 - 0.771 = 5.229 \text{ Ton.}$$

$$F_3 = F_2 + C_2 = 6 + 0.771 = 6.771 \text{ Ton.}$$

Diagrama de Fuerza Cortante

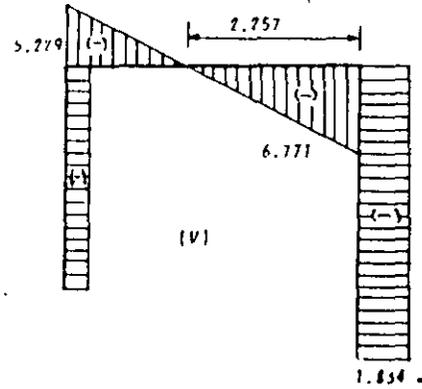
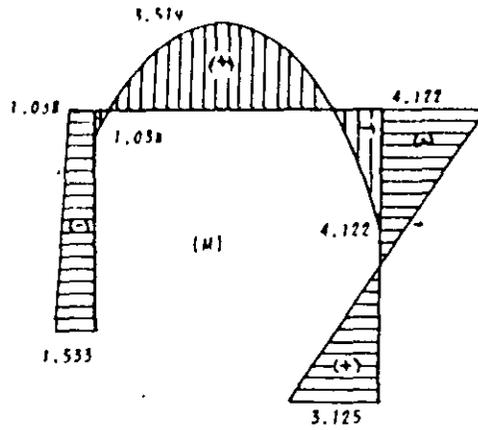
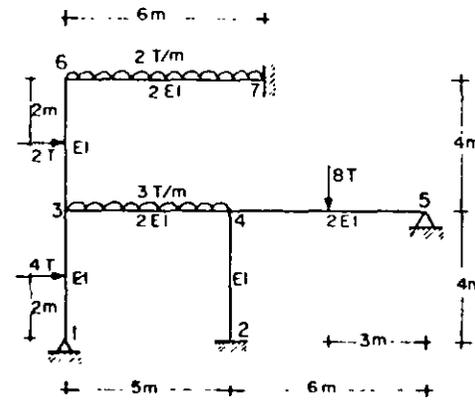


Diagrama de Momentos

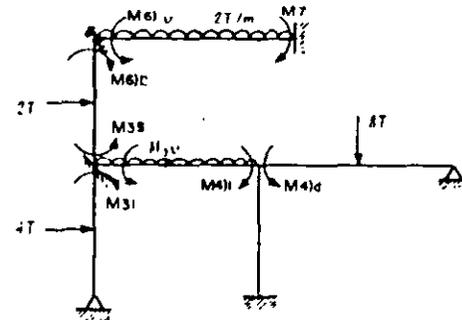


Problema 3.

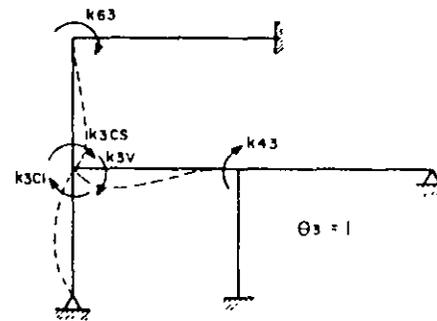
Resolver el siguiente marco



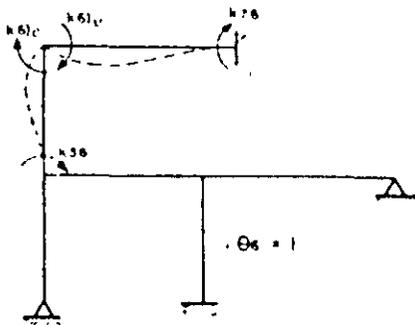
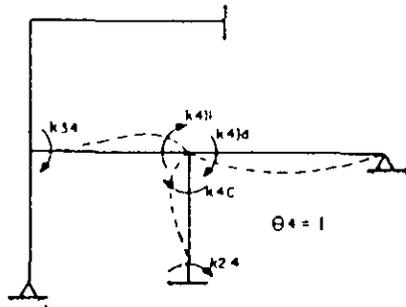
Incognitas  $\theta_3, \theta_4$  y  $\theta_6$



Solución particular



Solución complementaria



El grado de indeterminación cinemática es  $G = 3$  ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ )

Los momentos de emparramiento en los nudos son

$$M_1 = \frac{\omega L^2}{12} = \frac{2(6)^2}{12} = 6 \quad ; \quad M_2 = -6$$

$$M_3 = \frac{Pl}{8} = \frac{2(4)}{8} = 1 \quad ; \quad M_4 = -1$$

$$M_5 = \frac{\omega L^2}{12} = \frac{3(5)^2}{12} = -6.25 \quad ; \quad M_6 = 6.25$$

$$M_7 = \frac{3Pl}{16} = \frac{3(4)(4)}{16} = 3 \quad ; \quad M_8 = -\frac{3Pl}{16} = -\frac{3(8)(6)}{16} = -9$$

Las rigideces en los nudos son los siguientes

$$k_{34} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI \quad ; \quad k_{43} = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$k_{4c} = \frac{3EI}{4} = 0.75EI \quad ; \quad k_{c4} = \frac{4EI(2)}{5} = 1.6EI$$

$$k_{24} = \frac{2EI(2)}{2} = 0.8EI \quad ; \quad k_{42} = \frac{2EI(2)}{5} = 0.8EI$$

$$k_{36} = \frac{4EI(2)}{5} = 1.6EI \quad ; \quad k_{63} = \frac{3EI(2)}{6} = EI$$

$$k_{4c} = \frac{4EI}{4} = EI \quad ; \quad k_{c4} = \frac{2EI}{2} = 0.5EI$$

$$k_{36} = \frac{4EI}{4} = EI \quad ; \quad k_{63} = \frac{4EI}{6}(2) = 1.333EI$$

$$k_{24} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI \quad ; \quad k_{42} = \frac{2EI}{6}(2) = 0.666EI$$

Ecuaciones de Equilibrio (superposición)

$$M_6 + k_{63}\theta_3 + 0 + k_{64}\theta_6 = 0$$

$$M_3 + k_{34}\theta_1 + k_{36}\theta_6 + k_{32}\theta_2 = 0$$

$$M_4 + k_{43}\theta_1 + k_{4c}\theta_6 + 0 = 0$$

Sustituyendo valores

$$(1-6) + 0.5EI\theta_1 + 0 + (1 + 1.333)EI\theta_6 = 0$$

$$(-1-6.25 + 3) + (1 + 0.75 + 1.6)EI\theta_1 + 0.8EI\theta_2 + 0.5EI\theta_6 = 0$$

$$(6.25 - 9) + 0.8EI\theta_1 + (1.6 + 1 + 1)EI\theta_6 + 0 = 0$$

Resolviendo el sistema anterior

$$O_6 = 1.964/EI ; O_7 = 0.838/EI ; O_8 = 0.578/EI$$

Momentos reales en el marco

$$M_{11} = M_1 d + k_{11} O_7 = 3.638$$

$$M_{12} = M_1 v + k_{12} O_7 + k_{13} O_8 = -4.447$$

$$M_{14} = M_1 s + k_{14} O_7 + k_{15} O_8 = 0.819$$

$$M_{21} = M_2 e + k_{21} O_7 + k_{22} O_8 = 3.382$$

$$M_{22} = M_2 v + k_{23} O_7 = 3.317$$

$$M_{23} = M_2 t + k_{24} O_7 + k_{25} O_8 = 7.844$$

$$M_{31} = M_3 d + k_{31} O_7 = 1.422$$

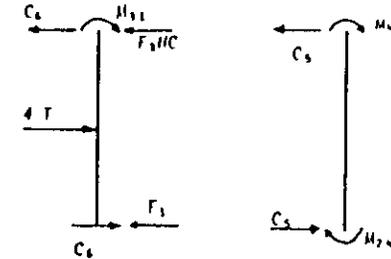
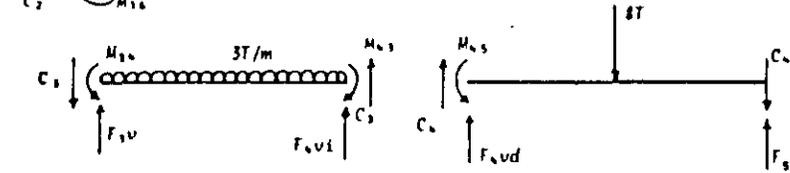
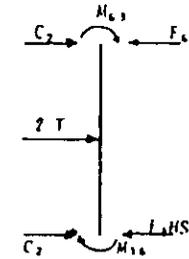
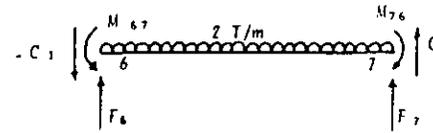
$$M_{32} = k_{32} O_7 = 0.578$$

$$M_{33} = M_3 + k_{33} O_8 = 7.309$$

$$M_{34} = k_{34} O_8 = 0.589$$

Las reacciones y diagramas de momentos, fuerza cortante y normal son las mostradas a continuación.

El procedimiento para determinar las reacciones, es similar al seguido en los ejemplos anteriores.



De la figura anterior se tiene

$$C_1 = \frac{M_{67} + M_{76}}{6} = \frac{-3.382 + 7.309}{6} = 0.655 T$$

$$C_2 = \frac{M_{23} + M_{32}}{4} = \frac{3.382 + 0.819}{4} = 1.051$$

$$C_3 = \frac{M_{34} + M_{43}}{5} = \frac{-4.447 + 7.844}{5} = 0.679$$

$$C_4 = \frac{M_{12} \cdot 0}{2} = -\frac{8.422}{2} = -4.211$$

$$C_5 = \frac{M_{12} + M_{21}}{4} = \frac{0.578 + 0.289}{4} = 0.217$$

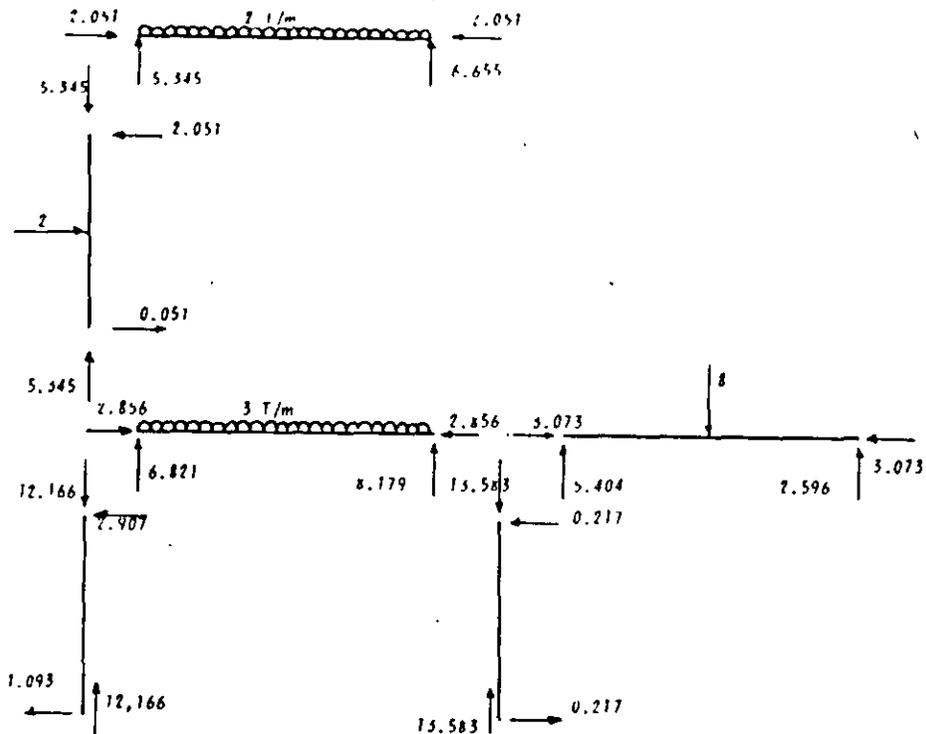
$$C_6 = \frac{M_{31} + 0}{4} = \frac{3.628}{4} = .907$$

$$F_{6V} = F_7 = \frac{wL}{2} = \frac{2(6)}{2} = 6 \text{ t}$$

$$F_{6H} = F_8 = \frac{7}{2} = 3.5; \quad F_{3V} = F_{4V} = \frac{3(5)}{2} = 7.5$$

$$F_{5V} = F_9 = \frac{8}{2} = 4; \quad F_{1H} = F_1 = \frac{4}{2} = 2$$

Del equilibrio de las fuerzas actuantes en cada uno de los miembros de la estructura se obtiene.



Reacciones.

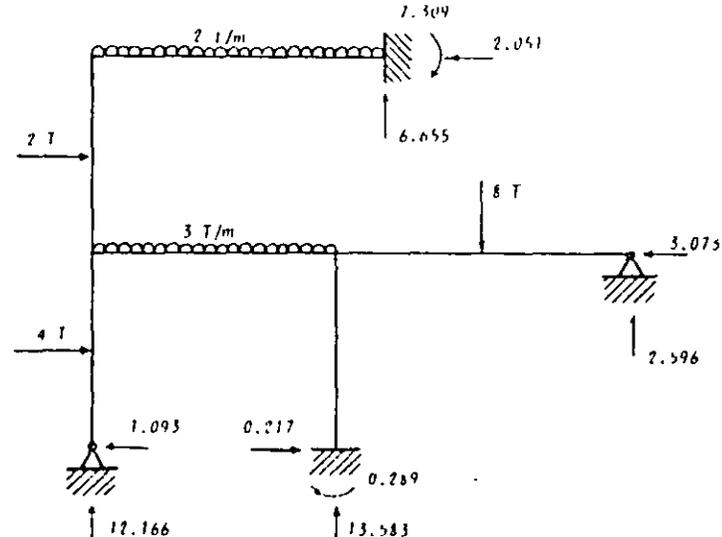
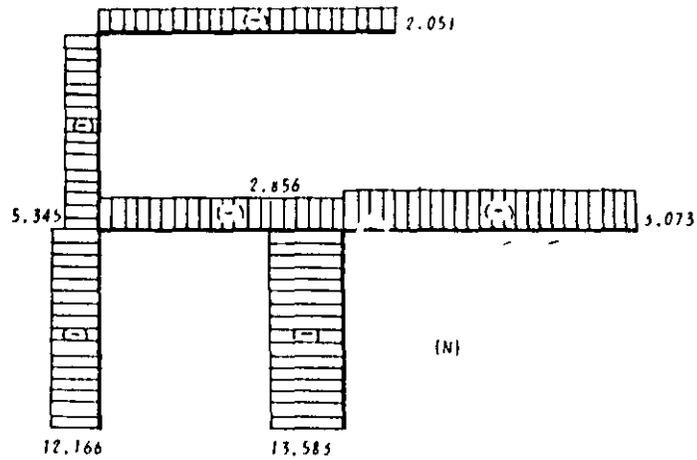


Diagrama de Fuerza Normal



(N)

Diagrama de cortante

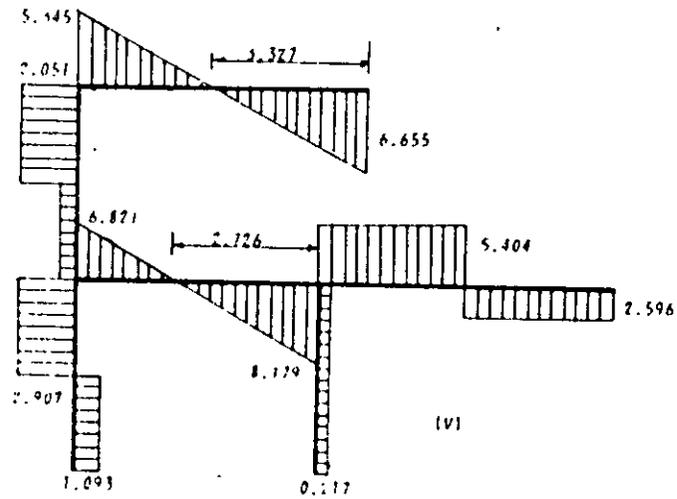
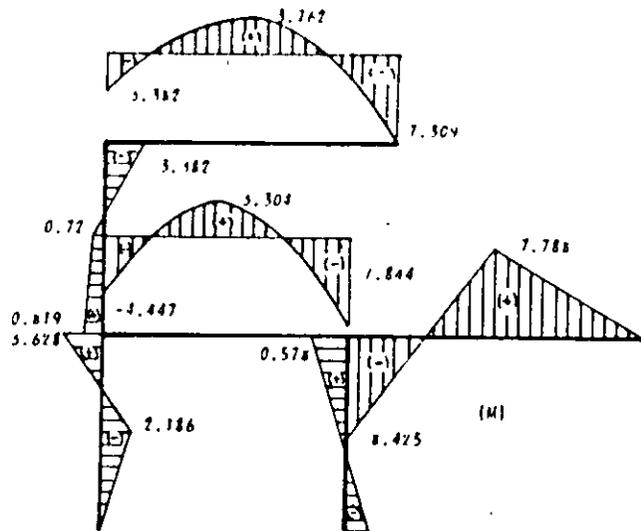
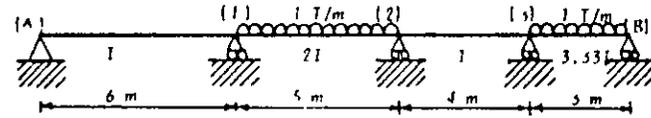


Diagrama de momentos



Problema 4.

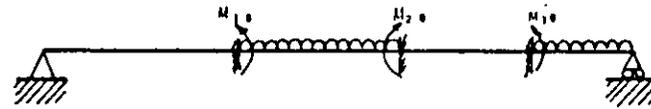
Determinar las reacciones y diagramas de momentos y fuerza cortante de la viga continua mostrada



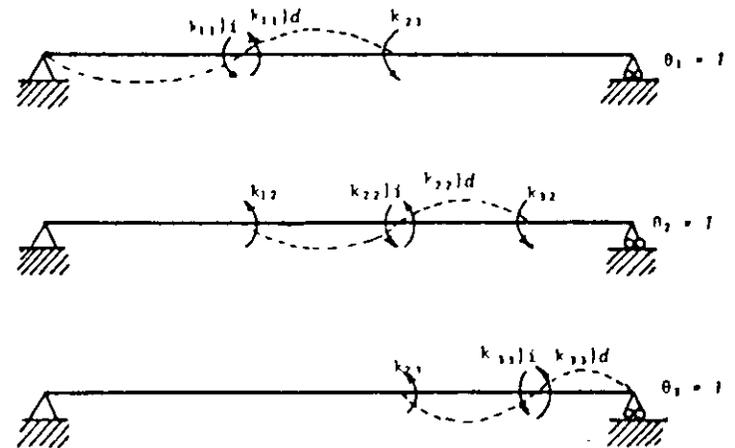
Notación  $\curvearrowright$  giros y desplazamientos

El grado de indeterminación es 3  $\{0, 0, 0\}$

Solución particular



Solución complementaria



Los momentos de empotramiento valen

$$M_{10} = \frac{wl^2}{12} = \frac{1(6)^2}{12} = 2.08 \text{ t-m} ; \quad M_{20} = -2.08 \text{ t-m}$$

$$M_{30} = \frac{wl^2}{8} = \frac{1(3)^2}{8} = 1.125 \text{ t-m}$$

$$k_{11}(l) = \frac{3EI}{8} = 0.5EI ; \quad k_{11}(d) = \frac{4EI(2)}{5} = 1.6EI$$

$$k_{21}(l) = \frac{4EI}{5} = 0.8EI ; \quad k_{21}(d) = \frac{4}{3} EI = 0.8EI$$

$$k_{31}(l) = \frac{4EI}{5} = 0.8EI ; \quad k_{31}(d) = \frac{4EI}{4} = EI$$

$$k_{41}(l) = \frac{2EI}{4} = 0.5EI ; \quad k_{41}(d) = \frac{2EI}{4} = 0.5EI$$

$$k_{51}(l) = \frac{4EI}{4} = EI ; \quad k_{51}(d) = \frac{3 \times 3 \times 3EI}{3} = 3.33EI$$

Funciones de equilibrio

$$M_{10} + k_{11}(l) \theta_1 + k_{12}(l) \theta_2 = 0$$

$$M_{20} + k_{21}(l) \theta_1 + k_{22}(l) \theta_2 + k_{23}(l) \theta_3 = 0$$

$$M_{30} + k_{31}(l) \theta_2 + k_{32}(l) \theta_3 = 0$$

Sustituyendo valores

$$2.08 + 10.5 \theta_1 + 1.6EI \theta_2 = 0$$

$$-2.08 + 0.8EI \theta_1 + (1.6 + 1)EI \theta_2 + 0.5EI \theta_3 = 0$$

$$1.125 + 0.5EI \theta_3 + EI + 3.33EI \theta_3 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\theta_1 = -\frac{1.502}{EI} ; \quad \theta_2 = \frac{1.342}{EI} ; \quad \theta_3 = -\frac{0.415}{EI}$$

Cálculo de momentos reales en la viga.

$$M_{1A} = k_{11}(l) \theta_1 = 0.5EI \left[ -\frac{1.502}{EI} \right] = -0.751 \text{ t-m}$$

$$M_{12} = M_{10} + k_{11}(d) \theta_1 + k_{12}(l) \theta_2 = 2.08 + (1.6EI) \left[ -\frac{1.502}{EI} \right] + 0.8EI \left[ \frac{1.342}{EI} \right]$$

$$M_{12} = 0.751$$

$$M_{21} = M_{20} + k_{21}(d) \theta_1 + k_{22}(l) \theta_2 = -2.08 + 0.8EI \left[ -\frac{1.502}{EI} \right] + 1.6EI \left[ \frac{1.342}{EI} \right] = 1.134$$

$$M_{23} = k_{22}(d) \theta_2 + k_{23}(l) \theta_3 = EI \left[ \frac{1.342}{EI} \right] + 0.5EI \left[ -\frac{0.415}{EI} \right] = 1.134$$

$$M_{32} = k_{32}(l) \theta_2 + k_{33}(l) \theta_3 = 0.5EI \left[ \frac{1.342}{EI} \right] + EI \left[ -\frac{0.415}{EI} \right] = 0.256$$

$$M_{1B} = M_{30} + k_{31}(d) \theta_3 = 1.125 + 3.33EI \left[ -\frac{0.415}{EI} \right] = -0.256$$

Fuerza y momentos resultantes en la viga

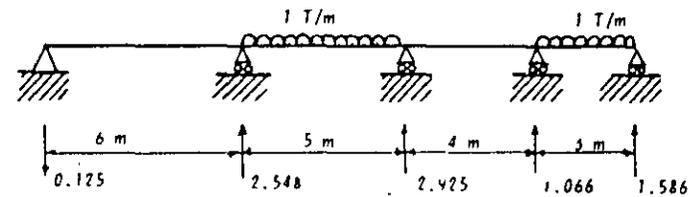
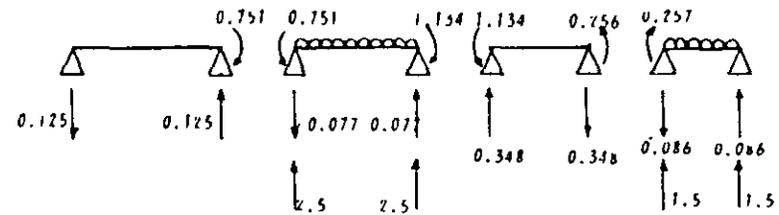


Diagrama de fuerza cortante

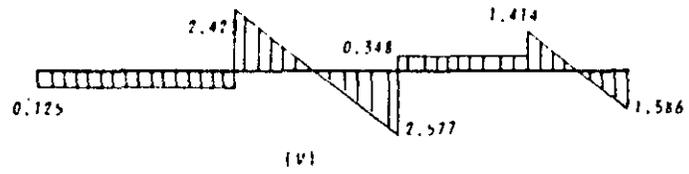
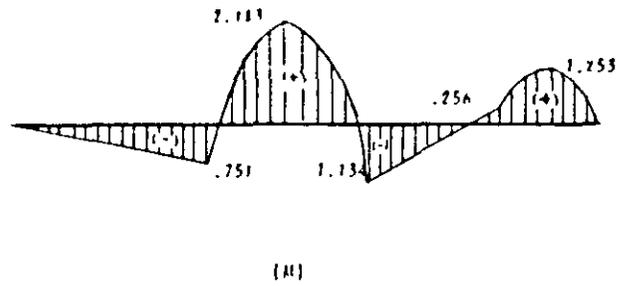


Diagrama de momentos



## MÉTODO DE CROSS

Este es un método de relajaciones y fue ideado por Hardy Cross en 1932. También se llama "Método de distribución de momentos". No es un método de los llamados aproximados, sino un proceso de aproximaciones sucesivas que nos permite determinar las incógnitas hiperestáticas con la precisión deseada.

En estructuras impedidas al desplazamiento lateral el método de Cross evita el tener que efectuar la solución de un sistema de ecuaciones. Si la estructura puede desplazarse, el método de Cross también conduce a un sistema de ecuaciones, pero el número de dichas ecuaciones es muy inferior al que se obtendría utilizando por ejemplo, el método de las flexibilidades o el método general de las rigideces.

El método de Cross puede aplicarse en estructuras con elementos de sección constante o variable, así como a estructuras con elementos de eje recto o curvo.

Para comprender este método es necesario comprender perfectamente ciertos términos básicos, los cuales se estudiarán enseguida.

## CONVENCIÓN DE SIGNOS

Para designar el signo de los momentos la convención será la siguiente: Si el momento de flexión tiende a hacer girar al apoyo en el sentido de las manecillas del reloj, el momento de flexión se considerará positivo.

## CAPITULO 7

## MÉTODO DE CROSS

### FACTOR DE DISTRIBUCION

Considérese la Fig. 1 mostrada, en la cual la estructura está sujeta a la aplicación externa de un momento  $M$ .

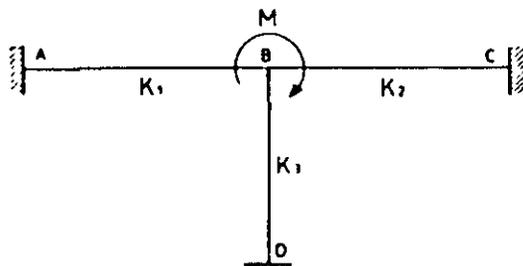


Fig. 1

La estructura soportará el momento  $M$  por medio de los elementos BA, BC y BD. La contribución de cada elemento para resistir el momento  $M$  estará en función de las rigideces  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  de cada elemento respectivamente. Se puede decir entonces que la contribución de cada elemento es:

$$M_{BA} = \frac{K_1}{\Sigma K} M$$

$$M_{BC} = \frac{K_2}{\Sigma K} M$$

$$M_{BD} = \frac{K_3}{\Sigma K} M$$

donde  $\Sigma K = K_1 + K_2 + K_3$

Por lo tanto se puede enunciar que:

"El factor de distribución para un elemento de un nudo en una estructura, es igual a la rigidez del elemento dividida por la suma de las rigideces de todos los elementos que llegan a dicho nudo"

En sí, el factor de distribución representa la rigidez proporcional del elemento con respecto a la rigidez del nudo.

Para el caso analizado arriba se tiene:

$\frac{K_1}{\Sigma K}$  es el factor de distribución para el elemento BA

$\frac{K_2}{\Sigma K}$  es el factor de distribución para el elemento BC

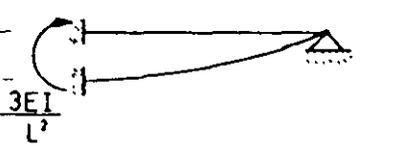
$\frac{K_3}{\Sigma K}$  es el factor de distribución para el elemento BD

### FACTOR DE TRANSPORTE

Se ha visto anteriormente que cuando se desarrolla un momento resistente en el extremo de un elemento, se induce un momento en el extremo opuesto de dicho elemento. El momento inducido en el extremo opuesto tiene siempre una relación con el momento resistente desarrollado en el extremo que gira o que se desplaza. Por lo tanto, se puede definir que:

"El factor de transporte es el valor por el cual debe multiplicarse el momento que se desarrolla en el extremo girado o desplazado de un elemento (siendo el otro extremo empotrado) para obtener el valor del momento inducido en el extremo opuesto".

En la siguiente tabla se analizan algunos casos comunes.

ESTRUCTURA	F. T.
	$\frac{1}{2}$
	$1$
	$0$
	$0$

\* F.T. "Factor de transporte"

METODO DE CROSS

a) Estructuras sin desplazamientos.

En la Fig. 2 se muestra un marco sujeto a un sistema de cargas dado. Para resolver dicho marco se puede usar el principio de superposición indicado en la figura.

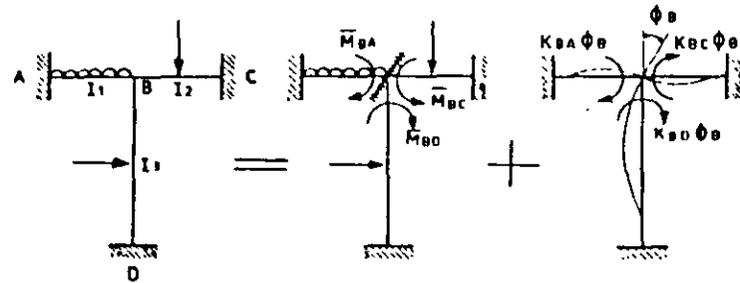


fig. 2

Los momentos de los elementos que llegan al nudo B son:

$$M_{BA} = \bar{M}_{BA} + K_{BA} \Phi_B$$

$$M_{BC} = \bar{M}_{BC} + K_{BC} \Phi_B \quad \text{--- (a)}$$

$$M_{BD} = \bar{M}_{BD} + K_{BD} \Phi_B$$

En condiciones de equilibrio  $\sum M_B = 0$  por lo tanto

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} = 0$$

o sea

$$\bar{M}_B + K_{BB} \phi_B = 0$$

y

$$\phi_B = - \frac{\bar{M}_B}{K_{BB}} \quad \text{———— (b)}$$

donde

$\bar{M}_B = \bar{M}_{BA} + \bar{M}_{BC} + \bar{M}_{BD}$  es el momento de desequilibrio del nudo B.

$K_{BB} = K_{BA} + K_{BC} + K_{BD}$  es la rigidez angular del nudo B.

sustituyendo (b) en (a) se tiene que

$$M_{BA} = \bar{M}_{BA} - \frac{K_{BA}}{K_{BB}} \bar{M}_B$$

$$M_{BC} = \bar{M}_{BC} - \frac{K_{BC}}{K_{BB}} \bar{M}_B \quad \text{———— (c)}$$

$$M_{BD} = \bar{M}_{BD} - \frac{K_{BD}}{K_{BB}} \bar{M}_B$$

si

$$d_{BA} = - \frac{K_{BA}}{K_{BB}}$$

$$d_{BC} = - \frac{K_{BC}}{K_{BB}}$$

$$d_{BD} = - \frac{K_{BD}}{K_{BB}}$$

que son los factores de distribución de cada elemento que llega al nudo B se sustituyen en (c), se tiene que

$$M_{BA} = \bar{M}_{BA} + d_{BA} \bar{M}_B$$

$$M_{BC} = \bar{M}_{BC} + d_{BC} \bar{M}_B$$

$$M_{BD} = \bar{M}_{BD} + d_{BD} \bar{M}_B$$

Las expresiones anteriores indican que los momentos finales en los elementos, es la suma del momento de empotramiento respectivo más la parte proporcional (factor de distribución) que le corresponde del momento de desequilibrio del nudo.

Los momentos en los extremos opuestos al nudo B serían:

$$M_{AB} = \bar{M}_{AB} + t_{BA} d_{BA} \bar{M}_B$$

$$M_{CB} = \bar{M}_{CB} + t_{BC} d_{BC} \bar{M}_B$$

$$M_{DB} = \bar{M}_{DB} + t_{BD} d_{BD} \bar{M}_B$$

donde  $t_{BA}$ ,  $t_{BC}$  y  $t_{CB}$  son los factores de transporte de los elementos que llegan al nudo B.

Puede establecerse entonces el siguiente procedimiento para la aplicación del método de Cross.

1. Se obtienen los momentos de empotramiento de la estructura.
2. Se calculan los factores de distribución y de transporte para todos los elementos de la estructura.
3. Se distribuyen los momentos de desequilibrio de cada nudo en todos los elementos que concurren a dicho nudo, según su factor de distribución correspondiente. Debe tenerse en cuenta que después de distribuir se debe transportar al extremo opuesto según el factor de transporte correspondiente.
4. El proceso de ir equilibrando los nudos puede terminarse según la aproximación deseada.

En el desarrollo de los ejercicios siguientes puede verse en mejor forma el procedimiento del método.

#### EJERCICIO

Considérese la viga mostrada en la Fig. 3 sujeta al sistema de carga dado.

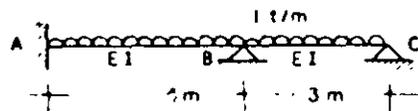


Fig. 3

Los momentos de empotramiento y los factores de distribución y transporte serán.

$$\bar{M}_{AB} = -\frac{WL^2}{12} = -\frac{1(4)^2}{12} = -1.333 \text{ t-m}$$

$$\bar{M}_{BA} = -\bar{M}_{AB} = 1.333 \text{ t-m}$$

$$\bar{M}_{BC} = -\frac{WL^2}{8} = -\frac{1(3)^2}{8} = -1.125 \text{ t-m}$$

$$K_{BA} = \frac{4EI}{L} = EI$$

$$K_{BC} = \frac{3EI}{L} = EI$$

$$\Sigma K_B = 2EI$$

$$d_{BA} = \frac{K_{BA}}{\Sigma K} = \frac{EI}{2EI} = 0.5$$

$$d_{BC} = \frac{K_{BC}}{\Sigma K} = \frac{EI}{2EI} = 0.5$$

$$t_{BA} = \frac{1}{2}$$

$$t_{BC} = 0$$

Se puede entonces hacer la siguiente representación de los datos obtenidos

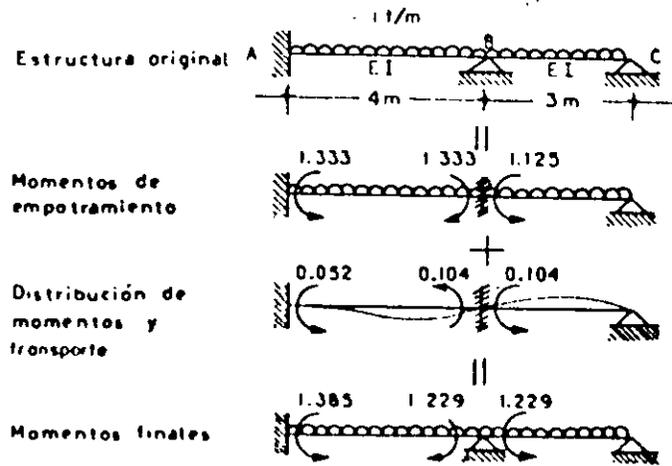


fig 4

La distribución de momentos se efectuó distribuyendo el momento de desequilibrio en los elementos BA y BC para establecer el equilibrio en el nudo B, o sea

$$\bar{M}_B = \bar{M}_{BA} + \bar{M}_{BC} = 1.333 - 1.125 = 0.208$$

$$d_{BA} \bar{M}_B = -0.5(0.208) = -0.104$$

$$d_{BC} \bar{M}_B = -0.5(0.208) = -0.104$$

Los momentos finales se obtienen sumando los momentos de empotramiento con los momentos distribuidos y/o transportados en B.

El ejercicio anterior puede también presentarse en la forma siguiente:

BARRA	Momento de empotramie.	RIGIDEZ	FACTOR DE DISTRIBUC.	FACTOR DE TRANSPORTE
BA	1.333	$\frac{4EI}{L} = EI$	0.50	0.50
BC	-1.125	$\frac{3EI}{L} = EI$	0.50	0.00
$\Sigma$	0.208	EI	1.00	

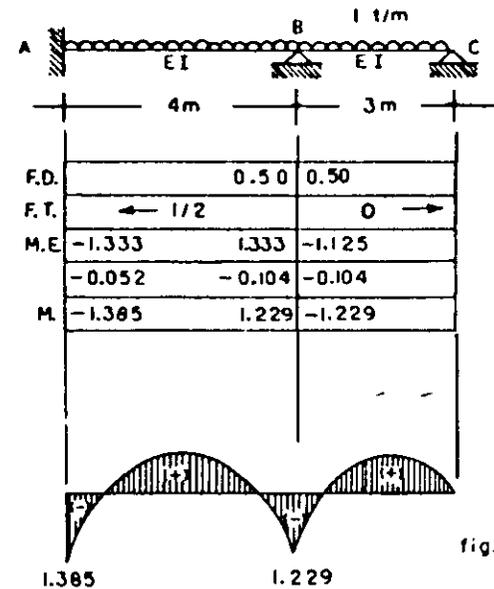


fig. 5

Factor de distribución  
Factor de transporte  
Momentos de empotramiento  
Distribución y transporte  
Momentos finales

Diagrama de momentos

## b). Estructuras con desplazamientos.

Para resolver este tipo de estructuras por medio del método de Cross se puede emplear el principio de la superposición. Considérese, por ejemplo, el marco mostrado en la Fig. 6, el cual puede desplazarse lateralmente.

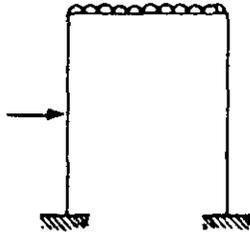
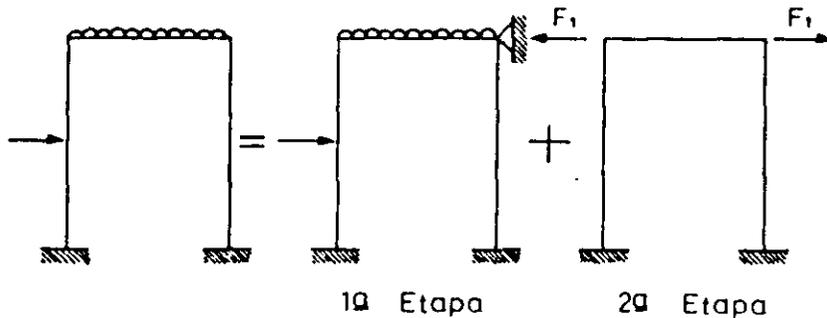


Fig. 6

Por superposición se puede establecer que:



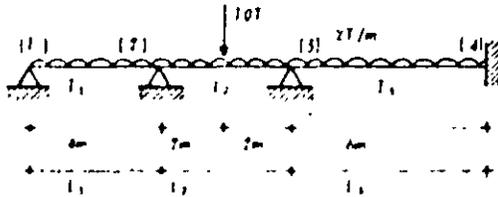
Lo cual quiere decir, que en la primera etapa se resuelve el marco considerando que este no se desplaza. Se calcula la fuerza  $F_1$  que impide el desplazamiento y se aplica al marco (segunda etapa). Puede establecerse entonces el siguiente procedimiento para resolver estructuras de este tipo:

1. Resolver la estructura considerando que esta no se puede desplazar. Determinar la fuerza  $F_1$  que impide el desplazamiento.
2. Suponer en la estructura un desplazamiento  $\Delta$  cualquiera impidiendo que los nudos giren. Con la estructura desplazada se permiten los giros en los nudos y se resuelve la estructura. Se calcula ahora la fuerza  $F_2$  que produce el desplazamiento  $\Delta$  dado.
3. Como la fuerza  $F_1$  que impidió el desplazamiento en (1) será diferente que la fuerza  $F_2$  calculada en (2), los resultados del paso (2) se deben multiplicar por el factor de corrección  $F_1/F_2$ .
4. Se suman los resultados obtenidos en (1) con los obtenidos en (3) y ésta será la solución final.

## EJEMPLOS

## MÉTODO DE CROSS

Problema 1.- Encontrar el diagrama de fuerza cortante y momento flexionante de la viga continua que se muestra enseguida, la cual está sometida a una carga uniformemente repartida de 2 tn/m y una carga de 10 tn, como se muestra en la figura.



$$L_1 = 4\text{m}; \quad L_2 = 2\text{m}; \quad L_3 = 6\text{m}; \quad L = 12\text{m}.$$

Solución.- Considerese que los nudos (2) y (3) están empotrados.

1.- Cálculo de los momentos de empotramiento

$$\bar{M}_{21} = \frac{wL_1^2}{8} + \frac{2(8)^2}{8} = 16;$$

$$\bar{M}_{23} = -\frac{wL_2^3}{12} - \frac{PL_2}{8} = -\frac{2(4)^3}{12} - \frac{10(4)}{8} = -7.66; \quad \bar{M}_{32} = 7.66$$

$$\bar{M}_{43} = -\frac{wL_3^3}{12} - \frac{2(6)^2}{12} = -6; \quad \bar{M}_{34} = 6$$

2.- Factores de distribución y transporte.

Nudo 2

$$K_{21} = \frac{3EI_1}{L_1} + \frac{3(150)E}{4} = 112.5E; \quad K_{23} = \frac{4EI_2}{L_2} = \frac{4(200)E}{2} = 200E$$

$$EK_2 = (112.5 + 200)E = 312.5E$$

$$F.D._{21} = \frac{K_{12}}{EK_2} = \frac{112.5}{312.5} = 0.36; \quad F.D._{23} = \frac{K_{23}}{EK_2} = \frac{200}{312.5} = 0.64$$

$$FT_{21} = 0.0; \quad FT_{23} = 0.5;$$

Nudo 3

$$K_{32} = \frac{4EI_2}{L_2} = \frac{4(200)E}{2} = 200E$$

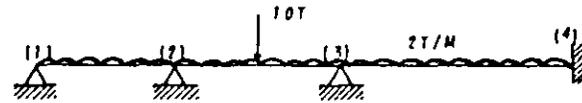
$$K_{34} = \frac{4EI_3}{L_3} + \frac{4(100)E}{6} = 66.67E$$

$$EK_3 = (200 + 66.67)E = 266.67E$$

$$F.D._{32} = \frac{K_{23}}{EK_3} = \frac{200}{266.67} = 0.75; \quad F.D._{34} = \frac{K_{34}}{EK_3} = \frac{66.67}{266.67} = 0.25$$

$$F.T._{32} = 0.5; \quad F.T._{34} = 0.5$$

El arreglo tabulado de la solución es el siguiente



	(1)	(2)	(3)	(4)
Fact. Distr.	-0.25	-0.25	-0.25	-0.25
Fact. Transp.	0	0.5	0.5	0
Momentos	4.00	-2.34	2.34	0
1 M <sub>0</sub>				
2 F.T. (1) M <sub>0</sub>	1.17		1.17	
3 M <sub>0</sub>			-2.17	-0.71
4 F.T. (1) M <sub>0</sub>		-1.06		-0.36
M <sub>0</sub>	0.14	0.14		
F.T. (1) M <sub>0</sub>			0.29	
M <sub>0</sub>			-0.29	-0.05
F.T. (1) M <sub>0</sub>		-0.11		-0.05
M <sub>0</sub>	0.03	0.03		
ΣM	5.75	-5.75	1.24	5.59

En la tabla anterior se ha ilustrado como se distribuyen los momentos de desequilibrio de cada nudo en los elementos que concurren a dicho nudo, según su factor de distribución correspondiente, teniendo en cuenta, que se deben transportar dichos momentos al extremo opuesto según su factor de transporte.

Con el fin de hacer más claro el método, se anotarán algunas operaciones en forma detallada de los valores obtenidos en la tabla.

Renglón 1. - Distribución de momentos (equilibrio del nudo 2)

$$\bar{M}_2 = \bar{M}_{21} + \bar{M}_{23} = 4 - 7.66 = -3.66$$

$$(d_{21})\bar{M}_2 = -0.36(-3.66) = 1.32; \quad (d_{23})\bar{M}_2 = -0.64(-3.66) = 2.34$$

Renglón 2. - Momento transportado

$$F.T._{21} (d_{21})\bar{M}_2 = 0.5(2.34) = 1.17$$

Renglón 3. - Distribución de momentos (equilibrio del nudo 3)

$$\bar{M}_3 = \bar{M}_{32} + \bar{M}_{34} + F.T._{23}(d_{33})\bar{M}_2 = 7.66 - 6 + 1.17 = 2.83$$

$$(d_{32})\bar{M}_3 = -0.75(2.83) = -2.12; \quad (d_{34})\bar{M}_3 = -0.25(2.83) = -0.71$$

Renglón 4. - Momentos transportados

$$F.T._{32}(d_{32})\bar{M}_3 = 0.5(-2.12) = -1.06; \quad F.T._{34}(d_{34})\bar{M}_3 = 0.5(-0.71) = -0.36$$

El procedimiento se repite iterativamente hasta obtener la precisión deseada.

Una vez que se han distribuido y transportado los momentos de desequilibrio se procede a determinar los momentos finales, que de acuerdo con la tabla anterior, basta con sumar algebraicamente los valores que aparecen en cada columna.

Cálculo de reacciones en la viga

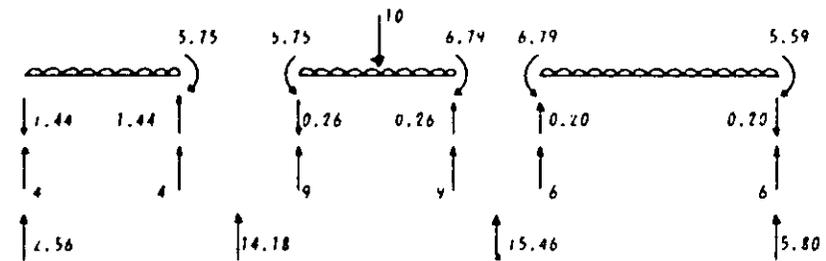


Diagrama de cortante

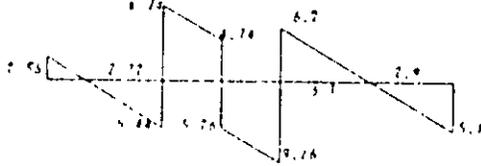
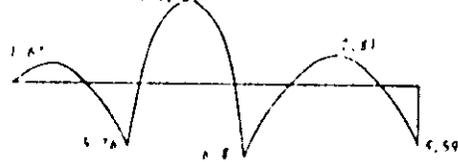
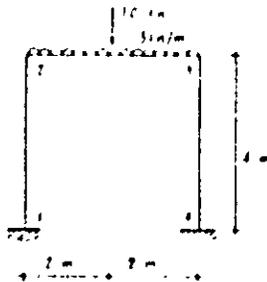


Diagrama de momentos



Problema 2 - Determinar el diagrama de fuerza cortante y momento flexionante del marco mostrado



$E, I = \text{constante}$   
 Por simetría geométrica y de carga  
 no hay desplazamiento lateral

1. - Momentos de empotramiento

$$\bar{M}_{21} = -\frac{wL^2}{12} + \frac{PL}{8} = -\frac{(10)(4)^2}{12} + \frac{10(4)}{8} = -9.0 ; \bar{M}_{22} = 0$$

$$\bar{M}_{32} = \frac{wL^2}{12} + \frac{PL}{8} = \frac{3(16)}{12} + \frac{10(4)}{8} = 9.0 ; \bar{M}_{33} = 0$$

2 - Cálculo de los factores de distribución.

Nudo 2

$$r_{21} = \frac{4EI}{4} = EI ; r_{23} = \frac{4EI}{4} = EI ; 2r_2 = 2EI$$

$$d_{21} = \frac{1}{2} + 0.5 = 0.75 ; d_{23} = \frac{1}{2} - 0.5 = 0.25$$

Nudo 3

$$r_{32} = \frac{4EI}{4} = EI ; r_{34} = \frac{4EI}{4} = EI ; 2r_3 = 2EI$$

$$d_{32} = \frac{1}{2} + 0.5 = 0.75 ; d_{34} = \frac{1}{2} - 0.5 = 0.25$$

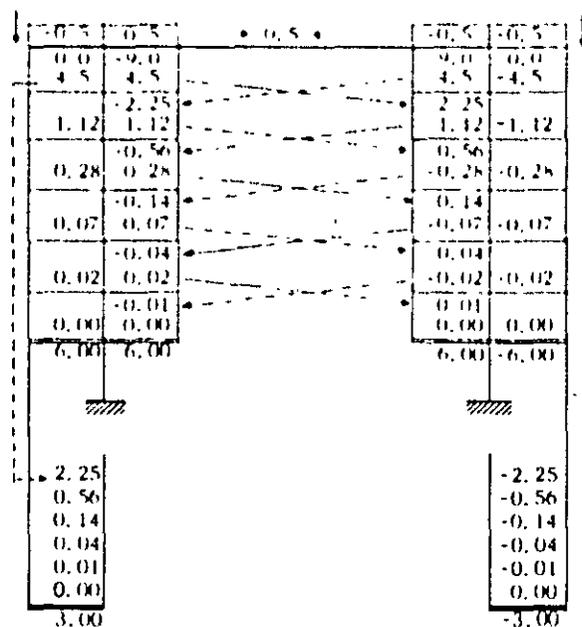
Dado que los factores de distribución son de vital importancia en el método de Cross en el cálculo de momentos, debe verificarse siempre que la suma de dichos factores en cada uno de los nudos, sea igual a la unidad.

Para este problema, puede observarse que la suma del valor de los factores de distribución en los nudos 2 y 3, es correcta.

Los factores de transporte son para todos los casos igual a 0.5

En este ejemplo se considera una variante del método que consiste en equilibrar todos los nudos y después efectuar los transportes correspondientes a los empotramientos 1 y 4.

El arreglo tabulado se presenta a continuación y no importa el orden de equilibrio de los nudos, ya que primero se equilibran todos ellos y después se procede al transporte de momentos.



La secuencia que se ha seguido en el cálculo anterior es como lo indican las flechas y que a continuación se expone brevemente.

De acuerdo con las ecuaciones utilizadas en este método y refiriendo la notación a la expuesta en la parte teórica de estos apuntes, se seguirá la secuencia indicada con líneas continuas.

El momento de desequilibrio del nudo 2 es:

$$M_2 = \bar{M}_{23} + \bar{M}_{21} = -9 + 0 = -9$$

El momento distribuido vale  $M_{D2} = d_{23} \bar{M}_2 = 0.5(-9.0) = -4.5$

El momento transportado es  $M_{T1} = t_{21} d_{23} \bar{M}_2 = 0.5(4.5) = 2.25$

Por lo tanto los momentos distribuidos con el nudo 3 son

$$M_{D3} = d_{32} M_{T1} = 0.5(2.25) = 1.12$$

$$y \quad M_{D1} = d_{12} M_{T1} = 0.5(2.25) = 1.12$$

El momento transportado del nudo 2 al 3 calculado antes, pasa a ocupar el momento de desequilibrio en el nudo 3, por lo que se procedió a la distribución del mismo.

Volviendo al problema se transporta el momento distribuido de -1.12 al nudo 2:

$$M_{T2} = t_{22} d_{32} M_{T1} = 0.5(-1.12) = -0.56$$

Este momento se distribuye en los miembros que concurren al nudo 2 repitiendo nuevamente el procedimiento.

Una vez equilibrados los nudos, se procede a transportar los momentos distribuidos hacia los empotramientos. Así por ejemplo para el apoyo 1 se tiene:

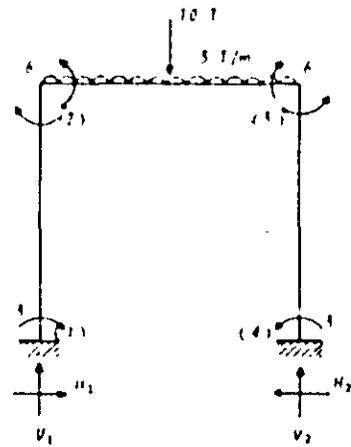
$$M_{T1} = t_{21} d_{21} \bar{M}_2 = \text{Momento transportado a "1"}$$

$$M_{T1} = 0.5(-0.5)(-9.0) = 2.25 \text{ (Línea punteada del nudo 2 al 1)}$$

$$M_{T1} = 0.5(1.12) = 0.56 ; M_{T1} = 0.5(0.28) = 0.14$$

etc:

Cálculo de reacciones en el marco:



$$\sum M_{i, \text{izq.}} = 0$$

$$6 = -3 + H_1(4) + H_2 \cdot \frac{9}{4} = 2.25 \text{ tn}$$

$$\sum M_{i, \text{izq.}} = 0$$

$$6 = -3 + 10(7) + 17(7) - V_1(4) = 2.25(4)$$

$$V_1 = 11.0 \text{ tn.}$$

Por simetría de cargas tenemos

$$V_1 = V_2 = 11.0 \text{ tn} ; H_1 = H_2 = 2.25 \text{ tn.}$$

Diagrama de fuerza cortante

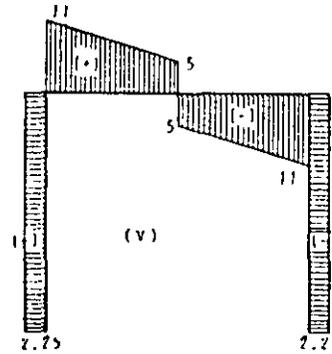
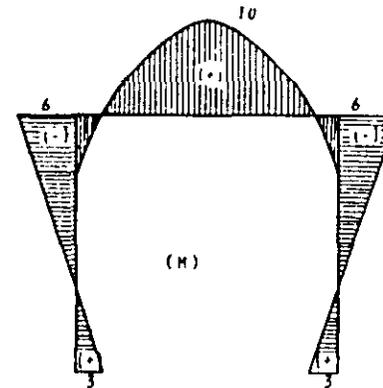
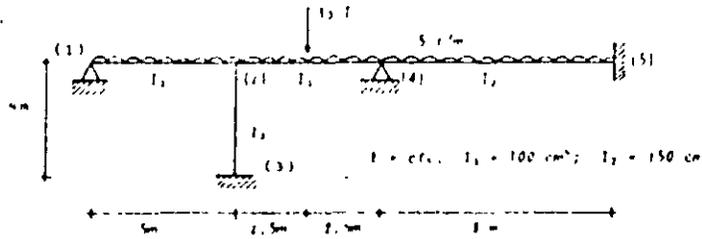


Diagrama de momento flexionante



Problema 3. Encontrar el diagrama de momento flexionante de la siguiente estructura



Solución.

1. Cálculo de momentos de empotramiento.

$$M_{21} = \frac{wl^2}{8} = 15.075; \quad M_{12} = -\frac{wl^2}{8} - \frac{Pl}{4} = -31.04$$

$$M_{32} = 31.04; \quad M_{23} = -\frac{wl^2}{8} = -15.075$$

2. Cálculo de rigideces relativas

Nudo 2

$$K_{21} = \frac{3I_1}{l} = 60; \quad K_{23} = \frac{4I_2}{l} = 80; \quad K_{24} = \frac{4I_1}{l} = 150$$

$$IK_2 = 290$$

Nudo 4

$$K_{42} = \frac{4I_1}{l} = 80; \quad K_{43} = \frac{4I_2}{l} = 75; \quad IK_4 = 155$$

3. Cálculo de factores de distribución y transporte

Nudo 2

$$d_{21} = \frac{K_{21}}{IK_2} = 0.207; \quad d_{23} = \frac{K_{23}}{IK_2} = 0.277; \quad d_{24} = \frac{K_{24}}{IK_2} = 0.516$$

$$c_{21} = 0; \quad c_{23} = 0.5; \quad c_{24} = 0.5$$

Nudo 4

$$d_{42} = \frac{K_{42}}{IK_4} = 0.517; \quad d_{43} = \frac{K_{43}}{IK_4} = 0.483$$

$$c_{42} = 0.5; \quad c_{43} = 0.5$$

4. Distribución de momentos de empotramiento

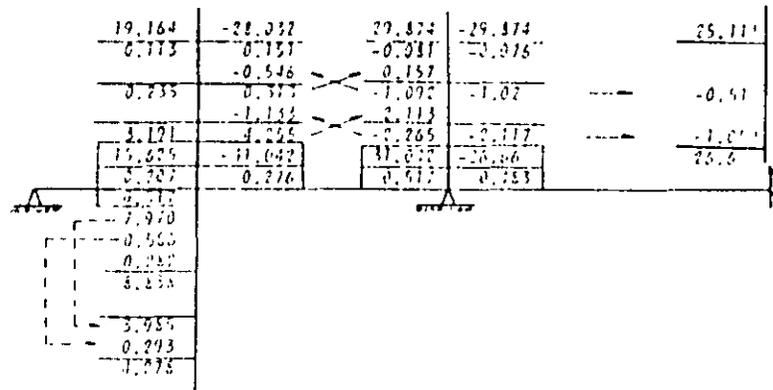
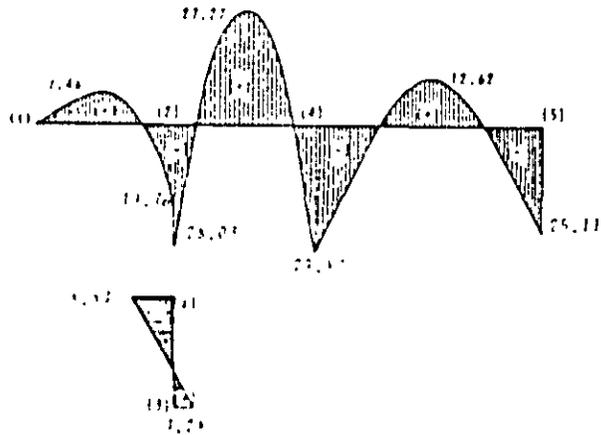
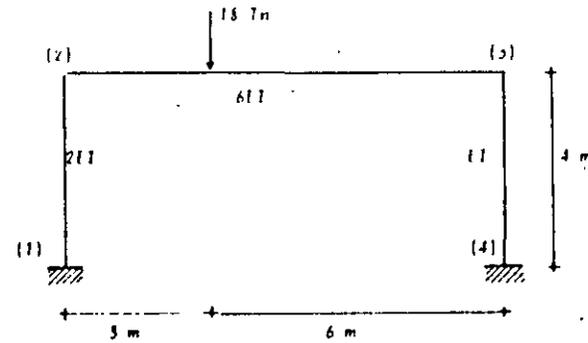


Diagrama de Momentos



Nota: La secuela de cálculo en la distribución de momentos, es la misma que se utilizó en los problemas 1 y 2.

Problema 4. - Resolver la estructura siguiente



Cálculo de momentos de empotramiento

$$\bar{M}_{21} = \frac{18(5)(36)}{8} = 24 \text{ t-n-m}; \quad \bar{M}_{32} = -\frac{18(6)9}{8} = -12 \text{ t-n-m}$$

Cálculo de los factores de distribución

Nudo 2

$$K_{21} = \frac{4(2EI)}{4} = 2EI; \quad K_{23} = \frac{4(6EI)}{9} = 2.67EI; \quad 1K_2 = 4.67EI$$

$$d_{21} = 2/4.67 = 0.428; \quad d_{23} = 2.67/4.67 = 0.572$$

Nudo 3

$$K_{32} = \frac{4(6EI)}{9} = 2.67EI; \quad K_{34} = \frac{4EI}{4} = 1EI; \quad 1K_3 = 3.67EI$$

$$d_{32} = 2.67/3.67 = 0.728; \quad d_{34} = 1/3.67 = 0.272$$

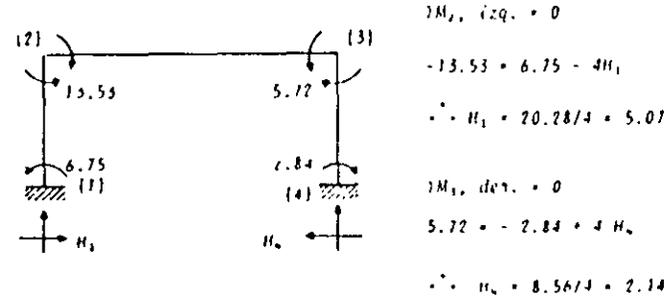
El arreglo tabulado es el que se presenta a continuación. En el cálculo se han equilibrado primero los nudos y después se hicieron los transportes correspondientes.

0.468	0.572		0.728	0.272
74.00	74.00		17.00	17.00
-10.73	-13.77		8.73	3.27
	4.36		0.86	
-1.86	-2.50		4.94	1.87
	7.84		1.25	
-1.06	-1.41		0.91	0.44
	0.15		0.71	
-0.12	-0.26		0.52	0.19
	0.26		0.19	
0.11	-0.15		0.10	0.05
	0.05		0.07	
-0.02	-0.03		0.05	0.02
	0.03		0.01	
-0.01	-0.01		0.01	
-13.53	13.53		-5.72	5.72
-5.74			1.63	
-0.93			0.93	
-0.53			0.17	
-0.09			0.09	
-0.05			0.01	
-0.01			0.01	
-6.75			2.84	

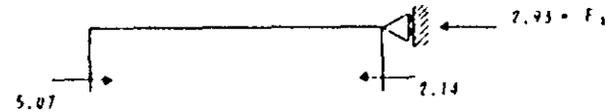
Cálculo de la fuerza que ha impedido el desplazamiento del cabezal.  
(Del paso 1).

De acuerdo con los valores de los momentos obtenidos en el cálculo

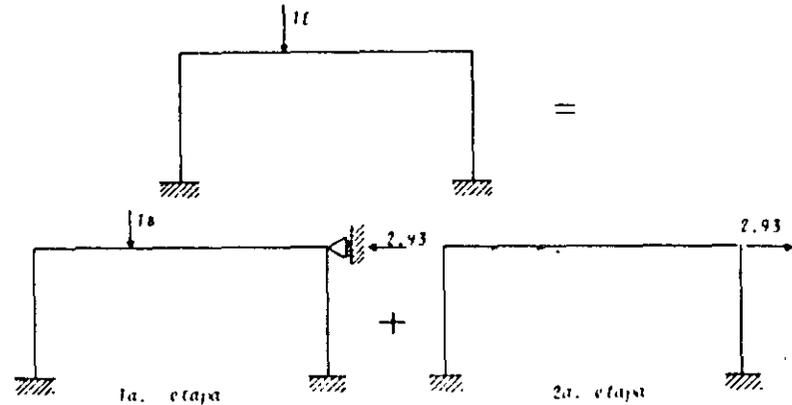
anterior (distribución y transporte de momentos), se tiene el marco siguiente.



Aislado el cabezal, se tiene

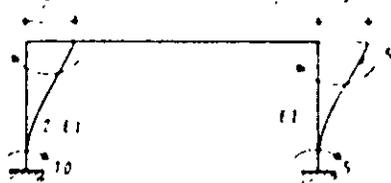


La solución de la estructura requiere el análisis de los marcos.



2º. PASO.- Como se mencionó anteriormente, se supone un desplazamiento  $\Delta$  del cabezal y se calculan los momentos que lo producen con los cuales se obtiene la fuerza en el cabezal que causa dicho desplazamiento. Así mismo puede suponerse el valor de los momentos y calcular la fuerza en el cabezal.

Por lo tanto supóngase momentos de 10 t.m. en la columna de la izquierda. Los momentos en la columna derecha no tendrán el mismo valor, dado que las rigideces en ellas son distintas.



De la fórmula de rotación se tiene

$$u = \frac{6EI\Delta}{l^2} = 10 = \frac{6(2EI)}{16} \Delta$$

$$\Delta = 132/11$$

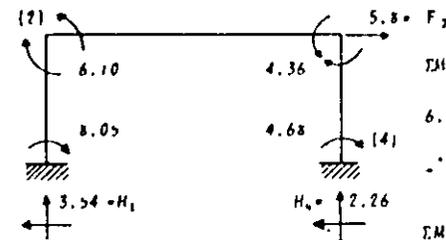
$$M_{10} = \frac{6EI}{l^2} \Delta = \frac{6EI}{16} \cdot \frac{40}{EI} = 15.0 \text{ t.m.}$$

La distribución de momentos se realiza de igual manera como se hizo en la primera etapa.

El orden del tabulado en esta etapa es el que se presenta enseguida.

0.426	0.572		0.778	0.222
10.00	-5.72		-3.64	5.00
-4.28	-1.87		-2.86	-1.36
0.78	1.04		2.08	0.78
-0.44	-0.60		-0.58	-0.14
0.08	0.11		-0.30	0.08
-0.05	-0.06		0.22	-0.01
0.01	-0.02		-0.03	0.01
6.10	-6.10		-4.36	4.36
10.00			5.00	
-2.14			-0.68	
0.39			0.39	
-0.72			-0.07	
0.04			0.04	
-0.02			0.04	
8.05			4.68	

Cálculo de la fuerza  $F_2$  que ha producido el desplazamiento del cabezal.



$$\Sigma M_2, \text{ izq.} = 0$$

$$6.10 = 4H_1 - 8.05$$

$$\therefore H_1 = 14.15/4 = 3.54$$

$$\Sigma M_2, \text{ der.} = 0$$

$$4.36 = 4H_2 - 4.68$$

$$\therefore H_2 = 9.04/4 = 2.26$$

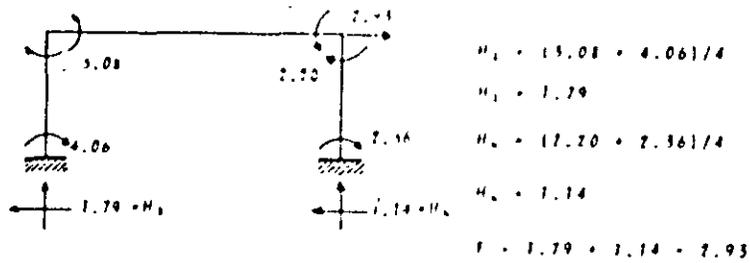
Se tiene  $F_2 = 3.54 + 2.26 = 5.80$

MÉTODO DE KANI

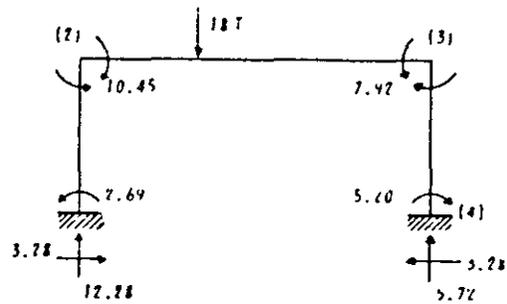
3er. PASO. - Como en el primer paso se obtuvo una fuerza de 2.93 ton. y en el segundo paso una fuerza  $F_2 = 5.80$ , se multiplicarán los resultados por el factor de corrección  $F_1/F_2$  que vale

$$C = 2.93/5.80 = 0.505$$

Se obtienen los momentos siguientes y como comprobación se calcula la fuerza en el cabezal

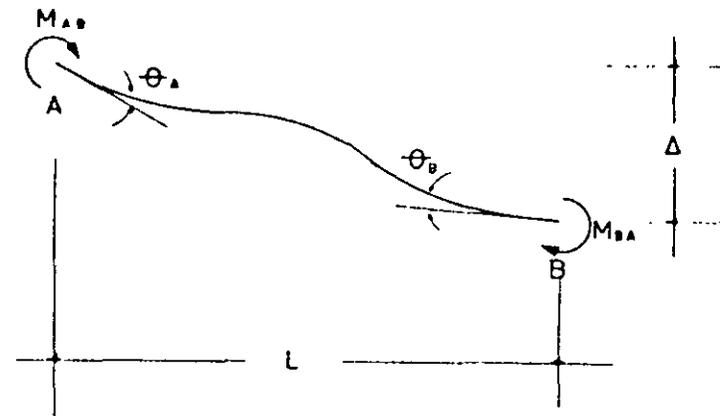


4o. PASO. - Sumando algebraicamente los resultados de esta etapa con los de la primera etapa, se obtiene finalmente

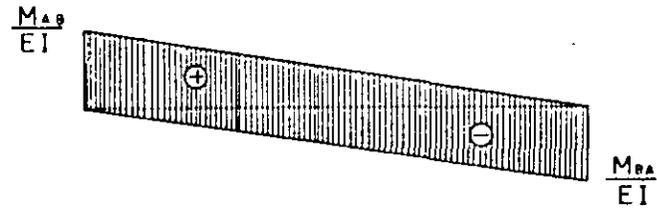


El método de Kani es un proceso iterativo, siendo el punto de partida del mismo las ecuaciones de pendiente deformación que a continuación se describen.

La relación entre los momentos aplicados en los extremos de una viga con los desplazamientos que producen, son:



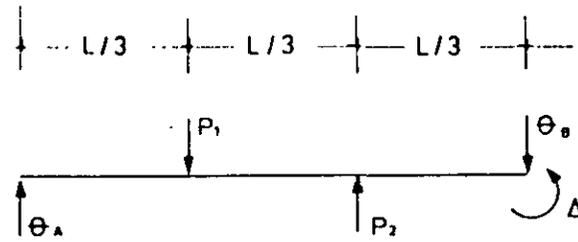
Los diagramas de momentos divididos entre  $EI$ , serán:



## CAPITULO 8

### METODO DE KANI

Resolviendo por viga conjugada:



$$P_1 = \frac{M_{AB} L}{2EI}$$

$$P_2 = \frac{M_{BA} L}{2EI}$$

Haciendo  $\sum M$  en  $P_2$ :

$$\theta_A \frac{2L}{3} + \theta_B \frac{1L}{3} - \Delta - \frac{M_{RA} L}{2EI} \frac{1L}{3} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

Haciendo ahora  $\sum M$  en  $P_1$ :

$$\theta_A \frac{1L}{3} + \theta_B \frac{2L}{3} - \Delta - \frac{M_{RB} L}{2EI} \frac{1L}{3} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

Si hacemos  $K = EI/L$  :

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B - \frac{3\Delta}{L}) \quad \text{--- (3)}$$

$$M_{BA} = 2EK(2\theta_B + \theta_A - \frac{3\Delta}{L}) \quad \text{--- (4)}$$

Las ecuaciones 3 y 4 se les llama ecuaciones del método pendiente-deformación.

El método de Kani es una resolución gráfica de las ecuaciones mencionadas.

La demostración del método de Kani, se expresa a continuación:

Si en las ecuaciones 3 y 4 se substituye:

$$K = \frac{EI}{L}$$

$$\Phi = 2\theta$$

$$\Psi = \frac{6\Delta}{L}$$

Se obtendrá

$$M_{12} = \frac{m_{12}}{2K_{12}} \Phi_1 + K_{12} \Phi_2 + K_{12} \Psi \quad \text{--- (5)}$$

$$M_{21} = \frac{m_{21}}{2K_{21}} \Phi_2 + K_{21} \Phi_1 + K_{21} \Psi \quad \text{--- (6)}$$

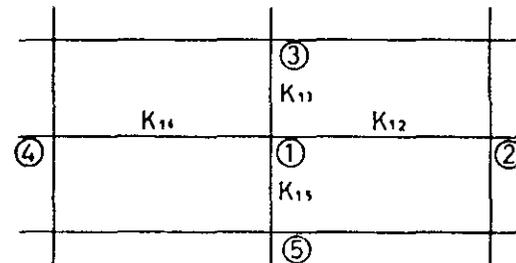
o en forma general:

$$M_{ij} = 2m_i + m_j + m'_{ij} + \mu_0 \quad \text{--- (7)}$$

en la cual:

- $m_i$  = contribución por giro de la barra  $ij$ , en el extremo estudiado.  $\left[ \frac{4EI}{L} \theta_i \right]$
- $m_j$  = contribución por giro de la barra  $ij$ , en el extremo opuesto.  $\left[ \frac{2EI}{L} \theta_j \right]$
- $m'_{ij}$  = contribución por desplazamiento lineal entre dos extremos de la barra  $\left[ \frac{6EI\Delta}{L} \right]$
- $\mu_0$  = momentos de empotramiento en los extremos de la barra, producido por el sistema de cargas.

Aplicando la ecuación de equilibrio de momentos a un nudo cualquiera en una estructura, se obtendrá:



$$\sum M_i = 0$$

$$K_{12}(2\phi_1 + \phi_2) + K_{14}(2\phi_1 + \phi_4) + K_{15}(2\phi_1 + \phi_5) + K_{13}(2\phi_1 + \phi_3) + K_{15}\psi_3 + K_{13}\psi_{II} + M_0 = 0 \quad (8)$$

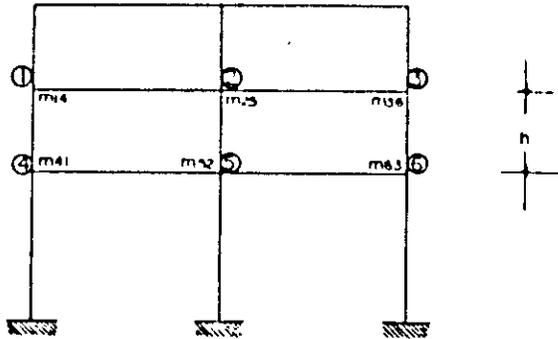
( $M_0$  = momento de desequilibrio en el nudo)

de donde:

$$\phi_1 = - \frac{1}{2(K_{12} + K_{13} + K_{14} + K_{15})} \left[ \begin{array}{c} \overbrace{M_0}^{m_{21}} + \overbrace{K_{12}\phi_2}^{m_{21}} + \overbrace{K_{14}\phi_4}^{m_{21}} + \overbrace{K_{15}\phi_5}^{m_{21}} \\ + \underbrace{K_{13}\phi_3}_{m_{13}} + \underbrace{K_{15}\psi_3}_{m_{15}} + \underbrace{K_{13}\psi_{II}}_{m_{13}} \end{array} \right] \quad (9)$$

Aplicando ahora la ecuación de equilibrio de fuerzas de entrespaño

se tendrá:



$$\sum F = 0 = \sum F - \sum V = 0$$

Siendo  $\sum F$  = Fuerzas exteriores

$\sum V$  = Fuerzas cortantes

$$Fh = \left[ \begin{array}{c} \overbrace{K_{14}(2\phi_1 + \phi_4)}^{m_{14}} + \overbrace{K_{41}(2\phi_4 + \phi_1)}^{m_{41}} + \overbrace{K_{14}\psi_I}^{m_{14}} \\ + \overbrace{K_{25}(2\phi_2 + \phi_5)}^{m_{25}} + \overbrace{K_{52}(2\phi_5 + \phi_2)}^{m_{25}} + \overbrace{K_{25}\psi_I}^{m_{25}} \\ + \overbrace{K_{36}(2\phi_3 + \phi_6)}^{m_{36}} + \overbrace{K_{63}(2\phi_6 + \phi_3)}^{m_{36}} + \overbrace{K_{36}\psi_I}^{m_{36}} \end{array} \right] \quad (10)$$

desarrollando la ecuación anterior, tenemos

$$Fh = 3(K_{14}\phi_1 + K_{14}\phi_4 + K_{25}\phi_2 + K_{25}\phi_5 + K_{36}\phi_3 + K_{36}\phi_6) + 2\psi_I(K_{14} + K_{25} + K_{36}) \quad (11)$$

de donde:

$$\psi_I = - \frac{3}{2(K_{14} + K_{25} + K_{36})} \left[ \begin{array}{c} \overbrace{K_{14}\phi_1}^{m_{14}} + \overbrace{K_{14}\phi_4}^{m_{41}} + \overbrace{K_{25}\phi_2}^{m_{25}} + \overbrace{K_{25}\phi_5}^{m_{25}} \\ + \underbrace{K_{36}\phi_3}_{m_{36}} + \underbrace{K_{36}\phi_6}_{m_{63}} - \frac{Fh}{3} \end{array} \right] \quad (12)$$

De la ecuación (9), se obtiene que:

$$m_{12} = K_{12} \phi_1 = - \frac{K_{12}}{2(K_{12} + K_{13} + K_{14} + K_{15})} \left[ \begin{array}{l} \text{mismo paréntesis que} \\ (9) \end{array} \right] \quad (13)$$

$$m_{13} = K_{13} \phi_1 = - \frac{K_{13}}{2(K_{12} + K_{13} + K_{14} + K_{15})} \left[ \text{mismo paréntesis que (9)} \right] \quad (14)$$

y en forma general:

$$m_{ij} = K_{ij} \phi_i = - \frac{K_{ij}}{2 \sum K_{ij}} \left[ \text{mismo paréntesis que (9)} \right] \quad (15)$$

A la expresión fuera del paréntesis se le llama coeficiente de rotación angular.

De la ecuación (12), se obtiene que:

$$m_{14} = K_{14} \psi_1 = - \frac{3K_{14}}{2(K_{14} + K_{25} + K_{36})} \left[ \text{mismo paréntesis que (12)} \right] \quad (16)$$

$$m_{25} = K_{25} \psi_1 = - \frac{3K_{25}}{2(K_{14} + K_{25} + K_{36})} \left[ \text{mismo paréntesis que (12)} \right] \quad (17)$$

y en forma general:

$$m'_{ij} = K_{ij} \psi_j = - \frac{3K_{ij}}{2 \sum K_{cols. \text{entrepiso}}} \left[ \text{mismo paréntesis que (12)} \right] \quad (18)$$

A la expresión fuera del paréntesis se le llama coeficiente de distribución lineal.

Las ecuaciones (13) y (18) son la base para la aplicación del método de Kani.

De acuerdo con lo mencionado, la secuencia de cálculo para la obtención del método de Kani será la siguiente:

1. Obtener los coeficientes de rotación angular en todos los nudos de la estructura y los coeficientes de distribución lineal de todas las columnas de la misma:

$$\text{coeficiente de rotación angular} = - \frac{1}{2} \frac{K_i}{\sum K_i}$$

$$\text{coeficiente de distribución lineal} = - \frac{3}{2} \frac{K_{col}}{\sum K_{cols}}$$

2. Calcular los momentos de empotramiento en vigas y posteriormente del momento de desequilibrio en cada nudo.

3. Si existen fuerzas horizontales, calcular la fuerza cortante en cada entrepiso y el valor correspondiente a  $V_h/3$

4. Recorrer todos los nudos de la estructura aplicando las ecuaciones (13) y (18), haciendo las iteraciones suficientes hasta lograr que la última iteración sea igual a la precedente. El orden para recorrer la estructura es arbitrario; pero es conveniente que una vez seleccionado algún orden, se repita en la misma forma. El método de Kani es autocorrectivo, es decir, si se cometió algún error numérico, éste se corrija

rá en la siguiente iteración.

Los momentos finales en las barras, se obtendrán como sigue:

$$M_{ij} = \mathcal{M} + 2m_i + m_j + m_{ij}$$

#### MÉTODO DE KANI

Las siguientes ecuaciones constituyen la base del llamado Método de Kani

$$m_{ij} = -\frac{K}{2\sum K} (\bar{M}_{io} + r m_i + 1 u_{ij}) \quad \text{--- (1)}$$

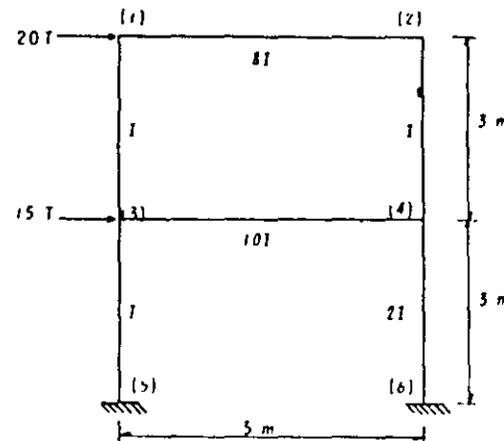
$$u_{ij} = -\frac{3K}{2\sum K} \left( \frac{V_h}{3} + r (m_i + m_{ji}) \right) \quad \text{--- (2)}$$

El momento real en el extremo de una barra será igual a:

$$M_{ij} = M_{io} + \frac{2EI}{L} (2\theta_i + \theta_j - 3\delta_{ij})$$

$$M_{ij} = M_{io} + 2m_{ij} + m_{ji} + u_{ij} \quad \text{--- (3)}$$

Problema 1. - Resolver por Kani la estructura siguiente



1er. PASO.- Cálculo de los factores de distribución

Sabemos que:  $F.D.A. = \frac{r}{\sum r}$ ;  $F.D.L. = \frac{3}{2} \frac{K}{\sum K}$

Angulares

BARRA	Rigidez Relativa	F. D.
1-2	$8/5 = 1.6$	0.415
1-3	$1/1 = 0.33$	0.085
Suma = 1.93		
$2 \times 1.93 = 3.86$		
2-1	$8/5 = 1.6$	0.415
2-4	$1/1 = 0.33$	0.085
Suma = 1.93		
$2 \times 1.93 = 3.86$		
3-1	$1/1 = 0.33$	0.062
3-4	$10/5 = 2.00$	0.176
3-5	$1/3 = 0.33$	0.062
Suma = 2.66		
$2 \times 2.66 = 5.32$		
4-2	$1/3 = 0.33$	0.055
4-3	$10/5 = 2.00$	0.335
4-6	$2/3 = 0.66$	0.110
Suma = 3.00		
$2 \times 3 = 6.00$		

Lineales

Entrepiso	Rigidez Relativa	F.D.
3-5	$1/3 = 0.33$	0.5
4-6	$2/3 = 0.66$	1.0
Suma = 1.00		
$(2/3) \times 1 = 0.666$		
Entrepiso	Rigidez Relativa	F.D.
1-1	$1/3 = 0.33$	0.75
2-4	$1/3 = 0.33$	0.75
Suma = 0.66		
$(2/3) \times 0.66 = 0.44$		

2o. PASO.- Cálculo de momentos de empotramiento.

Como las cargas están aplicadas en los cabezales de la estructura, los momentos de empotramiento valen cero.

3er. PASO.- Obtención de momentos de entrepiso

Este momento es igual a

Entrepiso	Momento = $1/3 v h$
2	$0.333 (20 \times 3) = 20$
1	$0.333 (35 \times 3) = 35$

4o. PASO.- Se sigue el siguiente orden:

a).- Se distribuye el valor de  $v h/3$ , entre las columnas de cada entrepiso.

Columna	- $u_{ij}$
3-5	$-35(0.5) = -17.5$
4-6	$-35(1.0) = -35$
1-3	$-20(0.75) = -15$
2-4	$-20(0.75) = -15$

b).- Se calcula la contribución angular en cada nudo

Nudo 1  $m_{ij} = -(F.D.A.) (\bar{m}_{i0} + \sum m_{ji} + \sum u_{ij})$  -- (1)

Donde  $\bar{m}_{i0} = 0$ , del paso 2

Como primera interacción puede suponerse que

Del paso 4 a, se obtuvo  $\sum u_{ij} = -15$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$1-2 \text{ ----- } m_{12} = -0,415(-15) = 6,22$$

$$1-3 \text{ ----- } m_{13} = -0,085(-15) = 1,27$$

Nudo 2  $\sum m_{ij} = 6,22; \sum u_{ij} = -15$  (Pasos 4, b y 4, a)

$$2-1 \text{ ----- } m_{21} = -0,415(6,22 - 15) = 3,64$$

$$2-4 \text{ ----- } m_{24} = -0,085(6,22 - 15) = 0,74$$

Nudo 3  $\sum m_{ij} = 1,27; \sum u_{ij} = -15 - 12,5 = -32,5$

$$3-1 \text{ ----- } m_{31} = -0,067(1,27 - 32,5) = 1,93$$

$$3-4 \text{ ----- } m_{34} = -0,926(1,27 - 32,5) = 11,74$$

$$3-5 \text{ ----- } m_{35} = -0,067(1,27 - 32,5) = 1,93$$

Nudo 4  $\sum m_{ij} = (11,74 + 0,74) = 12,48; \sum u_{ij} = -15 - 35 = -50$

$$4-2 \text{ ----- } m_{42} = -0,055(12,48 - 50) = 2,06$$

$$4-3 \text{ ----- } m_{43} = -0,335(12,48 - 50) = 12,56$$

$$4-6 \text{ ----- } m_{46} = -0,110(12,48 - 50) = 4,12$$

c) Se calcula la contribución lineal transversal.

