



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

**ANÁLISIS DE EXISTENCIA DE ESTADO ESTACIONARIO EN  
CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

PRESENTA:  
**MICHAEL JOSUÉ ROJAS GARCÍA**

TUTOR PRINCIPAL  
**GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ**  
FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, CDMX, DICIEMBRE, 2016



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

Secretario: Dr. Paul Rolando Maya Ortiz

Vocal: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

1er. Suplente: Dr. Jesús Dario Mina Antonio

2o. Suplente: Dr. Homero Miranda Vidales

La tesis se realizó en la Facultad de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Gerardo René Espinosa Pérez  
Facultad de Ingeniería

---

---

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Antecedentes . . . . .	2
1.3. Planteamiento del problema . . . . .	2
1.4. Contribuciones . . . . .	3
1.5. Estructura de la tesis . . . . .	3
<b>2. Preliminares</b>	<b>4</b>
2.1. Ejemplo introductorio. . . . .	4
2.2. Sistemas con carga de potencia constante . . . . .	6
2.2.0.1. Cargas de potencia constante (CPL) . . . . .	9
2.2.1. Circuito con una CPL . . . . .	11
2.3. Preliminares de teoría de grafos . . . . .	12
2.3.1. Nociones . . . . .	15
<b>3. Redes típicas en sistemas eléctricos</b>	<b>20</b>
3.1. Redes Típicas . . . . .	20
3.1.1. Modelado de redes eléctricas . . . . .	20
3.1.2. Modelo lineal . . . . .	24
3.1.3. Propiedades Estructurales de la Red . . . . .	26
3.2. Caracterización de Estructura topológicas de redes típicas . . . . .	27
3.2.0.1. Topología radial . . . . .	30
3.2.0.2. Topología Anillo . . . . .	31
3.2.0.3. Topología Malla . . . . .	33
<b>4. Existencia de estado estacionario en redes típicas</b>	<b>35</b>
4.1. Modelo General . . . . .	35

4.1.1. <i>Equilibria</i> de circuitos eléctricos con CPL . . . . .	36
4.1.2. Representación entrada-salida . . . . .	36
4.2. Estado estacionario en redes típicas . . . . .	37
4.2.1. Análisis de red radial . . . . .	38
4.2.2. Análisis red malla . . . . .	39
4.3. Estabilidad del estado estacionario . . . . .	40
4.3.1. Características de los <i>equilibria</i> . . . . .	41
4.3.2. Análisis de estabilidad . . . . .	42
<b>5. Conclusiones</b>	<b>44</b>
5.0.3. Trabajo Futuro . . . . .	45
<b>Bibliografía</b>	<b>46</b>

# Introducción

## 1.1. Motivación

El fenómeno de colapso de voltaje es característico de los sistemas de potencia, este fenómeno ocurre cuando existe un desequilibrio entre la cantidad de potencia reactiva que demanda la carga y la capacidad de los generadores de suministrarla. El estudio de este fenómeno es importante dentro de la teoría de sistemas de potencia ya que el colapso de voltaje representa uno de los problemas económicos, a causa de las pérdidas eléctricas, más graves dentro de estos sistemas. Existen diferentes formas de análisis de este fenómeno, pero con la evolución de estos sistemas resulta útil replantear el problema a través de un re-estudio de los circuitos eléctricos que los componen.

El enfoque que se abordará en este trabajo, consiste en realizar un estudio de las ecuaciones de balance de potencia para garantizar la existencia de una solución real de dichas expresiones, lo anterior para establecer condiciones de existencia de estado estacionario dentro de los circuitos eléctricos, en este caso dicho análisis se realizará para circuitos de corriente directa con un tipo de carga específico que son las cargas de potencia constante (CPL)<sup>1</sup>. El problema de colapso de voltaje se encuentra relacionado con la existencia de estado estacionario, en el presente escrito solamente se fijan precedentes del análisis para la caracterización de dicho fenómeno sin abordarlo directamente.

---

<sup>1</sup>por sus siglas en inglés

## 1.2. Antecedentes

En la literatura el análisis de condiciones de estado estacionario para circuitos eléctricos de corriente directa se encuentra poco estudiado, existen resultados que realizan un análisis de manera indirecta del estado estacionario, por ejemplo en las referencias [4] y [7] se aborda el problema que existe cuando la CPL consume un valor de potencia mayor a la potencia máxima que puede suministrar el generador, y se observan las implicaciones dinámicas de este evento a través de un análisis de plano de fase, sólo que en la referencia [7] usan la técnica de control de asignación de polos para lograr que el punto de equilibrio asociado al estado estacionario sea estable. De igual forma en la referencia [11] se realiza un análisis general del comportamiento de las *microrredes* con CPL y sus características de estabilidad según la potencia que demande la carga.

Es posible notar que el fenómeno de existencia de estado estacionario esta relacionado con el comportamiento de las cargas, bajo este contexto la búsqueda de generalizaciones en el comportamiento de cargas toma de modo general dos vertientes, la primera como en la referencia [10] que se aborda la representación como una relación de primer orden entre el voltaje y la potencia. El segundo enfoque tiene que ver con un análisis mixto entre el comportamiento dinámico del voltaje y corriente, y el comportamiento estático del consumo de potencia en la carga, dicho enfoque se aborda en la referencia [9].

La línea de investigación que trabaja con las condiciones de existencia de estado estacionario se encuentra la referencia [3] donde se realiza el análisis de circuitos de corriente directa, en donde su principal limitación esta en la formulación del resultado, ya que se encuentra definido para circuitos con una sola fuente, una línea de transmisión y una y dos cargas conectadas de modo radial.

## 1.3. Planteamiento del problema

El principal problema que se abordará se limita al análisis de circuitos lineales de corriente directa con CPL. Con base en la referencia [3] se extenderá el análisis de condiciones de existencia de estado estacionario de una rama simple a una red típica de circuitos eléctricos. Para eso se plantea la siguiente hipótesis

*El problema se resolverá explotando las propiedades estructurales de los circuitos eléctricos y las características asociadas a dichas propiedades.*

## **1.4. Contribuciones**

La principal contribución de este trabajo es ampliar el resultado presente en [3], que es determinar condiciones de existencia de estado estacionario para redes típicas de circuitos eléctricos.

## **1.5. Estructura de la tesis**

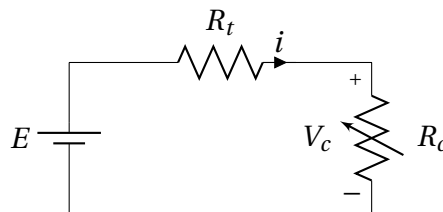
Para dejar claro el desarrollo del resultado, el presente trabajo se estructura de la siguiente forma, en el Capítulo 2 se muestra la base teórica necesaria para conocer el fenómeno de estado estacionario en redes eléctricas así como la técnica necesaria para el desarrollo del resultado, en el Capítulo 3 se realiza un análisis de las características principales de las redes típicas de circuitos eléctricos, en el Capítulo 4 se presenta el desarrollo del resultado y por último en el Capítulo 5, se presentan las conclusiones principales de este trabajo.



## Preliminares

### 2.1. Ejemplo introductorio.

El presente ejemplo es importante ya que representa el tipo de análisis que se realizará en el trabajo así como la complejidad presente en circuitos eléctricos que alimentan cargas CPL. En la referencia [6] se presenta el circuito mostrado en la Figura 2.1, el objetivo de dicho análisis es caracterizar puntos esenciales en el comportamiento dinámico del fenómeno para posteriormente realizar dicho análisis en sistemas eléctricos más complejos.



**Figura 2.1:** Circuito con carga dinámica.

El circuito se encuentra conformado por una fuente de voltaje constante ( $E$ ), una resistencia interna de dicha fuente ( $R$ ) y una carga ( $R_L$ ) la cual por acción de un control externo es capaz de demandar una potencia deseada ( $P_0$ ). La dinámica de la carga se encuentra representada por

$$\dot{R}_L = I^2 R_L - P_0. \quad (2.1)$$

Al realizar el análisis del circuito eléctrico mediante leyes de mallas de Kirchhoff se obtiene que

$$I_L = \frac{E}{R + R_L} \quad (2.2)$$

$$V_L = \frac{ER_L}{R + R_L} \quad (2.3)$$

$$P_L = \frac{E^2 R_L}{(R + R_L)^2}. \quad (2.4)$$

Sustituyendo la Ecuación(2.2) en la Ecuación (2.1), se obtiene la dinámica de la resistencia de la carga, la cual

$$\dot{R}_L = \frac{E^2}{(R + R_L)^2} R_L - P_0 \quad (2.5)$$

Al igualar a cero la Ecuación (2.5) se obtiene el conjunto de soluciones para los cuales el campo vectorial tiene una velocidad igual a cero. Dicho conjunto de ecuaciones se encuentra representado por la siguiente ecuación algebraica

$$R_L^2 + \left(2R - \frac{E^2}{P_0}\right) R_L + R^2 = 0 \quad (2.6)$$

Dado que la fuente de excitación es de corriente directa, las únicas soluciones viables para esta solución particular son  $R_L \in \mathbb{R}$ , entonces, y de acuerdo a la solución general de ecuaciones de segundo orden, la Ecuación (2.5) tiene solución real si

$$\frac{E^2}{4R} > P_0 \quad (2.7)$$

esto es, para que existan puntos de equilibrio reales es necesario que la potencia que demande la carga sea menor al factor  $\frac{E^2}{4R}$ , que corresponde a la aplicación del teorema de máxima transferencia de potencia en circuitos eléctricos. En caso contrario, los puntos de equilibrio para este tipo de circuitos carecen de sentido físico. Dada la existencia de puntos de equilibrio es posible establecer la existencia de un estado estacionario constante.

La referencia [3] muestra metodología de análisis para obtener la existencia de estado estacionario en circuitos eléctricos de corriente directa, dicha metodología será empleada para obtener la principal contribución del presente trabajo, por esa razón en la siguiente sección se muestra el desarrollo del resultado principal de [3].

## 2.2. Sistemas con carga de potencia constante

Con base en la representación entrada-salida del sistema excitado con fuentes de voltaje constante extraída de la referencia [3] es

$$Y(s) = G(s)U(s) + k \quad (2.8)$$

donde  $G(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ ,  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ , donde el operador  $\mathcal{L}$  indica la transformada de Laplace y  $k \in \mathbb{R}^m$ , con  $m$  el número de cargas con potencia constante dentro del sistema con las variables de puerto  $u$  y  $y \in \mathbb{R}^m$ , ambos vectores con elementos  $u_i$  y  $y_i$  donde  $i \in \mathcal{M} = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ , son conjugadas, es decir, el producto  $u_i y_i$  tiene unidades de potencia. Con éstas se establece la relación de las CPL con el sistema. En este sentido, la relación

$$-y_i(t)u_i(t) = P_i > 0, \quad i \in \mathcal{M} \quad (2.9)$$

se cumple para todo  $t \geq 0$ . La definición de estado estacionario dada en la referencia [3] se presenta a continuación

**Definición 2.2.1** *El sistema representado por la Ecuación (2.8) conectado a una CPL por medio de la Ecuación (2.9), posee estado estacionario constante si y sólo si existen vectores constantes  $\bar{u}$  y  $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$  tal que*

$$\bar{y} = G(0)\bar{u} + k \quad (2.10)$$

$$\bar{y}_i \bar{u}_i = -P_i, \quad i \in \mathcal{M} \quad (2.11)$$

□.

