



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Optimización del modelo de velocidades
utilizando un algoritmo de migración RTM
en áreas de geología compleja**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Geofísico

P R E S E N T A

Ortega Mayorga Miguel Angel

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Jose Carlos Ortiz Alemán



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2016

Resumen

La mejora de la resolución de las imágenes sísmicas es un tema de interés actual y de investigación a nivel mundial. Este trabajo es la continuación de trabajos previos (Dan, 2014 y García Reyes, 2013), donde se evalúa la aplicabilidad de un algoritmo de migración reversa en tiempo o Reverse Time Migration (RTM) como herramienta para obtener una mejora en una imagen sísmica en aguas someras del Golfo de México. En este trabajo, se diseña un algoritmo de optimización de las velocidades sísmicas de un modelo de velocidades para mejorar progresivamente la imagen sísmica, a través de un proceso iterativo que involucra migraciones consecutivas.

El caso de estudio corresponde a un área en aguas someras del golfo de México con geología altamente compleja. Se utiliza una imagen sísmica procesada con un algoritmo de migración Kirchhoff como modelo inicial para probar la aplicabilidad del algoritmo de optimización de velocidades sísmicas. Los mapas de sensibilidad obtenidos mediante la RTM representan una aproximación de alta calidad en baja frecuencia. Estos mapas proveen información geológica que conduce a la mejora progresiva de los modelos de velocidades. El resultado de ambos tipos de migración son un par de imágenes que contienen información complementaria (en alta y baja frecuencia), por lo que se propone combinar la información proveniente de la imagen sísmica de Kirchhoff con la de la RTM, generando una imagen optimizada en el rango completo de frecuencias.

Abstract

Improving the resolution of seismic images is a topic of current interest and research worldwide. This work is a continuation of previous work (Dan, 2014 and Garcia Reyes, 2013), where the applicability of Reverse Time Migration (RTM) algorithm as a tool for improved seismic imaging is evaluated, in a case of study in shallow waters of the Gulf of Mexico. In this paper an algorithm to optimize seismic velocities contained in the velocity model is designed, in order to progressively improve a seismic image through an iterative process of successive migrations.

The case study corresponds to an area in shallow waters of the Gulf of Mexico with highly complex geology. A seismic image processed with Kirchhoff migration served as the initial model to test the applicability of the optimization algorithm. Sensitivity maps obtained by the RTM represent a high quality approximation in the low frequencies. This sensitivity maps provide geological information leading to the progressive improvement of velocity models. The result of both types of migration are a pair of images containing complementary information (in high and low frequencies), so it is proposed to combine the information from Kirchhoff seismic image and RTM, to generate an optimized image with an enhanced frequency range.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres por la confianza y el apoyo en mi vida lo cual hoy me permite compartir un logro profesional y personal a través de este trabajo. A la Universidad Autónoma de México y a la Facultad de Ingeniería por ser mi casa de formación personal y profesional. Agradezco especialmente a mi asesor de tesis al Dr. Carlos Ortiz Alemán por permitirme trabajar en este proyecto y a mis compañeros del Instituto Mexicano del Petróleo que durante el tiempo que pase ahí compartieron conmigo sus conocimientos y sus consejos.

ÍNDICE

Resumen.....	1
Abstract.....	2
1 Introducción	7
1.1 Objetivos	8
1.2 Justificación	8
2. Antecedentes.....	9
2.1 Ondas sísmicas y medios de propagación	9
2.2 Ecuación de onda.....	10
2.3 Aproximación acústica en dos dimensiones	11
2.4 Medio bidimensional (ecuaciones acústicas)	12
2.5 Propagación de onda utilizando métodos numéricos	13
2.6 Métodos de diferencias finitas (FDM Finite difference methods)	14
3 Migración Sísmica.....	15
3.1 RTM (Reverse Time Migration)	17
3.2 Descripción del algoritmo.....	17
3.3 Esquema numérico	19
3.4 Discretización del dominio	20
3.5 Condición de estabilidad	22
3.6 Kernels de sensibilidad	22
3.7 Normalización de sismogramas	23

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería

4	Modelo de velocidades	25
4.1	Construcción del modelo de velocidades	25
4.2	Construcción del modelo de velocidades a partir de una imagen sísmica	27
4.3	Construcción del modelo de velocidades de geologías complejas	28
4.3.1	Construcción del modelo.....	30
4.4	Descripción de los objetivos	31
4.5	Metodología y criterios	31
4.6	Inundación de sedimentos	31
4.7	Barrido de velocidades.....	33
4.8	Interfaz grafica	35
5	Aplicación a un caso de estudio	37
5.1	Modelo inicial	38
5.1.2	Migración inicial	41
5.2	Modelo de velocidad (Reflectores supra-salinos).....	42
5.2.1	Migración (Reflectores supra-salinos).....	43
5.3	Modelo de velocidades (identificación del cuerpo)	44
5.3.1	Migración (Identificación del cuerpo).....	45
5.4	Modelo de velocidades (Reflectores sub-salinos)	45
5.4.1	Migración (Reflectores sub-salinos)	46
5.5	Comparación de las imágenes sísmicas	47

5.6 Optimización de la Imagen	49
5.7 Imagen Optimizada	55
6 Conclusiones	57
Referencias.....	60
Apéndice A: Esfuerzo, deformación y ecuaciones.	62
1. Teoría de la elasticidad	62
2. Esfuerzo	62
2.1 Estado de esfuerzo y el tensor de esfuerzos	62
2.1.2 Tensor de esfuerzos (σ_{ij})	63
3. Deformación	64
3.1 Tensor de deformación (ϵ_{ij})	64
4. Ley de Hooke generalizada (Esfuerzo y Deformación).....	66

1 Introducción

La mejora de la resolución de las imágenes sísmicas del subsuelo en áreas con geología altamente compleja es un tema principal de investigación y desarrollo a nivel mundial. Existen distintas técnicas de migración que permiten obtener imágenes del subsuelo, sin embargo, cada una de ellas presenta ventajas propias, así como limitaciones y dificultades.

La construcción de una imagen sísmica mediante el proceso de migración, puede plantearse como un problema inverso, donde los parámetros a determinar son las propiedades del subsuelo (velocidades sísmicas, densidades, parámetros elásticos, etc.). El algoritmo utilizado en este trabajo se conoce como migración reversa en tiempo (RTM) adjunta. Este algoritmo permite obtener mapas de sensibilidad de las propiedades físicas del subsuelo, que en realidad son imágenes sísmicas de alta resolución.

Los métodos de migración han crecido exponencialmente en los últimos 20 años, debido a la convergencia de nuevas tecnologías de cómputo de alto rendimiento y sofisticados algoritmos de procesamiento. Esta tesis es la continuación de trabajos previos (García-Reyes, 2013; Dan, 2014), donde se presenta el planteamiento numérico del método, así como su aplicación exitosa a modelos sintéticos.

En este trabajo, se evalúa la aplicabilidad de la técnica a datos reales pertenecientes a un yacimiento altamente complejo en el Golfo de México.

1.1 Objetivos

1. Evaluar la aplicabilidad del método de migración reversa en tiempo para la construcción de imágenes del subsuelo en profundidad integrando información proveniente de otros métodos geofísicos (métodos potenciales, registros geofísicos de pozos).
2. Analizar el impacto del modelo de velocidades-densidades sobre la calidad de las imágenes sísmicas del subsuelo en áreas con geología altamente compleja en el Golfo de México.
3. Desarrollar un algoritmo para la construcción de un modelo de velocidades robusto que incorpore todas las fuentes de información geológica y geofísica disponible en el área de estudio.

1.2 Justificación

En México, la creciente complejidad geológica en los objetivos exploratorios ha conducido a un severo decaimiento en la tasa de restitución de reservas de aceite y gas en la última década. Uno de los principales retos tecnológicos que tiene la industria nacional es la construcción de mejores imágenes del subsuelo en profundidad en regiones con geología altamente compleja.

El proceso de generación e interpretación de una imagen sísmica representa aproximadamente tres cuartas partes de la duración de un proyecto de exploración petrolera, los costos computacionales y económicos son grandes, lo cual crea un gran área de oportunidad para la innovación, investigación y desarrollo. Ante tal reto es necesario generar un modelo inicial robusto que contemple toda la información disponible, con el propósito de reducir los tiempos de procesamiento, para obtener en el menor número de iteraciones necesarias una imagen de calidad. Esta tesis aborda uno de los enfoques de solución a esta problemática.

2. Antecedentes

Antes de abordar el proceso de construcción de los modelos de velocidades y la migración, es necesario definir algunos conceptos básicos para la implementación de las herramientas computacionales que se emplean para ese propósito.

2.1 Ondas sísmicas y medios de propagación

De acuerdo a Sheriff (1991) las perturbaciones en el campo de esfuerzos son denominadas como ondas sísmicas. La propagación de ondas sísmicas se denomina elástica cuando la onda cambia su forma a través de una fuerza deformante. Si no se cumple la condición anterior, entonces se considera la propagación como acústica.

Las ondas sísmicas se clasifican como ondas de cuerpo u ondas de superficie. De acuerdo a su desplazamiento, las ondas de cuerpo viajan a través del interior de la tierra mientras que las ondas de superficie viajan a través de la superficie. Asimismo, las ondas de cuerpo se pueden clasificar de dos maneras: ondas compresionales y ondas de corte. Las ondas compresionales, o también conocidas como ondas (P), se propagan de manera paralela al movimiento de las partículas.

Las ondas de corte, o también conocidas como ondas (S), se propagan de manera perpendicular al movimiento de las partículas. Este tipo de ondas son de interés para el desarrollo de algoritmos de migración, es por ello que es necesario definir las a continuación:

Para medios isotrópicos y homogéneos.

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad V_p: \text{Velocidad de onda P} \quad (1)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \quad V_s: \text{Velocidad de onda S} \quad (2)$$

donde ρ representa densidad, λ y μ representan los parámetros de Lamé (véase Apéndice A). Una implicación fundamental de estos parámetros es que en medios acústicos las ondas de corte no se propagan ya que $\mu=0$.

Clasificación de los medios de propagación de las ondas

Los medios pueden clasificarse de dos maneras básicas con base en su densidad o en base a la variación de sus propiedades físicas. Con base en su densidad, los medios pueden ser homogéneos donde la densidad es constante o heterogéneos donde la densidad no es constante. Asimismo en isotrópicos cuando no hay variaciones, es decir, la propiedad física se mantiene si varía la dirección. Por otro lado un medio es anisotrópico cuando existen variaciones en las propiedades físicas al variar alguna dirección.

2.2 Ecuación de onda

Esta ecuación permite analizar y estudiar el fenómeno de propagación de las ondas sísmicas, la forma general de la ecuación de onda se obtiene a partir de la segunda ley de Newton y la ley de Hooke en conjunto que se muestra a continuación:

$$F = m a = \rho \frac{d^2u}{dt^2}; \quad (3)$$

donde ρ representa la densidad y $\frac{d^2u}{dt^2}$ representa la segunda derivada temporal del campo de desplazamientos. Para la resolución de la ecuación de onda existen diversos métodos integrales (Funciones de Green), métodos asintóticos (Kirchhoff) o métodos de discretización del dominio computacional (diferencias finitas). Para la realización de este trabajo se emplearon diferencias finitas con una aproximación acústica bidimensional.

2.3 Aproximación acústica en dos dimensiones

El medio bidimensional implica la simplificación de las ecuaciones que relacionan a la ecuación de onda. La aproximación acústica se realiza mediante un análisis de los esfuerzos que actúan en dos ejes cartesianos, el eje x (superficie del suelo) y el eje z (profundidad) donde se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}; \quad (5)$$

la ley de Hooke en un medio bidimensional queda expresada de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{bmatrix}; \quad (6)$$

de la ecuación anterior no se considera el desplazamiento (u_x, u_z) se considera la velocidad (v_x, v_z) por lo que se sustituye con la siguiente ecuación:

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \text{ donde } i = x, z; \quad (7)$$

de tal manera que es necesario reescribir las ecuaciones:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right); \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right); \quad (9)$$

derivando la ecuación (6) con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \quad (12)$$

la consideración del medio acústico implica $\mu=0$, lo cual significa que no existen esfuerzos de corte por lo que las ecuaciones se simplifican de tal manera que la ley de Hooke queda expresada de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{bmatrix}; \quad (13)$$

2.4 Medio bidimensional (ecuaciones acústicas)

Las ecuaciones que describen el medio acústico bidimensional son las que se obtienen a partir de la ecuación (13) (ley de Hooke véase apéndice A). Estas ecuaciones describen el comportamiento de propagación para este medio y son las que se utilizan en el algoritmo de migración. Este conjunto de ecuaciones se resuelven a partir de métodos numéricos y

diferencias finitas centradas con aproximación de series de Taylor de segundo orden y se muestran a continuación:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}; \quad (14)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right); \quad (16)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right); \quad (17)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 0; \quad (18)$$

2.5 Propagación de onda utilizando métodos numéricos

La solución de la ecuación de onda se puede aproximar utilizando diferentes tipos de métodos numéricos. Estos métodos dependen de la aproximación de la solución o de los recursos computacionales con los que se cuente, el dominio de resolución puede realizarse ya sea en tiempo o frecuencia y el criterio de selección de estas aproximaciones depende de la complejidad del área de estudio.

De acuerdo a Said (2015) los del dominio espectral producen buenos resultados cuando la geología es simple, en contraparte los de diferencias finitas proveen buena calidad en las imágenes cuando la geología es compleja.

Los métodos de elemento finito continuos o discontinuos o también conocidos como métodos de Galerkin se emplean más para resolver sub –superficies complejas.

2.6 Métodos de diferencias finitas (FDM Finite difference methods)

Los métodos de diferencias finitas son formulaciones de ecuaciones diferenciales parciales y están basados en la discretización de una malla computacional, en los cuales se procesan los valores del campo de ondas.

Computacionalmente por lo general se utilizan expansiones de Taylor para computar las derivadas así como para estimar los errores por dispersión numérica.

Las mayores dificultades de estos métodos se deben a la discretización de las mallas, ya que para un medio heterogéneo la discretización del espacio y la velocidad debe de ser muy pequeño, lo cual genera un gran consumo de recursos computacionales.

Las ventajas de estos métodos radican en que se pueden aplicar a cualquier dominio, ya sea dominios de frecuencia o dominios de tiempo. Estos métodos requieren garantizar ciertas condiciones específicas para garantizar su efectividad.

Las condiciones necesarias que deben cumplir cada método son: estabilidad, consistencia y convergencia (Said, 2015).

La estabilidad establece que la solución está limitada cuando la solución analítica a la ecuación diferencial parcial es limitada).

La consistencia del método establece que la truncación tiende a cero cuando la malla espacial y el tiempo tiende a cero.

La convergencia establece que la aproximación de soluciones usando diferencias finitas se aproxima a la solución analítica de la ecuación diferencial parcial.

3 Migración Sísmica

El proceso de migración sísmica consiste en colocar las reflexiones de los datos sísmicos en su posición correcta, puede realizarse en tiempo (t) o en el espacio (x). De acuerdo a la complejidad litológica se selecciona el dominio de resolución (Yilmaz, 2001).

La migración mejora la interpretación geológica y el mapeo de estructuras. Existen diversos algoritmos de migración, cada uno de ellos tiene diversos alcances y limitaciones (Tabla1), el dominio en el que se pueden trabajar depende específicamente del algoritmo de migración seleccionado.

Las diferencias esenciales entre la migración en tiempo y la migración en profundidad radica no solo en el dominio de resolución, sino en la función de retraso de tiempo computadas, las migraciones en tiempo son funciones analíticas y las migraciones en profundidad son funciones numéricas. A continuación se muestra una tabla comparativa entre las limitaciones y ventajas de los métodos de migración.

Algoritmo	Fidelidad en iluminación	Echados Fuertes	Multitrayectoria	Rapidez de ejecución	Flexibilidad de la salida	Limitaciones
Kirchhoff	x	✓	x	✓	✓	Limitado por la teoría de rayos
Beam	x	✓	Restringido	✓	✓	Limitado por la teoría de rayos
WEM	Restringido	x	✓	x	✓	No está limitado por la teoría de rayos
RTM	✓	✓	✓	x	✓	No está limitado por la teoría de rayosl

Tabla1 Ventajas y desventajas de los algoritmos de migración (Dan, 2014) modificado.

Al observar las ventajas y limitaciones que resultan de utilizar un algoritmo de migración se optó por utilizar el algoritmo RTM para realizar la optimización de la imagen sísmica, comprobar la aplicabilidad del algoritmo de optimización y construcción del modelo de velocidades.