Entrepiso 1  $\sum u_{ij} = (F, D, L, 1)[Vh/3 + \sum (m_{ij} + m_{ji})] = (2)$

$$1 \text{ m}_{ij} = m_{12} + m_{21} = 1,93 + 3,64 = 6,05;$$

$$1 \text{ m}_{ji} = 0 \text{ por ser el primer entrepiso}$$

$$Vh/3 = 35 \text{ (del paso 3)}$$

Sustituyendo en la ecuación (2)

$$3-5 \text{ ----- } u_{15} = -0,5(35 + 6,05) = -20,52$$

$$4-6 \text{ ----- } u_{26} = -1,0(35 + 6,05) = -41,05$$

Entrepiso 2  $Vh/3 = 20$  (del paso 3)

$$1 \text{ m}_{ij} = m_{12} + m_{24} = 1,27 + 0,74 = 2,01$$

$$1 \text{ m}_{ji} = m_{31} + m_{42} = 1,93 + 2,06 = 3,99$$

$$1-3 \text{ ----- } u_{13} = -0,75(20 + 2,01 + 3,99) = -19,50$$

$$2-4 \text{ ----- } u_{24} = -0,75(20 + 2,01 + 3,99) = -19,50$$

Después de este paso, se regresa a calcular las  $m_{ij}$  siguiendo nuevamente toda la secuencia de cálculo antes expuesta.

Los momentos finales se calculan aplicando la fórmula (3), por ejemplo:

$$M_{12} = 0 + 2(5.68) + 4.64 + 0 = 15.90$$

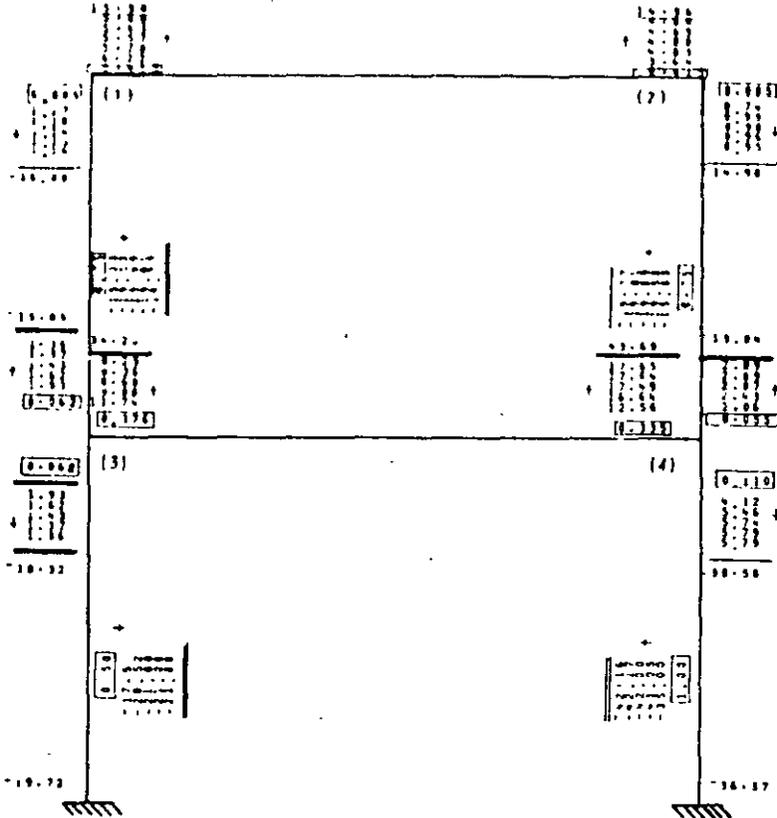
$$M_{13} = 0 + 2(1.16) + 1.36 = 19.77 = -16.00$$

$$M_{21} = 0 + 2(4.64) + 5.68 + 0 = 14.96$$

$$M_{23} = 0 + 2(0.95) + 2.89 = 19.77 = -14.98$$

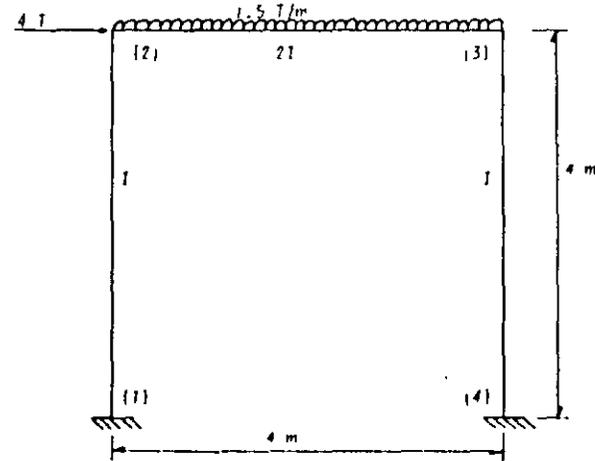
etc

En la figura que se muestra a continuación, se encuentran anotados los resultados obtenidos de la aplicación en forma interactiva de las ecuaciones (1) y (2); Maticas del método de Kani.



Problema 2.

Resolver por Kani el siguiente marco



Factores de distribución.

Angulares

BARRA	Rigidez Relativa	F.D.
2-1	$1/4 = 0.25$	0.166
2-3	$2/4 = 0.50$	0.333
Suma = 0.75		$2 \times 0.75 = 1.50$
3-2	$2/4 = 0.50$	0.333
3-4	$1/4 = 0.25$	0.166
Suma = 0.75		$2 \times 0.75 = 1.50$

Lineales

BARRA	Rigidez Relativa	F.D.
2-1	$1/4 = 0.25$	0.75
3-4	$1/4 = 0.25$	0.75
Suma = 0.50		$(2/3)0.5 = 0.333$

Momentos de Empotramiento

$$M_{2,1} = \frac{6k^2}{I_0} \cdot 2; \quad M_{1,2} = + 2$$

Momento de Entre piso  $\frac{Vh}{3} = \frac{4(4)}{3} = 5.33$

Distribución del valor de  $Vh/3$  entre las columnas

Columna	$\frac{I_0}{L_0}$
2-1	$5.33(0.75) = 4.0$
3-4	$5.33(0.75) = 4.0$

Contribución angular de cada nodo.

Nodo 2  $M_{2,1} = 2; \quad M_{2,3} = 2$

2-1  $m_{2,1} = 0.366(2+2) = 1.000$

2-3  $m_{2,3} = 0.366(2+2) = 1.000$

Nodo 3  $M_{3,2} = 2; \quad M_{3,4} = 2$

3-2  $m_{3,2} = 0.366(2+2) = 1.000$

3-4  $m_{3,4} = 0.366(2+2) = 1.000$

Contribución lineal transversal

1  $m_{1,2} = m_{1,3} = 1.000 + 0.00 = 1.00$

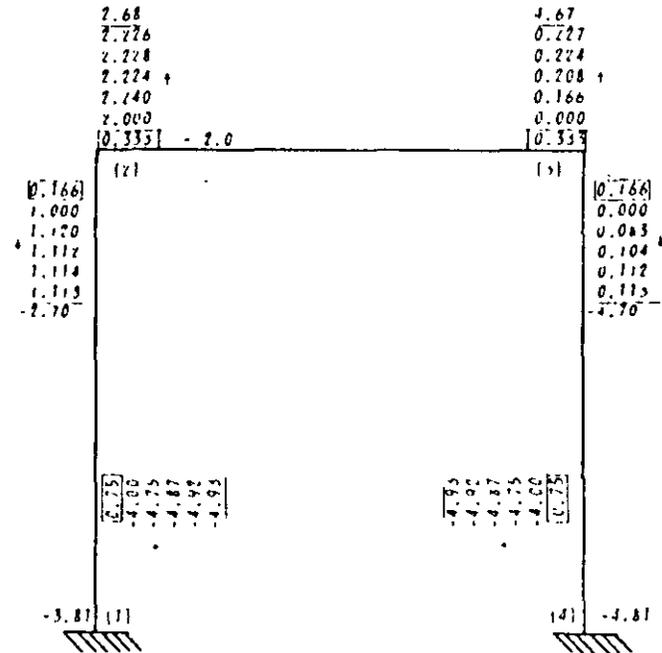
2  $m_{2,1} = 0; \quad Vh/3 = 5.33$

2-1  $u_{2,1} = 0.75(5.33 + 1.00) = 4.75$

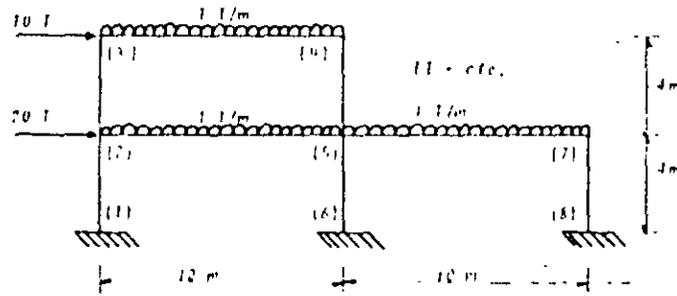
3-4  $u_{3,4} = 0.75(5.33 + 1.00) = 4.75$

Se vuelven a calcular las  $m_{ij}$ , los  $u_{ij}$  y así sucesivamente.

Los resultados se muestran en la figura siguiente.



Problema 3.- Resolver por km el marco siguiente.



Factores de distribución

Angular

PARTE	Tamaño Rotación	I.P.
2-1	1/4 = 0.25	0.204
2-3	1/4 = 0.25	0.204
2-5	1/10 = 0.10	0.082
Suma = 0.60 2 x 0.60 = 1.2		
3-2	1/4 = 0.25	0.357
3-4	1/10 = 0.10	0.143
Suma = 0.35 2 x 0.35 = 0.70		
4-3	1/10 = 0.10	0.143
4-5	1/4 = 0.25	0.357
Suma = 0.35 2 x 0.35 = 0.70		
5-2	1/10 = 0.10	0.0715
5-7	1/10 = 0.10	0.0715
5-4	1/4 = 0.25	0.179
5-6	1/4 = 0.25	0.179
Suma = 0.70 2 x 0.70 = 1.40		
7-5	1/10 = 0.10	0.143
7-8	1/4 = 0.25	0.357
Suma = 0.35 2 x 0.35 = 0.70		

Lineal

PARTE	Tamaño Rotación	I.P.
2-3	1/4 = 0.25	0.5
5-6	1/4 = 0.25	0.5
7-8	1/4 = 0.25	0.5
Suma = 0.75 (2/3)0.75 = 0.50		
3-2	1/4 = 0.25	0.75
4-5	1/4 = 0.25	0.75
Suma = 0.50 (2/3)0.5 = 0.333		

Momentos de empotramiento

$$M_{20} = M_{10} \cdot d = M_{10} \cdot \frac{\omega l^2}{12} = -8.33$$

$$M_{10} \cdot c = M_{20} + M_{10} + \frac{\omega l^2}{12} = 8.33$$

Momentos de entrepiso

$$V_h = \frac{10 \times 4}{3} = 13.33 ; \quad V_h = \frac{30 \times 4}{3} = 40.00$$

En este problema se inició la distribución, con las contribuciones angulares siguiendo la secuencia (3)(4)(2)(5)(7)

Así tenemos, por ejemplo, para el nudo 3

$$i \cdot m_{ij} = E \cdot \theta_{ij} = 0 ; \quad M_{20} = -8.33$$

Nudo 5 (utilizamos la ecuación 1)

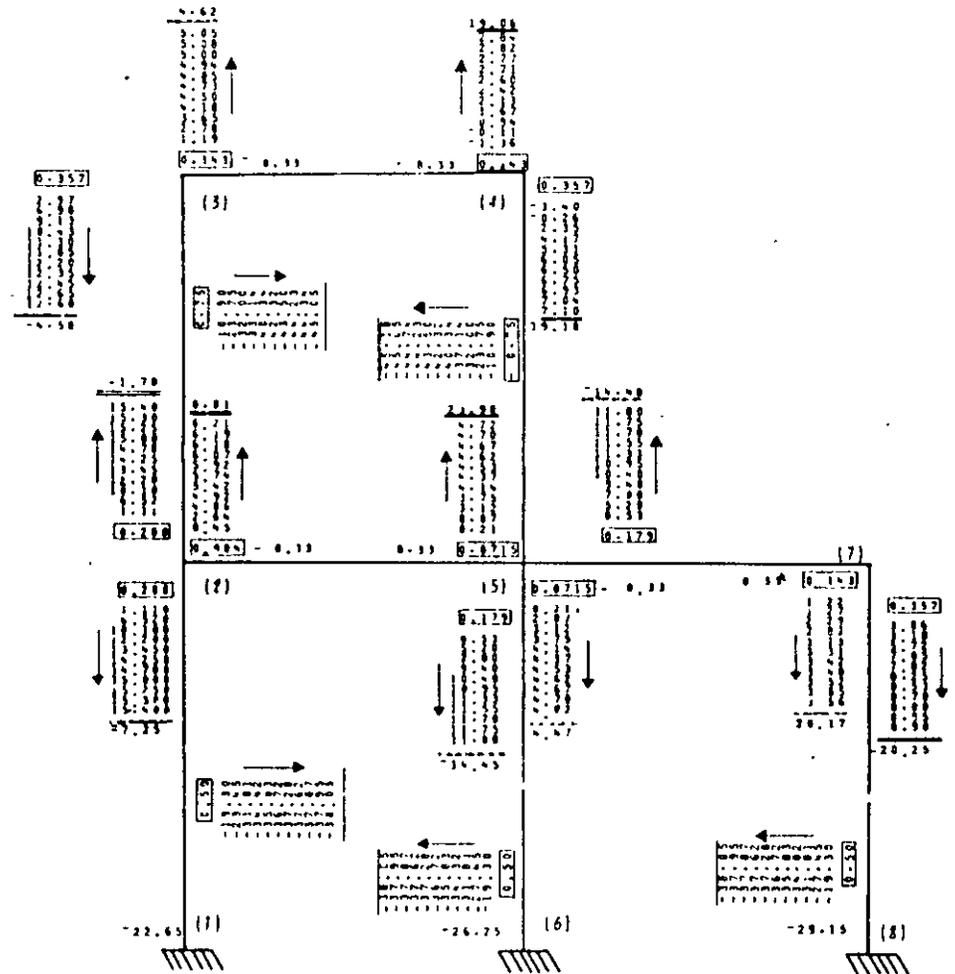
$$3-2 \quad m_{32} = -0.357 (-8.33) = 2.97$$

$$3-4 \quad m_{34} = -0.143 (-8.33) = 1.19$$

Los valores anteriores se encuentran anotados en el nudo 3 de la estructura, en primer orden. Una vez calculados los  $m_{ij}$  se procede al cálculo de los  $\theta_{ij}$  y así sucesivamente.

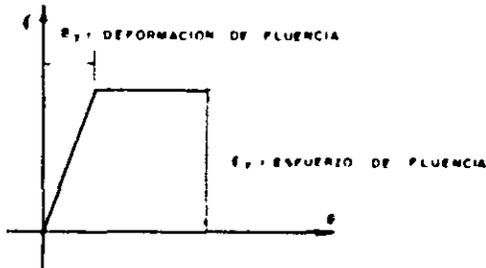
En la figura siguiente, se muestra la estructura con los valores calculados en cada interacción.

CAPITULO 9  
 INTRODUCCION  
 AL ANALISIS PLASTICO



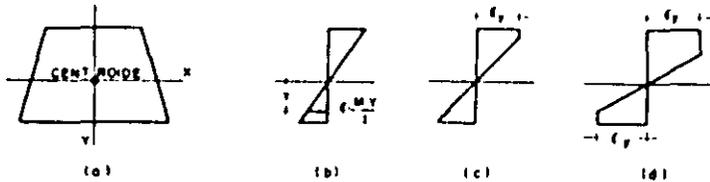
INTRODUCCION AL ANALISIS PLASTICO

Se supone que el material se deforma de una manera idealizada como se ve en la gráfica



Momento último.

Considérese una viga con la sección transversal que se indica con un eje de simetría (a)

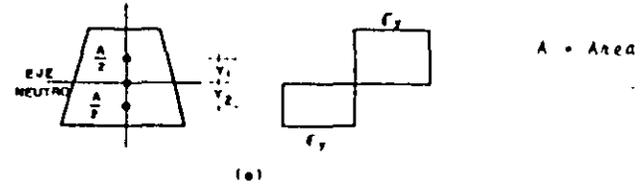


La viga, está sujeta a flexión en el plano de simetría.

Si el momento es, pequeño el esfuerzo y la deformación varían linealmente (b).

Cuando el momento aumenta el esfuerzo alcanza la fluencia, en la parte

superior (c); si sigue incrementándose el momento también se alcanza la fluencia en la parte inferior (d).



Si el momento sigue aumentando se llega al estado plástico total. Se puede calcular el valor del momento último en esta condición. El eje neutro divide a la sección en dos áreas iguales, las resultantes de tensión y compresión son  $\frac{A}{2} \sigma_y$  y el momento

$$M_p = \frac{A}{2} \sigma_y (y_1 + y_2)$$

donde  $y_1$  y  $y_2$  son las distancias a los centroides de las áreas de compresión y de tensión a partir del eje neutro.

El momento máximo que se presenta sin exceder el esfuerzo de fluencia es  $M_y = \sigma_y z$ ,  $z$  es el módulo de la sección.

La relación  $\frac{M_p}{M_y} = \alpha$  depende de la forma por lo cual  $\alpha$  se llama factor de forma y es siempre mayor que la unidad.

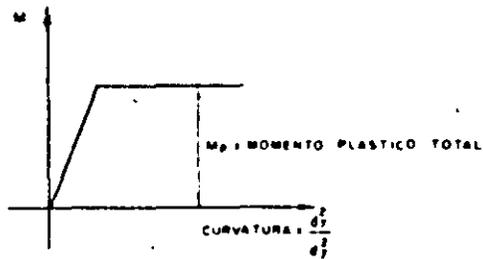
Para un rectángulo de base  $b$  y altura  $h$   $z = \frac{bh^2}{6}$

$$M_p = \sigma_y \frac{bh^2}{4} \quad \frac{M_p}{M_y} = \frac{\sigma_y \frac{bh^2}{4}}{\sigma_y \frac{bh^2}{6}} = \alpha = 1.5$$

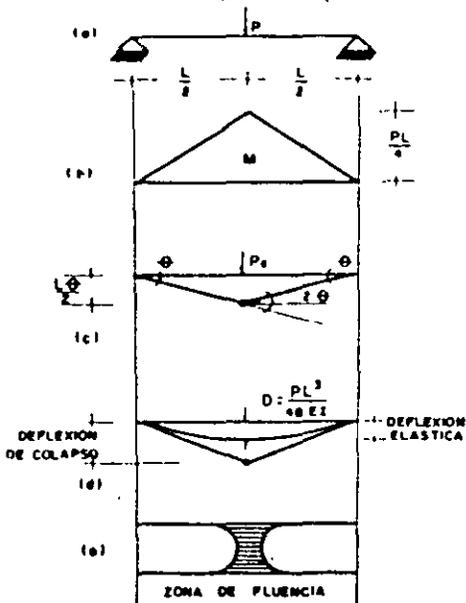
Para una sección circular sólida  $\alpha = 1.7$ , para vigas de sección I varía de 1.15 a 1.17.

Comportamiento plástico de una viga simple.

Considérese la relación entre Momento y Curvatura idealizada.



Veamos la siguiente viga:



Si se incrementa el valor de P hasta que se alcance el valor del momento  $M_p$

$$M_p = \frac{P_c l}{4}$$

$$P_c = \frac{4M_p}{l}$$

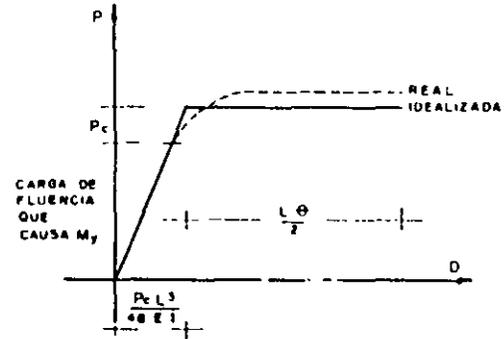
Entonces se presenta una articulación plástica y por lo tanto el colapso.

Si igualamos el trabajo con el interno en (c).

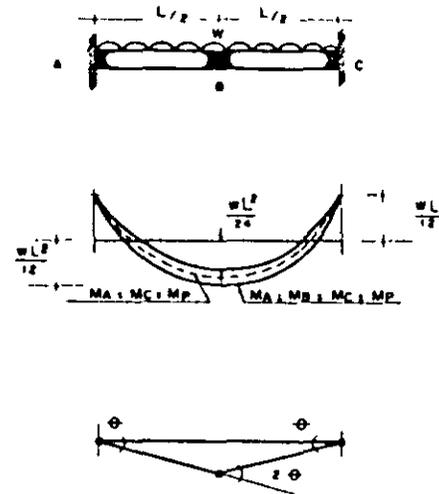
$$P_c \frac{l}{2} \theta = M_p 2\theta$$

$$P_c = \frac{4M_p}{l}$$

Grafiquemos la relación Carga-deflexión.



Consideremos una viga hiperestática:



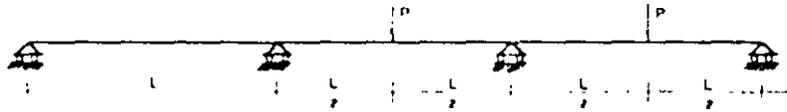
Igualando trabajo externo con interno.

$$M_p(\theta + 2\theta + \theta) = 2 \left[ \frac{wcl}{2} \right] \frac{\theta l}{4}$$

$$4M_p \theta = \frac{wcl^2}{2} \theta$$

$w_c = \frac{16Mp}{7L} = \text{Carga de colapso}$

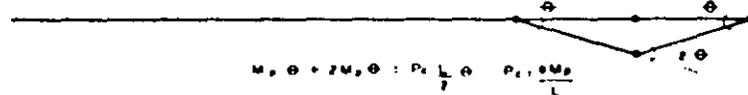
Estudiamos la siguiente viga continua:



MECANISMOS DE COLAPSO

$Mp\theta + 2Mp\theta + Mp\theta = \frac{PcL}{2}\theta$

$Pc = \frac{5Mp}{L}$



$M_p\theta + 2M_p\theta = Pc \cdot \frac{L}{2}\theta$

$Pc = \frac{6Mp}{L}$

El más pequeño de los valores calculados de  $Pc$  es la carga real colapso

es:

$Pc = \frac{6Mp}{L}$

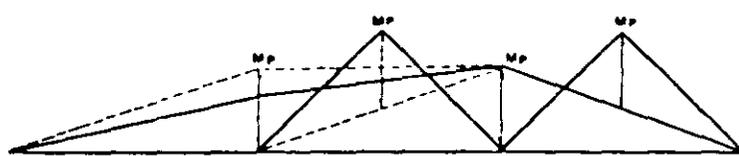
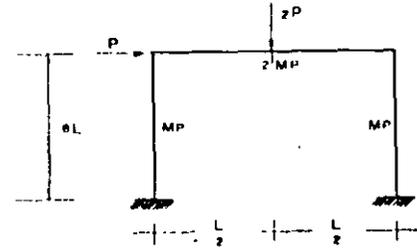
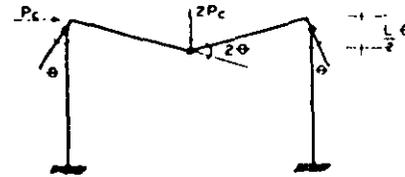


Diagrama de Momentos

Estudiamos un marco

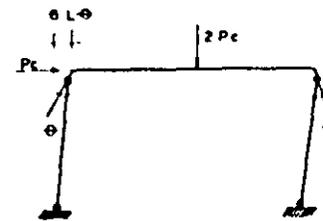


Mecanismos probables de colapso



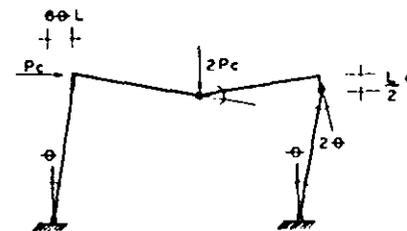
$2Pc \cdot \frac{L}{2}\theta = Mp\theta + Mp\theta + 2Mp\theta$

$Pc = \frac{6Mp}{L}$



$Mp(\theta + \theta + \theta) = Pc(6L)$

$Pc = \frac{6.67Mp}{L}$



$2Mp\theta + Mp(\theta + \theta + 2\theta) = 2Pc \cdot \frac{L}{2}\theta + (6\theta)L Pc$

$Pc = \frac{5Mp}{L}$

132 A

La carga de colapso es la más pequeña

$$P_c = \frac{5M_p}{L}$$

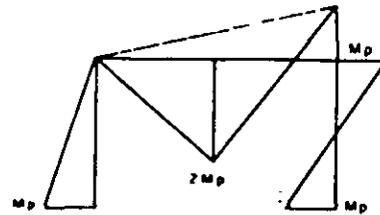


DIAGRAMA DE MOMENTOS

#### BIBLIOGRAFIA

- 1.- White, Geragely y Smith "Ingeniería Estructural" Vol. 2 LIMUSA 1977
2. Michalos y Wilson "Structural Mechanics and Analysis" Macmillan Company 1965
3. Norris, Benson y Utku "Análisis Elemental de Estructuras" Mc Graw-Hill Inc. 1973
4. P. Charon "El método de Cross" Editorial Aguilar 1968
5. Yuan-Yu-Hsieh "Teoría Elemental de Estructuras" Prentice Hall, 1973
6. J. S. Kinney "Análisis de Estructuras Indeterminadas" CECSA 1960
7. Rodolfo Luthe "Análisis Estructural" Representaciones y Servicios de Ingeniería 1971

Esta obra se terminó de imprimir  
en noviembre de 1994  
en el taller de imprenta del  
Departamento de Publicaciones  
de la Facultad de Ingeniería  
Ciudad Universitaria, México, D.F.  
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 1,000 ejemplares  
más sobrantes de reposición.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA  
"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MÓDULO I: ANALISIS ESTRUCTURAL**

**TEMA**

### **INTRODUCCION AL ANALISIS ESTRUCTURAL**

**EXPOSITOR: ING IGNACIO HERNANDEZ QUINTO  
PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DE 2001**

# INTRODUCCION AL ANALISIS ESTRUCTURAL 1

## 1.1 INTRODUCCION

El análisis estructural es un paso intermedio en el proceso a seguir para la construcción de cualquier obra civil y tiene como finalidad el determinar el comportamiento de la estructura que la soportará, es decir, los efectos producidos por las diferentes acciones que obrarán en la construcción. El comportamiento de la estructura se puede expresar a través de desplazamientos, reacciones y fuerzas internas (elementos mecánicos). A partir de estos últimos se define la resistencia que debe tener la estructura para soportar las cargas que obrarán sobre ésta y con los desplazamientos se revisarán las condiciones de servicio, para esto los desplazamientos actuantes serán menores o iguales que los permisibles establecidos por los reglamentos de construcción. Si esta condición no se cumple deberán cambiarse las dimensiones de la estructura y analizarla nuevamente. De lo anterior se observa que el análisis y el diseño de una estructura es un proceso iterativo y que el análisis estructural es una herramienta necesaria para diseñar una estructura y así poder construirla.

Por otro lado para poder realizar el análisis de una estructura, se debe tener bien definidas sus condiciones de frontera o condiciones de apoyo, ya que una estructura bajo las mismas condiciones de carga pero diferentes condiciones de apoyo tiene comportamiento diferente.

Un apoyo es la representación gráfica del número de reacciones necesarias en el punto donde se encuentra dicho apoyo, para establecer el diagrama de cuerpo libre en la estructura. Las diferentes condiciones de apoyo se obtienen a partir de la continuidad de los elementos o de la forma en que se conectan; por ejemplo un elemento ya sea de madera, concreto o acero se apoya en forma directa sobre otro elemento como se indica en la figura 1.1.a.

Se observa que los desplazamientos horizontal y angular pueden ser diferentes de cero, sin embargo en la dirección vertical el muro restringe el desplazamiento dando origen a una reacción vertical  $R_v$ . La idealización del apoyo de esta estructura se puede representar como se indica en la figura 1.1.b. Este apoyo se conoce como libre o directo y es la representación esquemática de una reacción.

Si la viga de la figura 1.1 se sujeta como se indica en la figura 1.2, el desplazamiento horizontal se restringe dando origen a una nueva reacción y su idealización se muestra en la figura 1.2.c. Este apoyo se conoce como articulación y es la representación esquemática de dos reacciones, una vertical y otra horizontal.

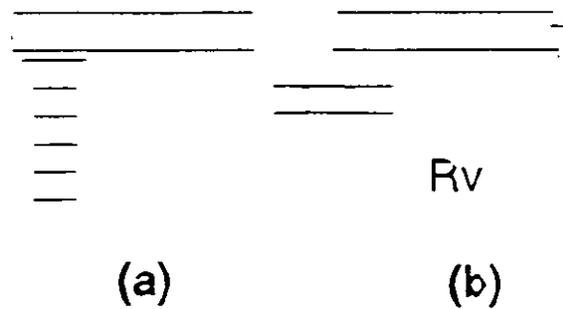


Figura 1.1

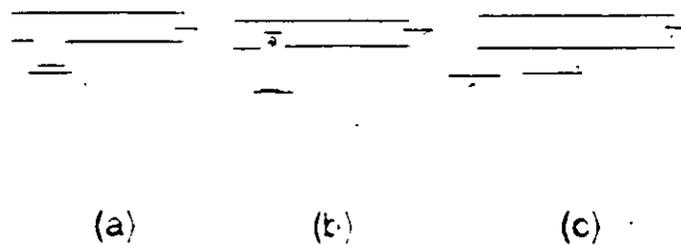


Figura 1.2

Si ese mismo elemento se conecta a otro de tal manera que el desplazamiento angular sea cero, además de los desplazamientos vertical y horizontal como se indica en la figura 1.3.a se da origen al apoyo que se conoce como empotramiento, el cual es la representación de tres reacciones como se muestra en la figura 1.3.b.

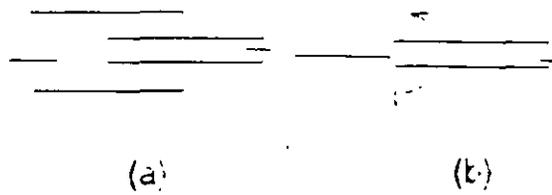


Figura 1.3

Finalmente si se conecta el elemento de la forma que se muestra en la figura 1.4 se obtiene el apoyo guiado, que es la representación esquemática de dos reacciones como se indica en las figuras 1.4.a y 1.4.b respectivamente.

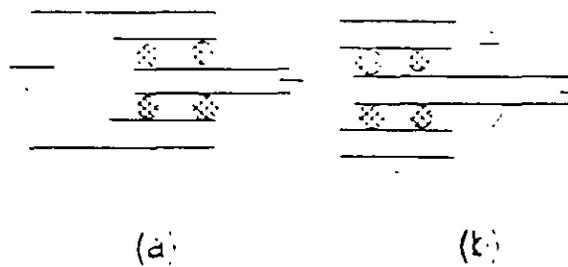


Figura 1.4

De los cuatro casos anteriores, se puede concluir que si hay desplazamiento en el apoyo no hay reacción y si hay reacción no hay desplazamiento.

## 1.2 EQUILIBRIO, COMPATIBILIDAD Y RELACION ENTRE FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS.

En la sección anterior se definió el objetivo del análisis como la determinación de los desplazamientos, reacciones y fuerzas internas bajo cualquier condición de carga. Sin importar el método utilizado para lograr este objetivo es necesario cumplir con las condiciones de equilibrio, compatibilidad y la relación entre fuerzas y desplazamientos

### 1.2.1 EQUILIBRIO

La solución correcta de la estructura debe satisfacer las condiciones de equilibrio estático, no solo para la estructura completa, sino también para cualquier parte de ella tomada como un cuerpo libre.

En un espacio tridimensional si el vector fuerza resultante es igual a cero, también sus componentes deben ser igual a cero, por lo que se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad 1.1.a$$

En estas ecuaciones las expresiones  $\Sigma F_x$ ,  $\Sigma F_y$  y  $\Sigma F_z$  son las sumas algebraicas de las componentes en x, y & z respectivamente de todos los vectores fuerza que actúan en el cuerpo libre. Igualmente, si el vector momento resultante es igual a cero, las ecuaciones de momento del equilibrio estático son:

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad 1.1.b$$

donde  $\Sigma M_x$ ,  $\Sigma M_y$  &  $\Sigma M_z$  son las sumas algebraicas de los momentos respecto a los ejes x, y & z respectivamente, de todos los pares y fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre

Las ecuaciones 1.1 representan las condiciones de equilibrio estático tridimensional. Si la estructura es plana y las cargas están en el plano que contiene a la estructura y los pares tienen sus vectores normales a ese plano, solo son útiles tres de las seis ecuaciones de equilibrio. Considerando que las fuerzas están en el plano x-y, evidentemente las ecuaciones  $\Sigma F_z = 0$ ,  $M_x = 0$  y  $\Sigma M_y = 0$  se satisfacen automáticamente. Las ecuaciones restantes  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$  y  $\Sigma M_z = 0$  son las ecuaciones de equilibrio estático que toda estructura en el plano x-y debe cumplir.

Las ecuaciones de equilibrio pueden aplicarse a cualquier estructura como cuerpo libre y si se cumplen en ésta, entonces deberán cumplirse también en cualquier punto, elemento, nodo o cualquier parte de ella tomada como cuerpo libre como ya se mencionó anteriormente.

## 1.2.2 COMPATIBILIDAD

En las estructuras donde el número de las incógnitas es igual al número de ecuaciones de equilibrio estático, se puede determinar el valor de las reacciones y de las fuerzas internas que estén presentes en el sistema estructural para lograr el equilibrio del mismo. Sin embargo hay estructuras que tienen más incógnitas que ecuaciones de equilibrio estático, por lo tanto se ve la necesidad de plantear ecuaciones adicionales para poder determinar todas las incógnitas. Estas ecuaciones se obtienen a partir de las condiciones de compatibilidad. Estas condiciones se refieren a la continuidad de los desplazamientos a lo largo de toda la estructura, por lo que, también reciben el nombre de condiciones de continuidad. Usualmente estas condiciones son de interés en los nodos de la estructura, por lo que se define la compatibilidad como el desplazamiento de un nodo debe ser igual al desplazamiento de los extremos de las barras que concurren al nodo.

Para ilustrar esta condición, considerese la viga mostrada en la figura 1.5, la cual tiene tres reacciones y solamente se pueden utilizar dos ecuaciones de equilibrio  $F_y = 0$  y  $\Sigma M_z = 0$ , por lo que hay que establecer una tercera ecuación.

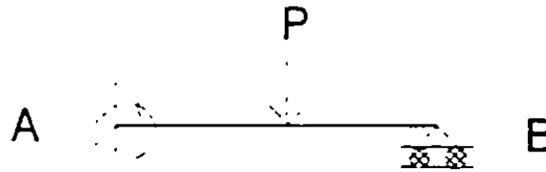
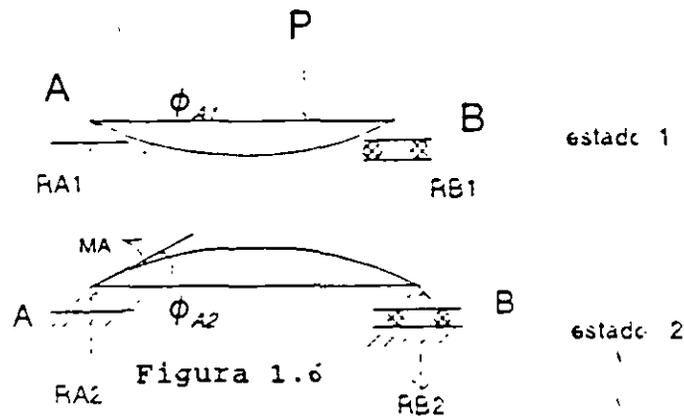


Figura 1.5

Utilizando el principio de superposición de causas y efectos ( la respuesta de una estructura, debida a un número de cargas aplicadas simultáneamente, se obtiene mediante la suma de las respuestas de las cargas individuales, aplicando por separado cada una de ellas ) la viga de la figura 1.5 se puede descomponer en dos estados como se muestra en la figura 1.6, de tal manera que si sumamos el estado 1 con el estado 2 se obtiene la viga inicial



Se observa que en el extremo A de la viga de la figura 1.5 el desplazamiento angular vale cero,

$$\phi_A = 0$$

y de la figura 1.6 para satisfacer esta condición de compatibilidad,

$$A_1 + \phi_{A2} = 0$$

la cual es la tercera ecuación necesaria para determinar las tres reacciones de la viga.

### 1.2.3 RELACION ENTRE FUERZAS Y DESPLAZAMIENTOS

Para definir la relación entre fuerzas y desplazamientos de cualquier sistema estructural, es necesario utilizar las leyes constitutivas ( propiedades ) de un material dado y los conceptos de equilibrio y compatibilidad. Hay dos formas básicas para expresar estas relaciones. La primer relación fuerza-desplazamiento de la forma:

$$P = K D$$

donde P es la fuerza, D los desplazamientos y K la rigidez de la estructura. La rigidez tiene unidades de fuerza por longitud y puede definirse como la fuerza necesaria para mantener el elemento en una unidad de desplazamiento. Esta relación es la base para el método de las rigideces, la segunda relación se puede expresar:

$$D = F P$$

en este caso  $F$  define la flexibilidad del elemento estructural y está dada en unidades de longitud por fuerza. Puede considerarse que un coeficiente de flexibilidad es el desplazamiento generado por una carga unitaria. Esta relación es la base para el método de las fuerzas.

### 1.3 TIPOS DE ESTRUCTURAS

Las estructuras de acuerdo a su comportamiento se pueden clasificar en dos grandes grupos las estables y las inestables. Estas últimas son aquellas que no son capaces de soportar un sistema general de cargas a menos de que éste sea controlado. Las estructuras estables son aquellas capaces de soportar un sistema general de cargas cuyos valores están limitados a que no ocurra una falla por deformación excesiva y a su vez se pueden subdividir en **isostáticas** e **hiperestáticas**. Las isostáticas son aquellas que se pueden resolver con las ecuaciones de equilibrio, es decir el número de incógnitas (reacciones y fuerzas internas) es igual al número de ecuaciones de equilibrio que se pueden utilizar. Por el contrario si no se pueden resolver con las ecuaciones de equilibrio se dice que son hiperestáticas. También se puede hacer la clasificación de las estructuras en torno a los elementos mecánicos que estarán presentes en las mismas

Para determinar los elementos mecánicos que estarán presentes en una estructura sujeta a un sistema general de cargas, se parte de considerar que la estructura está en equilibrio y como consecuencia cualquier punto o fracción de la misma también debe estar en equilibrio.

#### 1.3.1 ARMADURAS

Si se traza una sección, a-a en la armadura mostrada en la figura 1.7.a, se observará que para lograr el equilibrio de la porción de la estructura comprendida entre la sección a-a y el apoyo A se requiere de dos fuerzas normales  $N_1$  y  $N_2$  a la sección de las barras 1 y 2 respectivamente, figura 1.7.b. para cualquier otra sección resultará una situación similar, ya que las fuerzas necesarias para lograr el equilibrio serán normales

a la sección de las barras. a estas fuerzas también se les conoce como fuerzas axiales

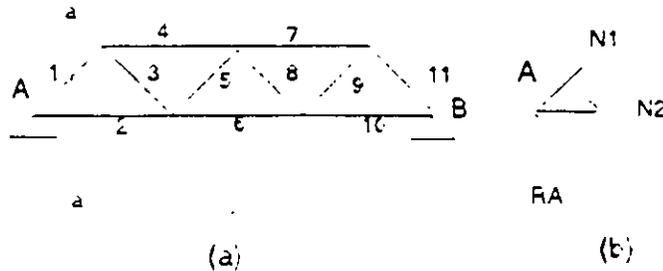


Figura 1.7

### 1.3.2 VIGAS

Si se traza la sección a-a en la viga mostrada en la figura 1.8.a, para lograr el equilibrio vertical se requiere una fuerza  $V$  que tendrá la misma magnitud pero sentido contrario a la reacción, a esta fuerza se le llama fuerza cortante, estas dos fuerzas producen un par que será contrarrestado por un momento  $M$ , que genere otro par de igual magnitud pero de sentido contrario, figura 1.8.b, así se concluye que la viga estará sujeta a fuerza cortante y momento flexionante.

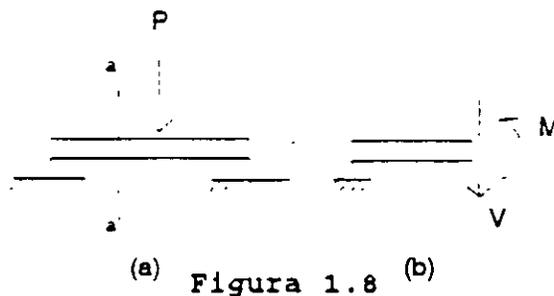


Figura 1.8

### 1.3.3 MARCOS PLANOS

Si se analiza la sección a-a del marco mostrado en la figura 1.9.a se requiere una fuerza normal  $N$  a la sección para equilibrar la reacción vertical, una fuerza cortante  $V$  para equilibrar la reacción horizontal, estas dos fuerzas ( $R_h$  y  $V$ ) forman un par que

será equilibrado por un momento  $M$  que genere otro par de igual magnitud pero sentido contrario, así los elementos mecánicos que estarán presentes en un marco serán: fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante, como se muestra en la figura 1.9.b.

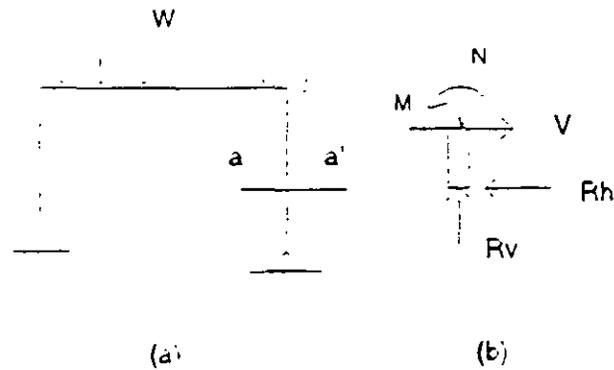


Figura 1.9

### 1.3.4 RETICULA O EMPARRILLADO

Una retícula es una estructura en la cual la carga se aplica perpendicular al plano que contiene la estructura, si se analiza la sección  $a-a$  de la retícula mostrada en la figura 1.10.a se observa que los elementos mecánicos necesarios para planterar el diagrama de cuerpo libre de la parte de la estructura comprendida entre la sección y el apoyo  $A$  son fuerza cortante  $V_y$ , momento flexionante  $M_z$  y momento torsionante  $M_x$  como se indica en la figura 1.10.b

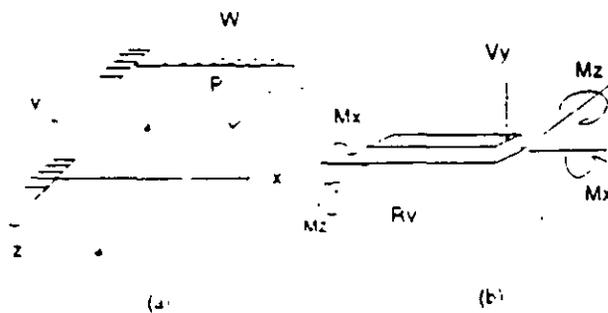


Figura 1.10

### 1.3.5 ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES

Estas estructuras también se conocen como marcos tridimensionales y para su análisis es necesario referirlas a un sistema coordenado tridimensional. Si se analiza la sección a-a del marco mostrado en la figura 1.11.a se observa que para lograr el equilibrio de la porción mostrada en la figura 1.11.b se requiere una fuerza axial  $N$ , dos fuerzas cortantes una en la dirección " y " y la otra en la dirección " z " que denominaremos como  $V_y$  y  $V_z$  respectivamente. en un momento torsionante alrededor del eje longitudinal de la barra  $M_x$  y dos momentos flexionantes uno alrededor del eje " y " y otro alrededor del eje " z "  $M_y$  y  $M_z$  respectivamente.

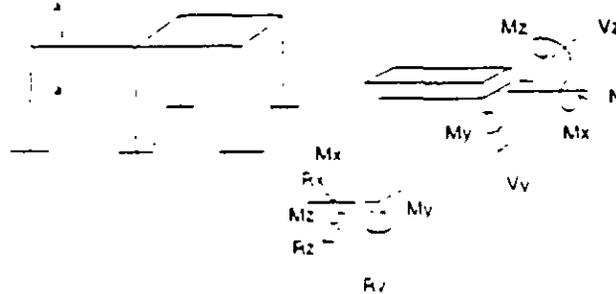


Figura 1.11

### 1.4. GRADO DE HIPERESTATICIDAD

Las estructuras hiperestáticas ( estáticamente indeterminadas ) pueden ser externamente y/o internamente indeterminadas. Si el número de reacciones excede el número de ecuaciones de equilibrio disponibles, se dice que la estructura es externamente indeterminada. Si algunas fuerzas internas (elementos mecánicos) no pueden determinarse por la estática a pesar de que todas las reacciones sean conocidas, la estructura se clasifica como internamente indeterminada. Para ilustrar lo anterior considere la viga de la figura 1.12 la cual tiene 5 reacciones y solo se tienen disponibles 3 ecuaciones de equilibrio (  $\Sigma F_x=0$ ,  $\Sigma F_y = 0$  y  $\Sigma M_z = 0$  ), lo cual da un número mayor de reacciones (incógnitas ) por lo tanto la viga se clasifica como externamente indeterminada.

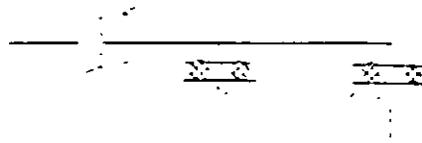


Figura 1.12

La armadura de la figura 1.13 tiene 3 reacciones para cualquier condición de carga y se dispone de tres ecuaciones de equilibrio ( $\Sigma F_x$ ,  $\Sigma F_y$  y  $\Sigma M_z$ ). Como el número de reacciones es igual al número de ecuaciones de equilibrio la armadura es isostática externamente, sin embargo las fuerzas en las barras no se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio. Si se retira o se corta una de las barras diagonales como se muestra en la figura 1.13.b, las fuerzas en las otras barras ya se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio, por lo que las fuerzas internas en la armadura exceden a las ecuaciones de equilibrio en una fuerza, lo cual indica que la armadura es hiperestática internamente

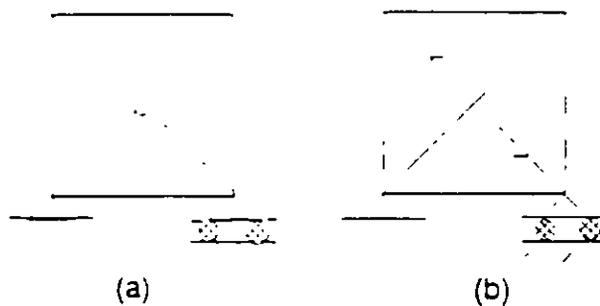


Figura 1.13

El marco de la figura 1.14 tiene seis reacciones y se tienen disponibles tres ecuaciones de equilibrio ( $\Sigma F_x$ ,  $\Sigma F_y$  y  $\Sigma M_z$ ). El número de reacciones es mayor al número de ecuaciones de equilibrio, lo cual hace que el marco sea hiperestático externamente. Las fuerzas internas (N, V y M) en todas las barras no se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio. Si se retira o se corta la barra horizontal inferior, como se muestra en la figura 1.14.b, las fuerzas internas en las otras barras ya se pueden calcular con las ecuaciones de la estática, por lo que las fuerzas internas del marco exceden en tres a las ecuaciones de equilibrio, lo cual

implica que el marco es hiperestático internamente.

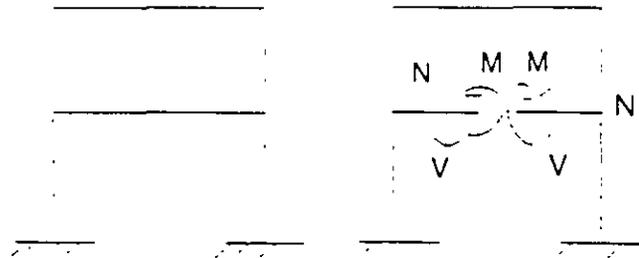


Figura 1.14 a y b

De lo anterior el grado de hiperestaticidad de una estructura se define como el número de reacciones y de fuerzas internas que exceden al número de ecuaciones de equilibrio estático. así:

$$\begin{aligned}
 GH &= GH_i + GH_e \\
 GH_i &= N.F.I. - N.E.E. \\
 GH_e &= N.R. - N.E.E.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

donde

$GH$ ,  $GH_i$  y  $GH_e$  son el grado de hiperestaticidad total, interno y externo respectivamente

$N.F.I.$  es el número de fuerzas internas (elementos mecánicos);  $N.R.$  es el número de reacciones y  $N.E.E.$  es el número de ecuaciones de equilibrio estático disponibles.

El grado de hiperestaticidad puede ser negativo, igual a cero o mayor que cero, estos valores representan

- $GH > 0$  estructura hiperestática**
- $GH = 0$  estructura isostática**
- $GH < 0$  estructura inestable**

Para ilustrar la aplicaciones de la expresión (1.1) se determinará el grado de hiperestaticidad para las estructuras de las figuras 1.15 a la 1.19

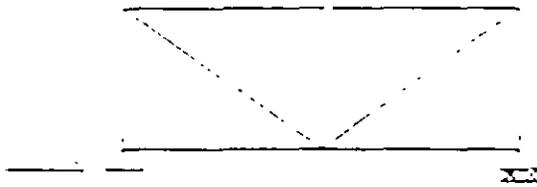


Figura 1.15

$$GHe = 3 - 3 = 0$$

$$GHi = 0$$

$$GH = 0$$

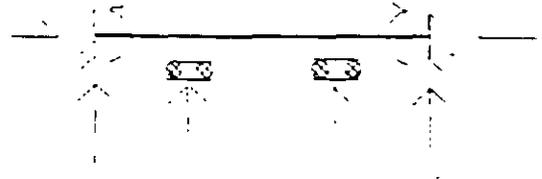


Figura 1.16

$$GH = 8 - 3 = 5$$

$$GHi = 3 - 3 = 0$$

$$GH = 5$$



Figura 1.17

$$GHe = 6 - 3 =$$

$$GHi = 3 - 3 = 0$$

$$GH = 3$$

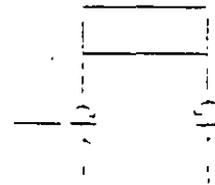


Figura 1.18

$$GHe = 6 - 3 = 3$$

$$GHi = 6 - 3 = 3$$

$$GH = 6$$



Figura 1.19

$$GHe = 6 - 3 = 3$$

$$GHi = 12 - 6 = 6$$

$$GH = 9$$

En las estructuras de la 1.15 a la 1.19 se determinó el grado de hiperestaticidad por inspección, es decir, estableciendo el número de reacciones, fuerzas internas y el número de ecuaciones de equilibrio estático que se pueden plantear en una estructura determinada. Para ciertas estructuras, especialmente para aquellas que tienen un gran número de barras, es difícil aplicar este enfoque, por lo que se recomienda utilizar la ecuación (1.2) que resulta de hacer un planteamiento formal.

Considérese una estructura cualquiera con NB barras, NN nodos y NR reacciones. Las incógnitas son los elementos mecánicos EM y las reacciones NR en cada barra y apoyos respectivamente, es decir:

$$I = NEM * NB + NR$$

En cada nodo se pueden plantear N ecuaciones de equilibrio estático NEE, así las ecuaciones que se generan en la estructura son:

$$E = NEE * NN$$

si la estructura es isostática, el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas

$$NEM * NB + NR = NEE * NN$$

por lo que el grado de hiperestaticidad es el número de incógnitas menos el número de ecuaciones

$$GH = NEM * NB + NR - NEE * NN \quad (1.2)$$

donde:

NEM: número de elementos mecánicos en las barras de la estructura en estudio.

NEM =1 en armaduras solo hay fuerza normal

NEM =2 en vigas cuando solo exista fuerza cortante y momento flexionante

NEM =3 en vigas y marcos en el plano por presentarse fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante.

NEM =3 en retículas o parrillas se tiene presente fuerza cortante, momento torsionante y momento flexionante

NEM =6 en marcos en el espacio por estar presente los seis elementos mecánicos (N, Vy, Vz, Mx, My, y Mz)

NN número de nodos

NR. número de reacciones

NB número de barras

NEE: número de ecuaciones de equilibrio por nodo

NEE =2 armaduras en el plano

NEE =3 armaduras en el espacio

NEE =2 vigas con fuerza cortante y momento flexionante

NEE =3 vigas y marcos con fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante

NEE =3 retículas o parrillas

NEE =6 marcos en el espacio

El uso de la ecuación (1.2) se ilustra con la aplicación de las estructuras de las figuras 1.15 a 1.19

Para la estructura de la figura 1.15 por ser armadura se tiene solo un elemento mecánico por barra que es la fuerza normal, por lo que NEM = 1, nueve barras NB = 9, tres reacciones NR = 3, por nodos se pueden plantear dos ecuaciones de equilibrio  $\Sigma F_x=0$  y  $\Sigma F_y=0$  por lo tanto NEE = 2 y por último tiene seis nodos incluyendo los apoyos NN = 6, sustituyendo en la ecuación (1.2)

$$GH = 1 \cdot 9 - 3 - 2 \cdot 6 = 0$$

Para la viga en la figura 1.16 los elementos mecánicos por barra son tres NEM=3, el número de reacciones es 8 NR = 8, el número de ecuaciones que se pueden plantear son tres ( $\Sigma F_x=0$ ,  $\Sigma F_y=0$  &  $M_z=0$ ) NEE = 3 y tiene cuatro nodos NN = 4 que aplicando la ecuación (1.2) resulta.

$$GH = 3 \cdot 3 + 8 - 3 \cdot 4 = 5$$

En el marco de la figura 1.17 se tiene NEM = 3, NB = 3, NR = 6, NEE = 3 y NN = 4.

$$GH = 3 \cdot 3 + 6 - 3 \cdot 4 = 3$$

Para el marco de la figura 1.18 se tiene NEM = 3, NB = 6, NR = 6, NEE = 3 y NN = 6, así

$$GH = 3 \cdot 6 - 6 - 3 \cdot 6 = 6$$

Finalmente para el marco de la figura 1.19 se tiene  $NEM = 6, NB = 8, NR = 24$  y  $NN = 8$ , así

$$GH = 6 * 8 + 24 - 8 * 6 = 24$$

que comparando los resultados se observa que son los mismos.

## 1.5 GRADO DE LIBERTAD ( INDETERMINACION CINEMATICA )

El grado de libertad está relacionado con los desplazamientos desconocidos en la estructura: como máximo un nodo puede tener seis desplazamientos desconocidos ( 3 lineales y 3 angulares ). El grado de libertad se define como el mínimo número de desplazamientos necesarios para definir la configuración deformada de la estructura. Si se consideran los desplazamientos de los nodos únicamente, el grado de libertad se puede definir como el número posible de desplazamientos de una estructura y se puede determinar a partir de la siguiente expresión

$$GL = NN * DN - NDR \quad ( 1.3 )$$

donde

GL grado de libertad

NN número de nodos incluyendo los de frontera

DN número de desplazamientos por nodo

NDR número de desplazamientos restringidos

La expresión anterior se puede leer como: el grado de libertad es igual al número de nodos incluyendo los de frontera por el número de movimientos posibles en cada nodo menos los desplazamientos restringidos

La expresión ( 1.3 ) también se ilustra aplicándola a las estructuras de las figuras 1.15 a 1.19.

La armadura de la figura 1.5 tiene 6 nodos  $NN = 6$ , dos desplazamientos por nodo  $DN = 2$  y tres reacciones  $NR = 3$ . así

$$GL = 6 * 2 - 3 = 9$$

La viga de la figura 1.16 tiene cuatro nodos  $NN = 4$ , tres desplazamientos por nodo dos lineales ( horizontal y vertical ) y uno angular  $DN = 3$  y ocho reacciones  $NR = 8$ , así:

$$GL = 4 * 3 - 8 = 4$$

Para el marco de la figura 1.17,  $NN = 4$ ,  $ND = 3$  y  $NR = 6$ , así:

$$GL = 4 * 3 - 6 = 6$$

Para el marco de la figura 1.18,  $NN = 6$ ,  $ND = 3$  y  $NR = 6$ , así:

$$GL = 6 * 3 - 6 = 12$$

Y finalmente para el marco de la figura 1.19 se tiene  $NN = 8$ ,  $ND = 6$  y  $NR = 24$ , así:

$$GL = 8 * 6 - 6 - 24 = 24$$

El grado de hiperestaticidad está relacionado con el método de las flexibilidades o de las fuerzas y nos indica el número de incógnitas (elementos mecánicos y reacciones) que exceden las ecuaciones de equilibrio estático y con esto el número de ecuaciones que hay que plantear adicionalmente a las de equilibrio estático, para poder analizar la estructura. Y el grado de libertad esta relacionado con el método de las rigideces y nos indica el número de desplazamientos desconocidos que tenemos en dicha estructura y así plantear las ecuaciones necesarias para conocerlos y a partir de estos determinar los elementos mecánicos

## METODO DE LAS RIGIDECES

## 2

Es un método de análisis general para estructuras que se puedan modelar a base de elementos barra, como es el caso de vigas, armaduras en el plano, armaduras en el espacio, marcos planos, retículas y estructuras en el espacio.

Vale la pena mencionar que es el método más adecuado para su programación, y todos los paquetes formales para el análisis estructural en computadora lo utilizan.

En términos generales, el método de las rigideces consiste en establecer a través del equilibrio y la compatibilidad la relación que hay entre las cargas y los desplazamientos que estas generan en la estructura, a partir de dicha relación se pueden conocer los desplazamientos en los nodos de la estructura y a partir de estos los elementos mecánicos en cada una de las barras que forman la estructura.

Como se puede observar para conocer los elementos mecánicos en las barras que forman la estructura, hay que conocer primero los desplazamientos de los nodos de la misma, razón por la cual también se le conoce como el método de los desplazamientos.

### **2.1 SISTEMAS DE REFERENCIA**

En general, se tienen dos sistemas de referencia, uno llamado local  $(x,y,z)$  para poder hablar de cada elemento que forma parte de un sistema estructural y otro llamado sistema global  $(x ,y ,z )$ , que será el que se utilice para hablar en su totalidad de todo el sistema estructural.

Es importante señalar que en el sistema local, el eje  $x$  deberá coincidir con el eje longitudinal de la barra y dependiendo de esto los otros dos ejes se establecerán

considerando un sistema coordenado derecho.

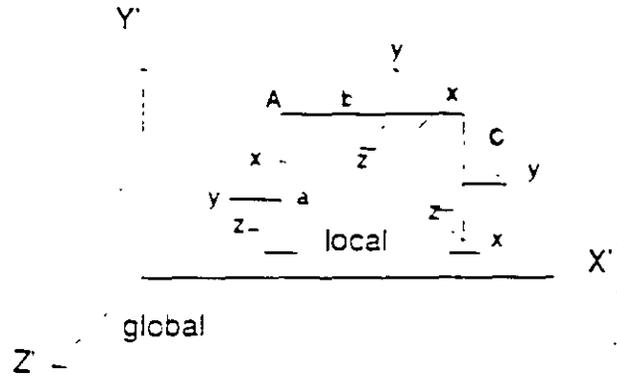


Figura 2.1

Considérese una barra cualquiera a la cual se le indica con el número uno el extremo donde inicia y con el número dos donde termina como se muestra en la figura 2.2

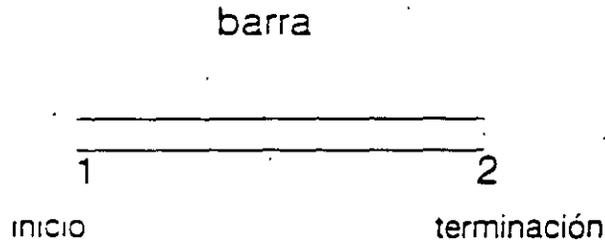


Figura 2.2

Sin embargo cuando vanas barras concurren en un mismo nodo no es conveniente escribir todos los números que indiquen inicio y terminación de barra, lo que se hace es indicarlo a través de una flecha, el extremo donde inicia la barra (extremo 1) coincide con el inicio de la flecha y el extremo donde termina la barra (extremo 2) coincidirá con la terminación de la flecha, figura 2.3.



Figura 2.3

Para la aplicación del método se parte de que toda estructura debe cumplir con las condiciones de equilibrio y de compatibilidad o continuidad. Para ilustrar dichas condiciones, considérese un nodo "i" de una estructura cualquiera al que concurren varias barras y se aplica un vector de cargas "P<sub>i</sub>", como se indica en la figura 2.4

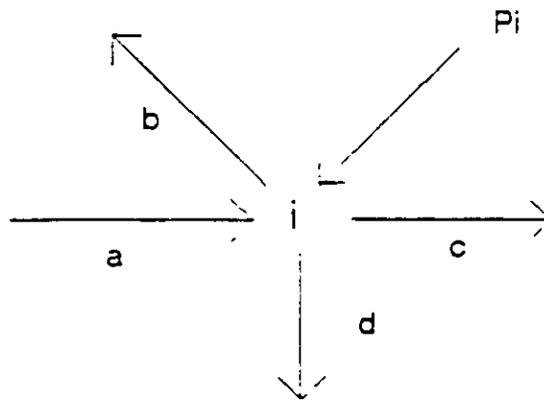


Figura 2.4

Por equilibrio:

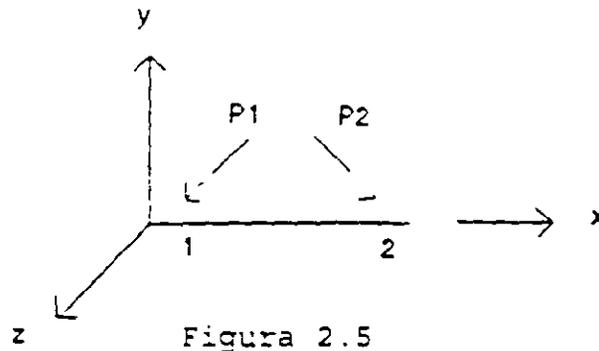
$$\vec{P}_i = \vec{P}_{i,a} + \vec{P}_{i,b} + \vec{P}_{i,c} + \vec{P}_{i,d}$$

por compatibilidad:

$$\vec{d}_i = \vec{d}_{i,a} + \vec{d}_{i,b} + \vec{d}_{i,c} + \vec{d}_{i,d}$$

Esta última condición indica que el vector desplazamiento en el extremo de las barras que concurren a un nodo debe ser igual al vector desplazamiento de dicho nodo

Por otro lado considérese una barra en el sistema local tridimensional y que puede estar sujeta a los vectores de cargas  $\vec{P}_1$  y  $\vec{P}_2$  en el extremo 1 y 2 respectivamente como se indica en la figura 2.5



Estos sin importar su magnitud y dirección, generan los vectores de desplazamiento  $\vec{d}_1$  y  $\vec{d}_2$  respectivamente.

Acopiando los vectores de cargas y desplazamiento en forma matricial, se puede establecer la relación entre estos vectores a través de una matriz de coeficientes que se define como la matriz de rigidez de la barra así:

$$\begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \end{bmatrix}$$

En forma condensada se puede escribir:

$$[\vec{P}] = [K][\vec{D}]$$

Que es la ecuación fuerza-desplazamiento de un elemento barra en el sistema local.

## 2.2 DETERMINACION DE LA MATRIZ DE RIGIDECES

La rigidez de un elemento estructural se entiende comunmente como la magnitud de la fuerza requerida para producir un desplazamiento unitario. Para ser más específicos, la palabra desplazamiento en el concepto anterior, deberá especificarse en detalle mencionando su carácter ( lineal o angular ) y su localización, como cada elemento tiene dos extremos, la palabra desplazamiento se interpreta como desplazamiento generalizado en los extremos de un elemento. En el sistema coordenado tridimensional el vector que representa el desplazamiento en un punto tiene seis componentes, tres lineales y, tres angulares, como se indica en la figura 2.6

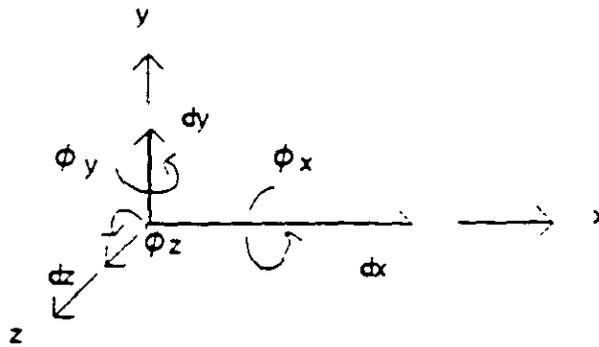


Figura 2.6

Al igual que el desplazamiento la fuerza debe de entenderse como una fuerza generalizada que en el sistema coordenado tiene seis componentes como se indica en la figura 2.7

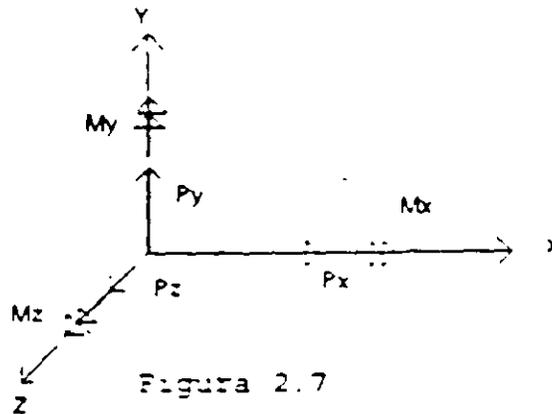


Figura 2.7

Representando en forma matricial al desplazamiento y la fuerza generalizados

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}$$

Así la rigidez será la fuerza generalizada que produce un desplazamiento unitario.

De acuerdo a la fuerza generalizada se tienen tantos tipos de rigideces como elementos mecánicos, es decir, rigidez axial, al corte, a la flexión y a la torsión.

Para facilitar la determinación de las rigideces se considerará un elemento empotrado al cual se le inducirán desplazamientos (lineales o angulares) unitarios. Se le llamará rigidez de un elemento empotrado a las acciones ejercidas sobre este elemento debido a las restricciones impuestas al inducir el desplazamiento unitario.

Estos desplazamientos se inducirán de uno en uno y se supondrán positivos respecto a los ejes de referencia

La restricciones y los desplazamientos asociados con el sistema de referencia x, y, & z, para deducir las rigideces del elemento se indican en la figura 2.8.a y 2.8.b respectivamente.

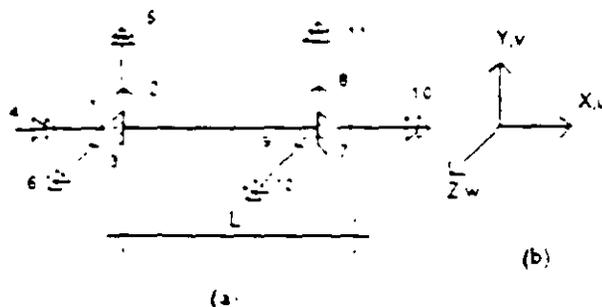


Figura 2.8

En la figura las flechas con una sola punta denotan traslación y las flechas con doble punta indican rotación. En el extremo 1 las traslaciones son numeradas 1, 2 y 3 y las rotaciones como 4, 5 y 6. Similarmente en el extremo 2 de la barra, el 7, 8 y 9 son traslaciones y 10, 11 y 12 son rotaciones. En todos los casos los desplazamientos se toman en el orden x, y & z respectivamente.

La rigideces se determinan a partir de la relación que existe entre los desplazamientos y las fuerzas generalizadas, esta relación de acuerdo a la resistencia de materiales esta dada por las ecuaciones de la 2.1.a a la 2.1.f

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{EA} \quad (2.1.a)$$

$$\frac{d^2 v_b}{dx^2} = - \frac{M_x}{EI_x} \quad (2.1.b)$$

$$\frac{dv_s}{dx} = \frac{f_{xy} V_y}{AG} \quad (2.1.c)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M_x}{GJ_s} \quad (2.1.d)$$

$$\frac{d^2 w_b}{dx^2} = - \frac{M_y}{EI_y} \quad (2.1.e)$$

$$\frac{dw_s}{dx} = - \frac{f_{xz} V_z}{AG} \quad (2.1.f)$$

### 2.2.1 RIGIDEZ AXIAL

Se aplica un desplazamiento unitario en el extremo 1 dirección "x" como se indica en la figura 2.9

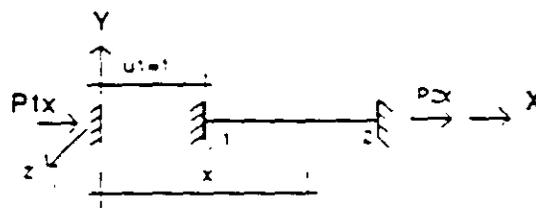


Figura 2.9

de la figura 2.9 se tiene que:

$$N_x = -P_{1x} \quad (2.2)$$

sustituyendo la ecuación (2.2) en la ecuación (2.1.a)

$$\frac{du}{dx} = - \frac{P_{1x}}{EA}$$

integrando ambos miembros de la ecuación resulta:

$$U = - \frac{P_{1x}}{EA} X + C_1$$

aplicando las condiciones de frontera. si  $x=0$ ,  $U_{x=0}=1$ , de donde  $C_1=1$ ; si  $x=L$ ,  $U_{x=L}=0$ , de donde:

$$0 = - \frac{P_{1x} L}{EA} + 1$$

$$P_{1x} = \frac{EA}{L}$$

Por equilibrio.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$P_{1x} + P_{2x} = 0$$

$$P_{2x} = - \frac{EA}{L}$$

En la figura 2.9 las acciones restringidas  $P_{1x}$  y  $P_{2x}$  surgen al aplicar el desplazamiento en el extremo uno del elemento en la dirección positiva del eje  $x$ . Este desplazamiento causa una fuerza de compresión en la barra. En el extremo 1 de la barra esta fuerza es equilibrada por la acción restringida  $EA/L$  en la dirección positiva de  $x$  y en el extremo 2 de la barra la acción restringida tiene el mismo valor pero en la dirección negativa de  $x$ .

## 2.2.2 RIGIDEZ AL CORTE

Se aplica un desplazamiento unitario en el extremo 1 dirección "y" como se indica en la figura 2.10

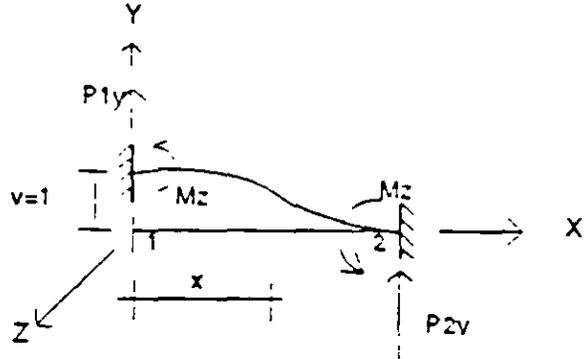


Figura 2.10

de la figura 2.10 se tiene:

$$\begin{aligned} V_y &= -P_{1y} \\ M_z &= M_{1z} - P_{1y} X \end{aligned}$$

sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación 2.1.b

$$\frac{dv_b}{dx} = -f_{fy} \frac{P_{1y}}{AG} \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2 v_b}{dx^2} = - (M_{1z} - P_{1y} x) \frac{1}{EI_z} \quad (2.4)$$

integrando la ecuación ( 2.4 )

$$\frac{dv_b}{dx} = - \frac{P_{1y} x^2}{2EI_z} - \frac{M_{1z} x}{EI_z} + C_1 \quad (2.5)$$

aplicando las condiciones de frontera. en  $x=0$ ,  $\frac{dv_b}{dx}=0$ , de donde  $C_1=0$ ; si  $x=L$ ,  $\frac{dv_b}{dx}=0$ , de donde:

$$0 = \frac{P_{1y} L^2}{2EI_z} - \frac{M_{1z} L}{EI_z}$$

$$M_x = \frac{P_{1y} L}{2} \quad (2.6)$$

sustituyendo en la ecuación ( 2.5 ) resulta.

$$\frac{dv_b}{dx} = \frac{P_{1y} X^2}{2EI_x} - \frac{P_{1y} L X}{2EI_x} \quad (2.7)$$

por otro lado sabemos que:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv_b}{dx} + \frac{dv_s}{dx}$$

sustituyendo las ecuaciones 2.3 y 2.7 en la ecuación anterior

$$\frac{dv}{dx} = \frac{P_{1y} X^2}{2EI_x} - \frac{P_{1y} L X}{2EI_x} - f_{ty} \frac{P_1}{AG}$$

integrando

$$v = \frac{P_{1y} X^3}{6EI_x} - \frac{P_{1y} L X^2}{4EI_x} - f_{ty} \frac{P_{1y} X}{AG} + C_2$$

aplicando las condiciones de frontera: si  $x=0$ ,  $v_{x=0}=1$ , de donde  $C_2=0$ ; si  $x=L$ ,  $v_{x=L}=0$  de donde:

$$0 = \frac{P_{1y} L^3}{6EI_x} - \frac{P_{1y} L^3}{4EI_x} - f_{ty} \frac{P_{1y} L}{GA} + 1$$

$$0 = -P_{1y} \left[ \frac{L^3}{12EI_x} + f_{ty} \frac{L}{GA} \right] + 1$$

$$0 = -\frac{P_{1y} L^3}{12EI_x} \left[ 1 + f_{ty} \frac{12EI_x}{GAL^2} \right] + 1$$

si llamamos factor de cortante a.

$$\phi_y = f_{ty} \frac{12EI_x}{GAL^2}$$

sustituyendo y despejando  $P_{1y}$  se tiene

$$P_{1y} = \frac{12EI_x}{(1-\phi_y)L^3} \quad (2.8)$$

sustituyendo en la ecuación 2.6

$$M_{1z} = \frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} \quad (2.9)$$

por equilibrio

$$\Sigma F_y = P_{1y} + P_{2y} = 0$$

por lo tanto

$$P_{2y} = -\frac{12EI_z}{(1-\phi_y)L^3} \quad (2.10)$$

$$\Sigma M_1 = M_{1z} + M_{2z} + P_{2y}L = 0$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior

$$\frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} + M_{2z} - \frac{12EI_z}{(1-\phi_y)L^2} = 0$$

por lo tanto

$$M_{2z} = \frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} \quad (2.11)$$

Las ecuaciones 2.8, 2.9, 2.10 y 2.11 representan las acciones restringidas, necesarias para lograr el equilibrio al aplicar el desplazamiento en el eje "y". En el extremo 1, las acciones restringidas para mantener el equilibrio son una fuerza cortante de  $12EI_z/(1+\phi_y)L^3$  en el sentido positivo del eje y un momento de  $6EI_z/(1+\phi_y)L^2$  positivo alrededor del eje "z". En el extremo 2 del elemento las acciones restringidas son las mismas solo que la fuerza cortante actúa negativamente en el eje "y".

En forma similar se puede determinar las acciones restringidas (rigideces del elemento) para los desplazamientos restantes.

A continuación, en las figuras 2.11 a 2.22 se representan las rigideces de un elemento para los doce posibles desplazamientos en los extremos del mismo, como se indicó en la figura 2.8.

En cada caso las diferentes acciones restringidas (rigideces del elemento) se dibujan como vectores. Las flechas con una punta representan un vector de fuerza y las flechas con doble punta representan un vector momento. Todos los vectores se dibujan en el sentido positivo y en el caso de que una acción restringida sea negativa un signo menos antecede a las expresiones para los coeficientes de rigidez.

1).- Desplazamiento en dirección "x", extremo 1

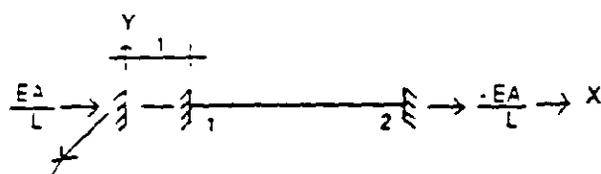


Figura 2.11

2).- Desplazamiento en dirección "y", extremo 1

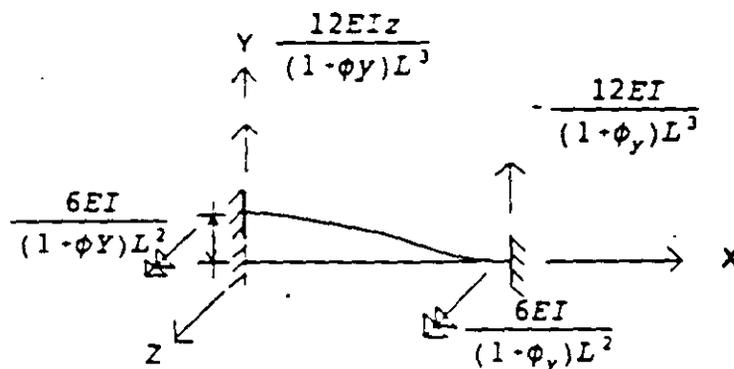


Figura 2.12

3).- Desplazamiento en dirección "z", extremo 1

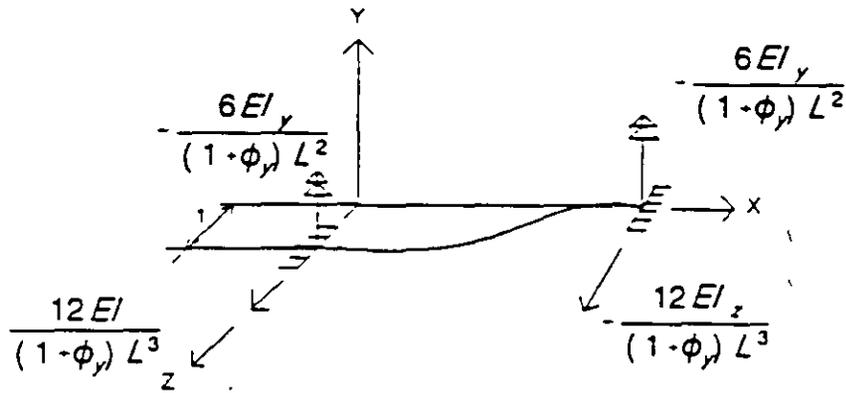


Figura 2.13

4).- Giro alrededor del eje "x", extremo 1

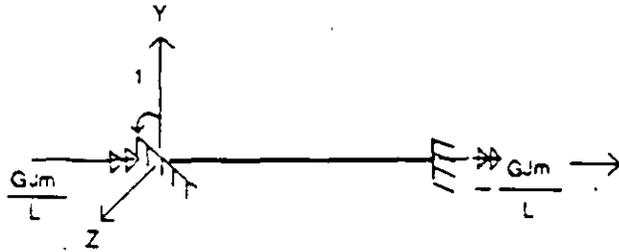


Figura 2.14

5) - Giro alrededor del eje "y", extremo 1

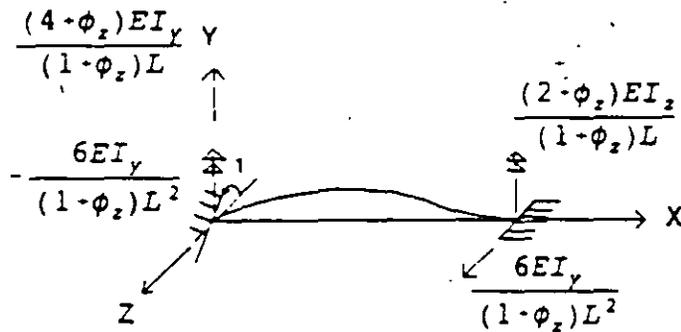


Figura 2.15

6).- Giro alrededor del eje "z", extremo 1

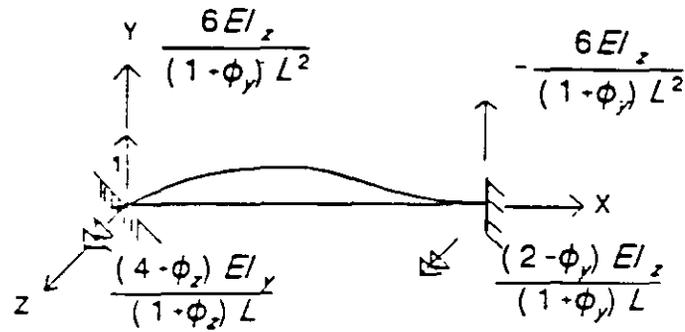


Figura 2.16

7).- Desplazamiento en la dirección X, extremo 2

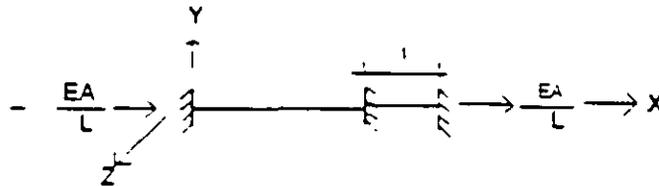


Figura 2.17

8).- Desplazamiento en la dirección Y, extremo 2

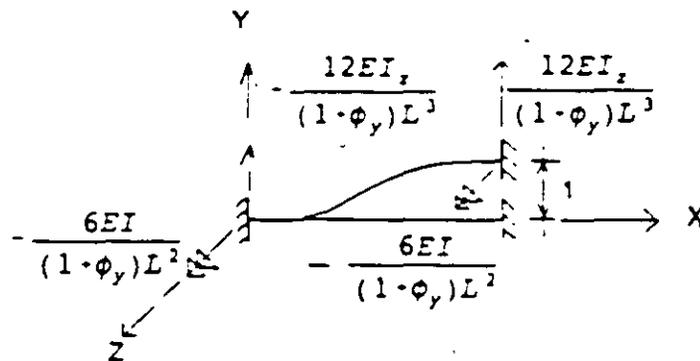


Figura 2.18

9).-Desplazamiento en la dirección Z, extremo 2

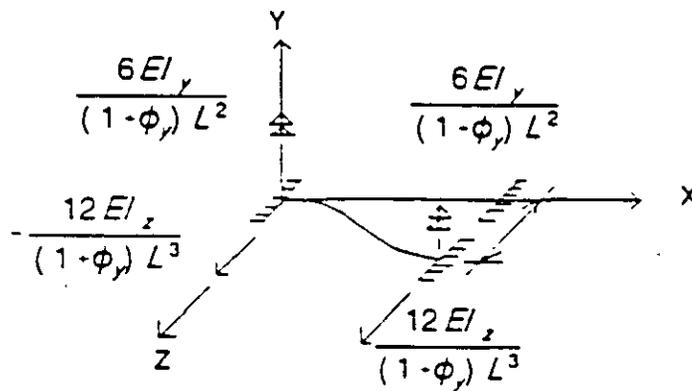


Figura 2.19

10).- Giro alrededor del eje "x", extremo 2

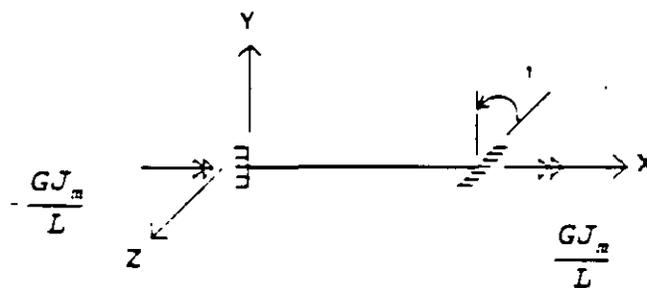


Figura 2.20

11.- Giro alrededor del eje "y", extremo 2

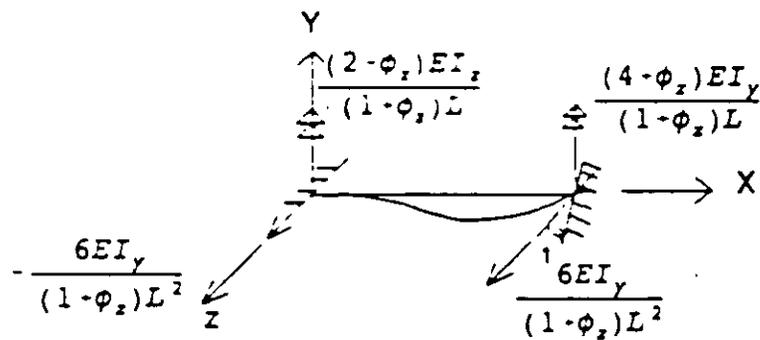


Figura 2.21

12) - Giro alrededor del eje "z", extremo 2

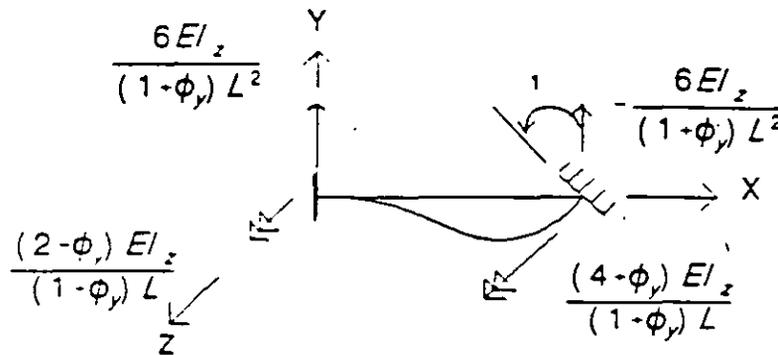


Figura 2.22

Se estableció que la ecuación fuerza-desplazamiento de una barra esta dada por

$$\vec{P} = K \vec{D}$$

Sustituyendo el valor del vector P y los valores mostrados en las figuras de la 2.11 a la 2.22 que corresponde a la matriz de rigidez y el vector de desplazamientos de una barra en el espacio tridimensional resulta la ecuación ( 2.12 ).

