



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL**

**ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE ALGORITMOS  
CONTINUOS DE CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DE  
ORDEN SUPERIOR PARA SISTEMAS MECÁNICOS Y  
ELECTROMECÁNICOS**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ULISES ARTURO PÉREZ VENTURA

TUTOR PRINCIPAL  
DR. LEONID FRIDMAN  
FACULTAD DE INGENIERÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2016



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dra. María Cristina Verde Rodarte  
Secretario: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez  
Vocal: Dr. Leonid Fridman  
1er. Suplente: Dr. Fernando Castaños Luna  
2o. Suplente: Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria

La tesis se realizó en el Posgrado de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Leonid Fridman  
Facultad de Ingeniería

---



*Este trabajo está dedicado a mi madre por su compañía a lo largo de mi vida profesional. A mis hermanos por todos los momentos felices que pasamos.*

*A Brenda por ser mi inspiración.*

*A mis compañeros y amigos del posgrado por su invaluable ayuda y por todos los momentos que compartimos.*

*Un especial agradecimiento al Dr. Fridman por sus grandes ideas y consejos para la realización de este trabajo. También a los compañeros del seminario de Modos Deslizantes por sus observaciones.*

*A los doctores del colegio de control por sus conocimientos compartidos.*

*Finalmente agradezco al CONACYT por el apoyo económico para la realización de mis estudios de posgrado.*



# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del Arte . . . . .	1
1.2. Motivación . . . . .	5
1.3. Planteamiento del problema . . . . .	6
1.4. Objetivos . . . . .	6
1.5. Contribuciones . . . . .	6
1.6. Estructura de la tesis . . . . .	7
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>9</b>
2.0.1. Sistema . . . . .	9
2.0.2. Dinámica Parásita . . . . .	10
2.1. Función Descriptiva y Enfoque de Balance Armónico . . . . .	11
2.1.1. Ecuación de Balance Armónico . . . . .	12
2.2. Criterio de Loeb de Estabilidad Orbital . . . . .	12
2.3. Enfoque de Potencia Promedio . . . . .	13
2.3.1. Clasificación de la Potencia Promedio . . . . .	14
2.4. Resumen del Capítulo . . . . .	14
<b>3. Análisis de Algoritmos de SMC para Sistemas de Grado Relativo Uno</b>	<b>15</b>
3.1. Análisis Basado en Balance Armónico . . . . .	17
3.1.1. Control por Modos Deslizantes de Primer Orden . . . . .	17
3.1.2. Algoritmo Super-Twisting . . . . .	20
3.1.2.1. Criterios de Selección de las Ganancias del Super-Twisting	23
3.1.3. Comparación de los Parámetros de <i>Chattering</i> . . . . .	24
3.1.4. Análisis Respecto a las Ganancias de los Algoritmos de Control por Modos Deslizantes . . . . .	26
3.2. Ejemplo: Motor de Corriente Directa . . . . .	29
3.3. Resumen del Capítulo . . . . .	36
<b>4. Análisis de Algoritmos de SMC para Sistemas de Grado Relativo Dos</b>	<b>39</b>
4.1. Análisis Basado en Balance Armónico . . . . .	41
4.1.1. Algoritmo Twisting . . . . .	41
4.1.2. Algoritmo Twisting Continuo . . . . .	44

## ÍNDICE GENERAL

---

4.1.3. Control Integral Discontinuo . . . . .	47
4.1.4. Comparación de los Parámetros de <i>Chattering</i> . . . . .	49
4.2. Ejemplo: Péndulo Invertido . . . . .	51
4.3. Resumen del Capítulo . . . . .	57
<b>5. Conclusiones</b>	<b>59</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>



# Introducción

---

Los sistemas mecánicos y electromecánicos representan un campo de estudio muy importante en la teoría de control debido a la gran cantidad de aplicaciones en las que se pueden utilizar, por ejemplo: regular la velocidad de motores, posicionar brazos manipuladores, controlar vehículos aeroespaciales, entre otras. El modelado de dichos sistemas generalmente contempla un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales por causa de los efectos de fricción y los fuertes acoplamientos entre las partes mecánicas y eléctricas. Es por esto que el esquema de control diseñado debe garantizar estabilidad en lazo cerrado, alta precisión y robustez con respecto a perturbaciones.

El control por Modos Deslizantes (SMC por sus siglas en inglés) es una técnica eficiente para compensar perturbaciones acopladas teóricamente en forma exacta. El objetivo del algoritmo de SMC es llevar al conjunto de deslizamiento a cero en tiempo finito y mantenerlo ahí, de manera que la dinámica de lazo cerrado tenga un desempeño deseado. Sin embargo para lograr este objetivo se requiere que la acción de control sea capaz de conmutar con frecuencia (teóricamente) infinita lo cual en la práctica es imposible de realizar debido a la presencia de dinámicas no modeladas en actuadores y sensores, efectos de retardo y discretización, histéresis, entre otros elementos no considerados en el modelo matemático de la planta. En consecuencia el conjunto de deslizamiento converge a una vecindad del origen dentro de la cual las trayectorias del sistema describen oscilaciones de alta frecuencia, este fenómeno es conocido como *chattering* en la literatura de SMC.

## 1.1. Estado del Arte

Diversos algoritmos de SMC se han utilizado para controlar sistemas mecánicos y electromecánicos, por ejemplo [Riachy \*et al.\* \(2008\)](#) diseñan una ley de control para un sistema carro-péndulo utilizando el algoritmo discontinuo Twisting. [Pisano \*et al.\* \(2008\)](#) implementan un algoritmo continuo Super-Twisting para controlar la velocidad de un motor de corriente directa. En el libro de [Utkin \*et al.\* \(2009\)](#) se estudian diversos modelos como motores de inducción, motores de imán permanente, convertidores de

Generación	Señal de Control	Información	Estabilidad	Orden de Deslizamiento
Primera	Discontinua	$\sigma, \dot{\sigma}$	Asintótica	1
Segunda	Discontinua	$\sigma, \dot{\sigma}$	Tiempo Finito	2
Tercera	Continua	$\sigma, \dot{\sigma}$	Asintótica	2
Cuarta	Continuo	$\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}$	Tiempo Finito	3
Quinta	Continua	$\sigma, \dot{\sigma}$	Tiempo Finito	3

**Tabla 1.1:** Características Principales de los Algoritmos de SMC para sistemas de grado relativo dos.

potencia, entre otros. Aplicaciones sobre suspensiones de automóviles se pueden consultar en el libro de [Imine \*et al.\* \(2011\)](#).

Los algoritmos de SMC se pueden clasificar en cinco generaciones cuyas características se resumen en la Tabla 1.1, considerando que se utilizan para estabilizar el origen del sistema

$$\ddot{\sigma} = F(t, \sigma, \dot{\sigma}) + u, \quad (1.1)$$

donde la perturbación acoplada  $F$  representa efectos de fricción por ejemplo, el grado relativo es dos con respecto a la salida  $\sigma \in \mathbb{R}$  (posición) y la entrada de control  $u \in \mathbb{R}$ .

- La primera generación de algoritmos de SMC generan señales de control discontinuo, logran convergencia asintótica de la salida  $\sigma$  a cero con la medición de las variables  $(\sigma, \dot{\sigma})$ . El control por modos deslizantes de primer orden (FOSMC por sus siglas en inglés) desarrollado por [Utkin \(1992\)](#) pertenece a esta generación.
- La segunda generación de algoritmos de SMC se caracteriza por señales de control discontinuo y convergencia de la salida  $\sigma$  a cero en tiempo finito. Para su implementación se requiere de la medición de  $(\sigma, \dot{\sigma})$ . El algoritmo Twisting propuesto por [Emelyanov \*et al.\* \(1986\)](#) pertenece a esta generación.
- La tercera generación de algoritmos de SMC tiene como principales características la generación de señales de control continuo y convergencia asintótica de la salida  $\sigma$  a cero. Para su implementación se requiere del conocimiento de  $(\sigma, \dot{\sigma})$ . El algoritmo Super-Twisting (STA por sus siglas en inglés) formulado por [Levant \(1998\)](#) pertenece a esta generación.
- La cuarta generación se compone de algoritmos anidados para sistemas de grado relativo arbitrario, conocidos como controladores por modos deslizantes de orden superior (HOSMC por sus siglas en inglés), cuentan con una estrategia filtrado que permite aplicar señales de control continuo. Logran convergencia de la salida  $\sigma$  a cero en tiempo finito con la medición de las variables  $(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma})$ . Ejemplos de estos algoritmos son el Anidado y el Cuasi-continuo desarrollados por [Levant \(2005b\)](#).

- La quinta generación de algoritmos de SMC son continuos, logran convergencia de la salida  $\sigma$  a cero en tiempo finito con la medición de las variables  $(\sigma, \dot{\sigma})$ . Ejemplos de estos algoritmos son el Control Integral Discontinuo de Zamora *et al.* (2013), el Algoritmo Twisting Continuo presentado por Torres-Gonzalez *et al.* (2015) y los algoritmos anidados propuestos por Fridman *et al.* (2015).

Los algoritmos de SMC de la cuarta generación permiten estabilizar el origen del sistema (1.1) en tiempo finito mediante la implementación de entradas de control continuo, sin embargo requieren de la estimación de  $\ddot{\sigma}$  lo que significa conocer la perturbación acoplada  $F$ . En comparación, los algoritmos de quinta generación requieren únicamente de la medición de las variables  $(\sigma, \dot{\sigma})$  y garantizan un *modo deslizante de tercer orden*

$$\exists t_r : \sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = \ddot{\sigma}(t) = 0, \forall t \geq t_r, \quad (1.2)$$

compensado teóricamente en forma exacta la perturbación acoplada  $F$ . A esta comportamiento teórico se le conoce como *deslizamiento ideal*; para lograrlo se requiere que la entrada de control conmute con frecuencia (teóricamente) infinita, lo cual en la práctica no es realizable debido a diversos factores como son la presencia de dinámicas no modeladas en actuadores y sensores, efectos de retardo y discretización, histéresis, entre otros. En consecuencia las trayectorias describen *vibraciones de alta frecuencia* en una vecindad de la restricción (1.2), a este fenómeno se le conoce como *chattering*.

Se han estudiado algunas de las principales dinámicas parásitas presentes en los sistemas de control que pueden provocar *chattering*. Por ejemplo Levant (2005a) define el Orden de Deslizamiento como el valor entero  $k > 0$  tal que

$$|\sigma| \leq \gamma \tau^k, \quad (1.3)$$

donde  $\gamma > 0$  y  $\tau$  es el paso de muestreo. La expresión (1.3) indica el *tamaño* de la vecindad a la que converge la salida  $\sigma$  en función del paso de muestreo. Suponiendo que el valor de  $\tau$  es suficientemente pequeño, la última columna de la Tabla 1.1 hace notar que conforme se fueron desarrollando los algoritmos de SMC fue disminuyendo el tamaño de la región a la que converge la salida  $\sigma$  (aumenta la precisión respecto al paso de muestreo). El análisis de otras dinámicas parásitas como retardos de tiempo, efectos de histéresis y discretización, se pueden consultar en el libro de Utkin (1992).

Por otro lado, Fridman (2001) y Boiko (2005) estudiaron la presencia de actuadores y sensores, en donde el *chattering* es considerado como una solución periódica en una vecindad de la restricción (1.2). Existen dos enfoques para analizar las oscilaciones de alta frecuencia causadas por la presencia de actuadores:

**Dominio del tiempo:** Fridman (2002) propone un enfoque basado en la teoría de perturbaciones singulares y estabilidad de Lyapunov para estimar la amplitud de las oscilaciones, obtiene condiciones suficientes para la existencia y estabilidad de la solu-

ción periódica. [Boiko et al. \(2007\)](#) extiende este análisis para algoritmos de SMC de segundo orden utilizando mapas de Poincaré. El inconveniente de esta metodología es que no puede ser utilizada para estudiar controladores de orden arbitrario.

**Dominio de la frecuencia:** [Tsykin \(1984\)](#) propone un método para calcular en forma exacta los parámetros de amplitud y frecuencia de las oscilaciones periódicas, sin embargo solo es aplicable a los algoritmos discontinuos de SMC. Por otra parte, el enfoque de Balance Armónico permite estimar los parámetros de una posible solución periódica (amplitud y frecuencia), para ello es fundamental calcular la Función Descriptiva del algoritmo de SMC que caracteriza el efecto de las no linealidades sobre los parámetros de la solución periódica. A continuación se presentan algunos trabajos relacionados al estudio de algoritmos de SMC basados el enfoque de Balance Armónico:

- [Boiko et al. \(2004\)](#) analizan el algoritmo de segundo orden Twisting, mediante una expresión analítica de la Función Descriptiva estiman los parámetros de amplitud y frecuencia de las oscilaciones. Se concluye que los algoritmos de segunda generación pueden provocar *chattering* cuando se incrementa el grado relativo de la planta.
- [Boiko y Fridman \(2005\)](#) analizan el algoritmo de segundo orden Super-twisting, mediante una expresión analítica de la Función Descriptiva estiman los parámetros de amplitud y frecuencia de las oscilaciones. Se concluye que los algoritmos de tercera generación pueden provocar *chattering* cuando se incrementa el grado relativo de la planta, a pesar de aplicar señales continuas de control.
- [Rosales et al. \(2015\)](#) proponen un método para el cálculo numérico de Funciones Descriptivas de algoritmos de HOSMC. Se analiza el algoritmo Anidado para diferentes órdenes y se concluye que los algoritmos de cuarta generación pueden provocar *chattering* cuando se incrementa el grado relativo de la planta. Además se introdujo el concepto de nivel de tolerancia que se refiere a los valores de amplitud y frecuencia para los cuales el desempeño del sistema de control es aceptable.

Algunos enfoques se han propuesto para atenuar los efectos del *chattering* los cuales intuitivamente partieron de la suposición de que los algoritmos continuos basados en SMC reducen estos efectos:

- La metodología por [Burton y Zinober \(1986\)](#) consiste en aplicar señales de control continuo aproximando las funciones signo mediante funciones de saturación o sigmoide, con esto se puede garantizar de manera teórica que el conjunto de deslizamiento converge a una vecindad del origen cuyo tamaño está definido por la pendiente de la función saturación, o bien por la aproximación de la función sigmoide (se pueden consultar ejemplos en el libro de [Shtessel et al. \(2014\)](#)).
- El control por modos deslizantes de orden superior (HOSMC por sus siglas en inglés), de acuerdo con [Levant \(2003\)](#), asegura la convergencia en tiempo finito no

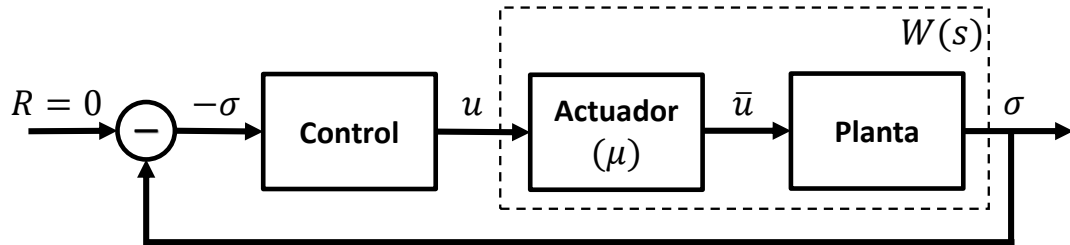


Figura 1.1: Esquema de Control.

solo de la variable de deslizamiento, si no también de sus derivadas sucesivas con respecto al tiempo. De manera teórica un controlador de *orden infinito* eliminaría completamente los efectos del chattering, sin embargo esto no es realizable. Por lo que esta estrategia consiste en incrementar el orden del controlador hasta obtener un desempeño aceptable del sistema en lazo cerrado.

No obstante, [Utkin \(2016\)](#) mostró a través de un ejemplo que existen actuadores estables cuyo efecto dinámico es tal que es mas conveniente aplicar entradas de control discontinuas en lugar de continuas; comparando la amplitud de las oscilaciones generadas por el FOSMC con respecto a las producidas por el Super-Twisting.

## 1.2. Motivación

El desarrollo de algoritmos de control por Modos Deslizantes de quinta generación representa un tema de investigación de gran interés en la actualidad debido a las propiedades de robustez con respecto a perturbaciones acopladas y convergencia de la salida a cero en tiempo finito; mediante el uso de señales de control continuas. Sin embargo resulta fundamental estudiar algunas de las principales dinámicas parásitas que son responsables de los fenómenos vibratorios de alta frecuencia, establecer criterios de comparación entre los diferentes algoritmos de control por Modos Deslizantes con respecto al *chattering* que producen y proponer metodologías de selección de las ganancias de los algoritmos para reducir sus efectos.

Las herramientas del dominio de la frecuencia se han utilizado satisfactoriamente para estimar los parámetros de amplitud y frecuencia de las posibles oscilaciones que se establecen cuando se considera a los actuadores y sensores (sistemas dinámicos que incrementan el grado relativo) como las dinámicas parásitas responsables de los fenómenos vibratorios de alta frecuencia.

### 1.3. Planteamiento del problema

Analizar en el dominio de la frecuencia algunos de los principales algoritmos de control por Modos Deslizantes, considerando la presencia de un actuador lineal (dinámica parásita) cuya dinámica está parametrizada por su constante de tiempo  $\mu$ , como puntos de comparación se tomarán los siguientes parámetros de *chattering*:

1. Amplitud de las posibles oscilaciones.
2. Frecuencia de las posibles oscilaciones.
3. Potencia promedio.

La Figura 1.1 presenta el esquema de control considerado para estudiar el fenómeno de *chattering*, se asume que los efectos de las dinámicas parásitas presentes en el lazo de control se pueden aproximar mediante un actuador estable para algún valor de su constante de tiempo  $\mu$ .

### 1.4. Objetivos

1. Comparar los parámetros de *chattering*: amplitud, frecuencia y potencia promedio, generados por algunos de los principales algoritmos de control por Modos Deslizantes en función del efecto de la dinámica del actuador (dinámica parásita) considerada.
2. Encontrar métodos de selección de las ganancias de los algoritmos de control por Modos Deslizantes analizados para reducir los efectos del *chattering*.
3. Estudiar las condiciones sobre la dinámica del actuador considerada para las cuales resulta más conveniente implementar algoritmos de SMC continuos con respecto a los algoritmos de SMC *clásicos* cuya señal de control es discontinua.
4. Mostrar a través de ejemplos los alcances de la metodología propuesta para analizar el *chattering* generado por los algoritmos de SMC cuando se utilizan para estabilizar sistemas mecánicos y electromecánicos.

### 1.5. Contribuciones

- Se calcularon expresiones analíticas de las Funciones Descriptivas de los algoritmos de SMC de quinta generación.
- Se estimaron los parámetros de amplitud y frecuencia de las oscilaciones a partir del enfoque de Balance Armónico, con lo que se propuso un criterio para calcular la energía cinética en cada ciclo de la solución periódica (potencia promedio).

- Se obtuvieron los valores críticos de la constante de tiempo del actuador que permiten determinar cuándo es más conveniente implementar algoritmos de SMC discontinuos con respecto a los de señal de control continua.
- Se ajustaron las ganancias de los algoritmos de SMC para reducir la amplitud de las oscilaciones y la potencia promedio.

## 1.6. Estructura de la tesis

El Capítulo 2 contiene un breve resumen de las herramientas matemáticas necesarias por desarrollar el trabajo de tesis. En el Capítulo 3 se presenta la metodología de análisis basada en Balance Armónico para estudiar el *chattering* que generan los principales algoritmos de SMC para sistemas de grado relativo uno, se propone como ejemplo el análisis de un sistema de control para un motor de corriente directa. El Capítulo 4 presenta el análisis de *chattering* de los principales algoritmos de SMC para sistemas de grado relativo dos, se propone como ejemplo el análisis de un sistema de control para un péndulo invertido. Finalmente se exponen las conclusiones del trabajo.





## Marco Teórico

---

El control por modos deslizantes (SMC por sus siglas en inglés) es una técnica eficiente para controlar sistemas afectados por perturbaciones e incertidumbres (se pueden consultar ejemplos en el libro de Utkin (1992)). La idea general de los algoritmos de SMC es llevar al *conjunto de deslizamiento* a cero en tiempo finito y mantenerlo ahí, de manera que la dinámica de lazo cerrado tenga un desempeño deseado. Sin embargo para lograr esto se requiere que las señales de control conmuten con frecuencia (teóricamente) infinita, la cual en la práctica no se puede alcanzar debido a la presencia de retardos, discretización, dinámicas no modeladas en actuadores y sensores, entre otros factores<sup>1</sup>. En consecuencia las trayectorias del sistema convergen a una vecindad del origen, este fenómeno de *vibraciones de alta frecuencia* es conocido como *chattering* en la literatura de SMC.