Para el presente trabajo se analizan las ventajas en el algoritmo de migración así como el modelo de velocidades que soportan. Los algoritmos de migración en tiempo poseen características distintas a los algoritmos en profundidad, analizar sus ventajas y alcances permite seleccionar el algoritmo que mejor resuelva el problema inicial y el objetivo de visualización específico.

El modelo de velocidades se debe de adaptar al algoritmo de migración empleado y a las características y limitaciones del mismo. A continuación se muestra la comparación en las características y usos del modelo de velocidades empleados para algoritmos de migración en tiempo y profundidad (Tabla 2).

Migración en tiempo	Migración en profundidad
No es sensible a variaciones laterales y se utiliza mayormente para velocidades y profundidades constantes	Permite variaciones bruscas laterales de la velocidad así como en profundidad y se emplean de mayor manera en geologías complejas.

Tabla 2 Comparación del modelo de velocidades en función del tipo de algoritmo de migración seleccionado.

3.1 RTM (Reverse Time Migration)

La migración reversa en tiempo (RTM) es una técnica de migración que modela la propagación de las ondas resolviendo la ecuación de onda completa en forma numérica (Baysal et al, 1983).

Es un algoritmo de migración que puede ser pre-stack o post-stack que le permite considerar el tiempo de viaje de la onda en cualquier dirección, es decir, que considera las reflexiones con patrones complejos. Esto hace que la técnica sea muy costosa en recursos y en tiempo de procesamiento. Sin embargo aprovechando los avances tecnológicos y las mejoras en los algoritmos se ha reducido y mejorado estas complicaciones.

En la siguiente tabla se explica brevemente el desarrollo del algoritmo RTM

No.	RTM	Descripción
1	Propagaciones directas	Generación de sismogramas iniciales
2	Retropropagación	Generación de sismogramas
3	Condición de imagen	Correlación entre sismogramas (Condición de imagen)

Tabla 3 Descripción del algoritmo RTM.

3.2 Descripción del algoritmo

Propagación inicial: Dado un modelo de velocidades del subsuelo se realiza una propagación inicial, esta propagación genera sismogramas que son registrados en diferentes receptores (se pueden disparar fuentes por separado o una sola fuente).

Retropropagación: Consiste en utilizar los receptores como fuentes y realizar la propagación en sentido inverso a la propagación directa y almacenar los valores que resulten de esta propagación.

Condición de Imagen: La condición de imagen es la relación entre los campos de ondas de las propagaciones originales y de los receptores. Se multiplica el campo de ondas final de la propagación original con el campo inicial de la propagación de los receptores y termina con la multiplicación del campo inicial de la propagación original con el campo de los receptores. Los resultados se van sumando y esto genera la imagen correspondiente de cada fuente.

La condición de imagen se describe mediante la siguiente ecuación:

$$I(\vec{x}) = \int_0^T S(\vec{x})R(\vec{x}, T - t) dt; \quad (19)$$

donde: $S(\vec{x})$: fuentes, $R(\vec{x})$:receptores y T : tiempo de registro de las propagaciones originales.

mediante esta ecuación se emplea el criterio de Claerbout (1985), el cual dice que un reflector existe cuando los campos de ondas de la fuente y del receptor coinciden en tiempo y en espacio.

A continuación se muestra el diagrama de flujo del algoritmo RTM.

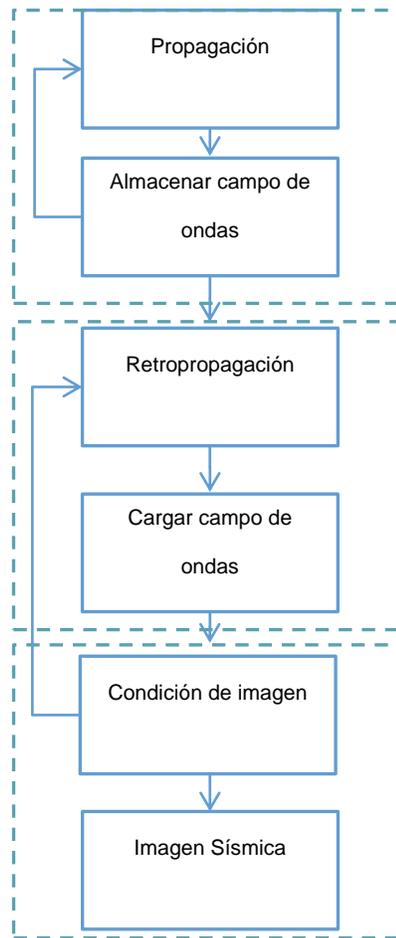


Figura 1 Diagrama de flujo RTM.

3.3 Esquema numérico

Para la realización del presente trabajo se emplea el esquema de malla escalonada o también conocidas como PML (Perfectly Matched Layers). Implementadas y estudiadas por Madariaga (1976), Vireux y Madariaga (1982) y Vireux (1986). Haciendo uso de la formulación propuesta por Komatitsch y Martin (2007). Para el cálculo de los parámetros en las ecuaciones (14), (15), (16) y (17) que se muestran se emplean diferencias finitas centradas y aproximación de series de Taylor de segundo orden.

3.4 Discretización del dominio

La malla utilizada está definida en el dominio x y z , tiene una extensión de 20 nodos en la posición x y 20 nodos en la posición z . A continuación se muestra el esquema utilizado para la discretización del dominio empleado (Figura 2)

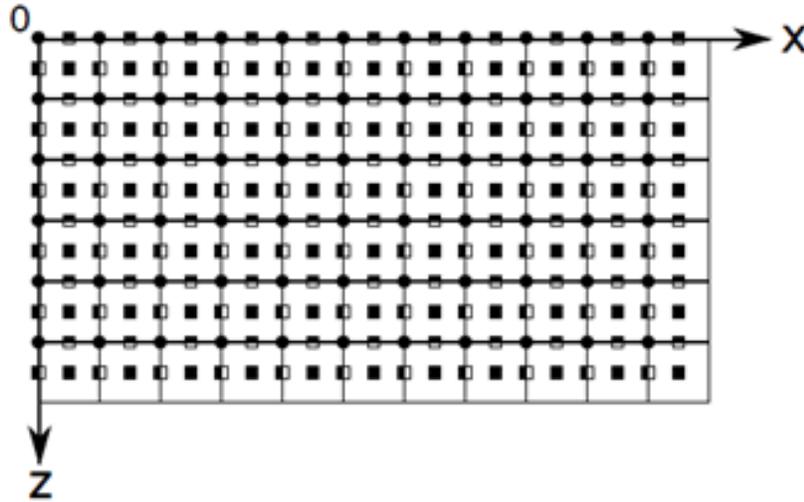


Figura 2 Esquema representativo de la malla empleada para la discretización del dominio Vireux (1986).

A continuación se muestra una celda de la malla empleada donde se muestran las posiciones para el cálculo v_x , v_z , σ_{xx} , σ_{zz} y σ_{xz} (Figura 3).

En los nodos del eje x se calculan las componentes x del campo de velocidades con un intervalo Δx . En las posiciones centrales $(\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta z}{2})$ de cada celda que componen la malla se calculan las componentes z del campo de velocidades.

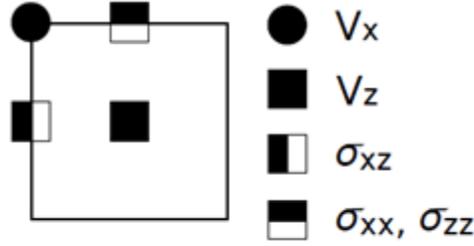


Figura 3 Esquema representativo de la malla implementada. Se muestran las posiciones para el cálculo de

$$v_x, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{zz} \text{ y } \sigma_{xz}.$$

Los esfuerzos σ_{xx} y σ_{zz} se calculan en el dominio x en las posiciones $(\frac{\Delta x}{2}, z)$. Los esfuerzos σ_{xz} se calculan en el dominio z en las posiciones $(x, \frac{\Delta z}{2})$. Las ecuaciones bajo el esquema de diferencias finitas para el cálculo de los parámetros de la malla descrita anteriormente se muestran a continuación:

$$v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}} = v_{x(i,j)}^{k-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\rho_{(i,j)}} \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sigma_{xx(i+\frac{1}{2},j)}^k - \sigma_{xx(i-\frac{1}{2},j)}^k \right) + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^k - \sigma_{xz(i,j-\frac{1}{2})}^k \right) \right]; \quad (20)$$

$$v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} = v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\rho_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}} \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sigma_{xz(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^k - \sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^k \right) + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^k - \sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j)}^k \right) \right]; \quad (21)$$

$$\sigma_{xx(i+\frac{1}{2},j)}^{k+1} = \sigma_{xx(i+\frac{1}{2},j)}^k + \left(\lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} + 2\mu_{(i+\frac{1}{2},j)} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(v_{x(i+\frac{1}{2},j)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}} \right) + \lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} \right); \quad (22)$$

$$\sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j)}^{k+1} = \sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j)}^k + \left(\lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} + 2\mu_{(i+\frac{1}{2},j)} \right) \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} \right) + \lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(v_{z(i+\frac{1}{2},j)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i,j)}^{k+\frac{1}{2}} \right); \quad (23)$$

las ecuaciones anteriores (20), (21), (22) y (23) son las ecuaciones acústicas del medio bidimensional bajo el régimen de diferencias finitas centradas.

3.5 Condición de estabilidad

La solución de las ecuaciones descritas anteriormente bajo el régimen de diferencias finitas converge a la solución siempre y cuando la condición de estabilidad se cumpla. La condición de estabilidad empleada en este trabajo es la propuesta por Virieux (1986) y se expresa a continuación.

$$V_P \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}} < 1; \quad (24)$$

donde: V_P corresponde la velocidad de ondas P, Δx y Δz corresponden a los intervalos de discretización en los ejes x y z, respectivamente.

3.6 Kernels de sensibilidad

Los kernels de sensibilidad en realidad pueden ser considerados como imágenes sísmicas de alta resolución. De acuerdo a Tarantola (1984), la inversión de la forma de onda para el caso acústico se puede hacer mediante un proceso iterativo en el que se busca disminuir el valor de la función de error de los datos observados y los datos sintéticos mediante la perturbación de los parámetros del modelo, a estos se les conoce como kernels de sensibilidad.

Para este trabajo se utilizan los kernels ρ y κ que son mapas de sensibilidad relacionados con la variación de la velocidad sísmica y de la densidad del modelo, su construcción involucra las simulaciones de la propagación de las ondas. El algoritmo RTM utilizado calcula cuatro kernels, kernel ρ , kernel κ y sus normalizaciones (ρ_N, κ_N) , estas normalizaciones involucran criterios de profundidad que se determinan a través de las pruebas consecutivas que se generan a través de cada iteración.

El algoritmo de optimización pretende ayudar a encontrar el valor ideal del parámetro (velocidad sísmica) en el menor número de iteraciones necesarias. Al tener un mayor rango de variación se selecciona el kernel kappa y kappa normalizado como modelo de visualización para implementar el algoritmo de optimización propuesto.

3.7 Normalización de sismogramas

Para mejorar la calidad de la imagen sísmica se emplearon normalizaciones dinámicas de las amplitudes de los sismogramas de manera que la correlación de las señales sea óptima para generar la condición de imagen. Esta normalización consiste en poner en una escala dinámica la amplitud de los sismogramas observados contra los directos y mantener una media cero. Para realizar esta normalización se utilizó la siguiente ecuación:

$$\text{RegV}_{\text{obs}} = \left(\left(\frac{\text{RegV}_{\text{Obs}} - \min(\text{RegV}_{\text{Obs}})}{\max(\text{RegV}_{\text{Obs}}) - \min(\text{RegV}_{\text{Obs}})} \right) * (\max(\text{RegV}_{\text{dir}}) - \min(\text{RegV}_{\text{dir}})) \right) + \min(\text{RegV}_{\text{dir}}); \quad (25)$$

donde: RegV_{obs} : sismogramas observados y RegV_{dir} : sismogramas directos.

Utilizando la ecuación anterior, para cada proceso de migración se implementó la normalización a los sismogramas generados. A continuación se muestra una traza de los sismogramas directos de 323 muestras (Figura 4), una traza de los sismogramas observados de 323 muestras (Figura 5) y la normalización dinámica de los sismogramas

(Figura 6), los cuales corresponden a la migración inicial (respuesta del medio) del caso de estudio.



Figura 4 Traza de los sismogramas directos.

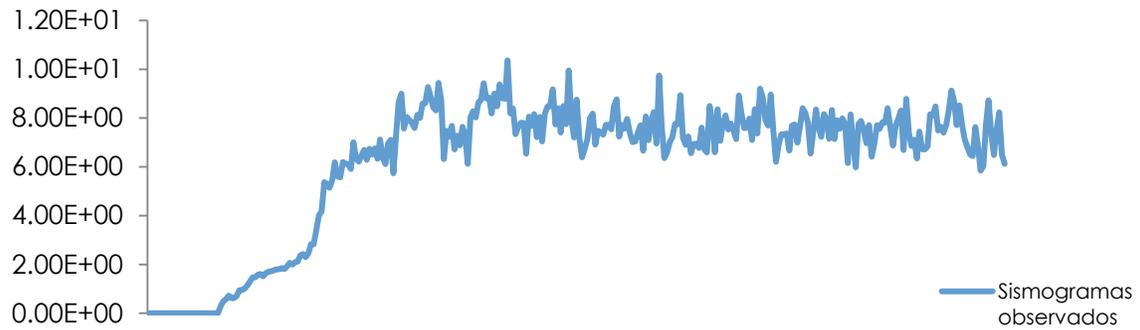


Figura 5 Traza de los sismogramas observados.

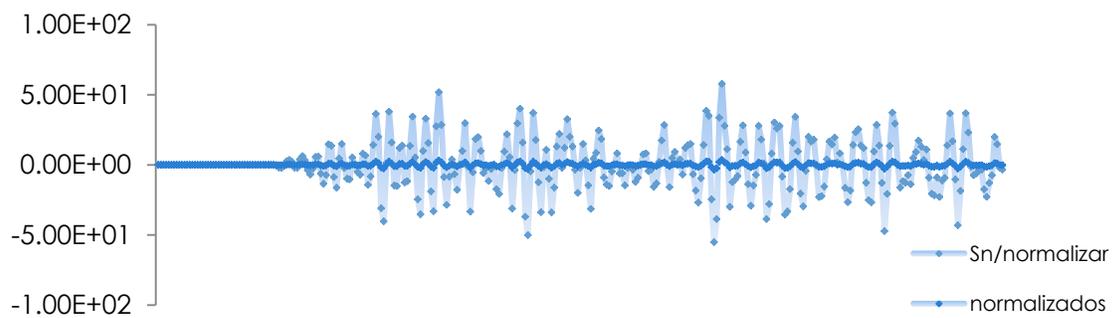


Figura 6 Sismogramas normalizados. Los sismogramas directos se escalan a la amplitud de los sismogramas observados.

4 Modelo de velocidades

El modelo de velocidades es intrínseco a cualquier técnica de migración o algoritmo empleado, su optimización está ligada a la fidelidad de la aproximación de la realidad, ya que depende directamente de la geología del área de estudio. Sin embargo no todas las técnicas de migración admiten modelos de velocidad complejos, ya que están limitados a las características propias de la técnica o algoritmo seleccionado.

Por lo general el modelo de velocidad debe de ser constante, las variaciones en la velocidad deben ser suaves, y los cambios laterales de velocidad no deben de variar severamente. Cuando el modelo de velocidades es complejo, está sujeto a variaciones bruscas en la velocidad, las cuales producen difracciones o múltiples con cierto tipo de algoritmos de migración. Es por ello que para áreas donde la geología es compleja se debe de seleccionar un algoritmo de migración que pueda resolver de manera adecuada el problema.

En la actualidad existen diferentes metodologías para construir un modelo de velocidades, ya sea empleando un software, flujo de trabajo o un algoritmo de construcción de modelos. En este trabajo se construye un algoritmo optimización del modelo de velocidades a partir de migraciones iterativas utilizando un algoritmo de migración RTM.

4.1 Construcción del modelo de velocidades

Generalmente el modelo de velocidades propuesto se utiliza para validar el algoritmo de migración empleado, este modelo es sintético y se construye a partir de toda la información disponible del área de estudio, registros de pozos, columnas estratigráficas,

reportes técnicos, sísmica, estudios de gravimetría, magnetometría, etc. Cada fuente de información aporta diferentes elementos al modelo que deben de ser considerados para generar una interpretación geológica.

