



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
ENERGÍA – DISEÑO BIOCLIMÁTICO

**TRANSPORTE DE ENERGÍA Y ESCALAMIENTO EN SISTEMAS DE
TECHOS VERDES**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
SERGIO QUEZADA GARCÍA

TUTOR PRINCIPAL
GILBERTO ESPINOSA PAREDES, UAM – IZTAPALAPA
COMITÉ TUTOR
AZUCENA ESCOBEDO IZQUIERDO – UNAM – FACULTAD DE INGENIERÍA
JUAN JOSÉ AMBRIZ GARCÍA – UAM – IZTAPALAPA
RODOLFO VÁZQUEZ RODRÍGUEZ – UAM – IZTAPALAPA
GUILLERMO BARRIOS DEL VALLE – UNAM – IER

MÉXICO, D. F., A DICIEMBRE DE 2016

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Ambirz García Juan José
Secretario: Dra. Escobedo Izquierdo M. Azucena
Vocal: Dr. Espinosa Paredes Gilberto
1^{er}. Suplente: Dr. Morales Ramírez José Diego
2^{do}. Suplente: Dr. Vázquez Rodríguez Rodolfo

Lugar donde se realizó la tesis: CIUDAD UNIVERSITARIA, FACULTAD DE INGENIERÍA

TUTOR DE TESIS:

GILBERTO ESPINOSA PAREDES

FIRMA

RESUMEN

El presente trabajo tiene como principal objetivo desarrollar modelos teóricos universales a diferentes escalas para evaluar y predecir el transporte de energía a través de las distintas capas de materiales bióticos y abióticos que componen un Sistema de Techo Verde (STV). Para cumplir el objetivo primero se hizo una revisión bibliográfica de los modelos matemáticos de transferencia de calor para STV existente, posteriormente se seleccionó uno de los modelos más completos para llevar a cabo un análisis de sensibilidad, esto con la finalidad de determinar cuáles son las variables de entrada que mayor influencia tienen sobre las temperaturas del sistema, temperatura de la capa verde y temperatura en el interior del edificio, básicamente. Posteriormente se propusieron ecuaciones válidas para los principales materiales que forman al STV, estas ecuaciones fueron tratadas con un método de escalamiento para obtener expresiones válidas para cada una de las capas que del STV. Es importante mencionar que estas expresiones son función de propiedades efectivas, las cuales consideran la fracción volumen del material presente así como las propiedades individuales de cada material. El modelo matemático fue evaluado y verificado tanto con datos experimentales obtenidos en el Laboratorio de Ambiente Controlado (LAC) de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (UAM-I), así como con datos publicados en la literatura. Los resultados obtenidos, por un lado muestran que las dos variables que

mayor influencia tienen sobre la temperatura del sistema son la temperatura ambiente y la radiación solar. El modelo matemático desarrollado describe con un buen grado de exactitud el perfil de temperaturas en un STV, debido a que el mayor error encontrado fue de 6.08% y la mayor diferencia de temperaturas fue de 1°C para un momento del día.

CONTENIDO

RESUMEN	3
CONTENIDO	5
ÍNDICE DE FIGURAS	8
ÍNDICE DE TABLAS	10
NOMENCLATURA	11
AGRADECIMIENTOS	14
1. INTRODUCCIÓN	15
1.1. Beneficios de los Sistemas de Techos Verdes	16
1.2. Panorama Mundial	19
1.3. Panorama Nacional	20
1.4. Ahorro de Energía en Edificaciones	21
2. ESTADO DEL ARTE	23
2.1. Modelado Matemático	23
2.2. Calculo de las Fuentes de Calor	26
2.2.1. Calor ganado por radiación solar de onda corta	26
2.2.2. Calor ganado por radiación de onda larga	26
2.2.3. Calor transferido por convección	26

2.2.4.	Calor perdido por emisión	29
2.2.5.	Calor perdido por transpiración	29
2.2.6.	Calor perdido por evaporación	29
2.2.7.	Calor almacenado por la planta	30
2.2.8.	Calor almacenado por el medio de cultivo	30
2.2.9.	Calor transferido al cuarto	30
2.2.10.	Calor debido a la fotosíntesis y a la respiración de las plantas	30
2.2.11.	Simplificaciones	31
2.2.	Experimentación en la Literatura	32
3.	<i>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA E HIPÓTESIS</i>	33
3.1.	Justificación de la investigación	34
3.2.	Objetivos	35
3.2.1.	Objetivo general	35
3.2.2.	Objetivos específicos	35
3.3.	Hipótesis	36
3.4.	Metodología	36
4.	<i>ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN EL TECHO VERDE</i>	38
4.1.	Monte Carlo	38
4.2.	Modelo matemático	39
4.3.	Metodología	41
4.4.	Desarrollo	42
4.4.1.	Generación de números aleatorios con distribución uniforme	42
4.4.2.	Conversión de la muestra uniforme a muestra normal	43
4.4.3.	Generación de la muestra aleatoria de los parámetros de entrada	43
4.4.4.	Implementación de las muestras aleatorias en el modelo matemático	44
4.4.5.	Análisis de invariabilidad	44
4.4.6.	Análisis de sensibilidad	49
4.5.	Resultados	52
5.	<i>MODELO MATEMÁTICO</i>	53
5.1.	Método de Escalamiento	55
5.1.1.	Capa verde	55
5.1.2.	Capa de sustrato	60
6.	<i>MODELO EXPERIMENTAL</i>	62
6.1.	Laboratorio	62
6.2.	Equipo y materiales	63
6.3.	Experimento	64
6.4.	Mediciones	64

7. MODELO DEL STV Y VERIFICACIÓN	66
7.1. Modelo Matemático	66
7.2. Comparación del modelo matemático con datos experimentales	69
7.3. Validación	70
7.4. Resultados	73
8. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	75
8.1. Discusión	75
8.2. Conclusiones	76
8.3. Trabajo futuro	77
APÉNDICE 1. GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS	78
A1.1. Generación de Números Pseudo-Aleatorios Enteros	79
A1.2. Escalamiento de Números Pseudo-Aleatorios	80
A1.2.1. Distribución normal	81
APÉNDICE 2. MÉTODO DE SOLUCIÓN NUMÉRICO	84
A2.1. Método de Volumen de Control	85
A2.1.1. Solución numérica en estado estacionario y unidimensional	85
A2.1.2. Solución numérica en estado transitorio y unidimensional	88
A2.1.3. Solución numérica bidimensional en estado transitorio	92
BIBLIOGRAFÍA	96

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1.1. Principales capas que componen un sistema de techo verde.</i>	15
<i>Figura 1.2. Algunos tipos de sedum.</i>	16
<i>Figura 2.1. Intercambio de energía entre un techo verde y su entorno.</i>	25
<i>Figura 3.1. STV a diferentes escalas. (a) Capa verde y capa de sustrato en escala muy grande. (b) Capa verde en escala grande. (c) Capa de sustrato en escala pequeña.</i>	34
<i>Figura 4.1. Intercambio de energía entre un STV y su entorno.</i>	39
<i>Figura 4.2. DER de los parámetros de salida para una variación de 10% de q_{sri}.</i>	46
<i>Figura 4.3. DER de los parámetros de salida para una variación de 10% de T_a.</i>	47
<i>Figura 4.4. DER de los parámetros de salida para una variación de 10% de R_{tp}.</i>	48
<i>Figura 4.5. DER de los parámetros de salida para una variación de 10% de v.</i>	48
<i>Figura 4.6. Efecto de la variación de la radiación solar sobre la temperatura dentro del edificio y la temperatura en la capa verde.</i>	50
<i>Figura 4.7. Efecto de la variación de la temperatura ambiente sobre la temperatura dentro del edificio y la temperatura en la capa verde.</i>	50
<i>Figura 4.8. Efecto de la variación de la tasa de evapotranspiración sobre la temperatura dentro del edificio y la temperatura en la capa verde.</i>	51

<i>Figura 4.9. Efecto de la variación de la velocidad del viento sobre la temperatura dentro del edificio y la temperatura en la capa verde.</i>	51
<i>Figura 6.1. Diagrama esquemático del LAC.</i>	63
<i>Figura 6.2. Diagrama esquemático del modelo experimental en el LAC.</i>	64
<i>Figura 6.3. Perfil de temperatura obtenido experimentalmente a diferentes alturas en la capa de sustrato.</i>	65
<i>Figura 7.1. Dominio de gobierno de las principales ecuaciones que forman el modelo de transferencia de calor en el STV.</i>	68
<i>Figura 7.2. Comparación de los datos obtenidos experimentalmente en el LAC con los datos simulados.</i>	69
<i>Figura 7.3. Comparación de las temperaturas de la capa verde obtenida a partir de los resultados reportados por Feng et al., (2010) y con el modelo matemático.</i>	73
<i>Figura 7.4. Comparación de la temperatura de la capa verde obtenida del modelo matemático propuesto y la temperatura obtenida en la literatura.</i>	74
<i>Figura A1.1. Números pseudo-aleatorios distribuidos uniformemente en el espacio (0,1).</i>	81
<i>Figura A1.2. Estructura de los números pseudo-aleatorios con distribución normal $N(0,1)$.</i>	82
<i>Figura A1.3. Función de densidad con distribución normal estimada a partir de una muestra de 100,000 variables pseudo-aleatorias.</i>	83
<i>Figura A2.1. Esquema del volumen de control unidimensional.</i>	86
<i>Figura A2.2. Dos ejemplos de perfiles (a) perfil escalonado, (b) perfil lineal por tramos.</i>	86
<i>Figura A2.3. Volumen de control para el caso de conducción de calor en dos dimensiones.</i>	93

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 4.1. Parámetros y valores usados en la simulación.</i>	<i>45</i>
<i>Tabla 4.2. Análisis de sensibilidad para el STV.</i>	<i>52</i>
<i>Tabla 5.1. Resumen de las ecuaciones derivadas en este capítulo para la capa verde y la capa de sustrato.</i>	<i>61</i>
<i>Tabla 7.1. Valores de los parámetros (Feng et al., 2010)</i>	<i>70</i>
<i>Tabla 7.2. Valores de los parámetros.....</i>	<i>71</i>
<i>Tabla 7.3. Valores de los parámetros utilizados para la validación del modelo matemático (Feng et al., 2010).....</i>	<i>72</i>

NOMENCLATURA

A	Área	$[m^2]$
a	Densidad de área interfacial	$[1/m]$
C_f	Coefficiente adimensional de TC	Adimensional
C_p	Calor específico	$[J/kg]$
D	Coefficiente de difusión	$[m^2/s]$
DER	Desviación estándar relativa	Adimensional
h	Coefficiente convectivo	$[W/m^2K]$
K	Conductividad térmica efectiva	$[W/mK]$
k	Conductividad térmica	$[W/mK]$
LAI	Índice de área de hoja	Adimensional
l	Calor latente de vaporización	$[J/kg]$
$M_{C_6H_{12}O_6}$	Masa molar de la glucosa	$[kg/mol]$
MN	Número de Monte Carlo	Adimensional
\vec{n}	Vector normal unitario	Adimensional
q	Flux de calor	$[W/m^2]$
q'''	Fuente volumétrica de calor	$[W/m^3]$
R	Tasa de evapotranspiración	$[kg/m^2 s]$

r	Resistencia al flujo de calor	[s/m]
s	Desviación estándar	
T	Temperatura	[°C]
t	Tiempo	[s]
U	Coefficiente global de TC	W/m ² K
V	Volumen	[m ³]
VWC	Contenido de agua	[m ³]
v	Velocidad del viento	[m/s]
	Tasa neta de generación de calor por	
$v_{net, C_6H_{12}O_6}$	fotosíntesis y respiración de las plantas	[kg/m ² s]
W	Contenido volumétrico de agua	[m ³ _{agua} /m ³]
X	Número pseudo-aleatorio	Adimensional
\bar{X}	Promedio de la muestra	Adimensional
X_0	Semilla	Adimensional

Caracteres especiales

$\Delta_r H_m^0$	Entalpía estándar de reacción	[J/mol]
α_l	Absorción del césped de onda larga	Adimensional
α_s	Absorción del césped de onda corta	Adimensional
ε	Fracción volumen	Adimensional
ε	Emisividad del césped	Adimensional
ρ	Densidad	[kg/m ³]
σ	Constante de Stefan-Boltzmann	[W/m ² K ⁴]
ω	Velocidad interfacial	[m/s]
ϖ	Radio de cobertura	Adimensional

Subíndices

a	Aire ambiente
c	Elemento constructivo
cv	Convección
d	Punto de rocío

<i>em</i>	Emisión
<i>ep</i>	Evaporación
<i>et</i>	Evapotranspiración
<i>g</i>	Capa verde
<i>ℓ</i>	Tierra
<i>lr</i>	Radiación de onda larga
<i>p</i>	Planta
<i>ps</i>	Energía convertida en la fotosíntesis
<i>ps,net t</i>	Calor neto convertido en la fotosíntesis
<i>r</i>	Cuarto
<i>rp</i>	Calor generado por respiración
<i>s</i>	Capa de sustrato
<i>sr</i>	Radiación solar
<i>sri i</i>	Radiación solar incidente
<i>tp</i>	Transpiración
<i>w</i>	Agua

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todos los ciudadanos mexicanos, que pagan impuestos, debido a que hacen posible que el *Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología* (CONACyT) otorgue becas a los estudiantes de posgrado.

1. INTRODUCCIÓN

Un Sistema de Techo Verde (STV) es un sistema de capas, como se muestra en la Fig. 1.1, instalado en una azotea, que comprende una membrana impermeable, un medio de cultivo y una capa de vegetación. La construcción entre el medio de cultivo y capa impermeabilizante del techo del edificio varía pero normalmente incluye:

- Una capa barrera de raíz
- Una capa de drenaje
- Sistema de irrigación cuando el sistema lo requiere

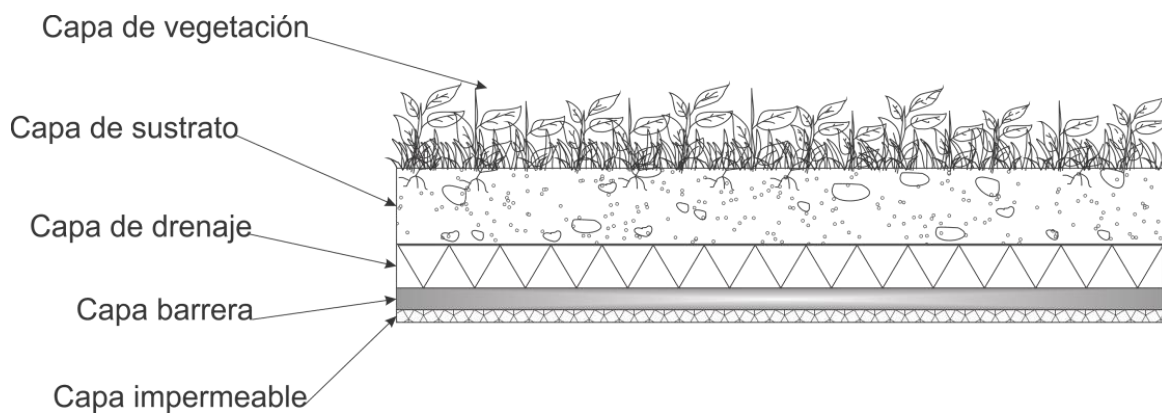


Figura 1.1. Principales capas que componen un sistema de techo verde.

Dado que los STV son una técnica de refrigeración pasiva que impide que la radiación solar llegue a la construcción, algunas de las características más importantes de los medios de cultivo son las propiedades físicas, tales como conductividad térmica, calor específico y la densidad (Sailor, 2008). Los techos verdes se clasifican de acuerdo con la profundidad del medio y mantenimiento requerido:

- Extensivos: tienen una profundidad de 10 cm a 15 cm, por lo cual la variedad de plantas que pueden albergar queda restringida a herbáceas, musgos y plantas *crassas* tipo *sedum*, en la Fig. 1.2 se muestran algunos tipos de esta planta. Estos techos verdes requieren de poco mantenimiento y pueden llevarse a cabo en edificios existentes, debido a que no suponen una carga adicional importante para la estructura.
- Intensivos: tienen una profundidad mayor a los 15 cm, por lo que es posible tener auténticos jardines en los techos. En estos techos se pueden alojar una gran cantidad de plantas, incluyendo arbustos y árboles pequeños. Estos techos requieren de un mantenimiento regular y se planean desde la construcción del edificio debido a que la carga adicional de peso es grande.



Figura 1.2. Algunos tipos de *sedum*.

1.1. Beneficios de los Sistemas de Techos Verdes

Muchos estudios se han realizado en los últimos años relacionados con los STV, debido a los múltiples beneficios que ofrecen, tales como:

a) Aumento cuantitativo de bosques urbanos

Actualmente es difícil ampliar con rapidez o mejorar espacios verdes existentes, por lo tanto, los STV se consideran como una buena alternativa a la adquisición de bosques urbanos. Así, los techos verdes pueden jugar un papel importante en el aumento de áreas verdes en zonas urbanas densamente pobladas (Berndtsson et al., 2009).

b) Ahorro de energía en el edificio

Los STV pueden reducir el uso de aire acondicionado o calefacción dentro de una edificación, por lo que es posible el ahorro de energía destinada a climatización.

Muchos estudios se han realizado para considerar el potencial de ahorro de energía en los edificios con techos verdes, demostrando que pueden ofrecer beneficios en la reducción de la calefacción durante el invierno así como de refrigeración en el verano (Castleton et al., 2010; Theodosiou, 2003; Onmura, 2001; Zinzi and Agnoli, 2011; Hong et al., 2012).

En general, los resultados de los estudios indican que los STV contribuyen a reducir las fluctuaciones térmicas en la superficie externa e interna del techo, contribuyendo con esto al mantenimiento de las condiciones de confort térmico interior del edificio y por lo tanto un menor consumo de energía (Parizoto and Lamberts, 2011).

c) Purificación del aire

En las ciudades, los parques son capaces de filtrar hasta un 80% de la contaminación del aire, mientras que los árboles en avenidas pueden filtrar hasta en un 70%. Incluso sin las hojas (en invierno), las plantas aún conservan el 60% de su eficacia: reducen el contenido de plomo en el aire, reducen el ruido hasta 12 dB (Renterghem and Botteldooren, 2009) y proporcionar un suministro de oxígeno en condiciones meteorológicas tranquilas. En consecuencia, zonas verdes y los árboles deben ser plantados de manera más sistemática en las ciudades (Saito et al., 1991)

Las plantas pueden mejorar la calidad del aire mediante la eliminación de contaminantes. En un día soleado, un techo verde puede disminuir la concentración de CO₂ en la región cercana en un 2% (Li et al., 2010). Otros estudios indican que los techos verdes pueden

eliminar O₃, NO₂, SO₂; así como pequeñas partículas de cenizas, de hollín, de polvo, de metales, etc., (Yang et al., 2008).

d) Reducción de escorrentía

La escorrentía es el agua que cae y corre sobre los techos de los edificios, calles, aceras y cualquier superficie impermeable durante la lluvia. Esta agua no se filtra por el suelo, fluye sobre las superficies, arrastra todo lo que está a su alcance como basura y otros contaminantes, llega al drenaje y posteriormente contamina los mantos acuíferos.

Un porcentaje cada vez mayor de la población mundial vive en ciudades, el desplazamiento de la tierra por superficies impermeables de calles, calzadas y edificios intensifica la cantidad de escorrentía, los techos verdes pueden ser usados para reducir su volumen.

Es un hecho que la escorrentía total anual de un techo verde es generalmente menor que el volumen de escorrentía de una superficie dura (Getter et al, 2007; Berndtsson et al., 2009; Mentens et al., 2006; Stovin et al., 2012; Speak et al., 2013). La construcción de techos verdes puede estar justificada por su contribución a la reducción de volumen de agua de escorrentía (Berndtsson et al., 2009).

Mentens et al., (2006) analizan las mediciones divulgadas en 18 publicaciones sobre la reducción de escorrentía, encontrando que los techos verdes pueden reducir hasta en un 54% el volumen de la cantidad total.

e) Prolongación de la vida del techo

En la actualidad, los techos verdes son principalmente un valor adicional en la longevidad del techo (Clark et al., 2008; Saiz et al., 2006; Kosareo and Ries, 2007).

f) Reducción del efecto isla de calor

El efecto isla de calor es el fenómeno que presentan algunas ciudades al mantener una temperatura mayor que la región circundante a causa de actividades humanas e industriales. Esta diferencia de temperatura puede ser de hasta 10°C. El aumento de la temperatura provoca un mayor consumo de energía para refrigerar (Ye et al., 2011).

Una medida para disminuir el efecto de isla de calor urbano es proporcionar a los edificios con revestimientos que puedan reducir la absorción de energía solar (Ye et al., 2011).

