



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Cálculo de segundo y tercer orden de la
dispersión de velocidad de grupo en un
compresor de prismas para pulsos de
femtosegundos**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero en Telecomunicaciones

P R E S E N T A

Aldo Enríquez Nieto

DIRECTOR DE TESIS

Dra. Martha Rosete Aguilar



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2016

Agradecimientos

Aldo Enriquez Nieto agradece a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico-Universidad Nacional Autónoma de México (DGAPA-UNAM) PAPIIT IN-104112 y PAPIIT IG-IG100615, por el apoyo de beca para concluir su trabajo de tesis.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México por permitirme ser parte de ella, así como brindarme los conocimientos necesarios para desarrollarme profesionalmente.

Agradezco a la Facultad de Ingeniería por otorgarme buenos estudios, excelentes profesores y amigos durante mi estancia, lo cual me permitió madurar tanto profesionalmente como de forma personal.

Agradezco infinitamente a mi tutora de tesis, Dra. Martha Rosete Aguilar por toda la dedicación, paciencia, su tiempo y apoyo que me brindó a lo largo de este proyecto.

Agradezco a mis sinodales Dr. Neil Bruce Davidson, Dr. Jesús Garduño Mejía, Dra. Selene Pérez García y al Dr. Ramon Gutierrez Castrejon por revisar y mejorar mi trabajo de tesis mediante sus conocimientos.

Agradezco a mi Mamá, por toda su dedicación, desvelos, apoyo, regaños, ejemplo y cariño que me ha brindado a lo largo de mi vida, a mi tío Armando Nieto por ser parte importante en mi desarrollo profesional y personal, a mi tía Teresa Nieto que fue un pilar en mi educación.

Índice

INTRODUCCIÓN	3
CAPÍTULO 1. PULSOS.	5
1.1 <i>Onda.</i>	5
1.2 <i>Pulsos ultracortos.</i>	8
1.3 <i>Velocidad de fase y Velocidad de grupo.</i>	10
1.4 <i>Pulso modulado por una Gaussiana.</i>	15
1.5 <i>Mode locking.</i>	17
CAPÍTULO 2. DISPERSIÓN	21
2.1 <i>Dispersión normal.</i>	23
2.2 <i>Dispersión anómala.</i>	25
2.3 <i>Dispersión de la Velocidad de grupo.</i>	25
2.4 <i>Dispersión Angular.</i>	30
CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE UN PULSO EN UN PAR DE PRISMAS.	34
3.1 <i>Pulso en cristal de titanio zafiro con par de prismas.</i>	38
3.2 <i>Pulso inicial sin chirp que pasa por un par de prismas.</i>	42
3.3 <i>Pulso inicial sin chirp que pasa por el cristal Titanio-Zafiro y el par de prismas.</i>	44
3.4 <i>Análisis de un pulso en un par de prismas mediante Fork.</i>	46
CAPÍTULO 4. RESULTADOS.	49
4.1 <i>Resultados para una Configuración Z.</i>	49
4.2 <i>Resultados para una Configuración de anillo.</i>	59

4.3 Programas Ejecutables.

67

CONCLUSIONES	72
REFERENCIAS	74
APÉNDICE A	75
APÉNDICE B	75
APÉNDICE C	76
APÉNDICE D	76
APÉNDICE E	80

Introducción

En este trabajo se presenta el análisis de dos configuraciones de compresión de pulsos ultracortos de luz, a una de estas se le conoce como configuración lineal, mientras que la otra recibe el nombre de configuración de anillo. Estas configuraciones tienen algo en común, manejan un par de prismas y un cristal, que representan el medio activo. La diferencia que hay entre estas dos configuraciones, es que el pulso en la configuración lineal pasa dos veces tanto por los prismas como por el cristal, mientras que en la configuración de anillo pasa una vez por el cristal y dos veces por los prismas.

Cuando un pulso pasa por el cristal se produce dispersión de velocidad de grupo positiva, GVD, por sus siglas en inglés Group Velocity Dispersion, por lo que la función del par de prismas es generar una GVD negativa para que se cancelen la GVD del cristal con la GVD de los prismas, cabe mencionar que manejamos dos GVD; una de segundo orden y otra de tercer orden, el objetivo del presente trabajo es realizar un análisis para que la GVD de segundo orden sea igual a cero.

El trabajo consta de cuatro capítulos, en el primer capítulo se describe a un pulso laser y se analiza partir de la suma de ondas de diferente frecuencia, que en un cierto tiempo y espacio tienen la misma fase inicial, de aquí se parte para explicar lo que son los pulsos ultracortos los cuales tienen duraciones temporales del orden de femtosegundos (10^{-15} seg) y picosegundos (10^{-12} seg). Se tratan temas como la velocidad de fase y la velocidad de grupo ya que no es lo mismo propagar el pulso en el vacío que en un medio, y el tema de propagar el pulso en un medio es fundamental ya que en el trabajo se propaga tanto en un cristal como en un par de prismas, por último en este capítulo se menciona un método para generar pulsos ultracortos, el cual se conoce como “amarre de modos”.

En el capítulo dos redacta sobre la dispersión y los tipos de dispersión que tiene un pulso cuando se propaga en un medio dispersivo, el fenómeno de dispersión se explica partiendo de la polarización eléctrica, la segunda ley de Newton y así con ello describir el tema de dispersión normal y dispersión anómala, posteriormente se explica la dispersión de velocidad de grupo de segundo y tercer orden mediante la serie de Taylor y finalizamos con la dispersión angular que expresa la separación angular entre dos longitudes de onda.

En el tercer capítulo se desarrolla un análisis de lo que ocurre cuando el pulso se propaga en un par de prismas, este análisis es crucial ya que se quiere lograr una dispersión de velocidad de grupo igual a cero, esto se logra en dos casos: uno cuando el pulso inicial sin chirp pasa por el par de prismas y otro cuando pasa por un cristal titanio zafiro y por los pares de prismas, en este análisis se tocan temas como ancho total cuando la intensidad máxima cae a la mitad, en inglés, full-width half maximum (FWHM), ángulo de Brewster, ángulo de desviación mínima y la ley de Snell.

El último capítulo es la conclusión de los capítulos anteriores, es decir son los resultados obtenidos de lo ya visto en los capítulos anteriores que se obtuvieron con una simulación en Matlab mediante el diseño de un programa. Se presentan resultados para cuatro casos: dos con la configuración de anillo y dos con la configuración lineal, la diferencia en los dos ejemplos para cada configuración es el material de los prismas, para un caso el material es de baja dispersión (Silicio Fundido) y para el otro caso es de alta dispersión (SF14), mientras que para el cristal se utiliza el mismo material para todos los casos que es de titanio zafiro.

De estos casos se obtuvieron los siguientes resultados, una que el material de SF14 genera mayor GVD de tercer orden que el del Silicio Fundido. Cabe aclarar que para todos los casos la GVD de segundo orden es igual a cero, dado que la configuración del par de prismas se diseña para que así funcione, y por otro lado se concluye que la configuración de anillo genera menor cantidad de GVD que la configuración lineal, cuando se usa un cristal del mismo espesor.

Capítulo 1

PULSOS

Un pulso se genera mediante la suma de ondas de diferente frecuencia y cuya fase inicial es igual.

La forma más sencilla de generar un pulso es sumando dos ondas de diferente frecuencia que tienen la misma fase inicial, supondremos una fase inicial igual a 0 (i.e., $\phi=0$). Cabe mencionar que la amplitud de las ondas puede ser la misma o estar modulada por una función gaussiana, o cualquier otra función como una secante hiperbólica, etc.

Las componentes de un pulso son la onda envolvente y la onda portadora. La onda envolvente modula la amplitud de la onda portadora.

1.1 ONDA

Para hablar de un pulso, antes se debe de mencionar que es una onda. Por ejemplo las ondas son simplemente la propagación de una perturbación de alguna propiedad de un medio, por ejemplo la oscilacion, ahora si hablamos de la expresión simple de una onda de cantidad variable ψ , que viaja en la dirección x con la velocidad c es:

$$\psi = f(x - ct) \tag{1.1}$$

La variable ψ , puede representar cualquier cantidad física, campo eléctrico, campo gravitacional, o cualquier otra cantidad que varíe tanto en el tiempo como de la distancia.

La onda general $\psi = f(x - ct)$ puede tener cualquier forma, siempre y cuando mantenga dicha forma al propagarse. La siguiente forma de onda es matemáticamente correcta y es de la cual vamos a hablar:

$$\psi = A\cos(\omega t - kx + \phi) \tag{1.2}$$

Dónde:

A-Amplitud

ω -Frecuencia angular

k-Número de onda

ϕ -fase inicial

La ecuación (1.2) describe una onda coseno que se propaga en dirección al eje x, como se muestra en la figura 1.1, en el tiempo $t=0$. La velocidad de esta onda es $v=w/k$.

El termino de fase ϕ determina la posición de la onda en $t=0$, esto quiere decir que representa la fase inicial. Al sumar $\pi/2$ a la fase hace que la onda se vuelva la función seno.

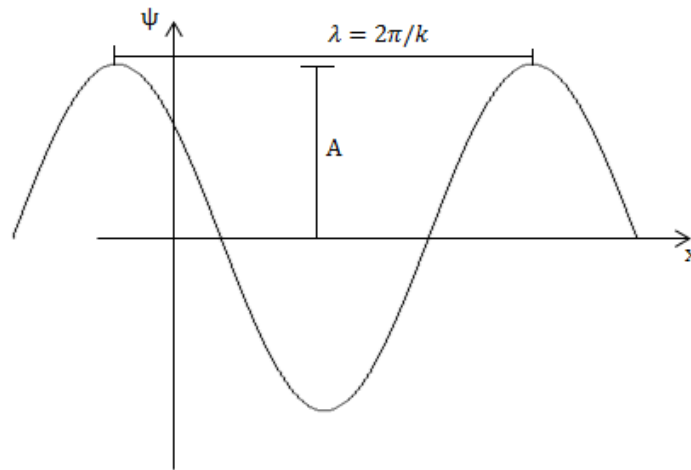


Figura 1.1-Descripción gráfica de una onda cosenoidal.

EL teorema de Fourier nos indica que cualquier onda periódica se puede representar como la suma de ondas senoidales.

A continuación describimos la propagación de una en la dirección del eje z por lo que $y(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \phi)$ a $t=0$. En la figura 1.2 se muestra la onda propagándose en el vacío y en la figura 1.3 cuando se propaga en un vidrio de material BK7 el cual tiene un índice de refracción de $n=1.511$ para una longitud de onda de 790nm. El valor del índice de refracción en términos de la longitud de onda de la luz en el vacío se puede calcular usando la ecuación de Sellmeier dada por :

$$n^2(\lambda) - 1 = \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 C_2} + \frac{B_3 \lambda^2}{\lambda^2 C_3} \quad (1.3)$$

Donde las constantes $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$, reciben el nombre de constantes de Sellmeier y son proporcionadas por el fabricante del vidrio. En la tabla 1.1 se muestran las constantes de

Sellmeier para tres vidrios: BK7, SF14 y Silica Fundida. Usando la ecuación (1.3) se calculó el índice de refracción del vidrio BK7 para la longitud de onda de 790nm, et al [1].

Constante	BK7	SF14	Silica Fundida
B_1	1.03961212	1.69182538	$6.69422575 \times 10^{-1}$
B_2	$2.31792344 \times 10^{-1}$	$2.85919934 \times 10^{-1}$	$4.34583937 \times 10^{-1}$
B_3	1.01046945	1.12595145	$8.71694723 \times 10^{-1}$
C_1	$6.00069867 \times 10^{-3}$	$1.33151542 \times 10^{-2}$	$4.48011239 \times 10^{-3}$
C_2	$2.00179144 \times 10^{-2}$	$6.12647445 \times 10^{-2}$	$1.32847049 \times 10^{-2}$
C_3	1.03560653×10^2	1.18405242×10^2	9.5341482×10^1

Tabla 1.1- Valores de las constantes de la ecuación de Sellmeier para tres tipos de vidrio[1].

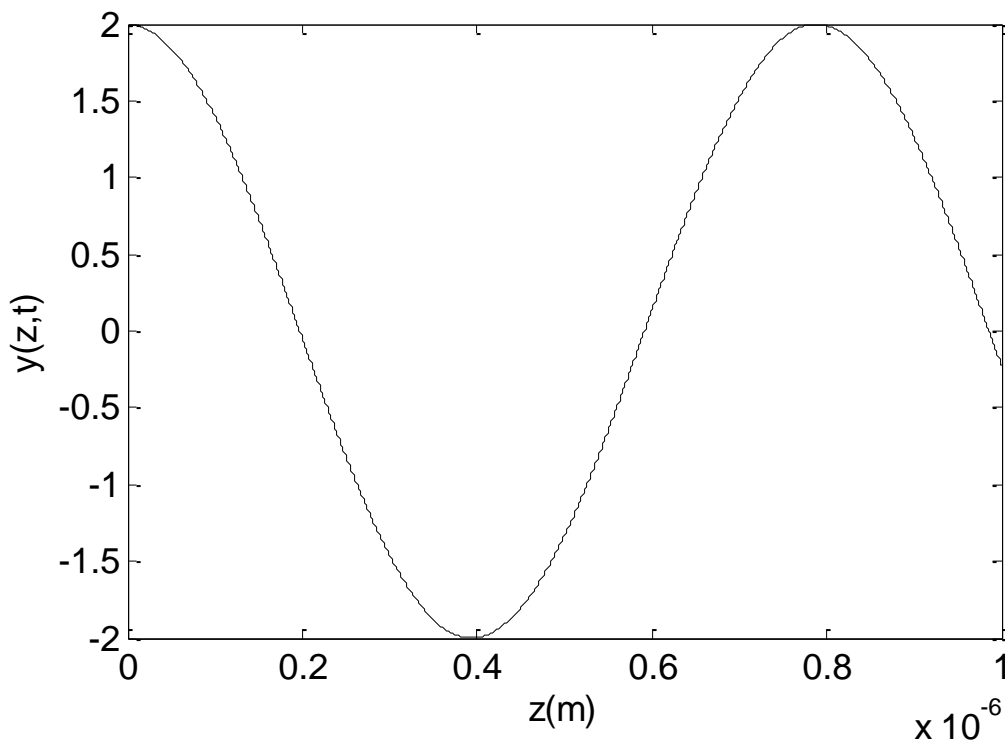


Figura 1.2 Onda propagándose en el vacío a $t=0$, $\lambda=790\text{nm}$, $\omega=2.386 \times 10^{15} \text{ rad/s}$, $\phi=0$ y $A=2$.

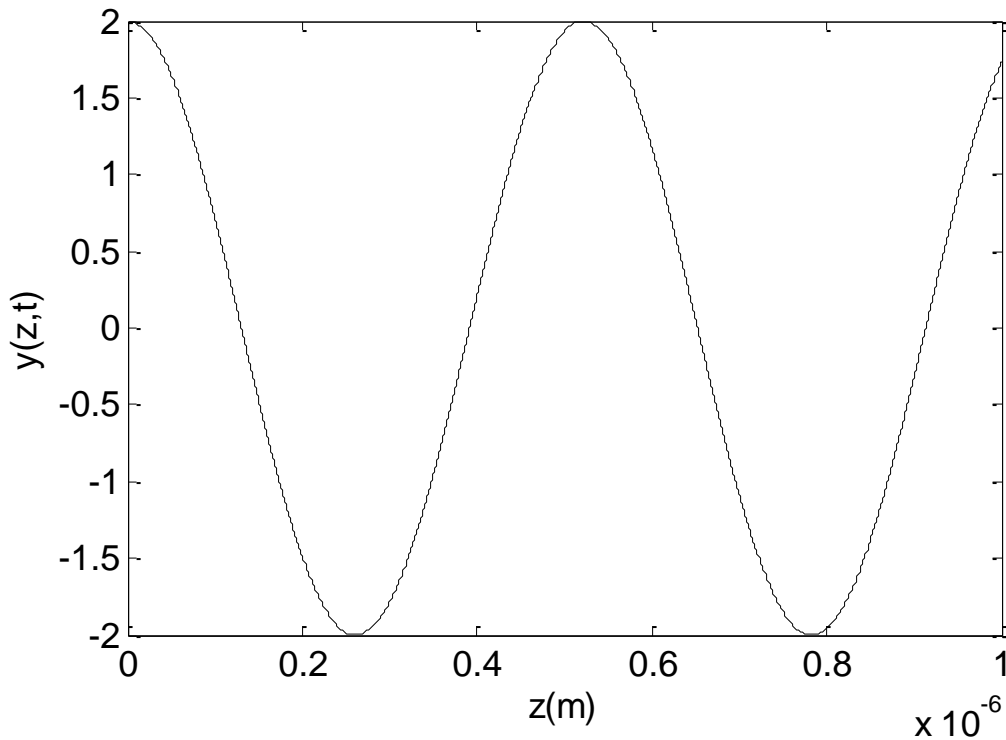


Figura 1.3 Onda propagándose en vidrio BK7 a $t=0$, $\lambda=790\text{nm}$, $n=1.511$, $\omega=2.386 \times 10^{15}\text{rad/s}$,
 $\phi=0$ y $A=2$.

Si comparamos ambas gráficas podemos ver que la onda que se propaga en el vidrio BK7 tiene un desfaseamiento con respecto a la onda que se propaga en el vacío, y la longitud de onda al propagarse en el vidrio BK7 disminuye.

1.2 PULSOS ULTRACORTOS

Los pulsos ultracortos son paquetes de ondas electromagnéticas, y por ello están bien definidos por el campo eléctrico en el espacio y tiempo. Entonces el pulso puede ser caracterizado por cantidades relacionadas con el campo eléctrico.

Los pulsos ultracortos son pulsos de luz que tienen una duración demasiado corta, las unidades que se utilizan son del orden de femtosegundos (10^{-15} [s]) o picosegundos (10^{-12} [s]), el método que se utiliza para generar estos pulsos se conoce como amarre de modos (Mode Locking en inglés) el cual describiremos más adelante.

Como se mencionó anteriormente la forma más sencilla de modelar un pulso es sumando dos ondas de diferente frecuencia y misma fase inicial, ϕ , la cual supondremos es igual a cero, cuyas amplitudes pueden ser la misma o estar modulada por una función. A este pulso se le conoce como un pulso sin chirp. La palabra chirp se refiere a la variación de la frecuencia de la onda portadora en el tiempo. Estas dos ondas las podemos expresar de la siguiente forma:

$$\psi_1(x, t) = A\cos(\omega_1 t - k_1 x + \phi)$$

$$\psi_2(x, t) = A\cos(\omega_2 t - k_2 x + \phi)$$

Al sumarlas nos queda

$$\psi(x, t) = A\cos(\omega_1 t - k_1 x + \phi) + A\cos(\omega_2 t - k_2 x + \phi)$$

Suponiendo que tienen la misma amplitud y haciendo $A=1$ para las dos ondas y una fase inicial igual a cero, i.e., $\phi = 0$, nos queda lo siguiente:

$$\psi(x, t) = \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

Utilizando la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{(\alpha + \beta)}{2}\cos\frac{(\alpha - \beta)}{2}$$

tenemos:

$$\psi(x, t) = 2\cos\left(\frac{\omega_1 t - k_1 x + \omega_2 t - k_2 x}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1 t - k_1 x - \omega_2 t + k_2 x}{2}\right)$$

La cual se puede reescribir como:

$$\psi(x, t) = 2\cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x}{2}\right)\cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x}{2}\right) \quad (1.4)$$

De aquí podemos concluir lo siguiente:

Observamos que tenemos dos ondas, el primer coseno de la ecuación (1.4) representa lo que se conoce como la onda portadora cuya frecuencia angular y número de onda están dados por el promedio:

$$w = \frac{w_1 + w_2}{2}, k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Y el segundo coseno de la ecuación (1.4) se conoce como la onda envolvente cuya frecuencia angular y número de onda están dados por:

$$w_e = \frac{w_1 - w_2}{2}, k_e = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

Como se discutirá en la siguiente sección la onda envolvente y la onda portadora se propagan con diferentes velocidades cuando se propagan en medios dispersivos. En el vacío, ambas ondas se propagan con la misma velocidad dada por la velocidad de la luz en el vacío.

1.3 VELOCIDAD DE FASE Y VELOCIDAD DE GRUPO.

La velocidad de fase es la velocidad con la que se mueve la onda portadora dada por $v = \frac{w}{k} = \frac{c}{n}$ donde n es el índice de refracción del medio por el cual se está propagando la onda portadora con frecuencia angular w y número de onda k .

Y la velocidad de grupo es la relación de la distancia recorrida en el tiempo de la onda envolvente:

$$Vg = \frac{w_e}{k_e} = \frac{w_1 - w_2}{k_1 - k_2} \quad (1.5)$$

Cuando el intervalo de frecuencias Δw , centrado alrededor de w , es pequeño la velocidad de grupo está dada por: $Vg = \frac{\partial w}{\partial k}$. Cabe recalcar que la velocidad de fase y la velocidad de grupo en el vacío son iguales, es decir $v = Vg = c$.

Ahora modelaremos un pulso sumando dos ondas: suponiendo que $\lambda_1=790$ nm y $\lambda_2=810$ nm, entonces la frecuencia de estas ondas es igual a: $v_1=3.7974 \times 10^{14}$ s⁻¹ y $v_2=3.7037 \times 10^{14}$ s⁻¹, respectivamente. Por lo que el ancho de banda es igual a $\Delta v=9.3764 \times 10^{12}$ seg⁻¹. La duración del pulso, τ_0 , es inversamente proporcional al ancho de banda, cuando la amplitud de las ondas es la misma, por lo que:

$$\tau_0 = \frac{1}{\Delta v} = 106.6499 \text{ fs}$$

La frecuencia angular y número de onda de la onda portadora generada al sumar estas dos ondas están dadas por:

$$w = \frac{w_1 + w_2}{2}, k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

donde $w_1 = 2\pi\nu_1 = \text{rad/seg}$ y $w_2 = 2\pi\nu_2 = \text{rad/seg}$.

En la figura 1.4 se ilustra la suma de las dos ondas propagándose en el vacío y en la figura 1.5 la suma de las dos ondas propagándose en un vidrio BK7.

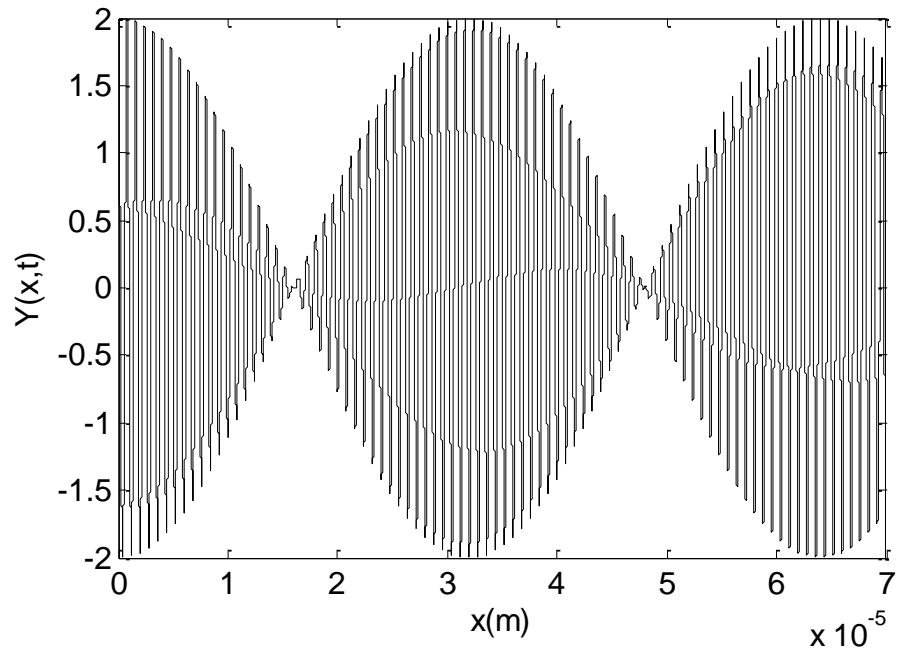


Figura 1.4 Suma de dos ondas en el vacío $t=0$, $\lambda_1=790\text{nm}$, $\lambda_2=810\text{nm}$ $w_1=2.386 \times 10^{15} \text{rad/s}$, $w_2=2.327 \times 10^{15} \text{rad/s}$, $\phi=0$ y $A=1$.

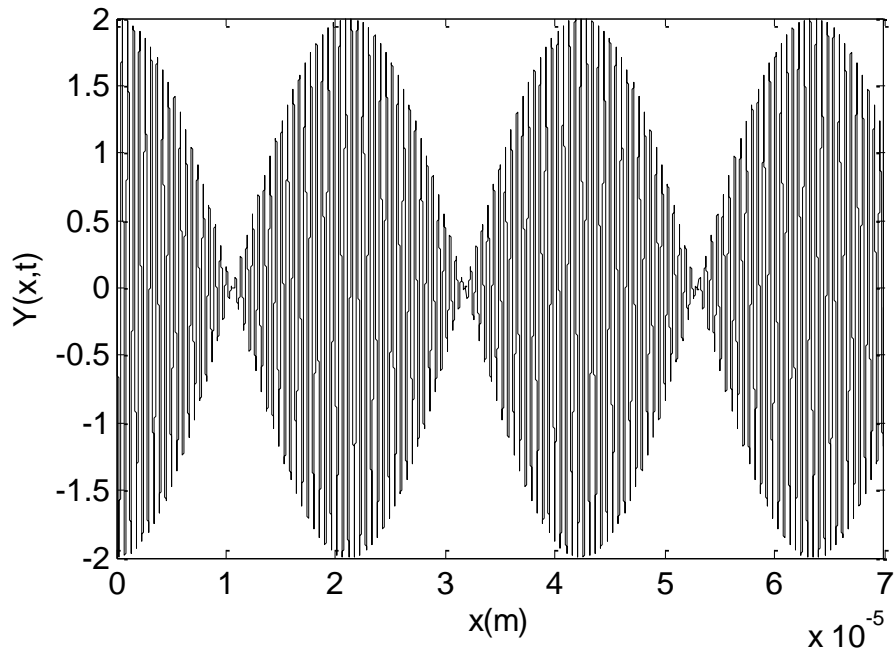


Figura 1.5 Suma de dos ondas en un vidrio BK7 $t=0$, $\lambda_1=790\text{nm}$, $\lambda_2=810\text{nm}$ $w_1=2.39 \times 10^{15}\text{rad/s}$, $w_2=2.33 \times 10^{15}\text{rad/s}$, $n_1=1.5097$, $n_2=1.51058$, $\phi=0$ y $A=1$.