Ya que los parámetros del circuito eléctrico son positivos se plantea la siguiente suposición

**Suposición 2.2.2** *La parte simétrica de la matriz de transferencia  $G(0)$  es de signo definido y sin pérdida de generalidad se asume que es **positiva definida**, es decir*

$$G(0) + G^T(0) > 0. \quad (2.12)$$

▽

El análisis de existencia de estado estacionario constante se encuentra dado por la restricción generada por la Ecuación (2.9), por esta razón y para conocer el comportamiento de la potencia dentro del sistema, se multiplica la Ecuación (2.8) por  $u$ , para obtener la siguiente expresión

$$\bar{u}_i(g_i \bar{u} + k_i) = - \underbrace{P_i}_{y_i \bar{u}_i}; \quad i \in \mathcal{M} \quad (2.13)$$

donde  $G^T(0) := [g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_m]$ , con base en la Ecuación (2.13), es posible realizar la siguiente proposición

**Proposición 2.2.3** *El estado estacionario constante del circuito eléctrico existe sí y sólo sí la Ecuación (2.13) tiene solución para  $\bar{u}$ .*

En la referencia [12] se muestran diversas técnicas de análisis para la solución problemas relacionados con mapeos cuadráticos. Una de las técnicas más usadas tiene que ver con la solución de desigualdades matriciales lineales (LMI, por sus siglas en inglés), y dentro de ella se utiliza la siguiente forma

**Proposición 2.2.4** *Se asume que existe una matriz diagonal  $T := \text{diag}\{t_i\} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tal que*

$$\begin{bmatrix} TG(0) + G^T(0)T & Tk \\ (Tk)^T & 2I_m TP \end{bmatrix} > 0 \quad (2.14)$$

*entonces, no existe estado estacionario constante para el sistema (2.8).*

La condición de la proposición anterior es sólo necesaria y es formulada en términos de desigualdad matriciales. Para realizar el análisis se puede reescribir la LMI en diferentes desigualdades, al aplicar el complemento de Schur a la Ecuación (2.14). Dichas desigualdades se muestran en las siguientes ecuaciones

$$TG(0) + G^T(0)T > 0 \quad (2.15)$$

$$I_m^T P > \frac{1}{2}(Tk)^T [TG(0) + G^T(0)T]^{-1} Tk \quad (2.16)$$

donde la segunda desigualdad tiene una interpretación física asociada a una ponderación de la máxima potencia que puede demandar una carga dentro del circuito eléctrico. Desde otro punto de vista, sí la potencia de la carga excede el valor marcado por la desigualdad se habla de la falta de existencia de equilibrio en el sistema eléctrico.

De las condiciones anteriores la matriz  $T$  se coloca como grado de libertad para extender el resultado de la referencia [15]. Dicho resultado muestra que la siguiente condición

$$\frac{1}{2}(k)^T [G(0) + G^T(0)]^{-1} k < 1_m^T P \quad (2.17)$$

que es suficiente y necesaria cuando  $m = 1$ , pero al momento de aumentar el número de cargas,  $m > 1$ , la condición se convierte en necesaria ya que representa la cantidad de potencia máxima que se puede demandar en las cargas, es decir  $1_m^T P = P_1 + P_2 + P_3 + P_i$ , pero no establece la potencia máxima que pueden demandar las cargas de forma individual. Por esa razón se propone el uso de la matriz  $T$  para indicar cuanta potencia es demandada por cada carga. El resultado en la referencia [3] se muestra en la siguiente proposición

**Proposición 2.2.5** *Se asume que existe una matriz  $T =: \text{diag}\{t_i\} \in \mathbb{R}^{m \times m} > 0$  tal que*

$$1_m^T P > \frac{1}{2}(Tk)^T [TG(0) + G^T(0)T]^{-1} Tk \quad (2.18)$$

*Sí la desigualdad anterior se satisface, entonces no existe estado estacionario constante para el sistema eléctrico.*

La condición de suficiencia se encuentra dada con base en las características de convexidad del espacio de soluciones, para entender esta condición es necesario enunciar el lema siguiente

**Lema 2.2.6** *Considere  $m$  funciones cuadráticas de la forma  $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$*

$$f_i(\bar{u}) := \frac{1}{2}\bar{u}\mathfrak{A}_i\bar{u} + \bar{u}^T\mathfrak{B}_i \quad (2.19)$$

*donde  $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_i^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $\mathfrak{B} \in \mathbb{R}^m$ . Para  $T =: \text{diag}\{t_i\} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  defina*

$$\mathfrak{A}(T) := \sum_{i=1}^m t_i \mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}(T) := \sum_{i=1}^m t_i \mathfrak{B}_i, \mathfrak{P}(T) := \sum_{i=1}^m t_i \mathfrak{P}_i \quad (2.20)$$

Sí la desigualdad matricial en  $T$  se define como

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{A}(T) & \mathfrak{B}(T) \\ \mathfrak{B}^T(T) & 2\mathfrak{F}(T) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.21)$$

y además se cumple que es positiva, entonces el conjunto de ecuaciones

$$f_i(\bar{u}) = -P_i, i \in \mathfrak{M} \quad (2.22)$$

no tiene solución.

La clave de la prueba es el punto de separación entre el conjunto de soluciones de  $f_i(\bar{u})$  y  $\mathfrak{F}$ . Sí el conjunto es convexo y cerrado la existencia de un hiperplano que separe estrictamente ambos conjuntos es una condición suficiente para que un punto del conjunto de soluciones cumpla con la desigualdad o no. Entonces de acuerdo a este resultado se plantea la siguiente proposición

**Proposición 2.2.7** *Si el conjunto  $\mathfrak{F}$  es convexo la Ecuación (2.8) tiene solución sí y sólo sí la LMI representada por la Ecuación (2.14) no es positiva.*

De acuerdo con resultados mostrados en la referencia [13] se puede garantizar convexidad para sistemas con menos de dos cargas, es decir  $m \leq 2$ , ya que para  $m > 2$   $\mathfrak{F}$  usualmente no es convexo.

### 2.2.0.1. Cargas de potencia constante (CPL)

Las cargas de potencia constante tienen como principal característica que sin importar la configuración interna de ellas, es decir, si es lineal o no lineal, ésta siempre consumirá una cantidad constante de potencia. En este caso se habla de consumo de potencia activa. Es necesario mencionar que esta aproximación de comportamiento de carga se realiza bajo el estudio de la teoría de control y la definición de CPL es ajena al tipo de cargas que dependen de la potencia en la literatura de sistemas eléctricos.

Bajo el contexto anterior anterior las CPL se rigen por la siguiente definición

**Definición 2.2.8 (Cargas de potencia constante (CPL)[15])** *Una CPL es aquella que sin importar si posee un comportamiento lineal o no lineal consume siempre una cantidad de potencia activa constante en un intervalo de tiempo establecido. Al graficar el plano de fase<sup>1</sup> de estas cargas las soluciones del sistema son hipérbolas que pertenecen a los cuadrantes I y III.* □.

Dado que el consumo de potencia de estas cargas es potencia activa constante, este tipo de cargas se encuentran presentes en microrredes de corriente directa, pero además estas cargas aproximan el comportamiento de consumo de potencia de convertidores estáticos, por tal motivo es común encontrar análisis dinámicos asociados a su comportamiento.

El estudio de este tipo de cargas radica en la influencia que tienen éstas en la estabilidad del circuito eléctrico. Sí bien, la estabilidad de los sistemas eléctricos en general depende de varios factores, las cargas son uno de los más importantes. En la referencia [8] se muestra como los puntos de equilibrio de un sistema eléctrico dependen del tipo de carga que se este alimentando.

Un problema identificado con las CPL se refiere a la dependencia de estabilidad de los puntos de equilibrio asociado al tipo de carga, Para mostrar esto, la potencia activa instantánea dentro de un circuito eléctrico se define de la siguiente forma

$$P = v i \quad (2.23)$$

por lo tanto el voltaje asociado a esa potencia se encuentra dado por

$$v = \frac{P}{i}. \quad (2.24)$$

Además de estas relaciones eléctricas se tiene que la impedancia de la carga es  $Z_c = \frac{v}{i}$  entonces para saber como varía el voltaje con respecto de la carga se realiza la derivada de la Ecuación (2.24) con respecto de la corriente, obteniendo

$$\frac{dv}{di} = -i^{-2} P = -\frac{P}{i^2} = -\frac{v^2}{P} = -Z_c \quad (2.25)$$

Se observa que la pendiente del voltaje con respecto a la corriente es negativa. La interpretación física de esta pendiente corresponde a la oposición del sistema al flujo de corrien-

---

<sup>1</sup>plano voltaje – corriente

te. Dicha oposición es la impedancia de la carga, por lo tanto dado que la impedancia es negativa, este fenómeno no es nuevo en análisis de circuitos eléctricos, esta presente en elementos semiconductores como diodo túnel y ocasionan problemas de estabilidad de puntos de equilibrio. En la referencia [4] se aborda el efecto que tienen las CPL dentro de la estabilidad de voltaje.

### 2.2.1. Circuito con una CPL

Para mostrar la metodología se considera el circuito eléctrico de la Figura 2.2

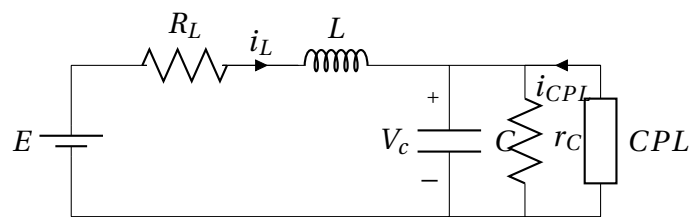


Figura 2.2: Circuito con CPL.

En el circuito anterior la carga es de tipo CPL. De acuerdo con lo visto en el ejemplo introductorio el problema de existencia de puntos de equilibrio está relacionado con el problema de existencia de estado estacionario.

Para aplicar la metodología descrita, el primer paso es obtener un modelo entrada salida del circuito eléctrico. Dicho modelo esta dado por la siguiente expresión

$$G(s) = \frac{Ls + r}{LCs^2 + \left(rC + \frac{L}{r_c}\right)s + \frac{r}{r_c} + 1} \quad (2.26)$$

donde la entrada es la corriente de la carga CPL y la salida el voltaje de dicha carga. Además de la corriente de la carga, otra variable eléctrica que influye en el comportamiento del voltaje es la fuente de excitación constante. Para caracterizar este efecto se obtiene la representación del voltaje de la carga al tomar como entrada el voltaje de alimentación.

$$K(s) = \frac{1}{LCs^2 + \left(\frac{r}{C} + \frac{1}{r_c}\right)s + \frac{r}{r_c} + 1} E(s) \quad (2.27)$$

entonces el voltaje en la carga se encuentra dado por la siguiente función de transferencia



$$V_c(s) = \frac{Ls + r}{LCs^2 + \left(rC + \frac{L}{r_c}\right)s + \frac{r}{r_c} + 1} I(s) + \frac{1}{LCs^2 + \left(\frac{r}{C} + \frac{1}{r_c}\right)s + \frac{r}{r_c} + 1} E(s) \quad (2.28)$$

Al aplicar el teorema del valor final en la expresión anterior, toma la forma

$$V_c(0) = \frac{r}{\frac{r}{r_c} + 1} I(0) + \frac{E}{\frac{r}{r_c} + 1} \quad (2.29)$$

donde  $V_c(0)$  es  $\bar{y}$  e  $I(0)$  es  $\bar{u}$ . Entonces debe existir una  $\bar{u}$  tal que se cumpla la ecuación anterior. Si se sigue la metodología mostrada en la presente sección la restricción que se debe cumplir es la siguiente

$$\frac{1}{2} k^T [G(0) + G^T(0)]^{-1} k \geq P \quad (2.30)$$

donde  $P$  es la potencia que demanda la carga; y  $G(0) = \frac{r}{\frac{r}{r_c} + 1}$  y  $k = \frac{E}{\frac{r}{r_c} + 1}$  por lo tanto la restricción de potencia se encuentra dada por

$$P \leq \frac{E^2}{4r \left(\frac{r}{r_c} + 1\right)} \quad (2.31)$$

Bajo esta condición se puede afirmar que existe estado estacionario para el circuito eléctrico mostrado en la Figura (2.2). Físicamente este resultado indica cuanta potencia puede demandar la carga para que exista estado estacionario. En el caso de una carga, en la Proposición 2.2.5 la matriz  $T$  toma el valor de la matriz identidad. Hasta este punto solamente se hace referencia a la existencia de estado estacionario, la estabilidad asociada a ese estado estacionario se encuentra definida por los parámetros del circuito.

