GUIA de estudio
para presentar examen
extraordinario de

2 3
90 6074

ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS

PROSPERO GARCIA M.
ANGEL VICTORIA R.
MIGUEL E. GONZALEZ C.

División de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería UNAM

PROPOSITO DE LA GUIA

Este material tiene por objeto orientar a los estudiantes que desean prepararse para presentar un examen extraordinario de la asignatura Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias.

La guía está destinada a los alumnos que ya han cursado la asignatura y que poseen ciertos conocimientos sobre la materia. LA GUIA NO PRETENDE SUSTITUIR A LOS CURSOS REGULARES, sino mejorar la preparación que el estudiante haya adquirido en ellos.

ESTRUCTURA DE LA GUIA

De cada tema del programa vigente de la asignatura se seleccionaron los conceptos fundamentales agrupándolos en bloques.

Cada uno de estos bloques contiene una *lista de conceptos* con sus respectivas referencias para localizarlos en los textos base; que son los siguientes:

- García Márquez Próspero, de la Lanza E. Carlos.
  APUNTES DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS
  Facultad de Ingeniería, UNAM.
  1a. Edición, México 1983.

- Shepley L. Ross
  INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES
  Nueva Editorial Interamericana S.A. de C.V.
  3a. Edición, México 1982.

- Facultad de Ingeniería, UNAM.
  CUADERNO DE EJERCICIOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS
  1a. Edición, México 1981.

Estos textos deberán tenerse a la mano al utilizar la guía.

En cada uno de los bloques se presentan, además, algunos *ejemplos* que ilustran la aplicación de los conceptos.

Al término de cada tema se plantea un conjunto de *problemas propuestos*, para que el estudiante los resuelva y adquiera con ello la práctica necesaria en el manejo de los conceptos del tema.

Al final de la guía aparecen los resultados de algunos problemas propuestos, a fin de que el estudiante pueda compararlos con las respuestas que obtuvo.

INSTRUCCIONES PARA EL USO DE LA GUIA

2. Analice detenidamente los procedimientos que se siguieron para obtener la solución en los ejemplos, cerciorándose que ha comprendido claramente los razonamientos expuestos; esto puede lograrse reproduciendo el proceso de solución sin recurrir al texto.
3. Estudie los conceptos y los ejemplos del siguiente bloque, con las mismas indicaciones de los dos pasos anteriores.
4. Resuelva los problemas propuestos que se plantean al final de cada tema; en caso de que tenga dificultad para resolverlos, deberá estudiar nuevamente los conceptos del bloque e intentar una vez más resolver dichos problemas.

La guía está diseñada para servir como material de autoinstrucción; no obstante, si el estudiante no logra comprender algún concepto o no consigue resolver un problema, se le sugiere CONSULTAR A LOS ASESORES DE LA ASIGNATURA, quienes podrán orientarle al respecto.

SE REQUIERE 60 HORAS DE TRABAJO, aproximadamente, para realizar las actividades que se proponen en esta guía, recomendándose distribuirlas en un período de tres a seis semanas. Es de suma importancia que el estudiante programe su trabajo con la debida anticipación y que inicie el estudio de la guía CUANDO MENOS TRES SEMANAS ANTES DE LA REALIZACION DEL EXAMEN.

La elaboración de este trabajo estuvo a cargo de los señores profesores:

ING. PROSPERO GARCIA MARQUEZ

ING. ANGEL VICTORIA ROSALES

ING. MIGUEL E. GONZALEZ CARDENAS

quienes contaron con la asesoría pedagógica de las licenciadas IRMA HINOJOSA FELIX y MARIA CUAIRAN RUIDIAZ, de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad.

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS

NOVIEMBRE DE 1983

I ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

I.1 LA ECUACION DIFERENCIAL

Referencias: Apuntes de la materia, página 8

Ecuaciones Diferenciales. S.L. Ross, páginas 1 y 2

I.2 ORDEN DE UNA ECUACION DIFERENCIAL

Referencias: Apuntes, páginas 9 y 10

S.L. Ross, página 3

Cuaderno de ejercicios, problema I.1

I.3 LA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL

Referencias: Apuntes, páginas 14 y 15

S.L. Ross, páginas 3 y 4

Cuaderno de ejercicios, problema I.1

I.4 SOLUCION PARTICULAR Y SOLUCION GENERAL

Referencias: Apuntes, páginas 12, 13 y 14

I.5 RESOLUCION DE LA EC. DIF. LINEAL DE PRIMER ORDEN

Referencias: Apuntes, páginas 18, 19, 20 y 21

Cuaderno de ejercicios, problema I.5.a

Ejemplo 1

Obtener la solución general de la ecuación:

$$2xy' - y = 3x^2$$

Solución:

De I.2, I.3 y I.5 se deduce que la ecuación es lineal de primer orden y no homogénea, de la forma:

$$y' + P(x)\ y = q(x)$$

es decir:

$$y' - \frac{1}{2x}\ y = \frac{3x}{2} \qquad \ldots (1)$$

De I.5 la ecuación homogénea asociada es:

$$y' - \frac{1}{2x}y = 0$$

Resolviendo la ecuación homogénea por separación de variables:

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{2x} = 0$$

integrando:

$$\int\frac{dy}{y} - \int\frac{dx}{2x} = c_1$$

$$\ln y - \frac{1}{2}\ln x = c_1$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln x + c_1$$

obteniendo el antilogaritmo en ambos miembros:

$$y = e^{\ln x^{1/2} + c_1}$$

o bien:

$$y = cx^{1/2} \; ; \quad c = e^{c_1}$$

por lo tanto $y_c = cx^{1/2}$ es la solución de la ecuación homogénea asociada.

De I.5 la forma de la solución particular es:

$$y_p = v(x)\, x^{1/2} \qquad \ldots (2)$$

sustituyendo (2) en (1):

$$v(x)\,\frac{x^{-1/2}}{2} + x^{1/2}\,\frac{dv(x)}{dx} - \frac{v(x)\,x^{1/2}}{2x} = \frac{3}{2}x$$

simplificando:

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

integrando:

$$v(x) = x^{3/2} \qquad \ldots (3)$$

sustituyendo (3) en (2):

$$y_p = x^{3/2}x^{1/2} = x^2$$

finalmente la solución general pedida es:

$$y_G = y_c + y_p$$

esto es:

$$\boxed{y_G = cx^{1/2} + x^2}$$

SEGUNDO BLOQUE

I.6 RESOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL HOMOGENEA DE ORDEN n

Referencias: Apuntes, páginas 23-25, 30-35
(Ver nota)
S.L. Ross, páginas 101-112, 124-132

Cuaderno de ejercicios, problema I.2

I.7 METODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Referencias: Apuntes, páginas 25-27, 35-40
(Ver nota)
S.L. Ross, páginas 119-122, 136-140

Cuaderno de ejercicios, problemas I.3 y I.4

I.8 METODO DE VARIACION DE PARAMETROS

Referencias: Apuntes, páginas 40-45
S.L. Ross, páginas 154-161

Cuaderno de ejercicios, problemas I.5 b, c y d

Nota: *Para estudiar estos subtemas satisfactoriamente se pueden utilizar los apuntes o el libro de Ross, no es necesario utilizar las dos referencias.*

