



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA MECÁNICA – DISEÑO MECÁNICO**

**PROPUESTA DE REDISEÑO DE UNA BANDA DE TRANSMISIÓN POR  
MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**  
**RAFAEL ABURTO PEÑALOZA**

**TUTOR**  
**FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS, FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM**

**COMITÉ TUTOR**  
**FRANCISCO CUENCA JÍMENEZ, FACULTAD DE INGENIERÍA**  
**FRANCISCO MANUEL SANCHEZ AREVALO, INSTITUTO DE**  
**INVESTIGACIONES EN MATERIALES**  
**ANTONIO ZEPEDA, FACULTAD DE INGENIERIA**  
**RICARDO YAÑEZ VALDEZ, FACULTAD DE INGENIERÍA**

**CIUDAD DE MÉXICO, ENERO 2017**

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Cuenca Jiménez Francisco

Secretario: Dr. Yáñez Valdez Ricardo

Vocal: Dr. Velázquez Villegas Fernando

1 er. Suplente: Sánchez Arévalo Francisco Manuel

2 do. Suplente: Zepeda Sánchez Antonio

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Ciudad de México, México

**TUTOR DE TESIS:**

Fernando Velázquez Villegas

-----  
**FIRMA**

## Dedicatoria

*At la memoria de mi abuelito, Apolonio Peñaloza Rueda.*

## Agradecimientos

A mis padres, Jovita y Rogelio; mis hermanos, Gisela y Rogelio, y mi perro, Brandy, por todo su amor y su apoyo incondicional a lo largo de mi vida. De no ser por ellos, juraría que nunca hubiera podido llegar tan lejos.

A las familias Aburto y Peñaloza, que tanto quiero y que me siento muy orgulloso y feliz de pertenecer, aunque en esta ocasión no incluyo nombres porque ambas familias son muy extensas. [*Risas*]. Entre ellos, un agradecimiento muy especial a mi tía Lulú, a mi tío Diego y esposa, y a mi primo Chava por todo su apoyo, cariño y comprensión en todo este tiempo que he convivido con ellos.

A mi tutor y amigo, Fernando Velázquez Villegas, por su toda su paciencia desde mi comienzo en la maestría hasta estos días, así como por brindarme su tiempo y sus conocimientos necesarios para guiarme en la realización de esta tesis.

A mis mejores amigos: Oscar, Lupita, Jesús y Bedolla por brindarme su amistad, por estar siempre a mi lado en las buenas y en las malas, y porque nunca han dejado de creer en mí.

A mis amigos y compañeros del laboratorio de mecánica computacional: Pedro, José Luis, Sebastián y Luis, por el sano ambiente de trabajo y compañerismo que siempre tuvimos en el laboratorio.

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por abrirme sus puertas y permitirme formar parte de su amplia matrícula, y por brindarme todos los recursos académicos necesarios para la realización de mis estudios de maestría y la realización de mi tesis.

A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA-UNAM) por el apoyo para realizar esta investigación a través del proyecto PAPIIT IN113315 “Mecánica computacional y optimización como línea de investigación en el diseño mecánico”.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, por brindarme los recursos económicos y así poder dedicarme de lleno a la realización de mi tesis. Gracias por haber depositado su confianza en mí.

A los integrantes del comité sinodal, por tomarse su tiempo para la contribución en la mejora de esta tesis.

Desde el fondo de mi corazón, ¡gracias a todos!

# Contenido

Introducción .....	1
Definición del problema.....	1
Objetivo.....	1
Justificación.....	2
Capítulo 1. Antecedentes.....	4
1.1 Historia.....	4
1.2 Perfiles.....	5
1.2.1 Perfil Imperial .....	5
1.2.2 Perfil de alta potencia H/HTD.....	6
1.2.3 Perfil Parabólico .....	7
Capítulo 2. Fundamentos y metodología.....	8
Parte I. Fundamentos.....	8
2.1 Las bandas de transmisión.....	8
2.2 Características geométricas .....	9
2.3 Proceso de fabricación .....	13
2.4 Miembros a tensión .....	14
2.5 Fuerzas en las bandas de transmisión y capacidad de carga en los dientes.....	16
2.6 Guías .....	19
Parte II. Metodología .....	20
2.7 Optimización .....	21
2.8 Comparación entre los métodos de optimización.....	26
2.9 Recursos computacionales .....	27
Capítulo 3. Implementación .....	31
3.1 Modelos.....	31
3.2 Consideraciones .....	32
3.3 Geometría.....	33
3.4 Condiciones de frontera .....	33
3.4.1 Fuerzas en el flanco izquierdo.....	34
3.4.2 Fuerzas en el flanco derecho .....	37
3.4.3 Estados de esfuerzos.....	40
3.5 Parámetros de optimización y casos de aplicación .....	42
3.5.1 Optimización de forma.....	42
3.5.2 Optimización topológica .....	43

3.6 Resultados .....	45
3.6.1 Optimización de forma.....	45
3.6.2 Optimización topológica .....	46
Capítulo 4. Discusión de resultados .....	48
4.1 Evaluación y selección de resultados .....	48
Caso I. Optimización de forma para el diente L.....	48
Caso II. Optimización de forma para el diente XXH.....	48
Caso III. Optimización topológica para el diente L .....	48
Caso IV. Optimización topológica para el diente XXH.....	48
4.2 Parámetros de diseño.....	48
Ajuste de curvas .....	48
4.3 Geometría propuesta .....	50
4.3.1 Análisis.....	50
4.4 Propuesta de elaboración.....	55
Conclusiones .....	57
Referencias.....	59

## Índice de figuras

Figura I.1. Comparación de la altura del diente entre distintos modelos de bandas .....	1
Figura 1.1. Primera aplicación de las bandas temporizadoras en las máquinas de coser Singer .....	4
Figura 1.2. Bandas dentadas con dientes de perfil trapecoidal .....	5
Figura 1.3. Bandas dentadas con dientes de perfil parabólico HTD .....	6
Figura 1.4. Bandas dentadas con dientes de doble perfil parabólico RPP .....	7
Figura 2.1. Principales características geométricas de la banda .....	9
Figura 2.2. Fabricación de las bandas por fundición .....	14
Figura 2.3. Miembros a tensión .....	15
Figura 2.4. Tipos de arreglo en los miembros a tensión .....	16
Figura 2.5. Fuerzas como función de potencia .....	17
Figura 2.6. Cargas que actúan en el k-ésimo diente de una banda .....	18
Figura 2.7. Desalineación de los ejes .....	20
Figura 2.8. Tipos de optimización aplicados a una estructura .....	22
Figura 2.9. Flujo de trabajo al utilizar la paquetería de software HyperWorks .....	27
Figura 3.1. Diente L .....	31
Figura 3.2. Diente XXH .....	32
Figura 3.3. (a) Cargas aplicadas en el diente L cuando $\gamma = 44.60^\circ$ .....	34
Figura 3.3. (b) Cargas aplicadas en el diente cuando $\gamma = 46.70^\circ$ .....	35
Figura 3.3. (c) Cargas aplicadas en el diente L cuando $\gamma = 48.71^\circ$ .....	35
Figura 3.4. (a) Cargas aplicadas en el diente XXH cuando $\gamma = 45.7521^\circ$ .....	36
Figura 3.4. (b) Cargas aplicadas en el diente XXH cuando $\gamma = 49.4973^\circ$ .....	36
Figura 3.4. (c) Cargas aplicadas en el diente XXH cuando $\gamma = 52.9781^\circ$ .....	36
Figura 3.5. (a) Cargas aplicadas en el diente L cuando $\psi = 44.60^\circ$ .....	37
Figura 3.5. (b) Cargas aplicadas en el diente L cuando $\psi = 46.70^\circ$ .....	38
Figura 3.5. (c) Cargas aplicadas en el diente L cuando $\psi = 48.71^\circ$ .....	38
Figura 3.6. (a) Cargas aplicadas en el diente XXH cuando $\psi = 45.7521^\circ$ .....	39
Figura 3.6. (b) Cargas aplicadas en el diente XXH cuando $\psi = 49.4973^\circ$ .....	39
Figura 3.6. (c) Cargas aplicadas en el diente XXH cuando $\psi = 52.9781^\circ$ .....	39
Figura 3.7. Distribución de esfuerzos para (a) $T_1$ y $F_1(44.60^\circ)$ , (b) $T_2$ y $F_{1,b}(44.60^\circ)$ .....	40

Figura 3.8. Distribución de esfuerzos para (a) $T_1$ y $F_1(46.70^\circ)$ , (b) $T_2$ y $F_{1,b}(46.70^\circ)$ .....	40
Figura 3.9. Distribución de esfuerzos para (a) $T_1$ y $F_1(48.71^\circ)$ , (b) $T_2$ y $F_{1,b}(48.71^\circ)$ .....	40
Figura 3.10. Distribución de esfuerzos para (a) $T_1$ y $F_1(45.7521^\circ)$ , (b) $T_2$ y $F_{1,b}(45.7521^\circ)$ .....	41
Figura 3.11. Distribución de esfuerzos para (a) $T_1$ y $F_1(49.4973^\circ)$ , (b) $T_2$ y $F_{1,b}(49.4973^\circ)$ .....	41
Figura 3.12. Distribución de esfuerzos para (a) $T_1$ y $F_1(52.9871^\circ)$ , (b) $T_2$ y $F_{1,b}(52.9871^\circ)$ .....	41
Figura 3.13. Zona de diseño para optimización de forma del diente L .....	43
Figura 3.14. Zona de diseño para optimización de forma del diente XXH .....	43
Figura 3.15. Zonas de diseño y no diseño para el diente L .....	44
Figura 3.16. Zonas de diseño y no diseño para el diente XXH .....	44
Figura 3.17. Forma inicial y final del diente L durante la optimización .....	45
Figura 3.18. Forma inicial y final del diente XXH durante la optimización .....	46
Figura 3.19. Distribución de espesores entre 0 y 1 para el diente L .....	46
Figura 3.20. Distribución de espesores entre 0 y 1 para el diente XXH .....	47
Figura 4.1. Puntos clave para la parametrización de la nueva geometría .....	49
Figura 4.2. Modelo CAD de la geometría propuesta hecho mediante SolidWorks .....	50
Figura 4.3. Vista frontal y vista superior de las distribuciones de esfuerzos de von Mises para la fuerza $F_1(45.7521^\circ)$ aplicada en el flanco izquierdo del diente .....	51
Figura 4.4. Vista frontal y vista superior de las distribuciones de esfuerzos de von Mises para la fuerza $F_{1,b}(45.7521^\circ)$ aplicada en el flanco derecho del diente .....	51
Figura 4.5. Vista frontal y vista superior de las distribuciones de esfuerzos de von Mises para la fuerza $F_1(49.4973^\circ)$ aplicada en el flanco izquierdo del diente .....	51
Figura 4.6. Vista frontal y vista superior de las distribuciones de esfuerzos de von Mises para la fuerza $F_{1,b}(49.4973^\circ)$ aplicada en el flanco derecho del diente .....	52
Figura 4.7. Vista frontal y vista superior de las distribuciones de esfuerzos de von Mises para la fuerza $F_1(52.9781^\circ)$ aplicada en el flanco izquierdo del diente .....	52
Figura 4.8. Vista frontal y vista superior de las distribuciones de esfuerzos de von Mises para la fuerza $F_{1,b}(52.9781^\circ)$ aplicada en el flanco izquierdo del diente .....	52
Figura 4.9. Diente XXH antes y después de la optimización .....	53
Figura 4.10. Distribución de esfuerzos para las cargas $T_1$ y $F_1(45.7521^\circ)$ antes y después de la optimización .....	53
Figura 4.11. Distribución de esfuerzos para las cargas $T_2$ y $F_{1,b}(45.7521^\circ)$ antes y después de la optimización .....	53



Figura 4.12. Distribución de esfuerzos para las cargas $T_1$ y $F_1(49.4973^\circ)$ antes y después de la optimización .....	54
Figura 4.13. Distribución de esfuerzos para las cargas $T_2$ y $F_{1,b}(49.4973^\circ)$ antes y después de la optimización .....	54
Figura 4.14. Distribución de esfuerzos para las cargas $T_1$ y $F_1(52.9871^\circ)$ antes y después de la optimización .....	54
Figura 4.15. Distribución de esfuerzos para las cargas $T_2$ y $F_{1,b}(52.9871^\circ)$ antes y después de la optimización .....	55
Figura 4.16. Parámetros a seguir para el diseño de costillas mediante RIM .....	56
Figura 4.17. Hundimiento cuando se exceden las dimensiones máximas permitidas para RIM .....	56

## Índice de tablas

Tabla 1.1. Dimensiones en milímetros para cada tamaño de banda de perfil trapezoidal .....	5
Tabla 1.2. Dimensiones en milímetros para cada tamaño de banda de perfil parabólico .....	6
Tabla 1.3. Dimensiones en milímetros para cada tamaño de banda de perfil RPP .....	7
Tabla 2.1. Principales características geométricas de la banda .....	10
Tabla 2.2. Ventajas y desventajas al usar optimización de forma .....	26
Tabla 2.3. Ventajas y desventajas al usar optimización topológica .....	26
Tabla 3.1. Dimensiones de los dientes L y XXH .....	33
Tabla 3.2. Cargas aplicadas en el flanco izquierdo del diente L .....	34
Tabla 3.3. Cargas aplicadas en el flanco izquierdo del diente XXH .....	35
Tabla 3.4. Cargas aplicadas en el flanco derecho del diente L .....	37
Tabla 3.5. Cargas aplicadas en el flanco derecho del diente XXH .....	38
Tabla 4.1. Tabla comparativa entre los requisitos para el diseño de costillas y las dimensiones del diente de la banda .....	53
Tabla C.1. Comparación de las características entre las bandas XXH original y rediseñada .....	54

## Introducción

En el presente trabajo se realiza el rediseño de los dientes con perfil trapezoidal de una banda de transmisión con múltiples aplicaciones; como pueden ser en el árbol de levas en el motor de un automóvil, las máquinas de coser, las fotocopiadoras, etc.

Desde 1975 hasta 1995 los fabricantes de bandas realizaron mejoras en la capacidad de potencia de éstas, aumentando la altura del diente y, por lo tanto, un incremento en el volumen [1]. En la realización de este trabajo la capacidad de potencia de las bandas, o bien se aumentará, o bien se mantendrá igual; pero con la notable diferencia de que se retirará material en comparación con los otros modelos de bandas que agregan más material para aumentar la capacidad de potencia. La remoción de material se hace con base en las zonas donde los valores de esfuerzo de von Mises son mínimos.

Al hacer esto, se espera obtener bandas que sigan satisfaciendo las condiciones de operación a las que éstas se someten; sin embargo, con una menor cantidad de material empleado en su elaboración. Para llegar a estos resultados se hará uso de los métodos de optimización de forma y optimización topológica.

## Definición del problema

Actualmente, los hallazgos que se han hecho por encontrar nuevos perfiles que soporten más potencia, se han obtenido al aumentar la altura del diente, llevándolo a un incremento en su volumen (y, por lo tanto, un incremento en la masa) que le ha llevado a una reducción del tamaño de la cabeza del diente, con la cual se apoya la banda sobre la polea durante el engranaje.

Al aumentar la altura del diente, el área de contacto entre los flancos del diente y la ranura de la polea aumenta. Sin embargo, esto lleva a un modo de falla debido a un mayor rozamiento entre dientes y ranuras en la polea, provocando así, desgaste en los flancos del diente que, por lo tanto, debe diseñarse una banda que se desgaste lo menos posible y que a la vez siga siendo funcional [1] [2].

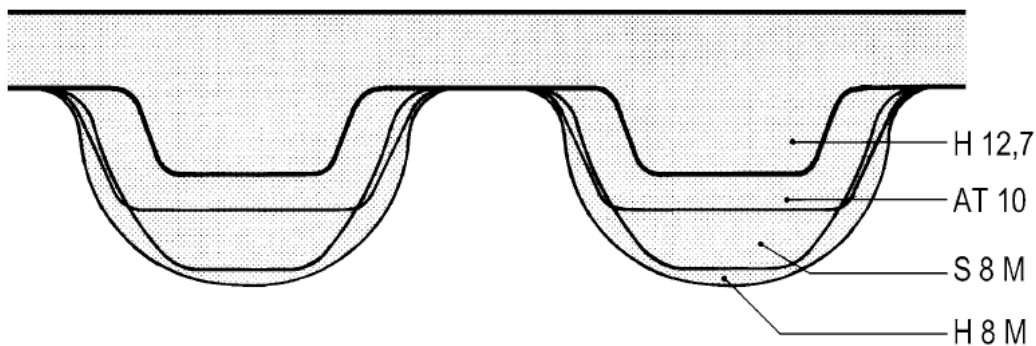


Figura I.1. Comparación de la altura del diente entre distintos modelos de bandas [1].

## Objetivo

Optimizar la geometría de un diente de perfil trapezoidal de una banda de transmisión para que esta siga funcionando durante su operación normal, evitando así los daños posteriores en otros componentes al fallar la banda. Con la metodología empleada en este trabajo, se espera obtener un diseño óptimo en el cual, se retire material cuyo valor de esfuerzo de von Mises sea mínimo y que el material empleado en la geometría optimizada tenga una distribución de esfuerzos más uniforme para

que de esta manera, el material se utilice de forma óptima. Además, la optimización deberá realizarse teniendo en cuenta el problema de la reducción de la cabeza del diente provocado por un incremento en la altura del mismo diente.

Para evitar el problema ya definido con anterioridad, en los procesos de optimización no se aumentará la altura del diente, aplicándose la optimización de la siguiente manera:

- La optimización de forma se hará restringiendo la masa del diente a un porcentaje menor que el de su masa actual, con lo cual no se permite un aumento en la altura del diente.
- La optimización topológica no involucra cambios en el exterior del diente que, por lo tanto, las fronteras del diente de la banda permanecerán inalteradas. Esto se debe a que la optimización topológica retirará material del interior del diente y no del exterior.

Por último, una vez que se obtenga un resultado, se propondrá un método para la elaboración de la banda rediseñada.

### Justificación

Cuando una banda de transmisión falla, se pierde la transferencia de movimiento y la transmisión de potencia. Por ejemplo, la tarea principal de una banda de transmisión en un automóvil es conectar el árbol de levas con el cigüeñal. El cigüeñal controla los pistones del motor, mientras que el árbol de levas abre y cierra las válvulas. La banda ayuda a controlar la sincronización de estos componentes, asegurando un desempeño óptimo del motor. Si la banda llegara a fallar, las válvulas podrían doblarse, podría haber daños en la cabeza del pistón o en el árbol de levas y/o un posible daño en las paredes de los cilindros. Además de esto, la marcha del motor se suspenderá totalmente.

En el caso de la industria automotriz, los vehículos anteriores a la década de 1990 utilizan bandas de transmisión dentadas en sus motores (posteriormente, las bandas fueron reemplazadas por las cadenas) [3]. Pese a la antigüedad de estos vehículos, aún hay un gran número de vehículos anteriores a la década de 1990 en circulación. Tan sólo en México hay más de 83 millones de vehículos de entre los años 1980 y 1990 en circulación [4]. El rediseño de las bandas de transmisión podría beneficiar con bandas que tengan una mayor durabilidad, disminuyendo la cantidad de veces que las bandas deban ser reemplazadas y, por ende, un ahorro de dinero al disminuir la cantidad de veces que una banda tenga que ser reemplazada.

Es por esto, que la realización de este trabajo tiene como finalidad diseñar un nuevo modelo de banda que, a diferencia de los ya existentes, tenga las siguientes características: que se pueda elaborar con una menor cantidad de material, que la distribución de esfuerzos sea más uniforme con la cantidad de material utilizado, que no experimente (en la medida de lo posible) el problema antes definido y que siga siendo operacional para las condiciones de trabajo a las que sea sometida dicha banda.

Actualmente, los recursos computacionales han mejorado (tanto en hardware como en software) con respecto a los que había disponibles en años anteriores, se hará uso de estos para encontrar la mejor solución al problema en el menor tiempo posible.

A continuación, se esboza de manera breve el contenido de este trabajo.

En el capítulo 1 se mostrará una breve historia de las bandas de transmisión y los modelos más utilizados al día de hoy.

En el capítulo 2 se describen ampliamente las características de las bandas dentadas, su modo de fabricación y el comportamiento de los dientes por las cargas aplicadas. Además, se da una

descripción de la metodología a aplicar en el proceso de optimización, de la cual se incluye una descripción del software a utilizar.

En el capítulo 3 toma lugar la implementación de la metodología presentada en el capítulo 2 con más de un caso de aplicación para hallar, de ser posible, más de una solución al problema definido.

Posteriormente, en el capítulo 4 se evalúan los resultados obtenidos para dictaminar cuales son realizables y cuáles no, se hará una propuesta de diseño que optimice el diseño dado, y se le hará un análisis FEM para comprobar que dicha propuesta no falle.

## Capítulo 1. Antecedentes

A continuación, se da un esbozo acerca de las bandas de transmisión, desde el surgimiento de éstas en la década de 1940 hasta sus más recientes desarrollos al día de hoy.

### 1.1 Historia

Las primeras bandas temporizadoras capaces de ser utilizadas como bandas de transmisión fueron desarrolladas por US Rubber Corporation en la década de 1940 [6]. Su primera aplicación fue en las máquinas textiles y en las máquinas de coser (figura 1.1). Su inventor, Richard Case, fue el primero en comprender la relación entre la línea neutra del miembro a tensión de la banda y el diámetro de paso de la polea, y definió la terminología básica de esta tecnología, la cual aún se utiliza al día de hoy. Los ingenieros de la entonces compañía US Rubber Corporation se referían a este grupo de productos como bandas planas dentadas. El producto consistía de una estructura compuesta, hecha de goma y un miembro a tensión. Los principios del desplazamiento positivo pronto demostraron ser un éxito, tal que se optó por llevar esta tecnología a otras aplicaciones en el campo de la ingeniería mecánica. Un tiempo después, se presentaron seis diferentes estándares para el perfil de los dientes, los cuales fueron estandarizados en 1977 bajo la norma ISO – 5294:2012 para las bandas y la norma ISO – 5296:2012 para las poleas.

Al incrementarse su demanda y aplicación, los usuarios de las bandas las buscaban con mayor capacidad de potencia, mayor rigidez y mejor precisión. Esto llevó a nuevos tipos de bandas con materiales optimizados y miembros a tensión más fuertes de manera significativa, e incluso, nuevos perfiles.

De 1975 a 1995 los fabricantes de bandas se esforzaron en incrementar la salida de potencia al utilizar nuevas geometrías. Este incremento de potencia se logró al optimizar la geometría del diente y en particular, al aumentar el volumen de este.

Actualmente existen tres perfiles típicos para las correas dentadas: el perfil de flanco recto, el perfil de flanco parabólico y el perfil de flanco curvilíneo. Aunque las correas dentadas con perfiles curvilíneos y parabólicos se caracterizan por una mejor distribución de la carga y una mayor capacidad de carga; la sencillez constructiva ha determinado que las correas con perfil de flancos rectos sean las más conocidas.



Figura 1.1. Primera aplicación de las bandas temporizadoras en las máquinas de coser Singer [5].

## 1.2 Perfiles

A continuación, se ilustran los perfiles mencionados con algunas de sus dimensiones y una tabla con los valores normalizados de sus respectivas dimensiones.

### 1.2.1 Perfil Imperial

Bandas con perfil trapezoidal (figura 1.2). Fueron creadas alrededor de 1940 por US Rubber Corporation, actualmente Gates Corporation. Son producidas a nivel mundial por la mayoría de los fabricantes de bandas [6].

