

**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

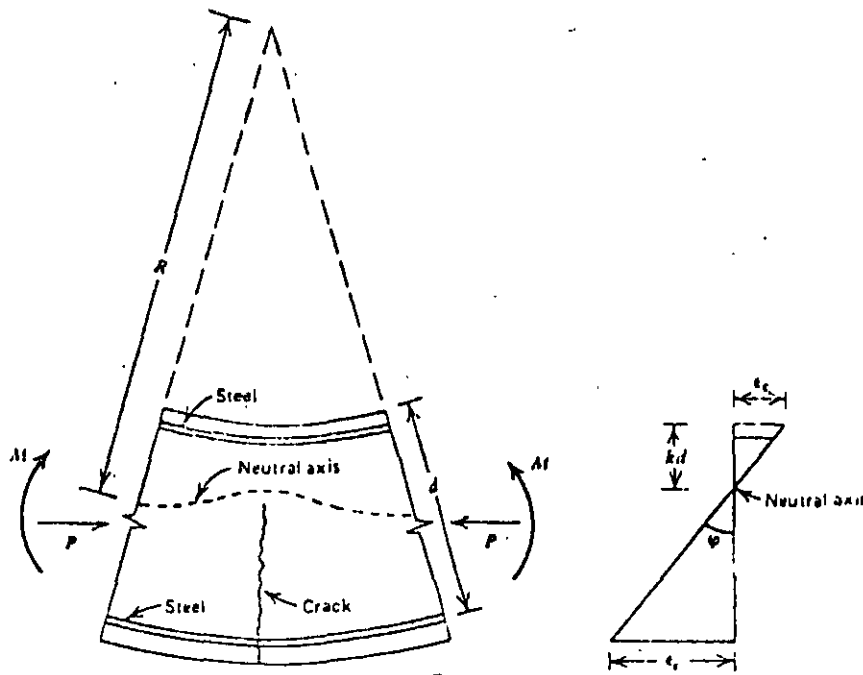
**FLEXIÓN**

**AUTOR DR. ROBERTO STARK FELDMAN  
EXPOSITOR: MIGUEL ÁNGEL GUZMAN ESCUDERO  
PALACIO DE MINERÍA  
AGOSTO DE 1998**

### III.- F L E X I O N

#### 1.- HIPOTESIS PARA LA OBTENCION DE LA RESISTENCIA.

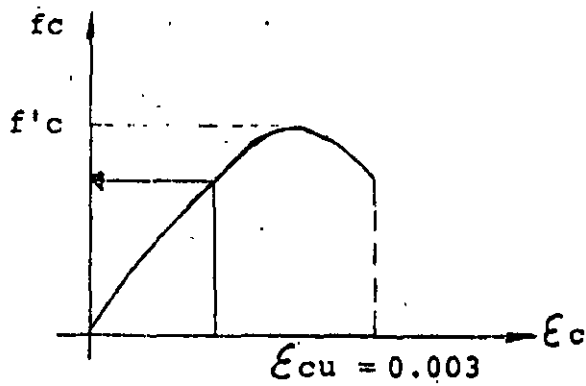
- A) EL CONCRETO NO RESISTE ESFUERZOS DE TENSION.
- B) LA DISTRIBUCION DE LAS DEFORMACIONES UNITARIAS LONGITUDINALES EN LA SECCION TRANSVERSAL DE UN ELEMENTO - ES PLANA Y POR LO TANTO SE CONSIDERA QUE EXISTE ADHESION PERFECTA ENTRE EL CONCRETO Y EL ACERO.



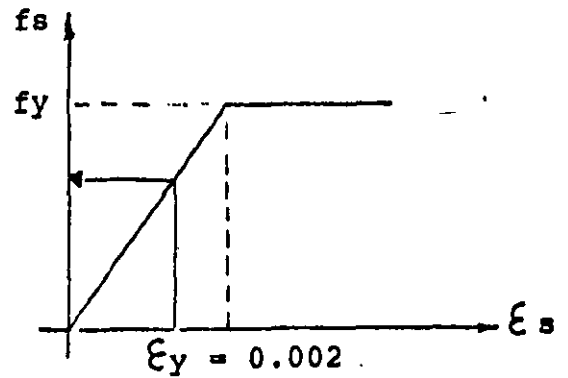
- C) LA DEFORMACION UNITARIA DEL CONCRETO A COMPRESION - CUANDO SE ALCANZA LA RESISTENCIA DE LA SECCION ES:

$$\epsilon_{cM} = 0.003$$

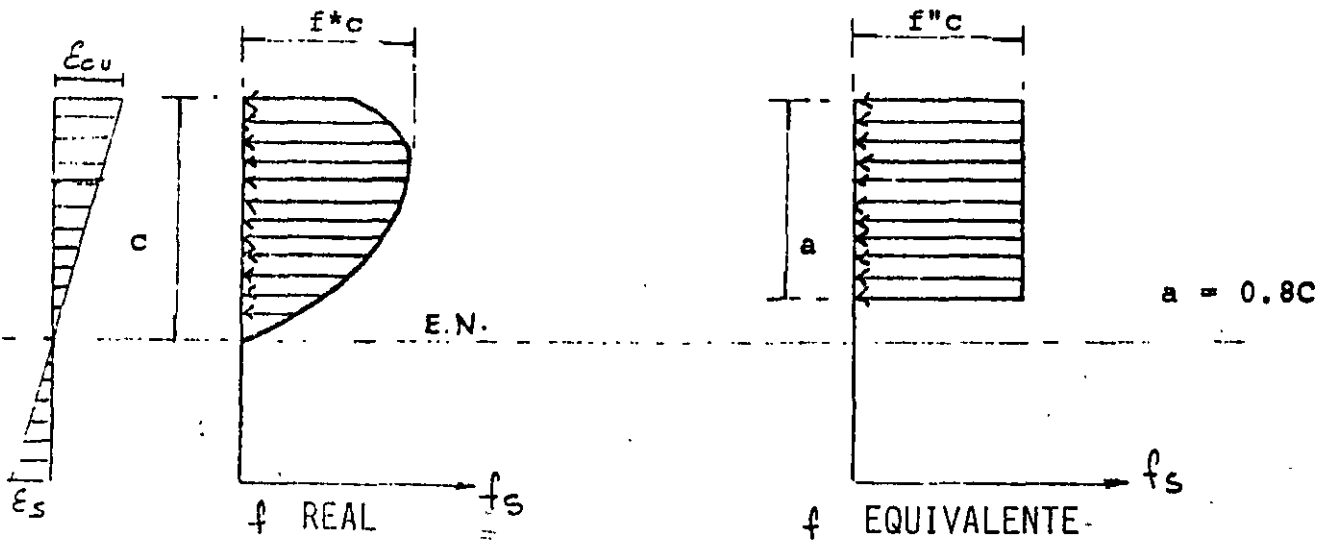
D) LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS EN EL CONCRETO Y EL ACERO CUANDO SE ALCANZA LA RESISTENCIA SE CONOCEN



CURVA TIPICA DEL CONCRETO EN COMPRESION.



CURVA TIPICA DEL ACERO EN TENSION.



$$f^*c = 0.8 f'c$$

$$f''c = 0.85 f^*c$$

$$f''c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1250}\right) f^*c$$

$$\text{si } f^*c \leq 250 \text{ Kg/cm}^2$$

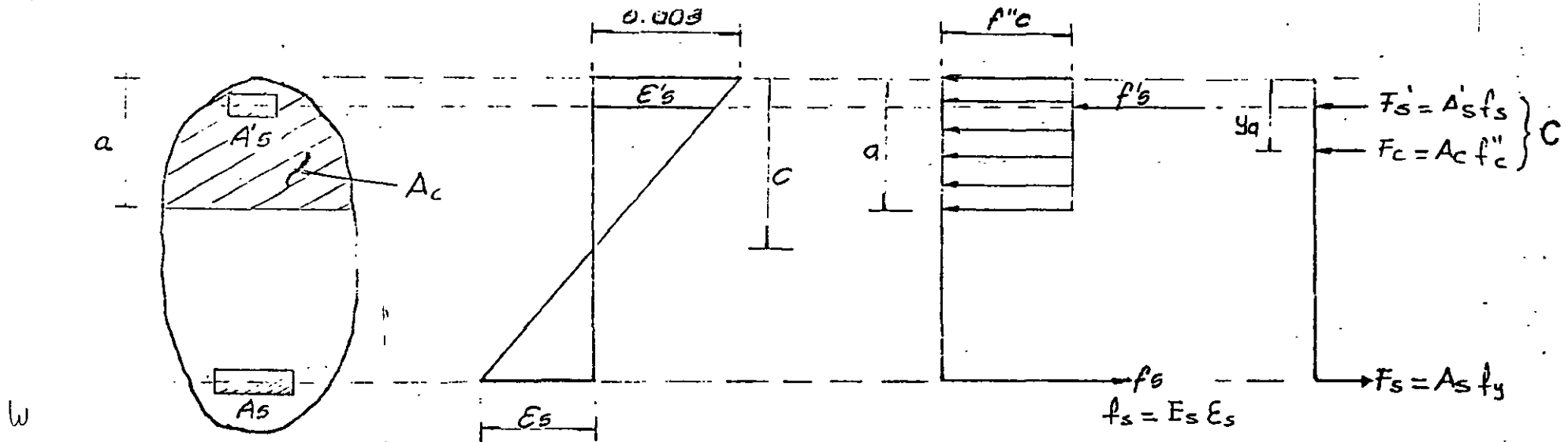
$$\text{si } f^*c > 250 \text{ Kg/cm}^2$$

SECCION DE  
FORMA  
CUALQUIERA

DEFORMACIONES  
UNITARIAS

DISTRIBUCION  
DE  
ESFUERZOS

FUERZAS



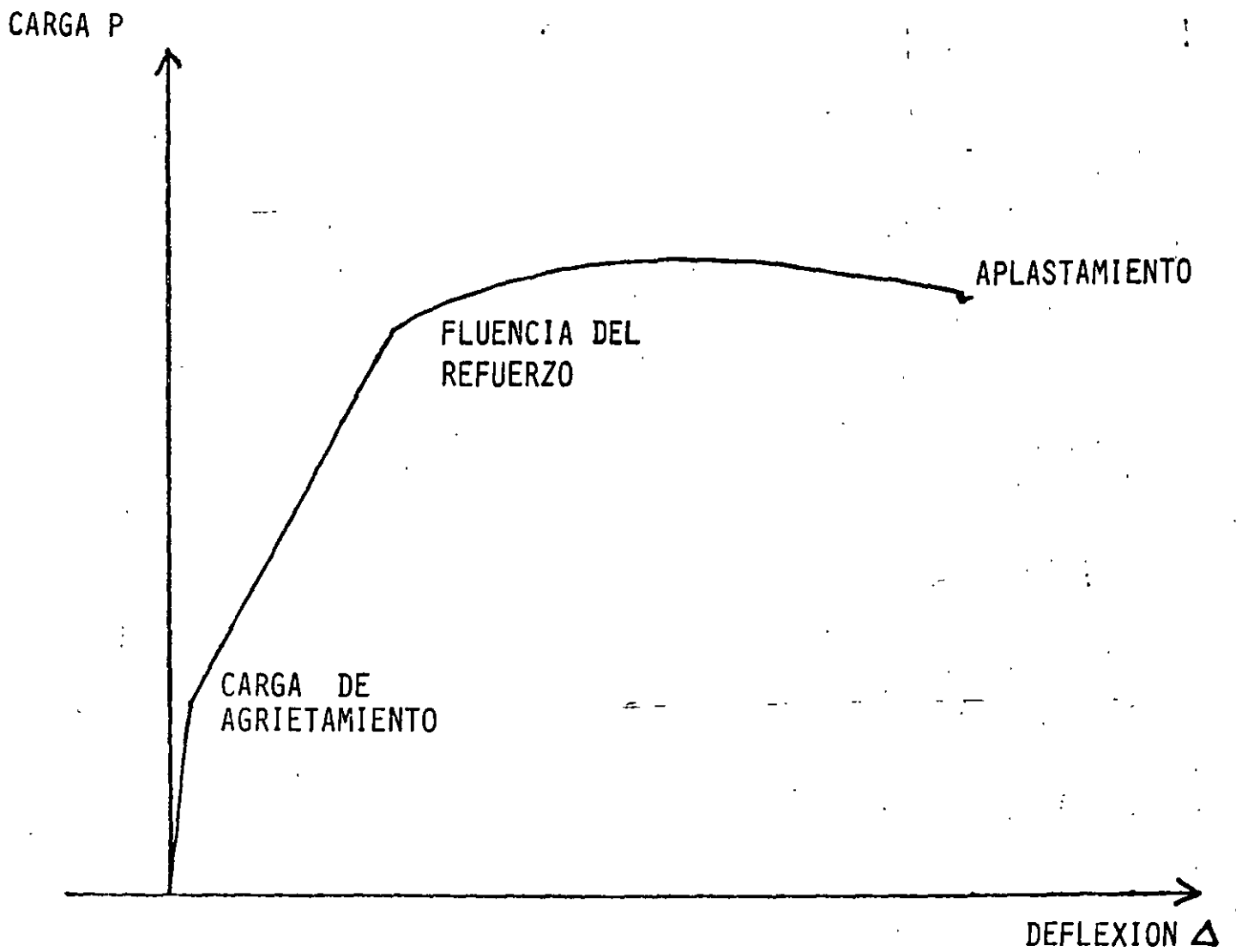
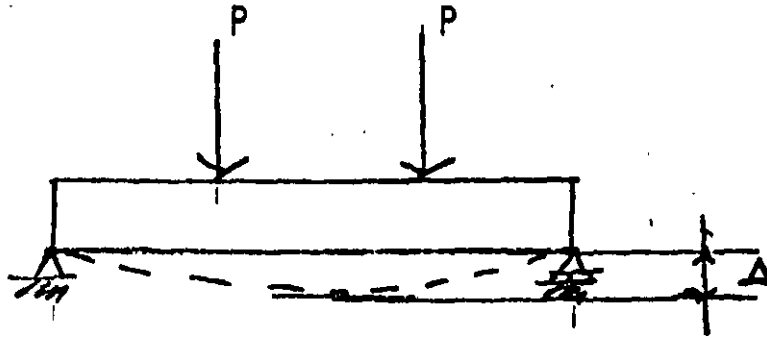
$$\sum F = 0 \Rightarrow C = T.$$

$$\sum M = M_r$$

PROCEDIMIENTO GENERAL PARA CALCULAR LA RESISTENCIA  $M_r$

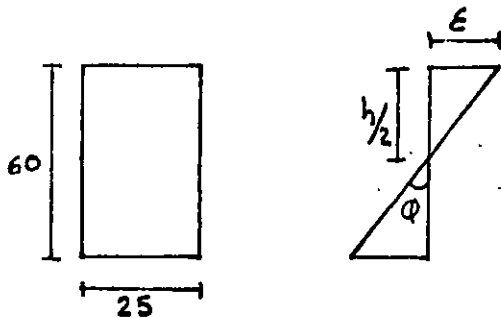


GRAFICA CARGA - DEFLEXION DE UN ELEMENTO  
CON UN PORCENTAJE USUAL DE ACERO DE -  
REFUERZO.



CALCULO DE RESISTENCIAS A FLEXION DE UNA SECCION RECTANGULAR DE CONCRETO CON DIFERENTE PROCENTAJE DE REFUERZO (R.C.D.F. - 1987).

1) SECCION DE CONCRETO SIMPLE



$f'c = 200$	Kg/cm <sup>2</sup>
$f^*c = 160$	Kg/cm <sup>2</sup>
$f''c = 136$	Kg/cm <sup>2</sup>
* $\bar{f}_t = 19.80$	Kg/cm <sup>2</sup>
** $E = 113,137$	Kg/cm <sup>2</sup>
$E_s = 2 \times 10^6$	Kg/cm <sup>2</sup>

$$F_R = 0.9$$

$$* E = 8000 \sqrt{f'_c}$$

$$** \bar{f}_t = 1.4 \sqrt{f''c}$$

A) CALCULO DE  $M_R$

$$\bar{f}_t = \frac{M_R}{I} C \quad M_R = \bar{f}_t \frac{I}{C} = \bar{f}_t S = \bar{f}_t \frac{bh^2}{6}$$

$$M_R = 19.80 \frac{(25 \times 60^2)}{6} = 297,000 \text{ Kg - cm}$$

$$M_R = 2.97 \text{ Ton - M}$$

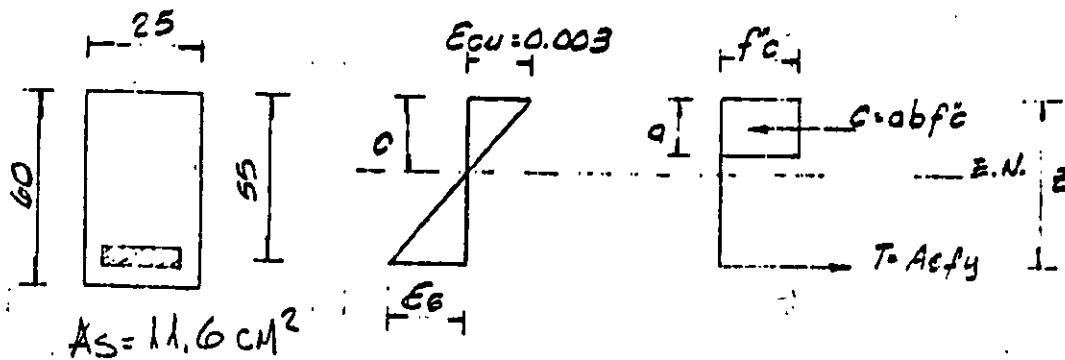
$$M_R = 2.97 \times 0.9 = 2.67 \text{ Ton-M (MOMENTO DE AGRIETAMIENTO)}$$

B) CALCULO DE  $\phi$  (CURVATURA)

$$\epsilon = \frac{\bar{f}_t}{E} = \frac{19.80}{113,137} = 0.00018$$

$$\phi = \frac{\epsilon}{C} = \frac{\epsilon}{h/2} = \frac{0.00018}{30} = 0.6 \times 10^{-5}$$

## 2) SECCION SIMPLEMENTE ARMADA (SUBREFORZADA)



( FIGURA 2 )

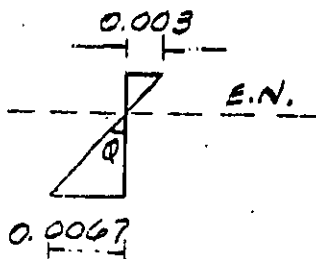
### A) CALCULO DE MR

SE SUPONE  $c = 17.00$

$$a = 0.8 \times 17 = 13.60$$

$$\epsilon_s = \frac{d}{c} \epsilon_{cu} - \epsilon_{cu} = \frac{55}{17} (0.003) - 0.003 = 0.0067$$

$$\epsilon_s = 0.0067 > \epsilon_y \Rightarrow f_s = f_y$$



FALLA DUCTIL

$$C = abfc = 13.60 \times 25 \times 136 = 46,240 \text{ Kg} = 46.24 \text{ Ton.}$$

$$T = Asfy = 11.60 \times 4000 = 46,400 \text{ Kg} \hat{=} C$$

$$M_R = Tz = T \left( d - \frac{a}{2} \right) = 46,400 \left( \frac{55 - 13.60}{2} \right) = 2,236,480 \text{ Kg-cm.}$$

$$M_R = 22.36 \text{ Ton-m}$$

$$M_R = 22.36 \times 0.9 = \underline{20.12} \text{ Ton-m}$$

### B) CALCULO DE $\phi$ (CURVATURA)

$$\phi = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.0030}{17} = \frac{17.65 \times 10^{-5}}{\text{cm}} \text{ rad}$$

3) SECCION SIMPLEMENTE ARMADA (SOBREREFORZADA)

A) CALCULO DE  $M_R$

$A_s = 30.00 \text{ cm}^2$       SECCION 25 X 60

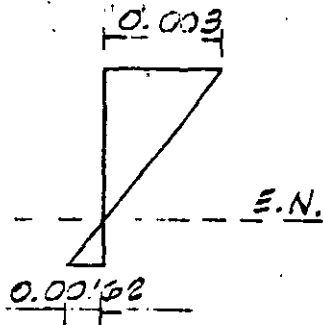
SE SUPONES  $c = 35.7$

$a = 0.8c = 0.8 \times 35.70 = 28.56 \text{ cm}$

$\epsilon_s = \left( \frac{d}{c} \epsilon_{cu} \right) - \epsilon_{cu} = \frac{55}{35.70} \cdot 0.003 - 0.003 = 0.0016 < \epsilon_y$

NO FLUYE EL ACERO

$f_s = \epsilon_s E_s$



FALLA FRAGIL

$C = abf''c = 28.56 \times 25 \times 136 = 97,104 \text{ Kg}$

$T = A_s \epsilon_s E = 30 \times 0.00162 \times 2 \times 10^6 = 97,200 \text{ Kg}$

$M_R = Tz = T \left( d - \frac{a}{2} \right) = 97,200 \left( 55 - \frac{28.56}{2} \right) = 3,957,964 \text{ Kg-cm}$

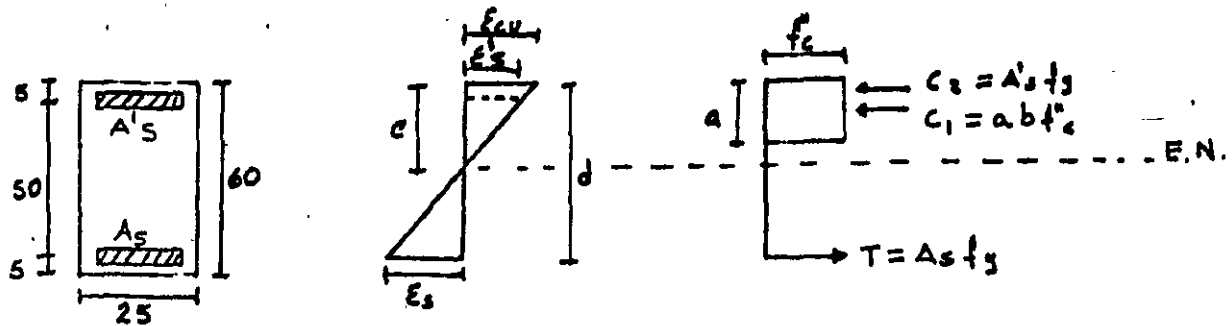
$M_R = 39.58 \text{ Ton-m}$

$M_R = 39.58 \times 0.9 = \underline{35.62 \text{ Ton-m}}$

B) CALCULO DE  $\phi$  (CURVATURA)

$\phi = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.003}{35.70} = \underline{8.40 \times 10^{-5} \text{ rad/cm}}$

4) SECCION DOBLEMENTE ARMADA (SUBREFORZADA)



DATOS:

$A_s = 30 \text{ cm}^2$

$A's = 10 \text{ cm}^2$

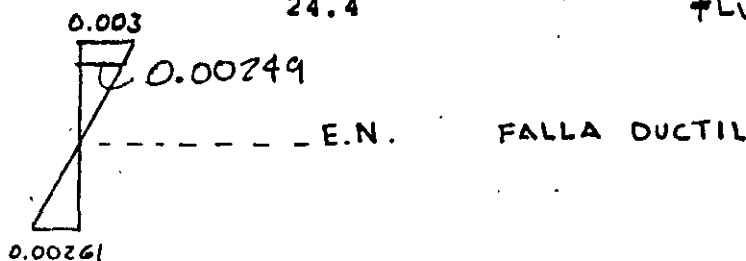
B) CALCULO DE MR

SE SUPONE  $c = 29.4$

$a = 0.8c = 23.52$

$\epsilon'_s = \frac{c - d'}{c} \epsilon_{cu} = \frac{(29.4 - 5)}{29.4} 0.003 = 0.00249 > f_y = 0.002$   
FLUYE EN COMPRESION

$\epsilon_s = \frac{d}{c} \epsilon_{cu} - \epsilon_{cu} = \frac{55}{29.4} 0.003 - 0.003 = 0.00261 > f_y = 0.002$   
FLUYE EN TENSION



$C_1 = a b f_c c = 23.52 \times 25 \times 136 = 79\,968 \text{ Kg}$

$C_2 = A's f_y = 10 \times 4000 = 40000 \text{ Kg}$

$C = C_1 + C_2 = 79968 + 40000 = 119,968 \text{ Kg}$

$T = A_s f_y = 30 \times 4000 = 120\,000 \text{ Kg} \approx C$

$$M_R = C_1 \left( d - \frac{a}{2} \right) + C_2 (d - d')$$

$$M_R = 79,968 \cdot (55 - \frac{23.52}{2}) + 40000 (55 - 5)$$

$$M_R = 5'457,816 \text{ Kg-cm}^2$$

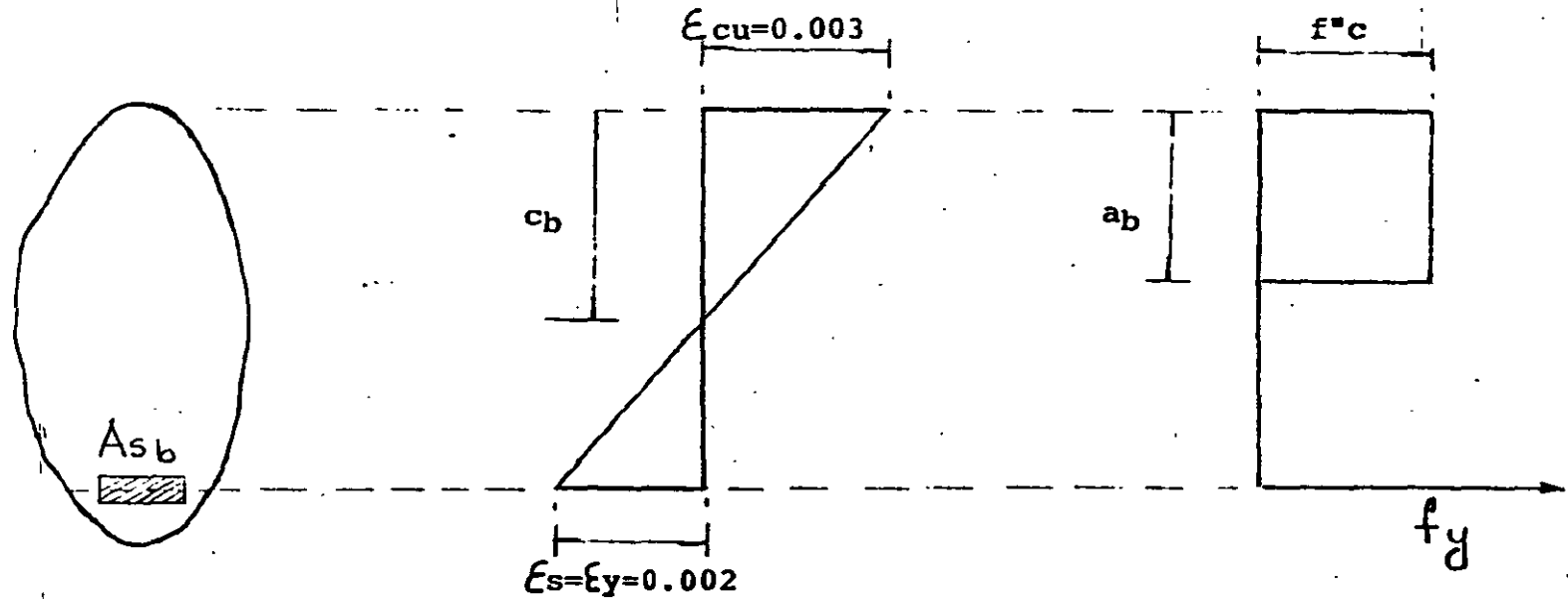
$$M_R = 54.57 \text{ Ton-m}$$

$$M_R = 54.57 \times 0.9 = \underline{49.11 \text{ Ton-m}}$$

B) CALCULO DE  $\phi$

$$\phi = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.003}{29.40} = \frac{10.20 \times 10^{-5}}{29.40} \text{ rad/cm}$$

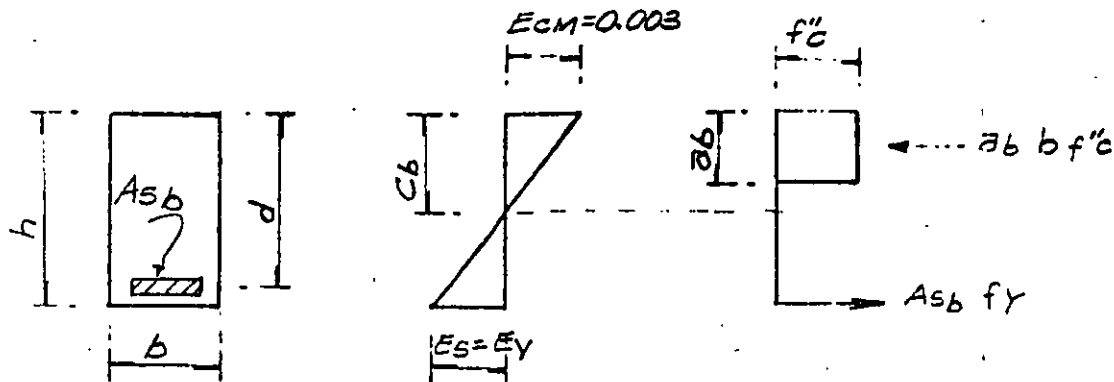
# FALLA BALANCEADA



SECCION SUBREFORZADA  $A_s \leq A_{sb}$

SECCION SOBREFORZADA  $A_s > A_{sb}$

CALCULO DEL PORCENTAJE BALANCEADO  
EN SECCIONES RECTANGULARES



$$P_b = \frac{A_{sb} f_y}{b d}$$

$$C = T$$

$$0.8 C_b b f'_c = P_b b d f_y$$

$$C_b = \frac{P_b b d f_y}{0.8 b f'_c} = \frac{P_b d f_y}{0.8 f'_c}$$

PERO  $\frac{0.003}{E_y + 0.003} = \frac{C_b}{d}$

$$\frac{0.003}{E_y + 0.003} = \frac{P_b d f_y}{0.8 f'_c d}$$

$$P_b = \frac{0.8 f'_c}{f_y} \frac{0.003}{E_y + 0.003}$$

MULTIPLICANDO POR  $E_s = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

$$P_b = \frac{0.8 f'_c}{f_y} \frac{6000}{f_y + 6000} \quad \left[ f_y = E_s E_y \right]$$

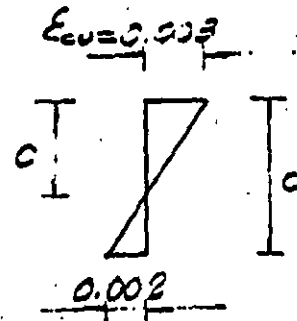
$$P_b = \frac{4800}{f_y + 6000} \frac{f'_c}{f_y}$$



5) SECCION BALANCEADA

A) CALCULO DE MR

$$\epsilon_s = \epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4000}{2 \times 10^6} = 0.002$$



DE LA FIGURA

$$\frac{c}{\epsilon_{cu}} = \frac{d}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} \quad c = \frac{d}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} \epsilon_{cu}$$

$$c = \frac{55 \times 0.003}{0.003 + 0.002} = 33.00 \text{ cm.}$$

$$a = 0.8c = 0.8 (33) = 26.40 \text{ cm}$$

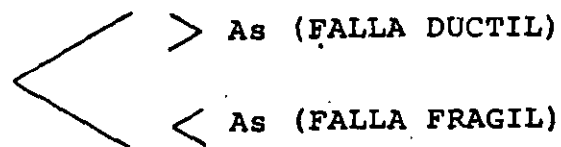
LA FUERZA DE COMPRESION ES

$$C = abf''c = 26.40 \times 25 \times 136 = 89,760 \text{ Kg}$$

POR EQUILIBRIO

$$T = C \Rightarrow A_s b f_y = 89,760$$

$$A_s b = \frac{89760}{4000} = \underline{\underline{22.44}} \text{ cm}^2$$



$$M_R = CZ = C \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

$$M_R = 89760 \left( 55 - \frac{26.40}{2} \right) = 3'751,968 \text{ Kg - cm}$$

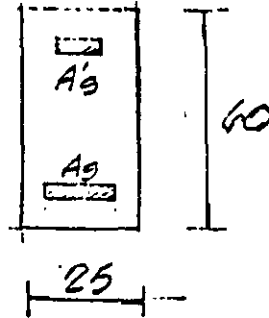
$$M_R = 37.52 \times 0.9 = \underline{\underline{33.77}} \text{ Ton-M}$$

B) CALCULO DE  $\phi$  (CURVATURA)

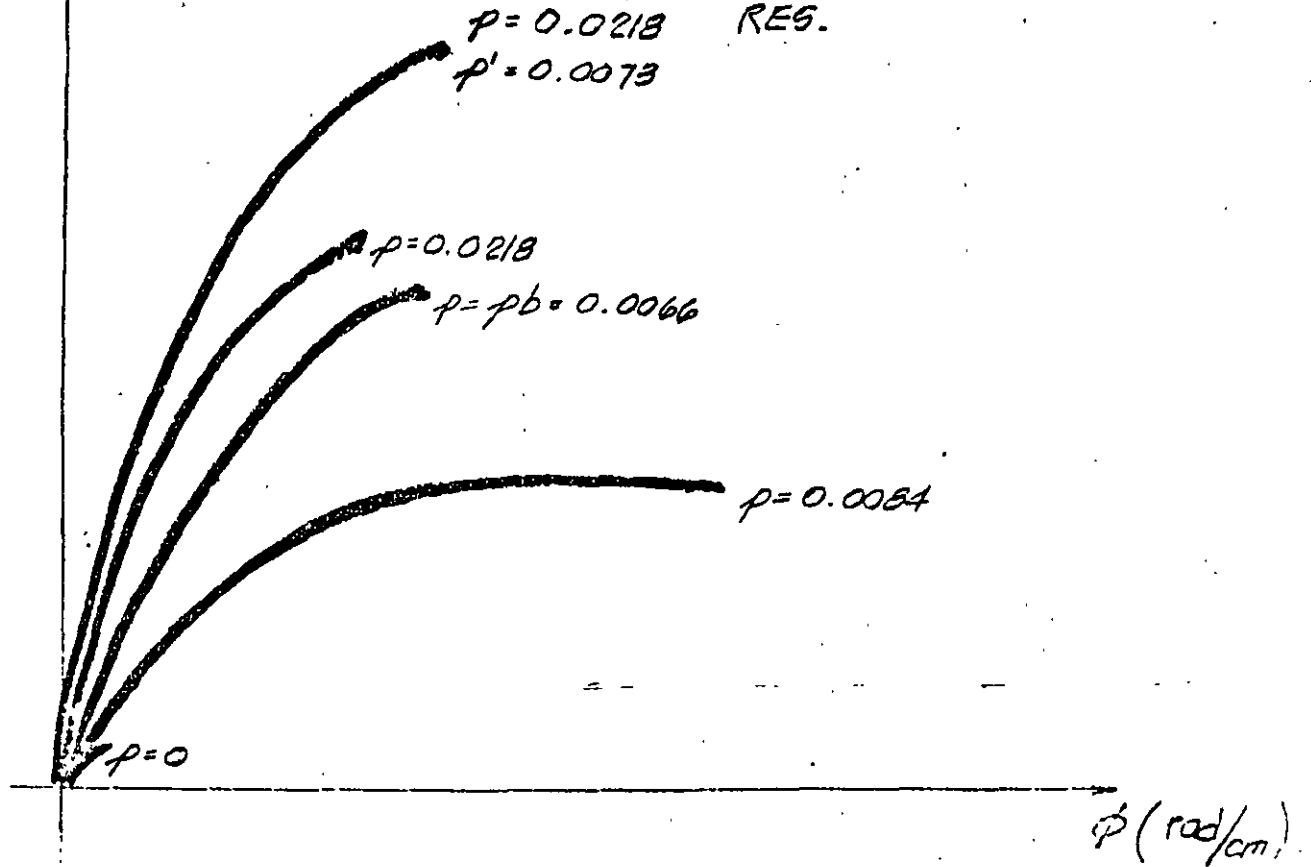
$$\phi = \frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.003}{33.00} = \underline{\underline{9.09 \times 10^{-5}}} \text{ rad/cm}$$

# GRAFICA MOMENTO-CURVATURA PARA DISTINTOS PORCENTAJES DE REFUERZO

M (TON-m)



RESISTENCIA Y CURVATURAS OBTENIDAS EN LOS EJEMPLOS ANTERIORES.



RESTRICCIONES EN LA CUANTIA DEL ACERO DE REFUERZO  
(RCDF-87)

1) REFUERZO MINIMO

1.1)  $M_R \geq 1.5 \text{ Mag}$

$$\text{Mag} = \frac{\bar{f}_f I}{Y_{\text{MAX}}}$$

$$\bar{f}_f = 1.4 \sqrt{f'c}$$

1.2) SECCIONES RECTANGULARES:

$$A_{s\text{mín}} = \frac{0.7 \sqrt{f'c}}{f_y} bd$$

2) REFUERZO MAXIMO

2.1)  $A_{s\text{máx}} \begin{cases} A_{sb} & (\text{NO SISMO}) \\ 0.75 A_{sb} & (\text{SI SISMO}) \end{cases}$

2.2) SECCIONES RECTANGULARES

$$A_{sb} = \frac{f'c}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} bd$$

RESTRICCIONES EN LA CUANTIA DEL ACERO DE REFUERZO  
(RCDF-87)

1) REFUERZO MINIMO

1.1)  $M_R \geq 1.5 \text{ Mag}$

$$\text{Mag} = \frac{\bar{f}_f I}{Y_{\text{MAX}}}$$

$$\bar{f}_f = 1.4 \sqrt{f'c}$$

1.2) SECCIONES RECTANGULARES:

$$A_{s\text{mín}} = \frac{0.7 \sqrt{f'c}}{f_y} bd$$

2) REFUERZO MAXIMO

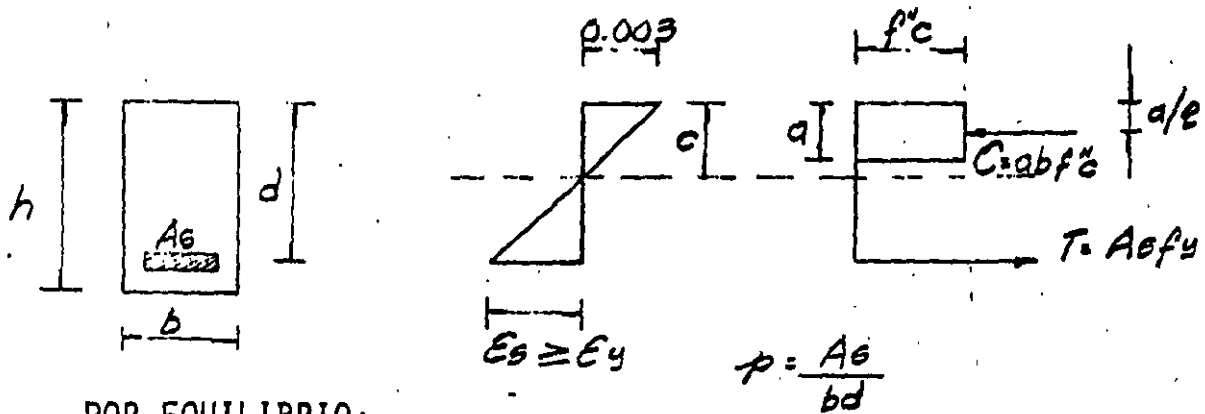
2.1)  $A_{s\text{máx}} \begin{cases} A_{sb} & (\text{NO SISMO}) \\ 0.75 A_{sb} & (\text{SI SISMO}) \end{cases}$

2.2) SECCIONES RECTANGULARES

$$A_{sb} = \frac{f'c}{f_y} \frac{4800}{f_y + 6000} bd$$

# FORMULAS PARA CALCULAR LAS RESISTENCIAS EN SECCIONES DE FORMA COMUN

A) SECCIONES RECTANGULARES SUBREFORZADAS SIN ACERO DE COMPRESION.



POR EQUILIBRIO:

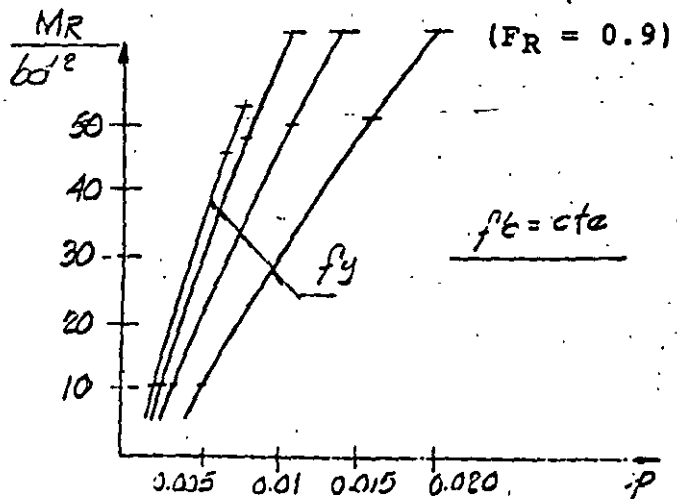
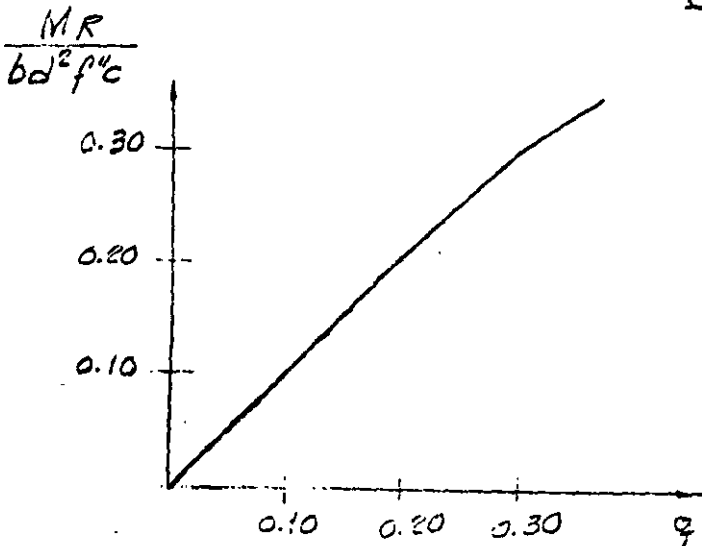
$$c = T$$

$$abf''c = Asfy$$

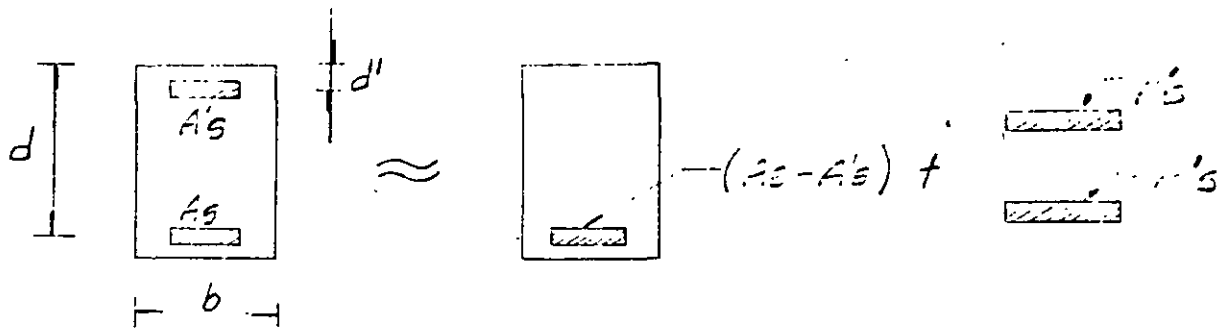
$$a = \frac{Asfy}{bf''c} = \frac{Pdfy}{f''c} \quad ; \quad q = \frac{Pfy}{f''c}$$

$$M_R = c(d - \frac{a}{2}) = abf''c d(1 - \frac{a}{2d}) = \frac{pdfy}{f''c} bf''c d(1 - \frac{Pdfy}{2df''c})$$

$$M_R = F_R [ b d^2 f''c q (1 - 0.5q) ] \quad \leftarrow$$



E. SECCION RECTANGULAR CON ACERO DE COMPRESION



$$M_R = F_R \left[ (A_s - A_s') f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A_s' f_y (d - d') \right]$$

de  $C = T$

$$a b f_c'' + A_s' f_y = A_s f_y$$

$$a = \frac{(A_s - A_s') f_y}{b f_c''}$$

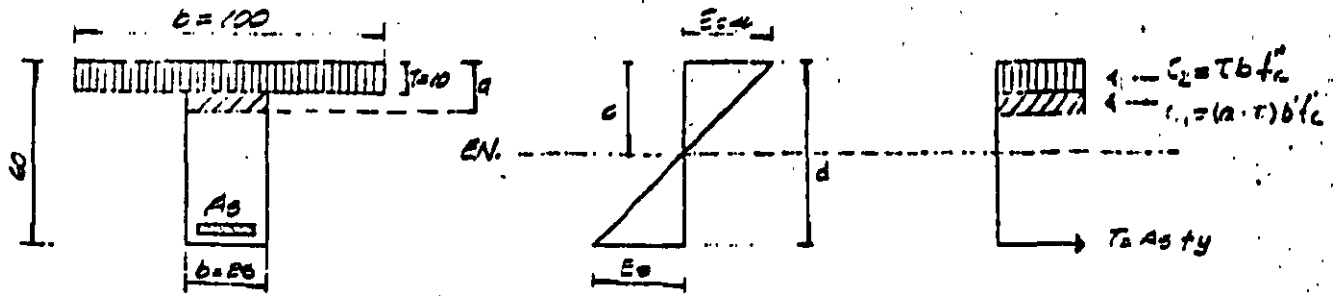
SOLO SI

$$(p - p') \geq \frac{4500}{6000 - f_y} \frac{d'}{d} \frac{f_c''}{f_y}$$

CONDICION QUE IMPLICA QUE EL ACERO FLUYE EN TENSION Y COMPRESION.

6-)

# SECCION T SIMPLEMENTE ARMADA (SUBREFORZADA)



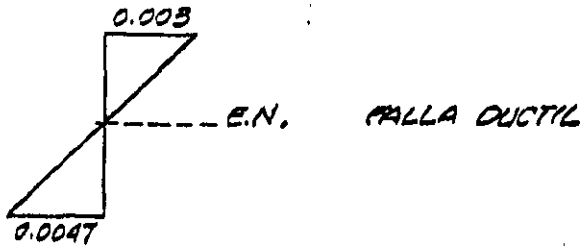
$$A_s = 40.00 \text{ CM}^2$$

A-) CALCULO DE  $M_r$ .

$$\text{SE SUPONE } c = 21.32 \text{ CM.}$$

$$d = 0.8 = 0.8 \times 21.32 = 17.06 \text{ CM.}$$

$$\epsilon_s = \frac{E}{E_s} \epsilon_{cu} - \epsilon_{cu} = \frac{55}{21.32} \cdot 0.003 = 0.0047 > \epsilon_y \Rightarrow f_s = f_y$$



$$C_1 = (a - \tau) b' f' c = (17.06 - 10) 25 \times 136 = 24,004 \text{ Kg.}$$

$$C_2 = \tau b f' c = 10 \times 100 \times 136 = 136,000 \text{ Kg.}$$

$$C = 24,004 + 136,000 = 160,004 \text{ Kg.}$$

$$T = A_s f_y = 40 \times 4000 = 160,000 \text{ Kg.} = C$$

$$M_r = C_1 \left( d - a + \frac{a - \tau}{2} \right) + C_2 \left( d - \frac{\tau}{2} \right)$$

$$M_r = 2400 (0.55 - 0.17 + \frac{0.17 - 0.1}{2}) + 136,00 (0.55 - \frac{0.1}{2}) = 77.95 \text{ TON-M.}$$

$$M_r = 77.95 \times 0.9 = 70.16 \text{ TON-M.}$$

E-) CALCULO DE  $\phi$  (CURVATURA)

$$\phi = \frac{\epsilon_s}{c} = \frac{0.0047}{21.32} = 0.00022 \frac{\text{rad}}{\text{cm.}}$$

### EJEMPLO 9.1 Diseño de una viga rectangular simplemente armada

Obtener las dimensiones de una viga rectangular y la cuantía de acero  $A_s$  para resistir los siguientes momentos (en condiciones de servicio):  $M_d = 7.50$  ton-m y  $M_l = 5.00$  ton-m. El agrietamiento por flexión debe ser revisado con el refuerzo; suponga que la viga está expuesta a la intemperie.

Usar  $f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$z = 145 \text{ (exposición al exterior)}$$

#### CALCULOS Y DISCUSION

referencias

10.3.3

1.- El procedimiento de diseño completo para secciones rectangulares simplemente armadas se presenta a partir de calcular un peralte mínimo, usando el porcentaje máximo que se permite para los miembros a flexión,  $0.75 P_b$

Paso 1. Cálculo del porcentaje máximo de acero\*

$$P_b = \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \frac{6000}{6000 + f_y} = 0.0283$$

$$\beta_1 = 0.85 \text{ (} f'_c \leq 280 \text{ Kg/cm}^2 \text{)}$$

$$P_{\text{máx}} = 0.75 P_b = 0.75 (0.0283) = 0.0212$$

10.3.3

Paso 2. Cálculo del  $bd^2$  necesario

Resistencia a la flexión necesaria:

$$U = 1.4 D + 1.7 L$$

$$M_u = 1.4 \times 7.50 + 1.7 \times 5.0$$

ec (9-1)

$$M_u = 19.00 \text{ ton-m}$$



\* Los valores de  $P_b$  y  $0.75 P_b$  se pueden obtener también directamente de la tabla 9.1

$$R_n = p f_y \left( 1 - 0.5 \frac{p f_y}{0.85 f_c} \right)$$

$$= 0.0212 \times 4200 \left( 1 - \frac{0.5 \times 0.0212 \times 4200}{0.85 \times 280} \right)$$

$$R_n = 72.38 \text{ Kg/cm}^2$$

9.3.2.1

$$\phi = 0.90 \text{ (flexión)}$$

$$bd^2_{\text{nec.}} = \frac{M_u}{\phi R_n} = \frac{19.00 \times 100,000}{0.9 \times 72.38} = 29,167 \text{ cm}^3$$

Paso 3. Dimensiones del elemento

$$bd^2_{\text{nec.}} \leq bd^2_{\text{disp.}}$$

Sea  $b = 25.0 \text{ cm}$  (ancho de columna)

$$d = \sqrt{\frac{29,167}{25}} = 34.16 \text{ cm}$$

Peralte mínimo total =  $34.16 + 6.25 = 40.4 \text{ cm}$

Para la resistencia a la flexión, resulta adecuada una viga de  $25 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ . Sin embargo, debe observarse que el peralte total de  $40 \text{ cm}$  es un poco menor que el requerido según el criterio de esfuerzos admisibles. Debido a eso que las deflexiones pueden ser importantes en las vigas diseñadas con el criterio de resistencia última.

Paso 4. Con el peralte total de  $40 \text{ cm}$ , se calcula un valor revisado de  $p$ .

