



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO**

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA DE SISTEMAS – INVESTIGACIÓN DE  
OPERACIONES

**ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN PARA PROBLEMAS  
BINIVEL DISCRETOS-CONTINUOS**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ZAIDA ESTEFANÍA ALARCÓN BERNAL

TUTOR PRINCIPAL:  
DR. RICARDO ACEVES GARCÍA, FACULTAD DE INGENIERÍA

COMITÉ TUTOR:  
DRA. ANGÉLICA LOZANO CUEVAS, INSTITUTO DE INGENIERÍA  
DR. SERVIO GUILLÉN BURGUETE, INSTITUTO DE INGENIERÍA

---

CIUDAD DE MÉXICO, ABRIL 2017



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dra. Angélica del Rocío Lozano Cuevas

Secretario: Dr. Servio Tulio Guillén Burguete

Vocal: Dr. Ricardo Aceves García

Primer suplente: Dra. Claudia Orquídea López Soto

Segundo Suplente: Dr. Nelson Maculan

Ciudad de México

Tutor de Tesis:

Dr. Ricardo Aceves García



*A Ricardo y Alejandra*



---

## Agradecimientos

---

A la Universidad Nacional Autónoma de México por los recursos que me ha brindado para mi desarrollo profesional.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada para la realización y conclusión de mis estudios de doctorado.

A mi tutor el Dr. Ricardo Aceves García por todas las aportaciones, correcciones y sugerencias para el desarrollo de esta investigación.

A la Dra. Angélica Lozano, al Dr. Servio Guillén, la Dra. Claudia López y el Dr. Nelson Maculán por sus aportaciones como parte del comité tutor y del jurado.





---

## Resumen

---

En este trabajo se proponen dos estrategias de solución basadas en la de descomposición de Benders y la relajación Lagrangiana para resolver problemas binivel lineales con variables binarias en el problema líder y continuas en el seguidor, bajo el supuesto de cooperación parcial (enfoque optimista en problemas binivel).

El problema binivel discreto - continuo es reformulado como un problema de un nivel utilizando las condiciones de Karush - Kuhn - Tucker. Este modelo no lineal puede ser linealizado aprovechando la estructura especial lograda con las variables binarias del problema líder y resolverse a través de estrategias de descomposición primal o dual.

Para aplicar el enfoque y mostrar la formulación y el funcionamiento de los métodos propuestos, se modeló un problema de localización de instalaciones no deseadas. Las pruebas numéricas muestran que el algoritmo propuesto puede resolver problemas grandes con buenos resultados.



---

# Índice general

---

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>XIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos de la Investigación . . . . .	3
1.2.1. Objetivo General . . . . .	3
1.2.2. Objetivos Específicos . . . . .	3
<b>2. El Problema de Programación Binivel</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción . . . . .	5
2.2. Conceptos Básicos . . . . .	6
2.3. Propiedades Teóricas . . . . .	17
<b>3. BLP lineal con variables discretas</b>	<b>25</b>
3.1. El Estado del Arte . . . . .	25

3.2. Propiedades del BLP Lineal Binario . . . . .	27
3.3. Definición del Problema . . . . .	30
<b>4. Estrategias de solución</b>	<b>33</b>
4.1. Estrategia Basada en la Descomposición de Benders . . . . .	33
4.1.1. Descomposición de Benders para Resolver el Problema Binivel Discreto - Continuo . . . . .	35
4.1.1.1. Algoritmo de Benders . . . . .	38
4.1.2. Resultados . . . . .	38
4.2. Estrategia Basada en la Relajación Lagrangiana . . . . .	39
4.2.1. Relajación Lagrangiana para Resolver el Problema Binivel Discreto - Continuo . . . . .	40
4.2.2. Algoritmo de Relajación Lagrangiana . . . . .	44
4.2.3. Resultados . . . . .	45
<b>5. Localización de Instalaciones No Deseadas</b>	<b>47</b>
5.1. Introducción . . . . .	47
5.2. Revisión de la Literatura . . . . .	48
5.3. Formulación Binivel . . . . .	49
5.4. Análisis Computacional de las Estrategias . . . . .	52
<b>6. Conclusiones</b>	<b>59</b>
<b>A. Descomposición de Benders en GAMS</b>	<b>63</b>
<b>B. Relajación Lagrangiana en GAMS</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

---

## Índice de figuras

---

2.1. Región factible relajada para el problema 2.7 . . . . .	8
2.2. Optimo para el problema relajado asociado al problema 2.7	8
2.3. Conjunto de reacción racional en el problema 2.7 . . . . .	9
2.4. Región inducida para el problema 2.7 . . . . .	9
2.5. Región inducida para el problema 2.7 . . . . .	10
2.6. Región factible relajada del problema 2.9 . . . . .	11
2.7. Reacción racional del problema seguidor en 2.9 . . . . .	12
2.8. Región inducida del problema 2.9 . . . . .	13
2.9. Región inducida del problema 2.13 . . . . .	14
2.10. Región inducida del problema 2.14 . . . . .	15
2.11. Región factible relajada del problema 2.20 . . . . .	19
3.1. Regiones inducidas para distintas versiones del BLP lineal	30



---

## Índice de cuadros

---

4.1. Comparación de resultados . . . . .	39
4.2. Comparación de resultados . . . . .	45
5.1. Tamaño de los problemas . . . . .	53
5.2. Resultados del Uso del Algoritmo Basado en la Descomposición de Benders para los Problemas Prueba .	54
5.3. Resultados del Uso del Algoritmo Basado en la Relajación Lagrangiana para los Problemas Prueba . . . . .	55





# CAPÍTULO 1

---

## Introducción

---

### 1.1. Motivación

Los seres humanos toman decisiones constantemente. Al adoptar un comportamiento optimizador, su deseo es llevar a cabo una determinada tarea de la mejor manera posible con respecto a un criterio para minimizar los costos o maximizar los beneficios.

El uso de las técnicas de optimización ha sido una parte fundamental para la solución de problemas. Sin embargo, los modelos de programación matemática más comunes, son frecuentemente poco adecuados para situaciones en donde se involucran más de un objetivo y más de un decisor.

En la mayoría de los casos, las decisiones sobre un proceso determinado, son producto de una interacción entre las preferencias de un grupo de individuos, por lo que decidir basándose en un solo criterio parece insuficiente, en particular cuando el proceso de toma de decisiones se aplica a entornos complejos de organización.

Por lo que es más realista procurar el logro de varios objetivos al mismo tiempo. Esto implica que los problemas deben ser resueltos de acuerdo con un criterio que satisfaga a todos los decisores en conjunto.

En consecuencia, aparecerán criterios que serán contradictorios y a menudo inconmensurables, situación que propició el desarrollo de la optimización multiobjetivo.

Los problemas de programación multiobjetivo son útiles para resolver situaciones en donde se debe de cumplir con más de un objetivo, atributo o meta, pero no incorporan la interdependencia que existe entre ellos. Sin embargo el incluir múltiples criterios presenta grandes avances respecto a la modelación tradicional, ya que se puede incorporar una mayor cantidad de alternativas para la toma de decisiones, aun cuando no se considera interdependencia entre éstos.

Por otro lado, los problemas de optimización multinivel involucran objetivos múltiples y además consideran alguna interdependencia entre ellos. Estos problemas incorporan algunas características de los problemas anteriores e incorporan el enfoque de la teoría de juegos, en particular se les considera como la generalización al problema de Stackelberg (Von Stackelberg (1934)) para juegos no cooperativos.

Las técnicas de optimización multinivel son útiles en sistemas donde los decisores de un nivel son influenciados por el comportamiento de los subordinados. Estos modelos particionan las variables de control de acuerdo al número de niveles jerárquicos y se tratan de problemas de optimización que tienen otros problemas de optimización como parte de sus restricciones.

El caso más sencillo de la programación multinivel, son los modelos binivel, donde se tienen un problema jerárquico con dos niveles (líder y seguidor), esto es, problemas de optimización que tienen un segundo problema de optimización como parte de sus restricciones.

El presente trabajo se enfocará a desarrollar una estrategia de solución para el problema de programación binivel con variables binarias en el problema líder y continuas en el seguidor, considerando la posible aplicación de la formulación a diversos problemas de programación matemática, como problemas de localización y distribución, asignación y ruteo, y otros que involucran a dos decisores en una relación jerárquica.

## **1.2. Objetivos de la Investigación**

### **1.2.1. Objetivo General**

Resolver de forma eficiente el Problema de Programación Binivel Discreto - Continuo, a través de una estrategia de solución basada en las técnicas de descomposición. Diseñar algoritmos de solución congruentes con la estrategia y aplicar el enfoque a un modelo específico para mostrar su comportamiento.

### **1.2.2. Objetivos Específicos**

Los objetivos específicos que permitirán lograr el objetivo principal son:

1. Revisar el estado del arte sobre los problemas de programación binivel y binivel entero mixto, realizando una revisión exhaustiva de la literatura relacionada con el análisis de este tipo de problemas, sus modelos, formulaciones, aplicaciones y técnicas de solución.
2. Revisar el estado del arte sobre métodos de solución para problemas de programación binivel discreto - continuo eficientes.
3. Proponer un modelo de programación binivel en el que el problema líder considere variables enteras.
4. Estudiar las propiedades matemáticas de la variante binivel.
5. Diseñar una estrategia para resolver el problema de programación binivel con la variante discreta - continua.
6. Analizar la estructura del problema propuesto para determinar las condiciones bajo las cuales la estrategia de solución propuesta es eficiente.
7. Implementar la estrategia diseñada en un compilador adecuado.
8. Analizar la eficiencia de la estrategia propuesta a través de un estudio comparativo con resultados publicados.

9. Identificar problemas que pudieran modelarse como un problema de programación binivel discreto - continuo.
10. Formular un problema conocido con el modelo propuesto y resolver aplicando la estrategia de solución propuesta para comparar los resultados.

Esta investigación está estructurada de la siguiente manera: en el capítulo 2 se presentan los conceptos relacionados con la programación binivel, las principales propiedades teóricas y la revisión de la literatura referente al problema general. En el capítulo 3 se introduce el problema binivel discreto - continuo, para el cual se presenta su formulación, las propiedades fundamentales y la revisión del estado del arte respecto a la formulación en específico.

En el capítulo 4 se describe la estrategia de solución basada en las técnicas de descomposición. Se presentan una técnica primal y una dual (descomposición de Benders y relajación Lagrangiana) y su aplicación al problema binivel discreto - continuo, así como algunos resultados comparados con problemas resueltos. En el capítulo 5 se propone la formulación de un problema de localización de instalaciones no deseadas con el enfoque binivel propuesto y se presenta la experimentación con los algoritmos planteados, mostrando la eficiencia de los mismos.

## CAPÍTULO 2

---

### El Problema de Programación Binivel

---

#### 2.1. Introducción

Los problemas de optimización binivel son problemas que involucran a dos programas matemáticos en una sola estructura, uno de estos problemas es parte de las restricciones del otro. Con base en esta relación jerárquica, el objetivo de mayor jerarquía es llamado “líder” y el objetivo que restringe es llamado “seguidor”.

La formulación general de un problema binivel (BLP) es la siguiente:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & F(x, y) \\ \text{suje}to \ a : \quad & G(x, y) \leq 0 \\ \min_y \quad & f(x, y) \\ \text{suje}to \ a : \quad & g(x, y) \leq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$  y  $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ .

Los componentes del problema 2.1 se dividen en dos clases:  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $F : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$  y el vector de funciones evaluadas  $G : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$  son llamados variables, función objetivo y restricciones de nivel

superior respectivamente; mientras que  $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$  y el vector de funciones evaluadas  $g : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$  son llamados variables, función objetivo y restricciones de nivel inferior respectivamente.

La optimización multinivel está muy relacionada con el problema de Stackelberg (1934) en la teoría de juegos. En este juego, se considera un proceso de planeación en el que se involucran agentes de dos niveles distintos: un líder y un seguidor. En esta estructura el líder se anticipa a la reacción del seguidor, lo que le permite escoger su estrategia óptima. De forma más precisa, el líder escoge una estrategia  $x$  en un conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$  y el seguidor responderá con un conjunto de estrategias  $Y(x) \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$  correspondientes a cada  $x \in X$ . Se asume que el conjunto  $Y(x)$  es cerrado y convexo.

Para esta formulación, sus propiedades y conceptos fundamentales han sido estudiados desde la década de 1970. Un gran número de referencias pueden consultarse en (L. N. Vicente y Calamai, 1994; Dempe, 2003; Colson y cols., 2007).

## 2.2. Conceptos Básicos

Considerando el problema 2.1, el problema *relajado* asociado es:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & F(x, y) \\ \text{sujeto a: } \quad & G(x, y) \leq 0 \\ & g(x, y) \leq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

y el valor óptimo de este problema es una cota inferior del valor óptimo de 2.1.

La *región factible relajada*, o *región de restricciones* (Bard, 1998) esta dada por el conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mid x \in X, G(x, y) \leq 0, \text{ y } g(x, y) \leq 0\} \tag{2.3}$$

Para un vector  $\bar{x} \in X$  dado, la *región factible de nivel inferior* se

define por

$$\Omega(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} \mid g(\bar{x}, y) \leq 0\} \quad (2.4)$$

El conjunto de reacción de nivel inferior o conjunto de reacción racional es

$$R(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} \mid y \in \operatorname{argmin}\{f(\bar{x}, \hat{y}) : \hat{y} \in \Omega(\bar{x})\}\} \quad (2.5)$$

cada  $y \in R(\bar{x})$  es una respuesta racional del seguidor. Para una  $x$  dada,  $R(x)$  es una función evaluada definida implícitamente de  $x$  que puede ser vacía para algunos valores del argumento.

El conjunto

$$IR = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mid x \in X, G(x, y) \leq 0, y \in R(x)\} \quad (2.6)$$

corresponde al conjunto de puntos factibles del problema de programación binivel y se conoce como *región inducida*. Este conjunto suele ser no convexo y puede estar desconectado o vacío en presencia de restricciones de nivel superior.

Para mostrar gráficamente la construcción de las regiones de solución, se utilizará el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \min_x & F = -x - 2y \\ \text{sujeto a : } \min_y & f = x - 2y \\ & \text{sujeto a :} \end{array} \quad \begin{array}{l} x + y \leq 3 \\ -x + y \leq 1 \\ -2x - y \leq -2 \\ x - 3y \leq 0 \\ x + 2y \leq 2 \\ x, y \geq 0 \end{array} \quad (2.7)$$

La *región factible relajada* dada por el conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mid x \in X, G(x, y) \leq 0, \text{ y } g(x, y) \leq 0\}$$

es el conjunto

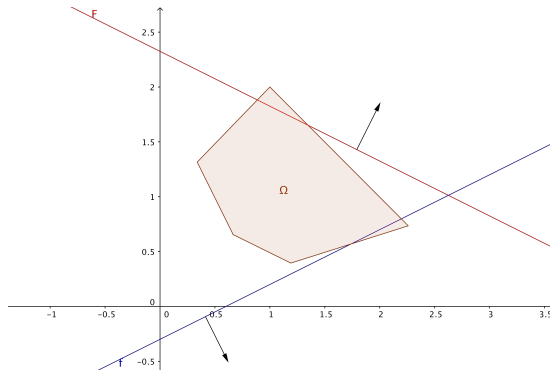


Figura 2.1: Región factible relajada para el problema 2.7

El valor óptimo para el problema relajado se muestra en la figura 2.2.

