



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**APLICACIÓN DEL MÉTODO NUMÉRICO DEL
ELEMENTO FINITO A LA SOLUCIÓN DE LA
ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN EN GUÍAS
DE ONDA ÓPTICAS**

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO EN COMPUTACIÓN

P R E S E N T A :

DARÍO DEL SINAI RAMÍREZ GARCÉS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RAMÓN GUTIÉRREZ CASTREJÓN



CIUDAD UNIVERSITARIA, 2008

AGRADECIMIENTOS

Con admiración y agradecimiento a mis varios padres: Evita, Aurelio, Tino, abuelito Caye por su constante apoyo, enseñanzas y por infundirme los valores necesarios para ser una persona de bien, además de la paciencia y confianza que depositaron en mí. Por otro lado y especialmente quiero agradecer a mi abue Lucy, quien fue más que una madre para mí, una persona importantísima en mi vida, en mi formación y un pilar de apoyo en los momentos difíciles.

A mis padres biológicos Darío y Esperanza, por darme el gran regalo de existir.

A mi abuelita Esperanza, por su cariño, enseñanzas, regaños, apoyo y motivación.

A mis tíos Loncho y Pilla, por los momentos familiares que hemos vivido y por el apoyo que me han dado.

A mis hermanas Ana y Esperanza, por su cariño, oraciones y por todo el apoyo incondicional que me han mostrado durante este tiempo.

A Yiselin, por su apoyo constante, amistad, cariño y por todos los momentos excelentes que hemos pasado juntos.

Al Doctor Ramón Gutiérrez Castrejón, parte importante en mi formación académica, por la dirección de este trabajo, la paciencia, atención y confianza que puso en mí. MUCHAS GRACIAS.

A mis compañeros Alejandro, Abraham, Jaime, Enrique, por las muchas veces que me ayudaron y la amistad que me brindaron a lo largo de la carrera.

A mis primos Mario, Christian y César, por el apoyo y los momentos que hemos vivido durante nuestras vidas.

A mi comité: Dra. Celia Sánchez Pérez, Dr. Pablo Pérez Alcazar, Dr. Francisco García Ugalde, M.I. Adolfo Millán Nájera, por la revisión a este trabajo y por las aportaciones para enriquecerlo.

Al Dr. Alejandro Farah Simón, por su tiempo y la ayuda que me proporcionó en relación a los elementos finitos.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, a la Facultad de Ingeniería y al Instituto de Ingeniería, por permitirme alcanzar mis metas.

Al proyecto “*Análisis de la viabilidad de implementación física de Ethernet a 100 Gb/s usando AOS*”, del Programa a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica PAPIIT.

A mis amigos de toda la vida: Laura, Eder, Chucho, Rafa, Luis, Kory, Mina, Membrana, Victor, Cipa, Jhon, Mario, Gaby, por su amistad, con todo cariño y respeto. Y especialmente a Jesús Galván y Gabriel Navarrete, gracias por todo.

Índice general

1	Introducción	11
1.1	Introducción	12
1.2	Guías de onda ópticas dieléctricas	12
1.3	Funcionamiento de las guías de onda	14
1.4	Historia de las guías de onda	15
1.5	Ecuaciones de Maxwell	16
1.6	Ecuación de onda	17
1.7	Aportaciones de este trabajo	19
1.8	Referencias	21
2	Modos de propagación en las guías de onda	23
2.1	Introducción	24
2.2	Polarización de la luz	24
2.3	Modos de propagación en las guías de onda	25
2.4	Introducción a los métodos para el análisis de modos	27
2.4.1	Método de diferencias finitas	27
2.4.2	Método de la ecuación integral	28
2.4.3	Métodos basados en expansión de series	28
2.4.4	Métodos basados en separación de variables	29
2.4.5	Método <i>Beam Propagation</i>	29
2.4.6	Método del Elemento Finito	30
2.5	Referencias	32

3	Método numérico del elemento finito	34
3.1	Introducción	35
3.2	Análisis de guías de onda con el elemento finito	35
3.3	Desarrollo del método de elementos finitos para guías de onda ópticas	37
3.3.1	Formulación del método del elemento finito	38
3.3.1.1	Selección del tipo de elementos finitos	38
3.3.1.2	Elementos “orilla” triangulares	39
3.3.1.3	Discretización	42
3.4	Referencias	45
4	Software para la obtención de los modos de propagación en guías de onda	47
4.1	Introducción	48
4.2	Requerimientos de un programa de solución para guías de onda	49
4.3	Descripción del programa	50
4.3.1	Datos de entrada	52
4.3.2	Generación de malla de elementos finitos	53
4.3.3	Ensamble de la matriz global	57
4.3.4	Solución del problema de valores propios	59
4.3.5	Resultados	60
4.4	Referencias	61
5	Validación del programa	63
5.1	Introducción	64
5.2	Ejemplos numéricos	64
5.2.1	Guía de onda con aire en su interior	64
5.2.2	Guía de onda dieléctrica rectangular	65
5.2.3	<i>Buried waveguide</i>	69
5.2.4	Línea de transmisión “ <i>Microstrip</i> ”	71
5.3	Discusión de los ejemplos numéricos	75
5.4	Referencias	76

6	Conclusiones	77
6.1	Conclusiones generales	78
6.2	Trabajo a futuro	80

Índice de figuras

1.1	Secciones transversales de algunos tipos de guías de onda ópticas	14
1.2	Guía de onda óptica	15
2.1	Modo TE, TM	26
2.2	Clasificación de guías de onda	27
2.3	Distribución de algunos modos de propagación en guías de onda	31
3.1	Estructura general de una guía de onda dieléctrica	37
3.2	Función de forma	38
3.3	Funciones de forma de segundo orden	39
3.4	Funciones de interpolación de orden mezclado	39
3.5	Elemento <i>edge</i> triangular	40
4.1	Estructura básica del programa	51
4.2	Geometría de una guía de onda rectangular	52
4.3	Primer pantalla del programa para guías de onda rectangulares	53
4.4	Triangulación de Delaunay	54
4.5	Condición de Delaunay	55
4.6	Construcción de la malla de elementos finitos triangulares	56
4.7	Numeración de elementos y nodos	57

5.1	Guía de onda rectangular dieléctrica	66
5.2	Formulario de resultados del programa para las longitudes de onda analizadas	67
5.3	Constante de propagación en función de la longitud de onda calculada con el programa	67
5.4	Características de propagación de una guía de onda rectangular modo E_{11}^x ($n_1 = 1.05$, $n_2 = 1.0$)	68
5.5	Guía de onda enterrada	69
5.6	Dispersión del modo E_{11}^x en una guía de onda enterrada	70
5.7	Dispersión del modo E_{11}^y en una guía de onda enterrada	70
5.8	Línea de transmisión del tipo <i>microstrip</i>	71
5.9	Formulario de datos de entrada del programa	72
5.10	Malla de elementos finitos línea de transmisión <i>microstrip</i>	73
5.11	Características de propagación del primer modo de una línea de transmisión del tipo <i>microstrip</i>	74

Índice de tablas

1.1	Historia de las guías de onda	16
5.1	Comparación de valores analíticos con resultados del programa	65

RESUMEN

Durante la década pasada se dio un gran crecimiento en cuanto a las comunicaciones ópticas, en gran medida por la expansión de Internet. No sólo los sistemas de comunicaciones están mejorando su rendimiento y capacidad, sino también los sistemas opto-electrónicos, es por ello que su demanda de utilización aumenta día con día.

Dentro de la teoría electromagnética y la ingeniería de microondas, las estructuras de guías de onda son muy importantes, tanto de forma teórica como práctica. En la práctica, las guías de onda son componentes básicos en circuitos y redes ópticas, (en analogía, las guías de onda son para los sistemas ópticos lo que los cables conectores y alambres son para los circuitos eléctricos), es por ello que el análisis de estos dispositivos ha sido un tema de investigación muy importante en las últimas décadas.

En este trabajo de tesis, se muestra el desarrollo de una herramienta computacional que analiza los modos de propagación de la luz en las guías de onda ópticas mediante el uso de la técnica de análisis numérico conocida como Método del Elemento Finito. Para lograr lo anterior fue necesario un estudio profundo acerca de las generalidades de las guías de onda, su estructura, modos en que se propaga la luz a través de ellas, así como de los conceptos necesarios para su solución, tales como ecuaciones de Maxwell, condiciones de frontera, ecuación de onda. Por otro lado, se profundizó en el método numérico del elemento finito vectorial para dar solución al problema de eigen valores en una guía de onda óptica dieléctrica; se analizaron diversas formulaciones del método y en base a ello se optó por la utilización de elementos triangulares “orilla” para eliminar las soluciones espurias. Con todo lo anterior, se procedió a implementar un simulador computacional para modelar las características de propagación dentro de la guía de onda y encontrar el valor de las constantes de propagación asociadas a los modos que la guía soporta.

De igual forma se buscaron en diversas fuentes de literatura especializada del tema, ejemplos numéricos de varios investigadores reconocidos dentro del ámbito de las guías de onda, quienes utilizaron otros métodos para el análisis de modos u otras derivaciones del método del elemento finito; lo anterior nos sirvió para comprobar nuestros resultados y así validar el programa que se desarrolló en este trabajo de tesis.

ABSTRACT

During the past decade, the world has seen an explosive growth in optical communications, fueled in part by the rapid expansion of the Internet. Not only are optical communications systems constantly improving in their performance and capacity, but also opto-electronic systems; it is for that reason that its use increases everyday.

In electromagnetics and microwave engineering, waveguide structures are very important, both theoretically and practically. In applications, waveguides are basic components in circuits and optical networks, (the waveguide is to optics what the wire is to electrical circuits). The analysis of waveguide structures has been a very active research topic in the last decades.

The Finite Element Method will be applied to the wave equation solution, combining triangular edge elements; the resulting eigenvalue problem will be solved by a numerical iteration method in order to obtain the propagation constants for each propagation mode of light in the optical waveguide.

The thesis is divided in six chapters which show the development of the Finite Element Method, as well as the implementation of software for the analysis of propagation modes in waveguides, and later its validation according to published results in scientific articles.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción

El desarrollo y los múltiples avances que se han dado en algunos campos, como la ingeniería de comunicaciones mediante fibra óptica y circuitos integrados opto electrónicos, ha incrementado el interés y las expectativas acerca de las ondas guiadas de forma óptica, donde las guías de onda juegan el rol principal [1].

Las guías de onda para circuitos integrados ópticos y fibra óptica funcionan mediante un fenómeno que básicamente atrapa la luz y la propaga en alguna dirección; estudiar y entender completamente los principios del guiado óptico es muy importante para desarrollar nuevos sistemas de comunicaciones ópticos y dispositivos opto electrónicos, como son conmutadores o multiplexores. De igual forma, es de vital importancia comprender totalmente las características de propagación de la luz en las guías de onda y utilizarlas efectivamente en el diseño de este tipo de tecnología.

Es importante mencionar que existen diversos tipos de guías de onda como son: acústicas, electromagnéticas y ópticas [2]. En el presente trabajo se estudiarán éstas últimas y de forma concreta las guías de onda ópticas en dispositivos opto-electrónicos, ya que la tendencia actual es sustituir los circuitos de procesamiento electrónico por dispositivos completamente ópticos con el fin de optimizar en cuanto a tiempo, costo y potencia [3].

1.2 Guías de onda ópticas dieléctricas

Las guías de onda son componentes de dispositivos y sistemas ópticos esenciales en la opto-electrónica, ya sea como fibra óptica, amplificadores, sistemas de láseres o circuitos integrados ópticos, todos estos fabricados con guías de ondas de diferentes configuraciones y propiedades.

La tecnología y forma de fabricación de este tipo de dispositivos ha avanzado mucho en los últimos años, y gracias a esto, ahora existe interés por implementar con sistemas ópticos muchas funciones tradicionalmente realizadas por dispositivos electrónicos. Día a día se diseñan nuevos tipos de dispositivos ópticos. Este desarrollo combinado con el incremento en la demanda de servicios de telecomunicaciones más sofisticados propicia el desarrollo de métodos eficientes y exactos para el análisis de este tipo de sistemas.

Los materiales utilizados en la fabricación de este tipo de dispositivos incluyen entre otros [5] Arseniuro de Galio (GaAs), Fosfato de Indio (InP), Niobato de Litio (LiNbO_3), Tantalato de Litio (LiTaO_3), sílice (SiO_2), polímeros, materiales orgánicos, entre otros compuestos. Muchos de esos materiales son anisotrópicos, como LiNbO_3 , LiTaO_3 y la mayoría de los componentes orgánicos.

Las técnicas avanzadas de hoy en día, para la fabricación de este tipo de dispositivos, han dado como resultado una gran variedad de guías de onda de formas diversas. La Figura 1.1 muestra la sección transversal de algunas estructuras de guías de onda comunes.

La fabricación de prototipos requiere el empleo de procesos tecnológicos sofisticados y los requerimientos para su análisis son muy variados. En primer lugar, es necesario establecer cuántos modos soporta la estructura de la guía de onda; en segundo lugar, se debe conocer la distribución exacta de los campos para cada modo, esto es muy importante, por ejemplo, cuando se desea diseñar un dispositivo con una alta eficiencia en acoplamiento entre una guía de onda planar y una fibra óptica. En tercer lugar, es necesario conocer la constante de propagación de un modo en una guía de onda determinada.

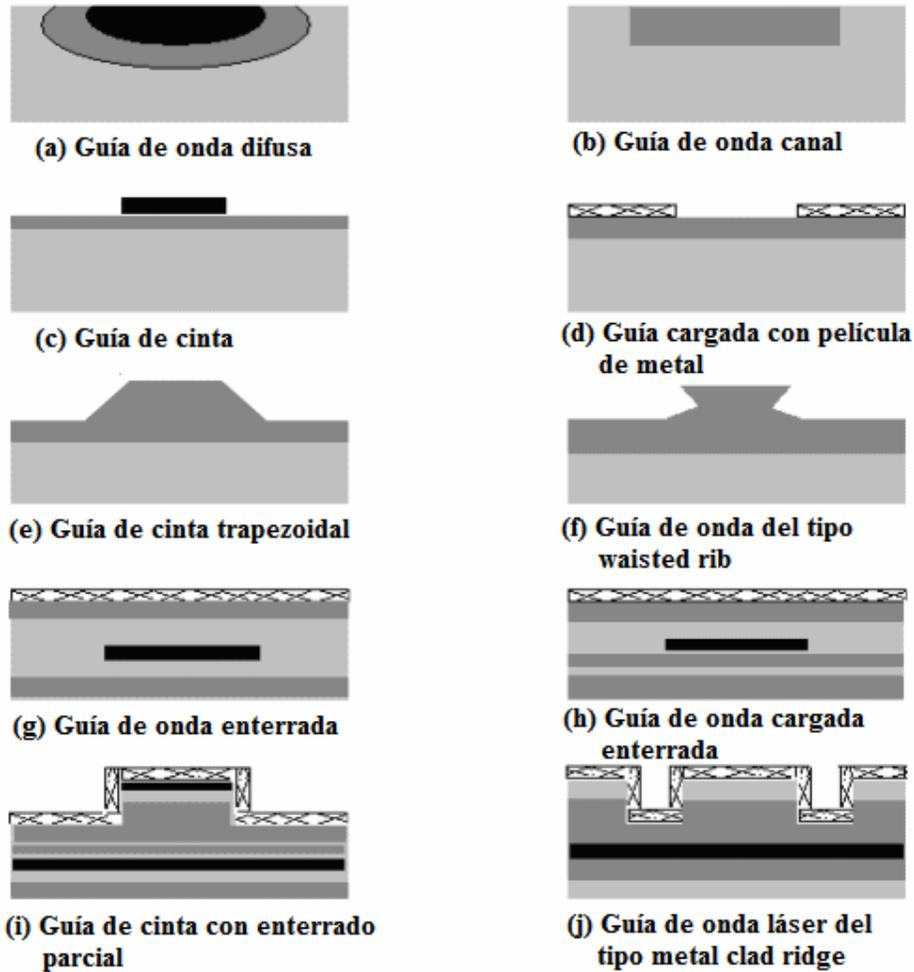


Figura 1.1. Secciones transversales de algunos tipos de guías de onda ópticas

1.3 Funcionamiento de las guías de onda

La luz es energía radiante, de naturaleza corpuscular y ondulatoria, donde se tiene un campo eléctrico y un campo magnético que se propagan juntos. Consiste en vibraciones transversales electromagnéticas y se propaga en línea recta en el espacio según diversas longitudes de onda [4].

Una guía de onda es una estructura que propaga ondas (electromagnéticas, luz u ondas de sonido) a lo largo de una sección transversal. Una guía de onda óptica propaga ondas electromagnéticas en el espectro óptico. Se utilizan en circuitos integrados ópticos o en medios de transmisión del mismo tipo. Estas clasifican de acuerdo a su geometría, estructura de sus modos, distribución del índice de refracción o material con el que son construidas. Las guías de onda usualmente están hechas por una

combinación apropiada de dieléctricos, como se muestra en la Figura 1.2. Distribuyendo un campo electromagnético sobre un área finita [5], por medio de una capa fina con un índice de refracción más alto que el sustrato o el revestimiento superior sobre la superficie del sustrato, la luz es confinada dentro de esta capa. En el caso de la guía de onda de la Figura 1.2, la luz se traslada al área central dentro de la capa fina, resultando la propagación de luz en la dirección z , con la potencia concentrada en una cierta parte de la sección transversal de la guía de onda. Esta guía es uniforme en la dirección de propagación, y es el tipo básico de guía de onda.