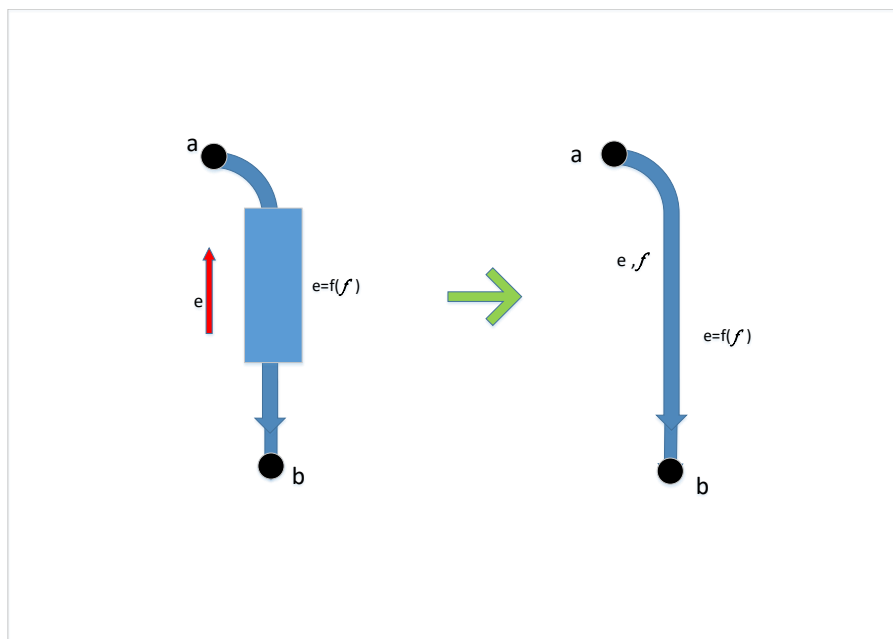
La metodología mostrada en la referencia [3] está restringida por las características de convexidad de las restricciones para un número mayor a dos cargas. EL objetivo de esta trabajo es mostrar que en redes eléctricas típicas estas características dependen de la estructura de la red.

## 2.3. Preliminares de teoría de grafos

Los sistemas dinámicos se encuentran caracterizados por dos tipos de restricciones, de compatibilidad y de continuidad. Ambos tipos representan a las leyes físicas que rigen cada

uno de los fenómenos físicos, como las leyes de Kirchhoff para circuitos eléctricos o las leyes de movimiento de Newton para sistemas mecánicos. Con estas relaciones es posible realizar modelos matemáticos que faciliten el análisis dinámico de los sistemas físicos. Por esta razón es importante encontrar herramientas que ayuden a obtener modelos matemáticos de forma sistemática.

Es posible representar a cualquier elemento de un sistema físico como un ente de un puerto que es caracterizado por una variable de esfuerzo y una de flujo. En la teoría de sistemas dinámicos las variables de esfuerzo son aquellas que cambian en función de una referencia, como ejemplos esta el voltaje y la velocidad. Por otro lado, las variables de flujo son aquellas que varían en función de una variable de esfuerzo pero no son directamente dependientes de una referencia, como ejemplos de estas variables son la corriente eléctrica y la fuerza en sistemas mecánicos. Con base en esto, es posible caracterizar a un elemento de un sistema dinámico en función de las variables de flujo y esfuerzo, por lo tanto es posible representar de manera gráfica a dichos elementos como segmentos dirigidos como se muestra en la Figura 2.3.



**Figura 2.3:** Representación general de un elemento.

La teoría de grafos es una herramienta matemática que sirve para obtener modelos que

aproximen el comportamiento de fenómenos de la vida real, desde problemas del área de la física hasta problemas asociados a las comunicaciones. En la referencia [14] se define una gráfica de acuerdo a lo siguiente

**Definición 2.3.1 (Gráfica)** *Una gráfica es un conjunto ordenado formado por tres elementos  $G = \{V(G), E(G), I_G\}$  donde  $V(G)$  es un conjunto no vacío formado por todos los nodos,  $E(G)$  es un conjunto disjunto de  $V(G)$  formado por todos los bordes e  $I_G$  es una relación de incidencia entre cada elemento de  $E(G)$  con un par ordenado de elementos de  $V(G)$ . Adicionalmente sí para cada borde  $e \in E(G)$  existe la siguiente relación  $I_G(e) = \{u, v\}$  donde  $\{u, v\} \in V(G)$ .*

□.

Otra definición de ayuda para el desarrollo del presente escrito es la siguiente

**Definición 2.3.2 (Gráfica completa)** *Un grafo simple  $G$  se dice que es completo sí cada par de vértices o nodos de  $G$  son adyacentes en  $G$ .*

□.

La definición anterior hace referencia al hecho de que una gráfica será considerada completa sí y sólo sí cada nodo se encuentra conectado a otro. En la Figura 2.4 se muestran ejemplos de gráficas completas.

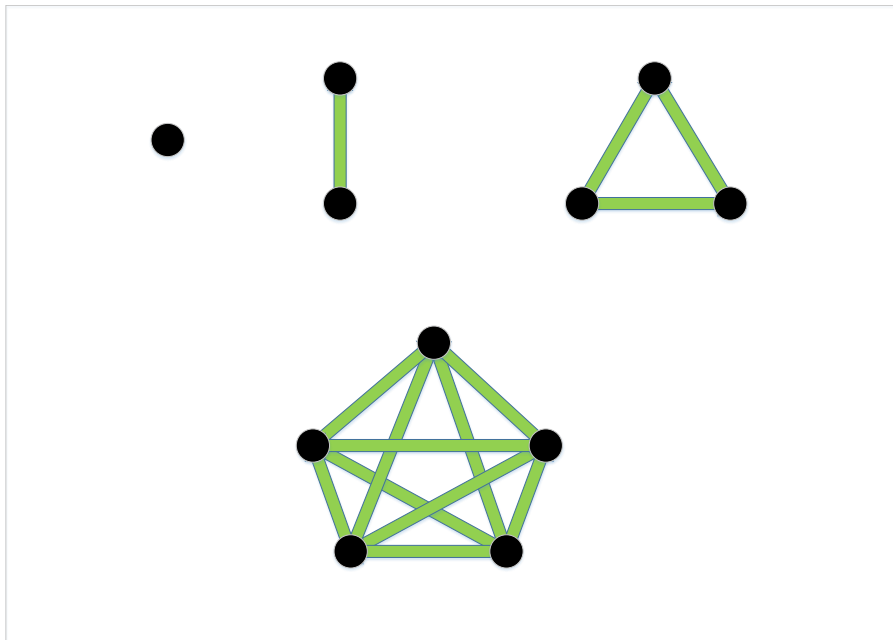
Excepcionalmente una gráfica compuesta sólo por un nodo es considerada una gráfica completa ya que al existir un sólo nodo, este es su propio adyacente.

Para terminar con algunas definiciones asociadas a teoría de grafos que serán de utilidad para el desarrollo del trabajo se tienen las relacionadas a subgrafos

**Definición 2.3.3 (Subgráfica)** *Un grafo  $H$  es llamado una subgráfica de  $G$  si  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$  e  $I_H$  es un mapeo de  $I_G \rightarrow E(H)$ .*

□.

Las definiciones mostradas en esta sección acercan al lector la conceptualización de la teoría de grafos. En la siguiente sección se realiza el análisis de elementos más técnicos para emplear esta herramienta en solución de problemas asociados a sistemas dinámicos.



**Figura 2.4:** Gráficas completas.

### 2.3.1. Nociones

Para entender el alcance de la técnica, en la presente sección se aborda de modo más particular la semántica de la teoría de grafos necesaria para entender el desarrollo del presente escrito. En la referencia [16] se describe la teoría de grafos enfocada a obtención de modelos de sistemas dinámicos. Las nociones mostradas en la presente sección ponen en contexto el uso de ella la solución del problema.

Las gráficas con las cuales se evaluarán los problemas físicos presentados son denominadas *gráficas Lineales* y reciben ese nombre ya que se elaboran con base en líneas, sin importar si los elementos que componen al sistema tienen relación de constitución lineal o no. Además son denominadas *orientadas* ya que a cada borde de la gráfica se le asigna una dirección. Los segmentos de las gráficas son denominados *bordes*, mientras los elementos que conectan un borde son llamados *nodos*. Algunas definiciones de utilidad en el desarrollo del trabajo se presentan a continuación.

**Definición 2.3.4 (Grado)** *El grado de un nodo corresponde al número de bordes conectados a ese nodo.*

□.

En la Figura 2.5 se muestra un grafo compuesto por dos nodos  $D$ , y  $C$ , y 3 bordes, donde cada nodo ( $D$  y  $C$ ) es de grado tres.



Figura 2.5: Grado de un nodo

**Definición 2.3.5 (Loopset)** *Un loopset es un conjunto de bordes y nodos de una gráfica tal que cada nodo tiene grado dos.*

□.

**Definición 2.3.6 (Loop)** *Un loop es una trayectoria cerrada generada al recorrer los elementos de un loopset.*

□.

En la Figura 2.6 se muestra la representación gráfica de el *loop* más básico dentro de la teoría de grafos. En este caso el *loopset* esta compuesto por  $\{D, C, 1, 2\}$ .

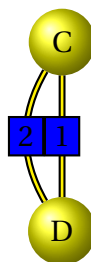


Figura 2.6: Grado de un nodo

**Definición 2.3.7 (cutset)** *Un cutset es un conjunto de bordes de un gráfica conectada tal que al quitar o cortar este conjunto de bordes la gráfica se separa en dos gráficas conectadas.*

□.

**Definición 2.3.8 (Ámbito)** *Un ámbito es una trayectoria cerrada que interseca a todos los bordes de un cutset.*

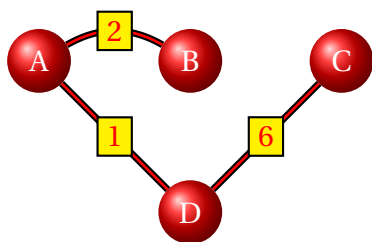
□.

**Definición 2.3.9 (Árbol)** *El árbol de una gráfica es una subgráfica completa que contiene **todos** los nodos de una gráfica y un conjunto de bordes que cumplen con la condición de no generar lazos cerrados o loops dentro de ésta. Los bordes que componen al árbol son llamados **ramas**.*

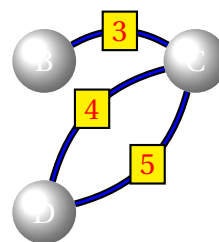
□.

**Definición 2.3.10 (Co-árbol)** *El co-árbol es el complemento del árbol de la gráfica de una gráfica, es decir, es el conjunto de bordes de la gráfica que genera una trayectoria cerrada.*

□.



(a) Árbol



(b) Co-árbol

**Figura 2.7:** Árbol y co-árbol

En la Figura 2.7 se muestra como ejemplo el árbol y co-árbol de un gráfica. Es necesario hacer mención que para una gráfica más de una combinación de nodos y bordes que formen un árbol. Los conceptos mencionados anteriormente sirven para plantear modelos matemáticos de diversos sistemas físicos, para ésto es necesario plantear reglas para obtener dichos modelos.