Como ilustración, se calcula el  $p$  con cuatro diferentes métodos

$$d = 40 - 6.2 = 33.8 \text{ cm}$$

(1) por fórmula (método exacto):

$$R_n = \frac{M_u}{\phi (bd^2)_{disp}} = \frac{19.00 \times 100,000}{0.9 (25 \times 33.8^2)} = 73.92 \text{ Kg/cm}^2$$

$$p = \frac{0.85 f'_c}{f_y} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2R_n}{0.85 f'_c}} \right)$$

$$p = \frac{0.85 \times 0.28}{4.2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2 \times 73.9}{0.85 \times 280}} \right) = 0.0218 \doteq p_{m\acute{a}x}$$

(2) Con las curvas de resistencia como las de la fig. 9.1 para  $R_n = 73.92 \text{ Kg/cm}^2$  ( $10511 \text{ lb/pulg}^2$ ),  $p = 0.0214$

(3) Con las tablas de resistencia como la tabla 9.2:

$$\text{para } \frac{M_u}{\phi f'_c bd^2} = \frac{19 \times 100,000}{0.9 \times 280 \times 25 \times 33.8^2} = 0.2640$$

$$w = 0.327$$

$$p = wf'_c / f_y = 0.327 \times 0.28 / 4.2 = 0.0218$$

(4) Con aproximación lineal:

$$p = (p_{original}) \frac{(R_n \text{ revisado})}{(R_n \text{ original})}$$

$$p = 0.0212 \times 73.92 / 72.38 = 0.0217$$

Paso 5. Cálculo de  $A_s$  necesaria

$$A_s = (p_{revisado}) (bd)_{disp.}$$

$$A_s = 0.0218 \times 25 \times 33.8 = 18.42 \text{ cm}^2$$

2.- Revisión de la corrección de los cálculos, por simple estática  
(ver la siguiente figura):

$$T = \rho b d f_y = A_s f_y = 18.42 \times 4.2 = 77.36 \text{ ton}$$

$$a = \frac{C \phi T}{0.85 f'_c b} = \frac{77.36}{0.85 \times 0.28 \times 25} = 13 \text{ cm}$$

Resistencia de diseño a la flexión:

$$\phi M_n = [\phi A_s f_y (d - \frac{a}{2})] = [0.9 \times 77.36 (33.8 - 13.00/2)]$$

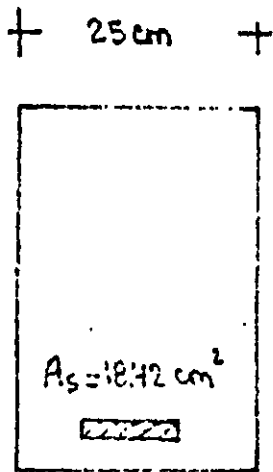
$$\phi M_n = 1900.74 \text{ ton-cm} \approx 19.01 \text{ ton-m}$$

como (resistencia necesaria)  $\leq$  (resistencia disponible), o sea que

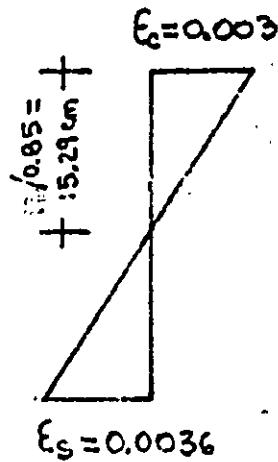
$$M_u \leq \phi M_n,$$

$$19.00 \approx 19.01$$

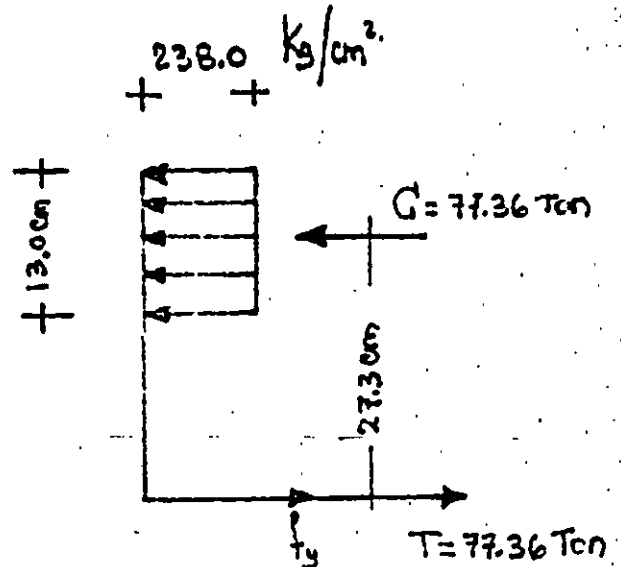
bien



sección  
transversal



deformaciones



bloque de  
esfuerzos

3. Cálculo del refuerzo que satisfaga los requisitos de la distribución del armado a flexión de la sección 10.6. Usar  $z = 145$  para elementos a la intemperie,

10.6

$$A_s \text{ necesario} = 18.42 \text{ cm}^2$$

$$\text{con 3 var \# 9, } A_s = 19.23 \text{ cm}^2$$

$$z = f_s (5.60) \sqrt[3]{d_c A} \quad \text{cc(10.4)}$$

$$d_c = (\text{recubrimiento necesario}) + (1/2 \text{ diámetro varilla}) +$$

$$(\text{diámetro estribo}) = 3.8 + 1.43 + 1.27 = 6.50 \text{ cm} \quad 10.0$$

$$(\text{recubrimiento para var \# 9} = 3.8 + 1.27 = 5.07 \text{ cm}) \quad 7.7.1$$

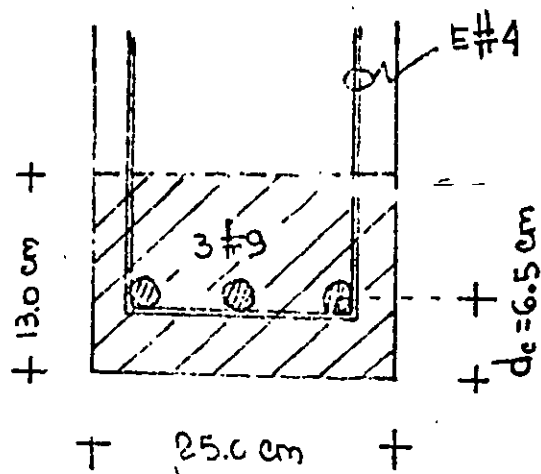
(expuesta a la intemperie)

$$A = 2d_c b / \text{no. de var.}$$

$$= 2 \times 6.50 \times 25 / 3 = 108.3 \text{ cm}^2 / \text{var.}$$

$$\text{con } f_s = 0.6 f_y = 0.6 \times 4.2 = 2.52 \text{ ton/cm}^2 \quad 10.6.4$$

$$z = 2.52 \times 5.60 \sqrt[3]{6.5 \times 108.3} = 125.5 < 145 \quad \underline{\text{bien}}$$



3. Cálculo del refuerzo que satisfaga los requisitos de la distribución del armado a flexión de la sección 10.6. Usar  $z = 145$  para elementos a la intemperie,

10.6

$$A_s \text{ necesario} = 18.42 \text{ cm}^2$$

$$\text{con 3 var } \# 9, A_s = 19.23 \text{ cm}^2$$

$$z = f_s (5.60) \sqrt[3]{d_c A} \quad \text{cc(10.4)}$$

$$d_c = (\text{recubrimiento necesario}) + (1/2 \text{ diámetro varilla}) +$$

$$(\text{diámetro estribo}) = 3.8 + 1.43 + 1.27 = 6.50 \text{ cm} \quad 10.0$$

$$(\text{recubrimiento para var } \# 9 = 3.8 + 1.27 = 5.07 \text{ cm}) \quad 7.7.1$$

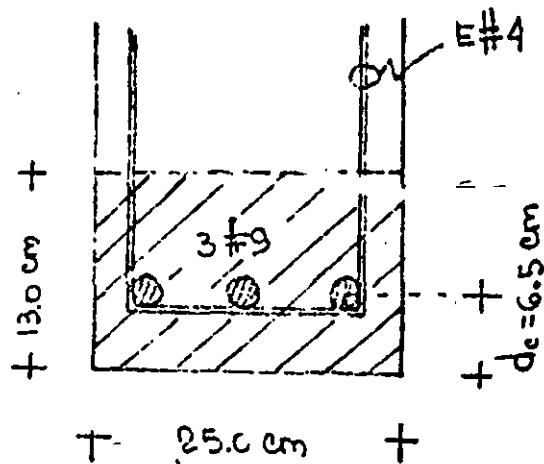
(expuesta a la intemperie)

$$A = 2d_c b / \text{no. de var.}$$

$$= 2 \times 6.50 \times 25 / 3 = 108.3 \text{ cm}^2 / \text{var.}$$

$$\text{con } f_s = 0.6 f_y = 0.6 \times 4.2 = 2.52 \text{ ton/cm}^2 \quad 10.6.4$$

$$z = 2.52 \times 5.60 \sqrt[3]{6.5 \times 108.3} = 125.5 < 145 \quad \text{bien}$$



#### 4. Revisión del ancho de viga

$$b_{\text{disp.}} \geq 2 \times (\text{recubrimiento}) + 3 \times 2.86 + 2 \times 2.86 = \quad 7.6.1$$

$$= 2 \times 5.07 + 14.30 = 24.4 < 25 \text{ cm (ancho disponible)} \quad 7.7.1$$

bien

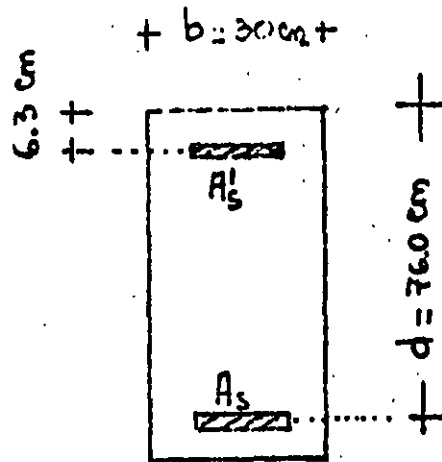
**EJEMPLO 9.2 DISEÑO DE UNA VIGA SIMPLEMENTE ARMADA**

Se tiene una sección transversal de una viga, con las dimensiones como se observa en la siguiente figura, y se pide calcular las cantidades de acero para resistir un momento factorial  $M_u = 124 \text{ ton-m}$

$$f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$z = 145$  (exposición al exterior)



**CALCULOS Y DISCUSION**

1. Revisión como simplemente armada (acero a tensión)

Cálculo del acero de refuerzo a tensión que se requiere, con la ayuda de la tabla 9.2:

$$\frac{M_u}{\phi f_c b d^2} = \frac{124 \times 100,000}{0.9 \times 280 \times 30 \times 76^2} = 0.2840$$

de la tabla 9.2,  $w = 0.361$

Porcentaje de acero a tensión necesario:

$$p = w f'_c / f_y = 0.361 \times 0.28 / 4.2 = 0.241$$

Considerando solo refuerzo a tensión:

$$P_{\text{máx}} = 0.75 P_b$$

10.3.3

de la tabla 9.1, con  $f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$  (4000 lb/pulg<sup>2</sup>) y

$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$  (60000 lb/pulg<sup>2</sup>):

$$P_{\text{máx}} = 0.0214$$

como  $0.0241 > 0.0214$  se necesita acero de compresión

## 2. Cálculo del acero necesario, $A_s$ y $A'_s$ :

La  $w$  máxima que se permite para vigas simplemente armadas (acero de tensión) es:

$$w \leq 0.75 \rho_b f_y / f'_c = 0.0214 \times 4.2 / 0.28 = 0.321; \text{ de la tabla}$$

9.2, con  $w = 0.321$ :

$$M_n / f'_c b d^2 = 0.2602$$

La resistencia máxima de diseño a la flexión como simplemente armada vale:

$$\begin{aligned} \phi M_n &= 0.9 (0.2602) (0.28 \times 30) (76^2) / 100 \\ &= 113.62 \text{ ton-m} \end{aligned}$$

y la resistencia necesaria tomada con el refuerzo a compresión:

$$M'_u = 124 - 113.62 = 10.38 \text{ ton-m}$$

Suponiendo que el acero a compresión fluye,  $f'_s = f_y$ :

$$\rho' = \frac{A'_s}{bd} = \frac{M'_u}{\phi f_y (d-d') bd}$$

$$\rho' = \frac{10.38 \times 100,000}{0.9 \times 4200 (76 - 6.3) 30 \times 76} = 0.00173$$

$$\rho = 0.75 \rho_b + \rho' = 0.0214 + 0.00173 = 0.0231$$

NOTA: para elementos doblemente armados, el porcentaje de  $\rho_b$  con que contribuye el refuerzo de compresión no se necesita reducir por el factor de 0.75

Ver la tabla 10.3.2 de los comentarios del Reglamento



$$A'_s = p'bd = 0.00173 \times 30 \times 76 = 3.94 \text{ cm}^2$$

$$A_s = pbd = 0.0231 \times 30 \times 76 = 52.67 \text{ cm}^2$$

Revisión de que se cumpla que el acero de compresión esté fluyendo:

$$\frac{A_s - A'_s}{bd} \geq \frac{0.85 b_1 f'_c d'}{f_y d} \left( \frac{6000}{6000 - f_y} \right)$$

$$0.0231 - 0.00173 \geq \frac{0.85 \times 0.85 \times 0.28 \times 6.3}{4.2 \times 76} \left( \frac{6000}{6000 - f_y} \right)$$

$$0.0214 \geq 0.0133$$

∴ sí fluye el acero de compresión como se supuso, bien.

3. Se puede llevar a cabo una revisión de las correcciones a los cálculos, según las ecs. de resistencia que se dan en la sección 10.3 (A) (3) de los comentarios del Reglamento. Cuando el armado a compresión fluye:

$$\phi M_n = \phi \left[ (A_s - A'_s) f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A'_s f_y (d - d') \right]$$

$$= \left[ 0.9 \left\{ (48.79 \times 4.2) \left( 76 - \frac{28.70}{2} \right) + 3.94 \times 4.2 (76 - 6.3) \right\} \right] / 100$$

$$= 124.08 \text{ ton-m} \dots \dots \text{bien}$$

$$\text{donde } a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{48.79 \times 4.2}{0.85 \times 0.28 \times 30} = 28.70$$

4. Distribución del acero para satisfacer el criterio de agrietamiento (por flexión) de la sección 10.6 para elementos colocados a la intemperie.

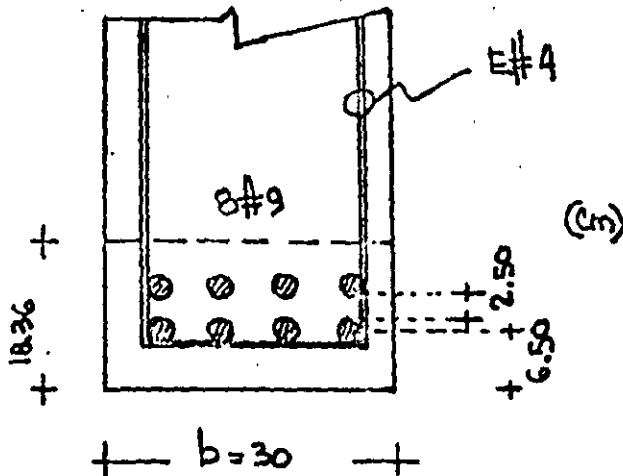
Refuerzo a tensión:

$$\text{sean 8 var. } \# 9 \quad (A_s = 51.28 \text{ cm}^2 \approx 52.67 \text{ cm}^2)$$

(2% menos que lo necesario .... bien)

Acero a compresión:

sean 2 var. # 5 ( $A'_s = 3.96 \text{ cm}^2 \approx 3.94 \text{ cm}^2$ , bien)



$$z = f_s (5.60) \sqrt[3]{d_c A} \quad \text{ec(10.4)}$$

$$d_c = (\text{recubrimiento}) + \frac{1}{2} \phi_{\text{longit.}} + \phi_{\text{estribo}} \quad 10.0$$

$$= 3.81 + 1.43 + 1.27 = 6.50 \text{ cm}$$

$$(\text{recubrimiento para var. \# 9} = 3.81 + 1.27 = 5.08 \text{ cm}) \quad 7.7.1$$

(expuesta a la intemperie)

$$A = 18.36 \times 30 / 8 = 68.85 \text{ cm}^2 / \text{varilla} \quad 10.0$$

$$\text{con } f_s = 0.6 f_y = 2.52 \text{ ton/cm}^2 \quad 10.6.4$$

$$z = 2.52 \times 5.60 \sqrt[3]{6.5 \times 68.85} = 108 < 145 \quad \text{bien}$$

5. Revisión del ancho de viga

$$b = 2 \times (\text{recubrimiento}) + 4 \times 2.86 + 3 \times 2.86$$

$$= 2 \times 5.08 + 11.44 + 8.58 = 30 \text{ cm} \quad \text{bien}$$

6. Para el tramo donde el armado de compresión se requiere por resistencia se necesitan estribos con:

$$\text{sup. máx} \leq 16 \times 1.59 = 25.4 \text{ cm}$$

$$48 \times 1.27 = 60.9 \text{ cm}$$

$$\text{dimensión menor de la viga} = 30 \text{ cm}$$

7.10.5.2

... usar E # 4 @ 25 cm

Resistencia a la compresión del patín:

$$C_f = 0.85 f'_c (b - b_w) h_f$$

$$= 0.85 \times 0.28 (75 - 25) 6.5 = 77.35 \text{ ton}$$

$A_{sf}$  necesario con que contribuye el patín:

$$A_{sf} = \frac{C_f}{f_y} = \frac{77.35}{4.2} = 18.42 \text{ cm}^2$$

Contribución, a la resistencia, del patín:

$$\phi M_{nf} = \phi [A_{sf} f_y (d - 0.5 h_f)]$$

$$= 0.9 [18.42 \times 4.2 (49 - 0.5 \times 6.5)] / 100 = 31.85 \text{ t-m}$$

Momento que debe tomar el alma de la viga:

$$\phi M_{uw} = M_u - \phi M_{nf} = 55.0 - 31.85 = 23.15 \text{ ton-m}$$

3. Con la ayuda de la tabla 9.2 se calcula el área de acero  $A_{sw}$  necesario para absorber 23.15 t-m

$$\text{para } \frac{M_{uw}}{\phi f'_c b d^2} = \frac{23.15 \times 100}{0.9 \times 0.28 \times 25 \times 49^2} = 0.153$$

de la tabla 9.2,  $w = 0.167$

$$A_w = 1.18 w d = 1.18 \times 0.167 \times 49 = 9.7 \text{ cm}$$

$$A_{sw} = \frac{0.85 f'_c b_w A_w}{f_y} = \frac{0.85 \times 0.28 \times 25 \times 9.7}{4.2} = 13.74 \text{ cm}^2$$

De igual modo,  $A_{sw}$  se puede calcular directamente de

$$A_{sw} = \frac{w f'_c b_w d}{f_y} = \frac{0.167 \times 0.28 \times 25 \times 49}{4.2} = 13.64 \text{ cm}^2$$

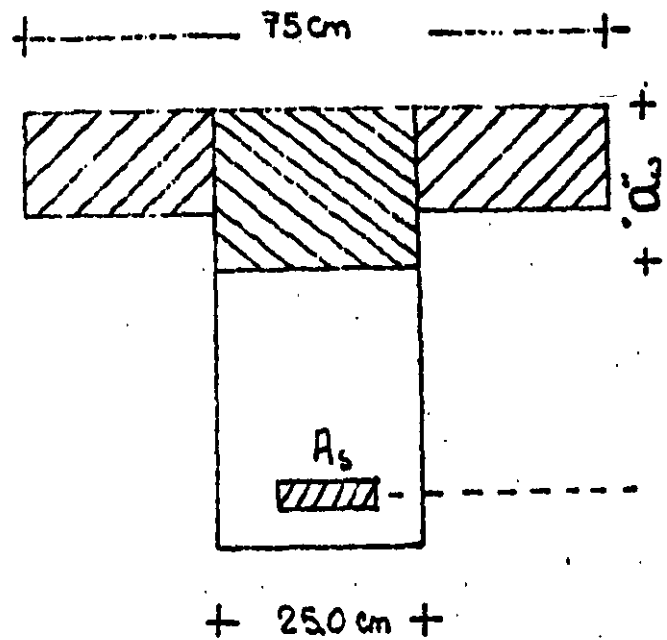
EJEMPLO 9.5 DISEÑO DE UNA SECCIÓN TIPO "T" SIMPLEMENTE ARMADA

Calcular el armado a tensión de una sección "T" que debe resistir un momento ya afectado por el factor de carga de  $M_u = 55 \text{ ton-m}$

$$f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$z = 145$  (expuesta a la intemperie)



CALCULOS Y DISCUSION

1. Con la ayuda de la tabla 9.2 se determina la profundidad del bloque equivalente de esfuerzos,  $a$ , como sección rectangular

$$\text{para } \frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{55 \times 100}{0.9 \times 0.28 \times 75 \times 49^2} = 0.121 \quad 9.3.2.1$$

de tabla 9.2,  $w = \rho f_y / f'_c = 0.132$

$$"a" = 1.19 w d$$

$$= 1.18 \times 0.132 \times 49 = 7.63 > 6.5 \text{ cm}$$

Como el valor de "a" necesario, como si fuera sección rectangular, es mayor que el espesor del patín, entonces el diseño debe hacerse como sección "T".

2. Cálculo del armado necesario  $A_{sf}$  y de la resistencia  $\phi M_{nf}$  con que contribuye el patín de la viga.

4. Así, el refuerzo total necesario para tomar el  $M_u = 55$  ton.-m. es

$$A_s = A_{sf} + A_{sw} = 18.42 + 13.74 = 32.16 \text{ cm}^2$$

10.3.3

5. Revisión del porcentaje máximo permitido según la sección 10.3.3. Ver la fig. 10.3.2 (c) y tabla 10.3.2 de los comentarios del Reglamento:

- (2) para secciones "T" simplemente armadas:

$$P_{\text{máx}} = 0.75 \left[ \frac{b_w}{b} (\bar{p}_b + p_f) \right]$$

$$p_f = 0.85 \frac{f'_c}{f_y} (b - b_w) h_f / (b_w d)$$

$$= 0.85 \frac{0.28}{4.2} (75 - 25) 6.5 / (25 \times 49) = 0.0150$$

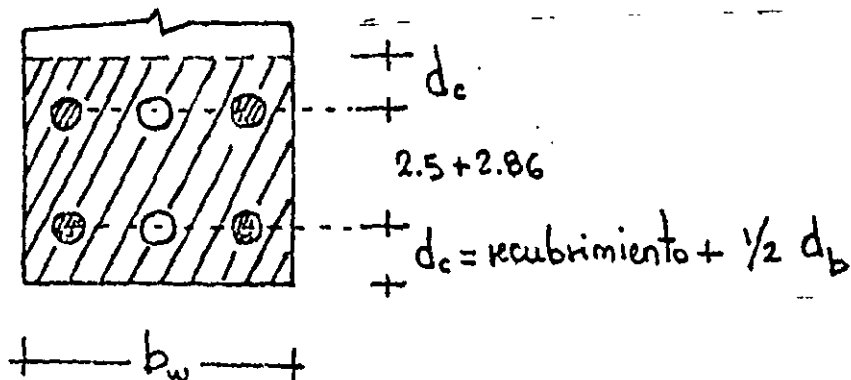
de la tabla 9.1,  $\bar{p}_b = 0.0285$

$$P_{\text{máx}} = 0.75 \left[ \frac{25}{75} (0.0285 + 0.015) \right] = 0.0109$$

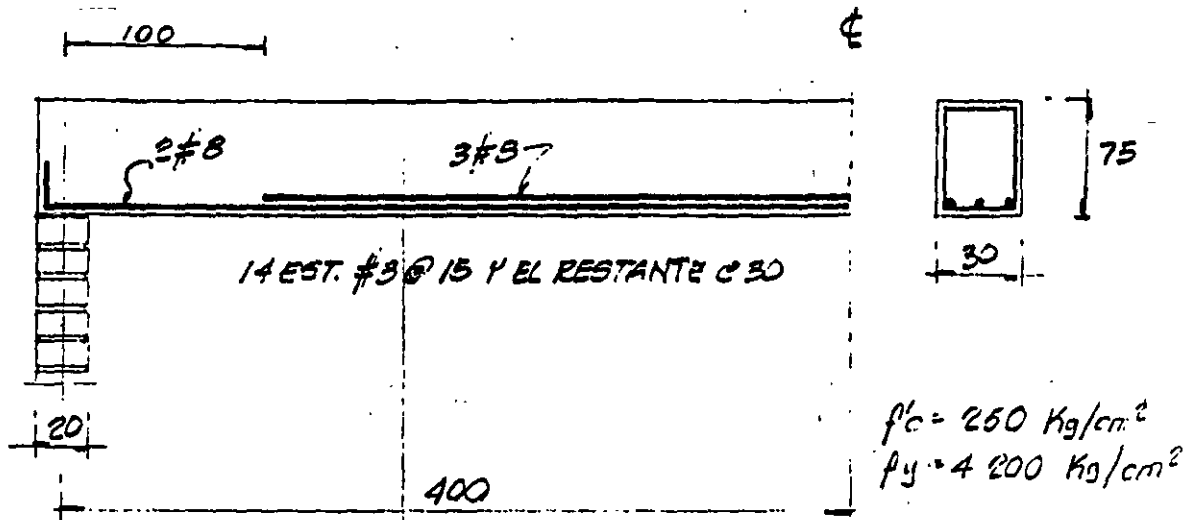
$$A_s \text{ máx} = 0.0109 \times 75 \times 49 = 40.06 \text{ cm}^2 > 32.16 \quad \underline{\text{bien}}$$

6. Selección del armado tal que satisfaga el criterio de control de agrietamiento para exposición a la intemperie ( $z = 145$ )

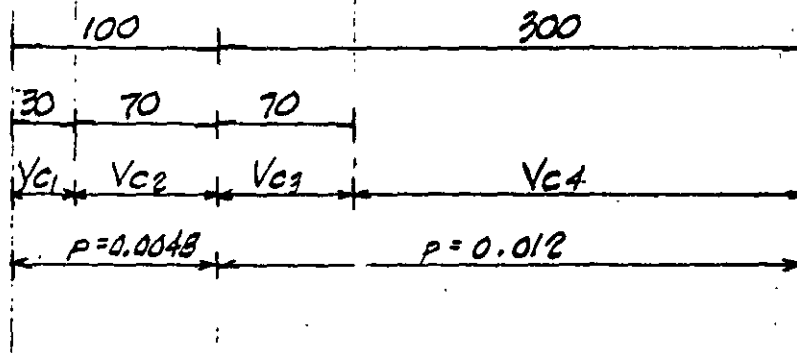
sean 4 var # 9 y 2 var # 7, ( $A_s = 33.40 \text{ cm}^2$ )



# 1.- DISEÑO A CORTANTE DE UNA VIGA RECTANGULAR



## A).- CONTRIBUCION DE $V_c$



(COMO  $h > 70$  REDUCIR EN UN 30% A  $V_c$  EN TODOS LOS CASOS)

- CALCULO DE  $V_c$ ,

COMO  $P = 0.0048 < 0.01$ ,

$$V_{c1} = V_{c2} = [(0.2 + 30P) F_r b d \sqrt{f'_c}]^{0.7}$$

$$V_{c1} = [(0.2 + 30 \cdot 0.0048) 0.8 \times 20 \times 70 \sqrt{250}]^{0.7} = 5721.11$$

- CALCULO DE  $V_{c2}$

EN ESTE TIPO DE ANTECARGOS REDUCIR EL 33%

$$V_{c2} = V_{c1} \cdot 0.67$$

$$d_c = 5.08 + 1.43 = 6.50 \text{ cm}$$

área efectiva de tensión del concreto:

$$A = (2d_c + 2.5 + 2.86) b_w / \text{No. equivalente de var \# 9}$$
$$= 18.36 \times 25 / (33.40 / 6.45) = 89.71 \text{ cm}^2$$

$$z = f_s (5.6) \sqrt[3]{d_c A} = 0.6 \times 4.2 \times 5.6 \sqrt[3]{6.5 \times 89.7}$$
$$= 118 < 145 \quad \underline{\text{bien}}$$

#### 7. Revisión del ancho del alma necesario

$$b_w \text{ necesario} = 2 (\text{recubrimiento}) + 2d_{b1} + 2d_{b1}^* + d_{b2}$$
$$= 2 \times 5.08 + 4 \times 2.86 + 2.22$$
$$= 23.8 \text{ cm} < 25 \text{ cm} \quad \underline{\text{bien}}$$

\*La distancia libre entre dos varillas debe ser mayor que  $d_b$  ó 2.5 cm



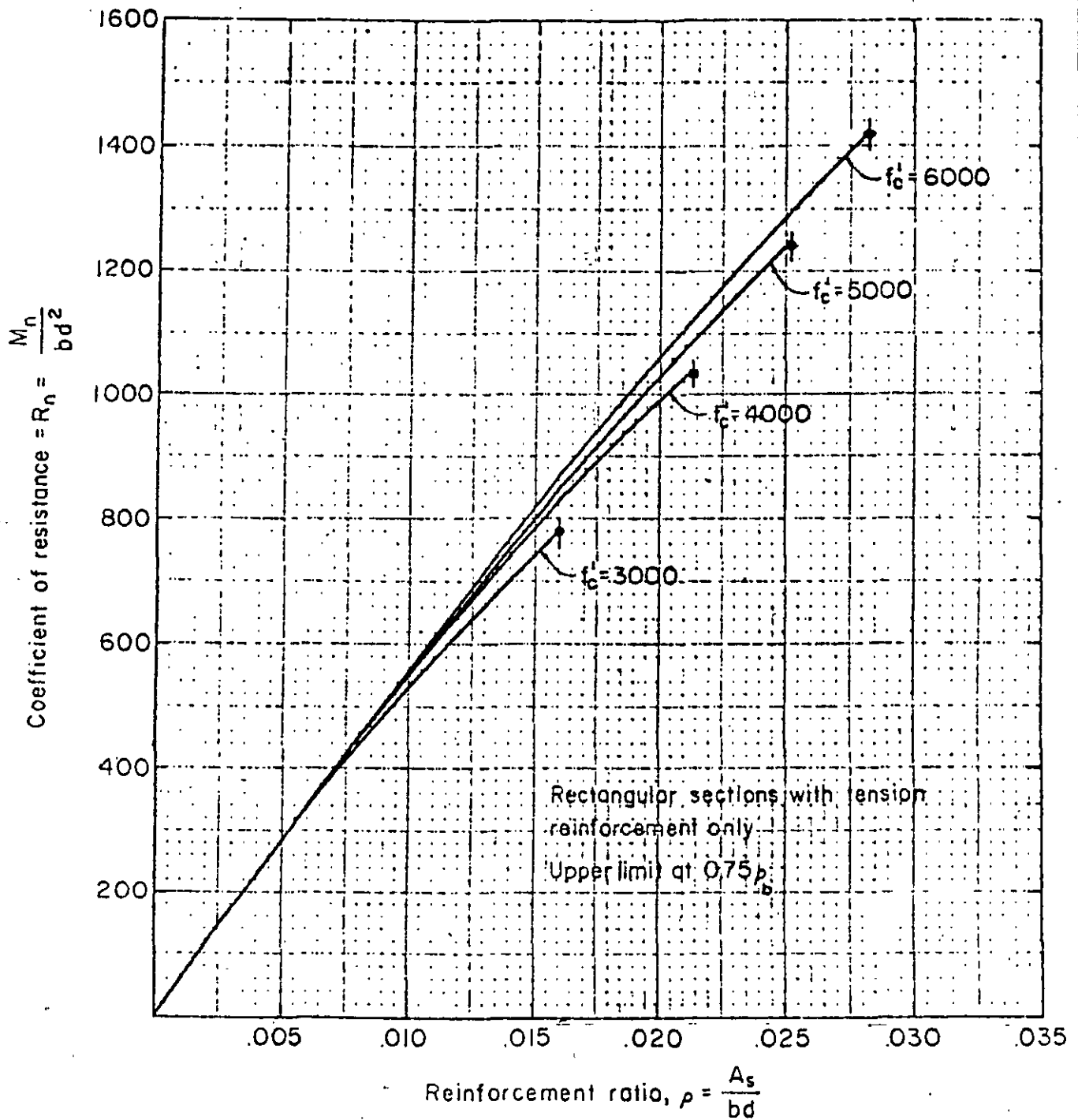


Fig. 9-1 - Strength Curves ( $R_n$  vs  $\rho$ ) for Grade 60 Reinforcement

TABLE 9-2. Moment Strength  $M_u / \phi f'_c b d^2$  or  $M_n / f'_c b d^2$  of Rectangular Sections with Tension Reinforcement Only\*

$\omega$	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
0.0	0	.0010	.0020	.0030	.0040	.0050	.0060	.0070	.0080	.0090
0.01	.0099	.0109	.0119	.0129	.0139	.0149	.0159	.0168	.0178	.0188
0.02	.0197	.0207	.0217	.0226	.0236	.0246	.0256	.0266	.0275	.0285
0.03	.0295	.0304	.0314	.0324	.0333	.0343	.0352	.0362	.0372	.0381
0.04	.0391	.0400	.0410	.0420	.0429	.0438	.0448	.0457	.0467	.0476
0.05	.0485	.0495	.0504	.0513	.0523	.0532	.0541	.0551	.0560	.0569
0.06	.0579	.0588	.0597	.0607	.0616	.0625	.0634	.0643	.0653	.0662
0.07	.0671	.0680	.0689	.0699	.0708	.0717	.0725	.0735	.0744	.0753
0.08	.0762	.0771	.0780	.0789	.0798	.0807	.0816	.0825	.0834	.0843
0.09	.0852	.0861	.0870	.0879	.0888	.0897	.0906	.0915	.0923	.0932
0.10	.0941	.0950	.0959	.0967	.0976	.0985	.0994	.1002	.1011	.1020
0.11	.1029	.1037	.1046	.1055	.1063	.1072	.1081	.1089	.1098	.1106
0.12	.1115	.1124	.1133	.1141	.1149	.1158	.1166	.1175	.1183	.1192
0.13	.1200	.1209	.1217	.1226	.1234	.1243	.1251	.1259	.1268	.1276
0.14	.1284	.1293	.1301	.1309	.1318	.1326	.1334	.1342	.1351	.1359
0.15	.1367	.1375	.1384	.1392	.1400	.1408	.1416	.1425	.1433	.1441
0.16	.1449	.1457	.1465	.1473	.1481	.1489	.1497	.1506	.1514	.1522
0.17	.1529	.1537	.1545	.1553	.1561	.1569	.1577	.1585	.1593	.1601
0.18	.1609	.1617	.1624	.1632	.1640	.1648	.1656	.1664	.1671	.1679
0.19	.1687	.1695	.1703	.1710	.1718	.1726	.1733	.1741	.1749	.1756
0.20	.1764	.1772	.1779	.1787	.1794	.1802	.1810	.1817	.1825	.1832
0.21	.1840	.1847	.1855	.1862	.1870	.1877	.1885	.1892	.1900	.1907
0.22	.1914	.1922	.1929	.1937	.1944	.1951	.1959	.1966	.1973	.1981
0.23	.1988	.1995	.2002	.2010	.2017	.2024	.2031	.2039	.2046	.2053
0.24	.2060	.2067	.2075	.2082	.2089	.2096	.2103	.2110	.2117	.2124
0.25	.2131	.2138	.2145	.2152	.2159	.2166	.2173	.2180	.2187	.2194
0.26	.2201	.2208	.2215	.2222	.2229	.2236	.2243	.2249	.2256	.2263
0.27	.2270	.2277	.2284	.2290	.2297	.2304	.2311	.2317	.2324	.2331
0.28	.2337	.2344	.2351	.2357	.2364	.2371	.2377	.2384	.2391	.2397
0.29	.2404	.2410	.2417	.2423	.2430	.2437	.2443	.2450	.2456	.2463
0.30	.2469	.2475	.2482	.2488	.2495	.2501	.2508	.2514	.2520	.2527
0.31	.2533	.2539	.2546	.2552	.2558	.2565	.2571	.2577	.2583	.2590
0.32	.2596	.2602	.2608	.2614	.2621	.2627	.2633	.2639	.2645	.2651
0.33	.2657	.2664	.2670	.2676	.2682	.2688	.2694	.2700	.2706	.2712
0.34	.2718	.2724	.2730	.2736	.2742	.2748	.2754	.2760	.2766	.2771
0.35	.2777	.2783	.2789	.2795	.2801	.2807	.2812	.2818	.2824	.2830
0.36	.2835	.2841	.2847	.2853	.2858	.2864	.2870	.2875	.2881	.2887
0.37	.2892	.2898	.2904	.2909	.2915	.2920	.2926	.2931	.2937	.2943
0.38	.2948	.2954	.2959	.2965	.2970	.2975	.2981	.2986	.2992	.2997
0.39	.3003	.3008	.3013	.3019	.3024	.3029	.3035	.3040	.3045	.3051

$*M_n / f'_c b d^2 = A_s f_y (d-a/2) / f'_c b d^2 = \omega(1-0.59\omega)$ , where  $\omega = \rho f_y / f'_c$   
 and  $a = A_s f_y / 0.85 f'_c b$ .

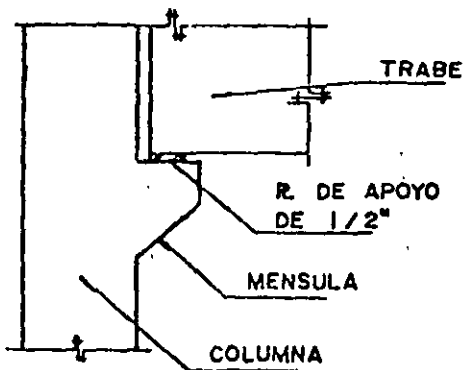
Design: Using factored moment  $M_u$  enter table with  $M_u / \phi f'_c b d^2$ ; find  $\omega$  and compute steel percentage  $\rho$  from  $\rho = \omega f'_c / f_y$ .

Investigation: Enter table with  $\omega$  from  $\omega = \rho f_y / f'_c$ ; find value of  $M_n / f'_c b d^2$  and solve for nominal moment strength,  $M_n$ .

Ejemplo:

Diseñar la ménsula mostrada en la figura con las mínimas dimensiones para soportar la trabe.

La ménsula se encuentra en una columna de 35 cm. Debido al efecto de contracción y flujo plástico restringidos se crea una fuerza de 9 ton. en el apoyo soldado.



$$f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2 \text{ (peso norm)}$$

$$f_y = 4200 \text{ "}$$

Cargas

$$C.M. = 10.9 \text{ ton.}$$

$$C.V. = 17.0 \text{ ton.}$$

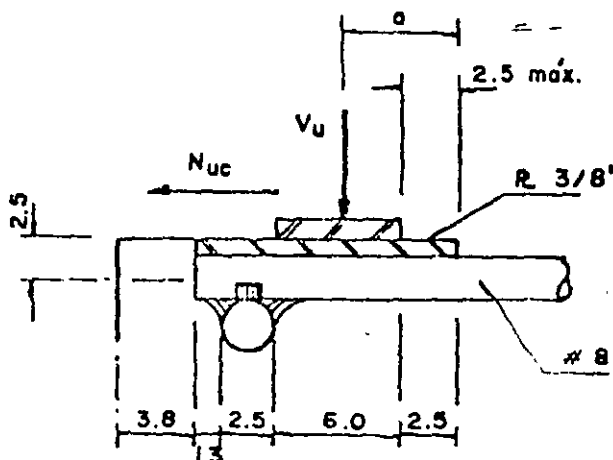
$$T = 9.1 \text{ ton.}$$

### Cálculo y Discusión

Referencia del  
Reglamento

1.- Dimensión del apoyo basado en la resistencia al aplastamiento de concreto de acuerdo a la sección 10.15.

El ancho del apoyo = 35 cm.



Cálculos y discusión.

Referencia del  
Reglamento

$$V_u = 1.4 (10.9) + 1.7 (17.0) = 44.2 \text{ tons.}$$

$$V_u \leq \phi P_{nb} = \phi (0.85 f'_c A_c)$$

10.5

$$44200 = 0.70 (0.85) (350) A_c = 208.3 A_c$$

9.3.2.4

$$A_c = 44200 / 208.3 = 212.2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Longitud de apoyo} = 212.2 / 35 = 6 \text{ cm.}$$

Usar un apoyo de 6 X 35 cm.

$$N_{uc} = 1.7 (9.1) = 15.5 \text{ ton. (como carga viva)}$$

11.9.3.4

2. Determinación de "a" con 2.54 cm. de holgura al final de la trabe. Considerando la reacción a un tercio de la placa de apoyo.

$$a = 2/3 (6.0) + 2.54 = 6.54 \text{ cm.}$$

Usar un a = 7 cm.

3. Determinación del peralte de la ménsula basándose en el diseño al límite por resistencia al cortante  $V_n$ .

$$\text{Para } f'_c = 350 \text{ Kg/cm}^2, V_n (\text{max}) = 56 \text{ bwd}$$

11.9.3.2.1

$$V_u \leq \phi V_n = \phi (56 \text{ bwd})$$

Se requiere un peralte:

$$"d" = 44200 / 0.85 (56) (35)$$

Cálculo y discusión.

Referencia del  
Reglamento

$$d = 26.5 \text{ cm.}$$

Suponiendo varillas #8 más la tolerancia

$$h = 26.5 + 2.54 = 29 \text{ cm.}$$

Usar h = 30 cm.

Para el diseño  $d=30-2.50=27.50 \text{ cm.}$

$$a/d = 0.26.$$

4. Determinación del refuerzo por corte-fricción  $A_{uf}$ .

$$A_{uf} = \frac{V_u}{\psi f_y \mu} = \frac{44200}{0.85(4200)(1.4)} = 8.8 \text{ cm.}$$

11.7.4.1

11.7.4.3

5. Determinación del refuerzo por momento  $A_f$ .

$$M_u = V_u a + N_u c (h-d)$$

11.9.3.3

$$= 44200(6.54) + 15500(30-27.50) = 327,820 \text{ Kg.cm}$$

$$= 3.28 \text{ Ton. m.}$$

Utilizando un método ordinario de flexión para el cálculo de  $A_f$  o usando conservadoramente  $j d = 0.9 d$ .

$$A_f = \frac{327820}{0.85(4200)(0.9)(27.50)} = 3.71 \text{ cm}^2$$

Nota: Para todos los cálculos se ha utilizado  $\psi = 0.85$

11.9.3.1

Cálculos y discusión.

Referencia del  
Reglamento

6. Determinación del refuerzo por tensión directa.

An

11.9.3.4

$$A_n = \frac{N_{uc}}{\phi f_y} = \frac{15500}{0.85(4200)} = 4.34 \text{ cm}^2$$

7. Determinación del refuerzo por tensión primaria.

As

11.9.3.5

$$(2/3) A_{uf} = (2/3) 8.8 = 5.9 \text{ cm}^2$$

$$A_f = 3.71 \text{ cm}^2 < (2/3) A_{uf}$$

$$A_s = (2/3) A_{uf} + A_n = 5.9 + 4.34 = 10.24 \text{ cm}^2$$

Usar 2 # 8

11.9.5

Verificación del refuerzo mínimo As -

$$p_{min} = 0.04(f'_c/f_y) = 0.04(350/4200) = 0.003$$

$$A_{smin} = 0.003(35)(27.5) = 2.88 \text{ cm}^2 < 10.24$$

8. Determinación del refuerzo por cor--

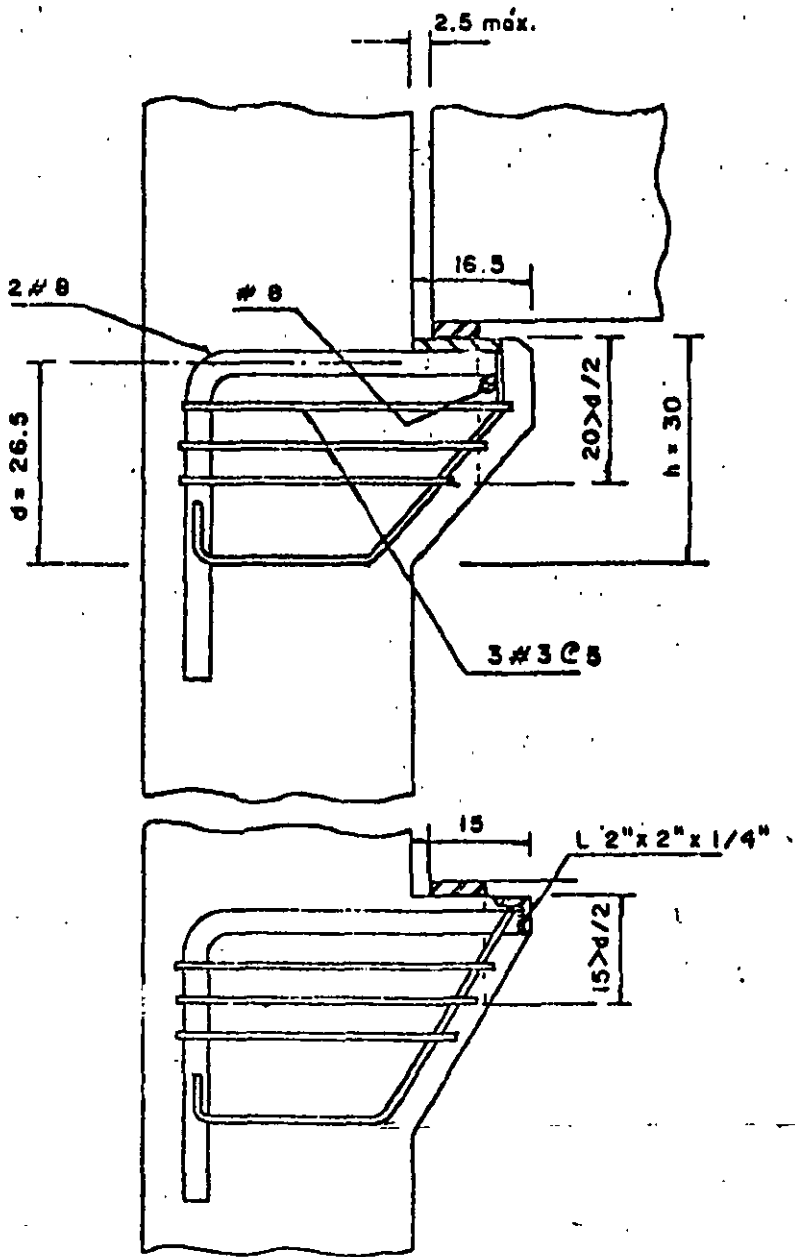
11.9.4

tante Ah

$$A_h = 0.5(A_s - A_n) = 0.5(10.24 - 4.34) = 2.95 \text{ cm}^2$$

Usar 3 Estribos # 3 (Ah=4.26 cm<sup>2</sup>)

Distribuir los estribos en 2/3 d adyacen  
tes a As.



### Ejemplo de muros.

Un muro de carga soporta un sistema de piso a base de vigas "T" pre fabricados separados 2.40 m.. El alma de la sección "T" es de 20 cm. y estan apoyadas por completo en el muro. La altura del muro es de 4.60 m. y se encuentra contraventeado lateralmente como se muestra en la figura.

#### Datos de Diseño

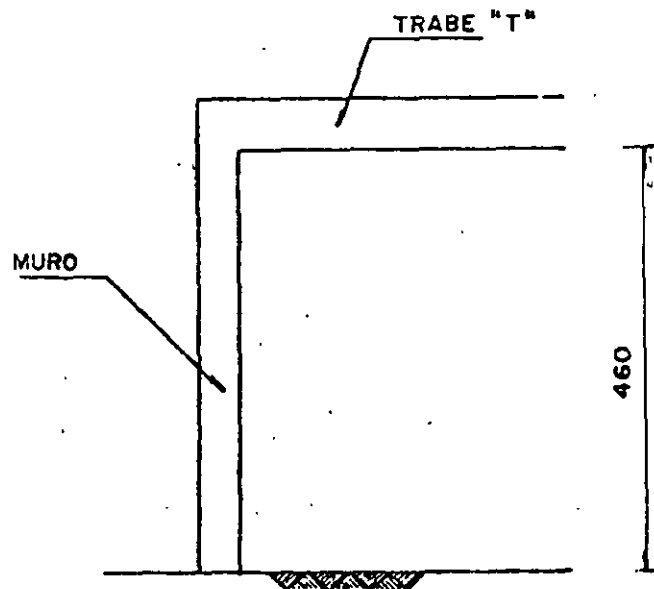
Reacciones:

$$P_{cM} = 12.7 \text{ ton.}$$

$$P_{cv} = 6.4 \text{ ton.}$$

$$f'c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$



#### Cálculo y discusión

Referencia del  
Reglamento

El procedimiento general de diseño es de suponer un espesor del muro  $h$ , después comprobarlo con las condiciones de carga.

##### 1. Selecciones del espesor $h$

$$h > l_u/25 \text{ pero no menor de } 10 \text{ cm.}$$

14.5.3.1

$$> 4.6/25 = 0.18 \text{ m.}$$

Se probará con  $h = 19 \text{ cm.}$



## Cálculo y Discusión

Referencia del  
Reglamento

### 2. Cálculo de la carga factorizada

$$P_u = 1.4D + 1.7L$$

Ec. (9-1)

$$= 1.4(12.7) + 1.7(6.4) = 28.7 \text{ ton.}$$

### 3. Checar la resistencia por aplastamiento del concreto.

Supondremos un valor de ancho del alma igual a 17.8 m.

$$\text{Área cargada} = A_c = 17.8(19) = 338.2 \text{ cm}^2$$

$$\psi (0.85 f'_c A_c) = 0.70(0.85)(280)(338.2) \\ = 56344 \text{ Kg.} = 56.3 \text{ ton.}$$

28.7 < 56.3 (resistencia al aplastamiento correcto)

### 4. Cálculo de la resistencia del muro

La longitud horizontal efectiva del muro por viga "T" está controlada por el ancho de apoyo del alma de la viga más 4 veces el espesor del muro.  $17.8 + 4(19) = 93.8 \text{ cm.}$

14.2.4

La distancia entre "T" es mayor que los 93.8 cm. por lo tanto no rige en este caso

$$\psi P_{n_w} = 0.55 \psi f'_c A_g \left[ 1 - \left( \frac{k_1 l_c}{32h} \right)^2 \right] \\ = 0.55(0.70)(280)(93.8)(19) \left[ 1 - \left( \frac{0.8 \times 460}{32(19)} \right)^2 \right] \\ = 121.740 \text{ Kg} = 121.7 \text{ ton.}$$

Ec. (14-1)

$$P_u < \psi P_{n_w}$$

28.7 < 121.7 por lo tanto el espesor del muro  $h = 19 \text{ cm.}$  es suficiente para soportar un posible efecto de excentri

## Cálculo y Discusión

Referencia del  
Reglamento

### 2. Cálculo de la carga factorizada

$$P_u = 1.4D + 1.7L$$

Ec. (9-1)

$$= 1.4(12.7) + 1.7(6.4) = 28.7 \text{ ton.}$$

### 3. Checar la resistencia por aplastamiento del concreto.

Supondremos un valor de ancho del alma igual a 17.8 m.

$$\text{Area cargada} = A_c = 17.8(19) = 338.2 \text{ cm}^2$$

$$\psi (0.85 f'_c A_c) = 0.70(0.85)(280)(338.2)$$

$$= 56344 \text{ Kg.} = 56.3 \text{ ton.}$$

28.7 < 56.3 (resistencia al aplastamiento correcto)

### 4. Cálculo de la resistencia del muro

La longitud horizontal efectiva del muro por viga "T" está controlada por el ancho de apoyo del alma de la viga más 4 veces el espesor del muro.  $17.8 + 4(19) = 93.8 \text{ cm.}$

14.2.4

La distancia entre "T" es mayor que los 93.8 cm, por lo tanto no rige en este caso

$$\psi P_{n_w} = 0.55 \psi f'_c A_g \left[ 1 - \left( \frac{klc}{32h} \right)^2 \right]$$

Ec. (14-1)

$$= 0.55(0.70)(280)(93.8)(19) \left[ 1 - \left( \frac{0.8 \times 460}{32(19)} \right)^2 \right]$$

$$= 121.740 \text{ Kg} = 121.7 \text{ ton.}$$

$$P_u < \psi P_{n_w}$$

28.7 < 121.7 por lo tanto el espesor del muro

$h = 19 \text{ cm.}$  es suficiente para soportar un posible efecto de excentricidad

acidad de carga.

5. Selección de refuerzo

Proporcionando refuerzo en una sola cara

Acero horizontal  $A_s = 0.0020 \times 19 \times 100 = 3.8 \text{ cm}^2/\text{m}$ . 14.3.3

Acero vertical  $A_s = 0.0012 \times 19 \times 100 = 2.3 \text{ cm}^2/\text{m}$ . 14.3.2

$S = 3h$ , pero no mayor a 45 cm. 7.6.5

$= 3 \times 19 = 57 > 45$  (S=45 cm)

horizontal  $A_s$  - usar # 4 @ 30 cm.

vertical  $A_s$  - usar # 4 @ 45 cm.

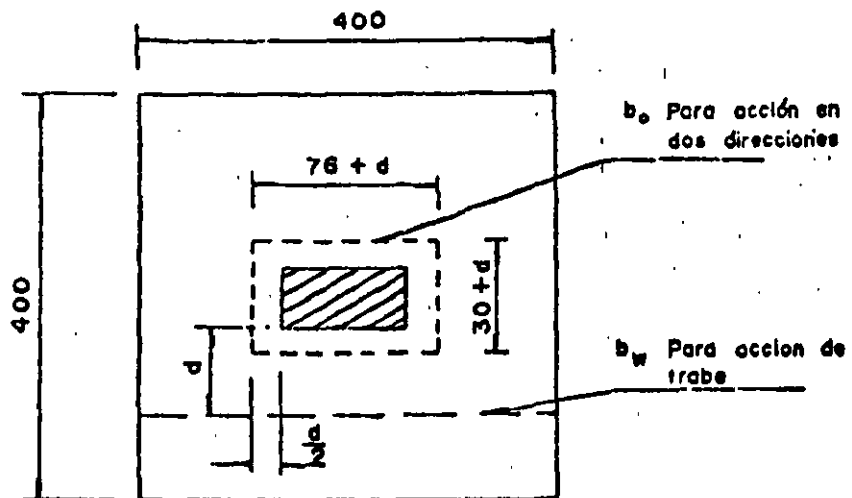
Ejemplo de Zapatas:

Determinar el espesor de la losa de la zapata que se muestra en la figura:

$$f'c = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$Pu = 435 \text{ ton.}$$

$$qs = 27.9 \text{ ton/m}^2$$



Cálculo y Diseño

Referencia del reglamento

Determinar el peralte para resistir el cortante sin refuerzo. Debe investigarse la acción de viga y la acción en dos direcciones. Supondremos un espesor total de 84 cm.  $d = 70 \text{ cm.}$

11.11

1. Acción de trabe

11.11.1.1

$$Vu \leq \psi Vn$$

Ec(11-1)

$$Vu \leq \psi (0.53 \sqrt{f'c}) b_w d$$

Ec. (11-3)

$$Vu = 27.9 (4.0) (1.80 - 0.35) = 162 \text{ ton}$$

$$b_w = 4.0 \text{ m.}$$

$$Vu \leq 0.85 (0.53) \sqrt{210} (400) (70) = 345 \text{ ton}$$

## Cálculo y Discusión

Referencia de  
reglamento

$$162 < 345 \text{ ton}$$

### 2. Acción en las dos direcciones

11.11.1.2

$$V_u \leq \psi V_n$$

Ec (11.1)

$$V_u \leq \psi (0.27) (2+4/\beta_c) \sqrt{f'_c} b_o d$$

Ec (11.36)

pero  $V_c$  no será mayor que  $1.1 \sqrt{f'_c} b_o d$

$$V_u = 27.90 (16.00 - 1.5 \times 1.0) = 405 \text{ ton}$$

$$b_o = 2(1.50) + 2(1.0) = 5 \text{ m.}$$

$$\beta_c = 75/30 = 2.5$$

$$V_u \leq 0.85 (0.27) (2+4/2.5) \sqrt{210} (500) (70)$$

$$405 \leq 419 \text{ ton.}$$

$$V_c \leq 1.1 \sqrt{210} (500) (70) = 558000 \text{ Kg}$$

Por lo tanto el peralte de 70 cm. es adecuado para resistir el cortante.

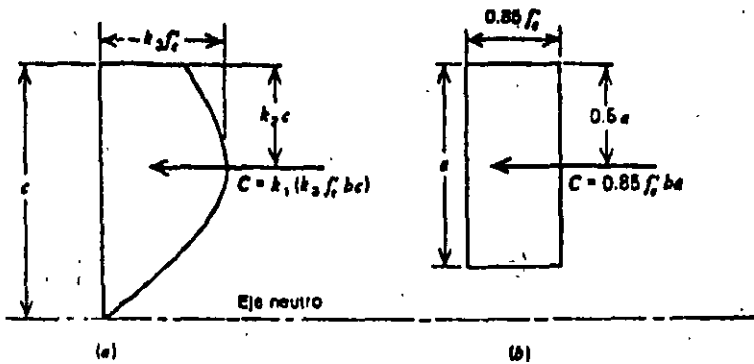


Figura 3.3. Distribución del esfuerzo de compresión en la zona comprimida de una sección de concreto rectangular. (a) Distribución real. (b) Distribución rectangular equivalente.

a compresión en la sección de momento máximo mediante los parámetros  $k_1$ ,  $k_2$ , y  $k_3$ , como se muestra en la figura 3.3a. Para una sección rectangular de ancho  $b$  y peralte efectivo  $d$ , la fuerza total de compresión en el concreto se expresa como  $k_1 k_2 f'_c b c$  y el brazo interno de palanca es  $d - k_2 c$ , en que  $c$  es la profundidad del eje neutro. Se ha investigado mucho para determinar la magnitud de estos parámetros para el concreto no confinado. El trabajo más notable ha consistido en pruebas a corto plazo realizadas por Hognestad y otros en la Asociación de Cemento Portland (PCA)<sup>3.2</sup> y por Rüschi.<sup>3.3</sup> Los especímenes utilizados en las pruebas de la PCA fueron semejantes a los que aparecen en la figura 3.4. La región de prueba del espécimen se cargó excéntricamente aumentando los dos empujes  $P_1$  y  $P_2$ . Se variaron independientemente los empujes  $P_1$  y  $P_2$  de manera que se mantuviera el eje neutro (es decir, la fibra con deformación cero) en la cara inferior del espécimen en toda la prueba; en consecuencia, se simuló la distribución de esfuerzo en la zona a compresión de un miembro con

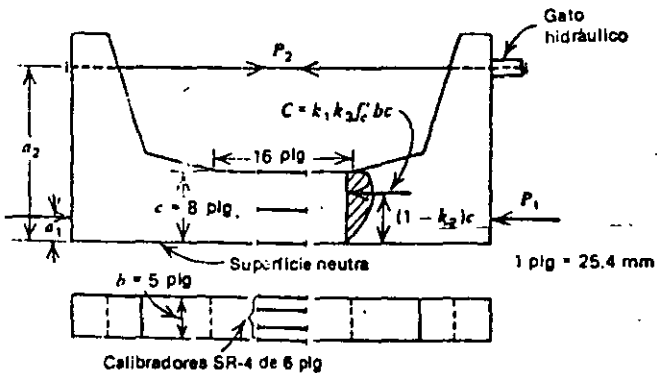


Figura 3.4. Especímen de prueba de la Asociación de Cemento Portland.<sup>3.2</sup>

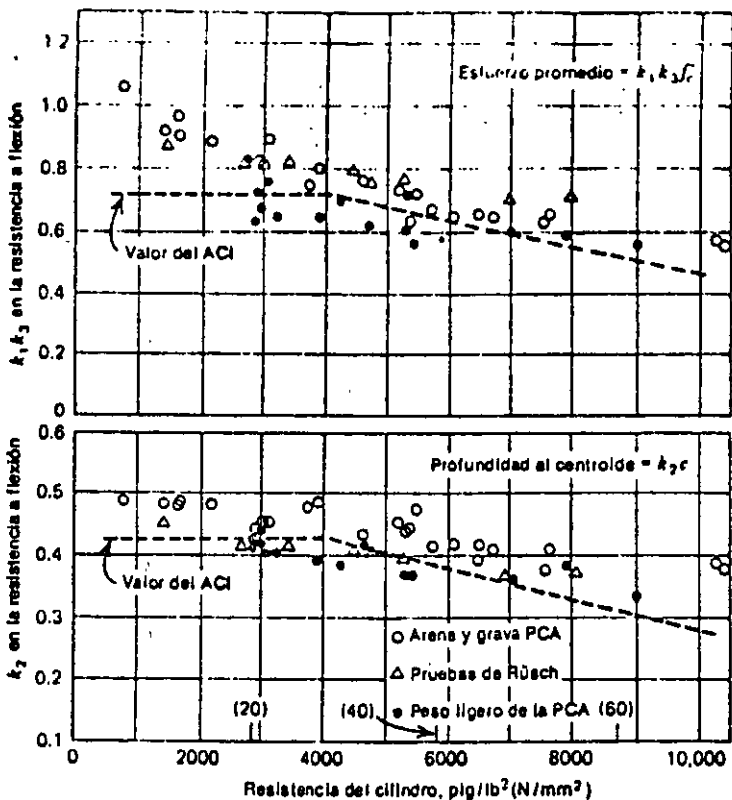


Figura 3.5. Propiedades de la distribución de esfuerzos de compresión en el concreto en la resistencia a flexión de una sección rectangular; comparación de los parámetros del ACI con los resultados de pruebas.<sup>3,7</sup>

### 3.2 BLOQUE DE ESFUERZOS RECTANGULAR EQUIVALENTE

Cierto número de investigadores (v. gr. Whitney<sup>3,5</sup>) han sugerido reemplazar el perfil actual del bloque de esfuerzo de concreto a compresión por un rectángulo equivalente, como medida de simplificación. Para obtener la resistencia a flexión, sólo se necesita conocer la magnitud ( $k_1, k_3$ ) y la posición ( $k_2$ ) de la fuerza de compresión del concreto. El bloque de esfuerzo rectangular equivalente logra esto y facilita considerablemente los cálculos. La práctica norteamericana representada por el código<sup>3,6</sup> ACI, ha sido reemplazar el bloque actual de esfuerzos por un rectángulo equivalente (fig. 3.3b). El rectángulo tiene un esfuerzo medio de  $0.85f'_c$  y una profundidad  $a$ , en que  $a/c = \beta_1 = 0.85$  para  $f'_c \leq 4000 \text{ lb/plg}^2 (17.6 \text{ N/mm}^2)$ ; se reduce a  $\beta_1$  continuamente en 0.05 por cada 1000  $\text{lb/plg}^2$

(6.89<sup>2</sup> N/mm<sup>2</sup>) de resistencia excedente de 4000 lb/plg<sup>2</sup> (27.6 N/mm<sup>2</sup>). La reducción de  $\beta_1$  para el concreto de alta resistencia se debe principalmente al perfil menos favorable de la curva esfuerzo - deformación en ese tipo de concreto (véanse las figs. 2.1 y 2.2).

