



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**



FACULTAD DE INGENIERÍA

**“OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL EVOLUTIVA:
DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN DE
CÓMPUTO PARA EL DISEÑO ÓPTIMO DE
ELEMENTOS BAJO DEFORMACIÓN PLANA”**

TESIS

Para obtener el título de:

Ingeniero Mecánico

Presenta:

Mario Delfino Mestas Santiago

Director de Tesis:

Dr. Fernando Velázquez Villegas

Ciudad Universitaria

Noviembre 2010



AGRADECIMIENTOS

Aprovecho este pequeño espacio para decir GRACIAS a todas aquellas personas que confiaron en mí, además de apoyarme, sin condiciones.

La gratitud que siento va dirigida:

A mis padres Delfino y Zita, quienes fueron uno de los principales motivos por el cual he salido adelante.

A mis hermanos Marco Antonio y Fernando, de quienes he aprendido valiosas lecciones.

A Liz Yamilé quien ha sido un gran apoyo a lo largo de este tiempo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por el apoyo proporcionado para la realización de este trabajo de tesis a través del proyecto IN108909 “Herramientas Computacionales para el Diseño Óptimo en Proyectos de Ingeniería e Innovación Tecnológica” del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la Dirección General de Asuntos de Personal Académico (DGAPA).

Al CDMIT perteneciente a la Facultad de Ingeniería por prestarme sus instalaciones.

Al Grupo de Diseño Mecánico Óptimo (GDMO) quienes hicieron ameno este tiempo, además de brindarme su amistad y apoyo.

Un especial agradecimiento al Dr. Fernando Velázquez Villegas y al M.I, Antonio Zepeda Sánchez por ofrecerme su amistad, su apoyo, además de sus inestimables consejos tanto a nivel escolar como personal, sin los cuales la realización de esta tesis no habría sido posible.



ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS	ii
ÍNDICE	iii
INTRODUCCIÓN	vi
1.1 JUSTIFICACION DE LA PROPUESTA.....	vii
1.2 OBJETIVOS DE LA TESIS.....	vii
1.3 OBJETIVO PERSONAL.....	viii
1.4 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS.....	viii
CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES	1
1.1 INTRODUCCION.....	1
1.2 PROCESO DE DISEÑO ÓPTIMO.....	2
1.3 OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL.....	4
1.4 FORMULACIÓN DEL DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS.....	4
1.4.1 Variables de diseño.....	4
1.4.2 Función objetivo.....	5
1.4.3 Restricciones.....	5
1.5 TIPOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL.....	6
1.5.1 Optimización de propiedades de la sección transversal.....	6
1.5.2 Optimización de geometría.....	7
1.5.3 Optimización por topología.....	7
1.6 MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL.....	7
1.6.1 Optimización sin un modelo de material.....	9
1.6.1.a Optimización Estructural Evolutiva (ESO).....	9
1.6.1.b Optimización Estructural Evolutiva Aditiva (AESO).....	10
1.6.1.c Optimización Estructural Evolucionaria Bidireccional (BESO).....	10
1.6.2 Métodos basados en el crecimiento biológico.....	10



1.7 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.....	11
1.7.1 Metodología general para el análisis por elementos finitos.....	12
1.7.1.a Discretización del dominio a través de elementos finitos.....	12
1.7.1.b Desarrollo de las ecuaciones de los elementos.....	14
1.7.1.c Ensamble de las ecuaciones de los elementos.....	15
1.7.1.d Aplicación de las condiciones de frontera naturales y esenciales.....	16
1.7.1.e Solución nodal de las variables.....	17
1.7.1.f Postproceso o relación de las cantidades para cada elemento.....	17
1.8 DESCRIPCIÓN DEL ESTADO DE DEFORMACIONES PLANAS.....	17
CAPÍTULO 2 DESARROLLO DEL ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN.....	21
2.1 INTRODUCCIÓN.....	21
...	
2.2 GENERADORES DE MALLAS.....	23
2.2.1 Tipos de Mallas.....	23
2.3 CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES PARA EL ANÁLISIS POR ELEMENTO FINITO PARA DEFORMACION PLANA.....	24
2.3.1 Matriz de elasticidad para deformación plana.....	24
2.3.2 Ecuaciones de elemento finito para deformación plana.....	26
2.3.2.a Elemento finito general para un plano.....	26
2.3.2.b Elemento finito para en elemento triangular en dos dimensiones.....	27
2.4 ALGORITMO DE REGLAS EVOLUTIVAS.....	28
2.4.1 Optimización Estructural Evolutiva (ESO).....	29
2.4.2 Optimización Estructural Evolutiva Aditiva (AESO).....	32
2.4.3 Optimización Estructural Evolutiva Bidireccional (BESO).....	34



CAPÍTULO 3 IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO	38
3.1 INTRODUCCIÓN.....	38
3.2 MÓDULO DE MALLADO.....	39
3.3 MÓDULO DE FEM.....	42
3.3.1 Discretización del dominio de solución en una malla elementos finitos.....	42
3.3.2 Desarrollo de las ecuaciones de los elementos finitos para un elemento triangular.....	42
3.3.3 Introducción de las condiciones de frontera.....	47
3.3.4 Ensamble de la matriz de rigidez.....	48
3.3.5 Solución del sistema.....	48
3.3.6 Postproceso.....	49
3.4 MÓDULO DE OPTIMIZACIÓN.....	51
 CAPÍTULO 4 APLICACIONES Y RESULTADOS	 55
4.1 INTRODUCCIÓN.....	55
4.2 CASO DE ESTUDIO 1.....	56
4.3 CASO DE ESTUDIO 2.....	61
4.4 CASO DE ESTUDIO 3.....	66
 CONCLUSIONES	 72
TRABAJOS A FUTURO	73
REFERENCIAS	74



INTRODUCCIÓN

Durante el transcurso del tiempo, el humano ha tenido un deseo de optimizar su entorno, es por ello que los diseños han ido mejorando a través del tiempo; sin embargo, muchos de los procesos de diseño realizados en el pasado se basaron en la experiencia e intuición del diseñador, en lugar de una aplicación intensiva de los procesos de optimización [22].

Esta forma de pensar ha cambiado debido a la importancia que ha tomado el campo de la optimización, aplicado al diseño estructural por medio de los análisis computacionales, ya que mediante dichos análisis, se logra reducir costos, peso y tiempo en los procesos de diseño realizados por los ingenieros.

“Everything that did not happen by accident or coincidence happened by design” [34]

En Ingeniería se busca obtener diseños novedosos, eficientes y cuyo costo sea mínimo, es por ello que el proceso de optimización empieza a ser un factor importante en los procesos de diseño.

Dentro de los importantes grupos de investigación de la facultad de ingeniería de la UNAM, se encuentra el CDMIT (Centro de Diseño Mecánico e Innovación Tecnológica), cuya finalidad es formar recursos que contribuyan al desarrollo tecnológico nacional. Es por ello que se ha creado el Grupo de Diseño Mecánico Óptimo (GDMO), cuyos objetivos principales se enfocan a desarrollar conocimientos sólidos en métodos de optimización e inteligencia artificial, para poder implementarlos a problemas de ingeniería de diseño, mediante el desarrollo de herramientas computacionales propias.



I.1 JUSTIFICACION DE LA PROPUESTA

El propósito de aplicar los conceptos de diseño estructural óptimo en este trabajo de tesis es el de crear una herramienta computacional capaz de obtener soluciones a problemas de ingeniería, que cumplan con ciertas restricciones impuestas y que a su vez, resulte ser la más cercana a la óptima, en cuanto a uno a varios criterios de diseño previamente establecidos.

En la actualidad la computación evolutiva se muestra como un enfoque alternativo, a los métodos de optimización tradicionales, aportando como ventajas: simplicidad conceptual, amplia aplicabilidad y amplia adaptabilidad, es por ello que resulta interesante contar con una herramienta computacional propia que nos proporcione soluciones a problemas de diseño cuyo desempeño no dependa de la experiencia del diseñador.

Dentro de las ventajas que nos proporcionan la implementación de las técnicas de optimización están:

- Obtención de diseños óptimos de estructuras que trabajen bajo condiciones de deformación plana
- Reducción de material.
- Ahorro en tiempo a los diseñadores, que se puede aprovechar en tener una mayor dedicación a las fases más creativas y productivas del diseño.
- La posibilidad de considerar una gran cantidad de especificaciones de diseños.

I.2 OBJETIVOS DE LA TESIS

El objetivo principal es desarrollar una herramienta de cómputo para el diseño óptimo de estructuras que estén sometidas a condiciones de deformación plana, mediante la evaluación de una técnica heurística.



El trabajo desarrollado en esta tesis contempla los siguientes objetivos parciales:

- Realizar un algoritmo para generar una malla triangular en un dominio establecido bidimensional.
- Desarrollar un algoritmo que permita añadir y eliminar elementos a una malla.
- Efectuar un algoritmo que permita relacionar cada elemento triangular de la malla con ecuaciones específicas correspondientes a deformación plana.
- Implementar la teoría del método de los elementos finitos.
- Realizar un algoritmo evolutivo para el análisis de estructuras continuas bidimensionales mediante el método de malla fija, aplicado a estructuras que estén sometidas a condiciones de deformación plana.

I.3 OBJETIVO PERSONAL

Generar conocimientos sólidos de diseño mecánico óptimo con el propósito de aplicarlos a estudios de posgrado y a nivel profesional.

I.4 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

Los conceptos e ideas para la comprensión de esta tesis se han organizado en cuatro capítulos.

El capítulo uno, hace referencia a los antecedentes del diseño óptimo, además se explican los diferentes tipos de optimización estructural, así como las bases que determinan la comprensión del método de los elementos finitos, también se incluye una breve descripción del estado de deformaciones planas.

En el capítulo dos se describen los diferentes tipos de malla, características importantes para el análisis por elemento finito para deformación plana, y los procesos evolutivos de optimización que fueron la base para la realización de esta tesis.



En el capítulo tres se explica a grandes rasgos los diferentes módulos que componen esta herramienta computacional de optimización.

En el capítulo cuatro se implementó el programa desarrollado en esta tesis a tres casos de estudio distintos.

Finalmente, se concluye a partir de los resultados obtenidos, además se comenta la ruta a futuro de los proyectos referentes a diseño mecánico óptimo.

Capítulo 1

ANTECEDENTES

1.1 INTRODUCCIÓN

En el pasado, las personas que se encargaban del diseño, debían tener gran experiencia, ya que ésta era directamente proporcional a la fidelidad de lo construido; si bien cada cultura basaba sus diseños en el tipo de material con el que contaban, los procesos de diseño cumplían con ciertos pasos, a los cuales se les denominó posteriormente como proceso de diseño óptimo. Dicho proceso cambió en el momento en que se lograron incorporar reglas evolutivas, las cuales en la actualidad son ejecutadas por medio de las computadoras.

En el campo de la optimización estructural, hoy en día, existen varios métodos, los cuales se pueden utilizar para determinar un diseño óptimo de una serie de diseños de una estructura (Figura I.1).

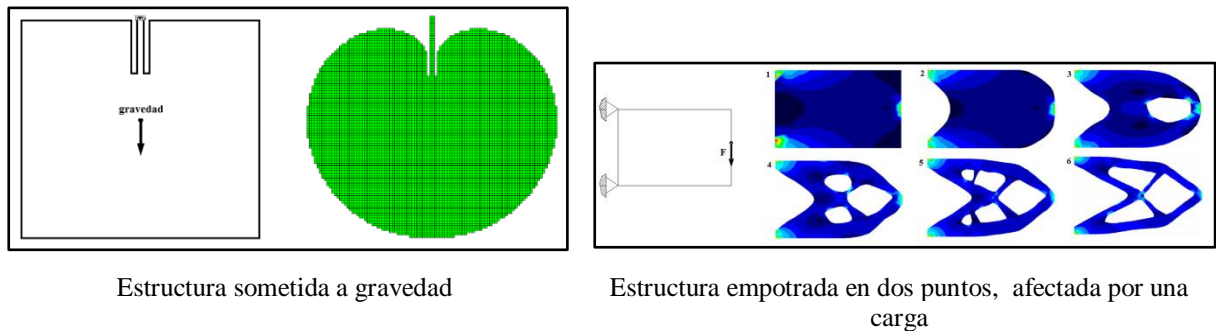


Figura I.1 Diseños optimizados a partir de reglas evolutivas [22,8].



Las matemáticas que se utilizan en el *proceso de optimización*, para determinar el mejor diseño sin comprobar todos los posibles, se basa en el manejo de un nivel relativamente modesto de matemáticas y la tarea de realizar cálculos numéricos iterativos, empleando procesos lógicos claramente definidos o algoritmos implementados en computadoras; los resultados están enfocados a encontrar la mejor opción de una colección de alternativas.

En este capítulo se describen los procesos de diseño, antes y después de la introducción de herramientas computacionales, que se realizaban para conseguir diseños óptimos; también se mencionan aspectos importantes para poder entender el proceso de optimización estructural, tales como el método de los elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés). Además, se describen algunos de los procesos de optimización estructural cuya fundamentación es la base para la realización de esta tesis.

1.2 PROCESO DE DISEÑO ÓPTIMO

El método que se empleaba en un principio para conseguir diseños óptimos se describe a continuación: el ingeniero definía un diseño inicial cuyo comportamiento era analizado numéricamente; de los resultados de dicho análisis se podían deducir (por experiencia o intuición) los cambios a realizar para mejorar dicho diseño. Se finalizaba el proceso cuando se consideraba que el diseño era lo suficientemente bueno con base en las condiciones a las que eran expuestos.

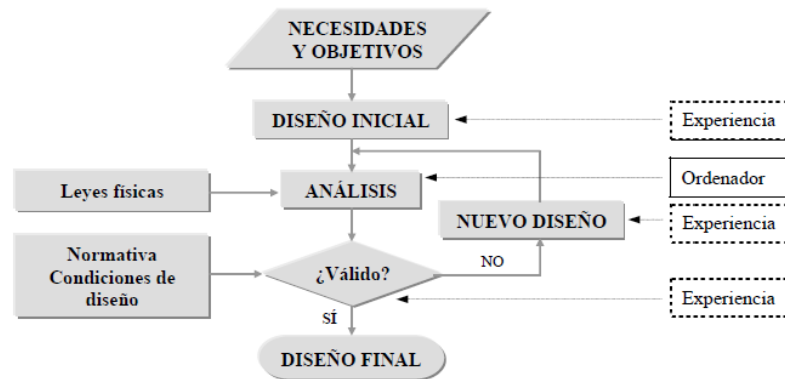


Figura 1.1 Proceso de diseño por prueba y error [18]



Esta metodología, llamada “prueba y error” (Figura 1.1), presentaba el inconveniente de que las modificaciones dependían totalmente de la experiencia del diseñador, lográndose buenas soluciones pero no las mejores, además de involucrar un alto costo.

Se puede definir al *problema de diseño óptimo* como aquel que se plantea determinar el valor de una serie de variables de manera que se minimice o maximice el valor de una función objetivo, a la vez que se cumplen una serie de restricciones impuestas.

El tiempo en que pueden ser analizados los problemas representa una parte importante en el proceso de diseño, ya que si en un principio se hubiese tenido la posibilidad de realizar el análisis de manera más rápida, los procesos se pudieron haber repetido en varias ocasiones con el objetivo de poder acercarse al óptimo. Es por ello que con la incursión de las computadoras y el uso de las diferentes técnicas de optimización se ha abierto un camino adecuado para poder desarrollar la optimización de forma automática.

De esta forma el diagrama del proceso de diseño óptimo se renovó al diagrama mostrado en la Figura 1.2.

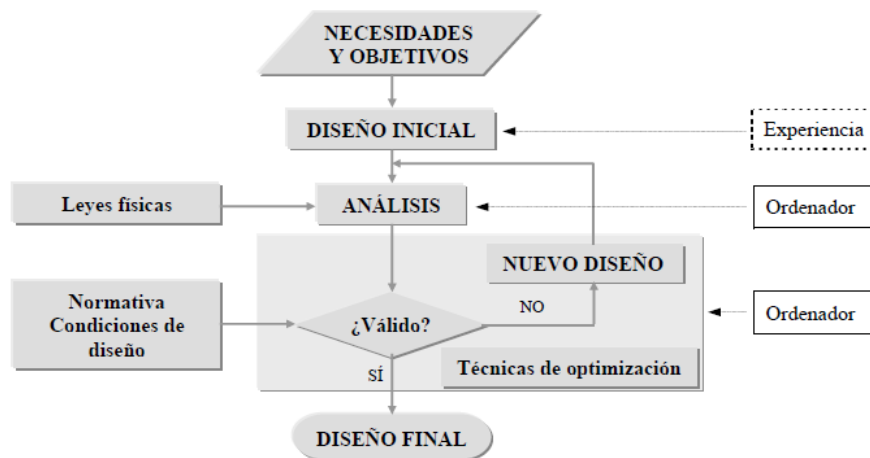


Figura 1.2 Proceso de diseño optimizado [18]



1.3 OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL

“La optimización estructural es una fusión de las áreas de ingeniería, matemáticas, ciencia y tecnología que tienen como objetivo llevar a cabo la mejor función de una estructura, como pueden ser un puente, un vehículo espacial o simplemente un elemento mecánico”[34]

El proceso de optimización estructural busca determinar el mejor diseño posible, cuyo resultado satisfaga ciertas condiciones impuestas por el diseñador, dichas condiciones dependen de qué tipo de optimización se desee, es decir, la optimización se puede enfocar a un nivel de esfuerzos, a un nivel de deformación, a una cantidad de volumen, a cierta longitud de desplazamientos, etc.

1.4 FORMULACIÓN DEL DISEÑO ÓPTIMO DE ESTRUCTURAS

El diseño óptimo estructural se refiere a un proceso analítico, el cual tiene como objetivo determinar el valor de una serie de variables de manera que se minimice o maximice el valor de una función objetivo, cumpliendo a su vez una serie de restricciones impuestas por el diseñador. Los tres aspectos básicos –variables de diseño, función objetivo y restricciones – se combinan para formar el problema de diseño en la geometría del espacio de diseño. A continuación se describe cada uno de estos aspectos del problema.

1.4.1 Variables de diseño

Las magnitudes que intervienen en un diseño se pueden dividir en dos ramas: parámetros del problema y variables del problema.

Parámetros del problema: tienen la característica de representar magnitudes cuyo valor es constante durante todo el diseño y son consecuencia, en general, de una serie de condiciones impuestas exactamente por el problema.

Variables del problema: se refieren a magnitudes cuyos valores cambian durante la evolución del diseño.



Para los casos de estudio que abarca esta tesis, se distinguen tres tipos de variables:

- Geometría de la estructura: altura, longitud, etc.
- Topología de la estructura: densidad del material, perímetro total, etc.
- Propiedades constitutivas: módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson, etc.

La importancia de una adecuada elección de las variables de diseño es trascendente, ya que de esta elección dependen soluciones prácticas y bien condicionadas.

1.4.2 Función objetivo

La función objetivo es un criterio para evaluar los diseños, de tal manera que se pueda identificar el “mejor” de una serie de diseños.

Es común que al diseñar las estructuras, la función objetivo esté enfocada a obtener un peso mínimo, el planteamiento tradicional expresa al peso de la pieza en función de las variables de diseño, esto se realiza con el propósito de reducirlo.

Sin embargo, en otras aplicaciones de diseño, el peso juega un papel secundario en cuyo caso la función objetivo se enfoca en otros factores tales como: fiabilidad, frecuencia, desplazamiento, esfuerzo, deformación, etc.

1.4.3 Restricciones

Una restricción es una limitante que debe satisfacerse para que el diseño sea aceptable.