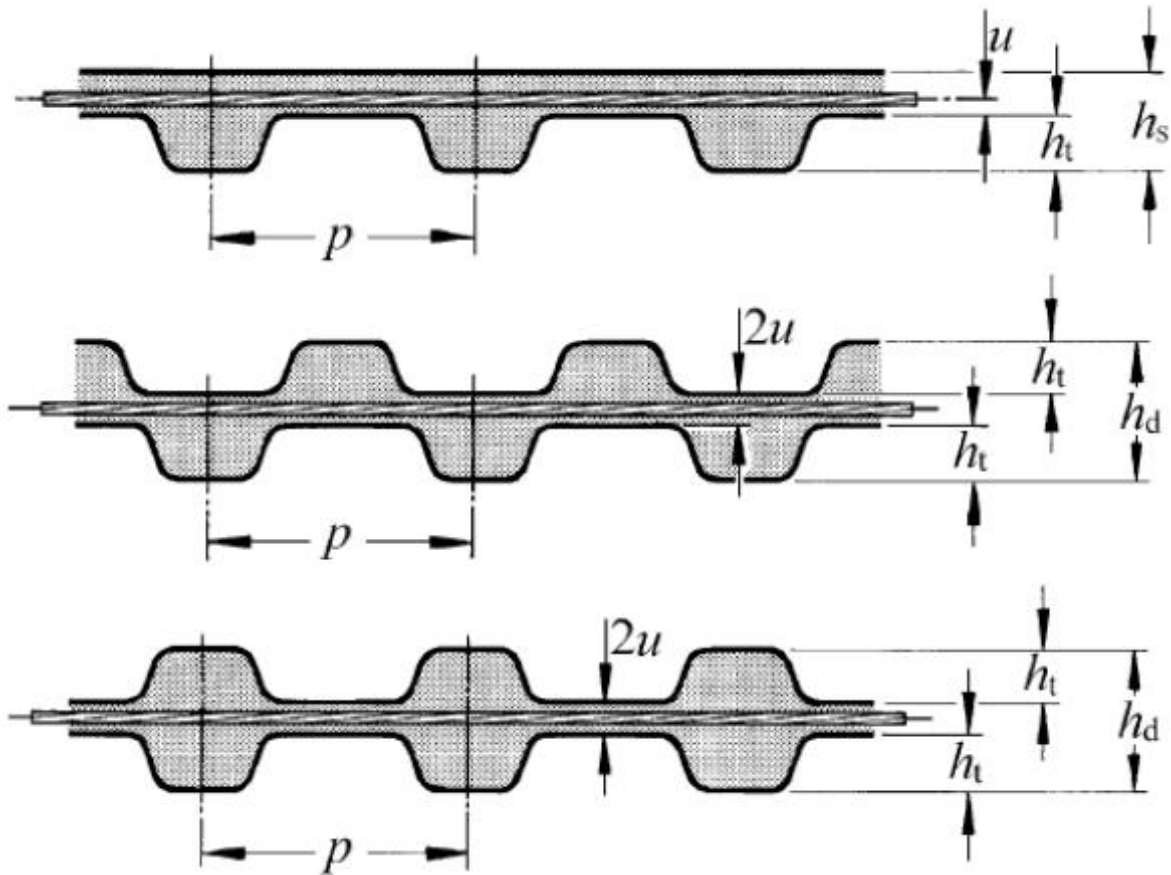


Figura 1.2. Bandas dentadas con dientes de perfil trapezoidal; acotándose el paso  $p$ , el valor  $u$ , la altura de un solo diente  $h_t$  y la altura total de la banda  $h_s$  o  $h_d$ , bien sea banda dentada sencilla (s), o bien sea banda dentada doble (d) [1].

Tabla 1.1. Dimensiones en milímetros para cada tamaño de banda [1].

Designación	$p$	$h_s$	$h_t$	$h_d$	$u$
MXL	2.023	1.140	0.510	1.530	0.225
XL	5.080	2.300	1.270	3.050	0.225
L	9.525	3.600	1.910	4.580	0.380
H	12.700	4.300	2.290	5.950	0.685
XH	22.225	11.200	6.350	15.490	1.395
XXH	31.750	15.700	9.530	22.100	1.520

### 1.2.2 Perfil de alta potencia H/HTD

Estas bandas cuentan con un perfil estandarizado ISO – 13050, se manejan con el prefijo H y son conocidas como bandas temporizadoras HTD. HTD significa Transmisión de Alta Potencia, por sus siglas en inglés. Las bandas están hechas de goma de policloropreno con miembros a tensión de fibra de vidrio y fueron desarrolladas por Gates Corporation. Los dientes curvos (figura 1.3) con una geometría circular y una mayor altura del diente incrementan la capacidad de carga y la resistencia a los saltos [6].

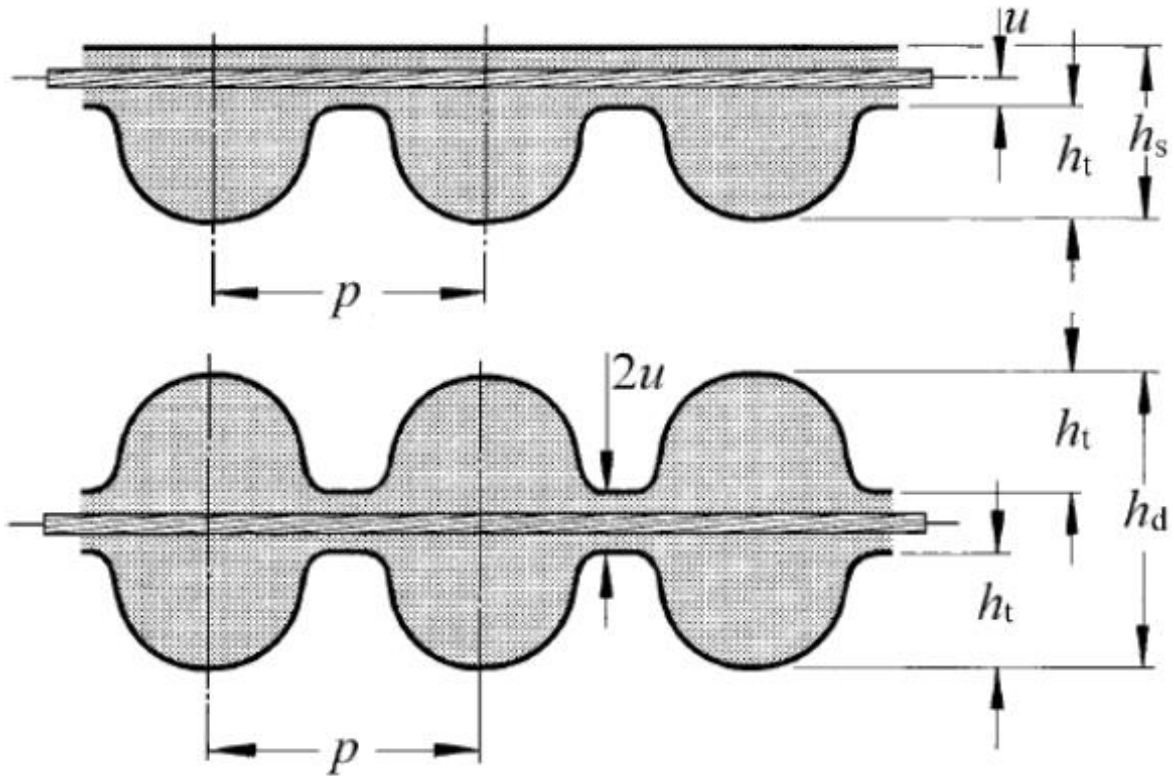


Figura 1.3. Bandas dentadas con dientes de perfil parabólico HTD; acotándose el paso  $p$ , el valor  $u$ , la altura de un solo diente  $h_t$  y la altura total de la banda  $h_s$  o  $h_d$ , bien sea banda dentada sencilla ( $s$ ), o bien sea banda dentada doble ( $d$ ) [1].

Tabla 1.2. Dimensiones en milímetros para cada tamaño de banda [1].

Designación	$p$	$h_s$	$h_t$	$h_d$	$u$
HTD2 M	2.0	1.5	0.70	–	0.250
HTD3 M	3.0	2.4	1.20	3.2	0.380
HTD5 M	5.0	3.6	2.10	5.4	0.570
HTD8 M	8.0	6.0	3.38	8.1	0.686
HTD14 M	14.0	10.0	6.02	14.8	1.397
HTD20 M	20.0	13.2	9.00	–	2.200



### 1.2.3 Perfil Parabólico

Estas bandas (figura 1.4) cuentan con un perfil estandarizado ISO – 13050, se manejan con el prefijo R y son conocidas como bandas RPP. RPP significa Perfil Parabólico de Goma, por sus siglas en inglés. Estas bandas fueron desarrolladas en 1985 por Pirelli S. P. A. en Pescara Italia y son principalmente distribuidas en el sur de Europa [6].

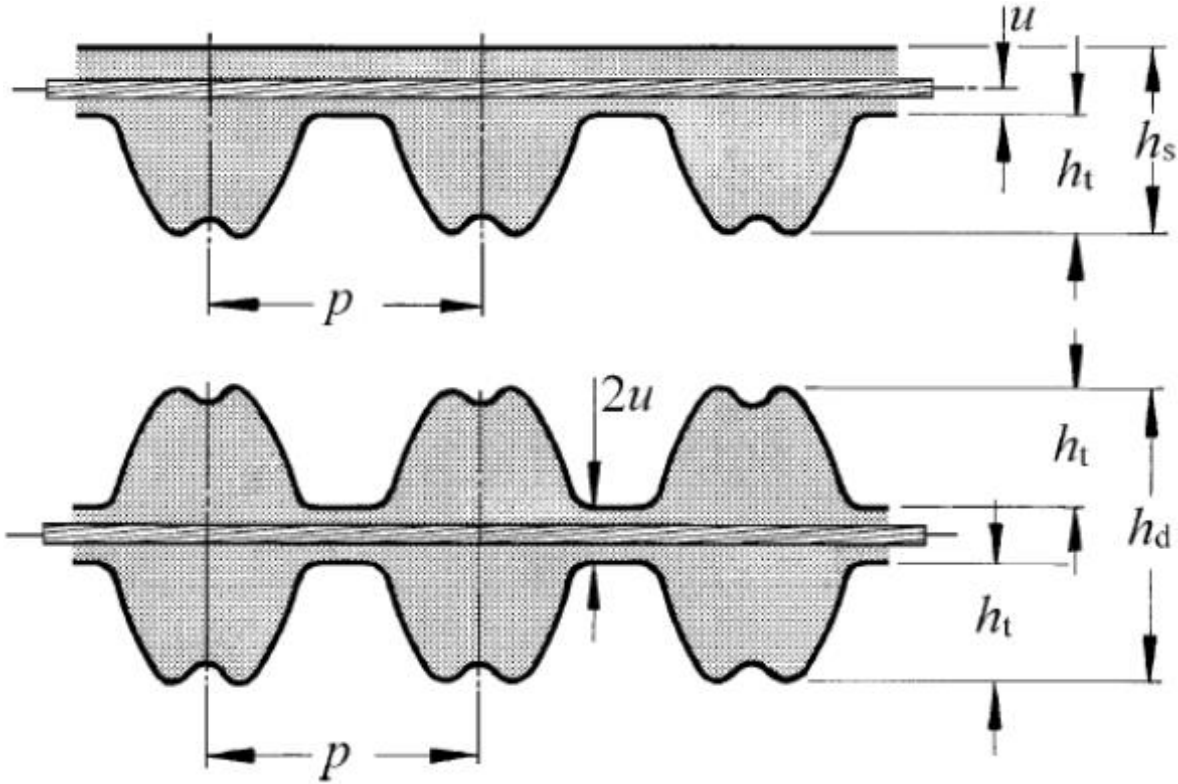


Figura 1.4. Bandas dentadas con dientes de doble perfil parabólico RPP; acotándose el paso  $p$ , el valor  $u$ , la altura de un solo diente  $h_t$  y la altura total de la banda  $h_s$  o  $h_d$ , ya sea banda dentada sencilla ( $s$ ), o sea banda dentada doble ( $d$ ) [1].

Tabla 1.3. Dimensiones en milímetros para cada tamaño de banda [1].

Designación	$p$	$h_s$	$h_t$	$h_d$	$u$
RPP2	2.0	1.5	0.73	–	0.270
RPP3	3.0	2.4	1.15	–	0.380
RPP5	5.0	3.8	2.00	5.14	0.570
RPP8	8.0	5.4	3.20	7.80	0.686
RPP14	14.0	9.7	6.00	14.50	1.397

Muchas de las mejoras antes mencionadas, para aumentar la potencia nominal transmisible por las correas trapecoidales, fueron introducidas entre las décadas de 1980 y 1990 [1].



## Capítulo 2. Fundamentos y metodología

### Parte I. Fundamentos

#### 2.1 Las bandas de transmisión

Las bandas de transmisión son construidas a partir de componentes que convierten y transfieren velocidades, direcciones, pares y fuerzas. Sus funciones básicas concretan el movimiento rotacional en las poleas y el movimiento lineal en las bandas. Son ampliamente utilizadas en diversos dispositivos mecánicos, como pueden ser: las máquinas de coser, fotocopiadoras, el árbol de levas en una transmisión mecánica, entre muchos otros. El arreglo más simple consiste de polea-banda-polea. Las bandas temporizadoras están clasificadas dentro del grupo de transmisiones mecánicas [6].

Con este tipo de sistemas de transmisión, las grandes distancias entre centros pueden estar conectadas sin problema y la potencia queda repartida sobre varias poleas impulsadas.

Algo que tienen en común todos los modelos de bandas es que sus miembros individuales realizan un movimiento restringido o síncrono en el cual, la posición de un elemento cualquiera está relacionada con la posición de cualquier otro componente.

Si los sistemas de transmisión tienen altos niveles de aceleración y frenado, entonces las bandas de transmisión deben ser de interés primario para el diseñador.

Las bandas de transmisión trabajan simultáneamente a altas velocidades y a bajas velocidades, y son particularmente convenientes en aplicaciones de frenado y aceleración por su baja masa.

El arco envolvente de la banda sobre las poleas distribuye la carga a través de muchos dientes sucesivos. De este modo, teniendo el mayor número de dientes engranados, la carga unitaria por diente es menor y entonces: se puede disponer de la mayor cantidad de par para ser transmitido.

Con cada cambio de marcha, desde inicio o accionamiento hasta el frenado y viceversa, el cambio de par también cambiará los flancos cargados de los dientes engranados con la polea. Este cambio en la banda ocurre de manera suave y sin cargas de choque, gracias a la elasticidad del material en la banda. Éstas experimentan poco desgaste durante los cambios rápidos en la dirección de rotación.

Los motores a pasos y la servotecnología modernos son a menudo utilizados en los procesos de fabricación para resolver tareas de movimiento puntual. Estos procesos involucran tareas de manejo mecánico como son: sujeción, movimiento y depósito, y tales tareas son caracterizadas por un rango limitado de movimiento, requiriendo inicio, frenado y posicionamiento constantes. Una complicación posterior es que los cambios de dirección de las fuerzas están concentrados mayormente en los mismos puntos de flexión. Éstas son áreas de aplicación ideal donde el uso de las bandas temporizadoras se incrementará notablemente, ya que pueden ser integradas perfectamente en los procesos de producción con muchas condiciones de operación diferentes.

Las bandas temporizadoras combinan todas las ventajas de las bandas convencionales, tales como altas velocidades de operación y como las cadenas: un movimiento síncrono y libre de deslizamiento. Además, son poco ruidosas y no requieren lubricación.

##### 2.1.1. Aplicación y uso

Muchos fabricantes ofrecen el mismo modelo de banda con diferentes niveles de desempeño, donde las geometrías del perfil coinciden y son funcionalmente intercambiables. Esto se traduce en bandas con miembros a tensión reforzados y/o bandas con mezclas de elastómeros modificadas. En la elección del tipo más apropiado de la banda para nuevas aplicaciones, se recomienda el perfil con la

mayor densidad de potencia. Como consecuencia de esto, la banda a menudo puede ser dimensionada con un ancho más estrecho y entonces el costo total de la transmisión puede ser reducido a poleas y bandas más estrechas. Reducir el ancho de la banda también da el beneficio de niveles de ruido más bajos.

## 2.2 Características geométricas

En la figura 2.1 se muestran las principales acotaciones de un típico sistema de transmisión, seguida de la tabla 2.1 que describe los parámetros que se muestran en la figura.

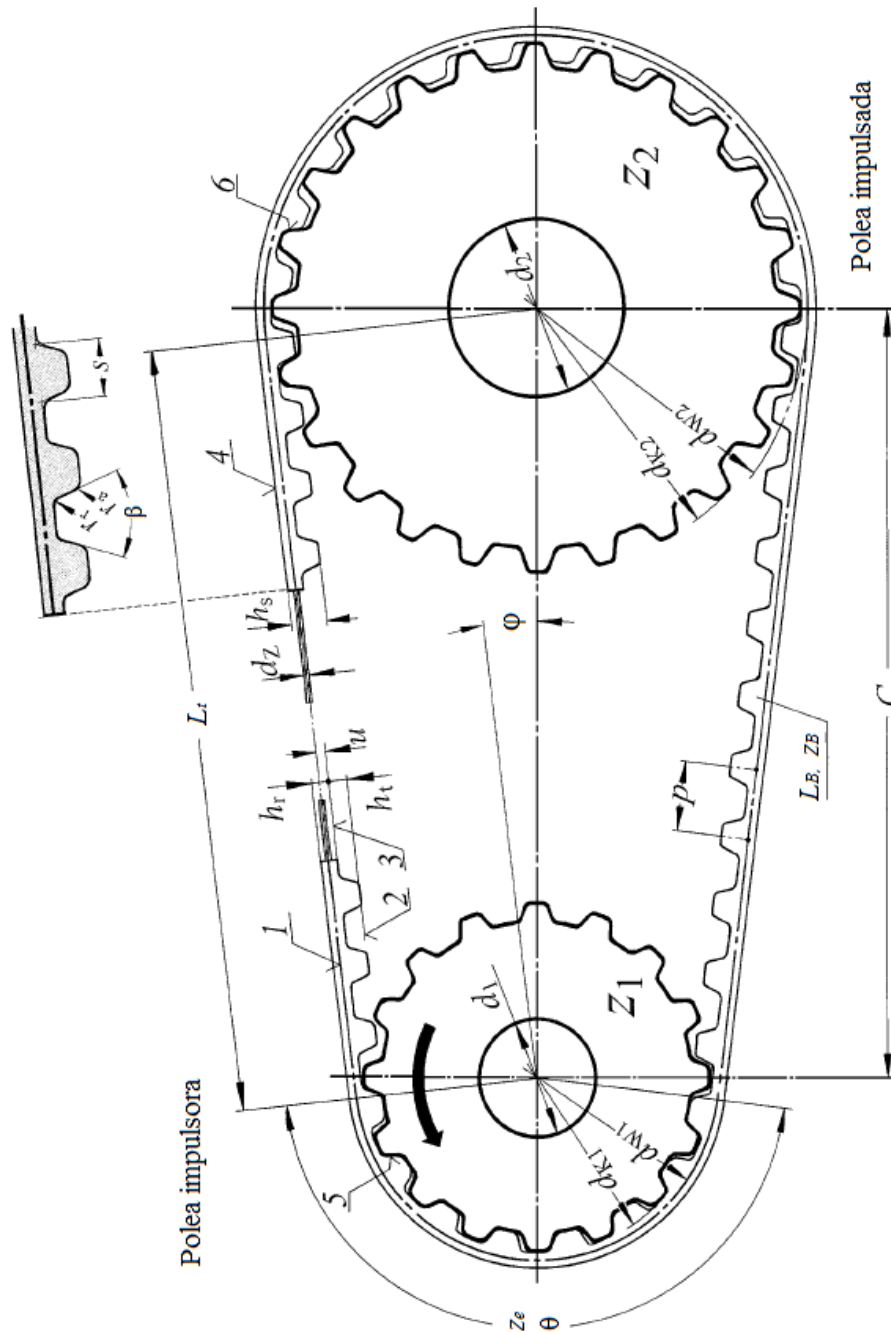


Figura 2.1. Principales características geométricas [6].

Tabla 2.1. Principales características geométricas [6].

Variable	Designación y unidades	Descripción
1	Línea de paso o <i>línea neutra</i>	Línea circunferencial en la banda que conserva su longitud cuando la banda es doblada perpendicularmente a su base.
2	Línea de cabeza	La línea donde se unen las cabezas de los dientes.
3	Línea de raíz	Línea donde yace la base del diente.
4	Línea de fondo	Línea de fondo o frontera externa de la banda.
5	Flanco de trabajo de la polea impulsora	El flanco de trabajo de la polea impulsora transmite el movimiento o fuerza de la polea a la banda.
6	Flanco de trabajo de la polea impulsada	El flanco de trabajo de la polea impulsada transmite el movimiento o fuerza de la banda a la polea.
$C$	Distancia entre centros (mm)	La distancia entre centros es la distancia más corta entre los centros de las dos poleas sujetas a la carga de pretensión en la banda.
$L_B$	Longitud de la banda (mm)	La longitud de la banda se basa en la longitud de paso bajo la carga de pretensión.
$L_t$	Longitud del tramo recto (mm)	La longitud del tramo recto es la distancia entre las dos poleas, donde la banda hace contacto tangencial con las poleas.
$z_B$	Número de dientes en la banda	El número total de dientes en el lado dentado de la banda.
$z_e$	Número total de dientes engranados	Número total de dientes totalmente engranados con las ranuras de la polea.
$z_E$	Número de dientes engranados para cálculos	Para calcular la fuerza tangencial, el valor de los dientes engranados se redondea al entero anterior (función piso).
$z_{1,2}$	Número de dientes en las poleas	Los dientes de las poleas se utilizan para engranar con los dientes de la banda y le brindan soporte radial a la banda. Los subíndices 1 y 2 se utilizan para designar a la polea impulsora y a la polea impulsada, respectivamente.
$p$	Paso del diente (mm)	El paso nominal es igual a la distancia entre dos dientes adyacentes en la línea de paso.
$d_{1,2}$	Diámetro de los ejes (mm)	El diámetro del eje es concéntrico con el diámetro de cabeza. El eje de la polea pequeña usualmente se designa como $d_1$ y el de la polea más grande como $d_2$ .
$d_w$	Diámetro de paso	El diámetro de paso yace en el medio del miembro a tensión y a través del arco envolvente concéntrico con la polea. Al igual que con el número de dientes, los subíndices 1 y 2 se utilizan para designar a la polea impulsora y a la polea impulsada, respectivamente.

$d_{k1,2}$	Diámetro de cabeza (mm)	El diámetro externo o de cabeza es la medida de la superficie externa de la polea, la cual es envuelta por la banda. Al igual que con el número de dientes, los subíndices 1 y 2 se utilizan para designar a la polea impulsora y a la polea impulsada, respectivamente.
$\theta$	Ángulo envolvente (°)	El ángulo del arco el cual es envuelto por la banda sobre la polea pequeña.
$\varphi$	Inclinación de la banda (°)	El ángulo al cual la banda emerge de la polea medido con respecto a la línea de la distancia entre centros.
$h_s$	Altura total de la banda (mm)	El espesor total es la medida desde la línea de cabeza hasta el fondo de la banda.
$h_t$	Altura del diente (mm)	La altura del diente es la distancia entre la base del diente y la cabeza del diente.
$t$	Espesor de la banda (mm)	Distancia entre el fondo de la banda y la base del diente (diferencia entre $h_s - h_t$ ).
$s$	Ancho de la base del diente (mm)	Distancia lineal entre los flancos opuestos de un diente en la línea base o de raíz.
$\beta$	Ángulo de los flancos (mm)	El doble de beta es ángulo total de la apertura entre los dos flancos del diente.
$r_a$	Radio de la punta del diente (mm)	El radio de cabeza conecta el flanco y la línea de cabeza del diente.
$r_r$	Radio de la base del diente (mm)	El radio de raíz conecta el flanco del diente y la línea de raíz de la banda.
$n$	Relación de velocidades	La relación de transmisión o de velocidades es un cociente del número de dientes en las poleas $z_2/z_1$ o las velocidades angulares $\omega_1/\omega_2$ .
$b$	Ancho de la banda (mm)	El ancho de la banda relaciona la distancia entre las dos caras adyacentes del diente.
$u$	Valor $u$ (mm)	A la distancia entre el centro del miembro a tensión y la línea de raíz se le denota como valor $u$ .

Otras variables son dependientes de las principales dimensiones geométricas y sus correlaciones están listadas. Por ejemplo, la longitud de la banda se puede expresar como un producto del paso de la banda y del número de dientes, es decir:

$$L_B = p \cdot z_B \quad (1)$$

La relación de transmisión se puede calcular a partir del número de dientes en las poleas por medio de:

$$n = \frac{z_2}{z_1} \quad (2)$$

La velocidad angular de la polea impulsada se puede calcular a partir de la relación de transmisión  $n$  y de la velocidad de la polea impulsora  $\omega_1$ :

$$\omega_{2,eff} = \frac{\omega_1}{n} \quad (3)$$

La distancia teórica entre centros  $C$  se calcula a partir del número de dientes en las poleas y en la banda de acuerdo con la siguiente relación:

$$C = \frac{p}{4} \left[ \left( z_B - \frac{z_1 + z_2}{2} \right) + \sqrt{\left( z_B - \frac{z_2 + z_1}{2} \right)^2 - 2 \left( \frac{z_2 - z_1}{\pi} \right)^2} \right] \quad (4)$$

Para el caso en que se disponga de la distancia entre centros y el número de dientes en las poleas y en la banda, la longitud de la banda se puede calcular mediante la siguiente relación:

$$L_B = \frac{p}{2} (z_2 + z_1) + \frac{p \cdot \alpha}{\pi} (z_2 - z_1) + 2C \cdot \cos \vartheta \quad (5)$$

con

$$\vartheta = \sin^{-1} \left( \frac{p(z_2 - z_1)}{2\pi \cdot C} \right) \quad (6)$$

O de manera aproximada

$$L_B \approx \frac{\pi}{2} (d_{W2} + d_{W1}) + 2C + \frac{(d_{W2} - d_{W1})^2}{4C} \quad (7)$$

Con  $L_{BSt}$  como la longitud efectiva para los cálculos

$$L_{BSt} = [L_B] \quad (8)$$

La distancia nominal entre centros, en función de la longitud efectiva, se calcula mediante la relación

$$C_{nom} = K + \sqrt{K^2 - \frac{(d_{W2} - d_{W1})^2}{8}} \quad (9)$$

donde

$$K = \frac{L_{BSt}}{4} - \frac{\pi(d_{W1} - d_{W2})}{8} \quad (10)$$

El ángulo envolvente de la banda sobre la polea se calcula mediante:

$$\theta = 180 - \frac{60(d_{W2} - d_{W1})}{C} \quad (11)$$

Mientras que el ángulo envolvente por diente de la banda se puede obtener al dividir  $\theta$  entre el número de dientes engranados:

$$\alpha = \frac{\theta}{z_E} \quad (12)$$

donde  $z_E = [z_e]$ ,

$$z_e = \frac{z_k}{6} \left( 3 - \frac{d_{W2} - d_{W1}}{C_{nom}} \right) \quad (13)$$

y  $z_k = z_1$ .