Para que las fuerzas resultantes de compresión de los bloques real y equivalente de esfuerzos de la figura 3.3 tengan la misma magnitud y línea de acción, los valores de los parámetros deben ser

$$C = k_1 k_3 f'_c bc = 0.85 f'_c ba \quad \therefore k_1 k_3 = 0.85 \frac{a}{c} = 0.85 \beta_1 \quad (3.1)$$

y

$$k_2 c = 0.5a \quad \therefore k_2 = 0.5 \frac{a}{c} = 0.5 \beta_1 \quad (3.2)$$

Los valores de  $k_1 k_3$  y  $k_2$  obtenidos de las ecuaciones 3.1 y 3.2 con los valores recomendados del ACI para  $\beta_1$  se comparan con los valores reales encontrados en las pruebas sobre muestras no confinadas por la PCA<sup>3,3</sup> y Rüschi<sup>3,3</sup> en la figura 3.5. Esta comparación proviene de una publicación debida a Mattock, Kriz y Hognestad.<sup>3,7</sup> Se ve que los valores recomendados para las propiedades del bloque rectangular de esfuerzos concuerdan bastante bien con los valores experimentales. La dispersión de los resultados experimentales indica claramente que no se justifica utilizar valores más complicados para los parámetros del bloque rectangular de esfuerzos. Además, hay muy pocos resultados experimentales en la figura 3.5 para resistencias del cilindro superiores a 8000 lb/plg<sup>2</sup> (55.2 N/mm<sup>2</sup>). Sin embargo, de la tendencia de los resultados en la figura es claro que los parámetros del bloque de esfuerzos del ACI son conservadores para resistencias de cilindro superiores a 8000 lb/plg<sup>2</sup>. En efecto, podría considerarse que los parámetros del ACI son sumamente conservadores a elevadas resistencias del concreto.

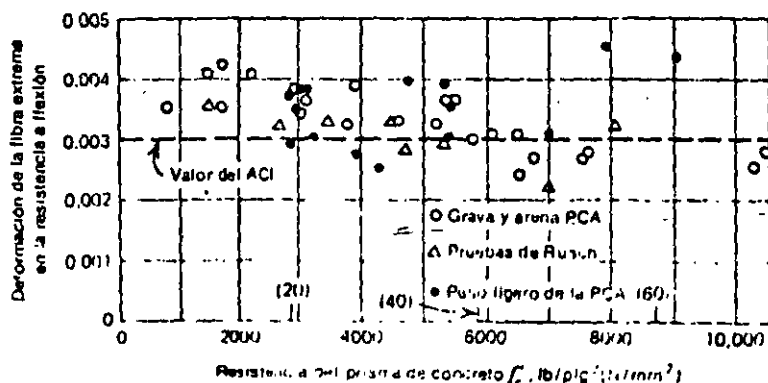


Figura 3.6. Deformación del concreto en la fibra extrema de compresión en la resistencia a flexión de una sección rectangular, comparación del valor del ACI con los resultados de pruebas.<sup>3,7</sup>





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS  
CONCRETOS FABRICADOS EN EL D.F.**

**M. en I. CARLOS J. MENDOZA ESCOBEDO  
PALACIO DE MINERÍA  
AGOSTO DE 1998**

# PROPIEDADES MECANICAS DE LOS CONCRETOS FABRICADOS EN EL DISTRITO FEDERAL

Carlos Javier Mendoza Escobedo (I)

## RESUMEN

Se determinan las propiedades mecánicas de los concretos fabricados con agregados típicos del Distrito Federal y se establecen expresiones que permiten determinar las variaciones de las resistencias a compresión y tensión, del módulo de elasticidad, de la relación de Poisson, del módulo de rigidez por cortante, de la contracción por secado y de la deformación diferida, a través del tiempo. Se dan recomendaciones para obtener concretos con un mejor comportamiento en cuanto a estas propiedades.

## INTRODUCCION

Los materiales pétreos empleados tradicionalmente en la ciudad de México para la fabricación de concreto, tienen características físicas que difieren de las especificadas en las normas relativas. Entre las discrepancias más notorias se pueden mencionar el peso específico, la absorción y el contenido de polvos. Lo anterior ha hecho que las propiedades de los concretos fabricados con estos agregados difieran de las alcanzadas en los concretos comunes.

Se ha observado que estos concretos, bajo condiciones de trabajo, presentan deformaciones y agrietamiento mayores que los usuales, haciéndose evidente, por estas y otras causas, la diferencia entre el comportamiento de los concretos característicos del Distrito Federal y los comunes.

## PROPIEDADES MECANICAS

Materiales componentes. En este trabajo se incluyen los resultados alcanzados con gravas y arenas andesíticas, comunes en el D.F. Se estudian dos tipos de arenas, cuya diferencia básica estriba en el contenido de polvos (material más fino que la malla 200).

Tanto las gravas como las arenas tienen peso específico bajo y absorción alta, lo que hace que los concretos fabricados con estos materiales sean muy deformables, a corto y a largo plazos.

En la fabricación de los concretos se empleó cemento Portland tipo I y no se usó aditivo alguno.

Concreto en estado fresco. Con los materiales antes descritos se hicieron proporcionamientos para resistencias nominales de 200, 300 y 400 kg/cm<sup>2</sup>. En todos los casos se usó un factor de sobrediseño de 50 kg/cm<sup>2</sup>. En las mezclas con resistencias nominales de 200 y 300 kg/cm<sup>2</sup> se buscó un revenimiento de 10 cm y para la de 400 kg/cm<sup>2</sup>, uno de 5 cm. Una de las mezclas de 300 kg/cm<sup>2</sup> tuvo revenimiento teórico de 12 cm, para cubrir los casos de concretos con características

adecuadas para ser transportado por medio de bombas.

Resistencia a compresión. Las edades de prueba fueron 7, 28, 90, 360 y 1825 días; cada resultado representa el promedio del ensaye de tres especímenes compactados. En la fig 1 se plantea la correlación que permite predecir la resistencia a compresión a cualquier edad en función de la alcanzada a los 28 días. Cabe mencionar que los incrementos de resistencia con la edad fueron mayores en aquellos concretos con menos polvo. La expresión sugerida resulta ser:

$$f_c = \frac{t}{8.4 + 0.7t} f'_c, \text{ en kg/cm}^2$$

Resistencia a tensión. Se hicieron especímenes cilíndricos para ensayarlos a tensión por medio de la prueba indirecta, así como vigas para determinar el módulo de rotura. Las expresiones que correlacionan las resistencias a tensión y compresión resultan ser:

Tensión indirecta, fig 2 ; por flexión, fig 3

$$f_t = 1.47 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2 \quad f_f = 1.81 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2$$

Módulo de elasticidad. El módulo de elasticidad se obtuvo a partir de las gráficas esfuerzo-deformación de especímenes ensayados a compresión. Se usó el criterio de módulo secante. Por cada mezcla de concreto estudiada se hicieron tres ensayos, siendo los valores reportados el promedio alcanzado en estas determinaciones. La expresión propuesta para determinar el módulo de elasticidad a partir de la resistencia a compresión es, fig 4

$$E_c = 8500 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2$$

Relación de Poisson. Esta se obtuvo del ensaye a 28 días de especímenes cilíndricos de concreto de diferentes resistencias. En la fig 5 se observa que la relación de Poisson varía con la resistencia y que se puede relacionar con ésta con la expresión

$$\mu = 0.22 + 0.00026 f'_c$$

habiendo alcanzado un valor medio de 0.30, superior al intervalo usual recomendado para el concreto (0.15 - 0.20).

Módulo de rigidez por cortante. Con los valores de módulos de elasticidad y relación de Poisson conocidos, se pueden estimar el módulo de rigidez por cortante. Para los concretos de agregados andesíticos resultó ser

$$G = 3300 \sqrt{f'_c}, \text{ en kg/cm}^2$$

Deformación unitaria ( $\epsilon_0$ ) correspondiente al esfuerzo máximo. El valor de esta deformación también se ve afectado por el nivel de resistencia que se alcance en el concreto, por lo que se puede correlacionar con ella con la expresión siguiente, fig 6

$$\epsilon_0 = 0.003 + 2.8 \times 10^{-6} f'_c$$

Los resultados de los ensayos condujeron a un valor medio de esta deformación ( $\bar{\epsilon}_0$ )

igual a 0.0044.

La curva esfuerzo-deformación del concreto bajo cargas de compresión, puede representarse en forma adecuada con la expresión

$$f_c = \frac{2f'_c}{\epsilon_0 \left| 1 + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^2 \right|}, \text{ en kg/cm}^2$$

Contracción por secado. La rapidez con que se presenta la contracción de los concretos andesíticos, varía de acuerdo con el contenido de polvos que se tenga en los materiales componentes, sin embargo, la contracción última se puede estimar del mismo orden para los dos casos e igual  $(\epsilon_{cs})_u = 0.001$ , para los proporcionamientos usuales y las condiciones ambientes de la ciudad de México, fig 7. Las expresiones que permiten estimar el valor de la contracción para una edad cualquiera se indican a continuación:

Concretos andesíticos con exceso de polvos (del orden del 20%)

$$(\epsilon_{cs})_t = \frac{t^{0.88}}{51 + t^{0.88}} \times 0.001$$

Concretos andesíticos con pocos polvos (del orden del 8%)

$$(\epsilon_{cs})_t = \frac{t}{53 + t} \times 0.001$$

en ambos casos t debe expresarse en días.

Deformación diferida. Esta deformación se estimó en función del coeficiente de deformación diferida ( $C_t$ ), el cual es igual  $C_t = \frac{\epsilon_t - \epsilon_i}{\epsilon_i}$ , siendo  $\epsilon_t$ , la deformación unitaria alcanzada en un tiempo t y  $\epsilon_i$ , la deformación unitaria inicial al aplicar el esfuerzo de compresión, igual a 40 por ciento del esfuerzo máximo.

El valor del coeficiente último ( $C_u$ ), estimado para un tiempo infinito, para los proporcionamientos usuales y para las condiciones ambientes de la ciudad de México, variarán de acuerdo con el contenido de polvos observados en los materiales componentes, fig 8. Las expresiones encontradas para calcular el valor de este coeficiente para un tiempo cualquiera t, en días, se indican a continuación:

Concretos andesíticos con exceso de polvos (del orden del 20%)

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} \times 4$$

Concretos andesíticos con pocos polvos (del orden del 8%)

$$C_t = \frac{t^{0.55}}{11 + t^{0.55}} \times 2.5$$

Contracción por secado en condición estándar. Tomando en cuenta los coeficientes determinados con los resultados de los ensayos y las modificaciones en la contracción última para ponerla en condición estándar, se recomienda emplear las siguientes expresiones para la estimación de la contracción por secado a cualquier edad:

Grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.88}}{51 + t^{0.88}} \times 0.0013$$

Grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$\epsilon_t = \frac{t}{53 + t} \times 0.0013$$

En estas expresiones el valor de  $t$  se debe tomar como el número de días después de la suspensión del curado húmedo y el valor de la contracción determinada se debe afectar por los factores de corrección para tomar en cuenta las características del concreto de que se trate y las condiciones del medio ambiente, fig 9.

Deformación diferida última en condición estándar. Entre las variables que mayor influencia tuvieron en los valores de los coeficientes de deformación diferida última están la edad a la que se aplica la carga, la humedad relativa, y el revenimiento, los cuales incrementaron los valores alcanzados en los ensayos.

El coeficiente de deformación diferida en condición estándar para cualquier edad (en días) se puede determinar con las siguientes expresiones:

Grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} 5.65$$

Grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$C_t = \frac{t^{0.55}}{11 + t^{0.55}} 3.12$$

Al igual que en la contracción por secado los coeficientes calculados para la deformación diferida, deberán ser afectados por los factores de corrección para tomar en cuenta las características particulares de los concretos empleados y las condiciones del medio ambiente en que se encuentran, fig 9.

#### CONCLUSIONES

1. El empleo de agregados de baja densidad y alta absorción, como los andesíticos, en la fabricación de concretos, conduce a obtener concretos con deformaciones mayores que las usuales.
2. Dadas las discrepancias encontradas entre las expresiones usuales y las

determinadas en este estudio para estimar la resistencia del concreto así como sus deformaciones a corto y largo plazos, se requiere modificar los parámetros usados convencionalmente en los diseños estructurales para obtener mejor concordancia entre el comportamiento estimado en el diseño y el alcanzado en las estructuras reales.

3. La contracción por secado registrada fue inversamente proporcional al contenido de agregado grueso en la mezcla y directamente proporcional al contenido de polvos en las arenas utilizadas y al revenimiento de las mezclas utilizadas.
4. Para un mismo tipo de agregado grueso el empleo de arenas con muchos finos incrementa notoriamente el coeficiente de la deformación diferida. Este coeficiente también aumentará en forma apreciable al incrementarse el revenimiento del concreto.

#### RECOMENDACIONES

En relación con los materiales pétreos se buscará, por una parte, emplear agregados gruesos que presenten la mayor densidad posible y agregados finos con el menor contenido de polvos que sea factible desde el punto de vista económico. Estas dos características conducirán a obtener concretos, para una resistencia dada, con mayor módulo de elasticidad y, por tanto, con menor deformación instantánea, menor contracción por secado, porque hay mayor restricción a estas deformaciones, y menor deformación diferida.

En cuanto a las mezclas de concreto se emplearán aquellas con mayor contenido de agregado grueso compatible con la trabajabilidad de la misma. Lo anterior conducirá a menores consumos de agua lo que a su vez se traduce en menor contenido de vacíos y por tanto mayores resistencias relativas, menores deformaciones y contracciones, así como menor deformación diferida.

La resistencia a tensión por flexión del concreto es usual valuarla como  $2\sqrt{f'_c}$  (ACI 318, RDF), sin embargo, los resultados de los ensayos efectuados con los concretos andesíticos dan resistencias a la tensión ligeramente menores, por lo que se sugiere tomar en cuenta esta discrepancia empleando la expresión propuesta.

En relación con el módulo de elasticidad estático, las expresiones propuestas por los diferentes reglamentos de construcción (ACI 318, RDF) sobrestiman los valores alcanzados con los concretos andesíticos, por lo que se recomienda emplear la expresión propuesta en este trabajo para predecir las deformaciones a corto plazo de las estructuras hechas con este material.

Al igual que los otros parámetros la relación de Poisson y el módulo de rigidez por cortante determinados para el concreto andesítico, difieren de los valores usualmente empleados, por lo que para estimar mejor el comportamiento de estos concretos conviene emplear los valores sugeridos.

La deformación correspondiente al esfuerzo máximo es usual considerarla igual a 0.003, sin embargo, el resultado de los ensayos indican que esta deformación alcanza un valor promedio de 0.0044.

En relación con las deformaciones a largo plazo, tanto las originadas por la contracción como por la deformación diferida, pueden estimarse con buena precisión con los coeficientes determinados de los resultados de los ensayos, sin requerirse de correcciones por características del material y medio ambiente del Distrito Federal, dado que los concretos empleados son característicos de los usuales en el área metropolitana de la ciudad de México, y las condiciones de curado representan también las usuales en esta área.

Cuando las características del concreto y las condiciones del medio ambiente varían, haciendo no aplicables directamente los resultados de los ensayos, se recomienda emplear los valores sugeridos para características y condiciones estándar y hacer todas las correcciones necesarias para adecuar los coeficientes a las circunstancias de cada caso en particular, de acuerdo con los factores de corrección indicados en la fig 9.

Como las deformaciones y agrietamientos alcanzados a largo plazo en los concretos característicos del D.F. son mucho mayores que los esperados usualmente, se deben tomar en el diseño las precauciones necesarias para restringir estos efectos con el acero de refuerzo u otros medios adecuados.

#### REFERENCIAS

1. Mendoza, C.J. "Estudio de las propiedades a largo plazo de los concretos en el Distrito Federal" Informe elaborado para la Comisión de Vialidad y Transporte Urbano, enero 1984
2. Neville, A.M. "Properties of Concrete" Pitman Publishing LTD, London, 1975
3. ACI Committee 209 "Prediction of creep, shrinkage, and temperature effects in concrete structures", ACI Publication SP-27.

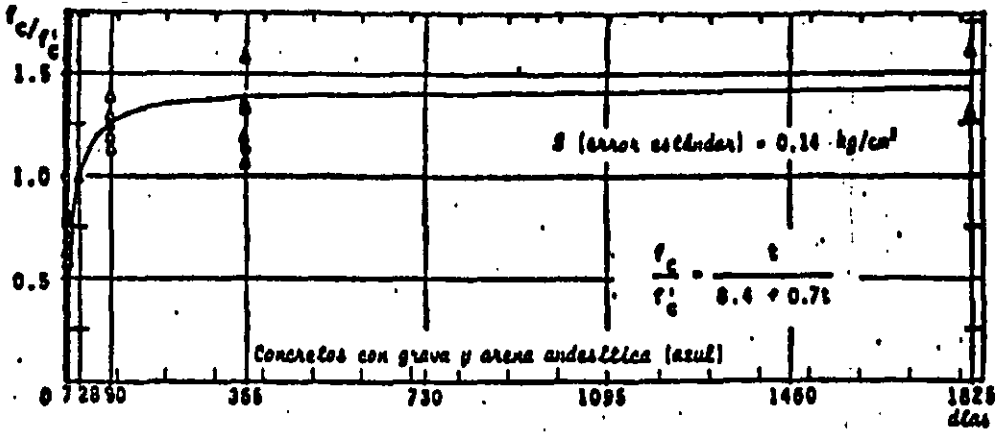


Fig. 1 Variación de la resistencia a compresión con el tiempo

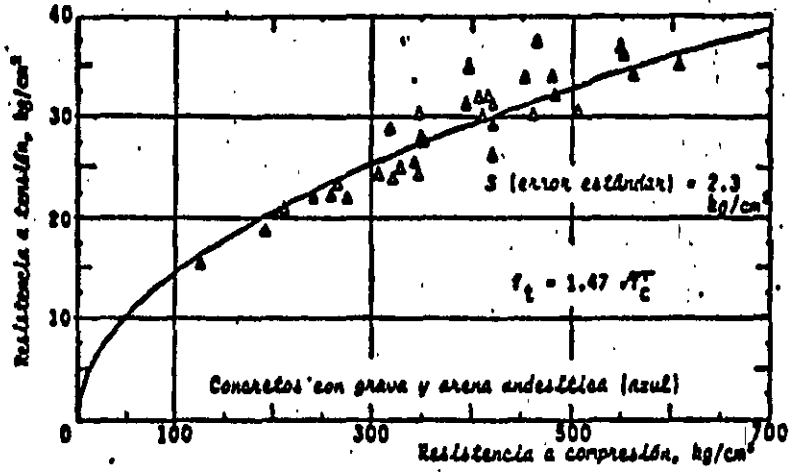


Fig. 2 Resistencia a tensión por compresión diametral

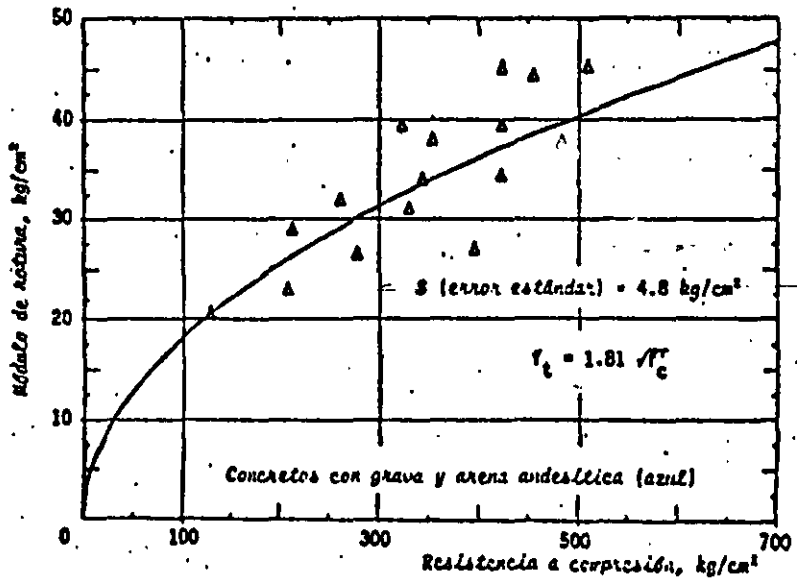


Fig. 3 Resistencia a tensión por flexión



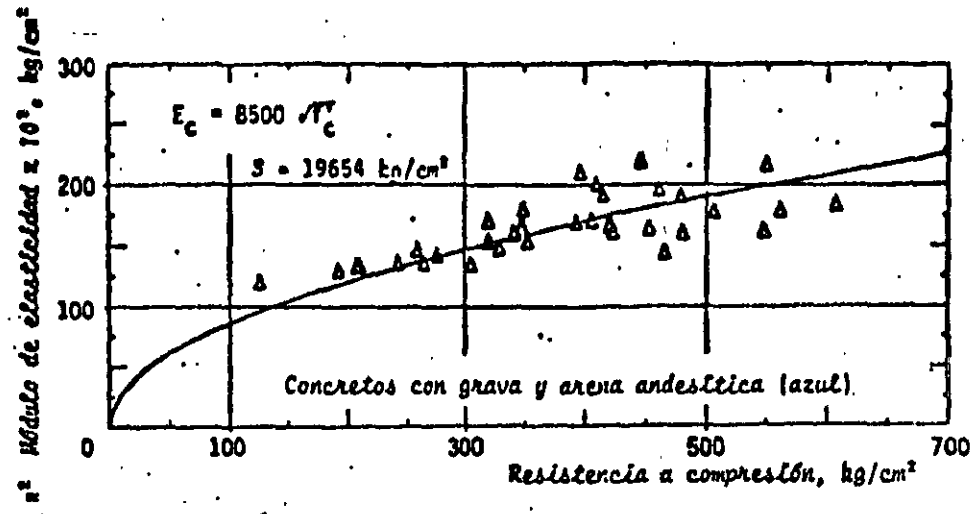


Fig 4 Módulo de elasticidad

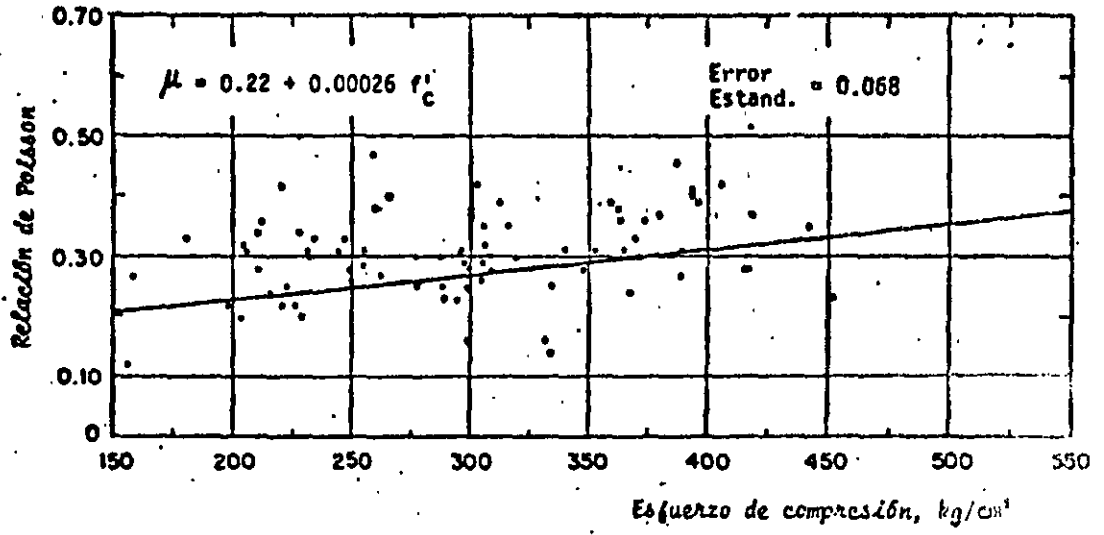
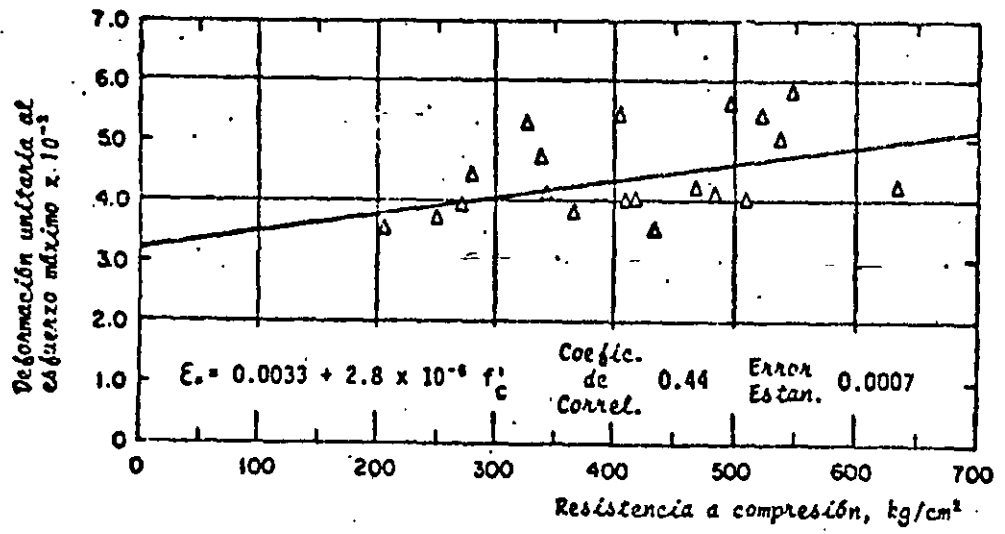
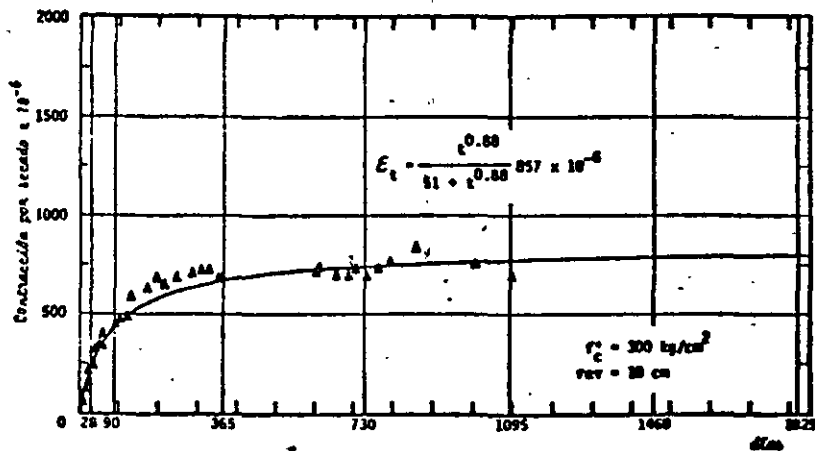


Fig 5 Relación de Poisson para concretos andesíticos

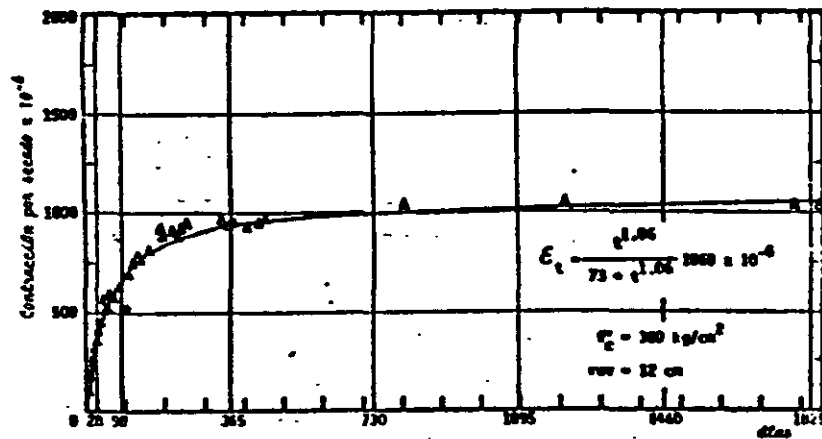


a) Concretos andesíticos

Fig 6 Relación entre deformación unitaria al esfuerzo máximo y resistencia a compresión

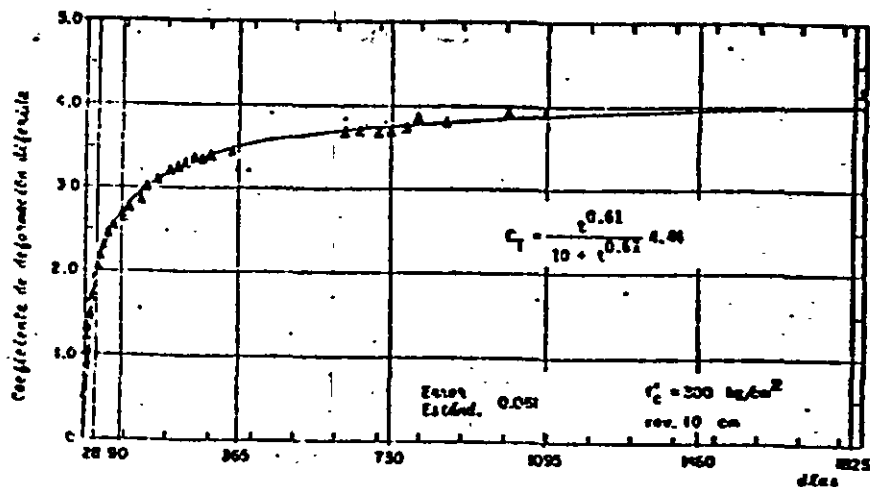


a) Concretos andesíticos con exceso de polvos

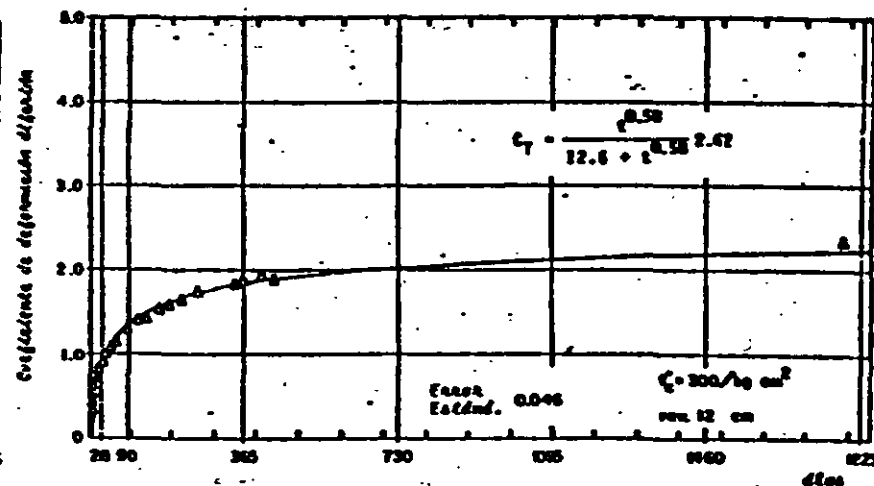


b) Concretos andesíticos con pocos polvos

Fig 7 Contracción por secado



a) Concretos andesíticos con exceso de polvos



b) Concretos andesíticos con pocos polvos

Fig 8 Deformación diferida

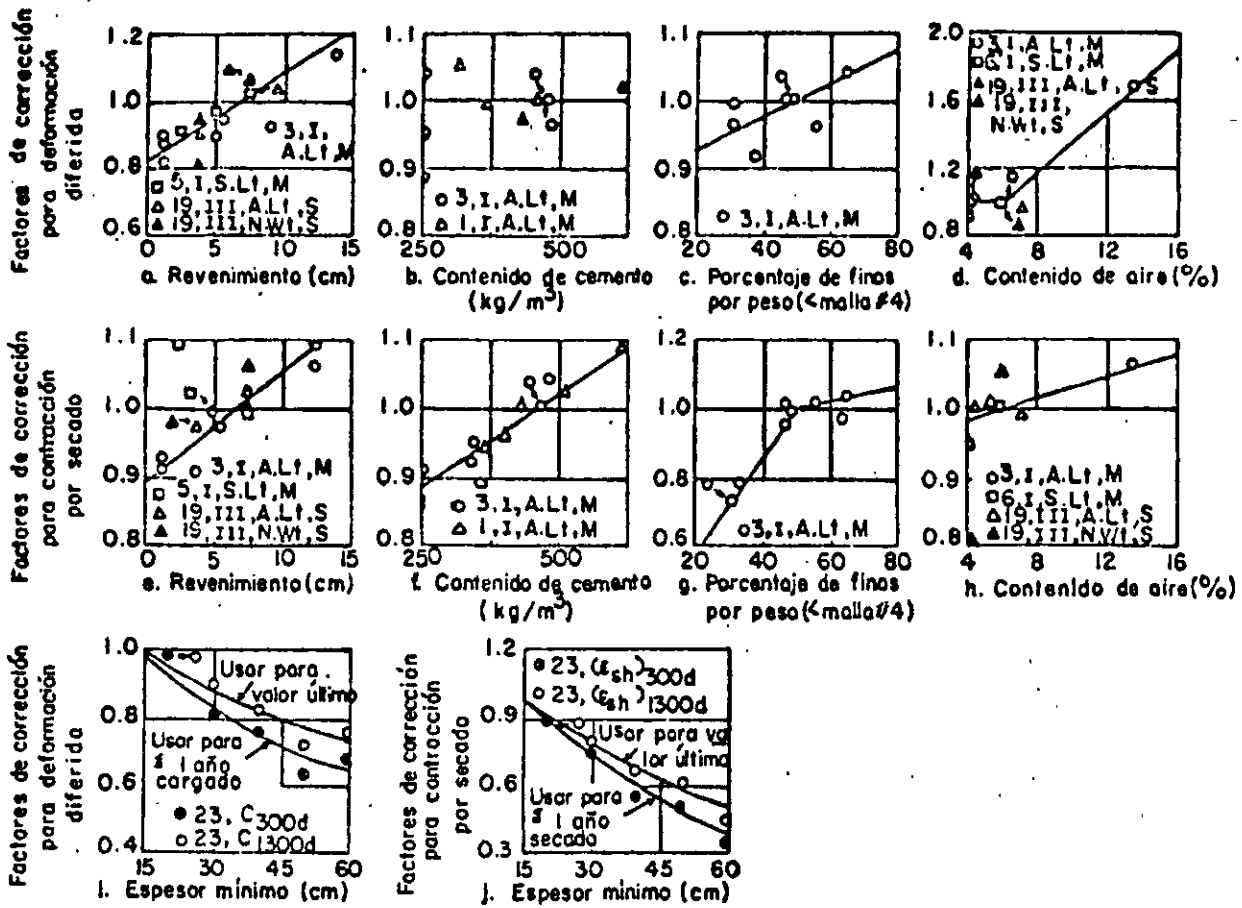


Fig 9 Factores de corrección nominales para deformación diferida y contracción por secado para los parámetros mostrados. I, III - Tipo de cemento; N.Wt, S. Lt, A.Lt - peso del concreto; M, S - curado húmedo y a vapor (ref 3)



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**INFLUENCIA DE LOS AGREGADOS EN LOS  
CONCRETOS ESTRUCTURALES DEL D.F.**

**M. en I. CARLOS J. MENDOZA ESCOBEDO  
PALACIO DE MINERÍA  
AGOSTO DE 1998**

# INFLUENCIA DE LOS AGREGADOS EN LOS CONCRETOS ESTRUCTURALES DEL D.F.

Ing. Carlos Javier Mendoza\*  
Ing. Manuel Mena Ferrer\*\*

## RESUMEN

Se analiza el efecto que tienen las partículas más finas de las arenas andesíticas y las características intrínsecas de las gravas calizas y andesíticas, disponibles en la ciudad de México, sobre las propiedades de los concretos en los estados fresco y endurecido. Además, se dan recomendaciones para mejorar las propiedades de estos concretos.

## SUMMARY

The effects of the finest part of andesitic sands and of the intrinsic characteristics of limestones and andesitic gravels, available in Mexico City, in the properties of fresh and hardened concrete are analyzed. Also, recommendations for improving the properties of these concretes are given.

\* Subdirector, Instituto de Ingeniería, UNAM

\*\* Asesor en tecnología del concreto

## INTRODUCCION

Los concretos utilizados comúnmente en la Ciudad de México presentan ciertas deficiencias, originadas en algunos casos por la calidad de los materiales componentes y en otros por las prácticas constructivas empleadas. Entre las deficiencias más notorias se pueden señalar las siguientes:

a) La deficiente calidad de los agregados empleados propicia que los concretos tengan propiedades inadecuadas como bajo módulo de elasticidad, elevados cambios volumétricos por secado y excesivas deformaciones diferidas bajo cargas sostenidas (flujo plástico)<sup>1</sup>. Asimismo, la tendencia al empleo de mezclas demasiado fluidas ocasiona sangrado excesivo en el concreto recién colocado y produce mayor contracción por secado en el concreto endurecido. Por todo ello, las estructuras de concreto son propensas a presentar agrietamientos por elevados cambios volumétricos, excesivas deformaciones a corto y largo plazo y escasa rigidez ante cargas laterales.

b) El empleo de cemento portland-puzolana en la fabricación de concreto propicia una adquisición de resistencia más lenta que la obtenida con otros tipos de cemento portland (I y III), lo cual es incompatible con la práctica usual de pronto descimbrado de las estructuras, en particular de los sistemas de pisos para edificios, y dar lugar a flechas excesivas y agrietamientos inaceptables.

c) Las pruebas de control de calidad realizadas por diferentes laboratorios<sup>2</sup> indican que con relativa frecuencia los concretos no cumplen con los requisitos de calidad especificados y que la proporción de mezclas con resistencias inferiores a la especificada llega a cerca de un 30%, sobre todo para algunos valores de  $f_c$ . Lo anterior ocasiona que los factores de seguridad de un número importante de elementos estructurales sean inferiores a los considerados en los reglamentos.

Los problemas anteriores tienden a agudizarse con los llamados concretos "bombeables", cuando se usan mezclas

con revenimientos exageradamente altos y proporciones excesivas de arena.

Por todo lo mencionado se opina que las características y propiedades del concreto que se ha utilizado normalmente en la Ciudad de México no son las más favorables para su empleo con fines estructurales, lo cual ha hecho pensar en la necesidad de introducir mejoras sustanciales, tanto en los materiales componentes como en el control de calidad y en las prácticas constructivas, sobre todo para aquellas aplicaciones con mayor requerimiento estructural.

Con el propósito de evaluar los efectos de ciertos cambios que en lo relativo a la calidad de los agregados pueden realizarse, se diseñó un programa

de ensayos en mezclas de concreto, que se llevó a cabo simultáneamente en tres diferentes laboratorios independientes de la Ciudad de México. En este trabajo se analizan los resultados obtenidos.

## MATERIALES EMPLEADOS

Para mejorar las propiedades de los concretos que se utilizan en las construcciones del Distrito Federal, se pueden considerar dos modificaciones principales en los agregados:

a) Emplear gravas de mejor calidad que las actuales de andesita y basalto esoriáceo.

b) Reducir el contenido de finos indeseables ( $< 74\mu$ ) en las arenas, y comprobar que los aceptados no tengan

TABLA 1. PROPIEDADES FISICAS DE LAS GRAVAS

GRAVAS	ANDESITICA		CALIZA TRITURADA		NORMA ASTM C-33
	5-10 mm	10-20 mm	5-10 mm	10-20 mm	
CONCEPTOS					
1. Material más fino que la malla No. 200,	1.60	0.40	0.67	0.75	1 máx.
2. Densidad	2.42	2.41	2.63	2.63	
3. Absorción,	4.54	4.19	0.82	0.68	
4. Sanidad en sulfato de sodio, pérdida en	9.8	14.7	8.0	7.4	12 máx.
5. Abrasión en Máquina Los Angeles, pérdida en	23.8	27.1	17.5	14.9	50 máx.
6. Coeficiente volumétrico:					
Por tamaños	0.34	0.37	0.13	0.22	
Grava total		0.36		0.19	
7. Pesos volumétricos:					
Suelto, $kg/m^3$	1256	1266	1366	1348	
Varillado, $kg/m^3$	1354	1370	1517	1528	

**TABLA 2. RESUMEN DE LAS PROPIEDADES FISICAS DE LAS ARENAS**

CONCEPTOS	IDENTIFICACION (% FINOS)	ARENAS ANDESITICAS				ARENA DE RE- FEREN- CIA (1.1)	NORMA ASTM C-33
		(7.7)	(9.9)	(16.7)	(19.3)		
1. Módulo de finura	3.44	3.00	2.60	2.97	2.78	2.80	2.3-3.1
2. Material más fino que la malla No. 200, %	1.8	7.7	9.9	16.7	19.3	1.1	5 máx.
3. Densidad	2.40	2.28	2.40	2.37	2.30	2.31	
4. Absorción, %	5.85	5.87	4.38	4.94	7.93	5.12	
5. Sanidad en sulfato de sodio, pérdida en %	5.67	10.54				5.82	10 máx.
6. Pesos volumétricos:							
Suelto, kg/m <sup>3</sup>	1396	1392	1443	1440	1450	1386	
Varillado, kg/m <sup>3</sup>	1531	1590	1690	1635	1624	1524	
7. Materia orgánica, color respecto al límite	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	Inf.	
8. Equivalente de arena, %	82.9	66.0	59.3	65.4	52.1	84.5	
9. Límites de consistencia:							
Límite líquido, %	17.2	23.1	19.0	21.1	22.3	15.6	
Límite plástico, %	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	
Índice plástico	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	Inap.	
Contracción lineal, %	0.0	2.10	0.0	1.95	1.85	0.0	

\* Arena andesítica lavada

**propiedades plásticas.**

Para cuantificar qué tanto pueden influir estas modificaciones en las propiedades del concreto, se realizó un estudio comparativo que incluyó mezclas con dos tipos de grava (andesítica natural y caliza triturada), cinco arenas andesíticas con diferentes contenidos de finos y una arena de referencia, no andesítica, que cumplió con los requisitos físicos de la norma ASTM C33.

En cuanto al cemento, se optó por emplear cemento portland tipo I como único material cementante y no usar aditivos en la preparación de las mezclas.

**Cemento**

Las pruebas físicas y químicas efectuadas al cemento portland tipo I empleado indicaron que cumple ampliamente con los requisitos especificados en la norma ASTM C150<sup>2</sup>. Sin embargo, cabe señalar que resultó ser menos fino de lo que suelen ser los cementos del mismo tipo.

**Agregados**

**a) GRAVAS**

Las gravas tanto andesíticas como calizas se dividieron en dos fracciones: de 5 a 10 mm y de 10 a 20 mm. Estas fracciones se combinaron en proporción de 35 y 65%, respectivamente, para integrar el agregado grueso

**empleado.**

Las propiedades físicas de estas gravas se presentan en la tabla 1. Los valores ahí mostrados son el promedio de las pruebas efectuadas en los tres laboratorios que participaron en el estudio.

Los resultados de las pruebas de densidad y absorción muestran una diferencia importante entre las gravas andesíticas y calizas, en favor de las segundas. Si se admite que estas propiedades pueden ser un buen índice del grado de deformabilidad de las rocas que las constituyen, debe esperarse que los concretos hechos

**TABLA 3. MEZCLAS DE CONCRETO DE PRUEBA**

Materiales	Mezclas No. (consumo promedio, kg/m <sup>3</sup> )								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cemento	300	296	297	297	303	300	295	294	298
Arena andesítica (finos): 1.8				770					
7.7					742				
9.9	775					774			
16.7		755					752		
19.3			736					761	
Arena de referencia									740
Grava andesítica	952	938	940						
Grava caliza				1024	1044	1034	1018	1014	1027
Agua	179	187	190	183	176	183	193	194	177
Agua/cemento	0.60	0.63	0.65	0.62	0.58	0.61	0.63	0.68	0.59

con la grava caliza resulten mucho menos deformables.

**b) ARENAS**

Se utilizaron cinco arenas andesíticas cuyos contenidos de finos menores que la malla 200 variaron entre 1.8 y 19.3%. Cuatro de estas arenas procedieron de otros tantos bancos (depósitos piroclásticos) de la región. La arena andesítica con 1.8% de finos se obtuvo por lavado. A manera de referencia se empleó una arena no andesítica con un contenido de finos de 1.1%.

En la tabla 2 se presentan los resultados de las pruebas efectuadas a estas arenas. Conviene notar que, además de las pruebas físicas que son usuales, se efectuaron otras dos determinaciones: el equivalente de arena y los límites de consistencia. Esto se hizo con el fin de buscar un medio que permitiera evaluar las propiedades plásticas de los finos de estas arenas.

Las especificaciones de calidad para agregados por lo regular aceptan un máximo de 5% de partículas más finas que la malla 200 (74 $\mu$ ) en arenas para concretos de uso general, no expuestos a la abrasión. Todas las arenas andesíticas que se utilizan en los concretos del Distrito Federal ex-

ceden por mucho este límite, pues sus contenidos de finos suelen fluctuar entre cerca del 10 y algo más del 20%. Debido a las dificultades que existen para reducir estos finos a valores aceptables, se ha vuelto costumbre tolerarlos sin mayor trámite, aduciendo que se trata de finos inertes que no afectan la calidad del concreto; sin embargo, la experiencia ha demostrado que esto no siempre es así, pues hay arenas contaminadas con finos plásticos (limos y arcillas) que sí son dañinos para el concreto.

Como es usual, todas estas arenas andesíticas exhibieron densidades relativamente bajas y altas absorciones. Conviene observar que, en este aspecto, la arena de referencia no presentó mejores características.

**PROGRAMA DE PRUEBAS**

El programa incluyó nueve mezclas de concreto en las que se mantuvieron constantes las siguientes características:

- a) Cemento: portland tipo
- b) Tamaño máximo de grava: 20 mm
- c) Granulometría de la grava: 35% de 5 a 10 mm y 65% de 10 a 20 mm
- d) Consumo de cemento: 300  $\pm$  5 kg/m<sup>3</sup>
- e) Proporción de arena en los agrega-

dos: 45% en volumen absoluto  
f) Revenimiento del concreto: 10  $\pm$  1 cm

Los consumos de materiales por metro cúbico de concreto, así como la relación agua/cemento de cada mezcla se presentan en la tabla 3.

**Pruebas realizadas**

A todas las mezclas de concreto se les efectuaron las mismas pruebas. Los métodos de ensaye fueron preferentemente los de las normas oficiales mexicanas (NOM) y, en su defecto, los de la ASTM. Las pruebas que se practicaron al concreto fresco fueron: revenimiento, peso volumétrico, contenido de aire (método gravimétrico) y agua de sangrado. Al concreto endurecido se le hicieron las siguientes determinaciones: resistencia a compresión y módulo de elasticidad a 28 días, y contracción por secado con 28 días en agua y 28 días al aire. Los resultados de estos ensayos se presentan en las tablas 4 y 5.

**CARACTERÍSTICAS DE LOS CONCRETOS**

El objetivo del estudio consistió en verificar la influencia que ejercen los contenidos de finos de las arenas y las características de las gravas sobre las propiedades de los concretos ensayados. Tomando en cuenta que en este caso la cantidad de finos totales en el



creto resultó proporcional a los contenidos de las arenas, como se muestra en la figura 1, las referencias se hacen en función de los finos de las arenas para facilitar la identificación de las mezclas.

#### Concretos en estado fresco

En la tabla 4 se presentan los resultados promedio de los ensayos efectuados en los tres laboratorios a los concretos en estado fresco. Como se puede observar, las mezclas estudiadas tuvieron revenimientos que variaron entre 9 y 10.5 cm; todos ellos quedaron en el intervalo de  $10 \pm 1$  cm propuesto para el estudio.

Dado que el revenimiento se mantuvo constante, el parámetro que se puede considerar para juzgar la influen-

cia del contenido de finos resulta ser el consumo de agua por volumen unitario de concreto. A este respecto, en la figura 2 se observa que, independientemente del tipo de grava empleada, el consumo de agua se manifestó constante para porcentajes de finos en la arena de hasta un 10%, y después de este valor, dicho consumo se incrementó en forma gradual hasta ser 8% mayor para contenidos de finos de 19% en la arena.

Por otro lado, si se comparan los 180 Kg de agua por metro cúbico de concreto requeridos en este caso, contra los 200 que estima el ACI 211.1<sup>3</sup> para un tamaño máximo de agregado de 20 mm, en mezclas sin aire incluido y revenimientos entre 8 y 10 cm, resulta que las mezclas en estudio necesitaron

10% menos de agua. Esta disminución se debió muy probablemente a la finura del cemento, que por ser más grueso de lo usual requirió menos agua para producir el revenimiento previsto.

En relación con el peso volumétrico de los concretos estudiados, en la tabla 4 y la figura 3 se observa que para contenidos de finos de hasta 10% el peso volumétrico se mantuvo constante y que éste disminuyó a medida que aumentaron los finos en las arenas más allá de ese valor. Asimismo se puede ver que existe una diferencia de alrededor de  $80 \text{ kg/m}^3$  entre los concretos fabricados con grava caliza y los hechos con andesita, a favor de la primera.

Dada la diferencia tan clara en cuanto a peso volumétrico de estos dos ti-

**TABLA 4. PROPIEDADES DE LOS CONCRETOS EN ESTADO FRESCO**

PROPIEDAD	MEZCLAS No.								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Revenimiento, cm	10.5	9.5	10.0	9.5	9.0	10.5	10.0	9.0	9.5
Peso volumétrico, $\text{kg/m}^3$	2207	2176	2165	2274	2270	2291	2258	2263	2242
Vacíos,	0.6	1.1	1.3	1.3	0.3	0.5	0.9	0.7	1.7
Agua de sangrado,	3.3	2.4	1.7	3.0	1.8	3.1	1.7	1.3	3.0

**TABLA 5. PROPIEDADES DE LOS CONCRETOS EN ESTADO ENDURECIDO**

PROPIEDAD	MEZCLAS No.								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Resistencia a compresión a 28 días ( $f'_c$ ), $\text{kg/cm}^2$	283	266	242	279	283	289	282	242	273
Módulo de elasticidad a 28 días ( $E_c$ ), $\text{kg/cm}^2$	157318	140369	138284	282350	279042	286094	259474	254460	274566
Relación $E_c/f'_c$	9352	8607	8809	16904	16587	16829	15451	16357	16617
Constracción por secado, 28 días en agua y 28 días al aire, $10^{-6}$	533	733	759	337	443	332	403	448	308

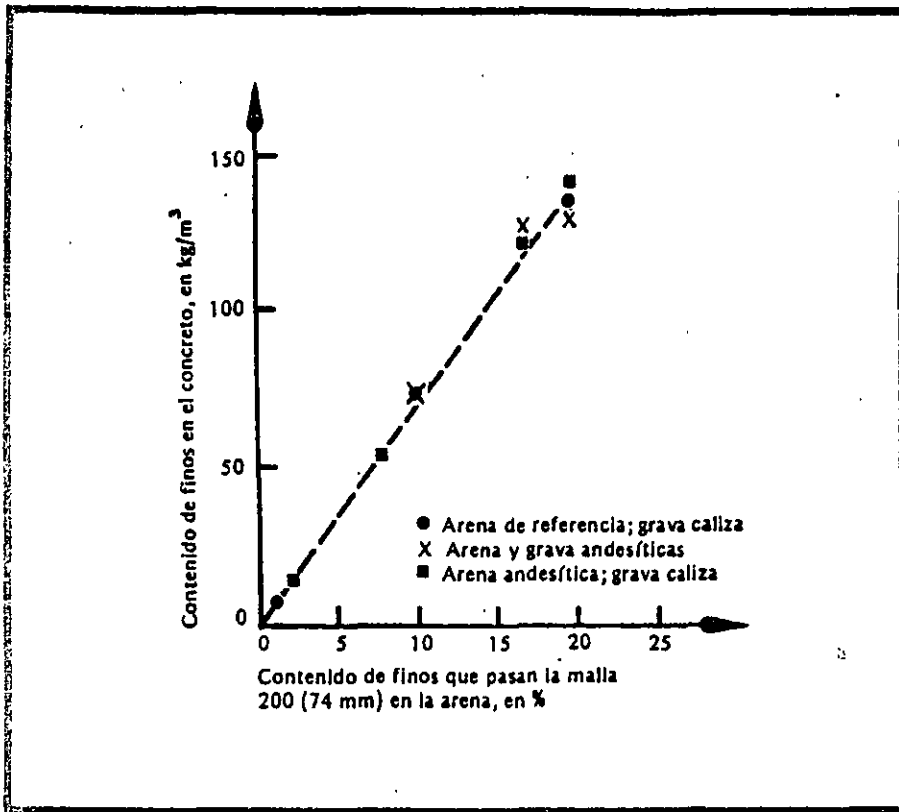


Fig. 1. Proporcionalidad entre los contenidos de finos de la arena y del concreto.