Wilmers (1988) mediante un estudio experimental muestra la disminución del efecto isla de calor cerca de un área verde. La diferencia de temperatura disminuye en su rango y aumenta su alcance con el tamaño del área verde.

La distribución de temperatura del aire en una zona urbana está estrechamente relacionada con la distribución de áreas verdes (Saito et al., 1991).

Los árboles y los espacios verdes contribuyen considerablemente a la disminución de la temperatura urbana por enfriamiento evaporativo. Así, los STV contribuyen a la reducción del efecto de isla de calor urbano (Wong et al., 2003; Weng and Yang, 2004; Wong and Chen, 2005; Lin et al., 2008; Takebayashi and Moriyama, 2007; Wong and Chen, 2003; Santamouris, 2012; Wong and Lau, 2013).

g) Mayor interés arquitectónico

Los techos verdes pueden proporcionar beneficios estéticos en los edificios donde son instalados. En algunos países de Europa se colocan techos verdes por razones estéticas. Algunos techos verdes son diseñados como auténticos jardines con capas profundas de suelo y grandes plantas, tales como árboles y arbustos. Además los STV contribuyen a la preservación de la biodiversidad (Madre et al., 2013)

Así para aprovechar los múltiples beneficios de los techos verdes, los gobiernos de algunas de las sociedades más urbanizadas, como Japón, Singapur, Alemania y Bélgica, han ofrecido incentivos para alentar e incluso imponer su uso (Wong and Chen, 2003).

1.2. Panorama Mundial

En Japón, se han creado leyes que hacen obligatoria la instalación de techos verdes a partir de abril del 2001 para los edificios de nueva construcción cuya superficie es igual o mayor a 1000 m².

Corea del Sur está llevando a cabo el proyecto de *Escuela Verde*, en el cual, se incluye la instalación de STV en escuelas primarias y secundarias (Hong et al., 2012).

En Japón, una de las funciones de los techos verdes es proporcionar espacio de esparcimiento para los usuarios del edificio; mientras que en Suecia una razón importante para el establecimiento de STV es la estética del edificio (Berndtsson et al., 2009).

1.3. Panorama Nacional

Aproximadamente el 75% de la población de México vive en zonas urbanas, por lo que es deseable contribuir a mejorar las áreas verdes.

En la Ciudad de México las áreas verdes son cada vez menores, según la Organización Mundial de la Salud (OMS) en 1995 las áreas verdes correspondían a 2.5 m²/persona y para el año 2005 disminuyeron a 0.5 m²/persona. La concentración de la población urbana está provocando una rápida disminución de los bosques urbanos y con ello el aumento de la contaminación día a día. La OMS recomienda como mínima área de bosque 9 m²/persona.

Dentro de las políticas públicas del Gobierno del Distrito Federal para un desarrollo sustentable, se incluye el dar una nueva dimensión a los espacios públicos, sin que implique perder los elementos de la naturaleza. Por lo tanto, se impulsa un programa de cubiertas verdes a través de la arborización de azoteas de edificios, primeramente en el centro histórico. Como parte de dicho programa se acondicionó la terraza del Antiguo Palacio del Ayuntamiento, en el centro histórico, como techo verde; dicha terraza cuenta con 150 m² de pasto.

El 14 de junio del 2011 el GDF publica en la Gaceta Oficial del D.F., los lineamientos que permiten a los capitalinos obtener 10% de descuento en el impuesto predial por la implementación de STV en su domicilio.

Hasta junio del 2011 sólo se tiene registro de 244 azoteas verdes en la ciudad, las cuales pertenecen a dependencias de gobierno como la Secretaría de Desarrollo Urbano y Vivienda Local, el Antiguo Palacio del Ayuntamiento, el Centro de Desarrollo Infantil del Sistema de Transporte Colectivo Metro y el Fondo Nacional de la Vivienda para los Trabajadores (Infonavit) y/o a empresas privadas.

Sin embargo, los incentivos algunas veces son insuficientes para desarrollar el proyecto, el aspecto económico es importante en la toma de decisiones. Por lo tanto, en algunos estudios se ha evaluado la viabilidad financiera de los STV, y se encontró que en los casos que el valor presente neto de los STV fue menor a los techos convencionales es debido principalmente al ahorro de energía (Clark, 2008; Carter and Keeler, 2008).

1.4. Ahorro de Energía en Edificaciones

Los techos son un componente de la envolvente del edificio que puede proporcionar soluciones avanzadas para el ahorro de energía, debido a que disminuyen el uso de energía para climatización. En promedio los techos reciben el doble de radiación solar que las paredes (Liu et al., 2012). Los STV pueden reducir la magnitud del flujo de calor a través de una de las envolventes del edificio, como resultado del aislamiento proporcionado por el medio de cultivo y brinda beneficios adicionales como la evapotranspiración que puede enfriar el techo bajo el sol (Onmura et al., 2001). Por lo tanto, los STV tienen el potencial para reducir el consumo de energía para enfriar y calentar el edificio (Castleton et al., 2010; Theodosiou, 2003).

Teemusk and Mander (2009) analizaron los STV en un clima extremo como el de Estonia, encontraron que durante el verano el STV con una capa de sustrato de profundidad de 100 mm reduce significativamente las fluctuaciones de temperatura dentro del edificio en comparación con un techo convencional. Durante el otoño y primavera la capa de sustrato protege el techo de un rápido enfriamiento y congelación; también proporciona un aislamiento térmico eficaz en invierno. Zinzi and Agnoli (2011) analizaron por medio de simulación dinámica la mejora en la eficiencia energética que traen consigo los STV, concluyeron que el contenido de agua en el STV tiene un impacto significativo en el ahorro de energía en el edificio, es decir la falta de agua afecta de forma negativa el ahorro generado por el menor consumo de energía para enfriamiento. Hong et al., (2012) demostraron, mediante simulación numérica el ahorro de energía por la instalación de STV en escuelas primarias.

El ahorro de energía depende de muchos factores, tales como: la composición del medio de cultivo, su profundidad, el contenido de humedad, el tipo de plantas, el riego y el clima local (Zinzi and Agnoli, 2011; Liu et al., 2012; Teemusk and Mander, 2009; Getter et al., 2011). Las plantas pueden reducir la cantidad de calor almacenada en la construcción a través del aumento de la radiación reflejada, la sombra proporcionada por la *canopy* y la evapotranspiración. Las plantas con hojas verdes tienen un mejor efecto en la reducción de la temperatura que las plantas con hojas moradas (Liu et al., 2012). Se ha encontrado que para una capa de sustrato con una profundidad de hasta 20 cm el coeficiente global de transferencia de calor (U) aumenta, mientras que para profundidades mayores de 20 cm el

valor de U disminuye (Kotsiris et al., 2012). Experimentalmente se encontró que la radiación solar representa, aproximadamente, el 99.1% de la ganancia total de calor en los STV; de la pérdida total de calor en el sistema alrededor del 58.4% es debida a la evapotranspiración, 30.9% es por la energía de onda larga emitida y aproximadamente el 9.5% es debida a la fotosíntesis de las plantas (Feng et al., 2010).

El aumento de la profundidad y el suministro de irrigación en el medio de cultivo permiten el uso de plantas con mayor biomasa y mayor índice de área de hoja (LAI por sus siglas en inglés leaf area index), esto da lugar a mayores tasas de evapotranspiración (Getter et al., 2011).

Los STV son sistemas pasivos de enfriamiento para el ahorro de energía, estos sistemas se basan en cuatro mecanismos fundamentales (Pérez et al., 2011):

1. La interceptación de la radiación solar por el efecto de sombra producido por la *canopy*.
2. El aislamiento térmico proporcionado por la vegetación y el sustrato.
3. El enfriamiento por evaporación que produce la evapotranspiración de las plantas y el sustrato.
4. El efecto del viento sobre el edificio.

Con el fin de conocer el posible ahorro de energía en un edificio, es deseable conocer la transferencia de calor a través del techo antes y después de la instalación del STV. Por lo tanto es recomendable disponer de modelos matemáticos que describan con precisión el flujo de calor a través de las diversas capas bióticas y abióticas que constituyen el STV, con la finalidad de predecir el intercambio de energía y por lo tanto la temperatura en el interior del edificio.

2. ESTADO DEL ARTE

2.1. Modelado Matemático

Los primeros esfuerzos para modelar las implicaciones energéticas de un edificio con STV representaban comúnmente al techo verde como una capa resistiva simple, cuya conductividad térmica era esencialmente constante (Niachou et al., 2001)

Algunos autores aun calculado la transferencia de calor a través de STV en términos de un coeficiente global de transferencia de calor (U) con el fin de evaluar el rendimiento térmico del STV en escala real y en condiciones dinámicas (Kotsiris et al., 2012). Estos estudios se realizan en general a STV ya instalados y son válidos únicamente para el techo en cuestión.

Algunos autores han desarrollado modelos matemáticos para el análisis de flujo de energía a través de los STV (del Barrio, 1998; Sailor, 2008; Kumar and Kaushik, 2005; Tsang and Jim, 2011; Meng and Hu, 2005).

En los últimos años han sido desarrollados sofisticados modelos de balance energético para los STV (Sailor, 2008). Ejemplos de tales modelos son: el modelo propuesto por del Barrio (1998); el modelo de Ayata et al. (2011), que considera 4 términos en el balance energético: el aumento de calor debido a la radiación neta, el flujo de calor sensible, el flujo de calor en los sólidos y el flujo de calor latente; y el modelo propuesto por Kumar y Kaushik (2005).

Jim y Tsang presentan un modelo matemático considerando que la conducción es el principal factor que afecta la temperatura del suelo (Jim and Tsang et al., 2011). Una típica ecuación de transferencia de calor por conducción, Ec. (2.1), puede emplearse para estimar la temperatura de la capa i :

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{1}{\rho_i C_i} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) \quad (2.1)$$

donde T_i es la temperatura de la capa i , ρ_i , C_i y k_i son la densidad de masa, el calor específico y la conductividad térmica de la capa i .

La forma dominante de la disipación de calor en el STV es la evapotranspiración, por lo tanto, es importante considerar el balance de masa (Theodosiou, 2003; Onmura et al., 2001; Feng et al., 2010; del Barrio, 1998; Sailor, 2008; Wong et al., 2003). Así, el balance de masa para la capa de sustrato está dando por (Jim and Tsang, 2011):

$$\frac{\partial W_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D_w \frac{\partial W_w}{\partial z} \right] \quad (2.2)$$

donde W_w es el contenido volumétrico de agua que el suelo puede retener y D_w es el coeficiente de difusión del agua en el suelo.

Sailor (2008) propone un modelo más completo que es incluido en EnergyPlus, sin embargo este modelo no toma en cuenta los procesos metabólicos de las plantas como las fotosíntesis y la respiración, por nombrar algunos.

Feng et al., (2010) proponen un balance unidimensional de energía, Ec. (2.3), para un STV donde los efectos térmicos metabólicos de las plantas, tales como la respiración, la transpiración y los efectos térmicos de microorganismos en el suelo no se consideran, de la misma manera, condiciones tales como, la precipitación y el rocío no están incluidos, por otra parte se supone que la cubierta verde es grande y basta, por lo cual se considera homogeneidad horizontal, el sistema se ilustra en la Fig. 2.1.

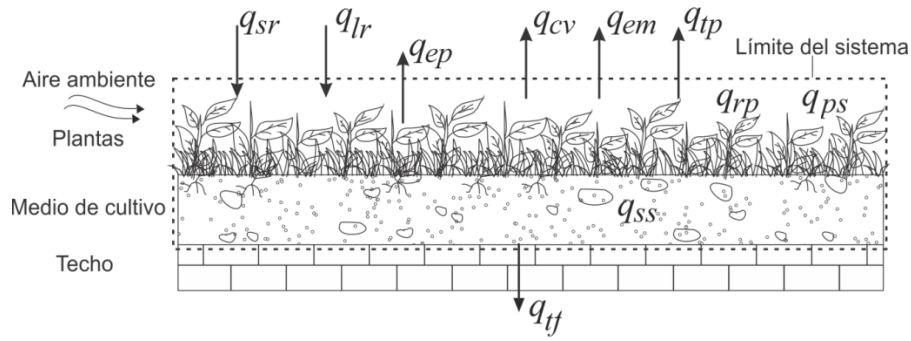


Figura 2.1. Intercambio de energía entre un techo verde y su entorno.

Por lo tanto, basándose en la primera ley de la termodinámica se tiene:

$$q_{sr} + q_{lr} + q_{cv} + q_{em} + q_{tp} + q_{ep} + q_{sp} + q_{ss} + q_{tf} + q_{ps} + q_{rp} = 0 \quad (2.3)$$

donde q_{sr} es el calor ganado por radiación solar, q_{lr} es el calor ganado por radiación de onda larga, q_{cv} es el calor transferido por convección, q_{em} es el calor perdido por emisión, q_{tp} es el calor perdido por transpiración, q_{ep} es el calor perdido por evaporación, q_{sp} es el calor almacenado en las plantas, q_{ss} es el calor almacenado en el sólido, q_{tf} es el calor transferido al interior del cuarto, q_{ps} es la energía solar convertida por la fotosíntesis y q_{rp} es el calor generado por la respiración de la planta.

Así el balance de energía para un STV propuesto por Feng et al., (2010) se basa en las siguientes suposiciones:

- El césped cubre el 100% de la superficie y es un cuerpo gris difuso.
- Los efectos térmicos de los microorganismos en el suelo, así como los efectos térmicos del metabolismo de las plantas son despreciables; excepto la fotosíntesis, la respiración y la transpiración.
- No se incluyen condiciones de precipitación y rocío.
- El STV es suficientemente grande para asumir la homogeneidad horizontal y aplicar un análisis unidimensional en la dirección vertical.

2.2. Cálculo de las Fuentes de Calor

A continuación de resumen algunos de los métodos de cálculo de los términos contenidos en la Ec. (2.3).

2.2.1. Calor ganado por radiación solar de onda corta

El calor ganado, en el STV, debido a la radiación solar se calcula a partir de (Feng et al., 2010; Jim y Tsang, 2011):

$$q_{sr} = q_{sri} \alpha_s \quad (2.4)$$

donde q_{sri} es la radiación solar que incide sobre la superficie del techo verde y α_s es la capacidad de absorción de radiación de onda corta del césped.

2.2.2. Calor ganado por radiación de onda larga

La radiación de onda larga absorbida por el césped o capa verde se obtiene a partir de (Feng et al., 2010; Jim and Tsang, 2011; Meng and Hu, 2005):

$$q_{lr} = \alpha_l \sigma (T_a + 273.15)^4 (0.802 + 0.004 T_d) \quad (2.5)$$

donde σ es la constante de Stefan Boltzmann, T_a es la temperatura ambiente expresada en grados centígrados y T_d es la temperatura de punto de rocío dada en grados centígrados.

2.2.3. Calor transferido por convección

Es posible calcular el calor transferido por medio de la convección por alguna de las siguientes Ecs. (2.6-2.14), dependiendo de las condiciones con las que se cuente.

Meng and Hu (2005), proponen calcular el calor ganado o perdido por convección a partir de la ley de enfriamiento de Newton:

$$q_{cv} = h(T_p - T_a) \quad (2.6)$$

donde h es el coeficiente convectivo de transferencia de calor y T_p es la temperatura de la planta.

Denardo (2003), propone una ecuación similar para calcular el flujo de calor debido a la convección:

$$q_{cv} = 2h(T_p - T_a) \quad (2.7)$$

La diferencia radica básicamente en que Denardo (2003), plantea que las hojas de las plantas tienen dos caras cuyas superficies se encuentran en contacto con el viento y esta razón propone multiplicar el coeficiente convectivo de transferencia de calor por dos.

Niachaou et al., (2001) y Tabares-Velasco and Srebric (2009) emplean la Ec. (2.8) para determinar el flujo de calor debido a la convección, que es una modificación de la ley de enfriamiento de Newton, en ella se introduce un término de densidad superficial de las hojas de las plantas, que básicamente indica que tanta sombra proporcionan éstas al medio de cultivo:

$$q_{cv} = LAI \cdot h(T_p - T_a) \quad (2.8)$$

donde LAI es el índice de área de hojas (*Leaf Area Index*).

Ayata et al., (2011), proponen el uso de dos ecuación dependiendo del tipo de convección que se tiene, así proponen una ecuación para convección forzada Ec. (2.9) y una para convección natural Ec. (2.10):

$$q_{cv} = \varpi \cdot LAI \cdot h \left(\frac{e^v}{(11 \cdot v \cdot VWC)^2} \right) (T_p - T_a)^n \quad (2.9)$$

$$q_{cv} = \varpi \cdot LAI \cdot h \left(\frac{VWC}{v} e^{3VWC} \right) (T_p - T_a) \quad (2.10)$$

donde VWC es el contenido volumétrico de agua contenido en el medio de cultivo, v es la velocidad del viento y ϖ es el radio de cobertura, en él se contabiliza la rugosidad de la superficie. En la Ec. (2.9), el efecto de la diferencia de temperatura depende de n que a su vez es función de la velocidad del viento y toma el valor de cero para una velocidad del viento menor o igual a $3m/s$.

Otra forma de determinar el calor perdido por convección en el sistema es utilizando el “método de McAdams”, que es válido para superficies planas y velocidades de viento menores a los $5m/s$ (Campbell and Norman, 2000):

$$q_{cv} = 5.9 + 4.1v \frac{511 + 294}{511 + T_a} \quad (2.11)$$

donde T_a es la temperatura ambiente expresada grados Kelvin.

Una ecuación similar es propuesta por Feng and Chen (1999):

$$q_{cv} = (5.7 + 3.8v)(T_p - T_a) \quad (2.12)$$

Deardorff (1978), propone la Ec. (2.13) para determinar el intercambio de calor en el sistema por medio de la convección:

$$q_{cv} = 1.1LAI \cdot \rho C_p C_f v \cdot (T_p - T_a) \quad (2.13)$$

donde ρ es la densidad del aire, C_p es el calor específico del aire a presión constante y C_f es un coeficiente adimensional de transferencia de calor que toma en cuenta ambos lados de la hoja.

Jensen et al., (1990), proponen el uso de la siguiente expresión:

$$q_{cv} = \frac{\rho C_p (T_p - T_a)}{r_a} \quad (2.14)$$

donde ρC_p es la capacidad calorífica volumétrica y r_a es la resistencia térmica del aire al flujo de calor.

2.2.4. Calor perdido por emisión

El calor perdido por emisión puede calcularse por medio de la siguiente ecuación (Feng et al., 2010; Jim and Tsang, 2011):

$$q_{em} = \sigma \varepsilon (T_p + 273.15)^4 \quad (2.15)$$

donde ε es la emitancia de la superficie.

2.2.5. Calor perdido por transpiración

El calor perdido por transpiración se calcula a partir de (Feng et al., 2010):

$$q_{tp} = R_{tp} l \quad (2.16)$$

donde R_{tp} es la tasa de transpiración y l es el calor latente de vaporización.

2.2.6. Calor perdido por evaporación

El calor perdido por evaporación se calcula a partir de (Feng et al., 2010; Jim and Tsang, 2011):

$$q_{ep} = R_{ep} l \quad (2.17)$$

donde R_{ep} es la tasa de evaporación.

2.2.7. Calor almacenado por la planta

Feng et al., (2010), proponen el empleo de la siguiente ecuación para determinar el calor almacenado por la planta:

$$q_{sp} = \rho_p C_{pp} \frac{dT_p}{dt} \quad (2.18)$$

donde ρ_p es la densidad de área de las plantas, C_{pp} es el calor específico de las plantas y t es el tiempo.

2.2.8. Calor almacenado por el medio de cultivo

El calor almacenado por el medio de cultivo puede calcularse a partir de (Feng et al., 2010; Jim and Tsang, 2011):

$$q_{ss} = \rho_s C_{ps} \frac{dT_s}{dt} \quad (2.19)$$

donde ρ_s es la densidad de área del medio de cultivo o sustrato y C_{ps} es el calor específico del medio de cultivo.

2.2.9. Calor transferido al cuarto

El calor transferido al interior del cuarto se puede estimar a partir de:

$$q_{tf} = U(T_s - T_r) \quad (2.20)$$

donde U es el coeficiente global de transferencia de calor y T_r es la temperatura en el interior del cuarto.

2.2.10. Calor debido a la fotosíntesis y a la respiración de las plantas

Feng et al., (2010), proponen un método para determinar el calor consumido por las plantas para llevar a cabo la fotosíntesis (Ec. 2.21), así como para determinar el calor generado por las plantas debido a la respiración (Ec. 2.22):

$$q_{ps} = \Delta_r H_m^\theta (25^\circ C) \frac{\nu_{ps, C_6H_{12}O_6}}{M_{C_6H_{12}O_6}} \quad (2.21)$$

$$q_{rp} = -\Delta_r H_m^\theta (25^\circ C) \frac{\nu_{rs, C_6H_{12}O_6}}{M_{C_6H_{12}O_6}} \quad (2.22)$$

donde $\Delta_r H_m^\theta (25^\circ C)$ es la entalpía estándar de formación a $25^\circ C$, $\nu_{ps, C_6H_{12}O_6}$ es la tasa fotosintética de la glucosa, $\nu_{rs, C_6H_{12}O_6}$ es la tasa de respiración de la glucosa y $M_{C_6H_{12}O_6}$ es la masa molar de la glucosa.