Una vez recopilada toda la información el proceso es intuitivo y consta de 3 pasos:

1. Recopilar la información
2. Realizar una interpretación inicial
3. Construcción

A continuación se muestra el diagrama de flujo correspondiente a la construcción del modelo de velocidades (Figura 7).



Figura 7 Proceso de construcción de un modelo de velocidades.

Los parámetros para determinar si un modelo de velocidad es adecuado o no lo es se establecen a partir de la calidad de la imagen obtenida después de someterla al proceso de migración.

Los errores más frecuentes en la construcción de modelos se deben a sobrestimaciones o subestimaciones de los parámetros (velocidades sísmicas) de las estructuras o interpretación geológica inicial errónea (geología compleja).

4.2 Construcción del modelo de velocidades a partir de una imagen sísmica

Para poder construir un modelo a partir de una imagen sísmica, es necesario haber realizado una migración previa de los datos, lo cual implica que se tiene un modelo de velocidades y una imagen previa del área de estudio.

Esta imagen contiene elementos que no se visualizan o son de interés mejorar su resolución. Es por ello que para mejorar la imagen es necesario someterla a un proceso iterativo de migraciones consecutivas.

En este proceso la imagen resultante se convierte en el nuevo modelo inicial, donde la imagen anterior generada de la migración se utiliza para ir ajustando los parámetros e ir incorporando nuevas interpretaciones. De tal manera que se va construyendo la imagen a partir de la selección de los valores adecuados del parámetro seleccionado (velocidad sísmica o densidad) y ajustando los valores correspondientes.

En el siguiente diagrama de flujo se muestra el proceso de construcción del modelo de velocidades a partir de una imagen sísmica (Figura 8).

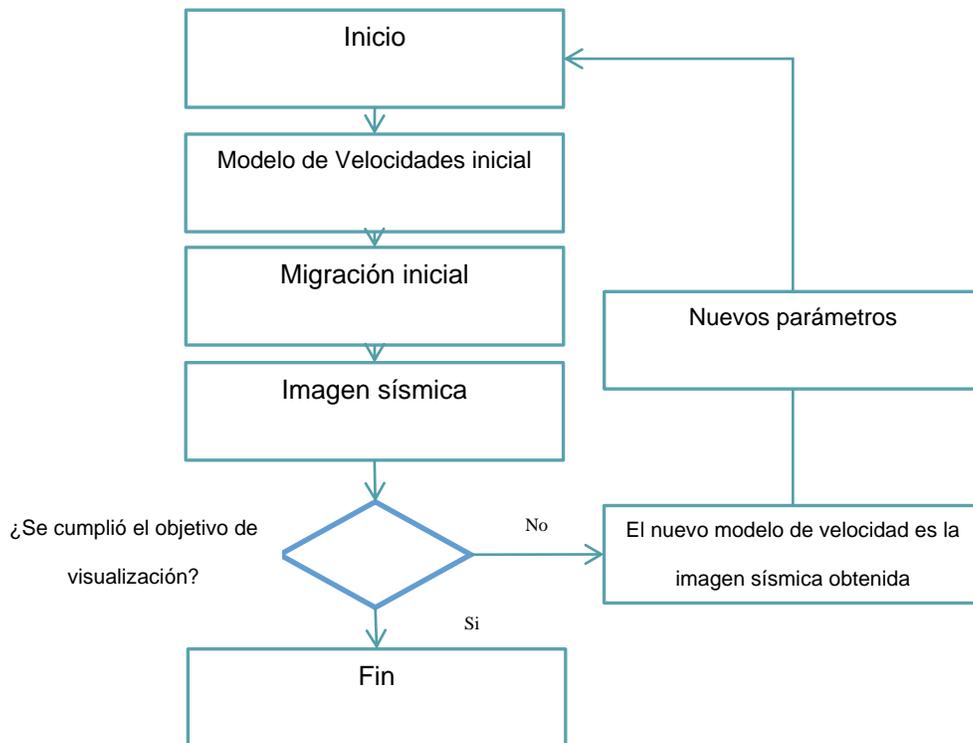


Figura 8 Diagrama de flujo, construcción de un modelo de velocidades a partir de una imagen sísmica.

4.3 Construcción del modelo de velocidades de geologías complejas

En presencia de geologías complejas, es necesario realizar diversos modelos de velocidades, ya que pueden existir diferentes interpretaciones geológicas de lo que se encuentra en el subsuelo. Cada interpretación puede ser válida pero genera diferentes resultados.

La creación de múltiples modelos es un proceso laborioso por lo que se pretende construir una metodología que pueda considerar diversos escenarios e incorpore todas las fuentes de información posible. El primer reto en la obtención de una imagen sísmica en presencia de geología compleja es determinar la forma de la estructura que se pretende visualizar. En el caso de un cuerpo salino el objetivo consiste en delimitar la forma y estructura del cuerpo. Debido a que existen altos contrastes de impedancias entre el

cuerpo y lo que lo rodea esto dificulta la propagación de la energía. Lo que se traduce en que no se puedan visualizar de manera correcta los reflectores presentes. Es por ello que el proceso debe de realizarse meticulosamente, e ir iluminando el cuerpo salino apropiadamente.

La definición de la forma, tamaño así como su espesor no se pueden obtener de manera directa, por lo que se debe de dividir el problema y establecer objetivos de visualización de acuerdo al proceso de migración que se esté llevando a cabo.

El procedimiento consiste en ir definiendo parcialmente la estructura de tal manera que se pueda identificar la cima, la base, establecer el espesor y la forma del cuerpo, para posteriormente definir los reflectores que se encuentren por debajo de ella.

Empleando esta metodología se establecen objetivos de visualización para la implementación del algoritmo aplicado a un caso de estudio. Para el caso de estudio se tiene una imagen sísmica obtenida a partir de un algoritmo de Kirchhoff (Figura 12) que sirve como modelo inicial para hacer que la convergencia del modelo de velocidades utilizado en la RTM sea óptima, esta imagen se interpreta y se definen las estructuras principales.

La reconstrucción de la imagen se hace a partir de incorporar los elementos y optimizar un modelo de velocidades utilizando el algoritmo propuesto.

A continuación se muestra la discretización del problema y los objetivos específicos de visualización para el caso de estudio (Tabla 4).

No.	Objetivos
1.	Definir reflectores superiores
2.	Definir la cima (cuerpo salino)
3.	Definir la base (cuerpo salino) ¹
4.	Establecer la forma (cuerpo salino)
5.	Definir reflectores inferiores

Tabla 4 Objetivos de visualización del caso de estudio.

4.3.1 Construcción del modelo

La construcción del modelo de velocidades debe de hacerse enfatizando los objetivos descritos anteriormente, al ser una metodología de construcción a partir de una imagen sísmica deben de realizarse diversas migraciones al modelo propuesto con los datos La siguiente tabla muestra el objetivo de visualización y la migración correspondiente.

No.	Objetivo	Migración
1	Definir reflectores superiores	Respuesta del medio
2	Definir la cima (cuerpo salino)	Inundación de reflectores supra-salinos
3	Establecer la forma del cuerpo salino	Inundación de la sal
4	Definir los reflectores sub-salinos	Inundación de reflectores sub-salinos

Tabla 5 Objetivos de visualización y etapas de migración.

¹En ciertos casos no es adecuado definir la base de la sal e interpretarla ya que se puede obtener una malinterpretación de los reflectores que se encuentren por debajo.

4.4 Descripción de los objetivos

1. La respuesta del medio brinda la información inicial general del área de estudio pues en ella se recaba todas las fuentes de información disponible.
2. La inundación de reflectores supra-salinos garantiza que el contraste entre estos y la estructura salina sea adecuado y permita visualizar la cima del cuerpo.
3. La inundación de la sal genera un contraste entre la estructura salina y los posibles reflectores sub-salinos que no hayan sido identificados en las imágenes anteriores.
4. La inundación de los reflectores sub-salinos permite definir de mejor manera estos reflectores y mejorar la interpretación de la estructura.

4.5 Metodología y criterios

Las técnicas y metodologías para la obtención de los parámetros optimizados consisten en la selección de los valores de velocidades sísmicas y densidades de los modelos que se generan al aplicar el algoritmo de migración. Se utiliza la inundación de sedimentos y el barrido de velocidades para la optimización de los valores de los parámetros y se emplean criterios de interpretación geológica para la modificación del modelo.

4.6 Inundación de sedimentos

La inundación de sedimentos consiste en propagar la energía a través de los datos, a partir de un modelo de velocidad inicial, con un contraste de velocidades significativo entre una estructura y otra, de tal manera que se pueda diferenciar los reflectores e iluminar la imagen sísmica.

Cada estructura posee un rango de velocidades variables que está ligado con diversos factores (presencia de fluidos, propiedades físicas, composición mineralógica, etc). Es imposible definir una velocidad absoluta por lo que al asignar el valor se debe de hacer

una estimación y probar con valores que se encuentren dentro del rango de velocidades de la estructura identificada.

La aproximación inicial no es aleatoria ya que existen tablas con diferentes velocidades sísmicas y densidades para distintas formaciones geológicas (Tabla 6). Para el presente trabajo se utilizó la siguiente tabla de velocidades sísmicas y densidades como referencia.

Formación	Densidad [gr/cm³]	Velocidad Sísmica [m/s]
RCPL	2	1750
MOCNL	2.14	2280
MOCNM	2.15	2330
MOCNE	2.16	2370
OLGNL	2.19	2500
OLGNE	2.2	2550
EOCNL	2.21	2600
EOCNM	2.22	2650
EOCNE	2.23	2700
PACNL	2.25	2800
PACNE	2.35	3300
BRCRT	2.4	3600
CRTCMT	2.62	5150
CRTE	2.66	5450
TTNNO	2.64	5300
KMMGN	2.52	4400
B M	2.18	6100
SAL	2.18	4500
SAL	2.18	2450-4500

Tabla 6 Velocidades Sísmicas y densidades, PEMEX.

Cuando el contraste de velocidades utilizado no es el adecuado no se pueden diferenciar algunos reflectores o pueden llegar a confundirse, es por ello que este proceso debe de ser cuidadosamente analizado.

4.7 Barrido de velocidades

Es un proceso iterativo que prueba diversos valores dentro de un rango hasta obtener la mejor aproximación a la velocidad del reflector. Por lo general se generan varios modelos (al menos tres), con variaciones de 10%, 20% y 30 % del valor de velocidad propuesto, subestimando o sobrestimando el valor de la velocidad sísmica, para observar y analizar el impacto que genera en la definición y visualización de las estructuras de la imagen sísmica.

Barrido de velocidades		
Creación de modelos	Sobrestimación de velocidades sísmicas	Subestimación de velocidades sísmicas
1	10%	-10%
2	20%	-20%
3	30%	-30%

Tabla 7 Barrido de velocidades.

El análisis de velocidades se aplica a las difracciones de la imagen ya que éstas definen si la velocidad propuesta es la adecuada o si no lo es. Al utilizar valores erróneos de velocidad los reflectores se distorsionan o se destruyen. Este análisis es primordial ya que permite eliminar difracciones no deseadas o presencia de múltiples en la imagen sísmica.

Cuando el contraste de velocidades es adecuado se ilumina la imagen dándole mayor resolución, lo cual facilita la identificación y la adición de nuevos reflectores o cuerpos.

A continuación se muestra el algoritmo de optimización el cual incluye el proceso de construcción del modelo de velocidades empleando la inundación de sedimentos y el barrido de velocidades para encontrar la velocidad optimizada (Figura 9).

El resultado final permite obtener una imagen sísmica optimizada.

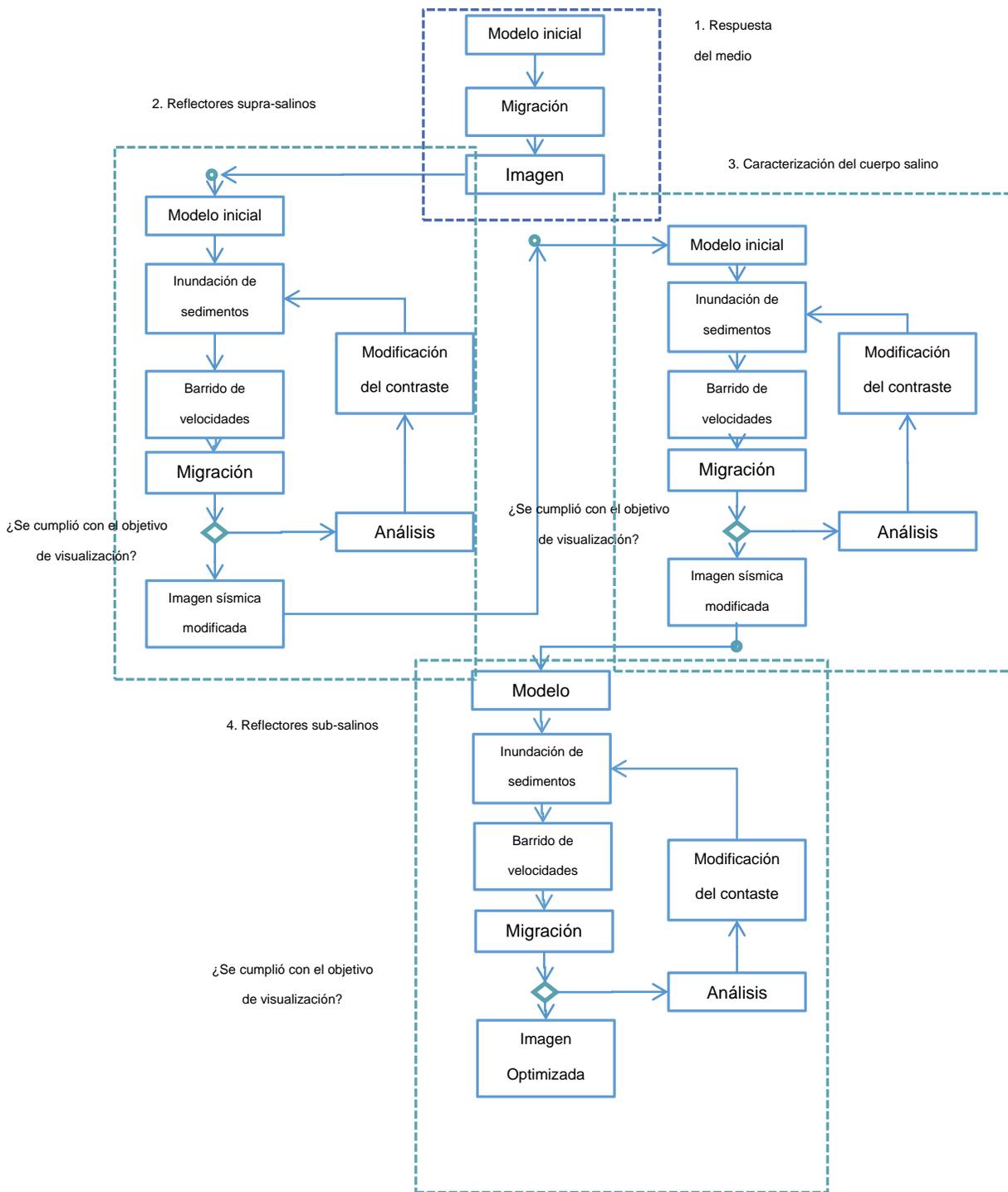


Figura 9 Algoritmo de optimización para la construcción del modelo de velocidades.

4.8 Interfaz grafica

Para la edición y creación de los modelos de velocidad se utilizó una interfaz gráfica desarrollada en MATLAB², para poder crear los distintos modelos de velocidades. Esta interfaz es capaz de leer archivos con diferentes tipos de extensiones ya sean datos (.dat) o imágenes. (.jpeg ó .png). A continuación se muestra el menú de inicio de la interfaz gráfica (ver Figura 10).

El algoritmo propuesto permite generar modelos paralelos, antes de realizar la migracion consecutiva y analizar el efecto e impacto de la modificacion de la velocidad, asi como editar y redibujar reflectores. Es posible modificar interpretaciones, o de ser el caso rehacer todo el modelo general. Todos los modelos se analizan y se almacenan para discretizar los parámetros que son de interés para la creacion del nuevo modelo.