La banda sale de la polea con un ángulo  $\varphi = \frac{1}{2}(180 - \theta)$ .

El diámetro de paso de la polea se calcula mediante

$$d_{W1,2} = \frac{z_{1,2} \cdot p}{\pi} \quad (14)$$

El diámetro de paso es una variable de referencia nominal libre sin tolerancia de la cual, las demás medidas importantes de la polea son tomadas, tales como el diámetro de cabeza y el diámetro de raíz.

Las bandas generalmente están apoyadas por el diámetro de cabeza y esto influye en otras dimensiones de la polea, así como también en la verdadera longitud de paso.

El verdadero círculo de paso que se extiende alrededor de la polea tiene un diámetro variable que fluctúa con el paso del diente para el valor de  $d_w$ . Este tiene el valor efectivo más grande sobre el diente y un diámetro ligeramente más pequeño sobre el hueco del diente [6].

### 2.3 Proceso de fabricación

Todas las bandas temporizadoras tienen en común una estructura compuesta. Esta estructura consiste principalmente de materiales a base de elastómeros, además de cordones embebidos de alta rigidez conocidos como miembros a tensión. Cada material tiene sus características específicas dependiendo de las tareas a desarrollar. La selección del elastómero para el cuerpo define, en esencia, todas las posibilidades de diseño y los pasos en el diseño. El elastómero elegido y su proceso de elaboración, también afectarán su ajuste al diseño y sus áreas de aplicación. Estas áreas ya están definidas por la división en los tipos de producción entre *bandas abiertas*, fabricadas para movimiento lineal y para transporte, y *bandas sin fin*, las cuales son utilizadas en los sistemas de transmisión de potencia. Aproximadamente el 90 % de todas las bandas producidas son utilizadas en la última aplicación antes mencionada. Como en este trabajo la banda a optimizar es una banda sin fin, únicamente se describirá el proceso de fabricación de ésta.

Los poliuretanos son bien conocidos por su habilidad de soportar grandes deformaciones y regresar completamente a su estado inicial sin carga. Este ramo de fabricación de las bandas de poliuretano depende de dos componentes, los cuales, en su condición de procesamiento, tienen una viscosidad baja. Los diseños de moldes ajustables utilizan formas cerradas consistiendo de un núcleo interno y una forma externa. Generalmente, el núcleo interno tiene el perfil requerido del diente y el diámetro interno de la carcasa exterior forma el contorno liso de la banda. En el caso de las bandas doblemente dentadas, se utiliza una carcasa exterior con la forma del perfil del diente.

Las bandas de poliuretano fundido sólo están disponibles como bandas sin fin. Este proceso de manufactura ofrece un rango de longitudes de aproximadamente 50 – 5000 mm.

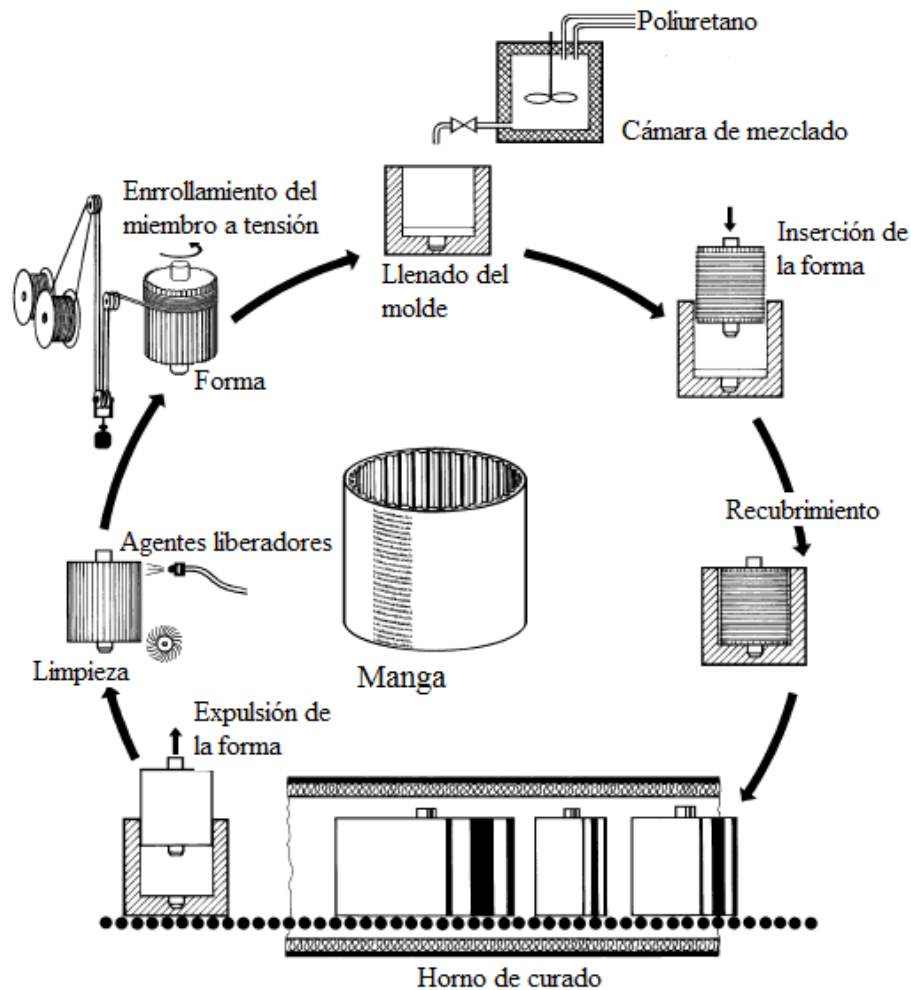


Figura 2.2. Fabricación de las bandas por fundición [6].

#### 2.4 Miembros a tensión

Una banda es doblada al menos en dos ocasiones por revolución en el diámetro de cada polea, en una transmisión de dos poleas, y se endereza en el tramo recto entre las dos poleas.

La carga de trabajo en el miembro a tensión consiste del par transmitido más los esfuerzos a flexión que dan la carga total. Las cargas son muy complejas, dado que los componentes individuales de la banda tienen diferentes comportamientos. El miembro a tensión está expuesto a ciclos de carga de tensión variante y esfuerzos a flexión superpuestos, y debido a la estructura de múltiples fibras individuales (filamentos), ocurre fricción entre estos, especialmente con poleas de diámetro pequeño. Estos movimientos relativos y las presiones entre los filamentos individuales son muy grandes y llevan a un aumento en el desgaste de las fibras.

Las interacciones complejas de los filamentos de los miembros a tensión se han estudiado poco. Además, las proyecciones para la vida en servicio del miembro a tensión, o las transmisiones completas, son limitadas. El conocimiento de los mecanismos de falla para los miembros a tensión es

de los temas de extrema importancia, porque esto podría llevar a un incremento en la eficiencia y reducir los niveles de pruebas empíricas.

El miembro a tensión consiste de un conjunto de alambres (o filamentos) enrollados para formar un cable, después, este cable se enrolla con otro conjunto de cables para formar el miembro a tensión (ver figura 2.3). Hay una variedad de posibles arreglos dependiendo del número de veces que se enrollen los cables y la configuración en que se enrollen.

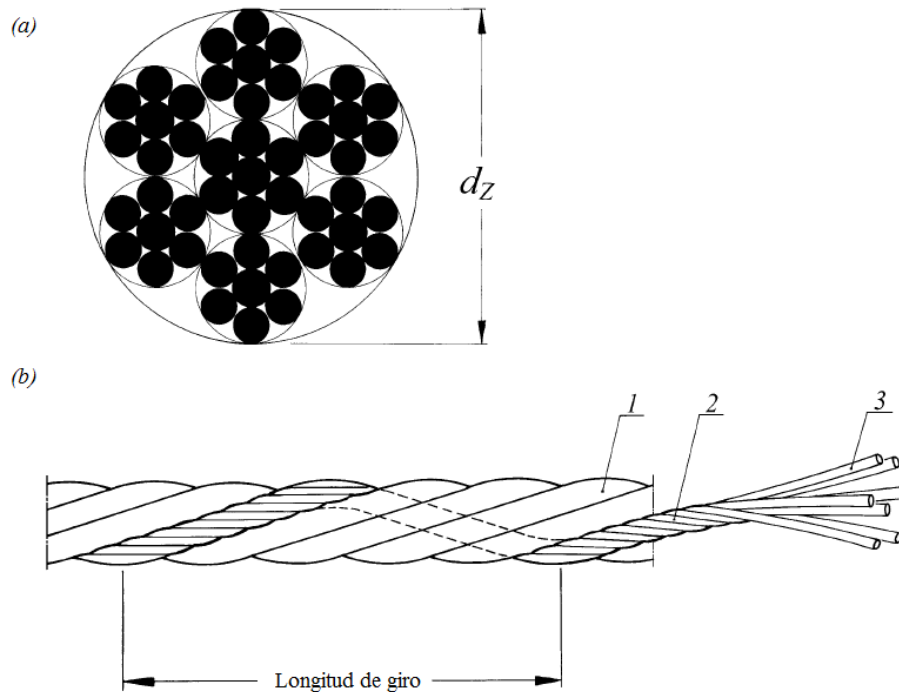


Figura 2.3. (a) Arreglo  $7 \times 7$  del miembro a tensión. (b) 1. Miembro a tensión. 2. Cable o cordón. 3. Alambre/filamento [6].

En general, entre más pequeño sea el diámetro del miembro a tensión y más delgados sean los alambres, el diseño será más flexible. Además de la configuración y el número de veces en que se enrollen los alambres, el paso y la dirección de paso son importantes. El paso es la distancia que a un alambre le toma realizar una envolvente completa con los otros alambres (longitud de giro en la figura 2.3b). El paso también se refiere a un múltiplo del diámetro nominal del alambre. Para los miembros de acero a tensión en las bandas, se acostumbra que el paso sea entre 6 y 12 veces el diámetro del cable.

La dirección en la que los cables son enrollados se puede distinguir como zurda, o *S-twist*, y como diestra, o *Z-twist*, como se muestra en la figura 2.4. Estas dos formas de enrollar se emplean en los alambres que forman los cables y en los cables para formar el miembro a tensión.

En el interior del cuerpo de la banda, el miembro a tensión está completamente embebido en el material y no hace contacto con la polea. Entonces, el material base, asistido por un agente adhesivo, está en contacto directo con el miembro a tensión, lo que significa que se evitan los movimientos relativos de los miembros a tensión. La formulación balanceada del agente adhesivo es; por tanto, una consideración clave para el funcionamiento correcto entre el miembro a tensión y el elastómero. La elección del proceso de manufactura también afecta la calidad de la estructura compuesta.



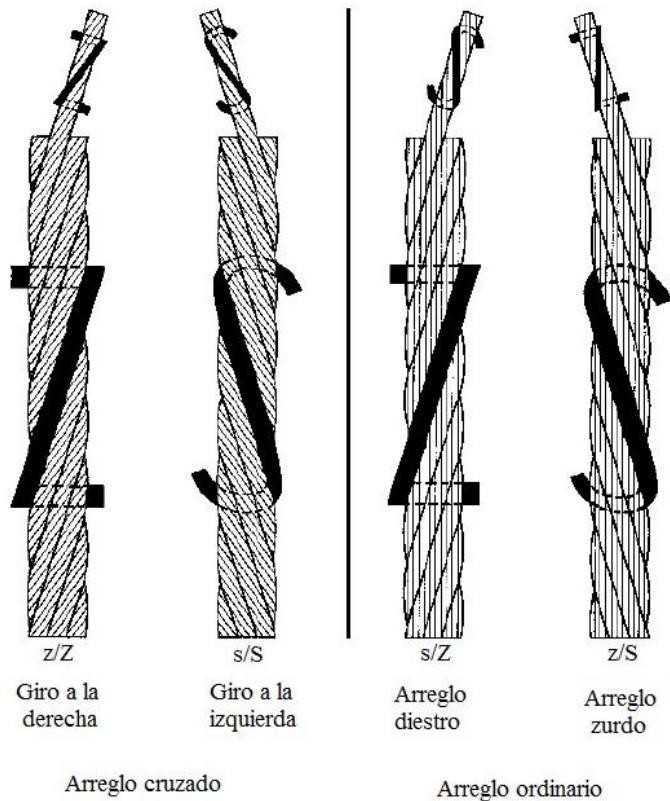


Figura 2.4. Tipos de arreglo en los miembros a tensión [6].

El fabricante del cordón de acero comprende, como proveedor, los requerimientos especiales para su uso en distintas aplicaciones en los perfiles de las bandas. Por lo tanto, el acabado de los cordones con los agentes adhesivos y su calidad, es responsabilidad del proveedor. Actualmente, es posible proveer los cordones en una matriz elastomérica embebida. Los espacios intermedios de los filamentos pretratados de tales cordones son 100 % llenados. Esto se anticipa al movimiento relativo de los filamentos individuales unos contra otros y entonces, previene el desgaste tribológico debido al contacto de los cables. La tendencia a la abrasión acompañada por el desgaste es eliminada completamente por este proceso. De esta forma, los cordones le dan a la estructura compuesta de la banda un incremento significativo en adhesión debido al buen acoplamiento mecánico entre los materiales. Estos miembros a tensión mejoran la estabilidad, así como también reducen la tendencia a la corrosión.

### 2.5 Fuerzas en las bandas de transmisión y capacidad de carga en los dientes

Una banda exhibe el mismo comportamiento en su interacción con una máquina a pesar del tipo de geometría o perfil.

Entre más potencia se requiera, la diferencia en tensión entre la parte tensa y la parte floja de la banda será mayor. Esta diferencia de fuerzas es conocida como la *fuerza periférica* o *fuerza tangencial*  $F_t$ :

$$F_t = T_1 - T_2 \quad (15)$$

donde  $T_1$  y  $T_2$  son las tensiones en la parte tensa y en la parte floja de la banda, respectivamente. Par y potencia se transmiten de una polea a otra mediante esta fuerza tangencial. En la mayoría de los casos, las bandas tienen un mejor desempeño cuando la tensión en el lado flojo ( $T_2$ ) tiene un valor entre el 10% y el 30% de la fuerza tangencial  $F_t$  [7].

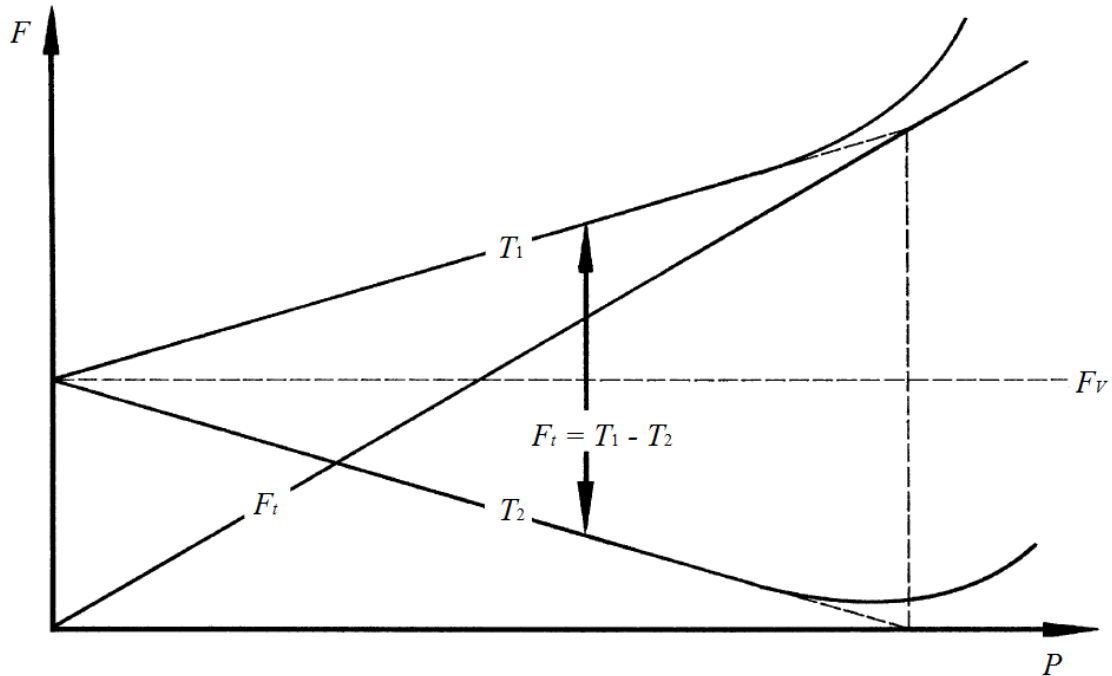


Figura 2.5. Fuerzas como función de potencia [6].

El arco de contacto de los dientes de la banda engranados transmite potencia a través del contacto con los dientes de la polea. La polea impulsora transmite potencia a la banda y la banda a la polea impulsada.

La capacidad de carga del diente de la banda se entiende que es: la carga que la banda soporta sin dañarse durante su uso extendido. En la mayoría de los casos, los catálogos de los fabricantes indican tal capacidad máxima de carga como la fuerza periférica específica por ancho de banda, a saber,  $F_{tspez}$ . Al multiplicar  $F_{tspez}$  por el número de dientes que se engranan  $z_e$  y por el ancho  $b$  de la banda se obtiene la fuerza periférica transmisible

$$F_t = F_{tspez} \cdot z_e \cdot b \quad (16)$$

Cuando se transmite un par, la tensión en la banda cambia de  $T_1$  a  $T_2$ . Esto significa que debe haber una cierta distribución de carga en el arco envolvente de la banda. En esta distribución de carga, debido a la fricción que hay entre la banda y la polea, la magnitud de  $T_1$  disminuye con cada diente que se engrana en la polea. Una vez que la banda abandona la polea, la tensión en la banda ha disminuido su magnitud hasta un valor  $T_2$ , que es la tensión en lado flojo de banda [8] [9] [10] [11].

Iniciando en el lado tenso de la banda (diagrama de cuerpo libre, figura 2.6), la tensión en la banda a lo largo del arco envolvente disminuye con cada diente. En el  $k$ -ésimo diente, las fuerzas de tensión,  $S_k$  y  $S_{k+1}$ , son equilibradas por la fuerza  $F$  que actúa en el flanco del diente.

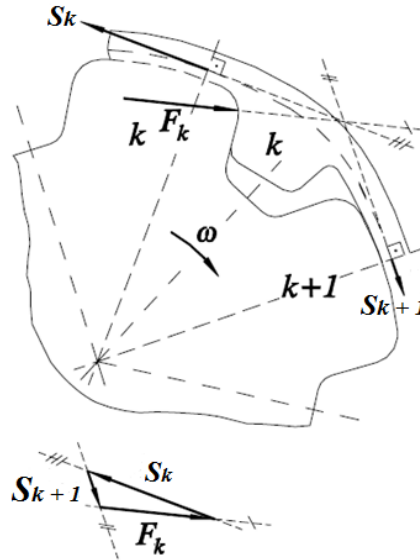


Figura 2.6. Cargas que actúan en el  $k$ -ésimo diente de una banda [7].

Un miembro a tensión sin elongación alguna sería deseable, pero en la vida real no es alcanzable. Los fabricantes de bandas, siendo conscientes de este problema, utilizan miembros a tensión capaces de soportar cargas mayores que las fuerzas periféricas calculadas.

Una transferencia de potencia es confiable siempre y cuando haya una tensión residual en el lado flojo de la banda. Entonces, la banda debería ser pretensada a un valor de

$$F_V \geq \frac{1}{2}F_t \quad (17)$$

Para este caso el símbolo  $\geq$  debe interpretarse como “igual o ligeramente mayor que” [6]. Cuando la potencia se incrementa más allá de su punto crítico, el lado flojo responderá con un pandeo y como resultado, habrá un daño agudo en los dientes. Las transmisiones compactas con bandas relativamente cortas superarán las sobrecargas; pero las transmisiones con bandas largas y menor precarga tienden a dar de saltos más grandes entre los dientes. La zona de peligro del salto de los dientes siempre es el punto de entrada de la banda en la polea impulsada, donde las fuerzas a tensión en la banda están en su valor mínimo.

Este pandeo se origina cuando la componente radial de la carga de pretensión existente, en el punto de entrada, no es lo suficientemente grande para vencer la fricción entre el flanco del diente de la banda y su correspondiente ranura en la polea, evitándose de esta manera el correcto engranaje de ambos componentes. Solo con un incremento de la tensión en el arco de contacto, esta resistencia puede ser gradualmente superada hasta que el diente, gradualmente, engrane en su hueco correspondiente. El pandeo se vuelve más pronunciado cuando: la transmisión está más cerca de ser operada a su límite, la relación  $F_t/T_2$  es más grande, la precarga  $F_V$  es menor y la fuerza de fricción que se opone al proceso de engranaje es mayor.

La solución óptima sería si cada diente pudiera entrar en su respectivo espacio sin carga o fricción, o al menos con fricción reducida, mientras que se incrementa la presión superficial en cada diente, hasta llegar a un valor máximo en el diente que sale de la polea. El engranaje del diente en la polea impulsora toma lugar bajo una tensión elevada, mientras que en la polea impulsada esto toma lugar

bajo una tensión reducida. Estas fuerzas locales dan como resultado cambios en el paso de la banda y podrían ser compensadas incrementando el diámetro de la polea impulsora y reduciendo el diámetro de la polea impulsada. Tales correcciones del diámetro llevan a una desestandarización del uso de las poleas y, por lo tanto, tales correcciones deberían realizarse solo en casos excepcionales.

Los análisis muestran que el miembro a tensión es resiliente sólo hasta cierto grado. Si este valor se excede, en cualquier punto durante la operación de la transmisión, la banda cederá. Consecuentemente, hay un salto sobre una longitud del arco de contacto, mientras que la línea de la longitud ideal de paso cede. Entonces, la banda se daña (ya sea que se elongue o los dientes se desprendan). En transmisiones compactas la banda no se puede elongar y se romperá inmediatamente de que los dientes salten. Durante el diseño de la transmisión, es imperativo no exceder la máxima fuerza a tensión  $F_{zul}$  en la banda.

Las máximas fuerzas a tensión se forman en el tramo recto de la banda y son calculadas de la relación:

$$F_{max} \approx F_V + \frac{1}{2}F_t \quad (18)$$

$$F_{max} = F_{zul} \quad (19)$$

Durante la operación de frenado, la carga se traslada al lado flojo de la banda y la polea impulsora se vuelve la polea impulsada y viceversa. Sin embargo, las consideraciones básicas permanecen inalteradas.

## 2.6 Guías

Para obtener bandas que se mantengan rectas durante la operación, una transmisión debe de usar algún tipo de guía. En general, las poleas tienen unas pestañas en las orillas que hacen posible esta función.

Esta característica de abandonar la polea es explicada por el hecho de que, en los miembros cargados a tensión, cada filamento lucha por tomar la trayectoria más corta posible; pero el elastómero envolvente evita el enderezamiento del miembro a tensión. En cambio, el efecto es un par rotacional que provoca una fuerza de escape en la banda. Estas fuerzas de escape se maximizan al presentarse las siguientes condiciones: entre más grande sea el diámetro del miembro a tensión, cuanta más cantidad de miembros a tensión haya por ancho de banda, entre más ancha sea la banda y entre más grande sea el par a transmitir. Este ímpetu se puede reducir a pequeñas fuerzas residuales, intercalando los miembros a tensión en arreglos zurdos y diestros (ver sección 2.4).

Para transmisiones de dos ejes, siempre se recomienda tener las pestañas en la polea impulsora, porque la banda guiada se mantendrá en posición con la polea impulsada. Para distancias entre dientes 15 veces más grandes que el ancho de la banda, se puede añadir un soporte lateral a la polea impulsada. Mientras que, para distancias entre dientes de alrededor de 30 veces el ancho de la banda, se puede utilizar pestañas en ambas poleas.

Para elegir el arreglo de las pestañas, usualmente, se tienen las siguientes reglas [6].

Preferentemente, las pestañas se colocan en la polea impulsora.

- Cuando la distancia entre dientes es muy grande y, por ende, el tramo recto de la banda, se requiere el uso de pestañas que garanticen la estabilidad direccional de la banda.

- En transmisiones de múltiples ejes, la banda necesita las guías en los tramos rectos donde las cargas sean mayores.

### 2.6.1 Alineación de las poleas

Las poleas pueden sufrir algunos de los siguientes tipos de desviación como se muestra en la figura 2.7.

- Paralelismo en las poleas.
- Desviación angular de los ejes.
- Rotación de los ejes.

Todos estos tipos de desviación provocan un aumento de tensión en una de las orillas de la banda y, como consecuencia, la banda trataría de liberarse en el lado donde la tensión es mayor.

Si los esfuerzos provocados por la desviación angular no son corregidos y actúan unilateralmente, hay riesgo de fracturas por fatiga prematura en los miembros a tensión. En este caso, las bandas más rígidas y anchas son las más proclives a reaccionar a este tipo de errores.