2.2.11. Simplificaciones

Con la finalidad de facilitar los cálculos, algunas de las fuentes de calor se agrupan para obtener una nueva ecuación.

La primera simplificación, se lleva a cabo para calcular la pérdida de calor por evaporación y transpiración. Mediante la suma de las Ecs. (2.16) y (2.17) se obtiene una nueva expresión utilizada para calcular la pérdida de calor por evapotranspiración:

$$q_{et} = q_{tp} + q_{ep} = R_{et} l \quad (2.23)$$

donde R_{et} es la tasa de evapotranspiración y está dada por:

$$R_{et} = R_{tp} + R_{ep} \quad (2.24)$$

La segunda simplificación es para el caso de la energía solar convertida por la fotosíntesis Ec. (2.21) y la generación de calor debida a la respiración de la planta Ec. (2.22), al sumar

estas dos ecuaciones se obtiene una nueva expresión que es utilizada para calcular el calor neto convertido por la fotosíntesis:

$$q_{ps,net} = q_{ps} + q_{rp} = \Delta_r H_m^\theta (25^\circ C) \frac{v_{net,C_6H_{12}O_6}}{M_{C_6H_{12}O_6}} \quad (2.25)$$

donde $v_{net,C_6H_{12}O_6}$ es la tasa neta de fotosíntesis y está dada por:

$$v_{net,C_6H_{12}O_6} = v_{ps,C_6H_{12}O_6} + v_{rp,C_6H_{12}O_6} \quad (2.26)$$

Los modelos matemáticos que describen el flujo de calor a través de los techos verdes son validados por algunos autores por medio de la experimentación.

2.2. Experimentación en la Literatura

Con el fin de validar los modelos matemáticos, algunos autores han usado programas de simulación, mientras que otros autores han recurrido a la experimentación para verificar la exactitud de los modelos matemáticos (Kotsiris et al., 2012; del Barrio, 1998; Jaffal, 2012). Jim and Tsang (2011) validaron su modelo matemático con los resultados empíricos de tres techos verdes experimentales. Jim y He (2010) realizaron un experimento similar midiendo variables como la radiación solar, las condiciones del suelo y los microclimas; 4 componentes de la radiación solar fueron reconocidas: radiación entrante y saliente de onda corta y radiación de onda larga entrante y saliente; también se demostró que factores tales como: la humedad del suelo y temperatura; factores meteorológico, incluyendo la humedad relativa del aire, la temperatura ambiente, la temperatura de punto de rocío, la velocidad del viento, así como, su dirección y la lluvia afectan la transferencia de calor en los STV.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA E HIPÓTESIS

Se ha demostrado que los STV tienen muchos beneficios, sin embargo, con los actuales modelos matemáticos y los métodos de experimentación aún se está lejos de describir de manera adecuada el flujo de calor a través de estos sistemas.

La transferencia de energía a través de los STV se ha estudiado hasta ahora a nivel macroscópico (escala muy grande), es decir en el balance global de energía la escala de longitud es del orden del techo verde. Este tipo de enfoque es limitado y no permite profundizar en el problema de la comprensión de los mecanismos de transferencia de calor en los procesos de transferencia de energía en los STV, especialmente cerca de los límites de las capas adyacentes que constituyen el STV.

Algunas de las diferentes capas que componen el STV son medios porosos, en estos se producen fenómenos importantes para el proceso de transferencia de calor y masa, por ejemplo, la porosidad no se toma en cuenta en la mayor parte de los modelos matemáticos existentes. Otra limitación de la descripción macroscópica es que no es posible analizar la interacción de las hojas de las plantas y el medio ambiente.

Un estudio más completo de la transferencia de calor a través de los STV se puede realizar mediante el uso de diferentes escalas de longitud, esto es mediante el estudio del fenómeno en una escala grande y una escala pequeña (Fig. 3.1) (Espinosa-Paredes, 2010; Wood,

2009). Un enfoque realizado en una escala pequeña tiene como ventaja que todos los factores implicados en el flujo de calor interfacial en el STV se toman en cuenta y las capas se consideran sistemas multifásicos.

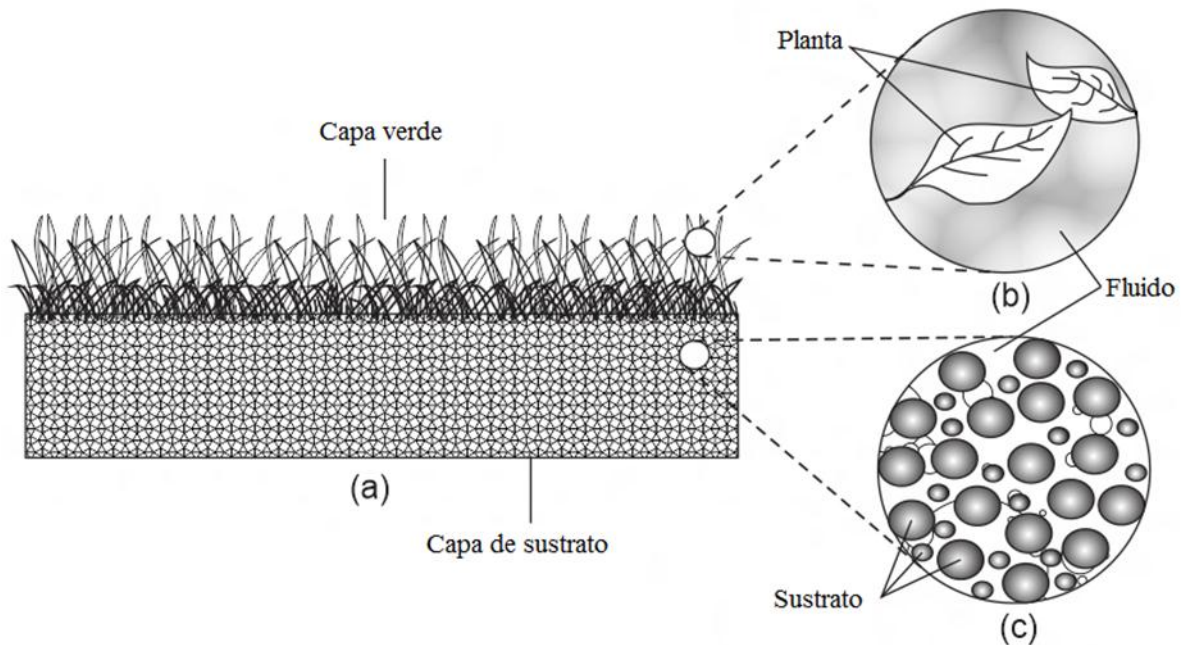


Figura 3.1. STV a diferentes escalas. (a) Capa verde y capa de sustrato en escala muy grande. (b) Capa verde en escala grande. (c) Capa de sustrato en escala pequeña.

Con respecto a los trabajos experimentales las mediciones para validar los modelos matemáticos, empleados para el cálculo del ahorro de energía, se han hecho en techos verdes ya instalados o en parcelas experimentales, es decir los experimentos se han realizado en la intemperie con múltiples factores que afectan la transferencia de calor. Por lo tanto, en algunos casos los modelos son válidos sólo para el caso particular de estudio. Por lo anterior, es importante realizar experimentos controlados dentro de un laboratorio de ambiente controlado (Arroyo-Cabañas et al., 2009).

3.1. Justificación de la investigación

Como ya se mencionó anteriormente los beneficios de los techos verdes son muchos, desde recreación por parte de los usuarios del edificio; pasando por los aspectos económicos en el

ahorro de energía y aumento de la vida útil del techo; hasta beneficios ambientales tales como la eliminación de CO₂, reducción del efecto isla de calor en las ciudades y reducción de escorrentía; por mencionar algunos.

Sin embargo, los estudios de campo en general, se han limitado a la evaluación de los efectos en verano de los techos verdes con un enfoque en temperaturas de la superficie (Sailor, 2008). Parte de la literatura que evalúa el ahorro de energía en los techos verdes no menciona la conductividad térmica de la estructura del techo, o el espesor de los materiales de techo utilizado. Esto significa que el nivel inicial de aislamiento de la cubierta no puede ser estimado, por lo tanto no se conoce el ahorro de energía que se tiene después de instalar el STV (Castleton et al., 2010).

La mayoría de los estudios carecen de información sobre las propiedades térmicas de la estructura del techo, por lo tanto, los resultados obtenidos son sólo aplicables a la situación en cuestión (Castleton et al., 2010).

De contar con modelos confiables para predecir la transferencia de calor en los techos verdes, éstos podrían diseñarse de acuerdo a las necesidades de cada edificio, es decir se podría optimizar el espesor de las capas, sería posible saber si es rentable su instalación y hacer un análisis entre diferentes tecnologías de aislantes en techos.

3.2. Objetivos

3.2.1. Objetivo general

Desarrollar modelos teóricos universales a diferentes escalas para evaluar y predecir el transporte de energía a través de las distintas capas de materiales bióticos y abióticos que componen un STV.

3.2.2. Objetivos específicos

- Determinar cuáles son las variables de entrada que influyen en mayor medida en la temperatura de la capa verde y la temperatura en el interior del edificio, esto con modelos de transferencia de calor existentes.
- De acuerdo con los resultados obtenidos en el punto anterior, desarrollar modelos de transporte de energía para los techos verdes considerándolos sistemas homogéneos.

- Desarrollar modelos de transporte de energía para los techos verdes tomando en cuenta que algunas capas que los componen son medios porosos.

3.3. Hipótesis

A continuación se enumeran las hipótesis de las que se parte para realizar la investigación:

1. Existen parámetros que influyen en mayor medida sobre el cambio de temperatura tanto en la capa verde como en el interior del edificio.
2. Los STV pueden ser estudiados como sistemas que están divididos en capas y a su vez éstas capas se componen de medios heterogéneos a una escala pequeña.
3. Por medio de un método de escalamiento se pueden plantear ecuaciones válidas para cada una de las capas compuestas por medios heterogéneos. Estas ecuaciones pueden ser acopladas por medio de condiciones de frontera para formar el modelo de transporte de energía en STV.
4. El modelo de transporte de energía puede ser validado mediante datos experimentales obtenidos en un laboratorio de ambiente controlado.

3.4. Metodología

La metodología que se emplea para confirmar la veracidad de las hipótesis es la siguiente:

1. Análisis de la literatura existente sobre STV y específicamente sobre transferencia de calor.
2. Identificar cuáles son los modelos matemáticos más completos en la literatura para describir la transferencia de calor en el STV.
3. Realizar un análisis de sensibilidad empleando uno de los modelos matemáticos existentes, para identificar cuáles son las variables de entrada que mayor influencia tienen sobre la temperatura de la capa verde y la temperatura en el interior del edificio.

4. Plantear ecuaciones de transferencia de calor para cada medio que conforma una capa del STV, realizando este proceso para cada una de las capas.
5. Mediante un método de escalamiento proponer ecuaciones válidas para cada una de las capas que componen el STV.
6. Acoplar las ecuaciones de cada una de las capas por medio de condiciones de frontera para tener un modelo completo.
7. Elaboración de un modelo experimental a escala que contenga los principales componentes de un STV para examinar su comportamiento en el Laboratorio de Ambiente Controlado (LAC) ubicado dentro de las instalaciones de la Universidad Autónoma Metropolitana – Iztapalapa (UAM-I).
8. Verificar y validar el modelo matemático propuesto en los puntos 5 y 6 con los datos experimentales obtenidos en el punto 7.

4. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN EL TECHO VERDE

En este capítulo se realiza un análisis de sensibilidad, basado en simulación Monte Carlo, para determinar cómo cambia la temperatura de la capa verde, así como la temperatura en el interior del edificio al variar los parámetros de entrada: radiación solar, temperatura ambiente, tasa de evapotranspiración y velocidad del viento.

4.1. Monte Carlo

La simulación de Monte Carlo es un método matemático donde una muestra de números aleatorios es aplicada sobre algún parámetro de entrada para construir una distribución de los parámetros de salida (Woller, 1996; Domínguez Muñoz et al., 2010). El método de Monte Carlo se define como un análisis estadístico basado en recrear artificialmente un proceso de cambio con números aleatorios para repetir el proceso muchas veces y estimar directamente los valores de los parámetros importantes (Mitzenmacher and Upfal, 2005). El análisis de sensibilidad de Monte Carlo tiene ventajas sobre otras técnicas tales como el análisis de sensibilidad diferencial y el análisis de sensibilidad estocástico (Lomas and Eppel, 1992).

El método de Monte Carlo se desarrolló rápidamente con el desarrollo de la tecnología informática, hoy en día es utilizado con éxito en muchos campos, tales como las finanzas, la física computacional, las matemáticas computacionales, química, física, videojuegos, etc. (Li, 2010). Algunos de los ejemplos de estudios que emplean el método de Monte Carlo son: variación en el consumo de las viviendas (Pettersen, 1994), en procesos que implican la transferencia de calor y masa (Khayet et al, 2010), en la estimación de incertidumbres (Domínguez Muñoz et al., 2010; Li et al., 2010; Mathioulakis et al., 2011; Wang et al., 2012), en aplicaciones de consideraciones de incertidumbre (Macdonald and Clarke, 2007), en los costos de los ciclos de vida (Paredes y Smith, 1998; Zhu et al, 2012), en análisis de eficiencia energética (Soratana y Marriott, 2010; Soratana y Marriott, 2010; Kumbaroglu y Madlener, 2012), análisis de costo beneficio para techos verdes (Bianchini y Hewage, 2012).

4.2. Modelo matemático

El balance de energía para el STV (Fig. 4.1) aplicado en este capítulo es el modelo propuesto por Feng et al., (2010):

$$q_{sr} + q_{lr} + q_{cv} + q_{em} + q_{tp} + q_{ep} + q_{sp} + q_{ss} + q_{tf} + q_{ps} + q_{rp} = 0 \quad (2.3)$$

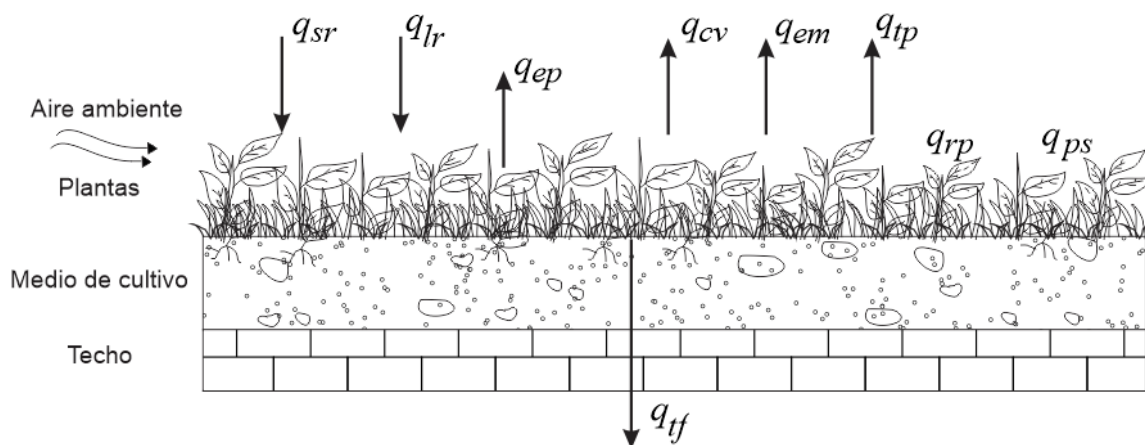


Figura 4.1. Intercambio de energía entre un STV y su entorno.

Este balance es el presentado en el capítulo 2. Las fuentes de calor están dadas por:

Calor ganado por radiación solar:

$$q_{sr} = q_{sri} \alpha_s \quad (2.4)$$

Calor ganado por radiación de onda larga:

$$q_{lr} = \alpha_l \sigma (T_a + 273.15)^4 (0.802 + 0.004T_d) \quad (2.5)$$

Calor transferido por convección:

$$q_{cv} = (5.7 + 3.8v)(T_p - T_a) \quad (2.12)$$

Calor perdido por emisión:

$$q_{em} = \sigma \varepsilon (T_p + 273.15)^4 \quad (2.15)$$

Calor almacenado por la planta:

$$q_{sp} = \rho_p C_{pp} \frac{dT_p}{dt} \quad (2.18)$$

Calor almacenado por el medio de cultivo:

$$q_{ss} = \rho_s C_{ps} \frac{dT_s}{dt} \quad (2.19)$$

Calor transferido al cuarto:

$$q_{tf} = U(T_s - T_r) \quad (2.20)$$

Calor perdido por evapotranspiración:

$$q_{et} = q_{tp} + q_{ep} = R_{et}l \quad (2.23)$$

Calor neto ganado por la fotosíntesis y la respiración de las plantas:

$$q_{ps,net} = q_{ps} + q_{rp} = \Delta_r H_m^\theta(25^\circ C) \frac{\nu_{net, C_6H_{12}O_6}}{M_{C_6H_{12}O_6}} \quad (2.25)$$

A continuación se presenta la metodología empleada para realizar el análisis de sensibilidad.

4.3. Metodología

La metodología aplicada en el presente capítulo considera los siguientes pasos:

Paso 1. Generación de números aleatorios con distribución uniforme en el espacio $U(0,1)$

Paso 2. Conversión de los números aleatorios generados con distribución uniforme $U(0,1)$ a números aleatorios con distribución normal $N(0,1)$.

Paso 3. Los números con distribución normal $N(0,1)$ son aplicados para generar una muestra aleatoria de los parámetros de entrada: radiación solar, temperatura ambiente, tasa de evapotranspiración y velocidad del viento. Estos son los parámetros de entrada.

Paso 4. Las muestras aleatorias de los parámetros de entrada generadas en el paso 3 son implementadas en el modelo numérico de transferencia de calor para el STV, con la finalidad de construir una distribución de temperatura dentro del edificio y en la capa verde, estos son los parámetros de salida.

Paso 5. Con la finalidad de determinar el tamaño de la muestra aleatoria para el análisis de Monte Carlo se realiza un análisis de invariabilidad utilizando la desviación estándar relativa (*DER*).

Paso 6. Finalmente se realiza el análisis de sensibilidad donde las variables predictoras son la temperatura interior del edificio y la temperatura de la capa verde.

4.4. Desarrollo

Se han utilizado muchos métodos para la generación de números aleatorios, en ocasiones se utilizan procesos que se consideran al azar, sin embargo para emplear el método de Monte Carlo se requieren, frecuentemente, decenas de miles o hasta millones de números aleatorios, por lo que generarlos se vuelve un proceso engorroso. Una opción es utilizar números pseudo-aleatorios que son deterministas pero se parecen a los números que se generan aleatoriamente (Gentle, 2003).

4.4.1. Generación de números aleatorios con distribución uniforme

En este capítulo se emplea un método de congruencia para generar números pseudo-aleatorios. Abramowitz y Stegun, (1964) proponen la siguiente ecuación para la generación de números pseudo-aleatorios:

$$X_{n+1} = (aX_n + b) \pmod{T} \quad (4.1)$$

donde X_n es el número pseudo-aleatorio generado, b y T son números primos y \pmod{T} es el módulo de T . Para comenzar la generación de los números pseudo-aleatorios se requiere de un valor inicial que es el primer número pseudo-aleatorio y debe de contar con ciertas características (ver Apéndice 1), a este primer número X_0 se le conoce como semilla.

Para este trabajo se genera una muestra de 90,000 números pseudo-aleatorios, en la cual no se encontraron valores recurrentes.

4.4.2. Conversión de la muestra uniforme a muestra normal

Los números pseudo-aleatorios que se generan con la Ec. (4.1) son números enteros que van de cero a infinito, por lo cual se requiere transformarlos a números con una distribución uniforme en el espacio $U(0,1)$ lo cual se hace de acuerdo con:

$$R_n = \frac{X_n}{T+1} \quad (4.2)$$

Los números pseudo-aleatorios que se generan en el espacio $U(0,1)$ deben de ser convertidos o transformados a números pseudo-aleatorios con distribución normal. Uno de los métodos para realizar la transformación es el de Box-Muller, que se utiliza en el presente trabajo, es está dado por:

$$MN_1 = \sqrt{-2\log(U_1)} \cos(2\pi U_2) \quad (4.3)$$

$$MN_2 = \sqrt{-2\log(U_1)} \sin(2\pi U_2) \quad (4.4)$$

Por lo tanto MN_1 y MN_2 se distribuyen de forma independiente como $N(0,1)$. Estos números pseudo-aleatorios son los que se utilizan para realizar el análisis de Monte Carlo en este capítulo.