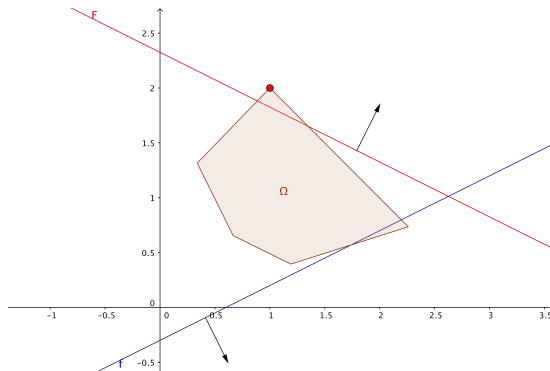


Figura 2.2: Óptimo para el problema relajado asociado al problema 2.7

Para un vector  $\bar{x}_1 \in X$ , la *región factible de nivel inferior* se define por

$$\Omega(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} \mid g(\bar{x}, y) \leq 0\}$$



y el conjunto de reacción de nivel inferior o conjunto de reacción racional es

$$R(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} \mid y \in \operatorname{argmin}\{f(\bar{x}, \hat{y}) : \hat{y} \in \Omega(\bar{x})\}\}$$

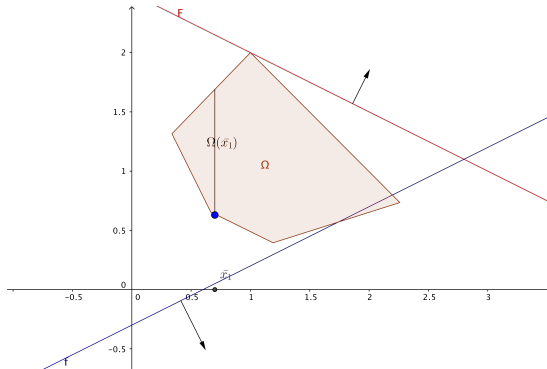


Figura 2.3: Conjunto de reacción racional en el problema 2.7

La región inducida

$$IR = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mid x \in X, G(x, y) \leq 0, y \in R(x)\} \quad (2.8)$$

es la región

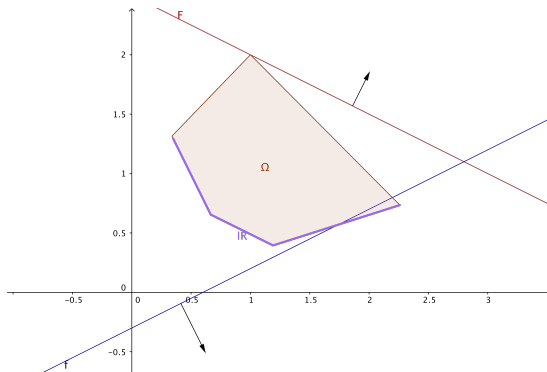


Figura 2.4: Región inducida para el problema 2.7

por lo que la solución óptima al problema 2.7 es

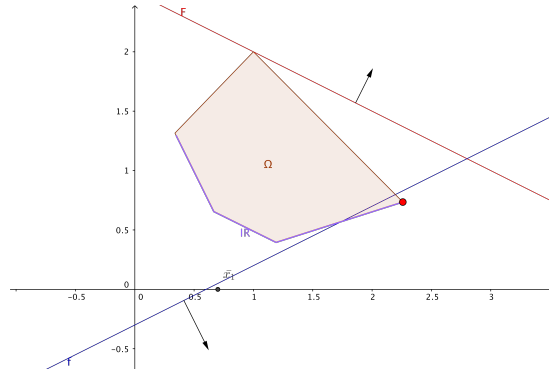


Figura 2.5: Región inducida para el problema 2.7

donde puede verse que incluso en un problema lineal con dos variables, la región inducida es no convexa.

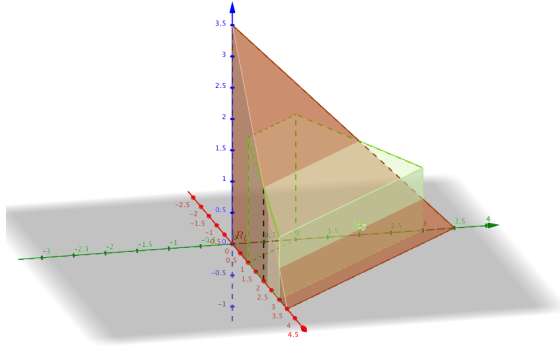
Las regiones en un problema con restricciones en el nivel superior se mostrarán con el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{ll}
 \underset{x}{\text{mín}} & F = x + 2y + z \\
 \text{sujeto a :} & 2x + 2y + 2z \leq 7 \\
 & x \geq 0 \\
 \underset{y,z}{\text{mín}} & f = y - 2z \\
 \text{sujeto a :} & x + y \geq 1 \\
 & x + y \leq 3 \\
 & x + y + 2z \leq 5 \\
 & y, z \geq 0
 \end{array} \quad (2.9)$$

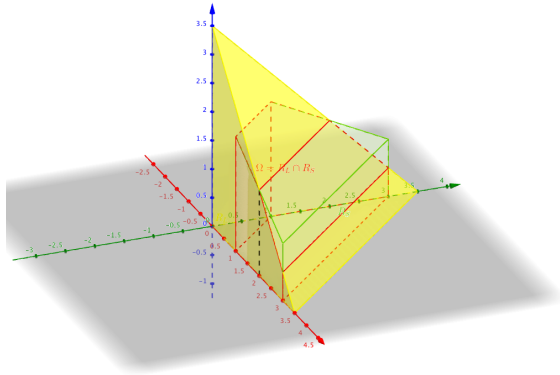
donde la *región factible relajada* dada por el conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mid x \in X, G(x, y) \leq 0, \text{ y } g(x, y) \leq 0\} \quad (2.10)$$

es:

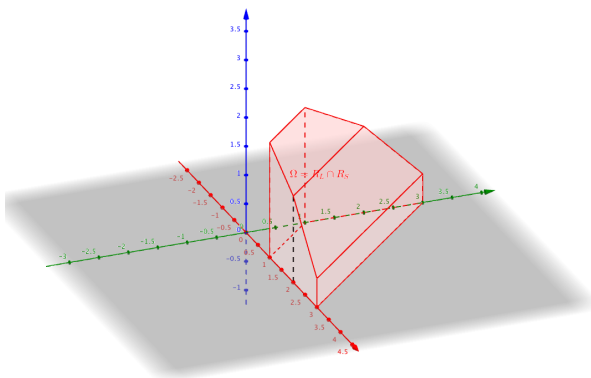


(a) Regiones factibles líder ( $R_L$ ) y seguidora ( $R_S$ )



(b)  $\Omega = R_L \cap R_S$

↙



(c)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mid x \in X, G(x, y) \leq 0, \text{ y } g(x, y) \leq 0\}$

Figura 2.6: Región factible relajada del problema 2.9

El conjunto de reacción de nivel inferior o conjunto de reacción racional dado por

$$R(\bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} \mid y \in \operatorname{argmin}\{f(\bar{x}, \hat{y}) : \hat{y} \in \Omega(\bar{x})\}\} \quad (2.11)$$

es la región

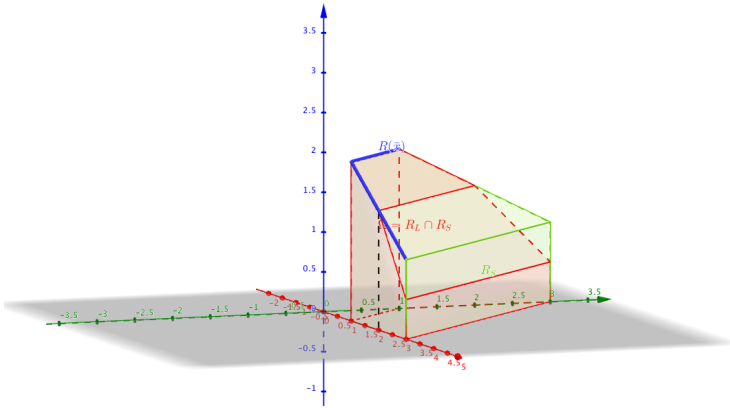


Figura 2.7: Reacción racional del problema seguidor en 2.9

Por lo que la región inducida

$$IR = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mid x \in X, G(x, y) \leq 0, y \in R(x)\} \quad (2.12)$$

es la definida por

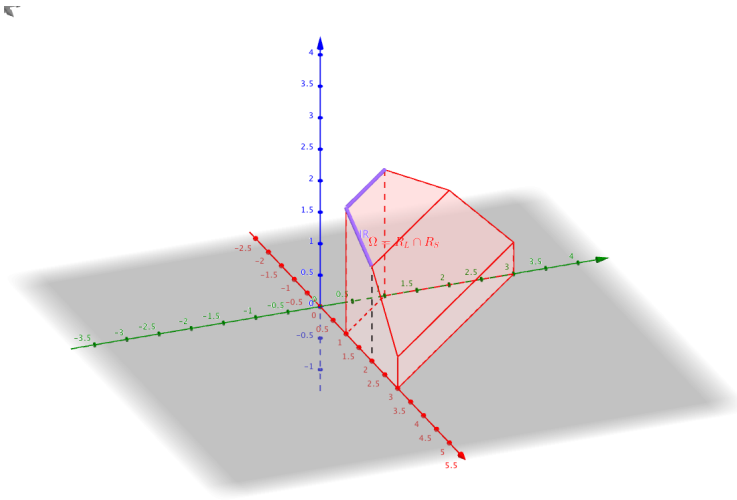
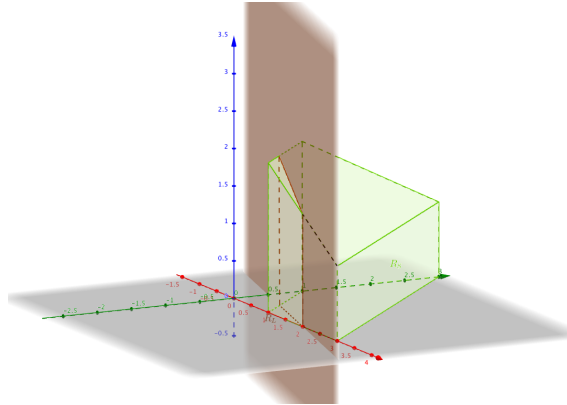


Figura 2.8: Región inducida del problema 2.9

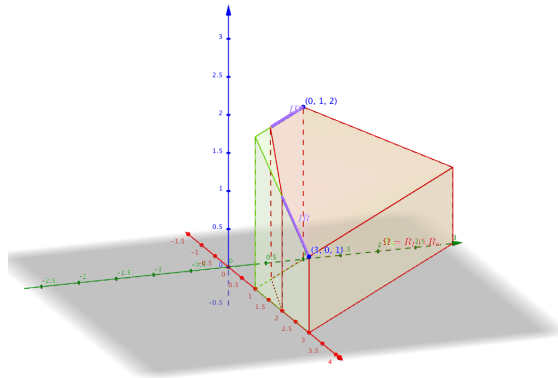
Considerando el problema

$$\begin{array}{ll}
 \underset{x}{\text{mín}} & F = x + 2y + z \\
 \text{suje}to\ a : & -x - 4y \leq -2 \\
 & x \geq 0 \\
 \underset{y,z}{\text{mín}} & f = y - 2z \\
 \text{suje}to\ a : & x + y \geq 1 \\
 & x + y \leq 3 \\
 & x + y + 2z \leq 5 \\
 & y, z \geq 0
 \end{array} \tag{2.13}$$

considerando la misma construcción, la región inducida está dada por



(a) Región factible relajada



(b) Región inducida

Figura 2.9: Región inducida del problema 2.13

donde se muestra que además de ser una región no convexa, la región inducida puede no estar conectada.

Considérese el problema

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & F = x - y \\
 \text{sujeto a :} \quad & \min_y \frac{-x + 3y + 15}{x + y + 1} \\
 \text{sujeto a :} \quad & -3x + 2y \leq 1 \\
 & -x - 4y \leq 9 \\
 & x - 3y \leq 2 \\
 & 2x + y \leq 25 \\
 & -x + 3y \leq 12
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

La región inducida para este problema se muestra en la figura 2.14.

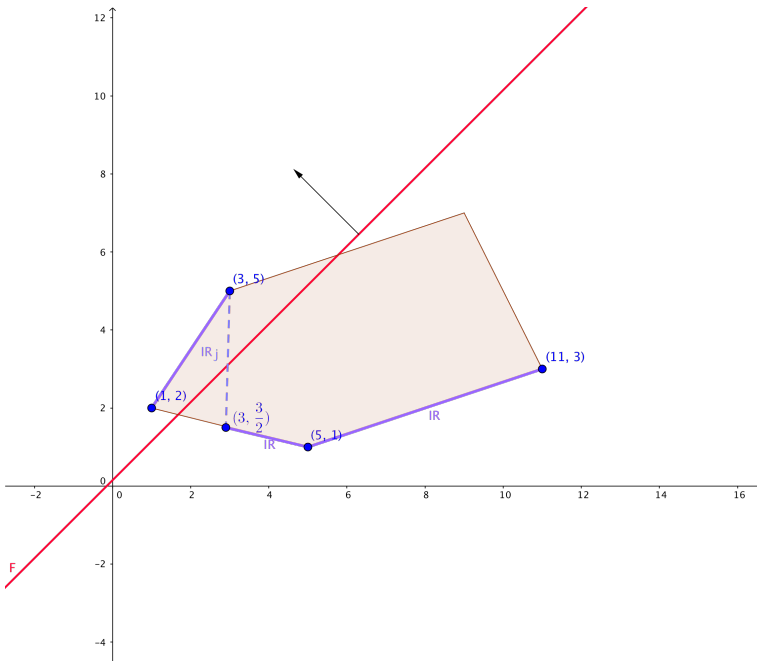


Figura 2.10: Región inducida del problema 2.14

Para  $x = 3$ , el seguidor tiene óptimos múltiples:  $R(3) = [\frac{3}{2}, 5]$  y el problema para el decisor del primer nivel no está bien definido: el mejor valor para  $F$  es  $-2$  obtenido en el punto  $(3, 5)$ , sin embargo, el líder no puede forzar este valor, porque el seguidor es indiferente a cada  $y \in [\frac{3}{2}, 5]$ .

Cuando existen soluciones óptimas alternativas en el conjunto de reacción  $R(x)$ , puede ocurrir que el seguidor decida cooperar con el líder y seleccionar la solución que sea mejor para éste. Esto se conoce como *enfoque optimista* o *enfoque débil* en programación binivel. En esta situación, el punto  $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$  es una *solución optimista* al problema binivel 2.1 si:

$$\begin{aligned} x^* &\in X \\ G(x^*, y^*) &\leq 0 \\ y^* &\in R(x^*) \\ F(x^*, y^*) &\leq F(x^*, y) \quad \forall y \in R(x^*) \end{aligned}$$

es decir que debe resolverse el problema

$$\min_{x \in \Omega_1} \phi_o(x)$$

donde

$$\phi_o(x) = \min_{y \in R(x)} F(x, y)$$

Bajo el enfoque optimista, al menos una solución del problema binivel se obtiene en un punto extremo del poliedro definido por las restricciones comunes.

En el ejemplo 2.14, una solución optimista es el punto  $(3, 5)$ , donde el líder obtiene el mejor valor posible para su función objetivo.

Cuando la cooperación entre el líder y el seguidor no está permitida o si el líder es adverso al riesgo y desea limitar el daño resultante de una solución no deseada del seguidor se conoce como *enfoque pesimista*. Entonces el punto  $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$  es una *solución pesimista* al problema binivel 2.1 si:



$$\begin{aligned}
 x^* &\in X \\
 G(x^*, y^*) &\leq 0 \\
 y^* &\in R(x^*) \\
 F(x^*, y^*) &\geq F(x^*, y) \quad \forall y \in R(x^*)
 \end{aligned}$$

es decir que debe resolverse el problema

$$\min_{x \in \Omega_1} \phi_o(x)$$

donde

$$\phi_o(x) = \max_{y \in R(x)} F(x, y)$$

En el ejemplo 2.14, una solución pesimista es el punto  $(3, \frac{3}{2})$ , donde el líder obtiene el peor valor posible para su función objetivo.

De forma más completa, estos enfoques se describen en (Dempe, 2002).

Como puede verse, los problemas de programación binivel son difíciles de resolver, por lo que la mayor parte de la investigación se enfoca a los caso más simples, es decir, los problemas con buenas propiedades, como el problema lineal, cuadrático o convexo en la función objetivo o en las restricciones.

En esta investigación se trabaja con el problema binivel lineal discreto en el nivel superior y continuo en el inferior, por lo que a manera de introducción, se presentarán las principales propiedades del problema binivel lineal.

## 2.3. Propiedades Teóricas

Para  $x \in X \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , el problema binivel lineal puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
& \underset{x \in X}{\text{mín}} && F(x, y) = c_1x + d_1y \\
& \text{sujeto a :} && A_1x + B_1y \leq b_1 \\
& && \underset{y \in Y}{\text{mín}} && F(x, y) = c_2x + d_2y \\
& && \text{sujeto a :} && A_2x + B_2y \leq b_2
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Con esta estructura, las regiones de solución pueden escribirse como:

La *región factible relajada* esta dada por el conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \in X \times Y \mid A_1x + B_1y \leq b_1, A_2x + B_2y \leq b_2\} \tag{2.16}$$

Para un vector  $\bar{x} \in X$  dado, la *región factible de nivel inferior* se define por

$$\Omega(\bar{x}) = \{y \in Y \mid B_2y \leq b_2 - A_2\bar{x}\} \tag{2.17}$$

El conjunto de reacción de nivel inferior o conjunto de reacción racional es

$$R(\bar{x}) = \{y \in Y \mid y \in \operatorname{argmin}\{f(\bar{x}, \hat{y}) : \hat{y} \in \Omega(\bar{x})\}\} \tag{2.18}$$

El conjunto

$$IR = \{(x, y) \in X \times Y \mid (x, y) \in \Omega, y \in R(x)\} \tag{2.19}$$

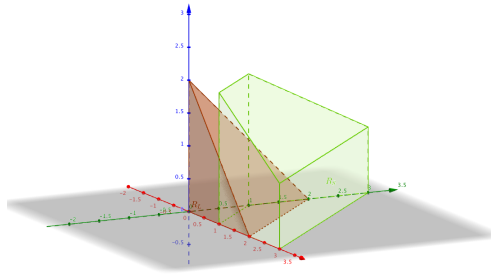
Los problemas binivel son difíciles de resolver, ya que son genéricamente no convexos y no diferenciables.