Si se desea considerar unicamente flexión, tomando en cuenta que la influencia de la fuerza cortante es pequeña, es decir que  $\phi_i = 0$ , la ecuación fuerza-desplazamiento resulta la ecuación ( 2.13 )

Particionando el vector de cargas, la matriz de rigideces y el vector desplazamiento y refiriéndolos a los extremos 1 y 2 la ecuación fuerza-desplazamiento en forma condensada se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

donde  $K_{ij}$  son submatrices de 6 x 6.

$\begin{bmatrix} N_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix}$	$=$	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
		0	$\frac{12EI_x}{(1+\phi)L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_x}{(1+\phi)L^2}$	0	$-\frac{12EI_x}{(1+\phi)L^3}$	0	0	0	0	$\frac{6EI_x}{(1+\phi)L^2}$
		0	0	$\frac{12EI_y}{(1+\phi)L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0	0	0	$-\frac{12EI_y}{(1+\phi)L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0	0
		0	0	0	$\frac{GJm}{L}$	0	0	0	0	0	$-\frac{GJm}{L}$	0	0	0
		0	0	$-\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0	$\frac{(4+\phi)EI_x}{(1+\phi)L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0	$\frac{(2-\phi)EI_x}{(1+\phi)L}$	0	0
		0	$\frac{6EI_x}{(1+\phi)L^2}$	0	0	0	$\frac{(4+\phi)EI_z}{(1+\phi)L}$	0	$-\frac{6EI_z}{(1+\phi)L^2}$	0	0	0	$\frac{(2-\phi)EI_z}{(1+\phi)L}$	
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	$-\frac{12EI_x}{(1+\phi)L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{(1+\phi)L^2}$	0	$\frac{12EI_x}{(1+\phi)L^3}$	0	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{(1+\phi)L^2}$
		0	0	$-\frac{12EI_y}{(1+\phi)L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0	0	0	$\frac{12EI_y}{(1+\phi)L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0	0
		0	0	0	$-\frac{GJm}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{GJm}{L}$	0	0	0
		0	0	$-\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0	$\frac{(2-\phi)EI_x}{(1+\phi)L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{(1+\phi)L^2}$	0	$\frac{(4+\phi)EI_x}{(1+\phi)L}$	0	0
		0	$\frac{6EI_x}{(1+\phi)L^2}$	0	0	0	$\frac{(2-\phi)EI_z}{(1+\phi)L}$	0	$-\frac{6EI_z}{(1+\phi)L^2}$	0	0	0	$\frac{(4+\phi)EI_z}{(1+\phi)L}$	

ECUACION 2.12 FUERZA-DESPLAZAMIENTO PARA UNA BARRA TRIDIMENSIONAL.

$N_{11}$	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$d_{11}$
$F_{11}$	0	$\frac{12EI_x}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_x}{L^2}$	0	$-\frac{12EI_x}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_x}{L^2}$	$d_{12}$
$F_{12}$	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	$d_{13}$
$M_{11}$	0	0	0	$\frac{GI_m}{L}$	0	0	0	0	$\frac{GI_m}{L}$	0	0	0	$d_{14}$
$M_{12}$	0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{4EI_x}{L}$	0	0	$\frac{6EI_x}{L^2}$	0	$\frac{2EI_x}{L}$	0	0	$\phi_{11}$
$M_{13}$	0	$\frac{6EI_x}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{L}$	$\phi_{12}$
$N_{21}$	$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$d_{21}$
$F_{21}$	0	$-\frac{12EI_x}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_x}{L^2}$	0	$\frac{12EI_x}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_x}{L^2}$	$d_{22}$
$F_{22}$	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	$\phi_{21}$
$M_{21}$	0	0	0	$-\frac{GI_m}{L}$	0	0	0	0	$\frac{GI_m}{L}$	0	0	0	$\phi_{22}$
$M_{22}$	0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{2EI_x}{L}$	0	0	$\frac{6EI_x}{L^2}$	0	$\frac{4EI_x}{L}$	0	0	$\phi_{23}$
	0	$\frac{6EI_x}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2-EI_z}{L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$	$\phi_{24}$

ECUACION 2.13 FUERZA-DESPLAZAMIENTO PARA UNA BARRA TRIDIMENSIONAL.

## 2.3 ROTACION DEL SISTEMA LOCAL AL GLOBAL

En la figura 2.23.a se muestra el vector de cargas generalizado en el sistema local, en las figuras 2.23.b, 2.23.c y 2.23.d se muestran los ángulos que forman el sistema local con los ejes  $x'$ ,  $y'$  &  $z'$  respectivamente, estos últimos corresponden en el sistema global.

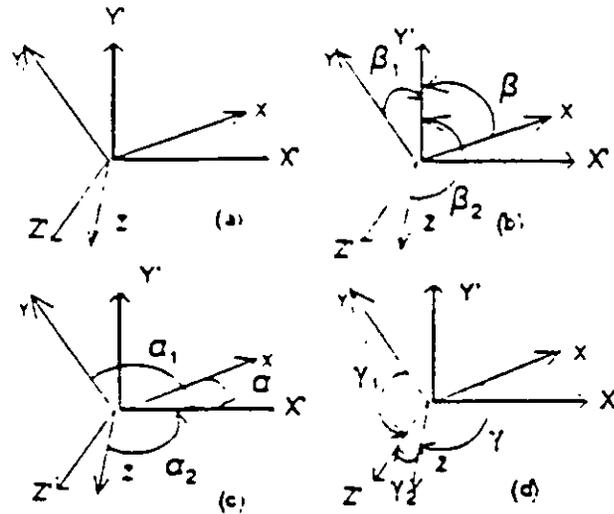


Figura 2.23

por cosenos directores tenemos; para las cargas

$$P'_x = P_x \cos \alpha + P_y \cos \alpha_1 + P_z \cos \alpha_2$$

$$P'_y = P_x \cos \beta + P_y \cos \beta_1 + P_z \cos \beta_2$$

$$P'_z = P_x \cos \gamma + P_y \cos \gamma_1 + P_z \cos \gamma_2$$

ahora para los momentos

$$M'_x = M_x \cos \alpha + M_y \cos \alpha_1 + M_z \cos \alpha_2$$

$$M'_y = M_x \cos \beta + M_y \cos \beta_1 + M_z \cos \beta_2$$

$$M'_z = M_x \cos \gamma + M_y \cos \gamma_1 + M_z \cos \gamma_2$$

sii llamamos:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_1 &= l_1 \\ \cos \beta_1 &= m_1 \\ \cos \gamma_1 &= n_1\end{aligned}$$

sustituyendo y usando notación matrcial se tiene

$$\begin{bmatrix} P_x' \\ P_y' \\ P_z' \\ M_x' \\ M_y' \\ M_z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_1 & l_2 & 0 & 0 & 0 \\ m & m_1 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ n & n_1 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & m & m_1 & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & n & n_1 & n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

en forma simplificada

$$\bar{P}' = T \bar{P} \quad (2.14)$$

donde

- $\bar{P}'$  = Vector de cargas en el sistema global
- T = Matriz de rotacion
- $\bar{P}$  = Vector de cargas en el sistema local

Por otro lado, un vector de cargas P realiza la misma cantidad de trabajo en cualquier sistema de referencia, por lo tanto

$$\bar{P}'^T \bar{d}' = \bar{P}^T \bar{d} \quad (2.15)$$

de la ecuación 2.14 se obtiene

$$\bar{P}'^T = \bar{P}^T T^T$$

sustituyendo en la ecuación ( 2 15 )

$$\bar{P}^c = T^c \bar{d}^c = \bar{P}^c \bar{d}$$

de donde:

$$\bar{d} = T^c \bar{d}^c \quad (2.16)$$

A las ecuaciones ( 2.14 ) y ( 2.16 ) se les llama " Principio de Contragradiencia".

Sabemos que la ecuación fuerza-desplazamiento para una barra está dada por

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{bmatrix}$$

desarrollando el producto matricial resulta

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= K_{11} \bar{d}_1 + K_{12} \bar{d}_2 \\ \bar{P}_2 &= K_{21} \bar{d}_1 + K_{22} \bar{d}_2 \end{aligned}$$

premultiplicando por T y sustituyendo la ecuación ( 2.14 )

$$\begin{aligned} T \bar{P}_1 &= T K_{11} T^c \bar{d}_1^c + T K_{12} T^c \bar{d}_2^c \\ T \bar{P}_2 &= T K_{21} T^c \bar{d}_1^c + T K_{22} T^c \bar{d}_2^c \end{aligned}$$

pero

$$T \bar{P} = \bar{P}^c$$

entonces

$$\begin{aligned} \bar{P}_1^c &= T K_{11} T^c \bar{d}_1^c + T K_{12} T^c \bar{d}_2^c \\ \bar{P}_2^c &= T K_{21} T^c \bar{d}_1^c + T K_{22} T^c \bar{d}_2^c \end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$T K_{1j} T^c = K_{1j}^c$$

Representa la rotación de las submatrices de rigideces del sistema local al global, por lo que:

$$\begin{aligned} \bar{P}_1^c &= K_{11}^c \bar{d}_1^c + K_{12}^c \bar{d}_2^c \\ \bar{P}_2^c &= K_{21}^c \bar{d}_1^c + K_{22}^c \bar{d}_2^c \end{aligned}$$

Estas dos últimas expresiones representan las ecuaciones fuerza desplazamiento de la barra en el sistema global.

Conocidas las submatrices de rigidez de las barras en el sistema global se puede hacer la conexión o acoplamiento de las barras aplicando las condiciones de equilibrio y compatibilidad como se plantearon anteriormente. La aplicación de estas dos ecuaciones conduce a la determinación de la ecuación fuerza-desplazamiento en el sistema global de la estructura a la cual se aplicaron.

### ACOPLAMIENTO DE BARRAS

Considerese, la estructura de la figura 2.24 a la cual se le aplican vectores de carga nodales.

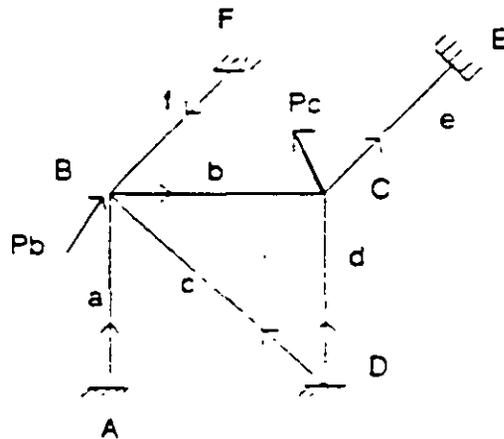


Figura 2.24

De la figura 2.24 por equilibrio

$$\bar{P}_B = \bar{P}_{i_a} - \bar{P}_{i_c} - \bar{P}_{i_b} - \bar{P}_{i_f}$$

$$\bar{P}_C = \bar{P}_{i_b} - \bar{P}_{i_d} - \bar{P}_{i_e} \quad (2.17)$$

por compatibilidad

$$d_{i_a} = 0 \quad d_{i_b} = d_B$$

$$d_{i_b} = d_B \quad d_{i_d} = d_C$$

$$\begin{aligned}
\bar{d}'_{1c} &= 0 & \bar{d}'_{2c} &= \bar{d}'_B \\
\bar{d}'_{1d} &= 0 & \bar{d}'_{2d} &= \bar{d}'_c \\
\bar{d}'_{1e} &= \bar{d}'_c & \bar{d}'_{2e} &= 0 \\
\bar{d}'_{1f} &= 0 & \bar{d}'_{2f} &= \bar{d}'_B
\end{aligned}$$

por otro lado, la ecuación fuerza-desplazamiento de una barra en el sistema global:

$$\begin{aligned}
\bar{P}'_1 &= K'_{11} \bar{d}'_1 + K'_{12} \bar{d}'_2 \\
\bar{P}'_2 &= K'_{21} \bar{d}'_1 + K'_{22} \bar{d}'_2
\end{aligned}$$

aplicando estas ecuaciones para cada barra se tiene;

$$\bar{P}'_{1a} = (K'_{12})_a \bar{d}'_B \quad ; \quad \bar{P}'_{2a} = (K'_{22})_a \bar{d}'_B$$

$$\bar{P}'_{1b} = (K'_{11})_b \bar{d}'_B + (K'_{12})_b \bar{d}'_c$$

$$\bar{P}'_{2b} = (K'_{21})_b \bar{d}'_B + (K'_{22})_b \bar{d}'_c$$

$$\bar{P}'_{1c} = (K'_{12})_c \bar{d}'_B \quad ; \quad \bar{P}'_{2c} = (K'_{22})_c \bar{d}'_B$$

$$\bar{P}'_{1d} = (K'_{12})_d \bar{d}'_c \quad ; \quad \bar{P}'_{2d} = (K'_{22})_d \bar{d}'_c$$

$$\bar{P}'_{1e} = (K'_{11})_e \bar{d}'_c \quad ; \quad \bar{P}'_{2e} = (K'_{21})_e \bar{d}'_c$$

$$\bar{P}'_{1f} = (K'_{12})_f \bar{d}'_B \quad ; \quad \bar{P}'_{2f} = (K'_{22})_f \bar{d}'_B$$

sustituyendo en las ecuaciones ( 2.17 )

$$\bar{P}'_B = (K'_{22})_a \bar{d}'_B + (K'_{22})_c \bar{d}'_B + (K'_{11})_b \bar{d}'_B + (K'_{12})_b \bar{d}'_c + (K'_{22})_f \bar{d}'_B$$

$$\bar{P}'_c = (K'_{12})_b \bar{d}'_B + (K'_{22})_d \bar{d}'_c + (K'_{11})_e \bar{d}'_c + (K'_{22})_b \bar{d}'_c$$

expresando las ecuaciones anteriores en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} P_B \\ P_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_{12})_a - (K_{12})_c - (K_{12})_b - (K_{12})_e & (K_{12})_b \\ (K_{12})_b & (K_{22})_b + (K_{22})_c + (K_{22})_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_B \\ \bar{d}_C \end{bmatrix}$$

en una forma simplificada

$$\bar{P}' = \bar{K}' \bar{D}'$$

que es la ecuación fuerza-desplazamiento en la estructura sistema global

en donde:

- $\bar{D}'$  = Vector desplazamiento de la estructura
- $\bar{K}'$  = Matriz de rigideces del sistema estructural
- $\bar{P}'$  = Vector de cargas en los nodos de la estructura

En forma práctica, la ecuación fuerza-desplazamiento de un sistema estructural se puede ensamblar observando los extremos de las barras que concurren a un nodo y las barras que interconectan los diferentes nodos, así.

Los términos de la diagonal principal de la matriz de rigideces se obtienen sumando las submatrices de los extremos de las barras que concurren a un mismo nodo

Los términos que se encuentran fuera de la diagonal principal de la matriz de rigideces son las submatrices cruzadas de las barras que unen dos nodos.

El sentido de la numeración de los nodos tiene mucha importancia ya que si es adecuada, se puede reducir el ancho de banda de la matriz de rigideces y por consecuencia, el tiempo de máquina que resulta muy costoso.

Si, en una estructura cualquiera de los nodos que intervienen en la formación de la matriz tiene un desplazamiento conocido, (igual a cero) es necesario anular la fila y la columna que corresponda según lo observado en el acoplamiento anterior ya que

dicho grado de libertad no participa. También es importante que la estructura que se analiza sea estable, pues si no, la matriz de rigideces no tiene inversa única.

**Ejemplo.-** Determinar en forma práctica la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura que se muestra en la figura ( 2.25 ).

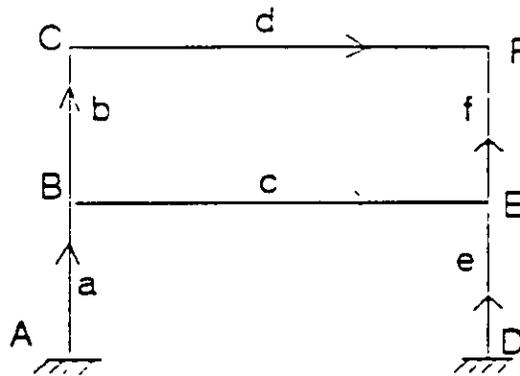


Figura 2.25

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_B \\ \bar{P}_C \\ \bar{P}_F \\ \bar{P}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{22a} + K'_{11b} + K'_{11c} & K'_{12b} & 0 & K'_{12c} \\ K'_{21b} & K'_{22b} + K'_{11d} & K'_{12d} & 0 \\ 0 & K'_{21d} & K'_{22d} + K'_{22e} & K'_{21e} \\ K'_{21c} & 0 & K'_{12e} & K'_{22c} + K'_{22e} + K'_{11e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_B \\ \bar{d}_C \\ \bar{d}_F \\ \bar{d}_E \end{bmatrix}$$

## 2.5 ARMADURAS EN EL PLANO

Para la aplicación del método de rigideces se requiere conocer las submatrices de rigidez de cada barra en el sistema global, lo cual se logra con la expresión:

$$K_{ij}^g = T K_{ij}^l T^T$$

Para el caso de armadura en el plano la matriz de rotación "T" se determina a partir de la figura 2.26

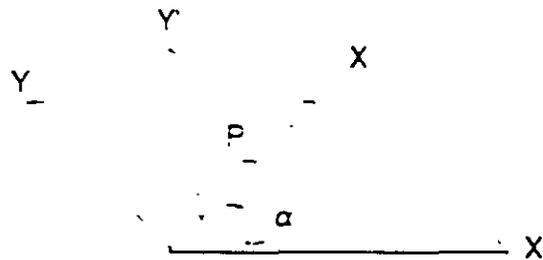


Figura 2.26

$$P_{x'} = P \cos \alpha$$

$$P_{y'} = P \sin \alpha$$

llamando  $\cos \alpha = l$  ;  $\sin \alpha = m$  y escribiendo en forma matricial

$$\begin{bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} P$$

en forma compacta se puede escribir

$$\bar{P}' = T \bar{P}$$

donde

$$T = \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$$

Por otro lado, de la matriz de rigideces general de doce por doce para una barra armadura resulta:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

de donde

$$K_{11} = \frac{EA}{L} \quad K_{12} = -\frac{EA}{L}$$

$$K_{21} = -\frac{EA}{L} \quad K_{22} = \frac{EA}{L}$$

Haciendo la rotación al sistema global se obtiene

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} \left[ \frac{EA}{L} \right] (1 \ m)$$

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & \begin{bmatrix} 1^2 & 1m \\ m^2 & m^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

de las expresiones anteriores se concluye

$$K_{12} = K_{21} = -K_{11}$$

$$K_{22} = K_{11}$$

2.5 1 Ejemplo.- Analizar la estructura mostrada en la figura 2.27

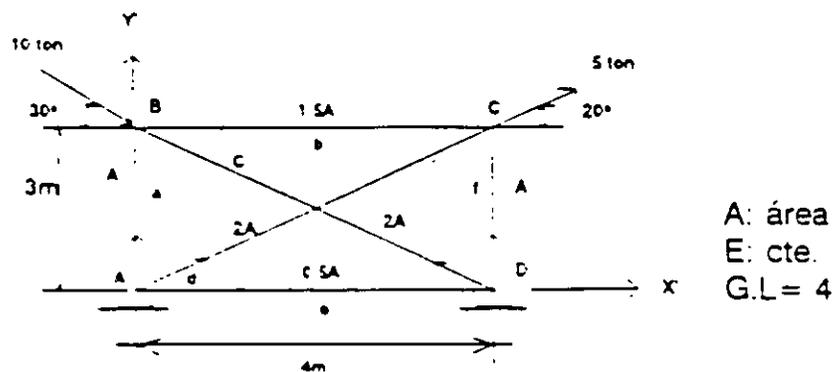


Figura 2.27

La ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura en el sistema global está dada por:

$$\bar{P}' = K' \bar{D}'$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}'_B \\ \bar{P}'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{22})_a + (K'_{22})_c + (K'_{11})_b & (K'_{12})_b \\ (K'_{11})_b & (K'_{22})_b + (K'_{22})_d + (K'_{11})_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}'_B \\ \bar{d}'_C \end{bmatrix}$$

donde:

$$\bar{P}'_B = \begin{bmatrix} P'_{xB} \\ P'_{yB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \cos 30^\circ \\ -10 \sin 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6603 \\ -5.0000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}'_C = \begin{bmatrix} P'_{xC} \\ P'_{yC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cos 20^\circ \\ 5 \sin 20^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6985 \\ 1.7101 \end{bmatrix}$$

De lo anterior el vector de cargas y el vector desplazamientos

$$\bar{P}' = \begin{bmatrix} 8.6603 \\ -5.0000 \\ 4.6985 \\ 1.7101 \end{bmatrix} \quad \bar{D}' = \begin{bmatrix} d'_{xB} \\ d'_{yB} \\ d'_{xC} \\ d'_{yC} \end{bmatrix}$$

Barra	L	A	I	m	I <sup>2</sup>	Im	m <sup>2</sup>
a	3	1	0	1	0	0	1
b	4	1.5	1	0	1	0	0
c	5	2	-0.8	0.6	0.64	-0.48	0.36
d	5	2	0.8	0.6	0.64	0.48	0.36
e	4	0.5	1	0	1	0	0
f	3	1	0	1	0	0	1

Sustituyendo en:

$$K_{11}' = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1^2 & 1m \\ m1 & m^2 \end{bmatrix} = K_{12}'$$

$$K_{12}' = -\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1^2 & 1m \\ m1 & m^2 \end{bmatrix} = K_{21}'$$

$$(K_{11}')_a = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.333 \end{bmatrix}$$

$$(K_{11}')_b = \frac{E(1.5)A}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.375 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(K_{11}')_c = \frac{E(2A)}{5} \begin{bmatrix} 0.64 & -0.48 \\ -0.48 & 0.36 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.256 & -0.192 \\ -0.192 & 0.144 \end{bmatrix}$$

$$(K_{11}')_d = \frac{E(2A)}{5} \begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 \\ 0.48 & 0.36 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.256 & 0.192 \\ 0.192 & 0.144 \end{bmatrix}$$

$$(K_{11}')_f = (K_{11}')_e$$

Solo se determinó  $K_{11}'$  de cada barra ya que  $K_{12}' = K_{21}' = -K_{11}'$  y  $K_{22}' = K_{11}'$ .

Sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento se tiene:

$$\begin{bmatrix} 8.660 \\ -5.000 \\ 4.698 \\ 1.710 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.631 & -0.192 & -0.365 & 0 \\ -0.192 & 0.477 & 0 & 0 \\ -0.375 & 0 & 0.631 & 0.192 \\ 0 & 0 & 0.192 & 0.477 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{xB'} \\ d_{yB'} \\ d_{xC'} \\ d_{yC'} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema aplicando cualquier método de solución de ecuaciones simultáneas.

$$\begin{bmatrix} d'_{xB} \\ d'_{yB} \\ d'_{xC} \\ d'_{yC} \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.08899 \\ 28.39403 \\ -7.83899 \end{bmatrix}$$

Una vez conocidos los desplazamientos en los nodos se procede a calcular la fuerza en cada barra, así la ecuación fuerza-desplazamiento para cada barra esta dada por:

$$\bar{P}'_1 = K'_{11} \bar{d}'_1 + K'_{12} \bar{d}'_2$$

$$\bar{P}'_2 = K'_{21} \bar{d}'_1 + K'_{22} \bar{d}'_2$$

por compatibilidad

$$\bar{d}'_{1a} = 0 \quad \bar{d}'_{1a} = \bar{d}'_B$$

$$\bar{d}'_{1b} = \bar{d}'_B \quad \bar{d}'_{1b} = \bar{d}'_C$$

$$\bar{d}'_{1c} = 0 \quad \bar{d}'_{1c} = \bar{d}'_B$$

$$\bar{d}'_{1d} = 0 \quad \bar{d}'_{1d} = \bar{d}'_C$$

$$\bar{d}'_{1e} = 0 \quad \bar{d}'_{1e} = 0$$

$$\bar{d}'_{1f} = 0 \quad \bar{d}'_{1f} = \bar{d}'_C$$

sustituyendo para cada barra

Barra ( a ):

$$\bar{P}'_{1a} = (K'_{11})_a (0) + (K'_{12})_a \bar{d}'_B$$

$$\bar{P}'_{1a} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.08899 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.69626 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}'_{1a} = (K'_{11})_a (0) + (K'_{12})_a \bar{d}'_B$$

$$\bar{P}'_{1a} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.086 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.69626 \end{bmatrix}$$

Barra ( b ):

$$\bar{P}'_b = \begin{bmatrix} 0.375 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.08899 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.375 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28.39403 \\ -7.83899 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.06528 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2b} = \begin{bmatrix} -1.06528 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Barra ( c ):

$$P'_{1c} = \begin{bmatrix} -0.266 & 0.192 \\ 0.192 & -0.144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31.23478 \\ 2.08899 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.59502 \\ 5.69626 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2c} = \begin{bmatrix} 7.59502 \\ -5.69626 \end{bmatrix}$$

Barra ( d ):

$$P'_{1d} = \begin{bmatrix} -0.256 & -0.192 \\ -0.192 & -0.144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28.39403 \\ -7.83899 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.76378 \\ -4.32284 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2d} = \begin{bmatrix} 5.76378 \\ 4.32384 \end{bmatrix}$$

Barra ( e ):

$$\bar{P}'_{1e} = \bar{P}'_{2e} = 0 \quad (\text{no trabaja})$$

Barra ( f ):

$$\bar{P}'_{1f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28.39403 \\ -7.83899 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.61274 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.61274 \end{bmatrix}$$

Comprobación del equilibrio

Nodo B :

$$\bar{P}_B = \bar{P}_{2a} + \bar{P}_{2c} + \bar{P}_{1b}$$

$$\begin{bmatrix} 8.6603 \\ -5.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6963 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7.5950 \\ -5.6963 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0653 \\ 0.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6603 \\ -5.000 \end{bmatrix}$$

Nodo C :

$$\bar{P}_C = \bar{P}_{1b} + \bar{P}_{2c} + \bar{P}_{1c}$$

$$\begin{bmatrix} 4.6985 \\ 1.7101 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0653 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.7638 \\ 4.3228 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2.6127 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6985 \\ 1.7101 \end{bmatrix}$$

Para la rotación del sistema global a local sabemos que.

$$P' = T P$$

premultiplicando por  $T'$

$$T P = T' T P, \text{ pero } T' T = I$$

$$P = T' P'$$

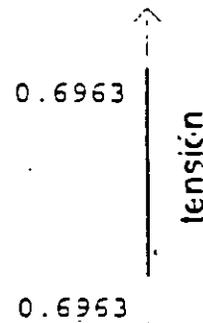
Para una barra i

$$P_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sena} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \end{bmatrix}$$

Barra ( a ):

$$P_{1a} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.6963 \end{bmatrix} = -0.6963 \text{ ton}$$

$$P_{2a} = 0.6963 \text{ ton}$$



Por lo que la barra ( a ) trabaja a tensión con 0.69 ton.

Barra ( b )

$$P_{1b} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1.0658 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.0658 \text{ ton}$$

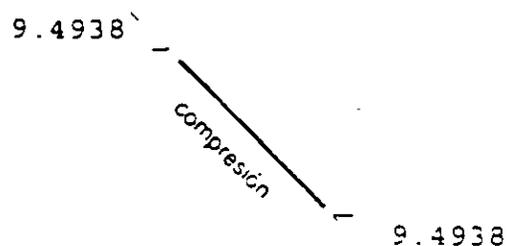
$$P_{2b} = -1.0658 \text{ ton}$$



Barra ( c )

$$P_{1c} = [-0.8 \ 0.6] \begin{bmatrix} -7.5950 \\ 5.6963 \end{bmatrix} = 9.4938 \text{ ton}$$

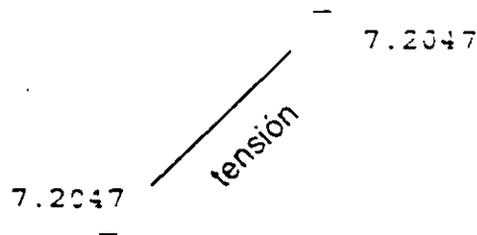
$$P_{2c} = -9.4938 \text{ ton}$$



Barra ( d )

$$P_{1d} = [0.8 \ 0.6] \begin{bmatrix} -5.7638 \\ -4.3228 \end{bmatrix} = -7.2047 \text{ ton}$$

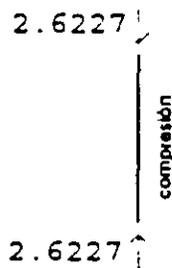
$$P_{2d} = 7.2047 \text{ ton}$$



Barra ( f ):

$$P_{1f} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 2.6127 \end{bmatrix} = 2.6127 \text{ ton}$$

$$P_{2f} = -2.6127 \text{ ton}$$



Representando en forma esquemática los resultados para toda la armadura:

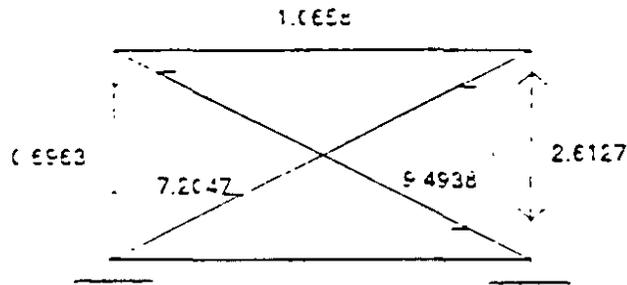


Figura 2.28

## 2.6 ARMADURAS EN EL ESPACIO

Para la determinación de las submatrices de rigideces para una barra en sistema global, se sabe

$$K_g = T K T^T$$

La matriz de rotación " T " se determina a partir de la figura 2.29.

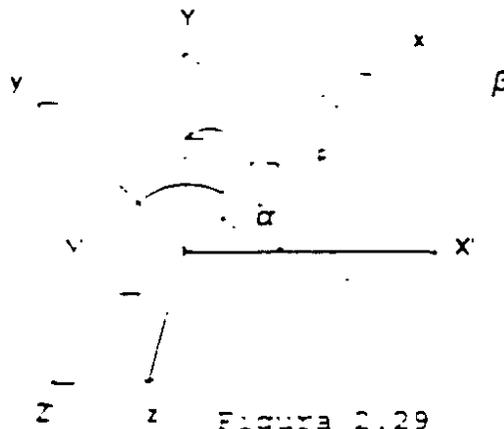


Figura 2.29

$$\begin{aligned} P'_{x'} &= P \cos \alpha \\ P'_{y'} &= P \cos \beta \\ P'_{z'} &= P \cos \gamma \end{aligned}$$

Llamando  $\cos \alpha = l$ ,  $\cos \beta = m$  &  $\cos \gamma = n$

$$\begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ n \end{bmatrix} P'$$

$$P' = T P$$

donde:

$$T = \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

De la matriz de rigideces general de 12x12 para un elemento armadura se tiene:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

efectuando la rotación de las submatrices:

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ n \end{bmatrix} \frac{EA}{L} (1 \ m \ n)$$

$$K'_{11} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1^2 & 1m & 1n \\ m1 & m^2 & mn \\ n1 & nm & n^2 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = K'_{21} = -K'_{11} \quad K'_{22} = K'_{11}$$

**EJEMPLO:** Determinar la fuerza en cada barra de la estructura mostrada en la figura (2.30). Considerar EA constante.

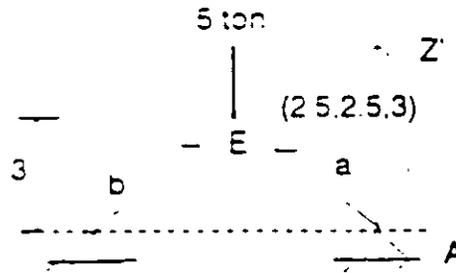
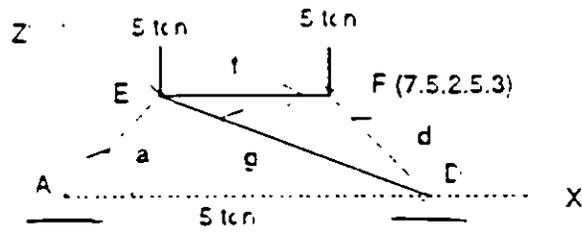
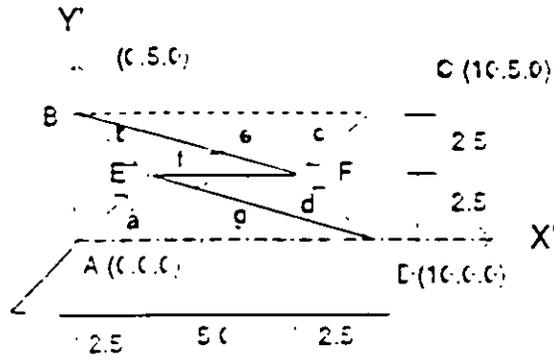


Figura 2.30

La ecuación fuerza desplazamiento de la estructura.

$$\begin{bmatrix} P_E^x \\ P_E^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_{22})_B + (K_{22})_D + (K_{22})_F + (K_{22})_E & (K_{12})_E \\ (K_{12})_E & (K_{11})_E + (K_{11})_D + (K_{11})_B + (K_{11})_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_E^x \\ d_E^z \end{bmatrix}$$

Vector de cargas y desplazamiento.

$$P_E = \begin{bmatrix} P'_{xE} \\ P'_{yE} \\ P'_{zE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \quad P_F = \begin{bmatrix} P'_{xF} \\ P'_{yF} \\ P'_{zF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \quad d'_i = \begin{bmatrix} d'_i \\ d'_{y_i} \\ d'_{z_i} \end{bmatrix}$$

Para la determinación de las submatrices de rigideces se organizan los datos de las barras en la siguiente tabla, para lo cual el cálculo de la longitud de las barras se hace a partir de la expresión:

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

"y" para el cálculo de los cosenos directores:

$$l = \cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{L}$$

$$m = \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{L}$$

$$n = \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

Barra	L	A, E	l	m	n	l <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	n <sup>2</sup>
a	4.637	1	0.539	0.539	0.647	0.291	0.291	0.419
b	4.637	1	0.539	-0.539	0.647	0.291	0.291	0.419
c	4.637	1	-0.539	-0.539	0.647	0.291	0.291	0.419
d	4.637	1	-0.539	0.539	0.647	0.291	0.291	0.419
e	8.456	1	0.887	-0.296	0.355	0.787	0.088	0.126
f	5.000	1	1.000	0	0	1.000	0	0
g	8.456	1	-0.887	0.296	0.355	0.787	0.088	0.126

Sustituyendo estos valores en las submatrices se tiene:

$$(K_{11})_s = EA \begin{bmatrix} 0.063 & 0.063 & 0.075 \\ 0.063 & 0.063 & 0.075 \\ 0.075 & 0.075 & 0.090 \end{bmatrix} \quad (K_{11})_s = EA \begin{bmatrix} 0.063 & -0.063 & 0.075 \\ -0.063 & 0.063 & -0.075 \\ 0.075 & -0.075 & 0.090 \end{bmatrix}$$

$$(K_{11})_c = EA \begin{bmatrix} 0.063 & 0.063 & -0.075 \\ 0.063 & 0.063 & -0.075 \\ -0.075 & -0.075 & 0.090 \end{bmatrix} \quad (K_{11})_c = EA \begin{bmatrix} 0.063 & -0.063 & -0.075 \\ -0.063 & 0.063 & 0.075 \\ -0.075 & 0.075 & 0.090 \end{bmatrix}$$

$$(K_{11})_e = EA \begin{bmatrix} 0.093 & -0.032 & 0.037 \\ -0.031 & 0.010 & -0.012 \\ 0.037 & -0.012 & 0.015 \end{bmatrix} \quad (K_{11})_e = EA \begin{bmatrix} 0.200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(K_{11})_f = EA \begin{bmatrix} 0.093 & -0.031 & -0.037 \\ -0.031 & 0.010 & 0.012 \\ -0.037 & 0.012 & 0.015 \end{bmatrix}$$

Solo se ha calculado el  $K_{11}'$  de cada barra ya que  $K_{22}' = K_{11}'$  y  $K_{12}' = K_{21}' = -K_{11}'$ . Sustituyendo en la ec fuerza-desplazamiento se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.419 & -0.031 & 0.113 & -0.200 & 0 & 0 \\ -0.031 & 0.136 & 0.012 & 0 & 0 & 0 \\ 0.113 & 0.012 & 0.195 & 0 & 0 & 0 \\ -0.200 & 0 & 0 & 0.419 & -0.031 & -0.113 \\ 0 & 0 & 0 & -0.031 & 0.136 & -0.012 \\ 0 & 0 & 0 & -0.113 & -0.012 & 0.195 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{xE} \\ d_{yE} \\ \theta_{zE} \\ d_{xF} \\ d_{yF} \\ \theta_{zF} \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema por cualquier método de solución se obtiene:

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 5.49 \\ 3.81 \\ -29.06 \\ -5.49 \\ -3.81 \\ -29.06 \end{bmatrix}$$

La ecuación fuerza-desplazamiento de la barra está dada por:

$$P_1' = K_{11}' D_1' + K_{12}' D_2'$$

$$P_2' = K_{21}' D_1' + K_{22}' D_2'$$

por compatibilidad

$$d_{1a}' = 0 \quad d_{2a}' = D_E'$$

$$d_{1b}' = 0 \quad d_{2b}' = D_E'$$

$$d_{1c}' = 0 \quad d_{2c}' = D_F'$$

$$d_{1d}' = 0 \quad d_{2d}' = D_F'$$

$$d_{1e}' = 0 \quad d_{2e}' = D_F'$$

$$d_{1f}' = D_E' \quad d_{2f}' = D_F'$$

$$d_{1g}' = 0 \quad d_{2g}' = D_E'$$

Sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento para cada barra.

Barra "a"

$$P_{1a}' = EA \begin{bmatrix} -0.063 & -0.063 & -0.075 \\ -0.063 & -0.063 & -0.075 \\ -0.075 & -0.075 & -0.090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.49631 \\ 3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 1.59283 \\ 1.59283 \\ 1.91699 \end{bmatrix}$$

$$P_{2a}' = \begin{bmatrix} -1.59283 \\ -1.59283 \\ -1.91699 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$P_{1b}' = EA \begin{bmatrix} -0.063 & 0.063 & -0.075 \\ 0.063 & -0.063 & 0.075 \\ -0.075 & 0.075 & -0.090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.49631 \\ 3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 2.07378 \\ -2.07378 \\ 2.48955 \end{bmatrix}$$

$$P_{2b}' = \begin{bmatrix} -2.07378 \\ 2.07378 \\ -2.48955 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$P'_{1c} = EA \begin{bmatrix} -0.063 & -0.063 & 0.075 \\ -0.063 & -0.063 & 0.075 \\ 0.075 & 0.075 & -0.090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.49631 \\ -3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} -1.59283 \\ -1.59283 \\ 1.91699 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2c} = \begin{bmatrix} 1.59283 \\ 1.59283 \\ -1.91699 \end{bmatrix}$$

Barra "d"

$$P'_{1d} = EA \begin{bmatrix} -0.063 & 0.063 & 0.075 \\ 0.063 & -0.063 & -0.075 \\ 0.075 & -0.075 & -0.090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.49631 \\ -3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} -2.07378 \\ 2.07378 \\ -2.48955 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2d} = \begin{bmatrix} 2.07378 \\ -2.07378 \\ -2.48955 \end{bmatrix}$$

Barra "e"

$$P'_{1e} = EA \begin{bmatrix} -0.093 & 0.031 & -0.037 \\ 0.031 & -0.010 & 0.012 \\ -0.037 & 0.012 & -0.015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.49631 \\ -3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} 1.46809 \\ -0.48095 \\ 0.59347 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2e} = \begin{bmatrix} 1.46809 \\ -0.48095 \\ 0.59347 \end{bmatrix}$$

Barra "f"

$$P'_{1f} = \begin{bmatrix} 2.19852 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P'_{2f} = \begin{bmatrix} -2.19852 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Barra "g"

$$P'_{1g} = EA \begin{bmatrix} -0.093 & 0.031 & 0.037 \\ 0.031 & -0.010 & -0.012 \\ 0.037 & -0.012 & -0.015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.49631 \\ 3.81704 \\ -29.0610 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} -1.46809 \\ 0.48095 \\ 0.59347 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2g} = \begin{bmatrix} 1.46809 \\ -0.48095 \\ -0.59347 \end{bmatrix}$$

Comprobación por equilibrio

$$\bar{P}'_E = \bar{P}'_{2a} + \bar{P}'_{2b} + \bar{P}'_{2f} + \bar{P}'_{2g}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.59283 \\ -1.59283 \\ -1.91699 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.07378 \\ 2.07378 \\ -2.48955 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.19852 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.46809 \\ -0.48095 \\ -0.59347 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}'_E = \bar{P}'_{2a} + \bar{P}'_{2b} + \bar{P}'_{2f} + \bar{P}'_{2g}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.59283 \\ 1.59283 \\ -1.91699 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.07378 \\ -2.07378 \\ -2.48955 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.19852 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.46809 \\ 0.48095 \\ 0.59347 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Rotación del sistema global a local

$$\bar{P} = T \bar{P}'$$

Barra "a"

$$P'_{2a} = \begin{bmatrix} 0.539 & 0.539 & 0.647 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.59283 \\ 1.59283 \\ 1.91699 \end{bmatrix} = 2.9574 \text{ ton}$$

$$P'_{2a} = -2.9574 \text{ ton} \quad \begin{array}{cc} 2.9574 & 2.9574 \\ \hline & \text{compresion} \end{array}$$

Barra "b"

$$P'_{2b} = \begin{bmatrix} 0.539 & -0.539 & 0.647 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.07378 \\ -2.07378 \\ 2.48955 \end{bmatrix} = 3.85 \text{ ton}$$

$$P'_{2A} = -3.85 \text{ ton}$$

0.6248

0.6248

compresion

y así para el resto de las barras

Finalmente

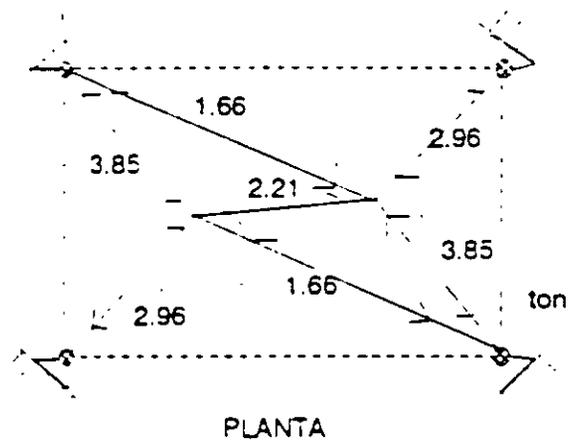


Figura 2.31

## 2.7 VIGAS CONTINUAS:

2.7.1 Ejemplo - Determinar los elementos mecánicos de la viga mostrada en la figura 2.32 considerando la influencia de la fuerza cortante (término  $1 - \phi_v$ ).

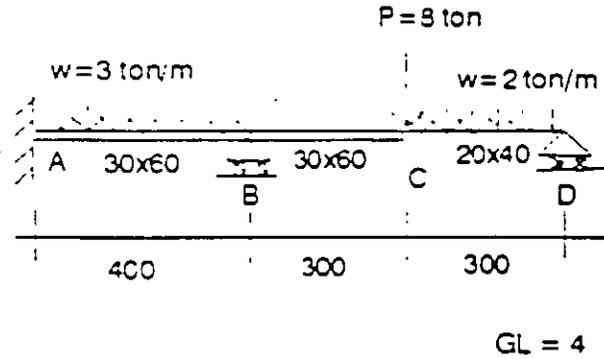


Figura 2.32

La ecuación fuerza desplazamiento de la estructura está dada por

$$\begin{bmatrix} P_B \\ P_C \\ P_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11a} - K_{11b} & K_{11b} & 0 \\ K_{11b} & K_{11b} - K_{11c} & 0 \\ 0 & K_{11c} & K_{11c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_B \\ D_C \\ D_D \end{bmatrix}$$

Vectores de empotramiento (acciones)

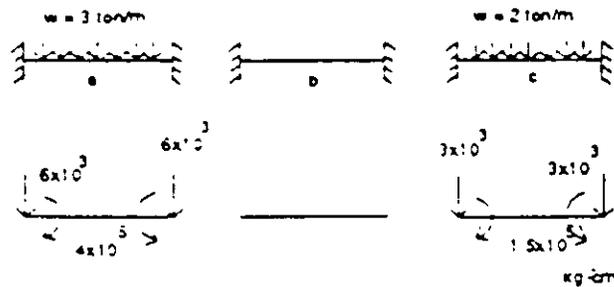


Figura 2.33

Sustituyendo en el vector de cargas y utilizando unidades en kilogramos y centímetros, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} P_B \\ P_C \\ P_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{yB} \\ M_{zB} \\ P_{yC} \\ M_{zC} \\ P_{yD} \\ M_{zD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \times 10^3 \\ 4 \times 10^5 \\ -11 \times 10^3 \\ -1.5 \times 10^5 \\ -3 \times 10^3 \\ 1.5 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} D_B \\ D_C \\ D_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{yB} \\ \phi_{zB} \\ d_{yC} \\ \phi_{zC} \\ d_{yD} \\ \phi_{zD} \end{bmatrix}$$

Como el transformador es igual a la matriz identidad  $T = 1$  para este caso de vigas continuas debido a que el sistema local coincide con el sistema global, entonces:

$$K_y = K'_y$$

de la matriz general de 12 X 12 se tiene que:

$$K_{11} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{(1-\phi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} \\ \frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} & \frac{(4-\phi_y)EI_z}{(1-\phi_y)L} \end{bmatrix} \quad K_{22} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \end{bmatrix}$$

$$K_{33} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{(1-\phi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} \\ \frac{6EI_z}{(1-\phi_y)L^2} & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1-\phi_y)L} \end{bmatrix} \quad K_{44} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \\ \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} & \frac{(4-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \end{bmatrix}$$

Se sabe que

$$\phi_y = \frac{12\sqrt{EI_z}}{GAL^2}$$

el factor de forma esta dado por la expresión

$$f_y = \int \frac{Q^2}{r^2 I_z b} dA$$

y para secciones rectangulares es igual a 1.2

Para determinar el módulo de elasticidad se considera un valor de  $E = 8000 \sqrt{T_c}$  y para el módulo de elasticidad al corte un valor de  $G = 0.4E$

Para determinar las submatrices de rigidez de cada barra se sugiere hacer la siguiente tabla.

Barra	L	A	$I_z$	E	G	$\phi_y$	$EI_z$
a	400	1800	$5.4 \times 10^5$	$1.13 \times 10^5$	$4.53 \times 10^4$	$6.75 \times 10^{-2}$	$6.11 \times 10^1$
b	300	1800	$5.4 \times 10^5$	$1.13 \times 10^5$	$4.53 \times 10^4$	$1.2 \times 10^{-2}$	$6.11 \times 10^1$
c	300	800	$1.07 \times 10^5$	$1.13 \times 10^5$	$4.53 \times 10^4$	$5.3 \times 10^{-2}$	$1.21 \times 10^1$

sustituyendo en las submatrices para cada barra se obtiene:

Barra "a"

$$K_{11a} = \begin{bmatrix} 10732 & 2146370 \\ 2146370 & 5.82 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad K_{12a} = \begin{bmatrix} -10732 & 2146370 \\ -2146370 & 2.77 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

$$K_{21a} = K_{12a}^T \quad K_{22a} = \begin{bmatrix} 10732 & -2146370 \\ -2146370 & 5.82 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$K_{11b} = \begin{bmatrix} 24246 & 3636905 \\ 3636905 & 7.49 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad K_{12b} = \begin{bmatrix} -24246 & 3636905 \\ -3636905 & 3.42 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

$$K_{21b} = K_{12b}^T \quad K_{22b} = \begin{bmatrix} 24246 & -2146390 \\ 3636905 & 7.49 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$K_{11c} = \begin{bmatrix} 5107 & 766065 \\ 766065 & 1.55 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad K_{12c} = \begin{bmatrix} -5107 & 766065 \\ -766065 & 74576488 \end{bmatrix}$$

$$K_{11c} = K_{22c}$$

$$K_{22c} = \begin{bmatrix} 5107 & -766065 \\ -766065 & 1.55 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la matriz de rigideces de la estructura se tiene

$$K = \begin{bmatrix} 34978 & 1490535 & -24246 & 3636905 & 0 & 0 \\ 1490535 & 1.331 \times 10^9 & -3636915 & 3.42 \times 10^8 & 0 & 0 \\ -24246 & -3636905 & 29353 & -2870840 & -5107 & 766065 \\ 3636905 & 342 \times 10^8 & -2870840 & 9.04 \times 10^8 & -766065 & 74576448 \\ 0 & 0 & -5701 & -766065 & 5107 & -766065 \\ 0 & 0 & 766065 & 74576448 & -766065 & 1.55 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura y eliminando los grados de libertad restringidos, es decir los correspondientes a  $d'_{yB} = 0$  y  $d'_{yD} = 0$  el sistema resulta

$$\begin{bmatrix} 4 \times 10^5 \\ -11000 \\ -1.5 \times 10^5 \\ 1.5 \times 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.331 \times 10^9 & -3636915 & 3.42 \times 10^8 & 0 \\ -3636905 & 29353 & -2870840 & 766065 \\ 3.42 \times 10^8 & -2870840 & 9.04 \times 10^8 & 74576448 \\ 0 & 766065 & 74576448 & 1.55 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{zB} \\ \phi_{yC} \\ \phi_{zC} \\ \phi_{zD} \end{bmatrix}$$

solucionando el sistema de ecuaciones anterior,

$$\begin{bmatrix} \phi_{zB} \\ \phi_{yC} \\ \phi_{zC} \\ \phi_{zD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0021897 \\ -1.316115 \\ -0.004304 \\ 0.0095435 \end{bmatrix}$$

por lo que los vectores de desplazamiento en cada nodo resultan:

$$\begin{bmatrix} d_{yB} \\ \phi_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.1897 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_{yC} \\ \phi_{zC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.316115 \\ -4.314 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} d_{yD} \\ \phi_{zD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9.5445 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

por compatibilidad:

$$\begin{aligned} d'_{1a} &= 0 & d'_{2a} &= d'_9 \\ d'_{1b} &= d'_9 & d'_{2b} &= d'_c \\ d'_{1c} &= d'_c & d'_{2c} &= d'_0 \end{aligned}$$

Para conocer los elementos mecánicos en cada barra se aplica la ecuación fuerza-desplazamiento que esta dada por:

$$\begin{aligned} P'_1 &= K'_{11} d'_1 + K'_{12} d'_2 \\ P'_2 &= K'_{21} d'_1 + K'_{22} d'_2 \end{aligned}$$

Barra "a"

$$P'_{1a} = K'_{11a} (0) + K'_{12a} d'_9$$

$$\begin{bmatrix} P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10732 & 2146370 \\ -2146370 & 2.77EB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2.1897E-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4700 \\ -606547 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2a} = K'_{21a} (0) + K'_{22a} d'_9$$

$$\begin{bmatrix} P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10732 & 2146370 \\ 2146370 & 5.82 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2.1897 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4700 \\ -1274405 \end{bmatrix}$$

en forma similar para las barras b y c se obtiene

Barra "b"

$$\begin{bmatrix} P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8294 \\ 1674532 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8294 \\ 814012 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$\begin{bmatrix} P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2708 \\ -963629 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2078 \\ 150036 \end{bmatrix}$$

## Comprobación del equilibrio

$$P'_B = P'_{2a} + P'_{1b}$$

Nodo "B"

$$\begin{bmatrix} -6000 \\ 4 \times 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4700 \\ -1274405 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8294 \\ 1674536 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6000 \\ 4 \times 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12994 \\ 4 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

Nodo "C"

$$P'_C = P'_{2b} + P'_{1c}$$

$$\begin{bmatrix} -11 \times 10^3 \\ -1.5 \times 10^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8294 \\ 814012 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2708 \\ -263629 \end{bmatrix}$$

Nodo "D"

$$P'_D = P'_{2c}$$

$$\begin{bmatrix} -3 \times 10^3 \\ 1.5 \times 10^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2078 \\ 1.5 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

se observa que en los nodos B y C no se cumple el equilibrio, correspondiente al grado de libertad dy (\*), esto es debido a que hay apoyo y este debe ser capaz de absorber toda la carga que le llegue.

Los elementos mecánicos finales, figura 2.34.c, se obtienen sumando a los vectores de carga (calculados) en cada extremo de las barras figura 2.32.a los vectores iniciales de empotramiento figura 2.34.b. Estos últimos se obtienen multiplicando por menos uno el vector de cargas inicialmente considerando (acciones) figura 2.33.

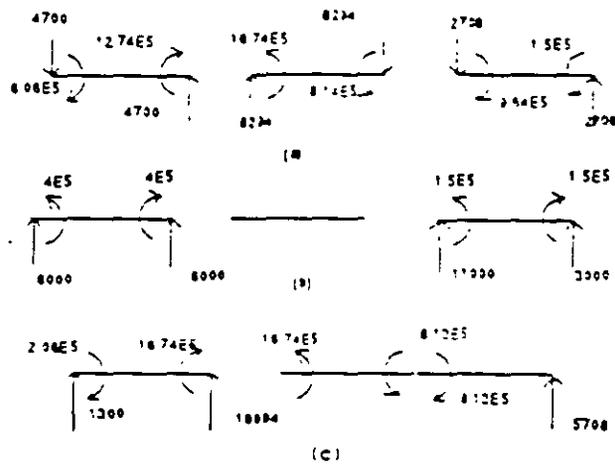


Figura 2.34

Resolver el problema anterior despreciando la influencia de la fuerza cortante en los desplazamientos.

La ecuación  $P=KD$  es la misma al valuar las submatrices de rigidez para cada elemento se debe considerar  $\phi_y = 0$ .

Barra "a"

$$K_{11a} = \begin{bmatrix} 11456 & 2291250 \\ 2291250 & 6.11 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad K_{22a} = \begin{bmatrix} -11456 & 2291250 \\ -2291250 & 3.055 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

$$K_{21a} = K_{12a}^T \quad K_{12a} = \begin{bmatrix} 11456 & -2291250 \\ -2291250 & 6.11 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$K_{11b} = \begin{bmatrix} 27156 & 4073333 \\ 4073333 & 8.1466 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad K_{22b} = \begin{bmatrix} -27156 & 4073333 \\ -4073333 & 4.0733 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

$$K_{21b} = K_{12b}^T \quad K_{12b} = \begin{bmatrix} 27156 & -4073333 \\ -4073333 & 8.1466 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$K_{11c} = \begin{bmatrix} 5378 & 806667 \\ 806667 & 1.6133 \times 10^7 \end{bmatrix} \quad K_{12c} = \begin{bmatrix} -5378 & 806667 \\ -806667 & 8.0666 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

$$K_{21c} = K_{12c}^t \quad K_{22c} = \begin{bmatrix} 5378 & -806667 \\ -806667 & 1.6133 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

sustituyendo:

$$\begin{bmatrix} -6 \times 10^3 \\ 4 \times 10^5 \\ -11 \times 10^3 \\ -1.5 \times 10^5 \\ -3 \times 10^3 \\ 1.5 \times 10^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38612 & 1782083 & -27156 & 4073333 & 0 & 0 \\ 1782083 & 1.425 \times 10^9 & -4073333 & 4.073 \times 10^8 & 0 & 0 \\ -27156 & -4073333 & 32534 & 3266666 & -5378 & 806667 \\ 4073333 & 4.073 \times 10^8 & 3266666 & 9.7599 \times 10^8 & -806667 & 8.066 \times 10^7 \\ 0 & 0 & -5378 & -806667 & 5378 & -806667 \\ 0 & 0 & 806667 & 8.0667 \times 10^7 & -806667 & 1.6133 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{yB} \\ \phi_{zB} \\ d_{yC} \\ \phi_{zC} \\ d_{yD} \\ \phi_{zD} \end{bmatrix}$$

eliminando las restricciones:

$$\begin{bmatrix} 4 \times 10^5 \\ -11 \times 10^3 \\ -1.5 \times 10^5 \\ 1.5 \times 10^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.425 \times 10^9 & -4073333 & 4.0733 \times 10^8 & 0 \\ -4073333 & 32534 & 3266666 & 806667 \\ 4.0733 \times 10^8 & 3266666 & 9.7599 \times 10^8 & 8.0667 \times 10^7 \\ 0 & 806667 & 8.0667 \times 10^7 & 1.6133 \times 10^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{zB} \\ d_{yC} \\ \phi_{zC} \\ \phi_{zD} \end{bmatrix}$$

solucionando

$$\begin{bmatrix} \phi_{zB} \\ d_{yC} \\ \phi_{zC} \\ \phi_{zD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00211 \\ -1.26632 \\ -0.00428 \\ 0.009405 \end{bmatrix}$$

Comparando estos desplazamientos con los que se obtuvieron al considerar  $\phi_y$ , se observa que estos últimos resultan ligeramente menores.

2.7.2 Ejemplo - Analizar la estructura que se muestra en la figura 2.35

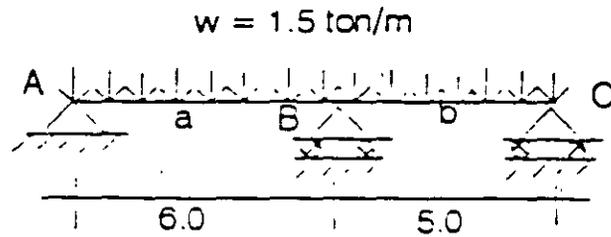


Figura 2.35

La ecuación fuerza-desplazamiento está dada por:

$$P' = K' D'$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}'_A \\ \bar{P}'_B \\ \bar{P}'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{11})_a & (K'_{12})_a & 0 \\ (K'_{21})_a & (K'_{22})_a - (K'_{11})_b & (K'_{12})_b \\ 0 & (K'_{21})_b & (K'_{22})_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}'_A \\ \bar{d}'_B \\ \bar{d}'_C \end{bmatrix}$$

Como no hay fuerza horizontal, no se genera fuerza axial, por lo tanto el desplazamiento horizontal en los nodos B y C son ceros y como no hay desplazamiento vertical en ninguno de los tres nodos, se puede considerar únicamente un grado de libertad por nodo (giro alrededor del eje z), lo que implica que solo se considerará momento flexionante, así el grado de libertad es: G.L. = 3.

Para determinar el vector de cargas se tiene que:

$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{wL_a^2}{12} = \frac{(1.5)(6)^2}{12} = 4.5 \text{ Ton} - m$$

$$M_{BC} = M_{CB} = \frac{wL_b^2}{12} = \frac{(1.5)(5)^2}{12} = 3.125 \text{ Ton} - m$$

Representándolos en la viga y considerando positivo al momento que representado como vector sería normal al plano que lo contiene:

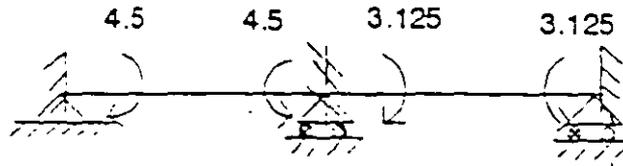


Figura 2.36

$$\bar{P}' = \begin{bmatrix} -4.5 \\ 1.375 \\ 3.125 \end{bmatrix} \quad \bar{D}' = \begin{bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \\ \phi_C \end{bmatrix}$$

Se sabe que:

$$K_n' = T K_n T'$$

Como en este caso, el sistema local coincide con el sistema global, puesto que el eje de la barra tiene la dirección del eje de las "x" (en caso contrario sí se utilizaría un transformador): la matriz de rigideces es la misma. así de la matriz general de rigideces, considerando solo flexión y despreciando la deformación por cortante, es decir  $\phi y$  se tiene:

$$K = K' = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

donde

$$K_{11}' = K_{22}' = \frac{4EI}{L} \quad y \quad K_{12}' = K_{21}' = \frac{2EI}{L}$$

sustituyendo:

$$(K_{11}')_n = \frac{4EI}{6} = 0.667 EI$$

$$(K_{12}')_n = \frac{2EI}{6} = 0.333 EI$$

$$(K_{11})_b = \frac{4EI}{5} = 0.80 EI$$

$$(K_{12})_b = \frac{2EI}{5} = 0.40 EI$$

sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura:

$$\begin{bmatrix} -4.5 \\ 1.375 \\ 3.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.333 & 0 \\ 0.333 & 1.467 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \\ \phi_C \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \\ \phi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.68 \\ 1.87 \\ 2.97 \end{bmatrix}$$

Por compatibilidad:

$$d_{2a} = \phi_B$$

$$d_{1b} = \phi_B$$

$$d_{2b} = \phi_C$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento para cada barra:

Barra "a"

$$P_{1a} = 0.667 EI (-7.68/EI) + 0.333 EI (1.87/EI) = -4.5 \text{ ton}$$

$$P_{2a} = 0.333 EI (-7.68/EI) + 0.667 EI (1.87/EI) = -1.31 \text{ ton}$$

Barra "b"

$$P_{1b} = 0.8 EI (1.87/EI) + 0.4 EI (2.970/EI) = 2.685 \text{ ton}$$

$$P_{2b} = 0.4 EI (1.87/EI) + 0.8 EI (2.970/EI) = 3.125 \text{ ton}$$

Comprobación del equilibrio.

$$P_A' = P_{1a}'; \quad P_B' = P_{2a}' + P_{1b}'; \quad P_C' = P_{2b}' \quad \underline{\text{Si checan}}$$

Para obtener los momentos finales se hace lo siguiente: En las figuras 2.36 a y b se representan las acciones y los valores obtenidos con las ecuaciones fuerza-desplazamiento de la barra, respectivamente

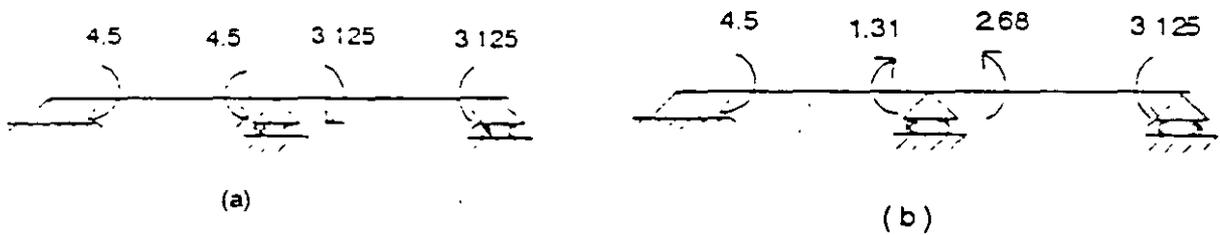


Figura 2.36

Para poder sumar los momentos de las figuras 2.37.a y 2.37.b es necesario que ambos sean acciones o reacciones por lo que se multiplica por menos uno a los momentos de la figura 2.37 a para sumarlos con los de la figura 2.37.b y así encontrar los momentos finales, estos se representan en la figura 2.37 d

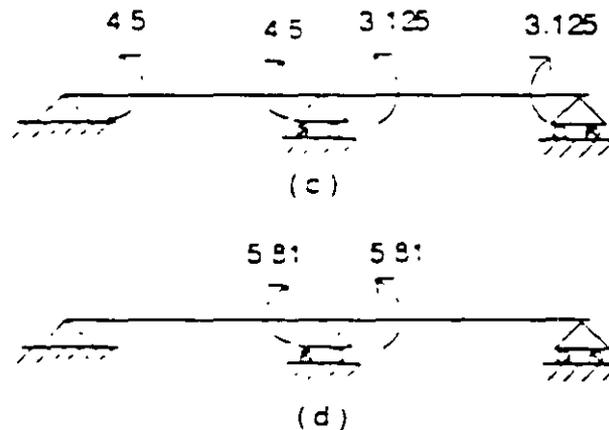


Figura 2.37

## 2.8 MARCOS PLANOS.

Se sabe que las submatrices de rigidez en el sistema global están dadas por:

$$k'_{ij} = T k_{ij} T^T$$

en el caso de marcos planos, la matriz de rotación o transformador se determina a partir de la figura 2.38

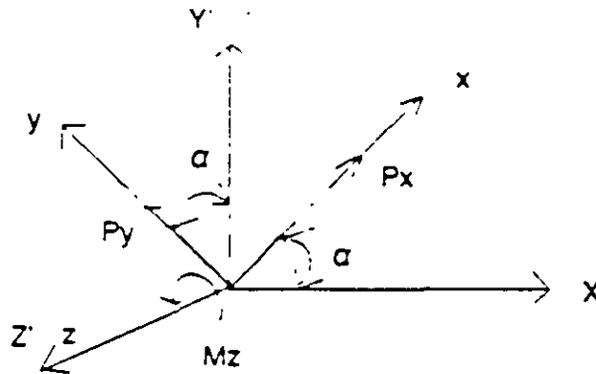


Figura 2.38

$$P'_x = P_x \cos \alpha - P_y \sin \alpha$$

$$P'_y = P_x \sin \alpha + P_y \cos \alpha$$

$$M'_z = M_x$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} P'_x \\ P'_y \\ M'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ M_x \end{bmatrix}$$

utilizando la notación  $\cos \alpha = l$  y  $\sin \alpha = m$ , el transformador resulta:

$$T = \begin{bmatrix} l & -m & 0 \\ m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la matriz general de 12 x 12 en el sistema local, la matriz de rigideces para un elemento marco despreciando el efecto de la fuerza cortante en las deformaciones resulta

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

Haciendo la rotación del sistema local al global se obtiene:

$$K_{ii} = \begin{bmatrix} 1 & -m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

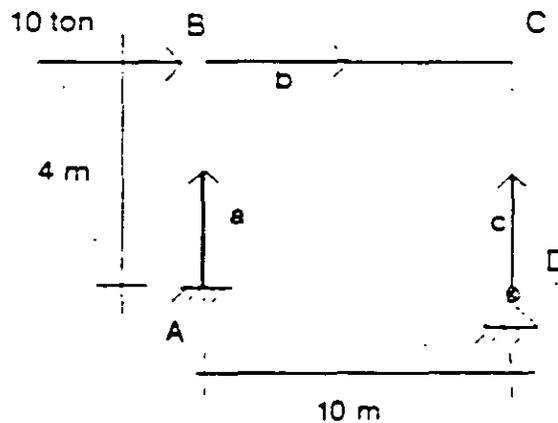
$$K_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} l^2 - \frac{12EI_z}{L^3} m^2 & (\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}) lm & -\frac{6EI_z}{L^2} m \\ (\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}) lm & \frac{EA}{L} m^2 - \frac{12EI_z}{L^3} l^2 & \frac{6EI_z}{L^2} l \\ -\frac{6EI_z}{L^2} m & \frac{6EI_z}{L^2} l & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{EA}{L} l^2 + \frac{12EI_z}{L^3} m^2\right) & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) lm & -\frac{6EI_z}{L^2} m \\ -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) lm & -\left(\frac{EA}{L} m^2 + \frac{12EI_z}{L^3} l^2\right) & \frac{6EI_z}{L^2} l \\ \frac{6EI_z}{L^2} m & -\frac{6EI_z}{L^2} l & \frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = K'_{12}$$

$$K'_{22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} l^2 + \frac{12EI_z}{L^3} m^2 & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) lm & \frac{6EI_z}{L^2} m \\ \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) lm & \frac{EA}{L} m^2 + \frac{12EI_z}{L^3} l^2 & -\frac{6EI_z}{L^2} l \\ \frac{6EI_z}{L^2} m & -\frac{6EI_z}{L^2} l & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

2.8 1 Analizar el marco mostrado en la figura 2.39



col 30x30 cm.  
trabes 30x60 cm.  
 $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$   
 $E = 14000 \sqrt{f'_c}$

Figura 2.39

El grado de libertad para el marco en cuestión es  $GL = 7$  y su ecuación fuerza-desplazamiento está dada por

$$\begin{bmatrix} P'_B \\ P'_C \\ P'_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{22a} - K'_{11b} & K'_{12b} & 0 \\ K'_{11b} & K'_{22b} - K'_{22c} & K'_{21c} \\ 0 & K'_{12c} & K'_{11c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_B \\ D'_C \\ D'_D \end{bmatrix}$$

Para valuar las submatrices de rigidez y con estas la ecuación fuerza-desplazamiento, se sugiere organizar la información en la siguiente tabla. Las unidades que se manejan en este problema son toneladas y centímetros.

Barra	A	E	I	EA	EI	L	l	m
a,c	900	221.359	67500	$1.9922 \times 10^5$	$1.4941 \times 10^7$	400	0	1
b	1800	221.359	540000	$3.9844 \times 10^5$	$1.1953 \times 10^8$	1000	1	0

Sustituyendo en las submatrices:

Barras "a" y "c"

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 2.802 & 0 & -560.314 \\ 0 & 498.058 & 0 \\ -560.314 & 0 & 1.494 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad K'_{22} = \begin{bmatrix} -2.802 & 0 & -560.314 \\ 0 & -498.058 & 0 \\ 560.314 & 0 & 74.709 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = \begin{bmatrix} -2.802 & 0 & 560.314 \\ 0 & -498.058 & 0 \\ -560.314 & 0 & 74.709 \end{bmatrix} \quad K'_{21} = \begin{bmatrix} 2.802 & 0 & 560.314 \\ 0 & 498.058 & 0 \\ 560.314 & 0 & 1.494 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 398.46 & 0 & 0 \\ 0 & 1.434 & 717.204 \\ 0 & 717.204 & 4.781 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad K'_{22} = \begin{bmatrix} -398.46 & 0 & 0 \\ 0 & -1.434 & -717.204 \\ 0 & 717.204 & 2.391 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = \begin{bmatrix} -398.46 & 0 & 0 \\ 0 & -1.434 & -717.204 \\ 0 & 717.204 & 2.391 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad K'_{21} = \begin{bmatrix} 398.46 & 0 & 0 \\ 0 & -1.434 & -717.204 \\ 0 & 717.204 & 2.781 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura se tiene.

10	401.27	0	560.31	-398.45	0	0	0	0	$d'_{x0}$
0	0	499.49	717.2	0	-1.43	717.2	0	0	$d'_{y0}$
0	560.31	717.2	$6.276 \times 10^5$	0	-717.20	$2.39 \times 10^5$	0	0	$\phi'_{z0}$
0	-398.45	0	0	401.25	0	560.31	-2.90	560.31	$d'_{xc}$
0	0	-1.43	-717.2	0	499.49	-717.20	0	-489.06	$d'_{yc}$
0	0	717.2	$2.39 \times 10^5$	560.31	-717.2	$6.276 \times 10^5$	-560.31	0	$\phi'_{xc}$
0	0	0	0	-2.8	0	-560.3	2.90	0	$\phi'_{yc}$
0	0	0	0	0	-499.06	0	0	499.06	$d'_{z0}$
0	0	0	0	560.31	0	74708.5	-560.31	0	$d'_{y0}$
									$\phi'_{z0}$

El sistema de ecuaciones resulta de 9x9, sin embargo el grado de libertad que se determinó al inicio del problema es  $GL = 7$  por lo que hay que eliminar los renglones y columnas correspondientes a las restricciones, es decir los renglones correspondientes a  $d'_{x0}$  y  $d'_{y0}$  cuyos valores son conocidos, dado que son igual con cero. La ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura considerando sus condiciones de frontera resulta:

10	401.27	0	560.31	-398.45	0	0	0	$d'_{z0}$
0	0	499.49	717.20	0	-1.43	717.20	0	$d'_{yc}$
0	560.31	717.2	$6.276 \times 10^5$	0	-717.20	$2.39 \times 10^5$	0	$\phi'_{xc}$
0	-398.45	0	0	401.25	0	560.31	560.31	$d'_{xc}$
0	0	-1.43	-717.2	0	499.49	-717.20	0	$d'_{yc}$
0	0	717.2	$2.39 \times 10^5$	560.31	-717.2	$6.276 \times 10^5$	74708.5	$\phi'_{xc}$
0	0	0	0	560.31	0	74708.5	$1.494 \times 10^5$	$\phi'_{z0}$

Solucionando el sistema.

$$\begin{array}{l}
 d'_{z0} \\
 d'_{yc} \\
 \phi'_{xc} \\
 d'_{xc} \\
 d'_{yc} \\
 \phi'_{xc} \\
 \phi'_{z0}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 3.34 \\
 4.7 \times 10^{-3} \\
 -2.8 \times 10^{-5} \\
 3.34 \\
 -4.7 \times 10^{-3} \\
 -4.5 \times 10^{-4} \\
 -1.2 \times 10^{-2}
 \end{array}$$

Por compatibilidad:

$$\begin{aligned} d'_{1a} &= 0 & d'_{2a} &= d'_B \\ d'_{1b} &= d'_B & d'_{2b} &= d'_C \\ d'_{1c} &= d'_D & d'_{2c} &= d'_C \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento de la barra en el sistema global:

$$\begin{aligned} P'_1 &= K'_{11} D'_1 + K'_{12} D'_2 \\ P'_2 &= K'_{21} D'_1 + K'_{22} D'_2 \end{aligned}$$

Barra "a"

$$P'_{1a} = K'_{11a} (0) + K'_{12a} D'_B$$

$$\begin{bmatrix} P'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.802 & 0 & -560.314 \\ 0 & -498.058 & 0 \\ 560.314 & 0 & 74708.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.34 \\ 4.7 \times 10^{-3} \\ -2.8 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.79 \\ -2.34 \\ 1663.07 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2a} = K'_{21a} (0) - K'_{22a} D'_B$$

$$\begin{bmatrix} P'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.802 & 0 & 560.314 \\ 0 & 498.058 & 0 \\ 560.314 & 0 & 1.4942 \times 10^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.34 \\ 4.7 \times 10^{-3} \\ -2.8 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.79 \\ 2.34 \\ 1452.03 \end{bmatrix}$$

En forma similar para las otras dos barras se obtiene:

Barra "b"

$$\begin{bmatrix} P'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ -152.02 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.21 \\ 2.34 \\ -884.8 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$\begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.21 \\ -2.34 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ 884.8 \end{bmatrix}$$

Comprobación del equilibrio:

Nodo B.

$$P'_B = P'_{2a} + P'_{1b}$$
$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.79 \\ 2.34 \\ 1452 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ -1452 \end{bmatrix}$$

Nodo D:

$$P'_C = P'_{2b} + P'_{2c}$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.21 \\ 2.34 \\ 884.80 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ -884.80 \end{bmatrix}$$

## ROTACION DEL SISTEMA GLOBAL AL LOCAL.

La rotación del sistema global al local se hace mediante la matriz de rotación traspuesta, en igual forma que en armaduras, así:

$$P = T^T P'$$

Barra a:

$$P_{1a} = (T^T)_a P'_{1a}$$

$$P_{1a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.79 \\ -2.34 \\ 1663.07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.34 \\ 7.79 \\ 1663.07 \end{bmatrix}$$

$$P_{2a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.79 \\ 2.34 \\ 1452.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.34 \\ -7.79 \\ 1452.03 \end{bmatrix}$$

En forma similar para las otras dos barras se tiene:

Barra "b"

$$P_{1b} = \begin{bmatrix} 2.21 \\ -2.34 \\ -1452.03 \end{bmatrix} \quad P_{2b} = \begin{bmatrix} -2.21 \\ 2.34 \\ -884.80 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$P_{1c} = \begin{bmatrix} 2.34 \\ 2.21 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{2c} = \begin{bmatrix} -2.34 \\ -2.21 \\ 884.80 \end{bmatrix}$$

En la figura 2.40.a se muestran las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en los extremos de cada barra y en la figura 2.40.b se muestran las fuerzas axiales.

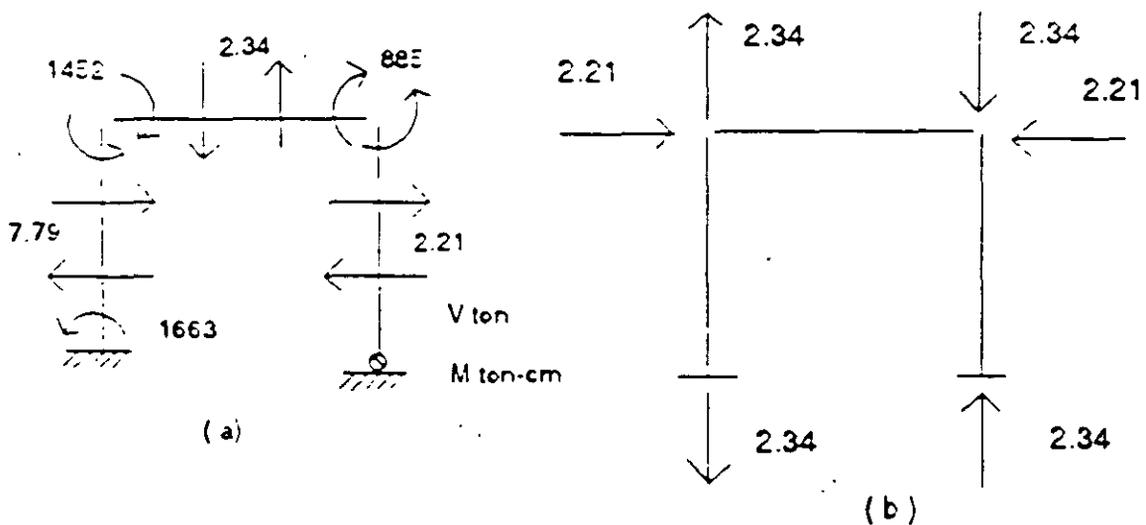


Figura 2.40

2.8.2 Ejemplo.- Analizar el marco que se muestra en la figura 2.41, considérese que la barra "d" esta articulada en sus extremos.

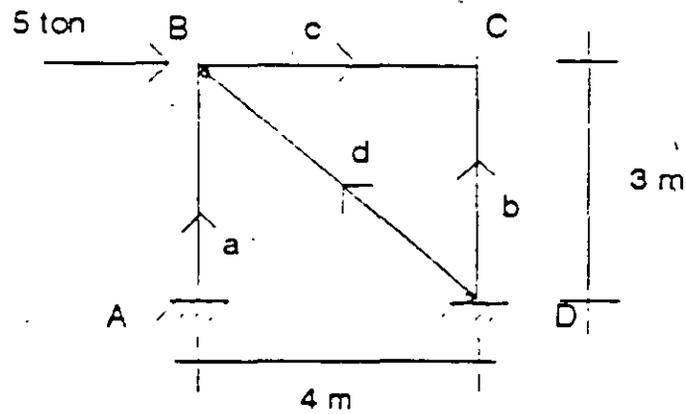


Figura 2.41

Las propiedades consideradas para cada barra se muestran en la siguiente tabla. Las unidades utilizadas para este problema son toneladas y centímetros.

El grado de libertad para el marco en cuestión es  $GL = 6$  y su ecuación fuerza-desplazamiento es:

$$\begin{bmatrix} P'_B \\ P'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22a} + K_{22d} + K_{11c} & K_{12c} \\ K_{21c} & K_{22c} + K_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D'_B \\ D'_C \end{bmatrix}$$

Barra	A	E	I	EA	EI	L	I	m
a y b	900	141.421	67500	127279	9545918	300	0	1
c	1250	141.421	260417	176776	36828433	400	1	0
d	2520	6	5927040	15120	35562240	500	-0.8	0.6

Las unidades consideradas son toneladas y centímetros. Sustituyendo en las submatrices.