Ejemplo 2

Empleando el método de coeficientes indeterminados, obtener la solución general de la ecuación:

$$y''' - 3y' + 2y = 5 - 3e^{-2x} \qquad \ldots (1)$$

Solución:

Por I.6, la ecuación homogénea asociada a (1) es:

$$y''' - 3y' + 2y = 0 \qquad \ldots (2)$$

la ecuación característica correspondiente es:

$$m^3 - 3m + 2 = 0$$

y las raíces son:

$$m_1 = -2\,, \quad m_2 = 1\,, \quad m_3 = 1$$

por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_c = c_1e^{-2x} + e^x(c_2 + c_3x)$$

De I.7, para obtener y_p, se determina el operador aniquilador $P_1(D)$, tal que $P_1(D)(5 - 3e^{-2x}) = 0$; este operador es:

$$P_1(D) = D(D + 2)$$

aplicando $P_1(D)$ a ambos miembros de (1):

$$D(D+2)\ (D^3 - 3D + 2)\ y = D(D+2)\ (5 - 3e^{-2x})$$

$$D(D+2)\ (D^3 - 3D + 2)\ y = 0 \qquad \dots (3)$$

De I.6, la solución de (3) es:

$$y = c_1\, e^{-2x} + (c_2 + c_3\, x)\ e^{x} + A + B\,x\,e^{-2x}$$

como:

$$y_G = y_c + y_p$$

entonces:

$$y_p = A + B\,x\,e^{-2x}$$

donde B y A son coeficientes indeterminados los cuales se obtendrán sustituyendo y_p en (1), para esto es conveniente derivar primero y_p:

$$y_p' = -\,2\,B\,x\,e^{-2x} + B\,e^{-2x}$$

$$y''' = -\,8\,B\,x\,e^{-2x} + 12\,B\,e^{-2x}$$

sustituyendo y_p, y_p' y y_p''' en (1):

$$-\,8\,B\,x\,e^{-2x} + 12\,B\,e^{-2x} - 3(-2\,B\,x\,e^{-2x} + B\,e^{-2x}) + 2(A + B\,x\,e^{-2x}) = 5 - 3\,e^{-2x}$$

simplificando:

$$9\,B\,e^{-2x} + 2\,A = 5 - 3\,e^{-2x}$$

por igualación:

$$9\,B\,e^{-2x} = -\,3\,e^{-2x}$$

$$2A = 5$$

de donde:

$$A = \frac{5}{2}\ ; \quad B = -\,\frac{1}{3}$$

sustituyendo en y_p:

$$y_p = \frac{5}{2} - \frac{1}{3}\,x\,e^{-2x}$$

finalmente la solución general de (1) es:

$$\boxed{y_G = c_1\, e^{-2x} + (c_2 + c_3 x)\ e^{x} + \frac{5}{2} - \frac{x}{3}\,e^{-2x}}$$

Ejemplo 3

Empleando el método de variación de parámetros, obtener la solución general de la ecuación:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^5} \qquad \dots (1)$$

Solución:

Por I.6, la ecuación homogénea asociada es:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

y su solución es:

$$y_c = c_1 e^{x} + c_2\, x\, e^{x}$$

la solución general de (1) es $y_G = y_c + y_p$ y para determinar la solución y_p se utilizará el método de variación de parámetros.

Por I.8, la forma de y_p es:

$$y_p = U_1(x)\ e^{x} + U_2(x)\ x e^{x} \qquad \dots (2)$$

donde las derivadas de $U_1(x)$ y de $U_2(x)$ deben satisfacer al sistema:

$$U_1'(x)\ e^{x} + U_2'(x)\, x e^{x} = 0 \qquad \dots (a)$$

$$U_1'(x)\ e^{x} + U_2'(x)\ [x + 1]\ e^{x} = \frac{e^x}{x^5} \qquad \dots (b)$$

Este sistema tiene la siguiente representación matricial:

$$\begin{bmatrix} e^{x} & x e^{x} \\ e^{x} & (x+1)\, e^{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1'(x) \\ U_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{e^x}{x^5} \end{bmatrix} \qquad \dots (A)$$

de (a):

$$U_1'(x) = -\ U_2'(x)\ x$$

sustituyendo en (b):

$$-U_2'(x)\ x e^{x} + U_2'(x)\ [x + 1]\ e^{x} = \frac{e^x}{x^5}$$

o bien:

$$-U_2'(x)\, x + U_2'(x)\, [x + 1] = \frac{1}{x^5}$$

simplificando:

$$U_2'(x) = \frac{1}{x^5}$$

integrando:

$$U_2(x) = \int \frac{dx}{x^5}$$

$$U_2(x) = -\,\frac{1}{4x^4}$$

como:

$$U_1'(x) = -\ U_2'(x)\ x$$

entonces:

$$U_1'(x) = -\,\frac{1}{x^4}$$

integrando:

$$U_1(x) = \frac{1}{3x^3}$$

sustituyendo $U_1(x)$ y $U_2(x)$ en (2):

$$y_p = \frac{1}{3x^3}e^x - \frac{x}{4x^4}e^x = e^x x^{-3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}e^x x^{-3}$$

finalmente la solución general es:

$$\boxed{y_G = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{12}x^{-3} e^x}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Obtener la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones.

   a) $y' + 2xy = 2x\,e^{-x^2}$

   b) $y'' + y = x \text{ sen } x$

   c) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$

   d) $x^2y'' - 2xy' + 2y = -2x^2$

   siendo $y_c = c_1x^2 + c_2x$

2. Obtener la solución de la ecuación:

   $y'' - 4y = 2 - 8x$

   que satisface las condiciones iniciales:

   $y(0) = 0 \;;\; y'(0) = 5$

II SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

II.1 SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y SU REPRESENTACION MATRICIAL

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 51-54
Ecuaciones Diferenciales. S.L. Ross, páginas 265-268, 344-347, 379

II.2 TRANSFORMACION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL DE ORDEN n A UN SISTEMA DE n ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

Referencias: Apuntes, páginas 74-76
S.L. Ross, página 268
Cuaderno de ejercicios, problema II.1

Ejemplo 1

Transformar la ecuación diferencial:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{d^2y}{dt^2} + 3y = 2e^t$$

a un sistema de ecuaciones de primer orden y representarlo en forma matricial.

Solución:

De II.2, se hace $y = x_1$, donde x_1 es una variable que depende de t en este caso.

Como:

$$y = x_1 \qquad \ldots (1)$$

entonces:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad \ldots (2)$$

la segunda derivada de y, se puede representar con x_3, de la siguiente manera:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt} = x_3 \qquad \ldots (3)$$

de la ecuación diferencial dada:

$$\frac{d^3y}{dt^3} = -3y + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 2e^t$$

pero como $y = x_1$, $\dfrac{d^2y}{dt^2} = x_3$ y $\dfrac{d^3y}{dt^3} = \dfrac{dx_3}{dt}$, entonces:

$$\frac{dx_3}{dt} = -3x_1 + 4x_3 + 2e^t \qquad \ldots (4)$$

Las ecuaciones (2), (3) y (4) forman un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden, donde las incógnitas son x_1, x_2 y x_3.

De II.1, la representación matricial del sistema de ecuaciones (2), (3) y (4) es:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^t \end{bmatrix}$$

como se observa, este sistema es de la forma:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + \bar{b}(t)$$

por lo tanto es un sistema lineal y no homogéneo.

