



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
CIVIL-HIDRÁULICA

TÉCNICAS DE MEDICIÓN DEL CAMPO DE VELOCIDADES Y SUS RANGOS DE
APLICACIÓN PARA DIFERENTES TIPOS DE ONDAS

MODALIDAD DE GRADUACIÓN: TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
DIANA CAROLINA VARGAS ORTEGA

TUTORES PRINCIPALES
RODOLFO SILVA CASARÍN, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM
EDGAR GERARDO MENDOZA BALDWIN, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

MÉXICO, D. F. OCTUBRE 2016

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Mendoza Baldwin Edgar Gerardo

Secretario: Dra. Reyes Chávez Lilia

Vocal: Dr. Silva Casarín Rodolfo

1 er. Suplente: Dr. Méndez Fragoso Ricardo

2 do. Suplente: Dra. Stern Forgach Catalina E.

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Instituto de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Rodolfo Silva Casarín

FIRMA

A mis padres, Minerva y Adolfo

"No importa que tan lento vayas, lo importante es nunca detenerse"
Confucio

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Rodolfo Silva y al Dr. Edgar Mendoza por abrirme las puertas del Laboratorio de Costas y colaboración con su grupo de trabajo, por contribuir en mi formación académica, por brindarme su confianza, por hacer cuestionamientos agudos e ingeniosos, por las discusiones hacia el trabajo, dedicación, entereza y una completa disposición en ayudarme en todo momento, lo aprecio demasiado.

Agradezco a la Dra. Catalina Elizabeth Stern Forgach, al Dr. Ricardo Méndez Fragoso y la Dra. Lilia Reyes Chávez por su tiempo, aportaciones y correcciones para mejorar esta tesis.

Agradezco al Dr. Ravindra Jayaratne por su colaboración en este trabajo y las enseñanzas durante mi estancia en UEL.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo financiero para mis estudios de posgrado.

A los miembros del Grupo de Costas y Puertos del Instituto de Ingeniería, laboratoristas y el señor Juanito del sistema de cómputo del IINGEN.

A mis entrañables amigos: Luis, Guadalupe, Mariana, Reyna, Buddhika, Mauricio, Sergio, David, Eulogio, Charles, Luciano, César, Ata, Erik y Carlitos, por tan gratos momentos compartidos, así como a las personas que me ayudaron a pasarme un desarmador o aditamento cuando lo necesitaba y que ayudaron a la realización de este trabajo.

A Adolfo Lugo, por compartir tu luz, enseñarme a vivir mejor de la penumbra y... ser un twinkie amistoso, bonito y amigable.

A mis padres por brindarme su amor incondicional y su gran humanidad.

Resumen

En esta investigación se presenta el estudio de una técnica de medición no intrusiva del campo de velocidades de un fluido, mediante el uso de un dispositivo que genera burbujas entre 5 mm y 6 mm de diámetro.

La motivación para la creación de una nueva técnica es que los diversos métodos de medición de parámetros físicos dentro de canales de oleaje todavía es limitada y de alto costo económico; por ello se desarrolló otra técnica de medición del campo de velocidades de bajo costo (100 veces menor a las técnicas convencionales) y de resolución aceptable, la cual se espera que sea fructífera para medir velocidades en zonas en donde hay limitantes por el proceso físico del fenómeno, por ejemplo en la rotura de oleaje.

Luego, el propósito del trabajo es establecer el alcance del uso y aplicación de esta técnica en los diversos procesos físicos (reflexión, refracción, difracción, etc) que se presentan en los canales de oleaje.

Para llegar al objetivo planteado se realizaron mediciones con la técnica desarrollada en este trabajo para determinar las velocidades asociadas al oleaje regular e irregular. Posteriormente con el uso de un PIV (Particle Image Velocimetry) de uso comercial, sensores UVP (Ultrasonic Velocity Profiling) y sensores de nivel se realizaron las mismas pruebas, obteniendo así una base de datos de mediciones locales y zonales de velocidades de las burbujas; a través de ellas se estableció una función de transferencia para reconstruir la superficie libre.

Este aspecto es lo ventajoso de la técnica desarrollada sobre otras porque se es posible conocer el comportamiento de la superficie libre a partir de mediciones realizadas hasta 40 cm por debajo de ella, sin la necesidad del uso de sensores de nivel, UVP y PIV.

Abstract

In this research an experimental study using a non-intrusive technique for the measurement of velocity field of bubbles between 5 and 6 mm of diameter that were generated in a slender sheet from a home-made device and a compressed air source is presented, in order to establish a transfer function that will allow to predict the free surface elevation.

The motivation for developing this new technique is arisen due to the lack of diversity of physical methods of measurement inside wave flumes. Therefore if another technique is created to measure the velocity field, it is expected to be fruitful for the measure of the velocities in the breaking waves, wherein the current measurement techniques have failed to eliminate certain limitations caused by the same physical process of the breaking.

The purpose of the study is to establish the scope, use and application of this technique in several physical processes that are typically presented in wave flumes.

To reach the objective, the measurements of velocities of bubbles were performed using the developed technique in the presence of regular and irregular waves. Subsequently with the use of commercial PIV (Particle Image Velocimetry), UVP (Ultrasonic Velocity Profile) and wave gauges the same tests were carried out, obtaining in this way a database of local and zonal measurements of the velocities of bubbles. With this data, a comparison was carried out between the developed technique and the PIV technique, and it was determined under what circumstances it is more feasible the use one technique or the another.

Finally with the use of the bubbles velocity measurements, a transfer function was calculated that allowed to predict the free surface elevation. This aspect is advantageous of the developed technique, because it leads to deduce the free surface elevation from the measurements up to 40 cm below it, without the need for use of wave gauges, UVP and PIV technique.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Lista de figuras	VII
Lista de tablas	IX
Panorama y organización del trabajo	X
Objetivos	XI
1. Aspectos físicos de las ondas y sus escalas	1
1.1. Introducción	1
1.2. Estado de mar ideal	1
1.3. Escala temporal y espacial de las ondas en la superficie libre del mar	3
1.3.1. Ondas de período largo	3
1.3.2. Ondas de período intermedio	5
1.3.3. Ondas de período corto	7
1.4. Factores de la generación del oleaje	8
1.5. Etapas del oleaje	8
1.6. Corrientes	10
1.7. Otra caracterización del oleaje	11
2. Análisis de señales de oleaje	13
2.1. Introducción	13
2.2. Análisis estadístico de la señal del oleaje.	14
2.3. Características del registro de oleaje	15
2.3.1. Duración e intervalo de muestreo del registro	15
2.4. Correcciones del registro	15
2.5. Cálculo de los parámetros del oleaje	16
2.5.1. Altura de ola	16
2.5.2. Período de ola	18
2.6. Análisis espectral de la señal del oleaje	18
2.7. Primer acercamiento de la varianza de la densidad del espectro	19
2.8. Segundo acercamiento de la varianza de la densidad del espectro	20
2.9. La varianza de la superficie libre	21
2.10. La varianza de la densidad del espectro en términos de la frecuencia angular	21
2.11. La varianza de la densidad del espectro usando la transformada de Fourier	21
2.12. Interpretación de la varianza de la densidad del espectro	22

3. Técnicas de medición del campo de velocidades por imágenes de partículas	24
3.1. Generalidades	24
3.2. Tamaños de las ventanas de interrogación	28
3.3. Estimación del desplazamiento de los sub-píxeles.	29
3.3.1. Centro de Masa (COM: Center-of-Mass)	29
3.3.2. Parabólico	29
3.3.3. Gaussiano	29
3.4. Bloqueo de pico	30
3.5. Detección de vectores no válidos	30
4. Metodología	31
4.1. Generalidades	31
4.2. Generador de burbujas	31
4.3. Canal de oleaje	31
4.4. Software empleado para la generación del oleaje	32
4.5. Sensores	33
4.6. PIV	33
4.7. Sensores UVP	34
4.8. Diseño experimental	34
4.9. Experimentos	35
4.10. Imágenes y su procesamiento	36
5. Resultados	41
5.1. Generalidades	41
5.2. Corrección de las series de los sensores de nivel	41
5.3. Corrección de las series de las velocidades de las burbujas	42
5.4. Sensores de nivel	42
5.5. Serie de la superficie libre obtenida por fotografías	44
5.6. Series de las velocidades horizontales de las burbujas	44
5.7. Oleaje Regular	45
5.8. Oleaje Irregular	51
6. Conclusiones	57
A. Teoría lineal de ondas	61
B. Procesos estocásticos y variables aleatorias	64
B.1. Variable aleatoria	64
B.2. Estimaciones de la variable aleatoria	65
B.3. Caracterización de dos variables aleatorias	66
B.4. Proceso Gaussiano estacionario	66
B.5. Proceso ergódico	66
B.6. Función de autocorrelación para la superficie libre	67
C. Serie de Fourier y transformada de Fourier	68
C.1. Serie de Fourier	68
C.2. Transformada de Fourier	68
D. Función de transferencia	70

Índice de figuras

1.1. Elementos de una onda sinusoidal.	2
1.2. Representación de la suma de dos ondas sinusoidales y su envolvente η	3
1.3. Clasificación de las ondas según su frecuencia y energía [Kinsman, 1965] y [Silva, 2005].	4
1.4. Clasificación de rotura de ola según la forma de la ola [Benassai, 2006]	11
2.1. Descomposición del oleaje en componentes armónicas, de diferentes amplitudes, períodos, fases y direcciones. [Pierson et al., 1958].	13
2.2. Método de pasos ascendentes y descendentes	14
2.3. Registro del oleaje y sus respectivos espectros de amplitudes y fases, [Holthuijsen, 2007]:	19
2.4. Tres diferentes anchos de espectros con sus respectivas señales de oleaje , [Holthuijsen, 2007]:	23
3.1. Técnica de Velocimetría por imágenes de partículas (PIV), [Dantec Dynamics, 2013]: .	24
3.2. Tipos de toma de captura de la cámara de las partículas (círculos abiertos son las posiciones de partículas de una imagen previa) [Raffael et al 1998]	26
4.1. Canal de oleaje del Laboratorio de Costas y Puertos, UNAM.	31
4.2. Captura de pantalla del Software AwaSys6	32
4.3. Sensores de nivel y generador de burbujas	33
4.4. Esquema del perfil de velocidades usando el sensor UVP. [Met Flow, 2011]	34
4.5. Montaje experimental	35
4.6. Imágenes de las cortinas.	36
4.7. Función de transferencia para el realce de contraste de la imagen.	37
4.8. Secuencia de fotos de la cortinas de burbujas con oleaje.	38
4.9. Cortina de burbujas con el campo de velocidades. Las líneas indican donde se extrajeron las series de tiempo de las velocidades de las burbujas	39
4.10. Ejemplos del contorno de la superficie libre mediante fotografías	40
5.1. Correcciones del nivel del oleaje de las series de los sensores de nivel	41
5.2. Corrección de las series de velocidades horizontales de las burbujas	42
5.3. Series de la superficie libre registrada por los sensores de nivel	43
5.4. Comparación de la superficie libre entre el sensor de nivel y con la metodología de las fotografías	44
5.5. Series de las velocidades de burbujas	45
5.6. Oleaje regular con $T = 1.2s$ y $H = 0.1m$	46
5.7. Coeficientes de determinación entre las velocidades de las burbujas y la superficie libre medida	47
5.8. Superficie libre medida (azul) y superficie libre reconstruida (rojo) para oleaje regular con $H = 0.1m$ y $T_p = 1.2s$ a diferentes alturas del tirante de agua	48
5.9. Coeficientes de determinación R^2 para diferentes condiciones de altura de ola y período, usando las serie de la superficie libre medida y la reconstruida	49

5.10. Coeficientes de determinación R^2 usando los espectros de las velocidades de las burbujas y los espectros de la superficie libre medida	50
5.11. Oleaje regular con $T = 1.2s$ y $H = 0.1m$	51
5.12. Coeficientes de determinación entre las velocidades de las burbujas y la superficie libre medida	52
5.13. Superficie libre medida (azul) y superficie libre reconstruida (rojo) para oleaje irregular con $H_p = 0.05m$ y $T_p = 0.8s$ a diferentes alturas del tirante de agua	53
5.14. Coeficientes de determinación R^2 para diferentes condiciones de altura de ola y período, usando las serie de la superficie libre medida y la reconstruida	54
5.15. Coeficientes de determinación R^2 usando los espectros de las velocidades de las burbujas y los espectros de la superficie libre medida	55
A.1. Regiones para las diferentes teorías de oleaje	61
B.1. Función de densidad de probabilidad $p(x)$ de la variable \underline{x}	65
B.2. Función de distribución acumulada $P(x)$ (probabilidad de no excedencia).	65

Índice de tablas

1.1. Clasificación de las ondas según Munk.	3
1.2. Clasificación de las ondas [Johnson et al., 1978]	4
2.1. Corrección del oleaje [Silva, 2005]	16
2.2. Métodos para calcular las alturas y períodos de la ola [Silva, 2005]	17
2.3. Pasos para el análisis espectral del oleaje [Silva, 2005]	19
4.1. Alturas de ola y períodos usados con un tirante de agua de 0.7m.	36
4.2. Alturas de ola y períodos usados con un tirante de agua de 0.6m.	36
4.3. Alturas de ola y períodos usados con un tirante de agua de 0.5m.	36
4.4. Alturas de ola y períodos usados con un tirante de agua de 0.4m.	36
A.1. Ecuaciones de oleaje para aguas someras.	62
A.2. Ecuaciones de oleaje para aguas profundas.	63
A.3. Ecuaciones de oleaje para aguas intermedias.	63

Panorama y organización del trabajo

La tesis está organizada de la siguiente forma:

Capítulo I Se muestran los principios teóricos y conceptuales de los diferentes tipos de ondas.

Capítulo II Se explican los conceptos necesarios para la caracterización estadística de señales de oleaje.

Capítulo III Se explica la técnica de velocimetría por imágenes de partículas para la medición del campo de velocidades de un fluido.

Capítulo IV Se explica la metodología empleada para los experimentos, donde se describe la construcción del dispositivo, los instrumentos utilizados y la captura de los datos. Además se explican las consideraciones que se deben de tener en cuenta para la realización del experimento y el procesamiento de datos.

Capítulo V Se presentan los resultados obtenidos, al aplicar la metodología del procesamiento de las imágenes capturadas con la técnica desarrollada y el uso del PIV.

Capítulo VI Se concluye el trabajo, mostrando los aspectos principales a partir del análisis de los resultados, las mejoras que se podrían realizar al trabajo y las futuras líneas de investigación y aplicación de la técnica.

Anexos Síntesis teórica y conceptual de elementos relevantes para la tesis.

Objetivos

El objetivo principal del presente trabajo es caracterizar el oleaje regular e irregular a partir del desarrollo de una técnica de bajo costo y fácil uso en canales donde se modelan los procesos físicos de prototipos a escala.

Como objetivos secundarios se encuentran:

- La realización de experimentos con la técnica propuesta en el trabajo y con la técnica PIV, para diferentes condiciones de oleaje.
- Realizar un pre-procesamiento, procesamiento y post-procesamiento de las imágenes obtenidas de los experimentos, para obtener series de tiempo de las velocidades de las burbujas
- Hacer la reconstrucción de la superficie libre usando campos de velocidades de burbujas para oleaje regular y oleaje irregular.
- Caracterizar la técnica empleada para mostrar sus limitaciones y explicación.
- Comparar los campos de velocidades de las burbujas con la técnica desarrollada en este trabajo con mediciones hechas con la técnica PIV.
- Reconstrucción de la superficie libre con una función de transferencia obtenida a partir de las velocidades de las burbujas.

Capítulo 1

Aspectos físicos de las ondas y sus escalas

1.1. Introducción

La generación de ondas por la acción del viento sobre la superficie del océano es uno de los fenómenos más impresionantes que la naturaleza puede ofrecer, y su conspicuo comportamiento ha sido objeto de estudio por científicos. Su amplia gama de movimientos que van desde los caóticos, como se observan en un enérgico huracán, hasta movimientos aparentemente sencillos, representan uno de los desafíos para la dinámica de fluidos, la oceanografía física y la ingeniería de costas. Es en este último campo que a menudo se tiene que diseñar, operar o administrar estructuras o sistemas naturales en el medio marino, como plataformas, buques, diques, playas, desembocaduras del mar, etc, que en mayor o menor medida, se ven afectadas por su interacción con las olas.

Hasta hoy el entendimiento del mecanismo de la formación del oleaje y la forma en que las olas viajan a través del océano no ha sido comprendida en su totalidad, esto se debe en parte a la dificultad de obtener observaciones y mediciones que ayuden a caracterizar a las ondas, y la otra parte se debe al comportamiento de fluidos ideales en los modelos matemáticos de las olas, los cuales no coinciden con los fluidos encontrados en el océano [Brown et al., 1997].

El objetivo de este capítulo es presentar un panorama general de las características de las oscilaciones marinas, y del tipo de movimientos que tiene el oleaje en sus respectivas escalas temporales y espaciales; las ondas que se estudian a lo largo del trabajo son regulares e irregulares de períodos de 0.2s, 0.8s y 1.2s y alturas de 0.05m a 0.1m. Como se verá más adelante de acuerdo a las clasificaciones estas ondas corresponden a ondas de ultragravedad, gravedad y en algunos casos ondas largas (que son remanentes de ondas que tardan un mayor tiempo en desvanecerse respecto a las ondas de ultragravedad y que se pueden encontrar en este trabajo cuando la duración entre cada prueba experimental no es lo suficientemente larga para que estas ondas se lleguen a disipar totalmente).

1.2. Estado de mar ideal

Lo primero a saber de un estado de mar, el cual se define como una onda sinusoidal caracterizada por un cierto período y altura de ola, es la terminología que se emplea para la descripción de este cuando su comportamiento es considerado como ideal.

De acuerdo a la figura (1.1), se tienen las siguientes características de la onda:

- La altura de ola H es la distancia vertical entre una cresta y un valle.
- La amplitud a es el desplazamiento vertical máximo de la superficie del movimiento vertical por arriba o por abajo del nivel medio de la superficie, en términos de la altura la amplitud es:

$$a = \frac{1}{2}H$$

- La longitud de onda L es la distancia entre cresta-cresta o valle-valle.
- El período T es el tiempo que tarda en pasar dos crestas seguidas o dos valles seguidos en un punto fijo.
- El número de onda $k = \frac{2\pi}{L}$ indica cuantas olas hay en una determinada distancia.
- La frecuencia de la onda f es el número de oscilaciones que se dan en un segundo. La representación de la frecuencia en radianes es: $f = \frac{2\pi}{T}$.
- La profundidad h es la distancia que hay entre el fondo y la superficie libre es la profundidad h .

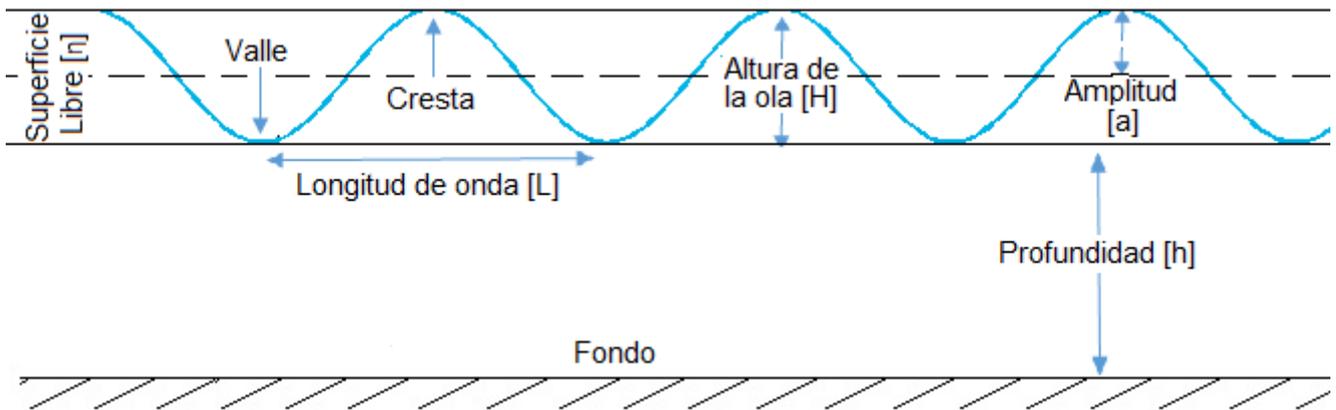


Figura 1.1: Elementos de una onda sinusoidal.

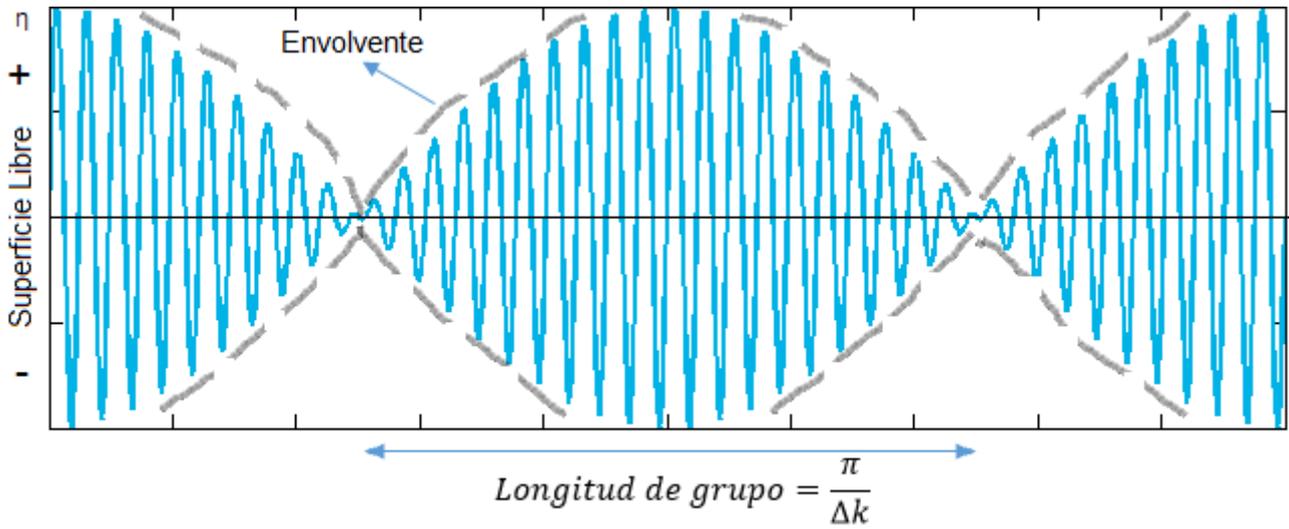
A partir de estas características físicas se considera como oleaje a la combinación de ondas con distintas frecuencias y amplitudes que al propagarse forman trenes de ondas con frecuencias cercanas entre ellas. A esta secuencia de olas de diferentes frecuencias se le conoce como grupos de ondas y por ello es conveniente definir las siguientes velocidades:

- La velocidad de grupo o dispersión es aquella velocidad en donde la envolvente (figura 1.2) se propaga en el espacio, $C_g = \frac{\partial f}{\partial k}$.
- La velocidad de fase es la razón a la cual la fase de la onda se propaga en el espacio $C = \frac{L}{T} = \frac{f}{k}$.

Cuando f es directamente proporcional a κ la velocidad de grupo es exactamente igual a la velocidad de fase lo que hace que C_g sea la misma para todas las frecuencias y el sistema no sea dispersivo. En caso contrario cuando la velocidad de grupo se modifica con un cambio en la frecuencia, se dice que el sistema es dispersivo porque la energía del sistema disminuye conforme al tiempo, es decir, ondas con diferentes frecuencias viajan a diferentes velocidades.

Finalmente otra característica de la onda es la densidad de energía de la onda que des la energía total por unidad de area y se define como:

$$E = (\rho g a^2)/2 = (\rho g H^2)/8 \quad (\text{joules } m^{-2}) \quad (1.1)$$



$$\eta = a \sin(kx - \omega t) \sin(\Delta kx - \Delta \omega t) \text{ para } t = 0, \quad \Delta k = \frac{k}{200}$$

Figura 1.2: Representación de la suma de dos ondas sinusoidales y su envolvente η .

1.3. Escala temporal y espacial de las ondas en la superficie libre del mar

A la perturbación que se produce en la superficie del mar se le denomina agente marino. Una clasificación de estas perturbaciones es la que hizo Walter H. Munk [Munk, 1951], esta clasificación se complementa con la información de la tabla 1.2.

Ondas	Período
Ondas capilares	menores a 0.1s
Ondas de ultragravedad	0.1s a 1s
Ondas de gravedad	1s a 30s
Ondas de infragravedad	de 30s a 5 min
Ondas largas	de 5 min a 12 horas
Mareas	12 horas a 24 horas
Transmareas	24 horas o más

Tabla 1.1: Clasificación de las ondas según Munk.

Existe otra clasificación basada en la frecuencia, como se muestra en la figura 1.3. Cada una de las ondas mencionadas en la clasificación de Munk se explicarán a continuación de acuerdo a su tamaño de período.

1.3.1. Ondas de período largo

Estas ondas tienen períodos desde unas pocas horas hasta más de días y su longitud de onda abarca cientos de kilómetros hasta miles de ellos, estas ondas se dividen en dos tipos [Benassai, 2006]:

- Oscilaciones regulares con períodos de medio día o hasta meses (mareas astronómicas).
- Variaciones no regulares con períodos de recurrencia 24 horas, días o hasta meses, producidas por condiciones meteorológicas.

Nombre	Período [T]	Longitud [L]	Altura [H]	Fuerza generadora	Fuerza restauradora
Capilares	0 a 0.1 s	2 a 7 cm	1 a 2 mm	viento	tensión superficial
Ultragravedad	0.1 s a 1 s	centímetros	centímetros	viento	tensión superficial y gravedad
Gravedad	1 s a 30 s	de metros a cientos de metros	de centímetros a 15 m	viento	gravedad
Infragravedad	de 30 s a 30 min	100 a 200 m	pequeña	viento	gravedad y fuerza de Coriolis
Ondas largas	de 5 min a 24 horas	pueden llegar a ser de escala planetaria	1 a 5 m	sismos, derrumbes, atracción de cuerpos celestes	gravedad y fuerza de Coriolis
Transmareas	más de 24 horas	—	0 a 12 m	oscilaciones climáticas	gravedad y fuerza de Coriolis

Tabla 1.2: Clasificación de las ondas [Johnson et al., 1978]

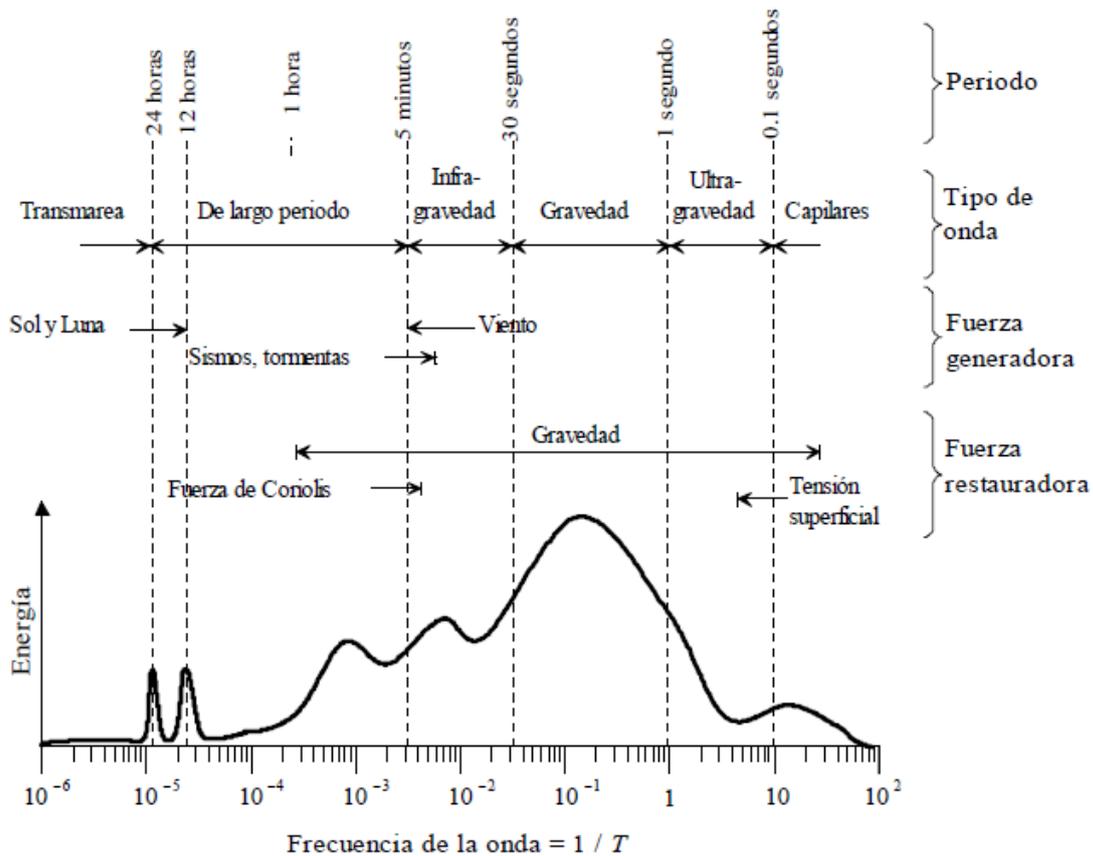


Figura 1.3: Clasificación de las ondas según su frecuencia y energía [Kinsman, 1965] y [Silva, 2005].

Mareas Astronómicas

La marea astronómica consiste en ascensos y descensos periódicos del nivel de agua generados por la interacción gravitacional entre la Tierra, la Luna y el Sol. Debido a fenómenos como la reflexión, la refracción, la fricción de fondo y el peraltamiento de la onda, en ciertos lugares la marea alcanza hasta 15 m de altura o se anula como resulta en los sistemas llamados anfidrómicos, si estos casos no se presentan la altura de ola común de la marea es de 0.5m [Van Rijin, 2013].

Cabe decir que el comportamiento de la marea varía según las componentes semidiurnas, las cuales presentan dos pleamares y dos bajamares cada día, o componentes diurnas que tienen solamente una bajamar y una pleamar cada día, así como una variación quincenal que causa que la marea sea mayor de lo normal en la luna llena y en la luna nueva (marea viva) y una marea menor a la normal en los cuartos de luna (marea muerta) [Benassai, 2006].

Variaciones meteorológicas

Las perturbaciones meteorológicas provocan cambios del nivel del agua, donde la más conocida es la marea de tormenta que es resultado de la combinación del esfuerzo del viento hacia la superficie del mar y un sistema atmosférico de baja presión, como en un ciclón tropical. En esta no se incluyen efectos de marea astronómica, sin embargo cuando los efectos de la marea de tormenta se combinan con una pleamar de la marea astronómica, la elevación del agua puede ocasionar inundaciones en la costa. [Benassai, 2006].