El uso de restricciones se debe a que en la mayor parte de los diseños no pueden tratarse libremente tomando en cuenta todas las elecciones posibles, sino que debe descomponerse en subproblemas separados, en donde, cada uno de estos subproblemas tienen restricciones que han sido impuestas para acotar su análisis. Por lo tanto, las restricciones son condiciones que debe cumplir el diseño para que pueda ser considerado como válido, planteándose en función de las variables, a las que se les exige tener un valor o mantenerse dentro de ciertos límites.

Una primera clasificación de las restricciones las divide en *explícitas e implícitas*. Las *restricciones explícitas* actúan directamente imponiendo condiciones a una variable (o un



grupo de ellas), mientras que las *restricciones implícitas* imponen condiciones sobre magnitudes que dependen a su vez de las variables.

Otra clasificación acerca de las restricciones las agrupa en *restricciones de igualdad y desigualdad*; las primeras suelen estar asociadas a las relaciones que fijan el comportamiento de la estructura, tales como: condiciones de equilibrio, de compatibilidad, ley de comportamiento del material, etc. Otras relaciones de igualdad están asociadas a las relaciones entre las variables de diseño del problema (condiciones de simetría, tangencia, curvaturas, etc.). Las restricciones de desigualdad suelen estar asociadas con limitaciones impuestas a la respuesta del elemento estructural, tales como tensiones, desplazamientos máximos, frecuencias de vibración, etc., así como, aquellas que delimitan el rango de los valores posibles de las variables [31].

1.5 TIPOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL

Los diferentes tipos de optimización estructural dependen de cuáles sean las variables de diseño a utilizar. De los tipos de variables utilizados, el material de la estructura es planteado y fijado por el diseñador, por lo cual quedan como variables de diseño más habituales las propiedades de la sección, la geometría, y la topología de la estructura. Estos tres tipos de variables son el origen de tres tipos de optimización estructural distintos, cuyas características se explican a continuación [18].

1.5.1 Optimización de propiedades de la sección transversal

En este tipo de optimización estructural, las variables de diseño están asociadas a propiedades geométricas de la sección transversal de los elementos que componen la estructura, tales como áreas de barras, espesores de placa, etc. En el caso de estructuras continuas, las variables de diseño suelen ser los espesores de los elementos, dado que el análisis suele resolverse mediante FEM, habría que asignar una variable por cada uno de los elementos resultantes de la división. Lo que obligaría a adoptar, algún tipo de relación, que reduzca el excesivo número de variables de diseño.



1.5.2 Optimización de geometría

En la optimización de geometría, además de las variables empleadas en la optimización de propiedades, son utilizadas variables asociadas a la forma de la estructura. Estas variables controlan la geometría del diseño y requieren a un modelo de análisis que se readapte durante el proceso de optimización.

El creciente interés por la optimización de forma se debe a dos motivos: en primer lugar, proporciona diseños mucho mejores que la optimización de propiedades; y en segundo lugar, la mayor disponibilidad actual de herramientas de análisis, y optimización que permite resolver de forma más eficiente este tipo de problemas.

1.5.3 Optimización por topología

El problema de optimización topológica consiste en encontrar la mejor distribución de material dentro de un dominio, denominado “*dominio de diseño*”, de tal forma que la estructura resultante maximice algún tipo de desempeño mecánico bajo ciertas restricciones. El algoritmo de optimización topológica selectivamente remueve o reubica elementos para conseguir el desempeño óptimo de la estructura.

En la optimización por topología, además de las variables empleadas en la optimización de propiedades, se utilizan variables asociadas a la topología de la estructura, es decir, al número de elementos y a su interconexión.

El interés creciente por la optimización por topología se debe a que se evita la necesidad de que el diseñador tenga que definir un supuesto diseño final.

1.6 MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL

Los principios básicos acerca de la teoría de la optimización se sitúan cronológicamente entre los siglos XVII y XVIII.



- Galilei (1638): forma óptima de una viga en voladizo, con una carga puntual en su extremo libre.
- Leibniz (1646-1741): cálculo infinitesimal.
- Lagrange (1736-1813): cálculo de variaciones (valores extremos de una función de funciones).
- Hamilton (1808-1865): principio de mínima acción.
- Michell (1904): principios fundamentales para el diseño óptimo de barras de peso mínimo.

En el campo de la optimización existen varios métodos que pueden ser empleados para determinar un conjunto de variables para proporcionar una estructura óptima.

Entre los años 1940 y 1950 el trabajo fundamentalmente fue analítico. Schmit y Farshi (1974) estuvieron entre los primeros autores que propusieron una declaración comprensiva sobre las técnicas de programación matemática [27].

Durante la década de 1970, la optimización disfrutó de una intensiva investigación, pero desgraciadamente fueron pocas las aplicaciones prácticas. Francavilla, Ramakrishnan y Zienkiewicz (1975) propusieron caracterizar la forma óptima con el objetivo de minimizar la concentración de tensiones, a través de parámetros geométricos predefinidos [11].

Oda (1977) presentó un estudio donde se obtienen las formas óptimas correspondientes a dos problemas planos introduciendo cambios en algunos elementos finitos preseleccionados [20].

Rodríguez y Sereig (1985) introducen un algoritmo basado en FEA (*Finite Elements Analysis*) donde la forma óptima se alcanza maximizando el empleo del material [26].

Mattheck y Burkhardt (1990) plantearon un método de optimización basándose en la analogía entre la geometría de la estructura, y el mecanismo de crecimiento del árbol con el objetivo de minimizar las concentraciones de tensiones [19].

Xie y Steven (1993) presentan un método denominado ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), el cual mediante un sencillo proceso iterativo va retirando el material menoseficiente del diseño [34].



Bendsøe y Kikuchi (1993) desarrollaron el método de homogenización en el cual un modelo de material con pequeñas cavidades se introduce en el diseño, resolviendo el problema de diseño óptimo mediante la determinación de la porosidad ideal [2].

En la actualidad, los algoritmos basados en el proceso de la selección natural y evolución biológica (algoritmos evolutivos), son los de mayor alcance y los que proporcionan diseños más eficientes [33].

A continuación se elabora una descripción más detallada de algunos métodos, los cuales son la base fundamental para la realización de esta tesis, así como otras técnicas que establecen el actual marco para la resolución del problema de diseño óptimo en estructuras continuas.

1.6.1 Optimización sin un modelo de material

Estos métodos producen de un modo sencillo, formas y topologías optimizadas, la calidad de las soluciones depende del tamaño de la malla. A continuación, se describen los principales métodos, en ausencia de un modelo de material, que se emplean con más frecuencia para la optimización de estructuras.

1.6.1.a Optimización Estructural Evolutiva (Evolutionary Structural Optimization o ESO)

ESO se basa en la sencilla idea de que la estructura óptima puede ser producida por la remoción gradual de material ineficiente usado en el dominio de diseño de la estructura.

Xie y Steven [34] introdujeron el método ESO, el cual, mediante un criterio de rechazo, elimina una pequeña cantidad de material en cada iteración. En su forma original, el método ESO determina la eficiencia del material, a partir del esfuerzo en los elementos, es decir, si un elemento presenta un esfuerzo (generalmente de *von Mises*) mínima, el elemento es ineficiente, por lo tanto dicho elemento deberá ser removido. El algoritmo de este método de optimización se explica con más detalle en el apartado 2.4.1.



1.6.1.b Optimización Estructural Evolutiva Aditiva (Additive Evolutionary Structural Optimisation o AESO)

En AESO, los elementos se incorporan a la estructura en aquellas regiones donde resultan necesarios según, sea el criterio de adición [23], dicho criterio se puede referir a los elementos que se necesiten reforzar. Al igual que la explicación detallada acerca del algoritmo de optimización de ESO, este método también se explica con más detalle en el apartado 2.4.2.

1.6.1.c. Optimización Estructural Evolucionaria Bidireccional (Bidireccional Evolutionary Structural Optimisation o BESO)

En el método de optimización estructural evolutiva bidireccional, los elementos de la estructura pueden ser agregados o eliminados. Los procesos de adición y eliminación son llevados a cabo mediante los métodos ESO y AESO, cuyo algoritmo se presenta en el apartado 2.4.3.

1.6.2 Métodos basados en el crecimiento biológico

El estudio de las estructuras biológicas (huesos, anillos de crecimiento, etc.) revela que existe una fuerza impulsora que conduce a activar los mecanismos de crecimiento en donde hay estados de tracción constante.

A raíz de estas observaciones, Mattheck [19] desarrolló un método al que denominó Computer Aided Optimization (CAO) capaz de simular el crecimiento biológico con el propósito de optimizar estructuras. De modo que, los elementos con un nivel de esfuerzo elevado, aumentan su volumen reproduciendo la agregación de material, mientras que, los elementos con niveles de esfuerzo inferior ven decrecer su volumen, simulando con ello la sustracción de material.



En la actualidad, existen muchos métodos de optimización asistidos por computadora, por lo que el procedimiento se ha renombrado como Biological Growth Structural Optimization (BGSO).

1.7 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (FEM)

Antes de hablar acerca del método de los elementos finitos, es necesario definir las características que lo componen. Las principales características – elemento finito (EF), nodos, conectividades, grados de libertad (GdL) – se entrelazan para poder realizar, mediante un método, un análisis, que a su vez nos proporciona resultados cercanos a la realidad.

Un *elemento finito* (EF) para dominios de cualquier número de dimensiones, es un segmento de dominio definido por un conjunto de puntos llamados *nodos* que guardan una relación ordenada, a la cual se le da el nombre de *conectividad*. Dicho segmento, conserva el comportamiento y propiedades del dominio al cual pertenece.

Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito, además un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varias conectividades, un nodo representa la relación entre una posición en el dominio y un conjunto de variables desconocidas y ordenadas, llamados *grados de libertad* (GdL).

Por lo anterior, la conectividad de un EF está dada por el conjunto ordenado de los GdL correspondientes a los nodos que lo definen.

Cada elemento que se encuentra dentro del dominio del diseño es generado por una conectividad por lo que al conjunto organizado de conectividades se le denomina *malla*.

El *método de los elementos finitos* es un procedimiento de aproximación de problemas continuos (infinitos grados de libertad), de tal forma que el continuo se divide en un



número finito de elementos, cada elemento tiene una simple geometría, lo cual facilita el análisis.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento del continuo regirán también el comportamiento del elemento. De esta forma se consigue pasar de un sistema continuo, que es regido por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número de GdL finito cuyo comportamiento se modela con un sistema de ecuaciones, lineales o no lineales, que se resuelven de manera simultánea mediante una computadora.

1.7.1 Metodología general para el análisis por elementos finitos

La aplicación del análisis de los elementos finitos a un problema dado involucra los siguientes seis pasos:

- a). Discretización del dominio de solución en una malla de elementos finitos.
- b). Desarrollo de las ecuaciones de los elementos.
- c). Ensamble de las matrices de rigidez de los elementos.
- d). Aplicación de las condiciones de frontera: naturales y esenciales.
- e). Solución del sistema.
- f). Calculo de esfuerzos (postproceso).

1.7.1.a. Discretización del dominio en una malla de elementos finitos

El método de los elementos finitos para el análisis de estructuras depende del número de nodos y el arreglo de estos, para definir el modelo, es decir, la fiabilidad mejora cuando el tipo de mallado es el adecuado. En ocasiones se logra esto incrementando la cantidad de nodos en las zonas donde hay curvaturas o algún tipo de discontinuidades, al incrementar la cantidad de nodos, el requerimiento computacional también aumenta por lo que hay que saber darle proporcionalidad. Para lograr una buena discretización se deben considerar los siguientes conceptos:



- a) *Geometría del dominio.* Cuando un dominio curvo se discretiza usando elementos finitos con lados rectos, se debe considerar que la cantidad de elementos debe ser razonable de otra manera estos generarán una discrepancia entre la geometría original y la discretización por elementos finitos.
- b) *Exactitud deseada.* La exactitud dependerá factores como: número de nodos, tipo de elemento, técnica de mallado.
- c) *Formulación de elementos.* Algunos elementos producen mayor exactitud que otros, es por ello que debe escogerse los más adecuados para llevar a cabo la discretización.
- d) *Características especiales de la solución.* Las regiones sobre las cuales la solución cambia rápidamente, en general, requieren un mayor número de nodos, los resultados que se obtienen en dichas regiones son usados a su vez para guiar el proceso de refinamiento de malla.
- e) *Simetría.* En muchos problemas prácticos, el dominio y las condiciones de frontera son simétricas, entonces se puede especificar simetría en el modelo y en la solución. La importancia de reconocer la simetría es debido a que es una ventaja el reducir el tamaño del modelo y con ello el sistema de ecuaciones a resolver.

El número de nodos y disposición de los elementos debe ser lo bastante buena para aproximar la geometría, cargas y otras características físicas del problema. Es posible seleccionar regiones en donde la solución cambia rápidamente antes del refinamiento e indicar en cuales se debe llevar a cabo dicho proceso. Para ver la convergencia de la solución, se puede seleccionar un punto en el modelo y monitorear la solución de éste. La solución debe comenzar a estabilizarse después de usar un número de nodos razonable.

1.7.1.b. Desarrollo de las ecuaciones de los elementos.

Cada análisis que es descrito en términos de una o más ecuaciones diferenciales requiere de un apropiado grupo de ecuaciones de elementos. Para cada uno de los sistemas de ecuaciones gobernantes, varios elementos con diferentes formas y características pueden ser considerados para una aplicación. Es por ello que escoger un elemento apropiado para una aplicación se vuelve importante para poder entender mejor la aproximación que ésta tendrá durante el cálculo final.

La solución del elemento propuesta se escribe en términos de variables seleccionadas en puntos denominados *nodos*. Las variables en los nodos son generalmente referidas como los *grados de libertad*, en la Figura 1.3(a) se aprecia un elemento unidimensional con dos nodos y dos grados de libertad representados mediante u_1 y u_2 , de forma similar, en la Figura 1.3 (b) se observa un elemento en dos dimensiones triangular con tres nodos y seis grados de libertad expresados por medio de: $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, y v_3$. Dicha terminología fue desarrollada por ingenieros de estructuras [1].

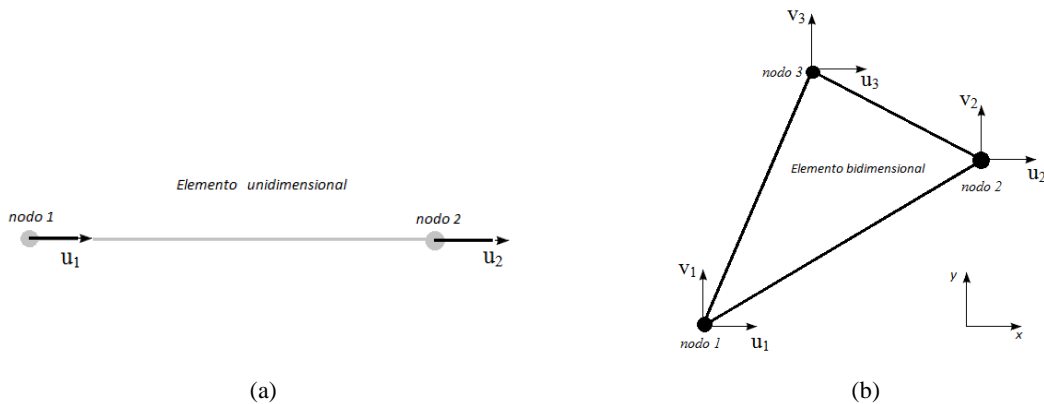


Figura 1.3 a) Representación de un elemento finito unidimensional con dos nodos y dos GdL,

b) Representación de elemento finito triangular en dos dimensiones con tres nodos y seis GdL.

La geometría de un elemento depende del tipo de la ecuación diferencial gobernante. Para problemas unidimensionales, ésta tiene una ecuación diferencial ordinaria, y el elemento es una línea recta o curva. Para problemas gobernados en dos dimensiones, con dos ecuaciones diferenciales parciales, los elementos usualmente son triángulos o cuadriláteros.



Las ecuaciones de los elementos expresan una relación entre los parámetros físicos en las ecuaciones diferenciales y los grados de libertad en los nodos, por esta razón, la cantidad de ecuaciones suele ser muy grande y es necesario utilizar notación matricial. La programación se organiza en dos fases: en la primera, la matriz del elemento se desarrolla para un elemento característico que represente a todos los demás elementos del modelo discretizado, lo cual llevará a una forma simbólica. En la segunda fase se utiliza la fórmula general o simbólica del elemento representativo, para generar las matrices de todos los elementos obteniendo y los valores específicos para cada matriz.

1.7.1.c. Ensamble de las matrices de rigidez de los elementos.

La discretización en elementos finitos divide el dominio de solución o estructura en elementos simples. Para cada elemento las ecuaciones de elemento finito pueden ser escritas o sustituidas por valores numéricos en las fórmulas para cada tipo de elementos. El principal concepto en el proceso de ensamble es que un nodo común entre varios elementos tiene una solución nodal igual para cada elemento dividido por dicho nodo. De este modo contribuye al grado de libertad de todos los elementos compartidos que deben ser añadidos de manera conjunta. En general, se puede identificar una serie de pasos a seguir para ensamblar elementos:

- Asignar un número distinto a cada nodo perteneciente a cada elemento, esto conlleva la numeración de los grados de libertad por nodo correspondientes a dicho elemento.
- Identificar la conectividad de cada elemento, a partir de los nodos que lo generan, lo que a su vez crea un vector de posición basada en los GdL.
- Obtener una matriz global de $n \times n$, donde n es el equivalente al número de GdL que se tenga en el dominio.
- Se sustituye cada posición del vector de posición, en la posición de la matriz global, cada uno de sus valores correspondientes a cada uno de los elementos.



- Finalmente se suman o se restan los valores que coincidan en la posición de la matriz global.

1.7.1.d Aplicación de las condiciones de frontera: naturales y esenciales.

Una variedad de condiciones de frontera (CF) están especificadas para distintos problemas. Para problemas de armaduras, algunos nodos están localizados en los soportes, por lo que los desplazamientos en esos nodos deben ser cero. Para problemas de flujo de calor las condiciones deben satisfacerse a lo largo de las fronteras especificando temperatura, convección, aislamiento o flujo de calor. Para problemas de análisis de esfuerzos, aplicación de cargas en una cara mientras existen soportes fijos.

En el Análisis por Elementos Finitos (Finite Element Analysis o FEA), algunas de las condiciones de frontera son incorporadas directamente en las ecuaciones de los elementos, estas reciben el nombre de condiciones de frontera esenciales (CFE), dichas condiciones son esenciales en el sentido que sin ellas el sistema no tendría solución. Las condiciones que de manera natural o automática se incorporan al inicio de la ecuación diferencial se les conoce como condiciones de frontera naturales (CFN), tal es el caso de cargas puntuales.

En el ensamble el proceso se asume que los GdL son desconocidos. Sin embargo, debido a las CFE, algunos de estos GdL deben tener un valor de cero. Por lo tanto, la introducción de las CFE, involucran la sustitución de los valores en el vector de variables nodales. Al introducir estas CF, provoca que el ensamble global, se vea reducido de acuerdo a los valores que se conozcan en las condiciones. Si se conocen los nodos en los cuales se tiene el valor de condición de frontera en ese mismo número se verá reducido el sistema global [30].



1.7.1.e. Solución Nodal de las variables.

El método más común para obtener la solución nodal es la solución lineal de ecuaciones, por su sencillez tanto de aplicación como de programación. Utilizando la solución lineal, aplicando una matriz inversa al vector d :

$$d = K^{-1}R$$

La solución nodal global estará dada, introduciendo los valores conocidos de los grados de libertad, al vector de solución “ d ”.

1.7.1.f. Postproceso o relación de las cantidades para cada elemento.

El postproceso se refiere a la obtención de cantidades particulares en el modelo de análisis como lo son: esfuerzos, deformaciones, desplazamientos, etc. Estas cantidades se obtienen a partir de la solución nodal, y se calculan para cada elemento generado [4].