4.4.3. Generación de la muestra aleatoria de los parámetros de entrada

Para analizar el efecto de los parámetros de entrada: radiación solar, temperatura ambiente, tasa de evapotranspiración y velocidad de viento, sobre la temperatura en el interior del edificio y la temperatura de la capa verde, se aplica el método de Monte Carlo en el modelo numérico del STV a través de la siguiente expresión:

$$\gamma_n = \gamma_0(1+b \times MN_n) \quad (4.5)$$

donde γ_0 es el valor nominal del parámetro, b es la tasa de cambio, MN_n es el número pseudo-aleatorio generado previamente y γ_n es el nuevo valor del parámetro de entrada.

Así para cada uno de los parámetros de entrada: radiación solar, temperatura ambiente, tasa de evapotranspiración y velocidad del viento se aplica la Ec. (4.5):

$$q_{sri,n} = q_{sri,0} (1 + bMN_n) \quad (4.6)$$

$$T_{a,n} = T_{a,0} (1 + bMN_n) \quad (4.7)$$

$$R_{et,n} = R_{et,0} (1 + bMN_n) \quad (4.8)$$

$$v_n = v_0 (1 + bMN_n) \quad (4.9)$$

Al aplicar las Ecs (4.6)-(4.9) a los parámetros de entrada se crean muestras aleatorias de los parámetros de entrada del tamaño de la muestra de números pseudo-aleatorios generada, en otras palabras, se tienen 90,000 valores de: radiación solar, temperatura ambiente, tasa de evapotranspiración y velocidad del viento.

4.4.4. Implementación de las muestras aleatorias en el modelo matemático

En la Tabla 4.1 se presentan los valores de los parámetros necesarios para comenzar la simulación.

4.4.5. Análisis de invariabilidad

El propósito del análisis de invariabilidad es obtener un tamaño de simulación n representativo, en otras palabras, se requiere que los resultados de la simulación sean independientes de su tamaño, para esto se utiliza la Desviación Estándar Relativa (DER) que está dada por:

$$DER = \frac{s}{\bar{X}} (100) \quad (4.11)$$

donde s es la desviación estándar y \bar{X} es la media aritmética. El valor óptimo de n se obtiene cuando el valor de la DER es constante con respecto al tamaño de la simulación n . Así al introducir la muestra aleatoria para la radiación solar dentro del modelo numérico del STV y aplicar la Ec. (4.11) a los parámetros de salida, se obtiene (ver Fig. 4.2):

Tabla 4.1. Parámetros y valores usados en la simulación.

Parámetro	valor	Unidades
ρ_p	3.3	Kg m ⁻²
C_p	4800	J kg ⁻¹ K ⁻¹
α_s	0.83	Adimensional
α_1	1.0	Adimensional
σ	5.67 x 10 ⁸	W m ⁻² K ⁻⁴
ε	1	Adimensional
U	0.5	W m ⁻² K ⁻¹
l	2,430,000	J kg ⁻¹
$\Delta_r H_m^\theta (25^\circ C)$	1,560,300	J mol ⁻¹
$M_{C_6H_{12}O_6}$	180	g mol ⁻¹
$v_{net,C_6H_{12}O_6}$	0.04807	g m ⁻²
$q_{sri,0}$	600	W m ⁻²
$R_{et,0}$	0.00006	Kg m ⁻² s ⁻¹
$T_{a,0}$	31.5	°C
v_0	1	m s ⁻¹

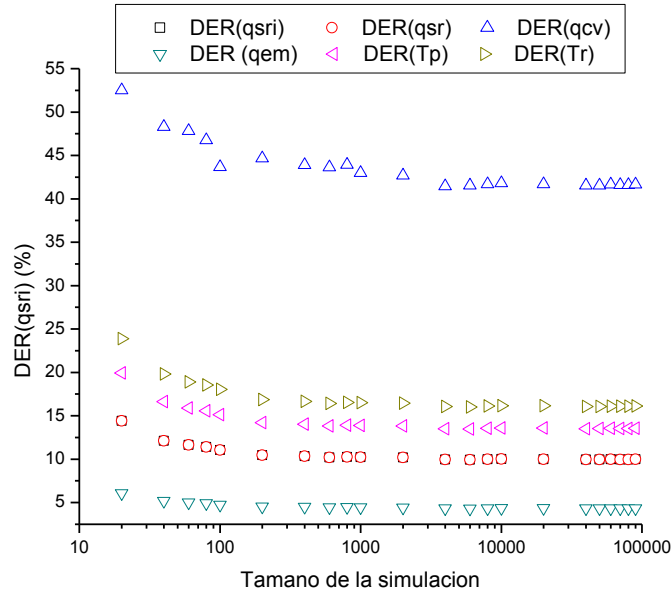


Figura 4.2. *DER* de los parámetros de salida para una variación de 10% de q_{sri} .

Como se puede ver en la Fig. 4.2 para tamaños pequeños de simulación hay variación de los parámetros de salida, es decir para valores menores a 1,000 la *DER* varía significativamente y para valores mayores a 10,000 la *DER* se mantiene constante para cada parámetro de salida. Por lo tanto para realizar la simulación de Monte Carlo en este caso basta tomar un tamaño de simulación mayor a 10,000.

Este proceso se repite para cada uno de los parámetros de entrada. En la Fig. 4.3 se muestra la variación de la *DER* cuando la muestra aleatoria es la temperatura ambiente, se puede apreciar que para valores menores a 1,000 la *DER* tiene grandes cambios, para valores de la simulación mayores a 1,000 y menores a 10,000 los cambios son pequeños y para valores mayores a 10,000 la *DER* se mantiene prácticamente constante para todos los parámetros de salida. Para este caso, igual que en el anterior, basta con que el tamaño de la simulación sea mayor a 10,000 en el método de Monte Carlo.

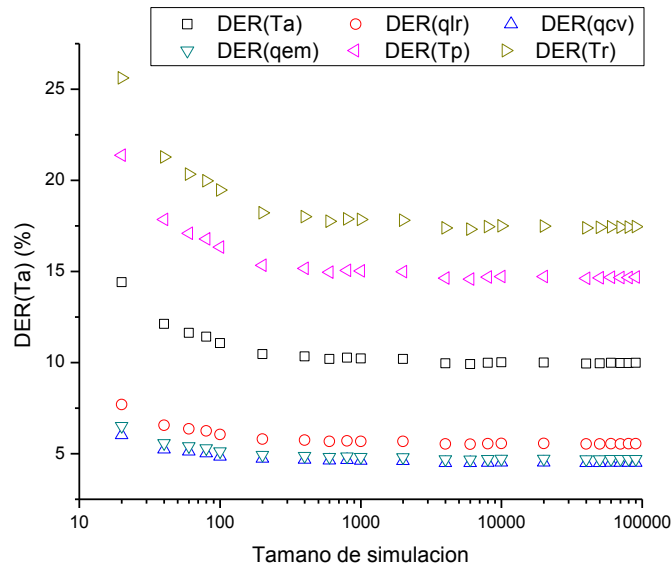


Figura 4.3. *DER* de los parámetros de salida para una variación de 10% de T_a .

De la misma manera en las Figs. 4.4 y 4.5 se muestra cómo cambia el valor de la *DER* cuando se varía en un 10% la tasa de evapotranspiración y la velocidad del viento, respectivamente.

En la Fig. 4.4 se puede ver que para valores menores a 100 se tienen grandes cambios en la *DER*, para valores mayores a 100 y menores a 1,000 hay parámetros para los cuales la *DER* se mantiene prácticamente constante, sin embargo para q_{et} y q_{cv} la *DER* continua variando, por lo tanto se requiere un mayor tamaño de simulación, el tamaño óptimo de simulación se encuentra cerca de 40,000 para este caso.

En la Fig. 4.5 se observa que los cambios más grandes de la *DER* son para la velocidad del viento, para las variables de salida la variación en su *DER* es mínima, de hecho para un tamaño de simulación de 1,000 todas son constantes excepto la *DER* de la velocidad del viento que comienza a ser constante para un tamaño de simulación de aproximadamente 50,000. Por lo tanto para aplicar el método de Monte Carlo se requiere un tamaño de simulación mayor a 50,000.

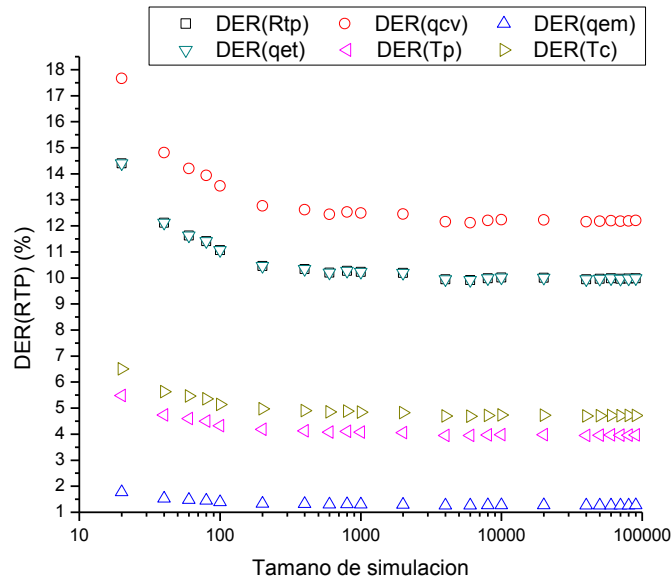


Figura 4.4. *DER* de los parámetros de salida para una variación de 10% de R_{tp} .

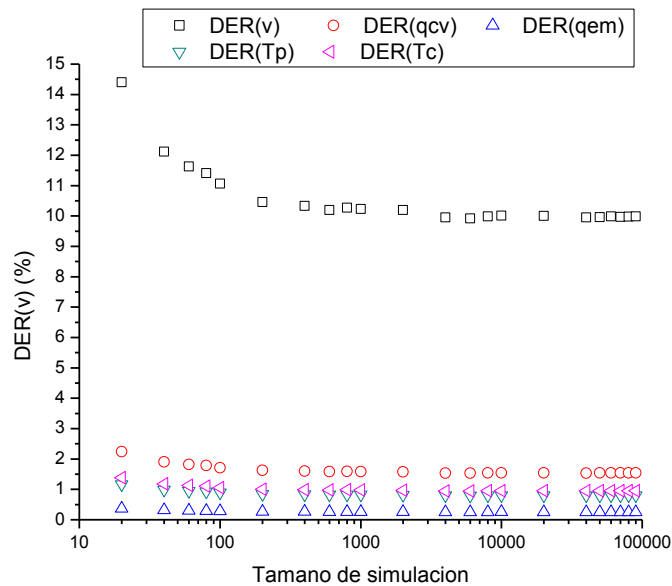


Figura 4.5. *DER* de los parámetros de salida para una variación de 10% de v .

Por lo tanto para garantizar la invariabilidad de la *DER*, en todos los casos, el método de Monte Carlo se lleva a cabo empleando 90,000 números aleatorios, por lo tanto el tamaño de la simulación es de 90,000.

4.4.6. Análisis de sensibilidad

Ya establecido el tamaño de la simulación se prosigue a realizar el análisis de sensibilidad, para hacerlo se programa el modelo matemático y se alimenta con los parámetros de la Tabla 4.1, se realiza una corrida con estos datos con el fin de obtener el estado estacionario, posteriormente se analiza cuanto tiempo tarda el STV en llegar al estado estacionario realizando variaciones del 10% en los parámetros de entrada: radiación solar, temperatura ambiente tasa de evapotranspiración y velocidad del viento. De acuerdo con las pruebas realizadas le basta al STV 8,000 segundos para llegar al estado estacionario después de que se modifica el valor de algún parámetro de entrada. El modelo numérico del STV se resuelve mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, el tamaño de paso es de 100 segundos, por lo tanto para cada valor de un parámetro de entrada el código se ejecuta 80 veces y se tienen cuatro muestras de parámetros de entrada con 90,000 valores, así para realizar el análisis de sensibilidad por el método de Monte Carlo el código se ejecuta 7.2 millones de veces para cada variable, así el código se ejecuta poco menos de 29 millones de veces para el análisis completo.

En las Figs. 4.6-4.9 se muestra la influencia que tiene cada parámetro de entrada sobre la temperatura dentro del edificio y la temperatura en la capa verde.

En la Fig. 4.6 se muestra que la temperatura dentro del edificio y la temperatura de la capa verde son directamente proporcionales a la radiación solar, es decir a mayor radiación solar se tiene una mayor temperatura dentro del edificio y en la capa verde.

En la Fig. 4.7 se puede ver la influencia que tiene la temperatura ambiente sobre la temperatura en el interior del edificio y la temperatura de la capa verde, al igual que con la radiación solar la temperatura en el interior del edificio y de la capa verde son directamente proporcionales a la temperatura ambiente, en otras palabras, a mayor temperatura ambiente se tiene una mayor temperatura tanto en el interior del edificio como en la capa verde.

La Fig. 4.8 muestra la influencia de la tasa de evapotranspiración sobre la temperatura en el interior del edificio y la temperatura de la capa verde. En este caso la temperatura en el interior del edificio y de la capa verde son inversamente proporcionales a la tasa de evapotranspiración, por lo tanto a mayor tasa de evapotranspiración menor temperatura tanto en la capa verde como en el interior del edificio, esto era de esperarse ya que la evapotranspiración es un mecanismo de enfriamiento.

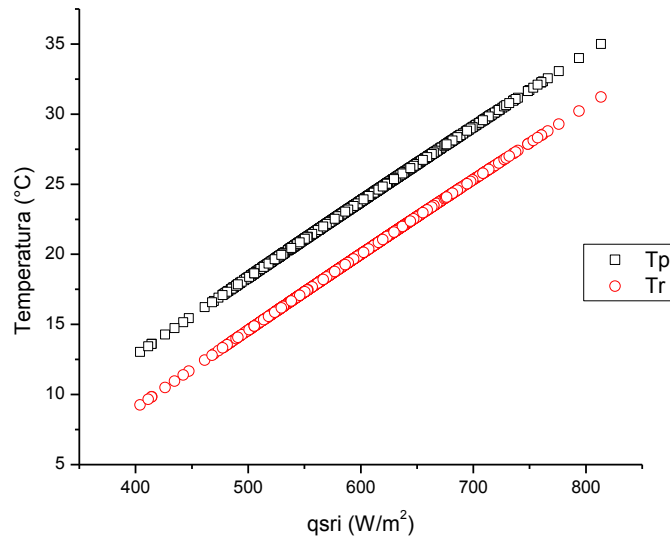


Figura 4.6. Efecto de la variación de la radiación solar sobre la temperatura dentro del edificio y la temperatura en la capa verde.

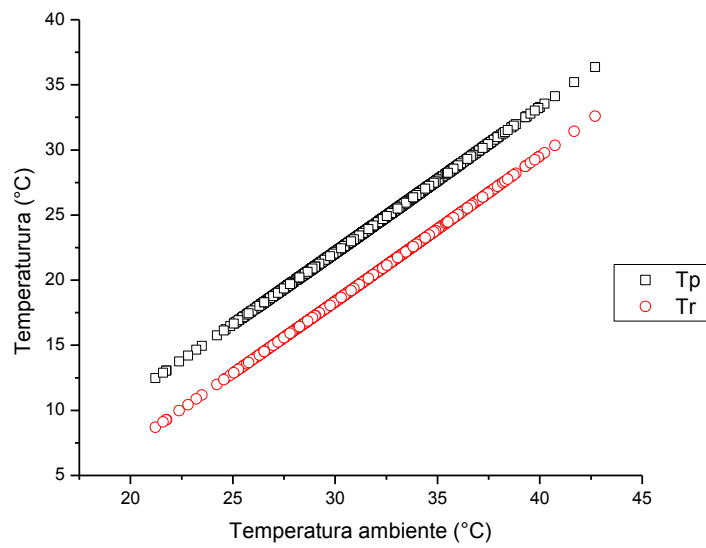


Figura 4.7. Efecto de la variación de la temperatura ambiente sobre la temperatura dentro del edificio y la temperatura en la capa verde.

En la Fig. 4.9 se puede ver que la temperatura dentro del edificio y de la capa verde aumentan al incrementarse la velocidad del viento, por lo tanto la temperatura de la capa verde y dentro del edificio son directamente proporcionales a la velocidad del viento.

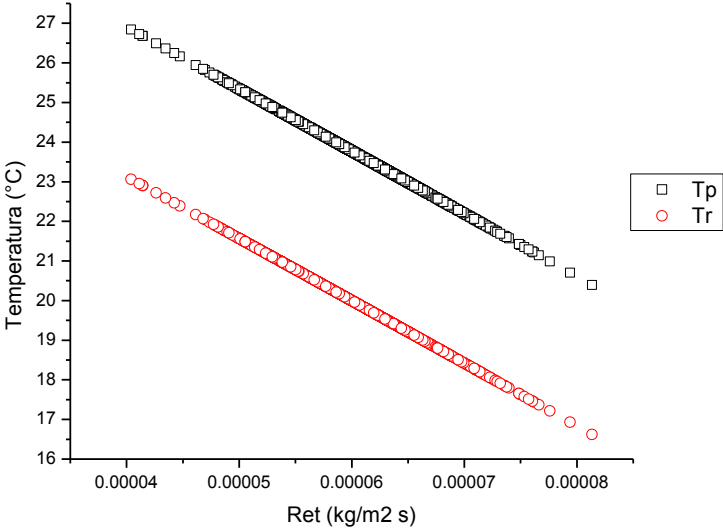


Figura 4.8. Efecto de la variación de la tasa de evapotranspiración sobre la temperatura dentro del edificio y la temperatura en la capa verde.

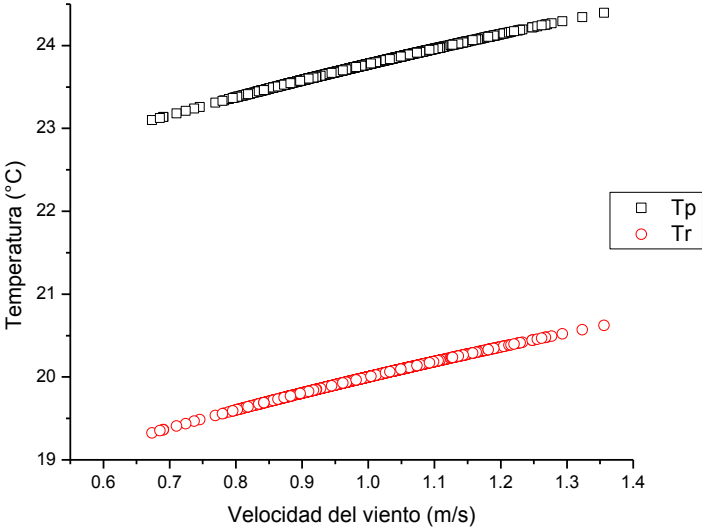


Figura 4.9. Efecto de la variación de la velocidad del viento sobre la temperatura dentro del edificio y la temperatura en la capa verde.

4.5. Resultados

Los resultados obtenidos en el análisis de sensibilidad realizado mediante el método de Monte Carlo se resumen en la Tabla 4.2, con ella se puede deducir que tanto la temperatura en el interior del edificio como en la capa verde del STV es más sensible a la temperatura ambiente, el siguiente parámetro que afecta con más fuerza a la temperatura de la capa verde y dentro del edificio es la radiación solar seguida de la tasa de evapotranspiración y finalmente el parámetro de entrada que menor impacto tiene es la velocidad del viento.

Tabla 4.2. Análisis de sensibilidad para el STV.

Parámetro de entrada		T_p	T_r
q_{sri}	363.2 – 836.7	13.32 – 34.22	7.58 – 32.42
T_a	19.1 – 43.9	9.80 – 37.75	6.03 – 33.97
R_{et}	3.63×10^{-5} – 8.36×10^{-5}	27.53 – 20.02	23.75 – 16.25
v	0.605 – 1.394	23.09 – 24.46	19.32 – 20.68

Los resultados obtenidos y resumidos en la tabla 4.2, son de importancia para el modelado matemático que se presenta en el capítulo siguiente de esta tesis.

5. MODELO MATEMÁTICO

A partir de la formulación local instantánea se pueden deducirse las ecuaciones para los medios en dos fases.

La primera capa que conforma al techo verde es la capa verde que está integrada principalmente por plantas y aire, a continuación se presentan las ecuaciones que describen la transferencia de calor a través de estos materiales.

El cambio de temperatura en la planta está dado por:

$$(\rho Cp)_p \frac{\partial T_p}{\partial t} = k_p \nabla^2 T_p + q''' \quad (5.1)$$

donde $(\rho Cp)_p$ es la densidad y el calor específico de la planta, T_p es la temperatura de la planta, t es el tiempo, k_p es la conductividad térmica de la planta y q''' es la suma de las fuentes de calor.