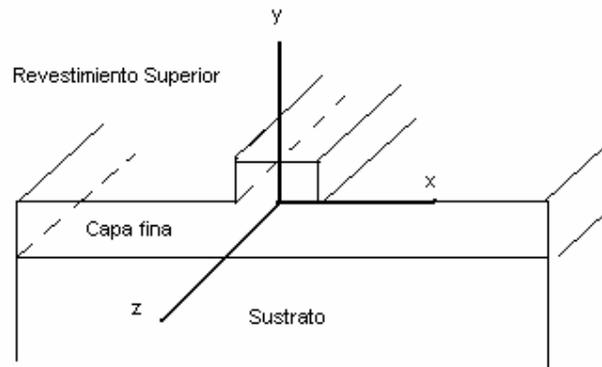


Figura 1.2 Guía de onda óptica

En las guías, los campos eléctrico y magnético están confinados en el espacio que se encuentra en su interior, de este modo no hay pérdidas de potencia por radiación, y las pérdidas en el dieléctrico son muy bajas, (especialmente si se considera el tamaño de tan sólo algunos milímetros de las guías de onda ópticas que se tratan en este trabajo). Este sistema evita que existan interferencias en el campo por otros objetos.

1.4 Historia de las guías de onda

Desde la instalación del primer sistema de telecomunicaciones que se basaba en el código Morse digital, se ha incrementado cada vez más el uso de guías de onda en el mundo. En la Tabla 1.1 se enlistan algunos de los eventos más importantes.

Año	Evento	Referencia
1844	Telégrafo	S. Morse
1957	Sputnik, despega de Baikonur, Kazajastán	
1962	Láser semiconductor	[6, 7, 8, 9]
1969	Primeros circuitos integrados ópticos	[10]
1970	Fibras ópticas con pérdida baja demostrada	[11]
1976	Primer fibra óptica comercial para sistemas de comunicaciones	
1977	Demostración de multiplexaje por división de longitud de onda	[12]
1988	Primer enlace trasatlántico con fibra óptica	
1988	Phased Array (PHASAR)	[13]

Tabla 1.1 Historia de guías de onda

Probablemente el mayor acontecimiento en la historia de las microondas fue el desarrollo de las guías de onda. Ya desde 1897, Lord Rayleigh (John William Strutt), probó matemáticamente que la propagación en guías de onda era posible, tanto para las guías de sección rectangular como circular [10]. Rayleigh también notó el conjunto infinito de modos del tipo TE o TM que era posible que se presentara y la existencia de una frecuencia de corte. Sir Oliver Lodge en 1894 notó que la radiación direccional era obtenida rodeando un oscilador que emitía chispas con un tubo metálico.

En 1936, George C. Southworth, trabajando en AT&T, demostró la propagación de luz a través de un tubo lleno de agua; después de este trabajo preliminar, se generó un interés para usar la guía de onda como una línea de transmisión con un amplio ancho de banda [10].

En la actualidad las guías de onda se utilizan comúnmente en circuitos integrados ópticos y en diodos láser. Éstos se usan como base de componentes ópticos en interferómetros Mach-Zehnder y multiplexores por división de longitud de onda [13].

1.5 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell predicen la existencia de distribuciones espaciales de campo que se propagan, lo que se conoce como ondas electromagnéticas [14].

La luz es un fenómeno electromagnético, representado por cuatro vectores de campo electromagnético, que están en función de la posición r [m] y el tiempo t [s]. Los cuatro vectores son: Campo eléctrico E [V/m], campo magnético H [A/m], densidad de flujo eléctrico D [C/m²] y densidad de flujo magnético B [Wb/m²], [15]. De acuerdo a las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times E = -\partial B / \partial t \quad (1.1)$$

$$\nabla \times H = \partial D / \partial t + J \quad (1.2)$$

Donde J [A/m²] es la densidad de corriente eléctrica. La ecuación para la conservación de la carga se obtiene mediante la densidad de carga ρ [C/m³] y J :

$$\nabla \cdot J = -\partial \rho / \partial t \quad (1.3)$$

De las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) y las ecuaciones vectoriales:

$$\nabla \cdot \nabla \times E = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \times H = 0$$

Obtenemos:

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (1.5)$$

Las ecuaciones (1.1), (1.2), (1.4) y (1.5) son las ecuaciones de Maxwell [16].

1.6 Ecuación de Onda

A partir de las ecuaciones de Maxwell es posible llegar a la formulación de la ecuación de onda, la cual es la base del análisis teórico de las guías de onda ópticas.

Consideremos luz con una frecuencia angular ω y una constante de propagación β , viajando a través de una guía de onda cuya estructura física e índice de refracción son constantes en la dirección de propagación z , (ver Figura 1.2). Si el campo eléctrico E y el campo magnético H se representan con los siguientes fasores [17]:

$$E(r, t) = \text{Re} \left\{ \tilde{E}(r_t) \exp[j(\omega t - \beta z)] \right\} \quad (1.6)$$

$$H(r, t) = \text{Re} \left\{ \tilde{H}(r_t) \exp[j(\omega t - \beta z)] \right\} \quad (1.7)$$

Entonces, de acuerdo a las ecuaciones anteriores podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell como [18]:

$$\nabla \times E = -j\omega\mu_0 H \quad (1.8)$$

$$\nabla \times H = j\omega\varepsilon_0 n^2 E \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (1.10)$$

$$\nabla \cdot E + \frac{\nabla_t(n^2)}{n^2} \cdot E = 0 \quad (1.11)$$

donde ε y μ denotan la permitividad y permeabilidad del medio, respectivamente. ε y μ se relacionan con sus respectivos valores en el vacío: $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ [F/m] y $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m] por $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$ y $\mu = \mu_0$. Entonces, para guías de onda del tipo dieléctrico tenemos [18]:

$$\nabla \times H = j\omega[\varepsilon]E = j\omega\varepsilon_0[\varepsilon_r]E \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot ([\varepsilon]E) = \varepsilon_0 \nabla \cdot ([\varepsilon_r]E) = 0 \quad (1.13)$$

donde $[\varepsilon]$ es el tensor diagonal de permitividad y $[\varepsilon_r]$ es el tensor diagonal de permitividad relativa. Las ecuaciones (1.12) y (1.13) en nuestro caso se utilizan en lugar de las expresiones (1.9) y (1.11) respectivamente [18].

Para las guías de onda con sección transversal arbitraria, la ecuación de onda tanto para el campo eléctrico como magnético, basada en las ecuaciones (1.8) y (1.12), es [19]:

$$\nabla \times ([p]\nabla \times \phi) - k_0^2 [q]\phi = 0 \quad (1.14)$$

con:

$$[p] = \begin{bmatrix} p_x & 0 & 0 \\ 0 & p_y & 0 \\ 0 & 0 & p_z \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

$$[q] = \begin{bmatrix} q_x & 0 & 0 \\ 0 & q_y & 0 \\ 0 & 0 & q_z \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

donde k_0 es el número de onda del vacío, ϕ representa el campo E o H , y las componentes $[p]$ y $[q]$ están dadas por:

$$\begin{aligned}
p_x &= p_y = p_z = 1, \\
q_x &= \varepsilon_{rx} = n_x^2, \\
q_y &= \varepsilon_{ry} = n_y^2, \\
q_z &= \varepsilon_{rz} = n_z^2, \quad \text{para } \phi=E
\end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}
q_x &= q_y = q_z = 1, \\
p_x &= 1/\varepsilon_{rx} = 1/n_x^2, \\
p_y &= 1/\varepsilon_{ry} = 1/n_y^2, \\
p_z &= 1/\varepsilon_{rz} = 1/n_z^2, \quad \text{para } \phi=H
\end{aligned} \tag{1.18}$$

ε_{rx} , ε_{ry} , ε_{rz} , son las permitividades relativas en las direcciones x , y , z , respectivamente, y n_x , n_y , n_z son los índices de refracción en las direcciones x , y , z , respectivamente. La ecuación (1.14) será el punto de partida para el desarrollo del método del elemento finito para las guías de onda ópticas.

1.7 Aportaciones de este trabajo

La realización de este trabajo de tesis propició el desarrollo de una pieza de software que permite resolver la ecuación de propagación de modos electromagnéticos (ecuación (1.14)), en el interior de dispositivos hechos de material semiconductor llamados guías de onda.

Para realizar lo antes descrito se estudiaron diversos métodos que se utilizan para analizar dispositivos semiconductores completamente ópticos entre los que se encuentran el Método de Propagación de Haz (*Beam Propagation Method*), el Método de las Diferencia Finitas, y el Método del Elemento Finito, entre otros que se mencionarán más adelante. Aun cuando cada método tiene sus ventajas y desventajas, el Método del Elemento Finito se eligió porque su naturaleza permite que se adapte muy bien a la implementación por computadora y puede programarse para manejar simultáneamente diversas geometrías complejas y condiciones de frontera.

Tradicionalmente, las soluciones del elemento finito se diseñaron para procesarse en computadoras especializadas muy potentes, pero con el avance vertiginoso en los sistemas de cómputo, hoy en día se puede realizar este tipo de análisis

incluso en una computadora personal, es por ello que en particular este método se ha convertido en una de las herramientas más poderosas y eficientes para la solución de problemas de guías de onda.

El programa resultado de este trabajo de tesis se validó de acuerdo con resultados publicados por connotados investigadores del tema de las guías de onda, y contribuirá para el análisis y evaluación del desempeño de estos dispositivos aún antes de fabricarlos, incrementando así las probabilidades de que funcionen exitosamente una vez construidos. El programa también representa una herramienta para analizar los casos límite. Desde un punto de vista didáctico, el software permitirá comprender más claramente la naturaleza de los procesos físicos que se llevan a cabo en los dispositivos estudiados.

Capítulo 2

Modos de propagación en las guías de onda

2.1 Introducción

Las ecuaciones de Maxwell constituyen un pilar básico de la teoría electromagnética. Las guías de onda se analizan resolviendo éstas ecuaciones con condiciones de frontera determinadas por las propiedades de los materiales. Estas ecuaciones tienen múltiples soluciones o modos [1].

Para comenzar con el estudio de los diferentes modos de las guías de onda, es necesario partir de algunos conceptos físicos importantes, ya que estos modos dependen de la longitud de onda operante y polarización, además de la forma y tamaño de la guía [2].

La importancia del estudio de los modos de propagación en las guías de onda en esta tesis, radica en que se busca determinar los modos del campo electromagnético que son susceptibles de propagarse a lo largo de una estructura de material semiconductor, permitiendo de esta manera, mediante un proceso de superposición, identificar el perfil transversal del haz que se propaga a lo largo de la estructura mencionada.

2.2 Polarización de la luz

La luz es una onda electromagnética tridimensional. La polarización de una onda transversal describe la dirección de oscilación en el plano perpendicular a la dirección de propagación. Las ondas longitudinales, al contrario que las transversales, no muestran polarización, porque su dirección de oscilación es la misma que la de propagación [3].

Para tener un mejor entendimiento acerca de la polarización, pensemos en la luz que viene del sol a las doce de la mañana. Ésta tiene el campo eléctrico vibrando en cualquier posición (de arriba abajo, de izquierda a derecha). Sin embargo, cuando se

refleja en una carretera muy caliente, el asfalto ha absorbido todos los campos que no son horizontales (izquierda derecha). A esto se le llama luz polarizada.

La polarización viene definida por la trayectoria que describe el vector de campo eléctrico (o magnético) cuando se observa en el sentido de propagación de la onda (la onda se aleja del observador). Así, se tiene [4]:

-Polarización lineal: las variaciones del vector de campo eléctrico están contenidas en una única dirección.

-Polarización circular: el vector de campo eléctrico describe una trayectoria circular. Si rota en el sentido de las agujas del reloj, la polarización es a derechas. Si lo hace en sentido contrario, la polarización es a izquierdas.

-Polarización elíptica: el vector de campo eléctrico describe una trayectoria elíptica. Al igual que antes, se puede distinguir entre polarización elíptica a derechas o a izquierdas [3].

Se debe tener en cuenta que un cambio en el sistema de referencia del observador no produce un cambio en la polarización. En realidad, tanto la polarización lineal como la circular son casos particulares de la elíptica [5].

2.3 Modos de propagación en las guías de onda

Las ondas electromagnéticas viajan a través de las guías por medio de diversas configuraciones las cuales se conocen como modos de propagación. Un modo es la forma en la que la energía se puede propagar a lo largo de la guía de onda y tiene la particularidad de que su distribución espacial no cambia conforme se propaga [6]. Se debe tener en cuenta que todos estos modos deben satisfacer ciertas condiciones de frontera para que se puedan resolver. En principio existe un número infinito de modos de propagación. Sin embargo, cada uno tiene su frecuencia de corte a partir de la cual existe. En otras palabras, a medida que se va aumentando la frecuencia de la onda propagada, (a partir de la frecuencia de corte), se irá incrementando el número de modos que la guía de onda soporta. De acuerdo a las ecuaciones de Maxwell, encontramos que una guía de onda soporta los siguientes modos de propagación [6]:

- a) $E_z = H_z = 0$, Éste es el modo electromagnético transversal, (TEM); en el cual ambos campos, (eléctrico y magnético), son transversales a la dirección de

propagación de la onda. Este modo tiene la característica de no poderse propagar en una guía de onda, debido a la estructura misma de ésta.

- b) $E_z = 0, H_z \neq 0$. Para este caso, las componentes restantes (E_x y E_y) del campo eléctrico son transversales a la dirección de propagación z . En esta condición se dice que los campos están en modos eléctricos transversales (TE), como se ve en la Figura 2.1a.

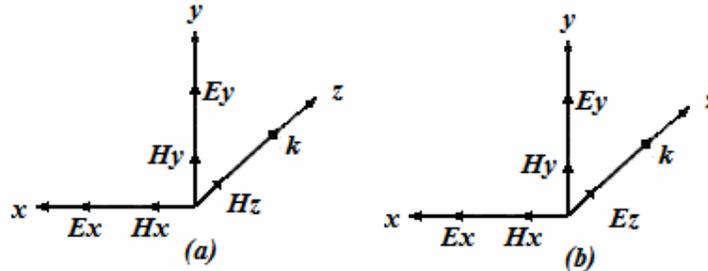


Fig. 2.1. (a) modo ET, $E_z = 0$.
(b) modo MT, $H_z = 0$

- c) $E_z \neq 0, H_z = 0$. En este caso, el campo H es transversal a la dirección de propagación de la onda. En consecuencia tenemos modos magnéticos transversales (TM), como se observa en la Figura 2.1b.
- d) $E_z \neq 0, H_z \neq 0$. Este es el caso en que tanto el campo E, como el H no son transversales a la dirección de propagación de la onda. Son llamados modos híbridos.

Para la designación de los modos se utilizará en este trabajo de tesis:

- $TE_{mn} (H_{mn})$ sí $E_z = 0$.
- $TM_{mn} (E_{mn})$ sí $H_z = 0$.

Esta convención se eligió porque es comúnmente utilizada en diversos trabajos publicados. (Los subíndices m, n son números enteros, el primero se refiere al número de medios ciclos de variación de campo a lo largo de la dimensión x , y el segundo se refiere al número de medios ciclos de variación de campo a lo largo de la dimensión y) [24].

Dentro de una guía de onda es posible la propagación de varios modos de ondas electromagnéticas. Cada modo tiene una frecuencia de corte asociada, de manera que si la frecuencia de la señal a transmitir es mayor que la frecuencia de corte, la energía electromagnética se transmitirá a través de la guía sin atenuación. En contraste, si la frecuencia de la señal es menor que la de corte, la energía se atenuará exponencialmente con la distancia, teniendo un valor extremadamente bajo a una distancia muy corta.

El modo dominante en la guía es aquel que tiene la frecuencia de corte más baja. Las dimensiones de la guía pueden escogerse de modo que para una señal dada, sólo el modo principal pueda transmitirse por ella [6].

2.4 Introducción a los Métodos para el Análisis de Modos

Para el análisis de los modos de propagación en una guía de onda con cualquier forma en su sección transversal, (ver Fig. 2.2), los valores de las constantes de propagación β y sus distribuciones de campo correspondientes se determinan mediante la solución de la ecuación de onda, la cual como se mencionó en el capítulo anterior, es la base de nuestro problema.

En esta sección se comentarán brevemente algunos de los métodos existentes para la solución de los modos de propagación en las guías de onda ópticas.

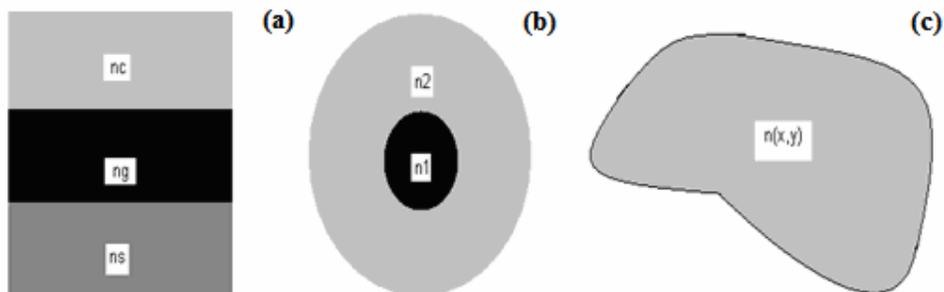


Figura 2.2 Clasificación de guías de onda
(a) Guía de onda planar
(b) Guía de onda axialmente simétrica
(c) Guía de onda con sección transversal arbitraria

2.4.1 Método de Diferencias Finitas

El método de Diferencias Finitas es uno de los métodos que se ha aplicado con mayor frecuencia a la solución de los modos de propagación en guías de onda [7].