A continuación sumaremos N números de ondas con diferentes frecuencias entre 790 nm y 810 nm, con la misma amplitud y una fase inicial $\phi=0$. Suponiendo que la onda portadora es de 800 nm y una duración del pulso de $\tau_0 = 10fs$, se obtiene un ancho de banda $\Delta\nu = 1 \times 10^{14}\text{seg}^{-1}$.

$$\Psi(x, t) = \sum_{i=1}^N A \cos(w_i t - k_i x + \phi) \quad (1.6)$$

En la figura 1.6 y figura 1.7 se muestra la suma de 21 ondas que se propagan en el vacío y en el vidrio BK7, respectivamente.

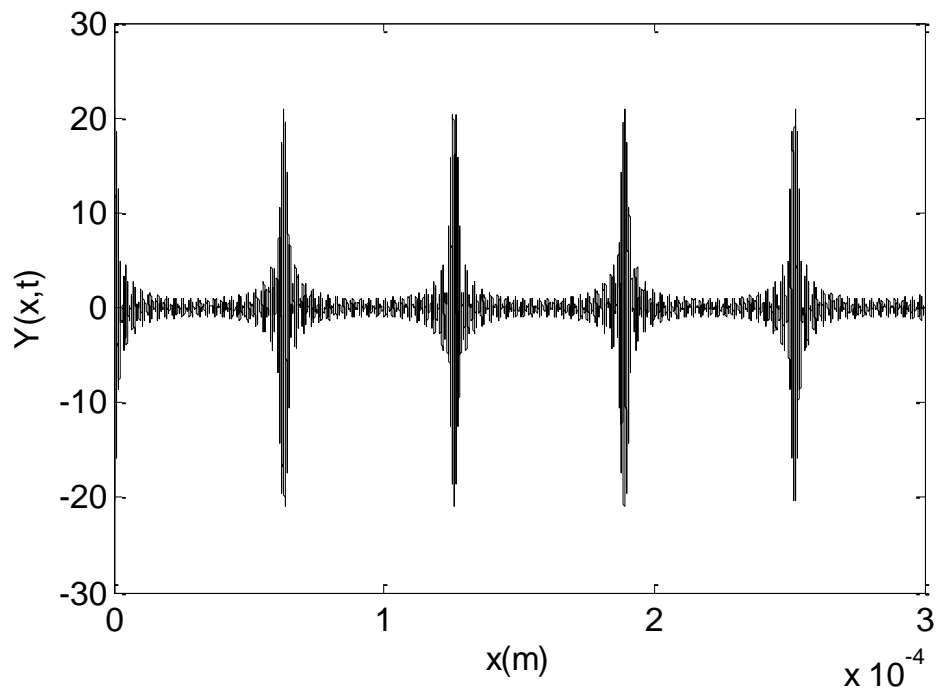


Figura 1.6 Suma de 21 ondas en el vacío sobre el eje x.

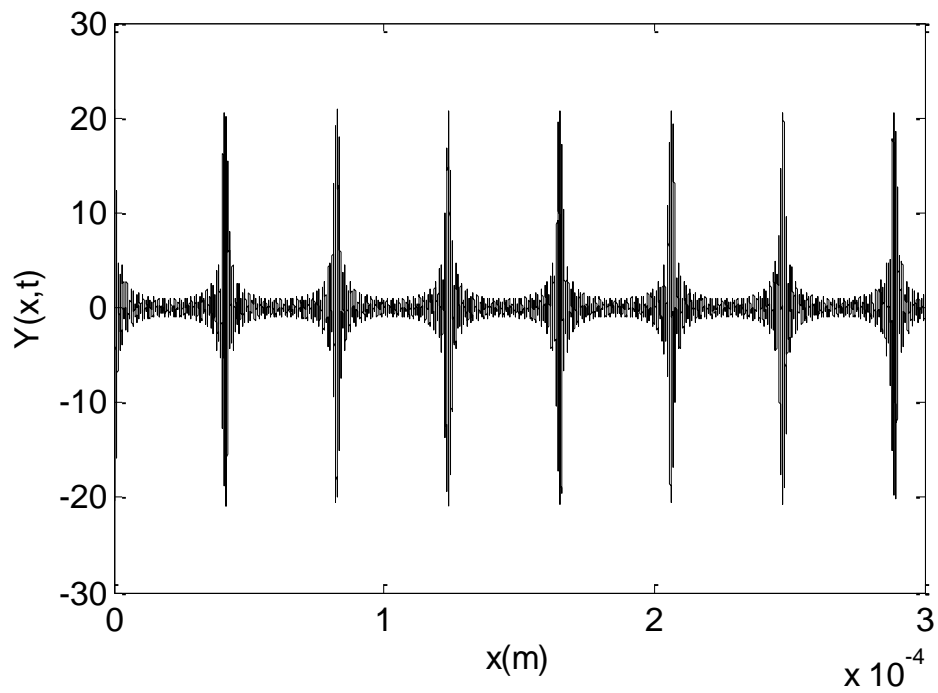


Figura 1.7 Suma de 21 ondas en un vidrio BK7 sobre el eje x.

Como se puede observar hay un atraso del pulso que se propaga en el vidrio BK7 con respecto al pulso que se propaga en el vacío.

Para facilitar mejor nuestros cálculos encontraremos la forma de calcular la velocidad de grupo en términos de la longitud de onda en el vacío de la portadora.

Si sabemos que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y la velocidad de fase $v = \frac{w}{k} = \frac{c}{n}$ por lo tanto $Vg = \frac{c}{n_g}$ donde n_g es el índice de refracción de grupo.

La derivada de $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ con respecto a la longitud de onda está dada por:

$$\partial k = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \partial \lambda \quad (1.7)$$

Y la derivada de $w = v k$ con respecto a k está dada por:

$$\frac{\partial w}{\partial k} = v + k \frac{\partial v}{\partial k} \quad (1.8)$$

Sustituimos $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y la ecuación 1.7 en la ecuación 1.8:

$$\frac{\partial w}{\partial k} = v - \lambda \frac{\partial v}{\partial \lambda} \equiv Vg$$

Ahora si $n_g \equiv \frac{c}{Vg}$, $v = \frac{c}{n}$ y $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ donde λ_0 es la longitud de onda en el vacío y λ es la longitud de onda en el medio.

$$\therefore n_g = \frac{c}{v - \lambda \frac{\partial v}{\partial \lambda}} = \frac{c}{\frac{c}{n} - \lambda \frac{\partial(c/n)}{\partial \lambda}} = \frac{1}{\frac{1}{n} - \frac{\lambda_0}{n} \frac{\partial(1/n)}{\partial(\lambda_0/n)}} \quad (1.9)$$

$$n_g = n - \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0} \quad (1.10)$$

La derivación de la ecuación (1.9) se muestra en el apéndice A.

Sustituyendo la ecuación (1.10) en la expresión para la velocidad de grupo se tiene:

$$Vg = \frac{c}{n - \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0}} \quad (1.11).$$

Ahora calcularemos la velocidad de fase ($v = \frac{w}{k} = \frac{c}{n}$) y la velocidad de grupo (Ecuación 1.11) con la que se propaga un pulso tanto en el vacío como en el vidrio BK7, teniendo en cuenta que $w = 2\pi\nu$ y $\nu = c/\lambda$. Los pulsos que se propagan en el vacío y en el vidrio BK7 son generados por la suma de dos ondas con longitudes de onda $\lambda_1=790$ nm y $\lambda_2=810$ nm, es decir, son los mismos que se muestran en las figuras 1.4 y 1.5, se utilizan estas longitudes de onda para obtener resultados en el orden de femtosegundos.

$\Delta\lambda$ (nm)	Vacío v (m/s)	Vacío Vg (m/s)	Vidrio BK7 v (m/s)	Vidrio BK7 Vg (m/s)
20	3×10^8	3×10^8	1.985734×10^8	1.965087×10^8

1.4 PULSO MODULADO POR UNA GAUSSIANA

Anteriormente se analizó un pulso en el cual la amplitud de todas las frecuencias que componen al pulso es la misma, ahora esta amplitud va a estar modulada por una función gaussiana como se muestra en la Figura 1.8, esta Gaussiana la expresaremos con la letra $F(\Omega)$ que es la función dada por:

$$F(\Omega) = \sqrt{\frac{1}{4\alpha}} \exp\left(\frac{-\Omega^2}{4\alpha}\right)$$

Donde α es igual a:

$$\alpha = \frac{2 \ln 2}{t_0^2}$$

Donde t_0 es la duración del pulso medido cuando la intensidad pico cae a la mitad.

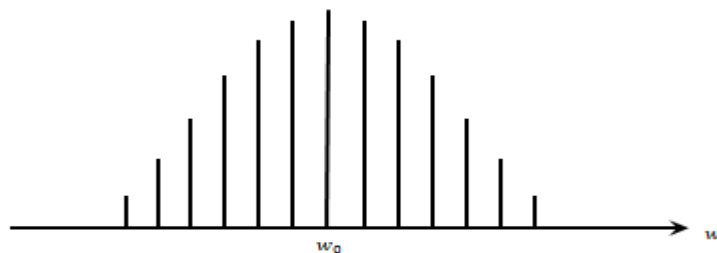


Figura 1.8.- Modos de oscilación modulados por una gaussiana.

A continuación se describe un pulso expresado como la suma de N ondas cuya amplitud de las frecuencias que componen al pulso esta modulada por una gaussiana la cual está dada por la función $F(\Omega)$. En las figuras 1.9 y 1.10 se muestra un pulso que tiene una duración de $t_0=100$ fs, la amplitud de sus frecuencias están moduladas por una Gaussiana y la longitud de onda portadora es $\lambda_0=800$ nm. En la figura 1.9 se muestra el pulso después de que se ha propagado una distancia de 100 mm en el vidrio BK7. Cabe mencionar que el centro de la abscisa se encuentra en el pico del pulso que está localizado en L/Vg , donde L es la distancia que recorrió el pulso sobre el vidrio y Vg es la velocidad de grupo que está dada por la ecuación 1.11.

Para comparación también se muestra en la figura 1.10 un pulso que tiene la misma duración inicial de $t_0=100$ fs, la longitud de onda portadora es $\lambda_0=800$ nm, pero cuyas amplitudes de sus frecuencias son las mismas, después de que se ha propagado una distancia de 100 mm en vidrio BK7.

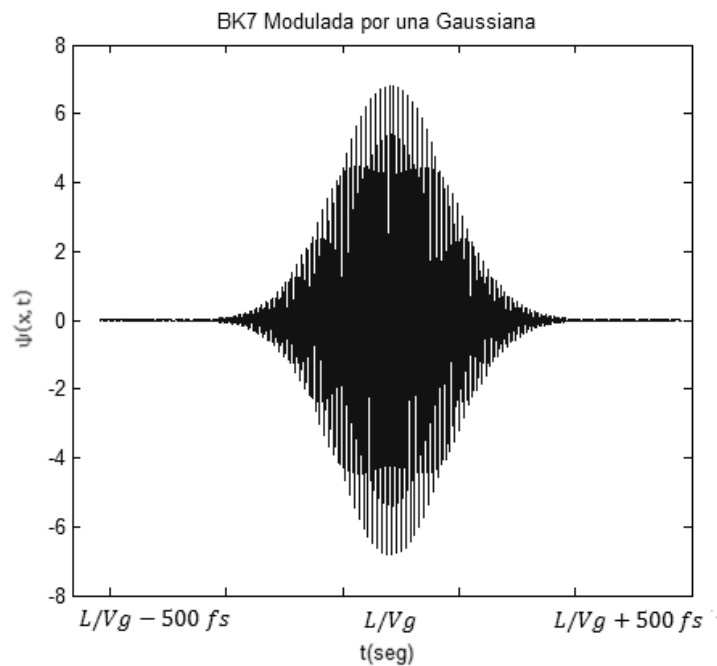


Figura 1.9.- Pulso que se propaga en vidrio BK7. La amplitud de las frecuencias está modulada por una gaussiana.

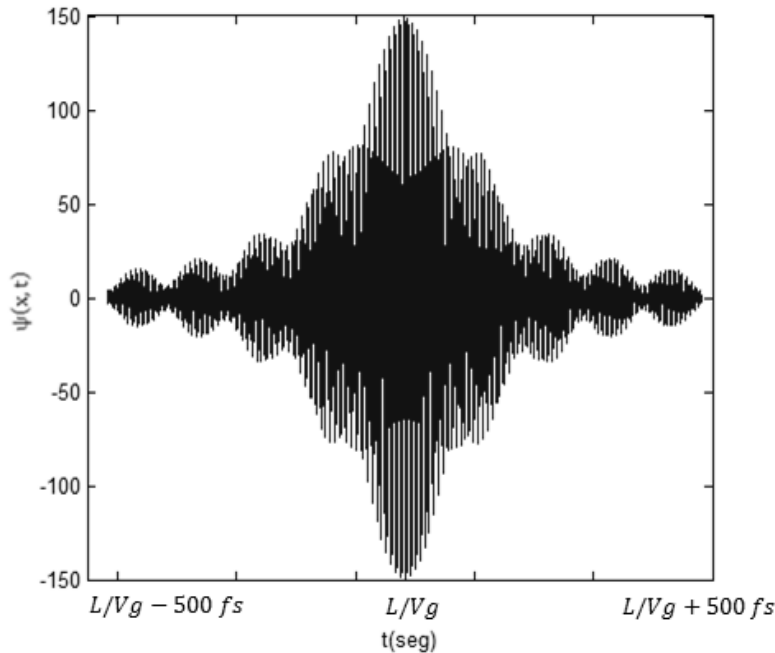


Figura 1.10.- Pulso que se propaga en vidrio BK7. La amplitud de las frecuencias es la misma.

1.5 AMARRE DE MODOS (MODE LOCKING)

Hay varias técnicas que se utilizan para la compresión de pulsos, pero hay una técnica en especial que es muy empleada para generar pulsos ultracortos conocida como el método de Amarre de modos (en inglés Mode locking), hay métodos que producen pulsos de muy alta energía, pero las duraciones de los pulsos son del orden de nanosegundos y requerimos producir pulsos en el orden de femtosegundos. Estas duraciones se obtienen usando el método de Amarre de modos.

Con el fin de entender el método Amarre de modos (Mode Locking), consideramos en primer lugar una oscilación de láser en muchas frecuencias simultáneamente. Por lo general, estas ondas a diferentes frecuencias no están correlacionadas y oscilan casi independientemente una de la otra, es decir, no existe una relación de fase fija entre las diferentes frecuencias. En este caso la salida se compone de una suma de estas ondas cuando no correlacionan entre ellas. Cuando esto sucede la salida es casi la suma de las intensidades de cada modo individual y obtenemos un haz a la salida que tiene fluctuaciones aleatorias en intensidad.

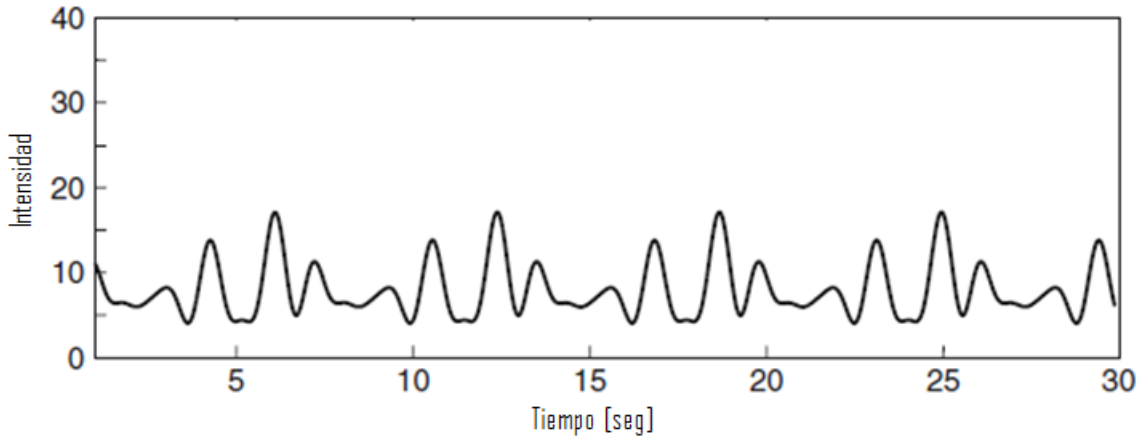


Figura 1.11.- La variación de la intensidad obtenida mediante la adición de ocho frecuencias igualmente espaciadas con fases aleatorias.[2]

En la figura 1.11 se muestra la salida de la variación de la intensidad con el tiempo obtenido como una suma de ocho diferentes frecuencias igualmente espaciadas pero con fases aleatorias. Se puede observar que a la salida la intensidad varía aleatoriamente con el tiempo que se asemeja al ruido.

Ahora, si somos capaces de bloquear las fases de cada uno de los modos de oscilación, por ejemplo atraerlos a todos en fase en un momento y mantener esta relación de fase, entonces en ciertas ocasiones las ondas tendrán sus crestas y depresiones en coincidencia para dar una salida muy grande y en otras ocasiones los máximos y los mínimos no se solapan, dando así una intensidad mucho menor (Figura 1.12).

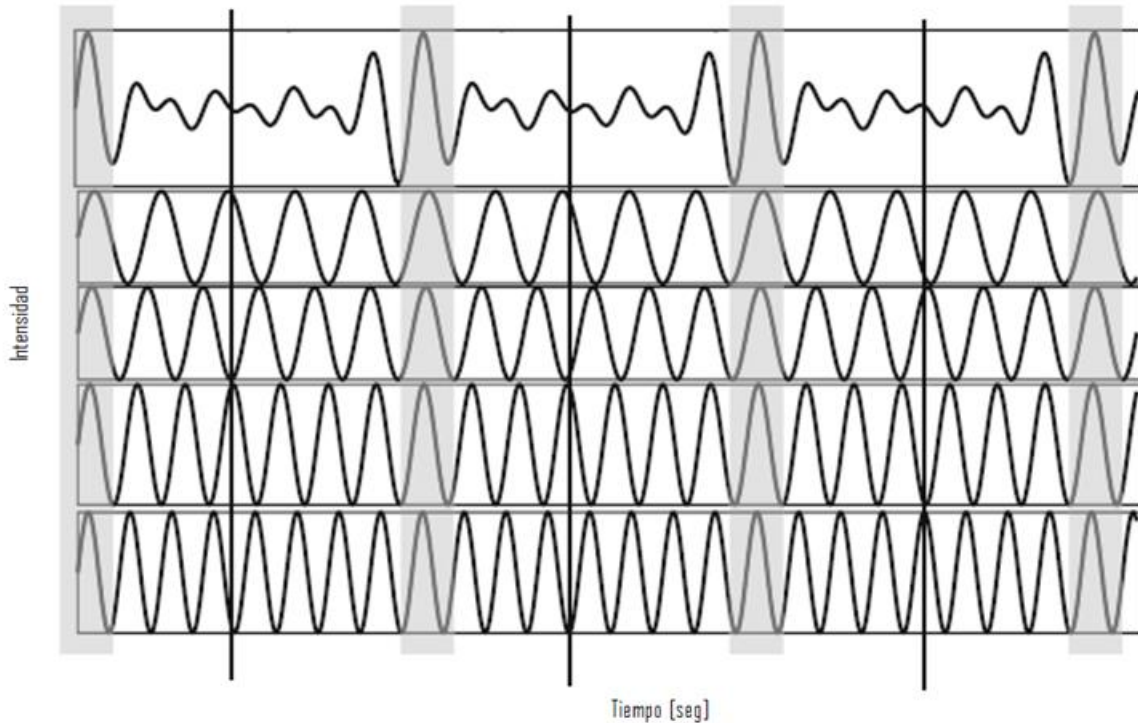


Figura 1.12.-Muestra la interferencia entre las cuatro frecuencias igualmente espaciadas, además que están en fase al principio y mantienen una relación de fase constante.[2]

En tal caso, la salida del láser sería una serie repetitiva de pulsos de luz, denominado tren de pulsos de mode-locked(modos bloqueados) y este fenómeno es denominado Amarre de modos (Mode locking).

Si el número de ondas de interferencia se hace muy grande, por ejemplo, cien o más, entonces la intensidad del pico puede ser muy alta y los anchos temporales del pulso pueden ser muy pequeños.

En la figura 1.13 se muestra un tren de pulsos obtenidos por Amarre de modos (Mode-locked) que sale de un láser de Titanio Zafiro. Tal tren de pulsos de Amarre de modos (Mode-locked) puede ser muy corto en la duración (picosegundos).

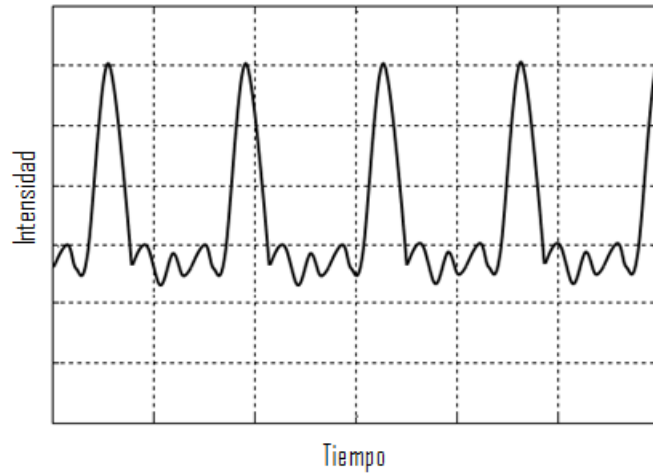


Figura 1.13.- Tren de pulsos Mode-locked de un láser Titanio Zafiro. Cada división es de 2 ns.[2]

Como hemos visto anteriormente, el Amarre de Modos (Mode locking) esencialmente requiere que los diversos modos longitudinales estén acoplados entre sí. En la práctica esto se puede obtener con el resultado de la modulación generada con un modulador de amplitud o fase controlado por un generador de radio frecuencias externo de señal senoidal, tal como pueden ser la modulación de las pérdidas en la cavidad o la ganancia en el medio de amplificación (Amarre de modos activo) o mediante el uso de un absorbedor saturable que opera en el régimen no lineal, pero su funcionamiento se da sin la necesidad del control externo del dispositivo, haciéndolo totalmente pasivo (Amarre de modos pasivo).

Capítulo 2

DISPERSIÓN

El fenómeno de dispersión corresponde al fenómeno por el cual el índice de refracción de un medio es dependiente de la frecuencia, o se describe con la variación del índice de refracción con la longitud de la onda.

Para que se entienda mejor este concepto mencionaremos lo que es la polarización eléctrica \vec{P} . La polarización se entiende como un fenómeno de volumen, y el valor de \vec{P} será el número de N moléculas por unidad de volumen por el valor del momento dipolar de una de ellas, dado por $q_e x$ donde q_e es la carga del electrón y x es el desplazamiento entre la nube de electrones y el núcleo.