Por algún tiempo se consideró que el problema binivel lineal era *NP-Hard* con base en el resultado de Jeroslow (1985), quien probó que el problema max-min lineal, un caso especial del binivel lineal, es *NP-Hard*. Esta característica puede verse al considerar que un problema binivel puede no tener solución, aun cuando  $F$  y  $f$  sean continuas y  $\Omega$  compacto, como puede verse en el siguiente ejemplo:

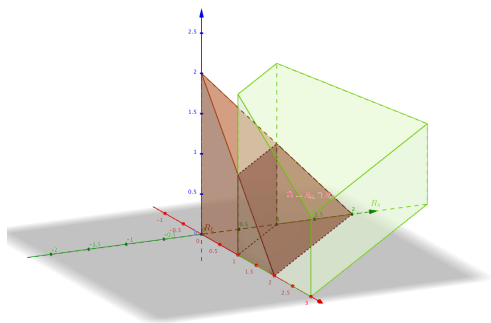
Considérese el siguiente problema (Galé, 2016):

$$\begin{array}{ll}
 \underset{x}{\text{mín}} & F = x + 2y + z \\
 \text{sujeto a :} & x + y + z \leq 2 \\
 & x \geq 0 \\
 \underset{y,z}{\text{mín}} & f = y - 2z \\
 \text{sujeto a :} & x + y \geq 1 \\
 & x + y \leq 3 \\
 & x + y + 2z \leq 5 \\
 & y, z \geq 0
 \end{array} \tag{2.20}$$

La región relajada es la que muestra la figura 2.11



(a) Regiones factibles líder ( $R_L$ ) y seguidora ( $R_S$ )



(b)  $\Omega = R_L \cap R_S$

Figura 2.11: Región factible relajada del problema 2.20

La reacción racional del problema seguidor está fuera de la región factible relajada, por lo que la región inducida es vacía y el problema binivel no tiene solución.

De manera formal, se tiene que:

**Proposición 2.3.1** *El problema binivel lineal es fuertemente NP-Hard (strongly NP-Hard).*

Este resultado fue demostrado por Hansen y cols. (1992); Blair (1992).

Con esta consideración y desde un punto de vista computacional, lo que se busca es desarrollar algoritmos cuyos tiempos de proceso sean acotados por un polinomio del tamaño del problema (número de variables, restricciones, etcétera) que permita encontrar una solución  $\epsilon$ -óptima a un problema dado, sin embargo, eso no sería siempre posible.

En los siguientes teoremas, tomados de (Bard, 1998), se muestra que cuando el problema binivel lineal se escribe como

$$\text{mín}\{F(x, y) \mid (x, y) \in IR\} \quad (2.21)$$

la región inducida resultante está formada por caras de  $\Omega$  y su solución ocurre en un vértice. Por facilidad, se asumirá que  $R(x)$  toma valores únicos para cada  $x$  dada y es acotado,  $\Omega$  es acotado y no vacío y  $Y = y \geq 0$ .

**Teorema 2.3.1** *La región inducida puede ser escrita de forma equivalente como una restricción de igualdad lineal por partes compuesta por hiperplanos de soporte de  $\Omega$ .*

**Demostración.** La región inducida puede ser escrita explícitamente como:

$$IR = \{(x, y) \in \Omega \mid d_2y = \min[d_2\hat{y} : B_2\hat{y} \leq b_2 - A_2x, \hat{y} \geq 0]\} \quad (2.22)$$

Sea

$$P(x) = \text{mín}\{d_2y : B_2y \leq b_2 - A_2x, y \geq 0\} \quad (2.23)$$

$P(x)$  es un programa lineal parametrizado en  $x$ . De la teoría de dualidad, se tiene que:

$$\text{máx}\{u(A_2x - b_2) \mid uB_2 \geq -d_2, u \geq 0\} \quad (2.24)$$

que tiene el mismo valor óptimo que 2.23 en el punto  $u^*$ . Sea  $U = \{u \mid uB_2 \geq -d_2, u \geq 0\}$ . La solución a 2.24 ocurre en un vértice de  $U$ , de donde se tiene el siguiente problema equivalente:

$$\text{máx}\{u^j(A_2x - b_2) \mid u^j \in U\} \quad (2.25)$$

lo que demuestra que  $P(x)$  es una función lineal por partes, por lo que  $IR$  se puede reescribir como

$$IR = \{(x, y) \in \Omega \mid P(x) - d_2y = 0\} \quad (2.26)$$

■

**Corolario 2.3.1** *El problema de programación binivel lineal 2.15 es equivalente a minimizar  $F$  sobre una región lineal por partes compuesta por una restricción lineal de igualdad.*

La función  $P(x)$  definida en 2.23 es convexa y continua. En general, como se minimiza una función lineal  $F = c_1x + d_1y$  sobre  $IR$ , y  $F$  es acotada en  $\Omega$  se puede concluir que:

**Corolario 2.3.2** *Una solución del problema de programación binivel lineal ocurre en un vértice de la región inducida  $IR$ .*

Este resultado fue probado por (Bialas y Karwan, 1984), de donde se concluye que 2.21 puede ser escrito como

$$\text{mín}\{c_1x + d_1y \mid (x, y) \in coIR\} \quad (2.27)$$

donde  $coIR$  es el casco convexo de la región inducida  $IR$ .

**Teorema 2.3.2** *La solución  $(x^*, y^*)$  del problema binivel lineal ocurre en un vértice de  $\Omega$ .*

La prueba puede consultarse en (Bard, 1998).

Lo que lleva al siguiente

**Corolario 2.3.3** *Si  $x$  es un punto extremo de  $IR$ , entonces es un punto extremo de  $\Omega$ .*

Para resolver el problema binivel, una forma es encontrar una representación explícita de la región inducida. Esto puede lograrse al reemplazar el problema seguidor por sus condiciones de Karush-Kuhn-Tucker y agregar el sistema resultante al problema líder.

$$\begin{array}{ll} \underset{x,y}{\text{mín}} & c_1x + d_1y \end{array} \quad (2.28)$$

$$\text{suje}to \ a : \quad A_1x + B_1y \leq b_1 \quad (2.29)$$

$$A_2x + B_2y \leq b_2 \quad (2.30)$$

$$\lambda^T(b_2 - A_2x - B_2y) = 0 \quad (2.31)$$

$$(d_2 + \lambda^T B_2)y = 0 \quad (2.32)$$

$$x, y, \lambda \geq 0 \quad (2.33)$$

del sistema anterior se tiene que

$$d_2^T y \geq -\lambda^T B_2 y \geq \lambda^T A_2 x - \lambda^T b_2 \quad (2.34)$$

para una selección dada del problema líder, el problema puede ser reformulado relacionando las restricciones primales y duales y requiriendo que la brecha de dualidad sea cero. Al incluir la ecuación:

$$d_2^T y = \lambda^T A_2 x - \lambda^T b_2 \quad (2.35)$$

se garantiza la satisfacción de ambas restricciones de complementariedad.

Entonces, el problema (2.15) puede ser escrito como:

$$\min_{x,y} \quad c_1x + d_1y \quad (2.36)$$

$$\text{sujeto a :} \quad A_1x + B_1y \leq b_1 \quad (2.37)$$

$$A_2x + B_2y \leq b_2 \quad (2.38)$$

$$-\lambda^T B_2 \leq d_2 \quad (2.39)$$

$$d_2y = \lambda^T A_2x - \lambda^T b_2 \quad (2.40)$$

$$x, y, \lambda \geq 0 \quad (2.41)$$

Desde un punto de vista conceptual, (2.36-2.41) es un problema matemático estándar relativamente fácil de resolver, ya que todas sus restricciones menos una son lineales, sin embargo, en la práctica, la restricción 3.8 es difícil de resolver.

A partir de las definiciones presentadas en este capítulo, se presentará el modelo que se pretende resolver y las estrategias de solución propuestas en los capítulos siguientes.





## CAPÍTULO 3

---

### Problemas de Programación Binivel Lineales con Variables Discretas

---

En muchos problemas de optimización, un subconjunto de las variables está restringido a tomar valores discretos. Esta situación puede complicar los problemas e incluso hacerlos irresolubles.

Por ser el modelo de interés, en esta sección se presentan las propiedades de varios tipos de modelos binivel lineales binarios, donde cada decisor controla todas las variables continuas o binarias según sea el caso.

#### 3.1. El Estado del Arte

Considerando el problema binivel cuando un subconjunto de variables está restringido a tomar valores discretos, se tienen trabajos a partir de la década de 1990 principalmente. Con estas características, Moore y Bard (1990a), U. Wen y Yang (1990) y Bard y Moore (1992) propusieron algoritmos de ramificación y acotamiento para problemas enteros mixtos y binarios. Edmunds y Bard (1992) desarrollaron un algoritmo de ramificación y acotamiento para resolver problemas binivel enteros mixtos no lineales.

L. Vicente y cols. (1996a) presentan algunas propiedades del problema binivel lineal discreto para diferentes conjuntos de variables discretas. Analizan también la geometría de la región inducida y se discute la existencia de la solución óptima. En este trabajo se proponen equivalencias entre distintas clases de problemas binivel lineales discretos y problemas multinivel particulares. Estas equivalencias se basan en funciones cóncavas penalizadas, por lo que el enfoque se utiliza para diseñar métodos de función de penalización para la solución de los problemas.

U. Wen y Huang (1996) proponen una formulación del problema binivel entero mixto lineal en la que las decisiones binarias son controladas por el decisor líder, mientras que las variables de decisión del seguidor pueden tomar valores reales. Los autores proponen un algoritmo basado en la búsqueda tabú y dos procedimientos variantes del mismo con buenos resultados computacionales.

En el trabajo de Dempe (2003) se señala que los métodos de ramificación y acotamiento requieren funciones lineales o no lineales convexas en el nivel inferior del problema binivel para ser funcionales.

Gümüş y Floudas (2005) propusieron un algoritmo de reformulación y linealización para el problema general entero mixto binivel con variables continuas en el seguidor utilizando la representación de su casco convexo.

Júdice y cols. (2006) proponen una formulación binivel con variables discretas. El problema es transformado en un problema de matemático con restricciones de equilibrio o de complementariedad (MPEC) explotando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker del problema seguidor. Se analiza un algoritmo para encontrar puntos estacionarios correspondientes al MPEC y un algoritmo secuencial complementario para encontrar el mínimo global.

Faísca y cols. (2007) proponen un algoritmo para resolver el problema binivel cuadrático y el entero mixto-lineal basado en la programación paramétrica. Más recientemente, Domínguez y Pistikopoulos (2010) usan dos algoritmos usando programación multiparamétrica para resolver problemas binivel enteros con las variables enteras controladas por el primer nivel. Köppe y cols. (2010) propusieron algoritmo basado en la misma estrategia para problemas binivel enteros mixtos donde el seguidor resuelve un problema entero.

Mitsos (2010) presenta un algoritmo para la optimización global de problemas binivel no lineales enteros mixtos que consiste en generar una cota inferior convergente y una cota superior óptima. Xu y Wang (2014) proponen un algoritmo exacto para el problema binivel entero mixto lineal con algunas simplificaciones. Sharma y cols. (2014) considera problemas binivel enteros con la función objetivo de primer nivel siendo lineal-fraccional y la seguidora lineal; propone un algoritmo iterativo de generación de cortes para resolver el problema.

Utilizando como base algunas técnicas de descomposición, Saharidis y Ierapetritou (2009) proponen un algoritmo basado en la descomposición de Benders para resolver el problema binivel entero mixto lineal; con este método se acotan los valores objetivo y se utilizan las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para transformar el problema en dos problemas de un nivel. Con base en la última propuesta, Fontaine y Minner (2014) y Caramia y Mari (2015) proponen el uso de la descomposición de Benders con un subproblema continuo.

Con base en la descomposición dual, Rahmani y MirHassani (2015) proponen un método basado en la relajación Lagrangiana, donde el problema binivel entero mixto se resuelve el problema relajado para encontrar las variables de nivel superior, fijando estos valores, se resuelve el problema seguidor utilizando la relajación lagrangiana. La función dual se maximiza utilizando el método de subgradiente para generar los cortes correspondientes.

## **3.2. Propiedades del BLP Lineal Binario**

En esta sección se presentan algunas propiedades del problema binivel binario (L. Vicente y cols., 1996b). Debe destacarse que cualquier variable entera puede ser escrita como una suma ponderada de variables binarias, aunque esta transformación no es eficiente desde el punto de vista algorítmico, puede utilizarse cuando no hay otras opciones disponibles.

Sea el problema

$$\begin{aligned}
& \underset{x \in X}{\text{mín}} && F(x, y) = c_1x + d_1y \\
& \text{sujeto a :} && A_1x + B_1y \leq b_1 \\
& && \underset{y \in Y}{\text{mín}} && F(x, y) = c_2x + d_2y \\
& && \text{sujeto a :} && A_2x + B_2y \leq b_2
\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $x \in X \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , las regiones de solución definidas en la sección 2.3 y las siguientes regiones

$$\Omega_L(y) = \{x \in X \mid A_2x \leq b_2 - B_2y\} \tag{3.2}$$

para todos los valores de  $y$ , y

$$\Omega_U(y) = \{(x, y) \mid A_1x + B_1y \leq b_1\} \tag{3.3}$$

Para cada  $x \in X$  se asumirá que la solución óptima de nivel inferior es única. Con base en el problema binivel lineal (LBLP), donde  $X = \mathbb{R}^{n_1}$  y  $Y = \mathbb{R}^{n_2}$ , pueden considerarse tres modelos:

- Problema binivel discreto lineal (DLBLP), donde cada  $X = B^{n_1}$  y  $Y = B^{n_2}$ .
- Problema binivel lineal discreto-continuo (DCLBLP), donde  $X = B^{n_1}$  y  $Y = \mathbb{R}^{n_2}$ .
- Problema binivel lineal continuo-discreto (CDLBLP), donde  $X = \mathbb{R}^{n_1}$  y  $Y = B^{n_2}$ .

Si  $\Omega_U = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$  entonces  $IR$  es no vacía si  $\Omega$  es no vacía. Si  $\Omega_U \neq \mathbb{R}^{n_1+n_2}$  entonces  $IR$  es no vacía si existe una  $\bar{x} \in X$  tal que  $(\bar{x}, y) \in \Omega_U$ .

Esta propiedad es válida para el LBLP, DLBLP, DCLBLP y CDLBLP y puede confirmarse para los casos más generales donde  $X = \mathbb{Z}^{n_1}$  y  $Y = \mathbb{Z}^{n_2}$ . En todos los casos, la existencia de soluciones óptimas para estos problemas depende de la presencia de restricciones de nivel superior.

Las regiones inducidas asociadas con estos problemas implican dos relaciones simples que pueden ser usadas para calcular cotas inferiores y superiores:

Las regiones inducidas de DCLBLP y DLBLP están incluidas en las regiones inducidas de LBLP y CDLBLP. Esta propiedad puede verse con el siguiente ejemplo.

Sean  $n_1 = n_2 = 1, q = 4, S_U = \mathbb{R}^2, c_2 = 0, d_2 = 1,$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Para el LBLP, siendo  $\Omega$  un conjunto acotado, es decir un politopo, si  $\Omega_U = \mathbb{R}^{n_1+n_2}$  entonces LBLP, DLBLP, y DCLBLP tienen una solución óptima si  $\Omega \neq \emptyset$ . Si  $\Omega_U \neq \mathbb{R}^{n_1+n_2}$  entonces LBLP, DLBLP, y DCLBLP tienen una solución óptima si existe una  $\bar{x} \in X$  tal que  $(\bar{x}, y) \in \Omega_U$ .

Esta propiedad establece que si  $\Omega$  es acotado, las condiciones suficientes para la existencia de soluciones coinciden con las condiciones bajo las cuales la región inducida es no vacía, el único tipo de problema para el que no se cumple la propiedad es el CDLBLP, para el que  $IR$  está compuesta por la unión finita de conjuntos cuasi-poliédricos, es decir, un conjunto cuya cerradura es un conjunto poliédrico.

El problema abordado en este trabajo es un problema binivel lineal discreto continuo. Considerando las propiedades anteriores, en la siguiente sección se definirá el problema de estudio.