Este método requiere de la división de la sección transversal de la guía de onda en sub regiones pequeñas. Además permite el modelado de medios no homogéneos y fronteras complejas. Las diferencias finitas se pueden aplicar a guías de onda del tipo anisotrópico, aunque generalmente se ha implementado para medios isotrópicos [8].

La forma en que se aplica este método es mediante el reemplazo de los diferenciales de la ecuación de onda por diferencias de los campos evaluados en los nodos de una malla rectangular de subdivisiones de la sección transversal (discretización de la guía). La formulación de este método se puede basar en el principio variacional [9]. De acuerdo a ello, se deriva un funcional para la ecuación de onda. Sus campos y las derivadas que aparecen en el funcional se aproximan por diferencias finitas. Este procedimiento utiliza elementos rectangulares de orden bajo y tiene la ventaja de generar una matriz simétrica, lo que permite resolver eficientemente el correspondiente problema de eigen valores.

2.4.2 Método de la Ecuación Integral

La ecuación de onda se puede transformar en una ecuación integral de acuerdo al Teorema de Green bidimensional. Resolver la ecuación integral es equivalente a resolver la ecuación de onda original [10].

Existen dos tipos de métodos de Ecuación Integral:

- Método de ecuación integral de dominio. [11].
- Método de ecuación integral de superficie. [12].

La mayor ventaja al utilizar este método es su exactitud en el modelado de fronteras abiertas.

2.4.3 Métodos basados en expansión de series

Existe un conjunto amplio de métodos basados en la expansión del campo en series de funciones ortogonales (funciones base). El método Point-Matching, el método de Galerkin y el método de Mode-Matching son los más populares [13].

En general, la convergencia de los métodos de expansión de series es sensible a la estructura de la guía de onda. Comparado con el método de Diferencias Finitas, los métodos de expansión en series son más eficientes y más sencillos en su implementación, particularmente para el análisis de guías de onda del tipo isotrópico.

2.4.4 Métodos basados en la separación de variables

Existen pocas estructuras de guías de onda que se pueden analizar exactamente por los métodos de separación de variables; para lograr lo anterior se requiere convertir un problema bidimensional en unidimensional y para ello se necesita un considerable esfuerzo. El problema con estos métodos es la dificultad que presenta la determinación de la exactitud en las soluciones. Los métodos de separación de variables son:

El método de Marcatili [14], (para una guía de onda rectangular), aproxima el campo en una guía de onda homogénea de núcleo rectangular, con los campos en dos guías de onda del tipo planar, que se obtienen extendiendo la altura y el ancho del núcleo rectangular al infinito. Esta aproximación es buena lejos de la región de corte de la guía de onda, pero sus resultados no son muy buenos cerca de la región de corte.

Método del Índice Efectivo [15] (para una guía de onda rectangular). La idea de este método es reemplazar el núcleo de la guía de onda en su equivalente homogéneo del tipo planar, con un perfil de índice efectivo que depende de la geometría de la guía original. El perfil de índice efectivo se puede determinar analíticamente resolviendo la ecuación de onda [16].

Además, existen otros métodos basados en la separación de variables como son el método feedback perturbation [17], el método weighted index [18], el método de momentos iterativos [19].

2.4.5 Método *Beam Propagation*

La idea principal de este método es definir una región de cálculo finita en la guía y resolver ahí la ecuación de onda. Lo anterior se logra dividiendo la sección transversal de la guía de onda con una malla de N elementos. Entonces, el *Beam Propagation Method* consiste en expresar las derivadas transversales en diferencias finitas y utilizar el esquema de *Crank-Nicholson* para integración en la dirección longitudinal.

Para obtener simulaciones precisas y reducir los recursos de cálculo necesarios, deben utilizarse condiciones de frontera adecuadas en los límites de la región de cálculo [20]. El objeto de estas condiciones de frontera es permitir que las ondas radiadas que forman parte de la solución del problema de propagación, puedan escapar libremente

hacia el exterior de la guía (región de cálculo), evitando así las reflexiones artificiales que se producen en la frontera.

Este método se ha utilizado desde la década de los setentas y presenta dificultades al analizar ondas propagadas en largas distancias, (comparadas con la longitud de onda), a través de las guías de onda.

El método *Beam Propagation* es ampliamente aceptado como el más poderoso en cuanto al análisis de guías de onda no homogéneas [10].

2.4.6 Método del Elemento Finito

El método del elemento finito tiene una larga historia dentro de la ingeniería mecánica [21], y se ha adaptado para la solución de un gran número de problemas electromagnéticos [22].

Este método comúnmente se formula mediante una expresión variacional, aunque también es posible definirlo utilizando el procedimiento de Galerkin. En general la aproximación variacional es preferible porque posee bases matemáticas más rigurosas en términos de la convergencia del método [23].

La idea básica del método del elemento finito es dividir la sección transversal de la guía de onda en un número de elementos, los cuales pueden ser de forma triangular, rectangular, etc. El campo dentro de cada elemento se expande en términos de un conjunto de polinomios base que contienen información de los valores del campo en los nodos de cada elemento. Para la conclusión del método, se debe buscar la solución de una ecuación matricial de eigenvalores formada con los valores del campo en los nodos de los elementos como variables incógnitas [10], y así se podrá encontrar las constantes de propagación asociadas a los modos, (eigen valores), y sus distribuciones de campo (Fig. 2.3).

Dentro de todos los métodos mencionados con anterioridad, el método numérico del Elemento Finito es el más adecuado para los propósitos de este trabajo de tesis, ya que es una herramienta poderosa y versátil, que puede proveer una alta exactitud en los resultados al procesar eficientemente problemas complicados de guías de onda, mientras su flexibilidad permite el tratamiento de diversas estructuras.

Su principal característica es la discretización del dominio en pequeños elementos. En esta división es donde radica la exactitud del método, ya que, incrementando el número de elementos en la sección transversal de la guía, (o en el área

de la guía donde se necesite una mayor densidad de elementos), se incrementa la precisión pero esto implica un mayor costo de cómputo [24]. En el siguiente capítulo se detallará el método de elementos finitos.

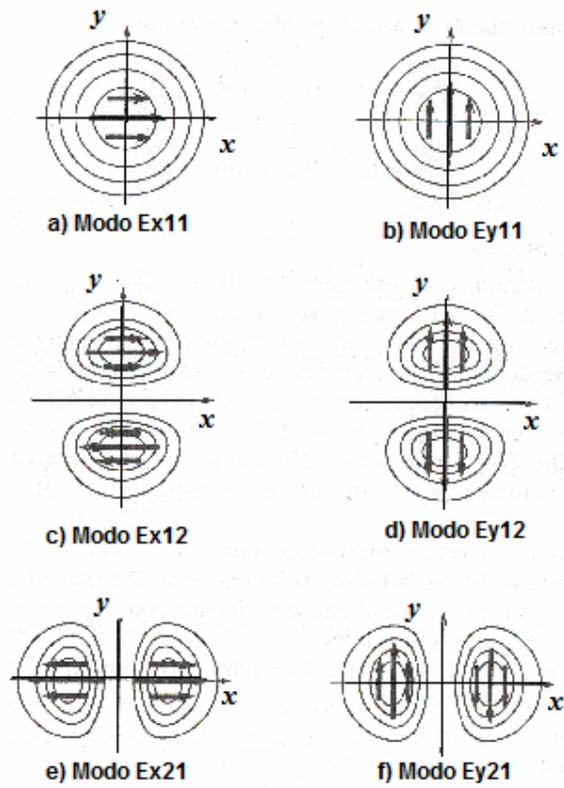


Fig. 2.3. Distribución de algunos modos de propagación en guías de onda.

Capítulo 3
Método numérico del
Elemento Finito

3.1 Introducción

Es importante conocer y saber aplicar métodos numéricos para la realización de diversos análisis en cualquier tipo de ingeniería, ya que no siempre es posible obtener soluciones analíticas de muchos problemas prácticos. Los métodos numéricos nos proveen soluciones aproximadas.

El método numérico del elemento finito se desarrolló originalmente para el análisis estructural, pero la naturaleza de la teoría en la que se basa hace posible su aplicación en otros campos de la ingeniería y de la física, desde la dinámica de fluidos hasta en problemas de electromagnetismo, por mencionar algunas aplicaciones.

Una de las características más importantes de este método numérico es que se adapta muy bien a la implementación por computadora y puede programarse para manejar sistemáticamente diversas geometrías complejas y condiciones de frontera [1]. Tradicionalmente, las soluciones del elemento finito se diseñaron para procesarse en computadoras especializadas muy potentes, pero con el avance vertiginoso en el cómputo, hoy en día se puede realizar este tipo de análisis incluso en una computadora personal. Por ejemplo, en la actualidad se pueden resolver problemas de eigen valores con matrices del orden de diez mil o más, en una PC.

3.2 Análisis de guías de onda con el elemento finito

El método del elemento finito se ha convertido en una de las herramientas más poderosas y eficientes para la solución de problemas de guías de onda electromagnéticas [2]. Sin embargo, la dificultad más seria que se ha presentado en la aplicación del método es la aparición de soluciones espurias (de naturaleza no física) que se mezclan con las soluciones reales.

Para la solución de problemas de guías de onda ópticas se requiere un análisis del vector de onda para una evaluación precisa de sus características de propagación. Existen diversos tipos de métodos de elemento finito para el análisis del vector de onda, dependiendo de cuáles componentes del campo electromagnético se formulan [3]:

- 1 Método del elemento finito utilizando componentes longitudinales del campo electromagnético.
- 2 Método del elemento finito utilizando las tres componentes del campo magnético.
- 3 Método del elemento finito utilizando las tres componentes del campo eléctrico.
- 4 Método del elemento finito utilizando componentes transversales del campo electromagnético.
- 5 Método del elemento finito utilizando componentes transversales del campo magnético.
- 6 Método del elemento finito utilizando componentes transversales del campo eléctrico.
- 7 Método del elemento finito utilizando componentes transversales del campo eléctrico y componentes longitudinales del campo magnético.
- 8 Método del elemento finito utilizando componentes transversales del campo magnético y componentes longitudinales del campo eléctrico.
- 9 Método del elemento finito utilizando las seis componentes del campo electromagnético.

Como se mencionó con anterioridad, en el análisis del vector de onda utilizando el método del elemento finito, se generan soluciones espurias, las cuales son un obstáculo muy serio, es por ello que es importante la selección del método adecuado para obtener los mejores resultados [4].

En esta tesis se plantea el método del elemento finito utilizando ya sean tres componentes del campo magnético o tres componentes del campo eléctrico. Para eliminar las soluciones espurias, se utilizarán elementos tipo “orilla”; en esta aproximación, los parámetros de los nodos no están limitados al campo magnético como en la formulación de tres componentes convencional para problemas de guías de onda dieléctricas [5]. La ecuación de eigen valores resultante, involucrará únicamente las

variables de las orillas en el plano transversal, y nos proveerá una solución directa para la constante de propagación.

3.3 Desarrollo del Método de Elementos Finitos para Guías Onda ópticas

Para evaluar rigurosamente las características de propagación en guías de onda ópticas, con sección transversal arbitraria (Fig. 3.1), es necesario un análisis de onda del tipo vectorial.

Para iniciar el desarrollo del método, consideraremos una guía de onda dieléctrica con un tensor diagonal de permitividad, y asumiremos que el campo electromagnético en la guía de onda tiene una variación $\exp [j(\omega t - \beta z)]$, donde t es el tiempo, z es la dirección de propagación, ω es la frecuencia angular y β es la constante de propagación en la dirección z [19], que deseamos calcular.

En el capítulo 1, de las ecuaciones de Maxwell se obtuvo la ecuación de onda vectorial (1.14), junto con (1.15), (1.16), (1.17) y (1.18). De acuerdo al método variacional, el funcional para la ecuación (1.14) está dado por [6], [20], [22]:

$$F = \iint_{\Omega} [(\nabla \times \phi)^* \cdot ([p] \nabla \times \phi) - k_0^2 [q] \phi^* \cdot \phi] dx dy \quad (3.1)$$

donde Ω es la sección transversal de la guía de onda y el asterisco representa el complejo conjugado.

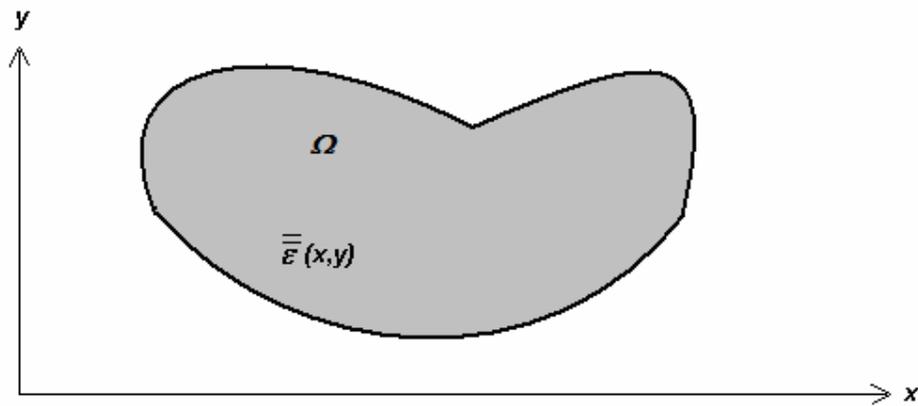


Figura 3.1 Estructura general de una guía de onda dieléctrica. La frontera puede estar formada por paredes perfectas magnéticas y eléctricas y secciones extendiéndose al infinito

3.3.1 Formulación del Método del Elemento Finito

3.3.1.1 Selección del tipo de elementos finitos

La forma de los elementos y la selección de las funciones de forma que serán utilizadas en el proceso de interpolación, dependen de la flexibilidad de la implementación por computadora. Se puede dividir una región en cualquier tipo de forma poligonal (triangular, cuadrilateral, etc.) [18].

Los elementos triangulares con funciones de forma de primer orden, como se muestra en la Figura 3.2, son los más simples de utilizar. La forma triangular nos provee flexibilidad en la subdivisión de regiones de forma arbitraria de dos dimensiones [16]. Otra ventaja al utilizar triángulos es que los métodos para la subdivisión de una región en una malla de triángulos están más desarrollados que para otros tipos de elementos.

La distribución de los nodos sobre la región de interés es un factor importante en la eficiencia del método del elemento finito [23]. La máxima eficiencia en el uso de recursos computacionales se logra con el uso de una malla irregular donde los nodos se distribuyen de tal forma que minimizan el error para un número dado de elementos (o nodos).

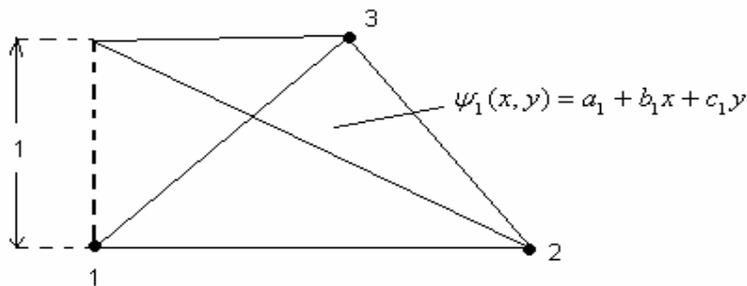


Figura 3.2. Función de forma Ψ_1 correspondiente al nodo 1 en un elemento triangular de primer orden en el plano x-y. las funciones Ψ_2 y Ψ_3 se obtienen de forma similar.

Si se utilizan elementos triangulares con funciones de interpolación de segundo orden, como se muestra en la Figura 3.3, esto nos dará una mayor exactitud que en el caso de primer orden para el mismo número total de nodos [11 - 15]. Lo anterior dará como resultado un problema matricial de eigen valor con menor dispersión [17]. También se pueden adoptar elementos de orden mezclado (Figura 3.4), utilizando funciones de forma de segundo orden sólo en aquellos nodos en las fronteras del

triángulo donde se requiere el cálculo de una integral de línea, esto es, en interfaces materiales y en algunos casos en paredes eléctricas (cuando se trata de conductores) [17]. Las funciones de forma de primer orden se pueden utilizar en cualquier nodo que no tenga la condición antes mencionada.