1.3.2. Ondas de período intermedio

En este grupo se encuentran las ondas que comprenden los 5 minutos hasta las 12 horas, las ondas que van de los 30 segundos a los 5 minutos (ondas infragravitatorias) y las ondas de 1 segundo a 30 segundos (ondas de gravedad); también se incluyen los tsunamis, ondas de resonancias en los puertos y seiches. Estos movimientos de períodos intermedios ocurren por la interacción del oleaje incidente de viento con la batimetría y con ondas generadas en el mar como corrientes en la zona cercana a la costa. Cabe decir que la cantidad de energía de las primeras olas dependerá de las segundas, un ejemplo es cuando la altura de ola infragravitatoria en la zona de resaca (surf) es de un 20-60 % de la altura de ola incidente [Silva, 2005].

Una subdivisión de estos movimientos son las ondas de baja frecuencia (LFW, Low frequency waves) u ondas infragravitatorias y movimientos vorticales como son las corrientes litorales y corrientes de retorno [Van Rijin, 2013]. En una playa plana, el movimiento LFW es a menudo descrito y analizado en términos de ciertos modos de movimiento, como modos de la onda de borde (edge) y modos reflexivos o modos de ondas salientes (leaky, donde los únicos modos libres son los que corresponden a las ondas libres (free) que llegan a la playa y que se reflejan allí.

A continuación se presenta un resumen del análisis de LFW, el cual permite entender su comportamiento en la costa [Hamm et al., 1993], [Roelvink, 1993]. Estos autores presentan que la mayoría de las observaciones indicaron que los movimientos de períodos largos son causados por ondas cortas incidente en la costa, donde el mayor proceso involucrado en esto es debido a que las ondas cortas pierden gran parte o toda su energía mediante la rotura, pero los estudios de disipación en los flujos por efectos del coeficiente de fricción en los bordes, mostraron que esta disipación difiere mucho de las observaciones. Esto se debe a que la rotura de oleaje usualmente lleva o puede llevar un esfuerzo cortante en el fluido interno tal que puede haber o no pérdida de momento, el cual es transferido a las ondas cortas mediante movimientos vorticales y movimientos por LFW; a este tensor del flujo de momento también se le suele llamar tensor de radiación. En el caso más simple en el que un tren de ondas

cortas incide sobre una playa plana, donde no hay corrientes, la transferencia de momento de la rotura de las ondas cortas en la zona de resaca (surf) va a equilibrar el gradiente de presión ya que induce una sobreelevación de la ola (set-up) sobre la elevación normal del oleaje, lo que ayuda a ver que cualquier variación no uniforme en el tren de ondas incidentes genera movimientos de ondas largas o intermedias.

Un ejemplo en donde las ondas largas o intermedias están moduladas por ondas cortas es el caso de las ondas libres, las cuales normalmente tienen una amplitud pequeña y se pueden mantener por sí solas ya que durante la mitad de su período se comprimen y durante la otra mitad se expanden, esto hace que la disipación de la energía y la transferencia de momento se modulen en el espacio y tiempo a través de las ondas largas. Cuando estas ondas viajan en una escala de tiempo del período del grupo de ondas ocurren las oscilaciones en el nivel del mar causadas por la resaca (Surf beat), la cual es una de las causas principales de la resonancia en zonas abrigadas. Una discusión clara de este fenómeno de onda larga está dada por Roelvink en 1993.

Fuera de la costa hay ondas largas vinculadas (bound long waves) que acompañan esas modulaciones y viajan a la velocidad de propagación de los grupos de olas (velocidad de grupo). Pueden formar ondas libres cuando el grupo de ondas es destruído [Longuet-Higgins and Stewart, 1964]. Un ejemplo es la rotura de oleaje en la zona de resaca. Cuando estas ondas libres se reflejan generalmente en la playa se escapan a aguas profundas y se les llama ondas salientes (leaky waves). Se ha observado que el patrón de oscilaciones estacionarias asociado a las ondas salientes no muestra variaciones en la dirección longitudinal a la costa, por lo que también se conocen como ondas bidimensionales.

Cuando algunas de las olas provienen de la reflexión de la playa de las ondas vinculadas y quedan atrapadas en la zona de rompiente por refracción se les llama ondas de borde (edge waves). En la dirección longitudinal a la playa estas ondas pueden ser progresivas, mientras que en la dirección transversal al litoral son estacionarias y sus crestas son normales a la línea de costa.

Otras ondas de períodos intermedios y que son más difíciles de predecir son las siguientes.

Seiches

Un seiche es una onda estacionaria con uno o más nodos, la cual puede ser considerada como la suma de dos ondas progresivas, que viajan en direcciones opuestas. Su frecuencia de oscilación está determinada por el tamaño y la profundidad del cuerpo semicerrado, donde este se define como aquel cuerpo que está rodeado parcialmente por fronteras físicas, por donde se puede transferir masa, por ejemplo una laguna con una desembocadura al mar [Brown et al., 1997].

Si la profundidad dividida entre la longitud es menor a 0.1, entonces el comportamiento de las ondas es como el que se presenta en aguas someras. Luego el período de oscilación es:

$$T = \frac{2l}{\sqrt{gd}} \quad (1.2)$$

Donde:

l : longitud del cuerpo semicerrado.

d : profundidad.

$$g = 9.8 \frac{m}{s^2}$$

Cuando el nodo ocurre en la entrada del cuerpo semicerrado y el antinodo al final del cuerpo, entonces la longitud del cuerpo l corresponde a la mitad de la longitud L de onda del seiche y su período de resonancia T es:

$$T = \frac{4l}{\sqrt{gd}} \quad (1.3)$$

Entiéndase como nodo a la superficie de agua constante, donde el flujo horizontal desde el inicio hasta el final del cuerpo es grande, un antinodo cuando la fluctuación del nivel del agua es grande y el movimiento horizontal es mínimo. Para ondas que se acercan al estado estacionario el período de resonancia con el período de la base debe ser igual al período de la onda en movimiento o a un número entero pequeño del múltiplo del período [Brown et al., 1997].

Estos seiches suelen ocurrir en lagos, bahías, puertos o lagunas costeras.

Tsunamis

Tsunamis es una palabra japonesa empleada para describir ondas de una gran longitud de onda causada por movimientos sísmicos o caídas de grandes masas de sedimentos por alguna inestabilidad gravitacional en el fondo marino, o a una actividad volcánica [Brown et al., 1997]. Estos tsunamis tienen longitudes de onda del orden de cientos de kilómetros y usualmente empiezan con una altura de ola pequeña, pero conforme avanzan, por efectos de someramiento, la velocidad, la aceleración y profundidad del forzante esta altura de ola se incrementa. El estudio de las fuentes y los factores que le transfirieron energía al tsunami es lo que determina su intensidad.

Resonancia en puertos

Este fenómeno se da en zonas de abrigo, cuando hay una interacción entre las oscilaciones de las ondas que entran a la zona y los bordes de la misma. Cuando ocurre la resonancia de las ondas, la amplitud de estas aumenta y si las celeridades coinciden con los modos libres que viajan las oscilaciones esta amplitud puede crecer demasiado. Su mecanismo es el mismo que las ondas de borde en la zona de rompiente [Silva, 2005].

1.3.3. Ondas de período corto

Este tipo de ondas, son generadas principalmente por el viento y su período es menor a los 30s y se clasifican de la siguiente forma.

Ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales, tienen un período mayor a $1/4s$ y su peralte y celeridad está gobernado por el efecto de gravedad y condiciones meteorológicas [Holthuijsen, 2007]. Estas ondas se pueden dividir en dos tipos.

- Oleaje de viento o mar de viento (wind-sea).

Ocurre cuando las ondas son generadas en alta mar por el viento local, presentan las siguientes características: poseen crestas de corta altura, caóticas, irregulares, nada periódicas y direccionales. Su direccionalidad hace difícil reconocer definidos frentes de onda, por lo que también se denominan ondas de corta cresta; además se presenta una asimetría en sus olas y su peralte es corto y alto, donde se entiende como peralte a la relación existente entre la altura y su longitud de la ola (ec. A.1), [Silva, 2005].

- Oleaje distante, oleaje de tormenta, mar de leva o mar de fondo (swell).

Se observa en profundidades reducidas y se presenta cuando el oleaje deja el área de generación y se propaga sin tener una influencia significativa del viento. Son ondas unidireccionales y sus crestas tienen una apariencia larga y regular [Benassai, 2006].

Ondas capilares

Una onda capilar es aquella onda que viaja a lo largo de la superficie de un fluido, ocasionado por el efecto de fricción al interactuar el viento sobre el agua, y cuya dinámica está dominada por los efectos de la tensión superficial. Las características de estas ondas son: que mientras más corta es la onda capilar mayor es su velocidad, son ondas dispersivas con una velocidad de grupo mayor a la de la velocidad de fase, sus amplitudes son del orden de unos milímetros de altura y hasta poco menos de 2 cm de longitud de onda y los período que tiene son menores a $1/4s$ [Holthuijsen, 2007]. Cuando el efecto de fricción entre la ola y el medio aumenta, las amplitudes de estas ondas se incrementan y su régimen se convierte a ondas de ultragravedad, si sigue aumentando esta fricción esas pequeñas rizaduras desaparecen para dar lugar a las ondas de gravedad.

1.4. Factores de la generación del oleaje

El oleaje son las ondulaciones que se generan como resultado de la acción del viento sobre la superficie del mar. Las propiedades de la ola (altura, período y dirección) dependen de los siguientes factores [Benassai, 2006].

- El campo del viento (velocidad, dirección y duración)
- El fetch o alcance del viento (metereological fetch) o el área del agua (geographical fetch).
- La profundidad del agua en el área de generación.

El fetch es la longitud de la superficie oceánica sobre la cual el viento sopla a una velocidad y en una dirección específica [Silva, 2005]. Cuando este fetch es lo suficientemente extenso, y el viento está soplando a una velocidad constante por un tiempo largo, el equilibrio eventualmente se alcanza, por lo que la energía de las olas se disipa a la misma tasa con la que las olas reciben energía del viento; a esto se le conoce como oleaje completamente desarrollado tal que sus características y tamaño de las olas no cambian.

Como el viento es muy variable, este oleaje desarrollado raramente ocurre, por lo que en la práctica el oleaje completamente desarrollado consiste en un rango de ondas con diferentes tamanos y amplitudes, lo cual se le conoce como campo de oleaje [Brown et al., 1997].

1.5. Etapas del oleaje

Las etapas del oleaje se pueden ver de la siguiente forma:

- Origen (generación por el viento)

El viento es causado por los gradientes de presión entre zonas adyacentes, que a su vez estos son resultado de la diferencia de temperaturas debido a que ciertas zonas entre la tierra y el mar reciben más radiación solar que otras. La acción del viento sobre el mar, es la responsable de la generación de ondas, variación de la elevación del nivel por el viento (wind set-up), oscilación de período intermedio o efecto de corriente de mar de fondo (surge) y corrientes superficiales.

- Transformación a oleaje swell (dispersión)

Una vez que el oleaje se aleja de la zona de generación, primero este empieza a perder energía (decaimiento) ya que las olas sufren una dispersión angular (que es en todas direcciones) y una radial; segundo las olas largas (períodos grandes) alcanzan a las ondas cortas (períodos pequeños) y tercero las ondas de períodos cercanos se fusionan. Ante estos procesos y que el oleaje se aleja del área de generación, el oleaje distante se convierte en oleaje tipo swell [Silva, 2005].

- Propagación del oleaje en aguas cercanas a la costa (someramiento, refracción, difracción y reflexión)

Cuando las ondas se acercan a la orilla, estas son afectadas por el fondo marino a través de la refracción, difracción, reflexión y someramiento [Benassai, 2006].

- Someramiento. Es la deformación de la onda que comienza cuando la profundidad del agua empieza a decrecer aproximadamente la mitad de la longitud de la onda. Este proceso causa una reducción en la velocidad de la propagación de la onda y un acortamiento en las olas.
- Refracción. Esta es causada por el cambio de dirección que sufre la onda, que a su vez cambia la velocidad de ella, en otras palabras este fenómeno se da cuando las olas se propagan más lentamente en aguas someras que en aguas profundas. El frente de onda viaja con un cierto ángulo y cuando éste incide sobre la batimetría se produce un cambio de ese ángulo y en la altura de ola. Las causas más comunes de este fenómeno son la batimetría (por eso las olas tienden a progresar en forma paralela a las líneas batimétricas) y la presencia de corrientes.
- Difracción. Ocurren porque la onda se desvía al encontrar un obstáculo, como puede ser, estructuras protectoras como rompeolas. En este fenómeno la onda se propaga por la zona del sotavento, detrás de la estructura, y transmite la energía lateralmente a lo largo de las crestas de las olas.

- Interacción entre las ondas

Cuando dos diferentes tipos de ondas se relacionan entre sí en un mismo lugar se producen los siguientes fenómenos [Benassai, 2006]:

- Profundidad inducida por rotura de oleaje. Esto sucede cuando la altura de la ola llega a ser más grande que una cierta fracción de la profundidad.
 - Interacciones entre la corriente y la ola. Estas se producen en presencia de una corriente de gran escala (como la de una boca de río) y en presencia de corrientes de retorno, las cuales influyen de manera importante en el transporte de sedimentos.
 - Interacciones onda-onda. Resultan del acoplamiento no lineal de la componente de una onda con la otra y de la transferencia de energía entre ellas.
- Decaimiento de las ondas Cuando la energía de las ondas se disipa, se da un decaimiento en su energía, dos causas de este decaimiento son las siguientes:
 - Fricción de fondo. Este factor hace que la onda disipe energía reduciendo la altura de ola conforme la profundidad del agua va disminuyendo. La fricción de fondo es significativa en el área de aguas someras.
 - Rotura de oleaje. Cuando la profundidad en donde la ola se está propagando disminuye y se genera un peralte en la ola, tal que se va incrementando conforme avanza hasta que llega a un punto en donde la ola es inestable y rompe. Stokes estableció que la condición de inestabilidad está dada en términos de un valor crítico del peralte de la ola, el cual se alcanza cuando la velocidad horizontal de la partícula de la cresta coincide con la velocidad de fase de la onda; cuando esto sucede la cresta se encuentra a un ángulo de 120° respecto a la horizontal [Stokes, 1880]. El criterio que usó Stokes fue:

$$\frac{H_o}{L_o} = 0.142 \cong \frac{1}{7}$$

De esta ecuación se observa que en aguas profundas la altura de la ola está limitada por la longitud de onda, mientras que en aguas someras, la altura de la ola está limitada por la

profundidad y no por la longitud de onda.

Galvin et. al hacen una clasificación de la rotura de oleaje de acuerdo a la forma de la ola (figura 1.4), la cual es la siguiente [Galvin et al., 1968]:

- Descrestamiento (Spilling). Se observan en aguas profundas o en playas con pendiente suave, se caracterizan por tener una rotura localizada a lo largo de una franja de la cresta.
- Voluta (Plunging). Ocurren en una parte más inclinada y tienen una mayor concavidad en su cresta tal que una gran cantidad de agua cae por delante en la parte frontal de la cresta por efectos de gravedad.
- Colapso (Collapsing.) Es similar a la rotura por voluta, excepto que en vez de generarse un cresta curvada, la parte frontal de la cresta colapsa. La pendiente en que ocurren es más empinada que la de la rotura en voluta.
- Oscilación (Surging). Esta rotura ocurre en playas muy empinadas, tal que presentan reflexión considerable y espuma en la parte inferior de la cresta (puntos negros de la figura 1.4).

1.6. Corrientes

Las corrientes ocurren dentro de las profundidades del océano, sobre la plataforma continental y zonas cercanas a la costa. Estas son cuasiconstantes y persisten por períodos que van desde unas cuantas horas hasta varias semanas, o pueden ser oscilatorias con períodos de segundos. Las corrientes están limitados por la superficie o el fondo del mar, o pueden extenderse por toda la profundidad del agua, además las corrientes superficiales pueden tener una dirección diferente a las corrientes que están en el fondo.

Las grandes corrientes son aquellas que ocurren en el océano abierto (corrientes oceánicas) las cuales son producto de las interacciones a escala global entre la atmósfera y el mar.

Las corrientes que cubren la plataforma continental (la cual se extiende entre uno y varios kilómetros de la costa) son una compleja mezcla de varios componentes, entre los cuales hay ondas internas, ondas atrapadas a la costa, mareas y corrientes locales inducidas por el viento.

Estas corrientes oceánicas y de plataforma no son significativas en la zona cercana a la costa. Las corrientes asociadas a esta zona son las siguientes [Benassai, 2006]:

- Corrientes inducidas por el oleaje. Las corrientes cercanas a la costa son causadas por las ondas que rompen en la playa, las cuales pierden energía debido a la turbulencia y el momento de energía transferido a lo largo de la columna de agua. Estas corrientes son paralelas a la orilla generadas por ondas incidentes normales u oblicuas y circulaciones que hay en la celda litoral.
- Corrientes normales o perpendiculares a la costa. Se sabe que la propagación de las ondas produce un transporte de masa en la dirección de propagación de la onda, que es una corrección de

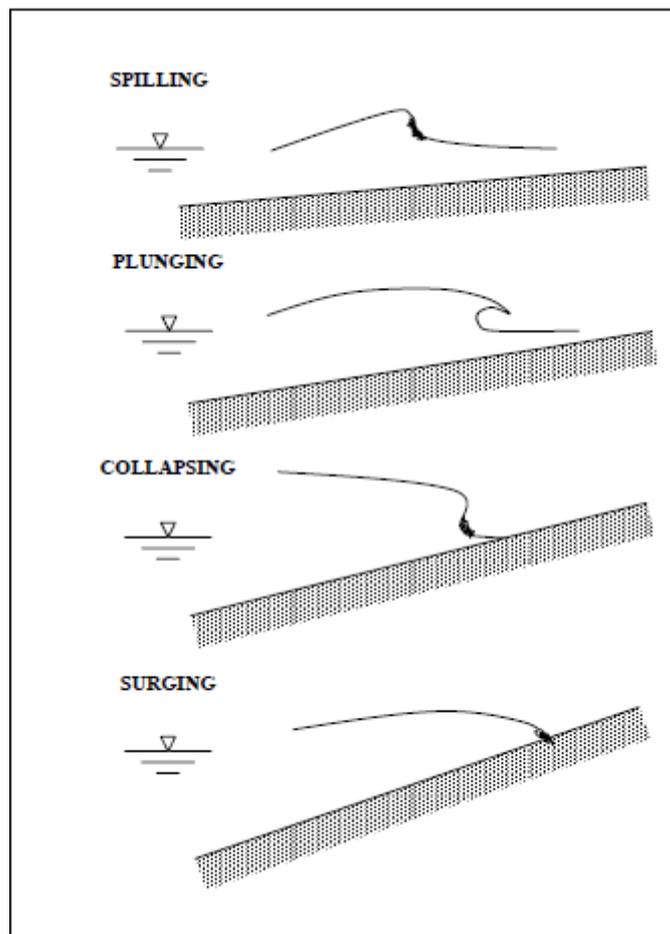


Figura 1.4: Clasificación de rotura de ola según la forma de la ola [Benassai, 2006]

segundo orden en la teoría lineal, este transporte de masa se llama corriente de deriva y tiene dirección hacia la costa. Cuando las olas están rompiendo, se desplaza agua hacia la costa y como el flujo neto debe de ser cero para compensar esta corriente se genera un flujo en dirección hacia el mar, a este movimiento se le llama corriente de retorno.

- Corrientes paralela a la costa. Estas corriente se generan por el esfuerzo (tensor de radiación) paralelo a la costa asociado al oleaje oblicuo por la rotura de oleaje.
- Corrientes de retorno. La dirección de está corriente es hacia el mar y su objetivo es devolver el agua transportada por la rotura de oleaje. Las corrientes de retorno están concentradas en la capa superficial y son parte de la circulación de la celda litoral, porque sus flujos convergen a lo largo de la costa.

1.7. Otra caracterización del oleaje

La previa caracterización de las olas, se dio en función de su período y longitud de onda. Otras escalas que se utilizan para la clasificación de las olas son aquellas que dan lugar al proceso de generación, propagación y disipación del oleaje, a continuación se enuncian estas escalas: [Holthuijsen, 2007]

- Pequeñas escalas. Son del orden de aproximadamente 10-100s y 10-1000m en el uso común son comparables a las dimensiones de la zona de surf o de un pequeño puerto. Las ondas se

describen con modelos teóricos, donde se usan las leyes básicas de la hidrodinámica para estimar el movimiento de la superficie del agua, la velocidad de las partículas de agua y la presión del agua en cualquier tiempo y espacio del cuerpo de agua. Como la teoría usa las leyes de Newton, este estudio es de forma determinista tal que presenta con detalle lo que sucede en una pequeña fracción de la longitud de la onda, conocido como enfoque de resolución de fase (phase-resolving approach).

- Escalas intermedias. Sus dimensiones son de 100-1000 s y 100-10 000m. En esta escala no se usa el enfoque de resolución de fase por las siguientes razones: son muchos los datos a analizar, tal que los datos del viento que genera la ola no se pueden predecir a esta escala y por consiguiente los detalles correspondientes a las olas tampoco se pueden predecir, por lo que es suficiente tener promedios de las ondas en el espacio y en el tiempo para poder obtener las características principales de las ondas. Esto se conoce como enfoque del promediado de las fases (phase-averaging approach), en donde las estadísticas de las propiedades de las onda se definen y modelan con promedios. Para aplicar este enfoque se necesita que la serie de datos sea homogénea y estacionaria en el espacio y en el tiempo.

Si las ondas no tienen un gran peralte y no se está en aguas someras, la física y las estadísticas es a través del espectro de la onda, donde este es el conjunto de ondas armónicas que se propagan cada una con su propia amplitud, frecuencia, longitud de onda, dirección y fase. Al conjunto de ondas con diferentes períodos y alturas también se le conoce como oleaje irregular.

- Grandes escalas. Aquí se presentan tres escalas, las de aguas costeras que son de un millar de longitudes de onda y períodos, la del mar en plataformas que son de diez mil longitudes de onda y períodos y la escala de un océano que son del orden de cien mil longitudes de onda y períodos. En los océanos y las plataformas sus escalas de tiempo y espacio son determinados por el tiempo que tardan en viajar las olas a través de una región, así como por las escalas del viento y de las mareas. Para las aguas costeras, su escala espacial se determina por los sistemas como playas o bahías que se puedan encontrar. Por ejemplo un sistema de islas de 50-100 km de largo y 10-20km de ancho, el tiempo que tarda en viajar la onda desde el continente hacia las islas es de 15-30min; mientras que la escala en el océano y mares de plataforma son del tamaño de una cuenca oceánica o de la escala de los sistemas meteorológicos. Por ejemplo, en el Mar del Norte es de 500km de ancho y 1.500 km de largo por lo que el tiempo que tardan en pasar olas de 10s es de 24h, el cual es del mismo orden de escala que las tormentas en ese lugar. En este caso como las escalas son muy grandes respecto al espectro de frecuencias se ve como una función que varía en el espacio y tiempo, tal que se usan los campos de vientos, mareas y batimetría para poder predecir las características de las olas pero de una forma determinista.
- Super escalas. Esta escala es de decena de años, donde se emplean estadísticas (llamados clima de oleaje) a largo plazo o simulaciones para poder determinar o predecir las características de las olas.

Capítulo 2

Análisis de señales de oleaje

2.1. Introducción

Se considera como oleaje al conjunto de ondas viajando en diferentes direcciones θ_i con diferentes amplitudes a_i , frecuencias f_i y fases ϵ_i tal que su estudio es mediante una combinación lineal de ondas armónicas que matemáticamente se representan como [Silva, 2005]:

$$\eta(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i \cos \left[\frac{\omega_i^2}{g} (x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - f_i t + \epsilon_i) \right] \quad (2.1)$$

Donde:
 a amplitud
 f frecuencia angular ($2\pi/T$)
 T período de la onda

θ ángulo de incidencia con respecto al eje X
 ϵ fase
 x, y posición espacial de la onda
 t tiempo

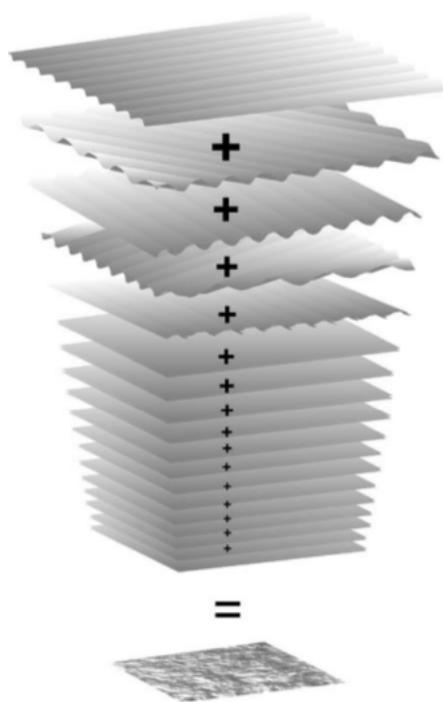


Figura 2.1: Descomposición del oleaje en componentes armónicas, de diferentes amplitudes, períodos, fases y direcciones. [Pierson et al., 1958].

Aunque la descripción del oleaje es usando ondas armónicas, su verdadera naturaleza es aleatoria por lo que este se analiza con técnicas estadísticas o con técnicas espectrales, las cuales son el objeto de estudio de este capítulo.

2.2. Análisis estadístico de la señal del oleaje.

Antes de explicar los conceptos estadísticos para el oleaje, debe de quedar claro que la superficie libre y la ola no son iguales. En un registro respecto al tiempo la superficie libre es la elevación instantánea de la superficie del mar (es decir, en cualquier momento en el tiempo) relativo a algún nivel de referencia, mientras que la ola es el perfil de la elevación de la superficie libre entre dos sucesivos pasos ascendentes por cero o dos pasos descendentes por cero. La elevación de la superficie puede ser negativa, mientras que la de la ola no. [Holthuijsen, 2007].

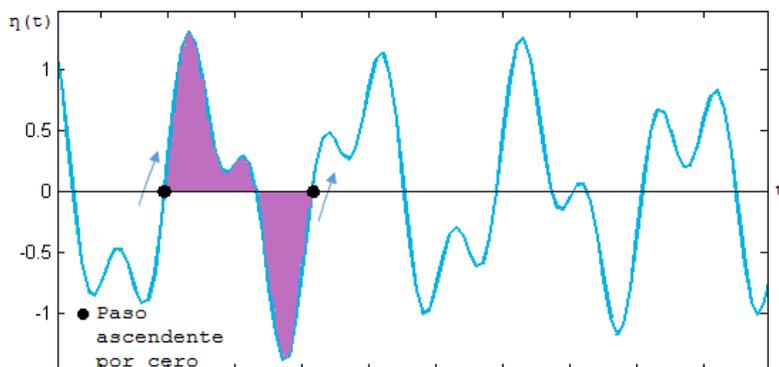
Se entenderá por paso ascendente por cero (figura 2.2), [Silva, 2005] cuando se cumple que:

$$\eta_i \cdot \eta_{i+1} < 0 \quad y \quad \eta_{i+1} > 0$$

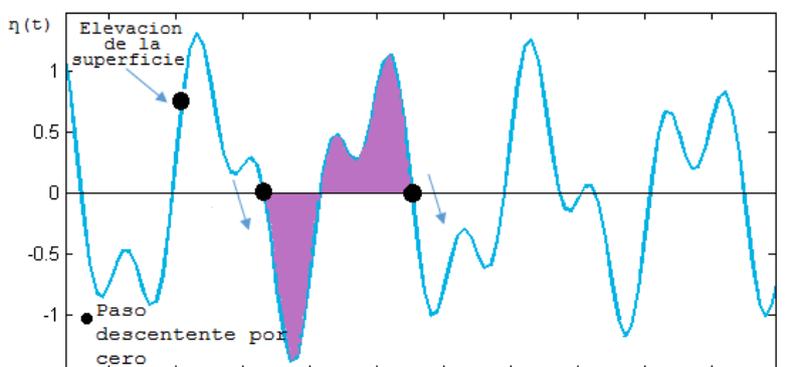
Y el paso descendente por cero (figura 2.2), [Silva, 2005] cuando:

$$\eta_i \cdot \eta_{i+1} < 0 \quad y \quad \eta_{i-1} > 0$$

Donde η_i es el i ésimo dato de la elevación de la superficie.



(a) Pasos ascendentes por cero.



(b) Pasos descendentes por cero.

Figura 2.2: Método de pasos ascendentes y descendentes

Es indistinto usar los pasos ascendentes o pasos descendentes, ya que las características estadísticas deben de ser simétricas, excepto cuando se trata de la rotura de oleaje, en la que se usa la definición de los pasos descendentes debido a que presenta asimetría en sus características y se representa mejor con esa definición. Además en esta descripción estadística de las señales cortas de oleaje (short-term) se requiere que las señales tengan las siguientes dos hipótesis estadísticas: estacionariedad y ergodicidad (ver apéndice B.8).

Cabe destacar que en esta descripción estadística el oleaje se considera como un proceso gaussiano (ver apéndice B) que proviene de una observación o medición denotada por $\eta_k(t)$. [Holthuijsen, 2007].

2.3. Características del registro de oleaje

Para poder utilizar un registro del oleaje se espera que el estado de mar en cada una de las posiciones de la dinámica del oleaje tenga una variación lenta para que el proceso se considere como estacionario, esto siempre y cuando el tiempo de medición sea lo suficientemente corto para que el proceso sea estacionario y un tiempo suficientemente largo para que el registro tenga un número de olas significativo para el análisis del fenómeno a estudiar.

2.3.1. Duración e intervalo de muestreo del registro

El tiempo óptimo de un registro de oleaje para el mar (que son las fluctuaciones de la superficie libre en función del tiempo en una posición) es de 15-30 min por cada hora [Holthuijsen, 2007], o entre 10 a 20 min por cada hora [Silva, 2005], [Benassai, 2006]. Si el registro es mayor se debe este dividir para poder preservar la estacionariedad en el registro.