La densidad del momento dipolar es:

$$P = q_e x N \quad (2.1)$$

Ahora para la mayoría de los materiales \vec{E} que es el campo eléctrico y \vec{P} son proporcionales y pueden ser relacionados de la siguiente forma:

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} \quad (2.2)$$

La fuerza F_e ejercida sobre un electrón de carga q_e por el campo eléctrico externo, $E(t)$, que es una onda armónica de frecuencia angular w , está dada por:

$$F_e = q_e E(t) = q_e E_0 \cos wt \quad (2.3)$$

Las fuerzas que actúan sobre la nube de electrones son dos; la fuerza de restauración que mantiene unida la nube de electrones del átomo al núcleo de sus respectivos átomos y la fuerza que ejerce el campo eléctrico externo sobre la nube de electrones. Usando la segunda ley de Newton se obtiene la ecuación de movimiento del electrón dada por la suma de estas dos fuerzas que debe ser igual a la masa por la aceleración, esto es:

$$q_e E_0 \cos wt - m_e w_0^2 x = m_e \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

El primer término (de izquierda a derecha) es la fuerza ejercida sobre un electrón de carga q_e por el campo eléctrico externo, $E(t)$, dada por la ecuación (2.3) y el segundo término es la fuerza de restauración que mantiene al electrón unido al núcleo. Para satisfacer esta expresión, x tendrá que ser una función cuya segunda derivada no sea muy diferente de x misma. También podemos concluir que el electrón oscilará a la misma frecuencia que $E(t)$, así que una forma de expresar la solución es $x(t) = x_0 \cos wt$, que al sustituirlo en la ecuación (2.4) se obtiene:

$$x(t) = \frac{q_e/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 \cos \omega t \quad (2.5)$$

o

$$x(t) = \frac{q_e/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E(t) \quad (2.6)$$

Este sería el desplazamiento entre la nube de electrones de carga negativa y el núcleo con carga positiva, al sustituir la ecuación 2.6 en 2.1 se obtiene:

$$P = \frac{q_e^2 N E / m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2.7)$$

Y por último sustituyendo la ecuación (2.7) en (2.2) y despejando la permitividad se obtiene:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{P(t)}{E(t)} = \varepsilon_0 + \frac{q_e^2 N / m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2.8)$$

Sabemos que el índice de refracción se puede escribir en términos de la permitividad del dieléctrico como $n^2 = \varepsilon / \varepsilon_0$, entonces el índice de refracción n se puede reescribir en términos de ω y esta expresión es conocida como la ecuación de dispersión (ecuación 2.9):

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{N q_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (2.9)$$

Cualquier sustancia suele someterse a varias transiciones o procesos a partir de $n > 1$ a $n < 1$ como la frecuencia de iluminación se hace para incrementar, lo que implica que en lugar de una sola frecuencia ω_0 a la que resuena el sistema, hay al parecer varias frecuencias. Por lo que sería más factible generalizar las cosas suponiendo que hay N moléculas por unidad de volumen, cada

uno con f_j oscilaciones teniendo frecuencias naturales w_{0j} , cuando $j = 1,2,3, \dots$ en ese caso quedaría la ecuación 2.9 como:

$$n^2(w) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \left(\frac{f_j}{w_{0j}^2 - w^2} \right) \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) describe la dispersión de la luz en regiones donde $w_{0j}^2 \neq w^2$ y se le conoce como dispersión normal, pero si la frecuencia angular del campo externo, w , se acerca a alguna de las frecuencias naturales w_{0j} , entonces la ecuación (2.10) no describe correctamente el fenómeno de dispersión, a este tipo de dispersión se le llama dispersión anómala. Para describir correctamente la dispersión anómala, se agrega una fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad (de la forma $m_e \gamma \partial x / \partial t$) en la ecuación de movimiento. Esta fuerza de amortiguamiento surge porque al acercarse la frecuencia angular del campo externo, w , a alguna de las frecuencias naturales de oscilación del electrón, w_{0j} , la amplitud de oscilación de los electrones aumenta y empiezan a chocar entre ellos. La solución a la ecuación de movimiento tomando en cuenta la fuerza de amortiguamiento está dada por:

$$n^2(w) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \left(\frac{f_j}{w_{0j}^2 - w^2 + i\gamma_j w} \right) \quad (2.11)$$

2.1 DISPERSIÓN NORMAL

En la figura 2.1 se observa la variación del índice de refracción contra la longitud de onda para diferentes materiales, en los cuales la longitud de onda depende del índice de refracción, además que conforme la longitud de onda disminuye el índice de refracción aumenta, a este fenómeno se le conoce como dispersión normal.

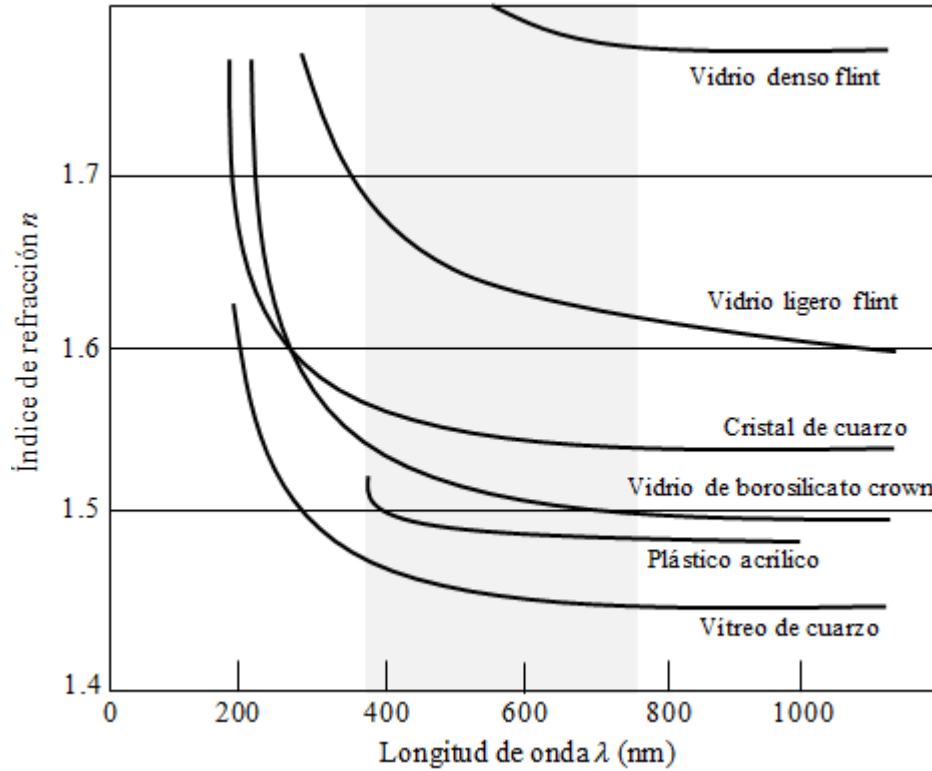


Figura 2.1.- La longitud de onda depende del índice de refracción para varios materiales.[3]

Ahora bien, la ecuación 2.9 está en términos de la frecuencia angular del campo eléctrico externo. La ecuación de dispersión dada por la ecuación (2.9) se puede escribir en términos de la longitud de onda, $\lambda = 2\pi c/\omega$, como:

$$n^2(\lambda) - 1 = \frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2 C_1} + \frac{B_2\lambda^2}{\lambda^2 C_2} + \frac{B_3\lambda^2}{\lambda^2 C_3} \quad (2.12)$$

La cual recibe el nombre de ecuación de dispersión de Sellmeier. Las constantes $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$, son proporcionadas por el fabricante del vidrio y reciben el nombre de constantes de Sellmeier dependiendo del material (Tabla 1.1). Esta ecuación fue introducida en el capítulo 1 como la ecuación 1.3.

Los pulsos modelados en el presente trabajo se propagan en vidrio dentro de la región de dispersión normal.

2.2 DISPERSIÓN ANÓMALA

Cuando $w_{0j} = w$ en la ecuación 2.11, el término de amortiguamiento se vuelve dominante. Las regiones sombreadas que rodean las diversas w_{0j} (ver figura 2.2), son llamadas bandas de absorción. En las bandas de absorción $\partial n / \partial w$ es negativo y el proceso es llamado como dispersión anómala, es decir, el índice de refracción disminuye conforme aumenta la frecuencia.

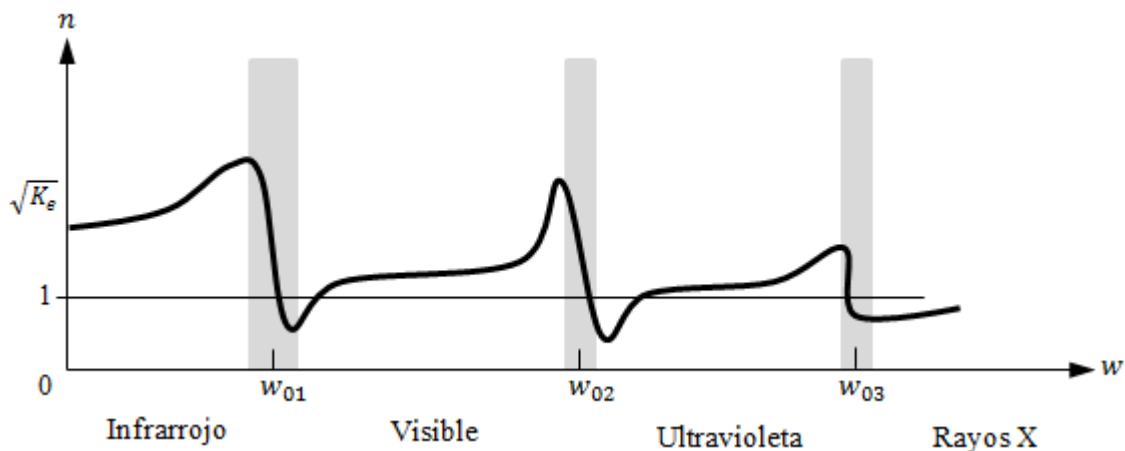


Figura 2.2.-Índice de refracción contra frecuencia.[3]

2.3 DISPERSIÓN DE LA VELOCIDAD DE GRUPO

La constante de propagación $k(w)$ se puede desarrollar en series de potencias (serie de Taylor) alrededor de la onda portadora:

$$k(w) = k(w_0) + k'(w - w_0) + \frac{1}{2}k''(w - w_0)^2 + \frac{1}{6}k'''(w - w_0)^3 + \dots \quad (2.13)$$

Si w_0 es la frecuencia de la onda portadora o central (rad/seg) de una señal pulsada, ahora los términos k, k' y k'' , de la serie de potencias de $k(w)$, son responsables de la velocidad de fase $v(w_0)$, velocidad de grupo $Vg(w_0)$ y la dispersión de la velocidad de grupo (GVD por sus siglas en inglés *Group Velocity Dispersion*) respectivamente. La relación de cada término es la siguiente [4]:

$$k = k(w)|_{w_0} = \frac{w_0}{v(w_0)} = \frac{w_0}{\text{velocidad de fase}} \quad (2.14)$$

$$k' = \left. \frac{\partial k}{\partial w} \right|_{w_0} = \frac{1}{Vg(w_0)} = \frac{1}{\text{velocidad de grupo}} \quad (2.15)$$

$$k'' = \left. \frac{\partial^2 k}{\partial w^2} \right|_{w_0} = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{Vg(w_0)} \right) = \text{dispersion de la velocidad de grupo de segundo orden} \quad (2.16)$$

$$k''' = \left. \frac{\partial^3 k}{\partial w^3} \right|_{w_0} = \text{dispersion de la velocidad de grupo de tercer orden} \quad (2.17)$$

A continuación los ciclos de la frecuencia de la portadora se moverán hacia adelante a una velocidad de fase v , mientras que la envolvente se moverá hacia adelante a una velocidad de grupo Vg evaluado al centro del espectro del pulso.

La dispersión de la velocidad de grupo de segundo orden está dada por la derivada de la inversa de la velocidad de grupo, ver ecuación (2.16).

En general, dada una función, f , que depende de la frecuencia angular, $f(w)$, se puede calcular sus derivadas con respecto a w , a partir de las derivadas con respecto a la longitud de onda, λ , usando la regla de la cadena (ver apéndice C) y la relación $w = \frac{2\pi c}{\lambda}$, obteniendo:

$$\frac{\partial}{\partial w} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial \lambda} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial w^2} = \frac{\lambda^3}{2\pi^2 c^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^4}{4\pi^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial w^3} = -\frac{\lambda^3}{(2\pi c)^3} \left(\lambda^3 \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} + 6\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + 6\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \quad (2.20)$$

Mediante estas relaciones obtenemos las siguientes derivadas, ya que el índice de refracción depende de la frecuencia angular:

$$\frac{\partial n}{\partial w} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{\partial n}{\partial \lambda} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial w^2} = \frac{\lambda^3}{2\pi^2 c^2} \frac{\partial n}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^4}{4\pi^2 c^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^3 n}{\partial \omega^3} = -\frac{\lambda^3}{(2\pi c)^3} \left(\lambda^3 \frac{\partial^3 n}{\partial \lambda^3} + 6\lambda^2 \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} + 6\lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right) \quad (2.23)$$

Ahora sabemos que $k = \frac{\omega n}{c}$, por lo que su primera, segunda y tercera derivada están dadas por:

$$\frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega} \right) = \frac{1}{c} \left(n + \frac{2\pi c}{\lambda} \left(-\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right) \right) = \frac{1}{c} \left(n - \lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right) \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial n}{\partial \omega} + \frac{\partial n}{\partial \omega} + \omega \frac{\partial^2 n}{\partial \omega^2} \right) = \frac{1}{c} \left(-\frac{\lambda^2}{\pi c} \frac{\partial n}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^2}{\pi c} \frac{\partial n}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^3}{2\pi c} \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} \right) = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3} = \frac{1}{c} \left(2 \frac{\partial^2 n}{\partial \omega^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial \omega^2} + \omega \frac{\partial^3 n}{\partial \omega^3} \right) = -\frac{1}{c^3} \left(\frac{\lambda^5}{(2\pi)^2} \frac{\partial^3 n}{\partial \lambda^3} + \frac{3\lambda^4}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} \right) \quad (2.26)$$

La ecuación 2.16 y 2.17 son las formas de calcular la dispersión de la velocidad de grupo de segundo y tercer orden respectivamente, las cuales se calcularán usando las ecuaciones (2.25) y (2.26), en donde n es el índice de refracción para la onda portadora. La primera, segunda y tercera derivada del índice de refracción con respecto a la longitud de onda se calcula usando la ecuación de dispersión de Sellmeier (Ecuación 1.3).

El campo eléctrico del pulso está definido por:

$$E(x, t) = \sum_{i=1}^N A \cos(\omega_i t - k_i x + \phi)$$

Suponiendo que la amplitud (A) de las ondas está modulada por una Gaussiana y la fase inicial ($\phi=0$) es la misma para todas las ondas. En la figura 2.3 esta dividida en dos imágenes, a) que muestra un pulso Gaussiano propagándose en el vacío y b) donde el pulso posteriormente pasa a través de un bloque de vidrio de ancho (d).

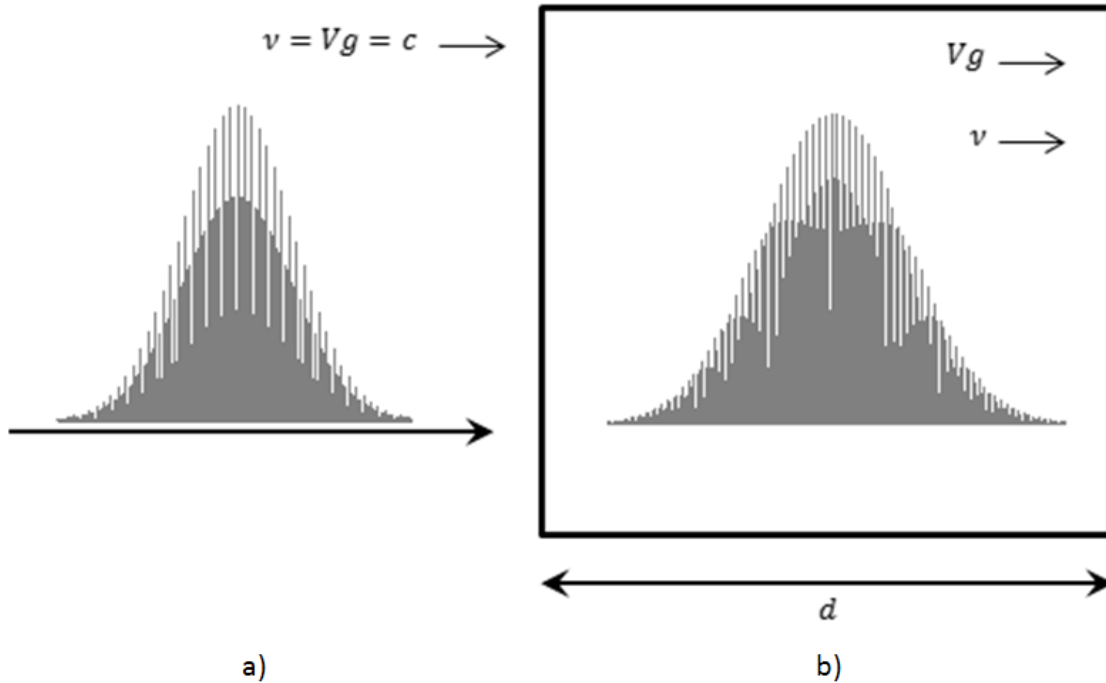


Figura 2.3.-a) Pulso propagándose en el vacío. b) Pulso propagándose en un vidrio de ancho d .

Ahora se modelará un pulso, suponiendo que la amplitud es igual a 1 para todas las ondas y la fase inicial ($\phi=0$) es la misma para todas las ondas.

Una forma de ver la dispersión de la velocidad de grupo es propagando un pulso en el vacío y otro en un vidrio, recorriendo cierta distancia, para este ejemplo utilizaremos diferentes vidrios (BK7, SF14, Titanio Zafiro y Silica fundida), de los 4 vidrios el más dispersivo es el vidrio SF14.

Tendremos un pulso con una duración de $t_0=100$ [fs] y una longitud de onda de la portadora de 800 [nm], el cual recorrerá una distancia de 100 [mm] en el vidrio. En la figura 2.4 se muestra el tren de pulsos, el eje de las abscisas está dado mediante el tiempo que tarda en propagarse el pulso sobre el vidrio dada una distancia y en el eje de las ordenadas muestra el campo eléctrico del pulso. Los pulsos mostrados en gris ilustran los pulsos propagándose en el vacío mientras que los pulsos en negro muestran el tren de pulsos que se ha propagado en el respectivo vidrio.

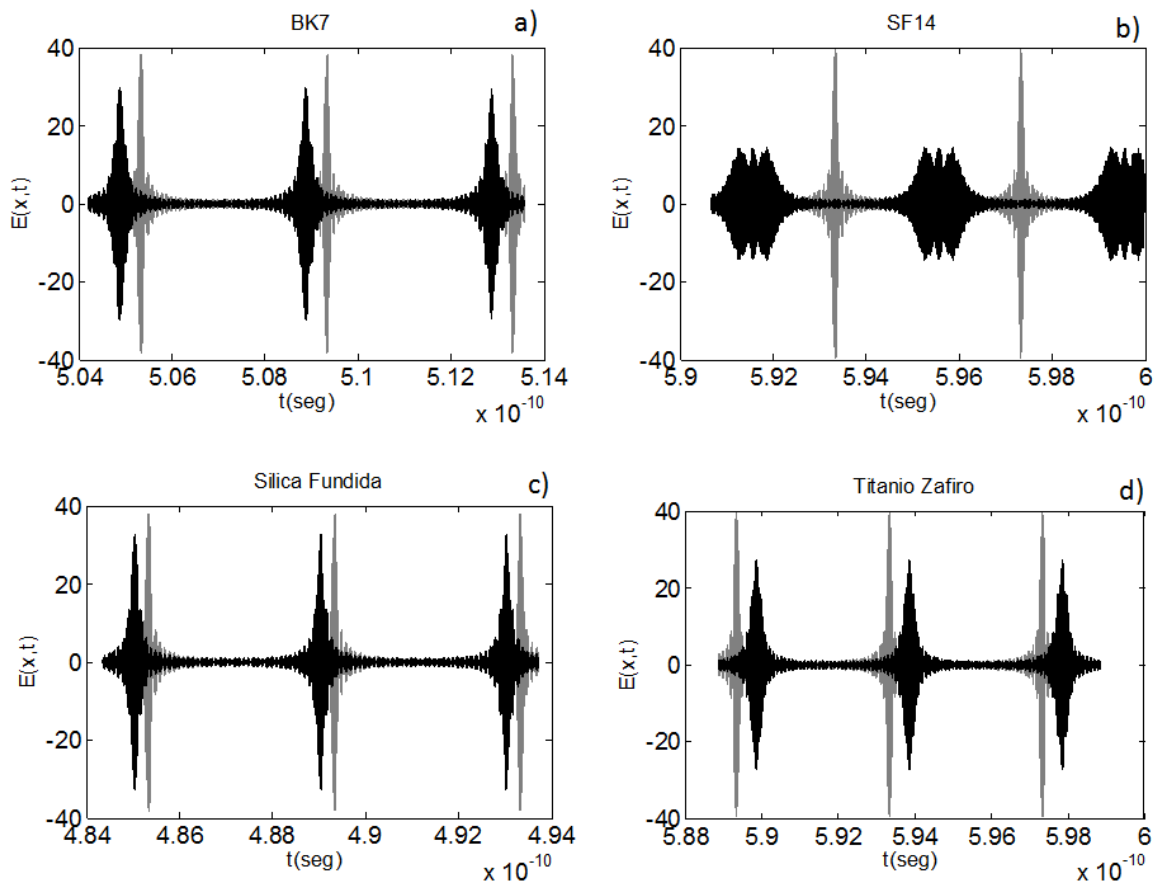


Figura 2.4 Pulsos propagándose en su respectivo medio una distancia de 100 [mm], los pulsos mostrados en gris se propagan en el vacío mientras que los pulsos en negro se propagan en el respectivo vidrio.

En las imágenes observamos cómo el pulso que recorre el vidrio va perdiendo amplitud por reflexión al incidir y también se está ensanchando en tiempo, en el vidrio SF14 (b) se puede apreciar más como el pulso se está deformando, así como también se está atrasando, el atraso del pulso que se propaga en el vidrio con respecto al pulso que se propaga en el vacío no lo podemos ver a simple vista en las gráficas así que calculamos el tiempo en que tarda el pulso propagándose una cierta distancia la cual en este caso es de 100 [mm] para una longitud de onda de la portadora de 800 [nm], en la tabla 2.1 observamos que el pulso en el vacío recorre la distancia de 100 [mm] en un tiempo menor que el pulso propagándose en el vidrio.

El ensanchamiento aumenta en materiales más dispersivos y en distancias mayores que recorre el pulso en el vidrio, esto lo produce la Dispersión de la Velocidad de Grupo. En la tabla 2.1 también

podemos ver que el pulso se tardó más en recorrer la distancia en el vidrio SF14 el cual es un material más dispersivo.

Vidrio	Tiempo en el vacío [ns]	Tiempo en el vidrio [ns]
BK7	0.33333	0.50888
SF14	0.33333	0.59557
Silica Fundida	0.33333	0.48903
Titanio Zafiro	0.33333	0.59385

Tabla 2.1.- Tiempo que tarda en propagarse el pulso una distancia de 100 [mm].

Cuando un pulso se propaga en un material dispersivo en la región de dispersión normal, se obtiene una dispersión de velocidad de grupo, GVD, positiva. El objetivo ahora es buscar una forma de generar una dispersión de velocidad de grupo, GVD, negativa para compensar la GVD positiva introducida al pulso cuando atraviesa el vidrio. Una forma de generar GVD negativa es usando un par de prismas isósceles, esto se verá en el siguiente capítulo.

2.4 DISPERSIÓN ANGULAR

El análisis que se ha realizado hasta el momento es suponiendo que el pulso incide sobre el cristal de forma perpendicular a este como en la figura 2.3. Ahora se analizará el caso cuando el pulso incide en un medio dispersivo con una cierta inclinación. Como se verá esta inclinación generará una dispersión angular en las frecuencias que componen al pulso. Para ejemplificar esto consideremos un haz que incide en un prisma como se muestra en la figura 2.5.

En la figura 2.5 se puede observar como un haz incide en un prisma, el cual al ingresar se separa en dos longitudes (λ_1 y λ_2), donde $\lambda_2 < \lambda_1$ (dispersión normal).

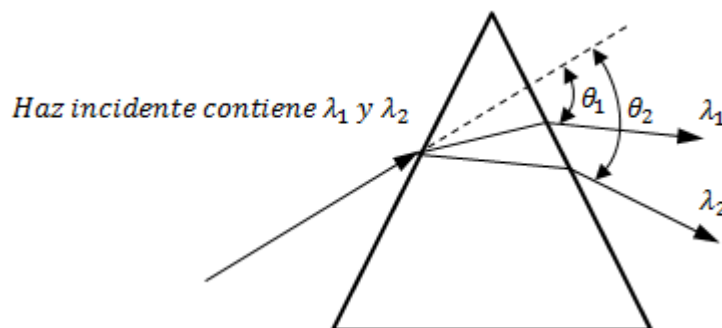


Figura 2.5.- *Dispersión de la luz por un prisma de vidrio [5].*

La dispersión angular expresa la separación angular entre dos longitudes de onda en una cantidad $d\lambda$. Este término lo podemos deducir de la figura 2.5 como:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \approx \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (2.27)$$

Usando la regla de la cadena, la dispersión angular también se puede expresar como se muestra en la Ecuación 2.28, donde n es el índice de refracción del prisma y el factor $dn/d\lambda$ (Dispersión) es una propiedad característica del prisma.

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{d\theta}{dn} \frac{dn}{d\lambda} \quad (2.28)$$

La GVD también puede ser causada por la dispersión angular, ya que los dispositivos ópticos basados en dispersión angular permiten una sintonización continua de la GVD, esto nos interesa mucho porque esto se emplea en la compresión de pulsos mediante prismas, lo que explica que el manejo de prismas que vamos a tener va a tener dispersión angular y ésta por consiguiente causará GVD.

La relación que hay entre la dispersión angular y la GVD se puede obtener de la siguiente manera. Consideraremos un rayo de luz que incide sobre un elemento óptico en el punto Q, que se muestra en la figura 2.6, este elemento por el momento no es de algún material en específico, solo se puede considerar que hay dispersión angular en el rayo, por lo tanto se generan diferentes componentes espectrales a diferentes ángulos dentro de un cono de luz el cual se aprecia mediante la parte sombreada en gris, en esta parte podemos ver dos rayos correspondientes a la frecuencia central ω_l y a una frecuencia arbitraria Ω , los frentes de ondas respectivamente están seleccionados por los subíndices 0 y Ω respectivamente, donde los planos S_0, S_Ω y S_0', S_Ω' son perpendiculares a la dirección del rayo respectivamente y representan los frentes de onda incidente y refractado.