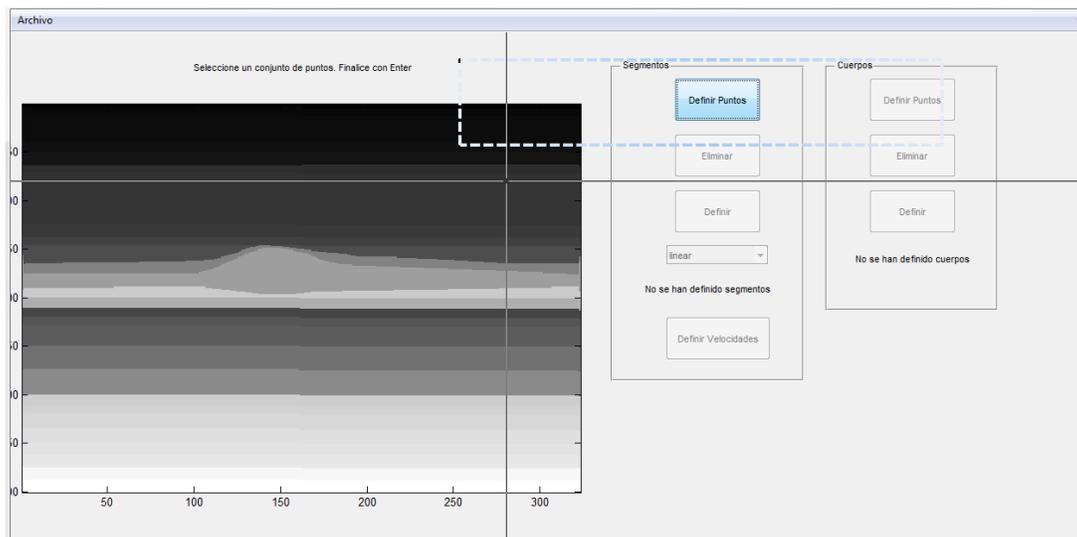


Figura 10 Interfaz gráfica para la construcción y edición de modelos de velocidades.

Una vez finalizado el modelo se asignan los valores de velocidades sísmicas para cada reflector dibujado (Figura 11). Así al finalizar el programa se genera una matriz de datos con las velocidades necesarias para realizar la propagación y retropropagación necesarias

² Interfaz diseñada por el Dr. Mauricio Orozco del Castillo.

para utilizar el algoritmo de migración RTM. El algoritmo de migración requiere el modelo de velocidades y densidades por lo que el modelo generado se guarda y posteriormente a ese modelo se le asignan las densidades correspondientes.

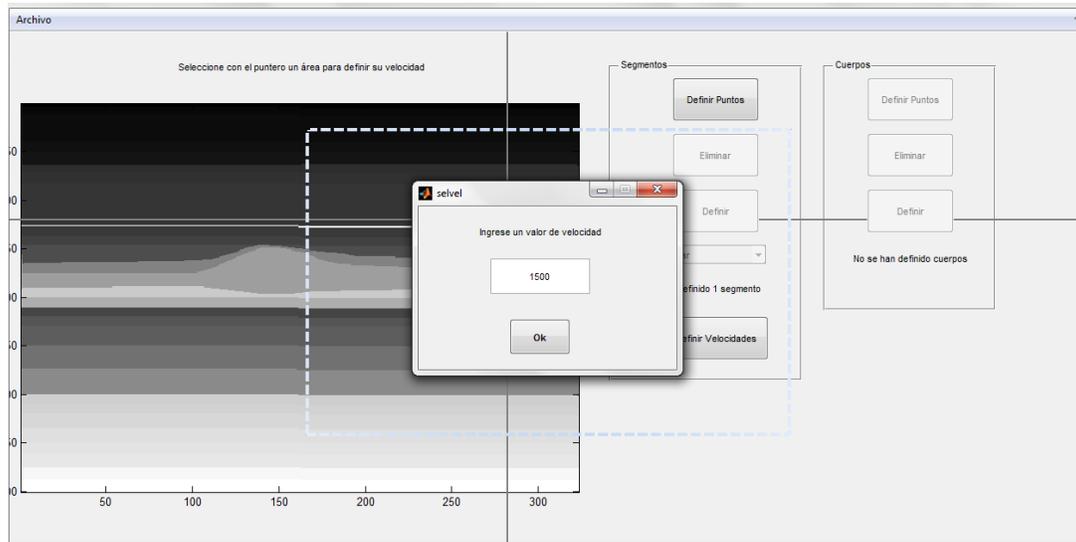


Figura 11 Asignación de velocidades sísmicas.

De esta manera cada modelo generado puede ser editado fácilmente, lo que permite realizar las pruebas de velocidad, visualizar las imágenes, realizar un análisis de velocidades y migrar todos los modelos simultáneamente. Lo que reduce significativamente el tiempo de procesamiento. Este proceso permite controlar los objetivos y enfatizar cierto tipo de estructuras que se vayan iluminando, por lo que se tiene un gran control y se reduce la probabilidad de asignar una velocidad sísmica errónea.

5 Aplicación a un caso de estudio

Los datos utilizados para este trabajo son sismogramas apilados de una inline de un área del Golfo de México en presencia de geología compleja, se reporta un cuerpo salino a una profundidad media de 3750 [m]-4500 [m] y un tirante de agua promedio de 40 [m].

La profundidad de investigación es de 10 [km] y tiene una extensión de 9 [km]. Se utilizó un algoritmo de migración RTM con fronteras absorbentes (García Reyes, 2013) para implementar el algoritmo de optimización de construcción de modelos y analizar el impacto en las imágenes sísmicas generadas.

Este algoritmo genera 4 kernels de sensibilidad, kernel kappa, kernel rho, kernel kappa normalizado y kernel rho normalizado. El kernel kappa está relacionado con las velocidades sísmicas y el kernel rho con las densidades.

El rango de variación de la velocidad sísmica es más grande en comparación con el de densidades, por lo que se opta por utilizar los kernels kappa y kappa normalizado para el análisis de las imágenes generadas. La imagen generada a partir de la inversión de los kernels tiene una dimensión de 323x400 píxeles, donde $1\text{pixel}=(\Delta x, \Delta z)$, donde $\Delta x=27.5[\text{m}]$ y $\Delta z=40[\text{m}]$, es decir la variación lateral y la variación en profundidad no son uniformes. Se muestra el proceso de construcción del modelo de velocidades y la imagen sísmica correspondiente del área de estudio para analizar la aplicabilidad del algoritmo de migración, el algoritmo de construcción de modelos y evaluar los efectos en la asignación de velocidades y densidades erróneas en los datos. Posteriormente se compara la imagen sísmica reconstruida con el algoritmo RTM y la imagen sísmica inicial obtenida con Kirchhoff y se realiza una comparación de las imágenes sísmicas.

5.1 Modelo inicial

El modelo inicial se obtiene a partir de una imagen sísmica migrada con un algoritmo de Kirchhoff (Figura 12), esta imagen se utiliza como referencia para obtener el modelo de velocidades para implementar el algoritmo RTM. A partir de esta imagen se identifican y se analizan las estructuras y reflectores presentes. De los reportes obtenidos se sabe que existe un cuerpo de sal a una profundidad media de 4500[m] pero no se incorpora debido a que el primer objetivo de visualización consiste en observar la respuesta del medio e indicar las formaciones supra-salinas y estructuras presentes.

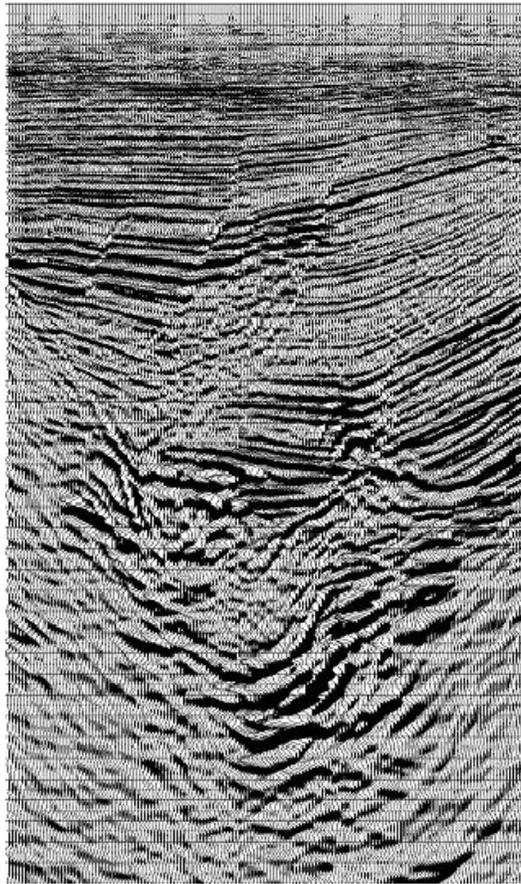


Figura 12 Imagen sísmica migrada con Kirchhoff. Esta imagen se utiliza como referencia para la construcción del modelo de velocidades e implementar el algoritmo RTM.

La figura previa corresponde a la imagen sísmica obtenida con Kirchhoff, en ella se aprecian una serie de fallas normales, y una cuenca sedimentaria. La Figura 13 corresponde a las formaciones identificadas en la imagen. En primera instancia se identifican cuatro formaciones presentes en la parte superior de la imagen. Las velocidades sísmicas utilizadas para la creación del modelo de velocidades de estas formaciones se toman directamente de los reportes de PEMEX (Tabla 5).

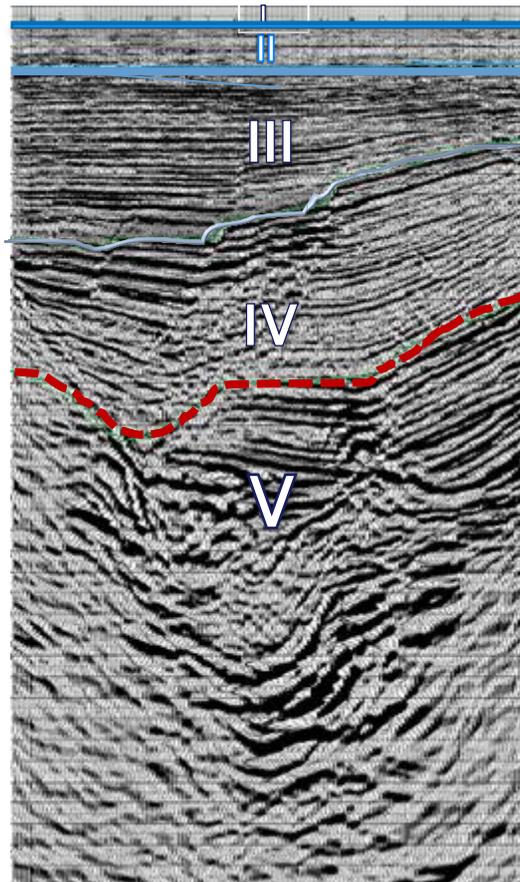


Figura 13 Formaciones identificadas de la imagen sísmica obtenida con Kirchhoff.

En la figura previa se muestran las formaciones indicadas de la interpretación visual de la imagen, las formaciones I-IV corresponden a las formaciones superiores al cuerpo salino, la formación V se indica solamente puesto que el objetivo de visualización de la primera migración solo contempla las formaciones superiores. Para generar el modelo necesario

para la implementación del algoritmo RTM, se utiliza la interfaz gráfica para dibujar las formaciones identificadas previamente, de tal manera que se obtenga un mapa de velocidades y densidades iniciales.

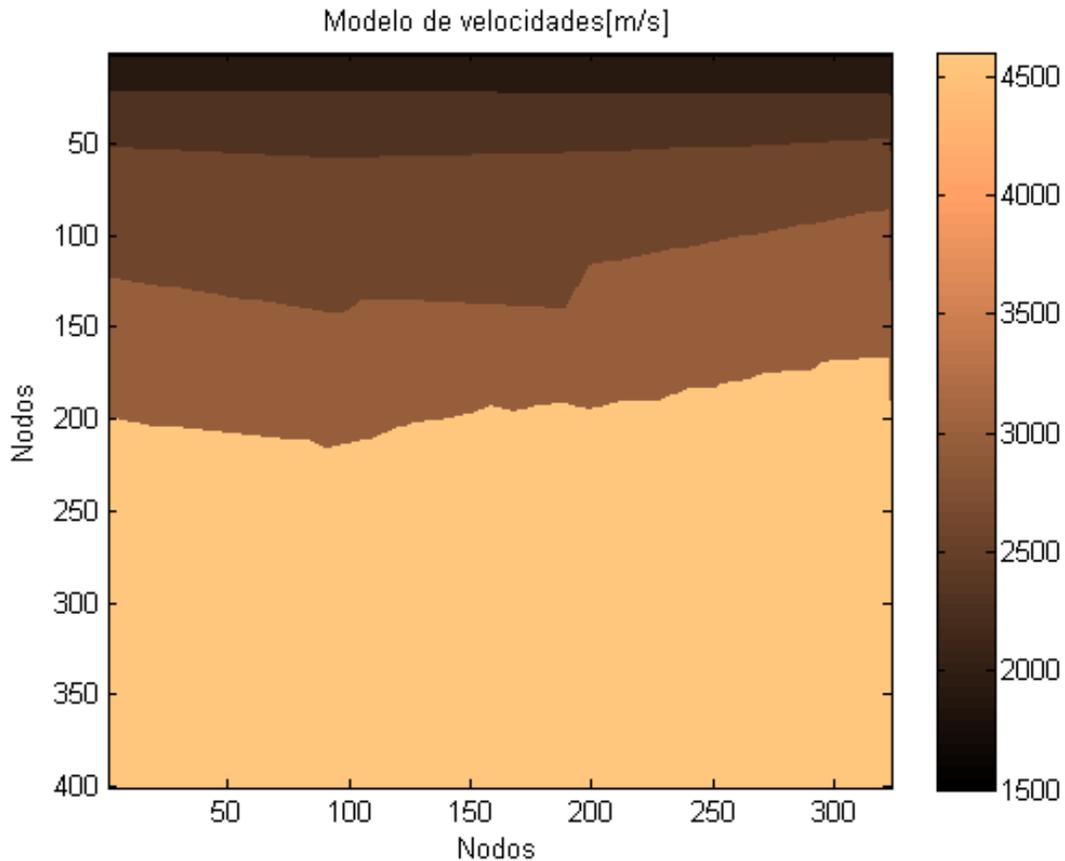


Figura 14 Modelo de velocidades inicial. Generado a partir de la interpretación de la imagen sísmica generada con el algoritmo de Kirchhoff.

Este modelo de velocidades y densidades es la base de los modelos consecutivos en los cuales se aplicará el algoritmo de optimización para reconstruir la imagen e identificar nuevos elementos. Para realizar este proceso se implementan la técnica de inundación de sedimentos y barrido de velocidades para obtener el valor óptimo del parámetro de interés del reflector identificado.

5.1.2 Migración inicial

En la Figura 15 se muestran los kernels de sensibilidad kernel kappa, kernel rho, kernel kappa normalizado y kernel rho normalizado generados con el algoritmo RTM³. Estas imágenes son la aproximación inicial y se utilizan como modelo inicial para la reconstrucción de la imagen sísmica.

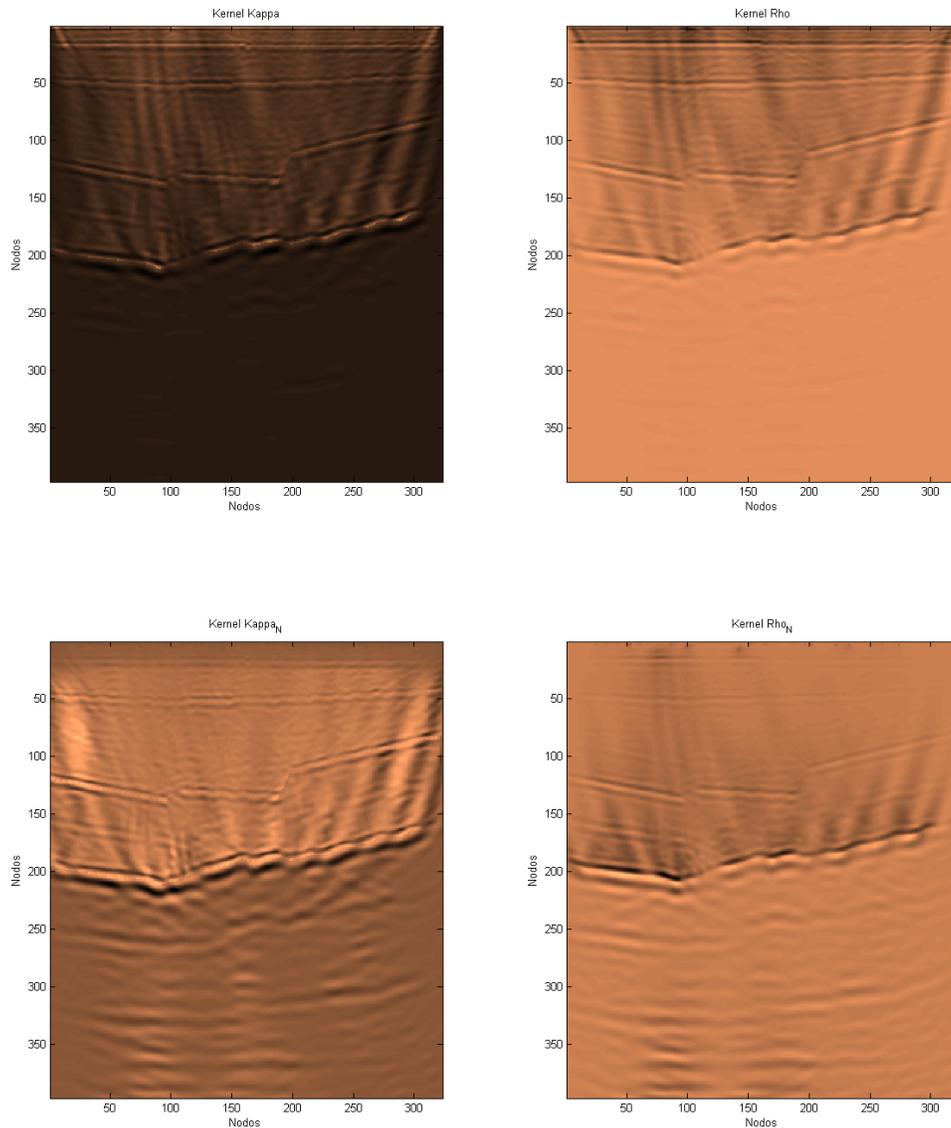


Figura 15 Kernel kappa, rho, kappa normalizado y rho normalizado obtenidos del algoritmo RTM.