Barras a y b

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 4.243 & 0 & -636.395 \\ 0 & 424.263 & 0 \\ -636.395 & 0 & 127279 \end{bmatrix} \quad K_{12} = \begin{bmatrix} -4.243 & 0 & -636.395 \\ 0 & -424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 63639 \end{bmatrix}$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} -4.243 & 0 & 0 \\ 0 & -424.263 & 0 \\ -636.395 & 0 & 63639 \end{bmatrix} \quad K_{22} = \begin{bmatrix} 4.243 & 0 & 636.395 \\ 0 & 424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 127279 \end{bmatrix}$$

Barra c

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 441.94 & 0 & 0 \\ 0 & 6.905 & 1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 368284.33 \end{bmatrix} \quad K_{12} = \begin{bmatrix} -441.94 & 0 & 0 \\ 0 & -6.905 & 1381.066 \\ 0 & -1381.066 & 184142.17 \end{bmatrix}$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} -441.94 & 0 & 0 \\ 0 & -6.905 & -1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 184142.17 \end{bmatrix} \quad K_{22} = \begin{bmatrix} 441.94 & 0 & 0 \\ 0 & 6.905 & -1381.066 \\ 0 & -1381.066 & 368284.33 \end{bmatrix}$$

De la matriz general de 12x12 en el sistema local, la matriz de rigideces para el elemento diagonal el cual solo estará sujeto a carga axial resulta:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Haciendo la rotación del sistema local al global se tiene:

$$K' = TKT$$

$$K'_{11} = K'_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} l^2 & \frac{EA}{L} lm & 0 \\ \frac{EA}{L} lm & \frac{EA}{L} m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = K'_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -m & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} l^2 & \frac{EA}{L} lm & 0 \\ \frac{EA}{L} lm & \frac{EA}{L} m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo:

Barra D

$$K'_{11} = K'_{22} = \begin{bmatrix} 19.354 & -14.515 & 0 \\ -14.515 & 10.886 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K'_{12} = K'_{21} = \begin{bmatrix} -19.354 & 14.515 & 0 \\ 14.515 & -10.886 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura se tiene

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 465.537 & -14.515 & 636.395 & -441.94 & 0 & 0 \\ -14.515 & 442.054 & 1381.066 & 0 & -6.905 & 1381.066 \\ 636.395 & 1381.066 & 495563.33 & 0 & -1381.066 & 184142.17 \\ -441.94 & 0 & 0 & 446.183 & 0 & 636.395 \\ 0 & -6.905 & -1381.066 & 0 & 431.168 & -1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 184142.17 & 636.395 & -1381.066 & 495563.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{xB} \\ d'_{yB} \\ \phi'_{zB} \\ d'_{xC} \\ d'_{yC} \\ \phi'_{zC} \end{bmatrix}$$

Solucionando el sistema se tiene:

$$\begin{bmatrix} d'_{xB} \\ d'_{yB} \\ \phi'_{zB} \\ d'_{xC} \\ d'_{yC} \\ \phi'_{zC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19279 \\ 7.54633 \times 10^{-3} \\ -1.99028 \times 10^{-4} \\ 0.19124 \\ -1.14398 \times 10^{-3} \\ -1.95852 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Por compatibilidad.

$$\begin{aligned} d'_{1a} &= 0 & d'_{2a} &= d'_B \\ d'_{1b} &= 0 & d'_{2b} &= d'_C \\ d'_{1c} &= d'_B & d'_{2c} &= d'_C \\ d'_{1e} &= 0 & d'_{2e} &= d'_B \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento de la barra en el sistema global.

$$\begin{aligned} P'_1 &= K_{11} D'_1 + K_{12} D'_2 \\ P'_2 &= K_{21} D'_1 + K_{22} D'_2 \end{aligned}$$

Barra "a"

$$P'_{1a} = K_{11a}(0) + K_{12a} d'_B$$

$$\begin{bmatrix} P'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.243 & 0 & -636.395 \\ 0 & -424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 63639 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ -3.20 \\ 110.03 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2a} = K_{21a}(0) + K_{22a} d'_B$$

$$\begin{bmatrix} P'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.243 & 0 & 636.395 \\ 0 & 424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 127279 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ 3.20 \\ 97.36 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$P_{1b}' = K_{11b}'(0) + K_{12b}'d_c'$$

$$\begin{bmatrix} P_{x1}' \\ P_{y1}' \\ M_{z1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.243 & 0 & -636.395 \\ 0 & -424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 63639 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1912 \\ -1.144 \times 10^{-3} \\ -1.9585 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ 109.24 \end{bmatrix}$$

$$P_{2b}' = K_{21b}'(0) + K_{22b}'d_c'$$

$$\begin{bmatrix} P_{x2}' \\ P_{y2}' \\ M_{z2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.243 & 0 & 636.395 \\ 0 & 424.263 & 0 \\ 636.395 & 0 & 127279 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.19124 \\ -1.144 \times 10^{-3} \\ -1.9585 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ 96.78 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$P_{1c}' = K_{11c}'d_B' - K_{12c}'d_c'$$

$$\begin{bmatrix} P_{x1}' \\ P_{y1}' \\ M_{z1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 441.94 & 0 & 0 & 0.1928 & -441.94 & 0 & 0 \\ 0 & 6.905 & 1381.066 & 7.5463 \times 10^{-3} & 0 & -6.905 & 1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 368284.53 & -1.9903 \times 10^{-4} & 0 & -1381.066 & 184142.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1912 \\ -1.144 \times 10^{-3} \\ -1.9585 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ -97.36 \end{bmatrix}$$

$$P_{2c}' = K_{21c}'d_B' + K_{22c}'d_c'$$

$$\begin{bmatrix} P_{x2}' \\ P_{y2}' \\ M_{z2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -441.94 & 0 & 0 & 0.1928 & 441.94 & 0 & 0 \\ 0 & -6.905 & -1381.066 & 7.5463 \times 10^{-3} & 0 & 6.905 & -1381.066 \\ 0 & 1381.066 & 184142 & -1.9903 \times 10^{-4} & 0 & -1381.066 & 368284 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1912 \\ -1.144 \times 10^{-3} \\ -1.9585 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ -96.78 \end{bmatrix}$$

Barra "d"

$$P_{1d}' = K_{11d}'(0) + K_{12d}'d_B'$$

$$\begin{bmatrix} P'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19.354 & 14.515 & 0 \\ 14.515 & -10.886 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.62 \\ 2.72 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{2d}' = K_{21d}'(0) + K_{22d}'d_B'$$

$$\begin{bmatrix} P'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.354 & -14.515 & 0 \\ -14.515 & 10.886 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1928 \\ 7.5463 \times 10^{-3} \\ -1.9903 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.62 \\ -2.72 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comprobación del equilibrio

Nodo B

$$F_B' = P_{2a}' + P_{1c}' + P_{2d}'$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ 3.20 \\ 97.36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ -97.36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.62 \\ -2.72 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nodo C

$$P_C' = P_{2b}' + P_{2c}'$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ 96.78 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ -96.78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rotación del sistema global al local

$$P = T' p'$$

Barra "a"

$$P_{1a}' = (T')_a P_{1a}'$$

$$P_{1a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.69 \\ -3.20 \\ 110.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.20 \\ 0.69 \\ 110.03 \end{bmatrix}$$

$$P_{2a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.69 \\ 3.20 \\ 97.36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.20 \\ -0.69 \\ 97.36 \end{bmatrix}$$

Barra "b"

$$P_{1b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ 109.24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.49 \\ 0.69 \\ 109.24 \end{bmatrix}$$

$$P_{2b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ 96.78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.49 \\ -0.69 \\ 96.78 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$P_{1c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ -97.36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.49 \\ 97.36 \end{bmatrix}$$

$$P_{2c} = \begin{bmatrix} -0.69 \\ 0.49 \\ 96.78 \end{bmatrix}$$

Barra "d"

$$P_{1d} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.62 \\ 2.72 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.528 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{id} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & 0 & 3.62 \\ -0.6 & -0.8 & 0 & -2.72 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.528 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En la figura 2 42 se representan fuerzas cortantes y momentos flexionantes y en la figura 2 43 fuerzas normales.

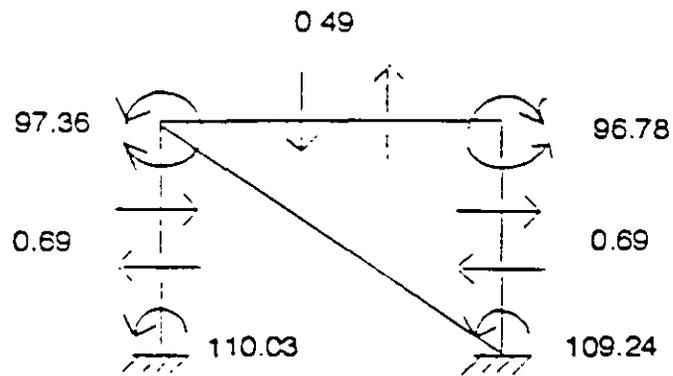


Figura 2.42

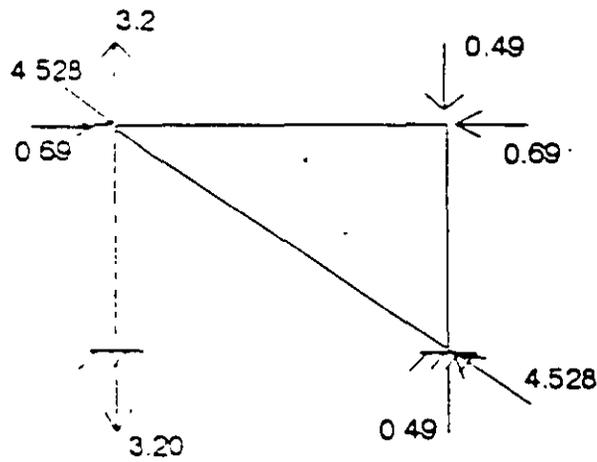


Figura 2.43

## 2.9 RETICULA O EMPARRILLADO.

Una retícula es una estructura a la cual se le aplica la carga en planos perpendiculares al plano que la contiene. Por lo cual será una estructura con tres grados de libertad por nodo, uno lineal y dos angulares como se vió en el capítulo uno

En igual forma que en armaduras y marcos primero se determinará las submatrices de rigidez en el sistema global, para esto se sabe que:

$$K'_y = T K_y T'$$

y en el caso de retículas la matriz de rotación T se determina a partir de la figura 2.45

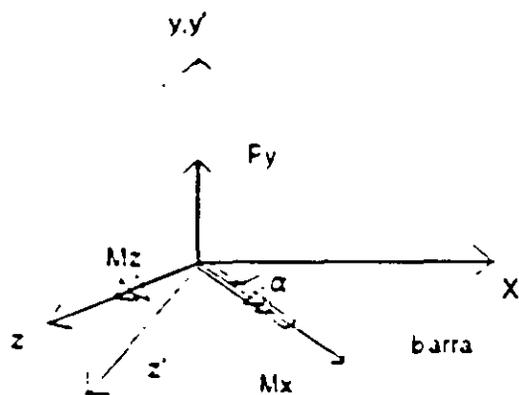


Figura 2.45

de la figura 2.45 se puede observar que.

$$M'_x = M_x \cos \alpha - M_z \sin \alpha$$

$$P'_y = P_y$$

$$M'_z = M_x \sin \alpha + M_z \cos \alpha$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M'_x \\ P'_y \\ M'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ P_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la matriz general de 12x12 en el sistema local, la matriz de rigideces para un elemento reticula es de la forma:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Haciendo la rotación del sistema local al global se obtiene:

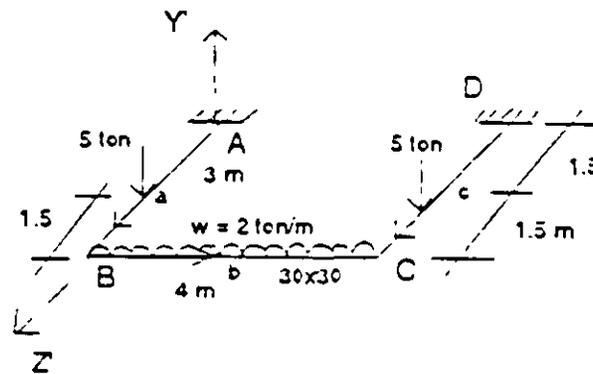
$$K_{11} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} 1^2 - \frac{4EI}{L} m^2 & \frac{-6EI}{L^2} m & (\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}) 1m \\ \frac{-6EI}{L^2} m & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} 1 \\ (\frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L}) 1m & \frac{6EI}{L^2} & \frac{GJ}{L} m^2 + \frac{4EI}{L} 1^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{GJ}{L} 1^2 + \frac{4EI}{L} m^2 & \frac{6EI}{L^2} m & -(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}) 1m \\ -\frac{6EI}{L^2} m & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} 1 \\ -(\frac{GJ}{L} + \frac{2EI}{L}) 1m & -\frac{6EI}{L^2} 1 & -\frac{GJ}{L} m^2 + \frac{2EI}{L} 1^2 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = K'_{12}^t$$

$$K'_{22} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} l^2 - \frac{4EI}{L} m^2 & \frac{6EI}{L^2} m \left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} \right) l m \\ \frac{6EI}{L^2} m & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} l \\ \left( \frac{GJ}{L} - \frac{4EI}{L} \right) l m & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{GJ}{L} m^2 + \frac{4EI}{L} l^2 \end{bmatrix}$$

2.9 1 Ejemplo.- Analizar la retícula mostrada en la figura 2.46



$$E = \sqrt{f_c} \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

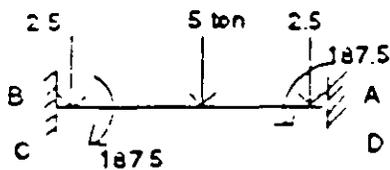
Figura 2.46

La ecuación fuerza-desplazamiento de la estructura en el sistema global está dada por

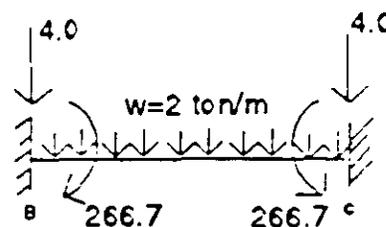
$$\begin{bmatrix} P'_B \\ P'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{22a} \cdot K'_{11b} & K'_{12b} \\ K'_{21a} & K'_{22b} \cdot K'_{11c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D'_B \\ D'_C \end{bmatrix}$$

Las unidades utilizadas para determinar el vector de caras serán toneladas para las cortantes y toneladas-centímetro para los momentos, así:

Barra a y c



barra B



$$M = \frac{Pl}{8} = 187.5 \text{ Ton-cm}$$

$$M = \frac{wl^2}{12} = 266.7 \text{ Ton-cm}$$

$$V = \frac{P}{2} = 2.5 \text{ Ton}$$

$$V = \frac{wl}{2} = 4 \text{ Ton}$$

El vector de cargas y el de desplazamientos se puede escribir

$$\begin{bmatrix} M'_{xB} \\ P'_{yB} \\ M'_{zB} \\ M'_{xC} \\ P'_{yC} \\ M'_{zC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -266.7 \\ -187.5 \\ -6.5 \\ 266.7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \phi'_{xB} \\ d'_{yB} \\ \phi'_{zB} \\ \phi'_{xC} \\ d'_{yC} \\ \phi'_{zC} \end{bmatrix} = ?$$

Para valuar las submatrices de rigidez para cada barra se sugiere organizar la información en la siguiente tabla.

Barra	E	G	I	J	L	EI	GJ	I	m
a y c	221.36	88.54	540000	370980	300	$1.1953 \times 10^7$	$3.2846 \times 10^7$	0	1
b	221.36	88.54	67500	114210	400	$1.4941 \times 10^7$	$1.0112 \times 10^7$	1	0

Para determinar el momento polar de inercia J se utiliza la expresión  $J = \beta b^3 h$  donde  $\beta$  es función de la relación  $h/b$ , como se indica en la siguiente tabla.

n/b	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10
$\beta$	0.141	0.196	0.214	0.229	0.245	0.263	0.281	0.3	0.313	0.33

Sustituyendo en las matrices transformadas al sistema global:

Barras a y c

$$K'_{11a,c} = \begin{bmatrix} 1593733.3 & -7968.87 & 0 \\ -7968.87 & 53.13 & 0 \\ 0 & 0 & 10948.56 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12a,c} = \begin{bmatrix} 796886.67 & 7968.87 & 0 \\ -7968.87 & -53.13 & 0 \\ 0 & 0 & -10948.56 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21a,c} = K'^t_{12a,c}$$

$$K'_{22a,c} = \begin{bmatrix} 1593733.3 & 7968.87 & 0 \\ 7968.87 & 53.13 & 0 \\ 0 & 0 & 10948.56 \end{bmatrix}$$

Barra b

$$K'_{11b} = \begin{bmatrix} 25280.38 & 0 & 0 \\ 0 & 2.80 & 560.31 \\ 0 & 560.31 & 149417.33 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12b} = \begin{bmatrix} -25280.38 & 0 & 0 \\ 0 & -2.80 & 560.31 \\ 0 & -560.31 & 74708.67 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21b} = K'^t_{12b}$$

$$K'_{22b} = \begin{bmatrix} 25280.38 & 0 & 0 \\ 0 & 2.80 & -560.31 \\ 0 & -560.31 & 149417.33 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación fuerza-desplazamiento.

$$\begin{array}{ccccccc|l}
 -187.5 & 1619013.7 & 7968.87 & 0 & -25280.38 & 0 & 0 & \phi'_{2B} \\
 -6.5 & 7968.37 & 55.93 & 560.31 & 0 & -2.80 & 560.31 & d'_{yB} \\
 -266.7 & 0 & 560.31 & 258905.89 & 0 & -560.31 & 74708.67 & \phi'_{2B} \\
 -187.5 & -25280.38 & 0 & 0 & 1619013.7 & 7968.87 & 0 & \phi'_{1C} \\
 -6.5 & 0 & -2.80 & -560.31 & 7968.87 & 55.93 & -560.31 & d'_{yC} \\
 266.7 & 0 & 560 & 74708.67 & 0 & -560.31 & 258905.9 & d'_{yC} \\
 & & & & & & & \phi'_{2C}
 \end{array}$$

Solucionando el sistema:

$$\begin{array}{l}
 \phi'_{xB} \\
 d'_{yB} \\
 \phi'_{zB} \\
 \phi'_{1C} \\
 d'_{yC} \\
 \phi'_{2C}
 \end{array}
 =
 \begin{bmatrix}
 0.001976 \\
 -0.418715 \\
 -0.001447 \\
 0.001976 \\
 -0.4187151 \\
 0.0014479
 \end{bmatrix}$$

Por compatibilidad

$$\begin{array}{ll}
 d'_{1a} = 0 & d'_{1a} = d'_{1B} \\
 d'_{1b} = d'_{1B} & d'_{2b} = d'_{2C} \\
 d'_{1c} = 0 & d'_{2c} = d'_{2C}
 \end{array}$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento para cada barra en el sistema global

$$\begin{array}{l}
 P'_1 = K'_{11} d'_1 + K'_{12} d'_2 \\
 P'_2 = K'_{21} d'_1 + K'_{22} d'_2
 \end{array}$$

Barra "a"

$$P'_{1a} = K'_{11a} d'_{1a} + K'_{12a} d'_{2a}$$

$$\begin{bmatrix} M'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 796886.67 & 7968.87 & 0 \\ -7968.87 & -53.13 & 0 \\ 0 & 0 & -109488.56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0019769 \\ -0.418715 \\ -0.0014479 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1762 \\ 6.5 \\ 158.5 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2a} = K'_{21a} d'_{1a} + K'_{22a} d'_{2a}$$

$$\begin{bmatrix} M'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1593733.33 & 7968.87 & 0 \\ 7968.87 & 53.13 & 0 \\ 0 & 0 & 109488.56 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0019769 \\ -0.418715 \\ -0.0014479 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -158.5 \end{bmatrix}$$

en forma similar para las otras barras se tiene.

Barra "b"

$$\begin{bmatrix} M'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -108.2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} M'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 108.2 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$\begin{bmatrix} M'_{x1} \\ P'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1762 \\ 6.50 \\ -158.5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} M'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ 158.5 \end{bmatrix}$$

Comprobación del equilibrio.

$$P'_B = P'_{2a} + P'_{1a}$$

$$\begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -266.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -158.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -108.2 \end{bmatrix} \quad \text{sicumple}$$

$$P'_c = P'_{2b} - P'_{2c}$$

$$\begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ 266.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 108.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ 158.5 \end{bmatrix} \quad \text{si cumple}$$

Para la rotación del sistema global al local se sabe que :

$$P = T' P'$$

Barra "a"

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1762 \\ 6.5 \\ 158.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 158.5 \\ 6.5 \\ 1762 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -187.5 \\ -6.5 \\ -158.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -158.5 \\ -6.5 \\ 187.5 \end{bmatrix}$$

en forma similar para las barra b y c

Barra "b"

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -108.2 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} M_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 108.2 \end{bmatrix}$$

Barra "c"

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -158.5 \\ 6.5 \\ 158.5 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} M_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 158.5 \\ -6.5 \\ 187.5 \end{bmatrix}$$

Los elementos mecánicos finales se obtienen en forma similar a los de los marcos así:

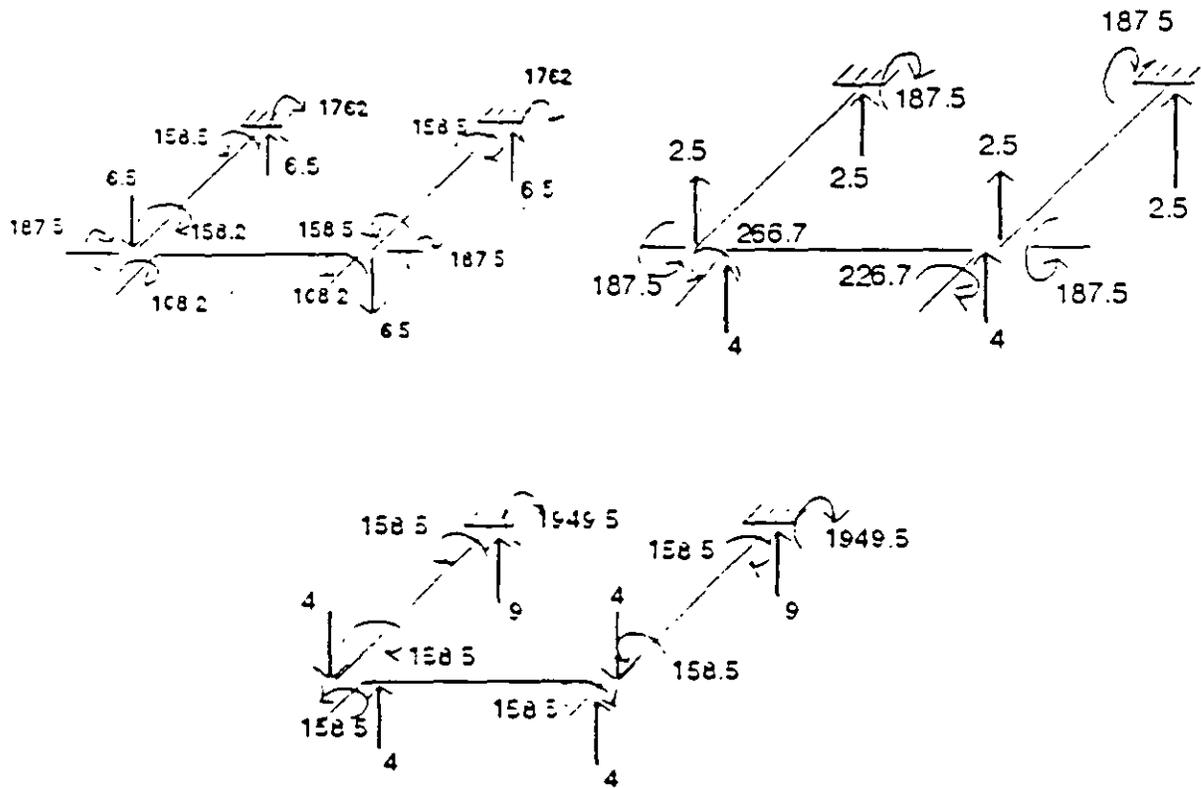


Figura 2.47

## 2.10 ESTRUCTURAS EN EL ESPACIO

Rotación del sistema local al global de una barra en el espacio

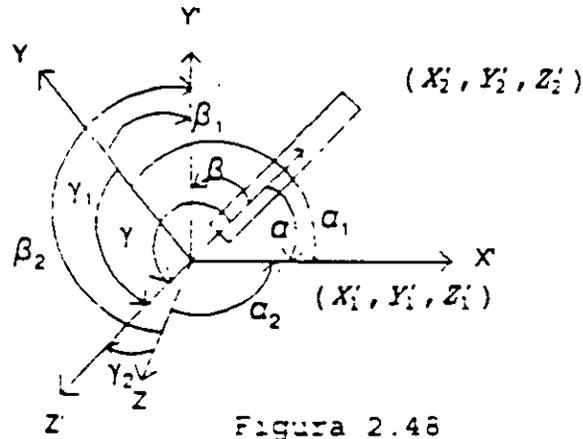


Figura 2.46

Se sabe:

$$L = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_2' - x_1'}{L} \quad \cos \beta = \frac{y_2' - y_1'}{L} \quad \cos \gamma = \frac{z_2' - z_1'}{L}$$

Por otro lado

$$P_x = P_x \cos \alpha + P_y \cos \alpha_1 + P_z \cos \alpha_2$$

$$P_y = P_y \cos \beta + P_y \cos \beta_1 + P_y \cos \beta_2$$

$$P_z = P_z \cos \gamma + P_z \cos \gamma_1 + P_z \cos \gamma_2$$

en igual forma para momentos en forma matricial y llamando

$$\cos \alpha_i = l_i ; \quad \cos \beta_i = m_i ; \quad \cos \gamma_i = n_i$$

$$\begin{bmatrix} P_x' \\ P_y' \\ P_z' \\ M_x' \\ M_y' \\ M_z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ 0 & 0 & 0 & n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

de donde:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & l_1 & l_2 & | & 0 & 0 & 0 \\ m & m_1 & m_2 & | & 0 & 0 & 0 \\ n & n_1 & n_2 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & m & m_1 & m_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & n & n_1 & n_2 \end{bmatrix}$$

De la matriz de rotación  $l$ ,  $m$ , y  $n$  representan los cosenos directores del eje "x" en el sistema global de referencia. Para determinar los cosenos directores  $l_1$ ,  $m_1$ , y  $n_1$  del eje "y" partimos de seleccionar a dicho eje perpendicular a los ejes  $x$  y  $z'$  de tal forma que el producto vectorial de  $z'$  con  $x$  coincida con el eje  $y$ ; así.

$$\bar{y} = \bar{z}' \times \bar{x} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & m & n \end{bmatrix} = -m_1 \cdot l_1 \cdot \bar{o}_x$$

como  $\bar{y}$  no es unitario entonces.

$$\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}} \bar{y}$$

si llamamos  $D = \sqrt{l_1^2 + m_1^2}$ , entonces

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} -\frac{m_1}{D} \\ \frac{l_1}{D} \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que.

$$l_1 = -\frac{m_1}{D}; \quad m_1 = \frac{l_1}{D} \quad y \quad n_1 = 0$$

El eje z se determinará por la condición de ortogonalidad

$$\bar{z} = \hat{x} \times \hat{y} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} l & m & n \\ -m & l & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{z} = \frac{1}{D} [-n \hat{i}_x - m \hat{i}_y + (l^2 + m^2) \hat{i}_z]$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{\frac{1}{D^2} [n^2 l^2 + m^2 n^2 + (l^2 + m^2)^2]}$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{\frac{n^2(l^2 + m^2) + (l^2 + m^2)^2}{(l^2 + m^2)}}$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{\frac{(l^2 + m^2) + (n^2 - l^2 - m^2)^2}{(l^2 + m^2)}}$$

$$|\bar{z}| = 1$$

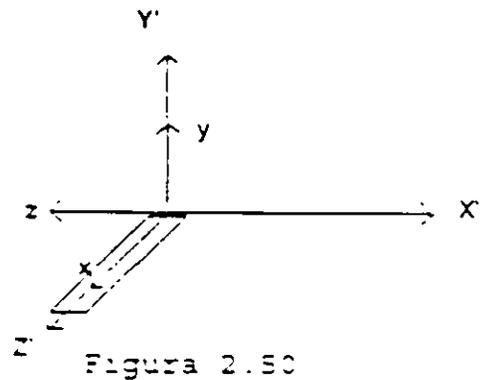
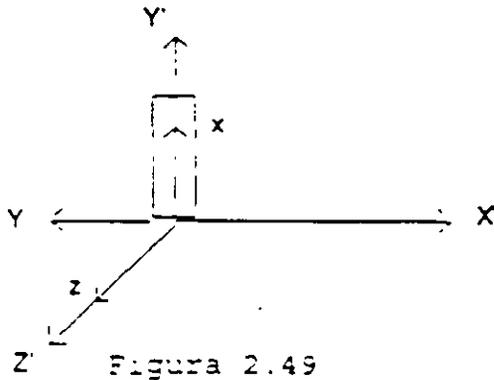
por lo que  $\bar{z} = \hat{z}$  y  $l_1 = -n \frac{1}{D}$  ;  $m_1 = -m \frac{n}{D}$

$$n_1 = \frac{l^2 + m^2}{\sqrt{l^2 + m^2}} = \sqrt{l^2 + m^2} = D$$

finalmente el transformador resulta.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{m}{D} & -\frac{n l}{D} & | & 0 & 0 & 0 \\ m & \frac{l}{D} & -\frac{m n}{D} & | & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & D & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & -\frac{m}{D} & -\frac{l n}{D} \\ 0 & 0 & 0 & | & m & \frac{l}{D} & -\frac{m n}{D} \\ 0 & 0 & 0 & | & n & 0 & D \end{bmatrix}$$

En el caso de que el eje "x" coincida con y' los ejes "z" & "z'" coincidirán como se muestra en la siguiente figura 4.29.



y el transformador resulta:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y en el caso de que el eje "x" coincida con z' los ejes "y" y "y'" coincidirán también como se muestra en la figura 2.50, el transformador resulta:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 3.1 MATRIZ DE RIGIDECES MODIFICADA

La matriz de rigideces se modifica con la finalidad de considerar diversas condiciones de frontera. Supongase una estructura como se muestra en la siguiente figura

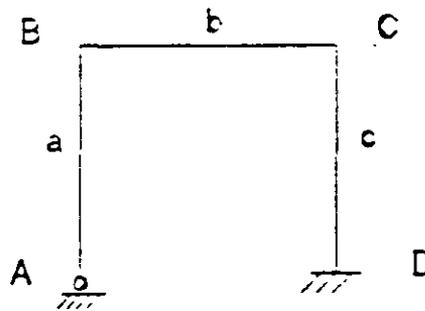


Figura 3.1

Si se consideran únicamente los grados de libertad de los nodos B y C para el análisis del marco, entonces la matriz de rigideces de la barra "a" debe modificarse para tomar en cuenta el grado de libertad del nodo A. La modificación se realiza considerando las condiciones de frontera es decir:



$$\begin{aligned}
 M_1 &= 0 & \phi_1 &\neq 0 \\
 N_1 &\neq 0 & U_1 &= 0 \\
 V_1 &\neq 0 & V_1 &= 0
 \end{aligned}$$

La ecuación fuerza-desplazamiento de la barra está dada por:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

sustituyendo las condiciones de frontera en el extremo 1

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ 0 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

de donde se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$0 = K_{33} \phi_1 + K_{34} U_2 + K_{35} V_2 + K_{36} \phi_2$$

$$\phi_1 = -K_{33}^{-1} (K_{34} U_2 + K_{35} V_2 + K_{36} \phi_2)$$

en forma matricial:

$$\phi_1 = -K_{33}^{-1} \begin{bmatrix} K_{34} & K_{35} & K_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

Es decir que a partir del vector desplazamiento en el extremo 2 se puede determinar el giro en el extremo 1.

Por otro lado se tiene:

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

lo cual se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{43} \\ K_{53} \\ K_{63} \end{bmatrix} \phi_1 + \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_2 \\ U_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

sustituyendo el valor de  $\phi_1$ ,

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{43} \\ K_{53} \\ K_{63} \end{bmatrix} -K_{33}^{-1} [K_{34} K_{35} K_{36}] \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{43} \\ K_{53} \\ K_{63} \end{bmatrix} -K_{33}^{-1} [K_{34} K_{35} K_{36}] \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

esto es:

$$\bar{P}_2 = K_{22}^* Q_2$$

donde  $K_{22}^*$  es la matriz de rigideces modificada

La matriz de rigideces modificada es la que se utilizará para efectuar el acoplamiento de las barras cuando no se incluya el grado de libertad del nodo "A", así:

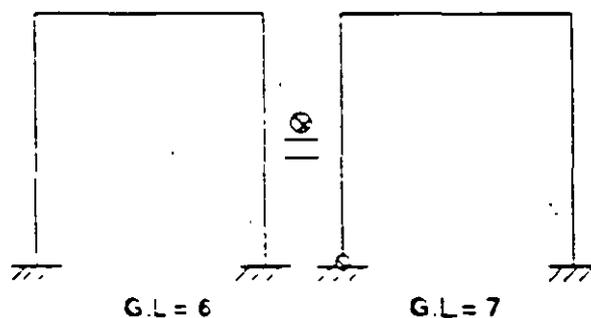
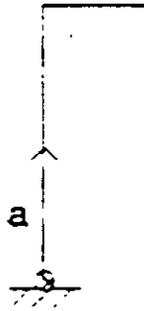


Figura 3.2

### 3.2 CONDENSACION DE LOS GRADOS DE LIBERTAD

El procedimiento anterior se puede simplificar condensando los grados de libertad de las fuerzas que son nulas:



$$M_1 = 0$$

$$\phi_1 \neq 0$$

La ecuación fuerza-desplazamiento de la barra "a" que se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

que se puede arreglar y particionar de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{23} \\ K_{41} & K_{42} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{43} \\ K_{51} & K_{52} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{53} \\ K_{61} & K_{62} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{63} \\ K_{31} & K_{32} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \phi_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

en forma simplificada:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{a1} \\ U_{a2} \end{bmatrix}$$

de la segunda ecuación:

$$P_2' = K_{21}' U_1' + K_{22}' U_2'$$

pero  $P_2' = 0$  entonces

$$U_2' = -K_{22}'^{-1} K_{21}' U_1'$$

de la ecuación 1

$$P_1' = K_{11}' U_1' + K_{12}' U_2'$$

sustituyendo  $U_2$

$$P_1' = K_{11}' U_1 - K_{12}' K_{22}'^{-1} K_{21}' U_1$$

$$P_1' = (K_{11}' - K_{12}' K_{22}'^{-1} K_{21}') U_1$$

de donde

$$K_{11}' - K_{12}' K_{22}'^{-1} K_{21}' = K_{11}''$$

para el ejemplo anterior:

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{43} \\ K_{53} \\ K_{63} \end{bmatrix} K_{33}^{-1} [K_{31} K_{32} K_{34} K_{35} K_{36}]$$

Sustituyendo condensaciones de frontera  $U_1 = 0$  y  $V_1 = 0$  lo que consiste en eliminar los renglones y columnas correspondientes, así:

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{43} \\ K_{53} \\ K_{63} \end{bmatrix} K_{33}^{-1} [K_{34} K_{35} K_{36}] \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

Que es el mismo resultado que se obtuvo al modificar la matriz de rigideces de la barra "a", de lo anterior se puede decir que la operación de condensación consiste en compactar los grados de libertad de una estructura, a aquellos que son de interes para el analista, al modular un problema dado. Generalmente los grados de libertad compactados son aquellos en donde no hay carga pero si desplazamiento.

### 3.3 MATRICES DE PERMUTACION

Estas matrices se forman mediante la permutación de renglones o columnas en la matriz identidad. Si se premultiplican se intercambian renglones y se postmultiplica se intercambian columnas.

Para ilustrar lo anterior intercambiar el primer renglón por el tercero, así como la primer columna por la tercera de la siguiente matriz.

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad MP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} & K_{33} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{11} & K_{12} & K_{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} & K_{33} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{11} & K_{12} & K_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{23} & K_{31} \\ K_{23} & K_{22} & K_{21} \\ K_{13} & K_{12} & K_{11} \end{bmatrix}$$

## METODO DE SUBESTRUCTURAS.

4

En la aplicación del método de las rigideces para estructuras de alto grado de hiperestaticidad cinemática en computadoras de poca memoria central, es necesario particionar la estructura en un número arbitrario de subestructuras, tomando en cuenta la capacidad de la máquina.

Se llama partición estructural a la división de la estructura completa en un número dado de subestructuras donde las uniones o fronteras de cada subestructura se fijan arbitrariamente, es conveniente tomar particiones estructurales correspondientes a particiones físicas reales. Como las propiedades de rigidez de cada subestructura pueden valuarse a partir de sus condiciones de frontera y de las propiedades geométricas y elásticas de cada barra que la componen, entonces cada subestructura puede tratarse en forma independiente aplicando el método directo de las rigideces, para condensar los grados de libertad correspondientes a los nodos intermedios (los que no están en las fronteras) a los grados de libertad en las fronteras (las fronteras son comunes a dos subestructuras adyacentes), para después hacer el acoplamiento de las subestructuras condensadas (este proceso se conoce como relajación de las fronteras) a través de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad, el sistema de ecuaciones resultante permite determinar los desplazamientos en los grados de libertad.

Cabe aclarar que el sistema estructural puede ser cualquiera por complejo que este sea, solo que aquí se presenta el de la figura 4.1 para que resulte más ilustrativo.

Como primer paso es dividir la estructura en un número conveniente de subestructuras, a las que se les imponen fronteras fijas ( estas fronteras son comunes a dos subestructuras adyacentes ) Esta división es arbitraria, se hace cuidando la capacidad de la microcomputadora, para este ejemplo se elige la partición que se muestra en la figura 4.1

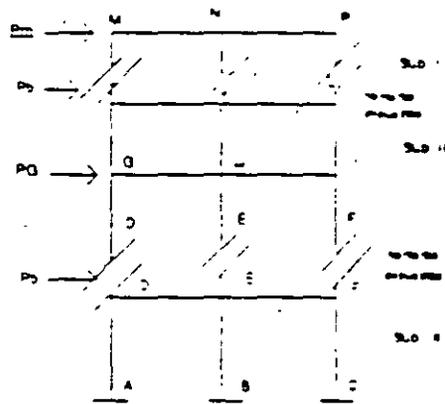


Figura 4.1

En la subestructura I los nodos M, N y P y en la subestructura II los nodos G, H e I se denominan nodos interiores, mientras que en la subestructura III no hay nodos interiores.

Una vez hecha la partición se procede al análisis de cada subestructura en forma independiente asumiendo las fronteras impuestas ( que como ya se mencionó son comunes a dos subestructuras adyacentes ), para condensar los grados de libertad a las fronteras, así como para determinar los vectores de empotramiento (reacciones en las fronteras necesarias para que los desplazamientos sean cero ).

Al condensar los grados de libertad a las fronteras, las subestructuras (fig. 4.1) se pueden considerar como elementos equivalentes como se ilustra en la figura 4.2.

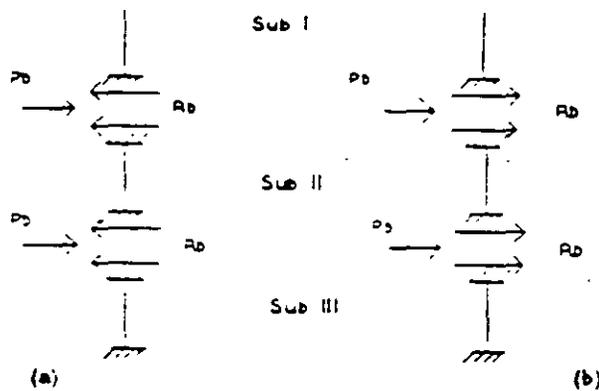


Figura 4.2

Quando las fronteras son relajadas las reacciones y cualesquiera fuerzas aplicadas en ellas, pueden no estar en equilibrio; por lo tanto la relajación inducirá desplazamientos de magnitud tal que se satisfaga el equilibrio en las fronteras

Para hacer el acoplamiento (relajación de las fronteras) a los vectores  $R_b$  se les cambia el signo para poder sumarlos con los vectores  $P_b$  que son las cargas aplicadas directamente en las fronteras como se indica en la figura 4.2.b

El acoplamiento de los elementos equivalentes de la figura 4.2 queda definido por las mismas reglas que para el ensamble de barras por el método directo.

Por otro lado el orden de las submatrices va a coincidir puesto que los puntos de unión o fronteras son comunes entre subestructuras adyacentes.

Al solucionar el sistema de ecuaciones que resulte del acoplamiento, se obtienen los desplazamientos en las fronteras de las diferentes subestructuras, naturalmente la solución de los desplazamientos en las fronteras implica un número pequeño de incógnitas en comparación con la solución de la estructura completa.

Finalmente se determinan los desplazamientos en los nodos interiores provocados por las cargas aplicadas directamente sobre dichos nodos más un desplazamiento que se le llama de corrección por la influencia de los desplazamientos de las fronteras.

#### 4.1 FORMULACION DEL METODO DE LAS SUBESTRUCTURAS.

Se sabe que la ecuación fuerza-desplazamiento de un sistema estructural está dado por

$$P = K D$$

Si denotamos al vector de los desplazamientos en las fronteras (comunes a dos subestructuras) por  $U_b$  y el vector de desplazamientos en los nodos interiores (cada uno ocurre en un punto interior de solamente una subestructura) por  $U_i$  y a las correspondientes fuerzas en las fronteras y en los nodos interiores por  $P_b$  y  $P_i$  respectivamente, así la ecuación fuerza-desplazamiento se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} P_b \\ P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_b \\ U_i \end{bmatrix} \quad 4.1$$

El total de desplazamientos en cualquier punto del sistema estructural, se calcula por la superposición de dos vectores tal que:

$$U = U^a + U^b \quad 4.2$$

donde  $U^a$  denota el vector de desplazamientos debido a las cargas  $P_i$  cuando  $U_b = 0$  y  $U^b$  representa la corrección necesaria a los desplazamientos  $U^a$  teniendo en cuenta los desplazamientos  $U_b$  cuando  $P_i = 0$ , por lo que el vector de desplazamientos se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} U_b \\ U_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_b^a \\ U_i^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_b^b \\ U_i^b \end{bmatrix} \quad 4.3$$

donde:

$\begin{bmatrix} U_b^a \\ U_i^a \end{bmatrix}$  Es el vector de desplazamientos cuando las fronteras están fijas; por lo que  $U_b^a = 0$

$\begin{bmatrix} U_b^b \\ U_i^b \end{bmatrix}$  Representa la corrección debida a la relajación de las fronteras.

Similantemente correspondiendo a los desplazamientos  $U^a$  y  $U^b$  las cargas pueden expresarse como:

$$P = P^a + P^b \quad 4.4$$

o bien.

$$\begin{bmatrix} P_b \\ P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_b^a \\ P_i^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_b^b \\ P_i^b \end{bmatrix} \quad 4.5$$

donde por definición:

$$P_1^a = P_1 \quad y \quad P_1^b = 0$$

de la segunda ecuación del sistema 4.1 cuando las fronteras están fijas ( $U_b^a = 0$ ), se tiene

$$P_1^a = K_{11} U_1^a$$

de donde

$$U_1^a = K_{11}^{-1} P_1 \quad 4.6$$

de la primer ecuación del sistema 4.1

$$P_1^a = K_{b1} U_1^a$$

sustituyendo la ecuación 4.6

$$P_b^a = K_{b1} K_{11}^{-1} P_1 \quad 4.7$$

donde  $P_b^a$  representa las reacciones necesarias en las fronteras para mantener a  $U_b = 0$  cuando las cargas en los nodos interiores son aplicadas, es decir la influencia de las cargas aplicadas en los nodos interiores sobre las fronteras en cada subestructura ver figura 4.3 a

Cuando las fronteras de las subestructuras son relajadas, los desplazamientos  $U^b$  pueden determinarse a partir del sistema de ecuaciones 4.1, así, considerando la segunda ecuación de este sistema.

$$P_1^b = K_{12} U_2^b + K_{11} U_1^b$$

pero  $P_1^b = 0$ , entonces:

$$U_1^b = -K_{11}^{-1} K_{12} U_2^b \quad 4.8$$

Se puede observar que la ecuación 4.7 representa la corrección de los desplazamientos en los nodos interiores por la relajación de las fronteras

De la ecuación 4.1

$$P_2^b = K_{22} U_2^b + K_{21} U_1^b$$

que sustituyendo la ecuación 4.8 se obtiene

factorizando:

$$P_b^a = K_{bb} U_b^a - K_{b1} K_{11}^{-1} K_{1b} U_b^a$$

$$P_b^a = [K_{bb} - K_{b1} K_{11}^{-1} K_{1b}] U_b^a \quad 4.9$$

si llamamos

$$K_b = K_{bb} - K_{b1} K_{11}^{-1} K_{1b}$$

la ecuación 4.8 se puede escribir

$$P_b^a = K_b U_b^a$$

donde  $K_b$  es la matriz de rigideces en las fronteras (condensación de la matriz de rigideces a los grados de libertad correspondientes a las fronteras de las subestructuras),  $U_b^a$  representa los desplazamientos en las fronteras y  $P_b^a$  es el vector de cargas en las fronteras considerando la influencia de las cargas aplicadas en los nodos interiores

De la ecuación 4.4

$$P_b^a = P_b - P_b^a \quad 4.10$$

donde  $P_b$  es la carga aplicada directamente en las fronteras y  $P_b^a$  es la influencia de las cargas aplicadas en los nodos interiores, ver figura 4.3.b.

Para el acoplamiento como ya se indicó las subestructuras se consideran como elementos equivalentes ver figura 4.3 y se aplica el método directo de las rigideces para establecer la ecuación fuerza-desplazamiento, así:

$$P_b^a = K_b - U_b^a$$

aquí  $P_b^a$  se considera como

$$P_b^a = P_b - P_b^a$$

donde  $K_b$  es la matriz de rigideces del sistema acoplado y  $U_b^a$  es el vector de desplazamientos en las fronteras (impuestas inicialmente) de toda estructura.

Para ilustrar este método se presentan ejemplos numéricos aplicados a la

solucion de armadura y marcos.

## 4.2 ARMADURAS

Aplicando el método de las subestructuras determinar la fuerza en cada una de las barras de la estructura que se muestra en la figura 4.3

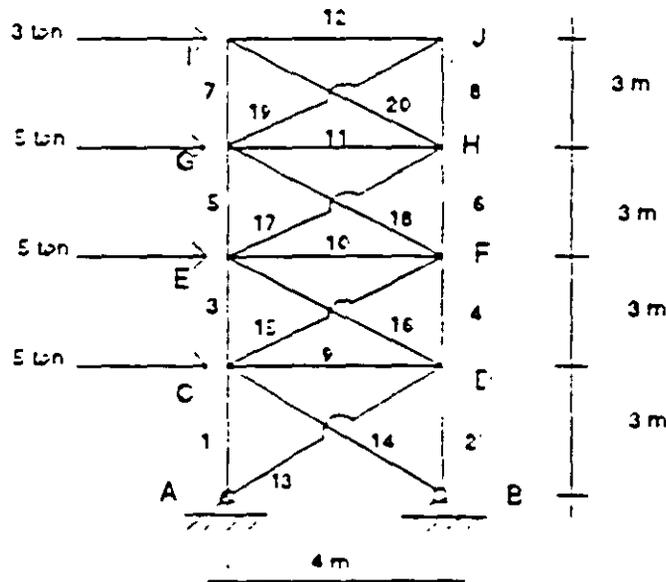


Figura 4.3

Para realizar la partición de la estructura hay varias opciones, algunas de estas se ilustran en la figura 4.4

En el primer caso figura 4.4 a para la subestructura superior resulta una matriz de  $8 \times 8$  la cual se condensaría a una de  $4 \times 4$  y para las dos subestructuras siguientes resulta una matriz de  $8 \times 8$ , las cuales no se condensan y finalmente para la subestructura inferior resulta una matriz de  $4 \times 4$  la cual también no se condensa por lo cual al hacer el acoplamiento de los elementos equivalentes (relajación de las fronteras) resultará una matriz de  $12 \times 12$ . Para la partición mostrada en la figura 4.4.b, la estructura intermedia de una matriz de  $12 \times 12$ , la cual al condensar resulta de  $8 \times 8$  y al hacer la relajación de

las fronteras se tendría que trabajar con una matriz de 8x8. Para la partición mostrada en la figura 4.4.c, en la subestructura superior inicialmente se maneja una matriz de 12x12 que al condensar resulta de 4x4 y para la subestructura inferior inicialmente la matriz es de 8x8, que al condensar también resulta de 4x4.

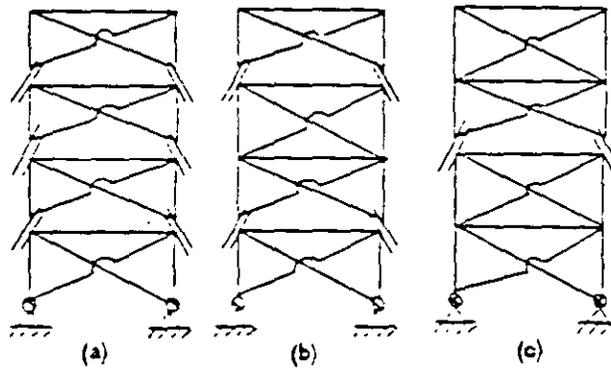


Figura 4 4

En este ejemplo se trabajará con la opción que muestra la figura 4.4.c

En la figura 4 4 se muestra la topología considerable en las subestructuras, se puede observar que los nodos E y F (fronteras) son comunes para ambas subestructuras.

#### ANÁLISIS DE LA SUBESTRUCTURA I

Aplicando el método directo de las rigideces la ecuación fuerza-desplazamiento para esta subestructura resulta:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 P_1 & (K_1 + K_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 P_2 & 0 & (K_1 + K_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 P_3 & (K_3) & (K_4) & (K_5 + K_6 + K_7) + (K_8 + K_9) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 P_4 & (K_1) & (K_2) & (K_3 + K_4 + K_5 + K_6 + K_7) & (K_8 + K_9) & (K_{10} + K_{11} + K_{12}) & (K_{13}) & 0 \\
 P_5 & 0 & 0 & (K_3) & (K_4) & (K_5 + K_6 + K_7) & (K_8 + K_9 + K_{10}) & 0 \\
 P_6 & 0 & 0 & (K_3) & (K_4) & (K_5 + K_6 + K_7) & (K_8 + K_9 + K_{10}) & 0 \\
 P_7 & 0 & 0 & (K_3) & (K_4) & (K_5 + K_6 + K_7) & (K_8 + K_9 + K_{10}) & 0 \\
 P_8 & 0 & 0 & (K_3) & (K_4) & (K_5 + K_6 + K_7) & (K_8 + K_9 + K_{10}) & 0 \\
 \hline
 & & & & & & & \Delta_1 \\
 & & & & & & & \Delta_2 \\
 & & & & & & & \Delta_3 \\
 & & & & & & & \Delta_4 \\
 & & & & & & & \Delta_5 \\
 & & & & & & & \Delta_6 \\
 & & & & & & & \Delta_7 \\
 & & & & & & & \Delta_8
 \end{array}$$

Las submatrices de rigidez en el sistema global para un elemento barra amadura están dadas por:

$$K_{11} = K_{22} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm \\ ml & m^2 \end{bmatrix}$$

$$k_{12} = K_{21} = -K_{11}$$

Por comodidad y rapidez se recomienda hacer la siguiente tabla para organizar la información

Barra	EA	L	l	m	l <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	lm
5	1	300	0	1	0	1	0
6	1	300	0	1	0	1	0
7	1	300	0	1	0	1	0
8	1	300	0	1	0	1	0
11	1	400	1	0	1	0	0
12	1	400	1	0	1	0	0
17	1	500	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48
19	1	500	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48
18	1	500	-0.8	0.6	0.64	0.36	-0.48
20	1	500	-0.8	0.6	0.64	0.36	-0.48

sustituyendo

Barras 5, 6, 7 y 8

Barras 17 y 19

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 12.8 & 9.6 \\ 9.6 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Barras 11 y 12

Barras 18 y 20

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 12.8 & -9.6 \\ -9.6 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

sustituyendo en la matriz de rigideces y particionando en la forma

$$K = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bd} \\ K_{db} & K_{dd} \end{bmatrix}$$

12.8	9.6	0	0	0	0	-12.8	-9.6	0	0	0	0
9.6	40.5	0	0	0	-33.3	-9.6	-7.2	0	0	0	0
0	0	12.8	-9.6	-12.8	9.6	0	0	0	0	0	0
0	0	-9.6	40.5	9.6	-7.2	0	-33.3	0	0	0	0
0	0	-12.8	9.6	50.6	0	-25.0	0	0	0	-12.8	-9.6
0	-33.3	9.6	-7.2	0	81.0	0	0	0	-33.3	-9.6	-7.2
-12.9	-9.6	0	0	-25.0	0	50.6	0	-12.8	9.6	0	0
-9.6	-7.2	0	-33.3	0	0	0	81.0	9.6	-7.2	0	-33.3
0	0	0	0	0	0	-12.8	9.6	37.8	-9.6	-25.0	0
0	0	0	0	0	-33.3	9.6	-7.2	-9.6	40.5	0	0
0	0	0	0	-12.8	-9.6	0	0	-25.0	0	37.8	9.6
0	0	0	0	-9.6	-7.2	0	-33.3	0	0	9.6	40.5

$10^{-4}$

Para obtener la matriz de rigideces condensada para esta subestructura se aplica la ecuación

$$K_{D1} = K_{11} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12}$$

realizando operaciones:

$$K_{D1} = \begin{bmatrix} 4.42 & 0.02 & -4.42 & -0.018 \\ 0 & 0 & 0 & -0.003 \\ -4.42 & 0.018 & 4.42 & 0.02 \\ 0 & -0.0057 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

El vector de empotramiento y los desplazamientos en nodos interiores producto de la influencia de las cargas aplicadas directamente en los nodos interiores están dadas por:

$$P_{D1}^a = (K_{D1} K_{11}^{-1}) ; P_{11}^a$$

$$P_{11}^a = (K_{11}^{-1}) ; P_{11}^a$$

$$P_{11}^a = \begin{bmatrix} P'_{GX} \\ P'_{GY} \\ P'_{HX} \\ P'_{HY} \\ P'_{IX} \\ P'_{IY} \\ P'_{JX} \\ P'_{JY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

haciendo operaciones resulta:

$$P_{D_1}^a = \begin{bmatrix} -3.63 \\ -8.25 \\ -4.37 \\ 8.25 \end{bmatrix} ; D_{D_1}^a = \begin{bmatrix} 0.463 \\ 0.165 \\ 0.398 \\ -0.150 \\ 0.829 \\ 0.211 \\ 0.791 \\ -0.172 \end{bmatrix} \times 10^4$$

## SUBESTRUCTURA II

Aplicando el método directo de las rigideces la ecuación fuerza-desplazamiento  $P' = K' D'$  para esta subestructura resulta:

$$\begin{matrix} P_1' & (K_{11})_1 - (K_{12})_1 - (K_{13})_1 & (K_{21})_1 & & (K_{31})_1 & (K_{41})_1 & D_1' \\ P_2' & (K_{12})_1 & (K_{22})_1 - (K_{23})_1 - (K_{24})_1 & & (K_{32})_1 & (K_{42})_1 & D_2' \\ P_3' & (K_{13})_1 & (K_{23})_1 & (K_{33})_1 - (K_{34})_1 - (K_{35})_1 - (K_{36})_1 & (K_{43})_1 & (K_{53})_1 & D_3' \\ P_4' & (K_{14})_1 & (K_{24})_1 & (K_{34})_1 & (K_{44})_1 - (K_{45})_1 - (K_{46})_1 - (K_{47})_1 & (K_{54})_1 & D_4' \end{matrix}$$

En igual forma que para la subestructura I, para valuar las rigideces de la subestructura II se hace la siguiente tabla.

Barra	EA	L	l	m	l <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	lm
5	1	300	0	1	0	1	0
6	1	300	0	1	0	1	0
7	1	300	0	1	0	1	0
8	1	300	0	1	0	1	0
11	1	400	1	0	1	0	0
12	1	400	1	0	1	0	0
17	1	500	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48
19	1	500	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48
18	1	500	-0.8	0.6	0.64	0.36	-0.48
20	1	500	-0.8	0.6	0.64	0.36	-0.48

sustituyendo

Barras 1,2,3 y 4

Barras 13 y 15

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 33.3 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 12.8 & 9.6 \\ 9.6 & 7.2 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Barras 9 y 10

Barras 14 y 16

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

$$K_{11} = EA \begin{bmatrix} 12.8 & -9.6 \\ -9.6 & 7.2 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

sustituyendo en la matriz de rigideces resulta.

$$\begin{bmatrix} 37.8 & -9.6 & -25.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12.8 & 9.6 \\ -9.6 & 40.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -33.3 & 9.6 & -7.2 \\ -25.0 & 0 & 37.8 & 9.6 & -12.8 & -9.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.6 & 40.5 & -9.6 & -7.2 & 0 & 0 & -33.3 \\ 0 & 0 & -12.8 & -9.6 & 50.6 & 0 & -25.0 & 0 & 0 \\ 0 & -33.3 & -9.6 & -7.2 & 0 & 81.0 & 0 & 0 & 0 \\ -12.8 & 9.6 & 0 & 0 & -25.0 & 0 & 50.6 & 0 & 0 \\ 9.6 & -7.2 & 0 & -33.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81.0 \end{bmatrix}$$

particionando la matriz de rigideces en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{b1} \\ K_{1b} & K_{11} \end{bmatrix}$$

Para condensar a los grados de libertad en las fronteras se aplica la fórmula:

$$K_{b::} = K_{bb} - K_{b1} K_{11}^{-1} K_{1b}$$

después de realizar operaciones se obtiene:

$$K_{b::} = \begin{bmatrix} 32.40 & -5.53 & -27.10 & 2.38 \\ -5.32 & 23.80 & -2.36 & -4.73 \\ -27.10 & -2.38 & 32.40 & 5.53 \\ 2.36 & -4.73 & 5.55 & 23.80 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

El vector de empotramiento y los desplazamientos en los nodos interiores están dados por

$$P_b^a = K_{b_i} K_{i_i}^{-1} P_i^a$$

$$F_{i_{i_i}}^a = K_{i_i}^{-1} P_{i_{i_i}}^a$$

$$P_{i_{i_i}}^a = \begin{bmatrix} P_{C_x}^a \\ P_{C_y}^a \\ P_{D_x}^a \\ P_{D_y}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

realizando operaciones

$$P_{b_{i_i}}^a = \begin{bmatrix} -0.825 \\ 0.620 \\ -1.675 \\ -1.250 \end{bmatrix} \quad U_{i_{i_i}} = \begin{bmatrix} 1307.25 \\ 0 \\ 645.85 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## RELAJACION DE LAS FRONTERAS

El acoplamiento de las subestructuras se hace considerandolas como elementos equivalentes.

La ecuación fuerza-desplazamiento está dada por:

$$P_b^b = K_b D_b^b$$

donde:

$$P_b^b = P_b - \sum P_b^a$$

para este caso en particular como se tienen dos subestructuras la expresión anterior se puede escribir:

$$P_b^b = P_b - P_b^a - P_b^b$$

el vector de cargas aplicado directamente en las fronteras resulta:

$$P_b = \begin{bmatrix} P_{E_x} \\ P_{E_y} \\ P_{F_x} \\ P_{F_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$P_3^B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.63 \\ -8.25 \\ -4.37 \\ 8.25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.83 \\ 0.62 \\ -1.68 \\ -1.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.46 \\ 7.73 \\ 6.05 \\ -7.00 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigideces en las fronteras se obtiene en este caso particular sumando las submatrices condensadas para las subestructuras I y II, así:

$$K_D = K_{DI} + K_{DII}$$

sustituyendo directamente en la ecuación fuerza-desplazamiento se tiene

$$\begin{bmatrix} 9.48 \\ 7.63 \\ 6.05 \\ -7.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.82 & -5.55 & -31.52 & 2.36 \\ -5.53 & 23.80 & -2.36 & -4.76 \\ -31.52 & -2.36 & 36.82 & 5.55 \\ 2.36 & -4.76 & 5.55 & 23.80 \end{bmatrix} 10^{-4} \begin{bmatrix} D_{Ex} \\ D_{Ey} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix}$$

solucionando el sistema:

$$\begin{bmatrix} D_{Ex} \\ D_{Ey} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31636.12 \\ 11445.58 \\ 31125.70 \\ -11057.01 \end{bmatrix} \frac{1}{EA}$$

corrección de los desplazamientos en los nodos interiores:

$$D_{i,j}^3 = (K_{i,i}^{-1} K_{i,b})^T D_b$$

$$D_{i,j}^B = -(K_{i,i}^{-1} K_{i,b})^T D_b$$

sustituyendo valores en las dos expresiones anteriores obtenemos:

$$D_{ix}^{\beta} = \begin{bmatrix} 48219.06 \\ 11494.74 \\ 48296.60 \\ -11004.82 \\ 65141.43 \\ 11490.29 \\ 65128.16 \\ -11014.18 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} \quad D_{ixx}^{\beta} = \begin{bmatrix} 11452.51 \\ 7429.02 \\ 11489.93 \\ -7290.47 \end{bmatrix} \frac{1}{EA}$$

por lo que los desplazamientos totales en los nodos interiores se obtienen con la expresión.

$$D_i = D_i^{\alpha} + D_i^{\beta}$$

sustituyendo.

$$D_{ix} = \begin{bmatrix} 52849.06 \\ 13144.74 \\ 52276.60 \\ -12504.82 \\ 73431.43 \\ 13600.29 \\ 73038.16 \\ -12734.18 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} D'_{cx} \\ D'_{cy} \\ D'_{hx} \\ D'_{hy} \\ D'_{ix} \\ D'_{jy} \\ D'_{jx} \\ D'_{jy} \end{bmatrix} ; \quad D_{ixx} = \begin{bmatrix} 12759.76 \\ 7424.02 \\ 11489.93 \\ -7290.47 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} = \begin{bmatrix} D'_{cx} \\ D'_{cy} \\ D'_{bx} \\ D'_{by} \end{bmatrix}$$

Una vez conocidos los desplazamientos en todos los nodos de la estructura, se procede a determinar las fuerzas en cada una de las barras, para lo cual se sigue el mismo procedimiento que cuando se aplica el método directo de las rigideces. Aquí se ilustra el procedimiento únicamente para dos barras

Por compatibilidad

$$\begin{aligned} D'_{1,1} &= 0 & D'_{2,1} &= D'_c \\ D'_{1,2} &= D'_c & D'_{2,2} &= D'_z \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento de una barra en el sistema global:

$$P'_1 = K'_{11} D'_1 + K'_{12} D'_2$$

$$P'_2 = K'_{21} D'_1 + K'_{22} D'_2$$

Barra 1

$$\begin{bmatrix} P'_{1x} \\ P'_{1y} \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -24.72 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} P'_{2x} \\ P'_{2y} \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 24.72 \end{bmatrix}$$

Barra 3

$$\begin{bmatrix} P'_{1x} \\ P'_{1y} \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -13.39 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} P'_{2x} \\ P'_{2y} \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13.39 \end{bmatrix}$$

Rotación del sistema global al local:

$$P = T^t P$$

Barra 1

$$P_1 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -24.72 \end{bmatrix} = -24.72 \text{ ton}$$

$$P_2 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 24.72 \end{bmatrix} = 24.72 \text{ ton}$$

Barra 3

$$P_1 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ -13.39 \end{bmatrix} = -13.39 \text{ ton}$$

$$P_2 = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 13.19 \end{bmatrix} = 13.39 \text{ ton}$$

Se deja al lector la determinación de la fuerza en las otras barras, así como la comprobación del equilibrio.

### 4.3 MARCOS

Aplicando el método de las subestructuras, determinar los desplazamientos y los elementos mecánicos del marco mostrado en la figura 4.6.

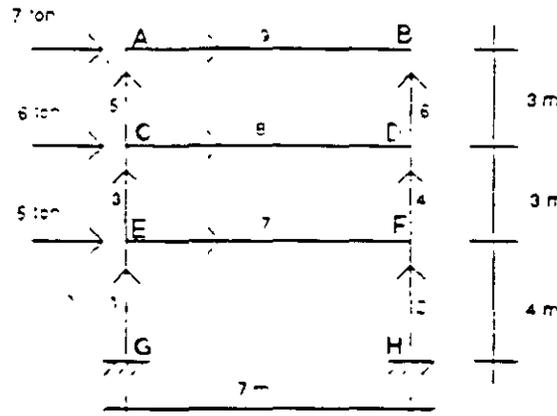


Figura 4.6

Utilizar secciones de 40x80 para las traveses y 40x40 para las columnas, un  $f_c$  de 250 kg/cm<sup>2</sup> por lo tanto un módulo de elasticidad de  $14000\sqrt{f_c}$ .

La partición se realiza en los nodos C y D como se muestra en la figura 4.7. Vale la pena mencionar que la partición de la estructura es arbitraria, en un momento dado el número de subestructuras, así como su tamaño se puede considerar en función del tamaño de las matrices por invertir como se mencionó en el problema anterior.

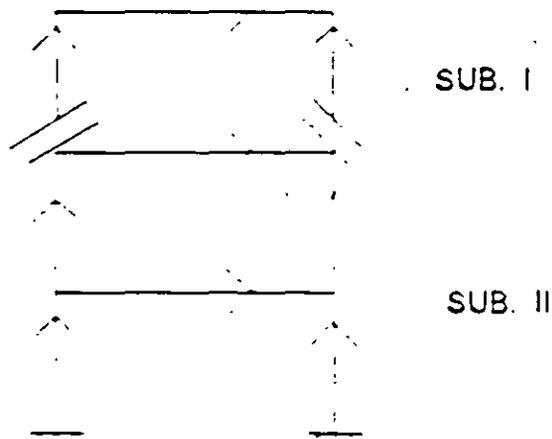


Figura 4.7

## ANALISIS DE SUBESTRUCTURA I

La matriz de rigideces de la subestructura I en el sistema global está dada por:

$$\begin{bmatrix}
 (K'_{22})_3 + (K'_{11})_8 & (K'_{12})_8 & (K'_{21})_3 & 0 \\
 (K'_{12})_8 & (K'_{22})_4 + (K'_{22})_8 & 0 & (K'_{21})_4 \\
 (K'_{21})_5 & 0 & (K'_{22})_1 + (K'_{11})_7 + (K'_{11})_3 & (K'_{12})_7 \\
 0 & (K'_{12})_4 & (K'_{21})_7 & (K'_{22})_2 + (K'_{22})_7 - (K'_{11})_4
 \end{bmatrix}$$

Valuando las submatrices de rigideces para cada barra en igual forma que en el método directo, sustituyendo y particionando en:

$$K_I = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix}$$

se obtiene:

10.3	0	31.5	-10.1	0	0	-21.0	0	31.5	0	0	0
0	11.9	46.3	0	-0.13	46.3	0	-11.8	0	0	0	0
31.5	46.3	27884.2	0	-46.3	10794	-31.5	0	3148.2	0	0	0
-10.1	0	0	10.3	0	31.5	0	0	0	-0.21	0	31.5
0	-0.13	-46.3	0	11.9	-46.3	0	0	0	0	-11.8	0
0	46.3	10794	31.5	-46.3	27884.2	0	0	0	-31.5	0	3148.2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
-21.0	0	-31.5	0	0	0	10.4	0	-13.8	-10.1	0	0
0	-11.8	0	0	0	0	0	20.8	46.3	0	-0.13	46.3
31.5	0	31.48	0	0	0	-13.8	46.3	32606.5	0	-46.3	10794
0	0	0	-0.21	0	-31.5	-10.1	0	0	10.4	0	-13.8
0	0	0	0	-11.8	0	0	-0.13	-46.3	0	20.8	-46.3
0	0	0	31.5	0	3148.2	0	46.3	10794	-13.8	-46.3	32606.5

Todos los valores de la matriz de rigideces se han redondeado a un decimal por falta de espacio.

Condensando a los grados de libertad en la frontera se tiene:

$$K_{Df} = K_{bb} - K_{bi} K_{ii}^{-1} K_{ib}$$

$$K_{br} = \begin{bmatrix} 1022.59 & -1.30 & 1753.87 & -1017.52 & 1.3 & -911.09 \\ -1.30 & 520.27 & 4522.06 & -1.34 & 14.25 & 4522.06 \\ 1753.87 & 4522.06 & 2593841 & -911.29 & -422.18 & 934633.9 \\ -1017.52 & -1.34 & -911.29 & 1022.59 & 1.30 & 1753.87 \\ 1.3 & 14.25 & -422.18 & 1.30 & 520.27 & -4522.06 \\ -911.09 & 4522.06 & 934633.9 & 1753.87 & -4522.06 & 2593829.7 \end{bmatrix}$$

El vector de empotramiento para la subestructura I, está dado por:

$$P_{br}^d = K_{br}^{-1} P_1^d$$

$$P_{1r}^d = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad P_{2r}^d = \begin{bmatrix} -1.723 \\ 0.142 \\ -262.75 \\ -1.676 \\ -0.142 \\ -255.55 \end{bmatrix}$$

El vector de desplazamientos para los nodos interiores:

$$D_{1r}^d = K_{11}^{-1} P_{1r}^d$$

$$D_{1r}^d = \begin{bmatrix} 8.63 \times 10^{-2} \\ -12.05 \times 10^{-3} \\ 2.80 \times 10^{-5} \\ 8.38 \times 10^{-2} \\ 12.05 \times 10^{-5} \\ 2.65 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

## ANALISIS DE LA SUBESTRUCTURA II

Ma matriz de rigideces para esta subestructura está dada por:

$$K = \begin{bmatrix} (K'_{11})_5 & 0 & (K'_{12})_5 & 0 \\ 0 & (K'_{11})_6 & 0 & (K'_{12})_6 \\ (K'_{21})_5 & 0 & (K'_{22})_5 + (K'_{11})_9 & (K'_{12})_9 \\ 0 & (K'_{21})_6 & (K'_{21})_9 & (K'_{22})_6 + (K'_{22})_9 \end{bmatrix}$$

Valuando las submatrices, sustituyendo y particionando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0.21 & 0 & -31.5 & 0 & 0 & 0 & -21.0 & 0 & -31.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -31.5 & 0 & 6296.4 & 0 & 0 & 0 & 31.5 & 0 & 3148.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.21 & 0 & -31.5 & 0 & 0 & 0 & -0.21 & 0 & -31.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -31.5 & 0 & 6296.4 & 0 & 0 & 0 & 31.5 & 0 & 3148.2 \\ --- & --- & -0.--- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- & --- \\ -21.0 & 0 & 31.5 & 0 & 0 & 0 & 10.3 & 0 & 31.5 & -10.1 & 0 & 0 \\ 0 & -11.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.9 & 46.3 & 0 & -0.13 & 46.3 \\ -31.5 & 0 & 3148.2 & 0 & 0 & 0 & 31.5 & 46.3 & 27884.2 & 0 & -46.3 & 1079.4 \\ 0 & 0 & 0 & -0.21 & 0 & 31.5 & -10.1 & 0 & 0 & 10.3 & 0 & 31.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11.8 & 0 & 0 & -0.13 & -46.3 & 0 & 11.9 & -46.3 \\ 0 & 0 & 0 & -31.5 & 0 & 3148.2 & 0 & 46.3 & 10794 & 31.5 & -46.3 & 27884.2 \end{bmatrix}$$

La matriz condensada a los grados de libertad resulta:

$$K_{brr} = K_{bb} - K_{b1} K^{-1}_{11} K_{1b}$$

$$K_{brr} = \begin{bmatrix} 7.58 & -0.0103 & -1279.11 & -7.58 & +0.0103 & 1279.12 \\ -0.0103 & 0.59 & 214.39 & -0.0025 & -0.602 & 214.39 \\ -1279.11 & 214.39 & 359588.9 & 1277.38 & -215.22 & -209481.9 \\ -7.58 & -0.0025 & 1277.38 & 7.58 & 0.0103 & -1279.12 \\ 0.103 & -0.602 & -215.22 & 0.0103 & 0.59 & -214.39 \\ 1279.12 & 214.39 & -209481.9 & -1279.12 & -214.39 & 359588.9 \end{bmatrix}$$

El vector de empotramiento para esta subestructura, esta dado por:

$$P_{brr}^3 = K_{b1} K^{-1}_{11} P_1^a$$

$$P_{1...}^a = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{2...}^a = \begin{bmatrix} -3.53 \\ -1.43 \\ 554.19 \\ -3.47 \\ 1.43 \\ 545.37 \end{bmatrix}$$

El vector de desplazamientos en los nodos interiores está dado por:

$$D_{1...}^a = K_{1...}^{-1} P_{1...}^a$$

$$D_{1...}^a = \begin{bmatrix} 19.21 \times 10^{-2} \\ 12.10 \times 10^{-4} \\ -16.11 \times 10^{-5} \\ 18.87 \times 10^{-2} \\ -12.10 \times 10^{-4} \\ 15.47 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

## RELAJACION DE FRONTERAS

El acoplamiento de las subestructuras se hace como ya se mencionó con los elementos equivalentes, a través de la ecuación fuerza-desplazamiento

$$P_b^a = K_b D_b$$

donde

$$P_b^a = P_b - P_{2...}^a - P_{2...}^a$$

el vector de cargas  $P_b$  aplicado directamente en las fronteras resulta

$$P_b = \begin{bmatrix} P_{Cx} \\ P_{Cy} \\ M_{Cz} \\ P_{Dx} \\ P_{Dy} \\ M_{Dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo para obtener  $P_D^3$

$$P_D^3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.723 & -3.53 & 11.253 \\ 0.142 & -1.43 & 1.288 \\ -262.75 & 554.19 & -291.44 \\ -1.676 & -3.47 & 5.146 \\ -0.142 & 1.43 & -1.288 \\ -255.55 & 545.37 & -289.82 \end{bmatrix} =$$

La matriz de rigideces en las fronteras se obtiene para este caso particular sumando las dos submatrices condensadas

$$K_D = K_{D1} + K_{D2}$$

sustituyendo directamente en la ecuación fuerza desplazamiento se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 11.253 \\ 1.288 \\ -291.44 \\ 5.146 \\ -1.288 \\ -289.82 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1030.17 & -1.31 & 474.76 & -1025.1 & 1.31 & 368.03 \\ -1.31 & 520.86 & 4736.45 & -1.34 & -14.85 & 4736.45 \\ 474.76 & 4736.45 & 2953430 & 366.09 & -4737.4 & 725152 \\ -1025.1 & -1.34 & 366.09 & 1030.17 & 1.31 & 474.75 \\ 1.31 & -14.85 & -4737.4 & 1.31 & 520.86 & -4736.45 \\ 368.03 & 4736.45 & 725152 & 474.75 & -4736.45 & 2953418 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Cx} \\ D_{Cy} \\ D_{Cz} \\ D_{Dz} \\ D_{Dy} \\ D_{Dx} \end{bmatrix}$$

Solucionando el sistema se obtienen los desplazamientos correspondientes a los grados de libertad en las fronteras, así:

$$D_D = \begin{bmatrix} D_{Cx} \\ D_{Cy} \\ D_{Cz} \\ D_{Dz} \\ D_{Dy} \\ D_{Dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.716 \\ 0.020 \\ -5.2 \times 10^{-4} \\ 1.713 \\ -0.020 \\ -5.2 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos  $D_{Dz}$  y  $D_{Dx}$  corresponden a los desplazamientos angulares alrededor de "z" en los nodos "D" y "C" respectivamente.

## CORRECCION DE LOS DESPLAZAMIENTOS EN LOS NODOS INTERIORES

Esta corrección para la subestructura I esta dada por

$$D_{iI}^a = -(K_{iI}^{-1} K_{iIb})_{iI} D_{bI}$$

en esta ecuación todos los términos corresponden a la subestructura I, por lo cual se les ha asignado el subíndice I. Después de efectuar operaciones, resulta:

$$D_{iI}^a = \begin{bmatrix} 1.110 \\ 0.015 \\ -9.0 \times 10^{-4} \\ 1.110 \\ -0.015 \\ -9.0 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

en igual forma para la subestructura II

$$D_{iII}^b = -(K_{iII}^{-1} K_{iIIb})_{iII} D_{bII}$$

sustituyendo

$$D_{iII}^b = \begin{bmatrix} 1.805 \\ 0.020 \\ -7.72 \times 10^{-5} \\ 1.805 \\ -0.020 \\ -8.27 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

## DESPLAZAMIENTOS TOTALES EN NODOS INTERIORES

Estos desplazamientos se obtiene sumando los desplazamientos generados directamente por las cargas  $P_i^a$  más los desplazamientos corrección así:

$$D_i = D_i^a + D_i^b$$

para la subestructura I

$$D_{iI} = D_{iI}^a + D_{iI}^b$$

sustituyendo:

$$D_{II} = \begin{bmatrix} D_{Ex} \\ D_{Ey} \\ D_{Ez} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \\ D_{Fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.63 \times 10^{-2} \\ -12.05 \times 10^{-3} \\ 2.80 \times 10^{-5} \\ 8.38 \times 10^{-2} \\ 12.05 \times 10^{-3} \\ 2.65 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.110 \\ 0.015 \\ -9.0 \times 10^{-4} \\ 1.110 \\ -0.015 \\ -9.0 \times 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.193 \\ 0.015 \\ -8.72 \times 10^{-4} \\ 1.194 \\ -0.015 \\ -8.69 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

en forma similar para la subestructura II

$$D_{III} = D_{III}^* \cdot D_{III}^{\#}$$

sustituyendo:

$$D_{III} = \begin{bmatrix} D_{Ax} \\ D_{Ay} \\ D_{Az} \\ D_{Bx} \\ D_{By} \\ D_{Bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.21 \times 10^{-2} \\ 12.10 \times 10^{-4} \\ -16.11 \times 10^{-5} \\ 18.87 \times 10^{-2} \\ -12.10 \times 10^{-4} \\ 15.47 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.805 \\ 0.020 \\ -7.72 \times 10^{-5} \\ 1.805 \\ -0.020 \\ -8.27 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.997 \\ 0.216 \\ -2.38 \times 10^{-4} \\ 1.994 \\ -0.022 \\ -2.37 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Las unidades utilizadas en los ejemplos fueron toneladas para las cargas y centímetros como unidad de longitud, por lo que los desplazamientos lineales resultan en centímetros y los angulares en radianes.

Conocidos los desplazamientos en todos los nodos de la estructura, los elementos mecánicos se determinan aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento de la barra como se hizo cuando se aplicó el método directo de las rigideces.

## 5.1 EQFUERZOS.

Considerese un cuerpo sólido homogéneo sometido a un sistema de cargas que lo mantienen en equilibrio. Si el cuerpo se corta por un plano  $N$  como se indica en la figura 5.1.a

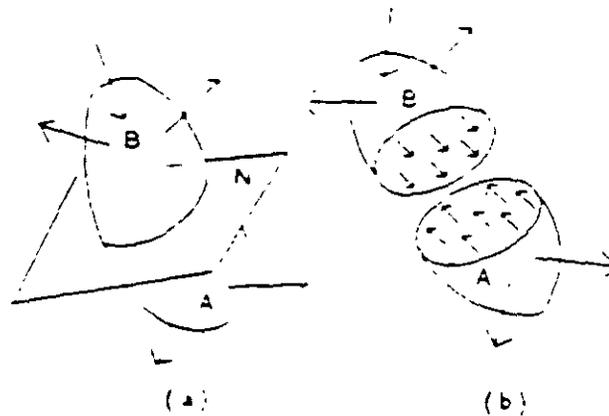


Figura 5.1

El cuerpo se ha dividido en dos partes, parte A y parte B, por el plano de corte  $N$ . A la acción que ejerce una parte sobre la otra en la superficie de corte se les llama fuerzas de interacción. Las fuerzas de interacción en la parte A equivalen a la resultante de las cargas que obran en la parte B y viceversa. Si se retira la parte B el sistema de fuerzas de interacción aplicadas a la parte A están en desequilibrio, sin embargo la parte A está en equilibrio, es decir las fuerzas de interacción son equilibradas por el sistema de fuerzas exteriores  $P_1, P_2, P_n$  que actúan sobre esta parte del cuerpo.

### 5.1.1 ESFUERZO EN UN PUNTO.

El esfuerzo medio o promedio es el cociente de dividir a la fuerza  $F$  entre el área

internos ocasionados por  $F$ , pero no precisa la forma en que están distribuidos en la sección. El esfuerzo promedio es más explícito en cuanto a la distribución en tanto que el área de la sección sea más pequeña

Considerese un cuerpo por el cual se ha hecho pasar un plano de corte  $N$ , el cual está definido por la normal exterior al mismo. Sea  $P$  un punto cualquiera de la sección en estudio,  $\Delta A$  un elemento de área que lo contiene y  $\Delta F$  sea la resultante de las fuerzas que obran en el elemento de área. Si se reduce el contorno de  $\Delta A$  alrededor del punto  $P$ , entonces el área  $\Delta A$  y la resultante de cargas  $\Delta F$  en dicha área disminuirán y tenderán a cero. Al límite

$$\frac{\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta F}{\Delta A}$$

se le denomina esfuerzo en el punto  $P$  de superficie situado en el plano de corte  $N$

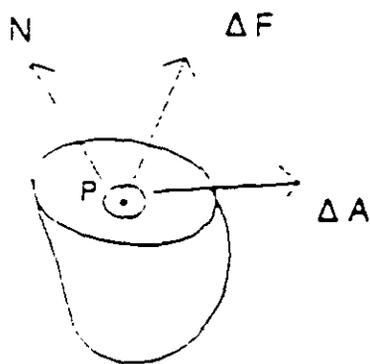


Figura 5.2

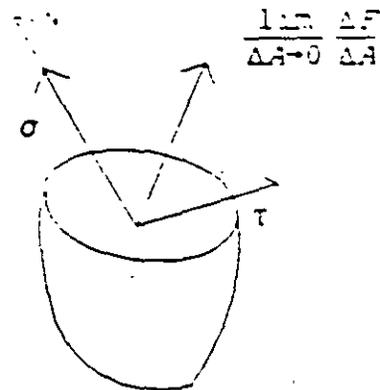


Figura 5.3

Este esfuerzo es un vector y es susceptible de descomponerse en dos, uno perpendicular al plano  $N$  y otro contenido en el mismo. Estas componentes reciben los nombres de esfuerzo normal  $\sigma$  y esfuerzo tangencial  $\tau$  en el punto respectivamente. Así

$$\sigma = \frac{\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta N}{\Delta A} ; \quad \tau = \frac{\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta V}{\Delta A}$$

en donde  $\Delta N$  y  $\Delta V$  son las componentes normal y tangencial de la fuerza  $\Delta F$  correspondientes al elemento de área  $\Delta A$ , figura 5.3

Para este trabajo los planos de corte se harán de tal manera que sean perpendiculares a uno de los ejes coordenados X, Y o Z.

Al esfuerzo normal asociado a un plano cuya normal es N, se denotará como  $\sigma_N$  y al esfuerzo tangencial como  $\tau_N$ ; sin embargo este último se puede descomponer en dos de acuerdo a los ejes que forman el plano por lo cual se denotará  $\tau_{xy}$ , donde el primer índice indica el plano al cual pertenece y el segundo índice indica la dirección del mismo. Figura 5.4.