Cabe aclarar que en el capítulo anterior todas las ondas se propagan en la misma dirección y por lo tanto la distancia que recorren es la misma para todas de tal forma que las derivadas de la fase de la portadora es la misma que las derivadas del número de onda, ya que $\Psi = k \cdot L$ donde L no

depende de la frecuencia. En este capítulo el pulso sufre dispersión angular por lo cual L depende de la frecuencia por lo que es necesario calcular las derivadas de Ψ .

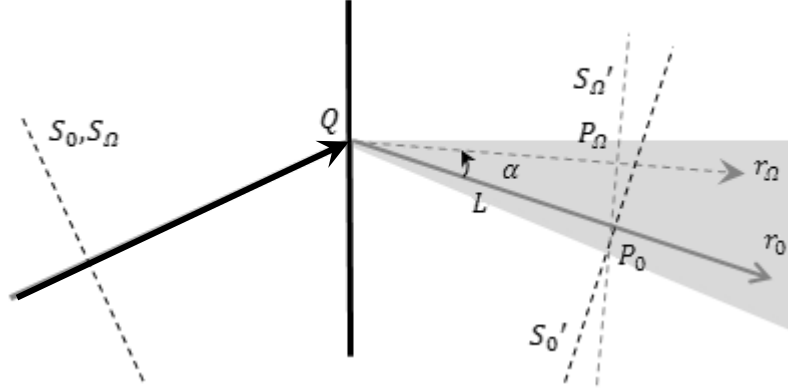


Figura 2.6.-Dispersión angular causa GVD.

La trayectoria óptica $\overline{QP_N}$ esta dada por:

$$\overline{QP_N} = P_{OL}(\Omega) = P_{OL}(w_l) \cos \alpha = L \cos \alpha$$

Donde $L = \overline{QP_0}$ y el retardo de la fase está dado por:

$$\Psi = \frac{\Omega}{c} L \cos \alpha \quad (2.29)$$

Ahora obtendremos la GVD de segundo y tercer orden con respecto a Ω :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \Omega} = \frac{L \cos \alpha}{c} - \frac{\Omega L \sin \alpha}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} = -\frac{L \sin \alpha}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} - \left(\frac{L \sin \alpha}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} + \frac{\Omega L \sin \alpha}{c} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \Omega^2} + \frac{\Omega L \cos \alpha}{c} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} \right)^2 \right)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} = -\frac{L}{c} \left(\sin \alpha \left[2 \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \Omega^2} \right] + \Omega \cos \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} \right)^2 \right) \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \Omega^3} = -\frac{L}{c} \left(2 \sin \alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \Omega^2} + 2 \Omega \cos \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} \right)^2 + \sin \alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \Omega^2} + \Omega \sin \alpha \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \Omega^3} \right)$$

$$+ \Omega \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \Omega^2} + \cos \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} \right)^2 - \Omega \sin \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} \right)^3 + 2 \Omega \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \Omega^2}$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \Omega^3} = -\frac{L}{c} \left(\sin \alpha \left[3 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \Omega^2} + \Omega \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \Omega^3} - \Omega \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} \right)^3 \right] + 3 \cos \alpha \left(\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} \right)^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \Omega^2} \right) \right) \quad (2.32)$$

En la ecuación 2.31, cuando $\sin \alpha \approx 0$, $\cos \alpha \approx 1$ y tomamos la derivada de la frecuencia central del pulso, $\Omega = w_l$. La cantidad $\partial \alpha / \partial \Omega$, la cual es la responsable de la dispersión angular no va a influir en el signo (independientemente de que signo tenga) del parámetro de la dispersión de velocidad de grupo de segundo orden, ya que este siempre va a ser negativo, por lo tanto la dispersión de velocidad de grupo de segundo orden no cambiará de signo pero sí puede aumentar su valor al aumentar la distancia L. Por lo que la dispersión angular siempre resulta en una GVD negativa.

Si consideramos estas especificaciones la ecuación 2.31 queda como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} \\ & \approx -\frac{L}{c} w_l \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Capítulo 3

ANÁLISIS DE UN PULSO EN UN PAR DE PRISMAS

Como ya sabemos al propagar un pulso en un prisma o cristal este sufre un cambio, que es conocido como dispersión de velocidad de grupo (GVD).

En la figura 3.1 mostramos un arreglo de un par de prismas isósceles idénticos, esto es, hechos del mismo material y con el mismo ángulo α conocido con el nombre de ápice del prisma, en el cual analizaremos la trayectoria que recorren las diferentes frecuencias que componen el pulso a través de estos. En la figura 3.1 se muestra la trayectoria de la onda portadora a través de estos dos prismas.

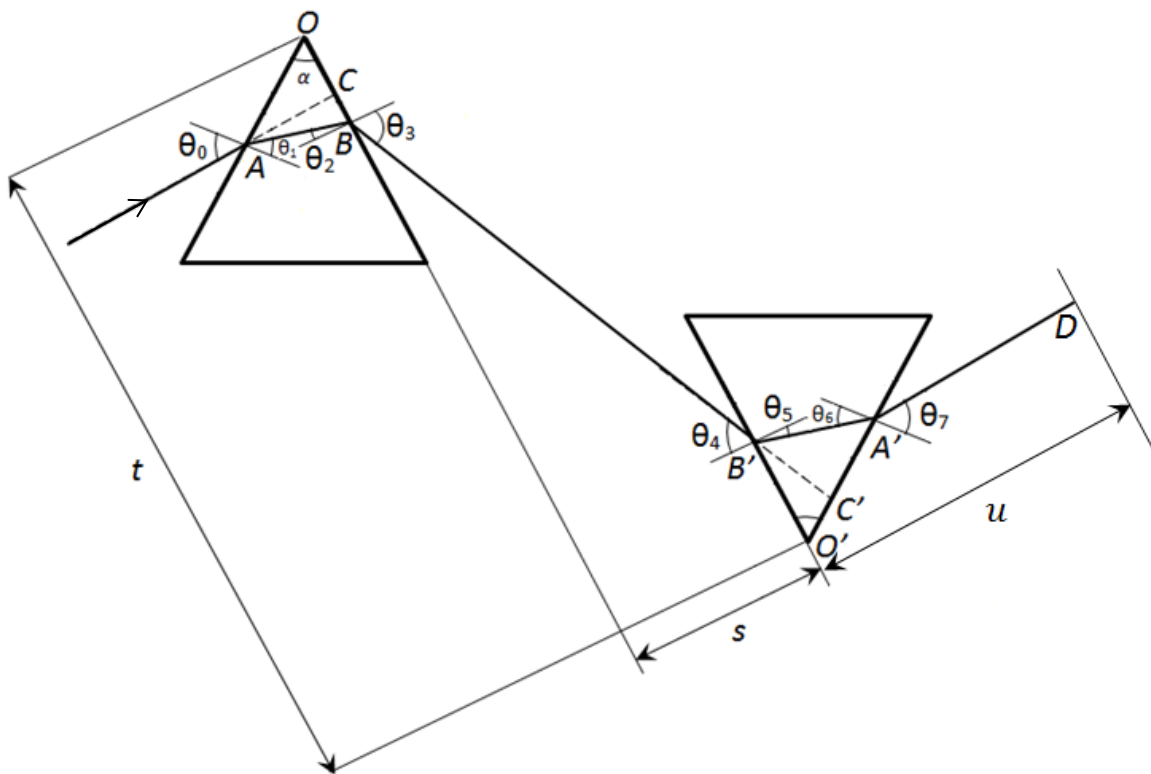


Figura 3.1.- Par de Prismas Isósceles.

Como vemos en la figura 3.1 tenemos ángulos de refracción los cuales hemos llamado $\theta_1, \theta_3, \theta_5$ y θ_7 , así como también ángulos incidentes $\theta_0, \theta_2, \theta_4$ y θ_6 , también un ángulo α el cual está dado por

el fabricante. Dado que las caras internas de los prismas son paralelas entre sí, se tiene que $\theta_0 = \theta_7, \theta_1 = \theta_6, \theta_2 = \theta_5, \theta_3 = \theta_4$ y $\alpha = \theta_1 + \theta_2$.

Las trayectorias que nos interesa analizar son $AB, L = BB', B'A' = A'B'$, y el rayo que sale del segundo prisma, $A'D$, ya que a lo largo de ellas se calcula el camino óptico que recorre la onda portadora y posteriormente la fase total, la cual estará dada por:

$$\Psi = \Psi_{AB} + \Psi_{BB'} + \Psi_{B'A'} + \Psi_{A'D} \quad (3.1)$$

De la figura 3.1 se obtienen las siguientes relaciones:

$$AB = \frac{AC}{\cos \theta_2}; \sin \alpha = \frac{AC}{AO};$$

$$\text{Así que } AB = \frac{AO \sin \alpha}{\cos \theta_2}; \quad (3.2)$$

$$A'B' = \frac{B'C'}{\cos \theta_1}; \sin \alpha = \frac{B'C'}{O'B'};$$

$$\text{Así que } A'B' = \frac{O'B' \sin \alpha}{\cos \theta_1}; \quad (3.3)$$

La separación entre las ápices de los prismas, medida a lo largo de las caras internas de los prismas está dada por:

$$t = OB + O'B' + s \tan \theta_3 \quad (3.4)$$

Dónde: $OB = OC + CB$

$$\text{Si } \cos \alpha = \frac{OC}{OA}; \tan \theta_2 = \frac{CB}{AC}; \sin \alpha = \frac{AC}{AO};$$

$$\therefore OB = OA \cos \alpha + OA \sin \alpha \tan \theta_2 \quad (3.5)$$

Sustituimos la ecuación 3.4 en 3.3 y despejamos $O'B'$:

$$O'B' = t - s \tan \theta_3 - OA(\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_2) \quad (3.6)$$

Sustituimos la ecuación 3.5 en 3.2:

$$A'B' = [t - s \tan \theta_3 - OA(\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_2)] \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1}; \quad (3.7)$$

Si nombramos a Lg como la distancia que recorre la portadora en ambos prismas, entonces:

$$Lg = AB + A'B' = \frac{OA \sin \alpha}{\cos \theta_2} + [t - s \tan \theta_3 - OA(\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_2)] \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1}$$

$$Lg = (t - s \tan \theta_3) \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} + \frac{AO \sin \alpha}{\cos \theta_2} - OA \left(\frac{\cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha \tan \theta_2}{\cos \theta_1} \right) \quad (3.8)$$

Si sabemos que $\theta_1 = \alpha - \theta_2$ y mediante entidades trigonométricas Lg nos queda:

$$Lg = (t - s \tan \theta_3) \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \quad (3.9)$$

$$\text{Si } \frac{\partial Lg}{\partial \Omega} = Lg \tan \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} - \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \quad (3.10)$$

La primera fase que analizaremos será la que recorre dentro de los dos prismas la cual está dada por:

$$\Psi_1 = \Psi_{AB} + \Psi_{A'B'} = k Lg = \frac{\Omega}{c} n Lg \quad (3.11)$$

Ahora la fase que sale del primer prisma, se calcula a partir del camino óptico que recorre la onda portadora entre los puntos BB' , como los prismas se encuentran en aire $n=1$ entonces el camino óptico es igual a $L = s / \cos \theta_3$ y la fase está dada por:

$$\Psi_2 = \Psi_{BB'} = L \frac{\Omega}{c} \quad (3.12)$$

Y por último la fase que adquiere la portadora al salir del segundo prisma es igual a:

$$\Psi_3 = \Psi_{A'D} = \frac{\Omega}{c} (u - O'A' \sin \theta_0) \quad (3.13)$$

Donde u es una constante arbitraria, que se puede hacer igual a cero, et.al. [8].

$$\text{Donde } O'A' = O'C' + C'A'; \cos \alpha = \frac{O'C'}{O'B'}; \sin \alpha = \frac{B'C'}{O'B'}; \tan \theta_1 = \frac{A'C'}{B'C'}$$

$$\begin{aligned} \therefore O'A' &= O'B' \cos \alpha + O'B' \sin \alpha \tan \theta_1 \\ &= [t - s \tan \theta_3 - OA(\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_2)](\cos \alpha + \sin \alpha \tan(\alpha - \theta_2)) \\ &= (t - s \tan \theta_3)(\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_1) - OA \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por lo tanto, la fase total está dada por la suma de las tres fases dadas por las ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.13), esto es:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 = \frac{\Omega}{c} nLg + L \frac{\Omega}{c} - \frac{\Omega}{c} (O'A' \sin \theta_0) \quad (3.15)$$

La fase total la podemos expandir en serie de Taylor:

$$\Psi = \Psi(w_0) + \Psi'(w - w_0) + \frac{1}{2} \Psi''(w - w_0)^2 + \frac{1}{6} \Psi'''(w - w_0)^3 + \dots \quad (3.16)$$

Donde Ψ' , Ψ'' y Ψ''' son las primera, segunda y tercera derivada respectivamente de la fase con respecto a w_0 . Calculando la primera, segunda y tercera derivadas (ver apéndice D) se obtiene que:

La primera derivada de la fase total está dada por la ecuación (D.9) del apéndice D:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \Omega} = \frac{Lg}{c} \left(n + \Omega \frac{\partial n}{\partial \Omega} \right) + \frac{L}{c} - \frac{O'A' \sin \theta_0}{c} \quad (3.17)$$

La segunda derivada de la fase total está dada por la ecuación (D.12) del apéndice D:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} = \frac{Lg}{c} \left(2 \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \Omega \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} \right) - \frac{n\Omega Lg}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 - \frac{\Omega}{c} \frac{s}{\cos \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right)^2 \quad (3.18)$$

Y por último la tercera derivada de la fase total está dada por la ecuación (D.14) del apéndice D:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \Omega^3} = & \frac{2}{c} \frac{\partial Lg}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{2Lg}{c} \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} + \frac{\Omega}{c} \frac{\partial Lg}{\partial \Omega} \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} + \frac{\Omega Lg}{c} \frac{\partial^3 n}{\partial \Omega^3} - \frac{2nLg\Omega}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \Omega^2} \right) \\ & - \frac{s\Omega}{c} \frac{\sin \theta_3}{\cos^2 \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right)^3 - \frac{2\Omega s}{c \cos \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \Omega^2} \right) - \frac{\Omega}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 \left(n \frac{\partial Lg}{\partial \Omega} - Lg \frac{\partial n}{\partial \Omega} \right) \\ & + \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} - \frac{2Lg}{c} \frac{\partial n}{\partial \Omega} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.1 PULSO QUE PASA A TRAVÉS DE UN CRISTAL TITANIO ZAFIRO Y UN PAR DE PRISMAS

Una vez realizado el análisis de la sección anterior, agregamos un cristal titanio zafiro, medio activo Laser como se muestra en la figura 3.2 de espesor d . Este cristal introduce al pulso una GVD de positiva la cual será compensada introduciendo una GVD negativa con el par de prismas.

El pulso después de propagarse por el cristal de Titanio-Zafiro incide en el primer prisma, donde las frecuencias del pulso se separan por dispersión angular. En la figura se muestra la trayectoria para tres ondas del pulso: la portadora con longitud de onda λ_0 , (línea continua), y otras dos ondas con longitudes de onda λ_1 (mayor que λ_0) (línea con puntos), y λ_2 (menor que λ_0) (línea con guiones). En el texto haremos referencia a estas longitudes de onda como longitud de onda del rojo (λ_1) y azul (λ_2).

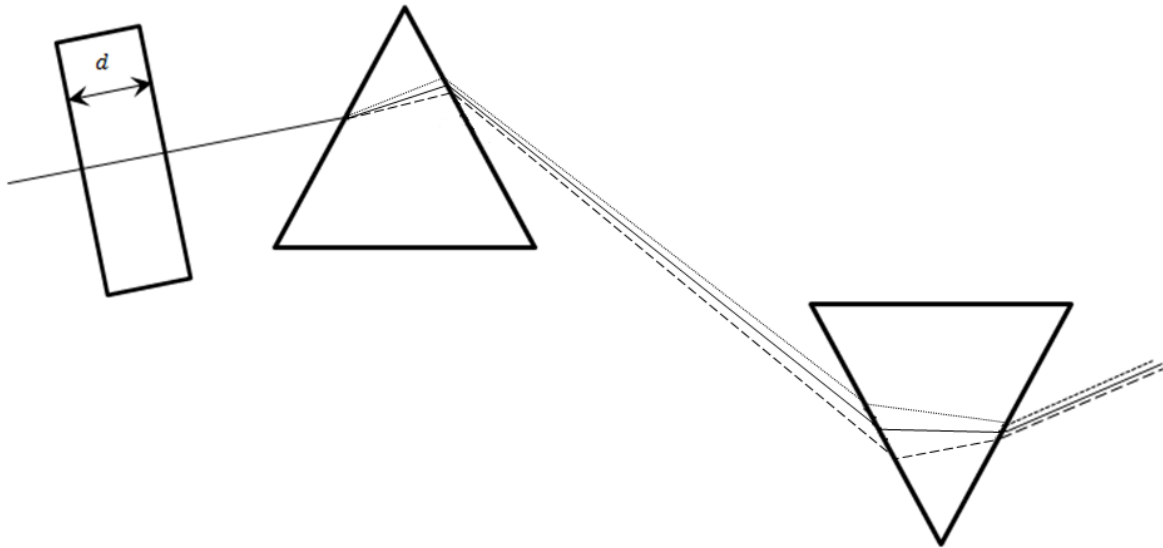


Figura 3.2.- Cristal de Titanio-Zafiro con par de prismas.

La fase del pulso después de pasar por el cristal está dada por:

$$\Psi_{Tit-zafiro} = \frac{\Omega}{c} nL \quad (3.20)$$

Donde L es el ancho o grosor del cristal también dado por d , i.e., $L = d$.

La primera, segunda y tercera derivada de la fase dada por la ecuación (3.20) están dadas por [6]:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \Omega_{Tit-zafiro}} = \frac{nL}{c} + \frac{\Omega L}{c} \frac{\partial n}{\partial \Omega}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \Omega}_{Tit-Zafiro} = \frac{L}{c} \left(n + \Omega \frac{\partial n}{\partial \Omega} \right) = \frac{L}{c} \left(n - \lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right) \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2}_{Tit-Zafiro} = \frac{L}{c} \left(\frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \Omega \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} \right) = \frac{\lambda^3 L}{2\pi c^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \Omega^3}_{Tit-Zafiro} = \frac{L}{c} \left(2 \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} + \Omega \frac{\partial^3 n}{\partial \Omega^3} \right) = \frac{L}{c} \left(-\frac{3\lambda^4}{(2\pi c)^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} - \frac{\lambda^5}{(2\pi c)^2} \frac{\partial^3 n}{\partial \lambda^3} \right) \quad (3.23)$$

donde:

$$\Omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\frac{\partial n}{\partial \Omega} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{\partial n}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} = \frac{\lambda^3}{2\pi^2 c^2} \frac{\partial n}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^4}{4\pi^2 c^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2}$$

$$\frac{\partial^3 n}{\partial \Omega^3} = -\frac{\lambda^3}{(2\pi c)^3} \left(\lambda^3 \frac{\partial^3 n}{\partial \lambda^3} + 6\lambda^2 \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} + 6\lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right)$$

Las longitudes de onda rojo (λ_1) y azul (λ_2) se calculan a través del ancho de banda del pulso que incide en el cristal de Titanio-Zafiro. Se sabe que para pulsos Gaussianos sin chirp el ancho de banda, Δw , y la duración del pulso, t_0 , están relacionados por la siguiente ecuación [7]:

$$\Delta w t_0 = 2\pi(0.441) \quad (3.24)$$

Usando la ecuación (3.24) se pueden calcular w_1 y w_2 (ver figura 3.3). Estas w_1 y w_2 , serian de los respectivos colores rojo y azul y usando la relación $\lambda = \frac{2\pi c}{w}$ se calculan las longitudes de onda del rojo y azul en el vacío.

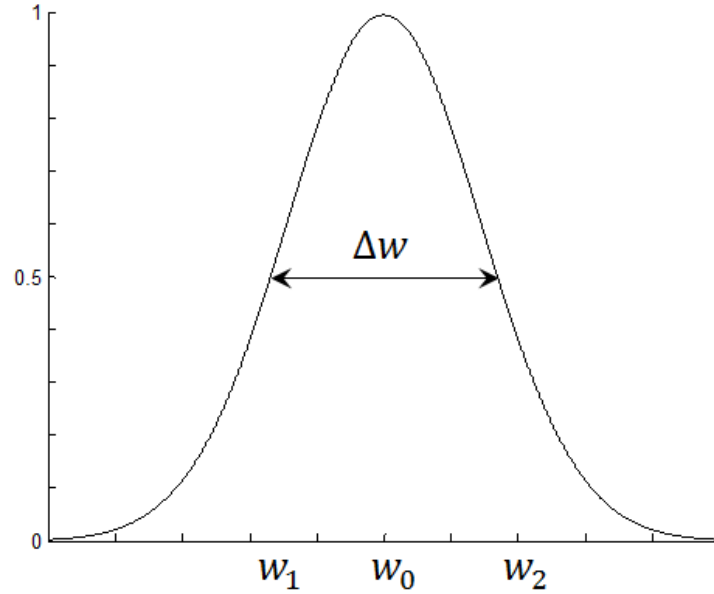


Figura 3.3.-Pulso Gaussiano.

Para este análisis tendremos tres valores para $O'B'$ y $O'A'$ así como diferentes ángulos de refracción, esto se debe a que hay tres longitudes de onda. Cabe señalar que los ángulos para la onda portadora quedan determinados por la condición del ángulo de desviación mínima ($\theta_0 = \theta_3$ y $\theta_1 = \theta_2$) y el ángulo de Brewster ($\tan \theta_1 = n$). Estos dos ángulos nos ayudan a simplificar los cálculos.

Sabemos que $O'A'$ para el caso general está dado por:

$$O'A' = (t - s \tan \theta_3)(\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_1) - OA \quad (3.25)$$

Ahora aplicamos la condición del ángulo de desviación mínima para la onda portadora, lo que nos queda:

$$O'A'p = (t - s \tan \theta_0)(\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_1) - OA \quad (3.26)$$

Y para las otras dos ondas, roja y azul, $O'A'$ queda como:

$$O'A'r = (t - s \tan \theta_{3r})(\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_{1r}) - OA \quad (3.27)$$

$$O'A'a = (t - s \tan \theta_{3a})(\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_{1a}) - OA \quad (3.28)$$

Como se muestra en la figura 3.3 la onda que más se desvía en el primer prisma es la onda azul. Por lo que la separación entre prismas debe escogerse de forma adecuada para no provocar que la punta del segundo prisma corte algunas frecuencias del pulso. Se usará la onda "azul" para

calcular cual es la separación mínima que puede haber entre los prismas sin cortar frecuencias del pulso.

Mediante la figura 3.4 analizaremos la trayectoria de la onda con frecuencia angular ω_2 y longitud de onda λ_2 , mostrada con una línea de rayas en la figura 3.4. Los cálculos que se presentan a continuación están referidos a esta figura.

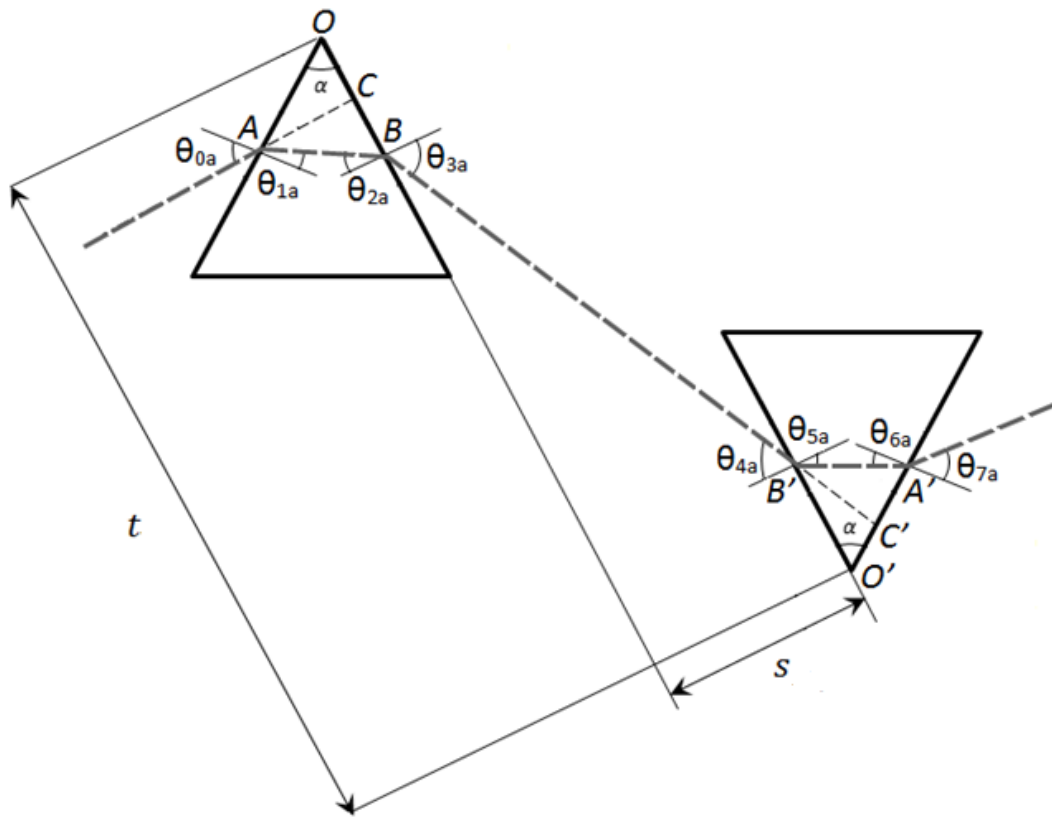


Figura 3.4.-Camino Óptico para la onda azul en un Par de Prismas Isósceles.