SEGUNDO BLOQUE

II.3 SOLUCION DE SISTEMAS LINEALES DE PRIMER ORDEN

Referencias: Apuntes, páginas 57-61

II.4 CALCULO DE e^{At}

Referencias: Apuntes, páginas 61-66

Cuaderno de ejercicios, problema II.3

II.5 RESOLUCION DE SISTEMAS LINEALES

Referencias: Apuntes, páginas 66-73

Cuaderno de ejercicios, problemas II.4, II.5, II.6, II.7 y II.8

Ejemplo 2

Determinar la solución del siguiente problema de condiciones iniciales:

$$x_1' = 2x_1 - x_2 + t \quad ; \quad x_1(0) = 1$$

$$x_2' = 4x_1 - 2x_2 \quad ; \quad x_2(0) = 0$$

Solución:

La matriz A de coeficientes y el vector $\bar{b}(t)$ del sistema son respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{b}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

de II.3, la solución del sistema no homogéneo es de la forma:

$$\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\delta)}\,\bar{b}(\delta)\,d\delta \qquad \ldots (1)$$

calculando e^{At} conforme lo estudiado en II.4:

los valores característicos de la matriz A son:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

sustituyendo $\lambda_1 = 0$ en $e^{\lambda_1 t} = \beta_0 + \beta_1\lambda_1$ se obtiene:

$$1 = \beta_0$$

sustituyendo $\lambda_2 = 0$ en $te^{\lambda_2 t} = \beta_1$ se obtiene:

$$t = \beta_1$$

por lo tanto $\beta_0 = 1$ y $\beta_1 = t$, calculando e^{At}:

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A = \begin{bmatrix} \beta_0 + 2\beta_1 & -\beta_1 \\ 4\beta_1 & \beta_0 - 2\beta_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2t & -t \\ 4t & 1-2t \end{bmatrix} \qquad \ldots (2)$$

de II.5, sustituyendo e^{At}, $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\bar{b}(\delta) = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix}$ en (1):

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} 1+2t & -t \\ 4t & 1-2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1+2(t-\delta) & -(t-\delta) \\ 4(t-\delta) & 1-2(t-\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix} d\delta$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2t \\ 4t \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \delta + 2t\delta - 2\delta^2 \\ 4t\delta - 4\delta^2 \end{bmatrix} d\delta$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2t \\ 4t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \\ \frac{2}{3}t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \\ 4t + \frac{2}{3}t^3 \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = 6x - 3y + e^t$$

$$\frac{dy}{d} = 2x + y + 1$$

a) Determinar la solución particular que satisface las condiciones iniciales:

$$x(0) = 1 \; ; \; y(0) = -1$$

b) Determinar la solución particular que satisface las condiciones:

$$x(1) = y(1) = 0$$

c) Determinar la solución general.

2. Demostrar que:

$$\int_0^t e^{A(t-\delta)}\,\bar{b}(\delta)\,d\delta = \int_0^t e^{A\delta}\,\bar{b}(t-\delta)\,d\delta$$

3. Determinar la solución general del siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

III TRANSFORMADA DE LAPLACE

Este tema comprende tres bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

III.1 DEFINICION DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 84 y 89

Ecuaciones Diferenciales. S.L. Ross, páginas 427-429 y 451

Cuaderno de ejercicios, problema III.1

III.2 PROPIEDADES DE LINEALIDAD Y TRASLACION

Referencias: Apuntes, páginas 90, 91, 95 y 96

S.L. Ross, páginas 434, 435, 437 y 438

III.3 TRANSFORMACION DE DERIVADAS

Referencias: Apuntes, páginas 98 y 99

S.L. Ross, página 437

Cuaderno de ejercicios, problema III.3

Ejemplo 1

Obtener la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = 5e^{-2t}\cosh 5t + 5t^2 + 6$$

Solución:

De III.1 y III.2, utilizando la propiedad de linealidad se tiene:

$$L\{f(t)\} = F(s) = 5L\{e^{-2t}\cosh 5t\} + 5L\{t^2\} + L\{6\}$$

aplicando el teorema de traslación en el dominio de "s" y de tablas:

$$F(s) = \frac{5(s+2)}{(s+2)^2 - (5)^2} + \frac{5(2)}{s^3} + \frac{6}{s} \qquad \ldots (1)$$

desarrollando (1):

$$F(s) = \frac{5s+10}{s^2+4s+4-25} + \frac{10}{s^3} + \frac{6}{s}$$

finalmente se tiene:

$$\boxed{F(s) = \frac{5s+10}{s^2+4s-21} + \frac{10}{s^3} + \frac{6}{s}}$$

SEGUNDO BLOQUE

III.4 DEFINICION DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Referencias: Apuntes, páginas 92 y 93

S.L. Ross, página 448

III.5 PROPIEDADES DE LINEALIDAD Y TRASLACION DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Referencias: Apuntes, páginas 93 y 96

Cuaderno de ejercicios, problema III.7.e.i

III.6 OBTENCION DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Referencias: Apuntes, páginas 101-103

S.L. Ross, páginas 449 y 450

Cuaderno de ejercicios, problema III.7

III.7 TEOREMA DE CONVOLUCION

Referencias: Apuntes, páginas 99 y 100

S.L. Ross, páginas 454 y 457

Cuaderno de ejercicios, problema III.7.c.ii

Ejemplo 2

Obtener la transformada inversa de Laplace de la siguiente función:

$$F(s) = \frac{s^2+5}{(s+3)^2\,(s^2+6s+12)} \qquad \ldots (1)$$

Solución:

De III.6 desarrollando F(s) en fracciones parciales se tiene:

$$F(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{(s+3)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+6s+12} \qquad \ldots (2)$$

sumando las fracciones en (2) e igualando el resultado del numerador con el numerador de (1):

$$A(s+3)(s^2+6s+12) + B(s^2+6s+12) + (Cs+D)(s+3)^2 = s^2+5$$

$$A(s^3+9s^2+30s+36) + B(s^2+6s+12) + C(s^3+6s^2+9s) + D(s^2+6s+9) = s^2+5$$

por igualación de coeficientes en la expresión anterior:

$$A + C = 0$$

$$9A + B + 6C + D = 1$$

$$30A + 6B + 9C + 6D = 0$$

$$36A + 12B + 9D = 5$$

resolviendo el sistema se obtiene:

$$A = -2$$

$$B = 14/3$$

$$C = 2$$

$$D = 7/3$$

con estos valores:

$$F(s) = \frac{-2}{s+3} + \frac{14/3}{(s+3)^2} + \frac{2s+7/3}{s^2+6s+12}$$

con objeto de utilizar el teorema de traslación, F(s) se puede expresar de la siguiente forma:

$$F(s) = \frac{-2}{s+3} + \frac{14/3}{(s+3)^2} + \frac{2(s+7/6+3-3)}{(s+3)^2+3} = \frac{-2}{s+3} + \frac{14/3}{(s+3)^2} + \frac{2(s+3)-11/3}{(s+3)^2+3}$$

o bien:

$$F(s) = \frac{-2}{s+3} + \frac{14/3}{(s+3)^2} + \frac{2(s+3)}{(s+3)^2+3} - \frac{11/3}{(s+3)^2+3}$$

de III.5 y III.6 utilizando la propiedad de traslación y de tablas:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = -2L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{14}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{(s+3)}{(s+3)^2+3}\right\} - \frac{11}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2+3}\right\}$$

de donde:

$$f(t) = -2e^{-3t} + \frac{14}{3}e^{-3t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 2e^{-3t}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3}\right\} - \frac{11}{3}e^{-3t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3}\right\}$$

y finalmente:

$$\boxed{f(t) = -2e^{-3t} + \frac{14}{3}te^{-3t} + 2e^{-3t}\cos\sqrt{3}\,t - \frac{11}{3\sqrt{3}}e^{-3t}\operatorname{sen}\sqrt{3}\,t}$$

TERCER BLOQUE

III.8 RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN POR TRANSFORMADA DE LAPLACE.