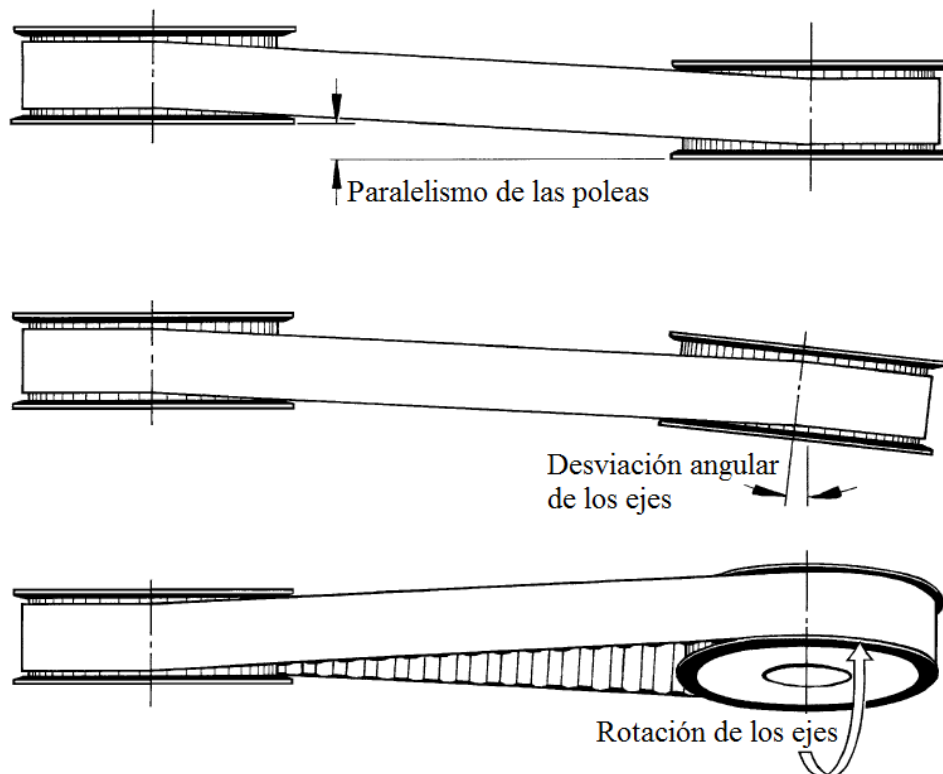


Figura 2.7. Desalineación de los ejes [6].

## Parte II. Metodología

### 2.7 Creación de la geometría

Durante el proceso de optimización resulta necesario tener una representación visual del dominio de diseño a optimizar, conteniendo todas las características geométricas del dominio de diseño. En el caso de este trabajo, el dominio de diseño consiste de la superficie media de un diente de perfil trapecoidal, junto con el tramo de la banda en el cual está contenido el diente y cuya longitud del tramo de la banda es igual al paso  $p$  de la banda. Para la representación de dicho dominio de diseño,

se construirá un modelo CAD del diente de la banda mediante el software SolidWorks, utilizando las dimensiones de los dientes L y XXH según la norma ISO – 5294:2012 para una fiel representación de ambos modelos de banda y finalmente, estos modelos geométricos serán exportados al software HyperMesh para continuar con el proceso de optimización.

## 2.8 Optimización

### 2.8.1 Optimización Matemática

El principio básico de optimización es: encontrar la mejor solución posible bajo ciertas circunstancias. Por ejemplo, encontrar la ruta al usar el transporte público o, como en el caso de la optimización estructural, encontrar la distribución óptima de material que satisfaga algún o algunos requisitos dados. Esto se hace más a menudo por las decisiones tomadas por el usuario o el ingeniero desde su propia experiencia y conocimiento sobre el tema en cuestión.

El objetivo del problema de optimización es a menudo una minimización o maximización. Por ejemplo, minimización del tiempo requerido o maximización de la rigidez. Para ser capaces de encontrar la solución óptima, la calidad de una solución, dependiendo de un conjunto particular de variables de diseño, necesita expresarse con un valor cuantitativo. Esto se hace típicamente con una función de las variables de diseño conocida como la *función costo*.

Matemáticamente, el problema general de optimización es más a menudo formulado como la minimización de la función costo (la cual se puede transformar fácilmente a maximización al minimizar la función negativa) sujeta a restricciones, lo cual puede expresarse de la siguiente manera:

Encontrar  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  tal que minimice  $f(\mathbf{x})$  sujeto a  $\begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0, & i = 1, 2, \dots, m \\ h_j(\mathbf{x}) = 0, & j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$  donde  $\mathbf{x}$  es el vector

de los parámetros de diseño y  $f(\mathbf{x})$  es la función costo. A las funciones  $g_i(\mathbf{x})$  y  $h_j(\mathbf{x})$  se les llama *función restricción de desigualdad* y *función de restricción de igualdad*, respectivamente, y definen las restricciones del problema. A esto se le llama *problema de optimización restringido*.

### Optimización multiobjetivo

En muchos casos hay múltiples objetivos que necesitan ser tomados en cuenta. Un ejemplo, utilizado por Ehrgott [12], es cuando se adquiere un auto que, por ejemplo, se desea que sea de gran desempeño, barato y ahorrador de combustible. Obviamente no es posible un auto que sea el mejor en todos los aspectos ya que un auto de gran desempeño, no es barato ni ahorrador de combustible.

Un concepto que se utiliza a menudo en optimización con múltiples objetivos es la optimalidad de Pareto. Una solución se dice que es un óptimo de Pareto si: no existen otras soluciones realizables que no beneficien alguna de las funciones objetivo sin perjudicar alguna otra de las funciones objetivo. Al conjunto de soluciones óptimas de Pareto se le llama frente de Pareto, para el caso de dos objetivos esto se puede representar fácilmente en un diagrama bidimensional [13].

Un método para resolver el problema de optimización multicriterio es por escalarización, al transformar las múltiples funciones objetivo en una función escalar de las variables de diseño. El método de escalarización más simple que hay consiste en el método de la suma ponderada:

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_{k=1}^p w_k f_k(\mathbf{x}) \quad (16)$$

donde  $f_1, \dots, f_k$  son las funciones objetivo.

Al variar las ponderaciones  $w_k$ , se pueden encontrar diferentes soluciones óptimas de Pareto.

Otro enfoque consiste en sólo considerar una de las funciones objetivo y restringir las otras, esto es, el método de las  $\varepsilon$ -restricciones:

$$\min_{\mathbf{x}} f_j(\mathbf{x}) \quad (17)$$

Sujeto a  $f_k(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_k, k = 1, \dots, p, k \neq j$ .

El problema es entonces resuelto con diferentes valores de las  $\varepsilon_k$  restricciones.

### 2.8.2 Optimización estructural

La optimización estructural es una aplicación de la optimización. Aquí, el propósito es encontrar la distribución óptima de material de acuerdo a algunas demandas dadas por la estructura. Algunas funciones comunes a minimizar son la masa, desplazamiento o rigidez (energía de deformación). Este problema en la mayoría de los casos está sujeto a algunas restricciones, por ejemplo, restricciones en la masa o en el tamaño del componente.

Esta optimización se acostumbra hacer manualmente, usando un proceso *iterativo-intuitivo* que consiste de los siguientes pasos:

1. Un diseño sugerido.
2. Se evalúan los requisitos del diseño, por ejemplo, con un análisis por elementos finitos.
3. Si se satisfacen los requisitos, el proceso de optimización termina. Si no, se modifica y se propone un diseño mejorado y se repiten los pasos 2 – 3.

El resultado depende enormemente de los conocimientos, la experiencia y la intuición del diseñador. Los cambios en el diseño se hacen de una forma intuitiva, a menudo por prueba y error. Este proceso puede llegar a consumir mucho tiempo y podría resultar en un diseño poco óptimo.

El problema de optimización estructural se puede separar en tres diferentes áreas: *optimización de tamaño*, *optimización de forma* y *optimización topológica* [14]. Para este trabajo sólo se realizarán optimización topológica y optimización de forma.

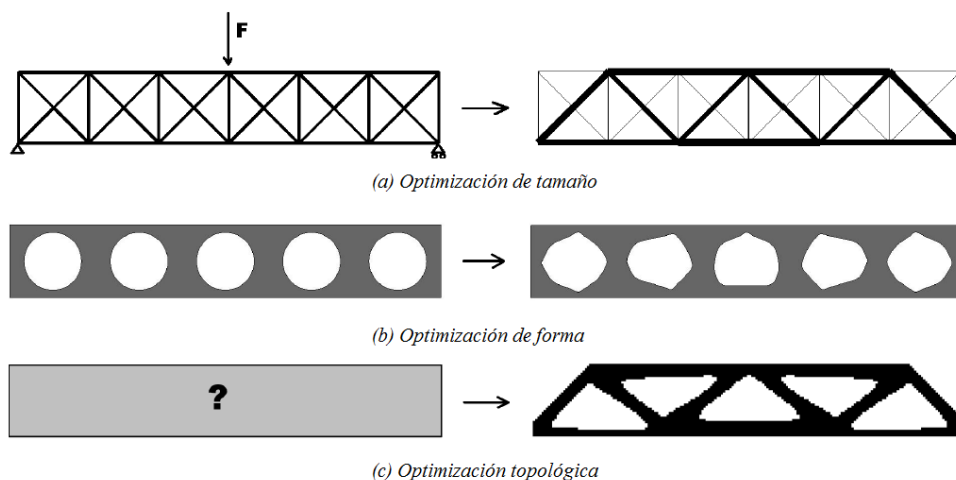


Figura 2.8. Tipos de optimización aplicados a una estructura [15].

### Optimización de forma

La topología (número de orificios, elementos, etc.) de la estructura se conoce al utilizar optimización de forma, la optimización de forma no dará nuevos orificios o elementos. En la optimización de forma las variables de diseño pueden ser, por ejemplo, la distribución del espesor junto con miembros estructurales, diámetro de los orificios, radio de los filetes o cualquier otra dimensión. Una diferencia fundamental entre optimización de forma versus optimización topológica es que: en lugar de tener una o más variables de diseño para cada elemento, las variables de diseño en la optimización de forma afectan a muchos elementos.

### Método de los vectores base

La forma de la estructura es definida como una combinación lineal de los vectores base. Estos vectores base definen las coordenadas nodales:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{v}_{B,i} \quad (18)$$

Donde  $\mathbf{r}$  es el vector de coordenadas nodales y  $\mathbf{v}_B$  son los vectores base asociados a las variables de diseño [16].

### Método de los vectores de perturbación

Un método para introducir cambios de forma al modelo de elemento finito, es mediante los vectores de perturbación. Primero, una o más formas se definen como perturbaciones siendo añadidas al vector inicial de coordenadas nodales ( $\mathbf{r}_0$ ),  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{p}$ .

Al hacer una combinación lineal de las perturbaciones, las variables de diseño a optimizar se pueden definir como la ponderación de los vectores de perturbación. Una variable de diseño por vector de forma:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{p}_i \quad (19)$$

$n$  = número de formas/variables de diseño con ponderaciones limite  $w_i^{\min} \leq w_i \leq w_i^{\max}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Entonces, el problema de optimización consiste en encontrar el conjunto óptimo de formas ponderadas [16].

### Optimización topológica

La forma más general de optimización estructural es la optimización topológica. Al igual que en la optimización de forma y de tamaño, el propósito es encontrar la distribución óptima de material. Con la optimización topológica la forma resultante o la topología es desconocida, el número de orificios, cuerpos, etc., no está decidido.

De un dominio de diseño dado, el propósito es encontrar la distribución óptima de material y huecos. Para resolver este problema, el dominio se discretiza al hacer uso del método del elemento finito (FEM) y al dividir el dominio de diseño en elementos discretos (malla). El problema resultante es entonces resuelto, haciendo uso de los métodos de optimización para encontrar cuales elementos son materiales y cuáles no. Esto lleva a un problema denominado 0 – 1, es decir, los elementos existen o no [17].



El número de combinaciones distintas es  $2^N$ , donde  $N$  es el número de elementos. Como un modelo de elemento finito fácilmente contiene miles de elementos, este problema está fuera del alcance para resolver cualquier problema práctico.

Las dos principales estrategias para resolver el problema de optimización con una topología ISE (elementos Isotrópicos Sólidos o Huecos), son el método de las densidades y el método de homogenización. Otros métodos incluyen el uso de algoritmos genéticos o métodos heurísticos, tales como optimización estructural evolutiva.

#### Método de las densidades

Se relaja el problema al permitir que la densidad del material tome cualquier valor entre cero y uno, es decir, densidad del 0 al 100 %. Al hacer esta relajación, es posible utilizar métodos de optimización basados en gradiente para encontrar un mínimo de la función objetivo. En la discretización por elementos finitos, la densidad a menudo se aproxima a un valor constante de cada elemento. Entonces, el problema resultante tiene una variable de diseño, la densidad por elemento.

En la práctica, esto se vuelve similar a la optimización de tamaño; donde en este caso las densidades son los tamaños de los elementos. Esta relajación carece de una explicación física simple. Al considerar elementos bidimensionales, la densidad podría ser representada como una placa de espesor variable. En el caso tridimensional no hay una contraparte similar.

Al uso de esta formulación en la optimización topológica se le llama *método de las densidades*. Para obtener un resultado que sea posible de manufacturar, se desea que la solución sólo contenga elementos sólidos o huecos, para llegar a un comportamiento de topología ISE. Para aplicar este comportamiento las densidades intermedias son penalizadas. Sin penalización la relación costo material – rigidez es lineal,  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{E}^0$  donde  $\mathbf{E}$  es el tensor de elasticidad y  $\rho$  la densidad,  $0 \leq \rho \leq 1$ . Un método popular para alcanzar densidades intermedias penalizadas es al dejar que la rigidez del material sea expresada como:

$$\mathbf{E} = \rho^p \mathbf{E}^0 \quad (20)$$

$$m = \int \rho d\Omega, \rho > 1 \quad (21)$$

donde  $m$  es la masa.

Cuando las densidades son consideradas como constantes sobre cada elemento, la relación densidad – rigidez se puede implementar simplemente, al escalar las matrices de rigidez antes de ensamblarlas en la matriz global de rigidez:

$$\mathbf{K}_e = \rho_e^q \mathbf{K}_e^0 \quad (22)$$

Donde  $q$  es un factor de penalización mayor que cero, típicamente de 2 a 5. En la literatura, el método de las densidades junto con esta penalización a menudo se le llama método SIMP (Microestructura Sólidas Isotrópicas con Penalización). Desafortunadamente, esta penalización todavía hará del problema de minimización un problema no convexo, tal que hallar el óptimo global será muy difícil.

El problema clásico de optimización topológica de minimizar la rigidez mientras se restringe la masa con el método de las densidades se puede formular como sigue:

$$\begin{cases} \min_{\rho} C(\rho) = \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\rho) \\ \rho^T \mathbf{a} = V \\ \rho_{\min} \leq \rho_e \leq \rho_{\max}, e = 1, \dots, n \end{cases} \quad (23)$$

Donde  $\rho = [\rho_1, \dots, \rho_n]^T$  es el vector de diseño que consiste de las densidades de los elementos y  $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]^T$  es el vector de las áreas de los elementos. Los desplazamientos se pueden hallar fácilmente con  $\mathbf{u}(\rho) = \mathbf{K}^{-1}(\rho)\mathbf{F}$ .

Dos de las principales ventajas de este método es que no se requiere demasiada memoria adicional, sólo se necesita una variable libre por elemento (la densidad) y cualquier combinación de las restricciones de diseño se puede utilizar.

#### Método de homogenización

La idea principal del método de homogenización es que la densidad de un material se pueda representar como una microestructura. La microestructura es un material compuesto con un número infinito de huecos infinitamente pequeños. Esto lleva a un medio poroso que puede tener una densidad variable del 0 al 100 %. Algunos tipos de microestructuras comunes son sólidos con orificios cuadrados o rectangulares, o algún tipo de microestructura por capas. Dado que las propiedades macroscópicas de la microestructura no son isotrópicas se necesita un ángulo de orientación.

La optimización se lleva a cabo de manera similar al método de las densidades. El problema es discretizado en elementos finitos, con las variables de diseño consideradas como constantes sobre cada elemento.

Una desventaja obvia del método de homogenización es que se requieren más variables de diseño por elemento que al utilizar el método de las densidades. Además, y tal vez más serio, es el hecho de que el método de homogenización sólo se puede aplicar con la flexibilidad (*compliance*) como función de restricción o función de costo.

#### Tablero de damas o ajedrez

Un problema común que surge en la optimización topológica, tanto para el método de las densidades como para el método de homogenización, es el fenómeno llamado damero o *checkerboarding*, en inglés [17]. Esto se refiere al patrón alternado en forma de tablero de damas con elementos de densidades 1 y 0. La causa de esto es la exageración de que la rigidez de los elementos sólo los conecta por sus esquinas. Esto, junto con la práctica común de sólo utilizar una variable de diseño por elemento y usar penalización de densidades intermedias lleva a este tipo de patrones. Esto no llega a ocurrir con la optimización de forma, ya que esta tiene un soporte global, es decir, cada variable de diseño afecta a muchos elementos.

Existen muchos métodos para suprimir el damero [17].

- Elementos finitos de orden superior. Por ejemplo, en el caso bidimensional en lugar de usar elementos bidimensionales rectangulares de 4 nodos se utilizan elementos de 8 nodos. Un inconveniente obvio derivado de este método es que se requiere más tiempo de cálculo, debido a que el número de grados de libertad aumenta considerablemente.
- Filtro. Se utiliza un filtro en cada iteración que suaviza la densidad. La densidad de un elemento se promedia con respecto a los elementos en su vecindad.

- Diferentes discretizaciones para el modelo FEM y las variables de diseño. Las mallas para las variables de diseño son más burdas que las de los elementos finitos, cada variable de diseño controla la densidad de más de un elemento.
- Control de tasa de densidad. El gradiente local de las densidades de los elementos se restringe a algún valor.

#### Comparación entre los métodos de optimización

Aunque la optimización de forma y la optimización topológica tienen la misma finalidad de encontrar la distribución óptima de material, por lo visto en la sección anterior, es bien sabido que ambas trabajan de forma distinta para llegar a su propósito. Es por esto que merece la pena hablar de las diferencias que hay al utilizar estos métodos, así como también de sus principales ventajas y desventajas.

En el caso de la optimización de forma, las variables de diseño describen las fronteras del dominio, modificando la frontera del dominio de diseño. Mientras que, para la optimización topológica, se modifican la geometría y la topología, permitiendo determinar bordes y/o crear huecos en la estructura.

Otra diferencia fundamental es que, en la optimización de forma las variables de diseño afectan muchos elementos, mientras que, en la optimización topológica se asignan una o más variables de diseño para cada elemento.

#### Ventajas y desventajas en la optimización de forma

En la tabla 2.2 se hace un listado de las principales ventajas y desventajas al hacer uso de la optimización de forma.

Tabla 2.2. Ventajas y desventajas al usar optimización de forma.

Ventajas	Desventajas
Muy útil cuando la estructura necesita conservarse totalmente sólida.	Se elimina una menor cantidad de material en comparación con la optimización topológica.
Es posible eliminar concentradores de esfuerzo en la búsqueda de una distribución de esfuerzos más uniforme.	La modificación de las fronteras afectará en las condiciones de frontera del problema original.

#### Ventajas y desventajas en la optimización topológica

En la tabla 2.3 se hace un listado de las principales ventajas y desventajas al hacer uso de la optimización topológica.

Tabla 2.3. Ventajas y desventajas al usar optimización topológica.

Ventajas	Desventajas
Libertad para modificar el interior de la estructura, crear orificios, la cantidad y la forma de los orificios, etc.	En ocasiones, se producen concentradores de esfuerzos en las formas de los orificios de la nueva topología.
Es posible hacer una mayor remoción de material en comparación con la optimización de forma.	Los métodos para combatir el efecto damero, agregan más tiempo de cálculo a la solución del problema.

## 2.9 Recursos computacionales

A continuación, se describe el software de mayor uso en la realización de este trabajo. El principal programa utilizado para realizar los análisis por elemento finito y optimizaciones es Optistruct, de Altair Engineering. Para ser capaces de definir el problema y ver los resultados es necesario utilizar HyperMesh y HyperView, respectivamente. HyperMesh es el preprocesador, el cual es utilizado para discretizar (mallar) un modelo CAD, definir condiciones de frontera, propiedades y configurar el problema para ser resuelto (optimización, análisis estático, análisis modal, etc.). Desde HyperMesh, se exporta un archivo el cual describe perfectamente el problema y este es procesado en Optistruct. Los resultados de Optistruct después se pueden evaluar usando el posprocesador HyperView [16].

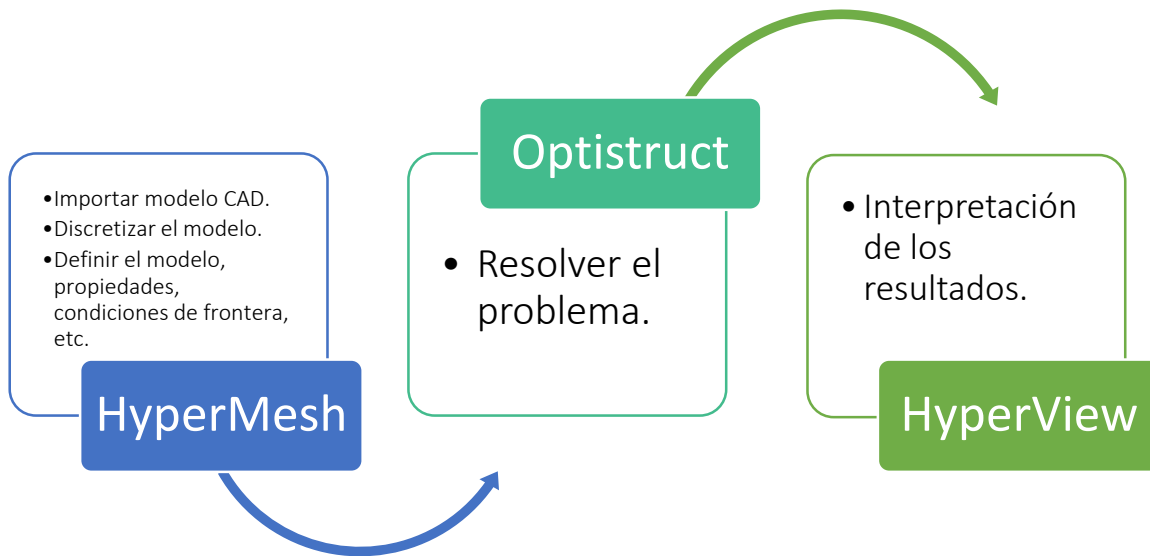


Figura 2.9. Flujo de trabajo al utilizar la paquetería de software HyperWorks.

### 2.9.1 Optistruct

Optistruct es la herramienta a utilizar para desarrollar optimización estructural. Optistruct carece de una interfaz gráfica, toda la formulación del problema se hace utilizando HyperMesh.

Optistruct es capaz de realizar un rango de diferentes análisis por elemento finitos; incluyendo análisis estáticos, modales, pandeo y análisis térmicos. Se pueden aplicar diferentes tipos de cargas, tales como fuerzas puntuales, presión, cargas gravitacionales, térmicas, etc.

Cuando se define el modelo de elemento finito, muchos tipos diferentes de elementos finitos son soportados incluyendo: diferentes tipos de elementos sólidos tridimensionales, elementos de cascarón bidimensionales y otros tipos de elementos tales como vigas, barras, resortes y masas puntuales.

Los tipos de optimización soportados por Optistruct incluyen:

Optimización topológica de dominios 2D y 3D.

- Optimización de tamaño, donde las variables de diseño son, por ejemplo, el espesor de la placa o la sección transversal de vigas o barras.
- Optimización de tamaño libre, para encontrar la distribución óptima de elementos planos.

- Optimización de forma, para formas definidas por el usuario.
- Optimización de forma libre, para que los nodos en las fronteras seleccionadas se muevan sin formas definidas por el usuario.
- Optimización topográfica, para encontrar el mejor patrón de refuerzo de una estructura plana.

### 2.9.2 Manejo del software

Los tipos de optimización de interés para este trabajo son optimización de forma libre y optimización topológica. El problema de optimización en Optistruct se define de forma similar para cada tipo de optimización. Los pasos necesarios son:

- Adquisición/creación del modelo FEM.
- Definir las variables de diseño y las restricciones en las variables de diseño.
- Definir las funciones de respuesta que serán utilizadas como funciones objetivo o restricciones.
- Formular el objetivo a optimizar.
- Si se desea, poner restricciones en las funciones de respuesta.

Aquí la mayor parte del trabajo es hecha en HyperMesh y HyperView.

#### Modelación en elemento finito

Un modelo FEM siempre será necesario cuando se realice una optimización mediante Optistruct. Este normalmente se crea al importar un modelo CAD en HyperMesh, donde es mallado utilizando las herramientas disponibles. El modelo FEM resultante deberá capturar el comportamiento del componente modelado. Esto es hecho al representar el componente con diferentes tipos de elementos de tamaños variables. Cabe mencionar que entre más precisión se desee mayor es el costo computacional.

Una diferencia clave al desarrollar una optimización topológica contra una optimización de forma es que, para la optimización resultante, el modelo FEM resultante es una malla de todo el dominio de diseño, mientras que para la optimización de forma la malla es solo del componente existente.