La dispersión de velocidad de grupo de segundo orden está dada por la segunda derivada de la fase. Ahora bien, para compensar la dispersión de velocidad de grupo positiva introducida al pulso al pasar por el cristal de Titanio-Zafiro, es necesario generar una dispersión de velocidad de grupo de la misma magnitud pero con signo negativo. Esta GVD negativa se introduce con el par de prismas, por lo tanto es necesario que se cumpla la siguiente ecuación:

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} \right|_{\text{Tit-Zafiro}} \Big|_{\omega_0} + \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} \right|_{\text{Prismas}} \Big|_{\omega_0} = 0 \quad (3.29)$$

Sustituyendo la ecuación (3.22) y (3.18) en la ecuación (3.29) se tiene:

$$\frac{\lambda^3 L}{2\pi c^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} \Big|_{w_0} + \frac{Lg}{c} \left(2 \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \Omega \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} \right) \Big|_{w_0} - \frac{n\Omega Lg}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 \Big|_{w_0} - \frac{\Omega}{c} \frac{s}{\cos \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right)^2 \Big|_{w_0} = 0 \quad (3.30)$$

Donde Lg está dada por la ecuación (3.7). Sustituyendo la ecuación (3.3) en la ecuación (3.7) se tiene:

$$Lg = OB \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1(w)} + s \tan \theta_3(w_0) \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1(w)} + O'B' \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1(w)} - s \tan \theta_3(w_0) \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1(w)}$$

$$Lg = OB \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1(w)} + O'B' p \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1(w)} \quad (3.31)$$

Lg es la distancia que recorre una onda de frecuencia w dentro de los prismas.

Dentro de una cavidad lineal el pulso pasa dos veces por el par de prismas y dos veces por el cristal por lo que el segundo y el tercer orden de dispersión de velocidad de grupo está dada por:

$$2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} \Big|_{\text{Tit-Zafiro}} \Big|_{w_0} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} \Big|_{\text{Prismas}} \Big|_{w_0} \right) = 0 \quad (3.32)$$

$$2 \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \Omega^3} \Big|_{\text{Tit-Zafiro}} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \Omega^3} \Big|_{\text{Prismas}} \right) \Big|_{w_0} \quad (3.33)$$

El tercer orden de dispersión de velocidad de grupo de las tablas 3.1 y 3.2 presentadas en las secciones 3.2 y 3.3 respectivamente, corresponde al valor calculado con la ecuación (3.33).

3.2 PULSO INICIAL SIN CHIRP QUE PASA POR UN PAR DE PRISMAS.

En el capítulo 1 en la sección 1.2 se modelaron pulsos sin chirp. Por otro lado, en el artículo de Ramírez-Corral, et.al. [7], se analizó la separación que debe haber entre el par de prismas si no se toma en cuenta el cristal de Titanio-Zafiro y suponiendo que sobre el primer prisma incide un pulso sin chirp, entonces se calcula la separación que debe haber entre los prismas para que el pulso al pasar y regresar por el par de prismas tampoco tenga chirp. En este caso la ecuación (3.18) se iguala a cero, esto es:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} = \frac{Lg}{c} \left(2 \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \Omega \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} \right) \Big|_{w_0} - \frac{n\Omega Lg}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 \Big|_{w_0} - \frac{\Omega}{c} \frac{s}{\cos \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right)^2 \Big|_{w_0} = 0 \quad (3.34)$$

Sustituyendo la expresión para Lg dada por la ecuación (3.7) y $D = 2 \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \Omega \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2}$ se tiene:

$$\left(\frac{D}{c} \Big|_{w_0} - \frac{n\Omega}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 \Big|_{w_0} \right) \left[(t - s \tan \theta_3) \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \right] - \frac{\Omega}{c} \frac{s}{\cos \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right)^2 \Big|_{w_0} = 0 \quad (3.35)$$

En la ecuación (3.35) se tienen dos incógnitas, s y t , fijando el valor de una de ellas se puede calcular de la otra, en este caso se fijara t y se despejara s .

$$s = \frac{t \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \left(\frac{n\Omega}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 - \frac{1}{c} \left(2 \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \Omega \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} \right) \right)}{\frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \left(\frac{n\Omega}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 - \frac{1}{c} \left(2 \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \Omega \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} \right) \right) - \frac{\Omega}{c} \frac{1}{\cos \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right)^2} \quad (3.36)$$

Para verificar el algoritmo escrito en Matlab se ha calculado el mismo ejemplo mostrado en el artículo de Ramirez-Corral, et.al. [8]. En la tabla 3.1 se muestran los resultados obtenidos para el par de prismas de Silica Fundida, $\alpha=69.1$, $t=200$ [mm] y $OA=3.0$ [mm]. Comparando la tabla 3.1 presentada en esta sección con la tabla 2 del artículo de Ramírez-Corral, et.al. [8], se verifica que los resultados son los mismos.

En la tabla 3.1 muestra los resultados de un compresor basado en un par de prismas para que un pulso sin chirp que incide en el primer prisma salga sin dispersión de velocidad de grupo de segundo orden, esto es, $\partial \Psi^2 / \partial w^2 |_{w_0} = 0$, después de ir y regresar por el par de prismas.

Variable	Silica Fundida	Unidades
α	69.1	Grados
θ_1	34.55	Grados
θ_3	55.507	Grados
$\partial \theta_1 / \partial w _{w_0}$	-0.00277985	fs
$\partial \theta_3 / \partial w _{w_0}$	0.011751314	fs
$\partial^2 \theta_1 / \partial w^2 _{w_0}$	0.000207022	fs ²
$\partial^2 \theta_3 / \partial w^2 _{w_0}$	-0.000579284	fs ²
t	200	mm
s	133.135633	mm
L	235.095661	mm
Lg	7.0720578	mm
$\partial L / \partial w$	4.0207963	mm fs
$\partial Lg / \partial w$	-5.5469144	mm fs
OA	3.0	mm
$O'A'$	3.235	mm
$\partial \Psi^2 / \partial w^2 _{w_0}$	0	fs ²
$\partial \Psi^3 / \partial w^3 _{w_0}$	-186.90086	fs ³

Tabla 3.1.-Resultado de un par de prismas.

3.3 PULSO INICIAL SIN CHIRP QUE PASA POR EL CRISTAL DE TITANIO-ZAFIRO Y EL PAR DE PRISMAS.

Tenemos las siguientes ecuaciones en términos de la frecuencia angular w_2 y longitud de onda λ_2

$$OBa = OA \cos \alpha + OA \sin \alpha \tan \theta_{2a}$$

$$t = OBa + O'B'a + s \tan \theta_{3a}$$

$$Lga = (t - s \tan \theta_{3a}) \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_{1a}} \quad (3.37)$$

$$Lga = (OBa + O'B'a) \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_{1a}} \quad (3.38)$$

Despejamos t de la ecuación (3.37)

$$t = \frac{Lga \cos \theta_{1a}}{\sin \alpha} + s \tan \theta_{3a} \quad (3.39)$$

La distancia que recorre la onda portadora dentro del material está dada por:

$$Lgp = (t - s \tan \theta_3) \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \quad (3.40)$$

Sustituimos la ecuación (3.39) en la ecuación (3.40):

$$Lgp = \left(\frac{Lga \cos \theta_{1a}}{\sin \alpha} + s \tan \theta_{3a} - s \tan \theta_3 \right) \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1}$$

O

$$Lgp = \frac{Lga \cos \theta_{1a}}{\cos \theta_1} + \frac{s \tan \theta_{3a} \sin \alpha}{\cos \theta_1} - \frac{s \tan \theta_3 \sin \alpha}{\cos \theta_1} \quad (3.41)$$

Sustituimos Lgp dada por la ecuación (3.41) en la ecuación (3.30):

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^3 L}{2\pi c^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{c} \left(2 \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \Omega \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} \right) \left(\frac{Lga \cos \theta_{1a}}{\cos \theta_1} + \frac{s \tan \theta_{3a} \sin \alpha}{\cos \theta_1} - \frac{s \tan \theta_3 \sin \alpha}{\cos \theta_1} \right) \\ - \frac{n\Omega}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 \left(\frac{Lga \cos \theta_{1a}}{\cos \theta_1} + \frac{s \tan \theta_{3a} \sin \alpha}{\cos \theta_1} - \frac{s \tan \theta_3 \sin \alpha}{\cos \theta_1} \right) - \frac{\Omega}{c} \frac{s}{\cos \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right)^2 \\ = 0 \end{aligned}$$

Si $M = \frac{\tan \theta_{3a} \sin \alpha}{\cos \theta_1} - \frac{\tan \theta_3 \sin \alpha}{\cos \theta_1}$ y despejamos s se obtiene:

$$\therefore s = \frac{\frac{\lambda^3 L}{2\pi c^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} + \frac{Lga \cos \theta_{1a}}{c \cos \theta_1} \left(2 \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \Omega \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} \right) - \frac{n\Omega}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 \frac{Lga \cos \theta_{1a}}{\cos \theta_1}}{\frac{1}{c} \left(2 \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \Omega \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} \right) M - \frac{n\Omega}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 M - \frac{\Omega}{c} \frac{s}{\cos \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right)^2} \quad (3.42)$$

La dispersión de velocidad de grupo de segundo-orden generada por el cristal de Titanio-Zafiro está dada por la ecuación (3.22). Si tenemos como valores para el cristal Titanio Zafiro $L = d = 4$ [mm] y $\lambda_0 = 800$ [nm], entonces:

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} \right|_{\omega_0}^{\text{Tit-Zafiro}} = 57.9586 \frac{fs^2}{mm} \times L = 231.834 fs^2$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} \right|_{\omega_0}^{\text{Tit-Zafiro}} = GVD \times L = GDD$$

Donde GDD es la dispersión de retardo de grupo por sus siglas en inglés Group Delay Dispersion, que es el producto de la GVD y la longitud del material.

Un pulso que atraviesa el cristal de Titanio-Zafiro, adquiere una cantidad de dispersión de velocidad de grupo de $231.834 fs^2$.

En la tabla 3.2 se desglosan los resultados usando un par de prismas de Silica Fundida que compensará la dispersión de velocidad de grupo introducida al pulso por el cristal de Titanio-Zafiro. El ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 69.1^\circ$, $OA=3.5$ [mm]. Suponiendo un pulso con una duración de $t_0=10$ [fs] se calculará la separación mínima entre los prismas para que las frecuencias del pulso no sean cortadas por el segundo prisma. Entonces haciendo que la altura a la que incide el rayo azul en el segundo prisma sea igual a $O'B'_\alpha = 0.000001mm$. Aunque no tiene sentido físico por que no se puede medir esta distancia experimentalmente, se hizo el cálculo para aproximarla a cero.

Obtenemos los siguientes resultados:

Variable	Silica Fundida	Unidades
α	69.1	Grados
OA	3.5	mm
λ_0	800	nm
Espesor Cristal (d)	4	mm
$O'B'_a$	0.000001	mm
OA	3.5	mm
Duración del pulso	10	fs
Ancho de banda	2.7708847×10^{14}	1/s
θ_1	34.55	Grados
θ_3	55.507	Grados
$\partial\theta_1/\partial w _{w_0}$	-0.00277985	fs
$\partial\theta_3/\partial w _{w_0}$	0.011751314	fs
Lg_{azul}	3.97092762	mm
s	219.659281	mm
t	324.309188	mm
L	391.69713992	mm
$Lg_{portadora}$	5.23804786	mm
$O'B'$	1.11807005	mm
$O'B'_r$	2.23880323	mm
$O'B'_a$	0.000001	mm
$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Prismas}$	-231.83432687	fs ²
$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$	0	fs ²
$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$	-323.9313905	fs ³

Tabla 3.2.-Resultados, Cristal de titanio Zafiro y un par de prismas.

En la tablas 3.1 y 3.2 se ha hecho el cálculo para una anchura a media altura (FWHM por sus siglas en inglés Full Width at Half Maximun).

3.4 ANÁLISIS DE UN PULSO EN PAR DE PRISMAS MEDIANTE EL MÉTODO DE FORK

Este es un método para producir GVD negativa mediante un arreglo de 4 prismas o colocando dos y posteriormente un espejo, la línea punteada que sale del primer prima corresponde al color rojo y la línea de rayas corresponde al color azul.

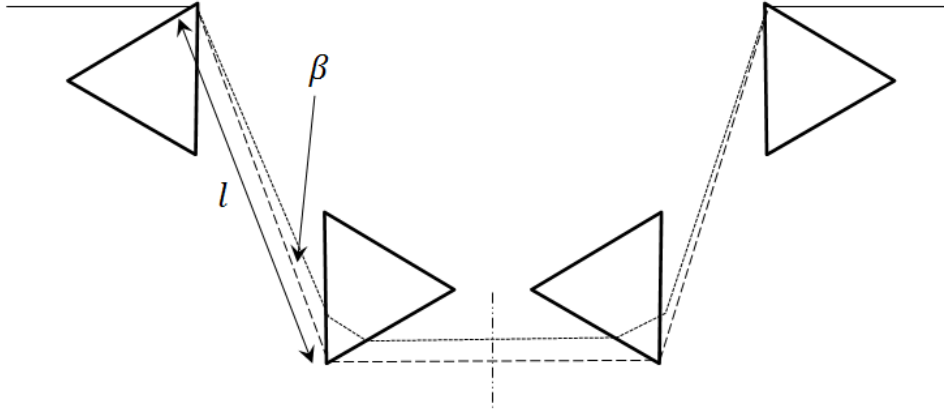


Figura 3.4.- Arreglo de cuatro Prismas para producir una GVD negativa [9].

El rayo que incide en la primera cara del primer prisma hace un ángulo igual al ángulo de Brewster. El rayo que corresponde a la frecuencia de la onda portadora incide al ángulo de Brewster en cada uno de los prismas, l es la distancia que hay entre los ápices del primero y segundo prisma que es igual a la distancia entre ápices del tercer y cuarto prisma. β es el ángulo entre el rayo de la portadora y la línea que une a los ápices(l).

El primer prisma dispersa el haz, el segundo colima el haz y los últimos dos (tercero y cuarto prisma) deshacen la acción que hicieron los dos primeros para que al momento que salen los rayos del cuarto sean idénticos a los que entraron. La línea punteada colocada verticalmente que está después del segundo prisma representa un espejo el cual se puede colocar después del segundo prisma y así utilizar dos prismas en lugar de cuatro.

Una forma común de expresar la fase espectral como expansión de Taylor alrededor de la frecuencia de la portadora del pulso es:

$$\Psi(\omega - \omega_0) = \Psi_0 + \Psi_1(\omega - \omega_0) + \Psi_2 \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} + \Psi_3 \frac{(\omega - \omega_0)^3}{6} + \dots \quad (3.43)$$

Si tenemos en cuenta que $\Psi(\omega) = k(\omega)L$, cuando k es la constante de propagación y L es la longitud del medio, si sabemos que la velocidad de grupo está definida por $\partial\omega/\partial k$, es fácil ver que el primer término en la ecuación 3.43 agrega una constante a la fase. El segundo término es proporcional a $1/V_g$, añade demora al pulso, el primer y segundo término no afectan la forma del pulso. El tercer término referido a la dispersión de retardo de grupo (GDD), es proporcional a $\frac{\partial}{\partial\omega} \left(\frac{1}{V_g} \right)$, el cual como vimos es la dispersión por velocidad de grupo (GVD). Se introduce un

retardo dependiente de la frecuencia de los diferentes componentes espectrales del pulso, así temporalmente cambiarlos. El GDD y GVD están relacionados a través $\Psi_2(\omega) = k_2(\omega)L$. Y el cuarto término se puede conocer como dispersión de velocidad de grupo de tercer orden.

Observando la figura 3.4 se puede ver que una longitud de trayectoria dependiente de la longitud de onda, $P(\lambda)$, debido a la dispersión está dado por:

$$P = 2l \cos \beta \quad (3.44)$$

Como ya se mencionó anteriormente, l es la distancia que hay de punta a punta entre el primer y segundo prisma, β es el ángulo del haz dispersado después de que recorre el primer prisma. El GDD introducido por la secuencia de prismas está dado por:

$$GDD_{Prismas} = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \left(\frac{\partial^2 P(\lambda)}{\partial \lambda^2} \right) \quad (3.45)$$

Donde la dispersión de retardo de grupo (GDD), es proporcional a $\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{v_g} \right)$, el cual como vimos es la dispersión por velocidad de grupo (GVD), λ es la longitud de onda de la luz y c es la velocidad de la luz. Utilizando la aproximación de Fork et.al. [9], la ecuación 3.45 se puede escribir de la siguiente manera:

$$GDD_{Prismas} = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \left[4l \left\{ \left[\frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} + \left(2n - \frac{1}{n^3} \right) \left(\frac{\partial n}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \sin \beta - 2 \left(\frac{\partial n}{\partial \lambda} \right)^2 \cos \beta \right\} + 4 \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} (2D_{1/e^2}) \right] \quad (3.46)$$

Cuando n es el índice de refracción y $D_{1/e}$ es el diámetro del haz en $1/e^2$. Las derivadas del índice de refracción con respecto a la longitud de onda se pueden obtener derivando la ecuación de Sellmeier y β puede ser estimado por: correcciones

$$\beta \approx -2 \frac{\partial n}{\partial \lambda} \Delta \lambda \quad (3.47)$$

Si β es muy pequeña y $\sin \beta \ll \cos \beta$ la ecuación 3.33 se puede simplificar a:

$$GDD_{Prismas} = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \left[-4l \left\{ 2 \left(\frac{\partial n}{\partial \lambda} \right)^2 + 4 \frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2} (2D_{1/e^2}) \right\} \right] \quad (3.48)$$

Analizando la ecuación 3.48 observamos que el primer término es negativo y depende de la distancia que hay entre el primer y segundo prisma. El segundo término es positivo y depende del trayecto de la longitud de onda a través de los prismas.

Capítulo 4

RESULTADOS

En este capítulo se verán los resultados para dos tipos de configuración de compresores, en este caso se utilizarán las configuraciones de compresor lineal y compresor de anillo, la diferencia en estas configuraciones se puede apreciar en la segunda y tercera derivada de la fase:

$$2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2 \text{Tit-Zafiro}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2 \text{Prismas}} \right) \Big|_{w_0} = 0 \quad (4.1)$$

$$2 \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \Omega^3 \text{Tit-Zafiro}} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \Omega^3 \text{Prismas}} \right) \Big|_{w_0} = 0 \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2 \text{Tit-Zafiro}} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2 \text{Prismas}} \right) \Big|_{w_0} = 0 \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \Omega^3 \text{Tit-Zafiro}} + 2 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \Omega^3 \text{Prismas}} \right) \Big|_{w_0} = 0 \quad (4.4)$$

Las ecuaciones 4.1 y 4.2 pertenecen a la configuración lineal mientras que las ecuaciones 4.3 y 4.4 a la configuración de anillo, la diferencia se puede ver en el 2, es decir la configuración lineal pasa dos veces tanto por el cristal como por los prismas, mientras que en la configuración de anillo pasa una sola vez por el cristal y dos por los prismas. Los resultados mostrados en la siguiente sección se obtuvieron con un programa ejecutable que se describe en la sección 4.3.

4.1 RESULTADOS CONFIGURACIÓN LINEAL

En la figura 4.1 se muestra la configuración lineal, posteriormente en la tabla 4.1 se fijan los siguientes datos, una longitud de onda de $\lambda_0 = 810[\text{nm}]$, ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 69.1^\circ$, $OA=3$ [mm] y t_0 será un valor que estará variando como se muestra en la tabla, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de 4 [mm] y los prismas son de Silica Fundida. En la figura 4.2 se graficaron las distancia L y t como función de la duración del pulso.

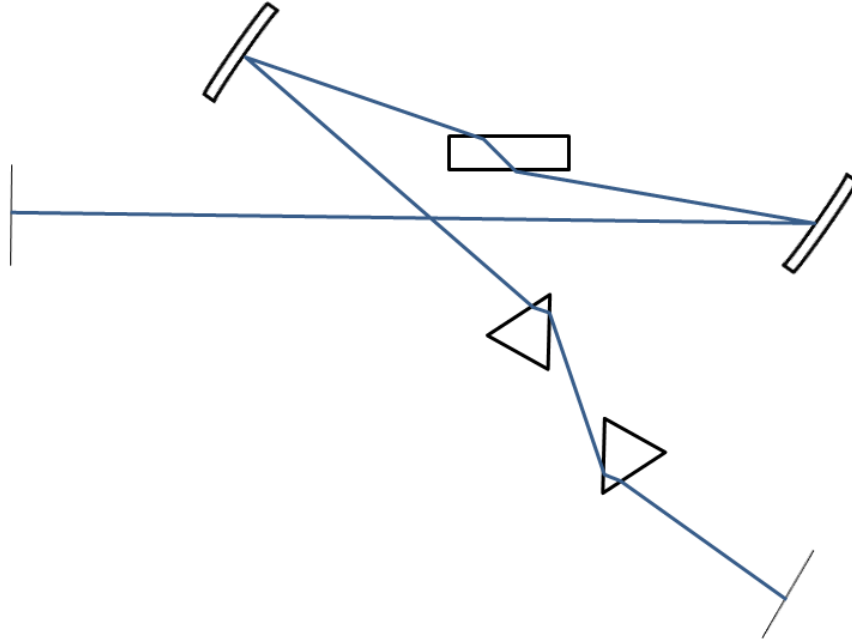


Figura 4.2.- Configuración lineal.

t_0 [fs]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs ²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs ³]
5	232.804	344.076	415.434	0	-277.298
10	204.664	301.8	364.651	0	-245.797
15	196.783	289.959	350.428	0	-236.975
20	193.069	284.38	343.726	0	-232.817
50	186.726	274.851	332.279	0	-225.717
100	184.703	271.811	328.628	0	-223.452
200	183.707	270.315	326.831	0	-222.337

Tabla 4.1.- Resultados cristal Titanio Zafiro y par de prismas de Silica Fundida.

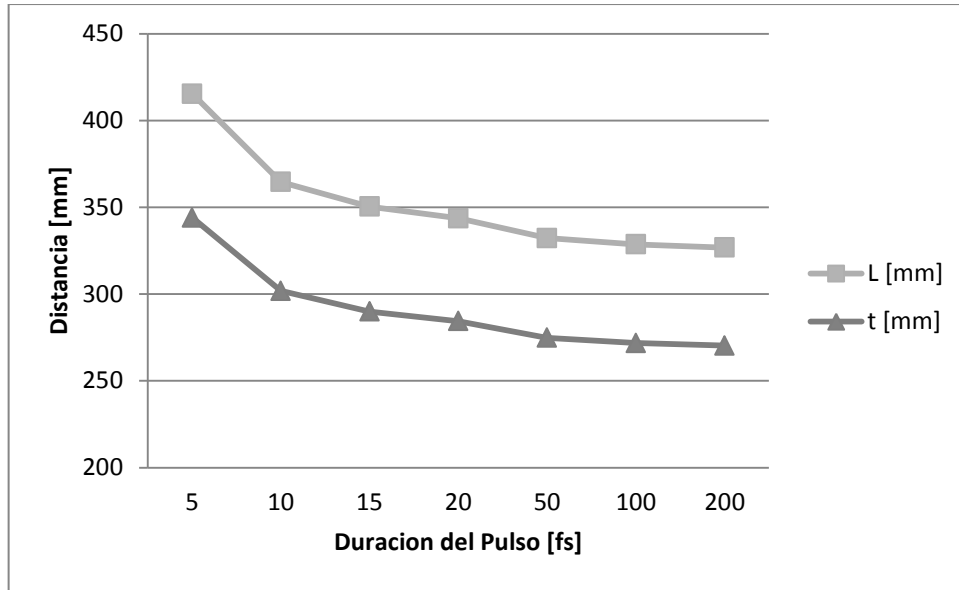


Figura 4.2.- Resultados separación entre Prismas de Silica Fundida [mm] vs Duración del pulso [fs].

En la tabla 4.2 se fijaran los siguientes datos: longitud de onda de la portadora de $\lambda_0 = 810[\text{nm}]$, ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 60.6^\circ$, altura a la que incide el haz en la primera cara del primer prisma: $OA=3 [\text{mm}]$. t_0 es la duración del pulso inicial, este valor estará variando como en el caso anterior, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de $4 [\text{mm}]$ y los prismas ahora cambiaran por SF14. En la figura 4.3 se graficaron las distancia L y t como función de la duración del pulso.

t_0 [fs]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs ²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs ³]
5	48.5812	95.1149	106.803	0	-4628.76
10	37.2062	72.5424	81.5273	0	-3533.69
15	34.6512	67.4724	75.85	0	-3287.73
20	33.5237	65.2349	73.3446	0	-3179.18
50	31.7017	61.6194	69.2962	0	-3003.78
100	31.1465	60.5176	68.0623	0	-2950.33
200	30.8777	59.9841	67.465	0	-2924.45

Tabla 4.2.- Resultados cristal Titanio Zafiro y par de prismas de SF14.