El cambio de temperatura en el aire está dado por:

$$(\rho Cp)_a \left(\frac{\partial T_a}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla T_a \right) = k_a \nabla^2 T_a \quad (5.2)$$

donde $(\rho Cp)_a$ es la densidad y el calor específico del aire, T_a es la temperatura del aire, \vec{v} es la velocidad del aire y k_a es la conductividad térmica del aire.

Las Ecs. (5.1) y (5.2) están relacionadas mediante la condición de frontera:

$$-\vec{n}_{pa} \cdot k_p \nabla T_p = -\vec{n}_{pa} \cdot k_a \nabla T_a \quad (5.3)$$

donde \vec{n}_{pa} es el vector normal unitario.

La condición de frontera entre la capa verde y el aire ambiente está dada por:

$$-\vec{n} \cdot k_p \nabla T_p = h(T_p - T_\infty) \quad (5.4)$$

Asimismo para la capa del techo verde conocida como sustrato o medio de cultivo, que está formada principalmente por tierra y agua se tienen dos ecuaciones, una para cada material.

El cambio de temperatura en la tierra está dado por:

$$(\rho Cp)_\ell \frac{\partial T_\ell}{\partial t} = k_\ell \nabla^2 T_\ell + q''' \quad (5.5)$$

donde $(\rho Cp)_\ell$ es la densidad y el calor específico de la tierra, T_ℓ es la temperatura de la tierra, k_ℓ es la conductividad térmica de la tierra y q''' es la sumatoria de las fuentes de calor en la tierra.

El cambio de temperatura en el agua está dado por:

$$(\rho Cp)_w \frac{\partial T_w}{\partial t} = k_w \nabla^2 T_w \quad (5.6)$$

donde $(\rho Cp)_w$ es la densidad y la conductividad térmica del agua, T_w es la temperatura del agua y k_w es la conductividad térmica del agua.

Las Ecs. (5.5) y (5.6) están relacionadas mediante la siguiente condición de frontera:

$$-\vec{n}_{\ell w} \cdot k_{\ell} \vec{\nabla} T_{\ell} = -\vec{n}_{w\ell} \cdot k_w \vec{\nabla} T_w \quad (5.7)$$

Para la capa de concreto se tiene:

$$(\rho Cp)_b \frac{\partial T_b}{\partial t} = k_b \nabla^2 T_b \quad (5.8)$$

donde $(\rho Cp)_b$ es la densidad y el calor específico del concreto, T_b es la temperatura del concreto y k_b es la conductividad térmica del concreto.

Condición interfacial entre la capa verde y la capa de tierra

Desconocida

Condición interfacial entre la tierra y la capa de concreto

Desconocida

Condición interfacial entre el concreto y el aire de la habitación:

$$-\vec{n} \cdot k_c \nabla T_c = h(T_c - T_{\infty}) \quad (5.10)$$

5.1. Método de Escalamiento

5.1.1. Capa verde

La temperatura promedio de la planta en el volumen de la capa verde es:

$$\langle T_p \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_p} T_p dV \quad (5.11)$$

La temperatura promedio de la planta en la planta está dada por:

$$\langle T_p \rangle^P = \frac{1}{V_p} \int_{V_p} T_p dV \quad (5.12)$$

Estos dos promedios se relacionan por medio de:

$$\langle T_p \rangle = \varepsilon_p \langle T_p \rangle^P \quad (5.13)$$

donde ε_p es la fracción volumen de la planta y se define como:

$$\varepsilon_p = \frac{\frac{1}{V} \int_{V_p} T_p dV}{\frac{1}{V_p} \int_{V_p} T_p dV} \quad (5.14)$$

Al promediar el lado izquierdo Ec. (5.1) se tiene:

$$\left\langle \frac{\partial T_p}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial T_p}{\partial t} dV \quad (5.15)$$

aplicando el teorema de Leibniz se tiene:

$$\left\langle \frac{\partial T_p}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle T_p \rangle}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_{A_{pa}} T_p \bar{w} \cdot \bar{n}_{pa} dA \quad (5.16)$$

pero si $\bar{w} = 0$:

$$\left\langle \frac{\partial T_p}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle T_p \rangle}{\partial t} \quad (5.17)$$

o bien:

$$\left\langle \frac{\partial T_p}{\partial t} \right\rangle = \varepsilon_p \frac{\partial \langle T_p \rangle^p}{\partial t} \quad (5.18)$$

Ahora al promediar el primer término de lado derecho de Ec. (5.1) se tiene:

$$\nabla^2 T_p = \nabla \cdot (\nabla T_p) \quad (5.19)$$

$$\langle \nabla \cdot (\nabla T_p) \rangle = \frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot (\nabla T_p) dV \quad (5.20)$$

$$\langle \nabla \cdot (\nabla T_p) \rangle = \nabla \cdot \langle \nabla T_p \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{pa}} (\nabla T_p) \cdot \bar{n}_{pa} dA \quad (5.21)$$

$$\langle \nabla \cdot (\nabla T_p) \rangle = \nabla \cdot \left\{ \nabla \langle T_p \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{pa}} T_p \cdot \bar{n}_{pa} dA \right\} + \frac{1}{V} \int_{A_{pa}} (\nabla T_p) \cdot \bar{n}_{pa} dA \quad (5.22)$$

$$\langle \nabla \cdot (\nabla T_p) \rangle = \nabla^2 \langle T_p \rangle + \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{V} \int_{A_{pa}} T_p \cdot \bar{n}_{pa} dA \right\} + \frac{1}{V} \int_{A_{pa}} (\nabla T_p) \cdot \bar{n}_{pa} dA \quad (5.23)$$

Reescribiendo la Ec. (5.1) se tiene:

$$(\rho C_p)_p \varepsilon_p \frac{\partial \langle T_p \rangle^p}{\partial t} = k_p \left(\nabla^2 \langle T_p \rangle + \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{V} \int_{A_{pa}} T_p \cdot \vec{n}_{pa} dA \right\} + \frac{1}{V} \int_{A_{pa}} (\nabla T_p) \cdot \vec{n}_{pa} dA \right) + \langle q''' \rangle \quad (5.24)$$

Si se define una densidad de área interfacial como:

$$a_{pa} = \frac{A_{pa}}{V} \quad (5.25)$$

entonces:

$$\frac{k_p}{V} \int_{A_{pa}} (\nabla T_p) \cdot \vec{n}_{pa} dA = \vec{q}_{pa} a_{pa} \quad (5.26)$$

por otro lado:

$$k_p \left(\nabla^2 \langle T_p \rangle + \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{V} \int_{A_{pa}} T_p \cdot \vec{n}_{pa} dA \right\} \right) = k_p \nabla^2 \langle T_p \rangle + k_{pa} \nabla^2 \langle T_a \rangle \quad (5.27)$$

reescribiendo la Ec. (5.24) se tiene:

$$(\rho C_p)_p \varepsilon_p \frac{\partial \langle T_p \rangle^p}{\partial t} = k_p \nabla^2 \langle T_p \rangle + k_{pa} \nabla^2 \langle T_a \rangle + \vec{q}_{pa} a_{pa} + \langle q''' \rangle \quad (5.28)$$

pero $\langle T_p \rangle = \varepsilon_p \langle T_p \rangle^p$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
(\rho Cp)_p \varepsilon_p \frac{\partial \langle T_p \rangle^p}{\partial t} = & \quad (5.29) \\
k_p \varepsilon_p \nabla^2 \langle T_p \rangle^p + k_{pa} \varepsilon_a \nabla^2 \langle T_a \rangle^a + \bar{q}_{pa} a_{pa} + \varepsilon_p \langle q^m \rangle^p
\end{aligned}$$

Aplicando el mismo procedimiento a la Ec. (5.2) se tiene:

$$\begin{aligned}
(\rho Cp)_a \varepsilon_a \frac{\partial \langle T_a \rangle^a}{\partial t} = & \quad (5.30) \\
k_a \varepsilon_a \nabla^2 \langle T_a \rangle^a + k_{ap} \varepsilon_p \nabla^2 \langle T_p \rangle^p + \bar{q}_{ap} a_{ap}
\end{aligned}$$

Considerando equilibrio termodinámico, esto es $\langle T_p \rangle^p = \langle T_a \rangle^a = T_H$ y sumando las Ecs. (5.29) y (5.30) se obtiene:

$$\begin{aligned}
(\rho_p Cp_p \varepsilon_p + \rho_a Cp_a \varepsilon_a) \frac{\partial T_H}{\partial t} = & (k_p \varepsilon_p + k_a \varepsilon_a) \nabla^2 T_H + k_{pa} \varepsilon_p \nabla^2 \langle T_a \rangle^a + k_{ap} \varepsilon_a \nabla^2 \langle T_p \rangle^p + \\
& \bar{q}_{pa} a_{pa} + \bar{q}_{ap} a_{ap} + \varepsilon_p \langle q^m \rangle^p \quad (5.31)
\end{aligned}$$

pero:

$$q_{pa} = \sigma \left(\langle T_p \rangle^p - \langle T_a \rangle^a \right) \quad (5.32)$$

así, se puede definir propiedades efectivas para la capa verde:

$$K_g = (k_p \varepsilon_p + k_a \varepsilon_a) \quad (5.53)$$

$$(\rho Cp)_g = (\rho_p Cp_p \varepsilon_p + \rho_a Cp_a \varepsilon_a) \quad (5.34)$$

y además:

$$\vec{q}_{pa} a_{pa} = -\vec{q}_{ap} a_{ap} \quad (5.35)$$

se tiene:

$$(\rho Cp)_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = K_g \nabla^2 T_H + \varepsilon_p \langle q^m \rangle^p \quad (5.36)$$

La Ec. (5.36) describe la transferencia de calor a través de la capa verde.

5.1.2. Capa de sustrato

Aplicando un tratamiento similar a las Ecs. (5.5) y (5.6) se tiene:

$$(\rho Cp)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = K_s \nabla^2 T_s + \varepsilon_\ell \langle q^m \rangle^\ell \quad (5.37)$$

donde:

$$(\rho Cp)_s = \varepsilon_w (\rho Cp)_w + \varepsilon_\ell (\rho Cp)_\ell \quad (5.38)$$

$$K_s = k_w \varepsilon_w + k_\ell \varepsilon_\ell \quad (5.39)$$

La Ec. (5.37) describe la transferencia de calor a través de la capa de sustrato. Mientras que las Ecs. (5.38) y (5.39) son propiedades efectivas del sustrato.

El Tabla 5.1 se presenta un resumen de las ecuaciones derivadas en este capítulo.

Tabla 5.1. Resumen de las ecuaciones derivadas en este capítulo para la capa verde y la capa de sustrato.

Capa verde	
Ecuación de gobierno	$(\rho Cp)_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = K_g \nabla^2 T_H + \varepsilon_p \langle q^m \rangle^p$
Propiedades efectivas	$(\rho Cp)_g = (\rho_p Cp_p \varepsilon_p + \rho_a Cp_a \varepsilon_a)$ $K_g = (k_p \varepsilon_p + k_a \varepsilon_a)$
Capa de sustrato	
Ecuación de gobierno	$(\rho Cp)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = K_s \nabla^2 T_s + \varepsilon_\ell \langle q^m \rangle^\ell$
Propiedades efectivas	$(\rho Cp)_s = \varepsilon_w (\rho Cp)_w + \varepsilon_\ell (\rho Cp)_\ell$ $K_s = k_w \varepsilon_w + k_\ell \varepsilon_\ell$

En el capítulo 7 son implementadas y evaluadas las Ecs. (5.36) y (5.37) en el modelo de transferencia de calor del techo verde, mientras que en el siguiente capítulo se diseña un modelo experimental con el fin de obtener datos de laboratorio para poder validar el modelo.

6. MODELO EXPERIMENTAL

Con el fin de estudiar el efecto sobre las temperaturas con el modelo de medios porosos, Ecs. (5.36) y (5.37), para calcular el transporte de calor a través de la capa de sustrato y a través de la capa verde, se diseña un modelo experimental con los principales componentes de un STV. El Laboratorio de Ambiente Controlado (LAC) de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (Arrollo-Cabañas et al., 2009), se utiliza para monitorear varios escenarios experimentales.

6.1. Laboratorio

El LAC es un laboratorio que consta de dos cámaras, con aislamiento térmico, que contienen una serie de termistores, con una precisión de ± 0.2 °C, para monitorear la temperatura en todo momento, el LAC también tiene una sala de control (ver Fig. 6.1) donde a través de equipos de cómputo y software especialmente diseñado se controla y monitorea la temperatura de los termistores en las dos cámaras. De esta manera, la temperatura dentro de las dos cámaras puede ser controlada y mantenerse constante; el límite inferior es 15 °C y 40 °C es la temperatura máxima que se puede alcanzar. El modelo experimental es colocado en la cámara caliente, la cual cuenta con 8 termistores.

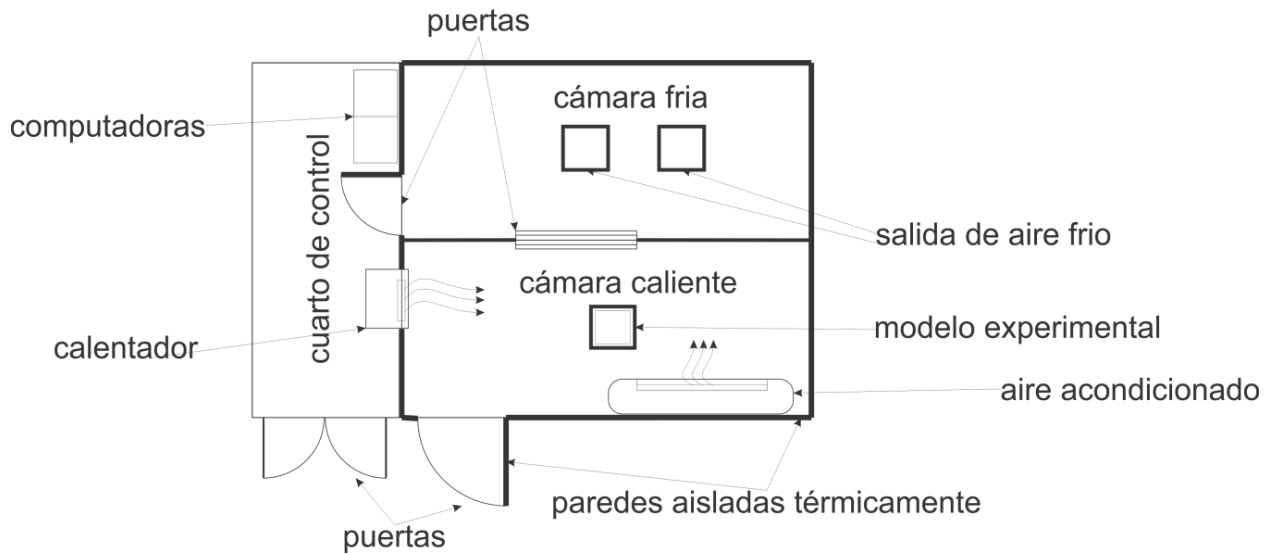


Figura 6.1. Diagrama esquemático del LAC.

6.2. Equipo y materiales

El modelo experimental es un paralelepípedo de madera con base cuadrada, con dimensiones de 20 cm en la base y altura de 35 cm, está dividido en dos secciones. En la sección superior se coloca el sustrato, mientras que en la sección inferior se coloca hielo para mantener una temperatura fría, con respecto al resto del sistema. Las paredes están aisladas térmicamente con lana de vidrio y poliestireno expandido, de tal manera que la transferencia de calor se da en la dirección vertical. Se colocan siete termistores en el modelo experimental como se muestra en la Fig. 6.2, uno de ellos registra la temperatura de la cámara caliente y la controla, cinco termistores son colocados en el sustrato, mientras que el último termistor se coloca en la sección inferior del modelo experimental, con el propósito de monitorear la temperatura fría.

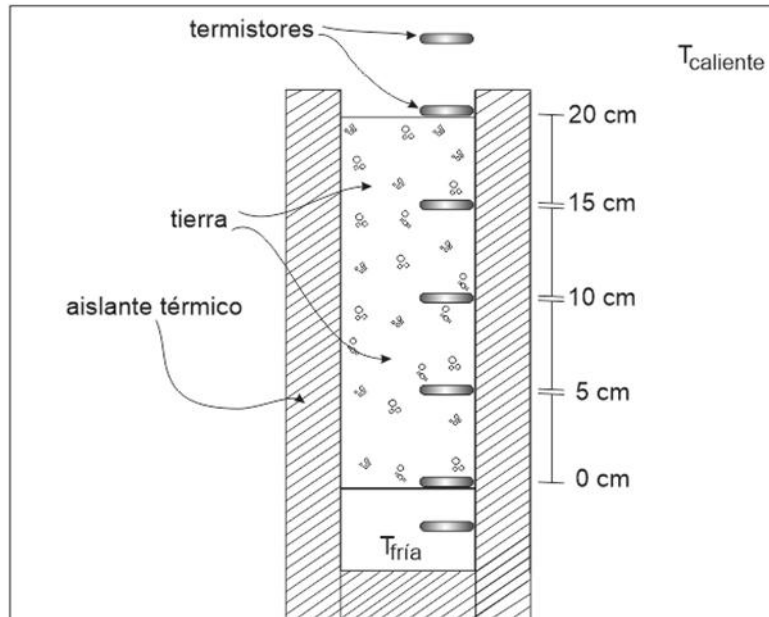


Figura 6.2. Diagrama esquemático del modelo experimental en el LAC.

6.3. Experimento

Se coloca hielo en la sección inferior del paralelepípedo con el propósito de tener una temperatura constante fría, mientras el laboratorio se ajusta a una temperatura más alta. El paralelepípedo está lleno de sustrato para monitorizar el cambio de temperatura a diferentes alturas y en diferentes momentos, tal como se ilustra esquemáticamente en la Fig. 6.2.

Durante el experimento se mantiene una temperatura fría constante dentro de la sección inferior del modelo experimental y una temperatura caliente en el LAC para lograr un gradiente de temperatura. Posteriormente, se controla y mantiene constante la temperatura de la cámara caliente, hasta alcanzar el estado estacionario en la distribución de temperaturas del sustrato. Por lo tanto, los parámetros medidos en el laboratorio son el tiempo y la temperatura para cada altura donde se colocaron los termopares.

6.4. Mediciones

Con el fin de determinar si el modelo matemático, que incluye expresiones para determinar la transferencia de calor a través de medios porosos, proporciona resultados comparables a

los que se tienen en la capa de sustrato, de un STV, a diferentes alturas y tiempos en presencia de un gradiente de temperaturas se presentan los resultados obtenidos experimentalmente. La temperatura a diferentes distancia se registra cada minuto hasta alcanzar el estado estacionario.

La temperatura del laboratorio se programa a 35°C, mientras que la temperatura dentro de la sección fría del modelo experimental se mantiene alrededor de 12 °C. La temperatura a diferentes profundidades de la tierra se mide hasta que se alcanza el estado estacionario, es decir aproximadamente 6 horas como se puede ver en la Fig. 6.3.

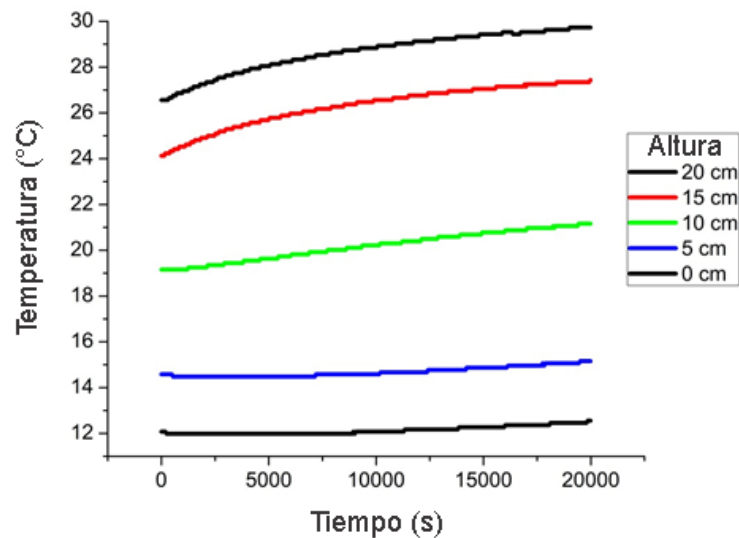


Figura 6.3. Perfil de temperatura obtenido experimentalmente a diferentes alturas en la capa de sustrato.

Utilizando los datos obtenidos en el LAC (Fig. 6.3) se verifica el modelo matemático de transferencia de calor a través del STV en el siguiente capítulo.

7. MODELO DEL STV Y VERIFICACIÓN

En esta sección se implementa y evalúa el modelo matemático completo de transferencia de calor para un STV considerando que algunas de sus capas están formadas por materiales porosos.