Referencias: Apuntes, páginas 104-109

S.L. Ross, páginas 457-468

Cuaderno de ejercicios, problemas III.8, III.9 y III.10

Ejemplo 3

Resolver la siguiente ecuación diferencial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + 4y' + 4y = \cos x \quad ; \quad y(0) = 1 \,, \quad y'(0) = 2$$

Solución:

De III.8 aplicando transformada de Laplace a la ecuación:

$$s^2 y_s - s - 2 + 4(sy_s - 1) + 4y_s = \frac{s}{s^2+1} \qquad \ldots (1)$$

factorizando y_s:

$$(s^2+4s+4)\,y_s = \frac{s}{s^2+1} + s + 6 = \frac{s^3+6s^2+2s+6}{s^2+1}$$

despejando y_s y desarrollando en fracciones parciales:

$$y_s = \frac{s^3+6s^2+2s+6}{(s^2+1)(s+2)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} \qquad \ldots (2)$$

sumando las fracciones para conocer A, B, C y D, se tiene:

$$(As+B)(s+2)^2 + C(s+2)(s^2+1) + D(s^2+1) = s^3+6s^2+2s+6$$

de la expresión anterior se obtiene:

$$A = \frac{3}{25} \;; \quad B = \frac{4}{25} \;; \quad C = \frac{22}{25} \;; \quad D = \frac{18}{5}$$

sustituyendo A, B, C y D en (2):

$$Y_s = \frac{(3/25)\,s + 4/25}{s^2+1} + \frac{(22/25)}{s+2} + \frac{(18/5)}{(s+2)^2}$$

o bien:

$$Y_s = \frac{3}{25}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \frac{4}{25}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + \frac{22}{25}\left(\frac{1}{s+2}\right) + \frac{18}{5}\left(\frac{1}{(s+2)^2}\right)$$

obteniendo la transformada inversa de Laplace de Y_s:

$$y(x) = L^{-1}\left\{Y_s\right\} = \frac{3}{25}\cos x + \frac{4}{25}\operatorname{sen} x + \frac{22}{25}e^{-2x} + \frac{18}{5}e^{-2x}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$$

finalmente:

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{25}\cos x + \frac{4}{25}\operatorname{sen} x + \frac{22}{25}e^{-2x} + \frac{18}{5}x\,e^{-2x}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Obtener $L\left\{f(t)\right\}$ donde $f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 2 \\ 3 & t > 2 \end{cases}$

2) Antitransformar las siguientes funciones:

a) $F(s) = \dfrac{5}{(s-2)^4} + \dfrac{7}{s}$ b) $F(s) = \dfrac{s+2}{s^2+4s+7}$

3) Antitransformar la siguiente función utilizando el teorema de convolución:

$$F(s) = \frac{4}{s(s-2)^2}$$

4) Resolver las siguientes ecuaciones utilizando transformada de Laplace.

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ sujeto a $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

b) $\dfrac{dy}{dt} - y = e^{3t}$; $y'(0) = 2$

5) Resolver el siguiente sistema utilizando la transformada de Laplace:

$$\frac{dx}{dt} - 4x + 2y = 2t \; ; \quad x(0) = 3$$

$$\frac{dy}{dt} - 8x + 4y = 1 \; ; \quad y(0) = 5$$

IV ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

IV.1 LA ECUACION EN DERIVADAS PARCIALES

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 115 y 116

IV.2 LA ECUACION LINEAL Y CONCEPTO DE ORDEN

Referencias: Apuntes de la materia, página 117

IV.3 METODO DE SEPARACION DE VARIABLES

Referencias: Apuntes, páginas 119-124

Cuaderno de ejercicios, problema VI.2

Ejemplo 1

Determinar la solución no trivial de la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + u$$

utilizando el método de separación de variables, considerando una constante de separación $\alpha < 0$.

Solución:

De IV.1 y IV.2, la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + u \qquad \ldots (1)$$

es una ecuación en derivadas parciales, lineal y de primer orden.

Por el método de separación de variables, se establece que la solución sea un producto de funciones:

$$u(x, y) = F(x)\cdot G(y) \qquad \ldots (2)$$

sustituyendo (2) en (1):

$$F'(x)\,G(y) = F(x)\,G'(y) + F(x)\,G(y)$$

separando variables:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{G'(y)}{G(y)} + 1$$

identidad que se satisface si:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \alpha \qquad \ldots (3)$$

$$\frac{G'(y)}{G(y)} + 1 = \alpha \qquad \ldots (4)$$

donde α es una constante de separación.

La solución de la ecuación diferencial ordinaria (3) con $\alpha < 0$ es:

$$F(x) = c_1 e^{\alpha x} \quad ; \quad \alpha < 0 \qquad \dots (5)$$

y la solución de (4) es:

$$G(y) = c_2 e^{(\alpha-1)y} \quad ; \quad \alpha < 0 \qquad \dots (6)$$

sustituyendo (5) y (6) en (2):

$$u(x, y) = c_1 e^{\alpha x} \cdot c_2 e^{(\alpha-1)y}$$

esto es:

$$\boxed{u(x, y) = c\, e^{\alpha x + (\alpha-1)y} \quad ; \quad \alpha < 0}$$

SEGUNDO BLOQUE

IV.4 SERIE TRIGONOMETRICA DE FOURIER. SERIE SENO Y SERIE COSENO

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 125-132

Cuaderno de ejercicios, problemas VI.3 y VI.4

IV.5 RESOLUCION DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES CON CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA

Referencias: Apuntes de la materia, problema IV.1, páginas 135-139

Cuaderno de ejercicios, problema VI.5

Ejemplo 2

Calcular el coeficiente b_n de la serie seno de Fourier de la función $f(x) = x$, en el intervalo $0 < x < \pi$.