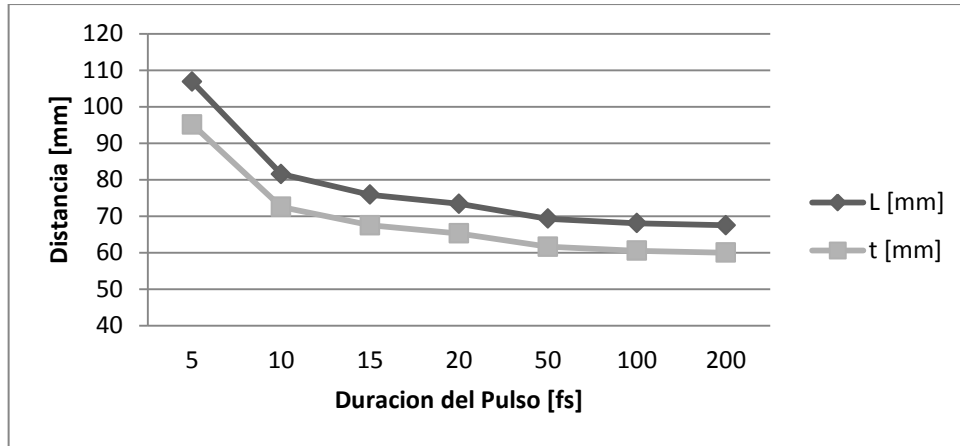


Figura 4.3.- Resultados separación entre Prismas [mm] vs Duración del pulso [fs].

En tabla 4.3 se fijaran los siguientes datos, un tiempo $t_0 = 10$ [fs], ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 69.1^\circ$, $OA = 3$ [mm] y la longitud de la onda portadora λ_0 será un valor que estará variando como se muestra en la tabla, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de 4 [mm] y los prismas son Silica Fundida. En la figura 4.4 se graficó la tercera derivada como función de la longitud de onda de la portadora.

λ_0 [nm]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs ²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs ³]
760	216.854	321.21	386.73	0	-552.827
770	215.015	317.39	383.364	0	-491.502
780	212.865	314.122	379.452	0	-430.05
790	210.415	310.423	375.06	0	-368.557
800	207.667	306.309	370.074	0	-307.11
810	204.664	301.8	364.651	0	-245.797
820	201.39	296.916	358.772	0	-184.705
830	197.87	291.678	352.461	0	-123.921
840	194.119	286.11	345.747	0	-63.5297
850	190.152	280.235	338.658	0	-3.61542
860	185.987	274.076	331.223	0	55.7396
870	181.641	267.659	323.473	0	114.456
880	177.13	261.007	315.436	0	172.455

Tabla 4.3.- Resultados cristal Titanio Zafiro y prismas de Silica Fundida.

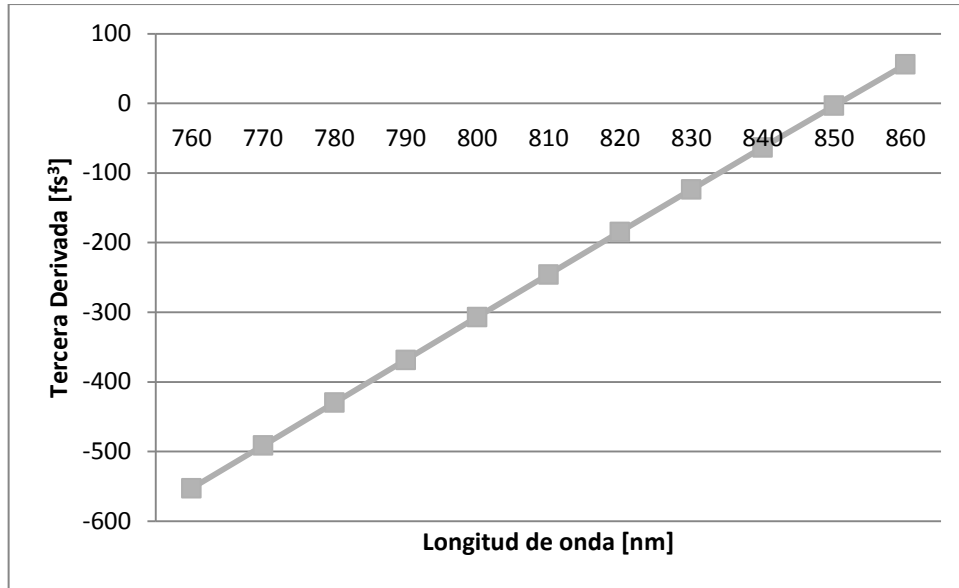


Figura 4.4.- Resultados de la Tercera derivada conforme se aumenta la longitud de onda.

Es importante notar en la Tabla 4.3 y figura 4.4, que la tercera derivada de la fase se hace cero para una longitud de onda de la portadora cercana a 850nm.

Por último en la tabla 4.4 se fijaran los siguientes datos, un tiempo $t_0 = 10$ [fs], ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 60.6^\circ$, $OA = 3$ [mm] y la longitud de onda λ_0 será un valor que estará variando como se muestra en la tabla, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de 4 [mm] y los prismas ahora cambiara por SF14. En la figura 4.5 se muestra la tercera derivada como función de la longitud de onda de la portadora. En este caso se observa que la tercera derivada nunca se hace cero.

λ_0 [nm]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs ²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs ³]
760	33.5883	66.3051	74.3272	0	-3991.82
770	34.3544	67.6323	75.8574	0	-3899.68
780	35.1009	68.9226	77.3459	0	-3807.95
790	35.8261	70.1729	78.7893	0	-3716.47
800	36.5284	71.3805	80.1842	0	-3625.09
810	37.2062	72.5424	81.5273	0	-3533.69
820	37.8577	73.6557	82.8153	0	-3442.15
830	38.4815	74.7178	84.045	0	-3350.37
840	39.0759	75.7258	85.2133	0	-3258.27
850	39.6393	76.677	86.3171	0	-3165.76
860	40.1704	77.569	87.3534	0	-3072.8
870	40.6677	78.3991	88.3192	0	-2979.31
880	41.1298	79.1652	89.212	0	-2885.26

Tabla 4.4.- Resultados cristal Titanio Zafiro y prismas de SF14.

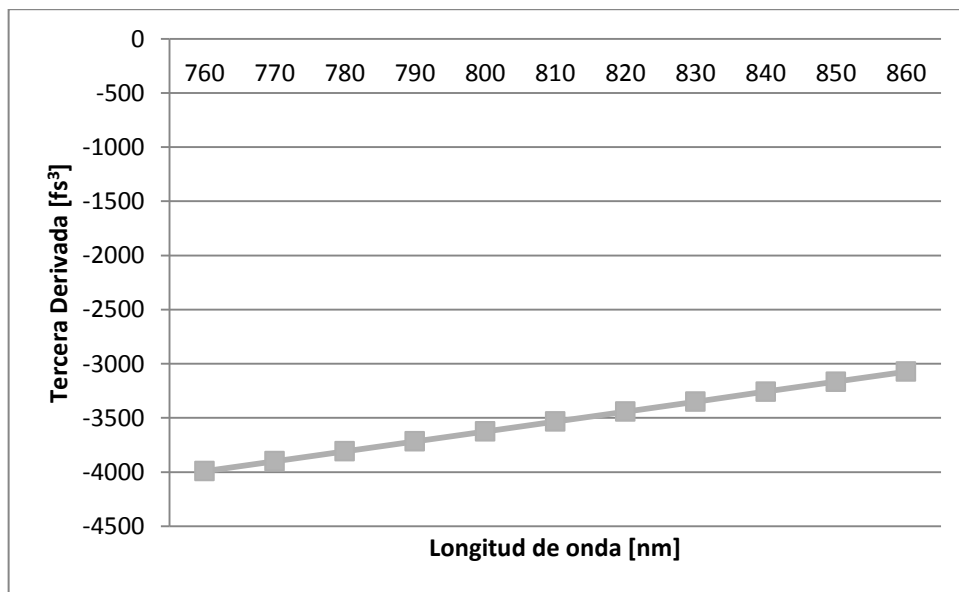


Figura 4.5.- Resultados de la Tercera derivada como función de la longitud de onda.

En la tabla 4.5 se fijaran los siguientes datos, una longitud de onda de $\lambda_0 = 810$ [nm], ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 69.1^\circ$, $OA=3$ [mm] y t_0 será un valor que estará variando como se

muestra en la tabla, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de 1 [cm] y los prismas son de Silica Fundida. En la figura 4.6 se muestran las distancia L y t como función de la duración del pulso.

t_0 [fs]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs ²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs ³]
5	461.165	678.639	820.502	0	-557.967
10	405.459	594.95	719.974	0	-495.607
15	389.857	571.51	691.818	0	-478.141
20	382.505	560.464	678.55	0	-469.911
50	369.949	541.601	655.892	0	-455.855
100	365.944	534.584	648.664	0	-451.371
200	363.973	532.623	645.107	0	-449.165

Tabla 4.5.- Resultados cristal Titanio Zafiro de 1[cm] de espesor y prismas de Silica Fundida.

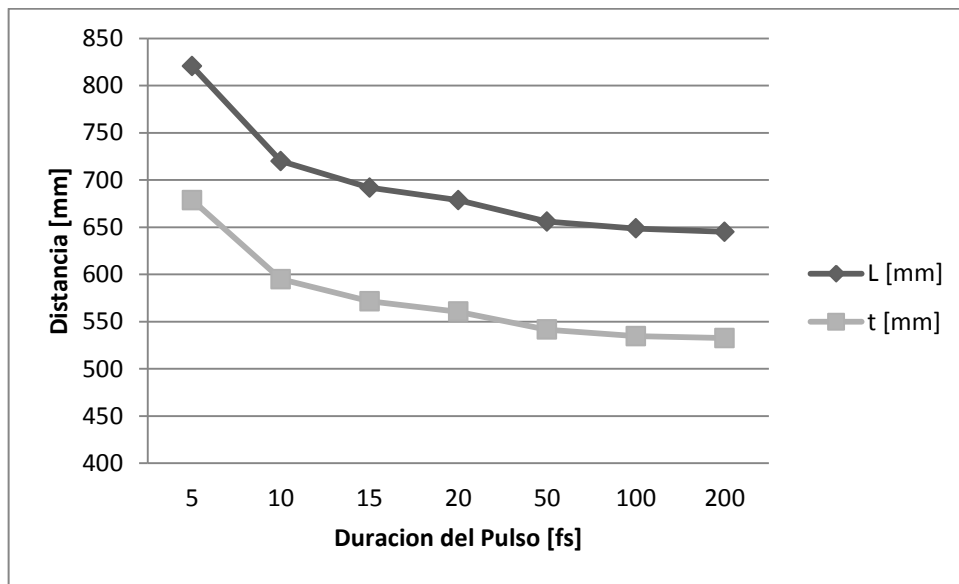


Figura 4.6.- Resultados de separación entre Prismas [mm] vs Duración del pulso [fs].

En la tabla 4.6 se fijaran los siguientes datos, una longitud de onda de $\lambda_0 = 810$ [nm], ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 60.6^\circ$, $OA=3$ [mm] y t_0 será un valor que estará variando como en el caso anterior, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de 1 [cm] y los prismas ahora cambiaran por SF14. En la figura 4.7 se muestra la distancia L y t como función de la duración del pulso.

t_0 [fs]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs ²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs ³]
5	70.4511	136.58	153.679	0	-6661.97
10	53.968	103.871	117.054	0	-5075.15
15	50.2658	96.524	108.828	0	-4718.74
20	48.632	93.282	105.198	0	-4561.46
50	45.992	88.0431	99.332	0	-4307.3
100	45.1874	86.4465	97.5443	0	-4229.85
200	44.7979	85.6736	96.6789	0	-4192.35

Tabla 4.6.- Resultados cristal Titanio Zafiro de 1[cm] de espesor y prismas de SF14.

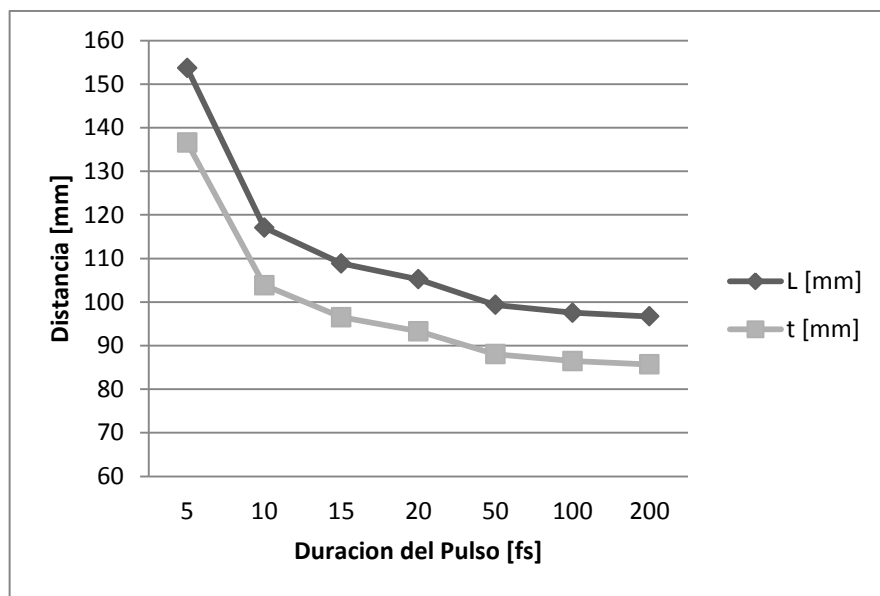


Figura 4.7.- Resultados separación entre Prismas [mm] vs Duración del pulso [fs].

En tabla 4.7 se fijaran los siguientes datos, un tiempo $t_0 = 10$ [fs], ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 69.1^\circ$, $OA = 3$ [mm] y la longitud de onda λ_0 será un valor que estará variando como se muestra en la tabla, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de 1 [cm] y los prismas son Silica Fundida. En la figura 4.8 se grafica la tercera derivada como función de la longitud de onda de la portadora. Se observa que la tercera derivada se hace cero para 850 nm aproximadamente.

λ_0 [nm]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs ²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs ³]
760	429.257	630.906	763.088	0	-1100.41
770	425.677	625.414	756.534	0	-979.609
780	421.485	619.04	748.906	0	-858.557
790	416.703	611.814	740.242	0	-737.426
800	411.352	603.772	730.583	0	-616.385
810	405.459	494.95	719.974	0	-495.607
820	399.052	585.388	708.464	0	-375.264
830	392.158	575.129	696.105	0	-255.526
840	384.808	564.218	682.949	0	-136.561
850	377.035	552.701	669.055	0	-18.5351
860	368.87	540.625	654.477	0	98.3904
870	360.346	528.038	639.276	0	214.058
880	351.498	514.99	623.51	0	328.316

Tabla 4.7.- Resultados cristal Titanio Zafiro de 1[cm] de espesor y prismas de Silica Fundida.

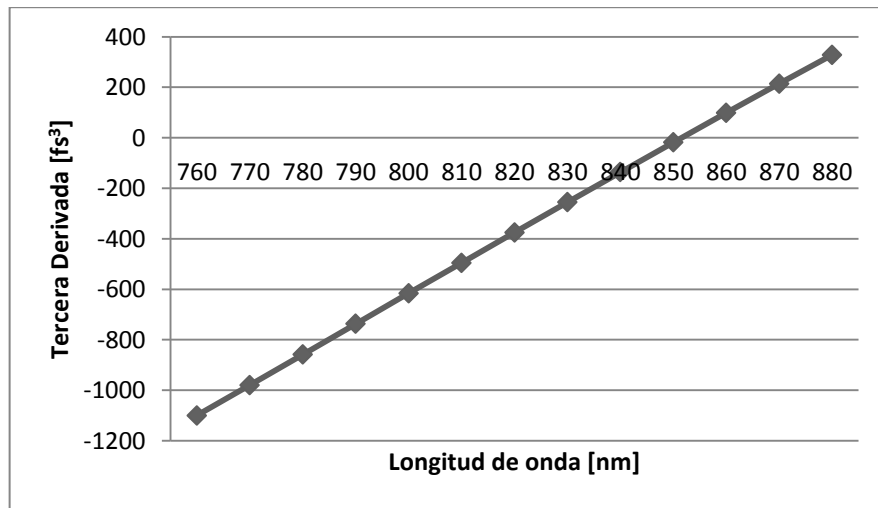


Figura 4.8.- Resultados de la Tercera derivada conforme se aumenta la longitud de onda.

Por ultimo en la tabla 4.8 se fijaran los siguientes datos, un tiempo $t_0 = 10$ [fs], ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 60.6^\circ$, $OA = 3$ [mm] y la longitud de onda λ_0 será un valor que estará variando como se muestra en la tabla, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de 1 [cm] y los prismas ahora cambiara por SF14.

λ_0 [nm]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs ²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs ³]
760	48.8175	95.0067	106.815	0	-5787.53
770	49.9205	96.916	109.017	0	-5645.34
780	50.9897	98.7618	111.148	0	-5503.21
790	52.0225	100.539	113.201	0	-5360.93
800	53.0162	102.244	115.172	0	-5218.3
810	53.968	103.871	117.054	0	-5075.15
820	54.8754	105.415	118.843	0	-4931.34
830	55.7358	106.873	120.534	0	-4786.73
840	56.5467	108.24	122.121	0	-4641.22
850	57.3057	109.512	123.599	0	-4494.72
860	58.0103	110.684	124.965	0	-4347.14
870	58.6584	111.753	126.212	0	-4198.43
880	59.2476	112.715	127.338	0	-4048.54

Tabla 4.8.- Resultados cristal Titanio Zafiro de 1[cm] de espesor y prismas de SF14.

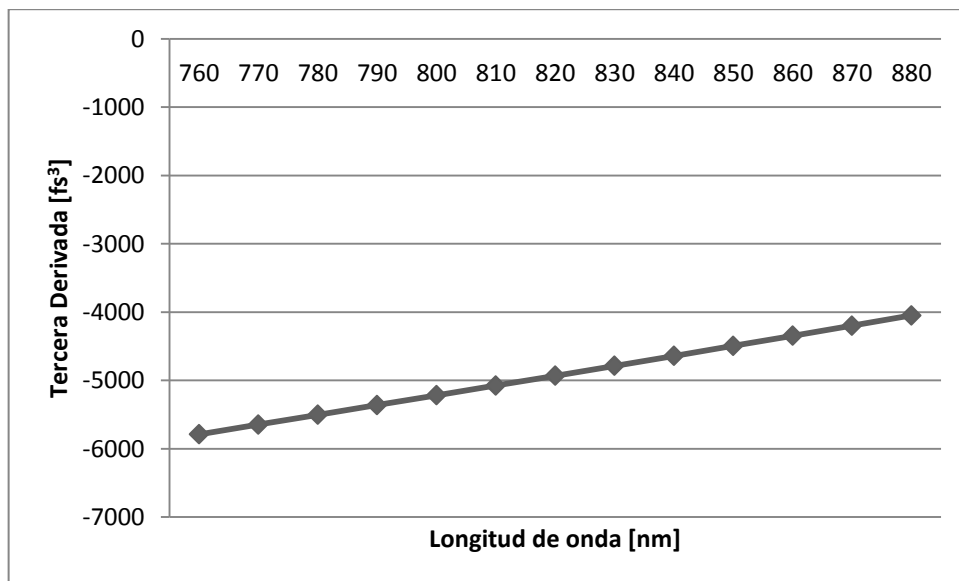


Figura 4.9.- Resultados de la Tercera derivada conforme se aumenta la longitud de onda.

En la figura 4.9 se muestra la tercera derivada como función de la longitud de onda cuando se usa un par de prismas de SF14. Como se observa no se corrige la tercera derivada.

4.2 RESULTADOS PARA UNA CONFIGURACIÓN DE ANILLO

En la siguiente tabla se fijaran los siguientes datos para una configuración de anillo, una longitud de onda de $\lambda_0 = 810[\text{nm}]$, ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 69.1^\circ$, $OA=3 [\text{mm}]$ y t_0 será un valor que estará variando como se muestra en la tabla, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de 4 [mm] y los prismas son de Silica Fundida. En la figura 4.10 se puede visualizar la configuración de anillo.

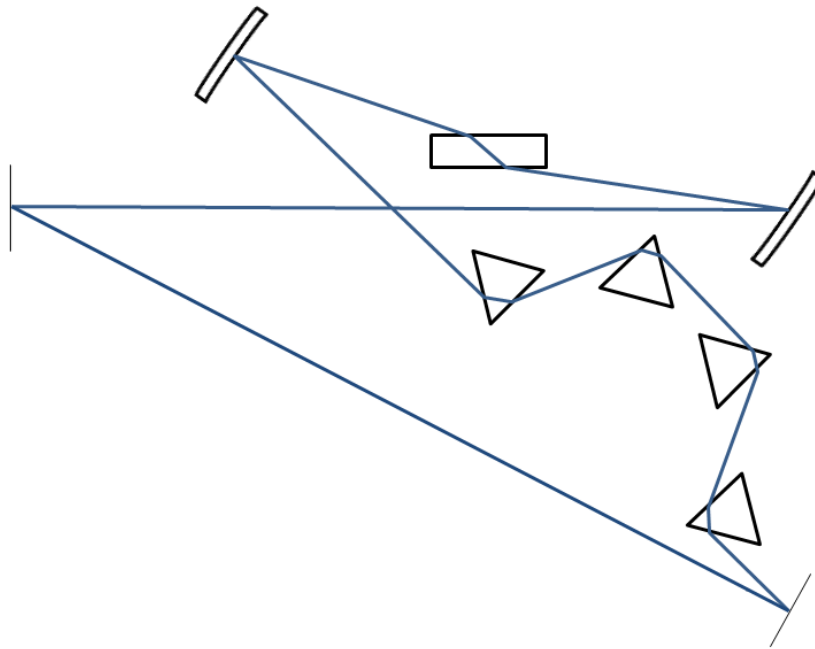


Figura 4.10.- Configuración de Anillo.

t_0 [fs]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs ²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs ³]
5	156.684	232.554	280.413	0	-183.742
10	137.732	204.083	246.212	0	-162.527
15	132.425	196.109	236.633	0	-156.586
20	129.923	192.351	232.119	0	-153.786
50	125.652	185.934	224.41	0	-149.004
100	124.289	183.887	221.951	0	-147.478
200	123.619	182.88	220.741	0	-146.728

Tabla 4.9.- Resultados cristal Titanio Zafiro y prismas de Silica Fundida.

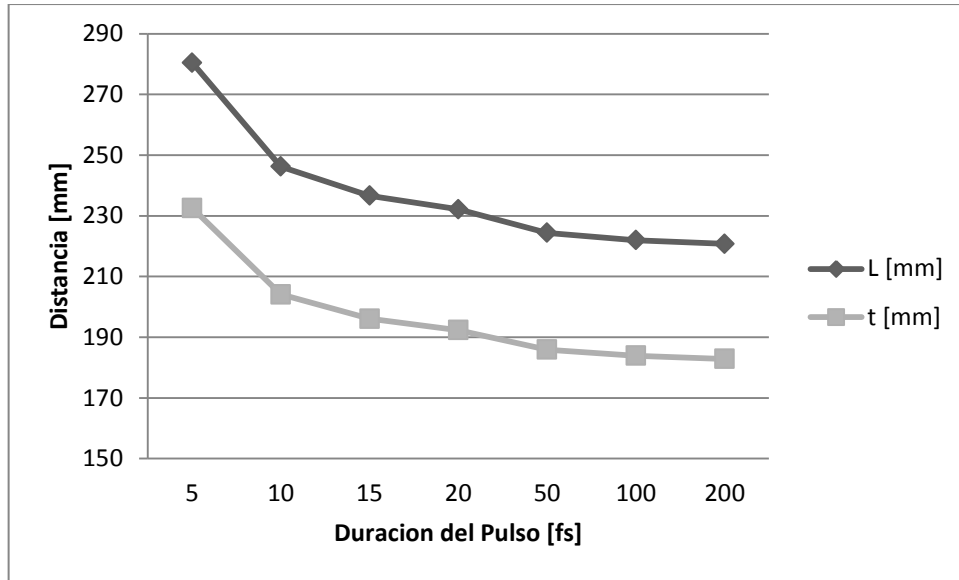


Figura 4.11.- Resultados separación entre Prismas [mm] vs Duración del pulso [fs].

En la tabla 4.10 se fijaran los siguientes datos para una configuración de anillo, una longitud de onda de $\lambda_0 = 810[\text{nm}]$, ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 60.6^\circ$, $OA=3 [\text{mm}]$ y t_0 será un valor que estará variando como en el caso anterior, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de 4 [mm] y los prismas ahora cambiaran por SF14.

t_0 [fs]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs ²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs ³]
5	41.2912	81.2933	91.1788	0	-3951.02
10	31.6189	62.0996	69.6859	0	-3019.87
15	29.4464	57.7885	64.8583	0	-2810.72
20	28.4876	55.8859	62.7278	0	-2718.42
50	26.9383	52.8116	59.2852	0	-2569.27
100	26.4662	51.8746	58.236	0	-2523.82
200	26.2376	51.421	57.7281	0	-2501.81

Tabla 4.10.- Resultados cristal Titanio Zafiro y prismas de SF14.

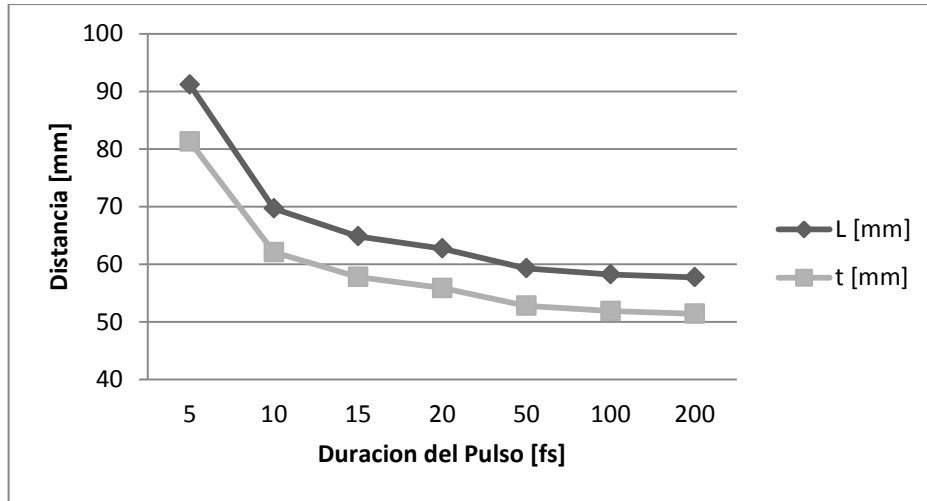


Figura 4.12.- Resultados separación entre Prismas [mm] vs Duración del pulso [fs].