### 2.0.1. Sistema

Considere un sistema lineal de una entrada y una salida

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}\bar{u}, \\ \sigma &= \mathbf{C}x,\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $\sigma \in \mathbb{R}$  es la salida,  $\bar{u} \in \mathbb{R}$  es la entrada de control y las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  tienen las dimensiones apropiadas. El grado relativo se define como el valor de  $r > 0$  para el cual los productos matriciales

$$\begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B} = 0, & i = 1, \dots, r-1 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B} \neq 0, \end{cases}$$

por lo tanto la  $r$ -ésima derivada temporal de la salida tiene de la forma

$$\sigma^{(r)} = \mathbf{C}\mathbf{A}^r x + \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B}\bar{u}.\tag{2.2}$$

---

<sup>1</sup>Los trabajos de Boiko *et al.* (2004), (2005), muestran que los algoritmos basados en SMC producen *chattering* en presencia de dinámicas parásitas que incrementan el grado relativo de la planta.

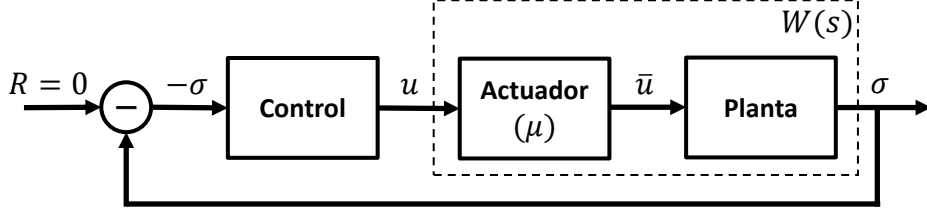


Figura 2.1: Esquema de Control.

Se puede diseñar la entrada  $\bar{u}$  con un algoritmo de SMC de  $r$ -ésimo orden (o mayor) tal que la salida y el conjunto de deslizamiento  $(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)})$  convergen a cero en tiempo finito (ver por ejemplo los trabajos de [Levant \(1993\)](#), [\(2003\)](#)), a este concepto teórico se le conoce como *modo deslizante ideal*.

### 2.0.2. Dinámica Parásita

Un *modo deslizante ideal* es un concepto teórico difícil de lograr debido a que el modelo matemático del sistema, utilizado para el diseño de las ganancias del algoritmo de SMC, no representa completamente la dinámica *real* de la planta. Es por esto que resulta conveniente considerar como fuente principal de *chattering* a alguna de las dinámicas parásitas presentes en los sistemas de control, como pueden ser efectos de retardo, discretización, dinámicas no modeladas en actuadores y sensores, entre otras. La Figura 2.1 muestra un esquema de control en donde se considera que la dinámica del actuador (dinámica parásita) puede modelarse mediante un sistema lineal

$$\begin{aligned} \mu \dot{z} &= \bar{\mathbf{A}}z + \bar{\mathbf{B}}u, \\ \bar{u} &= \bar{\mathbf{C}}z, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $z \in \mathbb{R}^m$  es el vector de estados del actuador. El grado relativo con respecto a la salida del actuador  $\bar{u} \in \mathbb{R}$  y a la entrada  $u \in \mathbb{R}$  se considera  $p > 0$ . Las matrices  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$  y  $\bar{\mathbf{C}}$  son de dimensiones apropiadas.

**Suposición 1** *La dinámica parásita (2.3) no se considera en el diseño de las ganancias del algoritmo de SMC, además de que su efecto en el lazo de control está parametrizado por medio de la constante del actuador  $\mu > 0$ .*

Debido a la presencia del actuador, el sistema dinámicamente perturbado (2.3)-(2.1)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\bar{\mathbf{C}} \\ 0_{n \times n} & \bar{\mathbf{A}}\mu^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \bar{\mathbf{B}}\mu^{-1} \end{bmatrix} u, \\ \sigma &= [\mathbf{C} \quad 0_{1 \times m}] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

es de grado relativo  $r+p$  con respecto a la salida  $\sigma$  y a la entrada de control  $u$  (algoritmo de SMC).

**Suposición 2** Debido a la presencia del actuador (2.3), el conjunto de deslizamiento converge a una solución periódica

$$\begin{aligned}\sigma &\cong A \operatorname{sen}(\omega t), \\ \dot{\sigma} &\cong A \omega \cos(\omega t), \\ &\vdots \\ \sigma^{(r-1)} &\cong A \omega^r \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{2} + \omega t\right),\end{aligned}\tag{2.5}$$

donde los parámetros  $A$  y  $\omega$  son la amplitud y frecuencia, respectivamente.

**Nota 1** El conjunto de deslizamiento (2.5) describe un modo deslizante ideal cuando la amplitud  $A$  es igual con cero y la frecuencia  $\omega$  es infinita, se asume que se establece este comportamiento para el valor  $\mu = 0$  de la constante del actuador (2.3) considerado.

## 2.1. Función Descriptiva y Enfoque de Balance Armónico

El método de la Función Descriptiva se usa principalmente para estudiar la estabilidad de sistemas no lineales y la predicción de ciclos límite (ver por ejemplo [Gelb y Vander Velde \(1968\)](#), [Atherton \(1975\)](#)). La Función Descriptiva de una no linealidad se define como la componente fundamental de  $u$  dividida entre la amplitud de la variable de deslizamiento  $\sigma$ , esto es

$$N(A, \omega) = \frac{a_1 + jb_1}{A} = \frac{M(A, \omega)}{A} e^{j\phi(A, \omega)},\tag{2.6}$$

donde la magnitud y el ángulo de fase son función de los parámetros del ciclo límite

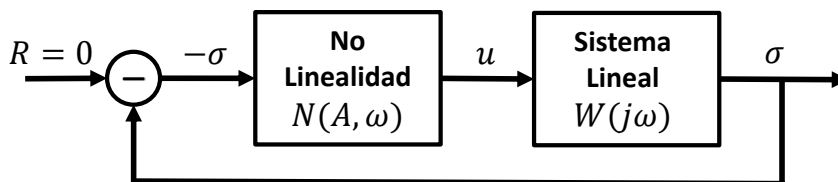
$$\begin{aligned}M(A, \omega) &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \\ \phi(A, \omega) &= -\tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right).\end{aligned}$$

La Función Descriptiva permite analizar los efectos de las no linealidades que componen al algoritmo de SMC, permitiendo predecir posibles oscilaciones en el comportamiento del sistema.

El análisis mediante Función Descriptiva parte de la suposición de que el sistema dinámicamente perturbado (2.4)

$$W(s) = G_a(s)G(s), \quad \begin{cases} G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \\ G_a(s) &= \bar{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}}, \end{cases}\tag{2.7}$$

atenúa los armónicos de alto orden en la variable de deslizamiento  $\sigma$ , condición que se satisface particularmente para los sistemas con características de *filtro paso bajas*.



**Figura 2.2:** Función Descriptiva y Balance Armónico.

En consecuencia la componente fundamental de la salida de la no linealidad (algoritmo de SMC) se puede aproximar como

$$u \approx a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = M \sin(\omega t + \phi). \quad (2.8)$$

donde los coeficientes de la Serie de Fourier son

$$a_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \cos(\omega t) dt, \quad b_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \sin(\omega t) dt,$$

despreciando la componente  $a_0$  conocida como componente de directa u *offset*.

### 2.1.1. Ecuación de Balance Armónico

Teniendo en cuenta el diagrama de bloques mostrado en la Figura 2.2, donde la no linealidad (algoritmo de SMC) se reemplaza por su Función Descriptiva, se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} A e^{j\omega t} N(A, \omega) &= M e^{j(\omega t + \phi)}, \\ M e^{j(\omega t + \phi)} W(j\omega) &= -A e^{j\omega t}, \end{aligned}$$

de manera que los parámetros de la solución periódica, amplitud  $A$  y frecuencia  $\omega$ , pueden ser estimados dando solución a la ecuación de Balance Armónico

$$N(A, \omega)W(j\omega) = -1. \quad (2.9)$$

## 2.2. Criterio de Loeb de Estabilidad Orbital

La Ecuación de Balance Armónico (2.9), en términos de sus partes real e imaginaria, se puede expresar de la siguiente manera

$$U(A, \omega) + jV(A, \omega) = 0. \quad (2.10)$$

Considerando perturbaciones cuasi-estáticas en la amplitud  $\Delta A$  y frecuencia  $\Delta\omega$  del ciclo límite, así como en la velocidad de cambio de la amplitud  $\Delta\nu = -\dot{A}/A$  asociada al término de frecuencia,

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A + \Delta A, \\ \omega &\rightarrow \omega + (\Delta\omega + j\Delta\nu), \end{aligned} \quad (2.11)$$

por definición los valores  $\Delta A$ ,  $\Delta\omega$  y  $\Delta\nu$  son pequeños. Sustituyendo los parámetros perturbados (2.11) en la ecuación de Balance Armónico (2.10), se tiene

$$U(A + \Delta A, \omega + (\Delta\omega + j\Delta\nu)) + jV(A + \Delta A, \omega + (\Delta\omega + j\Delta\nu)) = 0. \quad (2.12)$$

El desarrollo en series de Taylor de la expresión (2.12) en torno al estado de equilibrio  $(A, \omega)$

$$\frac{\partial U}{\partial A}\Delta A + \frac{\partial U}{\partial \omega}(\Delta\omega + j\Delta\nu) + j\frac{\partial V}{\partial A}\Delta A + j\frac{\partial V}{\partial \omega}(\Delta\omega + j\Delta\nu) = 0, \quad (2.13)$$

se debe satisfacer en sus partes real e imaginaria

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A}\Delta A + \frac{\partial U}{\partial \omega}\Delta\omega - \frac{\partial V}{\partial \omega}\Delta\nu &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial A}\Delta A + \frac{\partial V}{\partial \omega}\Delta\omega + \frac{\partial U}{\partial \omega}\Delta\nu &= 0, \end{aligned}$$

simplificando  $\Delta\omega$  del sistema de ecuaciones se obtiene

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A}\frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega}\frac{\partial V}{\partial A}\right)\Delta A = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)^2\right]\Delta\nu. \quad (2.14)$$

Para que un ciclo límite sea estable se deben dar las condiciones para que el signo de  $\Delta\nu/\Delta A$  sea siempre positivo. Lo anterior es conocido como criterio de estabilidad de Loeb (recopilado del libro de Atherton (1975)) y se puede expresar mediante la siguiente desigualdad

$$\frac{\partial U}{\partial A}\frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial U}{\partial \omega}\frac{\partial V}{\partial A} > 0. \quad (2.15)$$

La estabilidad de un ciclo límite se plantea en términos de perturbaciones cuasi-estáticas en la amplitud y la frecuencia. Se dice que el ciclo límite es **estable** si vuelve a su estado de equilibrio original, mientras que si su amplitud o frecuencia crece o decae hasta que alcanza otro estado de equilibrio se denomina **inestable**.

## 2.3. Enfoque de Potencia Promedio

Un efecto evidente de las *vibraciones de alta frecuencia* es el daño que pueden ocasionar a las partes mecánicas, fuentes de alimentación y actuadores, presentes en los sistemas de control. El enfoque que se presenta a continuación permite estimar

la potencia promedio de la salida  $\sigma$  cuando el conjunto de deslizamiento describe el movimiento periódico (2.5). Considere que la señal  $\sigma(t) \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, T]$  corresponde a la medición de la posición en un sistema mecánico, se define la potencia promedio de la salida como

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\sigma}^2(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (A\omega \cos(\omega t))^2 dt = \frac{A^2\omega^2}{2} \geq 0. \quad (2.16)$$

La expresión (2.16) permite estimar en forma cuantitativa la potencia promedio de la salida debido a la presencia de la dinámica parásita (2.3) considerada. Además teniendo en cuenta que se establece un *modo deslizante ideal* cuando  $\mu = 0$  (Nota 1), es posible formular una clasificación del *chattering* conforme los efectos del actuador (2.3) disminuyen ( $\mu \rightarrow 0$ ).

### 2.3.1. Clasificación de la Potencia Promedio

Sea la señal  $\sigma(t, \mu) \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, T]$ , considere que los efectos de las dinámicas parásitas presentes en el lazo de control se pueden aproximar mediante el actuador lineal (2.3) para algún valor de la constante  $\mu$ , suponiendo que dichos efectos disminuyen ( $\mu \rightarrow 0$ ) la potencia promedio se puede clasificar de la siguiente manera:

- La potencia promedio es **infinitesimal** si

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} P = 0.$$

- La potencia promedio es **acotada** si

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} P = \varepsilon > 0.$$

- La potencia promedio es **no acotada** si

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} P \rightarrow \infty.$$

## 2.4. Resumen del Capítulo

Utilizando la metodología presentada en este capítulo es posible estimar los parámetros de una posible solución periódica, amplitud  $A$  y frecuencia  $\omega$ , además de la potencia promedio  $P$ . Estas mediciones permiten comparar los distintos algoritmos de SMC en función de los efectos de las dinámicas parásitas presentes en el lazo de control, suponiendo que dichos efectos se pueden aproximar mediante el actuador lineal (2.3) para algún valor de la constante  $\mu$ .

# Análisis de Algoritmos de SMC para Sistemas de Grado Relativo Uno

---

Diversos sistemas electromecánicos, bajo ciertas consideraciones, se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\dot{\sigma} = F(t, \sigma) + Ku, \quad K \neq 0, \quad (3.1)$$

donde  $\sigma$  es la variable de salida y  $u$  la entrada de control. Por ejemplo, cuando se desea controlar la velocidad de un motor de corriente directa cuya inductancia de armadura es despreciable, la variable  $\sigma$  corresponde a la medición de la velocidad del rotor,  $u$  es la tensión de armadura y el término  $F(t, \sigma)$  representa efectos de fricción y pares de carga externos (perturbaciones desconocidas).

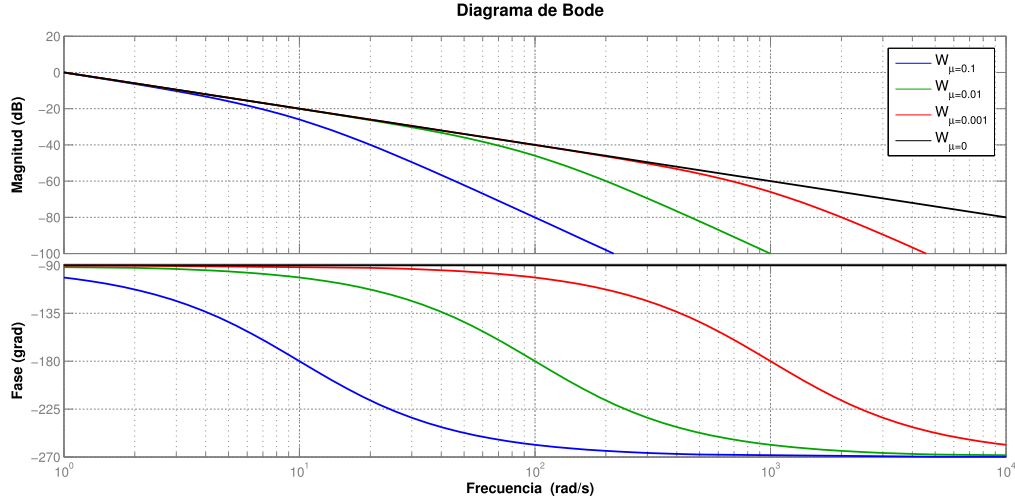
A lo largo de los años se han desarrollado diversos algoritmos de SMC para estabilizar sistemas dinámicos inciertos cuyo grado relativo es uno (ver por ejemplo los algoritmos desarrollados por [Utkin \(1992\)](#) y [Levant \(1998\)](#)). Además se conoce de la teoría de SMC que es posible seleccionar una variable de deslizamiento  $\sigma$  (salida virtual) tal que el grado relativo sea uno, y la dinámica de orden reducido en el modo deslizante ( $\sigma = 0$ ) tenga un desempeño deseado (en el libro de [Shtessel \*et al.\* \(2014\)](#) se presentan métodos de diseño de la variable de deslizamiento  $\sigma$  bajo el enfoque de ubicación de polos, minimización cuadrática, entre otros).

Para facilitar el análisis considere el sistema dinámico (tipo integrador)

$$\dot{x} = \bar{u}, \quad (3.2)$$

cuyo grado relativo con respecto a la salida  $x \in \mathbb{R}$  y a la entrada de control  $\bar{u} \in \mathbb{R}$  es  $r = 1$ .

### 3. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO UNO



**Figura 3.1:** Diagrama de Bode del sistema dinámicamente perturbado (3.4).

De manera particular se considera que la dinámica del actuador (dinámica parásita) puede modelarse mediante el sistema lineal de segundo orden críticamente amortiguado

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\mu^2} & -\frac{2}{\mu} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\mu^2} \end{bmatrix} u, \\ \bar{u} &= [1 \ 0] z, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $z \in \mathbb{R}^2$  es el vector de estados del actuador y la variable  $\bar{u} \in \mathbb{R}$  es la salida del actuador (entrada *real* de la planta). La forma del actuador (3.3) fue propuesta por Utkin (2016), la constante de tiempo  $\mu > 0$  parametriza la dinámica del actuador debido a que los valores propios del sistema (3.3) son reales e iguales a  $-1/\mu$ .

Por lo tanto, el sistema dinámicamente perturbado (3.3)-(3.2)

$$\mu^2 \ddot{x} + 2\mu \dot{x} + x = u, \quad (3.4)$$

es de grado relativo tres con respecto a la salida  $x$  y a la entrada de control  $u$  (algoritmo de SMC).

La Figura 3.1 muestra el diagrama de Bode del sistema dinámicamente perturbado (3.4) para algunos valores de  $\mu$ , cabe notar que conforme  $\mu \rightarrow 0$  de frecuencia de las posibles oscilaciones crece debido a que la dinámica del actuador es más *rápida*.



### 3.1. Análisis Basado en Balance Armónico

El sistema dinámicamente perturbado (3.4) tiene la siguiente representación en función de transferencia

$$W(s) = \frac{1}{s(\mu s + 1)^2}, \quad (3.5)$$

para solucionar la Ecuación de Balance Armónico (2.9) se sustituye la variable compleja  $s = j\omega$  en la expresión (3.5) y se reescribe de la siguiente manera

$$-\frac{1}{W(j\omega)} = 2\mu\omega^2 + j\omega(\mu^2\omega^2 - 1). \quad (3.6)$$

#### 3.1.1. Control por Modos Deslizantes de Primer Orden

El control por modos deslizantes de primer orden (FOSMC por sus siglas en inglés) propuesto por [Utkin \(1992\)](#), tiene la siguiente estructura

$$u = -M \operatorname{sign}(x), \quad (3.7)$$

donde  $M > 0$  se selecciona de manera que *se establece un modo deslizante de primer orden* ( $\exists t_r : x(t) = 0, \forall t \geq t_r$ ), cuando la dinámica del actuador es suficientemente rápida ( $\mu = 0$ ).

Suponiendo que al implementar FOSMC (3.7) sobre el sistema dinámicamente perturbado (3.5) la salida  $x$  converge a una solución periódica

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t), \quad (3.8)$$

donde  $A$  es la amplitud y  $\omega$  la frecuencia. La Función Descriptiva de la no linealidad (3.7) es de la forma

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}, \quad (3.9)$$

de acuerdo con [Gelb y Vander Velde \(1968\)](#). Por lo tanto, sustituyendo las expresiones (3.6) y (3.9) en la Ecuación de Balance Armónico (2.9) se tiene

$$\frac{4M}{\pi A} = 2\mu\omega^2 + j\omega(\mu^2\omega^2 - 1), \quad (3.10)$$

cuya solución analítica es

$$A = \left( \frac{2M}{\pi} \right) \mu, \quad (3.11)$$

$$\omega = \frac{1}{\mu}. \quad (3.12)$$

### 3. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO UNO

---

Sustituyendo la amplitud (3.11) y frecuencia (3.12) de la solución periódica en la expresión (2.16), la potencia promedio

$$P = \frac{2M^2}{\pi^2}, \quad (3.13)$$

es constante a pesar de que el parámetro del actuador  $\mu \rightarrow 0$ , por lo tanto la potencia promedio es **acotada** con respecto al efecto de la dinámica parásita considerada.