³ Para las migraciones posteriores los kernels que se utilizan para realizar los análisis son los kernels kappa y kappa normalizado como se mencionó previamente

5.2 Modelo de velocidad (Reflectores supra-salinos)

El objetivo de visualización del siguiente modelo de velocidad se divide en dos:

- 1) Identificar las estructuras geológicas superiores al cuerpo salino.
- 2) Identificar la cima del cuerpo.

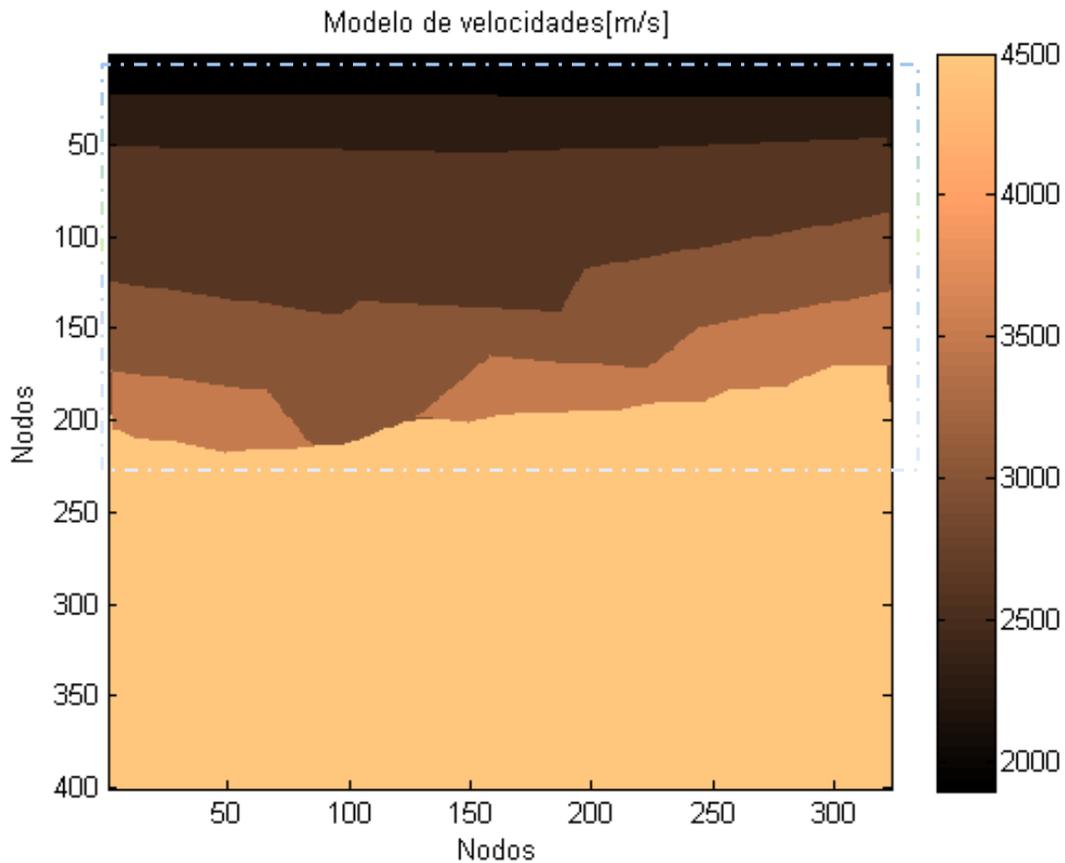


Figura 16 Modelo de velocidades.

Con el modelo correspondiente se pretende visualizar la continuidad de los reflectores superiores al cuerpo salino y delimitar la cima de la sal. Este modelo se migra utilizando el barrido de velocidades para encontrar el valor óptimo de los reflectores identificados, donde se generan modelos paralelos con velocidades sísmicas subestimadas y

sobrestimadas para observar el efecto en la continuidad de los reflectores y optimizar el valor asignado

5.2.1 Migración (Reflectores supra-salinos)

La siguiente imagen (Figura 17), es el kernel kappa normalizado en se indican muestra las estructuras geológicas indicadas en el recuadro, se aprecia que el modelo responde de manera adecuada con los datos. Por lo que la interpretación geológica planteada es adecuada. A partir de esta imagen se delimita y se dibuja la cima del cuerpo salino.

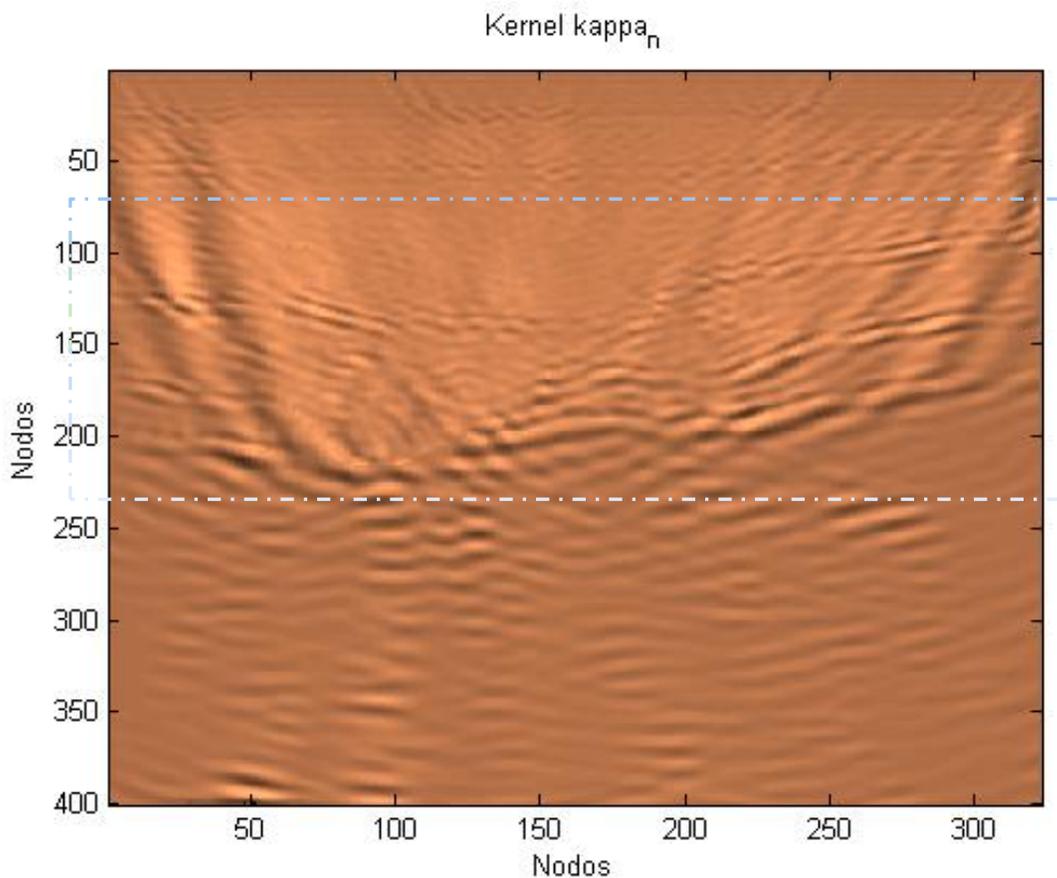


Figura 17 Kernel kappa normalizado (identificación de reflectores supra-salinos).

La cima del cuerpo se aprecia tenuemente, por lo que se pretende generar un contraste de velocidades para poder visualizar el cuerpo. La cima se indica en el modelo de velocidades consecutivo.

5.3 Modelo de velocidades (identificación del cuerpo)

El siguiente modelo de velocidades incorpora el cuerpo de sal indicado en el recuadro; la velocidad sísmica seleccionada es de 4500 [m/s] y una densidad de 2.18 [gr/cm³]. La forma y espesor se infieren a partir de la imagen previa. Con este modelo de velocidades se pretende delimitar el cuerpo y apreciar la presencia de reflectores sub-salinos.

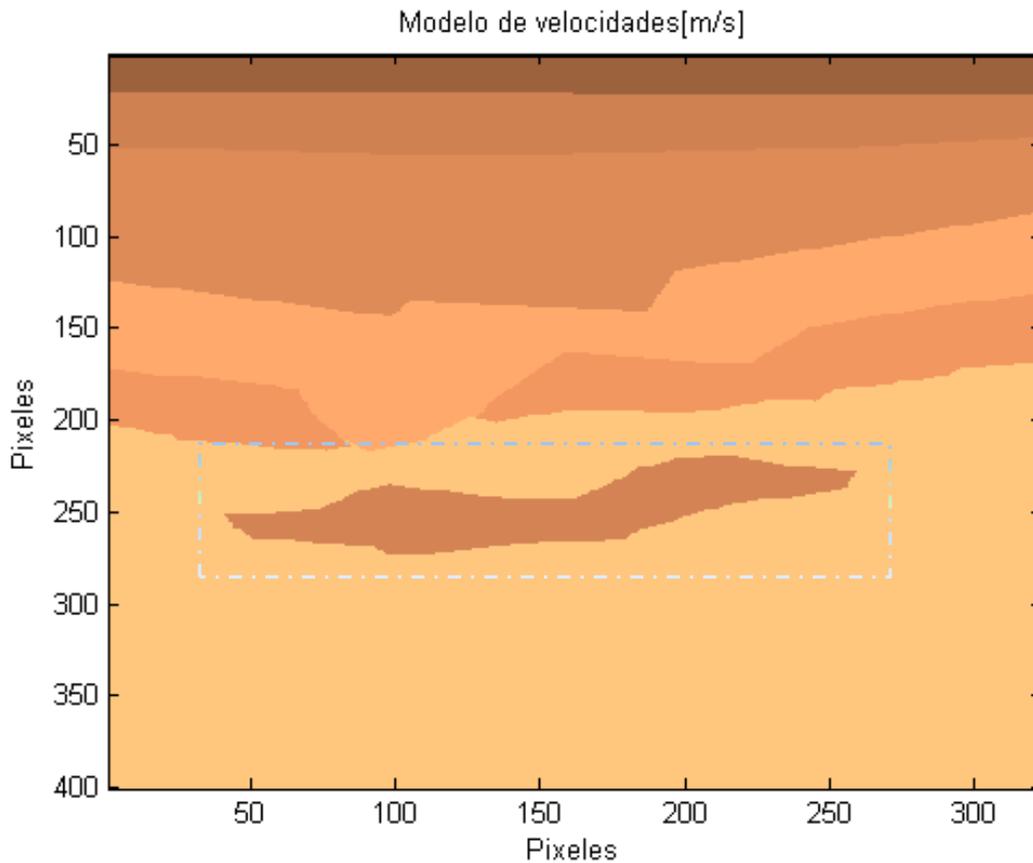


Figura 18 Modelo de velocidades. Adición del cuerpo de sal.

La forma de la sal es lenticular y está indicada a una profundidad de 4500 [m], de acuerdo a los reportes del área de estudio esta profundidad se encuentra dentro del rango de profundidades reportado.

5.3.1 Migración (Identificación del cuerpo)

En la siguiente imagen (Figura 19) se aprecia el contraste del cuerpo salino añadido, indicado en el recuadro, y se perciben la presencia de reflectores por debajo del mismo. Se debe generar un contraste adecuado de velocidades para poder visualizar y definir los reflectores presentes. Estos reflectores se añaden en el modelo de velocidades consecutivo.

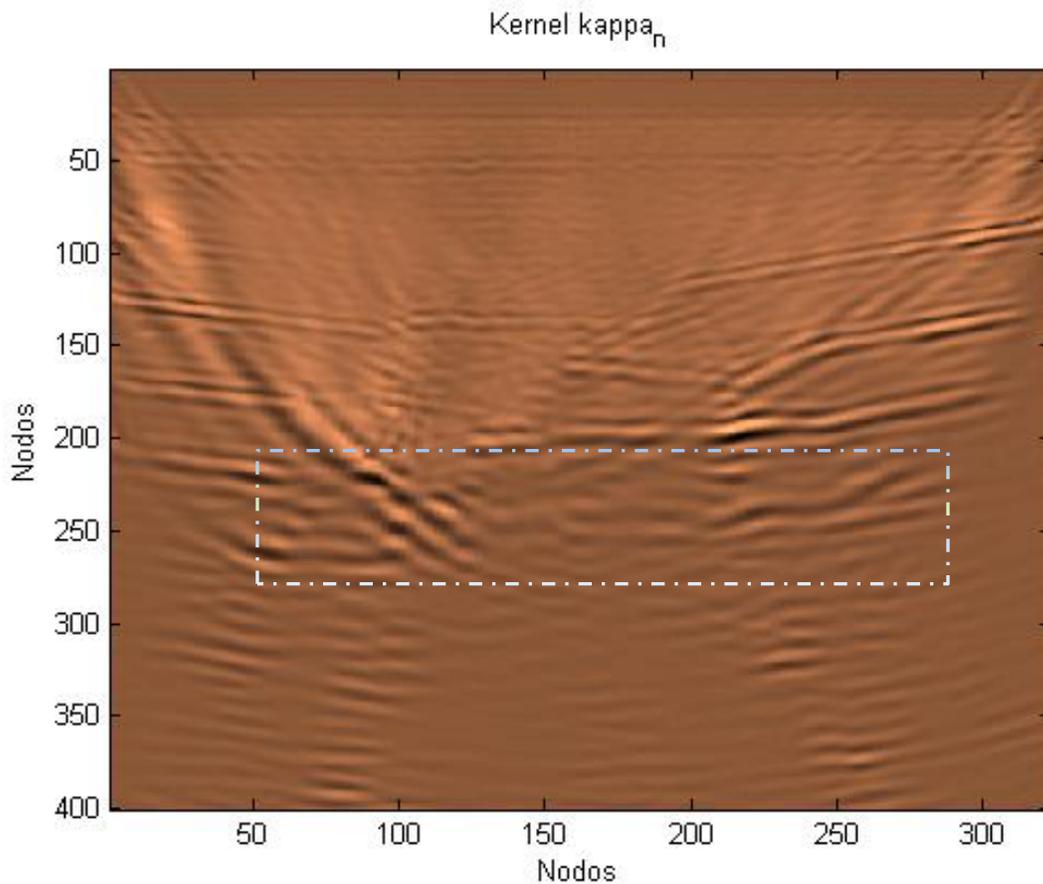


Figura 19 Migración Kernel Kappa normalizado.

5.4 Modelo de velocidades (Reflectores sub-salinos)

El siguiente modelo de velocidades (Figura 20) incorpora los nuevos reflectores sub-salinos identificados previamente, el objetivo de visualización corresponde a la

identificación de reflectores subsalinos. Este modelo es el modelo optimizado utilizado para la construcción de la imagen sísmica.

Se añade un horizonte, indicado en el recuadro, para generar un contraste de velocidades sísmicas para poder visualizar los reflectores presentes. La forma del horizonte y su posición se dibujan a partir de la imagen sísmica previa.