Para realizar un buen análisis del registro es conveniente que éste contenga al menos 100 olas y que el intervalo de muestreo ΔT entre dos valles sea de una décima 1/10 o de una vigésima 1/20 parte del período significativo, obteniendo por lo general intervalos que van entre 0.25 a 1.0 segundos, o más a menudo de 0.39 a 0.5 segundos [Benassai, 2006]. Una vez que el intervalo de muestreo se escogió, la frecuencia máxima llamada frecuencia de Nyquist [Benassai, 2006] que se escoge para estimar el espectro del oleaje es de:

$$f_c = \frac{1}{2\Delta t} \quad (2.2)$$

La componente de la onda con esta frecuencia se muestrea cada dos puntos por onda, y la energía proveniente de las frecuencias más grandes que f_c se agregan como una constante de energía en el rango de $0 < f < f_c$. Esto sucede porque se da el fenómeno de aliasing que es cuando, al tener un mal muestreo, en la señal dos frecuencias muy cercanas entre ellas y que tienen un valor mayor a f_c son indistinguibles. Como la densidad espectral de la onda decae en las altas frecuencias como f^5 o f^4 , el aliasing no representa ningún problema siempre y cuando se respete el valor ya mencionado para Δt .

2.4. Correcciones del registro

Antes de aplicar alguna técnica estadística o espectral al registro, este se debe filtrar para identificar y eliminar cualquier ruido de fondo que provenga del instrumento, alguna interferencia de señales de radio o algún otro error que altere la información contenida en la muestra. De tal manera que el registro corregido resulta de restar el registro original menos el promedio de los elementos del registro:

$$\eta_{i_corregida} = \eta_{i_original} - \bar{\eta}_i \quad (2.3)$$

Algunos métodos que se aplican a los registros para la corrección del oleaje se resumen en la tabla 2.1

Tipo de corrección del nivel medio	Ecuaciones	Característica
Media	$\bar{\eta}_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \eta_n$	Cuando no hay efecto de ondas largas
Lineal	$\bar{\eta}_n = A_0 + A_1 n, \text{ Donde } A_0 = \frac{N_2 Y_0 - N_1 Y_1}{N_0 N_2 - N_1^2} \text{ y } A_1 = \frac{N_0 Y_1 - N_1 Y_0}{N_0 N_2 - N_1^2},$ $N_r = \sum_{n=1}^N \eta^r, Y_r = \sum_{n=1}^N \eta^r \eta_n$	Elimina las ondas de período largo
Parabólica	$\bar{\eta}_n = B_0 + B_1 n + B_2^2, \text{ Donde:}$ $B_0 = \frac{1}{\Delta} [Y_0 (N_2 N_4 - N_3^2) + Y_1 (N_2 N_3 - N_1 N_4) + Y_2 (N_1 N_3 - N_2^2)],$ $B_1 = \frac{1}{\Delta} [Y_0 (N_2 N_3 - N_1 N_4) + Y_1 (N_0 N_4 - N_2^2) + Y_2 (N_1 N_2 - N_0^3)],$ $B_2 = \frac{1}{\Delta} [Y_0 (N_1 N_3 - N_2^2) + Y_1 (N_1 N_2 - N_0 N_3) + Y_2 (N_0 N_2 - N_1^2)],$ $\Delta = N_0 N_2 N_4 + 2 N_1 N_2 N_3 - N_2^3 - N_0 N_3^3 - N_1^2 N_4$	Cuando influye la carrera de marea

Tabla 2.1: Corrección del oleaje [Silva, 2005]

2.5. Cálculo de los parámetros del oleaje

Los principales parámetros estadísticos que caracterizan a un estado del mar son los siguientes [Silva, 2005]:

La variación del nivel medio del mar, que matemáticamente se define como:

$$\overline{\eta(t)} = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} \eta_i \quad (2.4)$$

La media cuadrática es:

$$\eta_{rms}^2 = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} \eta_i^2 \quad (2.5)$$

La oblicuidad o asimetría:

$$Skewness = \frac{1}{N \eta_{rms}^3} \sum_{i=1}^N \eta_i^3 \quad (2.6)$$

Donde N es el número de muestras del registro y N_0 el número de olas individuales del registro.

Otros parámetros importantes son el cálculo de las alturas y períodos de la altura que se estudian en los siguientes dos apartados. Cabe decir que para el cálculo de estos parámetros se deben de tener cada uno de los períodos y alturas de las olas individuales, en la tabla 2.2 se muestran algunos de los métodos más comunes para determinar estos períodos y alturas de ola.

2.5.1. Altura de ola

La altura de ola H es la distancia vertical entre el punto más bajo y el punto más alto de la elevación de la superficie de la onda, la cual es única. En un registro de N ondas la altura de ola media se define como:

$$\bar{H} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_i \quad (2.7)$$

Método	Ecuaciones
Método de pasos ascendentes por cero	$H = \eta_{max} - \eta_{min}$
Método de pasos descendentes por cero	$H = \eta_{max} - \eta_{min}$
Método de crestas	$H_i = Cresta_i - Cresta_{i+1} $ con $i=1,N-1$
Método de valles	$H_i = Valle_i - Valle_{i+1} $ con $i=1,N-1$

Tabla 2.2: Métodos para calcular las alturas y períodos de la ola [Silva, 2005]

Donde: i es la secuencia del número de la onda del registro ($i=1$ es la primera ola del registro, $i=2$ es la segunda ola del registro y así sucesivamente).

La onda cuadrática media se define como:

$$H_{rms} = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N H_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

Tal medida de altura de olas es relevante ya que la energía de la ola es proporcional al cuadrado de la altura de ola. Estas alturas características H y H_{rms} no se utilizan muy a menudo porque tienen poca semejanza con la altura de ola estimada visualmente, por ello existe otra altura de ola que es parecida a las observaciones visuales la cual es la altura de ola significativa H_s que se define como la media del tercio de olas más altas del registro.

$$H_s = H_{1/3} = \frac{1}{N/3} \sum_{j=1}^{N/3} H_j \quad (2.9)$$

Donde j es la secuencia del número de la onda del registro ($j = 1$ es la altura de ola más grande, $j = 2$ la segunda altura de ola más grande y así sucesivamente). Para tener en claro la terminología, a la altura de ola significativa se denotará como $H_{1/3}$ y la altura de ola visualmente será H_v ; la altura de ola significativa como se verá más adelante también se estima a partir del espectro de oleaje y se denota como H_{m_0} .

Otros tipos de altura de ola son los siguientes:

La altura de ola de un décimo que es el promedio del 10 % de las olas más altas.

$$H_s = H_{1/10} = \frac{1}{N/10} \sum_{j=1}^{N/10} H_j \quad (2.10)$$

La altura de ola de un centésimo que es el promedio del 1 % de las olas más altas.

$$H_s = H_{1/100} = \frac{1}{N/100} \sum_{j=1}^{N/100} H_j \quad (2.11)$$

La altura de ola de un milésimo que es el promedio del 0.1 % de las olas más altas.

$$H_s = H_{1/1000} = \frac{1}{N/1000} \sum_{j=1}^{N/1000} H_j \quad (2.12)$$

2.5.2. Período de ola

El período de ola es el intervalo entre un inicio de onda y un fin de onda (el intervalo entre un paso descendente y su siguiente paso descendente). El promedio de este período T_0 es:

$$\overline{T_0} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_{0,i} \quad (2.13)$$

Donde i es el número de secuencia de la onda en el registro.

El período de ola significativo es el 33 % de los períodos más altos de las olas, que se define matemáticamente como:

$$T_s = T_{1/3} = \frac{1}{N/3} \sum_{j=1}^{N/3} T_j \quad (2.14)$$

Donde $j = 1$ es el período más alto de la ola, $j = 2$ es el segundo período de ola más alto y así consecutivamente.

También se utilizan otros períodos como son:

El período de ola de un décimo que es el promedio del 10 % de las olas más altas.

$$T_s = T_{1/10} = \frac{1}{N/10} \sum_{j=1}^{N/10} T_j \quad (2.15)$$

El período de ola de un centésimo que es el promedio del 1 % de las olas más altas.

$$T_s = T_{1/100} = \frac{1}{N/100} \sum_{j=1}^{N/100} T_j \quad (2.16)$$

El período de ola de un milésimo que es el promedio del 0.1 % de las olas más altas.

$$T_s = T_{1/1000} = \frac{1}{N/1000} \sum_{j=1}^{N/1000} T_j \quad (2.17)$$

2.6. Análisis espectral de la señal del oleaje

En este apartado se verá que la superficie libre se puede representar como la suma de un gran número de componentes armónicas de una onda (Serie de Fourier, ver apéndice C) como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(2\pi f_i t + \alpha_i) \quad (2.18)$$

Donde N es un largo número de frecuencias, α_i y a_i son la fase y las amplitudes respectivamente de cada frecuencia f_i con $i = 1, 2, 3$ tal que el intervalo de la frecuencia es $\Delta f = 1/D$, donde D es la duración del registro. Con este análisis de Fourier se determinan los valores de la amplitud y la fase del espectro del registro (figura 2.3) que sustituyéndolos en la ecuación 2.18 se hace la reconstrucción de la superficie libre.

Cuando se usa el análisis espectral una forma de llevarlo a cabo es el sugerido por la tabla 2.3

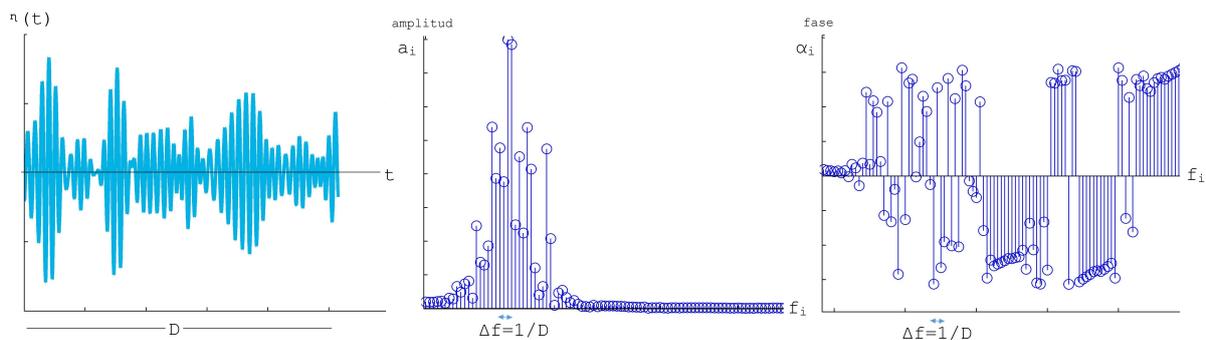


Figura 2.3: Registro del oleaje y sus respectivos espectros de amplitudes y fases, [Holthuijsen, 2007]:

Corrección del nivel medio	<ul style="list-style-type: none"> ■ Media ■ Ec. Lineal ■ Ec. Parabólica ■ Filtro espectral
Aplicación de una función ventana	<ul style="list-style-type: none"> ■ Ventana tipo trapezoide ■ Ventana tipo coseno
Estimación de las componentes de Fourier	
Cálculo del espectro de energía	
Suavizado del espectro de energía	
Parámetros espectrales	

Tabla 2.3: Pasos para el análisis espectral del oleaje [Silva, 2005]

2.7. Primer acercamiento de la varianza de la densidad del espectro

Para disminuir el valor de la incertidumbre de las amplitudes, es recomendable tomar la media de las amplitudes de todos los experimentos realizados bajo condiciones iniciales iguales (o muy parecidas), este cálculo de la media de la amplitud del espectro es mediante la ecuación:

$$\bar{a}_i = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M a_{i,m} \quad \forall f_i \quad (2.19)$$

Donde $a_{i,m}$ es el valor de a_i en el experimento con el número m . Otra cantidad que es más significativa que la media es la varianza de cada componente de la ola que es $\frac{1}{2} \bar{a}_i^2$. Esto se debe a que la varianza es más relevante que la media de la amplitud porque la suma de las varianzas de las componentes de la ola es igual a la varianza de la suma de las componentes, en contraste con la suma de las amplitudes de los componentes que no es igual a la amplitud de la suma de cada componente. Además la teoría lineal para las ondas de gravedad muestra que la energía de las ondas es proporcional a la varianza, esto implica que a través de la varianza se relaciona directamente la energía de las velocidades de las partículas y las variaciones de la presión, por poner un ejemplo.

Un problema que se presenta es que la varianza del espectro $\frac{1}{2}\overline{a_i^2}$ es discreta, es decir sólo las frecuencias $f_i = i/D$ están presentes, mientras que en el mar todas las frecuencias se presentan. Para solucionar esto la varianza $\frac{1}{2}\overline{a_i^2}$ se distribuye sobre el intervalo $\Delta f = 1/D$, dando como resultado la densidad de la varianza $\frac{1}{2}\overline{a_i^2}$ para cada frecuencia (es decir, es constante dentro de la banda de frecuencias). Haciendo esto ahora la varianza está distribuida a lo largo de todas las frecuencias pero este valor salta de una banda de frecuencias a otra (sigue siendo discontinua de cierta manera). Sin embargo, cuando el intervalo de la frecuencia Δt se aproxime a cero ($\Delta t \rightarrow 0$) el intervalo entre estos saltos de bandas de frecuencias se hace pequeño.

Considerando todos los aspectos previos la primera definición de la varianza de la densidad del espectro es [Holthuijsen, 2007]:

$$E(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \frac{1}{2} \overline{a^2} \quad \text{o} \quad E(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} E\left\{\frac{1}{2} \overline{a^2}\right\} \quad (2.20)$$

En la definición formal que se dará en el siguiente apartado, el promedio $\frac{1}{2}\overline{a_i^2}$ será reemplazado por el valor esperado $E\{\frac{1}{2}\overline{a^2}\}$ ¹ y la banda de frecuencias no necesita ser la misma para todas las frecuencias.

2.8. Segundo acercamiento de la varianza de la densidad del espectro

Del apartado anterior se observó que aunque es mejor usar la varianza del espectro $E\{\frac{1}{2}\overline{a_i^2}\}$ que el valor esperado de la amplitud $E\{a_i\}$, ambas características están basadas en frecuencias discretas y que su solución era distribuir la varianza $E\{\frac{1}{2}\overline{a_i^2}\}$ sobre el intervalo de frecuencias Δf_i ; dando como resultado la varianza de la densidad del espectro $E^*(f_i)$ que matemáticamente es:

$$E^*(f_i) = \frac{1}{\Delta f_i} E\left\{\frac{1}{2} \overline{a_i^2}\right\} \quad \forall f_i \quad (2.21)$$

Donde Δf_i es el intervalo de todas las frecuencias.

Cuando el ancho de la banda de frecuencia Δf_i se acerca a cero se obtiene la siguiente definición formal de manera continua de la varianza de la densidad del espectro $E(f)$ [Holthuijsen, 2007]:

$$E(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} E\left\{\frac{1}{2} \overline{a^2}\right\} \quad (2.22)$$

Esta función $E(f)$ da una descripción completa de la superficie libre del mar desde un sentido estadístico, de tal manera que la superficie libre puede ser vista como estacionaria y un proceso Gaussiano (ver apéndice B), lo que implica que todas las características estadísticas de la ola pueden estar expresados en términos del espectro.

Las unidades en el Sistema Internacional de la varianza de la densidad del espectro $E(f)$ se siguen directamente de la ecuación 2.22. Las dimensiones de la amplitud \underline{a} son [*longitud*], que en el S.I. son [*m*], las dimensiones de la banda de frecuencia es [*tiempo*]⁻¹, en el S.I. las unidades son [*s*⁻¹] o [*Hz*], entonces la dimensión de $E(f)$ es [*longitud*/(1/*tiempo*)] y en el S.I. las unidades son [*m*²*s*] o [*m*²/*Hz*].

¹Se usa la notación del apéndice B para referirse a la amplitud \underline{a}_i como variable aleatoria

2.9. La varianza de la superficie libre

La varianza de la superficie libre $\underline{\eta}(t)$ se define como el promedio del cuadrado de la superficie libre $\overline{\eta^2}$ ².

Para una onda armónica de amplitud a la varianza es $\overline{\eta^2} = \frac{1}{2}a^2$, por lo que si se considera ahora un un gran número de ondas armónicas que se suman entre ellas, la varianza de esta suma, es decir la superficie libre $\underline{\eta}(t)$, es igual a la suma de las varianzas individuales que es:³

$$\text{Varianza} = \overline{\eta^2} = E\{\underline{\eta^2}\} = \sum_{i=1}^N E\left\{\frac{1}{2}a_i^2\right\} \quad \text{para} \quad E\{\underline{\eta}\} = 0 \quad (2.23)$$

El cuadrado de la varianza es la desviación estándar σ_η de la superficie libre, la cual se puede ver como una escala vertical de las alturas de la ola. Por ejemplo, la altura de ola significativa $H_s \approx 4\sigma_\eta$ [Holthuijsen, 2007].

2.10. La varianza de la densidad del espectro en términos de la frecuencia angular

La varianza de la densidad ha sido definida en la sección anterior, en términos de la frecuencia $f = 1/T$ (donde T es el período de la onda armónica), pero puede ser igualmente definida en términos de la frecuencia en radianes $\omega = 2\pi/T$. El espectro correspondiente a $E(\omega)$ puede expresarse en términos de $E(f)$ y viceversa, pero se debe de hacer una transformación de $\overline{\eta^2}$ para que se conserve esta [Holthuijsen, 2007].

$$\overline{\eta^2} = \int_0^\infty E(\omega)d\omega = \int_0^\infty E(f)df \quad (2.24)$$

Lo cual lleva a

$$E(\omega)d\omega = E(f)df \quad (2.25)$$

Que es lo mismo a:

$$E(\omega) = E(f)\frac{df}{d\omega} = E(f)J \quad (2.26)$$

Donde $J = df/d\omega$ es el jacobiano. En este caso la transformación de $E(f)$ en $E(\omega)$ tiene el valor de $J = 1/(2\pi)$.

2.11. La varianza de la densidad del espectro usando la transformada de Fourier

Una definición alternativa del espectro que tiene la misma interpretación que la distribución de la varianza total sobre todas las frecuencias, está basada en la transformada de Fourier (ver apéndice C) de la función auto-covarianza (ver apéndice B) de la superficie libre, la cual es: [Holthuijsen, 2007].

$$E(\tilde{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau \quad \text{para} \quad -\infty \leq f \leq \infty \quad (2.27)$$

Donde la función de auto-covarianza $C(\tau)$ se define como el promedio del producto de las elevaciones de la superficie en el momento t al momento $t + \tau$.

²la barra superior indica promedio sobre el tiempo

³la varianza de la suma es la suma de las varianzas

Para un proceso estacionario, el valor de t no es relevante y la función de auto-covarianza depende sólo de la diferencia del tiempo τ

$$C(\tau) = E\{\underline{\eta}(t)\underline{\eta}(t + \tau)\} \quad \text{para } E\{\underline{\eta}(t)\} = 0 \quad (2.28)$$

Para una condición de onda estacionaria, $E(\tilde{f})$ y $C(\tau)$ son funciones pares, es decir que $E(-f) = E(\tilde{f})$ y $C(-\tau) = C(\tau)$. La varianza de la densidad del espectro $E(f)$ está definida como:

$$E(f) = 2E(\tilde{f}) \quad \text{para } f \geq 0 \quad (2.29)$$

Como $C(\tau)$ contiene todas las covarianzas de la probabilidad conjunta de las funciones de densidad $\underline{\eta}$ y $\underline{\eta}(t + \tau)$ para cualquier t y τ , permite tener una completa descripción del proceso (solo si el proceso es estacionario, Gaussiano y su media es cero)

Por otra parte, considerando que la transformada de Fourier tiene una función invertible, se tiene: $C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(f) \cos(2\pi f\tau) df$, por lo que la varianza de la densidad del espectro tiene la misma información que la función auto-covarianza para describir un proceso gaussiano y estacionario. De esto se sigue que la varianza total del proceso es: $\overline{\eta^2} = C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(f) df = \int_0^{\infty} E(f) df$, la cual indica que el espectro $E(f)$ da la distribución de la varianza total sobre las frecuencias.

Esta definición de la varianza de la densidad del espectro, que se basa en la función auto-covarianza no es muy usada porque requiere de más cálculos computacionales, por ello la ecuación 2.22 es más usada para calcular las amplitudes.

2.12. Interpretación de la varianza de la densidad del espectro

La varianza de la densidad del espectro introducida previamente transforma el espectro de amplitud discreto en una distribución continua de la varianza sobre las frecuencias. Este espectro muestra como Δvar en una banda de frecuencia Δf contribuye a la varianza total

$$\Delta var = \int_{\Delta f} E(f) df \quad (2.30)$$

Se sigue que la varianza total $\overline{\eta^2}$ de la superficie libre es la suma de las varianzas de todas las bandas de frecuencias Δf o para un espectro continuo [Holthuijsen, 2007].

$$Varianza\ total = \overline{\eta^2} = \int_0^{\infty} E(f) df \quad (2.31)$$

Hay que notar que en un continuo de ondas superpuestas la contribución de una sola frecuencia en la varianza total es infinitamente pequeña, porque el ancho de banda del espectro de una sola frecuencia es cero $\Delta \rightarrow 0$ y su contribución es $\Delta var = E(f)\Delta f \rightarrow 0$. Sin embargo, el espectro de una onda armónica es una onda con una sola frecuencia que contiene energía finita. Este espectro entonces consiste en una función delta con esa frecuencia (infinitamente estrecha y alta, con una integral igual a la varianza de la onda armónica).

La varianza de la densidad del espectro $E(f)$ muestra como la varianza de la superficie libre está distribuida sobre todas las frecuencias. Cuando se multiplica al espectro por ρg se obtiene el espectro de la densidad de energía que muestra como la energía de las olas está distribuida a lo largo de las frecuencias.

El aspecto general de las olas puede inferirse en la forma del espectro (figura 2.4), teniendo así tres formas principales:

- Cuando el espectro es estrecho, que corresponde a una onda armónica.
- Si el espectro se degenera en una función delta con una sola frecuencia distribuyéndose, la varianza sobre una frecuencia ligeramente mayor a la banda de frecuencia da una modulación lenta de la onda armónica porque las componentes de la frecuencia involucradas difieren ligeramente entre ellas creando un desfase entre ellos, pero aún así se crea una onda bastante regular.
- Cuando la distribución de la varianza de la onda está sobre una banda de frecuencia más amplia tal que se dan ondas bastantes caóticas (olas irregulares), porque las componentes del registro temporal están en un desfase rápido una con respecto a la otra.

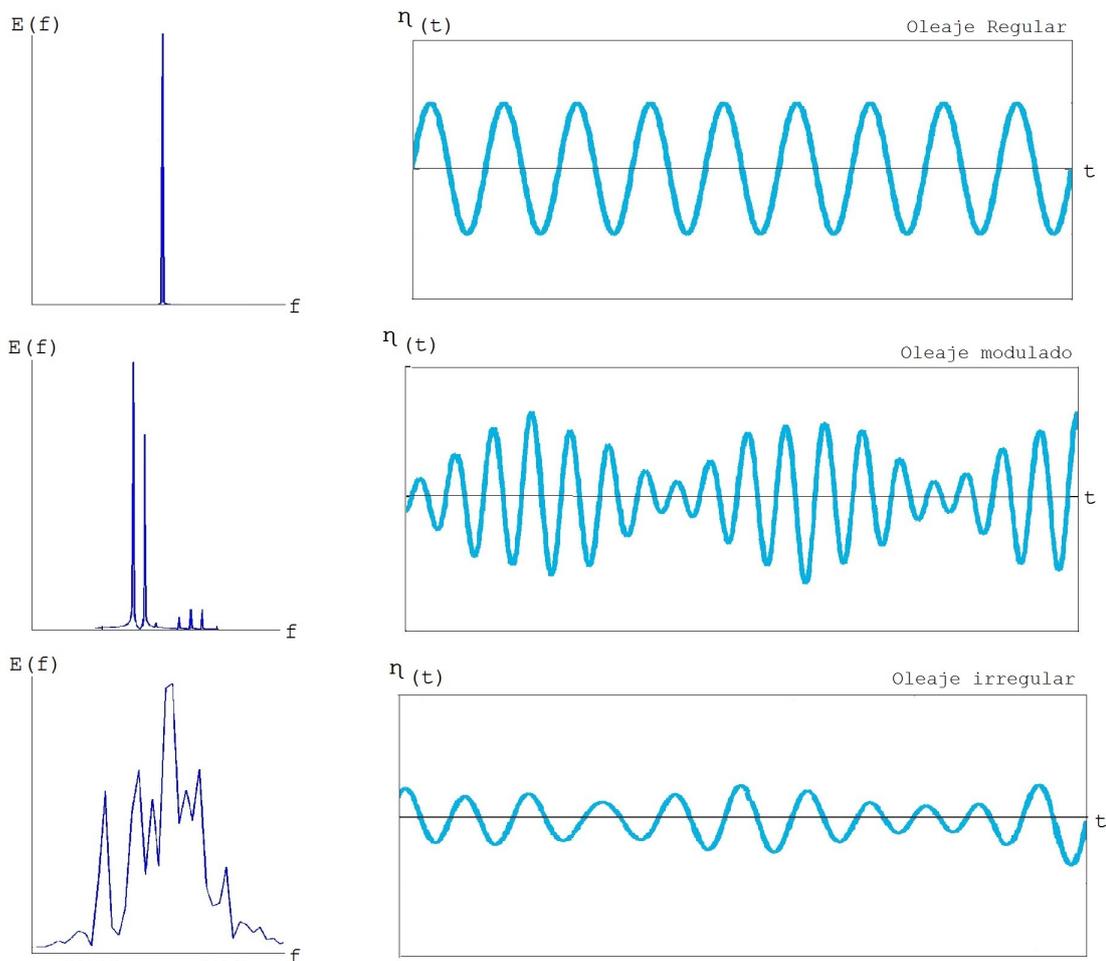


Figura 2.4: Tres diferentes anchos de espectros con sus respectivas señales de oleaje , [Holthuijsen, 2007]:

Capítulo 3

Técnicas de medición del campo de velocidades por imágenes de partículas

3.1. Generalidades

La velocimetría por imágenes de partículas (PIV, por sus siglas en inglés) es una técnica no intrusiva para obtener el campo de velocidades bidimensional de un fluido en movimiento, esta técnica consiste en grabar pares de imágenes (una al tiempo t_0 y la otra al tiempo $t_0 + \Delta t$) de una delgada hoja de luz que ilumina a un fluido que contiene partículas reflectivas y con una fuerza de flotación neutra. Las velocidades (Ecuación 3.1) se derivan del Δt y del desplazamiento más probable del grupo de partículas que viajan en línea recta entre el par de imágenes (figura 3.1); estas velocidades se obtienen de la correlación cruzada entre las llamadas ventanas de interrogación las cuales son subdivisiones de las imágenes originales.

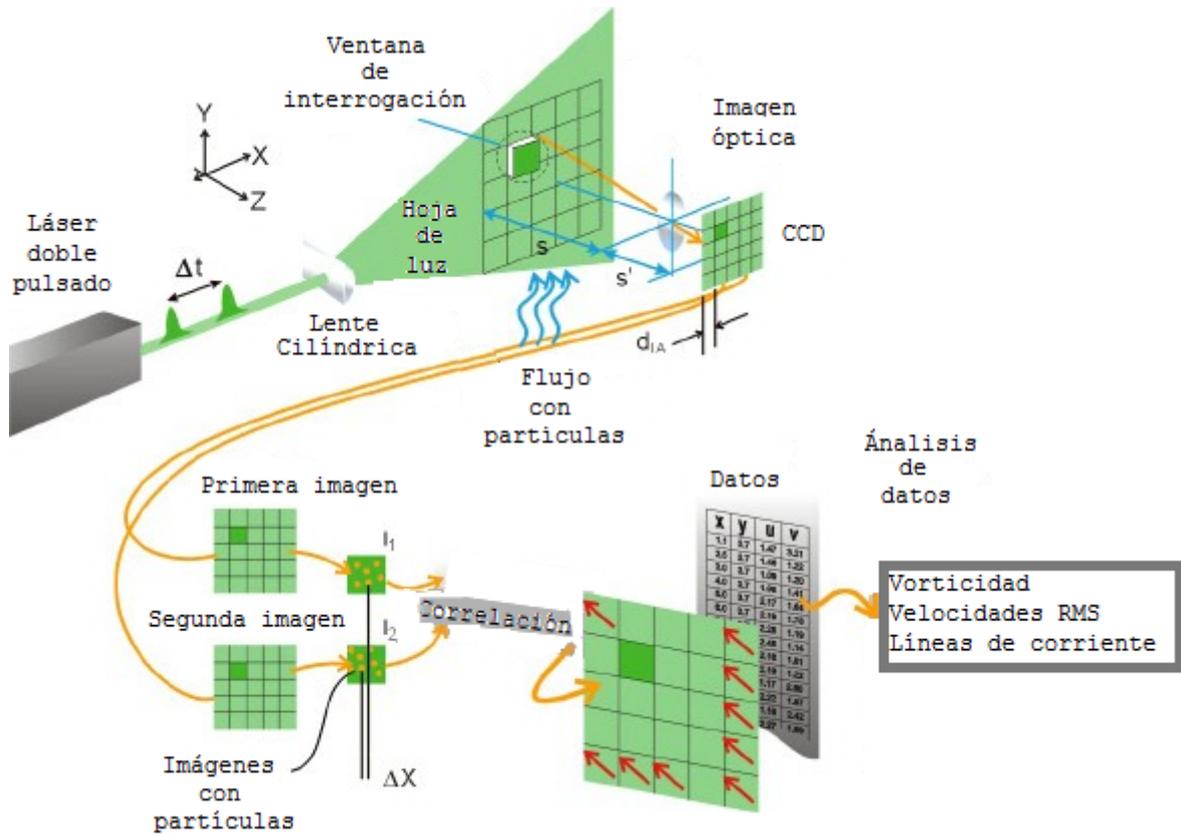


Figura 3.1: Técnica de Velocimetría por imágenes de partículas (PIV), [Dantec Dynamics, 2013]:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.1)$$

Algunas generalidades importantes a considerar de la técnica PIV son:

- El tiempo entre dos pulsos de luz, el de sincronización entre la cámara, el láser y la computadora dependerán de la velocidad media del flujo.
- Una alta resolución en la técnica se obtiene grabando imágenes de partículas con diámetros suficientemente pequeños.
- Una alta resolución espacial es de 3-4 pixeles por diámetro de cada partícula.
- Los parámetros que influyen en la precisión y en la confiabilidad de las mediciones son la densidad de partículas, la calidad de la imagen y el tamaño de la ventana de interrogación. Haciendo grande la ventana de interrogación se puede incrementar el número de partículas usadas en la correlación, sin embargo ventanas de interrogación grandes dan resoluciones espaciales bajas produciendo errores cuando los gradientes de las velocidades son grandes.
- La calidad de las mediciones del fluido están afectadas computacionalmente por el pre-procesamiento, los estimadores del pico del sub-pixel (ajuste estadístico de la función de correlación), procedimientos de validación de vectores, algoritmos de interpolación y métodos de suavizado.
- Como en este trabajo se usaron burbujas, se tiene que estas, a diferencia de otros trazadores que más comúnmente se emplean (partículas de plata) no son trazadores pasivos, por lo que se tiene que sustraer el campo de velocidades de las burbujas ya que estas tienen una fuerza de flotación positiva con respecto al fluido.
- El método más usado para correlacionar dos imágenes es la correlación promedio ya que reduce la influencia del movimiento Browniano, la baja concentración de partículas y la baja calidad de imágenes.
- Las formas para filmar una serie de imágenes se resume en dos tipos: la de sola exposición de múltiples imágenes y la multi-exposición de imágenes individuales, aunque existen otras formas de filmar, como se muestra en la figura 3.2.
- El análisis de autocorrelación es el método más común para la multi-exposición de imágenes, mientras que para una sola exposición de múltiples imágenes es el análisis de correlación cruzada. Este último análisis es más sencillo así como de los más exactos.
- El láser más empleado y el que se usó en este trabajo es el Nd:YAG (Neodimio-granate alumínico de Itrio) porque es capaz de generar pulsos cortos del orden de 10 nanosegundos, una energía de 400mJ/pulso, un tiempo de retraso entre pulsos de 10 nanosegundos a varios segundos y una emisión de la longitud de onda de 532nm.
- La longitud de la ventana de interrogación es de $N = 2^n$, donde n es entero y N se toma como una potencia de dos para simplificar el tiempo de cálculo.
- La definición de la correlación cruzada de dos ventanas de interrogación I, J , es [Sveen and Cowen, 2004]:

$$R(s, t) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} F'_{I,J}(i, j) F''_{I,J}(i + s, j + t) \quad (3.2)$$

Donde R es la función de correlación cruzada, F' pertenece a la primera imagen, F'' la de la segunda imagen, i, j es la posición del pixel en las ventanas I, J y s, t es el intervalo de tiempo de retraso con el que se calcula la correlación cruzada.

