



**FACULTAD DE INGENIERIA**

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

EDUARDO BELAUNZARAN GARCIA  
BERNARDO FRONTANA DE LA CRUZ  
RICARDO GOMEZ SAAVEDRA  
ENRIQUE GONZALEZ GUTIERREZ  
JOSE ANTONIO PATIÑO RAMIREZ  
SANTIAGO RIVAS GOMEZ

**APUNTES DE  
CALCULO  
VECTORIAL**

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS BASICAS

Estos apuntes han sido elaborados por un grupo de profesores de la materia y representan una adaptación de los anteriores de Matemáticas III, conforme las modificaciones que tuvo a bien aprobar el H. Consejo Técnico de la Facultad de Ingeniería, para convertir la anterior asignatura en su afín actual, Cálculo Vectorial.

Se mantiene el enfoque inductivo que se aplicó en los apuntes a los que se sustituye: a través de la resolución de algunos problemas particulares, se llegan a establecer conceptos generales.

El tratamiento de los temas es más extenso que lo usual en este tipo de apuntes; debido a esa extensión, el profesor no podrá exponer toda la teoría presentada ni discutir todos los ejemplos; pero el alumno tendrá a mano donde hallar explicaciones y ejemplos que le ayuden el tema en estudio. El esfuerzo de su parte le permitirá practicar otra de las facetas del proceso enseñanza-aprendizaje: la investigación, que se complementaría, en cualquier caso, con bibliografía extra.

Esta edición es la primera de estos apuntes; algunos profesores que han tenido acceso a ellos han hecho valiosas sugerencias o correcciones, mismas que se les agradecen, como también se apreciarán todas las críticas y sugerencias que se hagan a partir de ahora, que nos permitan presentar una segunda edición acorde con la calidad que merecen el cuerpo académico y el alumnado de esta materia.

Agradecemos a los señores profesores

Eduardo Belaunzarán García  
Bernardo Frontana de la Cruz  
Ricardo Gómez Saavedra  
Enrique González Gutiérrez  
José Antonio Mendoza Márquez  
Jesús Antonio Patiño Ramírez  
Santiago Rivas Gómez

su valiosa intervención en la elaboración de estos apuntes.

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS BASICAS  
Octubre de 1981

5-C

FACULTAD DE INGENIERIA



\*707967\*

G1.-707967

CAPITULO UNO

SUPERFICIES Y CAMPOS ESCALARES ..... 1.1

1.1) Campos Escalares ..... 1.1

1.2) Superficies ..... 1.3

1.3) Discusión de la Ecuación de una superficie ..... 1.15

1.4) Superficies Regladas ..... 1.31

1.5) El Paraboloide Hiperbólico ..... 1.33

1.6) Superficies Cilíndricas ..... 1.35

1.7) Superficies Cónicas ..... 1.39

1.8) Superficies de Revolución ..... 1.43

1.9) Cuádricas ..... 1.45

CAPITULO DOS

DERIVACION Y DIFERENCIACION DE FUNCIONES ESCALARES  
DE VARIAS VARIABLES ..... 11.1

2.1) Límites y Continuidad de Funciones Escalares  
de Variable Vectorial ..... 11.1

2.2) Derivadas Parciales ..... 11.18

2.3) Aplicaciones Geométricas de la Derivada Parcial ..... 11.26

2.4) Condiciones de Derivación ..... 11.27

2.5) Derivadas Parciales Sucesivas y Teorema de Schwarz ..... 11.28

2.6) Funciones Diferenciables ..... 11.32

2.7) Diferencial Total ..... 11.39

2.8) Derivadas Parciales de Funciones Compuestas ..... 11.47

2.9) Diferencial Total de Funciones Compuestas ..... 11.54

2.10) Derivada Total ..... 11.59

2.11) Derivada Direccional ..... 11.66

2.12) Gradiente ..... 11.68

2.13) Diferencial Exacta y su Integración ..... 11.77

2.14) Diferencial Exacta ..... 11.82

CAPITULO TRES

CAMPOS VECTORIALES ..... 111.1

Introducción ..... 111.1

3.1) Campos Vectoriales o Funciones Vectoriales ..... 111.1

5-C  
APUNTES

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



G1.- 707967

\*707967\*

3.2)	Límites y Continuidad de Funciones Vectoriales de Variable Escalar .....	III.6
3.3)	Arco de Curva y su Expresión Vectorial .....	III.12
3.4)	Derivada Ordinaria y Diferencial Ordinaria .....	III.17
3.5)	Derivadas Parciales de Funciones Vectoriales .....	III.44
3.6)	Diferenciales de Funciones Vectoriales .....	III.47
3.7)	Coordenadas Curvilíneas .....	III.49
3.8)	Ecuación Vectorial de una Superficie .....	III.68
3.9)	Generalización del Concepto de Gradiente .....	III.79
3.10)	El Gradiente en Coordenadas Curvilíneas .....	III.84
3.11)	Las Invariantes de la Matriz Gradiente .....	III.99
3.12)	La Divergencia y el Rotacional en Coordenadas Curvilíneas .....	III.105
3.13)	Invariantes de Segundo Orden .....	III.112

#### CAPITULO CUATRO

INTEGRALES CURVILINEAS .....	IV.1
4.1) La Integral Curvilínea. Su Expresión Vectorial y Física .....	IV.1
4.2) La Integral Curvilínea como Integral Ordinaria .....	IV.6
4.3) La Integral Curvilínea en Curvas Cerradas .....	IV.19
4.4) La Integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Su Aplicación Física .....	IV.21
4.5) Independencia de la Trayectoria .....	IV.28
4.6) Campos Conservativos .....	IV.34
4.7) Gasto en un Campo Plano de Velocidades .....	IV.39

#### CAPITULO CINCO

INTEGRALES MULTIPLES .....	V.1
Introducción .....	V.1
5.1) Integral doble en Coordenadas Cartesianas .....	V.4
5.2) Redes sobre una Región .....	V.8
5.3) Existencia de la Integral Doble .....	V.10
5.4) Propiedades de la Integral Doble .....	V.30
5.5) La Integral Doble como Integral Reiterada .....	V.37
5.6) Regiones .....	V.44
5.7) Interpretación Geométrica y Propiedades de la Integral Doble en Regiones Cualesquiera .....	V.48
5.8) Teorema de Green en el Plano .....	V.58

5.9) La Integral Doble en Coordenadas Curvilíneas .....	V.69
5.10) Area de una Superficie Alabeada .....	V.84
5.11) Areas de Superficies Alabeadas en Coordenadas Curvilíneas .....	V.90
5.12) Integral Triple en Coordenadas Cartesianas .....	V.97
5.13) Redes en una Región del Espacio $E^3$ .....	V.111
5.14) Región en el Espacio $E^3$ .....	V.114
5.15) Interpretación Física y Propiedades de la Integral Triple .....	V.131
5.16) La Integral Triple como Integral Iterada .....	V.139
5.17) La Integral Triple en Coordenadas Curvilíneas .....	V.169

#### CAPITULO SEIS

MAXIMOS PARA FUNCIONES DE DOS O MAS VARIABLES .....	VI.1
Introducción .....	VI.1
6.1) Valores Extremos .....	VI.3
6.2) Puntos Críticos .....	VI.4
6.3) Condición Suficiente para la Existencia de Puntos Extremos .....	VI.9
6.4) Máximos y Mínimos bajo Restricción .....	VI.25

## C A P I T U L O   U N O

### 1.1 Campos Escalares (Funciones Escalares de Variable Vectorial).

En la realidad que nos rodea es difícil encontrar fenómenos que pueden ser idealizados matemáticamente como funciones de una sola variable independiente, como las que estudiaste anteriormente. Generalmente son más de una las variables que encontramos involucradas en algún proceso físico o problema matemático, y para ilustrar lo anterior veamos un ejemplo:

#### Ejemplo 1.1.1

La temperatura en cada punto de un cuarto puede establecerse de acuerdo a la posición del punto; más caliente cerca de las ventanas, más caliente cerca del techo que del piso, etc. Entonces a cada punto corresponderá un valor de "T" o sea  $T=F(x,y,z)$  y, como en el caso anterior, puede establecerse una correspondencia unívoca entre cada punto y su temperatura. Entonces "T" es función del punto  $(x,y,z)$

En este ejemplo hemos hablado de conceptos físicos, representados por expresiones en las que más de uno de los parámetros que las componen pueden cambiar durante un proceso o fenómeno determinado. A estas expresiones, en las que la variable dependiente lo es de más de una variable independiente, se les denomina funciones escalares de varias variables independientes, o bien funciones reales de variable vectorial.

Al conjunto ordenado de valores de las variables independientes (pares, ternas, eneadas), para los cuales está definida la función se denomina "dominio de la función" o simplemente "dominio". Se acostumbra también nombrar a estos pares ordenados, ternas ordenadas, etc., de números reales como "vectores" según se ha visto en cursos antecedentes. De ahí el nombre de variable vectorial.

Al conjunto de valores que toma la variable dependiente o función para todos los puntos de su dominio se le denomina "recorrido o rango de la función"

En la figura 1.1.1 se ilustran gráficamente los conceptos de función escalar de variable vectorial, dominio y recorrido para una función  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ , con regla de correspondencia  $F=F(x,y)$

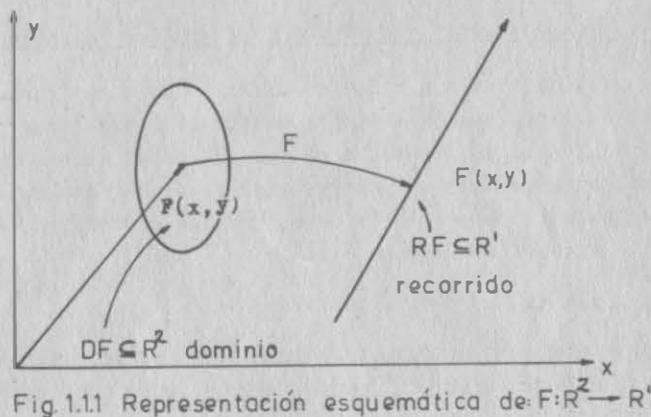


Fig. 1.1.1 Representación esquemática de  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$

### Ejemplo 1.1.2

Sea  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ , ¿Cuál es el dominio y el recorrido de Z?

Solución:

El radical  $\sqrt{1-x^2-y^2}$ , está definido cuando  $1-x^2-y^2 \geq 0$ .

Por las propiedades de las desigualdades se concluye que:

$$1 \geq x^2 + y^2; \text{ o sea } x^2 + y^2 \leq 1.$$

Los puntos que cumplen esta desigualdad constituyen el dominio de z, esto es, el dominio es el conjunto de puntos dentro de un

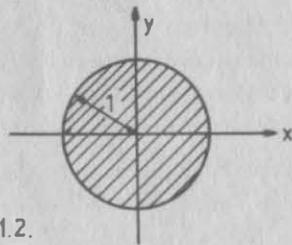


Fig. 1.1.2.

círculo de radio uno con centro en el origen, incluyendo los puntos de la circunferencia según se muestra en la fig. 1.1.2

El recorrido de z es el intervalo  $0 \leq z \leq 1$

1.2

Con lo visto anteriormente estamos preparados ya para la siguiente:

### Definición 1.1.1

Se tiene un campo escalar o función real de variable vectorial - cuando a cada elemento de un dominio (vector) se le asocia un número real, o sea un escalar.

### Ejemplo 1.1.3

En Física se enuncia la ley de Newton acerca de la Gravitación Universal en los términos siguientes: "La magnitud de la fuerza de atracción ejercida entre dos cuerpos en el espacio, es directamente proporcional al producto de sus masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa" Matemáticamente escribimos  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$  siendo G la constante de la gravitación universal ( $G=6.67 \times 10^{-8}$  newton  $m^2/\text{seg}$  en el sistema mks). De una manera similar a como lo hicimos en los ejemplos anteriores, podemos observar que a cada terna de valores  $(m_1, m_2, r)$  corresponde sólo un valor de la fuerza, y se puede decir que la fuerza F es función de las ternas  $(m_1, m_2, r)$ .

Hay un caso de campo escalar que, por su importancia merece que hagamos un estudio especial de él. Esto haremos a continuación.

### 1.2 Superficies.

De acuerdo con la definición de campo escalar (1.1.1) para una función definida en un dominio bidimensional, el escalar asociado puede representarse como una altura: hacia arriba si el valor es positivo. (Fig. 1.2.1), o hacia abajo si es negativo, con respecto al plano del dominio. Entonces la representación geométrica de la función es el conjunto de puntos  $(x,y,z)$  en el espacio tridimensional, caracterizado por el hecho de que están relacionados por la regla de correspondencia:

$$z = f(x,y)$$

1.3

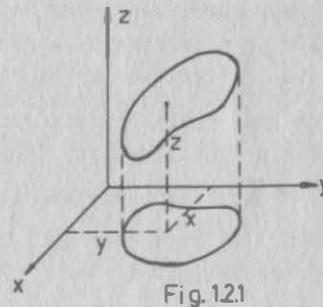


Fig. 1.2.1

A este conjunto de puntos se le llama SUPERFICIE.

En forma más general:

$$F(x,y,z) = 0$$

Por supuesto  $x, y$  también pueden explicitarse:

$$x = f_1(y,z), \quad y = f_2(x,z)$$

#### Definición 1.2.1

Superficie es el lugar geométrico definido por el conjunto de -- puntos:

$$S = \{(x,y,z) / F(x,y,z) = 0\}$$

donde la ecuación  $F(x,y,z) = 0$  deberá ser tal que, al despejar al menos una de las variables, se obtenga un campo escalar.

Con la última condición de la definición 1.2.1 se prevén casos como  $x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 0$  que no definen superficies.

Un plano es una superficie:  $F(x,y,z) = Ax + By + Cz + D = 0$

#### 1.2.1 Superficies suaves.

Sea  $D$  una región en el plano  $E_2$ ; denotaremos los puntos en  $D$  por  $P(x,y)$ . Supongamos que "f" es una función escalar continua definida en  $D$ .

$$z = f(P)$$

El rango de "f" vendrá a ser una superficie  $S$ .

Cabe esperar que en algunos casos, se nos presente un comportamiento muy complicado, por lo que nos restringiremos a la consideración de elementos de superficies a las que denominaremos suaves, que cumplen con las condiciones siguientes:

1)  $D$  es una región cerrada, acotada, simplemente conexa, cuya -- frontera es seccionalmente suave.

2) Para  $\forall P \in D$  se tiene un plano tangente único.

Si  $z = f(x,y)$  satisface estas condiciones, se llamará elemento -- de superficie suave.

1.4

#### 1.2.2 Grados de libertad.

Si elegimos arbitrariamente un punto del espacio, esa elección -- depende de los tres números  $x, y, z$  escogidos al azar. Dado que -- hemos tenido libertad para fijar cada uno de esos números, se di -- ce que un punto del espacio tiene tres grados de libertad.

En una superficie en  $E_3$ , tal como la hemos definido, para deter -- minar un punto que le pertenez -- ca, su elección dependerá única -- mente de dos números arbitrarios, -- o sea dos de sus coordenadas, -- pues el tercero queda determina -- do al quedar sobre la superfi -- cie. Este análisis confirma el que la ecuación de una superfi -- cie tiene las formas:

$$z = f(x,y) \quad \text{ó} \quad F(x,y,z) = 0$$

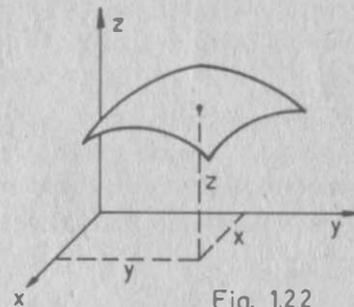


Fig. 1.2.2

Entonces, se dice que un punto sobre una superficie tiene dos gra -- dos de libertad. Fig. 1.2.2

En el caso de una curva en  $E_3$ , si tratamos de elegir un punto so -- bre ella, solo podremos fijar -- arbitrariamente una coordenada, (Fig. 1.2.3) las otras dos qued -- an obligadas por el hecho de -- pertenecer al punto a la curva. Análiticamente se deben cumplir dos condiciones:

$$z = f_1(x,y)$$

$$z = f_2(x,y)$$

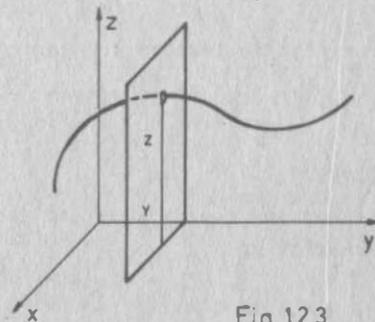


Fig. 1.2.3

Se dice que un punto sobre una curva tiene un grado de libertad.

#### 1.2.3 Ecuaciones de Superficies.

Conforme a lo visto  $F(x,y,z) = 0$  representa una superficie si las -- coordenadas de todo punto sobre la superficie satisfacen la ecua -- ción, y además si todo punto cuyas coordenadas satisfacen la -- ecuación está en la superficie. En tu curso de Álgebra y Geome -- tría Analítica discutiste el plano; veremos ahora la superficie -- esférica.

1.5

### 1.2.3.1 La Esfera.

La esfera es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que están a una distancia constante (radio de la esfera) de un punto fijo denominado centro.

Sea la esfera de centro  $C(h,k,l)$  y radio "a". Si  $P(x,y,z)$  es un punto cualquiera de la esfera, su distancia a  $C$  debe ser "a", y por lo tanto se cumplirá:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = a^2 \quad (1.2.3.1)$$

luego todo punto de la esfera tiene coordenadas que satisfacen -  
1.2.3.1. Por otro lado, si  $P(x,y,z)$  tiene coordenadas que satisfacen 1.2.3.1, eso significará que su distancia a  $C$  es igual con "a", por lo tanto  $P$  pertenece a la esfera.

#### Ejemplo 1.2.1

Hallar la ecuación de la esfera con centro en  $(1,-2,1)$  y radio igual a 5.

Al sustituir los valores dados en la ecuación 1.2.3.1 obtenemos:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$$

que desarrollada se convierte en:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 19 = 0$$

#### Ejemplo 1.2.2

Hallar las coordenadas del centro, y el radio de la esfera cuya ecuación es:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8x - 20y + 12z - 22 = 0$$

Solución:

En primer lugar, dividiremos la ecuación dada entre 2, para poder ponerla en la forma de la ecuación 1.2.3.1:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 10y + 6z - 11 = 0$$

a continuación completamos los trinomios cuadrados perfectos en  $x, y, z$ ; sin alterar la ecuación.

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 10y + 25) + (z^2 + 6z + 9) - 11 = 4 + 25 + 9$$

de donde obtenemos:  $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 49$

Finalmente el centro tiene por coordenadas  $(2,5,-3)$ , y radio igual a 7.

### 1.2.3.2 Método de Generación de Superficies.

Las ecuaciones de las superficies, pueden tratarse, tal como vimos en el caso de la esfera, dando una propiedad que deben cumplir todos los puntos. La traducción analítica de esta propiedad nos proporciona la ecuación de la superficie; sin embargo, generalmente, este procedimiento suele ser complicado.

Otro tratamiento que se puede hacer para hallar esas ecuaciones en forma cartesiana, es el denominado Método de Generación de Superficies, en que se les considera como el conjunto de todas las posiciones que toma una curva que se desplaza y deforma según leyes determinadas.

Para ilustrar éste método, vamos a ver el siguiente problema:

#### Ejemplo 1.2.3

Un rollo de tela plástica, de 12 dm de ancho, se desenrolla a través de una ranura fija; los extremos de la tela se mantienen siempre en dos guías fijas, inclinadas entre sí, que parten de los extremos de la ranura. Se supone que la tela se puede estirar lo necesario, y que el filo se desplaza horizontalmente, tal como se ilustra en la -  
fig. 1.2.4

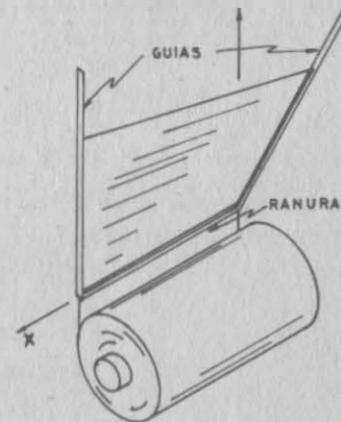


Fig. 1.2.4

¿Cuál es la ecuación de la superficie que se forma?

Solución:

Hagamos coincidir la ranura con el eje  $x$ , como se indica en la -  
figura 1.2.5; sean  $D_1$  y  $D_2$  las guías y  $g_1, g_2, \dots, g_n$ , las posiciones que va tomando el filo de la tela que denominaremos  $G$ , al desplazarse apoyándose constantemente en las guías de ecuaciones:

$$D_1 \begin{cases} x = 12 & \dots\dots (1.2.3.a) \\ y = 0 & \dots\dots (1.2.3.b) \end{cases}$$

$$D_2 \begin{cases} z = 2y & \dots\dots (1.2.3.c) \\ x = 0 & \dots\dots (1.2.3.d) \end{cases}$$

La totalidad de las posiciones de G será la superficie. En la posición  $g_n$  el filo recto se apoyará en el punto  $Q_1$  sobre el plano xz, cuya cota la designaremos con  $\gamma$  (variable paramétrica) y su abscisa será el ancho original de la tela: 12 dm, por lo que  $Q_1(12,0,\gamma)$ .

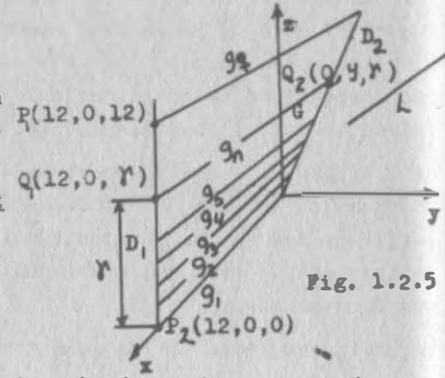


Fig. 1.2.5

Como G estará siempre sobre un plano horizontal, sus ecuaciones se pueden escribir como:

$$G \begin{cases} y = \alpha x + \beta & \dots\dots (1.2.3.e) \\ z = \gamma & \dots\dots (1.2.3.f) \end{cases}$$

en donde "a" y "b", serán variables paramétricas; como "gamma"

Para fijar una posición de G basta dar valores a  $\alpha, \beta, \gamma$ ; pero estos valores no pueden ser arbitrarios, pues por ejemplo, si hacemos  $\alpha = -\frac{1}{4}$ ,  $\beta = 10$ ,  $\gamma = 8$ , obtendremos:

$$y = -\frac{1}{4}x + 10$$

$$z = \gamma = 8$$

cuya posición se indica con L en la fig. 1.2.5, la cual no se apoya en las guías.

Por lo anterior se deduce que tienen que existir algunas ecuaciones que condicionen los valores que se les puede dar a los parámetros  $\alpha, \beta, \gamma$ ; esas ecuaciones reciben el nombre de "Ecuaciones de Condición", y para establecerlas nos tenemos que apoyar en Las ecuaciones de las guías pues dado que G pasa por ellas, las debe intersectar.

Trabajemos primero con G y  $D_1$ :

Al sustituir (1.2.3.a) y (1.2.3.b) en (1.2.3.e) obtenemos:

$$12\alpha + \beta = 0 \dots\dots (1.2.3.g)$$

Al emplear G y  $D_2$ , sustituimos (1.2.3.d) en (1.2.3.e):

$$y = \beta \dots\dots (1.2.3.h)$$

Al sustituir (1.2.3.f) y (1.2.3.h) en (1.2.3.c):

$$\gamma = 2\beta \dots\dots (1.2.3.i)$$

(1.2.3.g) y (1.2.3.i) son las ecuaciones de condición; podemos verificar el resultado, haciendo por ejemplo:

$$\beta = 6 \text{ Resulta } \alpha = -\frac{1}{2}, \gamma = 12, \text{ y la posición de G,}$$

queda definida por las ecuaciones:

$$y = -\frac{1}{2}x + 6$$

$$z = 12$$

y se indica con  $g_q$  en la figura 1.2.5.

Ya que conocemos las ecuaciones que deben cumplir los parámetros, si las sustituimos en las ecuaciones de la recta, tendremos el conjunto de posiciones de ésta o sea, la ecuación de la superficie:

Al sustituir (1.2.3.f) en (1.2.3.i)

$$\beta = \frac{z}{2} \dots\dots (1.2.3.j)$$

De (1.2.3.j) en (1.2.3.g)

$$\alpha = -\frac{z}{24} \dots\dots (1.2.3.k)$$

Finalmente, al sustituir (1.2.3.j) y (1.2.3.k) en (1.2.3.e):

$$y = -\frac{z}{24}x + \frac{z}{2}$$

$$(x-12)z = -24y \dots\dots (1.2.3.l)$$

En donde observamos que han sido eliminados los parámetros, lo que cabía esperar, pues se disponía de 4 ecuaciones y 3 parámetros.

La ecuación (1.2.3.l) da el conjunto de todas las posiciones de la recta generatriz; es precisamente la ecuación de la superficie buscada.

En este caso, observamos que la recta que generó la superficie, - llamada generatriz, contiene en su ecuación a tres parámetros, y que se requieren dos ecuaciones de condición, cada una de ellas obtenida por medio de una recta (directrices) en la cual la generatriz se apoya.

En general, podemos establecer que si en la ecuación de la generatriz: una curva cualquiera, intervienen "n" parámetros, se requerirán "n-1" ecuaciones entre los parámetros para que el problema quede determinado, y así obtener una ecuación en x,y,z que representará a la superficie generada.

Las ecuaciones de condición expresan las leyes mediante las cuales, la curva generatriz se desplaza y cambia de forma para engendrar diferentes tipos de superficies. Frecuentemente, esas leyes se obtienen obligando a la generatriz a apoyarse en curvas fijas llamadas directrices.

De las ecuaciones de las directrices y de la generatriz, se obtienen las ecuaciones de condición.

De acuerdo con lo anterior, en el caso de que sólo intervenga un parámetro en las ecuaciones de la curva generatriz, no necesitamos ecuaciones de condición ni, por lo tanto, directrices.

En resumen, si en las ecuaciones de la generatriz de una superficie figuran "n" parámetros, se requiere que durante su movimiento, la generatriz se apoye en n-1 directrices.

Al combinar las ecuaciones de la generatriz con las ecuaciones de cada directriz, se obtienen "n-1" ecuaciones de condición.

Entre las ecuaciones de condición y las de la generatriz, se eliminan los "n" parámetros, obteniendo así la ecuación de la superficie.

#### Ejemplo 1.2.4

¿Cuál es la ecuación de la superficie que se forma cuando una circunferencia se desplaza verticalmente, manteniendo su centro en el eje "z" y su plano horizontal; su radio varía, tomando un valor de  $\frac{1}{2}$  de la cota del plano sobre el cual yace?

Solución:

De acuerdo con el enunciado, tomaremos la circunferencia cuyo centro permanece sobre el eje z, Fig.1.2.6. Sus ecuaciones serán:

$$G \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4} & (1.2.4.a) \\ z = \beta & (1.2.4.b) \end{cases}$$

Aquí basta sustituir (1.2.4.b) en (1.2.4.a):

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4}$$

que corresponde a la superficie mostrada en la Fig.1.2.7

#### Ejemplo 1.2.5

Obtener la ecuación de la esfera de radio "a" y centro (h,k,l)

Solución:

Tomaremos como generatriz el círculo de radio variable "a" con centro sobre la recta  $x=h, y=k$ .

Este círculo se mantiene paralelo al plano xy; sus ecuaciones son:

$$G \begin{cases} (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 & (1.2.5.a) \\ z = \beta & (1.2.5.b) \end{cases}$$

Este círculo es variable, tanto en radio "a" como en altura; pero siempre paralelo al plano xy.

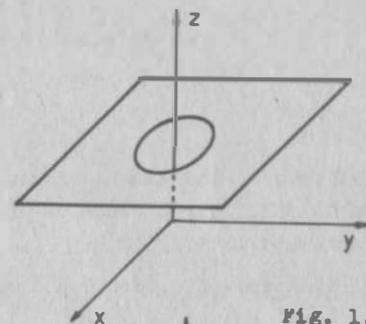


Fig. 1.2.6

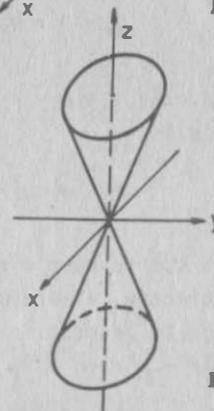


Fig. 1.2.7

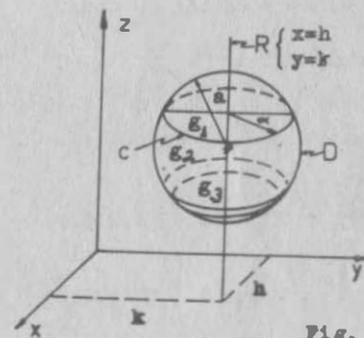


Fig. 1.2.8

Está indicando en la figura 1.2.8 como "c" Como directriz tomando la circunferencia paralela al plano yz, como centro (h,k,l) y radio "a" designada como "D" en la fig. 1.2.8 sus ecuaciones son:

$$D \begin{cases} (y-k)^2 + (z-l)^2 = a^2 & 1.2.5.c \\ x = h & 1.2.5.d \end{cases}$$

Tal como lo indicamos, eliminemos x,y,z de entre las ecuaciones de G: 1.2.5 a y b y una de las ecuaciones de D; por sencilla -empleamos la 1.2.5.d.

Al sustituir 1.2.5.d en 1.2.5.a:

$$(y-k)^2 = \alpha^2 \quad 1.2.5.e$$

Sustituimos 1.2.5.e y 1.2.5.b en 1.2.5.c, obtenemos la ecuación de condición.

$$\alpha^2 + (\beta - l)^2 = a^2 \quad 1.2.5.f$$

Ecuación que se cumple cuando la generatriz toca a la directriz. A continuación, eliminemos los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  entre las ecuaciones de la generatriz y la de condición, lo que logramos al -sustituir a y b en f de las ecuaciones 1.2.5

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = a^2 \quad 1.2.5.g$$

que es la ecuación buscada.

#### Ejemplo 1.2.6

Obtener la ecuación de la superficie generada por un elipse que se apoya en las hipérbolas.

$$D_1 \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & (1.2.6.a) \\ x = 0 & (1.2.6.b) \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & (1.2.6.c) \\ z = 0 & (1.2.6.d) \end{cases}$$

(ver fig. 1.2.9)

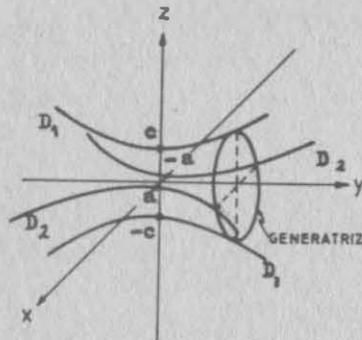


Fig. 1.2.9

Solución:

La elipse se conservará paralela al plano xz, por lo que -- sus ecuaciones serán:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1 \quad (1.2.6.e)$$

$$y = \delta \quad (1.2.6.f)$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  son parámetros; por ser tres, necesitamos dos ecuaciones de condición, mismas que obtendremos al obligar a la generatriz a tocar a cada una de las directrices:

Sustituimos 1.2.6.b en 1.2.6.e:

$$\frac{z^2}{\beta^2} = 1 \quad (1.2.6.g)$$

Ahora 1.2.6.f en 1.2.6.a:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{\delta^2}{b^2} = 1 \quad (1.2.6.h)$$

y eliminemos " $\delta$ " entre 1.2.6.g y 1.2.6.h:

$$\frac{\beta^2}{c^2} - \frac{\delta^2}{b^2} = 1 \quad (1.2.6.i)$$

que es la primera ecuación de condición. Análogamente, al trabajar con la otra directriz obtendremos:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\delta^2}{b^2} = 1 \quad (1.2.6.j)$$

Ahora haremos simultáneas las ecuaciones 1.2.6.e, 1.2.6.f, 1.2.6.i y 1.2.6.j, para eliminar los parámetros y obtener la ecuación de la superficie:

Despejemos  $\beta^2$  y  $\alpha^2$  de 1.2.6.i y 1.2.6.j, respectivamente:

$$\beta^2 = c^2 \left( 1 + \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (1.2.6.k)$$

$$\alpha^2 = a^2 \left( 1 + \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (1.2.6.l)$$

y sustituyamos en 1.2.6.e:

$$\frac{x^2}{a^2 \left( 1 + \frac{y^2}{b^2} \right)} + \frac{z^2}{c^2 \left( 1 + \frac{y^2}{b^2} \right)} = 1$$

Al multiplicar por  $1 + \frac{y^2}{b^2}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \quad (1.2.6.m)$$

Finalmente, al sustituir 1.2.6.f en 1.2.6.m:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$$

o bien:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Esta superficie se llama hiperboloide elíptico de un manto y se representa en la figura 1.2.10

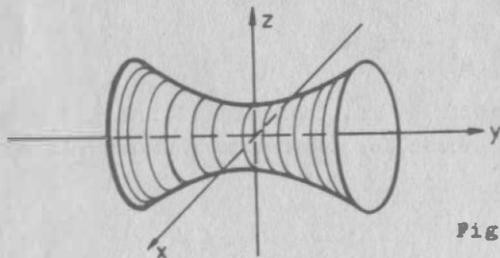


Fig. 1.2.10

### 1.3. Discusión de la Ecuación de una Superficie.

Ya establecimos que la ecuación de una superficie tiene la forma:  
 $F(x,y,z) = 0$  1.3.0.1

Ahora, conocida la ecuación, es conveniente que sepamos cuál es la forma de esa superficie y en que región del espacio existe; esto, en algunos casos, lo podemos lograr, como ocurre con la esfera, poniendo la ecuación en la forma de la ecuación 1.2.3.1 (Ejemplo 1.2.2), en que podemos identificar fácilmente sus características, es decir su centro, su radio, cuál es su dominio y cuál es su recorrido; lo mismo podremos hacer, con ese procedimiento, con algunas otras superficies particulares que posteriormente estudiaremos, pero en el caso general, podremos entender la superficie que estemos estudiando, si determinamos sus características siguientes:

#### 1.3.1 Intercepciones con los ejes.

Son los puntos de intersección de la superficie con los ejes - coordenados, los denominaremos intercepciones "x", "y" y "z".

Dada la ecuación de la superficie, obtenemos la intercepción "x" haciendo  $y=z=0$  en la ecuación, y resolviendo para "x". En forma análoga procedemos para las intercepciones "y" y "z".

#### Ejemplo 1.3.1

Hallar las intercepciones de la superficie

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$$

Solución:

Intercepción x: hacemos  $y=z=0$ , de donde obtenemos  $x^2=36$

y las intercepciones "x" son:

$$x = \pm 6$$

Intercepción "y": hacemos  $x=z=0$ , obtenemos  $3y^2=36$

$$y = \pm \sqrt{12}$$

Intercepción "z": hacemos  $x=y=0$ , de donde  $4z^2=36$

$$z = \pm 3$$

## Ejemplo 1.3.2

Hallar las intercepciones de la superficie

$$2x^2 - y^2 - 3z^2 = 50$$

Solución:

Intercepciones "x" : hacemos  $y=z=0$ 

$$2x^2 = 50$$

$$x = \pm 5$$

Intercepciones "y" :

$$-y^2 = 50, \quad y = \pm \sqrt{-50}$$

que son números imaginarios; concluimos que la superficie no intersepta al eje "y"; análogamente concluiremos que la superficie tampoco intersepta al eje z.

## 1.3.2 Trazas sobre planos coordenados.

Definición: Son las curvas de intersección entre la superficie dada y cada uno de los planos coordenados.

Para obtener la traza sobre el plano xy que tiene por ecuación  $z=0$ , sustituimos este valor en la ecuación dada.

En forma similar procedemos para hallar las trazas sobre xz y yz.

## Ejemplo 1.3.3

Hallar las trazas con los planos coordenados, de la superficie de ecuación  $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$

Traza con el plano xy: hacemos  $z=0$ , con lo que obtenemos:

$$x^2 + 3y^2 = 36$$

$$6 \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$$

curva que reconocemos como la elipse con centro en  $(0,0)$ , semieje mayor igual a 6, paralelo al eje x, y semieje menor igual a  $\sqrt{12}$ , paralelo al eje y.

Traza con el plano xz: hacemos  $y=0$ , de donde:

$$x^2 + 4z^2 = 36 \quad \delta \quad \frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$$

que es la elipse en el plano xz, con centro en  $x=0, z=0$ , con semieje mayor igual a 6, paralelo al eje x, y semieje menor igual a 3, paralelo al eje z.

Traza con el plano yz: hacemos  $x=0$ , obtenemos:

$$3y^2 + 4z^2 = 36 \quad \delta \quad \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{9} = 1$$

elipse sobre el plano yz, con centro en  $y=0, z=0$ , semieje mayor igual a  $\sqrt{12}$ , paralelo al eje y, y semieje menor igual a 3, paralelo al eje z.

## Ejemplo 1.3.4

Hallar las trazas de la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 11 = 0$$

con los planos coordenados.

Solución:

Con el plano xy; hacemos  $z=0$

$$x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

o bien

$$(x-6)^2 + y^2 = 25$$

que es una circunferencia con centro en  $(6,0)$  y radio 5.

Con el plano xz; hacemos  $y=0$  y agrupamos en forma similar:

$$(x-6)^2 + z^2 = 25$$

que es una circunferencia, con centro en  $x=6, z=0$  y radio 5.

Con el plano yz; hacemos  $x=0$

$$y^2 + z^2 = -11$$

como la suma de dos números positivos no puede ser negativa, concluimos que tal curva no existe y que la superficie no tiene traza en el plano yz.

1.3.3 Simetría con respecto a los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.

Se dice que dos puntos son simétricos respecto a un plano, si el plano bisecta perpendicularmente el segmento de recta que une dichos puntos. Una superficie es simétrica respecto a un plano, si cada punto de la superficie tiene sobre la misma superficie un punto simétrico respecto al plano. En la fig. 1.3.1 los puntos  $P$  y  $P'$  son simétricos respecto al plano  $xz$  si y sólo si tienen las mismas coordenadas  $x$  y  $z$ ; pero la coordenada "y" de uno de ellos es la opuesta de la coordenada "y" del otro.

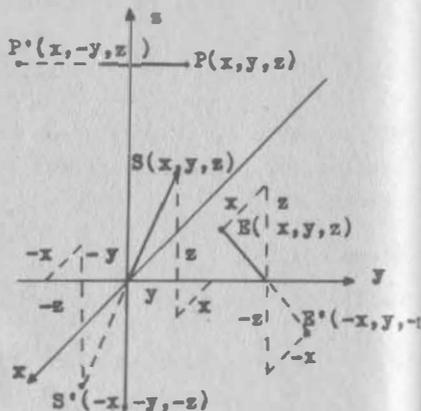


Fig. 1.3.1

En efecto, si la superficie  $F(x, y, z) = 0$  es simétrica con respecto al plano  $xz$ , entonces los puntos  $P_1(x_0, y_0, z_0)$  y  $P_2(x_0, -y_0, z_0)$  deben estar sobre la superficie y por lo mismo:

$$F(x_0, y_0, z_0) = F(x_0, -y_0, z_0) = 0$$

Por otra parte, si se cumple que:

$$F(x, y, z) = F(x, -y, -z) = 0$$

la superficie es simétrica respecto al eje  $x$ ; la superficie será simétrica respecto al eje  $Z$ , si y sólo al sustituir "x" por  $(-x)$  y "y" por  $(-y)$  en su ecuación, ésta no se altera.

Dos puntos son simétricos con respecto a un punto  $P_1$  si éste es el punto medio del segmento que los une. Una superficie es simétrica respecto a un punto, si cada punto de la superficie tiene un punto que pertenece, simétrico respecto al primer punto.

El punto simétrico de  $S(x, y, z)$  respecto al origen, es el  $S'(-x, -y, -z)$  porque el punto medio de  $SS'$  es el origen  $(0, 0, 0)$

Corolario.- Una superficie es simétrica respecto al origen, si y sólo al sustituir "x" por  $(-x)$ , "y" por  $(-y)$ , "z" por  $(-z)$  en la ecuación de la superficie, ésta no se altera.

Este corolario se demuestra en forma similar a los anteriores.

Ejemplo 1.3.5

Investigar la simetría respecto al origen, planos coordenados y ejes coordenados, de la superficie de ecuación  $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$ .

Solución:

Respecto al plano  $xy$ ; se sustituye "z" por  $(-z)$  en la ecuación:

$$x^2 + 3y^2 + 4(-z)^2 = 36$$

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$$

eso nos está diciendo que a cada punto,  $P(x, y, z)$  corresponde un punto  $Q(x, y, -z)$ , simétrico de  $P$  respecto al plano  $xy$ , que también está en la superficie; luego, la superficie será simétrica respecto al plano  $xy$ .

Análogamente: Una superficie es simétrica con respecto a los planos  $xy$  o  $yz$ , si su ecuación no se altera al sustituir "z" por  $(-z)$  o "x" por  $(-x)$  respectivamente.

Dos puntos son simétricos respecto a una recta "l" si ésta bisecta perpendicularmente al segmento que une dichos puntos. Una superficie es simétrica respecto a una recta, si cada punto de la superficie tiene un punto de la misma superficie simétrico respecto a la recta.

El punto simétrico de  $E(x, y, z)$  respecto al eje "y", es el punto  $E'(-x, y, -z)$  porque el punto medio de  $EE'$  es  $(0, y, 0)$  y además perpendicular al eje "y".

Corolario.- Una superficie es simétrica respecto al eje  $y$ , si su ecuación no se altera al sustituir "x" por  $(-x)$  y "z" por  $(-z)$ . Este corolario se demuestra de manera similar a como se demostró el anterior.

Análogamente, si al sustituir en la ecuación de la superficie "y" por (-y) y "z" por (-z), ésta no se altera, la superficie es simétrica respecto al eje x.

Respecto al plano xz: sustituimos "y" por (-y) :

$$x^2 + 3(-y)^2 + 4z^2 = 36$$

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$$

la ecuación no se altera  $\Rightarrow$  la superficie es simétrica respecto a xz.

Respecto al plano yz: sustituimos "x" por (-x)

$$(-x)^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$$

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$$

se obtiene la misma ecuación  $\Rightarrow$  la superficie es simétrica respecto a yz.

Respecto al eje x: sustituimos "y" por (-y), "z" por (-z)

$$x^2 + 3(-y)^2 + 4(-z)^2 = 36 \quad ; \quad x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$$

$\Rightarrow$  la superficie es simétrica respecto al eje x.

Respecto al eje y: sustituimos "x" por (-x), "z" por (-z)

$$(-x)^2 + 3y^2 + 4(-z)^2 = 36 \quad ; \quad x^2 + y^2 + 4z^2 = 36$$

la ecuación no se altera  $\Rightarrow$  la superficie es simétrica respecto al eje y.

Respecto al eje z: sustituimos "x" por (-x) y "y" por (-y)

$$(-x)^2 + 3(-y)^2 + 4z^2 = 36 \quad ; \quad x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$$

$\Rightarrow$  la superficie es simétrica respecto al eje z.

Respecto al origen: sustituimos "x" por (-x), "y" por (-y), "z" por (-z):

$$(-x)^2 + 3(-y)^2 + 4(-z)^2 = 36 \quad ; \quad x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$$

la ecuación no se altera, de donde la superficie es simétrica respecto al origen.

Una superficie simétrica con respecto a dos planos coordenados, lo será también con respecto al eje que definen entre ambos; una superficie simétrica con respecto a los tres ejes coordenados, lo será también con respecto al origen; las recíprocas de estas aseveraciones no son ciertas.

1.3.4 Secciones por planos paralelos a los planos coordenados.

En el propósito de conocer la superficie en discusión, es muy útil identificar qué curvas resultan al intersectar la superficie con planos paralelos a los planos coordenados.

Las secciones con planos paralelos al plano xy las obtenemos sustituyendo  $z=k$  en la ecuación de la superficie.

Para las secciones paralelas al XZ, hacemos en la ecuación:

$$y = k$$

Y para las secciones paralelas al yz hacemos:

$$x = k$$

Ejemplo 1.3.6

Hallar las secciones por planos paralelos a los planos coordenados, en la superficie que hemos venido estudiando, que tiene por ecuación:

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$$

Secciones paralelas a xy; hacemos  $z = k$

$$x^2 + 3y^2 = 36 - 4k^2$$

que es una familia de elipses con centro en  $x=0, y=0$ , con la condición que  $|k| \leq 3$  (Si  $|k| = 3$ , tenemos un punto, elipse evanescente).

Secciones paralelas a xz; hacemos  $y=k$

$$x^2 + 3k^2 + 4z^2 = 36$$

que identificamos como una familia de elipses con centro en  $x=0, z=0$ . ¿Qué restricción pondremos ahora a "k"?

Secciones paralelas a  $yz$ : hacemos  $x=k$

$$k^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$$

familia de elipses con centro en  $y=0, z=0$ .

### 1.3.5 Curvas de nivel

Una aplicación muy importante de las secciones por planos paralelos a los coordenados, la constituyen las curvas denominadas de nivel.

Cuando la ecuación de la superficie adopta la forma funcional:

$$z = f(x, y)$$

el plano paralelo a  $xy$ , que corta a la superficie a una altura - "C", definirá la curva de intersección:

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = C \\ z = C \end{array} \right\} \quad 1.3.5.1$$

Cada una de las curvas que obtenemos al dar valores a "C", recibe el nombre de "curva de nivel" porque un punto de igual nivel o cota. (Fig. 1.3.2)

La Topografía hace uso de este concepto para representar gráficamente el relieve de una región geográfica, al dibujar curvas correspondientes a determinadas alturas, medidas a partir de un plano base, generalmente el nivel del mar. Normalmente se dibujan como en la figura 1.3.2, interrumpiendo la línea para escribir el valor de la cota correspondiente.

Si bien el concepto es netamente geométrico y como tal se utiliza en la Topografía, es posible -- extenderlo a cualquier función escalar de dos variables. Así, por ejemplo, si  $T(x, y)$  nos asocia la temperatura a cada punto de una placa, las curvas de ecuación  $T(x, y) = C_1, C_2, \dots$ , se llamarán curvas de nivel de la función "T"

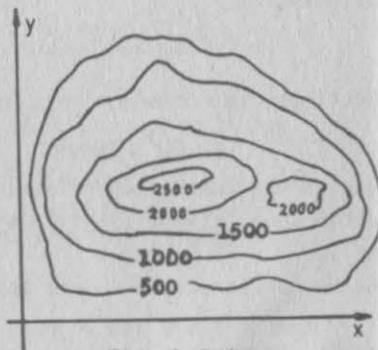


Fig. 1.3.2

o "isotermas". De igual manera tendremos las curvas "isoyetas" (igual precipitación pluvial); "isobaras" (igual presión atmosférica); "isohalinas" (igual contenido de sal); etc.

### Ejemplo 1.3.7

Una montaña obedece a la ecuación

$$z = -0.08(x^2 + y^2) + 2 \quad (x, y, z \text{ en km})$$

Trazar las curvas de nivel 500, 1000 y 1500 m.

Solución:

Se trata de intersectar a la superficie con los planos  $z=500 \text{ m} = 0.5 \text{ km}$ ,  $z=1 \text{ km}$ ,  $z=1.5 \text{ km}$ .

Para el primer plano:

$$0.5 = -0.08(x^2 + y^2) + 2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{-1.5}{-0.08} = 18.75$$

que corresponde a una circunferencia con centro en el origen y radio =  $\sqrt{18.75}$

Análogamente, para el segundo plano:

$$x^2 + y^2 = 12.5, \text{ circunferencia con centro en el origen y radio} = \sqrt{12.5}$$

Para el tercer plano:

$$x^2 + y^2 = 0.625$$

que se interpreta de manera similar, por lo que las curvas pedidas son las de la Fig. 1.3.3

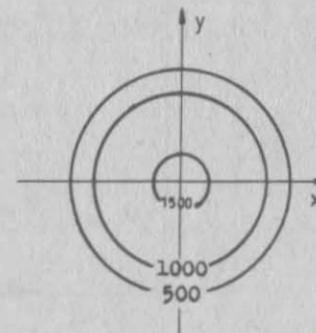


Fig. 1.3.3

### Ejemplo 1.3.8

Las temperaturas en una placa obedecen a la ley  $T = \frac{1}{2}xy$  donde los ejes coinciden con los bordes de la placa y "T" está en °C si  $x, y$ , están en cm. Trazar las isotermas 1°C, 2°C y 3°C.

Solución:

Hacemos  $T = k$ :  $k = \frac{1}{2} xy$

$xy = 2k$

Se trata de una familia de hipérbolas equiláteras, de las cuales nos interesan:

$xy = 2$

$xy = 4$

$xy = 6$

sólo nos resta trazarlas mediante algún método para dibujar hipérbolas. En la figura 1.3.4 se trazaron tabulando puntos.

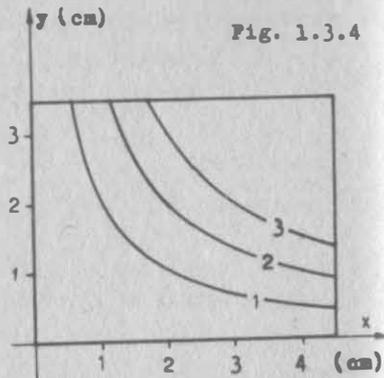


Fig. 1.3.4

Ejemplo 1.3.9.- La placa de la figura 1.3.5 se ha conectado a una batería y se han medido los voltajes (potenciales eléctricos) en varios puntos como se indica en dicha figura. Trazar aproximadamente las equipotenciales 1,2,3,4 y 5 centivolts.

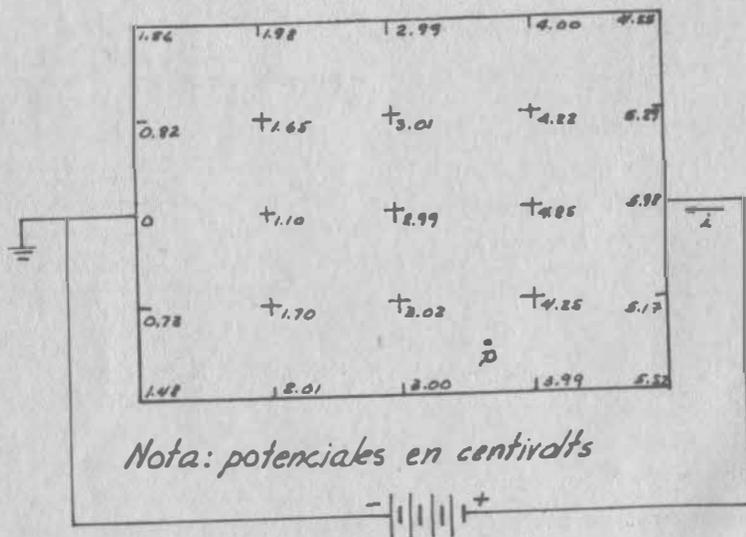


Fig. 1.3.5

Solución:

Este es un caso que se le presenta muy comúnmente al ingeniero, donde conoce los valores de una función (en este caso el potencial eléctrico) en varios puntos pero no conoce la definición analítica de la misma.

En tal caso, las curvas de nivel se trazan por interpolación; generalmente se interpola "a ojo"; pero puede interpolarse por métodos gráficos más precisos si se juzga conveniente. Las curvas de nivel que resuelvan el presente problema pueden ser las de la figura 1.3.6 En este caso, desde luego, la solución no es única, pues depende del "ojo" del que trace; eso sí, si te presentan un diagrama en que por el punto "P" (Fig. 1.3.5) pase la curva 5, puedes asegurar que tal diagrama está mal.

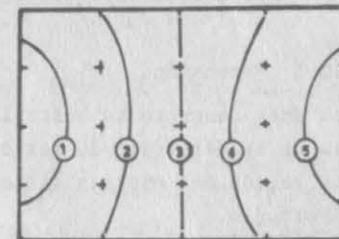


Fig. 1.3.6

Generalmente, las curvas de nivel se trazan a intervalos iguales de valores de la función; en tal caso, a ese intervalo constante se le llama "equidistancia".

En la figura 1.3.2 la equidistancia es de 500 m, misma que el ejemplo 1.3.3; en el ejemplo 1.3.7 la equidistancia es de 1°C y en el ejemplo 1.3.8, de 1 centivolt. Conviene aclarar, sin embargo, que no es obligatorio trazar las curvas de nivel con equidistancia.

Por existir relación funcional, dos curvas de nivel distintas no pueden intersectarse, ya que eso significaría que en el punto de intersección hay dos valores distintos de la función, lo que no es posible.

Cuando una función tiene tres variables independientes,  $u=f(x,y,z)$  no hay curvas de nivel. Al hacer  $u=cte.$  se tiene la ecuación de una superficie, a la que por extensión se le llama "superficie de nivel".

Cuando la función tiene más de tres variables independientes, el concepto se vuelve meramente matemático; a la ecuación  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = cte$ , algunos autores la llaman "hipersuperficie de nivel".

### 1.3.6 Extensión.

Con este concepto se busca investigar la extensión de la superficie en la dirección de los ejes coordenados, o de otra manera, en qué región del espacio tiene representación real la superficie - en estudio.

Ejemplo 1.3.10 Analizar la extensión de la superficie

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$$

Solución:

Despejamos a "x" de la ecuación dada:

$$x = \pm \sqrt{36 - 3y^2 - 4z^2} \quad 1.3.6.a$$

"x" tendrá valores reales cuando se cumpla que el radicando.

$$36 - 3y^2 - 4z^2 \geq 0 \quad 1.3.6.b$$

en el caso crítico:

$$36 - 3y^2 - 4z^2 = 0 \quad 1.3.6.c$$

es decir que tendrá valores reales dentro de la elipse:

$$\frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Por otra parte, el mayor valor de (1.3.6.a) ocurre cuando  $y=z=0$ , lo que significa que:

$$x = \pm 6$$

o, lo que es lo mismo, que la superficie, en el sentido del eje "x" se extiende en el intervalo:

$$-6 \leq x \leq 6$$

De la misma ecuación (1.3.6.c) se puede obtener que:

$$y^2 = 12 - \frac{4}{3} z^2$$

por lo que el máximo valor de "y" se tendrá si  $z=0$ :

$$y = \pm \sqrt{12} \quad 1.26$$

o bien, que la extensión de la superficie, en el sentido del eje "y", es en el intervalo:

$$-\sqrt{12} \leq y \leq \sqrt{12}$$

Si se manipula la ecuación (1.3.6.c) en forma similar se llega a:

$$-3 \leq z \leq 3$$

con un procedimiento análogo, a partir de la ecuación de la superficie, se llega a que los valores reales de "y" ocurren dentro de la elipse:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$$

y que los valores de "z" dan lugar dentro de la elipse:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$$

### 1.3.7 Perspectiva.

La discusión de una superficie nos proporciona información para dibujar una perspectiva de la misma.

Ejemplo 1.3.11

Dibujar la perspectiva de la superficie que tiene por ecuación:

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 36$$

Solución:

Todos los elementos han sido determinados en los ejemplos 1.3.1, 1.3.3, 1.3.5, 1.3.6 y 1.3.10. Así, del ejemplo 1.3.1 se definen los puntos A, B, C, D de la figura 1.3.7 y del ejemplo 1.3.3, las curvas  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , de la misma figura.

El ejemplo 1.3.5 nos dice que la superficie es simétrica con respecto al origen, ejes y planos coordenados, lo que nos permite hacernos una idea más completa de la misma.

Muy importantes son los resultados del ejemplo 1.3.6, que nos dicen que todas las secciones paralelas a los planos coordenados son elipses. En la figura 1.3.7 sólo se presenta una de estas

curvas ( $C_i$ ) pues su objetivo es presentar los elementos con claridad, pero en la figura 1.3.8, se utilizan varias de ellas en un sombreado que contribuye a darle forma a la perspectiva.

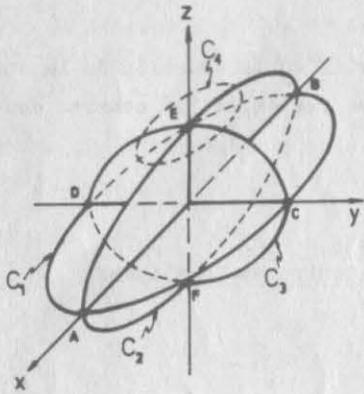


Fig.1.3.7



Fig.1.3.8

Finalmente, los resultados del ejemplo 1.3.10 nos indican los límites del dibujo, que en este caso los tiene en todas direcciones pues su extensión está acotada. Se trata de una superficie cerrada. La figura 1.3.7 es útil para un trabajo analítico, como los que desarrollaremos a lo largo del curso. La figura 1.3.8 sirve más bien para efectos de presentación.

No está por demás decir que en muchos casos no es necesario discutir todos los puntos anteriormente indicados para obtener una representación clara; tampoco será siempre necesario hacer una perspectiva, pues lo más importante es tener una representación clara.

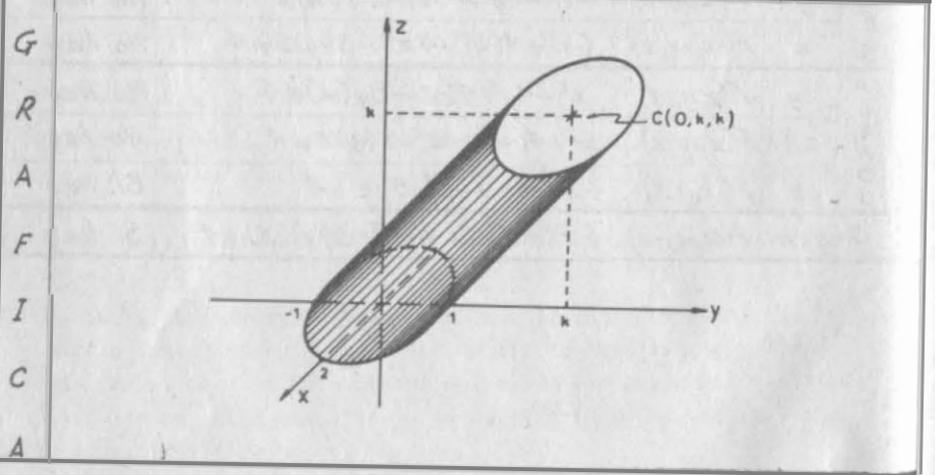
Es conveniente contar con un método de sistematización de los cálculos anteriormente descritos, a fin de simplificar tanto su desarrollo, como la interpretación de sus conclusiones. La tabla 1.3.1 reúne estos requisitos, te sugerimos que la uses mientras no encuentres algo mejor.

TABLA 1.3.1

DISCUSION DE LA SUPERFICIE  $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8yz = 4$ 

		Hágase	Operaciones	Resultado		
I N T E R S E C C I O N E S	E	$x$	$y=z=0$	$x^2=4$	$x=\pm 2$	
	J	$y$	$x=z=0$	$4y^2=4$	$y=\pm 1$	
	S	$z$	$y=x=0$	$4z^2=4$	$z=\pm 1$	
	P	$xy$	$z=0$	$x^2+4y^2=4$ $\frac{x^2}{4}+y^2=1$	Elipse Cen O Semiejes 2, 1	
	L	$xz$	$y=0$	$x^2+4z^2=4$ $\frac{x^2}{4}+z^2=1$	Elipse Cen O Semiejes 2, 1	
	A	$yz$	$x=0$	$4y^2-8yz+4z^2=4$ $2(y-z)^2=2$ $y-z=1; y-z=-1$	Dos rec- tas pa- ralelas	
	S I M E S	E	$x$	$F(x, y, z)$	$x^2+4(-y)^2+4(-z)^2-8(-y)(-z)=4$	Sí hay
		J	$y$	$F(x, y, z)$	$(-x)^2+4y^2+4(-z)^2-8y(-z)\neq 4$	No hay
		S	$z$	$F(x, y, z)$	$(-x)^2+4(-y)^2+4z^2-8(-y)z\neq 4$	No hay
		P	$xy$	$F(x, y, z)$	$x^2+4y^2+4(-z)^2-8y(-z)\neq 4$	No hay
L		$xz$	$F(x, y, z)$	$x^2+4(-y)^2+4z^2-8(-y)z\neq 4$	No hay	
A		$yz$	$F(x, y, z)$	$(-x)^2+4y^2+4z^2-8yz=4$	Sí hay	
Origen		$F(x, y, z)$	$(-x)^2+4(-y)^2+4(-z)^2-8(-y)(-z)=4$	Sí hay		

			Hágase	Operaciones	Resultado
S E C S	P L A N A S	xy	$x=k$	$x^2 + 4y^2 - 8ky = 4 - 4k^2$ $x^2 + 4(y-k)^2 = 4 - 4k^2 + 4k^2$ $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-k)^2}{1} = 1$	Elipses $C(0, k, k)$ Semiejes 2, 1
		xz	$y=k$	$x^2 + 4z^2 - 8kz = 4 - 4k^2$ $x^2 + 4(z-k)^2 = 4$ $\frac{x^2}{4} + (z-k)^2 = 1$	Elipses $C(0, k, k)$ Semiejes 2, 1
		yz	$x=k$	$4y^2 + 4z^2 - 8yz = 4 - k^2$ $4(y-z)^2 = 4 - k^2$ $2(y-z) = \sqrt{4-k^2}; 2(y-z) = -\sqrt{4-k^2}$	Familia rectas pa- rales $ k  \leq 2$
E X T E N S I O N	E J S I O S	x	$x=f(y, z)$	$x = \pm 2\sqrt{1-(y-z)^2}$	$-2 \leq x \leq 2$ Entre las rectas $y-z=1; y-z=-1$
		y	$y=g(x, z)$	$y = z \pm \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$	$y \rightarrow \pm \infty$ $z \rightarrow \pm \infty$
		z	$z=h(x, y)$	$z = y \pm \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$	$z \rightarrow \pm \infty$ $y \rightarrow \pm \infty$



1.30

1.4 Superficies Regladas.

Son todas las superficies generadas por una recta, por lo tanto es reglada la superficie estudiada en el ejemplo 1.2.3

Ejemplo 1.4.1

Hallar la ecuación de la superficie que tiene por generatriz a la familia de rectas:

$2x - 2ky - z = 0$  1.4.1.a

$2kx + 2y + kz = 0$  1.4.1.b

Solución:

Dado que existe un sólo parámetro, lo eliminamos entre las ecuaciones 1.4.1.a y b; despejamos k de 1.4.1.a

$k = \frac{2x - z}{2y}$  1.4.1.c

Sustituimos 1.4.1.c en 1.4.1.b:

$2 \frac{2x - z}{2y} x + 2y + \frac{2x - z}{2y} z = 0$

Finalmente:

$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0$  1.4.1.d

que es la ecuación obtenida por otro método en el ejemplo 1.2.4. Esta superficie es un cono circular recto, con vértice en el origen y eje de simetría el eje z, la cual es una superficie reglada, generada por un haz de rectas que pasan por el vértice.

Ejemplo 1.4.2

Investigar si la ecuación  $z^2 - 2x - 2y = 0$  representa una superficie reglada.

Solución:

Dado que la ecuación de la recta contiene únicamente términos de primer grado, hacemos el de segundo grado igual a un parámetro.

de donde:  $z = \alpha$  1.4.2.a

$2x + 2y = \alpha^2$  1.4.2.b

que son las ecuaciones de una familia de rectas paralelas.  
La traza de la superficie dada sobre el plano yz es:

$$z^2 - 2y = 0$$

$$x = 0$$

Ejemplo 1.4.3

Dada la ecuación de la superficie obtenida en el ejemplo 1.2.3 ¿Podríamos demostrar que se trata de una superficie reglada?

Solución:

En el ejemplo 1.2.3 obtuvimos como ecuación de la superficie a:

$$(x - 12)z = -24y \quad 1.2.3.1$$

Se ve claro en este ejemplo, que para obtener una familia de rectas, basta igualar uno de los factores del primer miembro, con un parámetro:

$$x - 12 = \lambda, \quad 1.4.3.a$$

de donde:  $\lambda, z = -24y \quad 1.4.3.b$

o podemos hacer  $z = \lambda_2 \quad 1.4.3.c$

y por lo tanto:  $\lambda_2(x - 12) = -24y \quad 1.4.3.d$

1.4.3.a y b, y 1.4.3.c y d, son las ecuaciones de las dos familias de rectas que generan esa superficie, con lo que identificamos a esa superficie como reglada.

En la figura 1.4.1 presentamos dos superficies regladas que suelen emplearse como techos.

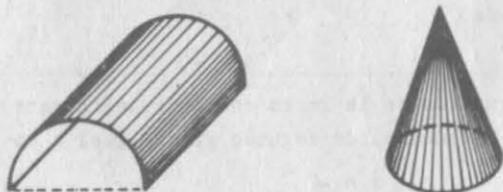


Fig. 1.4.1

1.5 El Paraboloide Hiperbólico.

Es la superficie que tiene por generatriz a una hipérbola que se desplaza paralelamente a si misma, apoyándose, no simultáneamente, en dos parábolas directrices.

Esta superficie queda indicada en la figura 1.5.1 Veamos el caso en que la generatriz es siempre paralela a xy, por lo tanto las ecuaciones de esta curva son de la forma:

$$G \begin{cases} \alpha x^2 - \beta y^2 = 1 & 1.5.0.1 \\ z = \gamma & 1.5.0.2 \end{cases}$$

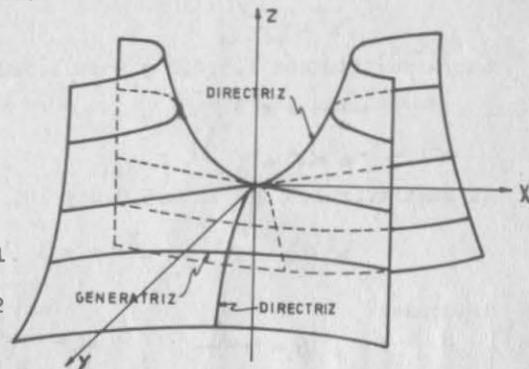


Fig. 1.5.1

$\alpha, \beta$  mismo signo ( $\alpha, \beta > 0$ )

Las directrices son parábolas

alojadas en los planos yz, y xz; tienen por ecuaciones:

$$D_1 \begin{cases} y^2 = -b^2 z \\ x = 0 \end{cases} \quad 1.5.0.3$$

$$1.5.0.4$$

$$D_2 \begin{cases} x^2 = a^2 z \\ y = 0 \end{cases} \quad 1.5.0.5$$

$$1.5.0.6$$

$a, b > 0$

En la ecuación de la generatriz intervienen 3 parámetros:  $\alpha, \beta, \gamma$ ; pero como contamos con dos directrices, el problema está definido. Entre las ecuaciones de  $D_1$  y  $G$  obtenemos la primera ecuación de condición, al sustituir 1.5.0.4 en 1.5.0.1:

$$y^2 = -\frac{1}{\beta} \quad 1.5.0.7$$

y después 1.5.0.2 y 7 en 1.5.0.3

$$-\frac{1}{\beta} = -b^2 \gamma; \quad b^2 \beta \gamma = 1 \quad 1.5.0.8$$

que es la primera ecuación de condición.

Para obtener la segunda ecuación de condición, trabajamos con las ecuaciones de  $D_2$  y  $G$

Sustituimos 1.5.0.6 en 1.5.0.1

$$x^2 = \frac{1}{\alpha} \quad 1.5.0.9$$

Ahora sustituimos 1.5.0.2 y 9 en 1.5.0.5

$$\frac{1}{\alpha} = a^2 \gamma \quad 1.5.0.10$$

$$a^2 \alpha \gamma = 1$$

Al sustituir 1.5.0.2 en 1.5.0.8 y 10, obtenemos:

$$b^2 \beta z = 1 \quad ; \quad a^2 \alpha z = 1 \quad 1.5.0.11$$

$$1.5.0.12$$

de donde:

$$\beta = \frac{1}{b^2 z} \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{a^2 z} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1.5.0.13 \\ 1.5.0.14 \end{array} \right.$$

Al sustituir 1.5.0.13 y 14 en 1.5.0.1

$$\frac{x^2}{a^2 z} - \frac{y^2}{b^2 z} = 1$$

Finalmente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \quad 1.5.0.15$$

Esta superficie tiene varias aplicaciones, tanto en matemáticas, como veremos al estudiar los máximos y mínimos de funciones de varias variables, como en la construcción de techos cuando la arquitectura así lo requiere; esta superficie tiene la ventaja de ser reglada, como veremos a continuación:

Representamos la ecuación 1.5.0.15 en la forma siguiente:

$$\left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = z \quad 1.5.0.16$$

Hagamos:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda_1$$

de donde la ecuación 1.5.0.15 se descompone en la familia de rectas:

$$R_1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda_1, \\ \lambda_1 \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = z \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 1.5.0.17 \\ 1.5.0.18 \end{array}$$

o con la sustitución  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda_2$  en una segunda familia de rectas:

$$R_2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda_2 \\ \lambda_2 \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) = z \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 1.5.0.19 \\ 1.5.0.20 \end{array}$$

## 1.6 Superficies Cilíndricas.

Por cilindro o superficie cilíndrica se conoce a la figura geométrica en  $E_3$ , generada por una línea recta que se desplaza paralelamente a una recta fija, que se apoya en una curva fija, tal como se indica en la fig. 1.6.1 Por consiguiente, un cilindro es una superficie reglada.

1.6.1 Cilindros con generatriz Paralela a un Eje Coordinado.

En el caso en que la **directriz** yacga en el plano  $xy$ , o sea paralelo a éste, y que la generatriz sea paralela al eje  $z$ , fig. 1.6.2 se tendrá para la directriz las ecuaciones:

$$f(x,y) = 0 \quad 1.6.1.1$$

$$z=0, (\text{ó } z=k) \quad 1.6.1.2$$

donde  $f$  es función de únicamente dos variables: "x" y "y"; 1.6.1.1 y 2 nos dicen que la curva está sobre  $xy$  o en un plano paralelo a  $xy$ .

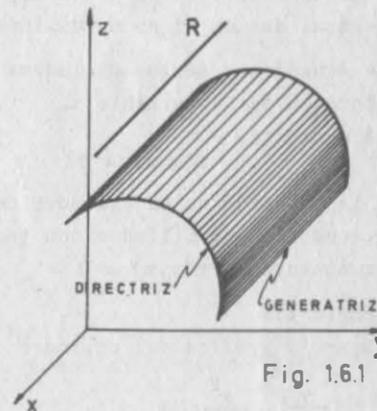


Fig. 1.6.1

La ecuación del cilindro C es:

$$f(x,y) = 0$$

1.6.1.3

obtenida al eliminar de las ecuaciones de la directriz a la segunda: 1.6.1.2, es decir permitiendo que  $z$  tome un valor arbitrario y no solamente  $z=0$ ,  $z=k$

Supongamos que  $P(x,y)$ , fig.1.6.2 satisface 1.6.1.3;  $Q(x,y,0)$  también satisface 1.6.1.1 y 2, -- ecuaciones de la directriz que pertenece a C, y obviamente satisface a la ecuación 1.6.1.3 del cilindro. De otra manera, si  $P(x,y,z)$  está sobre C, entonces  $Q(x,y,0)$  el punto en el -- cual corta a  $xy$  el plano paralelo al eje  $z$  que pasa por P, también satisface C.

La gráfica de 1.6.1.3, vista en  $E^2$  es una curva en el plano  $xy$ , mientras que en  $E^3$  es un cilindro con generatriz paralela al eje  $z$ .

Las ecuaciones de los cilindros con generatriz paralela al eje  $z$  carecen de la variable  $z$ .

Análogamente,

$$f(x,z) = 0$$

es la ecuación de un cilindro con generatriz paralela al eje "y" La ecuación del cilindro con generatriz paralela al eje  $x$  tiene por ecuación:  $f(y,z) = 0$

Ejemplo 1.6.1

Trazar la gráfica del cilindro

$$\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$$

En este caso, basta con trazar sobre  $zy$  las trazas del cilindro y de ahí diferentes posiciones de la directriz, fig.1.6.3

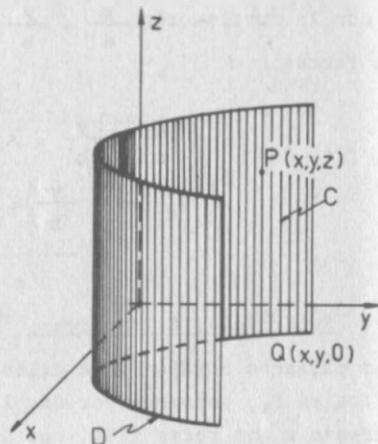


Fig.1.6.2

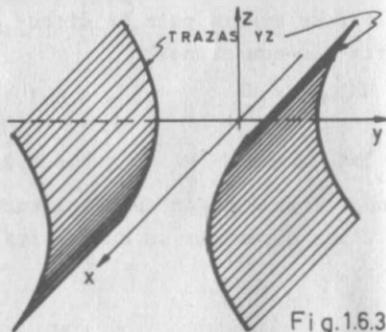


Fig.1.6.3

### 1.6.2 Cilindros con Generatriz Inclínada.

Sea el cilindro C, generado por la recta paralela a la de números directores  $[a,b,c]$  que se apoya en la directriz de ecuaciones:

$$D \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad 1.6.2.1$$

Supongamos que  $Q(x_0, y_0, z_0)$  es un punto de C, entonces las -- ecuaciones de la recta paralela a la generatriz, que pasa por Q son:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad 1.6.2.2.$$

De donde, al poner  $xy$  en función de  $z$  (conviene ésto último debido a que se simplifican las operaciones al ser  $z=0$ , en la -- ecuación de la directriz)

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{c} z - \frac{a}{c} z_0 + x_0 \\ y &= \frac{b}{c} z - \frac{b}{c} z_0 + y_0 \end{aligned} \quad 1.6.2.3$$

Como  $x_0, y_0, z_0$  dependen del punto Q, podemos sustituir los términos que las contienen, por variables paramétricas:

$$G \begin{cases} x = \frac{a}{c} z + \alpha \\ y = \frac{b}{c} z + \beta \end{cases} \quad 1.6.2.4$$

en donde hicimos:

$$\alpha = -\frac{a}{c} z_0 + x_0$$

$$\beta = -\frac{b}{c} z_0 + y_0$$

Las ecuaciones de G contienen 2 parámetros; pero como contamos con las ecuaciones de la directriz, caemos en los casos estudiados.

Ejemplo 1.6.2

Hallar la ecuación del cilindro con directriz

$$D \begin{cases} x^2 = 4y \\ z = 0 \end{cases} \quad 1.6.2.a$$

$$1.6.2.b$$

y cuya generatriz es paralela a la recta de números directores  $[2, 1, -3]$

Solución:

Formamos primero las ecuaciones de la generatriz al sustituir los valores dados en 1.6.2.4 de donde:

$$G \begin{cases} x = \frac{2}{-3} z + \alpha \\ y = \frac{1}{-3} z + \beta \end{cases} \quad \begin{matrix} 1.6.2.c \\ 1.6.2.d \end{matrix}$$

Al sustituir 1.6.2.b en 1.6.2.c y d:

$$x = \alpha \quad 1.6.2.e$$

$$y = \beta \quad 1.6.2.f$$

Sustituimos 1.6.2.e y f en 1.6.2.a:

$$\alpha^2 = 4\beta \quad 1.6.2.g$$

que es la ecuación de condición.

Ahora, entre esta última ecuación y las de la generatriz, eliminamos los parámetros  $\alpha, \beta$ . De las ecuaciones de G:

$$\alpha = x + \frac{2}{3} z \quad 1.6.2.h$$

$$\beta = y + \frac{1}{3} z \quad 1.6.2.i$$

al sustituir estas dos últimas ecuaciones en 1.6.2.g:

$$\left(x + \frac{2}{3} z\right)^2 = 4\left(y + \frac{1}{3} z\right) \quad 1.6.2.j$$

que es la ecuación buscada.

### 1.7 Superficies Cónicas.

Es el conjunto de posiciones que toma una recta que pasa por un punto fijo denominado vértice, y se apoya en una curva plana fija como directriz, fig.1.7.1

Sea el punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , y la directriz sobre el plano  $xy$ :

$$D \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad 1.7.0.1$$

En este caso, los números directores son variables, pues la generatriz  $G[a, b, c]$  cambia continuamente de dirección. La forma simétrica de las ecuaciones de la generatriz es:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \quad 1.7.0.2$$

de donde, al expresar  $x, y$  en términos de  $z$  obtenemos:

$$x = \frac{a}{c}(z-z_0) + x_0 \quad 1.7.0.3$$

$$y = \frac{b}{c}(z-z_0) + y_0$$

Al hacer:

$$\alpha = \frac{a}{c} \quad 1.7.0.4$$

$$\beta = \frac{b}{c}$$

obtenemos:

$$G \begin{cases} x = \alpha(z-z_0) + x_0 \\ y = \beta(z-z_0) + y_0 \end{cases} \quad 1.7.0.5$$

que es otro caso de generación de superficies en donde intervienen 2 parámetros y una directriz.

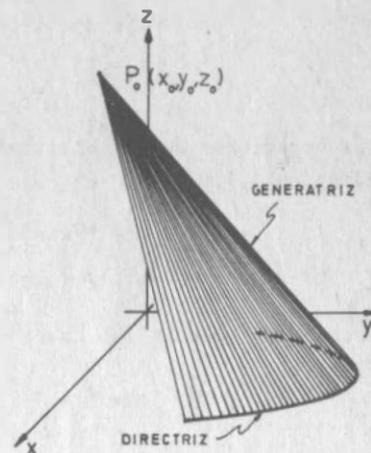


Fig.1.7.1

## Ejemplo 1.7.1

Hallar la ecuación del cono que tiene por vértice  $V(2,3,-1)$ , y por directriz a la parábola.

$$D \begin{cases} x^2 = 4y & 1.7.1.a \\ z = 0 & 1.7.1.b \end{cases}$$

Las ecuaciones de la generatriz las obtenemos al sustituir los datos en 1.7.0.5:

$$G \begin{cases} x = \alpha(z+1) + 2 & 1.7.1.c \\ y = \beta(z+1) + 3 & 1.7.1.d \end{cases}$$

Procedemos como en los casos anteriores; sustituimos 1.7.1.b en G.

$$x = \alpha + 2 \quad 1.7.1.e$$

$$y = \beta + 3 \quad 1.7.1.f$$

A continuación sustituimos 1.7.1.e y f en 1.7.1.a

$$(\alpha + 2)^2 = 4(\beta + 3) \quad 1.7.1.g$$

Entre esta ecuación de condición, y las de la generatriz, eliminamos  $\alpha$  y  $\beta$ :

De 1.7.1.e y d

$$\alpha = \frac{x-2}{z+1} \quad 1.7.1.h$$

$$\beta = \frac{y-3}{z+1} \quad 1.7.1.i$$

A continuación sustituimos 1.7.1.h e i en 1.7.1.g:

$$\left(\frac{x-2}{z+1} + 2\right)^2 = 4\left(\frac{y-3}{z+1} + 3\right) \quad 1.7.1.j$$

Finalmente:

$$x^2 - 8z^2 + 4xz - 4yz - 4y - 12z = 0$$

## Ejemplo 1.7.2

Hallar la ecuación de la superficie cónica que tiene por vértice al origen, y por directriz a la parábola  $x^2=5y$ ,  $z=4$

Solución:

De 1.7.0.5 obtenemos:

$$G \begin{cases} x = \alpha z & 1.7.2.a \\ y = \beta z & 1.7.2.b \end{cases}$$

para  $z=4$ :

$$x = 4\alpha \quad 1.7.2.c$$

$$y = 4\beta \quad 1.7.2.d$$

De 1.7.2.c y d despejamos  $\alpha$  y  $\beta$ , y sustituimos 1.7.2.c y d en la ecuación de la directriz:

$$16\alpha^2 = 20\beta \quad 1.7.2.e$$

con lo que obtenemos la ecuación de condición.

De las ecuaciones de G despejamos  $\alpha$  y  $\beta$  y las sustituimos en 1.7.2.e

$$16 \frac{x^2}{z^2} = 20 \frac{y}{z}$$

Simplificando:

$$4x^2 = 20yz \quad 1.7.2.f$$

Observamos que obtenemos una ecuación homogénea, lo que está de acuerdo con el teorema siguiente cuya demostración puedes ver en el apéndice:

Teorema.- Una ecuación representa una superficie cónica con vértice en el origen, si y solamente si es homogénea en las tres variables  $x, y, z$  y es de grado no menor de dos.

Desde luego que la ecuación que se estudie debe, primordialmente representar una superficie, pues en el caso de la ecuación homogénea  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  ésta representa un sólo punto: el origen.

## Ejemplo 1.7.3

Hallar la ecuación de la superficie cónica con vértice en  $V(5,0,0)$  y que tiene por directriz a:

$$D \begin{cases} y^2 + z^2 = 9 & 1.7.3.a \\ x = 0 & 1.7.3.b \end{cases}$$

Siguiendo con el planteamiento de las ecuaciones 1.7.0.5, aquí nos conviene establecer a  $Y$  y  $Z$  en términos de  $x$ , la variable que para la directriz permanece constante:

$$G \begin{cases} z = \alpha (x - x_0) + z_0 \\ y = \beta (x - x_0) + y_0 \end{cases} \quad 1.7.0.5'$$

de donde:

$$z = \alpha (x - 5) \quad 1.7.3.c$$

$$y = \beta (x - 5) \quad 1.7.3.d$$

al sustituir 1.7.3.b en 1.7.3.c y d obtenemos:

$$z = -5\alpha \quad 1.7.3.e$$

$$y = -5\beta \quad 1.7.3.f$$

que al ser sustituidas en 1.7.3.a, proporciona la ecuación de condición:

$$25\beta^2 + 25\alpha^2 = 9 \quad 1.7.3.g$$

finalmente, de 1.7.3.c y d despejamos  $\alpha$  y  $\beta$ , y la sustituimos en 1.7.3.g:

$$25\left(\frac{y}{x-5}\right)^2 + 25\left(\frac{z}{x-5}\right)^2 = 9 \quad 1.7.3.h$$

que al simplificarla queda:

$$25y^2 + 25z^2 = 9(x-5)^2 \quad 1.7.3.i$$

## 1.8 Superficies de Revolución:

Una superficie de revolución, es el conjunto de posiciones que toma una curva plana dada, al girar alrededor de un eje que ya ce en su plano. Por consiguiente, prácticamente todas las obras de alfarería son superficies de revolución, ya que se fabrican como se esquematiza en la fig. 1.8.1

Todo plano que pasa por el eje, corta a la superficie según curvas llamadas meridianos.

Todo plano normal al eje de revolución, corta a la superficie según curvas denominadas paralelos, fig. 1.8.1

Una superficie de revolución puede considerarse también, como generada por una circunferencia (un paralelo), que se desplaza y deforma apoyándose en una directriz (la curva meridiana); es decir: si la ecuación de la curva que gira es:

$$C \begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad 1.8.0.1$$

y el giro lo realiza alrededor del eje  $z$ , entonces la generatriz de la superficie tendrá por ecuaciones:

$$G \begin{cases} x^2 + y^2 = \alpha^2 \\ z = \beta \end{cases} \quad 1.8.0.2$$

y la curva  $C$ , será la directriz necesario, ya que tenemos  $\alpha$  y  $\beta$ .

En forma análoga procederemos cuando el giro sea alrededor de otro eje.

## Ejemplo 1.8.1

Obtener la ecuación de la superficie que resulta de girar la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1, \quad y=0, \quad \text{alrededor del eje } z.$$

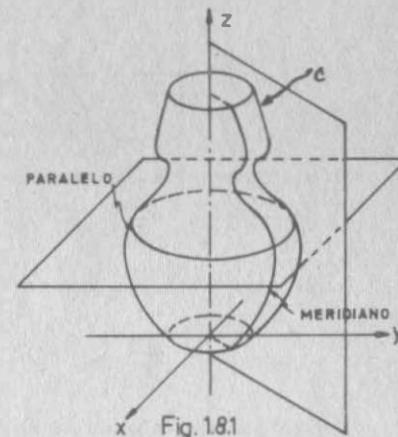


Fig. 1.8.1

Solución:

La generatriz tiene por ecuaciones:

$$G \begin{cases} x^2 + y^2 = \alpha^2 & 1.8.1.a \\ z = \beta & 1.8.1.b \end{cases}$$

$$D \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 & 1.8.1.c \end{cases}$$

$$y = 0 \quad 1.8.1.d$$

Al sustituir 1.8.1.d en 1.8.1.a, obtenemos:

$$x^2 = \alpha^2 \quad 1.8.1.e$$

sustituimos 1.8.1.b y e en 1.8.1.c:

$$\frac{\alpha^2}{16} + \frac{\beta^2}{9} = 1 \quad 1.8.1.f$$

que es la ecuación de condición.

Sustituimos 1.8.1.a y b en 1.8.1.f

$$\frac{x^2 + y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad 1.8.1.g$$

Finalmente:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

es la ecuación buscada, la cual recibe el nombre de superficie de revolución; su centro está en (0,0,0) y tiene por semiejes a 4,4,3 paralelos a los ejes x,y,z, respectivamente.

### Ejemplo 1.8.2

Hallar la ecuación del paraboloide de revolución que se obtiene al hacer girar la parábola.

$$z^2 = -3y \quad 1.8.2.a$$

$$x = 0 \quad 1.8.2.b$$

alrededor del eje Y.

Solución:

Las ecuaciones de la generatriz son:

$$G \begin{cases} x^2 + z^2 = \alpha^2 & 1.8.2.c \\ y = \beta & 1.8.2.d \end{cases}$$

de 1.8.2.b y e:

$$z^2 = \alpha^2 \quad 1.8.2.e$$

Al sustituir 1.8.2.d y e en 1.8.2.a obtenemos la ecuación de condición:

$$\alpha^2 = -3\beta \quad 1.8.2.f$$

Al eliminar  $\alpha$  y  $\beta$  entre 1.8.2.c, e y f:

$$x^2 + z^2 = -3y$$

De los ejemplos 1.8.1 y 2 observamos lo siguiente:

Curva que gira :  $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1, y=0$  ; Eje de giro: Eje z;

Solución:  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$

Curva que gira :  $z^2 = -3y, x=0$  ; Eje de giro: Eje y;

Solución:  $x^2 + z^2 = -3y$

Para obtener la solución, basta sustituir a la variable diferente a la del eje de giro, en la ecuación de la curva que gira, - por mas o menos la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de esa variable y de la que no aparece en la ecuación.

### 1.9 Cuádricas.

Ya hemos visto que podemos identificar una superficie de la cual se conoce su ecuación, a través de la discusión de ésta última; pero es muy conveniente el que las podamos reconocer, al menos a las más usuales, por inspección o análisis de su ecuación.

Consideremos la ecuación cuádrlica general en tres variables,  $x, y, z$ :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad 1.9.0.1$$

Por cuádrlica entenderemos a la representación geométrica de cualquier ecuación del forma 1.9.0.1. Las cuádrlicas son la generalización de las cónicas, en tres dimensiones.

Mediante algunas apropiadas operaciones de rotación y traslación de ejes, la ecuación 1.9.0.1 se transforma en una cualquiera de las dos formas siguientes:

$$Kx^2 + Ly^2 + Mz^2 = N \quad (N \geq 0) \quad 1.9.0.2$$

$$Kx^2 + Ly^2 = Pz \quad (P > 0) \quad 1.9.0.3$$

La transformación que mencionamos, es similar a la de  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$ , que ya estudiaste en cursos anteriores.

Las superficies con ecuación tipo 1.9.0.2 tienen centro de simetría: el origen, por lo que se denominan Cuádrlicas con Centro. Las superficies con ecuación tipo 1.9.0.3 no tienen centro de simetría, por lo que se designan como Cuádrlicas sin Centro.

Analizaremos a continuación, las ecuaciones de formas 1.9.0.2 y 3.

### 1.9.1 Cuádrlicas con Centro.

De acuerdo con lo que hemos estudiado, estas superficies, cuya ecuación está dada por 1.9.0.2, además de tener centro de simetría, poseen tres planos de simetría: los planos coordenados, y tres ejes de simetría: los ejes coordenados.

Este caso lo podemos reducir a dos posibilidades:

- a)  $N = 0$
- b)  $N > 0$

a)  $N = 0$ ; aquí se nos presentan las variantes siguientes:

I) Dos de los coeficientes  $K, L, M$  son nulos, por ejemplo --  $K = L = 0$  entonces:

$$Mz^2 = 0 \quad 1.9.1.1$$

de donde

$$z = 0 \quad 1.46$$

que representa al plano  $xy$ .

Los otros 2 casos posibles corresponden a los otros 2 planos -- coordenados:  $x=0$  para el plano  $yz$ , y  $y=0$  para el plano  $xz$ .

II) Uno de los coeficientes  $K, L, M$  es nulo, por ejemplo  $M=0$

$$Kx^2 + Ly^2 = 0 \quad 1.9.1.2$$

cuya única solución real es:

$$x = 0, y = 0 \quad 1.9.1.3$$

que representa al eje  $z$ .

Análogamente, los otros 2 casos posibles representan a los ejes  $X$  y  $Y$ .

III)  $K, L, M$  son diferentes de cero, pero tienen el mismo signo.

$$Kx^2 + Ly^2 + Mz^2 = 0 \quad 1.9.1.4$$

Esta ecuación representa al origen, pues sólo se satisfice para:

$$x = y = z = 0 \quad 1.9.1.5$$

IV)  $K, L, M$  diferentes de cero, pero dos de los coeficientes -- tienen el mismo signo; por ejemplo, si  $K$  y  $L$  son positivos y  $M$  negativo.

$$Kx^2 + Ly^2 = Mz^2 \quad 1.9.1.6$$

Estudiaremos esta superficie.

Intercepciones todas son cero.

Traza  $xy$ :  $z=0$ ;  $Kx^2 + Ly^2 = 0$

de donde:  $x=0, y=0$ , es el origen

Traza  $xz$ :  $y=0$ ;  $Kx^2 = Mz^2$

cuya solución es el par de rectas:

$$\begin{cases} x\sqrt{K} = \pm z\sqrt{M} \\ y = 0 \end{cases}$$

Traza yz:  $x=0$ ;  $Ly^2=Mz^2$

Su solución es el par de rectas.

$$\begin{cases} y\sqrt{L} = \pm z\sqrt{M} \\ x = 0 \end{cases}$$

Secciones paralelas a xy:

$$\begin{aligned} z &= K \\ Kx^2 + Ly^2 &= Mk^2 \end{aligned}$$

que es una familia de elipses.

Esta superficie recibe el nombre de Cono Elíptico, y se muestra en la fig. 1.9.1

Las otras dos formas posibles son:

$$Kx^2 + Mz^2 = Ly^2 \quad 1.9.1.7$$

$$Ly^2 + Mz^2 = Kx^2 \quad 1.9.1.8$$

que son Conos Elípticos con eje real sobre el eje Y y el eje x, respectivamente.

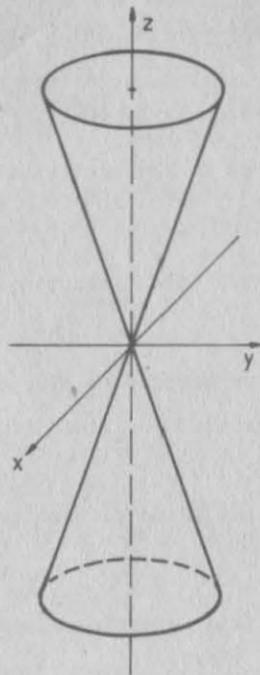


Fig. 1.9.1

b)  $N > 0$  En el caso general en que  $K, L, M$  son diferentes de cero, podemos escribir la ecuación 1.9.0.2 como:

$$\frac{Kx^2}{N} + \frac{Ly^2}{N} + \frac{Mz^2}{N} = 1$$

$$\delta \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad 1.9.1.9$$

esta última ecuación es la llamada forma canónica de la ecuación de las cuadráticas con centro.

Se nos presentan los casos siguientes:

I) Dos de los coeficientes  $K, L, M$  son nulos, por ejemplo:

$$K = L = 0, \quad M > 0$$

entonces:  $Mz^2 = N$

$$z = \pm \sqrt{\frac{N}{M}} \quad 1.48 \quad 1.9.1.10$$

que representa dos planos paralelos al xy. Desde luego, si  $M < 0$  no habría representación.

Análogamente se resuelven los otros dos casos posibles, con lo que se obtienen.

$$x = \pm \sqrt{N/K}; \quad y = \pm \sqrt{N/L}$$

II) Uno de los coeficientes  $M, L, K$  es nulo, por ejemplo  $M=0$ ; obtenemos:

$$Kx^2 + Ly^2 = N \quad 1.9.1.11$$

que representa a un cilindro con generatriz paralela al eje Z, con traza elíptica si  $K, L > 0$ ; de traza hiperbólica si  $K, L < 0$ ; de traza circular si  $K=L > 0$ .

Desde luego, no es posible  $K, L < 0$ .

Análogamente  $Kx^2 + Mz^2 = N$  representa un cilindro con generatriz paralela al eje Y, y  $Ly^2 + Mz^2 = N$  un cilindro con generatriz paralela al eje x.

III) Si  $K, L, M > 0$ , caemos en el caso del elipsoide discutido en el ejemplo 1.3.10.

Si dos de los coeficientes son iguales y mayores que el tercero, por ejemplo  $K=L > M$  se tiene el elipsoide de revolución achatado.

Si  $K=L < M$ , tenemos el elipsoide de revolución alargado.

Si  $K=L=M$ , el elipsoide se convierte en esfera.

IV) Dos de los coeficientes  $K, L, M$  son positivos y el otro negativo, por ejemplo  $K, L > 0, M < 0$ , que en forma canónica resulta

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad 1.9.1.12$$

Los otros dos casos son:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad 1.9.1.13$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad 1.9.1.14$$

Discutiremos la ecuación 1.9.1.11; las otras dos difieren únicamente en sus posiciones con respecto a los ejes coordenados.

Las intercepciones con los ejes "x" y "y" son  $x=\pm a$ ,  $y=\pm b$  respectivamente.

No existen intercepciones con el eje z.

Traza xy:  $z = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es una familia de elipses.

Traza xz:  $y=0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que es una hipérbola.

Traza yz:  $x=0$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que también es una hipérbola.

Secciones Paralelas al xy

$z = k$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

familia de elipses, en que al aumentar  $|k|$  aumentan de tamaño -- los semiejes.

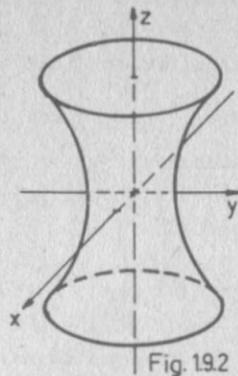
Secciones Paralelas al xz.

$y = k$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$$

familia de hipérbolas, con eje real paralelo al eje x cuando el segundo miembro:

$$1 - \frac{k^2}{b^2} > 0$$



El eje real cambia a ser paralelo al eje "z", cuando  $|k|$  alcanza valores en que:

$$1 - \frac{k^2}{b^2} < 0$$

Cuando el segundo miembro es nulo, se obtienen dos rectas:

$$\frac{x}{a} = \pm \frac{z}{c}$$

$$y = k$$

En forma análoga, las secciones paralelas al yz:

$$x = k$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$$

es una familia de hipérbolas con eje real paralelo al eje "y" -- cuando:

$$1 - \frac{k^2}{a^2} > 0$$

El eje real cambia a ser paralelo al eje z cuando  $1 - \frac{k^2}{a^2} < 0$

Se obtienen el par de rectas:

$$x = k, \quad \frac{y}{b} = \pm \frac{z}{c}$$

Para:  $1 - \frac{k^2}{a^2} = 0$

Esta superficie esta representada en la fig. 1.9.2 y recibe el nombre de Hiperboloide de una Hoja.

V) Uno de los coeficientes K,L,M es positivo y los otros dos son negativos. Sea por ejemplo  $K > 0$ , entonces la ecuación canónica tiene la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

1.9.1.15

Las otras dos formas posibles son:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad 1.9.1.16$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad 1.9.1.17$$

Discutiremos la ecuación 1.9.1.15. Como en el caso del hiperboloide de una hoja, las otras dos superficies sólo difieren en sus posiciones con respecto a los ejes coordenados.

Intercepciones:  $x = \pm a$

No existe intersección "y" y "z"

Traza xy: es la hipérbola:  $z=0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Traza xz: es la hipérbola:  $y=0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traza yz: no existe

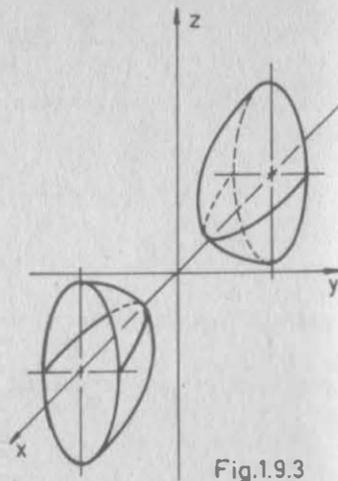


Fig.1.9.3

Secciones paralelas a yz.  $x=K$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{K^2}{a^2} - 1$$

familia de elipses, siempre que se cumpla.

$$\frac{K^2}{a^2} - 1 > 0$$

Con estos elementos ya podemos hacer el esquema de esta superficie, tal como se muestra en la fig. 1.9.3

### 1.9.2 Cuádricas sin Centro.

Ya indicamos que su ecuación es de la forma:

$$Kx^2 + Ly^2 = Pz \quad , \quad (P > 0) \quad 1.9.0.3$$

Dependiendo de los valores de K y L se nos presentan varios casos:

I)  $K=L=0$ , entonces:

$$Pz = 0 \quad 1.9.2.1$$

de donde:

$$z = 0$$

que representa al plano xy

II) Uno de los coeficientes es nulo; por ejemplo,  $K=0$

$$Ly^2 = Pz \quad 1.9.2.2.$$

que es un cilindro parabólico cuyo plano de simetría es xz. Si  $L > 0$ , esta superficie se abre hacia arriba, tal como se indica en la fig. 1.9.4.

Desde luego, si  $L < 0$ , el cilindro parabólico se abre hacia abajo.

III) Si K, L tienen el mismo signo, se obtiene la superficie que recibe el nombre de Paraboloides Elípticos.

Una de sus ecuaciones en forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \quad 1.9.2.3$$

La otra es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -z \quad 1.9.2.4$$

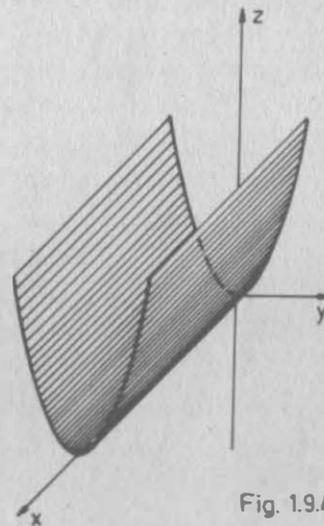


Fig. 1.9.4

Discutiremos la ecuación 1.9.2.3

Intercepciones: todas son nulas.

Traza xy:  $z=0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

es el origen.

Traza xz:  $y = 0$

$$x^2 = a^2 z$$

se obtiene una parábola con vértice en el origen y eje real sobre el eje z.

Traza yz:  $x = 0$

$$y^2 = b^2 z$$

parábola con vértice en el origen y eje real sobre el eje z.

Secciones Paralelas al xy:

$$z=k ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k$$

familia de elipses.

Secciones Paralelas al yz:

$$x=k ; y^2 = b^2 \left( z - \frac{k^2}{a^2} \right)$$

familia de parábolas.

Secciones Paralelas al xz:

$$y=k ; x^2 = a^2 \left( z - \frac{k^2}{b^2} \right)$$

familia de parábolas.

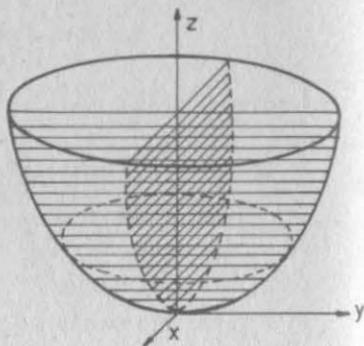


Fig. 1.9.5

Si  $K, L > 0$ , el paraboloide se abre hacia arriba, tal como se indica en la fig. 1.9.5 Si  $K, L < 0$  el paraboloide se abre hacia abajo.

IV)  $K, L$  de signo contrario; la superficie que se presenta en este caso, es la denominada paraboloide hiperbólico, y ya fue discutida en 1.5

### Clasificación de las Cuádricas

Con Centro :  $Kx^2 + Ly^2 + Mz^2 = N$

N	Coefficientes K,L,M	Lugar Geométrico
= 0	I) Dos nulos	Los planos coordenados
	II) Uno nulo	Los ejes coordenados
	III) Todos mismo signo	El origen de coordenados
	IV) Dos con mismo signo	El cono elíptico
> 0	I) Dos nulos	Dos planos paralelos a los coordenados.
	II) Uno nulo	Cilindros paralelos a los ejes coordenados.
	III) Todos positivos.	El elipsoide.
	IV) Dos positivos, el otro negativo	El hiperboloide de una hoja.
	V) Uno positivo, los otros dos negativos	El hiperboloide de dos hojas.

Sin centro:  $Kx^2 + Ly^2 = Pz$ , ( $P > 0$ )

Coefficientes K,L	Lugar Geométrico
I) Los dos nulos.	El plano xy
II) Uno nulo	El cilindro parabólico
III) Mismo signo	El paraboloide elíptico
IV) Signo distinto	El paraboloide hiperbólico

2.1 LIMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL.

2.1.1 Entornos y Regiones

Por lo que hemos visto en el tema anterior, una función escalar con variable vectorial está definida en un conjunto de puntos -- del plano o del espacio n-dimensional; así mismo al analizar su continuidad lo haremos en dichos espacios, por lo que es preciso definir los siguientes conceptos:

2.1.1.1 Entornos

Definición 2.1.1

Un conjunto de puntos  $(x,y)$  que cumple las desigualdades

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \text{ con } \delta > 0$$

se denomina entorno rectangular de lado "2 $\delta$ " del punto  $(x_0, y_0)$ .

En este entorno queda incluida la posibilidad de que  $x=x_0, y=y_0$  (Fig. 2.1.1.a)

Definición 2.1.2

Al conjunto de puntos  $(x,y)$  que cumple las desigualdades

$$0 < |x - x_0| < \delta, 0 < |y - y_0| < \delta$$

se les denomina entorno reducido del punto  $(x_0, y_0)$ .

Algunos autores le denominan también entorno o vecindad agujereada o exceptuada, ya que el propio punto  $(x_0, y_0)$  queda exceptuado del entorno (Fig. 2.1.1.b)

Definición 2.1.3

El conjunto de puntos  $(x,y)$  que cumplen la desigualdad

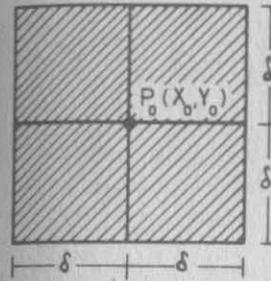
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

es un entorno circular de radio " $\delta$ " del punto  $(x_0, y_0)$  Fig. (2.1.1.c).

un entorno circular reducido de  $(x_0, y_0)$  será:

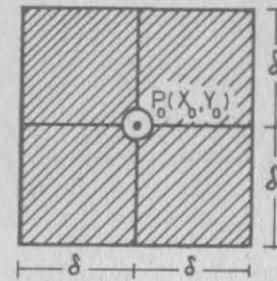
$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

Fácilmente puede generalizarse este concepto a 3 dimensiones, en donde los entornos serán prismas o esferas, o a 'n' dimensiones -- en donde el concepto se vuelve meramente Matemático.



ENTORNO RECTANGULAR DE  $P_0(x_0, y_0)$

fig. 2.1.1.a



ENTORNO RECTANGULAR REDUCIDO DE  $P_0(x_0, y_0)$

2.1.1.b



ENTORNO CIRCULAR DE  $P_0(x_0, y_0)$

2.1.1.c

Definición 2.1.4

Un conjunto de puntos  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$  que cumplen la desigualdad

$$|x_i - x_i^0| < \delta, \forall i (\delta > 0); (i = 1, 2, \dots, n)$$

se denomina entorno del punto  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E^n$ .

$$\text{Si } 0 < |x_i - x_i^0| < \delta \forall i,$$

el entorno se dice que es reducido.

Definición 2.1.5

Un conjunto de puntos  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$  que cumplen la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 < \delta^2$$

se denomina entorno esférico de radio " $\delta$ " del punto  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E^n$ .

Si  $0 < \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 < \delta^2$ , se dice que se trata de un entorno --

esférico reducido.

2.1.1.2 Regiones

Recordemos el ejemplo 1.1.2 en que calculamos el dominio de la función  $\sqrt{1-x^2-y^2}$ . El dominio era el conjunto de puntos que cumplen:  $x^2+y^2 \leq 1$ . Podemos describir este conjunto por comprensión como sigue:

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1; x, y \in \mathbb{R}\}$$

donde  $\mathbb{R}$  es el conjunto de los números reales. Fig. 2.1.2. Podríamos también definir un conjunto  $E$  que representará solamente los puntos que están dentro del círculo y no en su perímetro, o sea:

$$E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1; x, y \in \mathbb{R}\}$$

cuyo esquema mostramos en la Fig. 2.1.3.

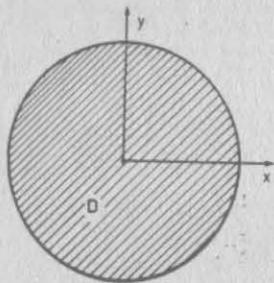


fig. 2.1.2

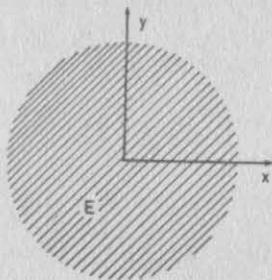


fig. 2.1.3

## Definición 2.1.6

Un punto que pertenece a un conjunto  $D$  se denomina punto interior, si tiene un entorno reducido cuyos puntos pertenecen todos a ese conjunto.

Un punto que no pertenece a ese conjunto, se denomina punto exterior si tiene un entorno reducido en el cual ninguno de sus puntos pertenece al conjunto.

Un punto que pertenece o no a un conjunto se denomina punto frontera si en todo entorno reducido que lo contiene existen puntos que pertenecen al conjunto y puntos que no le pertenecen.

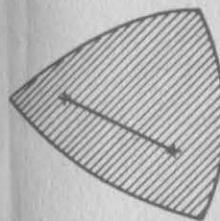
## Definición 2.1.7

Llamamos conjuntos cerrados, a los que están formados por puntos-frontera e interiores (Fig. 2.1.2) y a los conjuntos que contienen exclusivamente puntos interiores, los denominaremos conjuntos abiertos (Fig. 2.1.3).

## Definición 2.1.8

Si dos puntos cualesquiera de un conjunto de puntos, pueden ser unidos mediante una línea recta, cuyos puntos pertenecen todos al conjunto, decimos que es un conjunto convexo o simplemente convexo (Fig. 2.1.4).

Si la unión de dos puntos cualesquiera, la logramos solamente mediante un arco de longitud finita, cuyos puntos pertenecen todos al conjunto, decimos que es un conjunto conexo (Fig. 2.1.6).



CONJUNTO CONVEXO

fig. 2.1.4

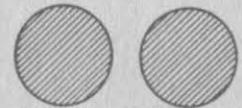


CONJUNTO NO CONVEXO

fig. 2.1.5

## Definición 2.1.9

Región es un conjunto -conexo de puntos, abiertos o cerrados.



CONJUNTO NO CONEXO

fig. 2.1.6

## Ejemplo 2.1.1

Representar gráficamente, en el plano cartesiano, el conjunto cerrado de puntos limitado por las rectas  $x=a$ ,  $x=b$ ,  $y=c$ ,  $y=d$ , y definirlo por comprensión. ( $a < b$ ,  $c < d$ ).

Solución:

Todo punto que pertenece a  $R$  debe tener su abscisa mayor o cuando menos igual que  $x=a$ ; escribimos:

$$x \geq a \quad (2.1.1.a)$$

Esto nos daría todos los puntos del plano a la derecha de la recta  $x=a$  (Fig. 2.1.7). Limitemos ahora el conjunto por la derecha. Vemos que las abscisas de los puntos de  $R$  son menores o cuando más iguales que  $x=b$ : escribimos  $x \leq b$ . Esto define el conjunto de puntos del plano a la izquierda de  $x=b$  (Fig. 2.1.8).

Si obtenemos la intersección de los conjuntos:

$$A = \{(x, y) / x \geq a\} \text{ y } B = \{(x, y) / x \leq b\} \quad (2.1.1.b)$$

tendremos:

$$A \cap B = \{(x, y) / x \geq a \text{ y } x \leq b\} \text{ o sea}$$

$$A \cap B = \{(x, y) / a \leq x \leq b\} \quad (2.1.1.c)$$

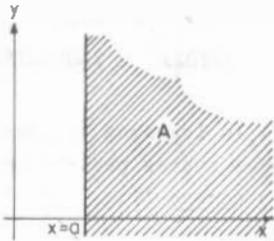


fig. 2.1.7

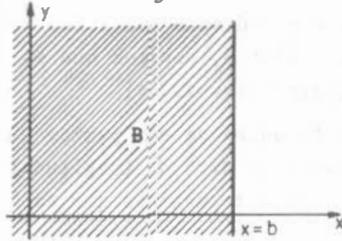


fig. 2.1.8

Vemos que ahora hemos limitado el plano cartesiano a una banda de ancho  $b-a$  paralela al eje  $y$  (Fig. 2.1.9). Tenemos entonces que limitar superior e inferiormente para obtener la región deseada.

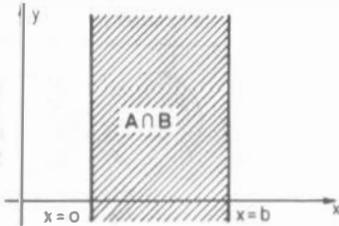


fig. 2.1.9

El límite inferior de las ordenadas será  $y=c$  y todos los puntos de la región tienen ordenada.

$$y \geq c ; \quad := \{(x, y) / y \geq c\} \quad (2.1.1.d)$$

Así mismo, las  $y$  de la región deben ser  $\leq d$ .

$$D = \{(x, y) / y \leq d\} \quad (2.1.1.e)$$

Al intersectar los conjuntos  $C$  y  $D$  obtenemos: la región pedida será la intersección de los conjuntos  $A \cap B$  y  $C \cap D$ , o sea:

$$R = (A \cap B) \cap (C \cap D) \quad (2.1.1.f)$$

$$R = \{(x, y) / a \leq x \leq b\} \cap \{(x, y) / c \leq y \leq d\} \quad (2.1.1.g)$$

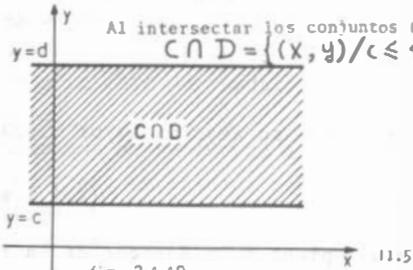


fig. 2.1.10

$$R = \{(x, y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (2.1.1.h)$$

que representa la región pedida.

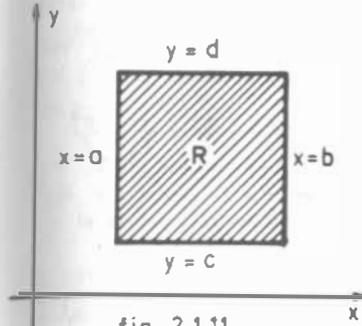


fig. 2.1.11

Una región queda definida cuando, dado un punto, se puede saber si pertenece o no a ella; por ejemplo, el conjunto

$$\{(x, y) / a \leq x \leq b\}$$

no define una región. Si quisieramos significar que el valor de "y" no tiene importancia (es decir, queremos definir la región abierta de la

Fig. 2.1.9. debemos de todos modos escribir:

$$R\{(x, y) / a \leq x \leq b ; -\infty < y < \infty\}$$

o bien  $R\{(x, y) / a \leq x \leq b ; y \in \mathbb{R}\}$

Más importante resulta decidir si una expresión matemática define realmente a la región que nosotros queremos definir; por ejemplo, la expresión:

$$\{(x, y) / x > y\} \dots \dots \dots (2.1.1.i)$$

no define la región abierta "R" de la (Fig. 2.1.12) ya que si bien el punto  $P \in R$  cumple con (2.1.1.i), el punto  $Q \notin R$  también la cumple. Una expresión correcta sería:

$$R\{(x, y) / x > y, y > 0\}.$$

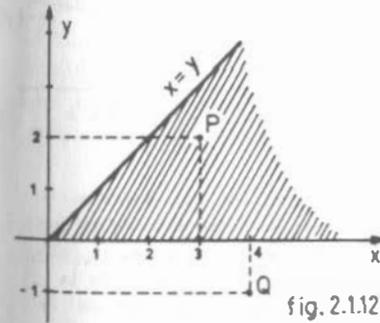


fig. 2.1.12

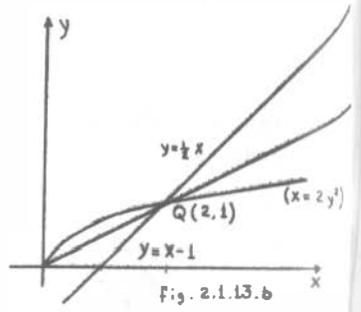
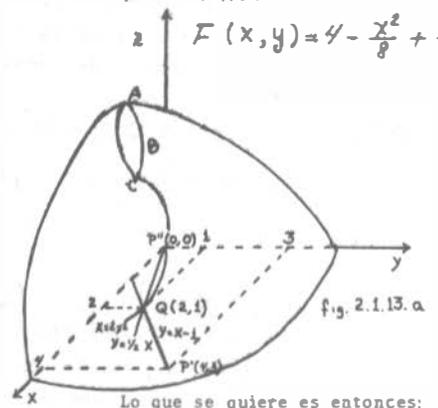
Diremos que una expresión define a la región que queremos definir, si y sólo si es satisfecha por todo punto que pertenece a ella y sólo por éstos.

### 2.1.2 Límites

Como recordamos nuestro curso de Cálculo Diferencial e Integral (C.D.I.), los conceptos de límite y continuidad están íntimamente ligados: Para poder determinar la continuidad de una función de dos o más variables independientes, debemos definir ahora la forma de determinar el límite de una función de dos variables independientes.

Ejemplo 2.1.2.

Determinar el límite de la función  $F(x,y) = 4 - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{y^2}{8}$  al aproximarse el punto  $P(x,y)$  a  $Q(2,1)$ . En este caso  $F(x,y)$  representa la cota de un punto que pertenece a la superficie dibujada en la Fig. 2.1.13.a. y cuya proyección en el plano es el punto  $P(x,y)$ .



Lo que se quiere es entonces:  $\lim_{P \rightarrow Q} F(x,y)$

El punto  $P(x,y)$  es un punto cualquiera, así que para aproximarnos al punto en cuestión, supongamos que lo hacemos desde el punto  $P'(4,3)$  siguiendo la recta  $y=x-1$  que une  $Q$  con  $P'$  en el plano  $x,y$ . Esta trayectoria se refleja en la superficie según la curva de la figura 2.1.13.a. Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria en el plano propuesto son:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t - 1 \end{aligned} \quad (2.1.2.b)$$

11.7

$x = y + 1$   
 $y = x - 1$   
 $t = 2$

11.7

las que substituidas en la ecuación 2.1.2.a. nos proporciona la tercera ecuación paramétrica de la curva ABC

$$f(t) = 4 - \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} - \frac{(t-1)^2}{8} \quad (2.1.2.c)$$

que es función de una sola variable independiente. Calculemos el límite de ésta cuando  $t \rightarrow 2$  (para  $x=2, t=2$ ; comprobación para  $y=1, t=2$ )

$$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2} \{4\} - \lim_{t \rightarrow 2} \left\{ \frac{t^2}{8} \right\} + \lim_{t \rightarrow 2} \left\{ \frac{t}{4} \right\} + \lim_{t \rightarrow 2} \left\{ \frac{(t-1)^2}{8} \right\} \dots$$

..... ecuación (2.1.2.d).

y calculando los límites como lo hicimos en C.D.I.

$$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = 4 - \frac{4}{8} + \frac{2}{4} - \frac{1}{8} = \frac{31}{8} = 3.875 \quad (2.1.2.e)$$

Sin embargo ésta no es la única manera de aproximarnos al punto  $Q$ ; podríamos haberlo hecho desde otro punto cualquiera por otra trayectoria propuesta o bien desde el mismo punto y sobre distinta trayectoria. Veamos dos posibilidades más para este problema. (Fig. 2.1.13.b). Consideremos el punto  $P''(0,0)$  a partir del cual nos aproximaremos al punto  $Q$ , siguiendo la recta que une  $P''$  y  $Q$  que tiene por ecuación cartesiana  $y=1/2 x$ , o bien ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 1/2 t \end{aligned} \quad (2.1.2.f)$$

Substituyendo las ecuaciones (1.2.2.f) en (1.2.2.a) complementamos las ecuaciones paramétricas de la curva:

$$f(t) = 4 - \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} - \frac{t^2}{32} \quad (2.1.2.g)$$

ahora tomemos el límite cuando  $t \rightarrow 2$

$$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = 4 - \frac{4}{8} + \frac{2}{4} - \frac{4}{32} = 4 - \frac{1}{8} = \frac{31}{8} = 3.875 \quad (2.1.2.h)$$

11.8

el resultado obtenido en (2.1.2.h) es igual al de (2.1.2.e.). Probo-  
mos otro camino, partamos ahora del punto  $P''(0,0)$  hacia  $Q(2,1)$  -  
siguiendo la parábola  $x = 2y^2$  en el plano  $x, y$  cuyas ecuaciones -  
paramétricas son  $x = 2t^2$ ;  $y = t$  (2.1.2.i)

las cuales al ser sustituidas en (2.1.2.a) definen:

$$f(t) = 4 - \frac{4t^4}{8} + \frac{2t^2}{4} - \frac{t^2}{8} \quad (2.1.2.j)$$

en este caso  $t \rightarrow 1$  para  $x=2, y=1$

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = 4 - \frac{4}{8} + \frac{2}{4} - \frac{1}{8} = 3.875 \quad (2.1.2.k)$$

Como vimos, por los tres caminos elegidos al azar, el resultado -  
obtenido fue el mismo, lo cual nos permite suponer que el límite  
de la función, cuando  $P(x,y) \rightarrow Q(x,y)$  es  $31/8$ , o bien escribiendo  
lo algebraicamente.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \left( 4 - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{y^2}{8} \right) = \frac{31}{8} = 3.875 \quad (2.1.2.l)$$

La suposición anterior se basa en la condición necesaria y sufi-  
ciente para la existencia del límite vista en C.D.I., que requie-  
ra la igualdad de los límites a derecha e izquierda para la exis-  
tencia del límite. Generalizaremos esto a funciones de dos varia-  
bles diciendo que para que exista el límite de  $f(x,y)$  cuando  $--$   
 $(x,y) \rightarrow (a,b)$  es necesario y suficiente que el límite sea el mis-  
mo sin importar el camino seguido para llegar a  $(a,b)$ .

Como corolario diremos que si al tender  $(x,y)$  a  $(a,b)$  por distin-  
tos caminos, en algunos obtenemos un valor  $L_1$  para el límite, y  
en otros un valor diferente  $L_2$ , el límite no existe.

Luego de haber resuelto este problema nos abocaremos a la defini-  
ción de límite de una función de varias variables independientes.  
Con el objeto de tener una interpretación gráfica nos restringire-  
mos a dos variables.

Sea  $f(x,y)$  definida en un entorno rectangular reducido de lado -  
 $2\delta$ , de  $(x_0, y_0)$ .

## Definición 2.1.10

Se dice que  $L$  es el límite de  $f(x,y)$  cuando  $x \rightarrow x_0$  y  $y \rightarrow y_0$ , lo  
cual se escribe:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = L,$$

Si para todo número positivo  $\epsilon$  se puede hacer corresponder un  $\delta$   
también positivo (que depende de  $\epsilon$  y de  $(x_0, y_0)$  en general) tal-  
que se cumplen las desigualdades siguientes:

$$|f(x,y) - L| < \epsilon$$

siempre que:  $|x - x_0| < \delta$ ;  $|y - y_0| < \delta$

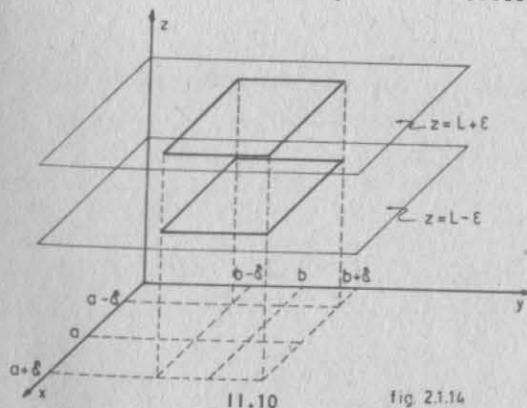
Expliquemos e interpretemos la definición anterior.