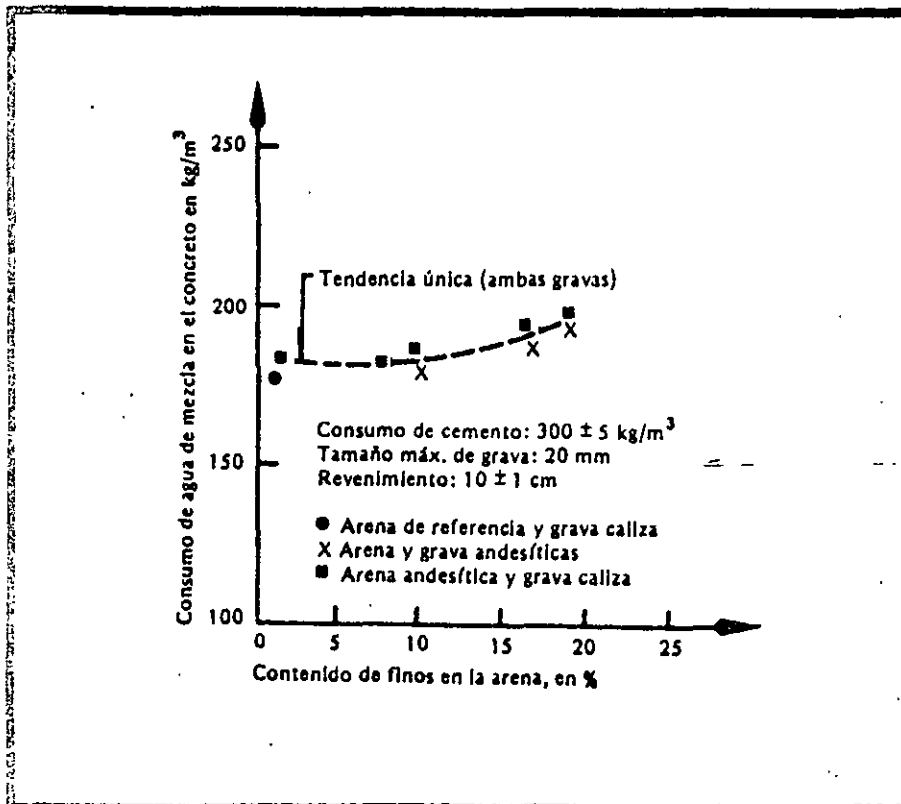


Fig. 2. Relación entre el contenido de finos de la arena y el consumo de agua de mezcla en el concreto.

pos de concreto y tomando en cuenta la simplicidad de la prueba, se puede sugerir su ejecución en obra como una primera medida para discriminar entre los dos tipos de concreto. Un valor razonable que se puede considerar como frontera entre los dos tipos de concreto es  $2250 \text{ kg/m}^3$ .

El contenido de vacíos de las mezclas estudiadas (figura 4), establecido en función de los volúmenes absolutos de los materiales componentes, parece tener un comportamiento independiente del tipo de agregado grueso y del contenido de finos en la arena. Los valores obtenidos resultan ser inferiores a los usualmente estimados para este tipo de mezclas (2%).

En relación con el agua de sangrado, en la figura 5 se puede observar que las mezclas estudiadas siguen una sola tendencia, independientemente del tipo de grava utilizada, y que para contenidos de finos de hasta 10% el sangrado resulta constante y cercano al 3%. Para contenidos finos en la arena mayores que 10% el sangrado disminuye a valores cercanos al 1.5% para porcentajes de finos de 19%.

Cabe señalar el comportamiento discrepante de la mezcla fabricada con arena con 7.7% de finos, la cual tuvo un sangrado de tan sólo 1.8%. Esta situación se atribuye a que no obstante que la arena tiene relativamente pocos finos, parte de ellos tienen características plásticas, lo que les permite retener mejor el agua.

Los resultados anteriores representan una contradicción, ya que por una parte es deseable limitar el porcentaje de finos en la arena y por otra es conveniente al mismo tiempo tener el mínimo de sangrado posible. Aparentemente la consistencia de la mezcla (revenimiento) tiene una influencia más significativa e importante en cuanto al sangrado; pero dado que las mezclas estudiadas tuvieron un revenimiento poco variable (9 a 10.5 cm), la influencia del mismo no quedó totalmente definida. Sin embargo, en la figura 6 se muestra una relación entre el sangrado y el revenimiento. Aunque ésta varió en un intervalo muy reducido, la figura parece sugerir que sería adecuado limitar

el sangrado a valores inferiores al 3.5%.

### Concretos en estado endurecido

Las propiedades determinadas a los concretos en estado endurecido se presentan en la tabla 5. Estas propiedades son las resistencia a la compresión y el módulo de elasticidad del concreto a 28 días de edad, y la contracción por secado después de 28 días de curado en agua a 23°C y 28 días de secado al aire a 23°C y 50% de humedad relativa.

En cuanto a la resistencia a la compresión, dado que los consumos de cemento y los revenimientos de todas las mezclas fueron prácticamente constantes, los resultados alcanzados se pueden comparar en forma directa; así, en la figura 7 se puede ver que los tipos de grava estudiadas y los diferentes contenidos de finos en la arena no tuvieron influencia en la resistencia a la compresión hasta para contenidos de finos del 10%, en tanto que para porcentajes mayores la resistencia a la compresión decreció hasta una reducción del orden del 15% para arenas con 19% de finos. Cabe hacer notar que el concreto fabricado con la arena considerada como de referencia siguió la misma tendencia general observada en los concretos con arenas andesíticas.

Otra forma de tomar en cuenta el efecto de los finos de la arena en la resistencia a la compresión del concreto es a través de la eficiencia del cemento, entendida ésta como la relación consumo de cemento/resistencia a la compresión (figura 8).

En esta figura se puede ver que para contenidos de finos en las arenas menores que el 10%, la relación antes mencionada se mantuvo constante en un valor de 1.06, en tanto que este valor se incrementó a 1.23 cuando los finos en la arena llegaron a ser del orden del 19%, lo que equivale a tener un incremento del 16% en el consumo de cemento para igualdad de resistencias.

En relación con el módulo de elasticidad, en la figura 9 se puede observar a gran influencia que tuvo el tipo de grava que se empleó en la fabricación del concreto. Se encontraron diferen-

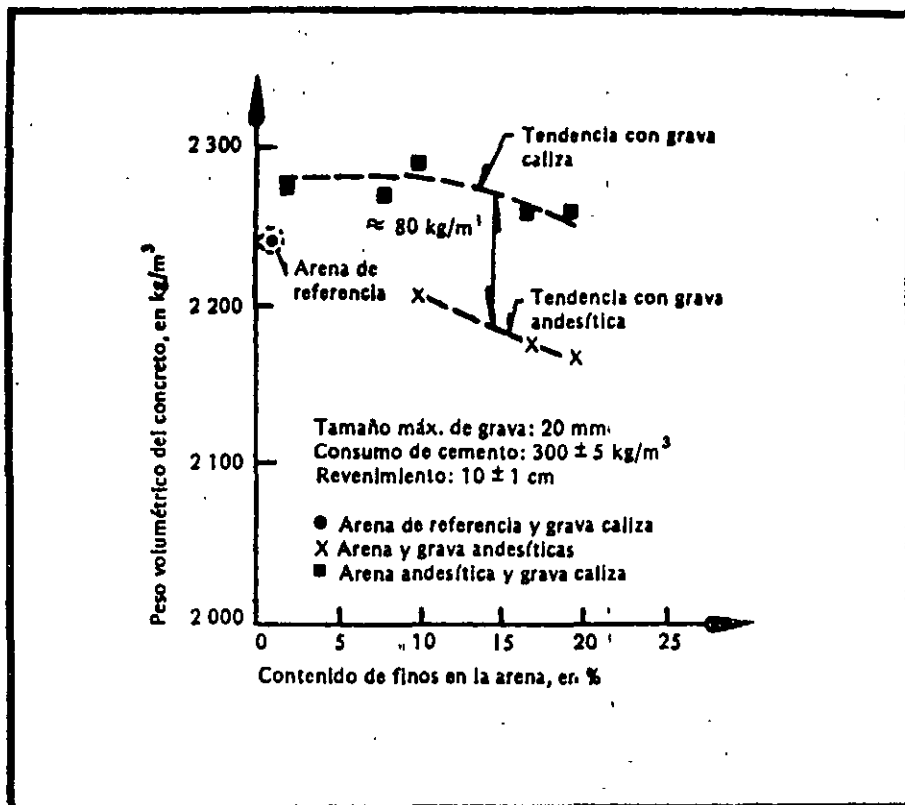


Fig. 3. Influencia del contenido de finos de la arena en el peso volumétrico del concreto.

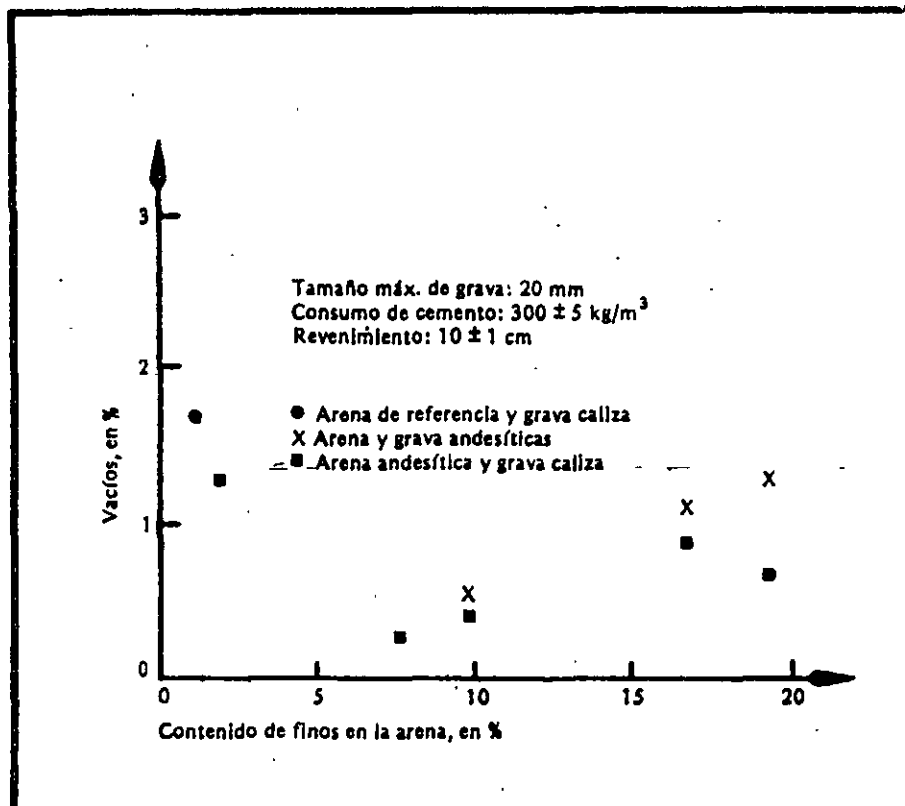


Fig. 4. Influencia de los finos de la arena en la cantidad de vacíos en las mezclas.

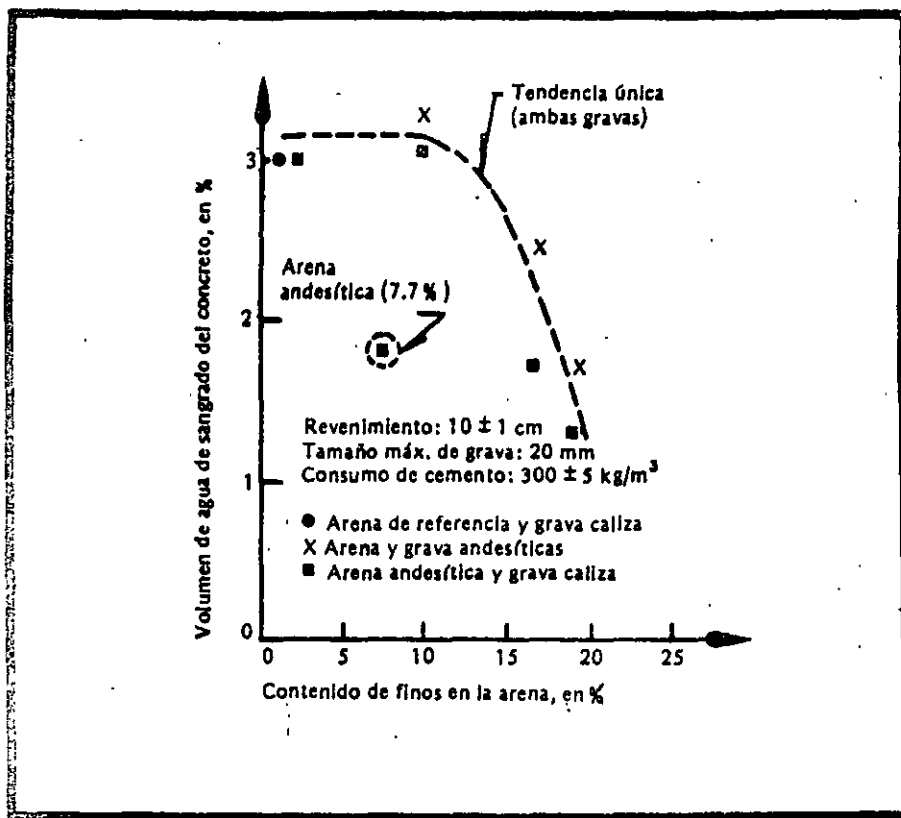


Fig. 5. Relación entre el contenido de finos de la arena y el agua de sangrado del concreto.

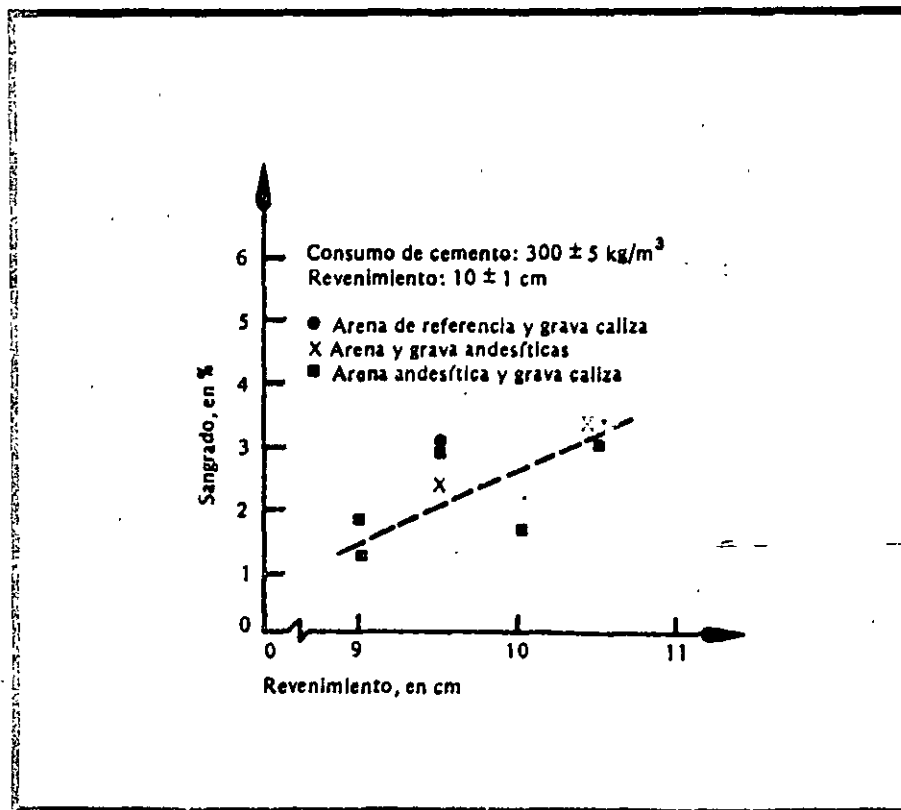


Fig. 6. Variación del sangrado en función del revenimiento.

cias del orden de 120 000 kg/cm<sup>2</sup> entre los módulos de los concretos hechos con gravas andesíticas y los fabricados con gravas calizas, diferencia que corresponde a un incremento del orden del 80% en los valores alcanzados por estos últimos.

Por otra parte, los finos de las arenas influyeron en el módulo de elasticidad de los concretos de manera similar a como lo hicieron en la resistencia a la compresión. Para contenidos inferiores al 10% no existió variación apreciable en los valores alcanzados, en tanto que para contenidos de finos en la arena del 19% la disminución en el módulo de elasticidad fue del orden del 12% en relación con los valores alcanzados en los concretos hasta con 10% de finos.

Conviene señalar que, al igual que para la resistencia a la compresión, el empleo de la arena de referencia con 1.1% de finos no cambió el comportamiento del concreto en cuanto a módulo de elasticidad, el cual alcanzó valores similares a los obtenidos con la arena andesítica lavada.

En la figura 10 se presenta la relación que se manifestó entre el módulo de elasticidad del concreto y la raíz cuadrada de la resistencia a la compresión del mismo. Esta relación alcanzó un valor medio aproximado de 9 000 para los concretos de gravas andesíticas y de 16,500 para los de grava caliza. Conviene hacer notar que aunque el tamaño de la muestra es pequeño, la tendencia está bien definida y la totalidad de los resultados quedan localizados dentro de una dispersión de  $\pm 2\sigma$  de la tendencia central.

En la contracción por secado, el tipo de grava empleada en el concreto tuvo también una influencia notoria; las contracciones de los concretos con grava caliza fueron del orden del 60% de las alcanzadas en los concretos con las gravas andesíticas. Asimismo, los finos de la arena, y en particular los finos con propiedades plásticas, influyeron también en forma considerable en las contracciones alcanzadas (figuras 11 y 12).

En los concretos con gravas andesíticas la contracción se incrementó des-

de un valor de  $533 \times 10^4$  con el uso de la arena con 10% de finos no plásticos, hasta un valor de  $759 \times 10^4$  con la arena de 19% de finos, parte de los cuales tuvieron propiedades plásticas.

En los concretos con gravas calizas el incremento de la contracción con el aumento de los finos en la arena no fue tan significativo; pasó de un valor de  $332 \times 10^4$  a  $448 \times 10^4$  al variar el contenido de finos del 10 al 19% respectivamente. Sin embargo, fue notorio el comportamiento del concreto fabricado con la arena con 7.7% de finos, parte de los cuales tuvieron propiedades plásticas. En este caso la contracción alcanzada resultó ser del mismo orden que la obtenida con la arena con 19% de finos. Conviene señalar que los finos de ambas arenas presentaron propiedades plásticas similares.

Los concretos fabricados con las arenas andesíticas lavadas y de referencia, que no tuvieron finos plásticos, presentaron contracciones similares a la alcanzada en el concreto con arena de 10% de finos, que tampoco tuvo finos plásticos.

En la figura 12 se puede observar la influencia que tuvo el contenido de finos plásticos, determinandos en función de la contracción lineal de los finos de la arena, en la contracción por secado del concreto. Como se observa la contracción por secado del concreto se incrementó al aumentar la contracción lineal de los finos de la arena, independientemente del tipo de grava utilizada, aunque este incremento fue mayor para los concretos con gravas andesíticas.

Las contracciones aquí registradas corresponden a las obtenidas después de un curado en agua de 28 días y secado al aire a una humedad relativa del 50% durante otros 28 días. De acuerdo con la literatura respectiva<sup>6</sup>, la contracción alcanzada en estas condiciones resulta ser del orden de la mitad de las contracciones últimas; por lo que si se extrapolaran los resultados en los concretos con las arenas hasta con 10% de finos no plásticos y gravas calizas, se llegaría a valores de contracciones últimas comprendidas entre  $600$  y  $900 \times 10^4$ , congruentes con los valores encontra-

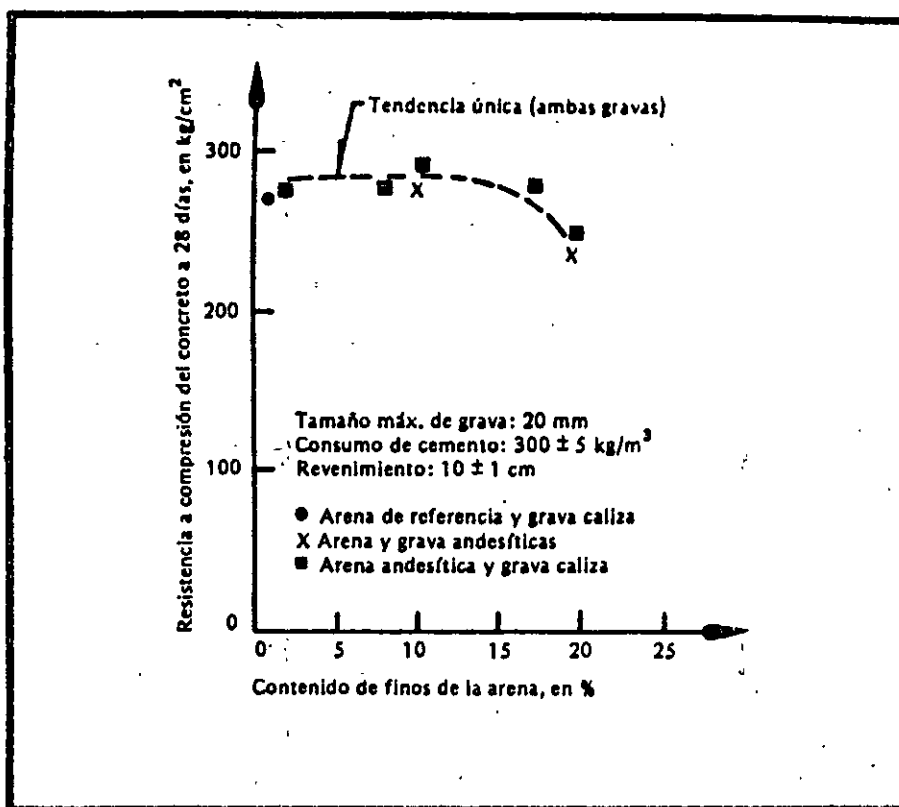


Fig. 7. Influencia del contenido de finos de la arena en la resistencia a la compresión del concreto.

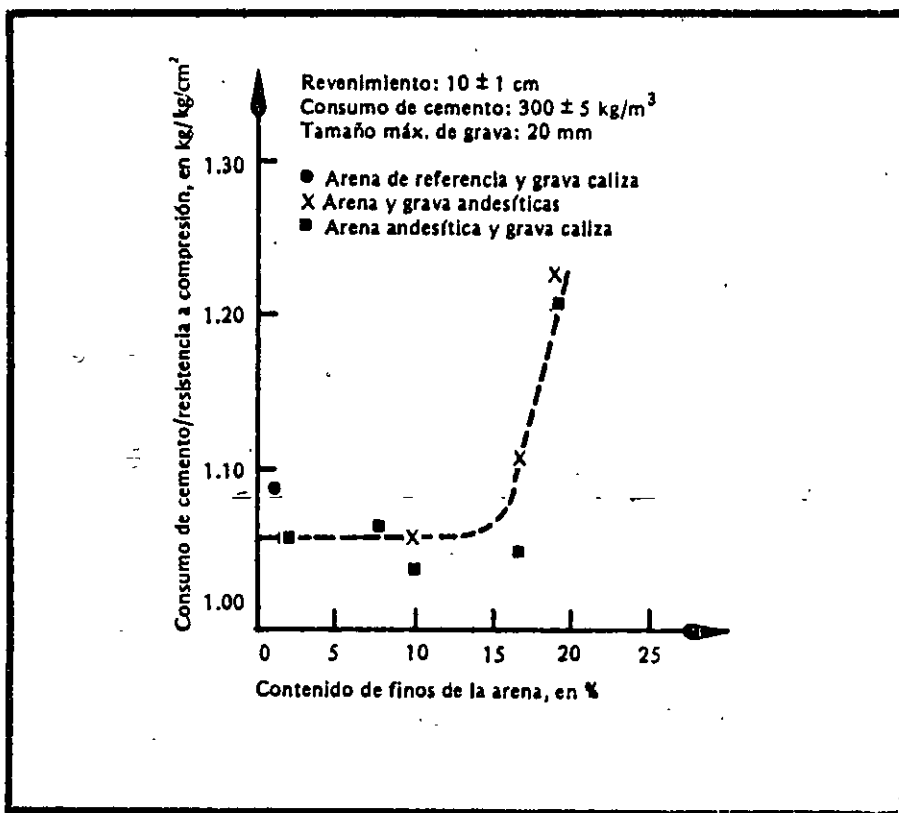


Fig. 8. Influencia del contenido de finos de arena en la eficacia del consumo de cemento.

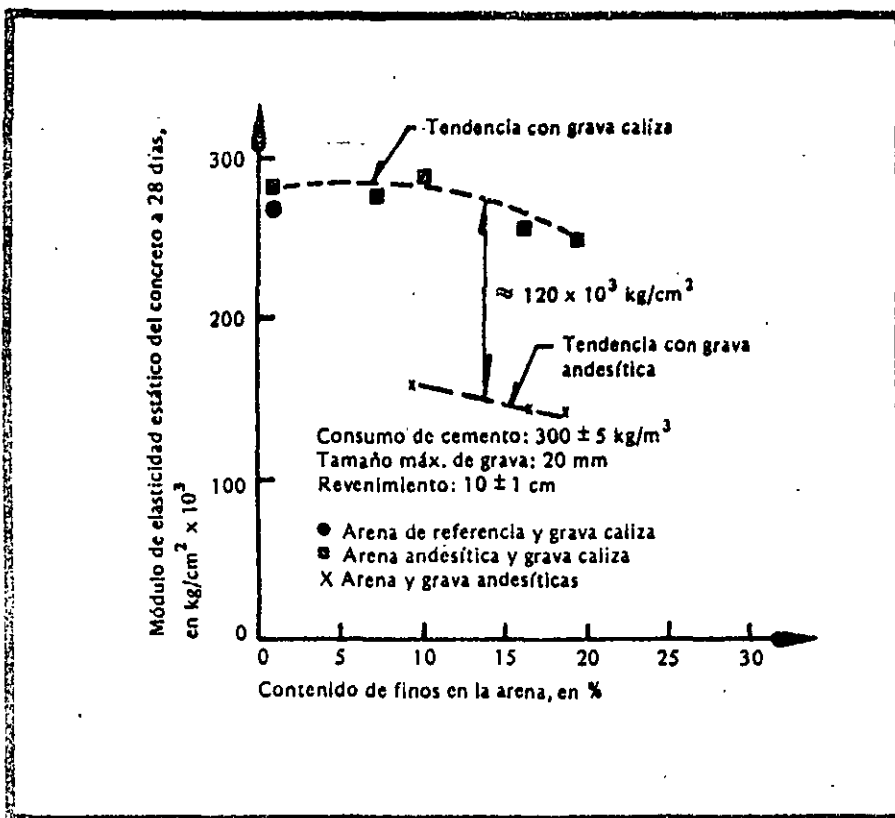


Fig. 9. Influencia del contenido de finos de la arena en el módulo de elasticidad del concreto.

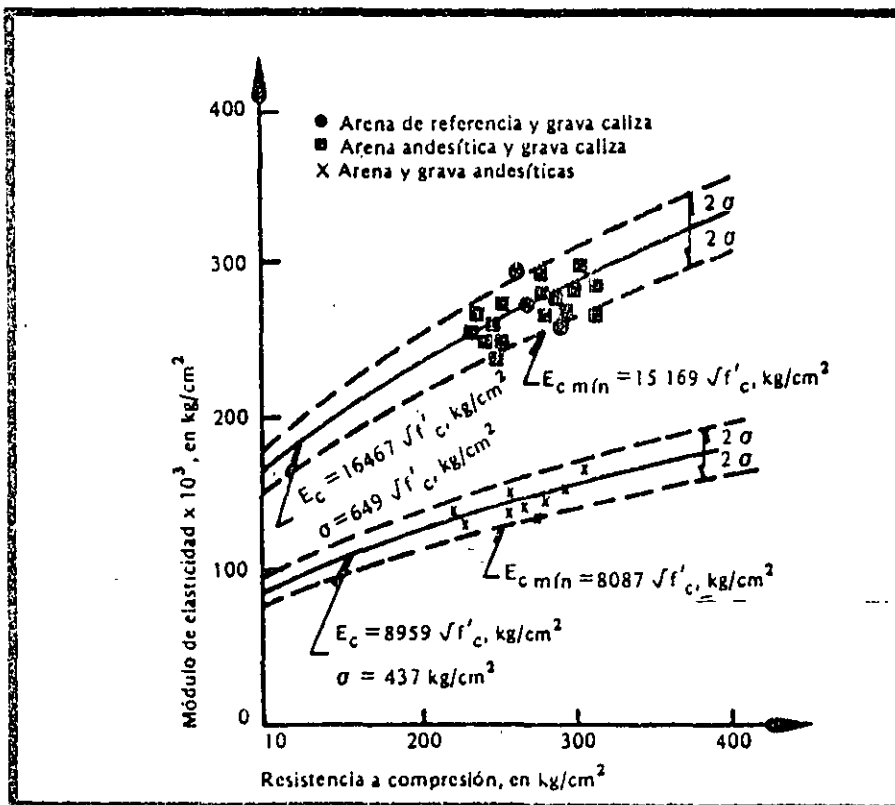


Fig. 10. Relación módulo de elasticidad - resistencia a la compresión de los concretos andesíticos y calizos.

dos en la literatura a que se refieren.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### Conclusiones

Los resultados de los ensayos efectuados y las consideraciones hechas sobre el comportamiento de los concretos conducen a las siguientes conclusiones:

1. Para mejorar las propiedades mecánicas de los concretos que se utilizan en el Distrito Federal, es necesario emplear gravas más densas y con menos absorción de las que actualmente se emplean.
2. Las arenas andesíticas en uso resultan ser las únicas, desde el punto de vista económico, viables para la fabricación de los concretos en el D.F. Sin embargo, es necesario limitar la cantidad de finos y muy especialmente la de los finos plásticos que contienen.
3. El tipo de cemento empleado en las mezclas puede afectar algunas de las propiedades de los concretos. Las conclusiones a que se llega en este trabajo se refieren a concretos hechos con cemento portland tipo I.
4. Las gravas calizas empleadas tuvieron un comportamiento satisfactorio en cuanto a todas las propiedades mecánicas de los concretos estudiados.
5. El coeficiente volumétrico de las partículas de grava caliza triturada prácticamente igual a 0.20 condujo a mezclas de concreto trabajables con contenidos de mortero usuales.
6. La proporción en la que se combinaron los tamaños de grava (35% de 5 a 10 mm y 65% de 10 a 20 mm) se manifestó como una granulometría adecuada para estos materiales.
7. Desde el punto de vista de las propiedades mecánicas del concreto, para alcanzar los mejores resultados se requiere limitar los finos en la arena a un máximo de 10% y además la contracción lineal de estos finos debe ser nula.
8. Debido a que la proporción en que se mezclaron grava y arena se mantuvo constante en todo el estudio, la cantidad de finos totales en las mezclas de concreto resultó pro-

10

porcional a la cantidad de finos en las arenas.

9. El requerimiento de agua de mezclado se manifestó constante para porcentajes de finos en la arena de hasta 10%; para porcentajes mayores, la demanda de agua de mezclado se incrementó hasta en un 8% para contenidos de finos del orden del 19%.
10. Independientemente del contenido de finos en la arena, los concretos con grava caliza tuvieron un peso volumétrico mayor a  $2\,250\text{ Kg/m}^3$  mientras que en los concretos con gravas andesíticas el peso volumétrico fue siempre inferior a este valor.
11. La cantidad de vacíos en las mezclas de concreto resultó independiente del tipo de agregado grueso empleado. Las mezclas fabricadas con arena andesítica lavada y con la arena de referencia tuvieron contenidos de aire cercanos al 2%; pero en las mezclas fabricadas con arenas con mayor contenido de finos los vacíos fueron siempre inferiores a esta cantidad.
12. El sangrado que presentaron las mezclas de concreto varió en forma inversamente proporcional al contenido de finos de las arenas y en proporción directa con el revenimiento de las mezclas. Para mezclas con arena de hasta 10% de finos, sería conveniente tener sangrados máximos del 3.5%.
13. La resistencia a la compresión resultó independiente del tipo de agregado grueso empleado y de los finos de la arena, cuando el porcentaje de éstos fue inferior al 10%. Para arenas con mayor contenido de finos la resistencia decreció.
14. Los módulos de elasticidad de los concretos hechos con agregados gruesos calizos resultaron del orden del doble de los obtenidos con gravas andesíticas. Los porcentajes de finos en las arenas inferiores al 10% no tuvieron influencia en el módulo de elasticidad alcanzado. El valor medio de la relación entre el módulo de elasticidad y la raíz cuadrada de la resistencia a la compresión resultó ser 16 500 para los concretos con gravas calizas y 9 000 para los hechos con gravas andesíticas.

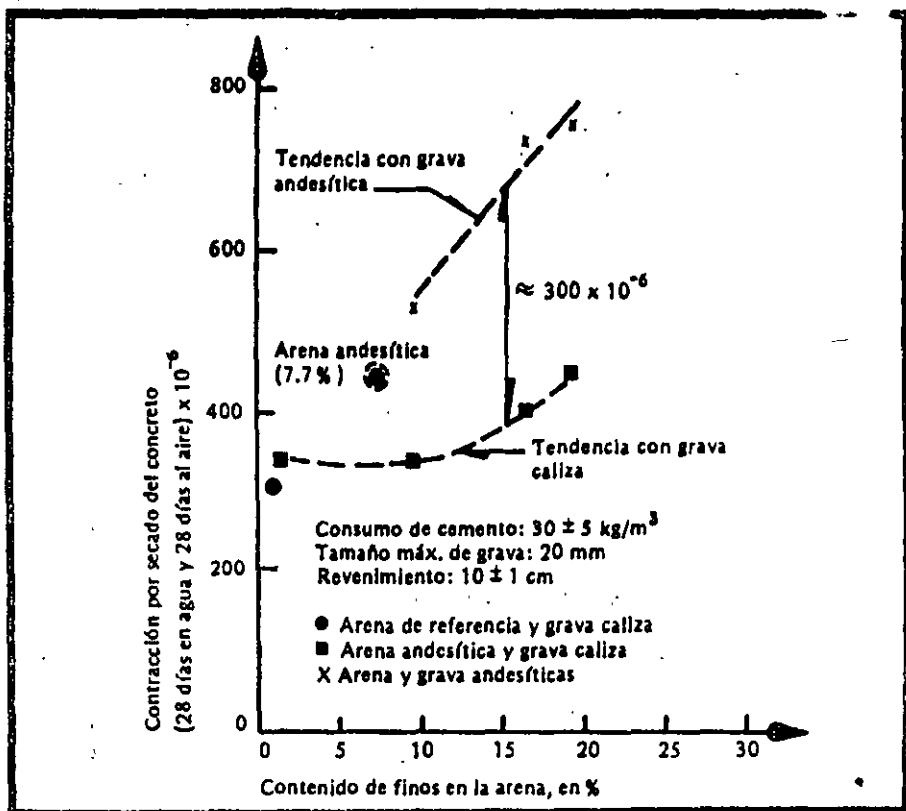


Fig. 11. Influencia del contenido de finos de la arena en la contracción por secado del concreto.

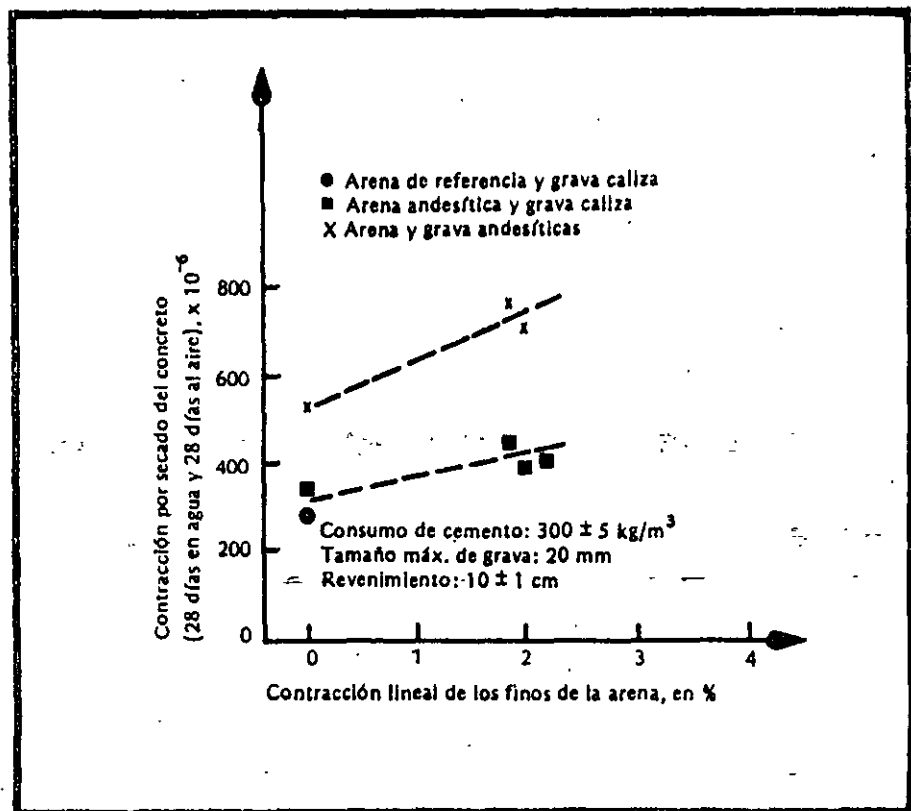


Fig. 12. Influencia de los finos plásticos de las arenas en la contracción por secado del concreto.

15. La contracción por secado de los concretos fabricados con grava caliza fue del orden del 60% de la obtenida en los concretos con gravas andesíticas. Los porcentajes de finos en las arenas superiores al 10%, en especial el contenido de finos con propiedades plásticas, tuvieron una influencia determinante en la contracción del concreto, incrementándose ésta con el porcentaje y las propiedades plásticas de estos finos.
16. La contracción por secado, después de 28 días de curado húmedo y de otros 28 de secado al aire con una humedad relativa de 50%, en concretos con porcentajes de finos en las arenas inferiores al 10%, resultó ser de  $332 \times 10^{-6}$  para los concretos con gravas calizas y de  $533 \times 10^{-6}$  para los de gravas andesíticas.

### Recomendaciones

La evaluación de los resultados de los ensayos conduce a plantear las siguientes recomendaciones:

Para obtener un concreto de calidad satisfactoria para fines estructurales, se requiere seleccionar con precaución las características de los materiales componentes.

En cuanto a los cementos portland se puede emplear cualquiera de los tipos usuales (I, II, III y V) con tal que sea congruente con los fines a los que se destine la estructura. Con respecto al cemento portland-puzolana, se halla en curso de revisión la norma NOM C-2 con objeto de incluir un tipo denominado PUZ-1, el cual se debe compor-

tar en su desarrollo de resistencia como el cemento portland tipo I.

Las gravas deben proceder de una roca sana, preferiblemente con densidad superior a 2.6 y absorción no mayor al 2%. Si las gravas se obtienen por un proceso de trituración conviene verificar que la forma de las partículas sea tal, que su coeficiente volumétrico resulte mayor a 0.20. Se obtiene una granulometría adecuada para fabricar concreto con tamaño máximo de 20 mm, cuando las gravas de 5 a 10 mm se mezclan con las de 10 a 20 mm en proporción de 35 a 65%, respectivamente.

Las arenas que se utilicen para la fabricación de los concretos pueden ser de naturaleza andesítica, pero se debe verificar que el porcentaje de los finos que contenga sea inferior al 10% y además que estos finos no tengan propiedades plásticas. Una forma de medir la plasticidad de los finos puede ser la prueba de contracción lineal, la cual debe conducir a valores de 0% cuando la arena está exenta de finos plásticos.

Dada la buena trabajabilidad que mostraron las mezclas con revenimientos de 10 cm, se sugiere emplear este valor como máximo nominal, con una tolerancia de  $\pm 2.5$  cm. En caso de requerir una mezcla más fluida se puede adicionar en obra un aditivo fluidificante que permita incrementar ese revenimiento. Como medida de control y aceptación del concreto en su estado fresco se recomienda realizar, adicionalmente a la prueba de revenimiento, la determinación del peso volumétrico, cuyo resultado permitirá distinguir si el concreto se fabricó con agregados den-

sos o ligeros. Un valor mínimo para esta característica en el concreto estructural puede ser de  $2\ 250\ \text{kg/m}^3$ .

Tomando en cuenta el comportamiento de los concretos con agregados gruesos calizos, se puede estimar que el módulo de elasticidad de los mismos a los 28 días tendrá un valor mínimo de  $14\ 500\ f_c$  y que la contracción por secado última será inferior a  $900 \times 10^{-6}$ .

### RECONOCIMIENTO

Este artículo es un resumen del informe "Ensayos para definir las características de los concretos estructurales en el D.F." preparado por el Instituto de Ingeniería para la Comisión de Vialidad y Transporte Urbano y se reproduce con la autorización de la mencionada comisión.

Los autores hacen patente su reconocimiento al personal del Grupo Tolteca, por su participación en la obtención y selección de los materiales empleados en el estudio; a los empleados de las empresas INSPECTEC, Laboratorios Liac y Laboratorio Nacional de la Construcción, quienes intervinieron en la realización de los ensayos; a la Comisión Federal de Electricidad por facilitar sus instalaciones y a todos los miembros del grupo de trabajo sobre control de calidad de los materiales de construcción. Se agradece en forma especial al Dr. Roberto Meli, por las sugerencias recibidas durante el desarrollo del estudio.



### REFERENCIAS

1. Mendoza, C.J., "Propiedades mecánicas de los concretos fabricados en el D.F.", Informe 495. Instituto de Ingeniería, UNAM.
2. Meli, R., "Estudio estadístico de propiedades de materiales y estructuras de concreto reforzado en el Distrito Federal", Informe Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, julio de 1985.
3. ASTM "Annual Book of Standards", Section 4, Volume 0.4.02 Concrete and Mineral Aggregates, 1983.
4. Rabot R., Coulon C. y Hamel J., "Contribution a l'amélioration de l'essai d'équivalent de sable", Bull Liaison Labo. P. et Ch. 57, enero-febrero de 1972.
5. ACI Committee 211 "Standard Practice for Selecting Proportions for Normal, Heavyweight, and Mass Concrete (ACI 211.1-81)", ACI Manual of Concrete Practice, Parte 1, 1986.
6. ACI Committee 209 "Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures", ACI Publication SP-27, 1971.





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**INFLUENCIA DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS AGREGADOS EN EL  
COMPORTAMIENTO DE LAS ESTRUCTURAS DE CONCRETO**

**M. en I. CARLOS J. MENDOZA ESCOBEDO  
PALACIO DE MINERÍA  
AGOSTO DE 1998**

# INFLUENCIA DE LAS CARACTERISTICAS DE LOS AGREGADOS EN EL COMPORTAMIENTO DE LAS ESTRUCTURAS DE CONCRETO

Carlos Javier Mendoza E.

## Introducción

En una mezcla de concreto los agregados constituyen cuando menos tres cuartas partes de su volumen total, por lo que la calidad de éstos tienen una importancia definitiva en la resistencia, durabilidad y comportamiento de las estructuras construidas con ellos.

Por otro lado, los agregados son más económicos que el cemento, por lo que resulta ventajoso usar la mayor cantidad posible de ellos, a parte de que el empleo de volúmenes importantes de agregados da al concreto mayor estabilidad volumétrica y durabilidad.

## Influencia de la forma y textura del agregado en la trabajabilidad y resistencia

La forma y textura superficial del agregado grueso tienen una influencia considerable en la resistencia del concreto, particularmente en la resistencia a flexión y son particularmente significativas en los concretos de alta resistencia.

La contribución de la forma y textura del agregado grueso en el desarrollo de la resistencia a compresión del concreto no se conoce, pero posiblemente una textura rugosa dé como resultado una fuerza de adhesión más grande entre las partículas y la matriz de cemento. De igual forma, una superficie de contacto más grande en los agregados angulosos significa que se puede desarrollar una mayor fuerza adhesiva. En la tabla 1 se hace una estimación cuantitativa de la manera en que la forma, la textura

superficial y el módulo de elasticidad del agregado afecta a las resistencias a flexión y compresión del concreto.

La forma y textura del agregado fino tiene un efecto significativo en el requerimiento de agua de mezclado, ya que estas propiedades se pueden expresar en forma indirecta en función del porcentaje de huecos que quedan en la arena en condición suelta. La influencia de los huecos entre las partículas del agregado grueso es menos definitiva en el consumo de agua, sin embargo, la forma del agregado grueso, y en particular el agregado grueso lajeado, tiene un efecto considerable en la trabajabilidad del concreto.

La influencia de las propiedades de los agregados en la trabajabilidad de crece con el consumo de cemento y posiblemente desaparece cuando la relación agregado/cemento es del orden de 2.5.

La influencia en la granulometría en la segregación es importante, pero esta depende mayormente del método de manejar y colocar el concreto. También el empleo de agregado grueso con peso específico muy diferente del que tiene el agregado fino aumenta la tendencia a la segregación.

Las propiedades físicas del agregado fino, especialmente el más pequeño que la malla #100 (150  $\mu$ m), puede afectar el sangrado del concreto.

La forma del agregado influye en la bombeabilidad de una mezcla, en general son preferibles arenas naturales y gravas redondeadas a los agregados triturados, pero puede hacerse una mezcla con características adecuadas para ser bombeada con una combinación apropiada de fracciones de agregados triturados.

Si la superficie del agregado es porosa los huecos internos pueden no estar totalmente saturados aún cuando estén completamente humedecidos. Cuando se aplica la presión en la línea, el aire en estos vacíos se contrae y el agua se introduce en los poros, dando como resultados que las mezclas sean más secas y poco manejables. Si se suspende el

bombeo y se libera la presión, se libera también el agua de los agregados; esta agua puede arrastrar materiales finos, formando un tapón cuando se reinicia el bombeo.

### Influencia de la resistencia del agregado en el comportamiento del concreto

La resistencia a compresión del concreto no puede exceder a la del agregado con el que se fabrica. Sin embargo, la resistencia a compresión del agregado tal como se encuentra es difícil de determinar y la información requerida tiene que obtenerse através de pruebas indirectas: resistencia a compresión de muestras labradas de la roca, valor al aplastamiento del agregado grueso, o comportamiento del agregado en el concreto.

Lo anterior implica que se deben hacer algunos ensayos previamente con el agregado que se pretende usar y compararlos con la respuesta de otros concretos de calidad conocida. Si el agregado bajo ensayo conduce a una resistencia a compresión más baja que la del concreto de referencia, y en particular si numerosas partículas individuales de agregados aparecen fracturadas después de que el espécimen se ha ensayado, la resistencia del agregado es inferior a la de la mezcla de concreto a la cual se le incorporó, por tanto, tales agregados solo deben usarse en mezcla de baja resistencia.

Una resistencia inadecuada del agregado representa una limitación ya que las propiedades del agregado tiene cierta influencia en la resistencia del concreto, aún cuando sea suficientemente resistente para no fracturarse prematuramente. Si se comparan concretos hechos con diferentes agregados se puede observar que la influencia del agregado en la resistencia del concreto es cualitativamente la misma, independientemente del proporcionamiento de la mezcla y de que el concreto se ensaye en compresión o tensión. Es posible que la influencia del agregado sobre la resistencia del concreto se deba no solamente a la resistencia mecánica del agregado sino también, y en grado considerable, a sus características de

absorción y adherencia.

En general la resistencia y elasticidad del agregado depende de su composición, textura y estructura así, una baja resistencia se puede deber a una debilidad de los granos constituyentes, a que los granos, no obstante de ser suficientemente resistentes, no están bien ligados o cementados.

El módulo de elasticidad del agregado, aunque se determina rara vez, no deja de tener importancia, ya que el módulo de elasticidad del concreto es más grande a medida que mayor es el módulo de elasticidad de los agregados constituyentes. El módulo de elasticidad del agregado afecta también la magnitud de la deformación diferida y de la contracción que puede presentarse en el concreto.

Por otro lado, el agrietamiento vertical de un espécimen sujeto a compresión uniaxial comienza bajo carga del orden de 50 a 75 por ciento de la carga última. El esfuerzo al que se forman las grietas depende en gran parte de las propiedades del agregado grueso: gravas lisas conducen al agrietamiento a esfuerzos más bajos que los requeridos con rocas trituradas, asperas y angulosas, debido probablemente a que la adherencia mecánica está influenciada por las propiedades de la superficie y, en cierta manera, por la forma del agregado grueso.

Las propiedades de los agregados afectan la carga de agrietamiento en compresión y la resistencia en flexión de la misma manera, por lo que la relación entre las dos cantidades es independiente del tipo del agregado usado, fig 1. Por otra parte la relación entre las resistencias a flexión y compresión depende del tipo de agregado grueso, ya que las propiedades del agregado, especialmente su textura superficial, afectan la resistencia última en compresión mucho menos que la resistencia en tensión o la carga de agrietamiento en compresión, fig 2, ref 1.

La influencia del tipo de agregado grueso en la resistencia del concreto varía en magnitud y depende de la relación agua/cemento de la mezcla.

Para relaciones agua/cemento inferiores a 0.4 el empleo de agregados triturados ha dado como resultado resistencias hasta 38 por ciento superiores que cuando se emplean gravas redondeadas. Con incremento en la relación agua/cemento la influencia del agregado disminuye, posiblemente debido a que la resistencia de la pasta misma es determinante, y a relaciones agua/cemento de 0.65 no se observa diferencias entre las resistencias alcanzadas con agregados triturados o gravas redondeadas.

La influencia del agregado en la resistencia a flexión parece depender también de la condición de humedad del concreto en el momento del ensaye.

#### Influencia de los agregados en el módulo de elasticidad del concreto

Las propiedades de los agregados también influyen en el módulo de elasticidad del concreto; mientras más alto sea el módulo de elasticidad del agregado, mayor será el módulo de elasticidad del concreto. La forma de las partículas de agregado y sus características superficiales pueden influir también en el valor del módulo de elasticidad del concreto y en la curvatura de la relación esfuerzo-deformación.

Es interesante hacer notar que los dos componentes del concreto, pasta de cemento y agregado, cuando están sujetos a esfuerzos en forma individual presentan una relación esfuerzo-deformación sensiblemente lineal. La razón para el comportamiento no lineal en el material compuesto (concreto) se debe a la presencia de interfases entre la pasta de cemento y el agregado y al desarrollo de microagrietamiento en esas interfases. Debido a que las grietas se desarrollan progresivamente en las interfases, hay un incremento progresivo en la intensidad del esfuerzo local y en la magnitud de la deformación, por lo que la deformación se incrementa más rápidamente que el esfuerzo promedio aplicado y la curva esfuerzo-deformación se hace cóncava hacia abajo con un comportamiento pseudo-plástico.

La relación entre módulo de elasticidad y resistencia depende también de la proporción de la mezcla (el agregado por lo general tiene un módulo

mayor que el de la pasta de cemento) y de la edad del concreto; a edades mayores (mayores resistencias) el módulo se incrementa más rápidamente que la resistencia. Esto se muestra en la fig 3, la cual también da resultados para concretos hechos con agregados de arcilla expandida. El módulo de elasticidad del concreto de agregado ligero no se incrementa con la resistencia en la misma proporción y su valor está entre 40 y 80 por ciento del módulo del concreto de agregado ordinario de la misma resistencia. Dado que el módulo del agregado ligero difiere poco del módulo de la pasta del cemento, la proporción con que se encuentra en la mezcla no afecta al módulo de elasticidad de los concretos de agregados ligeros.

#### Influencia de los agregados en la contracción

Los agregados restringen la contracción que se puede presentar. El tamaño y granulometría del agregado por ellos mismos no influyen en la magnitud de la contracción, pero un agregado más grande permite el uso de mezclas más pobres y origina, por tanto, una contracción menor.

Similamente, para una resistencia dada, el concreto de baja trabajabilidad contiene más agregado que uno de alta trabajabilidad hecho con agregados del mismo tamaño y, como consecuencia, la primera mezcla presentará una contracción más pequeña.

La influencia combinada de la relación agua-cemento y contenido de agregado puede presentarse en una gráfica; esto se hace en la fig 4 pero debe recordarse que los valores de contracción dados son solamente típicos para el secado en climas templados.

Las propiedades elásticas de los agregados determinan el grado de restricción ofrecido. Por ejemplo, los agregados de acero conducen a una contracción un tercio menor y los agregados de arcilla expandida un tercio mayor que la que permiten los agregados ordinarios. La presencia de arcilla en el agregado reduce su efecto restrictivo en la contracción, y dado que la arcilla misma está sujeta a contracción, la presencia de arcilla en el recubrimiento de los agregados puede incrementar la contracción hasta en 70 por ciento.

Dentro del intervalo de agregados normales hay una variación considerable en la contracción, fig 5. El agregado natural común no se contrae por sí mismo, pero existen algunos agregados que presentan contracciones por secado de hasta  $900 \times 10^{-6}$ , similar a la contracción que presenta el concreto fabricado con agregados sin contracción. Las rocas que presentan contracciones usualmente tienen alta absorción y este hecho debe servir como advertencia para investigar sus propiedades en relación con la contracción.

El agregado ligero usualmente conduce a contracciones más grandes que el agregado de peso normal, debido principalmente a que el agregado, teniendo un módulo de elasticidad más bajo, presenta menos restricciones a la contracción potencial de la pasta de cemento. Los materiales ligeros que tienen una proporción importante de material más pequeño que la malla 200 (75  $\mu$ m) tienen una contracción aun más grande, dado que la finura conduce a un contenido mayor de vacíos.

El contenido de agua de una mezcla de concreto afecta la contracción por que reduce el volumen de los agregados que la restringe, siguiendo la tendencia mostrada en la fig 6, pero el contenido de agua por sí mismo se piensa que no es un factor determinante.

#### Efecto del agregado en la deformación diferida

En la mayor parte de los casos el agregado de peso normal no está sujeto a deformación diferida, por lo que es razonable suponer que el origen de la deformación diferida está en la pasta de cemento, pero los agregados influyen en la deformación diferida del concreto a través de un efecto de restricción, similar al que se presenta en el caso de la contracción y dependiente de algunas propiedades físicas de las rocas de las cuales provienen.

Debido a la gran variación de los agregados dentro cualquier tipo mineralógico y petrográfico, no es posible establecer de una manera general la magnitud de la deformación diferida del concreto hecho con agregados de



diferentes tipos. Sin embargo, los datos de la fig 7 son de importancia considerable; después de 20 años de conservados a una humedad relativa de 50 por ciento, el concreto hecho con areniscas presenta una deformación diferida más del doble de la obtenida con calizas. Una diferencia aún más grande entre la deformación diferida del concreto hecho con diferentes agregados fue encontrada por Rüsçh et al, después de 18 meses bajo carga a una humedad relativa de 65 por ciento, la máxima deformación diferida fue cinco veces el valor mínimo; los agregados en orden creciente de deformación diferida son: basalto y cuarzo; grava, marmol y granito; y arenisca.

El agregado ligero merece atención especial porque la opinión generalizada sugiere que su uso conduce a deformación diferida sustancialmente más alta que la alcanzada con agregado de peso normal. Trabajos recientes indican que no hay diferencia fundamental entre agregados normal y ligero en lo que se refiere a la deformación diferida y que la deformación diferida más alta de los concretos ligeros refleja solamente el módulo de elasticidad más bajo de los agregados. No hay diferencia en el comportamiento inherente al hecho de que los agregados estén o no cubiertos o a que sean obtenidos por procesos de manufactura diferente; esto no significa que todos los agregados conducen a la misma deformación diferida.

Como regla general se puede establecer que la deformación diferida del concreto de calidad estructural de agregado ligero es aproximadamente la misma que la del concreto hecho con agregado ordinario. (Es importante en cualquier comparación que el contenido de agregado no difiera mucho entre el concreto de agregado ligero y el concreto de agregado normal). Más aun, siendo la deformación elástica de los concretos con agregados ligeros mayor que la que tienen los concretos ordinarios, la relación deformación diferida a deformación elástica es más pequeña para los concretos de agregados ligeros.

Características de los concretos comunes en el Distrito Federal

4. Las expresiones que correlacionan la resistencia a tensión por flexión con la resistencia a compresión son las siguientes:

Concretos con grava y arena andesítica

$$f_f = 1.9 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

concretos con grava de basalto escoriáceo y arena andesítica

$$f_f = 2.1 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

5. Las expresiones para determinar el módulo de elasticidad a partir de la resistencia a compresión son:

concretos con grava y arena andesítica

$$E_c = 8500 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

concretos con grava de basalto escoriáceo y arena andesítica

$$E_c = 11000 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

6. La relación de Poisson para concretos andesíticos ensayados a 28 días de edad, varía de 0.25 para una resistencia de 100 kg/cm<sup>2</sup> a 0.35 para 500 kg/cm<sup>2</sup> de resistencia a compresión. Un valor medio de 0.30 se recomienda tomar para la mayor parte de las resistencias usuales.