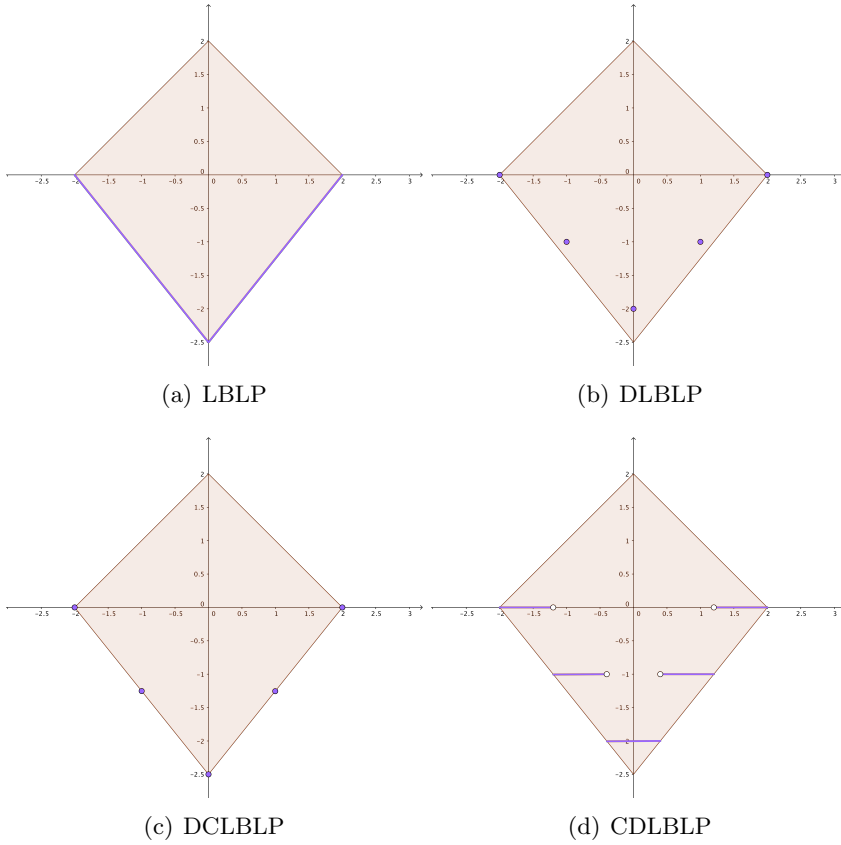


Figura 3.1: Regiones inducidas para distintas versiones del BLP lineal

### 3.3. Definición del Problema

En esta sección se formulará el problema binivel lineal discreto - continuo lineal (DCLBLP), donde se asume una cooperación parcial (o enfoque optimista) (Dempe, 2002), en la que, si el seguidor tiene soluciones óptimas alternativas, elegirá la que resulte mejor para el líder.

Considerando el problema

$$\begin{array}{ll} \min_{x,y} & c_1x + d_1y \end{array} \quad (3.4)$$

$$\text{sujeto a :} \quad A_1x + B_1y \leq b_1 \quad (3.5)$$

$$A_2x + B_2y \leq b_2 \quad (3.6)$$

$$-\lambda^T B_2 \leq d_2 \quad (3.7)$$

$$d_2y = \lambda^T A_2x - \lambda^T b_2 \quad (3.8)$$

$$x \in \{0, 1\}, \quad y, \lambda \geq 0 \quad (3.9)$$

obtenido en la sección 2.3, el término  $\lambda x = \mu = [\mu_1, \dots, \mu_{n_1}]$ , donde  $\mu_i$  es la  $i$ -ésima columna de  $\mu$  puede linealizarse (Fontaine y Minner, 2014; Saharidis y Ierapetritou, 2009; Cao y Chen, 2006) y la restricción (3.8) puede reescribirse para obtener el siguiente problema equivalente:

$$\begin{array}{ll} \min_{x,y} & c_1x + d_1y \end{array} \quad (3.10)$$

$$\text{sujeto a :} \quad A_1x + B_1y \leq b_1 \quad (3.11)$$

$$A_2x + B_2y \leq b_2 \quad (3.12)$$

$$-\lambda^T B_2 \leq d_2 \quad (3.13)$$

$$d_2y = \sum_{i=1}^{n_1} \mu_i^T A_{2i} - \lambda^T b_2 \quad (3.14)$$

$$\mu_{li} \geq \lambda_l - M(1 - x_i) \quad l = 1, \dots, q, \quad i = 1, \dots, n_1 \quad (3.15)$$

$$\mu_i \leq \lambda \quad i = 1, \dots, n_1 \quad (3.16)$$

$$\mu_l^T \leq Mx \quad l = 1, \dots, q \quad (3.17)$$

$$\mu \geq 0 \quad (3.18)$$

$$x \in \{0, 1\}, \quad y, \lambda \geq 0 \quad (3.19)$$

donde  $M$  es un número positivo grande.

Con las restricciones (3.15)-(3.18) se asegura que las variables  $\mu_{li}$  toman valor cero si  $x_i = 0$  y valor  $\lambda_l$  si  $x_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, n_1$ ,  $l = 1, \dots, q$ .

Para esta formulación, se propone el uso de dos estrategias basadas en las técnicas de descomposición: una primal que toma como base la descomposición de Benders y una dual que se basa en la relajación

Lagrangiana. Ambas estrategias se presentan y describen en los capítulos siguientes.



## CAPÍTULO 4

---

### Estrategias de Solución para Problemas Binivel Discretos-Continuos Lineales

---

#### 4.1. Estrategia Basada en la Descomposición de Benders

La Descomposición de Benders (1962) es una técnica popular para resolver algunas clases de problemas complicados, como problemas estocásticos y problemas enteros mixtos no lineales, donde se tiene un conjunto de variables que son consideradas complicadas. En esta sección se describirá la técnica que posteriormente será utilizado para resolver un problema binivel discreto-continuo, que resultará en un problema entero mixto.

Considérese el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & f = cx + dy \\ \text{suje}to \ a : \quad & Ax + By \geq b \\ & y \in Y \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Si  $y$  son las variables complicadas, el problema completo de minimización puede ser escrito como

$$\min_{y \in Y} \left[ dy + \min_{x \geq 0} \{cx \mid Ax \geq b - By\} \right] \quad (4.2)$$

El problema dual del programa lineal interior es

$$\begin{aligned} \max_u \quad & (b - B\bar{y})^T u \\ \text{sujeto a :} \quad & A^T u \leq c \\ & u \geq 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

En la estructura de descomposición de Benders se resuelven dos tipos de problemas: un problema maestro restringido con la forma

$$\begin{aligned} \min_y \quad & z \\ \text{sujeto a :} \quad & z \geq fy + (b - By)^T \bar{u}_k, \quad k = 1, \dots, K \\ & (b - By)^T \bar{u}_l, \quad l = 1, \dots, L \\ & y \in Y \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde las primeras  $K$  restricciones de este problema se denominan cortes de Benders o cortes de optimalidad y forman una aproximación exterior de la función correspondiente al subproblema. Como el número de vértices de la región factible (soluciones duales del subproblema de Benders) es finito, esta aproximación es una función convexa por partes.

El problema maestro propone una solución del conjunto de variables complicadas que posteriormente se fijan en un subproblema de la forma

$$\begin{aligned} \max_u \quad & f^T \bar{y} + (b - B\bar{y})^T u \\ \text{sujeto a :} \quad & A^T u \leq c \\ & u \geq 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

para generar los cortes de Benders. Cuando la solución propuesta por el problema maestro resulta en un problema que no es factible, debe modificarse el algoritmo para construir un otro tipo de corte: un corte

de factibilidad, que elimina la solución propuesta por el maestro. Estos cortes están indicados con el índice  $l$  en el problema 4.4.

Esta división induce un algoritmo de solución iterativo, en el que los problemas asociados a las variables del problema maestro y los asociados a las variables del subproblema son resueltos consecutivamente. Este método recibe el nombre de descomposición primal porque el maestro fija variables del problema primal.

El algoritmo de descomposición de Benders resuelve un problema maestro relajado en cada iteración y pasa el valor de las variables complicadas  $y$  al subproblema. Al resolver el subproblema de Benders se obtiene el valor de las variables duales  $u$  que se usan para generar un nuevo corte al problema maestro.

En cada iteración, el valor obtenido por la función objetivo del problema maestro  $z$  es una cota inferior del problema completo 4.1. La sucesión de estas cotas inferiores es monótona creciente dado que en cada iteración el problema maestro tiene un mayor número de restricciones. Por otro lado, una cota superior  $\bar{z}$  del valor óptimo de la función objetivo del problema original 4.1 está dada en cada iteración por  $(cx^j + dy^j)$  siendo  $x^j$  y  $y^j$  soluciones factibles en el maestro y el subproblema en la iteración  $j$ . El criterio de paro para el algoritmo es la coincidencia de ambas cotas con una tolerancia relativa  $\epsilon$ .

Dado que el conjunto de posibles valores duales es finito, el algoritmo de descomposición de Benders converge en un número finito de iteraciones.

#### 4.1.1. Descomposición de Benders para Resolver el Problema Binivel Discreto - Continuo

La descomposición de Benders (Benders, 1962) consiste en descomponer el problema en un problema maestro y un subproblema y resolverlos iterativamente. Las variables de decisión se dividen en variables complicadas, que en este caso son las variables binarias que conforman el vector  $x$ , y un conjunto de variables fáciles, o las variables continuas entradas de los vectores  $y, \lambda, \mu$ . En cada iteración, el problema maestro determina una posible decisión, que es usada por el subproblema para generar cortes de optimalidad y soluciones factibles para cortes de

factibilidad que se agregan al problema maestro.

Considerando el problema (3.10 - 3.19) y fijando  $x$  en  $\bar{x}$ , el subproblema de Benders puede construirse como:

$$\underset{y}{\text{mín}} \quad c_1 \bar{x} + d_1 y \quad (4.6)$$

$$\text{sujeto a : } B_1 y \leq b_1 - A_1 \bar{x} \quad (4.7)$$

$$B_2 y \leq b_2 - A_2 \bar{x} \quad (4.8)$$

$$-\lambda^T B_2 \leq d_2 \quad (4.9)$$

$$d_2 y - \lambda^T b_2 + \sum_{i=1}^{n_1} \mu_i^T A_{2i} = 0 \quad (4.10)$$

$$\lambda_l - \mu_{li} \leq M(1 - \bar{x}_i) \quad l = 1, \dots, q, \quad i = 1, \dots, n_1 \quad (4.11)$$

$$-\lambda + \mu_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_1 \quad (4.12)$$

$$\mu_l^T \leq M \bar{x} \quad l = 1, \dots, q \quad (4.13)$$

$$y, \lambda, \mu \geq 0 \quad (4.14)$$

Con las variables duales como los vectores renglón  $\alpha_1 \in \mathbb{R}^p$ ,  $\alpha_2 \in \mathbb{R}^p$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^{n_2}$ , el escalar  $\gamma$  y las matrices  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3 \in \mathbb{R}^{q \times n_1}$  el subproblema dual puede escribirse como:

$$\text{max} \quad \alpha_1(b_1 - A_1 \bar{x}) + \alpha_2(b_2 - A_2 \bar{x}) + d_2 \beta^T + \sum_{l=1}^q (\delta_{1l}(M(1 - \bar{x})) + \delta_{3l} M \bar{x}) \quad (4.15)$$

$$\text{sujeto a : } \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \gamma d_2 \leq d_1 \quad (4.16)$$

$$-B_2 \beta^T - \gamma b_2 + \sum_{i=1}^{n_2} (\delta_{1i} - \delta_{2i}) \leq 0 \quad (4.17)$$

$$\gamma A_2 - \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \leq 0 \quad (4.18)$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \leq 0 \quad (4.19)$$

Si este problema es factible para  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta^*, \gamma^*, \delta_1^*, \delta_2^*, \delta_3^*$ , se agrega al problema maestro el corte de optimalidad

$$c_1x + \alpha_1^*(b_1 - A_1x) + \alpha_2^*(b_2 - A_2x) + d_2\beta^{*T} + \sum_{l=1}^q (\delta_{1l}^*(M(1-x)) + \delta_{3l}^*Mx) \leq \eta \quad (4.20)$$

Si el subproblema es no acotado, se le agrega una nueva restricción que acota a la función objetivo con un número  $M_2$  suficientemente grande para acotar sólo a los rayos extremos:

$$\alpha_1(b_1 - A_1\bar{x}) + \alpha_2(b_2 - A_2\bar{x}) + d_2\beta^T + \sum_{l=1}^q (\delta_{1l}(M(1-\bar{x})) + \delta_{3l}M\bar{x}) \leq M_2 \quad (4.21)$$

La solución a este problema genera el siguiente corte de factibilidad para el problema maestro:

$$c_1x + \alpha_1^*(b_1 - A_1x) + \alpha_2^*(b_2 - A_2x) + d_2\beta^{*T} + \sum_{l=1}^q (\delta_{1l}^*(M(1-x)) + \delta_{3l}^*Mx) \leq 0 \quad (4.22)$$

El problema maestro puede definirse como:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x + \eta \\ \text{s. a :} \quad & \alpha_1^*(b_1 - A_1x) + \alpha_2^*(b_2 - A_2x) + d_2\beta^{*T} + \sum_{l=1}^q (\delta_{1l}^*(M(1-x)) + \delta_{3l}^*Mx) \leq \eta \\ & \forall (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta^*, \gamma^*, \delta_1^*, \delta_2^*, \delta_3^*) \in C_o \\ & c_1x + \alpha_1^*(b_1 - A_1x) + \alpha_2^*(b_2 - A_2x) + d_2\beta^{*T} + \sum_{l=1}^q (\delta_{1l}^*(M(1-x)) + \delta_{3l}^*Mx) \leq 0 \\ & \forall (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta^*, \gamma^*, \delta_1^*, \delta_2^*, \delta_3^*) \in C_f \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde  $C_o$  es el conjunto de soluciones que corresponden a cortes de optimalidad y  $C_f$  es el conjunto de soluciones que corresponde a cortes de factibilidad.

#### 4.1.1.1. Algoritmo de Benders

La estructura principal de un algoritmo de Benders es la siguiente:

**Paso 0 Inicialización.** Establecer la cota superior  $UB = \infty$ . Fijar  $\bar{x}$  en una solución factible de  $x$ .

**Paso 1** Resolver el subproblema para  $x = \bar{x}$ . Sea  $z_s$  el valor óptimo del subproblema y actualizar la cota superior como  $UB = \min\{UB, z_s\}$ . Si el subproblema es acotado, agregar un corte de optimalidad al problema maestro, en otro caso, agregar un corte de factibilidad al problema maestro.

**Paso 2** Resolver el problema maestro para obtener una nueva solución  $\bar{x}$ . Sea  $z_M$  la solución óptima del problema maestro.

**Paso 3** Si  $UB - z_M < \epsilon$  parar, en otro caso, ir al paso 2.

#### 4.1.2. Resultados

Existen algunos artículos en la literatura que consideran el mismo tipo de problemas que en este trabajo, que fueron utilizados para probar el desempeño del algoritmo que se propone.

Los experimentos numéricos se realizaron en una PC Intel Core i7 a 2.5 GHz con 8.0 GB en RAM, compilando en GAMS 24.7.3 de 64 bit para Windows con el solver CPLEX. La tabla 4.1 muestra los resultados obtenidos al utilizar el algoritmo y su comparación con los trabajos publicados.

Con base en los resultados obtenidos a partir de los ejemplos, el algoritmo alcanza resultados cercanos al óptimo en muy poco tiempo y con pocas iteraciones: 3, 4, 3 y 5 respectivamente. Debe destacarse que el algoritmo, en general, no alcanza el óptimo en problemas pequeños, pero los resultados con instancias más grandes son más cercanos a la mejor solución.

Cuadro 4.1: Comparación de resultados

No.	No. Variables		Referencia	Resultados Referencia	Resultados Benders	Tiempo de ejecución (s)
	Líder	Seguidor				
1	4	3	U.-P. Wen y Yang (1990)	$F = -1,011,67$ $f = -4,673,34$	$F = -988,44$ $f = -4202,64$	2.912
2	2	2	Tuy y Ghannadan (1998)	$F = -3,25$ $f = -6$	$F = -3,25$ $f = -6$	3.841
3	1	1	Moore y Bard (1990b)	$F = 13$ $f = 1$	$F = 13$ $f = 1$	2.511
4	1	2	Saharidis y Ierapetritou (2009)	$F = -961,69$ $f = -4,673,36$	$F = -923,28$ $f = -4021,48$	5.378

## 4.2. Estrategia Basada en la Relajación Lagrangiana

Considerando un problema de la forma

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & f(x) \\ \text{sujeto a :} \quad & g(x) \leq 0 \\ & x \in S \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas y  $S \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto arbitrario.

Dado  $u \geq 0$ , una relajación Lagrangiana de 4.24 se define por:

$$\begin{aligned} \text{ínf} \quad & L(x, u) = f(x) + u^T g(x) \\ \text{sujeto a :} \quad & x \in S \end{aligned} \quad (4.25)$$

También se define la función dual  $\omega(u)$  como evaluación del siguiente problema, conocido como subproblema de Lagrange:

$$\omega(u) = \text{mín} \quad f(x) + u^T g(x) \quad x \in S \quad (4.26)$$

De la función anterior, se tiene que para toda  $u \geq 0$

$$\omega(u) \leq f(x^*) \quad (4.27)$$

Entonces, los valores de la función dual son cotas inferiores del valor óptimo de 4.41. El problema dual consiste en encontrar el vector de multiplicadores  $u$  para el cual la cota inferior dada por la función dual es máxima:

$$\begin{aligned} & \underset{u}{\text{máx}} \omega(u) \\ & \text{suje}to \ a : u \geq 0 \end{aligned} \tag{4.28}$$

De la definición del Lagrangiano, se tiene la brecha de dualidad:

$$f(x^*) - \omega(u^*) \geq 0 \tag{4.29}$$

Si el problema 4.28 es no convexo, la brecha de dualidad es usualmente mayor que cero. Sin embargo, para problemas convexos, la brecha de dualidad desaparece (Bertsekas, 1999).