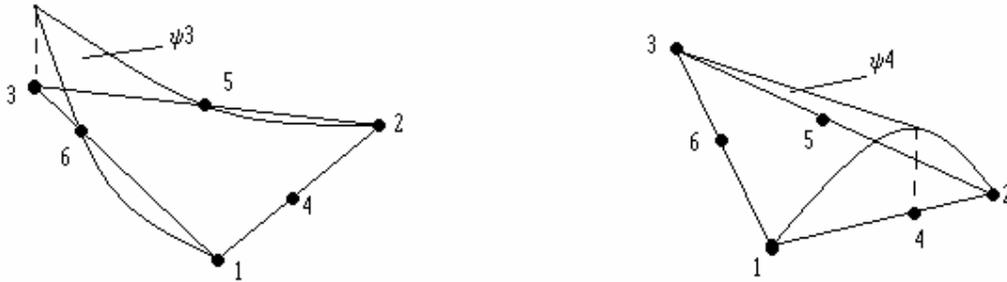


Figura 3.3. Funciones de forma de segundo orden

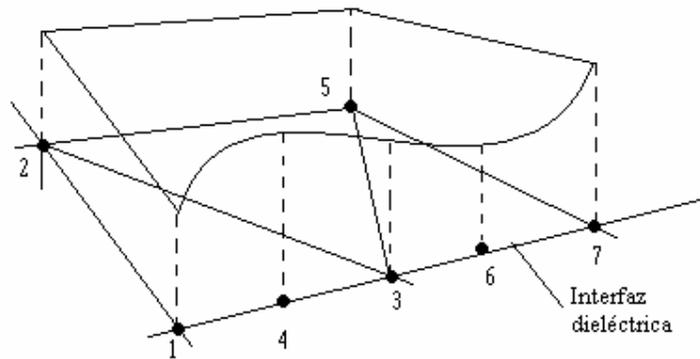


Figura 3.4 Funciones de interpolación de orden mezclado en elementos adyacentes a una interfaz dieléctrica

Los campos electromagnéticos tienen que ser tangencialmente continuos a lo largo de las interfaces de los materiales [7-10]. Hano [7] ha desarrollado el Método del Elemento Finito con elementos rectangulares del tipo orilla para resolver problemas de guías de onda no homogéneas. Por otro lado, Kikuchi [11] utilizó elementos triangulares del tipo orilla para analizar guías de onda de formas arbitrarias, pero sólo homogéneas. En esta tesis se aplicarán elementos triangulares del tipo orilla [11].

3.3.1.2 Elementos “Orilla” Triangulares

Un elemento triangular del tipo orilla, consiste en tres nodos correspondientes a las esquinas y tres nodos correspondientes a los lados [5], como se muestra en la Figura

3.5. Los nodos de las esquinas (1 a 3) son para calcular la componente axial ϕ_z (E_z o H_z), mientras que los nodos de los lados (4 a 6) son para la componente tangencial ϕ_t (E_t o H_t).

La componente axial ϕ_z se aproxima por el siguiente polinomio de primer orden [5]:

$$\phi_z = j \{N(x, y)\}^T \{\phi_z\}_e = j \{N\}^T \{\phi_z\}_e \quad (3.2)$$

con:

$$\{N\} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde $\{\phi_z\}_e$ es el vector del campo axial de los nodos para cada elemento e , $\{N\}$ es el vector ordinario de función de forma para elementos lineales de forma triangular, L_k 's ($k = 1, 2, 3$) son las coordenadas del área, y A_e es el área del elemento; los coeficientes a_k , b_k , c_k están dados por [5]:

$$2A_e = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

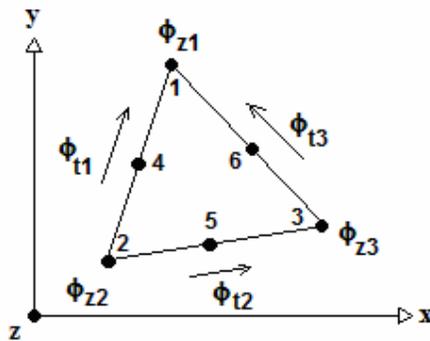


Fig. 3.5 Elemento orilla triangular

$$a_k = x_l y_m - x_m y_l \quad (3.5)$$

$$b_k = y_l - y_m \quad (3.6)$$

$$c_k = x_m - x_l \quad (3.7)$$

donde x_k, y_k ($k = 1, 2, 3$) son las coordenadas cartesianas de los puntos 1 a 3 de las esquinas del triángulo, y los subíndices k, l, m aumentan progresivamente de tres en tres cíclicamente de acuerdo a los tres vértices del triángulo.

Las componentes transversales ϕ_x (E_x o H_x) y ϕ_y (E_y o H_y) se aproximan por medio de una función lineal de y y x , respectivamente [5]:

$$\phi_x = \{U(y)\}^T \{\phi_t\}_e = \{U\}^T \{\phi_t\}_e \quad (3.8)$$

$$\phi_y = \{V(x)\}^T \{\phi_t\}_e = \{V\}^T \{\phi_t\}_e \quad (3.9)$$

con:

$$\{U\} = \begin{bmatrix} at_1 + ct_1 y \\ at_2 + ct_2 y \\ at_3 + ct_3 y \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\{V\} = \begin{bmatrix} bt_1 + ct_1 x \\ bt_2 + ct_2 x \\ bt_3 + ct_3 x \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

donde $\{\phi_t\}_e$ son las variables orilla en el plano transversal para cada elemento. $\{U\}$ y $\{V\}$ son los vectores de funciones de forma para los elementos “orilla” triangulares, y los coeficientes at_k, bt_k, ct_k , están dados por [5]:

$$at_k = [(y_{m+3} \cos \theta_{m+3} - x_{m+3} \text{sen} \theta_{m+3}) \text{sen} \theta_{i+3} - (y_{i+3} \cos \theta_{i+3} - x_{i+3} \text{sen} \theta_{i+3}) \text{sen} \theta_{m+3}] / \Delta \quad (3.12)$$

$$bt_k = [(y_{i+3} \cos \theta_{i+3} - x_{i+3} \text{sen} \theta_{i+3}) \cos \theta_{m+3} - (y_{m+3} \cos \theta_{m+3} - x_{m+3} \text{sen} \theta_{m+3}) \cos \theta_{i+3}] / \Delta \quad (3.13)$$

$$ct_k = (\cos \theta_{i+3} - \text{sen} \theta_{m+3} - \cos \theta_{m+3} \text{sen} \theta_{i+3}) / \Delta \quad (3.12)$$

con:

$$0 \leq \theta_{k+3} = \tan^{-1} \{(y_k - y_i) / (x_k - x_i)\} < \pi \quad (3.13)$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^3 (y_{k+3} \cos \theta_{k+3} - x_{k+3} \text{sen} \theta_{k+3}) - (\cos \theta_{i+3} \text{sen} \theta_{m+3} - \cos \theta_{m+3} \text{sen} \theta_{i+3}) \quad (3.14)$$

aquí, x_{k+3} , y_{k+3} ($k = 1, 2, 3$), son las coordenadas cartesianas de los nodos 4 a 6 de los lados del triángulo.

La componente tangencial, $\phi_t = \phi_x \cos \theta + \phi_y \text{sen} \theta$, es continua a lo largo de las fronteras entre los elementos y es constante en cada lado de los triángulos [21].

3.3.1.3 Discretización

Dividiendo la sección transversal de la guía de onda en un cierto número de elementos orilla (generación de malla), expandimos las componentes transversales ϕ_x , ϕ_y y la componente axial ϕ_z en cada elemento [5]:

$$\phi = [N]^T \{\phi\}_\varepsilon \quad (3.15)$$

con:

$$\{\phi\}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \{\phi_t\}_\varepsilon \\ \{\phi_z\}_\varepsilon \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \{U\} \{V\} \{0\} \\ \{0\} \{0\} j \{N\} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

donde $\{0\}$ es el vector nulo, $\{U\}$ y $\{V\}$, se definieron en el punto anterior.

Sustituyendo (3.15) en el funcional (3.1), de acuerdo al principio variacional obtendremos el siguiente problema de eigen valor [5]:

$$[K] \{\phi\} - k_0^2 [M] \{\phi\} = \{0\} \quad (3.18)$$

con:

$$\begin{aligned} [K] &= \begin{bmatrix} [K_{tt}] & [K_{tz}] \\ [K_{zt}] & [K_{zz}] \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\varepsilon} \iint_{\varepsilon} [B]^* [p] [B]^T dx dy \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
[M] &= \begin{bmatrix} [M_{tt}] & [0] \\ [0] & [M_{zz}] \end{bmatrix} \\
&= \sum_{\xi} \iint_{\xi} [N]^* [q] [N]^T dx dy \quad (3.20)
\end{aligned}$$

y

$$[B] = \begin{bmatrix} j\beta \{V\} & -j\beta \{U\} & -\{U_y\} + \{V_x\} \\ j\{N_y\} & -j\{N_x\} & \{0\} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

donde $\{\phi\}$ es el vector global de campo y las sub matrices de $[K]$ y $[M]$ están dadas por [5]:

$$[k_{tt}] = \sum_{\xi} \iint_{\xi} [p_x \beta^2 \{V\} \{V\}^T + p_y \beta^2 \{U\} \{U\}^T + 4p_z \{U_y\} \{U_y\}^T] dx dy \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned}
[k_{tz}] &= [k_{zt}]^T \\
&= \sum_{\xi} \iint_{\xi} [p_x \beta \{V\} \{N_y\}^T + p_y \beta \{U\} \{N_x\}^T] dx dy \quad (3.22b)
\end{aligned}$$

$$[k_{zz}] = \sum_{\xi} \iint_{\xi} [p_x \{N_y\} \{N_y\}^T + p_y \{N_x\} \{N_x\}^T] dx dy \quad (3.22c)$$

$$[M_{tt}] = \sum_{\xi} \iint_{\xi} [q_x \{U\} \{U\}^T + q_y \{V\} \{V\}^T] dx dy \quad (3.23a)$$

$$[M_{zz}] = \sum_{\xi} \iint_{\xi} q_z \{N\} \{N\}^T dx dy \quad (3.23b)$$

aquí, $\{N_x\} \equiv \partial\{N\}/\partial x$, $\{N_y\} \equiv \partial\{N\}/\partial y$, $\{U_y\} \equiv d\{U\}/dy$, y $\{V_x\} \equiv d\{V\}/dx$. La ecuación (3.18) se puede escribir como [5]:

$$[k_{tt}]\{\phi_t\} - \beta[k_{tz}]\{\phi_z\} - \beta^2[M_{tt}]\{\phi_t\} = \{0\} \quad (3.24a)$$

$$-\beta[k_{zt}]\{\phi_t\} + [k_{zz}]\{\phi_z\} = \{0\} \quad (3.24b)$$

con:

$$[k_{tt}] = \sum_{\xi} \iint_{\xi} [q_x k_0^2 \{U\} \{U\}^T + q_y k_0^2 \{V\} \{V\}^T - 4p_z \{U_y\} \{U_y\}^T] dx dy \quad (3.25a)$$

$$\begin{aligned}
[k_{zz}] &= [k_{zz}]^T \\
&= \sum_{\xi} \iint_{\xi} [p_x \{V\} \{N_y\}^T + p_y \{U\} \{N_x\}^T] dx dy \quad (3.25b)
\end{aligned}$$

$$[k_{zz}] = \sum_{\xi} \iint_{\xi} [q_z k_0^2 \{N\} \{N\}^T - p_x \{N_y\} \{N_y\}^T - p_y \{N_x\} \{N_x\}^T] dx dy \quad (3.25c)$$

$$[M_{zz}] = \sum_{\xi} \iint_{\xi} [p_x \{V\} \{V\}^T + p_y \{U\} \{U\}^T] dx dy \quad (3.26)$$

Las sub matrices (3.25) y (3.26) son equivalentes a (3.22) y (3.23), (en nuestro caso utilizaremos (3.25) y (3.26) puesto que no requieren conocer la constante de propagación β). Sustituyendo (3.24b) en (3.24a), obtendremos nuestra ecuación final de eigen valor (3.27), la cual resolveremos para obtener las constantes de propagación β y las distribuciones de los campos en las guías de onda [5].

$$[k_{zz}] \{\phi_t\} - \beta^2 [\tilde{M}_{zz}] \{\phi_t\} = \{0\} \quad (3.27)$$

con:

$$[\tilde{M}_{zz}] = [M_{zz}] + [k_{zz}] [k_{zz}]^{-1} [k_{zz}] \quad (3.28)$$

La ecuación (3.27) nos dará una solución directa para la constante de propagación y la distribución correspondiente del campo; esta ecuación involucra únicamente las variables orilla en el plano transversal $\{\phi_t\}$. Es importante mencionar que la solución del problema de eigen valor requerirá un grado de dificultad importante, ya que se necesitará de inversión de matrices y las matrices no serán del tipo *sparse*.

En el siguiente capítulo se tratará la implementación computacional de la solución de los modos de guías de onda.

Capítulo 4
Software para la obtención de
los modos de propagación en
guías de onda

4.1 Introducción

En este capítulo se presentará la implementación de software para la obtención de los modos de propagación en guías de onda dieléctricas.

El cómputo en problemas electromagnéticos es una herramienta esencial en la tecnología de microondas; y se han propuesto diversos métodos numéricos desde su nacimiento [1]. El método del elemento finito es un método numérico que se ha convertido en uno de los más importantes y prácticos para los ingenieros y científicos; ha servido en la solución de problemas mecánicos [2, 3], electromagnéticos [4, 5, 6], y muchos otros de índole física y matemática.

Existen diversos programas comerciales basados en el método del elemento finito, los cuales son herramientas importantes en industrias y en la investigación.

Se ha alcanzado un gran progreso en la implementación del método gracias al avance vertiginoso de los sistemas de cómputo, siendo una de las consecuencias de este avance tecnológico la incorporación de rutinas matemáticas más eficientes para la solución de problemas de elementos finitos de gran escala o dificultad; de igual forma se ha logrado modelar con mucha exactitud estructuras muy complejas. Para lograr lo anterior, existe una tendencia en el mercado donde se han incorporado los programas de Elementos Finitos en los programas de CAD (Computer Aided Engineering) o viceversa [7]; ya que al combinar las ventajas de MEF (Método del Elemento Finito) y del CAD, se provee a los ingenieros e investigadores de una herramienta de cálculo muy poderosa.

Estas tecnologías siguen evolucionando continuamente, permitiendo que el uso de estos programas sea cada vez más sencillo e intuitivo.

En este trabajo de tesis se optó por la implementación de un programa para la solución de los modos de propagación de la luz por medio del elemento finito debido a

su valor didáctico y porque nos permite disponer de un código abierto al cual le podemos realizar modificaciones y adecuaciones con facilidad, además de que permite incorporarle mejoras tanto técnicas como de método. Más aún, para la solución de los problemas que requerimos no basta entender un software comercial a nivel usuario, sino tener plena conciencia de los alcances y aplicaciones del método, lo cual sólo se logra mediante su implementación. Además, en un futuro se requiere ligar el software con otros programas a manera de subrutina y lo anterior no es posible con un programa comercial.

De igual forma, se eligió realizar la implementación en el lenguaje de programación C# porque es un lenguaje de programación orientado a objetos que fue diseñado para combinar el control de lenguajes de bajo nivel como C y la velocidad de programación de lenguajes de alto nivel como Visual Basic [8]. Es difícil encontrar en la actualidad algún software de elementos finitos para guías de onda de código abierto o no comercial. La mayoría de los investigadores en el tema de las guías de onda, simulan los modos mediante programas en Matlab o C por medio de otros métodos como Diferencias Finitas o Índice Efectivo, que tienen una mayor simplicidad a la hora de programar; es por ello que decidimos implementar en C#, ya que no hay programas de este tipo que no sean comerciales para ambiente Windows (fue el sistema operativo requerido en este trabajo de tesis) y es un lenguaje que minimiza los tiempos de desarrollo ya que la implementación de formularios es directa a diferencia de C++ u otros lenguajes, y se puede lograr una interfaz de usuario mejor y sencilla que en Matlab, C, etc.

A continuación se verán las consideraciones necesarias para la formulación y diseño del software para solución de guías de onda dieléctricas.

4.2 Requerimientos de un Programa de solución para guías de onda

La consideración más importante a la hora de implementar un software para el análisis de modos en guías de onda, tiene que ver con qué tipo de formulación se va a elegir; la decisión depende de los requerimientos del usuario. En el capítulo anterior se explicó que utilizaremos una formulación con elementos “orilla”, ya que se eliminan las soluciones espurias de forma directa; de igual forma es importante mencionar que existen otras formulaciones como el Método utilizando el vector completo de campo

magnético con elementos triangulares simples [9], [10], el cual es el más utilizado y muy práctico para un rango amplio de problemas complicados. Se ha utilizado para analizar estructuras de guías de onda, ondas milimétricas, regiones ópticas de longitud de onda y recientemente se ha usado en paquetes de CAD para opto-electrónica [11]. El problema más serio con respecto a esta formulación, es la aparición de soluciones espurias; para solucionar esto, se deben utilizar algunas herramientas como el método “*Penalty Function*” [11], [12], [13], [14], pero con esta técnica aparece una constante llamada “el coeficiente *penalty*” cuya magnitud influye en la exactitud de la solución.

Recientemente se han desarrollado otros tipos de formulaciones; pero cada uno tiene sus inconvenientes, por ejemplo, el uso de un gran número de componentes de campo [15], [16], la consideración de campos adjuntos [17], o la necesidad de estimar la integral de línea en la expresión variacional [18]; fue por ello que se optó por la utilización de elementos “orilla”.

Ciertamente el requerimiento más importante es que el programa sea rápido y eficiente, pero con cualquier programa para elementos finitos existe un “compromiso” entre el tiempo de procesamiento y la exactitud de los resultados.

A continuación se presenta una lista de prioridades con las que debe contar un programa para el análisis de los modos de propagación de las guías de onda ópticas.