7.1. Modelo Matemático

La transferencia de calor en la capa verde formada principalmente por las plantas y el aire está dada por:

$$(\rho C p)_g \frac{\partial \langle T \rangle_g}{\partial t} = \nabla \cdot (K_g \cdot \nabla \langle T \rangle_g) \quad (5.36)$$

En esta ecuación no son incluidas las fuentes de calor, sin embargo éstas actúan principalmente sobre la capa verde. Una forma sencilla de incluir los efectos de las fuentes de calor es empleando la siguiente condición de frontera que es válida en la interface formada por la capa verde y el entorno:

$$-K_g \frac{d\langle T \rangle_g}{dx} = \sum q'' \quad (7.1)$$

donde el término del lado derecho de la ecuación está dado por:

$$\sum q'' = q_{sr} + q_{lr} + q_{cv} + q_{em} + q_{et} + q_{ps,net} \quad (7.2)$$

La transferencia de calor en la capa del medio de cultivo formada principalmente por tierra y agua está dada por la Ec. (5.37) sin incluir los efectos de las fuentes de calor que pueden estar alcanzando al medio de cultivo, como la radiación solar y la radiación de onda larga, estos efectos pueden incluirse planteando condiciones de frontera apropiadas.

$$(\rho Cp)_s \frac{\partial \langle T \rangle_s}{\partial t} = \nabla \cdot (K_s \cdot \nabla \langle T \rangle_s) \quad (5.37)$$

Las Ecs. (5.36) y (5.37) están relacionadas con la siguiente condición de frontera:

$$\langle T \rangle_g = \langle T \rangle_s \quad (7.3)$$

Esta condición de frontera se aplica en la interface formada por la capa verde y la capa del medio de cultivo.

Por otra parte, la transferencia de calor a través del material constructivo está dada por:

$$(\rho Cp)_b \frac{\partial T_b}{\partial t} = k_b \frac{\partial^2 T_b}{\partial x^2} \quad (5.8)$$

donde el subíndice b indica que se trata de las propiedades del material constructivo.

La condición de frontera de la interface formada por el material constructivo y la capa del medio de cultivo está dada por:

$$T_b = \langle T \rangle_s \quad (7.4)$$

La condición de frontera entre el elemento de material constructivo y el interior del edificio está dada por:

$$-k_b \frac{dT_b}{dx} = h(T_b - T_r) \quad (7.5)$$

donde T_r es la temperatura del cuarto o temperatura interior del edificio, y h es el coeficiente convectivo de transferencia de calor.

Con las Ecs. (5.8), (5.36), (5.37), (7.1) a (7.5) se modela completamente la transferencia de calor a través del STV. Las fuentes de calor son calculadas de la misma manera que se hizo durante el capítulo 4. En la Fig. 7.1 se muestra el sistema y el dominio de gobierno de las principales ecuaciones que forman el modelo matemático de transferencia de calor a través de un STV.

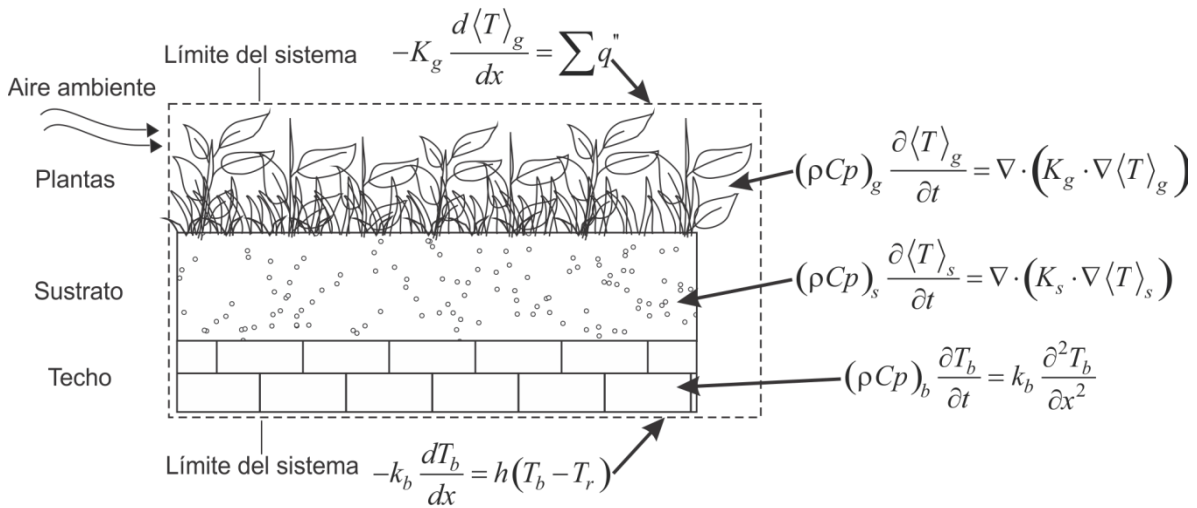


Figura 7.1. Dominio de gobierno de las principales ecuaciones que forman el modelo de transferencia de calor en el STV.

7.2. Comparación del modelo matemático con datos experimentales

En esta sección se presentan los resultados obtenidos comparando el modelo matemático de transferencia de calor a través del STV y los datos experimentales obtenidos en el LAC.

El modelo matemático se resuelve utilizando el método numérico de volumen de control (ver Apéndice 2), posteriormente es programado en Fortran.

Los datos experimentales obtenidos y los resultados de la simulación se comparan en la Fig. 7.2.

Como se ve en la Fig. 7.2, la temperatura medida en el LAC y la temperatura estimada con el modelo matemático se mantienen cerca de la ecuación ideal, debido a $R^2 = 0.9951$, así el error máximo entre estos resultados es de 6.08% que se presenta a los 5 cm de altura.

Sin embargo, debido a que el LAC se encuentra aislado no cuenta con fuentes de calor que son importantes en el STV. Una de las fuentes de calor más importante es la radiación solar, como se vio en el capítulo 4, por lo tanto es importante verificar el modelo en un escenario donde se incluye la radiación solar como fuente de calor.

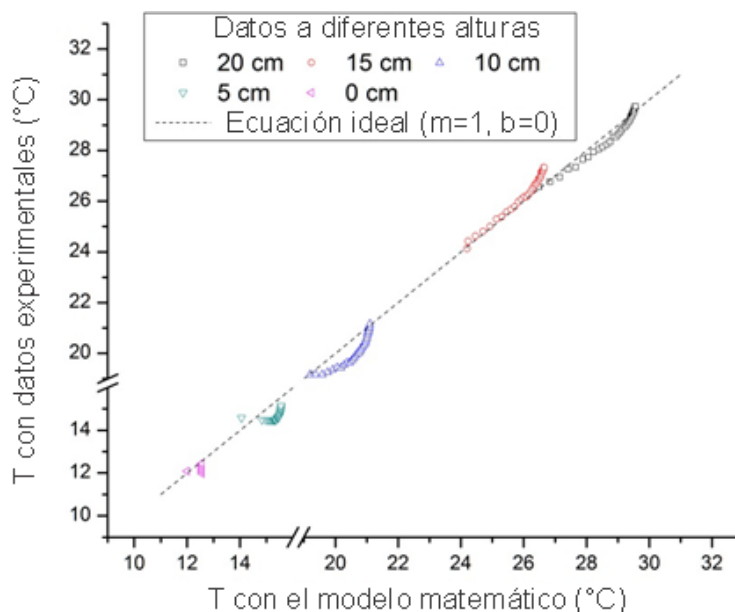


Figura 7.2. Comparación de los datos obtenidos experimentalmente en el LAC con los datos simulados.

7.3. Validación

Los ejemplos con datos útiles para la verificación y validación de modelos matemáticos de transferencia de calor a través de STV son limitados. Sin embargo, con el fin de validar el modelo matemático propuesto en este trabajo, se utilizan los experimentales publicados por Feng et al., (2010). Estos datos experimentales son: radiación solar incidente en superficie horizontal del techo, temperatura de bulbo seco, punto de rocío y velocidad del viento. Adicionalmente, se reportan los siguientes resultados: radiación solar absorbida, radiación de onda larga absorbida, radiación de onda larga emitida, intercambio de energía por evapotranspiración, almacenamiento de calor en las plantas, almacenamiento de calor por sustrato, transferencia de calor a través del techo e intercambio de calor por convección. En la Tabla 7.1 se presentan otros datos experimentales.

Tabla 7.1. Valores de los parámetros (Feng et al., 2010)

l	2430000 J/kg
$M_{C_6H_{12}O_6}$	180 g/mol
α_l	1.0 adimensional
α_s	0.83 adimensional
ε	1.0 adimensional
σ	$5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$

En su trabajo Feng et al., (2010) reportan los siguientes datos: profundidad de la capa de sustrato, profundidad de la capa verde, temperatura dentro del edificio, calor específico de las plantas, calor específico de la tierra, densidad de las plantas, densidad de la tierra, calor latente de la vaporización, masa molar de la glucosa, capacidad de absorción de onda larga del césped, capacidad de absorción de onda corta del césped, emisividad del césped y velocidad fotosintética neta en glucosa.

Además, el valor de las siguientes variables se presentan en gráficos: radiación solar incidente, temperatura del aire ambiente, punto de rocío, velocidad del viento. Finalmente se reportan los siguientes resultados: radiación solar absorbida, radiación de onda larga absorbida, radiación de onda larga emitida, intercambio de energía por evapotranspiración y fotosintética, almacenamiento de calor por plantas, almacenamiento de calor por sustrato,

transferencia de calor a través del techo y convección de intercambio de calor. Con esta información se determina la temperatura de la capa verde durante un día típico de verano para compararla con la temperatura obtenida mediante la evaluación del modelo matemático presentado en este trabajo. En la Tabla 7.2 se presentan los datos utilizados para la simulación.

Tabla 7.2. Valores de los parámetros.

ρ_p	582 kg/m ³
ρ_a	1.00 kg/m ³
Cp_p	4800 J/kg
Cp_a	1000 J/kg
k_p	0.5 W/mK
ρ_ℓ	1200 kg/m ³
ρ_w	1000 kg/m ³
Cp_ℓ	840 J/kg
Cp_w	4186 J/kg
k_ℓ	0.52 W/mK
k_w	0.58 W/mK
ρ_c	1800 kg/m ³
k_c	0.8 W/mK
Cp_c	840 J/kg
ε_w	0.26 adimensional
ε_a	0.53 adimensional

Por otro lado, el volumen de agua contenido en el sustrato es de 20%, la capa de sustrato tiene una profundidad de 4 cm en promedio, las plantas tienen una altura de 7 cm en promedio, mientras que la temperatura del aire interior bajo el techo se mantiene a alrededor de 26 °C empleando aire acondicionado. En la Tabla 7.3 se presentan otros datos utilizados para validar el modelo matemático propuesto.

Tabla 7.3. Valores de los parámetros utilizados para la validación del modelo matemático (Feng et al., 2010).

Time	Solar radiation	Wind speed	Temperature	
			Ambient air	Dew point
(h)	(W/m ²)	(m/s)	(°C)	(°C)
0	250	0.4	29.2	23.9
1	625	1.3	30.9	23.6
2	810	0.0	31.4	22.7
3	890	0.9	32.8	22.0
4	860	1.7	33.5	21.4
5	820	0.0	33.5	21.8
6	650	0.4	34.5	20.2
7	350	0.4	34.6	19.5
8	120	0.9	33.5	21.3
9	50	0.9	32.5	21.7
10	10	2.7	31.5	22.0
11	0	0.4	30.6	22.1
12	0	0.9	30.0	22.2
13	0	1.8	29.5	22.9
14	0	0.9	29.2	23.6
15	0	0.4	29.0	24.2
16	0	1.4	28.6	24.3
17	0	0.0	28.3	24.5
18	0	0.4	28.0	24.1
19	0	0.4	27.8	24.2
20	0	0.0	27.6	24.0
21	10	0.0	27.5	23.6
22	30	0.0	27.5	23.9
23	50	0.4	27.6	24.1
24	200	0.0	29.0	24.2

7.4. Resultados

La comparación del modelo con los datos presentados por Feng et al., (2010) se presenta en la Fig. 7.3. Utilizando los datos reportados por Feng et al., (2010) se simula un día típico de verano, los resultados de comparar la temperatura de la capa verde obtenida mediante la simulación y la temperatura de la capa verde a partir de los resultados reportados por Feng et al., (2010) se muestran en la Fig. 7.4.

Como se ve en la Fig. 7.3, la temperatura de la capa verde determinada con los datos publicados y la temperatura determinada con el modelo matemático se mantienen cerca de la ecuación ideal, debido a que $R^2 = 0.9878$ el error máximo entre estos resultados es de 5.88%.

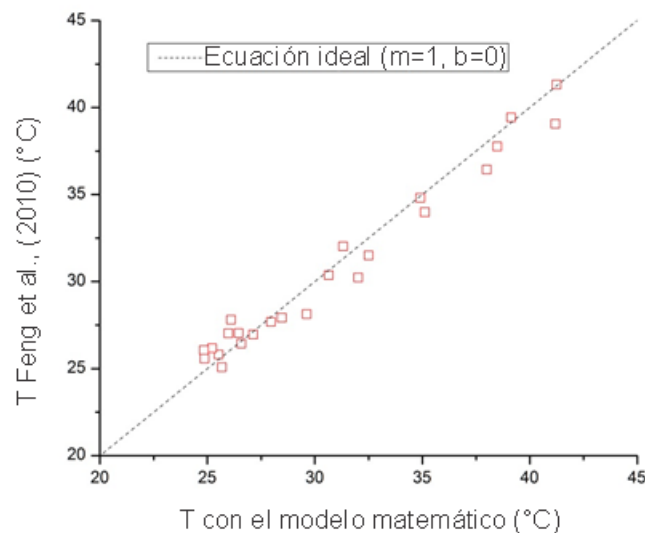


Figura 7.3. Comparación de las temperaturas de la capa verde obtenida a partir de los resultados reportados por Feng et al., (2010) y con el modelo matemático.

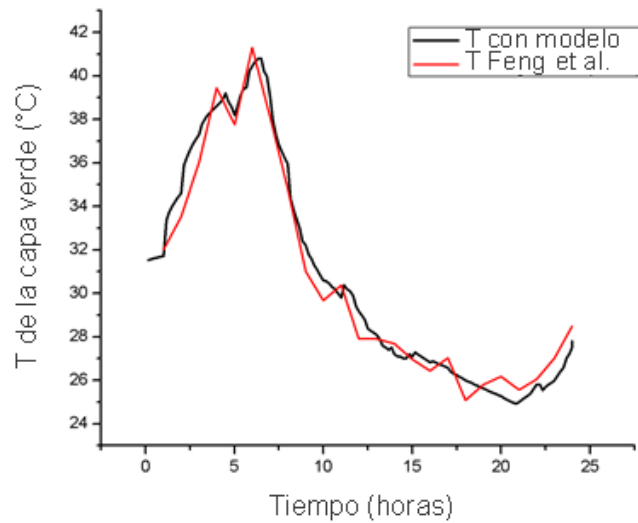


Figura 7.4. Comparación de la temperatura de la capa verde obtenida del modelo matemático propuesto y la temperatura obtenida en la literatura.

Como se ve en la Fig. 7.4, las dos temperaturas son similares, hay ligeras diferencias entre las dos en algún punto del día, esta diferencia es inferior a 1°C. Sin embargo, podemos ver que el modelo matemático propuesto en este trabajo, que tiene en cuenta que algunas de las capas que componen el STV están formadas por medios heterogéneos, se ajusta con bastante precisión a la temperatura de la capa verde calculada con datos experimentales reportados en la literatura.

Con la aplicación de ecuaciones para medios heterogéneos es posible describir la transferencia de calor a través de las capas que componen al STV; como la capa verde que está compuesta de plantas y el aire, así como la capa de sustrato compuesto de tierra y agua. Estas ecuaciones tienen la ventaja de que son fácilmente aplicables y contienen los efectos más importantes debido a las propiedades de cada material que compone la capa en estudio.

8. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

8.1. Discusión

Las Figs. 7.2-7.4 muestran que el modelo matemático se ajusta con bastante precisión a los datos experimentales así como a los datos publicados, el mayor error encontrado en las temperaturas es de aproximadamente 6% (que representa alrededor de 1°C) en ambos casos. Esto puede deberse a que las propiedades de la tierra no son uniformes, en otras palabras las propiedades de la tierra cambian dependiendo de la temperatura y la profundidad a las cuales son medidas.

Con la aplicación de ecuaciones para medios heterogéneos es posible describir la transferencia de calor a través de las capas que componen los techos verdes; como la capa verde compuesta de plantas y el aire, así como la capa de sustrato compuesto de tierra y agua. Estas ecuaciones tienen como ventaja que son fácilmente aplicables y contienen los efectos más importantes debido a las propiedades de cada material que compone la capa en estudio.

Los efectos importantes en las plantas no pueden ser tomados en cuenta si no se utilizan ecuaciones para medios heterogéneos. Estos efectos se pueden obtener ajustando la fracción volumétrica de los materiales que componen la capa.

Por otra parte es evidente que una mayor densidad de plantas en la capa verde hace que las propiedades efectivas tiendan a los valores de la planta, mientras que las propiedades para una menor densidad de plantas serán más similares a las del aire, un comportamiento similar también se observa en la capa de sustrato.

El modelo matemático propuesto en este trabajo puede ser utilizado para estimar la temperatura interior del edificio con STV y evaluar que tan cercana es a la temperatura de confort térmico y poder hacer una estimación de que cantidad de energía podría dejar de utilizarse por climatización. Así el modelo matemático también puede ser utilizado para la elaboración de normas de construcción de STV.

8.2. Conclusiones

En la primera hipótesis se planteó que “existen variables que influyen en mayor medida sobre el cambio de temperatura tanto en la capa verde como en la temperatura en el interior del edificio”. Con el fin de evaluar esta primera hipótesis se realizó un análisis de sensibilidad en el STV, utilizando uno de los modelos de transferencia de calor existentes. Se obtuvo gráficamente (Figs. 4.6-4.9) la influencia de las variables de entrada sobre la temperatura de la capa verde y la temperatura dentro del edificio. El análisis de sensibilidad mostró que el parámetro de entrada que mayor influencia tiene sobre la temperatura de la capa verde y la temperatura en el interior del edificio es la temperatura ambiente seguida de la radiación solar y la tasa de evapotranspiración, mientras que la velocidad del viento es el parámetro con menor impacto.

La segunda hipótesis del presente trabajo fue: “los STV pueden ser estudiados como sistemas que están divididos en capas y a su vez éstas capas se componen de medios heterogéneos a una escala pequeña”. Así durante el capítulo 5 se plantearon ecuaciones válidas para cada uno de los medios que componen una capa del STV.

Por otro lado, la tercera hipótesis sostiene: “por medio de un método de escalamiento se pueden plantear ecuaciones válidas para cada una de las capas compuestas por medios heterogéneos. Estas ecuaciones pueden ser acopladas por medio de condiciones de frontera para formar el modelo de transporte de energía en STV” para comprobar esto, se aplicó un

método de escalamiento para obtener ecuaciones válidas para cada una de las capas que componen al STV. Estas ecuaciones fueron introducidas en el modelo de transferencia de calor para el STV (capítulo 7), obteniéndose como resultado que las ecuaciones describen con un buen grado de exactitud la distribución de temperaturas que se tiene en el medio de cultivo, esto fue verificado con datos experimentales obtenidos en el LAC, el valor de R^2 fue de 0.9951 con un error máximo de 6.08%. Con esto queda demostrada la veracidad de las hipótesis 2 y 3.

La cuarta hipótesis plantea que: “el modelo de transporte de energía puede ser validado mediante datos experimentales obtenidos en un LAC”, sin embargo no es del todo cierta. Como se vio en el capítulo 4 una de las variables que mayor influencia tienen en la temperatura de la capa verde y en la temperatura en el interior del edificio es la radiación solar, por lo cual se tomaron datos publicados en revistas científicas para verificar que el modelo matemático propuesto en este trabajo describa con exactitud la transferencia de calor a través de los STV. Los resultados muestran que el modelo describe con buen grado de exactitud la temperatura de la capa verde (ver Figs. 7.3 y 7.4) debido a que el error máximo obtenido fue de 5.88% y el valor de R^2 fue de 0.9878.

8.3. Trabajo futuro

Algunos de los trabajos que se plantean en el futuro son:

- Modelar e implementar un sistema de aire acondicionado dentro del edificio acoplado al modelo de transferencia de calor del STV.
- Aplicaciones para ahorro de energía.
- Determinación de las propiedades en función de la posición (no isotrópico), y 2D, incluyendo efectos de paredes.
- Validación de normas existentes sobre la eficiencia energética en edificaciones para la envolvente de edificios, así como nuevas propuestas de normatividad.