#### Análisis de los Parámetros de *Chattering*

Considerando los parámetros: amplitud (3.11), frecuencia (3.12) y potencia promedio (3.13), se concluye lo siguiente:

1. La amplitud es de orden  $O(\mu)$ .
2. La frecuencia es de orden  $O(1/\mu)$ .
3. La potencia promedio es de orden  $O(1)$ .

Las expresiones de amplitud y frecuencia obtenidas mediante el enfoque de Balance Armónico revelan que conforme el parámetro del actuador  $\mu \rightarrow 0$  la salida describe oscilaciones de menor amplitud y mayor frecuencia, sin embargo la potencia promedio permanece constante a pesar de que la dinámica de actuador sea suficientemente rápida ( $\mu = 0$ ).

#### Criterio de Loeb de Estabilidad Orbital

La Ecuación de Balance Armónico (2.9) para este ejemplo se puede reescribir de la siguiente manera

$$\underbrace{[4M - 2\mu\pi A\omega^2]}_{U(A,\omega)} + j \underbrace{[\pi A\omega(1 - \mu^2\omega^2)]}_{V(A,\omega)} = 0, \quad (3.14)$$

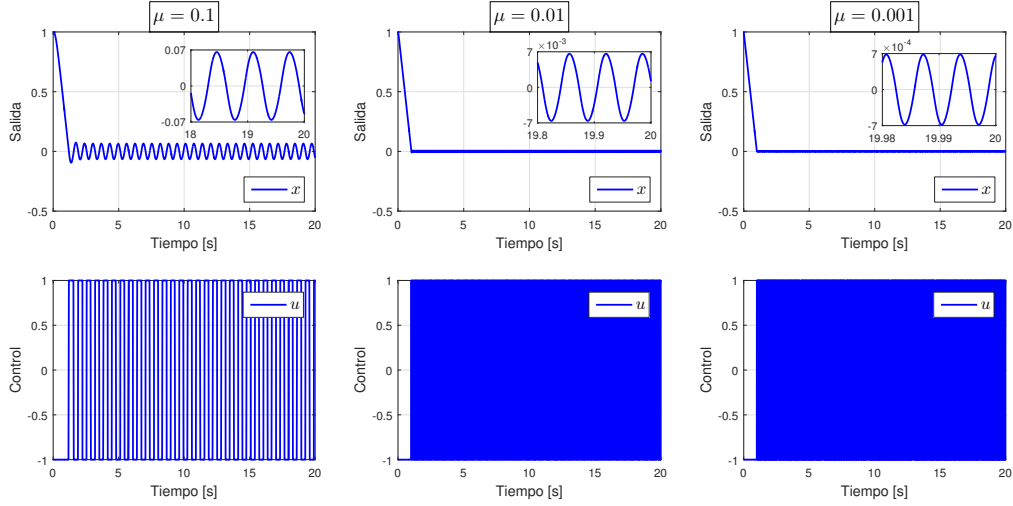
de donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A} &= -2\mu\pi\omega^2, & \frac{\partial U}{\partial \omega} &= -4\mu\pi A\omega, \\ \frac{\partial V}{\partial A} &= \pi\omega(1 - \mu^2\omega^2), & \frac{\partial V}{\partial \omega} &= \pi A(1 - 3\mu^2\omega^2). \end{aligned}$$

El ciclo límite será estable, de acuerdo con la desigualdad (2.15), si se satisface

$$(1 + \mu^2\omega^2) > 0, \quad (3.15)$$

la amplitud (3.11) y frecuencia (3.12) estimadas mediante Balance Armónico corresponden a un ciclo límite **estable**.



**Figura 3.2:** Simulación del sistema dinámicamente perturbado (3.5) en lazo cerrado con FOSMC (3.7).

Parámetros		$\mu$			Orden
		0.1	0.01	0.001	
Balance Armónico	$A$	$6.366 \times 10^{-2}$	$6.366 \times 10^{-3}$	$6.366 \times 10^{-4}$	$O(\mu)$
	$\omega$	10	100	1000	$O(1/\mu)$
	$P$	$2.026 \times 10^{-1}$	$2.026 \times 10^{-1}$	$2.026 \times 10^{-1}$	$O(1)$
Simulaciones	$A$	$6.585 \times 10^{-2}$	$6.602 \times 10^{-3}$	$6.815 \times 10^{-4}$	$O(\mu)$
	$\omega$	9.7789	97.686	963.68	$O(1/\mu)$
	$P$	$2.128 \times 10^{-1}$	$2.135 \times 10^{-1}$	$2.211 \times 10^{-1}$	$O(1)$

**Tabla 3.1:** Parámetros de *chattering* del sistema dinámicamente perturbado (3.5) en lazo cerrado con FOSMC (3.7).

## Simulaciones

La Figura 3.2 muestra las simulaciones del sistema actuador-planta (3.5) en lazo cerrado con el FOSMC (3.7) considerando algunos valores de la constante de tiempo  $\mu$  y partiendo de la condición inicial  $x(0) = 1$ . Se seleccionó la ganancia  $M = 1$  para que la entrada de control (3.7) permaneciera acotada en el valor  $|u| \leq 1$ , se utilizó el método de integración de Euler bajo el paso de muestreo  $\tau = 10^{-5}$  (paso fijo). La Tabla 3.1 permite comparar los parámetros de *chattering* obtenidos en simulación con respecto a los estimados mediante Balance Armónico.

Los resultados de simulación confirman que la Función Descriptiva (3.9) permite estimar los parámetros de *chattering* cuando se utiliza FOSMC (3.7) para estabilizar el

### 3. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO UNO

---

origen del sistema dinámicamente perturbado (3.5). Conforme el efecto de la dinámica parásita considerada es menor ( $\mu \rightarrow 0$ ) la salida describe oscilaciones de menor amplitud y mayor frecuencia, sin embargo la potencia promedio permanece constante (varía poco debido principalmente a otros factores como el paso de muestreo).

#### 3.1.2. Algoritmo Super-Twisting

El algoritmo Super-Twisting (STA por sus siglas en inglés) desarrollado por [Levant \(1993\)](#), es un controlador continuo que tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} u &= -k_1|x|^{1/2} \text{sign}(x) + v, \\ v &= -k_2 \text{sign}(x), \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde  $k_1, k_2 > 0$  se seleccionan de manera que *se establece un modo deslizante de segundo orden* ( $\exists t_r : x(t) = \dot{x}(t) = 0, \forall t \geq t_r$ ), cuando la dinámica del actuador es suficientemente rápida ( $\mu = 0$ ).

Suponiendo que al implementar STA (3.16) sobre el sistema dinámicamente perturbado (3.5) la salida  $x$  converge a una solución periódica de la forma (3.8). La Función Descriptiva de la no linealidad (3.16), propuesta por [Boiko \(2005\)](#), es de la forma

$$N(A, \omega) = \frac{1.1128k_1}{A^{1/2}} - j \frac{4k_2}{\pi A \omega}. \quad (3.17)$$

Por lo tanto, sustituyendo las expresiones (3.6) y (3.17) en la Ecuación de Balance Armónico (2.9) se tiene

$$\frac{1.1128k_1}{A^{1/2}} - j \frac{4k_2}{\pi A \omega} = 2\mu\omega^2 + j\omega(\mu^2\omega^2 - 1), \quad (3.18)$$

cuya solución analítica es

$$A = \mu^2 \mathbb{K}_A, \quad (3.19)$$

$$\omega = \frac{\mathbb{K}_\omega}{\mu}, \quad (3.20)$$

donde

$$\mathbb{K}_A = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{(1.1128k_1)^2 + \frac{16}{\pi}k_2}{1.1128k_1} \right)^2 = \left( \frac{1.1128k_1}{2\mathbb{K}_\omega^2} \right)^2,$$

$$\mathbb{K}_\omega = \left( \frac{(1.1128k_1)^2}{(1.1128k_1)^2 + \frac{16}{\pi}k_2} \right)^{1/2}.$$

Sustituyendo la amplitud (3.19) y frecuencia (3.20) de la solución periódica en la expresión (2.16), la potencia promedio

$$P = \frac{\mu^2}{32} \cdot \frac{\left( (1.1128k_1)^2 + \frac{16}{\pi}k_2 \right)^3}{(1.1128k_1)^2}, \quad (3.21)$$

tiende a cero cuando el parámetro del actuador  $\mu \rightarrow 0$ , por lo tanto la potencia promedio es **infinitesimal** con respecto al efecto de la dinámica parásita considerada.

### Análisis de los Parámetros de *Chattering*

Considerando los parámetros: amplitud (3.19), frecuencia (3.20) y potencia promedio (3.21), se concluye lo siguiente:

1. La amplitud es de orden  $O(\mu^2)$ .
2. La frecuencia es de orden  $O(1/\mu)$ .
3. La potencia promedio es de orden  $O(\mu^2)$ .

Los expresiones de amplitud y frecuencia obtenidas mediante el enfoque de Balance Armónico, muestran que conforme el parámetro del actuador  $\mu \rightarrow 0$  la salida describe oscilaciones de menor amplitud y mayor frecuencia, pero en este caso la potencia promedio tiende a cero.

### Criterio de Loeb de Estabilidad Orbital

La Ecuación de Balance Armónico (2.9) para el ejemplo se puede expresar de la siguiente manera

$$\underbrace{[\pi A \omega^2 (\mu^2 \omega^2 - 1) + 4k_2]}_{U(A, \omega)} + j \underbrace{[1.1128k_1 A^{1/2} \omega - 2\pi \mu A \omega^3]}_{V(A, \omega)} = 0, \quad (3.22)$$

de donde

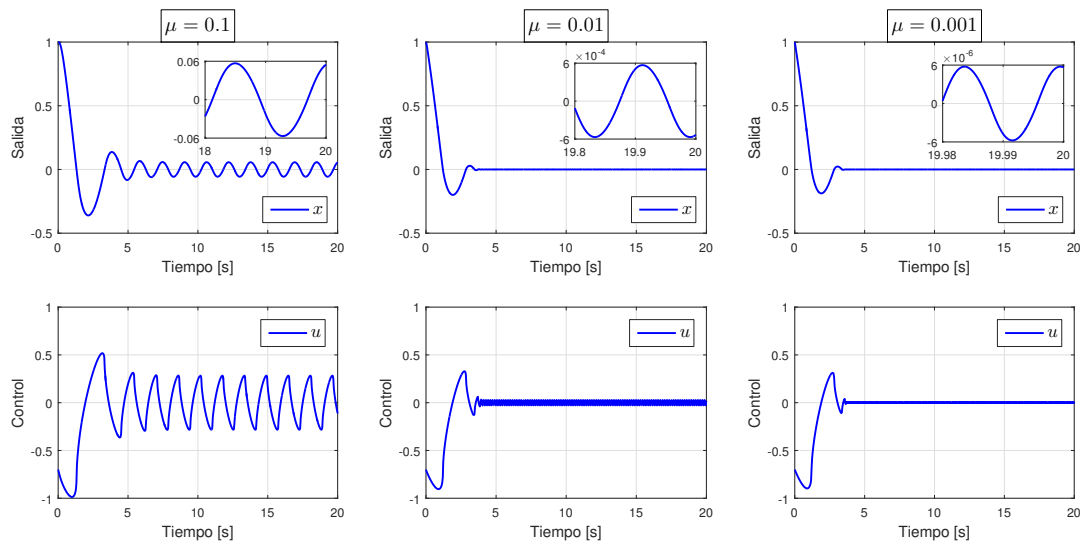
$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A} &= \pi \omega^2 (\mu^2 \omega^2 - 1), & \frac{\partial U}{\partial \omega} &= 2\pi A \omega (2\mu^2 \omega^2 - 1), \\ \frac{\partial V}{\partial A} &= \frac{\pi \omega}{2} \left( \frac{1.1128k_1}{A^{1/2}} - 4\mu \omega^2 \right), & \frac{\partial V}{\partial \omega} &= \pi A \left( \frac{1.1128k_1}{A^{1/2}} - 6\mu \omega^2 \right). \end{aligned}$$

El ciclo límite será estable, de acuerdo con la desigualdad (2.15), si se satisface

$$A > \left( \frac{1.1128k_1}{2(\mu^2 \omega^2 + 1)} \right)^2 \mu^2 = \left( \frac{1.1128k_1}{2(\mathbb{K}_\omega^2 + 1)} \right)^2 \mu^2. \quad (3.23)$$

la amplitud (3.19) y frecuencia (3.20) corresponden a un ciclo límite **estable**.

### 3. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO UNO



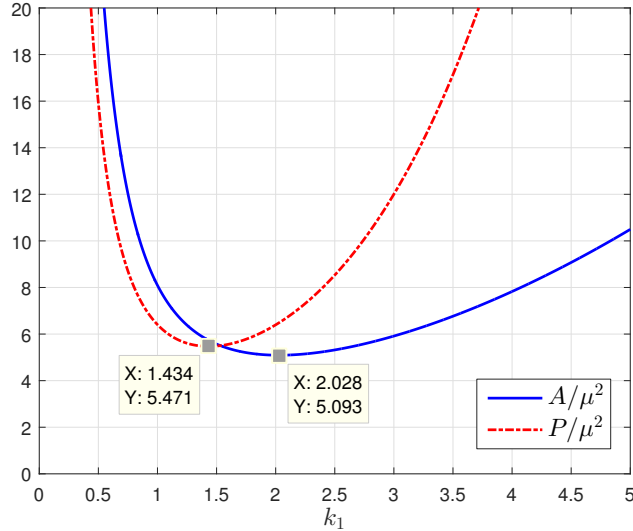
**Figura 3.3:** Simulación del sistema dinámicamente perturbado (3.5) en lazo cerrado con STA (3.16).

Parámetros		$\mu$			Orden
		0.1	0.01	0.001	
Balance Armónico	A	$5.527 \times 10^{-2}$	$5.527 \times 10^{-4}$	$5.527 \times 10^{-6}$	$O(\mu^2)$
	$\omega$	4.0703	40.703	407.03	$O(1/\mu)$
	P	$2.530 \times 10^{-2}$	$2.530 \times 10^{-4}$	$2.530 \times 10^{-6}$	$O(\mu^2)$
Simulaciones	A	$5.682 \times 10^{-2}$	$5.687 \times 10^{-4}$	$5.762 \times 10^{-6}$	$O(\mu^2)$
	$\omega$	3.9912	39.893	396.66	$O(1/\mu)$
	P	$2.644 \times 10^{-2}$	$2.647 \times 10^{-4}$	$2.685 \times 10^{-6}$	$O(\mu^2)$

**Tabla 3.2:** Parámetros de *chattering* del sistema dinámicamente perturbado (3.5) en lazo cerrado con STA (3.16).

#### Simulaciones

La Figura 3.3 muestra las simulaciones del sistema actuador-planta (3.5) en lazo cerrado con el STA (3.16), considerando algunos valores de la constante de tiempo  $\mu$ . Se seleccionaron las ganancias  $k_1 = 0.7$  y  $k_2 = 0.6$  para que la entrada de control (3.16) se mantuviera acotada en el valor  $|u| \leq 1$  cuando se parte de la condición inicial  $x(0) = 1$ . Se utilizó el método de integración de Euler bajo el paso de muestreo  $\tau = 10^{-5}$  (paso fijo), la Tabla 3.2 permite comparar los parámetros de *chattering* obtenidos en simulación con respecto a los estimados mediante Balance Armónico.



**Figura 3.4:** Valores críticos de las expresiones normalizadas de amplitud (3.24) y potencia promedio (3.26), variando la ganancia  $k_1 \in [0.1 \ 5]$  y fijando  $k_2 = 1$ .

Los resultados de simulación confirman que la Función Descriptiva (3.17) permite estimar los parámetros de *chattering* cuando se utiliza STA (3.16) para estabilizar el origen del sistema dinámicamente perturbado (3.5). Conforme el efecto de la dinámica parásita considerada es menor ( $\mu \rightarrow 0$ ), la salida describe oscilaciones de menor amplitud y mayor frecuencia además de que la potencia promedio tiende a cero.

### 3.1.2.1. Criterios de Selección de las Ganancias del Super-Twisting

Los parámetros de *chattering* obtenidos mediante el enfoque de Balance Armónico permiten seleccionar las ganancias del STA (3.16) de manera que la amplitud de las posibles oscilaciones o la potencia promedio sean mínimas. Partiendo de la siguiente *normalización* de la expresión de la amplitud (3.19)

$$\frac{A}{\mu^2} = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{(1.1128k_1)^2 + \frac{16}{\pi}k_2}{1.1128k_1} \right)^2, \quad (3.24)$$

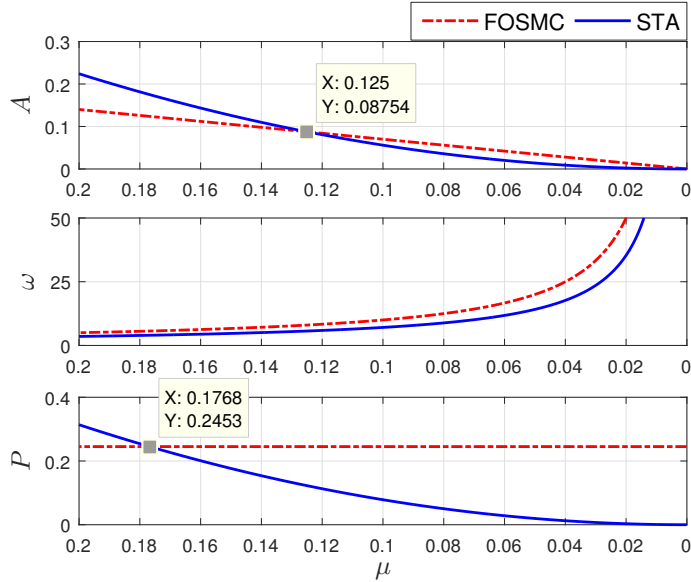
el valor de la ganancia  $k_1$  que minimiza la amplitud de las oscilaciones para cada valor de la ganancia  $k_2 > 0$  es

$$k_1 = \left( \frac{16k_2}{\pi(1.1128)^2} \right)^{1/2} = 2.028\sqrt{k_2}. \quad (3.25)$$

Para esta selección de las ganancias del STA (3.16), la salida  $x$  del sistema dinámicamente perturbado (3.5) describe oscilaciones de mínima amplitud.

### 3. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO UNO

---



**Figura 3.5:** Parámetros de *chattering* en función de la constante de tiempo  $\mu$ , considerando las ganancias:  $M = 1$  para el FOSMC (3.7) y  $k_1 = 2.028$ ,  $k_2 = 1$  para el STA (3.16).

De manera similar, considerando la siguiente *normalización* de la expresión de la potencia promedio (3.21)

$$\frac{P}{\mu^2} = \frac{1}{32} \cdot \frac{\left( (1.1128k_1)^2 + \frac{16}{\pi}k_2 \right)^3}{(1.1128k_1)^2}, \quad (3.26)$$

el valor de la ganancia  $k_1$  que minimiza la potencia promedio para cada valor de la ganancia  $k_2 > 0$  es

$$k_1 = \left( \frac{8k_2}{\pi(1.1128)^2} \right)^{1/2} = 1.434\sqrt{k_2}. \quad (3.27)$$

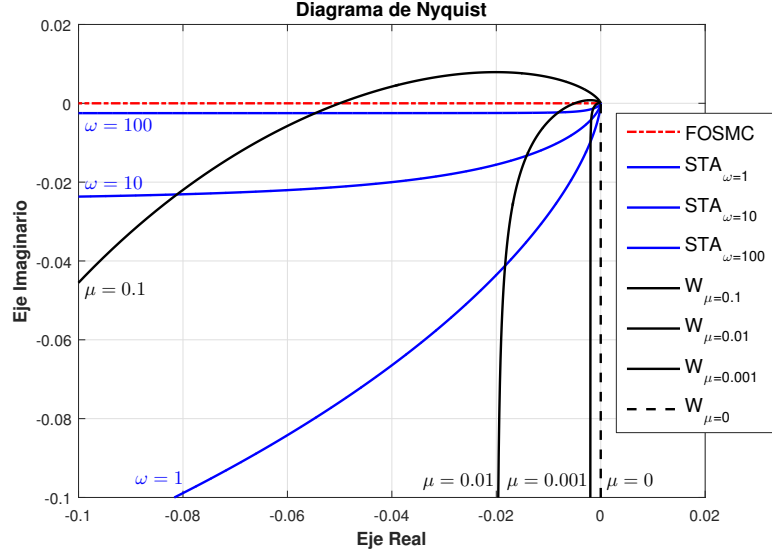
Para esta selección de las ganancias del STA (3.16), la potencia promedio debida a las oscilaciones de la salida  $x$  es mínima.