- El programa no debe tener como resultado modos espurios.
- Las matrices resultantes no necesariamente deben ser del tipo *sparse* aunque es deseable.
- El programa debe encontrar las constantes de propagación para cada modo.
- El programa debe soportar materiales isotrópicos y anisotrópicos.
- El programa debe ser eficiente.
- El programa debe resolver preferentemente el problema vectorial.

4.3 Descripción del Programa

El programa está formado de cinco partes: Controlador, pre-procesador, ensamblador de matriz, solución de eigen valores, y post-procesador. (Ver Figura 4.1).

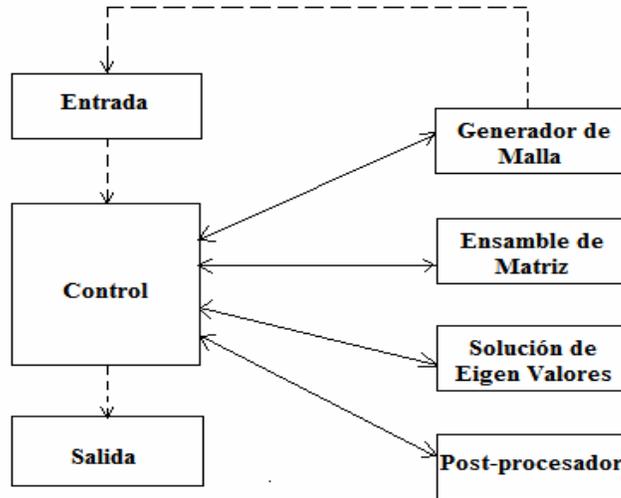


Figura 4.1. Estructura básica del programa

El control del programa es la parte principal, ya que, básicamente define las opciones para la ejecución del programa, recibe los parámetros de entrada, las propiedades físicas de la guía de onda, la longitud de la onda propagada, así como los modos que se desean analizar.

El pre-proceso consiste principalmente en el generador de la malla de acuerdo a los datos establecidos por el usuario, tales como las propiedades físicas de la guía, la longitud de onda y las permitividades o índices de refracción.

El ensamble de la matriz a resolver es la parte central del programa, su propósito es la construcción de la matriz global de acuerdo a las contribuciones de cada elemento en la malla.

La solución del problema de eigen valor se basa en un algoritmo de iteración (que será explicado más adelante), el cual regresa un número determinado de valores propios, los cuales se refieren al cuadrado de las constantes de propagación en la guía de onda.

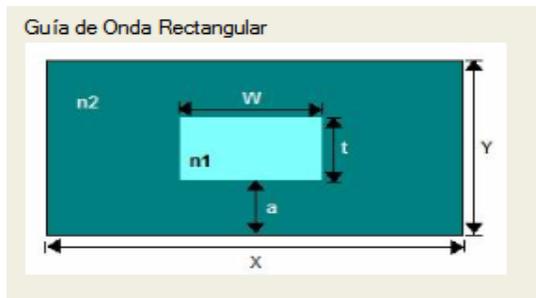
El post-procesador se encarga principalmente de adecuar los datos, para que el controlador pueda mostrar al usuario la salida del análisis requerido, de acuerdo a los modos seleccionados.

En los puntos siguientes, se explicará a detalle el funcionamiento del programa.

4.3.1 Datos de entrada

Cabe aclarar que el programa trabaja actualmente para el caso de las guías de onda del tipo rectangular, debido a que dicha guía se escogió porque nos permite validar el método de acuerdo a los resultados tanto analíticos como reportados en la literatura (como se verá en el siguiente capítulo). Aunque el programa se puede ampliar fácilmente al estudio de otras estructuras.

Al inicio del programa aparece un formulario, (ver Figura 4.3), donde se pide por medio de un textBox la introducción del valor “ t ” para el caso de una guía de onda rectangular; este parámetro define la geometría total de la guía de onda, (ver Figura 4.2), de acuerdo a las siguientes ecuaciones:



$$W = 2t \quad (4.1)$$

$$X = 10t \quad (4.2)$$

$$Y = 5t \quad (4.3)$$

Figura 4.2 Geometría de una guía de onda rectangular.

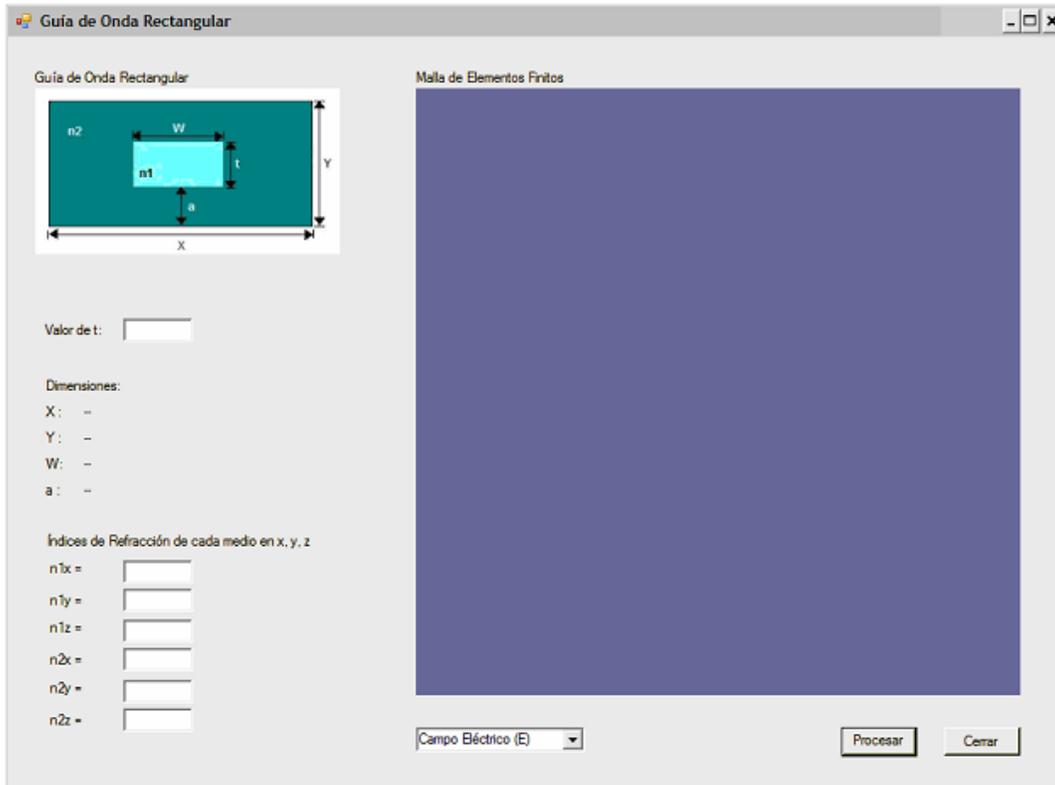


Figura 4.3 Primer pantalla del programa para guías de onda rectangulares.

Por otro lado, en el mismo formulario, (Figura 4.3), se pide la introducción de los valores de los índices de refracción en las direcciones x , y , z , tanto del medio uno, (n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}) como del segundo medio, (n_{2x}, n_{2y}, n_{2z}) . De acuerdo a las ecuaciones (1.17) y (1.18), los índices de refracción forman una matriz diagonal denominada p o q , dependiendo la selección de ϕ como E o H, la cual también se define en el comboBox del mismo formulario, (Figura 4.3).

Con base en los parámetros de entrada anteriores nos es posible la creación de la malla de elementos finitos para la guía de onda en cuestión.

4.3.2 Generación de malla de elementos finitos

La exactitud de la aproximación del elemento finito depende de la calidad provista por las funciones de forma de cada elemento, así como del tamaño de cada uno de ellos. Una mejor aproximación se obtiene mediante el uso de elementos pequeños y

un alto grado polinomial; sin embargo, esto hace que se incremente el costo y tiempo de cómputo.

En los problemas reales se requiere de un alto grado de exactitud y es por ello que se utilizan mallas con un gran número de elementos.

La subdivisión del dominio utilizando elementos del mismo tamaño es la forma más simple de división, pero cabe aclarar que no es la forma más eficiente.

En este trabajo de tesis, la malla no es uniforme en cuanto al tamaño de los elementos, lo que permite la adecuación del tamaño de los elementos de acuerdo a la geometría de la guía de onda a resolver. Esto hace al programa más flexible y preciso (ver Figura 4.6). En este trabajo se utilizó el algoritmo de Delaunay para su creación con la ayuda de la librería numérica MatforNet [20].

La triangulación de Delaunay es una red de triángulos que cumple la condición de Delaunay, (ver Figura 4.5) [19]. Esta condición dice que la circunferencia circunscrita de cada triángulo de la red no debe contener ningún vértice de otro triángulo (ver Figura 4.4). Este procedimiento maximiza los ángulos interiores de los triángulos de la malla [19].

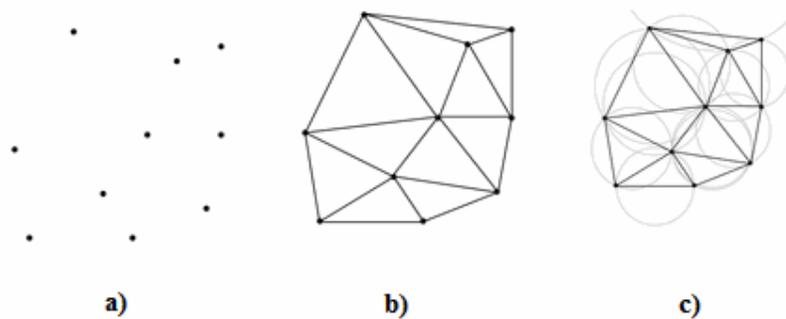


Figura 4.4 a) Puntos de los que se quiere construir una malla
b) Malla de triángulos
c) Con la condición de Delaunay se puede examinar si la triangulación es útil.

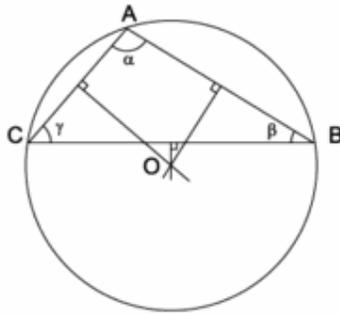


Figura 4.5. Los tres vértices A, B, C del triángulo ABC están a la misma distancia del circuncentro O.

Puntos a considerar:

- La circunferencia circunscrita de un triángulo es la circunferencia que contiene los tres vértices del triángulo.
- Según la definición de Delaunay la circunferencia circunscrita es vacía, si no contiene otros vértices a parte de los tres que la definen.
- La condición de Delaunay dice que una red de triángulos es una *Triangulación de Delaunay*, si todas las circunferencias circunscritas de todos los triángulos de la red son vacías. Esta condición asegura que los ángulos del interior de los triángulos son lo más grandes posible. Es decir, maximiza la extensión del ángulo más pequeño en la red [19].

La triangulación de Delaunay tiene las siguientes propiedades [19]:

- La triangulación forma la envolvente convexa del conjunto de puntos.
- El ángulo mínimo dentro de todos los triángulos es máximo.
- La triangulación es unívoca si en ningún borde de circunferencia circunscrita hay más de tres vértices.

Para la implementación del algoritmo, se debe partir de un conjunto de puntos, en nuestro caso, los puntos están contenidos en un arreglo dependiendo de los parámetros de la guía de onda calculados a partir del valor de t . Después, con ayuda de

la función $mf.Delaunay$ [20], se comienza a triangular y se va inspeccionando si algún vértice está dentro de una circunferencia circunscrita o no [19]; y así se realizó la construcción de la triangulación de Delaunay en 2D.

Cabe aclarar que de acuerdo a la formulación utilizada en esta tesis, (basada en los elementos “orilla”, desarrollados por M. Koshiba [21]), no fue necesaria la utilización de elementos infinitos en las fronteras de la guía de onda, sino que los elementos fueron acotados al tocar las fronteras, como se observa en la Figura 4.6.

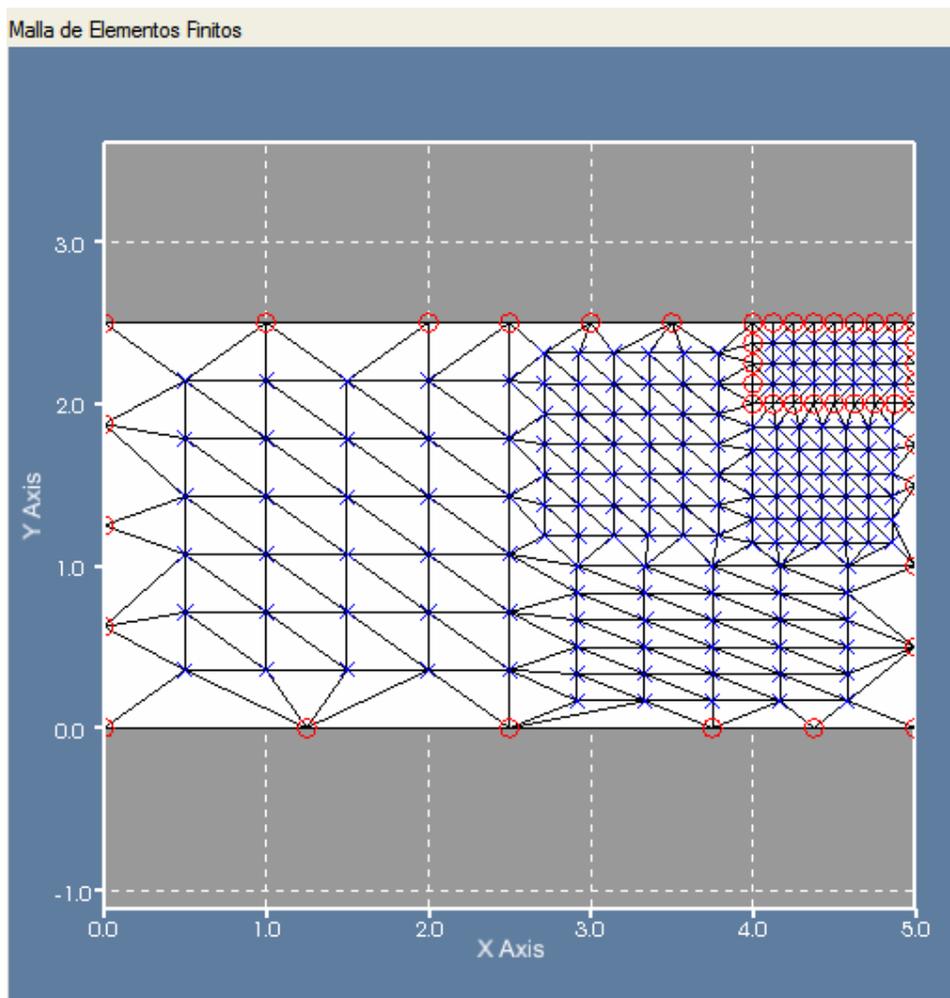


Fig. 4.6. Construcción de la malla de elementos finitos triangulares

4.3.3 Ensamble de la matriz global

Como se dijo con anterioridad, la matriz global de elementos finitos se construye de acuerdo a las contribuciones de cada elemento en la malla; esto es, sumando los coeficientes de las matrices locales (de cada elemento finito), de acuerdo al número de nodo y el número de elemento analizado.

En esta sección se ilustrará el procedimiento de acuerdo a la forma en que se realizó en este trabajo de tesis. Se plantea un pequeño ejemplo, ya que sería muy complicado ilustrar el caso realizado en la tesis debido al gran número de elementos utilizados en la malla de elementos finitos.

Consideremos una malla de elementos finitos “orilla” triangulares, (ver Figura 4.7), los elementos están numerados del 1 al 6, (color rojo), mientras que los nodos “orilla” están numerados del 1 al 12, (color azul).