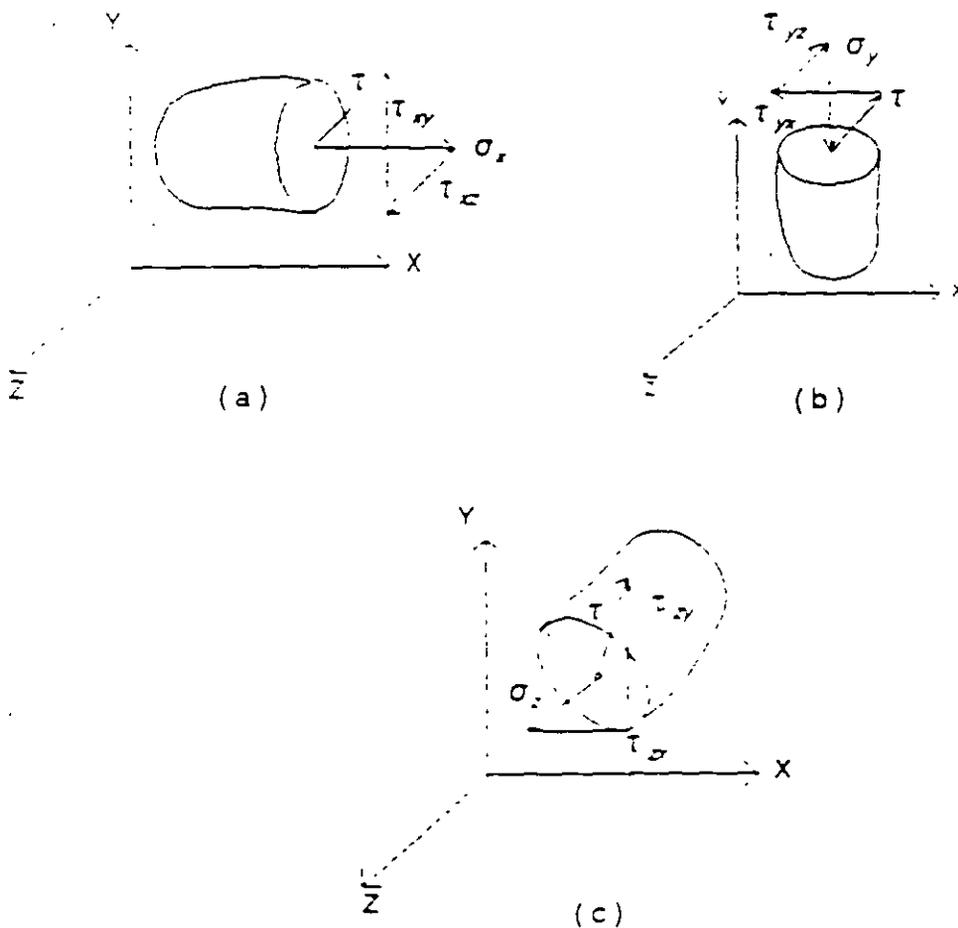


Figura 5.4

donde  $\sigma_i$  es el esfuerzo normal en el plano  $i$  y  $\tau_{ij}$  esfuerzo tangencial plano  $i$ , dirección  $j$

### 5.1.2 ESFUERZOS EN PLANOS PARALELOS.

Separaremos de un cuerpo sólido un elemento infinitamente pequeño en forma de paralelepípedo cuyo volumen es  $dx dy dz$ , el cual se encuentra en equilibrio, figura 5.5

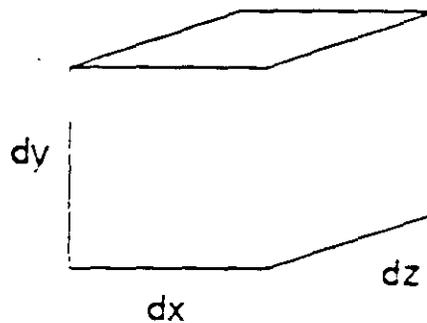


Figura 5.5

La acción que ejercen las partes subyacentes del cuerpo sobre el elemento aislado, los reemplazamos por fuerzas y los esfuerzos que generan, dichas fuerzas las descomponemos en tres componentes en cada cara, resultando así  $6 \times 3 = 18$  esfuerzos. Además se considera que en el cuerpo existen las llamadas fuerzas másicas (fuerzas de cuerpo que son debidas a la gravedad), también estas fuerzas se descomponen en 3 componentes X, Y, y Z figura 5.6

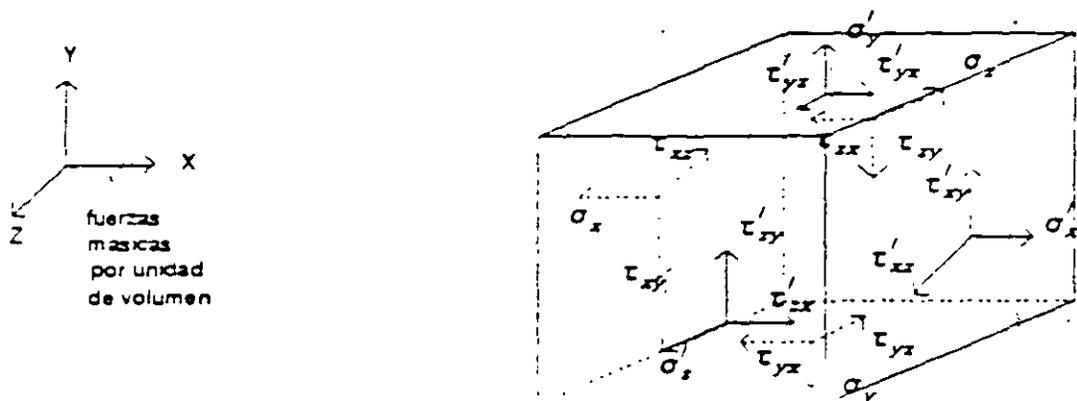
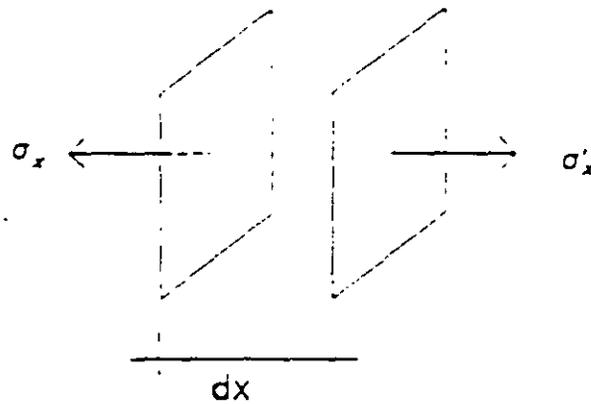


Figura 5.6

Aislando dos planos paralelos:



$$\sigma'_x = \sigma_x - d\sigma_x$$

sea  $\phi$  función de  $(x,y,z)$  entonces  $\phi = \phi(x,y,z)$ . se sabe que la diferencial de  $\phi$  esta dada por

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

si la función  $\sigma_x$  es igual a la función  $\phi$  y se considera que  $\sigma_x$  es función única y exclusivamente de la variable "x", entonces

$$d\sigma_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

por lo que.

$$\sigma'_x = \sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

en forma análoga para los otros esfuerzos

$$\sigma'_y = \sigma_y - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$$

$$\sigma'_z = \sigma_z - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$$

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$$

$$\tau'_{xz} = \tau_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$$

$$\tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

$$\tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$$

$$\tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$$

$$\tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz$$

representando estos esfuerzos en el cubo elemental se obtiene la figura 5.7

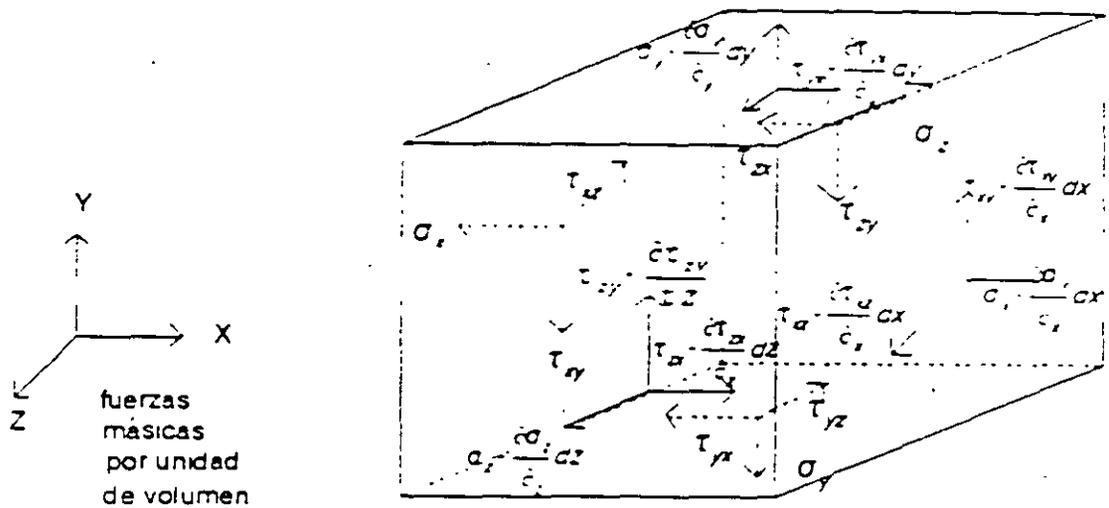


Figura 5.7

## 5.2 ECUACIONES DE EQUILIBRIO.

Considerese que las fuerzas de cuerpo actúan en el centro de gravedad del paralelepípedo figura 5.7 y que se encuentra en equilibrio; entonces deben verificarse las 6 ecuaciones de equilibrio estático.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 & \Sigma M_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 & \Sigma M_y &= 0 \end{aligned}$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

Aplicando la ecuación de equilibrio  $\Sigma F_x = 0$  resulta:

$$-\sigma_{xx} d_x d_z + (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d_x) d_y d_z - \tau_{yx} d_x d_z + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} d_y) d_x d_z - \tau_{xx} d_x d_z - (\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} d_z) d_y d_z - X d_x d_y d_z = 0$$

desarrollando

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d_x d_y d_z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} d_x d_y d_z - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} d_x d_y d_z - X d_x d_y d_z = 0$$

dividiendo entre dx dy dz

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} - X = 0$$

En forma similar para las otras dos ecuaciones de equilibrio  $\Sigma F_y = 0$  y  $\Sigma F_z = 0$  se obtiene respectivamente

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - Z = 0$$

A estas tres ecuaciones se les llama ecuaciones de Navier o de equilibrio interno

### 5.3 ESFUERZOS EN PLANOS PERPENDICULARES.

Aplicando las últimas tres ecuaciones de equilibrio ( suma de momentos igual a cero ) se puede conocer la relación de los esfuerzos en planos perpendiculares. Así aplicando  $\Sigma M_z = 0$  de la figura 5.8

$$(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} d_y) d_x d_x \frac{d_y}{2} - (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} d_x) d_x d_y \frac{d_x}{2} - \tau_{yx} d_x d_x \frac{d_y}{2} - \tau_{xy} d_x d_y \frac{d_x}{2} = 0$$

reordenando términos y dividiendo entre dx dy dz

$$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx = 0$$

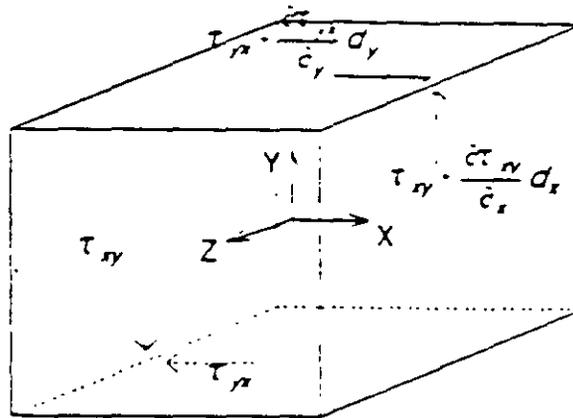


Figura 5.8

aplicando límites cuando  $dx$  y  $dy$  tienden a cero, resulta finalmente:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

En forma similar aplicando  $\sum M_y = 0$  y  $\sum M_x = 0$  se obtiene

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

De lo anterior los 18 esfuerzos incógnitas figura 5.6 se han reducido a seis que son:  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yz}$  y  $\sigma_z$

Agrupando los esfuerzos de 3 caras unicamente obtenemos lo que se conoce como tensor de esfuerzos

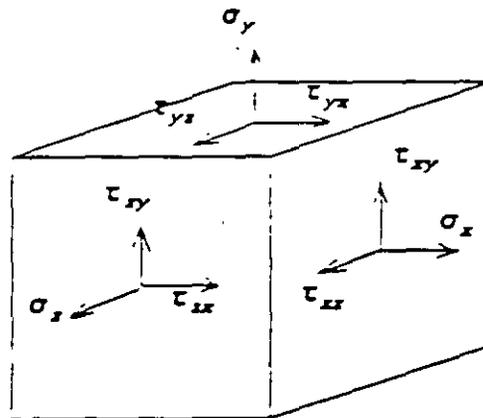


Figura 5.9

$$\tau_x = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad \tau_y = \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad \tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

$$[\sigma] = [(\tau_x) \ (\tau_y) \ (\tau_z)]$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

a esta agrupación se le llama tensor de esfuerzos.

#### 5.4 ESFUERZOS EN PLANOS OBLICUOS.

Para conocer los esfuerzos que actúan sobre las caras oblicuas pertenecientes a la superficie, se requerirá establecer una relación de los esfuerzos que actúan en las tres áreas elementales paralelas a los planos coordenados, como se muestra en la figura 5.10

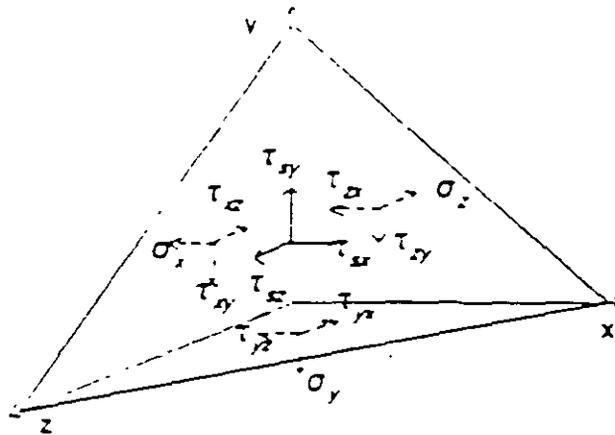


Figura 5.10

por equilibrio

$$\Sigma F_x = 0$$

$$0 = \tau_{sx} ds - \sigma_x \frac{dzdy}{2} - \tau_{yx} \frac{dx dz}{2} - \tau_{zx} \frac{dx dy}{2}$$

pero:

$$\frac{dzdy}{2} = ds \cos(s, x)$$

$$\frac{dx dz}{2} = ds \cos(s, y)$$

$$\frac{dx dy}{2} = ds \cos(s, z)$$

$$0 = \tau_{sx} ds - \sigma_x ds \cos(s, x) - \tau_{yx} ds \cos(s, y) - \tau_{zx} ds \cos(s, z)$$

de donde:

$$\tau_{sx} = \sigma_x \cos(s, x) - \tau_{yx} \cos(s, y) - \tau_{zx} \cos(s, z)$$

Aplicando las otras dos ecuaciones de equilibrio  $\Sigma F_y = 0$  y  $\Sigma F_z = 0$  se obtiene respectivamente:

$$\tau_{sy} = \sigma_y \cos(s, y) - \tau_{xy} \cos(s, x) - \tau_{zy} \cos(s, z)$$

$$\tau_{sz} = \sigma_z \cos(s, z) - \tau_{xz} \cos(s, x) - \tau_{yz} \cos(s, y)$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tau_{sx} \\ \tau_{sy} \\ \tau_{sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(s, x) \\ \cos(s, y) \\ \cos(s, z) \end{bmatrix}$$

a este sistema de ecuaciones se les llama ecuaciones de superficie o ecuaciones de Cauchy.

## 5.5 VARIACION DEL ESFUERZO CON LA VARIACION DEL ELEMENTO.

Considerese un cuerpo sólido sometido a un sistema de cargas que se encuentra en equilibrio por el cual se trazan dos planos de corte el a-a y el b-b como se muestra en la figura 5.11

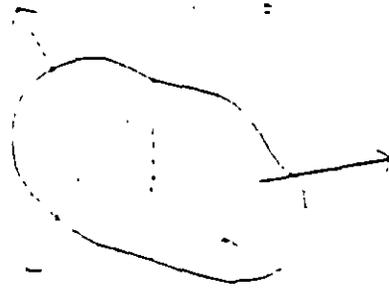


Figura 5.11

El plano de corte se traza perpendicularmente a la dirección de la resultante R, el cual se representa en la figura 5.12

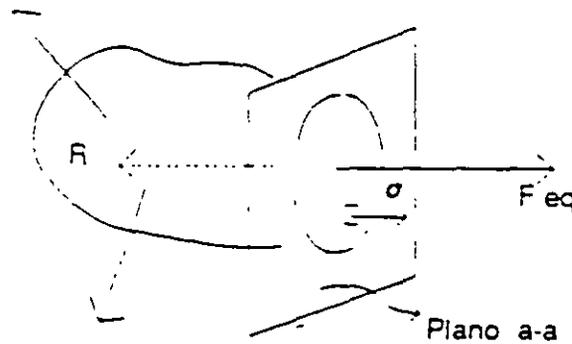


Figura 5.12

Cualquier elemento o punto situado en el plano de corte estará sometido únicamente a esfuerzo axial, mientras que si trazamos un plano de corte inclinado respecto de la dirección de la resultante, cualquier elemento situado en dicho plano estará sometido a esfuerzo normal y tangencial como se puede ver en la figura 5.13.

si se particulariza a un estado plano de esfuerzos donde únicamente se tengan  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  como los esfuerzos en un punto, es decir  $\sigma_z = 0$  y  $\tau_{xz} = 0$  para  $i = x, y$ ; como se ilustra en la figura 5.14

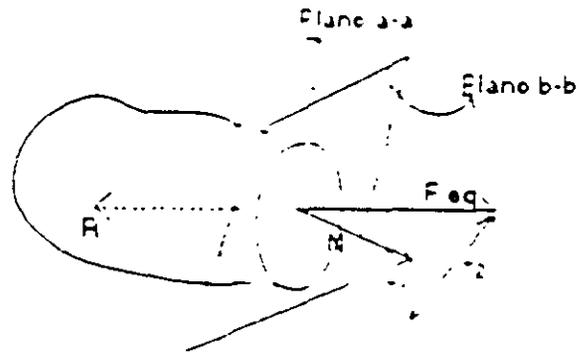


Figura 5.13

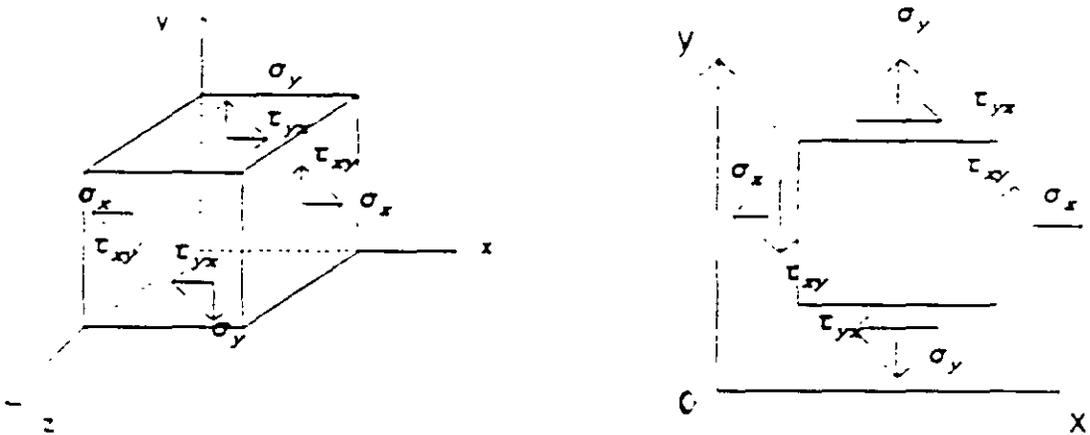


Figura 5.14

Los esfuerzos que actúan sobre cualquier plano "N" que contenga al eje Z y que está inclinado respecto a los ejes "X" e "Y" se representan en la figura 5.15

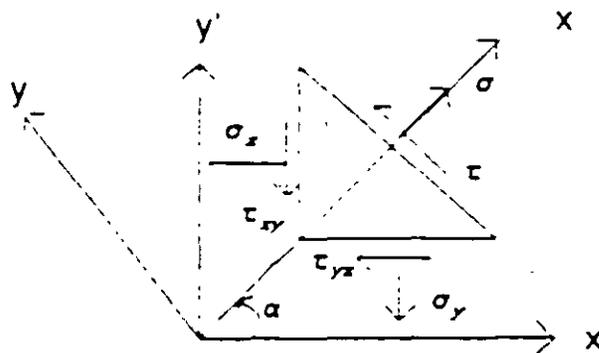


Figura 5.15

Si el área de la cara inclinada es una cantidad  $A$ , las áreas de las otras caras serán  $A \cos \alpha$  y  $A \sin \alpha$  para los planos  $x$  e  $y$  respectivamente, como se indica en la figura 5.16

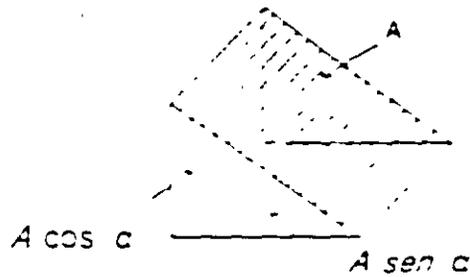


Figura 5.16

para aplicar el equilibrio dibujamos el diagrama de cuerpo libre en la figura 5.17

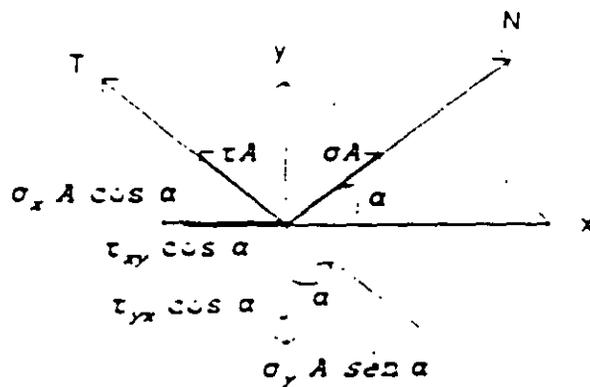


Figura 5.17

Aplicando  $\Sigma F_n = 0$

$$0 = \sigma_n - \sigma_x A \cos \alpha \cos \alpha - \tau_{xy} A \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_y A \sin \alpha \sin \alpha + \tau_{yx} A \cos \alpha \sin \alpha$$

de donde:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

sustituyendo

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sigma = \sigma_x \left( \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) - \sigma_y \left( \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) + 2\tau_{xy} \left( \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$$

Simplificando términos:

$$\sigma = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad 5.1$$

Aplicando  $\Sigma F_t = 0$

$$0 = \tau A - \sigma_x A \cos \alpha \sin \alpha - \tau_{xy} A \sin^2 \alpha - \sigma_y A \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} A \cos^2 \alpha$$

de donde:

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

sustituyendo las identidades trigonométricas anteriores:

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Las ecuaciones 5.1 y 5.2 representan el esfuerzo normal y cortante que están en función de dos esfuerzos en planos perpendiculares en dirección "X" e "Y"

## 5.6 ESFUERZOS PRINCIPALES.

Con frecuencia el interés se centra en la determinación del máximo esfuerzo y los planos donde se presentan tales esfuerzos. En general se determinan los planos donde se presentan los esfuerzos máximos y mínimos tanto normales como tangenciales, lo cual se logra igualando con cero las derivadas con respecto al ángulo de inclinación de las ecuaciones 5.1 y 5.2. Así para localizar el plano de un esfuerzo normal máximo o mínimo se deriva la ecuación 5.1 respecto de  $\alpha$  y se iguala con cero

$$\frac{d\sigma_x}{d\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} (2) \sin \alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

de donde

$$\tan 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

a partir de esta ecuación se puede encontrar dos direcciones perpendiculares entre sí.

para las cuales el esfuerzo tangencial es nulo. Estas direcciones se llaman direcciones principales y los esfuerzos normales corresponden a los esfuerzos principales.

La magnitud de los esfuerzos principales se obtiene sustituyendo los valores de las funciones  $\text{sen } 2\alpha$  y  $\text{cos } 2\alpha$  correspondientes en la ecuación 5.1. Si

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

gráficamente:

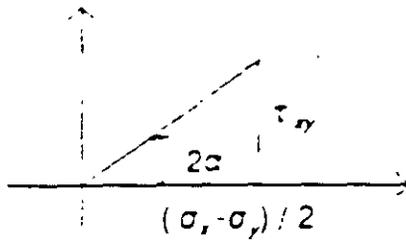


Figura 5.18

de donde.

$$\text{sen } 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\text{cos } 2\alpha = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}}$$

sustituyendo en la ecuación 5.1 se tiene

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

## 5.7 ESFUERZOS CORTANTES MAXIMOS.

De manera similar al estudio realizado antes para los esfuerzos normales se

procede con el esfuerzo cortante. Así para encontrar los planos en los que actúan los esfuerzos cortantes máximo o mínimo se deriva la ecuación 5.2 con respecto a  $\alpha$  y se iguala con cero. Después de efectuada esta operación se tiene:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{(\sigma_x - \sigma_y) / 2}{\tau_{xy}}$$

donde  $\alpha$  define el plano donde el esfuerzo cortante es máximo o mínimo

Haciendo la sustitución en la ecuación 5.2 de las funciones  $\cos 2\alpha$  y  $\sin 2\alpha$  determinadas en forma análoga a la de la figura 5.18 resulta:

$$\tau = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Esta ecuación da los esfuerzos cortantes máximo y mínimo. Se observa que el esfuerzo cortante máximo difiere únicamente en signo del esfuerzo cortante mínimo.

El sentido definido de esfuerzo cortante siempre se puede determinar por sustitución directa de  $\alpha$  en la ecuación 5.2 (correspondiente al plano de máximo o mínimo esfuerzo cortante).

## 5.8 DEFORMACIONES.

Considérese un cuerpo elástico, homogéneo e isótropo, sujeto de tal forma que no tiene movimiento de cuerpo rígido. Entonces todo corrimiento de sus puntos será originado por sus deformaciones. Así el punto "p" después de deformarse el cuerpo toma la posición  $p'$ , gráficamente se tiene:

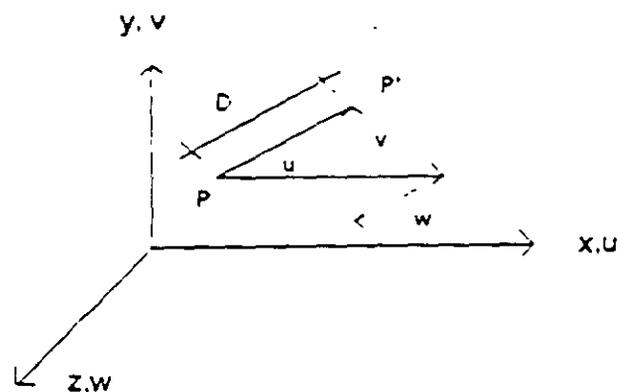


Figura 5.19

donde  $u, v$  y  $w$  son las proyecciones del desplazamiento  $pp'$  sobre los ejes coordenados

Si se considera un elemento diferencial del cuerpo con dimensiones  $dx, dy, dz$  al deformarse, sus longitudes varían y se deforman los ángulos formados por sus caras, que inicialmente son rectas.

Se define como deformación lineal unitaria en un punto y en la dirección de  $P$  a  $P'$  como:

$$\epsilon = \frac{\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \Delta \bar{l}}{\Delta l}$$

Por facilidad considerese solamente una cara del cuerpo para determinar las deformaciones (estado plano de deformaciones), figura 5.20

Si el cuerpo no se deforma, todos los puntos se desplazan,  $u$  en la dirección  $x$  y  $v$  en la dirección  $y$ ; pero como el cuerpo se deforma, entonces los puntos se desplazan  $u + du$  y  $v + dv$  respecto a cada eje

Cuando la variación es respecto al eje  $x$ , entonces:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad \text{y} \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

si la variación es respecto al eje  $y$  entonces

$$du = \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad ; \quad dv = \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

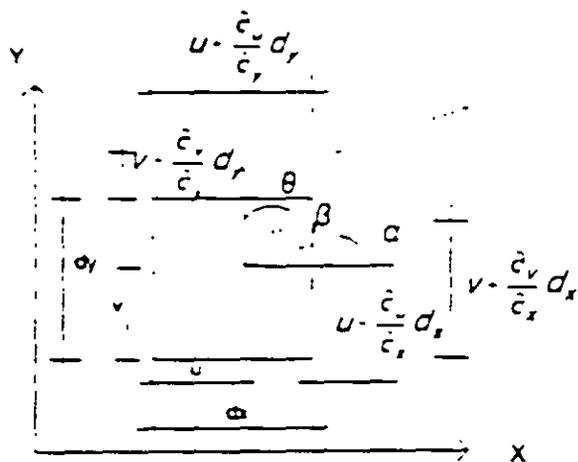


Figura 5.20

La deformación lineal unitaria en dirección X, será:

$$\epsilon_x = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

La deformación lineal unitaria en dirección Y será:

$$\epsilon_y = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy) - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Generalizando a un espacio tridimensional:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

La deformación angular se denota como  $\gamma_{xy}$  e indica la distorsión del cuerpo en el plano Z ( formado por los ejes x e y ).

De la figura 5.20 se tiene

$$\gamma_{xy} = \alpha + \theta = \frac{\pi}{2} - \beta$$

para ángulos pequeños la tangente del ángulo es igual al ángulo en radianes, así:

$$\alpha = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx) - v}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$$

de donde,

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$$

y

$$\theta = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy) - u}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}}$$

de donde:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

así se tiene que:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

En general para un cuerpo en el espacio tridimensional se tiene lo siguiente

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

Resumiendo se tiene

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

A estas seis expresiones se les conoce como relaciones de Cauchy

## 5.9 ECUACIONES DE CONTINUIDAD.

Estas ecuaciones relacionan las deformaciones lineales con las angulares y se obtienen de las relaciones de Cauchy derivando las deformaciones angulares como se indica

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2 \partial z}$$

Las derivadas parciales terceras de u, v y w se obtienen derivando de las relaciones de Cauchy las deformaciones lineales de tal manera que se obtenga el

término deseado, así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} & ; & & \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial y} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z^2} & ; & & \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z^2} & ; & & \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2 \partial z} \end{aligned}$$

Sustituyendo en las primeras expresiones anteriores se obtienen las primeras 3 ecuaciones de compatibilidad, así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} \end{aligned} \quad 5.3 a$$

Derivando nuevamente de las relaciones de Couchy las deformaciones angulares como se indica en seguida:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

multiplicando por -1 la primera de estas ecuaciones y sumandola con las otras dos se obtiene:

$$-\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{2 \partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

derivando parcialmente respecto de z toda la ecuación se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial^2 v_{xy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{yz}}{\partial y^2} \right) = \frac{2\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$$

de las relaciones de Cauchy se tiene que:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

derivando parcialmente respecto de "x" e "y" resulta:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$$

sustituyendo se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 v_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_{xy}}{\partial z^2} \right) = \frac{2\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}$$

En forma similar se obtienen las otras 2 ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial^2 v_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_{xy}}{\partial z^2} \right) = \frac{2\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 v_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_{xy}}{\partial z^2} \right) = \frac{2\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} \quad 5.3.b$$

Las ecuaciones 5.3.a y 5.3.b constituyen las seis ecuaciones de continuidad o compatibilidad que relacionan las deformaciones angulares con las deformaciones lineales.

## 5.10 RELACION ESFUERZO-DEFORMACION.

La solución de los problemas físicos de la teoría de elasticidad referente a las deformaciones que ocurren en un cuerpo elástico bajo la acción de fuerzas exteriores aplicadas a él no será posible mientras que los esfuerzos y deformaciones no estén relacionados por una ley física (Ley de Hooke).

Para deformaciones pequeñas la forma lineal es la más sencilla y más racional por lo tanto, se puede pensar que los esfuerzos son función de las deformaciones, es decir:

$$\sigma_x = f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$\sigma_y = f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$\sigma_z = f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$\tau_{xy} = f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$\tau_{yz} = f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$\tau_{zx} = f(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

por lo que se puede escribir:

$$\sigma_x = a_{11}\epsilon_x + a_{12}\epsilon_y + a_{13}\epsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{yz} + a_{16}\gamma_{zx}$$

$$\sigma_y = a_{21}\epsilon_x + a_{22}\epsilon_y + a_{23}\epsilon_z + a_{24}\gamma_{xy} + a_{25}\gamma_{yz} + a_{26}\gamma_{zx}$$

$$\tau_{zx} = a_{61}\epsilon_x + a_{62}\epsilon_y + a_{63}\epsilon_z + a_{64}\gamma_{xy} + a_{65}\gamma_{yz} + a_{66}\gamma_{zx}$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad 5.4$$

en forma reducida:

$$\{ \sigma \} = [ E ] \{ \epsilon \} \quad 5.4 a$$

o bien

$$\{ \epsilon \} = [ E ]^{-1} \{ \sigma \} \quad 5.5$$

Para cuerpos elásticos isotrópicos las ecuaciones anteriores adquieren la forma más simple, se puede deducir a partir de la ley de Hooke aplicada a las barras elásticas sometidas a tensión o compresión.

En la figura 5.21 se muestra la gráfica del comportamiento del acero, se observa claramente dos zonas bien definidas, la elástica (lineal) y la no elástica (no lineal) el punto A marca el punto de proporcionalidad

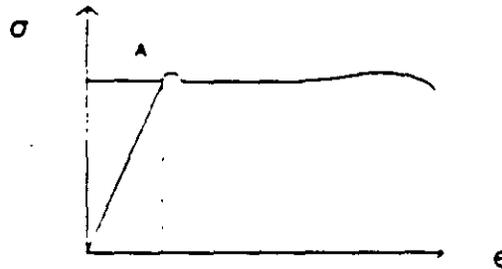


Figura 5.21

Esta gráfica es diferente para los distintos materiales y depende de la composición química y estructural del material

En casi todos los materiales, el alargamiento longitudinal cuando hay solamente tensión, es acompañado por deformaciones transversales, siendo estas deformaciones proporcionales y de sentido contrario al alargamiento, como se muestra en la figura 5.22

La deformación transversal en función de la deformación longitudinal se puede escribir como:

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\mu \epsilon_x$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de proporcionalidad y se conoce como coeficiente de Poisson. Este coeficiente es constante para cada material, pero diferente para los distintos materiales.

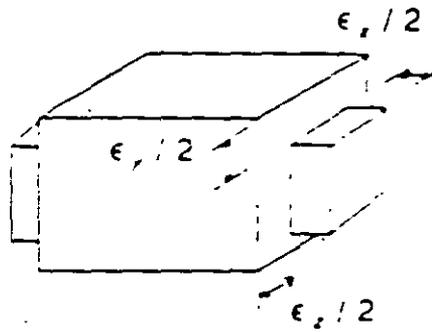


Figura 5.22

Además de las consideraciones hechas anteriormente se admitirá la proposición de que en un material elástico, homogéneo e isotropo el esfuerzo normal no genera distorsión angular y el esfuerzo cortante no genera alargamiento. Sobre esta base se determinarán las relaciones entre esfuerzo y deformación.

Considérese un paralelepípedo de aristas iguales a la unidad, sometido a la acción de fuerzas normales como se muestra en la figura 5.23.

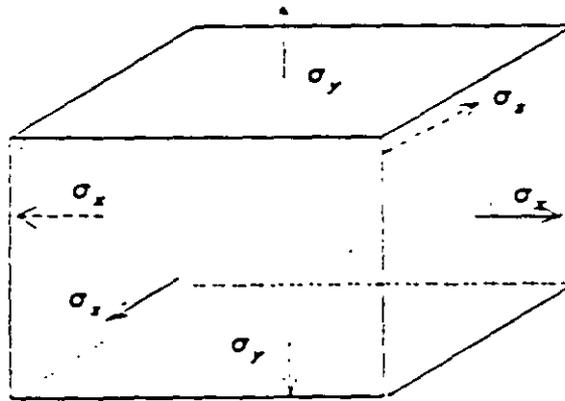


Figura 5.23

Si se considera que solamente actúa el esfuerzo  $\sigma_x$ , es decir  $\sigma_x \neq 0$  y  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ , la deformación lineal unitaria por este esfuerzo es

$$\epsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

Bajo la acción del esfuerzo  $\sigma_y$ , es decir  $\sigma_y \neq 0$  y  $\sigma_x = \sigma_z = 0$ , la deformación en la dirección x será:

$$\epsilon_x'' = -\mu \frac{\sigma_y}{E}$$

Análogamente para  $\sigma_x \neq 0$  y  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ , la deformación en la dirección x será

$$\epsilon_x''' = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

Por el principio de superposición de causas y efectos la deformación total a lo largo del eje x cuando actúan los tres esfuerzos simultáneamente es:

$$\epsilon_x = \epsilon_x' + \epsilon_x'' + \epsilon_x'''$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E}$$

expresión que se puede escribir:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_x)]$$

En forma similar para lograr la deformación lineal unitaria a lo largo de los ejes "y" y "z" se tiene respectivamente:

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

La proporcionalidad entre los esfuerzos tangenciales y las distorsiones angulares que se desarrollan en las caras del paralelepípedo están dadas por:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

donde G es el módulo de elasticidad al corte

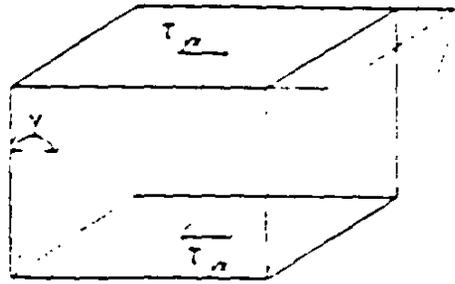


Figura 5.24

Arreglando en forma matricial las seis ecuaciones anteriores.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

A este arreglo se le conoce como la ecuación generalizada de Hooke.

Considerando la relación entre los módulos de elasticidad axial y al corte que está dada por

$$G = \frac{E}{2(1-\mu)}$$

la ecuación generalizada de Hooke se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

De acuerdo a la ecuación 5.5 la ecuación 5.6 se puede escribir como

$$\{\epsilon\} = [E]^{-1} \{\sigma\}$$

Al considerar la relación inversa se tiene.

$$\begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{matrix} = \frac{E}{(1-\mu)(1-2\mu)} \begin{matrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-2\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-2\mu) \end{matrix} \begin{matrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{matrix}$$

que de acuerdo a la ecuación 5.4 a en forma compacta se puede escribir

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\}$$

# FUNDAMENTOS DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS.

## 6

### 6.1 DESCRIPCION GENERAL Y ALCANCE DEL METODO.

La formulación del método de los elementos finitos data de 1943 aplicado a problemas de torsión en vigas, pero no es sino hasta 1960 cuando tuvo su auge, esto fue posible sobre todo a los progresos en el campo de la computación, ya que como en el método de las rigideces, el planteamiento del método de los elementos finitos conduce a un sistema de ecuaciones simultáneas, que en general resultan relativamente grandes por lo cual para su manejo y solución se requiere de las computadoras.

El método de los elementos finitos se desarrolló como una extensión de las técnicas del análisis estructural matricial.

Se puede pensar que el método de los elementos finitos es una generalización del método de las rigideces por lo que su enfoque es más amplio y se puede aplicar a casi todas las áreas de ingeniería.

En muchos de los casos de ingeniería se requiere determinar la distribución de esfuerzos y deformaciones en un continuo elástico. Estos casos pueden variar desde problemas bidimensionales de esfuerzos de deformación plana, sólidos en revolución, flexión de placas y hasta el análisis más general de sólidos tridimensionales. En todos los casos, el número de interconexiones entre un elemento finito cualquiera rodeado por fronteras imaginarias y los elementos vecinos a él es infinito, lo cual hace una estructura continua. La discretización de la estructura se logra siguiendo los siguientes puntos:

- 1) El sistema o continuo se divide en un número finito de elementos a través de líneas o superficies imaginarias.
- 2) Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante nodos en puntos discretos situados en sus contornos.

- 3) Se toma un conjunto de funciones que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada elemento finito en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento
- 4) Se determina un sistema de fuerzas concentradas en nodos tal que equilibren los esfuerzos y cualquier carga repartida, permitiendo así una relación entre fuerzas y desplazamientos de la forma  $P = K D$

Si se supone que de alguna manera se ha logrado definir la relación de rigideces entre las fuerzas y los desplazamientos de los nodos al igual que en el método de las rigideces, inicialmente para cada elemento, con la compatibilidad y el equilibrio se puede determinar la ecuación fuerza-desplazamiento del sistema estructural  $P = K D$ . La solución de esta ecuación se puede encontrar en forma similar que para el método directo de las rigideces.

Después de solucionada la ecuación fuerza-desplazamiento del sistema estructural para los desplazamientos nodales, pueden calcularse los esfuerzos internos de cada elemento.

Aunque este proceso obliga a que exista equilibrio en los puntos nodales, en general no hay imposición del equilibrio a lo largo de las fronteras del elemento, lo cual significa, por ejemplo, que un análisis del elemento finito puede determinar que los esfuerzos en los puntos A y B figura 6.1 cada uno en un elemento distinto, sean diferentes.

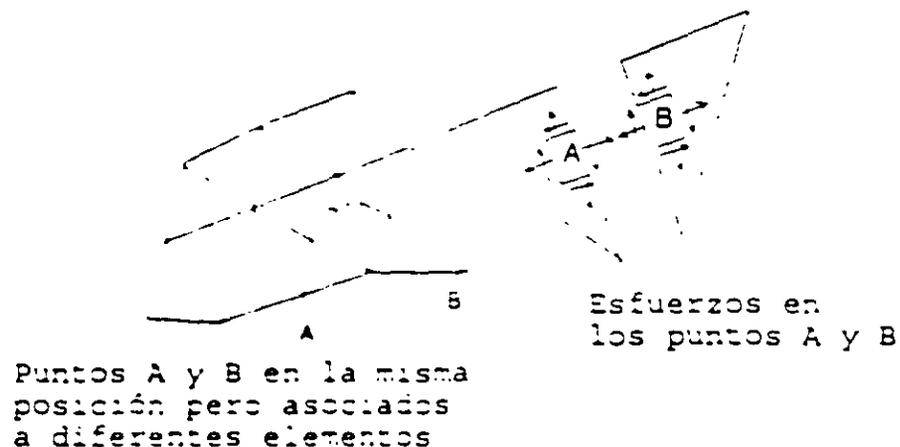


Figura 6.1

Por otro lado no siempre es fácil asegurar que las funciones de desplazamiento escogidos satisfagan las condiciones de compatibilidad o continuidad de desplazamientos entre elementos adyacentes. Por consiguiente esta condición puede no cumplirse en el contorno de los elementos, aunque es evidente que dentro de cada elemento si se cumplirá a causa de la unicidad de los desplazamientos ya que los mismos estan representados por funciones continuas.

Por lo anterior es evidente que se han introducido una serie de aproximaciones en cuanto a la igualdad de los esfuerzos y la continuidad de los desplazamientos. Al reducir el tamaño de los elementos finitos, la discrepancia entre los esfuerzos en las fronteras de elementos adyacentes disminuiría y el campo de desplazamientos convergerá en uno que sea continuo.

## 6.2 CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS.

Un campo de desplazamiento es una función de las coordenadas que definen la forma del desplazamiento de un elemento.

Por ejemplo para un elemento armadura el campo de desplazamientos es lineal y esta dado por:

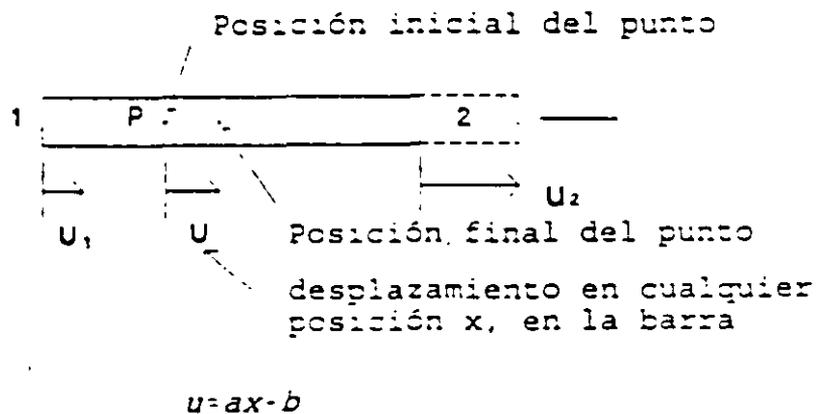


Figura 6.2

Para un elemento viga:

desplazamiento de la viga en cualquier posición  $x$

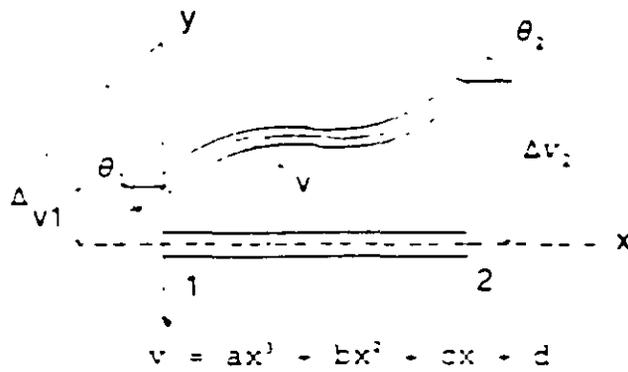


Figura 6.3

Para un elemento triangular:

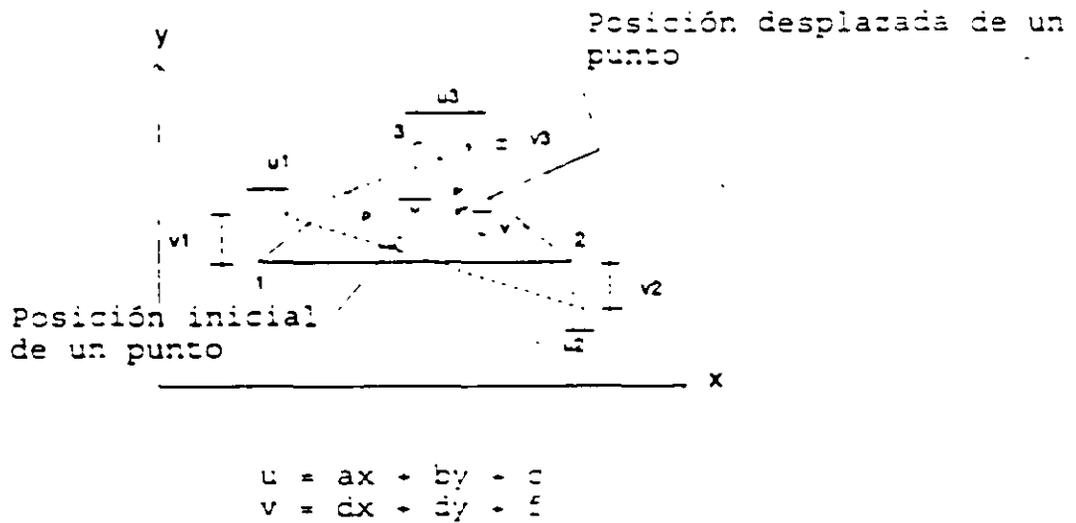
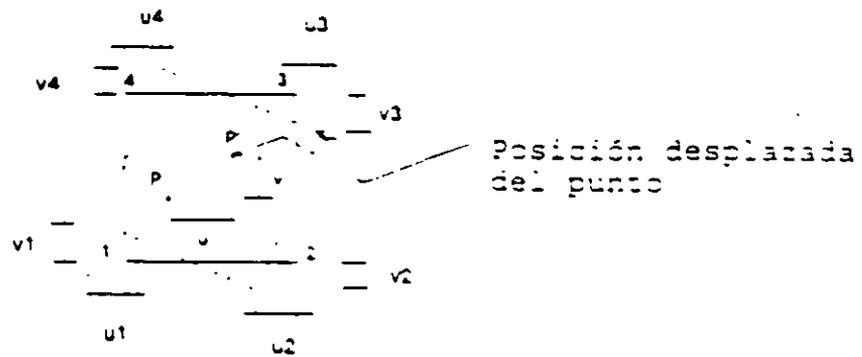


Figura 6.4

Para un elemento rectangular:



$u, v$  desplazamiento en cualquier posición

$$u = a + bx + cy + dxy$$

$$v = e + fx + gy + hxy$$

Figura 6.5

Las ecuaciones debajo de las figuras describen los posibles desplazamientos del elemento en términos de algunos parámetros desconocidos  $a, b, c, d, \dots$ , etc. Las formas más comunes en relación a los campos de desplazamiento son polinomios, para problemas unidimensionales y bidimensionales se toman del triángulo de Pascal.

$a_0$	Grado
$a_1x \quad a_2y$	1
$a_3x^2 \quad a_4xy \quad a_5y^2$	2
$a_6x^3 \quad a_7x^2y \quad a_8xy^2 \quad a_9y^3$	3
$a_{10}x^4 \quad a_{11}x^3y \quad a_{12}x^2y^2 \quad a_{13}xy^3 \quad a_{14}y^4$	4

Si se utilizan todos los términos que están arriba de cierto nivel, en el campo de desplazamientos, se dice que el polinomio está completo, lo cual es deseable ya que así se incrementa la convergencia, aunque algunos elementos están basados en polinomios incompletos.

Cabe hacer notar que el campo de desplazamientos son supuestos que pueden o no ser la forma exacta del desplazamiento del elemento.

El objetivo de los elementos finitos es determinar los coeficientes de los campos de desplazamiento seleccionados, que minimizan el potencial total de la estructura, o bien el error que introduce la aproximación en las ecuaciones diferenciales rectoras del equilibrio. Mientras más pequeño sea el elemento finito se tendrá más oportunidad de minimizar el error por la aproximación.

### 6.3 FUNCIONES DE FORMA.

En las figuras 6.1 a la 6.5 se han mostrado los campos de desplazamiento para cuatro elementos y también los movimientos posibles de los nodos es decir los desplazamientos nodales. Para que estos desplazamientos se clasifiquen como grados de libertad deben constituir el mínimo número de elementos de desplazamientos necesario para describir completamente la deformación en cualquier punto del elemento. Para que esto sea cierto el campo de desplazamiento elegido debe escribirse en función de los desplazamientos nodales en vez de los coeficientes polinomiales a, b, c, etc. A los campos de desplazamiento en función de los desplazamientos nodales se les conoce como funciones de forma.

#### 6.3.1 FUNCIONES DE FORMA PARA UN ELEMENTO ARMADURA.

Considérese el elemento que se muestra en la figura 6.6 con los grados de libertad nodales  $U_1$  y  $U_2$  y el campo de desplazamientos elegido:

$$u = ax + b \quad 6.1$$



Figura 6.6

de la figura se observa que si  $x=0$  el desplazamiento debe ser  $u_1$  y si  $x=L$  el desplazamiento debe ser  $u_2$ .

Al aplicar estas dos condiciones, se obtiene:

$$u_1 = a(0) - b$$

$$u_2 = a(L) - b$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

denotando al vector de desplazamientos nodales por "DN", a la matriz de coeficientes por "A" y al vector formado por las constantes como "a" tenemos:

$$[DN] = [A] \{a\} \tag{6.2}$$

solucionando para [ a ]

$$\{a\} = [A]^{-1} [DN] \tag{6.3}$$

así:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Expresando en forma matricial el campo de desplazamientos dado en la ecuación 1

$$u = [1 \ x] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

en forma condensada se puede escribir como

$$u = [P] \{a\} \tag{6.4}$$

sustituyendo la ecuación 3 en la 4, se obtiene

$$u = [P] [A]^{-1} [D_N] \quad 6.5$$

si llamamos  $[N] = [P] [A]^{-1}$  el campo de desplazamientos se puede escribir:

$$u = [N] [D_N] \quad 6.6$$

como el campo de desplazamientos queda expresado en términos de los desplazamientos nodales,  $[N]$  se define como la matriz de las funciones de forma. Cada elemento de  $[N]$  es una función de forma que multiplica a un desplazamiento nodal (grado de libertad). Así:

$$u = [x \ 1] \begin{bmatrix} -\frac{x}{L} & \frac{1}{L} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

haciendo el producto:

$$u = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

de donde se puede decir que las funciones de forma para el desplazamiento nodal  $u_1$  (grado de libertad 1) es:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad 6.7.1$$

y para el desplazamiento nodal 2 (grado de libertad 2) es:

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad 6.7.2$$

La validez de estas funciones de interpolación se demuestra sustituyendo los valores de  $x=0$  y  $x=L$ , es decir:

$$\text{si } x = 0 \quad u = [1 \ 0] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_1$$

$$\text{si } x = L \quad u = [0 \ 1] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_2$$

Las gráficas del campo de desplazamientos y de las funciones de interpolación se muestran en la figura 6.7

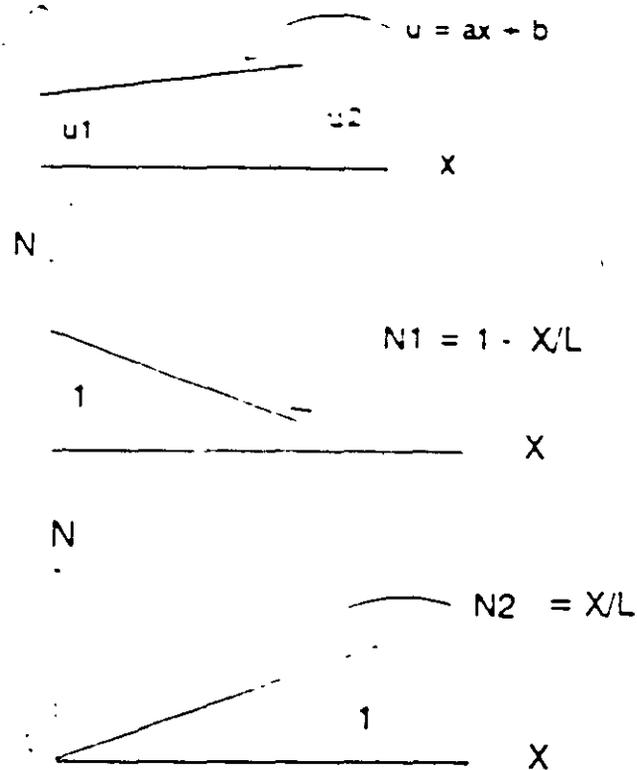


Figura 6.7

Se observa que las funciones de forma tiene un valor unitario cuando son evaluadas en su nodo correspondiente y un valor de cero en cualquier otro nodo.

Cabe aclarar que la elección del campo de desplazamientos no es arbitraria. Se observa que para describir el campo de desplazamientos nodales, deben de poder definirse de manera única los coeficientes de los polinomios a,b,c,etc. Esto requiere que haya tantos coeficientes como grados de libertad para el elemento. Si esto es cierto la matriz A resultará cuadrada y por lo tanto se puede invertir para encontrar

$$\{a\} = [A]^{-1} \{D_n\}$$

Esto se generaliza para cualquier elemento finito que se considere.

### 6.3.2 FUNCIONES DE FORMA PARA UN ELEMENTO VIGA.

Considérese los grados de libertad correspondientes a los desplazamientos nodales  $v_1$ ,  $\theta_1$ ,  $v_2$  y  $\theta_2$  como se muestra en la figura 6.8

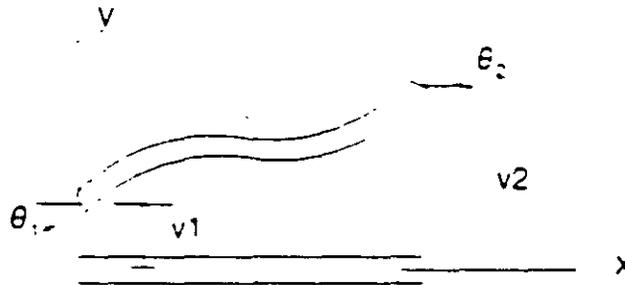


Figura 6.8

Las condiciones de frontera para este elemento son: para  $x = 0$ ,  $\frac{dv}{dx} = \theta_1$  y  $v = v_1$ , para  $x = L$ ,  $\frac{dv}{dx} = \theta_2$  y  $v = v_2$ .

El campo de desplazamientos para este elemento fue planteado como

$$v = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad 6.8$$

de donde se puede obtener:

$$\frac{dv}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c \quad 6.9$$

Estas funciones se determinan partiendo que el campo cúbico de desplazamientos satisfacen las condiciones de frontera.

Sustituyendo estas condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \text{si } x = 0, \quad v_1 &= d \\ \theta_1 &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = L, \quad v_2 &= aL^3 + bL^2 + cL + d \\ \theta_2 &= 3aL^2 + 2bL + c \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ 3L^2 & 2L & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$[D_v] = [A] [a]$$

al solucionar:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^2} & \frac{1}{L^2} \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$[a] = [A]^{-1} [D_v]$$

Expresando en forma matricial el campo de desplazamientos

$$v = [x^3 \ x^2 \ x \ 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$[D] = [P] [a]$$

sustituyendo el vector [a]

$$v = [x^3 \ x^2 \ x \ 1] \begin{bmatrix} \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^2} & \frac{1}{L^2} \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

en forma condensada.

$$[D] = [N] [DN]$$

desarrollando el producto

$$v = \begin{pmatrix} \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} - 1 \\ \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} - x \\ -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \\ \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

de donde las funciones de forma resultan

$$N_1 = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} - 1$$

$$N_2 = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} - x$$

$$N_3 = -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2}$$

$$N_4 = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

6.10

las funciones de forma  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  y  $N_4$  corresponden a los desplazamientos nodales  $v_1$ ,  $\theta_1$ ,  $v_2$  y  $\theta_2$  respectivamente

A estas funciones de forma también se les conoce como polinomios de interpolación, polinomios de Hermite o polinomios de Hermitianos.

En la figura 6.9 se muestran las gráficas de las funciones de forma y se observa que cumplen la propiedad de que sean igual a la unidad cuando se valúan en su nodo correspondiente y cero en cualquier otro.

### 6.3.3 FUNCIONES DE FORMA PARA ELEMENTO TRIANGULAR.

Considérese los desplazamientos nodales  $u_1, v_1$ ;  $u_2, v_2$  y  $u_3, v_3$  correspondientes a los grados de libertad "x" y "y" de los nodos 1, 2 y 3 respectivamente, según se ilustra en la figura 6.10

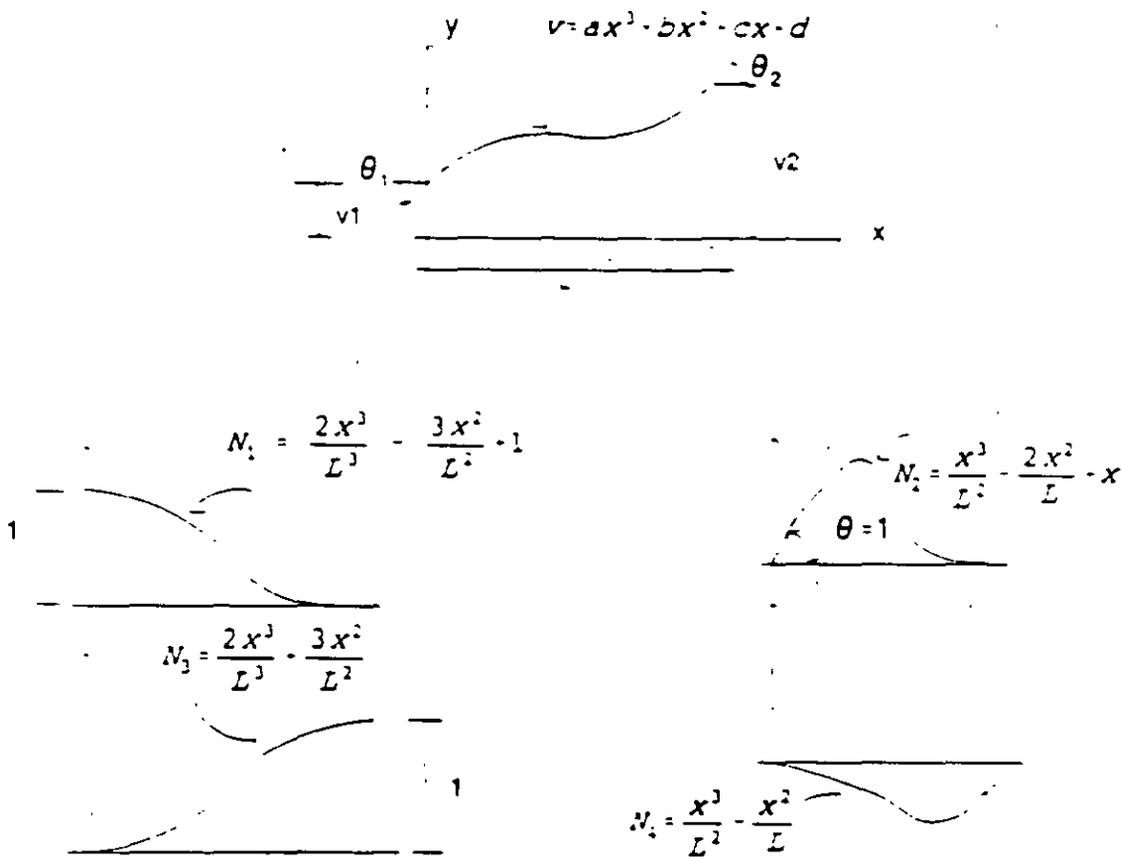


Figura 6.9

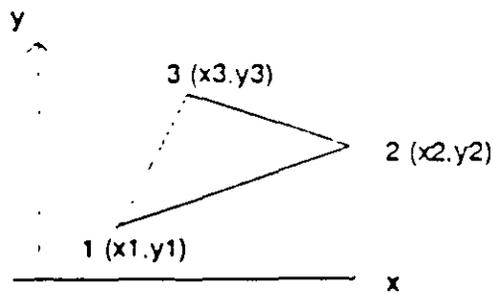


Figura 6.10

Se supondrá el campo de desplazamientos dado por:

$$u = ax + by + c$$

$$v = dx + ey + f$$

6.11

Las condiciones de frontera para este caso están dadas por:

$$x=x_1, y=y_1 \quad - \quad u=u_1 \text{ \& } v=v_1$$

$$x=x_2, y=y_2 \quad - \quad u=u_2 \text{ \& } v=v_2$$

$$x=x_3, y=y_3 \quad - \quad u=u_3 \text{ \& } v=v_3$$

si se aplican estas condiciones a los campos de desplazamiento:

$$u_1 = ax_1 + by_1 + c$$

$$v_1 = dx_1 + ey_1 + f$$

$$u_2 = ax_2 + by_2 + c$$

$$v_2 = dx_2 + ey_2 + f$$

$$u_3 = ax_3 + by_3 + c$$

$$v_3 = dx_3 + ey_3 + f$$

en forma matricial y ordenando el vector desplazamientos, primero en la dirección x y después todos en la dirección y.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

en forma compacta

$$[DN] = [A] [a]$$

solucionando:

en forma compacta.

$$[DN] = [A] [a]$$

solucionando:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{2DET} \begin{bmatrix} Y_2 - Y_3 & Y_3 - Y_1 & Y_1 - Y_2 & 0 & 0 & 0 \\ X_3 - X_2 & X_1 - X_3 & X_2 - X_1 & 0 & 0 & 0 \\ X_2 Y_3 - X_3 Y_2 & X_3 Y_1 - X_1 Y_3 & X_1 Y_2 - X_2 Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_2 - Y_3 & Y_3 - Y_1 & Y_1 - Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & X_3 - X_2 & X_1 - X_3 & X_2 - X_1 \\ 0 & 0 & 0 & X_2 Y_3 - X_3 Y_2 & X_3 Y_1 - X_1 Y_3 & X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

en forma condensada:

$$[a] = [A]^{-1} [DN]$$

donde

$$DET = \frac{1}{2} \{ (Y_1 X_3 - X_1 Y_3) - (X_2 Y_3 - Y_2 X_3) - (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) \}$$

Escribiendo en forma matricial los campos de desplazamiento.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

en forma condensada:

$$[D] = [P] [a]$$

sustituyendo el vector  $\{a\}$  y considerando como nueva constante cada término de la matriz  $A^{-1}$

En forma condensada:

$$[D] = [P] [A]^{-1} [DN]$$

donde:

$$[N] = [P] [A]^{-1}$$

por lo que desarrollando:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

desarrollando:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2DET} (a_1 x - b_1 y - c_1) & a_1 &= y_2 - y_3 \\ & & b_1 &= x_3 - x_2 \\ & & c_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ N_2 &= \frac{1}{2DET} (a_2 x - b_2 y - c_2) & a_2 &= y_3 - y_1 \\ & & b_2 &= x_1 - x_3 \\ & & c_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ N_3 &= \frac{1}{2DET} (a_3 x - b_3 y - c_3) & a_3 &= y_1 - y_2 \\ & & b_3 &= x_2 - x_1 \\ & & c_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned} \quad 6.13$$

Estas son las funciones de forma para el elemento triangular. En la figura 6.11 se muestra la gráfica de estas funciones

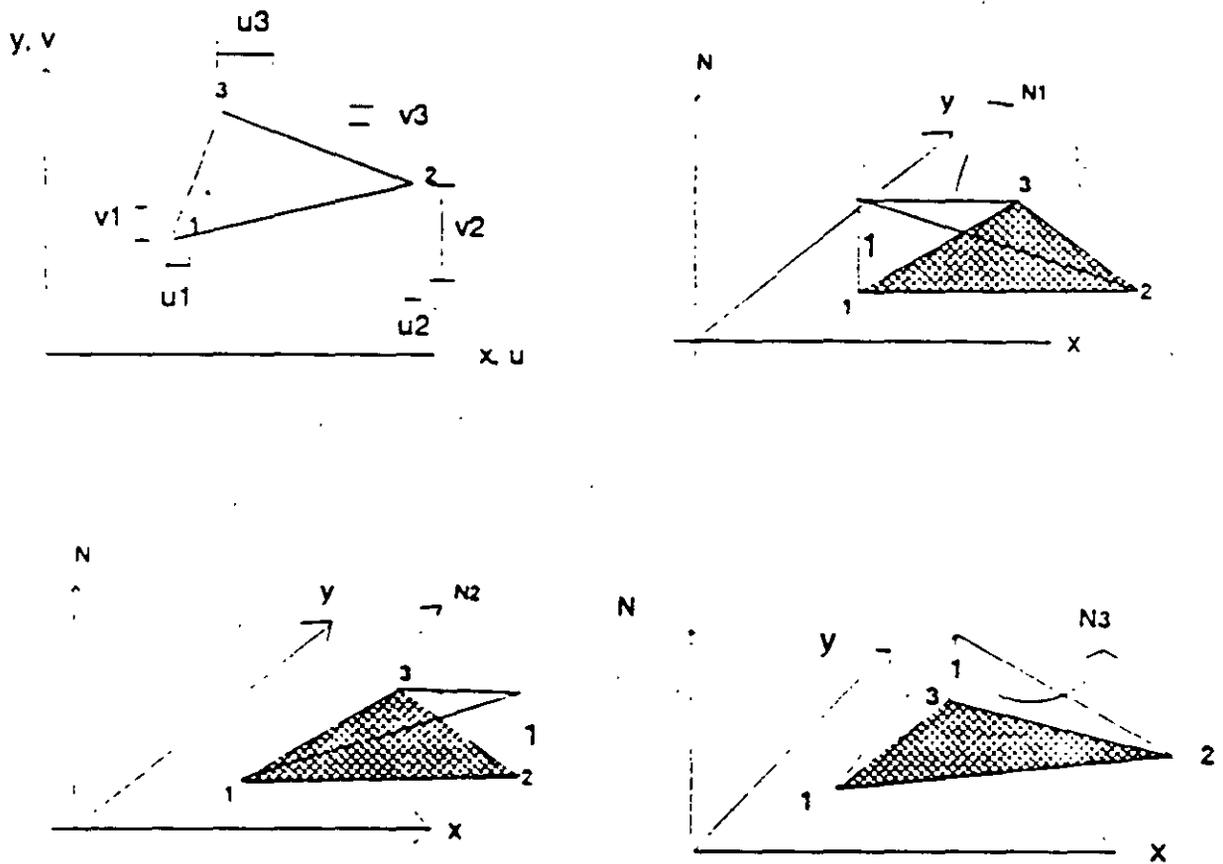


Figura 6.11

observése que cada función satisface el requisito de ser igual a la unidad en su nodo correspondiente e igual a cero cuando es valuada en los otros nodos.

#### 6.3.4 FUNCIONES DE FORMA PARA UN ELEMENTO RECTANGULAR.

Considérese los grados de libertad  $u_1, v_1$ ,  $u_2, v_2$ ,  $u_3, v_3$ , y  $u_4, v_4$ ; correspondientes a los grados de libertad de los nodos 1, 2, 3 y 4 respectivamente como se muestra en la figura 6.12

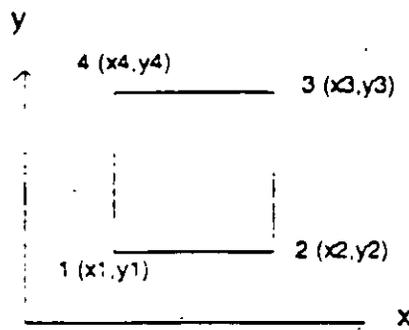


Figura 6.12

El campo de desplazamientos está dado por:

$$\begin{aligned} u &= a + bx + cy + dxy \\ v &= e + fx + gy + hxy \end{aligned} \quad 6.14$$

Las condiciones de frontera para este caso están dadas por:

$$\begin{aligned} \text{si } x_1 = x_1; \quad y = y_1; \quad \text{entonces} \quad u &= u_1; \quad v = v_1 \\ x = x_2; \quad y = y_1; \quad \text{entonces} \quad u &= u_2; \quad v = v_2 \\ x = x_3; \quad y = y_1; \quad \text{entonces} \quad u &= u_3; \quad v = v_3 \\ x = x_4; \quad y = y_1; \quad \text{entonces} \quad u &= u_4; \quad v = v_4 \end{aligned}$$

si se aplican estas condiciones al campo de desplazamientos:

$$\begin{aligned} u_1 &= a + bx_1 + cy_1 + dx_1y_1 \\ v_1 &= e + fx_1 + gy_1 + hx_1y_1 \\ u_2 &= a + bx_2 + cy_1 + dx_2y_1 \\ v_2 &= e + fx_2 + gy_1 + hx_2y_1 \\ u_3 &= a + bx_3 + cy_1 + dx_3y_1 \\ v_3 &= e + fx_3 + gy_1 + hx_3y_1 \\ u_4 &= a + bx_4 + cy_1 + dx_4y_1 \\ v_4 &= e + fx_4 + gy_1 + hx_4y_1 \end{aligned}$$

en forma matricial y ordenando el vector desplazamientos primero los de la dirección x (desplazamientos  $u$ ) y después todos los de la dirección y (desplazamientos  $v$ ).

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

Se observa que al solucionar este sistema se tiene que invertir una matriz de 4x4, dada la dificultad para efectuar esta inversa con literales se sugiere hacerlo numéricamente, resultando así:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

donde a, b, c, y d, son nuevas constantes de [A]'

En forma reducida:

$$[a] = [A]^{-1} [DN]$$

Escribiendo en forma matricial los campos de desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

en forma condensada:

$$[D] = [P] [a]$$

sustituyendo el vector [a]

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

desarrollando

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

donde

$$N_1 = a_1 + b_1x + c_1y + d_1xy$$

$$N_2 = a_2 + b_2x + c_2y + d_2xy$$

$$N_3 = a_3 + b_3x + c_3y + d_3xy$$

$$N_4 = a_4 + b_4x + c_4y + d_4xy$$

6.15

Estas son las funciones de forma para el elemento rectangular. En la figura 6.13 se representan los que serian las graficas de estas funciones.

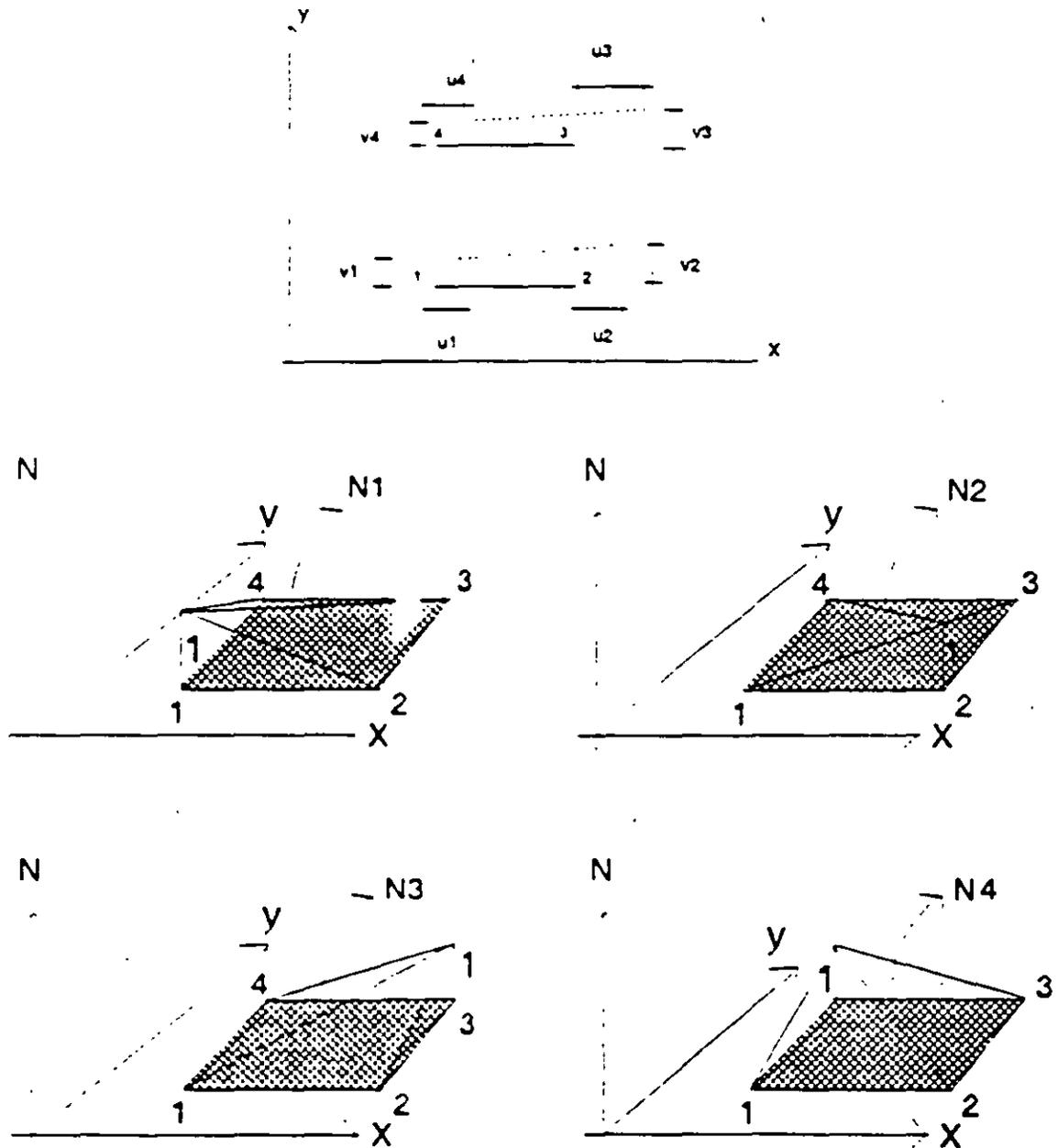


Figura 6.13

### 6.3.5 RESUMEN DE LAS FUNCIONES DE FORMA

En base a los cuatro casos planteados anteriormente, el planteamiento de las funciones de forma se puede generalizar para cualquier tipo de elemento (finito) considerando lo siguiente:

- Los campos de desplazamientos definen la forma supuesta del desplazamiento del elemento en términos de coeficientes polinomiales.

$$[D] = [P] [a] \quad 6.16$$

- Los coeficientes del campo polinomial supuesto están relacionados con los desplazamientos nodales, al forzar que el campo de desplazamientos sea igual al desplazamiento deseado en los nodos.

$$[DN] = [A] [a] \quad 6.17$$

- Expresando el desplazamiento en cualquier punto del elemento en términos de los desplazamientos nodales, se tiene

$$[D] = [P] [A]^{-1} [DN] \quad 6.18$$

- Las funciones de forma resultan

$$N = [P] [A]^{-1} \quad 6.19$$

y son el inicio deseado para plantear las matrices de rigidez. Estas funciones de forma deben poseer la propiedad fundamental de ser iguales a 1 cuando son evaluadas en las coordenadas de su nodo asociado y grado de libertad, y cero en todos los demás nodos y grados de libertad.

### 6.4 MATRIZ DE RIGIDEZES DEL ELEMENTO.

Para determinar la matriz de rigideces hay varios enfoques, entre otros se tiene el de la energía potencial, los residuos ponderados y el método de Galerkin. El

desarrollo siguiente se hará considerando la energía potencial.

En este enfoque se plantea que la energía potencial total del sistema esté en un valor estacionario, en el caso de equilibrio estable, este corresponde al valor mínimo del potencial.

La energía potencial se puede escribir como:

$$\phi = u + u_e$$

donde  $u$  es la energía de deformación interna y  $u_e$  es la energía potencial externa (de las cargas aplicadas)

Recuérdese que la energía de deformación interna se puede escribir como:

$$u = \frac{1}{2} \int_{\omega} \epsilon^T \sigma d\omega \quad 6.20$$

pero:

$$\sigma = E \epsilon$$

sustituyendo:

$$u = \frac{1}{2} \int_{\omega} \epsilon^T E \epsilon d\omega \quad 6.21$$

Considerando que la deformación unitaria se puede conocer a partir de los desplazamientos y que éstos pueden ponerse en función de los desplazamientos nodales, a través de las funciones de forma, la deformación se puede escribir como:

$$\{\epsilon\} = [B] \{DN\} \quad 6.22$$

donde  $\{DN\}$  son los desplazamientos nodales y  $[B]$  se conoce como la matriz de desplazamientos-deformación. Sustituyendo 6.22 en 6.21, para esto:

$$\{\epsilon\}^T = [D_v]^T [B]^T \quad 6.23$$

por lo que:

$$U = \frac{1}{2} \int D_N^T [B]^T [E] [B] D_N d_{vol} \quad 6.24$$

por otro lado la energía potencial externa en términos de las cargas que actuen en dirección de los grados de libertad se puede escribir como:

$$\begin{aligned} U_e &= -P_1 D_{N1} - P_2 D_{N2} + \dots + P_n D_{Nn} \\ U_e &= -[D_N]^T [P] \end{aligned} \quad 6.25$$

sustituyendo en la energía potencial total:

$$\phi = \frac{1}{2} [D_N]^T \left[ \int [B]^T [E] [B] d_{vol} \right] [D_N] - [D_N]^T [P]$$

aplicando el principio estacionario de la energía:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial D_N} &= 0 \\ \left[ \int [B]^T [E] [B] d_{vol} \right] [D_N] - [P] &= 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$[P] = \left[ \int [B]^T [E] [B] d_{vol} \right] [D_N] \quad 6.26$$

esta expresión es la relación fuerza-desplazamiento del elemento:

$$[P] = [K] [D_n] \quad 6.27$$

del elemento, por lo que la matriz de rigideces resulta:

$$[K] = \int [B]^T [E] [B] d_{vol} \quad 6.28$$

siendo [K] la matriz de rigideces del elemento y depende de la matriz constitutiva [E] del mismo y de la matriz desplazamientos-deformación [B], esta última es función del campo de desplazamientos seleccionado y la relación entre la deformación y el desplazamiento en cualquier punto del elemento. Como la matriz [E] es simétrica, la matriz de rigideces también será simétrica.

### 6.4.1 MATRIZ DE RIGIDECES PARA UN ELEMENTO SUJETO A CARGA AXIAL.

En la figura 6.14 se muestran los grados de libertad y las cargas nodales.

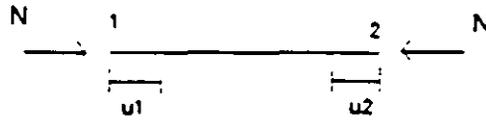


Figura 6.14

El campo de desplazamientos en términos de las funciones de forma se planteó como:

$$u = \left[ 1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$u = \{N_1 \quad N_2\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

De la teoría de elasticidad:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_x = \left[ \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\epsilon_x = \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{6.29}$$

de acuerdo a la ecuación 6.22 se puede escribir:

$$\epsilon_x = [B] \{DN\}$$

que es la relación desplazamiento-deformación deseada, así:

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad 6.30$$

La expresión para determinar la matriz de rigideces se determinó como:

$$K = \int_{vol} B^T E B d_{vol}$$

De la teoría de elasticidad la matriz constitutiva E solo tiene un término y es precisamente el módulo de elasticidad axial E. Sustituyendo:

$$K = \int_{vol} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} d_{vol}$$

El volumen diferencial para un elemento axial puede expresarse como.

$$d_{vol} = dA dx$$

para un elemento barra de sección constante y módulo de elasticidad axial constante:

$$K = EA \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la ecuación 6.27 se obtiene la ecuación fuerza-desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad 6.31$$

### 6.4.2 MATRIZ DE RIGIDECES PARA UN ELEMENTO VIGA.

En la figura 6.15 se muestran los grados de libertad considerados.

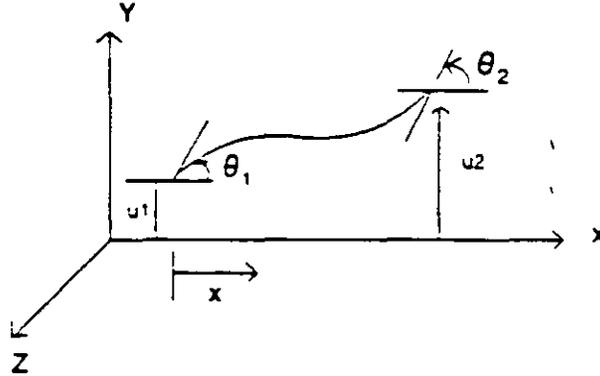


Figura 6.15

El campo de desplazamientos en términos de las funciones de forma se planteó como.

$$v = \left[ \left( \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \right) \left( \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \right) \left( -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \right) \left( \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right) \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$v = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

por otro lado, de la teoría de elasticidad:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

pero:

$$\sigma = \frac{M y}{I} \quad y \quad M = \frac{d^2 v}{dx^2} EI$$

por lo tanto:

$$\epsilon = y \frac{d^2 v}{dx^2}$$

sustituyendo el campo de desplazamientos.

$$\epsilon = y \left[ \frac{d^2 N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_4}{dx^2} \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$N_1'' = \frac{d^2 N_1}{dx^2} = \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}$$

$$N_2'' = \frac{d^2 N_2}{dx^2} = \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}$$

$$N_3'' = \frac{d^2 N_3}{dx^2} = -\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}$$

$$N_4'' = \frac{d^2 N_4}{dx^2} = \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}$$

asi:

$$\epsilon = y \left[ \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \quad -\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad 6.32$$

por lo tanto

$$B = y \left[ \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \quad -\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right] \quad 6.33$$

la expresi3n para valuar la matriz de rigideces esta dada por:

$$K = \int_{vol} B^T E B d_{vol}$$

considerando que el elemento viga es de sección constante, que la matriz constitutiva E, solo contiene el módulo de elasticidad axial E y que:

$$\int_{vol} = \int_0^L dx \int_A dA$$

$$K = \int_0^L dx \int_A y^2 \begin{bmatrix} N_1' \\ N_2' \\ N_3' \\ N_4' \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} N_1' & N_2' & N_3' & N_4' \end{bmatrix} dA$$

la integral de área es función unicamente de "y" por lo que:

$$\int y^2 dA = I$$

$$K = EI \int_0^L \begin{bmatrix} N_1' N_1' & N_1' N_2' & N_1' N_3' & N_1' N_4' \\ N_2' N_1' & N_2' N_2' & N_2' N_3' & N_2' N_4' \\ N_3' N_1' & N_3' N_2' & N_3' N_3' & N_3' N_4' \\ N_4' N_1' & N_4' N_2' & N_4' N_3' & N_4' N_4' \end{bmatrix} dx$$

desarrollando la integral.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

Si se observa esta matriz, es la misma que la obtenida con el método directo de las rigideces, considerando flexión y cortante únicamente.

## 6.5 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES PLANAS

El método de los elementos finitos obtuvo sus primeros éxitos en su aplicación a problemas bidimensionales.

Solamente se estudiará el elemento triangular, que es el más sencillo, pero el procedimiento es totalmente general. Este mismo problema se puede analizar utilizando elementos más elaborados, que se introducen en idéntica forma.