1.8 DESCRIPCIÓN DEL ESTADO DE DEFORMACION PLANA

La física de cualquier problema siempre se desarrolla en un espacio tridimensional, sin embargo, la ingeniería representa el arte de aplicar la física y las matemáticas buscando la mejor relación entre la aproximación de los resultados a la realidad y la solución más simple y que demande menores recursos matemáticos y computacionales. Es por consecuencia que en muchos problemas de ingeniería, una condición triaxial real sea idealizada a dos dimensiones, esto permite en muchos de los casos, soluciones analíticas prácticamente imposibles para el caso tridimensional.

Si una de las dimensiones es pequeña en comparación de las otras (ver Figura 1.4), entonces los esfuerzos en la dirección menor se desprecian y el problema se estudia en el

plano que definen las otras dimensiones, a esta situación se le denomina como Estado Plano de Esfuerzos.

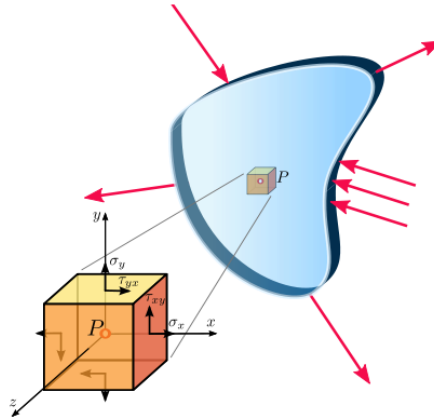


Figura 1.4 Estado plano de esfuerzos [37].

Por otra parte, si una de las dimensiones es muy grande en comparación con las otras (ver Figura 1.5), entonces se considera que la deformación en dicha dirección se puede despreciar definiéndose a tal situación como Estado de Deformación Biaxial o Estado de Plano de Deformación.

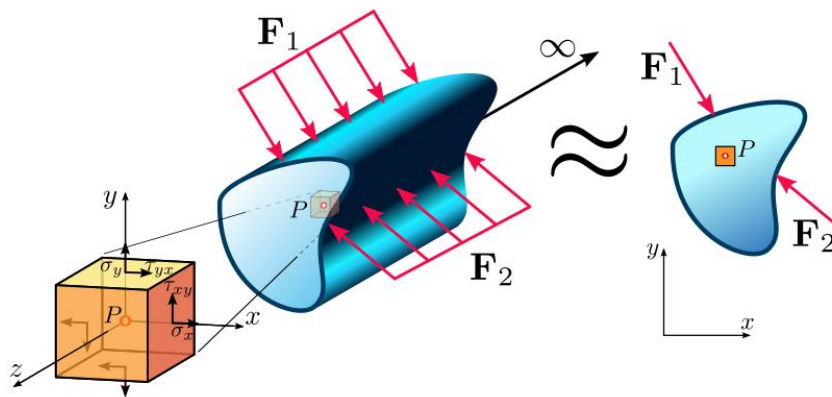


Figura 1.5 Estado plano de deformación [38].



Considerando la Figura 1.5, en donde la longitud de un cuerpo es extremadamente larga en dirección al eje “z”, además, dicho cuerpo está expuesto a un mismo sistema de cargas perpendiculares a lo largo de toda su longitud, se puede estipular que en cualquier sección transversal del cuerpo con respecto a z, recibe las mismas sollicitaciones.

Por lo tanto, se puede suponer que la estructura no tendrá ningún desplazamiento sobre la dirección z, dado que este desplazamiento se suprime, es decir:

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

A este estado se le conoce como deformación plana, y por consecuencia el tensor de deformación se expresará como:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando la Ley de Hooke generalizada se tiene:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} \left(\sigma_{ij} (1+\nu) - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)$$

Como:

$$\varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$



Por lo que el estado de esfuerzos se expresa como:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

DESARROLLO DEL ALGORÍTMO DE OPTIMIZACIÓN

2.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se mencionaron las características más importantes acerca de los procesos de optimización, método de los elementos finitos, así como las diferentes metodologías de optimización que ayudaran a entender más a fondo las características de cada proceso de este trabajo de tesis y con las cuales se podrá determinar los diseños óptimos.

Partiendo de la idea de que para realizar una aplicación computacional se deben repetir ciertos pasos, en donde se contemplan varias posibilidades, se llega a un punto en donde los algoritmos juegan un papel importante para el éxito de dicha aplicación, es así como los algoritmos brindan un gran apoyo para la realización de cualquier aplicación computacional.

Un algoritmo es un conjunto finito de pasos definidos, estructurados en el tiempo y formulados con base en un conjunto finito de reglas no ambiguas, que proveen un procedimiento para dar la solución o indicar la falta de ésta a un problema en un tiempo determinado.[25]



Los algoritmos son la base de todo procedimiento metódico y los encontramos en una infinidad de partes. Es posible enlistar una serie de pasos que pueden considerarse en conjunto como una guía genérica en la correcta creación de un algoritmo. Estos pasos son:

- a. Declaración del problema.
- b. Desarrollo de un modelo.
- c. Diseño del procedimiento de solución.
- d. Validación.
- e. Implementación.
- f. Análisis y complejidad.
- g. Pruebas.
- h. Documentación.

La implementación del algoritmo consiste en la escritura de un programa empleando un lenguaje de programación. Un algoritmo debe implementarse una vez que se ha probado su valía, mediante múltiples pruebas de papel.

El modelado numérico se basa en el cálculo numérico y representa una técnica que nos brinda una herramienta importante para el FEM.

En la actualidad el modelado numérico es una herramienta imprescindible en varias áreas de la ingeniería.

El diseño asistido por computadora (Computer Aided Design o CAD) está relacionado con la representación, manipulación y diseño de objetos matemáticos.

Las principales herramientas utilizadas en el CAD son el análisis matemático, el análisis numérico, la geometría diferencial, etc. Las aplicaciones se encuentran donde se necesitan métodos para describir matemáticamente los objetos que van a ser manufacturados por máquinas controladas por computadoras, como por ejemplo en la industria aeronáutica, automotriz, etc.

Para la representación gráfica de estos objetos matemáticos, no siempre resulta fácil trabajarlos en sus representaciones algebraicas. Una alternativa es trabajarlos mediante aproximaciones y es aquí en donde surge la idea de aproximar una superficie mediante una malla [18].

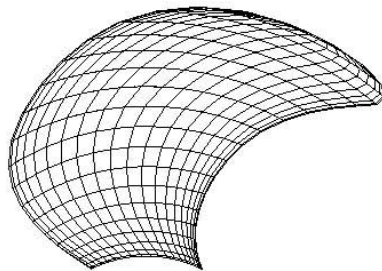


2.2 GENERADORES DE MALLAS

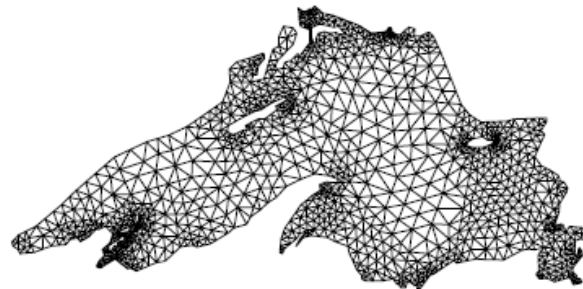
Las ecuaciones diferenciales planteadas para simulaciones de fenómenos físicos, requieren para su solución la implementación de métodos numéricos, muchos de los cuales asumen que el dominio de interés puede ser dividido en pequeños elementos cuya unión y continuidad forman una malla. La discretización del dominio permite que las ecuaciones puedan ser resueltas numéricamente con aproximaciones a las ecuaciones de conservación que dan un estimativo de las variables de interés. Estas ecuaciones diferenciales son linealizadas dentro de los elementos de control, donde las mismas son aplicadas [3].

2.2.1 Tipos de Mallas.

Existen dos tipos de mallas; las estructuradas y las no estructuradas. Una *malla estructurada* se define como aquella donde cada elemento de control tiene el mismo número de elementos vecinos, mientras que en una *malla no estructurada* se tienen diferentes números de elementos vecinos [3].



(a)



(b)

Figura 2.1 (a) Malla estructurada, (b) Malla no estructurada [3].

Una de las ventajas de las mallas estructuradas sobre las mallas no estructuradas es que cada vértice de la malla excepto en las fronteras, tiene un vecino isomorfo. Su implementación es simple y muy conveniente para la solución de diferencias finitas,



requieren menos memoria de cómputo y ofrecen la posibilidad de controlar directamente la forma y el tamaño de cada elemento. La gran desventaja de este tipo de mallas, es su poca flexibilidad para ajustarse a dominios con geometrías complicadas [32,15].

A partir de las complicaciones expresadas por las mallas estructuradas, aparecen las ventajas del método de elementos finitos y las mallas no estructuradas, usadas en el mismo. Los elementos finitos tienen una inherente habilidad para tratar con mallas no estructuradas, éstas permiten fácilmente refinamientos locales para dar resoluciones altas en regiones de interés, sin perder precisión.

2.3 CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES PARA EL ANÁLISIS POR ELEMENTO FINITO PARA DEFORMACION PLANA

En este apartado se obtendrán ecuaciones particulares para el problema en cuestión, los cuales permitirán, el desarrollo del FEA.

2.3.1 Matriz de elasticidad para deformación plana

Como se vio en el *apartado 1.8*, para el estado de deformación plana se supone una estructura extremadamente larga en dirección al eje z por lo que se supone que la estructura no tendrá ningún desplazamiento sobre la dirección z :

$$\epsilon_z = 0$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

Bajo tales circunstancias la ecuación constitutiva para esfuerzo plano queda como:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu}{E_y} & -\frac{\nu}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E_y} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E_y} & -\frac{\nu}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

Que también puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E_y}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esta ecuación se puede simplificar como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E_y}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \frac{E_y \nu (\epsilon_x + \epsilon_y)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = 0.$$

A la matriz de elasticidad se le asigna la letra C.

$$C = \frac{E_y}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{pmatrix}$$



2.3.2 Ecuaciones de elemento finito para deformación plana

2.3.2.a Elemento Finito Plano General

Los problemas de deformación y esfuerzo plano son casos especiales de problemas de sólidos elásticos, en los cuales las variables de interés corresponden a desplazamientos, deformaciones y esfuerzos. Los desplazamientos pueden considerarse como las variables principales de la cuales, una vez conocidas, se desprenden las otras dos. En los casos planos, con referencia cartesiana, las variables o grados de libertad a determinar son los desplazamientos en las direcciones “x” y “y”, es decir, los valores de las distribuciones de desplazamientos $u[x,y]$ y $v[x,y]$ en los nodos de una malla de elementos finitos (2 GdL por nodo) [30].

Común a cualquier análisis por elementos finitos, las distribuciones de desplazamientos se calculan a partir de funciones de interpolación, las cuales se representarán con la letra N , y valores nodales de estos. Si suponemos un EF cualquiera de “ n ” número de nodos, se puede decir que [30]:

$$\begin{pmatrix} u[x,y] \\ v[x,y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = N^T \cdot d$$

La deformación puede calcularse como:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = B^T \cdot d$$

Y de las ecuaciones constitutivas se calculan los esfuerzos.



La ecuación del elemento finito para situaciones planas es (sin considerar las cargas puntuales):

$$K \cdot d = r q + r b$$

Donde la matriz de rigidez es:

$$K = h \iint_A B \cdot C \cdot B^T dA$$

Donde h es el espesor del elemento finito; el vector de fuerzas de cuerpo es:

$$r b = h \iint_A N \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} dA$$

Donde b_x y b_y son las componentes de la fuerza de cuerpo por unidad de volumen aplicada en el centro de masas del elemento finito.

En cuanto al vector $r q$, que es el equivalente a las cargas distribuidas, es necesario considerar lo siguiente. Cada elemento finito para esfuerzo y deformación plana tiene una geometría definida por “n” nodos. Estos “n” nodos, en el caso más simple, generan “n” aristas (un elemento triangular tiene tres nodos y tres aristas). Por lo tanto, sobre un elemento finito plano pueden existir hasta “n” cargas distribuidas $q_c = \{q_{x_c}, q_{y_c}\}$; donde la $c = 1, 2, \dots, n$ se refiere a la arista en cuestión. Para cada carga distribuida se calcula un vector $r q_c$:

$$r q_c = \int_c N_c \cdot \begin{pmatrix} q_{x_c} \\ q_{y_c} \end{pmatrix} dc$$

Por lo tanto el vector $r q$ es [30]:

$$r q = \int_{c \rightarrow 1} N_{c \rightarrow 1} \cdot \begin{pmatrix} q_{x_1} \\ q_{y_1} \end{pmatrix} d(c \rightarrow 1) + \int_{c \rightarrow 2} N_{c \rightarrow 2} \cdot \begin{pmatrix} q_{x_2} \\ q_{y_2} \end{pmatrix} d(c \rightarrow 2) + \dots + \int_{c \rightarrow n} N_{c \rightarrow n} \cdot \begin{pmatrix} q_{x_n} \\ q_{y_n} \end{pmatrix} d(c \rightarrow n)$$

2.3.2.b Elemento Finito Triangular

Un elemento finito triangular simple está formado por tres nodos de dos GDL cada uno, en total 6 GDL: $\{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}$, como se aprecia en la Figura 2.2. Las características

acerca de este elemento en particular para incorporarlas al análisis por elementos finitos se describen en el capítulo 3.3.2, ya que la malla se genera a partir de estos elementos.

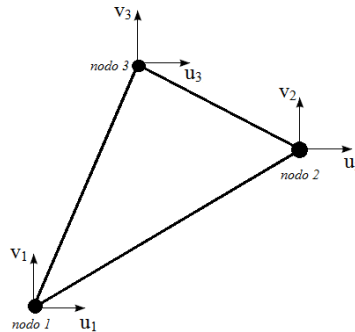


Figura 2.2 Elemento triangular formado por tres nodos y con seis GDL.

2.4 ALGORITMO DE REGLAS EVOLUTIVAS

En 1859, el naturalista Charles Darwin definió el concepto de selección natural como un proceso en el cual se preservan las diferencias individuales favorables y se erradican aquellas que son perjudiciales. El origen de la computación evolutiva (CE), es decir, el estudio de los fundamentos y aplicaciones de ciertas técnicas heurísticas de búsqueda basadas en los principios naturales de la evolución, se establece en los años 1950, con los trabajos de Box [6] en 1957, Friedman [12] en 1959, Bledsoe [5] en 1961, y Bremermann [7] en 1962.

Este campo permaneció en el desconocimiento (ausencia de un computacional), hasta que los trabajos de Rechenberg [24] en 1965, Fogel, Owens y Walsh [10] en 1966, y Holland [14] en 1975 comenzaron a cambiar lentamente este escenario.

El principio de la CE consiste en que una población de individuos evolucione utilizando operadores inspirados en la selección natural y en la variación genética. Históricamente, los principales algoritmos evolutivos desarrollados hasta el momento son: estrategias evolutivas, programación evolutiva, algoritmos genéticos, y programación genética. Además de los cuatro anteriores, existe una gran variedad de técnicas mixtas, tales como: algoritmos messy GA (Goldberg, Korb y Deg, 1989), CHC (Eshelman, 1991), structured



GA (Dasgupta y MacGregor, 1991), breeder GA (Mühlenbein y Schlierkamp-Voosen, 1993), etc. [31].

El algoritmo evolutivo en el cual se basa este trabajo de tesis lleva el nombre de “*Optimización Estructural Evolutiva Bidireccional*”, desarrollado por Xie y Querin, el cual basa su funcionamiento en eliminar el material ineficiente y reforzar las zonas en donde se encuentra el mayor nivel de esfuerzos en la estructura.

2.4.1 Optimización Estructural Evolutiva (ESO)

Como se explicó en el capítulo primero: ESO se basa en, una progresiva y lenta eliminación del material ineficiente de la estructura, la forma (y/o topología) de la misma evoluciona hacia el óptimo. Xie y Steven [34] introdujeron este método, el cual, mediante un criterio de rechazo, elimina una pequeña cantidad de material en cada iteración. En su forma original, el método ESO determina la eficiencia del material, a partir de los esfuerzos en los elementos. Es decir, si un elemento presenta un esfuerzo (generalmente de von Mises) mínimo, el elemento es ineficiente.

Los pasos que definen el método ESO, son:

- 1) Establecer una malla que cubra totalmente el dominio máximo de la estructura que se le permite ocupar.
- 2) Aplicar las cargas y restricciones.
- 3) Establecer todas las propiedades del material.
- 4) Especificar los criterios utilizados para optimizar la estructura. Generalmente, el esfuerzo de *von Mises*.
- 5) Especificar el parámetro con el cual se aplicara ESO, por ejemplo: el esfuerzo máximo o promedio de *von Mises* en el dominio de la estructura.
- 6) Analizar la respuesta de la estructura mediante el Análisis por Elementos Finitos.



- 7) Eliminar los elementos en la estructura que satisfacen la ecuación (1) ESO.

$$\sigma_{vm}^{(e)} \leq RR \sigma_{vm,e}^{max}$$

$$RR = a_0 + a_1 SS + a_2 SS^2 \quad (1)$$

Dónde:

$\sigma_{vm}^{(e)}$	Esfuerzo de <i>von Mises</i> por elemento “e”.
$\sigma_{vm,e}^{max}$	Esfuerzo máximo de <i>von Mises</i> en la malla.
RR	Tasa de rechazo.
a_0, a_1, a_2	Coefficientes determinados a partir de la experiencia con ESO.
SS	Número de óptimos locales.

- 8) Cuando transcurre una iteración y ningún elemento en el dominio del diseño satisface la ecuación, se habrá alcanzado un estado estable local, por lo que se tiene que aumentar en una unidad el valor de SS , en caso de no haber alcanzado la optimización.
- 9) Repetir los pasos 6 al 8, hasta satisfacer el criterio de paro.

El criterio de paro puede ser cualquiera que impulse la optimización de una estructura utilizando el método ESO. El aspecto importante es entender que no importa qué criterio se aplica, el método de ESO no cambia, sólo algunos parámetros.

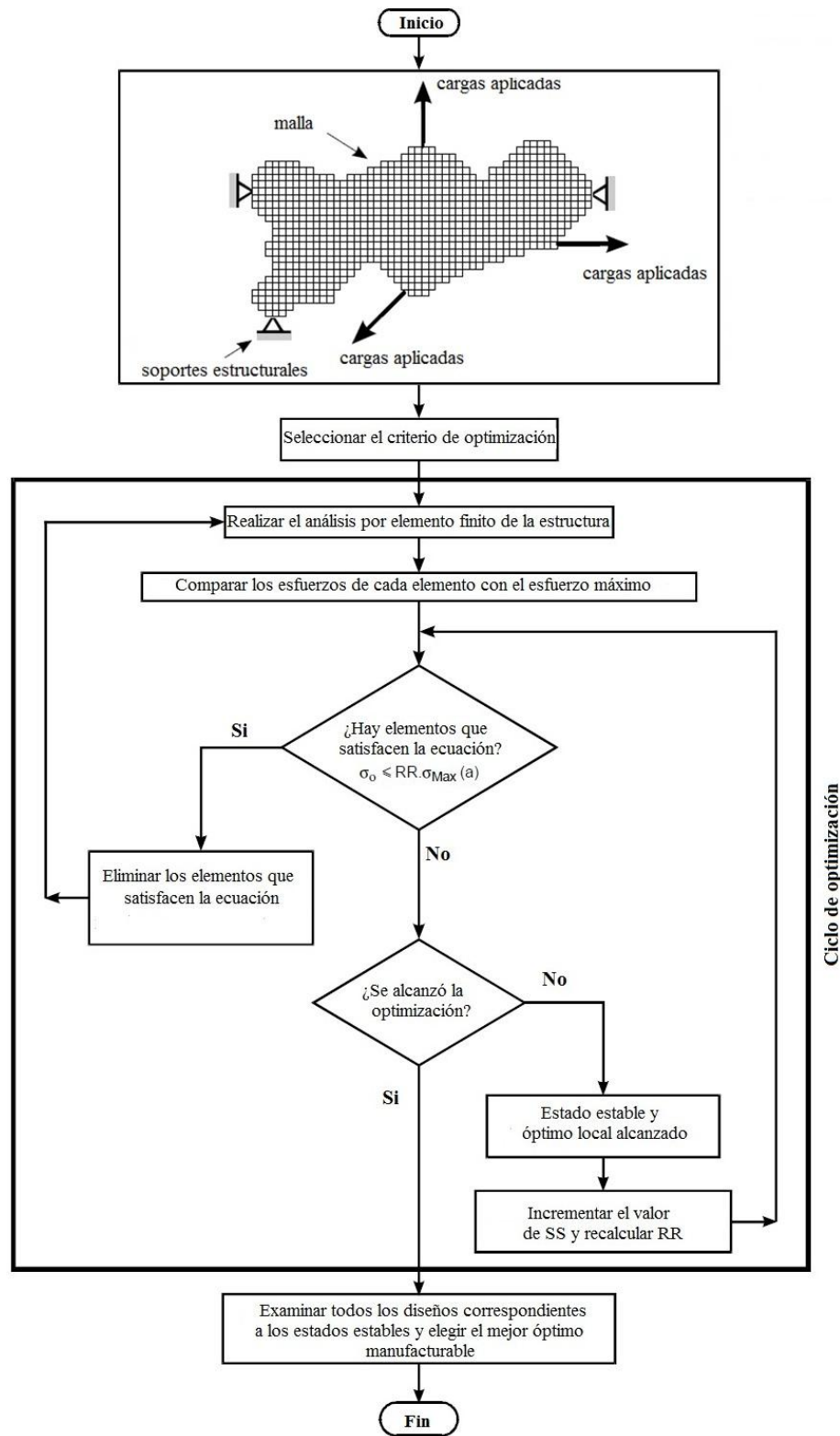


Figura 2.3 Diagrama de flujo que representa la metodología de ESO [22].