Digamos que  $\epsilon$  es la magnitud de la aproximación que se requiere-  
al límite de la función, la cual podemos fijar de antemano, en-  
tonces:

$$|f(x,y) - L| < \epsilon$$

nos circunscribe a un intervalo de amplitud  $2\epsilon$  en el recorrido -  
de la función (eje  $Z$ ); esto se representa gráficamente por dos -  
planos paralelos al plano  $(x,y)$  uno de ecuación  $Z = L + \epsilon$  y otro  
 $Z = L - \epsilon$  (Fig. 2.1.14)

Una vez fijado lo anterior, existirá el límite cuando sea posi-  
ble definir la magnitud de " $\delta$ " que representa la mitad del lado  
de un entorno rectangular en el dominio de la función en el que  
se cumple que para todo punto interior a él, su imagen en la su-  
perficie se encuentra entre los planos descritos.



11.10

fig 2.1.14

Hemos hablado ya de la propiedad de unicidad de los límites de funciones escalares de variable vectorial, como una generalización de la propiedad correspondiente a funciones escalares de variable escalar. Las demás propiedades son también una generalización de las que estudiaste en C.D.I. y se demuestran de manera similar. (Ver apéndice 2.1)

Ejemplo 2.1.3

Demostrar que 
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} 4 - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{y^2}{8} = \frac{31}{8}$$

Por definición debemos demostrar que el cumplimiento de:

$$\left| 4 - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{y^2}{8} - \frac{31}{8} \right| < \delta \quad (2.1.3.a)$$

implica necesariamente la existencia de un número  $\delta > 0$

tal que 
$$\begin{aligned} |x-2| < \delta \\ |y-1| < \delta \end{aligned}$$

Operemos con la expresión 2.1.3.a; primeramente multipliquemos, ambos miembros por 8 para simplificar la expresión.

$$\begin{aligned} |32 - x^2 + 2x - y^2 - 31| &< 8\delta \\ |1 - x^2 + 2x - y^2| &< 8\delta \\ |1 - (x^2 - 2x + 1) + 1 - y^2| &< 8\delta \\ |2 - (x-1)^2 - y^2| &< 8\delta \end{aligned}$$

Multipliquemos, dentro del signo de valor absoluto, por (-1). Naturalmente, la expresión no se altera.

$$|(x-1)^2 + y^2 - 2| < 8\delta$$

Ahora

$$\begin{aligned} -8\delta &< (x-1)^2 + y^2 - 2 < 8\delta \\ 2 - 8\delta &< (x-1)^2 + y^2 < 2 + 8\delta \end{aligned} \quad (2.1.3.b)$$

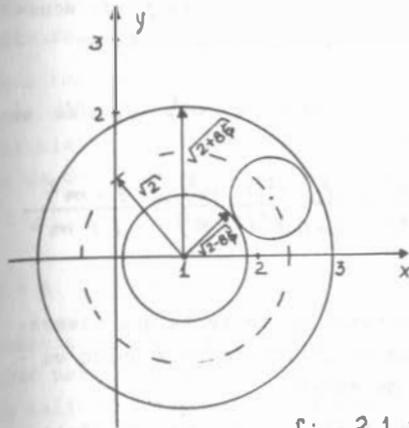


fig. 2.1.15

La expresión 2.1.3.b nos define la región mostrada en la figura 2.1.15, comprendida entre las circunferencias concéntricas en (1,0) y con radios respectivamente iguales a  $\sqrt{2+8\epsilon}$ ,  $\sqrt{2-8\epsilon}$ ; es decir, todos los puntos de esa región cumplen con 2.1.3.b, por consiguiente, con 2.1.3.a. Notemos también que la circunferencia de radio  $\sqrt{2}$  pasa por el punto (2,1). Ahora, siempre podremos trazar un círculo con centro en (2,1) y tangente a la circunferencia exterior --

(la distancia de la circunferencia punteada a la exterior, siempre será menor que su distancia a la circunferencia interior. ¿Por qué?), Todos los puntos interiores de este círculo quedarán dentro de la región definida por 2.1.3.b y cumplirán 2.1.3.a.

Luego, el cumplimiento de 2.1.3.a. garantiza el cumplimiento de:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 < (\sqrt{2+8\delta} - \sqrt{2})^2$$

y que 
$$\begin{aligned} (x-2)^2 &< (\sqrt{2+8\delta} - \sqrt{2})^2 \\ (y-1)^2 &< (\sqrt{2+8\delta} - \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} |x-2| &< \sqrt{2+8\delta} - \sqrt{2} \\ |y-1| &< \sqrt{2+8\delta} - \sqrt{2} \end{aligned} \quad (Q.E.D.)$$

donde

$$\delta = \sqrt{2+8\delta} - \sqrt{2} > 0, \text{ que siempre existe.}$$

Ejemplo 2.1.4

Determinar el límite de  $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$  cuando  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ , 6

sea:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Podemos proceder como en el ejemplo 2.1.2 partiendo de un punto-cualquiera  $(x,y)$  y aproximándonos a  $(0,0)$  por la recta de ecuación  $y=mx$  que pasa por ambos puntos; substituyendo  $y=mx$  en  $f(x,y)$  obtenemos:

$$f(x) = \frac{x^2 - m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} \quad \text{que es solo función de } x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 - m^2)}{x^2(1 + m^2)} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

Como podemos observar, el límite depende de la recta que usemos para aproximarnos al punto, así que el límite no será único en este caso, por lo que decimos que no existe.

Otra manera de resolver el problema sería calculando el límite de  $f(x,y)$  como si solamente fuera función de "x" cuando  $x \rightarrow 0$ , y después calcular el límite cuando  $y \rightarrow 0$ , del resultado del límite anterior, o sea:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ -\frac{y^2}{y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y^2} \left[ -\frac{1}{1} \right] = -1$$

o bien comenzando con  $f(x,y)$  como si solamente fuera función de "y", luego calcular el límite de ese resultado cuando  $x \rightarrow 0$ , que resulta ser:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x^2}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [1] = 1$$

Como observamos, los resultados son distintos, lo que confirma que el límite no existe.

A esta última forma de evaluar el límite de una función de dos variables independientes se le conoce con el nombre de límite reiterado. Es condición necesaria para la existencia del límite doble  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y)$  que los límites reiterados.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right] \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right]$$

sean iguales, pero su igualdad no garantiza la existencia del límite doble.

Como conclusión, podríamos resaltar que para que el límite exista éste debe ser único; la forma de determinar la existencia será calcularlo por alguno de los métodos propuestos e incluso, en caso de duda, verificarlo haciendo uso de la definición.

### 2.1.3. Continuidad

Comenzaremos por tratar de entender el concepto de continuidad. ¿Qué nos sugiere el término continuo?; ese término lo usamos para calificar algo que no tiene cortes ni saltos, que, en pocas palabras, tiene una secuencia ininterrumpida. En esta misma forma la usaremos para calificar a las funciones de varias variables independientes, y diremos que por ejemplo una función de dos variables independientes  $Z=f(x,y)$  que representa una superficie, es continua en una región, si no presenta interrupciones en su morfología sobre esa región. Fig. 2.1.16.

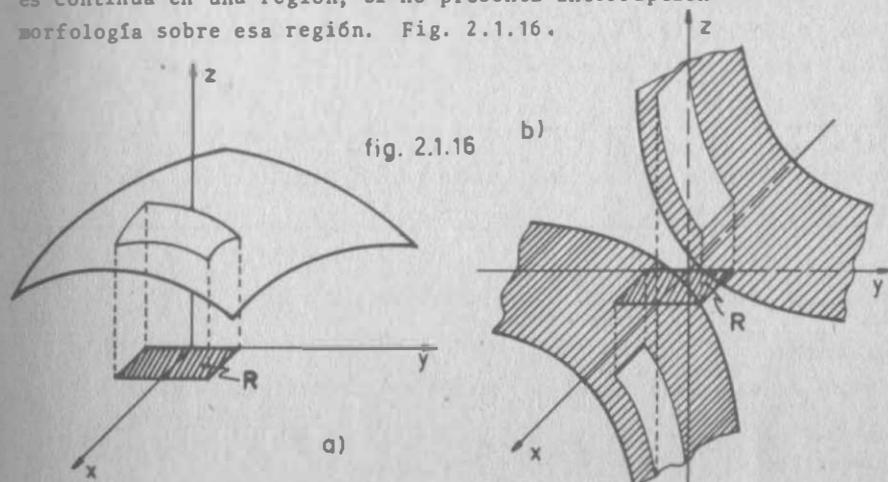


fig. 2.1.16

LA SUPERFICIE a) ES CONTINUA EN TANTO QUE b) NO LO ES.

Lo que necesitamos ahora es un criterio para definir cuando una función es continua o no lo es.

Podríamos comenzar por definir la continuidad en un punto.

Recordando nuestros antecedentes sabemos que para que una función de una variable independiente sea continua en un punto, debe satisfacer 3 condiciones:

- La existencia del límite en el punto en cuestión.
- La existencia de la función en el punto mismo.
- La igualdad entre el valor de la función y el límite.

Es fácil entonces hacer la generalización para obtener la definición de continuidad.

#### Definición 2.1.11.

Sea  $f(\bar{r})$  en un entorno rectangular " $\delta$ " de  $\bar{r}_0$ . Se dice que  $f(\bar{r})$  es continua en  $\bar{r}_0$  si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(\bar{r}) = L$ , o sea, que el límite doble existe.
- Que exista  $f(\bar{r}_0)$ ; o sea,  $f(\bar{r}_0)$  debe estar definida.
- Que  $f(\bar{r}_0) = L$ ; o sea, que el límite y el valor de la función en el punto sean iguales.

Si deja de cumplirse alguna de las condiciones anteriores la función es discontinua en el punto.

#### Definición 2.1.12.

Una función se dice continua en una región  $R \subseteq E^n$  si es continua en todo punto de  $R$ .

#### Ejemplo 2.1.5.

Analizar si  $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$  es continua en  $x=0, y=0$ .

Solución:

$f(0,0)$  no está definida  $\Rightarrow$  la función es discontinua en  $(0,0)$ .

#### Ejemplo 2.1.6.

Investigar si  $f(x,y) = \sqrt{5-x^2-y^2}$  es continua en  $(1,2)$ .

Solución:

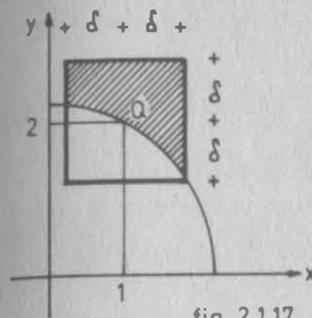


fig. 2.1.17

Pero el dominio de la función es interior al círculo de la figura (2.1.17); entonces la función no existe en la parte sombreada del entorno de  $Q$ ; la relación (2.1.5.a) no se cumple y el límite no existe.  $\Rightarrow$  la función es discontinua en  $(1,2)$

Otra forma de definir la continuidad es en términos de  $\delta$  y  $\epsilon$ . En efecto, consideremos la función del ejemplo 2.1.2 de la cual ya demostramos que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} f(x,y) = \frac{31}{8} = 3.875$$

Por otra parte,  $f(2,1) = 3.875 \Rightarrow f(x,y)$  es continua en  $(2,1)$ .

Ahora consideremos el punto  $(2.2, 1.1)$ :

$$f(2.2, 1.1) = 3.765; \quad 3.875 - 3.765 = 0.11$$

y el punto  $(2.1, 1.1)$ :

$$f(2.1, 1.1) = 3.8225; \quad 3.875 - 3.8225 = 0.0525 < 0.11$$

En general, podemos demostrar que la diferencia entre  $f(2,1)$  y el valor de la función en otro punto puede hacerse tan pequeña como se quiera, con tal de aproximar ese punto a  $(2,1)$ . En efecto, supongamos que queremos hacer esa diferencia menor que  $\epsilon$ :

$$|3.875 - f(x,y)| < \epsilon$$

pero como  $3.875 = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} f(x,y)$ :

$$|f(x,y) - 3.875| = |3.875 - f(x,y)| < \epsilon \quad \text{cuando} \quad |x-2| < \sqrt{2+8\epsilon} - \sqrt{2}$$

$$|y-1| < \sqrt{2+8\epsilon} - \sqrt{2}$$

Así, si fijamos  $\epsilon=0.01$ ,  $\sqrt{2+8\epsilon} - \sqrt{2} = 0.028$ ;  $1.972 \leq x \leq 2.028$   
 $0.972 \leq y \leq 1.028$

entonces podemos hacer  $x=2.02$ ,  $y=0.99$

$$f(2.02, 0.99) = 3.872; \quad 3.875 - 3.872 = 0.003 < 0.01$$

Como no hemos perdido generalidad en el razonamiento anterior, podemos afirmar que si una función  $f(\vec{r})$  es continua, entonces:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} [f(\vec{r}_0) - f(\vec{r})] = 0 \quad \text{--- (2.1.3.1)}$$

La función  $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq x/2 \\ 2 & \text{si } y < x/2 \end{cases}$  (Fig. 2.1.18)

es discontinua en el punto  $(2,1)$ . En efecto,  $f(2,1)=1$ ; pero no existe el límite. En este caso, si nos acercamos a  $(2,1)$  por la derecha de la recta  $y = \frac{x}{2}$ , no importa cuánto nos acerquemos, nunca podremos lograr que  $|f(2,1) - f(x,y)| < 1$ .

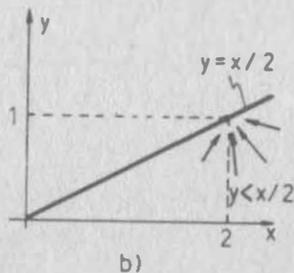
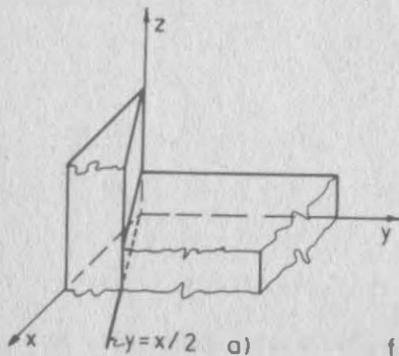


fig. 2.1.18

Esto nos hace suponer que sólo las funciones continuas cumplen con la condición (2.1.3.1). En efecto, si  $f(\vec{r})$  es tal que:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} [f(\vec{r}_0) - f(\vec{r})] = 0$$

podemos afirmar que:  $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f(\vec{r}_0) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f(\vec{r}) = 0$

o bien:  $f(\vec{r}_0) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f(\vec{r})$

Por lo que se puede afirmar que:

**Teorema 2.1.1.**

Una función  $f(\vec{r})$  es continua si y sólo si:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} [f(\vec{r}_0) - f(\vec{r})] = 0$$

## 2.2 DERIVADAS PARCIALES

El Cálculo Diferencial nació debido al interés de Leibnitz por encontrar una expresión general que definiese la ecuación de la tangente a una curva, representación geométrica de una función escalar de variable escalar.

Si consideramos ahora una función escalar de variable vectorial  $\vec{r}$ ,  $\vec{r} \in E^2$ , cuya representación geométrica es una superficie, -- tendremos interés por sus tangentes; pero una superficie no tiene tangente única en un punto, sino un sinnúmero de ellas que, unidas todas, definen un único plano tangente. Vamos a tratar entonces de encontrar la ecuación del plano tangente a una superficie en un punto.

Sea el paraboloides elíptico  $Z=2x^2+y^2$  y sea el punto  $P(1,2,6)$ . Queremos hallar la ecuación del plano tangente a esa superficie en el punto. (Fig. 2.2.1)

Para encontrar la ecuación de un plano, debemos conocer el vector normal a él y un punto. El punto ya lo conocemos; al vector normal lo podemos conocer si hacemos el producto vectorial de dos vectores del plano, es decir, de dos vectores tangentes a la superficie.

Tenemos un sinnúmero de vectores tangentes, ya lo dijimos; la cuestión es escoger aquéllos que más fácilmente podamos conocer sus coordenadas.

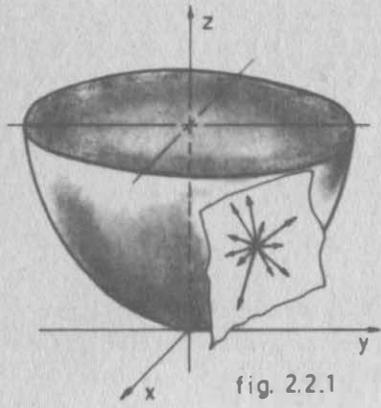


fig. 2.2.1

Cada vector tangente a la superficie, lo es a una curva - que resulta de intersectar a la superficie con un plano -- vertical que pasa por el punto (Fig. 2.2.2.). Si escogemos el plano intersector  $y=2$ , tendremos dos ventajas: por un lado, el vector tangente a la curva de intersección será perpendicular al eje "y" y só lo tendrá dos componentes distintas de cero; por otro lado, las ecuaciones de dicha curva nos quedan (Fig. 2.2.3)

$$\begin{cases} z = 2x^2 + 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

con lo que podremos calcular la dirección del vector tangente como aprendimos en C.D.I.

En efecto la figura 2.2.5 nos muestra la curva de intersección. La pendiente del vector tangente, definida como la -- tangente del ángulo que forma con la dirección positiva del eje "x"; sera:

$$m_1 = 4x/x=1 = 4$$

Como no nos interesa el módulo de ese vector, sino sólo su dirección, podemos decir que sus componentes son:

$$(1, 0, 4)$$

Por razones análogas, para obtener el otro de los vectores tangentes, nos conviene tomar el plano  $x=1$ , con lo que la ecuación de la curva de intersección es:

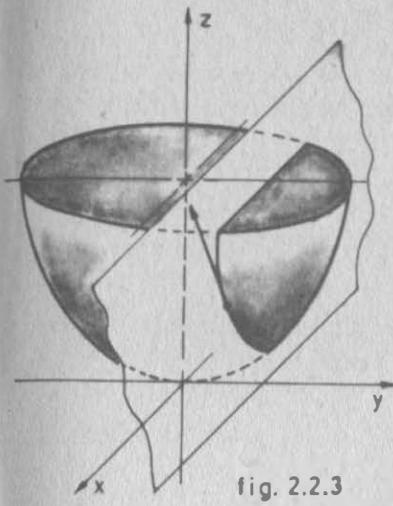


fig. 2.2.3

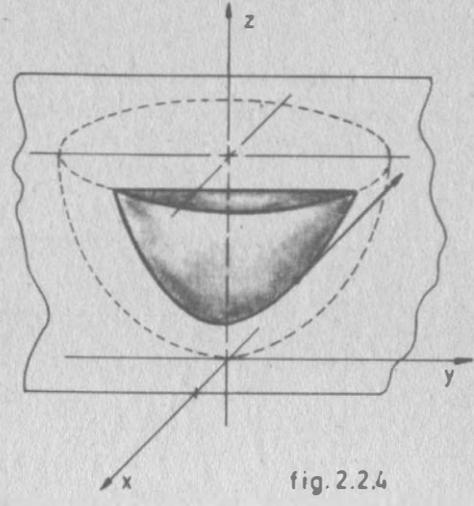


fig. 2.2.4

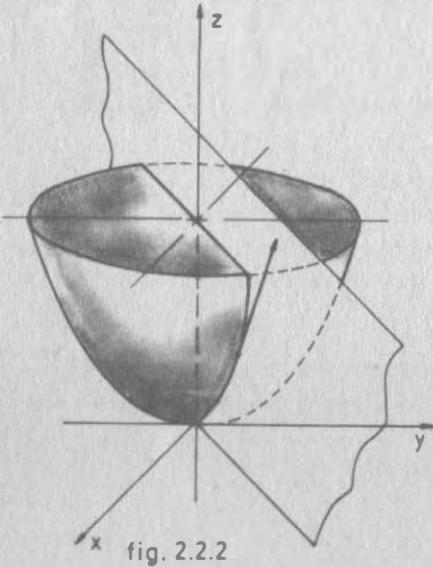


fig. 2.2.2

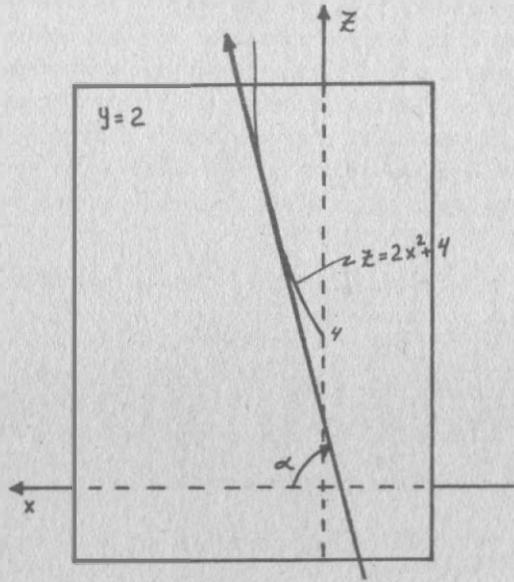


fig. 2.2.5

$$\begin{cases} z = y^2 + 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

y la pendiente del vector tangente, definida ahora como la tangente del ángulo que forma con la dirección positiva del eje "y", vale:

$$m_2 = 2y/y=2 = 4$$

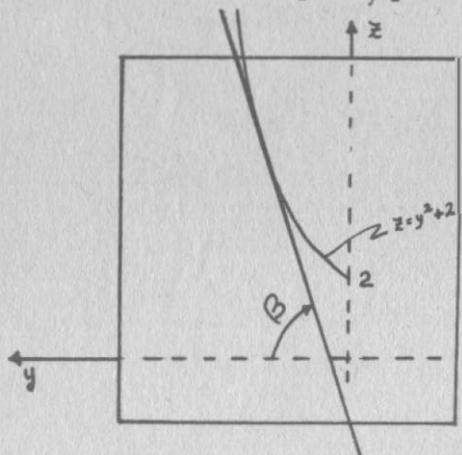


fig. 2.2.6

por lo que las componentes del vector buscado son:

$$(0, 1, 4)$$

Así, el vector normal al plano tangente es:

$$(4, 4, -1)$$

y la ecuación del plano tangente:

$$4x + 4y - z = 6$$

Bien; hemos resuelto el problema planteado y aparentemente sólo - hemos utilizado conceptos ya conocidos de cursos anteriores; sin embargo, hemos derivado dos veces, cada vez con respecto a distinta variable; pero antes de derivar, en ambos casos hicimos previamente constante a la otra variable. Cuando se tiene una función real de varias variables, y se deriva con respecto a una de ellas, manteniendo a los demás como constantes, se dice que se obtiene una DERIVADA PARCIAL.

Si  $z=f(x,y)$ , la derivada parcial de "z" con respecto a "x", se anota:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z_x, f_x$$

Análogamente, la parcial de "z" con respecto a "y":

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z_y, f_y$$

Así, en nuestro problema podemos escribir:

$$m_1 = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_p = z_x(1, 2, 6)$$

$$m_2 = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_p = z_y(1, 2, 6)$$

Por otra parte, aprendimos en C.D.I. que la aplicación de la derivada a la Geometría es muy importante; pero no es la única aplicación que le podemos dar a ese concepto matemático. Aprendimos también que una derivada valúa la rapidez de crecimiento de cualquier función y que conceptos físicos tan importantes como la velocidad, se definen a través de derivadas.

Así también, las derivadas parciales tendrán múltiples aplicaciones tanto en la Geometría, como en la Física y en la Matemática pura; más aún, sus aplicaciones no se limitan a un determinado número de variables; por ello es conveniente definir de una manera formal y general este concepto:

Sea una función real de variable vectorial  $u=f(\bar{x})$  donde  $\bar{x} \in E^n$  es un vector cuyas componentes son  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Si damos un incremento a una variable cualquiera " $x_i$ ", manteniendo constantes a las demás, la función se incrementará como sigue:

$$u + \Delta u = f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n)$$

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Si se divide la ecuación entre " $\Delta x_i$ "

$$\frac{\Delta u}{\Delta x_i} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Ahora tomemos límites cuando  $\Delta x_i \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \dots (2.2.01)$$

Definición 2.2.1. Si el límite de la expresión (2.2.0.1) existe, se dice que la función  $u=f(\bar{x})$  es derivable con respecto a la variable " $x_i$ " y al límite se le llama "DERIVADA PARCIAL DE LA FUNCIÓN CON RESPECTO A  $x_i$ "

En esta definición se repiten los cuatro pasos que estudiaste en C.D.I. para la derivada ordinaria; por lo mismo, las fórmulas de derivación que ya conoces son válidas si tratas a las demás variables como constantes; si las condiciones del problema lo permiten, puedes darles sus valores numéricos, como hicimos en el ejemplo que nos sirvió de introducción. Un método alternativo puede ser:

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial (2x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (y^2)}{\partial x} = 4x + 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} / p = 4(1) = 4$$

Ejemplo 2.2.1. Calcular las derivadas parciales, con respecto a las dos variables de la función:  $u = ye^{xy} + x \operatorname{sen} \frac{x}{y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 e^{xy} + x \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} + \operatorname{sen} \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = yx e^{xy} + e^{xy} + x \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cos \frac{x}{y}$$

Ejemplo 2.2.2. En una fábrica de bobinas se ha recibido un pedido para fabricar bobinas para electroimanes que serán utilizadas para construir timbres. Las bobinas deberán tener las siguientes especificaciones:

- $l = 3 \text{ cm.}$
- $r = 1 \text{ cm.}$
- $n = 10^3 \text{ espiras/cm.}$

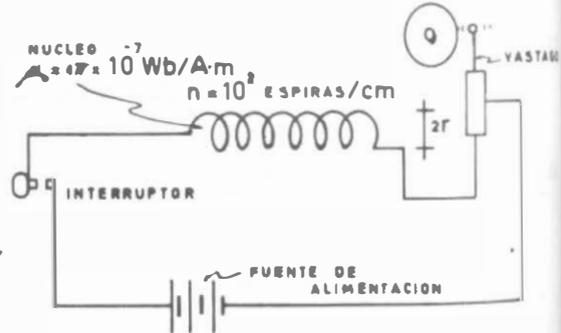


fig. 2.2.6

\* Una bobina es un arrollamiento de hilo conductor que recorrido por una corriente eléctrica, induce en el medio circundante un efecto magnético. En el caso de bobinas de electroimán, el efecto magnético suministra una fuerza de atracción de aproximadamente de  $23.6 \times 10^{-3}$  Newton sobre un vástago móvil para el caso que estamos analizando.

Si la inductancia en este tipo de bobinas está dada por la función:

$$L = 4\pi n^2 l \pi r^2 \quad \text{en donde}$$

$L$  está en henrios  
 $n$  = espiras o número de vueltas por cm. (cte. en este ejemplo)  
 $r$  y  $l$  están en cm.  
 $4\pi$  está en  $\frac{\text{webers}}{\text{amp. metro}}$   
 y un weber = henrio-ampere

Suponiendo que somos los ingenieros que vamos a controlar la calidad de las bobinas nos haríamos la siguiente pregunta: ¿Cuál de todas las especificaciones debemos cuidar más para que la diferencia entre la inductancia de diseño y la obtenida mediante los procesos de fabricación se mantenga más próxima a los estándares establecidos?

Determinemos entonces la variación de la inductancia debido a un cambio en la longitud  $l$ .

$$\frac{\partial L}{\partial l} = 4\pi n^2 \pi r^2$$

para los valores de diseño dadas, tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial l} = 4\pi \times 10^{-2} \left(\frac{10^3}{10^{-2}}\right)^2 \pi (10^{-2})^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = 39.47 \times 10^{-3} \frac{\text{henrios}}{\text{m}}$$

Ahora analicemos la variación de la inductancia debido al cambio en el radio  $r$ :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 2 \cdot 4\pi n^2 l \pi r \quad \text{y para los valores de diseño:}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 2 (4\pi \times 10^{-2}) \left(\frac{10^3}{10^{-2}}\right)^2 (3 \times 10^{-2}) \pi (10^{-2}) =$$

$$= 23.68 \times 10^{-2} \frac{\text{henrios}}{\text{m}}$$

Vemos que la variable que mayor variación produce a la inductancia es el radio de las bobinas, así que esa es la que requiere mayor control. Con esto hemos resuelto el problema.

## Ejemplo 2.2.3

En hidráulica se define el "radio hidráulico" de un conducto por el que circula un fluido, como el cociente  $R = \frac{A}{P}$  en donde "A" es el área de la sección transversal que lleva fluido y "P" es el perímetro de la sección en contacto con el fluido, llamado "perímetro mojado". Para el canal de la fig. 1.3.2:  $A = bt$ ,  $P = b + 2t$ .

Calcular  $\frac{\partial R}{\partial b}$  y  $\frac{\partial R}{\partial t}$  cuando  $b=6$  m,  $t=2$  m. y decir respecto a cual de las variables es más sensible el radio hidráulico.

Solución:

Si sustituimos A y P por sus valores en función de b y t:

$$R = \frac{bt}{b+2t}$$

Al derivar respecto a b, tenemos la derivada de un cociente:

$$\frac{\partial R}{\partial b} = \frac{(b+2t)t - bt(1)}{(b+2t)^2} = \frac{bt+2t^2 - bt}{(b+2t)^2} = \frac{2t^2}{(b+2t)^2}$$

para  $b=6$ ,  $t=2$

$$\frac{\partial R}{\partial b} \Big|_{(b,t)} = \frac{8}{(6+4)^2} = \frac{8}{100} = 0.08$$

Si se deriva ahora respecto a "t", manteniendo "b" constante:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{(b+2t)b - bt(2)}{(b+2t)^2} = \frac{b^2+2bt-2bt}{(b+2t)^2} = \frac{b^2}{(b+2t)^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} \Big|_{(b,t)} = \frac{36}{(6+4)^2} = \frac{36}{100} = 0.36$$

La mayor derivación del radio hidráulico se tiene al variar el radiante "t".

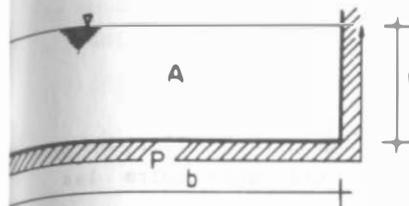


fig. 2.3.2

Las unidades de R son metros, lo mismo que las de b y t, por tanto las unidades de  $\frac{\partial R}{\partial b}$  o  $\frac{\partial R}{\partial t}$  son m/m, o bien, cm/cm, mm/mm, etc.

## 2.3. APLICACIONES GEOMETRICAS DE LA DERIVADA PARCIAL.

## 2.3.1. Normal a una superficie.

Basado en el problema inicial, halla una fórmula general para las componentes de un vector normal a una superficie, de ecuación  $Z=f(x,y)$ , en el punto  $(x_0, y_0)$ . Cuando la hayas encontrado verifica con el problema resuelto.

## 2.3.2. Ecuación del plano tangente.

Con la normal a la superficie del inciso anterior, plantea la ecuación general del plano tangente a esa superficie, en el punto  $P_0(x_0, y_0)$ .

Verifica la ecuación del plano tangente para el problema que resolvimos.

## 2.3.3. Ángulo entre dos superficies.

Como recordarás, el ángulo entre dos planos, es el ángulo entre sus vectores normales. Definimos ángulo entre dos superficies, un cierto punto de su curva de intersección, al ángulo entre sus respectivos planos normales, en ese punto.

Dadas las superficies de ecuaciones:

$$Z = f(x, y)$$

$$Z = g(x, y)$$

Deduca una expresión para determinar el ángulo entre ellas, en el punto  $P_0(x_0, y_0)$ , y aplícalo al cálculo del ángulo entre las superficies.

$$Z = -2x^2 + y^2 + 5x - y + 2$$

$$Z = x^2 - 3y^2 + 6y + 2x - 1$$

en  $P(1, 1)$ .

### 2.3.4 Recta tangente a la Intersección de Dos Superficies.

La recta tangente a la curva intersección entre dos superficies, tiene la dirección de la perpendicular común a las normales a esas superficies en el punto considerado. En el problema 2.3.3, para hallar el ángulo entre las dos superficies, determinaste las normales respectivas en el punto  $P(1, 1)$ . Ahora, utilizando esos resultados, encuentra un vector tangente a la curva de intersección de esas superficies, en ese mismo punto, y las ecuaciones de la recta tangente a esa curva en el punto dado.

### 2.4 CONDICIONES DE DERIVACION.

Sea la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} x+y & \text{si } xy = 0 \\ 1 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$$

11.27

2.3

Es evidente que esta función es discontinua en el origen; veamos si admite derivadas en ese punto

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0 + \Delta x) - (0 + 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \end{aligned}$$

Análogamente:

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 1$$

Cuando estudiaste las derivadas ordinarias concluíste que la existencia de la derivada implicaba necesariamente la continuidad de la función: podemos ver entonces, que cuando tenemos varias variables no es necesario que la función sea continua para que existan sus derivadas parciales.

La condición necesaria que podemos imponer ahora, es que la función  $f(x, y_0)$  sea continua en  $x = x_0$ , para que exista la derivada parcial de  $f(x, y)$  con respecto a  $x$  en el punto  $(x_0, y_0)$ .

Análogamente, la existencia de la derivada parcial de  $f(x, y)$  con respecto a  $y$  en el punto  $(x_0, y_0)$ , en ese punto implicará la continuidad de la función  $f(x_0, y)$  en ese punto.

### 2.5 DERIVADAS PARCIALES SUCESIVAS Y TEOREMA DE SCHWARZ.

La primera parte del título nos sugiere la posibilidad de derivar nuevamente una derivada, sólo que hay que ver en qué caso es posible.

Como vimos en el tema anterior, una función  $Z = F(x, y)$  definida y continua en una región  $R$  del plano  $(x, y)$  puede tener derivadas

parciales  $\frac{\partial Z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Z}{\partial y}$  si los límites que definen ambas derivadas existen.

11.28

2.4

Ahora bien, cuando se cumple lo anterior, las derivadas parciales son a su vez funciones definidas sobre la misma región R, es decir:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F_x(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = F_y(x, y)$$

en donde  $F_x$  y  $F_y$  definen distintas funciones de  $x$  y  $y$ . En tal situación es factible obtener las derivadas parciales de cada una de ellas, a las que llamaremos segundas derivadas parciales. La derivada con respecto a  $x_i$  de la primera derivada parcial de  $f(\bar{x})$ , respecto a  $x_i$  se denota por:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = f_{x_i x_i}(x, y)$$

que se lee: segunda derivada parcial de  $f(x, y)$  con respecto a  $x$  dos veces. El símbolo  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$  es el operador de Jacobi, mientras que  $f_{x_i x_i}(x, y)$  es el de Lagrange; empleándose también, en este caso,  $f_{ii}(x, y)$  ó  $f_{ii}$ . De manera similar podemos derivar parcialmente  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  ahora con respecto a  $x_j$ , obteniendo  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  derivada parcial mixta, en donde el orden de la derivación la indicamos de derecha a izquierda, así el símbolo anterior nos dice que  $f(x, y)$  fue primeramente derivada con respecto a  $x_i$  y después respecto a  $x_j$ .

Se puede seguir derivando sucesivamente hasta que se vuelvan cero las derivadas, o bien no existan.

Ejemplo 2.5.1

Obtener todas las segundas derivadas parciales de la función:

$$W = e^{x^2 y}$$

Solución:

Primero se obtienen las parciales de  $W$  respecto a  $x$  e  $y$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 2xy e^{x^2 y} \quad (2.5.1.a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = x^2 e^{x^2 y} \quad (2.5.1.b)$$

La expresión (2.5.1.a) puede ser derivada ahora respecto a "x" o a "y", ya que es una nueva función de "x" e "y" por lo tanto obtenemos las parciales:

$$W_{xx} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 4x^2 y^2 e^{x^2 y} + 2y e^{x^2 y} \quad (2.5.1.c)$$

$$W_{xy} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} = 2x e^{x^2 y} + 2x^3 y e^{x^2 y} \quad (2.5.1.d)$$

Al derivar ahora (2.5.1.b) respecto a "x" y "y", obtenemos:

$$W_{yx} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 2x e^{x^2 y} + 2x^3 y e^{x^2 y} \quad (2.5.1.e)$$

$$W_{yy} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = x^4 e^{x^2 y} \quad (2.5.1.f)$$

Como ves, de una función de dos variables se obtienen cuatro segundas derivadas parciales, cada una de las cuales es nuevamente función de las variables originales; si estas funciones son derivables, podemos encontrar las terceras derivadas parciales (8 en total), y así sucesivamente.

Es fácil ver que si hay "N" variables independientes, el número de segundas derivadas parciales es  $N^2$ , el de las terceras derivadas parciales es  $N^3$ , y así en lo que sigue.

Hay algo interesante que observar también. Analicemos cómo son las parciales representadas en (2.5.1.d e). Se aprecia que los resultados son los mismos; cabría la pregunta ¿Sucedo así con todas las parciales segundas mixtas?

La respuesta está dada por el teorema que enunciamos a continuación.

**Teorema 2.5.1**  
**Teorema de Schwarz.**  
 Si "f" es un campo escalar tal que sus derivadas

- $f_1, f_2$  existen en una vecindad de  $(a, b)$
- $f_{12}$  es continua en  $(a, b)$

Entonces  $f_{21}(a, b)$  existe y además:

$$f_{21}(a, b) = f_{12}(a, b)$$


La demostración de este teorema se presenta en el apéndice 2.2.

Ejemplo 2.5.2

10. Verificar que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  para la función  $f(x,y) = 3x \tan^2 xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \tan^2 xy + 3x [2y \tan xy] [\sec^2 xy] \quad (2.5.2.a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x [2x \tan xy] [\sec^2 xy] = 6x^2 (\tan xy) \sec^2 xy \quad (2.5.2.b)$$

al derivar (2.5.2.a) respecto a  $y$ , obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x (\tan xy) \sec^2 xy + 6x (\tan xy) \sec^2 xy + 6x^2 \sec^4 xy + 6x^2 y [2 \sec^2 xy] [\tan^2 xy]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 12x \tan xy \sec^2 xy + 6x^2 y \sec^4 xy + 12x^2 y \sec^2 xy \tan^2 xy \quad (2.5.2.c)$$

al derivar (2.5.2.b) respecto a  $x$ , obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x \tan xy \sec^2 xy + 6x^2 y \sec^4 xy + 12x^2 y \tan^2 xy \sec^2 xy \quad (2.5.2.d)$$

Como podemos observar, los resultados (2.5.2.c y d) son iguales. La función y sus derivadas no cumplen con las hipótesis del Teorema de Schwarz, en puntos en los que el producto  $xy$  es igual a  $\pi/2$ ,  $3\pi/2$  ó difiere de estos en  $n\pi/2$ ; en ellos, la función  $\tan xy$  no toma un valor determinado, y por otro lado  $\sec xy = \frac{1}{\cos xy}$  también es indeterminada. En dichos puntos, la función y sus derivadas son igualmente indeterminadas. Para puntos distintos siempre se cumplirá el Teorema de Schwarz. En los puntos en que  $xy = \frac{\pm n\pi}{2}$ , la función no cumple con la hipótesis del teorema de Schwarz y puede verse que, en esos casos, no es posible concluir la igualdad de las expresiones (2.5.2.c y d) dado que no tienen valores numéricos determinados (ambos tienden a infinito).

Cabe aclarar en este punto que el teorema de Schwarz señala una condición suficiente más no necesaria para la igualdad entre las parciales mixtas. Asimismo, vale la pena indicar que el alcance de este teorema se extiende a derivadas parciales mixtas de cualquier orden finito, con cualquier número finito de variables, como se demuestra por inducción matemática en el apéndice 2.2.

Ejemplo 2.5.3

Demostrar que la función  $Z = \ln [x + \phi(y)]$  satisface la ecuación:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

donde  $\phi(y)$  es una función cualquiera de " $y$ ".

Solución:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{1}{x + \phi(y)} \quad \dots (2.5.3.a) \quad ; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\phi'(y)}{x + \phi(y)} \quad \dots (2.5.3.b)$$

De (2.5.3.a) tenemos:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = -\frac{\phi'(y)}{[x + \phi(y)]^2} \quad \dots (2.5.3.c) \quad ; \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = -\frac{1}{[x + \phi(y)]^2} \quad \dots (2.5.3.d)$$

Ahora utilicemos (2.5.3.a, b, c y d) para formar la expresión que se trata de comprobar:

$$\frac{1}{x + \phi(y)} \left( -\frac{\phi'(y)}{[x + \phi(y)]^2} \right) = \frac{\phi'(y)}{x + \phi(y)} \left( -\frac{1}{[x + \phi(y)]^2} \right)$$

$$1 = 1 \quad (Q.E.D.)$$

## 2.6 FUNCIONES DIFERENCIABLES.

Hasta ahora hemos tratado con variaciones unitarias de la función respecto a sus variables independientes, considerando que de éstas una varía y las otras permanecen constantes. Esto, por supuesto, no representa la generalidad de formas en que una función escalar de variable vectorial puede variar. Consideremos ahora en que forma se incrementa una función al cambiar simultáneamente más de una de las variables que la afectan y no necesariamente en forma unitaria; para ilustrar esto, veamos el siguiente.

Ejemplo 2.6.1

Se desea determinar el cambio en la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 60 y 80 cm. (fig. 2.6.1) cuando sus lados se incrementan en -1.0 cm y +1.5 cm. respectivamente.

Solución:

La relación entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo está dada en el teorema de Pitágoras; llamemos "h" a la hipotenusa y sean "a" y "b" los catetos:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Si llamamos "h<sub>0</sub>" al valor de "h" para

$$a = 60 \text{ cm}, b = 80 \text{ cm}.$$

$$h_0^2 = 3600 + 6400 = 10000; \quad h_0 = 100 \text{ cm}.$$

El valor de "h" para a = 59 cm, b = 81.5 cm. es "h<sub>1</sub>":

$$h_1^2 = (59)^2 + (81.5)^2 = 10123.25$$

$$h_1 = 100.6143 \text{ cm}.$$

El cambio en la hipotenusa es:

$$\text{valor final} - \text{valor inicial} = h_1 - h_0 = 100.6143 - 100 = \underline{0.6143} \text{ cm}.$$

o sea, la hipotenusa crece 0.6143 cm.

El resultado obtenido por este procedimiento se conoce como "incremento total de la función", puesto que todas las variables cambian. Ilustremos mejor este concepto con el siguiente.

Ejemplo 2.6.2

Se proyectó un canal de 2 m. de ancho (plantilla) y un metro de profundidad (tirante); debido a imprecisiones propias de la construcción, las dimensiones quedaron de 2.02 m. para la plantilla, y de 1.03m. para el tirante. ¿Qué tanto varió el área del canal?

El área de la sección del conducto que en este caso es un canal rectangular, se incrementa según se muestra en la fig. 2.6.2.

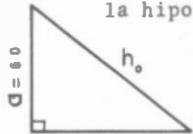


fig. 2.6.1

Solución:

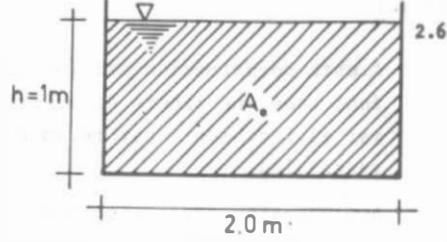
El área inicial de la sección es  $A_0 = 2 \text{ m}^2$

Si se considera  $b + \Delta b = 2.02$  y  $h + \Delta h = 1.03$ , el área será:

$$A_1 = (2.02)(1.03) = 2.0806 \text{ m}^2$$

y el incremento de área

$$\Delta A = A_1 - A_0 = + 0.0806 \text{ m}^2$$



$$\Delta b = 0.02 \text{ m}$$

$$\Delta h = 0.03 \text{ m}$$

fig. 2.6.2

La representación gráfica de estos incrementos se hace en la fig. 2.6.3, en la que se interpretan geoméricamente los resultados.

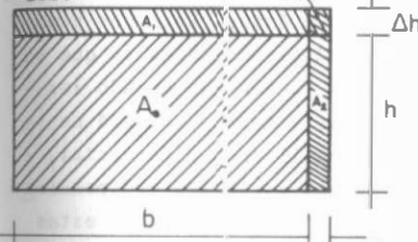


fig 2.6.3

En la figura  $\Delta A = A_1 + A_2 + A_3$ . Calculemos numéricamente cada uno de los incrementos de área:

$$A(b + \Delta b, h + \Delta h) = (b + \Delta b)(h + \Delta h)$$

$$= bh + b \Delta h + h \Delta b + \Delta b \Delta h$$

$$\Delta A = A(b + \Delta b, h + \Delta h) - A(b, h) = bh + b \Delta h + h \Delta b + \Delta b \Delta h - bh$$

$$\Delta A = b \Delta h + h \Delta b + \Delta b \Delta h$$

en donde:  $b \Delta h$  es  $A_1$   
 $h \Delta b$  es  $A_2$   
 $\Delta b \Delta h$  es  $A_3$

Veamos qué tanto afecta cada una de las áreas citadas al valor del incremento.

	% $\Delta A$
$b \Delta h = 2 \times 0.03 = 0.06$	74.442
$h \Delta b = 1 \times 0.02 = 0.02$	24.814
$\Delta b \Delta h = 0.02 \times 0.03 = 0.0006$	.744
<b>0.0806</b>	<b>100.000</b>

Como podemos observar, el producto  $\Delta b \Delta h$  en este caso aporta un .74 % al valor del incremento, por lo que podríamos haber prescindido de él para obtener una aproximación del incremento y decir así que:

$$\Delta A \approx b \Delta h + h \Delta b = 0.08 = \Delta A$$

A esta aproximación del incremento la llamamos "diferencial". Las funciones que tienen diferencial, a las que se les puede aproximar el incremento por medio de diferenciales, las llamamos "diferenciables".

Ahora veamos como se comporta el incremento de esta misma función si  $\Delta b = 1$  m,  $\Delta h = 0.8$  m. Ahora:

$$\begin{aligned} b\Delta h &= 2 \times 0.8 = 1.6 = 47\% \text{ de } \Delta A \\ h\Delta b &= 1 \times 1 = 1.0 = 29\% \text{ de } \Delta A \\ \Delta b\Delta h &= 1 \times 0.8 = 0.8 = 24\% \text{ de } \Delta A \\ \Delta A &= 3.4 \end{aligned}$$

Ya no sería correcto prescindir de la última parte del incremento, que nos representa casi la cuarta parte de éste. Entonces vemos que una característica de las funciones diferenciables es que su diferencial se aproxima al incremento de la función cuando los incrementos de las variables se aproximan a cero. No está de más observar también que, en lo que hemos llamado diferencial, los coeficientes de los incrementos de las variables independientes no dependen de éstos, sino que son constantes. Todas estas características de las funciones diferenciables las formalizamos en la siguiente definición:

#### Definición 2.6.1.

Decimos que una función escalar de variable vectorial  $f(\bar{x})$ ,  $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es diferenciable (en un punto) si su incremento puede escribirse en la forma:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \eta_i \Delta x_i \quad (2.6.0.1)$$

en donde las  $A_i$  no dependen de los incrementos, mientras que las  $\eta_i$  dependen de ellos en tal forma que  $\eta_i \rightarrow 0$  a medida que las  $\Delta x_i \rightarrow 0$

En algunos textos te encontrarás la siguiente definición:

#### Definición 2.6.1'

Una función escalar de variable vectorial  $f(\bar{x})$ ,  $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es diferenciable (en un punto), si su incremento puede escribirse en la forma:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i + \eta \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2} ; \quad \eta \rightarrow 0 \quad \Delta x_i \rightarrow 0 \quad \forall_i \quad (2.6.0.2)$$

Ambas definiciones son equivalentes, puesto que implican al dividirse, que el límite:

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{|\Delta f - \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}} = 0 \quad (2.6.0.3)$$

(ver demostración en el apéndice 1.3)

Notamos que el radical representa el módulo del vector incremento, como se representa gráficamente en la Fig. 2.6.4 para el caso de dos dimensiones.

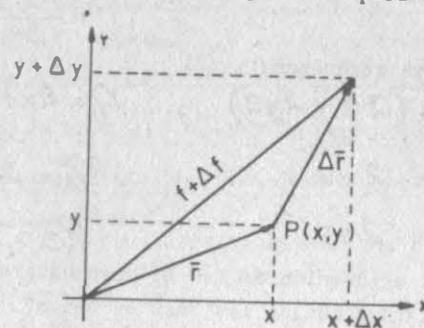


fig. 2.6.4

#### Ejemplo 2.6.3

Averiguar si la función  $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + z$  es diferenciable.

Solución:

Para que sea diferenciable es necesario que su incremento pueda escribirse en la forma:

$$\Delta f = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + A_3 \Delta z + \eta_1 \Delta x + \eta_2 \Delta y + \eta_3 \Delta z$$

según la definición. Calculemos el incremento:

1o. Incrementamos las variables

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) &= (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x)(y + \Delta y)(z + \Delta z) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2xy + 2x\Delta y + 2x\Delta yz + 2x\Delta y\Delta z + \\ &\quad + 2\Delta x yz + 2\Delta x y\Delta z + 2\Delta x \Delta y z + 2\Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

$$20. \Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z)$$

$$\Delta f = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2xy\Delta z + 2x\Delta yz + 2x\Delta y\Delta z + 2\Delta xy z + 2\Delta xy\Delta z + 2\Delta x\Delta y\Delta z$$

Al agrupar por un lado a los términos que contienen a  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , o  $\Delta z$ , y por otro a los que tienen productos entre estos incrementos.

$$\Delta f = (2x + 2yz)\Delta x + (2xz)\Delta y + (2xy)\Delta z + (\Delta x^2 + \Delta x\Delta y + \Delta x\Delta z + \Delta y\Delta z + \Delta y\Delta z + \Delta x\Delta z)\Delta y$$

En este caso se reconocen:

$$A_1 = (2x + 2yz), \quad \eta_1 = \Delta x + 2y\Delta z + 2\Delta yz + 2\Delta y\Delta z$$

$$A_2 = 2xz, \quad \eta_2 = 2x\Delta z$$

$$A_3 = 2xy, \quad \eta_3 = 0$$

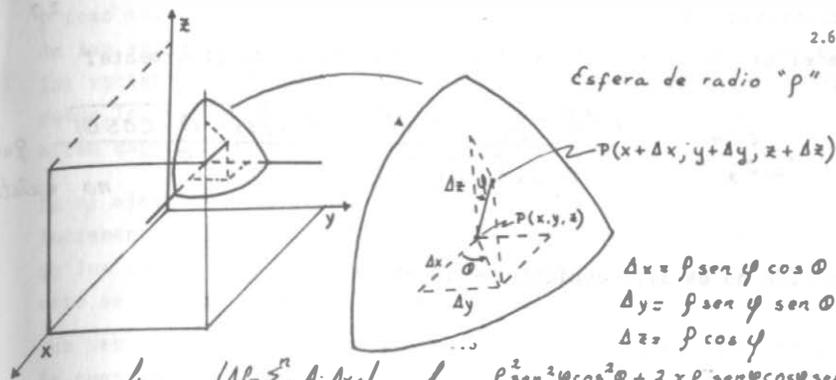
Nótese que la agrupación de las  $\eta_i$  pudo haberse hecho de otras maneras; la agrupación de las  $A_i$  es única.

Finalmente, como el incremento pudo expresarse de acuerdo a la definición, se afirma que la función es diferenciable.

Precisamente por la diversidad de formas de agrupar las  $\eta_i$ , generalmente es conveniente utilizar la definición 2.6.1 para saber si una función es o no diferenciable. En el caso del ejemplo 2.6.3 tendríamos:

$$\frac{|\Delta f - \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \frac{|\Delta x^2 + 2x\Delta y\Delta z + 2y\Delta x\Delta z + 2\Delta xy\Delta z|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

y debemos demostrar que el límite de la expresión anterior es cero, cuando los incrementos de las tres variables tiende simultáneamente a cero. Para ello, utilizemos el artificio mosrado en la figura 2.6.5.



$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta f - \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \text{sen}^2 \varphi \cos^2 \theta + 2x\rho \text{sen} \varphi \cos \varphi \text{sen} \theta + 2y\rho^2 \text{sen} \varphi \cos \varphi \cos \theta + 2z\rho^2 \text{sen}^2 \varphi \text{sen} \theta \cos \theta + 2\rho^2 \text{sen}^2 \varphi \cos \varphi \text{sen} \theta \cos \theta}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \text{sen}^2 \varphi \cos^2 \theta + 2x \text{sen} \varphi \cos \varphi \text{sen} \theta + 2y \text{sen} \varphi \cos \varphi \cos \theta + 2z \text{sen}^2 \varphi \text{sen} \theta \cos \theta + 2\rho \text{sen}^2 \varphi \cos \varphi \text{sen} \theta \cos \theta}{\rho}$$

Puesto que los términos encerrados en los signos de valor absoluto son constantes o variables acotadas.

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta f - \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = 0 \implies \text{La función es diferenciable en } E^3$$

Ejemplo 2.6.4 Definir si la función  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  es diferenciable en  $(0, 0)$ .

$$\Delta f = \sqrt{|(0+\Delta x)(0+\Delta y)|} - \sqrt{0} = \sqrt{|\Delta x \Delta y|} = 0\Delta x + 0\Delta y + \sqrt{|\Delta x \Delta y|}; \quad \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i = 0$$

$$\frac{|\Delta f - \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Al hacer uso de un artificio similar al mostrado anteriormente:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta f - \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\rho \sqrt{|\text{sen } \theta \cdot \text{cos } \theta|}}{\rho}$$

no existe

⇒ la función no es diferenciable en (0,0).

### 2.7 DIFERENCIAL TOTAL.

Como vimos en el inciso anterior, una diferencial es una aproximación del incremento de una función. Es aproximación porque, ya lo vimos, se está despreciando parte del incremento y se está considerando únicamente la llamada parte principal, que identificamos en las definiciones 2.6.1 y 2.6.1' con el primer grupo de sumandos. Esta es la definición formal de diferencial total:

Definición 2.7.1  
Si  $f(\bar{x})$  es una función escalar de variable vectorial, donde  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , su diferencial total es:

$$df = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i \quad \text{--- (2.7.0.1)}$$

donde  $A_i$  son constantes.

La diferencia entonces entre  $\Delta f$  y  $df$  es:

$$\Delta f - df = \sum_{i=1}^n \eta_i \Delta x_i \quad \text{--- (2.7.0.2)}$$

donde:  $\eta_i \rightarrow 0$   
 $\Delta x_i \rightarrow 0$

Lo anterior quiere decir que una mejor aproximación del incremento de una función se obtendrá en la medida que los incrementos de las variables se aproximen a cero; sin embargo, a nosotros nos interesa una aproximación desde el punto de vista ingenieril

y como tal entenderemos la que se obtiene cuando los incrementos de las variables son pequeños en comparación con los valores de las variables. En la mayoría de los casos, una relación de 10% entre los primeros y los segundos será satisfactoria; algún problema especial podrá requerir una relación menor.

En el ejemplo 2.6.2 puede verse que las diferencias entre el incremento y la diferencial se aproxima rápidamente a cero cuando los incrementos disminuyen. Una interpretación gráfica de esto se muestra en la figura 2.6.3.

Una vez explicado el concepto de diferencial total, persiste aún la cuestión de cómo calcular las constantes "A<sub>i</sub>". Puesto que son constantes, bastará con calcularlas para un caso particular de incrementar una determinada función. Sea esta función diferenciable.

$$f(\bar{x}) \text{ donde } \bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

su incremento:

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n + \eta_1 \Delta x_1 + \eta_2 \Delta x_2 + \dots + \eta_n \Delta x_n \quad (2.7.0.3)$$

Puesto que las variables son independientes, podemos obligar ahora que todos los  $\Delta x_i$ , con excepción de  $\Delta x_1$ , sean nulos; o sea:

$$\Delta x_i = 0 \quad \forall i \neq 1$$

Entonces, la expresión 2.7.0.3 se reduce a:

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \eta_1 \Delta x_1 \quad \text{--- (2.7.0.4)}$$

si dividimos ambos miembros de 2.7.0.4 entre  $\Delta x_1$ :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x_1} = A_1 + \eta_1$$

y si tomamos límites cuando  $\Delta x_1 \rightarrow 0$ , tendremos, en el primer miembro una derivada parcial, por definición; en el segundo miembro, el límite de una constante y el límite de una función que está definido en la expresión (2.7.0.2)

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = A_1 + 0$$

La constante  $A_i$ , será la derivada parcial de la función con respecto a " $x_i$ "; análogamente podemos calcular:

$$A_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} ; A_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3} ; \dots ; A_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Con estos resultados podemos redefinir la expresión (2.7.0.1):

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \quad \dots \quad (2.7.0.5)$$

Si recuerdas de C.D.J. que  $\Delta x = dx$  y si además tomamos en cuenta nuevamente que las variables son independientes, podremos asegurar asimismo que:

$$\Delta x_i = dx_i \quad \forall i$$

Por lo que las expresiones 2.6.0.1 y 2.7.0.5 pueden escribirse:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^n \eta_i dx_i \quad \dots \quad (2.7.0.6)$$

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad \dots \quad (2.7.0.7)$$

Ejemplo 2.7.1.

Determinar los valores de  $df$  y  $\Delta f$  para la función:

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^2 \text{ y los valores:}$$

a)  $x = 10 ; y = 20 ; \Delta x = 0.1 ; \Delta y = 0.3$

b)  $x = 10 ; y = 20 ; \Delta x = 5 ; \Delta y = 3$

Interpretar los resultados.

Solución:

Incremento:

$$\Delta f = 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2 - 2x^2 - 3xy + y^2$$

$$\Delta f = 2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 + 3xy + 3x\Delta y + 3y\Delta x + 3\Delta x\Delta y - y^2 - 2y\Delta y - \Delta y^2 - 2x^2 - 3xy + y^2$$

$$\Delta f = 4x\Delta x + 2\Delta x^2 + 3x\Delta y + 3y\Delta x + 3\Delta x\Delta y - 2y\Delta y - \Delta y^2$$

Diferencial:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (4x + 3y)dx + (3x - 2y)dy$$

a)  $\Delta f/a = 4(10)(0.1) + 2(0.1)^2 + 3(10)(0.3) + 3(20)(0.1) + 3(0.1)(0.3) - 2(20)(0.3) - (0.3)^2 =$

$$= 4 + 0.02 + 9 + 6 + 0.09 - 12 - 0.09 = 7.02$$

$df/a = (40 + 60)(0.1) + (30 - 40)(0.3) = 10 - 3 = 7.00$

$\Delta f - df = 0.02$

por lo que se puede aproximar la diferencial al incremento.

$$\text{error relativo en } \Delta = \frac{\Delta f - df}{df} \times 100 = 0.2849 \%$$

b)  $\Delta f/b = 4(10)(5) + 2(5)^2 + 3(10)3 + 3(20)(5) + 3(5)(3) - 2(20)(3) - (3)^2 =$

$$\Delta f/b = 556$$

$df/b = (40 + 60)(5) + (30 - 40)(3) = 470$

$\Delta f - df = 556 - 470 = 86$

por lo que el incremento no debe ser aproximado por medio de la diferencial en este caso. El error relativo que se cometa si usamos el diferencial en lugar del incremento es:

$$\text{error relativo} = \frac{\Delta f - df}{df} = \frac{86}{470} = 0.183 = 18.3 \%$$

En el ejemplo anterior se ve claramente el error que se comete al aplicar la diferencial como una aproximación del incremento, en el caso de que los valores de las diferenciales de las variables no sean pequeños en comparación con los de las propias variables.

En los siguientes ejemplos vamos a dar algunas aplicaciones de las diferenciales.

## Ejemplo 2.7.2

Determinar el valor aproximado de la función:

$$v = \sqrt[5]{(3.8)^2 + 2(2.1)^3}$$

Una primera aproximación del valor de  $v$  sería calcular:

$$v = \sqrt[5]{x^2 + 2y^3}$$

para los valores  $x = 4$ ,  $y = 2$ , con lo que se obtiene:

$$v_i = \sqrt[5]{4^2 + 2(2)^3} = \sqrt[5]{16 + 16} = \sqrt[5]{32} = 2$$

y luego sumar a  $v$  su incremento al cambiar  $x$  de 4 a 3.8 y  $y$  de 2 a 2.1. En este caso:

$$\Delta x = x_f - x_i = 3.8 - 4 = -0.2$$

$$\Delta y = y_f - y_i = 2.1 - 2 = 0.1$$

y el incremento lo aproximaremos por medio de la diferencial, ya que  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son pequeños:

$$\Delta v \approx dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy; \quad dx = \Delta x; \quad dy = \Delta y$$

Ahora calculando las parciales:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{5} (x^2 + 2y^3)^{-4/5} (2x) \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(4,2)} = \frac{1}{5} \frac{8}{(2)^4} = 0.1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{5} (x^2 + 2y^3)^{-4/5} (6y^2) \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{(4,2)} = \frac{1}{5} \frac{24}{(2)^4} = 0.3$$

$$dv = 0.1(-0.2) + 0.3(0.1) = 0.01$$

Finalmente:

$$v = v_i + dv = 2 + 0.01 = 2.01$$

que es una buena aproximación del valor obtenido con calculadora:  
2.0118

Además de la aplicación anterior de la diferencial, ésta tiene una gran aplicación en teoría de errores debido a que el error que se comete al realizar una cierta medición, es muy pequeño comparado con la magnitud medida. Cabe definir los siguientes tipos de errores:

Error debido a una variación en los valores de las variables  $\equiv df$

$$\text{Error relativo (id. anterior)} = \frac{df}{f}$$

$$\text{Error relativo en \%} = \frac{df}{f} \times 100$$

Con esto podremos resolver problemas como el siguiente:

## Ejemplo 2.7.3

La estación de radar  $O$  descubre un avión  $A$  a 80 km. de distancia. La estación  $B$ , a 50 km. al Este de  $O$ , descubre al mismo avión a 60 km. de distancia. Si el error posible al medir la distancia  $\overline{OA}$  es de  $\pm 4$  km. y el error posible al medir la distancia  $\overline{BA}$  es de  $\pm 3$  km., calcular el error que se puede cometer al calcular la abscisa de  $A$  con esos datos. Fig. 2.7.1

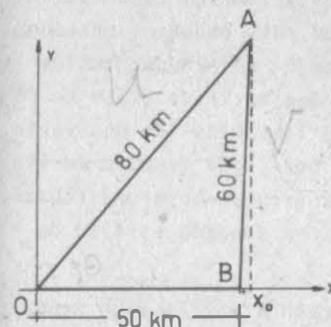


fig. 2.7.1

Llamemos  $\overline{OA} = u$   
 $\overline{BA} = v$

Evidentemente:

$$x_0 = u \cos \theta$$

pero nuestras variables independientes son "u" y "v", que son las que presentan errores directos. Entonces debemos obtener una expresión que contenga solamente a "u" y "v".

Por la ley de los cosenos:

$$\cos \theta = \frac{u^2 + 50^2 - v^2}{100u}$$

Entonces:

$$x_0 = u \frac{u^2 + 50^2 - v^2}{100u} = \frac{u^2}{100} + 25 - \frac{v^2}{100}$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = \frac{u}{50} \Big|_{u=80} = 1.6 \quad ; \quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = -\frac{v}{50} \Big|_{v=60} = -1.2$$

$$dx_0 = \frac{\partial x_0}{\partial u} du + \frac{\partial x_0}{\partial v} dv$$

$$dx_0 = 1.6 (\pm 4) - 1.2 (\pm 3)$$

El error máximo posible ocurrirá cuando los errores en las mediciones sean de signo opuesto. Esto es cuando se sumen sus efectos:

$$\max |dx_0| = 1.6(4) - 1.2(-3) = 10 \text{ km.}$$

Ahora bien, en capítulos anteriores hemos aprendido cómo averiguar si una función es diferenciable o no; sin embargo, notamos que la complicación inherente es mucho mayor que la que teníamos cuando investigábamos si una función de una variable era o no diferenciable. Y es que para este tipo de funciones (de una variable) basta averiguar si son derivables, pues toda función derivable es diferenciable y viceversa. ¿No tendremos ahora una regla semejante que nos ayude a investigar si una función escalar de variable vectorial es diferenciable?

Según vimos en el ejemplo 2.6.4, la función  $f(x,y) = \sqrt{xy}$  no es diferenciable en el origen; veamos si es derivable en este punto.

Desde luego que la función derivada:

$$f_x = \frac{y}{2\sqrt{xy}}$$

no existe en ese punto; pero para que  $f(x,y)$  sea derivable, basta con que exista el límite del cociente de incrementos. Calculemos lo:

$$f(0+\Delta x, 0) = \sqrt{(0+\Delta x) \cdot 0} = 0$$

$$f(0,0) = 0$$

$$\Delta x f = 0$$

$$\frac{\Delta x f}{\Delta x} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x f}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \text{la función es derivable; su derivada vale } 0.$$

11.45

Análogamente podemos ver que  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  (también existe)

Así pues, hay funciones escalares de variable vectorial que son derivables mas no diferenciables. No basta pues, con comprobar la derivabilidad de una función para saber si es diferenciable. Lo que sí observamos es que, mientras en funciones diferenciables (vgr la del ejemplo 2.6.3) las derivadas son continuas, en el caso que acabamos de analizar no lo son.

Supongamos entonces la función  $f(x,y)$  que tenga la característica de tener derivadas parciales continuas en el punto  $(a,b)$ . Consideremos su incremento cuando pasa al punto  $(a+h, b+k)$ :

$$\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a, b)$$

En este incremento podemos distinguir dos partes: el que sufre al pasar de P a Q y el que experimenta al pasar de Q

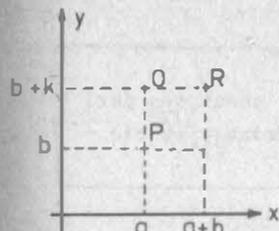


fig.2.7.2

$$\Delta f = \left[ f(a+h, b+k) - f(a, b+k) \right] + \left[ f(a, b+k) - f(a, b) \right] \dots (2.7.0)$$

Ahora, el incremento indicado en el primer paréntesis de (2.7.0.8) se debe a la variación de "x" exclusivamente; podemos aplicar el teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial, ya que la continuidad de  $f_x$  en  $(a,b)$  garantiza la existencia de esta derivada en todos los puntos de QR:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = h f_x(a + \theta h, b+k) \quad 0 \leq \theta \leq 1 \dots (2.7.0.9)$$

Asimismo, la continuidad de  $f_x$  en  $(a,b)$  permite afirmar que:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \left[ f_x(a + \theta h, b+k) - f_x(a, b) \right] = 0$$

o bien:

$$f_x(a + \theta h, b+k) = f_x(a, b) + \eta \quad \eta \xrightarrow[h \rightarrow 0]{k \rightarrow 0} 0 \dots (2.7.0.10)$$

Y al sustituir (2.7.0.9) en (2.7.0.8):

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = h f_x(a, b) + \eta_1 h \quad \eta_1 \xrightarrow[h \rightarrow 0]{k \rightarrow 0} 0 \dots (2.7.0.11)$$

11.46

Si se procede análogamente con el segundo paréntesis de la ecuación (2.7.0.) que asienta el incremento debido exclusivamente a "y", llegaremos a:

$$f(a, b+h) - f(a, b) = hf_y(a, b) + \eta_2 h \quad \eta_2 \rightarrow 0 \text{ --- (2.7.0.)}$$

al sustituir (2.7.0.) y (2.7.0.) en (2.7.0.):

$$df = hf_x(a, b) + hf_y(a, b) + \eta_1 h + \eta_2 h \quad \eta_1 \rightarrow 0 \quad \eta_2 \rightarrow 0$$

con lo que podemos afirmar que toda función cuyas derivadas parciales sean continuas en un punto, es diferenciable en ese punto. Aunque la demostración la hemos hecho para dos variables, ya te habrás dado cuenta de que demostrarla para "n" variables es una simple reiteración del proceso; por ello vamos a enunciar el siguiente.

#### Teorema 2.7.1

Si la función  $f(\bar{x})$  donde  $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tiene todas sus derivadas parciales continuas en un punto, es diferenciable en ese punto.

Nota, por otra parte, que ésta es una condición suficiente; es decir, no estamos afirmando que sólo las funciones con esta propiedad sean diferenciables. Si en algún caso se tiene una función con derivadas parciales discontinuas en un punto, para poder saber si es diferenciable habrá que proceder como quedó explicado en 2.6.

## 2.8 DERIVADAS PARCIALES DE FUNCIONES COMPUESTAS.

### 2.8.1 Funciones Compuestas.

#### Problema 2.8.1.

Vimos en el problema 2.2.3 que se define como radio hidráulico la sección de un conducto al cociente de su área entre el perímetro que se encuentra en contacto con el fluido, llamado perímetro mojado. Matemáticamente.

$$R = \frac{A}{P}$$

R = Radio hidráulico  
A = Área de la sección  
P = Perímetro mojado

Consideremos el canal de la fig. 2.8.1, cuyas dimensiones están en metros.

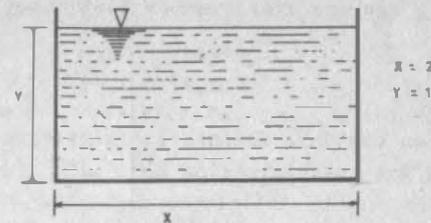


fig. 2.8.1

Para este caso

$$R = \frac{A}{P} = \frac{xy}{x+2y}$$

Para calcular el valor del radio hidráulico podemos proceder de dos maneras: una, hacer la substitución de las variables en la segunda expresión.

$$R \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = \frac{2 \times 1}{2 + 2(1)} = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ m.}$$

Otra forma sería calcular primeramente los valores del área y el perímetro y luego hacer el cociente.

$$A = 2$$

$$R = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ m.}$$

$$P = 2 + 2 \times 1 = 4$$

En el primer caso se dice que se está haciendo una composición de funciones; en el segundo caso, se dice que se está calculando a través de sus variables intermedias. Esquemáticamente esto lo podemos representar como se indica en la fig. 2.8.2

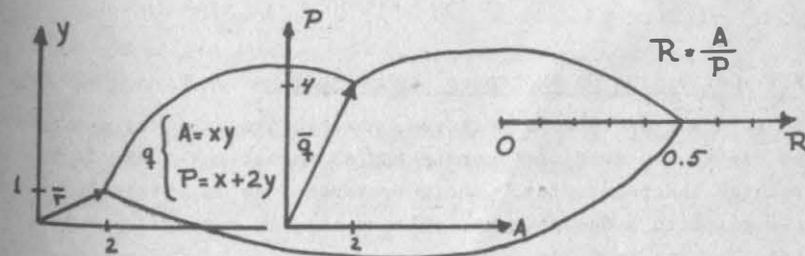


fig. 2.8.2

Interpretaremos lo anterior.

A y P son dos funciones de  $E^2 \rightarrow E^1$  cuyas reglas son:

$$A(x,y) = xy$$

$$P(x,y) = x + 2y$$

que en conjunto definen la transformación  $\bar{q}(x,y) = [xy, x+2y]$ ; R es una transformación de  $E^2 \rightarrow E^1$  cuya regla es:

$$R(A,P) = \frac{A}{P}$$

finalmente la composición de transformaciones.

$$R \circ q(x,y) = \frac{xy}{x+2y}$$

es una transformación o función de  $E^2 \rightarrow E^1$  que nos lleva de los valores  $x,y$  al de R, a través de los de A y P.

Hay que tener presente que para que se pueda obtener la composición  $G \circ F$ , es condición necesaria que el recorrido de F tenga la misma dimensión que el dominio de G, de lo contrario el problema no tiene solución.

En el caso de una composición de funciones podemos distinguir -- tres tipos de variables, ejemplificadas con las que intervienen en el problema 2.8.1

- a) Las independientes: como  $x,y$ .
- b) Las intermedias: como A y P.
- c) Las dependientes: como el caso de R.

La función compuesta será la que nos lleve directamente de las independientes a las dependientes sin pasar por las intermedias.

### 2.8.2 Derivación de Funciones Compuestas.

Como en nuestros temas anteriores, nuestro propósito es averiguar como varían las funciones compuestas al variar una o más de sus variables independientes. Ahora trataremos de la variación unitaria respecto a una sola variable, o sea, la derivada parcial respecto a esa variable.

### Problema 2.8.2

Recordemos el problema del radio hidráulico y preguntémos lo siguiente:

¿Respecto a cuál de las variables, considerando unitarias sus variaciones, se tendrá la mayor variación del radio hidráulico?

Solución:

Se trata de un problema de derivadas parciales; en el problema 2.2.3 habíamos encontrado:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{2y^2}{(x+2y)^3}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+2y)^2}$$

los cuales, para los nuevos valores que ahora manejamos:

$$R_x(2,1) = \frac{2}{(2+2)^3} = \frac{1}{8}$$

$$R_y(2,1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

La mayor variación del radio hidráulico es cuando varía el tirante.

### 2o. Camino.

Este consiste en una generalización de un concepto visto en C.D.I.

Nuestra función es  $R=R(A,P)$  en donde, a su vez:

$$A = A(x,y) \text{ y } P = P(x,y), \text{ o sea } R = R[A(x,y), P(x,y)]$$

y decimos que R es función de función de las variables  $x,y$ . Cuando teníamos este tipo de funciones calculábamos las derivadas

$\frac{\partial R}{\partial x}$  y  $\frac{\partial R}{\partial y}$  usando la llamada "regla de la cadena". ¿Será aplicable este concepto al problema planteado?

Calulemos el incremento total de R, que es una función diferenciable.

$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial R}{\partial P} \Delta P + \gamma \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta P)^2} \quad (2.8.2.a)$$

en donde:

$$\eta \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \Delta A \text{ y } \Delta P \rightarrow 0$$

en esta expresión,  $\Delta A$ ,  $\Delta P$  no varían independientemente, sino que son debidos a los incrementos de "x" e "y", los cuales se pueden presentar simultáneamente o bien uno por uno. Consideremos que sólo "x" varía y "y" permanece constante, entonces:

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{\partial R}{\partial A} \frac{\Delta A}{\Delta x} + \frac{\partial R}{\partial P} \frac{\Delta P}{\Delta x} + \eta \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P}{\Delta x}\right)^2} \quad (2.8.2.b)$$

Si tomamos límite de este cociente cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  tendremos por definición la derivada parcial de R con respecto a X, que es una de las que andamos buscando.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{\partial R}{\partial A} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} + \frac{\partial R}{\partial P} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \eta \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P}{\Delta x}\right)^2} \quad (2.8.2.c)$$

Por definición:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{\partial A}{\partial x} ; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = y/y = 1 \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 1$$

luego:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{2}$$

Además, como:

$$\Delta y = 0 \quad \text{y} \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \eta = 0$$

por lo que (2.8.2.c), queda:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x} + 0\sqrt{2} ; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x}$$

análogamente:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial y}$$

que es la regla de la cadena para una función de dos variables - independientes (x,y) a través de dos variables intermedias (A,P).

Al sustituir valores en nuestro ejemplo:

$$\frac{\partial R}{\partial A} = \frac{1}{P} \Big|_{x=2, y=1} = \frac{1}{4} m^{-1} ; \quad \frac{\partial R}{\partial P} = -\frac{A}{P^2} \Big|_{x=2, y=1} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{x=2, y=1} = 1 m ; \quad \frac{\partial A}{\partial y} = x \Big|_{x=2, y=1} = 2 m ; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 1 ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{4} (1) - \frac{1}{8} (1) = \frac{1}{8}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{1}{4} (2) - \frac{1}{8} (2) = \frac{1}{4}$$

y se concluye lo mismo que con el primer procedimiento. En este ejemplo es más sencillo derivar la función aplicando la regla de la cadena, pues nos evitamos derivar dos veces un cociente; en la generalidad de los casos también ocurre así, sobre todo si hemos de calcular la derivada en el punto.

Ejemplo 2.8.1

Si el fluido que circula por el canal del problema 1.8.1 es agua y el canal es de concreto y con pendiente de 0.4 milésimas, el gasto que pueda circular se calcula como:

$$Q = 1.25 A R^{3/2}$$

Calcula la variación unitaria de Q al variar "x" y la variación unitaria de Q al variar "y"

Solución:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1.25 \left( \frac{\partial Q}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 1.25 \left( \frac{\partial Q}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y} \right)$$

Al sustituir valores:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} &= 1.25 \left( R^{2/3} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{2}{3} AR^{-1/3} \frac{\partial R}{\partial x} \right) \\ &= 1.25 R^{2/3} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{2}{\alpha^5} \frac{1}{8} \right) = \frac{4}{3} 1.25 R^{2/3}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1.05 \frac{m^3/\text{seg}}{m} = 0.0105 \frac{m^3/\text{seg}}{\text{cm.}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial y} &= 1.25 \left( R^{2/3} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{2}{3} AR^{-1/3} \frac{\partial R}{\partial y} \right) \\ &= 1.25 R^{2/3} \left( 2 + \frac{2}{3} \frac{2}{\alpha^5} \frac{1}{7} \right) = \frac{8}{3} 1.25 R^{2/3}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2.10 \frac{m^3/\text{seg}}{m} = 0.0210 \frac{m^3/\text{seg}}{\text{cm.}}$$

En el problema 2.8.1 y el ejemplo 2.8.1 calculamos la variación de una función compuesta de varias variables independientes respecto a cada una de sus variables. A estas derivadas las llamamos derivadas parciales de funciones compuestas, y siempre podremos calcularlas con cualquiera de los procedimientos mencionados si es que la derivada existe.

Una generalización de la regla de la cadena empleada, puede verse a continuación.

Sea una función escalar de varias variables.

$$f(\bar{u})$$

en donde:

$$\bar{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$$

a su vez:

$$u_1 = u_1(\bar{x})$$

$$u_2 = u_2(\bar{x})$$

$$\vdots$$

$$u_n = u_n(\bar{x})$$

siendo:

11.53

$$\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]$$

Hemos tomado así una función compuesta, con las variables intermedias  $\bar{u}$ , y las variables independientes  $\bar{x}$ .

Las derivadas parciales para este tipo de funciones se obtienen como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_m} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_m} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_m}\end{aligned} \quad (2.8.2.1)$$

Estas derivadas parciales pueden también representarse en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_m} & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f}{\partial u_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (2.8.2.2)$$

## 2.9 Diferencial total de funciones compuestas.

### Problema 2.9.1.

Dado el canal del problema (2.8.1), calcula aproximadamente cuánto varía el radio hidráulico cuando la plantilla se incrementa en 5 cm. y el tirante en 2 cm.

11.54

Solución:

Se trata de un problema de diferencial total, que ya sabemos como resolver:

$$dR \doteq dR = \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy$$

$$dR = \frac{1}{4} 0.05 + \frac{1}{4} 0.02 = 0.01125 \text{ m.}$$

Hasta aquí no hay dificultad, porque hemos operado con las variables independientes, que es como sabemos operar una diferencial. Ahora se nos ocurre; ¿Qué resultado obtendríamos si operamos con las variables intermedias? Veamos.

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = 1(0.05) + 2(0.02) = 0.09 \text{ m}^2$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy = 1(0.05) + 2(0.02) = 0.09 \text{ m}^2$$

Además recordamos:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial A} \right|_{x=1, y=1} = 0.25 \text{ m}^{-1} \quad \left. \frac{\partial R}{\partial P} \right|_{x=1, y=1} = -0.125$$

Entonces:

$$\frac{\partial R}{\partial A} dA + \frac{\partial R}{\partial P} dP = 0.25(0.09) - 0.125(0.09) = 0.01125 \text{ m} = dR$$

O sea que el valor de la diferencial total fué el mismo, calculado a través de variables intermedias ó independientes. Este importante resultado lo podemos generalizar al caso de "n" variables intermedias y "m" independientes, como veremos a continuación:

Sea  $f(\bar{u})$ , donde

$$\bar{u}(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

siendo a su vez:

$$u_1 = u_1(\bar{x}), \quad u_2 = u_2(\bar{x}), \dots, \quad u_n = u_n(\bar{x})$$

donde:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Escribamos  $df$  en forma matricial:

$$df = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right] \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix} \dots \dots (2.9.0.1)$$

Ahora, puesto que la matriz renglón de (2.9.0.1) es la transpuesta de la que aparece en el primer miembro (2.8.2.2)

$$df = \left[ \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_m \end{bmatrix}$$

Por la ley asociativa de la multiplicación matricial:

$$df = \left[ \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n} \right] \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ \vdots \\ du_n \end{bmatrix} \dots \dots (2.9.0.2)$$

que es la misma expresión (2.9.0.1) referido a las variables intermedias. De esto se puede concluir que la forma de la diferencial total se conserva independientemente de que la función sea o no compuesta. Cabe mencionar en este punto lo siguiente: La diferencial total de una función compuesta puede reducirse a la diferencial total en términos de las variables independientes. Las diferenciales de las variables independientes pueden tomar sus valores sin restricción, no así las diferenciales de las intermedias, que serán diferenciales totales y deben su valor tanto al de las variables independientes como a sus diferenciales. Es decir, si "u" es una variable intermedia y "x" una independiente:  $dx = \Delta x$ ;  $du = \Delta u$ .

## Ejemplo 2.9.1

Consideremos nuevamente el ejemplo 2.7.5; pero ahora preguntémosnos el error que se comete al calcular la ordenada de A. Ahora:

$$y = u \operatorname{sen} \theta$$

si quisiéramos dejar la expresión en términos de "u" y "v" tendríamos:

$$y = u \operatorname{sen} \left[ \operatorname{ang} \cos \frac{u^2 + 50^2 - v^2}{100v} \right]$$

cuya diferenciación es muy laboriosa. En cambio si aplicamos la propiedad que acabamos de ver, podemos escribir:

$$dy = u \cos \theta d\theta + \operatorname{sen} \theta du$$

expresión de la que conocemos u,  $\theta$ , du y desconocemos d $\theta$  la que, según acabamos de ver, es la diferencial de una función; para calcularla partamos de:

$$\cos \theta = \frac{u^2 + 50^2 - v^2}{100u}$$

por lo que:

$$-100 \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{2u^2 - (u^2 + 50^2 - v^2)}{u^2} du - \frac{2v}{u} dv$$

$$d\theta = \frac{50^2 - v^2 - u^2}{100(\operatorname{sen} \theta)u^2} du - \frac{v}{50(\operatorname{sen} \theta)u} dv$$

Ahora:

$$\cos \theta \Big|_{\substack{u=80 \\ v=60}} = \frac{80^2 + 50^2 - 60^2}{8000} = 0.6625$$

$$\operatorname{sen} \theta \Big|_{\substack{u=80 \\ v=60}} = \sqrt{1 - 0.6625^2} = 0.7491$$

$$d\theta = -0.0156 du + 0.0200 dv$$

Entonces:

$$dy = 80(0.6625)(-0.0156 du + 0.0200 dv) + 0.7491 du$$

$$dy = -0.0777 du + 1.06 dv = -0.0777(\pm 4) + 1.06(\pm 3)$$

Finalmente:

$$\max |dy| = -0.0777(-4) + 1.06(3) = 3.4958 \text{ Km.}$$

11.57

## Ejemplo 2.9.2.

Calcular las ecuaciones de la recta tangente a la curva de intersección del hiperboloide  $\frac{x^2}{4} - y^2 - \frac{z^2}{9} = 1$  con el plano  $y=1$ , en el punto en que  $x=3$ ,  $z = \frac{3}{2}$ .

Solución:

Puesto que el plano que intersecta a la superficie alabeada es paralelo a xz, la pendiente de la tangente está dada por  $\frac{\partial z}{\partial x}$

Así pues, podemos despejar "z" de la ecuación de la superficie y derivar el radical que resulte. Si queremos evitarnos la labor que representa esto, podemos aplicar nuevamente la propiedad de permanencia de la forma de la diferencial total y escribir:

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} - y^2 - \frac{z^2}{9} - 1 = 0$$

donde "F" tiene un valor constante (0); "z" es la variable dependiente y "x", "y" son las variables independientes.

$$dF = \frac{2x}{4} dx - 2y dy - \frac{2z}{9} dz = 0$$

Ahora despejamos "dz":

$$dz = \frac{9}{2z} \left( \frac{x}{2} dx - 2y dy \right)$$

Como sabemos que:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Entonces podemos asegurar que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{9x}{4z} \Big|_{\substack{x=3 \\ z=\frac{3}{2}}} = 4.5$$

Las ecuaciones pedidas:

$$\begin{cases} z - \frac{3}{2} = 4.5(x-3) \\ y = 1 \end{cases}$$

11.58

Este es el procedimiento para derivar funciones implícitas, es decir funciones en las cuales no se puede o no se quiere despejar a la variable dependiente. Una generalización y formalización al respecto, la hallarás en el apéndice 2.4.

## 2.10 DERIVADA TOTAL

En el caso particular de una función compuesta con varias variables intermedias y una sola variable independiente, la derivada respecto a esa variable será una derivada ordinaria, a la que llamaremos derivada total.

Sea :

$$f = f(\bar{u})$$

en donde :

$$\bar{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$$

y :

$$u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t), \dots, u_n = u_n(t)$$

De acuerdo con 1.8.2.9. y teniendo en cuenta que las variables independientes se reducen a una sola:  $t$ , la regla de la cadena para una función compuesta de este tipo queda:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{du_n}{dt} \quad (2.10.0.1.)$$

expresada en forma matricial:

$$\frac{df}{dt} = \left[ \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n} \right] \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{bmatrix} \quad (2.10.0.2.)$$

o bien en forma vectorial:

$$\frac{df}{dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n} \right) \cdot \left( \frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}, \dots, \frac{du_n}{dt} \right) \quad (2.10.0.3.)$$

A la primera matriz de la expresión 1.10.0.2. que representa lo mismo que el primer vector de la expresión 1.10.0.3.:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_n} \right) \quad (2.10.0.4.)$$

la denominaremos "vector gradiente". Posteriormente veremos una interpretación de este vector.

Si suponemos ahora que nuestro problema se reduce a sólo tres variables intermedias ( $x, y, z$ ) y que represente al tiempo una independiente ( $t$ ). La expresión (2.10.0.1) queda:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (2.10.0.5.)$$

si ahora representamos al vector gradiente de  $f$  como  $\nabla f$ , en donde:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad (2.10.0.6.)$$

es un operador vectorial, y a  $\frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k$  como  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  obtendremos que:

$$\frac{df}{dt} = \nabla f \cdot \vec{v} \quad (2.10.0.7.)$$

Esta última forma de la derivada de una función compuesta nos es de suma utilidad en problemas de velocidades relativas, como el que se muestra a continuación.

## Ejemplo 2.10.1.

Un barco "A" se mueve según se indica en la figura 2.10.1, con una velocidad  $v_A = 20$  km/hr. Otro barco "B" sigue la trayectoria mostrada también en la figura con  $v_B = 30$  km/hr. ¿Con qué velocidad se están acercando en el instante en el que  $x=3$  km  $y=4$  km?

Solución:

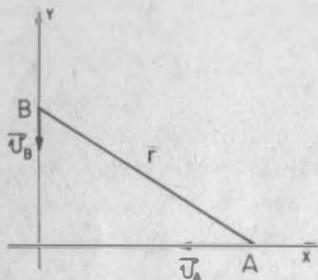


fig 2.10.1

La distancia que los separa es según el Teorema de Pitágoras.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.10.1.a.)$$

La variación de esta distancia respecto al tiempo es la velocidad pedida, así que hay que calcular:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (2.10.1.b.)$$

Las parciales de  $r$  respecto a "x", "y" se calculan a partir de la fórmula de la distancia, pero; ¿Cómo obtenemos  $\frac{dx}{dt}$  y  $\frac{dy}{dt}$ ?, aún cuando no se nos ha dado una relación entre  $x$  y  $t$ , se nos dice que la variación de  $x$  respecto a  $t$  es 20 km/hr, o sea  $\frac{dx}{dt} = -20$  km/hr (el signo negativo es porque  $x$  disminuye al aumentar  $t$ , según se ve en la figura por el sentido de la velocidad) de igual manera  $\frac{dy}{dt} = -30$  km/hr.

Resolviendo entonces por los datos proporcionados:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.10.1.c.)$$

$$\frac{dx}{dt} = -20 \text{ Km/hr.} \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = -30 \text{ Km/hr.}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{dy}{dt} \quad (2.10.1.d.)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} (-20) + \frac{4}{\sqrt{9+16}} (-30) = \frac{3}{5} (-20) + \frac{4}{5} (-30)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{60}{5} - \frac{120}{5} = -\frac{180}{5} = -36 \text{ Km/hr.} \quad \therefore \text{ Los barcos se aproximan con una velocidad de 36 Km/hr.}$$

11.61

Para efectos de simplificación de cálculos, podríamos haber resuelto este problema aplicando la derivada de la función compuesta, -- también en el primer miembro:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$2r \frac{dr}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 6(-20) + 8(-30) = -360$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{360}{2 \times 5} = -36 \text{ Km/hr.}$$

## Ejemplo 2.10.2.

La superficie de una montaña tiene por ecuación:

$$z = 1 - \frac{1}{25} (x^2 + y^2) \quad ; \quad (x, y, z \text{ en Km.})$$

Un camión va moviéndose sobre esa montaña y se ha determinado que la proyección de su movimiento en el plano horizontal obedece a la ley  $x = -9t - 3$ ,  $y = -12t + 4$  ( $t$  en horas), se quiere saber -- con qué rapidez está ganando altura cuando se encuentra situado en el punto (1,2).

Solución:

Lo que se requiere conocer es la variación de la cota respecto al tiempo, o sea  $\frac{dz}{dt}$ , en donde las coordenadas  $(x, y)$  del plano varían respecto al tiempo según la ley propuesta. Por ser  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , decimos que  $z$  es una función compuesta de  $t$ , -- así que calcularemos  $\frac{dz}{dt}$  con la regla de la cadena:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (2.10.2.a.)$$

Calculemos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{25} (2x) = -\frac{2}{25} x \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = -9 \text{ Km/hr.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{25} y \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = -12 \text{ Km/hr.} \quad (2.10.2.b.)$$

11.62

y sustituyendo (2.10.2.b) en (2.10.2.a) :

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2}{25} x(-9) - \frac{2}{25} y(-12) = \frac{18}{25} x + \frac{24}{25} y$$

La variación de  $z$  respecto a  $t$  en el punto pedido es:

$$\frac{dz}{dt} / (1,2) = \frac{18}{25} (1) + \frac{24}{25} (2) = 2.64 \text{ Km/hr.}$$

este resultado indica que el camión asciende a razón de 2.64 km/hr justamente en el punto dado.

Nos podríamos preguntar ahora qué tan rápidamente varía su altura en el mismo punto cuando en la proyección de su movimiento -- avanza unitariamente. Para contestar a esta pregunta sería necesario dividir el resultado anterior por la magnitud de la velocidad horizontal, ya que según vimos en Cálculo Diferencial e Integral:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{dz}{dt} / \frac{ds}{dt}$$

en donde  $S$  es la longitud medida en la dirección de la proyección del movimiento y  $\frac{ds}{dt}$  la rapidez en dicha dirección.

Como  $\frac{dx}{dt}$  y  $\frac{dy}{dt}$  son las respectivas proyecciones de la velocidad en  $x, y$  la magnitud de la velocidad en la dirección pedida es:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Antes de sustituir los valores numéricos escribamos la expresión:

$$\frac{dz}{dt} = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) / \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad (2.10.2.c.)$$

Si representamos el primer factor de (1.10.2.c.) como si proviniera de un producto escalar de vectores obtendríamos:

$$\frac{dz}{ds} = \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) / \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

que podemos escribir también como:

$$\frac{dz}{ds} = \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \right) \quad (2.10.2.d.)$$

Observamos que el segundo factor del 2o. miembro de (2.10.2.d) es un vector unitario, en dirección del movimiento, ya que las derivadas del numerador son las componentes del vector velocidad.

Si substituímos al segundo factor de (2.10.2.d) por el vector  $\hat{e}_v$  (vector unitario en dirección de la velocidad) tendremos:

$$\frac{dz}{ds} = \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \hat{e}_v \quad (2.10.2.e.)$$

Al primer vector de (1.10.2.e.) ya lo conocíamos, en (1.10.0.4) le dimos el nombre de vector gradiente, hablemos entonces un poco -- acerca de él.

La notación para representar al vector gradiente es  $\nabla z$ , o bien -- grad.  $z$ , que se leen, indistintamente, gradiente de  $z$ , nabla  $z$  ó atled  $z$ , en donde  $\nabla$  es un operador vectorial que, para funciones con su dominio en  $R^2$  tiene la forma

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j \quad (2.10.0.8.)$$

así, nabla ( $\nabla$ ) aplicado a la función  $z$  es lo que recibe el nombre de gradiente de  $z$ .

Usando el gradiente podemos escribir finalmente la expresión:

$$\frac{dz}{ds} = \nabla z \cdot \hat{e}_v \quad (2.10.0.9)$$

que nos da la variación pedida al substituir los vectores correspondientes.

Para la superficie de la montaña, en el punto dado:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{25}x \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=1, y=2} = -\frac{2}{25}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{25}y \Big|_{x=1, y=2} = -\frac{4}{25}$$

$$\nabla z \Big|_{x=1, y=2} = -\frac{2}{25}i - \frac{4}{25}j \quad ; \quad \text{el vector unitario}$$

en la dirección del movimiento es:

$$\hat{e}_v = \frac{\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} = \frac{-9i - 12j}{\sqrt{81 + 144}} = -\frac{3i + 4j}{5}$$

Finalmente:

$$\frac{dz}{ds} \Big|_{x=1, y=2} = \left(-\frac{2}{25}i - \frac{4}{25}j\right) \cdot \left(-\frac{3i + 4j}{5}\right) = \frac{22}{125}$$

que es la variación de la cota por cada unidad que se avanza en la proyección del movimiento. Se puede interpretar lo anterior como que la cota aumenta, al avanzar en la dirección del movimiento, a razón de 0.176 km por km.; o bien aprovechando que el número no tiene unidades, para dar una mejor idea del fenómeno podemos decir que el camión en ese punto, está subiendo con una pendiente de 0.176 m por m., o inclusive, 0.176 cm. por cm.

### 2.11.1 DERIVADA DIRECCIONAL

En el problema anterior analizamos como varía una función al avanzar en una dirección determinada de su dominio. Problemas similares al anterior se resuelven con el mismo procedimiento seguido, al que llamaremos "Derivada Direccional". Formalizaremos a continuación el concepto de derivada en una dirección cualquiera.

Consideremos una función  $f(x,y)$  y un punto  $P(x,y)$  del plano para el cual la función está definida y es diferenciable. Una dirección cualquiera a partir de  $P$  está determinada si especificamos el ángulo  $\theta$  que una recta cualquiera que pase por  $P$  forma con la

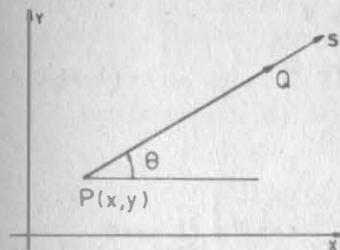


fig. 2.11.1

rama positiva del eje  $x$ . Consideremos ahora una variable  $S$  (longitud recorrida) que varíe, sobre la recta en la dirección que indica la flecha; el origen de  $S$  será el punto  $P$ . Fig. 2.11.1.

Para pasar del punto  $P$  al punto  $Q$ , ambos sobre la recta, es necesario dar un incremento a  $S$ ,  $(\Delta S)$ ; por supuesto la función experimentará un incremento que estará dado por:

$$\Delta f = f(x + \Delta S \cos \theta, y + \Delta S \sin \theta) - f(x, y) \quad (2.11.0.1.)$$

en donde  $\Delta S \cos \theta = \Delta x$ ,  $\Delta S \sin \theta = \Delta y$  son los incrementos de las variables  $x, y$  debidos al incremento en  $S$  (fig. 2.11.2)

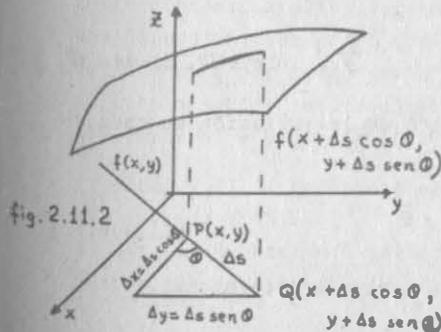


fig. 2.11.2

El vector unitario  $\vec{e}$ , en dirección de  $PQ$ , está definido por  $\vec{e} = \cos \theta i + \sin \theta j$  (2.11.0.2.)

La variación de  $f$  en la dirección de  $PQ$  recibe el nombre de derivada direccional de  $f$ ; (se escribe  $D_{\vec{e}}f$ ) en la dirección del vector  $\vec{e}$  y es, por definición:

$$D_{\vec{s}} f(x, y) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta s \cos \theta, y + \Delta s \sin \theta) - f(x, y)}{\Delta s} \quad (2.11.0.3.)$$

cuando el límite existe.

Para obtener la expresión de esta derivada se puede proceder por medio de la regla de la cadena como en el ejemplo 2.10.2; ahora, las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y Q son:

$$\begin{aligned} x &= x_p + S \cos \theta \\ y &= y_p + S \sin \theta \end{aligned} \quad (2.11.0.4.)$$

por lo que:

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \quad (2.11.0.5.)$$

De la expresión anterior proviene otra notación de la derivada direccional que es precisamente  $\frac{df}{ds}$  en donde S es la longitud que crece en la dirección del vector  $\vec{e}$ , así que:

$$D_{\vec{s}} f = \frac{df}{ds} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j \right) \cdot (\cos \theta i + \sin \theta j) \quad (2.11.0.6.)$$

en donde:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j, \quad \vec{e} = \cos \theta i + \sin \theta j;$$

es el vector unitario en la dirección de la variación buscada, así que:

$$D_{\vec{s}} f = \frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \vec{e} \quad (2.11.0.7.)$$

representa la forma vectorial de la derivada direccional.

A partir de esta representación vectorial podemos ver fácilmente que si  $\vec{e} = i$ :

$$D_i f = \left( \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j \right) \cdot i = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\text{y si } \vec{e} = j$$

$$D_j f = \left( \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j \right) \cdot j = \frac{\partial f}{\partial y}$$

de donde se concluye que la derivada parcial es un caso particular de la derivada direccional, siendo esta última la que sirve en general para analizar la variación de una función de varias variables en su dominio de definición.

El concepto de derivada direccional puede generalizarse fácilmente a funciones con más de dos variables independientes quedando así:

$$D_{\vec{s}} F(\vec{x}) = \vec{\nabla} F(\vec{x}) \cdot \vec{e} \quad (2.11.0.8.)$$

en donde:

$$\begin{aligned} S: \quad \vec{x} &= [x_1, x_2, \dots, x_n], \quad \vec{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n), \\ \text{y } |\vec{e}| &= 1 \end{aligned}$$

$$D_{\vec{e}} F(\vec{x}) = \frac{\partial F}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} e_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} e_n \quad (2.11.0.9.)$$

## 2.12 GRADIENTE

En el subtema anterior valuamos la variación de una función en una dirección dada de su dominio de definición, y vimos que esta se determina por medio de la derivada direccional. Veamos ahora algunos aspectos interesantes del gradiente, para lo cual nos referiremos al ejemplo (2.10.2)

Problema 2.12.1 Consideremos otra vez la montaña y el camión -- del ejemplo 2.10.2.

a) ¿En qué dirección a partir de P debe moverse el camión para que no suba ni baje?

b) ¿En qué dirección a partir de P se debe mover el camión para bajar por la máxima pendiente y llegar más pronto a la base de la montaña?

c) ¿Cuál es el valor numérico de la máxima pendiente en P?

d) ¿En qué dirección a partir de P, la pendiente es 0.01?

Solución:

En las preguntas de este problema ya no tenemos que averiguar -- como antes, la variación de la función, sino que ahora lo que se desea determinar es la dirección en que ocurre una cierta variación. ¿De qué podemos ayudarnos?

Recordemos la representación vectorial de la derivada direccional e interpretemosla; la expresión nos dice que:

$$D_{\vec{s}} f = \frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \vec{e} \quad (2.11.0.7.)$$

la interpretación geométrica del producto escalar, vista en Álgebra y Geometría Analítica nos dice que:

$$\nabla f \cdot \vec{e} = |\nabla f| |\vec{e}| \cos \phi$$

en donde  $\phi$  es el ángulo que forma el gradiente con  $\vec{e}$ , y como :

$$|\vec{e}| = 1$$

$$D_{\vec{s}} f = |\nabla f| \cos \phi \quad (2.12.1.1.)$$

ecuación que nos indica que la derivada direccional es la componente del vector gradiente en la dirección del vector unitario  $\vec{e}$ .

11.69

### 2.12.1 Dirección de variación nula.

Con ayuda de lo que acabamos de ver, se puede responder a las preguntas del problema 2.12.1.

a) Si se quiere que  $z$  sea constante

$$\frac{dz}{ds} = 0, \Rightarrow \nabla z \cdot \vec{e} = 0$$

es condición de perpendicularidad; de otro modo, puesto que:

$$|\nabla z| \cos \phi = 0, \text{ como } |\nabla z| \neq 0 \Rightarrow \cos \phi = 0 \quad (2.12.1.2.)$$

De la ecuación 2.12.1.2 obtenemos dos soluciones, una a  $90^\circ$  del gradiente, y la otra a  $270^\circ$ , así que, para evitar ambigüedades diremos que para que  $z$  no varíe debemos movernos en una dirección perpendicular al gradiente.

La cota del punto (1,2) es de 0.8 km; naturalmente para no variar la cota, el camión tendría que moverse sobre  $0.8 = 1 - \frac{1}{25}(x^2 + y^2)$ , o bien  $x^2 + y^2 = 5$  que es una circunferencia (al tomar en cuenta como segunda ecuación  $z = 0.8$ ). La tangente a esta circunferencia es paralela al vector  $\vec{u} = i - \frac{1}{2}j$ , (Fig. 2.12.1); el producto vectorial de éste con el gradiente nos indica que son perpendiculares:

$$\nabla z \cdot \vec{u} = \left(-\frac{2}{25}i - \frac{4}{25}j\right) \cdot \left(i - \frac{1}{2}j\right) = 0$$

lo cual verifica lo dicho anteriormente, es decir, que para no variar su cota, el camión debe moverse perpendicularmente al gradiente.

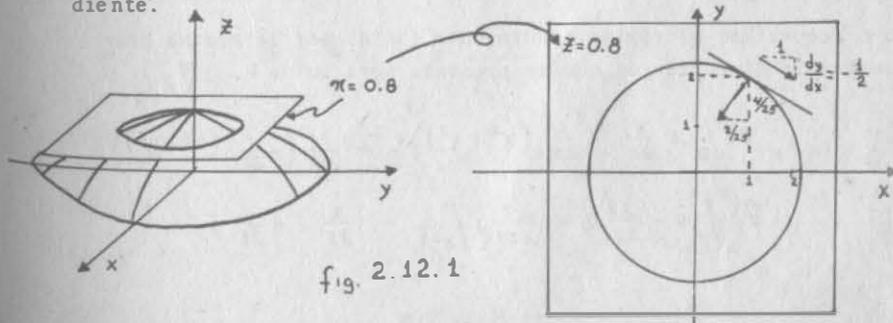


fig. 2.12.1

11.70

A una curva en que la cota se conserva constante, se le llama curva de nivel. Como vimos en el capítulo I; una dirección de variación nula es tangente a la curva de nivel que pasa por el punto.

### 2.13.3 Línea de Máxima Pendiente.

Después de haber resuelto el inciso "a" del problema (2.12.1), prosigamos con la solución de los siguientes incisos.

b) La solución de este punto requiere que la derivada direccional sea Máxima.

De (2.12.1.1) vemos que el mayor valor absoluto que puede tomar la expresión es cuando  $|\cos \phi| = 1$ , lo cual nos da dos soluciones si  $\phi = 0$ ,  $\cos \phi = 1$

$$\frac{dz}{ds} = |\nabla z| \quad (2.12.1.3.)$$

$$\text{Si } \phi = \pi, \quad \cos \phi = -1 \quad (2.12.1.4.)$$

$$\frac{dz}{ds} = -|\nabla z|$$

(2.12.1.3) representa el máximo crecimiento de la función, mientras que (2.12.1.4) representa el máximo decrecimiento.

El máximo crecimiento se da en dirección del vector gradiente, ya que, al ser cero el ángulo formado por el gradiente y vector que define la dirección, estos dos son colineales y del mismo sentido. El máximo decrecimiento de  $z$  se presenta en una dirección contraria al gradiente, pero colineal, ya que en este caso el ángulo que forman el gradiente y el vector que define la dirección es de  $180^\circ$ .

Como requerimos el máximo crecimiento (bajar por la máxima pendiente), la dirección en que se presenta será la de:  $-\nabla z/p$

$$\nabla z/p = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{25} (x^2 + y^2) \right) i + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{1}{25} (x^2 + y^2) \right) j$$

$$\nabla z/p = -\frac{2x}{25} i - \frac{2y}{25} j \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = -\frac{2}{25} i - \frac{4}{25} j$$

que forma un ángulo de  $-116^\circ 34'$  con la dirección positiva del eje  $x$ .

La dirección buscada es  $-\nabla z/p = \frac{2}{25} i + \frac{4}{25} j$  representada como vector, que forma un ángulo de  $63^\circ 26'$  con la dirección positiva del eje  $x$ ; ver figura 2.12.3

c) El valor numérico de la máxima pendiente es el valor de la máxima derivada direccional, o sea:

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} \text{ máxima} &= |\nabla f| = \sqrt{\frac{4+16}{(25)^2}} = \\ &= \frac{2}{25} \sqrt{5} \doteq 0.179 \end{aligned}$$

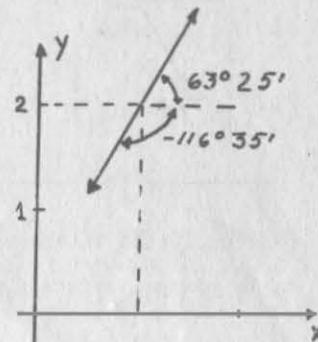


fig. 2.12.3

En general, tanto la dirección como el valor de la máxima pendiente, se refieren exclusivamente al punto en que se calculan.

d) Lo que ahora requerimos es determinar una dirección. Sabemos que:

$$\frac{df}{ds} = 0.01, \quad \text{además: } \frac{df}{ds} = |\nabla z| \cos \phi$$

en donde  $\phi$  es el ángulo formado entre  $\nabla z$ , y la dirección buscada; así que despejando  $\cos \phi$ , y de ésta  $\phi$ :

$$\phi = \arccos \frac{\frac{df}{ds}}{|\nabla z|}$$

$$\cos \phi = \frac{0.01}{2\sqrt{5}/25} = 0.055 \Rightarrow \phi = 56^\circ 37'$$

Debe moverse a  $56^{\circ}37'$  a partir del gradiente; hay dos direcciones que satisfacen esta condición, dependiendo hacia donde se mida - el ángulo, estas son, referidas a la dirección positiva del eje x. (Fig. 2.12.4)

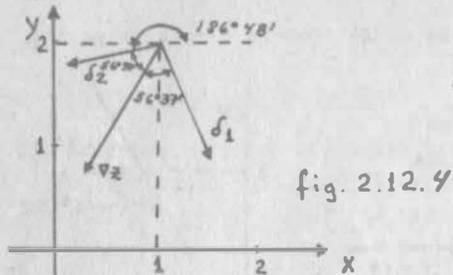


fig. 2.12.4

$$-116^{\circ}35' + 56^{\circ}37' = -59^{\circ}58'$$

$$-116^{\circ}35' - 56^{\circ}37' = -173^{\circ}12'$$

$$= 186^{\circ}48'$$

Una conclusión interesante del problema es que:

a) La máxima variación de una función  $f$  en un punto es:

$$\frac{df}{ds} \text{ máxima} = |\nabla f(p)| \quad (2.12.1.5.)$$

b) y ésta se presenta en la dirección de  $\nabla f(p)$

Estas dos conclusiones las podemos ahora aplicar para afirmar -- que:

El gradiente de una función escalar es un vector, cuya magnitud-representa la máxima variación de la función en un punto dado de su dominio y su dirección, la dirección en que tal máxima variación ocurre.

Además, como  $f$  es una función escalar de punto, depende del punto, pero no del sistema de referencia; así mismo, si "S" es la - longitud de un arco medido sobre una curva del plano o del espacio, "S" tampoco depende del sistema de referencia, así que  $\frac{df}{ds}$  es independiente de los cambios de coordenadas. Por consiguiente, la derivada direccional máxima, en la dirección en que ocurre, también será independiente del sistema de coordenadas.

Como  $\frac{df}{ds} = |\nabla f| \cos \phi$ , en donde  $\phi$  es el ángulo entre el gradiente y la dirección, en el caso de que  $\frac{df}{ds}$  sea máxima  $\frac{df}{ds} = |\nabla f|$ , y la magnitud del gradiente, así como su dirección son independien- tes de las coordenadas.

## Ejemplo 2.12.1

Dada la superficie  $z = 25 - x^2 - 4y^2$

a) Dibujar en el plano  $x, y$  las curvas  $z=0$ ,  $z=9$ ,  $z=16$

b) Encontrar el vector normal a la curva que pasa por  $P(2, \sqrt{3})$  y dibujarlo.

Solución:

a)

Para  $z=0$

$$x^2 + 4y^2 = 25 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

que es una elipse con centro en el origen y semieje  $(5, 5/2)$  en  $x, y$  respectivamente.

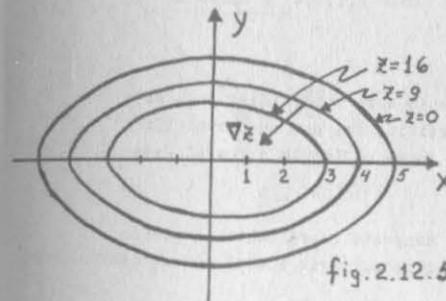


fig. 2.12.5

Para  $z=9$

$$9 = 25 - x^2 - 4y^2 \quad ; \quad x^2 + 4y^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

elipse con centro en el origen y semiejes 4 y 2 respectivamente- en  $x, y$ .

Para  $z=16$

$$16 = 25 - x^2 - 4y^2 \quad ; \quad x^2 + 4y^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 1$$

elipse con centro en el origen y semiejes 3 y 3/2 respectivamente.

b) El vector normal a la curva que pasa por  $P(2, \sqrt{3})$ , es:

$$\nabla z /_p = 2x /_{x=2} i + 8y /_{y=\sqrt{3}} j = 4i + 8\sqrt{3} j$$

2.12

cuya gráfica se ilustra en la fig. 1.12.5, y es perpendicular a la curva de nivel  $z=9$ .

Ejemplo 2.12.2

Hallar el vector tangente a la curva de intersección entre la superficie definida por la ecuación:

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z - 9 = 0$$

y un plano vertical que pase por el punto  $P(1, 1, 4)$  y forme un ángulo " $\alpha$ " con el eje  $x$ .

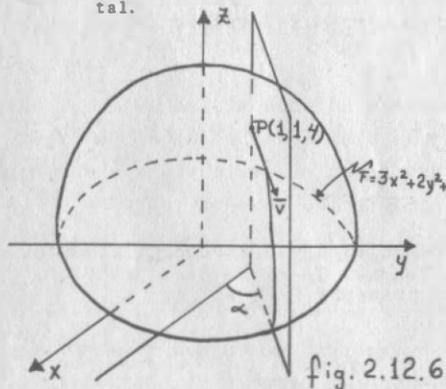
Solución:

Determinemos primero un plano tangente a la superficie; para esto definiremos una tangente a la superficie, tal que su proyección sobre el plano  $xy$  sea la recta que forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$ . (Ver figura 2.12.6)

La proyección horizontal del vector tangente caerá sobre la propia traza del plano. Así, si consideramos unitaria a esta proyección la podemos representar como:

$$\text{Proy}_{xy} \vec{v} = \cos \alpha i + \sin \alpha j = \vec{e}_\alpha$$

La componente vertical de ese vector tangente, será la variación de  $z$  por unidad de longitud medida sobre su proyección horizontal.



Dado que:

$$\frac{dz}{ds} = \nabla z \cdot \vec{e}_\alpha$$

al despejar  $z$  de la ecuación:

$$z = 9 - 3x^2 - 2y^2; \quad \nabla z = -6xi - 4yj$$

en el punto  $P(1, 1, 4)$ ,  $\nabla z|_P = -6i - 4j$

$$\frac{dz}{ds} \Big|_P = \nabla z \Big|_P \cdot \vec{e}_\alpha = -6 \cos \alpha - 4 \sin \alpha$$

11.75

que para cualquier valor de  $\alpha$  nos da la pendiente del vector tangente.

Finalmente el vector tangente en el punto es:

$$\vec{v} = \cos \alpha i + \sin \alpha j - (6 \cos \alpha + 4 \sin \alpha) k$$

como se ve en las figuras 2.12.6 y 2.12.7.

Este vector  $\vec{v}$  representa todos los vectores tangentes a la superficie en el punto dado, a que  $\alpha$  puede tener cualquier valor.

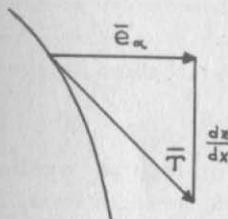


fig. 2.12.7

Ahora calculemos  $\nabla F|_P$

$$\nabla F = 6xi + 4yj + k$$

$$\nabla F|_P = 6i + 4j + k$$

entonces:

$$\nabla F|_P \cdot \vec{v}|_P = (6i + 4j + k) \cdot (\cos \alpha i + \sin \alpha j - (6 \cos \alpha + 4 \sin \alpha) k)$$

$$\nabla F|_P \cdot \vec{v}|_P = 6 \cos \alpha + 4 \sin \alpha - 6 \cos \alpha - 4 \sin \alpha = 0$$

Así que,  $\nabla F|_P$  es perpendicular a  $\vec{v}|_P$  para cualquier valor de  $\alpha$ , por lo tanto, como  $\nabla F|_P$  es perpendicular a todas las tangentes, también es perpendicular a la superficie.

En general una superficie cualquiera obedece a la ecuación:

$$F(x, y, z) = 0$$

En tanto que un punto se mueva sobre una superficie, es decir, en una dirección tangente  $\vec{e}$ , el valor de  $F$  debe permanecer nulo; esto es  $\frac{dF}{ds} = 0$ , o sea que en este caso:

$\nabla F \cdot \vec{e} = 0$  lo que significa que  $\nabla F$  es perpendicular a todos los vectores tangentes, y por lo tanto a la superficie.

Cabe decir lo mismo de una superficie definida en la forma  $F(x, y, z) = c$ :  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  será perpendicular a la superficie en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .

11.76

Una consecuencia de esto es que si la función  $w=w(x,y,z)$  toma valores constantes  $c$ , para cada valor  $c$  diremos que se tiene una SUPERFICIE DE NIVEL y el gradiente de  $w(x,y,z)$  será perpendicular a la superficie de nivel  $w=c$  en un punto dado  $(x,y,z)$  del dominio de  $w$ .

Al mismo tiempo, las direcciones en que una función crece con una rapidez dada en un punto, serán las de las generatrices de un cono circular recto con vértice en ese punto, y eje de simetría en la dirección del gradiente de la función en dicho punto.

### 2.13 DIFERENCIAL EXACTA Y SU INTEGRACION.

Comenzaremos tratando de resolver el problema siguiente:

Problema 2.13.1

¿Cuál es la función cuyo gradiente es  $-\frac{2}{25}x\mathbf{i} - \frac{2}{25}y\mathbf{j}$  y cuyo valor en el punto  $(1,2)$  es  $0.8$ ?

La solución en este caso no presenta mayor problema, pues si  $\nabla f = -\frac{2x}{25}\mathbf{i} - \frac{2y}{25}\mathbf{j}$  recordamos del problema 2.12.1 anterior que:

$$f = \frac{1}{25}(x^2 + y^2) + c$$

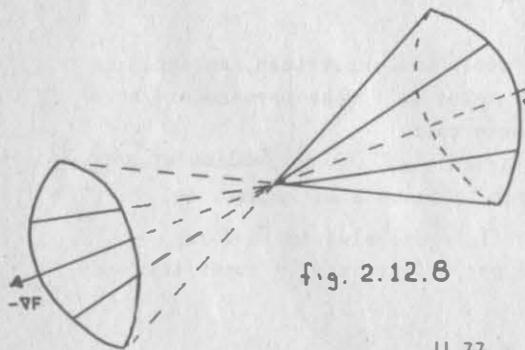


fig. 2.12.8

11.77

(1) La palabra más correcta es semicono, porque sólo nos referimos a un manto del cono; en el otro manto, la rapidez es la misma en valor absoluto, pero con signo contrario; como se indica en la fig. 2.12.8

Veamos ahora si podemos contestar el siguiente.

Problema 2.13.2

¿Cuál es la función cuyo gradiente es  $y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  y cuyo valor, en el punto  $(1,1)$  es  $2$ ? Esta vez no conocemos a priori la función; pero podemos razonar como sigue:

El gradiente es perpendicular a las curvas de nivel; luego su pendiente será recíproca y de signo contrario a la de dichas curvas, cuya ecuación en general podemos escribir:

$$f(x,y) = c$$

la pendiente de nuestro gradiente es  $\frac{x}{y}$ ; así que la pendiente de una curva de nivel cualquiera de  $f(x,y)$  será:  $-\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$

que podemos escribir:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

lo cual se integra como:

$$L_y = -L_x + L_c$$

o bien:

$$L(xy) = L_c \Rightarrow xy = c$$

ahora, usando la condición dada para  $x=1, y=1$ :

$$f(x,y) = xy + c$$

$$f(1,1) = 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$$

finalmente:

$$f(x,y) = xy + 1$$

Problema 2.13.3

Veamos ahora si podemos determinar la función de la cual  $y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$  es el gradiente.

De manera análoga obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

11.78

integrando:

$$L y = L x + L c$$

$$y: \frac{y}{x} = c, \text{ pero resulta que, si } g(x, y) = \frac{y}{x}$$

$$\vec{\nabla} g = -\frac{y}{x^2} i + \frac{1}{x} j \neq y i - x j$$

Entonces no cualquier combinación de funciones que se nos ocurra puede ser gradiente de una función, sino que, para que lo sea debe cumplir ciertas condiciones. En el caso anterior podíamos habernos dado cuenta que no era posible que  $y i - x j$  fuera gradiente de una función  $\phi$  porque, para serlo, se debería cumplir el teorema de Schwarz:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -x$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -1$$

o sea que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

de donde se concluye que siendo  $(y)$  y  $(-x)$  funciones que cumplen con las hipótesis del teorema de Schwarz, no provienen de una misma función, como se proponía.

### 2.13.1. Condición Necesaria y Suficiente para que un Vector sea el gradiente de una Función Escalar.

Del problema 2.13.2 surge una condición necesaria para que un vector de la forma  $\vec{v} = P(x, y)i + Q(x, y)j$  sea gradiente de una función escalar  $\phi$ , y ésta es que, si suponemos que el vector dado es el gradiente de  $\phi$ .

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j \quad (2.13.1.1.)$$

entonces:

$$P(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad ; \quad Q(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.13.1.2.)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad (2.13.1.3.)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (2.13.1.4.)$$

y según el teorema de Schwarz (2.13.1.3 y 4) son iguales, así -- que, para que  $\vec{v}$  sea un gradiente se requiere que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{CONDICION NECESARIA} \quad (2.13.1.5.)$$

Ahora nos preguntamos si la condición anterior garantiza la existencia de una función única  $\phi$  de la cual  $\vec{v}$  es gradiente.

Supongamos que los valores de  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son tales que (2.13.1.5) es cierta. Debemos entonces poder encontrar una función  $\phi$  tal que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P \quad (2.13.1.6.)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q \quad (2.13.1.7.)$$

Si (2.13.1.6) es verdadera, podemos integrarla respecto a "x" -- manteniendo "y" constante:

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + f(y) = \int P dx + f(y) \quad (2.13.1.8.)$$

y la función  $f(y)$  nos da la parte de  $\phi$  que depende exclusivamente de "y" ya que, al derivar  $\phi$  respecto a "x" se habían anulado estos términos que sólo contienen a "y"

La expresión (2.13.1.8) debe verificar también a (2.13.1.7), así que:

$$Q = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int P dx + f(y) \right] \quad (2.13.1.9.)$$

o sea:

$$Q = \frac{\partial}{\partial y} \int P dx + \frac{df}{dy}$$

de donde despejamos:

$$\frac{df}{dy} = Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx \quad (2.13.1.10.)$$

Recordemos que  $f$  depende solamente de "y", y por lo tanto su derivada; entonces la ecuación (2.13.1.10) nos está diciendo que al manipular en el segundo miembro, nos debe quedar una expresión que no contenga a "x". Esto es, su derivada parcial con respecto a "x" debe ser nula:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \int P dx \right] = 0 \quad (2.13.1.11.)$$

o lo que es lo mismo, de acuerdo con el teorema de Schwarz:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int P dx \right] = 0 \quad (2.13.1.12.)$$

que se simplifica como sigue:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} [P] = 0 \quad (2.13.1.13.)$$

de donde:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.13.1.14.)$$

así que, el cumplimiento de (2.13.1.5) garantiza que exist una función única  $\phi$  cuyo gradiente es el vector  $\vec{v}$ . Decimos entonces que la condición necesaria y suficiente para que un vector  $P(x,y) i + Q(x,y)j$  sea un gradiente es:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE} \quad (2.13.1.5)$$

## 2.14 DIFERENCIAL EXACTA.

### Definición 2.14.1

Si dada una expresión de la forma  $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$  existe una  $\phi(x,y)$  tal que  $d\phi = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$  para todo  $(x,y)$  en una cierta región y para todos los valores de  $dx, dy$ , decimos que la expresión es una diferencial exacta.