#### 4.2.1. Relajación Lagrangiana para Resolver el Problema Binivel Discreto - Continuo

Para evitar el uso de variables binarias, el problema (3.10 - 3.19) se puede transformar en el siguiente modelo equivalente:



$$\min_{x,y} \quad c_1x + d_1y \quad (4.30)$$

$$\text{sujeto a : } A_1x + B_1y \leq b_1 \quad (4.31)$$

$$A_2x + B_2y \leq b_2 \quad (4.32)$$

$$-\lambda^T B_2 \leq d_2 \quad (4.33)$$

$$d_2y = \sum_{i=1}^{n_1} \mu_i^T A_{2i} - \lambda^T b_2 \quad (4.34)$$

$$\mu_{li} \geq \lambda_l - M(1 - x_i) \quad l = 1, \dots, q, \quad i = 1, \dots, n_1 \quad (4.35)$$

$$\mu_i \leq \lambda \quad i = 1, \dots, n_1 \quad (4.36)$$

$$\mu_l^T \leq Mx \quad l = 1, \dots, q \quad (4.37)$$

$$\mu \geq 0 \quad (4.38)$$

$$x \leq x^2 \quad (4.39)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad y, \lambda \geq 0 \quad (4.40)$$

La restricción (4.39) es considerada como restricción complicada, por lo que puede ser dualizada. A partir de esta idea, en la sección siguiente se propone una estrategia de solución para el DCBLP.

Considerando el problema (4.30 - 4.40), la restricción 4.39 y dado  $u \geq 0$ , una relajación Lagrangiana se define por:

$$\min_{x,y} \quad c_1x + d_1y + u(x - x^2)$$

$$\text{sujeto a : } A_1x + B_1y \leq b_1$$

$$A_2x + B_2y \leq b_2$$

$$-\lambda^T B_2 \leq d_2$$

$$d_2y = \sum_{i=1}^{n_1} \mu_i^T A_{2i} - \lambda^T b_2 \quad (4.41)$$

$$\mu_{li} \geq \lambda_l - M(1 - x_i) \quad l = 1, \dots, q, \quad i = 1, \dots, n_1$$

$$\mu_i \leq \lambda \quad i = 1, \dots, n_1$$

$$\mu_l^T \leq Mx \quad l = 1, \dots, q$$

$$\mu \geq 0$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad y, \lambda \geq 0$$

donde la función dual  $\omega(u)$  se define como el subproblema de Lagrange:

$$\begin{aligned}
 \omega(u) &= \min_{x,y} c_1x + d_1y + u(x - x^2) \\
 \text{sujeto a : } & A_1x + B_1y \leq b_1 \\
 & A_2x + B_2y \leq b_2 \\
 & -\lambda^T B_2 \leq d_2 \\
 & d_2y = \sum_{i=1}^{n_1} \mu_i^T A_{2i} - \lambda^T b_2 \\
 & \mu_{li} \geq \lambda_l - M(1 - x_i) \quad l = 1, \dots, q, \quad i = 1, \dots, n_1 \\
 & \mu_i \leq \lambda \quad i = 1, \dots, n_1 \\
 & \mu_l^T \leq Mx \quad l = 1, \dots, q \\
 & \mu \geq 0 \\
 & 0 \leq x \leq 1, \quad y, \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

De la función anterior, se tiene que para toda  $u \geq 0$

$$\omega(u) \leq c_1x^* + d_1y^* \tag{4.43}$$

Entonces, los valores de la función dual son cotas inferiores del valor óptimo de (4.30 - 4.40). A partir de esta definición, se tiene la brecha de dualidad:

$$c_1x^* + d_1y^* - \omega(u^*) \geq 0 \tag{4.44}$$

Para resolver el problema, se busca reducir la brecha de dualidad, considerando que si el problema (4.6) - (4.16) es no convexo, la brecha de dualidad es usualmente mayor que cero. Sin embargo, para problemas convexos, la brecha de dualidad desaparece (Bertsekas, 1999).

Por lo que el problema dual consiste en encontrar el vector de multiplicadores  $u$  para el cual la cota inferior dada por la función dual es máxima:

$$\begin{aligned} & \underset{u}{\text{máx}} \omega(u) \\ & \text{suje}to \ a : u \geq 0 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Si se pudiera disponer de forma explícita del conjunto de soluciones factibles de la región factible de 4.42, el problema podría ser resuelto mediante la enumeración de todas ellas como

$$\omega(u) = \underset{x,y}{\text{mín}} c_1 x^s + d_1 y^s + u(x^s - (x^s)^2), \quad s = 1, \dots, r \tag{4.46}$$

Para resolver el problema, se propone un algoritmo de descomposición dual, para el que se utiliza un método de planos de corte duales. En este método, se maximiza una aproximación de la función dual y tiene propiedades de convergencia similares a las del método de subgradiente (Nowak, 2006).

La función dual es cóncava y el problema puede reformularse como el siguiente problema denominado problema maestro de la relajación Lagrangiana (Nowak, 2006; Cerisola Lopez De Haro y cols., 2004):

$$\begin{aligned} & \underset{u}{\text{máx}} \omega(u) \\ & \text{suje}to \ a : \quad \omega \leq c_1 x^1 + d_1 y^1 + u(x^1 - (x^1)^2) \\ & \quad \quad \quad \vdots \\ & \quad \quad \quad \omega \leq c_1 x^r + d_1 y^r + u(x^r - (x^r)^2) \end{aligned} \tag{4.47}$$

donde cada restricción es un corte de Lagrange.

La optimización del problema dual consiste en la resolución iterativa del problema maestro cuyo número de cortes de Lagrange aumenta con cada iteración.

Con la solución de cada problema maestro se obtiene un nuevo valor del multiplicador  $u$ , el cual, al ser evaluado en el subproblema de Lagrange, genera un nuevo corte para el problema maestro.

Cuando el multiplicador genera subproblemas no acotados, se debe introducir una restricción en el problema maestro que elimine al

multiplicador. Este corte se conoce como corte de acotamiento y se obtiene al resolver el subproblema de acotamiento

$$\begin{aligned}
 \omega(u) &= \min_{x,y} c_1x + d_1y + u(x - x^2) \\
 \text{sujeto a :} \quad & A_1x + B_1y \leq 0 \\
 & A_2x + B_2y \leq 0 \\
 & -\lambda^T B_2 \leq 0 \\
 & d_2y = \sum_{i=1}^{n_1} \mu_i^T A_{2i} - \lambda^T b_2 \\
 & \mu_{li} - \lambda_l - Mx_i \geq 0 \quad l = 1, \dots, q, \quad i = 1, \dots, n_1 \\
 & \mu_i \leq \lambda \quad i = 1, \dots, n_1 \\
 & \mu_l^T \leq Mx \quad l = 1, \dots, q \\
 & \mu \geq 0 \\
 & 0 \leq x \leq 1, \quad y, \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Si la solución óptima es un valor negativo, se debe introducir un corte de acotamiento en el problema maestro de la forma:

$$0 \leq c_1x^r + d_1y^r + u(x^r - (x^r)^2) \tag{4.49}$$

De esta manera, el algoritmo de relajación Lagrangiana itera entre un problema maestro formado por cortes de Lagrange y de acotamiento y un subproblema que evalúa los multiplicadores propuestos.

#### 4.2.2. Algoritmo de Relajación Lagrangiana

La estructura del algoritmo de la relajación Lagrangiana considerando la interpretación anterior se describe a continuación:

Paso 0 **Inicialización.**  $k = 0$ ,  $\epsilon = 10^{-6}$

Paso 1 Resolver el problema maestro de la relajación Lagrangiana

$$\begin{aligned}
 & \underset{u}{\text{máx}} \omega(u) \\
 \text{suje}to \ a : & \quad \omega \leq c_1 x^k + d_1 y^k + u(x^k - (x^k)^2) \\
 & \quad \text{si } u^k \text{ genera un corte de Lagrange} \\
 & \quad 0 \leq c_1 x^k + d_1 y^k + u(x^k - (x^k)^2) \\
 & \quad \text{si } u^k \text{ genera un corte de acotamiento}
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Obtener el valor de  $u^k$  e ir al paso 2.

Paso 2 Resolver el problema de acotamiento 4.48. Si  $\omega^*(u) \geq 0$  ir al paso 3. En otro caso, obtener la solución  $x^k$ , formar el corte de acotamiento correspondiente e ir al paso 1.

Paso 3 Resolver el subproblema de Lagrange 4.42. Obtener la solución  $x^k$ , formar el corte de Lagrange correspondiente e ir al paso 4.

Paso 4 Si  $|u^k - u^k - 1| < \epsilon$  parar. En otro caso, ir al paso 1.

### 4.2.3. Resultados

Existen algunos artículos en la literatura que consideran el mismo tipo de problemas que en este trabajo que fueron utilizados para probar el desempeño del algoritmo que se propone.

Los experimentos numéricos se realizaron en una PC Intel Core i7 a 2.5 GHz con 8.0 GB en RAM, compilando en GAMS 24.7.3 de 64 bit para Windows con los solvers CPLEX y LINDO. La tabla 4.2 muestra los resultados obtenidos al utilizar el algoritmo y su comparación con los trabajos publicados.

Cuadro 4.2: Comparación de resultados

No.	No. Variables		Referencia	Resultados en la referencia	Resultados del algoritmo	Tiempo de ejecución (s)
	Líder	Seguidor				
1	4	3	U.-P. Wen y Yang (1990)	$F = -1,011,67$ $f = -4,673,34$	$F = -1,011,67$ $f = -4,673,34$	2.294
2	2	2	Tuy y Ghannadan (1998)	$F = -3,25$ $f = -6$	$F = -3,25$ $f = -6$	3.247
3	1	1	Moore y Bard (1990b)	$F = 13$ $f = 1$	$F = 13$ $f = 1$	2.169
4	1	2	Saharidis y Ierapetritou (2009)	$F = -961,69$ $f = -4,673,36$	$F = -960$ $f = -4,616$	4.94

Con base en los resultados obtenidos a partir de los ejemplos, el algoritmo alcanza el óptimo en muy poco tiempo y con pocas iteraciones: 2, 4, 3 y 4 respectivamente.

La estrategia de solución para problemas binivel discretos-continuos basada en la relajación lagrangiana es la principal aportación en el trabajo de investigación, ya que este enfoque no ha sido reportado en la literatura para resolver problemas binivel.

## CAPÍTULO 5

---

# El Problema de Localización de Instalaciones No Deseadas Como Problema Binivel

---

### 5.1. Introducción

La mayor parte de la literatura sobre Teoría de Localización está enfocada a la ubicación de instalaciones deseables para los decisores, tales como escuelas, hospitales o servicios de emergencia, donde se busca que los usuarios estén lo más cerca posible de ellos. Sin embargo, hay instalaciones que pueden ser *molestas* (no deseadas) para la población, pero son necesarias para el desarrollo de las comunidades, como plantas eléctricas, rellenos sanitarios e incluso aeropuertos o estadios deportivos.

Esta molestia se vuelve una oposición de la población para la localización de servicios no deseados cerca de ellos. Sobre este problema, algunos autores han distinguido entre instalaciones peligrosas e instalaciones desagradables Erkut y Neuman (1989), sin embargo pueden sólo considerarse como instalaciones no deseadas Colebrook y Sicilia (2007).

Los altos costos de instalación, transporte y operación de estas instalaciones, así como las consideraciones sobre emisión de

contaminantes y la oposición de la población a la apertura de las mismas, hacen que las decisiones se tomen al resolver un problema con diversos objetivos. Además deben considerarse aspectos como la seguridad en el manejo de materiales y la forma de distribución (o recolección) y transporte para cada nueva instalación.

Por ejemplo, la selección de los lugares adecuados para la disposición final de residuos de las actividades humanas y el transporte eficiente de los mismos, minimiza la exposición de la población a factores contaminantes y la contaminación ambiental, reduciendo los riesgos asociados a la misma.

## 5.2. Revisión de la Literatura

No existen muchos trabajos dedicados a la localización de instalaciones no deseadas o molestas en redes. Este concepto surgió en la década de 1970, pero comenzó a cobrar importancia debido a la posible consideración de aspectos medio ambientales. Estos problemas son opuestos a los modelos clásicos de centros (minimax) y medianas (minisum) y usualmente se modelan como problemas con criterios *maximin* y *maxisum*. Melachrinoudis (2011); Colebrook y Sicilia (2013) presentan revisiones sobre este tipo de modelos.

La literatura en localización de instalaciones no deseadas inicia a finales de la década de 1980. En 1988 Ratick y White (1988) propuso un modelo de la localización de instalaciones no deseadas con tres objetivos. Rahman y Kuby (1995) tratan problemas considerando minimizar costos y la oposición de la población para la localización de una estación de transferencia de residuos sólidos.

Giannikos (1998) presenta un modelo multiobjetivo para localizar sitios de disposición para residuos peligrosos y la transportación de los mismos a lo largo de una red. Rakas y cols. (2004) desarrollan un modelo para determinar la localización de instalaciones no deseadas considerando objetivos en conflicto; utilizan un método de solución considerando que algunos parámetros son inciertos resolviéndolo con programación difusa.

Hamacher y Drezner (2002) presentan un algoritmo de tiempo polinómico para la localización de instalaciones semi molestas en redes.



Yapicioglu y cols. (2007) proponen un modelo para la localización de instalaciones semi molestas, el modelo se compone de una función minisum ponderada que representa los costos de transporte y de una función basada en la distancia para representar los efectos nocivos de la instalación; resuelven el problema utilizando un método de enjambre de partículas. Alçada-Almeida y cols. (2009) introducen un modelo multiobjetivo entero mixto para identificar las ubicaciones y capacidades de un tipo de instalación no deseada. El enfoque incorpora un modelo de dispersión de Gauss y un modelo de optimización multiobjetivo.

Song y cols. (2013) examinan las características del fenómeno *no en mi patio* (not in my backyard, NIMBY) y sugieren dos alternativas de optimización matemática para minimizar el grado total de oposición de este tipo; proponen algoritmos genéticos para resolver los modelos obtenidos. Finalmente, Boyer y cols. (2013) desarrollan un modelo de programación entera mixta para la localización y ruteo de desechos peligrosos con dos objetivos.

Considerando algunos de los objetivos utilizados en los trabajos anteriores, en esta sección se propone un modelo que involucra a dos decisores con una relación jerárquica: un líder y un seguidor. En el modelo, el líder decide sobre la localización de las instalaciones y su capacidad, considerando los costos y la oposición de la población asociados a la instalación, mientras el seguidor está a cargo de la satisfacción de la demanda de los clientes a través de la distribución del servicio (recolección de residuos, por ejemplo).

Para el modelo, se asume que el líder sólo puede abrir más instalaciones para que el seguidor pueda atender a más clientes, mientras el seguidor reacciona atendiendo a los usuarios que la capacidad del sistema le permite. El problema puede ser modelado como un problema binivel discreto-continuo.

### **5.3. Formulación del Problema de Localización de Instalaciones No Deseadas Como un Modelo Binivel**

Los modelos de localización para instalaciones deben indicar al menos cuántos servicios deben ser instalados, dónde y cómo deben

atender a los clientes, considerando la minimización de costos pero además afectando lo menos posible al entorno.

En este sentido, las afectaciones pueden considerarse como el impacto social, que puede medirse como un grado de oposición, la contaminación, afectaciones al terreno, etcétera. En nuestro modelo, la población más cercana a la instalación absorberá los costos de las afectaciones, en consecuencia, la oposición se medirá en función de alguna característica de la población.

Para este problema, el principal objetivo consiste en determinar el número y localización de instalaciones no deseadas a costo mínimo, minimizando simultáneamente el grado de oposición a las instalaciones en una red.

Si se considera la demanda de los centros de población (nodos), la oposición puede ser estimada como un valor inversamente proporcional a la demanda de cada nodo o alguna raíz de la misma:

$$O_i = D_i^{-1} \quad (5.1)$$

donde  $D_i$  es la demanda del centro de población en el nodo  $i$ , para localizar instalaciones lejos de centros de población con poca demanda (Rodríguez y cols., 2006).

Además, en el modelo, se impone una restricción de distancia máxima, es decir, un radio de atención para cada instalación y los nodos fuera de ese radio no podrán ser atendidos por la misma.

Dados un conjunto de clientes y de sitios candidatos para localizar instalaciones, un decisor (líder) selecciona un conjunto de instalaciones para abrir, con el objetivo de minimizar el costo de inversión y la afectación al entorno. Una vez que las instalaciones han sido designadas para ser abiertas, el seguidor define cómo atenderá a los clientes con el objetivo de minimizar sus costos. El líder no puede exigir al seguidor que atienda a todos los clientes, sin embargo, es posible garantizar un nivel de servicio equitativo con un porcentaje de la demanda atendida de cada cliente.