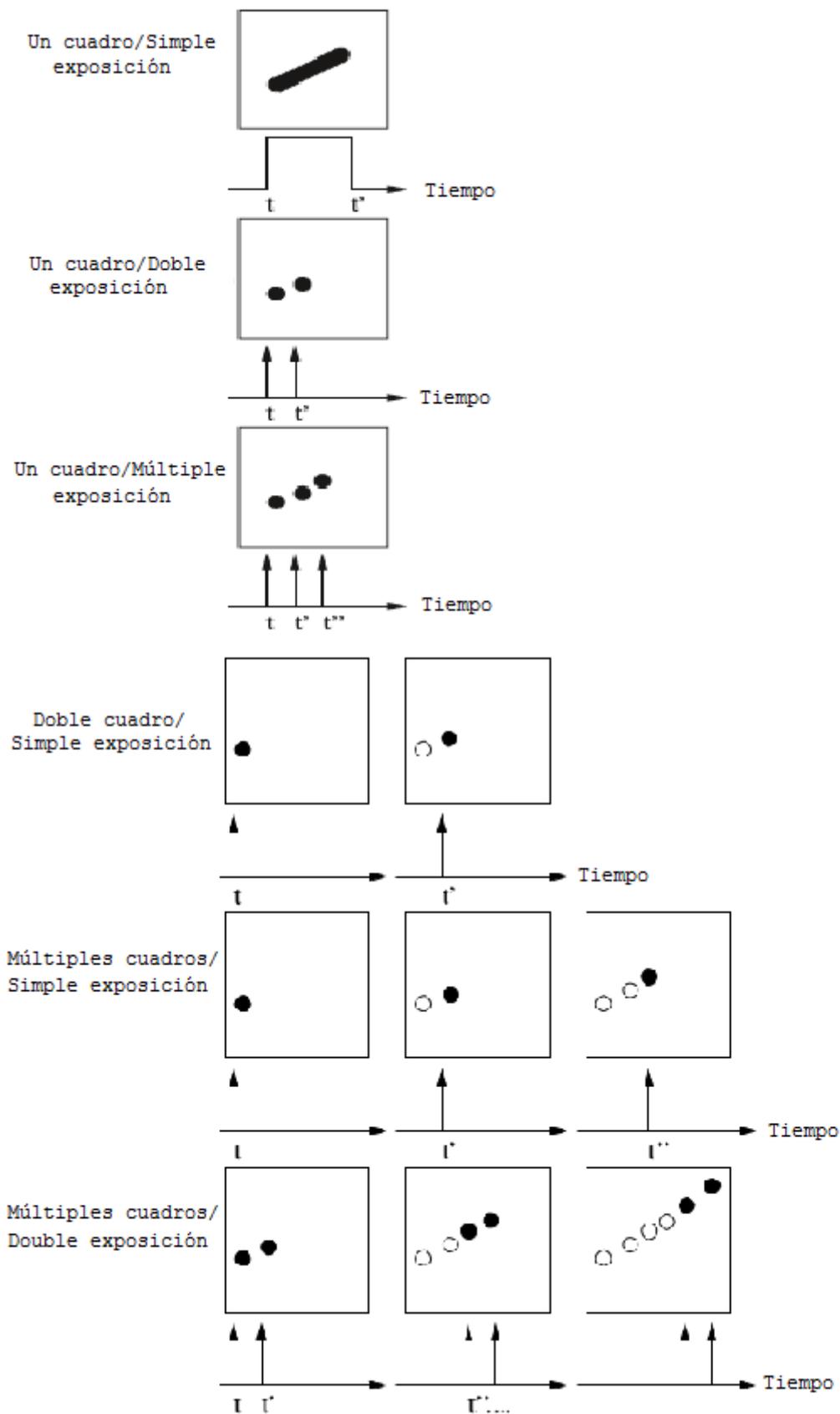


Figura 3.2: Tipos de toma de captura de la cámara de las partículas (círculos abiertos son las posiciones de partículas de una imagen previa) [Raffael et al 1998]

- En el dominio espectral R se puede calcular como [Sveen and Cowen, 2004]:

$$R(s, t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{F}^* \{F'_{I,J}(i, j)\} \mathcal{F} \{F''_{I,J}(i + s, j + t)\} \right] \quad (3.3)$$

Donde \mathcal{F} y \mathcal{F}^{-1} son los operadores de la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier y $*$ denota el complejo conjugado.

- Otras metodologías para estimar el desplazamiento promedio de las partículas contenidas en cada ventana de interrogación es estimar la covarianza cruzada que según Westerweel es: [Sveen and Cowen, 2004]

$$E \{R(s, t)\} = \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \left(1 - \frac{|t|}{N}\right) R(s, t) \quad (3.4)$$

La ventaja de las ecuaciones 3.2 y 3.3 se que considera la tendencia debido al retraso sobre (s, t) o una pérdida del plano entre pares de imágenes, pero su desventaja es que subestima el valor ante la presencia de grandes gradientes de velocidad, es decir que la tendencia crece linealmente con el tamaño de la fase o como Westerweel mostró se obtiene un ruido en R por correlaciones aleatorias y que va como $1/N^2$. Es decir que si no se grabaran todas las partículas en las imágenes a estudiar, el valor de la correlación cruzada aumenta porque la correlación entre las partículas de las ventanas de interrogación disminuye.

- Para remover este ruido se debe de sustraer el promedio del fondo a cada imagen a trabajar, además de escoger el tamaño adecuado de la ventana de interrogación.
- Sin ambigüedad, el PIV puede resolver un máximo desplazamiento de $N/2$ pixeles, si el desplazamiento es mayor a estos $N/2$ pixeles pero menor que N pixeles, tal que al menos cuatro partículas en una ventana de interrogación de 64×64 pixeles de la primera imagen permanezcan en la ventana de interrogación de la segunda imagen se encontrará que el pico de la correlación estará en $-(-N - \xi)$ donde ξ fue el desplazamiento; si este es mayor que N pixeles entonces R representa la correlación cruzada de dos ventanas de interrogación no correlacionadas y el desplazamiento estimado será resultado de un pico similar al pico que genera un ruido blanco.
- Los efectos que se deben evitar para que el pico de la correlación cruzada sea el más preciso es que las partículas deben de trasladarse sin efectos de rotación o deformación y que si la partícula se sale del plano de iluminación se debe corregir la correlación porque habrá una tendencia en ella ya que este plano que está fuera del movimiento de la partícula se correlaciona con la velocidad de la partícula. Además para evitar que la correlación de las partículas sea baja se debe de procurar que las partículas aparezcan en las imágenes a estudiar, como ya se mencionó previamente.
- El máximo valor de la correlación del plano mide el grado de similitud de los patrones entre las ventanas de interrogación y la razón de este valor máximo con el resto del plano de correlación indica el ruido que hay respecto con el valor de similitud, por ello es importante determinar este coeficiente de la correlación total o de la función de covarianza la cual se define como:

$$\hat{R}(s, t) = \frac{1}{N^2} \frac{\sum_i \sum_j [F'(i, j) - \bar{F}'] [F''(i + s, j + t) - \bar{F}'']}{\sum_i \sum_j \left([F'(i, j) - \bar{F}']^2 [F''(i + s, j + t) - \bar{F}'']^2 \right)^{1/2}} \quad (3.5)$$

Donde $\bar{F}' = \text{promedio}(F'(i, j))$ y $\bar{F}'' = \text{promedio}(F''(i + s, j + t))$, el numerador se calcula usando la transformada de Fourier y el denominador se puede calcular usando la desviación estándar $std(F') = [\sum (F' - \bar{F}')^2 / (N - 1)]^{1/2}$ tal que $N^2 std(F'(i, j)) \cdot std(F''(i, j))$ siempre y cuando el patrón esta uniformemente distribuido, lo que significa que la desviación estándar no cambia si se varía s y t durante el cálculo de \hat{R} , si la distribución del patrón es no uniforme se reduce la precisión de los cálculos.

- Para minimizar la tendencia, primero se debe de asegurar que la mayoría de las partículas de la ventana de interrogación de la primera imagen se encuentran en la ventana de la segunda imagen, con ello se procede a aplicar el método de ventanas de interrogación dinámicas o adaptación de tamaños de las ventanas.

El procedimiento del primer método consiste en que la ventana de interrogación de la primera imagen se fije en el espacio para que la ventana de la segunda imagen se desplace dinámicamente ciertos pasos enteros de manera iterativa para obtener un óptimo promedio del desplazamiento de las partículas con un segundo orden en precisión. Cowen y Monismith [Cowen and Monismith, 1997] comentan que si a la tercera iteración el método no converge al pixel cero, el análisis de las ventanas de interrogación es malo y se debe de descartar ese par de ventanas. Además Wereley y Meinhart sugieren que ambas ventanas deben ser dinámicas para evitar la necesidad de interpolar vectores de velocidad lo que garantiza un verdadero segundo orden en la precisión espacial del campo de velocidades.

En el segundo método el objetivo es expandir el área de la segunda ventana para garantizar que todas las partículas contenidas en la ventana de la primera imagen permanezcan en los límites de la ventana de la segunda imagen, para que la razón del ruido de la señal de la imagen disminuya a causa de una pérdida de información de la señal.

Lo ideal es combinar estos dos métodos.

3.2. Tamaños de las ventanas de interrogación

La consideración más importante para el tamaño de las ventanas es la resolución. Se investigaron varios rangos de tamaños de ventana desde $N = 32$ hasta $N = 256$, encontrándose que una reducción del tamaño de la ventana tradicional de $N = 256$ a $N = 128$ no permite apreciar una disminución en la precisión [Prasad et al., 1992]. Sin embargo, encontrar el tamaño de la ventana de interrogación necesario para adquirir la información deseada (la posición del pico de la correlación de la precisión del sub-pixel [Westerweel, 1993]) era el siguiente paso a estudiar; por ello se estudió que la señal se puede construir de señales cuyas componentes frecuenciales sean menores a algún máximo, es decir, su transformada de Fourier es diferente de cero sobre una porción finita del dominio de las frecuencias. Esto matemáticamente es:

$$\mathcal{F}(F)(s, t) = 0, \quad \text{para } |s| > S, \quad |t| > T \quad (3.6)$$

Donde el ancho de banda se define como el máximo de S y T , esta banda se puede reconstruir pidiendo que la tasa de muestreo sea al menos dos veces que el ancho de banda (Esto se conoce como la frecuencia de Nyquist y es el $\max(2S, 2T)$, ver capítulo dos). Además de las frecuencias de la señal se necesita considerar la parte óptica de los dispositivos y la parte del ancho de banda de la función de densidad espectral de la covarianza; del primer punto se tiene que el ancho de banda de la intensidad de la imagen capturada por un lente esférico (apertura D , distancia focal f , luz coherente con una longitud de onda λ) [Goodman, 1984]

$$W = \frac{D}{\lambda z_0} = \frac{D}{\lambda f(M + 1)} \quad (3.7)$$

Donde $z_0 = f(M + 1)$ es la distancia de la imagen y $M = z_0/Z_0$ es el aumento (Z_0 es la distancia objeto) tal que considerando $\lambda = 0.5\mu m$, $f/D = 8$, $M = 1$, $W = 125mm^{-1}$ y una frecuencia de muestreo de $2W = 250mm^{-1}$ se obtiene un tamaño de ventana de 256 pixeles con una área de $1mm^2$, pero este tamaño de ventana no se usa por las limitaciones del CCD ya que este a lo más tiene $10\mu m \times 10\mu m$ y $2W = 100mm^{-1}$. Del segundo punto se tiene que el ancho de banda de la señal W_p

con una simetría circular de la función de densidad espectral es:

$$W_p = (\pi s(0, 0))^{-1/2} \quad (3.8)$$

tal que si se considera una región cuadrada en vez de circular, la covarianza de las imágenes de las partículas con diámetro d , el ancho de la covarianza como $\sigma_h = d\sqrt{2}/(2.44\pi)$, $W = 1/(2\pi\sigma_h)$, usando los mismos parámetros ópticos y $d = 20\mu m$ resulta que: ($\sigma_h = 3.7\mu m$), $2W_p = 86m^{-1}$ y el tamaño de la ventana es de 64x64 pixeles que es un poco menos que $1mm^2$ lo cual es suficiente para el CCD.

También se suele emplear un tamaño de ventana con $N=32$ o menor, esto depende del tamaño del diámetro de la partícula.

3.3. Estimación del desplazamiento de los sub-pixeles.

Se puede mostrar que para cualquier partícula con un diámetro distinto de cero el ancho del pico de la correlación será más grande que un pixel tal que incluyendo valores adyacentes al máximo de R se encuentra el centro del pico para estimar la precisión del sub-pixel.

Descomponiendo el desplazamiento (s,t) como:

$$s = s_0 + \epsilon_s, \quad t = t_0 + \epsilon_t \quad (3.9)$$

Donde s_0, t_0 son los desplazamientos completos y ϵ_s, ϵ_t son una parte fraccionaria de ellos, se obtiene:

$$-0.5 < \epsilon_s < 0.5 \quad y \quad -0.5 < \epsilon_t < 0.5 \quad (3.10)$$

En la ausencia de una estimación para ϵ_s y ϵ_t el error es de $\pm\Delta/2$ donde Δ es un pixel, para $N = 32$ el desplazamiento de 8 pixeles tiene una incertidumbre de $\pm 0.5/8 \sim 6\%$ y para un $N=256$ la incertidumbre es de $\pm 0.5/64 \sim 1\%$. Entonces si se trabaja con una N pequeña se necesita estimar el centro del pico de la covarianza del sub-pixel, esto se hace con: $cov\epsilon_s, \epsilon_t = 0$, o si el pico de la covarianza es estrecho (lo que significa que solo el pixel más cercano del pico contiene información significativa) sólo se toman tres puntos para estimar el sub-pixel.

Los estimadores de sub-pixeles más comunes son el Centro de Masa, Parabólico y el Gaussiano.

3.3.1. Centro de Masa (COM: Center-of-Mass)

La estimación del sub-pixel del centro de masa se calcula con:

$$\epsilon_C = \frac{R_{+1} - R_{-1}}{R_{-1} + R_0 + R_{+1}} \quad (3.11)$$

Donde R_{-1} y R_{+1} son las correlaciones de los pixeles más cercanos en dirección vertical del pixel donde se encontró el pico más alto de la correlación.

3.3.2. Parabólico

$$\epsilon_P = \frac{R_{-1} - R_{+1}}{2(R_{-1} - 2R_0 + R_{+1})} \quad (3.12)$$

Esta fórmula requiere que el pico $|R_0|$ debe ser más grande $|R_{-1}|$ y $|R_{+1}|$

3.3.3. Gaussiano

Este estimador es el más común de los códigos de PIV debido a que las partículas son esféricas y a que el centro de la función de Airy se aproxima con una curva gaussiana.

$$\epsilon_G = \frac{\ln R_{-1} - \ln R_{+1}}{2(\ln R_{-1} - 2\ln R_0 + \ln R_{+1})} \quad (3.13)$$

Se debe notar que R_0 debe de ser un pico si $R_i > 0$ para $i = -1, 0, 1$ y que mientras que ϵ_C siempre da un valor ϵ_G tiene más restricciones, lo que indica que ϵ_C es más robusto que ϵ_G , pero por otra parte ϵ_C no puede reconocer cuando hay un pico en tanto que ϵ_G si lo identifica y además usa la información de los bordes; por lo que se espera que ϵ_G sea mejor que ϵ_C .

Westerweel [Westerweel, 1993] calcula el error cuadrático medio de los tres estimadores y encuentra que el mejor estimador es el Gaussiano, el cual sirve para cualquier diámetro de las partículas. Aunque este estimador se debe de corregir con:

$$R^*(s, t) = \frac{R(s, t)}{F_I(s, t)} \quad (3.14)$$

Donde: $F_I = \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) \left(1 - \frac{|t|}{N}\right)$, ya que presenta un sesgo ya sea positivo o negativo.

3.4. Bloqueo de pico

El problema del estimador de sub-píxeles es que produce un sesgo (bias) para las posiciones de sub-píxeles con pasos enteros, algunos positivos con $-0.5 < \epsilon < 0$ o negativos $0 < \epsilon < 0.5$, pero en ambos casos el desplazamiento está sesgado hacia el subpixel cero, este efecto se le conoce como bloqueo de pico (peak-locking) porque los picos de la correlación tienen una tendencia a “bloquearse” en los desplazamientos de números enteros de píxeles. La manera fácil para identificar la presencia de este fenómeno es representar gráficamente un histograma de los desplazamientos no calibrados (es decir, desplazamientos en píxeles) tal que dependiendo de la cantidad de interés de los desplazamientos, el bloqueo de pico puede o no ser un problema significativo. Si solo se quiere obtener la velocidad media o la varianza el bloque de pico no contribuye un error siempre y cuando el histograma se extienda por al menos dos píxeles enteros de su desplazamiento, pero cuando los desplazamientos son en menos de dos píxeles enteros la posibilidad de un alto sesgo (y por consiguiente de un bloqueo de pico considerable) está presente en las estadísticas calculadas como en la vorticidad o la aceleración ya que se calculan a partir de dos desplazamientos

3.5. Detección de vectores no válidos

Hay tres aspectos para validar un vector: calidad de la señal, consistencia espacial (suavidad en el espacio) y consistencia temporal (suavidad en la serie de tiempo), la primera se basa en propiedades específicas de las imágenes como en la magnitud del pico de la correlación relativa a la magnitud del ruido de fondo para validar el vector; la segunda compara cada vector con ciertas propiedades calculadas a partir de sus vecinos y la tercera es similar a la consistencia espacial excepto que el vector que se esta verificando también se compara con una estadística local en el tiempo (por ejemplo la aceleración) o una global en el tiempo (por ejemplo, la distancia promedio relativo a su desviación estándar).

Keane y Adrian [Keane y Adrian, 1990] propusieron una medida para detectar cuando el pico de la correlación es válida la cual la definieron como D_0 y es la razón del valor del primer pico de la correlación y el segundo; cuando el valor de D_0 es más grande que 1.2 y .5 se tiene que el vector se considera válido.

Capítulo 4

Metodología

4.1. Generalidades

Como ya se mencionó, la técnica del trabajo es no intrusiva y sirve para reconstruir la superficie libre en un punto fijo midiendo las velocidades de las burbujas; al ser estas mediciones el eje primordial del trabajo se llevaron a cabo 320 pruebas para medir estas velocidades, y garantizar su adecuada estimación en el canal de oleaje del Laboratorio de Costas y Puertos del Instituto de Ingeniería de la UNAM. En las siguientes líneas se describirá las condiciones iniciales de período de ola, altura de ola, profundidad de la columna de agua, tipo de iluminación, materiales y sensores con las que se realizaron los experimentos.

4.2. Generador de burbujas

El dispositivo que se utilizó para generar las burbujas fue un tubo de acrílico de 0.80m de largo, 0.0254m diámetro y grosor de 0.006m, al cual se le hicieron agujeros de diámetro del orden de $10^{-4}m$ y espaciados cada medio centímetro a lo largo del tubo. Los extremos del tubo fueron sellados herméticamente y en la parte central de él se puso un conector para suministrar aire al dispositivo mediante un compresor. Dado que el tamaño y la cantidad de las burbujas está en función de la presión del aire antes de iniciar las pruebas con el oleaje se caracterizó el dispositivo para saber el rango de operación de las presiones a utilizar en este trabajo.

4.3. Canal de oleaje

El canal de oleaje (figura 4.1) empleado es del tipo de generadores de oleaje bidimensional con una pala de acero inoxidable tipo pistón de la marca HR Wallingford, con paredes de vidrio templado de 0.02m de grosor y paredes de acero inoxidable, sus dimensiones son de 37m de longitud, 0.79m de ancho y 1.2m de altura. Para llenar el canal a 0.7m de alto se necesitan 20,000 litros de agua, la cual al ser almacenada en una cisterna (capacidad: $48m^3$) se tiene que bombear hacia él mediante el uso de dos bombas de potencia de 10 caballos de fuerza. Cabe mencionar que al final del canal se tiene una rampa de rocas que actúa como una playa disipadora y minimiza las olas reflejadas.



Figura 4.1: Canal de oleaje del Laboratorio de Costas y Puertos, UNAM.

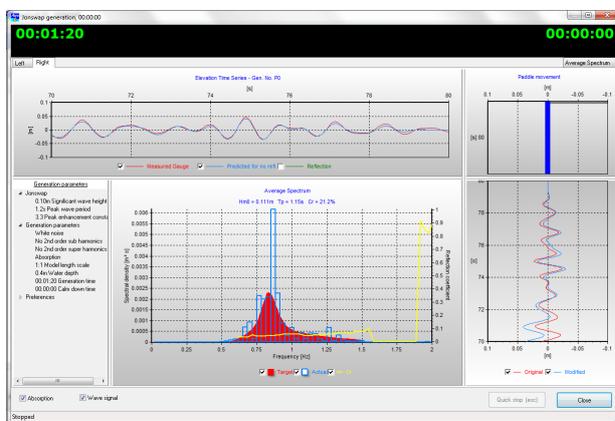
4.4. Software empleado para la generación del oleaje

A lo largo de la tesis se usaron dos tipos de software para la generación de los estados de mar. El primero fue el HR Wavemaker y el segundo fue el AwaSys6 (véase figura 4.2), ambos tienen predefinidas las funciones de densidad de probabilidad para la generación del oleaje y cuentan con un sistema de absorción de las ondas reflejadas que se forman en la parte posterior de la pala, el cual ajusta la frecuencia, potencia y posición de la pala de acuerdo con los valores que arroja la onda reflejada con respecto a los valores de la condición inicial a generar. Esto se logra porque la pala tiene dos sensores de nivel y de presión que ayudan a controlar el sistema de absorción y la calibración de la pala (cuya velocidad máxima es de 0.81m/s y desplazamiento máximo de 0.8m).

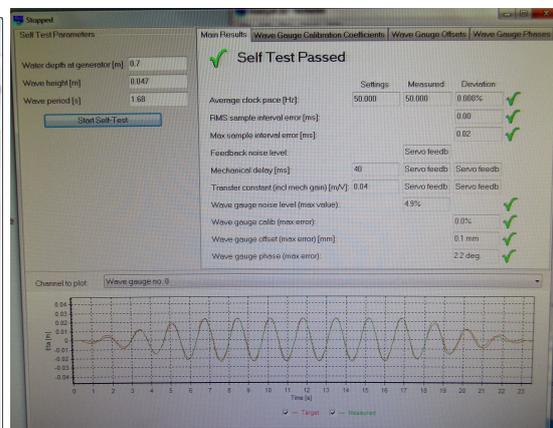
En el primer software, se introdujeron como parámetros iniciales la altura de ola $H[m]$, la frecuencia $f[Hz]$ y la profundidad de la columna de agua $h[m]$, cuando se trata de oleaje irregular adicionalmente se requirió el tipo de espectro a usar (JONSWAP o Pierson-Moskowitz), la frecuencia pico $f_p[Hz]$ y la altura de ola significativa $H_s[m]$ y los coeficientes correspondientes a cada espectro. En el segundo software, se usaron los mismos parámetros iniciales que el primer software. El AwaSys6 a diferencia del HR Wavemaker, tiene predeterminados los siguientes espectros:

- Oleaje Regular (lineal, 2do orden, aproximación a la teoría de corrientes)
- Ondas solitarias
- Bretschneider-Mitsuyasi
- Bretschneider-Mitsuyasi-Modificado
- Pierson-Moskowitz
- Jonswap
- Texel Marsen Arsløe
- TMA shallow water spectrum
- Espectros personalizados
- Series de la elevación de la superficie libre

Además su opción de sincronización automática permite programar una serie de experimentos con tiempos específicos de inicio y fin, lo cual facilita su uso al usuario. Para calibrar este sistema se requiere indicarle al programa el cero, que corresponde al nivel medio del agua a utilizar en el experimento, y otro punto que es arbitrario, el cual puede estar por debajo o por arriba del nivel medio del agua. Posteriormente se realiza un Self-Test (Captura de pantalla 4.2), el cual revisa que la configuración del software y que la calibración de la pala estén bien.



(a) Software AwaSys6



(b) Calibración del software AwaSys6

Figura 4.2: Captura de pantalla del Software AwaSys6

4.5. Sensores

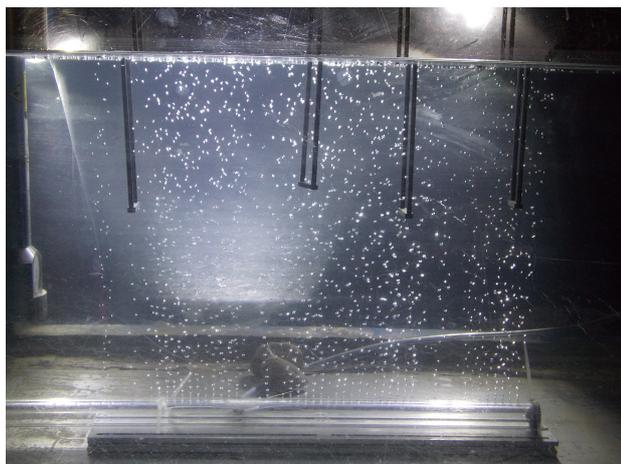


Figura 4.3: Sensores de nivel y generador de burbujas

Para registrar la serie de tiempo de la superficie del libre del agua se hace uso de sensores de nivel que miden la variación del nivel del agua. Estos consisten en dos placas paralelas de acero inoxidable (electrodos) las cuales están eléctricamente aisladas una de la otra. Su funcionamiento consiste en generar un campo eléctrico entre las placas al suministrarles un voltaje y una corriente mínima. Cuando se introduce un material dieléctrico como el agua, la capacitancia y el voltaje entre las placas va cambiando, de tal forma que el voltaje registrado es proporcional a la profundidad de la columna de agua, la precisión de los sensores es de 0.1mm.

Para calibrar los sensores se emplea el software imc STUDIO en el cual se le indica la profundidad de la columna de agua, los rangos del voltaje a utilizar, el tiempo de muestreo y el tiempo total a registrar. En este software debe de tomar lectura del voltaje que dan los sensores al ser posicionados cuando el nivel medio del agua está en $z = 0$, a $z = -x$ y a $z = x$, donde x es una distancia arbitraria en cm (por ejemplo 2cm), con esto el programa establece la relación que hay entre el voltaje proporcionado por los sensores y la posición de la superficie libre. En la (figura 4.3) se muestran los sensores de nivel empleados en este trabajo.

El software para la adquisición de los datos usando el software HR Wavemaker fue el Wave Data Collector (WDC), al cual se le indicó el número y tipo de sensores a ocupar (presión, velocidad o de nivel), la frecuencia de muestreo $f[Hz]$ y el número de datos a ser adquiridos (múltiplos de 512). Una vez ingresados estos parámetros se procede a la calibración de los sensores de nivel. El procedimiento para la calibración de los sensores consistió en establecer el cero del sensor (nivel de la profundidad a trabajar) con el voltaje cero registrado en el datalogger, después se desplazaron todos los sensores 0.04m arriba de la posición inicial y el programa registra un valor de voltaje positivo. Se realizó lo mismo para un desplazamiento negativo, es decir que se mueven los sensores a 0.04m por debajo de la posición inicial, registrándose un voltaje negativo. Para verificar que la calibración se ha realizado de manera correcta, se revisaba que en el archivo de calibración la tercera columna tuviera un valor 1.0 o de 0.999, lo que indicaba que la medición podría o no tener un error en la tercera cifra significativa. Al final el programa arrojaba un archivo de voltajes de los sensores y usando el programa LEEWDC se convirtieron esos voltajes en alturas de ola.

Cuando se usó el software AwaSys6 se empleó el software SPARTAN que capturó las señales análogicas para convertirlas en señales digitales y el software imc FAMOS (Fast Analysis and Monitoring of Signals) que transformó los datos del formato .imc a .txt.

4.6. PIV

Se utilizó un PIV de la marca Dantec Dynamics [Dantec Dynamics, 2013] para obtener el campo de velocidades de las burbujas, el cual compone de dos láseres pulsados de Nd:YAG de longitud de onda de 532 nm, el cual puede dar un pulso de energía hasta 30 mJ y de frecuencia de 15 Hz, un lente Nikon de 50mm f/2.8D AF Micro-Nikkor, una cámara Phantom SpeedSense 9040 (1632 x 1200 pixeles,

tiempo entre cuadros de 1500 ns, EPS:1016/508, tamaño de pixel en micras: 11.5) la cual es capaz de obtener fotos con intervalos de micro segundos. El láser y la cámara están conectadas a una tarjeta PCI-6601 (TimerBox), la cual sincroniza los tiempos de disparo del láser y el tiempo de obturación de la cámara. El TimerBox a su vez está conectado con un cable ethernet a la computadora. Cuando no hay una sincronización entre la cámara y el láser las fotografías obtenidas suelen tener fondos negros, o una cantidad insuficiente de partículas, lo que ocasiona que el cálculo del PIV no pueda ocurrir o sean mediciones erróneas para medir la velocidad del flujo.