En tabla 4.11 se fijaran los siguientes datos para una configuración de anillo, un tiempo $t_0 = 10$ [fs], ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 69.1^\circ$, $OA=3$ [mm] y la longitud de onda λ_0 será un valor que estará variando como se muestra en la tabla, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de 4 [mm] y los prismas son Silica Fundida.

λ_0 [nm]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs ²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs ³]
760	146.053	216.644	261.278	0	-370.3
770	144.794	214.715	258.975	0	-328.8
780	143.324	212.483	256.302	0	-287.214
790	141.652	209.959	253.275	0	-245.6
800	139.785	207.155	249.906	0	-204.019
810	137.732	204.083	246.212	0	-162.527
820	135.503	200.758	242.209	0	-121.186
830	133.107	197.195	237.914	0	-80.0528
840	130.555	193.408	233.348	0	-39.1859
850	127.858	189.413	228.527	0	1.35779
860	125.027	185.226	223.474	0	41.5227
870	122.073	180.865	218.206	0	81.2547
880	119.007	176.346	212.746	0	120.501

Tabla 4.11.- Resultados cristal Titanio Zafiro y prismas de Silica Fundida.

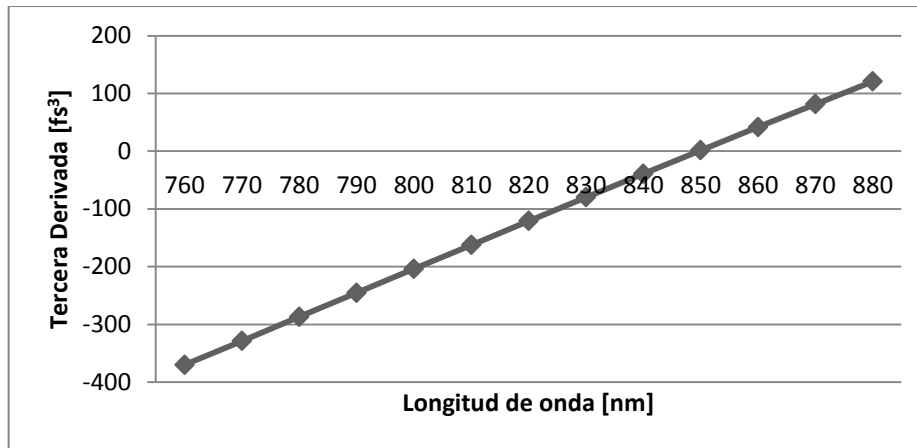


Figura 4.13.- Resultados de la Tercera derivada conforme se aumenta la longitud de onda.

Por ultimo en la tabla 4.12 se fijaran los siguientes datos para una configuración de anillo, un tiempo $t_0 = 10$ [fs], ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 60.6^\circ$, $OA = 3$ [mm] y la longitud de onda λ_0 será un valor que estará variando como se muestra en la tabla, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de 4 [mm] y los prismas ahora cambiara por SF14.

λ_0 [nm]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs³]
760	28.5119	56.7379	63.4989	0	-3393.25
770	29.1657	57.871	64.805	0	-3317.79
780	29.8046	58.9761	66.0795	0	-3242.86
790	30.4273	60.0508	67.3195	0	-3168.31
800	31.0325	61.0927	68.5225	0	-3094.02
810	31.6189	62.0996	69.6859	0	-3019.87
820	32.1852	63.0692	70.8069	0	-2945.75
830	32.73	63.9993	71.883	0	-2871.59
840	33.2522	64.8876	72.9117	0	-2797.28
850	33.7506	65.7321	73.8905	0	-2722.78
860	34.2238	66.5306	74.817	0	-2648.01
870	34.6708	67.2812	75.689	0	-2572.93
880	35.0905	67.9819	76.0541	0	-2497.5

Tabla 4.12.- Resultados cristal Titanio Zafiro y prismas de SF14.

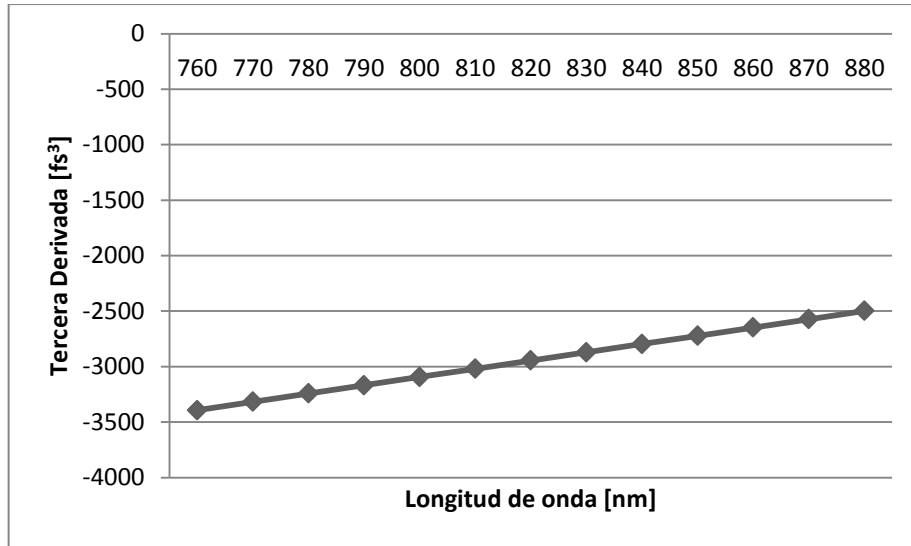


Figura 4.14.- Resultados de la Tercera derivada conforme se aumenta la longitud de onda.

En la siguiente tabla se fijaran los siguientes datos para una configuración de anillo, una longitud de onda de $\lambda_0 = 810[\text{nm}]$, ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 69.1^\circ$, $OA=3 [\text{mm}]$ y t_0 será un valor que estará variando como se muestra en la tabla, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de $1 [\text{cm}]$ y los prismas son de Silica Fundida.

$t_0 [fs]$	$s [mm]$	$t [mm]$	$L [mm]$	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs³]
5	270.864	399.836	482.945	0	-324.076
10	238.13	350.658	423.872	0	-287.432
15	228.962	336.884	407.326	0	-277.169
20	224.641	330.394	399.529	0	-272.333
50	217.263	319.309	386.214	0	-264.073
100	214.91	315.773	381.967	0	-261.438
200	213.751	314.033	379.877	0	-260.142

Tabla 4.13.- Resultados cristal Titanio Zafiro de $1[\text{cm}]$ de espesor y prismas de Silica Fundida.

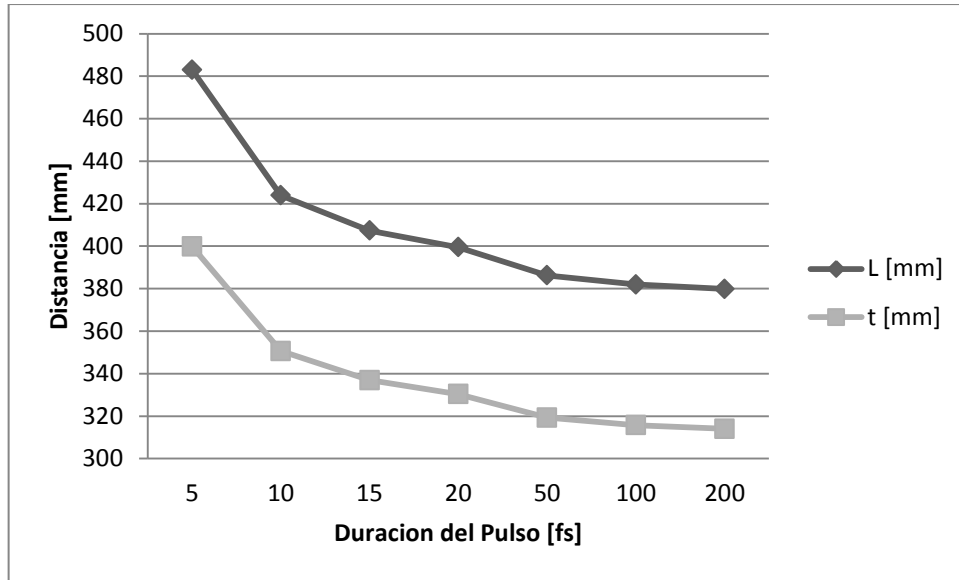


Figura 4.15.- Resultados separación entre Prismas [mm] vs Duración del pulso [fs].

En la tabla 4.14 se fijaran los siguientes datos para una configuración de anillo, una longitud de onda de $\lambda_0 = 810[\text{nm}]$, ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 60.6^\circ$, $OA=3 [\text{mm}]$ y t_0 será un valor que estará variando como en el caso anterior, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de 1 [cm] y los prismas ahora cambiarán por SF14.

t_0 [fs]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs ²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs ³]
5	52.2262	102.026	114.616	0	-4967.63
10	39.9998	77.7638	87.4482	0	-3790.6
15	37.2537	72.3143	81.3461	0	-3526.23
20	36.0418	69.9094	78.6533	0	-3409.56
50	34.0834	66.0234	74.3019	0	-3221.03
100	33.4866	64.8391	72.9757	0	-3163.58
200	33.1977	64.2657	72.3337	0	-3135.76

Tabla 4.14.- Resultados cristal Titanio Zafiro de 1[cm] de espesor y prismas de SF14.

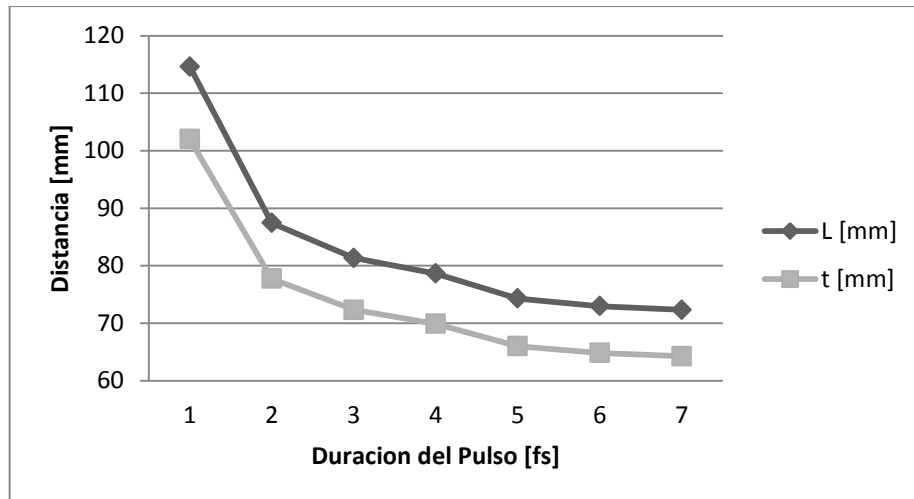


Figura 4.16.- Resultados separación entre Prismas [mm] vs Duración del pulso [fs].

En tabla 4.15 se fijaran los siguientes datos para una configuración de anillo, un tiempo $t_0 = 10$ [fs], ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 69.1^\circ$, $OA = 3$ [mm] y la longitud de onda λ_0 será un valor que estará variando como se muestra en la tabla, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de 1 [cm] y los prismas son Silica Fundida.

λ_0 [nm]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs ²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs ³]
760	252.255	371.992	449.456	0	-644.091
770	250.125	368.727	445.558	0	-572.853
780	247.635	364.942	441.028	0	-501.468
790	244.796	360.655	435.886	0	-430.035
800	241.623	355.886	430.159	0	-358.656
810	238.13	350.658	423.872	0	-287.432
820	234.334	344.995	417.053	0	-216.465
830	230.251	338.92	409.735	0	-145.855
840	225.9	332.462	401.947	0	-75.7016
850	221.299	325.646	393.724	0	-6.10202
860	216.468	318.501	385.099	0	62.8481
870	211.425	311.055	376.106	0	131.056
880	206.191	303.338	366.781	0	198.432

Tabla 4.15.- Resultados cristal Titanio Zafiro de 1[cm] de espesor y prismas de Silica Fundida.

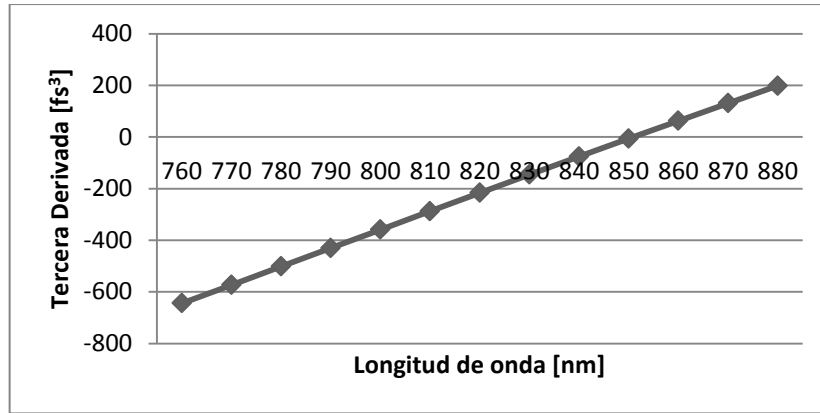


Figura 4.17.- Resultados de la Tercera derivada conforme se aumenta la longitud de onda.

Por ultimo en la tabla 4.16 se fijaran los siguientes datos para una configuración de anillo, un tiempo $t_0 = 10$ [fs], ángulo del ápice de los prismas es $\alpha = 60.6^\circ$, $OA=3$ [mm] y la longitud de onda λ_0 será un valor que estará variando como se muestra en la tabla, el material del cristal que se utiliza es Titanio Zafiro, el cual consta de un espesor de 1 [cm] y los prismas ahora cambiara por SF14.

λ_0 [nm]	s [mm]	t [mm]	L [mm]	$\partial\Psi^2/\partial w^2 _{Total}$ [fs ²]	$\partial\Psi^3/\partial w^3 _{Total}$ [fs ³]
760	36.1265	71.0887	79.7416	0	-4291.1
770	36.9487	72.5129	81.3839	0	-4190.62
780	37.749	73.8958	82.9793	0	-4090.49
790	38.5255	75.234	84.5244	0	-3990.54
800	39.2764	76.5244	86.0152	0	-3890.62
810	39.998	77.7638	87.4482	0	-3790.6
820	40.694	78.949	88.8197	0	-3690.35
830	41.3572	80.077	90.1263	0	-3589.77
840	41.9877	81.1448	91.3644	0	-3488.76
850	42.5837	82.1495	92.5306	0	-3387.26
860	43.1437	83.0882	93.6217	0	-3285.19
870	43.6661	83.9581	94.6346	0	-3182.5
880	44.1494	84.7568	95.5662	0	-3079.14

Tabla 4.16.- Resultados cristal Titanio Zafiro de 1[cm] de espesor y prismas de SF14.

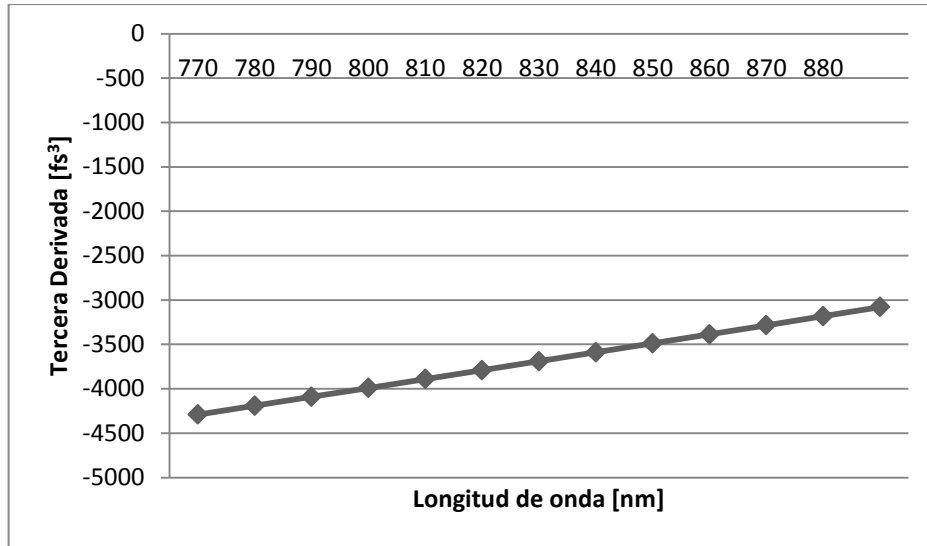


Figura 4.18.- Resultados de la Tercera derivada conforme se aumenta la longitud de onda.

4.3 PROGRAMAS EJECUTABLES

Los programas se realizaron en un ambiente de programación de Matlab, son dos uno para la configuración de anillo y otro para la configuración lineal.

En la figura 4.19 vemos como se ve el programa ejecutable para la configuración lineal antes de ingresarle valores y en la figura 4.20 se ve la imagen de la opción del boton que dice “Clic para ver Imagen”, esta imagen muestra la configuración del cristal con los pares de prismas, sirve para que el usuario que ejecute el programa entienda los valores que debe ingresar y los parámetros obtenidos.

La figura 4.21 muestra el programa cuando se presiona el boton de ejecutar, una vez que se han ingresado los datos que nos pide en la primera y segunda columna. Y por último, en la figura 4.22 se ve el pulso a la salida del par de prismas.

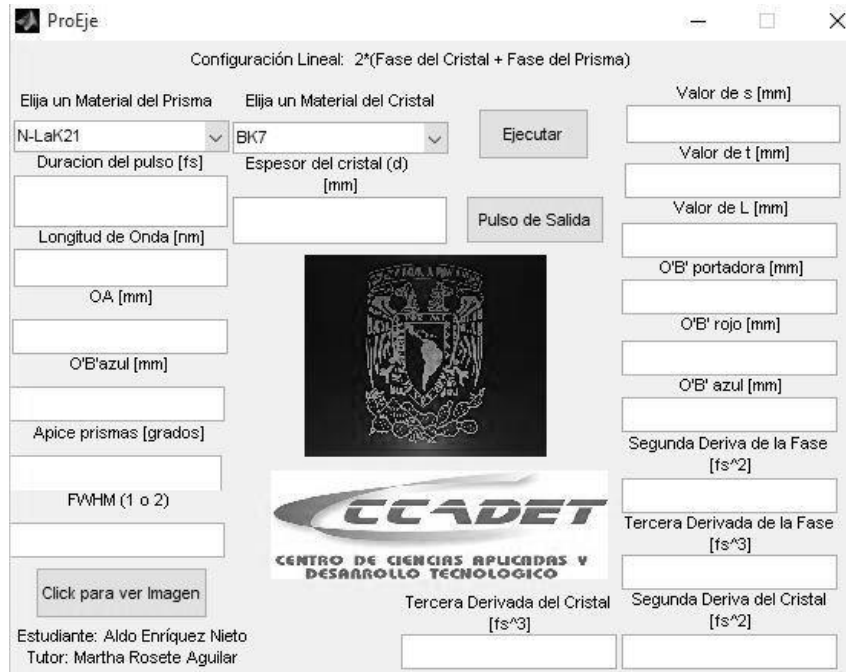


Figura 4.19.-Vista del programa antes de ingresar datos (Configuración lineal).

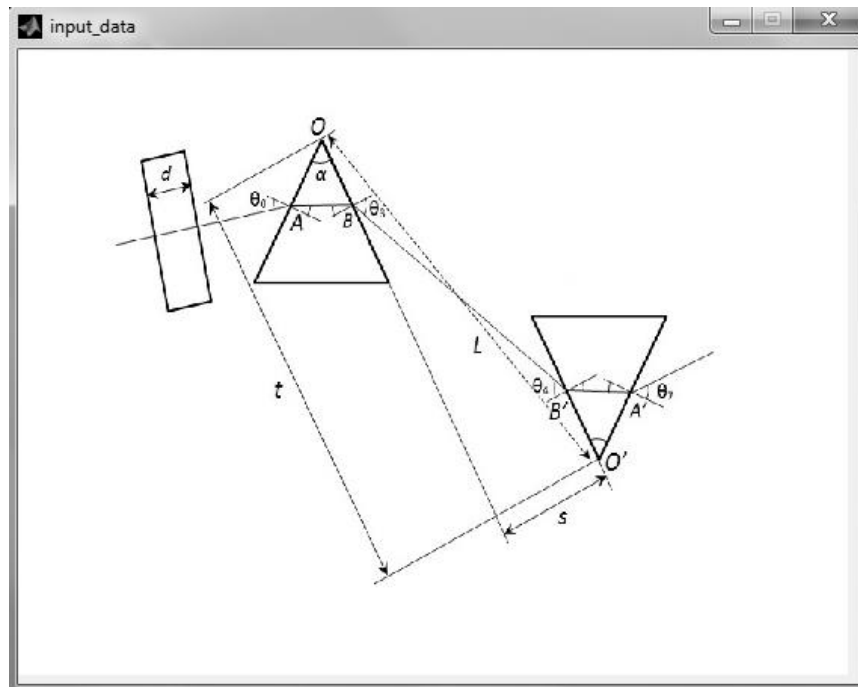


Figura 4.20.-Imagen del cristal con par de prismas.

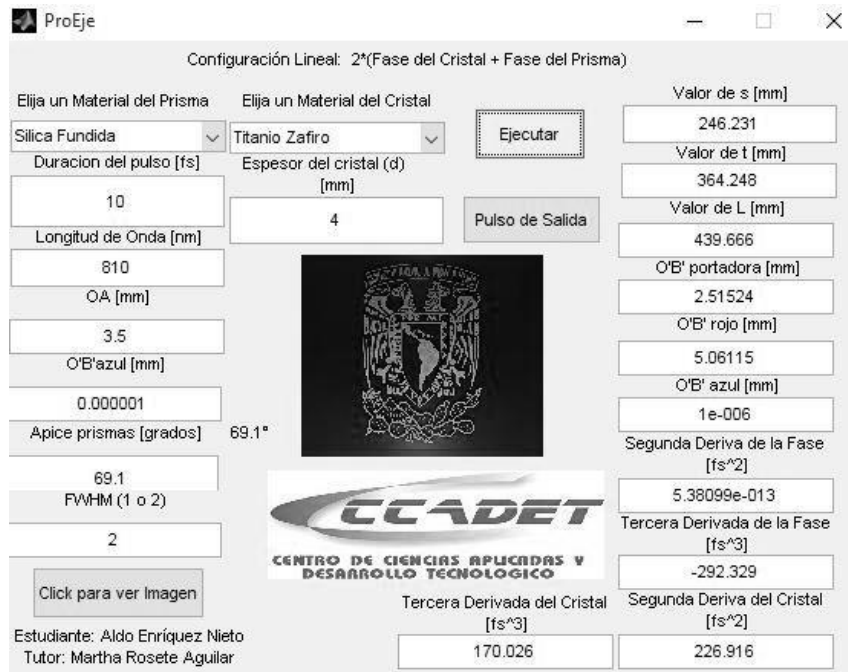


Figura 4.21.-Vista del programa ya ingresando datos (Configuración lineal).

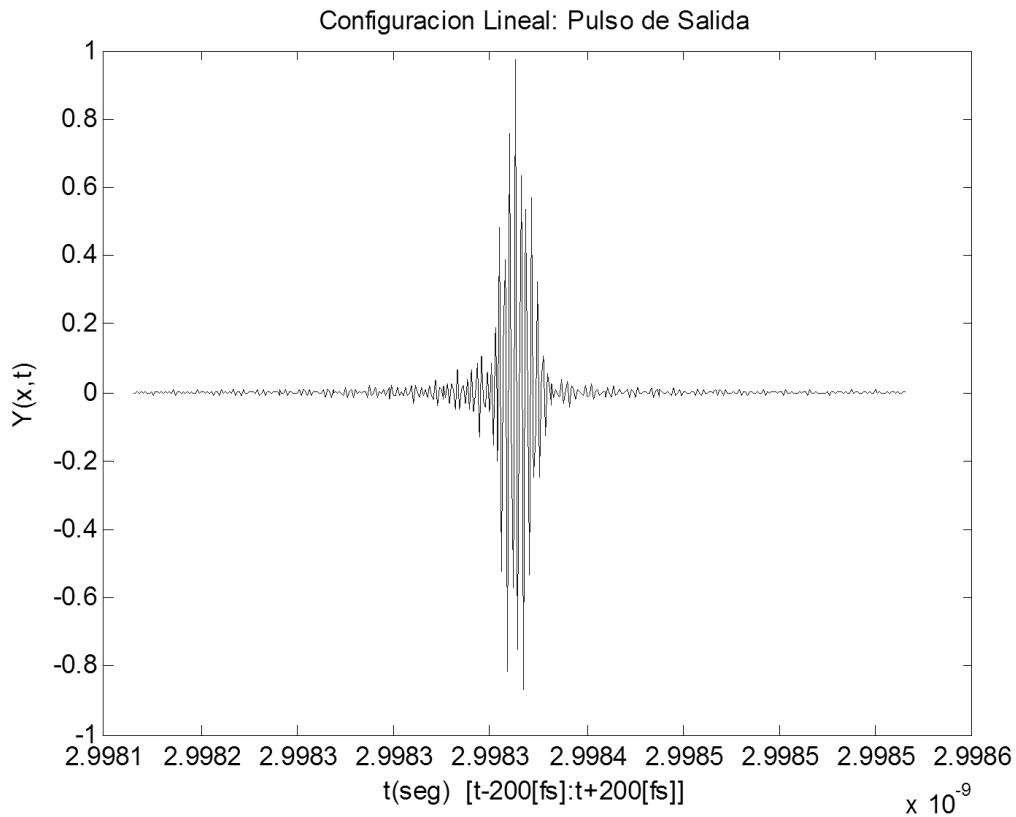


Figura 4.22.-Pulso de salida (Configuración lineal).