La Figura 3.4 muestra los valores críticos (mínimos) de las expresiones normalizadas de amplitud (3.24) y potencia promedio (3.26), respectivamente, al variar la ganancia  $k_1 \in [0.1 \ 5]$  y fijando  $k_2 = 1$  como ejemplo.

#### 3.1.3. Comparación de los Parámetros de *Chattering*

Se presenta a través de un ejemplo la comparación de los parámetros de *chattering* estimados con Balance Armónico, considerando que la entrada del sistema actuador-planta (3.5) se diseña utilizando el FOSMC (3.7) en contraste con el STA (3.16). Con esto es posible estudiar condiciones sobre la constante de tiempo  $\mu$  para las cuales resulta más conveniente implementar control discontinuo (FOSMC) en lugar de control continuo (STA).





**Figura 3.6:** Solución gráfica de la ecuación de Balance Armónico (2.9) considerando el sistema dinámicamente perturbado  $W(j\omega)$  (3.5) para algunos valores de  $\mu$ , la Función Descriptiva (3.9) del FOSMC y la Función Descriptiva (3.17) del STA para valores fijos de la frecuencia  $\omega$ .

Considere como ejemplo que se seleccionan las ganancias  $M = 1$  para el FOSMC (3.7) y  $k_1 = 2.028$ ,  $k_2 = 1$  para el STA (3.16), la Figura 3.5 muestra la comparación de los parámetros de *chattering* en función de la constante de tiempo  $\mu$  del actuador.

### Análisis de la Amplitud

La Figura 3.5 muestra que existe un valor de la constante de tiempo del actuador  $\mu$  para el cual la amplitud de las posibles oscilaciones es la misma,

$$\mu^* = \frac{8M(1.1128k_1)^2}{\pi \left( (1.1128k_1)^2 + \frac{16}{\pi}k_2 \right)^2}. \quad (3.28)$$

Por ejemplo para las ganancias consideradas, el valor de la constante de tiempo del actuador para obtener la misma amplitud es  $\mu^* = 0.125$  (ver Figura 3.5).

### Análisis de la Frecuencia

La solución gráfica a la ecuación de Balance Armónico (2.9) se presenta en la Figura 3.6 considerando algunos valores de la constante de tiempo  $\mu$  en el sistema dinámicamente perturbado  $W(j\omega)$  (3.5). La Función Descriptiva (3.9) del FOSMC se representa mediante una línea recta sobre el eje real negativo, mientras que la Función Descriptiva (3.17) del STA se puede trazar en el plano complejo fijando el valor de la frecuencia  $\omega$ . Se observa que basta con que la perturbación dinámica incremente el grado relativo de

### 3. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO UNO

---

la planta a tres para que una posible solución periódica se establezca cuando se aplica FOSMC, mientras que utilizando STA es suficiente con que se incremente el grado relativo de la planta a dos para que existan posibles oscilaciones. Además, la frecuencia de las oscilaciones generadas por el STA siempre es menor a la de las oscilaciones producidas por el FOSMC.

#### Análisis de la Potencia Promedio

La Figura 3.5 muestra que existe un valor de la constante de tiempo del actuador  $\mu$  para el cual la potencia promedio es la misma,

$$\mu^* = \frac{8M(1.1128k_1)}{\pi \left( (1.1128k_1)^2 + \frac{16}{\pi}k_2 \right)^{3/2}}. \quad (3.29)$$

Por ejemplo para las ganancias consideradas, el valor de la constante de tiempo del actuador para obtener la misma potencia promedio es  $\mu^* = 0.1768$  (ver Figura 3.5).

#### 3.1.4. Análisis Respecto a las Ganancias de los Algoritmos de Control por Modos Deslizantes

Considere que el sistema lineal (3.2) es afectado por una perturbación variante en el tiempo  $f(t)$

$$\dot{x} = \bar{u} + f. \quad (3.30)$$

El análisis basado en Balance Armónico no permite estudiar la propagación de la perturbación  $f(t)$  a lo largo del lazo de control debido a que puede *destruir* la periodicidad de la solución periódica, que es la suposición principal de esta metodología de análisis. Sin embargo, es posible estimar los parámetros de *chattering* debidos a la dinámica parásita (actuador) (3.3) cuando las ganancias de los algoritmos de SMC se seleccionan para rechazar una *posible perturbación acoplada*<sup>1</sup> a la entrada de control  $u$  (algoritmo de SMC), que debido a la presencia del actuador tiene la forma

$$F(t) = \mu^2 \ddot{f}(t) + 2\mu \dot{f}(t) + f(t), \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |F| \leq \delta, \\ |\dot{F}| \leq \Delta. \end{cases} \quad (3.31)$$

La perturbación acoplada (3.31) se asume acotada y Lipschitz en el tiempo, con el fin de comparar los parámetros de *chattering* generados por el FOSMC (3.7) con respecto a los producidos por el STA (3.16).

---

<sup>1</sup>La perturbación acoplada  $F(t)$  se considera igual con cero en las simulaciones para medir únicamente el efecto de la dinámica parásita (actuador) sobre el sistema de control.

### Control por Modos Deslizantes de Primer Orden

De acuerdo con Utkin (1992) se elige la ganancia del FOSMC (3.7)  $M = 1.1\delta$  donde  $\delta$  es la cota de la perturbación que afecta al sistema (3.30), con esto se garantiza un *modo deslizante de primer orden* cuando la dinámica del actuador es suficientemente rápida ( $\mu = 0$ ). En consecuencia los parámetros de *chattering*, amplitud (3.11), frecuencia (3.12) y potencia promedio (3.13), son:

$$A = 0.7003 \delta \mu, \quad \omega = \frac{1}{\mu}, \quad P = 0.2452 \delta^2. \quad (3.32)$$

Se concluye lo siguiente:

- La amplitud de las oscilaciones es proporcional a la cota  $\delta$  de la perturbación, por lo tanto si la magnitud de la perturbación acoplada es grande también lo será la amplitud de la solución periódica.
- La frecuencia no depende de la cota  $\delta$  de la perturbación.
- La potencia promedio es proporcional al cuadrado de la cota  $\delta$  de la perturbación y su valor es constante a pesar de que la dinámica del actuador sea suficientemente rápida ( $\mu = 0$ ).

### Super-Twisting

La selección de las ganancias del STA (3.16) propuesta por Levant (1998) consiste en elegir  $k_1 = 1.5\sqrt{\Delta}$  y  $k_2 = 1.1\Delta$  donde  $\Delta$  es la cota de la derivada respecto al tiempo de la perturbación que afecta al sistema (3.30), con esto se garantiza un *modo deslizante de segundo orden* cuando la dinámica del actuador es suficientemente rápida ( $\mu = 0$ ). En consecuencia los parámetros de *chattering*, amplitud (3.19), frecuencia (3.20) y potencia promedio (3.21), son:

$$A = 6.3138 \Delta \mu^2, \quad \omega = 0.5763 \frac{1}{\mu}, \quad P = 6.6204 \Delta^2 \mu^2.$$

Se concluye lo siguiente:

- La amplitud de las oscilaciones es proporcional a la cota  $\Delta$  de la derivada temporal de la perturbación, por lo tanto si la perturbación cambia rápidamente con el tiempo la amplitud de la solución periódica será mayor.
- La frecuencia no depende de la cota  $\Delta$  de la derivada temporal de la perturbación.
- La potencia promedio es proporcional al cuadrado de la cota  $\Delta$  de la derivada temporal de la perturbación, pero la constante del actuador  $\mu$  influye cuadráticamente en el valor de la potencia promedio.

### 3. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO UNO

---

Por otro lado, los criterios de selección de las ganancias del STA para minimizar la amplitud (3.25) o bien la frecuencia promedio (3.27) derivados del análisis basado en Balance Armónico se pueden modificar siguiendo la *sintonización estándar* propuesta por [Levant \(1998\)](#).

**Nota 2** Conocida la cota  $\Delta$  de la derivada respecto al tiempo de la perturbación acoplada  $F$ , las ganancias

$$k_1 = 2.127\sqrt{\Delta}, \quad k_2 = 1.1\Delta, \quad (3.33)$$

minimizan la amplitud de las oscilaciones cuando se implementa el STA (3.16) sobre el sistema dinámicamente perturbado (3.5). Para estas ganancias los parámetros de chattering son:  $A = 5.6022 \Delta \mu^2$ ,  $\omega = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}$ ,  $P = 7.8464\Delta^2 \mu^2$ .

**Nota 3** Conocida la cota  $\Delta$  de la derivada respecto al tiempo de la perturbación acoplada  $F$ , las ganancias

$$k_1 = 1.504\sqrt{\Delta}, \quad k_2 = 1.1\Delta, \quad (3.34)$$

minimizan la potencia promedio cuando se implementa el STA (3.16) sobre el sistema dinámicamente perturbado (3.5). Para estas ganancias los parámetros de chattering son:  $A = 6.3025 \Delta \mu^2$ ,  $\omega = \frac{1}{\mu\sqrt{3}}$ ,  $P = 6.6203\Delta^2 \mu^2$ .

**Observación 1** Condiciones suficientes para garantizar la estabilidad del origen de sistemas dinámicos en lazo cerrado con STA se proponen en el trabajo de [Moreno \(2009\)](#), donde las ganancias deben satisfacer las desigualdades

$$k_1 > 1.414\sqrt{k_2}, \quad k_2 > \Delta, \quad (3.35)$$

donde  $\Delta$  acota la derivada respecto al tiempo de la perturbación acoplada.

Los criterios de selección de ganancias del STA para minimizar la amplitud (3.33) y la potencia promedio (3.34) satisfacen las desigualdades de la expresión (3.35), garantizando que la salida converge a cero en tiempo finito cuando la dinámica del actuador es suficientemente rápida ( $\mu = 0$ ).

Descripción	Símbolo	Valor	Unidades
Inercia del rotor	$J$	0.011	kg m <sup>2</sup>
Constante de par	$k_m$	0.37	N m A <sup>-1</sup>
Constante de fuerza electromotriz	$k_b$	0.37	V s
Coefficiente de fricción viscosa	$B$	$5 \times 10^{-4}$	N m s
Resistencia de armadura	$R$	3.565	$\Omega$
Inductancia de armadura	$L$	$37 \times 10^{-6}$	H
Paso de muestreo	$\tau$	$1 \times 10^{-4}$	s

**Tabla 3.3:** Parámetros para el ejemplo del motor de corriente directa.

### 3.2. Ejemplo: Motor de Corriente Directa

El modelo matemático de un motor de corriente directa cuya inductancia de armadura es despreciable consiste en una ecuación diferencial de primer orden

$$JR_a \dot{x} + (BR_a + k_b k_m) x + R_a \tau_c = k_m \bar{u}, \quad (3.36)$$

donde la salida  $x$  corresponde a la medición de la velocidad,  $\tau_c$  es un par de carga externo (perturbación) y la entrada de control  $\bar{u}$  es la tensión de armadura. Los parámetros del motor se describen en la Tabla 3.3 y fueron recopilados del trabajo de [Pisano et al. \(2008\)](#). Para este ejemplo, las posibles dinámicas parásitas presentes en el lazo de control corresponden a circuitos de electrónica de potencia, generadores PWM, medidores de velocidad, etapas de control pre-instaladas, discretización, entre otras.

Considerando que los efectos de las dinámicas parásitas pueden ser aproximados mediante el actuador (3.3) para algún valor de la constante de tiempo  $\mu$ , el sistema dinámicamente perturbado actuador-motor (3.3)-(3.36)

$$\mu^2 \ddot{x} + (2 + a\mu)\mu \dot{x} + (1 + 2a\mu)\dot{x} + ax = Ku, \quad (3.37)$$

es de grado relativo tres con respecto a la salida  $x$  y a la entrada  $u$  (algoritmo de SMC), donde  $K = \frac{k_m}{JR_a}$ ,  $a = \frac{BR_a + k_b k_m}{JR_a}$ .

Suponiendo que se desea regular la velocidad del motor a un valor de referencia  $x_r$  constante, se define la variable de deslizamiento (error de velocidad)

$$\sigma = x - x_r. \quad (3.38)$$

Aplicando la entrada de control

$$u = \frac{1}{K}[ax + u_{\text{smc}}], \quad (3.39)$$

### 3. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO UNO

---

los parámetros de la solución periódica se pueden estimar considerando la Función de Transferencia

$$W(s) = \frac{X(s)}{U_{\text{smc}}(s)} = \frac{1}{\mu^2 s^3 + (a\mu^2 + 2\mu)s^2 + (1 + 2a\mu)s}, \quad (3.40)$$

así como la Función Descriptiva (3.9) para el FOSMC o bien la Función Descriptiva (3.17) para el STA, cuando el término  $u_{\text{smc}}$  se diseña basándose en alguno de estos algoritmos.

Por otro lado, la variable  $\bar{u}$  corresponde a la tensión en las terminales del motor

$$\bar{u} = \frac{1}{K} [A\omega \cos(\omega t) + aA \text{sen}(\omega t)], \quad (3.41)$$

por lo que es posible calcular el voltaje cuadrático medio (rms por sus siglas en inglés) aplicado al motor debido a los efectos de la dinámica parásita (3.3). Esto se obtiene modificando la integral (2.16) de la siguiente manera

$$\bar{U}_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}^2(t) dt} = \frac{1}{\sqrt{2}K} [A^2\omega^2 + a^2A^2]^{1/2}. \quad (3.42)$$

#### ■ FOSMC

Considere que la entrada de control (3.39) se diseña utilizando el algoritmo discontinuo

$$u_{\text{smc}} = -M \text{sign}(\sigma), \quad (3.43)$$

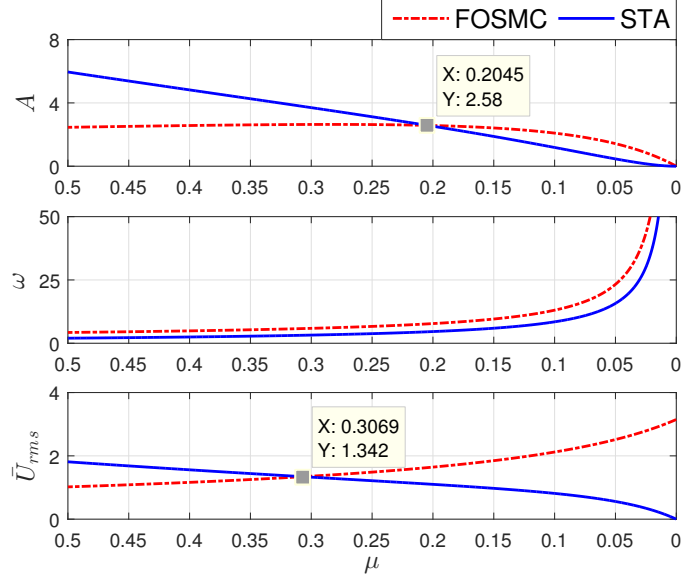
donde  $M = 1.1\delta$ .

Los parámetros de *chattering* estimados utilizando el enfoque de Balance Armónico se presentan a continuación:

$$A = \frac{4M}{\pi} \left[ \frac{\mu}{(2 + a\mu)(1 + 2a\mu)} \right], \quad (3.44)$$

$$\omega = \frac{(1 + 2a\mu)^{1/2}}{\mu}, \quad (3.45)$$

$$\bar{U}_{rms} = \frac{2\sqrt{2}M}{\pi K} \left[ \frac{(1 + a\mu)}{(1 + 2a\mu)(2 + a\mu)} \right]. \quad (3.46)$$



**Figura 3.7:** Parámetros de *chattering* del sistema Actuador-Motor (3.37) en función de  $\mu$ , considerando las ganancias:  $M = 1.1\delta$  para el FOSMC (3.43) y  $k_1 = 2.127\sqrt{\Delta}$ ,  $k_2 = 1.1\Delta$  para el STA (3.47).

#### ■ STA

Considere que la entrada de control (3.39) se diseña utilizando el algoritmo continuo

$$\begin{aligned} u_{smc} &= -k_1|\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) + v, \\ \dot{v} &= -k_2 \text{sign}(\sigma), \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde  $k_1 = 2.127\sqrt{\Delta}$  y  $k_2 = 1.1\Delta$ .

Los parámetros de *chattering* estimados mediante Balance Armónico se presentan a continuación:

$$A = \left[ \frac{(1.1128k_1)^2 + \frac{4k_2}{\pi}(2 + a\mu)^2}{(1.1128k_1)(1 + 2a\mu)(2 + a\mu)} \right]^2 \mu^2, \quad (3.48)$$

$$\omega = \left[ \frac{(1.1128k_1)^2(1 + 2a\mu)}{(1.1128k_1)^2 + \frac{4k_2}{\pi}(2 + a\mu)^2} \right]^{1/2} \frac{1}{\mu}, \quad (3.49)$$

$$\bar{U}_{rms} = \frac{\mu}{\sqrt{2}K} \left[ \frac{[(1.1128k_1)^2(1 + 2a\mu)\beta^3 + a^2\mu^2\beta^4]^{1/2}}{(1.1128k_1)^2(1 + 2a\mu)^2(2 + a\mu)^2} \right]. \quad (3.50)$$

donde  $\beta = \left( (1.1128k_1)^2 + \frac{4k_2}{\pi}(2 + a\mu)^2 \right)$ .

### 3. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO UNO

---

Control \ $\mu$		$\mu_1$	$\mu^*$	$\mu^*$	$\mu_2$
FOSMC	A	2.5708	2.6363	2.5795	2.0912
	$\omega$	4.8921	5.8020	7.6484	13.066
	$\bar{U}_{rms}$	1.1630	1.3425	1.6290	2.1215
STA	A	4.8214	3.7791	2.5797	1.1840
	$\omega$	2.4725	3.1560	4.5274	8.4610
	$\bar{U}_{rms}$	1.5592	1.3424	1.1106	0.8137

**Tabla 3.4:** Parámetros de *chattering* del motor de corriente directa estimados mediante Balance Armónico.

Con la finalidad de comparar los algoritmos FOSMC (3.7) y STA (3.16), se asume que la perturbación acoplada a la entrada de control  $u_{smc}$  es acotada y Lipschitz en el tiempo

$$F(t) = \frac{1}{J} [\mu^2 \ddot{\tau}_c + \mu(2 + a\mu)\dot{\tau}_c + (1 + 2a\mu)\tau_c], \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |F| \leq \delta, \\ |\dot{F}| \leq \Delta. \end{cases} \quad (3.51)$$

Por ejemplo, considere que se desea regular la velocidad del motor de corriente directa al valor constante  $x_r = 50 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$  y se eligen las cotas  $\delta = \Delta = 60$ . La Figura 3.7 muestra la comparación de los parámetros de *chattering* estimados bajo el enfoque de Balance Armónico en función de la constante de tiempo de actuador  $\mu$ , cuando se aplica la entrada de control (3.39) basada en FOSMC (3.43) con  $M = 1.1\delta$  y STA (3.47) con  $k_1 = 2.127\sqrt{\Delta}$ ,  $k_2 = 1.1\Delta$ , respectivamente. Es claro que conforme  $\mu \rightarrow 0$  la salida (velocidad) describe oscilaciones de menor amplitud y mayor frecuencia en torno al valor de referencia deseado. Por otro lado, el voltaje cuadrático medio tiende a un valor constante cuando  $\mu \rightarrow 0$  en el caso de aplicar FOSMC (3.43) y tiende a cero cuando se implementa STA (3.47). Esto último significa que a pesar de que la dinámica del actuador sea suficientemente rápida ( $\mu = 0$ ), cuando se implementa FOSMC (discontinuo) el actuador mantiene un voltaje constante en cada ciclo, mientras que cuando se aplica STA (continuo) el voltaje en cada ciclo es cero.