2.4.2 Optimización Estructural Evolutiva Aditiva (AESO)

En AESO, los elementos se incorporan en la estructura en aquellas regiones donde resultan necesarios [1], de forma similar a la eliminación de los elementos en el método ESO.

Los pasos que definen el método AESO, son:

- 1) Especificar el volumen máximo que puede ocupar la estructura.
- 2) Dividir el dominio mediante una malla de elementos finitos.
- 3) Aplicar las cargas y restricciones.
- 4) Establecer las propiedades del material.
- 5) Disponer un número de elementos mínimo capaz de conectar los soportes de la estructura con las cargas aplicadas.
- 6) Definir el criterio a optimizar. Generalmente, el esfuerzo efectivo de *von Mises*.
- 7) Analizar la respuesta de la estructura.
- 8) Añadir los elementos que satisfacen la inecuación (2) AESO.

$$\begin{aligned} \sigma_{vm}^{(e)} &\geq IR \sigma_{vm,e}^{max} \\ IR &= a_0 - a_1 SS - a_2 SS^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Dónde

$\sigma_{vm}^{(e)}$	Esfuerzo de <i>von Mises</i> por elemento “e”.
$\sigma_{vm,e}^{max}$	Esfuerzo máximo de <i>von Mises</i> para el elemento “e”.
IR	Tasa de adición.
a_0, a_1, a_2	Coefficientes determinados a partir de la experiencia con AESO.
SS	Número de óptimos locales.

- 9) Si en una iteración no se añaden nuevos elementos, se aumenta en una unidad el valor del número SS .
- 10) Repetir los pasos 7 a 9, hasta satisfacer el criterio de paro.

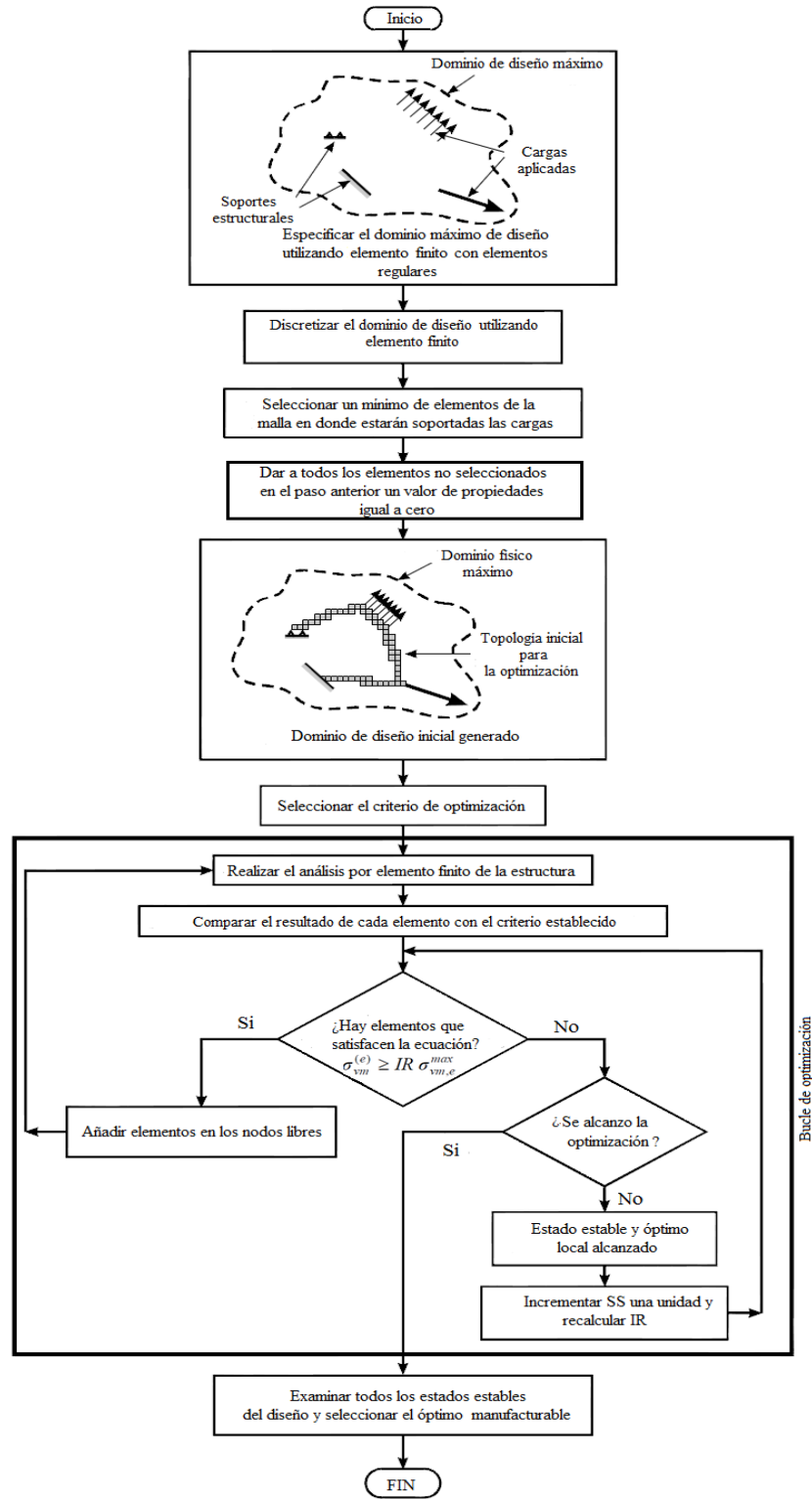


Figura 2.4 Diagrama de flujo que representa la metodología de AESO [22].



2.4.3 Optimización Estructural Evolutiva Bidireccional (BESO)

En BESO los elementos de la estructura pueden ser agregado o quitados. Los procesos de adición y eliminación son llevados a cabo mediante los métodos ESO y AESO.

Los pasos que describen el método BESO, son:

- 1) Especificar el volumen máximo que la estructura puede ocupar.
- 2) Dividir el dominio mediante una malla de elementos finitos.
- 3) Aplicar las cargas y restricciones.
- 4) Establecer las propiedades del material.
- 5) Definir el criterio a optimizar. Generalmente, el esfuerzo de von Mises.
- 6) Llevar a cabo el análisis de elemento finito.
- 7) Eliminar los elementos que satisfacen la inecuación ESO (1), y añadir los elementos que cumplen la inecuación AESO (2).

$$\sigma_{vm}^{(e)} \leq RR \sigma_{vm,e}^{max} \tag{1}$$

$$\sigma_{vm}^{(e)} \geq IR \sigma_{vm,e}^{max} \tag{2}$$

Dónde:

$\sigma_{vm}^{(e)}$ Esfuerzo de von Mises para el elemento “e”.

$\sigma_{vm,e}^{max}$ Esfuerzo máximo de von Mises en la malla.

RR Tasa de rechazo

IR Tasa de adición

$$RR = r_0 + r_1 * SS + a_{RR} * ON$$

$$0 \leq RR \leq 1$$

SS Número de estados estables



ON	Número de estados oscilatorios, un contador lo incrementa en una unidad cada vez que la optimización alcanza un estado de oscilatorio.
r_0	Constante con valor = 0
r_1	Constante determinada con la experiencia de BESO, normalmente es igual a 0.001
a_{RR}	Es una constante de número de oscilación determinada por la experiencia de BESO, normalmente 0.01
IR	Tasa de adición

$$IR = i_0 - i_1 * SS - a_{IR} * ON$$

$$0 \leq IR \leq 1$$

i_0	Constante con valor = 1
i_1	Constante determinada con la experiencia de BESO, normalmente 0.01
a_{IR}	Constante de número de oscilación, determinada por la experiencia de BESO
IR	Tasa de adición

- 8) Si se llega a un estado en donde no hay ningún elemento en el dominio del diseño que satisfacen las ecuaciones (1) y (2), se habrá alcanzado un estado estable. Para continuar con el proceso de optimización el número de estado estable (SS) es incrementa, y se repite el paso 7.



- 9) Si se llega a un estado oscilatorio antes de llegar al criterio de optimización elegido, el valor del estado oscilatorio (ON), se incrementa y se repite el paso 7; Se define como un estado oscilatorio cuando un elemento es adherido y el mismo elemento es removido en la siguiente iteración y sigue este patrón hasta el infinito. El incremento de esta variable cada que se llega a un estado oscilatorio permite que la estructura pueda continuar con su evolución.

- 10) Repetir los pasos del 6 al 9 hasta que el, o los criterios de optimización se alcancen.

En la Figura 2.5 se puede apreciar el algoritmo a seguir del método BESO por medio de un diagrama de flujo.

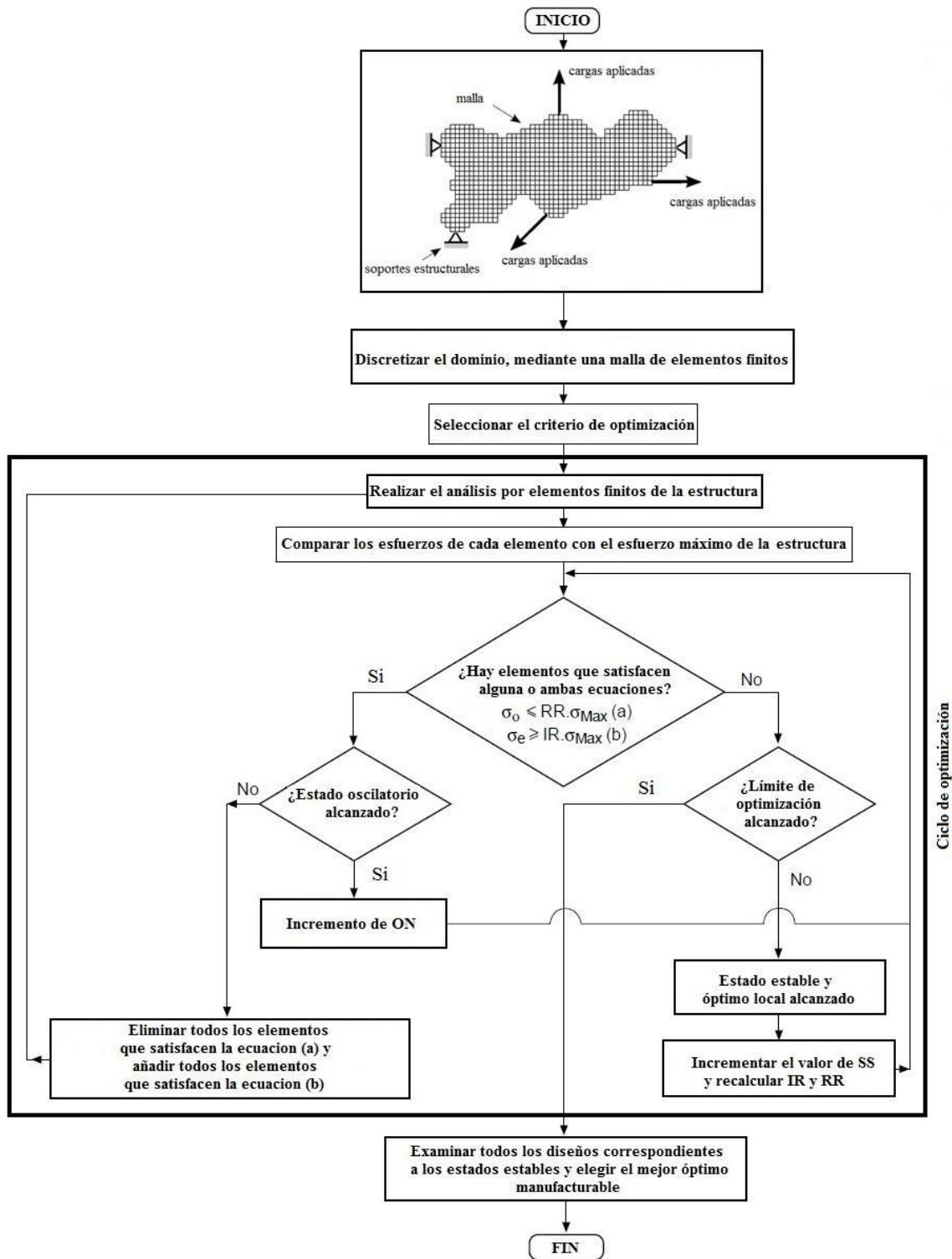


Figura 2.5 Diagrama de flujo que representa la metodología de BESO [22].

Capítulo 3

IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO

3.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo previo, se explican los algoritmos de optimización evolutiva, que son de interés para el desarrollo de esta tesis, además de aspectos importantes para el proceso de optimización. Dichos aspectos deben unirse para generar un proceso propio de optimización.

En este capítulo se describen los diferentes módulos en los que se ha dividido el algoritmo de optimización para este trabajo de tesis.

El módulo de mallado explica de forma breve el algoritmo que se utilizó para la creación de la misma.

El módulo de FEM nos explica cómo se obtienen las ecuaciones para el desarrollo de esta tesis.

Finalmente en el módulo de optimización se muestran los algoritmos de los métodos utilizados en esta tesis.



3.2 MÓDULO DE MALLADO

En un inicio se debe determinar un dominio de diseño, dicho dominio se crea a partir de las medidas de longitud y altura (Figura 3.1).

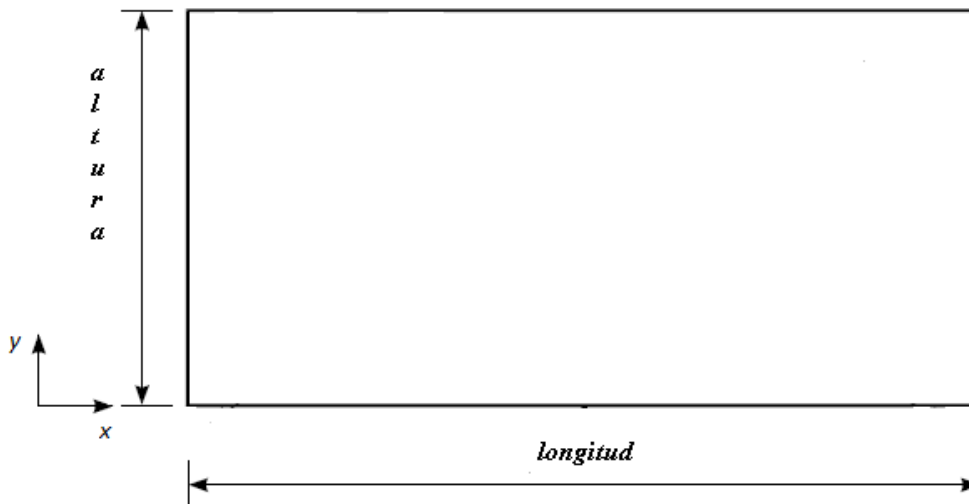


Figura 3.1 Dimensión total del dominio de una estructura.

Para conseguir una nube de nodos primero se divide la longitud y la altura en elementos diferenciales dl y da . De este modo, se puede conocer el número de subdivisiones que se encuentran entre dos nodos, tanto en la dirección “x” al cual se le asignó el nombre de “ ncx ”, como en “y” cuyo nombre asignado es “ ncy ”, esto se logra aplicando las siguientes fórmulas:

$$ncx = \frac{l}{dl} \quad , \quad ncy = \frac{a}{da}$$

Dónde:

l = longitud.

a = altura.

ncx = número de subdivisiones en dirección x.

ncy = número de subdivisiones en dirección y.

dl = elemento diferencial de longitud.

da = elemento diferencial de altura.



El número de nodos que se encuentran en la dirección x (nnx), se puede saber sumando una unidad a ncx , análogamente para saber la cantidad de nodos en el eje y (nnv) se le suma una unidad a ncv .

Al realizar pruebas de papel con diferentes dominios se logró crear una relación con la cual se pudo generar todos los nodos internos del dominio de diseño a partir de los datos antes mencionados, de esta forma la nube de nodos queda como se muestra en la Figura 3.2.

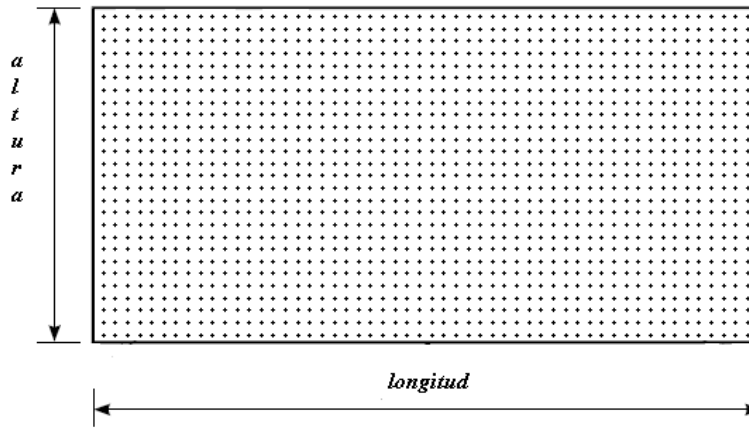


Figura 3.2 Nube de nodos, en un dominio determinado.

Al trasladar todos los nodos a un sistema cartesiano x, y , se puede saber las coordenadas de cada nodo, lo cual facilita el ordenamiento.

A partir de la nube de nodos es necesario dividir el dominio de trabajo en elementos triangulares, dichos elementos se forman a partir de conectividades, la conectividad se generó a partir de un arreglo en donde a cada nodo se le asigna un valor i -ésimo y mediante cierta lógica se determinó la posición de otros nodos j, k, l correspondientes al valor i -ésimo. Dichos valores i, j, k y l nos generan la conectividad.

La Figura 3.3, nos muestra el ordenamiento de los nodos a partir de la asignación de los nombres i, j, k y l . El arreglo de los nombres se proporcionó con un sentido antihorario.