En ambos casos de esfuerzos y deformaciones planas, el campo de desplazamientos viene expresado unívocamente en función de los desplazamientos  $u$  y  $v$  en las direcciones de los ejes cartesianos  $x$  e  $y$  respectivamente.

Cuando todas las fuerzas se aplican en el plano que contiene a la estructura, digamos en el plano  $x$ - $y$  y los esfuerzos que se producen son  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  mientras que  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  y  $\tau_{yz}$  son cero, se trata de un problema de esfuerzos planos.

En la figura 6.16 se muestra el estado de esfuerzos en un elemento diferencial.

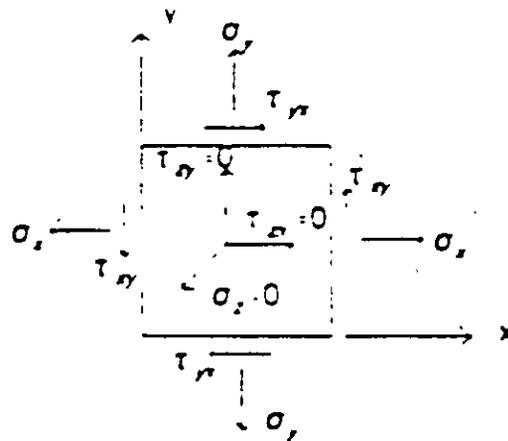


Figura 6.16

Por lo tanto las deformaciones presentes serán  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  mientras que  $\epsilon_z$ ,  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  son nulas.

Las vigas de gran peralte, los contrafuertes para presas y en general todo elemento de sección transversal (dirección z) pequeña respecto de sus otras dimensiones son estructuras para las cuales es aplicable la teoría de esfuerzos planos.

Por otro lado se dice que un cuerpo esta en estado de deformaciones planas si la deformación lineal unitaria en la dirección z se conserva igual a cero, pero el esfuerzo en la misma dirección es diferente de cero ( $\epsilon_z = 0$  y  $\sigma_z \neq 0$ ).

En la figura 6.17 se muestra el estado de esfuerzos para un problema de deformaciones planas.

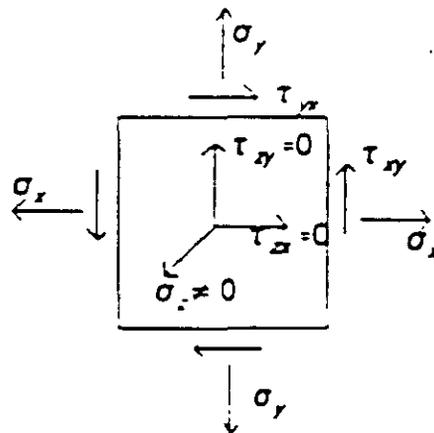


Figura 6.17

En la práctica los problemas de deformaciones planas ocurren en estructuras en que la dimensión en la dirección z es mucho más grande que las otras dos dimensiones y también la sección perpendicular al eje z es constante.

Para analizar este tipo de estructuras se toma una sección transversal representativa de espesor unitario para propósitos de análisis.

Como ejemplo de estructuras a las que se les puede aplicar esta teoría se tienen

las presas de gravedad incluyendo su cimentación, terraplenes, vertedores, etc.

### 6.5.1 MATRIZ DE RIGIDEZES DE UN ELEMENTO TRIANGULAR PARA ESFUERZOS PLANOS.

Considérese los grados de libertad mostrados en la figura 6.18.

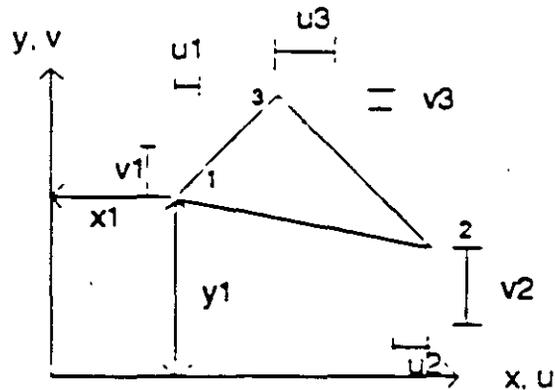


Figura 6.18

El campo de desplazamientos en términos de las funciones de forma se planteó:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

De la teoría de elasticidad para un problema de esfuerzos planos, todos los elementos están sujetos a tres esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , y  $\tau_{xy}$  como se indica en la figura 6.19

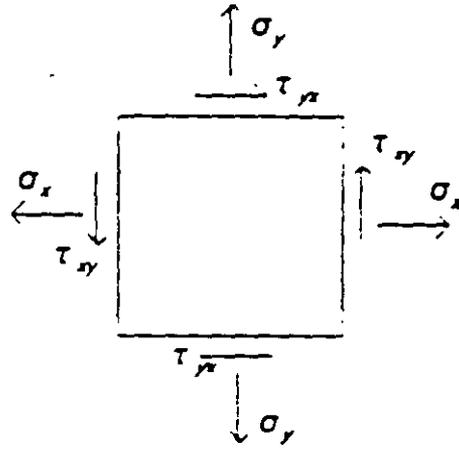


Figura 6.13

las deformaciones correspondientes:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

sustituyendo el campo de desplazamientos.

$$\epsilon_x = \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} v_3$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} u_3 + \frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} v_3$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1x} & 0 & N_{2x} & 0 & N_{3x} & 0 \\ 0 & N_{1y} & 0 & N_{2y} & 0 & N_{3y} \\ N_{1y} & N_{1x} & N_{2y} & N_{2x} & N_{3y} & N_{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

la cual se puede expresar como:

$$[\epsilon] = [B] \{DN\}$$

donde:

$$N_{1x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2DET} (a_1 x + b_1 y + c_1) \right] = \frac{a_1}{2DET} = \frac{Y_2 - Y_3}{2DET}$$

$$N_{2x} = \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2DET} (a_2 x + b_2 y + c_2) \right] = \frac{a_2}{2DET} = \frac{Y_3 - Y_1}{2DET}$$

$$N_{3x} = \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2DET} (a_3 x + b_3 y + c_3) \right] = \frac{a_3}{2DET} = \frac{Y_1 - Y_2}{2DET}$$

$$N_{1y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2DET} (a_1 x + b_1 y + c_1) \right] = \frac{b_1}{2DET} = \frac{x_3 - x_2}{2DET}$$

$$N_{2y} = \frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2DET} (a_2 x + b_2 y + c_2) \right] = \frac{b_2}{2DET} = \frac{x_1 - x_3}{2DET}$$

$$N_{3y} = \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2DET} (a_3 x + b_3 y + c_3) \right] = \frac{b_3}{2DET} = \frac{x_2 - x_1}{2DET} \quad 6.36$$

Para considerar la matriz constitutiva, en la teoría de elasticidad se planteó que

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1-\mu)}{E} \sigma_{xy}$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

considerando la relación inversa

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

y como en forma compacta se puede escribir

$$[\sigma] = [E] [\epsilon]$$

por lo tanto la matriz constitutiva resulta.

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix}$$

donde.

$$E_{11} = E_{22} = \frac{E}{(1-\mu^2)}$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{\mu E}{(1-\mu^2)}$$

$$E_{33} = \frac{E(1-\mu)}{2(1-\mu^2)}$$

6.37

sustituyendo en la expresión para valuar la rigidez:

$$K = \int [B]^T [E] [B] d_{vol}$$

$$K = \int_0 \begin{bmatrix} N_1 x & 0 & N_1 y \\ 0 & N_1 y & 0 \\ N_2 x & 0 & N_2 y \\ 0 & N_2 y & N_2 x \\ N_3 x & 0 & N_3 y \\ 0 & N_3 y & N_3 x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 x & 0 & N_2 x & 0 & N_3 x & 0 \\ 0 & N_1 y & 0 & N_2 y & 0 & N_3 y \\ N_1 y & N_1 x & N_2 y & N_2 x & N_3 y & N_3 x \end{bmatrix} t d_A$$

Para este elemento ningún término  $N_{1x}$ ,  $N_{1y}$ ,...etc. contiene las variables x o y. Como resultado de ello la integración sobre el área produce sencillamente el área del elemento y solo se efectúa la multiplicación de matrices, resultando:

$$K = \begin{vmatrix} E_1 a^2 - E_2 b^2 & a E_1 b - b E_2 a & a E_1 A - b E_2 B & a E_1 b_1 - b E_2 b_1 & a E_1 a_1 - b E_2 b_1 & a E_1 b_1 - b E_2 b_1 \\ a E_1 b - b E_2 a & E_1 b^2 - E_2 a^2 & b E_1 a - a E_2 b & b E_2 b_1 - a E_1 b_1 & b E_1 a_1 - a E_2 b_1 & b E_2 b_1 - a E_1 b_1 \\ a E_1 a - b E_2 b & b E_1 a - a E_2 b & E_1 a^2 - E_2 b^2 & a E_1 b_1 - b E_2 b_1 & a E_1 a_1 - b E_2 b_1 & a E_1 b_1 - b E_2 b_1 \\ a E_1 b - b E_2 a & b E_2 b_1 - a E_1 b_1 & a E_1 a - b E_2 b & E_2 a^2 - E_1 b^2 & b E_1 a_1 - a E_2 b_1 & b^2 E_2 b_1 - a^2 E_1 a_1 \\ a E_1 a - b E_2 b & b E_1 a - a E_2 b & a E_1 a - b E_2 b & a E_1 b_1 - b E_2 b_1 & E_1 a^2 - E_2 b^2 & a E_1 a_1 - b E_2 b_1 \\ a E_1 b - b E_2 a & b E_2 b_1 - a E_1 b_1 & a E_1 A - b E_2 B & a E_1 b_1 - b E_2 b_1 & a E_1 a_1 - b E_2 b_1 & E_2 a^2 - E_1 b^2 \end{vmatrix} \frac{1}{4DET}$$

donde

t = espesor

$$\begin{aligned} a_1 &= y_2 - y_3 & a_2 &= y_3 - y_1 & a_3 &= y_1 - y_2 \\ b_1 &= x_2 - x_3 & b_2 &= x_1 - x_3 & b_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

6.38

$$DET = \frac{1}{2} (b_1 a_2 - a_1 b_2)$$

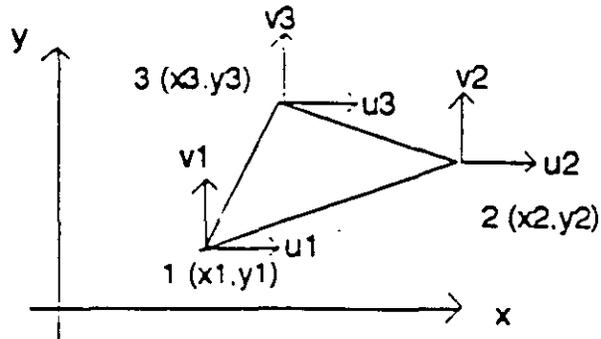


Figura 6.20

La numeración de los nodos se realizó en sentido antihorario. El área o el determinante también se puede calcular como:

$$A = DET = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - y_2 y_1)]$$

La ecuación fuerza-desplazamiento se puede escribir.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

6.39

donde.

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_1 x \\ P_1 y \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} P_2 x \\ P_2 y \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} P_3 x \\ P_3 y \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad D_3 = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Ahora puede utilizarse la matriz de rigideces en la misma forma que se utilizó para los los elementos barra, en el método de las rigideces directo para determinar los desplazamientos nodales.

### 6.5.2 MATRIZ DE ESFUERZOS.

Una vez conocidos los desplazamientos nodales de cada elemento

$$[DN] = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Para encontrar los esfuerzos se sabe que:

$$\begin{aligned} [\sigma] &= [E] [\epsilon] \\ [\epsilon] &= B DN \end{aligned}$$

sustituyendo:

$$[\sigma] = [E] [B] [DN]$$

llamando  $[S] = [E] [B]$  matriz de esfuerzo, se puede escribir:

$$[\sigma] = [S] [DN] \tag{6.40}$$

por lo que

$$S = \frac{1}{2DET} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2DET} \begin{bmatrix} E_{11}a_1 & E_{12}b_1 & E_{11}a_2 & E_{12}b_2 & E_{11}a_3 & E_{12}b_3 \\ E_{21}a_1 & E_{22}b_1 & E_{21}a_2 & E_{22}b_2 & E_{21}a_3 & E_{22}b_3 \\ E_{33}b_1 & E_{33}a_1 & E_{33}b_2 & E_{33}a_2 & E_{33}b_3 & E_{33}a_3 \end{bmatrix} \tag{6.41}$$

Para cada elemento se tendrán tres esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  en base a estos se puede calcular las direcciones y esfuerzos principales para cada elemento.

Si se analiza la matriz de esfuerzos S se observa que ninguno de los términos es función de x o y. Esto significa que los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  son constantes a través del elemento. Estos esfuerzos pueden considerarse como esfuerzos medios del elemento.

### 6.5.3 EJEMPLO DE APLICACION PARA ESFUERZOS PLANOS.

Analizar la placa rectangular que se muestra en la figura 6.21, usar un elemento finito triangular, desprecie el peso del cuerpo.

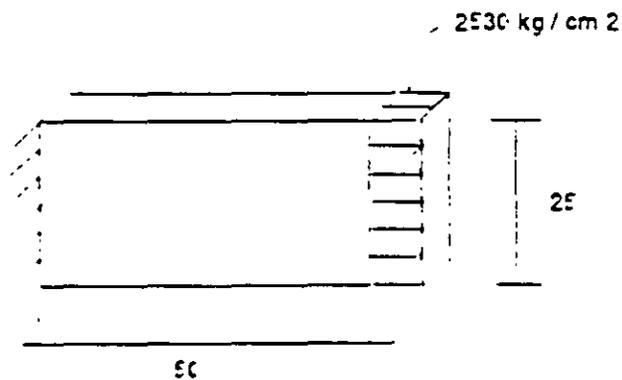


Figura 6.21

Datos:

Espesor  $t = 2.54$  cm

Módulo de elasticidad  $E = 2 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>

Relación de Poisson  $\mu = 0.25$

Para plantear la ecuación fuerza-desplazamiento de la placa, primero hay que idealizarla. En este caso particular la idealización se hace considerando los elementos finitos.

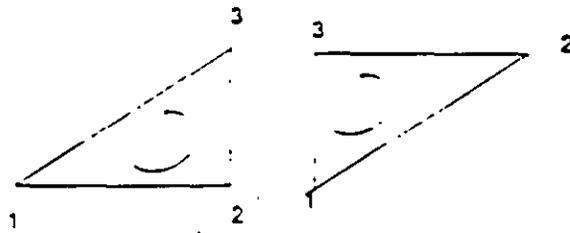


Figura 6.22

Así

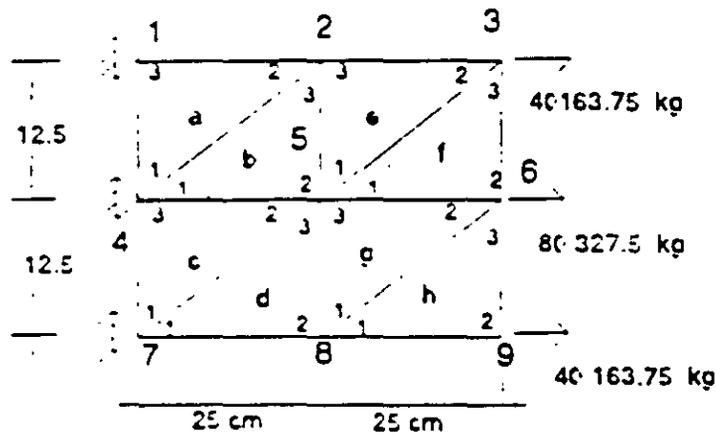


Figura 6.23

Se observa que todos los vértices de las triángulos están numerados de 1 a 3 en sentido contrario a la manecillas del reloj, estos números indican el vértice que llega a un nodo. Los números dentro de los círculos representan la numeración de los nodos.

Las cargas en los nodos se obtienen por áreas tributarias, así:

$$P_{3a} = 2530 \times 2.54 \times 6.25 = 40163.75 \text{ kg}$$

$$P_{6a} = 2530 \times 2.54 \times 12.50 = 80227.50 \text{ kg}$$

Al igual que el método directo de las rigideces la ecuación fuerza desplazamiento para el sistema estructural esta dada por:  $P' = K' DN'$

$P_2$	$K_{220} \cdot K_{230} \cdot K_{200}$	$K_{220}$	$K_{220} \cdot K_{210}$	0	0	0	$D_{12}$
$P_3$	$K_{220}$	$K_{220} \cdot K_{201}$	$K_{210} \cdot K_{211}$	$K_{221}$	0	0	$D_{13}$
$P_5$	$K_{220} \cdot K_{130}$	$K_{130} \cdot K_{131}$	$K_{220} \cdot K_{220} \cdot K_{130} \cdot K_{100} \cdot K_{110} \cdot K_{220}$	$K_{211} \cdot K_{220}$	$K_{220} \cdot K_{210}$	0	$D_{15}$
$P_6$	0	$K_{201}$	$K_{211} \cdot K_{220}$	$K_{221} \cdot K_{220} \cdot K_{200}$	$K_{210} \cdot K_{211}$	$K_{220}$	$D_{16}$
$P_8$	0	0	$K_{220} \cdot K_{130}$	$K_{220} \cdot K_{130}$	$K_{220} \cdot K_{110} \cdot K_{110}$	$K_{220}$	$D_{18}$
$P_9$	0	0	0	$K_{220}$	$K_{220}$	$K_{220}$	$D_{19}$

El vector de cargas y el de desplazamientos quedan definidos por:

$$\begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{x3} \\ P_{y3} \\ P_{x5} \\ P_{y5} \\ P_{x6} \\ P_{y6} \\ P_{x8} \\ P_{y8} \\ P_{x9} \\ P_{y9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40163.75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 80327.50 \\ 0 \\ 0 \\ 40163.75 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_5 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_6 \\ U_8 \\ V_8 \\ U_9 \\ V_9 \end{bmatrix} = ?$$

para obtener la matriz de rigideces de cada elemento triangular es necesario conocer los valores de la matriz constitutiva que están dados por la ecuación 6.37.

$$E_{11} = E_{22} = \frac{E}{1-\mu^2} = \frac{2 \times 10^6}{1-(0.25)^2} = 2.13 \times 10^6$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{\mu E}{1-\mu^2} = \frac{0.25(2 \times 10^6)}{1-(0.25)^2} = 0.53 \times 10^6$$

$$E_{33} = \frac{E(1-\mu)}{2(1-\mu^2)} = \frac{2 \times 10^6(1-0.25)}{2[1-(0.25)^2]} = 0.8 \times 10^6$$

De la ecuación 6.38 se puede evaluar las matrices de rigideces para cada elemento.

Recuérdese que la matriz de rigideces es independiente de la posición del sistema global por lo que los elementos a,e,c y g tienen las mismas propiedades de rigides así mismo los elementos b,f,d y h.

Para calcular la matriz de rigideces de los elementos d,e,o y g se consideran las coordenadas del elemento "a".

NODO	X	Y
1	0.0	12.5
2	25.0	25.0
3	0.0	25.0

$$a_1 = y_2 - y_1 = 0$$

$$b_1 = x_3 - x_2 = 0$$

$$a_2 = y_3 - y_1 = 12.5$$

$$b_2 = x_1 - x_3 = 0$$

$$a_3 = y_2 - y_3 = -12.5$$

$$b_3 = x_2 - x_1 = 25$$

$$DET = \frac{1}{2} (b_2 a_3 - a_2 b_3) = 156.25$$

sustituyendo en la ecuación 6.38

$$K_e = \begin{bmatrix} 2032000 & 0 & 0 & -1016000 & -2032000 & 1016000 \\ 0 & 5410200 & -673100 & 0 & 673100 & -5410200 \\ 0 & -673100 & 1352550 & 0 & -1352550 & 673100 \\ -1016000 & 0 & 0 & 508000 & 1016000 & -508000 \\ -2032000 & 673100 & -1352550 & 1016000 & 3384550 & -1689100 \\ 1016000 & -5410200 & 673100 & -508000 & -1689100 & 5918200 \end{bmatrix}$$

Los números que se han puesto arriba y a la derecha de la matriz corresponden a los grados de libertad (por nodo u y v) de los elementos y nos ayudan a particionar la matriz de rigideces en:

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{11e} & K_{12e} & K_{13e} \\ K_{21e} & K_{22e} & K_{23e} \\ K_{31e} & K_{32e} & K_{33e} \end{bmatrix}$$

lo que nos dá las submatrices para sustituir en la ecuación fuerza-desplazamiento para el sistema estructural.

Para calcular la matriz de rigideces de los elementos b,d,f y h se consideran las coordenadas del elemento "b"

NODO	X	Y
1	0	12.5
2	25.0	12.5
3	25.0	25.0

$$a_1 = y_2 - y_3 = -12.5$$

$$b_1 = x_3 - x_2 = 0$$

$$a_2 = y_3 - y_1 = 12.5$$

$$b_2 = x_1 - x_3 = -25.0$$

$$a_3 = y_2 - y_1 = 0$$

$$b_3 = x_2 - x_1 = 25$$

$$DET = \frac{1}{2} (b_1 a_2 - a_1 b_2) = 156.25$$

sustituyendo en la ecuación 6.38

$$K_b = \begin{bmatrix} 1352550 & 0 & -1352550 & 673100 & 0 & -673100 \\ 0 & 508000 & 1016000 & -508000 & -1016000 & 0 \\ -1352550 & 1016000 & 3384550 & -1689100 & -2032000 & 673100 \\ 673100 & -508000 & -1689100 & 5918200 & 1016000 & -5410200 \\ 0 & -1016000 & -2032000 & 1016000 & 2032000 & 0 \\ -673100 & 0 & 673100 & -5410200 & 0 & 5410200 \end{bmatrix}$$

particionando se puede escribir:

$$K_D' = \begin{bmatrix} K_{11b} & K_{12b} & K_{13b} \\ K_{21b} & K_{22b} & K_{23b} \\ K_{31b} & K_{32b} & K_{33b} \end{bmatrix}$$

sustituyendo las submatrices correspondientes en la ecuación fuerza-desplazamiento se obtiene:

0	6789100	-1689100	-1352550	1016000	-4084200	1689100	0	0	0	0	0	0	0
0	-1689100	11836400	873100	-508000	1689100	-10820400	0	0	0	0	0	0	0
40'83.75	1352550	873100	3384550	0	0	-1689100	-2032000	1016000	0	0	0	0	0
0	1016000	-508000	0	5018200	-1689100	0	873100	-5410200	0	0	0	0	0
0	-4084200	1689100	0	-1689100	13538200	-3878200	-2705100	1689100	-4084200	1689100	0	0	0
0	1689100	-10820400	1689100	0	-3378200	23872800	1689100	-1016000	1689100	-10820400	0	0	0
80327.5	0	0	-2032000	873100	-2705100	1689100	873100	-1689100	0	-1689100	-2032000	1016000	0
0	0	0	1016000	-5410200	1689100	-1016000	-1689100	11836400	-1689100	0	873100	-5410200	0
0	0	0	0	0	-4084200	1689100	0	-1689100	6789100	-1689100	-1352550	873100	0
0	0	0	0	0	1689100	-10820400	-1689100	0	-1689100	11836400	1016000	-508000	0
40'83.75	0	0	0	0	0	0	-2032000	873100	-1352550	1016000	3384550	-1689100	0
0	0	0	0	0	0	0	1016000	-5410200	873100	-508000	-1689100	5018200	0

solucionando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} d_{x2} \\ d_{y2} \\ d_{x3} \\ d_{y3} \\ d_{x5} \\ d_{y5} \\ d_{x6} \\ d_{y6} \\ d_{x8} \\ d_{y8} \\ d_{x9} \\ d_{y9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.94858 \times 10^{-2} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \\ 6.08817 \times 10^{-2} \\ 1.7609 \times 10^{-4} \\ 3.043 \times 10^{-2} \\ 1.318 \times 10^{-3} \\ 6.222 \times 10^{-2} \\ 4.1946 \times 10^{-3} \\ 3.22126 \times 10^{-2} \\ 5.2168 \times 10^{-3} \\ 6.376 \times 10^{-2} \\ 8.1336 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Para determinar las fuerzas que actúan en cada elemento se aplica la ecuación fuerza-desplazamiento:

$$\begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} & K'_{13} \\ K'_{21} & K'_{22} & K'_{23} \\ K'_{31} & K'_{32} & K'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DN'_1 \\ DN'_2 \\ DN'_3 \end{bmatrix}$$

que desarrollando se puede escribir:

$$P'_1 = K'_{11}DN'_1 + K'_{12}DN'_2 + K'_{13}DN'_3$$

$$P'_2 = K'_{21}DN'_1 + K'_{22}DN'_2 + K'_{23}DN'_3$$

$$P'_3 = K'_{31}DN'_1 + K'_{32}DN'_2 + K'_{33}DN'_3$$

Por compatibilidad:

$$D'_{1a} = 0 \quad D'_{1c} = 0 \quad D'_{1e} = DN'_5 \quad D'_{1g} = DN'_8$$

$$D'_{2a} = DN'_2 \quad D'_{2c} = DN'_4 \quad D'_{2e} = DN'_3 \quad D'_{2g} = DN'_6$$

$$D'_{3a} = 0 \quad D'_{3c} = 0 \quad D'_{3e} = DN'_2 \quad D'_{3g} = DN'_5$$

$$D'_{1b} = 0 \quad D'_{1d} = 0 \quad D'_{1f} = DN'_5 \quad D'_{1h} = DN'_8$$

$$D'_{2b} = DN'_5 \quad D'_{2d} = DN'_3 \quad D'_{2f} = DN'_6 \quad D'_{2h} = DN'_3$$

$$D'_{3b} = DN'_2 \quad D'_{3d} = DN'_5 \quad D'_{3f} = DN'_3 \quad D'_{3h} = DN'_5$$

Aplicando la ecuación fuerza-desplazamiento para cada elemento:

Elemento "a":

$$P'_{1a} = \begin{bmatrix} 0 & -1016000 \\ -673100 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.948 \times 10^{-2} \\ -2.3889 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2422.04 \\ -19846.95 \end{bmatrix}$$

$$P'_{2a} = \begin{bmatrix} 135255 & 0 \\ 0 & 508000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.948 \times 10^{-2} \\ -2.3889 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39881.14 \\ -1211.02 \end{bmatrix}$$

$$P'_{3a} = \begin{bmatrix} -1352550 & 1016000 \\ 673100 & -508000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.948 \times 10^{-2} \\ -2.3889 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42303.18 \\ 21057.97 \end{bmatrix}$$

Elementos "b", "c" y "d":

$$P_{2b} = \begin{bmatrix} 3384550 & -1689100 \\ -1689100 & 5918200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.043 \times 10^{-2} \\ 1.3188 \times 10^{-3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2032000 & 673100 \\ 1016000 & -5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.9486 \times 10^{-2} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39250.36 \\ -741.949 \end{bmatrix}$$

$$P_{3b} = \begin{bmatrix} 2032000 & 1016000 \\ 673100 & -5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.043 \times 10^{-2} \\ 1.3188 \times 10^{-3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2032000 & 0 \\ 0 & 5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.9486 \times 10^{-2} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -582.14 \\ 450.87 \end{bmatrix}$$

$$P_{2c} = \begin{bmatrix} 1352550 & 0 \\ 0 & 508000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.04318 \times 10^{-2} \\ 1.31888 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41160.56 \\ 669.99 \end{bmatrix}$$

$$P_{2d} = \begin{bmatrix} 3384550 & -1689100 \\ -1689100 & 5918200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.222 \times 10^{-2} \\ 5.217 \times 10^{-3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2032000 & 673100 \\ 1016000 & -5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.04318 \times 10^{-2} \\ 1.31888 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 139292.92 \\ 232.91 \end{bmatrix}$$

$$P_{3d} = \begin{bmatrix} -2032000 & 1016000 \\ 673100 & -5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.222 \times 10^{-2} \\ 5.217 \times 10^{-3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2032000 & 0 \\ 0 & 5410200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.0431 \times 10^{-2} \\ 1.3188 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1666.21 \\ 599.19 \end{bmatrix}$$

y así para los otros elementos se obtiene:

$$\begin{bmatrix} P'_{ix} \\ P'_{iy} \\ P'_{ix} \\ P'_{iy} \\ P'_{jx} \\ P'_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -679.14 \\ -1099.71 \\ 39971.91 \\ 339.57 \\ -393000.2 \\ 760.14 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P'_{ix} \\ P'_{iy} \\ P'_{ix} \\ P'_{iy} \\ P'_{jx} \\ P'_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40297.42 \\ -95.87 \\ 54276.17 \\ 435.43 \\ 191.74 \\ -339.56 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P'_{ix} \\ P'_{iy} \\ P'_{ix} \\ P'_{iy} \\ P'_{jx} \\ P'_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 714.32 \\ 311.18 \\ 46378.38 \\ -357.16 \\ -41092.71 \\ -668.34 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} P'_{ix} \\ P'_{iy} \\ P'_{ix} \\ P'_{iy} \\ P'_{jx} \\ P'_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40007.23 \\ 78.27 \\ 40163.78 \\ -0.0145 \\ -156.54 \\ -78.26 \end{bmatrix}$$

Comprobación del equilibrio.

Nodo 2

$$P_2' = P_{2a}' + P_{1b}' + P_{1c}'$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39881.41 \\ -1211.02 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -582.144 \\ 450.878 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -39300.20 \\ 760.14 \end{bmatrix}$$

Nodo 3

$$P_3' = P_{1a}' + P_{1c}'$$

$$\begin{bmatrix} 40163.75 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39971.99 \\ 339.57 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 191.74 \\ -339.56 \end{bmatrix}$$

Nodo 5

$$P_5' = P_{2b}' + P_{1c}' + P_{1d}' + P_{1e}' + P_{1f}' + P_{1g}'$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39250.36 & 41160.56 & 1664.21 & -679.14 & -40297.42 & -41093.7 \\ -741.95 & 669.99 & 539.19 & -1099.71 & -95.87 & 665.34 \end{bmatrix}$$

Nodo 6

$$P_6' = P_{1c}' + P_{1g}' + P_{1h}'$$

$$\begin{bmatrix} 80327.50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40105.63 \\ 435.43 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40378.38 \\ -357.16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -156.54 \\ -78.26 \end{bmatrix}$$

Nodo 8

$$P_8' = P_{1d}' + P_{1e}' + P_{1f}'$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39292 \\ 232.91 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 714.32 \\ -311.18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40007.23 \\ 78.27 \end{bmatrix}$$

Para determinar los esfuerzos en cada elemento, se requiere conocer la matriz de esfuerzos [S] que esta dada por la ecuación 6.41 y sustituirla en la ecuación 6.40.

La matriz de esfuerzos para los elementos a,e,c y g resulta:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -42400 & 85200 & 0 & -85200 & 42400 \\ 0 & -770400 & 21200 & 0 & -21200 & 170400 \\ -64000 & 0 & 0 & 32000 & 64000 & -32000 \end{bmatrix}$$

y para los elementos b,d,f y h.

$$S = \begin{bmatrix} -85200 & 0 & 85200 & -42400 & 0 & 42400 \\ -21200 & 0 & 21200 & -170400 & 0 & 170400 \\ 0 & -32000 & -64000 & 32000 & 64000 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, sustituyendo para cada elemento en la ecuación 6.40

$$[\sigma] = [S] [DN]$$

Elemento "a"

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -42400 & 85200 & 0 & -85200 & 42400 \\ 0 & -770400 & 21200 & 0 & -21200 & 170400 \\ -64000 & 0 & 0 & 32000 & 64000 & -32000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.9486 \times 10^{-3} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2512.20 \\ 625.10 \\ -23.28 \end{bmatrix}$$

Elemento "b"

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -85200 & 0 & 85200 & -42400 & 0 & 42400 \\ -21200 & 0 & 21200 & -170400 & 0 & 170400 \\ 0 & -32000 & -64000 & 32000 & 64000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.0432 \times 10^{-3} \\ 1.3188 \times 10^{-3} \\ 2.9486 \times 10^{-3} \\ -2.3839 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2435.79 \\ 14.20 \\ -18.38 \end{bmatrix}$$

en igual forma para los otros elementos:

Elemento c y d:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2592.79 \\ 645.15 \\ 42.20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2579.98 \\ 18.87 \\ 52.42 \end{bmatrix}$$

Elemento e y f:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2517.92 \\ 34.64 \\ -21.39 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2538.42 \\ -10.69 \\ 6.04 \end{bmatrix}$$

Elemento g y h:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2543.52 \\ -9.80 \\ -22.49 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2520.14 \\ -2.46 \\ -4.93 \end{bmatrix}$$

## 6.6 DEFORMACIONES PLANAS.

Para determinar la matriz de rigideces de un elemento triangular para deformaciones planas se sigue el mismo procedimiento que para un elemento triangular para esfuerzos planos, encontrando que las funciones de forma, la matriz desplazamiento-deformación [S] son las mismas, únicamente la matriz constitutiva es diferente. En este caso el esfuerzo normal  $\sigma_z$  no es nulo, debiendo de añadirse a las otras tres componentes de esfuerzo. Sin embargo la deformación  $\epsilon_z$  si es nula, por lo tanto:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\gamma_{xy} = 2(1+\mu) \frac{\tau_{xy}}{E}$$

pero

$$\epsilon_x = 0 = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

de donde

$$\sigma_z = \mu \sigma_x + \mu \sigma_y$$

sustituyendo en las deformaciones lineales  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E} (\mu \sigma_x + \mu \sigma_y)$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu^2 \frac{\sigma_x}{E} - \mu^2 \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} (1 - \mu^2) - \frac{\sigma_y}{E} (1 - \mu^2)$$

$$\epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E} (\mu \sigma_x + \mu \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \mu^2 \frac{\sigma_x}{E} - \mu^2 \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\sigma_x}{E} (1 - \mu^2) + \frac{\sigma_y}{E} (1 - \mu^2)$$

Arreglando en forma matricial las ecuaciones correspondientes a las deformaciones lineales  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y a la deformación angular  $\tau_{xy}$  se tiene:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} (1-\mu^2) & -(1-\mu^2) & 0 \\ -(1-\mu^2) & (1-\mu^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Considerando la relación inversa.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

en forma compacta:

$$[\sigma] = [E] [\epsilon]$$

por lo que la matriz constitutiva se puede escribir:

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix}$$

donde.

$$E_{11} = E_{22} = \frac{E(1-\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)}$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{E\mu}{(1-\mu)(1-2\mu)}$$

$$E_{33} = \frac{E(1-\mu)}{2(1-\mu^2)}$$

por lo que la ecuación 6.31 sigue siendo válida para valuar la matriz de rigideces de un elemento triangular para deformaciones planas.

Las ecuaciones 6.40 y 6.41 por consiguiente son válidas para este tipo de elementos y la solución de la ecuación 6.41 da como resultado los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . El esfuerzo  $\sigma_x$  se determina en función de los esfuerzos  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  por medio de la expresión:

$$\sigma_x = \mu\sigma_x + \mu\sigma_y$$

## 6.7 ANALISIS DE ESFUERZOS EN CUERPOS DE REVOLUCION.

Existen estructuras cuya geometría queda definida mediante un cuerpo de revolución, existiendo entonces aximetría. Los problemas matemáticos que se presentan son muy similares a los de esfuerzos y deformaciones planas, ya que el problema se trata en forma bidimensional. Por simetría el estado de deformaciones y por consiguiente el de esfuerzos esta definido completamente por las dos componentes de desplazamientos. En la figura 6.23 se representa una de tales secciones.

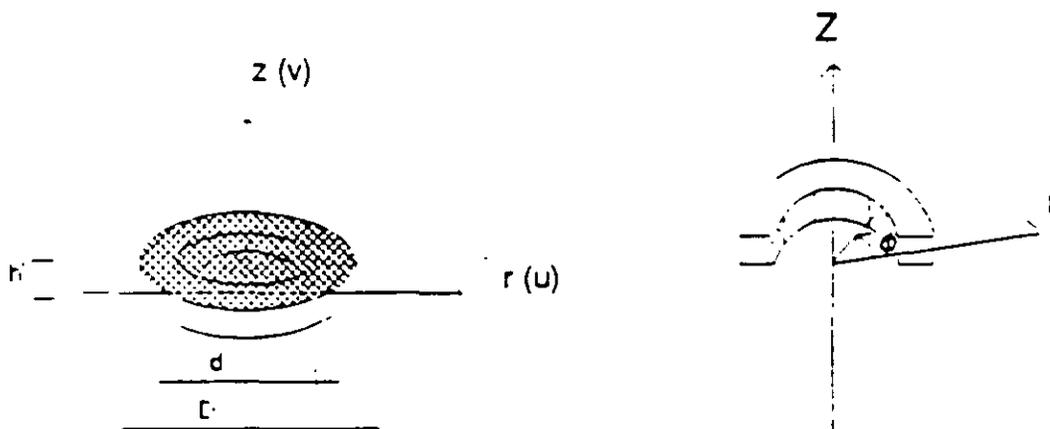


Figura 6.23

Si  $r$  y  $z$  representan respectivamente las coordenadas radial y axial de un punto respectivamente y  $u$  y  $v$  los desplazamientos correspondientes, es fácil ver que si se utiliza un elemento rectangular las ecuaciones de desplazamiento planteadas en las ecuaciones 6.5 pueden usarse para este problema, por consiguiente las funciones de forma expresadas por las ecuaciones 6.15 también son válidas, únicamente se hará el cambio de  $r$  por  $x$  y  $z$  por  $y$ .

También se puede utilizar un elemento triangular, en este caso se pueden usar las mismas funciones de desplazamiento utilizadas para esfuerzos y deformaciones planas. Sin embargo en este trabajo se planteará como ya se mencionó para un elemento rectangular.

**6.7.1 MATRIZ DE RIGIDEZES DE UN ELEMENTO RECTANGULAR PARA UN PROBLEMA AXISIMETRICO.**

Considérese los grados de libertad mostrados en la figura 6.24.

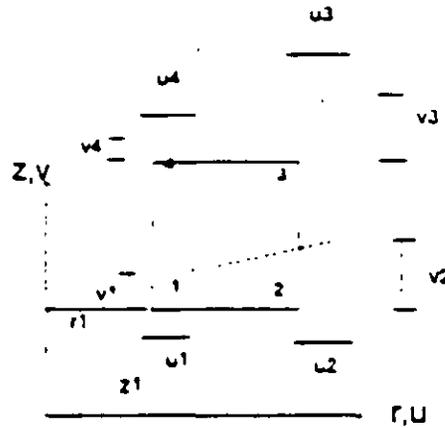


Figura 6.24

El campo de desplazamientos en términos de las funciones de forma se planteó así:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

De la teoría de elasticidad para un sólido axisimétrico el estado de esfuerzos queda definido por:

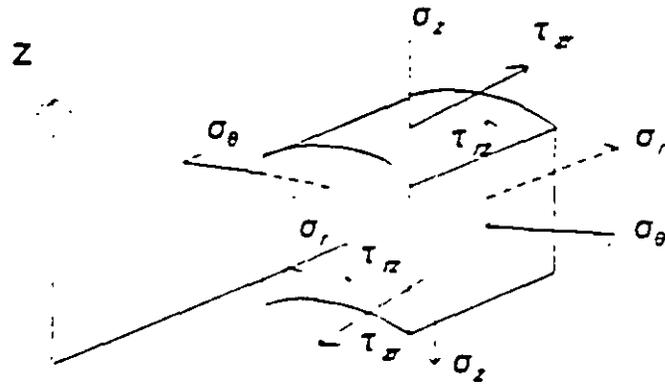


Figura 6.25

Por lo que las deformaciones a considerar en un sólido de revolución serán  $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_z$ ,  $\epsilon_\theta$  y  $\gamma_{rz}$ , así el vector de deformación queda definido por:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{bmatrix}$$

sustituyendo el campo de desplazamientos

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial N_1}{\partial r} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial r} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial r} u_3 + \frac{\partial N_4}{\partial r} u_4 \\ \epsilon_z &= \frac{\partial N_1}{\partial z} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial z} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial z} v_3 + \frac{\partial N_4}{\partial z} v_4 \\ \epsilon_\theta &= \frac{N_1}{r} u_1 + \frac{N_2}{r} u_2 + \frac{N_3}{r} u_3 + \frac{N_4}{r} u_4 \end{aligned}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial N_1}{\partial z} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial z} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial z} u_3 + \frac{\partial N_4}{\partial z} u_4 + \frac{\partial N_1}{\partial r} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial r} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial r} v_3 + \frac{\partial N_4}{\partial r} v_4$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1r} & 0 & N_{2r} & 0 & N_{3r} & 0 & N_{4r} & 0 \\ 0 & N_{1x} & 0 & N_{2x} & 0 & N_{3x} & 0 & N_{4x} \\ N_{1\theta} & 0 & N_{2\theta} & 0 & N_{3\theta} & 0 & N_{4\theta} & 0 \\ N_{1z} & N_{1r} & N_{2z} & N_{2r} & N_{3z} & N_{3r} & N_{4z} & N_{4r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

esta ecuación se puede expresar en forma compacta como:

$$[ \epsilon ] = [ B ] [ DN ]$$

donde:

$$N_{1r} = \frac{\partial N_1}{\partial r} = b_1 \cdot d_1 z$$

$$N_{2r} = \frac{\partial N_2}{\partial r} = b_2 \cdot d_2 z$$

$$N_{3r} = \frac{\partial N_3}{\partial r} = b_3 \cdot d_3 z$$

$$N_{4r} = \frac{\partial N_4}{\partial r} = b_4 \cdot d_4 z$$

$$N_{1x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} = c_1 \cdot d_1 r$$

$$N_{2x} = \frac{\partial N_2}{\partial x} = c_2 \cdot d_2 r$$

$$N_{3x} = \frac{\partial N_3}{\partial x} = c_3 \cdot d_3 r$$

$$N_{4x} = \frac{\partial N_4}{\partial x} = c_4 \cdot d_4 r$$

Para definir la matriz constitutiva se aplica cada una de las componentes del vector deformación en términos de los esfuerzos que la generan, así:

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_\theta}{E} \\ \epsilon_z &= -\mu \frac{\sigma_r}{E} + \frac{\sigma_z}{E} - \mu \frac{\sigma_\theta}{E} \\ \epsilon_\theta &= -\mu \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_\theta}{E} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\tau_{rz}}{G} = \frac{2(1-\mu)}{E} \tau_{rz}\end{aligned}$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-\mu) \end{bmatrix} \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{bmatrix}$$

considerando la relación inversa

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mu)}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix}$$

En forma reducida:

$$[\sigma] = [E] [\epsilon]$$

por lo tanto la matriz constitutiva resulta

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} \end{bmatrix}$$

donde:

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = \frac{E(1-\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)}$$

$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = \frac{E\mu}{(1-\mu)(1-2\mu)}$$

sustituyendo la matriz desplazamiento-deformación y la matriz constitutiva en la ecuación 6.28 se puede evaluar la matriz de rigideces. Recordando que la integral de volumen ha de extenderse a todo el anillo de material, se tiene:

$$K^* = 2\pi \int B^T E B r dr dz$$

Sustituyendo se obtendría:

$$K^* = 2\pi \int \begin{bmatrix} N_{1r} & 0 & N_{1\theta} & N_{1z} \\ 0 & N_{1z} & 0 & N_{1r} \\ N_{2r} & 0 & N_{2\theta} & N_{2z} & E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & N_{1r} & 0 & N_{2r} & 0 & N_{3r} & 0 & N_{4r} & 0 \\ 0 & N_{2z} & 0 & N_{2r} & E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & N_{1z} & 0 & N_{2z} & 0 & N_{3z} & 0 & N_{4z} \\ N_{3r} & 0 & N_{3\theta} & N_{3z} & E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 & N_{1r} & 0 & N_{2r} & 0 & N_{3r} & 0 & N_{4r} & 0 \\ 0 & N_{3z} & 0 & N_{3r} & 0 & 0 & 0 & E_{44} & N_{1z} & N_{1r} & N_{2z} & N_{2r} & N_{3z} & N_{3r} & N_{4z} & N_{4r} \\ N_{4r} & 0 & N_{4\theta} & N_{4z} \\ 0 & N_{4z} & 0 & N_{4r} \end{bmatrix} r dr dz$$

Como puede observarse las matrices desplazamiento-deformación [B] dependen de las coordenadas r y z por lo que la integral no puede realizarse tan sencillamente como en el caso de esfuerzos y deformaciones planas. Hay dos alternativas para realizar esta integral, la primera es una integración numérica, la segunda una multiplicación explícita y una integración término a término.

El procedimiento aproximado más sencillo es valuar la matriz desplazamiento-deformación [B] en el centro de gravedad de cada elemento, así:

$$K^e = 2\pi B^T E B r \Delta$$

siendo  $\Delta$  el área del elemento.

Esta aproximación se basa en la demostración de que si la integración numérica es de un orden tal que permita determinar exactamente el volumen del elemento, entonces la solución converge hacia la solución exacta cuando se aumenta indefinidamente el número de elementos.

Se puede seguir un procedimiento de integración más elaborado calculando el valor del integrando en varios puntos del elemento, para el elemento rectangular con 4 puntos (dos en cada dirección) se obtiene buena aproximación. figura 6.26.

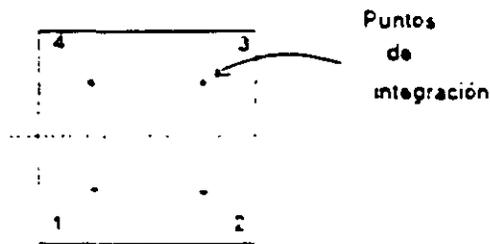


Figura 6.26

En general los puntos de integración se eligen considerando que el número de puntos de integración por tres deberá ser mayor que el grado de libertad (número de nodos por 2), menos los grados de libertad restringidos, esto es para que la matriz K sea no singular.

Aplicando la cuadratura de Gauss la matriz de rigideces se obtiene con:

$$K_{ij}^e = 2\pi r \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j B_i^T E B_j \Delta$$

donde  $n$  son los puntos de integración elegidos en cada dirección y  $W_i$ ,  $W_j$  son los coeficientes de peso de la fórmula de la cuadratura de Gauss.

Para obtener las coordenadas de los puntos de integración, así como a los coeficientes de peso de las fórmulas de cuadratura de Gauss se utiliza la tabla 8.1 pag. 228 del libro "El método de los elementos finitos" de O. C. Zienkiewicz.

### 6.7.2 MATRIZ DE ESFUERZOS PARA UN ELEMENTO AXISIMETRICO.

En este tipo de elementos el esfuerzo varía con respecto a las coordenadas por lo que es conveniente valuar dicho esfuerzo en el centroide del elemento y el procedimiento a seguir es el mismo que en esfuerzos y deformaciones planas, solo habrá que incluir los desplazamientos nodales correspondientes a los grados de libertad  $U_4$  y  $V_4$ . De la ecuación 6.40

$$[ \sigma ] = [ S ] [ DN ]$$

Una vez valuada la matriz desplazamiento-deformación  $[B]$  en el centroide del elemento se hace el producto con la matriz constitutiva para obtener la matriz esfuerzo.

$$[ S ] = [ E ] [ B ]$$

## BIBLIOGRAFIA

1. R. K. Livesley; Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press.
2. J. S. Przemieniecki; Theory of Matrix Structural Analysis, Mc Graw Hill.
3. H. Kardestuncer; Introducción al Análisis Estructural con Matrices; Mc Graw Hill.
4. Jeffrey p. Laible; Análisis Estructural; Mc Graw Hill.
5. A. Gali y A. M Neville; Análisis Estructural ; Diana.
6. J. Esterlin Kinney; Análisis de Estructuras Indeterminadas; Cecsca.
7. Carlos Magdaleno; Análisis Matricial de Estructuras Reticulares.
8. Heberto Martinez C; Análisis y diseño estructural; Representaciones y Servicios de Ingeniería.
9. Filonenko Borobich; Theory of Elasticity; Mir.
10. S. Timoshenko and J. N. Goodier; Teoría de la elasticidad; Urmo, s. a. de Edic.
11. Richard H. Gallagher; Finite element analysis fundamentals; Prentice Hall.
12. Zienkiewicz O. C. ; The Finit Element Method; Mc Graw Hill.
13. Analysis of framed structural; J. M. Gere and W. Weaver; Van Nostrand Company



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

**TEMA**

## **ANÁLISIS DINAMICO**

**EXPOSITOR: ING. AMILCAR GALINDO SOLORZANO  
PALACIO DE MINERÍA  
FEBRERO DEL 2001**



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

"ARAGON"

CURSO DE INGENIERIA SISMICA

ANALISIS DINAMICO

ING. AMILCAR GALINDO SOLORIZANO

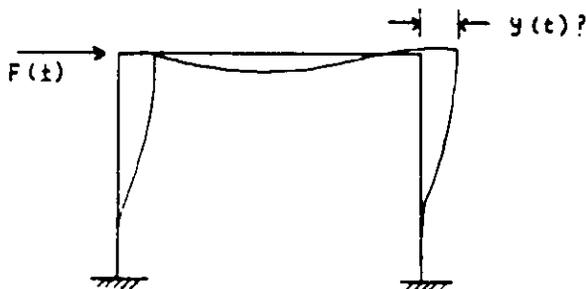
1 9 9 2

## ANALISIS DINAMICO

### Definición

Se denomina análisis dinámico al procedimiento que permite calcular la respuesta de una estructura, en función del tiempo, ante la acción de una carga que es también variable con el tiempo. La respuesta que con mayor frecuencia se calcula es el desplazamiento, ya que si se conoce la posición de los puntos de la estructura en cada instante, es posible también conocer los elementos mecánicos internos en cada instante.

Se ilustra en seguida la definición anterior para el caso sencillo de una estructura de un sólo grado de libertad:



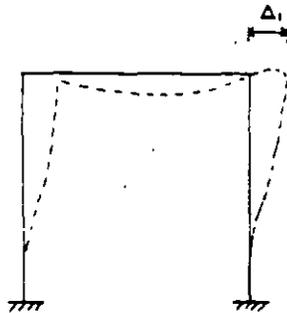
*Conocida la función  $F(t)$   
determinar  $y(t)$*

Se observa que la diferencia de un análisis dinámico con un análisis estático estriba en que el primero incluye el efecto del tiempo en tanto que el segundo, no. Aparte de esto, los dos procedimientos de análisis se rigen por los mismos principios; las relaciones entre fuerzas internas y desplazamientos son idénticas.

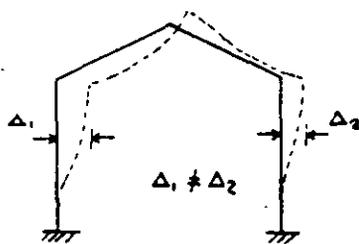
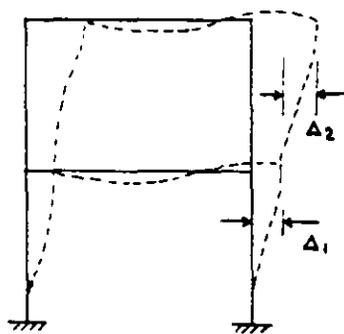
Las acciones exteriores variables con el tiempo y que requieren análisis dinámicos son por ejemplo el sismo, el viento y la carga de los vehículos sobre los puentes. Otras acciones tienen una variación muy lenta con el tiempo y por ello se caracterizan como cargas estáticas, por ejemplo las cargas vivas sobre los edificios.

Grado de libertad

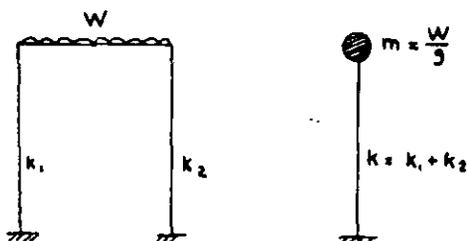
Se denomina grado de libertad al número mínimo de coordenadas que deben conocerse para definir la posición de un sistema en un instante dado. Un marco --



*Estructura de un grado de libertad*



*Estructuras de dos grados de libertad*



*Péndulo: Representación de una estructura de un grado de libertad.*

de un solo piso es una estructura de un solo grado de libertad, porque basta conocer el desplazamiento en la parte superior de las columnas para definir la deformada del sistema. En cambio, un marco de dos pisos es una estructura de dos grados de libertad, porque la deformada queda definida cuando conocemos  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ , los desplazamientos relativos de cada entrepiso.

Un marco con un solo piso, pero con el cabezal a dos aguas es una estructura de dos grados de libertad porque la deformada queda definida al conocer  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ , los desplazamientos en el tope de cada columna que no son iguales por la acción de "tijereteo" de la cumbrera.

Por comodidad, el comportamiento de una estructura de un grado de libertad puede asimilarse al de un péndulo, constituido por una masa sobre un vástago. La masa es  $\frac{W}{g}$  donde  $W$  es el peso concentrado en el piso y la rigidez del vástago es  $k$ , igual a la suma de las rigideces de las columnas del entrepiso.

## ANALISIS DINAMICO DE SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD.

Notación

Consideremos un péndulo oscilando en torno a su posición inicial de equilibrio. El sistema es de un solo grado de libertad porque su posición queda definida -



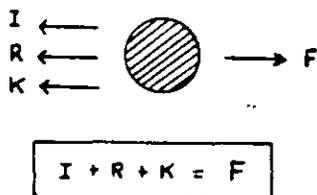
$y(t) =$  Desplazamiento  
 $\dot{y}(t) =$  Velocidad  
 $\ddot{y}(t) =$  Aceleración

si se conoce en cada instante el desplazamiento "y". En cada instante la velocidad de la masa será la primera derivada de y respecto al tiempo,  $\frac{dy}{dt}$  según la notación de Leibnitz o  $\dot{y}(t)$  según la notación de Newton; de igual modo la aceleración será la segunda derivada de y respecto al tiempo:  $\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}(t)$

En lo sucesivo emplearemos la notación de Newton.

Ecuación General del Equilibrio dinámico

D'Alembert, a fines del siglo XVIII estableció la ecuación general del equilibrio dinámico que nos dice que una masa en movimiento en un instante cualquiera se encuentra en equilibrio bajo la acción de cuatro fuerzas:



F = fuerza exterior, causante del movimiento

I = fuerza de inercia, que se opone al movimiento

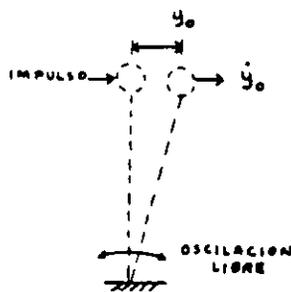
R = fuerza de amortiguamiento, debida a fricción

K = fuerza de restitución elástica, por la que el cuerpo trata de recuperar su posición original

Planteada de esta manera la ecuación del equilibrio dinámico parece ser muy sencilla, pero en realidad es complicada porque las cuatro fuerzas involucradas son funciones del tiempo y aplicadas a un caso particular conducen a una ecuación diferencial en la que debe despejarse la función del desplazamiento:  $y(t)$ .

Aplicada a sistemas de un grado de libertad en que se introducen algunas hipótesis simplificadoras, la ecuación general de equilibrio dinámico conduce a una ecuación diferencial matemáticamente soluble. En seguida, se presentan algunos casos particulares de análisis dinámico de estos sistemas:

a) Oscilación libre no amortiguada



$$F(t) = 0$$

$$R(t) = 0$$

Se supone en este caso que el sistema oscila libremente después de recibir un impulso (fuerza de corta duración) que le produce un desplazamiento inicial " $y_0$ " y una velocidad inicial " $\dot{y}_0$ ". La fuerza exterior y el amortiguamiento son nulos.

La ecuación del equilibrio dinámico se reduce entonces a:

$$I + K = 0$$

Pero por la segunda ley de Newton, la fuerza de inercia es igual a la masa por la aceleración:  $I = m\ddot{y}(t)$ . Si por otro lado se supone que el sistema es elástico lineal la fuerza de restitución elástica puede expresarse como  $K = ky(t)$  donde  $k$  es la rigidez que puede obtenerse como

$$k = \frac{F}{y_p} \left[ \frac{\text{Ton}}{\text{cm}} \right]$$

donde  $F$  es una fuerza estática

$y_p$  es el desplazamiento producido por  $F$

En consecuencia, la ecuación del equilibrio dinámico queda:

$$m \ddot{y}(t) + k y(t) = 0$$

Dividiendo por  $m$  y llamando  $\frac{k}{m} = \omega^2$

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

Ecuación diferencial clásica cuya solución es:

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t$$

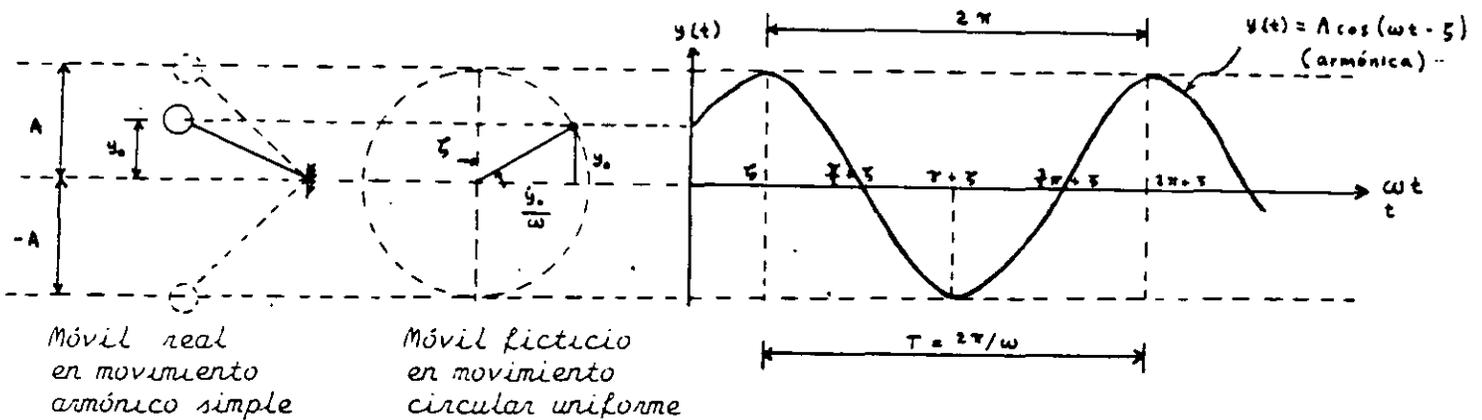
Solución que puede también escribirse:

$$y(t) = A \cos (\omega t - \zeta)$$

Donde  $A =$  amplitud  $= \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega}\right)^2} =$  Máximo desplazamiento del móvil

$$\zeta = \text{fase} = \text{ang tan } \frac{\dot{y}_0}{\omega y_0}$$

Cuya representación gráfica es:



Se observa que la posición del móvil real puede definirse en cada instante -- si se le correlaciona con la de un móvil ficticio en movimiento circular uniforme.

Se llama período  $T$ , al tiempo que tarda el móvil en dar una oscilación completa. Sus unidades son (seg.)

Se llama frecuencia,  $n$ , al número de oscilaciones completas que da el móvil -- en la unidad de tiempo:  $n = \frac{1}{T}$

Unidades: ciclos/seg = Hertz

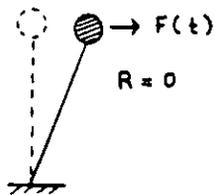
$\omega$  es la frecuencia angular natural; de la gráfica se deduce

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Sus unidades son  $\frac{1}{\text{seg}}$  ó  $\frac{\text{radian}}{\text{Seg}}$

El período  $T$  y la frecuencia  $\omega$  reciben el calificativo de "propios" porque -- no dependen más que de características propias de la estructura: su rigidez  $k$  y su masa  $m$ . Estas características son muy importantes porque definen la respuesta de una estructura ante una acción dinámica.

b) Oscilación forzada no amortiguada



Se supone en este caso, que el móvil sin - amortiguamiento se mueve bajo la acción de una fuerza exterior variable con el tiempo,  $F(t)$

Introduciendo las mismas hipótesis expresadas anteriormente, la ecuación del equilibrio dinámico queda:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = F(t)$$

Para resolver esta ecuación es necesario conocer la función  $F(t)$

Suponiendo que la fuerza exterior es una fuerza cíclica de variación armónica, de la forma

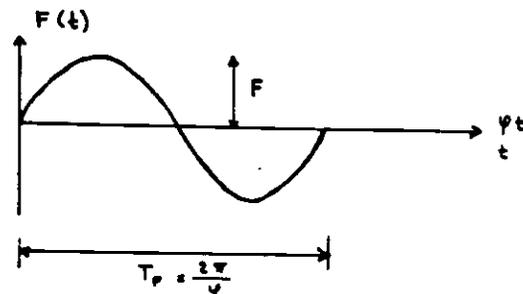
$$F(t) = F \sin \varphi t$$

Donde

$\varphi$  = frecuencia angular de la fuerza

$F$  = Valor máximo que puede adquirir la fuerza

$T_F$  = Período de la fuerza



En consecuencia,

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = F \sin \nu t$$

Dividiendo entre

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{F}{m} \sin \nu t$$

Ecuación diferencial clásica cuya solución es:

$$y(t) = \underbrace{A \cos(\omega t - \xi)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{F}{m} \frac{1}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t}_{\textcircled{2}}$$

El término  $\textcircled{1}$  representa el efecto de la oscilación propia y  $\textcircled{2}$  el de la fuerza.

En los casos de interés práctico el efecto de la fuerza es mucho mayor que el de la oscilación propia, por lo que en forma aproximada se puede escribir

$$y(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t$$

como  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  .  $m = \frac{k}{\omega^2}$

$$\therefore y(t) = \frac{F}{k} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t$$

pero  $\frac{F}{k} = y_{est F}$  = desplazamiento causado por una fuerza estática de valor F

$$y(t) = y_{est F} \frac{1}{1 - \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2} \sin \nu t$$

La función  $\sin \nu t$  puede tener como valor máximo = 1 por lo que,

$$y_{max} = y_{est F} \frac{1}{1 - \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2}$$

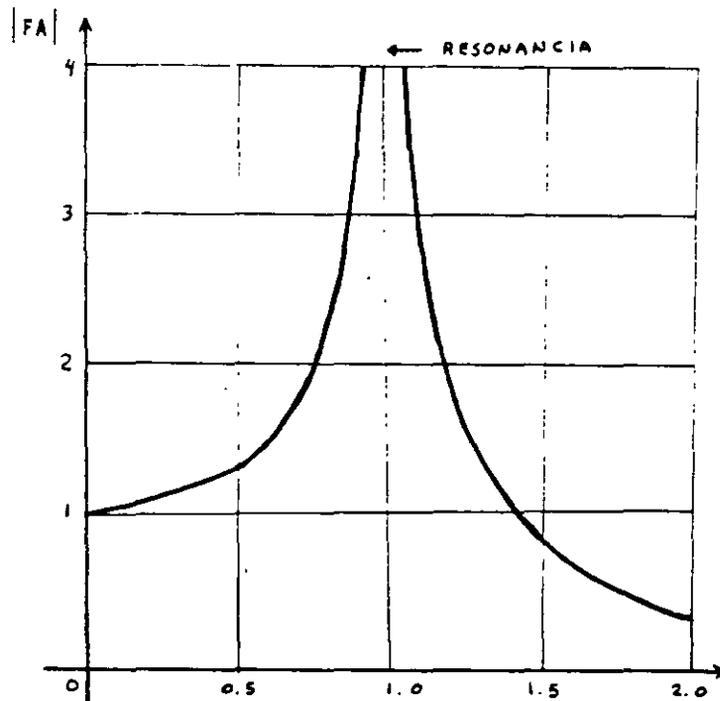
Al término  $\frac{1}{1 - \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2}$  se le llama factor de amplificación

dinámica = (FA), representa la relación entre el desplazamiento máximo causado por una fuerza dinámica de variación armónica y una fuerza estática:

$$FA = \frac{y_{obs}(u, \psi)}{y_{obs}}$$

$$FA = \frac{1}{1 - \left(\frac{\psi}{\omega}\right)^2}$$

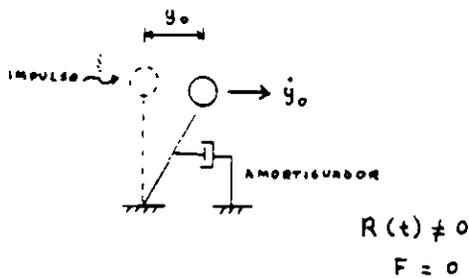
Es interesante observar en una gráfica cómo varía el factor de amplificación - en función de la relación  $\frac{\psi}{\omega}$  :



$\frac{\psi}{\omega}$	FA
0	1
1/2	1.33
1	$\infty$
$\sqrt{2}$	1
2	0.33

Se observa que si  $\psi = \omega$  el factor de amplificación es  $\infty$ , y la deformación - tiende al infinito. A este caso se le llama resonancia.

El concepto de resonancia tiene una gran trascendencia en Ingeniería Sísmica.- Cuando el período del suelo coincide con el período predominante de la excitación sísmica al nivel de roca basal, las aceleraciones a nivel de terreno natural se amplifican considerablemente; por otro lado si el período de un edificio coincide con el período del suelo en que se asienta, aumenta el riesgo de daños.

c) Oscilación libre amortiguada

Se supone, como en el primer caso, que el móvil oscila libremente después de recibir un impulso que le produce un desplazamiento  $y_0$  y una velocidad  $\dot{y}_0$  iniciales; pero ahora se introduce el efecto del amortiguamiento

La ecuación del equilibrio dinámico queda:

$$m\ddot{y}(t) + R(t) + ky(t) = 0$$

Para resolver esta ecuación es preciso conocer la función  $R(t)$ . Con fines de ingeniería se estudian diferentes tipos de amortiguamiento, pero en Ingeniería Sísmica interesa particularmente el llamado amortiguamiento viscoso en el que la fuerza de amortiguamiento en cada instante es proporcional a la velocidad del móvil en ese instante ( $R(t) = \beta \dot{y}(t)$ ) ya que estudios experimentales realizados en modelos físicos y en edificios reales han permitido demostrar que el amortiguamiento de las construcciones comunes es aproximadamente viscoso.

Por lo que puede escribirse

$$m\ddot{y}(t) + \beta \dot{y}(t) + ky(t) = 0$$

Donde  $\beta$  es un coeficiente de proporcionalidad entre fuerza y velocidad, cuyas unidades son Ton  $\frac{\text{seg}}{\text{cm}}$

Dividiendo entre  $m$ , recordando que  $\frac{k}{m} = \omega^2$  y haciendo  $\frac{\beta}{m} = 2\varepsilon$ , se tiene:

$$\ddot{y}(t) + 2\varepsilon \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

Donde:

$$\varepsilon = \frac{\beta}{2m} = \text{Factor de amortiguamiento.}$$

La anterior es una ecuación diferencial clásica cuya solución es:

$$y(t) = e^{-\epsilon t} A^* \cos(\omega^* t - \zeta^*)$$

donde

$e$  = base de los logaritmos Neperianos

$$A^* = \text{amplitud amortiguada} = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 + \epsilon y_0}{\omega^*}\right)^2}$$

$$\zeta^* = \text{fase amortiguada} = \arctan \frac{\dot{y}_0 + \epsilon y_0}{\omega^* y_0}$$

$$\omega^* = \text{frecuencia angular amortiguada} = \sqrt{\omega^2 - \epsilon^2}$$

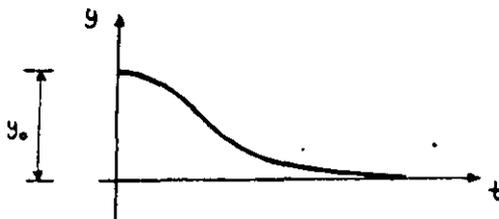
Se denomina "porcentaje de amortiguamiento" a la relación

$$\nu, \% = \frac{\epsilon}{\omega} 100, \quad \nu = \frac{\epsilon}{\omega}$$

por lo que

$$\omega^* = \omega \sqrt{1 - \nu}$$

Cuando  $\epsilon = \omega$ ,  $\nu = 1$ , se tiene el caso de amortiguamiento crítico y después de recibir el impulso el móvil regresa a su posición de equilibrio lentamente, sin oscilar:



*Amortiguamiento crítico*

Los amortiguamientos de las estructuras se expresan en función de  $\nu$ , porcentaje del amortiguamiento crítico. En forma experimental, se ha demostrado que los edificios comunes tienen porcentajes de amortiguamiento muy pequeños - - (del 2 al 7%) (valor medio: 5%) por lo que  $\omega^* \doteq \omega$

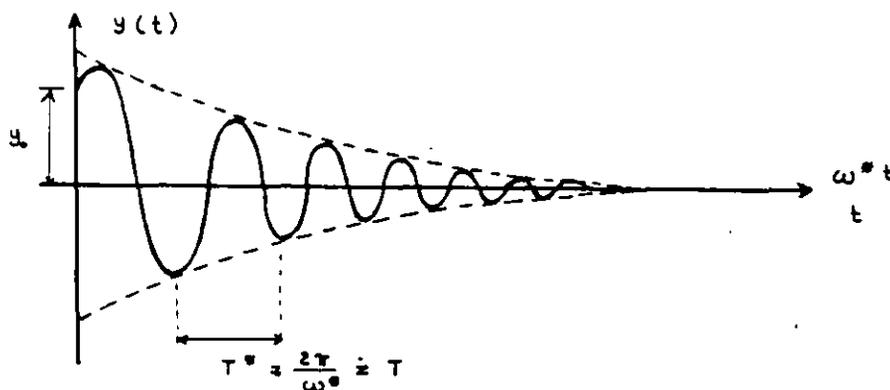
Introduciendo esta igualdad en las expresiones anteriores y substituyendo se tiene:

$$y(t) = e^{-\nu\omega t} A^* \cos(\omega t - \zeta^*)$$

donde

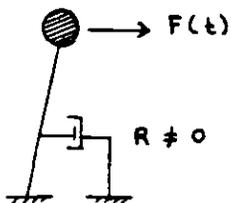
$$A^* = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega} + \nu y_0\right)^2} \quad \zeta^* = \text{ang tan} \left( \frac{\dot{y}_0}{\omega y_0} + \nu \right)$$

Gráficamente, la función toma esta forma:



Comparando esta gráfica con la del primer caso, se observa que el amortiguamiento tiene por efecto reducir en cada ciclo el tamaño de la amplitud, hasta que en unos cuantos ciclos las oscilaciones se vuelven muy pequeñas y el movimiento prácticamente se para. El período de la estructura amortiguada es - - prácticamente igual al de la no amortiguada.

#### d) Oscilación forzada amortiguada



Este es el caso general, en que un móvil amortiguado oscila bajo la acción de una fuerza exterior, variable con el tiempo. Si el sistema es elástico-lineal y el - - amortiguamiento viscoso, la ecuación - -

del equilibrio dinámico será:

$$m\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)$$

Para resolver esta ecuación, se requiere conocer la función  $F(t)$  Consideremos en seguida algunos subcasos correspondientes a diversas funciones  $F(t)$

d 1) La fuerza exterior es una función armónica del tiempo

Sea

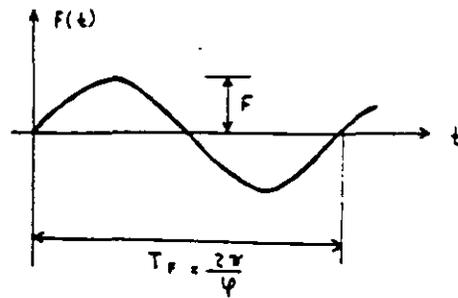
$$F(t) = F \sin \varphi t$$

donde

$F$  = valor máximo de la fuerza

$\varphi$  = frecuencia de la fuerza

$T_r$  = período de la fuerza



Bajo esta consideración:

$$m\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + ky(t) = F \sin \varphi t$$

Dividiendo entre  $m$ , recordando que

$$\frac{\beta}{m} = 2\varepsilon = 2\nu\omega \quad \frac{k}{m} = \omega^2$$

se tiene

$$\ddot{y}(t) + 2\nu\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{F}{m} \sin \varphi t$$

Ecuación diferencial cuya solución es

$$y(t) = \underbrace{e^{-\varepsilon t} A^e \cos(\omega t - \zeta^e)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{F}{k} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2\right)^2 + 4\nu^2 \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2}} \right]}_{\textcircled{2}} \sin(\varphi t - \zeta)$$

El término  $\textcircled{2}$  representa el efecto de la fuerza y el término  $\textcircled{1}$  el de la oscilación propia. En los casos de interés  $\textcircled{2}$  es mucho mayor que  $\textcircled{1}$  por lo que en forma aproximada

$$y(t) = \frac{F}{k} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\nu^2 \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2}} \right] \sin(\varphi t - \zeta)$$

donde

$$\zeta = \text{fase} = \arctan \frac{2\nu \frac{\varphi}{\omega}}{1 - \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2}$$

Pero  $\frac{F}{k} = y_{est.}$  y

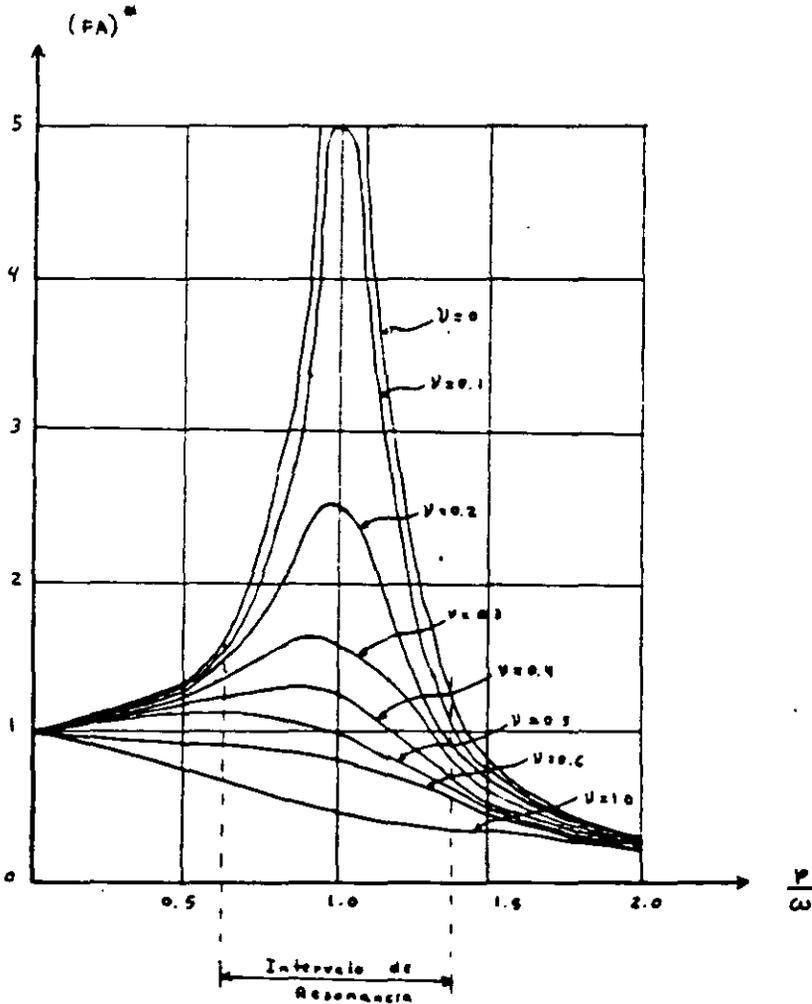
Al término  $\frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2 + 4D^2 (\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$  se le denomina "factor de amplificación dinámica amortiguada" y se le representa por  $(FA)^*$  por lo que

$$y(t) = y_{est.} (FA)^* \text{sen}(\omega t - \zeta)$$

Como el máximo valor de la función  $\text{sen}$  es 1,

$$y_{max} = y_{est.} (FA)^*$$

la siguiente gráfica muestra la variación de  $(FA)^*$  en función de  $(\frac{\omega}{\omega_n})$ :



Se observa que el amortiguamiento atenúa considerablemente el efecto de resonancia, ya que para  $\frac{\nu}{\omega} = 1$ , los desplazamientos máximos dinámicos son aproximadamente 5 veces el estático para  $\nu = 10\%$  y no  $\infty$  como para  $\nu = 0$

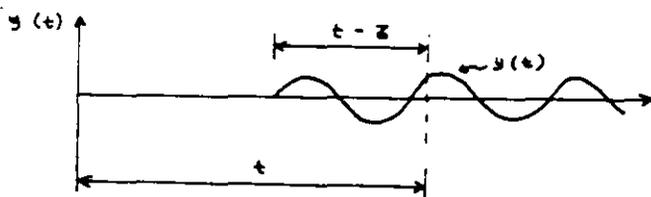
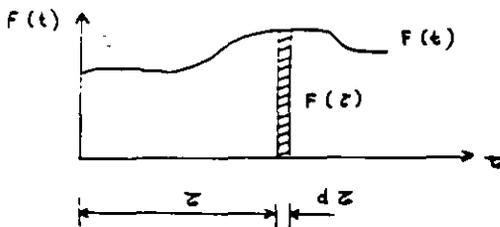
A mayor amortiguamiento menor amplificación dinámica.

El efecto es más acentuado en la zona de resonancia, para:  $0.7 < \frac{\nu}{\omega} < 1.3$

El amortiguamiento tiene, en resumen, un efecto favorable en el comportamiento dinámico de las estructuras, de ahí el alto interés que existe en determinar su valor efectivo en estructuras reales.

d 2) La fuerza exterior es una función cualquiera

Para resolver este caso descomponemos la acción de la fuerza en la acción de una serie de impulsos, cada uno de los cuales actúa durante un intervalo de tiempo muy pequeño



Consideremos el desplazamiento "y" que en el instante t produce el impulso  $F(z)$  que actúa en el instante  $z$

Si no se considera el amortiguamiento:

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{y_0}{\omega} \sin \omega t$$

Però el impulso se aplica con -

$y_0 = 0$  por lo que:

$$y(t) = \frac{y_0}{\omega} \sin [(t-z)\omega]$$

Habiéndose substituido  $t$  por  $t-z$  ya que éste es el tiempo de acción del - -

impulso.

Por otra parte, aplicando el principio de la cantidad de movimiento:

Fuerza. tiempo = masa. velocidad

$$F(z) dz = m \dot{y}_0$$

$$\dot{y}_0 = \frac{F(z)}{m} dz$$

Substituyendo en la ecuación anterior,

$$y(t) = \frac{F(z)}{\omega m} \text{sen}(\omega(t-z)) dz$$

Pero este desplazamiento es el causado por un solo impulso, por lo que substituímos  $y(t)$  por  $dy$

$$dy = \frac{F(z)}{\omega m} \text{sen}(\omega(t-z)) dz$$

Para obtener el desplazamiento total en el instante  $t$  integramos el efecto de todos los impulsos que actúan desde  $t=0$  hasta  $t=t$ :

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \frac{F(z)}{m} \text{sen}(\omega(t-z)) dz$$

Si se introduce el efecto del amortiguamiento, el resultado anterior se modifica como sigue:

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \frac{F(z)}{m} e^{-\nu\omega(t-z)} \text{sen}[\omega(t-z)] dz$$

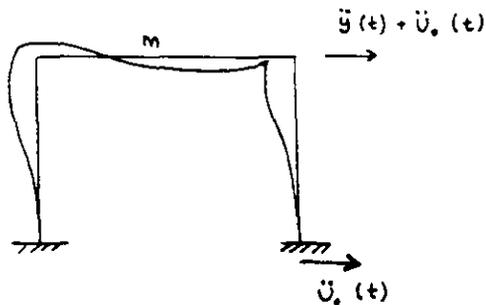
A esta integral se le llama la "Integral de Duhamel" y se le asigna gran importancia en Ingeniería Sísmica. Se enfatiza que la ecuación anterior es la solución de la ecuación general .

$$\ddot{y}(t) + 2\nu\omega \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{F(t)}{m}$$

Donde  $F(t)$  es una función cualquiera

d 3) La fuerza exterior es la acción sísmica

Denominando  $U_h(t)$  al desplazamiento del terreno por sismo a la profundidad  $h$ ,  $U_o(t)$  al desplazamiento del terreno a profundidad  $o$ , en la base de una estructura,



al desplazamiento relativo de la estructura respecto a su base, en la masa de la estructura actuará durante un sismo la aceleración  $\ddot{y}(t) + \ddot{U}_o(t)$  y como no actúa ninguna fuerza exterior, la ecuación del equilibrio dinámico es una estructura

de un grado de libertad queda:

$$m (\ddot{y}(t) + \ddot{U}_o(t)) + \beta \dot{y}(t) + k y(t) = 0$$

de donde puede obtenerse:

$$m \ddot{y}(t) + \beta \dot{y}(t) + k y(t) = -m \ddot{U}_o(t)$$

Dividiendo entre  $m$ :

$$\ddot{y}(t) + 2\gamma\omega \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \ddot{U}_o(t)$$

(Se elimina el signo por ser irrelevante en el segundo miembro de la igualdad anterior, ya que el sismo es alternante) comparando esta última expresión con la escrita al final del subcaso anterior es evidente que la solución es:

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{U}_o(\tau) e^{-\gamma\omega(t-\tau)} \text{sen}[\omega(t-\tau)] d\tau$$

Es importante destacar que el comportamiento sísmico puede analizarse como si actuase una fuerza exterior de valor  $-m\ddot{U}_o(t)$  pero que en realidad el sismo no es un problema de fuerza exterior impuesta a la estructura, sino de deformación impuesta.

Interesa el desplazamiento máximo, para el cual se tendrán los elementos mecánicos internos máximos.

Este vale:

$$y_{\max} = \frac{1}{\omega} \left| \int_0^t \ddot{u}_0(z) e^{-\nu\omega(t-z)} \text{sen}[\omega(t-z)] dz \right|_{\max}$$

Al valor absoluto máximo de la integral

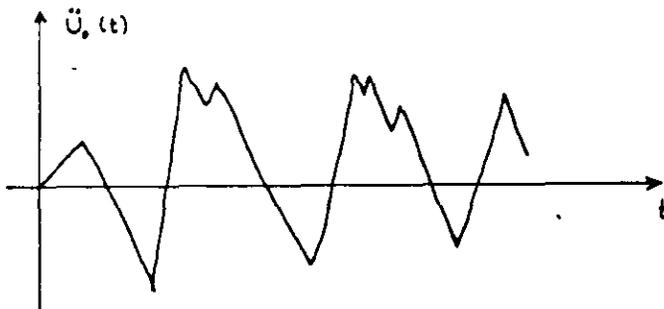
$$\int_0^t \ddot{u}_0(z) e^{-\nu\omega(t-z)} \text{sen}[\omega(t-z)] dz \quad \text{se le llama "Espectro de velocidad" --}$$

y se le representa por  $S_v$

$$S_v = \left| \int_0^t \ddot{u}_0(z) e^{-\nu\omega(t-z)} \text{sen} \omega(t-z) dz \right|_{\max}$$

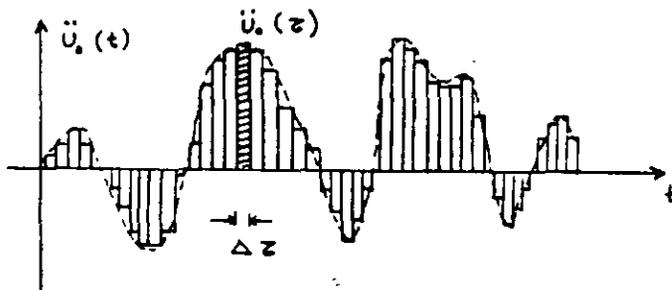
$$y_{\max} = \frac{S_v}{\omega}$$

La integral anterior no puede resolverse directamente porque la función  $\ddot{u}_0(z)$  no es integrable. Esta función es el acelerograma registrado en la base de la estructura durante el sismo cuyo efecto interesa estudiar.