La condición (2.13.1.5) es, simultáneamente, condición necesaria y suficiente para que la expresión:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (2.14.0.1.)$$

sea diferencial exacta o total de una función  $\phi$ , ya que si lo es:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x,y), \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q(x,y) \quad (2.14.0.2.)$$

Podemos ver además, que:

$$d\phi = \nabla \phi \cdot (dx, dy) \quad (2.14.0.3.)$$

puesto que  $d\vec{r} = (dx, dy)$ , y por lo tanto:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = \nabla \phi \cdot d\vec{r} \quad (2.14.0.4.)$$

2.14.1 Diferencial Exacta y su Integración.

Ejemplo 2.14.1

Consideremos la expresión  $(2xy + y)dx + (x^2 + x + y)dy$  en donde  $P(x, y) = 2xy + y$ ,  $Q(x, y) = x^2 + x + y$

¿Es la expresión dada una diferencial exacta? Si lo es ¿de qué función proviene?

Solución:

Para que sea diferencial exacta debe cumplirse:

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + x + y) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy + y)$$

calculando estas derivadas parciales obtenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 1 = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 1$$

por lo que sí es diferencial exacta.

Para encontrar la función de la que proviene podríamos intentar el método que utilizamos para resolver el problema 2.13.2

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + y}{x^2 + x + y}$$

pero vemos que ahora no es sencillo separar las variables para integrar. Afortunadamente la demostración realizada en 2.13.1 nos sugiere un método muy fácil.

Recordemos que  $P(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ , así que, integrando P respecto a x:

$$\phi = \int (2xy + y) dx + f(y),$$

en donde  $f(y)$  es función sólo de y.

$$\phi = x^2y + xy + f(y)$$

la que debe verificar a Q, así que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + x + f'(y) = x^2 + x + y$$

de donde:

$$f'(y) = y$$

Finalmente:

$$\phi = x^2y + xy + \frac{y^2}{2} + C$$

Para el caso en que existan 3 variables el concepto puede generalizarse fácilmente usando el Teorema de Schwarz, la única variante es que la función aditiva deberá serlo de las variables que no se hayan integrado, teniendo que verificar dicha función a los restantes términos de la diferencial.

Ejemplo 2.14.2

La expresión:

$$(3x^2 + z)dx + (2y + z^2)dy + (x + 2yz + 1)dz$$

¿Es diferencial exacta?

Si lo es, debe verificar que, siendo:

$$P = 3x^2 + z, \quad Q = 2y + z^2, \quad R = x + 2yz + 1$$

se cumpla el teorema de Schwarz tomando de dos en dos las funciones:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 1 = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 2z = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Cumple; por lo tanto, es una diferencial exacta.

¿De qué función proviene?

Integremos "P" respecto a "x", la constante de integración en este caso debe proporcionar la parte de  $\phi$  que sólo depende de (y, z):

$$\phi = \int (3x^2 + z) dx + f(y, z) = x^3 + xz + f(y, z);$$

e ta expresión debe verificar a "Q", así que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 + f_y(y, z) = Q = 2y + z^2$$

de donde:

$$f(y, z) = \int (2y + z^2) dy + h(z) = y^2 + z^2 y + h(z)$$

en donde  $h(z)$  representa todos los términos de  $\phi$  que dependen sólo de  $z$ ;  $Q = x^3 + xz + y^2 + z^2 y + h(z)$ , y esta expresión debe verificar a "R", así que:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = x + 2zy + h'(z) = x + 2yz + 1 = R$$

de donde:

$$h'(z) = 1 \Rightarrow h(z) = z + C$$

finalmente, la función  $\phi$  buscada es:

$$Q = x^3 + xz + y^2 + z^2 y + z + C$$

En capítulos posteriores veremos algunas consecuencias de la definición de diferencial exacta, y una interpretación física de la misma.

### 2.14.3 Generalización de la Diferencial Exacta.

#### Teorema 2.14.1

En general, diremos que una expresión de la forma:

$$P_1(\bar{x})dx_1 + P_2(\bar{x})dx_2 + \dots + P_n(\bar{x})dx_n \quad (2.14.3.1.)$$

en donde  $\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  es una diferencial exacta de una función  $F(\bar{x})$  si, siendo  $P_1, P_2, \dots, P_n$  funciones escalares definidas en una cierta región de  $E^n$  cumplen el teorema de Schwarz para todas las combinaciones posibles de parejas.

O sea, se deben cumplir  $\frac{n!}{2(n-2)!}$  <sup>(1)</sup> condiciones de la forma:

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$$

basadas todas ellas en el cumplimiento del teorema de Schwarz.

(1) ver la explicación de esta expresión en el apéndice 2.2.

## CAPITULO TRES

## 3. CAMPOS VECTORIALES.-

INTRODUCCION.- Todos los problemas que pueden solucionarse aplicando conceptos vectoriales, también se pueden resolver por métodos no vectoriales, sólo que el análisis vectorial nos simplifica considerablemente muchos cálculos. Los vectores son herramientas muy útiles en las Matemáticas del ingeniero, ya que ayudan a visualizar y relacionar conceptos físicos y geométricos, que de otro modo nos serían difíciles de captar.

Recordemos que existen, tanto en Física como en Geometría, cantidades que quedan completamente definidas cuando se da su tamaño o número de acuerdo a una cierta escala; a este tipo de cantidades se les llama escalares, y ejemplo de ellas son la presión, la masa, el área, la resistencia eléctrica, el calor, el volumen, etc. Por otro lado, existen cantidades que no podemos describir por medio de un sólo número, ya que no quedaría completamente definidas o caracterizadas; a este tipo de cantidades en que hace falta conocer su dirección, además de su magnitud, se les conoce como vectores, y ejemplo de ellos los tenemos al manejar conceptos tales como el peso de los cuerpos, las fuerzas, las velocidades, la gravedad, momentos, etc.

## 3.1 Campos Vectoriales o Funciones Vectoriales.

Hasta ahora, en los capítulos I y II, hemos manejado los vectores como variables independientes; procede ver que también podemos manejarlos como funciones.

## 3.1.1 Campos Vectoriales.

Si asignamos un vector  $\vec{v}(P)$  a cada punto "p" de un cierto conjunto de puntos (curva, superficie o región), entonces diremos que en estos puntos existe un campo vectorial  $\vec{V}(P)$ . Como podemos -- ver en las figuras 3.1.1 y 3.1.2.

III.1

## CAMPO DE VECTORES DE VELOCIDAD DE UN FLUJO

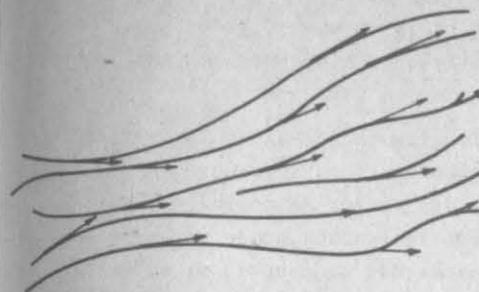


Fig. 3.1.1

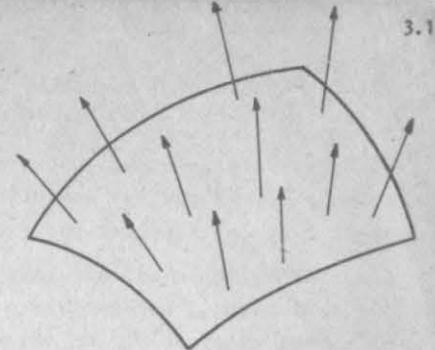


Fig. 3.1.2

## CAMPO DE VECTORES NORMALES A UNA SUPERFICIE

En estos casos, el vector función depende de las coordenadas del punto P, es decir, de su vector de posición; por ello se dice que es una función vectorial de variable vectorial. Puede darse el caso, sin embargo, de que el vector función dependa de una sola magnitud, como es el caso de la densidad de corriente en un conductor delgado, la cual queda completamente definida por medio de la distancia a la fuente de energía. Fig. 3.1.3a

Otro ejemplo del mismo caso es el de la fuerza tangencial sobre un carrito en la montaña rusa, fig. 3.1.3b, que depende del recorrido "s" sobre una curva en el espacio; en estos dos últimos casos se dice que tiene una función vectorial de variable escalar. Por ser éstas las más sencillas, empezaremos con ellas nuestro estudio de las funciones vectoriales.

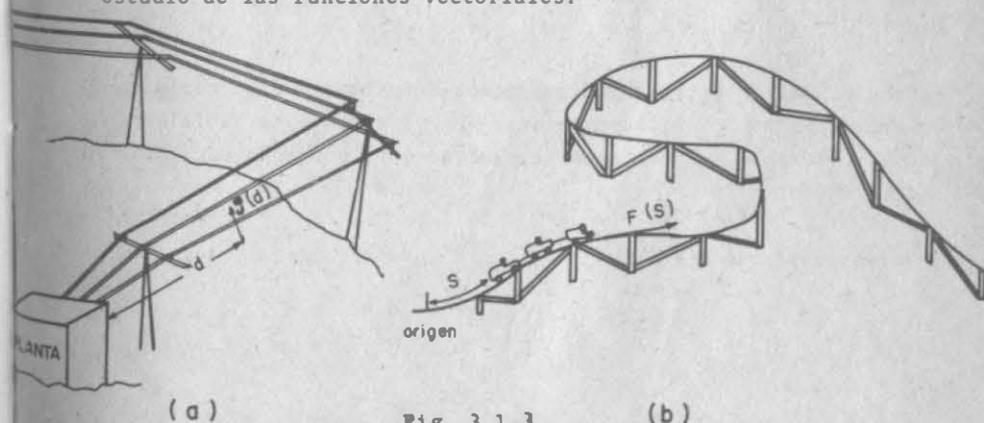


Fig. 3.1.3

III.2

### 3.1.2 Funciones Vectoriales de Variable Escalar.-

Si una partícula se está moviendo en el plano  $xy$ , y para seguir su movimiento colocamos observadores en los ejes "x" y "y" seguramente que el control que ellos llevarían sería, como se indica en la fig. 3.1.4 de tiempos y distancias en cada eje.

Como verás, se ha definido así una función vectorial de la variable real tiempo, que establece un mapeo de  $E^1$  en  $E^2$ , ya que asigna a cada valor de "t" un sólo valor del vector de posición  $\vec{r}$  en dos dimensiones. Ahora bien, para que la función quede definida analíticamente, sabemos, que habrá necesidad de conocer si el movimiento seguirá en la misma ley por más tiempo, o si la partícula va dando saltos o no.

t(seg)	x(m)	y(m)
0	0	0
1	2	1
2	4	4
3	6	9
4	8	16

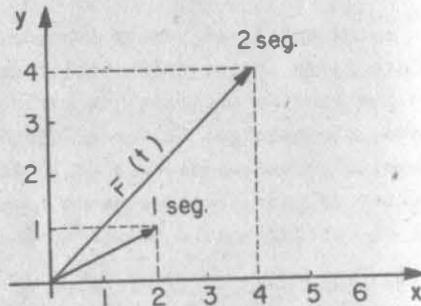


Fig. 3.1.4

Si el movimiento es continuo podremos escribir matemáticamente que:

$$\vec{r}: R^1 \rightarrow R^2 \mid \vec{r} = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, t \geq 0 \quad 3.1.2.1$$

En esa expresión estamos indicando que aceptamos que el movimiento empezó en  $t=0$ . Si supusieramos que el movimiento había empezado previamente, quitaríamos la restricción, pudiendo escribir simplemente:

$$\vec{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad 3.1.2.2$$

o bien ya que  $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ :

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= t^2 \end{aligned} \quad 3.1.2.3$$

y si se despeja "t" en una de ellas y se substituye en la otra, eliminaremos "t", y por lo tanto obtendremos la expresión cartesiana del movimiento de la partícula en dos dimensiones, fig. 3.1.5

$$t = \frac{x}{2}; t^2 = \frac{x^2}{4} \therefore y = \frac{x^2}{4}$$

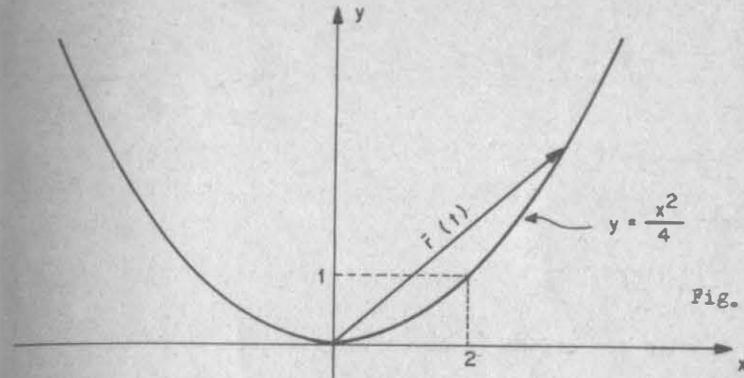


Fig. 3.1.5

En general para el sistema coordenado cartesiano  $x, y, z$ ,  
 $\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad 3.1.2.4$   
 siempre será posible eliminar "t" y obtener las ecuaciones cartesianas en función de  $x, y, z$ .

#### Ejemplo 3.1.1

Si se tiene el sistema:

$$x = \sin t \quad 3.1.1.a$$

$$y = 2 \sin t \quad 3.1.1.b$$

$$z = 3 \cos t \quad 3.1.1.c$$

o bien:

$$\vec{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + 3 \cos t\mathbf{k} \quad 3.1.1.d$$

De 3.1.1 a y b obtenemos:

$$y = 2x \quad 3.1.1.e$$

de 3.1.1.a

$$x^2 = \sin^2 t \quad 3.1.1.a'$$

de 3.1.1.b

$$\frac{y^2}{4} = \sin^2 t \quad 3.1.1.f$$

Al sumar 3.1.1.a' y f:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 2 \operatorname{sen}^2 t$$

de donde

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = \operatorname{sen}^2 t \quad 3.1.1.g$$

de 3.1.1.c

$$\frac{z^2}{9} = \cos^2 t \quad 3.1.1.h$$

al sumar 3.1.1.g y h:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad 3.1.1.i$$

que junto con 3.1.1.e nos define la curva intersección de un elipsoide y un plano.

### 3.1.3 Funciones Vectoriales de Variable Vectorial.

En general, si el recorrido de una función vectorial está en un espacio "n" dimensional, necesitamos acudir a los vectores unitarios base  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ , para definir cualquier vector  $\bar{v}(\bar{x})$  en "n" dimensiones.

$$\bar{v}(\bar{x}) = v_1(\bar{x})\bar{e}_1 + v_2(\bar{x})\bar{e}_2 + \dots + v_n(\bar{x})\bar{e}_n \quad 3.1.3.1$$

Esto está indicando la necesidad de contar con n funciones escalares del vector  $\bar{x}$ , para definir la función vectorial  $\bar{v}(\bar{x})$ .

A su vez, el vector  $\bar{x}$  estará definido por "m" variables independientes, esto es  $\bar{x} [x_1, x_2, \dots, x_m]$

En otras palabras estamos estudiando las funciones en sus términos más generales, tal como las estudias en Algebra Lineal, quitando ahora la restricción a las transformaciones correspondientes, de que sean lineales.

Si aplicamos los conocimientos sobre transformaciones, que estudiamos en Algebra Lineal, podemos concluir que la expresión 3.1.3.1 tiene un recorrido en el espacio de "n" dimensiones, y un dominio en el espacio de "m" dimensiones.

### Ejemplo 3.1.2

El campo gravitacional universal está dado por:

$$\bar{F} = -GMm \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3}$$

donde:  $\bar{F}$  es la fuerza de atracción entre las masas "M", "m" (origen en M)

$\bar{r}$  es el vector de posición de la masa "m".

Si se desglosa en forma cartesiana:

$$\bar{F} = -GMm \frac{x_i + y_j + z_k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

### Ejemplo 3.1.3

El campo de vectores normales unitarios y exteriores de una esfera de radio 2, está dado por la función:

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}}{2}$$

o bien, en forma cartesiana

$$\bar{n} = \frac{1}{2} (x_i + y_j + \sqrt{4 - x^2 - y^2} k)$$

## 3.2 Límites y continuidad de funciones vectoriales de variable escalar.

Por antecedentes de cursos previos, ya sabes analizar la continuidad de funciones dadas en forma cartesiana, sólo que creemos que sería más ventajoso que se pudiese analizar en la forma dada por 3.1.2.4. Así nos referimos al inciso 3.1.2 y veremos qué sucede si los observadores en los ejes x,y, nos reportaran que,

después de ver en el tiempo cero la partícula, la perdieran de vista para volverla a ver en  $t=1$  y así sucesivamente. En este caso la función existe y se representa por la figura 3.2.1; pero de ninguna manera es continua; por ejemplo en  $t=2$  la función existe en ese punto, pero no en sus proximidades.

En cambio la función  $\vec{r}(t) = ti + \frac{t^2-4}{t-2}j$  3.2.0.1

existe en las proximidades de  $t=2$ , pero no en  $t=2$  ya que no se puede definir su ordenada.

En el primer caso, de los observadores, decimos que existe la función, mas no el límite y en el segundo caso, existe el límite mas no la función; por ello habrá que ver qué se debe entender por el límite de una función vectorial de variable escalar.

**Definición 3.2.1.** Si dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|\vec{r} - \vec{a}| < \epsilon$  cuando  $|t - t_0| < \delta$ , se dice que el vector  $\vec{a}$  es el límite de la función vectorial  $\vec{r}$  cuando "t" tiende a  $t_0$ .

Lo anterior se escribe como:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \quad 3.2.0.2$$

veremos porqué la función definida en la figura 3.1.4 no tiene límite cuando  $t \rightarrow 2$

Si se fija  $\epsilon = 3$  y suponemos el vector  $\vec{a} = 4i + 4j$ , tendríamos de acuerdo a la definición:  $|xi + yj - 4i - 4j| < 3$  lo que significa que  $\sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} < 3$  ó bien  $(x-4)^2 + (y-4)^2 < 9$

Esta desigualdad nos define una región abierta dentro de la circunferencia con centro en (4,4) y radio 3 (Fig. 3.2.1), pero observamos que no hay valor de "t" que nos defina un vector, cuya extremidad esté dentro del círculo, por lo que "δ" no puede existir.

111.7

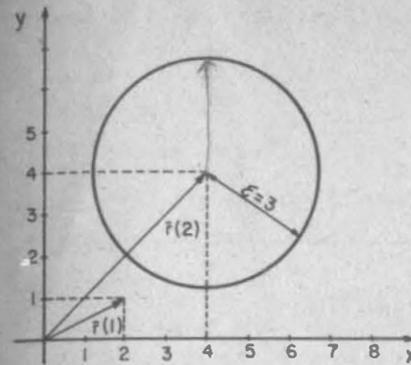


Fig. 3.2.1

En general para cualquier valor de  $\epsilon > 0$  puedes comprobar que  $|t-2| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} = \delta$

Por lo anterior puede afirmarse que el límite existe, aunque la función no esté definida en  $t=2$ . La definición es válida para cualquier número de dimensiones en que se defina  $\vec{r}$ . Puede verse en la fig. 3.2.2 una interpretación geométrica para tres dimensiones. Todos los vectores que cumplan con  $|\vec{r} - \vec{a}| < \epsilon$ , son aquellos cuyas extremidades se encuentran dentro de la esfera de radio  $\epsilon$  y deben ser generados por valores de "t" que se encuentran dentro de un entorno alrededor de  $t_0$ .

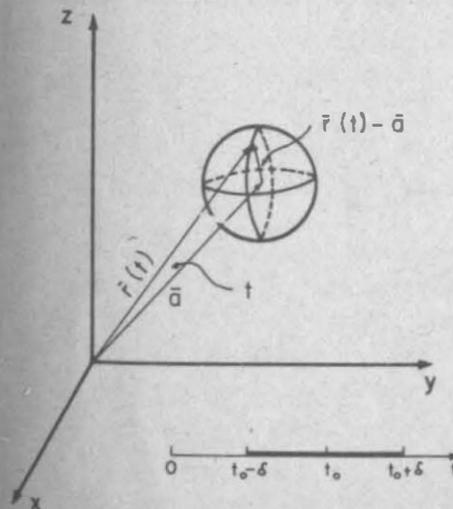


Fig. 3.2.2.

Por lo anterior, para calcular el límite de una función vectorial, se intuye que el vector límite estará compuesto por los límites de las componentes. Si consideramos el vector  $\vec{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  como límite de la función:  $\vec{r}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , cuando  $t \rightarrow t_0$  esto significa que:  $|\vec{r} - \vec{a}| < \epsilon$  cuando  $|t - t_0| < \delta$

3.2.0.3

111.8

o lo que es lo mismo:

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \epsilon \text{ cuando } |t - t_0| < \delta, \text{ don}$$

$$\text{de } x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t) \quad 3.2.0.4$$

al elevar al cuadrado (3.2.0.3):

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < \epsilon^2 \text{ cuando}$$

$$|t - t_0| < \delta \dots \quad 3.2.0.5$$

Pero como todos los sumandos son positivos:

$$\left. \begin{array}{l} (x_1 - a_1)^2 < \epsilon^2 \\ (x_2 - a_2)^2 < \epsilon^2 \\ \dots \\ (x_n - a_n)^2 < \epsilon^2 \end{array} \right\} \text{ Cuando } |t - t_0| < \delta \quad 3.2.0.6$$

o sea que:

$$\left. \begin{array}{l} |x_1 - a_1| < \epsilon \\ |x_2 - a_2| < \epsilon \\ \dots \\ |x_n - a_n| < \epsilon \end{array} \right\} \text{ Cuando } |t - t_0| < \delta \quad 3.2.0.7$$

$a_2$  

El hecho de que cada desigualdad cumpla con la condición anexa significa que:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x_1(t) = a_1$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x_2(t) = a_2$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x_3(t) = a_3$$

$$\dots$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x_n(t) = a_n$$

3.2.0.8

Esto es, los componentes del vector límite son los límites de las funciones componentes.

Definición 3.2.2

Una función vectorial  $\vec{r}(t)$  es continua en el punto  $t_0$  si y sólo si:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) \quad 3.2.0.9$$

Lo cual implica la existencia del límite y de la función. La continuidad de una función vectorial de variable escalar implica que la curva que la representa no tenga interrupciones ni dobles vectores. Por ejemplo para la función siguiente:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} ti + t^2j, & 0 \leq t \leq 2 \\ 2ti + t^2j, & 2 \leq t \end{cases}$$

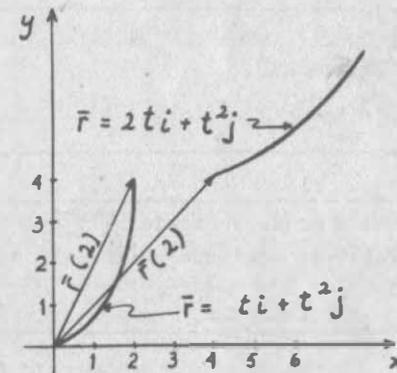


Fig. 3.2.3

La función (fig.3.2.3) es discontinua en  $t=2$ , donde la curva salta.

Puesto que ya se demostró que el límite de una función vectorial está compuesto por los límites de sus componentes, podremos demostrar fácilmente los siguientes teoremas, lo cual haremos con el primero dejándote de tarea que demuestres el segundo.

**Teorema 3.2.1** Una función vectorial  $\bar{r}(t)$  es continua en  $t=t_0$ , si y sólo si todas sus funciones componentes son continuas en dicho punto.

**Demostración:** Sea  $\bar{r}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$  para que exista se requiere que exista  $x_i(t_0)$  para todo valor de "i", y para que su límite sea  $\bar{r}(t_0)$  se requiere a la vez que:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = x_i(t_0) \quad \forall i$$

lo cual implica que  $x_i(t)$  debe ser continua  $\forall i$ .

A la inversa, si  $x_i(t)$  es continua  $\forall i$  eso implica que:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = x_i(t_0)$$

lo cual a su vez implica que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{r}(t) = \bar{r}(t_0)$

**Teorema 3.2.2** Para que la función vectorial  $\bar{r}(t)$  sea continua, es necesario y suficiente que:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)] = 0 \quad 3.2.0.10$$

**Definición 3.2.3** Una función vectorial  $\bar{r}(t)$  es continua en un intervalo, si y sólo si es continua en todos y cada uno de los puntos del intervalo.

**Ejemplo 3.2.1**

a) Calcular el límite de la función  $\bar{v}(t) = \cos t \mathbf{i} + 2 e^t \mathbf{j}$  cuando  $t \rightarrow 0$  y decir si es continua en ese punto.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{v}(t) = (\lim_{t \rightarrow 0} \cos t) \mathbf{i} + (\lim_{t \rightarrow 0} 2e^t) \mathbf{j} = \mathbf{i} + 2 \mathbf{j}$$

dado que el límite existe y la función si está definida para  $t=0$  entonces también será continua.

**Ejemplo 3.2.2**

Si  $\bar{r}(x) = x^2 \mathbf{i} - 2x \mathbf{j} + \sin x \mathbf{k}$  encontrar cuanto vale el límite cuando  $x \rightarrow 0$  y decir si es continua en ese punto.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \bar{r}(x) = (\lim_{x \rightarrow 0} x^2) \mathbf{i} - (\lim_{x \rightarrow 0} 2x) \mathbf{j} + (\lim_{x \rightarrow 0} \sin x) \mathbf{k} = 0 \mathbf{i} - 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} = \bar{0}$$

el límite para la función  $\bar{r}$  está definido, entonces  $\bar{r}$  será continua en  $x=0$ .

**Ejemplo 3.2.3**

Si  $\bar{v}(t) = \frac{1}{t} \mathbf{i} + (t^2 - 1) \mathbf{j}$ ; decir si la función es continua en  $t=0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{v}(t) = (\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}) \mathbf{i} + (\lim_{t \rightarrow 0} (t^2 - 1)) \mathbf{j}$$

como el límite de  $\frac{1}{t}$  cuando  $t \rightarrow 0$  no está definido, entonces diremos que la función  $\bar{v}(t)$  no es continua en  $t=0$ .

### 3.3 Arco de Curva y su Expresión Vectorial.

#### 3.3.0 Generalidades.

Si consideramos el hecho de que todos los objetos físicos están formados por partículas y cada partícula la tratamos de forma independiente, veremos que un objeto que se mueve, genera una gran cantidad de curvas, una por cada partícula del objeto. (fig. 3.3.1)

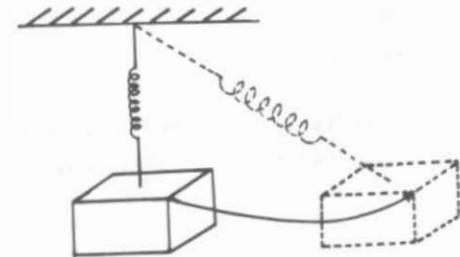


Fig. 3.3.1

Sabemos que existen curvas de todo tipo pero podemos distinguir aquellas que están contenidas en planos y que por lo mismo son llamadas "curvas planas", (fig.3.3.2.a) y otras que definitivamente no pueden estar contenidas en planos; a este último tipos se les denomina "curvas alabeadas". (fig.3.3.2.b)

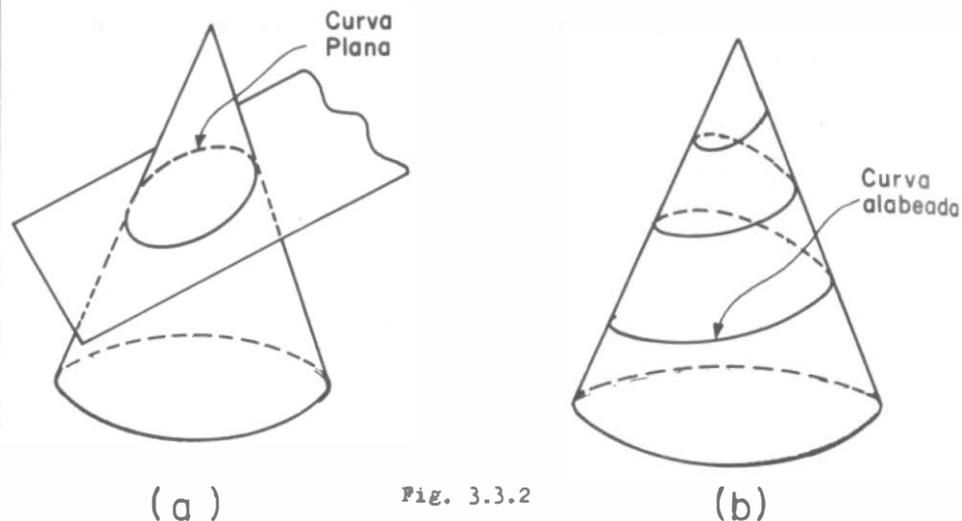


Fig. 3.3.2

Recordarás que si tenemos una curva en el plano  $xy$  la podemos definir matemáticamente por una ecuación del tipo  $y=f(x)$ , o bien  $\rho = f(\theta)$

La intersección de dos superficies (fig.3.3.3) define una curva en el espacio. Si estas superficies tienen por ecuaciones  $F(x,y,z)=0$ ,  $G(x,y,z)=0$ , respectivamente la expresión matemática de la curva de intersección está dada por el sistema:

$$\left. \begin{aligned} F(x,y,z) &= 0 \\ G(x,y,z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots 3.3.0.1$$

donde sólo una de las variables puede fijarse arbitrariamente; es decir, tenemos un sólo grado de libertad, como vimos en el Capítulo I.

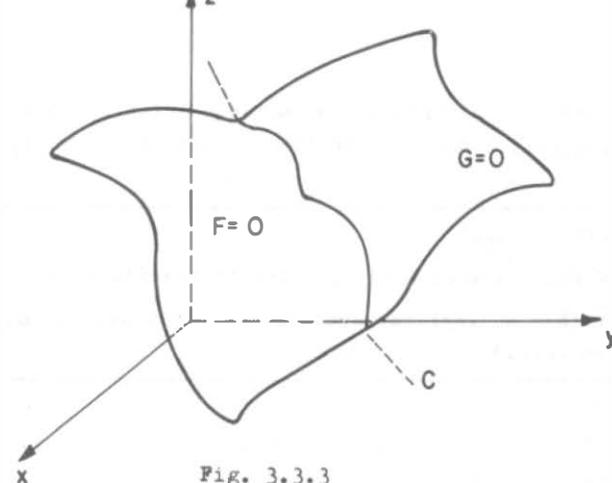


Fig. 3.3.3

Vimos en Geometría Analítica, que una curva puede ser definida vectorialmente por:

$$\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad 3.3.0.2$$

que viene a ser una función vectorial de variable escalar; ésta variable, "t" en este caso, es un parámetro cualquiera. Una forma muy útil que puede asumir la función vectorial es:

$$\vec{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad 3.3.0.3$$

donde "s" es la longitud de arco de curva que se obtiene en  $E_2$  a partir de:  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  y en  $E_3$ , a partir de:  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

así la longitud de arco de la curva  $y=f(x)$  en el intervalo  $a \leq x \leq b$  esta dado por:

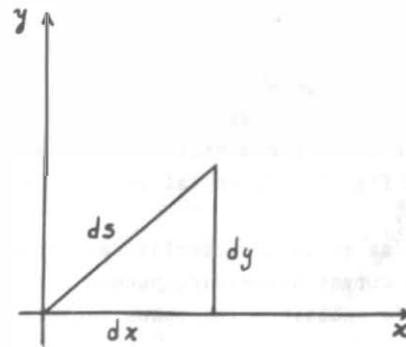
$$\begin{aligned} S_{a,b} &= \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \end{aligned}$$

si la integral existe se dice que la curva es rectificable.

Así mismo si:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

entonces:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad \text{Fig. 3.3.4}$$


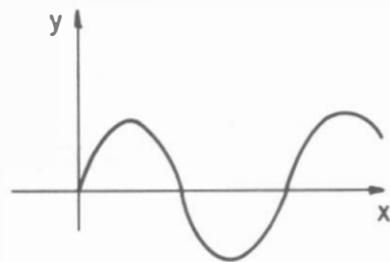
Si la curva es continua, esto es, no tiene interrupciones, brincos, ni autointersecciones, se le llama curva regular. Fig. 3.3.5

#### Definición 3.3.0.1

Dada la función vectorial  $\vec{r}(t)$  que representa a una curva, si  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$  no implica necesariamente que  $a=b$ , se dice que la curva es cerrada.

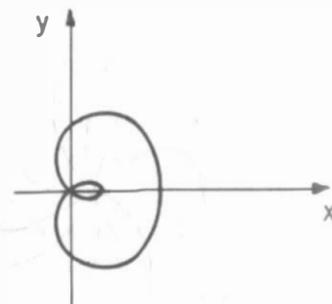
Así la función  $\vec{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ , representada en la figura 3.1.5 es abierta porque  $\vec{r}(a) = 2a\mathbf{i} + a^2\mathbf{j}$  y  $\vec{r}(b) = 2b\mathbf{i} + b^2\mathbf{j}$ , y la única manera en que  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$  es que  $a=b$ , en cambio para la curva del ejemplo 3.1.1 si  $t=0$ ,  $\vec{r}(0)=3\mathbf{k}$  si  $t=2\pi$ ,  $\vec{r}(2\pi)=3\mathbf{k}$  lo que indica que es cerrada.

Así mismo se le llamará curva suave o lisa (fig. 3.3.5) cuando tenga tangentes únicas que varíen en forma continua.



Curva regular suave

Fig. 3.3.5



Curva irregular

Fig. 3.3.6

Una curva puede estar formada por arcos regulares suaves como en la fig. 3.3.7; en tal caso se le llama curva seccionalmente suave.

Todas estas características geométricas difíciles de visualizar en curvas alabeadas, pueden ser analizadas a través del cálculo diferencial de funciones vectoriales, como veremos a continuación.

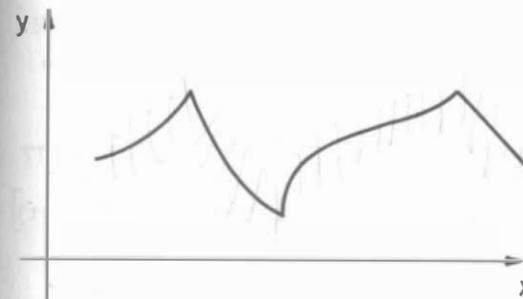


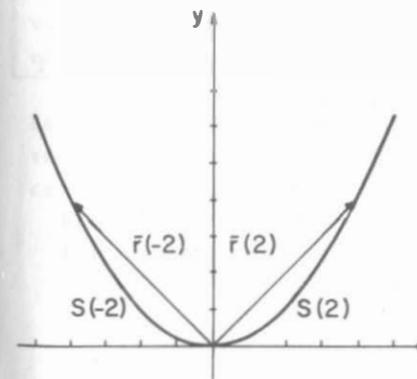
Fig. 3.3.7

Como una importante aplicación del cálculo vectorial, veremos el comportamiento de una curva en el espacio, a través del análisis de algunas de sus características geométricas, y de su aplicación a algunos problemas de la mecánica.

#### 3.3.1 Longitud de arco como parámetro.

Como recordarás de la sección 3.3.0 el arco de una curva "s" también puede ser usado como parámetro en lugar del tiempo "t", - por ello sólo añadiremos que este parámetro revela características intrínsecas de las curvas y por lo mismo comparables en cualquier clase de ellas.

Como hasta ahora para referirnos a una curva vectorialmente hemos buscado representarla a través de un parámetro cualquiera, es preciso ver si al usar el arco de curva "s" como nuevo parámetro, existe un solo vector de posición para cada valor de "s".



Para efecto de ilustración, si usamos el ejemplo de la sección 3.1.2:  $\vec{r}(t)=2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$  podemos hacer la representación siguiente: Vemos en la fig. 3.3.8, que para un cierto valor de "t", le corresponde un vector  $\vec{r}(t)$ , pero también un arco de curva  $s(t)$ , siempre y cuando tengamos un origen para medir el arco.

Fig. 3.3.8

Sabemos que la longitud de arco se puede calcular mediante la fórmula:  $s(t) = \int_0^t \sqrt{dx^2 + dy^2}$  así para  $t=2$ ,  $s(2) = \int_0^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}$  como  $dx = 2dt$ ;  $dy = 2t dt$ ,  $s(2) = \int_0^2 \sqrt{4dt^2 + 4t^2 dt^2} = 2 \int_0^2 \sqrt{t^2 + 1} dt$  al integrar obtenemos  $s(2) = \frac{2}{2} [t\sqrt{t^2+1} + L(\sqrt{t^2+1} + t)]_0^2 = 5.91577$

La solución general en este caso es  $s(t) = [t\sqrt{t^2+1} + L(\sqrt{t^2+1} + t)]$

3.3.1.1.

respetando el signo que resulte, pues de otro modo no se podrá usar "s" como parámetro de una función vectorial, es decir, no podemos considerar las longitudes de arco siempre como positivas.

Se ve claramente en la fig.3.3.8, que si le quitamos el signo a la longitud de arco 5.91577 le corresponderían dos valores de t (2 y -2) y dos vectores de posición  $\vec{r} = 4i + 4j$  y  $\vec{r} = -4i + 4j$

3.4 Derivada Ordinaria y Diferencial Ordinaria.

3.4.1 Derivada Ordinaria.

Ejemplo 3.4.1

Si consideramos nuevamente la función 3.1.2.2  $\vec{r}(t) = 2ti + t^2j$ , ahora en  $t=2$ :  $\vec{r}(2) = 4i + 4j$  y damos un incremento de 0.4 seg. a t:

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(2.4) = 4.8i + 5.76 j$$

vemos que el vector cambia en magnitud y dirección y por ello su cambio debe ser medido por otro vector:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(2.4) - \vec{r}(2) = 4.8i + 5.76 j - 4i - 4j = 0.8i + 1.76 j$$

como el cambio se efectuó en 0.4 seg. ello nos da la rapidez del cambio, o sea la velocidad media de la partícula:

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = 2i + 4.4j$$

Al tomar incrementos cada vez menores nos aproximamos más a la rapidez instantánea de cambio, alcanzándola en el límite; para esto utilizemos un incremento cualquiera  $\Delta t$ :

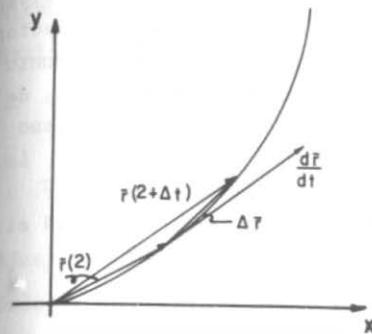


Fig. 3.4.1

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}(2 + \Delta t) - \vec{r}(2) \\ &= 2(2 + \Delta t)i + (2 + \Delta t)^2j - 4i - 4j \\ &= 2\Delta t i + (4\Delta t + \Delta t^2)j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} &= 2i + (4 + \Delta t)j \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} &= 2i + 4j = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = \vec{v} = \frac{d}{dt} \end{aligned}$$

Si calculamos la pendiente de la tangente a la trayectoria dada por las ecuaciones  $x=2t$ ,  $y=t^2$ , o sea  $y = \frac{x^2}{4}$ , tendremos, ya que para  $t=2$ ,  $x=4$ ;  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} \Big|_{x=4} = 2$  que es la misma que la del vector  $\frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_{t=2}$ ; por lo tanto este vector es tangente a la trayectoria, según se ilustra en la fig. 3.4.1

El procedimiento que hemos seguido, ya lo habrás identificado como la regla de los 4 pasos de la derivación, sólo que aplicada ahora a funciones vectoriales.

Definición 3.4.1

Si  $\vec{u}(t)$  es una función vectorial cualquiera de variable real, y existe  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t}$  se dice que la función  $\vec{u}(t)$  es derivable, y al límite obtenido se le llama "derivada de la función vectorial" y se denota por  $\frac{d\vec{u}}{dt}$ ,  $\vec{u}'(t)$  cuando la variable t es el tiempo se usa  $\dot{\vec{u}}$

La propiedad de tangencia del vector velocidad o simplemente del vector derivada, es general para cualquier tipo de función susceptible de ser representada por una curva en  $E_2$  o en  $E_3$ .

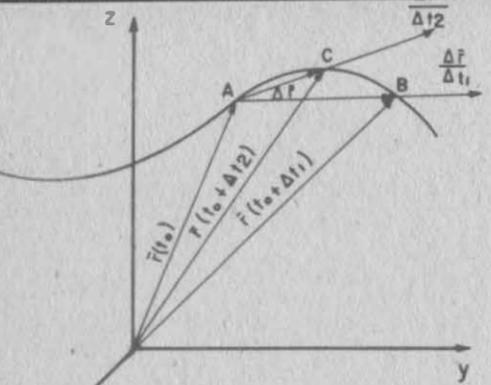


Fig. 3.4.2

A otro incremento  $\Delta t_2 < \Delta t_1$ , se definirá el punto C y le corresponderá un vector secante  $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t_2}$ , que obviamente es más cercano a la tangente en A que  $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t_1}$ ; si se prosigue así, dando incrementos cada vez más pequeños a la variable independiente "t", se alcanzará a la tangente en el límite.

Por la propiedad ya demostrada de que el límite de una función vectorial está compuesto por los límites de las funciones componentes, se puede afirmar que la derivada de una función vectorial está compuesta por las derivadas de las funciones componentes. Así para la función 3.1.2.2 veremos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 3.4.2

Hallar la derivada de:  $\vec{r}(t) = 2ti + t^2j$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) + \Delta \vec{r} &= 2(t + \Delta t)i + (t + \Delta t)^2j \\ \Delta \vec{r} &= 2(t + \Delta t)i + (t + \Delta t)^2j - 2ti - t^2j \\ \Delta \vec{r} &= 2\Delta ti + (2t\Delta t + (\Delta t)^2)j \\ \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} &= 2i + 2tj + \Delta tj \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} &= \vec{r}'(t) = 2i + 2tj \\ \vec{r}'(t) \Big|_{t=2} &= 2i + 2tj \Big|_{t=2} = 2i + 4j \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4.3

Hallar la derivada de:  $\vec{r}(t) = i \sin t - i \cos t^2 + e^t k$

$$\vec{r}'(t) = i [\cos t + 2t (\sin t^2)] + e^t k$$

Ejemplo 3.4.4

Dado  $\vec{r}(t) = \ln(t + e)i + \tan(t)j + \sec(t)k$ , hallar  $\vec{r}'(0)$

$$\vec{r}'(t) = \frac{1}{t + e} i - \sec^2(t)j + \sec(t)\tan(t)k$$

$$\vec{r}'(0) = e^{-1} i - j$$

Dijimos que una curva era suave si tenía tangente única y definida en todos sus puntos; matemáticamente esto significa que la función representada por esa curva debe ser derivable en todos y cada uno de sus puntos.

Ejemplo 3.4.5

La función  $\vec{r}(t) = 2ti + t^2j$  es derivable para todo valor de t, luego se trata de una curva suave.

Ejemplo 3.4.6.

La función  $\vec{r}(t) = (t - \sin t)i + (1 - \cos t)j$  no es derivable en  $t=0$ . En efecto  $\vec{r}'(t) = (1 - \cos t)i + \sin t j$   $\vec{r}'(0) = 0i + 0j$  que no define dirección. Esta curva, la cicloide, fig.3.4.3., es seccionalmente suave en el intervalo  $0 < t < 2\pi$ .

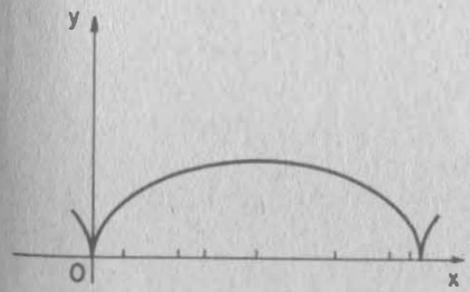


Fig. 3.4.3

Si hubiéramos seguido la regla de los 4 pasos, hubiéramos encontrado vectores tangentes diferentes en  $t=0$ , según hubiéramos derivado por la derecha o por la izquierda.

Si  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$  para  $a \neq b$ , dijimos que se trata de una curva cerrada. Si en tal caso se tiene  $\vec{r}'(a) = \vec{r}'(b)$  se trata de una curva cerrada simple.

## Ejemplo 3.4.7

La función  $\vec{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 3 \cos t \mathbf{k}$  es una curva cerrada simple; en efecto, ya vimos que:

$$\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi) = 3\mathbf{k}$$

$$\vec{r}'(t) = \cos t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} - 3 \sin t \mathbf{k}$$

$$\vec{r}'(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$\vec{r}'(2\pi) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

Lo contrario ocurre con la curva de la fig. 3.4.4 llamada luna de pascal, que es una curva cerrada en lazo; en efecto, su ecuación vectorial es:

$$\vec{r}(t) = (5 \cos t + 3) \cos t \mathbf{i} + (5 \cos t + 3) \sin t \mathbf{j}$$

En donde:  $\vec{r}(126.8^\circ) = \mathbf{0}$

y  $\vec{r}(233.2^\circ) = \mathbf{0}$

Por otra parte, derivando y

simplificando:

$$\vec{r}'(t) = -(5 \sin 2t + 3 \sin t) \mathbf{i} + (5 \cos 2t + 3 \cos t) \mathbf{j}$$

$$\vec{r}'(233.2^\circ) = -2.4\mathbf{i} - 3.2\mathbf{j}$$

$$\vec{r}'(126.8^\circ) = 2.4\mathbf{i} - 3.2\mathbf{j}$$

Con lo anterior es posible deducir fórmulas para derivar combinaciones de funciones vectoriales.

Sean  $\vec{u}(t)$ ,  $\vec{v}(t)$  y  $\vec{w}(t)$  funciones vectoriales y  $\phi(t)$  una función escalar, entonces:

$$\frac{d}{dt} [\vec{u}(t) + \vec{v}(t)] = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}$$

3.4.1.1

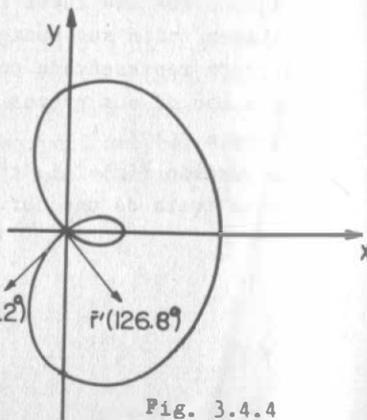


Fig. 3.4.4

Demostración:

$$\vec{r}(t) = \vec{u}(t) + \vec{v}(t)$$

$$\vec{r}(t) + \Delta \vec{r}(t) = \vec{u}(t + \Delta t) + \vec{v}(t + \Delta t)$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t) + \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$$

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t} + \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{u}(t) + \vec{v}(t)] = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Las siguientes fórmulas se dejan al alumno para su demostración:

$$\frac{d}{dt} [\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)] = \vec{u}(t) \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}(t) \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \quad \dots 3.4.1.2$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \times \vec{v} \quad \dots 3.4.1.3$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \frac{d\vec{w}}{dt} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{w} + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} \times \vec{w} \quad \dots 3.4.1.4$$

$$\frac{d}{dt} [(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \frac{d\vec{w}}{dt} + (\vec{u} \times \frac{d\vec{v}}{dt}) \times \vec{w} + (\frac{d\vec{u}}{dt} \times \vec{v}) \times \vec{w} \quad \dots 3.4.1.5$$

$$\frac{d}{dt} [\phi \vec{u}] = \phi \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \vec{u} \quad \dots 3.4.1.6$$

**Teorema 3.4.1** Es condición necesaria y suficiente para que una función vectorial  $\vec{r}(t)$  sea de módulo constante que

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

3.4.2 Derivadas sucesivas.

## Ejemplo 3.4.8

Si se vuelve a considerar la función 3.1.2.1  $\vec{r}(t) = 2t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$  y se evalúa su derivada para  $t=1$  y  $t=2$  tendremos:

$$\vec{v}(1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

y  $\vec{v}(2) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

Como ves, la velocidad obtenida ha respondido al cambio en el tiempo y ha variado tanto en magnitud como en sentido, como se representa en la fig. 3.4.5; la rapidez de cambio de la velocidad, mejor conocida como "aceleración", se obtiene dividiendo el vector incremento de velocidad entre el incremento de tiempo y tomando el límite de dicho cociente, cuando el divisor tiende a cero.

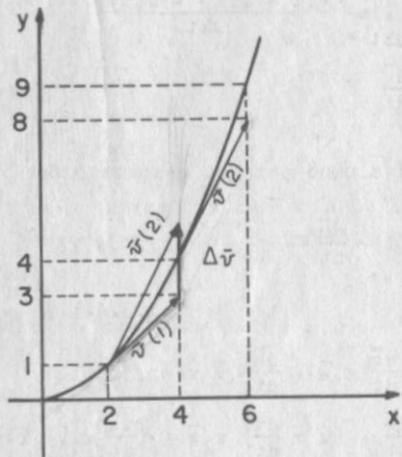


Fig. 3.4.5

Como te habrás dado cuenta, cada nueva derivada define en general una nueva función de la variable independiente y mientras esa función sea derivable, será posible encontrar la derivada de orden superior; así pues las derivadas de orden superior se obtienen igual que para funciones escalares, esto es, calculando la derivada de la derivada.

$$\frac{d^n(\bar{u}(t))}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{d^{n-1} \bar{u}(t)}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{d^{n-2} \bar{u}(t)}{dt} \right) \right] \dots \quad 3.4.2.1$$

y para el caso tratado  $\bar{a}' = 0$

$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$  y como puedes calcular el caso expuesto:

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}(2i + 2tj) = 2j$$

Si ahora se diese el caso de que la aceleración también cambiase con un cambio en el tiempo, se obtendría una rapidez de cambio de la aceleración esto es, una aceleración de la aceleración; matemáticamente vendría a ser la tercera derivada de  $\bar{r}(t)$ , esto es:

$$\bar{a}' = \frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d^2\bar{v}}{dt^2} = \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}$$

### 3.4.5 Diferencial Ordinaria.

Si se considera nuevamente la función 3.1.2.1 para los dos tiempos 2 y 2.1 seguidos, tendremos:

$$\bar{r}(2) = 4i + 4j$$

$$\bar{r}(2.1) = 4.2i + 4.41j$$

$$\Delta \bar{r} = 0.2i + 0.41j$$

donde se ve que ambas componentes  $x(t)$ ,  $y(t)$  sufrieron incrementos; como el incremento de la variable independiente "t" es pequeño (0.1) se pueden calcular aquellos en forma aproximada por medio de diferenciales, así:

$$\Delta x = dx = 2dt = 2(0.1) = 0.2$$

$$\Delta y = dy = 2t dt = 2(2)(0.1) = 0.4$$

como puede observarse, estos incrementos corresponden aproximadamente con los componentes del incremento de la función  $\bar{r}$ ; al vector compuesto por estas dos diferenciales se le llama diferencial de la función vectorial; para que ésta exista se requiere que la función sea diferenciable, lo que se define como sigue:

**Definición 3.4.2** Una función  $\bar{r}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  es diferenciable en  $t=t_0$  si y sólo si, su incremento puede escribirse como:

$$\Delta \bar{r} = [x'_1(t_0)\Delta t + \eta_1\Delta t]\bar{e}_1 + [x'_2(t_0)\Delta t + \eta_2\Delta t]\bar{e}_2 + \dots \dots \dots + [x'_n(t_0)\Delta t + \eta_n\Delta t]\bar{e}_n \quad \dots \quad 3.4.3.1$$

donde:

$$\bar{r} \cdot \bar{e}_i = x_i(t) \quad \eta_i \rightarrow 0 \quad \text{si } \Delta t \rightarrow 0, \forall i$$

Ahora bien, sabemos que la función 3.1.2.1 es diferenciable en  $t=2$  ya que:

$$\Delta \bar{r} = (2(t + \Delta t) - 2t)i + ((t + \Delta t)^2 - t^2)j = 2\Delta t i + (2t\Delta t + \Delta t^2)j$$

$$\text{o bien: } \Delta \bar{r} = (2\Delta t + 0\Delta t)i + (4\Delta t + \Delta t\Delta t)j$$

$$\text{donde: } h_1 = 0 = 0 \quad h_2 = \Delta t \rightarrow 0 \\ \text{si } \Delta t \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad e_i \Delta t \rightarrow 0$$

Puesto que los paréntesis rectangulares de 3.4.3.1 contienen los incrementos de las funciones componentes, se sigue inmediatamente que una función vectorial será diferenciable si y solo si lo son todos sus componentes. Por lo mismo, podemos afirmar que para que una función vectorial de variable real sea diferenciable es necesario y suficiente que sea derivable,

**Definición 3.4.3** Se llama diferencial de una función vectorial

$$\vec{r} [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \text{ a la expresión } d\vec{r} = x'_1(t)dt\vec{e}_1 + x'_2(t)dt\vec{e}_2 + \dots + x'_n(t)dt\vec{e}_n \quad \dots \quad 3.4.3.2$$

donde  $\vec{r} \cdot \vec{e}_1 = x_1(t)$

o bien  $d\vec{r} = [x'_1(t)\vec{e}_1 + x'_2(t)\vec{e}_2 + \dots + x'_n(t)\vec{e}_n] dt \quad \dots \quad 3.4.3.3$

puede observarse que la expresión entre paréntesis es la derivada de  $\vec{r}(t)$  por lo que:

$$d\vec{r} = \vec{r}'(t)dt$$

que tiene la misma forma que la diferencial de una función real; o bien, puesto que:

$$x'_1(t)dt = d(x_1), \quad d\vec{r} = [dx_1, dx_2, \dots, dx_n]$$

en la función 3.1.2.1, que ya vimos es diferenciable en  $t=2$ , su diferencial vale

$$d\vec{r} = (2i + 4j)dt = 2dti + 4dtj$$

si  $\Delta t = dt = 0.1$ ,  $d\vec{r} = 0.2i + 0.4j$

### 3.4.4 Variación de una Función Vectorial con Respecto al Arco de Curva.

De la ecuación 3.3.1.1 puede verse que "s" es función de "t" y puesto que  $\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{t^2+1}$ , es obvio que también es posible la función inversa; sin embargo, el despejar a "t" es engorroso, excepto en el caso de una circunferencia, como puedes ver en seguida:

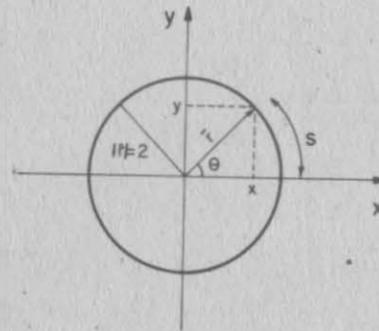


Fig. 3.4.6

ó (arco = radio \* ángulo); como  $\theta = \frac{s}{2}$  entonces:

$$\vec{r}(t) = 2 \cos 2\pi t i + 2 \sin 2\pi t j \quad \dots \quad 3.4.4.a$$

$$\vec{r}(s) = 2 \cos \frac{s}{2} i + 2 \sin \frac{s}{2} j \quad \dots \quad 3.4.4.b$$

Observando 3.4.4.b podemos ver que su derivada  $\vec{r}'(s) = -\sin \frac{s}{2} i + \cos \frac{s}{2} j$  es perpendicular al vector de posición  $\vec{r}$ , pero además es unitario como puede comprobarse con su módulo.

Si ahora generalizamos para cualquier curva encontraremos lo siguiente:

$$\Delta \vec{r} = |\Delta \vec{r}| \vec{e}, \quad \text{donde } |\vec{e}| = 1 \quad \text{así } \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} \vec{e}$$

si tomamos el límite:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \vec{e}$$

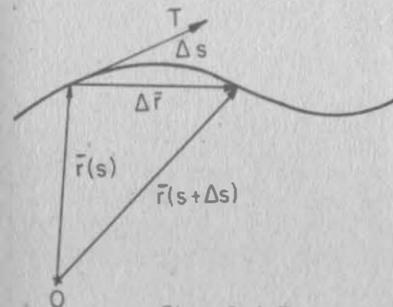


Fig. 3.4.7

El primer límite es el de la relación cuerda/arco y es igual a la unidad, y el del segundo es el de un vector siempre unitario y alojado en  $\Delta \vec{r}$ , que como sabemos viene a ser un vector tangente a la curva, a este vector se le acostumbra designar por "T" (fig.3.4.7)

$$\therefore \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}$$

Si ahora tomamos la ecuación 3.4.4.a y derivamos con respecto al tiempo, obtendremos el vector  $\bar{v}$ , definido como velocidad.

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = -4\pi \text{sen } 2\pi t \mathbf{i} + 4\pi \text{cos } 2\pi t \mathbf{j} \quad 3.4.4.d$$

Al módulo de  $\bar{v}$  se le llama rapidez y es igual en este caso a:

$$|\bar{v}| = \sqrt{16\pi^2 \text{sen}^2 2\pi t + 16\pi^2 \text{cos}^2 2\pi t} = 4\pi$$

o bien:

$$\bar{T} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\bar{v}}{\frac{ds}{dt}} \quad 3.4.4.e$$

En general  $\bar{v}$  se define en términos del tiempo:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \bar{T} \frac{ds}{dt} \quad 3.4.4.f$$

y ya que  $\bar{T}$  es un vector unitario, entonces el escalar  $\frac{ds}{dt}$  será el módulo de la velocidad, o sea, la rapidez con que una partícula recorre una curva dada. Entonces, para este caso  $|\bar{v}| = \bar{T} \frac{ds}{dt}$ , además como  $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ ;  $|\bar{v}| = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}$  en este caso  $\bar{v} = 4\pi \bar{T}$ .

#### Ejemplo 3.4.9

Sea la partícula descrita en el ejemplo de este párrafo que se mueve sobre una circunferencia de radio  $2\pi$ , y velocidad angular de  $60 \text{ R.F.M.}$  Calcular  $\frac{d\bar{T}}{ds}$ , el ángulo que forma este vector con el vector tangente  $\bar{T}$  y su relación con la aceleración de la partícula.

Solución:

En virtud de que

$$\bar{T} = -\text{sen } \frac{s}{2} \mathbf{i} + \text{cos } \frac{s}{2} \mathbf{j} \quad (\text{Ec. } 3.4.4.c)$$

entonces

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = -\frac{1}{2} \text{cos } \frac{s}{2} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \text{sen } \frac{s}{2} \mathbf{j} \quad 3.4.9.a$$



comparando  $\frac{d\bar{T}}{ds}$  con  $\bar{T}$  puede observarse que el producto :

$$\frac{d\bar{T}}{ds} \cdot \bar{T} = \frac{1}{2} \text{cos } \frac{s}{2} \left( \text{sen } \frac{s}{2} \right) - \frac{1}{2} \text{sen } \frac{s}{2} \left( \text{cos } \frac{s}{2} \right) = 0$$

$\Rightarrow \frac{d\bar{T}}{ds}$  y  $\bar{T}$  forman un ángulo de  $90^\circ$  (esto comprueba el teorema 3.4.1)

recordando de (3.4.4.a) que  $\bar{v} = -4\pi \text{sen } 2\pi t \mathbf{i} + 4\pi \text{cos } 2\pi t \mathbf{j}$  entonces  $\bar{a} = -8\pi^2 \text{cos } 2\pi t \mathbf{i} - 8\pi^2 \text{sen } 2\pi t \mathbf{j} \quad \dots 3.4.9.b$  y puesto que  $\theta = 2\pi t = \frac{s}{2}$

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = -\frac{1}{2} \text{cos } \theta \mathbf{i} - \frac{1}{2} \text{sen } \theta \mathbf{j}$$

$$\bar{a} = -8\pi^2 \text{cos } \theta \mathbf{i} - 8\pi^2 \text{sen } \theta \mathbf{j}$$

$$\bar{a} = 16\pi^2 \frac{d\bar{T}}{ds}$$

#### Ejemplo 3.4.10

Del ejemplo 3.4.9 se han obtenido dos conclusiones

$$\frac{d\bar{T}}{ds} \perp \bar{T} \quad \text{y} \quad \frac{d\bar{T}}{ds} \parallel \bar{a}$$

Comprobar si es posible generalizar estas conclusiones a cualquier tipo de movimiento.

a) Del teorema (3.4.1) como  $\bar{T}$  es de módulo constante (unitario) su derivada siempre será perpendicular a él, por lo tanto  $\frac{d\bar{T}}{ds}$  será perpendicular a  $\bar{T}$  en cualquier caso.

Del ejemplo 3.4.8 cuando  $\bar{r} = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ ,  $\bar{a} = 2\mathbf{j}$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \bar{T} = \frac{2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}}{\sqrt{4 + 4t^2}}$$

$$\text{luego entonces } \bar{a} \cdot \bar{T} = \frac{4t}{\sqrt{4 + 4t^2}} \neq 0$$

$\Rightarrow \bar{a}$  no es  $\perp$  a  $\bar{T}$  y como ya vimos que siempre  $\frac{d\bar{T}}{ds}$  es  $\perp$  a  $\bar{T}$  puede concluirse que  $\bar{a}$  no es paralela a  $\frac{d\bar{T}}{ds}$  esto es, no siempre  $\bar{a}$  es  $\parallel \frac{d\bar{T}}{ds}$ .

b) Siguiendo el ejemplo de este párrafo. Puesto que:

$$\vec{r}(s) = \rho \cos \frac{s}{\rho} \mathbf{i} + \rho \sin \frac{s}{\rho} \mathbf{j} \dots \dots \dots 3.4.10.a$$

$$\text{entonces } \vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = -\sin \frac{s}{\rho} \mathbf{i} + \cos \frac{s}{\rho} \mathbf{j} \dots \dots \dots 3.4.10.b$$

donde  $\rho$  es número real positivo y representa el radio de cualquier circunferencia.

$$\Rightarrow \vec{T} \perp \vec{r}(s) \text{ y como } \frac{d\vec{T}}{ds} \perp \vec{T} \dots \dots \dots 3.4.10.c$$

veamos que  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  es paralelo a  $\vec{r}(s)$  y de sentido contrario, o sea, dirigido hacia el centro de la circunferencia. Puede definirse un vector unitario " $\vec{N}$ " en la dirección  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  y entonces de 3.4.10.c podemos afirmar que  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  es " $k$ " veces el vector  $\vec{N}$  alojado en

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k \vec{N} \dots \dots \dots 3.4.10.d$$

Ejemplo 3.4.11 Obtener los valores de  $\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|$  para las circunferencias de radios 2, 4, 6 y  $\rho$  y asociar los resultados al valor de  $k$ .

Solución:

Si  $\rho$  es igual a 2 en la ecuación 3.4.10.a

$$\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} \cos^2 \frac{s}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{s}{2}} = \frac{1}{2}$$

Para radios 4, 6 y  $\rho$  comprueba que se obtendrán  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{6}$ , y  $\frac{1}{\rho}$  respectivamente.

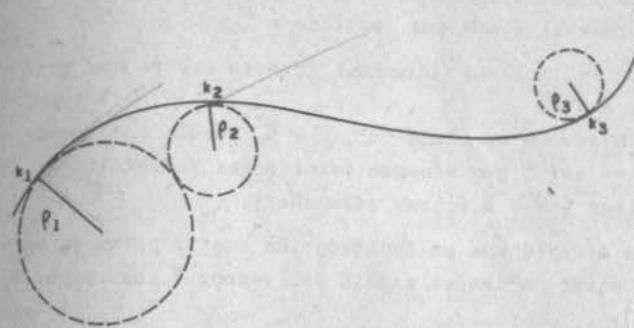
Como sabemos que todo vector dividido entre su módulo da un vector unitario, y ya que  $\vec{N}$  es unitario, de 3.4.10.d

$$\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = k$$

Esto indica que  $k$  es el recíproco del radio e indica qué curvatura se tiene en cada punto de las circunferencias.

$$\Rightarrow k = \frac{1}{\rho} \text{ o bien } \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{N} = k\vec{N}$$

Ejemplo 3.4.12: Generalizar las conclusiones del ejemplo 3.4.11 a cualquier curvatura.



Solución:

Fig. 3.4.8

Ya vimos que  $\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = k$  mide la rapidez con que cambia la dirección de " $\vec{T}$ " al recorrer un arco de circunferencia. Obviamente, si la curva es una recta, " $\vec{T}$ " no cambia y  $k = 0$ .

Una curva cualquiera, mientras más se desasemeje de una recta, " $\vec{T}$ " cambiará más rápidamente de dirección,  $k$ , por consiguiente será mayor y diremos que tiene una curvatura más grande.

Por similitud con lo que pasa en la circunferencia, al recíproco de " $k$ " se le llama "radio de curvatura". Definido éste en un punto de la curva, será posible trazar un circuito tangente a la curva, con ese radio. A ese círculo se le llama "círculo oscular" (osculo es sinónimo de beso) y será diferente, desde luego, en cada punto de la curva. Al plano que contiene a este círculo y por ende, a los vectores " $\vec{T}$ " y " $\vec{N}$ " se le llama "plano oscular".

A mayor curvatura, el radio " $\rho$ " de curvatura será menor y viceversa. El radio de curvatura de una recta no está definido (tiende a infinito).

A la ecuación (3.4.10.d) se le conoce como "Primera Fórmula de Frenet-Serret".

Ejemplo 3.4.13.- Obtener la manera de comprobar si una curva cualquiera es plana.

Solución:

Del ejemplo 3.4.10 se sabe que en cada punto de una curva existen  $\vec{T}$  y  $\vec{N}$  unitarios y que  $\vec{T} \perp \vec{N}$ . por ello  $\vec{T} \times \vec{N}$  debe ser otro vector unitario normal al plano que contiene a  $\vec{T}$  y  $\vec{N}$ .

Si a éste vector se le llama binormal (puesto que ya hay otro - normal)  $\Rightarrow \vec{T} \times \vec{N} = \vec{B}$  . . . . . 3.4.13.a en una curva alojada en un plano "α",  $\vec{T}$  y  $\vec{N}$  pueden cambiar de - dirección pero no así  $\vec{B}$  que siempre resulta ser perpendicular al plano que contiene a  $\vec{T}$  y  $\vec{N}$  (plano osculador).

Por ello puede decirse que un indicador de que la curva ya no - se aloja en el plano "α" es el cambio del vector  $\vec{B}$  con respecto al arco "s"

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{B}}{ds} &= \frac{d}{ds} (\vec{T} \times \vec{N}) \\ &= \frac{d\vec{T}}{ds} \times \vec{N} + \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds} \\ &= k\vec{N} \times \vec{N} + \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds} \\ &= \vec{T} \times \frac{d\vec{N}}{ds} \quad \dots 3.4.13.b \end{aligned}$$

De 3.4.13.b

$$\frac{d\vec{B}}{ds} \perp \vec{T} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{B}}{ds} \perp \frac{d\vec{N}}{ds}$$

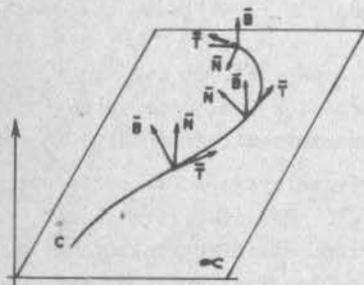


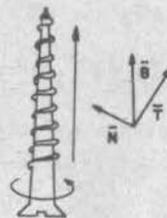
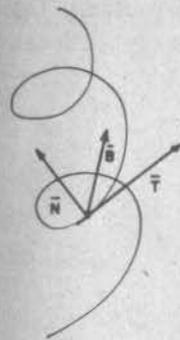
Fig. 3.4.9

Del teorema 3.4.1  $\vec{B} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{B}}{ds} \perp \vec{B}$

y si  $\frac{d\vec{B}}{ds}$  es perpendicular a  $\vec{B}$  y a  $\vec{T}$ , su dirección debe ser para - lela a  $\vec{N}$ . Por ello  $\frac{d\vec{B}}{ds}$  puede expresarse como un coeficiente - "ζ" que afecta el vector  $\vec{N}$  y que indicará el cambio del vector  $\vec{B}$ .

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\zeta \vec{N}$$

Este coeficiente  $\zeta$  es llamado Torsión porque indica el torcimien - to que sufre el plano osculador, al recorrerse la curva en el sen - tido positivo de crecimiento de "s" y al inverso de  $\zeta$  se le conoce como radio de tor - sión  $\rho$ .



A las curvas alabeadas semejan - tes a la cuerda de un torni - llo de rosca derecha (Fig.3.4.10) se les asigna torsión positi - va (sentido dextrógiro) como

$\frac{d\vec{B}}{ds}$  es contrario al vector  $\vec{N}$  debe llevar signo menos para cumplir con la convención ci - tada.

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\zeta \vec{N} \quad \dots 3.4.13.c$$

Fig. 3. 4. 10

Si  $\zeta$  vale cero  $\frac{d\vec{B}}{ds} = -\zeta \vec{N} = 0$  significa que  $\vec{B}$  no sufre cambio - alguno a lo largo de la curva y por lo mismo se trata de una cur - va plana.

A la ecuación 3.4.13.c se le conoce como 2a. fórmula de Frenet - Serret.

Ejemplo 3.4.14.- Encontrar el cambio del vector  $\vec{N}$  con respecto al arco de curva "s".

Se conoce que  $\frac{d\vec{T}}{ds} = k\vec{N}$  (1a. fórmula de Frenet-Serret) y que -

$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\zeta \vec{N}$  (2a. fórmula de Frenet-Serret) si se utiliza la ecua - ción citada en el ejemplo 3.4.13

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{B} \times \vec{T} \\ \text{y} \quad \frac{d\vec{N}}{ds} &= \frac{d\vec{B}}{ds} \times \vec{T} + \vec{B} \times \frac{d\vec{T}}{ds} = -\zeta \vec{N} \times \vec{T} + k\vec{B} \times \vec{N} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{N}}{ds} &= \zeta \vec{B} - k\vec{T} \end{aligned} \quad 3.4.14.a$$

A la ecuación 3.4.14.a se le conoce como 3a. fórmula de Frenet-Serret.

Ejemplo 3.4.15.- Comprobar que en un movimiento circular uniforme sólo existe aceleración normal y que ésta se dirige al centro de la circunferencia.

Solución:

Del ejemplo 3.4.9:  $\theta = 2\pi t$

Si  $\vec{r} = \rho \cos 2\pi t \mathbf{i} + \rho \sin 2\pi t \mathbf{j}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2\pi\rho \sin 2\pi t \mathbf{i} + 2\pi\rho \cos 2\pi t \mathbf{j}$$

$$\vec{a} = -4\pi^2\rho \cos 2\pi t \mathbf{i} - 4\pi^2\rho \sin 2\pi t \mathbf{j}$$

Como la velocidad angular es constante no debe existir proyecciones de  $\vec{a}$  en la dirección de  $\vec{T}$ , o sea,  $|\vec{a}_T| = \vec{a} \cdot \vec{T} = 0$

$$\begin{aligned} |\vec{a}_T| &= \vec{a} \cdot \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|} \\ &= (-4\pi^2\rho \cos 2\pi t \mathbf{i} - 4\pi^2\rho \sin 2\pi t \mathbf{j}) \cdot \frac{(-2\pi\rho \sin 2\pi t \mathbf{i} + 2\pi\rho \cos 2\pi t \mathbf{j})}{2\pi\rho} \\ &= 4\pi^2\rho \cos 2\pi t \sin 2\pi t - 4\pi^2\rho \sin 2\pi t \cos 2\pi t \\ &= 0 \quad (\text{QED}) \end{aligned}$$

La dirección de  $\vec{a}_N$  será la misma de  $\vec{a}$  y puede verse que las componentes de  $\vec{a}$ , aunque diferentes en magnitud, tienen igual dirección pero sentido contrario al vector de posición  $\vec{r}$ .

Ejemplo 3.4.16.- Obtener las componentes según  $\vec{T}$  y  $\vec{N}$  de la aceleración para cualquier tipo de trayectoria.

Solución:

Ya que  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  y  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \right) = \vec{T} \left( \frac{ds}{dt} \right)$

entonces

$$\vec{a} = \vec{T} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{dt}$$

también

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

entonces

$$\vec{a} = \vec{T} \frac{d^2s}{dt^2} + \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{T} \frac{d^2s}{dt^2} + v^2 \kappa \vec{N}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \frac{v^2}{\rho} \vec{N} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \frac{|\vec{v}|^2}{\rho} \vec{N} \quad 3.4.16.a$$

Puede concluirse de 3.4.16.a que la aceleración está siempre en un plano formado por los vectores  $\vec{T}$  y  $\vec{N}$  es decir, en el plano osculador y obviamente puede descomponerse en aceleración tangencial cuya magnitud es:

$$|\vec{a}_T| = \frac{d^2s}{dt^2}$$

y aceleración normal con magnitud

$$|\vec{a}_N| = \frac{v^2}{\rho} = \frac{|\vec{v}|^2}{\rho}$$

Ejemplo 3.4.17.- A partir de las ecuaciones del ejemplo 3.4.16 calcular la curvatura de cualquier curva.

Solución:

Sabemos que

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{T}$$

y que:

$$\vec{a} = \left( \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \frac{|\vec{v}|^2}{\rho} \vec{N} \right)$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \frac{ds}{dt} \vec{T} \times \left( \frac{d^2s}{dt^2} \vec{T} + \frac{|\vec{v}|^2}{\rho} \vec{N} \right)$$

$$\bar{v} \times \bar{a} = \frac{|\bar{v}|^3}{\rho} \bar{T} \times \bar{N} = \frac{|\bar{v}|^3}{\rho} \bar{B}$$

así  $|\bar{v} \times \bar{a}| = \frac{|\bar{v}|^3}{\rho} \implies k = \frac{1}{\rho} = \frac{|\bar{v} \times \bar{a}|}{|\bar{v}|^3}$

como ves, también de esta ecuación puede calcularse el vector  $\bar{B}$ .

$$\bar{B} = \frac{\bar{v} \times \bar{a}}{|\bar{v} \times \bar{a}|}$$

Ejemplo 3.4.18.- Calcular para la curva  $\bar{r} = \frac{2}{3} t^3 \bar{i} + t \bar{j} + t^2 \bar{k}$  en  $t=1$  los valores de  $\bar{v}$ ,  $\bar{a}$ ,  $\bar{a}_N$ ,  $\bar{a}_T$ ,  $k$  y  $\zeta$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = 2t^2 \bar{i} + \bar{j} + 2t \bar{k}$$

como  $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)} = \sqrt{4t^4 + 1 + 4t^2}$

$$|\bar{v}| = \frac{ds}{dt} = 1 + 2t^2$$

$$\bar{T} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}/dt}{ds/dt} = \frac{2t^2 \bar{i} + \bar{j} + 2t \bar{k}}{1 + 2t^2}$$

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = 4t \bar{i} + 2 \bar{k}$$

$$\bar{v} \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2t^2 & 1 & 2t \\ 4t & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 4t^2 \bar{j} - 4t \bar{k}$$

$$|\bar{v} \times \bar{a}| = \sqrt{4 + 16t^4 + 16t^2} = 2(1 + 2t^2)$$

$$\bar{B} = \frac{\bar{i} + 2t^2 \bar{j} - 2t \bar{k}}{1 + 2t^2}$$

como  $\bar{N} = \bar{B} \times \bar{T} = \frac{2t \bar{i} - 2t \bar{j} + (1 - 2t^2) \bar{k}}{1 + 2t^2}$

sabemos que  $|\bar{a}_N| = \bar{a} \cdot \bar{N}$

$$|\bar{a}_N| = (4t \bar{i} + 2 \bar{k}) \cdot \left( \frac{2t \bar{i} - 2t \bar{j} + (1 - 2t^2) \bar{k}}{1 + 2t^2} \right) = \frac{4t^2 + 2}{1 + 2t^2} = 2$$

$$\bar{a}_N = \frac{4t \bar{i} - 4t \bar{j} + 2(1 - 2t^2) \bar{k}}{1 + 2t^2}$$

Del ejemplo (3.4.16):

$$|\bar{a}_N| = \frac{v^2}{\rho} \quad \therefore 2 = \frac{(1 + 2t^2)^2}{\rho} \implies \rho = \frac{(1 + 2t^2)^2}{2}$$

y  $k = \frac{1}{\rho} = \frac{2}{(1 + 2t^2)^2}$

$$|\bar{a}_T| = \bar{a} \cdot \bar{T} = (4t \bar{i} + 2 \bar{k}) \cdot \left( \frac{2t^2 \bar{i} + \bar{j} + 2t \bar{k}}{1 + 2t^2} \right)$$

$$\therefore |\bar{a}_T| = 4t = \frac{d^2 s}{dt^2} \implies \bar{a}_T = \frac{8t^3 \bar{i} + 4t \bar{j} + 8t^2 \bar{k}}{1 + 2t^2}$$

Finalmente:

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = -\zeta \bar{N} = \frac{d\bar{B}/dt}{ds/dt} = \frac{-4t \bar{i} + 4t \bar{j} - (4t^2 - 2) \bar{k}}{(1 + 2t^2)^3}$$

$$-\zeta \bar{N} = -\zeta \left( \frac{2t \bar{i} - 2t \bar{j} + (1 - 2t^2) \bar{k}}{1 + 2t^2} \right)$$

Entonces  $\zeta = \frac{2}{(1 + 2t^2)^2}$

$\zeta$  también pueden obtenerse de la siguiente forma:

$$\bar{v} \times \bar{a} = |\bar{v} \times \bar{a}| \bar{B}$$

si se deriva respecto a "t":

$$\bar{v} \times \frac{d\bar{a}}{dt} + \bar{a} \times \bar{a} = |\bar{v} \times \bar{a}| \frac{d\bar{B}}{dt} + \bar{B} \frac{d}{dt} |\bar{v} \times \bar{a}|$$

Ahora multipliquemos escalarmente por  $\bar{a}$ , sabiendo que  $\bar{B} \cdot \bar{a} = 0$

$$\bar{v} \times \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{a} = |\bar{v} \times \bar{a}| \frac{d\bar{B}}{dt} \cdot \bar{a} \quad 3.4.18.a$$

Ahora, puesto que:

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = -\zeta \bar{N}, \quad \frac{d\bar{B}}{dt} = -\zeta \bar{N} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = -\zeta \bar{N} |\bar{v}| \quad 3.4.18.b$$

Así, al sustituir (3.4.18.b) en (3.4.18.a)

$$\begin{aligned}\bar{v} \times \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{a} &= - \left| \bar{v} \times \bar{a} \right| \left| \bar{v} \right| \zeta \frac{\bar{N} \cdot \bar{a}}{|\bar{a}_N|} \\ &= - \left| \bar{v} \times \bar{a} \right| \left| \bar{v} \right| \zeta \left| \bar{a}_N \right|\end{aligned}$$

como:  $\frac{d\bar{a}}{dt} = 4\mathbf{i}$

$$\bar{v} \times \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{a} = - \bar{v} \times \bar{a} \cdot \frac{d\bar{a}}{dt} = - \left| \bar{v} \times \bar{a} \right| \left| \bar{v} \right| \zeta \left| \bar{a}_N \right|$$

$$\frac{\bar{v} \times \bar{a}}{\left| \bar{v} \times \bar{a} \right|} \cdot \frac{d\bar{a}}{dt} \frac{1}{\left| \bar{v} \right| \left| \bar{a}_N \right|} = \zeta$$

$$(\bar{B} \cdot \frac{d\bar{a}}{dt}) \frac{1}{\left| \bar{v} \right| \left| \bar{a}_N \right|} = \zeta$$

$$\therefore \zeta = \left( \frac{\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}}{1 + 2t^2} \cdot 4\mathbf{i} \right) \frac{1}{(1 + 2t^2)^2}$$

$$\zeta = \left( \frac{4}{1 + 2t^2} \right) \left( \frac{1}{2(1 + 2t^2)} \right) = \frac{2}{(1 + 2t^2)^2}$$

Ejemplo 3.4.19.- Este ejemplo te lo dejaremos como ejercicio final y consta de las siguientes reflexiones:

- ¿Qué pasa cuando una carretera no tiene peralte en las curvas?
- ¿Cuánto vale la torsión?
- ¿Qué causa los vuelcos o salidas de los coches en las curvas?
- ¿Al entrar a una a una curva debes hacerlo frenando o acelerando?
- ¿Por qué?
- ¿Debes tomar una curva a alta o a baja velocidad? ¿Por qué?
- ¿Al ir saliendo de la curva te ayudas acelerando el coche o conservando la velocidad? ¿Por qué?
- Si cortas la curva invadiendo el otro carril, es mejor o peor que tomar tu carril ¿por qué?
- ¿Qué causa el peralte cuando la torsión es negativa?
- ¿Hay curva negativa? ¿Por qué?
- ¿El vector tangente puede cambiar en magnitud?

### 3.4.5 Obtención de la ecuación vectorial de una curva.

Hemos visto ya cómo analizar una curva, siempre que contemos con su ecuación vectorial; además, hemos visto cómo obtener las ecuaciones cartesianas de una curva a partir de su ecuación vectorial. Lo que no hemos visto hasta ahora, es cómo hallar la ecuación vectorial de una curva a partir de sus ecuaciones cartesianas.

Desde luego, hay curvas cuyas ecuaciones vectoriales asumen formas particularmente ventajosas; algunas de éstas las estudiaste en A.G.A. A ellas habría que añadir, por ejemplo la hélice.

$$\bar{r} = a \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \theta \mathbf{j} + b \theta \mathbf{k} \quad 3.4.5.1$$

el meridiano de una esfera:

$$\bar{r} = a \sin \psi \mathbf{i} + b \sin \psi \mathbf{j} + c \cos \psi \mathbf{k} \quad 3.4.5.2$$

donde:  $c =$  radio de la esfera;  $a^2 + b^2 = c^2$

el meridiano del elipsoide toma la misma forma, sin las restricciones anotadas. Las ecuaciones de este tipo hay que sabérselas de memoria o ser capaz de deducirlas en forma particular para cada caso.

Lo que pretendemos en este apartado es un método general para hallar la ecuación vectorial de una curva, dadas sus ecuaciones cartesianas.

Empecemos por una curva en el plano  $xy$ , cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$F(x, y) = 0 \quad 3.4.5.3$$

$$z = 0 \quad 3.4.5.4$$

Haremos caso omiso de la segunda, por trivial y atenderemos a la primera. Para empezar, advertiremos que no cualquier ecuación de ese tipo nos va a definir una curva; basta ver que:

$$x^2 + y^2 + 16 = 0$$

no define curva alguna. ¿Qué condiciones debe reunir entonces una ecuación del tipo (3.4.5.3) para definir una curva?

Teorema 3.4.2 Sea una ecuación  $F(x,y) = 0$ ; si

- I) Existe un punto  $P_0(x_0, y_0)$  tal que  $F(x_0, y_0) = 0$
- II) Las derivadas parciales  $F_x, F_y$  son continuas en un entorno de  $P_0$
- III)  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

Entonces existe un intervalo  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  donde está definida la función  $y = f(x)$  que puede ser representada por una curva suave.

Teorema 3.4.3 Sea la ecuación  $F(x,y) = 0$ ; si se cumplen las hipótesis (I) y (II) del teorema (3.4.2) y además  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ , entonces existe un intervalo  $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$  donde está definida la función  $x = g(y)$  que puede ser representada por una curva suave.

La demostración de estos teoremas se encuentra en el apéndice (3.1); además, los podemos ampliar para el caso de la ecuación  $F(x,y,z) = 0$ , que, según vimos en la definición (1.2.1) nos representa una superficie, siempre que, al despejar una de las variables, obtengamos una función de las otras dos. En el capítulo de referencia, vimos asimismo un caso en el cual, al despejar cualquier variable, no se llegaba a función; lo que no vimos allí, es como estar seguros de que  $F(x,y,z) = 0$ , nos representa una superficie.

Teorema 3.4.4 Sea la ecuación  $F(x,y,z) = 0$ ; si

- I) Existe un punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  al que  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
- II) Las derivadas parciales  $F_x, F_y, F_z$  son continuas en un entorno de  $P_0$
- III)  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Entonces existe una región en el plano  $xy$  que contiene a  $(x_0, y_0)$ , donde está definida la función  $z = f(x,y)$ , que puede ser representada por una superficie cuyo vector normal es único en cada punto.

Naturalmente podemos enunciar (y demostrar) otros dos teoremas semejantes al (3.4.4), cada uno de los cuales nos diría cómo estar seguros de que podríamos despejar a "x" ó a "y" respectivamente.

Pero volvamos a nuestra curva en el plano  $xy$  y supongamos que (3.4.5.3) cumple con las condiciones del teorema (3.4.2). Entonces podemos despejar a "y":

$$y = f(x)$$

y la ecuación vectorial la formaríamos:

$$\bar{r} = x i + f(x) j \quad 3.4.5.5$$

donde "x" sería el parámetro.

Análogamente, si (3.4.5.3) cumple con el teorema (3.4.3) entonces:

$$\bar{r} = g(y) i + y j \quad 3.4.5.6$$

Ejemplo 3.4.20

Encontrar la ecuación vectorial de la curva  $3x^2 - 5y + 12 = 0$

Solución:

$F_y = -5 \neq 0$  podemos despejar "y":

$$y = \frac{3x^2 + 12}{5}$$

y así:

$$\bar{r} = x i + \frac{3x^2 + 12}{5} j$$

Por otra parte,  $F_x = 6x \neq 0$   $x \neq 0$ ; entonces:

$$x = \pm \sqrt{\frac{5y - 12}{3}}$$

y tendremos dos ecuaciones:

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{5y - 12}{3}} i + y j \quad (12/5 \leq y < \infty)$$

$$\bar{r} = -\sqrt{\frac{5y - 12}{3}} i + y j \quad (12/5 \leq y < \infty)$$

Nota que si  $x = 0$ ,  $y = 12/5$

Ahora consideremos una curva en el espacio; sus ecuaciones cartesianas serían:

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 & 3.4.5.7 \\ G(x,y,z) = 0 & 3.4.5.8 \end{cases}$$

consideradas simultáneamente. Supondremos que ambas cumplen con el teorema 3.4.4; sin embargo, tal no es suficiente para garantizar que nos representen una curva; para demostrarlo consideremos:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + 5 = 0 \\ 3x + 2y - z + 6 = 0 \end{cases}$$

En ambos casos,  $F_z = -1 \neq 0$ ; pero por tratarse de planos paralelos, no representan curva alguna. Entonces veamos qué más es necesario:

Puesto que  $F_z \neq 0$ , despejamos "z" de (3.4.5.7)

$$z = \phi(x,y) \quad 3.4.5.9$$

Además, según vimos en el ejemplo (2.9.2)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \quad 3.4.5.10$$

Sustituyamos (3.4.5.9) en (3.4.5.8)

$$G(x,y,\phi) = \psi(x,y) = 0 \quad 3.4.5.11$$

donde  $\psi(x,y)$  indica la forma que tomaría el primer miembro de (3.4.5.11) después de reducir términos semejantes. De esta manera, si logramos demostrar que  $\frac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0$  afirmaremos que (3.4.5.11) cumple con el teorema (3.4.1) y que el sistema original representa una curva.

Para ello, diferenciamos (3.4.5.11):

$$G_x dx + G_y dy + G_z d\phi = \psi_x dx + \psi_y dy$$

Puesto que nos interesa derivar parcialmente con respecto a "y",  $dx=0$  y, al tomar en cuenta (3.4.5.10):

$$G_y dy + G_z \left(-\frac{F_y}{F_z}\right) dy = \psi_y dy$$

Al despejar  $\psi_y$ :

$$\psi_y = G_y - G_z \frac{F_y}{F_z} = \frac{G_y F_z - G_z F_y}{F_z}$$

y concluimos que, para que (3.4.5.7) y (3.4.5.8) nos representen una curva, se necesita que:

$$G_y F_z - G_z F_y \neq 0$$

Esta condición acostumbra escribirse en forma determinante:

$$\begin{vmatrix} F_z & F_y \\ G_z & G_y \end{vmatrix} \neq 0$$

determinante al que se denomina "Jacobiano de las funciones F,G, respecto a las variables "z,y" y se anota:

$$J\left(\frac{F,G}{z,y}\right) = \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}$$

si esta condición se cumple, "y" puede ser despejada de (3.4.5.11):

$$y = f(x)$$

y sustituida en (3.4.5.9):

$$z = \phi[x, f(x)] = \xi(x)$$

con la que la ecuación vectorial de la curva quedaría:

$$\vec{r} = xi + f(x)j + \xi(x)k \quad (3.4.5.12)$$

"x" sería nuevamente el parámetro.

Ejemplo 3.4.21.- Encontrar la ecuación vectorial de la curva:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0 \quad 3.4.21.a$$

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 - 5y = 0 \quad 3.4.21.b$$

Solución:

$$J\left(\frac{F,G}{y,z}\right) = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ (2y-5) & 0 \end{vmatrix} = -4yz + 10z \neq 0 \quad \forall z \neq 0, y \neq 5/2$$

Entonces, restemos (3.4.21.b) de (3.4.21.a);

$$z^2 + 5y - 25 = 0 \implies z^2 = 25 - 5y \tag{3.4.21.c}$$

y al sustituir (3.4.21.c) en (3.4.21.a):  $x^2 + y^2 + 25 - 5y - 25 = 0$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4x^2}}{2} \tag{3.4.21.d}$$

Finalmente, sustituyamos (3.4.21.d) en (3.4.21.c)

$$z^2 = 25 - 5 \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4x^2}}{2} = \frac{25 \pm 5\sqrt{25 - 4x^2}}{2}$$

y tendremos cuatro ecuaciones vectoriales:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= xi + \frac{5 + \sqrt{25 - 4x^2}}{2}j + \sqrt{\frac{25 - 5\sqrt{25 - 4x^2}}{2}}k \\ \vec{r} &= xi + \frac{5 + \sqrt{25 - 4x^2}}{2}j - \sqrt{\frac{25 - 5\sqrt{25 - 4x^2}}{2}}k \\ \vec{r} &= xi + \frac{5 - \sqrt{25 - 4x^2}}{2}j + \sqrt{\frac{25 + 5\sqrt{25 - 4x^2}}{2}}k \\ \vec{r} &= xi + \frac{5 - \sqrt{25 - 4x^2}}{2}j - \sqrt{\frac{25 + 5\sqrt{25 - 4x^2}}{2}}k \end{aligned}$$

Dibuja una perspectiva de esta curva, indicando los tramos descritos por cada una de estas ecuaciones.

Por supuesto si:

$$J\left(\frac{F,G}{x,z}\right) \neq 0,$$

se podría tener a "y" como parámetro y si:

$$J\left(\frac{F,G}{x,y}\right) \neq 0,$$

Se podrá tener a "z" como parámetro. Por consiguiente, bastará que uno cualquiera de los Jacobianos sea diferente de cero, para que exista la curva.

Ahora si recuerdas lo visto en el capítulo II, el vector tangente a una curva se obtiene como el producto vectorial de los vectores normales a las superficies que la definen; esto es:

$$\nabla F \times \nabla G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\nabla F \times \nabla G = J\left(\frac{F,G}{y,z}\right)i - J\left(\frac{F,G}{x,z}\right)j + J\left(\frac{F,G}{x,y}\right)k$$

Así, la condición de que cuando menos un jacobiano sea distinto de cero, equivale a decir que el vector tangente debe estar definido y que los vectores normales a las superficies no deben ser paralelos.

### 3.5 Derivadas Parciales de Funciones Vectoriales.

#### 3.5.1 Límites y continuidad.

Como recordarás de (2.1.3) una función vectorial con recorrido en "n" dimensiones está dada por:

$$\vec{v}(\vec{x}) = v_1(\vec{x})\vec{e}_1 + v_2(\vec{x})\vec{e}_2 + \dots + v_n(\vec{x})\vec{e}_n \tag{3.5.1.1}$$

donde el vector  $\vec{x}$  está definido en "m" dimensiones ( $D\vec{v} \in E^m$ ); o lo que es lo mismo,  $\vec{x}$  tiene "m" componentes, que son otras tantas variables escalares independientes:

$$\vec{x} (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Este es el concepto más general de función y de hecho, todos los demás tipos de funciones que hemos estudiado hasta la fecha son meros casos particulares de éste.

Si queremos adentrarnos en el análisis de éstas funciones mediante el Cálculo Diferencial, tendremos que generalizar los conceptos ya vistos, empezando por los conceptos de límite y continuidad. Afortunadamente, el hecho de haber ya comprendido los conceptos análogos en casos anteriores, nos permite ahora pasar adelante con la definición formal de tales conceptos, sin mayores preámbulos; después de todo, las variables se comportarán como las que vimos en el capítulo dos y las funciones, como las que vimos en los primeros incisos de este capítulo.

#### Definición 3.5.1

Si dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que

$$|\bar{v} - \bar{v}_0| < \epsilon \quad \text{cuando} \quad |\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta$$

se dice que el vector  $\bar{v}_0$  es el límite de la función  $\bar{v}$ , cuando la variable vectorial  $\bar{x}$  tiende a  $\bar{x}_0$

Se escribe:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \bar{v}(\bar{x}) = \bar{v}_0$$

Asimismo los teoremas sobre límites se generalizan a la nueva circunstancia y se demuestran a partir de los ya demostrados para otro tipo de funciones.

#### Definición 3.5.2

Una función  $\bar{v}(\bar{x})$  es continua en  $\bar{x} = \bar{x}_0$  si y sólo si:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \bar{v}(\bar{x}) = \bar{v}(\bar{x}_0)$$

También es fácil demostrar el siguiente teorema.

#### Teorema 3.5.3

Una función es continua en  $x = x_0$  si y sólo si:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} [\bar{v}(\bar{x}) - \bar{v}(\bar{x}_0)] = 0$$

cuando  $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (\bar{x} - \bar{x}_0) = 0$

#### 3.5.2) Derivadas parciales.

En la misma forma podemos entender el concepto de derivada parcial visto para funciones escalares en el inciso 2.2; esto es, viene a ser una derivada ordinaria con respecto a una de las variables, mientras las demás permanecen constantes. Así, la derivada parcial de (3.5.1.1) con respecto a  $x_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\bar{v}(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - \bar{v}(\bar{x})}{\Delta x_1} \\ &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{v_1(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - v_1(\bar{x})}{\Delta x_1} e_1 + \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{v_2(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - v_2(\bar{x})}{\Delta x_1} e_2 + \dots + \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{v_n(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - v_n(\bar{x})}{\Delta x_1} e_n \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} e_2 + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_1} e_n \quad (3.5.2.1)$$

De la misma manera podríamos obtener las derivadas parciales con respecto a las otras variables  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , esto es para cada  $x_i \in \bar{x}$ :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_i} e_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_i} e_2 + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_i} e_n \quad (3.5.2.2)$$

Donde las componentes  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son funciones escalares de varias variables independientes y  $[e_1, e_2, \dots, e_n]$  constituyen una base en el sistema n-dimensional. Para el espacio  $E_3$ , la ecuación (3.5.2.2) nos da:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} &= \frac{\partial v_1}{\partial x} i + \frac{\partial v_2}{\partial x} j + \frac{\partial v_3}{\partial x} k \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= \frac{\partial v_1}{\partial y} i + \frac{\partial v_2}{\partial y} j + \frac{\partial v_3}{\partial y} k \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= \frac{\partial v_1}{\partial z} i + \frac{\partial v_2}{\partial z} j + \frac{\partial v_3}{\partial z} k \end{aligned} \right\} \quad (3.5.2.3)$$

Conviene hacer notar que la derivada parcial obtenida también  $\underline{re}$  presenta una función vectorial a la que se puede volver a derivar siempre y cuando el límite exista o sea, se tendría una derivada parcial sucesiva de una función vectorial.

Ejemplo 3.5.1

$$\text{Si } \bar{v} = (2x^2y - x^4)\mathbf{i} + (e^{xy} - y\text{sen } x)\mathbf{j} + x^2\text{cos } y \mathbf{k}$$

Encontrar : a)  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$  , b)  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$  , c)  $\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial x}$

d)  $\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y}$

$$\text{a) } \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2x^2y - x^4)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x} (e^{xy} - y\text{sen } x)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x} (x^2\text{cos } y)\mathbf{k}$$

$$= (4xy - 4x^3)\mathbf{i} + (ye^{xy} - y\text{cos } x)\mathbf{j} + (2x\text{cos } y)\mathbf{k}$$

$$\text{b) } \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 2x^2\mathbf{i} + (xe^{xy} - \text{sen } x)\mathbf{j} - x^2\text{sen } y \mathbf{k}$$

$$\text{c) } \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) = 4x\mathbf{i} + (xye^{xy} + e^{xy} - \text{cos } x)\mathbf{j} - 2x\text{sen } y \mathbf{k}$$

$$\text{d) } \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = 4x\mathbf{i} + (xye^{xy} + e^{xy} - \text{cos } x)\mathbf{j} - 2x\text{sen } y \mathbf{k}$$

### 3.6 Diferenciales de funciones vectoriales.

Según lo visto en el inciso 2.6, el concepto de diferencial total se puede definir en términos de las diferenciales totales de las funciones escalares (componentes de las vectoriales). Así para la función (3.5.1.1)

$$\bar{v}(\bar{x}) = v_1(\bar{x})\mathbf{e}_1 + v_2(\bar{x})\mathbf{e}_2 + \dots + v_n(\bar{x})\mathbf{e}_n$$

$$d\bar{v}(\bar{x}) = d(v_1(\bar{x})\mathbf{e}_1 + v_2(\bar{x})\mathbf{e}_2 + \dots + v_n(\bar{x})\mathbf{e}_n)$$

$$= dv_1(\bar{x})\mathbf{e}_1 + dv_2(\bar{x})\mathbf{e}_2 + \dots + dv_n(\bar{x})\mathbf{e}_n \quad 3.6.0.1$$

y en tres dimensiones:

$$d\bar{v}(\bar{x}) = dv_1(\bar{x})\mathbf{i} + dv_2(\bar{x})\mathbf{j} + dv_3(\bar{x})\mathbf{k}$$

desarrollando:

$$d\bar{v}(\bar{x}) = \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} dx + \frac{\partial v_1}{\partial y} dy + \frac{\partial v_1}{\partial z} dz \right) \mathbf{i} +$$

$$+ \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} dx + \frac{\partial v_2}{\partial y} dy + \frac{\partial v_2}{\partial z} dz \right) \mathbf{j} +$$

$$+ \left( \frac{\partial v_3}{\partial x} dx + \frac{\partial v_3}{\partial y} dy + \frac{\partial v_3}{\partial z} dz \right) \mathbf{k} \quad 3.6.0.2$$

y agrupando:

$$= \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \mathbf{k} \right) dx + \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \mathbf{k} \right) dy$$

$$+ \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \mathbf{k} \right) dz$$

$$d\bar{v}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} dz \quad 3.6.0.3$$

Con lo anterior podemos decir que la estructura de la diferencial total de una función escalar es idéntica a la de una función escalar y puede usarse las fórmulas de derivación dadas en la sección 2.2

Ejemplo 3.6.1

$$\text{Si } \bar{u} = x^2\text{sen } y \mathbf{i} + z^2\text{cos } y \mathbf{j} - xy^2\mathbf{k}$$

$$d\bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} dz$$

$$= (2x\text{sen } y \mathbf{i} - y^2\mathbf{k})dx + (x^2\text{cos } y \mathbf{i} - z^2\text{sen } y \mathbf{j} - 2xy \mathbf{k})dy$$

$$+ (2z\text{cos } y \mathbf{j})dz$$

$$= (2x\text{sen } y dx + x^2\text{cos } y dy)\mathbf{i} + (2z\text{cos } y dz - z^2\text{sen } y dy)\mathbf{j} +$$

$$+ (-y^2dx - 2xy dy)\mathbf{k}$$

Nótese que la ecuación (3.6.0.2) puede escribirse en forma matricial:

$$d\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad 3.6.0.4$$

En la matriz asociada, los renglones son los gradientes de " $v_1$ ", " $v_2$ " " $v_3$ ", respectivamente, en tanto que las columnas son las derivadas parciales  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial z}$ , respectivamente. Además el determinante de esta matriz es el jacobiano  $J\left(\frac{v_1, v_2, v_3}{x, y, z}\right)$ ; por eso a esta matriz también se le llama "matriz jacobiana" y se anota:

$$J\left[\frac{v_1, v_2, v_3}{x, y, z}\right]$$

### 3.7 Coordenadas Curvilíneas.-

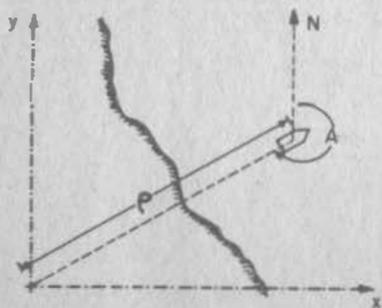


Fig. 3.7.1

Se está llevando a cabo una exploración petrolera en el mar. Una lancha se coloca en un cierto punto, detona una carga de explosivos y efectúa un sismograma; pasa en seguida a otro punto a realizar la misma tarea. Naturalmente, cada sismograma debe quedar perfectamente ubicado. En este caso el ingeniero

que realiza la exploración coloca un emisor de ondas de radio en un punto fijo en tierra y se lleva en la lancha un receptor que, además, mide la dirección de donde vienen las ondas (radiogoniómetro). Así, puede saber la distancia " $\rho$ " a que se encuentra la lancha del emisor, en el momento de tomar el sismograma y además el ángulo " $A$ " de la línea que los une. (ver fig. 3.7.1)

\* 111.49

De esta manera, la localización de los puntos en el plano es sumamente sencilla: se puede hacer gráficamente (¿como?) o bien analíticamente, si se toma en cuenta que:

$$x = \rho \sin(A - 180^\circ) = -\rho \sin A \quad (3.7.1.a)$$

$$y = \rho \cos(A - 180^\circ) = -\rho \cos A \quad (3.7.1.b)$$

El problema está en que los resultados urgen; en avión espera a que el ingeniero regrese a tierra, después de su diaria labor, para llevar lo realizado a las oficinas centrales de PEMEX. Así, el ingeniero debe localizar los puntos en la lancha; pero ahí no puede utilizar compás, escuadras, transportador, etc. y si se aboca a calcular a bordo las coordenadas cartesianas, retrasa el resto del trabajo y realiza menos sismogramas por día, lo cual tampoco es admisible. ¿Qué puede hacer el ingeniero?

La solución no es complicada: simplemente, el ingeniero lleva a bordo un papel como el mostrado en la figura 3.7.2, en él ha señalado el punto donde se ubica el emisor en tierra, y ha definido la dirección Norte.

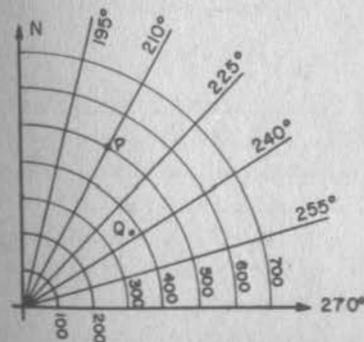


Fig. 3.7.2

Además, ha trazado una ecuación de círculos equidistantes (100 m. por ejemplo, a una cierta escala) y un conjunto de rectas concurrentes, se paradas entre sí por ángulos iguales (por ejemplo, 15°). Entonces, si lee como distancia 500 m. y en el radiogoniómetro 210°, no tiene dificultad en ubicar el punto "P". Si como distancia lee 375 m y como ángulo 237°, ubicará rápidamente el punto "Q" y así sucesivamente.

El vector de posición de cualquier punto, el espacio de dos dimensiones requiere de dos escalares para quedar definido; pero la idea involucrada de posición, es única y no depende del medio que se use para describirla; en otras palabras las escalares NO tienen que ser forzosamente las componentes del vector sobre los ejes cartesianos, sino que pueden estar referidos a otro sistema coordenado cualquiera.

El ingeniero de nuestro ejemplo inventó su propio sistema coordenado, que no es el cartesiano; puesto que las líneas en que la distancia (primera coordenada en el nuevo sistema) es constante, son curvas, este nuevo sistema coordenado será un sistema de coordenadas curvilíneas. A las ecuaciones 3.7.1.a y b que relacionan las nuevas coordenadas, se les llama "ecuaciones de transformación".

Ahora bien, la nueva pareja ordenada de números (ρ, A) define, como ya dijimos, un vector de posición; de hecho define un nuevo espacio vectorial. Las ecuaciones 3.7.1.a y b garantizan que, a cada vector del nuevo espacio corresponde un sólo vector del espacio cartesiano

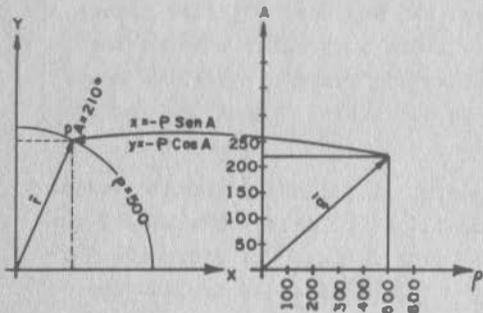


Fig. 3.7.3

o también:  $\vec{r} = -\rho \text{ sen } A \mathbf{i} - \rho \text{ cos } A \mathbf{j}$

de asignar un único vector  $\vec{q}$ . Estamos en posibilidad de contestar a esto si caemos en la cuenta de que (ρ, A) están expresadas implícitamente en el sistema de 3.7.1.a y b, si este sistema las define como funciones implícitas de (x, y), entonces a cada valor de  $\vec{r}$  corresponderá efectivamente un solo valor de  $\vec{q}$ .

Escribamos las ecuaciones 3.6.1.a y b como ya sabemos:

$$F = -\rho \text{ sen } A - x = 0$$

$$G = -\rho \text{ cos } A - y = 0$$

que deben cumplir las condiciones de las funciones implícitas 3.4.5.7 y 8 que como recordamos, son tres; las dos primeras se cumplen obviamente; veamos si se cumple la tercera:

$$J \left( \frac{F, G}{\rho, A} \right) = \begin{vmatrix} -\text{sen } A & -\rho \text{ cos } A \\ -\text{cos } A & \rho \text{ sen } A \end{vmatrix} = -\rho$$

diferente de cero, en general, excepto en el origen; en efecto, a este valor no le corresponde un sólo punto en el sistema (ρ, A) sino todo el eje "A", lugar geométrico de los puntos en que ρ=0. Cuando se tienen casos como éste, en que el jacobiano de transformación es, en general, diferente de cero, pero se anula en puntos específicos, a estos se denominan "puntos singulares"

En general, estamos en libertad de escoger el sistema coordenado que más útil nos resulte, para manejar el fenómeno que estamos representando. En cualquier caso, si estamos transformando un espacio de dos dimensiones en otro de dos dimensiones, tendremos, como función vectorial.

$$\vec{r} = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j}$$

que podemos escribir:

$$F = f(u, v) - x = 0 \tag{3.7.1.1}$$

$$G = g(u, v) - y = 0 \tag{3.7.1.2}$$

Para que la transformación inversa sea posible, es necesario que 3.7.1.1 y 3.7.1.2 se cumplan cuando menos en un punto; que  $f_u, f_v, g_u, g_v$  sean continuas en una región que contenga el punto, y que -

$$J \left( \frac{F, G}{u, v} \right) = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.7.1.3}$$

Podemos observar que:

$$x_u = f_u \qquad y_u = g_u$$

$$x_v = f_v \qquad y_v = g_v$$

por lo que la última condición suele expresarse como:

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \neq 0$$

3.7.1.4

llamada jacobiano de transformación.

Sobre estas bases, podemos idear un sinnfn de nuevos sistemas - coordenados. Imaginemos que el ingeniero del ejemplo anterior en vez de llevar los aparatos de medición en la lancha, los hubiese dejado a cargo de personal de tierra, llevándose solamente el emisor de ondas de radio. En tal caso, este personal reportaría la distancia de la lancha, y el ángulo que forma el recorrido de las ondas con una dirección fija "x". El sistema de coordenadas polares (Fig. 3.7.4) hubiese sido el más ventajoso; muy parecido al anterior, salvo en la denominación de las coordenadas angulares. Las ecuaciones de transformación ya las conoces:

$$\vec{r} = \rho \cos \theta \mathbf{i} + \rho \sin \theta \mathbf{j}$$

$$J\left(\frac{x,y}{\rho,\theta}\right) = \rho$$

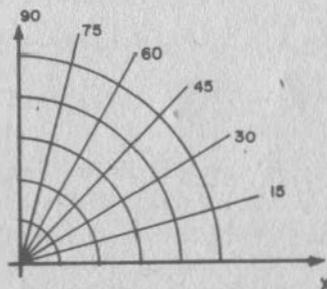


Fig. 3.7.4

Si la lancha se hubiese ubicado por medio de teodolitos colocados en dos puntos fijos:  $O_1$  y  $O_2$ , entonces el sistema coordenado más conveniente sería el de la fig. 3.7.5, cuyas ecuaciones de transformación, colocando el origen en  $O_1$  y el eje x sobre  $O_1O_2$ :

$$\vec{r} = \frac{a \sin \psi \cos \theta}{\sin(\psi + \theta)} \mathbf{i} + \frac{a \sin \psi \sin \theta}{\sin(\psi + \theta)} \mathbf{j}$$

donde " $\theta$ " es el ángulo medido por el teodolito en  $O_1$  y  $\psi$  en el ángulo medido por el teodolito en  $O_2$ .

Demuestra que el jacobiano de transformación vale:

$$J\left(\frac{x,y}{\psi,\theta}\right) = \frac{a^2 \sin \psi \sin \theta}{\sin^3(\psi + \theta)}$$

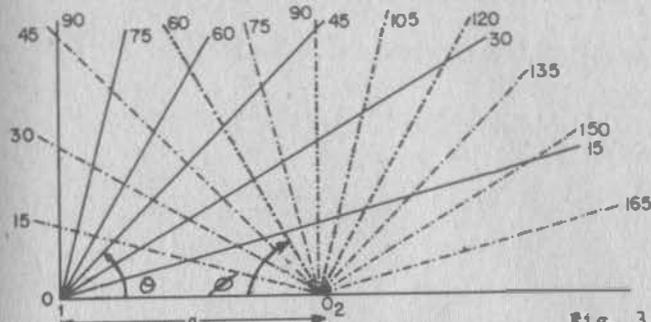


Fig. 3.7.5

Otra posibilidad son las coordenadas bipolares (Fig. 3.7.6) útiles cuando los puntos quedan ubicados por sus distancias a dos puntos fijos. Sus ecuaciones de transformación, haciendo coincidir el origen un  $O_1$  y el eje x con  $O_1O_2$  son:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 3.7.1.5$$

$$v = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \quad 3.7.1.6$$

donde "u" es la distancia del punto a " $O_1$ " y "v" la distancia del mismo a " $O_2$ ". Puedes demostrar también que:

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{uv}{ay}$$

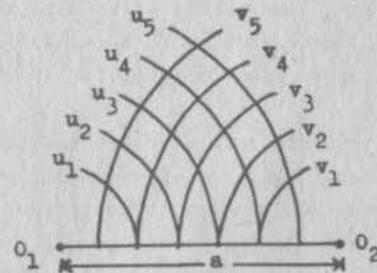


Fig. 3.7.6

Hay otras transformaciones que tú has realizado aunque sin caer en la cuenta de que eran casos particulares de coordenadas curvas. Por ejemplo, el dibujo a escala:

$$\vec{r} = ku \mathbf{i} + kv \mathbf{j} \quad ; \quad J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = k^2$$

Donde el prototipo se refiere al sistema  $xy$ , y el dibujo al sistema  $uv$ .

O con escala distorsionada, útil para dibujar los perfiles de terreno:

$$\vec{r} = k_1 u \mathbf{i} + k_2 v \mathbf{j} \quad ; \quad J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = k_1 k_2$$

Las gráficas en papel logarítmico y semilogarítmico:

$$\vec{r} = k_1 (Lu) \mathbf{i} + k_2 (Lv) \mathbf{j} \quad ; \quad J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \frac{k_1 k_2}{uv}$$

$$\vec{r} = k_1 u \mathbf{i} + k_2 (Lv) \mathbf{j} \quad ; \quad J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \frac{k_1 k_2}{v}$$

La traslación de ejes:

$$\vec{r} = (a+u) \mathbf{i} + (b+v) \mathbf{j} \quad ; \quad J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = 1$$

La rotación de ejes:

$$\vec{r} = (u \cos \alpha - v \sin \alpha) \mathbf{i} + (u \sin \alpha + v \cos \alpha) \mathbf{j}$$

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = 1$$

Aunque hemos asentado los sistemas más comúnmente utilizados en dos dimensiones, cabe hacer énfasis en que podemos crear siempre el que más nos convenga, definiendo sus ecuaciones de transformación.

En tres dimensiones, también puede transformarse el sistema coordenado. Considera por ejemplo, el caso del campo eléctrico alrededor de una partícula cargada. Este campo depende fundamentalmente de la distancia, por lo que resulta ventajoso manejarlo en coordenadas esféricas, cuyas ecuaciones de transformación ya conoces:

$$\vec{r} = \rho \cos \theta \sin \psi \mathbf{i} + \rho \sin \theta \sin \psi \mathbf{j} + \rho \cos \psi \mathbf{k} \quad 3.7.1.7$$

y que gráficamente se representa en la fig. 3.7.7. En cuanto al jacobiano de transformación, fácilmente puedes llegar a

$$J\left(\frac{x, y, z}{\rho, \psi, \theta}\right) = \rho^2 \sin \psi$$

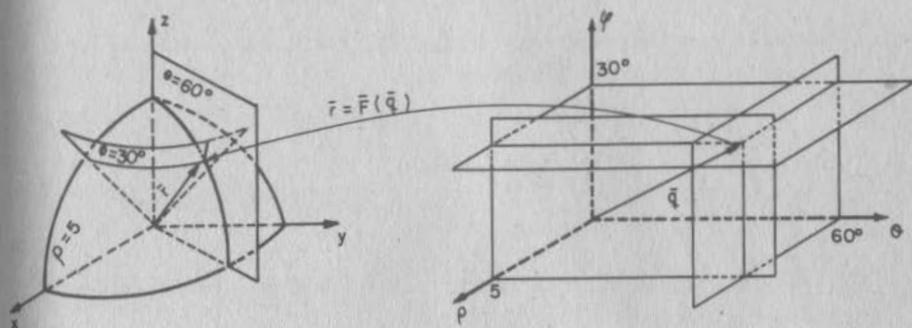


Fig. 3.7.7

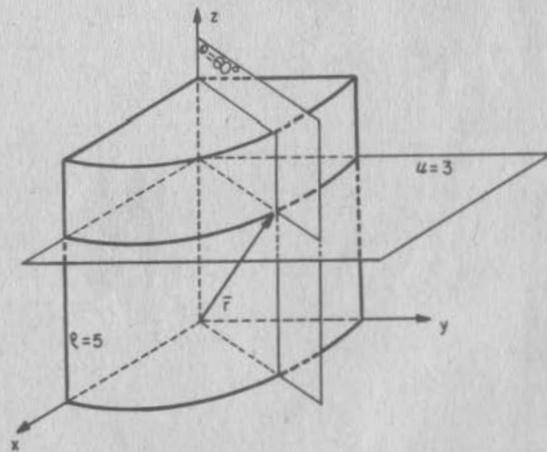


Fig. 3.7.8

{¿Dónde se anula este jacobiano? ¿Cómo mapear esos puntos singulares?}

En general para cualquier sistema de coordenadas curvilíneas en tres dimensiones, se tiene:

$$\vec{r} = f(u, v, w)\mathbf{i} + g(u, v, w)\mathbf{j} + h(u, v, w)\mathbf{k}$$

La función inversa existirá si  $f_u, f_v$ , etc., son continuas en una región alrededor del punto y si:

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) \neq 0$$

Otro sistema comúnmente usado en tres dimensiones es el de coordenadas cilíndricas: (fig. 3.7.8)

$$\vec{r} = \rho \cos \theta \mathbf{i} + \rho \sin \theta \mathbf{j} + u \mathbf{k}$$

$$J\left(\frac{x, y, z}{\rho, \theta, u}\right) = \rho$$

Desde luego podremos crear cualquier otro sistema de coordenadas curvilíneas en tres dimensiones, definiendo siempre la función vectorial que lo relaciona con el cartesiano.

Entre éstos, hay que mencionar el de los ejes rectangulares girados. En la figura 3.7.9 muestra este caso. Para encontrar las

ecuaciones de transformación consideremos un vector de posición  $\vec{r}$  de un punto cualquiera. Este vector, en la base  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ :

$$\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.7.1.8)$$

mientras que, en la base que  $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ , que serían vectores unitarios alojados en los ejes  $u, v, w$ , respectiva-

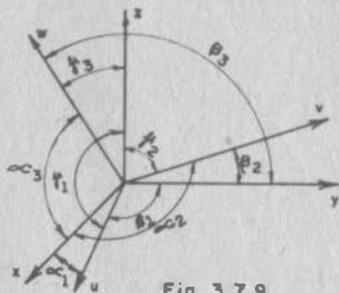


Fig. 3.7.9

mente:

$$\vec{r} = u\vec{e}_u + v\vec{e}_v + w\vec{e}_w \quad (3.7.1.9)$$

Por su parte, estos vectores unitarios, referidos a la base  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ :

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_u &= \cos \alpha_1 \mathbf{i} + \cos \beta_1 \mathbf{j} + \cos \gamma_1 \mathbf{k} \\ \vec{e}_v &= \cos \alpha_2 \mathbf{i} + \cos \beta_2 \mathbf{j} + \cos \gamma_2 \mathbf{k} \\ \vec{e}_w &= \cos \alpha_3 \mathbf{i} + \cos \beta_3 \mathbf{j} + \cos \gamma_3 \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad 3.7.1.10$$

y al sustituir el sistema (3.7.1.10) en (3.7.1.9):

$$\vec{r} = u(\cos \alpha_1 \mathbf{i} + \cos \beta_1 \mathbf{j} + \cos \gamma_1 \mathbf{k}) + v(\cos \alpha_2 \mathbf{i} + \cos \beta_2 \mathbf{j} + \cos \gamma_2 \mathbf{k}) + w(\cos \alpha_3 \mathbf{i} + \cos \beta_3 \mathbf{j} + \cos \gamma_3 \mathbf{k})$$

que puede agruparse:

$$\vec{r} = (u \cos \alpha_1 + v \cos \alpha_2 + w \cos \alpha_3) \mathbf{i} + (u \cos \beta_1 + v \cos \beta_2 + w \cos \beta_3) \mathbf{j} + (u \cos \gamma_1 + v \cos \gamma_2 + w \cos \gamma_3) \mathbf{k} \quad 3.7.1.11$$

Al comparar (3.7.1.11) con (3.7.1.8) y recordar la definición de igualdad entre vectores:

$$x = u \cos \alpha_1 + v \cos \alpha_2 + w \cos \alpha_3$$

$$y = u \cos \beta_1 + v \cos \beta_2 + w \cos \beta_3$$

$$z = u \cos \gamma_1 + v \cos \gamma_2 + w \cos \gamma_3$$

que son las ecuaciones de transformación pedidas. Su jacobiano de transformación:

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix} = 1 \quad (\text{¿Por qué?})$$

Por otra parte nota que, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = J \left[ \frac{x, y, z}{u, v, w} \right] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad 3.7.1.12$$

Observemos las columnas de  $[J]$  son los vectores  $\vec{e}_u, \vec{e}_v$  y  $\vec{e}_w$

¿Para que nos sirve esta transformación? Para muchas cosas, según podrás constatar a medida que avances en tus estudios; pero hay una aplicación que ya te mencionamos en (1. 9): mediante un giro de ejes, podemos eliminar los términos rectángulos (productos  $xy$ ,  $xz$ , y  $yz$ ) en la ecuación de una superficie cuádrlica -- de la misma manera que aprendiste a girar los ejes en el plano -- para eliminar los términos  $xy$  en la ecuación de una cónica.

Consideremos la cuádrlica.

$$Ax^2 + Bxy + Cxz + Dy^2 + Eyz + Fz^2 = G \quad 3.7.1.13$$

y caigamos en la cuenta de que también la podemos escribir en -- forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x, y, z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 & C/2 \\ B/2 & D & E/2 \\ C/2 & E/2 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, y, z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = G \quad 3.7.1.13'$$

Nuestro problema consiste entonces en transformar esta ecuación en una del tipo:

$$\begin{bmatrix} u, v, w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & D' & 0 \\ 0 & 0 & F' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u, v, w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = G \quad 3.7.1.14$$

En el tema V de Algebra Lineal (\*) se ve que, para transformar la matriz  $[M]$  en la matriz  $[D]$ , hay que premultiplicar la primera por una matriz  $[J]$ , cuyas columnas sean los llamados "vectores principales" y postmultiplicarla por  $[J]^{-1}$ .

\* Si al momento de estudiar esto no ha visto aún este tema en -- Algebra Lineal, te sugerimos que lo repases cuando veas el tema de Algebra Lineal. Vuélvelo a repasar antes de empezar a estudiar Máximos y Mínimos.

La gran ventaja de  $[J]$  en esta transformación, es que, como puedes comprobar:

$$[J][J]^T = [I] \quad [J]^T = [J]^{-1}$$

Así:

$$[D] = [J][M][J]^T \quad (3.7.1.15)$$

Entonces, al sustituir (3.7.1.15) en (3.7.1.13), deberemos tener cuidado de que no se altere la ecuación, para lo cual premultiplicaremos por  $[J]^T$  y postmultiplicaremos por  $[J]$ :

$$\begin{bmatrix} x, y, z \end{bmatrix} \underbrace{[J]^T}_{[I]} \underbrace{[J]}_{[I]} \underbrace{[M]}_{[D]} \underbrace{[J]^T}_{[I]} \underbrace{[J]}_{[I]} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = G \quad (3.7.1.16)$$

Finalmente al tomar en cuenta (3.7.1.12) en (3.7.1.16) obtenemos (3.7.1.14). Los propios conocimientos de Algebra Lineal nos dicen además que  $A'$ ,  $D'$ ,  $F'$ , son los llamados "valores principales" de la matriz  $[M]$ , obtenidos al anular el determinante característico.