APÉNDICE 1. GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS

Un número aleatorio es aquel que se obtiene al azar, de esta forma todo número tiene la misma probabilidad de ser elegido y su elección no depende de la elección de otro. Algunas de las aplicaciones en las cuales se requieren números aleatorios son:

- Simulación o método de Monte Carlo
- Muestreo
- Análisis numérico
- Programación
- Testing

En diversos trabajos han sido utilizados varios métodos para la generación de números aleatorios. En ocasiones se emplean procesos que son considerados al azar con el fin de generar una muestra aleatoria, sin embargo para el Método de Monte Carlo, que depende de miles y en ocasiones de millones de números aleatorios, el proceso de generación de números aleatorios se vuelve en general engorroso. En la mayoría de las aplicaciones son sustituidos los números aleatorios por números pseudo-aleatorios, que son deterministas pero parecen números aleatorios (Gentle, 2003).

Con frecuencia se desea generar números pseudo-aleatorios con una distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$ esto se denota como $U(0,1)$ que indica la distribución uniformemente distribuida absolutamente continua sobre el intervalo $(0,1)$. La ventaja de crear números aleatorios con esta distribución es que se pueden convertir de manera sencilla a números con otras distribuciones de interés.

En general para la generación de números pseudo-aleatorios primero se generan números enteros pseudo-aleatorios y posteriormente se escalan en el intervalo $(0,1)$. Si el rango de los números enteros generados es lo suficientemente grande, la granulidad resultante es poco relevante en el modelo de la distribución continua.

A continuación se describe el proceso para generar números aleatorios con distribución normal.

A1.1. Generación de Números Pseudo-Aleatorios Enteros

Existe una variedad de métodos que se han sugerido por diversos autores para la generación de números pseudo-aleatorios enteros. La experiencia ha demostrado que el método de congruencia es el instrumento preferible para generar números “aleatorios” en una computadora. La secuencia de números pseudo-aleatorios se denota por $\{X_n\}$, con $n=1,2,3\dots$. El método de congruencia de la generación de números pseudo-aleatorios enteros está dada por (Abramowitz and Stegun, 1964):

$$X_{n+1} = (aX_n + b) \pmod{T} \tag{A1.1}$$

donde b y T son relativamente primos, \pmod{T} representa el módulo de T . La elección de T se determina por la capacidad de la computadora. Los parámetros a y b se eligen de tal manera que:

1. La secuencia resultante $\{X_n\}$ posee las propiedades estadísticas deseadas de los números aleatorios.

2. El periodo de la secuencia sea lo más largo posible.
3. La velocidad de la generación debe de ser rápida.

Para la generación de números aleatorios es necesario contar una semilla X_0 que es el primer número aleatorio de la secuencia y debe de cumplir básicamente con las siguientes características: no debe de ser cero y no debe de ser un número par.

A1.2. Escalamiento de Números Pseudo-Aleatorios

Una vez que han sido generados los números pseudo-aleatorios enteros a partir de la Ec. (A1.1), estos deben de ser distribuidos uniformemente en el espacio $U(0,1)$ para lo cual se utiliza la siguiente expresión:

$$R_n = \frac{X_n}{T+1} \quad (\text{A1.2})$$

donde R_n es el número pseudo-aleatorio en el espacio $U(0,1)$ y X_n es el número pseudo-aleatorio generado previamente.

Los valores empleados para la generación de números aleatorios son: $T = 2^{31} - 1$, $X_0 = 123457$, $a = 7^5$ y $b = 0$. Por lo tanto, el periodo p es $2^{31} - 2$. Estos datos son los que toma el IMSL para la generación de números pseudo-aleatorios. En una muestra de 90,000 números pseudo-aleatorios no se encontraron valores recurrentes. Esta muestra generada se encuentra uniformemente distribuida en el intervalo $(0,1)$ como se ilustra en la Fig. A1.1.

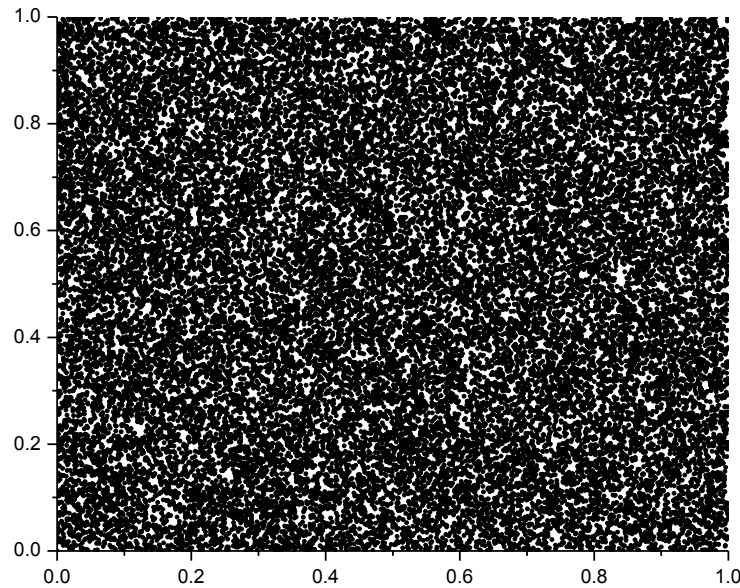


Figura A1.1. Números pseudo-aleatorios distribuidos uniformemente en el espacio $(0,1)$.

A1.2.1. Distribución normal

A la muestra de variables pseudo-aleatorias generada con distribución uniforme en el espacio se aplica una transformación de variables para convertirla en una muestra con una distribución diferente. Para convertir cada variable pseudo-aleatoria uniforme a una no uniforme puede ser utilizado un método de secuencia de uniformes que requiere una secuencia independiente, de números pseudo-aleatorios, a la transformada.

Para algunas distribuciones, puede haber muchas opciones de algoritmos para la transformación de números pseudo-aleatorios a una distribución diferente. Los algoritmos difieren en velocidad, exactitud, requerimientos de almacenamiento y complejidad de codificación. Una de las distribuciones más utilizadas es la distribución normal.

Los números pseudo-aleatorios generados uniformemente distribuidos en el espacio $U(0,1)$ deben de ser convertidos en variables aleatorias continuas con distribución normal $N(0,1)$, cuya característica es que la media es cero ($\bar{X} = 0$) y la desviación estándar es igual a uno ($s = 1$).

Existen varios métodos para la transformación de variables pseudo-aleatorias uniformes a variables pseudo-aleatorias normales. Un método sencillo y que ofrece buenos resultados es

el método de Box-Muller que surge de una transformación polar: si U_1 y U_2 se distribuyen de forma independientes como $U(0,1)$, entonces:

$$X_1 = \sqrt{-2\log(U_1)} \cos(2\pi U_2) \quad (\text{A1.3})$$

$$X_2 = \sqrt{-2\log(U_1)} \sin(2\pi U_2) \quad (\text{A1.4})$$

Por lo tanto, X_1 y X_2 se distribuyen de forma independientes como $N(0,1)$. Los números pseudo-aleatorios con distribución $U(0,1)$ se transforman por el método de Box-Muller a números pseudo-aleatorios con distribución $N(0,1)$. La Fig. A1.2 muestra la estructura que tienen estos números aleatorios con distribución normal.

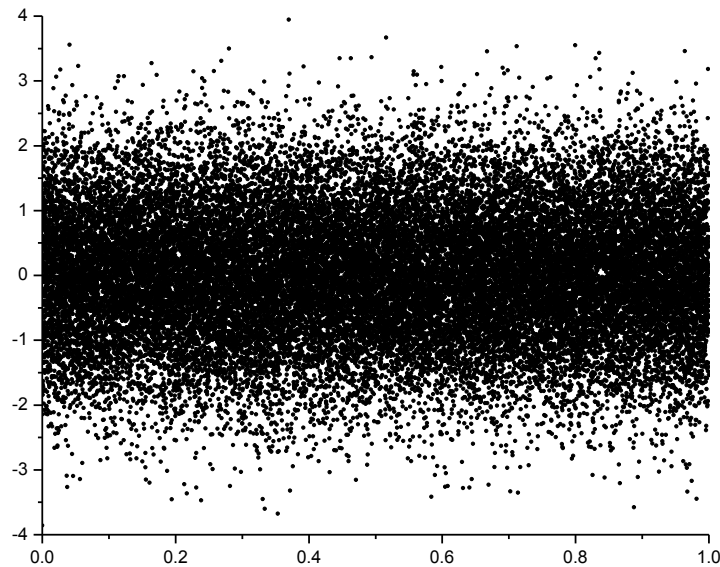


Figura A1.2. Estructura de los números pseudo-aleatorios con distribución normal $N(0,1)$.

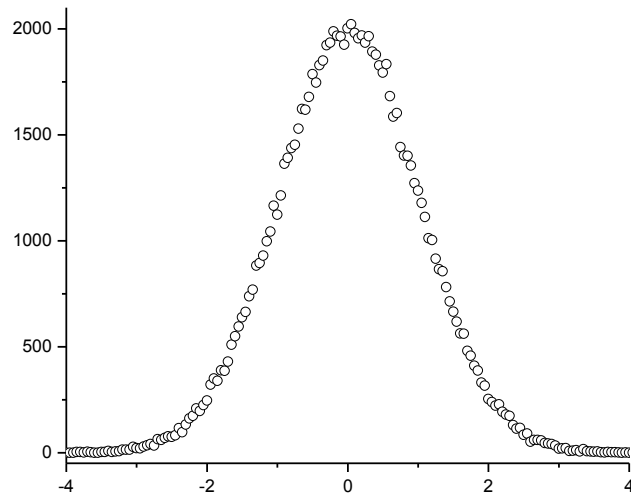


Figura A1.3. Función de densidad con distribución normal estimada a partir de una muestra de 100,000 variables pseudo-aleatorias.

La Fig. A1.3 muestra la función de densidad de los números psuedo-aleatorios generados en el espacio $N(0,1)$.

APÉNDICE 2. MÉTODO DE SOLUCIÓN NUMÉRICO

En ciencia y la tecnología se describen fenómenos reales mediante modelos matemáticos. El estudio y análisis de los modelos matemáticos permite un conocimiento más profundo de los fenómenos, así como de su evolución en el futuro o su historia en el pasado. Desafortunadamente, no siempre es posible aplicar métodos analíticos clásicos, para hallar la solución de los modelos, por diferentes razones:

- No se adecúan al modelo concreto.
- Su aplicación resulta excesivamente compleja.
- La solución formal es tan complicada que hace imposible cualquier interpretación posterior.
- Simplemente no existen métodos analíticos capaces de proporcionar soluciones al problema.

En estos casos son útiles los métodos numéricos, que mediante una labor de cálculo más o menos intensa, conducen a soluciones aproximadas. El importante esfuerzo de cálculo que implica la mayoría de estos métodos hace que su uso esté íntimamente ligado al empleo de computadoras.

Algunos de los métodos numéricos empleados para resolver modelos matemáticos que contienen ecuaciones diferenciales son: Euler, Taylor, Runge-Kutta, Adams-Bashford, Adams-Moulton, entre otros.

En la presente sección se estudia el método del volumen de control.

A2.1. Método de Volumen de Control

En el método numérico de volumen de control consiste en dividir el dominio de cálculo en un cierto número de volúmenes que no se traslapan entre sí, de tal manera que se rodea a cada punto de la malla. El método consiste en la integración de la ecuación diferencial sobre el volumen de control, con el fin de realizar ciertas suposiciones válidas a esa escala. Los segmentos de perfiles expresan la variación de algún parámetro entre los puntos de la malla, estos se usan para evaluar las integrales requeridas. A continuación se muestran algunos ejemplos.

A2.1.1. Solución numérica en estado estacionario y unidimensional

A continuación se presenta como se aplica el método del volumen de control considerando conducción de calor en estado estacionario y en una dirección:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \quad (\text{A2.1})$$

donde k es la conductividad térmica, T es la temperatura y S es el calor generado por unidad de volumen.

Para derivar la forma discreta de la ecuación se emplea un esquema como el que se ilustra en la Fig. A2.1 donde los puntos en la malla son nombrados según las coordenadas cardinales siendo el punto P el centro, la distancia que separa a W de P se denomina $(\delta x)_W$ y la distancia que separa P de E se denomina $(\delta x)_E$ asimismo los puntos de la cuadrícula w y e están separados entre sí una distancia Δx .

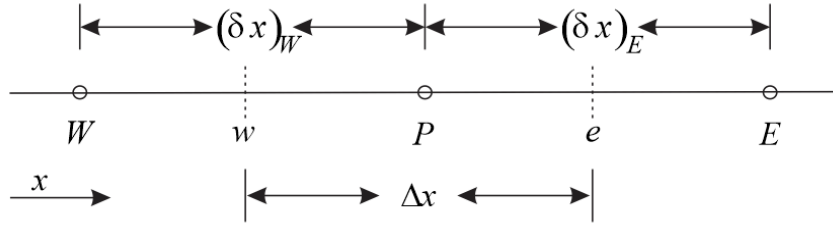


Figura A2.1. Esquema del volumen de control unidimensional.

Así al integrar la Ec. (A2.1) sobre el volumen de control se tiene:

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dx + \int_w^e S dx = 0 \quad (\text{A2.2})$$

Resolviendo la primera integral del lado izquierdo se tiene:

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(k \frac{dT}{dx} \right)_w + \int_w^e S dx = 0 \quad (\text{A2.3})$$

Sin embargo es posible sustituir los dos primeros términos de la Ec. (A2.3) por una aproximación considerando que es válido geoméricamente lo que se muestra en la Fig. A2.2.

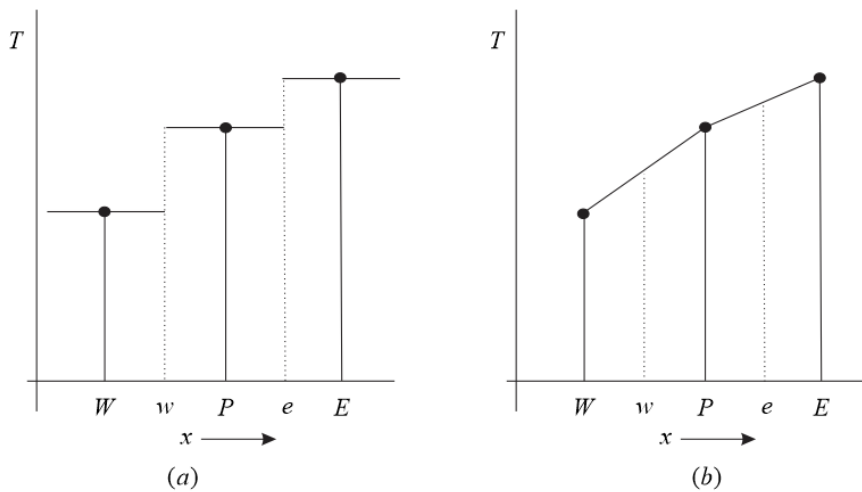


Figura A2.2. Dos ejemplos de perfiles (a) perfil escalonado, (b) perfil lineal por tramos.

En la Fig. A2.2a se muestra un perfil escalonado, para este perfil la pendiente dT/dx no está definida en las caras del volumen de control, es decir en w o e . La Fig. A2.2b no tienen la dificultad anterior ya que se emplea una función de interpolación lineal entre los puntos de la cuadrícula.

Por ejemplo, la derivada de la temperatura con respecto a x en el punto e puede ser aproximada por la diferencia de temperaturas entre los puntos E y P sobre la distancia que se encuentran separados estos dos puntos $(\delta x)_E$ (Fig. A2.1). Un tratamiento similar se aplica para el punto w obteniéndose:

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e = \frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_E} \quad (\text{A2.4})$$

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_w = \frac{k_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_W} \quad (\text{A2.5})$$

sustituyendo las Ecs. (A2.4) y (A2.5) en la Ec. (A2.3) e integrando se tiene:

$$\frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_E} - \frac{k_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_W} + \bar{S} \Delta x = 0 \quad (\text{A2.6})$$

La Ec. (A2.6) es la ecuación discretizada de conducción de calor en estado estacionario y una sola dirección. Renombrando los términos de la siguiente forma:

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_E} \quad (\text{A2.7})$$

$$a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_W} \quad (\text{A2.8})$$

$$a_p = a_E + a_W \quad (\text{A2.9})$$

$$b = \bar{S} \Delta x \quad (\text{A2.10})$$

así desarrollando la Ec. (A2.6) se tiene:

$$\frac{k_e T_e}{(\delta x)_E} - \frac{k_e T_p}{(\delta x)_E} + \frac{k_w T_w}{(\delta x)_W} - \frac{k_w T_p}{(\delta x)_W} + \bar{S} \Delta x = 0 \quad (\text{A2.11})$$

sustituyendo las Ecs. (A2.7), (A2.8) y (A2.10) en (A2.11) se tiene:

$$a_E T_e - a_E T_p + a_W T_w - a_W T_p + b = 0 \quad (\text{A2.12})$$

reacomodando la Ec. (A2.12) se tiene:

$$a_E T_e + a_W T_w + (-a_E T_p - a_W T_p) + b = 0 \quad (\text{A2.13})$$

$$(a_E T_p + a_W T_p) = a_E T_e + a_W T_w + b \quad (\text{A2.14})$$

sustituyendo la Ec. (9) en la Ec. (14) se tiene finalmente:

$$a_p T_p = a_E T_e + a_W T_w + b \quad (\text{A2.15})$$

A2.1.2. Solución numérica en estado transitorio y unidimensional

A continuación se presenta como se aplica el método del volumen de control para un caso unidimensional transitorio de conducción de calor:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + S \quad (\text{A2.16})$$

Al integrar sobre el volumen de control en el tiempo t y $t + \Delta t$, considerando un valor de ρC_p constante se tiene:

$$\rho C_p \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e S dx dt \quad (\text{A2.17})$$

Integrando el término del lado izquierdo de la Ec. (17) se tiene:

$$\rho C_p \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx = \rho C_p \int_w^e (T_P^{t+\Delta t} - T_P^t) dx \quad (\text{A2.18})$$

pero considerando que $(T_P^{t+\Delta t} - T_P^t)$ es constante con respecto a x , al integrar el lado derecho de la Ec. (18) de e a w se tiene que la integral es igual a Δx , como se ilustra en la Fig. 1, por lo tanto:

$$\rho C_p \int_w^e (T_P^{t+\Delta t} - T_P^t) dx = \rho C_p (T_P^{t+\Delta t} - T_P^t) \Delta x \quad (\text{A2.19})$$

ahora integrando el primer término del lado derecho de la Ec. (17) se tiene:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(k \frac{dT}{dx} \right)_w \right] dt \quad (\text{A2.20})$$

considerando que al igual que en el caso anterior son válidas las aproximaciones (A2.4) y (A2.5) se tiene:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(k \frac{dT}{dx} \right)_w \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_E} - \frac{k_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_W} \right] dt \quad (\text{A2.21})$$

por otra parte se puede definir la integral de T_P de la siguiente forma:

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P dt = \left[f T_P^{t+\Delta t} + (1-f) T_P^t \right] \Delta t \quad (\text{A2.22})$$

aplicando la Ec. (A2.22) a la Ec. (A2.21) se tiene:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_E} - \frac{k_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_E} \right] dt = \\ f \left[\frac{k_e (T_E^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t})}{(\delta x)_E} - \frac{k_w (T_P^{t+\Delta t} - T_W^{t+\Delta t})}{(\delta x)_W} \right] \Delta t \\ + (1-f) \left[\frac{k_e (T_E^t - T_P^t)}{(\delta x)_E} - \frac{k_w (T_P^t - T_W^t)}{(\delta x)_W} \right] \Delta t \end{aligned} \quad (\text{A2.22})$$

integrando el segundo término del lado derecho de la Ec. (A2.17) se tiene:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e S dx dt = \bar{S} \Delta x \Delta t \quad (\text{A2.23})$$

sustituyendo las Ecs. (A2.19), (A2.22) y (A2.23) en la Ec. (A2.17) se tiene:

$$\begin{aligned} \rho C_p (T_P^{t+\Delta t} - T_P^t) \Delta x = f \left[\frac{k_e (T_e^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t})}{(\delta x)_E} - \frac{k_w (T_P^{t+\Delta t} - T_w^{t+\Delta t})}{(\delta x)_W} \right] \Delta t \\ + (1-f) \left[\frac{k_e (T_e^t - T_P^t)}{(\delta x)_E} - \frac{k_w (T_P^t - T_w^t)}{(\delta x)_W} \right] \Delta t + \left[f \bar{S}^{t+\Delta t} + (1-f) \bar{S}^t \right] \Delta x \Delta t \end{aligned} \quad (\text{A2.24})$$

de forma general se tiene:

$$a_p T_P = a_E \left[f T_E^{t+\Delta t} + (1-f) T_E^t \right] + a_W \left[f T_W^{t+\Delta t} + (1-f) T_W^t \right] + \left[a_P^0 - (1-f) a_E - (1-f) a_W \right] T_P^0 \quad (\text{A2.25})$$

donde:

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} \quad (\text{A2.26})$$

$$a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w} \quad (\text{A2.27})$$

$$a_P^0 = \rho C_p \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (\text{A2.28})$$

$$a_P = f a_E + f a_W + a_P^0 \quad (\text{A2.29})$$

cuando $f = 0$ se tiene:

$$a_p T_P = a_E T_E^t + a_W T_W^t + \left(a_P^0 - a_E - a_W \right) T_P^0 \quad (\text{A2.30})$$

cuando $f = 1$:

$$a_p T_P = a_E T_E^{t+\Delta t} + a_W T_W^{t+\Delta t} + b \quad (\text{A2.31})$$

donde:

$$b = S_C \Delta x + a_P^0 T_P^t \quad (\text{A2.32})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_P^0 - S_P \Delta x \quad (\text{A2.33})$$

cuando $f = 0$ la Ec. (A2.24) se reduce a:

$$\rho C_P (T_P^{t+\Delta t} - T_P^t) \Delta x = \left[\frac{k_e (T_e^t - T_P^t)}{(\delta x)_E} - \frac{k_e (T_P^t - T_w^t)}{(\delta x)_E} \right] \Delta t + \bar{S}^t \Delta x \Delta t \dots (\text{A2.34})$$

A2.1.3. Solución numérica bidimensional en estado transitorio

A continuación se presenta como se aplica el método del volumen de control para conducción de calor en estado transitorio y dos dimensiones:

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(k \frac{dT}{dy} \right) + S \quad (\text{A2.35})$$

En la Fig. A2.3 se muestra la cuadrícula empleada para discretizar la ecuación de conducción de calor en dos dimensiones aplicando el método del volumen de control.