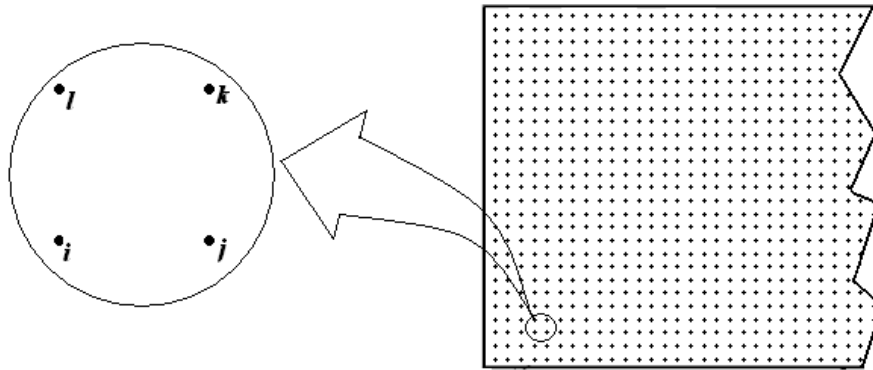


Figura 3.3 Nodos i, j, k, l para determinar la conectividad.

Al realizar este acomodo y con los datos antes obtenidos se puede obtener una relación en donde los nodos j, k, l queden en función del nodo i , de este modo podemos obtener todas las conectividades posibles dentro de nuestro dominio, a partir del nodo i -ésimo. Las conectividades realizadas para este trabajo de son de forma triangular con posiciones encontradas.

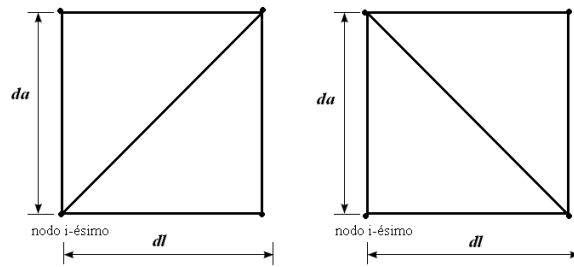


Figura 3.4 Elementos triangulares con posiciones encontradas generadas a partir del nodo i -ésimo.

Las conectividades nos muestran los elementos generados, así como sus dimensiones. De este modo se obtiene un dominio mallado el cual se utilizará para generar estructuras óptimas.

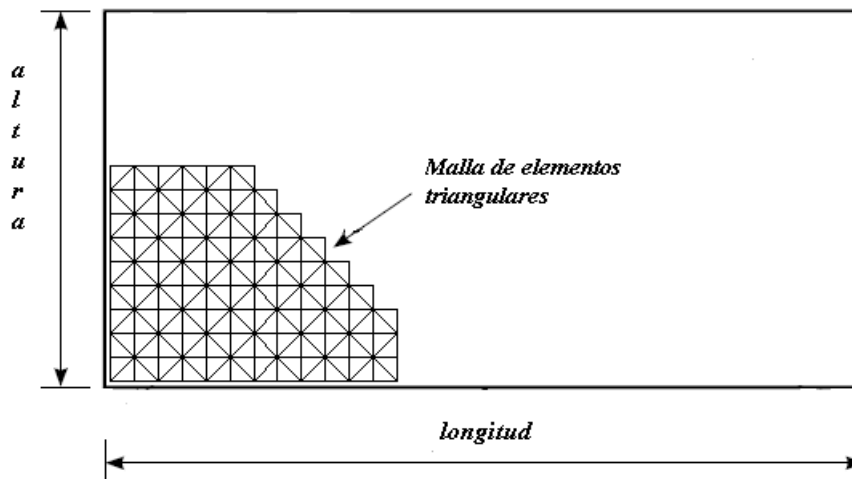


Figura 3.5 Mallado de un dominio estructural

3.3 MÓDULO DE FEM

El FEM es un método ampliamente utilizado debido a su capacidad de aproximación, es utilizado principalmente para resolver problemas ingenieriles. Uno de los factores que han motivado a la gente a utilizar este método se debe a que es un método ampliamente estudiado, además de proporcionar resultados confiables.

3.3.1 Discretización del dominio de solución en una malla Elementos Finitos

La discretización de los elementos finitos se lleva a cabo mediante la malla, antes expuesta.

3.3.2 Desarrollo de las ecuaciones de los elementos finitos para un elemento triangular

Un elemento finito triangular simple está formado por tres nodos de dos GDL cada uno, en total 6 GDL: $\{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}$ (ver apartado 1.7.1.b). Para interpolar estos valores en el dominio del elemento completo, se definen las siguientes funciones de interpolación lineales, las cuales representan planos.



$$N_1 = \frac{1}{2A}(xb_1 + yc_1 + f_1);$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}(xb_2 + yc_2 + f_2);$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}(xb_3 + yc_3 + f_3);$$

Donde; A es el área del triángulo b_i , c_i , f_i , para $i=1, 2, 3$ son las siguientes constantes geométricas del triángulo.

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & b_3 &= y_1 - y_2 \\ c_1 &= x_3 - x_2, & c_2 &= x_1 - x_3, & c_3 &= x_2 - x_1 \\ f_1 &= x_2y_3 - x_3y_2, & f_2 &= x_3y_1 - x_1y_3, & f_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 \\ A &= \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + f_3) \end{aligned}$$

Sustituyendo estas funciones de interpolación en el cálculo de la deformación, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = B^T \cdot d;$$

A su vez, sustituyendo lo anterior al cálculo de la matriz de rigidez:

$$K = h \int \int_A B \cdot C \cdot B^T dA = hA(B \cdot C \cdot B^T);$$



El vector de fuerzas de cuerpo es:

$$r_b = h \int \int_A N \cdot \begin{pmatrix} bx \\ by \end{pmatrix} dA = \begin{pmatrix} h \int \int_A N_1 bx dA \\ h \int \int_A N_1 by dA \\ h \int \int_A N_2 bx dA \\ h \int \int_A N_2 by dA \\ h \int \int_A N_3 bx dA \\ h \int \int_A N_3 by dA \end{pmatrix} = \frac{hA}{3} (bx \ by \ bx \ by \ bx \ by);$$

Cada una de las aristas del triángulo tiene una dirección normal;

$$n_1 = (nx_1 \ ny_1);$$

$$n_2 = (nx_2 \ ny_2);$$

$$n_3 = (nx_3 \ ny_3);$$

Las cargas distribuidas por cada arista, en general se definen en direcciones normal y transversal. Para transformarlas a coordenadas globales (x, y) se realiza el siguiente cálculo para cada una de ellas:

$$\begin{pmatrix} qx_i \\ qy_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nx_i & -ny_i \\ ny_i & nx_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} qn_i \\ qt_i \end{pmatrix};$$

Donde $i=1, 2, 3$; qn_i, qt_i son las cargas distribuidas normal y tangencial de la i -ésima arista, respectivamente como se muestra en la figura 3.6.

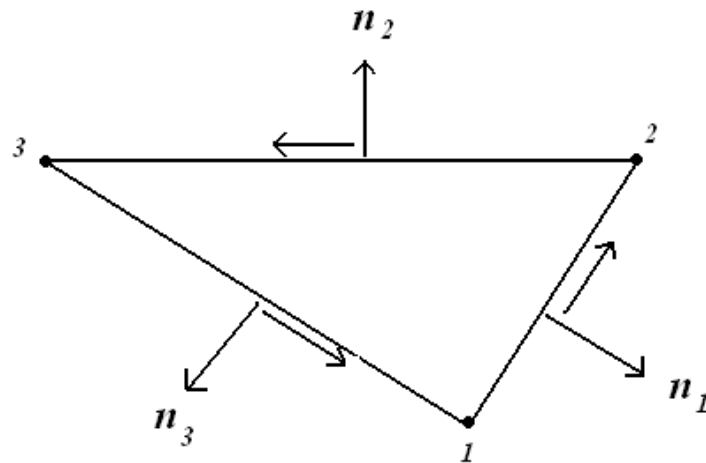


Figura 3.6 Elemento finito triangular con cargas normales y tangenciales en sus aristas.

Para las aristas del triángulo, las funciones de interpolación $N_{c \rightarrow i}$ se definen como:

$$N^T_{c \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} \frac{L_1 - t}{L_1} & 0 & \frac{t}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_1 - t}{L_1} & 0 & \frac{t}{L_1} & 0 \end{pmatrix};$$

$$N^T_{c \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{L_2 - t}{L_2} & 0 & \frac{t}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_2 - t}{L_2} & 0 & \frac{t}{L_2} \end{pmatrix};$$

$$N^T_{c \rightarrow 3} = \begin{pmatrix} \frac{t}{L_3} & 0 & 0 & \frac{L_3 - t}{L_3} & 0 \\ 0 & \frac{t}{L_3} & 0 & 0 & \frac{L_3 - t}{L_3} \end{pmatrix};$$



Con estas funciones se calculan los vectores de carga distribuida

$$rq_1 = \int_c N_{c \rightarrow 1} \begin{pmatrix} qx_1 \\ qy_1 \end{pmatrix} dc \rightarrow 1 = \begin{pmatrix} \int_0^{L_1} \frac{L_1 - t}{L_1} qx_1 dt \\ \int_0^{L_1} \frac{L_1 - t}{L_1} qy_1 dt \\ \int_0^{L_1} \frac{t}{L_1} qx_1 dt \\ \int_0^{L_1} \frac{t}{L_1} qy_1 dt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow rq_1 = \frac{hL_1}{2} = \begin{pmatrix} qx_1 \\ qy_1 \\ qx_1 \\ qy_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Análogamente [30]:

$$rq_2 = \frac{hL_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ qx_2 \\ qy_2 \\ qx_2 \\ qx_2 \end{pmatrix}; \quad rq_3 = \frac{hL_3}{2} = \begin{pmatrix} qx_3 \\ qy_3 \\ 0 \\ 0 \\ qx_3 \\ qy_3 \end{pmatrix}$$



3.3.3 Introducción de las condiciones de frontera.

Como se explicó en el capítulo 1, sección 1.7.1.d, las condiciones de frontera esenciales (CFE) se incorporan directamente en las ecuaciones de los elementos, mientras que las condiciones de frontera naturales (CFN) no son incorporadas directamente en las ecuaciones de los elementos; en la figura 3.4 se muestra un esquema acerca de las CFN y CFE.

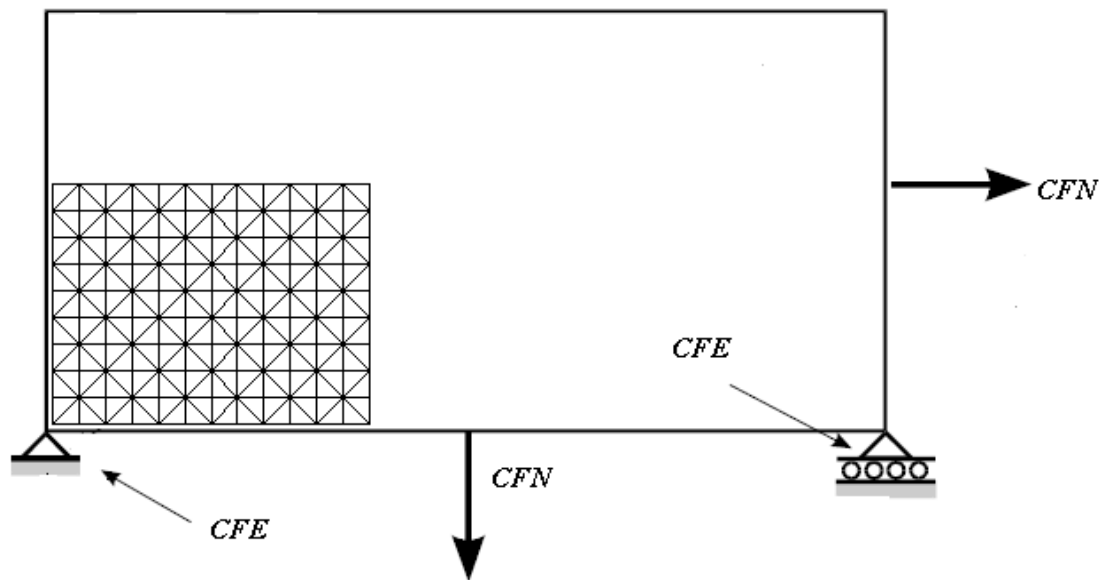


Figura 3.4 Representación de CFN y CFE.

En el ensamble, el proceso asume que los GDL son desconocidos. Sin embargo debido a las condiciones de frontera esenciales algunos de estos grados de libertad deben tener un valor de cero. Por lo tanto, la introducción de las condiciones de frontera esenciales, involucran la sustitución de los valores en el vector de variables nodales. Al introducir estas condiciones de frontera, provoca que el sistema global, es decir el ensamble global, se vea reducido de acuerdo a los valores que se conozcan en las condiciones. Si se conocen los nodos en los cuales se tiene el valor de condición de frontera en ese mismo número se verá reducido el sistema global.



3.3.4 Ensamble de la matriz de rigidez.

Con las ecuaciones obtenidas en el *apartado 3.3.2*, correspondientes a un plano triangular, la inclusión de la matriz “C” de propiedades y los valores constantes de A (área) y h (espesor), se puede calcular la matriz B, necesaria para obtener la matriz de rigidez para cada elemento.

$$k = hABC B^T$$

El ensamble para poder obtener la matriz de rigidez global (*KG*), se genera a partir de las conectividades de cada elemento, dicha conectividad permite posicionar dentro de la matriz de ensamble global a cada grado de libertad con un ordenamiento lógico, así como en el vector de ensamble llamado vector de cargas globales (*vG*). La matriz “*KG*” es una matriz cuadrada de dimensiones $n \times n$, donde:

$$n = 2 * \text{número total de nodos}$$

Al introducir las condiciones de frontera, se traduce como valores de grados de libertad conocidos iguales a cero, por lo que la matriz “*KG*” y el vector de cargas “*vG*” se ven reducidos.

Después del ensamble y de introducir las condiciones de frontera, se puede obtener la solución nodal. Partiendo del sistema general

$$k_{n \times n} d_{n \times 1} = (r_q + r_b)_{n \times 1}$$

3.3.5 Solución del sistema

Para solucionar el sistema, se utiliza el método de solución lineal, es decir, del sistema anterior se despeja el vector de desplazamientos “*d*”. La reducción del sistema implica que



al invertir la matriz de ensamble global, esta tendrá solución. De esta forma se obtiene el valor de los desplazamientos nodales o solución nodal.

$$d = [u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_n v_n]^T$$

3.3.6 Postproceso.

Con el vector de soluciones nodales “ d ”, se puede calcular el desplazamiento para cada elemento, este desplazamiento por elemento, además de las funciones de interpolación “ N_i ”, la matriz “ B ” y la matriz “ C ”, permitirán el cálculo para la determinación de cantidades necesarias para la aplicación del método de optimización como lo son: esfuerzos, deformaciones, desplazamientos, etc.

A partir de los esfuerzos principales se emplea el criterio de resistencia de *von Mises* el cual se emplea cuando se analizan materiales dúctiles. El criterio expresa que: *“el estado límite en un punto de un cuerpo en el que existe un estado de esfuerzos cualquiera comienza cuando la energía de distorsión por unidad de volumen en un entorno de dicho punto es igual a la energía de distorsión absorbida por unidad de volumen, cuando el material alcanza el esfuerzo límite”* [21].

El valor de esfuerzo de von Mises se calcula con la siguiente ecuación:

$$\sigma_{vMi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (-\sigma_1)^2 + 6(\tau_{XY})^2}$$

Este criterio es totalmente acorde con los resultados experimentales obtenidos con materiales dúctiles.



Para poder apreciar el comportamiento de la estructura en forma gráfica, se implementó una rutina de programación en la cual los esfuerzos de *von Mises* son normalizados y comparados, de este modo cada elemento quedará en un rango que va de cero a uno y con la cual podremos discernir mediante una escala llamada RGB, qué color corresponde a cada elemento.

La escala de colores RGB está dividida en cuatro segmentos:

Azul a cian; los elementos que les corresponde este color se encuentran a no más del 25% comparado con el esfuerzo máximo de la estructura.

Cian a verde; estos elementos están dentro de un rango mayor al 25% pero menor al 50% del valor de esfuerzo máximo de la estructura.

Verde a amarillo; estos elementos están en un rango mayor al 50% pero menor al 75% del esfuerzo máximo

Amarillo a rojo; cuyos valores de esfuerzos se encuentran en un rango mayor al 75% y menor al 100% del valor máximo

En la Figura 3.5, se muestra el resultado gráfico de un análisis utilizando el método de elementos finitos, en el cual se aprecia la gama de colores de acuerdo con el valor de esfuerzo correspondiente a cada elemento.

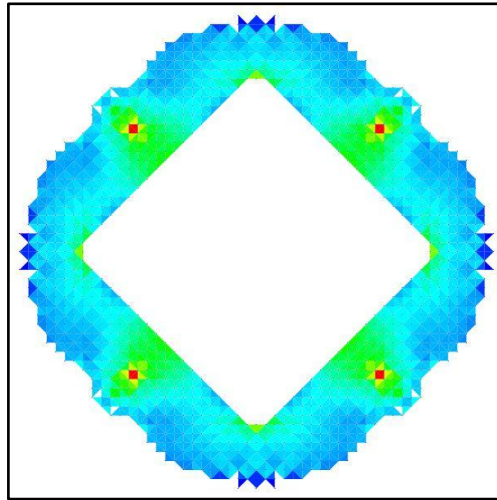


Figura 3.5 Representación gráfica del nivel de esfuerzos mediante una escala RGB.

3.4 MÓDULO DE OPTIMIZACIÓN

Además de usar la técnica BESO para el proceso de optimización topológica, se utilizó el método de *malla fija*, dicho método permite un acoplamiento automático de los grados de libertad en la matriz global, cada que un elemento es añadido o eliminado, por lo que no debe generarse dicha matriz en cada iteración, esto permite reducir el tiempo en el proceso computacional.

El método de malla fija ha sido utilizado en problemas en donde la geometría del objeto cambia durante el proceso de optimización.

Dentro de los aspectos importantes que se considera para el proceso iterativo de eliminación de elementos, es el hecho de comprender lo que conlleva la eliminación de un elemento, es decir, en ocasiones la eliminación de un elemento también implica la eliminación de un nodo (ver Figura 3.6), que a su vez se traduce en la eliminación de dos grados de libertad y la reducción de la matriz de rigidez global, en cualquier caso, ya sea que un nodo sea eliminado o no, el re-ensamble, cuyo ordenamiento se rige por la conectividad, debe de ser preciso.

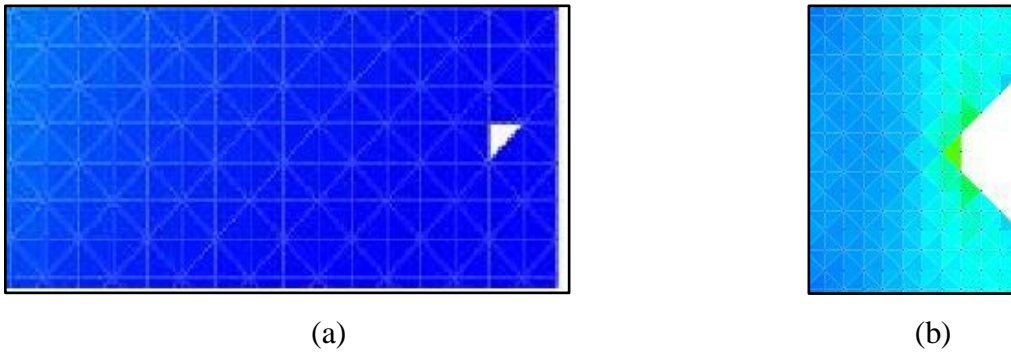


Figura 3.6 (a) Malla con un elemento eliminado y ningún nodo eliminado (b) Malla a la cual se le eliminó elementos y nodos

Para el proceso de adición se debe distinguir cuales elementos que deben ser añadidos. El algoritmo generado, detecta al elemento que requiere de una adición, sin sobre encimar elementos que aún están en la malla, la adición se basa en detectar aquellos elementos que necesiten ser reforzados, mediante una tasa de adición. La cantidad de elemento a añadir por cada elemento se muestra en la Figura 3.7.