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B/2 & C/2 \\ B/2 & D - \lambda & E/2 \\ C/2 & E/2 & F - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

que deben ser tres valores reales, por tratarse de una matriz simétrica.

Ejemplo 3.7.1 Obtener la transformación requerida para que la -  
cuádrica.

$$7x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xz - 4yz = 30$$

carezca de términos rectángulos. Escribir su ecuación referida  
al nuevo sistema.

Solución:

Lo primero que debemos hacer es establecer la matriz [M] :

$$[M] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Ahora valoremos los valores característicos de esta matriz:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

El polinomio característico es entonces:

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$$

cuyas raíces, obtenidas por cualquiera de los métodos que tú co-  
noces, dan:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 9$$

y podemos asegurar que la ecuación de la superficie en el nuevo  
sistema es:

$$3u^2 + 6v^2 + 9w^2 = 30$$

o bien:

$$u^2 + 2v^2 + 3w^2 = 10 \quad (\text{Elipsoide de tres ejes})$$

Como además nos están pidiendo la transformación, calculemos los  
vectores principales:

El asociado a  $\lambda_1$ :

$$\begin{aligned} (7-3)\cos\alpha_1 - 2\cos\beta_1 &= 0 \implies \cos\beta_1 = 2\cos\alpha_1 \\ (5-3)\cos\beta_1 - 2\cos\alpha_1 &= 0 \implies \cos\alpha_1 = \cos\beta_1 \\ \cos^2\alpha_1 + 4\cos^2\alpha_1 + 4\cos^2\alpha_1 &= 1 \implies \cos^2\alpha_1 = 1/9 \\ \cos\alpha_1 &= 1/3; \quad \cos\beta_1 = 2/3; \quad \cos\gamma_1 = 2/3 \end{aligned}$$

Análogamente podemos calcular el asociado a  $\lambda_2$ : (2/3, -2/3, 1/3)

y el asociado a  $\lambda_3$ : (2/3, 1/3, -2/3)

Así:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

o bien, escalarmente:

$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{3} + \frac{2v}{3} + \frac{2w}{3} \\ y &= \frac{2u}{3} - \frac{2v}{3} + \frac{w}{3} \\ z &= \frac{2u}{3} + \frac{v}{3} - \frac{2w}{3} \end{aligned}$$

### 3.7.2 Propiedades del Jacobiano.

Volvamos al problema de la exploración petrolera en el mar. Ha-  
bíamos dicho que el ingeniero resolvió la dificultad que se le  
presentó, llevándose a la lancha un papel como el de la fig.3.7.2  
Ahora se nos plantea el siguiente cuestionamiento: si queremos  
que no haya un error mayor de 10 m al determinar cada una de las  
coordenadas rectangulares del punto P (fig. 3.7.2) ¿Qué error  
Podemos permitirnos para las determinaciones de "ρ" y "A"?

La solución consiste en encontrar los incrementos de las variables "ρ" y "A", para obtener incrementos conocidos en dos funciones. Como éstos son pequeños, podemos calcularlos aproximadamente a través de sus diferenciales.

Debemos resolver entonces el sistema:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial A} dA$$

3.7.2.a

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial A} dA$$

que podemos hacer por muchos métodos; escojamos el de inversión-matricial; puesto el sistema 3.7.2.a en forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x, y \\ \rho, A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\rho \\ dA \end{bmatrix}$$

y su solución es:

$$\begin{bmatrix} d\rho \\ dA \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x, y \\ \rho, A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \rho, A \\ x, y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad 3.7.2.b$$

Entonces al sustituir los valores conocidos, obtendremos:

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = -\operatorname{sen} A = 0.5 \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial A} = -\rho \cos A = 433 \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = -\cos A = 0.866$$

Así:

$$J \begin{bmatrix} x, y \\ \rho, A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 433 \\ 0.866 & -250 \end{bmatrix}$$

Cuya adjunta es:

$$\begin{bmatrix} -250 & -0.866 \\ -433 & 0.5 \end{bmatrix}$$

La transpuesta de ésta es:

$$\begin{bmatrix} -250 & -433 \\ -0.866 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$J \begin{bmatrix} x, y \\ \rho, A \end{bmatrix}^{-1} = J \begin{bmatrix} \rho, A \\ x, y \end{bmatrix} = -\frac{1}{500} \begin{bmatrix} -250 & -433 \\ -0.866 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$-\frac{1}{500} \begin{bmatrix} -250 & -433 \\ -0.866 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\pm 10) \\ (\pm 10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\rho \\ dA \end{bmatrix}$$

Al hacer operaciones:

$$d\rho = \frac{250}{500} (\pm 10) + \frac{433}{500} (\pm 10)$$

$$dA = \frac{0.866}{500} (\pm 10) + \frac{0.5}{500} (\pm 10)$$

$$\text{Entonces, si } dx = dy = 10 \quad \begin{cases} d\rho = 13.66 \\ dA = 0.00732 = 0.42^\circ = 25' \end{cases}$$

$$\text{si } dx = 10, dy = -10 \quad \begin{cases} d\rho = -3.66 \\ dA = 0.02732 = 1.57^\circ = 1^\circ 34' \end{cases}$$

$$\text{si } dx = -10, dy = 10 \quad \begin{cases} d\rho = 3.66 \\ dA = -0.02732 = -1.57^\circ = -1^\circ 34' \end{cases}$$

$$\text{si } dx = -10, dy = -10 \quad \begin{cases} d\rho = -13.66 \\ dA = -0.00732 = -0.42^\circ = -25' \end{cases}$$

Puesto que las medidas  $\rho$ ,  $A$  son independientes, deberemos exigir:

$$|d\rho| = 3.66 \text{ m}$$

$$|dA| = 25'$$

Concentremos nuestra atención en la ecuación (3.7.2.b) y recordemos, por otra parte que:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy$$

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy$$

o bien, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} d\rho \\ dA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \rho, A \\ x, y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

3.7.2.c

Al igualar (3.7.2.c) con (3.7.2.b):

$$J \begin{bmatrix} x, y \\ \rho, A \end{bmatrix}^{-1} = J \begin{bmatrix} \rho, A \\ x, y \end{bmatrix}$$

3.7.2.d

En general, si tenemos la transformación:

$$x = x(u, v, w)$$

$$y = y(u, v, w)$$

$$z = z(u, v, w)$$

donde:

$$J \begin{bmatrix} x, y, z \\ u, v, w \end{bmatrix} \neq 1$$

de acuerdo con (3.6.0.3):

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x, y, z \\ u, v, w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$

y por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x, y, z \\ u, v, w \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

pero como, por otro lado

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} u, v, w \\ x, y, z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

entonces:

$$J \begin{bmatrix} x, y, z \\ u, v, w \end{bmatrix}^{-1} = J \begin{bmatrix} u, v, w \\ x, y, z \end{bmatrix} \quad 3.7.2.1$$

En términos de los determinantes jacobianos, esta ecuación se escribe:

$$J \begin{bmatrix} x, y, z \\ u, v, w \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} u, v, w \\ x, y, z \end{bmatrix} = 1 \quad 3.7.2.2$$

En C.D.I. habíamos visto que, si  $y=f(x)$  admitía función inversa:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

En funciones vectoriales de variable vectorial la relación equivalente está dada por (3.7.2.2). Nótese que:

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \neq 1 \quad \text{en general; en el ejemplo}$$

que acabamos de resolver:

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = 0.5 ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{250}{500} ; \quad \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{125}{500} \neq 1$$

Por lo demás, la ecuación (3.6.0.3) está definiendo a la diferencial de una función vectorial como una transformación lineal, en los mismos términos que lo hace el tema de Algebra Lineal.

Por consiguiente, todas las propiedades de la matriz asociada (y de su determinante) serán propiedades de los jacobianos. Entre ellos conviene mencionar que si hay una composición tal que:

$$\begin{array}{ll} x=x(u,v,w) & u=u(p,q) \\ y=y(u,v,w) & v=v(p,q) \\ & w=w(p,q) \end{array} \quad \text{donde}$$

$$J\left(\frac{x,y}{p,q}\right) = J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) J\left(\frac{u,v}{p,q}\right) + J\left(\frac{x,y}{v,w}\right) J\left(\frac{v,w}{p,q}\right) + J\left(\frac{x,y}{w,u}\right) J\left(\frac{w,u}{p,q}\right)$$

3.7.2.3

### 3.8 Ecuación Vectorial de una Superficie.

La tierra es un cuerpo de tres dimensiones; sin embargo, cuando queremos fijar un punto sobre su superficie, no recurrimos a las coordenadas  $(x,y,z)$  sino que lo localizamos mediante dos medidas angulares. La razón, desde luego, es la sencillez de realizar estas medidas comparada con el problema de referir el punto a tres ejes coordenados.

¿Por qué se localiza mediante solamente dos medidas? Recuerda del capítulo I que una superficie tiene dos grados de libertad; esto es, solamente dos medidas se pueden fijar arbitrariamente; así, aún cuando quisiéramos referir un punto de la tierra a coordenadas cartesianas bastaría que fijáramos, por ejemplo, la "x" y la "y", quedando fija la "z" mediante la ecuación de la superficie.

Supongamos el siguiente sistema cartesiano: el origen está en el centro de la tierra; el eje "z" coincide con el eje polar; el eje "x" pasa por la intersección del Ecuador con el meridiano de Greenwich; el eje "y" pasa por la intersección del Ecuador con el meridiano  $90^\circ\text{E}$ ; además, consideremos a la Tierra como una esfera (fig. 3.8.1) Entonces, las ecuaciones de transformación son:

$$x=6400 \cos \psi \cos \theta$$

$$y=6400 \cos \psi \sin \theta$$

$$z=6400 \sin \psi$$

3.8.0.1

$$-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2 ; \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

Como sabemos, los signos +, -, son sustituidos, respectivamente, por las letras E, W, cuando se refieren a " $\theta$ " (longitud) o por las letras N, S, cuando se refiere a " $\psi$ " (latitud).

(1) Por ejemplo, para conocer la latitud, basta observar la estrella polar y medir el ángulo que forma la visual con la horizontal.

(\*) Si al momento de estudiar esto no has visto aún este tema en Algebra Lineal, te sugerimos que lo repases cuando veas el tema referido en Algebra Lineal.

**Ejemplo 3.8.1.** Calcular las coordenadas cartesianas de la C.de México ( $100^{\circ}\text{W}, 19^{\circ}\text{N}$ ), con respecto al sistema descrito anteriormente.

$$x = 6400 \cos(19^{\circ}) \cos(-100^{\circ}) = -1050.80 \text{ km}$$

$$y = 6400 \cos(19^{\circ}) \sin(-100^{\circ}) = -5959.39 \text{ km}$$

$$z = 6400 \sin(19^{\circ}) = 2083.64 \text{ km}$$

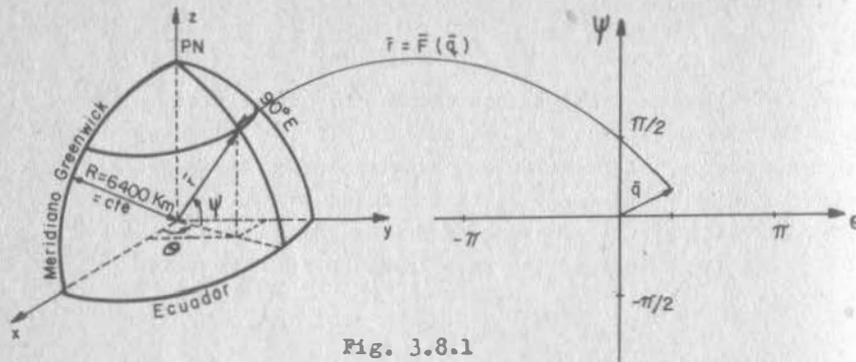


Fig. 3.8.1

Ahora bien, la pareja ordenada de números  $(\theta, \psi)$  definen un espacio vectorial y a cualquier vector de ese espacio, corresponde un sólo vector en el espacio cartesiano, mediante las ecuaciones 3.8.0.1. Estamos en presencia, entonces, de una función vectorial de variable vectorial, que transforma un espacio de dos dimensiones en un espacio de tres dimensiones.

Las ecuaciones 3.8.0.1 son también las ecuaciones paramétricas o vectoriales de la superficie de la tierra. Todas las superficies son susceptibles de definirse en esa forma,

En efecto, la ecuación general de una superficie es:

$$F(x, y, z) = 0$$

entonces, si suponemos que  $F_z \neq 0$ :

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad 3.8.0.2$$

Si  $F_z = 0$ , entonces, puesto  $\nabla F \neq 0$ , para que exista la superficie alguna, de las otras dos parciales será diferente de cero y podremos tener:

$$3.8.0.3 \quad \begin{cases} x = u \\ y = f(u, v) \\ z = v \end{cases} \quad \text{o bien} \quad 3.8.0.4 \quad \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = u \\ z = v \end{cases}$$

Con las ecuaciones 3.8.0.2, 3.8.0.3, 3.8.0.4 cualquier superficie puede ser expresada en forma paramétrica o vectorial; pero hay superficies que admiten ecuaciones más sencillas de manejar y vale la pena recordarlas:

La esfera: Las ecuaciones 3.8.0.1 pueden ser; normalmente, en vez del parámetro  $\psi$ , ángulo del vector de posición con el plano ecuatorial, se usa  $\phi = \frac{\pi}{2} - \psi$ , es decir el ángulo del vector de posición con el eje "z".

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = a \cos \phi \end{cases} \quad 3.8.0.5$$

a: radio de la esfera

(Ver figura 3.8.2)

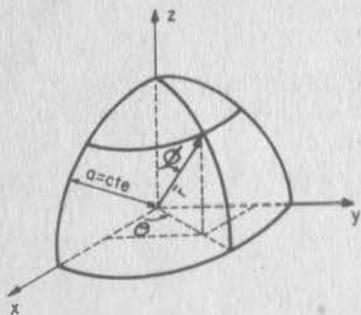


Fig. 3.8.2.

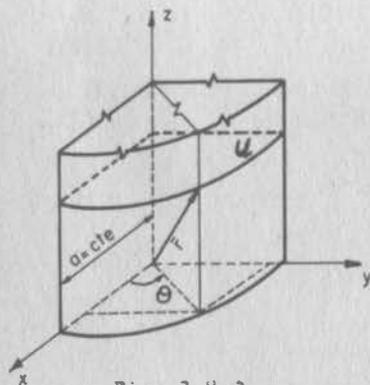


Fig. 3.8.3

El cilindro.- Si se considera un cilindro circular recto de generatriz paralela al eje "z" y radio "a", sus ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \operatorname{sen} \theta \\ z = u \end{cases} \quad 3.8.0.6$$

(Ver figura 3.8. 3)

Naturalmente, si se trata de un cilindro circular recto, con generatriz paralela a otro eje, tendremos ecuaciones muy similares.

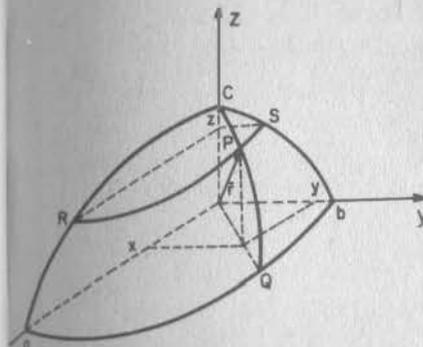
El elipsoide.- Si el elipsoide tiene por semiejes "a", "b" y "c" alojados respectivamente en "x", "y" y "z", sus ecuaciones paramétricas serán:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = b \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = c \cos \phi \end{cases} \quad 3.8.0.7$$

cuya demostración es muy sencilla, pues basta dividir cada ecuación por "a", "b", "c" respectivamente, elevar al cuadrado y sumar; para obtener la ecuación cartesiana del elipsoide:

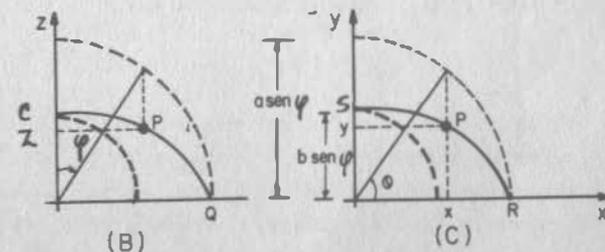
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

La interpretación geométrica de los parámetros angulares, no se refiere, empero, al vector de posición directamente. En la figura 3.8.4 puede verse la interpretación geométrica de ambos parámetros (¿por qué la elipse RPS tiene por semiejes: a sen phi, b sen phi?)



(A)

Fig. 3.8.4



(B)

(C)

Las superficies de revolución. Cuando la curva  $F(y, z) = 0$  (ver figura 3.8.5) gira alrededor del eje z, se genera una superficie de revolución, cuya ecuación cartesiana, tú lo sabes, tiene la forma:

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

Si llamamos "u" al radio de la sección circular (horizontal) que contiene al punto "p" y "θ" al ángulo que forma el plano vertical que pasa por "p", con el plano XOZ, tendremos:

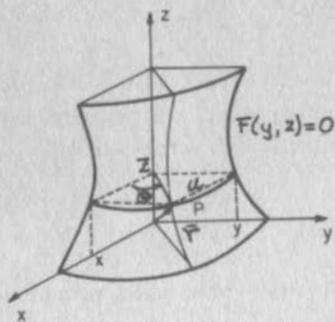


Fig. 3.8.5

$$\begin{aligned}x &= u \cos \theta \\y &= u \sin \theta\end{aligned}$$

Si  $\theta = 90^\circ$ ,  $x=0$ ,  $y=u$ ; si además  $F_z \neq 0$   $z = f(y) = f(u)$

Con lo que las ecuaciones paramétricas de una superficie de revolución, quedan:

$$\begin{aligned}x &= u \cos \theta \\y &= u \sin \theta \\z &= f(u)\end{aligned} \quad 3.8.0.8$$

Ejemplo 3.8.2 Establecer la ecuación vectorial del paraboloides de revolución que pasa por la curva.

$$\begin{aligned}z &= y^2 \\x &= 0\end{aligned}$$

Solución:

De acuerdo a lo que acabamos de ver:

$$\vec{r} = u \cos \theta \mathbf{i} + u \sin \theta \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}$$

al igual que en casos anteriores, nos interesa saber cuándo a un punto de la superficie, corresponde un sólo punto en el plano de los parámetros; es decir, cuándo existe la transformación (función) inversa. Para averiguarlo, consideremos que un punto en la superficie, aunque tenga tres coordenadas sólo dos de ellas pueden fijarse arbitrariamente. Entonces, si se tiene:

$$\begin{aligned}x &= x(u, v) & 3.8.0.9 \\y &= y(u, v) & 3.8.0.10 \\z &= z(u, v) & 3.8.0.11\end{aligned}$$

se pueden fijar arbitrariamente  $x, y$ ;  $x, z$  ó  $y, z$  dando lugar respectivamente a los sistemas 3.8.0.9, con 3.8.0.10; 3.8.0.9., con 3.8.0.11; 3.8.0.10 con 3.8.0.11.

Bastará entonces que uno de esos sistemas defina a  $u, v$  como funciones implícitas; o lo que es lo mismo, que uno por lo menos de los Jacobianos

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right), J\left(\frac{z, x}{u, v}\right), J\left(\frac{y, z}{u, v}\right)$$

Sea diferente de cero.

Ejemplo 3.8.3 En una esfera de radio = a

$$\begin{aligned}x &= a \sin \psi \cos \theta \\y &= a \sin \psi \sin \theta \\z &= a \cos \psi\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}J\left(\frac{x, y}{\psi, \theta}\right) &= \begin{vmatrix} a \cos \psi \cos \theta & -a \sin \psi \sin \theta \\ a \cos \psi \sin \theta & a \sin \psi \cos \theta \end{vmatrix} = a^2 \sin \psi \cos \psi \\J\left(\frac{z, x}{\psi, \theta}\right) &= \begin{vmatrix} -a \sin \psi & 0 \\ a \cos \psi \cos \theta & -a \sin \psi \sin \theta \end{vmatrix} = a^2 \sin^2 \psi \sin \theta \\J\left(\frac{y, z}{\psi, \theta}\right) &= \begin{vmatrix} a \cos \psi \sin \theta & a \sin \psi \cos \theta \\ -a \sin \psi & 0 \end{vmatrix} = a^2 \sin^2 \psi \cos \theta\end{aligned}$$

Los tres Jacobianos son en general diferentes de cero; pero los tres se anulan en  $\psi = 0$  y en  $\psi = 180^\circ$ . En efecto, a cada polo corresponde una infinidad de puntos en el plano  $\psi, \theta$  como puede observarse en la figura 3.8.6

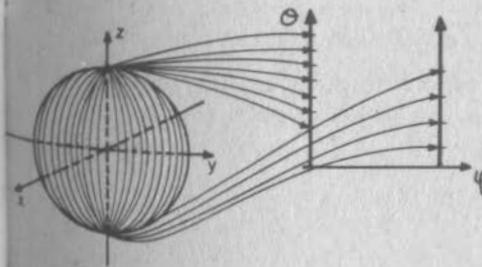


Fig. 3.8.6

Fuera de esos dos puntos, a cada punto de la superficie de la esfera corresponderá un sólo punto en el plano  $\psi, \theta$ . Cabe indicar también que si uno de los parámetros se mantiene constante, se estará definiendo una curva de la superficie, puesto que tendremos un sólo parámetro. Así por ejemplo en el cilindro.

$$\begin{aligned}x &= 3 \cos \theta \\y &= 3 \operatorname{sen} \theta \\z &= u\end{aligned}$$

Si hacemos  $\theta = 30^\circ$ , obtenemos la recta

$$\begin{aligned}x &= 3 \sqrt{3}/2 \\y &= 3/2\end{aligned}$$

Si, por el contrario, hacemos  $u = 4$ , obtenemos la circunferencia

$$\begin{aligned}x &= 3 \cos \theta \\y &= 3 \operatorname{sen} \theta \\z &= 4\end{aligned}$$

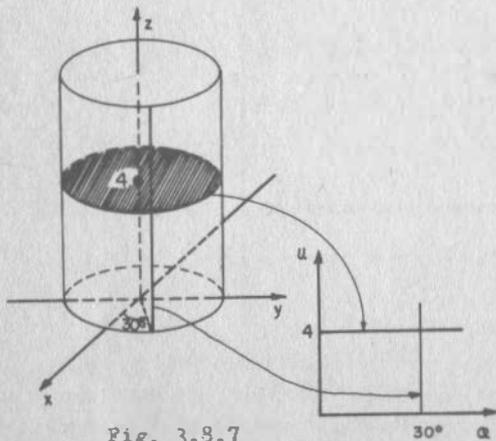


Fig. 3.8.7

Ejemplo 3.8.4 Encontrar la representación, en el plano  $\psi, \theta$  de la curva de intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  y el cilindro  $x^2 + y^2 - 5y = 0$

Estas curvas se representan en el plano  $u, \theta$  como se muestra en la fig. 3.8.7

Más aún, si alguno de los Jacobianos de transformación es en general diferente de cero, cualquier curva de la superficie podrá ser representada en el plano de los parámetros, como otra curva.

Solución:

Las ecuaciones de transformación para la esfera, son:

$$\begin{aligned}x &= 5 \operatorname{sen} \psi \cos \theta \\y &= 5 \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \\z &= 5 \cos \psi\end{aligned}$$

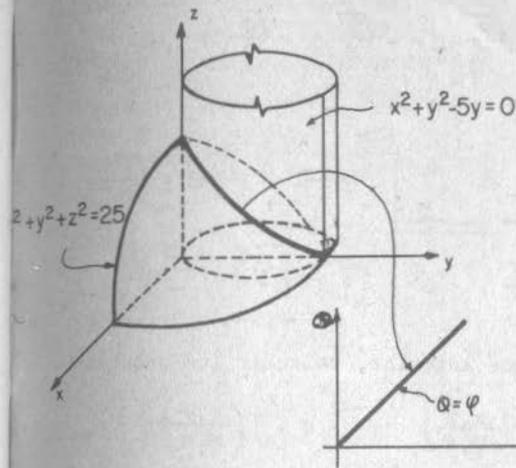


Fig. 3.8.8

Al aplicar estas ecuaciones al cilindro:

$$\begin{aligned}x^2 &= 25 \operatorname{sen}^2 \psi \cos^2 \theta \\y^2 &= 25 \operatorname{sen}^2 \psi \operatorname{sen}^2 \theta \\x^2 + y^2 &= 25 \operatorname{sen}^2 \psi \\-5y &= -25 \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \\x^2 + y^2 - 5y &= 25 \operatorname{sen} \psi (\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \theta) = 0\end{aligned}$$

Puesto que, como ya vimos  $\operatorname{sen} \psi \neq 0$  para que no se anulen los tres jacobianos, entonces se tiene que cumplir que:

$$\operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \theta = 0 ; \psi = \theta$$

que representa una recta en el plano  $\psi, \theta$  como se ilustra en la figura 3.8.8.

Ejemplo 3.8.5

Calcular el vector normal del elipsoide:  $\vec{r} = \operatorname{sen} \psi \cos \theta \mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + 3 \cos \psi \mathbf{k}$  en el punto en que  $\psi = 30^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$ .

Solución:

Para conocer el vector normal debemos conocer dos vectores tangentes a la superficie. Hemos dicho que si hacemos uno de los parámetros constante, se define una curva de la superficie; la tangente a esa curva será justamente la derivada (parcial) del vector de posición " $\vec{r}$ " con respecto al parámetro que queda como variable.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} = \cos \psi \cos \theta \mathbf{i} + 2 \cos \psi \sin \theta \mathbf{j} - 3 \sin \psi \mathbf{k}$$

$$\left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \right|_P = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} - 3 \frac{1}{2} \mathbf{k} = \frac{\sqrt{6}}{4} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{6}}{2} \mathbf{j} - \frac{3}{2} \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\sin \psi \sin \theta \mathbf{i} + 2 \sin \psi \cos \theta \mathbf{j}$$

$$\left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|_P = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + 2 \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j}$$

Entonces

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 3\frac{\sqrt{2}}{4} \mathbf{i} + 3\frac{\sqrt{2}}{8} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{k}$$

Ejemplo 3.8.6.- Para el elipsoide anterior, calcular los jacobianos:

$$A = J\left(\frac{y,z}{\psi, \theta}\right) ; \quad B = J\left(\frac{z,x}{\psi, \theta}\right) ; \quad C = J\left(\frac{x,y}{\psi, \theta}\right)$$

en el mismo punto.

Solución:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cos \psi \sin \theta & 2 \sin \psi \cos \theta \\ -3 \sin \psi & 0 \end{vmatrix} = 6 \sin^2 \psi \cos \theta = 6 \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \sin \psi & 0 \\ \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \sin \theta \end{vmatrix} = 3 \sin^2 \psi \sin \theta = 3 \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \sin \theta \\ 2 \cos \psi \sin \theta & 2 \sin \psi \cos \theta \end{vmatrix} = 2 \sin \psi \cos \psi \cos^2 \theta + 2 \sin \psi \cos \psi \sin^2 \theta$$

$$C = 2 \sin \psi \cos \psi = \sin 2\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como vemos, los jacobianos resultan ser equivalentes a las componentes del vector normal. Te dejamos, como ejercicio, que demuestres esta propiedad para cualquier superficie,  $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ .

Ejemplo 3.8.7 Dada la superficie  $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ ; calcular el área del paralelogramo que definen sus tangentes  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$  y  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ .

Solución: El área pedida es  $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|$ ; esta cantidad la podemos calcular de dos maneras:

a) Puesto que  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$

entonces:

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

donde

$$A = J\left(\frac{y,z}{u,v}\right) ; \quad B = J\left(\frac{z,x}{u,v}\right) ; \quad C = J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$$

b)  $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)}$

Ahora, podemos escribir:

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \vec{q}$$

y, como recuerdas de A.G.A. podemos intercambiar operadores:

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \vec{q} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \right]$$

El término en el paréntesis rectangular sabes cómo calcularlo:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} - \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

y así:

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2 = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) - \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right)$$

Para facilidad de escritura, hagamos:

$$E = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right)^2$$

$$F = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$$

$$G = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right)^2$$

Así:

$$\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Como ejercicio, verifica la igualdad obtenida para el elipsoide del ejemplo 3.8.5 ¿Cuándo desaparece "F"?

### 3.9 Generalización del concepto de Gradiente.

Recordemos brevemente acerca de la diferencial total de una función escalar  $f(\bar{r})$ ; su expresión puede escribirse:

$$df = \nabla f \cdot d\bar{r}$$

o bien, en forma matricial:

$$df = [\nabla f] [d\bar{r}]$$

Comparemos esta expresión con la ecuación (3.6.0.3): también en ésta tenemos en el primer miembro la diferencial de una función, función vectorial en este caso; en el segundo miembro, también aparece el vector  $d\bar{r}$  y, premultiplíquelo, una matriz. Este premultiplicador no es ahora un vector, es decir, una matriz renglón; sino que se trata de una matriz general; pero desempeña el mismo papel que el gradiente de una función escalar. Por esto, le llamaremos "gradiente de una función vectorial"

En general, si tenemos la función vectorial:

$$\bar{F}(u_1, u_2, \dots, u_m)$$

donde

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$u_2 = u_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\dots$$

$$u_m = u_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$d\bar{F} = (du_1, du_2, \dots, du_m)$$

pero

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} dx_n$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u_2}{\partial x_n} dx_n$$

$$\dots$$

$$du_m = \frac{\partial u_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_m}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} dx_n$$

Entonces:

$$[d\bar{F}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} = [\nabla \bar{F}] \begin{bmatrix} d\bar{r} \end{bmatrix} \quad 3.9.0.1$$

Si hacemos

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}$$

al dividir (3.9.0.1) entre "ds" obtendremos la derivada direccional de la función vectorial  $\bar{F}$  según una cierta dirección matemática en el espacio de "n" dimensiones

$$\frac{d\bar{F}}{ds} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \dots + \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_n} \frac{dx_n}{ds} \quad 3.9.0.2$$

que también puede escribirse:

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = \left[ \nabla \vec{F} \right] \left[ \frac{d\vec{r}}{ds} \right] \quad 3.9.0.3$$

expresión enteramente análoga donde el producto escalar se ha sustituido por un producto matricial y la matriz columna  $d\vec{r}/ds$  es un vector unitario. Si  $n=3$ , este vector estará dado por sus cosenos directores y definirá una dirección geométrica. Si  $n > 3$ , suele extrapolarse el concepto y hablar de ángulos directores con ejes matemáticos, así como de direcciones matemáticas.

Ejemplo 3.9.1 .- Encontrar el gradiente de  $\vec{r} = xi + yj + zk$ .

Solución:

$$\nabla \vec{r} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv I$$

Ejemplo 3.9.2 .- Encontrar el gradiente del campo gravitacional universal.

Solución:

Supongamos una masa "M" y coloquemos ahí el origen; consideremos otra masa "m" en un punto definido por el vector de posición  $\vec{r}$ . Entonces, de acuerdo con la ley de Newton:

$$\vec{F} = - \left( G \frac{Mm}{|\vec{r}|^2} \right) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

donde el término entre paréntesis define la magnitud, en tanto que el término fuera del paréntesis define la dirección; el signo define el sentido de la fuerza, hacia la masa mayor.

Al desglosar esta expresión en sus componentes, obtenemos:

$$\vec{F} = -GMm \frac{xi + yj + zk}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Entonces calculemos  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \right] \\ &= -x \left( -\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (2x) - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} (3x^2 - x^2 - y^2 - z^2) \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} (2x^2 - y^2 - z^2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -y \left( -\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (2x) = 3xy(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -z \left( -\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (2x) = 3xz(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}$$

Entonces:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \left[ (2x^2 - y^2 - z^2)i + 3xyj + 3xzk \right]$$

Análogamente:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \left[ 3xyi + (2y^2 - x^2 - z^2)j + 3yzk \right]$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial z} = \frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \left[ 3xzi + 3yzj + (2z^2 - x^2 - y^2)k \right]$$

Y el gradiente pedido:

$$\nabla \vec{F} \equiv \frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \begin{bmatrix} (2x^2 - y^2 - z^2) & 3xy & 3xz \\ 3xy & (2y^2 - x^2 - z^2) & 3yz \\ 3xz & 3yz & (2z^2 - x^2 - y^2) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.9.3 El campo de velocidades de un fluido está dado por:

$$\vec{v} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xzk \quad (\sqrt{v} \text{ en m/seg si } x, y, z \text{ en m})$$

Calcular la rapidez de crecimiento de la velocidad en el punto  $(4, 2, 2)$  y en dirección que forma un ángulo de  $60^\circ$  con el eje "x" y de  $45^\circ$  con el eje "y".

Solución: El gradiente de velocidad es:

$$\nabla \vec{v} = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Para calcular el vector unitario recordamos que:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\text{por lo que: } \cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = 1 - (1/2)^2 - (\sqrt{2}/2)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \vec{e} = (1/2, \sqrt{2}/2, 1/2)$$

Así:

$$\frac{d\vec{v}}{ds} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}+1 \\ 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.83 \\ 2.41 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ m/seg/m}$$

que se puede interpretar como sigue: la componente en "x" de la velocidad varía, en la dirección dada, a razón de 3.83 m/seg/m (6 cm/seg/cm), etc.

NOTA: El análisis del gradiente de velocidades es de vital importancia en los fenómenos de mezcla, con los que el ingeniero, cualquiera que sea su especialidad, alguna vez tendrá que tratar.

### 3.10 El Gradiente en Coordenadas Curvilíneas.

#### 3.10.1 Los vectores unitarios en Coordenadas Curvilíneas.

Cuando estuvimos repasando algunas transformaciones de coordenadas en todas expresamos el vector  $\vec{r}$  en términos de sus funciones componentes, es decir:

$$\vec{r} = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j}$$

La expresión fue el caso de las coordenadas bipolares (fig.3.7.6) donde nos limitamos a escribir:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 3.7.1.5$$

$$v = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \quad 3.7.1.6$$

La razón es, por supuesto, que resulta muy laborioso despejar x, y componentes de  $\vec{r}$ , 3.7.1.5 y 6 podríamos escribir, en cambio, el vector  $\vec{q}$ :

$$\vec{q} = (\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{(x-a)^2 + y^2})$$

pero también podríamos escribirlo en forma binómica:

$$\vec{q} = \sqrt{x^2 + y^2} \vec{e}_u + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \vec{e}_v$$

donde, en vez de los vectores  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ , hemos usado los vectores  $\vec{e}_u, \vec{e}_v$  unitarios y alojados en los ejes u, v. Naturalmente,  $\vec{e}_u$  señala la dirección en que "v" es constante, como "i" señala la dirección en que "y" conserva su valor; análogamente  $\vec{e}_v$  señalará la dirección en que u se conserva constante.

Estas direcciones no son constante desde luego en el sistema x, y; no lo son, porque  $u = \text{cte}$ ,  $v = \text{cte}$ , son representadas por curvas, por circunferencias, específicamente; por lo mismo, los vectores unitarios  $\vec{e}_u, \vec{e}_v$ , serán en cada punto, los vectores tangentes unitarios

rios a las circunferencias que se intersectan en este punto ---  
(fig. 3.10.1) En otras palabras:

$$\bar{e}_u = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right|} ; \quad \bar{e}_v = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right|}$$

Entonces, si queremos expresar estos vectores en el sistema  $xy$ ,--  
procedemos como ya sabemos:

$$u^2 = x^2 + y^2$$

$$v^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$2u \, du = 2x \, dx + 2y \, dy$$

$$2v \, dv = 2(x-a) \, dx + 2y \, dy$$

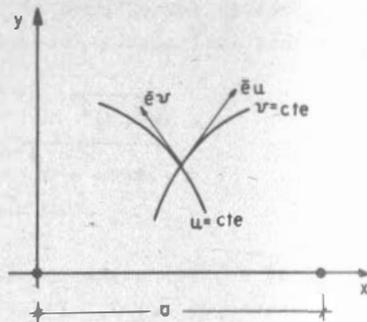


Fig. 3.10.1

Sistema que, al resolverlo por cualquier método que quieras, da:

$$dx = \frac{u}{a} \, du - \frac{v}{a} \, dv$$

$$dy = \frac{u}{ay} (a-x) \, du + \frac{xv}{ay} \, dv$$

Lo que nos permite afirmar que:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{u}{a} ; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{v}{a} ; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{u}{ay} (a-x) ; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{xv}{ay}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \frac{u}{a} \mathbf{i} + \frac{u}{ay} (a-x) \mathbf{j} = \frac{u}{a} \left( \mathbf{i} + \frac{a-x}{y} \mathbf{j} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = -\frac{v}{a} \mathbf{i} + \frac{xv}{ay} \mathbf{j} = -\frac{v}{a} \left( \mathbf{i} - \frac{x}{y} \mathbf{j} \right)$$

Sus módulos:

$$\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right| = \frac{u}{a} \sqrt{1 + \frac{(a-x)^2}{y^2}} = \frac{u}{ay} \sqrt{y^2 + (a-x)^2} = \frac{uv}{ay}$$

$$\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| = \frac{v}{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{v}{ay} \sqrt{y^2 + x^2} = \frac{uv}{ay}$$

Por lo que:

$$\bar{e}_u = \frac{\frac{u}{a} \left( \mathbf{i} + \frac{a-x}{y} \mathbf{j} \right)}{\frac{uv}{ay}} = \frac{\frac{1}{y} \left( y\mathbf{i} + (a-x)\mathbf{j} \right)}{\frac{v}{y}} = \frac{1}{v} \left[ y\mathbf{i} + (a-x)\mathbf{j} \right]$$

$$\bar{e}_v = \frac{-\frac{v}{a} \left( \mathbf{i} - \frac{x}{y} \mathbf{j} \right)}{\frac{uv}{ay}} = \frac{-\frac{1}{y} \left[ (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}) \right]}{\frac{u}{y}} = -\frac{1}{u} \left[ y\mathbf{i} - x\mathbf{j} \right]$$

Nota que estos vectores no son necesariamente ortogonales; en efecto:

$$\bar{e}_u \cdot \bar{e}_v = -\frac{1}{uv} \left[ y^2 - x(a-x) \right] = -\frac{1}{uv} (y^2 - ax + x^2)$$

$$\bar{e}_u \cdot \bar{e}_v = -\frac{1}{uv} (u^2 - ax) \neq 0, \text{ en general}$$

En cambio, hay otros sistemas de coordenadas curvilíneas en los cuales los vectores unitarios correspondientes, siempre son ortogonales entre sí; por ejemplo, el sistema polar:

$$\bar{r} = \rho \cos \theta \mathbf{i} + \rho \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} = \bar{e}_\rho$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \mathbf{i} + \rho \cos \theta \mathbf{j} ; \quad \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \right| = \rho$$

$$\Rightarrow \bar{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

$$\bar{e}_\rho \cdot \bar{e}_\theta = -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta = 0$$

En estos casos y sólo en éstos, tendremos que  $\bar{e}_\rho$ , tangente a la curva  $\theta = cte$ , es perpendicular a la curva  $\rho = cte$ ., por lo que:

$$\bar{e}_\rho = \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|}$$

Análogamente

$$\bar{e}_\theta = \frac{\nabla \theta}{|\nabla \theta|}$$

En general, consideremos la transformación:

$$\bar{r} = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j}$$

El vector unitario  $\bar{e}_u$  indicará la dirección en que "v" es constante, por lo que será tangente a dicha curva y se podrá encontrar como:

$$\bar{e}_u = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right|} \tag{3.10.1.1}$$

Análogamente:

$$\bar{e}_v = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right|} \tag{3.10.1.2}$$

Si  $\bar{e}_u \cdot \bar{e}_v = 0$ , entonces los vectores unitarios conservan su ortogonalidad al pasar de un sistema a otro; se dice que se trata de un mapeo "uniforme" y en tales casos y sólo en éstos:

$$\bar{e}_u = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \tag{3.10.1.3}$$

$$\bar{e}_v = \frac{\nabla v}{|\nabla v|} \tag{3.10.1.4}$$

En tres dimensiones, hay una dirección en la cual dos de las variables se conservan constantes; por ejemplo, en la dirección "i", en el sistema cartesiano, las variables "y" y "z" se conservan constantes y está definida por la intersección de las superficies (planos)  $y = cte$ ,  $z = cte$  (fig. 3.10.2)

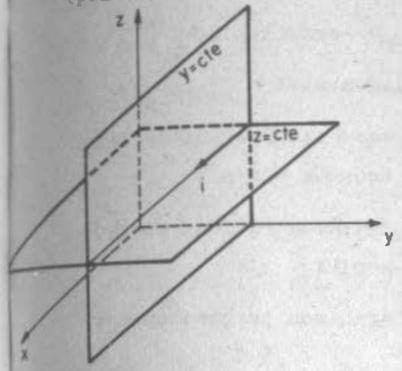


Fig. 3.10.2

En la misma forma, si pensamos en el sistema esférico, por ejemplo, la dirección  $\bar{e}_\theta$  señalará hacia donde " $\psi$ " y " $\rho$ " son constantes y quedará definida por las superficies  $\rho = cte$ ,  $\psi = cte$ ; pero ahora esas superficies no son planos, sino una esfera y un cono (fig.3.10.3) cuya curva de intersección es una circunferencia, tangente a la cual quedará  $\bar{e}_\theta$ , siendo variable por supuesto en cada punto.

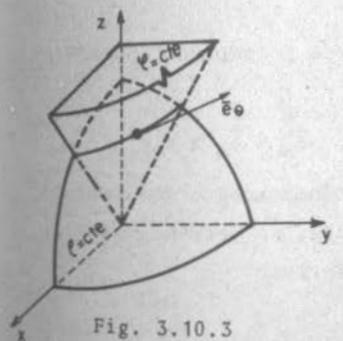


Fig. 3.10.3

Análogamente, las figuras 3.10.4 y 3.10.5 explican gráficamente la dirección de los vectores unitarios  $\bar{e}_\rho$  y  $\bar{e}_\theta$ . Para definir estos valores, recordemos que si mantenemos constantes a " $\rho$ " y a " $\psi$ ", por ejemplo, estamos definiendo a la curva de intersección de ambas superficies, cuyo parámetro es " $\theta$ " y por lo mismo,

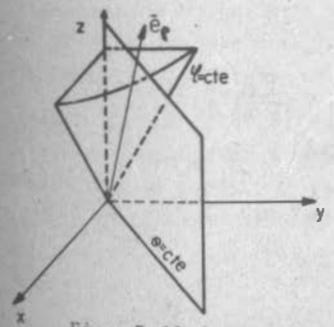


Fig. 3.10.4

$$\bar{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \right|}$$

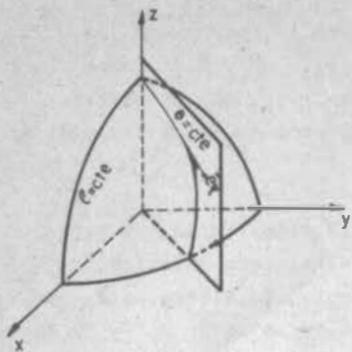


Fig. 3.10.5

Nota que, en este caso, estos tres vectores son perpendiculares entre sí; en efecto:

$$\begin{aligned} \bar{e}_\rho \cdot \bar{e}_\psi &= \cos^2 \theta \operatorname{sen} \psi \cos \psi + \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} \psi \cos \psi - \operatorname{sen} \psi \cos \psi \\ &= \operatorname{sen} \psi \cos \psi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta - 1) = 0 \end{aligned}$$

Tú puedes comprobar los otros dos productos y comprobar además que:

$$\bar{e}_\rho = \bar{e}_\psi \times \bar{e}_\theta ; \quad \bar{e}_\psi = \bar{e}_\theta \times \bar{e}_\rho ; \quad \bar{e}_\theta = \bar{e}_\rho \times \bar{e}_\psi$$

Por lo mismo,  $\bar{e}_\rho$  será perpendicular simultáneamente a dos tangentes a la esfera  $\rho = \text{cte}$  y consiguientemente, es perpendicular a dicha superficie de nivel y podremos escribir

$$\bar{e}_\rho = \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|}$$

y análogamente

$$\bar{e}_\psi = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|} ; \quad \bar{e}_\theta = \frac{\nabla \theta}{|\nabla \theta|}$$

En general, si tenemos la transformación

$$\bar{r} = f(u, v, w)\mathbf{i} + g(u, v, w)\mathbf{j} + h(u, v, w)\mathbf{k} \quad 3.10.1.5$$

Ahora:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = -\rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \mathbf{i} + \rho \cos \theta \operatorname{sen} \psi \mathbf{j}$$

$$\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \right| = \rho \operatorname{sen} \psi$$

Por lo que:

$$\bar{e}_\theta = -\operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

Análogamente:

$$\bar{e}_\rho = \cos \theta \operatorname{sen} \psi \mathbf{i} + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \mathbf{j} + \cos \psi \mathbf{k} = \bar{r} / \rho$$

$$\bar{e}_\psi = \cos \theta \cos \psi \mathbf{i} + \operatorname{sen} \theta \cos \psi \mathbf{j} - \operatorname{sen} \psi \mathbf{k}$$

el vector  $\bar{e}_u$  indicará la dirección en que "v" y "w" se mantendrán constantes, por consiguiente, tangente a la curva definida por la intersección de las superficies de nivel  $w = \text{cte}$ ,  $v = \text{cte}$ .; la ecuación vectorial de esta curva se obtiene directamente de 3.10.1.5, por lo que:

$$\bar{e}_u = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right|} \quad 3.10.1.6$$

Análogamente:

$$\bar{e}_v = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right|} \quad 3.10.1.7$$

$$\bar{e}_w = \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial w}}{\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \right|} \quad 3.10.1.8$$

Si  $\bar{e}_u \cdot \bar{e}_v = \bar{e}_v \cdot \bar{e}_w = \bar{e}_w \cdot \bar{e}_u = 0$ , se dice que, el mapeo es conforme y en tal caso y solo en éste, se puede escribir que:

$$\bar{e}_u = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \quad 3.10.1.9$$

$$\bar{e}_v = \frac{\nabla v}{|\nabla v|} \quad 3.10.1.10$$

$$\bar{e}_w = \frac{\nabla w}{|\nabla w|} \quad 3.10.1.11$$

La ventaja de contar con estos vectores unitarios es que hay campos físicos que pueden expresarse en forma muy sencilla en términos de ellos; pondremos dos ejemplos:

Ejemplo 3.10.1 Sea una rueda de radio "a" que gira alrededor de un eje con velocidad angular "w". A cada partícula de la rueda fijada por su vector de posición, le corresponde un vector velocidad, teniéndose de este modo una función vectorial de variable vectorial o, si se prefiere, un campo de velocidades.

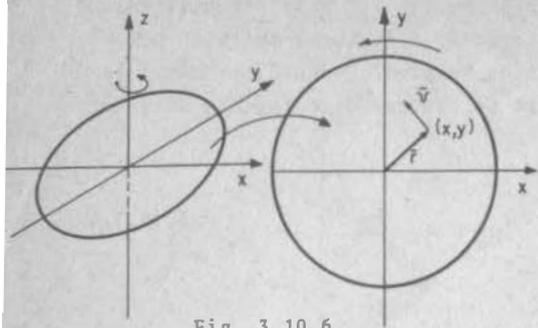


Fig. 3.10.6

La velocidad, teniendo en cuenta que  $\sqrt{x^2+y^2}$  permanece constante para una partícula determinada:

$$\vec{v} = -\omega\sqrt{x^2+y^2} \sin \omega t \mathbf{i} + \omega\sqrt{x^2+y^2} \cos \omega t \mathbf{j} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$$

Ahora, en coordenadas polares lo escribiríamos ( $\omega t = \theta$ ):

$$\vec{v} = -\omega \rho \sin \theta \mathbf{i} + \omega \rho \cos \theta \mathbf{j} = \omega \rho (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j})$$

$$\vec{v} = \omega \rho \bar{e}_\theta$$

Ejemplo 3.10.2 Una partícula cargada de electricidad genera un campo eléctrico que se expresa como sigue:

$$\mathbf{E} = \frac{kq_0 q \vec{r}}{|\vec{r}|^2 |\vec{r}|} = \frac{kq_0 q \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Donde el origen se encuentra en la partícula de carga  $q_0$ ; "k" es la constante dieléctrica y "q" es la carga de una partícula cualquiera que se encuentra en la extremidad de  $\vec{r}$ . Si las cargas tienen el mismo signo,  $q_0 q > 0$  y la fuerza tendrá el mismo sentido que  $\vec{r}$ , es decir, se repelen; lo contrario ocurre si  $q_0 q < 0$ .

Este campo lo podemos desglosar en coordenadas cartesianas:

$$\vec{E} = kq_0 q \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

pero también puede expresarse en coordenadas esféricas:

$$\vec{E} = kq_0 q \frac{\rho \cos \theta \sin \psi \mathbf{i} + \rho \sin \theta \sin \psi \mathbf{j} + \rho \cos \psi \mathbf{k}}{\rho^3}$$

$$\vec{E} = kq_0 q \frac{\cos \theta \sin \psi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \psi \mathbf{j} + \cos \psi \mathbf{k}}{\rho^2}$$

$$\vec{E} = \frac{kq_0 q}{\rho^2} \bar{e}_\rho$$

Desde luego que, para el campo gravitacional universal:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{\rho^2} \bar{e}_\rho \quad 3.10.1.12$$

### 3.10.2 Cálculo del Gradiente en Coordenadas Curvilíneas.

Propongámonos calcular la variación del campo gravitacional universal, dado por 3.10.1.12, en el punto  $(\rho, \psi, \theta)$  y según la dirección  $\bar{e}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ .

Solución:

Se trata de una derivada direccional y sabemos que ésta se calcula:

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = [\nabla \vec{F}] [\bar{e}] \quad 3.10.2.1$$

El gradiente de  $\vec{F}$  lo calculamos en el ejemplo 3.9.2; pero lo hicimos en coordenadas cartesianas y ahora el punto está dado en coordenadas esféricas; para evitar hacer la transformación, consideremos la regla de la cadena:

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \rho} \frac{d\rho}{ds} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \psi} \frac{d\psi}{ds} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds}$$

que puesta en forma matricial:

$$\left[ \frac{d\bar{F}}{ds} \right] = \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} \right] \frac{d\rho}{ds} + \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \psi} \right] \frac{d\psi}{ds} + \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} \right] \frac{d\theta}{ds} \quad 3.10.2.a$$

Además, las derivadas direccionales  $\frac{d\rho}{ds}$ ,  $\frac{d\psi}{ds}$ ,  $\frac{d\theta}{ds}$  las calculamos:

$$\frac{d\rho}{ds} = \nabla \rho \cdot \bar{e} ; \quad \frac{d\psi}{ds} = \nabla \psi \cdot \bar{e} ; \quad \frac{d\theta}{ds} = \nabla \theta \cdot \bar{e}$$

o bien, en forma matricial:

$$\frac{d\rho}{ds} = [\nabla \rho] [\bar{e}] \quad 3.10.2.b$$

$$\frac{d\psi}{ds} = [\nabla \psi] [\bar{e}] \quad 3.10.2.c$$

$$\frac{d\theta}{ds} = [\nabla \theta] [\bar{e}] \quad 3.10.2.d$$

Entonces, al sustituir 3.10.2. b,c y d en 3.10.2.a teniendo en cuenta a 3.10.2.1:

$$\frac{d\bar{F}}{ds} = [\nabla \bar{F}] [\bar{e}] = \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} \right] [\nabla \rho] [\bar{e}] + \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \psi} \right] [\nabla \psi] [\bar{e}] + \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} \right] [\nabla \theta] [\bar{e}]$$

que también puede expresarse, aprovechando la propiedad distributiva del producto matricial:

$$\frac{d\bar{F}}{ds} = [\nabla \bar{F}] [\bar{e}] = \left\{ \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} \right] [\nabla \rho] + \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \psi} \right] [\nabla \psi] + \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} \right] [\nabla \theta] \right\} [\bar{e}] \quad 3.10.2.e$$

Podemos calcular las parciales de  $\bar{F}$  con respecto a las tres variables:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} = -\frac{GMm}{\rho^2} \frac{\partial \bar{e}_\rho}{\partial \rho} + 2 \frac{GMm}{\rho^3} \bar{e}_\rho$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \psi} = -\frac{GMm}{\rho^2} \frac{\partial \bar{e}_\rho}{\partial \psi}$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} = -\frac{GMm}{\rho^2} \frac{\partial \bar{e}_\rho}{\partial \theta}$$

Si recordamos que:

$$\bar{e}_\rho = \cos \theta \operatorname{sen} \psi \mathbf{i} + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \mathbf{j} + \cos \psi \mathbf{k}$$

las derivadas buscadas, ya en forma matricial quedan:

$$\left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} \right] = \frac{2GMm}{\rho^3} \begin{bmatrix} \cos \theta \operatorname{sen} \psi \\ \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \\ \cos \psi \end{bmatrix} \quad 3.10.2.f$$

$$\left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \psi} \right] = -\frac{GMm}{\rho^2} \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi \\ \operatorname{sen} \theta \cos \psi \\ -\operatorname{sen} \psi \end{bmatrix} \quad 3.10.2.g$$

$$\left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} \right] = -\frac{GMm}{\rho^2} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \\ \cos \theta \operatorname{sen} \psi \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3.10.2.h$$

y ahora nos falta calcular los gradientes de  $\rho, \psi, \theta$ ; para ello, recordemos que:

$$\left[ J \begin{pmatrix} \rho, \psi, \theta \\ x, y, z \end{pmatrix} \right] \left[ J \begin{pmatrix} x, y, z \\ \rho, \psi, \theta \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que, desglosando los productos del primer renglón, obtenemos:

$$\nabla \rho \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = 1 \quad 3.10.2.i$$

$$\nabla \rho \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} = 0 \quad 3.10.2.j$$

$$\nabla \rho \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = 0 \quad 3.10.2.k$$

que nos indican que  $\nabla \rho$  es simultáneamente perpendicular a:  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi}$  y a  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$ ; esto quiere decir que:

$$\nabla \rho = \lambda \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) \quad 3.10.2.l$$

Al sustituir (3.10.2.l) en (3.10.2.i)

$$\lambda \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = 1$$

pero:

$$\left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = J \begin{pmatrix} x, y, z \\ \rho, \psi, \theta \end{pmatrix} = \rho^2 \operatorname{sen} \psi$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen} \psi} \quad 3.10.2.m$$

y al llevar (3.10.2.m) a (3.10.2.l) resulta:

$$\nabla \rho = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen} \psi} \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right)$$

En este caso, en que sabemos que  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \perp \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$ ; y que sabemos además que

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \right| \bar{e}_\psi \quad ; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| \bar{e}_\theta$$

podemos escribir

$$\nabla \rho = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen} \psi} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \right| \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| (\bar{e}_\psi \times \bar{e}_\theta) = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen} \psi} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \right| \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| \bar{e}_\rho$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} = \rho \cos \theta \cos \psi \bar{i} + \rho \operatorname{sen} \theta \cos \psi \bar{j} - \rho \operatorname{sen} \psi \bar{k} \Rightarrow \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \right| = \rho$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \bar{i} + \rho \cos \theta \operatorname{sen} \psi \bar{j} \Rightarrow \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = \rho \operatorname{sen} \psi$$

Entonces:

$$\nabla \rho = \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen} \psi} \rho \rho \operatorname{sen} \psi (\cos \theta \operatorname{sen} \psi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi, \cos \psi)$$

$$\nabla \rho = [\cos \theta \operatorname{sen} \psi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi, \cos \psi] \quad (3.10.2.n)$$

Análogamente:

$$\nabla \psi = \frac{1}{\rho} [\cos \theta \cos \psi, \operatorname{sen} \theta \cos \psi, -\operatorname{sen} \psi] \quad (3.10.2.o)$$

$$\nabla \theta = \frac{1}{\rho} [-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 0] \quad (3.10.2.p)$$

Ahora, con (3.10.2.f, g, h, n, o, p), podemos efectuar los productos indicados en (3.10.2.e):

$$\left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right] [\nabla \rho] = \frac{GMm}{\rho^3} \begin{bmatrix} 2 \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \psi & 2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^2 \psi & 2 \cos \theta \operatorname{sen} \psi \cos \psi \\ 2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^2 \psi & 2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \psi & 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \cos \psi \\ 2 \cos \theta \operatorname{sen} \psi \cos \psi & 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \cos \psi & 2 \cos^2 \psi \end{bmatrix}$$

$$\left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \right] [\nabla \psi] = \frac{GMm}{\rho^3} \begin{bmatrix} -\cos^2 \theta \cos^2 \psi & -\cos \theta \operatorname{sen} \theta \cos^2 \psi & \cos \theta \operatorname{sen} \psi \cos \psi \\ -\cos \theta \operatorname{sen} \theta \cos^2 \psi & -\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \psi & \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \cos \psi \\ \cos \theta \operatorname{sen} \psi \cos \psi & \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \cos \psi & -\operatorname{sen}^2 \psi \end{bmatrix}$$

$$\left[ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right] [\nabla \theta] = \frac{GMm}{\rho^3} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}^2 \theta & \operatorname{sen} \theta \cos \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al sumar estas matrices y hacer simplificaciones:

$$\frac{d\bar{F}}{ds} = \frac{GMm}{\rho^3} \begin{bmatrix} 3\cos^2\theta \sin^2\psi - 1 & 3\cos\theta \sin\theta \sin^2\psi & 3\cos\theta \sin\psi \cos\psi \\ 3\cos\theta \sin\theta \sin^2\psi & 3\sin^2\theta \sin^2\psi - 1 & 3\sin\theta \sin\psi \cos\psi \\ 3\cos\theta \sin\psi \cos\psi & 3\sin\theta \sin\psi \cos\psi & 3\cos^2\psi - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

3.10.2.g

que es el resultado buscado, pues todas las cantidades que aparecen son dadas.

Ahora pasemos nuestra atención a la ecuación (3.10.2.e) donde podemos ver que:

$$[\nabla \bar{F}] = \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} \right] [\nabla \rho] + \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \psi} \right] [\nabla \psi] + \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} \right] [\nabla \theta]$$

que es la expresión para la gradiente de cualquier campo vectorial en coordenadas esféricas; sin embargo, si recapitulamos en el procedimiento seguido para llegar a esta conclusión, caemos en la cuenta de que el razonamiento es general.

Entonces considerando el campo

$$\bar{F}(u, v, w)$$

donde las ecuaciones de transformación son:

$$x=f(u, v, w)$$

$$y=g(u, v, w)$$

$$z=h(u, v, w)$$

con la condición de que:

$$J = J \left( \begin{matrix} x, y, z \\ u, v, w \end{matrix} \right) \neq 0$$

Podamos decir entonces que:

$$[\nabla \bar{F}] = \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial u} \right] [\nabla u] + \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} \right] [\nabla v] + \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial w} \right] [\nabla w] \quad 3.10.2.2$$

Al mismo tiempo, podemos afirmar que:

$$\nabla u = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \right) \quad 3.10.2.3$$

$$\nabla v = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right) \quad 3.10.2.4$$

$$\nabla w = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right) \quad 3.10.2.5$$

con lo que:

$$[\nabla \bar{F}] = \frac{1}{J} \left\{ \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial u} \right] \left[ \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \right] + \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} \right] \left[ \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right] + \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial w} \right] \left[ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right] \right\} \quad 3.10.2.6$$

3.11 Las Invariantes de la Matriz Gradiente.

En el ejemplo (3.9.2) obtuvimos el gradiente del campo gravitacional universal, en coordenadas cartesianas:

$$[\nabla \vec{F}] = \frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} (2x^2-y^2-z^2) & 3xy & 3xz \\ 3xy & (2y^2-x^2-z^2) & 3yz \\ 3xz & 3yz & (2z^2-x^2-y^2) \end{bmatrix} \quad (a)$$

y en la ecuación (3.10.2.9) obtuvimos el gradiente del mismo campo en coordenadas esféricas.

$$[\nabla \vec{F}] = \frac{GMm}{\rho^3} \begin{bmatrix} 3\cos^2\theta \sin^2\varphi - 1 & 3\cos\theta \sin\theta \sin^2\varphi & 3\cos\theta \sin\varphi \cos\varphi \\ 3\cos\theta \sin\theta \sin^2\varphi & 3\sin^2\theta \sin^2\varphi - 1 & 3\sin\theta \sin\varphi \cos\varphi \\ 3\cos\theta \sin\varphi \cos\varphi & 3\sin\theta \sin\varphi \cos\varphi & 3\cos^2\varphi - 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

si sumamos los elementos de la diagonal principal de (a) obtenemos cero, mismo resultados que obtenemos si sumamos los elementos de la diagonal principal (b).

Esta coincidencia se explica porque entre la matriz (a) y (b) sólo ha mediado una transformación lineal y la suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz (traza) permanece invariante si ésta se somete a cualquier transformación lineal.

La demostración general de esta propiedad la puede ver en el Apéndice; pero nos gustaría hacer hincapié en que ya te has encontrado anteriormente con esta propiedad; por ejemplo, en Geometría Analítica.

## Ejemplo 3.11.1

Sea la elipse  $x^2 + 4y^2 = 4$  que, en forma matricial puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} x, y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \quad (c)$$

Si esta elipse la referimos a unos ejes  $u, v$  girados  $30^\circ$  con respecto a los anteriores, obtenemos:

$$\frac{7}{4} u^2 + \frac{\sqrt{27}}{2} uv + \frac{13}{4} v^2 = 4$$

que, puesta en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u, v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/4 & \sqrt{27}/4 \\ \sqrt{27}/4 & 13/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 4 \quad (d)$$

y podemos observar que en ambas matrices, la traza vale 5.

A nosotros, desde luego nos representa una gran ventaja utilizar una cantidad de esta naturaleza, precisamente porque sabemos que no va a cambiar con el sistema de referencia. Entonces:

**Definición 3.11.1** Dado el campo vectorial diferenciable

$$\vec{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

se llama DIVERGENCIA del campo vectorial  $\vec{F}$ , a

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (3.11.0.1)$$

Si volvemos a observar las matrices que aparecen en las ecuaciones (a) y (b), caeremos en la cuenta de que, en ambos casos, las restas de los elementos simétricos a la diagonal principal valen lo mismo (cero). Ello también lo podemos observar en las matrices de las ecuaciones (c) y (d). La demostración de que esta propiedad es general para todas las matrices, la puedes consul-

tar en el Apéndice. Como estas restas en un campo tridimensional son tres, las podemos ordenar en un vector que definimos como sigue:

Definición 3.11.2 Dado el campo vectorial diferenciable

$$\vec{F} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

se llama ROTACIONAL del campo vectorial  $\vec{F}$ , a

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (3.11.0.2)$$

Notemos que en estas dos invariantes están tomados en cuenta los nueve elementos de la matriz gradiente.

Hay una manera muy sencilla de recordar estas definiciones, que además, se presta para manipular ágilmente estos conceptos. Vamos a verla en seguida; pero antes debemos hacer algunas consideraciones y recordatorios sobre lo que es un operador.

A estas alturas, ya has tenido bastante contacto con operadores. Operadores son +, -, ÷, etc., que aprendiste en el ciclo elemental, a los cuales había que agregar los que conociste en los cursos superiores: d,  $\frac{d}{dx}$ ,  $\int$ , etc.

En este curso hemos introducido fundamentalmente dos operadores:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad \nabla$$

Lo que distingue a este último operador de los demás, es que tiene un carácter vectorial; es decir, no implica una sola operación sino un conjunto ordenado de operaciones: obtener ordenadamente todas las derivadas parciales. Por ello podemos representarlo, para el caso del espacio cartesiano:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Si lo aplicamos a una función escalar  $\phi(x,y,z)$  obtenemos:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

que funciona como el producto de un escalar por un vector:

$$\nabla \phi = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi$$

si aplicamos a una función vectorial  $\vec{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  vuelve a funcionar como un vector, en forma de matriz renglón:

$$[\vec{F}][\nabla] = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix}$$

En los conceptos que acabamos de definir, también se presta para una representación compacta, utilizando su carácter vectorial;

así por ejemplo, la divergencia:

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Así mismo el rotacional:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Este operador es llamado comúnmente "nabla" (por su semejanza con una letra del alfabeto hebreo), "atled" (delta al revés) o "grad".

Como dijimos antes, esta concepción también facilita su manipulación.

Ejemplo 3.11.2

Ordenar  $\nabla(\varphi\psi)$  donde  $\varphi = \varphi(x,y,z)$ ,  $\psi = \psi(x,y,z)$

$$\nabla(\varphi\psi) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi\psi = \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x}i + \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial y}j + \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial z}k$$

$$\nabla(\varphi\psi) = \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)i + \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)j + \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial z} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)k$$

Podemos agrupar:

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}i + \frac{\partial\psi}{\partial y}j + \frac{\partial\psi}{\partial z}k\right) + \psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}k\right)$$

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$$

3.11.0.3

Por inducción Matemática esta ecuación puede generalizarse a:

$$\nabla(\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n) = \varphi_2\varphi_3\cdots\varphi_n\nabla\varphi_1 + \varphi_1\varphi_3\cdots\varphi_n\nabla\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_{n-1}\nabla\varphi_n$$

donde  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  son todas funciones escalares de  $(x,y,z)$  3.11.0.4

Si  $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \varphi$ , la ecuación (3.11.0.4) queda

$$\nabla\varphi^n = n\varphi^{n-1}\nabla\varphi$$

3.11.0.5

Ejemplo 3.11.3

Calcular  $\nabla_x(\varphi\vec{F})$  donde " $\varphi$ " es una función escalar y  $\vec{F}$  es una función vectorial, ambas de  $(x,y,z)$ .

3.11

Sea  $\vec{F} = P_i + Q_j + R_k$ ; entonces:

$$\nabla_x(\varphi\vec{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi P & \varphi Q & \varphi R \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial(\varphi R)}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial z}\right]i + \left[\frac{\partial(\varphi P)}{\partial z} - \frac{\partial(\varphi R)}{\partial x}\right]j + \left[\frac{\partial(\varphi Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi P)}{\partial y}\right]k$$

$$\nabla_x(\varphi\vec{F}) = \left(\varphi\frac{\partial R}{\partial y} + R\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)i + \left(\varphi\frac{\partial P}{\partial z} + P\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \varphi\frac{\partial R}{\partial x} - R\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)j + \left(\varphi\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial P}{\partial y} - P\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)k$$

lo que podemos escribir:

$$\nabla_x(\varphi\vec{F}) = \varphi\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k\right] + \left(R\frac{\partial\varphi}{\partial y} - Q\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)i + \left(P\frac{\partial\varphi}{\partial z} - R\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)j + \left(Q\frac{\partial\varphi}{\partial x} - P\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)k$$

o bien:

$$\nabla_x(\varphi\vec{F}) = \varphi\nabla_x\vec{F} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (3.11.0.6)$$

En la misma forma, tú puedes demostrar las siguientes fórmulas:

Considera  $c = \text{cte}$ , las funciones escalares  $\varphi(x,y,z)$  y  $\psi(x,y,z)$ , así como las funciones vectoriales  $\vec{u}(x,y,z)$  y  $\vec{v}(x,y,z)$ .

$$\nabla(c\varphi) = c\nabla\varphi \quad (3.11.0.7)$$

$$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi \quad (3.11.0.8)$$

$$\nabla \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \nabla \cdot \vec{u} + \nabla \cdot \vec{v} \quad (3.11.0.9)$$

$$\nabla \cdot (c\vec{u}) = c\nabla \cdot \vec{u} \quad (3.11.0.10)$$

$$\nabla \cdot (\varphi\vec{u}) = \varphi\nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla\varphi \quad (3.11.0.11)$$

$$\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{u}) - (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{u} \quad (3.11.0.12)$$

$$\nabla \times (\vec{u} + \vec{v}) = \nabla \times \vec{u} + \nabla \times \vec{v} \quad (3.11.0.13)$$

$$\nabla \times (c\vec{u}) = c\nabla \times \vec{u} \quad (3.11.0.14)$$

3.12 LA DIVERGENCIA Y EL ROTACIONAL EN COORDENADAS CURVILINEAS.

Regresemos nuestra atención nuevamente a la ecuación (3.10.2.2):

$$[\nabla \bar{F}] = \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial u} \right] [\nabla \bar{u}] + \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} \right] [\nabla \bar{v}] + \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial w} \right] [\nabla \bar{w}] \quad (3.10.2.2)$$

Observemos que al primer miembro lo podemos escribir como:

$$[\bar{F}] [\nabla]$$

y entonces, recordando que la transpuesta de una matriz producto es el producto de las transpuestas en orden cambiado:

$$[\nabla][\bar{F}] = \nabla \cdot \bar{F} = [\nabla u] \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial u} \right] + [\nabla v] \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} \right] + [\nabla w] \left[ \frac{\partial \bar{F}}{\partial w} \right]$$

o, lo que es lo mismo:

$$\nabla \cdot \bar{F} = \nabla u \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial u} + \nabla v \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} + \nabla w \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial w} \quad (3.12.0.1)$$

Que es la ecuación para calcular la divergencia en cualquier tipo de, coordenadas, ligadas al sistema cartesiano por:

$$x = f(u, v, w)$$

$$y = g(u, v, w)$$

$$z = h(u, v, w)$$

$$J = J \left( \begin{matrix} x, y, z \\ u, v, w \end{matrix} \right) \neq 0$$

Análogamente se obtiene la expresión la otra invariante:

$$\nabla \times \bar{F} = \nabla u \times \frac{\partial \bar{F}}{\partial u} + \nabla v \times \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} + \nabla w \times \frac{\partial \bar{F}}{\partial w} \quad (3.12.0.2)$$

donde  $\nabla u$ ,  $\nabla v$ ,  $\nabla w$ , se obtienen con las ecuaciones (3.10.2.3), -- (3.10.2.4) y (3.10.2.5)

Cuando el sistema curvilíneo es ortogonal, esto es:

$$\bar{e}_u \cdot \bar{e}_v = \bar{e}_v \cdot \bar{e}_w = \bar{e}_u \cdot \bar{e}_w = 0$$

se puede observar de estas últimas ecuaciones que:

$$\nabla u = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \right) = \frac{1}{J} \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \right| \bar{e}_u = \frac{1}{J} \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \right| \cos 90^\circ \bar{e}_v$$

Además:  $J = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \right|$  (¿por qué?)

con lo que:

$$\nabla u = \frac{1}{\left| \frac{d\bar{r}}{du} \right|} \bar{e}_u$$

Para hacer más fácil la notación podemos hacer:

$$\left. \begin{aligned} u &= \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right| \\ v &= \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| \\ w &= \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \right| \end{aligned} \right\} \quad (3.12.0.3)$$

y entonces:

$$\nabla u = \frac{\bar{e}_u}{u} \quad (3.12.0.4)$$

Análogamente:

$$\nabla_v = \frac{\bar{e}_v}{v} \quad 3.12.0.5$$

$$\nabla_w = \frac{\bar{e}_w}{w} \quad 3.12.0.6$$

Entonces, para sistemas coordenados ortogonales y sólo para ellos, la ecuación

$$\nabla \cdot \bar{F} = \frac{1}{U} \frac{\partial \bar{F}}{\partial u} \cdot \bar{e}_u + \frac{1}{V} \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} \cdot \bar{e}_v + \frac{1}{W} \frac{\partial \bar{F}}{\partial w} \cdot \bar{e}_w \quad 3.12.0.7$$

y la ecuación (3.12.0.2):

$$\nabla \times \bar{F} = \frac{1}{U} \bar{e}_u \times \frac{\partial \bar{F}}{\partial u} + \frac{1}{V} \bar{e}_v \times \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} + \frac{1}{W} \bar{e}_w \times \frac{\partial \bar{F}}{\partial w} \quad 3.12.0.8$$

Recordemos que los sistemas cilíndrico y esférico son ortogonales por lo que les podemos aplicar estos resultados; en el sistema cilíndrico:

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

$$z = u$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} = \cos \theta \bar{i} + \operatorname{sen} \theta \bar{j} \quad U = 1$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = -\rho \operatorname{sen} \theta \bar{i} + \rho \cos \theta \bar{j} \quad V = \rho$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \bar{k} \quad W = 1$$

Si además consideramos que:

$$\bar{F} = P(\rho, \theta, u) \bar{e}_\rho + Q(\rho, \theta, u) \bar{e}_\theta + R(\rho, \theta, u) \bar{e}_u$$

tendremos:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + P \frac{\partial \bar{e}_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \bar{e}_\theta + Q \frac{\partial \bar{e}_\theta}{\partial \rho} + \frac{\partial R}{\partial \rho} \bar{e}_u + R \frac{\partial \bar{e}_u}{\partial \rho}$$

Recordemos que:

$$\bar{e}_\rho = \cos \theta \bar{i} + \operatorname{sen} \theta \bar{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{e}_\rho}{\partial \rho} = 0$$

$$\bar{e}_\theta = -\operatorname{sen} \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{e}_\theta}{\partial \rho} = 0$$

$$\bar{e}_u = \bar{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{e}_u}{\partial \rho} = 0$$

Así:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \rho} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \bar{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial \rho} \bar{e}_u$$

Análogamente:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta} = P \bar{e}_\theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} \bar{e}_\rho - Q \bar{e}_\rho + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial \theta} \bar{e}_u$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial u} \bar{e}_\rho + \frac{\partial Q}{\partial u} \bar{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial u} \bar{e}_u$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{F} = & \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \bar{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial \rho} \bar{e}_u \right) \cdot \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \left( P \bar{e}_\theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} \bar{e}_\rho - Q \bar{e}_\rho + \right. \\ & \left. + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial \theta} \bar{e}_u \right) \cdot \bar{e}_\theta + \left( \frac{\partial P}{\partial u} \bar{e}_\rho + \frac{\partial Q}{\partial u} \bar{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial u} \bar{e}_u \right) \cdot \bar{e}_u \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left( P + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial R}{\partial u} \quad 3.12.0.9$$

En cuanto al rotacional:

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{e}_\rho \times \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \vec{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial \rho} \vec{e}_u \right) + \frac{1}{\rho} \vec{e}_\theta \times \left( P \vec{e}_\theta + \frac{\partial P}{\partial \theta} \vec{e}_\rho - \right. \\ \left. Q \vec{e}_\rho + \frac{\partial Q}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial \theta} \vec{e}_u \right) + \vec{e}_u \times \left( \frac{\partial P}{\partial u} \vec{e}_\rho + \frac{\partial Q}{\partial u} \vec{e}_\theta + \frac{\partial R}{\partial u} \vec{e}_u \right)$$

Téngase en cuanto que:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\theta &= \vec{e}_u \\ \vec{e}_\theta \times \vec{e}_u &= \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_u \times \vec{e}_\rho &= \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial \rho} \vec{e}_u - \frac{\partial R}{\partial \rho} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial P}{\partial \theta} \vec{e}_u + Q \vec{e}_u + \frac{\partial R}{\partial \theta} \vec{e}_\rho \right) + \frac{\partial P}{\partial u} \vec{e}_\theta - \frac{\partial Q}{\partial u} \vec{e}_\rho$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial R}{\partial \theta} - \rho \frac{\partial Q}{\partial u} \right) \vec{e}_\rho + \left( \frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho} \left[ \left( \rho \frac{\partial Q}{\partial \rho} + Q \right) - \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] \vec{e}_u$$

Esta expresión es muy parecida a la del rotacional en coordenadas cartesianas; podemos llegar a una fórmula igualmente mnemotécnica si en vez de "i" se usa  $\frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho$ ; en vez de "k",  $\frac{1}{\rho} \vec{e}_u$

y en vez de "q",  $\rho Q$ :

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \frac{1}{\rho} \vec{e}_u \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial u} \\ P & \rho Q & R \end{vmatrix} \quad 3.12.0.10$$

Ejemplo 3.12.1 Sea el campo.

$$\vec{F} = \rho \sin \theta \vec{e}_\rho + u^2 \cos \theta \vec{e}_\theta + \frac{\rho^2}{u} \vec{e}_u$$

calcular su divergencia y su rotacional.

3.12

Solución:  $P = \rho \sin \theta$  ;  $Q = u^2 \cos \theta$  ;  $R = \frac{\rho^2}{u}$

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \sin \theta \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -u^2 \sin \theta \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial u} = -\left(\frac{\rho}{u}\right)^2$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \sin \theta + \frac{1}{\rho} (\rho \sin \theta - u^2 \sin \theta) - \left(\frac{\rho}{u}\right)^2 = \sin \theta (2 - \frac{u^2}{\rho^2}) - \left(\frac{\rho}{u}\right)^2$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \frac{1}{\rho} \vec{e}_u \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial u} \\ \rho \sin \theta & \rho u^2 \cos \theta & \frac{\rho^2}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} (-2u \cos \theta) \vec{e}_\rho - \frac{2\rho}{u} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho} (u^2 \cos \theta + \rho \cos \theta) \vec{e}_u$$

$$\nabla \times \vec{F} = -2u \cos \theta \vec{e}_\rho - \frac{2\rho}{u} \vec{e}_\theta + \cos \theta \left( \frac{u^2}{\rho} + 1 \right) \vec{e}_u$$

Sigue los pasos que aquí te hemos indicado y llegarás a las siguientes expresiones en coordenadas esféricas.

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 P) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial u} (Q \sin \theta) \quad 3.12.0.11$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_\theta \\ \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} & \frac{1}{\rho \sin \theta} & \frac{1}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad 3.12.0.12$$

donde:  $\vec{F} = P(\rho, \varphi, \theta) \vec{e}_\rho + Q(\rho, \varphi, \theta) \vec{e}_\varphi + R(\rho, \varphi, \theta) \vec{e}_\theta$

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \rho \cos \theta$$

Por último, considérese que la ecuación (3.10.2.2) puede servir asimismo para obtener el gradiente de una función escalar en coordenadas curvilíneas. En efecto sea  $f(u, v, w)$ :

$$[\nabla f] = \frac{\partial f}{\partial u} [\nabla u] + \frac{\partial f}{\partial v} [\nabla v] + \frac{\partial f}{\partial w} [\nabla w]$$

En los casos en que estas coordenadas curvilíneas sean mutuamente ortogonales, ya vimos que  $\nabla u$ ,  $\nabla v$ ,  $\nabla w$  obedecen a las ecuaciones (3.12.0.4), (3.12.0.5) y (3.12.0.6) por lo que:

$$\nabla f = \frac{1}{U} \frac{\partial f}{\partial u} \bar{e}_u + \frac{1}{V} \frac{\partial f}{\partial v} \bar{e}_v + \frac{1}{W} \frac{\partial f}{\partial w} \bar{e}_w \quad 3.12.0.13$$

para el caso de las coordenadas cilíndricas ya vimos que  $U=W=1$ ;  $V=\rho$ ; así:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{e}_z \quad 3.12.0.14$$

y en el caso de coordenadas esféricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \psi} \bar{e}_\psi + \frac{1}{\rho \sin \psi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \bar{e}_\theta \quad 3.12.0.15$$

Ejemplo 3.12.2. La temperatura de un cuerpo varía proporcionalmente a la distancia al eje "z" e inversamente proporcional a su altura. Encontrar el gradiente de temperatura.

Solución: La función es:

$$T = \frac{\lambda \rho}{u}, \text{ donde } \lambda \text{ es la constante de proporcionalidad}$$

Entonces:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{\lambda}{u} ; \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 ; \frac{\partial T}{\partial u} = -\frac{\lambda \rho}{u^2}$$

$$\nabla T = \frac{\lambda}{u} \bar{e}_\rho - \frac{\lambda \rho}{u^2} \bar{e}_u$$

### 3.13 INVARIANTES DE SEGUNDO ORDEN.

En este capítulo hemos visto fundamentalmente tres conceptos: Gradiente, Divergencia y Rotacional. El primero se puede aplicar indistintamente a un campo escalar o vectorial; si se aplica a un campo escalar, el resultado es un vector a cada punto, esto es, un campo vectorial; si se aplica a un campo vectorial, el resultado es una matriz asociada a cada punto que, como recordarás de tu curso de Álgebra, forman también un espacio vectorial.

Los otros dos conceptos se aplican siempre a campos vectoriales; la divergencia da por resultado un campo escalar y el rotacional da por resultado otro campo vectorial. La figura 3.13.1 aclara lo anterior.

Así, pues, si los resultados son nuevos campos escalares o vectoriales, a éstos también podemos nuevamente aplicarles los conceptos de referencia y obtener nuevamente campos escalares o vectoriales, a los cuales de nuevo se les podrían aplicar tales conceptos y así sucesivamente. A nosotros nos interesan sólo los de segundo orden; así, del campo vectorial que se obtiene con el gradiente de una función escalar, buscaremos su divergencia y su rotacional. Del campo escalar que resulta de la divergencia de un campo vectorial, obtendremos su gradiente y del campo vectorial de rotacionales, obtendremos su divergencia y rotacional.

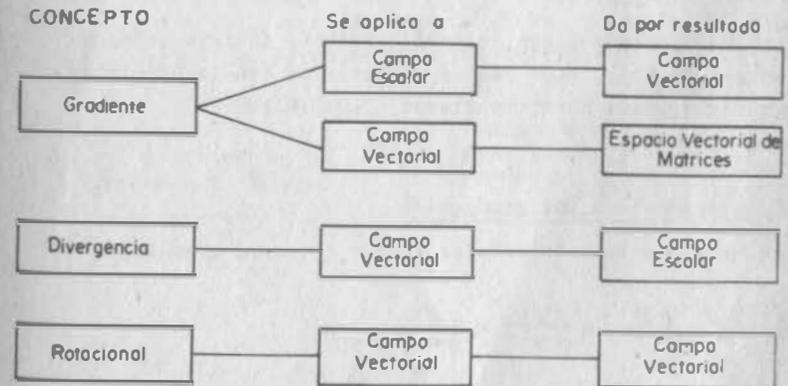


Fig. 3.13.1

3.13.1 Divergencia de un Gradiente.

Sea la función escalar  $\phi(x, y, z)$ ; su gradiente será el vector

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

Si de este vector buscamos su divergencia, obtendremos:

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

se provechan nuevamente las propiedades del operador vectorial y se escribe:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

3.13.1.1

A este concepto que acabamos de definir se le conoce como LAPLACIANO del campo escalar " $\phi$ " cuando un campo escalar posee la propiedad de que:

$$\nabla^2 \phi = 0, \text{ en todos los puntos,}$$

se dice que "cumple con la ECUACION DE LAPLACE" o que se trata de una FUNCION ARMONICA.

Esto implicará, desde luego, que el gradiente tuviese siempre una divergencia nula. Los campos vectoriales con la propiedad de tener divergencia nula, se llaman SOLENOIDALES.

3.13.2 Rotacional de una gradiente.

Sea nuevamente la función escalar  $\phi(x, y, z)$ , cuyo gradiente es:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

111.113

Ahora calculemos su rotacional:

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right)$$

Por el teorema de Schwarz, podemos afirmar que el rotacional de un gradiente siempre es el vector nulo.

Cabría preguntarnos si la recíproca es cierta; esto es, si dado un campo vectorial con rotacional nulo, siempre es gradiente de alguna función escalar; para averiguarlo, supongamos:

$$\vec{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}, \text{ tal que } \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$$

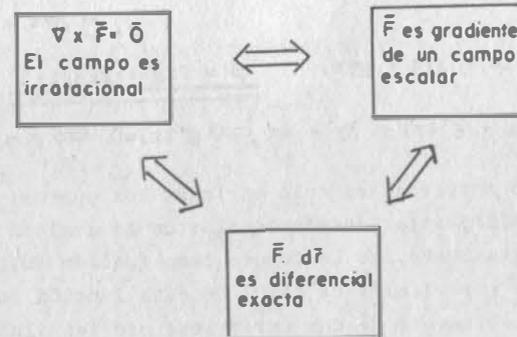
Como ya vimos:

$$\nabla \times \vec{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Luego, si  $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$

$$\implies \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} ; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} ; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

que, como recordamos del teorema 2.14.1 es la condición necesaria y suficiente para  $\vec{F}$  sea gradiente de una cierta función escalar " $\phi$ "



Nota.  
Recuerda que la flecha de doble tallo se lee "implica necesariamente".

Fig. 3.13.2

111.114

Naturalmente, si éste es el caso,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = P dx + Q dy + R dz$$

será diferencial exacta de la misma función "φ"

Ejemplo 3.13.1 Calcular el rotacional del campo:

$$\vec{F} = (2y+4z)\mathbf{i} + (2x+3z)\mathbf{j} + (3y+4x)\mathbf{k}$$

y, en caso de que sea nulo, averiguar de qué función es gradiente.

Solución:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y+4z & 2x+3z & 3y+4x \end{vmatrix} = (-3-3)\mathbf{i} + (4-4)\mathbf{j} + (2-2)\mathbf{k} = \vec{0}$$

Si el rotacional es nulo, entonces  $\vec{F}$  debe ser el gradiente de alguna función escalar, que calcularemos como vimos en el ejemplo 2.14.2:

$$\phi = \int (2y+4z)dx + f(y,z) = 2xy+4xz+f(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x + \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 3z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 3z \Rightarrow f = \int 3z dy + g(z) = 3yz + g(z)$$

$$\phi = 2xy + 4xz + 3yz + g(z) \quad \underline{\underline{\phi = 2xy+4xz+3yz+c}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 4x + 3y + g'(z) = 3y + 4x \Rightarrow g'(z)=0 \Rightarrow g(z)=cte$$

A los campos cuyo rotacional es nulo en todos los puntos, se les llama IRROTACIONALES; a la función escalar de la cual un campo irrotacional es gradiente, se le conoce como función POTENCIAL DEL CAMPO. A las superficies de nivel de esta función (o curvas, si la función es solamente de dos variables) se les llama "superficies (curvas) EQUIPOTENCIALES.

Ejemplo 3.13.2 Puesto que ya vimos que el campo gravitacional-universal es irrotacional, encontrar su función potencial.

Solución:

Hemos visto que este campo se expresa:  $\vec{F} = -GMm \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

$$\phi = -GMm \int \frac{x dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + f(y,z) = -\frac{GMm}{2} \left( \frac{1}{-1/2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + f(y,z)$$

$$\phi = \frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + f(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{-2yGMm}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{GMmy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow f(y,z) = g(z)$$

Análogamente,  $g(z) = c$ ; por lo que:

$$\phi = \frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + c$$

Para conocer las superficies equipotenciales, hacemos  $\phi = c''$ :

$$c'' - c' = c = \frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left( \frac{GMm}{c} \right)^2$$

Las equipotenciales son esferas concéntricas en el origen.

Ahora consideremos un campo de velocidades

$$\vec{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$$

y supongamos que sea, a la vez, irrotacional y solenoidal; si es irrotacional, entonces:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

y habrá una función " $\phi$ " de la cual es gradiente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_y$$

Por ser solenoidal:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

pero como  $\vec{v} = \nabla \phi$ ,

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad 3.13.2.2$$

y " $\phi$ " es una función que cumple con la ecuación de Laplace.

Ahora consideremos el campo:

$$\vec{u} = v_y \mathbf{i} - v_x \mathbf{j}$$

por la ecuación (3.13.2.2) este campo es irrotacional; luego existe una función " $\psi$ " tal que:

$$\nabla \psi = \vec{u}$$

pero por la ecuación (3.13.2.1) el campo  $\vec{u}$  también es solenoidal y puede entonces concluirse que:

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Además, puede concluirse que a cada función  $\phi(x,y)$ , armónica, corresponde otra función  $\psi(x,y)$ , también armónica, ligadas por las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad 3.13.2.3$$

que se conocen como condiciones de Cauchy-Riemann(\*)

Ahora considera dos curvas de nivel cualesquiera:  $\phi = c_1$ ,  $\psi = c_2$  de ambas funciones; puesto que  $\nabla \phi \cdot \nabla \psi = \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ , estas curvas siempre se cortarán ortogonalmente. (ver figura 3.13.3)

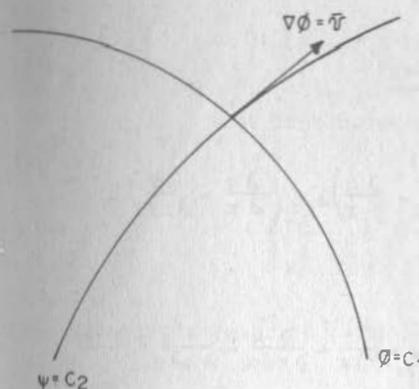


Fig. 3.13.3

En consecuencia,  $\nabla \phi = \vec{v}$  tiene que ser tangente a la curva  $\psi = c_2$ ; pero el hecho de que un vector velocidad sea siempre tangente a una curva, implica que esa curva es la trayectoria de una partícula.

Entonces, también puede afirmarse que la solución gráfica de la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \phi = 0$$

consiste en una trama de líneas que se cortan ortogonalmente; unas serán las curvas de nivel de " $\phi$ " (equipotenciales) y las otras, las trayectorias de las partículas. (líneas de flujo)

### 3.13.3 Gradiente de una Divergencia.

Sea ahora el campo vectorial  $\vec{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  cuya divergencia es

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

(\*) En cursos superiores de Matemáticas, encontrarás que estas condiciones se expresan en términos de variable compleja. La consignada arriba es una forma equivalente de expresarlas.

para obtener su gradiente:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) = & \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{j} + \\ & + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad 3.13.3.1$$

### 3.13.4 Divergencia de un rotacional.

Sea nuevamente  $\vec{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ , cuyo rotacional es:

$$\nabla \times \vec{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

la divergencia de este vector:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

La divergencia de un rotacional siempre vale cero; mediante un razonamiento análogo al que hicimos cuando descubrimos que el rotacional de un gradiente siempre es nulo, podemos concluir que, cuando un campo vectorial es solenoidal, se debe a que es rotacional de otro cierto campo vectorial. Este nuevo campo es de gran importancia en la teoría electromagnética y se llama "POTENCIAL VECTORIAL"; sin embargo, para calcularlo, requerimos de conocimientos sobre ecuaciones diferenciales, que aún no poseemos. Además, la solución no es única.

### 3.13.5 Rotacional de un rotacional.

Consideremos nuevamente a  $\vec{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  y a su rotacional:

$$\nabla \times \vec{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Calculemos el rotacional de este campo:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix} \quad 3.13.5.1$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = & \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Si restamos la ecuación (3.13.5.1) de la (3.13.3.1), obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = & \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla^2 P\mathbf{i} + \nabla^2 Q\mathbf{j} + \nabla^2 R\mathbf{k} \quad 3.13.5.2$$

A este vector así definido se le acostumbra llamar LAPLACIANO VECTORIAL del campo vectorial  $\vec{F}$  y se escribe:

$$\nabla^2 \vec{F} = \nabla^2 P\mathbf{i} + \nabla^2 Q\mathbf{j} + \nabla^2 R\mathbf{k} \quad 3.13.5.3$$

4.1.1 La Integral Curvilínea. Su expresión Vectorial y Física.

Problema 4.1.1

Un cañón dispara una granada con una velocidad inicial de 900 km/hr. Si el cañón forma un ángulo de 36°52' con la horizontal y despreciamos la resistencia del aire, ¿dónde se encuentra la granada 4 seg. después del disparo?

Solución:

Escribamos la velocidad inicial como vector:

$$\vec{v}_0 = 900 \cos 36^\circ 52' (i) + 900 \sin 36^\circ 52' (j)$$

$$\vec{v}_0 = 900 \left(\frac{4}{5}\right) i + 900 \left(\frac{3}{5}\right) j = 720i + 540j$$

(Hacemos coincidir el eje con la horizontal) cuyas componentes es conveniente reducir a unidades de m/s:

$$\vec{v}_0 = \frac{720000}{3600} i + \frac{540000}{3600} j = 200i + 150j$$

Ahora bien, puesto que despreciamos la resistencia del aire, la componente horizontal no debe variar; en cambio, la componente vertical debe sufrir un decremento constante de 9.8 m/seg cada segundo, debido a la aceleración de la gravedad. Entonces, la velocidad en cualquier instante queda:

$$\vec{v} = 200i + (150 - 9.8t)j \quad 4.1.1.a$$

Quando estudiamos los campos vectoriales de variable real (ver 3.4.3) planteamos un caso muy semejante, en el cual, dada la expresión vectorial de una velocidad, y una posición inicial, se pedía la posición del móvil un cierto tiempo después. Ese ejemplo lo resolvimos a través de la diferencial total, porque el incremento de tiempo era muy pequeño; es decir, hicimos:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_0 + \Delta \vec{r} \doteq \vec{r}_0 + d\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \Delta t$$

donde:  $\vec{r}_0$  = Vector de posición del punto inicial

$\vec{r}_f$  = Vector de posición del punto final

En el presente problema también nos dan una posición inicial  $\vec{r}_0(0,0)$  (situamos el cañón en el origen), la velocidad está dada por (4.1.1.a) y  $\Delta t=4$  seg.

La diferencia es que este incremento de tiempo es muy grande y ni siquiera como una primera aproximación podríamos aceptar la igualdad entre el incremento y la diferencial del vector de posición.

Lo que podemos hacer es aproximarnos por incrementos "pequeños" de tiempo, donde pueda aceptarse la igualdad aproximada entre el incremento y la diferencial; se propone  $\Delta t=1$  seg, con lo cual, mediante la tabla (4.1.1), llegaríamos a un resultado aproximado:

t (seg)	$\Delta t$ (seg)	$\vec{r}(m)$		$\vec{v}(m/seg)$		$d\vec{r} = \vec{v} \Delta t$	
		x	y	$v_x$	$v_y$	dx(m)	dy(m)
0		0	0	200	150		
1	1					200	150
1	1	200	150	200	140.2	200	140.2
2	1	400	290.2	200	130.4		
2	1					200	130.4
3	1	600	420.6	200	120.6		
3	1					200	120.6
4	1	800	541.2				
4	1					200	120.6
						800	541.2

TABLA 4.1.1

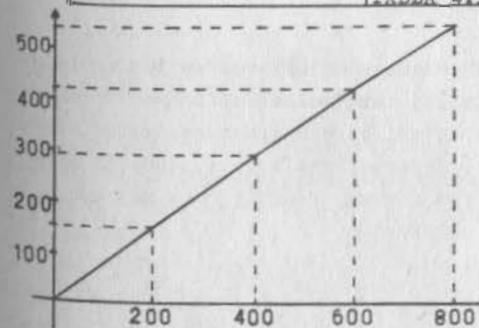


Fig. 4.1.1

Estos resultados están representados en la fig.4.1.1. Lo primero que observamos es que dado que partimos de  $\vec{r}_0(0,0)$ , pudimos haber llegado al mismo resultado sumando directamente las columnas de  $d\vec{r}$ , de acuerdo con la propiedad asociativa de la suma vectorial.

Además intuimos que:

a) Puesto que la velocidad es continua, en el instante dado la partícula tiene que ocupar una posición bien definida, esto es, no puede desaparecer, ni estar en dos puntos a la vez.

b) Si hubiésemos escogido un valor de " $\Delta t$ " más pequeño, hubiésemos caído más cerca del punto verdadero.

c) Hay varias maneras de acercarse al punto sin perder la aproximación; como vemos que los dos últimos segmentos son muy largos, podríamos haberlos subdividido.

d) La aproximación se rige por la amplitud del mayor intervalo de tiempo.

e) Nadie nos obliga a valuar la velocidad al inicio del intervalo de tiempo; cualquier punto, dentro del mismo, puede servirnos, igualmente, puesto que el teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial nos dice que la velocidad media en el intervalo es igual a la velocidad real en algún punto de éste.

Así pues aún fijando la amplitud máxima de los intervalos de tiempo, muchas personas obtendrán muchos puntos aproximados, que

podríamos imaginarlos repartidos dentro de un círculo, de radio " $\xi$ " y alrededor del punto verdadero, que llamaremos I. (Fig.4.1.2)

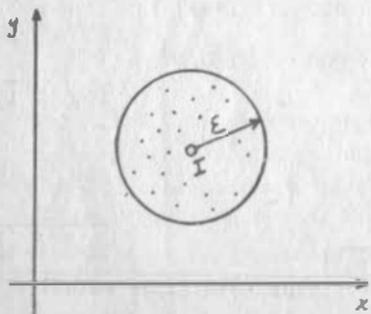


Fig. 4.1.2

Lo importante es que, si a las personas anteriores se les restringiera más la amplitud máxima de los intervalos de tiempo, volverían a entregarnos puntos diferentes; pero ahora todos ellos se agruparían dentro de un círculo de menor radio; y si todavía restringiésemos más nuestra amplitud máxima, reduciríamos más aún el radio del círculo y así sucesivamente.

### 4.1.2 Generalidades

Los campos vectoriales que tienen la característica anterior se dice que son integrables sobre la curva. ¿Sobre cuál curva? Sobre la que implícitamente nos está definiendo la reducción del campo a un solo parámetro.

Esto es muy importante, pues las integrales curvilíneas (o de línea), como su nombre lo indica, siempre habrán de referirse a una curva. En el ejemplo anterior, desde el momento en que nos referimos a una partícula, nos estaremos refiriendo a una sola trayectoria; por la misma razón, fue posible relacionar, tanto a  $\bar{v}$  como a  $\bar{r}$ , a una sola variable: " $t$ ".

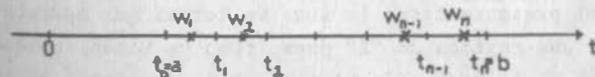
En general plantearemos: sea  $\bar{u}(\bar{r})$  un campo vectorial cualquiera y sea  $\bar{r}(t)$  una trayectoria rectificable a trozos (por secciones) sobre la cual  $\bar{u}$  existe y  $|\bar{u}|$  es acotado. Sean también los puntos

$$P = \bar{r} /_{t=a} = \bar{r}(a) \quad \text{y} \quad Q = \bar{r} /_{t=b} = \bar{r}(b)$$

Representemos el intervalo  $[a, b]$  en el eje " $t$ " (Fig.4.1.3) y hagamos una partición (o red de  $E_1$ ) en dicho intervalo, mediante los puntos:

$$t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_n = b.$$

Fig. 4.1.3



A cada subintervalo le llamaremos celda de la red y, a la amplitud de la mayor de las celdas le llamaremos "norma de la red" y la representaremos por " $\Delta$ ".

Dentro de cada celda y sin más limitación que ésta, escojamos un punto que llamaremos  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , según la celda en que se encuentre.

En cada uno de estos puntos podremos evaluar  $\vec{r}(w_i)$  y después, --  $\vec{u}(w_i)$ . Multipliquemos estos valores por los correspondientes escalares  $\Delta t_i$  y sumemos para obtener el vector:

$$\sum_{i=1}^n \vec{u}(w_i) \Delta t_i$$

Definición 4.1.1 Si dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n \vec{u}(w_i) \Delta t_i - \vec{I} \right| < \epsilon \text{ cuando } \Delta < \delta \quad (4.1.2.1)$$

se dice que  $\vec{u}(\vec{r})$  es integrable sobre la curva  $\vec{r}(t)$  y que el valor  $\vec{I}$  es la integral vectorial del campo  $\vec{u}$ .

Se escribe:

$$\vec{I} = \int_P^Q \vec{u}(\vec{r}) dt = \int_a^b \vec{u}[\vec{r}(t)] dt \quad (4.1.2.2)$$

La expresión (4.1.2.1) nos recuerda mucho la expresión del límite vectorial; pero téngase en cuenta, que, cuando definimos este tipo de límites (ver subtema 3.2) nos referimos a funciones vectoriales. En el presente caso, la suma vectorial que aparece en (4.1.2.1) NO es una función de "n" pues, como ya vimos, aunque fijemos la norma de la red, podemos tener tantos valores de la suma vectorial como queramos.

De allí que no podamos trasplantar todas las propiedades de los límites vectoriales a las integrales; por ejemplo:

$$\int_P^Q [\vec{u}(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r})] dt \neq \int_P^Q \vec{u}(\vec{r}) dt \cdot \int_P^Q \vec{v}(\vec{r}) dt$$

Si tenemos en cuenta estas limitaciones, podremos escribir que:

$$\int_P^Q \vec{u}(\vec{r}) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{u}(w_i) \Delta t_i \quad (4.1.2.3)$$

## 4.2 La Integral Curvilínea como Integral Ordinaria.

### 4.2.1 Método Directo.

¿Cómo podremos resolver una integral curvilínea?

Un posible método quedó esbozado en el inciso (4.1.1), consistente en realizar directamente las sumatorias.

Este método es muy importante, pues es base de la integración numérica, a través de computadora, que cada día es de uso más frecuente. Sin salirnos de este enfoque, podemos alcanzar la exactitud de la manera siguiente con referencia al problema (4.1.1).

Puesto que por razonamientos heurísticos hemos llegado a la conclusión de que el vector  $\vec{I}$  existe, tenemos la libertad de establecer la red en el intervalo de  $t$   $[0, 4]$  de la manera más conveniente para nosotros.

Establezcamos entonces una partición de "n" intervalos de amplitud "h", lo que implica  $nh=4$ .

Ahora elaboremos la tabla (4.2.1), en la misma forma que la (4.1.1); pero dejando todos sus elementos en términos de "h". La suma que obtenemos es:

$$\sum_{i=1}^n \vec{v}(w_i) \Delta t_i = i(200nh) + j[150nh - 9.8h^2(1+2+\dots+n-1)] \quad 4.2.1.1$$

que también puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \sum &= i(200nh) + j[150nh - 9.8h^2 \frac{n(n-1)}{2}] \\ \sum &= i(200nh) + j[150nh - 4.9h^2(n^2 - n)] \\ \sum &= i(200nh) + j(150nh - 4.9n^2h^2 + 4.9nh^2) \end{aligned} \quad 4.2.1.2$$

Si se recuerda que  $nh = 4$ :

$$\sum = 800i + (600 - 78.4 + 19.6h)j$$

Y finalmente, tomamos límites cuando  $h \rightarrow 0$ :

$$\vec{I} = \lim_{h \rightarrow 0} [800i + (521.6 + 19.6h)j] = 800i - 521.6j \quad 4.2.1.3$$

4.2.2. A través de Antiderivadas.

Hay otra posibilidad para integrar este tipo de funciones, que surgen cuando desglosamos la ecuación (4.1.2.1) en sus componentes.

Hagámoslo primero para el problema (4.1.1) donde, como ya sabemos:

$$\vec{v} = v_x(t)i + v_y(t)j$$

diremos que:  $\vec{I} = I_x i + I_y j$ :

$$\sqrt{\left[\sum_{l=1}^n v_x(w_l) \Delta t_l - I_x\right]^2 + \left[\sum_{l=1}^n v_y(w_l) \Delta t_l - I_y\right]^2} < \xi \text{ cuando } \Delta < \delta$$

4.2.2.1

TABLA 4.2.1

t (e)	t (s)	$\vec{r}$		$\vec{v}$		$d\vec{r} = \vec{v} \cdot t$	
		x	y	$v_x$	$v_y$	dx	dy
0		0	0	200	150		
	h					200h	150h
	h	200(h)	150(h)	200	150-9.8h		
	h					200h	150h-9.8h
	2h	200(2h)	150(2h)-9.8h <sup>2</sup>	200	150-9.8(2h)		
	h					200h	150h-9.8(2h <sup>2</sup> )
	3h	200(3h)	150(3h)-9.8(1+2)h <sup>2</sup>				
	...	.....	.....	.....	.....	.....	.....
	(n-1)h			200	150-9.8(n-1)h		
	h					200h	150h-9.8(n-1)h <sup>2</sup>
	nh	200(nh)	150(nh)-9.8(1+2+...+n-1)h <sup>2</sup>				

que elevada al cuadrado da:

$$\left[\sum_{l=1}^n v_x(w_l) \Delta t_l - I_x\right]^2 + \left[\sum_{l=1}^n v_y(w_l) \Delta t_l - I_y\right]^2 < \xi^2 \quad (4.2.2.2)$$

pero, como cada sumando es positivo, tiene que ser menor que la suma, por lo que:

$$\left[\sum_{l=1}^n v_x(w_l) \Delta t_l - I_x\right]^2 < \xi^2 \text{ cuando } \Delta < \xi \quad (4.2.2.3)$$

Al extraer raíz cuadrada en valor absoluto:

$$\left| \sum_{l=1}^n v_x(w_l) \Delta t_l - I_x \right| < \xi \text{ cuando } \Delta < \delta \quad (4.2.2.4)$$

que es una expresión que conocemos desde C.D.I.; nos dice que existe la integral ordinaria de  $v_x(t)$  y que ésta es  $I_x$ :

$$I_x = \int_a^b v_x(t) dt = \int_0^4 200 dt = 200 t \Big|_0^4 = 800 \text{ m}$$

Análogamente:

$$I_y = \int_0^4 (150-9.8t) dt = 150 t \Big|_0^4 - \frac{9.8}{2} t^2 \Big|_0^4 = 600-78.4 = 521.6 \text{ m}$$

por lo tanto:

$$\vec{I} = 800i + 521.6j$$

Esta propiedad la generalizamos por inducción para cualquier número de dimensiones, y concluimos que, para realizar una integral vectorial, basta con integrar cada una de sus componentes. Más aún: si suponemos que existe la integral de cada componente de la función vectorial.

$$\vec{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_j(t), \dots, u_m(t)], \vec{u} \in E^m \quad (4.2.2.5)$$

Entonces puede escribirse para la primer componente:

$$\left| \sum_{i=1}^n u_1(w_i) \Delta t_i - I_1 \right| < \xi \text{ cuando } \Delta < \delta \quad (4.2.2.6)$$

y al elevar al cuadrado:

$$\left[ \sum_{i=1}^n u_1(w_i) \Delta t_i - I_1 \right]^2 < \xi^2 \quad (4.2.2.7)$$

Al sumar esta expresión con sus análogas, obtenemos:

$$\sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n u_j(w_i) \Delta t_i - I_j \right]^2 < m \xi^2 \quad \text{cuando } \Delta < \delta \quad (4.2.2.8)$$

si extraemos raíz cuadrada y escribimos en expresión vectorial:

$$\left| \sum_{i=1}^n \bar{u}(w_i) \Delta t_i - \bar{I} \right| < \xi \sqrt{m} \quad \text{cuando } \Delta < \delta \quad (4.2.2.9)$$

puesto que "m" es finita, esto implica que:

$$\bar{I} = \int_a^b \bar{u}(t) dt \quad (4.2.2.10)$$

Lo que, a su vez, nos permite afirmar que si existen las integrales de las componentes, existe la integral vectorial, y viceversa. Nos permite además, reducir el problema de existencia y las propiedades, a términos de la integral ordinaria.

$$\int_P^Q \bar{u} dt = \left[ \int_a^b u_1 dt, \int_a^b u_2 dt, \dots, \int_a^b u_m dt \right] \quad (4.2.2.11)$$

Así, podemos ahora, y no sólo mediante un razonamiento heurístico, sino también mediante un razonamiento rigurosamente matemático, ver que la integral del problema (4.1.1) existe, puesto que ambas componentes de "v" son funciones continuas.

En general, si las componentes de un campo vectorial son funciones acotadas de "t" con un número finito de puntos de discontinuidad, la integral curvilínea del campo vectorial existe, según vimos para esas funciones en C.D.I.

Ejemplo 4.2.1 Sea el campo  $\bar{v} = x^2 i + xz j + xy k$  y la trayectoria  $x = t, y = 2t, z = t^2$ .

Decir si existe

$$\int_C^{(1,2,1)}_{(0,0,0)} \bar{v} dt$$

y, en caso afirmativo, calcular ésta.

Al sustituir x,y,z en términos de t:

$$\bar{v}(t) = t^2 i + t^3 j + 2t^2 k$$

Todas las componentes son continuas  $\implies$  Existe la integral pedida.

Si  $x=0, t=0$ ; comprobación: si  $y=0, t=0$ ; si  $z=0, t=0$   
Si  $x=1, t=1$ ; comprobación: si  $y=2, t=1$ ; si  $z=1, t=1$

$$\begin{aligned} \int_C^{(1,2,1)}_{(0,0,0)} \bar{v} dt &= i \int_0^1 t^2 dt + j \int_0^1 t^3 dt + 2k \int_0^1 t^2 dt \\ &= \frac{1}{3} i [t^3]_0^1 + \frac{1}{4} j [t^4]_0^1 + \frac{2}{3} k [t^3]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} i + \frac{1}{4} j + \frac{2}{3} k \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.2

Sea el campo  $\bar{v} = xy i + y^2 j$  y la curva:

$$\bar{r} = \begin{cases} \cos t i + \sin t j, & \forall 0 \leq t \leq \pi/2 \\ \cos t i + 2 \sin t j, & \forall \pi/2 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

Averiguar si existe  $\int_C^{(-1,0)}_{(1,0)} \bar{v} dt$  y, en caso afirmativo calcularla.

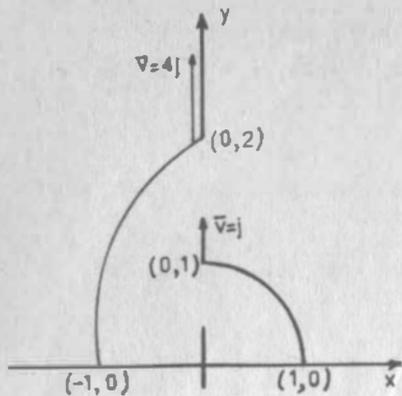


Fig. 4.2.1

La trayectoria está representada en la fig. (4.2.1) y podemos observar que existe una discontinuidad en  $t = \frac{\pi}{2}$ , donde el campo pasa bruscamente de  $j$  a  $4j$ ; sin embargo, este punto de discontinuidad es único por lo que la integral existe. Para calcularla, apliquemos una de las propiedades de la integral ordinaria, que tú recuerdas muy bien:

$$\begin{aligned} \int_C^{(-1,0)} \vec{v} dt &= i \int_0^{\pi} v_x(t) dt + j \int_0^{\pi} v_y(t) dt = i \int_0^{\pi/2} v_x(t) dt + \\ &+ i \int_{\pi/2}^{\pi} v_x(t) dt + j \int_0^{\pi/2} v_y(t) dt + j \int_{\pi/2}^{\pi} v_y(t) dt \\ \int_C^{(-1,0)} \vec{v} dt &= i \int_0^{\pi/2} \cos t \cos t dt + i \int_{\pi/2}^{\pi} 2 \cos t \cos t dt + j \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt + \\ &+ j \int_{\pi/2}^{\pi} 4 \sin^2 t dt. \\ &= \frac{1}{2} [\sin^2 t]_0^{\pi/2} + i [\sin^2 t]_{\pi/2}^{\pi} + j \left[ \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} + j [2t - \sin 2t]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} i - i + \frac{\pi}{4} j + (2\pi - \pi) j = -\frac{1}{2} i + \frac{5}{4} \pi j \end{aligned}$$

La propiedad que acabamos de aplicar se generaliza para cualquier integral curvilínea, de la siguiente manera:

$$\int_C^Q \vec{v} dt = \int_C^R \vec{v} dt + \int_R^Q \vec{v} dt \quad (4.2.2.12)$$

Independientemente de las posiciones relativas de P, Q, R.

Además, como ya dijimos, las propiedades de la integral ordinaria se convierten en propiedades de la integral curvilínea. Te vamos a demostrar una de ellas, para que tú demuestres las restantes.

Si  $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$  es un vector constante.

$$\int_P^Q \vec{e} \times \vec{v} dt = \vec{e} \times \int_P^Q \vec{v} dt \quad (4.2.2.13)$$

En efecto, sea  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ; entonces:

$$\vec{e} \times \vec{v} = i(e_2 v_z - e_3 v_y) + j(e_3 v_x - e_1 v_z) + k(e_1 v_y - e_2 v_x)$$

Si además "C" está descrita por  $\vec{r}(t)$  y  $P = \vec{r}(a), Q = \vec{r}(b)$ , podemos escribir:

$$(4.2.2.14)$$

$$\begin{aligned} \int_C^Q \vec{e} \times \vec{v} dt &= i \int_a^b e_2 v_z dt - i \int_a^b e_3 v_y dt + j \int_a^b e_3 v_x dt - \\ &- j \int_a^b e_1 v_z dt + k \int_a^b e_1 v_y dt - k \int_a^b e_2 v_x dt \end{aligned}$$

De cada una de las integrales ordinarias podemos sacar las constantes; entonces:

$$\begin{aligned} \int_C^Q \vec{e} \times \vec{v} dt &= i \left\{ e_2 \int_a^b v_z dt - e_3 \int_a^b v_y dt \right\} + j \left\{ e_3 \int_a^b v_x dt - e_1 \int_a^b v_z dt \right\} \\ &+ k \left\{ e_1 \int_a^b v_y dt - e_2 \int_a^b v_x dt \right\} \end{aligned}$$

o bien llamando  $I_x = \int_a^b v_x dt, I_y = \int_a^b v_y dt, I_z = \int_a^b v_z dt$

$$\int_C^Q \vec{e} \times \vec{v} dt = i(e_2 I_z - e_3 I_y) + j(e_3 I_x - e_1 I_z) + k(e_1 I_y - e_2 I_x) \quad (4.2.2.15)$$

Ahora si hacemos el producto vectorial

$$\vec{e} \times \vec{I} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ I_x & I_y & I_z \end{vmatrix} = i(e_2 I_z - e_3 I_y) + j(e_3 I_x - e_1 I_z) + k(e_1 I_y - e_2 I_x) \quad (4.2.2.16)$$

Al comparar (4.2.2.15) con (4.2.2.16) escribimos:

$$\int_a^Q \bar{e} \times \bar{v} dt = \bar{e} \times \bar{I} = \bar{e} \times \int_a^Q \bar{v} dt \quad (4.2.2.17)$$

Cabe decir que esta propiedad sólo es válida en espacios de 2 ó 3 dimensiones, toda vez que involucra un producto vectorial. Las siguientes propiedades están definidas en cualquier número de di mensiones:

$$\int_c^Q (\bar{u} + \bar{v}) dt = \int_c^Q \bar{u} dt + \int_c^Q \bar{v} dt \quad (4.2.2.18)$$

$$\int_c^Q h\bar{v} dt = h \int_c^Q \bar{v} dt \quad (4.2.2.19)$$

$$\int_c^Q \bar{e} \cdot \bar{v} dt = \bar{e} \cdot \int_c^Q \bar{v} dt \quad (4.2.2.20)$$

Si  $\bar{e}$  es un vector constante y  $\bar{e} \cdot \bar{v} \geq 0$  en todos los puntos de  $PQ$ , entonces:

$$\bar{e} \cdot \int_c^Q \bar{v} dt \geq 0 \quad (4.2.2.21)$$

En tres dimensiones, esta última propiedad tiene una interpretación geométrica:  $\bar{e} \cdot \bar{v} \geq 0$  indica que el vector variable  $\bar{v}$  nunca forma ángulo obtuso con una dirección constante; si tal es el caso, su integral tampoco formará ángulo obtuso con esa dirección.

#### 4.2.3 El Teorema Fundamental del Cálculo en la Integral Curvilínea.

Consideremos nuevamente el problema (4.1.1). ¿Sería posible calcular la posición de la partícula a los 5 seg.? Desde luego:

$$\bar{r}(5) = i \int_0^5 200 dt + j \int_0^5 (150 - 9.8t) dt = 1000i + 627.5j$$

En general:

$$\bar{r}(t) = i \int_0^t 200 dt + j \int_0^t (150 - 9.8t) dt = 200ti + (150 - 4.9t^2)j$$

donde, desde luego:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = 200i + (150 - 9.8t)j = \bar{v}$$

Estas expresiones nos permitirían responder a preguntas como:

a) Si el objetivo está en la horizontal, ¿Cuánto tiempo tarda el proyectil en alcanzarlo?

Respuesta:

Hacemos "y" (segunda componente de  $\bar{r}$  igual a cero.

$$150t - 4.9t^2 = 0$$

$$t(150 - 4.9t) = 0$$

$$t = \frac{150}{4.9} = \underline{30.6 \text{ seg}}$$

b) ¿A qué distancia está el objetivo del cañón?

Respuesta:

Encontramos "x" (primera componente de  $\bar{r}$ ) en  $t=30.6$  seg.

$$x = 200(30.6) = \underline{6122 \text{ m}}$$

c) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza el proyectil?

Respuesta:

Donde la velocidad vertical se anula.

$$150 - 9.8t = 0$$

$$t = \frac{150}{9.8} = \underline{15.3 \text{ seg}}$$

$$y_{\max} = 150(15.3) - 4.9(15.3)^2 = \underline{1148 \text{ m}}$$

En el caso más general, tendremos el campo vectorial  $\vec{u}(u_1, u_2, \dots, u_m)$  y la curva  $C: \vec{r}(t) \in E^m$ , donde  $P = \vec{r}(a)$

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= \int_P \vec{u} dt = \left\{ \int_a^t u_1 dt, \int_a^t u_2 dt, \dots, \int_a^t u_m dt \right\} = \\ &= \{ P_1(t), P_2(t), \dots, P_m(t) \} \end{aligned}$$

y por el teorema fundamental de la integral ordinaria que vimos en **Cálculo Diferencial e Integral**.

$$\frac{dP_1}{dt} = u_1, \quad \frac{dP_2}{dt} = u_2, \quad \dots, \quad \frac{dP_m}{dt} = u_m$$

Lo que significa que:

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{u} \quad (4.2.3.1)$$

que es como se expresa el teorema fundamental del cálculo para integrales curvilíneas y puede ser usado ventajosamente cuando la función por integrar puede reducirse a alguna de las fórmulas de derivación vistas en el Capítulo III.

Ejemplo 4.2.3

Puesto que

$$\frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}, \quad \int \vec{u} \cdot d\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{u}^2 + c$$

Ejemplo 4.2.4

Encontrar las fórmulas de integración por partes.

Sea  $\phi$  una función escalar  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  dos funciones vectoriales.

$$a) \quad d(\phi \vec{u}) = \phi d\vec{u} + \vec{u} d\phi \Rightarrow \int \phi d\vec{u} = \phi \vec{u} - \int \vec{u} d\phi \quad (4.2.3.2)$$

$$\int \vec{u} d\phi = \phi \vec{u} - \int \phi d\vec{u} \quad (4.2.3.3)$$

$$b) \quad d(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot d\vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{u} \Rightarrow \int \vec{u} \cdot d\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} - \int \vec{v} \cdot d\vec{u} \quad (4.2.3.4)$$

$$c) \quad d(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times d\vec{v} + d\vec{u} \times \vec{v} \Rightarrow \int \vec{u} \times d\vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} + \int \vec{v} \times d\vec{u} \quad (4.2.3.5)$$

Ejemplo 4.2.5.

Demostrar que una condición suficiente para que una partícula describa un movimiento plano, es que la aceleración sea siempre paralela al vector de posición de la partícula.

Sea  $\vec{r}(t)$  la trayectoria de la partícula; sea  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  su velocidad y sea  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lambda \vec{r}$  la aceleración siempre paralela a  $\vec{r}$ .

Por (4.2.3.5):

$$\int \vec{r} \times d\vec{v} = \vec{r} \times \vec{v} + \int \vec{v} \times d\vec{r} = \vec{r} \times \vec{v} + \vec{h}_1 \quad (4.2.3.a)$$

donde  $\vec{h}_1$  es un vector constante.

Ahora, si  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \lambda \vec{r}$ ,  $\vec{r} \times d\vec{v} = \vec{0}$  por lo que

$$\int \vec{r} \times d\vec{v} = \int \vec{0} = \vec{h}_2 = \text{cte.} \quad (4.2.3.b)$$

Al igualar (4.2.3.a) y (4.2.3.b):

$$\vec{r} \times \vec{v} + \vec{h}_1 = \vec{h}_2 \quad \text{o sea} \quad \vec{r} \times \vec{v} = \vec{h}_2 - \vec{h}_1 = \vec{h}$$

Por otra parte, recordarás (Ejem.3.4.8.11) que el producto vectorial de la velocidad por la aceleración, siempre nos dá un vector paralelo al binormal:

$$\vec{v} \times \vec{a} = \vec{v} \times \lambda \vec{r} = -\lambda \vec{h}$$

puesto que  $\vec{h}$  es constante y un escalar no puede hacer variar la dirección de un vector, el vector binormal se conservará paralelo a sí mismo y el movimiento será plano. (QED)

Ejemplo 4.2.6.

Calcular la energía cinética de los planetas.

Llamemos  $\rho = |\vec{r}|$ ; entonces el campo gravitacional del sol, es:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{\rho^3} \vec{r}$$

y por la 2a. Ley de Newton:

$$m\vec{a} = -G \frac{Mm}{\rho^3} \vec{r} \tag{4.2.3.c}$$

Si multiplicamos ambos miembros escalarmente por  $d\vec{r}$ :

$$m\vec{a} \cdot d\vec{r} = -G \frac{Mm}{\rho^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} \tag{4.2.3.d}$$

$$\text{pero } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}; \vec{v} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \cdot d\vec{v} \tag{4.2.3.e}$$

por otra parte, como

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \nabla \rho &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{k} \\ \nabla \rho &= \frac{\vec{r}}{\rho} \end{aligned} \tag{4.2.5.f}$$

Entonces:

$$-G \frac{Mm}{\rho^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = -G \frac{Mm}{\rho^2} \frac{\vec{r}}{\rho} \cdot d\vec{r} = -G \frac{Mm}{\rho^2} \nabla \rho \cdot d\vec{r} = -G \frac{Mm}{\rho^2} d\rho \tag{4.2.3.g}$$

Al llevar (4.2.3.e) y (4.2.3.g) a (4.2.3.c):

$$m\vec{v} \cdot d\vec{v} = -GMm \frac{d\rho}{\rho^2}$$

y al integrar:

$$\frac{1}{2} mv^2 = G \frac{Mm}{\rho} + C \tag{4.2.3.h}$$

que es la energía cinética que desarrollan los planetas.