*Acelerograma real*

La integral se resuelve por diferencias finitas, discretizando el acelerograma en impulsos que actúan a un intervalo  $\Delta z$ .



*Acelerograma discretizado*

Se recomienda tomar  $\Delta z = 0.1 T$ , siendo  $T$  el período de la estructura por analizar.

De esta manera:

$$S_{vz} = \left| \sum_0^t \ddot{U}_0(z) e^{-\nu\omega(t-z)} \text{sen}[\omega(t-z)] \Delta z \right|_{\max}$$

Existen programas de computadora que aplican este procedimiento para la obtención de espectros a partir del acelerograma.

De la expresión obtenida para la oscilación libre no amortiguada:

$$y(t) = A \cos(\omega t - \zeta)$$

$$y_{\max} = A$$

Derivando se obtiene la velocidad:

$$\dot{y}(t) = -\omega A \text{sen}(\omega t - \zeta)$$

$$\dot{y}_{\max} = \omega A$$

$$\dot{y}_{\max} = \omega y_{\max}$$

Derivando otra vez se obtiene la aceleración:

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t - \zeta)$$

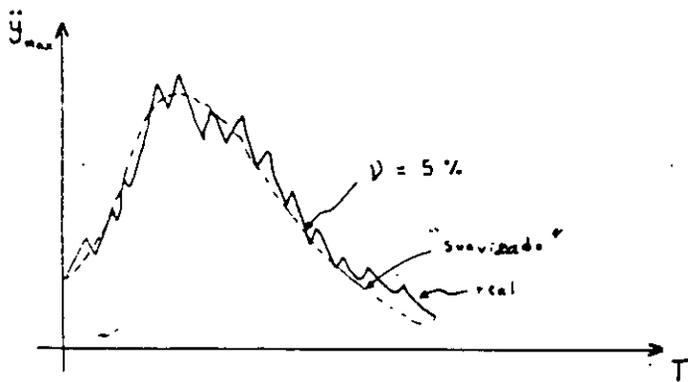
$$\ddot{y}_{\max} = \omega^2 A$$

$$\ddot{y}_{\max} = \omega^2 y_{\max} = \omega \dot{y}_{\max}$$

De estos resultados se infiere que a partir del espectro de velocidad se pueden obtener espectros de desplazamiento ( $S_d$ ) y de aceleración mediante las expresiones:

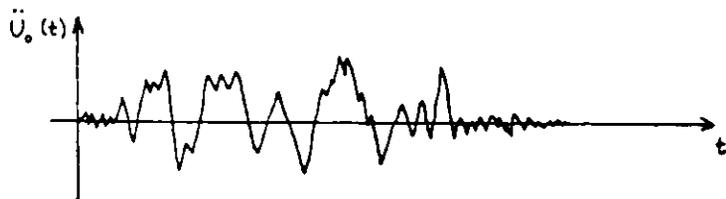
$$S_d = \frac{S_v}{\omega}$$

$$S_a = \omega S_v$$

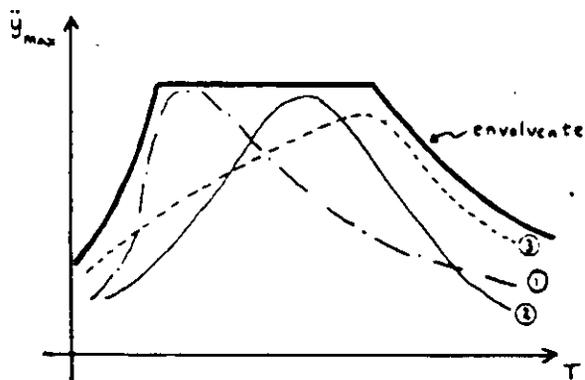


*Espectro de aceleraciones  
 ( Espectro de respuesta para un sismo  
 cuyo acelerograma se conoce: )*

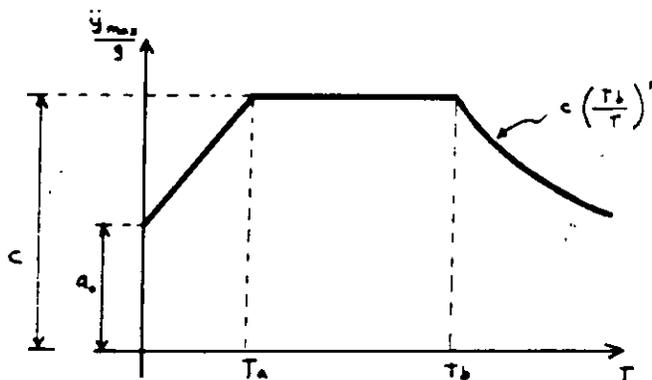
En la práctica de diseño el más usual es el espectro de aceleraciones, gráfica que en función del período de una estructura -- permite obtener la aceleración máxima de la misma durante un sismo conocido por su acelerograma. Del cálculo se obtiene una curva irregular, con muchos picos, la que se suaviza por procedimientos matemáticos.



A la envolvente de los espectros de respuesta de los sismos que probablemente ocurrirán en la vida de la estructura se le llama espectro de diseño.



*Espectro de diseño como envolvente de espectros de respuesta*



*Espectro de diseño en Reglamentos Mexicanos*

Los Reglamentos de construcción suelen incluir espectros de diseño para las -- estructuras en la zona de su jurisdicción.

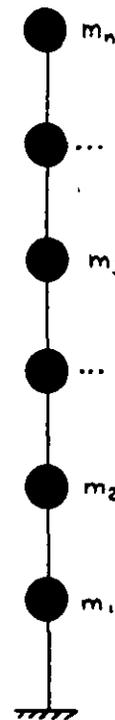
## ANALISIS DINAMICO DE SISTEMAS DE GRADOS DE LIBERTAD MULTIPLES.

Modelización de edificios altos

Sin mucho error un edificio de "n" pisos puede discretizarse como un sistema de "n" masas, considerando las masas concentradas al nivel de los pisos. Si se desprecian los acortamientos o alargamientos de las columnas y los movimientos de la cimentación este sistema tendrá 3 grados de libertad por piso: Dos desplazamientos horizontales paralelos a los ejes principales de la planta y un giro en torno a un eje vertical. El sistema tendrá entonces un total de "3n" grados de libertad.

Puede realizarse una simplificación ulterior si se aplican las siguientes hipótesis:

- a) El sismo actúa paralelamente a uno de los ejes principales de la planta y los desplazamientos horizontales son paralelos a ese eje.
- b) Las fuerzas cortantes sísmicas están aplicadas en el centro de torsión de cada entepiso y en consecuencia los giros en cada planta son nulos.

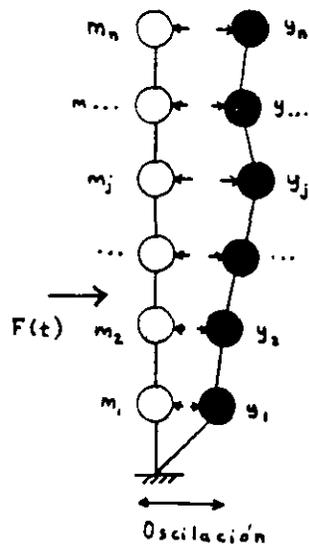


De esta manera el sistema se transforma en un sistema de "n" grados de libertad como el que se muestra en la figura en donde la rigidez de los elementos que conectan a las masas es la suma de las rigideces de los elementos de entepiso en la dirección de análisis.

Se ha obtenido así el modelo de una estructura, paso que es indispensable dar previamente al análisis dinámico de cualquier estructura. El análisis dinámico que se realice será tanto más aproximado al comportamiento real cuanto mejor sea el modelo de partida.

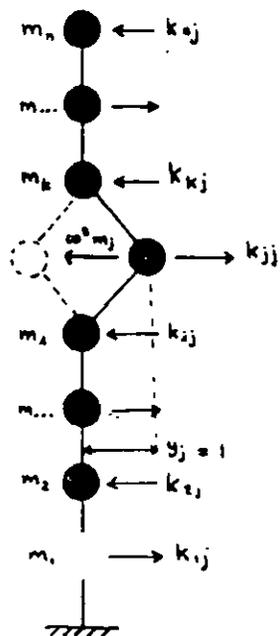
Propiedades dinámicas de un sistema de "n" grados de libertad

El problema del análisis dinámico de un sistema de n grados de libertad consiste en determinar los desplazamientos  $y_1, y_2 \dots y_j \dots y_n$  en cada instante de su oscilación bajo la acción de una excitación exterior  $F(t)$  variable con el tiempo.



Para resolver este problema consideramos en primer término que todas las masas se mantiene fijas y que la única que oscila es la masa  $m_j$  con un

desplazamiento máximo  $y_j = 1$



En estas condiciones, cuando el desplazamiento en j es máximo (1) sobre esa masa actúa la fuerza  $k_{jj}$  y en las demás masas aparecen las reacciones  $k_{1j}, k_{2j} \dots k_{nj}, k_{kj} \dots k_{nj}$  necesarias para que dichas masas permanezcan fijas.

En general:

$k_{jj}$  = Fuerza que debe aplicarse en  $m_j$  para que tenga un desplazamiento unitario, estando las demás masas fijas.

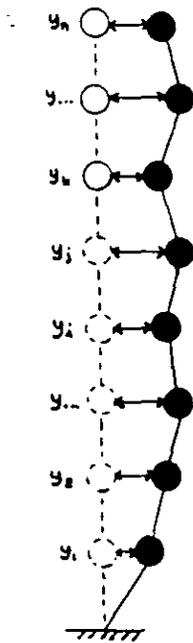
$k_{\lambda j}$  = Reacción que aparece en  $\lambda$  cuando  $m_j$  tiene un desplazamiento unitario y las demás masas están fijas.

Sobre la masa  $m_j$  actúa además la fuerza de inercia que vale: masa  $\times$  aceleración =  $m_j \cdot \omega^2 y_j = m_j \omega^2$

Estas dos fuerzas están en equilibrio:



Si ahora soltamos todas las masas para que el sistema tome la configuración  $y_1, y_2, \dots, y_i, y_j, y_k, \dots, y_n$  sobre la masa  $m_j$  aparecerán las fuerzas  $(k_{jj} - \omega^2 m_j) y_j$  (porque ahora el desplazamiento no es 1 sino  $y_j$ ) y las fuerzas  $k_{j1} y_1, k_{j2} y_2, \dots, k_{ji} y_i, k_{jk} y_k, \dots, k_{jn} y_n$



$$(k_{jj} - \omega^2 m_j) y_j + k_{j1} y_1 + k_{j2} y_2 + \dots + k_{ji} y_i + k_{jk} y_k + \dots + k_{jn} y_n = 0$$

Estas fuerzas se encuentran en equilibrio.

Una ecuación similar se puede escribir para todas las demás masas, por lo que se tiene:

$$\left. \begin{aligned}
 (k_{11} - \omega^2 m_1) y_1 + k_{12} y_2 + \dots + k_{1j} y_j + \dots + k_{1n} y_n &= 0 \\
 k_{21} y_1 + (k_{22} - \omega^2 m_2) y_2 + \dots + k_{2j} y_j + \dots + k_{2n} y_n &= 0 \\
 \dots & \\
 k_{j1} y_1 + k_{j2} y_2 + \dots + (k_{jj} - \omega^2 m_j) y_j + \dots + k_{jn} y_n &= 0 \\
 \dots & \\
 k_{n1} y_1 + k_{n2} y_2 + \dots + k_{nj} y_j + \dots + (k_{nn} - \omega^2 m_n) y_n &= 0
 \end{aligned} \right\} (A)$$

A las ecuaciones (A) se les denomina "Ecuaciones generales del equilibrio -- dinámico de un sistema de n grados de libertad". Estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial así:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{y\} = 0 \dots \dots (A)$$

Donde [K]= Matriz simétrica de rigideces =

$$\begin{bmatrix}
 k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\
 k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{jj} & \dots & k_{jn} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn}
 \end{bmatrix}$$

[K] es una matriz simétrica porque los elementos ubicados simétricamente respecto a la diagonal son iguales:  $k_{ij} = k_{ji}$  por el principio de Müller-Breslau.

[M]= Matriz diagonal de masas =

$$\begin{bmatrix}
 m_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 0 & m_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & m_j & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_n
 \end{bmatrix}$$

(Una matriz diagonal es aquella en que todos sus elementos son 0, excepto los alojados en la diagonal).

$$\{y\} = \begin{matrix} \text{Vector o} \\ \text{Matriz columna de} \\ \text{desplazamientos} \end{matrix} = \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_j \\ \dots \\ y_n \end{matrix}$$

(Un vector o matriz columna es una matriz que cuenta con una sola columna)

Examinando la ecuación(A) se observa que para que el producto del primer miembro sea 0, es preciso que el vector  $\{y\}$  sea 0, o bien que el determinante de  $-( [K] - \omega^2 [M] )$  sea 0. La primera alternativa es una solución trivial que se -- desecha ya que corresponde al caso en que  $y_1 = y_2 = \dots = y_j = \dots = y_n = 0$ , es decir cuando todo el sistema no se ha apartado de la posición de equilibrio. Se adopta entonces, la segunda posibilidad:

$$| [K] - \omega^2 [M] | = 0 \dots \dots (B)$$

Ecuación que expandida se escribe de esta manera:

$$\begin{vmatrix} (k_{11} - \omega^2 m_1) & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & (k_{22} - \omega^2 m_2) & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & (k_{jj} - \omega^2 m_j) & \dots & k_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nj} & \dots & (k_{nn} - \omega^2 m_n) \end{vmatrix} = 0 \dots \dots (B)$$

A la ecuación (B) se le denomina "Ecuación de los valores característicos de un sistema de n grados de libertad". Esta ecuación es de grado n en  $\omega^2$  del tipo de:

$$c + c_1 \omega^2 + c_2 (\omega^2)^2 + \dots + c_j (\omega^2)^j + \dots + c_n (\omega^2)^n = 0$$

Y tiene por solución  $n$  raíces:  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$

Tomando una de estas raíces y llevándola a las ecuaciones (A):

$$([K] - \omega^2 [M]) \{y\}_\lambda = 0 \dots \dots (c)$$

Se obtiene la ecuación (c) de la cual puede despejarse el vector  $\{y\}_\lambda$ .

Sin embargo, la ecuación (c) no es una ecuación determinada y existe un número infinito de vectores  $\{y\}_\lambda$  que la satisfacen. Pero todos estos vectores -- son proporcionales entre sí.

Ejemplo de vectores proporcionales:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ -2 \\ -3 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Por lo que para hacer determinada a la ecuación (c) se recurre al siguiente artificio:

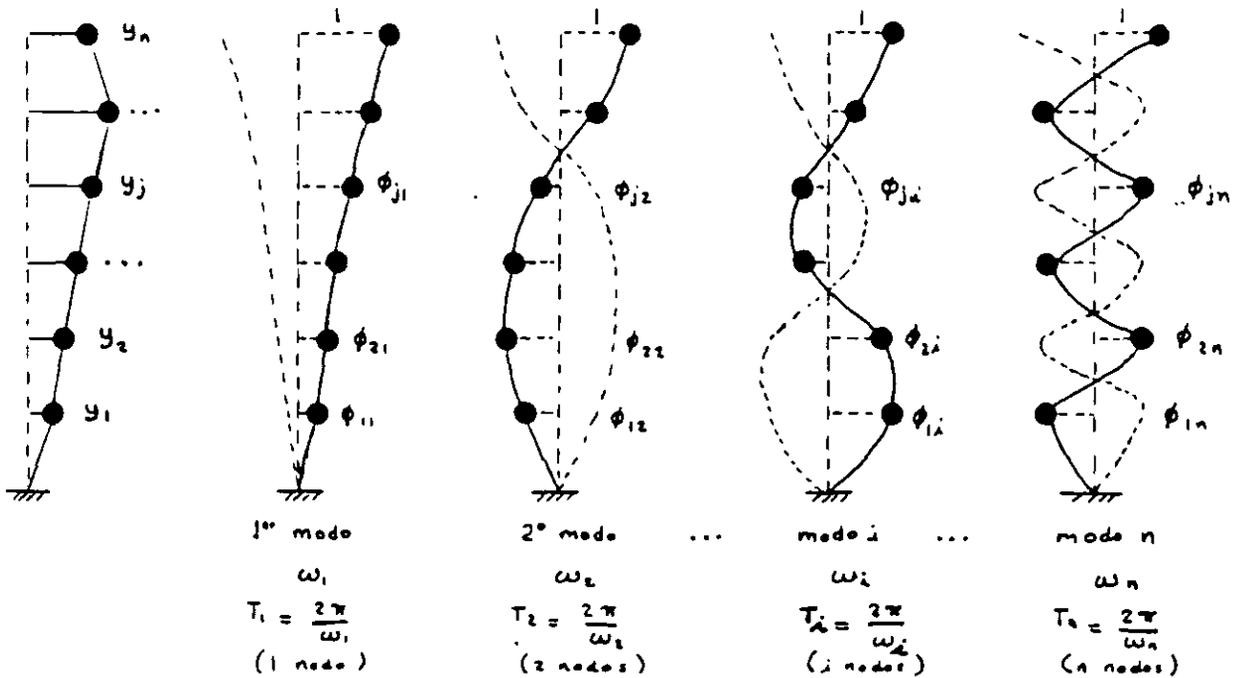
Arbitrariamente se asigna el valor 1 a uno de los desplazamientos, por ejemplo el de la última masa:

$$\begin{bmatrix} y_{1\lambda} \\ y_{2\lambda} \\ \dots \\ y_{j\lambda} \\ \dots \\ y_{n\lambda} \end{bmatrix} \quad \text{Haciendo} \quad \phi_{j\lambda} = \frac{y_{j\lambda}}{y_{n\lambda}} \quad \text{Se obtiene:} \quad \begin{bmatrix} \phi_{1\lambda} \\ \phi_{2\lambda} \\ \dots \\ \phi_{j\lambda} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \{\phi_j\}_\lambda$$

Al vector  $\{\phi_j\}_\lambda$  se le designa "vector de desplazamientos normalizados" correspondientes a la frecuencia  $\omega_\lambda$ .

Lo anterior significa que el movimiento de un sistema de  $n$  grados de libertad puede descomponerse en  $n$  movimientos simples, cada uno con su frecuencia  $\omega_\lambda$  y su ley de oscilación  $\{\phi_j\}_\lambda$ . A cada uno de estos movimientos se le llama modo.

La ley  $\{\phi_j\}_\lambda$  muestra la proporción que guardan entre sí los desplazamientos de las masas durante todo el movimiento, por lo que los desplazamientos  $\phi_{j\lambda}$  son adimensionales y están a escala arbitraria.



Se llama "nodo" a un punto que no se mueve dentro de cada modo. El número de nodos en cada ley corresponde con el número del modo.

Las amplitudes de las leyes de oscilación cumplen con la propiedad de ortogonalidad, es decir:

$$\sum_{j=1}^n m_j \phi_{j\lambda} \phi_{jk} = 0 \quad (\lambda \neq k; \lambda, k = 1, 2, \dots, n)$$

En donde:

$m_j$  = masa en el punto  $j$

$\phi_{j\lambda}$  = Amplitud del punto  $j$  en el modo  $\lambda$

$\phi_{jk}$  = Amplitud del punto  $j$  en el modo  $k$

que puede escribirse

$$\{\phi\}_j^T [M] \{\phi\}_k = 0 \quad (j \neq k)$$

Estas propiedades permiten la solución de sistemas de  $n$  grados de libertad - sometidos a oscilaciones forzadas.

El primer modo tiene una influencia preponderante en la definición de la res puesta total, por eso se designa "modo fundamental" y a su período se le llama "período fundamental".

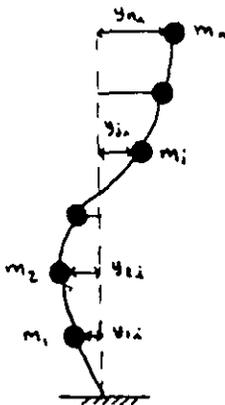
Los modos por encima del primero se denominan "modos superiores" y su influen cia de crece al aumentar el número del modo; por esa razón se recomienda en - muchos casos calcular únicamente los tres primeros modos.

En el procedimiento matemático que se ha desarrollado se ha considerado una - oscilación libre sin amortiguamiento, sin embargo, al igual que para los sis- temas de un grado de libertad puede considerarse que para el modo  $\lambda$   $\omega_\lambda^* \doteq \omega_\lambda$   $T_\lambda^* \doteq T_\lambda$ . Donde  $\omega_\lambda^*$  y  $T_\lambda^*$  son la frecuencia y el período amortiguados del - modo  $\lambda$ .

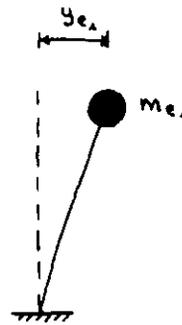
El procedimiento explicado es imposible de aplicar manualmente para  $n > 3$ . Aún con computadoras su aplicación es laboriosa. Por estas razones se han - desarrollado métodos numéricos para el cálculo aproximado manual de las fre- cuencias y leyes características.

Reducción de un sistema de  $n$  grados de libertad a un sistema con una sola masa.

Consideremos un sistema de  $n$  grados de libertad oscilando con los desplazamientos  $y_{1\lambda}, y_{2\lambda}, \dots, y_{i\lambda}, \dots, y_{n\lambda}$  correspondientes a las masas  $m_1, m_2, \dots, m_j, \dots, m_n$  y al modo  $\lambda$ . Encontraremos la masa equivalente  $m_{e\lambda}$  de un sistema de un solo grado de libertad, que produzca el mismo cortante en la base para el mismo evento sísmico.



*Sistema de  $n$  grados de libertad oscilando en el modo  $\lambda$*



*Sistema equivalente de un solo grado de libertad*

En ambas figuras las energías potenciales deben ser iguales:

$$E_{P\lambda} = E_{P_e}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j y_{j\lambda}^2 = \frac{1}{2} m_{e\lambda} y_{e\lambda}^2$$

$$m_{e\lambda} = \frac{1}{y_{e\lambda}^2} \sum_{j=1}^n m_j y_{j\lambda}^2$$

Por otra parte, las frecuencias de oscilación deben también ser iguales:

$$\omega_\lambda = \omega_{e\lambda}$$

Substituyendo estas frecuencias por las expresiones que proporciona el método -

de Rayleigh:

$$\sqrt{g} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n m_j y_{j1}}{\sum_{j=1}^n m_j y_{j1}^2}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{y_{e1}}}$$

$$\frac{1}{y_{e1}} = \frac{\sum_{j=1}^n m_j y_{j1}}{\sum_{j=1}^n m_j y_{j1}^2}$$

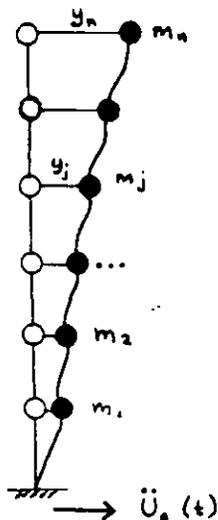
Substituyendo en (1)

$$m_{e1} = \frac{\left[ \sum_{j=1}^n m_j y_{j1} \right]^2}{\sum_{j=1}^n m_j y_{j1}^2}$$

Este resultado permite calcular la respuesta para uno de los modos de un sistema de  $n$  grados de libertad con los mismos procedimientos explicados antes para un solo grado de libertad.

Análisis sísmico de sistemas de  $n$  grados de libertad.

Considerando un sistema de  $n$  grados de libertad, sometido a una aceleración sísmica  $\ddot{U}_0(t)$ , llamando  $y_j(t)$  al desplazamiento relativo de la masa  $m_j$  respecto a la base, las ecuaciones del equilibrio dinámico son:



to a la base, las ecuaciones del equilibrio dinámico son:

$$[M] \{\ddot{y}_j\} + [C] \{\dot{y}_j\} + [K] \{y_j\} = [M] \{1\} \ddot{U}_0$$

Donde

$$[M] = \text{matriz diagonal de masas} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_j & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

$$[K] = \text{Matriz simétrica de rigideces} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{jj} & \dots & k_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

$\{\ddot{y}_j\}$ ,  $\{\dot{y}_j\}$ ,  $\{y_j\}$  = Matrices columna de aceleraciones, Velocidades y desplazamientos

$$\{\ddot{y}_j\} = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{y}_j \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{Bmatrix} \quad \{\dot{y}_j\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_j \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{Bmatrix} \quad \{y_j\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$$\{1\} \ddot{u}_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{u}_0 = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_0 \\ \ddot{u}_0 \\ \vdots \\ \ddot{u}_0 \\ \vdots \\ \ddot{u}_0 \end{Bmatrix}$$

La matriz de amortiguamiento  $[c]$  es una matriz compacta y simétrica de la forma:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{j1} & c_{j2} & \dots & c_{jj} & \dots & c_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Sin embargo esta matriz presenta dos problemas:

- 1) No existe un procedimiento que permita determinar físicamente los valores de los elementos
- 2) Si la matriz no satisface el principio de ortogonalidad respecto a los nodos que caracteriza a las matrices de rigidez y de masas  $[m]$ ,  $[M]$ , se - -

obtiene un sistema de ecuaciones acopladas y los modos propiamente no existen.

Aún cuando experimentalmente se ha demostrado que hay alguna interferencia entre los modos, este efecto es despreciable, sobre todo cuando las amplitudes son pequeñas y la estructura permanece en el rango elástico, por lo que con fines de diseño se puede asignar a cada uno de los modos un porcentaje de amortiguamiento ( $\nu = 2-5\%$ )

De este modo, para el modo  $i$  la ecuación del movimiento será:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\nu_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = - [\Psi]_i^T [M] \{1\} \ddot{U}_0$$

Donde se ha realizado el cambio de variable

$$\{y\} = [\Psi] \{\eta\}$$

$[\Psi]$  = Matriz ortonormal de vectores

$\{\eta\}$  = Matriz columna de las coordenadas generalizadas del modo normal de vibración.

De esta ecuación se llega a la siguiente solución:

$$y_{j\lambda} = c_\lambda \phi_{j\lambda} \frac{1}{\omega_\lambda} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau) e^{-\nu_\lambda \omega_\lambda (t-\tau)} \sin \omega_\lambda (t-\tau) d\tau$$

(En forma similar al caso de un grado de libertad)

Donde:

$y_{j\lambda}$  = desplazamiento en el instante  $t$  de la masa  $j$  debido al modo  $\lambda$

$$c_\lambda = \frac{\sum_j m_j \phi_{j\lambda}}{\sum_j m_j \phi_{j\lambda}^2} = \text{Factor de participación del modo } \lambda \text{ en el movimiento total.}$$

$\nu_i, \omega_i$  = Porcentaje de amortiguamiento y frecuencia del modo  $i$

### Análisis dinámico modal paso a paso

Este procedimiento de análisis consiste en el cálculo de los desplazamientos de cada masa, para cada modo en cada instante. La suma de los desplazamientos modales dará el desplazamiento total de cada masa en cada instante. El cálculo se realiza aplicando la expresión anterior, donde  $\ddot{u}_g(z)$  representa el acelerograma del sismo de interés. La integración se ejecuta mediante una suma de diferencias finitas, como se explicó anteriormente para un sistema de un solo grado de libertad.

Por otra parte el cálculo debe realizarse para varios sismos representativos, cada uno con diferente función  $\ddot{u}_g(z)$  (El Reglamento del D. F. especifica el uso de por lo menos cuatro movimientos).

Lo expuesto indica que si bien el método paso a paso tiene el atractivo de ofrecer el conocimiento de todos los desplazamientos de las masas en función del tiempo, a partir del conocimiento de la función de la excitación, requiere de trabajos excesivamente laboriosos, aún con el auxilio de computadoras muy potentes.

Por esta razón este procedimiento se aplica únicamente con fines de investigación y sólo en muy limitadas ocasiones con fines de diseño.

Cabe señalar que en todo lo expuesto hasta ahora se ha considerado que las estructuras tienen un comportamiento elástico lineal. El método de análisis paso a paso tiene la ventaja de permitir considerar de una manera directa un comportamiento no lineal.

### Análisis dinámico modal espectral

Este procedimiento parte del enfoque más práctico de calcular los desplazamientos máximos para cada modo.

A partir de la expresión:

$$y_{j,i} = c_i \phi_{ji} \frac{1}{\omega_i} \int_0^t e^{-\nu_i \omega_i (t-\tau)} \ddot{U}_0(z) \text{sen } \omega_i (t-z) dz$$

El desplazamiento máximo será:

$$y_{j,i \max} = \frac{c_i \phi_{ji}}{\omega_i} S_v(\nu_i, \omega_i, t)$$

Donde  $S_v =$  Espectro de velocidad =  $\left| \int_0^t \ddot{U}_0(z) e^{-\nu_i \omega_i (t-z)} \text{sen } \omega_i (t-z) dz \right|_{\max}$

Si se emplea, como es más común, el espectro de aceleraciones:  $S_v = \frac{S_a}{\omega}$

$$y_{j,i \max} = \frac{c_i \phi_{ji}}{\omega_i} S_a(\nu, \tau)$$

Determinados los desplazamientos máximos para cada modo, queda el problema de determinar los máximos totales. Estos no son la suma de los máximos modales, porque los últimos no ocurren simultáneamente, es decir:

$$y_{j \max} \neq \sum_{i=1}^n y_{j,i \max}$$

Un criterio de combinación de respuestas modales que da resultados aproximados para estructuras comunes (con distribución regular de masas y rigideces) es el de tomar la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados:

$$y_{j \max} = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_{ji \max}^2}$$

o bien:

$$y_{j \max} = \sqrt{y_{j1 \max}^2 + y_{j2 \max}^2 + \dots + y_{ji \max}^2 + \dots + y_{jn \max}^2}$$

Este criterio es aplicable a cualquier respuesta de la estructura, por lo que en general:

$$R_{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^n R_{i \max}^2}$$

Donde  $R$  puede ser desplazamiento total, desplazamiento relativo, fuerza constante, etc...

El procedimiento de análisis dinámico modal espectral es el que normalmente se aplica en la práctica de diseño de edificios altos. Existen en el mercado numerosos programas de computadora que facilitan su empleo.

#### Bibliografía

- Bazán E. y Meli R. "Manual de Diseño Sísmico de Edificios".- Editorial Limusa. México, 1985.
- Beles A, Ifrim M, García Yagüe A, "Elementos de Ingeniería Sísmica"- Editorial Omega. Barcelona, 1975.
- Biggs J. "Dynamic Analysis of One - Degree Systems" y "Analysis of Multidegree Systems" en "Fundamentals of Earthquake Engineering for Buildings" Massachusetts Institute of Technology. 1972.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS Y CIMENTACIONES**

## **MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

### **TEMA**

## **INTERACCION SUELO – ESTRUCTURA**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMENEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DEL 2001**

## APUNTES DE CIMENTACIONES INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA

Agustín Deméneghi Colina  
Héctor Sanginés García

### NOTA PRELIMINAR

La interacción suelo-estructura es aquella parte de la ingeniería que estudia las deformaciones del terreno de cimentación cuando éstas se ven afectadas por la presencia y rigidez de la propia estructura. La influencia de la estructura puede ser en condiciones estáticas, lo cual es tratado por la *interacción estática suelo-estructura*, o puede ser en condiciones dinámicas, lo cual cae en el campo de la *interacción dinámica suelo-estructura*.

### INTERACCIÓN ESTÁTICA SUELO-ESTRUCTURA

Se conocen como métodos de interacción estática suelo-estructura aquellos procedimientos que para el cálculo de las deformaciones del terreno de cimentación toman en cuenta la rigidez de la estructura. Todos estos métodos están basados en el principio de que en el contacto cimiento-terreno los desplazamientos tanto de la subestructura como los del terreno son iguales, es decir, existe compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo.

En términos generales, el procedimiento de cálculo para la interacción suelo-estructura consiste en tres pasos: (a) se calculan los desplazamientos de la subestructura, (b) se calculan los desplazamientos del terreno de cimentación, y (c) se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo.

Podemos distinguir dos clases de situaciones en relación con la interacción: (i) cuando los cimientos están suficientemente separados, de tal forma que la carga sobre un apoyo no ejerce influencia sobre los desplazamientos de los

apoyos vecinos (este fenómeno se presenta usualmente en zapatas aisladas), y (ii) cuando se trata de un cimiento continuo donde el desplazamiento de un punto de dicho cimiento está afectado por la carga repartida en toda la subestructura (es el caso de zapatas corridas o losas de cimentación).

#### Interacción suelo-zapatas aisladas

##### *Definición de módulo de reacción*

Para llevar a cabo la interacción suelo-zapatas aisladas, se hace uso del concepto de módulo de reacción o módulo de rigidez del terreno de cimentación, el cual se presenta en los siguientes párrafos.

Definamos el módulo de reacción o rigidez lineal vertical de un cimiento de la siguiente forma

$$K_v = Q_v / \delta_v \quad (1)$$

donde  $Q_v$  es la fuerza vertical aplicada al cimiento y  $\delta_v$  es el asentamiento vertical ocasionado por  $Q_v$ .

Se define la rigidez lineal horizontal de un cimiento

$$K_h = Q_h / \delta_h \quad (2)$$

donde  $Q_h$  es la fuerza horizontal aplicada al cimiento y  $\delta_h$  es el desplazamiento horizontal producido por  $Q_h$ .

Se define la rigidez a la rotación de un cimiento

$$K_r = M / \theta \quad (3)$$

---

\* Profesores del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

donde  $M$  es el momento aplicado al cimiento y  $\theta$  el ángulo —en radianes— producido por dicho momento.

### Análisis de la interacción suelo-zapatas aisladas

Ilustremos la solución de la interacción suelo-zapatas aisladas con el marco de la fig 1 (ejemplo 1). La rigidez vertical del terreno de cimentación vale  $K_v = 2331.96$  t/m, la rigidez horizontal  $K_h = 1901.38$  t/m y la rigidez a la rotación  $K_r = 1102.81$  t.m/rad.

Utilizaremos el método de rigideces para el análisis de la estructura (véase el anexo 1), en el que se debe cumplir

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (4)$$

donde

$\underline{K}$  = matriz de rigidez de la estructura

$\underline{\delta}$  = vector de desplazamientos

$\underline{P}^e$  = vector de cargas de empotramiento

$\underline{P}^c$  = vector de cargas concentradas

La formación de la matriz  $\underline{K}$  y de los vectores  $\underline{\delta}$ ,  $\underline{P}^e$  y  $\underline{P}^c$ , para el marco de la fig 1, viene descrito en el anexo 1; como resultado de esto, en la fig 2 se exhiben los grados de libertad de la estructura, y en las tablas 1, 2 y 3 la matriz de rigidez  $\underline{K}$ , el vector de cargas de empotramiento  $\underline{P}^e$  y el vector de cargas concentradas  $\underline{P}^c$  de toda la estructura, respectivamente (En la tabla 1 sólo incluimos los renglones de  $\delta_1$ ,  $\delta_3$ ,  $\theta_5$ ,  $\delta_7$ ,  $\delta_9$  y  $\theta_{11}$ , porque, por simetría  $\delta_2 = \delta_1$ ,  $\delta_4 = -\delta_3$ ,  $\theta_6 = -\theta_5$ ,  $\delta_8 = \delta_7$ ,  $\delta_{10} = -\delta_9$ ,  $\theta_{12} = -\theta_{11}$ .)

La rigidez del terreno de cimentación se puede incluir en el vector de cargas concentradas  $\underline{P}^c$ , de la siguiente forma: las fuerzas  $Q_v$ ,  $Q_h$  y  $M$  se pueden obtener con las ecs 1 a 3

$$Q_v = K_v \delta_v \quad (5)$$

$$Q_h = K_h \delta_h \quad (6)$$

$$M = K_r \theta \quad (7)$$

En la fig 3 se muestran las reacciones del terreno en función de las rigideces del mismo y de los desplazamientos.

Usando las ecs 5 a 7 calculamos las fuerzas  $Q_{v1}$ ,  $Q_{v2}$ ,  $Q_{h3}$ ,  $Q_{h4}$ ,  $M_5$  y  $M_6$ :

$$Q_{v1} = 2231.96 \delta_1, \quad Q_{v2} = 2231.96 \delta_2$$

$$Q_{h3} = 1901.38 \delta_3, \quad Q_{h4} = 1901.38 \delta_4$$

$$M_5 = 1102.81 \theta_5, \quad M_6 = 1102.81 \theta_6$$

El vector de cargas concentradas queda

$$\underline{P}^c = \begin{bmatrix} 2231.96 \delta_1 \\ 2231.96 \delta_2 \\ 1901.38 \delta_3 \\ 1901.38 \delta_4 \\ 1102.81 \theta_5 \\ 1102.81 \theta_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Reemplazando en la ec 4 los valores de  $\underline{K}$  (tabla 1),  $\underline{P}^e$  (tabla 2) y  $\underline{P}^c$  (ec 8), y resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos

$$\delta_1 = 0.010291 \text{ m}, \quad \delta_3 = 0.0055104 \text{ m}$$

$$\theta_5 = 0.00049148, \quad \delta_7 = 0.013289 \text{ m}$$

$$\delta_9 = -0.000078886 \text{ m}, \quad \theta_{11} = -0.0054707$$

Los elementos mecánicos en las barras de la estructura se calculan siguiendo el procedimiento indicado en el anexo 1. (Lo dejamos como ejercicio al lector.)

Las fuerzas en los apoyos se determinan con las ecs 5 a 7

$$Q_{v1} = Q_{v2} = 2331.96(0.010291) = 23.998 \text{ t}$$

$$Q_{h3} = 1901.38(0.0055104) = 10.477 \text{ t}$$

$$Q_{h4} = 1901.38(-0.0055104) = -10.477 \text{ t}$$

$$M_5 = 1102.81(0.00049148) = 0.542 \text{ t.m}$$

$$M_6 = 1102.81(-0.00049148) = -0.542 \text{ t.m}$$

Resolvamos otro ejemplo, el de la fig 4 (ejemplo 2), despreciando los efectos de acortamiento de barras. En la fig 5 y en la tabla 4 se exhiben la numeración de barras y grados de libertad. Las matrices de rigidez y los vectores de cargas de

empotramiento se hallan con los valores del anexo 3 (marcos planos con barras ortogonales, sin considerar el acortamiento de barras).

Barra 1  
Matriz de rigidez

$\theta_5$	$\theta_7$	$\delta_3$	
1299.52	649.76	423.76	$\theta_5$
649.76	1299.52	423.76	$\theta_7$
423.76	423.76	184.24	$\delta_3$

$$\underline{P}^e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \theta_5 \\ \theta_7 \\ \delta_3 \end{matrix}$$

Barra 2  
Matriz de rigidez

$\theta_6$	$\theta_8$	$\delta_4$	
1299.52	649.76	423.76	$\theta_6$
649.76	1299.52	423.76	$\theta_8$
423.76	423.76	184.24	$\delta_4$

$$\underline{P}^e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \theta_6 \\ \theta_8 \\ \delta_4 \end{matrix}$$

Barra 3  
Matriz de rigidez

$\theta_7$	$\theta_8$	$\delta_1$	$\delta_2$	
7970.4	3985.2	-1992.6	1992.6	$\theta_7$
3985.2	7970.4	-1992.6	1992.6	$\theta_8$
-1992.6	-1992.6	664.2	-664.2	$\delta_1$
1992.6	1992.6	-664.2	664.2	$\delta_2$

$$\underline{P}^e_3 = \begin{bmatrix} -wL/2 \\ -wL/2 \\ wL^2/12 \\ -wL^2/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.62 \\ -4.62 \\ 4.62 \\ -4.62 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de toda la estructura se exhiben en las tablas 5 y 6. (En la tabla 5 sólo incluimos los renglones de  $\delta_1$ ,  $\delta_3$ ,  $\theta_5$  y  $\theta_7$ , porque, por simetría  $\delta_2 = \delta_1$ ,  $\delta_4 = -\delta_3$ ,  $\theta_6 = -\theta_5$ ,  $\theta_8 = -\theta_7$ .)

El vector  $\delta$  es

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas concentradas vale (fig 4)

$$\underline{P}^c = \begin{bmatrix} Q_{v1-1.2} \\ Q_{v2-1.2} \\ Q_{h3} \\ Q_{h4} \\ M_5 \\ M_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La rigidez del terreno de cimentación la incluimos con las ecs 5 a 7 (obtenidas de las ecs 1 a 3)

$$Q = K_v \delta_v \quad (9)$$

$$Q_h = K_h \delta_h \quad (10)$$

$$M = K_r \theta \quad (11)$$

En la fig 6 se indican las reacciones del suelo en función de las rigideces y los desplazamientos.

Sustituyendo valores

$$Q_{v1} = 2331.96 \delta_1, \quad Q_{v2} = 2331.96 \delta_2$$

$$Q_{h3} = 1901.38 \delta_3, \quad Q_{h4} = 1901.38 \delta_4$$

$$M_5 = 1102.81 \theta_5, \quad M_6 = 1102.81 \theta_6$$

El vector de cargas concentradas queda

$$\underline{P}^c = \begin{bmatrix} 2331.96 \delta_1 - 1.2 \\ 2331.96 \delta_2 - 1.2 \\ 1901.38 \delta_3 \\ 1901.38 \delta_4 \\ 1102.81 \theta_5 \\ 1102.81 \theta_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reemplazando en la ec 4

$$\begin{aligned} -4.62 - 1.2 + 2331.96 \delta_1 &= 0 & (\delta_1) \\ 184.24 \delta_3 + 423.76 \theta_5 + 423.76 \theta_7 + 1901.38 \delta_3 &= 0 & (\delta_3) \\ 423.76 \delta_3 + 1299.52 \theta_5 + 649.76 \theta_7 + 1102.81 \theta_5 &= 0 & (\theta_5) \\ 426.76 \delta_3 + 649.76 \theta_5 + 5284.72 \theta_7 + 4.62 &= 0 & (\theta_7) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.0024958 \text{ m}, \delta_3 = 0.00014033 \text{ m} \\ \theta_5 &= 0.00022213, \theta_7 = -0.00091278 \end{aligned}$$

Para hallar los elementos mecánicos, se utiliza el procedimiento indicado en el anexo 1. (Lo dejamos como ejercicio al lector).

Las fuerzas en los apoyos se determinan con las ecs 5 a 7

$$\begin{aligned} Q_{v1} = Q_{v2} &= 2331.96(0.0024958) = 5.82 \text{ t} \\ Q_{h3} &= 1901.38(0.00014033) = 0.267 \text{ t} \\ Q_{h4} &= 1901.38(-0.00014033) = -0.267 \text{ t} \\ M_5 &= 1102.81(0.00022213) = 0.245 \text{ t.m} \\ M_6 &= 1102.81(-0.00022213) = -0.245 \text{ t.m} \end{aligned}$$

#### Determinación de los módulos de reacción del suelo

La determinación de las rigideces  $K_v$ ,  $K_h$  y  $K_r$  se lleva a cabo usando su definición dada por las ecs 1 a 3. Por ejemplo, el módulo  $K_v$  se obtiene aplicando a la zapata una carga vertical  $Q_v$  y calculando el asentamiento que produce dicha carga.

Dado el carácter no lineal de los suelos, es necesario que tanto la carga sobre el cimiento, como sus dimensiones, sean lo más cercano posible a sus magnitudes definitivas en la estructura, pues de otro modo la determinación de las rigideces será sólo aproximada.

#### Ejemplo

Determinar la rigidez lineal vertical  $K_v$  de la zapata de la fig E-1, utilizando para ello la fórmula de Burland y Burbridge. El subsuelo está formado por una arena normalmente cargada,  $N = 15$  golpes.

#### Solución

El asentamiento en milímetros de la zapata está dado por (Burland y Burbridge, 1985)

$$\delta = q_n B^{0.7} I_c$$

$$I_c = 1.17/N^{1.4}$$

$q_n$  = incremento neto de presión, en kPa  
 $B$  = ancho de la cimentación, en metros

Sustituyendo valores

$$q_n = 26/1.7(2) = 7.647 \text{ t/m}^2 = 74.995 \text{ kPa}$$

$$I_c = 0.0264$$

$$B = 1.7 \text{ m}$$

$$\delta = 2.870 \text{ mm} = 0.00287 \text{ m}$$

El módulo  $K_v$  vale (ec 1)

$$K_v = 26/0.00287 = 9059.2 \text{ t/m}$$

La teoría de la elasticidad proporciona los siguientes valores de los módulos de reacción, para un cimiento somero de planta circular

$$K_v = 2ER/(1-\nu^2) \quad (12)$$

$$K_h = 32(1-\nu)GR/(7-8\nu) \quad (13)$$

$$K_r = 8GR^3/3(1-\nu) \quad (14)$$

Estas fórmulas se pueden usar en zapatas rectangulares cuando  $B < L < 2.5B$ , mediante el siguiente artificio:

Sea  $A = BL$  el área del cimiento rectangular,

$$R = \sqrt{A/\pi} \quad (15)$$

Para calcular  $K_v$  y  $K_h$  usamos las ecs 12 y 13 con  $R$  obtenida de la ec 15.

Sea  $I$  = momento de inercia del cimiento alrededor del eje que se desea calcular  $K_r$

$$R = \sqrt[4]{4I/\pi} \quad (16)$$

$K_r$  se computa con la ec 14, con  $R$  obtenida de la ec 16

Por lo ya señalado antes, los cálculos de los módulos de reacción con las ecs 12 a 14 son sólo aproximados, pues el comportamiento real de los suelos es no lineal.

Otra forma aproximada de obtener los módulos de reacción es mediante la realización de pruebas de placa (Zeevaert, 1973). Sea  $k_v$  el módulo de rigidez unitario, definido como

$$k_v = Q_v/\delta_v A \quad (17)$$

Siendo  $A$  = área del cimiento

$S_{v31}$  es el módulo de rigidez vertical determinado con una prueba de placa de un pie de

lado, se puede emplear la siguiente fórmula (Terzaghi, 1955)

$$k_v = \bar{k}_{s1} [(B+0.3)/2B]^2 \quad (18)$$

donde B es el ancho de la zapata en metros. En el caso de arcillas

$$k_v = \bar{k}_{s1} [(n+0.5)/1.5n] \quad (19)$$

donde  $n = L/B$ , siendo L la longitud del cimiento.

La tabla 7 contiene valores propuestos por Terzaghi (1955) para  $k_{s1}$ . Cabe destacar que las ecs 18 y 19 se deben usar con precaución, pues sólo son aproximadamente válidas cuando el suelo es isotrópico hasta una profundidad bajo el desplante del cimiento igual al ancho del mismo (Zeevaert, 1973). Por lo mismo, dichas ecuaciones no son aplicables a suelos estratificados.

## REFERENCIAS

Burland, J B y Burbridge, M C, "Settlement of foundations on sand and gravel", Proc Inst Civil Eng, part I: 1325-1381, 1985

Terzaghi, K, "Evaluation of coefficients of subgrade reaction", Géotechnique, V, 1955

Zeevaert, L, *Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions*, Van Nostrand Reinhold, 1973

(Acise)



TABLA 4  
 NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD (EJEMPLO 2)

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\delta_v$	$\alpha$
						Grados
1	$\theta_5$	$\theta_7$	$\delta_1$	$\delta_1$	$\delta_3$	90
2	$\theta_6$	$\theta_8$	$\delta_2$	$\delta_2$	$\delta_4$	90
3	$\theta_7$	$\theta_8$	$\delta_1$	$\delta_2$	-	0

TABLA 5  
 MATRIZ DE RIGIDEZ DE TODA LA ESTRUCTURA (EJEMPLO 2)

$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$	$\theta_8$	
664.2	-664.2	0	0	0	0	-1992.6	-1992.6	$\delta_1$
---	---	---	---	---	---	---	---	$\delta_2$
0	0	184.24	0	423.76	0	423.76	0	$\delta_3$
---	---	---	---	---	---	---	---	$\delta_4$
0	0	423.76	0	1299.52	0	649.76	0	$\theta_5$
---	---	---	---	---	---	---	---	$\theta_6$
-1992.6	1992.6	423.76	0	649.76	0	9269.92	3985.2	$\theta_7$
---	---	---	---	---	---	---	---	$\theta_8$

TABLA 6  
 VECTOR DE CARGAS DE EMPOTRAMIENTO DE TODA LA ESTRUCTURA (EJEMPLO 2)

-4.62	$\delta_1$
-4.62	$\delta_2$
0	$\delta_3$
0	$\delta_4$
0	$\theta_5$
0	$\theta_6$
4.62	$\theta_7$
-4.62	$\theta_8$

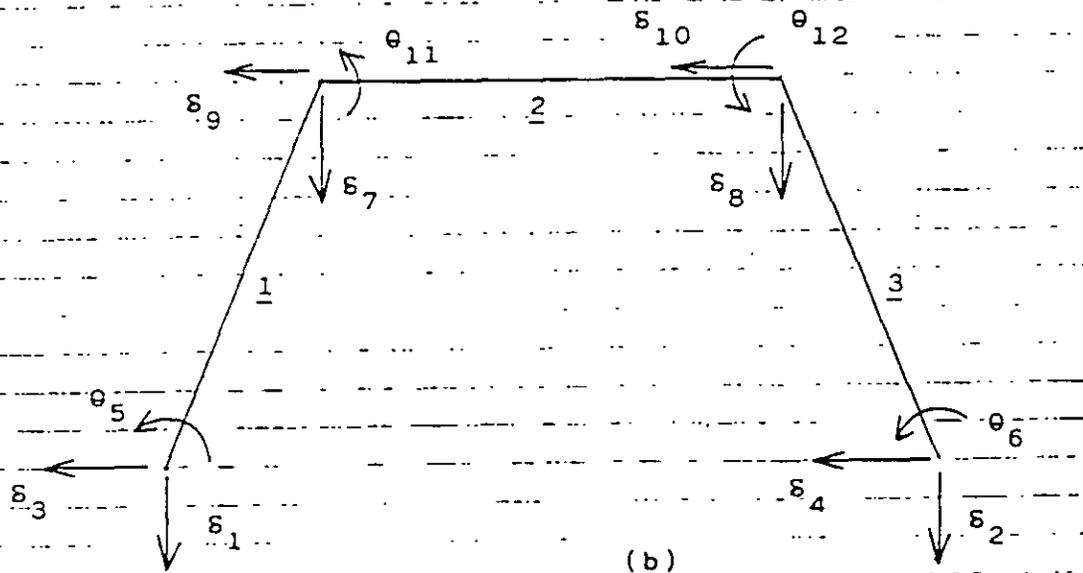
(Acise)

TABLA 7

Proposed average values of  $\bar{k}_{s1}$  for 1-ft X 1-ft square plates and long 1-ft wide strips, after Karl Terzaghi (1955)

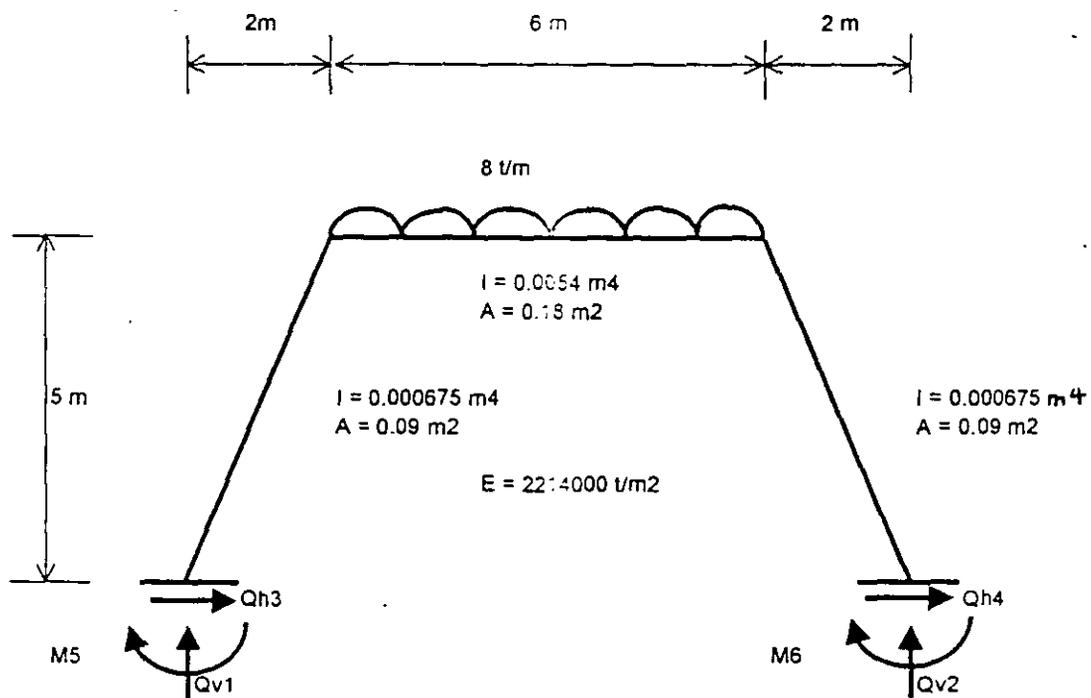
	Average $\bar{k}_{s1}$ values		Range of $\bar{k}_{s1}$ values	
	tons/ft <sup>3</sup>	kg/cm <sup>3</sup>	tons/ft <sup>3</sup>	kg/cm <sup>3</sup>
Sand: loose	40	1.29	20-60	0.64-1.92
medium	130	4.17	60-300	1.92-9.62
dense	500	16.10	300-1000	9.62-32.1
Clay: stiff	75	2.41	50-100	1.6-3.21
very stiff	150	4.82	100-200	3.21-6.42
hard	300	9.64	300	9.60

For dry sand multiply by 1.5 and for submerged sand by 0.6. Here 1 ton = 2000 lb.



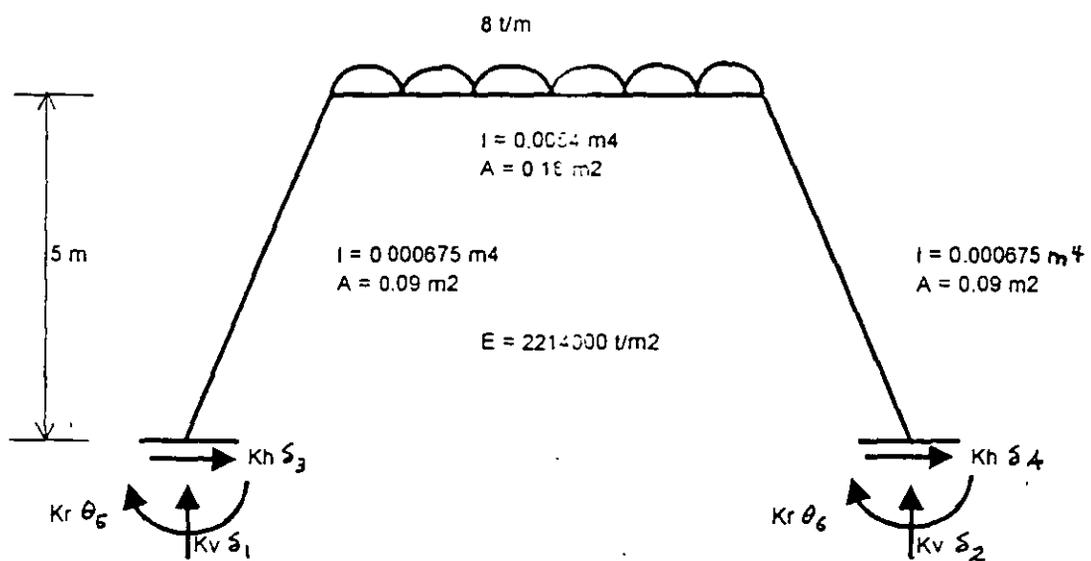
NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD (EJEMPLO)

FIGURA 2

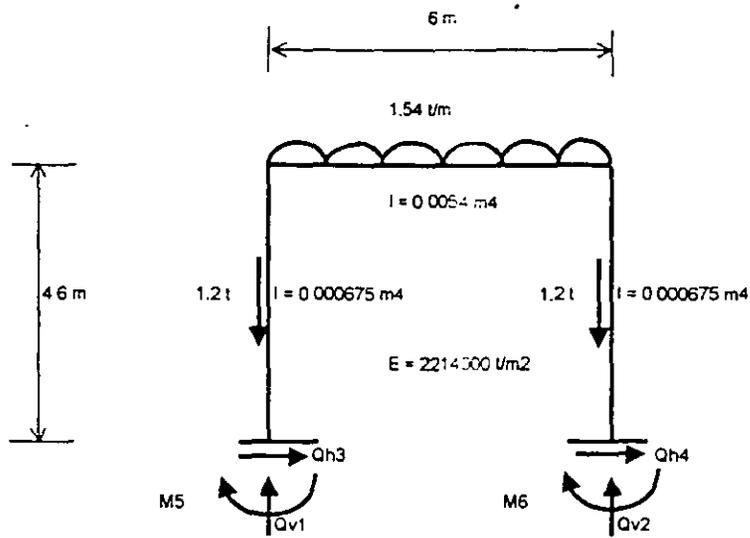


(Acisef)

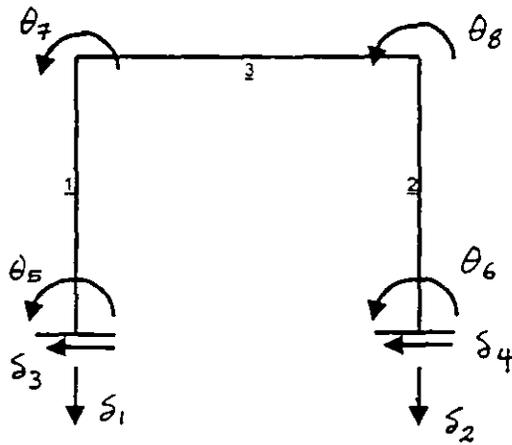
GEOMETRÍA Y CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA  
BARRAS INCLINADAS  
FIGURA 1



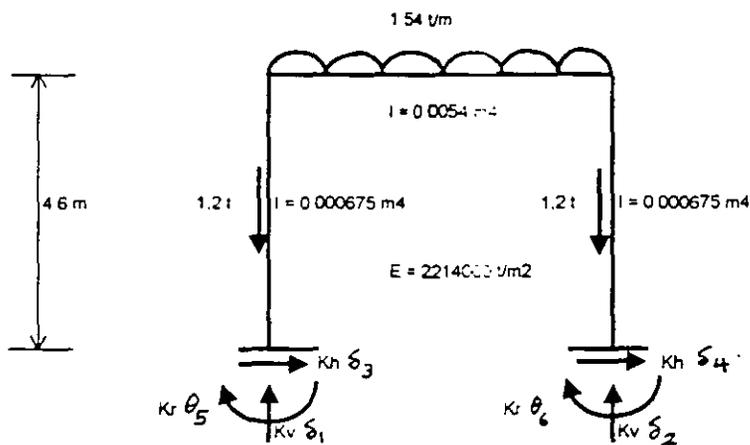
REACCIONES DEL TERRENO DE CIMENTACIÓN  
FIGURA 3



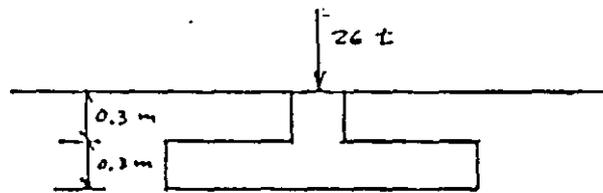
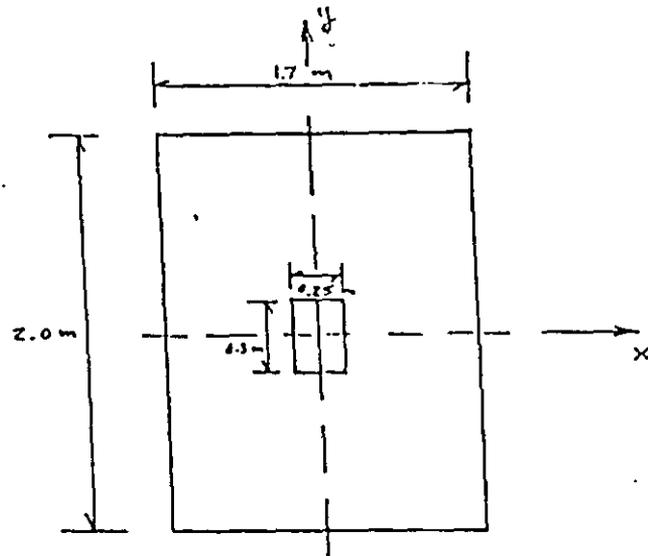
GEOMETRIA Y CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA  
FIGURA 4



NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD  
FIGURA 5



REACCIONES DEL TERRENO  
FIGURA 6



$$D_r = 50\% , \phi^p = 37^\circ , \gamma_s = 1.6 \text{ t/m}^3$$

Arena  $c_u = 2.6$

$N = 15$  golpes

SUELO FRICCIONANTE

FIGURA E-1

ANEXO 3  
 MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA  
 MARCO CON BARRAS ORTOGONALES  
 SIN CONSIDERAR ACORTAMIENTO DE BARRAS

Barras horizontales

$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	
$4EI/L$	$2EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$\theta_p$
$2EI/L$	$4EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$\theta_q$
$-6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$12EI/L^3$	$-12EI/L^3$	$\delta_r$
$6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$-12EI/L^3$	$12EI/L^3$	$\delta_s$

Barras verticales

$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_u$	$\delta_v$	
$4EI/L$	$2EI/L$	$6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$\theta_p$
$2EI/L$	$4EI/L$	$6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$\theta_q$
$6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$12EI/L^3$	$-12EI/L^3$	$\delta_u$
$-6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$-12EI/L^3$	$12EI/L^3$	$\delta_v$

(Acise)



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

**CURSOS ABIERTOS**

**DIPLOMADO EN DISEÑO DE ESTRUCTURAS  
Y CIMENTACIONES**

**MODULO I: ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

**TEMA**

**METODO DE RIGIDECES, MARCOS PLANOS CON  
BARRAS INCLINADAS**

**EXPOSITOR: M. EN I. AGUSTÍN DEMEÑEGHI COLINA  
PALACIO DE MINERIA  
FEBRERO DEL 2001**

MÉTODO DE RIGIDECES  
MARCOS PLANOS CON BARRAS INCLINADAS

Agustín Deméneghi Colina\*

El método de rigideces consta de las siguientes etapas (Beaufait et al 1970):

- a) Se empotra la estructura y se determinan los elementos mecánicos cuando la estructura está empotrada;
- b) Se liberan los nudos de la estructura y se hallan los elementos mecánicos debidos a desplazamientos lineales y angulares;
- c) Se establecen las condiciones de equilibrio en cada uno de los nudos donde haya desplazamientos diferentes de cero;
- d) Se resuelven las ecuaciones de equilibrio y se obtienen los desplazamientos de la estructura;
- e) Se obtienen los elementos mecánicos en los nudos de la estructura.

La ecuación general de equilibrio de la estructura es

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (1)$$

donde

- $\underline{K}$  = matriz de rigideces de la estructura
- $\underline{\delta}$  = vector de desplazamientos
- $\underline{P}^e$  = vector de cargas de empotramiento
- $\underline{P}^c$  = vector de cargas concentradas

La matriz de rigideces de la estructura se puede obtener mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura. El vector de cargas de empotramiento de toda la estructura es igual a la suma de los vectores de carga de todas y cada una de las barras de la estructura.

A continuación obtendremos la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de una barra con apoyos continuos, sometida a una carga uniformemente repartida  $v$  (fig 1). Utilizaremos la siguiente convención de signos, para una barra horizontal (fig 2): los giros se consideran positivos en sentido antihorario, los desplazamientos verticales son positivos si van hacia abajo y los desplazamiento horizontales son positivos si van hacia la izquierda (fig 2a). Los momentos flexionantes son positivos en sentido horario, las fuerzas cortantes verticales son positivas si van hacia arriba y las fuerzas cortantes horizontales son positivas si van hacia la derecha (fig 2b).

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

Demos un giro  $\theta'_p$  en el extremo izquierdo de la barra. En la fig 3a se muestran los elementos mecánicos ocasionados por este giro. En la fig 3b se muestran los elementos mecánicos producidos por un giro  $\theta'_q$  en el extremo derecho. Las figs 3c y 3d exhiben los elementos mecánicos provocados por un desplazamiento vertical  $\delta'_r$  en el nudo izquierdo y un desplazamiento vertical  $\delta'_s$  en el nudo derecho, respectivamente. Las figs 3e y 3f muestran los elementos mecánicos producidos por un desplazamiento horizontal  $\delta'_u$  en el nudo izquierdo y un desplazamiento horizontal  $\delta'_v$  en el nudo derecho. Las figs 3g y 3h contienen los momentos producidos por un giro de torsión  $\theta'_a$  en el nudo izquierdo y un giro de torsión  $\theta'_b$  en el nudo derecho.

Los elementos mecánicos que aparecen en la barra  $m$  valen

$$M'_p = wL^2/12 + (4EI/L) \theta'_p + (2EI/L) \theta'_q - (6EI/L^2) \delta'_r + (6EI/L^2) \delta'_s \quad (2)$$

$$M'_q = -wL^2/12 + (2EI/L) \theta'_p + (4EI/L) \theta'_q - (6EI/L^2) \delta'_r + (6EI/L^2) \delta'_s \quad (3)$$

$$V'_r = -wL/2 - (6EI/L^2) \theta'_p - (6EI/L^2) \theta'_q + (12EI/L^3) \delta'_r - (12EI/L^3) \delta'_s \quad (4)$$

$$V'_s = -wL/2 + (6EI/L^2) \theta'_p + (6EI/L^2) \theta'_q - (12EI/L^3) \delta'_r + (12EI/L^3) \delta'_s \quad (5)$$

$$N'_u = (AE/L) \delta'_u - (AE/L) \delta'_v \quad (6)$$

$$N'_v = - (AE/L) \delta'_u + (AE/L) \delta'_v \quad (7)$$

$$M'_a = (GI_t/L) \theta'_a - (GI_t/L) \theta'_b \quad (8)$$

$$M'_b = - (GI_t/L) \theta'_a + (GI_t/L) \theta'_b \quad (9)$$

En una viga de sección rectangular de dimensiones  $b$  por  $h$ , el momento polar de inercia debido a torsión se puede valorar en forma aproximada (Beaufait et al 1970)

$$I_t \cong \frac{h b^3}{3} \left[ 1 - 0.63 \frac{b}{h} + 0.052 \left( \frac{b}{h} \right)^5 \right] \quad (10)$$

$$h \geq b$$

Los elementos mecánicos que transmite la barra al nudo están dados por

$$\underline{P}'_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}^e)'_m \quad (11)$$

donde

$$\underline{K}'_m = \begin{bmatrix} \theta'_p & \theta'_q & s'_r & s'_s & s'_u & s'_v & \theta'_a & \theta'_b \\ 4EI/L & 2EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2EI/L & 4EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L & -AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -AE/L & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI/L & -GI/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GI/L & GI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ s'_r \\ s'_s \\ s'_u \\ s'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\underline{\delta}'_m = \begin{bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ s'_r \\ s'_s \\ s'_u \\ s'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$(\underline{P}^e)'_m = \begin{bmatrix} WL^2/12 \\ -WL^2/12 \\ -WL/2 \\ -WL/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$\underline{K}'_m$  = matriz de rigidez de la barra  $m$

$\underline{\delta}'_m$  = vector de desplazamientos de la barra  $m$

$(\underline{P}^e)'_m$  = vector de cargas de empotramiento de la barra  $m$

Veamos a continuación la determinación de la matriz de rigidez y del vector de cargas de empotramiento para una estructura tridimensional, formada por marcos planos ortogonales entre sí (fig 4); en cada marco pueden existir barras inclinadas.

En la fig 5 se presenta la transformación de un vector del sistema global x-y al sistema local x'-y'. Aplicando las ecuaciones de la fig 5 a la barra inclinada de la fig 6 (despreciando el efecto de torsión con eje de giro vertical):

$$\begin{aligned} \theta'_p &= \theta_p & \theta'_q &= \theta_q \\ \delta'_r &= \delta_r \cos \alpha - \delta_u \sin \alpha \\ \delta'_s &= \delta_s \cos \alpha - \delta_v \sin \alpha \\ \delta'_u &= \delta_r \sin \alpha + \delta_u \cos \alpha \\ \delta'_v &= \delta_s \sin \alpha + \delta_v \cos \alpha \\ \theta'_a &= \theta''_a \cos \alpha \\ \theta'_b &= \theta''_b \cos \alpha \end{aligned}$$

Aplicando las expresiones de la fig 5 a la barra de la fig 7:

$$\begin{aligned} \theta'_p &= \theta_p \cos \beta - \theta''_a \sin \beta \\ \theta'_q &= \theta_q \cos \beta - \theta''_b \sin \beta \\ \theta''_a &= \theta_p \sin \beta + \theta'_a \cos \beta \\ \theta''_b &= \theta_q \sin \beta + \theta'_b \cos \beta \end{aligned}$$

Sean

$$\delta'_m = \begin{bmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\underline{\delta}_B = \begin{bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix} \quad (16)$$

Es decir

$$\underline{\delta}'_B = \underline{T}_B \underline{\delta}_B \quad (17)$$

donde

$$\underline{T}_B = \begin{bmatrix} \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s & \delta_u & \delta_v & \theta_a & \theta_b \\ \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \beta & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \beta \\ 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ \cos \alpha \text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha \text{sen } \beta & 0 \\ 0 & \cos \alpha \text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha \text{sen } \beta \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{matrix} \quad (18)$$

Los desplazamientos de los sistemas local y global están relacionados mediante las siguientes expresiones

$$\theta'_p = \theta_p \cos \beta - \theta_a \text{sen } \beta \quad (19)$$

$$\theta'_q = \theta_q \cos \beta - \theta_b \text{sen } \beta \quad (20)$$

$$\delta'_r = \delta_r \cos \alpha - \delta_u \text{sen } \alpha \quad (21)$$

$$\delta'_s = \delta_s \cos \alpha - \delta_v \text{sen } \alpha \quad (22)$$

$$\delta'_u = \delta_r \text{sen } \alpha + \delta_u \cos \alpha \quad (23)$$

$$\delta'_v = \delta_s \text{sen } \alpha + \delta_v \cos \alpha \quad (24)$$

$$\theta'_a = \theta_p \cos \alpha \text{sen } \beta + \theta_a \cos \alpha \cos \beta \quad (25)$$

$$\theta'_b = \theta_q \cos \alpha \text{sen } \beta + \theta_b \cos \alpha \cos \beta \quad (26)$$

En el sistema local  $x'-z'$  (fig 6)

$$\underline{P}' = \underline{K}' \underline{\delta}' + (\underline{P}^e)' \quad (27)$$

Pero

$$(\underline{P}^e)' = \underline{T}_m \underline{P}^e \quad (28)$$

y

$$\underline{P}' = \underline{T}_m \underline{P}_m \quad (29)$$

Sustituyendo la ec 29 en la ec 27

$$\underline{T}_m \underline{P}_m = \underline{K}' \underline{\delta}' + (\underline{P}^e)' \quad (30)$$

Sustituyendo las ecs 17 y 28 en la ec 30

$$\underline{T}_m \underline{P}_m = \underline{K}' \underline{T}_m \underline{\delta}_m + \underline{T}_m \underline{P}^e$$

Premultiplicando por  $\underline{T}_m^{-1}$

$$\underline{P}_m = \underline{T}_m^{-1} \underline{K}' \underline{T}_m \underline{\delta}_m + \underline{P}^e$$

donde

$$\underline{T}_m^{-1} = \begin{bmatrix} \theta_p & \theta_q & \delta_r & \delta_s & \delta_u & \delta_v & \theta_a & \theta_b \\ \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\text{sen } \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\text{sen } \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} \\ 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & \text{sen } \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & \text{sen } \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} & 0 \\ 0 & -\text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \beta \alpha}{\sqrt{\cos \beta \alpha}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \\ \delta_u \\ \delta_v \\ \theta_a \\ \theta_b \end{matrix} \quad (31)$$

En el sistema global

$$\underline{P}_m = \underline{K}_m \underline{\delta}_m + \underline{P}^e \quad (32)$$

donde

$$\underline{K}_m = \underline{T}_m^{-1} \underline{K}' \underline{T}_m \quad (33)$$

Sustituyendo las ecs 12, 18 y 31 en la ec 33, se obtiene la matriz  $\underline{K}_m$ , la cual se muestra en la tabla 1.

Para el vector de cargas de empotramiento:

$$\underline{P}_m^e = \underline{T}^{-1} (\underline{P}_m^e)' \quad (34)$$

Para una barra sometida a una carga uniforme  $w$  en el sistema local  $x'-z'$ , el vector  $\underline{P}_m^e$  vale

$$\underline{P}_m^e = \begin{bmatrix} (wL^2/12) \cos \beta \\ - (wL^2/12) \cos \beta \\ - (wL/2) \cos \alpha \\ - (wL/2) \cos \alpha \\ (wL/2) \sin \alpha \\ (wL/2) \sin \alpha \\ - (wL^2/12) \sin \beta \\ (wL^2/12) \sin \beta \end{bmatrix} \quad (35)$$

La ec 33 proporciona la matriz de rigidez de la barra inclinada  $m$ , para el sistema coordenado general  $x-y-z$ . Las ecs 34 ó 35 proporcionan el vector de cargas de empotramiento de la barra inclinada  $m$ , para el sistema coordenado general  $x-y-z$ .

En resumen, primero se utilizan la tabla 1 y las 34 ó 35 para hallar la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de las barras de la estructura. La matriz de rigideces de la estructura completa se obtiene mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura; el vector de cargas de empotramiento de la estructura completa es igual a la suma de los vectores de carga de todas y cada una de las barras de la estructura. Sustituyendo en la ec 1 se obtiene la ecuación matricial de equilibrio de toda la estructura; resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los desplazamientos correspondientes al sistema global  $x-y-z$  (vector  $\underline{\delta}$ ). Los elementos mecánicos en las barras se obtienen de la siguiente forma: primero se determinan los desplazamientos en el sistema local, con el empleo de la ec 17 ó las ecs 19 a 26:

$$\underline{\delta}'_m = \underline{T}_m \underline{\delta}_m \quad (\text{ec } 17)$$

A continuación, los elementos mecánicos en la barra  $m$  se determinan con la ec 11 ó con las ecs 2 a 9:

$$\underline{P}'_m = \underline{K}'_m \underline{\delta}'_m + (\underline{P}_m^e)' \quad (\text{ec } 11)$$

Ejemplo 1

Determinar los elementos mecánicos en los nudos de la estructura ( la fig 8a.

Solución

Primeramente numeramos las barras y los grados de libertad de la estructura (fig 8b). En este ejemplo no se toman en cuenta los efectos de torsión ( $\beta = 0$ ).

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\delta_u$	$\delta_v$	$\alpha$ Grados
1	$\theta_5$	$\theta_{11}$	$\delta_1$	$\delta_7$	$\delta_3$	$\delta_9$	68.2
2	$\theta_{11}$	$\theta_{12}$	$\delta_7$	$\delta_8$	$\delta_9$	$\delta_{10}$	0
3	$\theta_6$	$\theta_{12}$	$\delta_2$	$\delta_8$	$\delta_4$	$\delta_{10}$	111.8

Empleando la tabla 1 se obtienen las matrices de rigidez de las barras 1, 2 y 3, las cuales se muestran en las tabla 2. La matriz de rigidez de la estructura completa en el sistema global es la suma de las matrices de todas y cada una de las barras.

Sumando las matrices de las barras 1, 2 y 3 (tabla 2) obtenemos

$$\underline{K} = \begin{bmatrix}
 \delta_7 & \delta_8 & \delta_9 & \delta_{10} & \theta_{11} & \theta_{12} \\
 32578.02 & -664.2 & 12719.58 & 0 & -1877.77 & -1992.6 \\
 -664.2 & 32578.02 & 0 & -12719.58 & 1992.6 & 1877.77 \\
 12719.58 & 0 & 71622.66 & -66420 & -287.08 & 0 \\
 0 & -12719.58 & -66420 & 71622.66 & 0 & -287.08 \\
 -1877.77 & 1992.6 & -287.08 & 0 & 9080.45 & 3985.2 \\
 -1992.6 & 1877.77 & 0 & -287.08 & 3985.2 & 9080.45
 \end{bmatrix}$$

$$\underline{p}^e = \begin{bmatrix} -24 \\ -24 \\ 0 \\ 0 \\ 24 \\ -24 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{GL} \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \quad \underline{p}^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{GL} \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

A continuación planteamos la ecuación matricial

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{p}^e + \underline{p}^c = 0 \quad (\text{ec 1})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$\begin{aligned} \delta_7 &= 0.00080245 \text{ m} & \delta_8 &= 0.00080245 \text{ m} \\ \delta_9 &= -0.00008378 \text{ m} & \delta_{10} &= 0.00008378 \text{ m} \\ \theta_{11} &= -0.00473308 & \theta_{12} &= 0.00473308 \end{aligned}$$

Además  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0$

Los elementos mecánicos en cada barra se hallan con el empleo de la ec 11:

$$\underline{P}'_1 = \underline{K}'_1 \underline{\delta}'_1 + (\underline{P}^c_1)' \quad (\text{ec 11})$$

Las matrices de cada barra en el sistema local ( $\underline{K}'_m$ ) se obtienen con la ec 12. En la tabla 3 se exhiben estas matrices para las tres barras de la estructura.

El vector de desplazamientos  $\underline{\delta}'_m$  se halla con el uso de las ecs 19 a 26, mientras que los elementos mecánicos en cada barra (sistema local) se determinan con el empleo de las ecs 2 a 9. La tabla 4 contiene el cómputo de desplazamientos y elementos mecánicos para las barras 1, 2 y 3.

### Ejemplo 2

Determinar los elementos mecánicos en los nudos de la estructura de la fig 9a. Despreciar el fenómeno de acortamiento de barras.

### Solución

Primeramente numeramos las barras y los grados de libertad de la estructura (fig 9b):

#### SISTEMA GLOBAL x-y

Barra	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\theta_a$	$\theta_b$
1	-	$\theta_2$	-	$\delta_1$	-	$\theta_3$
2	$\theta_2$	-	$\delta_1$	-	$\theta_3$	-

#### SISTEMA LOCAL x'-y'

Barra	$\theta'_p$	$\theta'_q$	$\delta'_r$	$\delta'_s$	$\theta'_a$	$\theta'_b$
1	-	$\theta'_2$	-	$\delta'_1$	-	$\theta'_3$
2	$\theta'_3$	-	$\delta'_1$	-	$\theta'_2$	-

Los desplazamientos están relacionados entre sí, de acuerdo con las ecs 19 a 26

Barra 1

$$\delta'_1 = \delta_1, \quad \theta'_2 = \theta_2, \quad \theta'_3 = \theta_3$$

Barra 2

$$\delta'_1 = \delta_1, \quad \theta'_2 = \theta_2, \quad \theta'_3 = -\theta_3$$

Las matrices de rigidez y los vectores de empotramiento en el sistema global, se hallan con los valores de la tabla 1 y las ecs 34 ó 35:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \theta_2 & \delta_1 & \theta_3 \\ 7970.40 & 1992.60 & 0 \\ 1992.60 & 664.20 & 0 \\ 0 & 0 & 384.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$P_1^e = \begin{bmatrix} -24 \\ -24 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \theta_2 & \delta_1 & \theta_3 \\ 384.38 & 0 & 0 \\ 0 & 664.20 & 1992.60 \\ 0 & 1992.60 & 7970.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$P_2^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -24 \\ -24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_2 \\ \delta_1 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez global es la suma de las matrices de cada una de las barras, es decir

$$K = \begin{bmatrix} \delta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ 1328.40 & 1992.60 & 1992.60 \\ 1992.60 & 8354.78 & 0 \\ 1992.60 & 0 & 8354.78 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$\underline{P}^e = \begin{bmatrix} -48 \\ -24 \\ -24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

$$\underline{P}^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{matrix}$$

A continuación planteamos la ecuación matricial

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (\text{ec 1})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.09671 \text{ m} \\ \theta_2 &= -0.020194 & \theta_3 &= -0.020194 \end{aligned}$$

Para obtener los elementos mecánicos en las barras, trabajamos en el sistema local, en el que las matrices  $\underline{K}'_m$  valen (ec 12):

$$\underline{K}'_1 = \begin{bmatrix} \theta'_2 & \delta'_1 & \theta'_3 \\ 7970.40 & 1992.60 & 0 \\ 1992.60 & 664.20 & 0 \\ 0 & 0 & 384.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta'_2 \\ \delta'_1 \\ \theta'_3 \end{matrix}$$

$$\underline{\delta}'_1 = \begin{bmatrix} \theta'_2 \\ \delta'_1 \\ \theta'_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}'_2 = \begin{bmatrix} \theta'_3 & \delta'_1 & \theta'_2 \\ 7970.40 & 1992.60 & 0 \\ 1992.60 & 664.20 & 0 \\ 0 & 0 & 384.38 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta'_3 \\ \delta'_1 \\ \theta'_2 \end{matrix}$$

$$\underline{\delta}'_2 = \begin{bmatrix} \theta'_3 \\ \delta'_1 \\ \theta'_2 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ec 11

Barra 1

$$M'_2 = 7.75 \text{ t.m}$$

$$V'_1 = 0$$

$$M'_3 = - 7.76 \text{ t.m}$$

Barra 2

$$M'_3 = - 7.75 \text{ t.m}$$

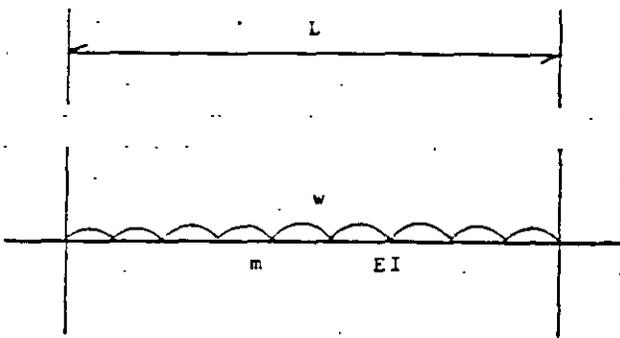
$$V'_1 = 0$$

$$M'_2 = - 7.76 \text{ t.m}$$

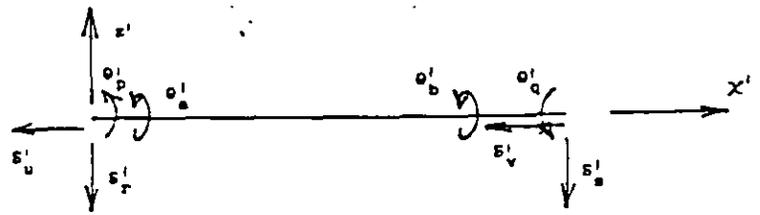
Los momentos obtenidos son de barra sobre nudo; éstos se exhiben en la fig 9c.