De la Figura 3.7 se puede determinar el valor de la constante de tiempo del actuador para el cual se tiene la misma amplitud ( $\mu^* = 0.2045$ ) o bien el mismo voltaje cuadrático medio ( $\mu^* = 0.3086$ ). La Tabla 3.4 resume los parámetros de *chattering*: amplitud (3.44), (3.48), frecuencia (3.45), (3.49), y voltaje cuadrático medio (3.46), (3.50), generados por el FOSMC y el STA, respectivamente; considerando las constantes de tiempo del actuador

$$\mu_1 = 0.4, \quad \mu^* = 0.3086, \quad \mu^* = 0.2045, \quad \mu_2 = 0.1. \quad (3.52)$$



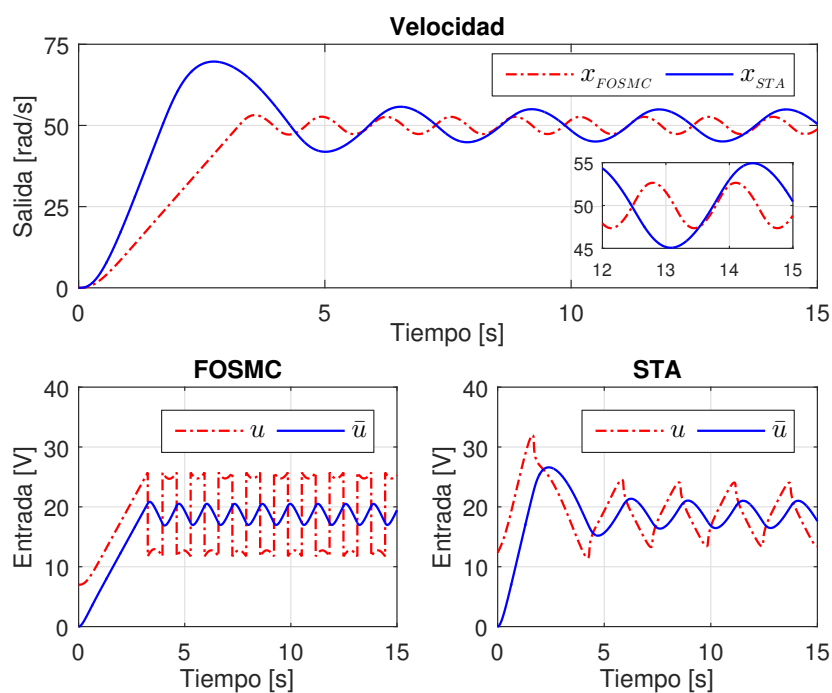


Figura 3.8: Simulación del motor de corriente directa para  $\mu_1 = 0.4$ .

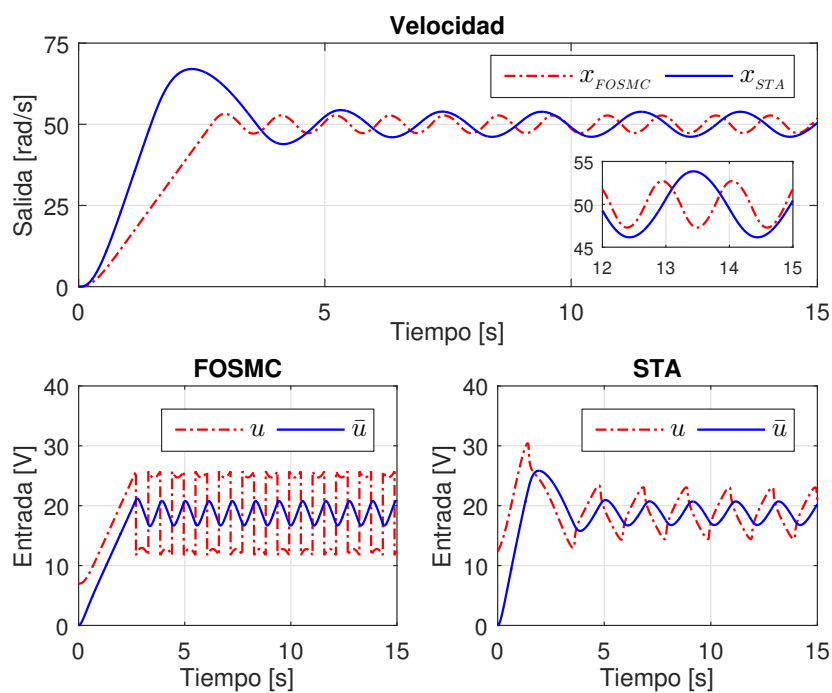


Figura 3.9: Simulación del motor de corriente directa para  $\mu^* = 0.3086$ .

### 3. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO UNO

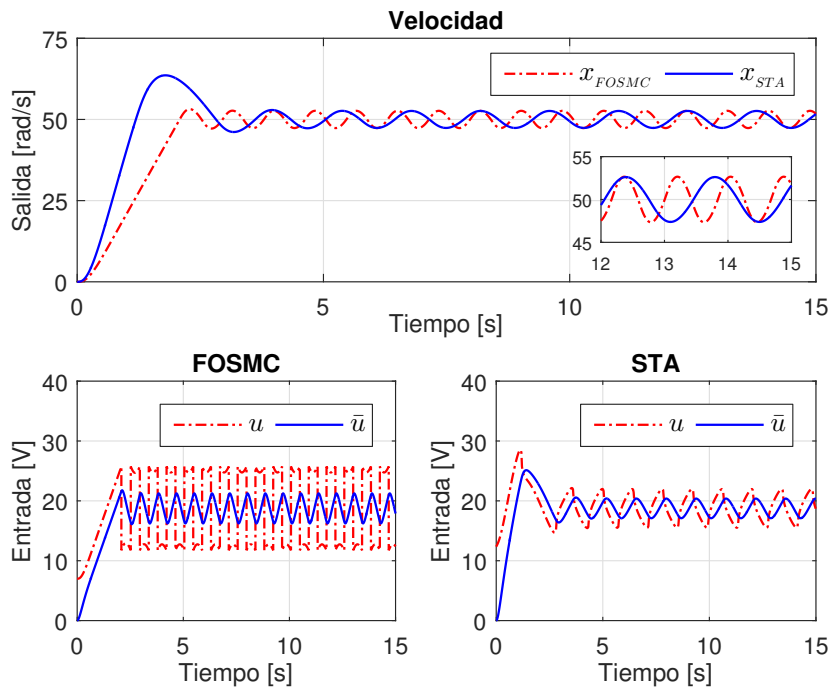


Figura 3.10: Simulación del motor de corriente directa para  $\mu^* = 0.2045$ .

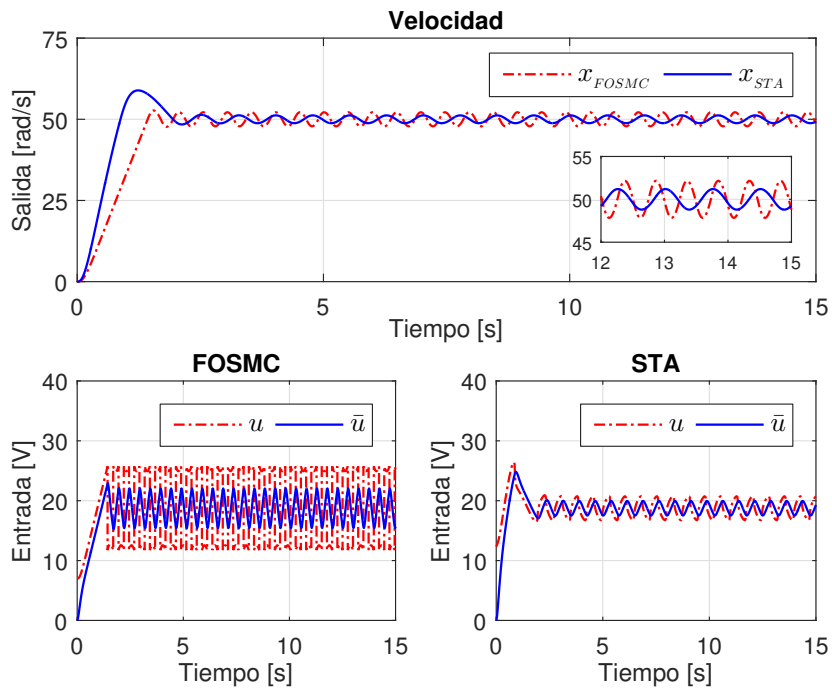


Figura 3.11: Simulación del motor de corriente directa para  $\mu_2 = 0.1$ .

Control \ $\mu$		$\mu_1$	$\mu^*$	$\mu^*$	$\mu_2$
FOSMC	A	2.6467	2.7140	2.6578	2.1595
	$\omega$	4.8004	5.6939	7.5032	12.802
	$\bar{U}_{rms}$	1.1945	1.3770	1.6691	2.1733
STA	A	4.9264	3.8470	2.6170	1.1985
	$\omega$	2.4360	3.1171	4.4829	8.3955
	$\bar{U}_{rms}$	1.5979	1.3687	1.1270	0.8234

**Tabla 3.5:** Parámetros de *chattering* del motor de corriente directa obtenidos de las simulaciones.

Se concluye lo siguiente:

- Existe un valor de la constante de tiempo del actuador  $\mu^*$  para el cual la amplitud de las oscilaciones es la misma.
- Existe un valor de la constante de tiempo del actuador  $\mu^*$  para el cual el voltaje cuadrático medio es igual.
- Si la constante de tiempo del actuador es mayor a  $\mu^*$  (por ejemplo  $\mu_1$ ) la amplitud de las oscilaciones será mayor cuando se implementa STA con respecto a las generadas por el FOSMC. Pero si la constante de tiempo del actuador es menor a  $\mu^*$  (por ejemplo  $\mu_2$ ) la amplitud será menor cuando se implementa STA en lugar de FOSMC.
- Si la constante de tiempo del actuador es mayor a  $\mu^*$  (por ejemplo  $\mu_1$ ) el voltaje cuadrático medio será mayor cuando se aplica STA en lugar de FOSMC. Pero si la constante de tiempo del actuador es menor a  $\mu^*$  (por ejemplo  $\mu_2$ ) el voltaje cuadrático medio será menor implementando STA en lugar de FOSMC.

Cabe mencionar que los valores de la constante de tiempo de actuador (3.52) determinados gráficamente corresponden a un desempeño factible para el sistema de control de un motor de corriente directa ya que se obtienen variaciones de entre 1% y 10% con respecto al valor de velocidad deseado  $x_r = 50 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ .

Las simulaciones se realizaron utilizando el método de integración de Euler bajo el paso de muestreo  $\tau = 10^{-4}$  (paso fijo), considerando las ganancias  $M = 1.1\delta$  para el FOSMC (3.43) y  $k_1 = 2.127\sqrt{\Delta}$ ,  $k_2 = 1.1\Delta$  para el STA (3.47). Se eligió la referencia de velocidad constante  $x_r = 50 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$  así como las cotas  $\delta = \Delta = 60$ .

Las Figuras 3.8, 3.9, 3.10, y 3.11, muestran las simulaciones del sistema de control considerando las constantes de tiempo del actuador (3.52), respectivamente. La Tabla 3.5 resume los parámetros de *chattering*, se concluye lo siguiente:

### 3. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO UNO

---

- El enfoque de Balance Armónico permite estimar los parámetros de *chattering* cuando se implementa FOSMC (3.43) y STA (3.47) sobre el sistema actuador-motor (3.37).
- Existe un valor de la constante de tiempo del actuador  $\mu^*$  para el cual la amplitud de las oscilaciones es la misma, además si

$$\begin{aligned}\mu > \mu^* &\Rightarrow A_{FOSMC} < A_{STA}, \\ \mu < \mu^* &\Rightarrow A_{FOSMC} > A_{STA}.\end{aligned}\tag{3.53}$$

- Existe un valor de la constante de tiempo del actuador  $\mu^*$  para el cual el voltaje cuadrático medio es igual, además si

$$\begin{aligned}\mu > \mu^* &\Rightarrow \bar{U}_{FOSMC} < \bar{U}_{STA}, \\ \mu < \mu^* &\Rightarrow \bar{U}_{FOSMC} > \bar{U}_{STA}.\end{aligned}\tag{3.54}$$

Esta metodología de análisis basada en el enfoque de Balance armónico permite estudiar las condiciones sobre la constante de tiempo del actuador  $\mu$  para las cuales resulta más conveniente implementar FOSMC (3.43) o STA (3.47) sobre el sistema dinámicamente perturbado actuador-motor (3.37), con respecto a la amplitud de la solución periódica (3.53) y el voltaje cuadrático medio (3.54).

### 3.3. Resumen del Capítulo

El enfoque de Balance Armónico permitió estimar los parámetros de *chattering*: amplitud, frecuencia y potencia promedio, cuando se utiliza FOSMC (3.7) y STA (3.16) para estabilizar el origen del sistema dinámicamente perturbado (3.4).

- Se verificó que los algoritmos continuos y discontinuos basados en SMC producen *chattering* en presencia de dinámicas parásitas que incrementan el grado relativo. El modelo del actuador (3.3) considerado permite aproximar los efectos de algunas dinámicas parásitas presentes en los sistemas de control mediante la variación del parámetro  $\mu$ .
- El FOSMC (3.7) genera una señal de control discontinua, la dinámica parásita considerada (3.3) influye proporcionalmente en la no idealidad del modo deslizante, la potencia promedio es constante a pesar de que la dinámica del actuador sea suficientemente rápida ( $\mu = 0$ ).
- El STA (3.16) genera una señal de control continua, la dinámica parásita considerada (3.3) influye cuadráticamente en la no idealidad del modo deslizante. La expresión analítica de la Función Descriptiva del STA permitió seleccionar las ganancias que minimizan la amplitud de la solución periódica o la potencia promedio.

- Se mostró que no siempre es conveniente sustituir algoritmos discontinuos de SMC por algoritmos continuos de SMC, se estimaron los valores críticos de la constante de tiempo  $\mu$  para los cuales se obtiene la misma amplitud de las oscilaciones o bien la misma potencia promedio.
- El ejemplo del motor de corriente directa permitió mostrar que la metodología de análisis de *chattering* propuesta en este trabajo se puede aplicar a diversos sistemas donde la amplitud y frecuencia así como la potencia promedio adquieren un sentido físico. Además, es posible establecer criterios que permiten seleccionar el tipo de entrada de control (continua o discontinua) en función de los efectos del actuador considerado y de las posibles perturbaciones acopladas que afectan al sistema.



# Análisis de Algoritmos de SMC para Sistemas de Grado Relativo Dos

---

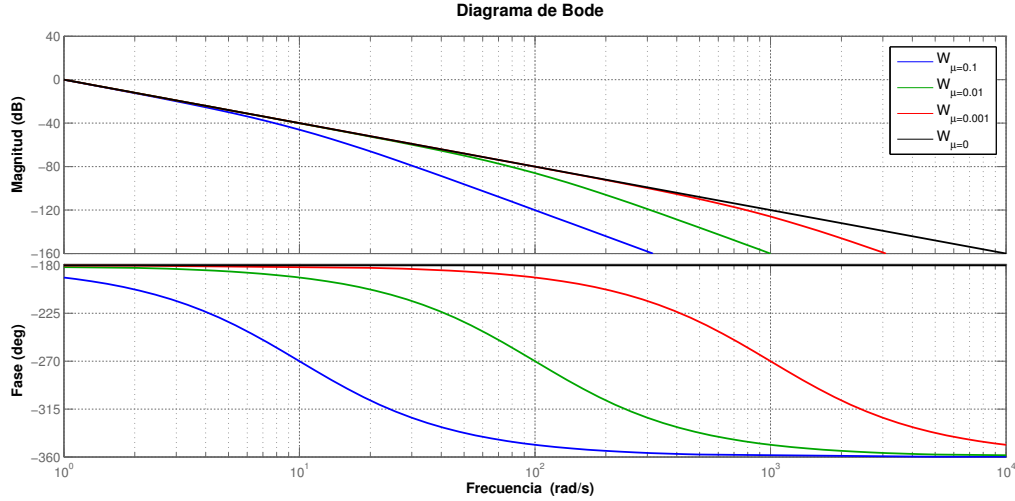
Diversos sistemas mecánicos y electromecánicos, bajo ciertas consideraciones, se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$\ddot{\sigma} = F(t, \sigma, \dot{\sigma}) + Ku, \quad K \neq 0, \quad (4.1)$$

donde  $\sigma$  es la variable de salida y  $u$  la entrada de control. Por ejemplo, cuando se desea regular la posición de un péndulo, la variable  $\sigma$  corresponde a la medición de la posición de la masa,  $u$  es el par de entrada aplicado y el término  $F(t, \sigma, \dot{\sigma})$  representa efectos debidos a la gravedad y la fricción (perturbaciones desconocidas). Otro ejemplo puede ser controlar la velocidad de un motor de corriente directa donde la variable  $\sigma$  corresponde a la medición de la velocidad del rotor,  $u$  es la tensión de armadura y el término  $F(t, \sigma, \dot{\sigma})$  representa efectos de fricción y pares de carga externos (perturbaciones desconocidas). Como estos ejemplos hay una gran variedad de sistemas que bajo ciertas consideraciones pueden ser modelados mediante la expresión (4.1).

Actualmente se han desarrollado algoritmos continuos basados en SMC para estabilizar el origen del sistema (4.1) en tiempo finito, compensando teóricamente en forma exacta la perturbación acoplada  $F$ . Por ejemplo los presentados por Zamora *et al.* (2013) y Torres-Gonzalez *et al.* (2015), que para su implementación requieren del conocimiento de la cota de la derivada temporal de la perturbación  $|\dot{F}| \leq \Delta$ , y la medición de la salida  $\sigma$  (posición) y su derivada  $\dot{\sigma}$  (velocidad). Sin embargo se conoce del trabajo de Boiko y Fridman (2005), que los algoritmos continuos basados en modos deslizantes producen *chattering* en presencia de dinámicas parásitas que incrementan el grado relativo de la planta, por lo que resulta importante estudiar los parámetros de las posibles oscilaciones periódicas y su repercusión en la potencia promedio. Además como se mostró en el Capítulo 3 no siempre es conveniente sustituir algoritmos discontinuos de SMC por algoritmos continuos, se presentan ejemplos que revelan este comportamiento.

#### 4. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO DOS



**Figura 4.1:** Diagrama de Bode del sistema dinámicamente perturbado (4.4).

Para facilitar el análisis considere el sistema dinámico (tipo doble integrador)

$$\ddot{x} = \bar{u}, \quad (4.2)$$

cuyo grado relativo con respecto a la salida  $x \in \mathbb{R}$  y a la entrada de control  $\bar{u} \in \mathbb{R}$  es  $r = 2$ . De manera particular se considera que la dinámica del actuador (dinámica parásita) puede modelarse mediante el sistema lineal de segundo orden críticamente amortiguado

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\mu^2} & -\frac{2}{\mu} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\mu^2} \end{bmatrix} u, \quad (4.3)$$

$$\bar{u} = [1 \ 0] z,$$

donde  $z \in \mathbb{R}^2$  es el vector de estados del actuador y la variable  $\bar{u} \in \mathbb{R}$  es la salida del actuador (entrada *real* de la planta). La forma del actuador (4.3) fue propuesta por Utkin (2016), la constante de tiempo  $\mu > 0$  parametriza la dinámica del actuador debido a que los valores propios del sistema (4.3) son reales e iguales a  $-1/\mu$ . Por lo tanto, el sistema dinámicamente perturbado (4.3)-(4.2)

$$\mu^2 \dddot{x} + 2\mu \ddot{x} + \dot{x} = u, \quad (4.4)$$

es de grado relativo cuatro con respecto a la salida  $x$  y a la entrada de control  $u$  (algoritmo de SMC).

La Figura 4.1 muestra el diagrama de Bode del sistema dinámicamente perturbado (4.4) para algunos valores de  $\mu$ , cabe notar que conforme  $\mu \rightarrow 0$  de frecuencia de las posibles oscilaciones crece debido a que la dinámica del actuador es más *rápida*.