Ejemplo 4.2.7

Demostrar la primera ley de Kepler: Los planetas describen órbitas elípticas, uno de cuyos focos es el sol.

De (4.2.3.c) podemos ver que la aceleración se conserva paralela a  $\vec{r}$ ; podemos concluir, por lo tanto que se trata de órbitas planas.

Multipliquemos vectorialmente ambos miembros de (4.2.3.c) por:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$m\vec{a} \times \vec{h} = -GMm \frac{\vec{r}}{\rho^3} \times (\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt})$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{h} = -GM \left( \frac{\vec{r}}{\rho^3} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{r} - \frac{\vec{r}}{\rho^3} \cdot \vec{r} \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = -GM \left( \frac{\vec{r}}{\rho^3} \cdot d\vec{r} \vec{r} - \frac{d\vec{r}}{\rho} \right)$$

Para integrar el segundo miembro, puede usarse la expresión (4.2.3.3):

$$\begin{aligned} \int d\vec{v} \times \vec{h} &= -GM \int \frac{\vec{r}}{\rho^3} \cdot d\vec{r} \vec{r} + GM \int \frac{d\vec{r}}{\rho} \\ \vec{u} &= \vec{r} & d\rho &= \frac{\vec{r}}{\rho^3} \cdot d\vec{r} \\ d\vec{u} &= d\vec{r} & \rho &= -\frac{1}{\rho} \\ \vec{v} \times \vec{h} &= -GM \left( -\frac{\vec{r}}{\rho} \right) + GM \int \left( -\frac{d\vec{r}}{\rho} \right) + GM \int \frac{d\vec{r}}{\rho} + \vec{C} \end{aligned}$$

o bien:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{h} = GM \rho + \vec{c} \cdot \vec{r}$$

pero

$$\vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{h} = h^2$$

entonces:

$$h^2 = GM \rho + \vec{c} \cdot \vec{r} = GM \rho + |\vec{c}|/\rho \cos \theta = \rho (GM + C \cos \theta)$$

donde  $C = |\vec{c}|$  y " $\theta$ " será el ángulo que forma el vector de posición a una dirección constante. Así:

$$\rho = \frac{h^2}{GM + C \cos \theta} = \frac{h^2/GM}{1 + \frac{C}{GM} \cos \theta}$$

Como recordarás de Algebra y Geometría Analítica, una cónica con foco en el polo tiene por ecuación:

$$\rho = \frac{P}{1 + e \cos \theta}$$

donde "e" es la excentricidad de la cónica, en este caso  $C/GM$

Ahora bien, hay cuatro cónicas: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola; pero:

No puede ser circunferencia, ya que sabemos que no siempre estamos a la misma distancia del Sol.

No puede ser parábola ni hipérbola, porque estas son curvas abiertas y también sabemos que damos vueltas alrededor del Sol.

Por lo tanto se trata de una elipse (QED)

#### 4.3) La integral curvilínea en curvas cerradas.

La integral curvilínea, sobre una trayectoria cerrada de cualquiera de los tipos mencionados, no presenta características especiales. Tan solo hay que tomar en cuenta el siguiente aspecto:

Sabemos que, por definición, en la integral ordinaria:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

lo que se antoja pasar a la integral curvilínea de la siguiente manera:

$$\int_P^P \vec{u} dt = 0$$

Esto es cierto si con ello se quiere significar NO recorrido; pero en una curva cerrada, podría tomarse como un regreso al punto de partida, después de un recorrido y en tal caso, la expresión anterior es falsa excepto en casos muy particulares.

En efecto, consideremos la curva  $\vec{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$ ; y un campo vectorial cualquiera  $\vec{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$ , a integrar sobre la curva cerrada.

Notación:

Para indicar que se trata de una integral curvilínea cerrada usaremos el símbolo:

$$\oint_C \vec{v} dt$$

en donde se está considerando que el recorrido sobre la curva C, será en sentido positivo.

El sentido positivo de recorrido será aquél que mantenga a la región encerrada por la curva "C", siempre a la izquierda, y negativo si la mantiene a la derecha. Fig. 4.3.1 (a) y (b)



Fig. 4.3.1

$$\oint_C \vec{v} dt = \mathbf{i} \int_0^{2\pi} v_x(t) dt + \mathbf{j} \int_0^{2\pi} v_y(t) dt \neq 0, \text{ en general}$$

Es decir, precisamente porque  $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi)$  los límites de la variable de integración son diferentes. Ahora la misma curva la podemos expresar como  $\vec{r} = t \mathbf{i} \pm \sqrt{1-t^2} \mathbf{j}$ . En tal caso, el único

valor de "t" que hace  $\vec{r} = \mathbf{i}$ , es  $\pm 1$ . Si integramos entre los límites 1,1, si obtendríamos invariablemente cero; pero hay que tomar en cuenta que en la forma expresada,  $\vec{r}$  NO es una función, puesto que a un valor de "t" corresponden 2 de  $\vec{r}$ ; en realidad tenemos dos trayectorias, por lo que la integral la debemos plantear:

$$\oint_C \vec{v} dt = \int_{C_1}^Q \vec{v} dt + \int_{C_2}^Q \vec{v} dt = \mathbf{i} \left\{ \int_{-1}^{-1} v_x dt + \int_{-1}^1 v_x dt \right\} + \mathbf{j} \left\{ \int_1^{-1} v_y dt + \int_{-1}^1 v_y dt \right\}$$

donde:

$$C_1 : \vec{r} = t \mathbf{i} + \sqrt{1-t^2} \mathbf{j}$$

$$C_2 : \vec{r} = t \mathbf{i} - \sqrt{1-t^2} \mathbf{j}$$

En general, en una curva cerrada, o bien tenemos dos valores diferentes de la variable de integración en el mismo punto, o bien hay dos trayectorias que hacen integrandos diferentes.

4.4) La Integral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  Su aplicación Física.

4.4.1) Problemas.- Sea el cuerpo de la figura (4.4.1).

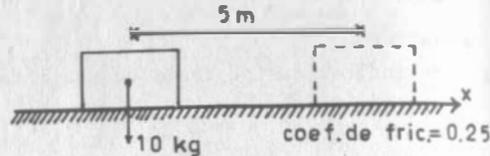


Fig. 4.4.1

Deseamos empujarlo sobre la superficie una longitud de 5 m .  
¿Qué trabajo debemos desarrollar?

Este es un problema elemental de trabajo.

La fuerza que se opone al desplazamiento es la fricción cuya magnitud es de 2.5 kg. Esta fuerza será constante, por lo que el trabajo es simplemente  $2.5 \times 5 = 12.5 \text{ kg}\cdot\text{m}$

Varias consideraciones habremos de hacer antes de seguir adelante; en primer lugar, el trabajo es un escalar y lo hemos obtenido como producto de un vector (la fuerza) por un escalar (la distancia).- Entonces quiere decir que por ahí quedó enmascarado un producto escalar; en efecto, lo que realmente hicimos, fue tomar la distancia y su dirección (i) y eso fue lo que multiplicamos escalarmente por la fuerza.

En segundo lugar, al definir el campo de fuerzas, nos damos cuenta que la fricción se opone al movimiento; luego  $\vec{F} = - 2.5 \text{ i}$ . La dirección del movimiento, en cambio lleva la dirección positiva de "x". Así, el trabajo nos debió salir negativo; sin embargo, para mover el cuerpo se realiza trabajo; luego si como es normal, definimos el campo de fuerzas que producen el movimiento, debemos cambiar el signo:

$$\vec{F} = 2.5 \text{ i} \quad ; \quad W = \vec{F} \cdot 5 \text{ i}$$

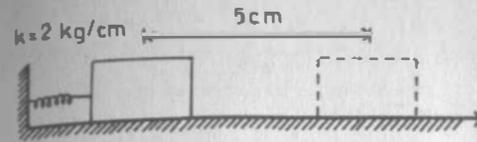


Fig. 4.4.2

Ahora consideremos el cuerpo de la figura (4.4.2) supongamos que el cuerpo es un bloque de hielo y la superficie horizontal una lámina lisa de acero, es decir, podemos suponer que la fricción no existe.

La fuerza que debemos de vencer es ahora la del resorte; pero ésta es una fuerza variable.

$$F = 2x \text{ i}$$

¿Qué hacemos ahora? Una solución aproximada sería dividir el desplazamiento en 5 intervalos y considerar que para desplazar el primer centímetro se requiere 2 kg; para desplazar el segundo, 4 kg y así sucesivamente, sumando luego los trabajos de esas fuerzas parciales; nos damos cuenta de que, en realidad, debemos hacer una integral vectorial:

$$W = \int_C^{(5,0)}_{(0,0)} \vec{F} \cdot ds \text{ i}$$

y puesto que  $s = x$ :

$$W = \int_0^5 (2x \text{ i}) \cdot dx \text{ i} = 2 \int_0^5 x \text{ dx} = [x^2]_0^5 = 25 \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

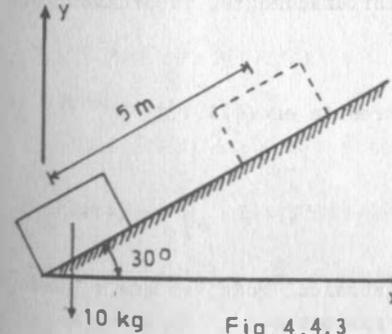


Fig. 4.4.3

Ahora consideremos el caso mostrado en la fig.(4.4.3). La fricción la suponemos también prácticamente, por lo que el campo de fuerzas que se opone al movimiento es el gravitacional y hay que aplicar.

$$\vec{F} = mg \text{ j} = 10 \text{ j}$$

Pero no es la fuerza completa la que se opone al movimiento, sino solamente su proyección sobre el plano de deslizamiento o para hablar con mas propiedad, sobre un vector paralelo ese plano, cuyas componentes son  $\vec{T} = \cos 30^\circ \text{ i} + \sin 30^\circ \text{ j} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ i} + \frac{1}{2} \text{ j}$

(tomando la dirección del desplazamiento), Esa proyección es la que debe multiplicarse por la distancia:

$$W = \vec{F} \cdot s\vec{T} = (10\mathbf{j}) \cdot 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = 25 \text{ kg}\cdot\text{m}$$

Nótese que ahora el vector  $\vec{T}$  sustituyó al vector "i"; es que ahora  $\vec{T}$  es el que da dirección al desplazamiento.

Con todos estos casos particulares ¿Podríamos encontrar una expresión general para calcular el trabajo?

Hemos visto que la fuerza puede ser variable y que debe proyectarse sobre la dirección del desplazamiento. Esta dirección podría ser variable también, por lo que  $\vec{T}$  adquiere el significado de tan gente unitaria a la trayectoria que debe seguir el cuerpo; con to do esto, podemos decir que:

$$W = \int_C^Q \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds \quad (4.4.1.1)$$

Esta expresión tiene, sin embargo, un inconveniente; vimos en (3.5.3) que trabajar en términos de "s" como parámetro, daba lugar a serias complicaciones algebraicas; afortunadamente, recordamos que

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Por lo que, si sustituimos esta expresión en (4.4.1.1)

$$W = \int_C^Q \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \, ds = \int_C^Q \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.4.1.2)$$

Que nos permite mayor facilidad algebraica, toda vez que  $\vec{r}$  puede manejarse en términos de cualquier parámetro.

#### 4.4.2 Propiedades

Por su gran aplicación en la Mecánica, este tipo especial de integral vectorial recibe una atención especial. En muchos casos, se le considera como único tipo de integral curvilínea y con ese nombre se le conoce. Nosotros preferimos considerarla como un caso-

particular curvilínea, refiriendo este nombre genérico a toda integral vectorial que puede ser reducida a una trayectoria.

Hay varias formas, aparte de la (4.4.1.1.) y (4.4.1.2.) de expresar este tipo de integrales. He aquí algunas:

Si  $\vec{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  entonces  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = Pdx + Qdy + Rdz$

y así:

$$\int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C^B Pdx + Qdy + Rdz \quad (4.4.1.3)$$

Al reducir el campo vectorial a una trayectoria,  $\vec{r}(t)$ , se tendrá:

$$\vec{F}(t) = F(t)\mathbf{i} + Q(t)\mathbf{j} + R(t)\mathbf{k}$$

Por otra parte:

$$\vec{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

$$d\vec{r} = f'(t)dt\mathbf{i} + g'(t)dt\mathbf{j} + h'(t)dt\mathbf{k}$$

$$= [f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}] dt$$

Entonces:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = [F(t)f'(t) + Q(t)g'(t) + R(t)h'(t)] dt$$

si además:

$$A = \vec{r}(a) \quad ; \quad B = \vec{r}(b)$$

$$\int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b [F(t)f'(t) + Q(t)g'(t) + R(t)h'(t)] dt \quad (4.4.1.4)$$

que además indica el procedimiento de cálculo.

Puesto que este tipo de integrales es tan importante, vale la pena explicitar algunas de sus propiedades que desde luego, no serán sino casos particulares de las propiedades generales de la integral vectorial, ya vistas.

Si la fuerza se multiplica por una constante escalar, el trabajo quedará multiplicado por dicha constante.

$$\int_C^B h\vec{F} \cdot d\vec{r} = h \int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.4.1.5)$$

Si dos campos de fuerzas obran sobre el cuerpo, el trabajo total será la suma de los trabajos de los campos aislados.

$$\int_C^B (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot d\vec{r} = \int_C^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_C^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} \quad (4.4.1.6)$$

El trabajo desarrollado para llevar un cuerpo, de A a B sobre una cierta trayectoria, es la energía que gana el cuerpo al ir de B a A sobre la misma trayectoria (o viceversa)

$$\int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.4.1.7)$$

El trabajo desarrollado para llevar un cuerpo de A a B sobre una cierta curva, es la suma del trabajo necesario para llevarlo de A a D y del trabajo necesario para llevarlo de D a B sobre la misma curva.

Lo anterior es cierto, independientemente de la posición que guarde D con respecto a A y B (Fig.4.4.4)

$$\int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C^D \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_D^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.4.1.8)$$

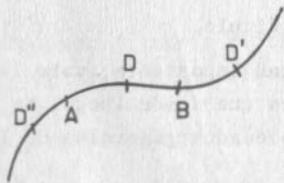


Fig. 4.4.4

Si en todos los puntos de la trayectoria el campo de fuerzas resultante actúa en dirección del movimiento (o perpendicular a él) para vencer la oposición, el trabajo desarrollado será positivo, o al menos nulo:

$$\text{Si } \vec{F} \cdot d\vec{r} \geq 0 \text{ en } \widehat{AB}, W = \int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \geq 0 \quad (4.4.1.9)$$

Inversamente, si la fuerza que produce el movimiento no encuentra oposición (Vgr caída en el vacío) el cuerpo ganará energía.

$$\text{Si } \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0 \text{ en } \widehat{AB}, W = \int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0 \quad (4.4.1.10)$$

Ahora tratemos de resolver algunos ejemplos.

Ejemplo 4.4.1

Sea el campo de fuerzas  $\vec{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ , donde  $|\vec{F}|$  está en kg si X y Y están en metros. Calcular el trabajo necesario para llevar una partícula del origen al punto (1,1)

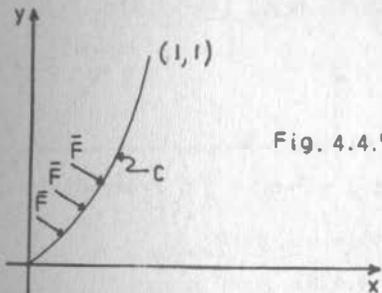


Fig. 4.4.5

a) A través de la parábola  $y=x^2$  (Fig.4.4.5)

Ecuación vectorial de la trayectoria: Hacemos  $x=y \therefore y=t^2$  y así:

$$\vec{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}; d\vec{r} = (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j})dt$$

$$\vec{F}(t) = t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (t^2 - 2t^2)dt = -t^2 dt$$

Si  $x=0, t=0$ ; comprobación: si  $y=0, t=0$

Si  $y=1, t=1$ ; comprobación: si  $y=1, t=1$

$$W = \int_C^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (-t^2)dt = -\frac{1}{3} [t^3]_0^1 = -\frac{1}{3} \text{ kg}\cdot\text{m}$$

b) A través de la recta  $y=x$  (Fig. 4.4.6)

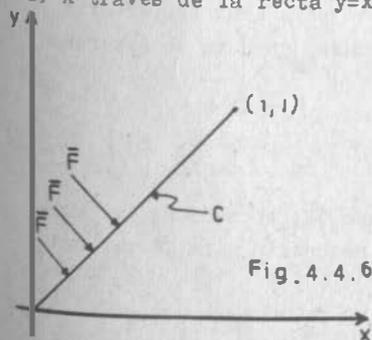


Fig. 4.4.6

Ahora hacemos  $x=t; y=t$ :

$$\vec{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}; d\vec{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})dt$$

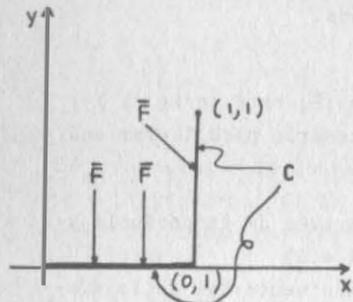
$$\vec{F} = t\mathbf{i} - t\mathbf{j}; \vec{F} \cdot d\vec{r} = t - t = 0$$

$$W = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Lo que se explica cuando cae uno en la cuenta de que en este caso  $\vec{F}$  es perpendicular a la trayectoria en todos los puntos, por lo que no se opone ni ayuda al movimiento de la partícula.

Siempre que el campo vectorial  $\vec{F}$  se mantenga perpendicular a la trayectoria, la integral curvilínea será nula.

c) A través de la recta quebrada que va de (0,0) a (0,1) y de (0,1) a (1,1) (Fig.4.4.7)



Puesto que la trayectoria no admite tangente única en (0,1),  $\vec{F} \cdot \vec{T}$  no es continua en ese punto; pero como el punto es único la integral existe. Debemos calcularla según (4.4.1.8)

Fig. 4.4.7

- De (0,0) a (0,1) :  $\vec{r}=ti$  ;  $d\vec{r}=dti$  ;  $\vec{F}=-tj$  ;  $\vec{F} \cdot d\vec{r}=0$   
- De (0,1) a (1,1) :  $\vec{r}=i+tj$  ;  $d\vec{r}=dtj$  ;  $\vec{F}=ti-j$  ;  $\vec{F} \cdot d\vec{r}=-dt$

$$W = \int_0^1 0 + \int_0^1 (-dt) = -1 \text{ kg}\cdot\text{m}$$

d) A través de la parábola  $y^2=x$  (Fig.4.4.8)

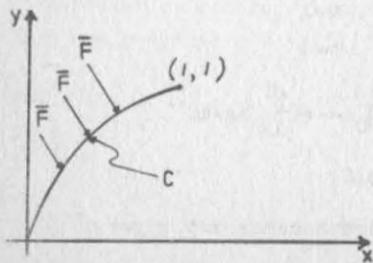


Fig.4.4.8

Bien, es justo que te dejemos resolver solo este problema; el resultado debe ser  $\frac{1}{3}$  kg-m

Por otro lado, observamos que el trabajo requerido fue distinto para cada trayectoria -- probada, como ya se esperaba.

Ejemplo 4.4.2

Sea el campo de fuerzas  $\vec{F}_1 = yi + xj$  donde  $|\vec{F}_1|$  está en kg, si x, y están en metros. Calcular el trabajo necesario para llevar una partícula del origen al punto (1,1)

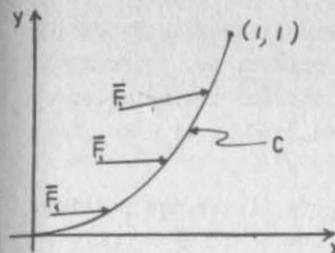


Fig. 4.4.9

a) A través de la parábola  $y=x^2$  (Fig. 4.4.9)

$$\vec{r}=ti + t^2j ; d\vec{r}=(i + 2tj)dt$$

$$\vec{F}_1 = t^2i + tj ; \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = 3t^2dt$$

$$W = \int_0^1 3t^2dt = [t^3]_0^1 = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}$$

b) A través de la recta  $y=x$  (Fig. 4.4.10)

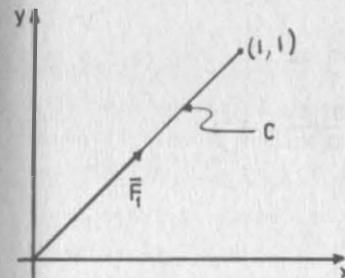


Fig. 4.4.10

Hazlo tú solo; el resultado es 1 kg-m.

¿El mismo resultado anterior? ¿Cómo? En el ejemplo (4.4.1) tuvimos resultados diferentes para cada trayectoria y ahora, un campo que es casi igual al anterior nos da mismos resultados para las dos trayectorias diferentes.

¿Qué está pasando aquí? ¿Qué funciones cumplen con esta propiedad? Vamos a verlo en seguida.

4.5 Independencia de la Trayectoria.

Calculemos el rotacional de  $\vec{F}$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2k$$

Ahora el rotacional de  $\vec{F}_1$

$$\nabla \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Así pues, en los ejemplos anteriores,  $\bar{F}$  se distingue de  $\bar{F}_1$  en que este último es un campo irrotacional y el primero no. ¿Será por eso que el trabajo contra  $\bar{F}_1$  da lo mismo por dos trayectorias diferentes? Consideremos un campo cualquiera  $\bar{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  tal que  $\bar{\nabla} \times \bar{F} = 0$ .

Queremos saber qué trabajo debe realizar para llevar una partícula del punto A al punto B, a través de la curva C:  $\bar{r} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ , sabiendo que  $A = \bar{r}(a)$ ;  $B = \bar{r}(b)$ .

Como hemos visto de (4.4.1.4.):

$$W = \int_a^b [Pf'(t) + Qg'(t) + Rh'(t)] dt \quad (4.5.0.1)$$

Pero si  $\bar{\nabla} \times \bar{F} = 0 \Rightarrow \bar{F} = \nabla \phi$ ; es decir  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P$ ;

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = R$$

$$\text{Además: } \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = Pf'(t) + Qg'(t) + Rh'(t) \quad (4.5.0.2)$$

Así al sustituir (4.5.0.2) en (4.5.0.1):

$$W = \int_a^b \frac{d\phi}{dt} dt = \int_A^B d\phi = \phi(B) - \phi(A) \quad (4.5.0.3)$$

La expresión (4.5.0.3) comprueba nuestra sospecha; en efecto, el trabajo de un campo irrotacional depende solamente de los puntos extremos de la trayectoria y no de ésta. Su cálculo se puede efectuar entonces de dos maneras: o integrando el campo a través de la trayectoria que nos resulte más simple, o calculando el potencial y valuando su "caída" entre los puntos extremos.

Si seguimos el último procedimiento en el ejemplo (4.4.2)

$$\bar{F} \cdot d\bar{r} = y dx + x dy$$

$$\phi = \int y dx + f(y) = xy + f(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + f'(y) = Q = x$$

$$f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = c$$

$$\phi = xy + c; \phi(0,0) = c; \phi(1,1) = 1 + c;$$

$$W = 1 + c - c = 1 \text{ kg-m}$$

Entonces, cada vez que nos proponamos calcular el trabajo requerido para vencer un campo de fuerzas, deberemos averiguar si ese campo es irrotacional, pues si tal es el caso, nuestros cálculos se simplificarán en gran medida.

¿Pero son los campos irrotacionales los únicos cuyo trabajo no depende de la trayectoria? Consideremos ahora un campo cualquiera  $\bar{F}$  cuyo trabajo no depende de la trayectoria e integrémoslo entre los puntos A(a,b,c) y M(x,y,z)

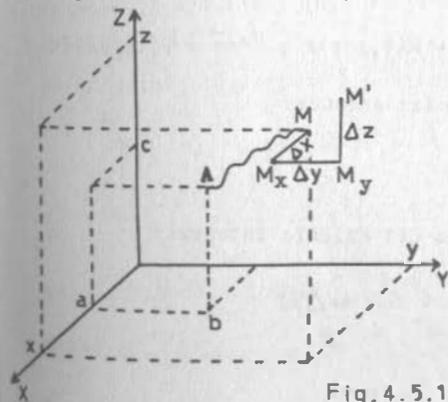


Fig. 4.5.1

Puesto que ya quedamos en que hay independencia de la trayectoria vayámonos por rectas paralelas a los ejes (Fig. 4.5.1): de M a  $M_x$ , de  $M_x$  a  $M_y$  y de  $M_y$  a  $M'$ .

Como de costumbre, consideremos:

$$\bar{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

$$W = \int_A^M P dx + Q dy + R dz$$

Ahora supongamos que queremos llevar la partícula a:

$$M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

Entonces por (4.4.1.8)

$$W + \Delta W = \left\{ \int_{M_x}^{M_x'} P dx + Q dy + R dz + \int_{M_y}^{M_y'} P dx + Q dy + R dz + \int_{M_z}^{M_z'} P dx + Q dy + R dz + \int_{M_x}^{M_x'} P dx + Q dy + R dz \right\}$$

Por lo que:

$$\Delta W = \left\{ \int_{M_x}^{M_x'} P dx + Q dy + R dz + \int_{M_y}^{M_y'} P dx + Q dy + R dz + \int_{M_z}^{M_z'} P dx + Q dy + R dz \right\}$$

o bien:

$$\Delta W = (\Delta_x W + \Delta_y W + \Delta_z W)$$

Calculemos  $\Delta_x W$ ; la ecuación de la trayectoria de  $M$  a  $M_x$  es:

$$\vec{r} = t\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}; \quad d\vec{r} = dt\mathbf{i}$$

$$\vec{F} = P(t, y, z)\mathbf{i} + Q(t, y, z)\mathbf{j} + R(t, y, z)\mathbf{k}; \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = P(t, y, z)dt$$

Además, en  $M$ ,  $t=x$ ; en  $M_x$ ,  $t=x+\Delta x$ ; entonces

$$\Delta_x W = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y, z) dt$$

y por el teorema del Valor Medio del Cálculo Integral:

$$\Delta_x W = P(\zeta, y, z) \Delta x, \quad (x \leq \zeta \leq x + \Delta x)$$

Ahora:

$$\frac{\Delta_x W}{\Delta x} = P(\zeta, y, z), \quad (x \leq \zeta \leq x + \Delta x)$$

Al tomar límites cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , el primer miembro tiende a  $\frac{\partial W}{\partial x}$  y "z" tiende a "x". Así

$$\frac{\partial W}{\partial x} = P(x, y, z)$$

Análogamente se puede llegar a

$$\frac{\partial W}{\partial z} = R(x, y, z); \quad \frac{\partial W}{\partial y} = Q(x, y, z)$$

y si hacemos

$$W = \phi; \quad \vec{\nabla} \phi = \vec{F}$$

lo que nos dice que sólo los campos irrotacionales pueden integrarse independientemente de la trayectoria.

Ejemplo 4.5.1

Calcular el trabajo realizado por el campo  $\vec{F} = (2x+y)\mathbf{i} + (2y+x)\mathbf{j}$  para llevar una partícula sobre la recta que une los puntos (0,0) y (1,1)

Si  $\vec{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$  El campo es irrotacional y no importa la trayectoria que sigamos. Se recomienda seguir una trayectoria de línea quebrada de (0,0) a (1,0) y de (1,0) a (1,1) ya que al variar una sola variable en cada segmento, se tiene una sola diferencial.

En el primer segmento:  $\vec{r} = t\mathbf{i}; \quad d\vec{r} = dt\mathbf{i}$

$$\vec{F} = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j}; \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2t dt$$

$$W_1 = \int_0^1 2t dt = [t^2]_0^1 = 1$$

En el segundo segmento:  $\vec{r} = t\mathbf{j} + \mathbf{i}; \quad d\vec{r} = dt\mathbf{j}$

$$\vec{F} = (2+t)\mathbf{i} + (2t+1)\mathbf{j}; \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = (2t+1)dt$$

$$W_2 = \int_0^1 (2t+1)dt = [t^2 + t]_0^1 = 2$$

$$W = W_1 + W_2 = 3$$

Otro procedimiento sería:

$$\phi = \int (2x + y) dx + f(y) = x^2 + xy + f(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + f'(y) = Q = 2y + x$$

$$\Rightarrow f'(y) = 2y$$

$$f(y) = y^2 + c$$

$$\phi = x^2 + xy + y^2 + c ; \phi(0,0) = c$$

$$\phi(1,1) = 3 + c$$

$$W = 3$$

#### Ejemplo 4.5.2

Calcular el trabajo requerido para darle una vuelta completa a una partícula sobre la circunferencia  $\vec{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$

y venciendo el campo

$$\vec{F} = 2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j}$$

El campo es nuevamente irrotacional. Para calcular el trabajo de terminemos su función potencial:  $\phi = x^2 + y^2 + c$

y ahora debemos calcular  $\phi$  en el punto final y restarle el valor correspondiente en el punto inicial. Pero como ambos puntos coinciden, el trabajo va a ser nulo.

El razonamiento es general: si  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (4.5.0.4)$$

sobre cualquier trayectoria cerrada y en cualquier sentido de recorrido.

#### 4.6 Campo Conservativo.

Hasta ahora hemos considerado diversos campos de fuerzas y el trabajo que hay que hacer para vencerlos. No hemos hablado del efecto que un campo de esta naturaleza produce en la partícula.

La segunda ley de Newton nos dice que las fuerzas producen aceleraciones, que pueden ser positivas o negativas (en ocasiones se les llama deceleraciones a éstas últimas).

Consideremos pues un campo de fuerzas  $\vec{F}$  tal que

$$\vec{F} = m\vec{a} \text{ (segunda ley de Newton)}$$

pero  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , entonces:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ahora si multiplicamos ambos miembros escalarmente por  $d\vec{r}$ :

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

Vemos ahora el trabajo que hay que hacer para llevar una partícula de masa "m" del punto (1) al punto (2) y cómo se comporta la velocidad de esa partícula:

$$W = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \int_{(1)}^{(2)} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

Puesto  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ ,  $\vec{F}$  admite potencial y por lo tanto:

$$W = [\psi]_{(1)}^{(2)} = \frac{m}{2} [\vec{v}^2]_{(1)}^{(2)}. \text{ Si hacemos } \phi = -\psi:$$

$$\phi(1) - \phi(2) = m \frac{\vec{v}_1^2}{2} - m \frac{\vec{v}_2^2}{2}$$

o bien:

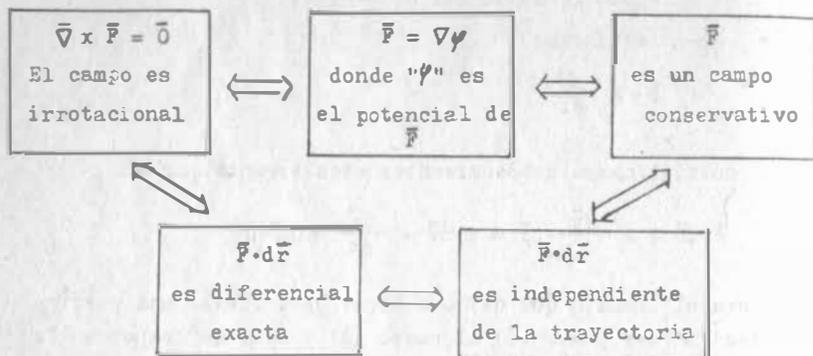
$$\phi(1) + m \frac{\vec{v}_1^2}{2} = \phi(2) + m \frac{\vec{v}_2^2}{2} \quad (4.6.0.1)$$

Al término  $-\frac{m\vec{v}_1^2}{2}$ , tú lo conoces y sabes que es la energía cinética de la partícula en el punto (1). El término  $\phi(1)$ , se llama energía potencial de la partícula en el punto (1) y dependerá del campo de fuerzas. Lo importante de la ecuación (4.6.0.1) es

que la energía total de una partícula, sujeta a un campo irrotacional de fuerza, es la misma en cualquier punto.

Es decir, la partícula no pierde ni gana energía sino que la conserva.

Por eso a los campos irrotacionales se les llama "conservativos". Si recordamos todo lo que hemos dicho hasta ahora sobre los campos irrotacionales, podemos hacer el siguiente esquema, donde la flecha con doble tallo se lee "implica necesariamente".



Por lógica, la doble implicación existe entre cualesquiera dos aseveraciones; por ejemplo:

$$\vec{F} = \nabla\psi \iff \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ es independiente de la trayectoria}$$

En el esquema no se anotaron todas las flechas en obvio de su claridad.

Ejemplo 4.6.1

El campo gravitacional localizado  $\vec{F} = mg\hat{k}$  es conservativo; en efecto, si  $\psi = -mgz$   $\vec{F} = \nabla\psi$ ,  $\psi = -mgz$

a) ¿Qué altura alcanza un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba?

Apliquemos la ecuación (4.6.0.1), los valores son:

$$\phi(1) = 0; \vec{v}_1 = v_0 \hat{k}; \vec{v}_1^2 = v_0^2; \phi(2) = mgh;$$

además, por condición del problema  $\vec{v}_2 = 0$  (El punto 2 es donde la partícula se detiene antes de iniciar su descenso).

Así:

$$mgz_1 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mgz_2 + 0$$

$$\text{Si } z_1 = 0 \quad \text{y} \quad z_2 - z_1 = h$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

b) ¿Con qué velocidad regresa al suelo?

Al aplicar nuevamente la ecuación (4.6.0.1), ahora con los valores:

$$\phi(1) = mgh \text{ (arriba, punto más alto)}$$

$$\vec{v}_1 = 0$$

$$\phi(2) = 0 \text{ (en el suelo);}$$

$$\vec{v}_2 = -v_f \hat{k}, \quad \vec{v}_2^2 = v_f^2$$

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{2gh} = v_0$$

c) ¿Cuánto tiempo tarda en subir y en bajar?

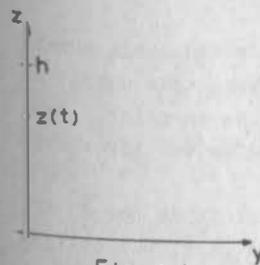


Fig. 4.6.1

$$\text{se tiene que } \frac{d\vec{v}}{dt} = -g\hat{k}$$

$$\vec{v} = \int -g\hat{k} dt = -gt\hat{k} + \vec{c}$$

si  $t=0$ ,  $\vec{v} = v_0\hat{k}$ , entonces:

$$v_0\hat{k} = \vec{c}$$

$$\vec{v} = (v_0 - gt)\hat{k}$$

Cuando  $\bar{v}=0$ ,  $t$ -tiempo de subida =  $t_s = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Para tiempo de bajada, sigue siendo cierto que:

$$\bar{v} = -gk + \bar{c}$$

Pero ahora, si  $t=0$ ,  $\bar{v}=0 \Rightarrow \bar{c}=0$

$$\bar{v} = -gk$$

Al llegar al suelo,  $\bar{v} = -\sqrt{2gh}$  k

Tiempo de bajada =  $t_b = \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_s$

#### Ejemplo 4.6.2

Sea una partícula de masa "m" que parte del reposo en la posición

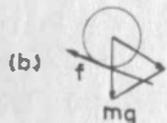
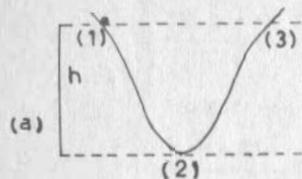


Fig. 4.6.2

(1) indicada en la figura (4.6.2)

la partícula tiene en ese momento una energía potencial  $mgh$  que, al llegar al punto (2), ya transformó totalmente en energía cinética, la que a su vez irá transformando en energía potencial para alcanzar el punto (3). En este punto inicia el descenso nuevamente y los fenómenos descritos

se repetirán de nuevo indefinidamente, puesto que la partícula está sometida al campo gravitacional, que es conservativo.

Nosotros sabemos que eso no es cierto, pues el movimiento continuo no existe.

¿Qué está pasando entonces?

Aparte del campo gravitacional, la partícula se encuentra sometida a otro campo de fuerzas que es el de fricción; este campo no conserva la energía mecánica, sino que la disipa en calor. Como ya vimos que los campos conservativos sólo pueden ser irrotacionales, este campo admitirá rotacional.

Si observamos la figura (4.6.2.b) nos damos cuenta de que la fricción hace par con la proyección del peso de la partícula obligándola a rotar.

#### Ejemplo 4.6.3

Calcular la velocidad teórica inicial, que hay que dar a un cohete espacial para que escape de la atracción terrestre. (despreciar la fricción del aire y los campos gravitacionales de otros cuerpos celestes).

Con las suposiciones establecidas, el cohete queda sujeto solamente al campo gravitacional de la tierra que, como ya vimos es:

$$\bar{F} = -G \frac{mM}{|\bar{r}|^3} \bar{r}$$

donde  $M$  = masa de la tierra

$m$  = masa del cohete

$G$  = constante de gravitación universal

$\bar{r}$  = vector que fija la posición del cohete en un momento cualquiera, con origen en el centro de la tierra.

De acuerdo con (4.2.0.13):

$$\phi = GmM \frac{1}{|\bar{r}|} ; \quad \phi = -GmM \frac{1}{|\bar{r}|}$$

Así, para aplicar (4.6.0.1) tendremos:

$$\phi_{\text{inicial}} = -\frac{GmM}{6400 \text{ km}}$$

Para escapar de la atracción de la tierra, esto es, para que  $\bar{F} = \bar{0}$ , se requiere que  $|\bar{r}|$  crezca indefinidamente; entonces:

$$\phi_{\text{final}} = \lim_{|\bar{r}| \rightarrow \infty} \left( -\frac{GmM}{|\bar{r}|} \right) = 0$$

La energía cinética inicial es lo que queremos averiguar; llamemos  $|\bar{v}|$  inicial =  $v_0$ ;  $E_{\text{ci}} = \frac{1}{2} mv_0^2$   
Lo que nos importa es escapar de la atracción terrestre; una vez logrado esto, no nos interesa que el cohete se mueva. Entonces:

$$|\bar{v}|_{\text{final}} = 0$$

Ahora sí, apliquemos (4.6.0.f):

$$-\frac{Gh_m}{6400} + \frac{f}{2} m v_o^2 = +0$$

$$\frac{f}{2} m v_o^2 = \frac{Gh_m}{(6400)^2} 6400 = 6400 \text{ g}$$

$$v_o = \sqrt{(2)(6400 \text{ km})(0.0098)} \text{ km/s}^2 = 11.2 \text{ km/s}$$

#### 4.7 Gasto en un Campo Plano de Velocidades.

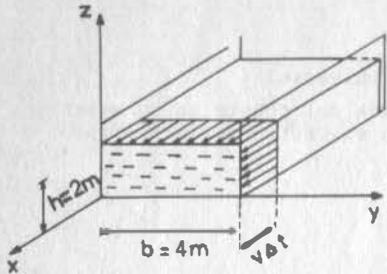


Fig. 4.7.1

Queremos calcular el gasto que está circulando por el canal. El gasto se define como el volumen que pasa en un tiempo unitario formalmente.

$$Q = \frac{dv}{dt}$$

En el problema planteado, el volumen que alcanza a pasar en un intervalo " $\Delta t$ " de tiempo es el prisma mostrado en la figura (4.7.1) puesto que la velocidad es la misma en todos los puntos; así:

$$\Delta V = v \Delta t b h = 2 \Delta t (4)(2) = 8 \Delta t$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = 8$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = Q = 8 \text{ m}^3/\text{s}$$

Ahora compliquemos un poco el problema, suponiendo que el plano-

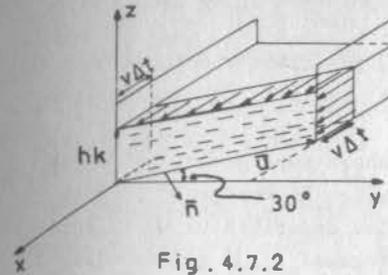


Fig. 4.7.2

de corte virtual forma un ángulo de  $30^\circ$  con el plano  $yz$ , figura (4.7.2)

Puesto que las velocidades siguen siendo las mismas en todos los puntos, el volumen que pasará en  $\Delta t$  será el del paralelepípedo mostrado en la fig. (4.7.2)

Nosotros sabemos calcular el volumen de un paralelepípedo como el doble producto escalar de los vectores que lo definen:

$$\Delta V = |\vec{u} \times (-\vec{v} \Delta t) \cdot h\vec{k}| \quad (4.7.0.1)$$

donde:  $\vec{u} = -b \tan 30^\circ \vec{i} + b \vec{j} = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \vec{i} + 4 \vec{j}$

$$\text{entonces: } \Delta V = \begin{vmatrix} -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 4 & 0 \\ -2 \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \Delta t$$

Con lo que podemos ver que llegamos al mismo resultado anterior, lo que quizá ya esperabas.

Lo importante de este resultado es que si consideramos el vector  $\vec{u}$ , normal unitario al plano de corte, " $\vec{u}$ " puede expresarse:

$$\vec{u} = s \vec{k} \times \vec{n} \quad , \quad \text{donde } s = |\vec{u}|$$

$$\begin{aligned} \text{Y entonces: } \vec{u} \times (-\vec{v} \Delta t) &= \vec{v} \Delta t \times \vec{u} = s \Delta t (\vec{v} \times (\vec{k} \times \vec{n})) \\ &= s \Delta t (\vec{v} \cdot \vec{n} \vec{k} - \vec{v} \cdot \vec{k} \vec{n}) \end{aligned}$$

$$\text{Y como } \vec{v} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{u} \times (-\vec{v} \Delta t) = s \Delta t (\vec{v} \cdot \vec{n} \vec{k}) \quad (4.7.0.2)$$

Al llevar (4.7.0.2) a (4.7.0.1)

$$\Delta V = s h \Delta t \vec{v} \cdot \vec{n} \quad (4.7.0.3)$$

Al comparar este caso con el anterior, nos damos cuenta de que, en vez de  $|\vec{v}|$  pusimos  $\vec{v} \cdot \vec{n}$  y, en vez de "b", pusimos "s" la longitud de la base del área de corte.

Complicuemos otro poco el problema. Ahora supongamos que el campo de velocidades está dado por  $\vec{v} = f(y)\vec{i}$ . El movimiento lo podemos concebir como sigue: las partículas describen un movimiento rectilíneo, paralelo a las paredes del canal; cada una de ellas lleva velocidad uniforme. Dos partículas tienen velocidad igual sólo si distan lo mismo de una de las paredes del canal. En estas condiciones, el volumen que va a pasar en un tiempo "Δt" es el que se esquematiza en la figura (4.7.3); como es un cilindroide, para determinarlo vamos a calcular simplemente el área de su base, como aprendimos en Cálculo Diferencial e Integral.

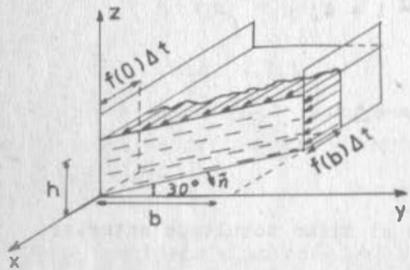


Fig. 4.7.3.a

$$\text{Area} = \Delta t \int_0^b f(y) dy + \tan 30^\circ \int_0^b y dy - \frac{b^2}{2} \tan 30^\circ$$

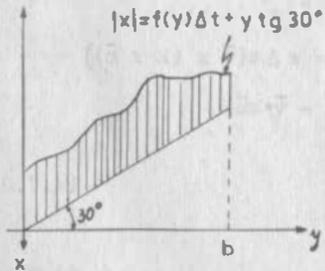


Fig. 4.7.3.b

En la integral que resta, hagamos cambio de variable.

$$y = s \cos 30^\circ, \quad dy = \cos 30^\circ ds$$

$$\text{Area} = \Delta t \int_0^{b/\cos 30^\circ} f(s \cos 30^\circ) \cos 30^\circ ds$$

Que es equivalente a la integral vectorial.

$$\text{Area} = \Delta t \int_c \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

donde "c" es la línea de corte. Fácilmente se llega a:

$$\Delta V = \Delta t \int_c \vec{v} \cdot \vec{n} h ds \tag{4.7.0.4}$$

que al compararla con (4.7.0.3) nos damos cuenta de que ahora tenemos una integral sobre la longitud "s".

Al mismo resultado llegamos si el corte lo hacemos siguiendo una curva cualquiera  $x = g(y)$ :

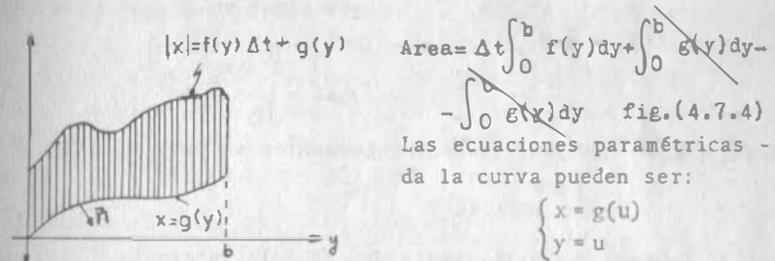


Fig. 4.7.4

Las ecuaciones paramétricas - da la curva pueden ser:

$$\begin{cases} x = g(u) \\ y = u \end{cases}$$

y por otra parte,  $u = u(s)$ , con lo que  $dy = u'(s) ds = \frac{ds}{s'(u)}$  y así:

$$\text{Area} = \Delta t \int_0^{s(t)} f(s) \frac{ds}{s'(u)}$$

Ahora recordemos que:  $T = \frac{g'(u)\vec{i} + \vec{j}}{s'(u)}$

$$\vec{n} = T \times k = \frac{\vec{i} - g'(u)\vec{j}}{s'(u)}$$

Por lo que:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \frac{f(s)}{s'(u)}$$

Hasta ahora, hemos supuesto siempre que la velocidad de las partículas no cambia en su recorrido. ¿Qué pasa si suponemos que  $\vec{v} = f(x)\vec{i}$ ?

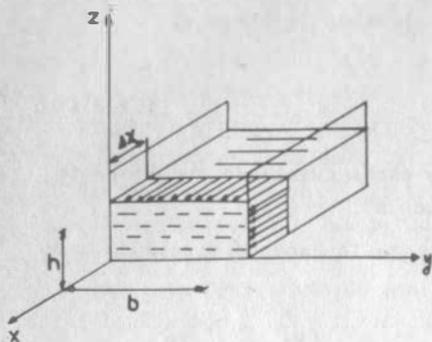


Fig. 4.7.5

Puesto que ya hemos visto el efecto de un corte cualquiera, asumamos que el corte lo hace nuevamente (Fig. 4.7.5) el plano YZ. Nuestro movimiento sigue siendo rectilíneo, pero ya no es uniforme, sino que cada partícula cambia su velocidad al acercarse a la región de corte. Si seguimos a una de las partículas, caemos a un problema muy semejante al que vimos en (4.1.0.1) Entonces:

$$\Delta x_i = \int_0^{\Delta t} \bar{v} dt$$

o bien, puesto que sólo tenemos componentes en "x"

$$\Delta x = \int_0^{\Delta t} f(x) dt$$

y por el teorema del Valor Medio del Cálculo Integral:

$$\Delta x = f(\zeta) \Delta t \quad 0 \leq \zeta \leq \Delta t$$

Entonces:

$$\Delta V = bhf(\zeta) \Delta t$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = bhf(\zeta)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = Q = bhf(0)$$

donde  $f(0)$  es la velocidad en la sección de corte. Así:

$$Q = bh|\bar{v}| = bh\bar{v} \cdot \mathbf{i} = bh\bar{v} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \int_c \bar{v} \cdot \bar{\mathbf{n}} h ds, \quad (c \equiv \text{eje } y)$$

resultando análogo a los anteriores y que nos permite pasar al caso más general, donde se tiene un flujo plano  $\bar{v} = v_1(x,y)\mathbf{i} + v_2(x,y)\mathbf{j}$  y un corte cualquiera definido por la curva  $c: \bar{\mathbf{r}} = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$  fig. (4.7.6).

El gasto que pasa a través de la superficie cilíndrica de altura "h", cuya directriz es "c" vale:

$$Q = h \int_c \bar{v} \cdot \bar{\mathbf{n}} ds \quad (4.7.5)$$

Hemos visto que trabajar con "s" como parámetro da lugar a problemas algebraicos muy serios, a excepción hecha de -- curvas muy particulares.

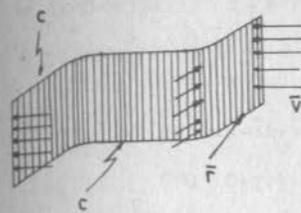


Fig. 4.7.6

Entonces tratemos de eliminar ese parámetro.

El vector  $\bar{\mathbf{n}}$  es normal a la curva de corte, pero dirigido hacia afuera: de hecho te habrás preguntado por qué usamos este sentido. La razón es que convencionalmente se considera gasto positivo al que "sale"; de ahí que la proyección de " $\bar{v}$ " la debemos hacer hacia "afuera". En todo caso  $\bar{\mathbf{n}} = -\mathbf{N}$  (N es el vector que vimos en el ejemplo 3.4.7) y si  $\mathbf{N} = B \times \mathbf{T}$ ,  $\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{T} \times \mathbf{B}$

Como estamos en el plano xy,  $\mathbf{B} = \mathbf{k}$  y entonces:

$$Q = h \int_c \bar{v} \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{k}) ds = h \int_c (\mathbf{k} \times \bar{v}) \cdot \mathbf{T} ds = h \int_c (\mathbf{k} \times \bar{v}) \cdot \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{ds} ds$$

$$Q = h \int_c (\mathbf{k} \times \bar{v}) \cdot d\bar{\mathbf{r}} \quad (4.7.0.6)$$

La expresión (4.7.0.6) es muy similar a la (4.5.1.1) donde F queda sustituido por  $(\mathbf{k} \times \bar{v})$  y permite integrar en términos de cualquier parámetro.

#### Ejemplo 4.7.1

El campo de velocidades de un fluido está dado por  $\bar{v} = xi + yj$ ,  $\bar{v}$  en m/s si x, y en m. Calcular el gasto que pasa.

a) A través de un segmento de cilindro circular recto, con radio=4m y eje de simetría en el eje z; limitado por las generatrices:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=4m \end{cases} \quad \begin{cases} x=4m \\ y=0 \end{cases} \quad \text{y los planos } z=0; z=3m$$

(Fig. 4.7.7)

Para la directriz:

$$\vec{r} = 4\cos \theta \mathbf{i} + 4\sin \theta \mathbf{j}$$

$$d\vec{r} = (-4\sin \theta \mathbf{i} + 4\cos \theta \mathbf{j})d\theta$$

$$k \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = x\mathbf{j} - y\mathbf{i} = -4\cos \theta \mathbf{j} - 4\sin \theta \mathbf{i}$$

$$k \times \vec{v} \cdot d\vec{r} = (16\cos^2 \theta + 16\sin^2 \theta)d\theta = 16d\theta$$

$$\text{Si } x=4, y=0 \quad \theta=0 \quad ;$$

$$\text{Si } x=0, y=4 \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad ;$$

además,  $h=3\text{m}$

$$Q = 3 \int_0^{\pi/2} 16d\theta = 24 \text{ m}^3/\text{s}$$

b) A través del segmento de cilindro  $y = 4 - \frac{x^2}{4}$  limitado por las generatrices  $\begin{cases} x=0 \\ y=4m \end{cases}$   $\begin{cases} x=4m \\ y=0 \end{cases}$  los planos  $x=0, z=3\text{m}$  (Fig. 4.7.8)

Ahora, para la directriz:

$$\vec{r} = t\mathbf{i} + (4 - \frac{t^2}{4})\mathbf{j}$$

$$d\vec{r} = (\mathbf{i} - \frac{t}{2}\mathbf{j})dt$$

$$k \times \vec{v} = x\mathbf{j} - y\mathbf{i} = t\mathbf{j} + (\frac{t^2}{4} - 4)\mathbf{i}$$

$$k \times \vec{v} \cdot d\vec{r} = (-\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4} - 4)dt =$$

$$= -(\frac{t^2}{4} + 4)dt$$

$$\text{Si } x=4, y=0, t=4 \quad ;$$

$$\text{Si } x=0, y=4, t=0 \quad .$$

En ese orden, para respetar el sentido antihorario.

$$Q = -3 \int_4^0 (\frac{t^2}{4} + 4)dt = 3 \int_0^4 (\frac{t^2}{4} + 4)dt = 64 \text{ m}^3/\text{seg}$$

### Ejemplo 4.7.2

El campo de velocidades de un fluido está dado por

$$\vec{v} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}, (|\vec{v}| \text{ en m/s, si } x, y \text{ en m}).$$

Calcular el gasto que pasa a través del rectángulo contenido en el plano  $x+y=4$ , limitado por las rectas  $x=2, y=2$  y  $x=4, y=0$ , y los planos  $z=0, z=3$ .

$$k \times \vec{v} = x\mathbf{j} + y\mathbf{i}$$

Nos damos cuenta de que  $k \times \vec{v}$  es un campo irrotacional, por lo que su integral es independiente de la traza de la sección de corte y sólo va a depender de las verticales que lo limiten. El potencial de  $k \times \vec{v}$  es  $XY + C$ ; entonces:

$$Q = 3 \left\{ [(2)(2) + C] - [(4)(0) + C] \right\} = 12 \text{ m}^3/\text{s}$$

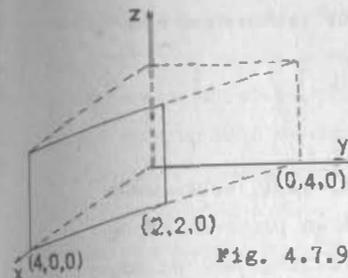


Fig. 4.7.9

En general, te será muy fácil probar que:

#### Teorema 4.7.1

Si  $\vec{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$  tal que  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ , entonces

$$\nabla \times (k \times \vec{v}) = 0$$

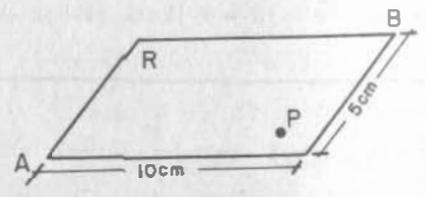
CAPITULO CINCO

Introducción

Para introducir la integral doble de una función sobre una región del plano, plantearemos y resolveremos un problema; pero antes hagamos un ligero recuerdo de lo que es una región (ver inciso 1.2.2): conjunto de puntos del plano limitado por una curva o polígono. Cuando una región se subdivide en otras menores, los bordes de estas subregiones serán también curvas o polígonos. Posteriormente trataremos con más detalle este asunto.

Problema 5.0.1

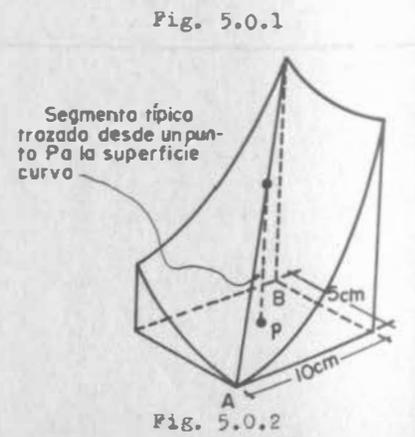
Estimemos el volumen de un sólido S, en el cual, sobre cada punto P de un rectángulo R de 10 cm de largo por 5 cm de ancho, se levanta un segmento de recta cuya longitud, en cm, es el cuadrado de la distancia que hay de P al vértice A (Fig. 5.0.1)



Los segmentos de rectas verticales cuando se consideran en el conjunto de todos los puntos de R, forman un sólido S cuya forma se muestra en la figura 5.0.2.

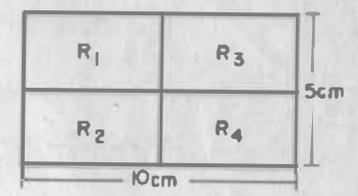
Podemos notar que el punto más alto de S está sobre el vértice B opuesto a A.

Por el teorema de Pitágoras tenemos que su altura es  $10^2 + 5^2 = 125$  cm.



Para comenzar, podemos notar que el volumen de S es, sin lugar a dudas, menor que  $10 \times 5 \times 125 = 6250 \text{ cm}^3$ , porque el sólido S puede colocarse dentro de una caja cuya base tenga un área de  $50 \text{ cm}^2$  y cuya altura sea de 125 cm. Si tratamos de obtener estimaciones más exactas, dividamos la base rectangular en regiones menores; por ejemplo dividámosla en cuatro rectángulos  $R_1, R_2, R_3, R_4$ , como vemos en la fig. 5.0.3.

Para estimar el volumen de S, calculemos el volumen de la porción de S que queda sobre cada uno de los rectángulos y sumémoslos. Para hacer lo anterior elijamos un punto en cada uno de los cuatro rectángulos, por ejemplo el punto



medio de cada uno de ellos, y sobre cada rectángulo construimos una caja cuya altura sea igual a la altura que debe tener S en el punto medio del rectángulo correspondiente (Fig. 5.0.4).

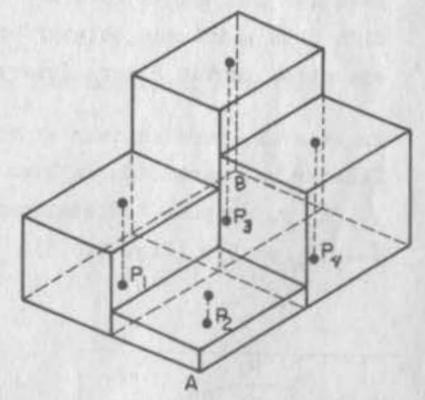
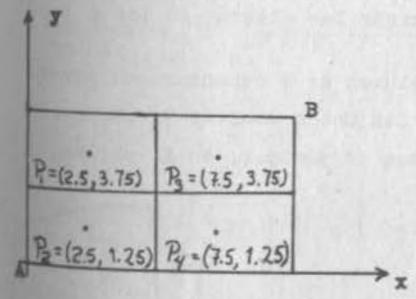


Fig. 5.0.4

Esto equivale a aproximar la función a través de una escalonada, como viste en CDI.

Las alturas de las cajas que están sobre  $R_n$  son:

$$R_1: (2.5)^2 + (3.75)^2 = 20.3125$$

$$R_2: 7.8125$$

$$R_3: 70.3125$$

$$R_4: 57.8125$$

Los volúmenes correspondientes son:

$$R_1: 2.5 \times 5 \times 20.3125 = 253.90625$$

$$R_2: 97.65625$$

$$R_3: 878.90625$$

$$R_4: 722.65625$$

$$\underline{\underline{1953.1249 \text{ cm}^3}}$$

Esto que hicimos es sólo una estimación; con la misma partición de  $R$  podríamos obtener otras estimaciones si escogiéramos otros puntos  $P$  para determinar las alturas de las cajas.

En general, para estimar el volumen de  $S$  comenzaremos por efectuar una partición de  $R$  en conjuntos menores  $R_1, R_2, \dots, R_n$  y, después, seleccionamos un punto  $P_1$  en  $R_1, P_2$  en  $R_2, \dots, P_n$  en  $R_n$ . (Fig. 5.0.5).

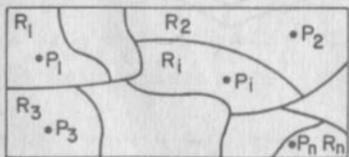


Fig. 5.0.5

Si a la altura de  $S$  sobre un punto típico  $P_i \in R_i$  la llamamos  $h(P_i)$ , y denominamos  $A_i$  al área de  $R_i$ , entonces

$$h(P_1)A_1 + h(P_2)A_2 + \dots + h(P_n)A_n \quad 5.0.0.1$$

es una estimación del volumen de  $S$  mediante la suma de los volúmenes de  $n$  sólidos, como el que se muestra en la fig.

5.0.5. Desde luego será fácil trabajar con cilindros de base rectangular (prismas), que con cilindros de base caprichosa. En lo sucesivo nos limitaremos pues a hablar de prismas, a menos que se especifique lo contrario.

La solución del problema anterior nos permite establecer lo siguiente.

### 5.1 Integral Doble en Coordenadas Cartesianas.

Es intuitivo que el volumen de  $S$  lo podremos obtener con mayor aproximación, si tomamos un mayor número de rectángulos de menor tamaño que los utilizados; y también es intuitivo que el tamaño de dichos rectángulos decrezca indefinidamente. Entonces, si el área de cada rectángulo  $A_i$  está dada por

$$A_i = \Delta x_i \Delta y_i$$

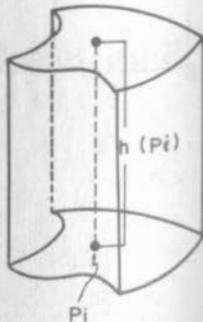
el volumen de  $S$  quedará más aproximado por

$$h(P_1)\Delta x_1 \Delta y_1 + h(P_2)\Delta x_2 \Delta y_2 + \dots + h(P_n)\Delta x_n \Delta y_n \quad 5.1.0.1$$

o sea

$$\sum_{i=1}^n h(P_i) \Delta x_i \Delta y_i \quad 5.1.0.2$$

El teorema de Weierstrass que viste en CDI, nos permite afirmar que, dentro de cada subregión habrá un punto "Q" tal que  $h(Q)$  no supere a algún otro valor  $h(P)$ , donde  $P$  pertenece a esa subregión; asimismo afirmamos que habrá un punto



"T" dentro de la misma subregión, tal que  $h(T)$  no sea superada por algún otro valor  $h(P)$ . A los valores  $h(Q)$  y  $h(T)$  les llamaremos, respectivamente, ínfimo y supremo de la subregión y los denotaremos

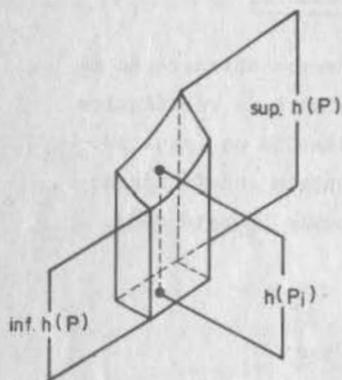
$$h(Q) = \inf h(P)$$

$$h(T) = \sup h(P)$$

como se muestra en la fig 5.1.1.

Por otro lado, el teorema de Bolzano permite afirmar que el valor de  $h(P_i)$  o sea el de la altura de cada punto típico  $P_i$  es un valor intermedio entre los anteriores (Fig.5.1.1).

$$\inf h(P) \leq h(P_i) \leq \sup h(P)$$



De esta manera, si escogemos puntos supremos de  $h(P)$  para cada prisma formado, podremos escribir

$$V_{\text{máx}} = \sum_{i=1}^n \sup h(P_i) A_i \quad 5.1.0.3$$

si escogemos puntos ínfimos tendremos

$$V_{\text{mín}} = \sum_{i=1}^n \inf h(P_i) A_i \quad 5.1.0.4$$

para una cierta partición.

Fig. 5.1.1

Como puede verse de la Fig. 5.1.1, el supremo y el ínfimo de cada subregión siempre se encontrarán separadas por una diagonal para la función que estamos estudiando. En una de esas subregiones esa diagonal será máxima con respecto a las de las otras subregiones. Llamamos " $\lambda$ " a la medida de esa

diagonal máxima.

También podemos afirmar que, para la función que estamos estudiando, la diferencia entre los valores supremo e ínfimo de la función en esa celda de diagonal máxima, es así mismo máxima.

Si hacemos otra partición en donde la diagonal máxima sea menor que en la partición anterior, la diferencia entre los supremos e ínfimos en cada subregión también será menor que en el caso inicial, y puesto que nuestra función es continua, esas diferencias decrecerán indefinidamente a medida que vayamos haciendo particiones tales, que la máxima diagonal vaya decreciendo. En el límite, el volumen máximo tenderá a confundirse con el volumen mínimo, es decir ambos tendrán un mismo límite que definiremos como volumen del sólido.

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sup h(P_i) A_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \inf h(P_i) A_i = \iint_R h(P) dA \quad 5.1.0.5$$

Puesto que  $h(P_i) = f(x, y)$

$$\text{entonces} \quad \iint_R h(P) dA = \iint_R f(x, y) dA \quad 5.1.0.6$$

Esta última expresión es la integral doble de la función  $f(x, y)$  en la región  $R$ .

Inmediatamente surgen las preguntas siguientes:

¿Existirá siempre la integral doble?

¿Cómo estableceremos la región  $R$ ?

¿Cómo evaluaremos la integral doble?

Para contestar la primera pregunta, suponte que queremos integrar la función siguiente:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \forall (x,y) / xy \text{ racional} \\ 0, & \forall (x,y) / xy \text{ irracional} \end{cases}$$

En la región  $R = \{(x,y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  mostrada en la fig. 5.1.2, en donde hemos hecho una partición cualquiera. Sigamos, ahora, el procedimiento anterior.

El supremo de cada celda vale, invariablemente, uno, en tanto que el ínfimo vale cero invariablemente. Evaluemos las sumas:

$$\sum_{i=1}^n \sup f(x,y)_{A_i} = \sum_{i=1}^n (1)_{A_i} = A$$

$$\sum_{i=1}^n \inf f(x,y)_{A_i} = 0$$

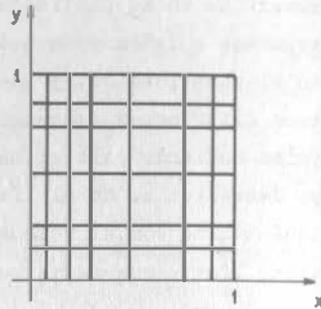


Fig. 5.1.2

Nota que estos puntos ya no están separados por la diagonal de la subregión correspondiente, sino que están contiguos (desde luego que la función no es continua).

Si ahora escogemos otra partición cuya  $\lambda$  sea menor que la de la partición anterior, las sumas van a seguir valiendo lo mismo y también eso ocurrirá si hacemos decrecer esa indefinidamente.

Ahora ¿cuál es el valor de la integral doble?, ¿el de la suma de los supremos o el de la suma de los ínfimos?, ¿o ambos?. Ninguna respuesta es racionalmente satisfactoria. Decimos entonces que no existe la integral doble de la función bajo estudio, en la región indicada.

Entonces surge otra pregunta, ¿cuándo existe la integral doble?. Vamos a responder a ello; pero antes formalicemos y generalicemos algunos de los conceptos ya vistos.

## 5.2 Redes sobre una Región

Consideremos ahora una región plana cerrada y finita  $R = \{(x,y)\}$  como se muestra en la fig. 5.2.1.

En ella el punto  $P_1$  es el punto de la región que tiene la abscisa de valor ínfimo de entre todos los puntos de la región  $R$ ; llamemos a esta abscisa  $x_0 = a$

$$a = \inf \{x / (x,y) \in R\}$$

De manera similar:

$$b = \sup \{x / (x,y) \in R\}$$

$$c = \inf \{y / (x,y) \in R\}$$

$$d = \sup \{y / (x,y) \in R\}$$

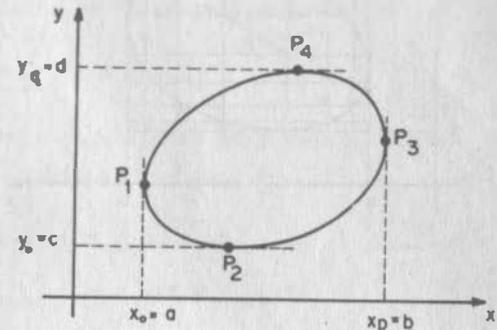


Fig. 5.2.1

$R$  queda encerrada dentro de un rectángulo comprendido entre  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$  al cual llamaremos " $Q$ " entonces podemos decir que

- $R \subset Q$
- Las fronteras de las regiones  $Q$  y  $R$  se intersectan en cuatro puntos:  $P_1, P_2, P_3, y P_4$ .

Subdividamos a los intervalos  $[a,b]$  y  $[c,d]$  en " $p$ " y " $q$ " subintervalos, respectivamente, no necesariamente iguales, es decir:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{q-1} < y_q = d$$

como podemos ver en la fig. 5.2.2.

De esta manera hemos sub-  
dividido a "Q" en pq sub-  
conjuntos y la región -  
"R" se ha subdividido en  
"n" subregiones, siendo  
 $n \leq pq$

**Definición 5.2.1**

A cada una de estas sub-  
regiones las llamamos -  
CELDA y decimos que, so-  
bre la región cerrada -  
"R", hemos establecido  
una RED de n celdas

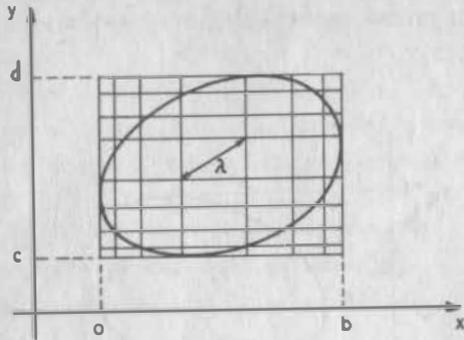


Fig. 5.2.2

Para efectos de este curso, tomaremos entonces como sinónimos las palabras RED y PARTICION.

Las redes más fáciles son las que se forman trazando rectas paralelas a los ejes coordenados, pero también pueden formarse trazando curvas sobre la región "R".

**Definición 5.2.2**

Se llama NORMA de la red a la longitud de la mayor diagonal que se puede establecer para todas las celdas comprendidas dentro de la red:

$$\lambda = \sup (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

donde "λ" es la norma.

**5.3 Existencia de la Integral Doble.**

**5.3.1) Definición Formal de la Integral Doble**

Sea la función  $f(x,y)$  definida en todos los puntos de la región

$$R = \left\{ (x,y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \right\}$$

Establezcamos una partición cualquiera en esta región, dividiendo el intervalo  $[a,b]$  mediante los puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$$

y el intervalo  $[c,d]$  mediante

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{q-1} < y_q = d$$

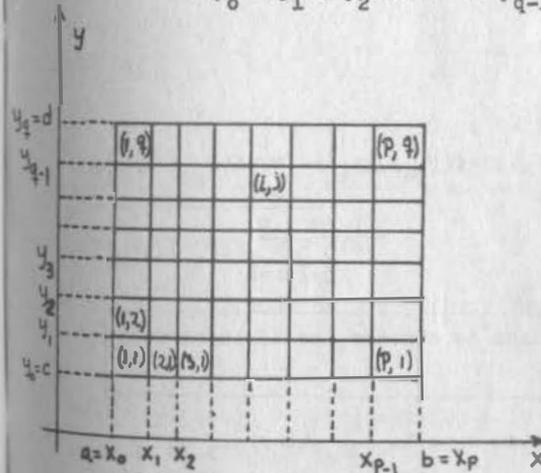


Fig. 5.3.1

El resultado es la red de la fig 5.3.1 donde convendremos en identificar a las celdas como se ve en esa misma figura.

Si seguimos el procedimiento ya explicado anteriormente, debemos escoger un punto dentro de cada celda, sin más limitación que ésta.

Llamemos  $P_{11}$  al punto que escogimos en la celda (1,1);  $P_{12}$  al que escogimos en la celda (1,2);  $P_{ij}$  al que escogimos en la celda (i,j), etc.

Valuemos ahora la función en cada uno de estos puntos, obten-



$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^p f(P_{ij}) \Delta A_{ij} = \iint_R f(x,y) \, dA$$

Pero no todas las propiedades de los límites se pueden aplicar simplemente a la integral doble; por ejemplo

$$\iint_R f(x,y)g(x,y) \, dA \neq \iint_R f(x,y) \, dA \iint_R g(x,y) \, dA$$

### 5.3.2) Integrabilidad de la Función Continua

Hemos formalizado el concepto de integral doble; pero aún no disponemos de un medio fácil para identificar a las funciones que cumplen con esa definición, esto es, a las funciones integrables.

Ya hemos hablado de la suma de supremos que se puede establecer sobre una partición. Si llamamos  $M_{ij}$  al valor supremo de la función en la celda  $(i,j)$  a esta suma la podemos representar como:

$$S_\lambda = \sum_{i,j} M_{ij} \Delta A_{ij}$$

que le llamaremos suma superior y que lleva índice porque depende de la norma de la red que estamos considerando.

Análogamente, llamaremos suma inferior a

$$s_\lambda = \sum_{i,j} m_{ij} \Delta A_{ij}$$

en donde  $m_{ij}$  es el valor ínfimo de la función en la celda  $(i,j)$

De todo lo que hemos hablado, ya habrás intuido que bastará demostrar que " $S$ " y " $s$ " convergen hacia el mismo número cuando  $\lambda \rightarrow 0$ , para estar seguros que todas las demás sumas

posibles también convergen y que por lo tanto existe la integral. Esto formalmente se expresa mediante el siguiente teorema:

#### Teorema 5.3.1

Para que la función  $f(x,y)$  sea integrable sobre la región  $R$  es necesario y suficiente que dado  $\epsilon > 0$  exista una  $\delta > 0$  tal que

$$S - s < \epsilon \quad \text{cuando } \lambda < \delta$$

La demostración la puedes encontrar en el apéndice 5.1, pero la fig. 5.3.2.a ilustra el caso de una función integrable, mientras que la fig. 5.3.2.b ilustra el caso de la función no integrable que estudiamos en el ejemplo 5.1.1.

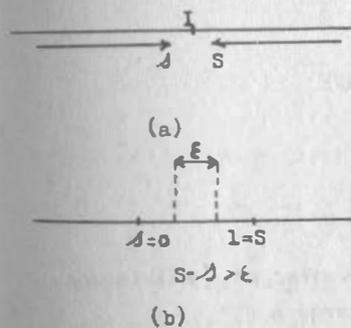


Fig. 5.3.2

Así pues, necesitamos que a medida que la norma de la red decrezca (a lo que se le llama "refinar la red") " $S$ " decrezca y " $s$ " crezca.

#### Teorema 5.3.2

$$\text{Si } \lambda_1 > \lambda_2, \quad S_{\lambda_1} \geq S_{\lambda_2}$$

$$\text{y } s_{\lambda_1} \leq s_{\lambda_2}$$

Demostración:

Supongamos la celda  $i,j$ ; cuando hacemos el refinamiento, pueden suceder dos cosas: o queda inalterada, o queda dividida en un número finito de celdas menores. (Fig. 5.3.3)

1' 2'	2' 2'	3' 2'
1' 1'	2' 1'	3' 1'

Celda 1, j

Fig. 5.3.3

Si queda inalterada, su contribución a "S" es la misma; si queda subdividida, su contribución a "S" va a ser:

$$\sum_{q,r} m'_{qr} \Delta A'_{qr}$$

Pero en cada una de las celdas menores se cumple forzosamente que

$$m'_{qr} \leq m_{ij}$$

Entonces:

$$\sum_{q,r} m'_{qr} \Delta A'_{qr} = \sum_{q,r} m_{ij} \Delta A'_{qr} = m_{ij} \sum_{q,r} \Delta A'_{qr} = m_{ij} \Delta A_{ij}$$

De donde se ve que la nueva contribución a "S" nunca será superior a la anterior, por lo que:

$$S_{\lambda_1} \geq S_{\lambda_2} \quad (\text{QED})$$

Análogamente puede demostrarse que

$$J_{\lambda_1} \leq J_{\lambda_2}$$

Por otra parte, para que "S" y "J" converjan, necesitamos que, en ningún caso, "J" vaya a superar a "S".

Teorema 5.3.3

Para cualesquier valores de  $\lambda_1, \lambda_2$ ,  $S_{\lambda_1} \geq J_{\lambda_2}$

Demostración:

Consideremos  $\lambda_3 < \lambda_1, \lambda_2$ ; entonces, de acuerdo con el teorema 5.3.2:

$$S_{\lambda_1} \geq S_{\lambda_3} \geq J_{\lambda_3} \geq J_{\lambda_2} \quad (\text{QED})$$

v.15

Ya habíamos intuido que una función continua es integrable; formalizamos con el siguiente teorema:

teorema 5.3.4

Toda función continua es integrable en la región en que es continua.

Demostración:

Sea  $f(x,y)$  continua en  $R \left\{ (x,y) / a \leq x \leq b ; c \leq y \leq d \right\}$

Hagamos una partición en esa región, con norma " $\lambda$ ", como ya se ha visto y establezcamos también las sumas superior e inferior:

$$S = \sum_{i,j} m_{ij} \Delta A_{ij}$$

$$J = \sum_{i,j} m_{ij} \Delta A_{ij}$$

Al restar miembro a miembro:

$$S - J = \sum_{i,j} (m_{ij} - m_{ij}) \Delta A_{ij} \quad 5.3.2.1$$

Hagamos  $\epsilon_1 > 0$ ; por la propiedad de las funciones continuas podemos encontrar  $\delta > 0$ , tal que:

$$m_{ij} - m_{ij} < \epsilon_1 \quad \text{cuando } \lambda < \delta \quad 5.3.2.2$$

Entonces, al tomar en cuenta (5.3.2.2) en (5.3.2.1):

$$S - J < \sum_{i,j} \epsilon_1 \Delta A_{ij} = \epsilon_1 \sum_{i,j} \Delta A_{ij} = \epsilon_1 A_R$$

cuando  $\lambda < \delta$

donde  $A_R$  es el área de la región; puesto que  $\epsilon_1 A_R > 0$  y finito, hacemos

$$\epsilon = \epsilon_1 A_R \quad v.16$$

con lo que:

$$S - A < \epsilon \quad \text{cuando } \lambda < \delta \quad (\text{QED})$$

Ahora ya casi podemos contestar a la pregunta "¿cuáles funciones son integrables?" Si vemos que una función es continua en una región, no preguntemos más: esa función es integrable sobre esa región.

Más aún, esto nos sugiere un método para integrar: si sabemos que todas las sumas de Riemann ha de converger, hagamos la que nos parezca más fácil y obtengamos su límite.

Para ilustrar esto, resolvamos el problema 5.0.1, consistente en calcular

$$\iint_R (x^2 + y^2) \, dx \, dy \quad \text{donde } R = \{(x,y) / 0 \leq x \leq 10 ; 0 \leq y \leq 5\}$$

Primero debemos establecer la red o partición. ¿Cuál será la más conveniente? Aquella que esté formada por cuadrados iguales (Fig. 5.3.4). Así, ya formamos una red de  $2n \times n$  cuadrados, cuyas dimensiones son  $h \times h$ . Naturalmente,

$$nh = 5$$

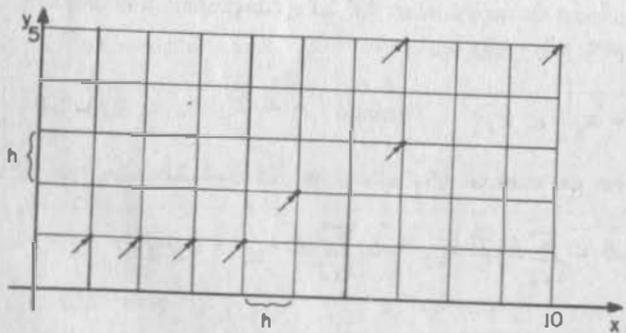


Fig. 5.3.4

Ahora debemos escoger un punto dentro de cada celda; inicialmente habíamos propuesto al punto medio por más "representativo"; pero ahora sabemos que esto no tiene importancia y que más bien debemos buscar la sencillez algebraica; entonces escojamos un vértice, por ejemplo, el superior derecho (debemos elevar al cuadrado; es más fácil manejar  $h^2$  que  $h^2/4$ ).

Ahora debemos valorar la función en cada uno de los puntos escogidos:

$$\text{En la celda } (1,1): f(h,h)=h^2+h^2=2h^2; f(h,h)\Delta A_{11}=2h^2(h^2)=2h^4$$

$$\text{En la celda } (2,1): f(2h,h)=4h^2+h^2=5h^2; f(2h,h)\Delta A_{21}=5h^2(h^2)=5h^4$$

$$\text{En la celda } (3,1): f(3h,h)=9h^2+h^2=10h^2; f(3h,h)\Delta A_{31}=10h^2(h^2)=10h^4$$

.....  
 .....  
 .....

$$\text{En la celda } (2n,1): f(2nh,h)=4n^2h^2+h^2=(4n^2+1)h^2;$$

$$f(2nh,h)\Delta A_{2n,1}=(4n^2+1)h^2(h^2)=(4n^2+1)h^4$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{2n} f(ih,h)\Delta A_{i1} = (2+5+10+\dots+4n^2+1)h^4}{= (1+4+9+\dots+4n^2+2n)h^4}$$

$$\text{Puesto que } 1+4+9+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1+4+9+\dots+4n^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}$$

y entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} f(ih,h)\Delta A_{i1} &= \left(\frac{16n^3+12n^2+2n}{6}+2n\right)h^4 = \frac{16n^3+12n^2+2n+12n}{6} h^4 = \\ &= \frac{16n^3+12n^2+14n}{6} h^4 \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\sum_{i=1}^{2n} f(ih, 2h) \Delta A_{i,2} = (1+4+9+\dots+4n^2)h^4 = (1+4+9+\dots+4n^2+8n)h^4 = \frac{16n^3+12n^2+50n}{6} h^4$$

$$\sum_{i=1}^{2n} f(ih, nh) \Delta A_{i,n} = [(1+n^2)+(4+n^2)+\dots+(4n^2+2n^2)]h^4 = (1+4+9+\dots+4n^2+2n^2)h^4 = \frac{16n^3+12n^2+(2+12n^2)n}{6} h^4$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{2n} f(ih, jh) \Delta A_{i,j} = h^4 \left[ n \frac{16n^3}{6} + n \frac{12n^2}{6} + \frac{14+50+\dots+(2+12n^2)}{6} n \right]$$

$$S = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{2n} f(ih, jh) \Delta A_{i,j} = h^4 \left\{ \frac{8n^4}{3} + 2n^3 + \frac{n}{6} [2n+12(1+4+9+\dots+n^2)] \right\}$$

$$= h^4 \left( \frac{8n^4}{3} + 2n^3 + \frac{n^2}{3} + 2n \frac{2n^3+3n^2+n}{6} \right)$$

$$= h^4 \left( \frac{8n^4}{3} + 2n^3 + \frac{n^2}{3} + \frac{2n^4}{3} + n^3 + \frac{n^2}{3} \right)$$

$$= h^4 \left( \frac{10n^4}{3} + 3n^3 + \frac{2n^2}{3} \right)$$

Puesto que  $nh=5$ :

$$S = \frac{10}{3} 625 + 375h + \frac{2}{3} 25h^2$$

Ahora, al tomar límites cuando  $h \rightarrow 0$ ; ( $\lambda = h\sqrt{2}$  también tenderá a cero)

$$\lim_{h \rightarrow 0} S = \frac{6250}{3} + 0 + 0 = \frac{6250}{3} = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$

Este procedimiento puede parecerle laborioso; en realidad es más ventajoso manejarlo numéricamente a través de una computadora, lo cual ocurre cada vez más frecuentemente en todos los campos de la Ingeniería, lo que no debes olvidar. Cuando las funciones y regiones son sencillas, como las propuestas en el presente ejemplo, podemos usar otro método más simple, que vamos a ver a continuación.

Para entenderlo, comencemos por suponer que la función a integrar estuviese sólo en términos de una de las variables, por ejemplo. "y":

$$f(x,y) = y^2, \text{ represe tada geoméricamente en la fig. 5.3.5}$$

Se trataría de calcular:

$$\iint_R y^2 dx dy \quad R \{ (x,y) / 0 \leq x \leq 10 ; 0 \leq y \leq 5 \}$$

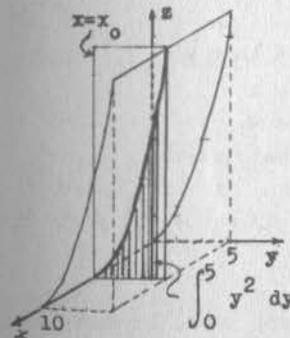


Fig. 5.3.5

Si cortamos la superficie  $z = y^2$  en cuestión con un plano  $y$  alelo al "yz", siempre obtenemos la curva

$$\begin{cases} z = y^2 \\ x = x_0 \end{cases}$$

y el área (sombreada) comprendida entre dicha curva, la intersección del plano secante con el "xy" y la recta  $\begin{cases} x=x_0 \\ y=5 \end{cases}$ , siempre

valdrá:

$$A = \int_0^5 y^2 dy = \frac{125}{5}$$

independientemente del valor de  $x_0$ ; por lo mismo, la integral pedida tiene un valor de

$$\iint_R y^2 dx dy = \int_0^{10} \frac{125}{3} dx = \frac{1250}{3}$$

Ahora regresemos a nuestra función propuesta inicialmente:

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

La figura 5.3.6 es la misma que la 5.0.1, vista desde otro punto de vista. Ahora, si cortamos con el plano  $x=3$  obtendremos la curva

$$\begin{cases} z = 9 + y^2 \\ x = 3 \end{cases}$$

y el área bajo esta curva vale

$$\int_0^5 (9+y^2) dy = 45 + 125/3$$

En cambio, si cortamos con el plano  $x=4$ , la curva es:

$$\begin{cases} z = 16 + y^2 \\ x = 4 \end{cases}$$

y el área bajo ella:

$$\int_0^5 (16+y^2) dy = 80 + \frac{125}{3} \neq 45 + \frac{125}{3}$$

En este caso, pues, la curva de intersección depende del plano de corte, así como el área bajo ella; en otras palabras, es función de "x", que denotaremos:

$$F(x) = \int_0^5 (x^2 + y^2) dy = x^2 [y]_0^5 + \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^5$$

$$F(x) = 5x^2 + \frac{125}{3} \tag{5.3.2.a}$$

Ahora establezcamos una red en nuestra región, que podría

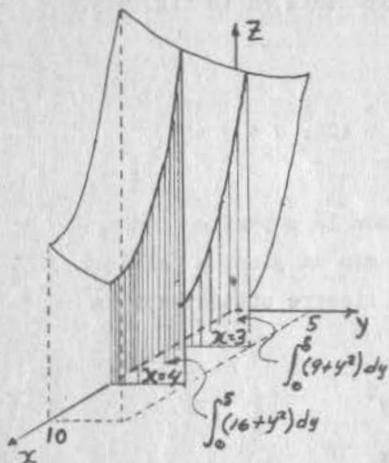


Fig. 5.3.6

ser la figura 5.3.4 u otra cualquiera; para fijar ideas, refirámonos a ésa. Cortemos nuestra superficie con un plano  $x=t_1$ , donde  $0 \leq t_1 \leq h$ . El área bajo la curva de intersección será, de acuerdo con (5.3.2.a):

$$F(t_1) = 5t_1^2 + \frac{125}{3}$$

Pero si recordamos las propiedades de la integral ordinaria, que estudiamos en CDI, podremos escribir que:

$$F(t_1) = \int_0^5 (t_1^2 + y^2) dy = \int_0^h (t_1^2 + y^2) dy + \int_h^{2h} (t_1^2 + y^2) dy + \dots + \int_{(n-1)h}^{nh} (t_1^2 + y^2) dy \tag{5.3.2.b}$$

Si adoptamos nuestra notación ya establecida, de llamar  $m_{ij}$  al ínfimo valor de la función en la celda  $(i,j)$  y  $M_{ij}$  al valor supremo de la función en la misma celda, tendremos que, para la celda  $(1,1)$ :

$$m_{11} = 0 \leq t_1^2 + y^2 \leq M_{11} = 2h^2$$

Entonces, por otra propiedad de la integral ordinaria:

$$m_{11}h \leq \int_0^h (t_1^2 + y^2) dy \leq M_{11}h$$

Análogamente, en la celda  $(1,2)$ :  $m_{12}h \leq \int_h^{2h} (t_1^2 + y^2) dy \leq M_{12}h$

y así sucesivamente

$$m_{1n}h \leq \int_{(n-1)h}^{nh} (t_1^2 + y^2) dy \leq M_{1n}h$$

Por lo que, sumando miembro a miembro y teniendo en cuenta a (5.3.2.b)

$$\sum_{j=1}^n m_{1j}h \leq F(t_1) \leq \sum_{j=1}^n M_{1j}h \tag{5.3.2.c}$$

La expresión (5.3.2.c) puede ser multiplicada por "h", la que, por ser constante, puede entrar y salir libremente del signo de suma:

$$\sum_{j=1}^n m_{1j} h^2 \leq F(t_1)h \leq \sum_{j=1}^n M_{1j} h^2$$

Ahora escojamos un plano de corte  $x=t_2$ , de manera que  $h \leq t_2 \leq 2h$ ; si procedemos análogamente que en el caso anterior:

$$\sum_{j=1}^n m_{2j} h^2 \leq F(t_2)h \leq \sum_{j=1}^n M_{2j} h^2$$

y podemos seguir así sucesivamente

.....  
.....  
.....

$$\sum_{j=1}^n m_{2n,j} h^2 \leq F(t_{2n})h \leq \sum_{j=1}^n M_{2n,j} h^2$$

Y sumar miembro a miembro:

$$\sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^n m_{ij} h^2 \leq \sum_{i=1}^{2n} F(t_i)h \leq \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^n M_{ij} h^2$$

Expresión en la cual tenemos tres sumas de Riemann que ya ha bras identificado: en el primer miembro tenemos la que hemos llamado suma inferior "I"; en el tercer miembro, la que llama mos suma superior "S" y en el segundo miembro, una suma en una sola variable, como las que establecías en CDI. ¿Qué pasa si la norma de la red tiende a cero ( $h \rightarrow 0$ )? Como la función es continua, sabemos que la integral doble existe y por lo mismo, "I" y "S" deben converger al mismo número, que es la integral doble, en cuanto al pobre segundo miembro, que quedó hecho "sandwich" entre las otras sumas, no le va a

quedar más remedio que converger hacia el mismo número; este número, tú lo sabes bien, es la integral ordinaria de  $F(x)$ . Así, teniendo en cuenta (5.3.2.a), podemos escribir:

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{10} F(x) dx = \int_0^{10} (5x^2 + \frac{125}{3}) dx \\ &= \frac{5}{3} [x^3]_0^{10} + \frac{125}{3} [x]_0^{10} = \frac{5000}{3} + \frac{1250}{3} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \frac{6250}{3} \text{ cm}^3}}$$

### 5.3.3 Otras Funciones Integrables

Podríamos darnos por satisfechos con saber que toda función continua es integrable, pero para contestar completamente la pregunta: "¿cuáles funciones son integrables?" debemos aclarar si sólo las funciones continuas lo son. Ya vimos en el ejemplo 5.1.1 un caso de función discontinua no integrable, pero por otra parte, recordamos de CDI que algunas funciones discontinuas (acotadas y con un número finito de puntos de discontinuidad) admiten integral ordinaria. ¿Habrán algunas funciones discontinuas de dos variables, que admitan integral doble?

Para contestar esta pregunta, debemos introducir un concepto nuevo, pero muy sencillo. Veamos: ¿Podríamos englobar a un punto dentro de un rectángulo de  $1 \text{ mm}^2$  de área? Desde luego que sí y desde luego que también podemos englobar dos puntos en sendos rectángulos cuyas áreas sumen  $1 \text{ mm}^2$ . ¿Podríamos englobar a un millón de puntos aislados, dentro de un número de rectángulos cuyas áreas sumasen  $1 \text{ micra cuadrada}$ ?

Por principio de cuentas, podemos contestar que el número de

rectángulos si sería infinito, porque el máximo número que necesitamos, dependiendo de la separación de los puntos sería un millón y este número, aunque es muy grande, es finito. Ahora veamos lo del área:

Si supondemos que todos los rectángulos son iguales, el área de uno de ellos tendría que ser

$$\frac{1\mu^2}{10^6} = 10^{-6}\mu^2 = 1\text{m}\mu^2$$

Este rectángulo es muy pequeño; tanto, que sólo a través del más potente microscopio podría observarse; pero un punto cabe dentro de él, porque un punto no ocupa área. En resumen: sí podemos englobar a un millón de puntos aislados dentro de un número finito de rectángulos cuyas áreas suman un número tan pequeño como queramos.

Ahora sea el conjunto de puntos de la región limitada por una circunferencia de 1 cm de radio. ¿Podríamos englobarlos en un número finito de rectángulos cuyas áreas sumasen.}  $\text{cm}^2$ ?



Fig. 5.3.7

Un solo rectángulo no basta, porque tendría  $4\text{ cm}^2$ ; debemos subdividir, a manera de minimizar el área no sombreada (Fig. 5.3.7); pero por mucho que los perímetros de los rectángulos se aproximen a la circunferencia, sus áreas no podrán sumar menos  $\pi\text{ cm}^2$ .

De lo anterior deducimos que hay dos tipos de conjunto de puntos.: aquellos cuyos elementos pueden englobarse en un número finito de rectángulos, cuyas áreas sumen un número arbitra-

riamente pequeño y los que se definen por exclusión. Formalicemos:

## Definición 5.3.4

Se dice que un conjunto de puntos tiene contenido de Jordan nulo (o simplemente, que es un conjunto nulo) si dado  $\epsilon > 0$ , todos los puntos del conjunto pueden ser englobados en un número finito de rectángulos cuyas áreas sumen una cantidad menor que " $\epsilon$ ".

Es conveniente hacer hincapié en que no es lo mismo un conjunto vacío que un conjunto nulo; no los vayas a confundir.

Ejemplo 5.3.1) Demostrar que el conjunto de puntos de un segmento rectilíneo de longitud " $L$ ", es nulo.

Hagamos " $n$ " cuadrados iguales como se ve en la figura 5.3.8. De esta manera hemos englobado todos los puntos. La condición exige que:

$$nh^2 < \epsilon$$

pero como

$$h = \frac{L}{n} \quad , \quad \frac{nL^2}{n^2} < \epsilon$$

$$\frac{L^2}{n} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{L^2}{\epsilon}$$

Como " $L$ ", " $\epsilon$ " son números finitos, " $n$ " también será finito (QED)

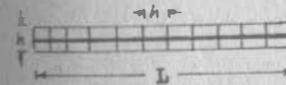


Fig. 5.3.8

Ejemplo 5.3.2) Determinar el número y dimensión de los rectángulos requeridos para englobar los puntos de un segmento rectilíneo de 10 Km, si las áreas no deben sumar más de  $1 \mu^2$ .

Solución :

Recojamos los cuadrados iguales; entonces

$$n > \frac{l^2}{\epsilon} = \frac{(10 \times 10^3)^2 \text{ m}^2}{(10^{-6})^2 \text{ m}^2} = 10^{20}$$

Tenemos que hacer más de 100 millones de billones de cuadrados, de dimensión:

$$n < \frac{10 \times 10^3 \text{ m}}{10^{20}} = 10^{-16} \text{ m} = 10^{-6} \text{ \AA}$$

El lado de cada cuadrado tendría que ser menor que una milonésima de unidad Armstrong.

#### Teorema 5.3.5

El conjunto de puntos de toda curva rectificable, es nulo

Demostración:

Es muy semejante a la que acabamos de hacer; pero no podemos colocar los rectángulos como en la recta, porque los cambios de dirección de la curva no garantizarían que englobáramos a todos los puntos; lo que podemos hacer es traslaparlos, como se ve en la figura 5.3.9, para garantizar que todo punto de la curva quede dentro de, cuando menos, un rectángulo. El área sumada de todos los rectángulos (cuadrados en realidad) es de

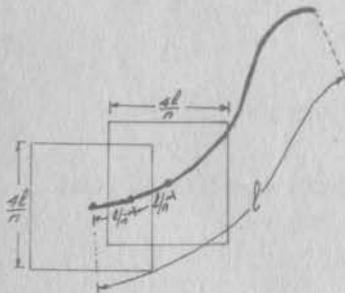


Fig. 5.3.9

$$n \left( \frac{\Delta l}{n} \right)^2$$

y esta cantidad deberá conservarse menor que un positivo pre-fijado de antemano:

$$n \frac{16 \Delta l^2}{n^2} = \frac{16 \Delta l^2}{n} < \epsilon \quad ; \Rightarrow n > \frac{16 \Delta l^2}{\epsilon}$$

Como el segundo miembro es finito, "n" también será finito (QED)

#### Teorema 5.3.6

Si una función es acotada sobre una región y el conjunto de puntos en que es discontinua, tiene contenido nulo, la función es integrable sobre esa región.

La demostración de este teorema la puedes ver en el Apéndice 5.2; pero vamos a ver en seguida un corolario que surge de inmediato.

#### Corolario del teorema 5.3.6

Si una función es acotada sobre una región "R" y el conjunto de sus puntos de discontinuidad se agrupan en un número finito de curvas rectificables, la función es integrable sobre "R".

Ahora veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 5.3.3) Decir si la función definida por

$$F(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq y \\ 1 & \text{si } x > y \end{cases}$$

es integrable sobre la región  $R \{ (x,y) / 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 \}$

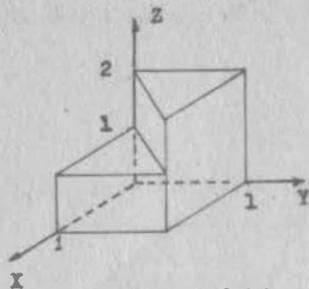


Fig. 5.3.10

Solución:

Esta función es discontinua sobre la región (su representación geométrica la puedes observar en la figura 5.3.10); pero sus puntos de discontinuidad se agrupan en un segmento de la recta  $x=y$ ; ya demostramos que este conjunto de puntos tiene contenido nulo. Luego, la función es integrable.

Ejemplo 5.3.4) Decir si la función  $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$  es integrable sobre la región  $R = \{(x,y) / -2 \leq x \leq 2 ; -2 \leq y \leq 2\}$

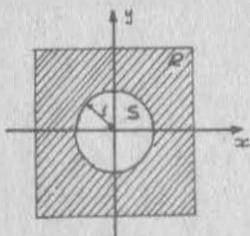


Fig. 5.3.11

Solución:

Ahora esta función es discontinua (no existe) en toda la región

$$T = R - S$$

donde  $S = \{(x,y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$

(Ver fig. 5.3.11)

El conjunto de puntos de "T" no tiene contenido nulo. La función no es integrable sobre "R" (¿Cómo formarías la suma de Riemann con las celdas que cayeron dentro de "T"?)

Cabe aclarar, sin embargo, que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \forall (x,y) \in T \\ \sqrt{1-x^2-y^2} & \forall (x,y) \in S \end{cases}$$

sí es integrable en "R", porque sus puntos de discontinuidad

se agrupan ahora en la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  y ésta es una curva rectificable.

#### 5.4) Propiedades de la Integral Doble

Vamos a considerar nuevamente el ejemplo 5.0.1 y recordemos las dimensiones de la región: 10 cm x 5 cm.

Ahora supongamos que volvemos a medir las alturas y obtenemos:

Si  $x=1$  cm,  $y=1$  cm,  $z=2$  pulg

Si  $x=2$  cm,  $y=1$  cm,  $z=5$  Pulg

etc.

Si  $x=10$  cm,  $y=5$  cm,  $z=125$  pulg

En suma, que la ley de correspondencia que nos habían dado inicialmente, parece correcta, siempre que consideremos las alturas en pulgadas; por lo mismo, nuestros cálculos son correctos; pero el volumen que nos dio lo tenemos que expresar en unidades tan raras como pulg-cm<sup>2</sup>

$$V = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \frac{6250}{3} \text{ pulg-cm}^2$$

Naturalmente, estas unidades no nos permiten manejar adecuadamente al resultado, por lo que demandamos que éste quede expresado en cm<sup>3</sup>; para ello bastará expresar "z" en cm, por lo que la nueva ley de correspondencia será:

$$z = 2.54(x^2 + y^2) = k f(x,y)$$

y ahora deberemos calcular:

$$V_1 = \iint_R z dx dy = \iint_R 2.54(x^2 + y^2) dx dy = \iint_R k f(x,y) dx dy$$

¿Debemos realizar nuevamente todos nuestros cálculos? Veamos: ya encontramos un número  $V = 6250/3$ , tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(P_{ij}) \Delta A_{ij} - V \right| < \xi \quad \text{cuando} \quad \lambda < \delta$$

y ahora se nos está pidiendo un número  $V_1$  tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q k f(P_{ij}) \Delta A_{ij} - V_1 \right| < \xi \quad \text{cuando} \quad \lambda < \delta$$

En esta última expresión "k" puede salir fuera del signo de suma, por la ley distributiva de la multiplicación:

$$\left| k \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(P_{ij}) \Delta A_{ij} - V_1 \right| < \xi \quad \text{cuando} \quad \lambda < \delta$$

Más aún: por la misma razón, podemos poner a "k" como factor común de toda la expresión dentro del signo de valor absoluto:

$$\left| k \left[ \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(P_{ij}) \Delta A_{ij} - \frac{V_1}{k} \right] \right| < \xi \quad \text{cuando} \quad \lambda < \delta$$

y además podemos sacarlo del signo de valor absoluto:

$$|k| \left| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(P_{ij}) \Delta A_{ij} - \frac{V_1}{k} \right| < \xi \quad \text{cuando} \quad \lambda < \delta$$

y al dividir toda la expresión entre  $|k| > 0$ : (\*)

$$\left| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(P_{ij}) \Delta A_{ij} - \frac{V_1}{k} \right| < \frac{\xi}{|k|} \quad \text{cuando} \quad \lambda < \delta$$

(\*) En este caso particular,  $k=2.54 > 0$ , por lo que podríamos prescindir del signo de valor absoluto. Lo conservamos para no perder generalidad.

toda vez que  $\left[ \frac{\xi}{|k|} \right] > 0$ , la expresión anterior nos está diciendo que

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \frac{V_1}{k} = v$$

O sea que:

$$V_1 = kV = 2.54 \frac{6250}{3} = 5291.7 \text{ cm}^3$$

así pues, no hubo necesidad de volver a integrar, sino que bastó multiplicar el resultado de la integración ya hecha, por el factor constante. En todo el desarrollo no hemos perdido generalidad, por lo que podemos enunciar la siguiente propiedad para todas las integrales dobles:

$$\iint_R k f(x,y) dx dy = k \iint_R f(x,y) dx dy \quad 5.4.0.1$$

Nos han encomendado construir una tienda de campaña para que sirva de dormitorio a un campamento de excursionistas. Decidimos una como la mostrada en la figura 5.4.1, con trazo continuo. Conocemos la ecuación del techo:  $z=f(x,y)$ , por lo que calculamos el volumen de aire contenido:

$$V_1 = \iint_R f(x,y) dx dy$$

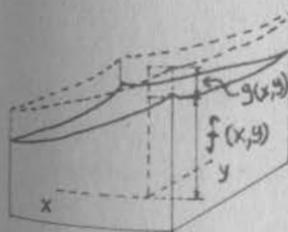


Fig. 5.4.1

Entonces nos damos cuenta de que, de acuerdo con el presunto número de excursionistas, hay peligro de que se vicié el aire.

Como de momento no disponemos de más área, decidimos aumentar la altura de los puntales que van a sostener

tener la lona superior, según una cierta ley:  $\Delta z = g(x, y)$ , quedando la tienda como se muestra con línea discontinua en la figura 5.4.1. Ahora el aire contenido va a ser:

$$V_2 = \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dx dy \quad 5.4.0.2$$

¿Nos servirá el primer resultado obtenido, como base para el nuevo volumen?

Inicialmente encontramos un número  $V_1$  tal que

$$\left| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(P_{ij}) \Delta A_{ij} - V_1 \right| < \epsilon_1 \quad \text{cuando } \lambda < \delta_1 \quad 5.4.0.3$$

Definamos  $V_3$  como

$$V_3 = \iint_R g(x, y) dx dy \quad 5.4.0.4$$

o, lo que es lo mismo :

$$\left| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q g(P_{ij}) \Delta A_{ij} - V_3 \right| < \epsilon_2 \quad \text{cuando } \lambda < \delta_2 \quad 5.4.0.5$$

Si definimos  $\delta < \delta_1, \delta_2$ , 5.4.0.3 y 5.4.0.5 se cumplirán simultáneamente y podremos sumarlas miembro a miembro:

$$\left| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(P_{ij}) \Delta A_{ij} - V_1 \right| + \left| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q g(P_{ij}) \Delta A_{ij} - V_3 \right| < \epsilon_1 + \epsilon_2$$

cuando  $\lambda < \delta$

Puesto que el valor absoluto de una suma nunca es mayor que la suma de valores absolutos, reforzamos la última desigualdad si escribimos:

$$\left| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(P_{ij}) \Delta A_{ij} - V_1 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q g(P_{ij}) \Delta A_{ij} - V_3 \right| < \epsilon_1 + \epsilon_2$$

cuando  $\lambda < \delta$

Por la ley asociativa de la suma:

$$\left| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q [f(P_{ij}) + g(P_{ij})] \Delta A_{ij} - (V_1 + V_3) \right| < \epsilon_1 + \epsilon_2$$

cuando  $\lambda < \delta$

Puesto que  $\epsilon_1 + \epsilon_2 > 0$ , la última expresión nos indica que

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = V_1 + V_3$$

o bien, de acuerdo con 5.4.0.2 :

$$V_2 = V_1 + V_3$$

Por lo que bastará con calcular la integral 5.4.0.4 y sumarle al resultado ya conocido, para obtener el volumen que se desea calcular. He aquí otra propiedad general de la integral doble, que expresamos diciendo:

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy + \iint_R g(x, y) dx dy \quad 5.4.0.6$$

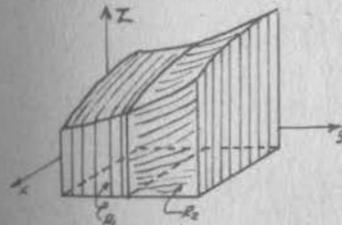


Fig. 5.4.2

Una propiedad muy importante de la integral doble es la que se ilustra en la figura 5.4.2 y que es evidente cuando se ve en su interpretación geométrica:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R_1} f(x, y) dx dy + \iint_{R_2} f(x, y) dx dy \quad 5.4.0.7$$

$R = R_1 \cup R_2$  ;  $R_1 \cap R_2$  es nulo

Independientemente de su interpretación geométrica, desde el punto de vista de la Matemática pura, esta propiedad requiere demostración. La podrás ver en el Apéndice 5.3.

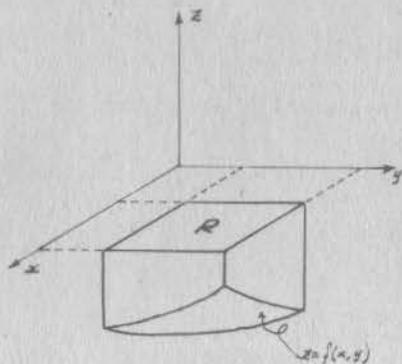


Fig. 5.4.3

Un volumen normalmente se considera positivo; sin embargo, si la superficie  $z=f(x,y)$  (Fig. 5.4.3) muestra todos sus puntos por abajo de los de la región en el plano  $xy$ , la integral doble saldrá negativa.

En efecto, supongamos que saliera positiva; en tal caso existirá una cierta  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(P_{ij}) \Delta A_{ij} - V \right| < \nu \quad \text{cuando } \lambda < \delta$$

o, lo que es lo mismo:

$$-V < \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(P_{ij}) \Delta A_{ij} - V < \nu \quad \text{cuando } \lambda < \delta$$

Si trabajamos con la primera parte de la desigualdad:

$$0 < \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f(P_{ij}) \Delta A_{ij} \quad \text{cuando } \lambda < \delta$$

Esta última expresión es un absurdo pues una suma de términos negativos no podrá ser positiva bajo circunstancia alguna. Y hemos demostrado una propiedad general más de la integral doble:

Si  $f(x,y) \leq 0$  en  $R$ :

$$\iint_R f(x,y) \, dx \, dy \leq 0$$

5.4.0.8

De la cual obtenemos naturalmente la propiedad inversa:

Si  $f(x,y) \geq 0$  en  $R$ :

$$\iint_R f(x,y) \, dx \, dy \geq 0 \quad 5.4.0.9$$

Y un corolario muy importante:

Si  $f(x,y) \geq g(x,y)$  en  $R$ :

$$\iint_R f(x,y) \, dx \, dy \geq \iint_R g(x,y) \, dx \, dy \quad 5.4.0.10$$

Así pues, deberemos tener cuidado cuando tratemos un caso como el mostrado en la figura 5.4.4. Si nos interesa el volumen

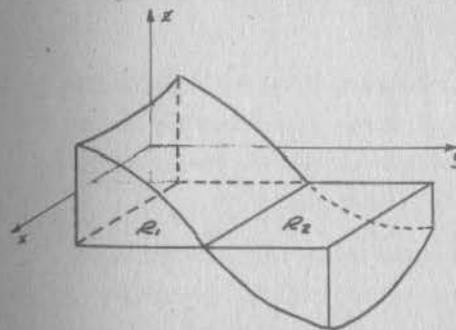


Fig. 5.4.4

como un todo, debemos integrar por separado en  $R_1$  y  $R_2$  y luego sumar los valores absolutos; pero si nos interesa la diferencia de volúmenes, con su signo, entonces integramos sobre

$$R = R_1 \cup R_2$$

Este último será el caso si, por ejemplo, debiéramos excavar bajo  $R_2$  para rellenar sobre  $R_1$ . Si la integral es positiva, la excavación es insuficiente para el relleno y lo que nos falta deberemos traerlo de otro sitio (préstamo). Si la integral es negativa, entonces hay sobrante en la excavación y tal deberá ser removido para que no estorbe (acarreo).

Como propiedad importante, anotaremos que las variables de integración son mudas; esto es, que no importa cómo llamemos

a tales variables, siempre y cuando la región se defina congruentemente. Así si:

$$R \left\{ (x,y)/a \leq x \leq b; c \leq y \leq d \right\} = R_1 \left\{ (u,v)/a \leq u \leq b; c \leq v \leq d \right\}$$

$$\int\int_R f(x,y) dx dy = \int\int_{R_1} f(u,v) du dv \quad 5.4.0.11$$

Finalmente, anotaremos una propiedad no muy utilizada:

$$\left| \int\int_R f(x,y) dx dy \right| \leq \int\int_R |f(x,y)| dx dy \quad 5.4.0.12$$

5.5) La Integral Doble como Integral Reiterada

5.5.1) En Regiones rectangulares

En (5.3.2) desarrollamos un método para integrar una función particular sobre una región en términos de integrales ordinarias. Trataremos ahora de generalizar el método para toda región integrable sobre una región rectangular.

Partamos pues de una función cualquiera  $f(x,y)$ , integrable sobre la región  $R \left\{ (x,y)/a \leq x \leq b; c \leq y \leq d \right\}$ , sobre la cual estableceremos una red cualquiera de norma " $\lambda$ ". (Ver Figura 5.5.1).

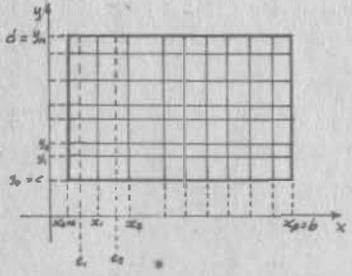


Fig. 5.5.1

Un razonamiento análogo al que hicimos en la ocasión mencionada, nos permite definir

$$F(x) = \int_c^d f(x,y) dy \quad 5.5.1.1$$

Podemos estar seguros de la existencia de esta integral,

porque estamos diciendo que  $f(x,y)$  es integrable sobre " $R$ ", lo cual implica que, o bien es continua sobre toda la región o sus puntos de discontinuidad son aislados y finitos, o se agrupan en una curva rectificable. Esto conduce a afirmar que  $f(x,y)$ , sobre la recta  $x=x$ , o es continua, o sus puntos de discontinuidad son aislados y finitos.

Entonces, dado  $x_0 \leq t_1 \leq x_1$ :

$$F(t_1) = \int_c^d f(t_1,y) dy \quad 5.5.1.2$$

que podemos escribir:

$$F(t_1) = \int_{y_0}^{y_1} f(t_1,y) dy + \int_{y_1}^{y_2} f(t_1,y) dy + \dots + \int_{y_{q-1}}^{y_q} f(t_1,y) dy$$

Sabemos que dentro de la celda (1,1) hay un supremo  $M_{11}$  y un infimo,  $m_{11}$ , de los cuales podemos afirmar que

$$m_{11} \leq f(t_1,y) \leq M_{11} \text{ en el intervalo } [y_0, y_1]$$

Entonces, una propiedad de la integral ordinaria permite escribir

$$m_{11} \Delta y_1 \leq \int_{y_0}^{y_1} f(t_1,y) dy \leq M_{11} \Delta y_1$$

y razonamientos análogos nos permiten decir que:

$$m_{11} \Delta y_1 \leq \int_{y_0}^{y_1} f(t_1,y) dy \leq M_{11} \Delta y_1$$

$$m_{12} \Delta y_2 \leq \int_{y_1}^{y_2} f(t_1,y) dy \leq M_{12} \Delta y_2$$

.....

$$\dots\dots\dots$$

$$m_{1q} \Delta y_q \leq \int_{y_{q-1}}^{y_q} f(t_1, y) dy \leq M_{1q} \Delta y_q$$

$$\frac{\sum_{i=1}^q m_{1j} \Delta y_j}{\sum_{j=1}^q m_{1j} \Delta y_j} \leq \int_{y_0}^{y_q} f(t_1, y) dy \leq \frac{\sum_{j=1}^q M_{1j} \Delta y_j}{\sum_{j=1}^q M_{1j} \Delta y_j}$$

o bien, de acuerdo con 5.5.1.2 :

$$\sum_{j=1}^q m_{1j} \Delta y_j \leq F(t_1) \leq \sum_{j=1}^q M_{1j} \Delta y_j$$

Podemos multiplicar toda esta desigualdad por  $\Delta x_1$ ; como esta cantidad es constante con "j", puede entrar y salir libremente del signo de suma; así:

$$\sum_{j=1}^q m_{1j} \Delta x_1 \Delta y_j \leq F(t_1) \Delta x_1 \leq \sum_{j=1}^q M_{1j} \Delta x_1 \Delta y_j$$

(Al escoger ahora  $x_1 \leq t_2 \leq x_2$  y reiterar los razonamientos anteriores):

$$\sum_{j=1}^q m_{2j} \Delta x_2 \Delta y_j \leq F(t_2) \Delta x_2 \leq \sum_{j=1}^q M_{2j} \Delta x_2 \Delta y_j$$

Y así sucesivamente

$$\sum_{j=1}^q m_{pj} \Delta x_p \Delta y_j \leq F(t_p) \Delta x_p \leq \sum_{j=1}^q M_{pj} \Delta x_p \Delta y_j$$

$$\frac{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j}{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j} = \frac{\sum_{i=1}^p F(t_i) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j}$$

Con lo que nos encontramos con sumas muy semejantes a las que nos resultaron en el inciso (5.3.2): a la izquierda de

la suma de supremos, ambas convergiendo hacia la integral doble, puesto que la función es integrable. En medio, una expresión que forzosamente convergerá a donde convergen los extremos; pero que a su vez convergerá hacia

$$\int_a^b F(x) dx$$

como recordarás de CDI. Entonces podemos escribir:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b F(x) dx \tag{5.5.1.3}$$

y al sustituir 5.5.1.1 en 5.5.1.3 :

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y) dy \right\} dx \tag{5.5.1.4}$$

Esta expresión nos permite calcular la integral doble a través de integrales ordinarias. Al segundo miembro de 5.5.1.4 se le llama "Integral Reiterada". Los corchetes (llaves) indican el orden en que deben realizarse las integrales; si recuerdas que siempre debe empezarse con la integral de "adentro", puedes escribir simplemente

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx \tag{5.5.1.4'}$$

Sin embargo, si hubiéramos invertido el orden de los razonamientos que nos llevaron a la última expresión, hubiéramos empezado por definir:

$$F(y) = \int_a^b f(x,y) dx$$

y finalmente habríamos llegado a

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y) dx \right\} dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy \tag{5.5.1.5}$$

por lo que el orden en que se efectúe la integral reiterada es irrelevante cuando se trata de regiones rectangulares.

Cabe hacer hincapié en que la existencia de la integral doble garantiza la existencia de la integral reiterada. La recíproca no es necesariamente cierta.

### 5.5.2) En regiones cualesquiera

Propongámonos el siguiente problema: sea la región

$$R \left\{ (x,y) / 0 \leq x \leq 10 \text{ cm}; 0 \leq y \leq 5 \text{ cm} \right\}$$

donde queremos integrar la función

$$F(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \forall (x,y) / x \geq y \\ 0 & \forall (x,y) / x < 2y \end{cases} \text{ en cm. si } (x,y)$$

Lo primero que podemos decir es que la función propuesta es discontinua en la región; en seguida nos damos cuenta de que sus puntos de discontinuidad se agrupan en la recta  $x-2y=0$ ; dentro de la región que nos interesa, cabe un segmento de esta recta, perfectamente delimitado entre los puntos  $(0,0)$  y  $(10,5)$ , de longitud finita,

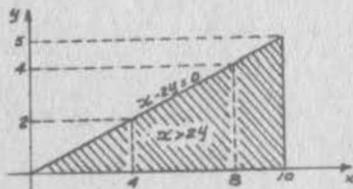


Fig. 5.5.2

por lo que el conjunto de puntos de discontinuidad tiene contenido nulo. Finalmente concluimos que  $F(x,y)$  es integrable sobre "R".

Tratemos de calcular esta integral, por el método que acabamos de desarrollar.

$$\iint_R F(x,y) \, dx \, dy = \int_0^{10} \left\{ \int_0^5 F(x,y) \, dy \right\} dx$$

Calculemos primero la integral de "adentro": al intentarlo, nos damos cuenta de que siempre va a presentar un punto de discontinuidad; más aún, que la ubicación de este punto es

función de "x". Por ejemplo, planteemos la integral para  $x=4$ :

$$\int_0^5 F(4,y) \, dy = \int_0^2 (16+y^2) \, dy + \int_2^5 0 \, dy$$

y si la planteamos para  $x=8$ :

$$\int_0^5 F(8,y) \, dy = \int_0^4 (64+y^2) \, dy + \int_4^5 0 \, dy$$

Ahora tenemos integrales con límites variables; las de la derecha no nos preocupan, porque siempre van a ser nulas; pero las precedentes siempre van a tener un valor que dependerá de "x", por lo que debemos expresarlas en términos de esta variable. La solución está en expresar, no sólo el integrando, sino también los límites, como funciones de "x".

$$\begin{aligned} \int_0^5 F(x,y) \, dy &= \int_0^{x/2} (x^2 + y^2) \, dy + \int_{x/2}^5 0 \, dy \\ &= \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{x/2} + 0 = \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{24} = \frac{13}{24} x^3 \end{aligned}$$

Lo que sigue ya no ofrece dificultad: para obtener el resultado final, integramos esta expresión entre límites constantes

$$\begin{aligned} \iint_R F(x,y) \, dx \, dy &= \int_0^{10} \frac{13}{24} x^3 \, dx = \frac{13}{96} \left[ x^4 \right]_0^{10} = \frac{13 \cdot 10^4}{96} \\ &= \underline{\underline{1354 \text{ cm}^3}} \end{aligned}$$

Hemos resuelto el problema que nos proponíamos; en busca de una interpretación geométrica del mismo, representamos la

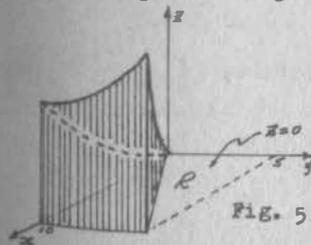


Fig. 5.5.3

función como se ve en la figura 5.5.3 y entonces se nos ocurre decir que hemos calculado el volumen de la parte sombreada. Como los volúmenes se calculan por in-

tegral doble, se nos ocurre decir, además, que hemos calculado la integral doble de

$$z = x^2 + y^2$$

sobre la región  $R_1 \{ (x,y) / 0 \leq x \leq 10; 0 \leq y \leq 5; x > 2y \}$   
5.5.2.a

Y en efecto, así lo vamos a considerar, pero como no tenemos un respaldo rigurosamente lógico, sólo intuitivo, deberemos definir:

#### Definición 5.5.1

Sea la función  $f(x,y)$  y sea la región

$$R \{ (x,y) / a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$

(Fig. 5.5.4)

Se dice que "f" es integrable sobre "R" si existe

$$\int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right\} dx$$

y al resultado de esa reiterada integración, se le llama

$$\iint_R f(x,y) dx dy$$

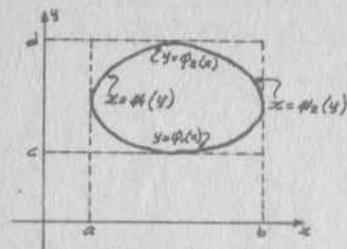


Fig. 5.5.4

#### Definición 5.5.2

Sea la función  $f(x,y)$  y sea la región

$$R \{ (x,y) / c \leq y \leq d; \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$$

Fig. 5.5.4

Se dice que "f" es integrable sobre "R" si existe

$$\int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx \right\} dy$$

y al resultado de esa reiterada integración se le llama

$$\iint_R f(x,y) dx dy$$

Si  $R \{ (x,y) / a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \} = \{ (x,y) / c \leq y \leq d; \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$   
5.5.2.1

entonces

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx \right\} dy$$

5.5.2.2

Hemos contestado totalmente a la pregunta: ¿Cómo evaluaremos la integral doble?

#### 5.6) Regiones

Bueno, hemos contestado satisfactoriamente a la pregunta sobre cómo evaluar la integral doble, pero hemos dejado pendiente la pregunta sobre cómo establecer una región.

Ya te habrás dado cuenta de que esta pregunta complementa a la ya resuelta, sobre todo si se hace de la siguiente manera: ¿cómo estableceremos una región para que podamos efectuar una integral doble sobre ella? Porque si te fijas, la expresión 5.5.2.a establece perfectamente la región sombreada de la figura 5.5.2, porque todo punto de la región obedece a la expresión de referencia y sólo los puntos de esa región obedecen a ella; pero esa expresión NO nos sirve directamente para efectuar la integral doble, porque de ella NO se obtienen directamente los límites.