REFERENCIA

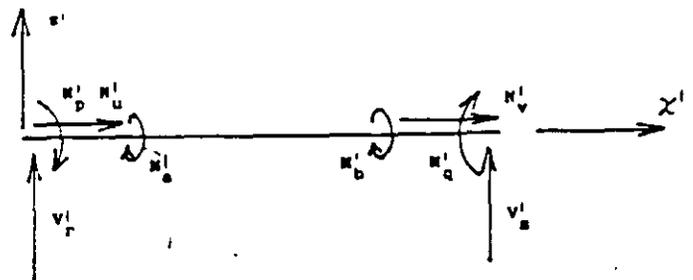
Beaufait, F W, Rowan, W H, Hoadley, P G y Hackett, R M, Computer Methods of Structural Analysis, Prentice-Hall, 1970



Barra m  
FIGURA 1



a) Desplazamientos



b) Elementos mecánicos  
(barra sobre nudo)

CONVENCIÓN DE SIGNOS

(ADSMRI9)

FIGURA 2

TABLA 1

TITULO: MATRIZ DE RIGIDEZ. BARRA INCLINADA  
 FECHA: 23/04/96  
 PROGRAMA: MARIGBI

Sean	$D = 4 EI/L$ $F = GIt/L$	$M = 6 EI/L^2$	$N = 12 EI/L^3$	$Q = AE/L$				
SA = sen A CA = cos A		S2A = sen <sup>2</sup> A C2A = cos <sup>2</sup> A	SB = sen B CB = cos B	S2B = sen <sup>2</sup> B C2B = cos <sup>2</sup> B				
tp	tq	dr	ds	du	dv	ta	tb	
D C2B + F S2B	(D/2) C2B - F S2B $\pi B$	- M CB CA	M CB CA	M CB SA	- M CB SA	- D CB SB + F CB SB	-(D/2) CB SB - F SB CB	tp
(D/2) C2B - F S2B	D C2B + F S2B	- M CB CA	M CB CA	M CB SA	- M CB SA	-(D/2) CB SB - F CB SB	- D CB SB + F CB SB	tq
- M CA CB	- M CA CB	N C2A + Q S2A	- N C2A - Q S2A	- N CA SA + Q CA SA	N CA SA - Q CA SA	M CA SB	M CA SB	dr
M CA CB	M CA CB	- N C2A - Q S2A	N C2A + Q S2A	N CA SA - Q CA SA	- N CA SA + Q CA SA	- M CA SB	- M CA SB	ds
SA CB	M SA CB	- N CA SA + Q CA SA	N CA SA - Q CA SA	N S2A + Q C2A	- N S2A - Q C2A	- M SA SB	- M SA SB	du
- M SA CB	- M SA CB	N CA SA - Q CA SA	- N CA SA + Q CA SA	- N S2A - Q C2A	N S2A + Q C2A	M SA SB	M SA SB	dv
- D CB SB + F CB SB	-(D/2) CB SB - F CB SB	M CA SB	- M CA SB	- M SA SB	M SA SB	D S2B + F C2B	(D/2) S2B - F C2B	ta
-(D/2) CB SB - F CB SB	- D CB SB + F CB SB	M CA SB	- M CA SB	- M SA SB	M SA SB	(D/2) S2B - F C2B	D S2B + F C2B	tb



TABLA 3

## Sistema local

Matriz de rigidez de la barra 1

	5	11	1	7	3	9				
tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'			
1110.049	555.0247	-309.196	309.1965		0	0	0	0	tp'	5
555.0247	1110.049	-309.196	309.1965		0	0	0	0	tq'	11
-309.196	-309.196	114.8327	-114.832		0	0	0	0	dr'	1
309.1965	309.1965	-114.832	114.8327		0	0	0	0	ds'	7
0	0	0	0	37001.65	-37001.6		0	0	du'	3
0	0	0	0	-37001.6	37001.65		0	0	dv'	9
0	0	0	0	0	0		0	0	ta'	
0	0	0	0	0	0		0	0	tb'	

## Sistema local

Matriz de rigidez de la barra 2

	11	12	7	8	9	10				
tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'	GL		
7970.4	3985.2	-1992.6	1992.6		0	0	0	0	tp'	11
3985.2	7970.4	-1992.6	1992.6		0	0	0	0	tq'	12
-1992.6	-1992.6	664.2	-664.2		0	0	0	0	dr'	7
1992.6	1992.6	-664.2	664.2		0	0	0	0	ds'	8
0	0	0	0	66420	-66420		0	0	du'	9
0	0	0	0	-66420	66420		0	0	dv'	10
0	0	0	0	0	0		0	0	ta'	
0	0	0	0	0	0		0	0	tb'	

## Sistema local

Matriz de rigidez de la barra 3

	6	12	2	8	4	10				
tp'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'			
10.049	555.0247	-309.196	309.1965		0	0	0	0	tp'	5
555.0247	1110.049	-309.196	309.1965		0	0	0	0	tq'	11
-309.196	-309.196	114.8327	-114.832		0	0	0	0	dr'	1
309.1965	309.1965	-114.832	114.8327		0	0	0	0	ds'	7
0	0	0	0	37001.65	-37001.6		0	0	du'	3
0	0	0	0	-37001.6	37001.65		0	0	dv'	9
0	0	0	0	0	0		0	0	ta'	
0	0	0	0	0	0		0	0	tb'	

TABLA 4

.stema local

arra 1

p'	5	11	1	7	3	9	ta'	tb'
	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'	
0	-0.00473		0	0.000375	0	0.000713	0	0 -2.51077 Mp'
0	-0.00473		0	0.000375	0	0.000713	0	0 -5.13775 Mq'
0	-0.00473		0	0.000375	0	0.000713	0	0 1.420296 Vr'
0	-0.00473		0	0.000375	0	0.000713	0	0 -1.42029 Vs'
0	-0.00473		0	0.000375	0	0.000713	0	0 -26.4169 Vu'
0	-0.00473		0	0.000375	0	0.000713	0	0 26.41699 Vv'
0	-0.00473		0	0.000375	0	0.000713	0	0 0 Ma'
0	-0.00473		0	0.000375	0	0.000713	0	0 0 Mb'

stema local

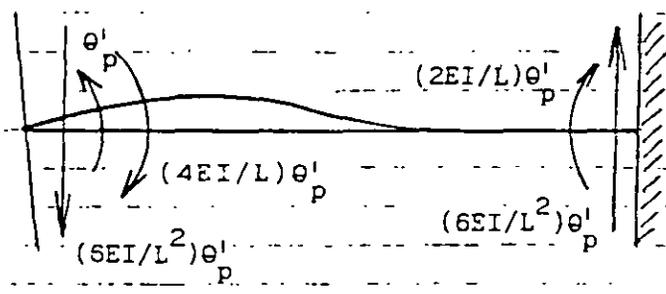
arra 2

p'	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 5.137729 Mp'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 -5.13772 Mq'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 24 Vr'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 24 Vs'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 -11.1293 Vu'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 11.12933 Vv'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 0 Ma'
0.00473	0.004733	0.000802	0.000802	-0.00008	0.000083	0	0 0 Mb'

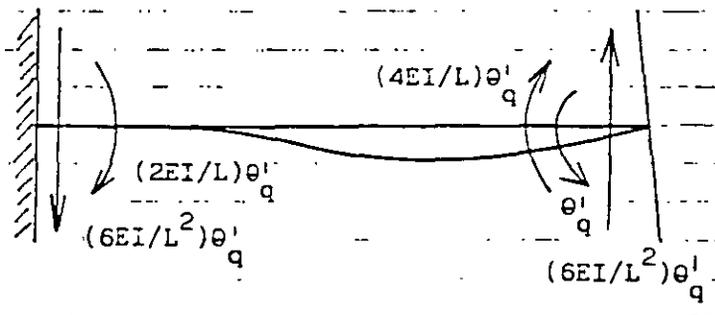
istema local

arra 3

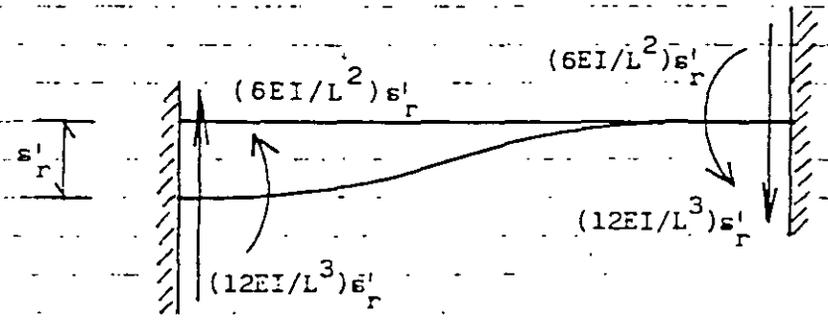
p'	5	11	1	7	3	9	ta'	tb'
	tq'	dr'	ds'	du'	dv'	ta'	tb'	
0	0.004733		0	-0.00037	0	0.000713	0	0 2.510777 Mp'
0	0.004733		0	-0.00037	0	0.000713	0	0 5.137754 Mq'
0	0.004733		0	-0.00037	0	0.000713	0	0 -1.42029 Vr'
0	0.004733		0	-0.00037	0	0.000713	0	0 1.420296 Vs'
0	0.004733		0	-0.00037	0	0.000713	0	0 -26.4169 Vu'
0	0.004733		0	-0.00037	0	0.000713	0	0 26.41699 Vv'
0	0.004733		0	-0.00037	0	0.000713	0	0 0 Ma'
0	0.004733		0	-0.00037	0	0.000713	0	0 0 Mb'



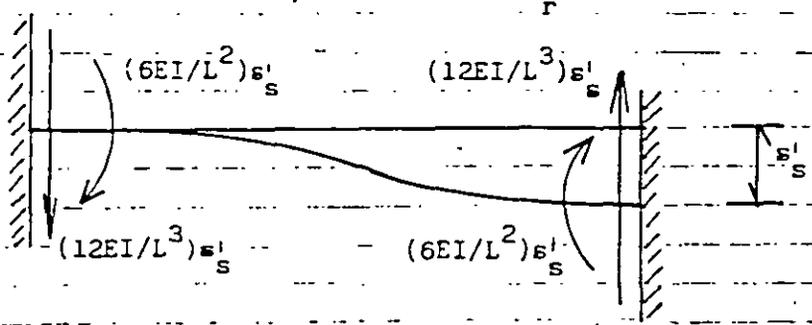
a) Giro  $\theta_p'$



b) Giro  $\theta_q'$



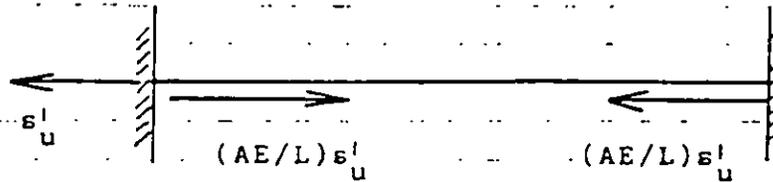
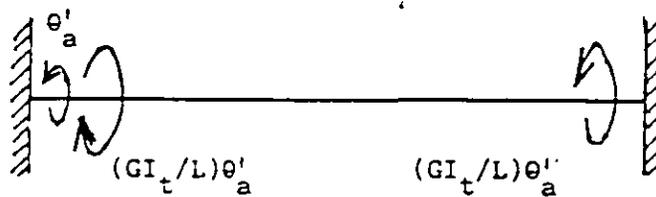
c) Desplazamiento  $s_r'$



d) Desplazamiento  $s_s'$

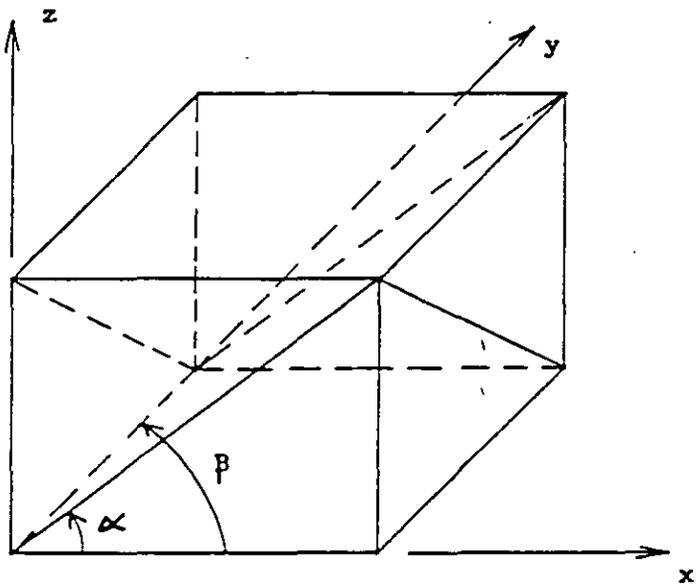
ELEMENTOS MECÁNICOS OCASIONADOS POR DESPLAZAMIENTOS ANGULARES Y LINEALES

FIGURA 3

e) Desplazamiento  $s'_u$ f) Desplazamiento  $s'_v$ g) Giro  $\theta'_a$ h) Giro  $\theta'_b$ 

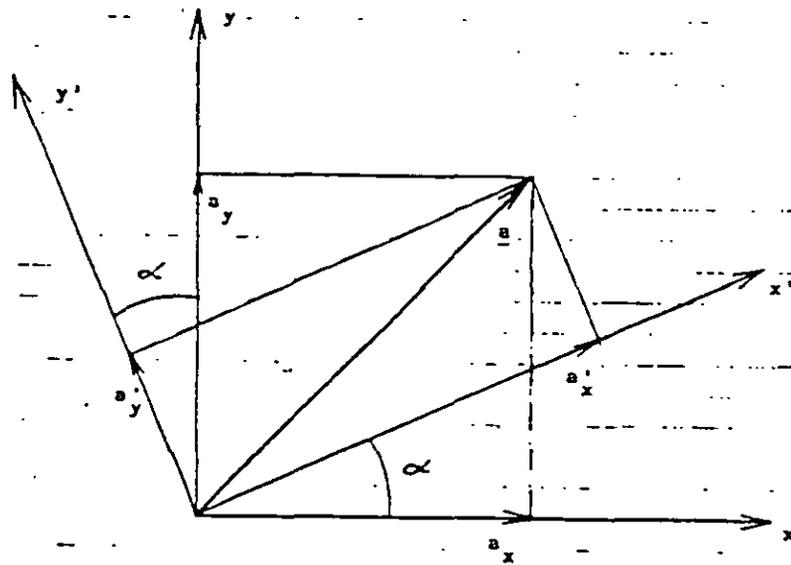
ELEMENTOS MECÁNICOS OCASIONADOS POR  
DESPLAZAMIENTOS ANGULARES Y LINEALES

FIGURA 3



MARCOS PLANOS ORTOGONALES ENTRE SÍ

FIGURA 4

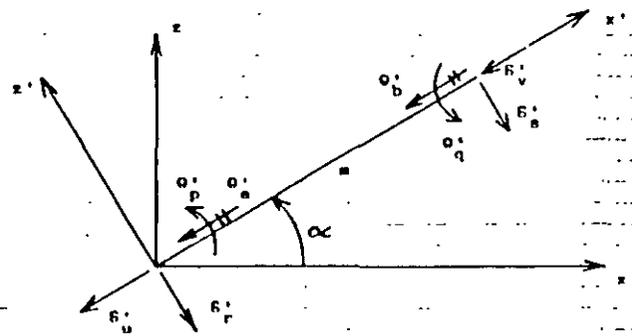


$$a'_x = a_x \cos \alpha + a_y \sin \alpha$$

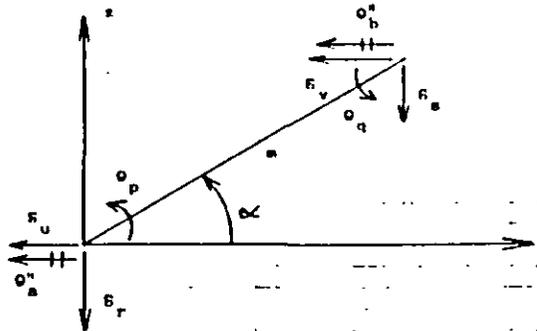
$$a'_y = -a_x \sin \alpha + a_y \cos \alpha$$

TRANSFORMACIÓN DE UN VECTOR DEL SISTEMA GLOBAL x-y AL SISTEMA LOCAL x'-y'

FIGURA 5



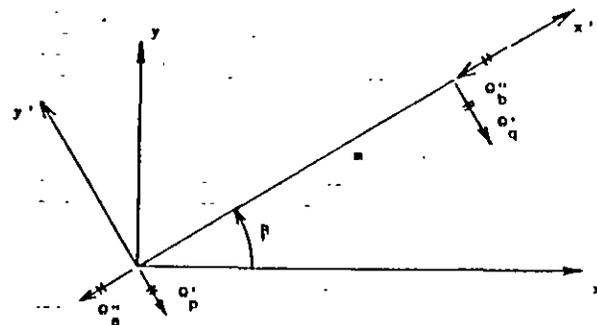
a) SISTEMA LOCAL  $x'-y'-z'$



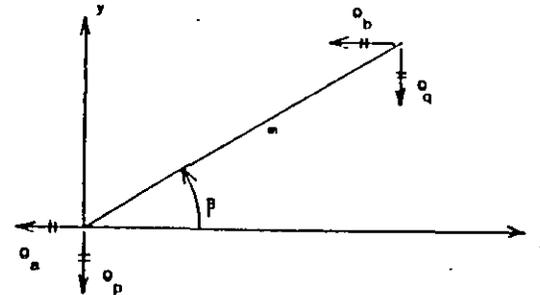
b) SISTEMA GLOBAL  $x-z$

DESPLAZAMIENTOS DE LA BARRA INCLINADA

FIGURA 6



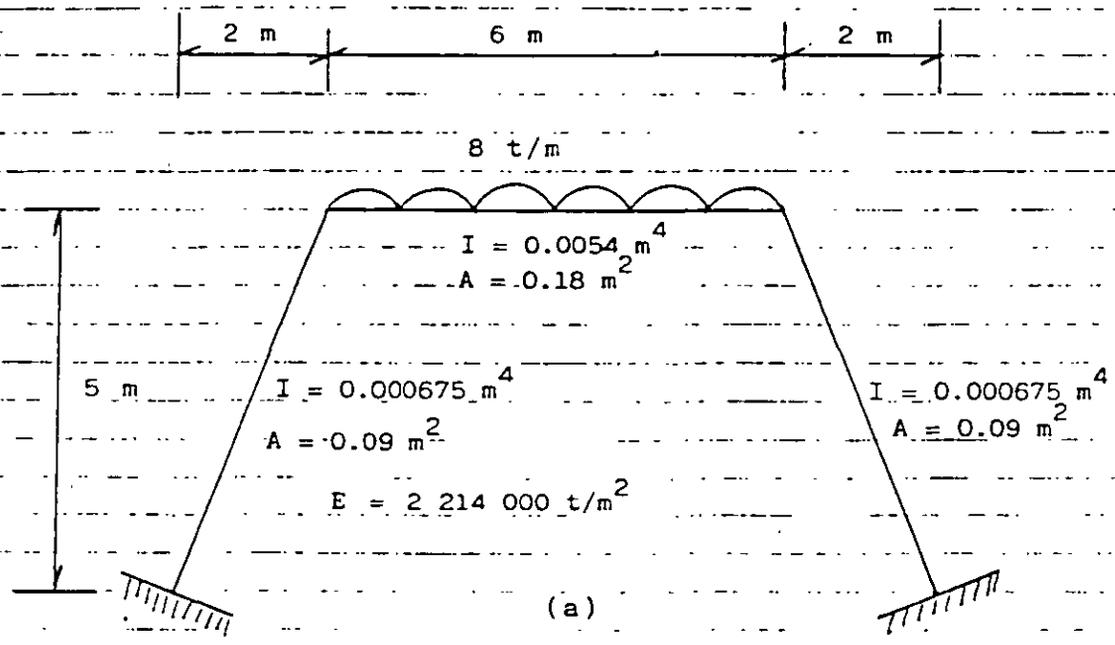
a) SISTEMA LOCAL  $x'-y'$



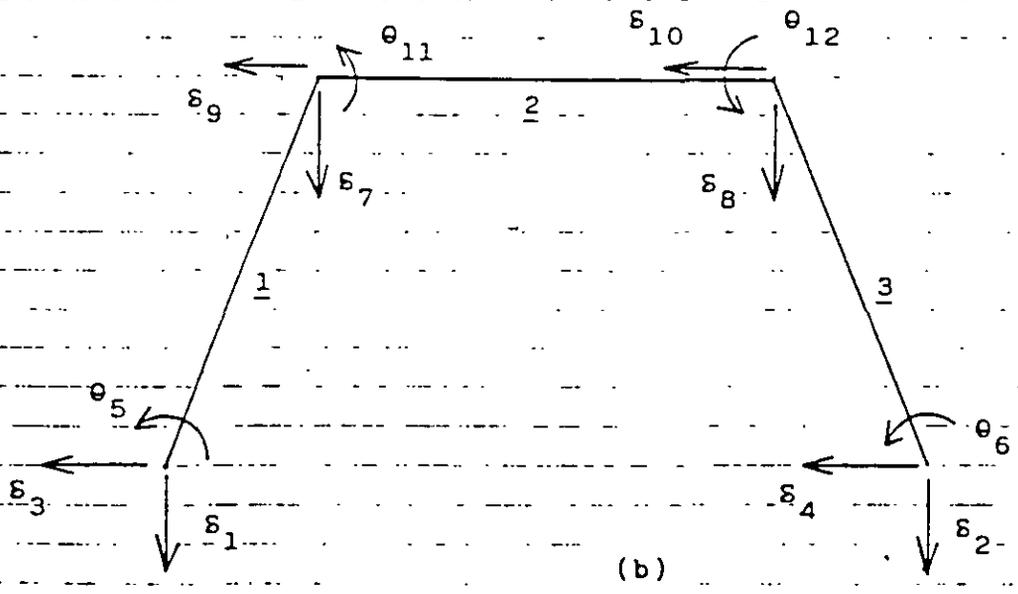
b) SISTEMA GLOBAL  $x-y$

GIROS DE LA BARRA PARALELOS AL PLANO  $x-y$

FIGURA 7

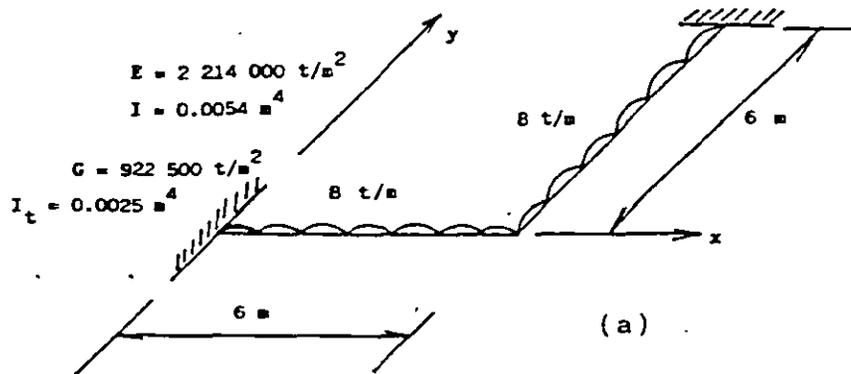


GEOMETRÍA Y CARGAS EN LA ESTRUCTURA (EJEMPLO)

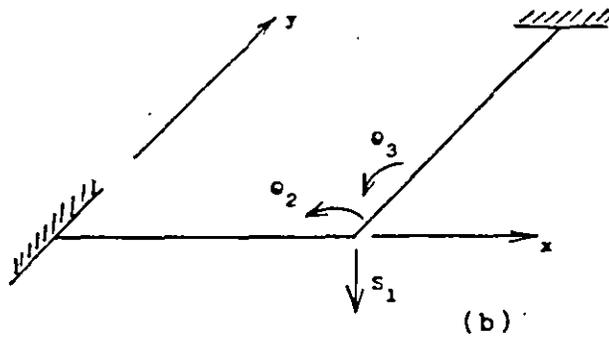


NUMERACIÓN DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD (EJEMPLO)

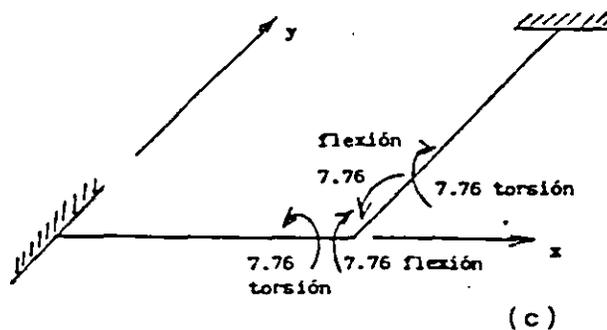
FIGURA 8



GEOMETRÍA Y CARGAS (EJEMPLO)



GRADOS DE LIBERTAD



MOMENTOS EN t.m

FIGURA 9

# Interacción estática suelo-estructura, considerando efectos de torsión y acortamiento de barras

Static soil-structure interaction, considering torsion and compression of bars

A Deméneghi, Profesor del Departamento de Geotecnia, Facultad de Ingeniería, UNAM

RESUMEN. Se presenta un procedimiento para el análisis de la interacción estática suelo-estructura en tres dimensiones, considerando el efecto de acortamiento de barras y de torsión, el cual toma en cuenta toda la estructura y todos los estratos del subsuelo. Esta técnica permite además conocer los elementos mecánicos en cualquier nudo de la estructura, incluyendo desde luego la estructura de cimentación. Con el propósito de ilustrar el empleo del método, se presenta un ejemplo sencillo de aplicación resuelto paso a paso.

## 1. INTRODUCCIÓN

Se han desarrollado hasta la fecha técnicas de interacción estática suelo-estructura bastante útiles la mayoría de ellas; sin embargo, algunos de estos métodos están elaborados para aplicarse únicamente en dos dimensiones, de manera que el análisis de una estructura se realiza en un plano, lo cual hace que se pierda la visualización del fenómeno tridimensional. Se puede intentar hacer análisis en dos direcciones ortogonales y superponer los efectos para representar el fenómeno tridimensional, pero aún así el procedimiento es aproximado, y además no es posible conocer los elementos mecánicos en las vigas intermedias de la estructura de cimentación. Por lo tanto, es necesario desarrollar procedimientos que tomen en cuenta el efecto tridimensional en la interacción suelo-estructura.

En este artículo se presenta un método de interacción tridimensional que toma en cuenta toda la estructura (considerando efectos adicionales de acortamiento de barras y de torsión) y todos los estratos de suelo.

La técnica de interacción que se propone (Deméneghi 1983) consiste en considerar las reacciones del terreno de cimentación como cargas sobre la estructura, manejándolas como incógnitas. Después se calculan los hundimientos del suelo en función de las cargas sobre él (estas cargas son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones, por la tercera ley de Newton). Finalmente se establece la compatibilidad de deformaciones entre estructura y suelo, lo que equivale a igualar los desplazamientos entre ambos medios; con esto se resuelve el problema, ya que se obtienen los hundimientos del suelo y las reacciones sobre la estructura. Como previamente se realizó el análisis estructural, es posible determinar además los giros en los nudos de la estructura. Con estos resultados se pueden calcular los elementos mecánicos en toda la estructura, incluyendo desde luego a la estructura de cimentación.

## 2. ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Emplearemos el método de rigideces para llevar a cabo el análisis estructural. En este método, la ecuación general de equilibrio de la estructura es:

$$K \delta - P^e - P^c = 0 \tag{1}$$

donde  $K$  = matriz de rigidez de la estructura  
 $\delta$  = vector de desplazamientos  
 $P^e$  = vector de cargas de empotramiento  
 $P^c$  = vector de cargas concentradas

La matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de la estructura completa se obtienen mediante la suma de las matrices de rigidez y de los vectores de cargas, respectivamente, de todas y cada una de las barras que forman la estructura

Hallemos la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de una barra con apoyos continuos, sometida al sistema de cargas mostrado en la fig 1. Los desplazamientos de la barra se indican en la fig 2a; los giros se consideran positivos en sentido antihorario, los desplazamientos verticales son positivos si van hacia abajo y los desplazamientos horizontales son positivos si van hacia la izquierda (fig 2a). Los momentos son positivos en sentido horario, las fuerzas cortantes verticales son positivas si van hacia arriba y los fuerzas cortantes horizontales son positivas si van hacia la derecha (fig 2b). Dando a la barra los desplazamientos indicados en la fig 2a, aparecen en dicha barra los elementos mecánicos dados por la siguiente ecuación:

$$P_m' = K_m \delta_m' + (P_m)^c \tag{2}$$

donde

$$P_m' = \begin{pmatrix} M_p' \\ M_q' \\ V_r' \\ V_s' \\ N_u' \\ N_v' \\ M_a' \\ M_b' \end{pmatrix} \quad \delta_m' = \begin{pmatrix} \theta_p' \\ \theta_q' \\ \delta_r' \\ \delta_s' \\ \delta_u' \\ \delta_v' \\ \theta_a' \\ \theta_b' \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez  $K_m'$  de la barra se muestra en la tabla 1. El vector de cargas de empotramiento vale

$$(P_m')^e = \begin{pmatrix} wL^2/12 - (11/192)L^2 r_r - (5/192)L^2 r_s \\ -wL^2/12 - (5/192)L^2 r_r + (11/192)L^2 r_s \\ -wL/2 + (13/32)L r_r + (3/32)L r_s \\ -wL/2 + (3/32)L r_r - (13/32)L r_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Veamos a continuación la determinación de la matriz de rigidez y del vector de cargas de empotramiento para una estructura tridimensional, formada por marcos planos ortogonales entre sí, en los que en cada marco pueden existir barras inclinadas.

En las barras inclinadas de las figs 3 y 4, los desplazamientos del sistema local están relacionados con los desplazamientos del sistema global mediante las siguientes expresiones

$$\theta_p' = \theta_r \cos \beta - \theta_s \sin \beta \quad (4)$$

$$\theta_q' = \theta_q \cos \beta - \theta_b \sin \beta \quad (5)$$

$$\delta_r' = \delta_r \cos \alpha - \delta_u \sin \alpha \quad (6)$$

$$\delta_s' = \delta_s \cos \alpha - \delta_v \sin \alpha \quad (7)$$

$$\delta_u' = \delta_r \sin \alpha + \delta_u \cos \alpha \quad (8)$$

$$\delta_v' = \delta_s \sin \alpha + \delta_v \cos \alpha \quad (9)$$

$$\theta_a' = \theta_r \cos \alpha \sin \beta + \theta_s \cos \alpha \cos \beta \quad (10)$$

$$\theta_b' = \theta_q \cos \alpha \sin \beta + \theta_b \cos \alpha \cos \beta \quad (11)$$

En el sistema global

$$P_m = K_m \delta_m - P_m^e \quad (12)$$

en que la matriz  $K_m$  está dada en la tabla 2.

En una barra inclinada sometida a carga uniforme  $w$  en el sistema local  $x'-z'$ , el vector  $P_m^e$  en el sistema global vale

$$P_m^e = \begin{pmatrix} (wL^2/12) \cos \beta \\ -(wL^2/12) \cos \beta \\ -(wL/2) \cos \alpha \\ -(wL/2) \cos \alpha \\ (wL/2) \sin \alpha \\ (wL/2) \sin \alpha \\ -(wL^2/12) \sin \beta \\ (wL^2/12) \sin \beta \end{pmatrix} \quad (13)$$

La matriz  $K_m$  de la tabla 2 proporciona la matriz de rigidez de la barra inclinada  $m$ , para el sistema coordenado general  $x-y-z$ . La ec 13 proporciona el vector de cargas de empotramiento de la barra inclinada  $m$ , para el sistema coordenado general  $x-y-z$ .

La secuencia de cálculo es la siguiente: primero se emplean las ecs 12 y 13 para hallar la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de cada una de las barras en el sistema global. Como mencionamos antes, la matriz de rigideces de la estructura completa se halla mediante la suma de las matrices de rigidez de todas y cada una de las barras que forman la estructura. El vector de cargas de empotramiento de la estructura completa es igual a la suma de los vectores de carga de todas y cada una de las barras de la estructura. Sustituyendo en la ec 1 se obtiene la ecuación matricial de equilibrio de toda la estructura. La determinación de los elementos mecánicos en la barra  $m$  requiere de la previa determinación de sus desplazamientos en el sistema local, con el empleo de las ecs 4 a 11. A continuación, los elementos mecánicos en la barra  $m$  se hallan con la ec 2:

$$P_m' = K_m' \delta_m' + (P_m')^e \quad (2)$$

donde  $K_m'$  y  $(P_m')^e$  están dados en la tabla 1 y en la ec 3, respectivamente.

### 3. HUNDIMIENTOS DEL TERRENO DE CIMEN-TACIÓN,

Las cargas que transmite la estructura al terreno de cimentación son iguales en magnitud y de sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura, por la tercera ley de Newton. Calculemos los asentamientos del terreno en función de estas cargas: consideremos una reacción  $r_k$  actuando en la superficie (fig 5): la presión vertical vale  $r_k d_k / a_k$ , donde  $d_k$  y  $a_k$  son la longitud y el área en las que actúa la carga, respectivamente. La deformación del estrato de espesor  $H_j$ , debida a la carga  $r_k$  vale

$$\delta_{jk} = (1/E_{Dj}) H_j \sigma_{zjk}$$

Pero

$$\sigma_{zjk} = I_{jk} r_k d_k / a_k$$

donde  $I_{jk}$  es el valor de influencia, el cual está dado por el esfuerzo normal vertical en el punto  $ij$ , producido por una presión unitaria actuando en el área  $a_k$  (Zeevaert 1973).

$E_{Dj}$  es el módulo lineal de deformación, el cual se define como el cociente del esfuerzo normal vertical entre la deformación unitaria vertical que produce. En consecuencia



$$P^c = \begin{pmatrix} -9.6 \\ 0 \\ -9.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{GL} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Sustituyendo valores en la ec-1 y tomando en cuenta que por simetría

$$\delta_1 = \delta_3 = \delta_7 = \delta_9 \quad \delta_2 = \delta_4 = \delta_6 = \delta_8$$

$$r_1 = r_3 = r_7 = r_9 \quad r_2 = r_4 = r_6 = r_8$$

$$\theta_{10} = \theta_{11} = -\theta_{14} = \theta_{15} = \theta_{22} = -\theta_{23} = -\theta_{26} = -\theta_{27}$$

$$\theta_{13} = \theta_{16} = -\theta_{20} = -\theta_{25}$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones (que representa el equilibrio de cortantes o de momentos en el grado de libertad correspondiente):

Grado de libertad 1:

$$773.14 \delta_1 - 773.14 \delta_2 - 1662.24 \theta_{10} + 3.494 r_1 - 0.8062 r_2 - 3.44 - 9.6 = 0 \quad (a)$$

Grado de libertad 2

$$-773.14 \delta_1 + 859.767 \delta_2 - 86.62 \delta_5 + 1662.24 \theta_{10} - 186.23 \theta_{13} - 0.8062 r_1 - 5.241 r_2 + 0.4031 r_5 - 6.88 = 0 \quad (b)$$

Grado de libertad 5

$$-346.48 \delta_2 + 346.48 \delta_5 + 744.92 \theta_{13} + 1.6124 r_2 - 6.988 r_5 - 13.76 = 0 \quad (c)$$

Grado de libertad 10

$$-831.12 \delta_1 + 831.12 \delta_2 - 2692.76 \theta_{10} - 310.23 \theta_{13} - 1.0593 r_1 - 0.4815 r_2 + 1.233 = 0 \quad (d)$$

Grado de libertad 13

$$-186.23 \delta_2 + 186.23 \delta_5 - 620.46 \theta_{10} + 1154.32 \theta_{13} - 1.0593 r_2 - 0.4815 r_5 - 2.465 = 0 \quad (e)$$

b) Cálculo de las deformaciones del terreno de cimentación

Haciendo  $i = 1$  en la ec 14

$$\delta_1 = \sum_{j=1}^2 (1/E_{z1j}) H_j \sum_{k=1}^9 I_{jk} r_k d_k / a_k \quad (A)$$

Como se indicó en el inciso 3. el valor de influencia  $I_{jk}$  representa el esfuerzo en el punto  $ij$  debido a una presión unitaria colocada en el área  $k$ . Calculemos como ejemplo un valor de influencia. digamos el  $I_{115}$ . En la fig 9 se muestra la planta del área 5 y del punto 1. Colocamos una presión unitaria en el área 5 y

calculamos el esfuerzo bajo el punto 1. a la mitad del estrato 1. es decir. a una profundidad de 1.2 m. Aplicando la ecuación de Boussinesq. se obtiene un esfuerzo vertical de 0.002988. Los demás valores de influencia se hallan en forma similar. Sustituyendo estos valores en la ec (A):

$$\begin{aligned} \delta_1 = & 0.0154(2.4) [0.2271(4.3r_1)/4.6225 \\ & + 0.009375(6.45r_2)/9.245 + 0.0001528(4.3r_3)/4.6225 \\ & + 0.009375(6.45r_4)/9.245 + 0.002988(8.6r_5)/18.49 \\ & + 0.0001625(6.45r_6)/9.245 + 0.0001528(4.3r_7)/4.6225 \\ & - 0.0001625(6.45r_8)/9.245 + 0.00002824(4.3r_9)/4.6225] \\ & + 0.0222(2.0)[0.1139(4.3r_1)/4.6225 \\ & + 0.04407(6.45r_2)/9.245 + 0.002284(4.3r_3)/4.6225 \\ & + 0.04407(6.45r_4)/9.245 + 0.028026(8.6r_5)/18.49 \\ & - 0.002638(6.45r_6)/9.245 + 0.0022836(4.3r_7)/4.6225 \\ & + 0.002638(6.45r_8)/9.245 + 0.0005157(4.3r_9)/4.6225] \end{aligned}$$

Por simetría

$$r_1 = r_3 = r_7 = r_9 \quad r_2 = r_4 = r_6 = r_8$$

Sustituyendo valores y haciendo operaciones

$$\delta_1 = 0.012733 r_1 + 0.0033854 r_2 + 0.00063012 r_5 \quad (f)$$

En forma análoga se obtienen  $\delta_2$  y  $\delta_5$

$$\delta_2 = 0.0036877 r_1 + 0.020326 r_2 + 0.0021424 r_5 \quad (g)$$

$$\delta_5 = 0.0028714 r_1 + 0.010629 r_2 + 0.025023 r_5 \quad (h)$$

c) Compatibilidad de deformaciones

La compatibilidad de deformaciones entre la estructura y el terreno de cimentación se logra sustituyendo las ecs (f), (g) y (h) en las ecs (a), (b), (c), (d) y (e), o resolviendo el sistema de ecuaciones de la (a) a la (h).

$$r_1 = 3.2353 \text{ t/m} \quad r_2 = 1.0817 \text{ t/m} \quad r_5 = 1.1488 \text{ t/m}$$

$$\theta_{10} = 0.003760 \quad \theta_{13} = -0.0007646$$

$$\delta_1 = 0.04558 \text{ m} \quad \delta_2 = 0.03638 \text{ m} \quad \delta_5 = 0.04953 \text{ m}$$

Como ilustración hallaremos los elementos mecánicos en las barras 1 y 7. para lo que se aplican las ecs 2 y 3, y la tabla 1.

Barra 1

$$\begin{aligned} M'_{10} &= -1.403 \text{ t-m} & M'_{12} &= -1.697 \text{ t-m} \\ V'_1 &= 4.8 \text{ t} & V'_2 &= 1.042 \text{ t} \\ M'_{11} &= -1.404 \text{ t-m} & M'_{13} &= 1.404 \text{ t-m} \end{aligned}$$

Barra 7

$$\begin{aligned} M'_{11} &= -1.403 \text{ t-m} & M'_{17} &= -1.697 \text{ t-m} \\ V'_1 &= 4.8 \text{ t} & V'_4 &= 1.042 \text{ t} \\ M'_{10} &= 1.404 \text{ t-m} & M'_{16} &= -1.404 \text{ t-m} \end{aligned}$$

## 6. CONCLUSIONES

Como se puede apreciar en los incisos anteriores, se puede resolver el problema de la interacción estática suelo-estructura en una estructura tridimensional, incluyendo acortamiento de barras y momentos de torsión, para marcos planos ortogonales, tomando en cuenta toda la estructura y todos los estratos del subsuelo.

Uno de los aspectos importantes es que para aplicar esta técnica en la práctica profesional, es necesario elaborar programas de computadora que resuevan el problema de manera expedita.

## 7. REFERENCIAS

Beaufait, F W, Rowan, W H, Hoadley, P G y Hackert, R M. 1970. *Computer methods of structural analysis*. Prentice-Hall.

Deméneghi, A. 1983. Interacción suelo-estructura. *Rev Ingeniería*. Vol LIII No 4. 80-90.

Zeevaert, L. 1973. *Foundation engineering for difficult subsoil conditions*. Van Nostrand Reinhold.

TABLA 1  
MATRIZ DE RIGIDEZ  $K'_{m}$  DE UNA BARRA (SISTEMA LOCAL)

$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\delta_u$	$\delta_v$	$\theta_a$	$\theta_b$	
$4EI/L$	$2EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	0	0	0	0	$\theta_p$
$2EI/L$	$4EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	0	0	0	0	$\theta_q$
$-6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$12EI/L^3$	$-12EI/L^3$	0	0	0	0	$\delta_r$
$6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$-12EI/L^3$	$12EI/L^3$	0	0	0	0	$\delta_s$
0	0	0	0	$AE/L$	$-AE/L$	0	0	$\delta_u$
0	0	0	0	$-AE/L$	$AE/L$	0	0	$\delta_v$
0	0	0	0	0	0	$GI/L$	$-GI/L$	$\theta_a$
0	0	0	0	0	0	$-GI/L$	$GI/L$	$\theta_b$

TABLA 2  
MATRIZ DE RIGIDEZ  $K_m$  DE UNA BARRA INCLINADA (SISTEMA GLOBAL)

Sean	$D = 4EI/L$	$M = 6EI/L^2$	$N = 12EI/L^3$	$Q = AE/L$	$F = GI/L$			
	$SA = \text{sen } \alpha$	$S2A = \text{sen}^2 \alpha$	$SB = \text{sen } \beta$	$S2B = \text{sen}^2 \beta$				
	$CA = \text{cos } \alpha$	$C2A = \text{cos}^2 \alpha$	$CB = \text{cos } \beta$	$C2B = \text{cos}^2 \beta$				
$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\delta_u$	$\delta_v$	$\theta_a$	$\theta_b$	
$D C2B$ $- F S2B$	$(D/2) C2B$ $- F S2B$	$- M CB CA$	$M CB CA$	$M CB SA$	$- M CB SA$	$- D CB SB$ $- F CB SB$	$-(D/2) CB SB$ $- F SB CB$	$\theta_p$
$(D/2) C2B$ $- F S2B$	$D C2B$ $+ F S2B$	$- M CB CA$	$M CB CA$	$M CB SA$	$- M CB SA$	$-(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$- D CB SB$ $+ F CB SB$	$\theta_q$
$- M CA CB$	$- M CA CB$	$N C2A$ $+ Q S2A$	$- N C2A$ $- Q S2A$	$- N CA SA$ $+ Q CA SA$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$M CA SB$	$M CA SB$	$\delta_r$
$M CA CB$	$M CA CB$	$- N C2A$ $- Q S2A$	$N C2A$ $+ Q S2A$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$- N CA SA$ $+ Q CA SA$	$- M CA SB$	$- M CA SB$	$\delta_s$
$M SA CB$	$M SA CB$	$- N CA SA$ $+ Q CA SA$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$N S2A$ $+ Q C2A$	$- N S2A$ $- Q C2A$	$- M SA SB$	$- M SA SB$	$\delta_u$
$- M SA CB$	$- M SA CB$	$N CA SA$ $- Q CA SA$	$- N CA SA$ $+ Q CA SA$	$- N S2A$ $- Q C2A$	$N S2A$ $+ Q C2A$	$M SA SB$	$M SA SB$	$\delta_v$
$- D CB SB$ $+ F CB SB$	$-(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$M CA SB$	$- M CA SB$	$- M SA SB$	$M SA SB$	$D S2B$ $+ F C2B$	$(D/2) S2B$ $- F C2B$	$\theta_a$
$-(D/2) CB SB$ $- F CB SB$	$- D CB SB$ $+ F CB SB$	$M CA SB$	$- M CA SB$	$- M SA SB$	$M SA SB$	$(D/2) S2B$ $- F C2B$	$D S2B$ $+ F C2B$	$\theta_b$

TABLA 3  
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA 1.  $K_1$

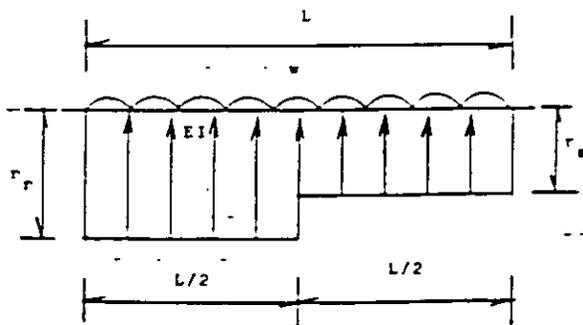
$\theta_{10}$	$\theta_{12}$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta_{11}$	$\theta_{13}$	
2382.530	1191.265	-831.115	831.115	0	0	$\theta_{10}$
1191.265	2382.530	-831.115	831.115	0	0	$\theta_{12}$
-831.115	-831.115	386.565	-386.565	0	0	$\delta_1$
831.115	831.115	-386.565	386.565	0	0	$\delta_2$
0	0	0	0	310.08	-310.08	$\theta_{11}$
0	0	0	0	-310.08	310.08	$\theta_{13}$

TABLA 4  
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA BARRA 7.  $K_7$

$\theta_{10}$	$\theta_{16}$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta_{11}$	$\theta_{17}$	
310.08	-310.08	0	0	0	0	$\theta_{10}$
-310.08	310.08	0	0	0	0	$\theta_{16}$
0	0	386.565	-386.565	831.115	831.115	$\delta_1$
0	0	-386.565	386.565	-831.115	-831.115	$\delta_2$
0	0	831.115	-831.115	2382.530	1191.265	$\theta_{11}$
0	0	831.115	-831.115	1191.265	2382.530	$\theta_{17}$

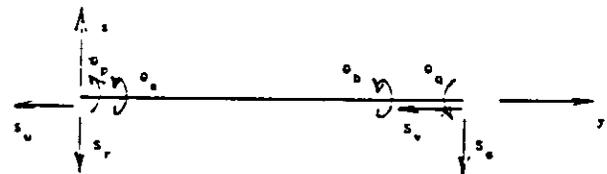
TABLA 5  
MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA  $K$  PARA LOS PRIMEROS CINCO GRADOS DE LIBERTAD. SISTEMA GLOBAL

$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_5$	
773.130	-386.565	0	-386.565	0	$\delta_1$
-386.565	859.750	-386.565	0	-86.619	$\delta_2$
0	-386.565	773.130	0	0	$\delta_3$
-386.565	0	0	859.750	-86.619	$\delta_4$
0	-86.619	0	-86.619	346.477	$\delta_5$

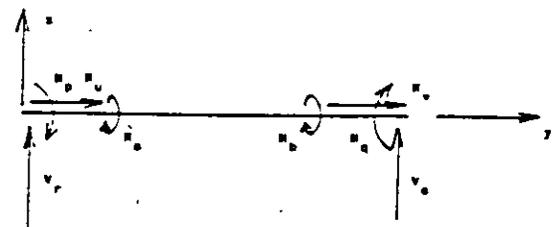


GEOMETRÍA Y CARGAS  
BARRA DE CIMENTACIÓN

FIGURA 1

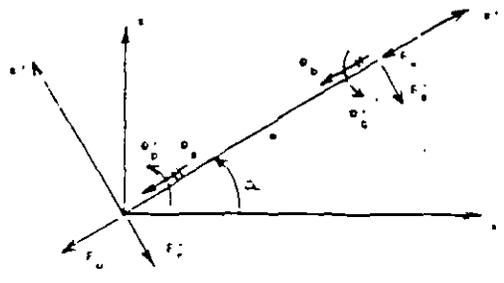


a) Desplazamientos

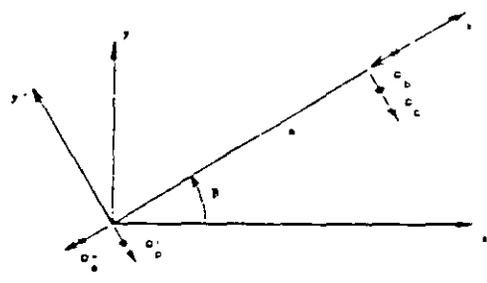


b) Elementos mecánicos  
(barra sobre rudo)

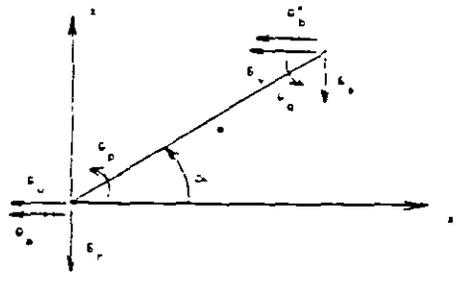
CONVENCIÓN DE SIGNOS FIGURA 2



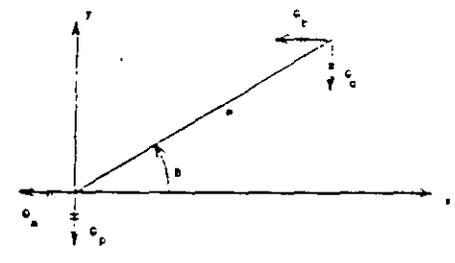
(a) SISTEMA LOCAL x'-y'



(b) SISTEMA LOCAL x''-y''



(c) SISTEMA GLOBAL x-z



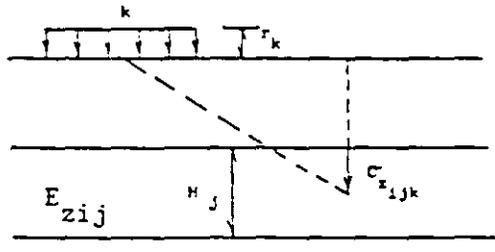
(d) SISTEMA GLOBAL x-y

DESPLAZAMIENTOS DE LA BARRA INCLINADA

CÍRCOS DE LA BARRA PARALELOS AL PLANO x-y

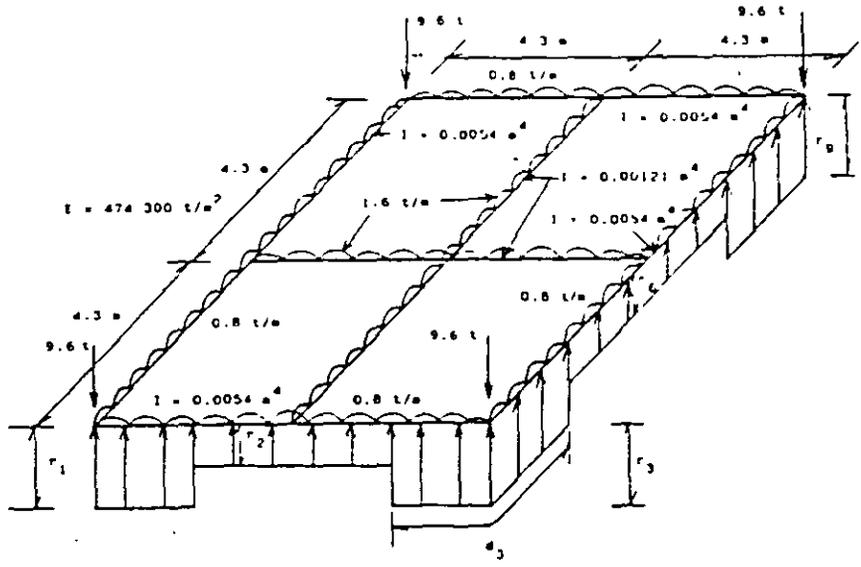
FIGURA 3

FIGURA 4



CÁLCULO DE LOS HUNDIMIENTOS DEL TERRENO

FIGURA 5



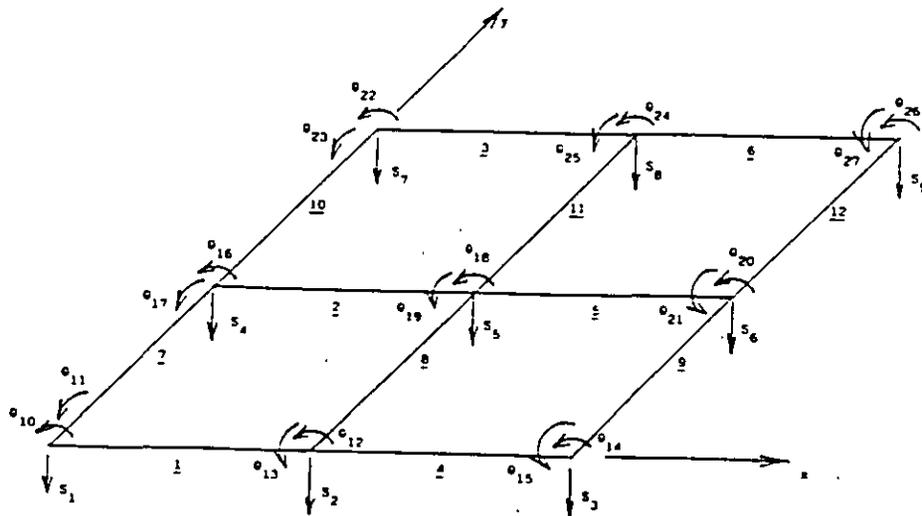
GEOMETRÍA Y SISTEMA DE CARGAS SOBRE LA ESTRUCTURA

FIGURA 6

$1/E_z = 0.0154 \text{ m}^2/t$	2.4 m Estrato 1
$1/E_z = 0.0222 \text{ m}^2/t$	2.0 m Estrato 2

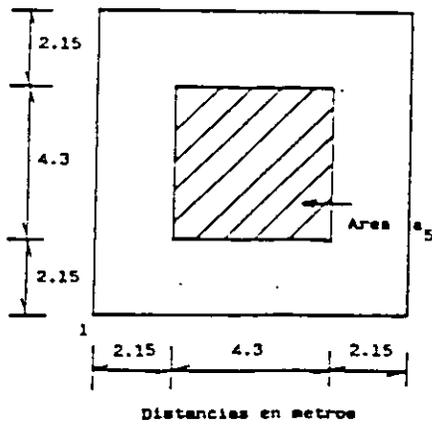
ESTRATIGRAFÍA Y PROPIEDADES (EJEMPLO)

FIGURA 7



NUMERACION DE BARRAS Y GRADOS DE LIBERTAD

FIGURA 8



DETERMINACIÓN DE LOS VALORES DE INFLUENCIA

FIGURA 9



$$P_1^e = \begin{bmatrix} 4.9333 - 0.91667 r_1 - 0.41667 r_2 \\ -4.9333 + 0.41667 r_1 + 0.91667 r_2 \\ -7.4 + 0.375 r_1 + 1.625 r_2 \\ -7.4 + 1.625 r_1 + 0.375 r_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_4 \\ \theta_5 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix}$$

El vector de cargas de empotramiento de la barra 2 vale (ec 4)

$$P_2^e = \begin{bmatrix} 4.9333 - 0.91667 r_2 - 0.41667 r_3 \\ -4.9333 + 0.41667 r_2 + 0.91667 r_3 \\ -7.4 + 0.375 r_2 + 1.625 r_3 \\ -7.4 + 1.625 r_2 + 0.375 r_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento de la estructura están dados por suma de las matrices y vectores de las barras 1 y 2, respectivamente. No se considera el grado de libertad 5 ( $\theta_5$ ) porque por simetría es igual a cero.

$$K = \begin{bmatrix} & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \theta_4 & \theta_6 \\ \begin{matrix} 10939.1 \\ -10939.1 \\ 0 \\ -21878.2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -10939.1 \\ 21878.2 \\ -10939.1 \\ 21878.2 \\ -21878.2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -10939.1 \\ 10939.1 \\ 0 \\ 21878.2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 21878.2 \\ 0 \\ 58341.9 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -21878.2 \\ 21878.2 \\ 0 \\ 58341.9 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -21878.2 \\ 21878.2 \\ 0 \\ 58341.9 \end{matrix} \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_6 \end{bmatrix}$$

$$P^e = \begin{bmatrix} -7.4 + 1.625 r_1 + 0.375 r_2 \\ -14.8 + 0.375 r_1 + 3.25 r_2 + 0.375 r_3 \\ -7.4 + 1.625 r_2 + 0.375 r_3 \\ 4.9333 - 0.91667 r_1 - 0.41667 r_2 \\ -4.9333 + 0.41667 r_2 + 0.91667 r_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_6 \end{matrix}$$

$$P_0^e = \begin{bmatrix} -35 \\ -50 \\ -35 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_6 \end{matrix}$$

Tomando en cuenta que por simetría  $\delta_1 = \delta_3$ ,  $\theta_4 = -\theta_6$ , y utilizando la ecuación matricial

$$K \delta + P^e + P^c = 0$$

se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$10939.1 \delta_1 - 10939.1 \delta_2 - 21878.12 \theta_4 + 1.625 r_1 + 0.375 r_2 - 7.4 - 35 = 0 \quad (a)$$

$$-21878.2 \delta_1 + 21878.2 \delta_2 + 43756.4 \theta_4 + 0.75 r_1 + 3.25 r_2 - 14.8 - 50 = 0 \quad (b)$$

$$-21878.2 \delta_1 + 21878.2 \delta_2 + 58341.9 \theta_4 - 0.91667 r_1 - 0.41667 r_2 + 4.9333 = 0 \quad (c)$$

b) Hundimientos del terreno

Se emplea la ec 5

$$\delta_i = \delta_{o1} + \sum_{j=1}^{n_e} M_{z_{ij}} H_{ij} \sum_{k=1}^{n_r} I_{ijk} r_k d_k / a_k$$

Los valores de influencia  $I_{ijk}$  se obtienen aplicando presiones unitarias y calculando los esfuerzos producidos por estas presiones unitarias. Por ejemplo, el valor  $I_{111}$  se determina aplicando una presión unitaria en el área 1 (área de 2 por 2 m<sup>2</sup>) y calculando el esfuerzo normal vertical  $\sigma_z$  bajo el punto 1, en el primer estrato, a la profundidad  $z = 0.8/2 = 0.4$  m. Aplicando la ecuación de Boussinesq se halla un  $\sigma_z = I_{111} = 0.4878$ . Los demás valores de influencia se obtienen en forma similar.

En la tabla 1 se presentan los valores de influencia del terreno de cimentación y en la tabla 2 las magnitudes de los elementos de la matriz de flexibilidades del suelo. Tomando en cuenta que por simetría  $\delta_1 = \delta_3$ ,  $r_1 = r_3$ , se obtienen los hundimientos  $\delta_i$  en función de las cargas  $r_i$ :

$$\delta_1 = 0.000817668 r_1 + 0.0000349723 r_2 \quad (d)$$

$$\delta_2 = 0.0000634471 r_1 + 0.00163405 r_2 \quad (e)$$

c) Compatibilidad de deformaciones

Resolviendo el sistema de ecuaciones a a e:

$$\delta_1 = 0.021759 \text{ m}$$

$$\delta_2 = 0.020075 \text{ m}$$

$$\theta_4 = 0.0010381$$

$$r_1 = 26.129 \text{ t/m}$$

$$r_2 = 11.271 \text{ t/m}$$

e) Elementos mecánicos

Como ejemplo, determinaremos los elementos mecánicos en la barra 1. Aplicando las ecs 6 a 9

$$M'_4 = 0$$

$$M'_5 = 9.717 \text{ t.m}$$

$$V'_1 = 35 \text{ t}$$

$$V'_2 = 25 \text{ t}$$

f) Expansiones del subsuelo

Para estimar el efecto de una expansión del subsuelo, consideremos que los puntos 1 y 3 sufren un levantamiento en campo libre de 2.5 cm. La ec  $\alpha$  queda

$$\delta_1 = -0.025 + 0.000817668 r_1 + 0.0000349723 r_2 \quad (d')$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones  $\alpha$  a e (con la ec  $d'$  en lugar de la ec  $\alpha$ ), se halla

$$\delta_1 = 0.0003896$$

$$\delta_2 = 0.005754 \text{ m}$$

$$\theta_4 = -0.0002122$$

$$r_1 = 35.247 \text{ t/m}$$

$$r_2 = 2.153 \text{ t/m}$$

Hallemos los elementos mecánicos en la barra 1, aplicando las ecs 6 a 9

$$M'_4 = 0$$

$$M'_5 = 46.189 \text{ t.m}$$

$$V'_1 = 35 \text{ t}$$

$$V'_2 = 25 \text{ t}$$

Nótese el incremento de la reacción  $r_1$  de 26.129 a 35.247 t/m y la disminución de la reacción  $r_2$  de 11.271 a 2.153 t/m. También es significativo el incremento del momento flexionante en el nudo 5, que pasa de 9.717 a 46.189 t.m, con un aumento de 375 %.

LCULO DE LOS VALORES DE INFLUENCIA  
 NTO, ESTRATO, CARGA, VALOR DE INFLUENCIA

1	1	1	.4878484
1	1	2	7.820726E-04
1	1	3	7.838011E-06
2	2	1	.2963525
2	2	2	2.385181E-02
2	2	3	4.414916E-04
1	1	1	7.368624E-04
1	1	2	.9756968
1	1	3	7.368624E-04
2	2	1	2.162087E-02
2	2	2	.592705
2	2	3	2.162087E-02
1	1	1	7.838011E-06
1	1	2	7.820726E-04
1	1	3	.4878484
2	2	1	4.414916E-04
2	2	2	2.385181E-02
2	2	3	.2963525

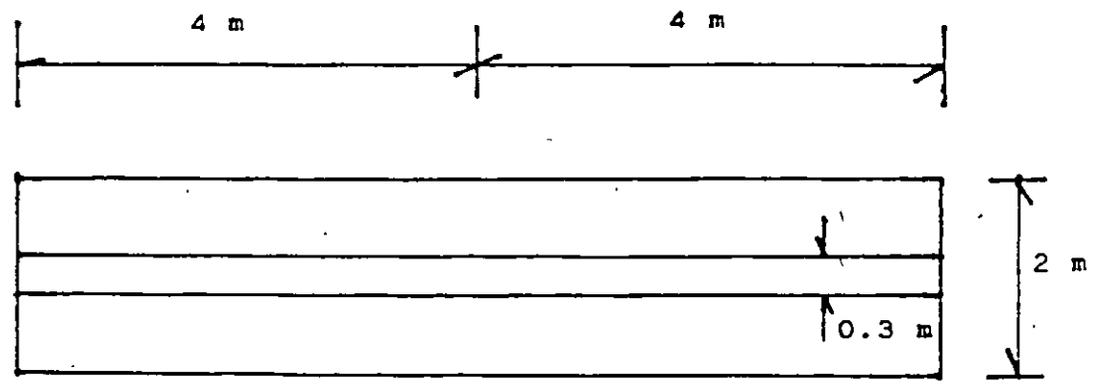
TABLA 2

MATRIZ DE FLEXIBILIDADES DEL SUELO

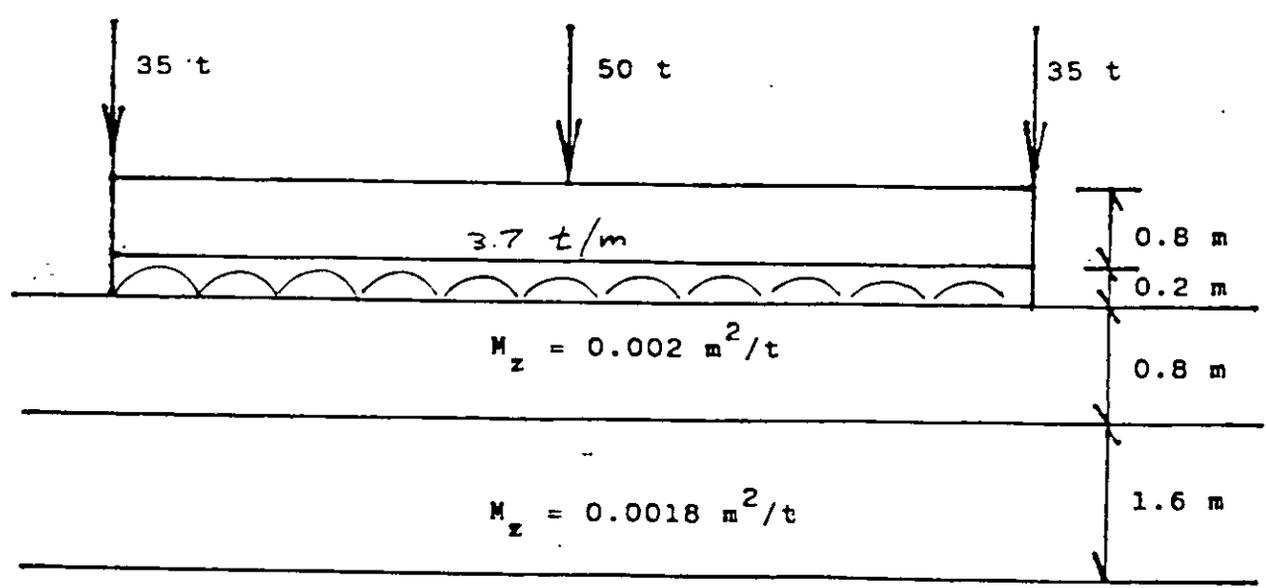
, FLE(I,K)

1	1	8.170263E-04
1	2	3.497227E-05
1	3	6.420184E-07
2	1	3.172354E-05
2	2	1.634053E-03
2	3	3.172354E-05
3	1	6.420184E-07
3	2	3.497227E-05
3	3	8.170263E-04

NOMBRE: CURSO DE CIMENTACIONES. EJEMPLO DE ISF																					
FECHA: 11/02/97																					
PROGRAMA: ISEPRMEC																					
NOMBRE: CALCULO DE ESFUERZOS NORMALES EN LA MASA DE SUELO																					
FECHA: 20/07/92																					
PROGRAMA: ESTFOR																					
ESTRATO	Z	q	nu	L	R	A	Ra1z A	x2+z2	y2+z2	xyz	sz	sx	sy	sz	sx	sy	sz	sz	sx	sy	sz
	m	t/m2		m	m						t/m2	t/m2	t/m2	t/m2	t/m2	t/m2	t/m2	t/m2	t/m2	t/m2	t/m2
1	0,4	9,35	0,45	8	1	65,16	8,07217	1,16	64,16	3,2	2,284389	1,240512	1,59837	4,568778	2,481025	3,19674	220	0,8	0,00915	499,126	
2	1,6	9,35	0,45	8	1	67,56	8,21849	3,56	66,56	12,8	1,499071	0,147423	0,712	2,998045	0,294847	1,424	420	1,6	0,0053	566,034	
1	0,4	9,35	0,45	4	1	17,16	4,14246	1,16	16,16	1,6	2,284141	1,22477	1,575071	4,888918	4,888918	6,30059	220	0,8	0,01862	490,623	
2	1,6	9,35	0,45	4	1	19,56	4,42267	3,56	18,56	6,4	1,486529	0,137689	0,59606	5,946115	0,550756	2,38424	420	1,6	0,01101	539,929	



PLANTA

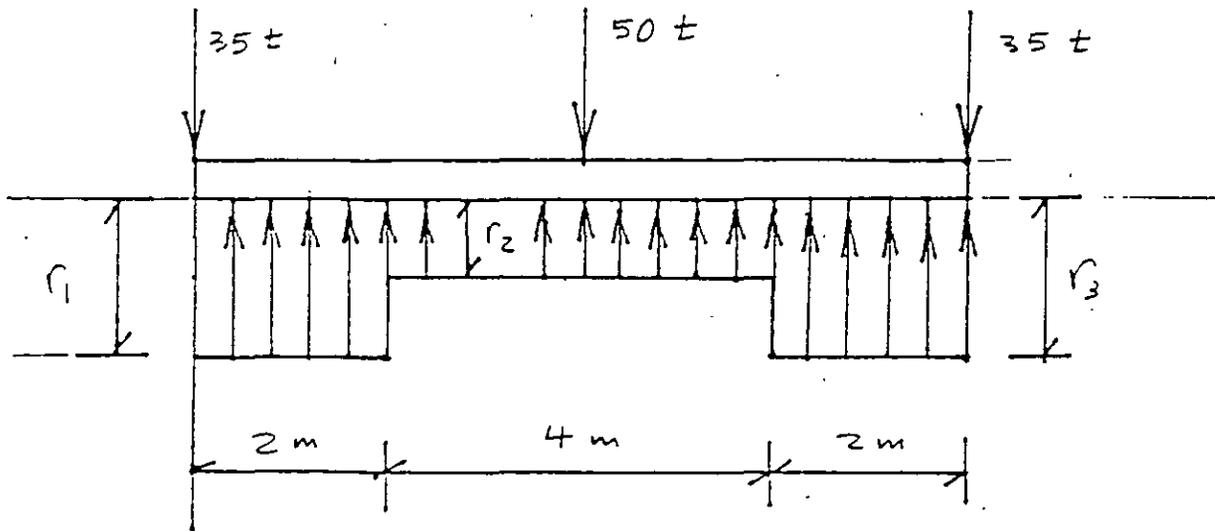


Roca

ELEVACION

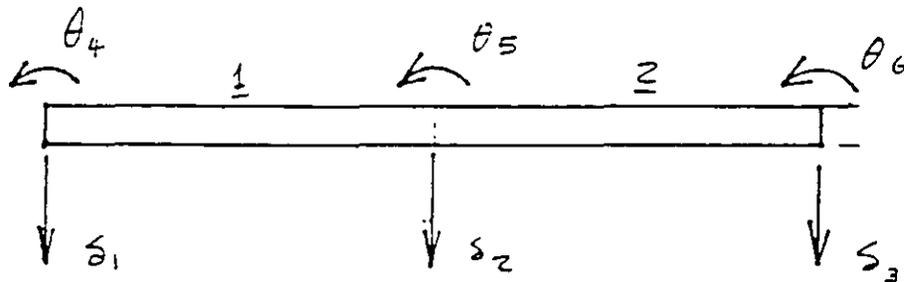
CARACTERISTICAS DE ESTRUCTURA Y TERRENO  
DE CIMENTACION

FIGURA 1



SISTEMA DE CARGAS.

FIGURA 2



NUMERACIÓN DE BARRAS Y  
GRADOS DE LIBERTAD

FIGURA 3

# INTERACCIÓN ESTÁTICA SUELO-ESTRUCTURA EN ARCILLAS EXPANSIVAS

Agustín Deméneghi Colina\*

## 1. Cálculo de la interacción estática suelo-estructura

La interacción estática suelo-estructura se puede extender a lugares donde en subsuelo esté formado por arcillas expansivas. En este caso la expansión del subsuelo en un punto  $i$  se puede tomar con una deformación que denominaremos  $\delta_{oi}$ . La deformación del punto  $i$ , considerando además el efecto de las cargas  $r_k$  estará dada por la siguiente expresión:

$$\delta_i = \delta_{oi} + \sum_{j=1}^{n_e} M_{z_{ij}} H_{ij} \sum_{k=1}^{n_r} I_{ijk} r_k d_k / a_k \quad (1)$$

donde  $M_{z_{ij}}$  = módulo lineal de deformación, igual al cociente de la deformación unitaria vertical del estrato  $j$ , entre el esfuerzo normal vertical que la ocasiona

$H_{ij}$  = espesor del estrato  $j$ , bajo el punto  $i$

$I_{ijk}$  = valor de influencia, igual al esfuerzo normal vertical en el punto  $ij$ , producido por una presión unitaria actuando en el área  $a_k$

$r_k$  = reacción en el punto  $k$ , en t/m

$d_k$  = distancia en que actúa  $r_k$

$n_e$  = número de estratos

$n_r$  = número de reacciones

El levantamiento en un punto se tomará con un valor negativo. Así, si el suelo experimenta en el punto  $i$  una expansión en campo libre de 4 cm,  $\delta_{oi} = -4$  cm.

Consideremos el ejemplo de Deméneghi (1995) y supongamos que los puntos 1, 3, 7 y 9 sufren una expansión en campo libre de 3 cm. Por lo tanto:

$$\delta_{o1} = \delta_{o3} = \delta_{o7} = \delta_{o9} = -0.03 \text{ m}$$

La ec  $f$  queda

$$\delta_1 = -0.03 + 0.012733 r_1 + 0.0023854 r_2 + 0.00063012 r_5 \quad (f')$$

Las demás ecuaciones permanecen iguales. Resolviendo el sistema (a) a (h):

\* Profesor del Departamento de Geotecnia. División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica. Facultad de Ingeniería. UNAM

$$\begin{array}{lll} \delta_1 = 0.02478 \text{ m} & \delta_2 = 0.02695 \text{ m} & \delta_3 = 0.4874 \text{ m} \\ \theta_{10} = 0.00003207 & \theta_{19} = -0.004690 & \\ r_1 = 4.121 \text{ t/m} & \delta_2 = 0.443 \text{ t/m} & r_3 = 1.287 \text{ t/m} \end{array}$$

Presentamos a continuación la determinación de los elementos mecánicos en las barras 1 y 7:

Barra 1 (dirección x)

Se aplican las ecs 6 a 11, 14 y 15

$$\begin{array}{ll} M_{10} = -1.457 \text{ t.m} & M_{12} = 3.072 \text{ t.m} \\ V_1 = 4.788 \text{ t} & V_2 = 1.584 \text{ t} \\ M_{11} = -1.464 \text{ t.m} & M_{19} = 1.464 \text{ t.m} \end{array}$$

Barra 7 (dirección y)

Se aplican las ecs 6 a 13

$$\begin{array}{ll} M_{11} = -1.457 \text{ t.m} & M_{17} = 3.072 \text{ t.m} \\ V_1 = 4.788 \text{ t} & V_4 = 1.584 \text{ t} \\ M_{10} = 1.464 \text{ t.m} & M_{16} = -1.464 \text{ t.m} \end{array}$$

En la fig 1 se exhiben los elementos mecánicos en las barras 1 y 7. Se han graficado además, para fines de comparación, los elementos mecánicos sin considerar expansión. El incremento más importante se presenta en el momento flexionante (grado de libertad 12) del nudo derecho de la barra 1 (o barra 7), en el que inclusive se presenta cambio de signo; el aumento es del orden de 220 %. También se presenta un incremento considerable, del orden de 53 %, en el cortante (grado de libertad 2) del nudo derecho.

Lo anterior hace ver la necesidad de tomar en cuenta la expansión del subsuelo, en la interacción estática suelo-estructura.

## 2. Determinación de deformaciones y propiedades del suelo

En suelos cohesivos parcialmente saturados en que la presión hidráulica  $u_v \leq 0$ , la presión de confinamiento resultante  $p_{ce}$  está dada por la suma de los efectos debidos a la presión debida a peso propio  $p_{co}$  (presión total de confinamiento) y los debidos a la presión de succión  $p_s$ . La deformabilidad del suelo depende de la presión de confinamiento resultante  $p_{ce}$ .

Para fines de análisis de interacción suelo-estructura, conviene separar el problema calculando dos clases de deformaciones:

(a) La deformación debida a la variación de la succión, manteniendo los demás esfuerzos (presiones totales) constantes (deformación en campo libre  $\delta_{oi}$ , ec 1); y

(b) La deformación debida a incrementos de esfuerzo ocasionados por la estructura, manteniendo la presión de succión constante (segundo término del segundo miembro de la ec 1). Por lo tanto, el módulo  $M_{z,u}$  debe determinarse para una succión constante.

### 3. Consideraciones prácticas

Con el empleo de la interacción suelo-estructura se pueden determinar en forma más realista los desplazamientos diferenciales en una estructura. A pesar de que el ejemplo aquí presentado no es totalmente representativo de lo que ocurre en una arcilla expansiva, puede sin embargo ilustrar, en forma *cualitativa* el fenómeno de interacción que se presenta en esta clase de suelo. Tomando los datos del ejemplo, supongamos que la estructura se construyó en temporada de estiaje y que ésta sufrió los siguientes asentamientos:

Nudo	Asentamiento cm
1	4.16
2	3.49

Consideremos que por alguna razón se incrementa la humedad del subsuelo (agua de lluvia, rotura de tubería de drenaje, riego, etcétera), y que, en la zona aledaña a los puntos 1, 3, 7 y 9 (en campo libre), el suelo sufrió una expansión de 3 cm. Los desplazamientos de la estructura, después de esta expansión, quedaron

Nudo	Asentamiento cm
1	2.48
2	2.70

El nudo 1 se levantó  $4.16 - 2.48 = 1.68$  cm, mientras que el nudo 2 se levantó  $3.49 - 2.70 = 0.79$  cm. Es decir, a pesar de que la expansión del suelo (en campo libre) fue de 3 cm, por efecto de las cargas sobre el terreno y de la rigidez de la estructura de cimentación, las deformaciones de la estructura fueron menores.

En términos generales, es conveniente calcular las deformaciones de la estructura para diferentes estados de movimiento. Así, una posible condición consiste en que la estructura se construya en temporada de estiaje, y que sufra asentamientos sólo por incrementos de carga debidos a la estructura; posteriormente, en época de lluvias se incrementa la humedad del subsuelo y ocurrirán expansiones de la

arcilla y de la estructura. Otra posible trayectoria de deformaciones puede consistir en que la estructura se construya en época de lluvias, y que la estructura experimente asentamientos por la carga sobre el subsuelo; en temporada de estiaje el suelo se enjutará y se presentaran asentamientos adicionales en la estructura.

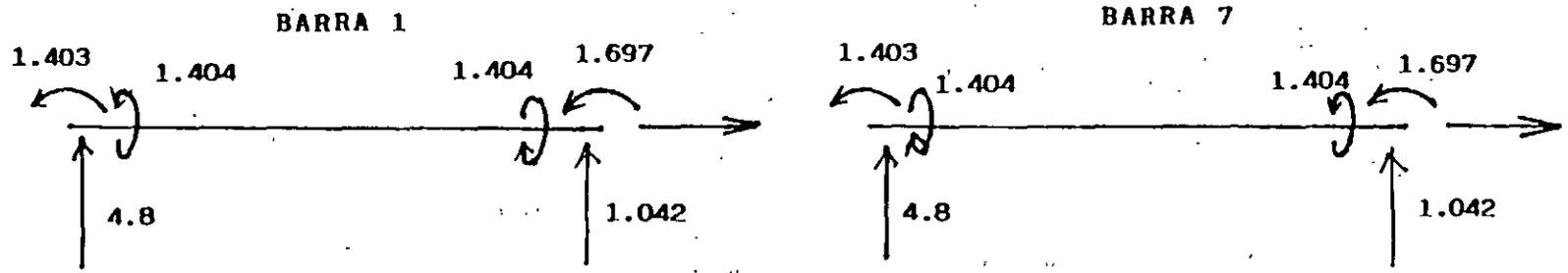
Los desplazamientos diferenciales se deberán comparar con los desplazamientos diferenciales *tolerables*. En la fig 2 (Bjerrum 1963) y en la tabla 1 (Sowers 1962) se presentan magnitudes de estos desplazamientos tolerables (la fig 2 y la tabla 1 están tomados de Lambe y Whitman 1969).

Se espera que lo expuesto en párrafos anteriores pueda contribuir a conocer mejor el comportamiento de la interacción estática suelo-estructura en arcillas expansivas. Es obvio que lo aquí presentado puede ser apenas el inicio de un programa de investigación mucho más completo sobre el tema.

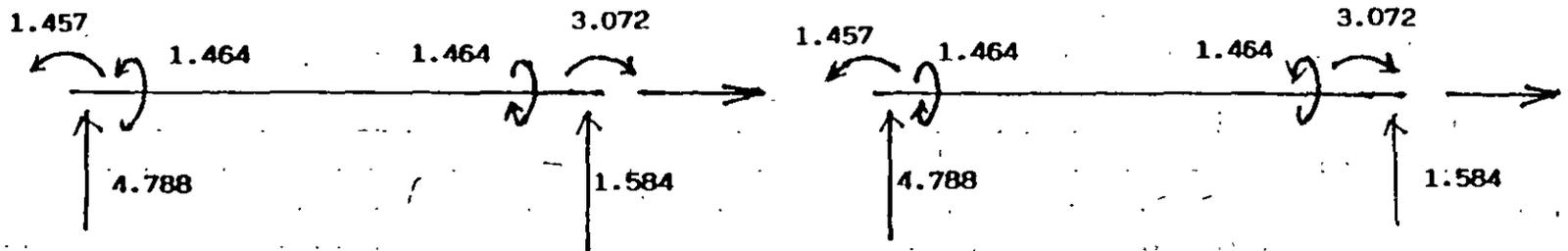
#### Referencias

Deméneghi, A., "Método tridimensional de interacción estática suelo-estructura", Memorias del X Congreso Panamericano de Mec de Suelos e Ing de Cimentaciones, Vol 2, Guadalajara, Jal, 1995

Lambe, T W y Whitman, R V, Soil Mechanics, Wiley, 1969

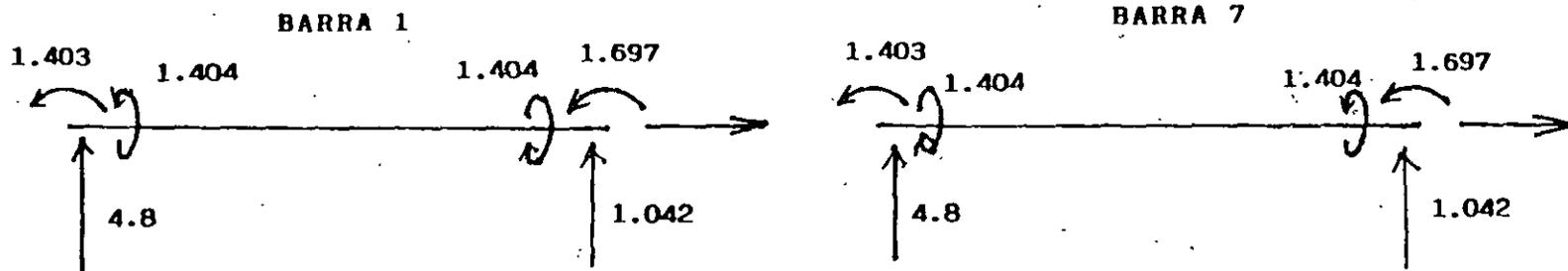


a) SIN EXPANSION

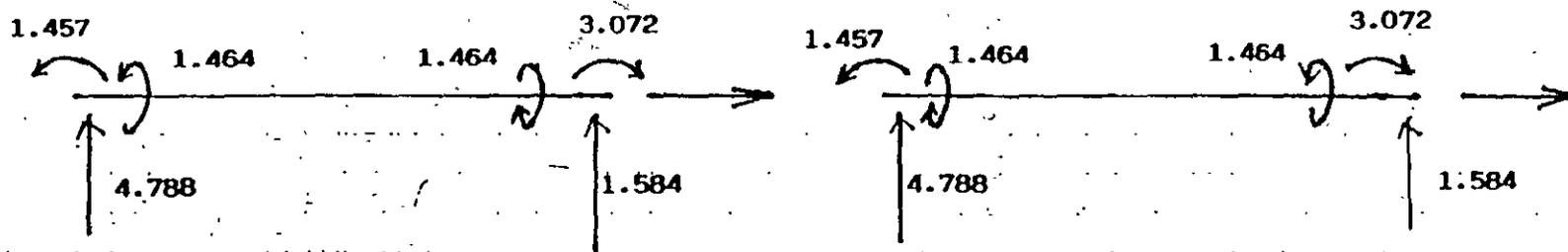


b) CON UNA EXPANSION DE 3 cm EN EL GRADO DE LIBERTAD 1 (NUDO IZQUIERDO)

FIGURA 1



a) SIN EXPANSION



b) CON UNA EXPANSION DE 3 cm EN EL GRADO DE LIBERTAD 1 (NUDO IZQUIERDO)

FIGURA 1