## 4.1. Análisis Basado en Balance Armónico

El sistema dinámicamente perturbado (4.4) tiene la siguiente representación en función de transferencia

$$W(s) = \frac{1}{s^2(\mu s + 1)^2}, \quad (4.5)$$

para solucionar la Ecuación de Balance Armónico (2.9) se sustituye la variable compleja  $s = j\omega$  en la expresión (4.5) y se reescribe de la siguiente manera

$$-\frac{1}{W(j\omega)} = \omega^2(1 - \mu^2\omega^2) + j2\mu\omega^3. \quad (4.6)$$

### 4.1.1. Algoritmo Twisting

El algoritmo Twisting propuesto por [Emelyanov et al. \(1986\)](#) tiene la siguiente estructura

$$u = -c_1 \text{sign}(x) - c_2 \text{sign}(\dot{x}), \quad (4.7)$$

donde  $c_1 > c_2 > 0$  se seleccionan de manera que *se establece un modo deslizante de segundo orden* ( $\exists t_r : x(t) = \dot{x}(t) = 0, \forall t \geq t_r$ ), cuando la dinámica del actuador es suficientemente rápida ( $\mu = 0$ ).

Suponiendo que al implementar Twisting (4.7) sobre el sistema dinámicamente perturbado (4.5) la salida  $x$  converge a una solución periódica

$$\begin{aligned} x &= A \text{sen}(\omega t), \\ \dot{x} &= A\omega \text{cos}(\omega t), \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde  $A$  es la amplitud y  $\omega$  la frecuencia. La Función Descriptiva de la no linealidad (4.7), propuesta por [Boiko et al. \(2004\)](#), es

$$N(A) = \frac{4}{\pi A}(c_1 + jc_2). \quad (4.9)$$

Por lo tanto, sustituyendo las expresiones (4.6) y (4.9) en la Ecuación de Balance Armónico (2.9) se tiene

$$\frac{4}{\pi A}(c_1 + jc_2) = \omega^2(1 - \mu^2\omega^2) + j2\mu\omega^3, \quad (4.10)$$

cuya solución analítica es

$$A = \mu^2 \mathbb{K}_A, \quad (4.11)$$

$$\omega = \frac{\mathbb{K}_\omega}{\mu}, \quad (4.12)$$

#### 4. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO DOS

---

donde

$$\mathbb{K}_A = \frac{2c_2^4}{\pi \left[ \sqrt{c_1^2 + c_2^2} - c_1 \right]^3} = \frac{2c_2}{\pi \mathbb{K}_\omega^3},$$

$$\mathbb{K}_\omega = \frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2} - c_1}{c_2}.$$

Sustituyendo la amplitud (4.11) y frecuencia (4.12) de la solución periódica en la expresión (2.16), la potencia promedio

$$P = \frac{2\mu^2}{\pi^2} \cdot \frac{c_2^6}{\left[ \sqrt{c_1^2 + c_2^2} - c_1 \right]^4}, \quad (4.13)$$

tiende a cero cuando el parámetro del actuador  $\mu \rightarrow 0$ , por lo tanto la potencia promedio es **infinitesimal** con respecto al efecto de la dinámica parásita considerada.

#### Análisis de los Parámetros de *Chattering*

Considerando los parámetros: amplitud (4.11), frecuencia (4.12) y potencia promedio (4.13), se concluye lo siguiente:

1. La amplitud es de orden  $O(\mu^2)$ .
2. La frecuencia es de orden  $O(1/\mu)$ .
3. La potencia promedio es de orden  $O(\mu^2)$ .

Las expresiones de amplitud y frecuencia obtenidas mediante el enfoque de Balance Armónico revelan que conforme el parámetro del actuador  $\mu \rightarrow 0$  la salida describe oscilaciones de menor amplitud y mayor frecuencia, y la potencia promedio tiende a cero.

#### Criterio de Loeb de Estabilidad Orbital

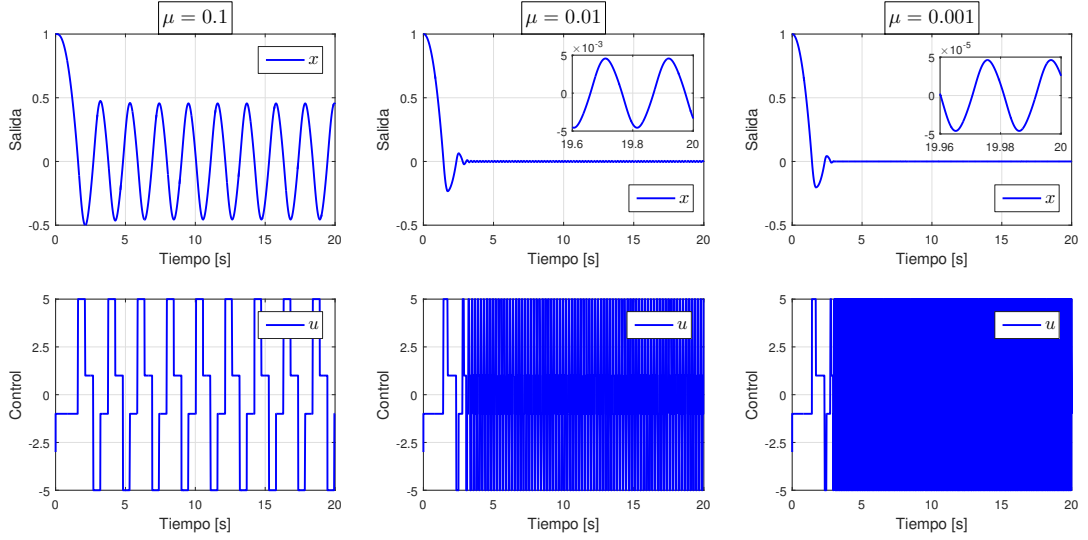
La Ecuación de Balance Armónico (2.9) para el ejemplo se puede expresar de la siguiente manera

$$\underbrace{[4c_1\omega + \pi A\omega^3(\mu^2\omega^2 - 1)]}_{U(A,\omega)} + j \underbrace{[4c_2\omega - 2\pi\mu A\omega^4]}_{V(A,\omega)} = 0, \quad (4.14)$$

de donde

$$\frac{\partial U}{\partial A} = \pi\omega^3(\mu^2\omega^2 - 1), \quad \frac{\partial U}{\partial \omega} = \pi A \left( \frac{4c_1}{\pi A} + \omega^2(5\mu^2\omega^2 - 3) \right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -2\pi\mu\omega^4, \quad \frac{\partial V}{\partial \omega} = \pi A \left( \frac{4c_2}{\pi A} - 8\mu\omega^3 \right).$$



**Figura 4.2:** Simulación del sistema dinámicamente perturbado (4.5) en lazo cerrado con Twisting (4.7).

Parámetros		$\mu$			Orden
		0.1	0.01	0.001	
Balance Armónico	$A$	$4.587 \times 10^{-1}$	$4.587 \times 10^{-3}$	$4.587 \times 10^{-5}$	$O(\mu^2)$
	$\omega$	3.0277	30.277	302.77	$O(1/\mu)$
	$P$	$9.645 \times 10^{-1}$	$9.645 \times 10^{-3}$	$9.645 \times 10^{-5}$	$O(\mu^2)$
Simulaciones	$A$	$4.558 \times 10^{-1}$	$4.563 \times 10^{-3}$	$4.615 \times 10^{-5}$	$O(\mu^2)$
	$\omega$	3.0076	30.063	299.20	$O(1/\mu)$
	$P$	$9.185 \times 10^{-1}$	$9.196 \times 10^{-3}$	$9.303 \times 10^{-5}$	$O(\mu^2)$

**Tabla 4.1:** Parámetros de *chattering* del sistema dinámicamente perturbado (4.5) en lazo cerrado con Twisting (4.7).

El ciclo límite será estable, de acuerdo con la desigualdad (2.15), si se satisface

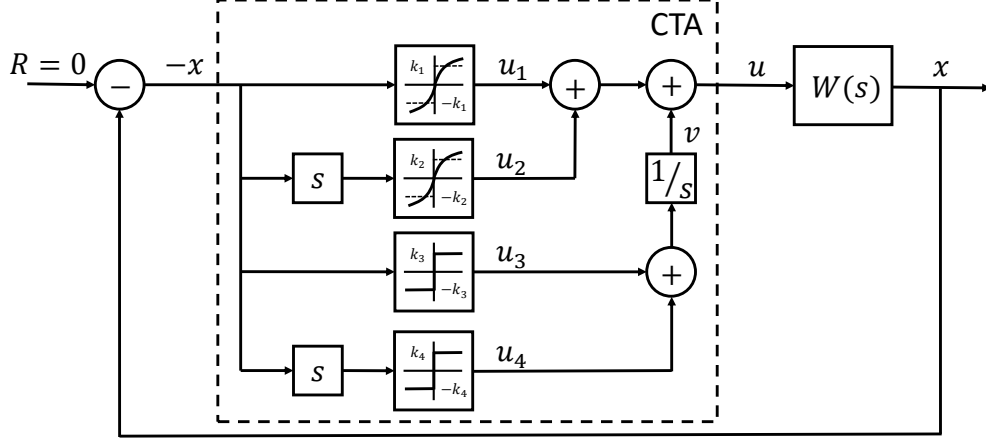
$$A > \frac{2c_2(1 - \mu^2\omega^2) - 4\mu c_1\omega}{\pi\mu\omega^3(\mu^2\omega^2 + 1)} = \left[ \frac{2c_2(1 - \mathbb{K}_\omega^2) - 4c_1\mathbb{K}_\omega}{\pi\mathbb{K}_\omega^3(\mathbb{K}_\omega^2 + 1)} \right] \mu^2, \quad (4.15)$$

la amplitud (4.11) y frecuencia (4.12) corresponden a un ciclo límite **estable**.

### Simulaciones

La Figura 4.2 muestra las simulaciones del sistema actuador-planta (4.5) en lazo cerrado con el Twisting (4.7) considerando algunos valores de la constante de tiempo  $\mu$  y partiendo de la condición inicial  $x(0) = 1$ . Se seleccionaron las ganancias  $c_1 = 3$  y

#### 4. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO DOS



**Figura 4.3:** Diagrama de bloques del sistema dinámicamente perturbado (4.5) en lazo cerrado con CTA (4.16).

$c_2 = 2$  para que la entrada de control (4.7) permaneciera acotada en el valor  $|u| \leq 5$ , se utilizó el método de integración de Euler bajo el paso de muestreo  $\tau = 10^{-5}$  (paso fijo). La Tabla 4.1 permite comparar los parámetros de *chattering* obtenidos en simulación con respecto a los estimados mediante Balance Armónico.

Los resultados de simulación confirman que la Función Descriptiva (4.9) permite estimar los parámetros caracterizan al *chattering* cuando se implementa el algoritmo Twisting (4.7) sobre el sistema dinámicamente perturbado (4.5). Conforme el efecto de la dinámica parásita considerada es menor ( $\mu \rightarrow 0$ ), la salida describe oscilaciones de menor amplitud y mayor frecuencia además de que la potencia promedio tiende a cero.

##### 4.1.2. Algoritmo Twisting Continuo

El Algoritmo Twisting Continuo (CTA por sus siglas en inglés) presentado por Torres-Gonzalez *et al.* (2015) tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} u &= -k_1|x|^{1/3} \text{sign}(x) - k_2|\dot{x}|^{1/2} \text{sign}(\dot{x}) + v, \\ v &= -k_3 \text{sign}(x) - k_4 \text{sign}(\dot{x}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde  $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0$  se seleccionan de manera que se establece un modo deslizante de tercer orden ( $\exists t_r : x(t) = \dot{x}(t) = \ddot{x}(t) = 0, \forall t \geq t_r$ ), cuando la dinámica del actuador es suficientemente rápida ( $\mu = 0$ ).

La Figura 4.3 muestra la conexión del sistema actuador-planta (4.5)  $W(s)$  en lazo cerrado con el CTA (4.16), se puede observar que se aplica una función no lineal similar al Super-Twisting a la salida  $x$  (posición), y otra función también similar al Super-Twisting a  $\dot{x}$  (velocidad).

Considerando cada una de las no linealidades que conforman al CTA (4.16) por separado se tiene

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_1|x|^{1/3} \text{sign}(x), \\ u_2 &= -k_2|\dot{x}|^{1/2} \text{sign}(\dot{x}), \\ u_3 &= -k_3 \text{sign}(x), \\ u_4 &= -k_4 \text{sign}(\dot{x}), \end{aligned}$$

Suponiendo que la salida  $x$  (posición) y su derivada  $\dot{x}$  (velocidad) describen un movimiento periódico de la forma (4.8), las no linealidades son impares para el caso de  $u_1$  y  $u_3$ , mientras que  $u_2$  y  $u_4$  son pares. Al calcular la componente fundamental (2.8) de las no linealidades por separado se obtiene

$$N_1 = \frac{2k_1}{\pi A} \int_0^\pi |A \text{sen}(t)|^{1/3} \text{sign}(A \text{sen}(t)) \text{sen}(t) dt = \frac{1.1596k_1}{A^{2/3}}, \quad (4.17)$$

$$N_2 = j \frac{2k_2}{\pi A} \int_0^\pi |A\omega \cos(t)|^{1/2} \text{sign}(A\omega \cos(t)) \cos(t) dt = j \frac{1.1128k_2\omega^{1/2}}{A^{1/2}}, \quad (4.18)$$

$$N_3 = \frac{4k_3}{\pi A} \int_0^\pi \text{sign}(A \text{sen}(t)) \text{sen}(t) dt = \frac{4k_3}{\pi A}, \quad (4.19)$$

$$N_4 = j \frac{4k_4}{\pi A} \int_0^\pi \text{sign}(A\omega \cos(t)) \cos(t) dt = j \frac{4k_4}{\pi A}, \quad (4.20)$$

debido al integrador (ver Figura 4.3) las expresiones (4.19) y (4.20) se vuelven

$$N_v = (N_3 + N_4) \frac{1}{s} = \frac{4k_4}{\pi A\omega} - j \frac{4k_3}{\pi A\omega}. \quad (4.21)$$

Finalmente de las expresiones (4.17), (4.18) y (4.21), la Función Descriptiva del CTA (4.16) es

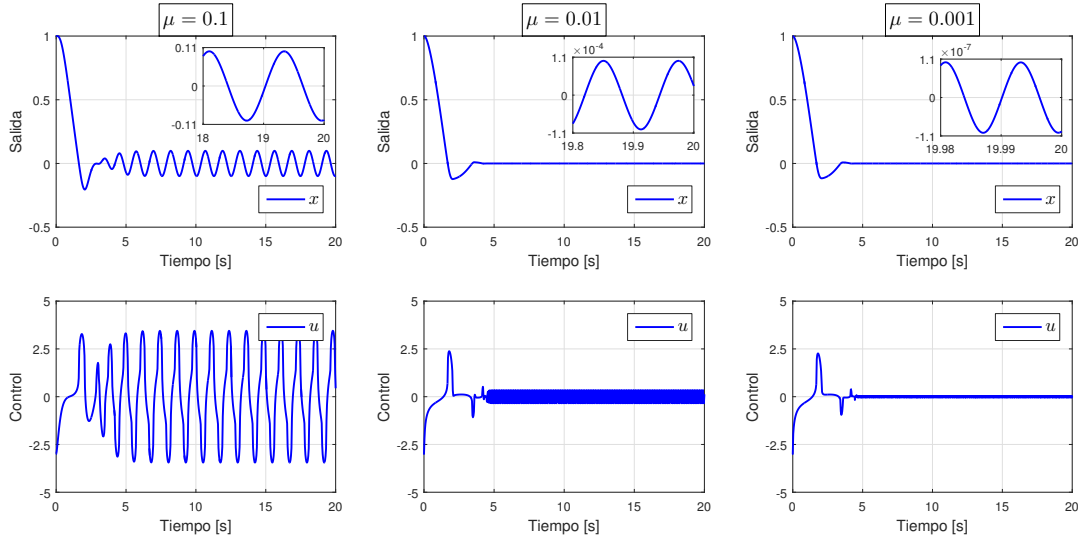
$$N(A, \omega) = \frac{1.1596k_1}{A^{2/3}} + \frac{4k_4}{\pi A\omega} + j \left[ \frac{1.1128k_2\omega^{1/2}}{A^{1/2}} - \frac{4k_3}{\pi A\omega} \right]. \quad (4.22)$$

Sustituyendo las expresiones (4.6) y (4.22) en la Ecuación de Balance Armónico (2.9) se tiene

$$\frac{1.1596k_1}{A^{2/3}} + \frac{4k_4}{\pi A\omega} + j \left[ \frac{1.1128k_2\omega^{1/2}}{A^{1/2}} - \frac{4k_3}{\pi A\omega} \right] = \omega^2(1 - \mu^2\omega^2) + j2\mu\omega^3, \quad (4.23)$$

cuya solución (estimación de la amplitud  $A$  y la frecuencia  $\omega$  de las posibles oscilaciones) se puede obtener numéricamente para cada conjunto de ganancias del CTA (4.16) que estabilicen al sistema dinámicamente perturbado (4.5).

#### 4. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO DOS



**Figura 4.4:** Simulación del sistema dinámicamente perturbado (4.5) en lazo cerrado con CTA (4.16).

Parámetros		$\mu$			Orden
		0.1	0.01	0.001	
Balance Armónico	A	$9.867 \times 10^{-2}$	$9.867 \times 10^{-5}$	$9.867 \times 10^{-8}$	$O(\mu^3)$
	$\omega$	5.0689	50.689	506.89	$O(1/\mu)$
	P	$1.251 \times 10^{-1}$	$1.251 \times 10^{-5}$	$1.251 \times 10^{-9}$	$O(\mu^4)$
Simulaciones	A	$9.925 \times 10^{-2}$	$9.941 \times 10^{-5}$	$10.10 \times 10^{-8}$	$O(\mu^3)$
	$\omega$	5.0749	50.728	505.48	$O(1/\mu)$
	P	$1.248 \times 10^{-1}$	$1.251 \times 10^{-5}$	$1.277 \times 10^{-9}$	$O(\mu^4)$

**Tabla 4.2:** Parámetros de *chattering* del sistema dinámicamente perturbado (4.5) en lazo cerrado con CTA (4.16).

#### Análisis de los Parámetros de Chattering

Por ejemplo considere la selección de las ganancias de CTA (4.16):  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 4$ ,  $k_3 = 2.3$  y  $k_4 = 1.1$ . La Tabla 4.2 resume los parámetros de *chattering* de la salida  $x$  obtenidos al solucionar la Ecuación de Balance Armónico (4.23) para algunos valores de la constante de tiempo del actuador  $\mu$ . Se concluye lo siguiente:

1. La amplitud del ciclo límite es de orden  $O(\mu^3)$ .
2. La frecuencia del ciclo límite es de orden  $O(1/\mu)$ .
3. La disipación de energía es de orden  $O(\mu^4)$ .

Los resultados obtenidos numéricamente muestran que conforme el parámetro del actuador  $\mu \rightarrow 0$  la salida describe oscilaciones de menor amplitud y mayor frecuencia, además de que la potencia promedio tiende a cero. Cabe señalar que cuando la dinámica del actuador es *rápida* ( $\mu \rightarrow 0$ ), la amplitud y la potencia promedio generadas por el CTA son menores a las producidas por el Twisting.

### Simulaciones

Usando el método de integración de Euler bajo el paso de muestreo  $\tau = 10^{-5}$  (paso fijo), así como las ganancias de control  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 4$ ,  $k_3 = 2.3$  y  $k_4 = 1.1$ . La Figura 4.4 muestra la simulación del sistema de control para algunos valores de  $\mu$ . Los resultados de simulación confirman que la Función Descriptiva (4.22) permite estimar los parámetros caracterizan al *chattering* cuando se implementa CTA (4.16) sobre el sistema dinámicamente perturbado (4.5). Conforme el efecto de la dinámica parásita considerada es menor ( $\mu \rightarrow 0$ ) la salida describe oscilaciones de menor amplitud y mayor frecuencia además de que la potencia promedio tiende a cero.

#### 4.1.3. Control Integral Discontinuo

El control Integral Discontinuo (DIC por sus siglas en inglés) propuesto por Zamora *et al.* (2013), es un caso particular del CTA (4.16) cuando  $k_4 = 0$ , esto es

$$\begin{aligned} u &= -k_1|x|^{1/3} \text{sign}(x) - k_2|\dot{x}|^{1/2} \text{sign}(\dot{x}) + v, \\ \dot{v} &= -k_3 \text{sign}(x), \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde  $k_1, k_2, k_3 > 0$  se seleccionan de manera que se establece un modo deslizante de tercer orden ( $\exists t_r : x(t) = \dot{x}(t) = \ddot{x}(t) = 0, \forall t \geq t_r$ ), cuando la dinámica del actuador es suficientemente rápida ( $\mu = 0$ ).