En cambio la expresión 5.5.2.1 sí proporciona directamente los límites de integración, por lo que procuraremos ajustarnos a esa forma cada vez que debamos establecer una región en concreto.

Veamos ahora el siguiente problema, en el cual también nos va a interesar describir adecuadamente a "R", la cual está limitada por  $y=x^2$ ,  $y=0$ ,  $x=2$  y se representa en la figura 5.6.1

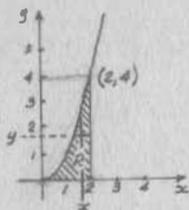


Fig. 5.6.1

Si observamos la región, podemos notar que para los puntos  $(x,y)$  de "R", los valores de "x" varían de 0 a 2, o sea:  $0 \leq x \leq 2$ .

Ahora mantengamos fijo a "x" y consideremos sólo la variación de "y"; podemos notar que para cualquier "x", la "y" correspondiente varía de 0 a la curva, o sea de 0 a  $x^2$ , lo cual podemos escribir como

$$0 \leq y \leq x^2$$

y entonces

$$R\{(x,y)/0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq x^2\}$$

Podemos hacernos las siguientes preguntas: ¿será ésta la única forma de poder definir los límites de integración? ¿Si acabamos de mantener constante a "x", no podríamos haberlo hecho con "y"?

Veamos: procediendo ahora en forma inversa, notamos que las "y" varían entre 0 y 4, o sea  $0 \leq y \leq 4$ .

Ahora, para una "y" cualquiera, la correspondiente variación de "x" será de la curva a la recta  $x=2$ , o sea  $x^2 \leq x \leq 2$  y entonces

$$R\{(x,y)/0 \leq y \leq 4; x^2 \leq x \leq 2\}$$

y podemos notar que hay otra expresión para definir la misma región, igualmente útil para fines de integral doble.

Una la obtuvimos cuando mentuvimos los límites de "x" con

tantes y variables los de "y". La otra la obtuvimos en forma inversa. A la primera forma se le llama "región en x" ( $R_x$ ) y a la segunda, "región en y" ( $R_y$ ).

Si quisiéramos integrar una función  $f(x,y)$  en R, escribiríamos:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_0^2 \left\{ \int_0^{x^2} f(x,y) dy \right\} dx = \int_0^4 \left\{ \int_{x^2}^2 f(x,y) dx \right\} dy$$

De lo anterior, podemos generalizar diciendo que hay dos formas de expresar algebraicamente una región plana en coordenadas cartesianas, para fines de integral doble:

$$R_x \{(x,y)/a \leq x \leq b; f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

llamada "REGION EN X", ó

$$R_y \{(x,y)/c \leq y \leq d; g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

llamada "REGION EN Y".

Las funciones  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  son funciones continuas en el intervalo  $[a,b]$ . Las funciones  $g_1(y)$ ,  $g_2(y)$  son continuas en el intervalo  $[c,d]$ . Además, debe cumplirse que  $f_1(x) \leq f_2(x)$  en  $[a,b]$  y que  $g_1(y) \leq g_2(y)$  en  $[c,d]$ .

La representación gráfica de la región " $R_x$ " se muestra en la figura 5.6.2.a y la de " $R_y$ ", en la figura 5.6.2.b

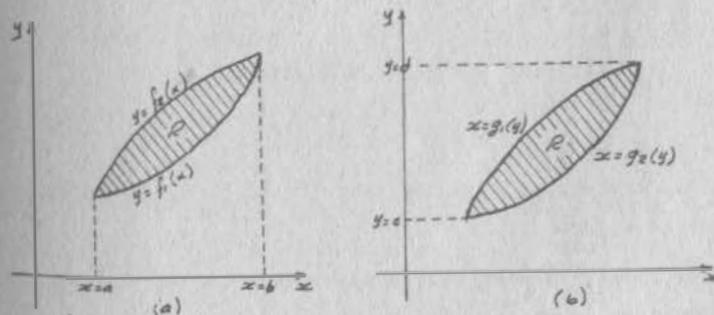


Fig. 5.6.2

Veamos ahora el siguiente problema, en donde "R" es la región limitada por  $y=2x-1$ ,  $y=7-2x$ ,  $y=0$ ,  $x=y+2$ . La representación gráfica se muestra en la figura 5.6.3.

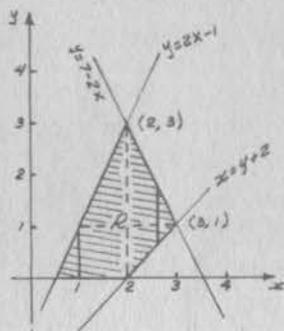


Fig. 5.6.3

Puesto que una de las fronteras es  $y=0$ , entonces la región no deberá extenderse hacia la parte negativa del eje "y". Podemos observar que para distintos valores que adopte "x", "y" variará en forma diferente; por ejemplo, si  $x=1$ , "y" estará entre 0 y  $2x-1$ ; si  $x=5/2$ , "y" variará entre  $x=y+2$  y  $y=7-2x$ . Veamos entonces que no será posi-

ble expresar nuestra región con una sola expresión, sino como varias subregiones, que serían las que se muestran en la figura 5.6.4.

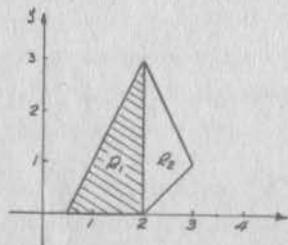


Fig. 5.6.4

$$R_{x_1} \left\{ (x,y) / 0 \leq x \leq 2 ; 0 \leq y \leq 2x-1 \right\}$$

$$R_{x_2} \left\{ (x,y) / 2 \leq x \leq 3 ; x-2 \leq y \leq 7-2x \right\}$$

Se deja al alumno encontrar las expresiones de "R<sub>y</sub>", tomando como base la figura 5.6.5.

En este problema, nuestra región la tuvimos que dividir en dos subregiones. A una región que está formada por un conjun-

to finito de regiones normales, se llama región regular y una región normal es aquella finita y cerrada, donde se cumple que cualquier recta paralela a los ejes coordenados intersecta a la frontera en dos puntos como máximo. (Fig. 5.6.6.a y b).

Lo anterior nos permite hacer la conclusión de que no es posible decir la forma en que debe procederse en todos los casos. Más aún: el adecuado establecimiento de una región requiere de una habilidad que has de adquirir ejercitándote; pero que presupone un profundo conocimiento de la Geometría Analítica.

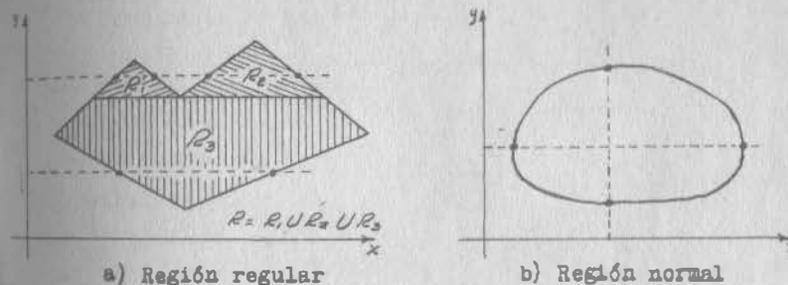


Fig. 5.6.6

## 5.7) Interpretación Geométrica y Propiedades de la Integral Doble en Regiones Cualesquiera

### 5.7.1.- Interpretación Geométrica

Hemos visto cómo calcular un volumen bajo una superficie y sobre una región rectangular, mediante la integral doble. En el inciso (5.5.2) vimos cómo podríamos pasar esta interpretación a regiones no rectangulares.

En general, puede decirse que si tiene una región "R" cualquiera y sobre ella definida una función  $z=f(x,y)$ , que puede ser representada por una superficie (Fig. 5.7.1), el volumen comprendido entre esa superficie, el plano xy y el cilindro cuya directriz es la frontera de la región y cuya generatriz es paralela al eje "z", está dado por:

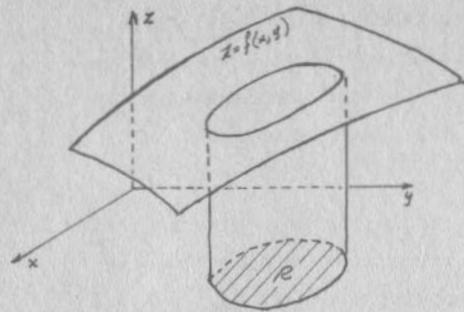


Fig. 5.7.1

$$V = \iint_B f(x, y) \, dx \, dy \quad 5.7.1.1$$

Considera ahora un cilindro como el mostrado en la figura 5.7.2. Su directriz es la frontera de una región cualquiera, sus generatrices son paralelas al eje "z" y está limitado superiormente por el plano  $z=1$ .

De acuerdo con 5.7.1.1, el volumen de este cilindro vale

$$V = \iint_B 1 \, dx \, dy$$

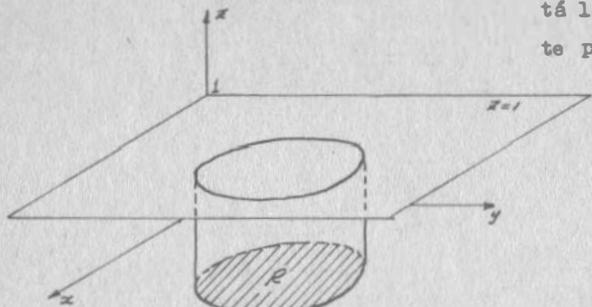


Fig. 5.7.2

Pero nosotros sabemos que el volumen de un cilindro como éste, se puede calcular como

$$V = A_R h$$

donde " $A_R$ " es el área de la región, esto es, el área de la base del cilindro y " $h$ " es la altura, constante e igual a 1 en este caso.

Entonces

$$V = \iint_R 1 \, dx \, dy = A_R \cdot 1$$

por lo que

$$A_R = \iint_R dx \, dy \quad 5.7.1.2$$

de aquí que en ocasiones se acostumbra anotar

$$dx \, dy = dA$$

5.7.1.3

Ejemplo 5.7.1

Calcular el volumen del cuerpo de la figura 5.7.3.

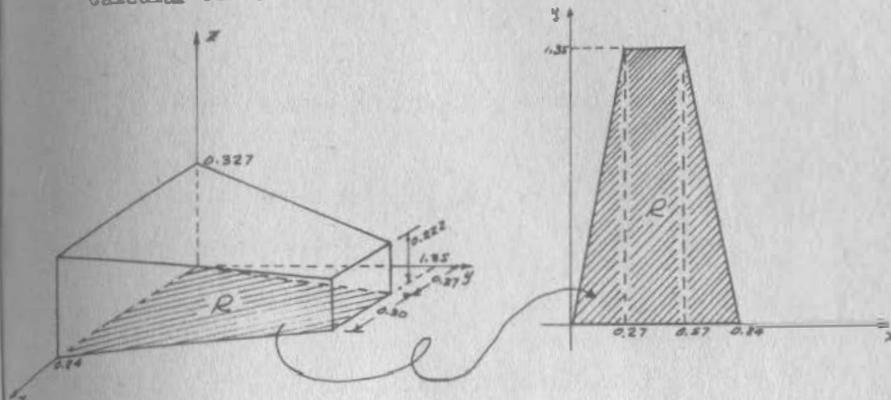


Fig. 5.7.3

Solución:

Desde luego nos damos cuenta de que éste es un problema que se puede resolver por integral doble, ya que se trata de un Volumen delimitado por una superficie, el plano  $xy$  y cuatro planos verticales.

Debemos primero encontrar la ecuación del plano que limita al volumen por la parte superior; es un plano perpendicular al eje "z" ; entonces:

$$z - 0.327 = \frac{0.222 - 0.327}{1.35} y$$

$$z = -0.078y + 0.327$$

Ahora debemos establecer la región, de manera que nos sirva para una integral doble. Al observar la figura 5.7.3, nos damos cuenta de que, si definimos en "x", esto es, si cortamos con rectas paralelas al eje "y", vamos a tener que

considerar tres subregiones, separadas por las rectas punteadas. En cambio, si cortamos la región con rectas paralelas al eje "x", sólo tendremos que considerar un caso: de la recta  $y=5x$ , a la recta  $y=4.25-5x$ . Así, nos es más ventajoso definir la región en "y".

$$R_y \left\{ (x,y) / 0 \leq y \leq 1.35; \frac{y}{5} \leq x \leq \frac{4.25-y}{5} \right\}$$

Ahora

$$V = \iint_R z \, dx \, dy = \int_0^{1.35} \left\{ \int_{y/5}^{\frac{4.25-y}{5}} (-0.078y + 0.327) \, dx \right\} dy$$

$$\int_{y/5}^{\frac{4.25-y}{5}} (-0.078y + 0.327) \, dx = -0.078y \left[ x \right]_{y/5}^{\frac{4.25-y}{5}} + 0.327 \left[ x \right]_{y/5}^{\frac{4.25-y}{5}}$$

$$\int_{y/5}^{\frac{4.25-y}{5}} (-0.078y + 0.327) \, dx = 0.016y^2 - 0.131y + 0.278$$

$$V = \int_0^{1.35} (0.016y^2 + 0.131y + 0.278) \, dy = \frac{0.016}{3} [y^3]_0^{1.35} - \frac{0.131}{2} [y^2]_0^{1.35} + 0.278 [y]_0^{1.35}$$

$$V = 0.269 \, m^3 \quad (*)$$

(\*) Este volumen es aproximadamente el volumen de agua en la cámara de aproximación de un medidor Parshall, cuando el caudal es de 100 lps.

Ejemplo 5.7.2

Calcular el área sombreada de la figura 5.7.4.

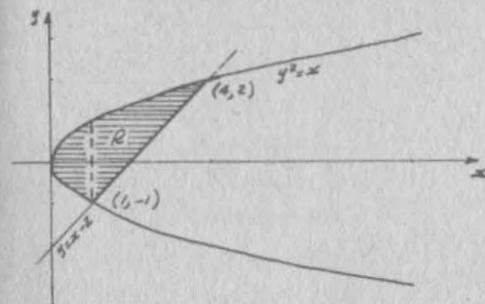


Fig. 5.7.4

Solución:

Nuestro primer problema consiste ahora en definir la región de manera que la podamos usar en integral doble.

Con la experiencia que ya tienes en definir re-

giones, te habrás dado cuenta de que, si defines en "x", tienes que definir dos; pero si defines sobre "y" sólo tienes que definir una.

$$R_y \left\{ (x,y) / -1 \leq y \leq 2; y^2 \leq x \leq y+2 \right\}$$

Ahora

$$A = \iint_R dx \, dy = \int_{-1}^2 \left\{ \int_{y^2}^{y+2} dx \right\} dy = \int_{-1}^2 (y+2-y^2) \, dy$$

$$A = \frac{1}{2} [y^2]_{-1}^2 + 2 [y]_{-1}^2 - \frac{1}{3} [y^3]_{-1}^2$$

$$A = 9/2$$

Cabe hacer hincapié en que, cuando debemos calcular un volumen, la que podemos hacer por integral doble es calcular el volumen BAJO la superficie; cualquier otro volumen tendremos que determinar, si es posible, por sumas y/o diferencias con los que se obtengan de la manera descrita.

Ejemplo 5.7.3

Calcular el volumen comprendido entre la superficie  $z = x^2 + y^2$  y los planos  $xz, yz, z=125, x=10, y=5$  (Fig. 5.7.5)

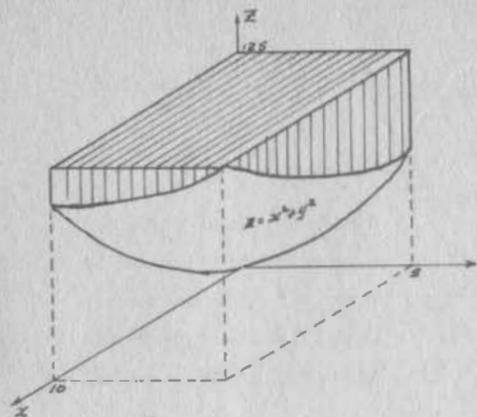


Fig. 5.7.5

ficie y sobre la región

$$R \{ (x,y) / 0 \leq x \leq 10; 0 \leq y \leq 5 \}$$

El primer volumen vale:

$$10 \times 5 \times 125 = 6250 \text{ cm}^3$$

El segundo volumen sí se puede calcular por integral doble; de hecho es el problema (5.0.1) que ya resolvimos en el inciso (5.2.2), con un resultado de

$$6250/3 \text{ cm}^3$$

Entonces, el volumen pedido vale:

$$6250 - 6250/3 = \underline{\underline{12500/3 \text{ cm}^3}}$$

El concepto de volumen bajo la superficie, se puede ampliar a los otros dos planos coordenados; así, el volumen pedido en el ejemplo (5.7.3) lo podemos considerar como el volumen comprendido entre el plano  $xz$ , la superficie  $z=x^2+y^2$  y el plano  $y=5$  y limitada por el cilindro  $z=x^2$  y los planos  $yz$  y  $z=125$ . En tal caso, diremos que

$$V = \iint_S y \, dx \, dz$$

5.7.1.4

## Ejemplo 5.7.4

Calcular el volumen pedido en el ejemplo (5.7.3), utilizando la ecuación (5.7.1.4).

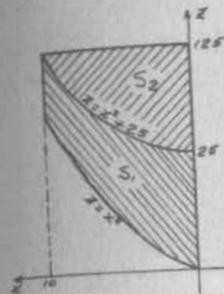


Fig. 5.7.6

Solución:

Al observar la figura 5.7.5, nos damos cuenta de que, al trazar rectas paralelas al eje "y", por cualquier punto de "S<sub>1</sub>" intersectamos a la superficie  $z=x^2+y^2$ ; si trazamos una recta paralela al eje "y" por cualquier punto de "S<sub>2</sub>" (Fig. 5.7.6), intersectamos a la superficie  $y=5$ .

Entonces

$$V = V_1 + V_2$$

$$V_1 = \iint_{S_1} y \, dx \, dz = \iint_{S_1} \sqrt{z-x^2} \, dx \, dz$$

$$V_2 = \iint_{S_2} y \, dx \, dz = \iint_{S_2} 5 \, dx \, dz$$

Ahora definamos las regiones "S<sub>1</sub>" y "S<sub>2</sub>":

$$S_1 \{ (x,y) / 0 \leq x \leq 10; x^2 \leq z \leq x^2+25 \}$$

$$S_2 \{ (x,y) / 0 \leq x \leq 10; x^2+25 \leq z \leq 125 \}$$

Así:

$$V_1 = \int_0^{10} \left\{ \int_{x^2}^{x^2+25} \sqrt{z-x^2} \, dz \right\} dx$$

$$\int_{x^2}^{x^2+25} \sqrt{z-x^2} \, dz = \frac{2}{3} \left[ (z-x^2)^{3/2} \right]_{x^2}^{x^2+25}$$

$$= \frac{2}{3} (x^2 + 25 - x^2)^{3/2} = \frac{2}{3} 125$$

$$V_1 = \int_0^{10} \frac{2}{3} 125 dx = \frac{2500}{3}$$

Ahora

$$V_2 = \int_0^{10} \left( \int_{x^2+25}^{125} 5 dz \right) dx = 5 \int_0^{10} (100 - x^2) dx = 5000 - \frac{5000}{3}$$

$$V_2 = \frac{10000}{3}$$

Entonces

$$V = \frac{2500}{3} + \frac{10000}{3} = 12500/3 \text{ cm}^3$$

Resultado que coincide con el obtenido anteriormente. Como ejercicio, calcula este mismo volumen, ahora utilizando la ecuación:

$$V = \iiint_T x \, dy \, dz \quad 5.7.1.5$$

donde "T" es la región sobre el plano yz.

Nota, en cambio, que el cálculo de áreas por integral doble no está sujeto a que éstas estén comprendidas entre una curva y un eje ni limitadas por rectas paralelas a un eje (restricciones que sí tenemos si queremos calcularlas por integral ordinaria). De aquí que calcular áreas por integral doble resulta ser un método general.

### 5.7.2.- Propiedades

Hemos demostrado las propiedades de la integral doble cuando ésta se halla definida sobre una región rectangular; las mismas propiedades funcionan para regiones cualesquiera:

$$\iint_R k f(x,y) \, dx \, dy = k \iint_R f(x,y) \, dx \, dy \quad 5.7.2.1$$

$$\iint_R [f(x,y) + g(x,y)] \, dx \, dy = \iint_R f(x,y) \, dx \, dy + \iint_R g(x,y) \, dx \, dy \quad 5.7.2.2$$

$$\iint_R f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{R_1} f(x,y) \, dx \, dy + \iint_{R_2} f(x,y) \, dx \, dy \quad 5.7.2.3$$

donde  $R = R_1 \cup R_2$ ;  $R_1 \cap R_2$  es un conjunto nulo

Si  $f(x,y) \geq 0$  en R:

$$\iint_R f(x,y) \, dx \, dy \geq 0 \quad 5.7.2.4$$

$$\iint_R f(x,y) \, dx \, dy = \iint_R f(u,v) \, du \, dv \quad 5.7.2.5$$

$$\iint_R |f(x,y)| \, dx \, dy \geq \left| \iint_R f(x,y) \, dx \, dy \right| \quad 5.7.2.6$$

Además, se tienen los corolarios de la propiedad (5.7.2.4):

Si  $f(x,y) \leq 0$  en R:

$$\iint_R f(x,y) \, dx \, dy \leq 0 \quad 5.7.2.7$$

Si  $f(x,y) \geq g(x,y)$  en R:

$$\iint_R f(x,y) \, dx \, dy \geq \iint_R g(x,y) \, dx \, dy \quad 5.7.2.8$$

En las ecuaciones (5.7.2.1) a (5.7.2.8), inclusive, "R" es una región cualquiera.

A continuación demostraremos que las propiedades (5.7.2.1) y (5.7.2.3) funcionan también para regiones cualesquiera. Con procedimientos análogos, tú demostrarás, como ejercicio, las demás propiedades.

Demostración de la propiedad (5.7.2.1)

Sea la región de la figura 5.7.7:

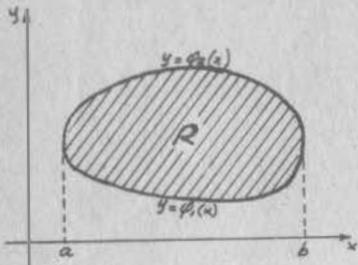


Fig. 5.7.7

$$\iint_R k f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} k f(x,y) dy \right\} dx$$

Por la propiedad ya conocida de la integral ordinaria:

$$\iint_R k f(x,y) dx dy = \int_a^b k \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy \right\} dx$$

Aplicamos nuevamente la misma propiedad:

$$\iint_R k f(x,y) dx dy = k \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy \right\} dx \quad (5.7.2.9)$$

Pero, por la definición (5.5.1):

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy \right\} dx$$

Entonces, al sustituir esta expresión en (5.7.2.9):

$$\iint_R k f(x,y) dx dy = k \iint_R f(x,y) dx dy \quad (QED)$$

La propiedad (5.7.2.3) ya la aplicamos intuitivamente, sin demostrarla, en el ejemplo (5.7.4). He aquí su demostración:

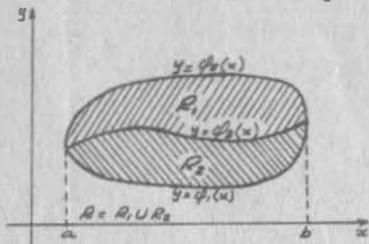


Fig. 5.7.8

Sean las regiones de la figura 5.7.8:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy \right\} dx$$

5.7.2.10

Por la propiedad ya conocida de la integral ordinaria:

$$\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_3(x)} f(x,y) dy + \int_{\phi_3(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy \quad (5.7.2.11)$$

Al sustituir (5.7.2.11) en (5.7.2.10), recordando nuevamente las propiedades de la integral ordinaria:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_3(x)} f(x,y) dy + \int_{\phi_3(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy \right\} dx$$

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_3(x)} f(x,y) dy \right\} dx + \int_a^b \left\{ \int_{\phi_3(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy \right\} dx$$

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_{R_1} f(x,y) dx dy + \iint_{R_2} f(x,y) dx dy \quad (QED)$$

5.8) Teorema de Green en el Plano

5.8.1.- Introducción

Imaginemos un flujo como el mostrado en la figura 5.8.1.(a), en el cual todos los vectores velocidad sobre los puntos de una misma vertical son iguales. Imaginemos un cilindro totalmente permeable que colocáramos en medio del flujo, cuya traza fuera la curva "C" de la figura 5.8.1.(b).

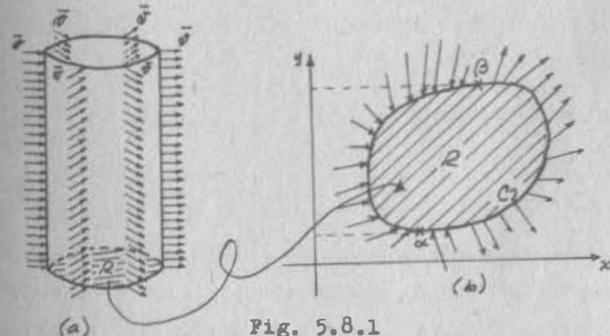


Fig. 5.8.1

Supongamos que nuestro problema consiste en encontrar el gasto neto a través del cilindro; es decir, el balance entre el gasto que entra y el que sale. Según vimos en el punto (4.7) esto lo podemos lograr realizando la integración:

$$\Delta Q = \oint_C \bar{v} \cdot \bar{n} \, ds = \oint_C \mathbf{k} \times \bar{v} \cdot d\bar{r} \quad 5.8.1.1$$

donde  $\bar{n}$  es el vector normal exterior a "C".

Para calcular la integral indicada, requerimos las ecuaciones paramétricas de la curva, así como la función vectorial de la velocidad. Supongamos que la región "R" englobada por "C" puede definirse como

$$R \{ (x,y)/c \leq y \leq d; \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \} \quad 5.8.1.2$$

En tal caso, las ecuaciones paramétricas de "C" las podemos escribir como:

$$\begin{array}{l} \text{Parte derecha} \left\{ \begin{array}{l} x = \psi_2(t) \quad 5.8.1.3 \\ y = t \quad 5.8.1.4 \end{array} \right. \\ \text{Parte izquierda} \left\{ \begin{array}{l} x = \psi_1(t) \quad 5.8.1.5 \\ y = t \quad 5.8.1.4 \end{array} \right. \end{array}$$

Por otra parte, sea

$$\bar{v} = v_x(x,y)\mathbf{i} + v_y(x,y)\mathbf{j} \quad 5.8.1.6$$

Ahora podemos escribir:

$$\Delta Q = \oint_C \mathbf{k} \times \bar{v} \cdot d\bar{r} = \oint_C -v_y dx + v_x dy = - \oint_C v_y dx + \oint_C v_x dy \quad 5.8.1.1'$$

Enfoquemos nuestra atención a

$$\oint_C v_x dy$$

la cual, para calcularla, debemos poner los términos de la integral en función de "t"; al sustituir (5.8.1.4) y (5.8.1.5) en (5.8.1.6), obtenemos, para la parte izquierda de la curva:

$$v_x = v_x[\psi_1(t), t] \quad ; \quad \text{además, de (5.8.1.4): } dy=dt$$

Por otra parte, de (5.8.1.3) y (5.8.1.4), para la parte derecha de "C":

$$v_x = v_x[\psi_2(t), t] \quad ; \quad dy=dt$$

Una integral en circuito la podemos empezar en cualquier punto, con tal de terminarla en el mismo; como tenemos dos expresiones para la curva, deberemos hacer dos integraciones, por lo que nos conviene empezar en " $\alpha$ " ( $y=c$ ) y terminar en " $\beta$ " ( $y=d$ ), la primera; empezar en " $\beta$ ", la segunda y terminarla en " $\alpha$ ". Ahora, de (5.8.1.4):

Si  $y=c$ ,  $t=c$

Si  $y=d$ ,  $t=d$

y entonces:

$$\oint_C v_x dy = \int_c^\beta v_x dy + \int_\beta^\alpha v_x dy = \int_c^d v_x[\psi_2(t), t] dt + \int_d^c v_x[\psi_1(t), t] dt$$

Por definición, como tú sabes:

$$\int_d^c v_x[\psi_1(t), t] dt = - \int_c^d v_x[\psi_1(t), t] dt$$

Así:

$$\begin{aligned} \oint_C v_x dy &= \int_c^d v_x[\psi_2(t), t] dt - \int_c^d v_x[\psi_1(t), t] dt \\ &= \int_c^d \left\{ v_x[\psi_2(t), t] - v_x[\psi_1(t), t] \right\} dt \end{aligned} \quad 5.8.1.7$$

Se nos ocurre pensar que la cantidad entre corchetes (llaves) es el resultado de una integral con límites variables; en efecto, considera:

$$\int_{\psi_1(t)}^{\psi_2(t)} \frac{\partial v_x(x,t)}{\partial x} dx = v_x[\psi_2(t), t] - v_x[\psi_1(t), t] \quad 5.8.1.8$$

Entonces, llevando (5.8.1.8) a (5.8.1.7)

$$\oint_C v_x dy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(t)}^{\psi_2(t)} \frac{\partial v_x(x,t)}{\partial x} dx \right\} dt = \iint_R \frac{\partial v_x(x,t)}{\partial x} dx dt$$

Finalmente, de (5.8.1.4)

$$\oint_C v_x(x,y) dy = \iint_R \frac{\partial v_x(x,y)}{\partial x} dx dy \quad 5.8.1.9$$

Por otra parte, siguiendo un procedimiento análogo al descrito, tú puedes demostrar que

$$-\oint_C v_y(x,y) dx = \iint_R \frac{\partial v_y(x,y)}{\partial y} dx dy \quad 5.8.1.10$$

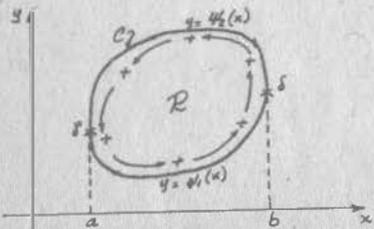


Fig. 5.8.2

La razón del cambio de signo está explicada en la figura (5.8.2): para seguir el sentido positivo de recorrido (antihorario), se debe partir de "y" hacia "x"; pero ahora seguimos la parte inferior de la curva, mientras que en el caso anterior seguimos la parte derecha.

Una vez que hayas comprobado la ecuación (5.8.1.10), puedes unirla con la (5.8.1.9), para obtener:

$$-\oint_C v_y dx + \oint_C v_x dy = \iint_R \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy + \iint_R \frac{\partial v_y}{\partial y} dx dy = \iint_R \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dx dy$$

Si se tiene en cuenta la ecuación (5.8.1.1) y se recuerda, además, que la expresión entre paréntesis es la divergencia

de la velocidad, podremos escribir que:

$$\Delta Q = \oint_C \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \iint_R \nabla \cdot \vec{v} dx dy \quad 5.8.1.11$$

Hemos llegado a lo que se conoce como Teorema de la divergencia en el plano, que nos proporciona una interpretación física de la divergencia. En efecto, notemos primeramente que, si la divergencia es idénticamente nula, no hay incremento de gasto; esto es, el mismo gasto que entra es el que sale del cilindro.

Ahora bien, ¿qué significa esto? Para comprenderlo mejor, imaginemos que sólo entra gasto y nada sale. Esto quiere decir que el fluido se está almacenando dentro del cilindro; pero como éste ya está lleno, la única manera en que esto puede suceder es comprimiéndose. ¿Puede esto suceder si el fluido es agua?

¡No! El agua no puede comprimirse, ni los líquidos, en general. Aún cuando la condición no fuera tan severa como la propuesta, basta con que el gasto que salga sea menor que el que entra, para que dentro del cilindro se efectúe una compresión y esto no puede suceder en un líquido. Más aún: si el líquido no puede comprimirse, tampoco puede descomprimirse, por lo que no aceptaríamos, tampoco, que saliese más, gasto de un líquido, que el entrante. En pocas palabras: la divergencia de la velocidad de un líquido, siempre vale cero. (\*)

(\*) Hay problemas muy específicos en los cuales se requieren considerar las pequeñas deformaciones de volumen que sufre un líquido. Entre otros, se tiene el caso del golpe de ariete y el manejo de aceite a las altísimas presiones de un yacimiento. Estos problemas los estudiarás en su oportunidad; por ser tan específicos, se salen totalmente del alcance de estas notas, donde siempre consideraremos que un líquido es incompresible.

En cambio, un gas puede comprimirse o descomprimirse de acuerdo con las leyes que ya estudiaste en Termodinámica (Boyle-Mariotte-Gay Lussac). Por ello, la divergencia de velocidades de un gas es, en general, diferente de cero.

Si el flujo de un líquido es además irrotacional, caemos en el caso que discutíamos en el inciso (3.10.2). Entonces el flujo cumple además con la ecuación de Laplace y puede representarse gráficamente mediante una red de curvas que se corten ortogonalmente; a una red de este tipo se le llama "red de flujo". La figura 5.8.3 representa el flujo a través de un vertedor; la figura 5.8.4 representa el flujo a través de una "tablaestaca".

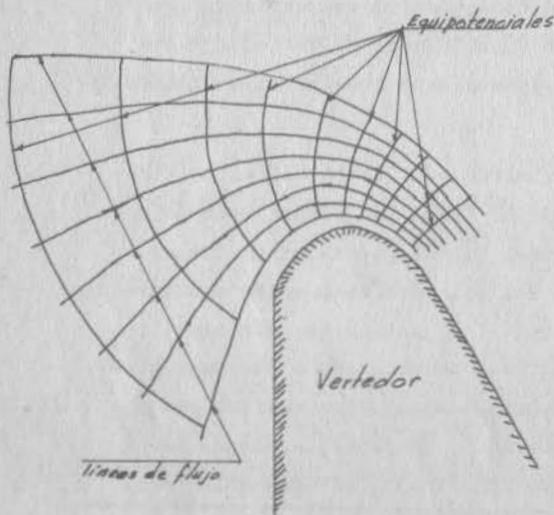


Fig. 5.8.3

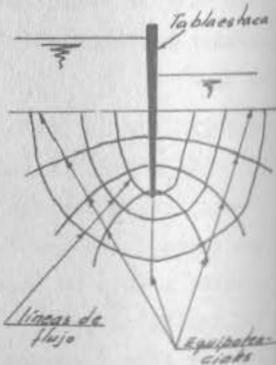


Fig. 5.8.4

5.8.2.- Los Teoremas de Green y Stokes en el Plano

El teorema de la divergencia en el plano es una forma de expresar el llamado Teorema de Green, que nos va a ser de gran utilidad en el cálculo de las integrales múltiples.

En efecto, en el teorema de la divergencia integramos en el

campo  $k \times \bar{v}$ ; hagamos:

$$-v_y(x,y) = P(x,y) ; v_x(x,y) = Q(x,y)$$

Entonces hemos definido el campo

$$\bar{F} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$$

Teorema 5.8.1 (Teorema de Green)

Sea "R" una región regular cerrada, limitada por un conjunto de curvas suaves a trozos. Si  $P(x,y)$ ,  $Q(x,y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ , son continuas en "R":

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

La demostración de este teorema, para una región normal, sigue los mismos pasos que la demostración del teorema de la divergencia, que ya quedó demostrado en el inciso anterior. Queda por demostrar que el teorema se cumple en cualquier región regular, como la mostrada en la figura 5.8.5.

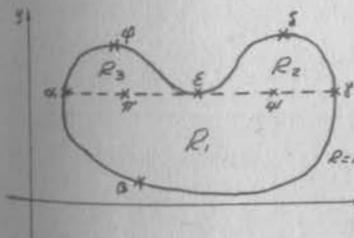


Fig. 5.8.5

En efecto, si se cumple para una región normal, se cumplirá para las regiones  $R_1, R_2, R_3$ :

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{R_1 \cup R_2 \cup R_3} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

cuyo primer miembro lo podemos

escribir:

$$\int_{\alpha\beta\gamma} P dx + Q dy + \int_{\gamma\delta\epsilon} P dx + Q dy + \int_{\epsilon\eta\alpha} P dx + Q dy = \iint_{R_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

5.8.2.1

Análogamente:

$$\int_{\gamma \delta \epsilon} P dx + Q dy + \int_{\epsilon \gamma \eta} P dx + Q dy = \iint_{R_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad 5.8.2.2$$

$$\int_{\epsilon \gamma \alpha} P dx + Q dy + \int_{\alpha \gamma \epsilon} P dx + Q dy = \iint_{R_3} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad 5.8.2.3$$

Si sumamos miembro a miembro (5.8.2.1), (5.8.2.2) y (5.8.2.3), teniendo en cuenta que

$$\int_{\gamma \delta \epsilon} P dx + Q dy = - \int_{\epsilon \gamma \eta} P dx + Q dy, \text{ etc. obtenemos:}$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \beta \gamma} P dx + Q dy + \int_{\gamma \delta \epsilon} P dx + Q dy + \int_{\epsilon \gamma \alpha} P dx + Q dy &= \iint_{R_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \\ &+ \iint_{R_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{R_3} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

O sea:

$$\oint_{\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \gamma \alpha} P dx + Q dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (QED)$$

A este teorema le podemos dar una expresión vectorial si caemos en la cuenta de que

$$P dx + Q dy = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{y que} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = |\nabla \times \vec{F}|$$

Entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} dx dy \quad 5.8.2.4$$

A esta forma de expresar el teorema de Green, la llamamos "Teorema de Stokes en el plano". A la cantidad calculada se le llama "circulación del campo vectorial" y puede referirse a una fuerza, a una velocidad, al campo eléctrico, etc., según lo que esté representando el campo. Si éste es de fuer-

zas, nuevamente se observa que, para que haya trabajo en circuito cerrado, el campo de fuerzas debe admitir rotacional. Si el campo es de velocidades, la energía consumida produce una depresión aproximadamente cónica en la superficie libre del agua, produciéndose un vórtice.

Aparte de su importancia física, estos teoremas nos relacionan dos conceptos matemáticos muy importantes, como son la integral curvilínea y la integral doble. Además, el teorema de Green tiene una interpretación geométrica muy útil, como veremos a continuación.

### 5.8.3.- Interpretación Geométrica del Teorema de Green.

Sea "R" una región regular cerrada y limitada por la curva "C". Sea el campo:  $\vec{F} = xj - yi$ .

De acuerdo con el teorema de Green:

$$\oint_C x dy - y dx = \iint_R \left[ \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y} \right] dx dy = 2 \iint_R dx dy = 2A_R \quad 5.8.3.1$$

Expresión que nos permite calcular el área de una región por medio de una integral curvilínea, lo que resulta muy ventajoso cuando la curva tiene ecuaciones paramétricas sencillas.

Ejemplo 5.8.1

Calcular el área de la elipse de semiejes a, b

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$x = a \cos \theta$$

$$y = b \sin \theta$$

por lo que

$$dx = -a \sin \theta d\theta$$

$$dy = b \cos \theta d\theta$$

De acuerdo con (5.8.3.1):

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos \theta b \cos \theta d\theta - b \sin \theta (-a \sin \theta) d\theta$$

$$A = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \underline{\underline{\pi ab}}$$

### Ejemplo 5.8.2

Calcular el volumen comprendido entre el paraboloides  $z = x^2 + y^2$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = 25$ .

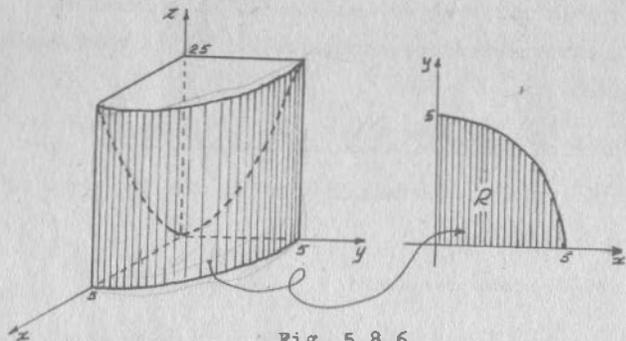


Fig. 5.8.6

Solución:

El volumen pedido se representa, en una cuarta parte, en la figura 5.8.6. Para calcularlo, debemos hacer:

$$(1/4)V = \iint_R z \, dx \, dy = \iint_R (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

donde

$$R \left\{ (x,y) / 0 \leq x \leq 5 ; 0 \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \right\}$$

Entonces

$$(1/4)V = \int_0^5 \left\{ \int_0^{\sqrt{25-x^2}} (x^2 + y^2) \, dy \right\} dx$$

Ahora

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{25-x^2}} (x^2 + y^2) \, dy &= x^2 \left[ y \right]_0^{\sqrt{25-x^2}} + \frac{1}{3} \left[ y^3 \right]_0^{\sqrt{25-x^2}} \\ &= x^2 \sqrt{25-x^2} + \frac{1}{3} (25-x^2)^{3/2} \end{aligned}$$

Y así:

$$(1/4)V = \int_0^5 \left[ x^2 \sqrt{25-x^2} + \frac{1}{3} (25-x^2)^{3/2} \right] dx$$

Esta integral puede calcularse, pero es evidente que el proceso sería muy laborioso. Veamos si el teorema de Green nos puede ayudar.

Se trata de integrar

$$\iint_R (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

Entonces podemos suponer que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = x^2 + y^2$$

O sea que "Q" podría ser:

$$Q = \frac{x^3}{3} + y^2 x$$

Y así, de acuerdo con el teorema de Green:

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy = \oint_C Q \, dy = \oint_C \left( \frac{x^3}{3} + y^2 x \right) dy$$

donde "C", para la región mostrada en la figura 5.8.6, es el cuadrante de circunferencia, más los dos segmentos de ejes. Como nos interesa el volumen completo, nos conviene ahora considerar como región de integración a todo el círculo englobado por la traza del cilindro, que vendrá a ser la curva sobre la cual integraremos y cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = 5 \cos \theta$$

$$y = 5 \sin \theta ; \quad dy = 5 \cos \theta \, d\theta$$

Así

$$\frac{x^3}{3} + y^2 x = \frac{125}{3} \cos^3 \theta + 125 \sin^2 \theta \cos \theta$$

Entonces:

$$V = \int_0^{2\pi} \left( \frac{125}{3} \cos^3 \theta + 125 \sin^2 \theta \cos \theta \right) 5 \cos \theta \, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left( \frac{625}{3} \cos^4 \theta + 625 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right) d\theta$$

$$V = 625 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{3} \cos^4 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right) d\theta$$

Recordemos que

$$\sin^2 \theta = 1/2(1 - \cos 2\theta)$$

$$\cos^2 \theta = 1/2(1 + \cos 2\theta)$$

$$\cos^4 \theta = 1/4(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)$$

Por lo que

$$V = 625 \int_0^{2\pi} \left( 1/4 - \frac{1}{12} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$V = \frac{625}{4} \left[ \theta \right]_0^{2\pi} - \frac{625}{48} \left[ \sin 4\theta \right]_0^{2\pi} + \frac{625}{4} \sin 2\theta = \frac{625}{2} - 0 + 0$$

$$V = \underline{\underline{\frac{625\pi}{2}}}$$

## 5.9) La Integral Doble en Coordenadas Curvilíneas

### 5.9.1.- Regiones en Coordenadas Curvilíneas

El problema que acabamos de plantear resultó ser difícil de resolver por el método tradicional; aún con la ayuda del teorema de Green, resultó laborioso. La razón es que la región y su frontera no resultan fácilmente manejables en coordenadas cartesianas.

Ya vimos en el punto (3.6) que hay otros sistemas coordenados aparte del cartesiano y que, si se cumplen ciertas condiciones, un punto puede representarse gráficamente en un sistema o en otro, indistintamente. Bajo el supuesto de que se cumplen esas condiciones en todos los puntos de una región, será posible entonces representar a esa región en diferentes

sistemas coordenados. En seguida vamos a ver cómo, ilustrando primeramente con la región del problema que acabamos de resolver.

### Ejemplo 5.9.1

Representar en el sistema polar la región de la figura 5.8.6.

Solución:

Desde luego que a la región, al igual que en coordenadas cartesianas, la vamos a representar dibujando sus fronteras; por lo mismo, debemos trasladar al sistema polar todos y cada uno de los puntos frontera; naturalmente, los puntos de la región serán los que queden englobados por dichas fronteras.

Antes, debemos ver que se cumplan las condiciones para que el mapeo sea posible; veamos, las ecuaciones de transformación son:

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

que evidentemente se cumplen en todos los puntos; además, todas las parciales son continuas para cualesquier valores de  $\rho, \theta$ ; finalmente

$$J \left( \frac{x, y}{\rho, \theta} \right) = \rho$$

diferente de cero en general, excepto en el punto (0,0), que es un punto singular.

Así pues, todos los puntos frontera de nuestra región (a excepción hecha del origen) y todos los puntos interiores de la misma, mapearán punto a punto en el sistema polar.

Para efectuar el mapeo, tomemos el conjunto de puntos frontera, excluyendo el origen; este conjunto puede expresarse por comprensión de la siguiente manera (Fig. 5.9.1).

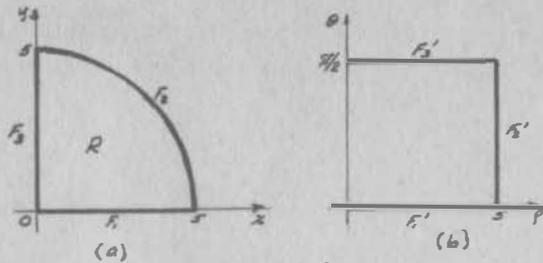


Fig. 5.9.1

$$R = P_1 \cup P_2 \cup P_3$$

$$P_1 \{ (x,y)/y=0 ; 0 < x \leq 5 \}$$

$$P_2 \{ (x,y)/x^2 + y^2 = 25 ; x,y > 0 \}$$

$$P_3 \{ (x,y)/x=0 ; 0 < y \leq 5 \}$$

Ahora debemos expresar al conjunto " $P_1$ " en términos de  $\rho, \theta$ :

$$y=0 = \rho \operatorname{sen} \theta$$

Puesto que " $\rho$ " no puede ser nulo:

$$\operatorname{sen} \theta = 0 \implies \theta = 0$$

Además:

$$0 < x = \rho \cos 0 = \rho \implies \rho > 0$$

$$5 \geq x = \rho \cos 0 = \rho \implies \rho \leq 5$$

Entonces

$$P_1 \{ (\rho, \theta)/\theta = 0 ; 0 < \rho \leq 5 \}$$

No nos cuesta ahora trabajo identificar a este conjunto de puntos como el segmento del eje " $\rho$ " que se muestra con línea gruesa en la figura 5.9.1.(b).

Análogamente:

$$\begin{aligned} x^2 &= \rho^2 \cos^2 \theta \\ y^2 &= \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\ x^2 + y^2 &= \rho^2 = 25 \implies \rho = 5 ; x,y > 0 \implies 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Con lo que podemos identificar este segmento en la figura 5.9.1.(b)

Finalmente:

$$x=0 = \rho \cos \theta ; \cos \theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$0 < y \leq 5 \implies 0 < \rho \leq 5$$

y posamos este segmento a la figura 5.9.1.(b).

La región ha quedado abierta por la izquierda; pero aún nos falta un punto de la frontera que deliberadamente hemos excluido: el origen. Para este punto,  $\rho = 0$ , es decir, el eje " $\theta$ ". Por tratarse de un punto singular, el origen no mapea en este caso como un solo punto, sino como un conjunto de puntos. La región, ya mapeada, queda representada en la figura 5.9.2.

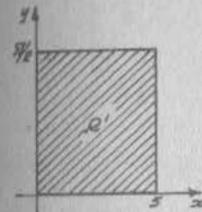


Fig. 5.9.2

Puedes observar que esta región es mucho más fácil de manejar en el sistema polar, ya que

$$R' \{ (\rho, \theta)/0 \leq \rho \leq 5 ; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \}$$

es una región rectangular, con límites constantes.

Desde luego, no es estrictamente indispensable manejar las fronteras con simbología de conjuntos, aunque esto ayuda mucho a la comprensión del proceso; se pueden manejar simplemente las ecuaciones, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.9.2.

Mapear la región de la figura 5.9.3 en un sistema curvilíneo cuyas ecuaciones de transformación son:

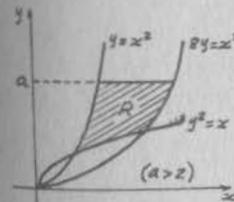


Fig. 5.9.3

$$\begin{aligned} u &= \frac{x^2}{y} \\ v &= \frac{y^2}{x} \end{aligned}$$

Solución:

Las derivadas son discontinuas en los ejes, pero estos puntos no pertenecen a la región. El jacobiano de transformación:

$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{3} \neq 0$$

y el mapeo será punto a punto en toda la región.

Las fronteras son:

- La parábola  $y=x^2$ :  $x^2/y = 1 \Rightarrow u=1$  recta paralela al eje "v"
- La parábola  $y^2=x$ :  $y^2/x = 1 \Rightarrow v=1$  recta paralela al eje "u"
- La parábola  $8y=x^2$ :  $x^2/y = 8 \Rightarrow u=8$  recta paralela al eje "v"
- La recta  $y=a$ :  $x^2/a = u$ ;  $a^2/x = v$

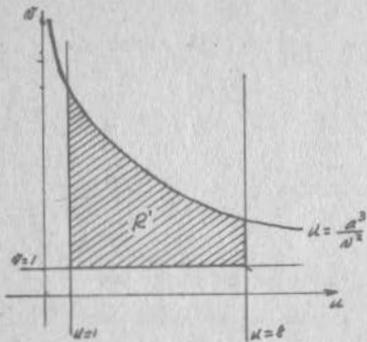


Fig. 5.9.4

$$x = \frac{a^2}{v}; \quad x^2 = \frac{a^4}{v^2}$$

$$\frac{\frac{a^4}{v^2}}{a} = u \Rightarrow u = \frac{a^3}{v^2} \text{ curva asintótica a los ejes } u, v$$

Al representar gráficamente todas estas curvas, obtendremos la región de la figura 5.9.4, que analíticamente expresamos:

$$R' \left\{ (u,v) / 1 \leq u \leq 8 ; 1 \leq v \leq \sqrt{\frac{a^3}{u}} \right\}$$

Ejemplo 5.9.3.

Encontrar una transformación que permita el mapeo de la región mostrada en la figura 5.9.5, como región rectangular.

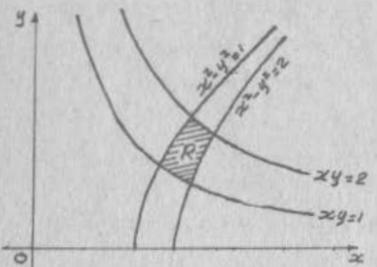


Fig. 5.9.5

Solución:

Sea la transformación

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = xy$$

Sus derivadas parciales son continuas y su jacobiano de transformación:

$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 + 2y^2 \neq 0 \text{ excepto en } O \notin R$$

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$$

Mediante esta transformación, tenemos:

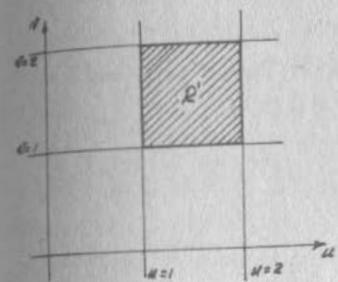


Fig. 5.9.6

- $x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow u=1$  recta paralela eje "v"
- $xy = 1 \Rightarrow v=1$  recta paralela eje "u"
- $x^2 - y^2 = 2 \Rightarrow u=2$  recta paralela eje "v"
- $xy = 2 \Rightarrow v=2$  recta paralela eje "u"

Como puede verse en la figura 5.9.6

$$R' \left\{ (u,v) / 1 \leq u \leq 2 ; 1 \leq v \leq 2 \right\}$$

En resumen, podemos decir que para mapear regiones de un sistema coordenado en otro, deberemos:

- Definir las ecuaciones de las fronteras en el sistema original
- Transformarlas al nuevo sistema y dibujarlas en él
- Definir los puntos singulares, en su caso, y manejarlos adecuadamente
- Definir analíticamente la región mapeada

5.9.2.- Cambio de Variable en Integral Doble

Veamos que la solución del ejemplo (5.8.2) se volvía laboriosa debido a que tanto la región como su frontera no se prestaban para manejarse en coordenadas cartesianas. Vimos además en el ejemplo (5.9.1), cómo la región de referencia se podía representar en forma sumamente sencilla en el sistema polar. Entonces intentemos integrar en este sistema.

$$4 \iint_R (x^2 + y^2) dx dy = 4 \iint \rho^2 d\rho d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^5 \rho^2 d\rho \right\} d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} [\rho^3]_0^5 d\theta = \frac{500}{3} [\theta]_0^{\pi/2} = \frac{250\pi}{2} \neq \frac{625\pi}{2}$$

El resultado obtenido no coincide con el correcto, lo que quiere decir que no podemos cambiar una integral doble de un sistema coordenado a otro, nada más así como así. Veamos la manera de hacerlo correctamente.

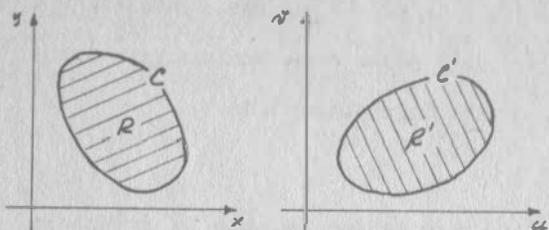


Fig. 5.9.7

Sea la integral doble

$$\iint_R f(x,y) dx dy$$

R

y sea la transformación

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{aligned} \right\} 5.9.2.1$$

tal que las parciales sean continuas y que el jacobiano

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) > 0$$

En tales circunstancias, sabemos que el mapeo es biunívoco, por lo que existirán

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned} \right\} 5.9.2.2$$

y la región "R", así como la curva "C" de la figura 5.9.7 mapearán como R' y C', respectivamente.

Hagamos "Q" tal que  $\frac{\partial Q}{\partial x} = f(x,y)$ ; entonces

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \quad 5.9.2.3$$

y podemos aplicar el teorema de Green:

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q dy \quad 5.9.2.4$$

Ahora bien, si "C" tiene como ecuaciones paramétricas

$$x=g(t)$$

$$y=h(t)$$

por (5.9.2.2), C' tendrá ecuaciones paramétricas también en términos de "t", que sería la variable de integración. Inversamente, si definimos las ecuaciones paramétricas de C', quedarán definidas las de "C" en el mismo parámetro. En pocas palabras, da lo mismo integrar sobre "C" que sobre C' y sólo habrá que poner a "dy" en términos de la nueva variable.

$$dy = \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt$$

y así

$$\oint_C Q dy = \oint_{C'} Q \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt \quad 5.9.2.5$$

Cabe aclarar que esta expresión es enteramente cierta porque hemos supuesto positivo el jacobiano de transformación; si esto no fuera así, cambiaría el sentido de recorrido de "C" a C' y habría un cambio de signo en la ecuación (5.9.2.5); pero nosotros tomaríamos el valor absoluto.

Entonces, llevando (5.9.2.5) a (5.9.2.4):

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{C'} Q \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt = \oint_{C'} \left( Q \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left( Q \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv \quad 5.9.2.6$$

Ahora podemos aplicar nuevamente el teorema de Green, para transformar nuestra última integral en circuito, en una integral doble. Nota que hay una expresión afectada por "dv"; esta expresión debemos derivarla parcialmente con respecto a "u" y

restarle la derivada parcial, con respecto a "v", de la expresión afectada por "du".

$$\oint_{c^*} \left( Q \frac{\partial Y}{\partial u} \right) du + \left( Q \frac{\partial Y}{\partial v} \right) dv = \iint_{R^*} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( Q \frac{\partial Y}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( Q \frac{\partial Y}{\partial u} \right) \right] du dv \quad (*)$$

5.9.2.7

Efectuemos las operaciones indicadas:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( Q \frac{\partial Y}{\partial v} \right) = Q \frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v}$$

$$-\frac{\partial}{\partial v} \left( Q \frac{\partial Y}{\partial u} \right) = -Q \frac{\partial^2 Y}{\partial v \partial u} - \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( Q \frac{\partial Y}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( Q \frac{\partial Y}{\partial u} \right) = \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} \quad 5.9.2.8$$

Ahora, puesto que "Q" es función de "u" y "v" a través de las intermediarias "x", "y":

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \frac{\partial Q}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v}$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial Q}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} J \left( \frac{x, y}{u, v} \right)$$

5.9.2.9

Entonces, llevando (5.9.2.9) a (5.9.2.8) y (5.8.2.7):

$$\oint_{c^*} \left( Q \frac{\partial Y}{\partial u} \right) du + \left( Q \frac{\partial Y}{\partial v} \right) dv = \iint_{R^*} \frac{\partial Q}{\partial x} J \left( \frac{x, y}{u, v} \right) du dv$$

Finalmente, si llevamos esta expresión a (5.9.2.3), teniendo en cuenta (5.9.2.6):

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R^*} f \left[ x(u, v), y(u, v) \right] J \left( \frac{x, y}{u, v} \right) du dv \quad 5.9.2.10$$

(\*) El orden de la resta es irrelevante, porque al final se toma el valor absoluto. Lo expresado arriba es correcto porque estamos suponiendo el jacobiano positivo. V.77

Ahora podemos ver por qué la integración hecha al inicio de este inciso NO dio el resultado correcto: no tomamos en cuenta el jacobiano de transformación, que es lo que permite hacer el cambio de coordenadas en una integral doble. Intentemos nuevamente, recordando que

$$J \left( \frac{x, y}{\rho, \theta} \right) = \rho$$

$$4 \iint_R (x^2 + y^2) dx dy = 4 \iint_{R^*} \rho^2 \rho d\rho d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^5 \rho^3 d\rho \right\} d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} [\rho^4]_0^5 d\theta$$

$$V = 4 \iint_R (x^2 + y^2) dx dy = 625 \left[ \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{625\pi}{2}$$

Si  $f(x, y) = 1$ , estaremos calculando un área; en tal caso:

$$A = \iint_R dx dy = \iint_{R^*} J \left( \frac{x, y}{u, v} \right) du dv \quad 5.9.2.11$$

Por el teorema fundamental del Cálculo podemos escribir también:

$$dA = J \left( \frac{x, y}{u, v} \right) du dv \quad 5.9.2.12$$

Ejemplo 5.9.4

Calcular el área de la región mostrada en la figura 5.9.3, si  $n=4$ .

Solución:

La región quedó mapeada en la figura 5.9.4 y el jacobiano calculado en el ejemplo 5.9.2. Entonces, de acuerdo con (5.9.2.11):

$$A = \iint_R dx dy = \iint_{R^*} \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \int_1^8 \left\{ \int_1^{\sqrt{u}} dv \right\} du = \frac{1}{3} \int_1^8 \left( \frac{8}{\sqrt{u}} - 1 \right) du$$

$$A = \frac{16}{3} [\sqrt{u}]_1^8 - \frac{1}{3} [u]_1^8 = \frac{32}{3} \sqrt{2} - \frac{23}{3}$$

Ejemplo 5.9.5.

Calcular el volumen bajo el paraboloides  $z=x^2+y^2$  y sobre la región mostrada en la figura 5.9.5.

Solución:

La región mapeada en la figura 5.9.6 y el jacobiano calculado en el ejemplo 5.9.3. Entonces, apliquemos (5.9.2.10).

$$V = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{R'} (x^2 + y^2) \frac{1}{2(x^2 + y^2)} du dv = \frac{1}{2} \iint_{R'} du dv$$

$$\underline{\underline{V = 1/2}}$$

Ejemplo 5.9.6

Calcular el volumen comprendido entre el paraboloides  $z=x^2+y^2$ , el plano  $z=5$  y limitado por el cilindro de generatriz paralela al eje "z", cuya intersección con el plano xy es la región de la figura 5.9.5.

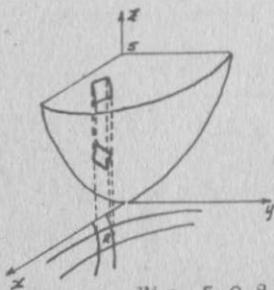


Fig. 5.9.8

Solución:

El volumen pedido se representa en la figura 5.9.8. Puesto que se trata de un volumen sobre la superficie, tendremos que calcularlo por diferencia entre el volumen del cilindro y el volumen bajo la superficie, ya calculado en el ejemplo 5.9.5.

El volumen del cilindro lo calcularemos como el área de la base por la altura, que es 5; debemos conocer el área de la base.

$$A = \iint_R dx dy = \iint_{R'} \left( \frac{x, y}{u, v} \right) du dv = \iint_{R'} \frac{1}{2(x^2 + y^2)} du dv$$

Esta vez no podemos simplificar el valor del jacobiano, por

lo que tendremos que ponerlo en términos de u, v.

$$u = x^2 - y^2 \\ v = xy ; x = \frac{v}{y} ; x^2 = \frac{v^2}{y^2}$$

Así:

$$u = \frac{v^2}{y^2} - y^2 ; uy^2 = v^2 - y^4 \quad y^2 = \frac{-u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}$$

Análogamente:

$$x^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2} \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \sqrt{u^2 + 4v^2}$$

Entonces:

$$A = \iint_{R'} \frac{1}{2(x^2 + y^2)} du dv = \iint_{R'} \frac{du dv}{\sqrt{u^2 + 4v^2}} = \int_1^2 \left\{ \int_1^2 \frac{dv}{\sqrt{u^2 + 4v^2}} \right\} du$$

$$\int_1^2 \frac{dv}{\sqrt{u^2 + 4v^2}} = \frac{1}{2} \left[ \sinh^{-1} \frac{2v}{u} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \sinh^{-1} \frac{4}{u} - \sinh^{-1} \frac{2}{u}$$

Entonces:

$$A = \frac{1}{2} \int_1^2 \sinh^{-1} \frac{4}{u} du - \frac{1}{2} \int_1^2 \sinh^{-1} \frac{2}{u} du$$

Ahora, integrando por partes:

$$\int \sinh^{-1} \frac{a}{u} du = u \sinh^{-1} \frac{a}{u} + a \sinh^{-1} \frac{u}{a} + c$$

Así, si se hacen las sustituciones, llegamos a:

$$A = \frac{1}{2} (3 \sinh^{-1} 2 - \sinh^{-1} 4 + 6 \sinh^{-1} \frac{1}{2} - 4 \sinh^{-1} \frac{1}{4} - 4 \sinh^{-1} 1)$$

$$A = 0.304$$

Por consiguiente, el volumen del cilindro vale:

$$V_c = 5 \times 0.304 = 1.52 \quad \text{y el volumen pedido:}$$

$$V = 1.52 - 0.5 = \underline{\underline{1.02}}$$

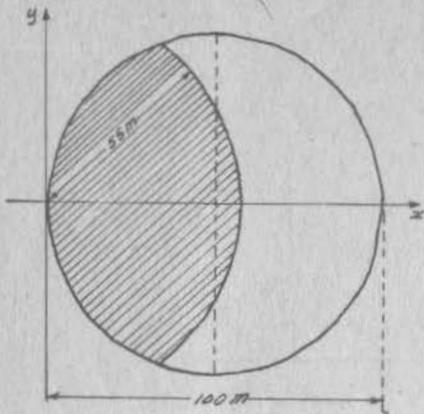


Fig. 5.9.9

Ejemplo 5.9.7

Juan y Pedro heredan a partes iguales un terreno circular de 100 m de diámetro. Juan clava una estaca en el perímetro y con una cuerda de 55 m amarra a su vaca y la deja pastar. Pedro reclama que su vaca le está invadiendo; pero Juan argumenta que su vaca no alcanza a comerse la mitad del pasto. ¿Quién tiene razón?

Solución:

Juan tendrá razón si el área "A", sombreada en la figura 5.9.9, no es mayor que la mitad del terreno; es decir si

$$A \leq \frac{2500\pi}{2}$$

Vamos a calcular esa área sombreada; aprovechando la simetría, calculemos el área sombreada "A<sub>R</sub>" arriba del eje "x":

$$A_R = \iint_R dx dy$$

Como la región es difícil de manipularse en coordenadas cartesianas, la transformaremos a coordenadas polares. Las fronteras son:

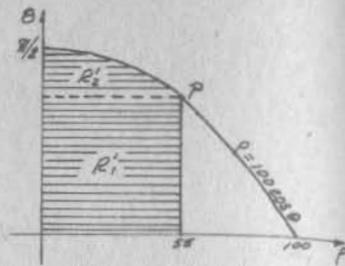


Figura 5.9.10

Fig. 5.9.10

- El eje  $x, y=0 \Rightarrow \theta=0$
- La circunferencia  $x^2 + y^2 = 55^2 \Rightarrow \rho=55$
- La circunferencia  $x^2 + y^2 - 100x = 0$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$-100x = -100\rho \cos \theta$$

$$x^2 + y^2 - 100x = \rho^2 - 100\rho \cos \theta = \rho(\rho - 100 \cos \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \rho = 100 \cos \theta$$

- El origen  $\Rightarrow \rho=0$

Todas estas curvas están dibujadas en la figura 5.9.10.

Ahora definamos R'; aunque aparentemente es más fácil definir la región en "ρ", porque la podemos definir con una sola expresión, ello implicaría integrar un "ang cos". En consecuencia, definamos la región en "θ", para lo cual deberemos encontrar el punto "P" de intersección:

$$\rho = 55$$

$$\rho = 100 \cos \theta \Rightarrow 55 = 100 \cos \theta ; \cos \theta = 0.55$$

$$\theta = 56.63^\circ = 0.9884 \Rightarrow P(55, 0.9884)$$

Entonces:

$$R' = R'_1 \cup R'_2 \quad R'_1 \{ (\rho, \theta) / 0 \leq \theta \leq 0.9884; 0 \leq \rho \leq 55 \}$$

$$R'_2 \{ (\rho, \theta) / 0.9884 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \rho \leq 100 \cos \theta \}$$

Así:

$$A_R = A_1 + A_2 = \iint_{R'_1} \rho d\rho d\theta + \iint_{R'_2} \rho d\rho d\theta$$

$$\iint_{R'_1} \rho d\rho d\theta = \int_0^{0.9884} \left\{ \int_0^{55} \rho d\rho \right\} d\theta = \frac{55^2}{2} \int_0^{0.9884} d\theta = 1495 \text{ m}^2$$

$$\iint_{R'_2} \rho d\rho d\theta = \int_{0.9884}^{\pi/2} \left\{ \int_{0.9884}^{100 \cos \theta} \rho d\rho \right\} d\theta = \int_{0.9884}^{\pi/2} \frac{1}{2} [\rho^2]_0^{100 \cos \theta} d\theta = 5000 \int_{0.9884}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$$

$$\iint_{R'_2} \rho d\rho d\theta = 2500 \int_{0.9884}^{\pi/2} d\theta + 2500 \int_{0.9884}^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta = 412 \text{ m}^2$$

$$A_R = 1495 + 412 = 1907 \text{ m}^2$$

$$A = 2A_R = \underline{\underline{3814 \text{ m}^2}} < \frac{2500\pi}{2} = 3927 \text{ m}^2$$

⇒ Juan tiene razón.

Ahora, como ejercicio, dínos de qué largo debió haber escogido la cuerda Juan para que su vaca pudiera comer exactamente la mitad del pasto.

Ejemplo 5.9.8

El graficador de banda del limnógrafo de una estación hidrométrica nos proporciona la gráfica de la figura 5.9.11, durante una avenida. La ecuación de la curva es  $4x^2 - 33x + 8y - 8 = 0$  ( $x, y$ , en cm). Se sabe que el gasto base del río varía según la ley  $x - 8y + 8 = 0$  ( $x, y$ , en cm). Si cada centímetro del eje "y" equivale a  $20 \text{ m}^3/\text{s}$  y cada centímetro del eje "x" equivale a 1 hora. ¿Cuál fue el gasto en exceso escurrido durante la avenida?

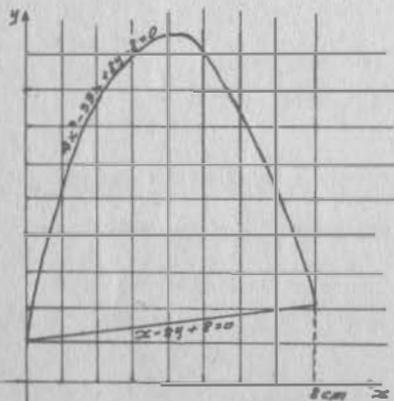


Fig. 5.9.11

Solución:

El gasto base es el caudal que escurre por un río, independientemente de la precipitación directa. El gasto en exceso es la diferencia entre el gasto total y el gasto base. Ahora bien, sabemos que

$$Q = \frac{dV}{dt}$$

Por consiguiente, el volumen se obtiene integrando el gasto o, lo que es lo mismo, obteniendo el área bajo una curva que resultaría muy parecida a la de la figura 5.9.11; pero donde los ejes fueran  $Q, t$ . Además, como nos piden el volumen en exceso, habría que restar el área bajo la curva del gasto

base, quedándonos un área como la mostrada en la figura 5.9.11, referida a los ejes ya mencionados. Estamos nuevamente ante un cambio de coordenadas:

$$t = 3600 \left( \frac{\text{seg}}{\text{cm}} \right) x$$

$$Q = 20 \left( \frac{\text{m}^3/\text{s}}{\text{cm}} \right) y$$

$$J\left(\frac{t, Q}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} 3600 & 0 \\ 0 & 20 \end{vmatrix} = 72000 \text{ m}^3/\text{cm}^2$$

Así:

$$V = \iint_R J\left(\frac{t, Q}{x, y}\right) dx dy = 72000 \iint_R dx dy$$

Como

$$R = \left\{ (x, y) / 0 \leq x \leq 8; \frac{1}{8}x + 1 \leq y \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{33}{8}x + 1 \right\}$$

Entonces

$$V = 72000 \int_0^8 \left\{ \int_{\frac{x}{8} + 1}^{-\frac{x^2}{2} + \frac{33}{8}x + 1} dy \right\} dx = 72000 \int_0^8 \left( -\frac{x^2}{2} + 4x \right) dx$$

$$V = \underline{\underline{3 \cdot 072,000 \text{ m}^3}}$$

### 5.10) Área de una Superficie Alabeada

Según el diccionario, al referirnos a una superficie alabeada nos estamos refiriendo a una superficie que no queda en un plano.

Si recordamos nuestro problema 5.0.1, supongamos que ahora nos interesa obtener el área de la superficie alabeada descrita en ese problema y que representamos en la figura 5.10.1.

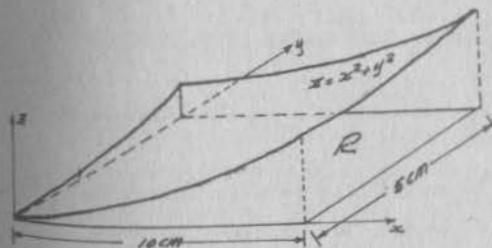


Fig. 5.10.1

Evidentemente, el área de esa superficie será mayor que la de la base, o sea, mayor que  $10 \times 5 = 50 \text{ cm}^2$

Para estimarla, necesitaríamos que esa superficie fuese plana, lo cual no podremos lograrlo (\*); pero sí podemos construir un poliedro que se aproxime a la superficie. Dividamos primeramente nuestra región "R" en cuatro subregiones; escogamos un punto (p.ej. el punto medio) en cada subregión y llevémoslo a la superficie; por ese punto construimos el plano tangente y obtenemos un poliedro; por ese punto construimos el plano tangente y obtenemos un poliedro como el que se muestra en la figura 5.10.2.

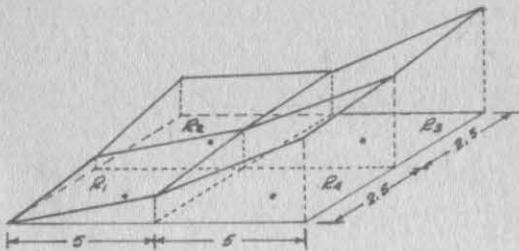


Fig. 5.10.2

Ahora bien, si observamos esta figura, nos damos cuenta de que el área de cada subregión viene a ser la proyección del área del plano correspondiente; pero pa

ra calcular ésta última, tendríamos que conocer cuál es la inclinación de cada superficie. Si recordamos nuestros conocimientos de Geometría Analítica en el espacio, así como lo que vimos en el Capítulo Dos, la inclinación de un plano la podemos conocer si conocemos la normal al mismo. Si la superficie está expresada como  $z=f(x,y)$ , el vector normal será

$$\vec{n} = \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right)$$

Si aislamos uno de los prismoides, tendremos: (Fig. 5.10.3)

(\*) Sólo se puede lograr si la superficie es desarrollable.  
¿Has desforrado una pelota de beisbol? Hazlo y notarás que es imposible que las partes del forro se aplanen.

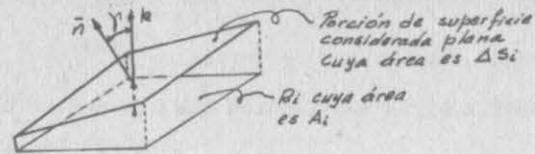


Fig. 5.10.3

Para obtener la proyección de  $\Delta S_i$  en  $R_i$  tenemos, si llamamos "γ" al ángulo que forma " $\vec{n}$ " con la vertical:

$$A_i = \Delta S_i \cos \gamma \quad ; \quad \Delta S_i = \frac{A_i}{\cos \gamma}$$

Pero además sabemos que

$$\cos \gamma = \frac{-1}{|\vec{n}|} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$$\cos \gamma = - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

Entonces, con relación a nuestro problema, podemos formar la siguiente tabla; recordemos que  $z=x^2 + y^2$ ;  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

Subregión	Area	Punto (cm)			n̄			n̄	cos γ	A <sub>i</sub> / cos γ = ΔS <sub>i</sub>
		x	y	z	A	B	C			
R <sub>1</sub>	12.5	2.5	1.25	2.795	5	2.5	-1	5.67	0.1763	70.90
R <sub>2</sub>	12.5	2.5	3.75	4.506	5	7.5	-1	9.06	0.1103	113.32
R <sub>3</sub>	12.5	7.5	3.75	8.385	15	7.5	-1	16.80	0.059	211.86
R <sub>4</sub>	12.5	7.5	1.25	7.60	15	2.5	-1	15.21	0.065	192.30

$$S_{total} = 588.38 \text{ cm}^2$$

Es claro que a medida que disminuamos el tamaño de las  $R_i$ , aumentaremos la precisión de nuestra estimación y ésta será más precisa a medida que el área de las " $R_i$ " tienda a cero; o sea, estamos nuevamente en el caso de tener que realizar una suma de áreas cuando el área de cada una tiende a cero

(o la norma de cada celda tiende a cero).

En general, si  $z=f(x,y)$  es una función que nos define una superficie localizada sobre una región "R" del plano xy, el área de esa porción de superficie la podemos obtener de la siguiente forma:

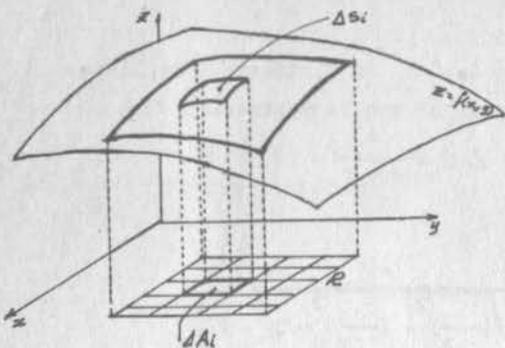


Fig. 5.10.4

Para calcular el área de la superficie alabeada podemos sumar las antiproyecciones de las "n" subregiones en los correspondientes planos tangentes a la superficie y llamar  $\Delta S_i$  al área de la superficie que está sobre la iésima subregión. Como hay "n" subregiones, la suma

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_i$$

es una aproximación a la medida "S" de la porción de superficie buscada.

Para calcular  $\Delta S_i$ , consideremos la figura 5.10.5. Conocemos " $\Delta A_i$ " y a partir de ella podemos conocer " $\Delta S_i$ "; lo único que necesitamos hacer es antiproyectar " $\Delta A_i$ " en " $\Delta S_i$ ", lo cual lograremos si conocemos el ángulo

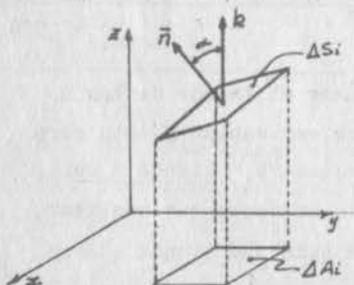


Fig. 5.10.5

que forman entre sí ambas superficies.

Si " $\vec{n}$ " es la normal a  $\Delta S_i$ , ésta estará formando un ángulo " $\gamma$ " con respecto al eje "z" o, si consideramos vectores, con respecto a "k"; entonces:

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \Delta S_i \cos \gamma \\ \Delta S_i &= \frac{\Delta A_i}{\cos \gamma} \end{aligned} \quad 5.10.0.1$$

El vector  $\vec{n}$ , si recordamos lo visto en el Capítulo Dos, lo podemos obtener con las derivadas parciales de la función en el punto, o sea

$$\vec{n} \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right)$$

Entonces el ángulo " $\gamma$ " lo podremos calcular:

$$\cos \gamma = \frac{-1}{|\vec{n}|} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad 5.10.0.2$$

Ahora sustituimos (5.10.0.2) en (5.10.0.1), teniendo en cuenta, además, que  $\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$

$$\Delta S_i = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \Delta x_i \Delta y_i$$

Al sumar todas estas áreas

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \Delta x_i \Delta y_i \quad 5.10.0.3$$

obtenemos la suma de Riemann mostrada. Si todas las sumas de este tipo que podamos formar convergen cuando la norma de la red tiende a cero, se dice que la superficie es SUAVE y que su área vale el número al cual convergen las sumas (5.10.0.3)

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx \, dy \quad 5.10.0.4$$

que es la expresión que nos permitirá calcular el área de la superficie alabeada.

Esta fórmula la hacemos extensiva a regiones cualesquiera mediante las definiciones (5.5.1) y (5.5.2).

Ejemplo 5.10.1.

Calcular el área de la superficie del cilindro  $x^2 + z^2 = 16$  limitada por los planos  $x=0$ ,  $x=3$ ,  $y=0$ ,  $y=3$ . (Fig. 5.10.6).

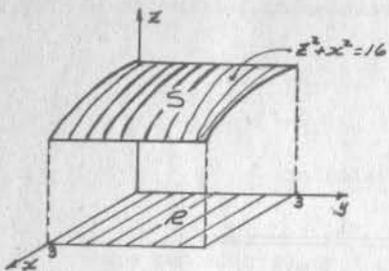


Fig. 5.10.6

Solución:

Podemos empezar por definir "R"

$$R \{ (x,y) / 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 3 \}$$

Ahora:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2}{16-x^2}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$$

$$1 = \frac{16-x^2}{16-x^2}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 = \frac{16}{16-x^2}$$

$$S = \iint_R \frac{4 \, dx \, dy}{\sqrt{16-x^2}} = 4 \int_0^3 \left\{ \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} \right\} dy = 4 \int_0^3 \text{ang} \, \text{sen} \frac{3}{4} \, dy$$

$$S = 3.392 \int_0^3 dy = \underline{\underline{10.18}}$$

### 5.11) Áreas de Superficie Alabeada en Coordenadas Curvilíneas

En el inciso 3.6.1 vimos que una superficie siempre podría expresarse por medio de su ecuación vectorial.

$$\vec{r} = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k} \quad 5.11.0.1$$

o, lo que es lo mismo, mediante sus ecuaciones paramétricas:

$$x = x(u,v)$$

$$y = y(u,v)$$

$$z = z(u,v)$$

Vimos además que, bajo ciertas condiciones, esta representación implicaba un mapeo punto a punto en el plano uv, con lo que una porción cualquiera de la superficie, se podrá mapear como una región en el plano uv.

Ejemplo 5.11.1

Dibujar, en el plano  $\psi, \theta$ , la porción de superficie de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ , comprendida entre las intersecciones de dicha esfera con el cilindro  $x^2 + y^2 - 5y = 0$  y con el plano yz (Ver figura 3.6.16).

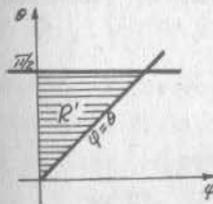


Fig. 5.11.1

Solución:

La primera curva de intersección la representamos ya en el ejemplo 3.6.4. Para representar la segunda, actuamos de manera análoga.

Aplicamos las ecuaciones de transformación al plano yz:

$$x=0 = 5 \, \text{sen} \psi \, \text{coa} \, \theta$$

Puesto que  $\text{sen} \psi \neq 0$ :

$$\text{coa} \, \theta = 0 \implies \theta = \pi/2 \text{ recta paralela eje } \psi$$

Nos falta una curva para cerrar la región; pero la frontera

de la porción de superficie analizada comprende al polo de la esfera, que ya vimos (Ejemplo 3.6.3) que es un punto singular, donde

$$\psi = 0 \quad \text{eje } \theta$$

Aquí pues, la región pedida (Fig. 5.11.1) se define analíticamente:

$$R' \{ (\psi, \theta) / 0 \leq \theta \leq \pi/2 ; 0 \leq \psi \leq \theta \}$$

Ahora bien ¿qué utilidad tiene esto en el cálculo de áreas de superficies alabeadas? Respondamos encontrando el área de la porción de superficie descrita en el ejemplo 5.11.1.

Ejemplo 5.11.2.

Calcular el área de la porción de la superficie de esfera descrita en el ejemplo 5.11.1.

Solución:

Desde luego se nota que si queremos emplear la ecuación (5.10.0.4), tendríamos que integrar en una región semicircular, que ya hemos visto que resulta muy difícil de manejar. En cambio, la región que acabamos de definir es muy sencilla; integremos entonces en ella, pero no olvidemos el jacobiano de transformación.

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx \, dy$$

$$= \iint_{R'} J\left(\frac{x, y}{\psi, \theta}\right) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \, d\psi \, d\theta$$

Ahora

$$J\left(\frac{x, y}{\psi, \theta}\right) = 25 \operatorname{sen} \psi \cos \psi \quad (\text{ver ejemplo 3.6.3})$$

$$\text{Por otra parte } z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2-y^2}} \quad ; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2}{25-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{25-x^2-y^2}} \quad ; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{y^2}{25-x^2-y^2}$$

$$1 = \frac{25-x^2-y^2}{25-x^2-y^2}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}{25-x^2-y^2} = \frac{25}{25-x^2-y^2}$$

Al poner esta cantidad en términos de las variables de integración:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 = \frac{25}{25-25 \operatorname{sen}^2 \psi} = \frac{25}{25 \cos^2 \psi} = \sec^2 \psi$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sec \psi$$

Entonces

$$S = \iint_{R'} 25 \operatorname{sen} \psi \cos \psi \sec \psi \, d\psi \, d\theta = 25 \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{\theta} \operatorname{sen} \psi \, d\psi \right\} d\theta$$

$$S = 25 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos \theta) \, d\theta = 25 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

En general, si deseamos calcular el área de una porción de la superficie (5.11.0.1) que mapea en el plano  $uv$  como  $R'$  (Fig. 5.11.2), haremos:

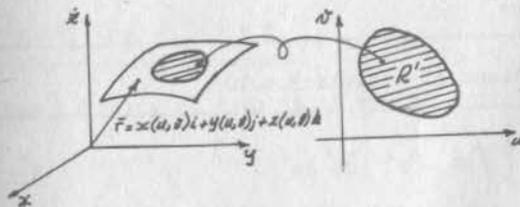


Fig. 5.11.2

$$S = \iint_{R'} J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \, du \, dv$$

Recordemos que ya hemos denominado

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = C$$

podemos introducir este jacobiano al radical y obtener

$$S = \iint_{R'} \sqrt{c^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + c^2} \, du \, dv$$

$$S = \iint_{R'} \sqrt{\left(c \frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(c \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + c^2} \, du \, dv$$

Ahora

$$c \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}\right) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Sumamos y restemos  $\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}$ :

$$c \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}\right) \frac{\partial y}{\partial v} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}\right) \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$c \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = -A$$

Análogamente:

$$c \frac{\partial z}{\partial y} = J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = B$$

Así

$$S = \iint_{R'} \sqrt{A^2 + B^2 + c^2} \, du \, dv \quad 5.11.0.2$$

o bien, si recordamos el ejemplo 3.6.10:

$$S = \iint_{R'} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \quad 5.11.0.3$$

donde, como se asienta en el citado ejemplo:

$$E = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\right)^2 ; \quad G = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right)^2 ; \quad F = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$$

Como ejercicio, resuelve el ejemplo 5.11.2, utilizando las ecuaciones (5.11.0.2) y (5.11.0.3).

Ejemplo 5.11.3.

Calcular el área sobre la superficie de la esfera de radio "a", comprendida entre los meridianos  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$  y los paralelos  $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ .

Solución:

La porción de referencia mapea como se ve en la figura

5.11.3:

$$R' = \{(\varphi, \theta) / \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 ; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$$

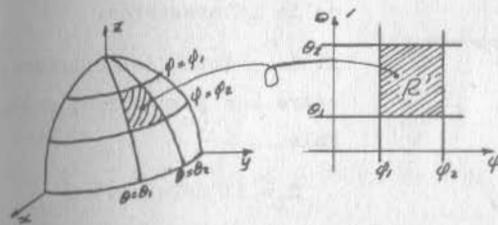


Fig. 5.11.3

Ahora, al resolver el ejercicio que te acabamos de indicar obtuviste

$$\sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin \varphi$$

Entonces

$$S = \iint_{R'} a^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = a^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi \, d\varphi \right\} d\theta = a^2 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$$

$$S = a^2 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) (\theta_2 - \theta_1)$$

Si queremos calcular el área de la semiesfera:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi/2, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 2\pi$$

$$S = a^2 (1 - 0) (2\pi - 0) = \underline{\underline{2\pi a^2}} \quad \text{resultado que ya conocíamos.}$$

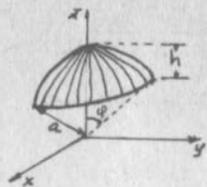


Fig. 5.11.4

Como ejercicio, utiliza el resultado obtenido para calcular el área del casquete esférico de la figura 5.11.4, poniendo el resultado, tanto en términos de "u" como en términos de "h".

Ejemplo 5.11.4.

Calcular el área del cilindro  $x^2 + z^2 = a^2$ , limitada por el cilindro  $y^2 + z^2 = a^2$ .

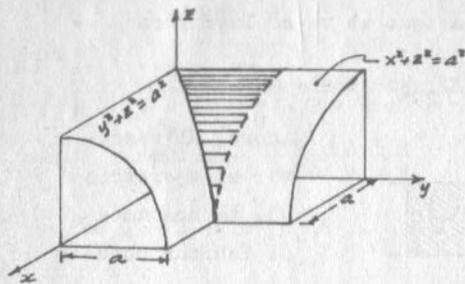


Fig. 5.11.5

Solución:

En la figura 5.11.5 se representa la octava parte de la intersección.

El área total del cilindro entre los planos  $x=a$ ,  $x=-a$ , vale

$$S_1 = 2\pi a \cdot 2a = 4\pi a^2$$

Para obtener el área pedida debemos restar a "S<sub>1</sub>" ocho veces el área de la porción sombreada, que es lo que queda fuera de la intersección.

El cilindro tiene por ecuación vectorial:

$$\vec{r} = a \cos \theta \mathbf{i} + u \mathbf{j} + a \sin \theta \mathbf{k}$$

Las fronteras son las intersecciones con las superficies

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= a \\ y^2 + z^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Las cuales mapean en el plano  $\theta u$  como se ve a continuación:

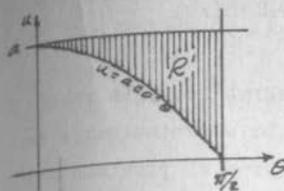


Fig. 5.11.6

$$x=0 = a \cos \theta \quad \cos \theta = 0 \quad \theta = \pi/2$$

$$y=a=u$$

$$y^2 + z^2 = a^2 = u^2 + a^2 \sin^2 \theta$$

$$u^2 = a^2 - a^2 \sin^2 \theta = a^2 \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow u = a \cos \theta$$

$$R = \{ (\theta, u) / 0 \leq \theta \leq \pi/2 ; a \cos \theta \leq u \leq a \}$$

(Fig. 5.11.6)

Por otra parte:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \mathbf{j} ; \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right)^2 = 1 = E$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -a \sin \theta \mathbf{i} + a \cos \theta \mathbf{k} ; \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right)^2 = a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta = a^2 = G$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = 0 = F$$

Entonces:

$$\begin{aligned} S_2 &= 8 \iint_{R'} \sqrt{a^2 \cdot 1 - 0} \, du \, d\theta = 8a \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_{a \cos \theta}^a du \right\} d\theta \\ &= 8a \int_0^{\pi/2} (a - a \cos \theta) \, d\theta = 8a^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) = 4\pi a^2 - 8a^2 \end{aligned}$$

y la superficie pedida:

$$S = S_1 - S_2 = \underline{\underline{8a^2}}$$

5.12 Integral triple en coordenadas cartesianas.

5.12.1 Introducción.

Viste, cuando estudiaste C.D.I., que la integral sencilla resuelve, entre otros, el problema del área bajo la curva; acabamos de ver que la integral doble resuelve, entre otros, el problema del volumen bajo una superficie. ¿En que nos podrá ayudar entonces la integral triple?

Veamos nuestros conocimientos anteriores desde un punto de vista más general: en la integral sencilla, tomamos límite de una suma de áreas rectangulares; cada una de esas áreas se obtiene multiplicando el valor de la función que representa la curva en un punto, por la amplitud de un intervalo variable independiente, intervalo dentro del cual se encuentra el punto.

(Ver figura 5.12.1)

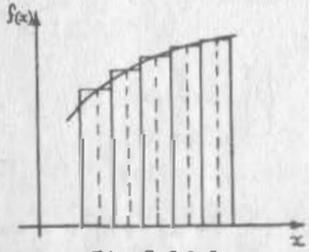


Fig. 5.12.1

En la integral doble, tomamos el límite de una suma de volúmenes prismáticos y cada uno de esos volúmenes se calcula multiplicando el valor de la función, en un punto cualquiera dentro de la base del prisma, por el área de esa base. (Ver figura 5.12.2)

Entonces en forma similar en la

integral triple tendremos que tomar un límite de productos, cada uno de los cuales formados como sigue: el valor de una función, ahora de tres variables, tomada en un punto del espacio, dentro de un prisma, por el volumen de ese prisma, que será el producto de los incrementos de las tres variables. (Ver figura 5.12.3)

Ahora la función, por ser tres variables, no es susceptible de representarse geoméricamente; pero nosotros sabemos que una función de tres variables tiene distintas interpretaciones físicas, como la que vamos a ver en el siguiente problema.

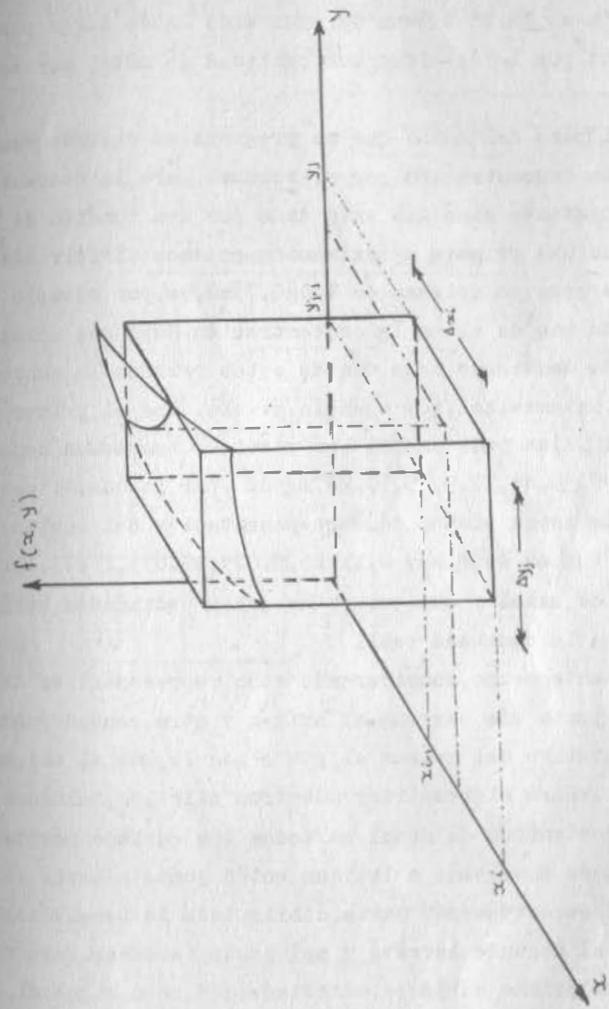


Fig. 5.12.2

5.12.2 Problema

En un bloque de roca, extraído de una mina, la concentración de metal obedece a la ley  $C = 3X + 2Y + Z$  donde "C" está en  $\text{mg}/\text{dm}^3$  si X, Y, Z están en dm. El bloque de roca mide 2m de largo por 1.5 m de ancho por 1m de alto. ¿Qué cantidad de metal hay en ese bloque?

Discusión.- El peso del metal que se pregunta se obtiene como producto de la concentración por el volumen; pero la concentración no es constante sino que está dada por una función de tres variables. Como una primera aproximación podemos dividir nuestro bloque de roca en prismas de  $1.0 \times 0.75 \times 0.5 \text{ m}$ , por ejemplo y valuar en cada uno de ellos la concentración. Será una aproximación, por que dentro de cada uno de estos prismas la concentración no es constante; así, por ejemplo, si aislamos el primer prisma (figura 5.12.4) en cada uno de los vértices tendremos concentraciones de 0, 30, 45, 15, 5, 35, 50, 20  $\text{mg}/\text{dm}^3$ , por lo que, si escogemos algunos de estos puntos como representativo del cubito, podremos decir que en éste, hay 0, 11.25, 5.625, 16.875, 1.875, 13.125, 7.5, 18.75 gr de metal y cualquiera de estas cantidades será una aproximación a la cantidad real.

Hagamos dos tanteos: uno, considerando como representativo de cada prisma al punto más cercano al origen y otro, considerando como representativo del prisma el punto más lejano al origen. Primer tanteo.- Para sistematizar nuestros cálculos, valúemos primero los contenidos de metal en todos los cubitos adyacentes al eje X; después pasaremos a los que están junto a éstos, en la base y así sucesivamente hasta cubrir toda la base. Pasaremos entonces al segundo estrato y así hasta terminar. Para distinguir de qué prisma hablamos, denominémosle como sigue: al cubo adyacente al origen le llamaremos el (1,1,1); al que le sigue en dirección longitudinal, le llamaremos el (2,1,1) para terminar con la primera hilera de prismas longitudinal; la hilera

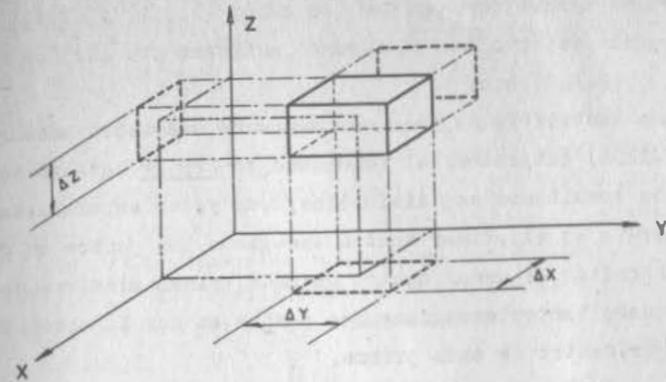


FIGURA 5.12.3

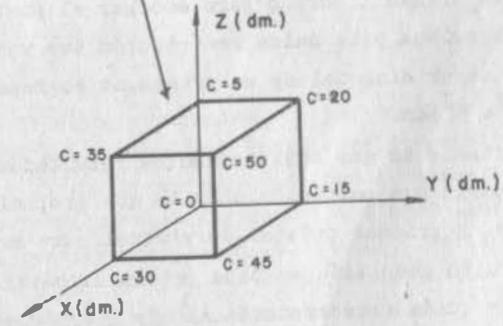
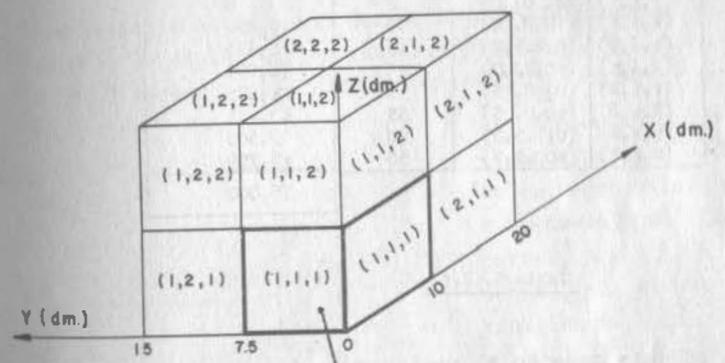


FIGURA 5.12.4

adyacente estará formada por los cubos (1,2,1) y (2,2,1).

El segundo estrato estará formado, análogamente por los cubos (1,1,2), (2,1,2) etc.

Segundo tanteo.-Te dejamos que, mediante una tabla análoga a la (5.12.1) compruebes el resultado de 225 gr totales de metal. Los resultados son disímbolos, como ya se esperaba; tanto más porque en el primer tanteo escogimos los puntos en que la concentración es menor dentro de cada prisma mientras que, en el segundo tanteo, escogimos los puntos en que la concentración es mayor, dentro de cada prisma.

Prisma	Pto. repre- sentativo	$C=3x+2y+z$ (mg/dm <sup>3</sup> )	Peso metal (gr)
(1,1,1)	(0, 0, 0)	0	0
(2,1,1)	(10, 0, 0)	30	11,250
(1,2,1)	(0, 7.5, 0)	15	5,625
(2,2,1)	(10, 7.5, 0)	45	16,875
(1,1,2)	(0, 0, 5)	5	1,875
(2,1,2)	(10, 0, 5)	35	13,125
(1,2,2)	(0, 7.5, 5)	20	7,500
(2,2,2)	(10, 7.5, 5)	50	18,750
			75,000

Tabla 5.12.1

Supón que en este momento el profesor le dijera al grupo: "Muchachos, cada quién va a resolver aproximadamente el problema. Quedan en libertad para dividir la roca en cubos y/o prismas. También tienen libertad para escoger el punto que quieran dentro del prisma y la única restricción que van a respetar es que la mayor diagonal de un prisma, no sobrepase  $13.46 (= 10^2 + 7.5^2 + 5^2)$  dm."

Lo más probable es que hubiera tantos resultados como alumnos, pues uno, haría una partición como la que propusimos; otro la haría a base de prismas de  $7 \times 5 \times 1$  dm y aquel otro usaría prismas de  $1 \times 7 \times 5$ . Quién escogería en cada prisma al vértice más cercano al origen y quién seleccionaría al más alejado, en tanto que el

alumno de más ella escogería, ora el más cercano, ora el más alejado, ora un punto interior.

Una vez que tuvieramos reunidos todos los resultados disímbolos, observaríamos una cosa curiosa: ningún resultado sería mayor de 225 gr. y ningún resultado sería menor a 75 gr. ¿Por qué? Porque para mantener la restricción de la mayor diagonal, tuvimos necesariamente que, o bien respetar los prismas que habíamos formado o bien partirlos. Para explicar mejor lo que queremos decir, suponemos que en vez del prisma que hemos llamado (1,1,1), queremos poner un prisma de  $11 \times 7.5 \times 1$  (ver fig. 5.12.4.). Esto significa que al prisma original lo hemos partido en dos partes que llamaremos A y B. Volumen de B =  $75 \text{ dm}^3$ ; volumen de A =  $300 \text{ dm}^3$ .

Ahora escogamos un punto dentro de A; seleccionamos el punto (0,0,1) donde la función adquiere el menor valor dentro de A, que es de  $1 \text{ mg/dm}^3$ . Así, A contribuye a la nueva suma con 300 mg.

Al escoger un punto en B, escogemos el origen, donde C adquiere el menor valor, que es de 0, a la nueva suma. Entre ambas partes, A y B, contribuyen con 300 mg, que es mayor que la contribución anterior del prisma (1,1,1). Este razonamiento lo podemos hacer a la inversa, refiriéndonos al valor mayor de la función y llegar a la conclusión de que la nueva contribución es menor que la antigua.

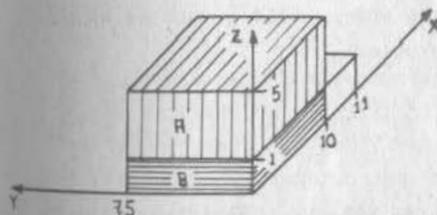


Fig. 5.12.4'

Y extrapolando el mismo razonamiento a los demás prismas, explicamos el porqué de ese curioso comportamiento de resultados. Sigamos suponiendo: ahora el profesor pide que se resuelva nuevamente el problema en forma aproximada; deja las mismas libertades que antes; pero la restricción la hace ahora más severa: la mayor diagonal no debe exceder de 1 dm. Nuevamente se obtendrían tantos resultados como alumnos; pero ahora observaríamos que la diferencia entre el mayor y el menor sería inferior a 150 gr, que es la

diferencia que obtuvimos antes. ¿A que se debe esto? A la propiedad que tienen las funciones continuas consistente en que, al valorarlos en dos puntos diferentes, estos valores serán tanto más parecidos cuanto más cerca estén los puntos entre sí. Como los puntos donde la función adquiere sus valores mayor y menor dentro de cada prisma están separados por su diagonal y ahora ésta se acorta, es natural que todos los resultados se parezcan más.

Y que pasará si la diagonal se acortara cada vez más? Los resultados, aunque siguieran siendo disímbolos se parecieran cada vez mas; pero al parecerse cada vez más, quiere decir que se están aglutinando alrededor de un número. Ese número es justamente el que nos describe el peso del metal en la roca.

¿Cómo encontrar ese número? Hay varias maneras, que veremos más adelante. Por ahora te vamos a sugerir una, que surge directamente de la discusión anterior: divide la roca en cubos de  $h \times h \times h$ . Escoge el punto más cercano al origen, dentro de cada cubo; valúa la función ahí, multiplica por  $h^3$  y suma (tendrás que auxiliar de la Inducción Matemática). Esta suma te debe dar 150 000-9000 h (mg). Al hacer que "h" tienda a cero, esto es, al hacer que la diagonal tienda a cero, obtienes 150 000 mg = 150 gr que es el número que resuelve exactamente el problema.

5.12.3 Definiciones.

Cuando en el problema que acabamos de resolver, decidimos dividir la roca en prismas, realizamos lo que formalmente se conoce como ESTABLECER UNA RED. Esta operación ha hicimos con el objeto de evaluar el contenido de un cierto metal en la roca y quedamos en que era evidente que, la precisión del cálculo sólo podía depender del tamaño de los prismas y no de sus dimensiones relativas; por lo mismo, siempre que queramos establecer una red, no tendremos restricciones de ese tipo. Las reales mostradas en la figura (5.12.5) son igualmente válidas.

A cada uno de los prismas que resultan de la operación anterior se les denomina CELDAS DE RED. De todas ellas, habrá una que tenga la mayor diagonal; a esta diagonal la llamaremos NORMA de la red y la representaremos con la letra griega "Δ"

La red la establecimos en la roca, que matemáticamente puede definirse como un conjunto conexo de puntos; esto es, una región. Si es un conjunto, podremos definirlo como tal; en nuestro caso:

$$V \{ (x,y,z) / 0 \leq x \leq 20; 0 \leq y \leq 15; 0 \leq z \leq 10 \}$$

que se lee, como tú recordarás: Conjunto V de puntos definidos por (x,y,z), tales que x se encuentra en el intervalo 0,20 , etc.

Sigamos recapitulando en lo que hicimos para resolver nuestro problema: una vez que teníamos establecida la red, escogimos un punto en cada celda y en cada uno de éstos valuamos la concentración.

Esto equivale a aproximarnos a la función mediante una escalonada, como hiciste en la integral sencilla y doble, nada más que ahora no podemos visualizar la escalera.

La única restricción que debemos respetar en esta operación es -- que el punto se encuentre dentro de la celda, incluyendo sus fronteras; vimos, recuerda, que el resultado final no debía depender de los puntos que escotiéramos. Una vez escogido el punto en cada celda y valuada la función en él, lo multiplicamos por el volumen de la celda; esto nos dió una aproximación de la cantidad de metal en cada celda.

El siguiente paso fue sumar todos los productos; esta suma, que es una aproximación a la cantidad total, depende del tamaño de las celdas; esto es, de la norma de la red; pero depende también de cómo se seleccionaron los prismas y de cuáles puntos se eligieron en cada celda; sin embargo, vimos que las diferencias inherentes a las distintas elecciones al respecto tendían a desaparecer a medida que la norma de la red se hacía más pequeña, y que las sumas se aglutinaban alrededor de un número que, en el caso del ejemplo, resultó ser 150 gr.

Las funciones que tienen esta propiedad, se dice que son TRIPLEMENTE INTEGRABLES en la región correspondiente. En este caso, diremos que la función  $C = 3x + 2y + z$  es triplemente integrable en V. Al número que resulte del procedimiento descrito se le denomina INTEGRAL TRIPLE de la función, en la región definida. En este caso, 150 gr es la integral triple de la función C en la región V y anotaremos:

$$150gr = \iiint_V C dx dy dz$$

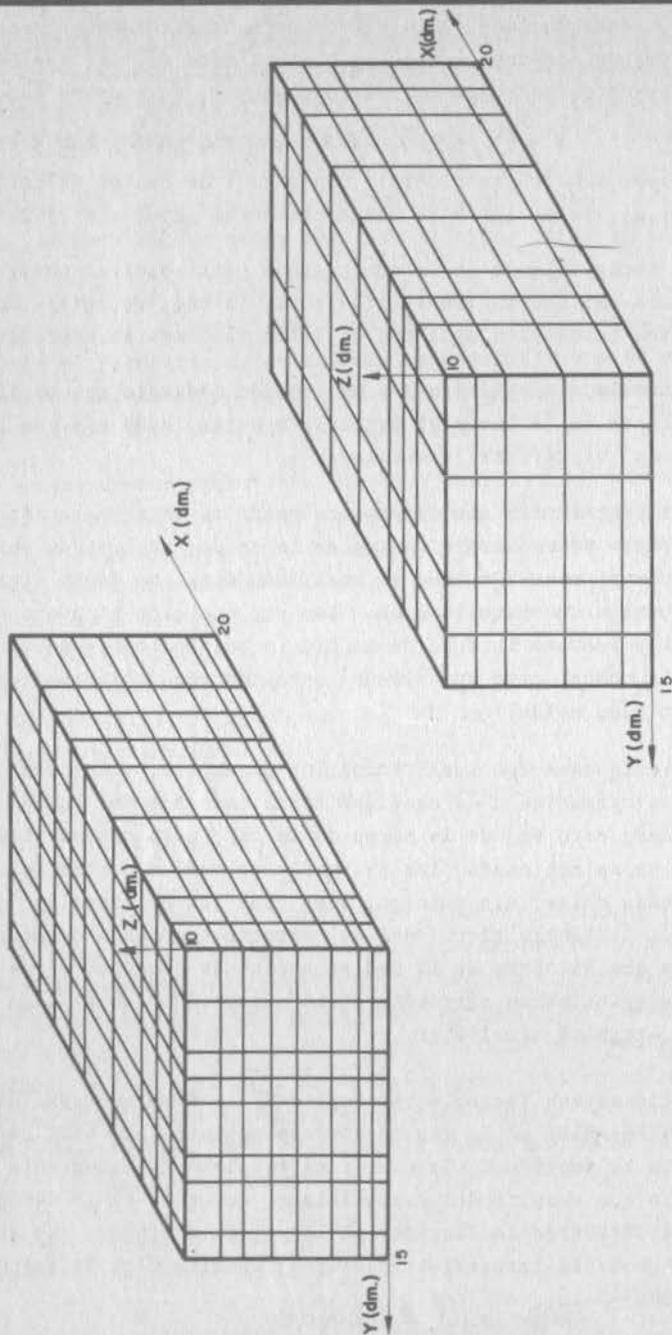


FIGURA 5.12.5.

Formalmente, diremos:

Definición 5.12.1 Si dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que

$$\left| \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - I \right| < \epsilon \quad \text{cuando } \Delta < \delta \quad \dots (5.12.3.1)$$

se dice que la función  $f(x, y, z)$  es integrable en la región y que el número "I" es la integral triple de  $f(x, y, z)$  en tal región.

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \quad \dots (5.12.3.2)$$

Ya te diste cuenta de la gran semejanza que existe entre la expresión (5.12.3.1) y la definición de límite; de ahí que suele escribirse:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \quad (5.12.3.3) \end{aligned}$$

donde  $(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$  son las coordenadas del punto elegido en cada celda; pero también te habrás dado cuenta de que no se trata de un límite ordinario. En efecto, en el límite ordinario, el valor del término en valor absoluto, depende exclusivamente del valor que se asigne a la variable; en cambio, en la expresión (5.12.3.1) para un mismo valor de " $\Delta$ ", ya vimos que puedes obtener una infinidad de valores para el término en valor absoluto. De ahí que no podemos usar simplemente todas las propiedades de los límites ordinarios; por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

en cambio:

$$\iiint_V f(x, y, z)g(x, y, z) dx dy dz \neq \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz$$

Si estás consciente de esta diferencia, puedes utilizar la expresión (5.12.3.3) como una forma abreviada de definir la integral triple.

5.12.4 Existencia de la Integral Triple.

No todas las funciones tienen la propiedad de ser integrables en una región; por consiguiente, conviene puntualizar cuáles tienen esa propiedad.

Cuando analizamos la función "C", vimos que su continuidad implicaba que era integrable. ¿Serán integrables las funciones continuas? Veámoslo:

Consideremos una región prismática cualquiera:

$$V \{ (x,y,z) / a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; e \leq z \leq f \}$$

y la función  $f(x,y,z)$  continua en  $V$ . Establezcamos una red cualquiera en  $V$ , de norma " $\Delta$ ".

Ahora recordemos el teorema Weierstrass que viste ya en Cálculo Diferencial e Integral y volvimos a usar cuando estudiamos la integral doble; con este teorema en la mano podemos afirmar que hay un valor de la función dentro de la celda  $(i,j,k)$  que no es superado por algún otro dentro de la misma celda y que llamamos  $M_{ijk}$ . Inversamente, afirmaremos que existe, dentro de esa celda otro valor,  $m_{ijk}$  que no supera a algún otro dentro de la celda en cuestión.

Entonces, dentro de las infinitas posibilidades de escoger un punto dentro de la celda  $(i,j,k)$ , escojamos aquél en el cual el valor de la función es justamente  $M_{ijk}$  y procedemos en forma análoga en todas las celdas. Al sumar, tendremos:

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l M_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \dots \dots \dots (5.12.4.1)$$

¿Qué pasará con esta suma si disminuimos la norma? Para hacerlo tendremos que dividir cuando menos una de las celdas; pero como esto lo tenemos que hacer con un plano, en realidad tendremos que dividir toda una "pared" de celdas. (Fig. 5.12.6). Analicemos una de las celdas divididas (Fig. 5.12.6)

Llamemos  $M_{ijk}$  al valor de la función que no es superado por otro dentro de la parte A y  $m_{ijk}$  a su análogo en la parte B.

Evidentemente:

$$M_{ijk} \leq M_{ijk}$$

$$m_{ijk} \leq m_{ijk}$$

Si el volumen de A es  $\Delta V_{ijk}^A$  y el volumen de B es  $\Delta V_{ijk}^B$  entonces la celda  $(i,j,k)$  contribuirá a la nueva suma con:

$$M_{ijk}^A \Delta V_{ijk}^A + M_{ijk}^B \Delta V_{ijk}^B \leq M_{ijk} \Delta V_{ijk}^A + M_{ijk} \Delta V_{ijk}^B$$

$$\leq M_{ijk} (\Delta V_{ijk}^A + \Delta V_{ijk}^B) = M_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

De esta manera, la contribución de cada celda a la suma "S" disminuye (o en algún caso particular permanece igual) al ser partida; así, podemos afirmar que, si disminuimos la norma de la red, la suma "S", formada como se explicó anteriormente, disminuirá. (Permanecerá igual si  $f(x,y,z) = cte$ )

En forma inversa, con la red original de norma " $\Delta$ ", podríamos escoger los puntos  $m_{ijk}$  y formar la suma

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l m_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \dots \dots \dots (5.12.4.2)$$

y podremos demostrar que, si la norma disminuye, "S" aumenta, o al menos queda igual.

Pero si "s" aumenta y "S" disminuye, cuando disminuimos la norma ¿Cabría la posibilidad de que "S" se volviese mayor que "s"? No puesto que  $m_{ijk}$  nunca podrá ser mayor que  $M_{ijk}$ . Por la misma razón, cualquier suma que se intente, escogiendo puntos diferentes de los indicados se encontrará forzosamente entre los valores de "S" y "s"

Ahora bien, como decíamos hace poco, en toda función continua, dos valores de ella, valuados en puntos diferentes, se parecen tanto más cuando más cercanos estén los puntos.  $M_{ijk}$  y  $m_{ijk}$  son dos valores de la función  $f(x,y,z)$  valuados en dos puntos diferentes de la misma celda; cuando la diagonal de ésta tiende a cero, ambos puntos tienden a acercarse, por lo que la diferencia entre ambos valores tiende a desvanecerse. Matemáticamente expresamos esto:

$$M_{ijk} - m_{ijk} < \epsilon > 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta < \delta > 0 \quad (5.12.4.3)$$

Ahora, al restar miembro a miembro (5.12.4.1) y (5.12.4.2):

$$S - s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l (M_{ijk} - m_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

y, al tomar en cuenta (5.12.4.3):

$$\int - \int < \epsilon \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \epsilon \quad \text{Vol. de la región}$$

Toda vez que el volumen de la región es finito, podremos hacer la diferencia  $S$ -s tan pequeña como nosotros queramos y sin que se vuelva negativa; esto quiere decir que están convergiendo a un número y, por consiguiente, todas las sumas intermedias; entonces, la integral triple existe y contestamos afirmativamente la pregunta que inició la discusión y esto merece establecerse en el siguiente.

**Teorema 5.12.1)** Toda función continua es integrable en la región en que es continua.

Pero no solamente las funciones continuas son integrables; para discutir este aserto, veamos nuevamente el concepto de contenido nulo en un conjunto de puntos. Este concepto lo vimos en el plano; cuando discutíamos la integral doble; ahora la trasladaremos al espacio de 3 dimensiones.

**Definición 5.12.2)** Dado  $\epsilon > 0$ , si todos los puntos de un conjunto pueden quedar encerrados en un número finito de prismas, cuyos volúmenes sumen una cantidad  $< \epsilon$ , se dice que el conjunto de puntos tiene un contenido de Jordan nulo, o simplemente contenido nulo.

Ya podrás visualizar que un número cualquiera de puntos aislados en el espacio, con tal que sea finito, tiene contenido nulo; también podrás influir que las curvas rectificables tienen esta propiedad; pero lo más interesante es que:

**Teorema 5.12.2)** El conjunto de puntos que pertenecen a una superficie suave tiene contenido nulo.

**Corolario 5.12.1)** El conjunto de puntos que pertenecen a un número finito de superficies suaves, tienen contenido nulo.

La demostración de este teorema la puedes encontrar en el anexo (5.12)

Ahora bien, volvamos al punto ¿cuáles otras funciones, aparte de las continuas, son integrables? Aquéllas que son acotadas y cuyos puntos de discontinuidad formen un conjunto de contenido nulo, lo que formalmente enunciamos en el siguiente.

**Teorema 5.12.3)** Si una función  $f(x,y,z)$  es acotada en la región  $V\{(x,y,z) / a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; e \leq z \leq f\}$  y sus puntos de discontinuidad, dentro de la misma, forman un conjunto de contenido nulo, la función  $f(x,y,z)$  es integrable en la región  $V$ .

Si entendiste bien la demostración del teorema análogo para integral doble, no te será difícil entender la demostración del presente teorema, que se encuentra en el anexo (5.12).

**Ejemplo 5.12.1** La función  $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$  es integrable en la región  $V\{(x,y,z) / 0 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 7; 2 \leq z \leq 4\}$  porque es continua en todo esa región.

**Ejemplo 5.12.2)** La función  $f(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + 2xz - xy & \text{si } z \leq 2 \\ 0 & \text{si } z > 2 \end{cases}$

¿es integrable en:

$$V\{(x,y,z) / 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 4; 0 \leq z \leq 5\} ?$$

**Solución:** La función es discontinua en  $V$ ; en efecto, supongamos el punto:  $P(1, 3, 2) \in V$ :

$$f(1, 3, 2) = 2$$

y también:  $Q(1, 3, 2+\delta) \in V: (\delta > 0)$

$$f(1, 3, 2+\delta) = 0$$

y el incremento:

$$\Delta f = -2, \text{ No tiende a cero cuando } \delta \rightarrow 0^+$$

Los puntos de discontinuidad se agrupan en el plano  $z = 2$ , que es una superficie suave  $\Rightarrow$  La función  $f(x,y,z)$  es integrable en  $V$ .

**Ejemplo 5.12.3)** La función  $f(x,y,z) = \sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$

¿es integrable en  $V\{(x,y,z) / -6 \leq x \leq 6; -6 \leq y \leq 6; -6 \leq z \leq 6\} ?$

La función no existe y por lo mismo es discontinua, fuera de la región  $U = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\} \subset V$

Los puntos de discontinuidad forman ahora una región  $W$  que podemos definir  $W = \text{int} U \subset V$  y una región  $NO$  tiene contenido nulo en  $E^3$ .

$\Rightarrow$  La función  $NO$  es integrable en  $V$ .

(Imagínate una red sobre la región  $V$ ; considera la celda que contiene al punto  $(6, 6, 6)$ ; tienes que escoger un punto dentro de esa celda, escoge al indicado; ahora tienes que valorar la función en ese punto ¿cuál es ese valor?.

Cabe hacer una aclaración: la función

$$F(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2} & \forall (x, y, z) \in U \\ 0 & \forall (x, y, z) \in W \end{cases}$$

Si es integrable en  $V$ , porque ahora " $F$ " la hemos definido y hecho continua en  $W$ ; los puntos de discontinuidad están ahora exclusivamente en la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

que es una superficie suave; por consiguiente, el conjunto de puntos de discontinuidad tiene ahora contenido nulo.

### 5.13 REDES EN UNA REGION DEL ESPACIO $E^3$ .

El concepto de red en una región del espacio  $E^3$  creemos que ha quedado suficientemente aclarado con las ilustraciones hechas hasta ahora; sin embargo, es conveniente formalizar el concepto.

Sea la región  $V = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; e \leq z \leq f\}$

La proyección de esta región sobre el eje  $x$  será el intervalo  $I_1, [a, b]$ ; en tanto que sus proyecciones sobre los ejes  $y, z$  serán, respectivamente:  $I_2, [c, d]$ ,  $I_3, [e, f]$

Ahora recuerda que en Cálculo Diferencial e Integral, se define "red" o "partición" sobre un intervalo cerrado. Hagamos pues uso de ese concepto para establecer sendas redes o particiones en los intervalos  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  y  $[e, f]$ , quedando así definidos los puntos (fig. 5.13.1)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (5.13.0.1)$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_j < \dots < y_{m-1} < y_m = d \quad (5.13.0.2)$$

$$e = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_k < \dots < z_{l-1} < z_l = f \quad (5.13.0.3)$$

y vimos que, si por cada uno de los puntos definidos en las redes (5.13.0.1) y (5.13.0.2) trazamos rectas perpendiculares al eje correspondiente, se define una red sobre la región:

$$R = \{(x, y) / a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\} \subset E^2$$

Si, ahora, por cada uno de los puntos definidos según las redes (5.13.0.1), (5.13.0.2), (5.13.0.3) trazamos planos perpendiculares al eje respectivo, es decir, los planos de ecuaciones:  $x = x_i$ ,  $x = x_2, y = y_1, y = y_2, \dots, z = z_1, z = z_2, \dots, z = z_n, z = z_n$ , se dice que se ha establecido una red de la región  $V$ .

Se puede decir que la red sobre  $V$  es la intersección de las redes sobre los intervalos  $I_1, I_2, I_3$ .

El resultado es que la región  $V$  ha quedado dividida en subregiones de forma prismática rectangular a las cuales se denomina celdas de red y se identifican según el orden que ocupa el vértice más alejado del origen dentro de la red en cada eje. Así por ejemplo (ver figura 5.13.2) la celda que tiene por vértices  $(a, c, e)$ ,  $(x_i, c, e)$ ,  $(a, y_j, e)$ ,  $(x_i, y_j, e)$ ,  $(a, c, z)$ ,  $(x_i, c, z)$ ,  $(a, y_j, z)$ ,  $(x_i, y_j, z)$ ; su vértice más alejado del origen es el último;  $x_i$ , ocupa el primer lugar en la red (5.13.0.2);  $z$ , ocupa el primer lugar en la red (5.13.0.3); así a esta celda la llamamos  $V_{ijk}$ . En general, la celda cuyos vértices son (ver nuevamente fig. 5.13.2);  $(x_{i-1}, y_{j-1}, z_{k-1})$ ,  $(x_i, y_{j-1}, z_{k-1})$ ,  $(x_{i-1}, y_j, z_{k-1})$ ,  $(x_i, y_j, z_{k-1})$ ,  $(x_{i-1}, y_{j-1}, z_k)$ ,  $(x_i, y_{j-1}, z_k)$ ,  $(x_{i-1}, y_j, z_k)$ ,  $(x_i, y_j, z_k)$  la llamaremos  $V_{ijk}$ . Su volumen:

$$\Delta V_{ijk} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}) = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Definición 5.13.1 Se llama diámetro de la celda prismática  $V_{ijk}$  a

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}$$

En otras palabras, diámetro es la longitud de una diagonal del prisma.