Solución:

De IV.4, la serie seno de Fourier de una función $f(x)$ es:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \quad ; \quad 0 < x < \ell$$

donde:

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \, dx \; ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

para el ejemplo en cuestión, $f(x) = x$ y $\ell = \pi$, por lo tanto:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx \; ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

integrando:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} nx \right)\Bigg|_0^{\pi} \; ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} n\pi \right) \; ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

para estos valores de n:

$$\cos n\pi = (-1)^n \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} n\pi = 0$$

por lo tanto, el coeficiente de la serie es:

$$b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

con esto, la serie seno de Fourier de la función en cuestión es:

$$\boxed{f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2}{n}(-1)^n \right] \operatorname{sen} nx \quad ; \quad 0 < x < \pi}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Aplicar el método de separación de variables, para resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $y \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + u = 0$; con una constante de separación $\alpha > 0$

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

c) $a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2k \dfrac{\partial u}{\partial t}$; $k > 0$

con una constante de separación $\alpha = 0$

2. Resolver la siguiente ecuación sujeta a las condiciones de frontera especificadas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \; ; \quad u(0, y) = y \; ; \quad u(1, y) = y^2 + 1$$

3. Determinar la solución de la ecuación de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; ; \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \; ; \quad u(x, 0) = x - x^2$$

$$0 < x < 1$$

(V) FUNCIONES DISCRETAS Y ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

V.1 FUNCIONES DISCRETAS

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 141-143

V.2 DIFERENCIA DE UNA FUNCION, OPERADORES Δ y E

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 148-151, 153, 154

Cuaderno de ejercicios, problema IV.1

V.3 SUMATORIA DE UNA FUNCION

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 155, 157 (de la expresión 19 en adelante), 158-160

Cuaderno de ejercicios, problemas IV.2 y IV.3

Ejemplo 1

Obtener $\Delta^2 f(k)$ si $f(k) = \sum k$

Solución:

De V.3: $k = k^{(1)}$

recordando que:

$$\sum k^{(m)} = \frac{k^{(m+1)}}{m+1}$$

se obtiene:

$$\sum k = \sum k^{(1)}$$

$$\sum k = \frac{k^{(2)}}{2} = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k^2-k}{2}$$

$$\therefore\ f(k) = \sum k = \frac{k^2-k}{2}$$

De V.2 y recordando que $\Delta^2 f(k) = f(k+2) - 2f(k+1) + f(k)$, se tiene:

$$\Delta^2\left(\frac{k^2-k}{2}\right) = \frac{1}{2}(k+2)^2 - \frac{1}{2}(k+2) - (k+1)^2 + (k+1) + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k = 1$$

por lo tanto:

$$\boxed{\Delta^2 f(k) = 1}$$

Ejemplo 2

Obtener $\sum \frac{-k^2}{2^{k+1}}$

Solución:

$$\sum \frac{-k^2}{2^{k+1}} = -\frac{1}{2}\sum \frac{k^2}{2^k} \quad ;$$

esta suma se puede efectuar por partes.

De V.3:

$$\sum f(k)\ \Delta g(k) = f(k)\,g(k) - \sum g(k+1)\ \Delta f(k) \qquad \ldots (1)$$

haciendo:

$$f(k) = k^2 \qquad \ldots (a)$$

$$\Delta g(k) = \frac{1}{2^k} \qquad \ldots (b)$$

De V.2:

$$\Delta f(k) = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1 \qquad \ldots (c)$$

De V.3:

$$g(k) = \sum \frac{1}{2^k} = \frac{2}{(1-2)2^k} = -\frac{2}{2^k} \qquad \ldots (d)$$

sustituyendo (a), (b), (c) y (d) en (1):

$$\sum k^2 \frac{1}{2^k} = -\frac{2k^2}{2^k} - \sum\left[-\frac{2}{2^{k+1}}(2k+1)\right]$$

simplificando:

$$\sum k^2 \frac{1}{2^k} = -\frac{2k^2}{2^k} + \sum \frac{2k}{2^k} + \sum \frac{1}{2^k} \qquad \ldots (2)$$

donde:

$$\sum \frac{1}{2^k} = -\frac{2}{2^k} \qquad \ldots (e)$$

y:

$$\sum \frac{2k}{2^k} = 2\sum \frac{k}{2^k}$$

sumando nuevamente por partes:

$$f(k) = k \implies \Delta f(k) = 1$$

$$\Delta g(k) = \frac{1}{2^k} \implies g(k) = -\frac{2}{2^k}$$

por lo que:

$$2\sum \frac{k}{2^k} = 2\left[-\frac{2k}{2^k} - \sum -\frac{2}{2^{k+1}}(1)\right] = 2\left[\frac{-2k}{2^k} + \sum \frac{1}{2^k}\right] = 2\left[\frac{-2k}{2^k} - \frac{2}{2^k}\right] \qquad \ldots (f)$$

sustituyendo (e) y (f) en (2):

$$\sum k^2 \cdot \frac{1}{2^k} = -\frac{2k^2}{2^k} + 2\left[\frac{-2k}{2^k} - \frac{2}{2^k}\right] - \frac{2}{2^k}$$

$$= -\frac{1}{2^k}(2k^2 + 4k + 6)$$

$$= \frac{-2}{2^k}(k^2+2k+3)$$

$$\therefore -\frac{1}{2}\sum k^2 \frac{1}{2^k} = -\frac{1}{2}\left[\frac{-2}{2^k}(k^2+2k+3)\right] = \frac{1}{2^k}(k^2+2k+3)$$

es decir:

$$\boxed{\sum -\frac{k^2}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}(k^2+2k+3)}$$

SEGUNDO BLOQUE

V.4 LA ECUACION EN DIFERENCIAS, EL CONCEPTO DE ORDEN

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 161-163

Cuaderno de ejercicios, problema IV.4

V.5 LA ECUACION LINEAL EN DIFERENCIAS

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 164, 165

V.6 RESOLUCION DE ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 166-171

Cuaderno de ejercicios, problema IV.5

V.7 METODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 171-174

Cuaderno de ejercicios, problemas IV.6, IV.7 y IV.8 inciso (a)

V.8 METODO DE VARIACION DE PARAMETROS

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 175-178

Cuaderno de ejercicios, problemas IV.8 inciso (b) y IV.9

Ejemplo 3

Empleando el método de coeficientes indeterminados, obtener la solución general de la ecuación:

$$(E^2 - 6E + 8)\, y(k) = 3k^2 + 2 - 5.3^k \qquad \ldots (1)$$

Solución:

De V.5 la solución es de la forma:

$$y(k) = y_c(k) + y_p(k) \qquad \ldots (2)$$

por V.6 la ecuación homogénea asociada es:

$$(E^2 - 6E + 8)\, y(k) = 0$$

y la ecuación característica:

$$\beta^2 - 6\beta + 8 = 0$$

cuyas raíces son:

$$\beta_1 = 2, \qquad \beta_2 = 4$$

por lo que la solución complementaria queda:

$$y_c(k) = c_1\, 2^k + c_2\, 4^k$$

como:

$$q(k) = 3k^2 + 2 - 5\cdot 3^k$$

por V.7 la forma de la solución particular es:

$$y_p(k) = Ak^2 + Bk + C + D3^k \qquad \ldots (3)$$

donde A, B, C, D son coeficientes por determinar.