Suponiendo que al implementar (4.24) sobre el sistema dinámicamente perturbado (4.5) la salida  $x$  converge a un ciclo límite de la forma (4.8), la Función Descriptiva del DIC (4.24) es

$$N(A, \omega) = \frac{1.1596k_1}{A^{2/3}} + j \left[ \frac{1.1128k_2\omega^{1/2}}{A^{1/2}} - \frac{4k_3}{\pi A\omega} \right]. \quad (4.25)$$

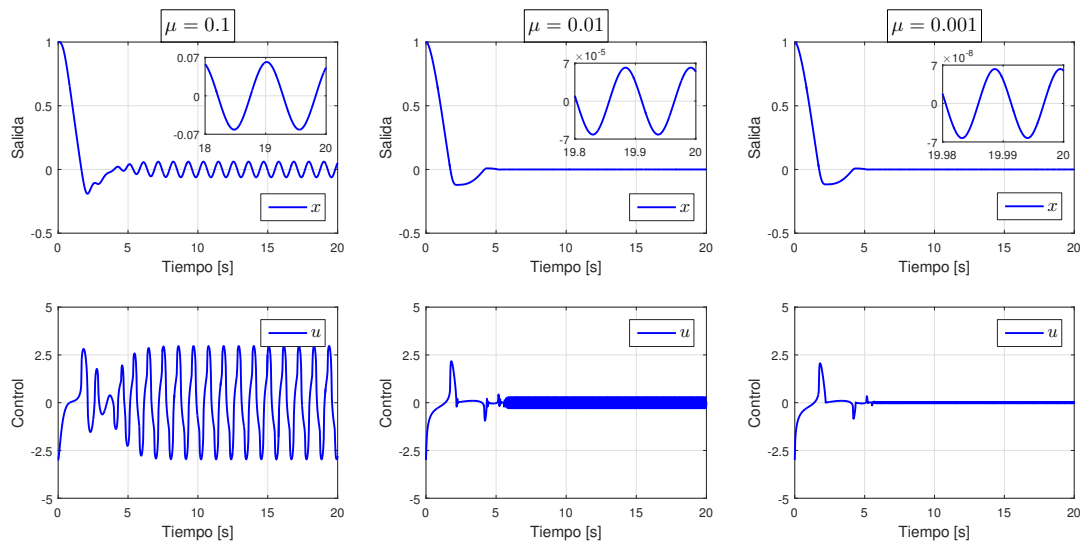
Los parámetros de la solución periódica generada por el DIC (4.24) se pueden estimar para este ejemplo resolviendo la siguiente ecuación no lineal

$$\frac{1.1128k_2}{(1.1596k_1)^{3/4}} \cdot \frac{(1 - \mu^2\omega^2)^{3/4}}{\omega} - \frac{4k_3}{\pi(1.1596k_1)^{3/2}} \cdot \frac{(1 - \mu^2\omega^2)^{3/2}}{\omega} = 2\mu, \quad (4.26)$$

para la frecuencia  $\omega$  y sustituyendo el resultado en la expresión de la amplitud

$$A = \left[ \frac{1.1596k_1}{\omega^2(1 - \mu^2\omega^2)} \right]^{3/2}. \quad (4.27)$$

#### 4. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO DOS



**Figura 4.5:** Simulación del sistema dinámicamente perturbado (4.5) en lazo cerrado con DIC (4.24).

Parámetros		$\mu$	0.1	0.01	0.001	Orden
Balance Armónico	A		$6.115 \times 10^{-2}$	$6.115 \times 10^{-5}$	$6.115 \times 10^{-8}$	$O(\mu^3)$
	$\omega$		5.8240	58.240	582.40	$O(1/\mu)$
	P		$6.341 \times 10^{-2}$	$6.341 \times 10^{-6}$	$6.341 \times 10^{-10}$	$O(\mu^4)$
Simulaciones	A		$6.160 \times 10^{-2}$	$6.172 \times 10^{-5}$	$6.291 \times 10^{-8}$	$O(\mu^3)$
	$\omega$		5.8268	58.242	580.16	$O(1/\mu)$
	P		$6.357 \times 10^{-2}$	$6.377 \times 10^{-6}$	$6.564 \times 10^{-10}$	$O(\mu^4)$

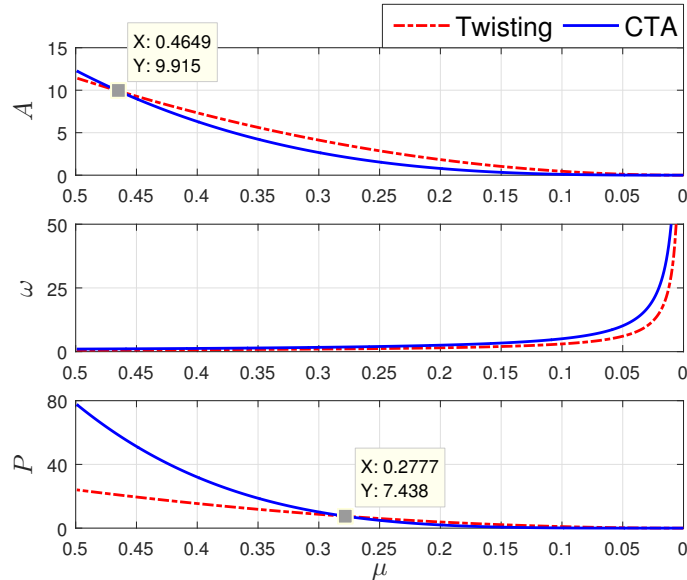
**Tabla 4.3:** Parámetros de *chattering* del sistema dinámicamente perturbado (4.5) en lazo cerrado con DIC (4.24).

#### Análisis de los Parámetros de Chattering

Por ejemplo considere la selección de las ganancias de DIC (4.24):  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 4$  y  $k_3 = 1.1$ . La Tabla 4.3 resume los parámetros de *chattering* de la salida  $x$  estimados utilizando el enfoque de Balance Armónico, considerando algunos valores de la constante de tiempo del actuador  $\mu$ . Se concluye lo siguiente:

1. La amplitud del ciclo límite es de orden  $O(\mu^3)$ .
2. La frecuencia del ciclo límite es de orden  $O(1/\mu)$ .
3. La disipación de energía es de orden  $O(\mu^4)$ .





**Figura 4.6:** Comparación de los parámetros de *chattering* en función de  $\mu$ , considerando las ganancias:  $c_1 = 3$ ,  $c_2 = 2$  para el Twisting (4.7) y  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 4$ ,  $k_3 = 2.3$ ,  $k_4 = 1.1$  para el CTA (4.16) como ejemplo.

## Simulaciones

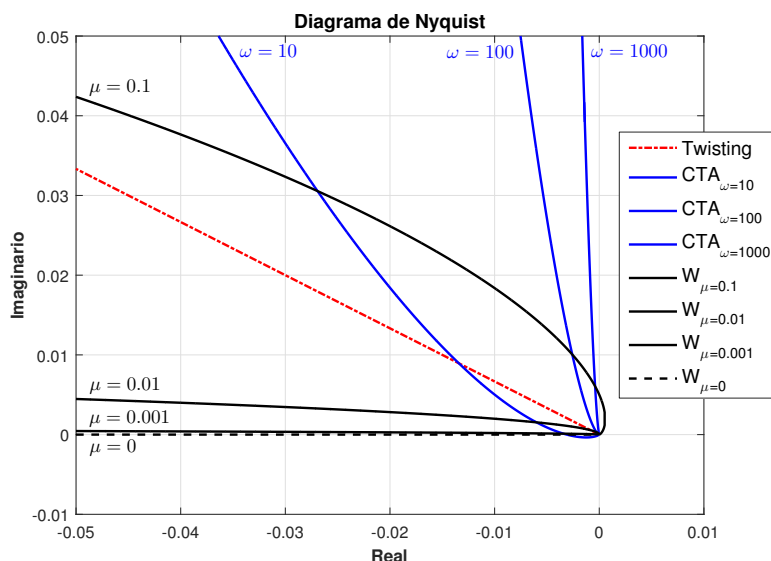
Usando el método de integración de Euler bajo el paso de muestreo  $\tau = 10^{-5}$  (paso fijo), así como las ganancias de control  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 4$  y  $k_3 = 1.1$ . La Figura 4.5 muestra la simulación del sistema de control para algunos valores de  $\mu$ . Los resultados de simulación confirman que utilizando la Función Descriptiva (4.25) del DIC (4.24) se pueden estimar los parámetros de que caracterizan al *chattering*. Conforme el efecto de la dinámica parásita considerada es menor ( $\mu \rightarrow 0$ ) la salida describe oscilaciones de menor amplitud y mayor frecuencia además de que la potencia promedio tiende a cero.

### 4.1.4. Comparación de los Parámetros de *Chattering*

Se presenta a través de un ejemplo la comparación de los parámetros de *chattering* estimados con Balance Armónico, considerando que la entrada del sistema actuador-planta (4.5) se diseña utilizando el algoritmo Twisting (4.7) en contraste con el CTA (4.16). Con esto es posible estudiar condiciones sobre la constante de tiempo  $\mu$  para las cuales resulta más conveniente implementar control discontinuo (Twisting) en lugar de control continuo (CTA).

Considere como ejemplo que se seleccionan las ganancias  $c_1 = 3$ ,  $c_2 = 2$  para el Twisting (4.7) y  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 4$ ,  $k_3 = 2.3$ ,  $k_4 = 1.1$  para el CTA (4.16), la Figura 3.5 muestra la comparación de los parámetros de *chattering* en función de la constante de tiempo  $\mu$  del actuador.

## 4. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO DOS



**Figura 4.7:** Solución gráfica de la ecuación de Balance Armónico (2.9) considerando el sistema dinámicamente perturbado  $W(j\omega)$  (4.5) para algunos valores de  $\mu$ , la Función Descriptiva (4.9) del Twisting y la Función Descriptiva (4.22) del CTA para valores fijos de la frecuencia  $\omega$ .

### Análisis de la Amplitud

La Figura 4.6 muestra que existe un valor de la constante de tiempo del actuador  $\mu$  para el cual la amplitud de las posibles oscilaciones es la misma, cuando se aplica Twisting (4.7) o CTA (4.16) sobre el sistema dinámicamente perturbado (4.5), este valor es  $\mu^* = 0.4649$  para las ganancias consideradas.

### Análisis de la Frecuencia

La solución gráfica a la ecuación de Balance Armónico (2.9) se presenta en la Figura 4.7 considerando algunos valores de la constante de tiempo  $\mu$  en el sistema dinámicamente perturbado  $W(j\omega)$  (4.5). La Función Descriptiva (4.9) del Twisting se representa mediante una línea recta con pendiente  $\arctan(c_2/c_1)$ , mientras que la Función Descriptiva (4.22) del CTA se puede trazar en el plano complejo fijando el valor de la frecuencia  $\omega$ . Se observa que basta con que la perturbación dinámica incremente el grado relativo de la planta a tres para que una posible solución periódica se establezca cuando se aplica el algoritmo Twisting (4.7) o bien el CTA (4.16).

### Análisis de la Potencia Promedio

La Figura 4.6 muestra que existe un valor de la constante de tiempo del actuador  $\mu$  para el cual la potencia promedio es la misma, cuando se aplica Twisting (4.7) o CTA (4.16) sobre el sistema dinámicamente perturbado (4.5), este valor es  $\mu^* = 0.2777$  para las ganancias consideradas.

Descripción	Símbolo	Valor	Unidades
Aceleración gravitacional	$g$	9.81	$\text{m s}^{-2}$
Distancia del centro de masa	$l$	0.011	m
Masa del péndulo	$m$	0.1040	kg
Coefficiente de fricción viscosa	$B$	$5.65 \times 10^{-5}$	N m s
Momento de inercia	$J$	0.00292	$\text{kg m}^2$
Paso de muestreo	$\tau$	$1 \times 10^{-4}$	s

**Tabla 4.4:** Parámetros para el ejemplo del péndulo invertido

Con este ejemplo se muestra que es posible estimar los valores críticos de la constante de tiempo del actuador para los cuales resulta más conveniente implementar la entrada de control discontinuo (Twisting) en lugar del control continuo (CTA), con respecto a la amplitud de las oscilaciones y la potencia promedio.

## 4.2. Ejemplo: Péndulo Invertido

El modelo matemático de un péndulo simple consiste en una ecuación diferencial de segundo orden

$$J\ddot{x} + B\dot{x} + mgl \sin(x) = \bar{u} + f, \quad (4.28)$$

donde la salida  $x$  corresponde a la medición de la posición del péndulo, el par de entrada es  $\bar{u}$  y el término  $f$  representa perturbaciones. Los parámetros del péndulo se describen en la Tabla 4.4 y fueron recopilados del trabajo de [Mendoza \*et al.\* \(2015\)](#). Para este ejemplo, las posibles dinámicas parásitas presentes en el lazo de control corresponden a la dinámica del actuador (motor de corriente directa), generadores PWM, medidores de posición y velocidad, etapas de control pre-instaladas, discretización, entre otras.

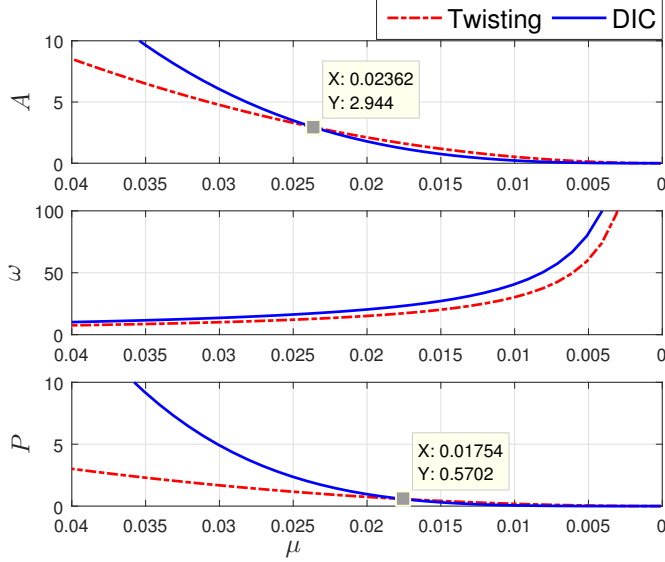
Suponiendo que los efectos de las dinámicas parásitas se pueden aproximar mediante el actuador (4.3) para algún valor de la constante de tiempo  $\mu$ , el sistema dinámicamente perturbado (4.3)-(4.28) tiene la siguiente estructura (para valores pequeños de la posición angular  $x$ )

$$\mu^2 \ddot{\ddot{x}} + (a\mu^2 + 2\mu)\ddot{\ddot{x}} + (1 + 2a\mu - b\mu^2)\ddot{x} + a\dot{x} - bx = Ku, \quad (4.29)$$

cuyo grado relativo es cuatro con respecto a la salida  $x$  y a la entrada  $u$  (algoritmo de SMC), donde  $K = \frac{1}{J}$ ,  $a = \frac{B}{J}$ ,  $b = \frac{mgl}{J}$ . Este ejemplo tiene por objetivo mostrar los efectos de la dinámica parásita (actuador) sobre el sistema de control, por lo que se asume que se puede aplicar la entrada

$$u = \frac{1}{K}[a\dot{x} - bx + u_{\text{smc}}], \quad (4.30)$$

#### 4. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO DOS



**Figura 4.8:** Parámetros de *chattering* del sistema Actuador-Péndulo (4.29) en función de  $\mu$ , considerando las ganancias:  $c_1 = 3\delta$ ,  $c_2 = 2\delta$  para el Twisting (4.7) y  $k_1 = 4\Delta^{2/3}$ ,  $k_2 = 3\Delta^{1/2}$ ,  $k_3 = 1.1\Delta$  para el DIC (4.24).

donde el término  $u_{\text{smc}}$  se diseñará utilizando el algoritmo Twisting (4.7) y el algoritmo DIC (4.24) con fines comparativos. Por lo tanto se debe asumir que la perturbación acoplada a la entrada de control  $u_{\text{smc}}$  es acotada y Lipschitz en el tiempo

$$F(t) = \frac{1}{J} \left[ \mu^2 \ddot{f} + \mu(2 + a\mu)\dot{f} + (1 + 2a\mu - b\mu^2)f \right], \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |F| \leq \delta, \\ |\dot{F}| \leq \Delta. \end{cases} \quad (4.31)$$

Los parámetros de la solución periódica se pueden estimar considerando la Función de Transferencia

$$W(s) = \frac{X(s)}{U_{\text{smc}}(s)} = \frac{1}{\mu^2 s^4 + (a\mu^2 + 2\mu)s^3 + (1 + 2a\mu - b\mu^2)s^2}, \quad (4.32)$$

así como la Función Descriptiva (4.9) para el Twisting o bien la Función Descriptiva (4.25) para el DIC, respectivamente.

En este ejemplo la energía cinética rotacional se puede calcular a partir de la expresión

$$E(t) = \frac{J}{2} \dot{x}^2(t) = \frac{JA^2\omega^2}{2} \cos^2(\omega t), \quad (4.33)$$

por lo tanto la potencia promedio se obtiene modificando la integral (2.16) de la siguiente manera

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt = \frac{JA^2\omega^2}{4}. \quad (4.34)$$

		$\mu$			
		$\mu_1$	$\mu^*$	$\mu^*$	$\mu_2$
<b>Twisting</b>	<b>A</b>	4.7630	2.9436	1.6198	0.5257
	$\omega$	10.068	12.802	17.252	30.275
	$P$	1.6789	1.0366	0.5701	0.1849
<b>DIC</b>	<b>A</b>	6.0468	2.9405	1.2011	0.2222
	$\omega$	13.560	17.236	23.222	40.7462
	$P$	4.9043	1.8751	0.5679	0.0598

**Tabla 4.5:** Parámetros de *chattering* del péndulo invertido estimados mediante Balance Armónico.

Por ejemplo, considere las cotas  $\delta = 2$ ,  $\Delta = 20$ , así como las ganancias  $c_1 = 3\delta$ ,  $c_2 = 2\delta$ , del Twisting (4.7) y  $k_1 = 4\Delta^{2/3}$ ,  $k_2 = 3\Delta^{1/2}$ ,  $k_3 = 1.1\Delta$  para el DIC (4.24). La Figura 4.8 muestra la comparación de los parámetros de *chattering* estimados utilizando Balance Armónico en función de la constante de tiempo de actuador  $\mu$ . Es claro que conforme  $\mu \rightarrow 0$  la salida (posición angular del péndulo) describe oscilaciones de menor amplitud y mayor frecuencia. Por otro lado, la potencia promedio de la salida tiende a cero en ambos casos.

De la Figura 4.8 se puede determinar el valor de la constante de tiempo del actuador para el cual se tiene la misma amplitud ( $\mu^* = 0.02362$ ) o bien la misma potencia promedio ( $\mu^* = 0.01754$ ). La Tabla 4.5 resume los parámetros de *chattering*: amplitud, frecuencia y potencia promedio, estimados utilizando el enfoque de Balance Armónico; considerando las constantes de tiempo del actuador

$$\mu_1 = 0.03, \quad \mu^* = 0.02362, \quad \mu^* = 0.01754, \quad \mu_2 = 0.01. \quad (4.35)$$

Se concluye lo siguiente:

- Existe un valor de la constante de tiempo del actuador  $\mu^*$  para el cual la amplitud de las oscilaciones es la misma.
- Existe un valor de la constante de tiempo del actuador  $\mu^*$  para el la potencia promedio es la misma.
- Si la constante de tiempo del actuador es mayor a  $\mu^*$  (por ejemplo  $\mu_1$ ) la amplitud de las oscilaciones será mayor cuando se implementa DIC con respecto a las generadas por el Twisting. Pero si la constante de tiempo del actuador es menor a  $\mu^*$  (por ejemplo  $\mu_2$ ) la amplitud será menor cuando se implementa DIC en lugar de Twisting.