La primera regla que se debé de plantear son las restricciones de continuidad, las cuales están asociadas a las variables de flujo del sistema físico. Las restricciones de continuidad de flujo se encuentran asociadas a las matrices de *cutsets* del grafo ( $C_0$ ) de modo que la restricción algebraica está dada por la siguiente ecuación

$$C_0 f_e = 0_r \quad (2.32)$$

donde  $C_0 \in \mathbb{R}^{r \times b}$  que es la matriz de *cutsets* y  $f_e \in \mathbb{R}^b$  que es el vector de flujos de borde, donde  $b$  es el número de bordes en el grafo y  $r$  es el número de *cutsets* asociados a la gráfica.

En cuanto a la generación de las restricciones de continuidad de flujo definidas con la matriz de *cutsets*  $C_0$  existen restricciones redundantes, esto es, que el sistema de ecuaciones de las restricciones de continuidad de flujo tiene multiples soluciones.

Para encontrar las restricciones de continuidad independientes se hace uso del concepto de árbol y co-árbol. Dado un árbol de una gráfica  $G$  los *cutsets* del árbol son llamados *cutsets* básicos, donde la matriz asociada es  $C_B \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ , con base en ellos es posible representar a las restricciones de continuidad como

$$C_B f_e = 0_{n-1} \quad (2.33)$$

Además si el vector de  $f_e$  se ordena de tal forma que los flujos del árbol sean los primeros elementos del vector, seguidos por los flujos del co-árbol es posible expresar a las restricciones de continuidad como

$$C_B f_e = \begin{bmatrix} I_{n-1} & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_t \\ f_c \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

donde  $f_t \in \mathbb{R}^{n-1}$  son los flujos asociados a las ramas del árbol,  $f_c \in \mathbb{R}^{b-n+1}$  son los flujos de las cuerdas y  $H \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (b-n+1)}$  es la matriz fundamental de *loops*. De la estructura de la matriz  $C_B$  se observa que el sistema físico tendrá  $n - 1$  restricciones de continuidad de flujo.

Además de las restricciones de continuidad dentro de los sistemas físicos existen las restricciones de compatibilidad. Estas se encuentran asociados a las variables de esfuerzo. Para obtener estas restricciones se utilizan *loopsets* y su matriz asociada  $B_0$ , así las restricciones de esfuerzo se encuentran dadas por

$$B_0 e_e = 0_l \quad (2.35)$$

donde  $l$  es el número de *loopsets* que posee el grafo,  $B_0 \in \mathbb{R}^{l \times b}$  y  $e_e \in \mathbb{R}^b$  es el vector de esfuerzos de borde. De manera análoga al problema de restricciones de continuidad la matriz de *loopsets* da información redundante acerca del sistema por lo cual es necesario recurrir al concepto de *loopset* básico para obtener las restricciones linealmente independiente necesarias para caracterizar el sistema. Adicionalmente es posible representar a las restricciones de compatibilidad de la siguiente forma

$$C_0 e_e = \begin{bmatrix} -H^T & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_t \\ e_c \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

La metodología mostrada en [3] esta restringida por las características de convexidad de la restricciones para un número mayor a dos cargas, el objetivo de la siguiente sección es mostrar como esas características de convexidad dependen de la estructura de la red.



## Redes típicas en sistemas eléctricos

En este capítulo se abordan las diferentes topologías que existen dentro de los circuitos eléctricos, así como su modelo y representación dinámica y las características básicas de estado estacionario y estabilidad

### 3.1. Redes Típicas

Dentro de la ingeniería eléctrica en general existen tres topologías básicas para la interconexión de sistemas. En la referencia [1] se muestra como con estas tres topologías es posible representar cualquier sistema eléctrico. Las topologías básicas son radial, anillo y malla. Antes de entablar relaciones específicas para cada topología se abordará la representación general.

#### 3.1.1. Modelado de redes eléctricas

Con base en algunos conceptos mencionados en la parte de preliminares de este trabajo, un circuito eléctrico puede ser definido como un grafo  $G$  orientado y lineal, tal que los nodos de la gráfica corresponden a la interconexión de elementos eléctricos. A cada nodo y borde se le asocia las variables generalizadas de flujo y esfuerzo, que para sistemas eléctricos son voltaje y corriente. El espacio vectorial  $C_1(G)$  contiene a todas las corrientes  $i$  sobre los bordes del grafo, mientras que el espacio dual  $C^1(G)$  está formado por los voltajes  $v$  del sistema.

Es claro que la interconexión de los elementos del circuito eléctricos debe satisfacer las leyes de Kirchhoff, es decir, la interconexión de los elementos debe de tener una estructura, cuyas restricciones, leyes de Kirchhoff, se pueden expresar en términos de *cutsets* y *loops*

básicos.

De acuerdo con la teoría mostrada en los preliminares, el grafo asociado al circuito eléctrico se puede dividir en árboles y co-árboles. El objetivo es encontrar un par tal que las corrientes  $i \in C_1$  y los voltajes  $v \in C^1$  puedan tomar la siguiente forma

$$i = \begin{bmatrix} i_t \\ i_c \end{bmatrix} \in C_1; \quad v = \begin{bmatrix} v_t \\ v_c \end{bmatrix} \in C^1$$

con  $i_t \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ ,  $v_t \in \mathbb{R}^{(n-1)}$  las corrientes y los voltajes del árbol, mientras que  $i_c \in \mathbb{R}^{b-(n-1)}$ ,  $v_c \in \mathbb{R}^{b-(n-1)}$  representan las corrientes y los voltajes del co-árbol. Las restricciones de continuidad y compatibilidad se representan como

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_t \\ i_c \end{bmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{bmatrix} -H^T & I_{b-n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t \\ v_c \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

donde a la matriz  $H \in \mathbb{R}^{(n-1) \times b-(n-1)}$  es llamada matriz fundamental de *loops*. De las restricciones físicas dadas por las ecuaciones (3.1) y (3.2) se puede observar que la matriz  $H$  relaciona en sus renglones los elementos del co-árbol incidentes en los *cutsets* básicos y las columnas a los elementos del árbol que inciden en los *loopsets* básicos.

Antes de empezar a analizar el modelado matemático es necesario dejar claro que los elementos que componen al sistema eléctrico son de parámetros concentrados. Bajo estas condiciones es posible encontrar un modelo general sustituyendo las restricciones de cada elemento por separado.

Según la teoría de grafos existen diferentes formas de escoger un árbol y su respectivo co-árbol. Para poder obtener de una forma sistemática el modelo de los circuitos eléctricos es necesario considerar las siguientes observaciones

**Observación 3.1.1 (Elementos del árbol)** *Todos los elementos que sean controlados por voltaje serán parte del árbol de la gráfica, esto es, las fuentes de voltaje, capacitores y algunas resistencias controladas por voltaje.*

Considerando la observación anterior es posible obtener la siguiente representación

$$i_t = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_C \\ i_{Rt} \end{bmatrix}; v_t = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_C \\ v_{Rt} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

**Observación 3.1.2 (Elementos del co-árbol)** *Todos los elementos que sean controlados por corriente serán parte del co-árbol de la gráfica, esto es, las fuentes de corriente, inductores y algunas resistencias controladas por corriente.*

Por lo tanto, las corriente y voltajes de co-árbol exhiben también la estructura

$$i_c = \begin{bmatrix} i_{Rc} \\ i_L \end{bmatrix}; v_c = \begin{bmatrix} v_{Rc} \\ v_L \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Para fines de facilitar la presentación del resultado se toma en cuenta la siguiente notación

- $n_1$  hace referencia al número de fuentes de voltaje.
- $n_2$  hace referencia al número de capacitores.
- $n_3$  hace referencia al número de resistores de árbol.
- $n_4$  hace referencia al número de resistencias de co-árbol
- $n_5$  hace referencia al número de inductores.

donde  $v_1, i_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $v_C, i_C \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $v_{Rt}, i_{Rt} \in \mathbb{R}^{n_3}$ , tal que  $n_1 + n_2 + n_3 = n - 1$ , y  $v_{Rc}, i_{Rc} \in \mathbb{R}^{n_4}$ ,  $v_L, i_L \in \mathbb{R}^{n_5}$ .

De acuerdo con la referencia [2] y la bibliografía en ella, el análisis mencionado considera la clase específica de circuitos eléctricos, que pueden ser representados por medio de las ecuaciones de Brayton-Moser. En la referencia [5] menciona que un circuito es denominado completo en un sentido topológico cuando existe un árbol asociado al grafo del circuito eléctrico en el cual se encuentran todos los capacitores del circuito, así como un co-árbol en donde se encuentren todos los inductores del mismo. Bajo estas nuevas condiciones las variables de esfuerzo asociadas a los capacitores ( $v_C$ ) y las variables de flujo asociados a los

inductores ( $i_L$ ) forman el llamado conjunto completo de variables, con lo cual se abre la opción de poder obtener el modelo matemático de la red eléctrica por medio de la función de potencial mixto propuesta en la referencia [5].

Para obtener el modelo de la red eléctrica en este trabajo se define una función de energía almacenada,  $H_a : \mathbb{R}^{n_2 \times n_5} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , representada de la siguiente forma

$$H_a(q, \phi) = V(q) + V(\phi) \quad (3.5)$$

donde  $q$  representa la carga del capacitor y  $\phi$  los encadenamientos de flujo dentro del inductor. Adicionalmente  $H_a(q, \phi) > 0$  y conocida. De igual forma es posible recuperar las variables de puerto a través de la función energía como se muestra a continuación

$$\dot{q} = i_C, \quad v_C = \frac{\partial H_a(q, \phi)}{\partial q} = \nabla_q H_a \quad (3.6)$$

$$\dot{\phi} = v_L, \quad i_L = \frac{\partial H_a(i, \phi)}{\partial \phi} = \nabla_\phi H_a \quad (3.7)$$

mientras que los elementos que disipan energía se encuentran definidos con la siguiente relación de constitución

$$i_{Rt} = -\varphi_t(v_{Rt}), \quad v_{Rc} = -\varphi_c(i_{Rc}) \quad (3.8)$$

donde  $\varphi_t, \varphi_c$  son funciones biyectivas.

Además de considerar la función de energía es necesario establecer la estructura de la matriz fundamental de *loops*. Dicha estructura se muestra a continuación

$$H = \begin{bmatrix} H_{1R} & H_{1L} \\ H_{CR} & H_{CL} \\ H_{RR} & H_{RL} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

donde cada submatriz posee las dimensiones adecuadas de acuerdo a la relación entre los elementos del árbol y los elementos del co-árbol, donde dichas submatrices corresponden a un circuito formado por fuentes de voltaje, líneas de transmisión inductivas y cargas resistivas controladas por corriente.