Definición 5.13.2) Se llama norma de una red establecida sobre la región  $VCE^3$ , al mayor de los diámetros de sus celdas.

A este parámetro, como ya vimos, se le denota con la letra " $\Delta$ ". Es evidente que:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta V_{ijk} = 0$$

Fig. 5.13.2

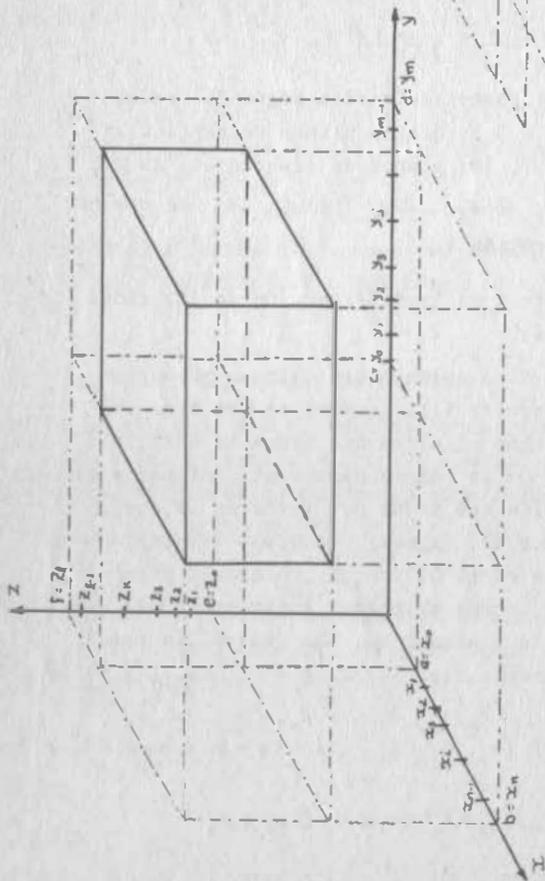
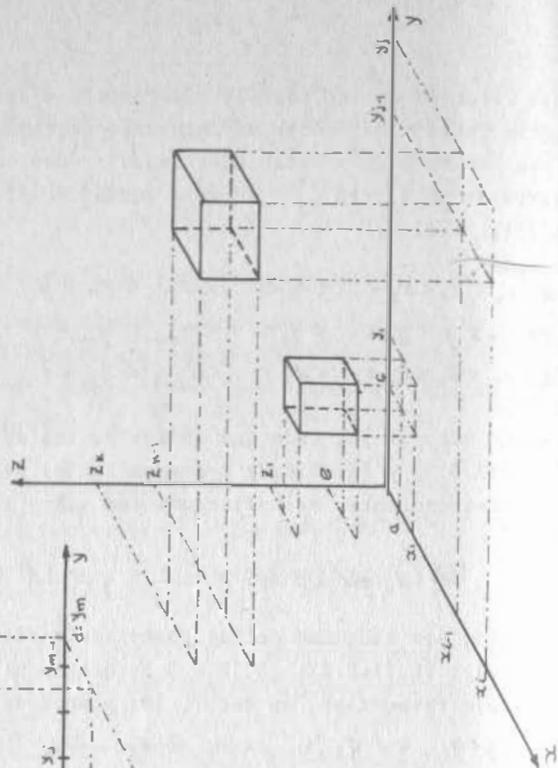


Fig. 5.13.1

V.113

#### V.14 REGION EN EL ESPACIO $E^3$

El concepto de región nos es también conocido desde hace tiempo, formalmente nos lo han definido como un conjunto conexo de puntos y nosotros, para el caso de los espacios  $E^2$  y  $E^3$ , sabemos que eso quiere decir que dos puntos cualesquiera del conjunto, son susceptibles de unirse por medio de una línea quebrada con un número finito de lados, tal que todos los puntos de dicha línea pertenecan al conjunto. Los conjuntos de puntos mostrados en la fig. (5.14.1) son conexos, y por lo mismo, se denominan regiones.

En este subtema veremos en recordatorio de como se pueden describir analíticamente las regiones en  $E^3$  y además, haremos una clasificación de las mismas.

Esta clasificación es muy similar a las de las regiones en  $E^2$ , que ya vimos anteriormente.

Definición 5.14.1) Se dice que una región  $VCE^3$  es normal, si un plano cualquiera, paralelo a algún plano coordenado, la corta según una región plana normal.

Las regiones de la figura (5.14.2) son normales.

Definición 5.14.2) Se dice que una región  $VCE^3$  es regular, si puede descomponerse en un número finito de regiones normales.

V.114

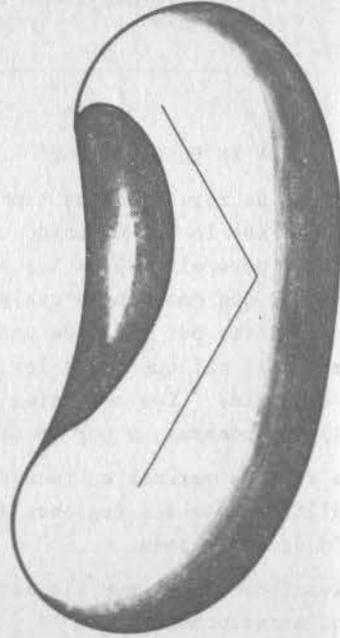


FIGURA 5.14.1

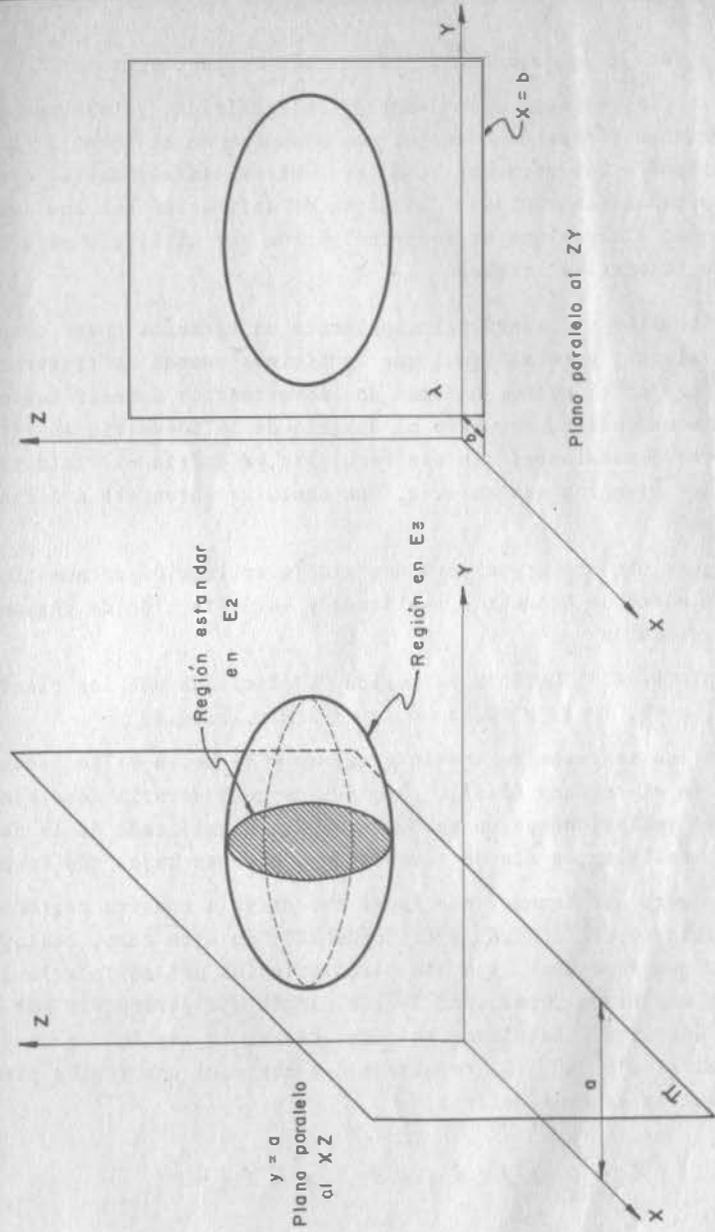


FIGURA 5.14.2

La región de la figura (5.14.3) es una región regular.

Por lo que respecta a su descripción analítica, ya sabemos que -- hay muchas formas de hacerlo; por ejemplo, en el ejemplo (5.12.3) definimos a las regiones V, U, W de otras tantas maneras distintas y todas son válidas. La forma de definición que aquí vamos a proponer lleva el objetivo principal de ser utilizado para cálculo de integrales triples.

La discusión se basará principalmente en ejemplos, para después generalizar; pero al igual que lo hicimos cuando se trataron las regiones en el plano, haremos una advertencia: definir regiones tridimensionales, requiere el dominio de la Geometría Analítica en tres dimensiones; sin ese requisito, ya podríamos ilustrar todos los ejemplos que quieras, que nunca se aprenderá a definir regiones?

Así pues, lo que sigue será una simple aplicación de nuestros conocimientos de Geometría Analítica y la definición de regiones tridimensionales.

Ejemplo 5.14.1) Definir la región "V" limitada por los planos  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = c$ ,  $y = d$ ,  $z = e$ ,  $z = f$  (Fig. 5.14.4)

Este caso se resuelve instintivamente y de hecho ya lo hemos definido en el subtema (5.13). La idea de considerarla como ejemplo, es que reflexionemos un poco acerca del significado de la definición analítica, a fin de tomarlo como base en casos más complejos.

Lo primero que tenemos que hacer es cortar a nuestra región con un plano normal a algún eje coordenado; en este caso, cualquier plano que escojamos con esa característica nos corta a la región según una misma forma, por lo que ningún eje parece ser más ventajoso que otro. Escojamos entonces cortar la región con un plano normal al eje "x". El resultado del corte es una región plana "R" que ya sabemos definir.

$$R\{(y, z) / c \leq y \leq d ; e \leq z \leq f\}$$

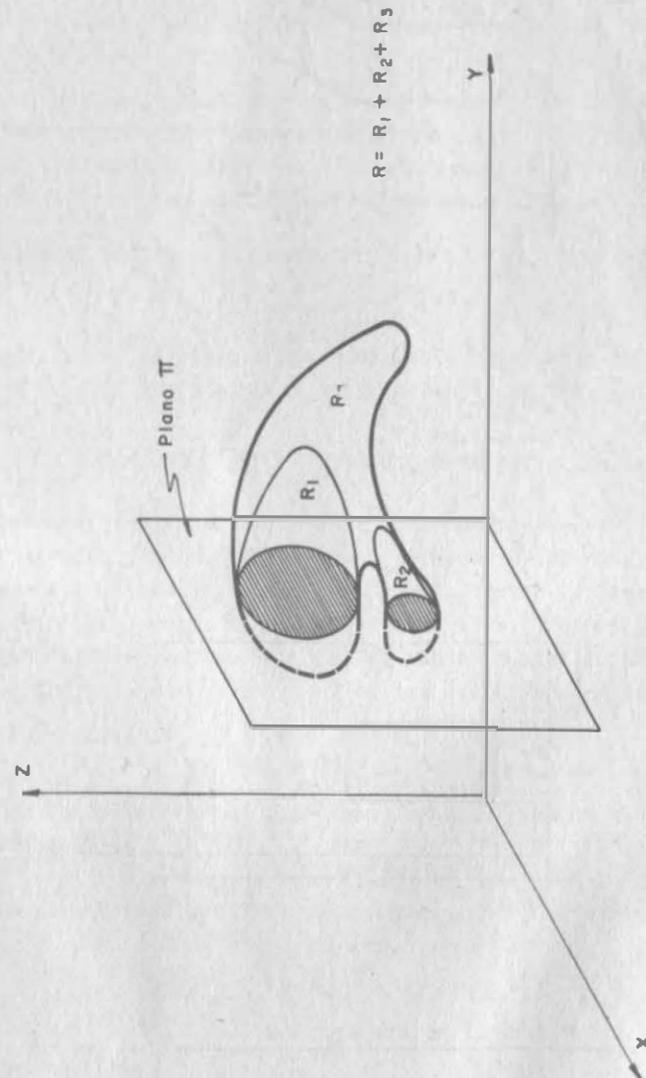


FIGURA 5.14.3  
REGION REGULAR

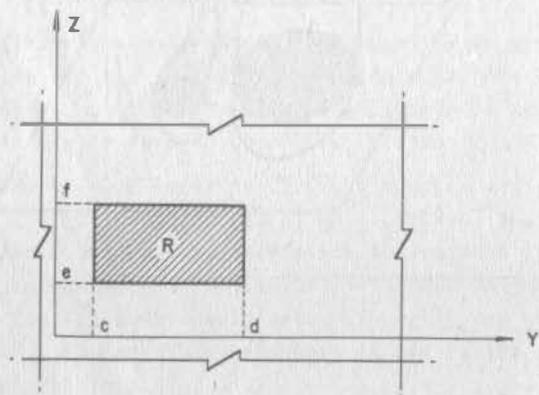
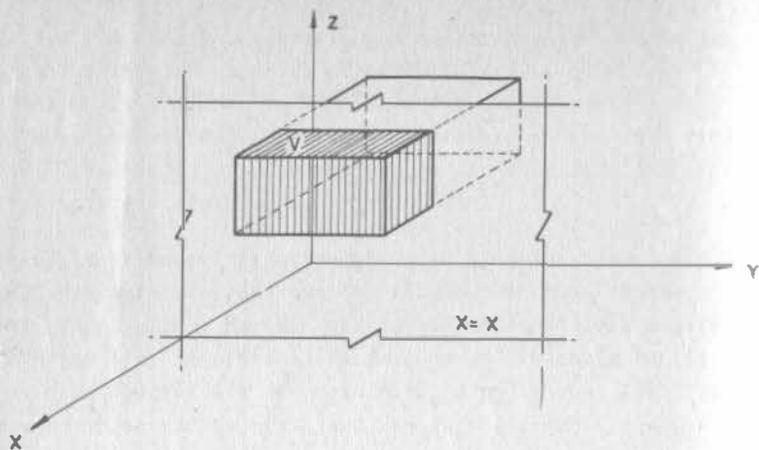


FIGURA 5.14.4.

Ahora bien, en este caso, mientras movemos el plano de corte paralelamente a sí mismo, dentro del intervalo  $a < x < b$ , la región de corte va a ser la misma. Entonces escribamos:

$$V\{(x, y, z) / a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; e \leq z \leq f\}$$

Ejemplo 5.14.2) Definir analíticamente la región "V" limitada por  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $z = 3$  y el plano  $x$ . (Fig. 5.14.5)

Escojamos ahora planos normales al eje  $z$ . Uno cualquiera de estos planos corta a la frontera cilíndrica según una región circular, que ya sabemos como definir, aunque para ello debemos decidir primero si la cortamos con rectas normales a "y" o a "x".

Escojamos rectas normales a "y".

$$R\{(x, y) / -5 \leq y \leq 5; -\sqrt{25-y^2} \leq x \leq \sqrt{25-y^2}\}$$

Desde luego, los planos secantes deben moverse en el intervalo  $0 < z < 3$  para que realmente intersecten la región. Así;

$$V\{(x, y, z) / 0 \leq z \leq 3; -5 \leq y \leq 5; -\sqrt{25-y^2} \leq x \leq \sqrt{25-y^2}\}$$

Podríamos también elegir planos normales al eje "x", para intersectar a la región. En tal caso, debemos establecer la región plana correspondiente que, como puedes ver en la propia figura (5.14.5) es siempre una región rectangular. Veamos primero que región define el plano  $x = 3$  al cortar a nuestra región; para saber los límites, sustituimos  $x = 3$  en las ecuaciones de las fronteras:

$$\begin{aligned} \text{a) En el cilindro } x^2 + y^2 &= 25 \\ 9 + y^2 &= 25; y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \end{aligned}$$

b) En los planos  $z = 3$  y  $z = 0$  no tiene influencia  $x$ , por lo que permanecen así:

$$R/x=3 \{(y, z) / -4 \leq y \leq 4; 0 \leq z \leq 3\}$$

Pero si intersectamos "V" con el plano  $x = 0$  obtenemos:

$$R/x=0 \{(y, z) / -5 \leq y \leq 5; 0 \leq z \leq 3\} \neq R/x=3$$

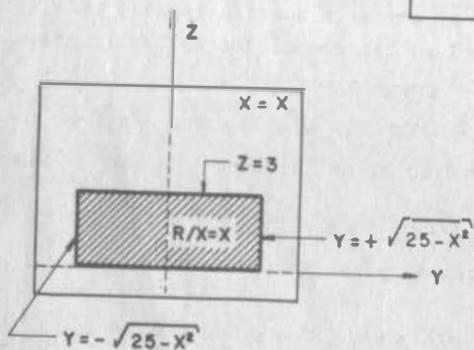
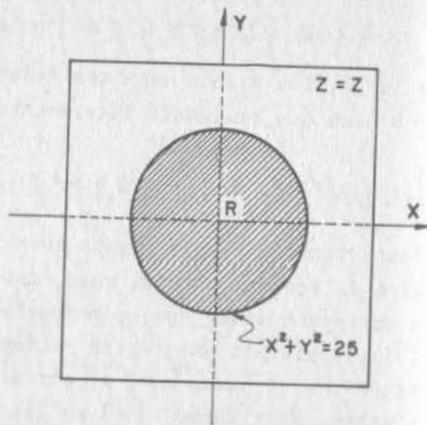
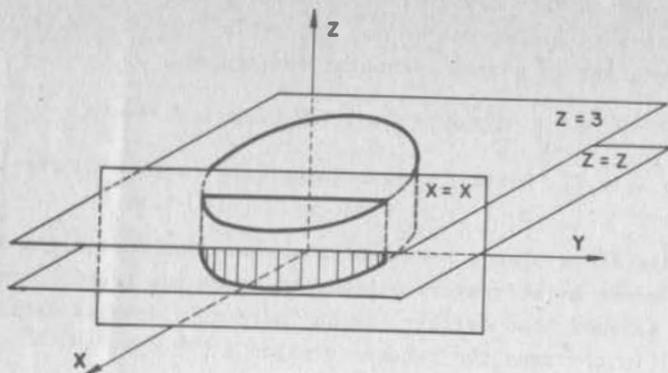


FIGURA 5.14.5.

Deberemos ser capaces entonces de definir  $R/x=x$  ¿cómo? pues como hicimos en (a), sólo que considerando que "x" puede tener cualquier valor:

$$x^2 + y^2 = 25; \quad y^2 = 25 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Entonces:

$$R/x=x \left\{ (y,z) / 0 \leq z \leq 3; -\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \right\}$$

Desde luego, esto sólo es cierto en el intervalo  $-5 \leq x \leq 5$ , pues cualquier valor fuera de él implicaría raíces imaginarias. Así:

$$V \left\{ (x,y,z) / -5 \leq x \leq 5; 0 \leq z \leq 3; -\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \right\}$$

Hemos definido la misma región V de dos maneras distintas y ambas igualmente correctas. Todavía podríamos definirla de una manera más, escogiendo planos de corte normales al eje "y". Hazlo como ejercicio, por favor.

Ejemplo 5.14.3) Definir analíticamente la región "V" comprendida dentro de la esfera de radio 4 y en el origen (fig.5.14.6)

Escogamos planos de corte normales al eje x. Al cortar a "V" con estos planos obtenemos regímenes circulares que varían con el plano escogido; por ejemplo, si cortamos con  $x=0$  y luego con rectas normales a y:

$$R/x=0 \left\{ (y,z) / -4 \leq y \leq 4; -\sqrt{16-y^2} \leq z \leq \sqrt{16-y^2} \right\}$$

En tanto que si escogemos el plano  $x=\sqrt{7}$ :

$$7 + y^2 + z^2 = 16; \quad z^2 = 9 - y^2; \quad z = \pm\sqrt{9 - y^2}$$

por lo que:

$$R/x=\sqrt{7} \left\{ (y,z) / -3 \leq y \leq 3; -\sqrt{9-y^2} \leq z \leq \sqrt{9-y^2} \right\}$$

Deberemos ser capaces entonces de encontrar una expresión que describa a  $R/x=x$ , en la cual, no sólo cambiarán límites de "z" sino también los de "y". Sabemos cómo definir los primeros:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 ; \quad z = \pm \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

pero ¿y los límites de "y"? Bien, cuando establecimos las regiones  $R/x=0$ ,  $R/x=\sqrt{z}$ , nos dimos cuenta de que en ambos casos los regímenes circulares tenían su centro en el eje x; de ahí que en ambos casos hayamos encontrado los límites de "y" haciendo  $z=0$  en la ecuación del círculo correspondiente. No nos cuesta trabajo visualizar que lo mismo va a ocurrir con todos los demás planos de corte, por lo que:

Ecuación del círculo de corte, para  $x=x$ :

$$y^2 + z^2 = 16 - x^2$$

Si  $z=0$

$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{16 - x^2}$$

y así:

$$R/x=x \left\{ (y,z) / -\sqrt{16-x^2} \leq y \leq \sqrt{16-x^2}; -\sqrt{16-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{16-x^2-y^2} \right\}$$

y como los planos de corte los podemos mover sobre el intervalo  $-4 \leq x \leq 4$ ;

$$\sqrt{(x,y,z) / -4 \leq x \leq 4; -\sqrt{16-x^2} \leq y \leq \sqrt{16-x^2}; -\sqrt{16-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{16-x^2-y^2} \}$$

Como ejercicio, define la misma región:

- a) Cortando con planos normales a "x"; pero cortando la región -- plana resultante con rectas normales a "z".
- b) Cortando con planos normales a "y" y luego con rectas normales a "x".
- c) Cortando con planos normales a "y" y luego con rectas normales a "z"

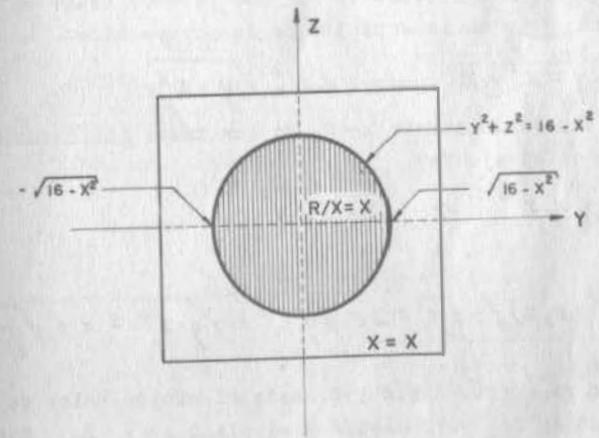
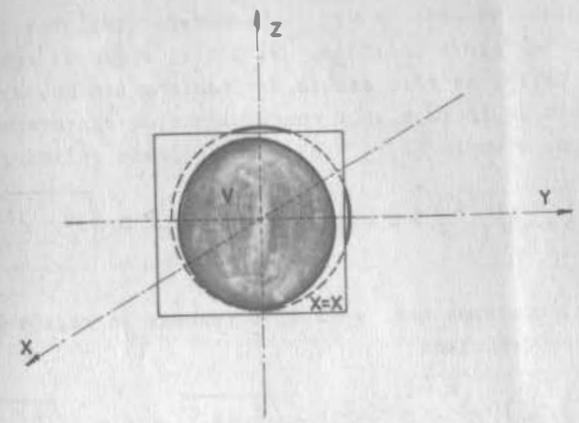


FIGURA 5.14.6.

Ejemplo 5.14.4) Definir analíticamente la región limitada por las superficies  $y = x^2 + z^2$ ;  $z = y - 2$  (Fig. 5.14.7)

Escojamos planos normales a "y" y obtendremos regiones como las mostradas en la figura indicada. Es decir, ahora la región definida por el corte, no sólo cambia en cuanto a tamaño, sino que -- también cambia de forma y, por consiguiente de expresarnos para definirla; por ejemplo (5.14.7.b), que se puede definir:

$$R|_{y=1/4} \left\{ (x,z) / -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}; -\sqrt{\frac{1}{4} - z^2} \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{4} - z^2} \right\}$$

En cambio, si cortamos con  $y = 9/4$ , obtenemos la región de la fig. (5.14.7.c) que definimos:

$$R|_{y=9/4} \left\{ (x,y) / \frac{1}{4} \leq z \leq \frac{3}{2}; -\sqrt{\frac{9}{4} - z^2} \leq x \leq \sqrt{\frac{9}{4} - z^2} \right\}$$

En el primer caso, los límites de "x" los podemos tener en general si hacemos  $y = y$  en la ecuación de la paraboloidé

$$y = x^2 + z^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y - z^2}$$

y los de "z", haciendo además  $x = 0$ , ya que todos los círculos tienen su centro en el eje "y".

$$y = z^2 \Rightarrow z = \pm \sqrt{y}$$

con lo que:

$$R|_{y=y} \left\{ (x,z) / -\sqrt{y} \leq z \leq \sqrt{y}; -\sqrt{y - z^2} \leq x \leq \sqrt{y - z^2} \right\}$$

Pero esto sólo es cierto desde  $y=0$  hasta el mínimo valor de "y" en la intersección del paraboloidé y el plano  $z = y - 2$ . Este valor lo encuentra, ver figura (5.14.7) sobre el plano yz, por lo que hacemos simultáneas:

$$\begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ z = y - 2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$$

y escogemos el intervalo  $[0, 1]$  para "y".

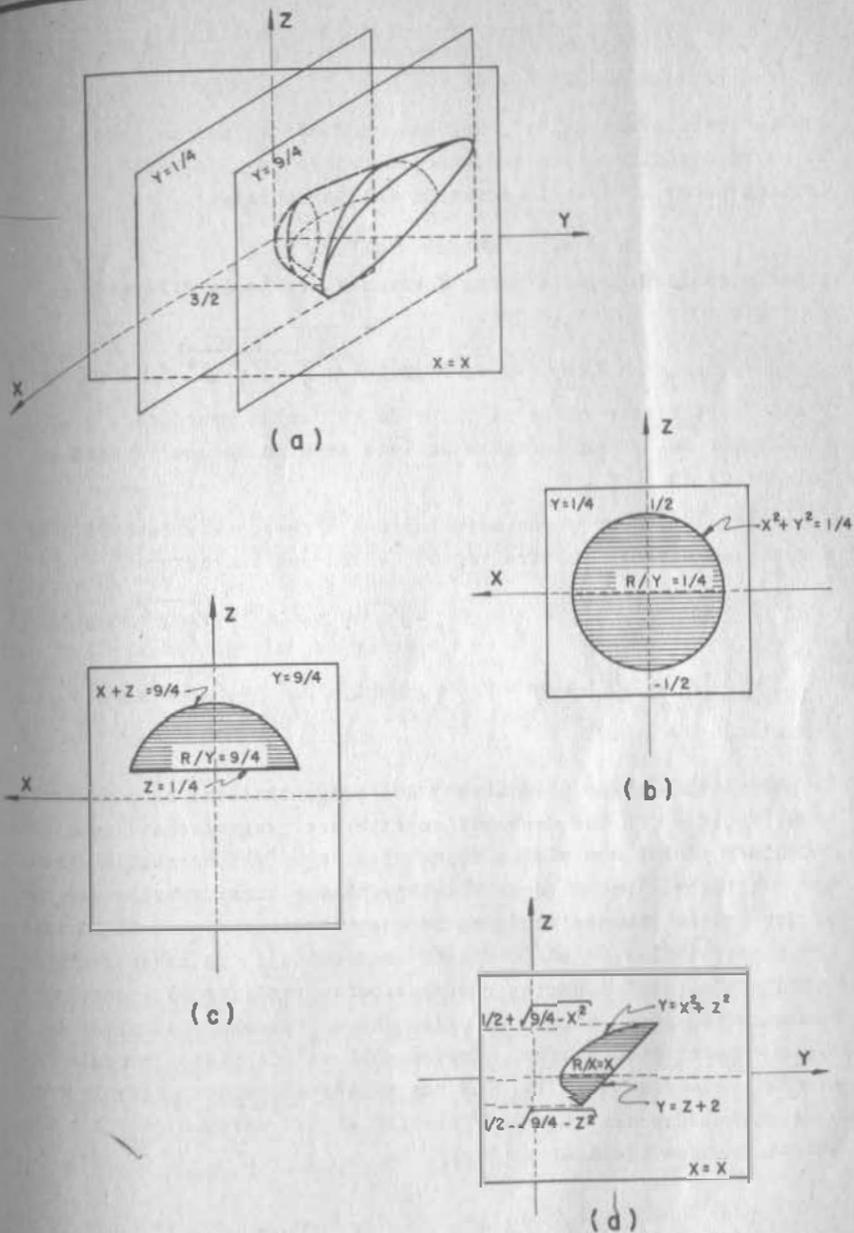


FIGURA 5.14.7.

En el segundo caso, podemos proceder análogamente; los límites de "x"

$$x = \pm \sqrt{y - z^2}$$

y para los límites de "z", debemos considerar, por un lado, que la parte circular sigue teniendo su centro en el eje "y", lo que implica hacer  $x=0$  en la ecuación del paraboloido:

$$y = z^2 \Rightarrow z = +\sqrt{y}$$

y por otro lado, que la recta horizontal es la intersección de  $y=y$  con  $z=y-2$  por lo que:

$$R'/y,y \left\{ (x,y) / y-2 \leq z \leq \sqrt{y}; -\sqrt{y-z^2} \leq x \leq \sqrt{y-z^2} \right\}$$

y esto será cierto entre el valor de "y" antes mencionado y el máximo valor de "y" en la curva de intersección lo que ya está calculado y da  $y=4$ .

Puesto que  $R/y=y$  no puede asimilarse a  $R'/y=y$ , ni viceversa, tendremos que dividir nuestra región "V" en dos subregiones:

$$V_1 \left\{ (x,y,z) / 0 \leq y \leq 1; -\sqrt{y} \leq z \leq \sqrt{y}; -\sqrt{y-z^2} \leq x \leq \sqrt{y-z^2} \right\}$$

$$V_2 \left\{ (x,y,z) / 1 \leq y \leq 4; y+2 \leq z \leq \sqrt{y}; -\sqrt{y-z^2} \leq x \leq \sqrt{y-z^2} \right\}$$

definiendo  $V = V_1 \cup V_2$

El procedimiento fue laborioso y nos preguntamos si no podríamos simplificarlo; quizás debíamos empezar por preguntarnos ¿por qué decidimos contar con planos normales al eje "y"? en realidad no hay una razón especial para ello; podríamos considerarlo como un primer tanteo (aunque aquí, entre nos, lo hicimos para ilustrar las consecuencias de una decisión inadecuada). Ya sabemos que la integración y sus aspectos convexos deben realizar por tanteos: equivocarse, pues, en uno de ellos, no es "pecado", simplemente hay que hacer otro tanteo. Cortemos ahora con planos normales al eje "x". La figura (5.14.7.d) nos enseña ahora una parábola cortada por una recta. Caso muy similar al del ejemplo (5.7.4); de hecho, se hace igual si  $x=0$ :

$$R'/x=0 \left\{ (y,z) / -1 \leq y \leq 2; z^2 \leq y \leq z+2 \right\}$$

En general, para obtener los límites de "y", hacemos  $x=x$  en la ecuación del paraboloido (la ecuación del plano no depende de x)

$$y = x^2 + z^2$$

$$y = z + 2$$

y para obtener los límites de "z" consideremos la intersección de los planos  $x=x$ ,  $z=y-2$  con el paraboloido, lo que da:

$$x^2 + z^2 = z + 2$$

$$z^2 - z + (x^2 - 2) = 0$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(x^2 - 2)}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}$$

Así:

$$R'/x=x \left\{ (y,z) / \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - x^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}; x^2 + z^2 \leq y \leq z + 2 \right\}$$

Y esto será cierto en el intervalo  $-3/2 < x < 3/2$ , ya que valores fuera de este intervalo darían lugar a raíces imaginarias en los límites de "z". (También pueden encontrarse estos valores, si hallas los valores máximos y mínimos de "x" en la curva de intersección del paraboloido con el plano  $z=y-2$ ). Entonces:

$$V \left\{ (x,y,z) / -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}; \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - x^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - x^2}; x^2 + z^2 \leq y \leq z + 2 \right\}$$

Como ejercicio, define esta misma región eligiendo planos normales a "z" (horizontales). Tal vez te parezca la más sencilla de todos en realidad, es difícil decidirse a priori por la que tú vas a hallar o por lo que acabamos de encontrar. Debemos esperar a aplicarla a una integral concreta, como vemos más adelante, para poder juzgar.

Tratemos ahora de obtener conclusiones generales, si es posible. Como ya habíamos dicho, no es posible asentar una "receta" que sirva para todos los casos. Definir adecuadamente una región tiene algo de "arte" o, por lo menos, requiere de una gran porción de "ojo clínico" y una buena dosis de imaginación, que nos permita "ver" la región en un espacio tridimensional.

El primer paso será siempre cortar la región con planos normales a algún eje cartesiano ¿cuál?. No es posible dar reglas fijas. Una vez decidida la orientación de los planos secantes, tendremos en general una región que varía en forma y/o tamaño con respecto

a la variable seleccionada (Vamos a llamar "variable seleccionada" a la que se asocia con el eje normal a los planos de corte), por lo cual, al definir esa región plana, los límites quedarán en términos de dicha variable.

Ahora bien, para definir la región plana, debemos tomar otra decisión, pues podemos cortarla con rectas paralelas a cualquiera de dos ejes. En total, tendremos 6 posibilidades, de las cuales te mencionaremos dos, para que tú deduzcas las otras cuatro.

Una posibilidad: Cortamos la región "V" con planos normales al eje "x" y, a la región plana que resulte, con rectas normales al eje "y". (Fig. 5.14.8. a y b)

La región plana se definirá en general:

$$R|_{x=x} \left\{ (y, z) / \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x); z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \right\}$$

donde " $z_1$ " y " $z_2$ " se obtienen despejando "z" de las ecuaciones de las fronteras correspondientes. " $\varphi_1$ " y " $\varphi_2$ " se obtienen, en general como mínimo y máximo valores de "y", respectivamente, considerando a "x" como constante; verbigracia; en el ejemplo (5.14.3), nos preguntaríamos por los valores mínimos y máximos de "y" en la conferencia  $y^2 + z^2 = 16 - x^2$ ; sin embargo, cabe aclarar que, en la mayoría de los casos prácticos, una buena representación gráfica de la región permitirá visualizar fácilmente estas funciones.

Otra posibilidad: contamos primero con planos normales a "y" y luego con rectas normales a "x". (fig. 5.14.9 a y b)

Si la región cambia bruscamente de forma (Ejemplo 5.14.4) es posible que tengamos que cambiar la expresión correspondiente dos o más veces para cubrir todas las posibilidades. En todo caso, como último paso del procedimiento para definir una región, deberemos fijar el intervalo en la variable seleccionada, para el cual se cumple la definición de región correspondiente.

Como procedimiento general para ello, se puede decir que consiste en obtener un máximo y un mínimo (\*) sin embargo, cabe decir que, en la mayoría de las veces, una buena figura será suficiente para definirnos el intervalo y llegar finalmente a cualquier de seis

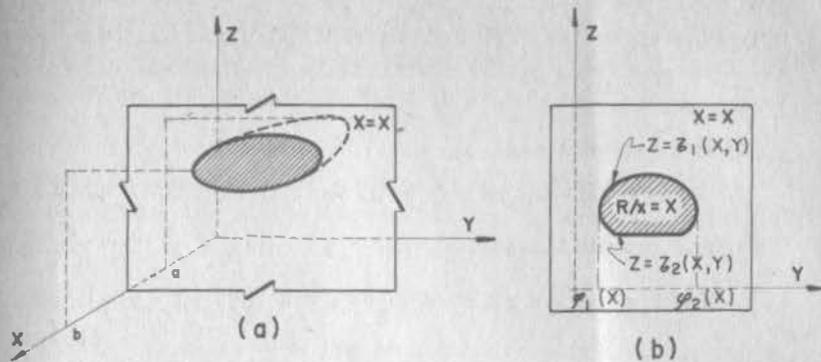


FIGURA 5.14.8.

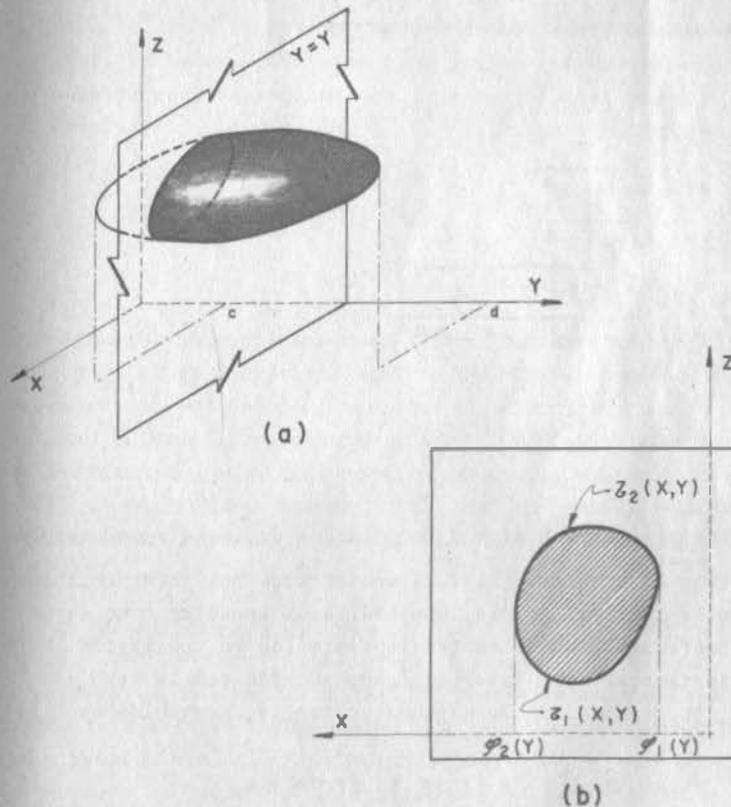


FIGURA 5.14.9.

expresiones, de las cuales te vamos a mencionar las correspondientes a las regiones planas discutidas y tú obtendrás las cuatro restantes:

• Primera probabilidad:

$$V\{(x, y, z) / a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x); \zeta_1(x, y) \leq z \leq \zeta_2(x, y)\} \quad (5.14.0.1)$$

• Segunda probabilidad:

$$V\{(x, y, z) / c \leq x \leq d; \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y); \zeta_1(x, y) \leq z \leq \zeta_2(x, y)\} \quad (5.14.0.2)$$

Si reconsideramos el ejemplo (5.14.3), identificamos fácilmente la simbología usada:

Utilizamos la forma (5.14.0.1); entonces:

$$a = -4$$

$$b = 4$$

$$\varphi_1(x) = -\sqrt{16-x^2}$$

$$\varphi_2(x) = \sqrt{16-x^2}$$

$$\zeta_1(x, y) = -\sqrt{16-x^2-y^2}$$

$$\zeta_2(x, y) = +\sqrt{16-x^2-y^2}$$

### 5.15) Interpretación Física y Propiedades de la integral triple.

Quando vimos el problema (5.12.2) encontramos una interpretación física de la integral triple, que podríamos enunciar como sigue: dado un cierto volumen de sustancia contenido en una región "V" y otra cierta sustancia intercalada de acuerdo con la ley  $C(x, y, z)$ , la cantidad de la segunda sustancia, contenida en V sería:

$$W = \iiint_V c(x, y, z) dx dy dz$$

No es, desde luego, este caso el único resoluble a través de la integral triple; hay otros campos escalares que tienen pleno significado dentro del estudio de la integral triple.

Un cuerpo heterogéneo tiene distintas densidades según el lugar (punto) en que se miden. Por ejemplo, una combinación de hidrocarburos tendrá a los más pesados abajo y a los más ligeros arriba; si llamamos " $\sigma$ " a la densidad, tendremos en este caso:

$$\sigma = f(z) / \frac{df}{dz} < 0$$

Más general sería el caso de una roca compuesta de distintos minerales, en el cual

$$\sigma = f(x, y, z)$$

En tal caso dividiríamos la roca, es decir, nuestra región, en prismas, como ya hemos visto y en cada prisma (celda) escogeríamos un punto en el cual volveríamos la densidad. Si el punto escogido en la celda (i, j, k) es  $(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$ , entonces tendríamos la suma.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l \sigma(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Generalmente, se considera que  $\sigma(x, y, z)$  es continua en toda la roca; pero si quisiésemos llegar al detalle de considerar las oquedades, no hay problema teórico; en efecto en cada oquedad la densidad cambiaría bruscamente a cero, causando una discontinuidad en la función  $\sigma$ ; pero cada oquedad estaría limitada por un número finito de superficies suaves por lo que los puntos de discontinuidad tendrían contenido nulo y podemos afirmar que la masa de la roca sería:

$$M = \iiint_V \sigma(x, y, z) dx dy dz \quad (5.15.0.1)$$

El peso de la roca sería un vector; pero si hablamos de una roca sobre la superficie de la tierra, ya sabemos que siempre tendrá una dirección vertical y un sentido hacia abajo, por lo que nuestro interés se reduce a la magnitud del vector, que es un escalar y que podremos valorar multiplicando el valor de la función

$\sigma(f_i, h_j, \xi_k)$  por 9.81 = g = cte y podríamos afirmar que:

$$W = \iiint_V g \sigma(x, y, z) dx dy dz \quad (5.15.0.2)$$

lo que significa que:

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l g \sigma(f_i, h_j, \xi_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - W \right| < \epsilon \text{ cuando } \Delta < \delta$$

o bien:

$$\left| g \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l \sigma(f_i, h_j, \xi_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - \frac{W}{g} \right| < \epsilon \text{ cuando } \Delta < \delta$$

y como  $g > 0$ :

$$g \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l \sigma(f_i, h_j, \xi_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - \frac{W}{g} \right| < \epsilon \text{ cuando } \Delta < \delta$$

La expresión en valor absoluto nos indica que:

$$\frac{W}{g} = \iiint_V \sigma(x, y, z) dx dy dz$$

o lo que es lo mismo:

$$W = g \iiint_V \sigma(x, y, z) dx dy dz \quad (5.15.0.3)$$

Al comparar las expresiones (5.10.0.2) y (5.15.0.3) nos damos cuenta de que hemos demostrado una de las propiedades de la integral-triple que, en general, se expresa:

$$\iiint_V x f(x, y, z) dx dy dz = x \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \quad (5.15.0.4)$$

Un caso particular del cálculo de masas lo constituye  $(x, y, z) = cte$ ; de acuerdo a la propiedad que acabamos de ver la ecuación (5.15.0.1) quedaría:

$$M = \sigma \iiint_V dx dy dz$$

con lo que obtenemos la interpretación geométrica de la integral-triple:

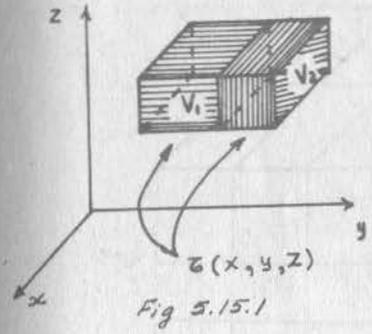
$$\frac{M}{\sigma} = Vol = \iiint_V dx dy dz \quad (5.15.0.5)$$

En un cuerpo heterogéneo, el calor específico, esto es, la cantidad de calor requerido para aumentar 1°C la temperatura, es un campo escalar que puede ser diferente en cada punto; si llamamos  $\tau$  al calor específico,

$$\tau = f(x, y, z)$$

y la cantidad de calor requerida para aumentar 1°C la temperatura del cuerpo:

$$E = \iiint_V \tau(x, y, z) dx dy dz$$



Podría darse el caso de que, en un cuerpo como el mostrado en la fig.(5.15.1), se necesitase conocer la cantidad de energía necesaria para elevar 1°C la temperatura de la parte  $V_1$ , la correspondiente energía para elevar 1°C la temperatura de la parte  $V_2$  y, además, la energía requerida para elevar la temperatura 1°C en todo el cuerpo.

Desde luego:

$$E_1 = \iiint_{V_1} \tau(x, y, z) dx dy dz \quad (5.15.0.6)$$

$$E_2 = \iiint_{V_2} \tau(x, y, z) dx dy dz \quad (5.15.0.7)$$

y, si llamamos  $V = V_1 \cup V_2$

$$E = \iiint_V \tau(x, y, z) dx dy dz \quad (5.15.0.8)$$

y nos preguntamos si da el mismo calentar todo el cuerpo por calentar las dos partes por separado. Veamos:

Hagamos una red en la región  $V_1$  de  $n \times m \times l$  celdas, con norma  $\Delta_1$  y otro en la región  $V_2$ , también de  $n \times m \times l$ , con norma  $\Delta_2$ . Alguna de las dos normas a de ser menor; dada la figura (5.15.2), parece ser que  $\Delta_2 < \Delta_1$ . Así lo consideramos.

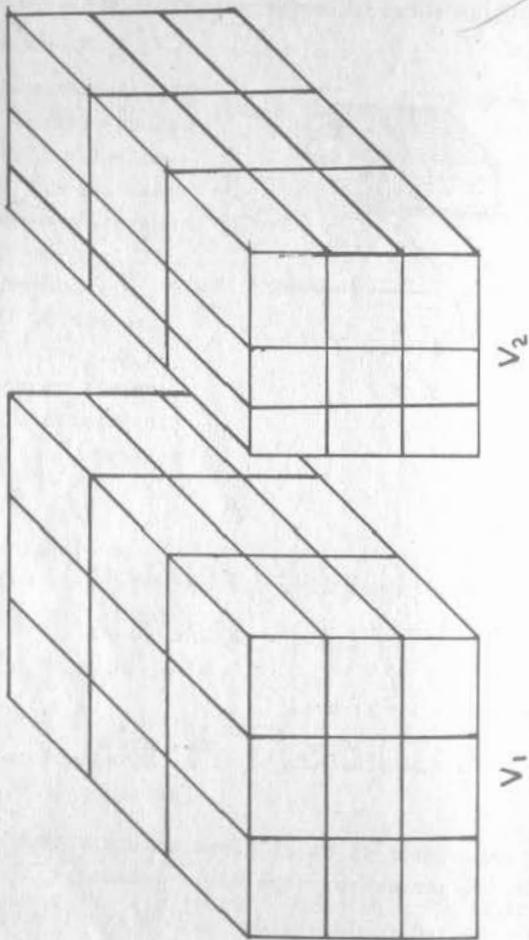


Fig 5.15.2

De (5.15.0.6) escribimos:

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l z(\xi_i, \eta_j, \xi_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - E_1 \right| < \epsilon_1 \text{ cuando } \Delta_1 < \delta$$

y, de (5.15.0.7):

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l z(\xi'_i, \eta'_j, \xi'_k) \Delta x'_i \Delta y'_j \Delta z'_k - E_2 \right| < \epsilon_2 \text{ cuando } \Delta_2 < \delta$$

Puesto que  $\Delta_2 < \Delta_1$ ,  $\Delta_1 < \delta$ ; entonces las dos desigualdades se cumplen simultáneamente y podemos sumarlas miembro a miembro:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l z(\xi_i, \eta_j, \xi_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - E_1 \right| \\ + & \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l z(\xi'_i, \eta'_j, \xi'_k) \Delta x'_i \Delta y'_j \Delta z'_k - E_2 \right| < \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ & \text{cuando } \Delta_1, \Delta_2 < \delta \end{aligned}$$

Ya que el valor absoluto de una suma nunca supera a la suma de valores absolutos, reforzamos la desigualdad si escribimos:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l z(\xi_i, \eta_j, \xi_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l z(\xi'_i, \eta'_j, \xi'_k) \Delta x'_i \Delta y'_j \Delta z'_k \right. \\ & \left. - (E_1 + E_2) \right| < \epsilon_1 + \epsilon_2 \text{ cuando } \Delta_1, \Delta_2 < \delta \end{aligned}$$

Pero, por la propiedad asociativa de la suma:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l z(\xi_i, \eta_j, \xi_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - (E_1 + E_2) \right| < \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ & \text{cuando } \Delta_1, \Delta_2 < \delta \end{aligned}$$

Esta última expresión es equivalente a la ecuación (5.15.0.8) por lo que podemos afirmar que  $E = E_1 + E_2$  o sea, se gasta la misma cantidad de energía al calentar un cuerpo, que calentando a sus partes por separado. Como en el razonamiento anterior no hemos perdido generalidad, podemos asentar como propiedad de la integral triple:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{S.15.0.9}$$

Siempre que  $V = V_1 \cup V_2$  y  $V_1 \cap V_2$  sea nulo.

Ahora consideremos un recipiente prismático rectangular "V" lleno de agua destilada al cual alguien le vierte una cantidad desconocida de cloruro de sodio (sal común). Esta sal se disolverá len-

tamente en el agua y alcanzará, después de un tiempo bastante largo, una concentración uniforme en el seno del líquido. Entre tanto, en un instante determinado, medimos la concentración del NaCl en el agua y encontramos que obedece a la ley continua.

$$C_1 = f(x, y, z)$$

por lo que, la cantidad total de NaCl en el agua será de:

$$W_1 = \iiint_V c_1(x, y, z) dx dy dz \tag{5.15.0.10}$$

Ahora suponte que, además de echarle NaCl, le echaron al agua otra sal, dígase sulfato de Calcio (CaSO<sub>4</sub>), que tiene una diferente rapidez de difusión que NaCl. Por consiguiente, al medir su concentración en el mismo instante anterior se obtuvo una ley diferente:

$$C_2 = g(x, y, z) \quad (\text{también continua})$$

por lo que:

$$W_2 = \iiint_V c_2(x, y, z) dx dy dz \tag{5.15.0.11}$$

La cantidad total de sales añadida al agua es W<sub>1</sub> + W<sub>2</sub> ¿Podríamos calcularla a través de una sola integral? Veámoslo:

Establezcamos una red en V, de norma Δ; entonces, de (5.15.0.10):

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l c_1(\xi_i, \eta_j, \xi_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - W_1 \right| < \epsilon, \text{ cuando } \Delta < \delta$$

y de (5.15.0.11):

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l c_2(\xi_i, \eta_j, \xi_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - W_2 \right| < \epsilon_2 \text{ cuando } \Delta < \delta$$

Puesto que las dos desigualdades se cumplen simultáneamente, podemos sumarlas miembro a miembro y aplicar la propiedad ya vista de los valores absolutos:

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l [c_1(\xi_i, \eta_j, \xi_k) + c_2(\xi_i, \eta_j, \xi_k)] - (W_1 + W_2) \right| < \epsilon_1 + \epsilon_2 \text{ cuando } \Delta < \delta$$

Esta expresión quiere decir que:

$$\iiint_V [c_1(x, y, z) + c_2(x, y, z)] dx dy dz = W_1 + W_2$$

o sea que podemos proceder, bien sumando las funciones C<sub>1</sub> y C<sub>2</sub> e integrando una vez, o bien integrando C<sub>1</sub> y C<sub>2</sub> por separado y luego sumando, como nos resulte más ventajoso. Esta es otra propiedad de la integral triple que, en general expresamos:

$$\iiint_V [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dx dy dz = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz \tag{5.15.0.12}$$

El ejemplo que hemos utilizado para ilustrar esta propiedad no es tan ocioso como parece. Ese "alguien" que vierte sales en las lagunas costeras, es el mar, por efectos de marea. Corresponde a los biólogos definir cuales son las concentraciones deseables de sales; pero es responsabilidad del ingeniero hacer las obras que garanticen tales concentraciones. Desde luego, el problema es mucho más complejo; pero el principio es el mismo.

Si medimos las diferentes temperaturas de un cuerpo "V" en grados kelvin, obtenemos un campo escalar, como hemos visto en otras ocasiones:

$$T = f(x, y, z)$$

La cantidad de calor en todo el cuerpo, o en talpia es:

$$E = \iiint_V T(x, y, z) dx dy dz \tag{5.15.0.13}$$

¿Podríamos llegar a tener una entalpia negativa? Supongamos que sí; entonces -E > 0 y, dada una red en V de norma Δ, escribiríamos el significado de (5.15.0.13) como sigue:

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l T(\xi_i, \eta_j, \xi_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - E \right| < -E \text{ cuando } \Delta < \delta$$

o lo que es lo mismo:

$$E < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l T(\xi_i, \eta_j, \xi_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k - E < -E \text{ cuando } \Delta < \delta$$

Al trabajar con la segunda parte de la última desigualdad:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l T(\xi_i, \eta_j, \xi_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k < 0 \text{ cuando } \Delta < \delta \tag{5.15.0.14}$$

Ahora bien, la experiencia humana, hasta la fecha, no ha logrado ni siquiera acercarse a la temperatura de un cuerpo al cero de Kelvin o cero absoluto (-273°C). Entonces, la desigualdad (5.15.0.14) no se puede cumplir, porque en el primer miembro tendremos la suma de números positivos; por consiguiente, la entalpia de un cuerpo nunca podrá ser negativa. Al mismo tiempo, podemos asentar, como propiedad de la integral triple:

$$\text{Si } f(x, y, z) \geq 0 \text{ en } V, \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \geq 0 \quad (5.15.0.15)$$

y sus corolarios:

$$\text{Si } f(x, y, z) \leq 0 \text{ en } V, \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \leq 0 \quad (5.15.0.16)$$

$$\text{Si } f(x, y, z) \geq g(x, y, z) \text{ en } V, \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \geq \iiint_V g(x, y, z) dx dy dz \quad (5.15.0.17)$$

Hay otra propiedad de la integral triple que no es tan profusamente utilizada como las anteriores. Como ejercicio, puedes demostrar que:

$$\left| \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_V |f(x, y, z)| dx dy dz \quad (5.15.0.18)$$

5.16) La Integral Triple como Integral Iterada.

5.16.1) Introducción.- Sabemos en realidad cómo resolver una integral triple: el problema (5.12.2) nos da un método que de ninguna manera debes olvidar, ya que es la base para realizar integración por medio de computadora que, en los días que corren, son quizá más usuales que las tradicionales.

Ahora, si no dispones de computadora o si las funciones que vas a manejar puedes antiderivarlas sin mucha dificultad, puedes disponer de otro método, que a continuación te vamos a exponer.

Antes de entrar propiamente en materia, vamos a remitirnos nuevamente al problema (5.12.2) y vamos a suponer, por un momento, que la ley de distribución del metal fuese:

$$c = 3x + 2y \quad (c \text{ en } \text{mg}/\text{dm}^3 \text{ si } x, y \text{ en dm})$$

Supongamos también que establecemos la misma red y que, al escoger los puntos en cada celda del segundo estrato, los escogemos sobre la misma vertical que los seleccionados en el primer estrato.

Necesariamente, entonces:

$$c(\xi_i, \eta_j, \xi_1) = c(\xi_i, \eta_j, \xi_2) = c(\xi_i, \eta_j)$$

por lo que:

$$W = \sum_{k=1}^2 \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \right] \Delta z_k$$

y, para cualquier red establecida en V:

$$W = \sum_{k=1}^2 \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \right] \Delta z_k$$

Si ahora hacemos que la norma de la red tienda a cero, la norma de la red establecida en  $R = \{(x, y) | 0 < x < 20; 0 < y < 15\}$  también tiende a cero y, por ser "C" continua, podemos afirmar que la expresión entre paréntesis rectangular converge a la integral doble y que:

$$\iint_R c(x, y) dx dy \left[ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^2 \Delta z_k \right] = \iint_R c(x, y) dx dy \left[ \int_0^{10} dz \right]$$

Finalmente:

$$W = 10 \iint_R c(x, y) dx dy$$

5.16.2) La integral iterada en regiones prismáticas:

En el caso general, sin embargo, tendremos como integrando una función en los tres variables; la función del problema (5.12.2) así lo es y por mismo:  $c(\xi_i, \eta_j, \xi_1) \neq c(\xi_i, \eta_j, \xi_2)$

(Ver tabla 5.12.1:  $C(0,0,0) = 0 \neq C(0,0,5) = 5$ , cte).

Por supuesto, también la suma en el primer estrato (=33.75 gr. ver tabla 5.12.1) es diferente de la suma en el segundo estrato sería diferente; en pocas palabras:

$$\iint_R c(x,y,z) dx dy = F(z) \quad (5.16.2.a)$$

Ahora establezcamos una red cualquiera en la región V, de norma  $\Delta$  escojamos un punto cualquiera  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  dentro de la celda  $(1,1,1)$  y tracemos un plano horizontal que pase por ese punto:  $z = \xi_1$  (Fig. 5.16.1)

$$F(\xi_1) = \iint_R c(x,y,\xi_1) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \iint_{R_{ij}} c(x,y,\xi_1) dx dy \quad (5.16.2.b)$$

donde  $R_{ij}$  es la región definida por la celda  $(i,j,1)$  sobre el plano xy. (Fig. 5.16.1)

Sabemos que en la celda  $(1,1,1)$  la función vale 0 en  $(0,0,0)$  y -- que ese valor no supera a algún otro dentro de la celda; por tanto  $m_{11} = 0$  y por la propiedad que ya conocemos de la integral doble:

$$m_{11} \Delta x_1 \Delta y_1 < \iint_{R_{11}} c(x,y,\xi_1) dx dy$$

lo contrario podríamos asegurar del punto  $(\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1)$  donde la función adquiere el valor  $M_{11}$  y por lo tanto:

$$m_{11} \Delta x_1 \Delta y_1 < \iint_{R_{11}} c(x,y,\xi_1) dx dy < M_{11} \Delta x_1 \Delta y_1$$

En la celda  $(1,2,1)$  podremos escribir  $m_{12} \Delta x_1 \Delta y_2 < \iint_{R_{12}} c(x,y,\xi_1) dx dy < M_{12} \Delta x_1 \Delta y_2$

y así sucesivamente, hasta llegar a la celda  $(n,m,1)$

$$m_{nm} \Delta x_n \Delta y_m < \iint_{R_{nm}} c(x,y,\xi_1) dx dy < M_{nm} \Delta x_n \Delta y_m$$

Al sumar miembro a miembro las desigualdades anteriores y tomar en cuenta (5.16.2.b)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j < F(\xi_1) < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \quad (5.16.2.c)$$

Ahora multipliquemos los tres miembros de (5.16.2.c) por  $\Delta z_1$ ; -- esta cantidad es constante para todas las celdas de R, por lo que puede entrar y salir libremente de las sumatorias.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_1 < F(\xi_1) \Delta z_1 < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_1$$

y procedemos análogamente con todos los demás estratos:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij2} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_2 < F(\xi_2) \Delta z_2 < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij2} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_2$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ijl} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_l < F(\xi_l) \Delta z_l < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ijl} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_l$$

y sumemos miembro a miembro estas desigualdades:

$$\sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k < \sum_{k=1}^l F(\xi_k) \Delta z_k < \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

que, de acuerdo con la notación adoptada, podemos escribir:

$$s < \sum_{k=1}^l F(\xi_k) \Delta z_k < S$$

Ahora hagamos tender a cero la norma de la red; puesto que la función que estamos integrando es continua, tanto "s" como "S" tienden por limite la integral triple; el limite del miembro central es un viejo conocido: se trata de la integral ordinaria de  $F(z)$ :

$$\iiint_V c(x,y,z) dx dy dz = \int_0^{10} F(z) dz \quad (5.16.2.d)$$

Y al sustituir (5.16.2.a) en (5.16.2.d)

$$\iiint_V c(x,y,z) dx dy dz = \int_0^{10} \left\{ \iint c(x,y,z) dx dy \right\} dz$$

Expresión que nos dice que primero integremos en R para obtener una función de z y, a tal función, la integramos posteriormente en el intervalo 0,10. A esto se le llama integral iterada o reiterada. La integral doble que nos dura: ya tenemos definida la región R en el inciso anterior; entonces:

$$\iint_R c(x,y,z) dx dy = \int_0^{20} \left\{ \int_0^{15} (3x+2y+z) dy \right\} dx = \int_0^{20} [3xy + y^2 + zy]_0^{15} dx$$

$$= \int_0^{20} (45x + 225 + 15z) dx = [22.5x^2 + 225x + 15xz]_0^{20}$$

$$\iint_R c(x,y,z) dx dy = 13500 + 300z = F(z)$$

ahora:

$$W = \iiint_V c(x,y,z) dx dy dz = \int_0^{10} (13500 + 300z) dz = [13500z + 150z^2]_0^{10}$$

$$W = 135000 + 15000 = \underline{\underline{150000 \text{ mg}}}$$

El procedimiento que hemos seguido es general y la podemos aplicar a cualquier región  $V \{ (x,y,z) / a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; e \leq z \leq f \}$  y a cualquier función  $f(x,y,z)$  integrable en ella.

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_e^f \left\{ \iint_{R_{xy}} f(x,y,z) dx dy \right\} dz \quad (5.16.2.1)$$

Más aún tenemos otras dos posibilidades:

a) Definir  $F(y) = \iint_{R_{xz}} f(x,y,z) dx dz$

en cuyo caso obtendríamos finalmente:

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_c^d \left\{ \iint_{R_{xz}} f(x,y,z) dx dz \right\} dy \quad (5.16.2.2)$$

b) Definir  $F(x) = \iint_{R_{yz}} f(x,y,z) dy dz$

en cuyo caso obtendríamos finalmente:

$$v.143 \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \iint_{R_{yz}} f(x,y,z) dy dz \right\} dx \quad (5.16.2.3)$$

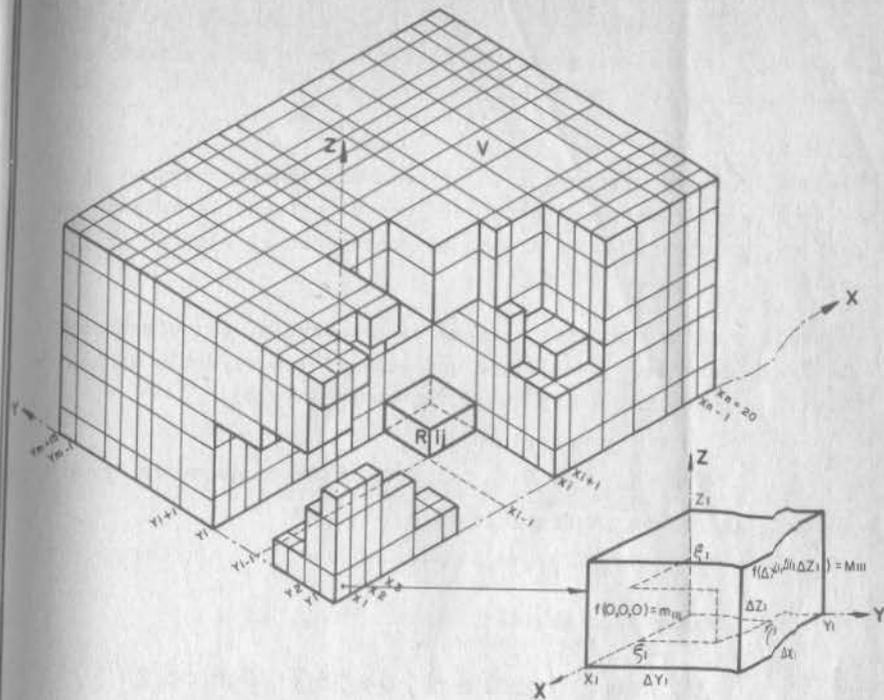


FIGURA 5.16.1

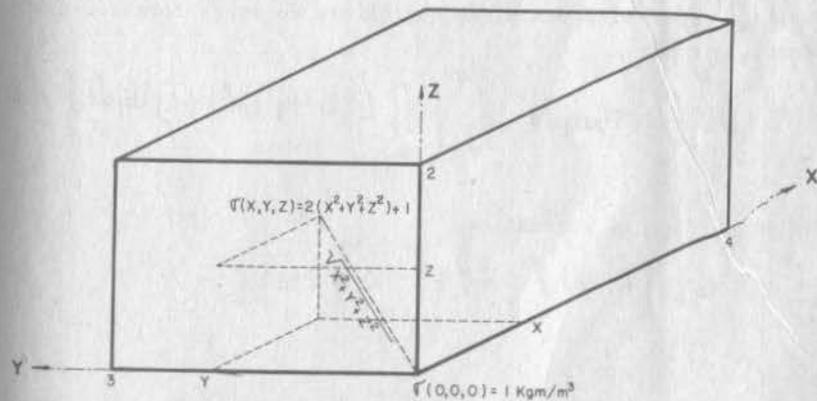


FIGURA 5.16.2

Ejemplo 5.16.1) Calcular la masa de un cuerpo prismático trirrectangular cuyas dimensiones son  $4 \times 3 \times 2$  m. Su densidad en un vértice es de  $1 \text{ kgm/m}^3$  y aumenta a razón del doble del cuadrado de la distancia a dicho vértice.

Solución:

Refiramos nuestro problema a un sistema coordenado: hagamos coincidir el vértice de menor densidad, con el origen; la arista más larga con el eje "x" y la arista más corta con el eje "z" (Fig. - 5.16.2)

Ahora, de acuerdo con este sistema de referencia, establezcamos la función densidad. Nos dicen que aumenta con el doble de la distancia al origen, o sea que en el punto  $(x, y, z)$ :

$$\Delta \sigma = 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

(2 tiene unidades de  $\text{kgm/m}^5$ )

Y como en el origen la densidad vale  $1 \text{ Kgm/m}^3$ :

$$\sigma = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 1$$

Ahora establezcamos la región:

$$V \{ (x, y, z) / 0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 3; 0 \leq z \leq 2 \}$$

Entonces podemos integrar en cualquiera de las formas (6.16.2.1), (5.16.2.2) ó (5.16.2.3.) Cuando se tienen regiones prismáticas, suele ser igualmente ventajoso cualquiera de estas formas. Escogamos la última:

$$M = \iiint_V \sigma \, dx \, dy \, dz = \int_0^4 \left\{ \iint_{R_{yz}} [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] \, dy \, dz \right\} dx$$

Definamos  $R_{yz}$ ; es automático:

$$R_{yz} \{ (y, z) / 0 \leq y \leq 3; 0 \leq z \leq 2 \}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \iiint_{R_{yz}} [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] \, dy \, dz &= \int_0^3 \left\{ \int_0^2 [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] \, dz \right\} dy \\ &= \int_0^3 [2(x^2 + y^2 + \frac{z^3}{3}) + z]_0^2 \, dy \\ &= 4 \int_0^3 (x^2 + y^2 + \frac{11}{6}) \, dy \\ &= 4 \left[ yx^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{11y}{6} \right]_0^3 \\ &= 4(3x^2 + \frac{27}{3}) = F(x) \end{aligned}$$

Ahora:

$$M = 4 \int_0^4 (3x^2 + \frac{27}{3}) \, dx = \underline{\underline{488 \text{ Kgm}}}$$

Si lo prefieres, el peso del sólido es, de acuerdo con (5.15.0.3):

$$W = 9.81 \times 488 = \underline{\underline{4787.28 \text{ Nw}}} = \underline{\underline{488 \text{ Kgf}}}$$

Ejemplo 5.16.2 Consideremos el cuerpo del ejemplo (5.16.1). Supongamos que deseamos izarlo como se indica en la figura (5.16.3), sin que experimente giro. ¿Dónde debe colocarse el gancho?

Solución:

La única manera de evitar el giro, es lograr que la fuerza de izar "P" sea colineal al peso del cuerpo. Del ejemplo (5.16.1) sabemos que el peso es 499 kg; pero ignoramos cuál es su línea de acción para conocerla, debemos calcular el momento del peso con respecto a algún punto de referencia; por ejemplo, con respecto al origen.

Al peso lo podemos considerar como resultante de los pesos de todas las partículas materiales que componen el cuerpo; si dividimos a éste en "n" prismas, según una red, podemos escoger un punto " $\bar{r}_m$ " en el m prisma (ver fig. 5.16.3.b), suponer que en todos los puntos del prisma hay la misma densidad y calcular aproximadamente la masa y peso del prisma bajo esa suposición:

$$\text{masa del } m^{\circ} \text{ prisma} = \sigma(\bar{r}_m) \Delta V_m$$

$$\text{peso del } m^{\circ} \text{ prisma} = g \sigma(\bar{r}_m) \Delta V_m \text{ (magnitud)}$$

y para definir a este último como vector:

$$\Delta \bar{W}_m = -g \sigma(\bar{r}_m) \Delta V_m \mathbf{k}$$

Además, podemos suponer que  $\bar{r}_m$  es punto de la línea de acción del peso y, en tal caso, su momento con respecto al origen vale:

$$\Delta \bar{M}_m = -g \sigma(\bar{r}_m) \Delta V_m \mathbf{k} \times \bar{r}_m$$

La suma vectorial de estos momentos nos daría una aproximación del momento del peso (Teorema de Varignon); pero si la norma de la red establecida tiende a cero, tal suma convergerá (todas las funciones involucradas son continuas) al verdadero momento del peso con respecto al origen:

$$\begin{aligned} \text{Momento del peso} &= \iiint_V -g \sigma(\bar{r}) \mathbf{k} \times \bar{r} dV \\ &= -g \mathbf{k} \times \iiint_V \bar{r} \sigma(\bar{r}) dV \\ &= -g \mathbf{k} \times \bar{B} \end{aligned} \quad (5.16.2.a)$$

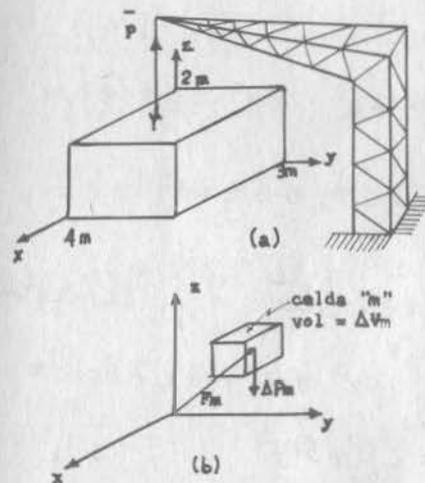


Fig. 5.16.3

donde  $\vec{B}$  es una integral vectorial llevada al volumen; sus componentes escalares las denominaremos  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$ , respectivamente y se calculan integrando las correspondientes componentes escalares del vector dentro de la integral. De acuerdo con los datos del ejemplo (5.16.1)  $\sigma(\vec{r}) = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 1$ , por lo que

$$B_x = \iiint_V x [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] dV = \iiint_V (2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2 + x) dV$$

Ahora calculemos esta integral según la forma (5.16.2.2.)

$$B_x = \int_0^3 \left\{ \iint_{R_{xz}} (2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2 + x) dx dz \right\} dy$$

donde:

$$R_{xz} \left\{ (x,z) / 0 \leq x \leq 4; 0 \leq z \leq 2 \right\}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \iint_{R_{xz}} (2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2 + x) dx dz &= \int_0^2 \left\{ \int_0^4 (2x^3 + 2xy^2 + 2xz^2 + x) dx \right\} dz \\ &= \int_0^2 (4x^3 + 4xy^2 + \frac{16}{3}x + 2x) dx \\ &= \frac{944}{3} + 32y^2 \end{aligned}$$

Entonces:  $B_x = \int_0^3 \left( \frac{944}{3} + 32y^2 \right) dy = 1232 \text{ kg}_m - m$

Análogamente:

$$B_y = \iiint_V y [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] dV = \iiint_V (2x^2y + 2y^3 + 2yz^2 + y) dV$$

que calcularemos según la forma (5.16.2.1):

$$B_y = \int_0^2 \left\{ \iint_{R_{xy}} (2x^2y + 2y^3 + 2yz^2 + y) dx dy \right\} dz$$

Como ya hemos desarrollado práctica, no definiremos la región  $R_{xz}$ , sino que sustituiremos directamente la integral doble por su correspondiente integral reiterada:

$$B_y = \int_0^2 \left\{ \int_0^3 \left[ \int_0^4 (2x^2y + 2y^3 + 2yz^2 + y) dx \right] dy \right\} dz$$

Nota que los límites de las integrales son los que aparecen definiendo los intervalos de "x", "y", "z", respectivamente en la región "V". Ahora calculamos cómo debe calcularse cualquier expresión en que aparezcan paréntesis, esto es, de adentro hacia afuera:

$$\begin{aligned} \int_0^4 (2x^2y + 2y^3 + 2yz^2 + y) dx &= \frac{140}{3}y + 8y^3 + 8yz^2 \\ \int_0^3 \left( \frac{140}{3}y + 8y^3 + 8yz^2 \right) dy &= 372 + 36z^2 \end{aligned}$$

$$B_y = \int_0^2 (372 + 36z^2) dz = 840 \text{ kg}_m - m$$

De la misma manera:

$$B_z = \iiint_V z [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] dV = \iiint_V (2x^2z + 2y^2z + 2z^3 + z) dV$$

Calcula esta integral por el camino que a ti te parezca mejor, para llegar al resultado:  $B_z = 708 \text{ kg}_m - m$

Así llevando estos resultados a la ecuación (5.16.2.a):

$$\begin{aligned} \text{Momento del peso} &= -gkx(1232i + 840j + 708k) = -g(1232j - 840i) \\ &= g(840i - 1232j) \end{aligned}$$

Si dividimos la magnitud de este vector entre la magnitud del peso, como hacías en los problemas sencillos de palancas que resolviste en Bachillerato obtendremos la distancia perpendicular del origen a la lí-

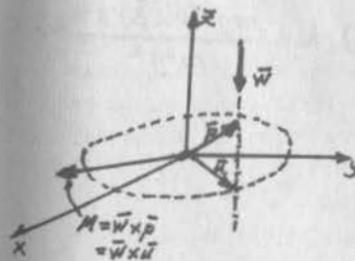


Fig 5.16.4

nea de acción del peso; esto es, la magnitud de " $\vec{u}$ " (fig. 5.16.4):

$$|\vec{u}| = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{W}|} \quad (5.2.16.b)$$

pero como ahora estamos en el espacio, esta magnitud sólo nos define una circunferencia (punteada en la fig. 5.16.4) por cualquier punto de cuyos puntos puede pasar la línea de acción de " $\vec{W}$ ". Necesitamos conocer al vector " $\vec{u}$ " en magnitud, dirección y sentido; más bien, lo que nos interesa es la ecuación de la línea de acción de " $\vec{W}$ ", es decir, el vector " $\vec{p}$ " de posición de un punto cualquiera de esa línea. Claro que, si conocemos " $\vec{u}$ ":

$$\vec{p} = \vec{u} + \lambda_1 \mathbf{k} \quad (5.16.2.c)$$

Ahora bien, puesto que " $\vec{u}$ " es perpendicular simultáneamente a " $\vec{M}$ " y a " $\vec{W}$ ":

$$\vec{u} = \lambda_2 (\vec{M} \times \vec{W}) \quad (5.16.2.d)$$

donde " $\lambda_2$ " es el escalar que fija la magnitud de " $\vec{u}$ ". Puesto que " $\vec{M}$ " y " $\vec{W}$ " son también perpendiculares entre sí, podemos escribir, teniendo en cuenta (5.16.2.b):

$$|\vec{u}| = \lambda_2 |\vec{M}| |\vec{W}| = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{W}|}$$

por lo que:

$$\lambda_2 = \frac{1}{W^2} \quad (5.16.2.e)$$

Al llevar (5.16.2.e) a (5.16.2.d) y sustituir ésta en (5.16.2.c):

$$\vec{p} = \frac{\vec{M} \times \vec{W}}{W} + \lambda_1 \mathbf{k}$$

Así, para nuestro caso particular, " $\vec{M}$ " está dado por (5.16.2.a); por otra parte,  $\vec{W} = mg\mathbf{k}$ , donde " $m$ " es la masa del cuerpo = 488 kgm, según calculamos en el ejemplo (5.16.1):

$$\vec{p} = \frac{(-g\mathbf{k} \times \vec{B}) \times (-mg\mathbf{k})}{m^2g^2} + \lambda_1 \mathbf{k} = \frac{mg^2(k \times \vec{B}) \times \mathbf{k}}{m^2g^2} + \lambda_1 \mathbf{k}$$

Y, al hacer simplificaciones y desarrollar:

$$\vec{p} = \frac{(k \cdot k)\vec{B} - (k \cdot \vec{B})\mathbf{k}}{m} + \lambda_1 \mathbf{k}$$

Finalmente, podemos hacer:

$$\lambda = \lambda_1 - \frac{k \cdot \vec{B}}{m}$$

con lo que:

$$\vec{p} = \frac{\vec{B}}{m} + \lambda \mathbf{k}$$

y así:

$$\vec{p} = \left( \frac{1232}{488} \mathbf{i} + \frac{840}{488} \mathbf{j} + \frac{708}{488} \mathbf{k} \right) + \lambda \mathbf{k}$$

$$\vec{p} = (2.52\mathbf{i} + 1.72\mathbf{j} + 1.45\mathbf{k}) + \lambda \mathbf{k}$$

que es la ecuación de una recta vertical que pasa por el punto

$$G(2.52, 1.72, 1.45)$$

El gancho debe colocarse donde esta recta intersekte a la cara superior del cuerpo, que tiene cota 2; el punto pedido es:

$$(2.52, 1.72, 2)$$

Ejemplo 5.16.3) Encontrar la ecuación de la línea de acción de la fuerza que proporciona al cuerpo del ejemplo (5.16.1) una aceleración " $\vec{a}$ " igual en todos sus puntos.

Solución:

Podemos aprovechar mucho de la solución del problema anterior: podemos establecer una red de prismas en el cuerpo y analizar el emésimo prisma, cuya masa podemos calcular aproximadamente como:

$$\Delta m = \sigma(\vec{r}_m) \Delta V_m$$

La fuerza que a esta masa le proporcione una aceleración " $\vec{a}$ " será:

$$\Delta \vec{F}_m = \vec{a} \sigma(\vec{r}_m) \Delta V_m$$

y su momento con respecto al origen, también aproximadamente:

$$\Delta \vec{M}_m = \sigma(\vec{r}_m) (\vec{a} \times \vec{r}_m) \Delta V_m$$

Nuevamente, la suma de estos momentos nos daría una aproximación del momento de la fuerza buscada con respecto al origen; pero si hacemos tender la norma de la red a cero, esa suma se convertirá en una integral triple que nos cuantifica el momento exacto de la fuerza con respecto al origen:

$$\vec{M} = \iiint_V \sigma(\vec{r}) (\vec{a} \times \vec{r}) dv$$

y puesto que " $\vec{a}$ " es constante en todos los puntos:

$$\vec{M} = \vec{a} \times \iiint_V \vec{r} \sigma(\vec{r}) dv = \vec{a} \times \vec{B} \quad (5.16.3.a)$$

Como ves, la única diferencia entre las ecuaciones (5.16.2.a) y (5.16.3.a) consiste en que, en la primera, la aceleración tiene magnitud "g", dirección vertical y sentido hacia abajo, en tanto que, en la (5.16.3.a), la aceleración puede tener cualquier magnitud, cualquier dirección y cualquier sentido.

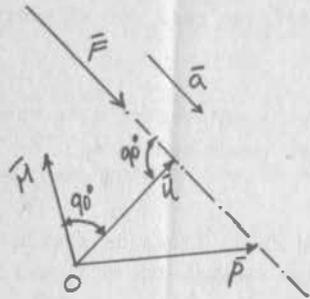


Fig. 5.16.5

Del razonamiento que sigue, -- también podemos aprovechar una buena parte: necesitamos encontrar un vector " $\bar{p}$ " de posición de un punto cualquiera de la línea de acción de " $\bar{F}$ ", para lo cual aprovechamos al vector " $\bar{u}$ " que va del origen a un cierto punto de la línea de acción, perpendicular simultáneamente a " $\bar{F}$ " y a " $\bar{M}$ ". (Fig. 5.16.5)

$$\bar{p} = \bar{u} + \lambda_1 \bar{a}$$

Asimismo:

$$\bar{u} = \lambda_2 (\bar{M} \times \bar{F})$$

y además:

$$|\bar{u}| = \lambda_2 |\bar{M}| |\bar{F}| = \frac{|\bar{M}|}{|\bar{F}|}$$

y así, manipulando estas ecuaciones como lo hicimos en el ejemplo anterior, llegamos a:

$$\bar{p} = \frac{\bar{M} \times \bar{F}}{F^2} + \lambda_1 \bar{a} \quad (5.16.3.b)$$

Sustituimos (5.16.3.a) en (5.16.3.b):

$$\bar{p} = \frac{(\bar{a} \times \bar{B}) \times \bar{F}}{F^2} + \lambda_1 \bar{a}$$

Ahora tenemos en cuenta que  $\bar{F} = m\bar{a}$ , donde "m" vuelve a ser la masa del cuerpo:

$$\bar{p} = \frac{(\bar{a} \times \bar{B}) \times m\bar{a}}{m^2 \bar{a}^2} + \lambda_1 \bar{a} = \frac{(\bar{a} \cdot \bar{a})\bar{B}}{m\bar{a}^2} - \frac{(\bar{a} \cdot \bar{B})\bar{a}}{m\bar{a}^2} + \lambda_1 \bar{a}$$

Hacemos entonces  $\lambda = \lambda_1 - \frac{\bar{a} \cdot \bar{B}}{m\bar{a}^2}$  y escribimos:

$$\bar{p} = \frac{\bar{B}}{m} + \lambda \bar{a} = (2.52\bar{i} + 1.72\bar{j} + 1.45\bar{k}) + \lambda \bar{a}$$

que es la ecuación de una recta que pasa nuevamente por el punto "G" y tiene la dirección de " $\bar{a}$ ".

Observamos que el punto "G" es un punto obligado de paso para cualquier fuerza de inercia (fuerza másica, también se llama). Por ello se le denomina "Centro de Masa" y depende solamente de las características del cuerpo, esto es, de su masa y de la distribución de ésta. Toda vez que el peso es una fuerza de este tipo, pasará también por ese punto; pero cuando nos referimos al peso, le llamamos "Centro de Gravedad". Para cuerpos sobre la superficie terrestre y de dimensiones incomparablemente menores que las de la Tierra, el centro de gravedad siempre coincidirá con el centro de masa.

Se acostumbra anotar  $G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . No confundir estas coordenadas testadas con vectores. De acuerdo con lo que hemos visto:

$$\bar{x} = \frac{\partial x}{m} = \frac{\iiint_V x \sigma(x, y, z) dv}{m} \quad (5.16.2.4)$$

$$\bar{y} = \frac{\partial y}{m} = \frac{\iiint_V y \sigma(x, y, z) dv}{m} \quad (5.16.2.5)$$

$$\bar{z} = \frac{\partial z}{m} = \frac{\iiint_V z \sigma(x, y, z) dv}{m} \quad (5.16.2.6)$$

A las componentes escalares del vector  $\bar{B}$  se les llama "Momentos Estáticos" en "x", "y", "z", respectivamente. Esta denominación es tan buena como otra cualquiera para referirse a ellos; pero ten en cuenta que no son en realidad "momentos" en el sentido en que se han diferido éstos, ni con respecto a un punto, ni con respecto a un eje.

Ejemplo 5.16.4) Calcular la energía cinética del cuerpo del ejemplo (5.16.1) si gira alrededor del eje "z" con una velocidad angular "w".

Solución:

Sabemos que la energía cinética de un cuerpo se calcula como:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (5.16.2.7)$$

pero en este caso:

. En cada punto hay una masa diferente.

. Cada punto tiene una velocidad diferente, que podemos calcular-

$$|\vec{v}| = \omega \rho_z$$

donde  $\rho_z$  es la distancia del punto al eje "z" =  $\sqrt{x^2 + y^2}$

Volvamos pues a considerar una red de "n" celdas prismáticas sobre nuestro cuerpo de entre las cuales escogemos la emésima, uno de cuyos puntos tiene por vector de posición a  $\vec{r}_m$ . Entonces, la energía cinética aproximada de dicha celda la podemos calcular:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \Gamma(\vec{r}_m) \Delta V_m (\omega \sqrt{x_m^2 + y_m^2})^2$$

Al sumar las energías de todas las celdas así consideradas, se obtiene una aproximación de la energía cinética pedida; pero si la norma de la red tiende a cero, la suma convergerá al verdadero valor de la energía y se calculará como integral triple:

$$E_c = \frac{1}{2} \omega^2 \iiint_V (x^2 + y^2) \Gamma(\vec{r}) dV \quad (5.16.2.8)$$

Si analizamos comparativamente la energía cinética de un cuerpo que se traslada (ecuación 5.16.2.7) con la de un cuerpo que gira (ecuación 5.16.2.8) nos encontramos que en la primera aparece la mitad de la velocidad al cuadrado, en tanto que en la segunda, aparece la mitad de la velocidad angular al cuadrado. En (5.16.2.7) aparece la masa del cuerpo que, como sabes, es la medida de la inercia; en (5.16.2.8) aparece una integral triple que, deducimos, debe ser la medida de la inercia al giro. Así pues, a esta integral la vamos a llamar "Momento de Inercia con respecto a eje z"

En nuestro caso, al sustituir el valor de " $\omega$ "

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] dV$$

o bien: 
$$I_z = \iiint_V x^2 [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] dV + \iiint_V y^2 [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] dV$$

$$I_z = I_{xx} + I_{yy}$$

donde: 
$$I_{xx} = \iiint_V (2x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + x^2) dV$$

$$I_{yy} = \iiint_V (2x^2y^2 + 2y^4 + 2y^2z^2 + y^2) dV$$

Calculemos estas integrales por la forma (5.16.2.1); pero sin explicitar la región plana en xy; más aún, puesto que ya sabemos -- que las integrales se resuelven de "adentro hacia afuera", suprimamos los paréntesis:

$$I_{xx} = \int_0^2 \int_0^3 \int_0^4 (2x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + x^2) dx dy dz$$

$$I_{xx} = \int_0^2 \int_0^3 \left( \frac{6464}{15} + \frac{128}{3} y^2 + \frac{128}{3} z^2 \right) dy dz$$

$$I_{xx} = \int_0^2 \left( \frac{8384}{5} + 128 z^2 \right) dz = 3694.93 \text{ Kg}_m - m^2$$

Ahora comprueba que:

$$I_{yy} = \int_0^2 \int_0^3 \int_0^4 (2x^2y^2 + 2y^4 + 2y^2z^2 + y^2) dx dy dz = 1809.60 \text{ Kg}_m - m^2$$

Por lo que:

$$I_z = 5504.53 \text{ Kg}_m - m^2$$

Análogamente puedes calcular  $I_{zz} = \iiint_V z^2 [2(x^2 + y^2 + z^2) + 1] dV = 718.93 \text{ Kg}_m - m^2$  con lo que, si el eje de rotación fuera "x":

$$I_x = I_{yy} + I_{zz} = 2528.53$$

Y, si el eje de rotación fuera "y":

$$I_y = I_{xx} + I_{zz} = 4413.87$$

Y comprobamos algo que "se siente": lo más difícil es hacer girar el cuerpo alrededor del eje "z"; lo más fácil, hacerlo girar alrededor del eje "y".

Nota además que  $I_x \neq I_{xx}$ ,  $I_y \neq I_{yy}$ ,  $I_z \neq I_{zz}$ ; a estas últimas cantidades,  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$ , se le llama también "Momentos de Inercia" en (no con respecto a) "x", "y", "z", respectivamente. En general se definen:

$$I_{xx} = \iiint_V x^2 \sigma \, dv \quad (5.16.2.9)$$

$$I_{yy} = \iiint_V y^2 \sigma \, dv \quad (5.16.2.10)$$

$$I_{zz} = \iiint_V z^2 \sigma \, dv \quad (5.16.2.11)$$

### 5.16.3) La integral iterada en regiones normales.

Supongamos que, para utilizar el sólido anterior, lo vamos a cortar por la mitad, a modo de dejar dos prismas triangulares, cuyas caras triangulares tengan  $x \times 2$  m. (Fig. 5.16.3.a) ¿Cuánto pesa cada parte?

Concentremos primero en la parte menos pesada, esto es, en la que contiene al vértice de densidad 1, que coincide con el origen. -- Ahora la región "U", que nos preocupa, no es ya prismática rectangular, sino que está limitada por los tres planos coordenados y el plano:

$$\frac{x}{4} + \frac{z}{2} = 1 \quad (5.16.3.a)$$

Nosotros sabemos cómo integrar en una región prismática trirrectangular; entonces englobemos nuestra región "U" en la región "V" y definamos

$$\sigma = \begin{cases} 2(x^2 + y^2 + z^2) + 1 & \forall (x, y, z) \in U \\ 0 & \forall (x, y, z) \notin U \end{cases}$$

Esta función es integrable en "V", toda vez que sus puntos de discontinuidad se agrupan en el plano (5.16.3.a), que es una superficie suave. Por otra parte, intuimos que estamos calculando la masa que nos interesa, puesto que la parte restante de la región no tiene masa.

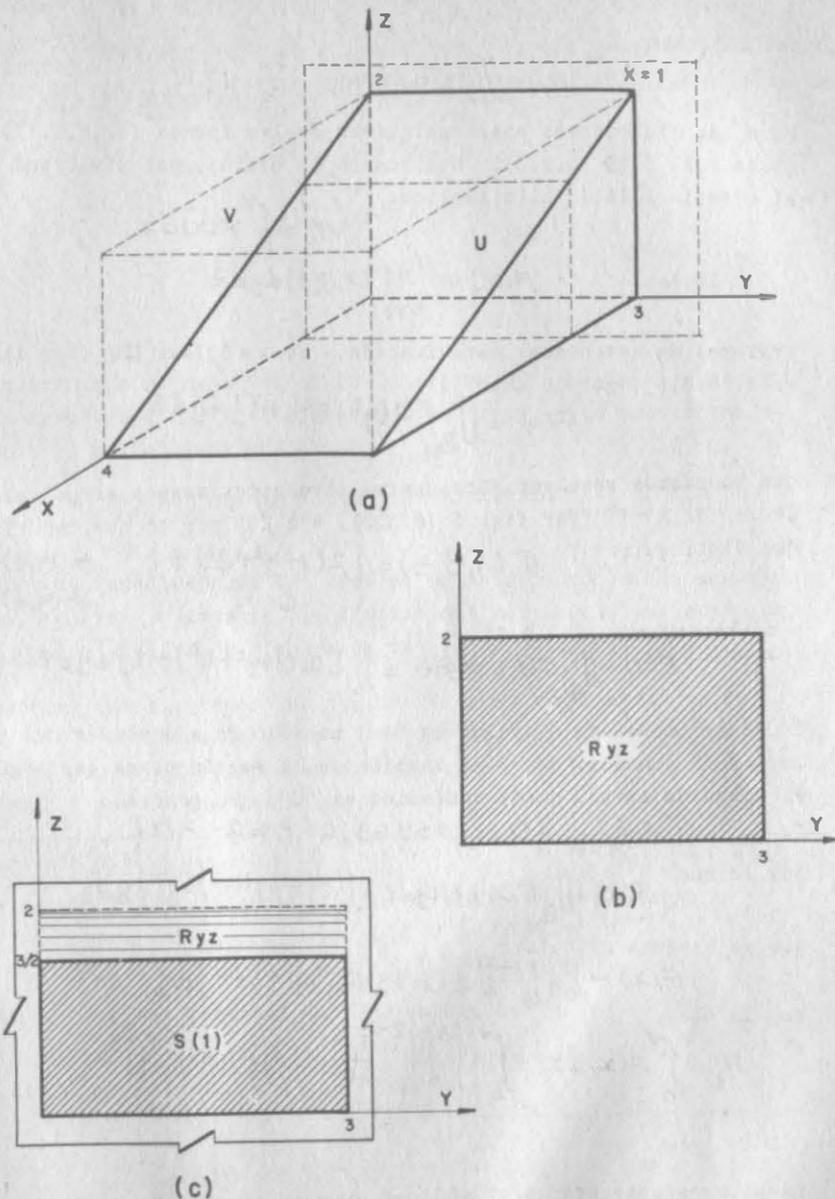


FIGURA 5.16.3

Entonces calculemos:

$$M_1 = \iiint_V \sigma dx dy dz$$

Para hacerlo podemos usar cualquiera de las formas (5.16.2.1), (5.16.2.2) ó (5.16.2.3). Utilicemos la última, por similitud con el ejemplo 5.16.1 Ello implica.

$$M_1 = \int_0^4 F(x) dx$$

donde: 
$$F(x) = \iint_{R_{yz}} \sigma(x, y, z) dy dz$$

Tratemos de establecer esta función. Si  $x=0$ ,  $R_{yz} \subset U$  (Ver figura 5.16.3.6), por lo que:

$$F(0) = \iint_{R_{yz}} [2(y^2+z^2)+1] dy dz$$

que podríamos resolver fácilmente; pero antes veamos otros valores de  $x$ : Si  $x=1$  (Ver fig. 5.16.3.c),  $R_{yz} \not\subset U$  por lo que tendríamos que distinguir:

$$\sigma(1, y, z) = \begin{cases} 2(1+y^2+z^2)+1 & \forall (y, z) \in S \\ 0 & \forall (y, z) \notin S \end{cases}$$

Y si recordamos (5.4.0.7)

$$F(1) = \iint_{R_{yz}} \sigma(1, y, z) dy dz = \iint_S [2(1+y^2+z^2)+1] dy dz$$

Es decir que ahora el valor de  $F(x)$  no sólo va a depender del valor de la función " $\sigma$ ", sino también de la región plana que según el plano de corte, quede contenida en " $U$ ". En general:

$$S/x=x \{ (x, y) / 0 \leq y \leq 3; 0 \leq z \leq 2 - x/2 \}$$

por lo que: 
$$F(x) = \iint_{R_{yz}} \sigma(x, y, z) dy dz = \iint_S [2(x^2+y^2+z^2)+1] dy dz$$

que ya sabemos calcular:

$$F(x) = \int_0^3 \left[ \int_0^{2-x/2} [2(x^2+y^2+z^2)+1] dz \right] dy$$

con lo que:

$$M_1 = \int_0^4 F(x) dx = \int_0^4 \left[ \int_0^3 \left[ \int_0^{2-x/2} [2(x^2+y^2+z^2)+1] dz \right] dy \right] dx \quad (5.16.3.b)$$

Resolvamos entonces en orden:

$$\int_0^{2-x/2} [2(x^2+y^2+z^2)+1] dz = 4y^2 - xy^2 - \frac{13}{2}x^3 + 5x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{2z}{3}$$

$$\int_0^3 [4y^2 - xy^2 - \frac{13}{2}x^3 + 5x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{2z}{3}] dy = -\frac{13}{4}x^3 + 15x^2 - \frac{9}{2}x + 58$$

Finalmente:

$$\int_0^4 (-\frac{13}{4}x^3 + 15x^2 - \frac{9}{2}x + 58) dx = [-\frac{13}{16}x^4 + 5x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 58x]_0^4$$

$$M_1 = 164 \text{ Kg m}$$

y su peso:

$$w_1 = 164 \text{ Kgf}$$

Por cierto que no hemos definido la región " $U$ "; hagámoslo en otra forma congruente con lo que acabamos de hacer, esto es, cortando con planos normales a " $x$ ":

$$U \{ (x, y, z) / 0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 3; 0 \leq z \leq 2 - \frac{x}{2} \}$$

Notamos de inmediato que los límites de integración de la ecuación (5.16.3.b) son justamente los límites que definen la variación de cada una de nuestras variables en la región " $U$ ".

En general vamos a tener una región " $V$ " como la mostrada en la figura 5.16.4.a, donde deberemos integrar una función  $f(x, y, z)$ ; lo que intuimos en el ejemplo anterior requiere de un respaldo lógico formal, por lo que definimos:

#### Definición 5.16.1

Si  $W$  es una región prismática trirrectangular que contiene a " $V$ "

y si se tiene 
$$P(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \forall (x, y, z) \in V \\ 0 & \forall (x, y, z) \notin V \end{cases}$$

donde  $f(x, y, z)$  es continua en " $V$ ", entonces:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_W P(x, y, z) dx dy dz \quad (5.16.3.1)$$

Para calcular el segundo miembro de (5.16.3.1), en el ejemplo anterior decidimos definir:

$$F(x) = \iint_{R_{yz}} P(x, y, z) dy dz \quad \text{donde: } P(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \forall (x, y, z) \in V \\ 0 & \forall (x, y, z) \notin V \end{cases}$$

esto fue equivalente a la decisión de cortar a nuestra región según planos normales al eje "x". En el ejemplo resuelto, al cortar a "V" con esos planos, nos encontramos regiones rectangulares; en el caso general tendremos regiones planas de cualquier forma, por lo que tendremos que decidir si las cortamos con rectas normales al eje "y" ó al eje "z". Al tomar esta decisión, estaremos decidiendo simultáneamente el orden de cálculo de la integral doble, como ya sabemos. Supongamos que optamos por la primera alternativa; entonces habremos decidido definir a "V" según (5.14.0.1) (Fig. 5.16.4.b)

$$V \{ (x,y,z) / a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x); z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \}$$

ya sabemos que:

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \iint_{R_{yz}} f(x,y,z) dy dz \right\} dx \quad (5.16.3.2)$$

puesto que:

$$(x,y,z) \in V \iff (y,z) \in S \quad (\text{Ver fig 5.16.4.b})$$

tendremos:

$$\iint_{R_{yz}} f(x,y,z) dy dz = \iint_S f(x,y,z) dy dz = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right\} dy \quad (5.16.3.3)$$

Finalmente, al llevar (5.16.3.3) a (5.16.3.2)

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dy \right\} dx \quad (5.16.3.4)$$

y debemos remarcar ciertos aspectos:

. Los límites de la integral interior (primera en orden de realización) son, en general, funciones de (x,y); en casos particulares podrá faltar una y otra variable, o ambas; pero nunca podrán contener "z".

. Los límites de la integral intermedia serán, en general, funciones de (x); podrán ser constantes; pero nunca podrán contener a "y" o a "z".

. Los límites de la integral exterior siempre deben ser constantes.

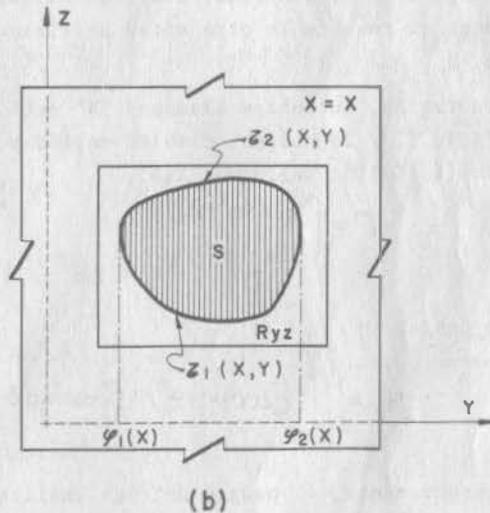
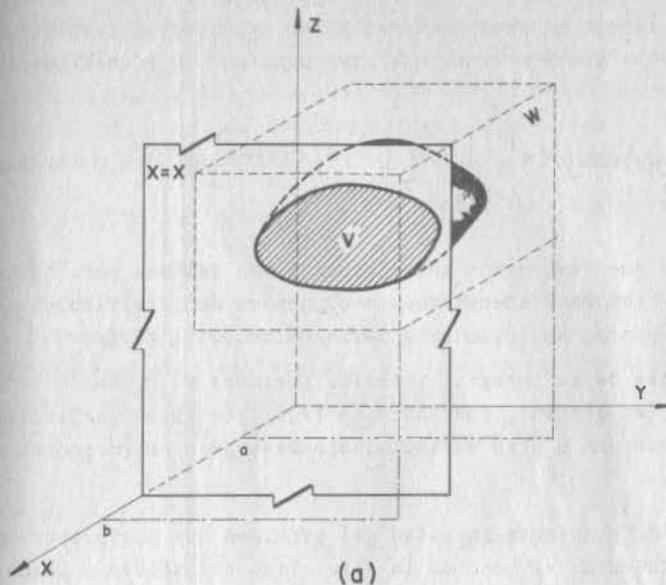


FIGURA 5.16.4.

Naturalmente, puesto que tenemos 6 maneras de definir "V" tendremos otras tantas maneras de desarrollar la integral triple, de las cuales te vamos a mencionar otra para que tu encuentres las otras cuatro:

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_c^d \left\{ \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} \left[ \int_{\varphi_3(x,z)}^{\varphi_4(x,z)} f(x,y,z) dy \right] dx \right\} dz \quad (5.16.3.5)$$

los puntos que remarcamos anteriormente son válidos para todas formas si cambiamos adecuadamente el nombre de la variable. Así, el primer punto, aplicado a la forma (5.16.3.5), diría:

"Los límites de la integral interior (primera en orden de realización) son, en general, funciones de (x,z); en casos particulares, podrá faltar una u otra variable, o ambas; pero nunca podrán contener "y".

Hemos dejado pendiente la mitad del problema que nos propusimos, esto es, calcular el peso de la otra mitad del sólido. Desde luego, una simple resta puede bastar; pero a fin de fijar ideas, por una parte y de comprobar nuestros cálculos, (\*) por otra, calcularemos el peso de la otra mitad utilizando también la integral triple.

Nuestra región, que ahora llamamos "W" está representada en la fig. (5.16.5) y la podemos también englobar en la región "V" del ejemplo (5.16.1). Definimos así:

$$\sigma = \begin{cases} 2(x^2+y^2+z^2)+1 & \forall (x,y,z) \in W \\ 0 & \forall (x,y,z) \notin W \end{cases}$$

por lo que:

$$M_2 = \iiint_W [2(x^2+y^2+z^2)+1] dx dy dz = \iiint_V \sigma(x,y,z) dx dy dz$$

(\*) Aparentemente, el pedazo de roca analizado puede ser izado por un malacate de 200 kg; pero si nos equivocamos en la Aritmética y el motor del malacate se quema, perdemos la chamba... y con razón.

Ahora tenemos que definir nuestra región; pero ya sabemos que eso implica definir, al mismo tiempo, el orden de integración. Con esto en mente, nos proponemos cortar a nuestra región con planos normales a "y", a fin de comparar si hay alguna simplificación en los cálculos. Esto equivale, como ya vimos, a definir.

$$F(y) = \iint_{R \times z} \sigma(x,y,z) dx dz = \iint_S [2(x^2+y^2+z^2)+1] dx dz$$

la región "S" que obtenemos así es siempre la misma, pero ahora no es rectangular, sino triangular (ver fig. 5.16.5). Es indiferente como cortemos esta región; escojamos cortarla con rectas normales a "x", con lo que definimos "S".

$$S \left\{ (x,y) / 0 \leq y \leq 4 ; 2 - \frac{x}{2} \leq z \leq 2 \right\}$$

ó, de una vez, "W":

$$W \left\{ (x,y,z) / 0 \leq y \leq 3 ; 0 \leq x \leq 4 ; 2 - \frac{x}{2} \leq z \leq 2 \right\}$$

y podemos plantear nuestra integral triple:

$$M_2 = \iiint_W [2(x^2+y^2+z^2)+1] dx dy dz = \int_0^3 \int_0^4 \left[ \int_{2-\frac{x}{2}}^2 [2(x^2+y^2+z^2)+1] dz \right] dx dy$$

Al resolver paso a paso tendremos:

$$\int_{2-\frac{x}{2}}^2 [2(x^2+y^2+z^2)+1] dz = \frac{13}{12} x^3 - x^2 + y^2 x + \frac{9x}{2}$$

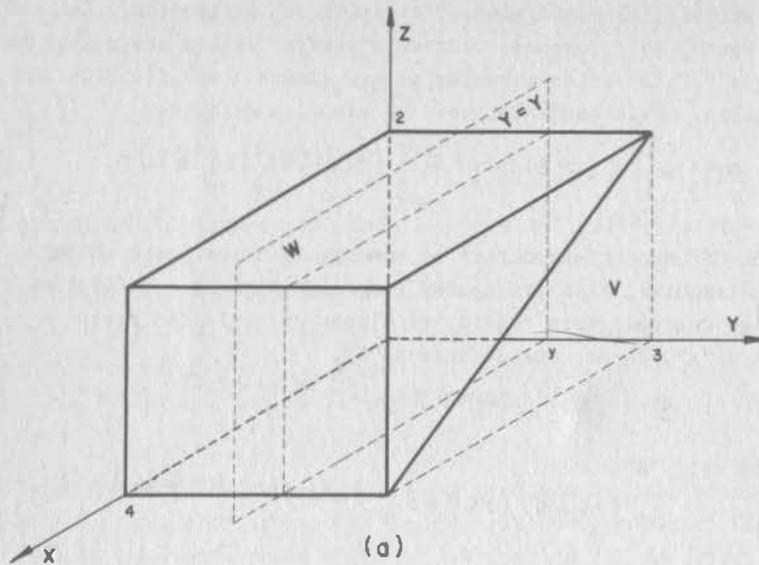
$$\int_0^4 \left[ \frac{13}{12} x^3 - x^2 + y^2 x + \frac{9x}{2} \right] dx = 84 + 8y^2$$

$$M_2 = \int_0^3 (84 + 8y^2) dy = 4 \left[ 21y + \frac{2}{3} y^3 \right]_0^3 = \underline{\underline{324 \text{ Kg.m}}}$$

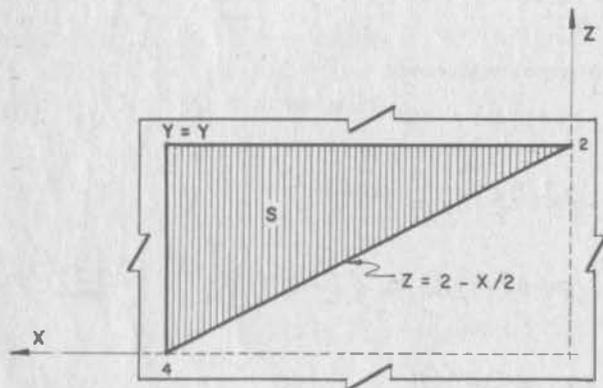
y el peso  $W_2 = 324 \text{ kgf.}$

Comprobación:

$$W_1 + W_2 = 164 + 324 = 488 \text{ kgf.}$$



(a)



(b)

FIGURA 5.16.5

Si ambas mitades se han de izar por separado, requerimos de un lacate de 200 kg y de otro de 1/2 ton.

Ejemplo 5.16.3) Para fabricar ciertas piezas de maquinaria, a unas esferas de acero de 5 cm se les agujerea hasta su centro por medio

de un taladro cónico (ver fig. 5.16.6). Las limaduras a una-dundidora. Si la fábrica tala dra 1000 esferas diarias y la eficiencia de recuperación es de 70% ¿qué cantidad de lima-dura se junta diariamente?

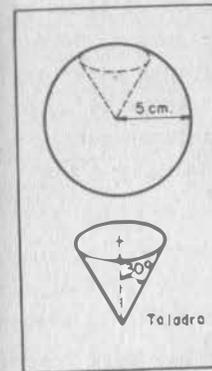


FIG. 5.16.6

Solución:

Necesitamos saber qué volumen de acero se extrae da cada esfera. Este volumen, multiplicado por el peso específico del acero (7.85 gr/cm<sup>3</sup>), por la cantidad de esferas taladradas y por la eficiencia de recuperación, será la respuesta a nuestro problema.

La parte principal del problema es pues, conocer el volumen de acero que se extrae, a cada esfera y esto lo podemos conocer por medio de una integral triple. Para plantearla, observemos que un cono tiene dos planos de simetría, por lo que nuestra región la limitaremos a un octante de la esfera (Fig. 5.16.7), que es la cuarta parte del volumen total extraído.

Las ecuaciones de las superficies involucradas son:

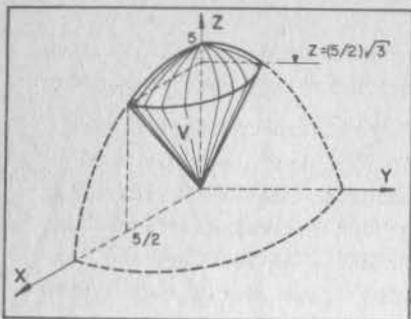


FIG. 5.16.7.

Esfera:  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

Cono:  $A^2 x^2 + a^2 y^2 + z^2 = 0$

Si  $x = 0$

$A^2 y^2 = z^2$

$\pm Ay = z$

que son las ecuaciones de las generatrices en el plano yz. Pero de la figura (5.16.6), el ángulo que forman estas rectas con el eje z es de  $30^\circ$ , por lo que sus ecuaciones son:

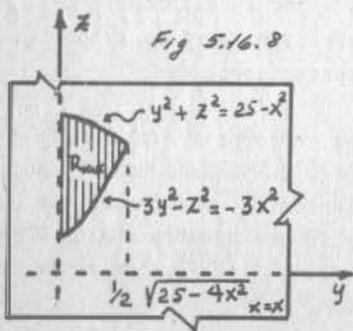
$$z = \pm \cot 30^\circ y = \pm \sqrt{3} y$$

de donde:

$$A = \sqrt{3}$$

y la ecuación del cono queda:

$$3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$$



Para definir una sola región, debemos cortar con planos normales a "x" o a "y". Cortemos con planos normales a "x" para obtener la región variable mostrada en la figura (5.16.8) y que definimos:

$$R/x = \left\{ (y,z) / 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \sqrt{25 - 4x^2}; \sqrt{3x^2 + 3y^2} \leq z \leq \sqrt{25 - x^2 - y^2} \right\}$$

y como podemos cortar desde el plano yz hasta  $x = 5/2$

$$V = \left\{ (x,y,z) / 0 \leq x \leq \frac{5}{2}; 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \sqrt{25 - 4x^2}; \sqrt{3x^2 + 3y^2} \leq z \leq \sqrt{25 - x^2 - y^2} \right\}$$

Así, el volumen de la región:

$$V_V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{5/2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2} \sqrt{25 - 4x^2}} \left[ \int_{\sqrt{3(x^2 + y^2)}}^{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dz \right] dy \right\} dx$$

Al resolver en orden:

$$\int \frac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{\sqrt{3(x^2 + y^2)}} dy = \sqrt{25 - x^2 - y^2} - \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2} \sqrt{25 - 4x^2}} (\sqrt{25 - x^2 - y^2} - \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2}) dy =$$

Antes de continuar, hagamos un alto y reflexionemos sobre los siguientes pasos: todavía, después de realizar la integral planteada, hay que integrar en "x" ¿y qué integrales vamos a manejar? Para integrar el primer radical, tendremos que hacer la sustitución  $y = \sqrt{25 - x^2} \sin \mu$  para llegar al conocido resultado:

$\frac{\sqrt{25 - x^2}}{2} (\mu + \sin \mu \cos \mu)$ ; pero el límite superior no es constante, por lo que tendríamos que dejar en función del (ang. sen) para luego integrar esta función con respecto a "x". Memos halador se presenta el panorama con el segundo radical, donde la sustitución sería  $y = x \operatorname{tg} \theta$  para obtener, como integrando en el siguiente paso,  $L(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)$ . Todo esto nos conduce a abandonar el presente procedimiento como un tanteo fallido y a replantear el problema - definiendo la región de otra manera.

5.16.4) La Integral iterada en regiones regulares.

Solo unas breves palabras al respecto, puesto que ya estás intu- yendo lo que va a pasar.

En efecto cuando no tenemos una región normal, vamos a suponer, - porque al cortarse con un plano normal a "x", no obtenemos una re- gión plana normal (Fig. 5.16.10) no podemos definir.

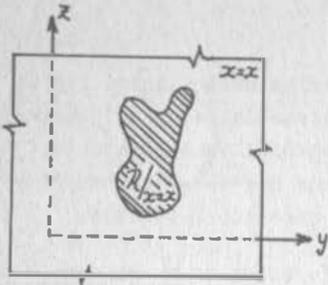


Fig. 5.16.10

$$F(x) = \iint_{R_x} f(x, y, z) dy dz,$$

puesto que está integral sólo- puede plantearse como iterada si la región es normal.

Pero si nuestra región origi- nal es regular, esto es, si -- puede descomponerse en un núme- ro finito de regiones normales, entonces podemos aplicar reite- radamente (5.10.0.9) y escribir:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \dots + \iiint_{V_n} f(x, y, z) dx dy dz \quad (5.16.4.1)$$

y resolver cada una de las integrales como ya vimos en el inciso- (5.16.3)

5.17) La Integral Triple en Coordenadas Curvilíneas.

Aplicación a cilíndricas y esféricas .

5.17.1) Introducción.- A lo largo de estos apuntes hemos hablado ya de las coordenadas curvilíneas y de algunas de sus aplicaciones. Específicamente, en el subtema(5.9) vimos como, al pasar de un -- sistema de referencia a otro, la forma de las regiones podía sim- plicarse y por ende, las integrales que sobre ellas se definie- sen.

En integral triple, sucede por el estilo como veremos a continua- ción:

5.17.2) Mapeo de regiones en E<sup>3</sup>.- Consideremos el ejemplo (5.16.2) y la transformación a coordenadas esféricas:

$$(5.17.2.a) \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \implies J\left(\frac{x, y, z}{\rho, \varphi, \theta}\right) = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$$

Puesto que este Jacobiano es diferente de cero, en general, pode- mos asegurar que, a cada vector de posición  $\vec{r}(x, y, z)$ , corresponde un único vector de posición  $\vec{q}(\rho, \varphi, \theta)$  en el sistema esférico. O sea, toda curva en el sistema cartesiano, tiene su correspondien- te imagen en el sistema esférico y lo mismo puede decirse de cada superficie.

Entonces veamos cuáles son las imágenes de las fronteras de la región V. Estas fronteras son: los planos xz y yz; el cono --  $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$  y la esfera-  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ . Para entrar -- sus respectivas imágenes, sus- tituímos en sus respectivas -- ecuaciones, las ecuaciones -- (5.17.2.a)

Entonces, el plano xz,  $y = 0$ :  
 $\rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta = 0$   
puesto que  $\rho \operatorname{sen} \varphi \neq 0$ , para que  $j \neq 0$ ,  $\operatorname{sen} \theta = 0$ ,  $\theta = 0$   
Ecuación del plano  $\theta = 0$  (fig.5.17. 1.a).

Ahora el plano yz,  $x = 0$ :

$$\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta = 0; \cos \theta = 0; \theta = \frac{\pi}{2}$$

Ecuación del plano que se mues- tra en la figura (5.17.1.b)

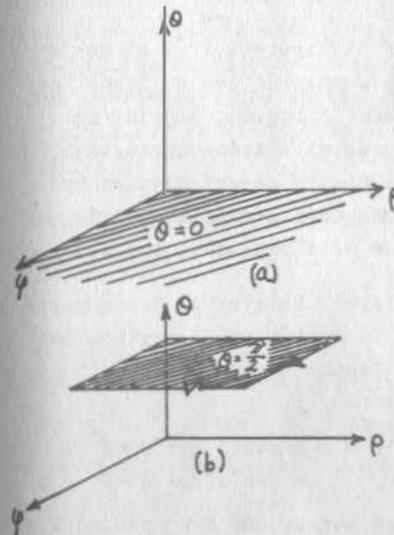
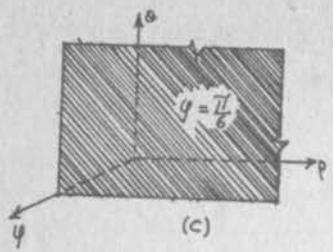
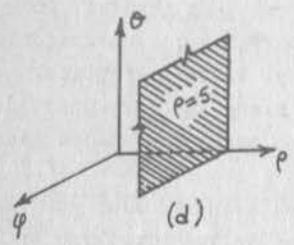


Fig. 5.17.1.



El cono  $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$   
 $3(\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha)$   
 $- \rho^2 \cos^2 \varphi = 0 ; 3 \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi ;$   
 $\tan^2 \varphi = \frac{1}{3} ; \tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} ; \varphi = 30^\circ$

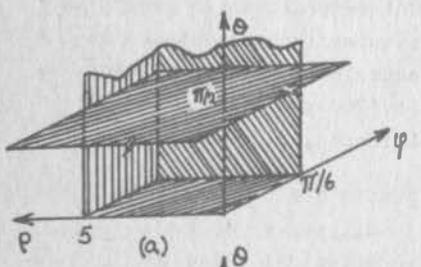
Ecuación del plano mostrado en la figura (5.17.1.c)



La esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$   
 $\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha$   
 $+ \rho^2 \cos^2 \varphi = 25$   
 $\rho^2 [\sin^2 \varphi (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \cos^2 \varphi] = 25$   
 $\rho^2 = 25 ; \rho = 5$   
 (Fig. 5.17.1.d)

Fig. 5.17.1.

Si juntamos todas estas superficies en la figura(5.17.2.a) nos damos cuenta de que no hemos cerrado la región, a pesar de que en el sistema cartesiano, las cuatro superficies se bastaban para cerrar la región. ¿Qué está pasando entonces?



¡Claro! El eje "z" forma parte de la región en el sistema cartesiano; sus ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho \sin \phi \cos \theta = 0 \\ \rho \sin \phi \sin \theta = 0 \end{cases}$$

Como  $\sin \theta, \cos \theta$  no pueden ser simultáneamente nulos:

$$\sin \phi = 0 \quad \phi = 0$$

y el mapeo no puede ser punto a punto. El eje "z" mapea como el plano  $\varphi = 0$

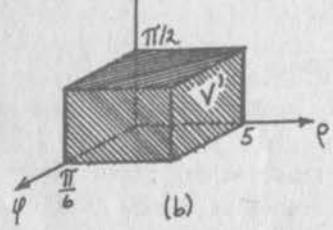


Fig. 5.17.2

Algo similar ocurre en el origen, donde  $\rho=0$ , ocasionando también la anulación del jacobiano. El origen mapea entonces como el plano  $\rho=0$ , dejando así definida la región imagen, que llamaremos  $V'$  y que definimos (Fig. 5.17.2.b)

$$V' = \{ (\rho, \varphi, \alpha) / 0 \leq \rho \leq 5 ; 0 \leq \varphi \leq \pi/6 ; 0 \leq \alpha \leq \pi/2 \} \quad (5.17.2.a)$$

Vemos entonces como una región que tanto trabajo nos había costado definir en el sistema cartesiano, se convierte en una región prismática al cambiar de sistema de referencia.

Por otra parte, cabe indicar que el procedimiento explicado es el general para realizar el mapeo de una región de un sistema coordenado a otro. En este caso, se podría haber establecido la región imagen al caer en la cuenta de que las fronteras son superficies coordenadas del sistema esférico; en efecto, las superficies coordenadas, en el sistema esférico, son conos, esferas y planos verticales.

También es importante el sistema cilíndrico, cuyas ecuaciones de transformación son:

$$(5.17.2.z) \dots \begin{cases} x = \rho \cos \alpha \\ y = \rho \sin \alpha \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow J\left(\frac{x, y, z}{\rho, \alpha, \mu}\right) = \rho$$

Sus superficies coordenadas con cilindros, planos verticales y planos horizontales. Sus puntos singulares (donde  $J=0$ ) se agrupan en el eje "z", que mapea como el plano  $\rho=0$ .

Ejemplo 5.17.1) Dada la región mostrada en la figura (5.17.3) representar su imagen en el sistema cilíndrico y definirla analíticamente.

Las fronteras de la región son:

a) Plano  $z = 3$ :

$$u = 3 \quad \text{plano horizontal}$$

b) Paraboloide  $z = x^2 + y^2$ :

$$u = \rho^2 \cos^2 \alpha + \rho^2 \sin^2 \alpha$$

$$u = \rho^2 \quad \text{cilindro parabólico.}$$

c) Plano  $xz$ ,  $y = 0$

$$\rho \sin \theta = 0$$

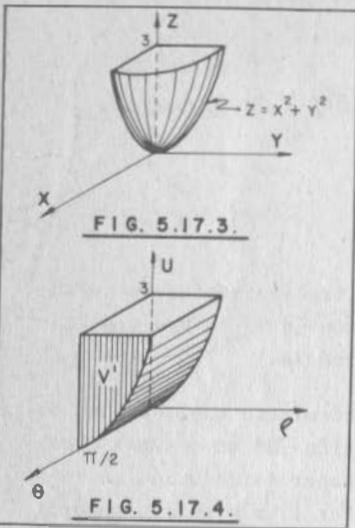
puesto que  $\rho \neq 0$ ,  $\sin \theta = 0$

$$\theta = 0 \quad \text{plano } \rho u$$

d) Plano  $yz$ ,  $x = 0$

$$\rho \cos \theta = 0; \quad \cos \theta = 0$$

$$\theta = \pi/2 \quad \text{plano paralelo a } \rho u$$



e) Para cerrar, el eje "z" mapea como el plano  $\rho = 0$ , para determinar así la región mostrada en la figura (5.17.4), que se define:

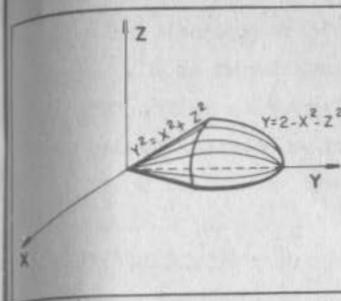
$$V' \left\{ (\rho, \theta, u) / 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \rho \leq 3; \rho^2 \leq u \leq 3 \right\} \dots (5.17.2.b)$$

En ocasiones puede ser ventajoso cambiar la forma específica de (5.17.2.1) o de (5.17.2.2) Para explicar lo que queremos decir, consideremos el siguiente.

Ejemplo 5.17.2) Dada la región consignada en la figura (5.17.5) representar su imagen en un sistema cilíndrico y definirla analíticamente.