4.7. Sensores UVP

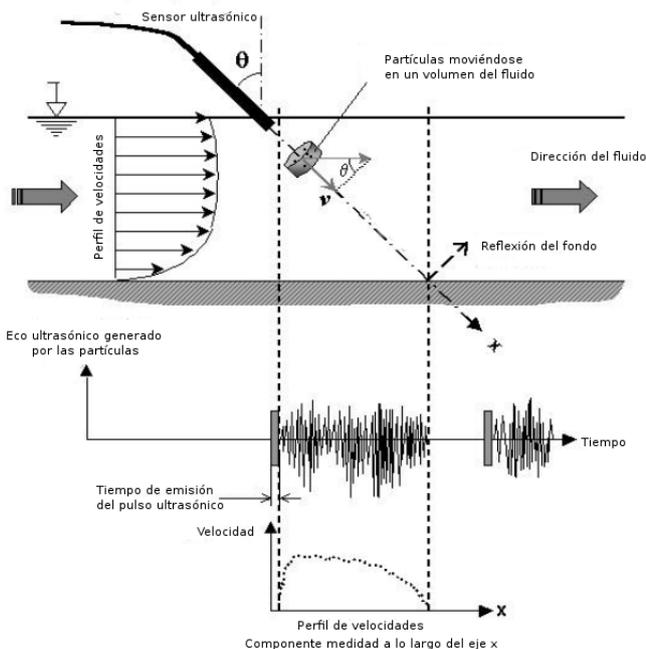


Figura 4.4: Esquema del perfil de velocidades usando el sensor UVP. [Met Flow, 2011]

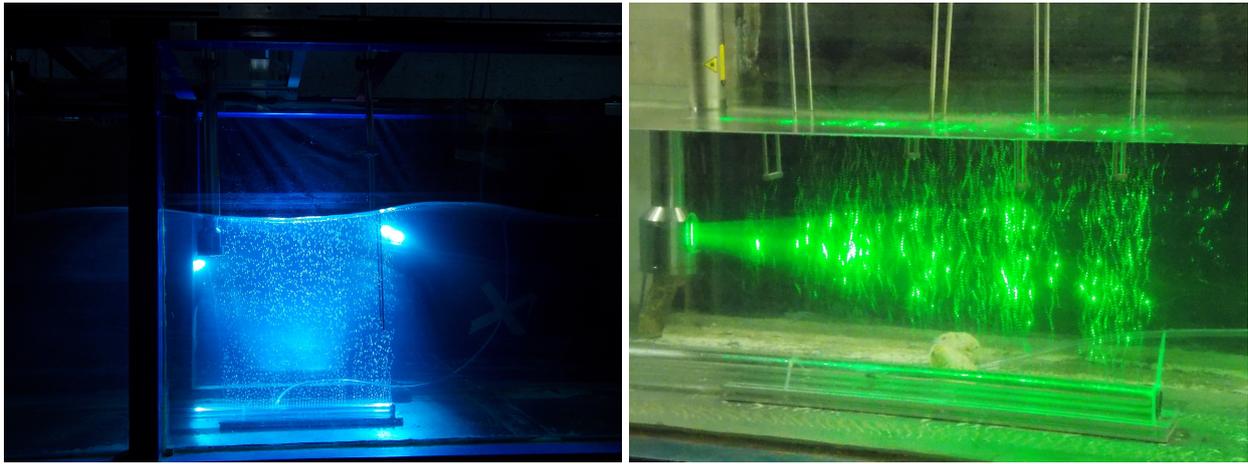
El funcionamiento del sensor consiste en enviar una onda ultrasónica tal que usando el retraso en la frecuencia de la onda reflejada mediante el efecto Doppler (figura 4.4), se detecta la dirección del flujo en cada posición para así determinar un vector velocidad. La ecuación que mejor representa este fenómeno es:

$$\frac{v}{c} = \frac{f_d}{2f_0} \quad (4.1)$$

Donde v es la velocidad del flujo a determinar, c es la velocidad del sonido en el medio inmerso, f_d es la frecuencia retardada de la onda reflejada y f_0 es la frecuencia de la onda emitida. Como la frecuencia del efecto Doppler está directamente relacionada con el valor de la velocidad, el sensor no requiere de un procedimiento de calibración, solamente que el flujo a estudiar contenga una cantidad suficiente de partículas suspendidas para poder originar el eco ultrasónico. Es recomendable que las partículas tengan un tamaño mayor a $\lambda/4$, las partículas deben tener una densidad específica similar entre ellas pero de impedancia acústicas distintas. Los sensores usados fueron de la marca MET-FLOW de 0.5MHz de frecuencia, con un diámetro activo de 19mm, un diámetro externo de 23mm y con una longitud de 40mm de acero inoxidable.

4.8. Diseño experimental

EL montaje experimental consistió en colocar el generador de burbujas en el fondo del canal, centrado a lo ancho del canal, paralelo a la dirección de propagación del oleaje y se posicionó a una distancia de 8.9m respecto a la playa disipativa (figura 4.5). Para filmar el movimiento de las burbujas se utilizó una cámara Fastec Hi Speed (con un alcance de 12,000 imágenes por segundo) que se puso a 3.7 m paralelo a la cortina de burbujas. Se usaron cuatro leds para la iluminación de la cortina de burbujas y un fondo negro para maximizar el contraste entre las burbujas y el entorno. Se llevaron a cabo experimentos con las mismas condiciones de período y de altura de ola, pero bajo diferentes sistemas de generación de oleaje, iluminación, colocación y tipos de sensores, pero en general los pasos para realizar un experimento fueron:



(a) Iluminación: leds.

(b) Iluminación: láser

Figura 4.5: Montaje experimental

1. Fijar un tirante de agua del canal, una altura y periodo para oleaje regular y oleaje irregular.
2. Activación de los 5 sensores de nivel (previamente calibrados y con una cierta frecuencia de muestreo), tal que el primero actúa como sensor testigo (es decir, que verifica que la pala genere la altura de ola y períodos indicados) y los otros cuatro están distribuidos a lo largo del generador de burbujas.
3. Enfocar la cámara en el plano de las burbujas, filmar el fondo negro con y sin burbujas, y filmar una escala métrica en el plano de las burbujas para tener el parámetro de conversión de píxeles a metros.
4. Filmar la cortina de burbujas entre 500 Hz y 250 Hz cuadros por segundo con su movimiento intrínseco, con oleaje regular y con oleaje irregular.
5. Activar los leds para la iluminación o cuando se usa el PIV activar el disparo del láser (figura 4.5).

Es importante dejar entre cada experimento un intervalo de reposo para que el canal no tenga ondas largas que actúen como condiciones iniciales para el siguiente experimento.

4.9. Experimentos

Los parámetros que se necesitan establecer para realizar un experimento son el período $T[s]$, la altura de ola $H[m]$ y la profundidad del tirante de agua $h[m]$, tal que estos se usaron tanto para oleaje regular e irregular y para el sistema de iluminación con los leds y el láser del PIV. Se realizaron dos veces los ensayos, para averiguar que tan reproducible fue cada experimento y obtener una mejor precisión (mediante promedios) de las velocidades de las burbujas.

Los parámetros que se escogieron para los experimentos están enlistados en las tablas A.1, A.2, A.3 y 4.4, además de tres parámetros adimensionales que permiten clasificar el régimen en que se encuentran las olas (Apéndice E).

T[s]	H[m]	h[m]	L[m]	$U = \frac{HL^2}{h^3}$	$\frac{H}{gT^2}$	$\frac{h}{gT^2}$
0.2	0.05	0.7	0.0625	0.00056	0.1274	1.7839
0.2	0.1	0.7	0.0625	0.0011	0.2548	1.7839
0.8	0.01	0.7	0.9989	0.0291	0.0016	0.1115
0.8	0.03	0.7	0.9989	0.0873	0.0048	0.1115
0.8	0.05	0.7	0.9989	0.1455	0.0080	0.1115
0.8	0.1	0.7	0.9989	0.2909	0.0159	0.1115
1.2	0.01	0.7	2.1714	0.1375	7E-04	0.0496
1.2	0.03	0.7	2.1714	0.4124	0.0021	0.0496
1.2	0.05	0.7	2.1714	0.6873	0.0035	0.0496
1.2	0.1	0.7	2.1714	1.3746	0.0071	0.0496

Tabla 4.1: Alturas de ola y períodos usados con un tirante de agua de 0.7m.

T[s]	H[m]	h[m]	L[m]	$U = \frac{HL^2}{h^3}$	$\frac{H}{gT^2}$	$\frac{h}{gT^2}$
0.2	0.05	0.5	0.0625	0.0016	0.1274	1.2742
0.2	0.1	0.5	0.0625	0.0031	0.2548	1.2742
0.8	0.01	0.5	0.9956	0.0793	0.0016	0.0796
0.8	0.03	0.5	0.9956	0.2379	0.0048	0.0796
0.8	0.05	0.5	0.9956	0.3965	0.0080	0.0796
0.8	0.1	0.5	0.9956	0.7930	0.0159	0.0796
1.2	0.01	0.5	2.0483	0.3357	0.0007	0.0354
1.2	0.03	0.5	2.0483	1.0070	0.0021	0.0354
1.2	0.05	0.5	2.0483	1.6783	0.0035	0.0354
1.2	0.1	0.5	2.0483	3.3565	0.0071	0.0354

Tabla 4.3: Alturas de ola y períodos usados con un tirante de agua de 0.5m.

T[s]	H[m]	h[m]	L[m]	$U = \frac{HL^2}{h^3}$	$\frac{H}{gT^2}$	$\frac{h}{gT^2}$
0.2	0.05	0.6	0.062	9.02E-04	0.1274	1.5291
0.2	0.1	0.6	0.062	0.0018	0.2548	1.5291
0.8	0.01	0.6	0.9982	0.0461	0.0016	0.0956
0.8	0.03	0.6	0.9982	0.1384	0.0048	0.0956
0.8	0.05	0.6	0.9982	0.2306	0.0080	0.0956
0.8	0.1	0.6	0.9982	0.4613	0.0159	0.0956
1.2	0.01	0.6	2.1229	0.2086	0.0007	0.0425
1.2	0.03	0.6	2.1229	0.6259	0.0021	0.0425
1.2	0.05	0.6	2.1229	1.0432	0.0035	0.0425
1.2	0.1	0.6	2.1229	2.0865	0.0071	0.0425

Tabla 4.2: Alturas de ola y períodos usados con un tirante de agua de 0.6m.

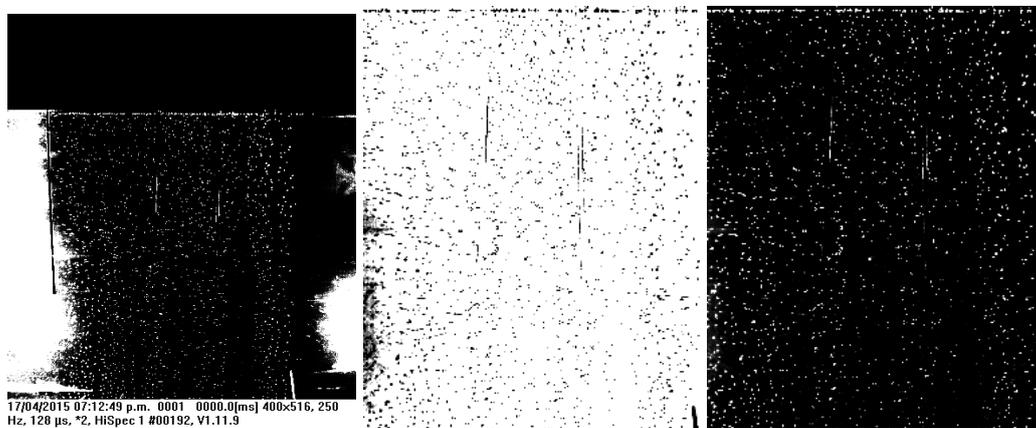
T[s]	H[m]	h[m]	L[m]	$U = \frac{HL^2}{h^3}$	$\frac{H}{gT^2}$	$\frac{h}{gT^2}$
0.2	0.05	0.4	0.0625	0.0030	0.1274	1.0194
0.2	0.1	0.4	0.0625	0.0061	0.2548	1.0194
0.8	0.01	0.4	0.9870	0.1522	0.0016	0.0637
0.8	0.03	0.4	0.9870	0.4567	0.0048	0.0637
0.8	0.05	0.4	0.9870	0.7611	0.0080	0.0637
0.8	0.1	0.4	0.9870	1.5223	0.0159	0.0637
1.2	0.01	0.4	1.9362	0.5858	0.0007	0.0283
1.2	0.03	0.4	1.9362	1.7574	0.0021	0.0283
1.2	0.05	0.4	1.9362	2.9290	0.0035	0.0283
1.2	0.1	0.4	1.9362	5.8579	0.0071	0.0283

Tabla 4.4: Alturas de ola y períodos usados con un tirante de agua de 0.4m.

4.10. Imágenes y su procesamiento

Para reducir la cantidad de vectores velocidad erróneos de las fotografías es recomendable asegurar que las imágenes sean nítidas, en caso de que no lo sean se deben de mejorar antes de que la correlación del PIV tenga lugar, para ello se lleva el pre-procesamiento de las imágenes, a las cuales se les hicieron dos tipos de contrastes, una en donde las burbujas se representaban en negro (figura 4.6) y el fondo blanco; para el otro caso se hizo lo contrario, las burbujas son blancas en un fondo negro (figura 4.6). Esto se hizo para saber si se modifican los resultados del PIV cuando se usa un cierto contraste.

Debido a alguna limitante de la iluminación, en algunas partes de la imagen las burbujas suelen perder brillo, luego el incremento del contraste de la imagen ayuda a mejorar la visibilidad de las burbujas e implementa el desempeño del algoritmo de PIV cuando se realiza la correlación. Durante el ajuste del



(a) Imagen original (b) Imagen con fondo blanco (c) Imagen con fondo negro

Figura 4.6: Imágenes de las cortinas.

contraste de la imagen, la intensidad de cada pixel en la imagen original se transforma a otro valor con una función de transferencia. La función de transferencia más común es la mostrada en la figura 4.7, donde low_in y low_high da el valor bajo y el valor alto de intensidad de la escala de grises que tiene la imagen.

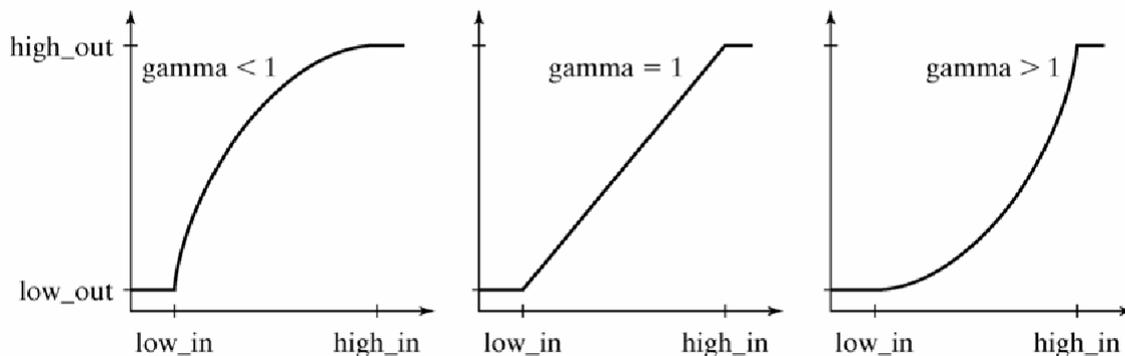


Figura 4.7: Función de transferencia para el realce de contraste de la imagen.

Los productos de los experimentos se muestran en la (figura 4.8).

El procedimiento que se lleva a cabo para el análisis de las imágenes consiste en las siguientes tres etapas:

- Primera etapa: La imagen original (matriz: 644x400px) se recortó (matriz: 397x222px) para estudiar sólo el área de interés, se incrementó su contraste y se sustrajo el fondo, en donde este fondo es el promedio de todas las imágenes. También se puede considerar la media de los valores de las imágenes. Esto se realizó para una serie entre 1020 a 10,000 imágenes.
- Segunda etapa: Se utilizó el código de PIVLab [Thielicke et al., 2014] para hacer el análisis de PIV. En este software se usaron tres tamaños de ventana de interrogación iterativas, es decir que se calcularon primero las correlaciones de una ventana de 64x32px, después de 32x16px y finalmente de 16x8px, para que se promediaran los tres valores (picos) más altos de las tres correlaciones. El cálculo de la correlación se hizo usando las transformada de Fourier, una deformación de ventana lineal, un estimador sub-pixel del tipo Gaussiano y dependiendo de la frecuencia en que fueron filmadas las fotos se tuvo un intervalo de tiempo entre imágenes de .004s, hasta 0.002s; respecto al valor de conversión entre pixel y metros también este dependió del lente usado y del enfoque de ese momento pero en general se obtuvo que $1px = (0.001954 \pm 0.0005)m$, luego el factor de conversión de $(px/cuadro \rightarrow m/s) : 0.467 \pm 0.005$
- Tercera etapa: En esta etapa se hace un post-procesamiento de los vectores que es la validación de ellos, por lo que se usa un filtro en la desviación estándar de los valores de la velocidad, se emplea una interpolación en donde se usa una matriz de 3x3 de los vecinos del vector a interpolar, otra interpolación puede ser lineal o con splines y se hace un suavizado de los datos para eliminar el ruido que inevitablemente genera el análisis de PIV.

Se debe mencionar que como se usan pares de imágenes, debido a la técnica del PIV, el número de archivos que se obtienen es la mitad del número de imágenes, por lo que si hay 10390 imágenes se obtienen 5195 archivos de PIV, en los que se indican el valor X, Y de cada pixel y el valor correspondiente de la velocidad V_x y V_y . Esto es relevante para la siguiente sección del análisis de datos, porque al tener más imágenes se tienen series de tiempo de velocidades de burbujas más largas, es decir, que el tiempo total de la serie si se usan 10390 cuadros muestreados a 0.004s es de 40s, y si el período de la ola es de 1.2s se tendrán 34 olas para analizar, teniendo entonces que si el período de la ola disminuye se incrementará el número de olas.

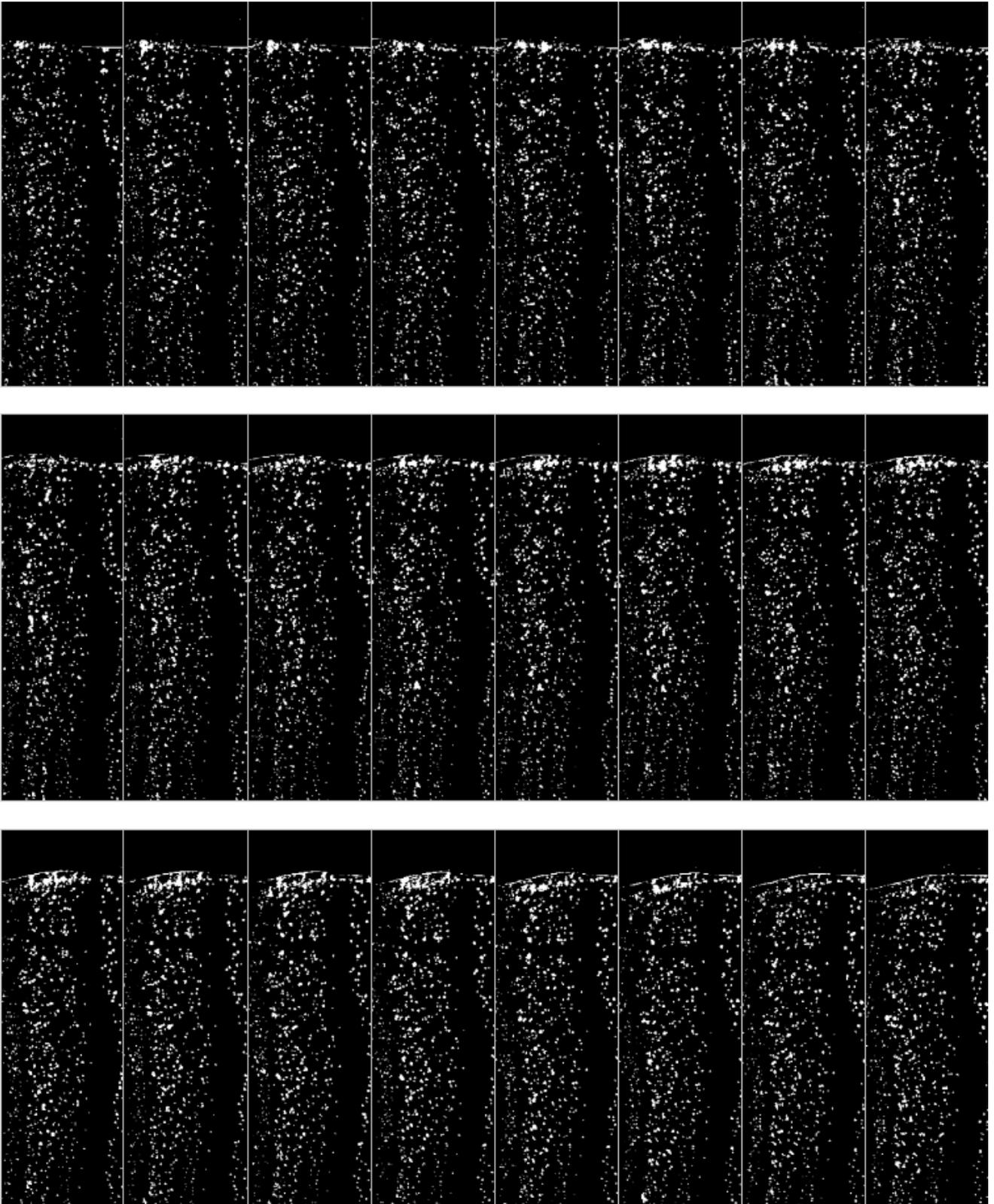


Figura 4.8: Secuencia de fotos de la cortinas de burbujas con oleaje.

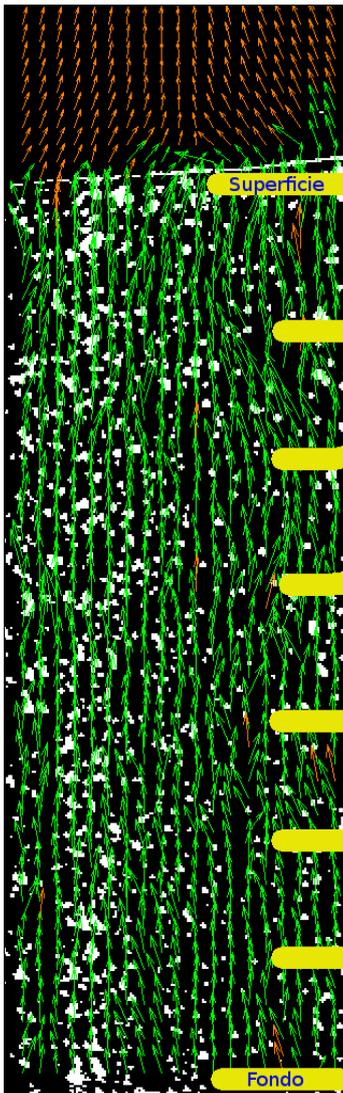
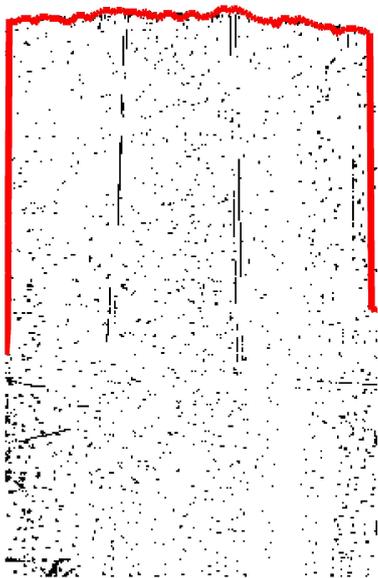


Figura 4.9: Cortina de burbujas con el campo de velocidades. Las líneas indican donde se extrajeron las series de tiempo de las velocidades de las burbujas

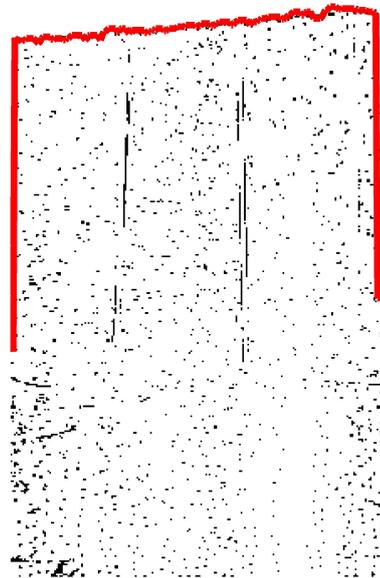
Con los vectores velocidad de las burbujas se procede a hacer el análisis más importante de este trabajo que es la reconstrucción de la superficie libre a partir de las velocidades de las burbujas, por lo que se realizan los siguientes pasos para su obtención:

- De todos los archivos .txt donde se encuentran los vectores de los campos de velocidades de las burbujas se extrajo el valor del vector en una cierta posición de X, Y por cada par de imágenes, de tal forma que las series de tiempo de las velocidades de las burbujas quedaran muestreadas a 0.008s, cuando las imágenes se grabaron con una frecuencia de 250Hz. Se escogieron dos criterios para hacer la series de tiempo, el primero en donde se fijaba una X, Y y se extraía el valor, a esto le podemos llamar una posición local, y el segundo donde se tomaron zonas para promediarse, es decir que se fijaba un cuadro, cuyas esquinas son $X_{inicial}, X_{final}, Y_{inicial}, Y_{final}$. Para ambos criterios se extrajeron series de tiempo a lo largo del tirante de agua como se muestra en la figura 4.9.
- Se realiza una corrección (capítulo 2.4) tanto a las series tomadas por los sensores de nivel como a las series de tiempo de las velocidades.
- Se extraen las series de tiempo de la cortina de burbujas cuando no hay oleaje, para poder sustraer esta velocidad intrínseca de las burbujas a las series de tiempo con oleaje regular e irregular.
- Se utiliza la técnica SSA (Singular spectrum analysis) para suavizar todas las series de tiempo.
- Se calculan los espectros de fourier de las series de las velocidades y los espectros de fourier de la serie de los sensores. Como la serie de los sensores se muestrearon a diferente frecuencia que la de las imágenes se hizo una ajuste a estas series para que todas quedaran muestreadas con la misma frecuencia y que los espectros tuvieran la misma longitud.
- Usando los valores de los espectros de las series de tiempo de las velocidades de las burbujas y las series de los sensores se encuentra un ajuste entre ellos. Este ajuste se realiza por partes.
- Con las relaciones encontradas, que corresponde a la función de transferencia, se usan las series de tiempo de las velocidades de las burbujas para hacer la reconstrucción de la superficie libre.

Algo relevante a mencionar de la metodología es que hay un paso alternativo para medir directamente la superficie libre que es mediante las fotografías, esto consiste en encontrar el contorno de la superficie libre de cada fotografía, como se observa en la figura 4.10. La realización de esto es útil porque evita la presencia de los sensores de nivel en el experimento, por lo que a lo largo de la tesis se usaron estas mediciones directas de la superficie libre en vez de las presentadas por los sensores de nivel.



(a) Contorno de la superficie libre a un tiempo t_1



(b) Contorno de la superficie libre a un tiempo t_2

Figura 4.10: Ejemplos del contorno de la superficie libre mediante fotografías

Capítulo 5

Resultados

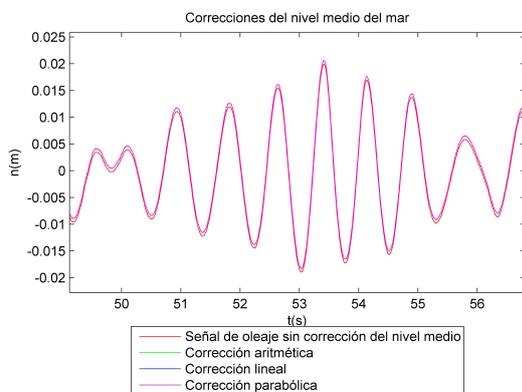
5.1. Generalidades

En las próximas páginas se muestran los resultados que se obtuvieron a partir de la metodología empleada del capítulo cuatro.

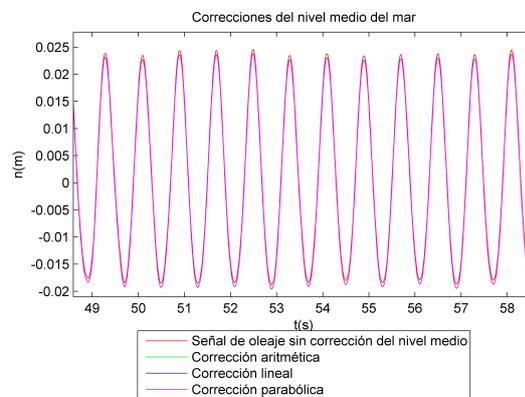
5.2. Corrección de las series de los sensores de nivel

De las series de oleaje obtenidas por los sensores de nivel se le aplicaron los métodos de corrección de oleaje del capítulo 2.4. En la figura 5.1 se tiene una comparación de los tres métodos empleados para esta corrección; también se aprecia que para esta señal dada por el sensor, cualquiera de las correcciones, ya sea aritmética, lineal y parabólica, se pueden utilizar ya que hasta la séptima cifra se encuentra una diferencia entre ellas, como se ve en los siguientes valores de la desviación estándar.

- Corrección lineal: 0.84754136
- Corrección aritmética: 0.84754178
- Corrección parabólica: 0.84754113



(a) Corrección del oleaje irregular



(b) Corrección del oleaje regular

Figura 5.1: Correcciones del nivel del oleaje de las series de los sensores de nivel

5.3. Corrección de las series de las velocidades de las burbujas

Análogo a la sección previa se hicieron las correcciones de las velocidades de las burbujas (figura 5.2). Para estas series la diferencia entre una corrección a otra es mayor que para la serie de los sensores. Para estas series se utilizó una corrección aritmética porque su desviación estándar coincidía más con la desviación estándar de la serie original, la cual fue de 0.05179410. A continuación se ponen los valores de la desviación estándar para cada tipo de corrección respectivamente.

- Corrección lineal: 0.05175332.
- Corrección aritmética: 0.05179410.
- Corrección parabólica: 0.05175306.