En la fase del modelado FEM se deben definir las condiciones de frontera, cargas y casos de carga.

Tanto la función objetivo como las diferentes funciones de restricción son definidas de forma similar. Primeramente, se necesita crear una función de respuesta. Una función de respuesta es una medida numérica de algún aspecto de las variables de diseño o de un análisis del modelo. La respuesta, o bien puede ser una función objetivo, o bien una restricción. Optistruct soporta muchas respuestas diferentes.

También es posible poner restricciones geométricas en el diseño como, por ejemplo:

- Extrusión. Esto hace que el diseño tenga la misma sección transversal en una dirección específica o a lo largo de una curva.
- Dirección de salida. Hace que el diseño no tenga cavidades en una dirección, para hacer posible la manufactura del componente por fundición.
- Simetría. Simetría con respecto a uno, dos o tres planos, o simetría cíclica (rotacional).

#### Optimización topológica

Aquí los pasos que se necesitan para desarrollar una optimización topológica serán descritos y se presentara una breve descripción de las opciones más importantes. Esto considera que un modelo FEM del problema esté disponible y que diferentes propiedades se utilicen para los elementos de

diseño y no diseño. Todo el trabajo manual de definir el problema para optimización topológica se hace utilizando HyperMesh.

Los requisitos mínimos para desarrollar una optimización topológica son una variable de diseño y una función objetivo definidas. El orden en que se define el problema no es de importancia, es decir, todos los pasos se pueden hacer en el orden que sea.

Variables de diseño. Como primer paso, se crea la variable de diseño para la optimización. La variable de diseño le dice a Optistruct cuales elementos están sujetos al proceso de optimización. Además, la variable de diseño podría tener algunas opciones asociadas a ésta, tales como restricciones de manufactura, restricciones de esfuerzo y tamaño mínimo/máximo de los miembros.

La variable de diseño es creada al utilizar el correspondiente dialogo en HyperMesh, los elementos de diseño son elegidos al seleccionar una o más propiedades en HyperMesh. Entonces, los elementos de diseño se pueden distinguir de los elementos de no diseño al tener propiedades diferentes. Sólo los elementos sólidos o planos pueden ser usados como elementos de diseño.

Restricciones en las variables de diseño. Además de las restricciones en el proceso de optimización, es posible ajustar restricciones directamente en las variables de diseño. Estas se definen en el mismo dialogo donde las variables de diseño son creadas. Las distintas restricciones de diseño son diferentes de las restricciones de manufactura, tales como ajustar una dirección de salida (dirección de fundición o casting), restricción de extrusión o restricciones de simetría.

Esta también es la forma en que las restricciones de esfuerzo se aplican a un problema de optimización topológica. Adicionalmente, se puede aplicar control del tamaño máximo o mínimo de los miembros. Se recomienda el control del tamaño mínimo del miembro dado que este es capaz de suprimir el damero. Los archivos de ayuda de Optistruct recomiendan un tamaño mínimo de al menos tres veces el tamaño del elemento.

Función objetivo y restricciones. Debe definirse exactamente un objetivo para que se lleve a cabo la optimización. Este objetivo podría ser, minimizar o maximizar una función de respuesta previamente definida.

Se puede definir una o más restricciones en las respuestas al acotar estas por arriba y/o por abajo.

Cabe mencionar que en este tipo de optimización para atacar el problema del efecto del tablero de damas se utilizarán elemento de segundo orden.

### Optimización de forma

La optimización de forma se lleva a cabo de manera similar a la optimización topológica. La diferencia principal radica en la forma en que se definen las variables de diseño.

Variables de diseño. Hay dos formas de definir la optimización en Optistruct, optimización de forma y optimización de forma libre. Para una optimización de forma, primeramente, se define la variable de diseño creando una forma, o deformación, utilizando el módulo Hypermorph perteneciente a HyperMesh.

El segundo método, es el método de forma libre. En este método es suficiente con solo elegir un conjunto de nodos en la frontera. Optistruct entonces utiliza un método con código propio para definir automáticamente los cambios que modificaran la frontera. Las restricciones se pueden definir en la forma en la que se permita el movimiento de los nodos. También es posible usar las restricciones de manufactura antes mencionadas.

En este trabajo se utilizará la herramienta optimización de forma libre. En ambos tamaños de diente se seleccionarán los nodos que pertenecen a la frontera del diente, porque es la forma del diente la que se desea cambiar. Para aumentar las posibilidades de obtener un diseño óptimo, se les permitirá a los nodos que conforman la frontera del diente un movimiento bidireccional. De tal forma que los nodos podrán moverse hacia el interior y hacia el exterior de las fronteras del diente.

Función objetivo y restricciones. Las funciones objetivo y las restricciones se definen de la misma manera en que se definen en la optimización topológica, con la diferencia de que en este caso se pueden utilizar algunas otras funciones de respuesta, como objetivo o como restricción.

#### 2.10 Interpretación de resultados

Para todos los casos, los resultados obtenidos se visualizarán e interpretarán en HyperView. De los resultados obtenidos, deberán descartarse aquellos que no sean satisfactorios y deberán seleccionarse los más satisfactorios para llegar a una propuesta de diseño. Los resultados menos satisfactorios serán aquellos que violen las restricciones y/o cuya remoción de material sea poco significativa. Por otro lado, los resultados más satisfactorios serán aquellos que además de cumplir con las restricciones impuestas, la remoción de material sea considerable y se mejore la distribución de esfuerzos.

Para el resultado seleccionado (o los resultados seleccionados) como propuesta, será necesario construir modelos CAD de la nueva geometría mediante SolidWorks. Posteriormente, los nuevos modelos serán importados con HyperMesh para discretizarlos, asignarles material y propiedades, definir condiciones de frontera para realizar análisis FEM y comparar las distribuciones de esfuerzos de los modelos optimizados con las distribuciones de esfuerzos de los modelos originales. Cabe mencionar que el material, las propiedades y las condiciones de frontera serán las mismas que de los modelos originales.

Si la comparativa resulta satisfactoria, entonces deberá proponerse un método para que sea posible la manufactura del nuevo diseño.

## Capítulo 3. Implementación

A continuación, se aplican los métodos de optimización topológica y optimización de forma, con la ayuda de las herramientas computacionales mencionadas en la sección 2.9.2, a dos diferentes modelos de banda, pero ambas con el perfil trapezoidal, dando un total de cuatro casos de aplicación.

En cada caso, se tiene la finalidad de modificar la distribución de material en el diente de tal manera que, se elimine el material cuyo valor de esfuerzo de von Mises sea mínimo.

### 3.1 Modelos

Para la realización de este trabajo, se seleccionaron el diente L y el diente XXH de dos diferentes bandas dentadas (figuras 3.1 – 3.2) por tener dimensiones de tamaños considerables, en los cuales las modificaciones en la forma y en la topología pueden llegar a ser más notorias en comparación de los modelos de bandas más pequeños. Utilizando la superficie media (*midsurface*) de cada diente, se construye la malla de cada modelo y se realizan los análisis posteriores. En cada caso, el diente en cuestión a analizar es el primer diente de la banda que hace contacto con la polea impulsora, porque este diente es el que recibe la mayor de las cargas ejercidas por la polea sobre la banda y a su vez, una de las cargas menores durante el frenado. En esta situación, se invierten los valores de tensión en el lado flojo y en el lado tenso de la banda.

(a)



(b)

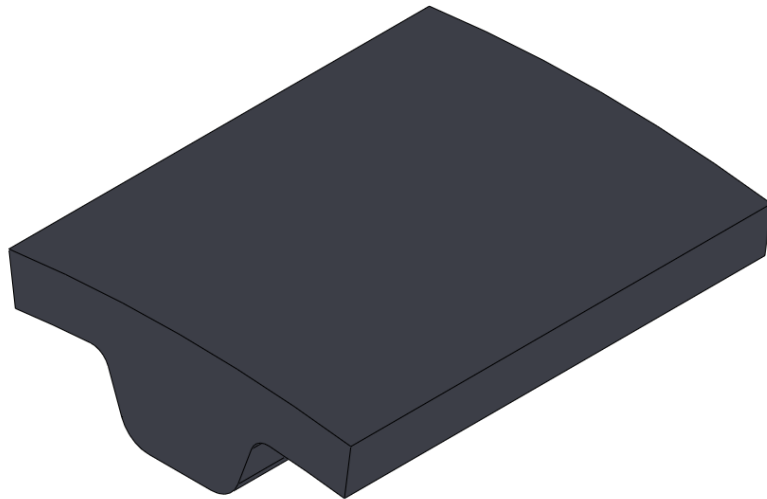


Figura 3.1. Diente L. (a) Vista frontal. (b) Vista isométrica.



(a)



(b)

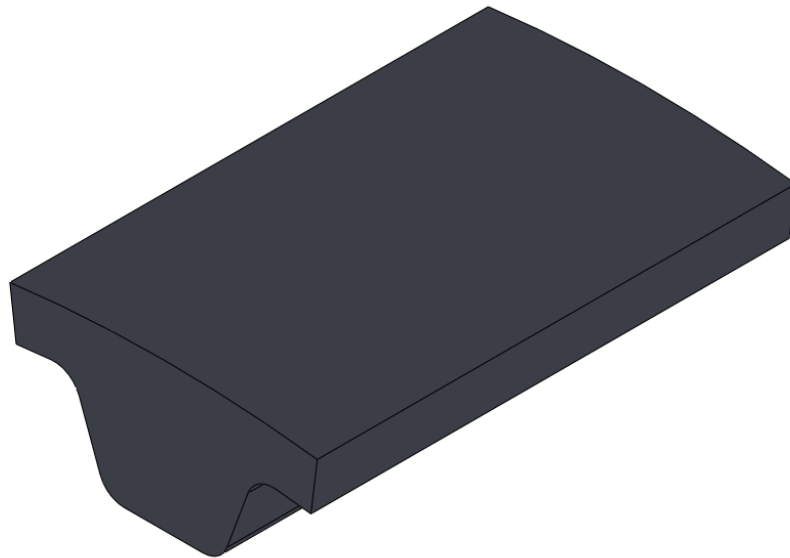


Figura 3.2. Diente XXH. (a) Vista frontal. (b) Vista isométrica.

### 3.2 Consideraciones

- Para los cálculos a realizar, el círculo de paso se considera invariante. Por lo tanto, los valores de  $d_{w1}$  y  $d_{w2}$  serán constantes (sección 2.2).
- La banda opera en condiciones de trabajo óptimas con  $T_2 = 0.3F_t$  (sección 2.5).
- Para todos los modelos de banda a optimizar, las bandas se consideran completamente sólidas; ignorando la presencia de los miembros a tensión, porque estos no están presentes en la sección transversal de los dientes.
- No hay pandeo presente en las bandas (sección 2.5).
- Las bandas se consideran perfectamente alineadas, esto es, que los esfuerzos en el ancho de la banda están distribuidos de manera simétrica y, por lo tanto, éstas no abandonan las respectivas poleas en las cuales están montadas (sección 2.6).
- Para evitar el efecto del damero (sección 2.7.2), se hará uso de elementos bidimensionales de segundo orden en la optimización topológica.

- Se hará uso de la paquetería de software HyperWorks, manejándose como se indica en la figura 2.9.

### 3.3 Geometría

Siguiendo la nomenclatura utilizada en la figura 2.1 y en la tabla 2.1, la tabla 3.1 muestra las características geométricas de cada diente. Al tratarse de un solo diente, la longitud de paso del diente es el mismo paso  $p$  del diente y su correspondiente ángulo envolvente por diente es el ángulo  $\alpha$ , como se calcula según la ecuación 12.

Tabla 3.1. Dimensiones de los dientes L y XXH.

Variable	Diente L	Diente XXH
$p$	9.525	31.75
$b$	25.4	50.8
$d_1$	75.8	252.66
$z_1$	25	25
$d_2$	181.91	606.38
$z_2$	60	60
$n$	2.4	2.4
$\omega_1$	6000	3000
$\omega_{2\text{eff}}$	2500	1250
$z_B$	92	112
$C$	229.613	1088.95
$L_B$	876.296	3556
$L_{BSl}$	876	3556
$K$	117.798	551.656
$C_{\text{nom}}$	229.461	1088.95
$z_k$	25	25
$z_e$	10.573	11.1466
$z_E$	10	11
$\theta$	152.2273	160.51
$\alpha$	15.2273	14.5919
$\varphi$	13.8637	9.7448

### 3.4 Condiciones de frontera

En cada diente a analizar, la potencia  $P$  y la velocidad angular de la polea impulsora  $\omega_1$  se consideraron constantes, y se hicieron variar las direcciones  $\gamma$  y  $\psi$  de las fuerzas  $F_1$  y  $F_{1,b}$ , respectivamente, que la polea ejerce sobre la banda para obtener distintos casos de carga. Donde el subíndice  $b$  representa las fuerzas que actúan sobre la banda durante la operación de frenado.

Dado que las cargas concentradas producen valores de esfuerzos muy grandes en la vecindad del punto donde se aplican, las cargas fueron reemplazadas por cargas distribuidas en una longitud colindante a los puntos de aplicación de dichas cargas.

En las figuras 3.3 a 3.6 se ilustran las condiciones de frontera para cada caso de carga. Aunque en los análisis se hace de cargas distribuidas, para fines ilustrativos las cargas distribuidas se reemplazaron por cargas concentradas.

### 3.4.1 Fuerzas en el flanco izquierdo

Siguiendo el diagrama de cuerpo libre de la figura 2.6, al tratarse del primer diente ( $k = 1$ ) la tensión en el extremo izquierdo de la banda es  $S_1 = T_1$ , la fuerza ejercida sobre el diente es  $F_1$  y la restricción en la banda es la tensión en el lado derecho, a saber,  $S_2$ .

Al resolver las ecuaciones de equilibrio del diagrama de cuerpo libre para  $F_1$  en función de  $\gamma$  se obtiene que

$$F_1(\gamma) = \sqrt{T_1^2 - 2T_1S_2(\gamma) \cos \alpha + S_2^2(\gamma)} \quad (24)$$

donde

$$S_2(\gamma) = \frac{\tan \gamma - \tan \alpha_1}{\tan \gamma + \tan \alpha_1} T_1 \quad (25)$$

y  $\alpha_1 = \frac{\alpha}{2}$ .

#### Casos de carga diente L

En la tabla 3.2 se muestran los valores de las cargas  $F_t$ ,  $T_1$ ,  $S_2$  y  $F_1$  dados  $P$ ,  $\omega_1$  y  $\gamma$  para el diente L, seguido de sus respectivos casos de carga ilustrados.

Tabla 3.2. Cargas aplicadas en el flanco izquierdo del diente L.

Variable	Valor
$P$	0.9396 kW
$v_{\text{eff}}$	23.812 m/s
$F_t$	39.459 N
$\alpha_1$	7.6136 °
$T_1$	51.297 N
$F_1(44.60^\circ)$	17.048 N
$S_2(44.60^\circ)$	39.050 N
$F_1(46.70^\circ)$	16.588 N
$S_2(46.70^\circ)$	39.820 N
$F_1(48.71^\circ)$	16.190 N
$S_2(48.71^\circ)$	40.519 N

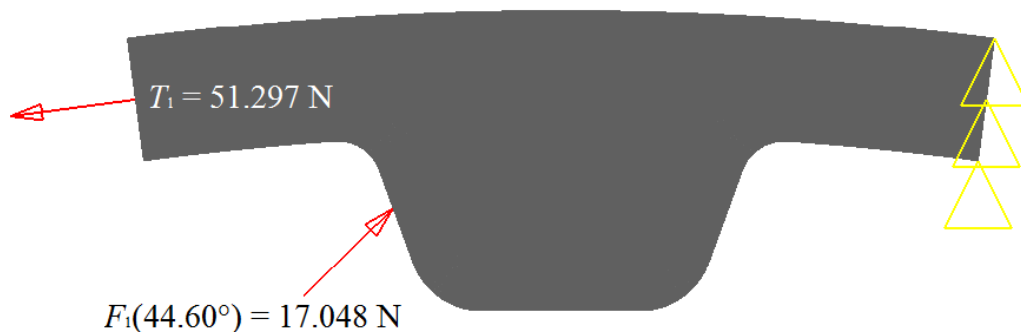


Figura 3.3. (a) Cargas aplicadas en el diente L cuando  $\gamma = 44.60^\circ$ .

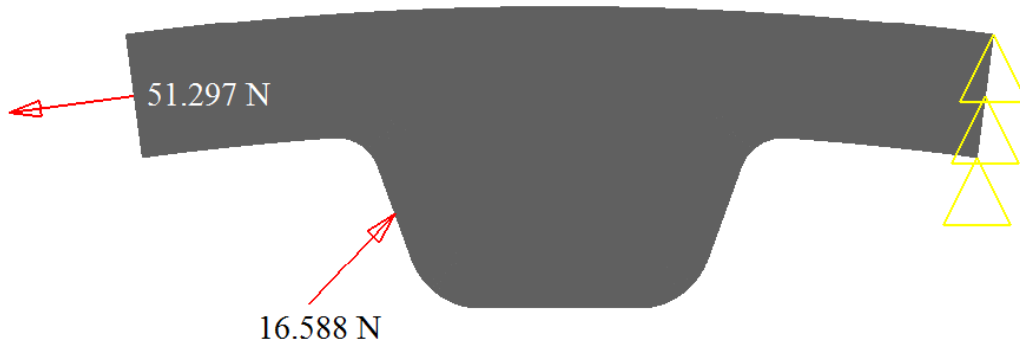


Figura 3.3. (b) Cargas aplicadas en el diente cuando  $\gamma = 46.70^\circ$ .

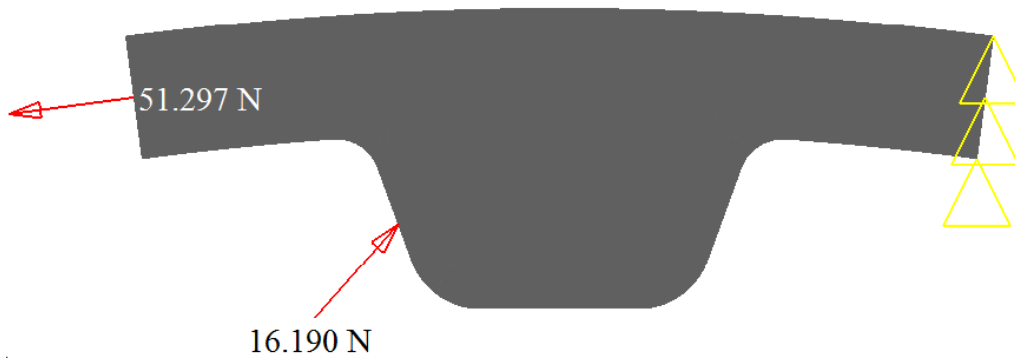


Figura 3.3. (c) Cargas aplicadas en el diente L cuando  $\gamma = 48.71^\circ$ .

#### Casos de carga diente XXH

En la tabla 3.3 se muestran los valores de las cargas  $F_t$ ,  $T_1$ ,  $S_2$  y  $F_1$  dados  $P$ ,  $\omega_1$  y  $\gamma$  para el diente XXH, seguido de sus respectivos casos de carga ilustrados.

Tabla 3.3. Cargas aplicadas en el flanco izquierdo del diente XXH.

Variable	Valor
$P$	15.622 kW
$v_{\text{eff}}$	39.685 m/s
$F_t$	393.65 N
$\alpha_1$	7.2959 °
$T_1$	511.75 N
$F_1(45.7521^\circ)$	161.33 N
$S_2(45.7521^\circ)$	398.26 N
$F_1(49.4973^\circ)$	154.09 N
$S_2(49.4973^\circ)$	410.85 N
$F_1(52.9781^\circ)$	148.46 N
$S_2(52.9781^\circ)$	421.63 N

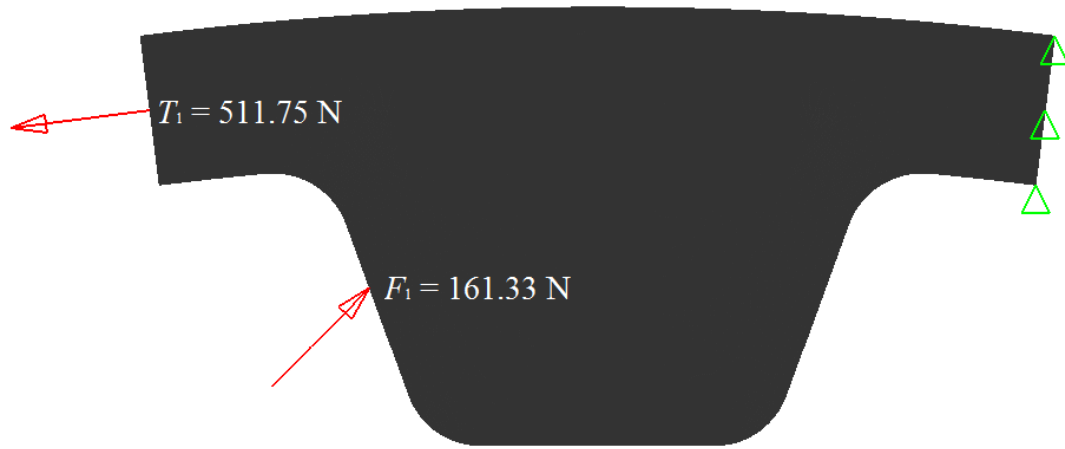


Figura 3.4. (a) Cargas aplicadas en el diente XXH cuando  $\gamma = 45.7521^\circ$ .



Figura 3.4. (b) Cargas aplicadas en el diente XXH cuando  $\gamma = 49.4973^\circ$ .

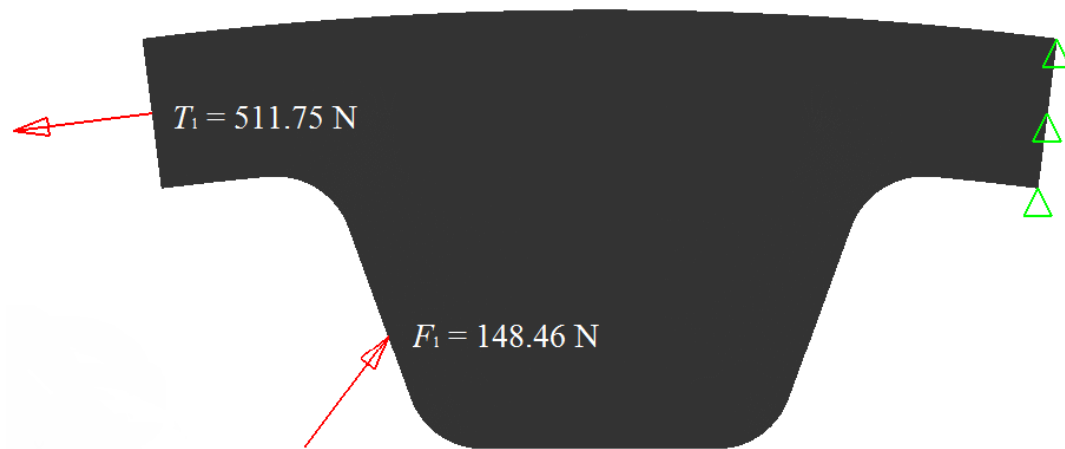


Figura 3.4. (c) Cargas aplicadas en el diente XXH cuando  $\gamma = 52.9781^\circ$ .

### 3.4.2 Fuerzas en el flanco derecho

Al igual que en la sección anterior, se resuelven las ecuaciones de equilibrio para  $F_{b,1}$ , la cual actúa en el flanco opuesto del diente (flanco derecho) en función del ángulo  $\psi$  y se reemplaza  $T_1$  por  $T_2$  dando como resultado:

$$F_{1,b}(\psi) = \sqrt{T_2^2 - 2T_2S_{2,b}(\psi) \cos \alpha + S_{2,b}^2(\psi)} \quad (26)$$

donde

$$S_{2,b}(\psi) = \frac{\tan \psi + \tan \alpha_1}{\tan \psi - \tan \alpha_1} T_2 \quad (27)$$

#### Casos de carga diente L

En la tabla 3.4 se muestran los valores de las cargas  $F_t$ ,  $T_2$ ,  $S_2$  y  $F_{1,b}$  dados  $P$ ,  $\omega_1$  y  $\gamma$  para el diente L, seguido de sus respectivos casos de carga ilustrados.

Tabla 3.4. Cargas aplicadas en el flanco derecho del diente L.

Variable	Valor
$P$	0.9396 kW
$v_{\text{eff}}$	23.812 m/s
$F_t$	39.459 N
$\alpha_1$	7.6136 °
$T_2$	11.838 N
$F_{1,b}(44.60^\circ)$	5.1680 N
$S_{2,b}(44.60^\circ)$	15.550 N
$F_{1,b}(46.70^\circ)$	4.9313 N
$S_{2,b}(46.70^\circ)$	15.250 N
$F_{1,b}(48.71^\circ)$	4.7300 N
$S_{2,b}(48.71^\circ)$	14.987 N



Figura 3.5. (a) Cargas aplicadas en el diente L cuando  $\psi = 44.60^\circ$ .



Figura 3.5. (b) Cargas aplicadas en el diente L cuando  $\psi = 46.70^\circ$ .



Figura 3.5. (c) Cargas aplicadas en el diente L cuando  $\psi = 48.71^\circ$ .