Existe una relación entre las variables de flujo y esfuerzo del circuito eléctrico y las variables de estado del sistema mismo. Dichas relaciones se encuentran dadas por las siguientes expresiones

$$\dot{q}_C = H_{CL}^T i_L \quad \dot{\phi} = -H_{CL} v_C \quad (3.10)$$

De aquí el comportamiento dinámico del sistema se representa según las siguientes ecuaciones diferenciales dadas en forma matricial

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_a \\ \nabla_\phi H_a \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -H_{CR} \\ H_{RL}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Rt} \\ i_{Rc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H_{1L}^T e_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

con

$$\begin{bmatrix} v_{Rt} \\ i_{Rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi_t^{-1}(i_{Rt}) \\ -\varphi_c^{-1}(v_{Rc}) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

El modelo dinámico anterior se puede representar de la siguiente forma

$$\dot{x} = \mathbb{J} \nabla_x H_a(x) + \mathbb{F}(x, e_1, i_{Rc}, v_{Rt}) + \mathbb{G} E_1 \quad (3.13)$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \phi \end{bmatrix}; \quad \nabla_x H_a(x) = \begin{bmatrix} \nabla_q H_a \\ \nabla_\phi H_a \end{bmatrix}; \quad E_1 = \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

y la representación matricial queda expresada como

$$\begin{aligned} \mathbb{J} &= \begin{bmatrix} 0 & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbb{G} = \begin{bmatrix} H_{C2} & 0 \\ 0 & H_{1L}^T \end{bmatrix} \\ \mathbb{F}(x, e_1, i_{Rc}, v_{Rt}) &= \begin{bmatrix} 0 & -H_{CR} \\ H_{RL}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\varphi_t^{-1}(-H_{RR} i_{Rc} - H_{RL} \nabla_\phi H_a(q, \phi)) \\ -\varphi_c^{-1}(H_{1R}^T e_1 + H_{RR}^T v_{Rt} + H_{CR}^T \nabla_q H_a(q, \phi)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 3.1.2. Modelo lineal

Para analizar que sucede con cada una de las redes típicas es conveniente iniciar con el caso más simple y éste es cuando las resistencias poseen relaciones de constitución lineales, es decir

$$i_{Rt} = -R_t^{-1} v_{Rt}, \quad v_{Rc} = -R_c i_{Rc} \quad (3.15)$$

donde  $R_t^{-1} = \text{diag}\{r_{it}^{-1}\} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n_3$ , son las resistencias de árbol y  $R_c = \text{diag}\{r_{ic}\} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n_4$  representan a las resistencias de co-árbol. Para realizar el análisis del problema principal del presente trabajo es necesario considerar un caso particular en el circuito eléctrico, consiste en considerar cargas modeladas como resistencias controladas por corriente que representan el comportamiento de las cargas CPL. Para poder obtener un modelo con base en esta metodología es necesario definir lo siguiente

- $n_6$  hace referencia al número de resistencias controladas por corriente.

donde  $v_2, i_2 \in \mathbb{R}^{n_6}$  y son componentes del co-árbol. Donde dichas resistencias poseen la siguiente relación de constitución

$$i_2 = \varphi^{-1}(V_c) \quad (3.16)$$

donde la función  $\varphi^{-1}(V_c)$  es biyectiva. Por lo tanto la matriz fundamental de *loops* queda representada de la siguiente forma

$$H = \begin{bmatrix} H_{1R} & H_{1L} & H_{12} \\ H_{CR} & H_{CL} & H_{C2} \\ H_{RR} & H_{RL} & H_{R2} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

A partir de las relaciones mencionadas anteriormente es posible caracterizar a los voltajes  $v_{Rt}$  y las corrientes  $i_{Rc}$  en función de las variables de puerto como se muestra a continuación

$$v_{Rt} = (R_t^{-1} + H_{RR} R_c^{-1} H_{RR}^T)^{-1} [-H_{RL} f_L - H_{RR} R_c^{-1} H_{1R}^T e_1 - H_{RR} R_c^{-1} H_{CR}^T e_C - H_{R2} f_{CPL}] \quad (3.18a)$$

$$f_{Rc} = (R_c - H_{RR}^T R_t H_{RR})^{-1} [-H_{1R}^T e_1 + H_{RR}^T R_t H_{RL} f_L + H_{RR}^T R_t H_{R2} f_{CPL} - H_{CR}^T e_C] \quad (3.18b)$$

Consecuentemente, el modelo (3.11), (3.18) se expresa de forma equivalentemente como se muestra a continuación

$$\dot{x} = [J - R] \nabla_x H_a(x) + Gu \quad (3.19)$$

donde se han incorporado las definiciones (3.14) y se las matrices

$$J = \begin{bmatrix} 0 & J_{12} \\ -J_{12}^T & 0 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.20a)$$

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} \quad (3.20b)$$

con  $J = -J^T$  antisimétrica y  $R = R^T$  simétrica. A demás

$$\begin{aligned} J_{12} &= H_{CR} [R_c + H_{RR}^T R_t H_{RR}]^{-1} H_{RR}^T R_t H_{RL} - H_{CL} \\ R_1 &= H_{CR} [R_c + H_{RR}^T R_t H_{RR}]^{-1} H_{CR}^T \\ R_2 &= H_{RL}^T [R_t^{-1} + H_{RR} R_c^{-1} H_{RR}^T]^{-1} H_{RL} \\ G_1 &= -H_{CR} [R_c + H_{RR}^T R_t H_{RR}]^{-1} H_{1R}^T \\ G_2 &= H_{CR} (R_c - H_{RR}^T R_t H_{RR})^{-1} H_{RR}^T R_t H_{R2} - H_{C2} \\ G_3 &= H_{1L}^T - H_{RL}^T R_t H_{RR} [R_c + H_{RR}^T R_t H_{RR}]^{-1} H_{1R}^T \\ G_4 &= -H_{RL}^T (R_t^{-1} + H_{RR} R_c^{-1} H_{RR}^T)^{-1} H_{R2}. \end{aligned}$$

Cabe aclarar que aún cuando se han supuesto resistencias lineales, las relaciones constitutivas de los elementos almacenadores pueden ser no-lineales.

### 3.1.3. Propiedades Estructurales de la Red

El objetivo de modelar la red como se mostró anteriormente es aprovechar la estructura de los circuitos para obtener propiedades asociadas a ella. En la presente sección se realiza un análisis de algunas de éstas propiedades.

**Proposición 3.1.3** *Las pérdidas de los inductores de modelan en serie con los mismos, estas resistencias serán consideradas controladas por voltaje, por lo tanto pertenecen al árbol del análisis, son  $R_t$ , entonces*

$$H_{RL} = I_2 \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_3}; H_{RR} = 0_1 \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_4} \quad (3.21)$$

con  $I_2$  la matriz identidad y  $0_1$  una matriz de ceros.

**Proposición 3.1.4** *Las pérdidas de los capacitores serán modeladas como resistencias en paralelo con los mismos, estas resistencias serán consideradas resistencias controladas por corriente, por lo tanto estos elementos pertenecen al co-árbol del grafo por lo que*

$$H_{CR} = I_3 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}; H_{1R} = \mathbf{0}_2 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \quad (3.22)$$

con  $I_3$  una matriz identidad y  $\mathbf{0}_2$  una matriz llena de ceros.

**Proposición 3.1.5** *Las cargas se modelan como resistencias con relación de constitución no lineal en paralelo con los capacitores, dadas sus características, estas resistencias aparecen en el co-árbol del grafo, por lo tanto*

$$H_{C2} = I_4 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_6}; H_{R2} = \mathbf{0}_3 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_6} \quad (3.23)$$

con  $I_4$  es una matriz identidad y  $\mathbf{0}_3$  es una matriz llena de ceros.

## 3.2. Caracterización de Estructura topológicas de redes típicas

Hasta este momento se ha sentado la base tanto física como matemática para expresar modelos matemáticos de circuitos eléctricos. En la referencia [2] además de proponer una metodología sistemática para la obtención de modelos matemáticos de circuitos eléctricos, se muestra un análisis de características de estabilidad de las redes. En la presente sección solo se aborda el estudio de las propiedades estructurales de las redes típicas.

Para este estudio se explota el hecho de que cada submatriz de la matriz fundamental de *loops* define la estructura del circuito.

Para poder formular los resultados, se considera primero una red genérica que captura de manera unificada las características de las redes típicas, para después presentar los casos particulares. Suponga entonces que se cumplen las condiciones dadas en las Proposiciones 3.1.3 y 3.1.4. Entonces, el modelo dinámico de la red se representa por el modelo (??) donde quedan por caracterizar las matrices  $H_{CL} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_5}$  que contempla las conexiones entre los



capacitores y los inductores, y  $H_{1L} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_5}$  que incluye las conexiones entre las fuentes y los inductores.

Considere que los  $n_5$  inductores están divididos en tres tipos:  $n_r$   $r$ -inductores que están en una trayectoria que conecta una fuente con un capacitor,  $n_s$   $s$ -inductores que están en una trayectoria que conecta una fuente con otra fuente y  $n_p$   $p$ -inductores situados en una trayectoria que conecta un capacitor con otro capacitor, de manera que  $n_r + n_s + n_p = n_5$ . Más aún, considere que los capacitores pertenecen a alguno de los siguientes casos

**C.1** El  $i$ -ésimo capacitor, con  $i = 1, \dots, n_2$ , comparte cutset con  $r_i$   $r$ -inductores.

**C.2** El  $i$ -ésimo capacitor, con  $i = 1, \dots, n_2$ , comparte cutset con  $s_i$   $s$ -inductores.

Por otro lado los voltajes de las fuentes satisfacen

**C.3** La  $i$ -ésima fuente de voltaje, con  $i = 1, \dots, n_2$ , comparte cutset con  $m_i$   $m_i \in \{1, \dots, n_1\}$  inductores.

Entonces, la matriz de inductancias  $L$  puede dividirse como

$$L = \text{diag}\{\Lambda_r, \Lambda_s, \Lambda_p\} \in \mathbb{R}^{n_5 \times n_5}, \quad (3.24)$$

donde  $\Lambda_r$  es una matriz diagonal con  $z$  bloques, es decir,  $\Lambda_r = \text{diag}\{L_1, L_2, \dots, L_z\} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$  donde cada bloque es una matriz diagonal  $L_i \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i}$  con  $r_i$  el número de  $r$ -inductancias en el cutset básico del  $i$ -ésimo capacitor e  $i = 1, 2, \dots, z$ .

Debido a las proposiciones hechas en la sección anterior, la dimensión de la matriz de resistencias en serie con los inductores  $R_t$  es  $n_5 \times n_5$ , considerando  $n_3 = n_5$ , entonces la matriz de resistencia asociada puede dividirse de la misma forma, esto es, las variables asociadas a los capacitores e inductores pueden organizarse de modo que, los renglones de  $H_{CL}$  pueden dividirse en dos bloques, el primero, que corresponde a los capacitores que cumplen simultáneamente con las condiciones **C.1** y **C.2** y el segundo con aquellos capacitores que sólo cumplen con la condición **C.2**. Por otro lado, las columnas de  $H_{CL}$  están divididas en tres bloques, cada uno corresponde a un tipo de inductor ( $r$ ,  $s$  o  $p$ ).

Al seguir la organización descrita anteriormente, la matriz  $H_{CL}$  puede escribirse como

$$-H_{CL} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{r_1}^T & 0 & \cdots & 0 & 0_s & N_1 \\ 0 & \mathbf{1}_{r_2}^T & \cdots & 0 & 0_s & N_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1}_{r_z}^T & 0_s & N_z \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0_s & N_{z+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0_s & N_{n_2} \end{bmatrix}; \quad (3.25)$$

con  $\mathbf{1}_{r_i}^T \in \mathbb{R}^{1 \times r_i}$  un vector lleno de unos denotando la condición propuesta en **C.1**, donde se cumple que  $r_1 + r_2 + \dots + r_z = n_r$ . Las columnas con entradas  $0_s$  son vectores llenos de ceros de dimensión  $1 \times n_s$  y reflejan el hecho de que ningún capacitor puede ser conectado a un inductor tipo  $s$ .