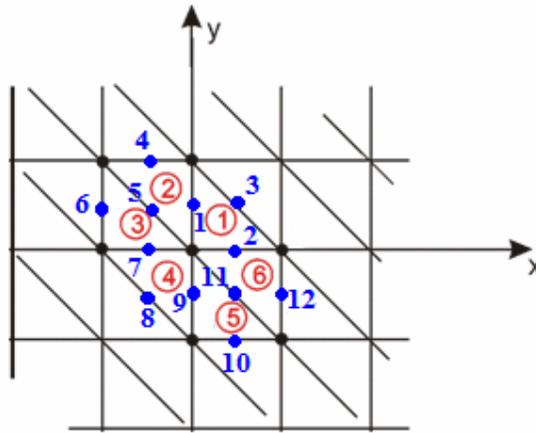


Fig. 4.7. Numeración de elementos y nodos

Partiendo de la ecuación (3.27), y después de realizar la malla de elementos finitos, es necesario obtener las matrices locales (para cada elemento de acuerdo al método desarrollado en el capítulo anterior), esto se consigue aplicando el algebra de matrices a (3.27), y con ello, obtendremos la ecuación (4.1), con la que nos será más fácil obtener sus valores propios.

$$[\tilde{M}_{tt}]^{-1}[k_{tt}]\{\phi_t\} = \beta^2 \{\phi_t\} \quad (4.1)$$

La ecuación (4.1) es nuestra ecuación a resolver, donde β es la constante de propagación que buscamos para cada modo. De acuerdo a esta ecuación y tomando en cuenta nuestra malla de elementos finitos de ejemplo, tenemos que las matrices locales para cada elemento son:

$$e_1 = \begin{bmatrix} c_{111} & c_{112} & c_{113} \\ c_{121} & c_{122} & c_{123} \\ c_{131} & c_{132} & c_{133} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{t1} \\ \phi_{t2} \\ \phi_{t3} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} c_{211} & c_{212} & c_{213} \\ c_{221} & c_{222} & c_{223} \\ c_{231} & c_{232} & c_{233} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{t4} \\ \phi_{t5} \\ \phi_{t6} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} c_{311} & c_{312} & c_{313} \\ c_{321} & c_{322} & c_{323} \\ c_{331} & c_{332} & c_{333} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{t7} \\ \phi_{t8} \\ \phi_{t9} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

$$e_4 = \begin{bmatrix} c_{411} & c_{412} & c_{413} \\ c_{421} & c_{422} & c_{423} \\ c_{431} & c_{432} & c_{433} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{t10} \\ \phi_{t11} \\ \phi_{t12} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

$$e_5 = \begin{bmatrix} c_{511} & c_{512} & c_{513} \\ c_{521} & c_{522} & c_{523} \\ c_{531} & c_{532} & c_{533} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{t13} \\ \phi_{t14} \\ \phi_{t15} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

$$e_6 = \begin{bmatrix} c_{611} & c_{612} & c_{613} \\ c_{621} & c_{622} & c_{623} \\ c_{631} & c_{632} & c_{633} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{t16} \\ \phi_{t17} \\ \phi_{t18} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

donde e se refiere al elemento analizado y c a los coeficientes de las matrices.

De acuerdo a lo anterior, ahora se buscará formar la matriz global de elementos finitos, esto se hará sumando las contribuciones de cada elemento en la malla; realizando el procedimiento, la matriz resultante es:

$$\begin{bmatrix}
c1_{11} + c2_{11} & c1_{12} & c1_{13} & c2_{12} & c2_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{t1} \\
c1_{21} & c1_{22} + c6_{22} & c1_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c6_{23} & c6_{21} & \phi_{t2} \\
c1_{31} & c1_{32} & c1_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{t3} \\
c2_{21} & 0 & 0 & c2_{22} & c2_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{t4} \\
c2_{31} & 0 & 0 & c2_{32} & c2_{33} + c3_{33} & c3_{31} & c3_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{t5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & c3_{13} & c3_{11} & c3_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{t6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & c3_{23} & c3_{21} & c3_{22} + c4_{22} & c4_{23} & c4_{21} & 0 & 0 & 0 & \phi_{t7} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c4_{32} & c4_{33} & c4_{31} & 0 & 0 & 0 & \phi_{t8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c4_{12} & c4_{13} & c4_{11} + c5_{11} & c5_{12} & c5_{13} & 0 & \phi_{t9} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c5_{21} & c5_{22} & c5_{23} & 0 & \phi_{t10} \\
0 & c6_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c5_{31} & c5_{32} & c5_{33} + c6_{33} & c6_{31} & \phi_{t11} \\
0 & c6_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c6_{13} & c6_{11} & \phi_{t12}
\end{bmatrix} \quad (4.8)$$

La ecuación (4.8) es la matriz global de elementos finitos calculada para nuestro ejemplo, en esta tesis se utilizó el mismo procedimiento, aunque nuestra matriz resultante fue de 589 filas por 589 columnas, correspondientes al número de nodos de la malla de elementos finitos.

4.3.4 Solución del problema de valores propios

El problema estándar de valores propios para una matriz A , consiste en encontrar escalares (valores propios) λ , tales que [23]:

$$A\{\phi_t\} = \lambda\{\phi_t\} \quad (4.9)$$

donde de acuerdo a nuestro caso, y partiendo de la ecuación (4.1), tenemos que $\lambda = \beta^2$, y

$$A = [\tilde{M}_{\pi}]^{-1} [k_{\pi}]$$

Para la solución de este problema, fue necesario el uso de la librería *Bluebit .NET Matrix Library*, la cual proporciona clases para el álgebra lineal orientada a objetos en plataforma .Net, y utiliza rutinas de LAPACK [22].

A grandes rasgos, para el cómputo del problema se siguieron los siguientes pasos:

- La matriz real simétrica A , es reducida a la forma T (tri-diagonal real).
Como los valores de A son reales, y A , es una matriz simétrica (589 x 589), su descomposición es $A=QTQ^T$, con Q ortogonal y T tri-diagonal, simétrica.
- Se calculan los valores propios [24] y vectores propios de la matriz real, simétrica y tri-diagonal T . Lo anterior se consigue factorizando T como $T = SAS^T$, donde S es ortogonal y A es diagonal. Los coeficientes diagonales de A son los valores propios de T , los cuales son también los valores propios de A , y las columnas de S son los vectores propios de T .
Los vectores propios de A son las columnas de $\{\phi_i\} = QS$, entonces $A=\{\phi_i\}A\{\phi_i\}^T$ [24].

Después de aplicar la rutina descrita se obtiene un vector real de 589 elementos, cada uno de los cuales es el cuadrado de la constante de propagación para cada modo de propagación de la luz en la guía de onda analizada, de acuerdo a la ecuación (4.1).

4.3.5 Resultados

En cuanto a la obtención de resultados, el programa obtiene gráficas de las constantes de propagación β con respecto a las diferentes longitudes de onda analizadas. De igual forma obtiene el vector completo de constantes de propagación β en cada longitud de onda de entrada; es importante mencionar que el tiempo de cálculo es corto, puesto que para el análisis de cinco longitudes de onda diferentes el programa tarda un poco más de un minuto en una computadora personal bajo ambiente Windows con 504 MB de RAM y procesador de 1.66 GHz.

En el siguiente capítulo se detallará la forma de los resultados del programa comparándolos con otros resultados conseguidos mediante otros métodos y derivaciones del Método del Elemento Finito, lo que permitirá validar el programa resultado de este trabajo de tesis.

Capítulo 5

Validación del programa

5.1 Introducción

En el presente capítulo se mostrará la utilidad del método empleado por medio de la solución de algunos ejemplos numéricos, los cuales fueron resueltos con anterioridad por investigadores empleando otros métodos u otras formulaciones del método del elemento finito. Este procedimiento nos permitirá validar tanto el algoritmo, como especialmente la pieza de software que hemos desarrollado.

5.2 Ejemplos numéricos

5.2.1 Guía de onda con aire en su interior

Como primer ejemplo, se analizará una guía de onda rectangular metálica con aire en su interior, la guía tiene dimensiones de 10 x 5 cm. y transporta una señal senoidal de 4.5 GHz. Este ejemplo se resolvió obteniendo la constante de propagación correspondiente a la frecuencia de corte para cada modo y los resultados son comparados en la Tabla 5.1 con valores obtenidos de forma analítica.

Para la solución analítica de este ejemplo se utilizaron las siguientes ecuaciones [1]:

$$f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{A}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2} \quad (5.1)$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c} \sqrt{f^2 - f_c^2} \quad (5.2)$$

donde f_c es la frecuencia de corte, c es la velocidad de la luz, A y B son las dimensiones de la guía de onda; m y n son números enteros, el primero se refiere al número de

medios ciclos de variación de campo a lo largo de la dimensión A , y el segundo se refiere al número de medios ciclos de variación de campo a lo largo de la dimensión B , y por tanto determinan el modo que se propaga. β es la constante de propagación, λ es la longitud de onda, y f es la frecuencia transmitida en la guía de onda.

Introduciendo los datos en el programa obtenemos los siguientes valores:

<i>(Modo)</i> <i>m, n</i>	<i>Frecuencia</i> <i>corte [GHz]</i>	<i>λ [cm]</i>	<i>β analítica</i> <i>[rad/cm]</i>	<i>β programa</i> <i>[rad/cm]</i>	<i>%_Error</i>
<i>1 0</i>	1.5	7.07	0.88871174	9.091501e-001	2.29
<i>0 1</i>	3.0	8.94	0.7028179	7.261107e-001	3.31
<i>1 1</i>	3.35	9.98	0.62957836	6.539658e-001	3.87
<i>2 0</i>	3.0	8.94	0.7028179	7.261107e-001	3.31
<i>2 1</i>	4.24	19.9	0.31573829	3.401780e-001	7.74

Tabla 5.1. Comparación de valores analíticos con resultados del programa.

Como puede observarse en la Tabla 5.1, los valores obtenidos se encuentran muy cercanos al valor que predice la teoría (solución analítica), por tanto, el porcentaje de error es relativamente pequeño. Se debe tomar en cuenta que a diferencia del programa desarrollado, el método analítico solo encuentra una constante de propagación a la vez, y con las ecuaciones mencionadas anteriormente sólo es posible analizar medios isotrópicos. Sin embargo, los resultados que se presentan en la tabla anterior nos ofrecen una primera indicación de que nuestro programa está realizando su función correctamente.

5.2.2 Guía de onda dieléctrica rectangular

Para el siguiente ejemplo, consideraremos una guía de onda dieléctrica rectangular, (Figura 5.1), donde $n_1 = 1.05$ y $n_2 = 1.0$, son los índices de refracción del núcleo y del revestimiento, respectivamente. De acuerdo a la simetría de la guía de onda, sólo fue necesario dividir un cuarto de la sección transversal de este dispositivo en elementos triangulares “orilla”, lo que redundó en una economía de recursos

computacionales. El aprovechar la simetría de los problemas es un enfoque ampliamente aceptado.

Por simplicidad asumimos las fronteras artificiales $x = \pm X/2$ y $y = \pm Y/2$.

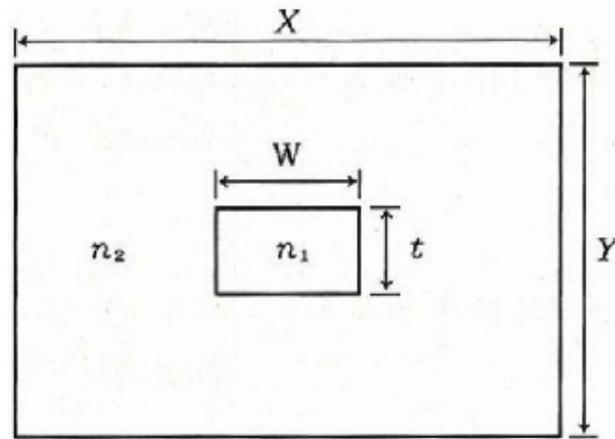


Figura 5.1. Guía de Onda Rectangular dieléctrica

Introduciendo los datos en el programa (utilizando $t = 1$ [cm]) y después de aplicar el Método del Elemento Finito, se obtuvieron valores de constantes de propagación del modo E_{11}^x , de una guía de onda rectangular dieléctrica (Ver Figura 5.2, Figura 5.3).

Guía de Onda Rectangular

Longitudes de onda	Elemento:	Constante de propagación:
1.60078106 [cm]	0	3.93109471289822 [rad]/[cm]
1.28062484 [cm]	0	4.91117139766964 [rad]/[cm]
1.06718737 [cm]	0	5.89164087390844 [rad]/[cm]
0.91473203 [cm]	0	6.87233684613027 [rad]/[cm]
0.80039053 [cm]	0	7.8531751295915 [rad]/[cm]

Procesar

Figura 5.2 Formulario de resultados del programa para las longitudes de onda analizadas.

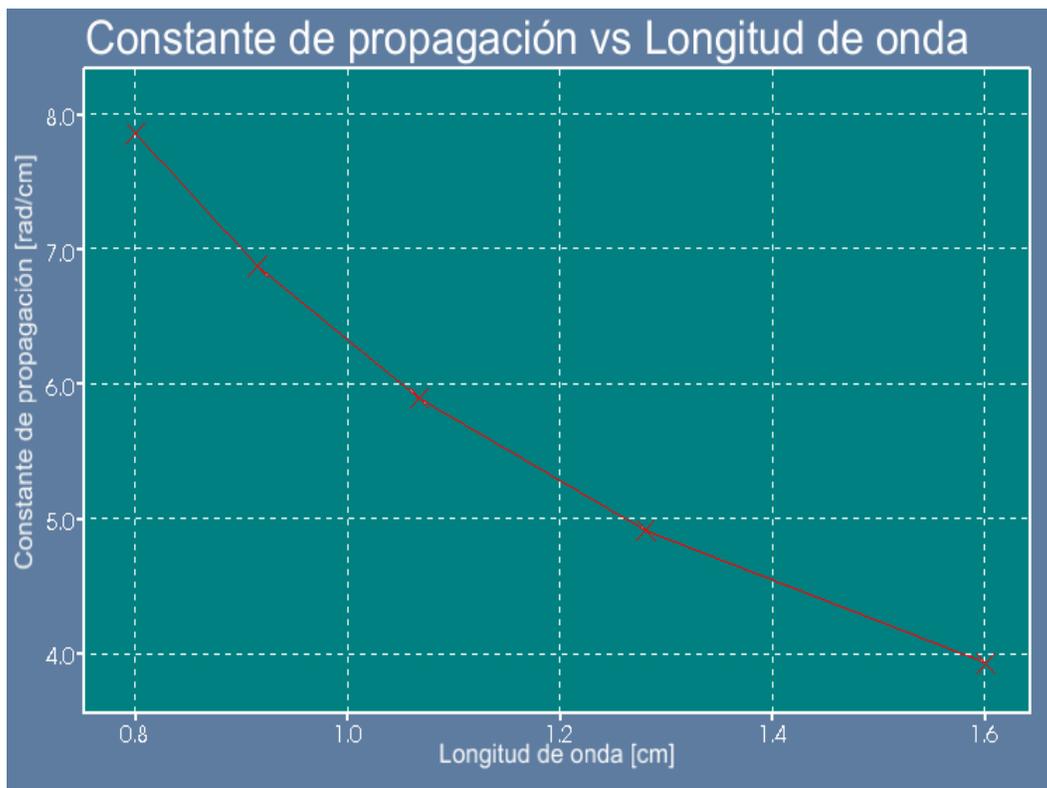


Figura 5.3 Constante de propagación en función de la longitud de onda calculada con el programa

En la Figura 5.2 dentro de cada textBox denominado elemento, el número “0” indica que el formulario despliega la primer constante de propagación β [rad/cm] para cada una de las cinco longitudes de onda analizadas, lo anterior puede modificarse en

tiempo de ejecución aumentando el número de elemento en los textBox y así desplegar las siguientes constantes de propagación asociadas a las longitudes de onda.

La Figura 5.4 muestra una vez más las características de propagación de esta guía de onda, donde $t = 1$ [cm], $W = 2t$, $X = 10t$, $Y = 5t$. Esta vez se incluyen los resultados obtenidos por el método de Marcatili [3], por Goell [2], y por el Método del Elemento Finito de M. Koshiba [4].

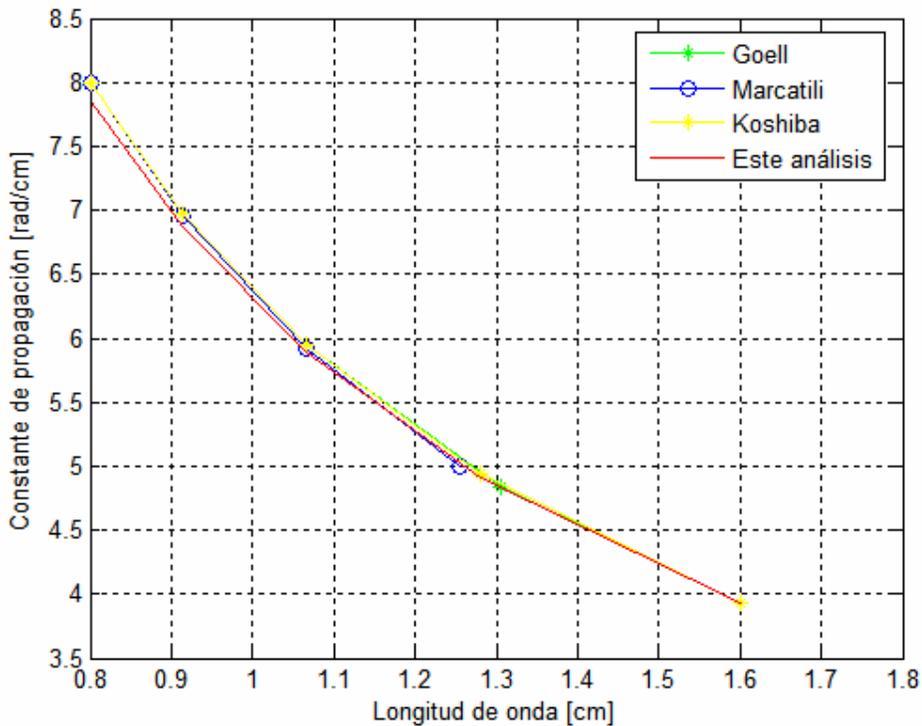


Figura 5.4 Características de propagación de una guía de onda rectangular. Modo Ex11 ($n_1 = 1.05$, $n_2 = 1.0$).

Como se puede observar en la Figura 5.4, los resultados obtenidos con el programa son muy cercanos a los obtenidos por los autores mencionados. Esto confirma una vez más el correcto funcionamiento del programa cuando se resuelve un problema más complejo que el anteriormente expuesto, ya que estamos analizando una guía con dos medios diferentes.