*Casos de carga diente XXH*

En la tabla 3.5 se muestran los valores de las cargas  $F_t$ ,  $T_2$ ,  $S_2$  y  $F_{1,b}$  dados  $P$ ,  $\omega_1$  y  $\gamma$  para el diente XXH, seguido de sus respectivos casos de carga ilustrados.

Tabla 3.5. Cargas aplicadas en el flanco derecho del diente XXH.

Variable	Valor
$P$	15.622 kW
$v_{\text{eff}}$	39.685 m/s
$F_t$	393.65 N
$\alpha_1$	7.2959 °
$T_2$	118.10 N
$F_{1,b}(45.7521^\circ)$	47.839 N
$S_{2,b}(45.7521^\circ)$	151.75 N
$F_{1,b}(49.4973^\circ)$	44.291 N
$S_{2,b}(49.4973^\circ)$	147.10 N
$F_{1,b}(52.9781^\circ)$	41.584 N
$S_{2,b}(52.9781^\circ)$	143.34 N



Figura 3.6. (a) Cargas aplicadas en el diente XXH cuando  $\psi = 45.7521^\circ$ .



Figura 3.6. (b) Cargas aplicadas en el diente XXH cuando  $\psi = 49.4973^\circ$ .



Figura 3.6. (c) Cargas aplicadas en el diente XXH cuando  $\psi = 52.9781^\circ$ .



### 3.4.3 Estados de esfuerzos

A continuación, se presenta la distribución de esfuerzos para ambos dientes dados todos los casos de carga.

#### Diente L

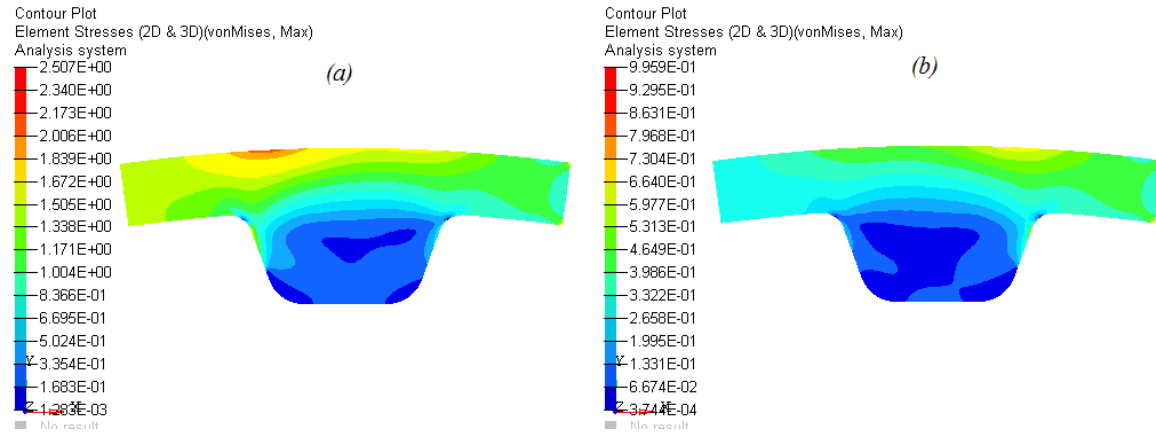


Figura 3.7. Distribución de esfuerzos, en megapascales (MPa), para (a)  $T_1$  y  $F_1(44.60^\circ)$ , (b)  $T_2$  y  $F_{1,b}(44.60^\circ)$ .

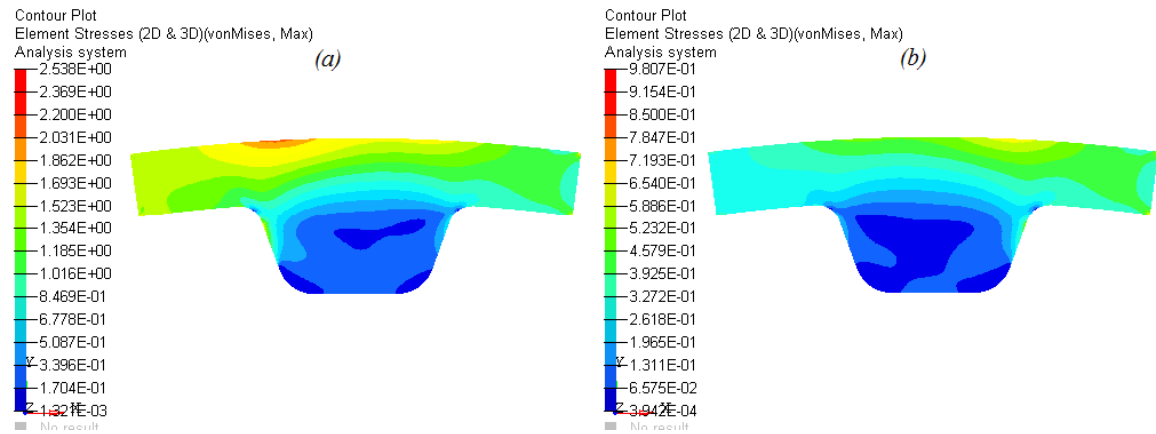


Figura 3.8. Distribución de esfuerzos, en megapascales (MPa), para (a)  $T_1$  y  $F_1(46.70^\circ)$ , (b)  $T_2$  y  $F_{1,b}(46.70^\circ)$ .

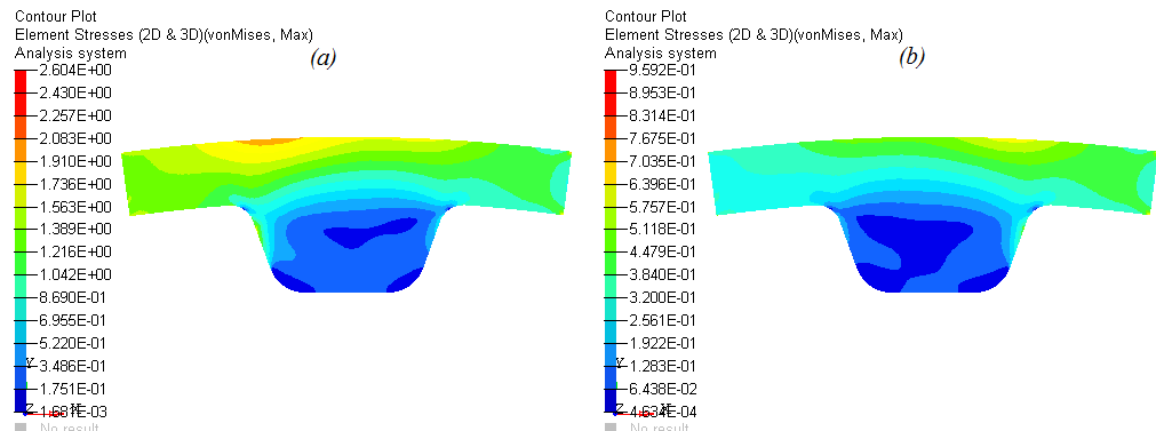


Figura 3.9. Distribución de esfuerzos, en megapascales (MPa), para (a)  $T_1$  y  $F_1(48.71^\circ)$ , (b)  $T_2$  y  $F_{1,b}(48.71^\circ)$ .

Diente XXH

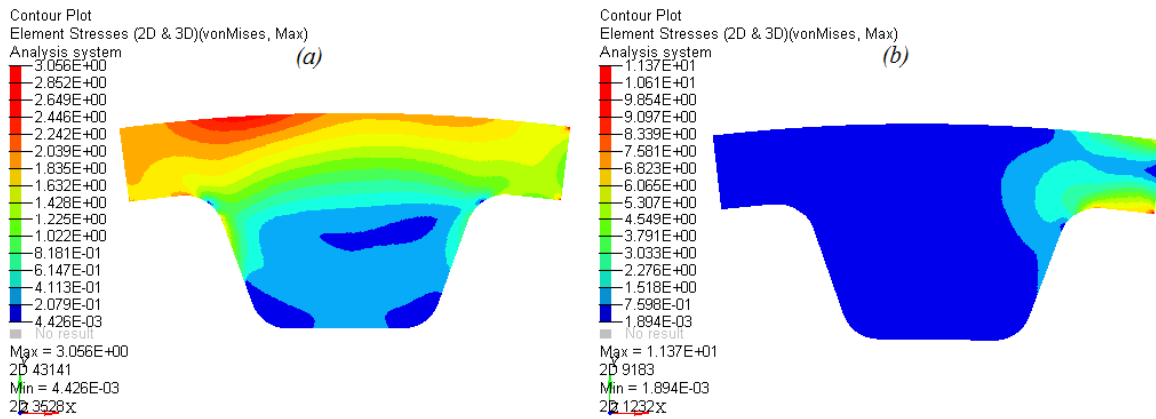


Figura 3.10. Distribución de esfuerzos, en megapascales (MPa), para (a)  $T_1$  y  $F_1(45.7521^\circ)$ , (b)  $T_2$  y  $F_{1,b}(45.7521^\circ)$ .

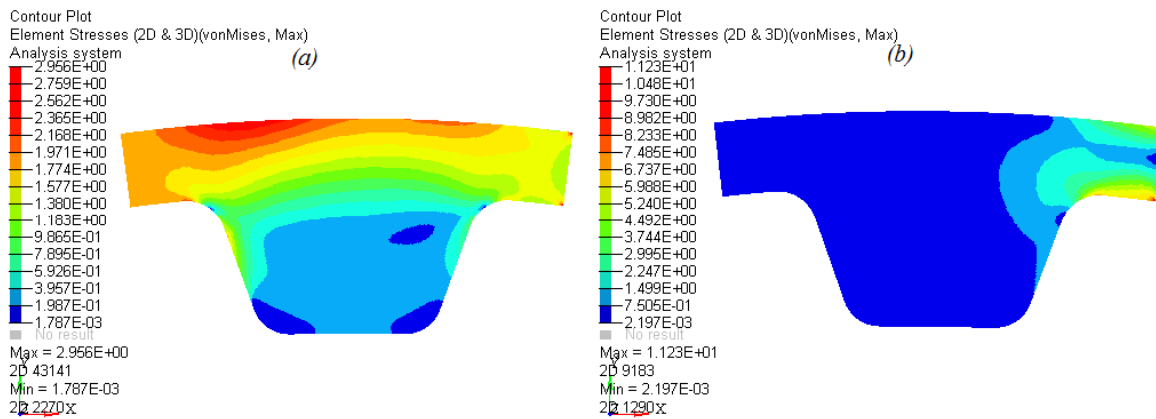


Figura 3.11. Distribución de esfuerzos, en megapascales (MPa), para (a)  $T_1$  y  $F_1(49.4973^\circ)$ , (b)  $T_2$  y  $F_{1,b}(49.4973^\circ)$ .

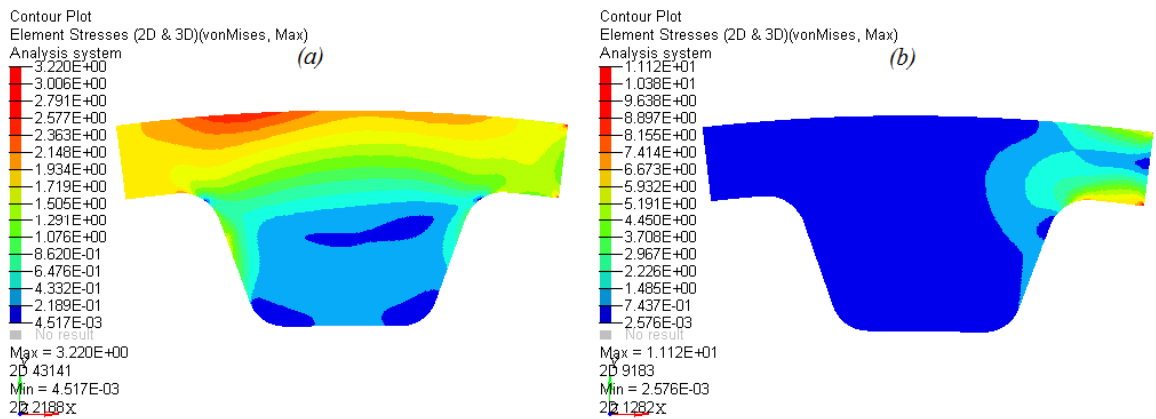


Figura 3.12. Distribución de esfuerzos, en megapascales (MPa), para (a)  $T_1$  y  $F_1(52.9871^\circ)$ , (b)  $T_2$  y  $F_{1,b}(52.9871^\circ)$ .

### 3.5 Parámetros de optimización y casos de aplicación

Para todos los casos de optimización se planteó reducir la rigidez del componente, restringiendo la masa y aplicando condiciones de simetría. Es decir,

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \textit{Weighted Compliance}$$

sujeta a  $\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$  donde

$g_1$  = porcentaje de masa.

$g_2$  = restricción de manufactura por simetría.

$\mathbf{x}$  es el vector de variables de diseño (densidades de los elementos para la optimización topológica y coordenadas nodales para la optimización de forma).

Al inverso de la rigidez se le conoce como *flexibilidad* o *compliance* y al minimizar esta, se maximiza la rigidez. La flexibilidad ponderada (o *weighted compliance*, en inglés) corresponde a la suma ponderada de todos los casos de carga para incluirlos de manera simultánea en los procesos de optimización [18].

Al aplicar restricciones de simetría se busca que la banda sea capaz de hacer traslación y rotación de manera bidireccional.

Se ejecutan varios análisis, empezando por restringir en la masa del 95 % y reduciendo cada vez más la restricción en porcentajes de 5 en 5% hasta llegar a un porcentaje donde la remoción de material haya sido considerable sin descuidar la forma y/o la topología del diente.

El material utilizado es poliuretano con  $\sigma_Y = 42.9$  MPa,  $E = 1050$  MPa,  $\rho = 1020$  kg/m<sup>3</sup> y  $\nu = 0.48$  [19] [20].

#### 3.5.1 Optimización de forma

Para ambos casos a optimizar (diente L y diente XXH), la variable de diseño corresponde a los nodos que conforman la frontera del diente, partiendo desde la curvatura entre la base y el flanco izquierdo del diente; pasando por el flanco izquierdo, la cabeza del diente, el flanco derecho y terminando en la curvatura entre la base y el flanco derecho. En esta zona de diseño se asigna una determinada cantidad de nodos como zona de transición entre la zona de diseño y la zona de no diseño para evitar que se distorsione la malla entre estas dos zonas. Así mismo, a la variable de diseño se le aplican restricciones de simetría con respecto a un plano.

En ambos modelos, la masa total del diente es la función de restricción y la función objetivo es la flexibilidad ponderada para incluir a todos los casos de carga de manera simultánea en el proceso de optimización.

##### *Caso I*

Se aplican los parámetros de optimización de forma al diente L, permitiendo que la frontera del diente se pueda achicar o agrandar según lo requiera la optimización durante las iteraciones.

##### *Caso II*

Se aplican los parámetros de optimización de forma al diente XXH, donde al igual que en el caso I, se permite que la frontera del diente se mueva de manera bidireccional, según lo requiera.

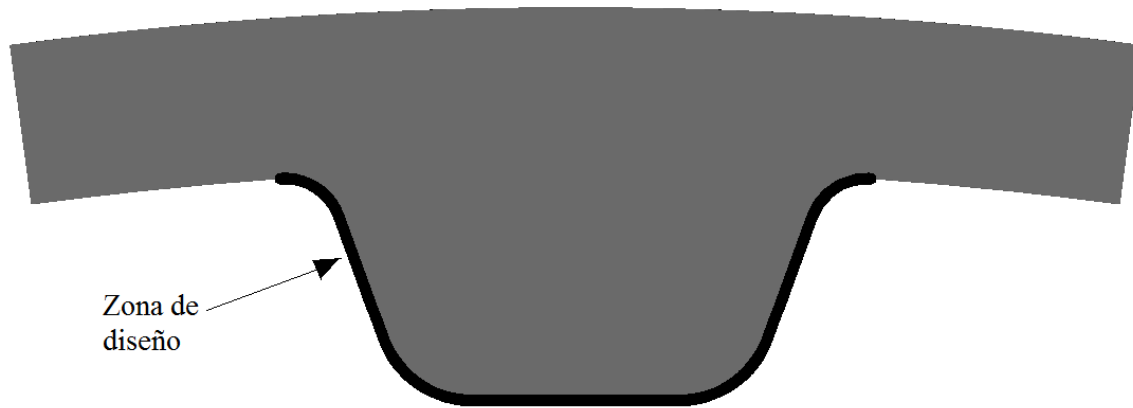


Figura 3.13. Zona de diseño para optimización de forma del diente L.

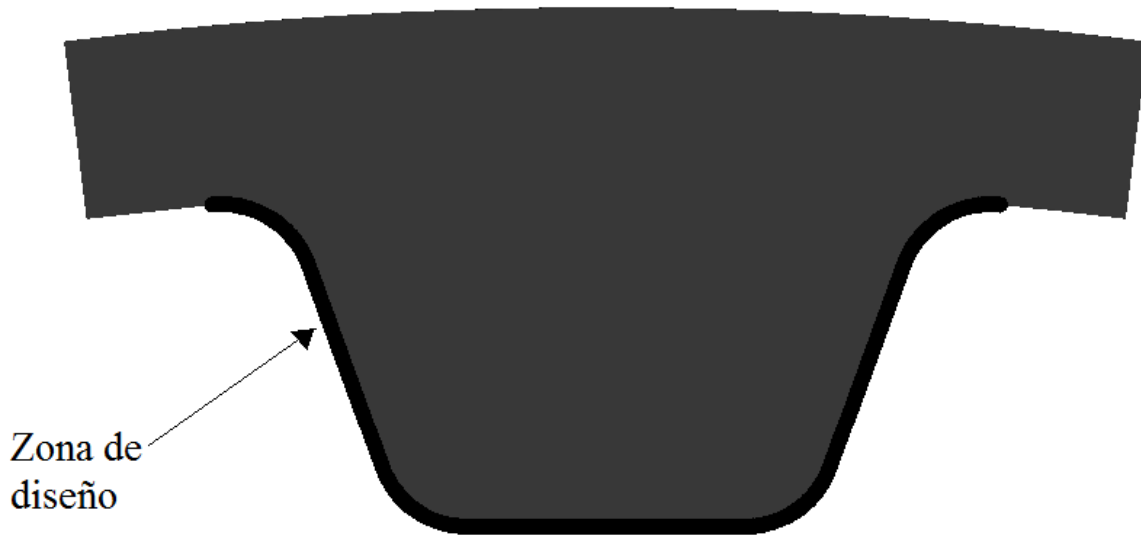


Figura 3.14. Zona de diseño para optimización de forma del diente XXH.

### 3.5.2 Optimización topológica

En ambos modelos la zona de diseño es el interior del diente, la cual está limitada por el círculo base (o de raíz) y un *offset* de las líneas que conforman la frontera del diente, a saber, los flancos y la cabeza del diente (figuras 3.15 y 3.16). Además, al definir la variable de diseño se le asigna la restricción de simetría con respecto a un plano.

Al tratarse de una optimización topológica solo se considera la masa de la zona de diseño.

Al igual que en la optimización de forma, se minimizará la flexibilidad ponderada con la cual se consideran todos los casos de carga para maximizar la rigidez global.

#### Caso III

La distancia del *offset* corresponde a 0.508 mm, con lo cual se obtendría un espesor de pared delgada mayor que el espesor de pared delgada mínimo que se requiere para el proceso de fundición, proceso por el cual se fabrican estas bandas.

*Caso IV*

La distancia del *offset* corresponde a 2.7 mm, mayor que el espesor de pared delgada mínimo para el proceso de fundición y que a su vez es mayor que la altura total de otros modelos de banda más pequeños.



Figura 3.15. La zona de color más tenue representa la zona de diseño para optimización topológica en el diente L.



Figura 3.16. La zona de color más tenue representa la zona de diseño para optimización topológica del diente XXH.

### 3.6 Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para los cuatros casos de optimización.

#### 3.6.1 Optimización de forma

##### Caso I

En la figura 3.17 se muestran los resultados obtenidos de la optimización de forma del diente L, mostrando la forma inicial del diente y la forma que se obtuvo al final de la optimización. La escala mostrada en la figura mide los desplazamientos de la malla, medidos en milímetros.

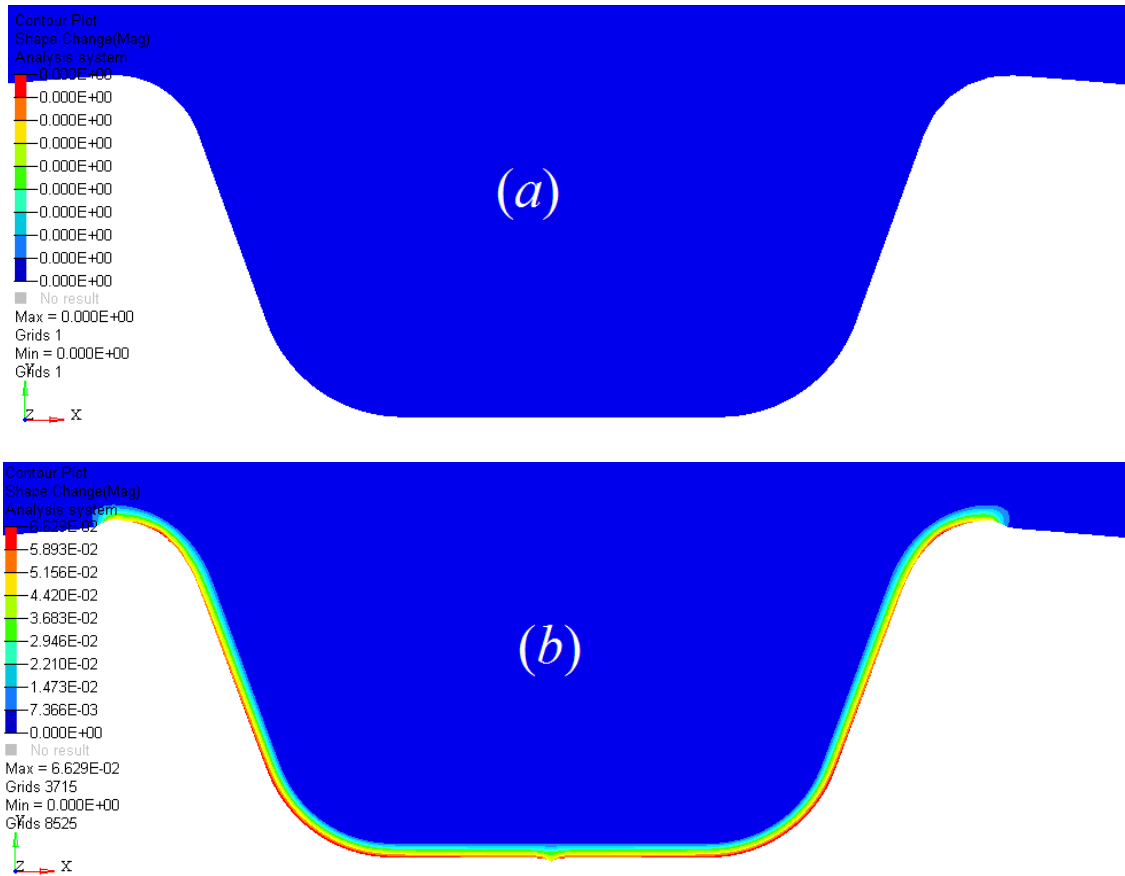


Figura 3.17. (a) Forma inicial del diente durante la optimización (iteración cero). (b) Forma final del diente durante la optimización.

##### Caso II

En la figura 3.18 se muestran los resultados obtenidos de la optimización de forma para el diente XXH. Al igual que en el caso I, se muestran la forma inicial y la forma final del diente, y la escala que mide los desplazamientos de la malla, también en milímetros.

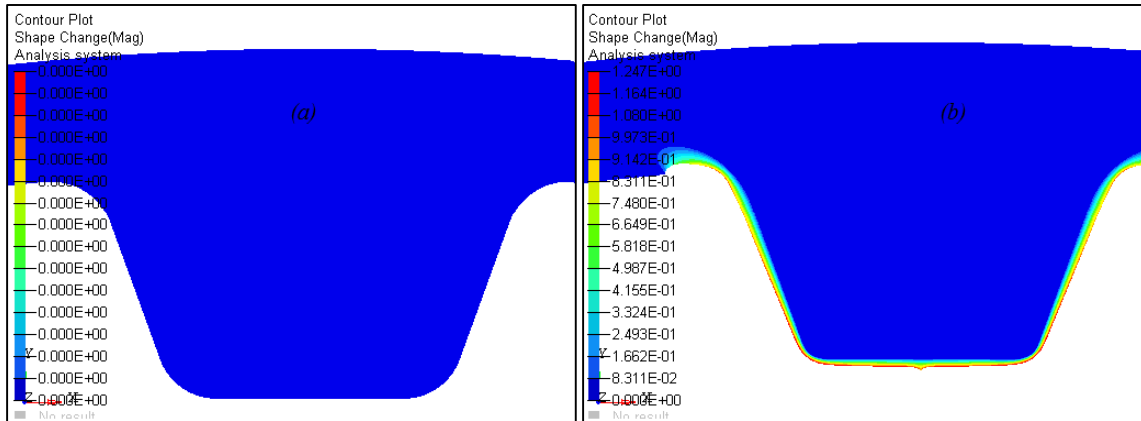


Figura 3.18. (a) Forma inicial del diente durante la optimización. (b) Forma final del diente durante la optimización.