7. El módulo de rigidez por cortante para concretos andesíticos se puede calcular con la expresión:

$$G = 3300 \sqrt{f'_c} \quad , \quad \text{kg/cm}^2$$

estando G y  $f'_c$  expresados en kg/cm<sup>2</sup>

Los concretos usualmente empleados en el Distrito Federal están fabricados con gravas y arenas de origen piroclástico (gravas y arenas andesíticas y basaltos escoriaáceos) las cuales son relativamente ligeras y muy absorbentes. Esta situación ha dado como consecuencia que las propiedades de estos concretos difieran en forma sustancial de las consideradas como comunes. En la tabla 2 se presentan los valores alcanzados en un estudio realizado al respecto y se comparan con aquellos considerados como comunes, ref 2. Como resultado de ese estudio se alcanzaron las siguientes conclusiones:

1. El empleo de agregados de baja densidad y alta absorción en la fabricación de concretos, conduce a obtener concretos con deformaciones mayores que las usuales.
2. Los concretos fabricados con grava de basalto escoriaáceo presentaron incrementos de resistencia más grandes respecto a la alcanzada a los 28 días en relación con los incrementos observados en los concretos fabricados con gravas andesíticas.

En cuanto a las arenas, los mayores incrementos se alcanzaron en los concretos fabricados con las arenas con menor contenido de polvos.

3. Las expresiones que correlacionan la resistencia a compresión a una edad cualquiera con la alcanzada a los 28 días se indican a continuación:

Concretos con grava y arena andesíticas

$$f_c = \frac{t}{8.4 + 0.7t} f'_c, \text{ kg/cm}^2$$

concretos con grava de basalto escoriaáceo y arena andesítica

$$f_c = \frac{t}{9.3 + 0.67t} f'_c, \text{ kg/cm}^2$$

8. La deformación unitaria correspondientes al esfuerzo máximo ( $\epsilon_0$ ) varía con el tipo de agregado grueso y con el nivel de resistencia del concreto. Valores representativos de este comportamiento, correspondientes a resistencias a compresión entre 200 y 300 kg/cm<sup>2</sup> pueden ser:

Concretos con agregado andesíticos

$$\epsilon_0 = 0.004$$

Concretos con agregado grueso de basalto escoriaéreo y arena andesítica

$$\epsilon_0 = 0.003$$

9. La curva esfuerzo-deformación se puede obtener con la expresión

$$f_c = \frac{2f'_c \epsilon}{\epsilon_0 \left| 1 + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right|}, \text{ kg/cm}^2$$

en la que los valores de  $f'_c$  y  $\epsilon_0$  se seleccionan de acuerdo con las características de los concretos

10. La contracción por secado registraba fue inversamente proporcional al contenido de agregado grueso en la mezcla y directamente proporcional al contenido de polvos en las arenas utilizadas. El tipo de agregado grueso también tuvo influencia, presentando menos contracción los concretos hechos con grava de basalto escoriaéreo.
11. La contracción por secado a cualquier edad se puede estimar con las siguientes expresiones:

Concretos con grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos.

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.93}}{10 + t^{0.93}} 1300 \times 10^{-6}$$

concretos con grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.71}}{10 + t^{0.71}} 1300 \times 10^{-6}$$

concretos con grava de basalto escoriaáceo y arena andesítica con exceso de polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.84}}{16 + t^{0.84}} 1100 \times 10^{-6}$$

concretos con grava de basalto escoriaáceo y arena andesítica con pocos polvos

$$\epsilon_t = \frac{t^{0.81}}{17 + t^{0.81}} 1000 \times 10^{-6}$$

Los valores determinados con estas expresiones habrán que afectarlos por los factores de corrección para tomar en cuenta las características del material y las condiciones del medio ambiente.

12. La tendencia al agrietamiento, medida como la presencia o ausencia de grietas, depende no solamente de la contracción potencial sino también de la deformabilidad del concreto, su resistencia y el grado de restricción a la deformación, lo que puede conducir al agrietamiento.
13. El coeficiente de deformación diferida resulta mayor para los concretos más rígidos (mayor módulo de elasticidad), por lo que las deformaciones totales, incluyendo deformaciones instantáneas y a largo plazo, vienen a ser del mismo orden, independientemente del tipo de agregado grueso utilizado.
14. Para un mismo tipo de agregado grueso el empleo de arenas con muchos finos, incrementa notoriamente el coeficiente de la deformación diferida.

15. El coeficiente de la deformación diferida en condición estándar para cualquier edad (en días) se puede determinar con las siguientes expresiones:

concretos con grava andesítica y arena andesítica con exceso de polvos

$$C_t = \frac{t^{0.60}}{10 + t^{0.60}} \quad 5.65$$

concretos con grava andesítica y arena andesítica con pocos polvos

$$C_t = \frac{t^{0.55}}{11 + t^{0.55}} \quad 3.12$$

concretos con grava de basalto escoriaeo y arena andesítica con exceso de polvos

$$C_t = \frac{t^{0.80}}{46 + t^{0.80}} \quad 7.14$$

concretos con grava de basalto escoriaeo y arena andesítica con pocos polvos

$$C_t = \frac{t^{0.66}}{21 + t^{0.66}} \quad 3.88$$

16. La deformación diferida afecta las deformaciones y las deflexiones y en ocasiones la distribución de esfuerzos; sin embargo, afecta poco la resistencia última de los elementos estructurales y ayuda a la relevación de esfuerzo originados por contracciones, cambios de temperatura o movimiento de los apoyos.

#### Recomendaciones para los concretos estructurales futuros en el Distrito Federal

Conocidas las características y deficiencias de los concretos utilizados comúnmente en la ciudad de México es conveniente plantear algunas medidas correctivas a la práctica usual, sobre todo si se toma en cuenta el com-

portamiento poco favorable de algunas estructuras de concreto durante los recientes sismos.

En relación con los materiales pétreos se buscará, por una parte, emplear agregados gruesos que presenten la mayor densidad posible y agregados finos con el menor contenido de polvos que sea factible desde el punto de vista económico. Estas dos características conducirán a obtener concretos, para una resistencia dada, con mayor módulo de elasticidad y, por tanto, con menor deformación instantánea, menor contracción por seco, por restringir mejor estas deformaciones, y menor deformación diferida.

En cuanto a las mezclas de concreto, se emplearán aquellas con mayor contenido de agregado grueso compatible con la trabajabilidad de la misma. Lo anterior conduciría, por una parte, a menores consumos de agua los que a su vez se traduce en menor contenido de vacíos y por tanto mayores resistencias relativas, menores deformaciones y contracciones, así como menor deformación diferida.

Para satisfacer estas recomendaciones se pueden sustituir las gravas andesíticas y las de basalto escoriaáceo por otras trituradas de origen calizo o de basalto sano y denso. Estas pueden alcanzar densidades superiores a 2.6, en comparación con 2.3 que tienen las andesíticas o 2.0 los basaltos escoriaáceos.

En cuanto a la arena andesítica es difícil sustituirla por otra de mejores características que se encuentre a distancias razonables de la ciudad de México, por lo que será necesario seguirlas empleando, limitando el contenido de polvos de las mismas. Un valor límite deseable en el contenido de polvo podría ser 5 por ciento.

En cuanto a la trabajabilidad de las mezclas se deberá limitar el reventamiento a 10 cm y las relaciones arena/agregados totales a valores no superiores 0.45, en volumen absoluto.

En pruebas realizadas con un agregado calizo y con una arena con densidad de 2.4 y 5 por ciento de polvos se obtuvieron los siguientes parámetros, ref 3:

Peso volumétrico	2260 kg/m <sup>3</sup>
Módulo de elasticidad	14100 $\sqrt{f'_c}$ en kg/cm <sup>2</sup>
Contracción por secado última	900 X 10 <sup>-6</sup>
Coefficiente de deformación diferida última	2.4

Lo anterior indica que con estos materiales se pueden tener parámetros del comportamiento del concreto en las estructuras muy cercanos a aquellos considerados como comunes.

#### Referencias

1. Neville, A.M. "Properties of concrete" Pitman Publishing LTD, London, 1975
2. C.J. Mendoza "Propiedades mecánicas de los concretos fabricados en el Distrito Federal" Informe 495, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1985.
3. C.J. Mendoza "Comportamiento a corto y largo plazo de vigas presforzadas de concreto" Informe Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, 1985.



TABLA 1. VALORES RELATIVOS PROMEDIO DEL EFECTO DE LAS PROPIEDADES DE LOS AGREGADOS EN LA RESISTENCIA DEL CONCRETO (KAPLAN)

Propiedades del concreto	Efecto relativo de las propiedades de los agregados, por ciento		
	Forma	Textura superficial	Módulo de elasticidad
Resistencia a flexión	31	26	-43
Resistencia a compresión	22	44	34

Los valores representan la relación de variancia debida a cada propiedad a la variancia total obtenida para las tres características de los agregados en pruebas realizadas sobre tres mezclas hechas con 13 agregados.

TABLA 2. COMPARACION ENTRE CARACTERISTICAS DE CONCRETOS COMUNES Y LOS QUE SON FACTIBLES DE FABRICAR EN EL DISTRITO FEDERAL

<u>Características</u>	<u>Comunes</u>	<u>Andesítica</u>	<u>Basalto Escoreáceo</u>	<u>Calizas</u>
Resistencia a tensión	$2.5 \sqrt{f'_c}$	$1.9 \sqrt{f'_c}$	$2.1 \sqrt{f'_c}$	—
Módulo de elasticidad	$14900 \sqrt{f'_c}$	$8500 \sqrt{f'_c}$	$11000 \sqrt{f'_c}$	$14000 \sqrt{f'_c}$
Relación de Poisson	0.15 - 0.20	0.30	—	—
Módulo de rigidez	$6500 \sqrt{f'_c}$	$3300 \sqrt{f'_c}$	—	—
Deformación unitaria al esfuerzo máximo	0.003	0.004	0.003	—
Contracción por secado última	$800 \times 10^{-6}$	$1300 \times 10^{-6}$	$1100 \times 10^{-6}$	$900 \times 10^{-6}$
Coefficiente de deformación diferida última	1.30 - 4.15	3.12 x 5.65	3.88 - 7.14	2.4

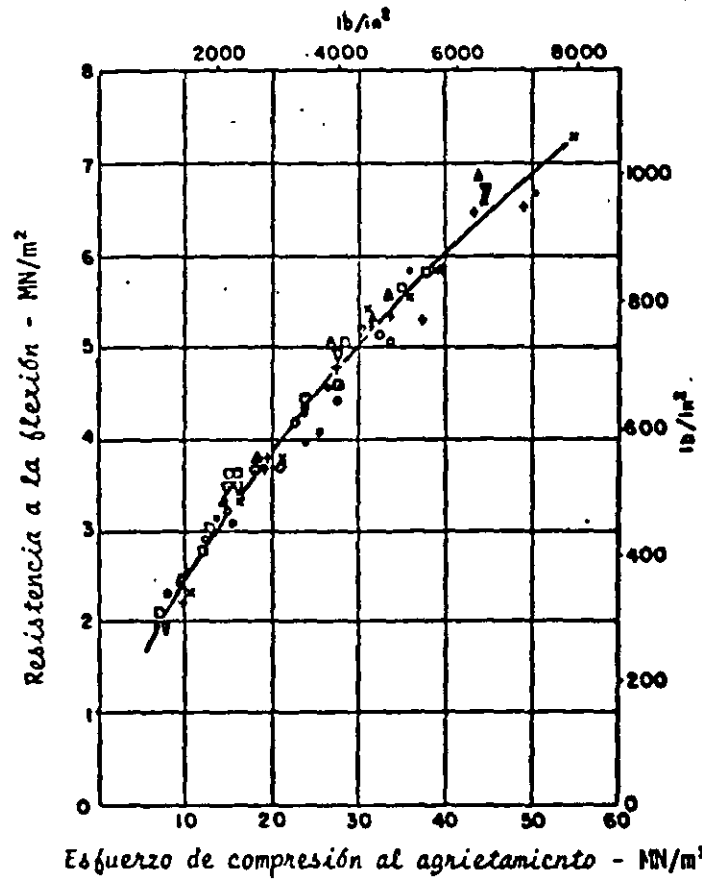


Fig 1. Relación entre resistencia a flexión y esfuerzo de compresión al agrietamiento para concretos hechos con diferentes agregados gruesos (ref 1)

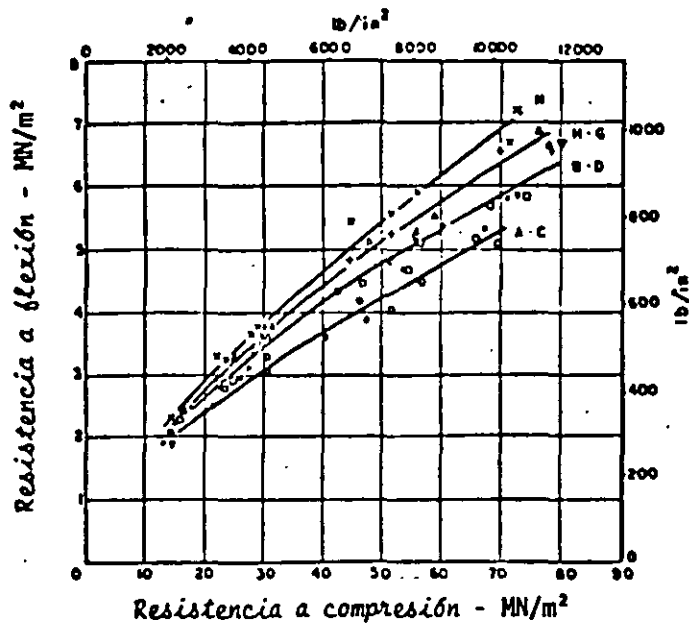


Fig 2. Relación entre resistencia a flexión y compresión para concretos hechos con diferentes agregados (ref 1)

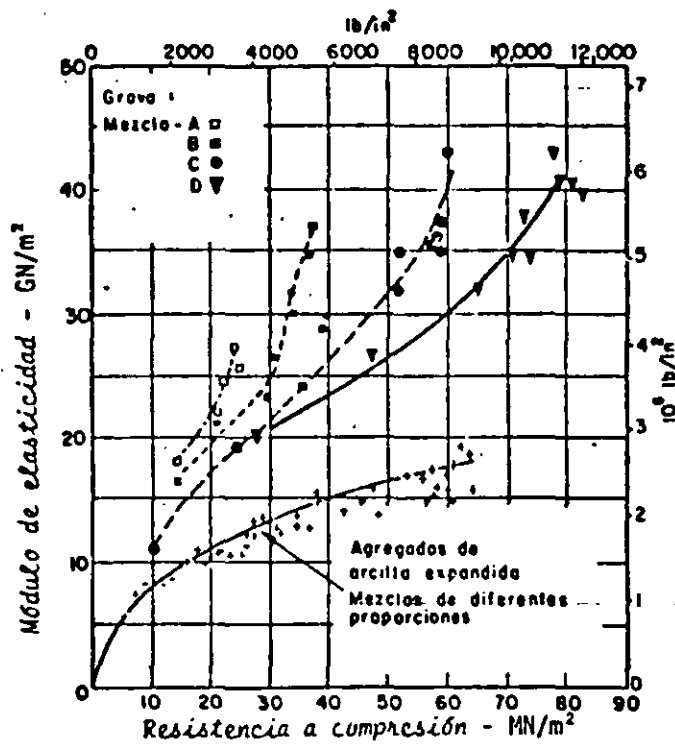


Fig 3. Módulo de elasticidad estático de concretos hechos con agregados gruesos de río y de arcilla expandida, y ensayados a diferentes edades hasta un año (ref 1)

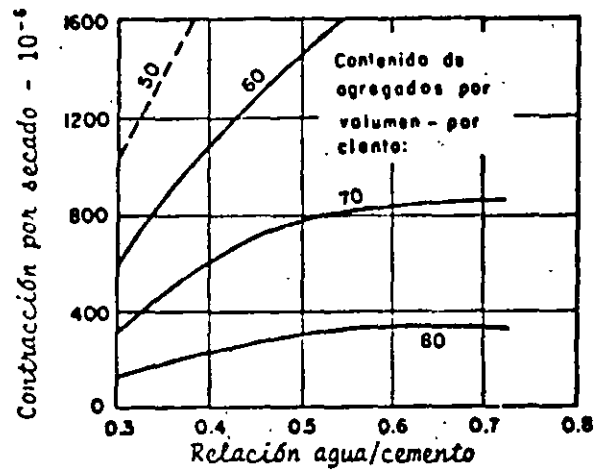


Fig 4. Influencia de la relación agua/cemento y del contenido de agregado en la contracción (ref 1)

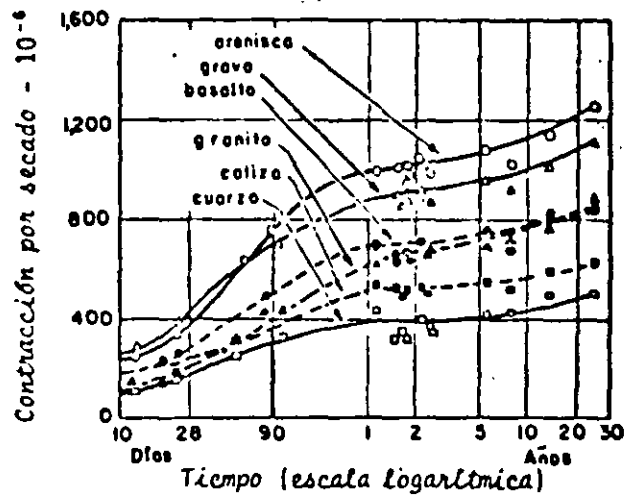


Fig 5. Contracción por secado de concretos hechos con las mismas proporciones en la mezcla, pero con diferentes agregados, almacenados al aire a 21° C y una humedad relativa de 50 por ciento (ref 1)

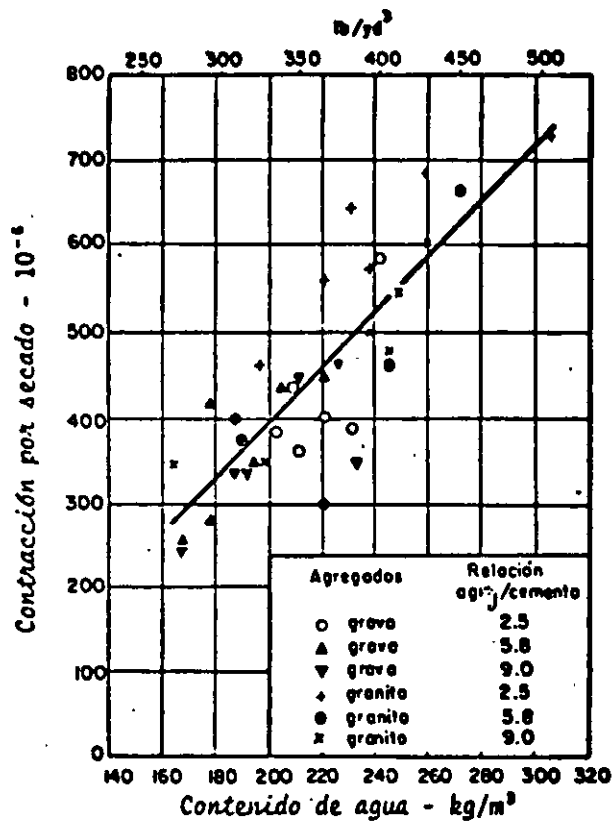


Fig 6. Relación entre el contenido de agua del concreto fresco y la contracción por secado (ref 1)

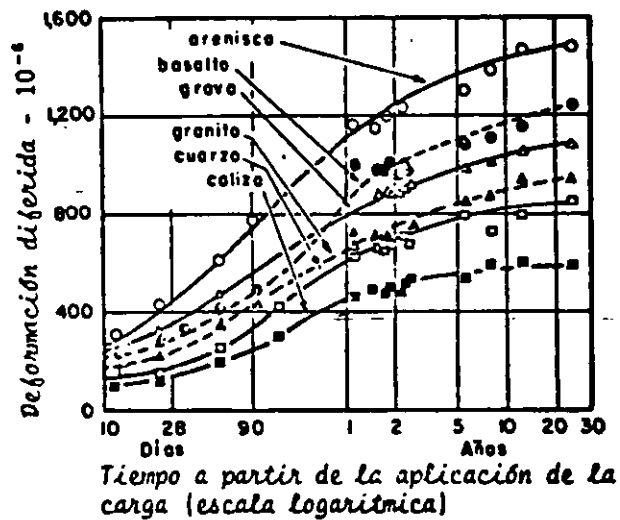


Fig 7. Deformación diferida de concretos de las mismas proporciones pero hechos con diferentes agregados, cargados a la edad de 28 días y almacenados en aire a 21° C y a una humedad relativa de 50 por ciento (ref 1)



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**CARACTERÍSTICAS GENERALES  
DEL CO**

## CAPÍTULO 2

### Características generales del concreto y del acero

2.1 Introducción./ 2.2 Características esfuerzo-deformación del concreto simple./ 2.3 Efectos del tiempo en el concreto endurecido./ 2.4 Fatiga./ 2.5 Módulos elásticos./ 2.6 Deformaciones por cambios de temperatura./ 2.7 Algunas características de los aceros de refuerzo.

#### 2.1 Introducción

El concreto es un material pétreo, artificial, obtenido de la mezcla, en proporciones determinadas, de cemento, agregados y agua. El cemento y el agua forman una pasta que rodea a los agregados, constituyendo un material heterogéneo. Algunas veces se añaden ciertas sustancias, llamadas aditivos o adicionantes, que mejoran o modifican algunas propiedades del concreto.

El concreto simple, sin refuerzo, es resistente a la compresión, pero es débil en tensión, lo que limita su aplicabilidad como material estructural. Para resistir tensiones, se emplea refuerzo de acero, generalmente en forma de barras, colocado en las zonas donde se prevé que se desarrollarán tensiones bajo las acciones de servicio. El acero restringe el desarrollo de las grietas originadas por la poca resistencia a la tensión del concreto.

El uso del refuerzo no está limitado a la finalidad anterior. También se emplea en zonas de compresión para aumentar la resistencia del elemento reforzado, para reducir las deformaciones debidas a cargas de larga duración y para proporcionar confinamiento lateral al con-

creto, lo que indirectamente aumenta su resistencia a la compresión.

La combinación de concreto simple con refuerzo constituye lo que se llama *concreto reforzado*.

El concreto presforzado es una modalidad del concreto reforzado, en la que se crea un estado de esfuerzos de compresión en el concreto antes de la aplicación de las acciones. De este modo, los esfuerzos de tensión producidos por las acciones quedan contrarrestados o reducidos. La manera más común de presforzar consiste en tensar el acero de refuerzo y anclarlo en los extremos del elemento.

Para dimensionar estructuras de concreto reforzado es necesario utilizar métodos que permitan combinar el concreto simple y el acero, de tal manera que se aprovechen en forma racional y económica las características especiales de cada uno de ellos. Esto implica el conocimiento de estas características; en las páginas siguientes se describirán algunas de las más importantes.

Existen otras características del concreto, tales como su durabilidad, permeabilidad, resistencia al fuego, a la abrasión, a la intemperie, etc., que no se tratarán, ya que no es necesario su conocimiento detallado para establecer métodos de dimensionamiento. El lector puede consultar a este respecto algún texto de tecnología del concreto, como los de Neville [2.2, 2.19], el de Troxell, Davis y Kelly [2.1] o el de Orchard [2.3], recomendados al final de este capítulo.

#### 2.2 Características esfuerzo-deformación del concreto simple

Se ha indicado que el objeto principal del estudio del comportamiento del concreto es la obtención de las relaciones acción-respuesta del material, bajo la gama total de solicitaciones a que puede quedar sujeto. Estas características acción-respuesta pueden describirse claramente mediante curvas esfuerzo-deformación de especímenes ensayados bajo distintas condiciones.



En este caso, el esfuerzo es comúnmente una medida de la acción ejercida en el espécimen, y la deformación, una medida de la respuesta. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que en algunos casos, como por ejemplo en asentamientos y contracciones, esta relación se invierte; es decir, las solicitaciones quedan medidas por la deformación y la respuesta está representada por los esfuerzos respectivos.

Para conocer el comportamiento del concreto simple es necesario determinar las curvas esfuerzo-deformación correspondientes a los distintos tipos de acciones a que puede estar sometido. En el caso más general sería necesario analizar todas las combinaciones de acciones a que puede estar sujeto un elemento. Hasta la fecha, sólo se han establecido las relaciones esfuerzo-deformación para las combinaciones más comunes. Así, se han hecho estudios sobre el comportamiento del concreto sujeto a estados uniaxiales de compresión y tensión, a estados biaxiales de compresión y tensión, y a estados triaxiales de compresión.

### 2.2.1 *Modos de falla y características esfuerzo-deformación bajo compresión axial*

#### MODOS DE FALLA

La figura 2.1 muestra un cilindro de concreto simple ensayado en compresión axial. En cilindros con relación de lado a diámetro igual a dos, como el que se muestra en la figura, la falla suele presentarse a través de planos inclinados respecto a la dirección de la carga. Esta inclinación es debida principalmente a la restricción que ofrecen las placas de apoyo de la máquina contra movimientos laterales. Si se engrasan los extremos del cilindro para reducir las fricciones, o si el espécimen es más esbelto, las grietas que se producen son aproximadamente paralelas a la dirección de aplicación de la carga. Al comprimir un prisma de concreto en estas condiciones, se desarrollan grietas en el sentido paralelo al de la compresión, porque el concreto se expande transversalmente.

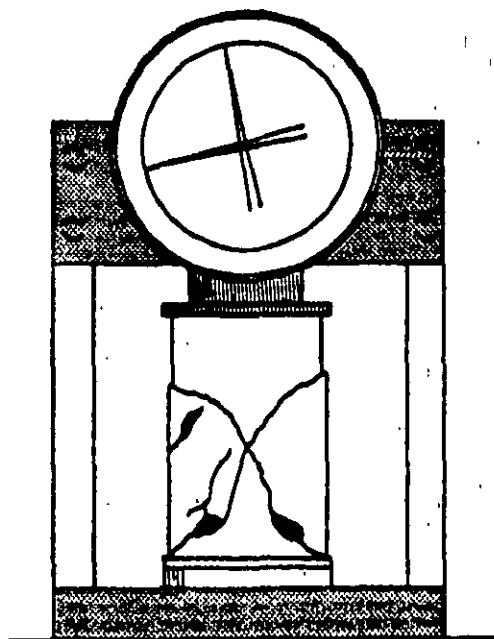


Figura 2.1 Falla en compresión de un cilindro de concreto.

Las grietas se presentan de ordinario en la pasta y muy frecuentemente entre el agregado y la pasta. En algunos casos también se llega a fracturar el agregado. Este microgrietamiento es irreversible y se desarrolla a medida que aumenta la carga, hasta que se produce el colapso.

#### CURVAS ESFUERZO-DEFORMACIÓN

Las curvas esfuerzo-deformación se obtienen del ensaye de prismas sujetos a carga axial repartida uniformemente en la sección transversal mediante una placa rígida. Los valores del esfuerzo resultan de dividir la carga total aplicada,  $P$ , entre el área de la sección transversal del prisma,  $A$ , y representar valores promedio obtenidos bajo la hipótesis de que la distribución de deformaciones es uniforme y de que las características esfuerzo-deformación del concreto son constantes en toda la masa. El valor de la deformación unitaria,  $\epsilon_c$ , es la relación entre el acortamiento total,  $\alpha$ , y la longitud de medición,  $l$  (figura 2.2).

Puesto que el concreto es un material heterogéneo, lo anterior es una idealización del fe-

nómeno. Según la distribución de la pasta y del agregado en la masa, los esfuerzos, considerados como la carga soportada en un área diferencial, variarán de un punto a otro de una misma sección. Sin embargo, esta variación no es significativa desde el punto de vista del diseño estructural.

**CURVA TÍPICA BAJO CARGA DE CORTA DURACIÓN**

La curva que se presenta en la figura 2.2 corresponde a un ensaye efectuado en un tiempo relativamente corto, del orden de unos cuantos minutos desde la iniciación hasta el colapso. Se puede apreciar que el concreto no es un material elástico y que la parte inicial de estas curvas no es rigurosamente recta. Sin embargo, sin gran error puede considerarse una porción recta hasta aproximadamente el 40 por ciento de la carga máxima. Se observa, además, que la curva llega a un máximo y después tiene una rama descendente. El colapso se produce comúnmente a una carga menor que la máxima.

En el ensaye de prismas o cilindros de concreto simple, la carga máxima se alcanza a una deformación unitaria del orden de 0.002, si la longitud de medición es del mismo orden de magnitud que el lado del espécimen. El colapso del prisma, que corresponde al extremo de la rama descendente, se presenta en ensayes de corta duración a deformaciones que varían entre 0.003 y 0.007, según las condiciones del espécimen y de la máquina de ensaye.

**EFECTO DE LA EDAD**

Debido al proceso continuo de hidratación del cemento, el concreto aumenta su capacidad de carga con la edad. Este proceso de hidratación puede ser más o menos efectivo, según sean las condiciones de intercambio de agua con el ambiente, después del colado. Por lo tanto, el aumento de capacidad de carga del concreto depende de las condiciones de curado a través del tiempo.

La figura 2.3 muestra curvas esfuerzo-deformación de cilindros de 15 X 30 cm, fabricados de un mismo concreto y ensayados a distintas edades. Todos los cilindros fueron curados en las mismas condiciones hasta el día del ensaye. Las curvas se obtuvieron aplicando incrementos de deformación constantes. Se determinan así ramas descendentes más extendidas que las obtenidas comúnmente bajo incrementos constantes de carga. Se puede observar que la deformación unitaria para la carga máxima, es del orden de 0.0015 a 0.0020.

El aumento de resistencia con la edad depende también del tipo de cemento, sobre todo a edades tempranas. La figura 2.4 muestra el aumento de resistencia con la edad para cilindros de 15 X 30 cm, hechos con cemento normal (tipo I), y de alta resistencia inicial (tipo III), que son los dos tipos más empleados en estructuras de concreto reforzado. Después de los primeros tres meses, el aumento en resistencia es relativamente pequeño.

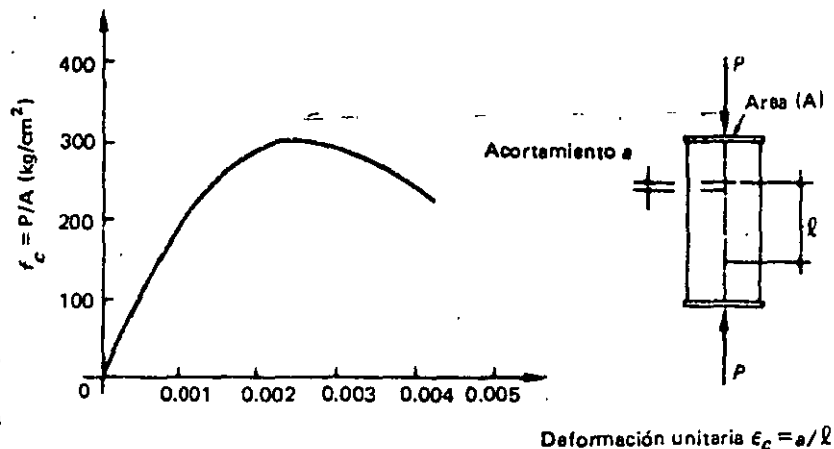


Figura 2.2 Curva esfuerzo-deformación en compresión axial de un espécimen sujeto a carga de corta duración.

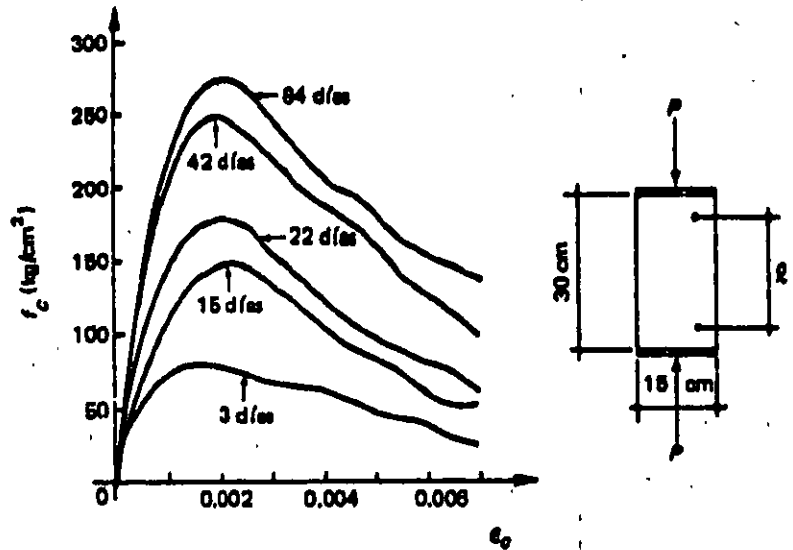


Figura 2.3 Efecto de la edad al ensayar en la resistencia.

#### EFFECTO DE LA RELACIÓN AGUA/CEMENTO

La resistencia del concreto depende de la relación agua/cemento: a mayor relación agua/cemento, menor resistencia. En la figura 2.5 se presentan curvas esfuerzo-deformación, correspondientes a distintas relaciones.

Puede observarse en las figuras 2.3 y 2.5 que la forma de la curva esfuerzo-deformación depende de la resistencia. Para resistencias bajas, la pendiente de la rama descendente es muy suave. Para resistencias altas, la curva es muy pronun-

ciada en su parte superior, y la rama descendente es más corta. También se nota que la pendiente de la tangente inicial a la curva aumenta a medida que crece la resistencia.

#### EFFECTO DE LA VELOCIDAD DE CARGA

La figura 2.6 muestra resultados de ensayos de cilindros realizados a distintas velocidades de carga. En este tipo de ensayos se aplicó la carga a una velocidad constante y se midió el tiempo necesario para alcanzar la resistencia.

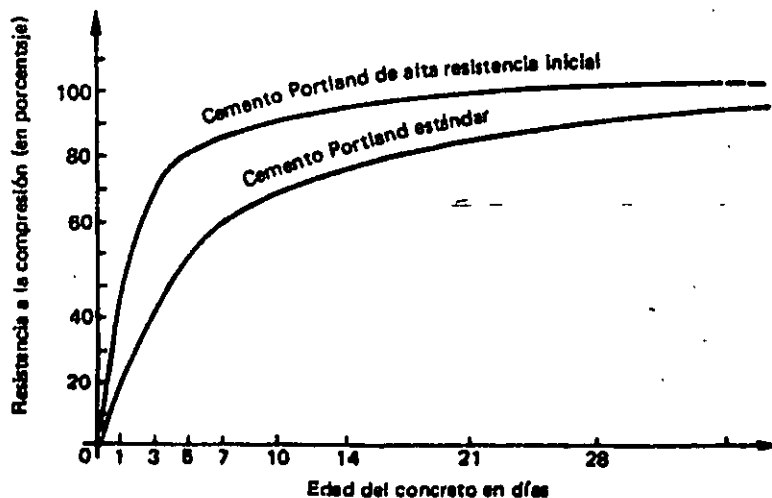


Figura 2.4 Variación de la resistencia con la edad.

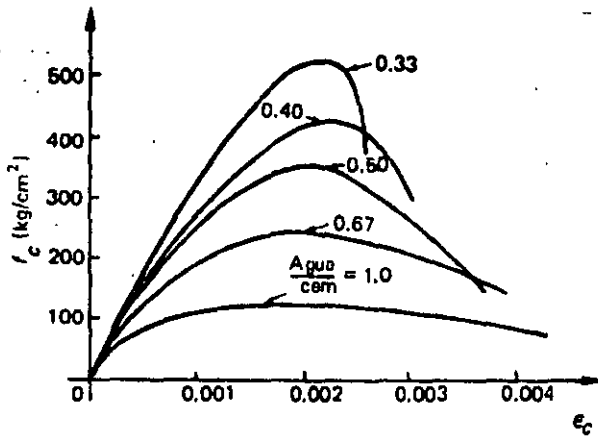


Figura 2.5 Efecto de la relación agua/cemento.

Se puede observar que la resistencia de un cilindro en el que la carga máxima se alcanza en centésimas de segundo es aproximadamente 50 por ciento mayor que la de uno que alcanzó su carga máxima en 66 segundos. Por otra parte para un cilindro en que la carga máxima se alcanza en 69 minutos, la resistencia disminuye aproximadamente en un 10 por ciento.

En ensayos a velocidad de carga constante, las ramas descendentes de las curvas esfuerzo-deformación no son muy extendidas, debido

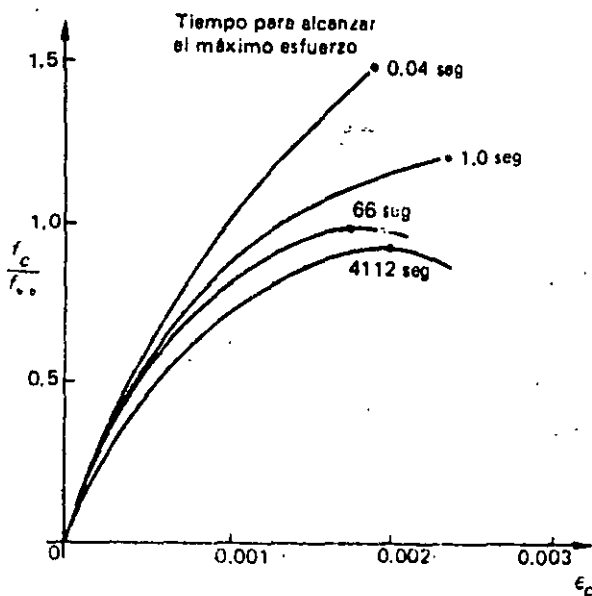


Figura 2.6 Efecto de la velocidad de carga (Ilatano [2.4]).

a que las características de las máquinas de ensayo hacen que el colapso ocurra súbitamente, una vez que se alcanza la carga máxima.

En la figura se muestra que las pendientes de las tangentes iniciales a las curvas crecen al aumentar la velocidad. No es posible determinar en todos los casos la rama descendente. Al igual que en otros tipos de ensayo, las deformaciones correspondientes a las cargas máximas son del orden de 0.002.

#### EFFECTO DE LA VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN

La figura 2.7 muestra curvas obtenidas ensayando cilindros a distintas velocidades de deformación, desde una milésima de deformación unitaria por minuto, hasta una milésima por cien días. En esta figura,  $f_{c(0.001)}$  representa la resistencia obtenida cuando la velocidad de deformación unitaria en el ensayo es de 0.001 por minuto. Como puede apreciarse, esta variable tiene un efecto notable sobre las características de la curva esfuerzo-deformación, especialmente sobre la carga máxima. Si la velocidad de deformación es muy grande, la rama descendente es brusca, en tanto que si la deformación se aplica lentamente, la rama descendente es bastante suave. La deformación unitaria correspondiente a la carga máxima sigue siendo del orden de 0.002. Puede observarse que la resistencia disminuye muy poco con incrementos importantes en la duración del ensayo.

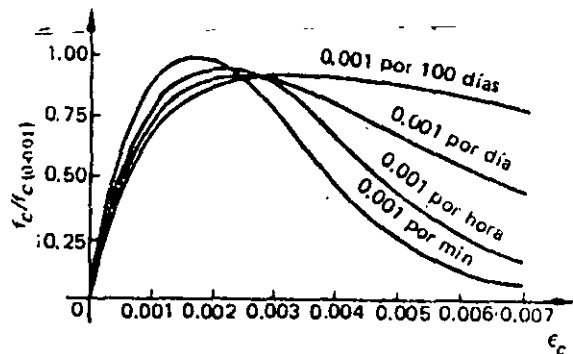


Figura 2.7 Efecto de la velocidad de deformación (Rüsch [2.5]).

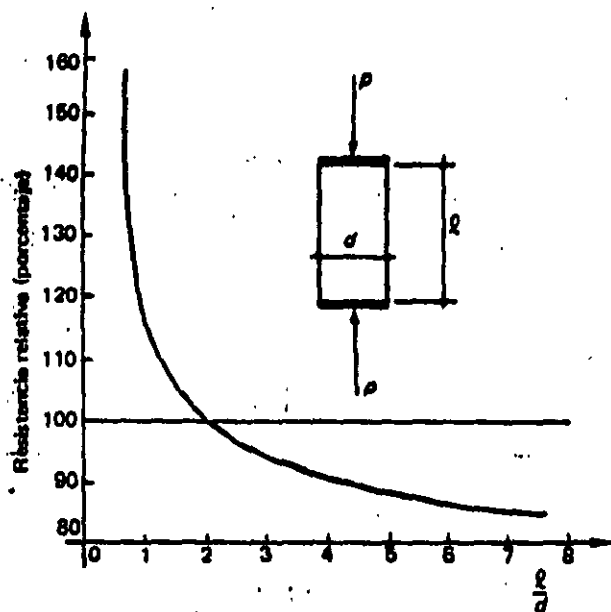


Figura 2.8 Efecto de la relación de esbeltez.

**EFFECTO DE LA ESBELTEZ Y DEL TAMAÑO DEL ESPÉCIMEN**

El efecto de la relación de esbeltez sobre la resistencia a la compresión de un prisma se muestra de manera cualitativa en la figura 2.8, en la que arbitrariamente se ha tomado como 100 por ciento la resistencia de un espécimen con relación de esbeltez igual a dos. Como medida de la esbeltez se toma la relación entre la longitud, medida en dirección de la carga, y el lado menor de un prisma, o el diámetro de un cilindro.

Para esbelteces mayores que dos, la resistencia baja, hasta llegar al 85 por ciento, aproximadamente, para esbelteces de seis o más. Por el contrario, para especímenes de esbelteces menores que dos, la resistencia aumenta indefinidamente, y en teoría sería infinita para un espécimen de altura nula.

En especímenes geoméricamente semejantes pero de distinto tamaño, la resistencia disminuye, dentro de ciertos límites, mientras mayor sea el espécimen. Esto es debido a que en materias frágiles, como el concreto, la probabilidad de que existan zonas de resistencia baja aumenta con el tamaño del espécimen. La fi-

gura 2.9 muestra el efecto del tamaño de un cilindro en su resistencia a la compresión.

**2.2.2 Compresión triaxial**

Los ensayos efectuados en cilindros de concreto bajo compresión triaxial muestran que la resistencia y la deformación unitaria correspondiente crecen al aumentar la presión lateral de confinamiento. En estos ensayos, el estado triaxial de esfuerzos se crea rodeando el espécimen de aceite a cierta presión y aplicando una carga axial hasta la falla mediante dispositivos como el ilustrado esquemáticamente en la figura 2.10 (a).

En la figura 2.10 (b) se presentan curvas esfuerzo-deformación obtenidas de los ensayos realizados por Brandtzaeg [2.6]. Corresponden a distintas presiones de confinamiento lateral, desde 38 hasta 286 kg/cm<sup>2</sup>. Se puede observar que el incremento de la resistencia es función directa del incremento de la presión de confinamiento. Con presiones de confinamiento adecuadas pueden obtenerse resistencias de más de 1000 kg/cm<sup>2</sup>.

El efecto de la presión lateral sobre la resistencia se ilustra en la figura 2.10 (c), donde se presenta una gráfica del esfuerzo axial,  $f_1$ , necesario para producir la falla del cilindro, contra la presión lateral,  $f_2$ . Los resultados obtenidos de los ensayos pueden representarse, aproximadamente, por medio de la expresión

$$f_1 = f'_c + 4.1 f_2 \quad (2.1)$$

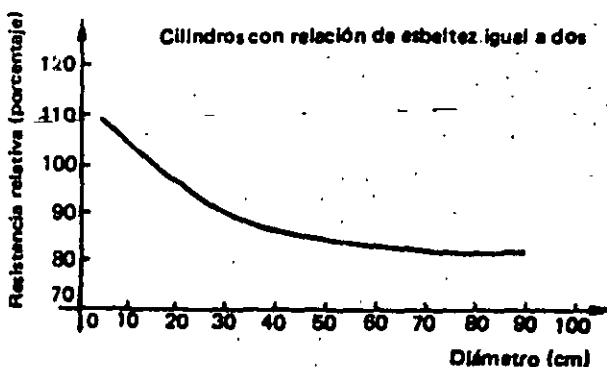


Figura 2.9 Efecto del tamaño.

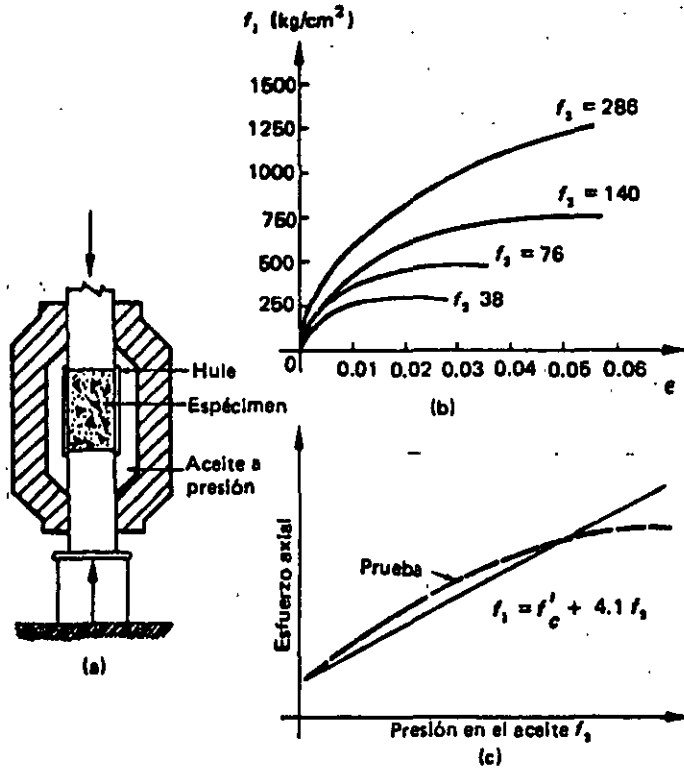


Figura 2.10 Compresión triaxial (Brandtzaeg [2.9]).

donde  $f'_c$  es la resistencia en compresión axial de un cilindro sin presión confinante. Es evidente que el efecto del confinamiento es muy importante; basta que se aplique una compresión lateral igual a la cuarta parte de la resistencia uniaxial para que ésta se duplique.

Debe notarse también el incremento notable en el valor de la deformación unitaria, correspondiente a la resistencia al incrementar la presión de confinamiento; con una presión de 38  $\text{kg/cm}^2$ , la deformación unitaria correspondiente a la carga máxima aumenta diez veces respecto a la de un cilindro sin confinar.

### 2.2.3 Tensión

Es difícil encontrar una manera sencilla y reproducible de determinar la resistencia a tensión uniaxial. Siendo el concreto bajo esta condición un material frágil, es necesario que la sección transversal del espécimen varíe gradualmente, para evitar fallas prematuras debidas a

concentraciones de esfuerzos. La curva esfuerzo-deformación de concreto en tensión representada en la figura 2.11 se obtuvo ensayando un espécimen de sección rectangular, variable, a lo largo del mismo. Para fijarlo en la máquina de ensaye, se utilizaron placas pegadas con resina a los extremos del espécimen, las que a su vez fueron atornilladas a la máquina. Este tipo de ensaye requiere mucho cuidado para lograr resultados dignos de confianza.

Para concreto en tensión axial, tanto las resistencias como las deformaciones correspondientes son aproximadamente del orden de una décima parte de los valores respectivos en compresión axial. Sin embargo, la relación no es lineal para toda la escala de resistencias.

En 1948, Lobo Carneiro [2.7] en Brasil y, casi simultáneamente Akazawa [2.8] en Japón, idearon un procedimiento de ensaye indirecto en tensión, que se conoce como el ensaye brasileño. En esencia consiste en someter un cilindro a compresión lineal diametral, como se

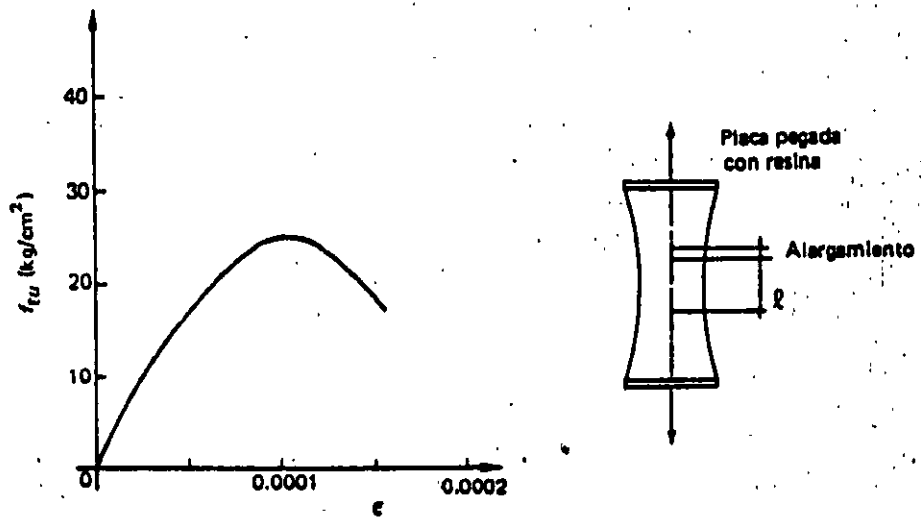


Figura 2.11 Curva esfuerzo-deformación en tensión uniaxial.

muestra en la figura 2.12 (a). La carga se aplica a través de un material relativamente suave, como triplay o corcho. Si el material fuera perfectamente elástico, se originarían esfuerzos de tensión uniformemente distribuidos en la mayor parte del plano diametral de carga, como se muestra en la figura 2.12 (b).

La resistencia en tensión se calcula con la fórmula:

$$(f_{tb})_{\max} = \frac{2P}{\pi dl} \quad (2.2)$$

deducida de la teoría de la elasticidad. (Véase, por ejemplo, la referencia 2.9.)

En la expresión (2.2):

- $P$  = carga máxima
- $d$  = diámetro del espécimen
- $l$  = longitud del espécimen

En realidad, el concreto no es elástico y, además, la resistencia en tensión que se mide no es la resistencia en tensión uniaxial como la

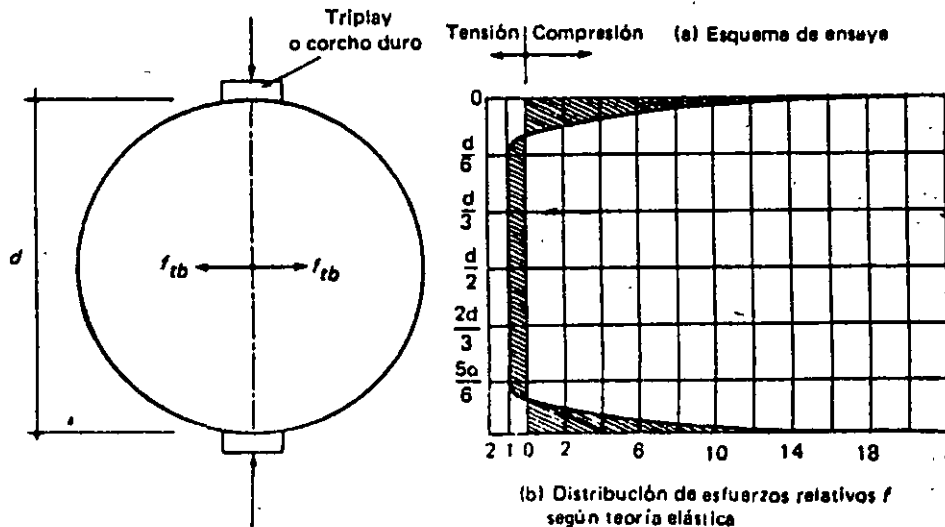


Figura 2.12 Distribución de esfuerzos y tipo de carga en tensión indirecta.

que se obtendría en el ensaye mostrado en la figura 2.11. Sin embargo, lo que se pretende es tener una medida de la resistencia del concreto a la tensión por medio de un ensaye fácil y reproducible por muchos operadores en distintas regiones. Esto se logra satisfactoriamente con el ensaye brasileño.

Para concretos fabricados con agregados de Santa Fe (ciudad de México), la relación entre la resistencia a la compresión de un cilindro y su resistencia a la tensión, obtenida del ensaye brasileño, está dada por la expresión

$$(f_{tb})_{\text{máx}} = 6 \text{ kg/cm}^2 + 0.06 f'_c \quad (2.3)$$

válida para

$$150 \text{ kg/cm}^2 < f'_c < 450 \text{ kg/cm}^2$$

donde

$$(f_{tb})_{\text{máx}} = \text{resistencia en tensión del ensaye brasileño}$$

$$f'_c = \text{resistencia a la compresión simple de un cilindro de... } 15 \times 30 \text{ cm.}$$

Esta expresión es solamente aproximada y se presenta para dar una idea de los órdenes de magnitud relativos. Para valores bajos de  $f'_c$ , la resistencia en tensión es del orden de  $0.10 f'_c$ , mientras que para valores altos disminuye a  $0.07 f'_c$ .

El conocimiento de la resistencia a la tensión del concreto es importante para el diseño en tensión diagonal y para otros tipos de comportamiento, en donde la tensión es el fenómeno predominante.

#### 2.2.4 Flexión

Para algunas aplicaciones, tales como pavimentos de concreto, es necesario conocer aproximadamente la resistencia a la flexión del concreto simple. Esta se determina frecuentemente ensayando un prisma de concreto li-

brememente apoyado, sujeto a una o dos cargas concentradas. La falla es brusca, con una grieta única que fractura el espécimen.

El esfuerzo teórico de tensión en la fibra inferior correspondiente a la rotura se calcula mediante la expresión

$$f_r = \frac{Mc}{I} \quad (2.4)$$

en la que  $f_r$  es el módulo de rotura,  $M$  es el momento flexionante correspondiente a la carga máxima aplicada,  $c$  es el medio peralte, e  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal del prisma.

Al aplicar la expresión (2.4) se supone que el concreto es elástico hasta la rotura, hipótesis que, como se ha indicado, no es correcta para toda la escala de carga.

Esta prueba proporciona una medida de la resistencia del concreto a flexión, o más bien, a la tensión debida a flexión. Normalmente, el módulo de rotura es mayor que la resistencia a la tensión obtenida del ensaye brasileño.

Se ha observado que el esfuerzo máximo de rotura en flexión depende, entre otras variables, de la resistencia a la compresión, de la relación peralte a claro y de las condiciones de curado. Debido a que la medición de deformaciones es difícil de realizar, no existen muchos datos experimentales sobre las características esfuerzo-deformación de prismas sujetos a flexión simple.

El módulo de rotura como medida de la resistencia a la tensión, tiene varias desventajas. La principal es que el punto de tensión máxima se presenta en la superficie externa del espécimen, que está sujeta en forma importante a esfuerzos de contracción originados por cambios en el ambiente. Por esta razón, la dispersión de datos de ensayos de módulo de rotura es mayor que la dispersión obtenida en el ensaye brasileño, la que a su vez es mayor que la dispersión de datos de pruebas en compresión. Es difícil establecer relaciones generales entre los valores de  $f_r$  y  $f'_c$ , ya que la relación depende del tipo de concreto.



### 2.2.5 Otras condiciones de esfuerzos

La determinación de la resistencia del concreto simple a un estado de esfuerzo cortante puro no tiene mucha importancia práctica, porque dicho estado implica siempre la presencia de tensiones principales de la misma magnitud que el esfuerzo cortante, las cuales originan la falla cuando el elemento podría aún soportar esfuerzos cortantes mayores. Algunos procedimientos indirectos indican que la resistencia al esfuerzo cortante es del orden del 20 por ciento de la resistencia a la compresión.

También se han realizado ensayos en concreto simple sujetando especímenes de diversos tipos a otras combinaciones de esfuerzos. Entre éstos cabe mencionar los ensayos efectuados por McHenry [2.10], utilizando cilindros huecos sujetos a una presión interior y a una carga axial longitudinal, en los que se provoca un estado combinado de esfuerzos de tensión y compresión; los llevados a cabo por Bresler [2.11], sometiendo cilindros a combinaciones de esfuerzos de torsión y compresión axial, y los de Kupfer, Hilsdorf y Rüsck [2.12] en placas y prismas cargados a través de dispositivos especiales, para evitar alteraciones de los estados de esfuerzos estudiados.