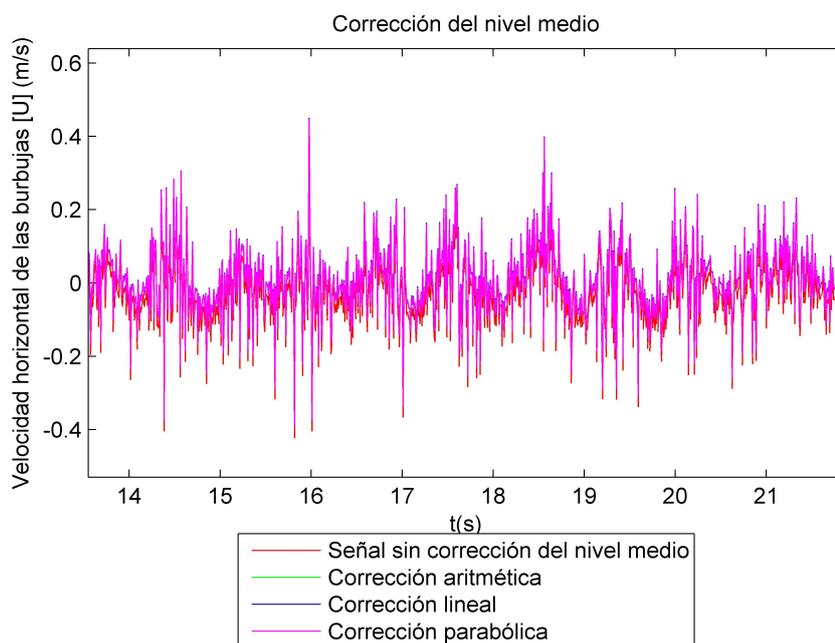


Figura 5.2: Corrección de las series de velocidades horizontales de las burbujas

5.4. Sensores de nivel

Se colocaron cuatro sensores a lo largo del generador de burbujas, en la figura 5.5, se presentan las series de la superficie libre ya corregidas obtenidas por los sensores, observando que las cuatro series muestran un comportamiento similar, excepto que están desplazadas ligeramente, lo cual toma sentido al considerar que al propagarse la onda, esta tiende a desfazarse.

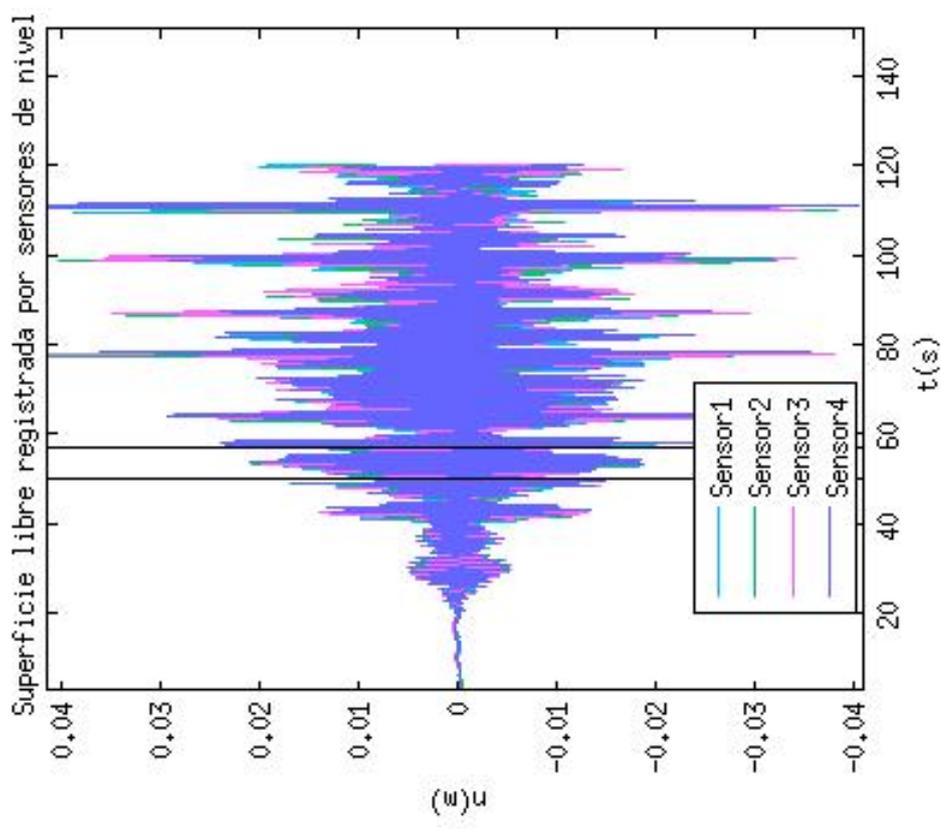
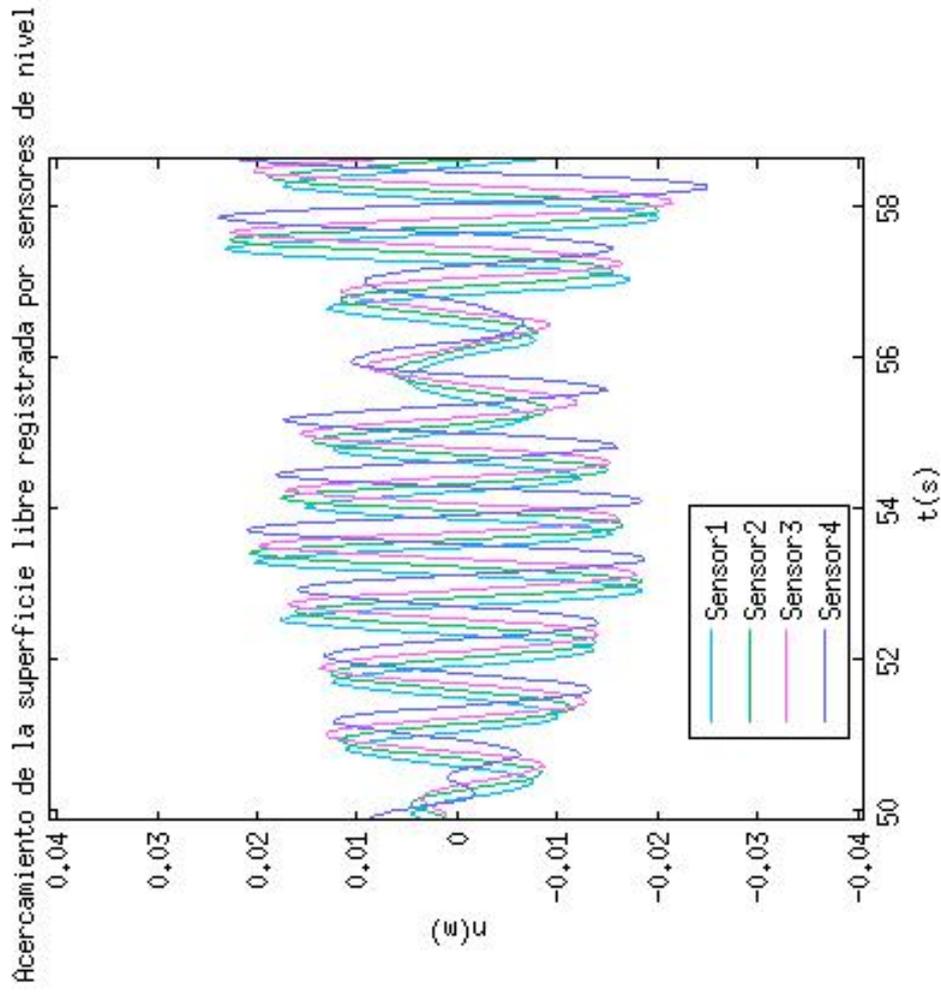


Figura 5.3: Series de la superficie libre registrada por los sensores de nivel

5.5. Serie de la superficie libre obtenida por fotografías

Además de obtener la superficie libre por los sensores de nivel, otra manera de obtenerla es usando el contorno de la superficie libre de las mismas fotografías que se usaron para el cálculo de las velocidades de las burbujas. La idea consiste en obtener el contorno de la superficie libre y obtener la posición de los píxeles de este contorno en cada fotografía para después transformar esa posición del píxel a la posición real, el factor de conversión usado fue $1\text{px}=0.0019\text{m}$.

Para verificar que la serie de la superficie libre obtenida por las fotografías se asemeja al comportamiento del oleaje presentado, se comparó esta serie con la serie de la superficie libre obtenida por los sensores de nivel.

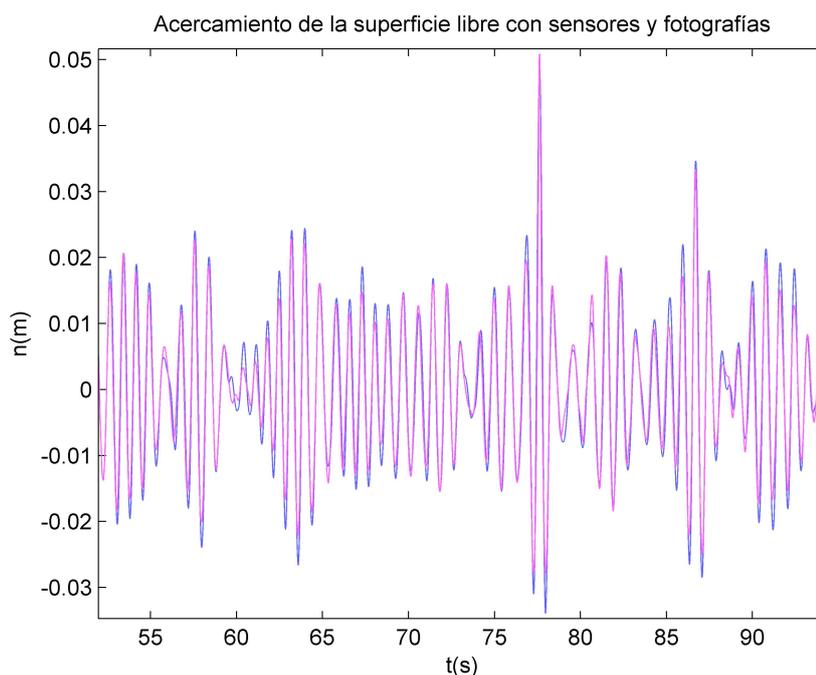


Figura 5.4: Comparación de la superficie libre entre el sensor de nivel y con la metodología de las fotografías

5.6. Series de las velocidades horizontales de las burbujas

Como se mencionó en el capítulo 3, a partir del procesamiento de las imágenes usando PIV se obtuvieron los campos de velocidades de las fotografías de la cortina de burbujas; en la figura 5.5 se presentan tres series de tiempo de las velocidades de las burbujas con un oleaje irregular de período pico $T_p = 0.8\text{s}$ y altura pico de $H_p = 0.05\text{m}$. La serie de tiempo A de las velocidades de las burbujas es una serie con influencia de oleaje, la serie B es igual de velocidades de las burbujas pero sin oleaje y la serie C corresponde a la resta que se hace de la serie A-B, cuya finalidad es eliminar la presencia de la velocidad horizontal que corresponde a una oscilación intrínseca que experimentan las burbujas. Las series con las que se trabajaron a lo largo de la tesis y con las que se realiza la reconstrucción de la superficie libre son del tipo de la serie C.

Respecto a la nota de la posición de referencia= 0.695m en la figura 5.5, se debe aclarar que como se usaron tres ventanas de interrogación en el PIV, se obtuvieron 26 vectores velocidad en la horizontal y 48 vectores velocidad en la vertical, donde el inicio de la numeración corresponde a la parte superior de la imagen y el último vector es la parte inferior de la imagen, por lo que los primeros números de

los vectores son la parte más cercana de la superficie libre y los últimos vectores son los cercanos al fondo del canal.

El factor de conversión que se usó para saber cuantos centímetros equivalieron a un vector fue el siguiente: $vector = 0.0165m$. Esto es importante conocerlo ya que con él se sabe a partir de que vector se pueden tomar las mediciones del PIV. Por ejemplo si se tiene una altura de ola de $H = 0.05m$ y un tirante de agua de $h = 0.7m$ la profundidad a partir con la que se pueden usar las mediciones de PIV es de $0.675m$, luego se deben de tomar los vectores velocidad a partir de esta profundidad porque sino se tendrían mediciones de vectores que PIV interpolados a partir de vecinos que no tienen partículas (vectores rojos de la imagen 4.9) y que por ende no representan mediciones físicas.

También para obtener esta posición de referencia se consideró que la fotografía esta tomada a partir del quinto centímetro respecto al fondo del canal, ya que es en estos centímetros donde se colocó el generador de burbujas.

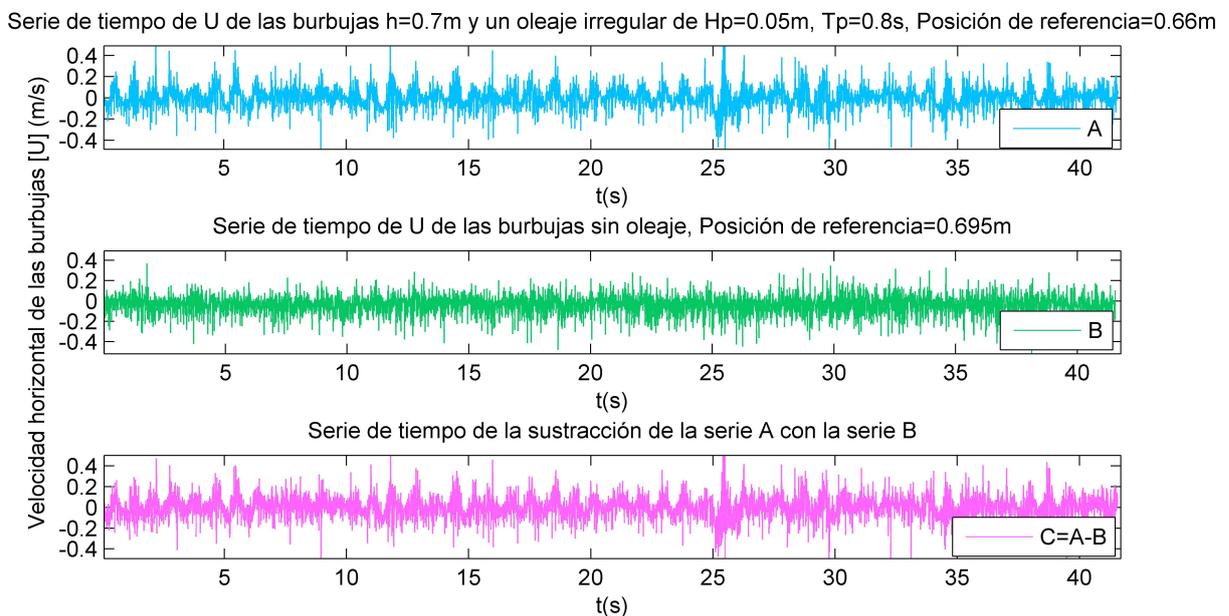
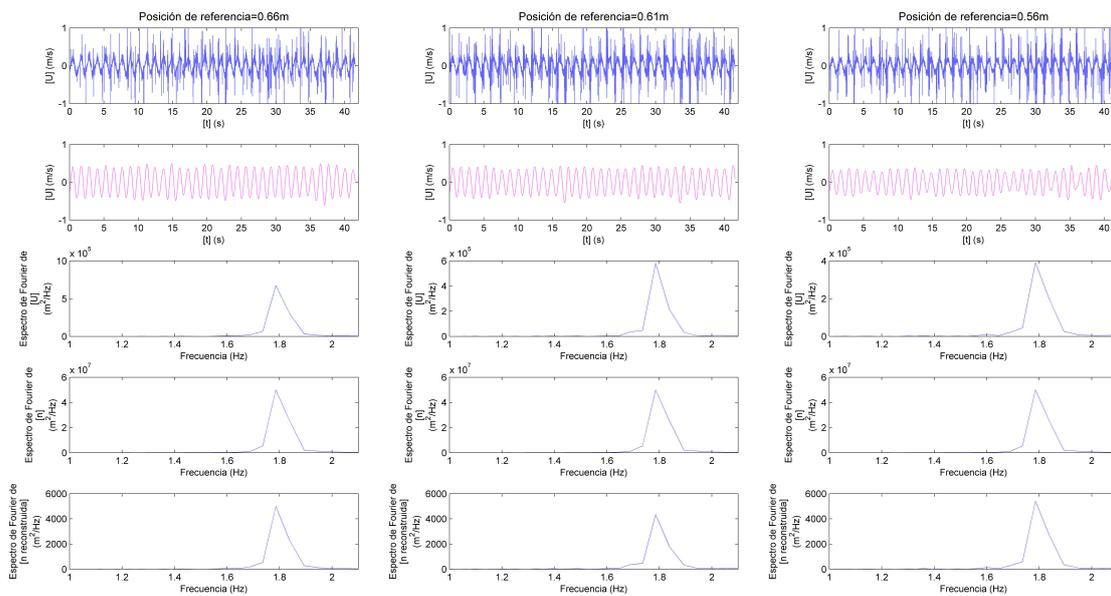


Figura 5.5: Series de las velocidades de burbujas

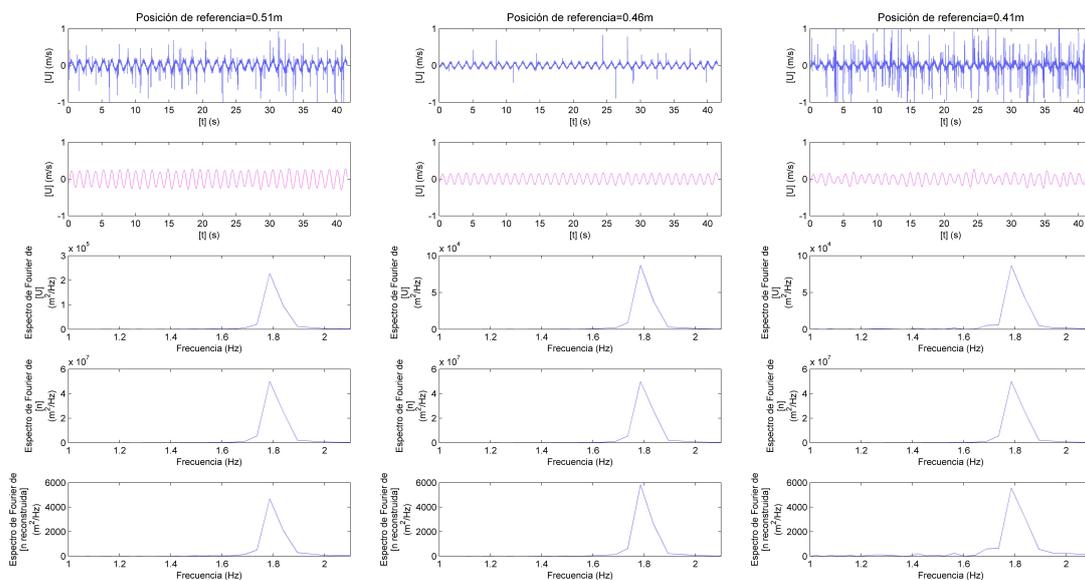
5.7. Oleaje Regular

Se estudió el caso de oleaje regular con un período de $T = 1.2s$ y altura de ola de $H = 0.1m$. En la figura 5.6 se tienen tres columnas con cinco gráficas, donde columna corresponde a una cierta altura del tirante de agua. De las cinco gráficas, la primera representa la serie de tiempo de las velocidades de las burbujas que se obtienen con el análisis del PIV (azul), la segunda gráfica es la serie después de aplicarle la técnica de SSA, la tercera gráfica es el espectro de Fourier de la serie de velocidades de las burbujas, la cuarta gráfica muestra el espectro de Fourier de la serie de la superficie libre medida por las fotografías y la quinta gráfica representa el espectro de Fourier de la superficie libre reconstruida. De la figura 5.6 se observa que las velocidades de las burbujas van disminuyendo conforme la profundidad disminuye, al ser oleaje regular los espectros de Fourier están caracterizados por una sola frecuencia, tal que en los tres espectros calculados coinciden con esta frecuencia principal. También se tiene que el espectro de la superficie libre reconstruida a una profundidad de referencia de $0.41m$

respecto al fondo del canal no suele coincidir del todo con el espectro de Fourier de la superficie libre medida.



(a) Casos de oleaje regular cerca de la superficie libre



(b) Casos de oleaje regular a media agua

Figura 5.6: Oleaje regular con $T = 1.2s$ y $H = 0.1m$

En la figura 5.7 se muestra el coeficiente de determinación R^2 para una altura desde $0.66m$ hasta $0.353m$. A partir de estos diagramas de dispersión se obtuvieron las funciones de transferencia que permitieron hacer las reconstrucciones de las superficies libres. Como se usa oleaje regular, no es necesario tomar todo el espectro de Fourier para hacer la reconstrucción, por lo que se ubicó el valor máximo del espectro y a partir de ahí se tomo un valor hacia adelante y un valor hacia atrás, por ello en el diagrama de dispersión se observan tres puntos.

Para las reconstrucciones de la superficie libre se usaron las relaciones encontradas de los diagramas de dispersión de la figura 5.7, obteniéndose la figura 5.8. La técnica usando oleaje regular funciona para las series de las velocidades de las burbujas que se encuentran más cerca de la superficie libre, esto es porque las burbujas sienten una mayor influencia de este movimiento a comparación de las burbujas que están en el fondo, como se puede observar cuando se toma una profundidad de $0.41m$ respecto al fondo, que es cuando la reconstrucción no se asemeja tanto a la superficie libre medida.

Para cuantificar que tanto la reconstrucción de la superficie libre se asemeja con la superficie libre medida mediante las fotografías, se usó nuevamente el coeficiente de determinación R^2 . En la figura 5.9 se muestra como este coeficiente se modifica con la profundidad relativa, además de que cambia cuando se modifica las condiciones de altura de ola y período. En la figura 5.10 se tienen los coeficientes de determinación de la figura 5.7, pero para diferentes casos de altura de ola y período.

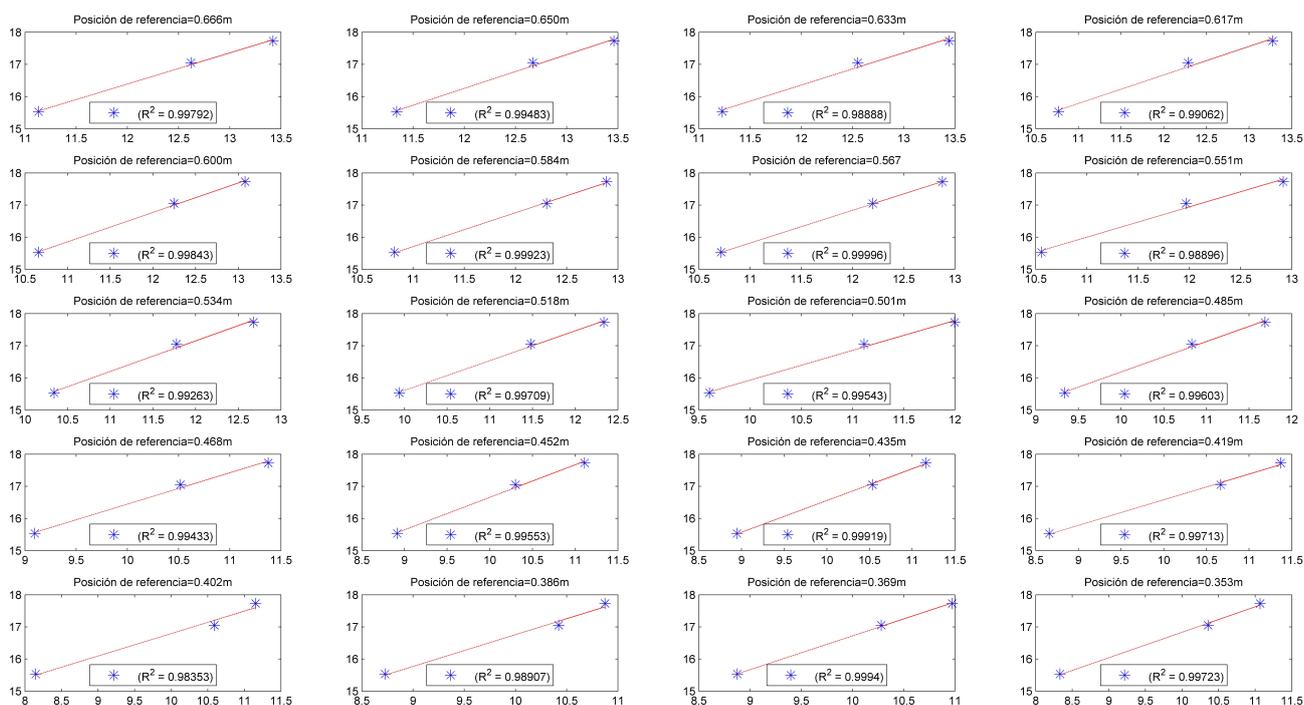


Figura 5.7: Coeficientes de determinación entre las velocidades de las burbujas y la superficie libre medida

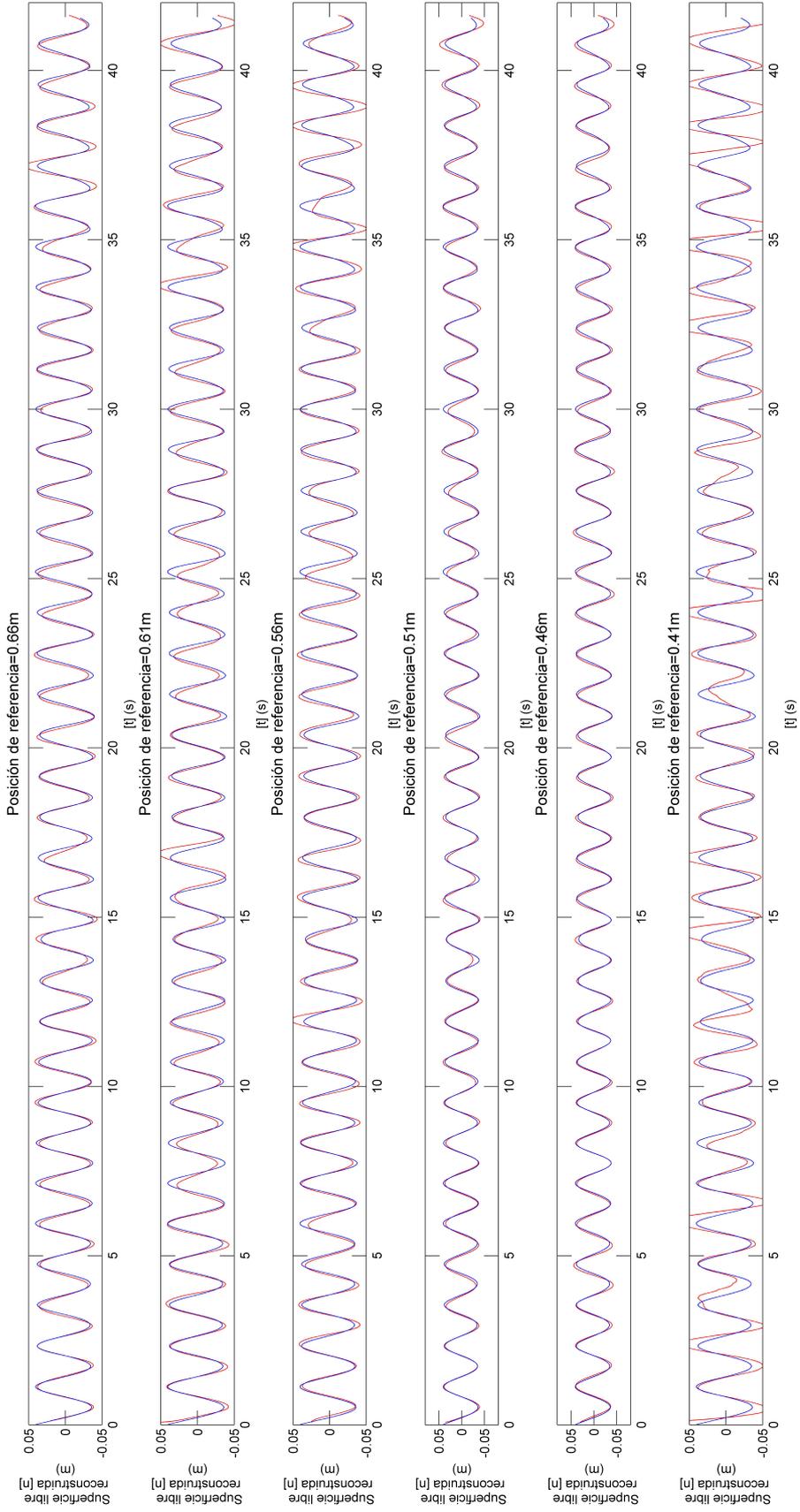


Figura 5.8: Superficie libre medida (azul) y superficie libre reconstruida (rojo) para oleaje regular con $H = 0.1m$ y $T_p = 1.2s$ a diferentes alturas del tirante de agua

R^2 usando la serie de la superficie libre reconstruida y la serie de la superficie libre medida