### 3.6.2 Optimización topológica

#### Caso III

La figura 3.19 muestra los resultados obtenidos de la optimización topológica para el diente L. Las distintas tonalidades, mostradas en la escala que acompaña a la figura, representan el valor de los espesores en la zona de diseño. El color rojo representa a las zonas de mayor espesor, siendo este el espesor original del diente. Mientras que las zonas en color azul oscuro representan las zonas de menor espesor. Las demás tonalidades son valores intermedios del espesor.

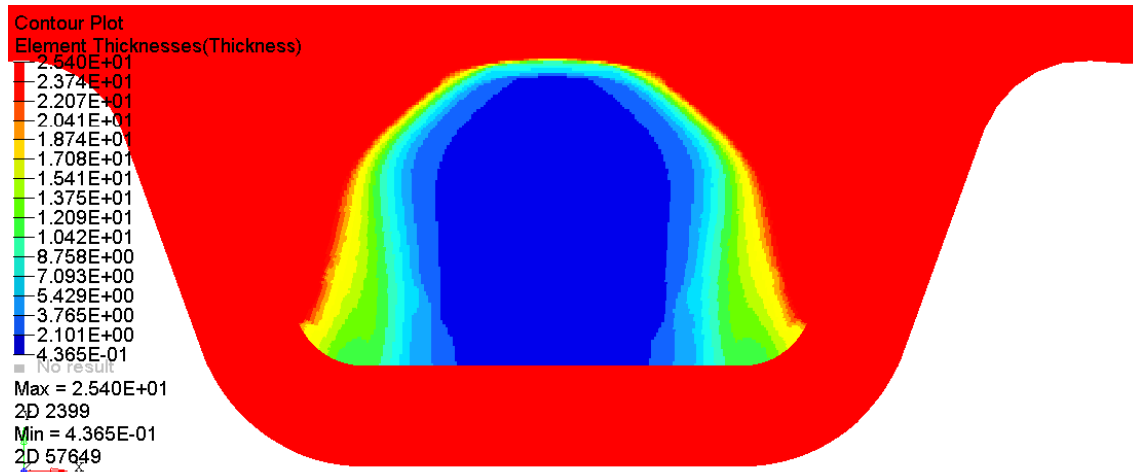


Figura 3.19. Distribución de espesores entre 0 y 1 para el diente L.

#### Caso IV

La figura 3.20 muestra los resultados obtenidos de la optimización topológica para el diente XXH. Al igual que en el caso III, el color rojo es para las zonas que conservan el espesor original del diente. Mientras que el color azul es para las zonas con menor espesor y las demás tonalidades representan valores intermedios.

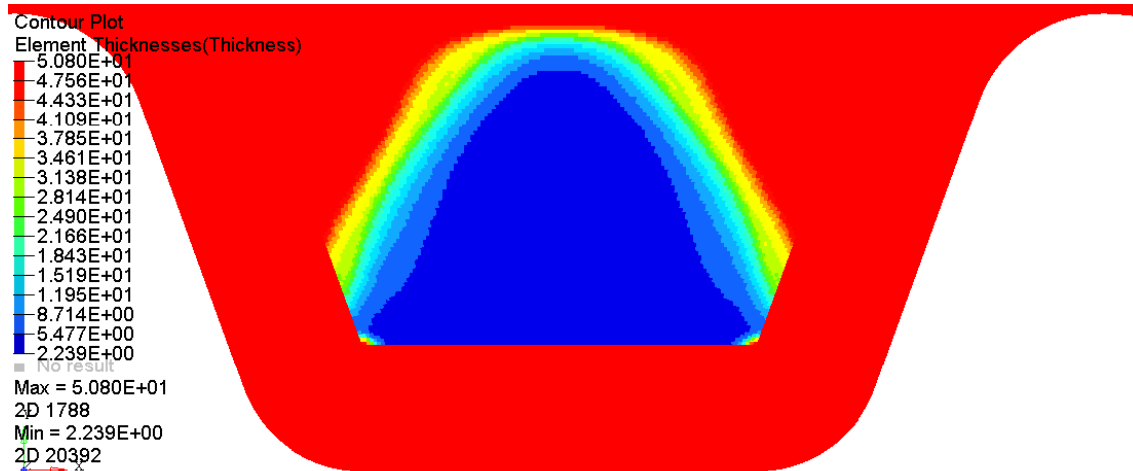


Figura 3.20. Distribución de espesores entre 0 y 1 para el diente XXH.



## Capítulo 4. Discusión de resultados

En la presente sección se evalúan los resultados obtenidos en las optimizaciones y se selecciona el modelo más adecuado para su diseño, del cual se deben proporcionar los parámetros necesarios para generar el nuevo diseño.

### 4.1 Evaluación y selección de resultados

#### Caso I. Optimización de forma para el diente L

Durante la iteración 0, al tener una cantidad de masa mayor a la que demanda la restricción se dice que ésta se está violando.

Posteriormente, cuando los cambios en la función objetivo y el porcentaje de violación de restricción son muy pequeños durante las últimas 3 iteraciones consecutivas, se dice que la optimización ha convergido.

Al final del proceso de optimización la restricción permaneció violada y, consecuentemente, este resultado se descarta.

#### Caso II. Optimización de forma para el diente XXH

Se obtuvieron cambios de forma para una restricción de la masa hasta del 85%; sin embargo, los cambios de forma sólo mostraron una reducción de tamaño del diente, conservando así la forma trapezoidal del diente. Dicho lo anterior, no hay un verdadero cambio de forma y, por consiguiente, este resultado queda descartado.

#### Caso III. Optimización topológica para el diente L

Fue posible realizar la optimización, restringiendo la masa hasta el 50% del total de la masa de la zona de diseño. Sin embargo, el espesor de pared delgada de la nueva topología es incapaz de darle la rigidez necesaria a la banda para sus tareas a realizar. Por consiguiente, el resultado queda descartado.

#### Caso IV. Optimización topológica para el diente XXH

Al igual que en el caso III, la optimización se realizó hasta restringir la masa al 50%, siempre satisfaciendo las restricciones y al tener un espesor lo bastante grueso como para darle rigidez al modelo, este se selecciona para una nueva propuesta de diseño.

### 4.2 Parámetros de diseño

Ahora que se ha seleccionado uno de los resultados obtenidos mediante la optimización topológica, es necesario conocer los parámetros que dan forma a esta nueva topología. Para ello, se hace un ajuste de curvas con algunos puntos clave que conforman la topología, tal que estas curvas den forma a la topología del diente.

Para garantizar la rigidez del diente, en lugar de crear un orificio con la forma mostrada en los resultados, se harán dos orificios ciegos en ambas caras del diente, teniendo estos orificios una profundidad de 23.161 mm.

#### Ajuste de curvas

Los puntos  $A(-4.196, 2.698)$ ,  $B(-2.404, 6.237)$  y  $C(-0.483, 8.543)$  de la figura 4.1 le darán la forma a la superficie del fondo del diente, mientras que los puntos  $D(-4.985, 4.872)$ ,  $E(-2.888, 8.734)$  y  $F(-1.039, 9.505)$  darán la forma al orificio ciego en la cara del diente.

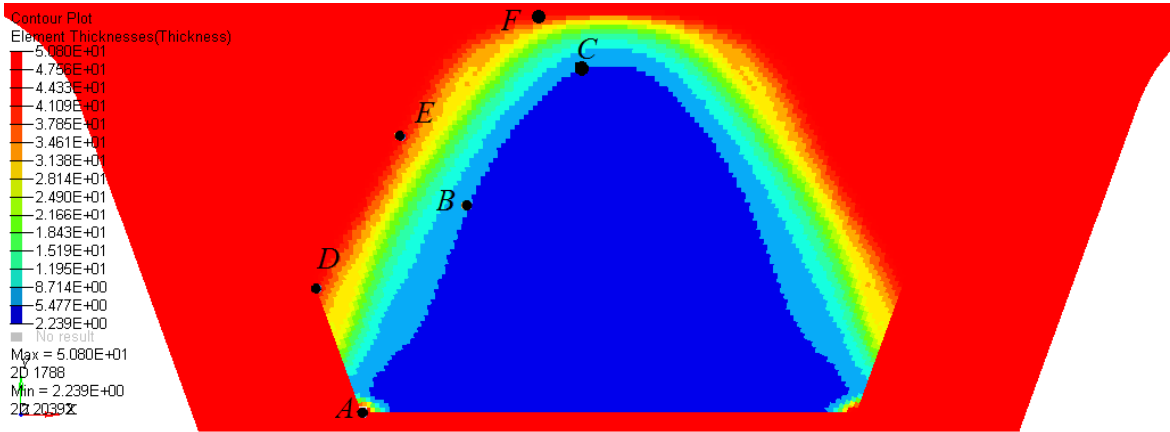


Figura 4.1. Puntos clave para la parametrización de la nueva geometría.

Los puntos  $D$ ,  $E$  y  $F$  deben pasar por la parábola  $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ , de tal forma que al sustituirse estos 3 puntos para  $x$  y  $y$  se forma un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas (los parámetros  $a_1$ ,  $b_1$  y  $c_1$ ) cuya solución única da como resultado la siguiente parábola:

$$y = -0.361x^2 - 1.001x + 8.805 \quad (28)$$

Los puntos  $A$  y  $D$  están unidos por la recta  $y = mx + b$ , tal que al sustituirse forman un sistema de ecuaciones de  $2 \times 2$  y su solución única al sustituirse en la ecuación de la recta, se obtiene el siguiente resultado:

$$y = -2.755x - 8.865 \quad (29)$$

La línea horizontal que pasa por el punto  $A$  se puede representar con la recta  $y = 2.698$  mientras que la línea horizontal que pasa por  $F$  se puede representar con la recta  $y = 9.505$ .

Dado que hay condiciones de simetría para la topología, los resultados anteriores se pueden extender al resto de las fronteras del orificio, de tal forma que este se puede parametrizar de la siguiente manera:

- La recta  $y = 2.698$  para  $-4.196 \leq x \leq 4.196$  en la base del hueco.
- La parábola  $y = -0.361x^2 - 1.001x + 8.805$  para los intervalos  $(-4.985, -1.039) \cup (1.039, 4.985)$  y las rectas  $y = \pm 2.755x - 8.865$  para  $[-4.985, -4.196]$  (signo negativo) y  $[4.196, 4.985]$  (signo positivo) para los costados.
- Y la recta  $y = 9.505$  para  $-1.039 \leq x \leq 1.039$  en la parte superior.

Aplicando el mismo método a la parábola  $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$  con  $A$ ,  $B$  y  $C$  se obtiene la parábola:

$$y = -0.208x^2 + 0.599x + 8.905 \quad (30)$$

Para que el orificio tenga un ángulo de desmolde, las curvas que parametrizan la superficie en el fondo del orificio serán desplazadas por un valor de 0.481 en la dirección  $y$ , este valor es la mitad de la distancia que hay entre las rectas  $y = 9.505$  e  $y = 8.543$ , de tal forma que la parametrización de esta superficie queda representada de la siguiente manera:

- La parábola  $y = -0.208x^2 + 0.599x + 9.386$  para  $-4.196 \leq x \leq -0.483$  y  $0.483 \leq x \leq 4.196$  en los costados.
- La recta  $y = 3.179$  para  $-4.196 \leq x \leq 4.196$  en la base.
- Y la recta  $y = 9.024$  en la parte superior.

### 4.3 Geometría propuesta

Conociendo la parametrización de la nueva topología, es posible crear un modelo de su geometría (figura 4.2) para un posterior análisis FEM con los mismos casos de carga aplicados al modelo original XXH.

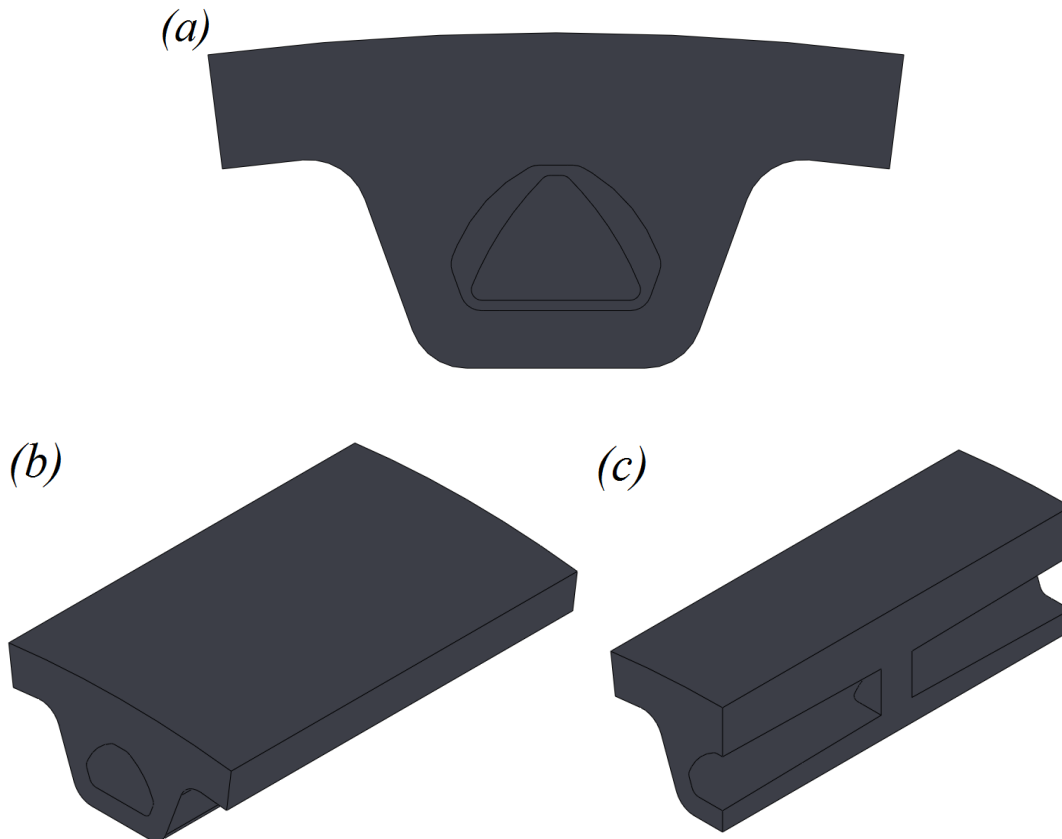


Figura 4.2. Modelo CAD de la geometría propuesta hecho mediante SolidWorks. (a) Vista frontal. (b) Vista isométrica. (c) Vista de sección.

#### 4.3.1 Análisis

En comparación con el modelo original, se sigue utilizando el mismo material y sus propiedades mecánicas siguen siendo las mismas, así como también las condiciones de frontera con los mismos casos de carga. Dicho lo anterior, se crea una nueva malla para el modelo con el material y las condiciones de frontera antes mencionadas. Posteriormente, se realiza el análisis en Optistruct.

A continuación, en las figuras 4.3, 4.4 y 4.5, se muestran los resultados de los análisis de carga. Para cada caso de carga, se muestra la distribución de esfuerzos de von Mises en la vista frontal y en la vista superior del modelo, esto último con la finalidad de mostrar que la distribución de esfuerzos en el ancho de la banda no es desigual y, por lo tanto, no se presentará el problema de que la banda intente abandonar la polea (sección 2.6).

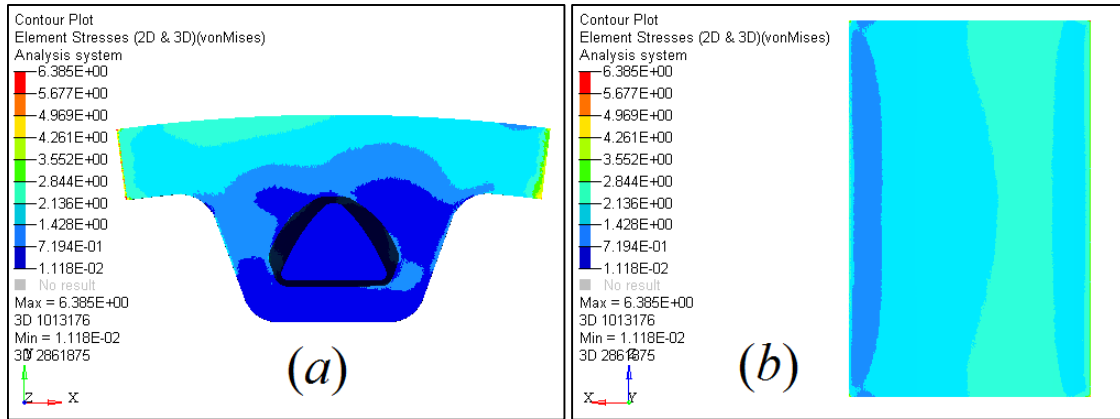


Figura 4.3. Vista frontal (a) y vista superior (b) de las distribuciones de esfuerzos de von Mises (en unidades de MPa) para la fuerza  $F_1(45.7521^\circ)$  aplicada en el flanco izquierdo del diente. En la vista superior se puede apreciar que la distribución de esfuerzos en el ancho de la banda es simétrica y, por lo tanto, la banda no abandonará la polea (sección 2.6).

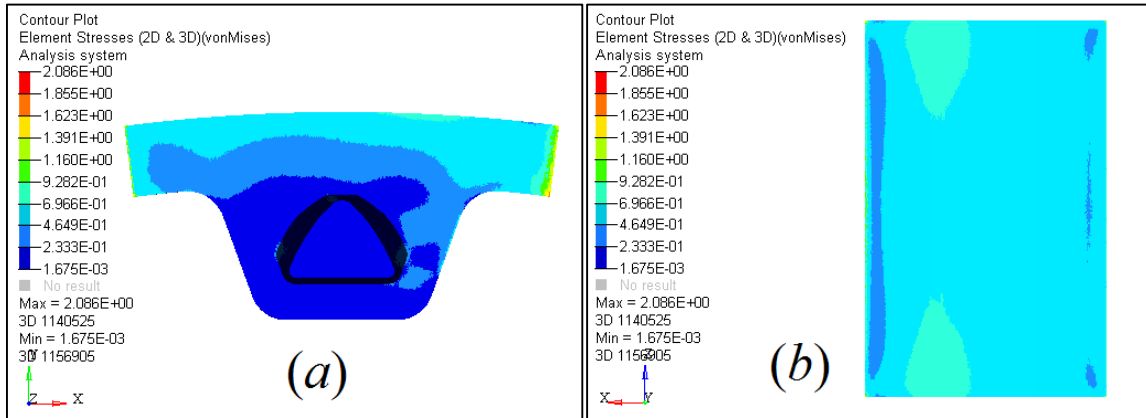


Figura 4.4. Vista frontal (a) y vista superior (b) de las distribuciones de esfuerzos de von Mises (en unidades de MPa) para la fuerza  $F_{1,b}(45.7521^\circ)$  aplicada en el flanco derecho del diente. En la vista superior se puede apreciar que la distribución de esfuerzos en el ancho de la banda es simétrica y, por lo tanto, la banda no abandonará la polea (sección 2.6).

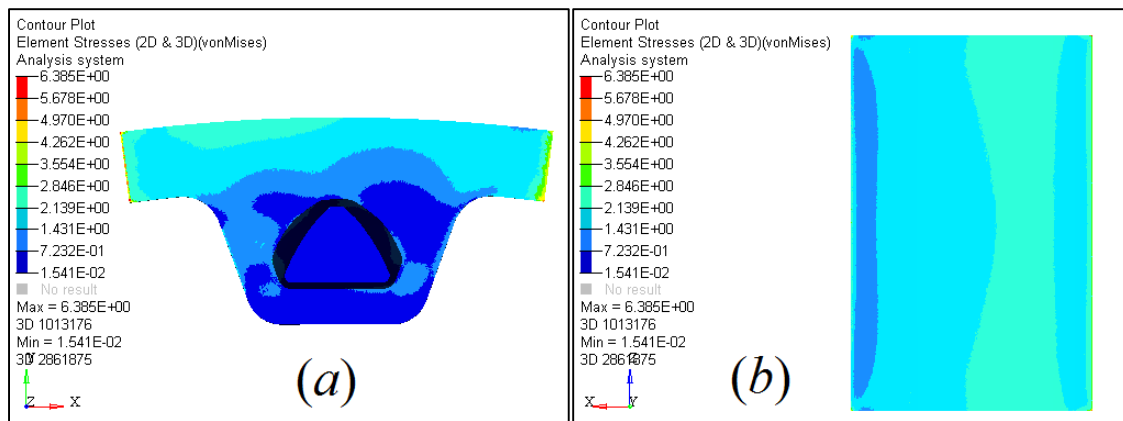


Figura 4.5. Vista frontal (a) y vista superior (b) de las distribuciones de esfuerzos de von Mises (en unidades de MPa) para la fuerza  $F_1(49.4973^\circ)$  aplicada en el flanco izquierdo del diente. En la vista superior se puede apreciar que la distribución de esfuerzos en el ancho de la banda es simétrica y, por lo tanto, la banda no abandonará la polea (sección 2.6).

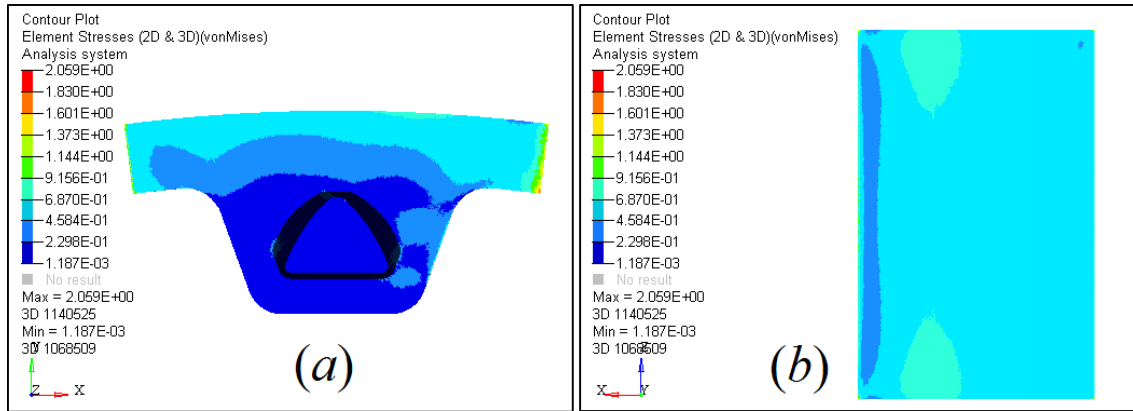


Figura 4.6. Vista frontal (a) y vista superior (b) de las distribuciones de esfuerzos de von Mises (en unidades de MPa) para la fuerza  $F_{1,b}(49.4973^\circ)$  aplicada en el flanco derecho del diente. En la vista superior se puede apreciar que la distribución de esfuerzos en el ancho de la banda es simétrica y, por lo tanto, la banda no abandonará la polea (sección 2.6).

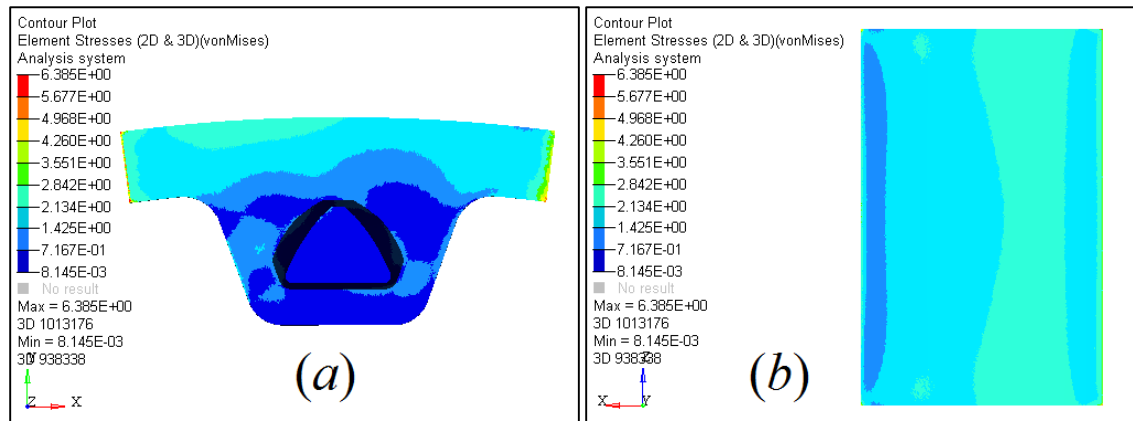


Figura 4.7. Vista frontal (a) y vista superior (b) de las distribuciones de esfuerzos de von Mises (en unidades de MPa) para la fuerza  $F_1(52.9781^\circ)$  aplicada en el flanco izquierdo del diente. En la vista superior se puede apreciar que la distribución de esfuerzos en el ancho de la banda es simétrica y, por lo tanto, la banda no abandonará la polea (sección 2.6).