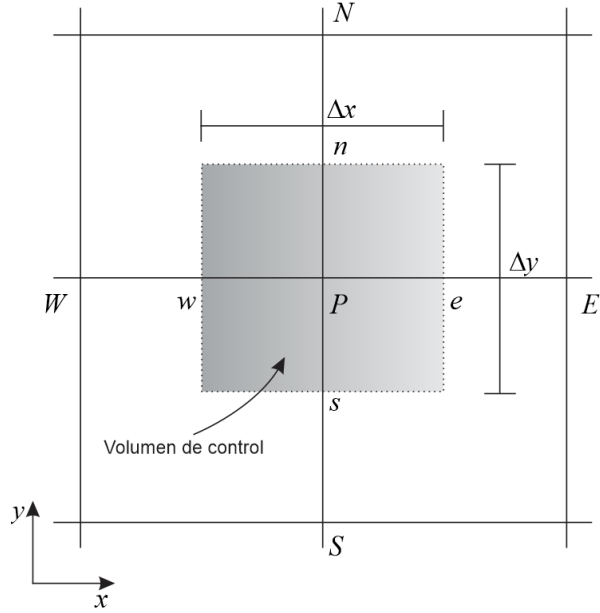


Figura A2.3. Volumen de control para el caso de conducción de calor en dos dimensiones.

Integrando sobre el volumen de control $\Delta x \Delta y$ y en el intervalo de tiempo t a $t + \Delta t$ se tiene:

$$\begin{aligned} \rho C p \int_s^n \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx dy &= \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dx dy dt \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{d}{dy} \left(k \frac{dT}{dy} \right) dy dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e S dx dy dt \end{aligned} \quad (\text{A2.36})$$

al integrar el término del lado izquierdo se tiene:

$$\rho C p \int_s^n \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx dy = \rho C p (T_P^{t+\Delta t} - T_P^t) \Delta x \Delta y \quad (\text{A2.37})$$

el primer del lado derecho queda:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dx dy dt = \left[\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(k \frac{dT}{dx} \right)_w \right] \Delta y \Delta t \quad (\text{A2.38})$$

$$\left[\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(k \frac{dT}{dx} \right)_w \right] \Delta y \Delta t = \left[\frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_E} - \frac{k_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_W} \right] \Delta y \Delta t \quad (\text{A2.39})$$

para el segundo término del lado derecho se tiene:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{d}{dy} \left(k \frac{dT}{dy} \right) dy dx dt = \left[\frac{k_n (T_N - T_P)}{(\delta x)_N} - \frac{k_s (T_P - T_S)}{(\delta x)_S} \right] \Delta x \Delta t \quad (\text{A2.40})$$

al integrar el tercer término del lado derecho se tiene:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e S dx dy dt = \bar{S} \Delta x \Delta y \Delta t \quad (\text{A2.41})$$

sustituyendo las Ecs. (A2.37), (A2.39), (A2.40) y (A2.41) en la Ec. (A2.36) se tiene:

$$\begin{aligned} \rho C_p (T_P^{t+\Delta t} - T_P^t) \Delta x \Delta y &= \left[\frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_E} - \frac{k_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_W} \right] \Delta y \Delta t \\ &+ \left[\frac{k_n (T_N - T_P)}{(\delta x)_N} - \frac{k_s (T_P - T_S)}{(\delta x)_S} \right] \Delta x \Delta t + \bar{S} \Delta x \Delta y \Delta t \end{aligned} \quad (\text{A2.42})$$

o bien, puede expresarse como:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b \quad (\text{A2.43})$$

donde:

$$a_E = \frac{k_e \Delta y}{(\delta x)_e} \quad (\text{A2.44})$$

$$a_W = \frac{k_w \Delta y}{(\delta x)_w} \quad (\text{A2.45})$$

$$a_N = \frac{k_n \Delta x}{(\delta y)_n} \quad (\text{A2.46})$$

$$a_S = \frac{k_s \Delta x}{(\delta y)_s} \quad (\text{A2.47})$$

$$a_P^0 = \rho C_p \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (\text{A2.48})$$

$$b = S_C \Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0 \quad (\text{A2.49})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y \quad (\text{A2.50})$$

BIBLIOGRAFÍA

- Abramowitz M., and Stegun I.A., (1964) Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, National Bureau of Standards Applied Mathematics. Series – 55.
- Arroyo-Cabañas F.G., Aguillón-Martínez J.E., Ambríz-García J.J., and Canizal G. (2009). Electric energy saving potential by substitution of domestic refrigerators in Mexico. Energy Policy. doi:10.1016/j.enpol.2009.06.032.
- Ayata T., Tabares-Velasco P.C., and Srebric J. (2011). An investigation of sensible heat fluxes at a green roof in a laboratory setup. Building and Environment, 46: 1851-1861.
- Berndtsson J. C., Bengtsson L., Jinno K., (2009) Runoff water quality from intensive and extensive vegetated roofs, Ecological Engineering, 35: (3) 369–380.
- Bianchini F. and Hewage K., (2012) Probabilistic social cost-benefit analysis for green roofs: A lifecycle approach. Building and Environment, 58: 152-162.
- Carter T., and Keeler A. (2008). Life-cycle cost–benefit analysis of extensive vegetated roof systems. Journal of Environmental Management, 87: 350-363.
- Campbell G.S., and Norman J.M., (2000), An introduction to environmental biophysics.

- Castleton H. F., Stovin V., Beck S. B. M., Davison J. B., (2010) Green roofs; building energy savings and the potential for retrofit, *Energy and Buildings*, 42: 1582–1591.
- Chan A.L.S., and Chow T.T., (2013) Energy and economic performance of green roof system under future climatic conditions in Hong Kong. *Energy and Buildings*, 64: 182–198.
- Clark C., Adriaens P., Talbot F., (2008) Green roof valuation: a probabilistic economic analysis of environmental benefits, *Environ. Sci. Technol.*, 42: 2155-2161.
- Deardorff J.W., (1978) Efficient prediction of ground surface temperature and moisture, with inclusion of a layer of vegetation. *Journal of Geophysical Research*: 83, 1889–903.
- del Barrio E.P. (1998) Analysis of the green roofs cooling potential in buildings. *Energy and Buildings*, 27: 179-193.
- Denardo J., (2003) Green roof mitigation of stormwater and energy usage, MS thesis, Dept. of Horticulture, Pennsylvania State University, PA.
- Domínguez-Muñoz F., Cejudo-López J. M. and Carrillo-Andrés A., (2010) Uncertainty in peak cooling load calculations. *Energy and Buildings*, 42: 1010-1018.
- Espinosa-Paredes G. (2010) Instantaneous equations for multiphase flow in porous media without length-scale restrictions using a non-local averaging volume. *Nuclear Engineering and Design*, 240: 1160-1185.
- Espinosa-Paredes G., (2012). A derivation of the nonlocal volumen-averaged equations for two-phase flow transport. *Science and Technology of Nuclear Installations*, DOI: 10.1155/2012/890815.
- Espinosa-Paredes G., Castillo-Jiménez V., Herranz-Puebla, and Vázquez-Rodríguez R., (2013) Analysis of the interfacial heat transfer process in a pebble fuel. *Progress in Nuclear Energy*, 65: 15–31.
- Feng C., Meng Q., and Zhang Y. (2010) Theoretical and experimental analysis of the energy balance of extensive green roofs. *Energy and Buildings*, 42: 959-965.
- Feng Y., Chen Q.G., (1999) Thermal process of roof-plants. *Acta Energiæ Solaris Sinica*, 20: (3) 311–315.

- Gentle J.E., (2003) *Statistics and computing, Random number generation and Monte Carlo Methods*. Springer.
- Getter, K.L., Rowe, D.B., Andresen, J.A., (2007) Quantifying the effect of slope on extensive green roof stormwater retention. *Ecological. Engineering*, 31: 225–231.
- Holloway C.L., and Kuester E.F., (2013) Corrections to the classical continuity boundary conditions at the interface of a composite medium. *Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications* 11: 397–422.
- Hong T., Kim J., Koo C., (2012) LCC and LCCCO₂ analysis of green roofs in elementary schools with energy saving measures, *Energy and Buildings*, 45: 229-239.
- Jaffal I., Ouldboukhitine S.E., and Belarbi R., (2012) A comprehensive study of the impact of green roofs on building energy performance. *Renewable Energy*, 43: 157-164.
- Jensen M.E., Burman R.D. and Allen R.G., (1990) *Evapotranspiration and irrigation water requirements*, manual no. 70. New York: American Society of Civil Engineers.
- Jim C.Y., and He H., (2010) Coupling heat flux dynamics with meteorological conditions in the green roof ecosystem. *Ecological Engineering*, 36: 1052-1063.
- Jim C.Y., and Tsang S.W., (2011) Modeling the heat diffusion process in the abiotic layers of green roofs. *Energy and Buildings*, 43: 1341–1350.
- Khayet M., Imdakm A.O. and Matsuura T., (2010) Monte Carlo simulation and experimental heat and mass transfer in direct contact membrane distillation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53: 1249-125.
- Kosareo L., and Ries R., (2007) Comparative environmental life cycle assessment of green roofs. *Building and Environment*, 42: 2606-2613.
- Kotsiris G., Androutsopoulos A., Polychroni E., and Nektarios P.A., (2012) Dynamic U-value estimation and energy simulation for green roofs. *Energy and Buildings*, 45: 240-249.
- Kumar R., and Kaushik S.C., (2005): Performance evaluation of green roof and shading for thermal protection of buildings. *Building and Environment*, 40: 1505-1511.

- Kumbaroglu G. and Madlener R., (2012) Evaluation of economically optimal retrofit investment options for energy savings in buildings. *Energy and Buildings*, 49: 327-334.
- Li J., Wai O., Li Y.S., Zhan J., Ho A., Li J., Lam E., (2010) Effect of green roof on ambient CO2 concentration, *Building and Environment*, 45: 2644-2651.
- Li C.-Z, Shia Y.-M., Liu S., Zheng Z.-L. and Liu Y.-C., (2010) Uncertain programming of building cooling heating and power (BCHP) system based on Monte-Carlo method. *Energy and Buildings*, 42: 1369-1375.
- Lin C.Y., Chen F., Huang J.C., Chen W.C., Liou Y.A., Chen W.N., and Liu S.C., (2008) Urban heat island effect and its impact on boundary layer development and land-sea circulation over northern Taiwan. *Atmospheric Environment*, 42: 5635-5649.
- Liu T.-C., Shyu G.-S., Fang W.-T., Liu S.-Y., and Cheng B.-Y., (2012) Drought tolerance and thermal effect measurements for plants suitable for extensive green roof planting in humid subtropical climates. *Energy and Buildings*, 47: 180-188.
- Lomas K. J. and Eppel H. (1992). Sensitivity analysis techniques for building thermal simulation programs. *Energy and Buildings*, 19: 21-44.
- Macdonald I. A. and Clarke J. A., (2007) Applying uncertainty considerations to energy conservation equations. *Energy and Buildings*, 39: 1019-1026.
- Mathioulakis E., Panaras G. and Belessiotis V., (2011) Estimation of uncertainties in indirect humidity measurements. *Energy and Buildings*, 43: 2806-2812.
- Madre F., Vergnes A., Machon N., and Clergeau P., (2013) A comparison of 3 types of green roof as habitats for arthropods. *Ecological Engineering*, 57: 109-117.
- Meng Q., and Hu W., (2005) Roof cooling effect with humid porous medium. *Energy and Buildings*, 37: 1-9.
- Meng Q.L., Zang Y., and Zang L., (2006) Measurement of the equivalent thermal resistance of rooftop lawns in a hot-climate wind tunnel, *Journal of Harbin Institute of Technology (New Series)* 13 (Suppl.) 53-56.
- Mentens J., Raes D., Hermy M., (2006) Green roofs as a tool for solving the rainwater runoff problem in the urbanized 21st century?, *Landscape and Urban Planning*, 77: 217-226.

- Mitzenmacher M. and Upfal E., (2005) *Probability, Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*, Cambridge University Press.
- Niachou A., Papakonstantinou K., Santamouris M., Tsangrassoulis A., and Mihalakakou G., (2001), Analysis of the green roof thermal properties and investigation of its energy performance, *Energy and Buildings*, 33: (7) 719–729.
- Ökten G. and Göncü A. (2011). Generating low-discrepancy sequences from the normal distribution: Box–Muller or inverse transform? *Mathematical and Computer Modelling* 53: 1268-1281.
- Onmura S., Matsumoto M., and Hokoi S., (2001) Study on evaporative cooling effect of roof lawn gardens. *Energy Buildings*, 33: 653-666.
- Pashah S., Arif A.F.M., Zubair S.M., Inam M., (2013) The impact of fin profile and interface condition on performance characteristics of heat sinks. *Applied Thermal Engineering* 55: 102-112.
- Patankar V. Suhas. (1980) *Numerical heat transfer and fluid flow*. McGraw-Hill Compay. United States of Amercia.
- Pérez G., Rincón L., Vila A., González J.M., and Cabeza L.F., (2011) Green vertical systems for buildings as passive systems for energy savings. *Applied Energy*, 88: 4854-4859.
- Pérez G., Vila A., Rincón L., Solé C., and Cabeza L.F. (2012). Use of rubber crumbs as drainage layer in green roofs as potential energy improvement material. *Applied Energy*, 97: 347-354.
- Petterson T. D., (1994) Variation of energy consumption in dwellings due to climate building and inhabitants. *Energy and Buildings*, 21: 209-218.
- Renterghem T.V., and Botteldooren D., (2009) Reducing the acoustical façade load from road traffic with green roofs. *Building and Environment*, 44: 1081–1087.
- Sailor D.J., (2008) A green roof model for building energy simulation programs, *Energy and Buildings*, 40: 1466–1478
- Sailor D.J., and Hagos M. (2011). An updated and expanded set of thermal property data for green roof growing media. *Energy and Buildings*, 43: 2298-2303.
- Saito I., Ishihara O., Katayama T., (1990-1991) Study of the green areas on the thermal environment in an urban area, *Energy and Buildings*, 15: (16) 493-498.

- Saiz S., Kennedy C., Bass B., and Pressnail K., (2006) Comparative life cycle assessment of standard and green roofs. *Environmental Science and Technology*, 40: 4312-4316.
- Santamouris M., (2012) Cooling the cities – A review of reflective and green roof mitigation technologies to fight heat island and improve comfort in urban environments. *Sol. Energy* <http://dx.doi.org/10.1016/j.solener.2012.07.003>
- Soratana K. and Marriott J., (2010) Increasing innovation in home energy efficiency: Monte Carlo simulation of potential improvements, *Energy and Buildings*, 42: 828-833.
- Speak A.F., Rothwell J.J, Lindley S.J. and Smith C.L., (2013) Rainwater runoff retention on an aged intensive green roof. *Science of the Total Environment*, 461–462: 28–38.
- Stadlober E., (1990) The ratio of uniforms approach for generating discrete random variates. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 31: 181-189.
- Stovin V., Vesuviano G., and Kasmin H., (2012) The hydrological performance of a green roof test bed under UK climatic conditions. *Journal of Hydrology*, 414-415: 148-161.
- Tabares–Velasco and PC Srebric J., (2009) The role of plants in the reduction of heat flux through green roofs: laboratory experiments. *ASHRAE Transactions*. 2 115.
- Takebayashi H., and Moriyama M. (2007). Surface heat budget on green roof and high reflection roof for mitigation of urban heat island. *Building and Environment* 42. 2971-2979.
- Teemusk A., and Mander U., (2009) Green roof potential to reduce temperature fluctuations of a roof membrane: A case study from Estonia. *Building and Environment*, 44: 643-650.
- Theodosiou T.G., (2003) Summer period analysis of the performance of a planted roof as a passive cooling technique. *Energy and Buildings*, 35: 909-917.
- Tsang S.W., and Jim C.Y., (2011) Theoretical evaluation of thermal and energy performance of tropical green roofs. *Energy*, 36: 3590-3598.

- Walls III J. and Smith M. R., (1998) Life Cycle Cost Analysis in Pavement Design, FHWA-SA- 98-079, Federal Highway Administration, Washington, DC.
- Wang L., Mathew P. and Pang X., (2012) Uncertainties in energy consumption introduced by building operations and weather for a medium-size office building. *Energy and Buildings*, 53: 152-158.
- Watson, D.J., (1947) Comparative physiological studies in the growth of field crops. I. Variation in net assimilation rate and leaf area between species and varieties, and within and between years. *Ann. Botany* 11, 41–76.
- Weng Q., and Yang S., (2004) Managing the adverse thermal effects of urban development in a densely populated Chinese city. *Journal of Environmental Management*, 70: 145-156.
- Wilmers F., (1988) Green for Melioration or Urban Climate, *Energy and Buildings*, 11: 289-299.
- Wong J.K.W. and Lau L.S. –K., (2013) From the ‘urban heat island’ to the ‘green island’? A preliminary investigation into the potential of retrofitting green roofs in Mongkok district of Hong Kong. *Habitat International*, 39: 25–35.
- Wong N.H., and Chen Y., (2005) Study of green areas and urban heat island in a tropical city. *Habitat International*, 29: 547-558.
- Wong N.H., Chen Y., Ong C.L., and Sia A., (2003) Investigation of thermal benefits of rooftop garden in the tropical environment. *Building and Environment*, 38: 261-270.
- Wong N.H., Tay S.F., Wong R., Ong C.L., and Sia A., (2003) Life cycle cost analysis of rooftop gardens in Singapore. *Building and Environment*, 38: 499-509.
- Wood B. (2009). The role of scaling law in upscaling. *Advances in Water Resources*, 32: 723-735.
- Yang H. S., Kang J., and Choi M. S., (2012) Acoustic effects of green roof systems on a low-profiled structure at street level. *Building and Environment*, 50: 44-55.
- Yang J., Yu Q., Gong P., (2008) Quantifying air pollution removal by green roofs in Chicago, *Atmospheric Environment*, 42: (31) 7266–7273

- Ye X., Luo Y., Gao X., Zhu S., (2011) Design and evaluation of a thermochromic roof system for energy saving based on poly(N-isopropylacrylamide) aqueous solution, *Energy and Buildings*, 48: 175-179.
- Zhu Y., Tao Y. and Rayegan R., (2012) A comparison of deterministic and probabilistic life cycle cost analyses of ground source heat pump (GSHP) applications in hot and humid climate. *Energy and Buildings*, 55: 312–321.
- Zinzi M., and Agnoli S., (2011) Cool and green roofs. An energy and comfort comparison between passive cooling and mitigation urban heat island techniques for residential buildings in the Mediterranean region. *Energy Buildings*, doi:10.1016/j.enbuild.2011.09.024

Páginas de internet

- Capital verde. Sitio oficial del Gobierno del Distrito Federal. Disponible en:
<<http://www.capitalverde.df.gob.mx/azoteas.html>> [acceso 5.4.2012]
- Organización Mundial de la Salud. Sitio oficial de la OMS. Disponible en
<<http://www.who.int/es/>> [acceso 5.4.2012]
- Woller J. (1996) *The Basics of Monte Carlo Simulations*, Spring 1996; Disponible en:
<<http://www.chem.unl.edu/zeng/joy/mclab/mcintro.html>> [acceso 2009/Sep/25]