### 2.2.6 Criterio de falla

A pesar de los estudios que se han realizado no se tiene todavía una teoría de falla sencilla y que permita predecir con precisión aceptable la resistencia del concreto simple. Se ha intentado hacer adaptaciones, entre otras, de las teorías de Mohr, de Coulomb, de esfuerzos cortantes y de deformaciones limitativas. K. Newman y J. Newman han utilizado con buenos resultados criterios de falla basados en teorías energéticas, las cuales parecen ser las más adecuadas para el caso del concreto [2.13]. En la referencia 2.14 se presenta un resumen de los estudios efectuados para determinar la resistencia del concreto a estados combinados de esfuerzos y las distintas teorías de falla que se han propuesto hasta la fecha.

## 2.3 Efectos del tiempo en el concreto endurecido

### 2.3.1 Conceptos generales

Cuando se aplica una carga a un espécimen de concreto, éste adquiere una deformación inicial. Si la carga permanece aplicada, la deformación aumenta con el tiempo, aun cuando no se incremente la carga.

Las deformaciones que ocurren con el tiempo en el concreto se deben esencialmente a dos causas: contracción y flujo plástico.

La figura 2.13 muestra una curva típica de deformación-tiempo de un espécimen de concreto bajo carga constante. La forma de la curva y las magnitudes relativas son aproximadamente las mismas, sea la acción de flexión, compresión, tensión o torsión. En el eje vertical se muestra la deformación y en el horizontal, el tiempo, ambas variables en escala aritmética.

Se puede ver que al aplicar la carga en un tiempo relativamente pequeño, el concreto sufre una deformación inicial, que para efectos prácticos se puede considerar como instantánea. Si se mantiene la carga, el concreto sigue deformándose, con una velocidad de deformación grande al principio, que disminuye gradualmente con el tiempo.

Aunque para efectos prácticos puede considerarse que la curva tiende a ser asintótica respecto a una horizontal, se ha comprobado que la deformación sigue aumentando aún después de muchos años. Sin embargo, aproximadamente el 90 por ciento de la deformación total ocurre durante el primer año de aplicación de la carga.

Si en cierto momento se descarga el espécimen, se produce una recuperación instantánea, seguida de una recuperación lenta. La recuperación nunca es total; siempre queda una deformación permanente.

En la figura 2.13, la curva de trazo continuo representa las deformaciones de un espécimen sujeto a una carga constante, la cual es retirada después de cierto tiempo. La línea de trazo interrumpido representa las deformaciones que

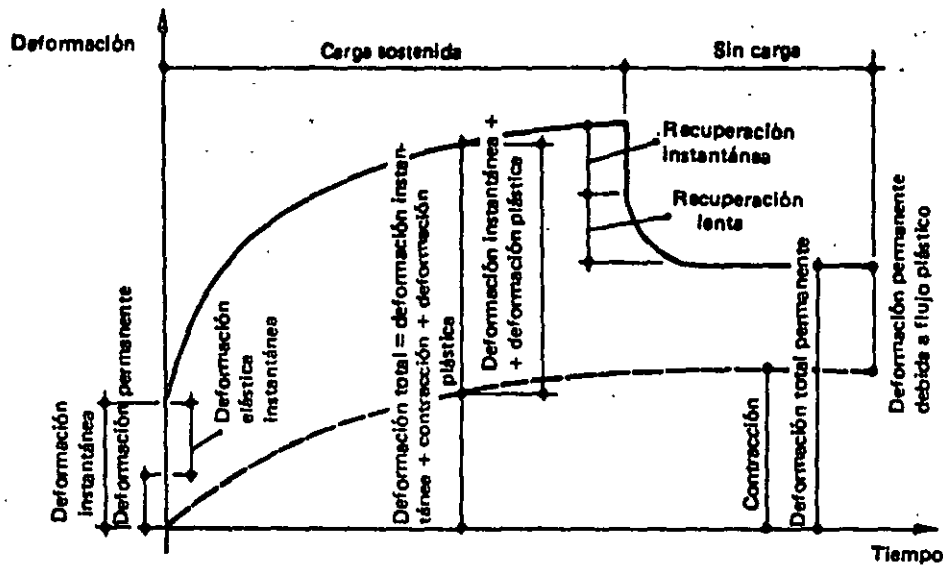


Figura 2.13 Curva típica deformación-tiempo, bajo condiciones ambientales constantes.

produce el tiempo en un espécimen sin carga. Las ordenadas de esta curva son las deformaciones debidas a contracción.

Para efectos de diseño estructural, no basta con conocer las deformaciones iniciales o instantáneas; en muchos casos interesa aún más estimar la magnitud de la deformación total, incluyendo los efectos del tiempo. En vigas sujetas a carga constante se han observado deflexiones totales de dos a cinco veces mayores que las medidas inmediatamente después de aplicada la carga.

### 2.3.2 Contracción

Las deformaciones por contracción se deben esencialmente a cambios en el contenido de agua del concreto a lo largo del tiempo. El agua de la mezcla se va evaporando e hidrata el cemento. Esto produce cambios volumétricos en la estructura interna del concreto, que a su vez producen deformaciones.

Los factores que más afectan la contracción son la cantidad original de agua en la mezcla y las condiciones ambientales especialmente a edades tempranas. Como generalmente un concreto de alta resistencia tiene menos agua que

otro de baja resistencia, el primero se contraerá menos que el segundo. Asimismo, un concreto en ambiente húmedo se contraerá menos que en ambiente seco.

Para la misma relación agua/cemento, la contracción varía con la cantidad de pasta por unidad de volumen. Una mezcla rica en pasta (cemento más agua) se contraerá más que otra pobre.

La contracción tiende a producir esfuerzos debidos a las restricciones al libre desplazamiento del elemento que existen en general en la realidad. Si el concreto pudiera encogerse libremente, la contracción no produciría ni esfuerzos, ni grietas.

Si el curado inicial del concreto se hace muy cuidadosamente, disminuirá el efecto de la contracción. Se puede estimar que las deformaciones unitarias debidas a contracción varían entre 0.0002 y 0.0010. Normalmente, la mayor parte de la deformación por contracción ocurre en los primeros meses.

### 2.3.3 Flujo plástico

El flujo plástico es un fenómeno relacionado con la aplicación de una carga. Las teorías que

se han desarrollado para explicarlo son complejas y caen fuera del alcance de este texto. Puede consultarse a este respecto la referencia 2.15. Se trata esencialmente de un fenómeno de deformación bajo carga continua, debido a un reajuste interno de las partículas que ocurre al mismo tiempo que la hidratación del cemento.

Las deformaciones por flujo plástico son proporcionales al nivel de carga, hasta niveles del orden del 50% de la resistencia. Para niveles mayores la relación ya no es proporcional.

Como el flujo plástico se debe en gran parte a deformaciones de la pasta de cemento, la cantidad de ésta por unidad de volumen es una variable importante.

En la figura 2.13 se observa que la deformación debida al flujo plástico aumenta con la duración de la carga. También se ha observado que, para un mismo nivel de carga, las deformaciones disminuyen al aumentar la edad a que ésta se aplica.

Otros factores que afectan a las deformaciones por flujo plástico son las propiedades de los materiales constituyentes del concreto, las proporciones de la mezcla y la humedad ambiente.

Es interesante mencionar que, como el flujo plástico aumenta con el nivel de carga, este fenómeno tiende a aliviar las zonas de máximo esfuerzo y, por lo tanto, a uniformar los esfuerzos en un elemento.

#### 2.3.4 Efecto de la permanencia de la carga

Es importante conocer el porcentaje de la resistencia que puede soportar una pieza de concreto en compresión sin fallar, cuando la carga se mantiene indefinidamente. En la figura 2.14 se muestra el efecto de la permanencia de una carga según los ensayos de Rüsçh [2.5]. En el eje horizontal se representan deformaciones unitarias, y en el eje vertical valores relativos,  $f_c/f'_c$ , de los esfuerzos aplicados con respecto a la resistencia en una prueba de corta duración (20 minutos aproximadamente).

Se presentan curvas esfuerzo-deformación obtenidas de especímenes sujetos a distintas velocidades de deformación, con lo que se produjeron fallas a diferentes edades. La línea de trazo continuo corresponde a un espécimen en el que la falla se produjo en 20 minutos. Las curvas de especímenes llevados a la falla en 100 minutos y 7 días se presentan con trazo discontinuo. Las curvas de especímenes llevados a la falla en 100 minutos y 7 días se presentan con trazo discontinuo.

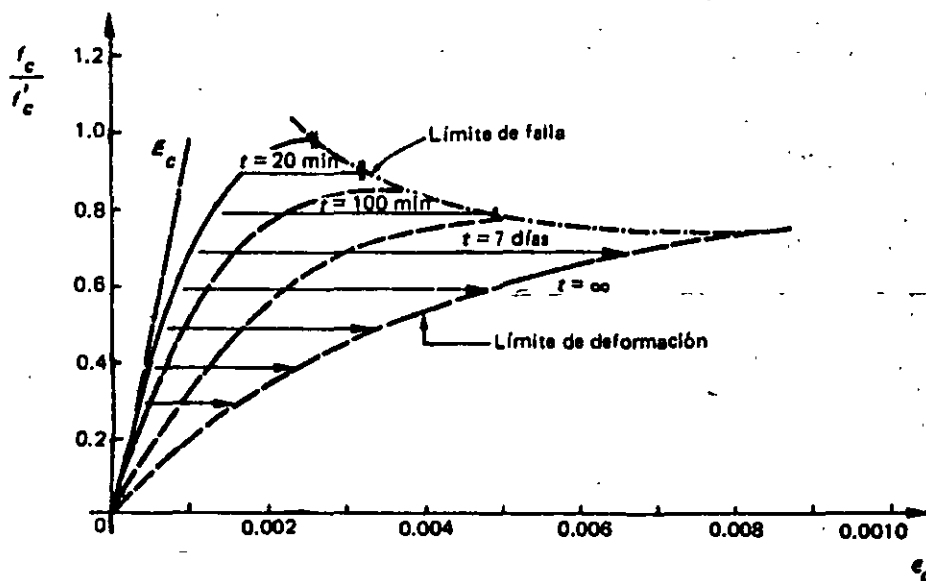


Figura 2.14 Efecto de la permanencia de la carga (Rüsçh) [2.5].

Se muestran además dos envolventes: la inferior, llamada *límite de deformación* y la superior, *límite de falla*. La primera muestra las deformaciones máximas que se obtienen al aplicar indefinidamente distintos porcentajes de la resistencia, inferiores a un cierto valor crítico. La segunda envolvente indica las deformaciones a la falla, correspondientes a porcentajes de carga superiores al valor crítico. La intersección entre estas dos envolventes indica, teóricamente, el porcentaje de la resistencia por debajo del cual el espécimen puede soportar la carga indefinidamente.

En la figura puede observarse que si se carga un espécimen al 80 por ciento de su resistencia de corta duración, se producirá la falla eventualmente a una deformación del orden de 0.0055. En cambio, si se le sujeta solamente al 40 por ciento de su resistencia de corta duración, el espécimen sufrirá una deformación del orden de 0.0025 después de un tiempo muy largo y mantendrá su carga indefinidamente.

Se puede decir, con cierto grado de seguridad, que el concreto puede tomar indefinidamente, sin fallar, cargas hasta del 60 por ciento de su capacidad. Cargas mayores que el 70-80 por ciento, aplicadas de modo permanente, acaban siempre por provocar la falla del espécimen.

## 2.4 Fatiga

Se han hecho diversos estudios sobre elementos de concreto sujetos a repeticiones de carga. Cuando un elemento falla después de un número muy grande de repeticiones de carga, se dice que ha fallado por *fatiga*. Este tipo de sollicitación tiene importancia práctica, ya que elementos como vigas de puente, durmientes de ferrocarril o cimentaciones de maquinaria están sujetos a muchas repeticiones de carga.

Se mencionó anteriormente que un elemento de concreto en compresión no puede soportar indefinidamente fracciones de su resistencia estática mayores que un 70 por ciento. Cuando a un elemento de concreto se le aplican

compresiones del orden de la mitad de su resistencia estática, falla después de aproximadamente diez millones de repeticiones de carga. Se ha encontrado también que si la carga se aplica intercalando periodos de reposo, el número de ciclos necesario para producir la falla aumenta considerablemente.

Los estudios experimentales se han hecho aplicando los ciclos de carga y descarga a velocidades bastante más rápidas que las que se presentan en la práctica y, por lo tanto, sus resultados en general son conservadores.

Se puede estimar que el concreto simple en compresión, toma diez millones o más de repeticiones de carga al 50 por ciento de su resistencia estática. En flexión, el mismo número de aplicaciones puede alcanzarse con ciclos de carga y descarga con valor máximo del orden de 35-50 por ciento de su resistencia estática. Se han hecho estudios limitados de fatiga en torsión, que tienen un interés práctico menor.

Para ciertos materiales, como el acero, se ha encontrado que, aplicando ciclos de carga y descarga y llevando el esfuerzo máximo hasta un cierto valor, existe un límite de este esfuerzo por debajo del cual se puede soportar un número indefinido de ciclos. En concreto, se han llevado los ensayos hasta 10 millones de aplicaciones de carga, sin que se haya comprobado la existencia de límites semejantes. En las referencias 2.16 y 2.18 se trata ampliamente el tema de fatiga en el concreto.

## 2.5 Módulos elásticos

Para estimar deformaciones debidas a cargas de corta duración, donde se puede admitir un comportamiento elástico sin errores importantes, es necesario definir un valor del módulo de elasticidad. Del estudio de las curvas esfuerzo-deformación mostradas, resulta obvio que el concepto convencional de módulo de elasticidad no tiene sentido en concreto. Por lo tanto, es necesario recurrir a definiciones arbitrarias, basadas en consideraciones empíricas. Así, se puede definir el módulo tangente inicial o tan-

gente a un punto determinado de la curva esfuerzo-deformación y el módulo secante entre dos puntos de la misma. Para tomar en cuenta los efectos de cargas de larga duración en una forma simple, se utilizan a veces módulos elásticos menores que los correspondientes a las definiciones mencionadas anteriormente.

El módulo secante se usa en ensayos de laboratorio para definir la deformabilidad de un concreto dado. La ASTM [2.17] recomienda la pendiente de la línea que une los puntos de la curva correspondiente a una deformación de 0.0005 y al 40 por ciento de la carga máxima.

Se ha observado que, después de varios ciclos de carga y descarga a esfuerzos relativamente pequeños, la relación esfuerzo-deformación tiende a convertirse en una relación prácticamente lineal. Como es difícil determinar el módulo tangente inicial de una manera reproducible, se recurre a veces a aplicaciones previas de carga y descarga, con objeto de rectificar la curva esfuerzo-deformación, y se considera la pendiente de la curva así obtenida como el módulo de elasticidad. El método para determinar el módulo tangente en esta forma se describe con detalle en la referencia 2.17. El módulo de elasticidad es función principalmente de la resistencia del concreto y de su peso volumétrico. Se han propuesto varias expresiones para predecir el módulo de elasticidad a partir de estas variables. Por ejemplo, el Reglamento ACI presenta la ecuación

$$E_c = w^{1.5} \frac{4270}{15-100} \sqrt{f'_c} \quad (2.5)$$

donde  $E_c$  es el módulo de elasticidad en  $\text{kg/cm}^2$ ,  $w$  es el peso volumétrico del concreto en  $\text{ton/m}^3$  y  $f'_c$  es la resistencia del concreto en  $\text{kg/cm}^2$ . El Reglamento del D.F., propone la ecuación

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c} \quad (2.6)$$

que es aplicable únicamente a concretos fabricados con agregados típicos de la ciudad de México. Estas ecuaciones dan únicamente valores aproximados, porque existen otras varia-

bles importantes, como el tipo de agregado. Las diferencias entre los valores reales y los calculados con estas ecuaciones pueden ser muy grandes. Cuando se requieren estimaciones de cierta precisión, conviene determinar el módulo de elasticidad del concreto usado en particular.

En algunos análisis elásticos se suelen emplear  $G$ , el módulo de elasticidad al esfuerzo cortante, y  $\mu$ , el coeficiente de Poisson. El primero se toma comúnmente como fracción del módulo de elasticidad que se usa en compresión, del orden de 0.4. Experimentalmente, se ha determinado que el segundo varía entre 0.12 y 0.20. Con frecuencia se supone  $\mu$  igual a 0.18.

## 2.6 Deformaciones por cambios de temperatura

El concreto está sometido a cambios volumétricos por temperatura. Se han determinado algunos coeficientes térmicos que oscilan entre 0.000007 y 0.000011 de deformación unitaria por grado centígrado de cambio de temperatura. Los valores anteriores corresponden a concreto de peso volumétrico normal (del orden de  $2.2 \text{ ton/m}^3$ ). Para concretos fabricados con agregados ligeros, los coeficientes pueden ser muy distintos de los mencionados.

## 2.7 Algunas características de los aceros de refuerzo

El acero para reforzar concreto se utiliza en distintas formas. La más común es la barra o varilla que se fabrica tanto de acero laminado en caliente como de acero trabajado en frío. En las figuras 2.15 y 2.16 se muestran curvas de ambos tipos de acero, típicas de barras europeas.

Los diámetros usuales de las barras producidas en México, varían de  $1/4$  pulg a  $1\frac{1}{2}$  pulg. (Algunos productores han fabricado barras corrugadas de  $5/16$  pulg,  $5/32$  pulg y  $3/16$  pulg.) En otros países se usan diámetros aun mayores. Todas las barras, con excepción del alambrión de  $1/4$  pulg, que generalmente es liso, tienen corrugaciones en la superficie, para mejorar

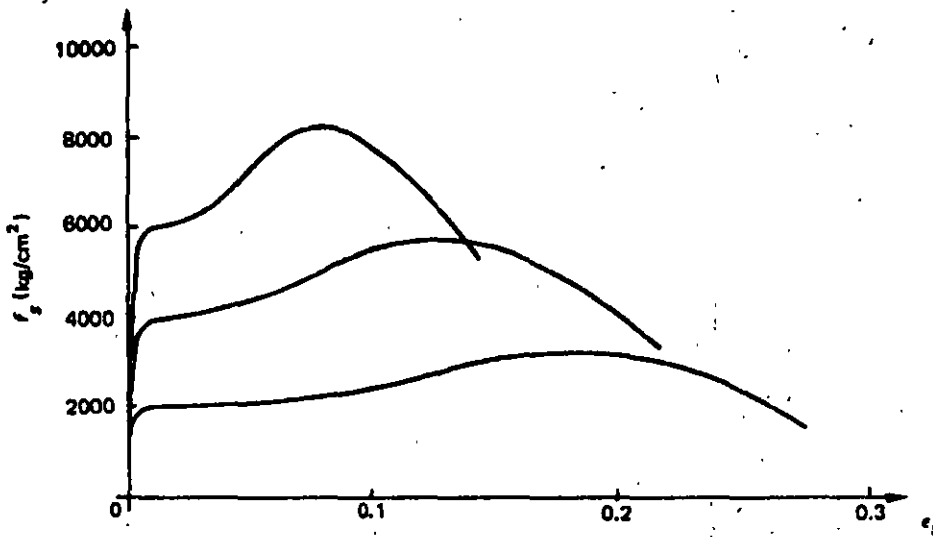


Figura 2.15 Curvas esfuerzo-deformación de aceros laminados en caliente para barras de refuerzo de fabricación europea.

su adherencia al concreto. La tabla 2.1 proporciona datos sobre las características principales de barras de refuerzo, así como la nomenclatura para identificarlas.

Generalmente el tipo de acero se caracteriza por el límite o esfuerzo de fluencia. Este límite se aprecia claramente en las curvas esfuerzo-deformación de barras laminadas en caliente,

como se ve en la figura 2.15. El acero trabajado en frío no tiene un límite de fluencia bien definido (figura 2.16). En este caso, el límite de fluencia suele definirse trazando una paralela a la parte recta de la curva esfuerzo-deformación desde un valor de la deformación unitaria de 0.002; la intersección de esta paralela con la curva define el límite de fluencia.

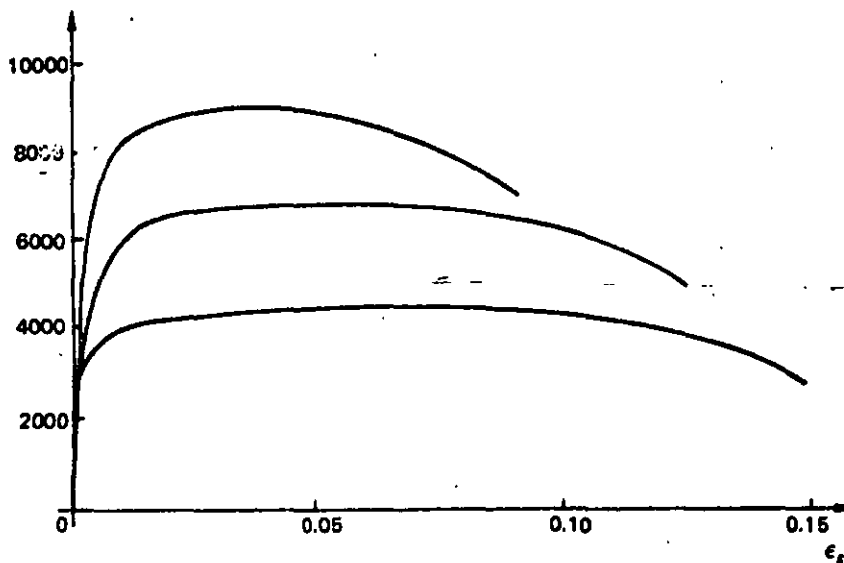


Figura 2.16 Curvas esfuerzo-deformación de acero trabajados en frío para barras de refuerzo de fabricación europea.

Tabla 2.1 Diámetros, pesos, áreas, y perímetros de barras.

Barra Núm.	Diámetro pulg	Diámetro mm	Peso kg/m	Área cm <sup>2</sup>	Perímetro cm
2	1/4	6.4	0.248	0.32	1.99
2.5	5/16	7.9	0.388	0.49	2.48
3	3/8	9.5	0.559	0.71	2.98
4	1/2	12.7	0.993	1.27	3.99
5	5/8	15.9	1.552	1.98	5.00
6	3/4	19.0	2.235	2.85	6.00
7	7/8	22.2	3.042	3.88	6.97
8	1	25.4	3.973	5.07	7.98
9	1-1/8	28.6	5.028	6.41	8.99
10	1-1/4	31.8	6.207	7.92	9.99
11	1-3/8	34.9	7.511	9.58	10.96
12	1-1/2	38.1	8.938	11.40	11.97

## OBSERVACIONES

Los diámetros, áreas y pesos se ajustan a la norma de la Secretaría de Comercio, NOM B6-1974. Según esta norma, el diámetro nominal y el área de una barra corresponden a los que tendría una barra lisa, sin corrugaciones, del mismo peso por metro lineal; todas las barras, con excepción de la No. 2, están corrugadas.

En México se cuenta con una variedad relativamente grande de aceros de refuerzo. Las barras laminadas en caliente pueden obtenerse con límites de fluencia desde 2 300 hasta 4 200 kg/cm<sup>2</sup>. El acero trabajado en frío alcanza límites de fluencia de 4 000 a 6 000 kg/cm<sup>2</sup>. En la figura 2.17 se representa la gráfica esfuerzo-deformación de un acero trabajado en frío, fabricado en México. En los países escandinavos se usan varillas con límites de fluencia hasta de 9 000 kg/cm<sup>2</sup>.

Una propiedad importante que debe tenerse en cuenta en refuerzos con detalles soldados es la soldabilidad. La soldadura de aceros trabajados en frío debe hacerse con cuidado. Otra propiedad importante es la facilidad de doblado, que es una medida indirecta de ductilidad y un índice de su trabajabilidad.

Se ha empezado a generalizar el uso de mallas como refuerzo de losas, muros y algunos elementos prefabricados. Estas mallas están formadas por alambres lisos unidos por puntos de

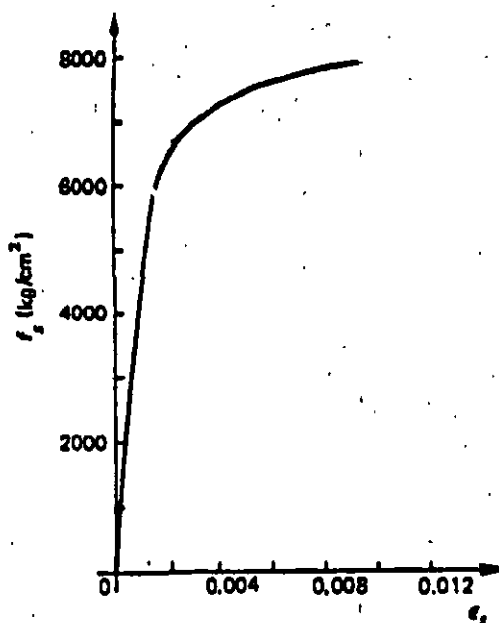


Figura 2.17 Gráfica esfuerzo-deformación de un acero de alta resistencia, sin límite de fluencia definido, de fabricación nacional.

soldadura en las intersecciones. El acero es del tipo trabajado en frío, con refuerzos de fluencia del orden de 5 000 kg/cm<sup>2</sup>. El espaciamiento de los alambres varía de 5 a 40 cm y los diámetros de 2 a 7 mm, aproximadamente. En algunos países, en lugar de alambres lisos, se usan alambres con algún tipo de irregularidad superficial, para mejorar la adherencia.

El acero que se emplea en estructuras prefabricadas es de resistencia francamente superior a la de los aceros descritos anteriormente. Su resistencia última varía entre 14 000 y 22 000 kg/cm<sup>2</sup> y su límite de fluencia, definido por el esfuerzo correspondiente a una deformación permanente de 0.002, entre 12 000 y 19 000 kg/cm<sup>2</sup>.

Como ilustración, en la figura 2.18 se presentan, atendiendo al grado de calidad, algunas curvas esfuerzo-deformación para distintos tipos de acero, y dos curvas esfuerzo-deformación para concreto con una resistencia de 250 kg/cm<sup>2</sup>, correspondientes a cargas de corta y larga duración.

El módulo de elasticidad de los distintos tipos de acero cambia muy poco. De la compa-

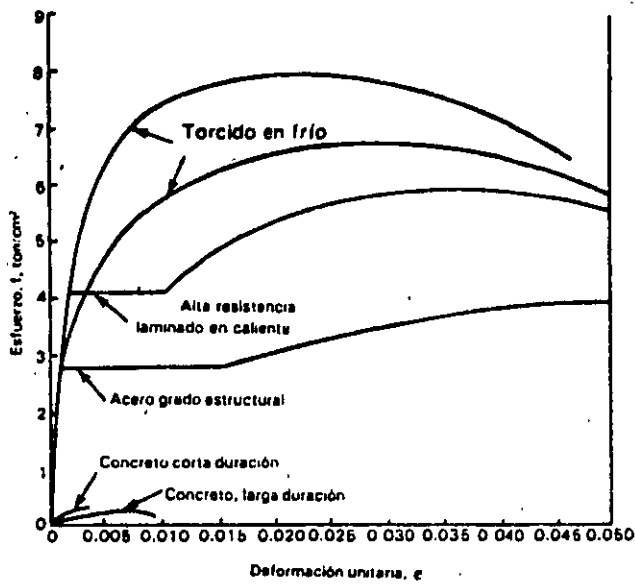


Figura 2.18 Curvas comparativas para acero y concreto

ración de las curvas del acero y del concreto, se puede inferir que si ambos trabajan en un

elemento de concreto reforzado sujeto a compresión axial, el colapso del conjunto estará regido por la deformación del concreto que, bajo cargas de larga duración, puede ser hasta de 0.010 ó 0.012. Para esta deformación, el acero tendría apenas una deformación del orden correspondiente a su límite de fluencia.

Las características de adherencia de los distintos aceros, y su influencia en el diseño, se presentarán en el capítulo de Adherencia. Para lograr el trabajo en conjunto debe tenerse una adherencia suficiente entre concreto y acero obtenida ya sea mecánicamente o por medio de la adhesión entre el concreto y el acero de refuerzo.

Para el diseño se supone que la curva esfuerzo-deformación del acero en compresión es idéntica a la curva esfuerzo-deformación en tensión. La curva en compresión es difícil de determinar en el caso de barras, debido a efectos de esbeltez.

## Referencias

- 2.1 Troxell, G. E., H. E. Davis y J. W. Kelly. *Composition and Properties of Concrete*, segunda edición. Nueva York, McGraw Hill, 1968.
- 2.2 Neville, A. M. *Properties of Concrete*, tercera edición. Londres, Pitman, 1981.
- 2.3 Orchard, D. F. *Concrete Technology* (3 volúmenes). Nueva York, Halsted Press. Vol. I, 1973; Vol. 2; 1973, Vol. 3, 1976.
- 2.4 Hatano, T. y H. Tsutsumi. *Dynamical Compressive Deformation and Failure of Concrete under Earthquake Load*. Informe No. C 5904 del Laboratorio Técnico del Instituto Central de Investigaciones de la Industria Eléctrica, Tokio, septiembre 1968. Véase también el Informe No. C 5906, por T. Hatano, Tokio, marzo 1960.
- 2.5 Rüschi, H. "Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete". *Journal of the American Concrete Institute*, Detroit, julio 1960.
- 2.6 Richart, F. E., A. Brandtzaeg y R. L. Brown. "A Study of the Failure of Concrete under Combined Compressive Stresses". *Bulletin No. 185*. Urbana, Ill., University of Illinois, Engineering Experiment Station, noviembre 1928.
- 2.7 Lobo B. Carneiro, F. L. "Concrete Tensile Strength". *Boletín RILEM No. 13*, marzo 1953.
- 2.8 Akazawa, T. "Tension Test Method for Concrete". *Boletín RILEM No. 16*, noviembre 1953.
- 2.9 Timoshenko, S. P. y J. N. Goodier. *Teoría de la elasticidad*. Bilbao, URMO, 1968.
- 2.10 McHenry, D. y J. Karni. "Strength of Concrete under Combined Tensile and Compressive Stresses". *Journal of the American Concrete Institute*. Detroit, abril 1958.
- 2.11 Bresler, B., y K. S. Pister. "Strength of Concrete under Combined Stresses". *Journal of the American Concrete Institute*. Detroit, septiembre 1958.
- 2.12 Kupfer, H., H. K. Hilsdorf y H. Rüschi. "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses". *Journal of the American Concrete Institute*, Detroit, agosto 1969.
- 2.13 Newman, K. y J. B. Newman. "Failure Theory and Design Criteria for Plain Concrete". En la Memoria del *International Conference of Structure, Solid Mechanics and Engineering Design and Civil Engineering Materials*. Southampton, 1969.
- 2.14 Jordá, R. *Resistencia del concreto a esfuerzos combinados*, tesis profesional. Puebla, México, Universidad Autónoma de Puebla, 1970.



- 2.15 \_\_\_\_\_. *Symposium on Creep of Concrete (SP-9)*. Detroit. American Concrete Institute, 1964.
- 2.16 Lloyd, J. P., J. L. Lott y C. E. Kesler. "Fatigue of Concrete". *Bulletin No. 499*. Urbana, Ill., University of Illinois, Engineering Experiment Station, 1968.
- 2.17 \_\_\_\_\_. *Standard Method of Test for Static Young's Modulus of Elasticity and Poissons Ratio in Compression of Cylindrical Concrete Specimens (ASTM C 469-65)*. Filadelfia, American Society for Testing and Materials, 1965.
- 2.18 Shah, S. P., editor. *Fatigue of Concrete Structures (SP 75)*. Detroit, American Concrete Institute, 1982.
- 2.19 Neville, A. M. *Tecnología del concreto (2 volúmenes)*. México, D. F., Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**ADHERENCIA Y ANCLAJE**

**EXPOSITOR: M en I. JOSÉ LUIS TRIGOS SUAREZ  
PALACIO DE MINERÍA  
AGOSTO DE 1998**

# IV. ADHERENCIA Y ANCLAJE

## 1.- NATURALEZA

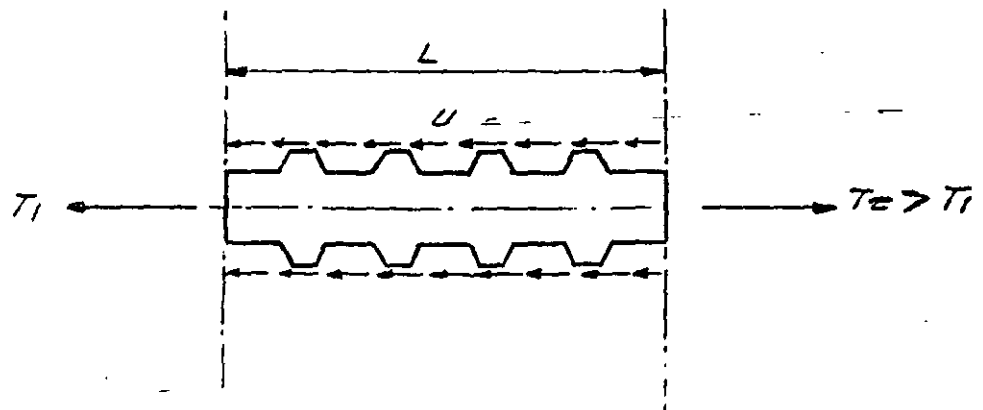
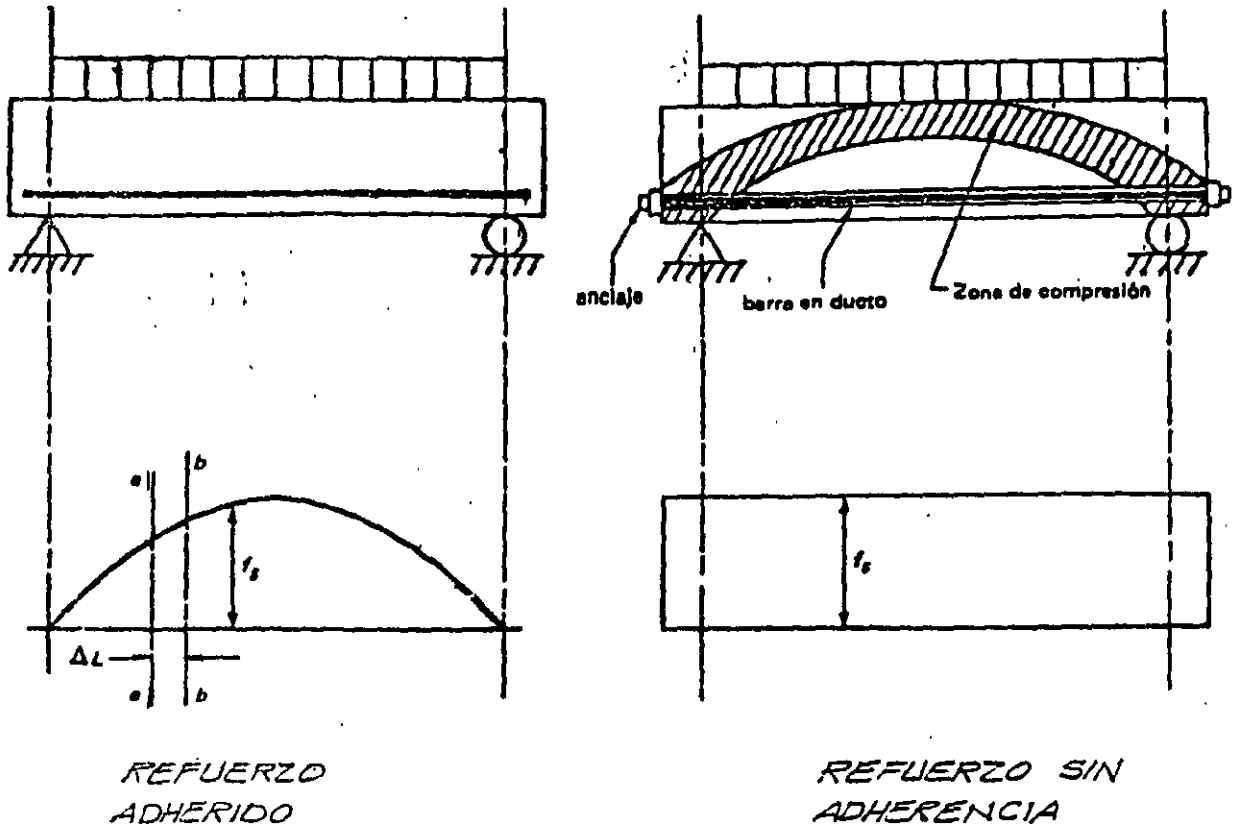
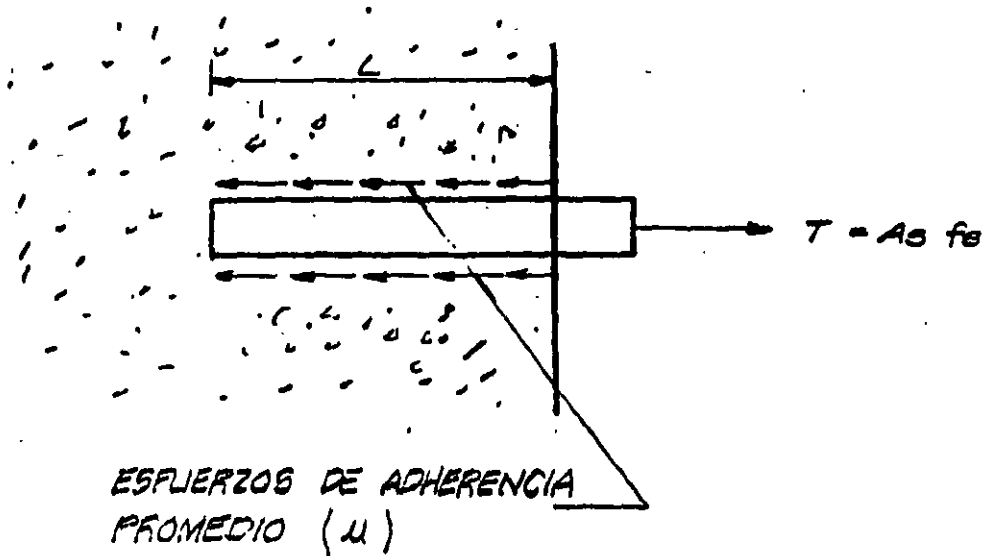


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE UN TRAMO DE BARRA ADHERIDA

## 1.1 ORIGEN DE LA ADHERENCIA O RESISTENCIA AL DESLIZAMIENTO

- A) ADHESION DE ORIGEN QUIMICO
  - B) FRICCION ENTRE EL ACERO Y EL CONCRETO
  - C) APOYO DIRECTO DE LAS CORRUGACIONES
- 
- A) Y B) EN VARILLAS LISAS
  - A) B) Y C) EN VARILLAS CORRUGADAS

## 2.- ADHERENCIA POR ANCLAJE O DESARROLLO



POR EQUILIBRIO

$$\mu \Sigma o L = A_s f_s$$

$$\mu = \frac{A_s f_s}{\Sigma o L} = \frac{\frac{\pi d_b^2}{4} f_s}{\pi d_b L}$$

$$\mu = \frac{d_b f_s}{4L}$$

si  $f_s = f_y$

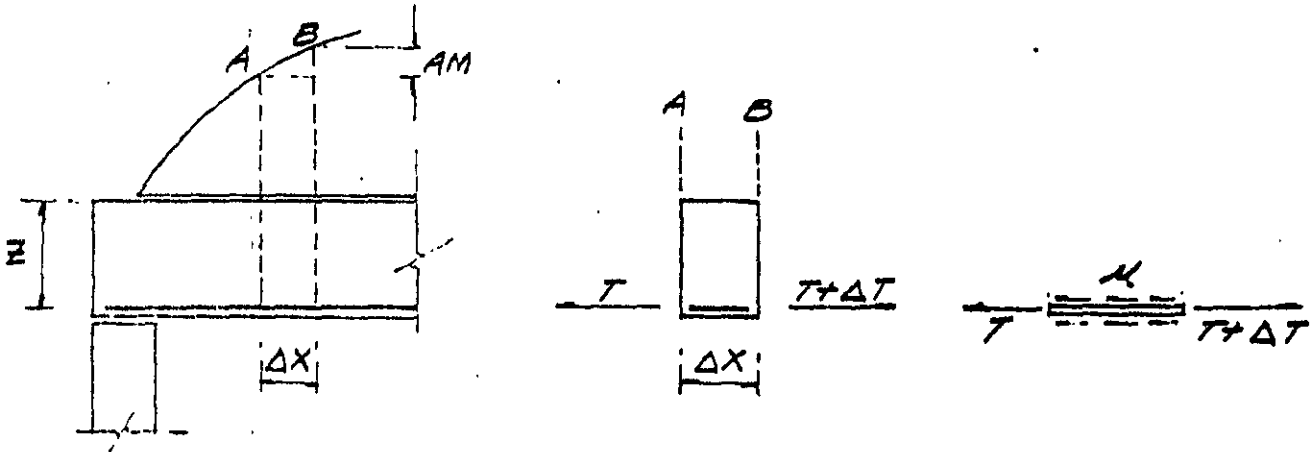
$\mu = \mu_u$

y  $L = l_d$

$$l_d = \frac{f_y d_b}{4 \mu_u}$$

### 3.- ADHERENCIA POR FLEXION

A) POR EFECTO DE UN INCREMENTO DE ESFUERZOS EN LAS VARRILLAS DEBIDO A UN CAMBIO EN EL DIAGRAMA DE MOMENTOS.



$$\Delta T = \frac{\Delta M}{z}$$

$$\Delta T = \mu (\Sigma O) \Delta x$$

$$\mu = \frac{\Delta M}{z \Sigma O \Delta x}$$

TOMANDO LIMITES CUANDO  $\Delta x \rightarrow 0$

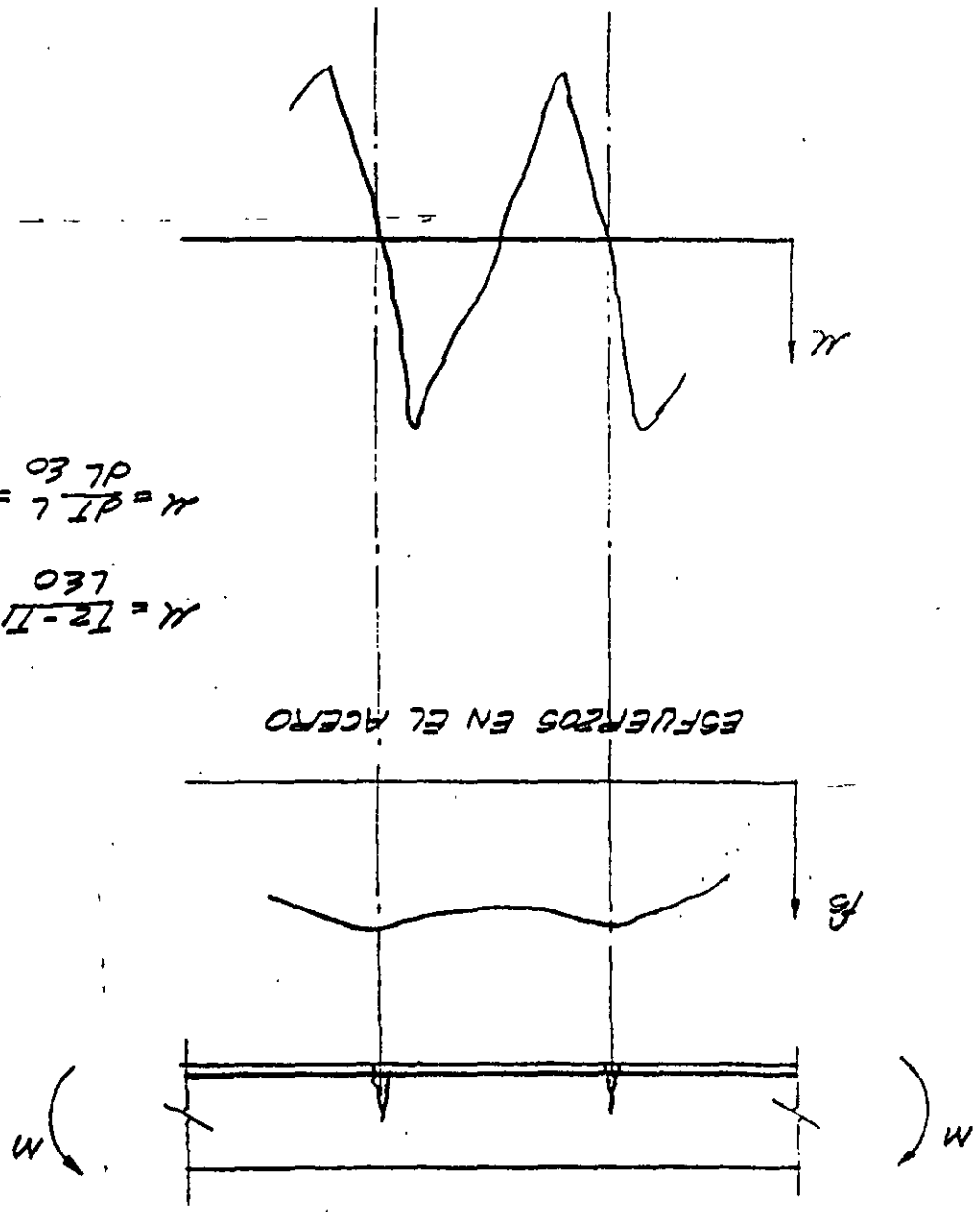
$$\mu = \frac{dM}{dx} \frac{1}{z \Sigma O}$$

PERO  $\frac{dM}{dx} = V$

$$\mu = \frac{V}{z \Sigma O}$$

b) CAMBIO EN LOS ESFUERZOS DE LAS VARILLAS POR AGRIETAMIENTO DEL ELEMENTO

MOMENTO CONSTANTE



$$\mu = \frac{P \cdot L}{\Delta I} = \frac{P \cdot L}{\Delta I} = \mu$$

$$\mu = \frac{L \cdot II}{\Delta I} = \mu$$

4.- VARIABLES QUE INTERVIENEN EN EL DESARROLLO DE LA ADHERENCIA.

- A) RESISTENCIA A TENSION DEL CONCRETO, QUE ES PROPORCIONAL A  $\sqrt{F'c}$ .
- B) TIPO DE CORRUGACIONES Y DIAMETRO DEL REFUERZO.
- C) POSICION DEL REFUERZO.  
SE DESARROLLA MAYOR ADHERENCIA EN VARILLAS DE LECHO INFERIOR QUE EN LECHO SUPERIOR, Y MEJOR EN BARRAS VERTICALES QUE EN HORIZONTALES.
- D) RECUBRIMIENTO Y SEPARACION DE LAS VARILLAS.
- E) CONFINAMIENTO DEL CONCRETO POR ESTRIBOS CERRADOS.
- F) EN BARRAS A COMPRESION, LA INEXISTENCIA DE GRIETAS DE FLEXION, MEJORA LA ADHERENCIA.

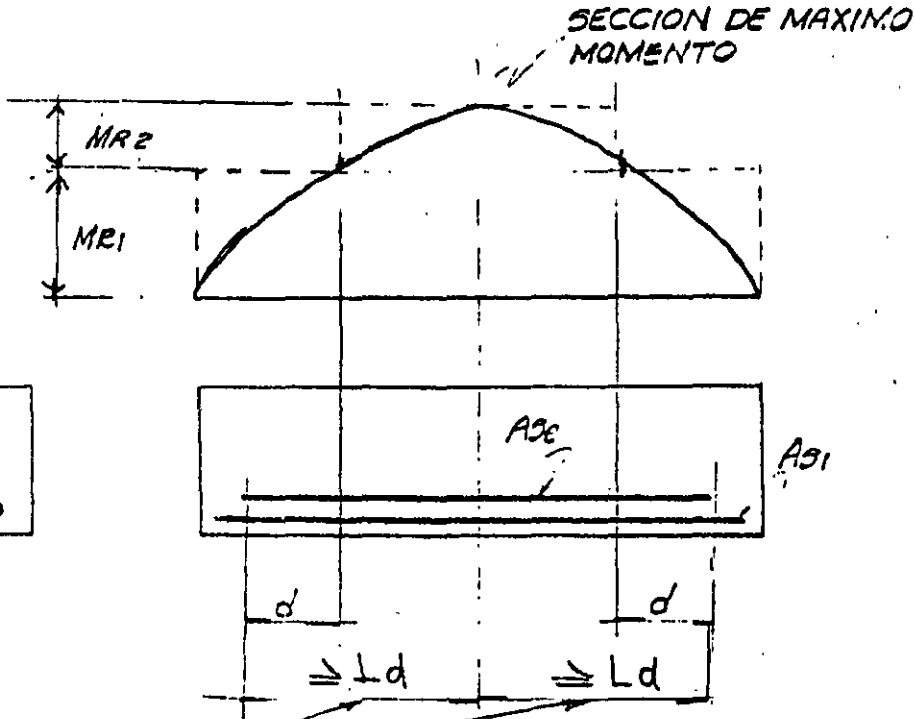


5.- REVISION DE LA ADHERENCIA DEL REFUERZO.

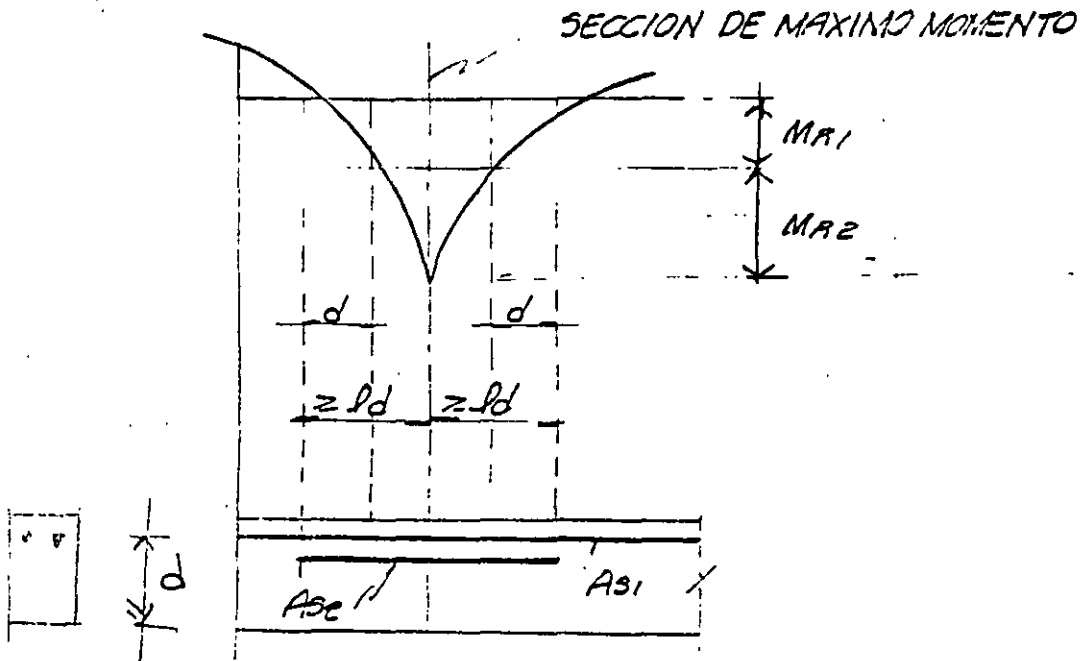
A CAMBIO DE CALCULAR LOS ESFUERZOS DE ADHERENCIA, LOS REGLAMENTOS ESPECIFICAN UNA LONGITUD DE ANCLAJE O DESARROLLO MINIMA QUE DEBE PROPORCIONARSE A CADA LADO DE LAS SECCIONES DONDE SE PRESENTEN ESFUERZOS MAXIMOS EN EL ACERO. ESTA LONGITUD DEPENDE BASICAMENTE DE LAS VARIABLES INDICADAS EN EL PUNTO 4.