En este sentido, los vectores renglón  $N_i \in \mathbb{R}^{1 \times n_p}$  incluyen la posibilidad de que un capacitor dado puede conectarse de manera simultánea a inductores tipo  $r$  y tipo  $p$ . Específicamente, si el  $i$ -ésimo capacitor está conectado a uno de los inductores  $p$  aparecerá un 1 en la entrada correspondiente, de otra forma aparecerá un 0. Si el capacitor sólo cumple con **C.1**, entonces el vector  $N_i$  es cero. En los renglones que van de  $z+1$  a  $n_2$  sólo aparecen vectores  $N_i$  porque corresponden a capacitores de la clase **C.2**. Es inherente que surjan dos propiedades:

- Cada columna de la matriz  $N = \text{col}\{N_1, \dots, N_{n_2}\} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_p}$  tiene sólo un 1 y un -1.
- El vector  $\mathbf{1}_{n_2}$  es un vector propio izquierdo de  $N$  asociado al valor propio derecho 0, tal que  $\mathbf{1}_{n_2}^T N = 0$ .

Si se toma en cuenta la matriz  $H_{1L}^T \in \mathbb{R}^{n_5 \times n_1}$ , es posible llegar a la siguiente expresión

$$\dot{i}_1 = -H_{1L} \dot{i}_L$$

dado que sí  $H_{1R} = 0$ , y al tomar en cuenta que los renglones de la matriz  $H_{1L}^T$  se pueden dividir en tres bloques que corresponden a los inductores tipo  $r$ ,  $s$  y  $p$ , donde el tercer bloque siempre es cero debido a que las fuentes nunca se encuentran en el *cutset* donde se encuentran los inductores tipo  $p$ , entonces, la matriz puede representarse como

$$H_{1L}^T = \begin{bmatrix} M_r \\ M_s \\ 0_p \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

donde  $0_p$  es un vector cero de dimensión  $n_p \times n_1$ . Las entradas diferentes de cero para cada columna de  $M_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_1}$  relacionan las fuentes con los inductores tipo  $r$ . Además, de manera consecuente con la partición de la matriz  $H_{CL}$ , que a su vez viene de **C.1**,  $M_r$  puede dividirse en  $z$  secciones, cada una de dimensión  $r_i \times n_1$ . Estas secciones  $M_{r_i}$ , con  $i = 1, \dots, z$ , están formadas por vectores columna  $\beta_{ij} = \text{col}(\beta_{ij}^k) \in \mathbb{R}^{r_i}$ , con  $j = 1, \dots, n_1$ , llegando a la siguiente representación

$$M_r = \begin{bmatrix} M_{r_1} \\ M_{r_2} \\ \vdots \\ M_{r_z} \end{bmatrix}; M_{r_i} = \begin{bmatrix} \beta_{i1} & \cdots & \beta_{in_1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_i \times n_1}; \quad (3.27)$$

y a su vez  $\beta_{ij}^k \in \mathbb{R}$  para  $k = 1, \dots, r_i$ ,  $i = 1, \dots, z$ . Las propiedades de esta matriz son las siguientes:

- Dado que una fuente puede ser conectada sólo a un inductor tipo  $r$ , el  $k$ -ésimo renglón de  $M_{r_i}$  tiene sólo una entrada diferente de cero y ésta aparece en una columna diferente respecto a los demás renglones.
- Las entradas diferentes de cero de cada columna de  $M_s \in \mathbb{R}^{n_s \times n_1}$  muestran que hay conexiones entre la fuente con otra fuente.
- La matriz  $0_p$  está llena de ceros y exhibe el hecho de que las fuentes no pueden ser conectadas con inductores tipo  $p$ .

### 3.2.0.1. Topología radial

La red radial es la topología más simple de todas. Esta red tiene la propiedad de que sólo hay una fuente para satisfacer la demanda de todas las cargas. Esto quiere decir que la energía eléctrica solo circula en una sola dirección  $n_1 = 1$ .

El sistema radial es análogo a una rueda con rayos con soporte desde el centro. La potencia se envía a un punto central y desde ahí se divide en ramificaciones en serie para suministrar servicio eléctrico a cargas individuales. Un ejemplo de esta red es la que se muestra en la Figura 3.1.

Las siguientes son propiedades de este tipo de interconexión

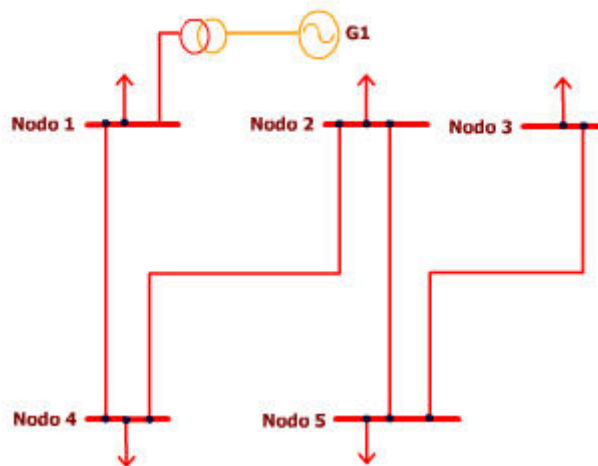


Figura 3.1: Red Radial

- Sólo hay inductores tipo  $r$  y hay un  $r$ -inductor en el cutset de cada capacitor, por lo que  $r_i = 1$ ,  $n_2 = n_5$  y las matrices de interconexión toman la forma

$$H_{CL} = -I_{n_2} \quad H_{1L} = \mathbf{1}_{n_2}^T \quad (3.28)$$

### 3.2.0.2. Topología Anillo

Esta configuración es más confiable que la radial, puesto que tiene dos fuentes de alimentación, si una falla, la otra provee energía. Un ejemplo de esta red puede observarse en la Figura 3.2.

Las propiedades topológicas se muestra a continuación

- No hay inductores tipo  $s$  y sólo hay un  $r$ -inductor en el cutset de cada capacitor, por lo que  $r_i = 1$ .
- Como sólo hay dos fuentes  $n_1 = 2$ , con lo que  $n_r = 2$  y el número de capacitores que satisfacen de manera simultánea C.1 y C.2 es también 2.
- Debido a los puntos anteriores,  $n_p = n_2 - 2$  por lo tanto, los primeros dos renglones de la matriz  $N$  son cero.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, las matrices  $H_{CL}$ ,  $H_{1L}$  están dadas

### 3.2 Caracterización de Estructura topológicas de redes típicas

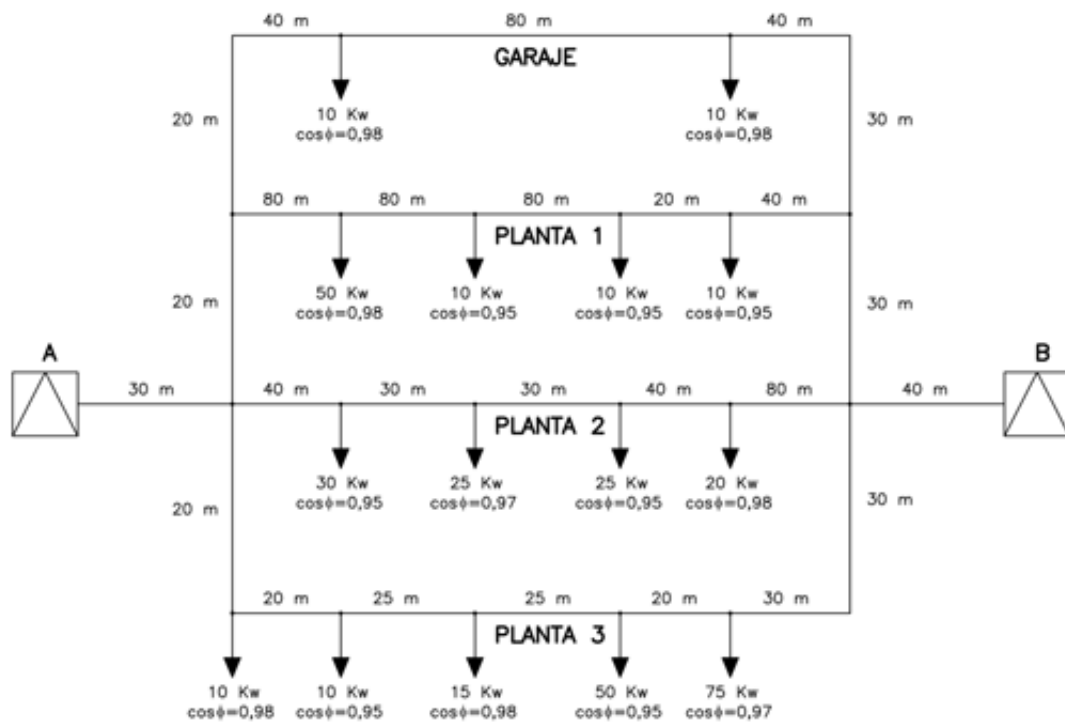


Figura 3.2: Red Anillo

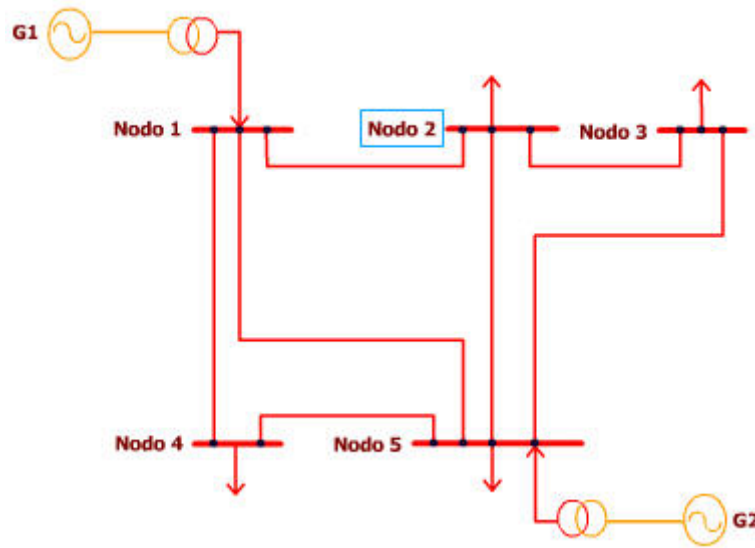


Figura 3.3: Red Malla

por

$$-H_{CL} = \begin{bmatrix} I_2 & \tilde{N}_1 \\ 0_4 & \tilde{N}_2 \end{bmatrix}; \quad H_{1L}^T = \begin{bmatrix} \beta_{11}^1 & \beta_{12}^1 \\ \beta_{21}^1 & \beta_{22}^1 \\ 0_p & 0_p \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

en este caso  $0_4 \in \mathbb{R}^{n_2-2 \times 2}$  y  $\tilde{N}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times n_p}$  y  $\tilde{N}_2 \in \mathbb{R}^{n_2-2 \times n_p}$ .

### 3.2.0.3. Topología Malla

La red malla es la más elaborada pero también la más confiable ya que cada carga se conecta a todas las fuentes y las fuentes también están conectadas entre ellas. Un ejemplo típico de esta red es la que se muestra en la Figura 3.3.

donde las principales características de esta topología son

- No hay inductores tipo  $p$  ni capacitores clase **C.2**.
- El número de fuentes es igual al número de capacitores, como consecuencia  $n_1 = n_2$ .
- Debido a que todas las fuentes están conectadas a todas las resistencias de co-árbol, entonces  $r_i = n_1$  para todo  $i = 1, \dots, n_r$ .

De acuerdo a las características mencionadas anteriormente la matriz  $H_{CL}$  se puede expresar como

$$H_{CL}^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{n_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\mathbf{1}_{n_1} \\ 0_s & 0_s & \cdots & 0_s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_5 \times n_1}, \quad (3.30)$$

con  $n_1$  el número de fuentes y  $n_s < n_1$  son las fuentes conectadas a otras fuentes. Por su parte, la matriz  $H_{1L}^T$  es como (3.26) sin el término  $0_{p \times n_1}$ .