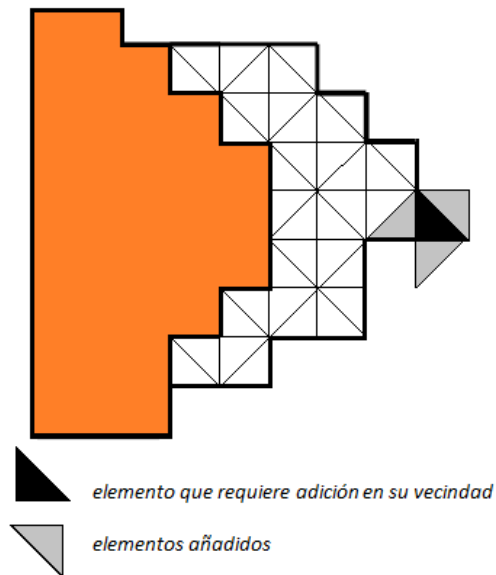


Figura 3.7 Adición de elementos adyacentes a un elemento



Como ya se había mencionado anteriormente, esta tesis basa su algoritmo en los trabajos realizados por Xie y Querin llamado BESO, con un criterio de paro relacionado con el volumen final de la estructura y el esfuerzo máximo.

La tasa de rechazo (RR) y adición (IR), que rigen al proceso tanto de eliminación como de adición, se obtiene mediante ecuaciones que se encuentran en función de varias constantes de diseño, las cuales se les ha asignado un valor de acuerdo a la experiencia de BESO (ver apartado 2.4).

$$RR = r_0 + r_1 * SS + a_{RR} * ON$$

$$IR = i_0 - i_1 * SS - a_{IR} * ON$$

Los valores correspondientes a las variables SS y ON, se calibran de acuerdo al caso de estudio en cuestión.

El criterio de paro definido para los casos de estudio escritos en esta tesis se basa en el volumen. La Figura 3.8 muestra el diagrama de flujo que representa el método BESO.

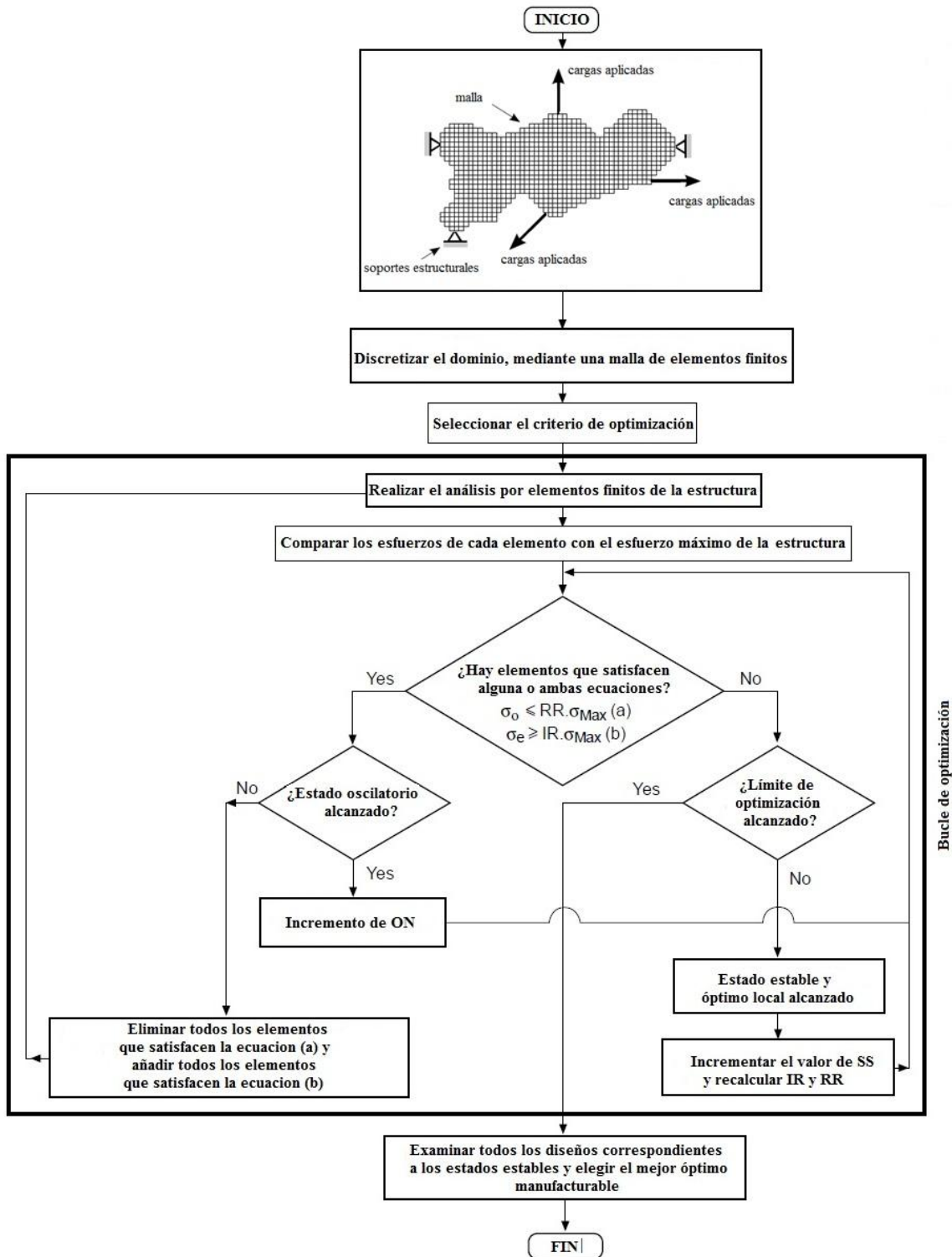


Figura 3.8 Diagrama de flujo del método BESO[22]

Capítulo 4

APLICACIONES Y RESULTADOS

4.1 INTRODUCCIÓN

Los distintos módulos desarrollados en el capítulo tres se han implementado en un algoritmo evolutivo, dicho algoritmo se enfoca a problemas cuyas características cumplen condiciones de deformación plana, aplicando la técnica BESO, si bien ya se ha demostrado la funcionalidad de ESO y AESO, se ha recreado el método con el propósito de desarrollar conocimientos referentes a la optimización estructural con elementos finitos, además de crear una herramienta de computo, útil para el aprendizaje de este tema.

En este capítulo se presentan la aplicación del método a tres casos de estudio diferentes, el criterio de optimización elegido, pretende reducir el volumen y distribuir de mejor forma los niveles de esfuerzo en toda la estructura.

4.2 CASO DE ESTUDIO 1

Se tiene una estructura con dominio de diseño rectangular cuyas dimensiones se muestran en la Figura 4.1. Con un espesor de 1[m], según la teoría de deformación plana, dicha estructura esta soportada por el punto medio de su base y está sometida a una carga distribuida de 2500[N/m] a lo largo de toda la superficie superior, dicha zona también es considerada como una zona de no diseño. El material utilizado es acero con un módulo de elasticidad de 210 [GPa] y un coeficiente de Poisson de 0.3.

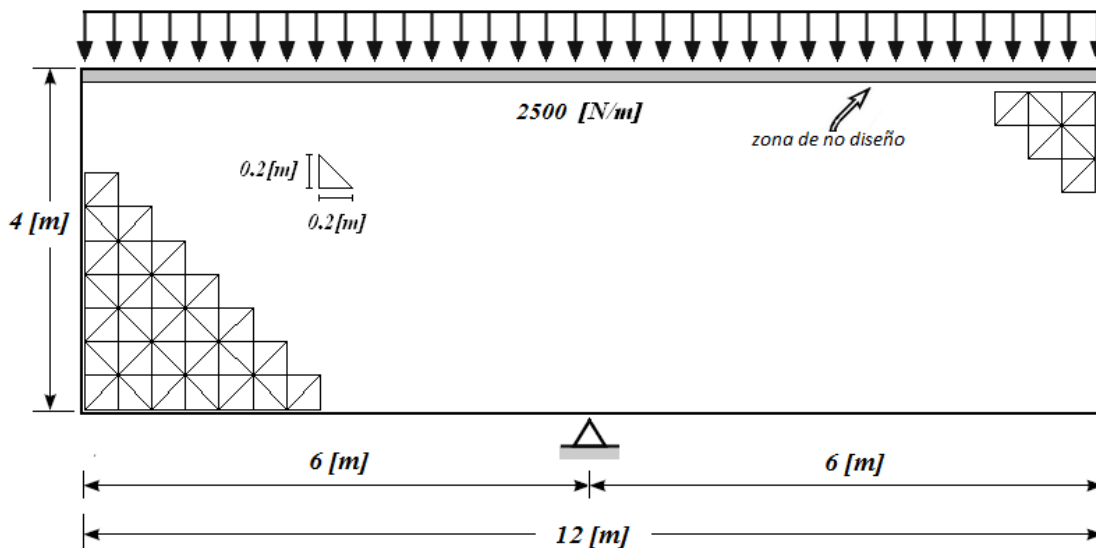


Figura 4.1 Dominio de una estructura tipo puente con una carga distribuida y un soporte.

El dominio de diseño se dividió internamente en 61 x 21 nodos, a partir de los cuales se generó una malla de 2400 elementos triangulares de igual tamaño (0.2[m] de base x 0.2[m] de altura), ver Figura 4.2.

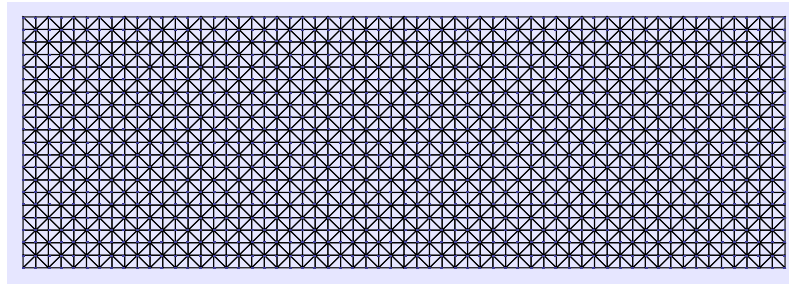


Figura 4.2 Dominio de diseño mallado

La distribución de esfuerzo de la estructura, generada por el FEA de esta tesis se muestra en la Figura 4.3.

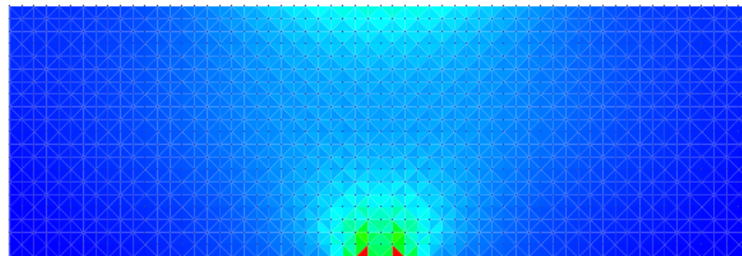
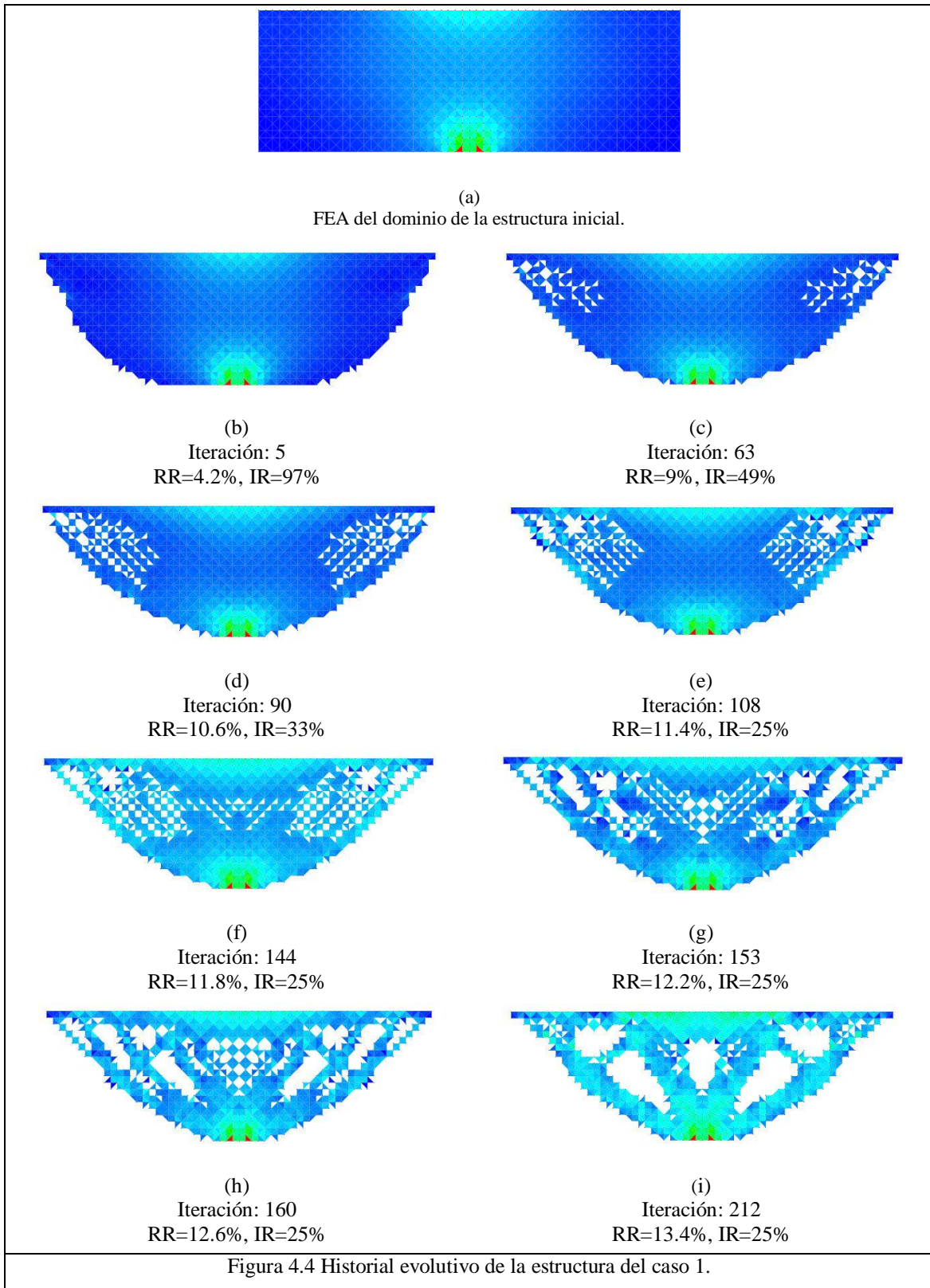


Figura 4.3 FEA aplicado al dominio del modelo de diseño del caso 1

El proceso evolutivo para este caso de estudio según la teoría de BESO inicio con un valor de tasa de rechazo $RR = 0.04$, y un valor de tasa de adición $IR = 0.99$.

Para este caso de estudio se ha planteado como función objetivo, la reducción del volumen de por lo menos el 54% del volumen inicial, sin embargo se ha tomado en cuenta un criterio de paro adicional que consiste en no sobrepasar el esfuerzo de fluencia.

En la Figura 4.4 (b-i) se muestra los diseños óptimos, más representativas que han ido surgiendo durante la optimización. Cada diseño representa un estado estable además de su correspondiente tasa de rechazo y adición. Como se mencionó anteriormente el material ineficiente es removido de la estructura, mientras que los elementos con mayor nivel de esfuerzo son reforzados adicionando material alrededor de éstos. El resultado final se muestra en la Figura 4.4 (i).





En el gráfico de la Figura 4.5, se muestra el comportamiento del esfuerzo máximo, se puede apreciar el aumento de dicho esfuerzo en algunas iteraciones, esto implica un concentrador de esfuerzos que se hace presente en algunas topologías.

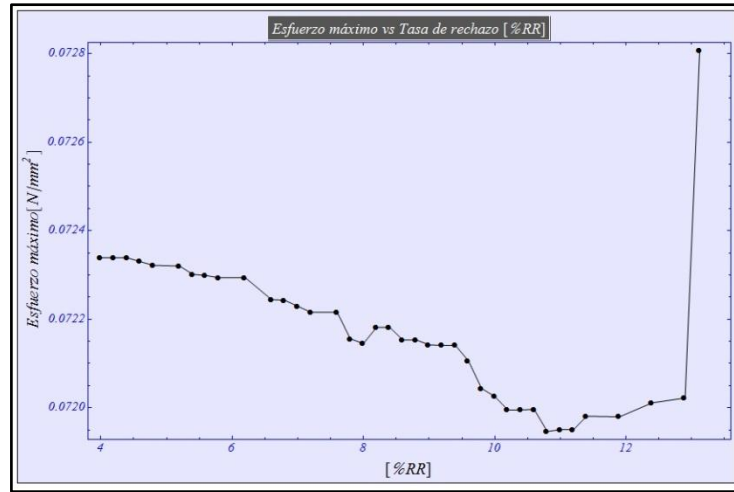


Figura 4.5 Gráfico del esfuerzo máximo vs tasa de rechazo.

El gráfico correspondiente al esfuerzo promedio contra el porcentaje de tasa de rechazo nos muestra la tendencia de aumento en el esfuerzo promedio, debido a una mejor distribución de esfuerzos en la estructura (Figura 4.6).

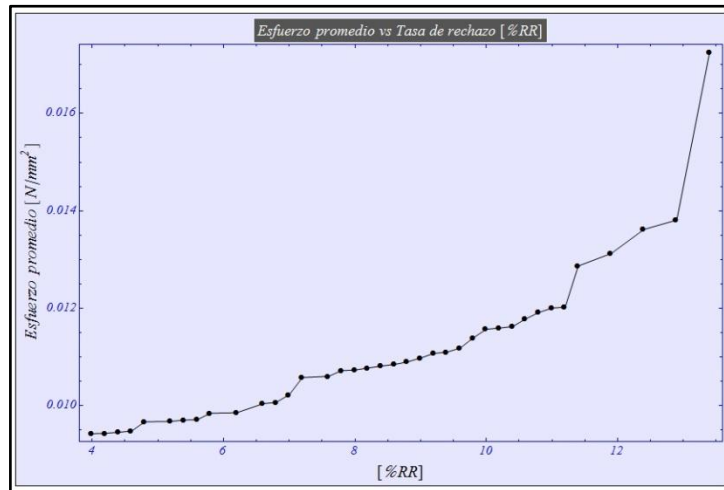


Figura 4.6 Gráfico del esfuerzo promedio vs tasa de rechazo.



Para generar una idea más clara de lo que pasa con el volumen, se genera un gráfico en donde el eje de las ordenadas representa a la fracción de volumen a lo largo de las iteraciones, es decir, se toma el volumen en cada iteración y se divide entre el volumen original (V/V_0), el eje de las abscisas representa al porcentaje de tasa de rechazo.

El historial evolutivo del volumen se muestra en la Figura 4.7. La Tabla 4.1 compara los niveles de esfuerzo: máximo y promedio en el dominio inicial rectangular de la estructura correspondientes a la Figura 4.4(a), con la estructura optimizada mostrada en la Figura 4.4(i).