Figura 4.23.-Vista del programa antes de ingresar datos (Configuración de Anillo).

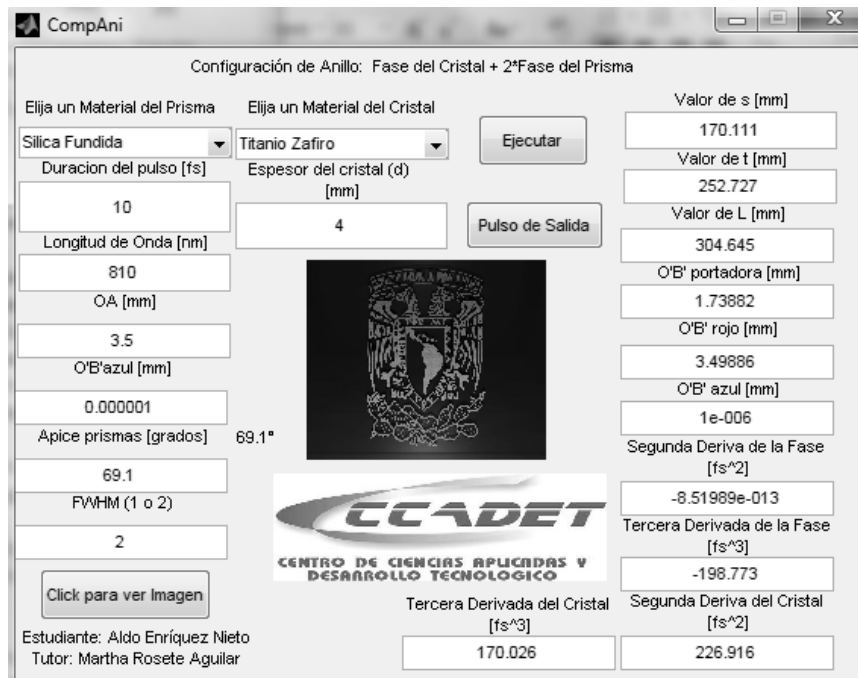


Figura 4.24.-Vista del programa ya ingresando datos (Configuración de Anillo).

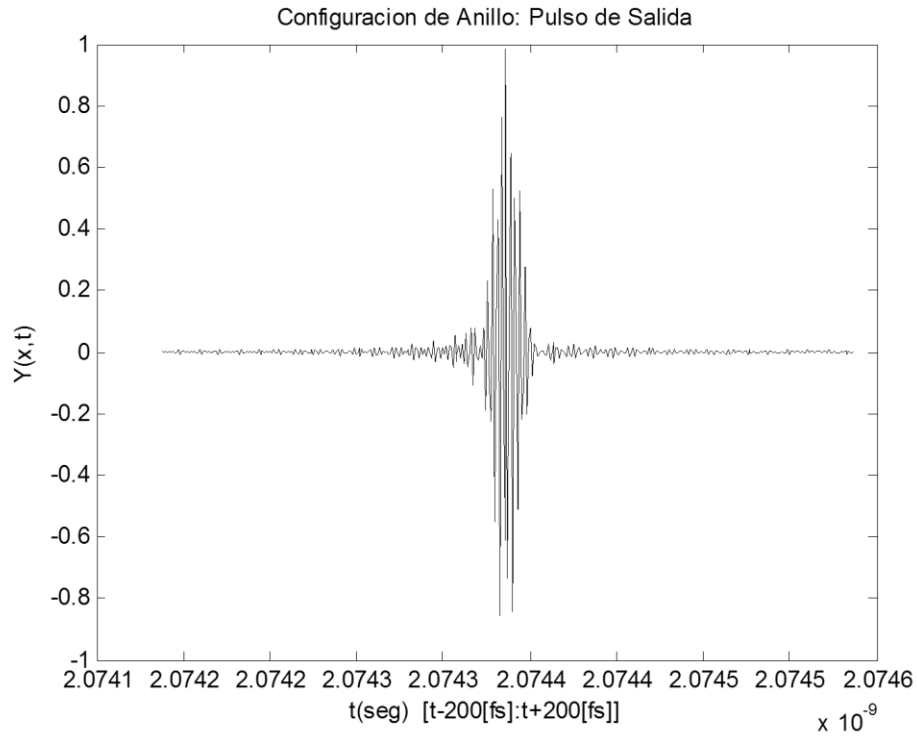


Figura 4.25.-Pulso de salida (Configuración de Anillo).

En la figura 4.23 vemos como se ve el segundo programa ejecutable, pero ahora para la configuración de anillo antes de ingresarle valores; la figura 4.24 muestra el programa cuando se presiona el botón de ejecutar para la configuración de anillo, una vez ingresado los datos que nos pide en la primera y segunda columna. Y por último, en la figura 4.25 se ve el pulso de salida del par de prismas para la configuración de anillo.

Conclusión

En esta tesis se vieron los conceptos necesarios para entender lo relacionado con la compresión de pulsos, se partió desde el concepto de una onda, como se genera un pulso, hasta llegar al arreglo para esta compresión de pulsos, compuesto por un par de prismas isósceles arreglados con sus caras internas paralelas entre sí. El pulso se generó mediante la suma de ondas de diferente frecuencia que tiene la misma fase inicial. Se analizaron varios ejemplos de pulsos donde se sumaron 21 y 200 ondas, y cómo los pulsos se propagan en un medio dispersivo, para lo cual se tuvo que buscar el índice de refracción del medio, el cual se calculó mediante la ecuación de Sellmeier. Se modelaron pulsos con una longitud de onda de la portadora de 800nm, y como la duración del pulso es del orden de femtosegundos, se trabajó en un rango espectral que va desde los 10nm hasta los 200nm.

Se utilizaron dos arreglos de configuración de cavidad láser que se conocen como configuración de anillo y configuración lineal. Estos dos arreglos utilizan un par de prismas y un cristal. Los prismas fueron de dos tipos de materiales: uno de baja dispersión (Silica fundida) y otro de alta dispersión (SF14), mientras que el cristal fue del material Titanio Zafiro. Se realiza todo un análisis matemático para que en estos dos arreglos la GVD de segundo orden sea igual a cero, posteriormente se realiza un programa en Matlab el cual facilita tanto los cálculos como los resultados.

La diferencia en estas dos configuraciones es que en la configuración lineal, la luz pasa dos veces tanto por los prismas como por el cristal, mientras que en la configuración de anillo nada más pasa una vez por el cristal y dos veces por el par de prismas. Esta diferencia es fundamental ya que al realizar los cálculos cambian mucho los resultados.

Se obtuvieron resultados para dos espesores del cristal de Titanio-Zafiro 4 [mm] y 1[cm], ya que estos son los espesores de los cristales que se cuentan en el laboratorio de Pulsos ultracortos. Para el cristal de 1cm de espesor se obtiene que tanto la separación entre prismas así como la tercera derivada de la fase son mayores que para el cristal de 4 [mm].

Se llega a la conclusión de que la configuración de anillo es mejor que la configuración lineal, ya que la derivada de tercer orden de la fase es menor en la configuración de anillo lo que implica una dirección temporal menor.

Como se mencionó anteriormente se utilizan dos materiales para el par de prismas: uno de baja dispersión (Silica fundida) y uno de alta dispersión (SF14), de lo cual se puede ver que el material SF14 genera una mayor cantidad GVD de tercer orden que con el material de Silica fundida. Esta cantidad de GVD de tercer orden es la que limita el ancho espectral que se genera dentro de la cavidad.

REFERENCIAS

- [1] M. Rosete-Aguilar, F.C. Estrada-Silva, N.C. Bruce, C.J Roman-Moreno y R. Ortega-Martinez, "Calculation of temporal spreading of ultrashort pulses propagating through optical glasses", *Revista Mexicana de Física* 54(2) 141-148 (2008)
- [2] K. Thyagarajan y Ajoy Ghatak, *LASERS Fundamentals and Applications*, "Chapter 7. Optical Resonators", pag. 173, Springer.
- [3] Eugene Hecht, *OPTICS*, "Chapter 3. Electromagnetic Theory, Photons and Light", pag 72, Addison Wesley.
- [4] Anthony E. Siegman, *Lasers* (University Science Books, 1986), "Chapter 9. Linear Pulse Propagation".
- [5] Eugene D. Olsen, *Métodos Ópticos de Análisis*, "Capítulo 1. Introducción y Principios Generales", pag 46, Reverte, 1990.
- [6] M. Rosete-Aguilar, J. Garduño-Mejía, F.C. Estrada-Silva, C.J Roman-Moreno, N.C. Bruce y R. Ortega-Martinez, "Analytical method for calculating the electric field envelope of ultrashort pulses by approximating the wavenumber up to third order", (2010)
- [7] Jean-Claude Diels y Wolfgang Rudolph, *Ultrashort Laser Pulse Phenomena*, second edition (Optics and Photonics series), Elsevier, Inc, 2006.
- [8] C.Y. Ramirez-Corral, M. Rosete-Aguilar y J. Garduño-Mejía, "Third-order dispersion in pair of prisms", *J. Mod. Opt.*, 56,1659-1669 (2009)
- [9] R.L. Fork, O. E. Martinez y J. P. Gordon, "Negative dispersion using pairs of prisms", *Opt. Lett.*, 9, 150-152 (1984)

APÉNDICE A) CÁLCULO DE LA DERIVADA DE LA ECUACIÓN 1.9.

$$n_g = \frac{c}{v - \lambda \frac{\partial v}{\partial \lambda}} = \frac{c}{\frac{c}{n} - \lambda \frac{\partial(c/n)}{\partial \lambda}} = \frac{1}{\frac{1}{n} - \frac{\lambda_0}{n} \frac{\partial(1/n)}{\partial \lambda_0}} \quad (A.1)$$

Sea

$$\frac{\partial(1/n)}{\partial(\lambda_0/n)} = \frac{-\partial n/n^2}{\frac{n\partial\lambda_0 - \lambda_0\partial n}{n^2}} = \frac{-\partial n}{n\partial\lambda_0 - \lambda_0\partial n} = \frac{-\partial n}{\partial\lambda_0 \left(n - \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial\lambda_0} \right)} \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned} \therefore n_g &= \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{\lambda_0}{n} \frac{\partial n}{\partial \lambda_0} \left(\frac{1}{n - \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0}} \right)} = \frac{n}{1 + \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0} \left(\frac{1}{n - \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0}} \right)} \\ &= \frac{n}{\left(\frac{1}{n - \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0}} \right) \left(n - \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0} + \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0} \right)} = \frac{n}{n - \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0}} \end{aligned}$$

$$n_g = n - \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0} \quad (A.3)$$

APÉNDICE B) τ_0 EN TÉRMINOS DE Δv .

El periodo de un tren de pulsos está dado por:

$$T = \frac{2\pi}{w} \quad (B.1)$$

Y el ancho temporal de cada pulso mediante la siguiente ecuación:

$$t_0 = \frac{T}{N} \quad (B.2)$$

Donde N es el número de modos oscilantes el cual puede ser estimado por $N \approx \frac{\Delta w}{w}$ y T es el periodo de un tren de pulsos, sabiendo esto t_0 se puede escribir en términos de la frecuencia como:

$$t_0 = \frac{2\pi}{\Delta w} = \frac{1}{\Delta v} \quad (B.3)$$

APÉNDICE C) DERIVADAS DE LAS ECUACIONES 2.18, 1.19 Y 2.20.

Si $w = \frac{2\pi c}{\lambda}$ la primera derivada con respecto a w , siguiendo la regla de la cadena quedaría:

$$\therefore \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)} = \frac{\partial}{-\frac{2\pi c}{\lambda^2} \partial \lambda} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial \lambda} \quad (C.1)$$

A continuación realizaremos la segunda derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial w^2} &= \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w} \left(-\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) = \frac{1}{2\pi c} \left(\frac{\partial \left(-\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)}{\partial \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)} \right) = \frac{1}{2\pi c} \left(\frac{-2\lambda \partial \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - \lambda^2 \partial \lambda \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}}{-\frac{2\pi c}{\lambda^2} \partial \lambda} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi c} \left(\frac{2\lambda^3 \frac{\partial}{\partial \lambda} + \lambda^4 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}}{2\pi c} \right) = \frac{\lambda^3}{2\pi^2 c^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^4}{4\pi^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \end{aligned} \quad (C.2)$$

Por último el resultado de la tercera derivada sería de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial w^3} &= \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial^2}{\partial w^2} = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\lambda^3}{2\pi^2 c^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\lambda^4}{4\pi^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right) = \frac{1}{(2\pi c)^2} \left(\frac{\partial \left(2\lambda^3 \frac{\partial}{\partial \lambda} + \lambda^4 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right)}{\partial \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi c)^2} \left(\frac{4\lambda^3 \partial \lambda \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \lambda^4 \partial \lambda \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} + 6\lambda^3 \partial \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + 2\lambda^3 \partial \lambda \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}}{-\frac{2\pi c}{\lambda^2} \partial \lambda} \right) \\ &= -\frac{\lambda^3}{(2\pi c)^3} \left(\lambda^3 \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} + 6\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + 6\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \end{aligned} \quad (C.3)$$

APÉNDICE D) PRIMERA, SEGUNDA Y TERCERA DERIVADA DE LA FASE TOTAL.

Tenemos que la fase total está dada por

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 = \frac{\Omega}{c} nLg + L \frac{\Omega}{c} - \frac{\Omega}{c} (O'A' \sin \theta_0) \quad (D.1)$$

Calculando la primera derivada de cada una de las fases se tiene

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \Omega} = \frac{nLg}{c} + \frac{\Omega Lg}{c} \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{\Omega n}{c} \frac{\partial Lg}{\partial \Omega} \quad (D.2)$$

$$\text{Si } \frac{\partial Lg}{\partial \Omega} = Lg \tan \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} - \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega}$$

$$\therefore \frac{\partial \Psi_1}{\partial \Omega} = \frac{Lg}{c} \left(n + \Omega \frac{\partial n}{\partial \Omega} \right) + \frac{\Omega n}{c} \left(Lg \tan \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} - \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right) \quad (D.3)$$

La primera derivada de la fase Ψ_2 es igual a:

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \Omega} = \frac{\Omega}{c} L \tan \theta_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} + \frac{L}{c} \quad (D.4)$$

Y por último la primera derivada de Ψ_3 es igual a:

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial \Omega} = -\frac{O'A' \sin \theta_0}{c} - \frac{\Omega \sin \theta_0}{c} \frac{\partial O'A'}{\partial \Omega} \quad (D.5)$$

$$\text{Si } \frac{\partial O'A'}{\partial \Omega} = (t - s \tan \theta_3) \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} - (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_1) \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega}$$

$$\frac{\partial O'A'}{\partial \Omega} = \frac{Lg}{\cos \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} - (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_1) \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \quad (D.6)$$

$$\therefore \frac{\partial \Psi_3}{\partial \Omega} = -\frac{O'A' \sin \theta_0}{c} + \frac{s \Omega \sin \theta_0}{c \cos^2 \theta_3} (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_1) \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} - \frac{\Omega}{c} (t - s \tan \theta_3) \frac{\sin \theta_0 \sin \alpha}{\cos^2 \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \quad (D.7)$$

Sumando cada uno de los términos se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \Omega} &= \frac{nLg}{c} + \frac{\Omega Lg}{c} \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{\Omega n}{c} \left(Lg \tan \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} - \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right) + \frac{\Omega}{c} L \tan \theta_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} + \frac{L}{c} \\ &\quad - \frac{O'A' \sin \theta_0}{c} + \frac{s \Omega \sin \theta_0}{c \cos^2 \theta_3} (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_1) \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} - \frac{\Omega}{c} (t - s \tan \theta_3) \frac{\sin \theta_0 \sin \alpha}{\cos^2 \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \quad (D.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \Omega} &= \frac{Lg}{c} \left(n + \Omega \frac{\partial n}{\partial \Omega} \right) + \frac{L}{c} - \frac{O'A' \sin \theta_0}{c} + \frac{\Omega}{c} \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \left(nLg \tan \theta_1 - Lg \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_1} \right) + \frac{\Omega}{c} L \tan \theta_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \\ &\quad + \frac{\Omega n}{c} \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \left(-\frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} + \sin \theta_1 (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial \Omega} &= \frac{Lg}{c} \left(n + \Omega \frac{\partial n}{\partial \Omega} \right) + \frac{L}{c} - \frac{O'A' \sin \theta_0}{c} + \frac{\Omega}{c} \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \left(nLg \tan \theta_1 - nLg \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right) + \frac{\Omega}{c} L \tan \theta_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \\
&\quad + \frac{\Omega n}{c} \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \left(-\frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} + \sin \theta_1 \cos \alpha + \frac{\sin \alpha \sin^2 \theta_1}{\cos \theta_1} \right) \\
\frac{\partial \Psi}{\partial \Omega} &= \frac{Lg}{c} \left(n + \Omega \frac{\partial n}{\partial \Omega} \right) + \frac{L}{c} - \frac{O'A' \sin \theta_0}{c} + \frac{\Omega}{c} L \tan \theta_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \\
&\quad + \frac{\Omega n}{c} \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} (\sin \theta_1 \cos \alpha + \sin \alpha \cos \theta_1) \\
\frac{\partial \Psi}{\partial \Omega} &= \frac{Lg}{c} \left(n + \Omega \frac{\partial n}{\partial \Omega} \right) + \frac{L}{c} - \frac{O'A' \sin \theta_0}{c} + \frac{\Omega}{c} L \tan \theta_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} + \frac{\Omega n}{c} \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} (-\sin \theta_2) \\
\frac{\partial \Psi}{\partial \Omega} &= \frac{Lg}{c} \left(n + \Omega \frac{\partial n}{\partial \Omega} \right) + \frac{L}{c} - \frac{O'A' \sin \theta_0}{c} \tag{D.9}
\end{aligned}$$

La segunda derivada quedaría:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} = \frac{n}{c} \frac{\partial Lg}{\partial \Omega} + \frac{Lg}{c} \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{L \sin \theta_3}{c \cos \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} - \frac{\sin \theta_0}{c} \frac{\partial O'A'}{\partial \Omega} + \frac{Lg}{c} \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{\Omega}{c} \frac{\partial Lg}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{\Omega Lg}{c} \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} \tag{D.10}$$

$$\text{Si } \frac{\partial O'A'}{\partial \Omega} = \frac{Lg}{\cos \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} - (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_1) \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \text{ y } \frac{\partial Lg}{\partial \Omega} = Lg \tan \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} - \frac{s}{\cos^2 \theta_3 \cos \theta_1} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} &= \frac{nLg}{c} \tan \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} - \frac{n}{c} \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} + \frac{Lg}{c} \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{L \sin \theta_3}{c \cos \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} - \frac{Lg \sin \theta_0}{c \cos \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \\
&\quad + \frac{s \sin \theta_0}{c \cos^2 \theta_3} (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_1) \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} + \frac{Lg}{c} \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{\Omega Lg}{c} \tan \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial \Omega} \\
&\quad - \frac{\Omega}{c} \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{\Omega Lg}{c} \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} &= \frac{Lg}{c} \left(2 \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \Omega \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} \right) + \frac{\Omega Lg}{c} \tan \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial \Omega} - \frac{\Omega}{c} \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial \Omega} \\
&\quad + \frac{L}{c \cos \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \left(-n \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} + \sin \theta_3 + \sin \theta_0 (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_1) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} &= \frac{Lg}{c} \left(2 \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \Omega \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} \right) + \frac{\Omega Lg}{c} \tan \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial \Omega} - \frac{\Omega}{c} \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial \Omega} \\
&\quad + \frac{L}{c \cos \theta_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \left(-n \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} + n \sin \theta_2 + n \sin \theta_1 (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_1) \right) \tag{D.11}
\end{aligned}$$

Mediante entidades trigonométricas (ver apéndice E) $-n \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} + n \sin \theta_2 + n \sin \theta_1 (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_1) = 0$:

$$\therefore \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} = \frac{Lg}{c} \left(2 \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \Omega \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} \right) + \frac{\Omega Lg}{c} \tan \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial \Omega} - \frac{\Omega}{c} \frac{s}{\cos^2 \theta_3} \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial \Omega}$$

Ahora mediante la ley de Snell sabemos que $\sin \theta_0 = n \sin \theta_1$ y $n \sin \theta_2 = \sin \theta_3$, hacemos sus respectivas derivadas y nos queda $\partial \theta_1 = -\frac{\tan \theta_1}{n} \partial n$ y $\cos \theta_3 \partial \theta_3 = \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} \partial n$. Sustituimos estos valores y la segunda derivada de la fase nos queda:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} = \frac{Lg}{c} \left(2 \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \Omega \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} \right) - \frac{n \Omega Lg}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 - \frac{\Omega}{c} \frac{s}{\cos \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right)^2 \quad (D.12)$$

Y la tercera derivada de la fase total está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \Omega^3} &= \frac{2 \partial Lg}{c} \frac{\partial n}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{2 Lg}{c} \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} + \frac{\Omega \partial Lg}{c} \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} + \frac{\Omega Lg}{c} \frac{\partial^3 n}{\partial \Omega^3} + \frac{Lg}{c} \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} - \frac{n \Omega \partial Lg}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 \\ &\quad - \frac{Lg \Omega}{c} \frac{\partial n}{\partial \Omega} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 - \frac{n Lg}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 - \frac{2 n Lg \Omega}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \Omega^2} \right) - \frac{s}{c \cos \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right)^2 \\ &\quad - \frac{s \Omega \sin \theta_3}{c \cos^2 \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right)^2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \\ &\quad - \frac{2 \Omega s}{c \cos \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \Omega^2} \right) \end{aligned} \quad (D.13)$$

Agrupando los términos de la segunda derivada de la ecuación (D.12), la ecuación (D.13) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \Omega^3} &= \frac{2 \partial Lg}{c} \frac{\partial n}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{2 Lg}{c} \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} + \frac{\Omega \partial Lg}{c} \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} + \frac{\Omega Lg}{c} \frac{\partial^3 n}{\partial \Omega^3} - \frac{2 n Lg \Omega}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \Omega^2} \right) \\ &\quad - \frac{s \Omega \sin \theta_3}{c \cos^2 \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right)^3 - \frac{2 \Omega s}{c \cos \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \Omega^2} \right) - \frac{\Omega}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 \left(n \frac{\partial Lg}{\partial \Omega} - Lg \frac{\partial n}{\partial \Omega} \right) \\ &\quad + \left(\frac{Lg}{c} \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} + \frac{2 Lg}{\Omega c} \frac{\partial n}{\partial \Omega} - \frac{2 Lg}{\Omega c} \frac{\partial n}{\partial \Omega} - \frac{n Lg}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 - \frac{s}{c \cos \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right)^2 \right) \frac{\Omega}{\Omega} \end{aligned}$$

Finalmente la tercera derivada se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \Omega^3} = & \frac{2}{c} \frac{\partial Lg}{\partial \Omega} \frac{\partial n}{\partial \Omega} + \frac{2Lg}{c} \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} + \frac{\Omega}{c} \frac{\partial Lg}{\partial \Omega} \frac{\partial^2 n}{\partial \Omega^2} + \frac{\Omega Lg}{c} \frac{\partial^3 n}{\partial \Omega^3} - \frac{2nLg\Omega}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \Omega^2} \right) \\
& - \frac{s\Omega}{c} \frac{\sin \theta_3}{\cos^2 \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \right)^3 - \frac{2\Omega s}{c \cos \theta_3} \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial \Omega^2} \right) - \frac{\Omega}{c} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \Omega} \right)^2 \left(n \frac{\partial Lg}{\partial \Omega} - Lg \frac{\partial n}{\partial \Omega} \right) \\
& + \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Omega^2} - \frac{2Lg}{c} \frac{\partial n}{\partial \Omega} \right)
\end{aligned} \tag{D.14}$$

APÉNDICE E) EXPLICACIÓN MEDIANTE ENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS.

$$-n \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} + n \sin \theta_2 + n \sin \theta_1 (\cos \alpha + \sin \alpha \tan \theta_1) = 0 \tag{E.1}$$

$$\text{Si } \sin \theta_2 = \sin(\alpha - \theta_1) = \sin \alpha \cos \theta_1 - \cos \alpha \sin \theta_1$$

$$\therefore -n \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} + n \sin \alpha \cos \theta_1 - n \cos \alpha \sin \theta_1 + n \sin \theta_1 \cos \alpha + \frac{n \sin \alpha \sin^2 \theta_1}{\cos \theta_1} = 0 \tag{E.2}$$

$$\text{Si } \sin^2 \theta_1 = 1 - \cos^2 \theta_1$$

$$\therefore -n \frac{\sin \alpha}{\cos \theta_1} + n \sin \alpha \cos \theta_1 + \frac{n \sin \alpha}{\cos \theta_1} - n \sin \alpha \cos \theta_1 = 0 \tag{E.3}$$