El problema binivel de instalaciones no deseadas (BFNDL) puede

formularse como:

$$\min_{x_j} \quad F = \sum_{j=1}^N (S_j + O_j)x_j \quad (5.2)$$

$$\text{sujeto a :} \quad \sum_{j=1}^N x_j \leq p \quad (5.3)$$

$$\sum_{j=1}^M C_j x_j \geq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N D_i y_{ij} \quad (5.4)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, N \quad (5.5)$$

$$\min_{y_{ij}} \quad f = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N D_i c_{ij} y_{ij} \quad (5.6)$$

$$\text{sujeto a :} \quad y_{ij} \leq x_j \quad \forall i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N \quad (5.7)$$

$$\sum_{j=1}^N y_{ij} \geq \lambda_i \quad i = 1, \dots, M \quad (5.8)$$

$$\sum_{j=1}^N y_{ij} \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (5.9)$$

$$\sum_{i=1}^M D_i y_{ij} \leq C_j \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (5.10)$$

$$L_{ij} y_{ij} \leq R \quad \forall i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N \quad (5.11)$$

$$y_{ij} \in (0, 1) \quad (5.12)$$

La función objetivo (5.2) consiste en minimizar el costo de instalación de los servicios y la oposición de la población de cada centro de demanda a la instalación de los mismos simultáneamente.

La restricción (5.3) asegura que no se abran más instalaciones que el máximo establecido. La restricción (5.4) asegura que se abran suficientes

instalaciones para satisfacer la demanda.

En la función objetivo (5.6) se busca minimizar el costo de transporte desde la instalación localizada en  $j$  al centro de demanda  $i$ .

La restricción (5.7) establece que sólo pueden atenderse centros de demanda desde instalaciones abiertas. Con la restricción (5.8) se garantiza la equidad estableciendo un nivel mínimo de servicio por cliente. La ecuación (5.9) permite que no se satisfaga la demanda totalmente. La restricción (5.10) evita que se exceda la capacidad de cada sitio  $j$ . La desigualdad (5.11) limita la distancia entre los nodos candidatos y los centros de demanda. Las restricciones (5.5) y (5.12) a ser binarias y continuas entre cero y uno respectivamente.

Con esta formulación, el problema puede ser resuelto utilizando las estrategias presentadas anteriormente, por lo que en la sección siguiente se presenta la aplicación de las mismas a problemas de prueba de distintas dimensiones.

## 5.4. Análisis Computacional de las Estrategias

El enfoque jerárquico para resolver problemas de localización de instalaciones no deseadas considerado en este trabajo, no ha sido considerado en la literatura, por lo que no hay problemas de comparación. Con el fin de mostrar el desempeño del algoritmo sugerido, se utilizó un conjunto de problemas prueba (Fernández-Aréizaga, s.f.).

Los experimentos numéricos se realizaron en una PC Intel Core i7 a 2.5 GHz con 8.0 GB en RAM, compilando en GAMS 24.7.3 de 64 bit para Windows con los solvers CPLEX e IPOPT.

Los datos originales proporcionan la siguiente información:

Siendo  $I = \{1, \dots, m\}$  y  $J = \{1, \dots, n\}$  conjuntos de clientes y plantas respectivamente, se tiene:

- Número de clientes ( $m$ ).
- Número de plantas ( $n$ ).
- Matriz de  $m \times n$  de costos de distribución.

- $c = [c_{ij}] \quad i \in I, j \in J$
- Vector de demanda de clientes  $D = (D_i) \quad i \in I$
- Vector de costos fijos de apertura de plantas  $S = (S_j) \quad j \in J$
- Vector de capacidades de las plantas  $C = (C_j) \quad j \in J$

A partir de esta información, se construyeron los problemas de prueba, agregando la oposición en función de la distancia a la planta y la demanda del cliente como

$$O_i = (D_i \cdot c_{ij})^{-1} \quad (5.13)$$

La demanda mínima que debe ser satisfecha  $\lambda_i$  se asignó aleatoriamente como un valor entre  $\frac{1}{3}$  y 1. Sin pérdida de generalidad, la distancia máxima que debe recorrerse, igual para todos los casos. Como criterio de paro, se consideraron 100 iteraciones o una tolerancia de  $10^{-6}$  entre las cotas de los problemas o los multiplicadores propuestos.

El tamaño de los problemas prueba se muestra en el cuadro 5.1.

Cuadro 5.1: Tamaño de los problemas

No.	Dimensiones del Problema			Número de Variables Binarias
	m	n	No. Restricciones	
1	10	10	230	10
2	20	10	450	10
3	30	15	975	15
4	40	20	1700	20
5	50	20	2120	20
6	60	30	3750	30
7	75	30	4680	30
8	90	30	5610	30

Fueron probados 61 problemas, para los que se presentan las soluciones para el líder, el seguidor con la resolución de cada problema. El desempeño del algoritmo fue medido utilizando el tiempo de ejecución y comparando las soluciones obtenidas con las correspondientes a la

reformulación de un solo nivel con las condiciones de Karush - Kuhn - Tucker. Los resultados se muestran en los cuadros 5.2 y 5.3.

Cuadro 5.2: Resultados del Uso del Algoritmo Basado en la Descomposición de Benders para los Problemas Prueba

No.	Dimensiones		Descomposición de Benders			Reformulación KKT		Gap	
	$m$	$n$	$F$	$f$	Iter	$F$	$f$	$F$	$f$
1	10	10	306.47	2,269.00	9	306.47	2,269.00	0%	0%
2	10	10	909.40	2,762.33	10	927.51	2,773.00	2%	0%
3	10	10	1,103.49	3,428.83	8	1,163.50	4,025.00	5%	15%
4	10	10	1,340.58	2,643.50	8	1,340.58	2,643.50	0%	0%
5	10	10	944.81	3,549.00	9	971.58	5,561.33	3%	36%
6	10	10	351.36	2,240.50	12	351.36	2,240.50	0%	0%
7	20	10	513.18	5,253.20	11	513.18	5,253.20	0%	0%
8	20	10	1,610.17	3,009.75	13	1,610.18	3,009.75	0%	0%
9	20	10	2,292.32	4,113.50	10	2,295.18	4,147.76	0%	1%
10	20	10	2,550.18	3,532.08	9	2,550.18	3,532.08	0%	0%
11	20	10	1,703.24	7,706.87	10	1,718.11	6,150.88	1%	25%
12	20	10	777.19	4,380.38	13	790.16	3,684.99	2%	19%
13	30	15	1,157.13	5,987.44	4	1,198.10	4,948.68	3%	21%
14	30	15	543.18	4,124.39	5	543.18	4,124.39	0%	0%
15	30	15	5,849.27	3,460.85	15	6,082.28	3,975.15	4%	13%
16	30	15	943.27	4,347.81	52	943.27	4,347.81	0%	0%
17	30	15	903.42	4,956.27	4	903.42	4,956.27	0%	0%
18	30	15	888.45	5,283.63	4	888.45	5,283.63	0%	0%
19	30	15	3,419.58	2,551.00	20	3,419.58	2,551.00	0%	0%
20	30	15	3,740.09	7,628.00	4	3,740.09	7,628.00	0%	0%
21	30	15	5,131.58	4,250.93	20	5,131.58	4,250.93	0%	0%
22	40	20	5,825.34	5,556.16	33	5,935.33	6,363.58	2%	13%
23	40	20	6,430.21	6,572.37	18	6,430.21	6,572.37	0%	0%
24	40	20	6,928.32	5,538.12	14	7,220.27	5,136.57	4%	8%
25	40	20	2,356.58	5,518.22	18	2,356.58	5,518.22	0%	0%
26	40	20	1,133.39	5,732.85	9	1,133.39	5,732.85	0%	0%
27	40	20	2,333.29	7,119.51	8	2,333.29	7,119.51	0%	0%
28	40	20	2,475.88	11,645.44	10	2,522.43	10,102.97	2%	15%
29	40	20	3,847.12	6,800.22	9	3,847.12	6,800.22	0%	0%
30	50	20	1,311.29	8,350.58	8	1,338.33	7,373.71	2%	13%
31	50	20	3,728.11	11,075.72	7	3,728.11	11,075.72	0%	0%
32	50	20	3,815.26	5,090.92	9	3,815.26	5,090.92	0%	0%
33	50	20	3,835.23	8,310.91	11	3,841.12	11,339.22	0%	27%
34	50	20	3,707.73	7,351.04	14	3,728.59	7,159.00	1%	3%
35	50	20	1,475.59	9,909.30	12	1,475.59	9,909.30	0%	0%
36	50	20	3,843.16	11,984.36	8	3,843.16	11,984.36	0%	0%
37	50	20	13,837.80	7,336.03	7	14,074.76	6,437.17	2%	14%
38	60	30	1,412.17	14,478.16	13	1,412.17	14,478.16	0%	0%
39	60	30	1,805.20	12,727.47	17	1,805.20	12,727.47	0%	0%
40	60	30	5,532.23	10,142.18	11	5,532.23	10,142.18	0%	0%
41	60	30	4,360.17	11,872.56	7	4,360.17	11,872.56	0%	0%
42	60	30	16,001.42	6,427.46	13	16,756.41	6,474.39	5%	1%
43	60	30	9,920.34	8,052.89	12	9,920.34	8,052.89	0%	0%
44	60	30	16,771.39	7,237.25	16	16,771.39	7,237.25	0%	0%
45	60	30	5,531.08	15,332.03	13	5,531.08	15,332.03	0%	0%

Continúa.

No.	Dimensiones		Descomposición de Benders			Reformulación KKT		Gap	
	$m$	$n$	$F$	$f$	Iter	$F$	$f$	$F$	$f$
46	75	30	1,919.33	14,873.52	8	1,922.32	14,125.37	0%	5%
47	75	30	1,343.28	16,366.56	16	1,343.28	16,366.56	0%	0%
48	75	30	10,985.44	6,621.44	9	11,575.40	6,964.15	5%	5%
49	75	30	3,424.21	13,601.99	9	3,424.21	13,601.99	0%	0%
50	75	30	12,695.25	10,322.29	11	12,695.25	10,322.29	0%	0%
51	75	30	18,669.36	8,159.24	9	18,669.36	8,159.24	0%	0%
52	75	30	17,900.19	17,024.66	7	18,775.35	15,501.92	5%	10%
53	75	30	25,847.39	7,971.68	7	22,905.34	10,100.69	13%	21%
54	90	30	1,483.22	19,054.17	10	1,483.22	19,054.17	0%	0%
55	90	30	1,685.39	15,134.05	8	1,685.39	15,134.05	0%	0%
56	90	30	8,989.28	14,219.70	12	8,989.28	14,219.70	0%	0%
57	90	30	8,250.28	12,937.81	8	8,250.28	12,937.81	0%	0%
58	90	30	8,310.21	16,188.55	8	8,310.21	16,188.55	0%	0%
59	90	30	17,180.38	13,055.07	14	18,069.39	11,571.30	5%	13%
60	90	30	18,941.24	17,045.73	9	18,941.24	17,045.73	0%	0%
61	90	30	14,911.22	18,798.15	8	14,911.22	18,798.15	0%	0%

Fuente: Elaboración propia

Los resultados obtenidos por el algoritmo son muy cercanos a las soluciones obtenidas resolviendo el problema reformulado directamente como problemas enteros mixtos no lineales. En el 70% de los casos, la solución del problema líder coincide con exactitud, mientras que esta coincidencia ocurre en el 67% en el objetivo seguidor. Las soluciones se encuentran en un número razonable de iteraciones, de acuerdo con el tamaño de los problemas, y el tiempo de ejecución no excedió los 10 minutos, por lo que el método es bueno.

Cuadro 5.3: Resultados del Uso del Algoritmo Basado en la Relajación Lagrangiana para los Problemas Prueba

No.	Dimensiones		Relajación Lagrangiana			Reformulación KKT			Gap	
	$m$	$n$	$F$	$f$	$T_L$ (s)	$F$	$f$	$T_R$ (s)	$F$	$f$
1	10	10	306.5	2,269.0	2.40	306.5	2,269.0	7.80	0%	0%
2	10	10	909.4	2,762.3	3.22	927.5	2,773.0	7.07	2%	0%
3	10	10	1,103.5	3,428.8	1.97	1,163.5	4,025.0	6.15	5%	15%
4	10	10	1,340.6	2,643.5	1.57	1,340.6	2,643.5	6.86	0%	0%
5	10	10	944.8	3,549.0	3.27	971.6	5,561.3	7.32	3%	36%
6	10	10	351.4	2,240.5	2.06	351.4	2,240.5	14.26	0%	0%
7	20	10	513.2	5,253.2	2.71	513.2	5,253.2	19.12	0%	0%
8	20	10	1,610.2	3,009.8	1.96	1,610.2	3,009.8	10.16	0%	0%
9	20	10	2,292.3	4,109.3	2.79	2,295.2	4,147.8	9.12	0%	1%
10	20	10	2,550.2	3,532.1	1.81	2,550.2	3,532.1	6.81	0%	0%
11	20	10	1,703.2	7,706.9	2.87	1,718.1	6,150.9	9.17	1%	25%

Continúa.

No.	Dimensiones		Relajación Lagrangiana			Reformulación KKT			Gap	
	$m$	$n$	$F$	$f$	$T_L$ (s)	$F$	$f$	$T_R$ (s)	$F$	$f$
12	20	10	777.2	4,380.4	3.49	790.2	3,685.0	11.22	2%	19%
13	30	15	1,157.1	5,987.4	7.87	1,198.1	4,948.7	9.59	3%	21%
14	30	15	543.2	4,124.4	8.52	543.2	4,124.4	18.41	0%	0%
15	30	15	5,849.3	3,460.9	13.88	6,082.3	3,975.2	29.43	4%	13%
16	30	15	943.3	4,347.8	47.13	943.3	4,347.8	108.89	0%	0%
17	30	15	903.4	4,956.3	6.85	903.4	4,956.3	15.06	0%	0%
18	30	15	888.5	5,283.6	9.30	888.5	5,283.6	10.22	0%	0%
19	30	15	3,419.6	2,551.0	23.08	3,419.6	2,551.0	28.36	0%	0%
20	30	15	3,068.4	11,849.7	2.84	3,740.1	7,628.0	3.78	18%	55%
21	30	15	5,131.6	4,250.9	23.47	5,131.6	4,250.9	76.04	0%	0%
22	40	20	5,825.3	5,556.2	44.29	5,935.3	6,363.6	138.13	2%	13%
23	40	20	6,430.2	6,572.4	34.48	6,430.2	6,572.4	119.56	0%	0%
24	40	20	6,928.3	5,538.1	28.03	7,220.3	5,136.6	68.50	4%	8%
25	40	20	2,356.6	5,518.2	23.29	2,356.6	5,518.2	81.49	0%	0%
26	40	20	1,133.4	5,732.9	50.78	1,133.4	5,732.9	107.61	0%	0%
27	40	20	2,333.3	7,119.5	33.21	2,333.3	7,119.5	73.53	0%	0%
28	40	20	2,475.9	11,645.4	72.63	2,522.4	10,103.0	160.15	2%	15%
29	40	20	3,847.1	6,800.2	19.50	3,847.1	6,800.2	47.71	0%	0%
30	50	20	1,311.3	8,350.6	154.95	1,338.3	7,373.7	357.26	2%	13%
31	50	20	3,728.1	11,075.7	10.49	3,728.1	11,075.7	25.04	0%	0%
32	50	20	3,815.3	5,090.9	43.69	3,815.3	5,090.9	134.74	0%	0%
33	50	20	3,835.2	8,310.9	122.67	3,841.1	11,339.2	395.10	0%	27%
34	50	20	3,707.7	7,351.0	54.91	3,728.6	7,159.0	175.81	1%	3%
35	50	20	1,475.6	9,909.3	66.21	1,475.6	9,909.3	218.25	0%	0%
36	50	20	3,843.2	11,984.4	83.78	3,843.2	11,984.4	97.89	0%	0%
37	50	20	13,837.8	7,336.0	50.93	14,074.8	6,437.2	54.82	2%	14%
38	60	30	1,412.2	14,478.2	379.88	1,412.2	14,478.2	850.87	0%	0%
39	60	30	1,805.2	12,727.5	410.84	1,805.2	12,727.5	556.22	0%	0%
40	60	30	5,532.2	10,142.2	328.60	5,532.2	10,142.2	433.72	0%	0%
41	60	30	4,360.2	11,872.6	135.99	4,360.2	11,872.6	193.87	0%	0%
42	60	30	16,001.4	6,427.5	109.91	16,756.4	6,474.4	283.10	5%	1%
43	60	30	9,920.3	8,052.9	60.78	9,920.3	8,052.9	222.42	0%	0%
44	60	30	16,771.4	7,237.3	125.85	16,771.4	7,237.3	456.05	0%	0%
45	60	30	5,531.1	15,332.0	71.05	5,531.1	15,332.0	245.28	0%	0%
46	75	30	1,919.3	14,873.5	315.11	1,922.3	14,125.4	1,086.47	0%	5%
47	75	30	1,343.3	16,366.6	107.92	1,343.3	16,366.6	473.05	0%	0%
48	75	30	10,985.4	6,621.4	375.47	11,575.4	6,964.1	810.50	5%	5%
49	75	30	3,424.2	13,602.0	403.66	3,424.2	13,602.0	674.92	0%	0%
50	75	30	12,695.3	10,322.3	318.97	12,695.3	10,322.3	787.03	0%	0%
51	75	30	18,669.4	8,159.2	219.40	18,669.4	8,159.2	303.77	0%	0%
52	75	30	17,900.2	17,024.7	540.50	18,775.4	15,501.9	1,440.16	5%	10%
53	75	30	25,847.4	7,971.7	272.26	22,905.3	10,100.7	689.48	13%	21%
54	90	30	1,483.2	19,054.2	282.20	1,483.2	19,054.2	986.27	0%	0%
55	90	30	1,685.4	15,134.1	620.83	1,685.4	15,134.1	2,133.65	0%	0%
56	90	30	8,989.3	14,219.7	587.01	8,989.3	14,219.7	699.35	0%	0%
57	90	30	8,250.3	12,937.8	415.65	8,250.3	12,937.8	1,046.03	0%	0%
58	90	30	8,310.2	16,188.5	219.47	8,310.2	16,188.5	327.21	0%	0%
59	90	30	17,180.4	13,055.1	715.95	18,069.4	11,571.3	2,197.41	5%	13%
60	90	30	18,941.2	17,045.7	516.11	18,941.2	17,045.7	1,254.83	0%	0%
61	90	30	14,911.2	18,798.1	428.71	14,911.2	18,798.1	648.31	0%	0%

Fuente: Elaboración propia



Los resultados computacionales del enfoque muestran que el algoritmo obtiene buenos resultados, alcanzando el óptimo en el 69% de los problemas resueltos, en tiempos relativamente cortos, siendo 12 minutos el tiempo máximo necesario para encontrar una solución, correspondiente a un problema con 30 variables binarias en el problema líder, 2700 variables en el seguidor, dos restricciones en el líder y 5,610 en el seguidor.