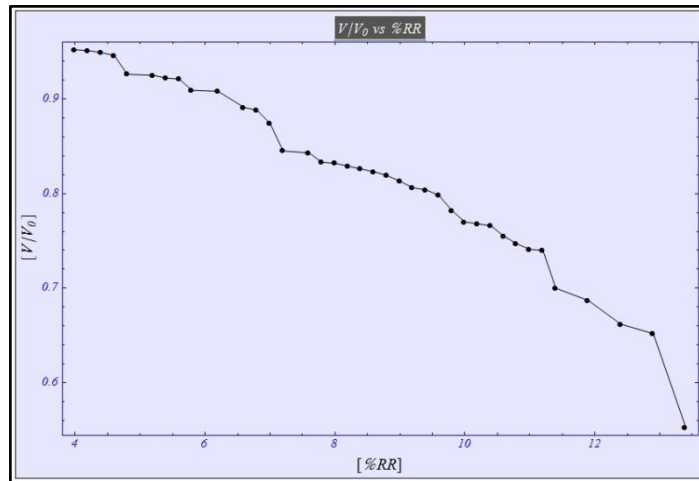


Figura 4.7 Historial de la fracción de volumen vs la tasa de rechazo para el diseño del caso 1

Tabla 4.1 Comparación entre el diseño inicial rectangular de la Figura 4.4(a) y el diseño optimizado de la figura 4.4(i)

	$\sigma_{max}^{VM} [N/mm^2]$	$\sigma_{promedio}^{VM} [N/mm^2]$	Volumen[m ³]	V/V ₀
Modelo inicial	0.072338	0.007537	48	1
Diseño optimizado	0.073880	0.016732	22.04	0.46

Comparando el modelo inicial con el diseño final se puede apreciar que el esfuerzo promedio se incrementó, mientras que al mismo tiempo el total del volumen de la estructura sufrió un decremento del 54% del volumen original.

4.3 CASO DE ESTUDIO 2

En este ejemplo se muestra las dimensiones máximas que podría tener un MBB Aircraft Support Beam, dichas dimensiones se pueden observar en la Figura 4.8, así como también se aprecian las restricciones y una carga puntual de 200[N] en el punto medio superior de la estructura. El material que se utilizó fue un acero con un módulo de elasticidad $E=210[\text{GPa}]$ y un coeficiente de Poisson de $\nu=0.3$. El espesor de acuerdo con la teoría de deformación plana corresponde a 1[m].

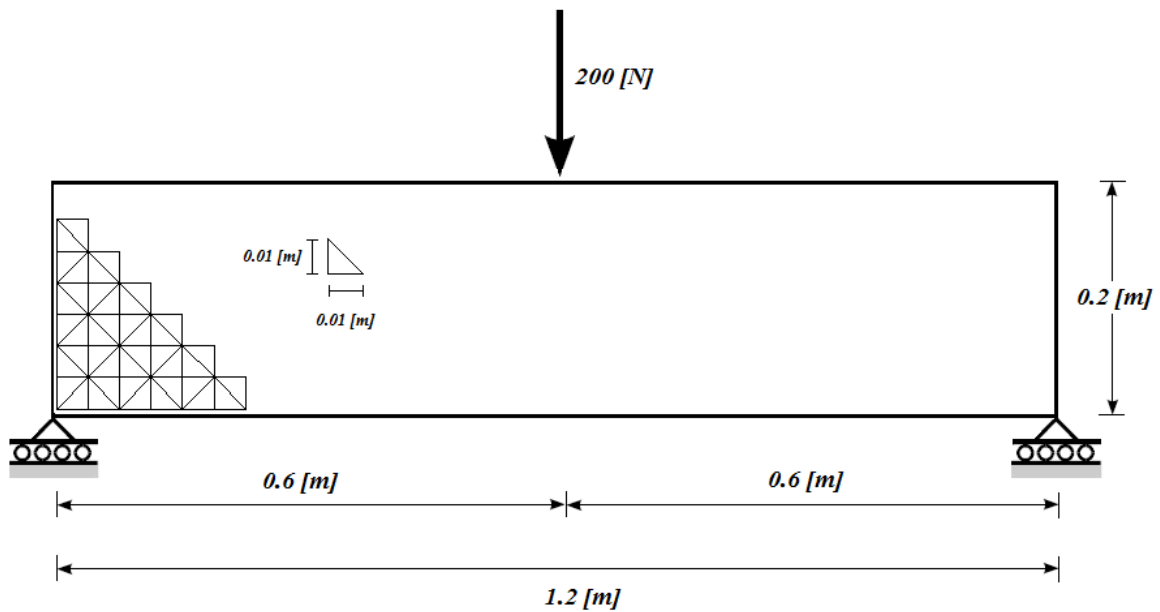


Figura 4.8 Dominio de diseño inicial de MBB aircraft support beam.

El dominio de diseño de la Figura 4.8 se dividió en 121 x 21 nodos, generando un total de 4800 elementos triangulares del igual tamaño (0.01[m] de base x 0.01[m] de altura), ver Figura 4.9.

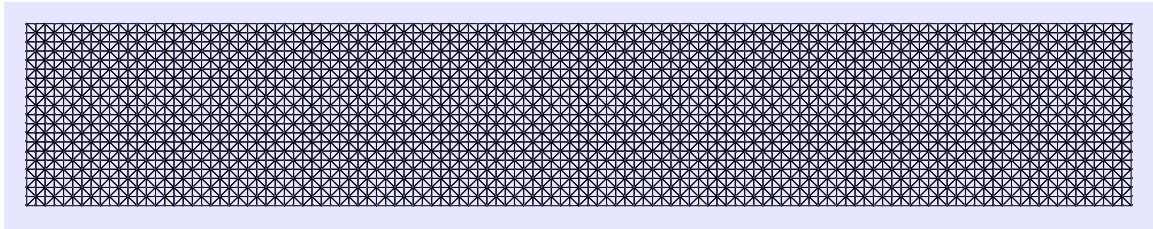


Figura 4.9 Dominio de diseño mallado para el caso 2

La Figura 4.10 muestra el resultado del FEA, aplicada a este modelo.

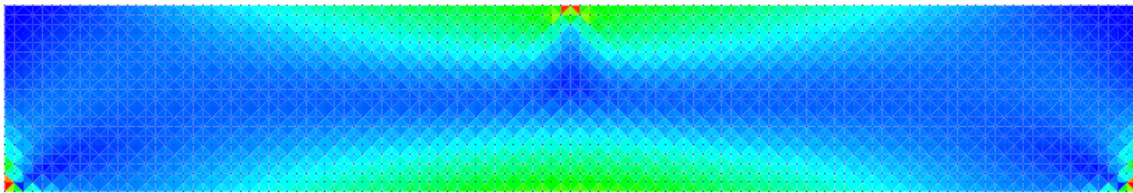


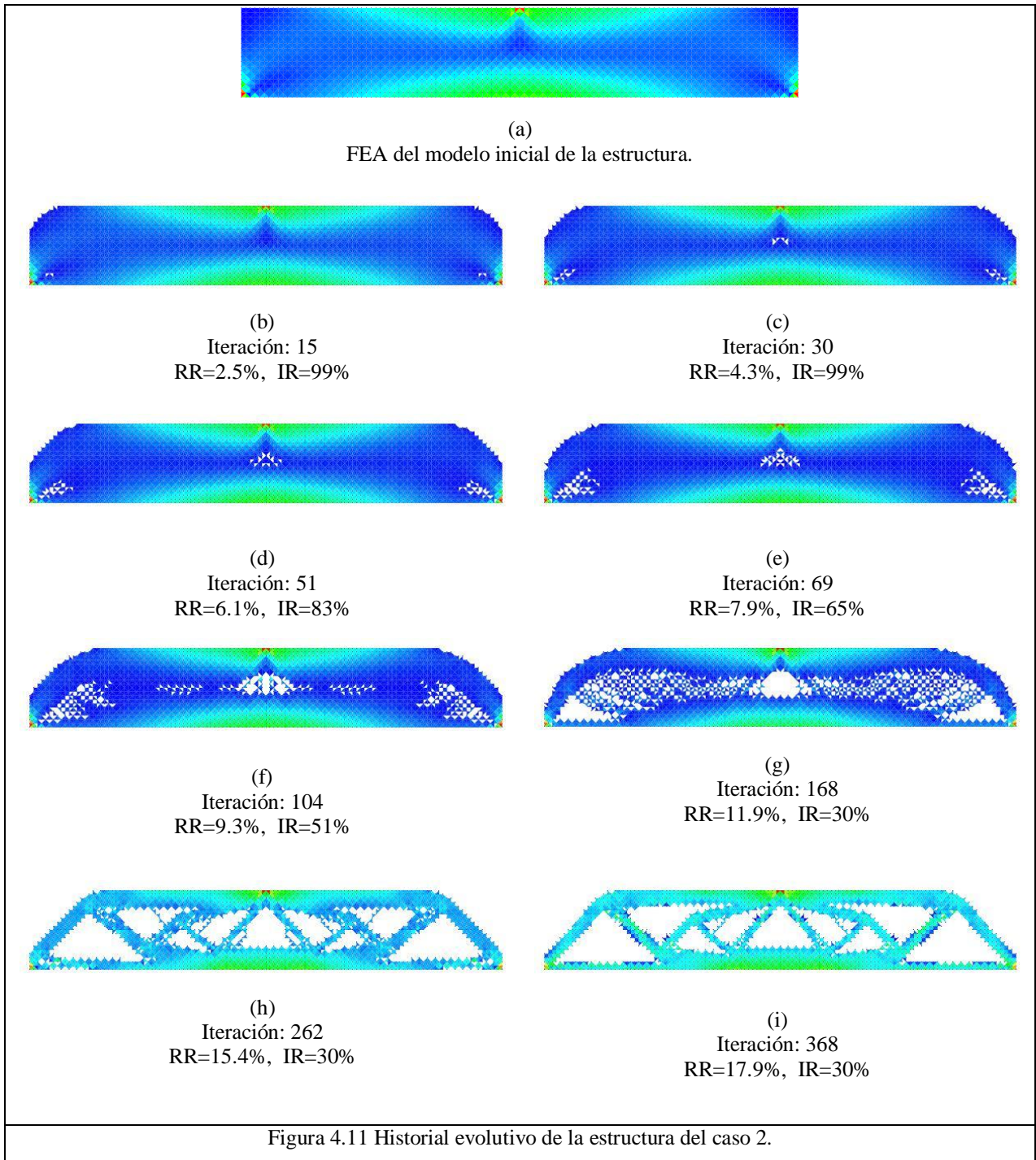
Figura 4.10 FEA aplicado al modelo de diseño del caso 2

El proceso evolutivo para este caso de estudio se inició con un valor de $IR = 0.003$ y un valor de $IR = 0.99$.

El criterio de paro definido para este caso de estudio fue el volumen (se requiere diseño topológico con un volumen cercana al 50% del volumen inicial).

En la Figura 4.11 (b-i) se muestra el historial evolutivo de los diferentes diseños de la estructura que han ido surgiendo a lo largo de la optimización. Cada diseño representa un estado estable, además se puede apreciar el valor correspondiente al número de iteración, valor de RR y valor de IR .

El diseño final se muestra en la Figura 4.11 (i).



El historial evolutivo del esfuerzo máximo y esfuerzo promedio se puede apreciar individualmente con los siguientes gráficos.

En el gráfico de la Figura 4.12, se puede observar que el esfuerzo máximo tiende a aumentar brevemente en las primeras iteraciones y posteriormente el aumento es mayor.

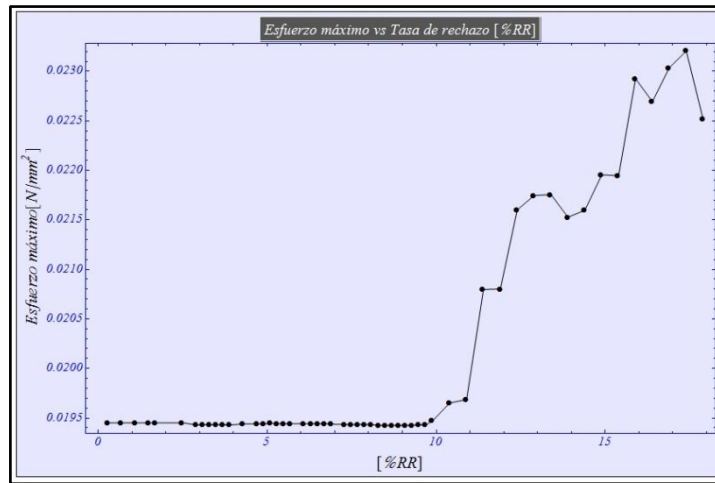


Figura 4.12 Gráfico del esfuerzo máximo vs tasa de rechazo.

En cuanto el nivel de esfuerzo promedio se puede observar en la Figura 4.13, que el aumento de esfuerzo promedio aumenta, debido a una mejor distribución de esfuerzos en la estructura.

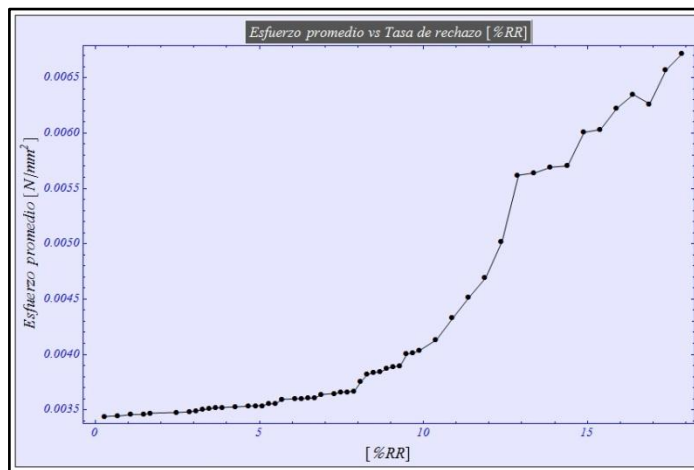


Figura 4.13 Gráfico del esfuerzo promedio vs tasa de rechazo.



El historial de la reducción del volumen se muestra en la Figura 4.14.

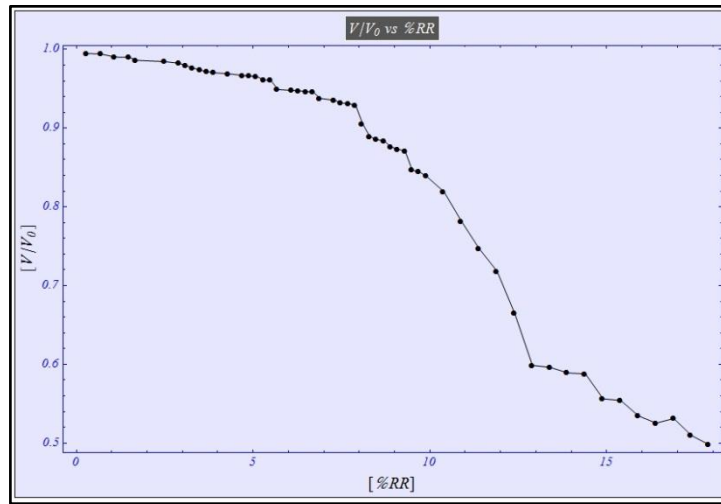


Figura 4.14 Historial de la reducción del volumen para el diseño del caso 2

La Tabla 4.2 compara los niveles de esfuerzo: máximo y promedio en el dominio inicial rectangular de la estructura correspondientes a la Figura 4.11(a), con la estructura optimizada mostrada en la Figura 4.11(i), además de la comparación de los volúmenes inicial y final.

Tabla 4.2 Comparación entre el diseño inicial rectangular de la Figura 4.11(a) y el diseño optimizado de la figura 4.11(i)

	$\sigma_{max}^{VM} [N/mm^2]$	$\sigma_{promedio}^{VM} [N/mm^2]$	Volumen[m ³]	V/V ₀
Modelo inicial	194.51	34.24	0.24	1
Diseño optimizado	225.15	67.20	0.119	0.49

Comparando el modelo inicial con el diseño final se puede apreciar que el esfuerzo promedio se incrementó de 34.24 [N/mm²] a 67.20 [N/mm²] (incremento del 96.2%), mientras que al mismo tiempo el total del volumen de la estructura sufrió un decremento del 51% del volumen original.

4.4 CASO DE ESTUDIO 3

Se le aplica una presión interna de 1.6 [MPa] a un tubo sujeto de cuatro puntos como se muestran en la Figura 4.15, El material usado fue acero cuyo módulo de elasticidad es de $E=210$ [GPa] y un coeficiente de Poisson de $\nu=0.3$, El espesor de acuerdo a la teoría de deformación plana corresponde a 1[m]. El dominio se discretizó con una malla 2462 nodos, los cuales generan elementos finitos triangulares de igual tamaño (0.0025 de base x 0.0025 de altura [m]), generando un total de 4680 elementos.

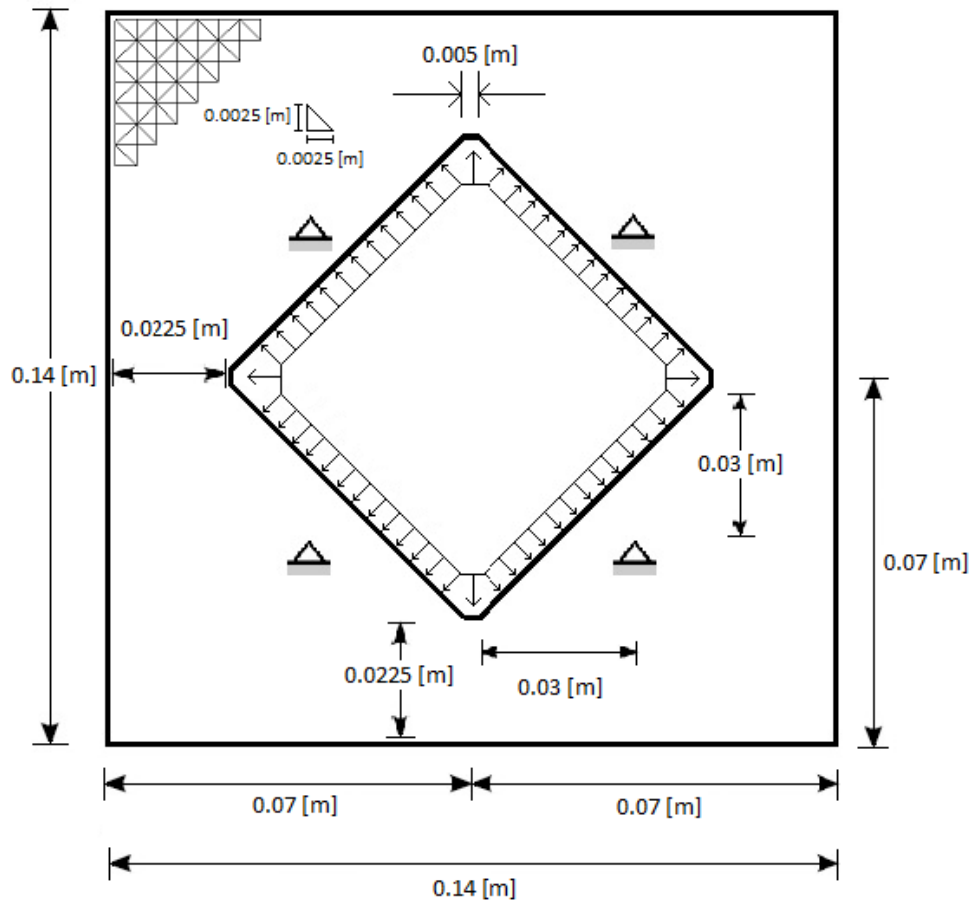


Figura 4.15 Dominio de diseño correspondiente a un tubo sometido a presión interna.



En la Figura 4.16, se muestra el resultado del FEA, aplicado al modelo del caso 3.