#### 4. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO DOS

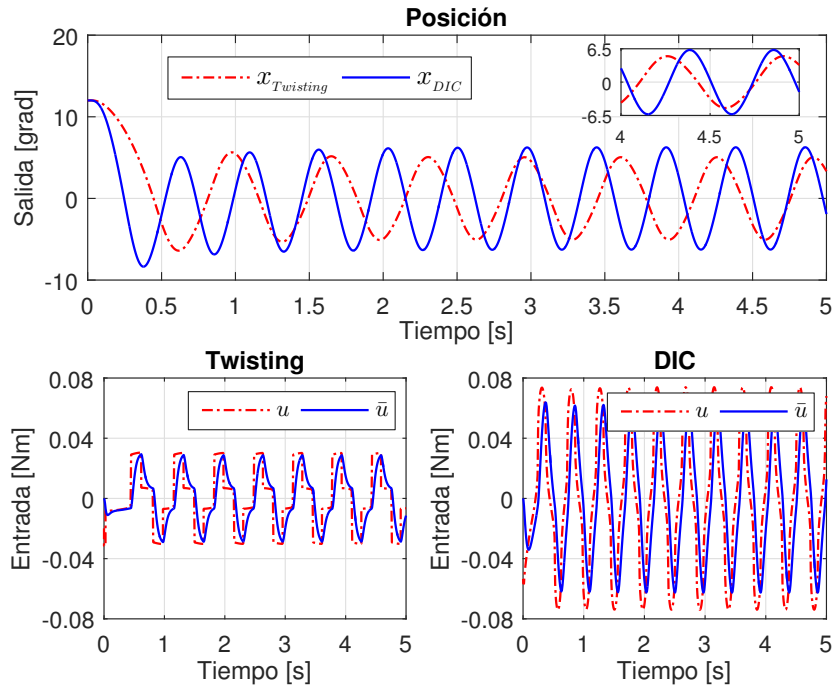


Figura 4.9: Simulación del péndulo invertido para  $\mu_1 = 0.03$ .

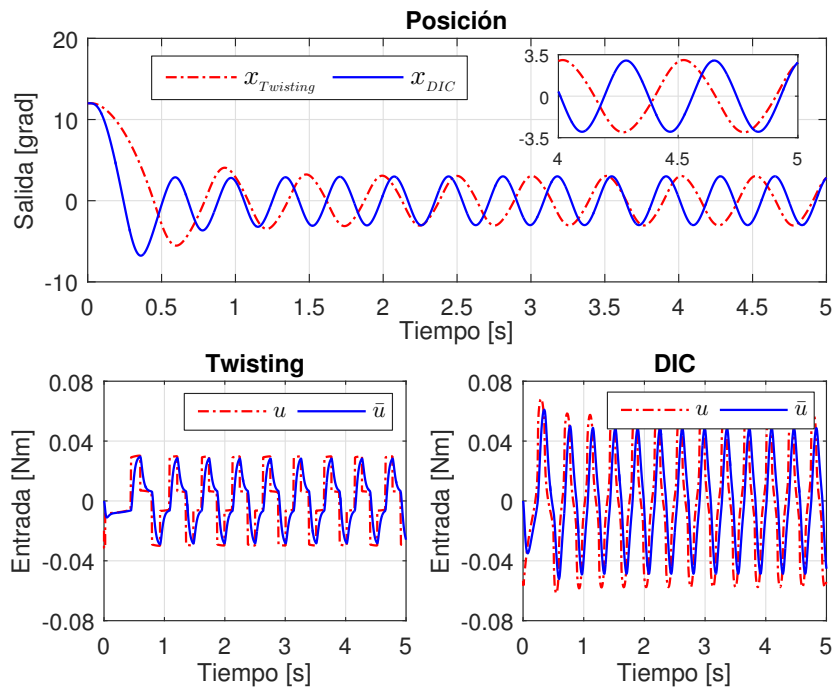


Figura 4.10: Simulación del péndulo invertido para  $\mu^* = 0.02362$ .

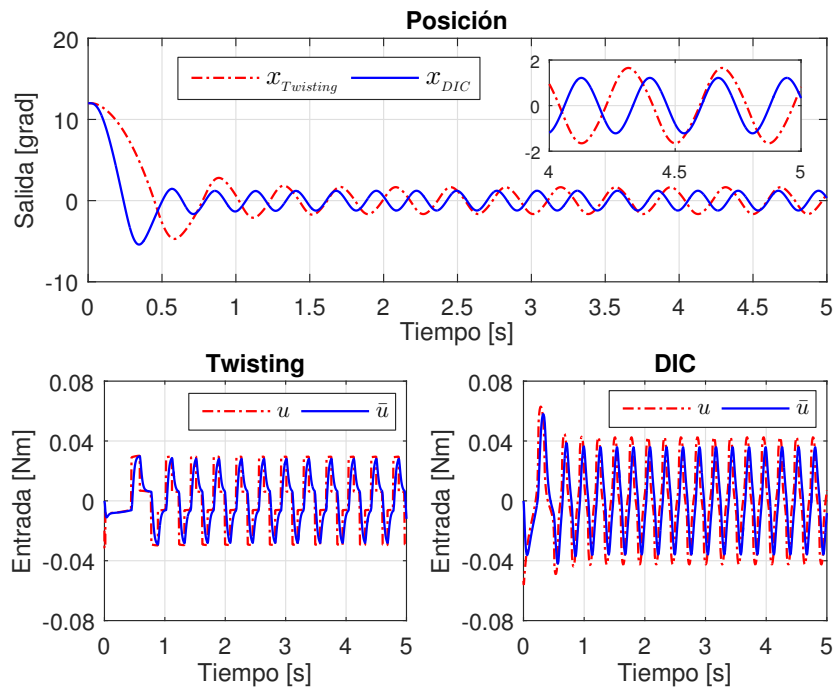


Figura 4.11: Simulación del péndulo invertido para  $\mu^* = 0.01754$ .

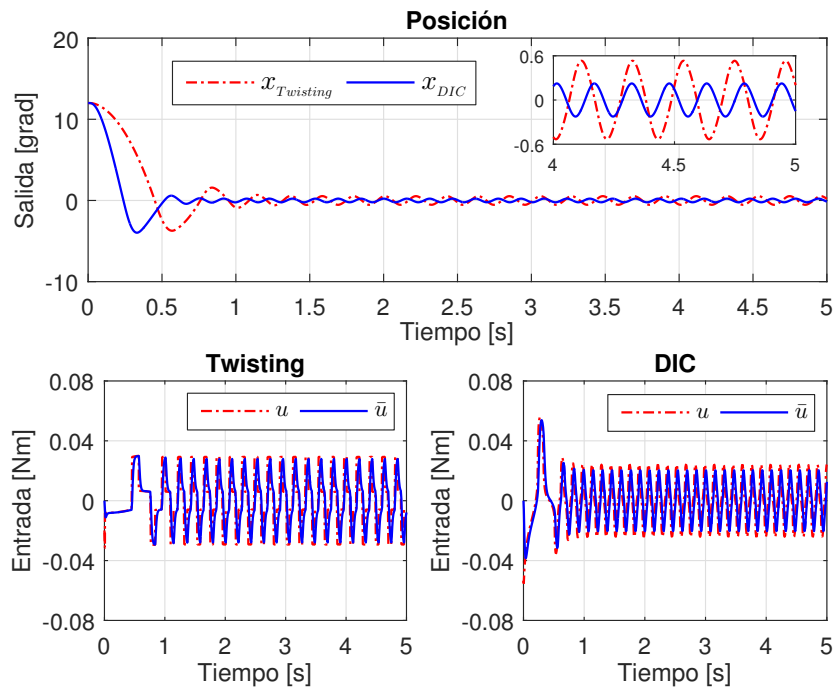


Figura 4.12: Simulación del péndulo invertido para  $\mu_2 = 0.01$ .

#### 4. ANÁLISIS DE ALGORITMOS DE SMC PARA SISTEMAS DE GRADO RELATIVO DOS

---

Control \ $\mu$		$\mu_1$	$\mu^*$	$\mu^*$	$\mu_2$
Twisting	A	5.0491	3.0494	1.6532	0.5324
	$\omega$	9.6427	12.427	16.890	29.806
	P	1.6922	1.0239	0.5563	0.1795
DIC	A	6.2650	3.0040	1.2164	0.2246
	$\omega$	13.348	17.069	23.083	40.589
	P	5.0158	1.8864	0.5660	0.0596

**Tabla 4.6:** Parámetros de *chattering* del péndulo invertido obtenidos de las simulaciones.

- Si la constante de tiempo del actuador es mayor a  $\mu^*$  (por ejemplo  $\mu_1$ ) potencia promedio será mayor cuando se aplica DIC en lugar de Twisting. Pero si la constante de tiempo del actuador es menor a  $\mu^*$  (por ejemplo  $\mu_2$ ) la potencia promedio será menor implementando DIC en lugar de Twisting.

Cabe mencionar que los valores de la constante de tiempo de actuador (4.35) determinados gráficamente corresponden a un desempeño factible para el sistema de control de péndulo invertido ya que se obtienen variaciones de entre 0.2 y 6 grados con respecto al valor de posición deseado  $x = 0$ .

Las simulaciones se realizaron utilizando el método de integración de Euler bajo el paso de muestreo  $\tau = 10^{-4}$  (paso fijo), considerando las ganancias  $c_1 = 3\delta$ ,  $c_2 = 2\delta$  para el Twisting (4.7) y  $k_1 = 4\Delta^{2/3}$ ,  $k_2 = 3\Delta^{1/2}$ ,  $k_3 = 1.1\Delta$  para el DIC (4.24); con las cotas  $\delta = 2$ , y  $\Delta = 20$ .

Las Figuras 4.9, 4.10, 4.11, y 4.12, muestran las simulaciones del sistema de control considerando las constantes de tiempo del actuador (3.52), respectivamente. La Tabla 4.6 resume los parámetros de *chattering*, se concluye lo siguiente:

- El enfoque de Balance Armónico permite estimar los parámetros de *chattering* cuando se implementa Twisting (4.7) y DIC (4.24) sobre el sistema actuador-péndulo (4.29).
- Existe un valor de la constante de tiempo del actuador  $\mu^*$  para el cual la amplitud de las oscilaciones es la misma, además si

$$\begin{aligned} \mu > \mu^* &\Rightarrow A_{Twisting} < A_{DIC}, \\ \mu < \mu^* &\Rightarrow A_{Twisting} > A_{DIC}. \end{aligned} \quad (4.36)$$



- Existe un valor de la constante de tiempo del actuador  $\mu^*$  para el la potencia en cada ciclo es igual, además si

$$\begin{aligned}\mu > \mu^* &\Rightarrow P_{Twisting} < P_{DIC}, \\ \mu < \mu^* &\Rightarrow P_{Twisting} > P_{DIC}.\end{aligned}\tag{4.37}$$

Esta metodología de análisis basada en el enfoque de Balance armónico permite estudiar las condiciones sobre la constante de tiempo del actuador  $\mu$  para las cuales resulta más conveniente implementar Twisting (4.7) o DIC (4.24) sobre el sistema dinámicamente perturbado actuador-péndulo (4.29), con respecto a la amplitud de la solución periódica (4.36) y la potencia promedio (4.37).

### 4.3. Resumen del Capítulo

El enfoque de Balance Armónico permitió estimar los parámetros de *chattering*: amplitud, frecuencia y potencia promedio, cuando se utiliza Twisting (4.7) y CTA (4.16) para estabilizar el origen del sistema dinámicamente perturbado (4.5).

- Se verificó que los algoritmos continuos y discontinuos basados en SMC producen *chattering* en presencia de dinámicas parásitas que incrementan el grado relativo. El modelo del actuador (4.3) considerado permite aproximar los efectos de algunas dinámicas parásitas presentes en los sistemas de control mediante la variación del parámetro  $\mu$ .
- El algoritmo Twisting (4.7) genera una señal de control discontinua, la dinámica parásita considerada (4.5) influye cuadráticamente en la no idealidad del modo deslizante, así como en la potencia promedio.
- El CTA (4.16) genera una señal de control continua, la dinámica parásita considerada (4.3) influye cúbicamente en la no idealidad del modo deslizante, mientras que la potencia promedio es proporcional a la potencia cuarta de la constante de tiempo del actuador considerado.
- Se mostró que no siempre es conveniente sustituir algoritmos discontinuos de SMC por algoritmos continuos de SMC, se estimaron los valores críticos de la constante de tiempo  $\mu$  para los cuales se obtiene la misma amplitud de las oscilaciones o bien la misma potencia promedio.
- El ejemplo del péndulo invertido permitió mostrar que la metodología de análisis de *chattering* propuesta es este trabajo se puede aplicar a diversos sistemas donde la amplitud y frecuencia, así como la potencia promedio adquieren un sentido físico. Además, es posible establecer criterios que permiten seleccionar el tipo de entrada de control (continua o discontinua) en función de los efectos del actuador considerado y de las posibles perturbaciones acopladas que afectan al sistema.



## Conclusiones

---

El diseño de esquemas de control para sistemas dinámicos afectados por perturbaciones e incertidumbres puede ser abordado utilizando la teoría de control por Modos Deslizantes, logrando convergencia de la salida a cero en tiempo finito y alta precisión respecto al paso de muestreo. Sin embargo existen dinámicas parásitas presentes en los sistemas de control que influyen en el deterioro de las propiedades antes mencionadas, como la presencia de dinámicas no modeladas en actuadores y sensores, efectos de retardo y discretización, histéresis, entre otras; las cuales ocasionan que las entradas de control conmuten con frecuencia finita y por consiguiente que las trayectorias del sistema en lazo cerrado describan oscilaciones de alta frecuencia. El modelo del actuador propuesto trata de aproximar los efectos de las dinámicas parásitas mediante la variación de su constante de tiempo, además incrementa el grado relativo de la planta lo cual provoca que se establezca una posible solución periódica.

El enfoque de Balance Armónico resultó muy útil para estimar los parámetros de la solución periódica, amplitud y frecuencia, con esta información se propuso un criterio para el cálculo de la potencia promedio de la respuesta de estado permanente. El cálculo analítico de las Funciones Descriptivas permitió, entre otras cosas, dar criterios de selección de las ganancias de los algoritmos de control por Modos Deslizantes para reducir los efectos del *chattering*.

Resulta fundamental estudiar el efecto de las dinámicas parásitas presentes en los sistemas de control ya que no siempre es conveniente sustituir algoritmos discontinuos de control por Modos Deslizantes por algoritmos continuos. Se obtuvieron los valores críticos de la constante de tiempo del actuador considerado, los cuales permiten determinar qué tipo de entrada de control (continua o discontinua) es más conveniente utilizar, con respecto a la amplitud de las oscilaciones y la potencia promedio.



## Bibliografía

---

- Atherton, D. P. (1975). *Nonlinear Control Engineering-Describing Function Analysis and Design*. Van Nostrand Reinhold, New York and London. [11](#), [13](#)
- Bartolini, G., Ferrara, A., y Usani, E. (1998). Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE transactions on Automatic Control*, 43(2):241–246.
- Bartolini, G., Pisano, A., Punta, E., y Usai, E. (2003). A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems. *International Journal of Control*, 76(9-10):875–892.
- Boiko, I. (2000). Application of the locus of a perturbed relay system to sliding mode relay control design. En *Control Applications, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on*, pp. 542–547. IEEE.
- Boiko, I. (2005). Oscillations and transfer properties of relay servo systems—the locus of a perturbed relay system approach. *Automatica*, 41(4):677–683. [3](#), [9](#), [20](#)
- Boiko, I. (2007). Analysis of closed-loop performance and frequency-domain design of compensating filters for sliding mode control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(10):1882–1891.
- Boiko, I. (2009). *Frequency-Domain Analysis and Design*. Birkhäuser Basel.
- Boiko, I., Castellanos, I., y Fridman, L. (2006). Analysis of response of second-order sliding mode control systems to external inputs. En *International Workshop on Variable Structure Systems, 2006. VSS'06.*, pp. 172–177. IEEE.
- Boiko, I. y Fridman, L. (2005). Analysis of chattering in continuous sliding mode controllers. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(9):1442–1446. [4](#), [39](#)
- Boiko, I., Fridman, L., y Castellanos, M. (2004). Analysis of second-order sliding-mode algorithms in the frequency domain. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 49(6):946–950. [4](#), [9](#), [41](#)

- Boiko, I., Fridman, L., Pisano, A., y Usai, E. (2007). Analysis of chattering in systems with second-order sliding modes. *IEEE transactions on Automatic control*, 52(11):2085–2102. [4](#)
- Burton, J. y Zinober, A. S. (1986). Continuous approximation of variable structure control. *International journal of systems science*, 17(6):875–885. [4](#)
- Edwards, C. y Spurgeon, S. (1998). *Sliding mode control: theory and applications*. CRC Press.
- Emelyanov, S., Korovin, S., y Levantovskii, L. (1986). Higher-order sliding modes in binary control systems. En *Soviet Physics Doklady*, volumen 31, p. 291. [2](#), [41](#)
- Fridman, L., Moreno, J. A., Bandyopadhyay, B., Kamal, S., y Chalanga, A. (2015). Continuous nested algorithms: The fifth generation of sliding mode controllers. En *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*, pp. 5–35. Springer. [3](#)
- Fridman, L. M. (2001). An averaging approach to chattering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8):1260–1265. [3](#)
- Fridman, L. M. (2002). Singularly perturbed analysis of chattering in relay control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(12):2079–2084. [3](#)
- Gelb, A. y Vander Velde, W. E. (1968). *Multiple-Input Describing Functions and Non-linear System Design*. McGraw Hill. [11](#), [17](#)
- Imine, H., Fridman, L., Shraim, H., y Djemai, M. (2011). *Sliding mode based analysis and identification of vehicle dynamics*, volumen 414. Springer Science & Business Media. [2](#)
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, 58(6):1247–1263. [10](#), [20](#)
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3):379–384. [2](#), [15](#), [27](#), [28](#)
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International journal of Control*, 76(9-10):924–941. [4](#), [10](#)
- Levant, A. (2005a). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5):823–830. [3](#)
- Levant, A. (2005b). Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(11):1812–1816. [2](#)
- Levant, A. (2010). Chattering analysis. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 55(6):1380–1389.

- 
- Levant, A. y Fridman, L. (2010). Accuracy of homogeneous sliding modes in the presence of fast actuators. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 55(3):810–814.
- Mendoza, J., Castillo, I., y Fridman, L. (2015). Control de un carro-péndulo vía superficies y controladores continuos por modos deslizantes de orden superior. *Congreso Nacional de Control Automático, AMCA*, pp. 411–416. [51](#)
- Moreno, J. A. (2009). En *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE, 2009 6th International Conference on*, pp. 1–6. IEEE. [28](#)
- Moreno, J. A. (2016). Discontinuous integral control for mechanical systems. En *2016 14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pp. 142–147.
- Pisano, A., Davila, A., Fridman, L., y Usai, E. (2008). Cascade control of pm dc drives via second-order sliding-mode technique. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55(11):3846–3854. [1](#), [29](#)
- Riachy, S., Orlov, Y., Floquet, T., Santiesteban, R., y Richard, J.-P. (2008). Second-order sliding mode control of underactuated mechanical systems i: Local stabilization with application to an inverted pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(4-5):529–543. [1](#)
- Rosales, J. A., Shtessel, Y., y Fridman, L. (2015). Frequency domain analysis of hosm systems. *Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 4758–4763. [4](#)
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., y Levant, A. (2014). *Sliding mode control and observation*. Birkhäuser. [4](#), [15](#)
- Shtessel, Y. B. y Lee, Y.-J. (1996). New approach to chattering analysis in systems with sliding modes. En *Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE Conference on*, volumen 4, pp. 4014–4019. IEEE.
- Torres-Gonzalez, V., Moreno, J., y Fridman, L. (2015). Continuous twisting algorithm. *Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 5397–5401. [3](#), [39](#), [44](#)
- Tsytkin, Y. Z. (1984). *Relay control systems*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press. [4](#)
- Utkin, V. (1992). *Sliding modes in optimization and control problems*. Springer Verlag, New York. [2](#), [3](#), [9](#), [15](#), [17](#), [27](#)
- Utkin, V. (2016). Discussion aspects of high order sliding mode control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 61:829–833. [5](#), [16](#), [40](#)
- Utkin, V., Guldner, J., y Shi, J. (2009). *Sliding mode control in electro-mechanical systems*, volumen 34. CRC press. [1](#)
- Zamora, C., Moreno, J., y Kamal, S. (2013). Control integral discontinuo para sistemas mecánicos. *Congreso Nacional de Control Automático AMCA*. [3](#), [39](#), [47](#)
-