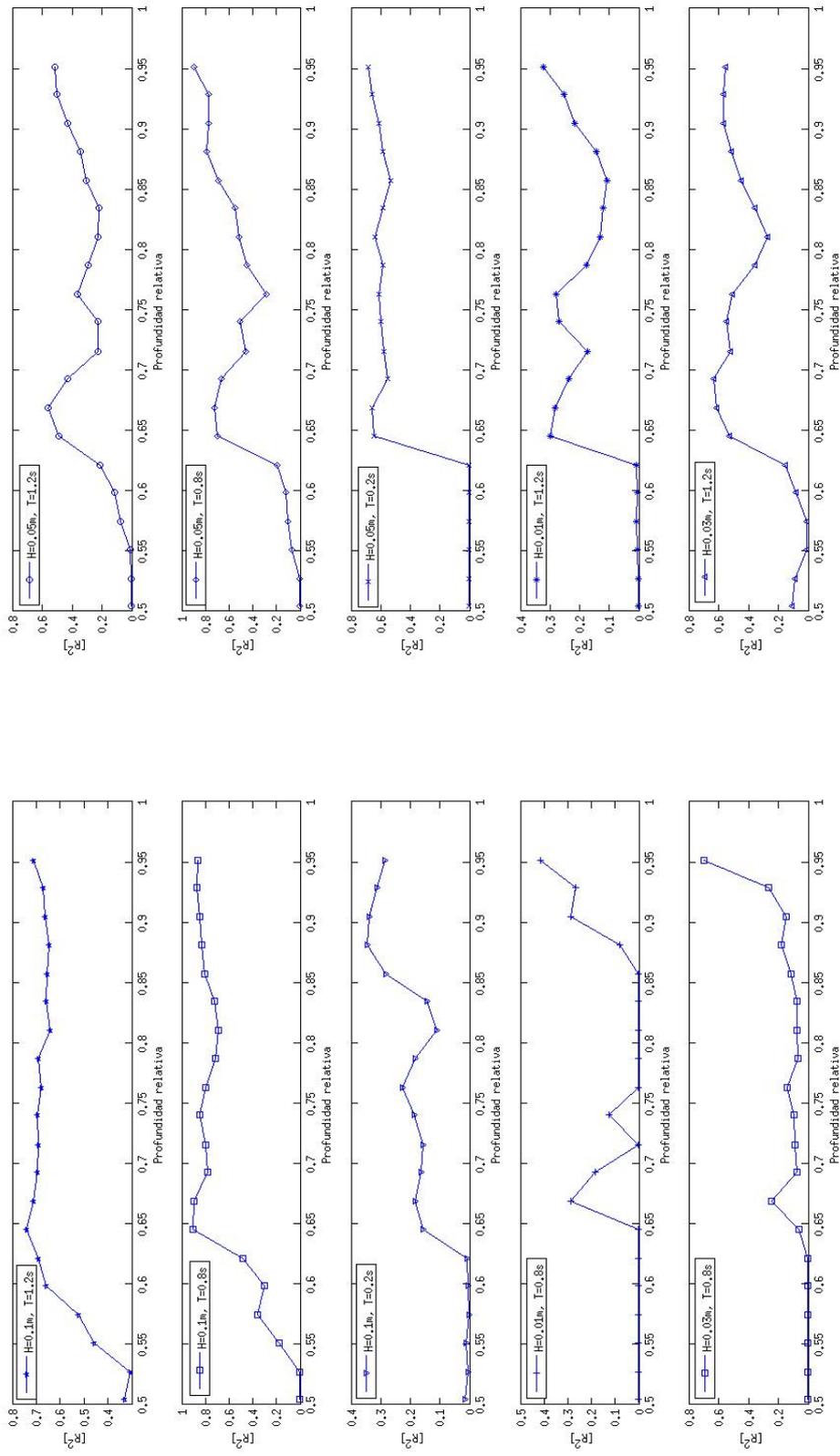


Figura 5.9: Coeficientes de determinación R^2 para diferentes condiciones de altura de ola y período, usando las serie de la superficie libre medida y la reconstruida

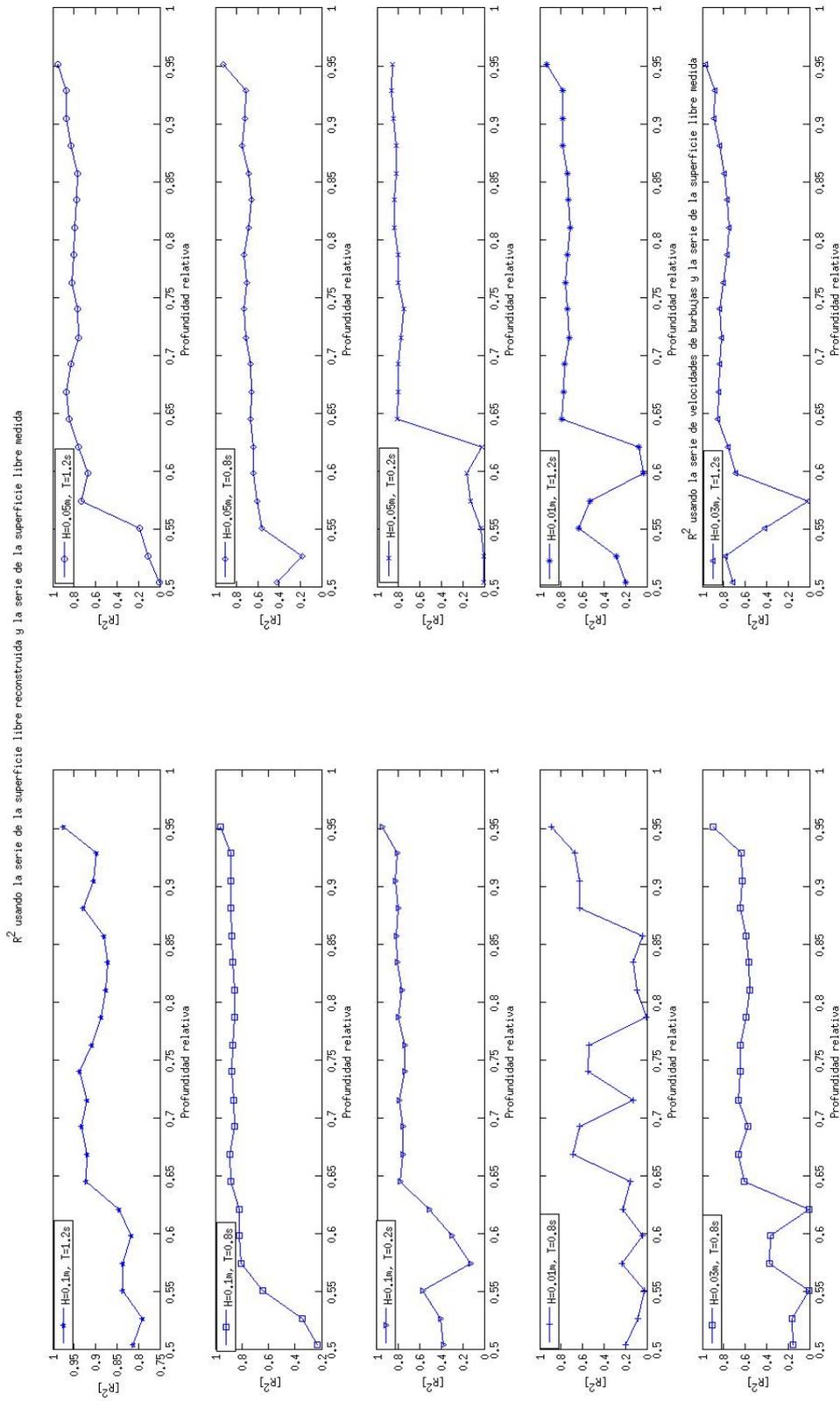
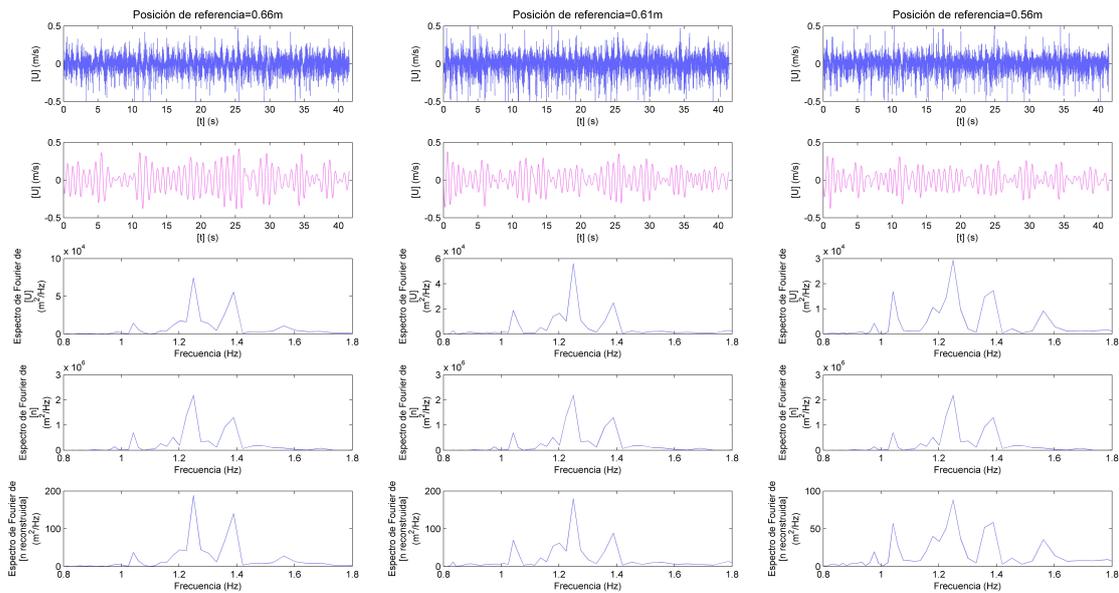


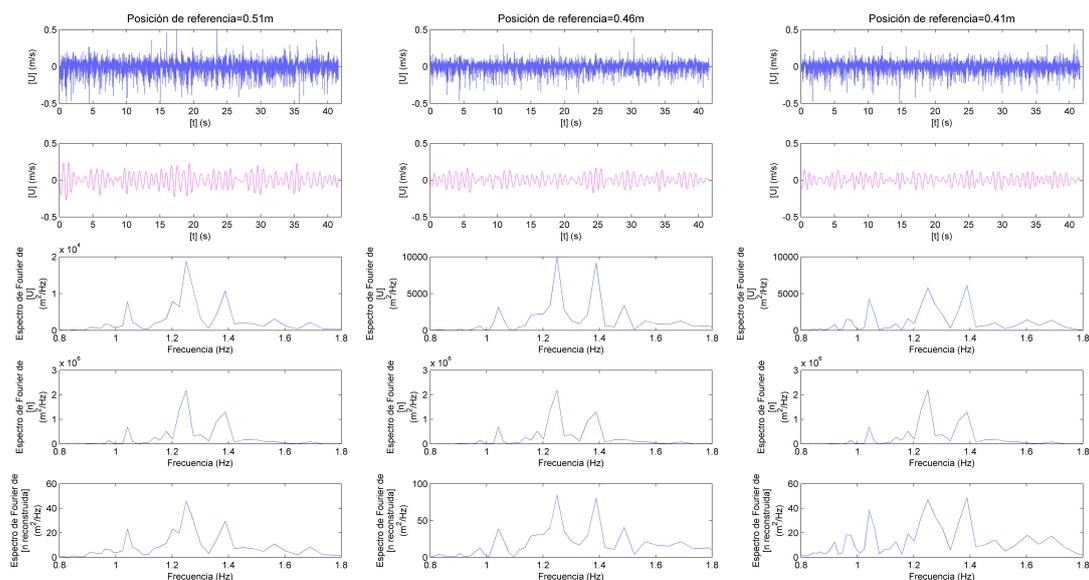
Figura 5.10: Coeficientes de determinación R^2 usando los espectros de las velocidades de las burbujas y los espectros de la superficie libre medida

5.8. Oleaje Irregular

Se realizó lo análogo de oleaje regular para oleaje irregular, en este caso se consideró un período pico de $T_p = 0.8s$ y altura de ola pico de $H_p = 0.05m$. Como en las figuras de oleaje regular, se muestran aquí también tres columnas con cinco gráficas que representan lo mismo como se explicó en la sección 5.7. Para el caso de oleaje irregular se observa en la figura 5.11 que desde las posiciones más cercanas a la superficie libre, los espectros de Fourier de la superficie libre medida con la superficie libre reconstruida son ligeramente diferentes, teniendo como consecuencia que la reconstrucción de la superficie libre no sea completamente idéntica a la superficie libre medida.

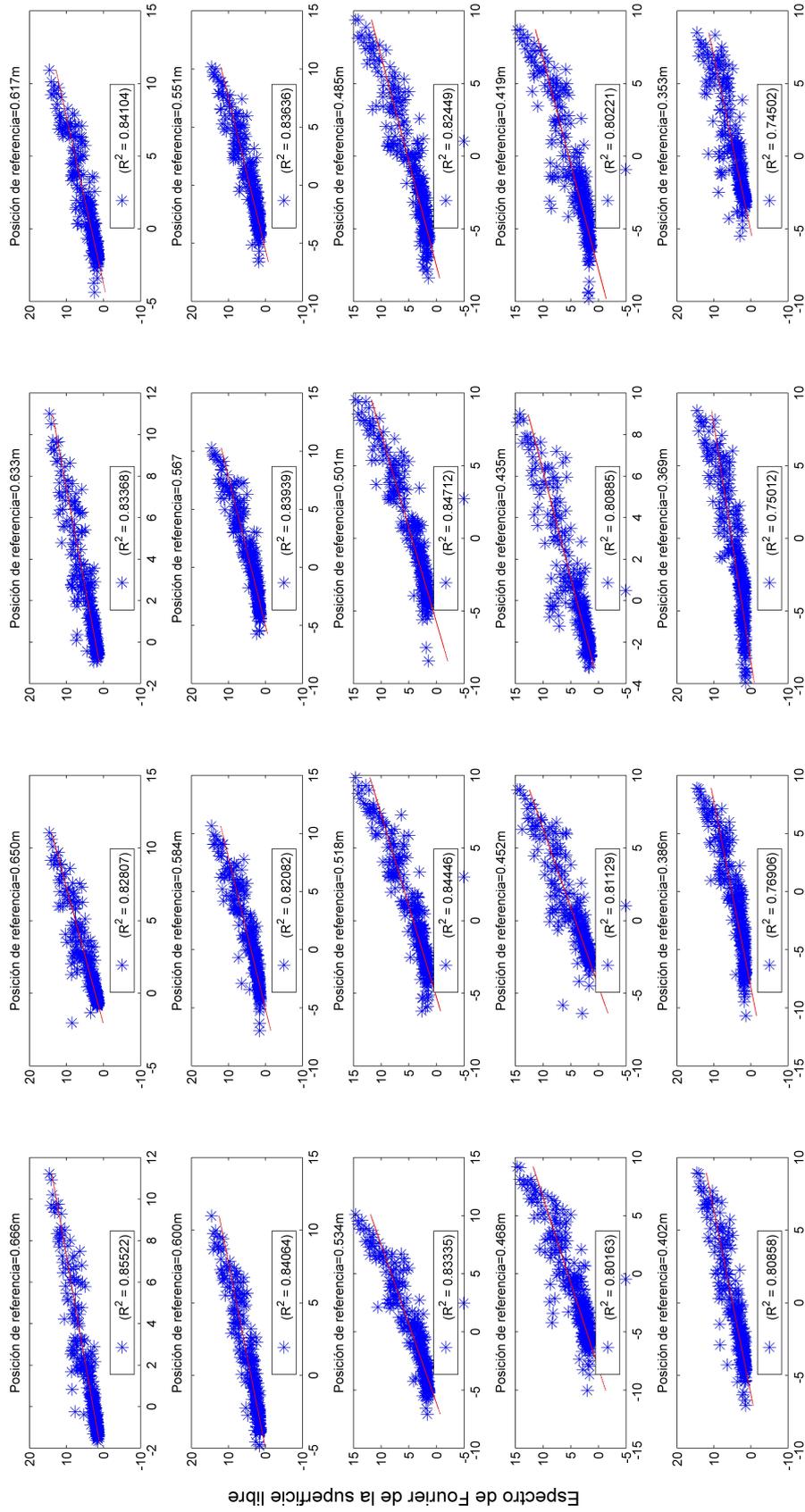


(a) Casos de oleaje irregular cerca de la superficie libre



(b) Casos de oleaje irregular a media agua

Figura 5.11: Oleaje regular con $T = 1.2s$ y $H = 0.1m$



Espectro de Fourier de las velocidades de las burbujas

Figura 5.12: Coeficientes de determinación entre las velocidades de las burbujas y la superficie libre medida

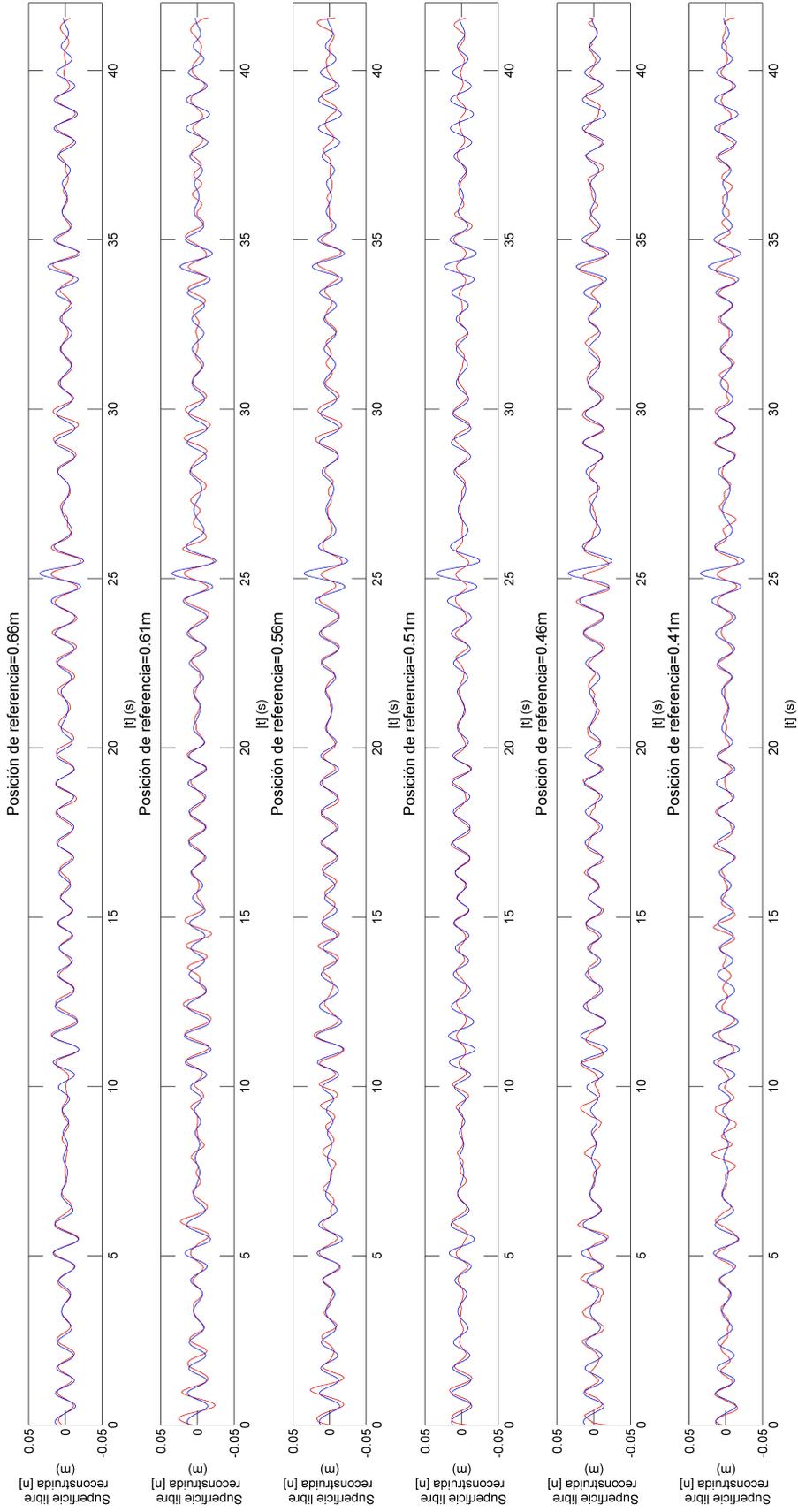


Figura 5.13: Superficie libre medida (azul) y superficie libre reconstruida (rojo) para oleaje irregular con $H_p = 0.05m$ y $T_p = 0.8s$ a diferentes alturas del tirante de agua

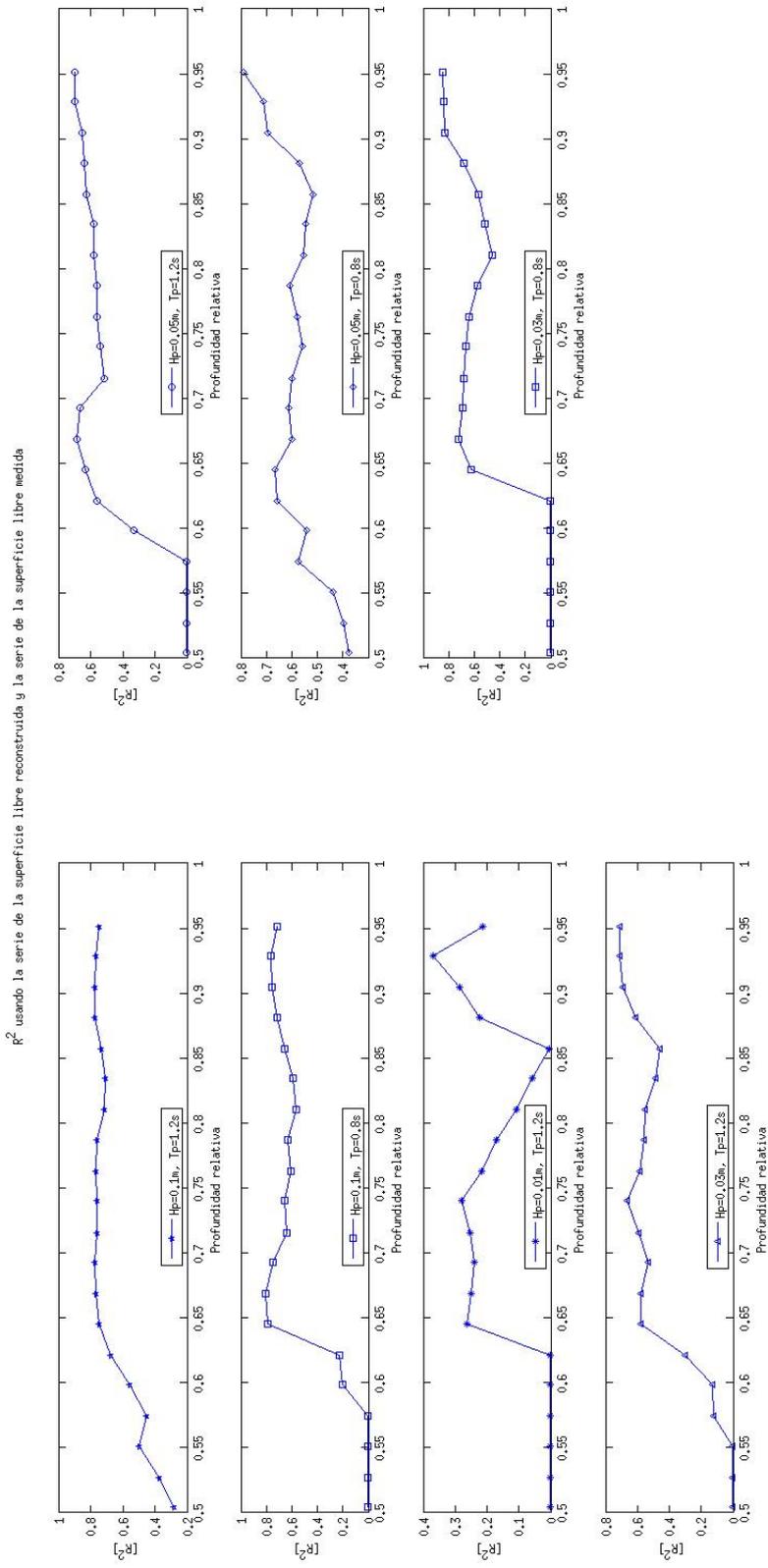


Figura 5.14: Coeficientes de determinación R^2 para diferentes condiciones de altura de ola y período, usando la serie de la superficie libre medida y la reconstruida

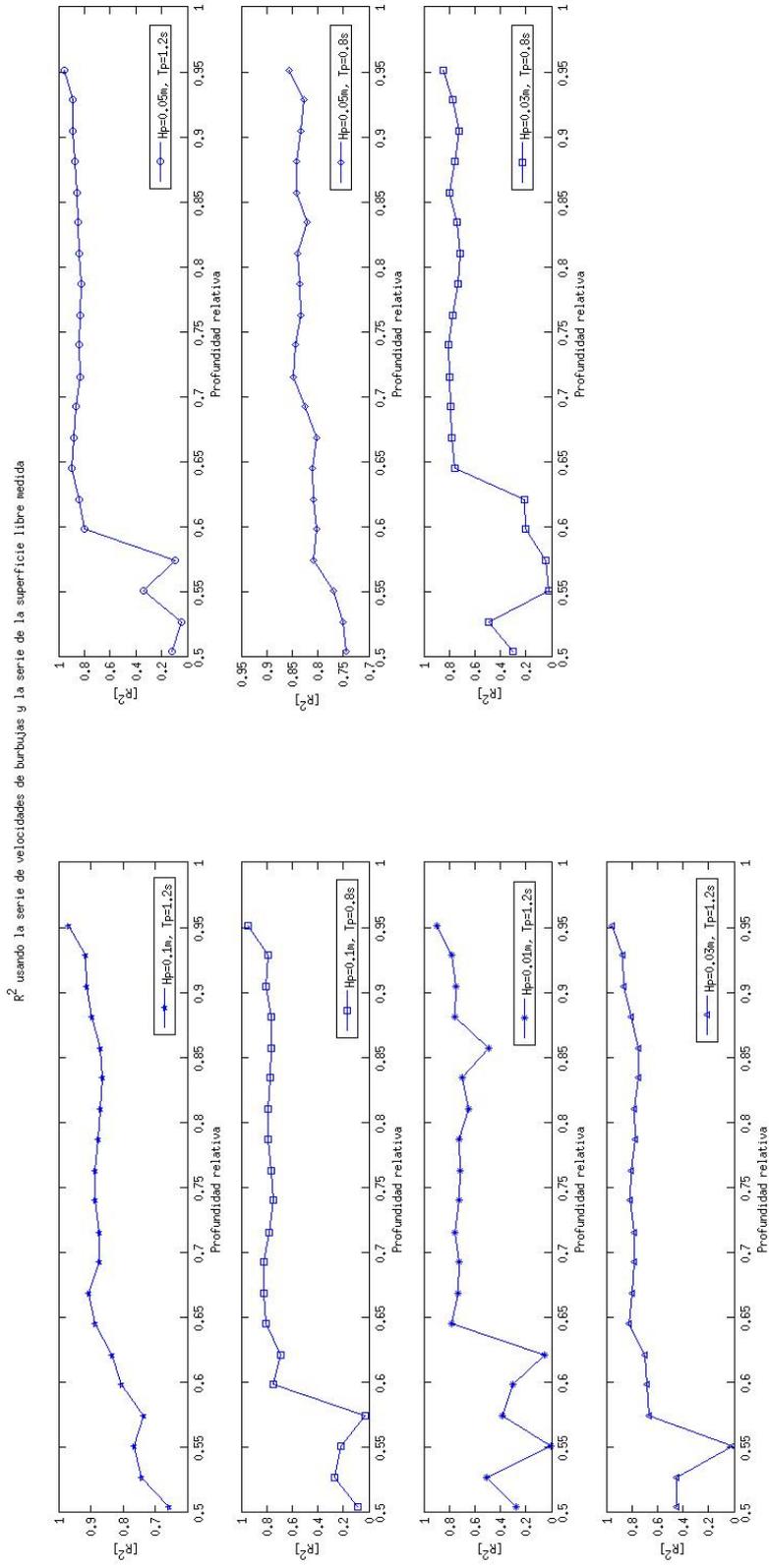


Figura 5.15: Coeficientes de determinación R^2 usando los espectros de las velocidades de las burbujas y los espectros de la superficie libre medida

En la figura 5.12 se muestran los diagramas de dispersión entre los espectros de Fourier de la superficie libre medida y el espectro de Fourier de las velocidades de las burbujas. Como el oleaje irregular está compuesto de varias frecuencias, se tuvieron que considerar más valores del espectro para poder hacer los diagramas de dispersión y no solo tres valores como se hizo en oleaje regular.

Respecto a las reconstrucciones mostradas en la figura 5.13 se observa que aunque hay una gran similitud entre la superficie libre medida con la superficie libre reconstruida, esta última no permite describir comportamientos en donde hay cambios pequeños o muy grandes. En la figura 5.15 se muestran los coeficientes de determinación de la figura 5.12 para el caso presentado en esta sección y para otros casos con diferente altura de ola pico y período pico. Finalmente en la figura 5.14 se muestran los coeficiente de determinación de las series de la superficie libre medida y la superficie libre reconstruida.

Capítulo 6

Conclusiones

El campo de velocidades medido a través del uso de la técnica desarrollada en este trabajo, permitió hacer una reconstrucción de la superficie libre; ésta, como primera aproximación, resultó ser acertada.

Debido a que el análisis giró entorno a las fotografías tomadas, se decidió utilizarlas para obtener la superficie libre, en vez de los sensores de nivel, permitiendo así medir la superficie libre sólo con el uso de fotografías y con el algoritmo que en un inicio había sido empleado para el realce del contraste de las burbujas. El error relativo arrojado entre la superficie libre con el sensor de nivel y las imágenes fue del 5 %.

La técnica presentó una serie de limitantes, la principal de ellas fue que la reconstrucción de la superficie libre sólo puede realizarse en los 40 cm más cerca a la superficie libre, cuando la altura de ola es de 10 cm, y un período de 1.2 s (ondas de gravedad). Conforme la altura de ola disminuye y el período aumenta, la reconstrucción resulta ser más complicada. Cabe destacar que estos 40 cm están por debajo de los primeros 3 cm más cercanos de la superficie. Las series de tiempo de las velocidades de estos 3 cm, presentaron muchas perturbaciones, es decir que esta zona actúa como capa límite entre la interfaz del agua y aire.

Para realizar la reconstrucción del oleaje regular, fueron necesarios tomar los primeros tres valores de los diagramas de dispersión, en comparación con el oleaje irregular, donde se tuvieron que tomar 100 valores; esto se debió a la naturaleza del oleaje irregular, donde se recordará que al ser una suma de ondas con diferentes amplitudes y periodos, no se da la reconstrucción inmediata de la superficie libre al sólo tomar pocos valores, ya que ellos no son los suficientes para dar una aproximación más certera a la superficie libre.

En cuanto a la ventaja principal de la técnica radica en la no intrusión de sensores, lo que permite el desarrollo sin obstáculos (sólo la del generador de burbujas en el fondo del canal) del comportamiento del fenómeno físico de estudio. Además el generador de burbujas presenta una fácil y económica construcción comparado con un sensor de nivel. Dentro de las desventajas se encuentra que si no se hace un buen acoplamiento entre la velocidad de la cámara, el control de las velocidades de las burbujas y la magnitud de la velocidad del fluido en estudio, se llegan a tener sobre o sub estimaciones de las velocidades del flujo, las cuales obstruyen el fenómeno de estudio en cuestión. Otro punto es la presencia de la cámara de alta velocidad, la cual facilita esta sincronización de tiempos entre la toma de imágenes y el tiempo de ocurrencia y presencia del fenómeno físico.

Dentro de las aplicaciones de la técnica se encuentra en el estudio de modelaciones físicas en canales de oleaje, la cual permite dar de manera cualitativa y cuantitativa la idea de fenómenos físicos de difracción, reflexión y refracción de las olas, así como en su peralte y someramiento de estas. Otro

posible tipo de aplicación dentro de la Ingeniería hidráulica es la que presenta en el estudio de los saltos hidráulicos en estructuras como diques, escolleras, vertedores o tanques de amortiguamiento.