5.2.3 Buried Waveguide

En el siguiente ejemplo, cuyo grado de dificultad es mayor, se analizará una guía de onda enterrada (*Buried waveguide*), (Ver Figura 5.5). El núcleo tiene un tensor de permitividad relativa anisotrópico con las componentes $n_x^2 = n_z^2 = 2.31$ y $n_y^2 = 2.19$ y se encuentra dentro de un revestimiento de permitividad $n_2^2 = 2.05$.

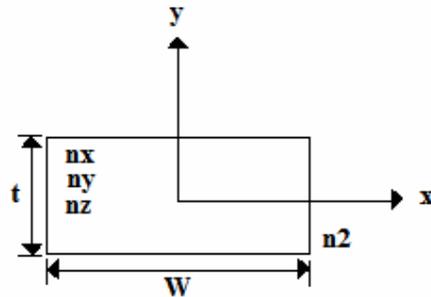


Figura 5.5. Guía de onda enterrada

La Figura 5.6 y Figura 5.7, muestran las características de dispersión de los primeros dos modos de propagación de la guía de onda. Los resultados obtenidos por el programa concuerdan con los obtenidos por Ohtaka, quien utilizó un método variacional y expansión de funciones harmónicas cilíndricas [5]; de igual forma, los resultados son similares a los obtenidos por A. Fernández, quien utilizó el Método del Elemento Finito, con una formulación utilizando el vector completo del campo magnético H , y elementos triangulares simples, así como una malla de elementos infinitos en el revestimiento de la guía de onda [6]. Estos resultados nuevamente confirman la correcta operación de nuestro programa, aún cuando el tensor de permitividad que se introduce como dato posee diferentes valores para cada una de sus entradas (anisotropía).

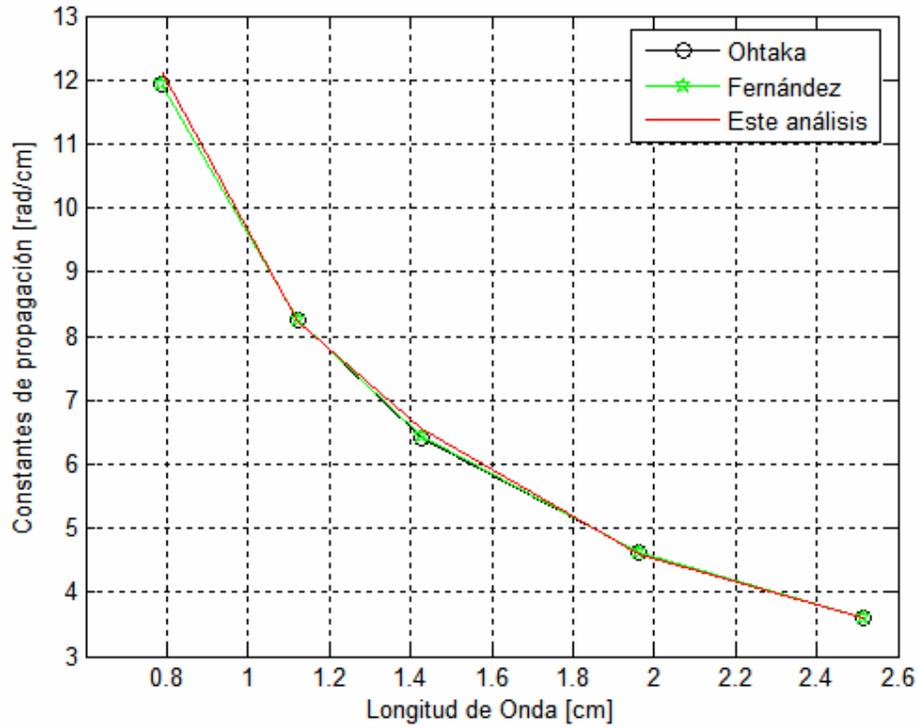


Figura 5.6. Dispersión del modo Ex11 en una guía de onda enterrada

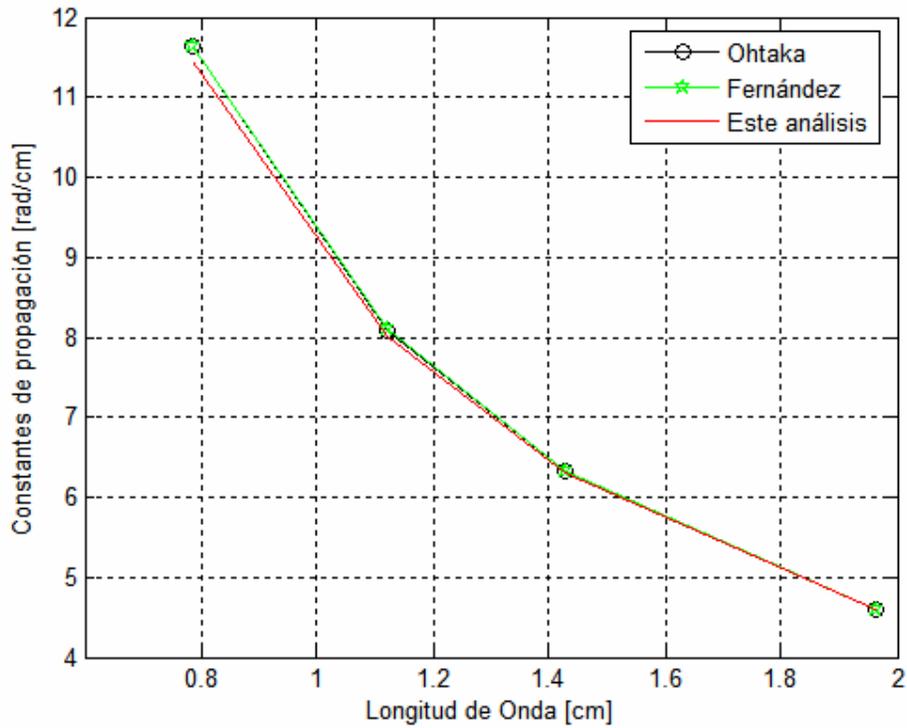


Figura 5.7. Dispersión del modo Ey11 en una guía de onda enterrada

5.2.4 Línea de transmisión “Microstrip”

Finalmente, consideremos una línea de transmisión del tipo “Microstrip”, (ver Figura 5.8, Figura 5.9). Para su análisis, subdividimos una mitad de la sección transversal de la guía de onda en elementos triangulares “orilla”.

Para este ejemplo, los parámetros que definen la geometría tienen los siguientes valores: $W = 1.27 [mm]$, $t = 0$, $h = 1.27 [mm]$, $X = 12.7 [mm]$ y $Y = 12.7 [mm]$.

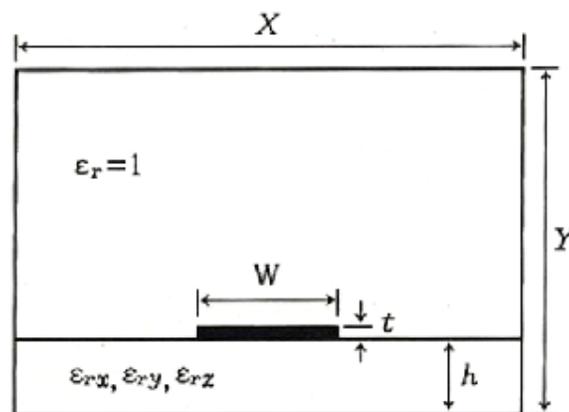


Figura 5.8. Línea de transmisión del tipo microstrip

Modos Guías de Ondas

Línea de Transmisión Shielded Microstrip:

Ancho de la Guía (X) [mm]:

Altura de la Guía (Y) [mm]:

Ancho del Conductor Strip (W) [mm]:

Altura del Conductor Strip (t) [mm]:

Altura del Substrato (h) [mm]:

Figura 5.9. Formulario de datos de entrada del programa

Al correr el programa con los valores antes mencionados, se obtuvo una malla de elementos finitos (ver Figura 5.10), la cual a diferencia de los casos anteriores fue realizada con nodos aleatorios en la triangulación de Delaunay.

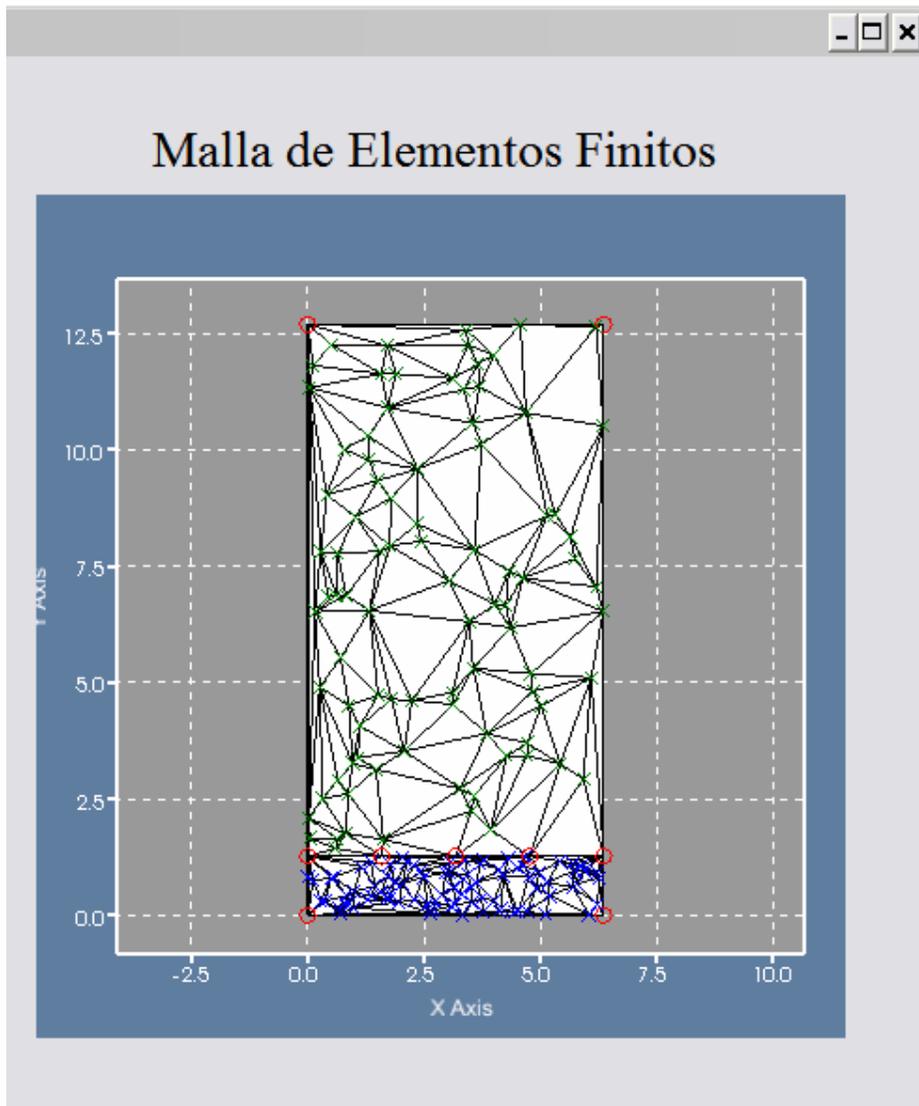


Figura 5.10. Malla de elementos finitos línea de transmisión microstrip

La Figura 5.11 muestra las características de propagación para el primer modo de propagación de una línea de transmisión del tipo microstrip con un sustrato anisotrópico con $\epsilon_{rx} = \epsilon_{rz} = 9.4$, y $\epsilon_{ry} = 11.6$, respectivamente.

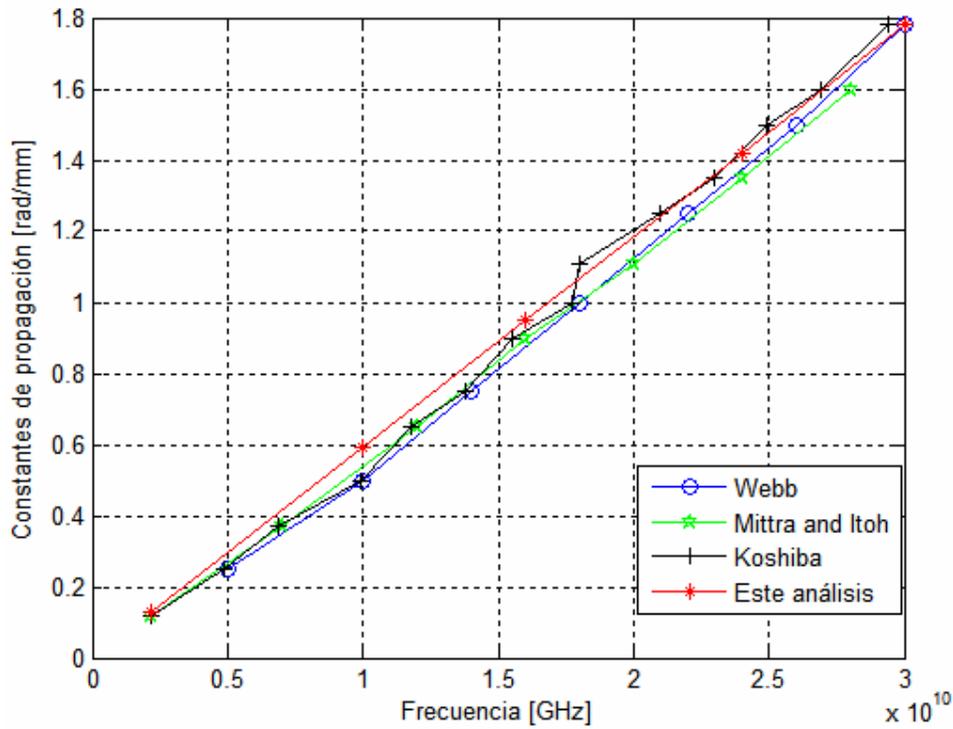


Figura 5.11 Características de propagación del primer modo línea de transmisión del tipo microstrip con un sustrato anisotrópico.

De acuerdo a la Figura 5.11., podemos observar que los resultados obtenidos por el programa mantienen una concordancia con los resultados reportados por Webb [7], Mitra [8] y Koshiba [4]. Los resultados confirman nuevamente el correcto funcionamiento del programa, así como la viabilidad del algoritmo al analizar estructuras diferentes a las guías de onda del tipo rectangular.

5.3 Discusión de los ejemplos numéricos

En este capítulo se demostró la validez del método del elemento finito descrito en los capítulos anteriores aplicándolo a una serie de ejemplos realizados en otros trabajos de investigación reportados por connotados autores. Los ejemplos incluyeron medios anisotrópicos e isotrópicos; también se analizó el caso de las fronteras abiertas, (caso *buried waveguide*), y se demostró que la formulación del elemento finito considerada en esta tesis fue suficiente para analizar este tipo de casos y no fue necesario el uso de elementos infinitos o el uso de condiciones de impedancia en las fronteras.

En síntesis, en este capítulo se demostró el correcto funcionamiento y eficiencia del programa realizado al resolver diversos ejemplos con distintos grados de dificultad. A pesar de que la complejidad en cada uno de los ejemplos estudiados era distinta, el método dio resultados muy satisfactorios, de donde se puede inferir, que tanto el método como el algoritmo que lo resuelve, son suficientemente generales y válidos para analizar otros casos.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Conclusiones generales

Como se vio en este trabajo de tesis, cualquier estructura que transmite ondas electromagnéticas puede ser considerada una guía de onda. En los últimos años, las guías de onda se han vuelto muy importantes y su demanda aumenta día con día. Es por ello que el análisis de estos dispositivos se ha vuelto un tema de investigación muy importante y económicamente redituable en las últimas décadas.

El análisis, diseño y fabricación de estos dispositivos es sumamente complejo, ya que cada tipo de guía de onda tiene un número infinito de configuraciones de campo electromagnético que soporta; a estas configuraciones se les conoce como modos de propagación de la guía de onda y cada uno cuenta con una constante de propagación asociada. Las características de los modos de propagación en las guías de onda, dependen en gran medida de la forma y dimensiones de la sección transversal, así como del tipo de material dieléctrico dentro de la guía de onda y la frecuencia de operación.

Para el análisis de los modos de propagación en las guías de onda es necesaria la utilización de métodos numéricos, puesto que realizar un análisis completo de estos dispositivos de forma analítica, es una tarea imposible. En este trabajo de tesis, para el análisis de los modos en las guías de onda, se desarrolló una formulación vectorial del método del elemento finito utilizando ya sea las tres componentes del campo eléctrico, o las tres componentes del campo magnético. Para eliminar las soluciones espurias se utilizaron elementos triangulares “orilla”. Como resultado se obtuvo una ecuación de valores propios, la cual involucró únicamente las variables “orilla” en el plano transversal. Lo anterior nos dio una solución directa para encontrar las constantes de propagación de la guía de onda. Se obtuvieron resultados muy buenos para los diversos

ejemplos mostrados en el capítulo 5, lo que demuestra la viabilidad del uso de este método y el correcto funcionamiento del programa realizado.