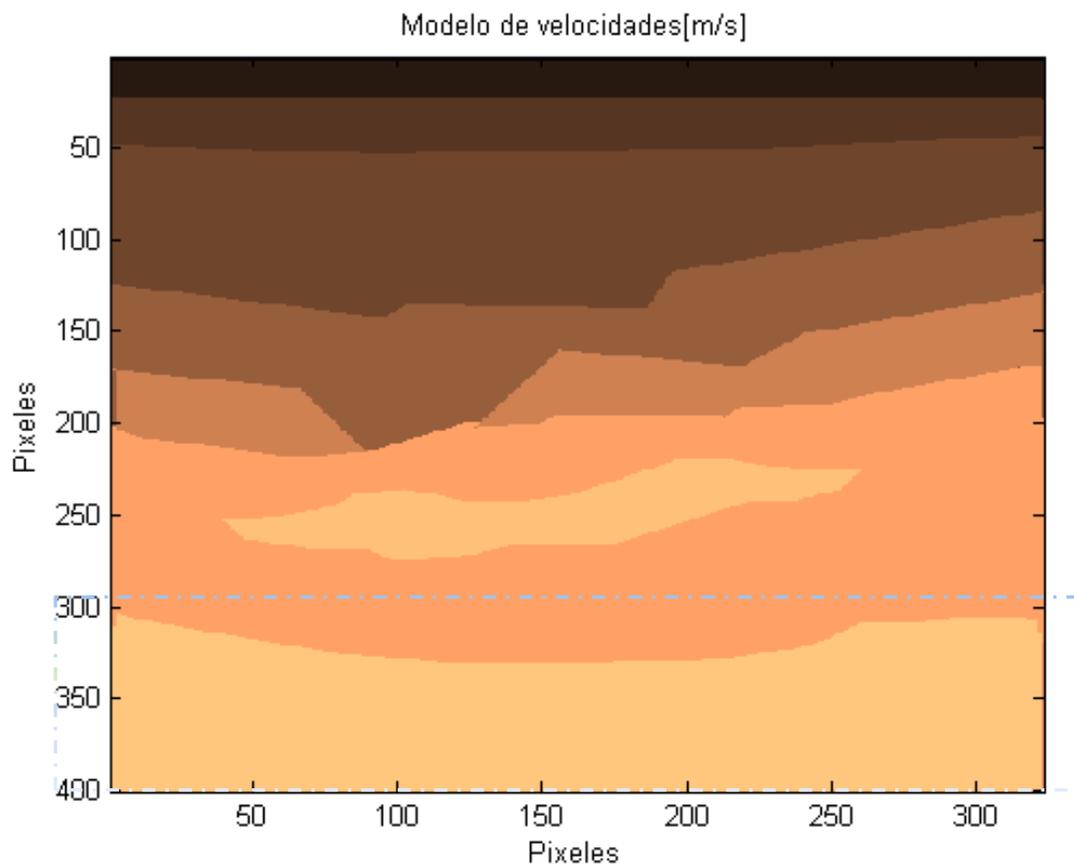


Figura 20 Modelo de velocidades. Se incorpora un horizonte para visualizar los reflectores sub-salinos.

5.4.1 Migración (Reflectores sub-salinos)

En esta imagen (Figura 21) se aprecian los reflectores correspondientes al horizonte añadido en el modelo de velocidad previo. Se muestra que el valor seleccionado de velocidad sísmica contrasta en la imagen sísmica generada.

La continuidad de los reflectores sub-salinos se aprecia significativamente. Por lo que se infiere que la posición y selección de ese horizonte es adecuado. Este horizonte geológico identificado, indicado en el recuadro, corresponde a formaciones geológicas con profundidades de 6 [km].

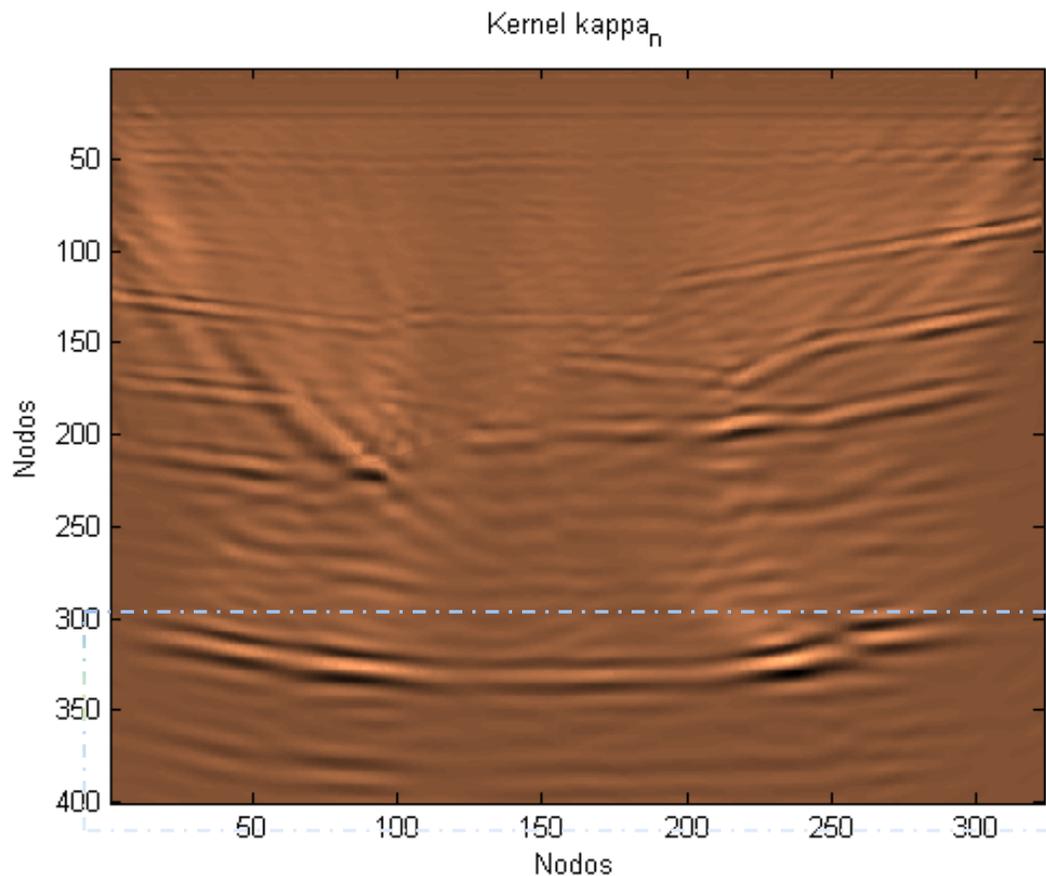


Figura 21 Kernel Kappa normalizado. Se aprecia la definición de reflectores sub-salinos.

5.5 Comparación de las imágenes sísmicas

A continuación se muestra la comparación de las imágenes sísmicas (Figura 22), la imagen de la izquierda corresponde a la imagen inicial Kirchhoff. La imagen de la derecha corresponde a la imagen obtenida con el algoritmo RTM.

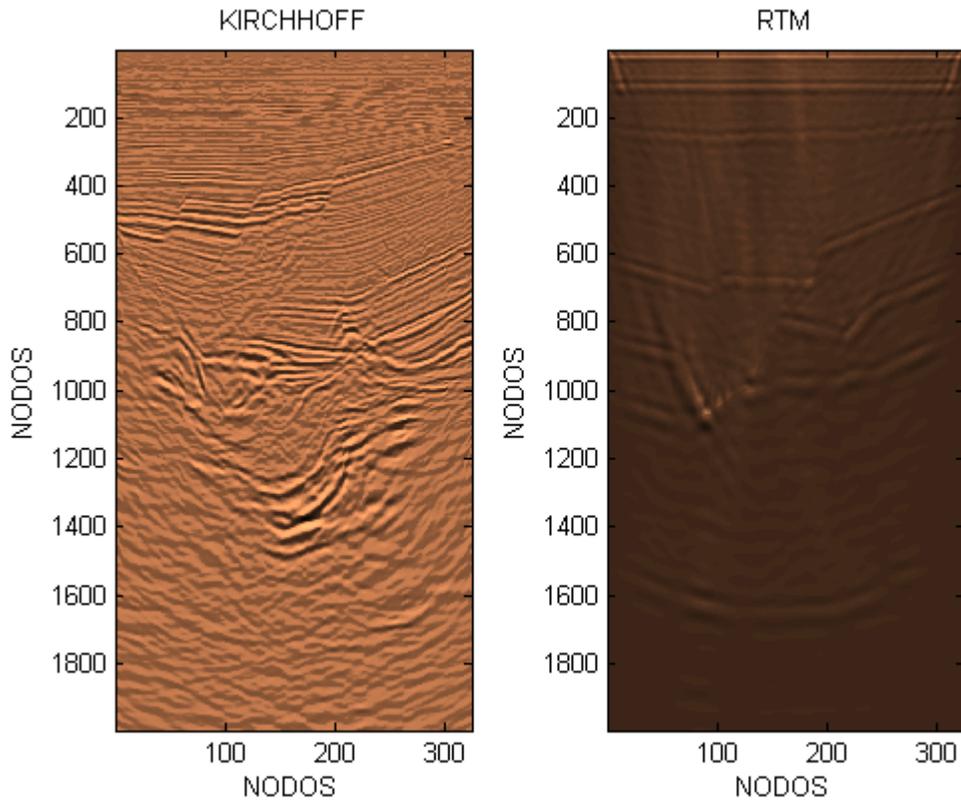


Figura 22 Comparación de imágenes sísmicas KIRCHHOFF/ RTM.

Al realizar un análisis de las imágenes se aprecia que en la imagen construida con el algoritmo RTM se muestran los rasgos principales identificados en la imagen obtenida con Kirchhoff. Comparando horizonte a horizonte para los reflectores superiores el algoritmo RTM identifica plenamente los reflectores presentes, Sin embargo para los reflectores sub-salinos se aprecia que en la imagen de Kirchhoff no se definen plenamente los reflectores presentes, en cambio en la RTM se puede percibir un horizonte que no aparece inicialmente en la imagen de Kirchhoff. Esto muestra que el algoritmo RTM complementa la información. Y ambas tienen aplicaciones diferentes para visualizar objetivos.

En la siguiente figura (Figura 23) se muestra la comparación de las imágenes sísmicas y el modelo de velocidades construido utilizando el algoritmo de optimización.

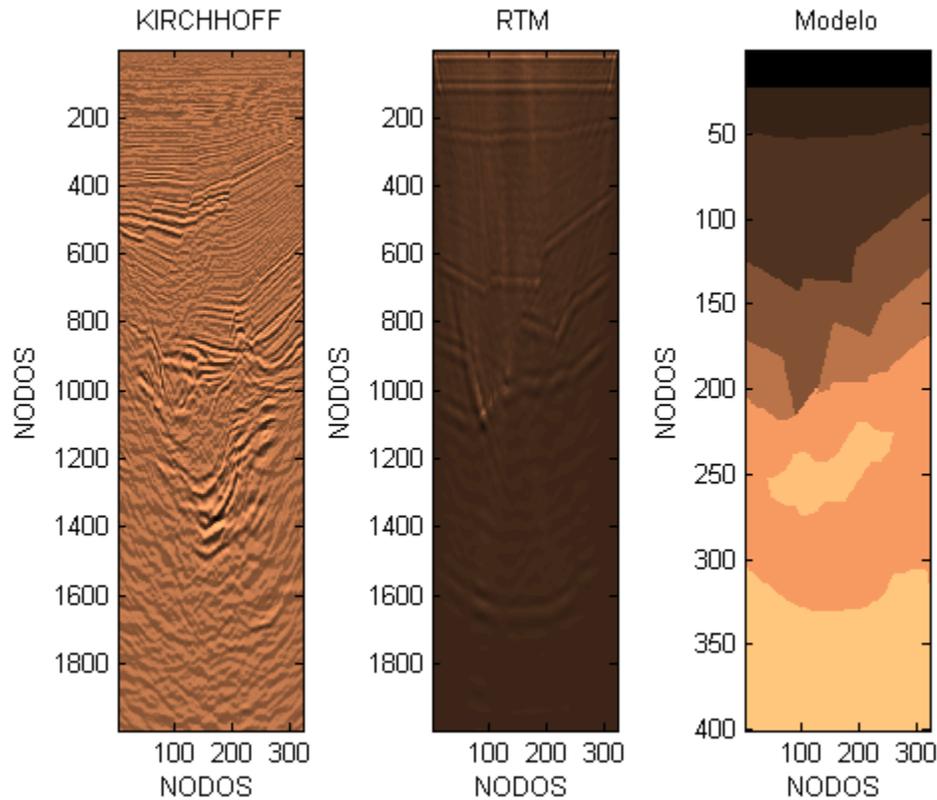


Figura 23 Comparación de las imágenes sísmicas y el modelo de velocidades construido.

5.6 Optimización de la Imagen

Al analizar la información que proporciona cada algoritmo de migración, se propone combinar ambas características para obtener una imagen mejorada. Este proceso se realizó a través de un análisis espectral de ambas imágenes, para observar el contenido de frecuencias y su contribución específica en la imagen sísmica.

Se aplicó una transformada de Fourier bidimensional para poder obtener el espectro de amplitudes de ambas imágenes.

Analizando la forma y el contenido de frecuencias de cada espectro se consideró que al sumar las frecuencias dominantes de cada imagen se podría obtener una combinación de características. A continuación se muestra el espectro de amplitudes y el contenido de frecuencias de la imagen obtenida con el algoritmo de Kirchhoff (Figura 24).

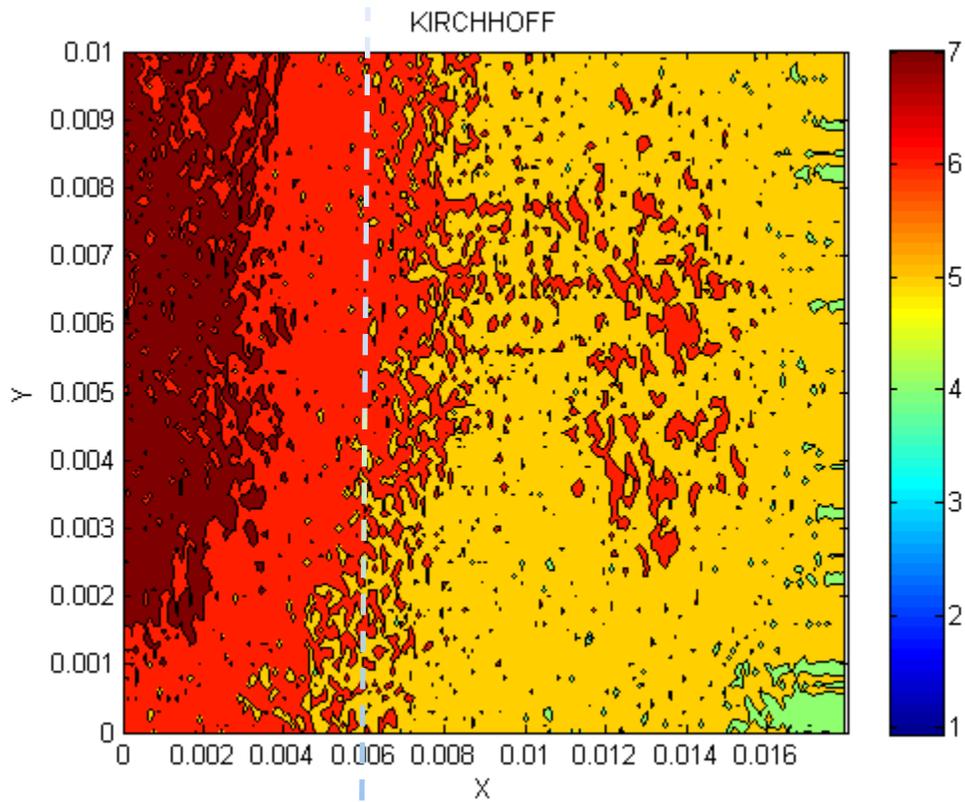


Figura 24 Espectro de Amplitudes Kirchhoff.

De la figura anterior se observa que el contenido de altas frecuencias se encuentra cuando $X < 0.01$. Este contenido de frecuencias es el que se considera importante y se pretende combinar con el de la RTM. A continuación se muestra el espectro de amplitudes y el contenido de frecuencias de la RTM (Figura 24).