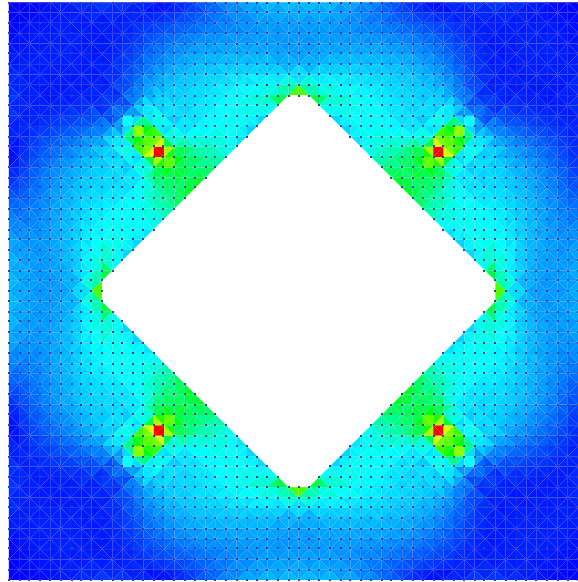


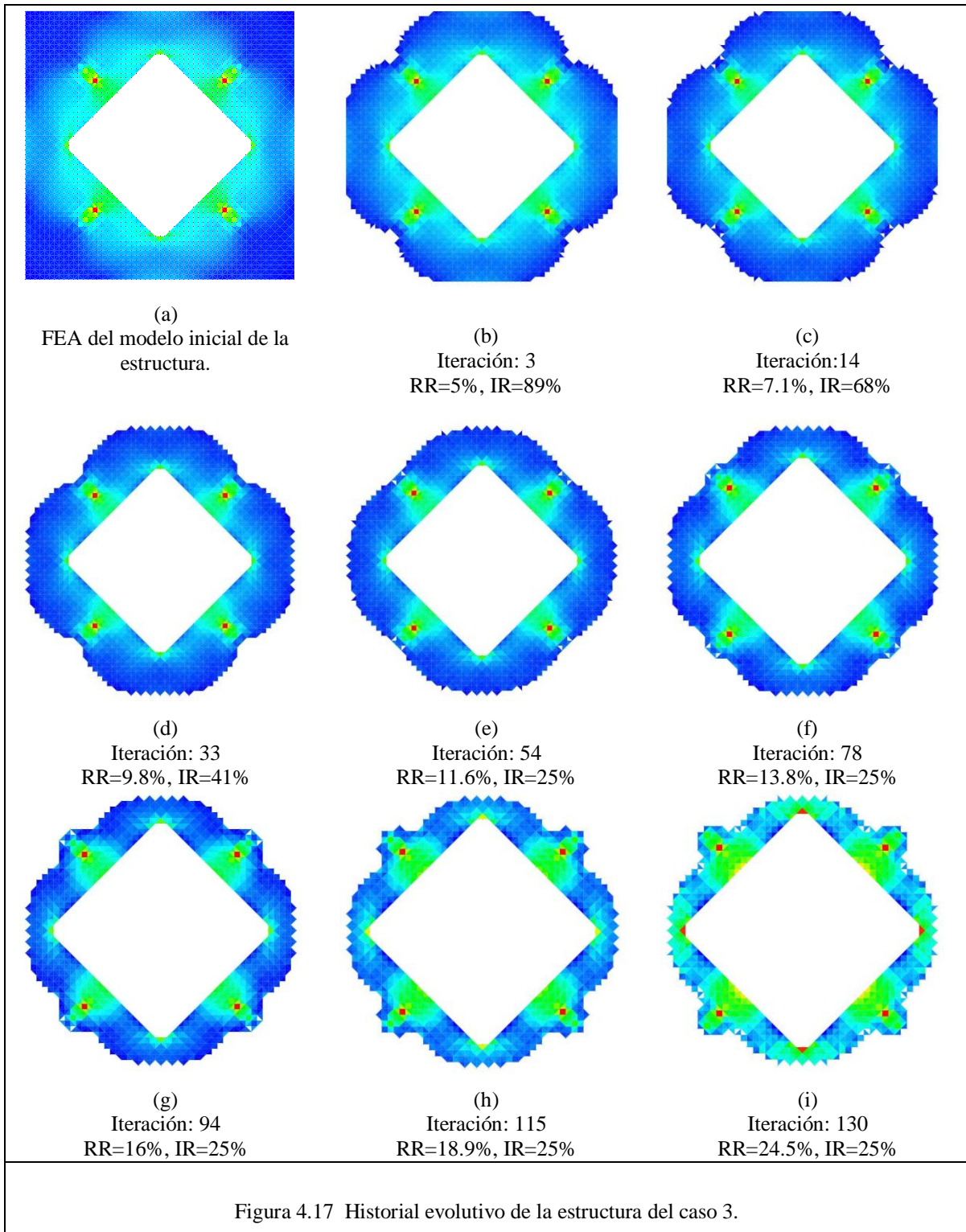
Figura 4.16 FEA aplicado al modelo del caso 3

El proceso evolutivo para este caso de estudio se inició con un valor de $RR= 0.05$, y un valor de $IR = 0.99$.

El criterio de paro definido para este caso de estudio fue el volumen (se requiere una reducción cercana al 74% del volumen inicial).

En la Figura 4.17 (b-i) se muestra el historial evolutivo de los diferentes diseños de la estructura, que han ido surgiendo a lo largo de la optimización. Para cada diseño se puede apreciar el valor correspondiente al número de iteración, valor de RR y valor de IR .

La condición de volumen se cumple en la iteración número 130 y el diseño final corresponde a la Figura 4.17 (i).



El historial evolutivo del esfuerzo máximo y esfuerzo promedio correspondiente a las iteraciones a lo largo de la optimización se muestra en el gráfico de la Figura 4.18 y 4.19. El historial de la reducción del volumen se muestra en la Figura 4.20. La Tabla 4.3 compara los niveles de esfuerzo: máximo y promedio, así como la cantidad de volumen, del dominio inicial rectangular de la estructura correspondientes a la Figura 4.15(a), con la estructura optimizada mostrada en la Figura 4.15 (i),

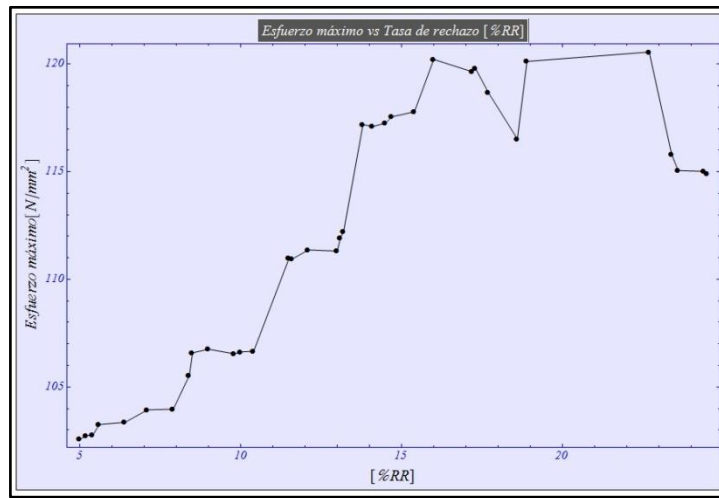


Figura 4.18 Gráfico del esfuerzo máximo vs tasa de rechazo.

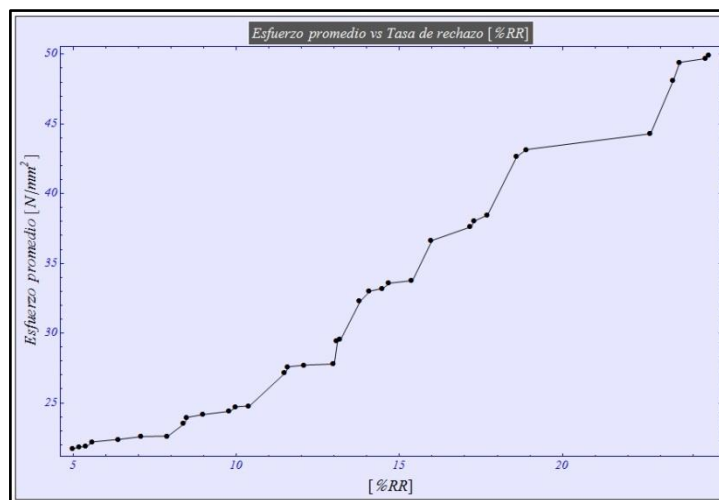


Figura 4.19 Gráfico del esfuerzo promedio vs tasa de rechazo.

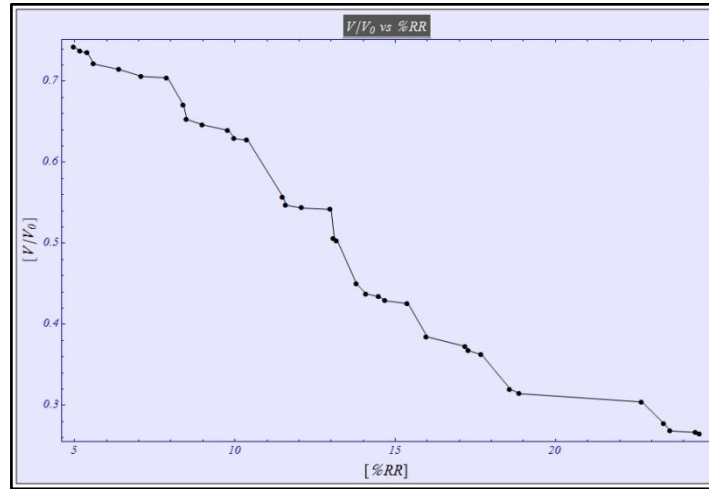


Figura 4.20 Historial de la reducción del volumen para el diseño del caso 3

Tabla 4.3 Comparación entre el diseño inicial rectangular de la Figura 4.17 (a) y el diseño optimizado de la figura 4.17 (i)

	$\sigma_{max}^{VM} [N/mm^2]$	$\sigma_{promedio}^{VM} [N/mm^2]$	Volumen[m ³]	V/V ₀
Modelo inicial	102.5	16.7	0.014625	1
Diseño optimizado	114.9	49.95	0.003875	0.2649

Comparando el modelo inicial con el diseño final podemos apreciar que el esfuerzo promedio se incrementó de 16.7 [N/mm²] a 49.95 [N/mm²], mientras que al mismo tiempo el total del volumen de la estructura sufrió un decremento del 73.5% del volumen original, muy cercano al impuesto inicialmente.



Resultados

Los resultados de los casos expuestos en esta tesis muestran la correcta implementación del análisis por elementos finitos, el concepto de malla fija y la aplicación de reglas evolutivas.

La tasa de rechazo, adición y el tamaño de elemento, son parámetros que el diseñador puede calibrar, dichos parámetros repercuten en las optimizaciones realizadas, es por ello que la correcta manipulación del valor de inicio de RR y de IR pueden ser un caso de estudio particular para poder automatizar de forma completa el programa de acuerdo al tipo de estructura que se desee optimizar.

El utilizar condiciones de simetría proporciona resultados semejantes comparados con el análisis de estructuras completas.

Los números de nodos, elementos y los tiempos de optimización para cada uno de los tres casos se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 4.4 Números de nodos, elementos y tiempo de optimización

	Número de nodos	Número de elementos	Tiempo de optimización (horas)
Caso 1	1281	2400	2
Caso 2	2541	4800	8.5
Caso 3	2462	4680	5.58

Las pruebas de los diferentes casos de estudio, fueron realizadas en una computadora con las siguientes características: Windows7[®], Procesador Intel Core Duo 3.16 GHz[®], 8 GB de memoria RAM, y el paquete comercial: Mathematica 7[®].



CONCLUSIONES

En base a lo aprendido a los objetivos buscados se puede concluir lo siguiente:

- Se logró generar una malla bidimensional en un dominio establecido.
- El desarrollo del algoritmo que elimina y añade elementos cumplió su función exitosamente
- Se implementó la relación de los elementos triangulares con las ecuaciones de deformación plana.
- Se implementó con éxito el método de los elementos finitos.
- Se logró la implementación de malla fija al proceso evolutivo de optimización, con lo cual, el tiempo de procesamiento computacional se redujo.
- Se obtuvo topologías óptimas correspondientes a los casos de estudio.

Además:

- Los ejemplos presentados en esta tesis demuestra que el método de malla fija proporciona estimaciones fiables de las deformaciones y los esfuerzos.
- Al implementar las reglas evolutivas basadas en los resultados de cada análisis por elementos finitos, podemos ver que la estructura tiende a homogeneizar el valor de sus esfuerzos.
- La reducción del volumen y la mejor distribución de esfuerzos en el diseño final son un buen indicativo que presentaron todos los casos de estudio.
- Se comprueba que el método ESO es una forma confiable para obtener estructuras óptimas.
- ESO se puede modificar dependiendo de los tipos de problemas que se quieran analizar.
- Las estructuras óptimas mejoran cuantiosamente al utilizar el método BESO, es decir la combinación del método ESO con AESO.



- El tiempo que lleva cada optimización es corto y depende de la complejidad de la estructura.

El desarrollo de esta tesis contribuye significativamente al entendimiento y desarrollo, referentes al diseño mecánico óptimo, las cuales tienen por objetivo ser la base para entender e implementar las diversas técnicas de optimización.

TRABAJOS A FUTURO.

A partir del estudio del diseño mecánico óptimo en la facultad de ingeniería, se abren las puertas para poder aprender técnicas de diseño óptimo, las cuales se utilizan cada vez más a nivel industrial.

Esta tesis aporta parte de la información que servirá a futuras generaciones para el entendimiento de los procesos de optimización.


Dentro de los trabajos a futuro están.


- Buscar diferentes estrategias para mejorar la malla.
- Considerar otros tipos de restricciones.
- Ampliar las metodologías desarrolladas al proceso de optimización de estructuras tridimensionales.
- Implementar otros tipos de variables de diseño que pueden intervenir en la optimización de una estructura.




Referencias

- [1] BATTAGLIA L., CARDONA A., “Aplicación de métodos de optimización de Forma en el Diseño Estructural”, Revista Mecánica Computacional, Vol. XXI, Argentina 2002, pp. 2804-2823.
- [2] BENDSØE M.P., KIKUCHI N., “Topology and Generalized Layout Optimization of Elastic Structures”. Topology Design of Structures 1993.
- [3] BERN, M., EPPSTEIN, D., “Mesh generation and optimal triangulation”, <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/pubs/BerEpp-CEG-95.pdf> [citado 23 Enero de 2008.
- [4] BHATTI, M. ASGHAR, “Fundamental Finite Element Analysis and Applications”, 2ª ed., Ed. John Wiley & Sons Inc., USA 2005, pp. 3-675.
- [5] BLEDSOE W.W., “The use of biological concepts in the analytical study of systems”. ORSA-TIMS National Meeting: San Francisco, 1961.
- [6] BOX G., “Evolutionary operation: A method for increasing industrial productivity”. Journal of the Royal Statistical Society 1957; 6(2): 81-101.
- [7] BREMERMAN H.J., “Optimization through evolution and recombination. Self-Organizing” Systems. Yovits MC, Jacobi GT, Goldstein GD, eds. Spartan Books, 1962.
- [8] CERVERA E., TREVELYAN J., “Evolutionary structural optimization based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms” School of Engineering University of Durham, February 2005.
- [9] ESPINOLA J. E., ASÍS M. E., “Generación Automática de Mallas Triangulares con Control de Error y Aplicaciones en la Industria”, Paper, Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo, pp. 1-5.

-
- 
- [10] FOGEL L. J., OWENS A. J., WALSH M. J., “Artificial intelligence through simulated evolution”. Wiley: New York, 1966.
- [11] FRANCAVILLA A., RAMAKRISHNAN C.V., ZIENKIEWICZ O.C., “Optimization of Shape to Minimize Stress Concentration”, Journal of Strain Analysis 1975; 10: 63-70.
- [12] FRIEDMAN G.J., “Digital simulation of an evolutionary process”. General Systems Yearbook 1959; 4: 171-184.
- [13] GARCIA M.J., STEVEN G.P., “Fixed grid finite elements in elasticity problems”, Finite Element Analysis Research Centre, Aeronautical Engineering Department, The University of Sydney, Australia.
- [14] HOLLAND J.H., “Adaptations in natural and artificial systems”. University of Michigan Press: Ann Arbor, 1975.
- [15] LEGRAND, S., LEGAT, V. ANDDELEERSNIJDER, E., “Delaunay mesh generation for an unstructured-grid ocean general circulation model, Ocean Modelling”, 2,17-28, 2000.
- [16] LOZANO D., “Optimización Estructural Evolutiva: Diseño de Cavidades Internas en Elementos Planos ” Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Enero 2010.
- [17] MARTÍ P., Aplicación de las Técnicas de Optimización en el Diseño de Estructuras Ligeras para Grandes Luces, pp. 2.
- [18] MARTINEZ, P., “Diseño Óptimo Simultaneo de Topología y Geometría de Estructuras Articuladas mediante Técnicas Evolutivas”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cartagena, Julio 2003, pp. 37-241.
- [19] MATTECK C, BURKHARDT S. “A New Method of Structural Shape Optimization Based on Biological Growth”. Int. Journal of Fatigue 1990; 12(3): 185-190.

-
- 
- [20] ODA J., "On a Technique to obtain an Optimum Strength Shape by the Finite Element Method". Bulletin of the JSME 1977; 20:160-167.
- [21] ORTIZ L., "Resistencia de materiales" 3ª ed., Ed. Mc Graw Hill, España 2007.
- [22] QUERIN, O.M., "Evolutionary Structural Optimization: Stress Based Formulation and Implementation", Thesis Doctoral, University of Sydney Australia, April 1997, pp. 1-246.
- [23] QUERIN O.M., STEVEN G.P., XIE Y.M., "Evolutionary Structural Optimisation Using an Additive Algorithm. Finite elements in Analysis and Design", 2000; 34: 291-308.
- [24] RECHENBERG I., "Cybernetic Solution Path of an Experimental Problem". Ministry of Aviation. Royal Aircraft Establishment: UK, 1965.
- [25] RODRIGUEZ E. R., "El Correcto y Completo Desarrollo de un Algoritmo" UPIICSA, pp. 1-15.
- [26] RODRIGUEZ J., SEIREG A., "Optimizing the Shapes of Structures via a Rule-based Computer program. ASME - Computers in Mechanical Engineering" 1985; 4: 20-29.
- [27] SCHMIT L.A, FARSHI B., "Some Approximation Concepts for Structural Synthesis". AIIA Journal 1974; 12: 692-699.
- [28] STEVEN, G. P., XIE, Y. M., "A simple evolutionary procedure for structural optimization", *Computers & Structures*, 49, No. 5, pp 885-896, 1993.
- [29] STEVEN, G.P., XIE, Y. M., "Evolutionary structural optimization with FEA", *Computational Mechanics*, S. Valliappan et al. (eds.), A.A. Balkema Publishers, Rotterdam, Vol. 1, pp. 27-34, August, 1993.
- [30] VELAZQUEZ F., "Análisis por Elementos Finitos", Apuntes de la Facultad de Ingeniería, UNAM - 2009.

-
- 
- [31] VICTORIA M., “Optimización de Forma y Topología con Malla Fija y Algoritmos Genéticos”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cartagena, Abril 2006, pp. 1-180.
- [32] WILLIAMSON, D. “Difference approximation for fluid flow on a sphere, En: Numerical methods used in atmospheric models(vol. II)”, GARP Publication Series no. 17,WMO-ICSU, 1979.
- [33] WOON S.Y., TONG L., QUERIN O.M., STEVEN G.P.,“ Optimising Topologies through a Multi-GASystem”, WCSMO 5 2003.
- [34] XIE, Y.M., STEVEN, G.P., “Evolutionary Structural Optimization”, 1ª ed., Ed. Springer, Great Britain 1997, pp. 1-40.
- [35] XIE, Y. M., STEVEN, G. P., “Optimal design of multiple load case structures using and evolutionary procedure”, Engineering Computations, 11, pp 295-302, 1994.
- [36] XIE, Y.M., STEVEN, G.P., “Shape and layout optimization via an evolutionary procedure”, Proceedings of International Conference on Computational Engineering Science, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, December 17-22, 1992.

Mesografía

- [37] http://en.wikibooks.org/wiki/File:Plane_stress.svg
- [38] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Plane_strain.svg