Una aportación adicional del trabajo de investigación es la formulación del problema de localización de instalaciones no deseadas como un problema binivel, considerando como líder o decisor de nivel superior a quien decide sobre la localización de las instalaciones y como seguidor o decisor de nivel inferior, a quien se encarga de la recolección. Si bien la formulación ha sido mencionada en la literatura, el problema no ha sido resuelto con esta estructura.

La resolución del problema con las instancias propuestas muestra que ambas estrategias de descomposición son eficientes en cuanto a tiempos de solución y cercanía a las soluciones exactas.



# CAPÍTULO 6

---

## Conclusiones

---

El problema de programación binivel es una formulación que ha sido estudiada de manera reciente. Tomando como base el juego de Stackelberg, se considera la relación jerárquica de dos objetivos, donde uno de ellos es parte de las restricciones del otro. En estos problemas, el decisor principal, también llamado líder o decisor de nivel superior, busca optimizar su función objetivo fijando las variables sobre las que tiene control; ante esta decisión, el decisor secundario, seguidor o decisor de nivel inferior reacciona, decidiendo para optimizar su propio objetivo.

Con este proceso de decisión, los problemas toman características que los vuelven complicados, incluso en sus versiones más simples, ya que la región donde se toma la decisión final, conocida como región inducida, puede ser no convexa, no conectada o vacía, incluso en los casos más sencillas, como el problema binivel lineal. Esta situación se complica si además el problema líder tiene sus propias restricciones.

Al resolver estos problemas, además debe considerarse la posibilidad de existencia de soluciones alternativas para el problema seguidor para alguna solución del líder. Ésto da origen a dos enfoques importantes dentro del área: el enfoque optimista, que asume una cooperación entre los decisores y que el seguidor seleccionará el punto que optimice el objetivo del líder; y el enfoque pesimista en el que se asume que no puede haber cooperación entre los decisores y para una selección del decisor

de nivel superior, el seguidor seleccionará el valor que menos beneficie al líder. En esta investigación se consideró el enfoque optimista.

Una característica importante del problema binivel convexo es la posibilidad de sustituir el nivel inferior por sus condiciones de Karush - Kuhn - Tucker para encontrar una solución. Este enfoque ha dado origen a muchos algoritmos y es el que se utiliza para la propuesta de los métodos utilizados en este trabajo. Desde el punto de vista conceptual, esta reformulación parece fácil de resolver, sin embargo, la restricción no lineal se vuelve complicada, por lo que es necesario manipular el problema para poder resolverlo.

En algunos problemas binivel, es necesario considerar restricciones en algún conjunto de variables. Con este supuesto, los principales resultados teóricos se han desarrollado desde principios de 1990, sin embargo, la literatura al respecto no es muy abundante debido a lo complicado que resulta encontrar la región inducida. Mayoritariamente, la teoría se ha desarrollado con los problemas binivel lineales continuos, con restricciones de integralidad en alguno de los niveles, principalmente el líder; problemas binivel no lineales convexos y considerando múltiples objetivos en alguno de los niveles. Respecto a los algoritmos de solución, los métodos heurísticos son los más desarrollados actualmente, destacando los algoritmos genéticos por la forma de búsqueda por poblaciones.

En este trabajo se proponen dos estrategias de solución para el problema binivel discreto - continuo basadas en las técnicas de descomposición, particularmente la descomposición de Benders y la relajación Lagrangiana. Los algoritmos desarrollados con base en estas técnicas obtienen resultados muy cercanos al óptimo en tiempos cortos (máximo 12 minutos). En este enfoque se aplican las descomposiciones a la reformulación del problema, considerando las condiciones de Karush - Kuhn - Tucker del problema seguidor.

Para probar la eficiencia de los algoritmos desarrollados con base en las estrategias presentadas, se utilizó un modelo de localización de servicios no deseados, el cual fue formulado como problema binivel. Se utilizaron datos de problemas de localización de servicios para construir 63 problemas prueba modificados, de los cuales 2 resultaron no tener solución binivel.

Considerando el conjunto de problemas prueba, los resultados

computacionales del enfoque muestran que los algoritmos obtiene buenos resultados, alcanzando el óptimo en el 70 % de los problemas resueltos en el caso del enfoque primal y en 69 % con la descomposición dual, en tiempos relativamente cortos, siendo 12 minutos el tiempo máximo necesario para encontrar una solución, correspondiente a un problema con 30 variables binarias en el problema líder, 2700 variables en el seguidor, dos restricciones en el líder y 5,610 en el seguidor.

La estrategia de solución para problemas binivel discretos-continuos basada en la relajación Lagrangiana es la principal aportación en el trabajo de investigación, ya que este enfoque no ha sido reportado en la literatura para resolver problemas binivel.

Una aportación adicional del trabajo de investigación es la formulación del problema de localización de instalaciones no deseadas como un problema binivel, considerando como líder o decisor de nivel superior a quien decide sobre la localización de las instalaciones y como seguidor o decisor de nivel inferior, a quien se encarga de la recolección. Si bien la formulación ha sido mencionada en la literatura, el problema no ha sido resuelto con esta estructura.

La resolución del problema con las instancias propuestas muestra que ambas estrategias de descomposición (de Benders y relajación Lagrangiana) son eficientes en cuanto a precisión y tiempos de solución.

Como trabajo futuro, se utilizará la estrategia de descomposición sin considerar la reformulación del problema binivel y la consideración de más de un objetivo en la función líder.



## APÉNDICE A

---

# Método de Solución Para Problemas Binivel Discretos-Continuos Basado en La Descomposición de Benders en GAMS

---

Sets

i variables líder /1\*m/

j variables seguidor /1\*n/

k restricciones líder /1\*2/

l restricciones seguidor /1\*(2(m × n) + 2n + m)/

Scalar

M /1.0e6/

tcomp

texec

telapsed;

Parameters

c1(i) Coeficientes variable líder problema líder

/

\$ondelim

\$include c1.csv

\$offdelim

```
/
d1(j) Coeficientes variable seguidora problema líder
/
$ondelim
$include d1.csv
$offdelim
/

c2(i) Coeficientes variable líder problema seguidor
/
$ondelim
$include c2.csv
$offdelim
/

    d2(j) Coeficientes variable seguidora problema seguidor
/
$ondelim
$include d2.csv
$offdelim
/

b.1(k) Lados derechos restricciones líder
/
$ondelim
$include b1.csv
$offdelim
/

b.2(l) Lados derechos restricciones seguidor
/
$ondelim
$include b2.csv
$offdelim
/;

Table A1(k,i)
$ondelim
$include A1.csv
$offdelim
;
```



```
Table B1(k,j)
$ondelim
$include B_1.csv
$offdelim
;
```

```
Table
A2(l,i)
$ondelim
$include A2.csv
$offdelim
;
```

```
Table
B2(l,j)
$ondelim
$include B_2.csv
$offdelim
;
```

```
Variables
F 'Objetivo del líder'
f_s 'Objetivo del seguidor'
;
```

```
Positive variables
y(j),
mu(i,l),
lambda(l)
;
```

```
BINARY VARIABLES
x(i)
;
```

```
*-----
*Sbproblema primal
*-----
```

```
Equations

objlidersp
objsegsp
```

```

reslídersp(k)
resseghsp(1)
comp1sp(j)
comp2sp
entero1sp(i,1)
entero2sp(i,1)
entero3sp(i,1)
entero4sp(i,1);

objlídersp.. F =e= sum(i,c1(i)*x.l(i)) + sum(j,
d1(j)*y(j));
objseghsp.. f_s =e= sum(ii, c2(ii)*x.l(ii)) + sum(jj,
d2(jj)*y(jj));
reslídersp(k).. sum(iii, A1(k,iii)*x.l(iii)) + sum(jjj,
B1(k,jjj)*y(jjj)) =l= b.1(k);
resseghsp(1).. sum(iv, A2(1,iv)*x.l(iv)) + sum(jv,
B2(1,jv)*y(jv)) =l= b.2(1);
comp1sp(vj)..sum(1l,-lambda(1l)*B2(1l,vj)) =l= d2(vj);
comp2sp.. sum(vjj,d2(vjj)*y(vjj)) =e=
sum((11l,vi),mu(vi,11l)*A2(11l,vi)) -
sum(1v,lambda(1v)*b.2(1v));
entero1sp(vii,v1).. mu(vii,v1) =g= lambda(v1) -
M*(1-x.l(vii));
entero2sp(viii,v11).. mu(viii,v11) =l= lambda(v11);
entero3sp(ix,v111).. mu(ix,v111) =l= M*x.l(ix);

Model subproblemaprimal /objlídersp, reslídersp, resseghsp,
comp1sp, comp2sp, entero1sp, entero2sp, entero3sp,
objseghsp/

*-----
*Subproblema de Benders
*-----

Variables
z 'objetivo subproblema'
gamma 'dual complementariedad 2'
;

Negative variables
alpha1(k) 'dual restricciones líder'
alpha2(1) 'dual restricciones seguidor'

```

```

beta(j) 'dual complementariedad 1'
delta1(i,l) 'dual integralidad 1'
delta2(i,l) 'dual integralidad 2'
delta3(i,l) 'dual integralidad 3'
;

Equations
objsub,
dualy(j),
duallambda(l),
dualmu(i,l)
;

*para encontrar subproblemas no acotados

Scalar noacotado /1.0e20/;
z.up = noacotado;

objsub.. z =e= sum(k,alpha1(k)*(b_1(k)-sum(i,A1(k,i)*x.l(i))))
+ sum(l, alpha2(l)*(b_2(l)-sum(ii,A2(l,ii)*x.l(ii))))
+ sum(j,d2(j)*beta(j)) + sum((ll,iii),
delta1(iii,ll)*(M*(1-x.l(iii)))+delta3(iii,ll)*M*x.l(iii));
dualy(jj).. sum(kk,alpha1(kk)*B1(kk,jj)) +
sum(lll,alpha2(lll)*B2(lll,jj)) + gamma*d2(jj) =l= d1(jj);
duallambda(lv).. sum(jjj,-B2(lv,jjj)*beta(jjj)) -
gamma*b_2(lv) + sum(iii, delta1(iii,lv) - delta2(iii,lv))
=l= 0;
dualmu(iv,vl).. gamma*A2(vl,iv) - delta1(iv,vl) +
delta2(iv,vl) + delta3(iv,vl) =l= 0;

Model subproblema /objsub,dualy,duallambda,dualmu/;

subproblema.solprint=2;

*Subproblema modificado para encontrar rayos no acotados

Equations
cotarayo;

cotarayo.. sum(kk,alpha1(kk)*(b_1(kk)-sum(ii,A1(kk,ii)*x.l(ii))))
+ sum(ll, alpha2(ll)*(b_2(ll)-sum(iii,A2(ll,iii)*x.l(iii))))
+ sum(jj,d2(jj)*beta(jj)) + sum((lll,iv),
delta1(iv,lll)*(M*(1-x.l(iv)))+delta3(iv,lll)*M*x.l(iv))

```

```

=l= M;

Model subproblemamodificado /objsub,cotarayo,dualy,duallambda,dualmu/;

subproblemamodificado.solprint=2;

*-----
*Solución inicial
*-----

Variable
dummy 'variable objetivo auxiliar'

Equations
edummy;

edummy.. dummy =e= 0;

Model fact/edummy,reslider,resseg/;

*-----
*Problema maestro
*-----

Set iter /iter1*iter100/;
Set conjcorte(iter);
conjcorte(iter)=no;
Set conjcortenoac(iter);
conjcortenoac(iter)=no;

Variable eta 'objetivo maestro';

Parameters
constcortea1(iter,k) 'Constantes en los cortes'
constcortea2(iter,l)
constcorteb(iter,j)
constcortead1(iter,i,l)
constcortead3(iter,i,l)
;

Equations
*objmaster
optimalidad(iter) 'Corte de Benders'
factibilidad(iter) 'Corte para subproblemas no acotados'

```

```

;

*objmaster.. eta =e= sum(i,c1(i)*x(i))+ theta;
optimalidad(conjcorte).. sum(i,c1(i)*x(i))+
sum(k,constcortea1(conjcorte,k)*(b_1(k)-sum(i,A1(k,i)*x(i))))
+ sum(l, constcortea2(conjcorte,l)*(b_2(l)-sum(i,A2(l,i)*x(i))))
+ sum(j,d2(j)*constcorteb(conjcorte,j)) + sum((ll,ii),
constcortead1(conjcorte,ii,ll)*(M*(1-x(ii)))+
constcortead3(conjcorte,ii,ll)*M*x(ii)) =l= eta;
factibilidad(conjcortenoac).. sum(i,c1(i)*x(i))+
sum(k,constcortea1(conjcortenoac,k)*(b_1(k)-sum(i,A1(k,i)*x(i))))
+ sum(l, constcortea2(conjcortenoac,l)*(b_2(l)-sum(i,A2(l,i)*x(i))))
+ sum(j,d2(j)*constcorteb(conjcortenoac,j)) + sum((ll,ii),
constcortead1(conjcortenoac,ii,ll)*(M*(1-x(ii)))+
constcortead3(conjcortenoac,ii,ll)*M*x(ii)) =l= 0;

Model maestro /optimalidad,factibilidad/;

*maestro.solprint=2;

*-----
*Descomposición de Benders
*-----

*Inicialización

Scalar UB 'Cota superior' /INF/;
Scalar LB 'Cota inferior' /-INF/;

Solve fact minimizing dummy using mip;

Display ''Valores iniciales'', x.l;

*Algoritmo de Benders

Scalar converged /0/;
Scalar iteration;
Scalar cota;

Parameter xmejor(i);
Parameter log(iter,*) 'Información de proceso';

loop(iter$(not converged),
*Resolver subproblema

```

```

solve subproblema maximizing z using lp;
Display ''Solución al subproblema'', z.l, x.l;

*Resultados
abort$(subproblema.modelstat >= 4)
''El subproblema es infactible''

*Subproblema no acotado
if(subproblema.modelstat = 3,
solve subproblemamodificado maximizing z using lp;

*Revisar resultados
abort$(subproblemamodificado.modelstat>=2)
''El problema modificado no alcanza la optimalidad'';

*Agregar corte de factibilidad al maestro
conjcortenoac(iter)=yes;
*El problema es no acotado
*resolver el problema modificado

else
*el problema es acotado
cota=sum(i,c1(i)*x.l(i))+z.l;
if (cota <UB,
UB=cota;
xmejor(i)=x.l(i);
display xmejor;
);
*Agregar corte de Benders
conjcorte(iter)=yes;
);

*Constantes de Cortes
constcortea1(iter,k) = alpha1.l(k);
constcortea2(iter,l) = alpha2.l(l);
constcorteb(iter,j) = beta.l(j);
constcortead1(iter,i,l) = delta1.l(i,l);
constcortead3(iter,i,l) = delta3.l(i,l);

*Resolver el problema maestro
option optcr=0;