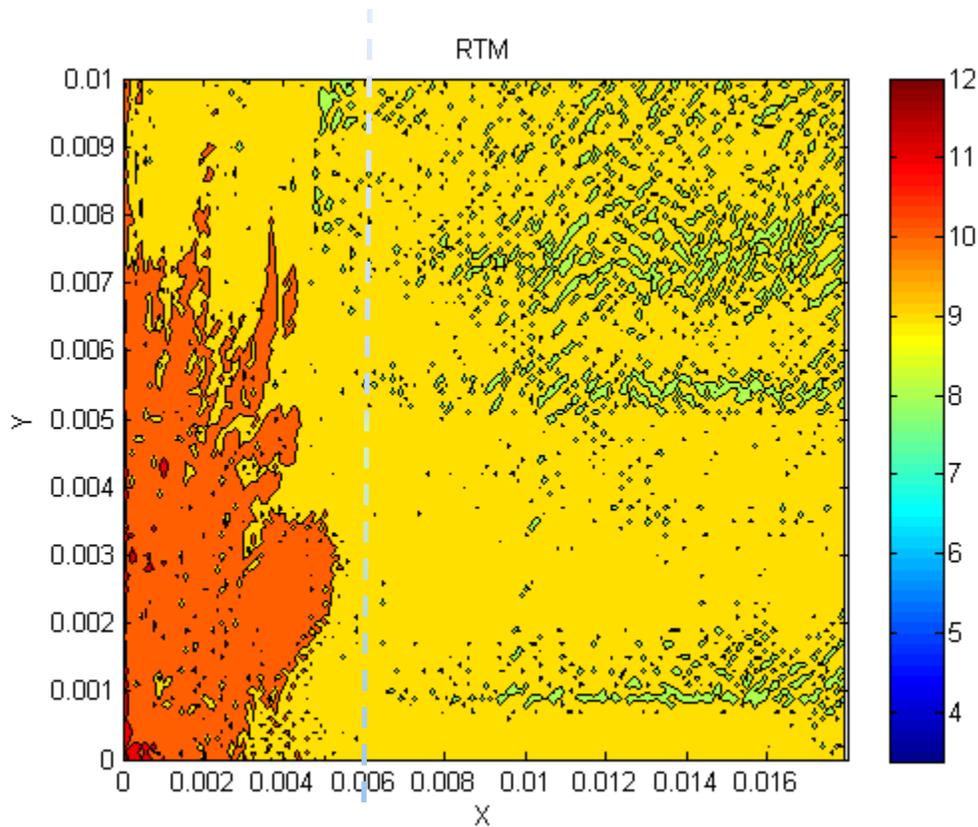


Figura 25 Espectro de amplitudes de la RTM.

Analizando la forma y el contenido de frecuencias de la RTM se observa que el rango de interés se encuentra dentro de $X < 0.006$. Este contenido de frecuencias es el que resulta de interés y se pretende combinar con el de Kirchhoff.

La combinación del contenido de frecuencias se hace a partir de ecualizar las imágenes haciendo que la contribución de cada una sea cuantificable.

La magnitud del contenido de frecuencias de la imagen sísmica obtenida con el algoritmo RTM es más dominante por lo que se escala a la dimensión de la imagen resultante del algoritmo de Kirchhoff para poder realizar una suma ponderada. A continuación se muestra la comparación de ambos espectros (Figura 26).

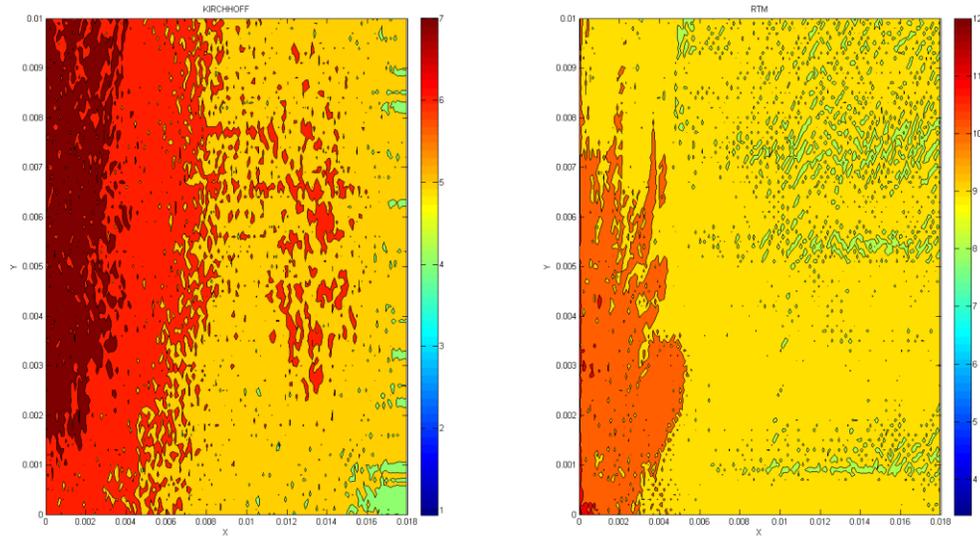


Figura 26 Comparación del contenido de frecuencias, la imagen de la izquierda Kirchhoff, la imagen de la derecha RTM.

Para obtener el espectro combinado se sumaron los contenidos de frecuencias de ambas imágenes resaltando la información proveniente de la RTM. Para realizar esta acción se propone utilizar una superficie que encierre el contenido deseado e ir haciendo pruebas para analizar el efecto del contenido seleccionado, es decir variar el contenido que encierra la superficie e ir analizando el efecto que resulta de realizar este procedimiento. La superficie seleccionada para realizar el procedimiento es una elipse, cuyo eje menor corresponde a las frecuencias en el dominio X y el eje mayor corresponde a las frecuencias en el dominio Y .

A continuación se muestra una prueba del procedimiento descrito anteriormente, la elipse seleccionada encierra las frecuencias, frecuencias en x cuando $X < 0.006$ y frecuencias en y cuando $Y = 0.01$. El contenido de frecuencias dentro de la elipse se suma y el contenido de frecuencias fuera de la superficie se mantiene de acuerdo a las características de la imagen que se quiera resaltar.

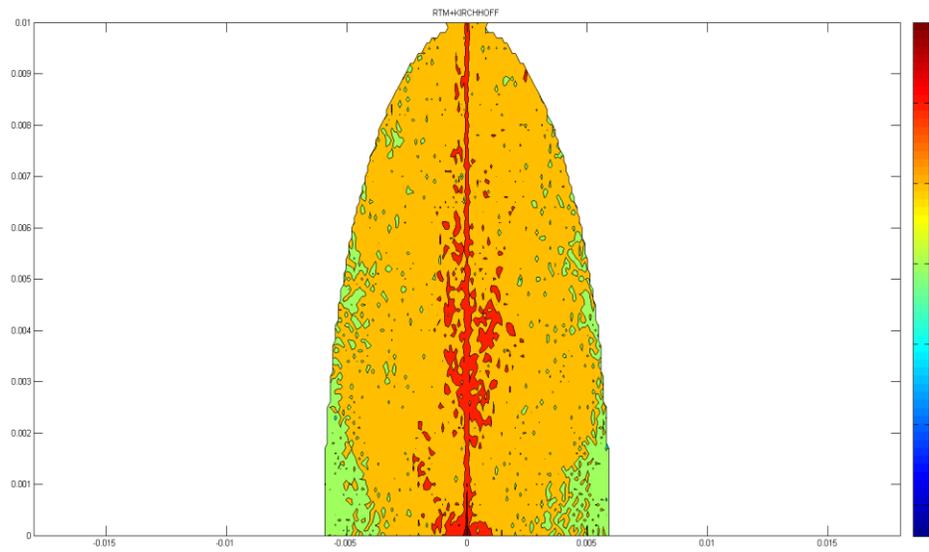


Figura 27 Suma de contenido de frecuencias utilizando una elipse.

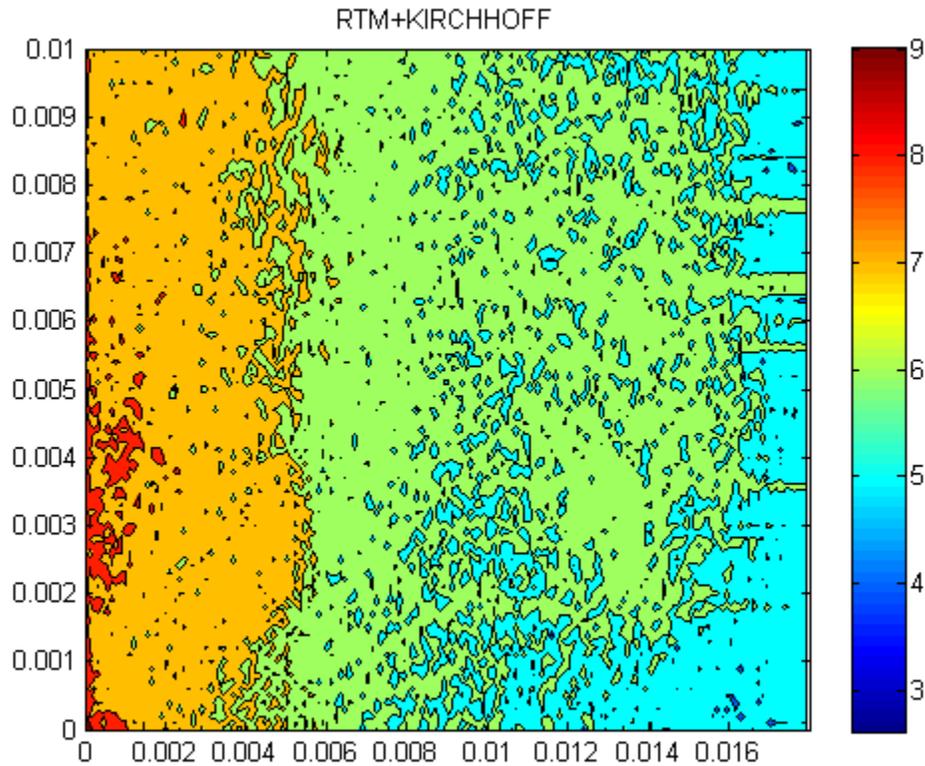


Figura 28 Espectro combinado utilizando la elipse.

Para realizar el análisis se anti-transforma el nuevo espectro de frecuencias generado y se analiza la contribución específica en la imagen. como se muestra en la Figura 29.

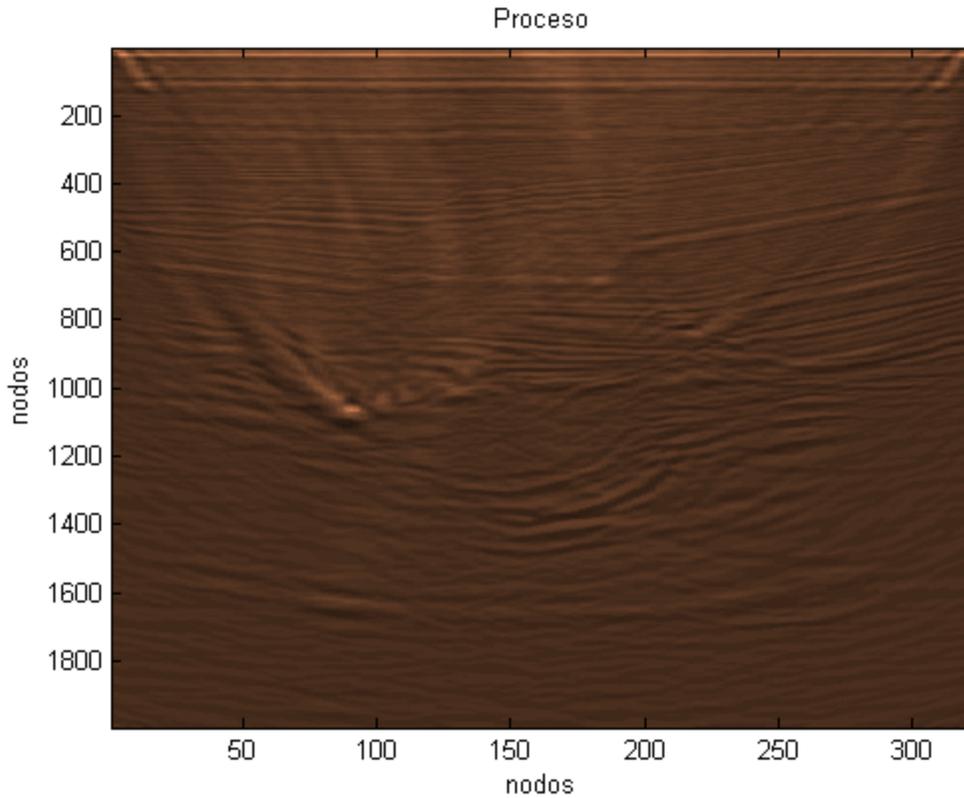


Figura 29 Imagen que resulta de aplicar la anti-transformada del espectro de frecuencias.

En la figura anterior se visualiza tenuemente el reflector sub-salino identificado con el algoritmo RTM y se mantiene la información que proporciona el algoritmo de Kirchhoff. Este procedimiento muestra que se pueden combinar ambas fuentes de información utilizando las ventajas y limitaciones de cada algoritmo para generar una imagen que contiene mayor información del área de estudio. En la siguiente figura se muestra el resultado final que resulta de la combinación del contenido de frecuencias (Figura 30).

5.7 Imagen Optimizada

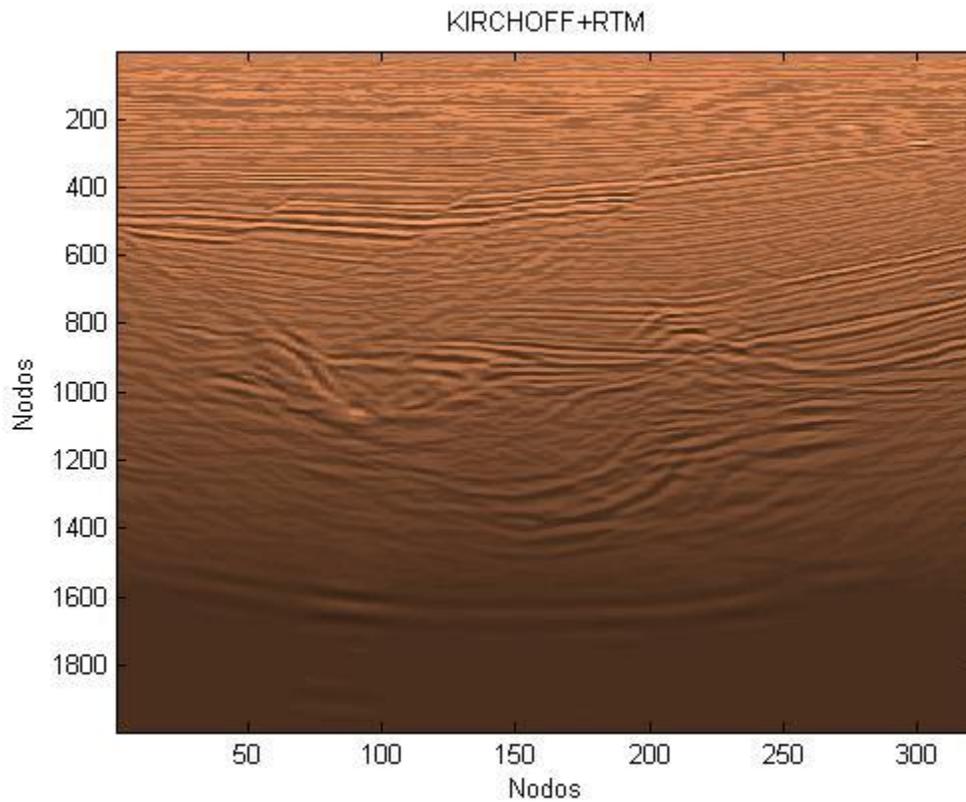


Figura 30 Imagen Optimizada

Finalmente se muestra la comparación de la imagen sísmica inicial Kirchhoff y la imagen optimizada (Figura 31).

En ella se aprecia la contribución y la adición del reflector sub-salino que se visualizaba en la imagen obtenida con el algoritmo RTM.