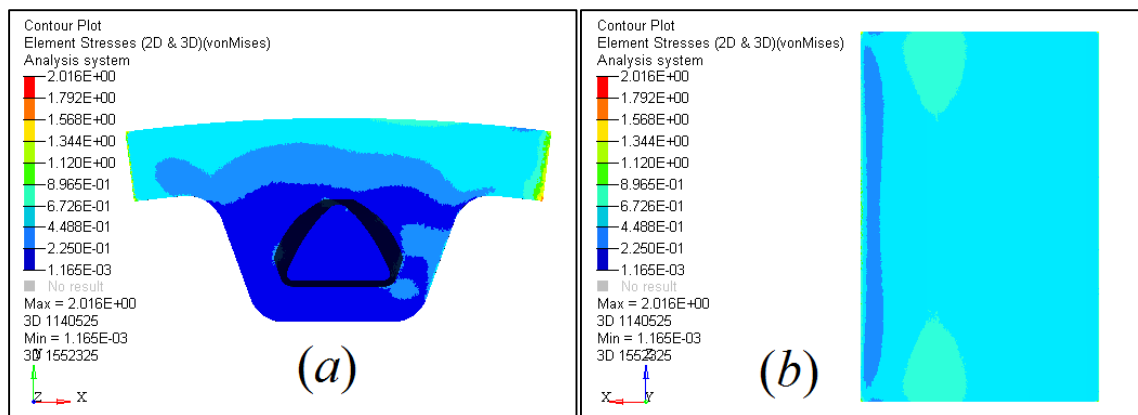


Figura 4.8. Vista frontal (a) y vista superior (b) de las distribuciones de esfuerzos de von Mises (en unidades de MPa) para la fuerza  $F_{1,b}(52.9781^\circ)$  aplicada en el flanco izquierdo del diente. En la vista superior se puede apreciar que la distribución de esfuerzos en el ancho de la banda es simétrica y, por lo tanto, la banda no abandonará la polea (sección 2.6).

### 4.3.2 Comparativa

A continuación, se hace una comparación de las distribuciones de esfuerzos entre la geometría del diente XXH antes de la optimización y las distribuciones de esfuerzos del diente XXH optimizado.

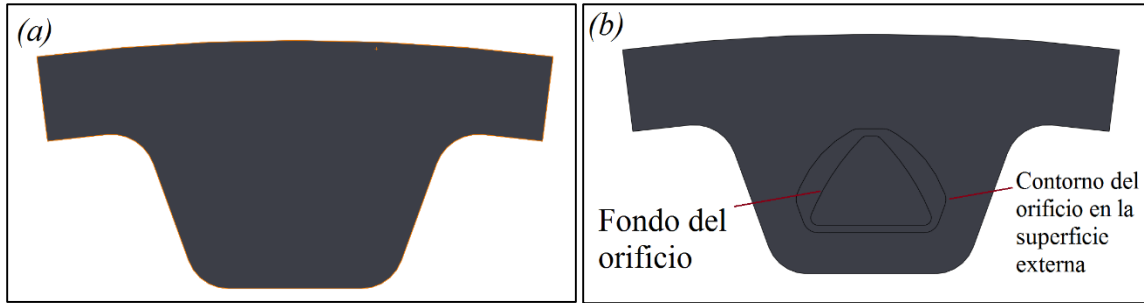


Figura 4.9. (a) Diente XXH antes de la optimización. (b) Diente XXH después de la optimización.

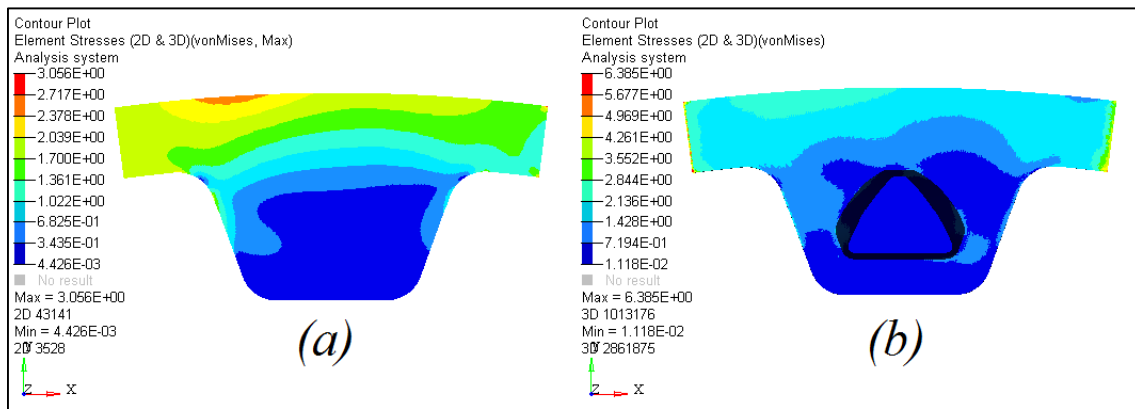


Figura 4.10. Distribución de esfuerzos, en megapascales (MPa), para las cargas  $T_1$  y  $F_1(45.7521^\circ)$ . (a) Antes de la optimización. (b) Después de la optimización.

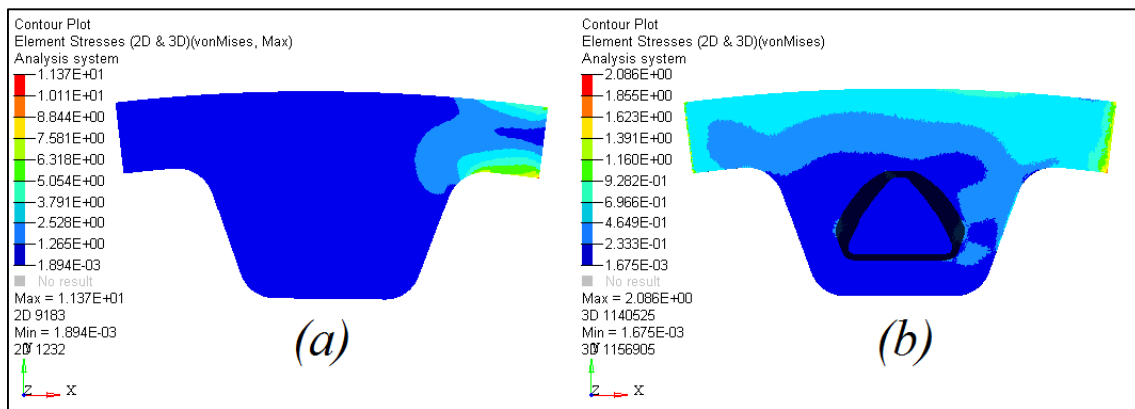


Figura 4.11. Distribución de esfuerzos, en megapascales (MPa), para las cargas  $T_2$  y  $F_{1,b}(45.7521^\circ)$ . (a) Antes de la optimización. (b) Después de la optimización.

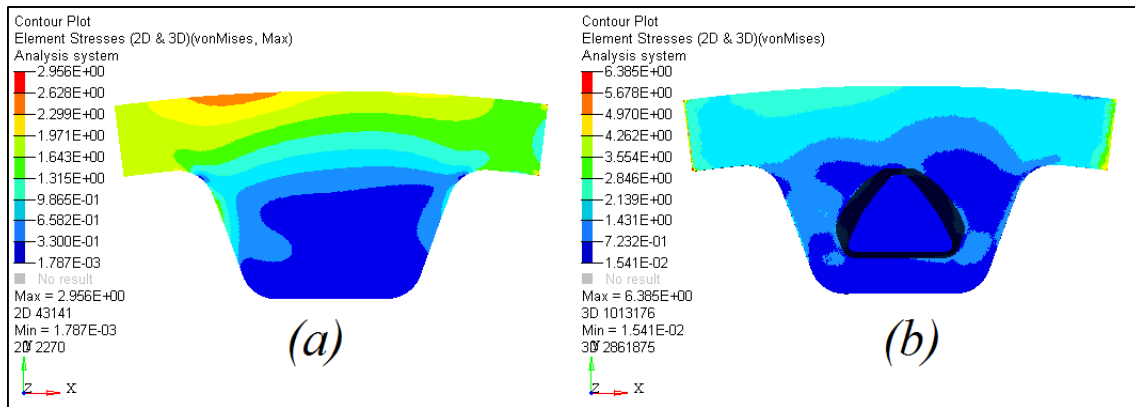


Figura 4.12. Distribución de esfuerzos, en megapascales (MPa), para las cargas  $T_1$  y  $F_1(49.4973^\circ)$ . (a) Antes de la optimización. (b) Después de la optimización.

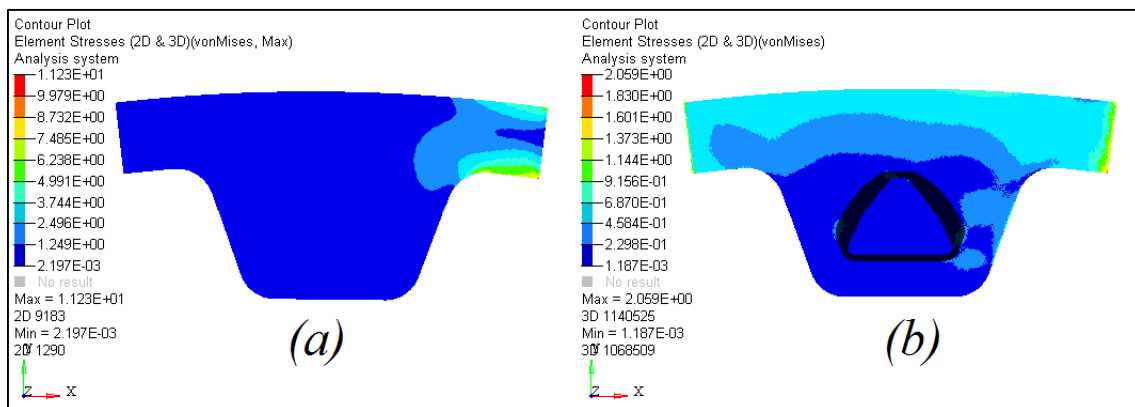


Figura 4.13. Distribución de esfuerzos, en megapascales (MPa), para las cargas  $T_2$  y  $F_{1,b}(49.4973^\circ)$ . (a) Antes de la optimización. (b) Después de la optimización.

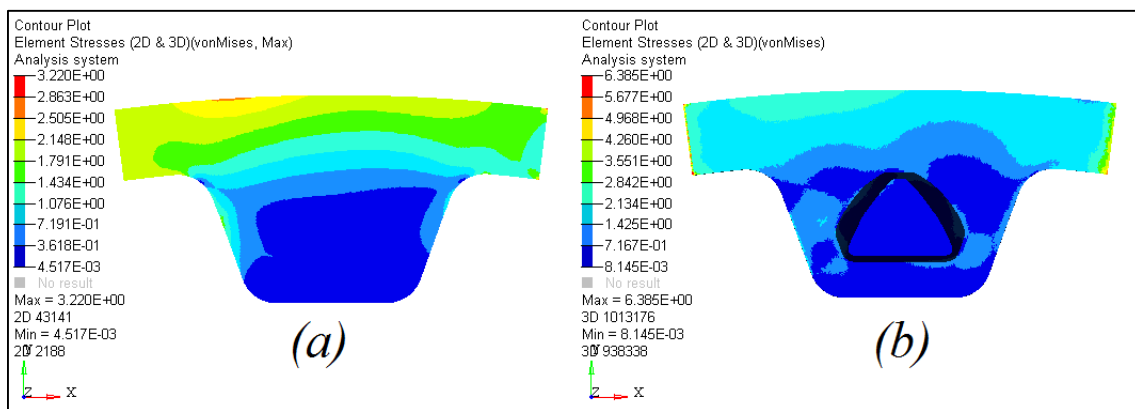


Figura 4.14. Distribución de esfuerzos, en megapascales (MPa), para las cargas  $T_1$  y  $F_1(52.9871^\circ)$ . (a) Antes de la optimización. (b) Después de la optimización.

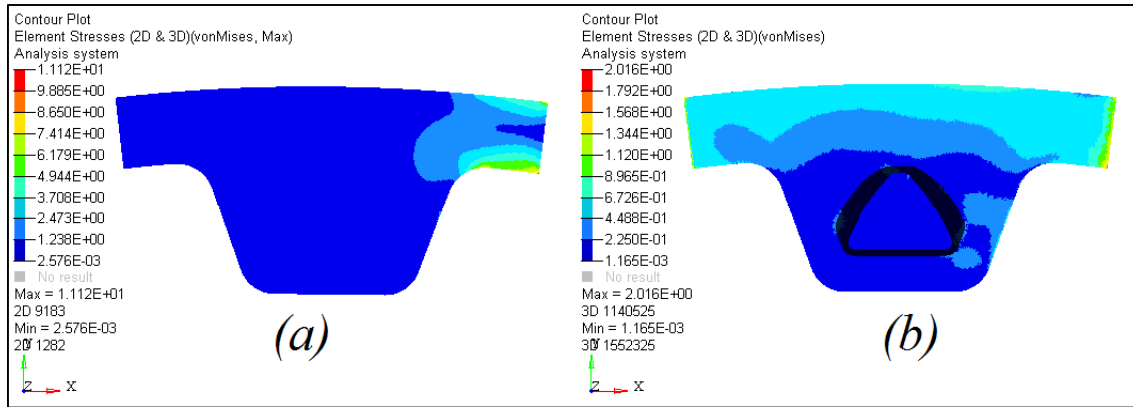


Figura 4.15. Distribución de esfuerzos, en megapascales (MPa), para las cargas  $T_2$  y  $F_{1,b}(52.9871^\circ)$ . (a) Antes de la optimización. (b) Después de la optimización.

En las figuras 4.10 a 4.15 se observan las distribuciones de esfuerzos para los seis casos de carga aplicados en el diente XXH antes y después de la optimización. Para los seis casos de carga antes de la optimización se puede observar que hay pequeñas regiones donde se concentran los esfuerzos de von Mises de mayor magnitud, mientras que el resto del dominio de diseño tiene valores de esfuerzo muy bajos en comparación con los esfuerzos máximos. En cambio, para los seis casos de carga después de la optimización, se puede observar que las distribuciones de esfuerzos son más uniformes sin que se presenten concentradores de esfuerzos. Además de lo anterior, aunque los valores máximos de esfuerzo se incrementaron casi en un 200 % para las cargas aplicadas en el flanco izquierdo del diente, estos siguen estando por debajo del esfuerzo de cedencia  $\sigma_Y = 42.9$  MPa. Mientras que para las cargas aplicadas en el flanco derecho del diente el valor máximo del esfuerzo de von Mises se redujo casi en una quinta parte de su magnitud, dejando así, una mejor distribución de esfuerzos. Y, por lo tanto, la banda optimizada no fallará durante su operación.

Por lo visto en esta sección y en la sección anterior, se ha demostrado que la distribución de esfuerzos en el diente de la banda optimizada es más uniforme y que, además, la distribución de esfuerzos en el ancho de la banda es simétrica de tal forma que la banda será incapaz de abandonar la polea durante su operación. Es por esto, que en la siguiente sección se hará una propuesta para su posible manufactura.

#### 4.4 Propuesta de fabricación

En un principio se contempló el moldeo por inyección a reacción (*RIM*, por sus siglas en inglés). Esto, por ser un proceso en el cual se trabaja ampliamente con el poliuretano y que se puede aplicar para partes con geometrías complicadas. Sin embargo, debido a que las dimensiones de los dientes, sus espaciamentos entre estos y las dimensiones de la banda exceden la mayoría de las dimensiones máximas permitidas (ver tabla 4.1 y figura 4.6) para esta técnica, éstas características provocarían un hundimiento en el lado plano de la banda durante el proceso de moldeo [21] (figura 4.7).

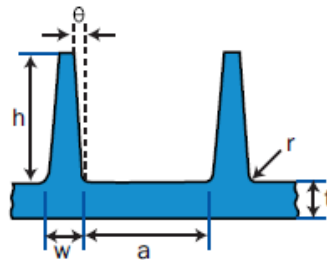
Sin embargo, si se combina lo mejor del moldeo por inyección a reacción junto con el moldeo por compresión se obtiene el proceso de moldeo por inyección-compresión. Proceso en el cual se evita el hundimiento desigual de la pieza, haciendo que éste sea uniforme en toda la superficie plana de la banda. Además de esto, se tiene la ventaja de que este proceso es fácil de automatizar, los acabados superficiales tienen mejor calidad y es más barato si se aplica para grandes volúmenes de producción.



Otra alternativa, es el ya utilizado proceso de fundición con el cual se obtienen mejores propiedades físicas y el costo de los moldes es menor que en el proceso de moldeo por inyección-compresión. Sin embargo, se tiene la desventaja de que el costo por parte es mayor al ser un proceso más intensivo.

Tabla 4.1. Tabla comparativa entre los requisitos para el diseño de costillas y las dimensiones del diente de la banda.

Requisito [21]	Dimensión de la banda
-	$t = 6.17 \text{ mm}$
$0.13 \text{ mm} \leq r \leq 0.2 \text{ mm}$	$r = 3.18 \text{ mm} > 0.2 \text{ mm}$
$a \geq 3t$	$a = 12.7 \text{ mm} < 3t$
$0.5t \leq w \leq 0.8t$	$w = 19.05 \text{ mm} > 0.8t$
$2.5t \leq h \leq 5t$	$h = 9.530 \text{ mm} < 2.5t$
$0.5^\circ \leq \theta \leq 2^\circ$	$\beta = 20^\circ > 2^\circ$ ( $\theta$ en la figura 4.6)



Diseño de costillas

Figura 4.16. Parámetros a seguir para el diseño de costillas mediante RIM [21].

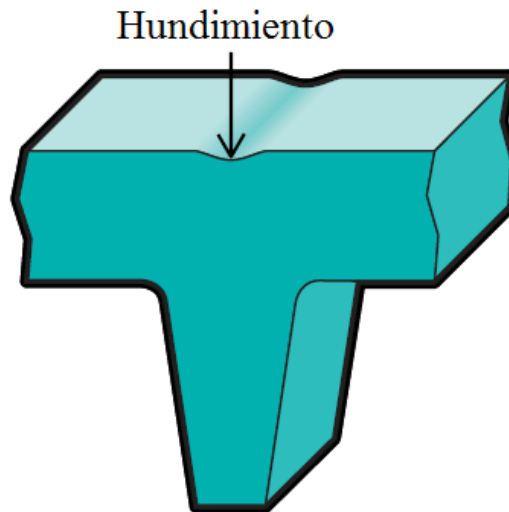


Figura 4.17. Hundimiento cuando se exceden las dimensiones máximas permitidas para RIM [22].

## Conclusiones

Se han aplicado los métodos de optimización de forma y optimización topológica al diente de una banda con perfil trapecoidal, en tamaños L y XXH.

Para la optimización de forma, en ambos tamaños, no se obtuvieron resultados satisfactorios. Para el caso del diente L, la masa no se pudo reducir ni al 95% de la masa total del diente, debido a los cambios poco significativos en la forma del diente. Mientras que para el diente XXH, la restricción fue posible hasta en un 85%, pero no se obtuvieron cambios de forma, sino cambios de tamaño que, además, reducían el tamaño en la cabeza del diente.

Por otro lado, la optimización topológica mostró resultados más interesantes, porque en ambos casos fue posible reducir la masa de la zona de diseño hasta en un 50%. Pese a estos resultados, se descartaron los resultados del diente L, porque su espesor de pared delgada era demasiado pequeño para aportar la rigidez necesaria para el correcto funcionamiento de la banda y un aumento de este espesor provocaría una disminución en la zona de diseño, imposibilitando así una reducción de masa considerable.

En el caso de la optimización topológica del diente XXH, su espesor de pared delgada al ser de un tamaño considerable (incluso más grande que el alto de algunos modelos de banda más pequeños) puede proporcionar la suficiente rigidez que la banda requiere para su operación. De este modo, este resultado se eligió como propuesta de diseño.

Teniendo la nueva propuesta de diseño, se construye un modelo CAD de su geometría (ver figura 4.2) para, posteriormente, hacer un análisis FEM de las mismas cargas que se aplicaron en el modelo original y comparar los resultados como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla C.1. Comparación de las características entre las bandas XXH original y rediseñada.

Característica	Banda original	Banda rediseñada
Masa por diente (g)	17.36	15.41
Masa total (kg)	1.944	1.726
Volumen por diente (mm <sup>3</sup> )	17015.47	15105.48
Volumen total (mm <sup>3</sup> )	$1.906 \times 10^6$	$1.692 \times 10^6$
Esfuerzo máximo de von Mises por caso de carga (MPa)		
$F_1(45.7521^\circ)$	3.056	6.385
$F_{1,b}(45.7521^\circ)$	11.37	2.086
$F_1(49.4973^\circ)$	2.956	6.385
$F_{1,b}(49.4973^\circ)$	11.23	2.059
$F_1(52.9781^\circ)$	3.220	6.385
$F_{1,b}(52.9781^\circ)$	11.12	2.016

Como es de observarse en la tabla, al multiplicar el volumen (o la masa) de un solo diente y multiplicarlo por el número total de dientes en la banda se obtiene el volumen total de la banda que, comparado con el volumen de la banda original, éste se ha reducido de hasta en un 11.21% del volumen total de la banda original.

Además de lo anterior, los valores máximos de esfuerzo de von Mises se incrementaron en más de un 200%, pero aun siendo menores que  $\sigma_y$ , para las cargas aplicadas en el flanco izquierdo. Mientras que los valores máximos de esfuerzo para las cargas aplicadas en el flanco derecho han disminuido hasta

en una quinta parte del valor de esfuerzo que se tenía originalmente. Sin embargo, en todos los casos de carga la distribución de esfuerzos es más uniforme y no hay concentradores de esfuerzos.

Gracias a que se modificó el interior del diente y no el exterior, como se intentó en un principio, estas bandas, de ser fabricadas, ofrecen la gran ventaja de ser perfectamente intercambiables con las bandas de dientes trapezoidales ya existentes en el mercado. Esto se debe a que sus correspondientes poleas compartirían el mismo tipo de ranura. Consecuentemente, una vez teniendo una geometría optimizada, se hizo una propuesta para su posible manufactura.

La realización de este trabajo es sólo el inicio y aún queda como trabajo a futuro inmediato, diseñar un experimento en el cual se puedan validar los resultados obtenidos de este diseño conceptual. Además de esto, si es posible, aún quedan por optimizar los tamaños H y XH y aplicar este mismo método a otros perfiles de dientes como trabajo a futuro en el largo plazo.

## Referencias

- [1] Perneder, R., & Osborn, I. (2012). Power increases and further development. In R. Perneder & I. Osborn, *Handbook Timing Belts* (pp. 39-41). Springer Berlin Heidelberg.
- [2] Guo, J., Jiang, H., Han, G., & Yan, H. (2008). A new design of tooth profiles increases synchronous belt's fatigue life. ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition.
- [3] Hernandez, F. (08 de 10 de 2014). *Here's What Happens When Your Timing Belt Snaps And How To Fix It*. Obtenido de The Garage: <https://goo.gl/6FFLqR>
- [4] Instituto Nacional de Estadística y Geografía. *Vehículos de motor registrados en circulación*. Obtenido de Instituto Nacional de Estadística y Geografía: <https://goo.gl/2STQ7t>
- [5] *Introduction to timing belts. History of timing belt development*. (2011). Retrieved from Habatech: <https://goo.gl/coZlu1>
- [6] Perneder, R., & Osborne, I. (2012). *Handbook Timing Belts*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [7] Mectrol Corporation. (2001). *Belt Theory*. Retrieved from <https://goo.gl/VIND1v>
- [8] Berthe, D., Dowson, D., Godet, M., & Taylor, C. M. (1989). *Tribological Design of Machine Elements*. Elsevier.
- [9] Gerbert, G., Jönsson, H., Persson, U., & Stensson, G. (1978). Load Distribution in Timing Belts. *Journal of Mechanical Design*, 208-215.
- [10] Karolev, N., & Gold, P. (1995). Load Distribution of Timing Belts Drives Transmitting Variable Torques. *Mechanism and Machine Theory*, 553-567.
- [11] Koyama, T., Kagotani, M., Shibata, T., Sato, S., & Hoshiro, T. (1980). A study on strength of toothed belt. *Bulletin of the JSME*, 1240-1244.
- [12] Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria Optimization*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [13] Multi-objective Optimization. (2008). In M. Caramia, & Dell'Olmo, *Multi-objective Management in Freight Logistic Increasing Capacity, Service Level and Safety with Optimization Algorithms* (pp. 11-36). Springer-Verlag London.
- [14] Christensen, P. W., & Klarbring, A. (2009). *An Introduction to Structural Optimization*. Springer Netherlands.
- [15] Bendsoe, M. P., & Sigmund, O. (2004). *Topology Optimization*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [16] Altair Engineering, Inc. (2014). Hyperworks 13.0 help files.
- [17] Bendsøe, M. P. (1995). *Optimization of Structural Topology, Shape and Material*. Springer Berlin Heidelberg.

- [18] Payten, W. M., & Law, M. (1998). Generalized Shape Optimization Using Stress Constraints Under Multiple Load Cases. *Structural Optimization*, 269-274.
- [19] Scyher, M. (2013). *Scyher's Handbook of Polyurethanes*. CRC Press.
- [20] Clemitson, I. R. (2015). *Castable Polyurethane Elastomers*. CRC Press.
- [21] Shoemaker, J. (2006). *Moldflow Design Guide. A Resource for Plastic Engineer*. Moldflow Corporation.
- [22] Design, M. a. (2014). *Ashby, M; Johnson, K*. Elsevier.