6.- REGLAMENTO D. F. 1987

ACERO EN TENSION:

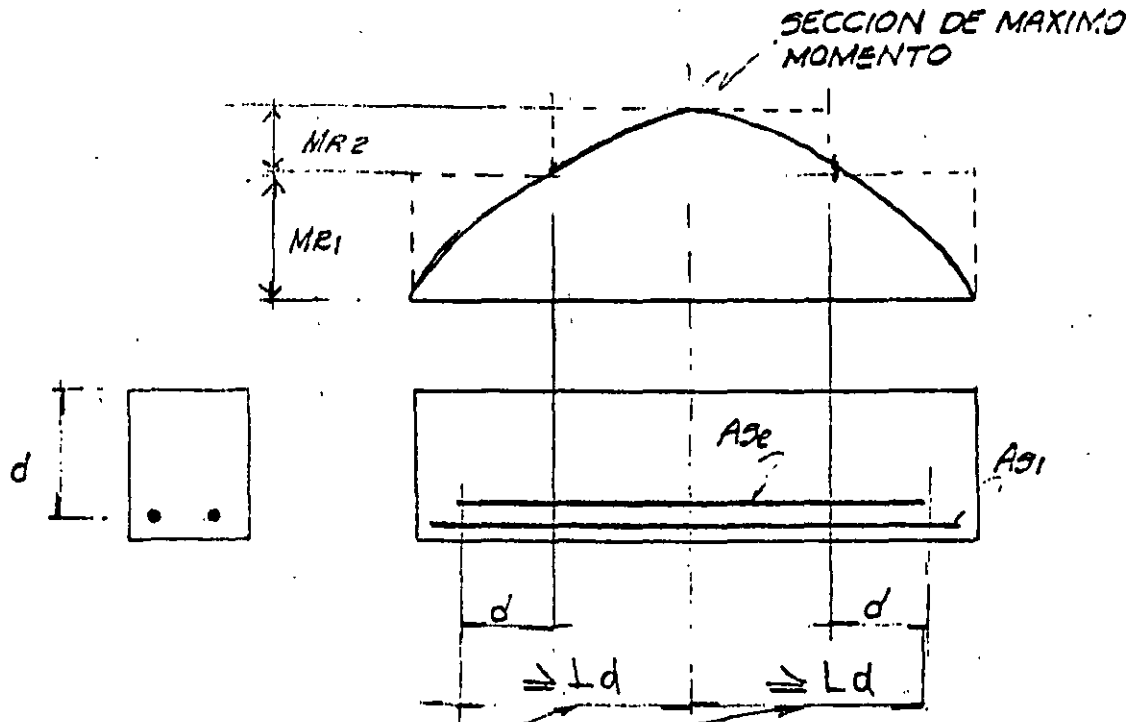


PARA QUE EN NINGUNA  
SE SEA  $f_y$

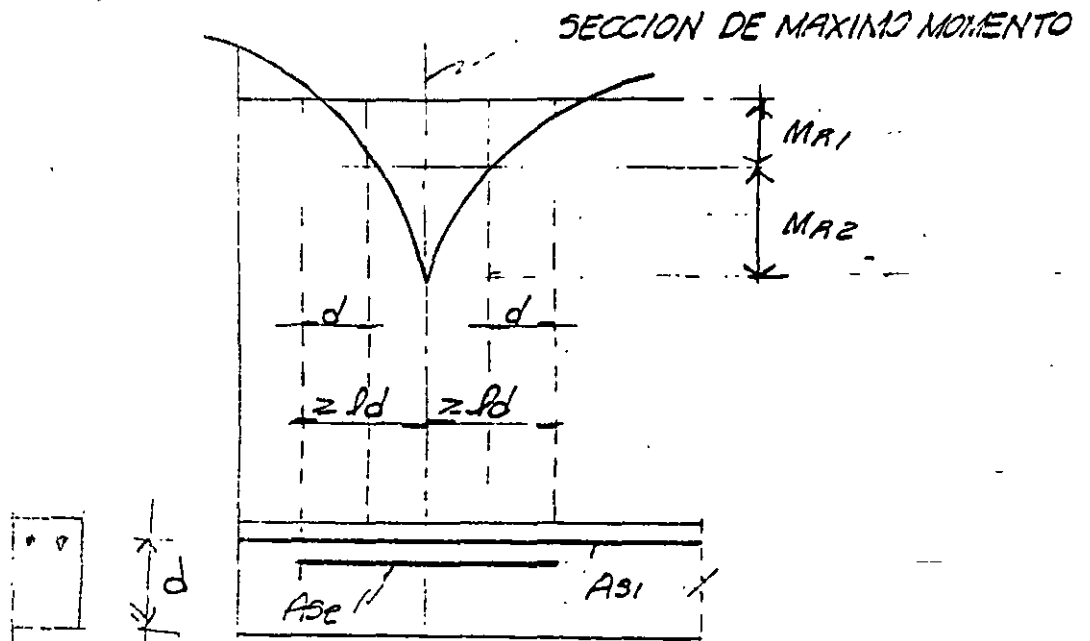


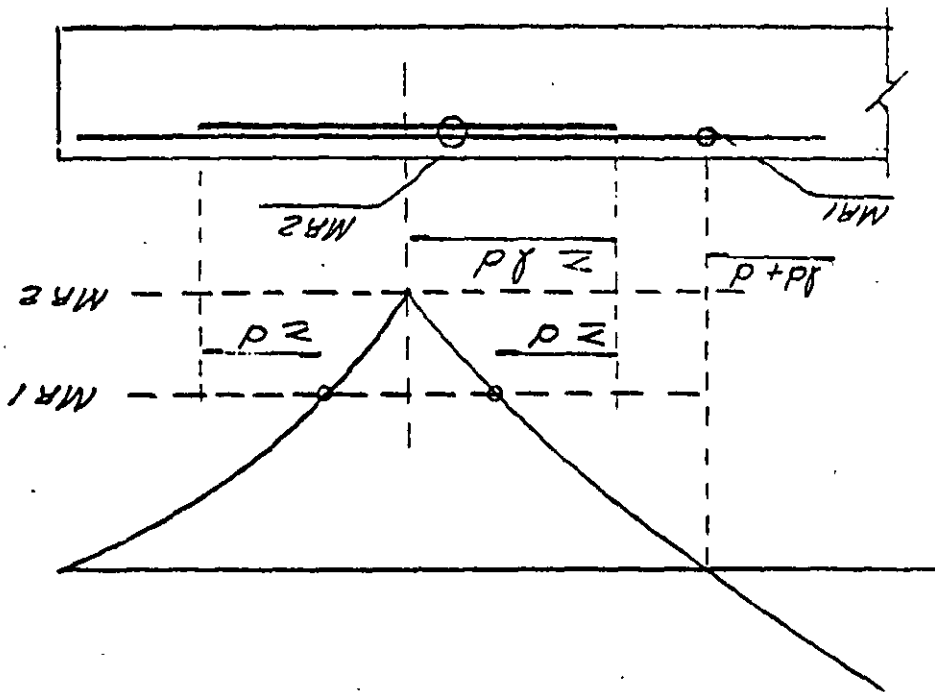
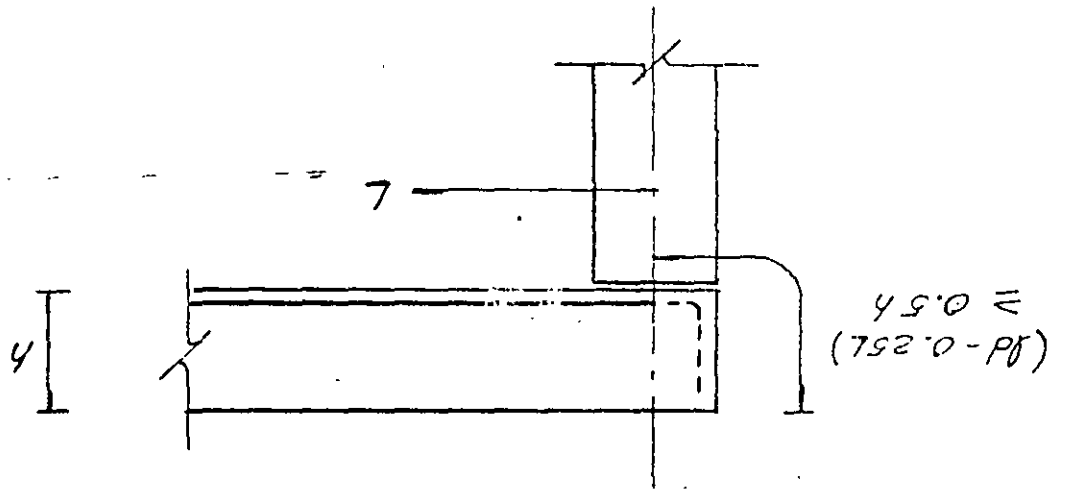
6.- REGLAMENTO D. F. 1987

ACERO EN TENSION:



PARA QUE EN  $M_{max}$   
 $f_s$  SEA  $f_y$





LONGITUD BASICA DE DESARROLLO:

$$L_{db} = 0.06 \frac{a_s f_y}{\sqrt{f'_c}} \geq 0.006 d_b f_y$$

FACTORES PARA OBTENER LA LONGITUD DE DESARROLLO. (  $L_d$  )

$$L_d = \text{Factor } L_{db}$$

<u>CONDICION DEL REFUERZO</u>	<u>FACTOR</u>
BARRAS HORIZONTALES O INCLINADAS COLOCADAS DE MANERA QUE BAJO ELLAS SE CUELEN MAS DE 30 CM DE CONCRETO.	1.4
EN CONCRETO LIGERO	1.33
BARRAS CON $F_y$ MAYOR DE 4200 KG/CM <sup>2</sup> ( $F_y$ , EN KG/CM <sup>2</sup> ).	2 - $\frac{4200}{F_y}$
BARRAS TORCIDAS EN FRIJO DE DIAMETRO - IGUAL O MAYOR QUE 19.1 MM (N°6).	1.2
TODOS LOS OTROS CASOS	1.0

EN NINGUN CASO  $L_d$  SERA MENOR DE 30 CM.

EN PAQUETES  $L_d$  SE INCREMENTA:



$$L_d = 1.2 L_{dc/b}$$



$$L_d = 1.00 L_{dc/b} \text{ (NO SE MODIFICA)}$$

SI EL ESFUERZO EN EL ACERO ES MENOR QUE  $F_y$ :

$$L_d' = \frac{f_s}{f_y} L_d$$

DONDE  $f_s = \frac{M}{A_s Z}$

EN VARILLAS LISAS

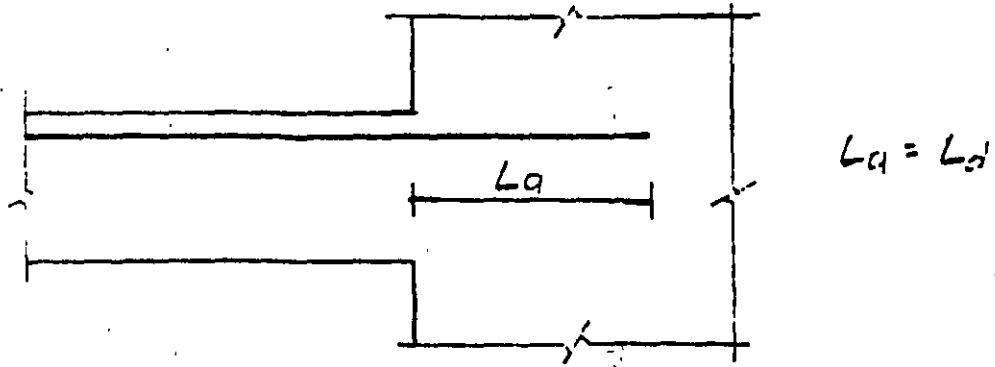
$$L_d' = 2 L_{d_{corr}}$$

ACERO EN COMPRESION.

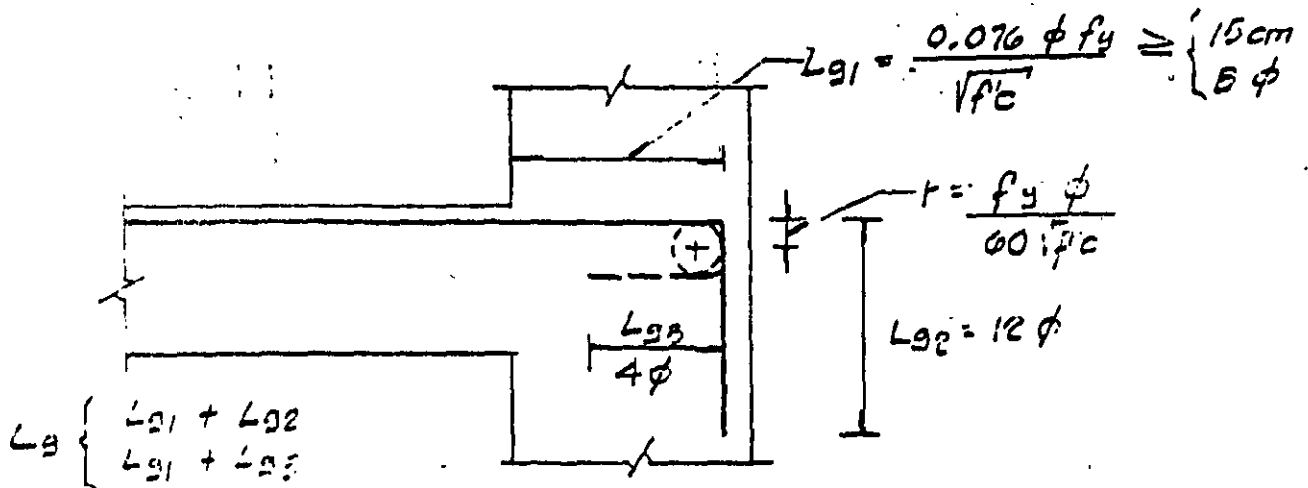
$$L_d = 0.6 L_d \text{ tensión}$$

$$L_d \geq 20 \text{ cm.}$$

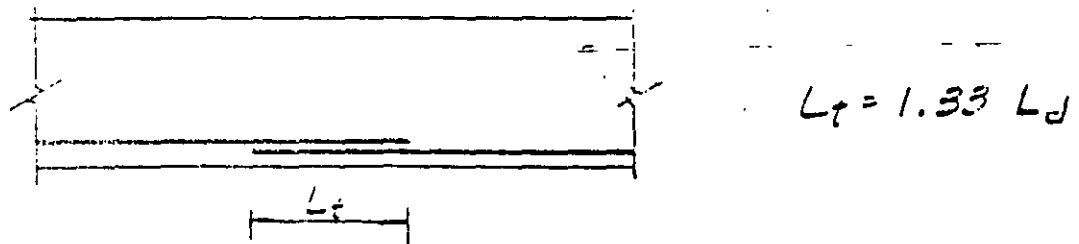
# ANCLAJE Y REFUERZO DEL REFUERZO



ANCLAJE RECTO

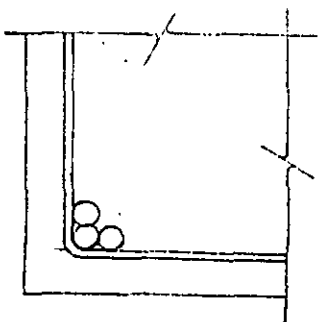
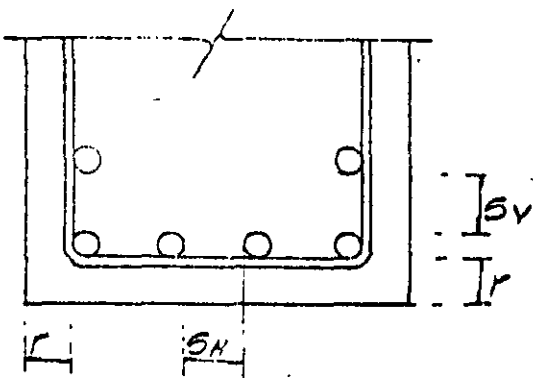
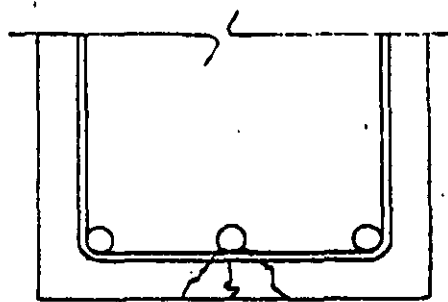
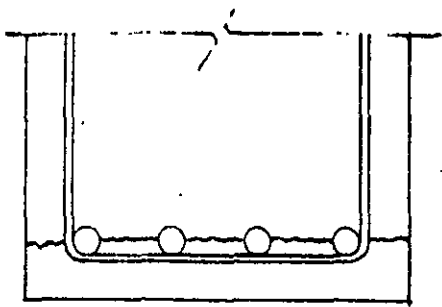


ANCLAJE EN ESCUADRA ( $L_B$ )



LONGITUD DE TRASLAPE ( $L_T$ )

# RECUBRIMIENTO Y SEPARACION DE VARILLAS



EN ELEMENTOS NO EXPUESTOS

$r$  - SERÁ EL MENOR DE LOS DOS VALORES SIGUIENTES

$\phi$  MAX.  
2 cm.

EN ELEMENTOS COLADOS CONTRA EL SUELO

$r = \begin{cases} 5 \text{ cm. SIN PLANTILLA} \\ 3 \text{ cm. CON PLANTILLA} \end{cases}$

$sh$  EL MAYOR DE  $\begin{cases} \phi \text{ MAX} \\ 1.5 T \text{ m} \text{áx. AGR} \end{cases}$

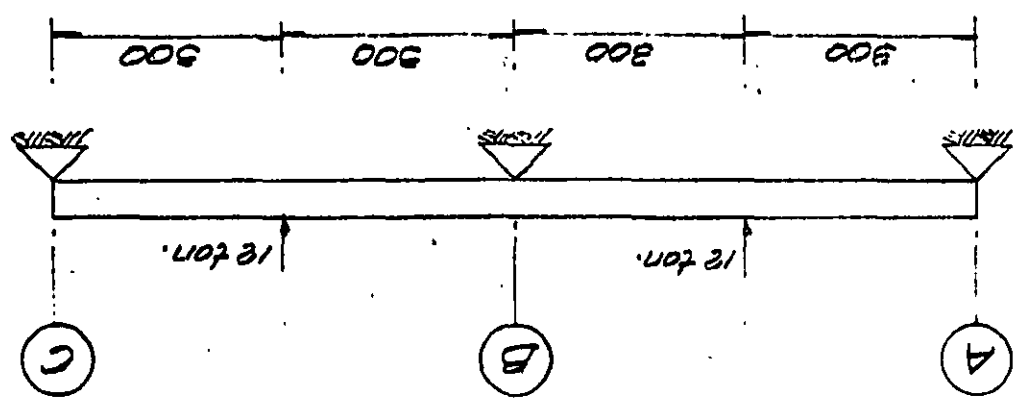
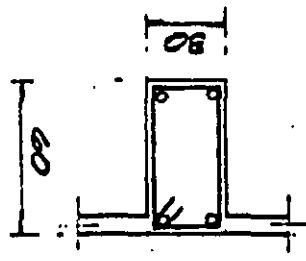
$sv$  EL MAYOR DE  $\begin{cases} \phi \text{ MAX} \\ 2 \text{ cm.} \end{cases}$

PAQUETES DE BARRAS A CONDICION QUE ESTEN EN UNA ESQUINA DE ESTRIBO

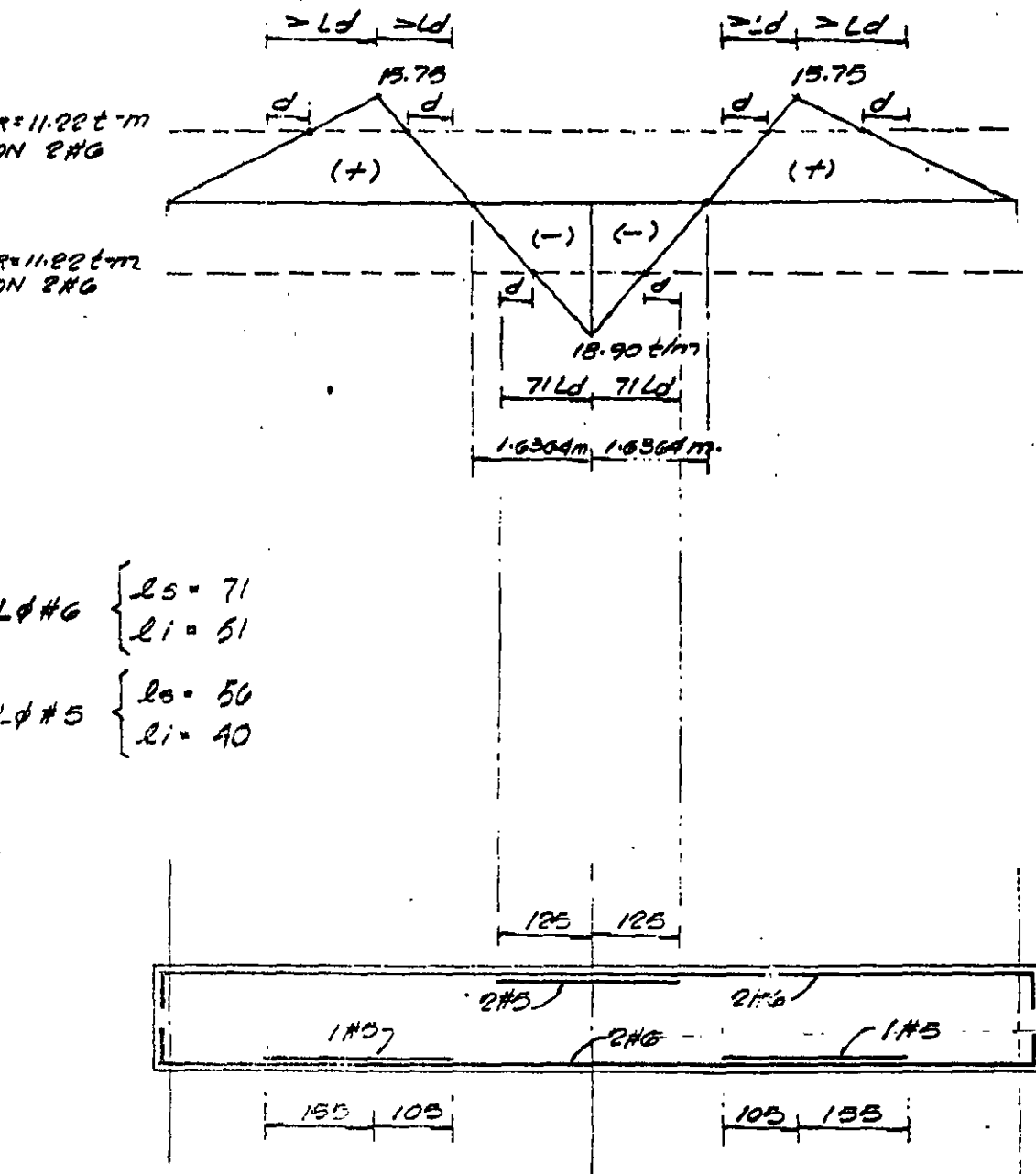
2 VARILLAS EN TRABES Y  
3 EN COLUMNAS (MAX)



$f_c = 1.4$   
 $f_r = 0.9$  (FLEXION)  
 $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$   
 $f_c = 200 \text{ kg/cm}^2$   
 $h = 60 \text{ cm.}$   
 $r = 5 \text{ cm.}$   
 $d = 55 \text{ cm.}$   
 $b = 30 \text{ cm.}$   
 $P = 12 \text{ ton.}$   
 DATOS



# DIAGRAMA DE MOMENTO FLEXIONANTE





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***

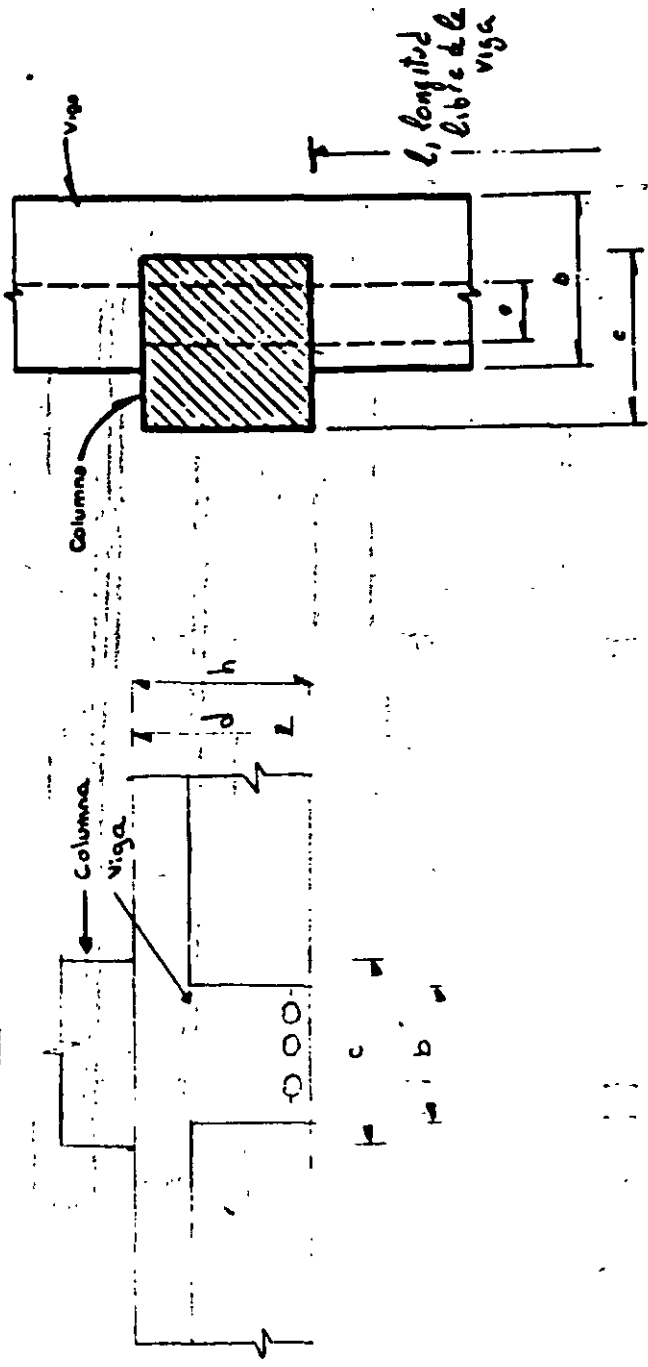
**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**REQUISITOS DE DUCTILIDAD PARA  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO**

**DR. ROBERTO MELI PIRALLA  
PALACIO DE MINERÍA  
AGOSTO DE 1998**



a) Requisitos Generales

$$l/b \leq 35$$

b) Requisitos para marcos disipables

$$b \geq 25 \text{ cm}$$

$$b \leq c$$

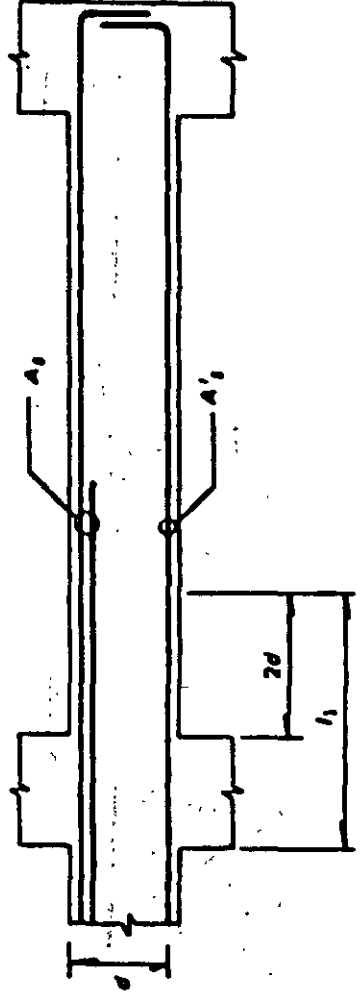
$$h/b \leq 3$$

$$e \leq 0.1c$$

$$l/b \leq 30$$

$$l/d \geq 4$$

Requisitos generales para vigas de marcos de concreto.



### a) Requisitos generales

$A_s$  y  $A_s' \geq 0.7 \frac{\sqrt{f_c}}{f_y} b d$  , en zonas donde aparezcan tensiones

$A_s, A_s' \leq 0.75 A_{sb}$  (área de refuerzo correspondiente a fallas balanceadas)

### b) Requisitos para marcos dúctiles

$A_s, A_s' \geq 0.7 (\sqrt{f_c} / f_y) b d$ , en toda la longitud de la viga

$A_s, A_s' \leq 0.75 A_{sb}$

Mínimo dos barras #4 en toda la longitud y en ambas leñas

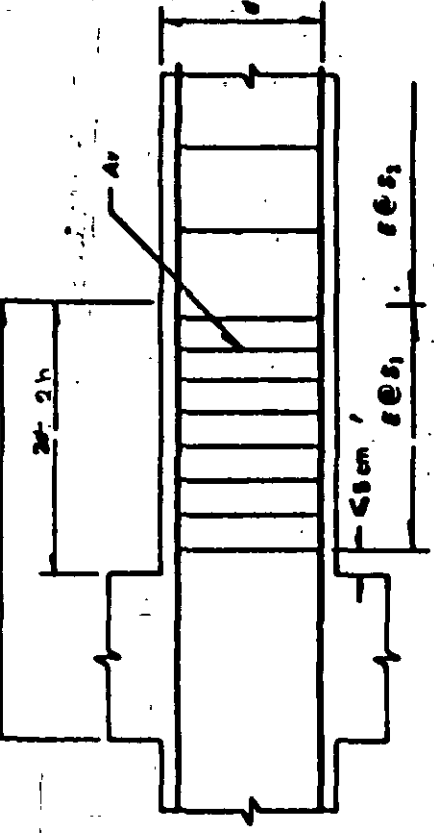
No se admiten paquetes de más de dos barras

El momento resistente positivo en  $L_1$  no será menor que la mitad del momento resistente negativo.

No puede haber traslapes, ni corte del refuerzo longitudinal en  $L_1$

Todo el refuerzo de tensión,  $A_s$ , necesario por sismo deberá pasar por el núcleo de la columna

En toda sección de la viga deberá proporcionarse una resistencia a momento negativo y positivo no menor que una cuarta parte de la máxima que se tiene en los extremos de la viga



### a) Requisitos generales

No se tendrá en cuenta estribos:

- que formen un ángulo con el eje de la pieza  $< 45^\circ$
- Ni barras dobladas en que dicho ángulo sea  $< 30^\circ$

Suministros refuerzo mínimo por tensión diagonal cuando

si  $V_u < V_{cr}$ ,  $\phi \geq \#2$  @  $0.5d$  (Se colocará a partir de toda viga o viga con columna o muro hasta  $0.25$  del dero correspondiente)

$$\text{si } V_u > V_{cr}, \quad s = \frac{F_r A_v f_y d (\text{Sen } \theta + \text{Cos } \theta)}{V_u - V_{cr}} \leq \frac{F_r A_v f_y}{3.5 b}$$

NOTA: en secciones circulares se cambia  $d$  por el diámetro

$$s \geq 5 \text{ cm}$$

$$V_{cr} \leq V_u \leq 1.5 F_r b d \sqrt{f_c'} \quad s \leq 0.6d$$

$$1.5 F_r b d \sqrt{f_c'} < V_u \quad s \leq 0.25d$$

En ningún caso se permitirá que  $V_u > 2 F_r b d \sqrt{f_c'}$

Cuando el refuerzo consiste de 1 solo estribo o grupo de barras paralelas dobladas en una misma sección, su área se calculará

$$A_v = \frac{V_u - V_{cr}}{F_r f_y \text{Sen } \theta}$$

, en este caso no se admitirá  $V_u > 1.5 F_r b d \sqrt{f_c'}$

## b) Requisitos para marcos dúctiles

### 1) Refuerzo Transversal para confinamiento

Estribas # 2.5 ó mayores

En la zona de los estribos deberán ser cerrados y con un ángulo de 135° se indica en la fig. 10.4. La separación no deberá exceder de:

$$S_1 \leq \begin{cases} 8 \text{ diámetros de la barra longitudinal mayor} \\ 24 \text{ diámetros del estribo} \\ 30 \text{ cm} \\ d/4 \end{cases}$$

Además al menos una de cada dos barras longitudinales de periferia deberá estar abrazada por la esquina de un estribo.

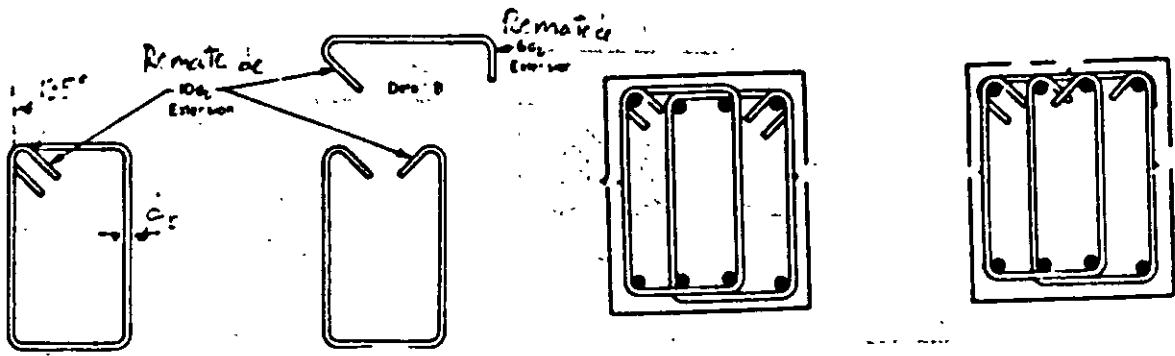
### 2) Requisitos por cortante.

Fuera de la altura estribos a una separación  $s_1 \leq d/4$   
Estribas verticales cerradas de una pizca.

$$D_s \geq 2.5$$

$$V_{oismo} \geq \frac{V_u}{2} \rightarrow V_{ca} = 0$$

Fig. 10.3 Requisitos para refuerzo transversal de vigas de marcos de concreto



- a) Estribo cerrado con remate a 135°
- b) Estribo cerrado de dos piezas
- c) Estribos cerrados dobles
- d) Estribos cerrados con pieza de remate

Fig 10.4 Estribos para confinamiento (de Código ACI)

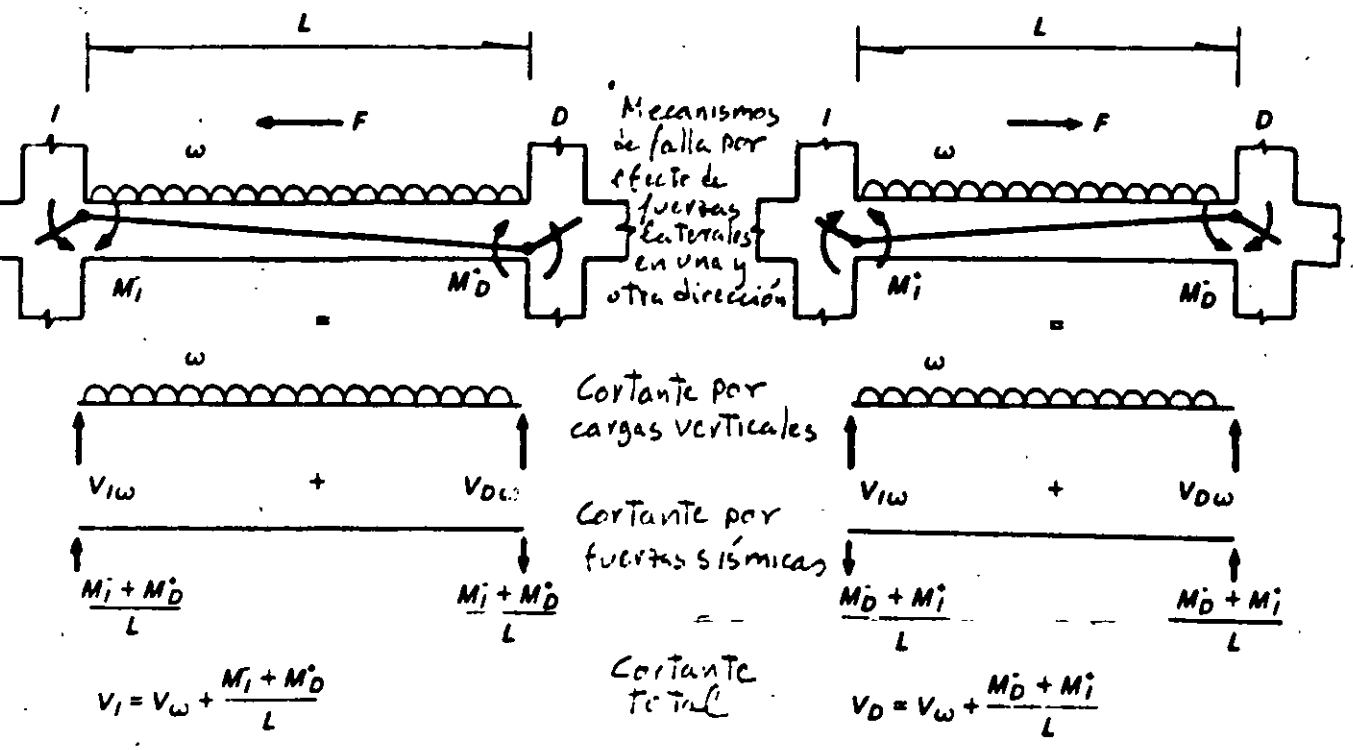
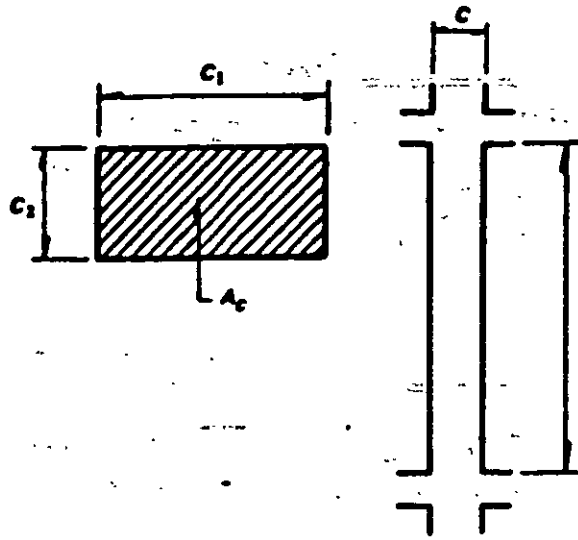


Fig 10.5 Determinación de las fuerzas cortantes de diseño para vigas de marcos dúctiles de concreto





Requisitos generales

$$c_1, c_2 \geq 20 \text{ cm}$$

$$c_1/c_2 \leq 4$$

Requisitos adicionales para marcos dúctiles

$$c_1, c_2 \geq 30 \text{ cm}$$

$$A_c \geq \frac{P_u}{0.5f_c}$$

$$c_1/c_2 \leq 2.5$$

$$l/c \leq 15$$

Fig 10.6 Requisitos geométricos para columnas de marcos de concreto

## I.- REFUERZO LONGITUDINAL

En la unión de la columna que ataraca la unión con la viga debe colocarse el mismo ref. transversal que en la. Si el nudo está confinado

por cuatro traves que llegan a él y el ancho de cada una es al menos igual a 0.75 veces el ancho respectivo de la columna, puede usarse la mitad del refuerzo transversal mínimo.

a) Requisitos generales.

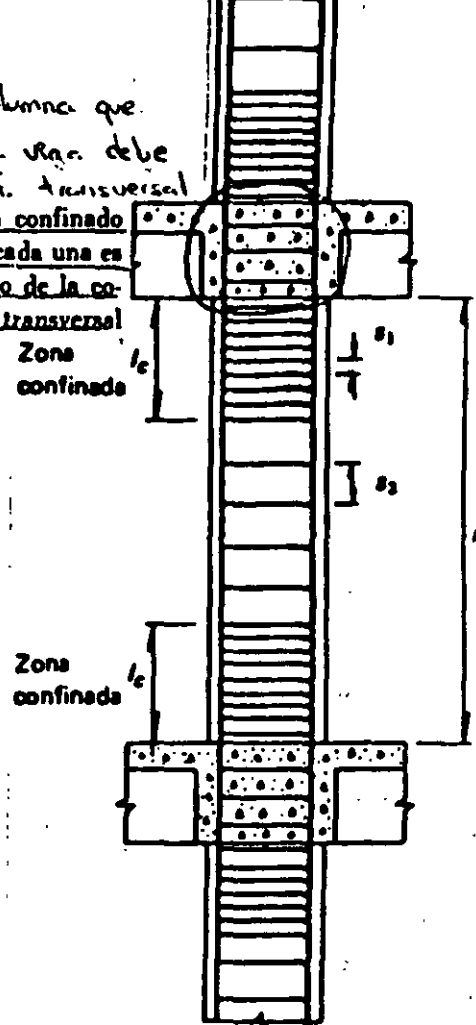
$$\frac{20}{f_y} \leq \rho \leq 0.06$$

Mínimo 4 barras en columnas rectangulares y 6 en circulares

b) Requisitos para marcos de detalles

$$0.01 \leq \rho \leq 0.04$$

Paquetes de no más de dos barras  
Terminales solo en la mitad central de la altura libre de la columna



$l_c >$   
 •  $1/6$   
 • 60 cm  
 •  $C_1, C_2$  (ver figura 9.5) 10.6

## II.- REFUERZO TRANSVERSAL

El refuerzo transversal de toda columna no será menor que el necesario por resistencia a fuerza cortante y torsión, en su caso.

En la parte inferior de columnas de planta baja este refuerzo debe llegar hasta media altura de la columna, y debe continuarse dentro de la cimentación al menos en una distancia igual a la longitud de desarrollo en compresión de la barra más gruesa

a) Requisitos generales

$$S_2 \leq \begin{cases} \frac{250 d_b}{\sqrt{f_y}} & d_b - \phi \text{ más delgado} \\ 48 d_u & d_u - \phi \text{ estribo} \\ c_1/2, c_2/2 \end{cases}$$

$S_1 \leq$  la mitad de los límites para  $S_2$

b) Requisitos para marcos de detalles

El refuerzo transversal no debe ser de grado mayor que 42.  
 $d_v \geq \#3$

Refuerzo Transversal mínimo:

$$S_1 \leq \begin{cases} 10 \text{ cm} \\ \frac{C_{\text{menor}}}{4} \end{cases}$$

$S_1$  - Mismos límites que para el caso general.

$S_2$  - Igual que para requisitos generales

2) Fuerza cortante.

Si  $P_u < \frac{A_g f'_c}{20}$  (Incluyendo efectos sísmo)

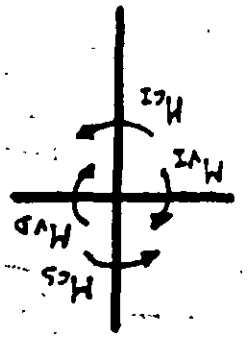
$$V_{\text{sismo}} \geq \frac{V_u}{2} \rightarrow V_{cr} = 0$$

Fig. 10.7 Requisitos de refuerzo para columnas de marcos de concreto.

Fig. 10? Procedimiento para la revisión de la capacidad en flexocompresión de columnas de marcos dúctiles de concreto

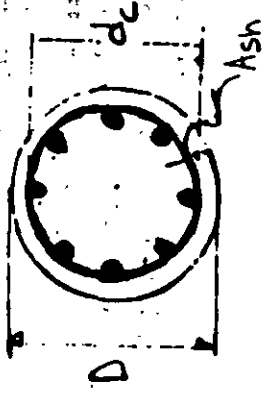
El momento resistente de la columna se calcula para la carga axial que le corresponde a la columna por efecto de carga vertical más el doble de lo que se genera por efecto de las fuerzas sísmicas actuando en la dirección correspondiente al signo de los momentos flexionantes considerados

$\sum M_c = M_{cS} + M_{cI}$ , es la suma de los momentos flexionantes que deben ser capaces de resistir los extremos de las columnas (superiores e inferiores) que llegan a dicho nudo



$\sum M_v = M_{vD} + M_{vI}$ , es la suma de los momentos flexionantes resistentes (negativo de un lado y positivo del otro) de los extremos de las vigas que llegan a un nudo

$$\sum M_c \geq 1.5 (\sum M_v)$$



Mínimo 6 barras longitudinales

Ref. Transversal  $\phi \geq 10.3$

El acero de la hélice  $\leq$  grado 42

$$A_{sh} \geq 0.11 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} d_c s$$

$$A_{sh} \geq 0.12 \frac{f'_c d_c s}{f_y}$$

$$l_c \geq \begin{cases} D \\ h/6 \\ 60 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s_2 \leq 7 \text{ cm y } \geq 1.5 \text{ tamaño agregado}$$

Los traspases tendrán 1.5 vueltas

Los hélices se anclarán en los extremos de la columna mediante 2.5 vueltas

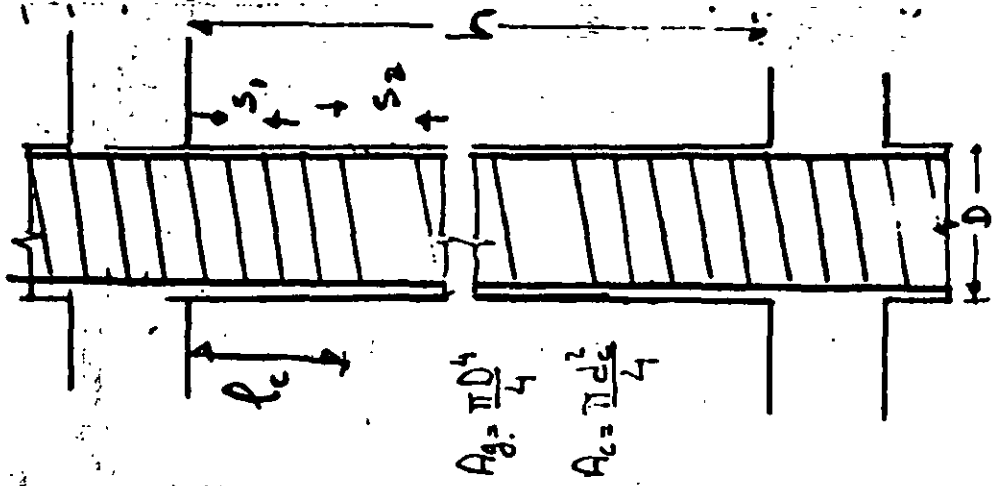
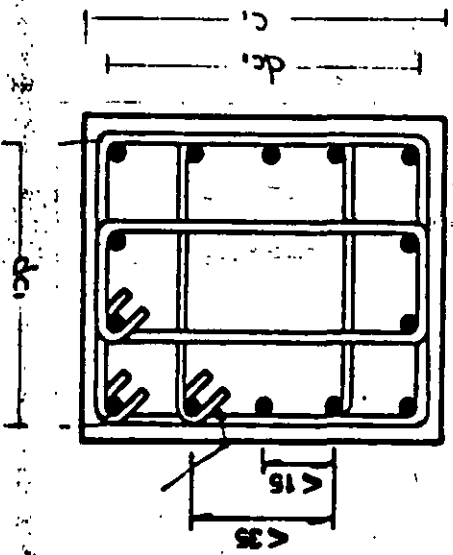


Fig 10.9 Requisitos para columnas zunchadas

Fig. 10.10 Requisitos de distribución de refuerzo en columnas de estribos.

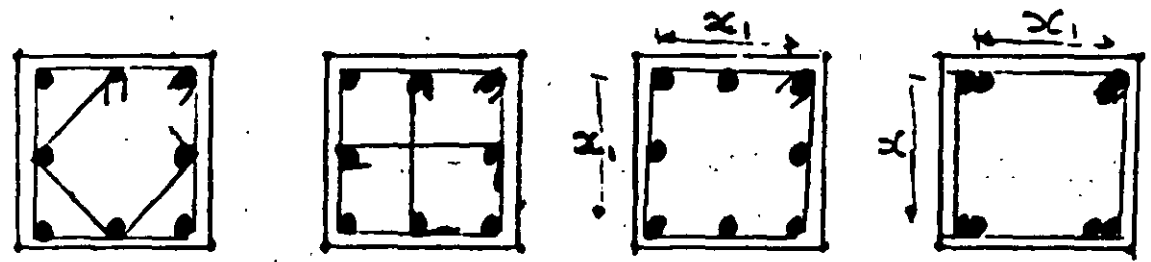
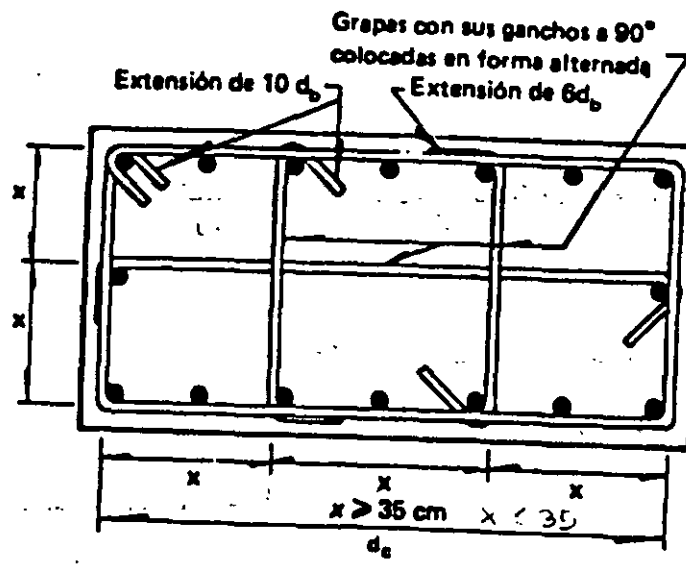


$\Sigma A_v$  = suma de áreas de todos las ramas de estribos en la direc. en la considerada

$$\Sigma A_v \geq 0.19 \frac{f'_c d_c s}{f_y}$$

$$\Sigma A_v \geq 0.3 \left( \frac{A_c}{A_g} - 1 \right) \frac{f'_c d_c s}{f_y}$$

10.  
**Figura 9.9** Combinaciones de estribos y  
 grapas admisibles para confinamiento de  
 columnas, según el Reglamento ACI 83.



No son aconsejables  
 Admisibles si  $x_1 \leq 30$

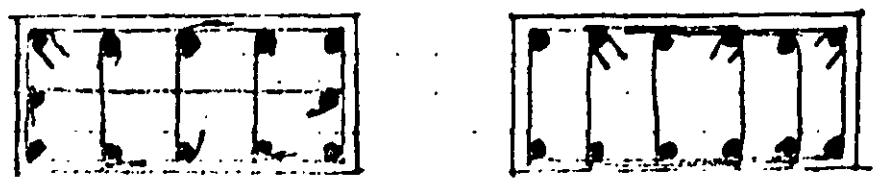
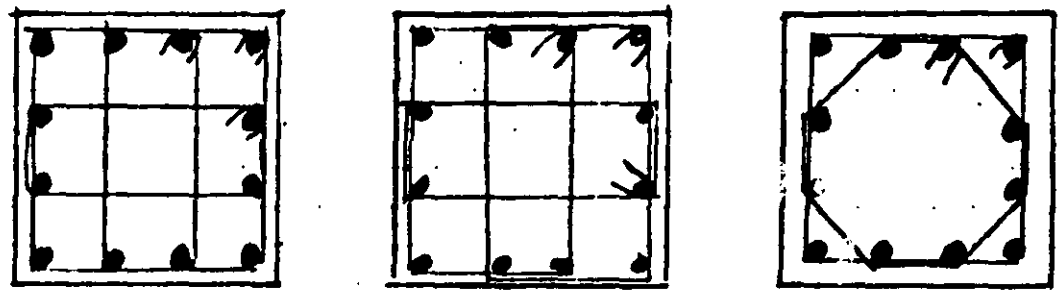
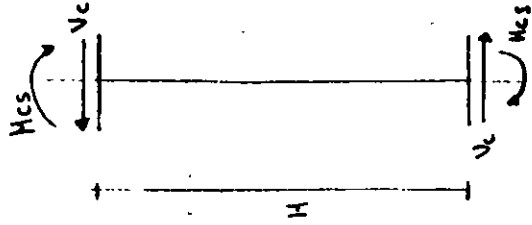


Fig. 9.10 - Arraigles admisibles de refuerzo en columnas

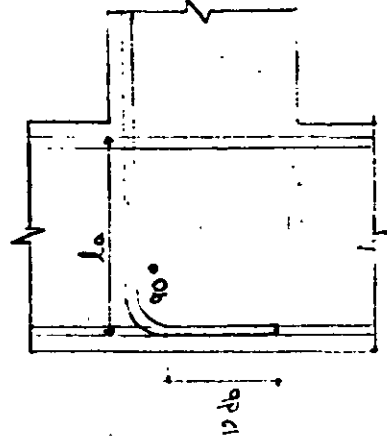


$$N_c = \frac{M_{cs} + H_{cs}}{H}$$

$$M_c > 1.5(\Sigma M_u)$$

- En el extremo inferior de columnas de planta baja, se usará el momento resistente de diseño de la columna obtenido con la carga axial de diseño que conduzca al mayor momento resistente.
- En el extremo superior de columnas del último entrepiso se usará  $1.5 \sum M_u$ .

Fig. 10.14 Procedimiento para la revisión de la capacidad por cortante de las columnas de marcos dúctiles.

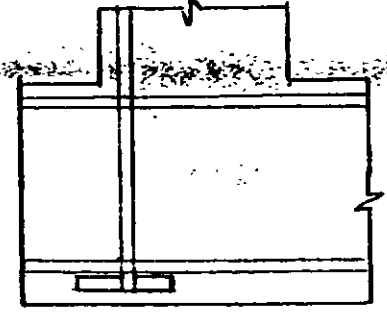
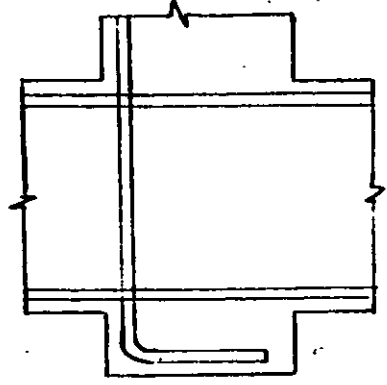


$$l_0 \geq \frac{0.076 f_y d_b}{\sqrt{f_c}}$$

15 cm

8 db

NOTA: 30 % mayor en concreto ligero



a) Anclaje con gancho extremo

b) Vrga con saliente para proporcionar la longitud de anclaje necesaria

c) Anclaje mecánico

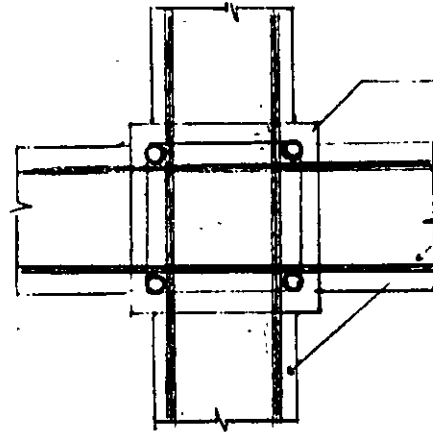
Fig. 10.15 Anclaje del refuerzo longitudinal en vigas extremas de marcos dúctiles



# UNION VIGA-COLUMNA

## Marcos Dúctiles

### 1) Requisitos generales.



Columna

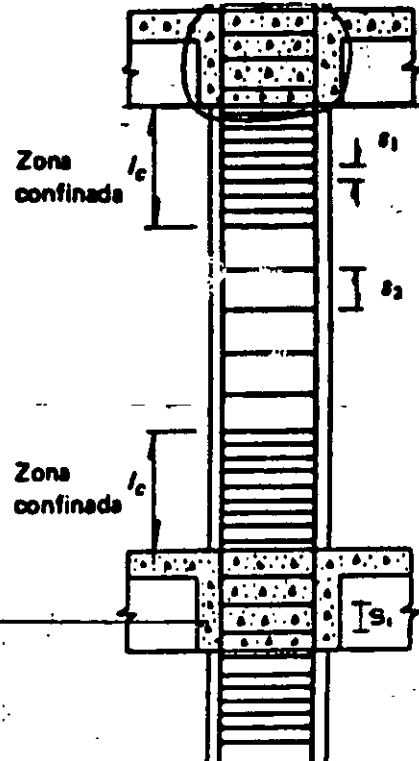
Refuerzo longitudinal de las vigas.

El refuerzo longitudinal de las vigas que llegan a la unión debe pasar dentro del núcleo de la columna.

### 1) Refuerzo Transversal

- El refuerzo transversal no debe ser de grado mayor que el 42.
- Las barras pueden ser de espesor de  $\phi \geq \text{No. 3}$
- Puede emplearse con grupos del mismo  $\phi$  del estibo.

$$S_1 \leq \begin{cases} 0.25 C_{\text{min}} \\ 10 \text{ cm} \end{cases}$$



Zona confinada

Zona confinada

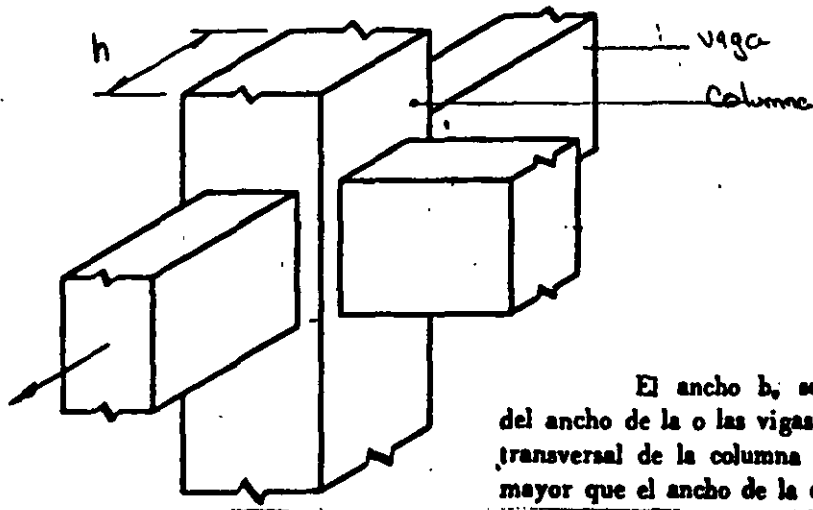
UNION VIGA-COLUMNA

Si el núcleo está confinado por 4 traveses que llegan a él y el ancho de cada una es al menos

c) Resistencia a fuerza cortante.

La fuerza cortante se calculará en un plano horizontal a media altura del nudo.

en todos los miembros  $V_u = 5.5 F_u \sqrt{F_c'} b_e h$   
en los nudos  $V_u = 4.5 F_u \sqrt{F_c'} b_e h$



d) Ancho del refuerzo.

Los diámetros de las barras de vigas y columnas que pasen rectos a través de un nudo deben seleccionarse de modo que se cumplan las relaciones siguientes:

$$h(\text{col})/d_b(\text{barras de viga}) \geq 20$$
$$h(\text{viga})/d_b(\text{barras de col.}) \geq 20$$

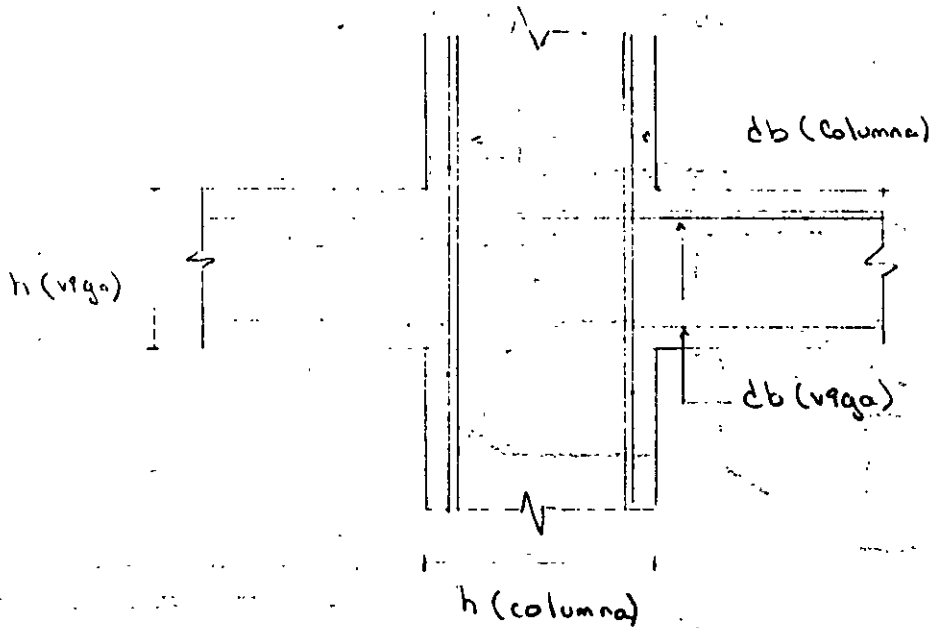
$h(\text{col.})$  es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de viga consideradas

Es en la columna superior del nudo cumple:

$$\frac{P_u}{A_g f'_c} \geq 0.3$$

Entonces:  $h(\text{viga})/d_b(\text{barras de col.}) \geq 15$

NOTA: también esta relación se cumplirá cuando en la estructura los muros de concreto reforzado resisten más del 50% de la fuerza lateral total.