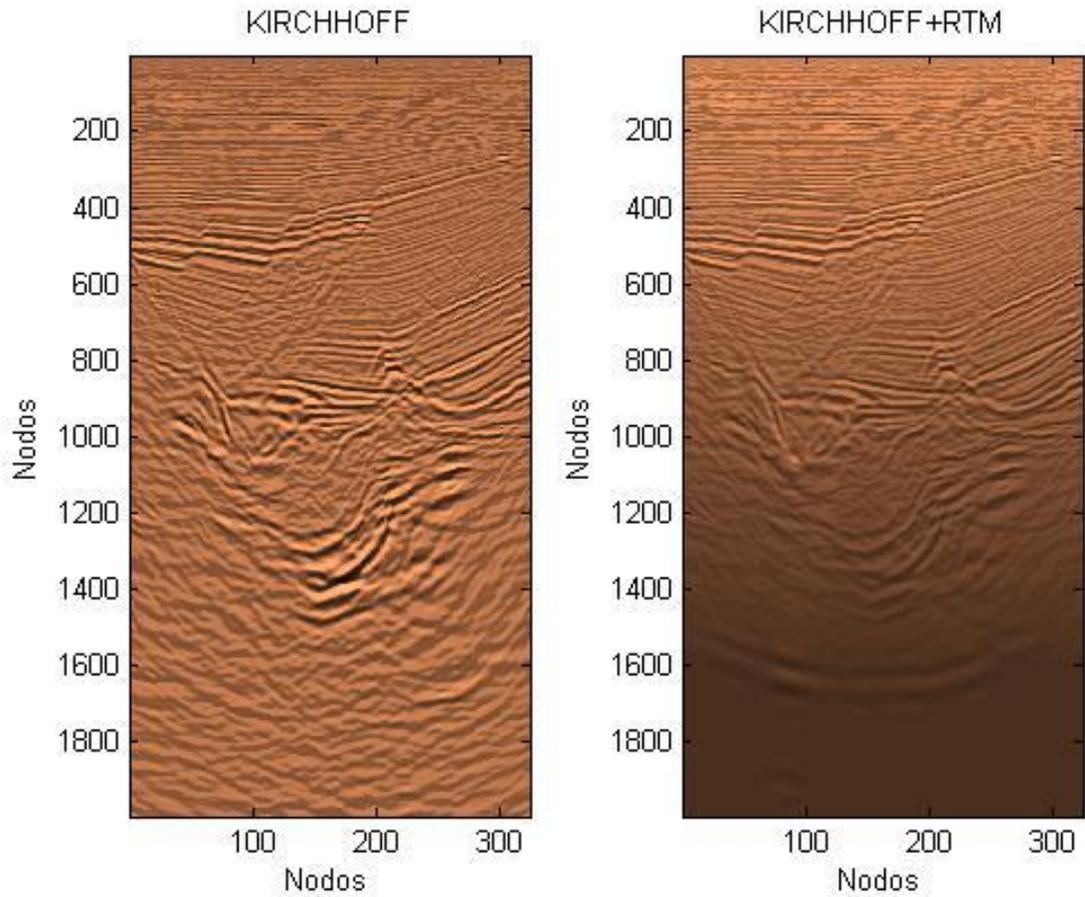


Figura 31 Imagen Inicial vs imagen optimizada.

En la figura de la izquierda se muestra la imagen inicial obtenida con el algoritmo de Kirchhoff y en la figura de la derecha se muestra la imagen optimizada, a partir de la combinación de frecuencias de la imagen generada con el algoritmo RTM y la de Kirchhoff.

6 Conclusiones

En esta tesis se demuestra la aplicabilidad de un algoritmo RTM adjunto como una herramienta poderosa para la optimización del modelo de velocidades que se emplea en la migración PSDM.

Los mapas de sensibilidad obtenidos mediante la RTM proveen información geológica que conduce a la mejora progresiva del modelo de velocidades inicial utilizado para un caso de estudio con datos sísmicos reales.

El algoritmo desarrollado presenta grandes ventajas en la construcción y diseño de los modelos de velocidades, ya que es posible relacionar las propiedades físicas de los objetivos geológicos identificados durante la interpretación, con los cambios apreciables en las imágenes sísmicas del subsuelo.

El proceso de construcción del modelo de velocidades tiende a ser ágil y eficaz, lo cual redundará en grandes beneficios pues en la industria se pretende construir un modelo de velocidades robusto y optimizado en el menor número de iteraciones posible.

Los efectos en la asignación equivocada de las velocidades se reflejan de manera directa en la imagen obtenida, ya que si se realiza una sobrestimación o subestimación de dicha propiedad, los efectos de las difracciones de la energía sísmica se aprecian claramente en la imagen.

Cuando se excede el rango de velocidades sísmicas físicamente posible se destruyen los reflectores identificados o se modifican las estructuras superiores delimitadas en alguna iteración previa. Por lo que el procedimiento de construcción del modelo de velocidades consiste en aplanar los reflectores y colapsar las difracciones directamente en los mapas

de sensibilidad, en busca de la velocidad sísmica óptima que permite que no se modifiquen los reflectores superiores previamente aplanados. El algoritmo de migración RTM utilizado resulta ser una herramienta muy útil pues admite gradientes significativos en el contraste de propiedades físicas, así como inversiones en las velocidades sísmicas como función de la profundidad.

Muchos algoritmos de migración tienen limitaciones en el diseño del modelo de velocidades cuando se presentan estos últimos factores, mientras que este algoritmo permite lidiar con estas dificultades técnicas sin mayores limitaciones.

La interfaz utilizada permite editar de manera paralela los modelos de velocidades intermedios necesarios para la optimización de la velocidad sísmica objetivo, esto es muy útil puesto que se puede redibujar toda la estructura o solo hacer ediciones en la velocidad sísmica inferida, lo cual agiliza el diseño del modelo significativamente.

La evolución de los algoritmos así como el crecimiento exponencial en los recursos computacionales agilizan los tiempos de procesamiento necesarios para realizar este procedimiento lo cual genera gran expectativa y áreas de oportunidad.

La imagen sísmica optimizada presenta mejoras significativas en la resolución de las estructuras presentes y se adapta de manera adecuada al modelo de velocidades propuesto.

La calidad de la imagen está ligada a diversos factores que no solo intervienen con la definición del modelo de velocidades, ya que la calidad de los datos es fundamental, por lo que aún hay limitaciones por resolver.

La combinación de Kirchhoff con RTM permite obtener una imagen con mayor información, el procedimiento utilizado permite realizar esta tarea al realizar un análisis espectral del contenido de frecuencias de cada una de ellas.

Este algoritmo podría aplicarse a un nuevo caso de estudio para verificar la eficacia del algoritmo desarrollado.

Dada la actualidad en la industria de explotación petrolera los objetivos salinos y sub-salinos son un área de oportunidad y generan gran expectativa por lo que el desarrollo de este algoritmo pretende ser una herramienta más para facilitar la exploración y explotación futura de esos recursos.

Referencias

Aki K, Richards P G Quantitative Seismology Segunda edición 2002, University Science Books, P. 700.

Biondo L. Biondi, 2004, 3-D Seismic Imaging, Stanford University.

Claerbout, J. F., 1985, Imaging the Earth's interior., Blackwell Scientific Publications, Inc.

Claerbout, J.C., 2004, EARTH SOUNDINGS ANALYSIS: Processing versus Inversion, SEP, P. 1-34.

Baysal, E., Kosloff, D. D., and Sherwood, J. W. C., 1983, Reverse time migration: Geophysics, 48, 1514-1524.

Dan Natalia, 2014, Aplicación de la migración reversa en tiempo para la exploración de plays sub-salinos, Universidad Nacional Autónoma de México.

García Reyes, 2013, Inversión de forma de onda completa, Universidad Nacional Autónoma de México.

Gray H Samuel, Etgen J, Dellinger J, Whitmore D, 2001, Seismic migration problems and solutions, Geophysics, P. 1622-1640.

Gong, X. B., Han, L. G., Niu, J. J., Zhang, X. P., Wang, D. L., & Du, L. Z., 2010, Combined migration velocity model-building and its application in tunnel seismic prediction. Applied Geophysics, 7(3), P. 265-271.

Issam Said, 2015, Contributions of hybrid architectures to depth imaging: a CPU, APU and GPU comparative study, Computer Science [cs], UPMC.

Kamal Al-Yahya, 1989, Velocity analysis by iterative profile migration, GEOPHYSICS, VOL. 54, NO.6; P. 718-729.

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería

Komatish D. Martin R., 2007, An unsplit convolutional perfectly matched layer in grazing incidence for the seismic wave equation, *Geophysics*, Vol. 70, No.5, P. SSM167.

Liu, Z., & Bleistein, N., 1995, Migration velocity analysis: Theory and an iterative algorithm. *Geophysics*, 60(1), P. 142-153.

Ortigosa F, Repsol, Qingbo Liao, Guitton Antoine, 2008, Speeding up RTM Velocity Model Building beyond algorithmics, 3DGeo Inc., and Wenying Cai, Repsol, SEG.

Sheriff, R.E., 1991, Encyclopedic Dictionary of Exploration Geophysics, Third Edition: Society of Exploration Geophysicists.

Sheriff R. E Geldart L.P Exploration Seismology, Segunda edición, Editorial Cambridge University Press, 1995.

Stein, S Wyession, M An introduction to seismology, earthquakes and Earth structure, Editorial Blackwell Publishing, 2003.

Tarantola, A, 1984,. Inversion of seismic reflection data in acoustic approximation, Vol.49, No. 8.

Tromp J, Tape, C Lin Q, 2005 Seismic tomography, adjoint methods, time reversal, doughnut kernels, *Geophysics J Vol* 160.

Virieux, J, 1986, P-SV propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference *Geophysics*, Vol.51.

Yilmaz, O., 2001 Seismic-Data Analysis: Processing Inversion and Interpretation of Seismic Data, Segunda Edición, Tulsa, SEG, P 463-476.

Apéndice A: Esfuerzo, deformación y ecuaciones.

1. Teoría de la elasticidad

Cuando un cuerpo es sometido a fuerzas externas, fuerzas que actúan sobre la superficie, el cuerpo tiende a sufrir cambios en su forma y volumen original deformación, si el cuerpo tiene la capacidad de regresar a su estado original se dice que el cuerpo es elástico. La elasticidad es la capacidad de un cuerpo de resistir cambios en su forma y volumen, regresando a su estado original al retirar las fuerzas externas a la que fue sometido. Para establecer la teoría de la elasticidad es importante definir dos conceptos básicos: esfuerzo y deformación.

2. Esfuerzo

Es la magnitud de la fuerza aplicada sobre un área determinada y la magnitud del área sobre la que es aplicada.

$$\text{Esfuerzo} = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Area}}; \quad (1)$$

El esfuerzo actuando sobre una superficie está compuesto por dos componentes: normal y de corte que representan las fuerzas presentes en la superficie. La componente normal es perpendicular a la superficie y componente de corte se encuentra en el plano de la superficie.

2.1 Estado de esfuerzo y el tensor de esfuerzos

Para definir espacialmente al tensor de esfuerzo se eligen los tres planos perpendiculares a cada uno de los tres ejes cartesianos de coordenadas, y se escogen en cada plano tres componentes del vector esfuerzo que actúa sobre él: la componente normal y dos

componentes de corte que actúan según las direcciones paralelas a los ejes de coordenadas paralelas al plano.

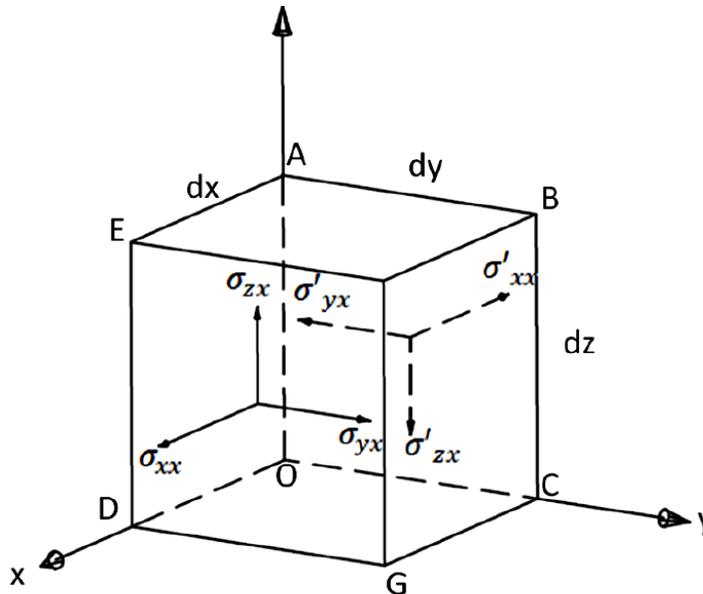


Figura1 Esquema que representa el estado de esfuerzos en un sólido con densidad constante ρ , el cuerpo se encuentra en equilibrio (Sheriff y Geldart, 1995).

2.1.2 Tensor de esfuerzos (σ_{ij})

El tensor de esfuerzos puede ser definido a través de sus componentes como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}; \quad (2)$$

Sin embargo debido a que el cuerpo se encuentra en equilibrio y tiene la propiedad de simetría se tiene: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Por lo tanto:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}; \sigma_{zx} = \sigma_{xz}; \sigma_{yz} = \sigma_{zy}; \quad (3)$$

De tal manera que el tensor de esfuerzos se representa a través de la siguiente ecuación:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}; \quad (4)$$

utilizando la ecuación anterior y realizando un análisis de fuerzas para cada dirección se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}; \quad (7)$$

3. Deformación

Es el cambio temporal que sufre un cuerpo sometido a un esfuerzo, siempre y cuando se encuentre dentro del límite elástico. Al igual que el esfuerzo está compuesto por dos componentes; deformaciones normales y deformaciones cortantes.

3.1 Tensor de deformación (ϵ_{ij})

El tensor de esfuerzos puede ser definido a través de sus componentes:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}; \quad (8)$$

análogamente el tensor de deformación ε_{ij} se encuentra en equilibrio y presenta la propiedad de simetría por lo que: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

De tal manera que:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}; \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}; \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}; \quad (9)$$

utilizando la ecuación anterior y realizando un análisis de fuerzas para cada dirección se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad (10)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad (11)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (12)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_y}{\delta x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right); \quad (13)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_z}{\delta y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right); \quad (14)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_x}{\delta z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \quad (15)$$

sustituyendo todas las expresiones en la ecuación (8) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta u_x}{\delta x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_x}{\delta y} + \frac{\delta u_y}{\delta x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_x}{\delta z} + \frac{\delta u_z}{\delta x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_y}{\delta x} + \frac{\delta u_x}{\delta y} \right) & \frac{\delta u_y}{\delta y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_y}{\delta z} + \frac{\delta u_z}{\delta y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_z}{\delta x} + \frac{\delta u_x}{\delta z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_z}{\delta y} + \frac{\delta u_y}{\delta z} \right) & \frac{\delta u_z}{\delta z} \end{pmatrix}; \quad (16)$$

4. Ley de Hooke generalizada (Esfuerzo y Deformación)

La ley de Hooke generalizada relaciona los conceptos esfuerzo y deformación y está representada a partir de la siguiente ecuación:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}; \quad (17)$$

donde E_{ijkl} representa al módulo de elasticidad, ε_{kl} representa el tensor de deformación y σ_{ij} representa el tensor de esfuerzos.

Cuando un cuerpo es sometido a varios esfuerzos, cada uno de estos produce una deformación independiente. De manera que la deformación total que sufre un cuerpo se calcula al sumar cada uno de los esfuerzos a los que el cuerpo se ve sometido

Modulo elástico(E_{ijkl}): El modulo elástico es una constante elástica que mide la relación de esfuerzos con las deformaciones.

Existen 81 constantes elásticas diferentes que representan diferentes propiedades. Las constantes elásticas más utilizadas son: λ y μ llamadas contantes de Lamé.

Constantes de Lamé

Las constantes de Lamé permiten caracterizar el comportamiento de un sólido que sufre pequeñas deformaciones, a través de 2 constantes (λ , μ). Donde μ : módulo de rigidez (oposición de los cuerpos en el cambio de la forma) y λ : primer constante elástica (no tiene un significado físico). Estas constantes se derivan de hacer múltiples consideraciones (simetría, energía y deformación e isotropía) en la simplificación de la ley de Hooke, existen 81 constantes elasticidad diferentes.

Aunque existen otras constantes elásticas, se pueden definir a partir de (λ , μ). De tal manera que la ley de Hooke puede expresarse de la siguiente manera incluyendo las constantes de Lamé:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{pmatrix}; \quad (18)$$

De tal manera que desarrollando las ecuaciones quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\sigma_{ii} = \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{ii}; \quad i = x, y, z \quad (19)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}; \quad i, j = x, y, z; \quad i \neq j; \quad (20)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -P; \quad (21)$$

donde se observa que los siguientes esfuerzos σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{xz} se reducen a 0 es decir:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0; \quad (22)$$

Los elementos λ y μ permiten definir cualquier constante elástica de Lamé. Las relaciones que existen entre las constantes λ y μ se describen en las siguientes ecuaciones:

$$\lambda = k - \frac{2\mu}{3}; \quad (23)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}; \quad (24)$$

Los parámetros λ y μ se utilizan para definir la velocidad de las ondas P y S en términos de las propiedades elásticas.