Por V.2:

$$E^2\, y_p(k) = A(k+2)^2 + B(k+2) + C + D3^{k+2}$$

$$E\, y_p(k) = A(k+1)^2 + B(k+1) + C + D3^{k+1}$$

sustituyendo $y_p(k)$ en (1):

$$A(k+2)^2 + B(k+2) + C + D3^{k+2} - 6\left[A(k+1)^2 + B(k+1) + C + D3^{k+1}\right] +$$

$$+ 8(Ak^2 + Bk + C + D3^k) = 3k^2 + 2 - 5\cdot 3^k$$

simplificando:

$$3Ak^2 + k(3B - 8A) + 3C - 2A - 4B - D3^k = 3k^2 + 2 - 5\cdot 3^k$$

por igualación de coeficientes:

$$A = 1, \quad B = \frac{8}{3}, \quad C = \frac{44}{9}, \quad D = 5$$

sustituyendo en (3) los valores obtenidos para A, B, C y D:

$$y_p(k) = k^2 + \frac{8}{3}k + \frac{44}{9} + 5\cdot 3^k$$

finalmente, sustituyendo en (2) $y_c(k)$ y $y_p(k)$, la solución general es:

$$\boxed{y(k) = c_1 2^k + c_2 4^k + k^2 + \frac{8}{3}k + \frac{44}{9} + 5\cdot 3^k}$$

Ejemplo 4

Empleando el método de variación de parámetros, obtener la solución general de la ecuación:

$$y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = k^2 \qquad \ldots (1)$$

Solución:

De V.5:

$$y(k) = y_c(k) + y_p(k) \qquad \ldots (2)$$

De V.6, la ecuación homogénea asociada es:

$$(E^2 - 5E + 6)\, y(k) = 0$$

la ecuación característica es:

$$\beta^2 - 5\beta + 6 = 0$$

cuyas raíces son:

$$\beta_1 = 2\ , \quad \beta_2 = 3$$

y la solución complementaria es:

$$y_c(k) = c_1 2^k + c_2 3^k$$

como:

$$q(k) = k^2$$

De V.8:

$$y_p(k) = A(k)\ 2^k + B(k)\ 3^k \qquad \ldots (3)$$

donde $A(k)$ y $B(k)$ son funciones de k por determinar. Para esto, se forma el sistema:

$$\begin{bmatrix} 2^{k+1} & 3^{k+1} \\ 2^{k+2} & 3^{k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A(k) \\ \Delta B(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k^2 \end{bmatrix}$$

resolviendo por Cramer:

$$\Delta A(k) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3^{k+1} \\ k^2 & 3^{k+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2^{k+1} & 3^{k+1} \\ 2^{k+2} & 3^{k+2} \end{vmatrix}} = \frac{-3k^2\, 3^k}{18\cdot 2^k\cdot 3^k - 12\cdot 2^k\cdot 3^k} = \frac{-k^2}{2^{k+1}}$$

es decir:

$$\Delta A(k) = \frac{-k^2}{2^{k+1}}$$

de donde:

$$A(k) = \sum \frac{-k^2}{2^{k+1}}$$

esta sumatoria se resolvió en el ejemplo ilustrativo No. 2, de tal manera que:

$$A(k) = \frac{1}{2^k}\ (k^2 + 2k + 3)$$

también por Cramer:

$$\Delta B(k) = \frac{\begin{vmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 2^{k+2} & k^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2^{k+1} & 3^{k+1} \\ 2^{k+2} & 3^{k+2} \end{vmatrix}} = \frac{k^2\cdot 2^{k+1}}{18\cdot 2^k\cdot 3^k - 12\cdot 2^k\cdot 3^k} = \frac{2k^2}{6\cdot 3^k} = \frac{k^2}{3^{k+1}}$$

esto es:

$$\Delta B(k) = \frac{k^2}{3^{k+1}}$$

de donde:

$$B(k) = \sum \frac{k^2}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \sum \frac{k^2}{3^k}$$

esta suma también se puede efectuar por partes y comprobar que:

$$B(k) = -\frac{1}{2\cdot 3^k}\ (k^2 + k + 1)$$

sustituyendo $A(k)$ y $B(k)$ en (3):

$$y_p(k) = \frac{1}{2^k}\ (k^2 + 2k + 3)\ 2^k - \frac{1}{2\cdot 3^k}\ (k^2 + k + 1)\ 3^k$$

$$= k^2 + 2k + 3 - \frac{1}{2}\ (k^2 + k + 1)$$

$$y_p(k) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{5}{2}$$

finalmente, sustituyendo $y_c(k)$ y $y_p(k)$ en (2):

$$\boxed{y(k) = c_1 2^k + c_2 3^k + \frac{1}{2}\ (k^2 + 3k + 5)}$$

que representa la solución general de (1).

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Empleando el método de los coeficientes indeterminados, obtener la solución general de las ecuaciones:

   a) $y(k+2) - y(k+1) + 6y(k) = k + 2^k$

   b) $y(k+1) - y(k) = k\ ; \quad y(0) = 1$

2) Empleando el método de variación de parámetros, obtener la solución general de las ecuaciones:

   a) $5y(k+2) - 3y(k+1) - 2y(k) = 3k + (-2)^k$

   b) $4y(k+2) - 4y(k+1) + y(k) = \dfrac{3}{2^k}$

(VI) SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

VI.1	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS DE PRIMER ORDEN. REPRESENTACION MATRICIAL
	Referencias: Apuntes de la materia, páginas 187 y 188
VI.2	TRANSFORMACION DE UNA ECUACION EN DIFERENCIAS DE ORDEN n A UN SISTEMA DE n ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE PRIMER ORDEN
	Referencias: Apuntes de la materia, páginas 189 y 190
	Cuaderno de ejercicios, problema V.6

Ejemplo 1

Transformar la ecuación $y(k+5)+3y(k+3)-4y(k+1)+2y(k)=k^2-\operatorname{sen}\pi k$, a un sistema de ecuaciones de primer orden y representar éste en forma matricial.

Solución:

De VI.2, hacemos:

$$\left.\begin{aligned} y(k) &= x_1(k)\\ y(k+1) &= x_2(k)\\ y(k+2) &= x_3(k)\\ y(k+3) &= x_4(k)\\ y(k+4) &= x_5(k)\end{aligned}\right| \quad \ldots \text{(A)}$$

aplicando el operador E a las expresiones (A):

$$\left.\begin{aligned} y(k+1) &= x_1(k+1)\\ y(k+2) &= x_2(k+1)\\ y(k+3) &= x_3(k+1)\\ y(k+4) &= x_4(k+1)\\ y(k+5) &= x_5(k+1)\end{aligned}\right| \quad \ldots \text{(B)}$$

sustituyendo (A) en (B):

$$\left.\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k)\\ x_2(k+1) &= x_3(k)\\ x_3(k+1) &= x_4(k)\\ x_4(k+1) &= x_5(k)\\ x_5(k+1) &= y(k+5)\end{aligned}\right| \quad \ldots \text{(C)}$$

de la ecuación dada:

$$y(k+5)=k^2-\operatorname{sen}\pi k-3y(k+3)+4y(k+1)-2y(k)$$

en función de las nuevas variables:

$$y(k+5)=k^2-\operatorname{sen}\pi k-3x_4(k)+4x_2(k)-2x_1(k)$$

sustituyendo $y(k+5)$ en la última ecuación de (C), el sistema queda:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k)\\ x_2(k+1) &= x_3(k)\\ x_3(k+1) &= x_4(k)\\ x_4(k+1) &= x_5(k)\\ x_5(k+1) &= -2x_1(k)+4x_2(k)-3x_4(k)+k^2-\operatorname{sen}\pi k\end{aligned}$$

de VI.1, en forma matricial el sistema es:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ x_3(k+1)\\ x_4(k+1)\\ x_5(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ -2&4&0&-3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k)\\ x_2(k)\\ x_3(k)\\ x_4(k)\\ x_5(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ k^2-\operatorname{sen}\pi k\end{bmatrix}$$

que como se puede observar tiene la representación matricial:

$$\overline{X}(k+1)=A\,\overline{X}(k)+\overline{E}(k)$$

SEGUNDO BLOQUE

VI.3	RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES
	Referencias: Apuntes de la materia, páginas 190 y 191
VI.4	RESOLUCION DE SISTEMAS HOMOGENEOS, CALCULO DE A^k
	Referencias: Apuntes de la materia, páginas 191-197
	Cuaderno de ejercicios, problemas V.1 y V.2
VI.5	RESOLUCION DE SISTEMAS NO HOMOGENEOS
	Referencias: Apuntes de la materia, páginas 198-200
	Cuaderno de ejercicios, problemas V.3 y V.4