```

```

solve maestro minimizing eta using mip;

*Resultados

abort$(maestro.modelstat=4)
''El problema maestro es infactible'';

*abort$(maestro.modelstat>=2)
*''El problema maestro no alcanza la optimalidad'';

*Actualizar cota inferior
LB=eta.l;

log(iter,'LB')=LB;
log(iter,'UB')=UB;
log(iter,'eta')=eta.l;

iteration=ord(iter);

Display iteration, LB, UB, eta.l;

converged$((UB-LB)<0.1)=1;

Display$converged ''El problema converge'';
);

subproblemaprimal.solprint=2;
solve subproblemaprimal minimizing F using lp;

Display log;
abort$(not converged) ''El problema no converge'';

*Solucion

x.fx(i) = xmejor(i);
*kkt.solprint=2;
*solve kkt minimizing F using mip;
*abort$(kkt.modelstat>2) ''KKT no alcanza la optimalidad''
tcomp = TimeComp;
texec = TimeExec;
telapsed = TimeElapsed;

Display ''Solución'', x.l, z.l, F.l, f.s.l, y.l, tcomp,
texec, telapsed

```





## APÉNDICE B

---

### Método de Solución Para Problemas Binivel Discretos-Continuos Basado en La Relajación Lagrangiana en GAMS

---

```
OPTION OPTCR = 0

Sets
iter /iter1*iter100/
corte_LR(iter) subconjunto de Índices
corte_AC(iter) subconjunto de Índices
i variables lider /1*m/
j variables seguidor /1*n/
k restricciones lider /1*2/
l restricciones seguidor /1*(2(m × n) + 2n + m)/

* Datos del problema

Parameters
c1(i) Coeficientes variable lider problema lider
/
$ondelim
$include c1.csv
$offdelim
/
```

```
d1(j) Coeficientes variable seguidora problema lider
/
$ondelim
$include d1.csv
$offdelim
/

c2(i) Coeficientes variable lider problema seguidor
/
$ondelim
$include c2.csv
$offdelim
/

d2(j) Coeficientes variable seguidora problema seguidor
/
$ondelim
$include d2.csv
$offdelim
/

b.1(k) Lados derechos restricciones lider
/
$ondelim
$include b1.csv
$offdelim
/

b.2(l) Lados derechos restricciones seguidor
/
$ondelim
$include b2.csv
$offdelim
/;

Table A1(k,i)
$ondelim
$include A1.csv
$offdelim
;

Table B1(k,j)
```

```

$ondelim
$include B_1.csv
$offdelim
;

Table
A2(1,i)
$ondelim
$include A2.csv
$offdelim
;

Table
B2(1,j)
$ondelim
$include B_2.csv
$offdelim
;

Scalar
TOL tolerancia relativa / 1e-6 /
Z.INF cota inferior / -INF /
Z.SUP cota superior / INF /
Delta 0 para subproblema de acotamiento 1 para Lagrange
DIF diferencia en iteraciones
M /1.0e6/
tcomp
texec
telapsed
iteration;

PARAMETERS
w_it(iter) función objetivo del problema dual en la
iteración iter
x_it(i,iter) valores de las variables lider en la iteración
iter
y_it(j,iter) valores de las variables lider en la iteración
iter
*Delta_it(iter) tipo de corte (acotación 0 óptimo 1) de la
iteración iter
Rho_it(i,iter) multiplicadores en la iteración iter

```

Variables

F 'Variable objetivo primal (subproblema)'

F\_lid 'Objetivo del lider'

f\_s 'Objetivo del seguidor'

w 'variable dual'

;

Positive variables

y(j) 'variables',

mu(i,l),

lambda(l),

Rho(i) 'multiplicador',

x(i) 'variables'

;

\* Ecuaciones

Equations

objlider

evallider

objseg

reslider(k)

resseg(l)

comp1(j)

comp2

entero1(i,l)

entero2(i,l)

entero3(i,l)

entero4(i,l)

Rel(i) restricciones que se relajan

Cortes\_LR(iter) cortes de Relajación Lagrangiana

Cortes\_AC(iter) cortes de Acotamiento

Corte\_RE corte redundante

mini(i)

;

objlider.. F =e= sum(i,c1(i)\*x(i)) + sum(j, d1(j)\*y(j)) +  
sum(xi,rho.l(xi)\*(x(xi)-sqr(x(xi)))));

evallider.. F\_lid =e= sum(i,c1(i)\*x(i)) + sum(j,  
d1(j)\*y(j));

objseg.. f\_s =e= sum(ii, c2(ii)\*x(ii)) + sum(jj,

```

d2(jj)*y(jj));
reslider(k).. sum(iii, A1(k,iii)*x(iii)) + sum(jjj,
B1(k,jjj)*y(jjj)) =l= Delta*b_1(k);
resseg(l).. sum(iv, A2(l,iv)*x(iv)) + sum(jv,
B2(l,jv)*y(jv)) =l= Delta*b_2(l);
comp1(vj)..sum(l1,-lambda(l1)*B2(l1,vj)) =l= Delta*d2(vj);
comp2.. sum(vjj,d2(vjj)*y(vjj)) =e=
sum((l11,vi),mu(vi,l11)*A2(l11,vi)) -
sum(lv,lambda(lv)*b_2(lv));
entero1(vii,v1).. mu(vii,v1) =g= lambda(v1) - M*(1-x(vii));
entero2(viii,v11).. mu(viii,v11) =l= lambda(v11);
entero3(ix,v111).. mu(ix,v111) =l= Delta*M*x(ix);
Rel(xiii).. x(xiii) =e= sqr(x(xiii));
Cortes_LR(corte_LR).. w =l= sum(i,c1(i)*x_it(i,corte_LR)) +
sum(j, d1(j)*y_it(j,corte_LR)) + SUM(i,rho(i)*(x_it(i,corte_LR)-((x_it(i,
Cortes_AC(corte_AC).. 0 =l= sum(i,c1(i)*x_it(i,corte_AC)) +
sum(j, d1(j)*y_it(j,corte_AC)) + SUM(i,rho(i)*(x_it(i,corte_AC)-((x_it(i,
Corte_RE.. w =l= 1000000;
mini(xiv).. x(xiv) =l= 1;

Model Maestro_LR / Cortes_LR , Cortes_AC, Corte_RE, mini/ ;
Maestro_LR.solprint=2;
Model Subproblema_LR / objlider, evallider, objseg,
reslider, resseg, comp1, comp2, entero1, entero2, entero3,
mini/ ;
Subproblema_LR.solprint=2;
Model Completo / objlider, objseg, reslider, resseg, comp1,
comp2, entero1, entero2, entero3, Rel, mini/ ;
Completo.solprint=2;

* inicialización de par-metros del problema
corte_LR(iter) = NO;
corte_AC(iter) = NO;
*Delta = 0;
x_it(i,iter) = 0;
y_it(j,iter) = 0;
*Cotas multiplicador
Rho.LO(i) = 0;
Rho.UP(i) = 10;
DIF = INF;

```

```

* Algoritmo
Loop(iter $(DIF>TOL),
iteration=ord(iter);
Display iteration;

* Resolución del problema maestro de Relajación Lagrangiana
If(ORD(iter) >1,
Solve Maestro_LR using qcp maximizing w;
w_it(iter) = w.l;
display w.l;
ELSE
Rho.l(i) = 0;
) ;

Rho_it(i,iter) = Rho.l(i);

* Resolución del subproblema de acotamiento

Delta = 0;
Solve Subproblema_LR using nlp minimizing F;
Display F.l, ''Subproblema de acotamiento'';

* Si la solución es negativa, generar un corte de
acotamiento
IF(F.l <0,
x_it(i,iter) = x.l(i);
y_it(j,iter) = y.l(j);
corte_AC(iter) = YES;

* En caso contrario resolver el subproblema de Relajación
Lagrangiana
ELSE
Delta = 1 ;
Solve Subproblema_LR using nlp minimizing F;
x_it(i,iter) = x.l(i) ;
corte_LR(iter) = YES;
Display F.l, ''Subproblema de Lagrange''
) ;

* Actualización de la diferencia de multiplicadores
If(ORD(iter)>1,

```

```
DIF = SUM(i, MAX(Rho_it(i,iter)-Rho_it(i,iter-1),
Rho_it(i,iter-1)-Rho_it(i,iter))) ;
Display DIF;
) ;

) ;

*x.up(i) = 1 ;
*Rho.FX(i) = 0 ;
*Delta = 1 ;

tcomp = TimeComp;
texec = TimeExec;
telapsed = TimeElapsed;

Display ''Solución'', x.l, F.l, F_lid.l, f_s.l, y.l, rho.l,
tcomp, texec, telapsed;
```





---

## Referencias

---

- Alçada-Almeida, L., Coutinho-Rodrigues, J., y Current, J. (2009). A multiobjective modeling approach to locating incinerators. *Socio-Economic Planning Sciences*, 43(2), 111–120.
- Bard, J. F. (1998). *Practical bilevel optimization: algorithms and applications* (Vol. 30). Springer Science & Business Media.
- Bard, J. F., y Moore, J. T. (1992). An algorithm for the discrete bilevel programming problem. *Naval Research Logistics (NRL)*, 39(3), 419–435.
- Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische mathematik*, 4(1), 238–252.
- Bertsekas, D. P. (1999). *Nonlinear programming*. Athena scientific Belmont.
- Bialas, W. F., y Karwan, M. H. (1984). Two-level linear programming. *Management science*, 30(8), 1004–1020.
- Blair, C. (1992). The computational complexity of multi-level linear programs. *Annals of Operations Research*, 34(1), 13–19.
- Boyer, O., Sai Hong, T., Pedram, A., Mohd Yusuff, R. B., y Zulkifli, N. (2013). A mathematical model for the industrial hazardous waste location-routing problem. *Journal of Applied Mathematics*, 2013.
- Cao, D., y Chen, M. (2006). Capacitated plant selection in a decentralized manufacturing environment: a bilevel optimization approach. *European journal of operational research*, 169(1), 97–110.

- Caramia, M., y Mari, R. (2015). A decomposition approach to solve a bilevel capacitated facility location problem with equity constraints. *Optimization Letters*, 1–23.
- Cerisola Lopez De Haro, S., Ramos Galán, A., y Baillo Moreno, A. (2004). Modelado de algoritmos de descomposición con gamas.
- Colebrook, M., y Sicilia, J. (2007). Undesirable facility location problems on multicriteria networks. *Computers & operations research*, 34(5), 1491–1514.
- Colebrook, M., y Sicilia, J. (2013). Hazardous facility location models on networks. En *Handbook of or/ms models in hazardous materials transportation* (pp. 155–186). Springer.
- Colson, B., Marcotte, P., y Savard, G. (2007). An overview of bilevel optimization. *Annals of operations research*, 153(1), 235–256.
- Dempe, S. (2002). *Foundations of bilevel programming*. Springer Science & Business Media.
- Dempe, S. (2003). Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints.
- Domínguez, L., y Pistikopoulos, E. (2010). Multiparametric programming based algorithms for pure integer and mixed-integer bilevel programming problems. *Computers and Chemical Engineering*, 34(12), 2097–2106. doi: 10.1016/j.compchemeng.2010.07.032
- Edmunds, T. A., y Bard, J. F. (1992). An algorithm for the mixed-integer nonlinear bilevel programming problem. *Annals of Operations Research*, 34(1), 149–162.
- Erkut, E., y Neuman, S. (1989). Analytical models for locating undesirable facilities. *European Journal of Operational Research*, 40(3), 275–291.
- Fáisca, N., Dua, V., Rustem, B., Saraiva, P., y Pistikopoulos, E. (2007). Parametric global optimisation for bilevel programming. *Journal of Global Optimization*, 38(4), 609–623. doi: 10.1007/s10898-006-9100-6
- Fernández-Aréizaga, E. (s.f.). *Single source capacitated plant location problem instances*. Descargado 20/12/2016, de <http://www-eio.upc.es/~elena/>

- Fontaine, P., y Minner, S. (2014). Benders decomposition for discrete-continuous linear bilevel problems with application to traffic network design. *Transportation Research Part B: Methodological*, 70, 163-172. doi: 10.1016/j.trb.2014.09.007
- Galé, C. (2016). *Bilevel programming: Theoretical and algorithmic approaches*.
- Giannikos, I. (1998). A multiobjective programming model for locating treatment sites and routing hazardous wastes. *European Journal of Operational Research*, 104(2), 333-342.
- Gümüş, y Floudas, C. (2005). Global optimization of mixed-integer bilevel programming problems. *Computational Management Science*, 2(3), 181-212. doi: 10.1007/s10287-005-0025-1
- Hamacher, H. W., y Drezner, Z. (2002). *Facility location: applications and theory*. Springer Science & Business Media.
- Hansen, P., Jaumard, B., y Savard, G. (1992). New branch-and-bound rules for linear bilevel programming. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 13(5), 1194-1217.
- Jeroslow, R. G. (1985). The polynomial hierarchy and a simple model for competitive analysis. *Mathematical programming*, 32(2), 146-164.
- Júdice, J. J., Faustino, A. M., Ribeiro, I. M., y Neves, A. S. (2006). On the use of bilevel programming for solving a structural optimization problem with discrete variables. En *Optimization with multivalued mappings* (pp. 123-142). Springer.
- Köppe, M., Queyranne, M., y Ryan, C. (2010). Parametric integer programming algorithm for bilevel mixed integer programs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 146(1), 137-150. doi: 10.1007/s10957-010-9668-3
- Melachrinoudis, E. (2011). The location of undesirable facilities. En *Foundations of location analysis* (pp. 207-239). Springer.
- Mitsos, A. (2010). Global solution of nonlinear mixed-integer bilevel programs. *Journal of Global Optimization*, 47(4), 557-582. doi: 10.1007/s10898-009-9479-y

- Moore, J. T., y Bard, J. F. (1990a). Mixed integer linear bilevel programming problem. *Operations Research*, 38(5), 911-921.
- Moore, J. T., y Bard, J. F. (1990b). The mixed integer linear bilevel programming problem. *Operations research*, 38(5), 911-921.
- Nowak, I. (2006). *Relaxation and decomposition methods for mixed integer nonlinear programming* (Vol. 152). Springer Science & Business Media.
- Rahman, M., y Kuby, M. (1995). A multiobjective model for locating solid waste transfer facilities using an empirical opposition function. *Infor*, 33(1), 34.
- Rahmani, A., y MirHassani, S. (2015). Lagrangean relaxation-based algorithm for bi-level problems. *Optimization Methods and Software*, 30(1), 1-14.
- Rakas, J., Teodorović, D., y Kim, T. (2004). Multi-objective modeling for determining location of undesirable facilities. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 9(2), 125-138.
- Ratick, S. J., y White, A. L. (1988). A risk-sharing model for locating noxious facilities. *Environment and Planning B*, 15(2), 165-179.
- Rodríguez, J. S., García, C. G., Pérez, J. M., y Casermeiro, E. M. (2006). A general model for the undesirable single facility location problem. *Operations Research Letters*, 34(4), 427-436.
- Saharidis, G., y Ierapetritou, M. (2009). Resolution method for mixed integer bi-level linear problems based on decomposition technique. *Journal of Global Optimization*, 44(1), 29-51. doi: 10.1007/s10898-008-9291-0
- Sharma, V., Dahiya, K., y Verma, V. (2014). A class of integer linear fractional bilevel programming problems. *Optimization*, 63(10), 1565-1581. doi: 10.1080/02331934.2014.883509
- Song, B. D., Morrison, J. R., y Ko, Y. D. (2013). Efficient location and allocation strategies for undesirable facilities considering their fundamental properties. *Computers & Industrial Engineering*, 65(3), 475-484.

- Tuy, H., y Ghannadan, S. (1998). A new branch and bound method for bilevel linear programs. En *Multilevel optimization: Algorithms and applications* (pp. 231–249). Springer.
- Vicente, L., Savard, G., y Judice, J. (1996a). Discrete linear bilevel programming problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 89(3), 597-614.
- Vicente, L., Savard, G., y Judice, J. (1996b). Discrete linear bilevel programming problem. *Journal of optimization theory and applications*, 89(3), 597–614.
- Vicente, L. N., y Calamai, P. H. (1994). Bilevel and multilevel programming: A bibliography review. *Journal of Global optimization*, 5(3), 291–306.
- Von Stackelberg, H. (1934). *Marktform und gleichgewicht*. J. Springer.
- Wen, U., y Huang, A. (1996). A simple tabu search method to solve the mixed-integer linear bilevel programming problem. *European Journal of Operational Research*, 88(3), 563–571.
- Wen, U., y Yang, Y. (1990). Algorithms for solving the mixed integer two-level linear programming problem. *Computers and Operations Research*, 17(2), 133-142. doi: 10.1016/0305-0548(90)90037-8
- Wen, U.-P., y Yang, Y. (1990). Algorithms for solving the mixed integer two-level linear programming problem. *Computers & Operations Research*, 17(2), 133–142.
- Xu, P., y Wang, L. (2014). An exact algorithm for the bilevel mixed integer linear programming problem under three simplifying assumptions. *Computers and Operations Research*, 41(1), 309-318. doi: 10.1016/j.cor.2013.07.016
- Yapicioglu, H., Smith, A. E., y Dozier, G. (2007). Solving the semi-desirable facility location problem using bi-objective particle swarm. *European Journal of Operational Research*, 177(2), 733–749.