Para que la técnica desarrollada permita un resultado válido, se debe de tener un buen sembrado de burbujas (20 partículas en una ventana de interrogación), el pre-acondicionamiento de las imágenes debe permitir que se tenga el mayor número de burbujas visibles, el estimador sub-pixel empleado y la validación e interpolación de vectores debe de influir en lo mínimo en el comportamiento de las burbujas.

Debido al desfase de las mediciones de los experimentos y las fotografía, no se permitió realizar la reconstrucción de la superficie libre mediante el uso del piv comercial, por lo que se necesita implementar el algoritmo de la reconstrucción para encontrar otra manera de realizarse.

Respecto a los datos arrojados por el UVP, se observó que la magnitud de las series de velocidades medidos por el sensor, son de la magnitud de las series de tiempo de velocidades de las burbujas.

Futuras líneas de investigación

Dentro del trabajo a futuro se espera usar la técnica en tanques de oleaje para ver su comportamiento en un ambiente con tridimensionalidad, mejorar el control de la iluminación, hacer una automatización entre los tiempos del control de inicio del canal de oleaje y la toma de imágenes, disminuir los tiempos de cálculo de procesamiento de las imágenes, implementar el algoritmo de la reconstrucción de la superficie libre para poder obtener una mejor precisión en la reconstrucción, empatar las series de tiempo de las velocidades medidas por el UVP, el sensor de nivel, las series de tiempo de las velocidades de las burbujas y las series de tiempo de la superficie libre obtenidas por las fotografías de los experimentos, lo que permitiría tener diferentes mediciones del fenómeno físico, que a su vez dará una mejor explicación a su comportamiento

Bibliografía

- [Adrian, 1991] Adrian R.T., Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics, *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 1991.
- [Asmar, 2000] Asmar, Nakhlé, Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems, second edition, Pearson, Prentice Hall, USA, 2000.
- [Benassai, 2006] Benassai G., *Introduction to Coastal Dynamics and Shoreline Protection* WIT Press, UK, 2006.
- [Cowen and Monismith, 1997] Cowen E. and Monismith S., *Exp. FLuids* 22, 199, 1997.
- [Brown et al., 1997] Brown J., Colling A., Park D. et al. *Waves, tides, and shallow-water processes* Butterworth Heinemann and the Open University, UK, 1997.
- [Galvin et al., 1968] Galvin, C.J., Jr., *Breaker Type Classification on Three Laboratory Beaches*, *Jour. Geophys. Res.*, 73(12),3651, 1968.
- [Goodman, 1984] Goodman J., *Laser speckle and related phenomena*, Springer, Berlín, 1984.
- [Hamm et al., 1993] Hamm L., Madsen, P.A. and Peregrine, D.H., *Wave transformation in the nearshore zone: a review* Coastal Engineering, Vol. 21, 1993.
- [Holthuijsen, 2007] Holthuijsen L. H., *Waves in Oceanic and Coastal Waters* Cambridge University Press, UK, 2007.
- [Johnson et al., 1978] Johnson R., Mansard, E y Ploeg J., *Effects of wave grouping on breakwater stability* Int Conference on Coastal Engineering, ASCE, Hamburgo, 1978.
- [Keane y Adrian, 1990] Keane R., Adrian R.T., *Meas. Sci. Technol.*, 1, 1202, 1990.
- [Kinsman, 1965] Kinsman, B., *Wind waves* Printice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1965.
- [Longuet-Higgins and Stewart, 1964] Longuet-Higgins, M.S. and Stewart, R.W., *Radiation stresses in water waves: a physical discucion with applications* Deep Sea Research, 11, 1964.
- [Massel, 1951] Massel, S.R., *Hydrodynamics of coastal zones* Elsevier, USA, 1989.
- [Munk, 1951] Munk, W.H., *Origin and Generation of Waves* USA, 1951.
- [Pierson et al., 1958] Pierson W. J., Neumann G., James R. W., *Practical methods for observing and forecasting ocean waves by means of wave spectra and statistics*, US, Navy Hydrogr., USA, 1958.
- [Prasad et al., 1992] Prasad A., Adrian R., Ladreth C. y Offutt P., *Exp. Fluids* 13, 105, 1992.
- [Raffael et al 1998] Raffael, M., Willert, C., Kompenhans, J., *Particle image velocimetry, a practivial guide* Springer VERlag, Berlín, 1998

- [Roelvink, 1993] Roelvink, J.A., *Surf beat and its effect on cross-shore profiles* Ph.D. Thesis, Dep. Of Civil Eng., Delft Univ. of Technology, Delft, Netherlands, 1993.
- [Silva, 2005] Silva, R.C. *Análisis y descripción estadística del oleaje*. Serie Docencia, Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Ingeniería, México, 2005.
- [Stokes, 1880] Stokes, G. G., *Math. Phys. Papers, Vol. 1* Cambridge, Univ. Press, UK, 1880.
- [Sveen and Cowen, 2004] Sveen J., Cowen Edwin, *Chapter 1. Quantitative imaging techniques and their applications to wavy flows* WSPC, 2004
- [Thielicke et al., 2014] Thielicke, W. and Stamhuis, E.J., *PIVlab – Towards User-friendly, Affordable and Accurate Digital Particle Image Velocimetry in MATLAB*, Journal of Open Research Software 2(1):e30, Journal of Open Research Software 2(1):e30, DOI: <http://dx.doi.org/10.5334/jors.bl>, 2014
- [Van Rijn, 2013] Van Rijn, L.C., *Basic Hydrodynamic Processes in the Coastal Zone USA*, 2013.
- [Westerweel, 1993] Westerweel, *Ph.D. Dissertation*, University Press, Delft, 1993.
- [Xin-She Yang, 2008] Xin-She, Yang, *Introductory Mathematics for Earth Scientists*, Dunedin, UK, 2008.
- [Dantec Dynamics, 2013] [//www.dantecdynamics.com/measurement-principles-of-piv](http://www.dantecdynamics.com/measurement-principles-of-piv)
- [Met Flow, 2011] *UVP-DUO Monitor User's Guide*

Apéndice A

Teoría lineal de ondas

La figura A.1 muestra las regiones donde es válida las distintas teorías de oleaje. Además de esta

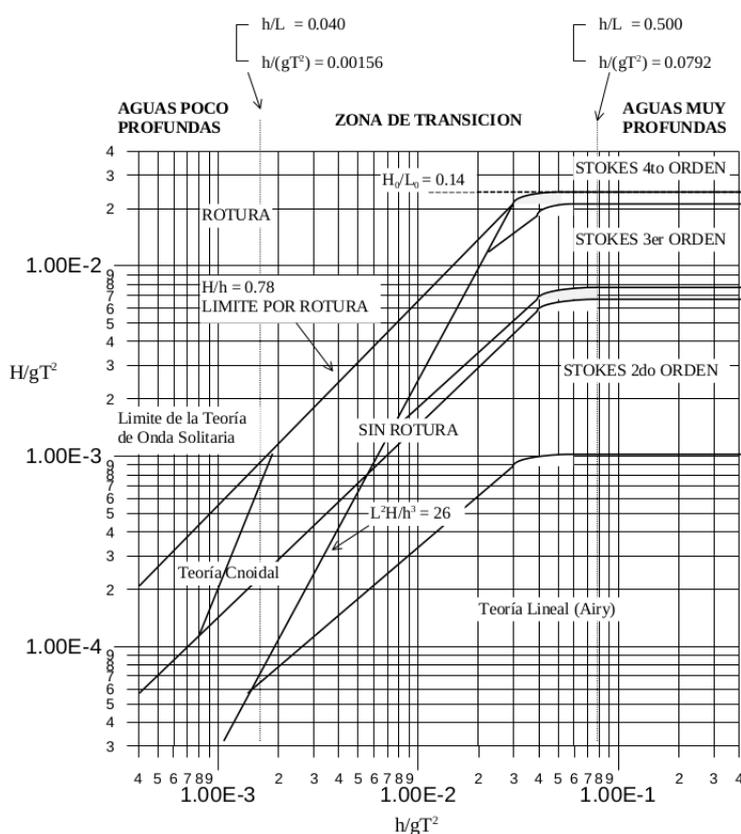


Figura A.1: Regiones para las diferentes teorías de oleaje

figura se usan los siguientes parámetros para la descripción de las ondas.

$$\epsilon = kA = H/L = kH \quad (A.1)$$

$$\delta = A/h = H/h \quad (A.2)$$

$$\mu = kh = h/L \quad (A.3)$$

El parámetro ϵ es el peralte de la ola e indica la variación vertical de la onda en una longitud de onda.

El parámetro δ es la altura relativa de la onda y dice que tan significativo es la oscilación vertical de la onda respecto la profundidad. El parámetro μ es la profundidad relativa e indica hasta que profundidad llega a ser significativo el movimiento de la onda. O dice que tan dispersiva es la onda.

Otros dos parámetros son:

$$\frac{H}{gT^2} \quad y \quad \frac{h}{gT^2} \quad (\text{A.4})$$

Se puede utilizar el parámetro μ para clasificar las ondas:

$$\frac{h}{L} > \frac{1}{2} \quad \text{aguas profundas} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{1}{20} < \frac{h}{L} < \frac{1}{2} \quad \text{aguas intermedias} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{h}{L} < \frac{1}{20} \quad \text{aguas someras} \quad (\text{A.7})$$

Usando el parámetro kh , la clasificación resulta:

$$kh > \pi \quad \text{aguas profundas} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\pi}{10} < kh < \pi \quad \text{aguas intermedias} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\pi}{10} < kh \quad \text{aguas someras} \quad (\text{A.10})$$

Otro parámetro que es útil para caracterizar a las olas y saber la no linealidad de ellas es con el número de Ursell, el cual se deriva de la expansión de la onda Stokes de una serie de perturbaciones no lineales de ondas periódicas en el límite de longitud de onda larga de aguas poco profundas (cuando la longitud de onda es mucho mayor que la profundidad del agua). Este parámetro se define como:

$$U = \frac{H\lambda^2}{h^3} \quad (\text{A.11})$$

Las ecuaciones que se utilizan en teoría lineal se describen a continuación en las tablas A.1, A.2 y A.3.

Longitud de onda	$L = T\sqrt{gh}$
Celeridad	$C = \frac{L}{T} = \sqrt{gh}$
Celeridad de grupo	$C_g = C = \sqrt{gh}$
Velocidad de partículas en la horizontal	$u = a\sqrt{\frac{g}{h}}\cos(kx - \omega t)$
Velocidad de partículas en la vertical	$w = a\omega\left(1 + \frac{z}{h}\right)\text{sen}(kx - \omega t)$
Aceleración de partículas en la horizontal	$a_x = a\omega\sqrt{\frac{g}{h}}\text{sen}(kx - \omega t)$
Aceleración de partículas en la vertical	$a_z = -a\omega^2\left(1 + \frac{z}{h}\right)\cos(kx - \omega t)$
Desplazamiento de partículas en la horizontal	$\zeta = -a\omega\sqrt{\frac{g}{h}}\text{sen}(kx - \omega t)$
Desplazamiento de partículas en la vertical	$\xi = a\omega^2\left(1 + \frac{z}{h}\right)\cos(kx - \omega t)$
Presión total (hidrostática+dinámica)	$P = -\rho gz + \rho g\eta$
Flujo de energía	$E = ((\rho g H^2)/8)\sqrt{\frac{g}{h}}$

Tabla A.1: Ecuaciones de oleaje para aguas someras.

Longitud de onda	$L = \frac{gT^2}{2\pi}$
Celeridad	$C = \frac{gT}{2\pi}$
Celeridad de grupo	$C_g = \frac{C}{2}$
Velocidad de partículas en la horizontal	$u = a\omega e^{kx} \cos(kx - \omega t)$
Velocidad de partículas en la vertical	$w = a\omega e^{kx} \sen(kx - \omega t)$
Aceleración de partículas en la horizontal	$a_x = a\omega^2 e^{kx} \sen(kx - \omega t)$
Aceleración de partículas en la vertical	$a_z = -a\omega^2 e^{kx} \cos(kx - \omega t)$
Desplazamiento de partículas en la horizontal	$\zeta = -ae^{kx} \sen(kx - \omega t)$
Desplazamiento de partículas en la vertical	$\xi = ae^{kx} \cos(kx - \omega t)$
Presión total (hidrostática+dinámica)	$P = -\rho gz + \rho g \eta e^{kz}$
Flujo de energía	$E = ((\rho g H^2)/8) \frac{1}{2} C$

Tabla A.2: Ecuaciones de oleaje para aguas profundas.

Longitud de onda	$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kh)$
Celeridad	$C = \frac{L}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{gT}{2\pi} \tanh(kh)$
Celeridad de grupo	$C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\senh(2kh)}\right)$
Velocidad de partículas en la horizontal	$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{agk}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t)$
Velocidad de partículas en la vertical	$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{agk}{\omega} \frac{\senh k(h+z)}{\cosh(kh)} \sen(kx - \omega t)$
Aceleración de partículas en la horizontal	$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{agk}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \sen(kx - \omega t)$
Aceleración de partículas en la vertical	$a_z = -\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{agk}{\omega} \frac{\senh k(h+z)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t)$
Desplazamiento de partículas en la horizontal	$\zeta = \int u dt = -a \frac{gk}{\omega^2} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \sen(kx - \omega t)$
Desplazamiento de partículas en la vertical	$\xi = \int w dt = -a \frac{gk}{\omega^2} \frac{\senh k(h+z)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t)$
Presión total (hidrostática+dinámica)	$P = -\rho gz + \rho g \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t)$
Flujo de energía	$E = ((\rho g H^2)/8) \frac{\omega}{k} \left[1 + \frac{2kh}{\senh(2kh)}\right]$

Tabla A.3: Ecuaciones de oleaje para aguas intermedias.

Apéndice B

Procesos estocásticos y variables aleatorias

B.1. Variable aleatoria

La superficie libre es considerada como una variable aleatoria en cualquier lugar y en cualquier momento, por ejemplo: considérese que se coloca un sensor de nivel que registra la superficie libre en función del tiempo en la posición A dentro de un canal de oleaje. Si se denota como $\eta(t_1)$ al primer registro que se hace de la superficie libre después de generar oleaje con el sistema de palas del canal de olas, como $\eta(t_2)$ al segundo experimento y así sucesivamente, el resultado es una serie de variables aleatorias \underline{x} 's que no se pueden predecir si no se cuenta con su función de densidad de probabilidad $p(x)$, la cual se define como la probabilidad de que \underline{x} tenga un valor entre x y $x + dx$, matemáticamente se expresa como [Holthuijsen, 2007]:

$$Pr x < \underline{x} \leq x + dx = \int_x^{x+dx} p(x)dx \quad (B.1)$$

Esta probabilidad de \underline{x} es menor o igual que x (que es la probabilidad de no-excedencia, figura B.2) que es [Holthuijsen, 2007]:

$$Pr \underline{x} \leq x = \int_{-\infty}^{x+dx} p(x)dx = P(x) \quad (B.2)$$

Donde $P(x)$ es la función de distribución acumulada de \underline{x} . La función de densidad de probabilidad se puede obtener derivando esta distribución, es decir:

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx} \quad (B.3)$$

El valor de una variable aleatoria siempre es menor que infinito, por lo que el valor de la probabilidad del valor de x es menor que 1, entonces el máximo valor de la función de distribución $P(x)$ es 1 y el área de la superficie de la función de densidad de probabilidad es siempre 1, como se muestra en la siguiente ecuación [Holthuijsen, 2007]:

$$Pr \underline{x} \leq \infty = P(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad (B.4)$$

La probabilidad de no excedencia se denota como $x(P) = P^{-1}(x)$.

Al promedio de la variable \underline{x} , se denomina el valor esperado de \underline{x} y se define como:

$$Valor \text{ esperado de } x = E\{\underline{x}\} = \mu_x = \frac{m_1}{m_0} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx} \quad (B.5)$$

Donde $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$, entonces el valor esperado se reescribe como:

$$Valor \text{ esperado de } x = E\{\underline{x}\} = \mu_x = \frac{m_1}{m_0} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (B.6)$$

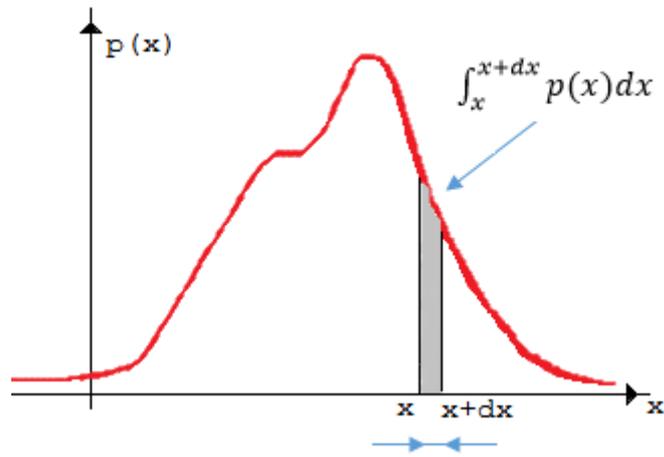


Figura B.1: Función de densidad de probabilidad $p(x)$ de la variable \underline{x} .

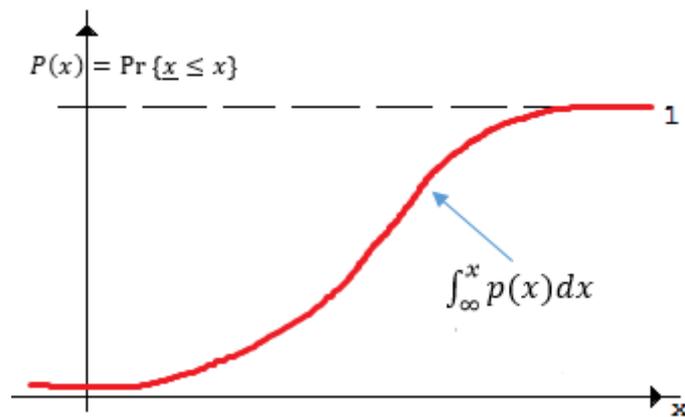


Figura B.2: Función de distribución acumulada $P(x)$ (probabilidad de no excedencia).

Donde m_0 se le llama momento cero a la media, el m_1 momento de orden uno a la media, el m_2 momento de orden dos o anchura de la función de probabilidad, el m_3 tercer momento o la asimetría o sesgo y el m_4 es el cuarto momento o la curtosis de la función. A la varianza de la distribución se denota como σ_x , y al cuadrado de la varianza es la desviación estándar de \underline{x}

$$\sigma_x^2 = E(\underline{x} - \mu_x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 p(x) dx = E\{\underline{x}^2\} - \mu_x^2 = m_2 - m_1^2 \quad (\text{B.7})$$

B.2. Estimaciones de la variable aleatoria

Cuando se quiere estimar la varianza o el promedio a partir de un conjunto de variables aleatorias \underline{x} discretas, sin usar funciones de probabilidad se hace de la siguiente manera:

$$\text{Promedio} = \mu_x \approx \langle \underline{x} \rangle := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{B.8})$$

$$\text{Varianza} := \sigma_x^2 \approx \langle (\underline{x} - \langle \underline{x} \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle \underline{x} \rangle)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle x_i \rangle^2 - \langle \underline{x} \rangle^2 \quad (\text{B.9})$$

Donde N es el número de muestras.

B.3. Caracterización de dos variables aleatorias

Sean $(\underline{x}, \underline{y})$ un par de variables aleatorias, su caracterización es con la función de probabilidad conjunta $p(x,y)$ la cual se define como:

$$Pr\{x < \underline{x} \leq x + dx, y < \underline{y} \leq y + dy\} = \int_x^{x+dx} \int_y^{y+dy} p(x, y) dy dx \quad (\text{B.10})$$

Cuando estas dos variables no están relacionadas entre sí es porque son independientes entre ellas y cuando están linealmente relacionadas se dice que están correlacionadas. Cabe aclarar que dos variables aleatorias pueden estar relacionadas pero no correlacionadas.

El grado de correlación se cuantifica con el coeficiente $\gamma_{x,y}$, que es la covarianza $C_{x,y}$ normalizada, que es:

$$\gamma_{x,y} = \frac{C_{x,y}}{(\sigma_x \sigma_y)} \text{ con } -1 \leq \gamma_{x,y} \leq 1 \quad (\text{B.11})$$

La covarianza se define como:

$$C_{x,y} = E\{(\underline{x} - \mu_x)(\underline{y} - \mu_y)\} \quad (\text{B.12})$$

B.4. Proceso Gaussiano estacionario

Un proceso estacionario Gaussiano es aquel en donde el promedio y las covarianzas de cada momento en el tiempo se requieren para la caracterización de las variables. Si el promedio de la variable es cero, la función de covarianza se escribe como:

$$C(\tau) = E\{x(t)x(t + \tau)\} \quad \text{si } \mu_x(t) = \mu_y(t) = 0 \quad (\text{B.13})$$

La función de autocovarianza para $\tau = 0$ es la varianza del proceso $E\{x^2(t)\} = C(0)$

B.5. Proceso ergódico

Si el promedio en el tiempo o en el espacio de un conjunto X de variables aleatorias es el mismo que el promedio de un subconjunto X_i contenido en X , se le llama proceso ergódico. La media y la varianza de un proceso ergódico se estima como:

$$\mu_x \approx \langle \underline{x}(t_i) \rangle = \frac{1}{D} \int_D \underline{x}(t) dt \quad (\text{B.14})$$

$$\sigma_x^2 \approx \langle [\underline{x}(t_i)]^2 \rangle = \frac{1}{D} \int_D [\underline{x}(t)]^2 dt \quad \text{si } \mu_x = 0 \quad (\text{B.15})$$

La función de auto-covarianza es:

$$C(\tau) \approx \langle x(t)x(t + \tau) \rangle = \frac{1}{D} \int_D [\underline{x}(t)\underline{x}(t + \tau)] dt \quad \text{si } \mu_x = 0 \quad (\text{B.16})$$

Donde D es la longitud del interval de duración de la muestra y $\langle \cdot \rangle$ es el promedio del conjunto de variables aleatorias.

La forma general del proceso ergódico de la función $f[\underline{x}(t_i)]$ es:

$$\langle f[\underline{x}(t_i)] \rangle = \frac{1}{D} \int_D f[\underline{x}(t)] dt \quad (\text{B.17})$$

Si un proceso es ergódico, entonces el proceso es estacionario, pero lo contrario no es verdad.

B.6. Función de autocorrelación para la superficie libre

La función de autocorrelación se define como el desplazamiento vertical que correlaciona el valor de la variable aleatoria \underline{x} en el tiempo t con el valor al tiempo $t + \tau$ y por lo tanto da una información de la correlación de la señal con ella misma para los diferentes valores de tiempo τ .

Tomando como variable aleatoria η , se define la función de autocorrelación como:

$$R_{\eta\eta}(\tau) = \langle \eta(t) \cdot \eta(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \eta(t) \cdot \eta(t + \tau) dt \right] \quad (\text{B.18})$$

La función de autocorrelación $R(\tau)$ de un proceso estocástico estacionario puede representarse como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\Phi(\sigma) \quad (\text{B.19})$$

Donde la función $\Phi(\sigma)$ es la llamada función de distribución espectral del proceso.

Si se cumple la condición de que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_{\eta\eta}| d\tau < \infty \quad (\text{B.20})$$

Entonces la función $R_{\eta\eta}(\tau)$ se representa con la integral de Fourier:

$$R_{\eta\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\eta\eta}(\sigma) e^{i\sigma\tau} d\sigma \quad (\text{B.21})$$

Donde:

$$\Phi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\sigma} S_{\eta\eta} d\sigma \quad (\text{B.22})$$

$$S(\sigma) = \frac{d\Phi(\sigma)}{d\sigma} \quad (\text{B.23})$$

Donde la función $S_{\eta\eta}$ es la función de densidad espectral del proceso $\eta(t)$ y es positiva $S_{\eta\eta}(\sigma) \geq 0$ para todo σ .

La función de autocorrelación está directamente relacionada con la función de densidad espectral del proceso $\eta(t)$ que es:

$$S_{\eta\eta}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta\eta}(\tau) e^{-i\sigma\tau} d\tau \quad (\text{B.24})$$

Si se considera solo la parte real de la función $\Phi(\sigma)$ se obtiene:

$$R_{\eta\eta} = \int_0^{\infty} S(\sigma) \cos\sigma\tau d\sigma \quad (\text{B.25})$$

$$S(\sigma) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_{\eta\eta}(\tau) \cos\sigma\tau d\tau \quad (\text{B.26})$$

Donde $S(\sigma)$ es la función de densidad espectral y está definida sólo en $\sigma \geq 0$ y su relación con $S_{\eta\eta}$ es:

$$S(\sigma) = 2S_{\eta\eta}(\sigma) \quad (\text{B.27})$$

Apéndice C

Serie de Fourier y transformada de Fourier

C.1. Serie de Fourier

Sea f una función $2T$ -periódica y suave a trozos tal que su representación en series de Fourier es:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \right] \quad (\text{C.1})$$

Donde los a_n y b_n son los coeficientes de Fourier del intervalo de $f(t)$ de $[-T, T]$ que están dados por sus siguientes fórmulas de Euler.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt \quad (\text{C.2})$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{C.3})$$

La serie de Fourier converge a $f(t)$ si f es continua en x y $\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$ también es continua.

Una función es suave a trozos cuando cumple el siguiente teorema:

Una función f , definida en el intervalo $[a, b]$, se dice que es suave a trozos si f y f' son continuas por partes en el intervalo $[a, b]$. Luego f es suave a trozos si:

- f es continua a trozos en $[a, b]$
- f' existe y es continua en (a, b) excepto en un posible y finito número de puntos c donde el $\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$ y $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$ existen.
- Además $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ existen.

C.2. Transformada de Fourier

Sea f es una función suave a trozos en cada intervalo finito y $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$, entonces f tiene la siguiente representación integral de Fourier:

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \sin(\omega t)] d\omega \quad (-\infty < t < \infty) \quad (\text{C.4})$$

Donde para toda $\omega \geq 0$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad (\text{C.5})$$

La integral de la ecuación C.4 converge a $f(t)$ si f es continua en t y $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ es continua también. Entonces la transformada de Fourier $\mathcal{F}[f(t)]$ de $f(t)$ se define como:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (-\infty < \omega < \infty) \quad (\text{C.6})$$

Y la transformada de Fourier inversa es:

$$F(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \quad (-\infty < t < \infty) \quad (\text{C.7})$$

Donde $\exp[i\omega t] = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$.

Literatura tomada de: [Asmar, 2000]

Apéndice D

Función de transferencia

Cuando se quiere relacionar dos variables aleatorias, una en términos de la otra, se puede establecer un sistema lineal entre las dos variables.

Considérese el siguiente sistema:

Una señal de excitación con entrada $x(t)$, que responde un salida $X(t)$: $x(t) \rightarrow X(t)$

Una señal de excitación con entrada $y(t)$, que responde un salida $Y(t)$: $y(t) \rightarrow Y(t)$

Si una combinación lineal de estas señales da una combinación lineal de las respuestas se tiene:

$$ax(t) + by(t) \rightarrow aX(t) + bY(t) \quad (\text{D.1})$$

Lo cual muestra que si se da una amplificación en la señal excitada, se da una amplificación en la señal de respuesta. Cabe aclarar que las señales excitadas son independientes, es decir la respuesta de excitación de $x(t)$ no se ve afectada por la respuesta de excitación de $y(t)$ y viceversa. Por ejemplo, la relación de una onda sinusoidal de la superficie libre (señal excitada $x(t)$) y su correspondiente sinusoidal de la presión del agua en la algún punto de ella (señal de respuesta $X(t)$) es una relación lineal, es decir, que si se duplica la amplitud de la onda, el resultado de la presión es el doble, independientemente de alguna otra señal excitada.

Otra característica es la constante del tiempo, cuando la señal excitada es un armónico con cierta frecuencia, la señal de respuesta también es un armónico, con la misma frecuencia.

$$X(t) = \hat{x} \sin(2\pi ft + \alpha_x) \rightarrow \text{Sistema lineal} \rightarrow X(t) = \hat{X} \sin(2\pi ft + \alpha_X) \quad (\text{D.2})$$

Donde la respuesta $X(t) = \hat{X} \sin(2\pi ft + \alpha_X)$ difiere de la señal de excitación $x(t) = \hat{x} \sin(2\pi ft + \alpha_x)$ solo en la amplitud y la fase. Para un sistema lineal, la respuesta puede ser descrita en función de la razón de las diferencias de las amplitudes y la fase, ya que generalmente dependen de la frecuencia de la señal excitada

$$R(f) = \frac{\hat{X}(f)}{\hat{x}(f)} \quad (\text{D.3})$$

Que es la función de respuesta de la amplitud (ecuación D.3)

$$R_\alpha(f) = \alpha_X(f) - \alpha_x(f) \quad (\text{D.4})$$

Que es la función de respuesta de la fase (ecuación D.4).

La respuesta del espectro $E_X(f)$ se obtiene como el producto de la señal del espectro excitada $E_x(f)$

y el cuadrado de la respuesta de amplitud $\hat{R}(f)$ (es al cuadrado, porque la varianza de la densidad espectral es el cuadrado de la amplitud)

$$E_X(f) = [\hat{R}(f)]^2 E_x(f) \quad (\text{D.5})$$

La ecuación D.5 es la función de respuesta del espectro.

Las dos funciones $\hat{R}(f)$ y R_α son llamadas las funciones de respuesta de la frecuencia (que son la función de la amplitud y de la fase respectivamente). Si la superficie libre es estacionaria y Gaussiana y el sistema es constante en el tiempo y lineal, la respuesta también es estacionaria, Gaussiana y además se caracteriza por su espectro $E_X(f)$ como la señal de excitación es caracterizada por su espectro $E_x(f)$. Si se requiere una función de respuesta en dos dimensiones la función de la amplitud se define de la misma manera como la función de respuesta de la amplitud de la frecuencia.

$$\hat{R}(f, \theta) = \frac{\hat{X}(f, \theta)}{\hat{x}(f, \theta)} \quad (\text{D.6})$$

Donde $\hat{R}(f, \theta)$ = es la función de respuesta de la frecuencia y de la dirección de la amplitud. Las amplitudes son las de la onda armónica excitada $\hat{x}(f, \theta)$ y la onda de respuesta $\hat{X}(f, \theta)$ respectivamente.

La respuesta del espectro se calcula como:

$$E_X(f, \theta) = [\hat{R}(f, \theta)]^2 E_x(f, \theta) \quad (\text{D.7})$$

Literatura tomada de: [Holthuijsen, 2007]