Ejemplo 2

Obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix} \quad ; \quad x(0) = 1 \quad ; \quad y(0) = 2$$

Solución:

De VI.5, la solución es de la forma:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} + \sum_{r=0}^{k-1} A^r \bar{b}(k-1-r) \qquad \ldots (1)$$

siendo A una matriz de 2 x 2 y por VI.4:

$$A^k = \beta_0 I + \beta_1 A \qquad \ldots (2)$$

$$\lambda_1^k = \beta_0 + \beta_1 \lambda_1 \qquad \ldots (3)$$

donde β_0 y β_1 son funciones de k por determinar.

La matriz A tiene por ecuación característica:

$$(2-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

por lo que $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ son los valores característicos.

Para $\lambda_1 = 2$, (3) queda:

$$2^k = \beta_0 + 2\beta_1 \qquad \ldots (4)$$

derivando (3) y valuando para $\lambda = 2$:

$$k\,2^{k-1} = \beta_1 \qquad \ldots (5)$$

resolviendo (4) y (5) simultáneamente se obtiene:

$$\beta_0 = 2^k - k\,2^k, \qquad \beta_1 = k\,2^{k-1}$$

que sustituidas en (2) resulta:

$$A^k = (2^k - k\,2^k) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k\,2^{k-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

efectuando operaciones y simplificando:

$$A^k = \begin{bmatrix} 2^k & k\,2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

por VI.4, la solución del sistema homogéneo es:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k & k\,2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

efectuando la multiplicación:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k + k\,2^k \\ 2 \cdot 2^k \end{bmatrix} \qquad \ldots (6)$$

de VI.5, una solución del sistema no homogéneo es:

$$\sum_{r=0}^{k-1} A^r \bar{b}(k-1-r) \qquad \ldots (7)$$

donde:

$$A^r = \begin{bmatrix} 2^r & r\,2^{r-1} \\ 0 & 2^r \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{b}(k-1-r) = \begin{bmatrix} 2 \\ k-1-r \end{bmatrix}$$

efectuando el producto $A^r \bar{b}(k-1-r)$:

$$A^r \bar{b}(k-1-r) = \begin{bmatrix} 2^r & r\,2^{r-1} \\ 0 & 2^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ k-1-r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2^r + \frac{k-1}{2} r\,2^r - \frac{r^2}{2} 2^r \\ (k-1)\,2^r - r\,2^r \end{bmatrix}$$

sustituyendo en (7):

$$\begin{bmatrix} \sum_{r=0}^{k-1} (2.2^r + \frac{k-1}{2} r\,2^r - \frac{r^2}{2} 2^r) \\ \sum_{r=0}^{k-1} \left[(k-1)\,2^r - r\,2^r\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sum_{r=0}^{k-1} 2^r + \frac{k-1}{2} \sum_{r=0}^{k-1} r\,2^r - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{k-1} r^2\,2^r \\ (k-1) \sum_{r=0}^{k-1} 2^r - \sum_{r=0}^{k-1} r\,2^r \end{bmatrix} \ldots (8)$$

en donde las sumas son:

$$2 \sum_{r=0}^{k-1} 2^r = 2 \left[2^r\right]_0^k = 2 \cdot 2^k - 2 \qquad \ldots (a)$$

$$\frac{k-1}{2} \sum_{r=0}^{k-1} r\,2^r = \frac{k-1}{2} \left[r\,2^r - 2 \cdot 2^r\right]_0^k$$

$$= \frac{1}{2} 2^k (k^2 - 3k + 2) + k - 1 \qquad \ldots (b)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{k-1} r^2\,2^r = \frac{1}{2} \left[r^2\,2^r - 4\,r\,2^r + 6 \cdot 2^r\right]_0^k$$

$$= \frac{1}{2} k^2\,2^k - 2k\,2^k + 3 \cdot 2^k - 3 \qquad \ldots (c)$$

$$(k-1) \sum_{r=0}^{k-1} 2^r = (k-1) \left[2^r\right]_0^k$$

$$= k\,2^k - 2^k - k + 1 \qquad \ldots (d)$$

sustituyendo (a), (b), (c) y (d) en (8):

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 2^k - 2 + \frac{1}{2} 2^k (k^2 - 3k + 2) + k - 1 - \left(\frac{1}{2} k^2\,2^k - 2k\,2^k + 3.2^k - 3\right) \\ k\,2^k - 2^k - k + 1 - (k\,2^k - 2 \cdot 2^k + 2) \end{bmatrix}$$

simplificando:

$$\sum_{r=0}^{k-1} A^r\,\bar{b}(k-1-r) = \begin{bmatrix} \frac{k}{2}\,2^k + k \\ 2^k - k - 1 \end{bmatrix} \qquad \ldots (9)$$

sustituyendo (6) y (9) en (1):

$$\bar{y}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k + k\,2^k \\ 2\cdot 2^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k}{2}\,2^k + k \\ 2^k - k - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^k + \frac{3}{2}k\,2^k + k \\ 3\cdot 2^k - k - 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\begin{aligned} x(k) &= 2^k + \tfrac{3}{2}k\,2^k + k \\ y(k) &= 3\cdot 2^k - k - 1 \end{aligned}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Obtener la solución de cada uno de los siguientes sistemas:

a) $x(k+1) = 2x(k) + y(k)$

$y(k+1) = x(k) + 2y(k)$

b) $x(k+1) = x(k) + 2y(k)$; $x(0) = 0$

$y(k+1) = 2x(k) + y(k)$; $y(0) = -2$

c) $x(k+1) = 3x(k) + 2y(k) + 1$; $x(0) = 0$

$y(k+1) = 2x(k) + 3y(k) + 1$; $y(0) = 0$

(VII) TRANSFORMADA GEOMETRICA

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

VII.1 DEFINICION DE TRANSFORMADA GEOMETRICA

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 207 y 208

VII.2 TRANSFORMADA GEOMETRICA DE FUNCIONES DISCRETAS

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 209-211

VII.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA GEOMETRICA

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 211-214

Ejemplo 1

Obtener la transformada geométrica de la función:

$$f(k) = k\,5^k + 2^k \operatorname{sen} 5k + 6$$

Solución:

De VII.2 y VII.3, utilizando la propiedad de linealidad:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{k\,5^k\} + \mathcal{Z}\{2^k \operatorname{sen} 5k\} + 6\,\mathcal{Z}\{1\}$$

utilizando la propiedad de la multiplicación por a^k y de tablas:

$$\boxed{F(z) = \frac{5z}{(1-5z)^2} + \frac{2z \operatorname{sen} 5}{(2z)^2 - 2(2z)\cos 5 + 1} + \frac{6}{1-z}}$$