En el siguiente Capítulo se hará uso de las estructura de la red presentadas para abordar el problema principal de este trabajo, la existencia de estado estacionario para redes eléctricas.

# Existencia de estado estacionario en redes típicas

En el presente capítulo se realizará el análisis de existencia de estado estacionario para las redes típicas que caracterizan a los circuitos eléctricos.

## 4.1. Modelo General

Hasta este punto la representación del sistema se encuentra en función de  $q$ , cargas en el capacitor y  $\varphi$ , encadenamientos de flujo en los inductores. Para seguir la metodología es necesario representar al sistema en función de voltajes y corrientes, dicho modelo es el siguiente

$$\dot{z} = P^{-1}[J - R]z + P^{-1}Gu \quad (4.1)$$

donde  $z = \nabla_x H_a \in \mathbb{R}^{n_2+n_5 \times 1}$ ,  $P = \text{diag}\{C, L\} \in \times$ . Bajo las proposiciones 3.1.3, 3.1.4 y 3.1.5 la expresión matricial del modelo anterior se representa como

$$\begin{bmatrix} V_c \\ i_L \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_c^{-1} & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & -R_t \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -C^{-1} \\ 0_3 \end{bmatrix}}_{B_1} i_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ L^{-1} H_{1L}^T \end{bmatrix}}_{B_2} E \quad (4.2)$$

Donde el modelo (4.2) representa de forma general el comportamiento de redes eléctricas con CPL.



### 4.1.1. Equilibria de circuitos eléctricos con CPL

Con base en el modelo (4.2), los puntos para los cuales la velocidad del campo vectorial asociado al sistema es cero, se encuentran dados por las siguientes expresiones

$$-R_c^{-1}V_C - H_{CL}i_L - i_2 = 0 \quad (4.3a)$$

$$H_{CL}^T V_C + R_t i_L - H_{1L}^T E = 0 \quad (4.3b)$$

Donde los puntos de equilibrio de la red con CPL serán las soluciones que satisfagan la restricción algebraica (4.3), el conjunto de soluciones de (4.3) son los puntos de equilibrio, es decir los valores  $V_{C*}$  e  $i_{L*}$ , así como  $i_{2*}$  y  $E_*$ . Por lo tanto los *equilibria* se encuentran representados por las siguientes expresiones

$$-R_c^{-1}V_{C*} - H_{CL}i_{L*} - i_{2*} = 0 \quad (4.4a)$$

$$H_{CL}^T V_{C*} + R_t i_{L*} - H_{1L}^T E_* = 0 \quad (4.4b)$$

### 4.1.2. Representación entrada-salida

Para poder realizar la representación entrada salida es necesario considerar la siguiente ecuación de salida

$$y = \begin{bmatrix} I_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ i_L \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Entonces la representación entrada-salida para el sistema definido por (4.2) y (4.5) es la siguiente

$$V_C(s) = \begin{bmatrix} I_4 & 0 \end{bmatrix} \left( sI - \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_c^{-1} & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & -R_t \end{bmatrix} \right)^{-1} \left( \begin{bmatrix} -C^{-1} \\ 0_3 \end{bmatrix} I_2(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ L^{-1} H_{1L}^T \end{bmatrix} E(s) \right) \quad (4.6)$$

donde el comportamiento de  $V_C(s)$  en estado estacionario es el siguiente

$$\bar{V}_C(0) = \begin{bmatrix} I_4 & 0 \end{bmatrix} \left( - \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_c^{-1} & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & -R_t \end{bmatrix} \right)^{-1} \left( \begin{bmatrix} -C^{-1} \\ 0_3 \end{bmatrix} \bar{I}_2(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ L^{-1} H_{1L}^T \end{bmatrix} E(0) \right) \quad (4.7)$$

donde la representación entrada salida se representa como

$$\bar{V}_C(0) = \begin{bmatrix} I_4 & 0 \end{bmatrix} \left( - \begin{bmatrix} -R_c^{-1} & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & -R_t \end{bmatrix} \right)^{-1} \left( \begin{bmatrix} -I_{n_2} \\ 0_3 \end{bmatrix} \bar{I}_2(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ H_{1L}^T \end{bmatrix} E(0) \right) \quad (4.8)$$

Ahora bien, con la intención de desarrollar la ecuación (4.9), asuma que matriz  $[J - R]^{-1}$  tiene la forma general

$$[J - R]^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

con las matrices  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  y  $A_{22}$  de las dimensiones adecuadas. Entonces por un lado, la ecuación (4.9) también puede escribirse como

$$\bar{V}_C(0) = - \begin{bmatrix} I_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -I_{n_2} \\ 0_3 \end{bmatrix} \bar{I}_2(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ H_{1L}^T \end{bmatrix} E(0) \right) \quad (4.9)$$

Mientras que usando el complemento de Schur, las submatrices  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  son

$$A_{11} = [-R_c^{-1} - H_{CL}R_t^{-1}H_{CL}^T]^{-1} \quad (4.10a)$$

$$A_{12} = -[R_c^{-1} + H_{CL}R_t^{-1}H_{CL}^T]^{-1} (-H_{CL}R_t^{-1}) \quad (4.10b)$$

$$(4.10c)$$

donde la función de transferencia en estado estacionario general es

$$\bar{V}(0) = -A_{11}I_2(0) - A_{12}H_{1L}^T E \quad (4.11)$$

En la siguiente sección se analiza de forma particular cada red típica de circuitos eléctricos para obtener condiciones de existencia de estado estacionario en función de las propiedades estructurales de cada red.

## 4.2. Estado estacionario en redes típicas

En esta sección se realiza el análisis de estado estacionario para cada una de las redes típicas de circuitos eléctricos.

### 4.2.1. Análisis de red radial

De acuerdo a lo presentado en la Sección 3.2, las características topológicas de la red radial, en términos de las submatrices de la matriz fundamental de loops son

$$H_{CL} = -I_{n_2} \text{ y } H_{1L} = \mathbf{1}_{n_2}^T. \quad (4.12)$$

Bajo estas condiciones, el modelo (4.2) puede ser expresado como

$$\begin{bmatrix} V_c \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_c^{-1} & I_{n_2} \\ -I_{n_2} & -R_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C^{-1} \\ 0_3 \end{bmatrix} i_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ L^{-1} \mathbf{1}_{n_1}^T \end{bmatrix} E \quad (4.13)$$

con las matrices diagonales  $R_c > 0$ ,  $R_t > 0$ .

Nótese que el uso de las propiedades (4.12) simplifica considerablemente el modelo original y sintetiza la obtención de  $\bar{V}_C(0)$ , de acuerdo con la representación general del estado estacionario de la sección anterior, para la red radial, se expresa de la siguiente forma

$$A_{11} = [-R_c^{-1} - R_t^{-1}]^{-1} \quad (4.14a)$$

$$A_{12} = -[R_c^{-1} + R_t^{-1}]^{-1} (R_t^{-1}) \quad (4.14b)$$

$$(4.14c)$$

$$\bar{V}_C(0) = -[-R_c^{-1} - R_t^{-1}]^{-1} I_2(0) - [R_c^{-1} + R_t^{-1}]^{-1} (R_t^{-1}) \mathbf{1}_{n_1}^T E \quad (4.15)$$

donde las matrices  $R_c^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{r_{ci}} \right\}$  y  $R_t^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{r_{ti}} \right\}$  con  $i = 1, \dots, n$  son tales que

$$R_c^{-1} + R_t^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{r_{ci}} + \frac{1}{r_{ti}} \right\}$$

y consecuentemente

$$[R_c^{-1} + R_t^{-1}]^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{r_{ti} r_{ci}}{r_{ci} + r_{ti}} \right\}. \quad (4.16)$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones (4.16) y (4.14) en (??), se puede escribir la salida en estado estacionario  $\bar{Y}$  como

$$\begin{aligned} \bar{V}_C &= [R_c^{-1} + R_t^{-1}]^{-1} I_2 + [R_c^{-1} + R_t^{-1}]^{-1} R_t^{-1} E \\ &= \underbrace{\text{diag} \left\{ \frac{r_{ti} r_{ci}}{r_{ci} + r_{ti}} \right\}}_{G(0)} I_2 + \underbrace{\text{diag} \left\{ \frac{r_{ci}}{r_{ci} + r_{ti}} \right\}}_k E. \end{aligned} \quad (4.17)$$

De la última expresión se observa que la  $i$ -ésima salida depende únicamente de los  $i$ -ésimos elementos, en otras palabras, los voltajes de capacitor están desacoplados. Esta propiedad permite hacer una primer extensión al trabajo de [3], en el sentido de que se pueden considerar  $n$  CPLs conectadas de manera radial sin modificar notablemente la prueba de estabilidad.

Al considerar la metodología en [3] es posible afirmar que existe estado estacionario si

$$\tilde{V}_C = G(0) + k \Leftrightarrow -P_i = g_i(0)\bar{u}_i^2 + kt \text{ tiene solución real para } \bar{u}_i \quad (4.18)$$

Para la red radial la condición que se obtiene para garantizar la existencia de estado estacionario es la siguiente

$$P_i < \frac{k_i^2 E^2}{4g_i(0)} \quad (4.19)$$

De manera particular, haciendo  $n = 1$  en (4.17), se recupera la función de transferencia  $G(0)$  analizada en [3] para una carga, con salida

$$\begin{aligned} \tilde{V}_C(0) &= \frac{r_{t1}r_{c1}}{r_{c1} + r_{t1}}i_2 + \frac{r_{c1}}{r_{c1} + r_{t1}}E \\ &= \frac{r_{t1}}{1 + r_{t1}r_{c1}^{-1}}i_2 + \frac{1}{1 + r_{t1}r_{c1}^{-1}}E. \end{aligned}$$

Las propiedades (4.16) y (4.14) son consecuencia primero de expresar el modelo en términos de propiedades estructurales de la matriz fundamental de loops y segundo, de que esta topología radial es la más simple. Sin embargo, estas propiedades pueden seguir siendo explotadas para redes más elaboradas como la malla.

### 4.2.2. Análisis red malla

De acuerdo con la Sección 3.2 las características topológicas de la red malla, en términos de las submatrices de *loops* son

$$H_{CL}^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{n_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\mathbf{1}_{n_1} \\ 0_s & 0_s & \cdots & 0_s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_1}, \text{ y } H_{1L}^T = \begin{bmatrix} M_r \\ M_s \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

Al sustituir las propiedades de la matriz fundamental de *loops* la representación en estado estacionario esta dado por la siguiente expresión

$$\bar{V}_C = -diag\{r_{c_i}^{-1} + r_{11}^{-1} + r_{12}^{-1}\}\bar{I}_2 - \mathbb{K}E \quad (4.21)$$

donde  $K$  tiene la siguiente estructura

$$K = \begin{bmatrix} \frac{r_{11}^{-1}}{r_{c1}^{-1}+r_{11}^{-1}+r_{12}^{-1}} & \frac{r_{12}^{-1}}{r_{c1}^{-1}+r_{11}^{-1}+r_{12}^{-1}} \\ \frac{r_{21}^{-1}}{r_{c2}^{-1}+r_{11}^{-1}+r_{12}^{-1}} & \frac{r_{22}^{-1}}{r_{c2}^{-1}+r_{11}^{-1}+r_{12}^{-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

de acuerdo con la metodología empleada se debe de cumplir lo siguiente

$$\bar{V}_C = G(0)\bar{I}_2 + KE \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \bar{V}_{C1} = g_1(0)\bar{I}_{21} + k_{11}E_1 + k_{12}E_2 \\ \bar{V}_{C2} = g_2(0)\bar{I}_{22} + k_{21}E_1 + k_{22}E_2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

de forma general es posible expresar la representación en estado estacionario de la siguiente forma

$$-P_i = g_i(0)\bar{I}_{2i}^2 + (k_{i1}E_1 + k_{i2}E_2)\bar{I}_{2i} \quad (4.24)$$

Con base en la ecuación anterior es posible expresar la restricción de estado estacionario para la red malla de la siguiente forma

$$P_i < \frac{\Gamma_i^2}{4g_i(0)} \quad (4.25)$$

donde  $\Gamma_i^2 = \sum_{j=1}^{n_1} k_{ij}E_j$ . Dadas las condiciones de estado estacionario para las redes típicas es necesario caracterizar el tipo de estabilidad que posee dicho estado estacionario. Como se ha mencionado a lo largo de este documento el problema de estado estacionario se encuentra ligado al problema de existencia de puntos de equilibrio, por esa razón el análisis de estabilidad presentado en la siguiente sección será un análisis de estabilidad de puntos de equilibrio.