Ahora nos conviene usar la transformación:

$$(5.17.2.c) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = u \\ z = \rho \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \int \left( \frac{x, y, z}{\rho, \theta, u} \right) = \rho$$



Con lo que tendríamos que las fronteras son:

a) Paraboloide  $y = 2 - x^2 - z^2$

$$u = 2 - (\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta)$$

$$u = 2 - \rho^2 \quad \text{cilindro parabólico}$$

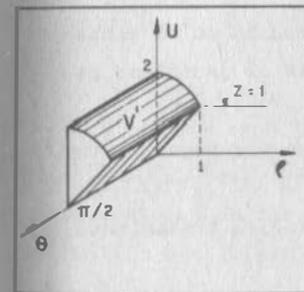
b) Cono  $y^2 = x^2 + z^2$

$$u^2 = \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta = \rho^2$$

$$u = \rho \quad \text{plano perpendicular a } \rho u$$

c) Plano  $xy$ ,  $z = 0$

$$\theta = 0 \quad \text{plano } \rho u$$



d) Plano  $yz$ ,  $x = 0$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{plano paralelo a } \rho u$$

e) Cerramos con el eje "y", que es donde ahora se anula el jacobiano y que mapea en  $\rho = 0$ , plano  $\theta u$ , para tener la figura (5.17.6) donde la región  $V'$  se define:

$$V' \left\{ (\rho, \theta, u) / 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \rho \leq u \leq 2 - \rho^2; 0 \leq \rho \leq 1 \right\}$$

Las coordenadas siguen siendo cilíndricas; las ecuaciones de transformación han cambiado; también cambian las superficies coordenadas, que ahora son cilindros con eje de simetría en

"y"; planos que contienen a "y" y planos paralelos a xz. Aunque hasta ahora hemos hablado de coordenadas cilíndricas - y esféricas, exclusivamente, no debe entenderse que éstos - sean los únicos sistemas de coordenadas curvilíneas en E<sup>3</sup>. En general tendremos el problema de transformar la región "V" en el sistema cartesiano, a la región V' en un sistema cualquiera de coordenadas curvilíneas, dada por

$$\left. \begin{aligned} x &= f(u, v, w) \\ y &= g(u, v, w) \\ z &= h(u, v, w) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.17.2.3)$$

con la condición de que

$$J \left( \frac{x, y, z}{u, v, w} \right) \neq 0$$

Para hacerlo, deberemos:

- 1o.) Identificar las fronteras de nuestra región en el sistema cartesiano y los puntos singulares (donde el jacobiano se anule) en su caso.
- 2o.) Sustituir (5.17.2.3) en las ecs. de las fronteras. Interpretar geoméricamente el resultado.
- 3o.) Dar a los puntos singulares, en su caso, el tratamiento especial que merezcan.
- 4o.) Dibujar en el nuevo sistema.

5.17.3) Cambio de variables en la integral triple.

Puesto que ya hemos visto que un cambio de variables puede - simplificar grandemente una región, es lógico esperar que la integral correspondiente también se simplificaría al aplicarse en la región transformada. Lo que tenemos que ver ahora es qué debemos hacer y tener en cuenta para efectuar la integral en la nueva región.

Para ver esto en forma racional, deberemos hacer intervenir un concepto que es muy sencillo en sí; pero que no se contem-

pla en forma explícita en el programa del curso, razón por la cual vamos a contemplarlo con la mínima profundidad requerida para los fines inmediatos que perseguimos. Una visión más profunda la encontrarás en el Apéndice y te recomendamos que lo consultes, pues te será de gran utilidad en otras materias - que habrás de cursar, Mecánica de Fluidos y Mecánica del Medio Continuo, entre otras. El concepto en cuestión es el de INTEGRAL DE SUPERFICIE.

Cuando vimos la integral curvilínea, hicimos gran hincapié en que nos limitaríamos a integrar aquellos campos vectoriales que nos interesase reducirlos a una curva o trayectoria. Por eso es que toda integral curvilínea se puede reducir a una integral ordinaria, con una sola variable.

Pues bien, si nos interesase reducir un campo vectorial a una superficie e integrarlo, tendríamos la integral de superficies. En general, una integral de superficie cualquiera estará dada por

$$\iiint_S \vec{v} \cdot d\vec{w} \tag{5.17.3.1}$$

donde  $\vec{v}$  es el campo vectorial y "u", "w" son los parámetros de la superficie; en casos particulares, estos parámetros pueden ser un par cualquiera de las variables cartesianas.

Ahora bien, de toda la gama de combinaciones de funciones vectoriales que nos puede interesar integrar, hay una que es la más importante.

$$Q = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds \tag{5.17.3.2}$$

donde  $\vec{v}$  es el campo vectorial

$\vec{n}$  es la normal unitaria exterior a la superficie.

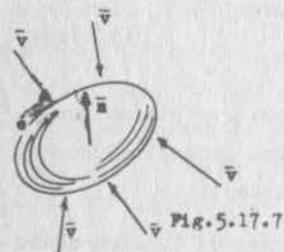
$$ds = \sqrt{EG-F^2} \, du \, dw = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx \, dy$$

Esta integral es importante porque valúa el gasto de un fluido, cuyo campo de velocidades es  $\vec{v}$ , a través de una superficie cualquiera; en efecto, si recuerdas (4.7.0.5) encontrarás que (5.17.3.2) no es sino la generalización de aquella en tres dimensiones.

Para poder llegar a un valor numérico de (5.17.3.2), deberemos definir la región de integración en el plano de los parámetros; se nos puede presentar dos casos:

- a) Nos interesa una porción de superficie limitada por una curva cerrada.
- b) Nos interesa una superficie cerrada (p.ej. una esfera, un elipsoide, etc.)

Quando se tiene el primer caso, se tiene una liga con la integral curvilínea a través del siguiente



Teorema 5.17.1 (Stokes).

Si "s" es una superficie orientable y seccionable suave y " $\vec{v}$ " un campo vectorial diferenciable, entonces

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\epsilon = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (5.17.3.3)$$

A esta cantidad se le llama "circulación de  $\vec{v}$ "; sus dimensiones

[ $L^2 T^{-2}$ ]. Su aplicación es básica en la teoría del vórtice. (Ver Apéndice).

Quando se tiene una superficie cerrada, entonces existe una importantísima liga con la integral triple, que ilustraremos en el siguiente

Ejemplo 5.17.3) Calcular el volumen de la esfera:  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ , por medio de una integral doble.

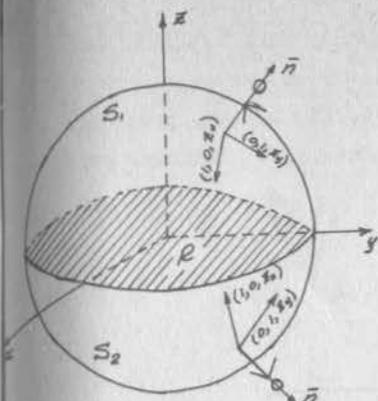


Fig 5.17.8

$$Vol = 2 \iint_R z \, dx \, dy$$

y puesto que

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

$$Vol = 2 \iint_R \sqrt{25 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

que puedes resolver mediante una transformación a coordenadas polares para obtener el resultado ya conocido:

$$Vol = \frac{500\pi}{3}$$

Ejemplo 5.17.4) Si  $\vec{v}_1 = zk$ , calcular  $\oiint_S \vec{v}_1 \cdot \vec{n} \, dS$ , donde "S" es la esfera:  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ .

(El símbolo  $\oiint$  indica, como ya te lo imaginas, que la integral es sobre toda la superficie cerrada).

Debemos calcular  $\vec{n}$ ; ya sabemos que

$$\vec{n} = \frac{z_x \vec{i} + z_y \vec{j} - k}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}$$

Pero en este caso, el sentido es importante, pues  $\vec{n}$  debe ir dirigido siempre hacia afuera; en la figura (5.17.8) vemos que en la parte situada arriba del plano xy, esto lo logramos si hacemos el producto

$$(1, 0, z_x) \times (0, 1, z_y) = -z_x \vec{i} - z_y \vec{j} + k$$

en tanto que, en la parte inferior a xy, para lograrlo, deberemos:

$$(0, 1, z_y) \times (1, 0, z_x) = z_x \vec{i} + z_y \vec{j} - k$$

Calcular una integral de superficie, es muy similar al cálculo de una integral curvilínea: debemos llevar el vector a la superficie y hacer las operaciones indicadas, con lo que lograremos tener una integral doble común y corriente. Establezcamos primero la integral en  $S_1$ :

$$\vec{v}_1 = zk = \sqrt{25-x^2-y^2} \ k$$

$$\vec{n} = \frac{-z \ i - z \ j + k}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} ; \ dS = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \ dx \ dy$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} \ dS = \sqrt{25-x^2-y^2} \ dx \ dy$$

Ahora en  $S_2$ :

$$\vec{v}_1 = zk = -\sqrt{25-x^2-y^2} \ k ; \ \vec{n} = \frac{z \ i + z \ j - k}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \frac{-\sqrt{25-x^2-y^2}}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} ; \ \vec{v}_1 \cdot \vec{n} \ dS = -\sqrt{25-x^2-y^2} \ dx \ dy$$

Entonces:

$$\oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \ dS = \iint_{S_1} \vec{v}_1 \cdot \vec{n} \ dS + \iint_{S_2} \vec{v}_1 \cdot \vec{n} \ dS$$

$$\oiint_S \vec{v}_1 \cdot \vec{n} \ dS = \iint_R \sqrt{25-x^2-y^2} \ dx \ dy + \iint_R -\sqrt{25-x^2-y^2} \ dx \ dy$$

$$\oiint_S \vec{v}_1 \cdot \vec{n} \ dS = 2 \iint_R \sqrt{25-x^2-y^2} \ dx \ dy = Vol \quad (5.17.3.a)$$

Por supuesto que si  $\vec{v}_2 = yj$ ,  $\vec{v}_3 = xi$ :

$$\oiint_S \vec{v}_2 \cdot \vec{n} \ dS = 2 \iint_{R_{xz}} \sqrt{25-x^2-z^2} \ dx \ dz = Vol \quad (5.17.3.b)$$

$$\oiint_S \vec{v}_3 \cdot \vec{n} \ dS = 2 \iint_{R_{yz}} \sqrt{25-y^2-z^2} \ dy \ dz = Vol \quad (5.17.3.c)$$

y entonces, al sumar miembro a miembro (5.17.3.a), (5.17.3.b) y (5.17.3.c):

$$3 \ Vol = \oiint_S (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) \cdot \vec{n} \ dS$$

y como

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = zk + yj + xi = \vec{r}$$

y además:

$$Vol = \iiint_V dx \ dy \ dz, \text{ donde "V" es la región delimitada por}$$

la esfera; y por otra parte

$$\nabla \cdot \vec{r} = 3$$

podemos escribir:

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{r} \ dx \ dy \ dz = \oiint_S \vec{r} \cdot \vec{n} \ dS \quad (5.17.3.d)$$

Esta relación la generalizamos en el siguiente

**Teorema 5.17.2 (Gause, de la divergencia o Green en el espacio)**  
 Si el campo vectorial " $\vec{v}$ " es diferenciable en la región "V", delimitada por la superficie cerrada "S", seccionalmente suave, entonces:

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{v} \ dV = \oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \ dS \quad (5.17.3.4)$$

La importancia de este teorema es muy grande; nos da rigurosamente la interpretación física de la divergencia para cualquier campo de velocidades; da las bases para establecer la ecuación de difusión, etc., (ver Apéndice); pero la utilidad inmediata que nosotros vamos a obtener de él, es que nos va a permitir encontrar la relación fundamental para el cambio de variables

en la integral triple.

Para verlo, desglosamos escalarmente la ecuación (5.17.3.4). Sea

$$\vec{v} = v_1(x,y,z)\mathbf{i} + v_2(x,y,z)\mathbf{j} + v_3(x,y,z)\mathbf{k}$$

supongamos, además que la superficie "S" se expresa en términos de los parámetros "u" y "w"; es decir, su ecuación vectorial:

$$\vec{r} = x(u,w)\mathbf{i} + y(u,w)\mathbf{j} + z(u,w)\mathbf{k}$$

Entonces:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Por otra parte:

$$\vec{n} = \pm \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right|} = \pm \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right|} \left[ J\left(\frac{y,z}{u,w}\right)\mathbf{i} + J\left(\frac{z,x}{u,w}\right)\mathbf{j} + J\left(\frac{x,y}{u,w}\right)\mathbf{k} \right]$$

y además:

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right| du dw$$

Así, (5.17.3.4) queda:

$$\iiint_V \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{R'} \left[ v_1 J\left(\frac{y,z}{u,w}\right) + v_2 J\left(\frac{z,x}{u,w}\right) + v_3 J\left(\frac{x,y}{u,w}\right) \right] du dw \quad (5.17.3.5)$$

Ejemplo 5.17.5).- Valuar el segundo miembro de (5.17.3.d)

Para la esfera se tiene:

$$x = 5 \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$$

$$y = 5 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$$

$$z = 5 \cos \varphi$$

Con lo que la esfera queda representada por la región R' mostrada en la figura (5.17.9).

Ahora:

$$J\left(\frac{y,z}{\varphi,\theta}\right) = 25 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \theta$$

$$J\left(\frac{z,x}{\varphi,\theta}\right) = 25 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \theta$$

$$J\left(\frac{x,y}{\varphi,\theta}\right) = 25 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

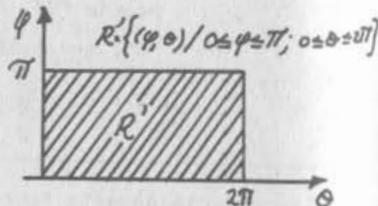


Fig. 5.17.9

Como  $\vec{v} = \vec{r}$ ,  $\vec{v}_1 = x = 5 \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \Rightarrow v_1 J\left(\frac{y,z}{\varphi,\theta}\right) = 125 \operatorname{sen}^3 \varphi \cos^2 \theta$

Análogamente

$$v_2 J\left(\frac{z,x}{\varphi,\theta}\right) = 125 \operatorname{sen}^3 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$v_3 J\left(\frac{x,y}{\varphi,\theta}\right) = \frac{125 \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \theta}{125 \operatorname{sen} \varphi}$$

Así:

$$\oiint_S \vec{r} \cdot \vec{n} ds = \iint_{R'} 125 \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta = 125 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta = 250 \int_0^{2\pi} d\theta = 500\pi = 3 \text{ veces el volumen de la esfera}$$

Ahora consideremos nuevamente el ejemplo (5.16.2) y tratemos de resolverlo en el sistema  $(\rho, \varphi, \theta)$  donde, según vimos en el inciso (5.17.2), la región se convertía en prismática trirrectangular, mediante la transformación asentada en el sistema de ecuaciones (5.17.2.a).

Por (5.17.3.a) podemos escribir:

$$V_v = \oiint_S z \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (5.17.3.a')$$

donde "S" es la superficie seccionalmente suave formada por los planos xz, yz, por el cono  $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$  y por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ . Mediante la transformación propuesta, "S" se transforma en la superficie, también seccionalmente suave, mostrada en la figura (5.17.2), que llamaremos S'.

Para resolver el segundo miembro de (5.17.3.a') tenemos que poner a "S" en términos de dos parámetros; pero esto también lo podemos lograr a través de la superficie S', puesto que a cada punto de ésta, corresponde un punto de S. Así, por ejemplo, el plano  $\varphi = \pi/6$ :

$$\begin{aligned} \rho &= u \\ \varphi &= \pi/6 \\ \theta &= w \end{aligned}$$

y entonces, el cono representado por aquél plano:

$$\left. \begin{aligned} x &= 1/2 u \cos w \\ y &= 1/2 u \sin w \\ z &= \sqrt{3}/2 u \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.17.3.e)$$

Además, puesto que las variables son las mismas, los límites de integración serán los mismos. Lo único que cabe prever es que quizá haya un signo cambiado al pasar de un sistema a otro, debido a un diferente sentido del vector "n". En este caso, como sabemos que tratamos con un volumen, esencialmente positivo, haremos caso omiso del signo, utilizando el que nos lleve al volumen positivo. Entonces, tomando en cuenta (5.17.3.5) podemos escribir la siguiente expresión, que es válida en ambos sistemas:

$$V_v = \iint_{\mathcal{R}'} z J\left(\frac{x,y}{u,w}\right) du dw \quad (5.17.3.f)$$

El jacobiano lo podemos calcular fácilmente a través de (5.17.3.e) pero sólo serviría para el plano  $\varphi = \pi/6$ ; sin embargo, en general podemos escribir: (ver 1.15.5.2)

$$J\left(\frac{x,y}{u,w}\right) = J\left(\frac{x,y}{\rho,\varphi}\right)J\left(\frac{\rho,\varphi}{u,w}\right) + J\left(\frac{x,y}{\varphi,\theta}\right)J\left(\frac{\varphi,\theta}{u,w}\right) + J\left(\frac{x,y}{\theta,\rho}\right)J\left(\frac{\theta,\rho}{u,w}\right)$$

con lo cual, (5.17.3.f) queda:

$$V_v = \iint_{\mathcal{R}'} z \left[ J\left(\frac{x,y}{\rho,\varphi}\right)J\left(\frac{\rho,\varphi}{u,w}\right) + J\left(\frac{x,y}{\varphi,\theta}\right)J\left(\frac{\varphi,\theta}{u,w}\right) + J\left(\frac{x,y}{\theta,\rho}\right)J\left(\frac{\theta,\rho}{u,w}\right) \right] du dw \quad (5.17.3.g)$$

Ahora apliquemos al revés el teorema de la divergencia; esto es, convirtamos la integral de superficie en una integral triple en el espacio  $(\rho, \varphi, \theta)$ ; para ello comparemos (5.17.3.g) con (5.17.3.5) y observemos que  $J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)$  debe corresponder a  $J\left(\frac{\varphi,\theta}{u,w}\right)$  (2a. y 3a. variables); luego, "v," debe corresponder a

$$z J\left(\frac{x,y}{\varphi,\theta}\right) = \rho \cos \varphi \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi = \rho^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi \quad (5.17.3.h)$$

Análogamente:

$$v_2 \rightarrow z J\left(\frac{x,y}{\theta,\rho}\right) = \rho \cos \varphi (-\rho \sin^2 \varphi) = -\rho^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi \quad (5.17.3.i)$$

$$v_3 \rightarrow z J\left(\frac{x,y}{\rho,\varphi}\right) = 0 \quad (5.17.3.j)$$

Al observar nuevamente (5.17.3.5), vemos que (5.17.3.h) debe ser derivada con respecto a "ρ" (primera variable); (5.17.3.i) con respecto a "φ" y (5.17.3.j) con respecto a "θ" y luego sumadas para obtener el integrando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi) &= 3 \rho^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (-\rho^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi) &= \rho^2 \sin \varphi (\sin^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (0) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} V_v &= \iiint_V dx dy dz = \iiint_V J\left(\frac{x,y,z}{\rho,\varphi,\theta}\right) d\rho d\varphi d\theta \dots (5.17.3.k) \\ V_v &= \iiint_V \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^5 \rho^2 \left[ \int_0^{\pi/6} \sin \varphi d\varphi \right] d\rho \right\} d\theta \\ V_v &= \frac{125\pi}{6} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8.769 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Resultado que coincide con el obtenido en el ejemplo (5.16.2); ahora la integración fue mucho más sencilla; pero tal vez pienses (y con razón) que esa simplificación se ve compensada con creces por el volumen de cálculos que tuvimos que hacer para llegar a la ecuación (5.17.3.k). La cuestión es si siempre habremos de hacer todos esos cálculos o si podemos contar con que siempre llegaremos a una expresión análoga a (5.17.3.k). Si ves el Apéndice, te encontrarás demostrado que no solamente en el caso del volumen, sino que, en el caso general:

Si  $f(x,y,z)$  es integrable en  $V$ :

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(u,v,w) J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) du dv dw \quad (5.17.3.6)$$

Ejemplo 5.17.6).- Cuando traemos un fluido por una tubería y queremos darle la oportunidad de que siga 3 direcciones ortogonales, (fig. 517.10.a) usamos una pieza prefabricada que, en el léxico ingenieril, se llama "cruz" y que puedes ver

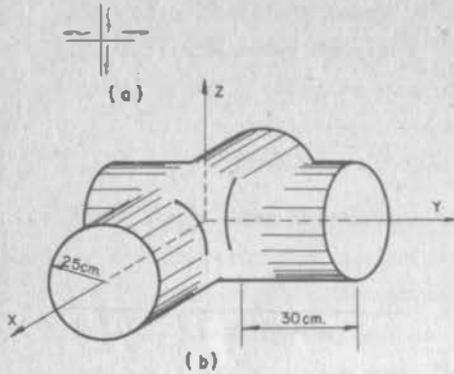


FIGURA 5.17.10.

representada en la figura (5.17.10.b). Tal es el caso de una fábrica donde se conduce diesel (peso específico =  $0.85 \text{ kg/dm}^3$ ) a través de una tubería colgada del techo. Se quiere saber cuánto pesa la pieza de acero (peso específico =  $7.8 \text{ kg/dm}^3$ ) llena de diesel, si el espesor del acero es de 1 cm.

El peso total puede descomponerse en dos partes; el peso de la pieza sola y el peso del diesel. Por otra parte, tanto para uno como para otro, podemos descomponerlo en el cilindro circular recto, de 30 cm de altura y la intersección.

$$\text{Peso total} \begin{cases} \text{Peso del cilindro} = & P_1 \\ \text{Peso de la pieza} \begin{cases} \text{Peso de la intersección} = & P_2 \\ \text{Peso del diesel contenido en el cilindro} = & P_3 \\ \text{Peso del diesel contenido en la intersección} = & P_4 \end{cases} \end{cases}$$

El peso  $P_3$  se obtiene de inmediato:

$$P_3 = 4(0.85) \pi (2.5)^2 (3) = 200.28 \text{ kg}$$

Si consideramos que el espesor es muy pequeño cuando se le compara con las dimensiones generales de la pieza,  $P_1$  puede salir también de inmediato:

$$P_1 = 4(7.8) \pi (5)(3)(0.1) = 147.03 \text{ kg}$$

Con la misma consideración,  $P_2$  también podemos obtenerlo calculando el volumen de acero como la superficie de la intersección por el espesor. En el ejemplo (5.11.4) vimos que la superficie de intersección es

$$S = 16(2.5^2) \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) = 57.08 \text{ dm}^2$$

$$P_2 = 57.08(0.1)(7.8) = 44.52 \text{ kg}$$

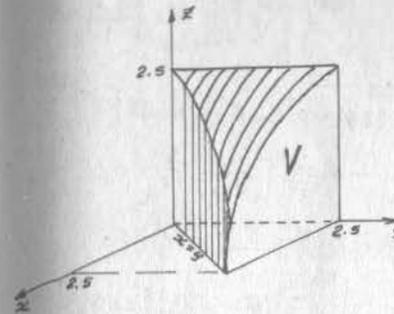


Fig 5.17.11

Nos resta tan solo calcular  $P_4$ , peso del líquido contenido en la intersección; para ello, vamos a aprovechar la simetría y calcularemos el volumen de la región "V" mostrada en la figura (5.17.11) que es la dieciseisava parte del volumen total. Nótese que aunque sobre el plano yz se define una región rectangular, en la inte-

gración tendríamos que manejar radicales.

Propongamos la transformación:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = u \\ z = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$J \left( \frac{x, y, z}{\rho, \theta, u} \right) = \rho$$

Encontramos entonces la región  $V^*$  en el espacio  $(\rho, \theta, u)$ :

- Plano yz,  $x=0$ :  $\theta = \pi/2$  (Plano perpendicular al eje  $\theta$ )
- Plano xy,  $z=0$ :  $\theta = 0$  (Plano  $\rho u$ )
- Plano  $y=2.5$ :  $u=2.5$  (Plano perpendicular al eje u)
- Cilindro  $x^2+z^2=6.25$ :  $\rho=2.5$  (Plano perpendicular al eje  $\rho$ )
- Plano  $x=y$ :  $\rho \cos \theta = u$
- Eje y:  $\rho = 0$  (Plano  $u\theta$ )

La región transformada se representa como en la figura (5.17.12.a). Para definirla, dejamos que sea el ángulo el que varíe entre lí-

mites constantes, lo que implica cortar con planos perpendiculares a " $\theta$ ", como se ve en la figura (5.17.2.b).

Finalmente

$$V_v = \iiint_V \rho \, d\rho \, d\alpha \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{2.5} \rho \left[ \int_{\rho \cos \alpha}^{2.5} du \right] d\rho \right\} d\alpha$$

$$\int_0^{2.5} (2.5\rho - \rho^2 \cos \alpha) d\rho = 1.25 [\rho^2]_0^{2.5} - \frac{\cos \alpha}{3} [\rho^3]_0^{2.5}$$

$$= 7.8125 - \frac{15.625}{3} \cos \alpha$$

$$V_v = \int_0^{\pi/2} (7.8125 - \frac{15.625}{3} \cos \alpha) d\alpha$$

$$= \frac{7.8125 \pi}{2} - \frac{15.625}{3} [\sin \alpha]_0^{\pi/2}$$

$$V_v = 7.06 \, \text{dm}^3$$

$$P_4 = 16(7.06)(0.85) = 96.02 \, \text{kg}$$

Peso total:

$$P_1 = 147.03 \, \text{kg}$$

$$P_2 = 44.52 \, \text{kg}$$

$$P_3 = 200.28 \, \text{kg}$$

$$P_4 = 96.02 \, \text{kg}$$

$$\underline{487.85 \, \text{kg}}$$

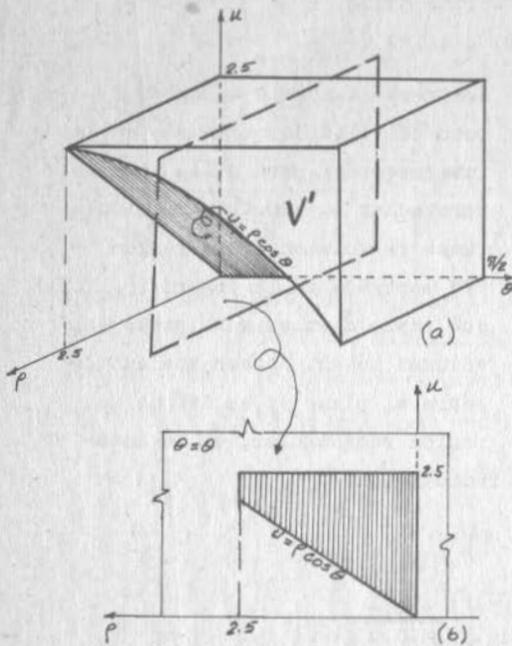


Fig. 5.17.12.

Ejemplo 5.17.7).- Para un cierto proceso industrial se vierte una mezcla de solventes en un embudo como el mostrado en la figura (5.17.13). De día se mantiene una agitación dentro del embudo, para mantener homogénea la mezcla; de noche, se deja estratificar y se tiene una densidad:  $\sigma = 2.8 - 0.7z$ , donde " $\sigma$ " está en  $\text{ton}_{\text{masa}}/\text{m}^3$  si " $z$ " está en m. Se desea saber:

- El peso total del contenido del embudo.
- La densidad de la mezcla durante el día.
- La línea de acción del peso durante el día y durante la noche.
- El momento de volteo que ocasiona un temblor de  $1 \, \text{m}/\text{seg}^2$ , en dirección del eje " $y$ ", durante el día.
- El momento de volteo que ocasiona un temblor de la misma intensidad y dirección, durante la noche.

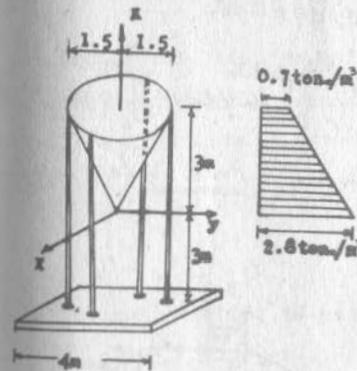


Fig. 5.17.13

Solución:

Sabemos que  $m = \iiint_V \sigma \, dV$  ;  $P = g \iiint_V \sigma \, dV$

por lo que debemos establecer la región " $V$ ". Encontremos la ecuación del cono:

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 - z^2 = 0 \quad \text{Si } x=0: y=1.5, z=3$$

$$2.25\Delta = 9 \quad ; \quad \Delta = 4$$

$$4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0 \quad \text{ec. del cono}$$

Aprovechemos la simetría y definamos la región "V" en el primer octante, utilizando coordenadas esféricas. (Fig. 5.17.14).

$$\text{Plano } xz \rightarrow \theta = 0$$

$$\text{Plano } yz \rightarrow \theta = \pi/2$$

$$\text{Cono } 4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0 \rightarrow 4\rho^2 \sin^2\varphi (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho^2 \cos^2\varphi$$

$$\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 = 1/4; \quad \text{tg}\varphi = 1/2; \quad \varphi = 0.4636 \text{ rad}$$

$$\text{Plano } z=3 \quad \rho \cos\varphi = 3; \quad \rho = 3 \sec\varphi$$

$$\text{Eje } z \quad \varphi = 0$$

$$\text{Origen} \quad \rho = 0$$

$$\text{Entonces:} \quad \frac{1}{4} m = \iiint_{V_1} \rho^2 \sin\varphi (2.8 - 0.7\rho \cos\varphi) d\rho d\varphi d\theta$$

$$= 2.8 \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{3\sec\varphi} \rho^2 d\rho \right\} \sin\varphi d\varphi - 0.7 \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{3\sec\varphi} \rho^3 \cos\varphi d\rho \right\} \sin\varphi d\varphi$$

$$\frac{1}{4} m = \frac{\pi}{64} (100.8 - 56.7); \quad m = 8.66 \text{ ton masa}; \quad \rho = 8.66 \text{ ton fuerza}$$

Puesto que el volumen del tanque es:

$$V_{\text{ol}} = \frac{1.5^2 \pi \times 3}{8} = 7.07 \text{ m}^3$$

entonces la densidad de la mezcla homogénea durante el día:

$$\rho = \frac{M}{V_{\text{ol}}} = \frac{8.66}{7.07} = 1.225 \text{ ton}_{\text{masa}}/\text{m}^3$$

Ahora calculemos la línea de acción

del peso; sabemos que debe ser vertical,

por lo que sólo deberemos calcular " $\bar{x}$ " y " $\bar{y}$ "; durante el día:

$$\bar{x} = \frac{1}{8.66} \iiint_V x(1.225) dV = \frac{1.225}{8.66} \iiint_V x dV$$

Esta integral no la podemos resolver integrando sólo en el primer octante y multiplicando por cuatro, pues hay dos octantes en que la función integrando ( $x$ ) es positiva y dos en que es ne-

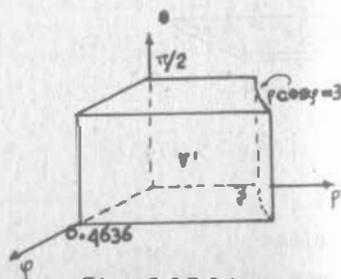


Fig. 5.17.14

gativa; entonces dividimos nuestra región como se ve en la figura (5.17.15) y aplicamos la propiedad (5.15.0.9):

$$\bar{x} = 0.1415 \left\{ \iiint_{V_1} x dV + \iiint_{V_2} x dV \right\}$$

Puesto que a cada punto  $Q \in V_1$ , corresponde otro  $Q' \in V_2$ , tales que

$$x_Q = -x_{Q'}$$

podemos concluir que

$$\iiint_{V_1} x dV = - \iiint_{V_2} x dV \Rightarrow \iiint_{V_1} x dV + \iiint_{V_2} x dV = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$$

Un razonamiento análogo nos llevaría a concluir que  $\bar{y} = 0$

Durante la noche, la densidad no es constante y no podremos sacarla de la integral; por consiguiente:

$$\bar{x} = \frac{1}{8.66} \iiint_V x(2.8 - 0.7z) dV = \frac{1}{8.66} \left\{ \iiint_{V_1} x(2.8 - 0.7z) dV + \iiint_{V_2} x(2.8 - 0.7z) dV \right\}$$

Sin embargo, también en este caso se cumple que si  $Q \in V_1$ ,

$$\exists Q' \in V_2 / x_{Q'} = -x_Q, \text{ por lo que}$$

$$\iiint_{V_1} x(2.8 - 0.7z) dV + \iiint_{V_2} x(2.8 - 0.7z) dV = 0 \quad \bar{x} = 0$$

y, análogamente:  $\bar{y} = 0$

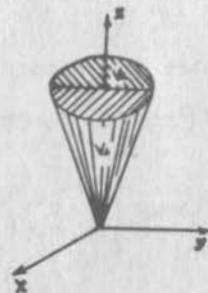


Fig. 5.17.15

Estos resultados son intuitivos en realidad y los podemos generalizar diciendo que si un cuerpo admite plano de simetría, el centro de masa estará en ese plano de simetría.

Ahora veamos los efectos de un temblor. La fuerza ocasionada en la estructura será nuevamente una fuerza de inercia que se aplicará en el centro de masa. Esta fuerza tratará de hacer girar la estructura alrededor del eje definido por (ver fig. 5.17.13)

$$\begin{cases} y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

El momento con respecto a un eje, recordemos, vale:

$$M = \bar{F} \times \bar{p} \cdot \bar{e}$$

donde

$\bar{F}$  es la fuerza

$\bar{p}$  es un vector que une un punto cualquiera de la línea de acción de  $\bar{F}$  con un punto cualquiera del eje.

$\bar{e}$  es el vector unitario que define la dirección del eje.

Definamos la fuerza; primero su magnitud:

$$|\bar{F}| = m |\bar{a}| = 8.66 \times 1 = 8.66 \text{ estenios} = 0.883 \text{ ton fuerza}$$

$$\Rightarrow \bar{F} = 0.883j$$

Ahora sólo falta acabar de definir el centro de masa para tener un punto de la línea de acción de la fuerza; ya sabemos que  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ; calculemos  $z$ .

En el día:

$$\bar{z} = \frac{1}{8.66} \iiint_V 1.225z \, dV = 0.1415 \iiint_V z \, dV$$

Ahora sí hay simetría en los cuatro cuadrantes, por lo que:

$$\bar{z} = 4(0.1415) \iiint_{V'} \rho^2 \sin\varphi \rho \cos\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$\bar{z} = 0.5659 \int_0^{\pi/2} \int_0^{0.4636} \int_0^{3\text{sc}} \rho^2 \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \underline{2.25 \text{ m}}$$

$$\Rightarrow G(0,0,2.25)$$

Nota que la integral triple que acabamos de calcular depende exclusivamente de las características geométricas del tanque; ello se debe a que la condición diurna significa densidad constante, que puede salir del signo de integral; podemos escribir:

$$\bar{z} = \frac{\sigma \iiint_V z \, dV}{\sigma \iiint_V dV} = \frac{\iiint_V z \, dV}{\text{Vol}} \quad (5.17.3.7)$$

En el mismo caso de densidad constante, se puede escribir:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x \, dV}{\text{Vol}} \quad (5.17.3.8)$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_V y \, dV}{\text{Vol}} \quad (5.17.3.9)$$

y se dice que el centro de masa del cuerpo coincide con el "centroide" del volumen, siendo el centroide el punto definido por las ecuaciones (5.17.3.7), (5.17.3.8) y (5.17.3.9) y que es un concepto enteramente geométrico.

Hecho este paréntesis, nos damos cuenta que, conocido  $G$ , podemos obtener  $\bar{p}$ ; como un punto del eje es (0,2,-3):

$$\bar{p} = (0,0,2.25) - (0,2,-3) = (0,-2,5.25)$$

Además, el vector unitario que define la dirección del eje es " $\bar{1}$ ", por lo que:

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 0.883 & 0 \\ 0 & -2 & 5.25 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{4.64 \text{ ton} \cdot \text{m}}$$

Durante la noche:

$$\bar{z} = \frac{1}{8.66} \iiint_V (2.8-0.7z)z \, dV$$

$$\bar{z} = \frac{4}{8.66} \iiint_{V'} \rho^2 \sin \psi (2.8 - 0.7 \rho \cos \psi) \rho \cos \psi \, d\rho \, d\psi \, d\theta$$

$$\bar{z} = 0.4619 \left\{ 2.8 \iiint_{V'} \rho^3 \sin \psi \cos \psi \, d\rho \, d\psi \, d\theta + \right. \\ \left. - 0.7 \iiint_{V'} \rho^4 \sin \psi \cos^2 \psi \, d\rho \, d\psi \, d\theta \right\}$$

$$\bar{z} = \underline{2.06 \text{ m}} \quad G(0, 0, 2.06)$$

Nota que ahora  $\bar{z}$  y por consiguiente  $G$ , sí dependen de la densidad, que es un concepto físico. Por lo demás:

$$\bar{p} = (0, 0, 2.06) - (0, 2, -3) = (0, -2, 5.06)$$

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 0.883 & 0 \\ 0 & -2 & 5.25 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{4.47 \text{ ton} \cdot \text{m}}$$

Ejemplo 5.17.8).- En un trozo de cilindro, como el mostrado en la figura (5.17.16), se tiene una densidad  $\rho = xy$ , donde " $\rho$ " está en  $\text{kg}/\text{dm}^3$  si " $x$ ", " $y$ " están en  $\text{dm}$ . Encontrar las coordenadas del centro de masa.

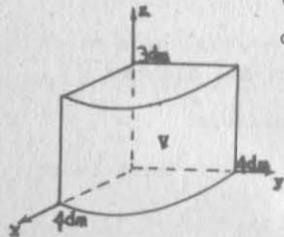


Fig. 5.17.16

$$\iiint_V x^2 y \, dV = \int_0^3 \left\{ \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} y \, dy \, dx \right\} dz$$

Solución:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x(xy) \, dV}{\iiint_V xy \, dV}$$

donde  $V \left\{ (x, y, z) / 0 \leq z \leq 3; 0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2} \right\}$

Notemos que la integral reiterada entre corchetes es constante

con respecto a " $z$ ", ya que no aparece esta variable ni en el integrando ni en los límites; por consiguiente puede salir multiplicando a la integral exterior.

$$\iiint_V x^2 y \, dV = \left\{ \int_0^4 x^2 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} y \, dy \, dx \right\} \int_0^3 dz = 3 \iint_R x^2 y \, dA$$

donde " $R$ " es la región definida por la traza del cilindro; es decir

$$R \left\{ (x, y) / 0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2} \right\}$$

De la misma forma:

$$\iiint_V xy \, dV = 3 \iint_R xy \, dA$$

y así

$$\bar{x} = \frac{3 \iint_R x^2 y \, dA}{3 \iint_R xy \, dA} = \frac{\iint_R x^2 y \, dA}{\iint_R xy \, dA}$$

Las integrales dobles las vamos como ya sabemos para obtener:

$$\bar{x} = \frac{68.27}{32} = \underline{2.13 \text{ dm}}$$

Análogamente:

$$\bar{y} = \frac{\iiint_V xy^2 \, dV}{\iiint_V xy \, dV} = \frac{\iint_R xy^2 \, dA}{\iint_R xy \, dA} = \underline{2.13 \text{ dm}}$$

Finalmente, para calcular  $\bar{z}$ , nos damos cuenta de que el plano  $z = 3/2$  es plano de simetría; o bien:

$$\bar{z} = \frac{\int_0^3 z \left\{ \iint_R xy \, dA \right\} dz}{\int_0^3 \left\{ \iint_R xy \, dA \right\} dz} = \frac{\int_0^3 z \, dz}{\int_0^3 dz} = \frac{9/2}{3} = \underline{3/2 \text{ dm}}$$

En general, cuando tenemos un cilindro (o prisma) con generatriz paralela al eje  $z$ , cuya densidad sea independiente de " $z$ " ( $\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$ )

y limitado por los planos  $z=e$ ,  $z=f$  ( $f > e$ ), las coordenadas de su centro de masa estén dadas por:

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x \sigma(x,y) dA}{\iint_R \sigma(x,y) dA} \quad (5.17.3.10)$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y \sigma(x,y) dA}{\iint_R \sigma(x,y) dA} \quad (5.17.3.11)$$

$$\bar{z} = \frac{\int_e^f z dz}{\int_e^f dz} = \frac{1/2 (f^2 - e^2)}{f - e} = 1/2 (f + e) \quad (5.17.3.12)$$

Si además,  $\sigma = \text{cte}$ :

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x dA}{\text{Area}} \quad (5.17.3.13)$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y dA}{\text{Area}} \quad (5.17.3.14)$$

y al punto del plano  $xy$  definido por las ecuaciones (5.17.3.13) y (5.17.3.14) se le llama "centroide del área", siendo un concepto enteramente geométrico.

## 6. Máximos y Mínimos de Funciones de Varias Variables.

Uno de los problemas básicos de la ingeniería es el de optimizar la solución de los problemas que le competen. La capacidad de optimizar constituye una de las razones de ser del ingeniero. En otras palabras, existen muchas personas que pueden realizar una obra de ingeniería; pero es el ingeniero el capacitado para seleccionar los procedimientos óptimos, aprovechar al máximo las propiedades de los materiales para, bajo las adecuadas normas de seguridad, emplear un mínimo de éstos; en fin, para realizar el tipo de obra que mayor beneficio rinda a la colectividad.

La vida del ingeniero transcurre en un constante optimizar; este proceso no siempre es racional y consciente debido a la complejidad de ciertos problemas; pero aún en estos casos, la actitud del ingeniero está orientada hacia la optimización.

En el curso de Cálculo D. e I., viste la deducción de las condiciones necesaria y suficiente, que deben cumplir los máximos y mínimos de una función de una variable, y se estableció el procedimiento adecuado para su determinación. Ahora emprendémos la resolución de este problema para el caso en que la función dependa de varias variables independientes. Al término de este capítulo, quedarás capacitado para resolver problemas del tipo siguiente:

### Problema 6.0.1

La sección de un canal de irrigación, abierto, ha de tener la forma de un trapecio. Si el área de la sección ha de ser de  $37m^2$ , ¿qué dimensiones y qué pendiente de los lados hacen mínimo la superficie sustentadora  $S$ ? (Fondo y lados). Fig. 6.0.1.

Reemos unitaria la longitud del canal para reducidos al estudio del área.

En este problema las variables independientes son 2, ya que de entre  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $\alpha$ , 2 de ellas se pueden establecer en términos de las restantes a través de su relación geométrica, según se deduce de la Fig. 6.0.1, y del dato área igual a  $37 \text{ m}^2$ .

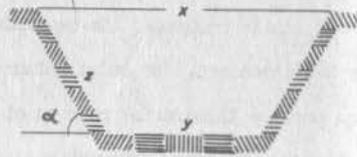


Fig. 6.0.1

El número de variables independientes: 2, obliga a ampliar los conocimientos que adquiriste en Cálculo D.e I.

La resolución de este problema, según procedimiento que veremos posteriormente, - proporciona los valores siguientes:

$$x=10.66 \text{ m}, \quad y=5.33 \text{ m}, \quad z=5.33 \text{ m}, \quad \alpha=60^\circ \quad \text{y} \quad S=16 \text{ m}^2 \text{ como valor mínimo.}$$

En este problema, los resultados anotados fueron los únicos aceptables, por lo que obviamente corresponden a la solución buscada. En problemas objetivos como el anterior, es sencillo discriminar las soluciones para determinar los máximos o mínimos de las funciones que se van a optimizar; pero existen casos en que no es evidente esa definición, por lo que es necesario establecer las condiciones necesaria y suficiente que deben llenar esos valores.

## 6.1 Valores Extremos

Procederemos a establecer las nociones de valores máximos y mínimos, relativos o absolutos de una función, pues nos serán útiles en la solución de estos problemas.

Sea

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$$

definida y diferenciable en  $E$ , un entorno de  $P$ .

### Definición 6.1.1

Un punto  $P_0$  es un punto máximo relativo o local de una función  $f$ , si existe un entorno  $E$  de  $P_0$ , subconjunto del dominio de  $f$ , tal que para todo  $P \in E$ .

$$f(P) < f(P_0)$$

el valor  $f(P_0)$  se llama (valor) máximo relativo de la función.

Si el entorno en el cual se cumple que  $f(P_0) > f(P)$  se extiende a todo el dominio de la función, entonces se dice que en  $P_0$  existe un máximo absoluto.

En forma análoga, un punto  $P_0$  es un punto mínimo relativo o local de una función  $f$ , si existe un entorno  $E$  de  $P_0$ , subconjunto del dominio de  $f$ , tal que para todo  $P \in E$ .

$$f(P) > f(P_0)$$

Si el entorno en el cual se cumple que  $f(P_0) < f(P)$  se extiende a todo el dominio de  $f$ , entonces se dice que en  $P_0$  existe un mínimo absoluto.

De las anteriores definiciones no desprende un método sencillo para investigar la ubicación de un máximo o un mínimo. En efecto, notamos que las definiciones nos dan un criterio de revisión una vez que el punto ha sido propuesto, mas no nos dicen cómo podemos proponer ese punto. Si nos atuviésemos exclusivamente a las definiciones, nos veríamos obligados a seguir un procedimiento de tanteos, suponiendo que en un punto existe un máximo o mínimo, y revisando si cumple con la condición correspondiente, lo que significa un trabajo muy laborioso, pues hay que investigar el valor de la función en todos los puntos de un entorno de punto propuesto. Hace nos notar que éste no es un procedimiento descabellado, y que se usa con relativa frecuencia en problemas prácticos, en donde la función es tan complicada, que no se pueden aplicar los métodos que veremos a continuación; obviamente para este procedimiento se necesita una computadora, y se sale de las metas de nuestro curso.

#### Definición 6.1.2

Los valores extremos de una función son sus máximos y mínimos, relativos y absolutos.

### 6.2 Puntos Críticos

Sea la función  $f$  definida y diferenciable

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$$

Para que una función  $f$  tenga un valor extremo en algún punto  $P_0$ , perteneciente a su dominio de definición, debe alcanzar ese valor extremo sobre cualquier curva intersección entre la superficie representativa geométrica de esa función, y un plano que pase por  $P_0$  y sea paralelo al eje sobre el cual se mide el recorrido de la función.

En el caso del sistema coordenado cartesiano, esos planos serán paralelos al eje  $z$ , y por tanto perpendiculares al Plano  $xy$ . Al referirnos a este sistema, todas las curvas intersección admitirán una tangente horizontal en  $P_0$ , y la superficie admitirá un plano tangente horizontal y un vector normal con dirección vertical en ese punto, como indicamos en la Fig. 6.2.1.

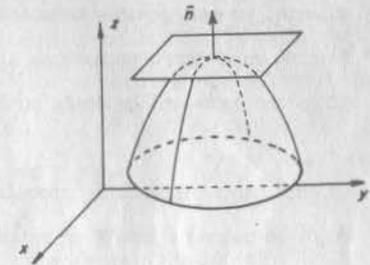


Fig. 6.2.1

Para nuestra función en estudio:  $Z=f(x,y)$ ,  
la normal es:

$$\vec{n} = [0, 0, 1]$$

que equivale a:

$$\nabla Z = 0$$

es decir, en ese punto ya no existe, en ninguna dirección, crecimiento para  $Z$ , lo que precisamente identifica a un punto extremo máximo; en forma semejante podemos establecer para un punto mínimo la misma condición, o sea que el punto en donde se presente un extremo (máximo o mínimo), la función no puede crecer ni decrecer.

#### Teorema 6.2.1

Para que una función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  presente un extremo en un punto, es condición necesaria que el gradiente de la función se anule en dicho punto.

$$\nabla f = \vec{0}$$

6.2.0.1

**Demostración:**

Por reducción al absurdo, si en un punto el gradiente no es nulo, la función crecerá en la dirección del gradiente y decrecerá en la opuesta; por consiguiente, no será posible establecer un entorno sobre el cual, el valor de la función en el punto permanezca siempre superior o siempre inferior a los valores que asume en los demás puntos del entorno.

De esta manera tenemos un procedimiento sencillo para ubicar los puntos en donde se sospecha existe un extremo. Al anular el gradiente se generan "n" ecuaciones con otras tantas incógnitas, que constituyen las coordenadas del punto.

Ahora, cabe preguntar si esta condición la cumplen exclusivamente los puntos extremos de una función. Para visualizar la respuesta consideremos la función:

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

Calculemos su gradiente

$$\nabla f = 2xi - 2yj$$

de donde obtenemos

$$2x=0, \quad 2y=0$$

sistema cuyas raíces son

$$x=0, \quad y=0$$

Veamos si podemos encontrar un entorno de P (0,0), Fig. 6.2.2 en donde la función se mantenga, en todos sus puntos, siempre superior o siempre inferior a

$$f(0,0)=0$$

Incrementemos las coordenadas de P en h y k respectivamente, entonces para P' (0+h,0+k), el valor de la función será:

$$f(0+h, 0+k) = h^2 - k^2 \begin{cases} > 0, & \text{si } |h| > |k| \\ < 0, & \text{si } |h| < |k| \end{cases}$$

de donde se ve que no es posible formar tal entorno, pues la función adquiere valores positivos o negativos en la vecindad de (0,0), dependiendo de la dirección en que nos movamos. Según se ve en la figura 6.2.2., tomará valores positivos sobre las regiones 1 y 3, negativos en las regiones 2 y 4.

Concluimos, por lo anterior, que la condición de gradiente nulo no es suficiente para garantizar la existencia de un punto extremo; mas sí es condición necesaria.

La función estudiada:

$$z = f(x,y) = x^2 - y^2$$

queda representada en la Fig. 6.2.3; observamos las regiones ACD y BOC en que z tiene valores positivos, y las regiones AOB y COD con valores negativos, de acuerdo con el análisis que hicimos para la Fig.6.2.2.

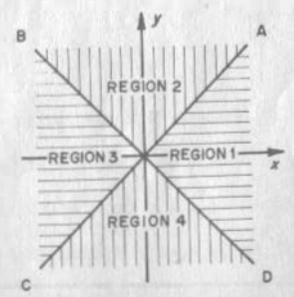


Fig. 6.2.2

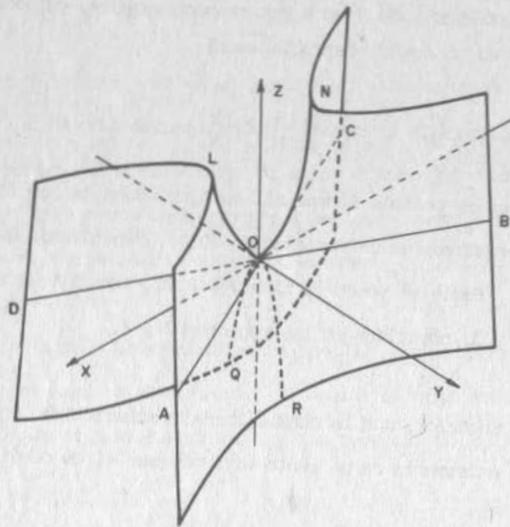


Fig. 6.2.3

**Definición 6.2.1.**  
 Se denomina punto crítico de la función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  a todo punto  $P_0$  para el cual  $\nabla f(P_0) = 0$ .

Geométricamente, los puntos críticos son aquellos en los cuales la superficie  $z = f(x,y)$  tiene un plano tangente horizontal según vemos en la fig. 6.2.1. - Esto incluye a los puntos extremos: máximos y mínimos y otros que reciben el nombre de puntos silla, porque la forma de la superficie típica donde esto sucede es la de la Fig. 6.2.3 que asemeja una silla de montar.

La intersección de esa superficie con el plano YZ es la curva QOR que tiene un máximo en O, mientras que su corte con el plano XZ es la curva LON que muestra un mínimo en O.

6.3 Condición Suficiente para la Existencia de Puntos Extremos.

Ya es establecida la condición necesaria que deben cumplir los puntos extremos de una función: (ec. 6.2.0.1), debemos encontrar la condición suficiente que deban satisfacer esos puntos.

6.3.1 Criterio de la Segunda Derivada.

Para entender más fácilmente este criterio, veamos primeramente funciones del tipo  $z=f(x,y)$ , que pueden visualizarse geométricamente. Las consideraciones que hemos hecho acerca de los máximos, los mínimos, y los puntos silla dan la clave: cualquiera que sea el plano perpendicular a XY que corte a la superficie en estudio pasando por el punto considerado, nos debe proporcionar curvas que siempre presenten un máximo, o siempre un mínimo en ese punto; y nosotros, de acuerdo con el curso de Cálculo D.e I, ya sabemos cómo analizar una curva: simplemente obtenemos la segunda derivada, y si su valor en  $P_0$ , punto en estudio, es positivo, se trata de un mínimo, y si su valor en ese punto es negativo, se trata de un máximo. Así pues, lo que debemos investigar es si para cualquier dirección de corte, dirección definida por la traza horizontal del plano verti-

cal, la segunda derivada conserva su signo.

¿Con respecto a qué debemos derivar?: no importa; una curva depende de un sólo parámetro  $y$ , cualquiera que sea éste, con respecto a él debemos derivar. Si escogemos como parámetro a "s" longitud del arco de curva, el razonamiento se simplifica, pues entonces estaremos hablando de derivadas direccionales.

Sea un vector unitario en una dirección cualquiera de corte:

$$\bar{e} = \cos \alpha i + \sin \alpha j \quad 6.3.1.1$$

$$[\bar{e}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Como sabemos, dada  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ , la primera derivada direccional es:

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \bar{e} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad 6.3.1.2$$

En forma similar calculamos la segunda derivada direccional:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left( \frac{df}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha \right) = \nabla \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha \right) \cdot \bar{e} \\ &= \left[ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \alpha \right) i + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cos \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin \alpha \right) j \right] \cdot \bar{e} \end{aligned} \quad 6.3.1.3$$

o bien, en notación matricial

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{ds^2} &= \left[ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \sin \alpha \right), \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cos \alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin \alpha \right) \right] \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha, \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = [\bar{e}]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} [\bar{e}] \end{aligned} \quad 6.3.1.4$$

$$= [\bar{e}]^T H [\bar{e}] \quad 6.3.1.4'$$

en donde  $[\bar{e}]^T$  es la matriz transpuesta de  $\bar{e}$ .

A la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = H \quad 6.3.1.5$$

se le denomina "matriz hessiana", y se le designa con H.

A su determinante

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)^2 \quad 6.3.1.6$$

se le denomina "determinante hessiano", o simplemente "hessiano". Si el determinante hessiano es diferente de cero, y dado que H es una matriz simétrica, ésta puede transformarse, de acuerdo a lo que viste en tu curso de Algebra, en una matriz diagonal  $H' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$  mediante la matriz de vectores principales  $P$  que es una matriz ortogonal, es decir que su transpuesta  $P^T$  es su inversa:  $P^T = P^{-1}$ , y cumple que  $PP^T = I$ , con lo que

$$P^T H P = H' \quad 6.3.1.7$$

en que  $H'$  es la matriz diagonal que tiene como elementos diagonales a los valores característicos de H, a los que designaremos con  $\lambda_1$ , y  $\lambda_2$

$$H' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad 6.3.1.8$$

Desde luego que para no alterar 6.3.1.4', premultiplicaremos y postmultiplicaremos a H por  $I = PP^T$ , entonces

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = [\bar{e}]^T (PP^T) H (PP^T) [\bar{e}] \quad 6.3.1.9$$

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = [\bar{e}]^T P H' P^T [\bar{e}] \quad 6.3.1.9'$$

Como recordarás, esto es equivalente a girar los ejes coordenados, y adoptar otros que coincidan con los vectores principales  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , como se esquematiza en la fig. 6.3.1, en donde los vectores principales están definidos por

$$\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 \end{bmatrix}$$

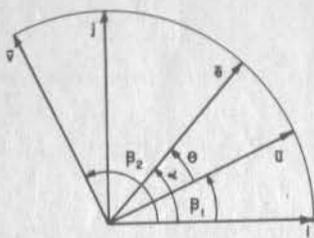


Fig. 6.3.1

Entonces

$$\begin{bmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u}, \vec{v} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \cos \beta_2 \\ \sin \beta_1 & \sin \beta_2 \end{bmatrix}$$

Para fijar ideas, consideremos el siguiente

Ejemplo 6.3.1

Hallar la matriz H, sus valores característicos, y las matrices p y H' de la función  $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$  en un punto crítico.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3y \Rightarrow 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 3x \Rightarrow 3y^2 - 3x = 0 \end{aligned} \tag{6.3.1.a}$$

Al resolver el sistema 6.3.1.a obtenemos:

$$\begin{aligned} x = y^2, \quad y^3 - y = 0 &\Rightarrow y_1 = 1; y_2 = 0 \\ x_1 = 1; x_2 = 0 \end{aligned}$$

*Handwritten:*  
 $y(y^3 - 1) = 0$   
 $y^3 = 1$

Entonces los puntos que satisfacen el sistema son:

$$q_1 (1,1) \text{ y } q_2 (0,0)$$

Estudiamos  $q_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x, & \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2} &= 6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 6y, & \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2} &= 6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= -3, & \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y \partial x} &= -3 \end{aligned}$$

Al substituir estos valores en 6.3.1.6, obtenemos

$$[H] = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Para hallar valores característicos, recordarás de tu curso de Algebra, que debe buscarse la solución no trivial del sistema:

$$\begin{aligned} (6 - \lambda) \cos \beta - 3 \sin \beta &= 0 \\ -3 \cos \beta + (6 - \lambda) \sin \beta &= 0 \end{aligned} \tag{6.3.1.b}$$

para lo cual se debe anular el determinante

$$\begin{bmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{6.3.1.c}$$

de donde:

$$(6-\lambda)^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 9$$

Al substituir  $\lambda_1$  en el sistema 6.3.1.b

$$(6-3) \cos \beta_1 - 3 \sin \beta_1 = 0 \Rightarrow \cos \beta_1 = \sin \beta_1, \beta_1 = 45^\circ$$

$$\cos \beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

de donde :

$$\vec{u} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

Al sustituir  $\lambda_2$  en el mismo sistema

$$\cos \beta_2 = -\text{sen } \beta_2 \rightarrow \beta_2 = 135^\circ, \cos \beta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{sen } \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{v} = \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

por lo tanto

$$\begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

y podemos verificar  $H'$

$$\begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix}^T H \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ -9\sqrt{2} & 9\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H' \end{bmatrix}$$

El producto  $\vec{e}^T \vec{p}$  da como resultado un vector unitario que designaremos  $\vec{w}$ , que indica la direcci3n de corte con respecto a los nuevos ejes  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , segun ve-

remos a continuaci3n:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha, \text{sen } \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta_1 \cos \beta_2 \\ \text{sen } \beta_1 \text{sen } \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta_1 + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta_1, \cos \alpha \cos \beta_2 + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos (\alpha - \beta_1), \cos (\alpha - \beta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos (\alpha - \beta_1), \cos (\beta_2 - \alpha) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.3.1.10}$$

De la Fig. 6.3.1,

$$\alpha - \beta_1 = \theta, \quad \beta_2 - \alpha = 90^\circ - \theta \Rightarrow \cos (\beta_2 - \alpha) = \text{sen } \theta$$

Finalmente

$$\vec{e}^T \vec{p} = \begin{bmatrix} \cos \theta, \text{sen } \theta \end{bmatrix} = \vec{w}^T \tag{6.3.1.11}$$

Analogamente

$$\begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{bmatrix} = \vec{w}$$

Para verificar que obtenemos un vector unitario, que hemos designado con  $\vec{w}$ , supongamos que  $\vec{e}$  forma un angulo, digase  $60^\circ$ , con el eje  $i$ , o sea que formara un angulo de  $15^\circ$  con el vector  $\vec{u}$  de nuestro ejemplo, ya que  $\vec{u}$  forma el angulo  $45^\circ$  con  $i$ .

$$\begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{e} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ, \text{sen } 60^\circ \end{bmatrix} = \left[ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} = \left[ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9659, 0.2588 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 15^\circ, \text{sen } 15^\circ \end{bmatrix} = \vec{w}$$

Entonces, volviendo a (6.3.1.9)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{ds^2} &= \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{e} \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix}^T \right) H \left( \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{e} \end{bmatrix} \tag{6.3.1.9} \\ &= \left( \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} \right) \left( \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix}^T H \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{p} \end{bmatrix} \right) \left( \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{e} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \vec{w} \\ \vec{w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{w} \\ \vec{w} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta, \text{sen } \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \text{sen}^2 \theta \tag{6.3.1.13}$$

Evidentemente el signo de  $\frac{d^2 f}{ds^2}$  depende exclusivamente de los signos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

Si para el punto crítico en estudio

$$\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 > 0 \tag{6.3.1.14}$$

entonces, de acuerdo con 6.3.1.13

$$\frac{d^2f}{ds^2} > 0 \tag{6.3.1.15}$$

sin importar la dirección de corte, por lo que en ese punto se tendrá un mínimo relativo.

Si para el punto crítico

$$\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 < 0 \tag{6.3.1.16}$$

entonces

$$\frac{d^2f}{ds^2} < 0 \tag{6.3.1.17}$$

en cualquier dirección de corte; en ese punto se tendrá un máximo relativo.

Si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen signo contrario, de la misma ec. 6.3.1.13 se ve que  $\frac{d^2f}{ds^2}$

no conserva el signo, pues éste dependerá de si  $\cos \theta$  es mayor que  $\sin \theta$  o viceversa, es decir de la dirección de corte; esto significa que se tiene un -

punto silla.

Si  $\lambda_1$  o  $\lambda_2$  son nulos, habrá una dirección en la que nada puede concluirse, pues en ella  $\frac{d^2f}{ds^2} = 0$ , por ejemplo, si  $\lambda_1 = 0$  en  $\theta=0$ ,  $\frac{d^2f}{ds^2} = 0$ , condición que según viste en Cálculo D.e I. no define la calidad del punto crítico.

Al seguir nuestro ejemplo 6.3.1, en  $q_1 (1,1) : \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 9$  ambos mayores que cero, por lo que para todo valor de

$$\frac{d^2f}{ds^2} = 3 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta > 0$$

por lo que afirmamos que en  $q_1$  existe un mínimo.

Analicemos ahora los resultados anteriores en términos de

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

que podemos obtener de inmediato a partir de la función en estudio.

Recordemos que los valores característicos de la matriz Hessiana se obtienen al anular el determinante.

$$\begin{bmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{6.3.1.18}$$

o sea

$$\lambda^2 - \lambda(A + C) + (AC - B^2) = 0 \tag{6.3.1.19}$$

en donde podemos identificar al término independiente  $(AC-B^2)$  como el valor del determinante  $\Delta_H$ , e igual, de acuerdo con la teoría de polinomios, al producto de las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de la ec. 6.3.1.19

$$\Delta_H = AC - B^2 = \lambda_1 \lambda_2 \quad 6.3.1.20$$

En un máximo

$$\frac{d^2f}{ds^2} < 0$$

lo que se obtiene, de acuerdo con la ec. 6.3.1.13, si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son negativos, - en cuyo caso, de acuerdo con la ec. 6.3.1.20

$$\Delta_H > 0 \quad 6.3.1.21$$

lo que, al analizar 6.3.1.20, requiere que A y C tengan el mismo signo.

Para investigar qué signo les corresponde, simultáneamente, a A y C, apuntamos las soluciones de la ec. 6.3.1.19

$$\lambda = \frac{(A+C) \pm \sqrt{(A+C)^2 - 4(AC-B^2)}}{2} \quad 6.3.1.22$$

$$\lambda = \frac{(A+C) \pm \sqrt{(A+C)^2 - 4\Delta_H}}{2}$$

Dado que en el caso que estamos estudiando hemos establecido que  $\Delta_H > 0$ , entonces

$$|A + C| > \sqrt{(A+C)^2 - 4\Delta_H} \quad 6.3.1.23$$

por lo tanto el signo de A+C predominará y dará el mismo signo tanto a  $\lambda_1$  como a  $\lambda_2$ , y como ya vimos que el signo de estas es el negativo, también serán negativos A y C.

$$A \text{ y } C < 0 \quad 6.3.1.24$$

En un mínimo

$$\frac{d^2f}{ds^2} > 0$$

De donde, ec. 6.3.1.13:

$$\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 > 0 \quad 6.3.1.25$$

por lo tanto

$$\Delta_H > 0 \quad 6.3.1.26$$

y

$$A \text{ y } C > 0 \quad 6.3.1.27$$

En un punto silla, ya vimos que

$$\lambda_1 \text{ y } \lambda_2 \text{ tienen signos contrarios}$$

en este caso

$$\Delta_H < 0 \quad 6.3.1.28$$

Si se nos presenta un problema en que

$$\lambda_1 \text{ ó } \lambda_2 \text{ se anulan}$$

entonces

$$\Delta_H = 0 \quad 6.3.1.29$$

Ya vimos que en este caso nada podemos concluir con esa única información; habrá que recurrir al estudio de un entorno reducido del punto crítico, para definir - si se trata de un punto extremo o de un punto silla.

Conforme a lo que hemos visto, el análisis de los puntos críticos, para el tipo de función que estamos estudiando, lo hacemos con los valores característicos de la matriz hessiana; pero también hemos encontrado qué valores tienen en esos puntos, tanto el determinante hessiano como las segundas derivadas parciales, según lo hemos establecido con las ecs. 6.3.1.21, 24, 26, 27, 28 y 29, o sea que en el caso de una función  $f: E^2 \rightarrow E^1$ , la definición de los puntos críticos la podemos hacer con el hessiano y con las segundas derivadas parciales, términos que podemos determinar de inmediato a partir de la función en estudio. Resumiremos a continuación este procedimiento, mismo que contiene las condiciones necesaria y suficiente que deben cumplir los puntos críticos de una función con dos variables independientes.

Dado que los puntos críticos deben cumplir la condición necesaria

$$\nabla f = 0,$$

éstos se hallan resolviendo el sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Si para los puntos críticos así determinados

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0, y \begin{cases} f_{xx} < 0, & \text{en ese punto existe un máximo.} \\ & (\text{ó } \lambda_1 < 0 \text{ y } \lambda_2 < 0) \\ f_{xx} > 0, & \text{en ese punto existe un mínimo} \\ & (\text{ó } \lambda_1 > 0 \text{ y } \lambda_2 > 0) \end{cases}$$

$$\Delta_H < 0, \text{ en ese punto existe un punto silla.} \\ (\text{ó } \lambda_1 = -K \lambda_2, K > 0)$$

$$\Delta_H = 0, \text{ el punto crítico queda indeterminado; se deberá estudiar un entorno de ese punto.}$$

(En este caso  $\lambda_1 \text{ ó } \lambda_2 = 0$ )

## Ejemplo 6.3.2

Hallar mediante el criterio de la segunda derivada, los puntos críticos de

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 \quad (\text{Ver ejemplo 6.3.1})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 3y^2, \quad -3x + 3y^2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 = 1; y_1 = 1 \\ x_2 = 0; y_2 = 0 \end{aligned}$$

Se hallaron  $q_1(1,1)$ , y  $q_2(0,0)$ ; investigaremos a qué tipo de punto crítico corresponden, para lo cual determinaremos su hessiano

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3$$

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9 \quad \begin{matrix} = 27 > 0, \\ P_1(1,1) \end{matrix} \quad \begin{matrix} 36xy - 9 = -9 < 0 \\ P_2(0,0) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{P_1(1,1)} = 6 > 0$$

En  $P_1(1,1)$  existe un mínimo, pues se tiene que  $\Delta_H$  y  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$

$$\text{Mínimo} = (1)^3 - 3(1)(1) + (1)^3 = -1$$

En  $P_2(0,0)$  existe un punto silla, pues  $\Delta_H < 0$  en ese punto.

6.3.3 Generalización

Tratemos ahora de generalizar estos razonamientos a una función escalar cualquiera con dominio en  $E^n$

Sea

$$f(\vec{r}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

6.3.3.1 Condición Necesaria

La condición necesaria para la existencia de puntos críticos es, según ya vimos

$$\nabla f = 0 \tag{6.2.0.1}$$

6.3.3.2 Condición Suficiente

En este caso no podremos hablar de planos de corte ni de curvas resultantes, pero sí podemos decir que al definir un vector unitario  $\vec{e} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , que por ser unitario cumple la condición:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} = 1 \tag{6.3.3.1}$$

queda definido un parámetro  $s$  tal que

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{e} \tag{6.3.3.2}$$

donde  $\nabla f(\vec{r}_0) = 0$

y por consiguiente será posible definir  $f(\vec{r})$  en términos del parámetro "s", y establecer como condición suficiente para que haya un máximo en  $\vec{r}_0$ , la siguiente

$$\frac{d^2 f(\vec{r}_0)}{ds^2} < 0, \forall \vec{e} \tag{6.3.3.3}$$

y para que haya un mínimo:

$$\frac{d^2 f(\vec{r}_0)}{ds^2} > 0, \forall \vec{e} \tag{6.3.3.4}$$

En estos casos, algunos autores hablan de "cortar a la función con un hiperplano", y que la intersección es una hipercurva, y cabe indicar que también suele decirse que " $\vec{e}$ " define una dirección.

La segunda derivada, en cualquier caso, la podemos calcular, como una generalización de lo visto anteriormente

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \vec{e}^T H \vec{e} = [y_1, y_2, \dots, y_n] \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{6.3.3.5}$$

dato que en forma de matriz

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{6.3.3.6}$$

por lo que su matriz transpuesta es:

$$\vec{e}^T = [y_1, y_2, \dots, y_n] \tag{6.3.3.7}$$

y además H es la matriz formada con todas las posibles segundas derivadas parciales de  $f(\vec{r})$ :

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & & f_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.3.3.8}$$

La matriz H, de acuerdo con el T. de Schwarz es simétrica, por lo que aceptará "n" valores principales que pueden calcularse en forma análoga a los anteriores, o bien por medio de algún método numérico.

Asimismo, puede obtenerse la matriz P de vectores Principales con lo cual se cumple, como recordarás de tu curso de Algebra Lineal:

$$P^T H P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (6.3.3.9)$$

en que D es una matriz diagonal cuyos elementos no nulos son justamente los valores principales de la matriz H; esta matriz D posee gran facilidad operativa, por lo que vale la pena trabajar con ella en lugar de H; pero para poderla tener en la ecuación 6.3.3.5 necesitamos premultiplicar y postmultiplicar por  $PP^T$  a fin de que dicha ecuación no se altere. Ya sabemos que

$$P^{-1} = P^T,$$

además 
$$e^T P = \bar{w}^T \equiv [w_1, w_2, \dots, w_n] \quad (6.3.3.10)$$

$$P^T e = \bar{w} \equiv \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (6.3.3.11)$$

en donde  $w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2 = 1 \quad (6.3.3.12)$

o sea, que  $\bar{w}$  y  $\bar{w}^T$  son vectores unitarios; es decir  $w_1, w_2, \dots, w_n$  juegan el mismo papel de los cosenos directores. Al sustituir 6.3.3.9, 10 y 11 en la ec. 6.3.3.5 obtenemos

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \bar{e}^T H \bar{e} = \bar{e}^T (PP^T) H (PP^T) \bar{e} = (\bar{e}^T P) (P^T H P) (P^T \bar{e}) \quad (6.3.3.13)$$

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \bar{w}^T D \bar{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (6.3.3.14)$$

que al ser desarrollada

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \dots + \lambda_n w_n^2 \quad (6.3.3.15)$$

De donde podemos concluir que habrá máximo si y sólo si

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n < 0$$

habrá mínimo si y sólo si

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$$

y habrá punto silla si los valores principales no conservan su signo, pues dependiendo de  $\bar{w}$ , la  $\frac{d^2 f}{ds^2}$  será positiva o negativa.

Si uno de los valores principales se anula, entonces existe por lo menos una dirección en la cual se anula la segunda derivada; por ejemplo, si  $\lambda_i = 0$ , la segunda derivada será nula en la dirección  $w_i = 1, w_j = 0 \forall j \neq i$

Sabemos que, en tal caso, no es posible afirmar con certidumbre, si hay máximo, mínimo, o punto de inflexión, por lo que habrá que analizar el punto crítico con otro enfoque. Una simplificación, como hicimos para el caso en  $E^2$ , inciso 6.3.2, no es posible en mayor número de dimensiones, pues por ejemplo, para  $E^3$ , los valores principales se obtienen anulando el determinante:

$$\begin{vmatrix} (f_{xx} - \lambda) & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & (f_{yy} - \lambda) & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & (f_{zz} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

donde, como podrás comprobar, el término independiente de la ecuación simplificada es nuevamente  $\Delta H$ , por lo que

$$\Delta H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

Pero ahora, el valor de este determinante nada nos dice sobre los signos de los valores principales. En efecto, suponjamos  $\Delta H > 0$ : ¿es porque los tres son positivos, o es porque hay dos negativos y un positivo?

Así pues, siempre que tengamos un problema de máximos y mínimos con más de dos variables, estamos obligados a calcular los valores principales de la matriz hessiana.

6.4 Máximos y Mínimos Bajo Restricción

Qualquier problema de máximos y mínimos es, en términos generales, susceptible de ser planteado y resuelto según el procedimiento visto anteriormente; sin embargo en la práctica el ingeniero será requerido a optimizar bajo ciertas restricciones.

No se puede pedir a un ingeniero que proyecte un generador de máxima eficiencia ni que construya una estructura de costo mínimo, así a secas; se le pedirá un generador de máxima eficiencia que no cueste más de una cierta cantidad, o una estructura

de costo mínimo que soporte ciertos esfuerzos; es decir, se le imponen ciertas condiciones o restricciones.

La expresión matemática de esas restricciones, al sustituirse en la función a optimizar, reduce el problema al tipo de los ya estudiados; pero en la mayoría de los casos, dan lugar a expresiones complicadas que requieren de un trabajo muy laborioso para determinar sus puntos extremos con el método ya conocido.

Par ejemplo, si se nos piden las dimensiones de un tanque prismático, sin tapa, de volumen máximo, con la condición de no usar más de 100 m<sup>2</sup> de lámina para construirlo (Fig. 6.4.1), nuestra función a optimizar es:

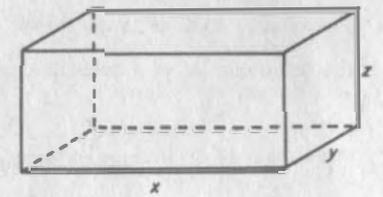


Fig. 6.4.1

$$V = xyz$$

Con la limitación

$$xy + 2xz + 2yz \leq 100$$

En general, siempre será posible despejar de las restricciones un cierto número de variables y sustituirlas en la función a optimizar; como desde luego, el caso más desfavorable se tiene si:

$$xy + 2xz + 2yz = 100$$

entonces:

$$z = (100 - xy) / 2(x + y)$$

y

$$V = \frac{xy(100 - xy)}{2(x + y)}$$

A esta expresión se le trataría como quedó explicado anteriormente; pero se observa que aún en este sencillo problema el aparato algebraico se nos ha complicado.

Veremos a continuación un procedimiento que evita las dificultades algebraicas, - que implica el criterio de la segunda derivada. Haremos antes algunas consideraciones.

#### 6.4.1 Función Objetivo

Lo primero que hay que distinguir es la función objetivo, para lo cual nos haremos la pregunta: ¿Qué es lo que vamos a maximizar o minimizar? la expresión matemática de lo que se va a optimizar es la función objetivo.

Así, en el caso de la estructura de costo mínimo:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

donde

$C_1$  = Costo del concreto

$C_2$  = Costo del acero

etc.

$C$ , costo total, es la función objetivo

#### 6.4.2 Restricciones o Condiciones Laterales

Por otro lado deben distinguirse las restricciones, es decir, las condiciones laterales que deben cumplir las variables que intervienen en la función objetivo. -

Estas restricciones pueden representarse en forma de desigualdades cerradas:

$>$  ;  $<$  . Desde luego, estas desigualdades tienen su principal importancia en su cerradura, o sea en los puntos en que se cumple con la igualdad, a lo que se -

denomina parte activa de la restricción. En el caso de la estructura de costo mínimo, las restricciones estarían representadas por las fórmulas de resistencia de materiales.

#### Ejemplo 6.4.1

Obtenemos el menor valor de la distancia del origen a la región:

$$G = \{ (x,y) / g(x,y) \leq 0 \} \quad \text{en donde:}$$

$$g(x,y) = 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y + 250 \leq 0 \quad 6.4.1.a$$

mostrada en la Fig. 6.4.2

La condición  $g(x,y) \leq 0$ , la cumplen los puntos situados dentro de la curva  $g(x,y)=0$  indicados con achure en la Fig 6.4.2.

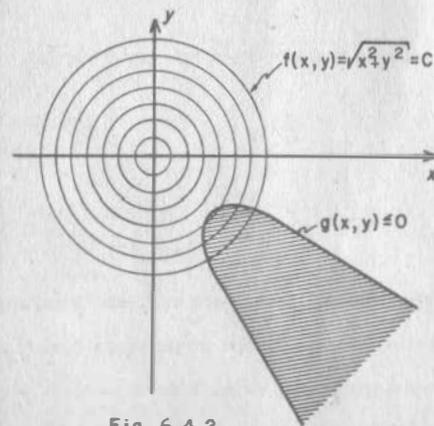


Fig. 6.4.2.

La distancia del origen a cualquier punto está dada por :

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 6.4.1.b$$

Como se trata de hallar el menor valor de  $f(x,y)$ , ésta será la función a optimizar, es decir, la función objetivo, que estará sujeta a la restricción

$g(x,y) \leq 0$ , que nos define una región según mostramos en la Fig. 6.4.2.

**Definición 6.4.1**

Región Permisible es la formada por todos los puntos que cumplen las restricciones.

En nuestro problema es, desde luego, la definida por  $g(x,y) \leq 0$ , y la designaremos con P; las restricciones se ven aumentadas con las no mencionadas pero - obvias

$$x > 0, \quad y < 0$$

Estudiamos una de las curvas de nivel de la función objetivo, por ejemplo:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} = 11 \quad 6.4.1.c$$

o por sencillez en la manipulación a

$$F(x,y) = [f(x,y)]^2 = x^2 + y^2 = 121 \quad 6.4.1.d$$

De esta circunferencia estudiaremos un punto que pertenezca a P, por ejemplo: A, y veamos qué variaciones admite; para ello analicemos su derivada direccional, para lo cual necesitamos primero su gradiente, (Fig. 6.4.3)

$$\nabla F = 2xi + 2yj$$

Dado que  $x > 0$  y  $y < 0$ , este vector tiene la dirección indicada en la Fig. 6.4.3.

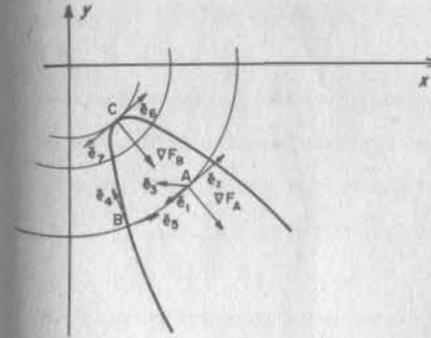


Fig. 6.4.3

Es evidente que nuestra función crece en la dirección indicada, y decrece en la opuesta, y dado que lo que buscamos es un mínimo, consideremos un vector unitario  $\bar{e}_3$  que forme un ángulo obtuso - con  $\nabla F$ . Evidentemente nos podemos mover en esta dirección, pues apunta hacia puntos pertenecientes a la región permisible. Calculemos la derivada direccional de nuestra función objetivo en esa dirección

$$\frac{dF}{ds} = \nabla F \cdot \bar{e}_3 \quad 6.4.1.e$$

Puesto que  $\nabla F$  y  $\bar{e}_3$  forman un ángulo obtuso,  $\frac{dF}{ds} < 0$ , y la función será decreciente en esa dirección, luego hay puntos de la región permisible, más cercanas al origen que "A", entonces "A" no es el punto buscado. La misma conclusión obtendríamos si escogiéramos otra dirección entre  $\bar{e}_1$  y  $\bar{e}_2$ , mostrados en la Fig. Llegaríamos a conclusión análoga, para cualquier punto no frontera de P sobre la curva de nivel en estudio.

Si escogiéramos el punto frontera B, donde la curva de nivel intersecta a la - frontera de P, las direcciones en las cuales podemos movernos dentro de la región permisible, conservando obtuso el ángulo con el gradiente, se han restrin

gido, quedando ahora comprendidas entre  $\bar{e}_4$ , tangente a la frontera, y  $\bar{e}_5$  tangente a la curva de nivel. Aún así hay muchas direcciones en las cuales podemos movernos, conservando decreciente a nuestra función objetivo.

En conclusión, ninguno de los puntos de la curva de nivel que hemos analizado, satisface la condición de optimalidad, pues hay todavía muchos puntos de P en los cuales la distancia al origen es menor que 11, tal como lo está indicando el hecho de que la derivada direccional de F se conserva negativa.

La solución está, intuitivamente, donde la frontera de la restricción sea tangente a una curva de nivel.

En efecto, en estas condiciones, todas las direcciones que forman ángulo obtuso con el gradiente no pueden ser seguidas, pues nos llevan a puntos fuera de la región permisible.

Las direcciones límite son las de  $\bar{e}_6$  y  $\bar{e}_7$ , tangentes simultáneamente a la frontera de la región permisible y a la curva de nivel, circunstancia por la cual la derivada direccional de F en cualquiera de estas dos direcciones, es nula. Por lo anterior concluimos que no existe dirección permisible en la cual la función objetivo decrezca, lo que indica que hemos alcanzado el punto mínimo: C

Para determinar ese punto crítico, observemos que la condición de tangencia simultánea a la frontera y a la curva de nivel de la función objetivo, implica que las normales a ambas, esto es, los gradientes de las funciones que representan, deben coincidir en dirección, o lo que es lo mismo, un gradiente puede ser expresado como el otro multiplicado por un escalar.

$$\nabla F = \lambda \nabla g \tag{6.4.1.f}$$

de 6.4.1.a

$$\nabla g = (18x + 24y - 40)i + (24x + 32y + 30)j \tag{6.4.1.g}$$

de donde

$$2xi + 2yj = \lambda [(18x + 24y - 40)i + (24x + 32y + 30)j] \tag{6.4.1.h}$$

lo que requiere

$$2x = \lambda (18x + 24y - 40) \tag{6.4.1.i}$$

$$2y = \lambda (24x + 32y + 30) \tag{6.4.1.j}$$

Dado que el punto que es solución del problema debe satisfacer la parte activa de la restricción, con esa ecuación se completa el sistema que permite hallar los valores  $x, y$  y  $\lambda$ .

Generalmente no es necesario hallar el valor de  $\lambda$ , por lo que se puede eliminar entre las ecs.

$$\lambda = \frac{x}{9x + 12y - 20} = \frac{y}{12x + 16y + 15}$$

de donde obtenemos la ecuación

$$12x^2 + 7xy - 12y^2 + 15x + 20y = 0 \tag{6.4.1.k}$$

a partir de la cual despejamos x

$$x = \frac{-7y - 15 \pm \sqrt{49y^2 + 210y + 225 + 576y^2 - 960y}}{24} \tag{6.4.1.l}$$

$$x = \frac{-7y - 15 \pm (25y - 15)}{24} \tag{6.4.1.l'}$$

con lo que obtenemos

$$x_1 = \frac{3y - 5}{4} \quad x_2 = -\frac{4}{3}y \quad 6.4.1.l$$

Al sustituir  $x_1$  en la ec. 6.4.1.a y hacer el arreglo correspondiente

$$25y^2 - 30y + 201 = 0 \quad 6.4.1.m$$

de donde

$$y = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 20100}}{50} \quad 6.4.1.n$$

solución imaginaria, por lo que la desdeshamos.

Al sustituir  $x_2$  en la ec. 6.4.1.a, obtenemos

$$y_2 = -3 \quad 6.4.1.o$$

para la que corresponde

$$x_2 = 4 \quad 6.4.1.p$$

Entonces en (4,-3) existe un mínimo igual a

$$z = f(4,-3) = 5 \quad 6.4.1.q$$

El razonamiento que hemos seguido aquí, es general para todo este tipo de problemas; sólo nos resta dar las expresiones matemáticas necesarias para atacar un problema en cualquier número de dimensiones.

En obvio de simplificar la exposición, hagamos antes unas cuantas convenciones:

1°) Podemos evitarnos la disyuntiva entre maximizar o minimizar y hablar solamente de maximizar. En efecto, minimizar una función equivale a maximizar la misma función con signo cambiado

$$\text{Min. } f(\vec{r}) = \text{Máx. } [-f(\vec{r})] \quad 6.4.2.1$$

Minimizar un costo significa también maximizar los ahorros.

2°) Todas las restricciones serán expresadas como  $\geq 0$ . Esto siempre será posible mediante el mismo artificio de cambiar de signo.

Así, en el ejemplo resuelto anteriormente, en vez de escribir

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y + 250 \leq 0$$

escribiremos

$$40x - 9x^2 - 24xy - 16y^2 - 30y - 250 \geq 0$$

Ahora plantearemos el problema general.

Maximización de la Función  $f(\vec{r})$

Sea  $f(\vec{r})$ , en que  $\vec{r}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , continua y diferenciable en un entorno de  $\vec{r}$ .

Sujeta a las restricciones

$$g_1(\vec{r}) \geq 0$$

$$g_2(\vec{r}) \geq 0$$

...

$$g_m(\vec{r}) \geq 0$$

Las restricciones definirán una región en  $E^n$ ; pero no podremos dibujarla; sólo matemáticamente podremos saber si un cierto punto, está o no en la región permisible.

Diremos entonces que  $\vec{r}_1 \in P$  si y sólo si

$$g_1(\vec{r}_1) \geq 0$$

$$g_2(\vec{r}_1) \geq 0$$

...

$$g_m(\vec{r}_1) \geq 0$$

6.4.2.3

Con respecto a las direcciones, diremos que una dirección dada por el vector unitario  $\bar{e}$ , a partir del punto  $\bar{x}_0$ , es permisible, si existe  $\tau > 0$  tal que

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + \tau \bar{e} \in P, (\bar{x}_0 \in P) \quad 6.4.2.4$$

En un espacio de "n" dimensiones, sólo "n" restricciones pueden operar activamente en un punto sin ser redundantes. Salvo esta limitante, no podemos saber, en el problema general, cuántas restricciones van a operar activamente en el punto óptimo. Estos problemas normalmente se atacan a base de una computadora; pero en los problemas que atacaremos durante este curso, siempre habrá alguna circunstancia que nos permita definir, heurísticamente, el número de restricciones que obran activamente en el punto óptimo.

En el ejem. 6.4.1, aparte de la restricción dada por el problema, incluiremos - ahora 2 más:

$$x > 0$$

$$y < 0$$

pero ambas son redundantes, pues se pueden establecer a través de  $g(x,y) > 0$ .

En lo que sigue supondremos que ninguna de las "n" restricciones que plantearemos es redundante.

Al conjunto de restricciones activas en un punto lo designaremos con A, y con D designaremos a un conjunto de vectores unitarios que cumplen, en un punto dado, - con la definición de dirección permisible.

#### Teorema 6.4.1

Sea  $\bar{x}_0$  un punto frontera, en el cual opera activamente el conjunto de restricciones A. Si  $\bar{e} \in D$  entonces

$$\nabla g_i(\bar{x}_0) \cdot \bar{e} \geq 0, \quad \forall i \in A \quad 6.4.2.5$$

#### Demostración:

Por reducción al absurdo: supongamos  $\nabla g_i(\bar{x}_0) \cdot \bar{e} < 0$  para  $\bar{e} \in D$ .  $\nabla g_i \cdot \bar{e} < 0$  implica que la función  $g_i$  decrece en dirección  $\bar{e}$ . Esto implica

$$g_i(\bar{x}_0 + \tau \bar{e}) < g_i(\bar{x}_0), \quad (\tau > 0) \quad 6.4.2.6$$

Pero como  $g_i$  es activa en  $\bar{x}_0$ ,  $g_i(\bar{x}_0) = 0$ ; entonces

$$g_i(\bar{x}_0 + \tau \bar{e}) < 0 \quad 6.4.2.7$$

por lo que  $\bar{x}_0 + \tau \bar{e} \notin P$ ; pero entonces

$$\bar{e} \notin D \quad 6.4.2.8$$

lo que contradice la suposición inicial.

Cuando resolvimos el ejemplo, pusimos como condición para ello que en el punto - óptimo, ninguna dirección permisible formase ángulo obtuso con el gradiente de la función objetivo.

Como ahora estamos hablando de maximizar, diremos que en el punto óptimo, ninguna dirección permisible formará ángulo agudo con el gradiente de la función objetivo:

## Teorema 6.4.2

Sea  $\bar{q} \in P$  un punto óptimo; entonces si  $\bar{e}$  es permisible, ( $\bar{e} \in D$ )

$$\nabla f(\bar{q}) \cdot \bar{e} < 0 \quad 6.4.2.9$$

Demostración:

Por reducción al absurdo; supóngase  $\nabla f(\bar{q}) \cdot \bar{e} > 0$ ,  $\bar{e} \in D$

Entonces  $\bar{r}_1 = \bar{q} + \tau \bar{e} \in P$  ( $\tau > 0$ ) 6.4.2.10

Además, si la derivada direccional de  $f$  es positiva,  $f$  es creciente en esa dirección y entonces

$$f(\bar{r}_1) > f(\bar{q}) \text{ y como } \bar{r}_1 \in P, \bar{q} \text{ no es óptimo.}$$

En un punto óptimo en  $E^n$ , pueden operar activamente una, dos, o hasta "n" restricciones. Usando la terminología de conjuntos, en un punto óptimo el conjunto "A" de las restricciones activas puede contener 1, 2, ..., n elementos; nunca será vacío, pues vamos a considerar que se trata de un punto frontera, ni nunca contendrá más de "n" elementos, pues ya hemos convenido que ninguna restricción será redundante. Consideremos entonces primeramente el caso en el que sobre el punto  $\bar{q} \in E^n$ , óptimo, operan activamente "n" restricciones, las que quedarán designadas con los índices 1 a n, es decir:

$$\begin{aligned} g_1(\bar{q}) &= 0 \\ g_2(\bar{q}) &= 0 \\ &\dots \\ g_n(\bar{q}) &= 0 \end{aligned} \quad 6.4.2.11$$

Puesto que "n" ecuaciones definen un punto en  $E^n$ , quiere decir que son independientes; o lo que es lo mismo, el rango de la matriz jacobiana es "n"

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \\ \dots \\ \nabla g_n \end{bmatrix} \quad 6.4.2.12$$

Entonces, todos los gradientes de las restricciones que operan activamente en  $\bar{q}$  son linealmente independientes y forman una base en  $E^n$ . Al aumentar otro vector, por ejemplo  $\nabla f$ , se tendrá un conjunto de vectores linealmente dependientes, y se podrá escribir:

$$\nabla f(\bar{q}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(\bar{q}) = 0 \quad 6.4.2.13$$

Ecuación conocida como de Lagrange. Los escalares  $\lambda_i$  son conocidos como multiplicadores de Lagrange.

Este caso lo tendríamos en nuestro ejm. 6.4.1. si aumentáramos una restricción que dejase afuera al punto óptimo encontrado anteriormente. Sea el ejm. siguiente:

## Problema 6.4.2

En el problema 6.4.1 agregar la restricción y  $\xi - 7$ , la cual deja fuera el punto óptimo encontrado inicialmente. La región permisible se reduce, y ahora el punto

óptimo es  $\bar{q}$ , Fig. 6.4.4. Como el planteamiento original fue hallar un mínimo, ahora de acuerdo con lo ya indicado, lo convertiremos en un problema de máximos por el artificio de multiplicar por menos uno a la función  $F(x,y)$

$$G(x,y) = -F(x,y) = -x^2 - y^2 \quad 6.4.2.a$$

con las restricciones

$$g_1 = 40x - 9x^2 - 24xy - 16y^2 - 30y - 250 \geq 0 \quad 6.4.2.b$$

$$g_2 = -y - 7 \geq 0 \quad 6.4.2.c$$

Al resolver

$$\nabla G + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = 0 \quad 6.4.2.d$$

o sea

$$-2xi - 2yj + \lambda_1 [(40 - 18x - 24y)i + (-24x - 32y - 30)j] + \lambda_2 [-j] = 0 \quad 6.4.2.e$$

obtenemos

$$x = 4,8, \quad y = -7, \quad \lambda_1 = 0.0789, \quad \lambda_2 = 20.2173$$

Se observa que también en el punto  $\bar{p}$  (18,3,-7), definido por las restricciones  $g_1$  y  $g_2$ , se presenta la dependencia lineal de los vectores  $\nabla G$ ,  $\nabla g_1$  y  $\nabla g_2$  pero aquí los valores de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son los siguientes

$$\lambda_1 = -0.3015, \quad \lambda_2 = 87.9278$$

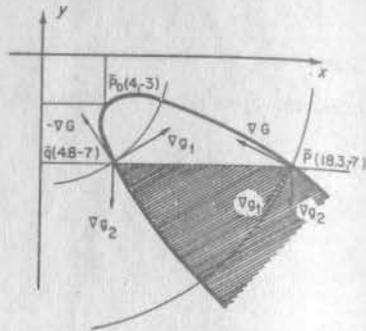


Fig. 6.4.4.

La diferencia está en que en el punto óptimo, los multiplicadores de Lagrange resultaron ser positivos, en tanto que en el punto no óptimo, uno de los multiplicadores resultó ser negativo.

Esta condición se puede generalizar a cualquier número de dimensiones

#### Teorema 6.4.3

Sea  $\bar{q} \in E^n$  un punto óptimo en el cual operan activamente "n" restricciones. Entonces, ninguno de los multiplicadores que figuran en la expresión

$$\nabla f(\bar{q}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(\bar{q}) = 0 \quad 6.4.2.14$$

puede ser negativo.

Demostración:

Por reducción al absurdo: supongamos que uno de los multiplicadores, por ejemplo

$$\lambda_j < 0 \quad \nabla G + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 + \dots - \lambda_j \nabla g_j + \dots + \lambda_n \nabla g_n = 0 \quad 6.4.2.15$$

Siempre podremos encontrar una dirección  $\bar{e}$  tal que

$$\bar{e} \cdot \nabla g_i = 0, \quad \forall i \neq j \quad 6.4.2.16$$

$$\bar{e} \cdot \nabla g_j > 0$$

En el caso particular de  $E^3$  esta dirección se encontraría fácilmente como la de  $\pm \nabla g_1 \times \nabla g_2$ , seleccionando el signo de manera que  $\nabla g_1 \times \nabla g_2 \cdot \bar{e} > 0$

Las condiciones establecidas permiten afirmar que  $\bar{e}$  es permisible, pues no forma ángulo obtuso con ninguno de los gradientes de las restricciones.

Multipliquemos escaladamente la ec. de Lagrange por este vector

$$\nabla G \cdot \bar{e} - \lambda_j \nabla g_j \cdot \bar{e} = 0 \quad 6.4.2.17$$

$$\nabla G \cdot \bar{e} = \lambda_j \nabla g_j \cdot \bar{e} > 0 \quad 6.4.2.18$$

O sea, esa dirección permisible forma ángulo agudo con el gradiente de la función objetivo, en  $\bar{q}$ . Luego  $\bar{q}$  no es óptimo.

Podemos entonces concluir que cuando en un punto óptimo  $\bar{q} \in E^n$  operen activamente "n" restricciones, se cumplirá la ec. de Lagrange con todos los multiplicadores positivos.

Ahora debemos estudiar el caso en el cual sobre el punto óptimo operen activamente  $m < n$  restricciones. Este último caso, por cierto, será el de los problemas que se resolverán durante el presente curso.

El problema, en general, lo plantearemos así:

$$\text{Máximo de } f(\bar{r}), \quad (\bar{r} \in E^n) \quad 6.4.2.19$$

Sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} g_1(\bar{r}) &= 0 \\ g_2(\bar{r}) &= 0 \\ \dots & \dots \\ g_m(\bar{r}) &= 0 \quad (m < n) \end{aligned} \quad 6.4.2.20$$

Además, aceptaremos que el rango de la matriz jacobiana

$$\begin{bmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \\ \dots \\ \nabla g_m \end{bmatrix} \quad 6.4.2.21$$

es igual a "m", es decir, ninguna de las restricciones es redundante. En el ejemplo que hemos estado estudiando, se observa que en un punto cualquiera de la frontera de P, donde obra activamente una sola restricción, el gradiente de ésta es perpendicular a las direcciones límites de las permisibles, representadas en este caso por las dos direcciones (opuestas) tangentes a la parábola que limita a P.

No es difícil generalizar esta observación a un espacio de "n" dimensiones, con una sola restricción, si se recuerda que un gradiente siempre debe ser ortogonal a su hipersuperficie de nivel. Entonces, si en un punto frontera operan activamente dos restricciones, las direcciones límite serán aquellas que sean simultáneamente normales a  $\nabla g_1$  y  $\nabla g_2$ , y así sucesivamente hasta llegar al caso en que operen activamente (n-1) restricciones.

En  $E^3$ , por ejemplo, si dos restricciones operan activamente sobre un punto frontera, éste se encontrará sobre la curva de intersección de  $g_1=0$  y  $g_2=0$ ; las direcciones límites serán las dos tangentes (opuestas) a la curva de intersección, y por lo mismo simultáneamente perpendiculares a las normales (gradientes) a las superficies. (Fig. 6.4.5)

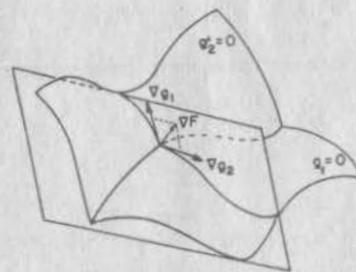


Fig. 6.4.5

## Teorema 6.4.4

Sea el punto  $\bar{r}_0 \in E^n$ , sobre la frontera de  $P$ , en el cual operan activamente  $m < n$  restricciones. Entonces el conjunto de los gradientes de tales restricciones en  $\bar{r}_0$ , unido a un conjunto de vectores que señalen direcciones límite, forman una base en  $E^n$ .

Demostración:

Hemos dicho que el rango de la matriz formada por los gradientes de las restricciones es "m", ésto indica que son linealmente independientes y que, por lo mismo, forman una base en el subespacio  $E^m$ . Ahora demostraremos primero que una dirección límite no está en  $E^m$ ; esto es, que es linealmente independiente de los gradientes.

En efecto, sea  $\bar{e}_L$  una dirección límite:

$$\alpha_0 \bar{e}_L + \alpha_1 \nabla g_1 + \alpha_2 \nabla g_2 + \dots + \alpha_m \nabla g_m = 0 \quad 6.4.2.22$$

Multipliquemos escalamente por  $\bar{e}_L$

$$\alpha_0 \bar{e}_L^2 = \alpha_0 = 0 \quad 6.4.2.23$$

Entonces

$$\alpha_1 \nabla g_1 + \alpha_2 \nabla g_2 + \dots + \alpha_m \nabla g_m = 0 \quad 6.4.2.24$$

Pero si el conjunto de gradientes es linealmente independiente

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0 \quad 6.4.2.25$$

De donde

$$\bar{e}_L, \nabla g_1, \nabla g_2, \dots, \nabla g_m \quad 6.4.2.26$$

es un conjunto de vectores linealmente independiente.

Ahora, ya establecido el conjunto  $\nabla g_1, \nabla g_2, \dots, \nabla g_m, \bar{e}_L$  como linealmente independiente en  $E^{m+1}$ , y por consiguiente en  $E^n$ , siempre se podrá encontrar - si  $n-m \geq 2$ , otro vector  $\bar{e}_{L2}$  tal que

$$\bar{e}_{L2} \cdot \nabla g_i = 0, \quad \forall i \quad 6.4.2.27$$

$$\bar{e}_{L2} \cdot \bar{e}_{L1} = 0 \quad 6.4.2.28$$

y así sucesivamente hasta completar la base en  $E^n$ .

## Teorema 6.4.5

Sea  $\bar{q} \in E^n$  un punto óptimo de  $f(\bar{r})$ , sobre el cual operan activamente  $m < n$  restricciones  $g_i$ , en que  $i=1,2,\dots,m$ . Sea el vector  $\bar{e}$  tal que

$$\nabla g_i(\bar{q}) \cdot \bar{e} = 0, \quad \forall i \quad 6.4.2.29$$

$$\text{Entonces} \quad \nabla f(\bar{q}) \cdot \bar{e} = 0 \quad 6.4.2.30$$

Demostración:

La dirección señalada por  $\bar{e}$  es permisible, pues no forma ángulo obtuso con ninguno de los gradientes de las restricciones. Por la misma razón, también  $-\bar{e}$  es permisible. Entonces

$$\forall f(\bar{q}) \cdot \bar{e} \leq 0 \quad 6.4.2.31$$

$$\forall f(\bar{q}) \cdot (-\bar{e}) \leq 0 \quad 6.4.2.32$$

La única forma de que estas dos expresiones se cumplan simultáneamente es que

$$\forall f(\bar{q}) \cdot \bar{e} = 0 \quad 6.4.2.33$$

Consideremos la ecuación cuádrlica general en tres variables,  $x, y, z$ :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad 1.9.0.1$$

Por cuádrlica entenderemos a la representación geométrica de cualquier ecuación del forma 1.9.0.1 Las cuádrlicas son la generalización de las cónicas, en tres dimensiones.

Mediante algunas apropiadas operaciones de rotación y traslación de ejes, la ecuación 1.9.0.1 se transforma en una cualquiera de las dos formas siguientes:

$$Kx^2 + Ly^2 + Mz^2 = N \quad (N \geq 0) \quad 1.9.0.2$$

$$Kx^2 + Ly^2 = Pz \quad (P > 0) \quad 1.9.0.3$$

La transformación que mencionamos, es similar a la de  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = P$ , que ya estudiaste en cursos anteriores.

Las superficies con ecuación tipo 1.9.0.2 tienen centro de simetría: el origen, por lo que se denominan Cuádrlicas con Centro. Las superficies con ecuación tipo 1.9.0.3 no tienen centro de simetría, por lo que se designan como Cuádrlicas sin Centro.

Analizaremos a continuación, las ecuaciones de formas 1.9.0.2 y 3.

### 1.9.1 Cuádrlicas con Centro.

De acuerdo con lo que hemos estudiado, estas superficies, cuya ecuación está dada por 1.9.0.2, además de tener centro de simetría, poseen tres planos de simetría: los planos coordenados, y tres ejes de simetría: los ejes coordenados.

Este caso lo podemos reducir a dos posibilidades:

a)  $N = 0$

b)  $N > 0$

a)  $N = 0$ ; aquí se nos presentan las variantes siguientes:

I) Dos de los coeficientes  $K, L, M$  son nulos, por ejemplo --  $K = L = 0$  entonces:

$$Mz^2 = 0 \quad 1.9.1.1$$

de donde

$$z = 0 \quad 1.46$$

que representa al plano  $xy$ .

Los otros 2 casos posibles corresponden a los otros 2 planos -- coordenados:  $x=0$  para el plano  $yz$ , y  $y=0$  para el plano  $xz$ .

II) Uno de los coeficientes  $K, L, M$  es nulo, por ejemplo  $M=0$

$$Kx^2 + Ly^2 = 0 \quad 1.9.1.2$$

cuya única solución real es:

$$x = 0, y = 0 \quad 1.9.1.3$$

que representa al eje  $z$ .

Análogamente, los otros 2 casos posibles representan a los ejes  $X$  y  $Y$ .

III)  $K, L, M$  son diferentes de cero, pero tienen el mismo signo.

$$Kx^2 + Ly^2 + Mz^2 = 0 \quad 1.9.1.4$$

Esta ecuación representa al origen, pues sólo se satisface para:

$$x = y = z = 0 \quad 1.9.1.5$$

IV)  $K, L, M$  diferentes de cero, pero dos de los coeficientes -- tienen el mismo signo; por ejemplo, si  $K$  y  $L$  son positivos y  $M$  negativo.

$$Kx^2 + Ly^2 = Mz^2 \quad 1.9.1.6$$

Estudiaremos esta superficie.

Intercepciones todas son cero.

Traza  $xy$ :  $z=0$ ;  $Kx^2 + Ly^2 = 0$

de donde:  $x=0, y=0$ , es el origen

Traza  $xz$ :  $y=0$ ;  $Kx^2 = Mz^2$

cuya solución es el par de rectas:

$$\begin{cases} x\sqrt{K} = \pm z\sqrt{M} \\ y = 0 \end{cases}$$

Al eliminar  $\lambda$  entre 6.4.3.g y h

$$\frac{yz}{75y+300z} = \frac{xz}{75x+300z} \quad 6.4.3.j$$

De las ecs. 6.4.3.h e i

$$\frac{xz}{75x+300z} = \frac{xy}{300(x+y)} \quad 6.4.3.k$$

Al quitar denominadores en la ec. 6.4.3.j y simplificándola:

$$z^2(x-y) = 0 \quad 6.4.3.l$$

De donde

$$z_1 = 0 \quad 6.4.3.ll$$

$$x = y \quad 6.4.3.m$$

Es evidente que  $z_1 = 0$  no conduce a un máximo para el volumen, por lo que no la consideraremos.

Al proceder en la misma forma en la ec. 6.4.3.k

$$x^2(4z-y) = 0 \quad 6.4.3.n$$

De donde  $x_2 = 0$

$$6.4.3.o$$

$$y = 4z \quad 6.4.3.p$$

Desde luego que  $x_2$  no corresponde a un máximo.

Al sustituir 6.4.3.m y 6.4.3.p en 6.4.3.c

$$1200z^2 + 1200z^2 + 1200z^2 = 3600 \quad 6.4.3.q$$

De donde

$$z^2 = 1, \quad z_3 = -1, \quad z_4 = 1$$

Aquí desechamos la raíz negativa

Para  $z = 1, x = 4, y = 4$

El volumen máximo será  $16 \text{ m}^3$

Problema 6.4.4.

Hallar las cotas máxima y mínima de la curva intersección entre las regiones

$$z \geq x^2 + y^2, \quad z \leq 6 - 2x - 2y$$

Función objetivo:  $z$  6.4.4.a

Función restrictiva núm. 1:  $z - x^2 - y^2 \geq 0$  6.4.4.b

Función restrictiva núm. 2:  $6 - 2x - 2y - z \geq 0$  6.4.4.c

Al aplicar la ec. de Lagrange a la ec. 6.4.4.a, y a la parte activa de las -  
ecs. 6.4.4.b y c

$$k + \lambda_1(-2x - 2y) + \lambda_2(-2x - 2y - k) = 0 \quad 6.4.4.d$$

de donde obtenemos

$$-2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \quad 6.4.4.e$$

$$-2y\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \quad 6.4.4.f$$

$$1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad 6.4.4.g$$

De éstas tres últimas ecs., más las dos que corresponden a la parte activa de -  
las ecs. 6.4.4.b y c obtenemos

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = 1, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = -3, \quad y_2 = -3, \quad z_2 = 18, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}$$

En  $P(1,1)$  tendremos la cota mínima:  $z_1 = 1$

En  $Q(-3,-3)$  tendremos la cota máxima:  $z_2 = 18$

#### 6.4.3 Condición Suficiente

Hemos llegado a la ecuación de Lagrange partiendo de las condiciones a cumplir en el punto óptimo; así, estamos seguros de que ningún punto será óptimo si no cumple con la ec. de Lagrange; pero procede preguntarnos si sólo un punto óptimo cumple con ella. En otras palabras, una vez llevado a cabo el proceso descrito y habiendo encontrado las coordenadas del punto que cumple la ec. 6.4.2.13, incluyendo la restricción de signos para los multiplicadores, ¿estamos seguros de que realmente es el punto óptimo?. Para responder a esta pregunta introducimos algunos conceptos nuevos y recordará, además, la definición de conjunto convexo que viste en el Capítulo I.

6.4.3.1.- Funciones Cóncavas

Ahora consideremos la curva  $C_1$  de la Fig. 6.4.6., que representa a la función

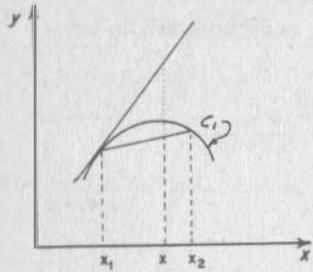


Fig. 6.4.6

$$y = f(x)$$

Supóngase que conocemos  $f(x_1)$  y  $f(x_2)$ , y que tratamos de estimar  $f(x)$  por medio de una interpolación lineal. Esta estimación será tanto más aproximada cuanto más próximos estén los puntos  $x_1, x_2$ ; pero siempre será una subestimación del valor de la función.

A las funciones que cumplen con esa condición se les denomina funciones cóncavas, y son muy fáciles de visualizar si están definidas sobre  $E^1$  (Fig. 2.4.6); resulta más difícil su visualización si están definidas sobre  $E^2$ , e imposible si el número de dimensiones aumenta; por lo mismo, resulta conveniente una definición formal que permita reconocer una función de este tipo en cualquier número de dimensiones.

Para su mejor comprensión recordemos el proceso de interpolación.

Ejemplo 6.4.5.

Encontrar el seno de  $34^\circ 33'$  sabiendo que  $\text{sen } 34^\circ 30' = 0.5664$ , y  $\text{sen } 34^\circ 40' = 0.5688$

Llamemos  $x = 34^\circ 33'$ ;  $x_1 = 34^\circ 30'$ ,  $x_2 = 34^\circ 40'$

$$\theta = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \approx 0.7$$

obviamente, siempre tendremos  $0 \leq \theta \leq 1$

$$\text{sen } x \approx \text{sen } x_2 - \theta (\text{sen } x_2 - \text{sen } x_1)$$

$$\text{sen } 34^\circ 33' \approx 0.5688 - 0.7 (0.5688 - 0.5664) = 0.56712$$

Esta última ec. la podemos escribir

$$\text{sen } x_2 - \theta (\text{sen } x_2 - \text{sen } x_1) = \theta \text{sen } x_1 + (1-\theta) \text{sen } x_2$$

Además

$$x_2 - x = \theta (x_2 - x_1)$$

$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$$

Ahora sí, veamos la siguiente

## Definición 6.4.2

Una función es cóncava si dados dos puntos  $\bar{r}_1$  y  $\bar{r}_2$  cualesquiera que le pertenecen

$$\theta f(\bar{r}_1) + (1-\theta)f(\bar{r}_2) \leq f(\theta\bar{r}_1 + (1-\theta)\bar{r}_2), \quad \forall 0 \leq \theta \leq 1 \quad 6.4.3.1$$

Al regresar a la curva  $C_1$  de la Fig. 6.4.6., si la estimación se hiciese a través de la tangente

$$f(x) \approx f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) \quad 6.4.3.2$$

y entonces se estará sobrestimando la función. Esta es una propiedad que todas las funciones cóncavas tienen y sólo ellas.

## Teorema 6.4.6

Sea  $f(\bar{r})$  una función cóncava, y sean  $\bar{r}_1$  y  $\bar{r}_2$  dos puntos cualesquiera, entonces

$$f(\bar{r}_1) + \nabla f(\bar{r}_1) \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \geq f(\bar{r}_2) \quad 6.4.3.3$$

La demostración de este teorema la puedes ver en el Apéndice

Ejem. 6.4.6

Sea el parabolóide de ecuación  $z = -x^2 - y^2$  demostrar que es una función cóncava

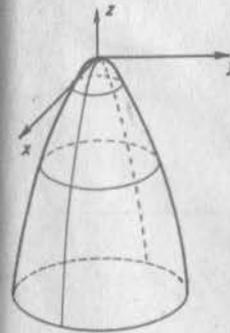


Fig. 6.4.7

Estudiamos la parte de esa superficie mostrada en la fig. 6.4.7, cuyo dominio es la región mostrada en la Fig. 6.4.8

Dentro del dominio consideremos dos puntos cualesquiera, por ejem.  $\bar{r}_1$  y  $\bar{r}_2$ , al aplicar al Teorema 6.4.6

$$f(\bar{r}) = -\bar{r}^2$$

$$\nabla f = -2\bar{r} = -2\bar{r}_1$$

$$\bar{r} = \bar{r}_1$$

$$-\bar{r}_1^2 - 2\bar{r}_1 \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = -\bar{r}_1^2 - 2\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 + 2\bar{r}_1^2$$

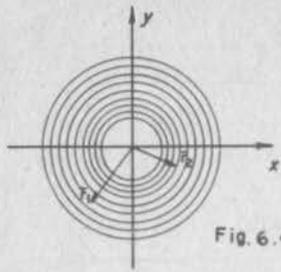


Fig. 6.4.8

$$= \bar{r}_1^2 - 2\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 + \bar{r}_2^2 - \bar{r}_2^2$$

$$\Rightarrow (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2 - \bar{r}_2^2 \geq f(\bar{r}_2) = \bar{r}_2^2, \text{ QED}$$

6.4.3.2.- Funciones Cuasicoóncavas

En la curva  $c_4$  Fig. 6.4.9 el valor de la función en cualquier punto intermedio entre 2 cualesquiera, nunca será menor que el menor de los extremos; en la curva  $c_4$ ,  $f(x_1) > f(x) > f(x_2)$ . A una función como la representada por la curva  $c_4$ , se llama "cuasicoóncava", y su definición formal es como sigue:

Una función  $f(\bar{r})$  es cuasicoóncava si y sólo si

$$f[\theta \bar{r}_1 + (1-\theta)\bar{r}_2] \geq \inf [f]$$

**Teorema.-** Sea  $f(\bar{r})$  una función cuasicoóncava; sea el conjunto

$$R = \{\bar{r} \mid f(\bar{r}) \geq \gamma\}$$

Entonces R es un conjunto convexo

Demostración.- Sea  $\gamma$  un escalar cualquiera, y sean  $\bar{r}_1, \bar{r}_2 \in R$  tales que

$$f(\bar{r}_1) \geq \gamma$$

$$f(\bar{r}_2) \geq \gamma$$

Sea  $\bar{r} = \theta \bar{r}_1 + (1-\theta)\bar{r}_2$ . Por ser cuasicoóncava:

$$f(\bar{r}) \geq f(\bar{r}_1) \geq \gamma$$

o bien  $f(\bar{r}) \geq f(\bar{r}_2) \geq \gamma$

de donde  $f(\bar{r}) \geq \gamma$

lo que a su vez implica

$$\bar{r} = \theta \bar{r}_1 + (1-\theta)\bar{r}_2 \in R$$

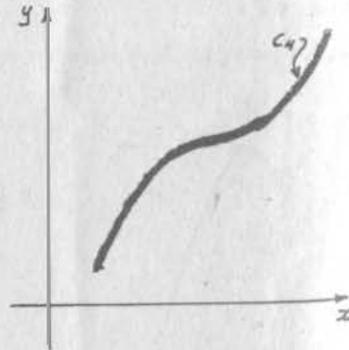


Fig. 6.4.9

Ejemplo 6.4.7 Demostrar que la función  $g(x,y) = 25 - x^2 - y^2$  es cuasicoóncava sean  $\bar{r}_1$  y  $\bar{r}_2$  dos puntos, y supongamos que  $g(\bar{r}_1) > g(\bar{r}_2)$

Entonces

$$25 - |\bar{r}_1|^2 > 25 - |\bar{r}_2|^2$$

$$|\bar{r}_1|^2 < |\bar{r}_2|^2$$

Ahora, si  $r = \theta \bar{r}_1 + (1-\theta)\bar{r}_2$  ( $0 < \theta < 1$ )

Para  $\theta = 0$ ;  $\bar{r} = \bar{r}_2$

Para  $\theta = 1$ ;  $\bar{r} = \bar{r}_1$

como  $|\bar{r}_1| < |\bar{r}_2|$ , y además  $\bar{r}$  es una transformación lineal de  $\bar{r}_1$  y  $\bar{r}_2$

entonces:

$$|\bar{r}| \leq |\bar{r}_2|$$

6.4.3.3.- Funciones Seudoóncavas

Ahora consideremos la curva  $C_2$  que representa a la función  $y = f(x)$ , (Fig. 6.4.10). Esta función no es cóncava, pues una interpolación lineal entre los puntos  $x_1$  y  $x_2$ , arroja una sobreestimación de la función, sin embargo se parece mucho a una función cóncava, de ahí que se le denomine seudoóncava. Esta función tiene un sólo intervalo en el cual es creciente, y otro sólo intervalo en el cual es decreciente, lo que permite escribir:

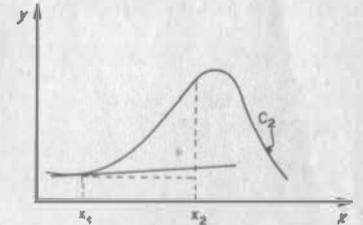


Fig. 6.4.10

$$\text{Si } f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1) < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad 6.4.3.4$$

Esta propiedad no la tiene la función representada por la Curva  $C_3$ , Fig. 6.4.13

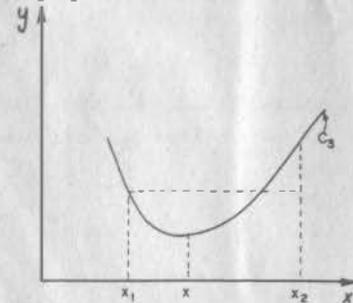


Fig. 6.4.11

$$f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1) < 0 \quad 6.4.3.5$$

Sin embargo  $f(x_2) > f(x_1) \quad 6.4.3.6$

En esta característica se basa la definición formal de función seudoóncava.

## Definición 6.4.3

Una función es seudocóncava si sólo si, para dos puntos cualesquiera  $\bar{r}_1$  y  $\bar{r}_2$

$$\forall f(\bar{r}_1) \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \leq 0 \Rightarrow f(\bar{r}_1) \geq f(\bar{r}_2) \quad 6.4.3.7$$

Hacemos notar que una función cóncava satisface las definiciones de las funciones seudocóncavas y cuasicóncavas; además una función seudocóncava satisface la definición de función cuasicóncava. La recíproca no es cierta, es decir, sean:

C  $\equiv$  El conjunto de funciones cóncavas.

P  $\equiv$  El conjunto de funciones seudocóncavas.

Q  $\equiv$  El conjunto de funciones cuasicóncavas.

entonces

$$C \subset P \subset Q$$

## Ejemplo 6.4.8

demostrar que la función  $z = -x^2 - y^2$  cumple con la condición de función seudocóncava

$$\begin{aligned} z(\bar{r}) &= -\bar{r}^2 \\ \forall z &= -2\bar{r} \end{aligned}$$

Partamos de que:

$$\forall z(\bar{r}_1) \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \leq 0$$

o sea

$$-2\bar{r}_1 \cdot (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \leq 0$$

$$\Rightarrow -2\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 + 2\bar{r}_1^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \bar{r}_1^2 \leq \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2 \Rightarrow |\bar{r}_1| |\bar{r}_1| \leq |\bar{r}_1| |\bar{r}_2| \cos \theta$$

$$\Rightarrow |\bar{r}_1| < |\bar{r}_2| \quad ; \quad \bar{r}_1^2 < \bar{r}_2^2$$

$$\Rightarrow -\bar{r}_1^2 > -\bar{r}_2^2 \quad Q.E.D.$$

puesto que ya demostramos que un conjunto de funciones de la forma  $f(\bar{r}) > y$  siempre define un conjunto convexo de puntos, entonces las restricciones deben ser cuasicóncavas para garantizar la existencia del óptimo.

## Teorema 6.4.7

Sea hallar el Máx  $f(\bar{r})$ , en que  $\bar{r} \in E^n$ , sujeto a

$$g_1(\bar{r}) \geq 0$$

$$g_2(\bar{r}) \geq 0$$

$$\dots \dots$$

$$g_m(\bar{r}) \geq 0$$

6.4.3.9

que definen una región  $P \subset E^n$

Sea  $\bar{q} \in P$  un punto que cumple con

$$f(\bar{q}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\bar{q}) = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \forall i \quad 6.4.3.10$$

Entonces, si  $f$  es seudocóncava y  $P$  es convexa,  $\bar{q}$  es un punto que resuelve el problema.

## Demostración

Debemos hacer ver que  $f(\bar{q}) \geq f(\bar{r})$ ,  $\bar{r} \in P$

6.4.3.11

Consideramos pues un punto cualquiera  $\bar{r}$  de la región permisible, y unámoslo con  $\bar{q}$

por medio de una línea recta. Como  $P$  es un conjunto convexo, todos los puntos

de esta recta estarán en  $P$  y, por lo mismo,  $\bar{r} - \bar{q}$  es una dirección permisible.

Pero para cualquier dirección permisible se debe cumplir

$$\forall f(\bar{q}) \cdot \bar{e} \leq 0 \quad 6.4.3.12$$

Entonces

$$\forall f(\bar{q}) \cdot (\bar{r} - \bar{q}) \leq 0 \quad 6.4.3.13$$

pero como  $f$  es seudocóncava, esta condición implica que

$$f(\bar{q}) \geq f(\bar{r}) \quad 6.4.3.14$$

## Ejemplo 6.4.9

Hallar la cota máxima de la región  $z \leq -x^2 - y^2$

Función objetivo:  $z$

6.4.9.a

Función restrictiva:  $-x^2 - y^2 \geq z$

6.4.9.b

Parte activa de la restricción:  $-x^2 - y^2 - z = 0$

6.4.9.c

$$k + \lambda(-2x - 2y - k) = 0$$

6.4.9.d

de donde

$$x = 0, \quad y = 0$$

6.4.9.e

Valores que al ser sustituidos en 6.4.9.c proporcionan  $z$  máxima

$$z = 0$$

En este ejemplo hemos encontrado el punto óptimo con toda seguridad, porque ya se demostró que  $-x^2 - y^2$  es una función cóncava (Ejem. 6.4.6), y la región permisible (Ver Fig. 6.4.8), es un conjunto convexo.