SEGUNDO BLOQUE

VII.4 TRANSFORMADA GEOMETRICA INVERSA

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 214-216

VII.5 RESOLUCION DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS POR MEDIO DE LA TRANSFORMADA GEOMETRICA

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 217-219

Ejemplo 2

Resolver la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 5 \;; \quad y(0) = 0 \;; \quad y(1) = 3$$

Solución:

De VII.5, aplicando transformada geométrica a la ecuación en diferencias:

$$\mathcal{Z}\{y(k+2)\} - 5\,\mathcal{Z}\{y(k+1)\} + 6\,\mathcal{Z}\{y(k)\} = 5\,\mathcal{Z}\{1\}$$

esto es:

$$\left[z^{-2}y(z) - z^{-2}y(0) - z^{-1}y(1)\right] - 5\left[z^{-1}y(z) - z^{-1}y(0)\right] + 6y(z) = \frac{5}{1-z}$$

sustituyendo las condiciones $y(0) = 0$ y $y(1) = 3$, se obtiene:

$$z^{-2}y(z) - 3z^{-1} - 5z^{-1}y(z) + 6y(z) = \frac{5}{1-z}$$

factorizando $y(z)$:

$$(z^{-2} - 5z^{-1} + 6)\ y(z) = \frac{5}{1-z} + 3z^{-1} = \frac{5 + 3z^{-1} - 3}{1-z} = \frac{3z^{-1}+2}{1-z}$$

despejando $y(z)$ se tiene:

$$y(z) = \frac{3z^{-1}+2}{(1-z)(z^{-2}-5z^{-1}+6)}$$

multiplicando y dividiendo entre z^2:

$$y(z) = \frac{2z^2+3z}{(1-z)(1-5z+6z^2)} = \frac{2z^2+3z}{(1-z)(1-3z)(1-2z)}$$

de VII.4, desarrollando en fracciones parciales:

$$y(z) = \frac{2z^2+3z}{(1-z)(1-3z)(1-2z)} = \frac{A}{(1-z)} + \frac{B}{(1-3z)} + \frac{C}{(1-2z)} \quad \ldots \ (1)$$

determinando los valores de A, B y C:

$$A(1-3z)(1-2z) + B(1-z)(1-2z) + C(1-z)(1-3z) = 2z^2 + 3z$$

$$A(6z^2-5z+1) + B(2z^2-3z+1) + C(3z^2-4z+1) = 2z^2 + 3z$$

por igualación se tiene:

$$6A + 2B + 3C = 2$$

$$-5A - 3B - 4C = 3$$

$$A + B + C = 0$$

resolviendo el sistema se obtiene:

$$A = \frac{5}{2}\ ; \quad B = \frac{11}{2}\ ; \quad C = -8$$

sustituyendo en (1):

$$y(z) = \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{1-z}\right) + \left(\frac{11}{2}\right)\left(\frac{1}{1-3z}\right) + (-8)\left(\frac{1}{1-2z}\right)$$

de VII.5, aplicando la transformada geométrica inversa:

$$y(k) = \frac{5}{2}\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-z}\right\} + \frac{11}{2}\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-3z}\right\} - 8\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-2z}\right\}$$

finalmente:

$$\boxed{y(k) = \frac{5}{2} + \frac{11}{2}\cdot 3^k - 8\cdot 2^k}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Obtener la transformada geométrica de las siguientes funciones:

   a) $y(k) = 3(-1)^k + 6$

   b) $R(k) = 2^k\left[\cos 3k + k^2\right]$

2. Obtener la transformada geométrica inversa de las siguientes funciones:

   a) $y(z) = \dfrac{z^2}{(1-3z)(z^2-4)}$

   b) $z(z) = \dfrac{z^2+6z}{(z+3)(z^2-4z+3)}$

3. Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias utilizando transformada geométrica:

   a) $y(k+2) + 4y(k+1) + 3y(k) = k\ ;\qquad y(0) = y(1) = 0$

   b) $N(r+2) - N(r) = (1)^r\ ;\qquad N(0) = 1\ ;\qquad N(1) = -1$

RESULTADOS DE ALGUNOS PROBLEMAS PROPUESTOS

TEMA I

1. a) $y(x) = (c + x^2)\, e^{-x^2}$

   c) $y(x) = (c_1 + c_2 x - \ln x - 1)\, e^{-2x}$

   d) $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x + 2x^2 (1 - \ln x)$

2. $y(x) = e^{2x} - \dfrac{e^{-2x}}{2} - \dfrac{1}{2} + 2x$

TEMA II

b) $$\bar{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} e^t + \frac{3}{10} e^{5t-4} - \frac{3}{25} e^{5t-5} + \frac{3}{5} t - \frac{12}{25} + \frac{e}{5} \\ \\ -\frac{1}{2} e^t + \frac{1}{10} e^{5t-4} - \frac{1}{25} e^{5t-5} + \frac{6}{5} t - \frac{29}{25} + \frac{2e}{5} \end{bmatrix}$$

3. $$\bar{x} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - \frac{5}{4} c_3 e^{-2t} \\ c_2 e^{-t} - c_3 e^{-2t} \\ c_3 e^{-2t} \end{bmatrix}$$

TEMA III

1) $F(s) = -\dfrac{e^{-2s}}{s^2} + \dfrac{e^{-2s}}{s} + \dfrac{1}{s^2}$

3) $f(t) = e^{2t}(2t - 1) + 1$

4) a) $y(x) = e^{2x}$

5) $x = 3 + 2t + \frac{4}{3} t^3$

   $y = 5 + 5t - 2t^2 + \frac{8}{3} t^3$

TEMA IV

1. b) No es aplicable el método de separación de variables.

2. $u = x^3 + (x^2 - y)\, x + y$

3. $u = \displaystyle\sum_{n=1} \frac{4}{n^3 \pi^3} \left[1 - (-1)^n\right] e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \operatorname{sen} n \pi x$

TEMA V

1. b) $y(k) = \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2} k + 1$

2. b) $y(k) = c_1 2^{-k} + c_2 k\, 2^{-k} + \frac{3}{2} k^2\, 2^{-k}$

TEMA VI

a) $x(k) = c_1 \left(\dfrac{3^k + 1}{2}\right) + c_2 \left(\dfrac{3^k - 1}{2}\right)$

   $y(k) = c_1 \left(\dfrac{3^k - 1}{2}\right) + c_2 \left(\dfrac{3^k + 1}{2}\right)$

c) $x(k) = \dfrac{5^k}{4} - \dfrac{1}{4}$

   $y(k) = \dfrac{5^k}{4} - \dfrac{1}{4}$

TEMA VII

1. b) $R(z) = \dfrac{(2z)\left((2z)^{-1} - \cos 3\right)}{4z^2 - 4z \cos 3 + 1} + \dfrac{4z^2 + 2z}{(1 - 2z)^3}$

2. a) $y(k) = -\dfrac{1}{35} (3)^k - \dfrac{1}{14} (-1/2)^k + \dfrac{1}{10} (1/2)^k$

3. a) $y(k) = \dfrac{1}{8} (-1)^k - \dfrac{1}{32} (-3)^k + \dfrac{k}{8} - \dfrac{3}{32}$