Para concluir es necesario puntualizar que se cumplieron satisfactoriamente los objetivos de este trabajo de tesis, los cuales fueron, en primer lugar, el comprender los conceptos de funcionamiento de las guías de onda, así como del método numérico del elemento finito aplicado a problemas de propagación de ondas de luz. En segundo lugar, desarrollar un programa computacional que, mediante el uso de la técnica de análisis numérico conocida como Método del Elemento Finito, fuera capaz de resolver la ecuación diferencial parcial independiente del tiempo que caracteriza la propagación de un haz de luz a lo largo de una estructura tridimensional hecha de material semiconductor no activo. Dicha estructura se asumió conformada por una sección transversal conocida (caracterizada por los índices de refracción de los materiales que componen dicha estructura) cuya forma se mantiene constante a lo largo de la sección longitudinal del dispositivo. El programa fue capaz de determinar los modos del campo electromagnético que son susceptibles de propagarse a lo largo de la estructura de material semiconductor, encontrando las constantes de propagación asociadas.

6.2 Trabajo a Futuro

Para un desarrollo posterior se propone la implementación de una malla de elementos finitos más especializada, es decir, con funciones de mayor densidad de elementos en las áreas donde sea requerido dentro de la sección transversal de las guías de onda. Lo anterior mejoraría significativamente los resultados computados, sobre todo para modos alejados del fundamental. Por otro lado, es deseable realizar las gráficas de las distribuciones espaciales de los modos de propagación dentro de las guías de onda, lo cual se puede conseguir aproximando las componentes transversales mediante una función lineal de x y y respectivamente. La componente axial puede ser aproximada por un polinomio de primer orden. De acuerdo al capítulo 3, lo anterior se consigue sustituyendo la constante de propagación resultante del modo analizado en las ecuaciones (3.2), (3.8) y (3.9).

Finalmente, dentro del programa desarrollado, es conveniente realizar un módulo específico para que el usuario defina la estructura física de la guía de onda (tipo de la guía de onda), de acuerdo a sus necesidades; de igual forma, en un futuro se puede integrar el programa como módulo o subrutina de algún otro software de análisis de dispositivos ópticos, lo cual sería muy bueno tanto con fines didácticos como de investigación.

1.8 Referencias

- [1] Koshiha Masanori, "Optical Waveguide Analysis", Advanced Science and Technology Series, Japan 1992.
- [2] "Wikipedia The free encyclopedia", <http://en.wikipedia.org/wiki/Waveguide>.
- [3] R. Gutiérrez-Castrejón; *Hacia un sistema de telecomunicaciones completamente óptico*. Series del Instituto de Ingeniería, UNAM. Vol. SD/48, Mayo 2005. ISBN 970-32-2660-4.
- [4] H. A. Perkins, "Física General", UTEHA, p. 415, 1969.
- [5] Koshiha Masanori, "Optical Waveguide Analysis", Advanced Science and Technology Series, pp. 1-17, Japan 1992.
- [6] R. N. Hall, G. E. Fenner, J. D. Kingsley, T. J. Soltys, and R. O. Carlson, "Coherent light emission from GaAs junctions", *Physical Review Letters*, vol. 9, pp. 366-368, 1962.
- [7] M. I. Nathan, W. P. Dumke, G. Burns, F. H. Dill Jr., and G. Lasher, "Stimulated emission of radiation from GaAs p-n junctions", *Appl. Phys. Lett.*, vol. 1, pp. 62-64, 1962.
- [8] T. M. Quist, R. H. Rediker, R. J. Keyes, W. E. Krag, B. Lax, A. L. McWhorter, and H. J. Zeiger, "Semiconductor Maser of GaAs", *Appl. Phys. Lett.*, vol. 1, pp. 91-92, 1962.
- [9] Jr. N. Holonyak and S. F. Bevacqua, "Coherent (visible) light emission from Ga(As_{1-x}P_x) junctions", *Appl. Phys. Lett.*, vol 1, pp. 62, 1962.
- [10] S. E. Miller, "Integrated optics: An introduction", *The Bell System Technical Journal*, vol. 48, pp. 2059-2069, 1969.
- [11] F. P. Kapron, D. B. Keck and R. D. Maurer, "Radiation Losses in glass optical waveguides", *Appl. Phys. Lett.*, vol 17, pp. 423-425, 1970.
- [12] W. J. Tomlinson and G. D. Aumiller, "Optical multiplexer for multimode fiber transmission system", *Appl. Phys. Lett.*, vol 31, pp. 169-171, 1977.
- [13] M. K. Smit, "New focussing and dispersive planar component based on an optical phased array", *Electron. Lett.*, vol. 24, pp. 385-386, 1988.
- [14] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill, 1941.
- [15] Koshiha Masanori, "Optical Waveguide Analysis", Advanced Science and Technology Series, pp 14, Japan 1992.

- [16] Koshiha Masanori, "Optical Waveguide Analysis", Advanced Science and Technology Series, pp 15, Japan 1992.
- [17] I. Tatsuo, P. Giuseppe, P Silvester, "Finite Element Software for Microwave Engineering", Wiley Series in Microwave and Optical Engineering, pp 4, 2003.
- [18] Koshiha Masanori, "Optical Waveguide Analysis", Advanced Science and Technology Series, pp 29, Japan 1992.
- [19] Koshiha Masanori and Kazuhiro Inoue, "Simple and Efficient Finite-Element Analysis of Microwave and Optical Waveguides", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. Vol 40. 1992.

2.5 Referencias

- [1] Okamoto Katsunari, "Fundamentals of optical waveguides", Optics and photonics, Academic Press pp. 9, USA 1992.
- [2] Koshiba Masanori, "Optical Waveguide Analysis", Advanced Science and Technology Series, pp. 17-18, Japan 1992.
- [3] R. Feynman, R. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 2, Fondo Educativo Interamericano, Bogotá, 1972.
- [4] E. Hecht, Optics, Addison-Wesley Pub. Co., New York, 1990.
- [5] M. Alonso y E. J. Finn, Física, vol. 2, *campos y ondas*, Fondo Educativo Interamericano, Bogotá, 1970.
- [6] Loranca Ramos, Y. A. 2003. *Líneas de Transmisión y guías de onda*. Tesis Licenciatura. Ingeniería en Electrónica y Comunicaciones. Departamento de Ingeniería Electrónica, Escuela de Ingeniería, Universidad de las Américas, Puebla.
- [7] E. Schweing and W. B. Bridges, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-34 (1986) 1104.
- [8] A. T. Galick, T. Kerkhoven, , *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-40 (1992) 699.
- [9] R. K. Lagu and R. V. Ramaswamy, *IEEE J. Quantum Electron.* QE-32 (1986) 968.
- [10] K. S. Chiang, Review of numerical and approximate methods for the modal analysis of general optical dielectric waveguides, *Optical and Quantum Electronics* 26 (1994) S113-S134.
- [11] H. M. De Ruiter, *J. Opt. Soc. Am.* 70 (1980) 1519.
- [12] L. Eyges, P. Gianino and P. Wintersteiner, *Opt. Soc. Am.* 69 (1979) 1226.
- [13] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, (Macmillan, New York, 1968).
- [14] E. A. J. Marcatili, *Bell Syst. Tech. J.* 48 (1969) 2071.
- [15] R. M. Knox and P. P. Toullos, *Proceedings of the MRI Symposium on Submillimeter Waves*, (Polytechnic Press, Brooklyn, 1970) p. 497.
- [16] K. S. Chiang, *Appl. Opt.* 25 (1986) 348.
- [17] T. Mizumoto and Y. Naito, *Electron. Lett.* 26 (1990) 63.
- [18] P. C. Kendall, M. J. Adams, S. Ritchie and M. J. Robertson, *IEEE Proc. A* 134 (1987) 699.

- [19] S. She, *Opt. Quantum Electron.* 20 (1988) 125.
- [20] D. Yevick, *Opt. Quantum Electron.* (1994) 185.
- [21] O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method* (McGraw-Hill, London, 1977).
- [22] P. P. Silvester and R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers* (Cambridge University Press, Cambridge, 1983).
- [23] G. Strang and G. J. FIX, *An Analysis of the Finite Element Method* (Prentice – Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973).
- [24] F.A. Fernández y Y. Lu, “Microwave And Optical Waveguide Analysis By The Finite Element Method”, Research Studies Press Ltd., England, 1996.

3.4 Referencias

- [1] P. L. Arlet, A. K. Baharani, O. C. Zienkiewicz, “Applications of finite elements to the solution of Helmholtz’s equation”, *Proc. IEE*, vol. 115, N° 12, pp. 1762-1766, 1968.
- [2] J. B. Davies, “Review of methods for numerical solution of hollow-waveguide problem”, *Proc. IEE*, vol. 119, N° 1, pp. 33-37, 1972.
- [3] Koshiba Masanori, “Optical Waveguide Analysis”, Advanced Science and Technology Series, pp. 7-8, Japan 1992.
- [4] Kagawa, Y., Koshiba, M., Ikeuchi, M., and Kagami, S., “Finite/Boundary-Element Methods for Electric and Electronic Engineers – Application to Wave Problems”, Ohm Pub. Co., Tokyo, 1984.
- [5] M. Koshiba and K. Inoue, Simple and Efficient Finite – Element Analysis of Microwave and Optical Waveguides, *IEEE Trans. On Microwave Theory and Tech.* Vol. 40, No. 2. 1992.
- [6] M. Koshiba, “Optical Waveguide Analysis”, Advanced Science and Technology Series”, p. 104, McGraw-Hill, 1992.
- [7] M. Hano, “Finite-element Analysis of Dielectric-loaded Waveguides,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol MTT-32, pp.1275 – 1279, 1984.
- [8] M. Hano, “Vector Finite-element Solution for Anisotropic Waveguides Using Novel Triangular Elements”, *Electron. and Commun. Japan*, pt. 2, vol 71, pp. 71-80, 1988.
- [9] R. Miniowitz and J. P. Webb, “Covariant-projection Quadrilateral Elements for the Analysis of Waveguides with Sharp Edges”, *IEEE Trans. On Microwave Theory and Tech.*, vol 39, pp. 501-505, 1991.
- [10] S. H. Wong and Z. J. Cendes, “Combined Finite Element Modal Solution of Three-dimensional Eddy Current Problems”, *IEEE Trans. Magn.*, vol 24, pp. 2685-2687, 1988.
- [11] F. Kikuchi, “Mixed and Penalty Formulations for Finite Element Analysis of an Eigenvalue Problem in Electromagnetism”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 64, pp.509-521, 1987.
- [12] A. Bossavit, “A Rationale for “Edge Elements” in 3-D Fields Computations”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, pp. 74-79, 1988.
- [13] -----, “Whitney Forms: A Class of Finite Elements for Three-dimensional Computations in Electromagnetism”, *IEE Proc.*, pt. A, vol. 135, pp. 493-500, 1988.

- [14] A. Kameari, "Calculation of Transient 3D Eddy Current Using Edge Elements", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 26, pp. 466-469, 1990.
- [15] A. Bossavit, "Solving Maxwell Equations in a Closed Cavity, and the Question of 'Spurious Modes'," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 26, pp. 702-705, 1990.
- [16] B. A. Finlayson, "The Method of Weighted Residuals and Variational Principles", *New York: Academic Press*, 1972.
- [17] Hughes T. J. R., "The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", *Englewood Cliffs: Prentice-Hall*, 1987.
- [18] F.A. Fernández y Y. Lu, "Microwave And Optical Waveguide Analysis By The Finite Element Method", *Research Studies Press Ltd.*, England, 1996.
- [19] T. Itoh, G. Pelosi and P. P. Silvester, "Finite Element Software for Microwave Engineering", *Wiley Series in Microwave and Optical Eng.*, p. 4, 2003.
- [20] S. H. Gould, "Variational Methods for Eigenvalue Problems", *Toronto: University of Toronto Press*, 1957.
- [21] I. Stakgold, "Boundary Value Problems of Mathematical Physics", vol. 2, New York: McMillan, 1968.
- [22] S. G. Mikhlin, "Variational Methods in Mathematical Physics", Oxford: Pergamon Press, 1964.
- [23] O. C. Zienkiewicz and K. Morgan, "Finite Elements and Approximation", *New York: John Wiley & Sons*, 1983.

4.4 Referencias

- [1] T. Itoh, G. Pelosi, P. P. Silvester, “Finite Element Software for Microwave Engineering”, *Wiley Series in Microwave and Optical Engineering*, 2003.
- [2] Zienkiewicz, O. C., “The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics”, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [3] Kwon, Y. W. and H. Bang, “The Finite Element Method Using MATLAB”, CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [4] P. P. Silvester, “Finite Elements for Electrical Engineers”, *Cambridge University Press, New York*, 1996.
- [5] J. Jin, “The Finite Element Method in Electromagnetics”, *John Wiley & Sons*, New York, 1993.
- [6] Volakis, J. L., A. Chatterjee, and L. C. Kempel, “Finite Element Method for Electromagnetics: Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications”, *IEEE Press*, New York, 1998.
- [7] J. Stephen, “The CAD Guidebook: A basic manual for understanding and improving Computer Aided Design”.
- [8] Especificación del lenguaje C# (Standard ECMA-334), “<http://www.ecma-international.org/publications/standards/Ecma-334.htm>”.
- [9] A. Honrad, “High-order Triangular Finite Elements for Electromagnetic Waves in Anisotropic Media”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-25, pp. 353 – 360, 1977.
- [10] S. H. Wong and Z. J. Cendes, “Combined Finite Element Modal Solution of Three-dimensional Eddy Current Problems”, *IEEE Trans. Magn.*, vol. 24, pp. 2685 – 2687, 1988.
- [11] M. Koshiya, K. Hayata, and M. Suzuki, “Vectorial Finite-element Formulation without Spurious Solutions for Dielectric Waveguide Problems”, *Electron. Lett.*, vol. 20, pp. 409- 410, 1984.
- [12] B. M. A. Rahman and J. B. Davies, “Penalty Function Improvement of Waveguide Solutions by Finite Elements”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-32, pp. 922 – 928, 1984.

- [13] M. Koshihara, K. Hayata, and M. Suzuki, "Improved Finite-element Formulation in Terms of Magnetic Field Vector for Dielectric Waveguides", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-33, pp. 227 – 233, 1985.
- [14] T. P. Young, "Design of Integrated Optical Circuits Using Finite Elements", *IEE Proc.*, pt. A, vol. 135, pp. 135-144, 1988.
- [15] T. Angkaew, M. Matsuhara, and N. Kumagai, "Finite Element Analysis of Waveguide Modes: A Novel Approach that Eliminates Spurious Modes", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-35, pp. 117 – 123, 1987.
- [16] J. A. M. Svedin, "A Numerically Efficient Finite Element Formulation for the General Waveguide Problem without Spurious Modes", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 37, pp. 1708 – 1715, 1989.
- [17] W. C. Chew and M. A. Nasir, "A Variational Analysis of Anisotropic, Inhomogeneous Dielectric Waveguides", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 37, pp. 661 – 668, 1989.
- [18] F. A. Fernandez, and Y. Lu, "Variational Finite Element Analysis of Dielectric Waveguides with no Spurious Solutions", *Electron. Lett.*, vol. 26, pp. 2125 – 2126, 1990.
- [19] B. Delaunay: *Sur la sphere vide. A la memoire de Georges Voronoi. Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh Nauk* (Bulletin of Academy of Sciences of the USSR), 7, págs. 793-800, 1934.
- [20] *Matfor 4.0 in Visual C#, Referente Guide, Ancad Co.*
- [21] M. Koshihara and K. Inoue, Simple and Efficient Finite – Element Analysis of Microwave and Optical Waveguides, *IEEE Trans. On Microwave Theory and Tech.* Vol. 40, No. 2. 1992.
- [22] <http://www.netlib.org/lapack/lug/node48.html>.
- [23] C. Huang, "The Shifted QR Algorithm for Normal Matrices", The University of Tennessee.
- [24] Grossman, "Algebra lineal", vol. 1, McGraw-Hill, 1995.

5.4 Referencias

- [1] Loranca Ramos, Y. A. 2003. *Líneas de Transmisión y guías de onda*. Tesis Licenciatura. Ingeniería en Electrónica y Comunicaciones. Departamento de Ingeniería Electrónica, Escuela de Ingeniería, Universidad de las Américas, Puebla.
- [2] J. E. Goell, “A Circular Harmonic Computer Analysis of Rectangular Dielectric Waveguides”, *Bell Syst. Tech. J.*, vol 48, pp. 2133 – 2160, 1969.
- [3] E. A. J. Marcatili, “Dielectric Rectangular Waveguide and Directional Coupler for Integrated Optics”, *Bell Syst. Tech. J.*, vol 48, pp. 2071 – 2102, 1969.
- [4] M. Koshiba and K. Inoue, Simple and Efficient Finite – Element Analysis of Microwave and Optical Waveguides, *IEEE Trans. On Microwave Theory and Tech.* Vol. 40, No. 2. 1992.
- [5] M. Ohtaka, “Analysis of the guided modes in the anisotropic dielectric rectangular waveguides”, *Trans. IECE Japan*, vol. J64-C, pp. 674, 681.
- [6] F. A. Fernández y Y. Lu, “Microwave And Optical Waveguide Analysis By The Finite Element Method”, Research Studies Press Ltd., England, 1996.
- [7] J. P. Webb, “Finite Element Analysis of Dispersion in Waveguides with Sharp Metal Edges”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 36. pp. 1819 – 1824, 1988.
- [8] R. Mittra and T. Itoh, “A new technique for the analysis of the dispersion characteristics of microstrip lines”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-19, pp. 47-56, 1971.