### 4.3. Estabilidad del estado estacionario

Para poder dar características de estabilidad de los puntos de equilibrio asociados a un estado estacionario es necesario definir que propiedades tienen los puntos de equilibrio.

### 4.3.1. Características de los *equilibria*

Los puntos de equilibrio de los circuitos eléctricos con CPL se encuentran dados por la siguiente expresión

$$-R_c^{-1}V_{C*} - H_{CL}i_L + i_{2*} = 0 \quad (4.26a)$$

$$H_{CL}^T V_{C*} + R_t i_{L*} - H_{1L}^T E_* = 0 \quad (4.26b)$$

Para encontrar características asociadas a los puntos de equilibrio, las ecuaciones anteriores se multiplica por  $V_{C*}$  la primera ecuación y por  $i_{L*}$  por la segunda, entonces los puntos de equilibrio quedan representados como

$$-V_{C*}^T R_c^{-1} V_{C*} - V_{C*}^T H_{CL} i_L + V_{C*}^T i_{2*} = 0 \quad (4.27a)$$

$$i_{L*}^T H_{CL}^T V_{C*} + i_{L*}^T R_t i_{L*} - i_{L*}^T H_{1L}^T E_* = 0 \quad (4.27b)$$

donde la potencia que consumen las CPL esta dada por

$$V_{C*}^T R_c^{-1} V_{C*} + V_{C*}^T H_{CL} i_L = \sum_i = 1^{n_6} P_{i*} \quad (4.28)$$

Asociada a la relación algebraica (4.28) se tiene la restricción de existencia de estado estacionario

$$P_{i*} < \frac{k_i^2 E_*^2}{4g_i(0)} \quad (4.29)$$

Al analizar la segunda ecuación de equilibrio se tiene

$$i_{L*}^T H_{CL}^T V_{C*} + i_{L*}^T R_t i_{L*} - i_{L*}^T H_{1L}^T E_* = 0 \quad (4.30)$$

donde el producto  $i_{L*}^T H_{1L}^T$  representa la corriente de la fuente de alimentación, entonces es posible expresar a la potencia de la fuente de esta forma

$$P_{1*} = i_{L*}^T H_{CL}^T V_{C*} + i_{L*}^T R_t i_{L*} = 0 \quad (4.31)$$

si bien las condiciones de existencia de estado estacionario establecen límites de consumo de potencia en la carga, la fuente de alimentación se encuentra naturalmente limitada

por una cantidad de potencia máxima, por lo tanto es necesario establecer la siguiente restricción

$$P_{1*} < P_{1max} \quad (4.32)$$

es decir, los puntos de equilibrio que satisfacen la solución de las ecuaciones algebraicas (4.26) además deben de satisfacer las condiciones (4.29) y 4.32 para garantizar la existencia de puntos de equilibrio reales dentro del sistema eléctrico.

### 4.3.2. Análisis de estabilidad

Para realizar el análisis la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas eléctricos con CPL es necesario tomar en cuenta el modelo matemático del sistema

$$\dot{z} = P^{-1}[J - R]z + P^{-1}Gu \quad (4.33)$$

al obtener los puntos de equilibrio para esta representación se tiene

$$P^{-1}[J - R]z_* + P^{-1}Gu_* = 0 \quad (4.34)$$

Donde  $P^{-1}G = [B_1 \ B_2]$  y  $u = [i_2 \ E]^T$ . Para realizar la prueba de estabilidad es necesario recordar que el comportamiento de la CPL es no lineal y esta definido por la siguiente expresión

$$i_2 = \varphi_c^{-1}(V_C) \quad (4.35)$$

para continuar con la prueba se realiza la siguiente suposición

**Suposición 4.3.1** *El mapeo  $\varphi_c^{-1}$  es incrementalmente pasivo, es decir*

$$(x_1 - x_2)^T (\varphi_c^{-1}(x_1) - \varphi_c^{-1}(x_2)) > 0 \quad (4.36)$$

con base en la suposición anterior es posible plantear la siguiente proposición

**Proposición 4.3.2** *Sea una red eléctrica con CPL definidas según (4.35) y asumiendo 4.3.1 como cierta. El punto de equilibrio es asintóticamente estable*

**Prueba 1** *Considere*

$$\tilde{x} = x - x_*$$

$$\tilde{i}_2 = i_2 - i_{2*}$$

$$\tilde{E} = E - E_*$$

y sea el modelo dinámico representado en las dinámicas admisibles

$$\dot{\tilde{x}} = [J - R]\tilde{x} + B_1\tilde{i}_2 + B_2\tilde{E} \quad (4.37)$$

y sea

$$H(\tilde{x}) = \frac{1}{1} \tilde{x}^T P^{-1} \tilde{x} \quad (4.38)$$

al obtener las derivadas a lo largo de las trayectorias del sistema se tiene

$$\dot{H}(\tilde{x}) = -\tilde{x}^T P^{-1} R P^{-1} \tilde{x} + \tilde{x}^T P^{-1} B_1 \tilde{i}_2 + \tilde{x}^T P^{-1} B_2 \tilde{E} \quad (4.39)$$

es posible simplificar la ecuación  $\tilde{x}^T P^{-1} B_1 \tilde{i}_2$

$$\tilde{x}^T P^{-1} B_1 \tilde{i}_2 = -(V_C - V_{C_*})^T (\varphi_c^{-1}(V_C) - \varphi_c^{-1}(V_{C_*})) \quad (4.40)$$

al considerar  $E_* = E$

$$\dot{H}(\tilde{x}) = -\tilde{x}^T P^{-1} R P^{-1} \tilde{x} - (V_C - V_{C_*})^T (\varphi_c^{-1}(V_C) - \varphi_c^{-1}(V_{C_*})) \quad (4.41)$$

entonces si  $R > 0$  entonces  $\dot{H}(\tilde{x})$  entonces  $\tilde{x}$  es asintóticamente estable.



## Conclusiones

El estudio de estabilidad transitoria en redes eléctricas se ha convertido en un problema de interés para la comunidad dedicada al estudio de la ingeniería eléctrica en general, bajo esta tendencia es claro que en el presente escrito se abordó un problema de manera muy específica relacionado con este tipo de problemas, específicamente estabilidad transitoria de voltaje. Si bien las nuevas vertientes en el estudio de los sistemas de potencia tienen un enfoque de estudio hacia las características del sistema en estado estacionario a través de modelos estáticos de las redes de potencia, en el presente se muestra un re-estudio de las condiciones de existencia de estado estacionario en redes eléctricas. Este estudio se muestra como una opción para aprovechar la dinámica de todo el sistema de eléctrico, esto es una ventaja en el estudio de fenómenos transitorios de los circuitos en general.

El principal problema que se abordó en este trabajo es el de existencia de estado estacionario en circuitos de corriente directa, si bien, el estudio de este tipo de problemas no es nuevo, emplear propiedades estructurales de las redes para el análisis de dichas condiciones si lo es. La principal contribución del trabajo fue llevar las condiciones de estado estacionario a redes eléctricas complejas al hacer uso de las propiedades estructurales de los circuitos eléctricos, caracterizando los puntos de equilibrio así como la estabilidad de dichos puntos.

Si bien el presente trabajo se enfocó en un problema muy específico asociado a las redes eléctricas queda como precedente para un futuro análisis de estos sistemas con conocimiento de causa de las propiedades estructurales de las redes.

---

### **5.0.3. Trabajo Futuro**

En principal enfoque en este trabajo es el análisis de sistemas eléctricos con fuentes de excitación constantes, el principal pendiente es enfocar el análisis en circuitos con excitación alterna, de donde surgen dos aristas, la primera, determinar ¿cuál es el estado estacionario de un sistema eléctrico alterno?, ¿cómo representarlo? y dos cuales son las condiciones de existencia de dicho estado estacionario. Esto es importante ya que con esas condiciones será posible caracterizar fenómenos de inestabilidad de voltaje como el colapso de forma dinámica dando pie a generación de técnicas de control para evitar dicho suceso.

---

## Bibliografía

- [1] Ieee recommended practice for electric power distribution for industrial plants. *IEEE Std 141-1993*, pages 1–768, April 1994. [20](#)
- [2] Sofia Ávila Becerril. *Caracterización y control de microrredes de potencia Vía propiedades estructurales*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2016. [22](#), [27](#)
- [3] Nikita Barabanov, Romeo Ortega, Roberto Griño, and Boris Polyak. On existence and stability of equilibria of linear time-invariant systems with constant power loads. *IEEE Transactions on circuit and systems-I*, 62(12):1–9, january 2015. [2](#), [3](#), [5](#), [6](#), [8](#), [12](#), [19](#), [39](#)
- [4] Awang bin Jusoh. The instability effect of constant power loads. In *National Power and Energy Conference*, 2004. [2](#), [11](#)
- [5] R. Brayton and J. Moser. A theory of nonlinear networks I. *Quart App. Math.*, 1964. [22](#), [23](#)
- [6] T. Van Cutsem and C. Vournas. *Voltage stability of electric power systems*, volume 75. Springer-Verlag, 1998. Birkhäuser Verlag. [4](#)
- [7] L. Herrera and J. Wang. Stability analysis and controller desing of dc microgrids with Constant Power Loads. *IEEE*, pages 691–696, 2015. [2](#)
- [8] David J. Hill. On the equilibria of power systems with nonlinear loads. *IEEE transactions on circuits and systems*, 36(11):1458–1463, November 1989. [10](#)
- [9] P. Ju, E. Handschinn, and Karl. Nonlinear dynamic load modelling: Model and parameter estimation. *IEEE Transactions on Power systems*, 1996. [2](#)
- [10] Daniel Karlsson and J. David Hill. Modelling and indentification of nonlinear dynamic loads in power systems. *IEEE Transactions on Power systems*, 9(1):157–166, February 1994. [2](#)

- [11] A. Kwasiniski and Ch.O. Onwuchekwa. Dynamic behavior and stabilization of dc microgrids with constant power load. *IEEE Transactions power electronics*, 26(3):822–834, 2011. [2](#)
- [12] B. Polyak. Convexity of quadratic transformations and its use in control optimization. *Journal of Optimal theory and applications*, 1998. [7](#)
- [13] B. Polyak and E. Gryazina. Convexity/nonconvexity certificate for power flow analysis. In *ISESO*, 2015. [9](#)
- [14] K. Ranganathan (auth.) R. Balakrishnan. *A Textbook of Graph Theory*. Universitext. Springer-Verlag New York, 2 edition, 2012. [14](#)
- [15] S. Sanchez, R. Ortega, R. Griño, G. Bergna, and M. Molinas. Conditions for existence of equilibria of systems with constant power load. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 61(7):2204–2211, July 2014. [8](#), [10](#)
- [16] P.E. Wellstead. *Introduction to physical system modelling*. [www.control-systems-principles.co.uk](http://www.control-systems-principles.co.uk), 2000. [15](#)