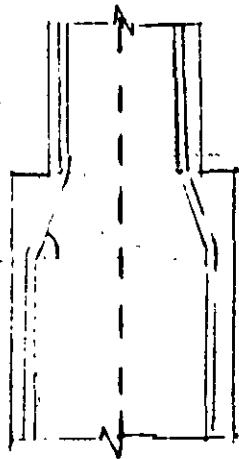


GENERALIDADES:

Como de la misma manera que en la zona de confinamiento (el diámetro del ref. transversal no será menor que las usadas en la columna en las secciones próximas a dicha sección, Si igual que en la zona de confinamiento).

Si la intersección es excéntrica, deben tomarse en cuenta las fuerzas cortantes, momentos y torsiones causados por la excentricidad.

Los muros  $\leq m 1:6$



← eje de columna.

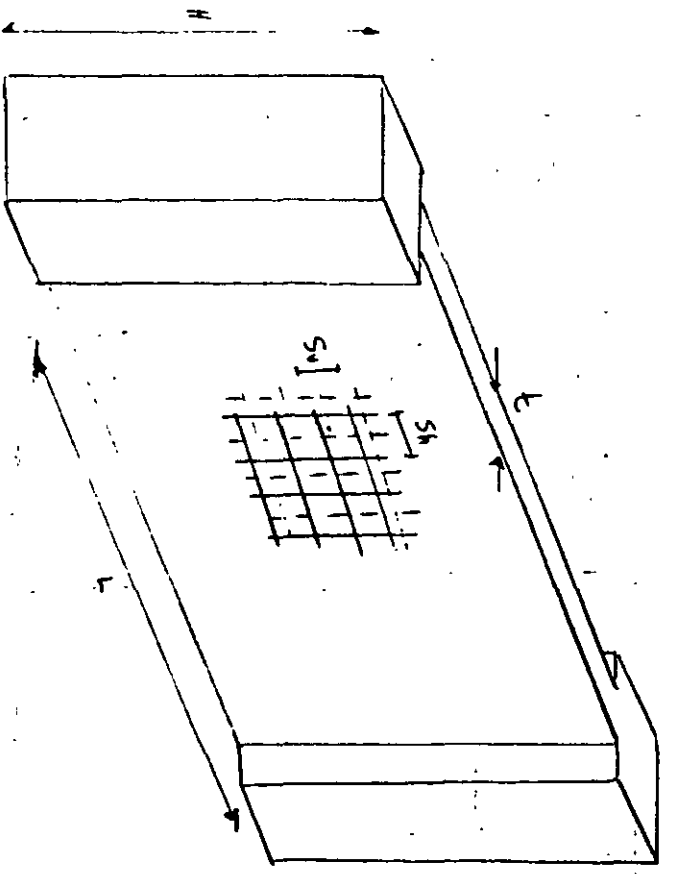


Fig. 10.18 Requisitos geométricos y de refuerzo en muros de concreto

Laminaciones geométricas

$$L/E \leq 70$$

$$E \geq 13 \text{ cms.}$$

0.06 H  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cathódica} \\ \text{no resina} \\ \text{grde lateralmente} \end{array} \right.$

Refuerzo mínimo

$$P_u, P_h \geq 0.0025$$

$$S_v, S_h \leq 35 \text{ cm.}$$

$$P_h = \frac{A_s h}{t_s h} \quad P_u = \frac{A_s v}{t_s h}$$

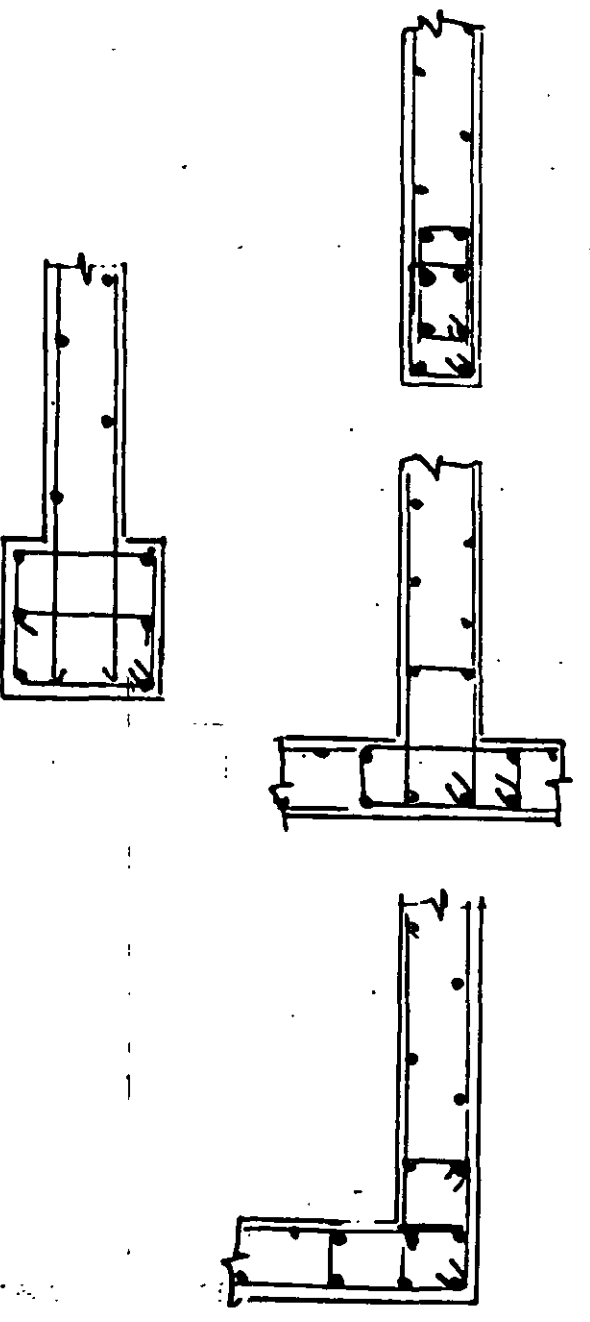
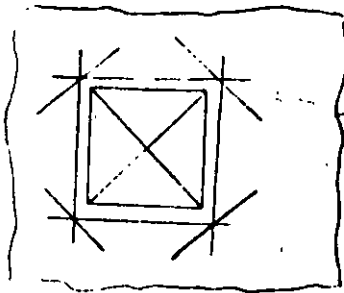
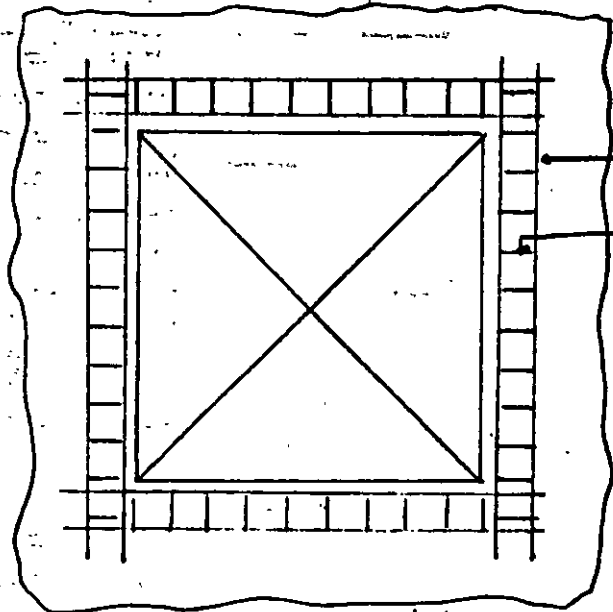


Fig. 10.14 Refuerzo en las extremas de muros



5 #4  
Cada uno.

Refuerzo mínimo alrededor de aberturas pequeñas (la mayor dimensión del vano no supera 80 cm ni una cuarta parte de la dimensión de la pared)



4 #4  
#2 @ 2t

Refuerzo mínimo alrededor de aberturas mayores.

Fig. 10.20 Detalles recomendados de refuerzo alrededor de aberturas en muros de concreto.

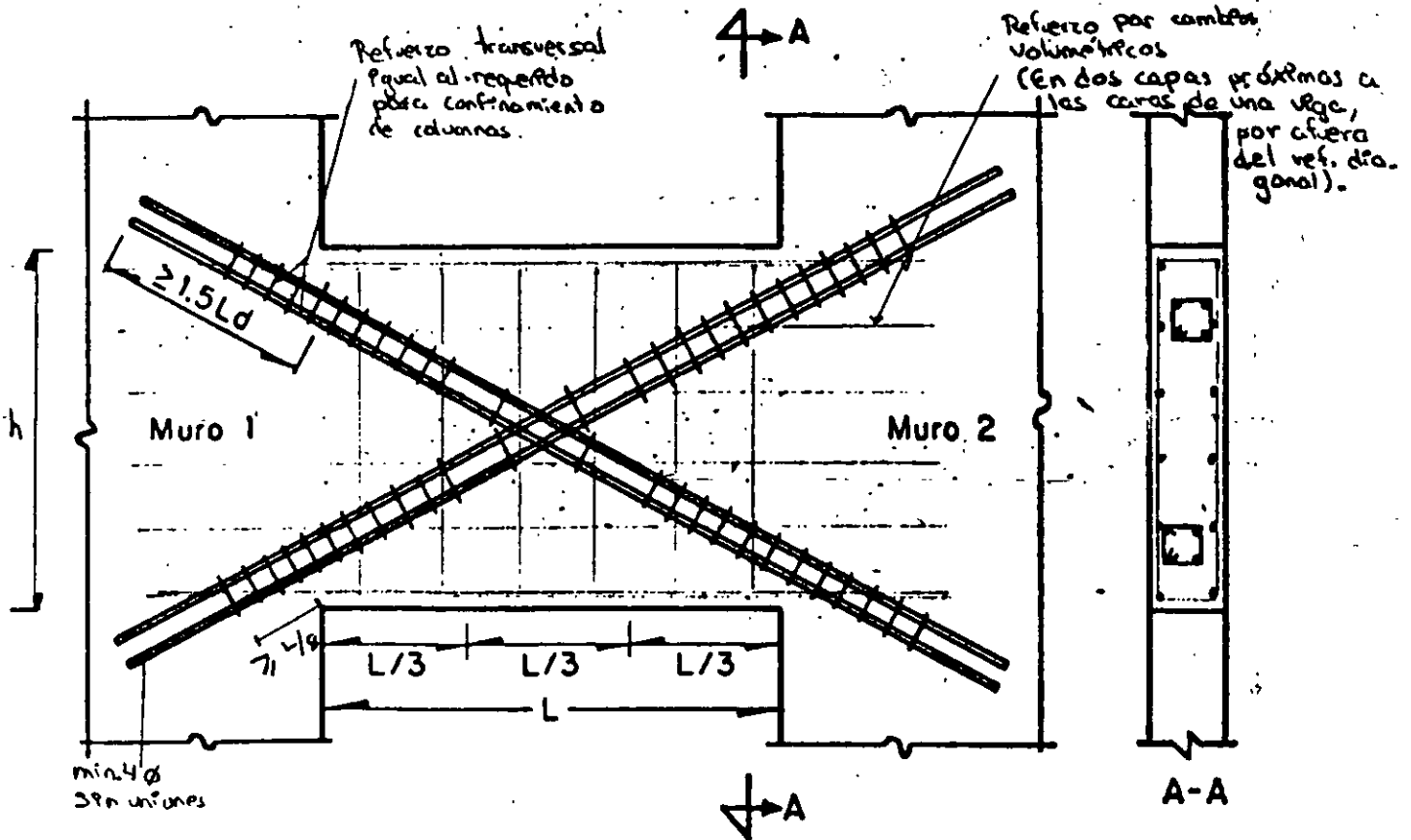
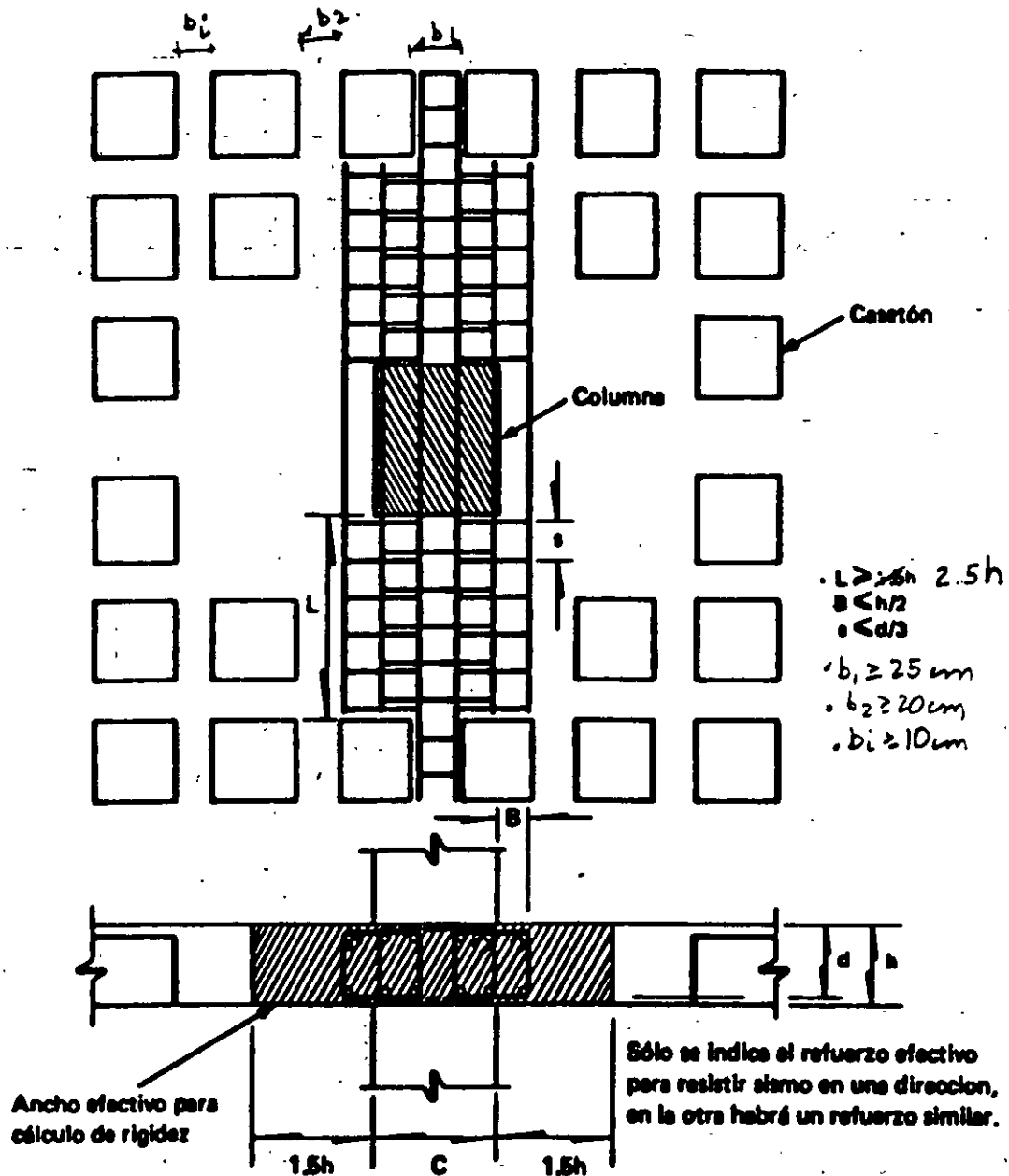


Fig. 10.21 Refuerzo de viga de acoplamiento que une muros de concreto (para  $L/h \leq 2$ )



$$h(\text{columna})/d_b(\text{barras de losa}) \geq 20$$

$$h(\text{losa})/d_b(\text{barras de col.}) \geq 15$$

$h(\text{columna})$  - es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de losa consideradas.

Fig 10.17 Refuerzo en la conexión losa plano-columna



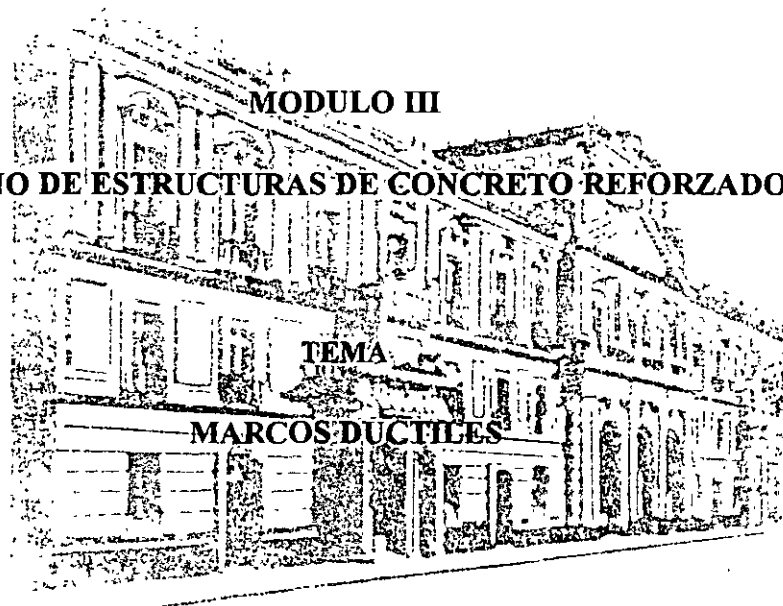
**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

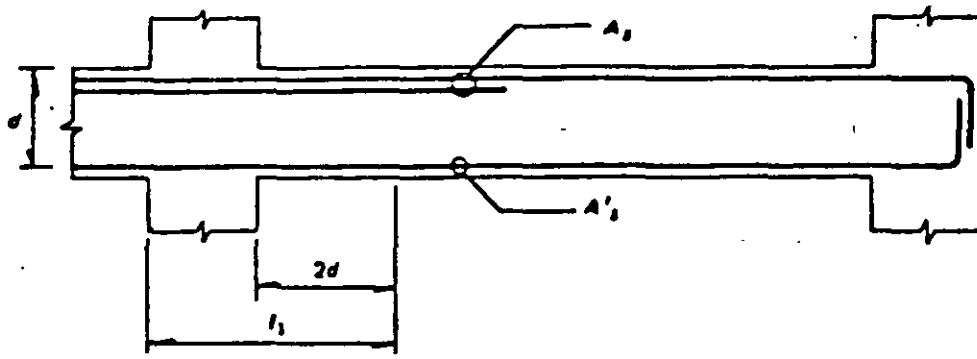
***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***

**MODULO III  
DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**



**M. en I. ROBERTO STARK FELDMAN  
PALACIO DE MINERÍA  
AGOSTO DE 1998**





a) Requisitos generales

$$A_s \text{ y } A'_s \geq 0.7 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} b d, \text{ en zonas donde aparezcan tensiones}$$

$$A_s, A'_s \leq 0.75 A_{sb} \text{ (área de refuerzo correspondiente a falla balanceada)}$$

b) Requisitos para marcos dúctiles

$$A_s, A'_s \geq 0.7 (\sqrt{f'_c} / f_y) b d, \text{ en toda la longitud de la viga}$$

$$A_s, A'_s \leq 0.75 A_{sb}$$

Mínimo dos barras #4 en toda la longitud y en ambos lechos

No se admiten paquetes de más de dos barras

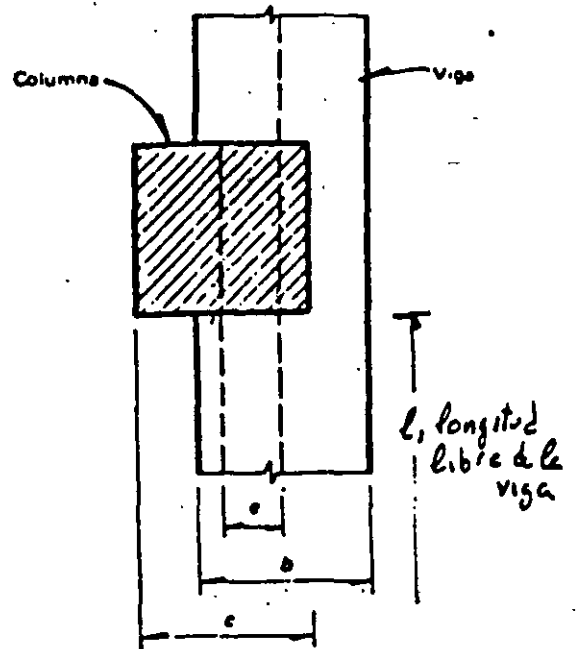
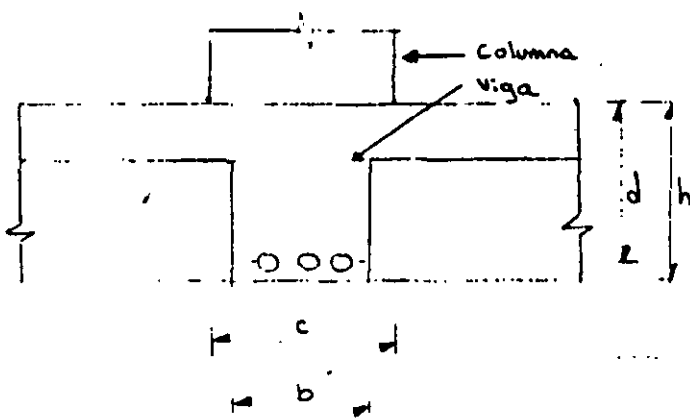
El momento resistente positivo en  $l_1$  no será menor que la mitad del momento resistente negativo.

No puede haber traslapes, ni corte del refuerzo longitudinal en  $l_1$

Todo el refuerzo de tensión,  $A_s$ , necesario por sismo deberá pasar por el núcleo de la columna

En toda sección de la viga deberá proporcionarse una resistencia a momento negativo y positivo no menor que una cuarta parte de la máxima que se tiene en los extremos de la viga

Requisitos para el refuerzo longitudinal de vigas de marcos de concreto.



a) Requisitos Generales

$$l/b \leq 35$$

b) Requisitos para marcos dúctiles

$$b \geq 25 \text{ cm}$$

$$b \leq c$$

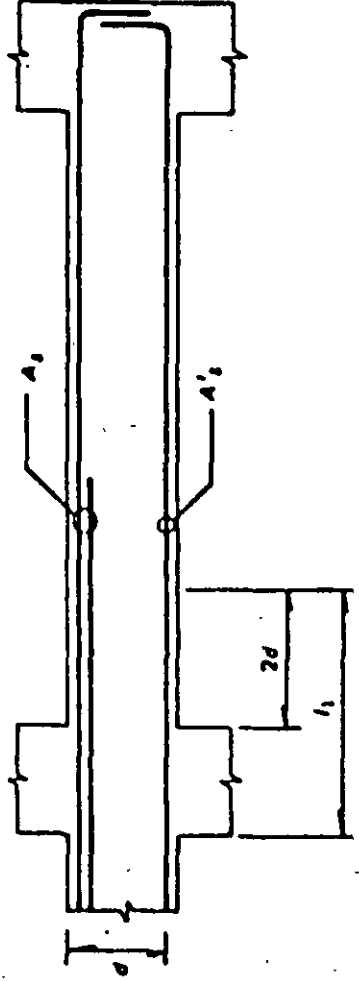
$$h/b \leq 3$$

$$e \leq 0.1c$$

$$l/b \leq 30$$

$$l/d \geq 4$$

Requisitos geométricos para vigas de marcos de concreto.



a) Requisitos generales

$A_s \text{ y } A_s' \geq 0.7 \frac{\sqrt{f_c}}{f_y} b d$  , en zonas donde aparezcan tensiones

$A_s, A_s' \leq 0.75 A_{sb}$  (área de refuerzo correspondiente a falla balanceada)

b) Requisitos para marcas dúctiles

$A_s, A_s' \geq 0.7 (\sqrt{f_c}/f_y) b d$ , en toda la longitud de la viga  
 $A_s, A_s' \leq 0.75 A_{sb}$

Mínimo dos barras #4 en toda la longitud y en ambas leñas

No se admiten paquetes de más de dos barras

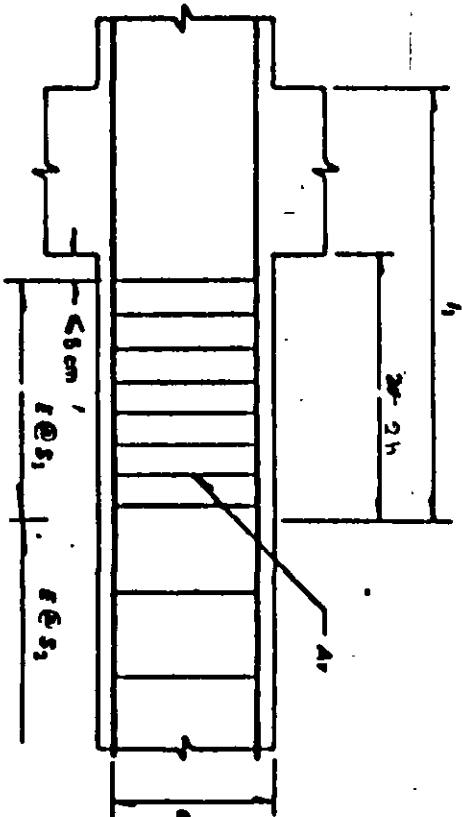
El momento resistente positivo en  $L_1$  no será menor que la mitad del momento resistente negativo.

No puede haber traslapes, ni corte del refuerzo longitudinal en  $L_1$

Todo el refuerzo de tensión,  $A_s$ , necesario por sismo deberá pasar por el núcleo de la columna

En toda sección de la viga deberá proporcionarse una resistencia a momento negativo y positivo no menor que una cuarta parte de la máxima que se tiene en los extremos de la viga

Requisitos para el refuerzo longitudinal de vigas de marcos de concreto.



a) Requisitos generales

Debe ser tendido en cuenta esto:

- que forme un ángulo con el eje de la pieza  $< 45^\circ$
- Ni barras dobladas en que dicho ángulo sea  $< 30^\circ$

Suministrar refuerzo mínimo por tensión diagonal cuando

- si  $V_u < V_{cr}$ ,  $\phi \geq \#2$  @  $0.5d$  (Se colocará a partir de toda unión de viga con columna o muro hasta  $0.25$  del dero correspondiente).

$$\text{si } V_u > V_{cr}, \quad S = \frac{F_a A_v f_y d (\sin \theta + \cos \theta)}{V_u - V_{cr}} \leq \frac{F_a A_v f_y}{3.5 b}$$

NOTA: en secciones circulares se cambia  $d$  por el diámetro.

$$S \geq 5 \text{ cm}$$

$$V_{cr} \leq V_u \leq 1.5 F_a b d \sqrt{f_c'} \quad S \leq 0.6d$$

$$1.5 F_a b d \sqrt{f_c'} < V_u \quad S \leq 0.25d$$

En ningún caso se permitirá que  $V_u > 2 F_a b d \sqrt{f_c'}$

Cuando el refuerzo consiste de 1 solo estribo o grupo de barras paralelas dobladas en una misma sección, su área se calculará

$$A_v = \frac{V_u - V_{cr}}{F_a f_y \sin \theta}$$

## Requisitos para marcos dúctiles

### 1) Refuerzo Transversal para confinamiento

Estribas # 2.5 ó mayores

En la zona L1 los estribas deberán ser cerradas y con remache a  $135^\circ$  se indica en la fig. 10.4. La separación no deberá exceder de:

$$S_1 \leq \begin{cases} 8 \text{ diámetros de la barra longitudinal mayor} \\ 24 \text{ diámetros del estribo} \\ 30 \text{ cm.} \\ d/4 \end{cases}$$

Además al menos una de cada dos barras longitudinales de la periferia deberá estar abrazada por la esquina de un estribo.

### 2) Requisitos por cortante.

Fuera de la zona L1 los estribas a una separación  $s_1 \leq d/2$  los estribas verticales cerrados de una pieza.

$$\phi_s \geq 2.5$$

$$V_{sismo} \geq \frac{V_u}{2} \rightarrow V_{cr} = 0$$

Fig. 10.3 Requisitos para refuerzo transversal de vigas de marcos de concreto

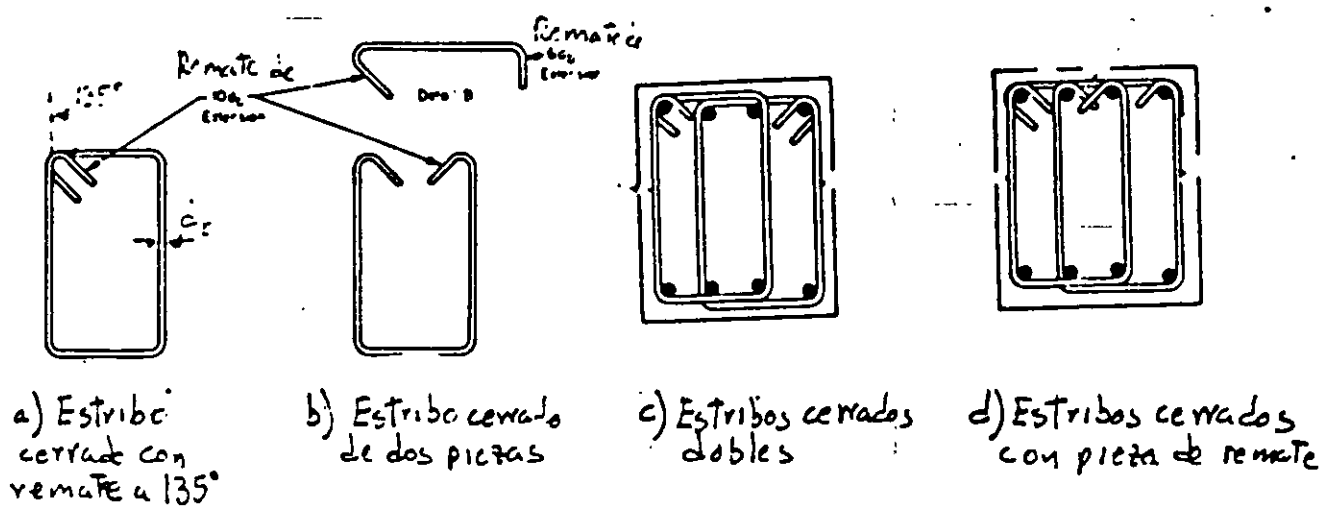


Fig 10.4 Estribos para confinamiento (de código ACI)

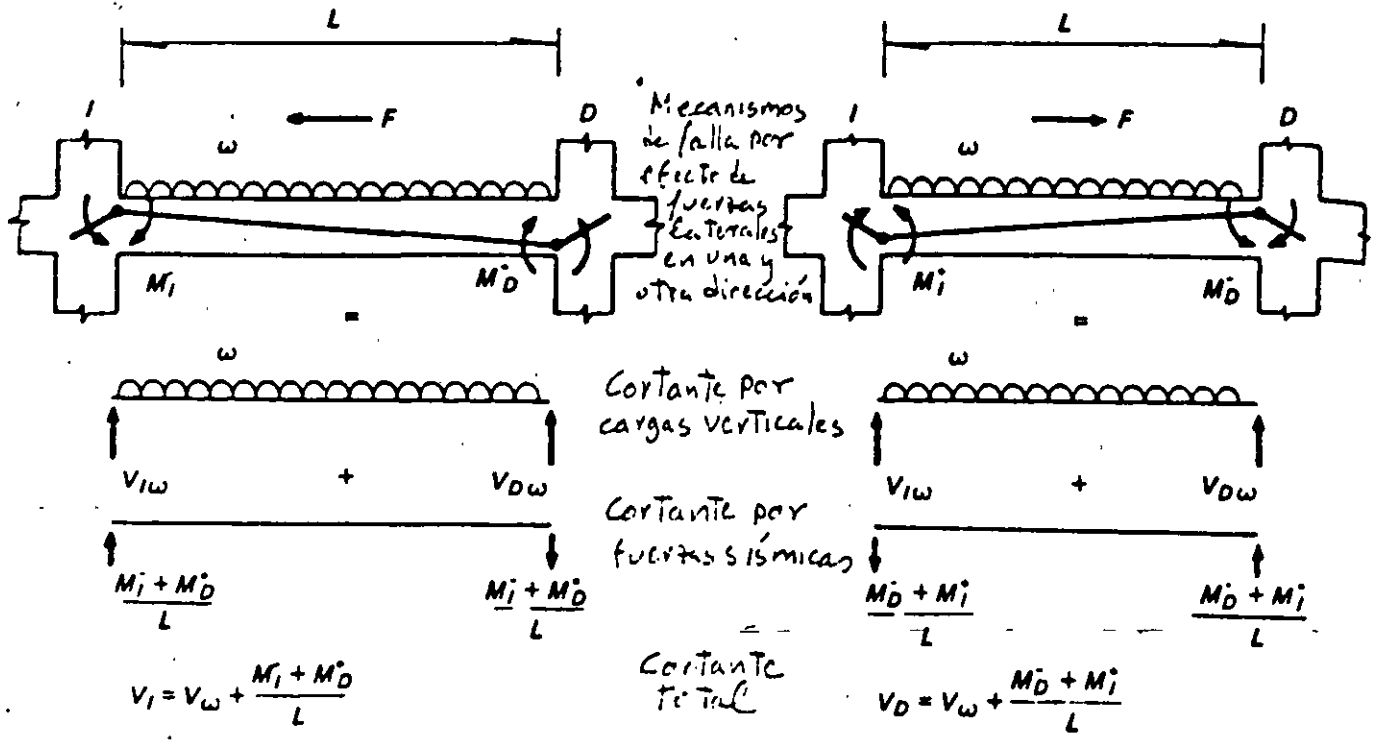
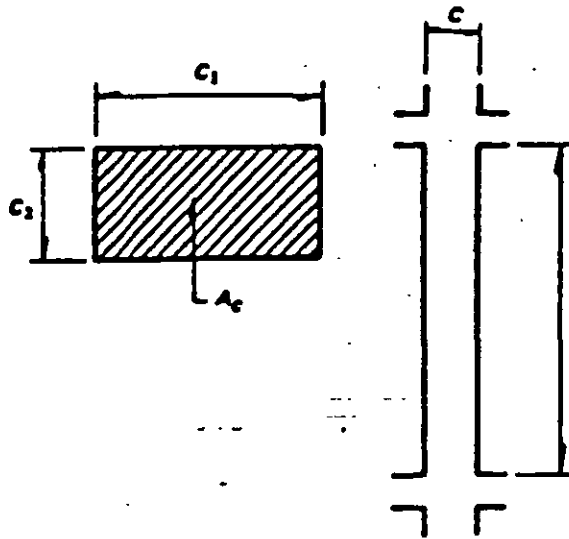


Fig 10.5 Determinación de las fuerzas cortantes de diseño para vigas de marcos dúctiles de concreto



Requisitos generales

$c_1, c_2 \geq 20 \text{ cm}$

$c_1/c_2 \leq 4$

Requisitos adicionales para marcos dúctiles

$c_1, c_2 \geq 30 \text{ cm}$

$A_c \geq \frac{P_u}{0.5f'_c}$

$c_1/c_2 \leq 2.5$

$l/c \leq 15$

Fig 10.6 Requisitos geométricos para columnas de marcos de concreto

## I.- REINFORCING LONGITUDINAL

En la periferia de la columna que cubren la unión con la viga debe colocarse el mismo ref. transversal que en la. Si el nudo está confinado

por cuatro traveses que llegan a él y el ancho de cada una es al menos igual a 0.75 veces el ancho respectivo de la columna, puede usarse la mitad del refuerzo transversal mínimo.

a) Requisitos mínimos

$$\frac{20}{f_y} \leq \rho \leq 0.06$$

Mínimo 4 barras en columnas rectangulares y 6 en circulares

b) Requisitos para marcos dúctiles

$$0.01 \leq \rho \leq 0.04$$

Paquetes de no más de dos barras  
Trislopes solo en la mitad central de la altura libre de la columna

## II.- REFUERZO TRANSVERSAL

El refuerzo transversal de toda columna no será menor que el necesario por resistencia a fuerza cortante y torsión, en su caso.

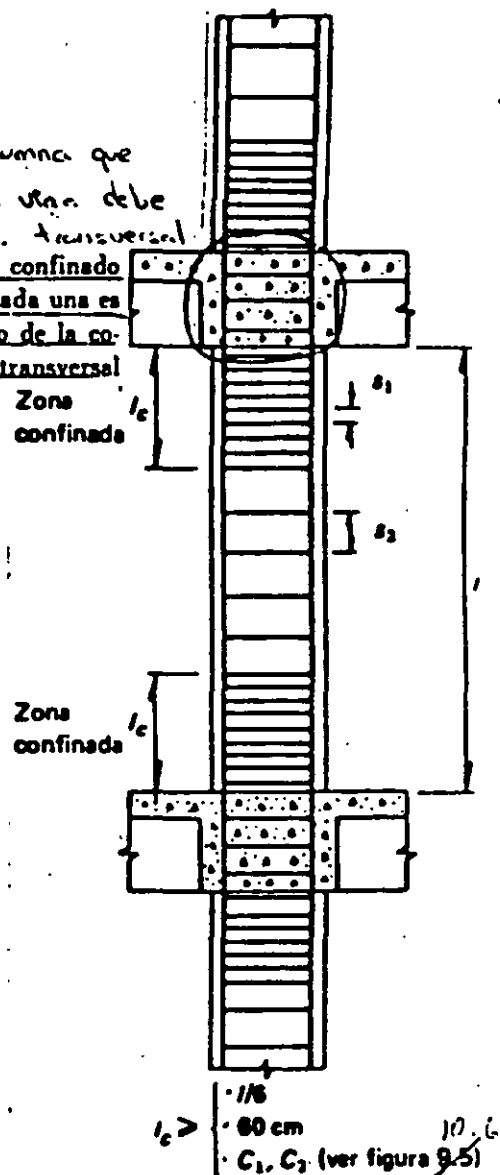
a) Requisitos generales

$$S_2 \leq \begin{cases} \frac{250 d_b}{\sqrt{f_y}} & d_b - \phi \text{ más delgado} \\ 48 d_v & d_v - \phi \text{ estribo} \\ c_1/2, c_2/2 \end{cases}$$

$S_1 \leq$  la mitad de los límites para  $S_2$ .

b) Requisitos para marcos dúctiles

y confinamientos



En la parte inferior de columnas de planta baja este refuerzo debe llegar hasta media altura de la columna, y debe continuarse dentro de la cimentación al menos en una distancia igual a la longitud de desarrollo en compresión de la barra más gruesa



El refuerzo transversal no debe ser de grado mayor que 42.

$$d_v \geq \#3$$

Refuerzo Transversal mínimo:

$$S_1 \leq \begin{cases} 10 \text{ cm.} \\ \frac{C_{\text{menor}}}{4} \end{cases}$$

S<sub>1</sub> - Mismos límites que para el caso general.

S<sub>2</sub> - Igual que para requisitos generales.

2) Fuerza cortante.

S:  $P_u < \frac{A_g f'_c}{20}$  (Incluyendo efectos sísmo)

$$V_{\text{sismo}} \geq \frac{V_u}{2} \rightarrow V_{ca} = 0$$

Fig. 10.7 Requisitos de refuerzo para columnas de marcos de concreto.

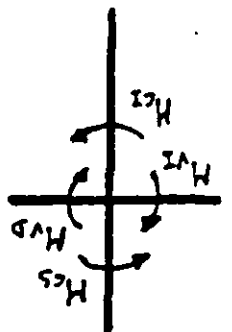
Fig. 10? Procedimiento para la revisión de la capacidad en flexocompresión de columnas de marcos dúctiles de concreto

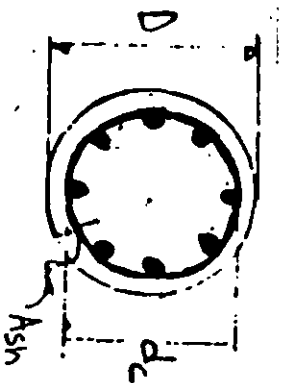
El momento resistente de la columna se calcula para la carga axial que le corresponde a la columna por efecto de carga vertical más el doble de lo que se genera por efecto de las fuerzas sísmicas actuando en la dirección correspondiente al signo de los momentos flexionantes considerados

$\sum M_c = M_{cs} + M_{cs}$ , es la suma de los momentos flexionantes que deben ser capaces de resistir los extremos de las columnas (superior e inferior) que llegam a dicho nodo

$\sum M_v = M_{vb} + M_{vt}$ , es la suma de los momentos flexionantes resistentes (negativo de un lado y positivo del otro) de los extremos de las vigas que llegam a un nodo

$$\sum M_c \geq 1.5(\sum M_v)$$





Mínimo 6 barras longitudinales

Ref. Transversal  $\lambda_s \geq 10.3$

El acero de la hélice  $\leq$  grado 42

$$A_{sh} \geq 0.11 \left( \frac{A_g - 1}{A_c} \right) \frac{f'_c}{f_y} d_c s$$

$$A_{sh} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y} d_c s$$

$$\lambda_c \geq \begin{cases} D \\ h/6 \\ 60 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s_2 \leq 7 \text{ cm y } \geq 1.5 \text{ tamaño agregado}$$

Los Anclajes tendrán 1.5 vueltas

Las hélices se anclarán en los extremos de la columna mediante 2.5 vueltas

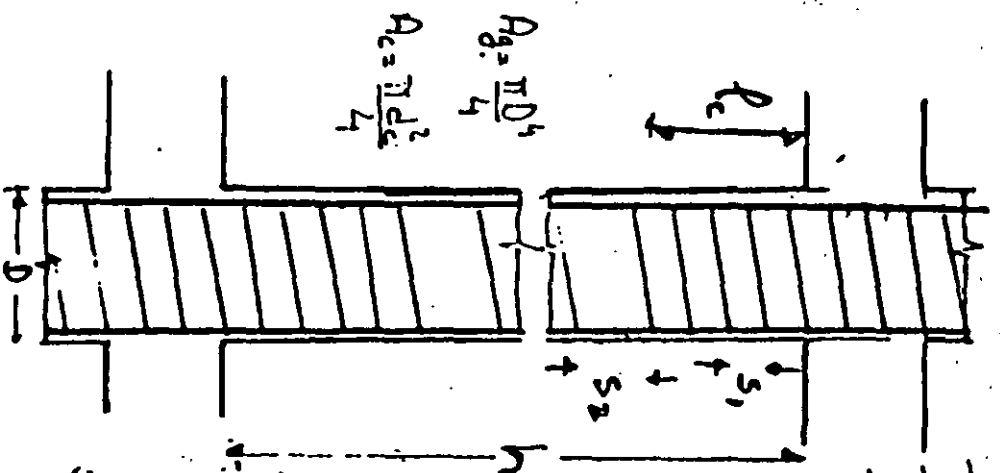


Fig 10.9 Requisitos para columnas zunchadas

$$\Sigma A_u \geq 0.3 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} d_c S_1$$

$$\Sigma A_u \geq 0.19 \frac{f'_c d_c S_1}{f_y}$$

$\Sigma A_u$  = suma de áreas de todas las ramas de estribos en la dirección considerada.

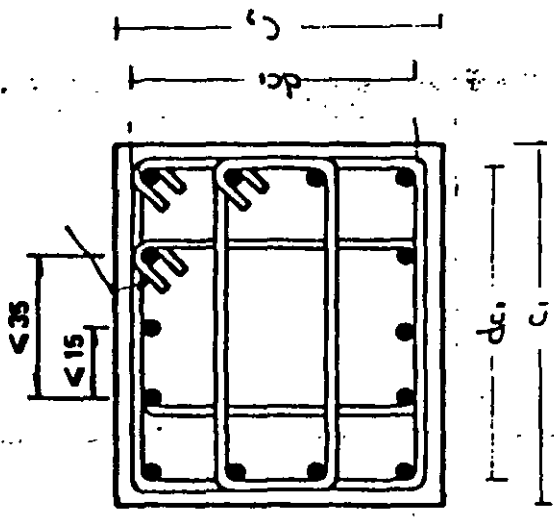
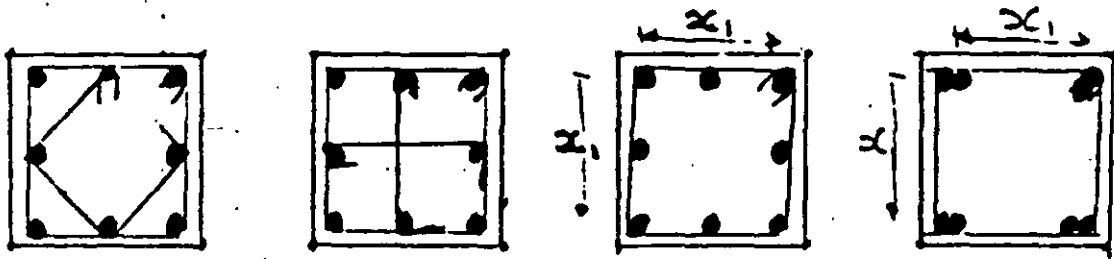
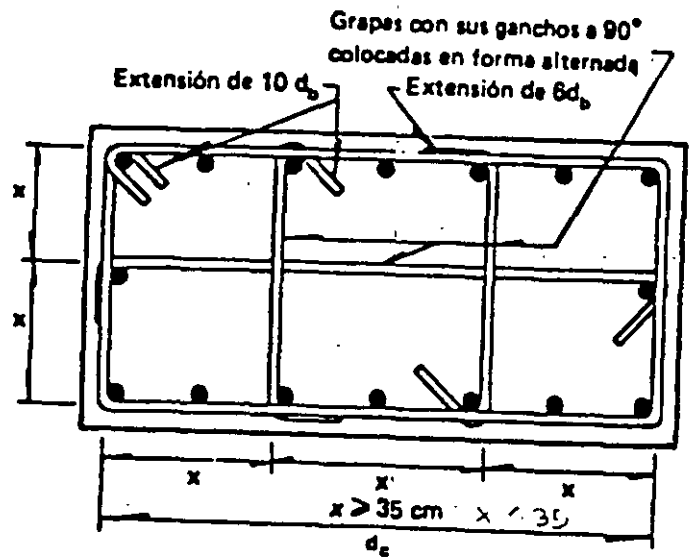


Fig. 10.10 Requisitos de distribución de refuerzo en columnas de estribos.

10.  
**Figura 9.9** Combinaciones de estribos y  
 grapas admisibles para confinamiento de  
 columnas, según el Reglamento ACI 83.



No son aconsejables  
 Admisibles si  $x_1 \leq 30$

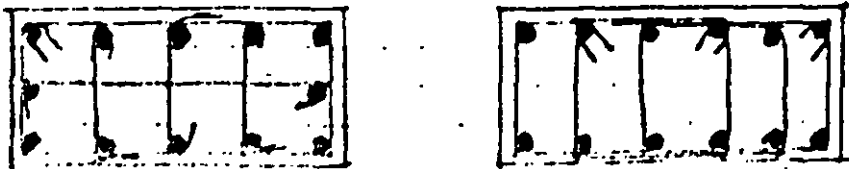
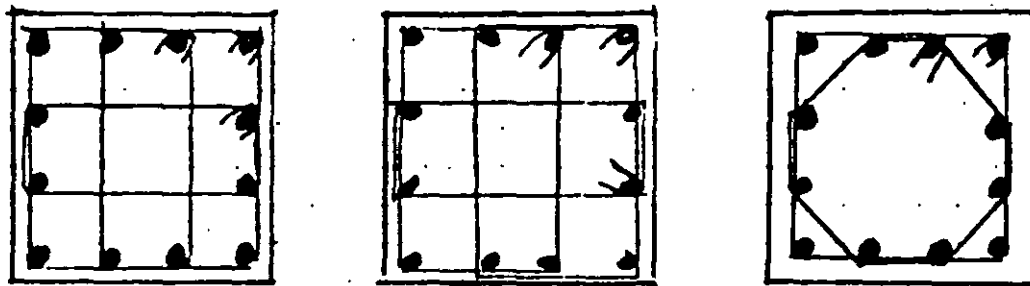
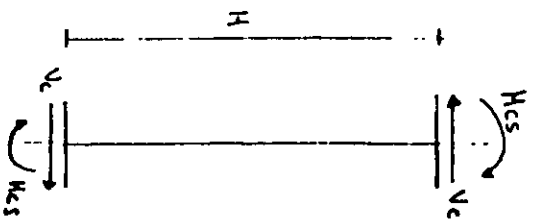


Fig. 9.9 - Arrangos admisibles de refuerzo en columnas  
 de muros y vigas de concreto



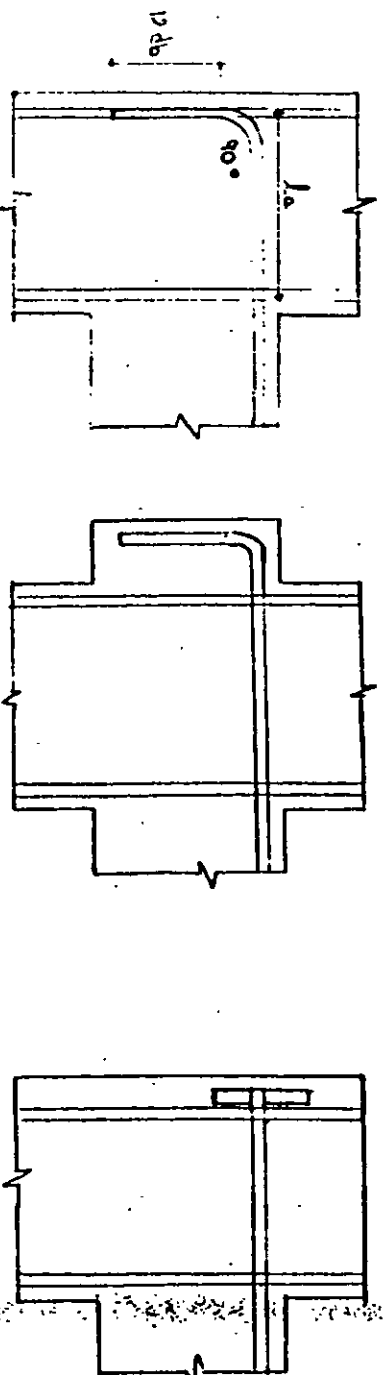
$$N_c = \frac{M_{cs} + H c_s}{H}$$

$$M_c \geq 1.5 (\Sigma H U)$$

- En el extremo inferior de columnas de planta baja, se usará el momento resistente de diseño de la columna obtenido con la carga axial de diseño que conduce al mayor momento resistente.

- En el extremo superior de columnas del último alveo se usará  $1.5 \Sigma H U$ .

Fig. 10.14 Procedimiento para la revisión de la capacidad por cortante de las columnas de marcos dúctiles.



$$L_{a2} \geq \frac{0.076 f_y d_b}{\sqrt{f_c}}$$

15 cm  
8 db

NOTA: 30% por lo en concreto ligero

a) Anclaje con gancho extremo

b) Viga con saliente por proporciónar la longitud de anclaje necesaria

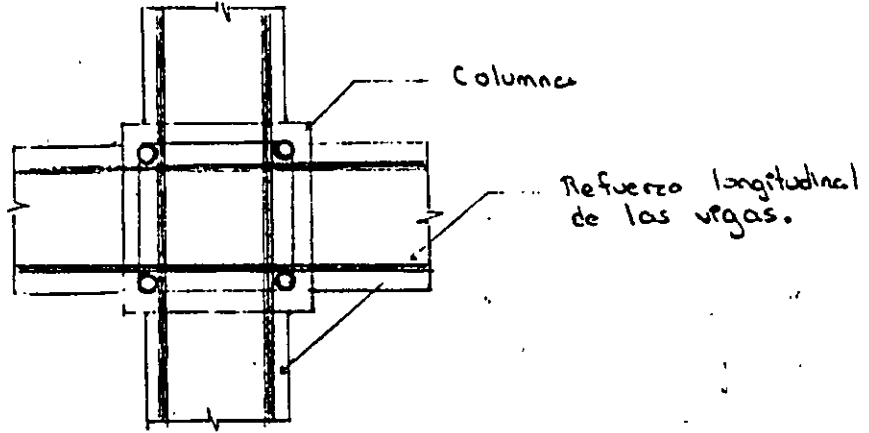
c) Anclaje mecánico

Fig. 10.15 Anclaje del refuerzo longitudinal en Vigas externas de marcos dúctiles.

# UNION VIGA-COLUMNA

## Marcos Discretos

### 1) Requisitos generales.

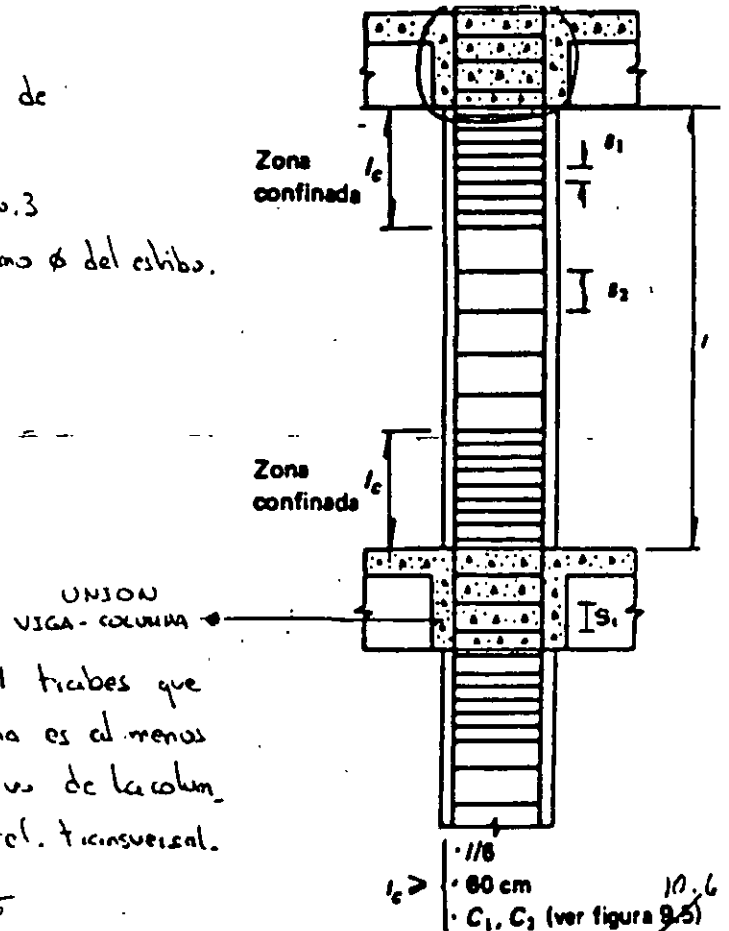


El refuerzo longitudinal de las vigas que llegan a la unión debe pasar dentro del núcleo de la columna.

### 1b) Refuerzo Transversal

- El refuerzo transversal no debe ser de grado mayor que el 42.
- Las barras pueden ser de  $\phi \geq \text{No. 3}$
- Puede emplearse con grupos del mismo  $\phi$  del estibo.

$$s_1 \leq \begin{cases} 0.25 C_{\text{min}} \\ 10 \text{ cm} \end{cases}$$

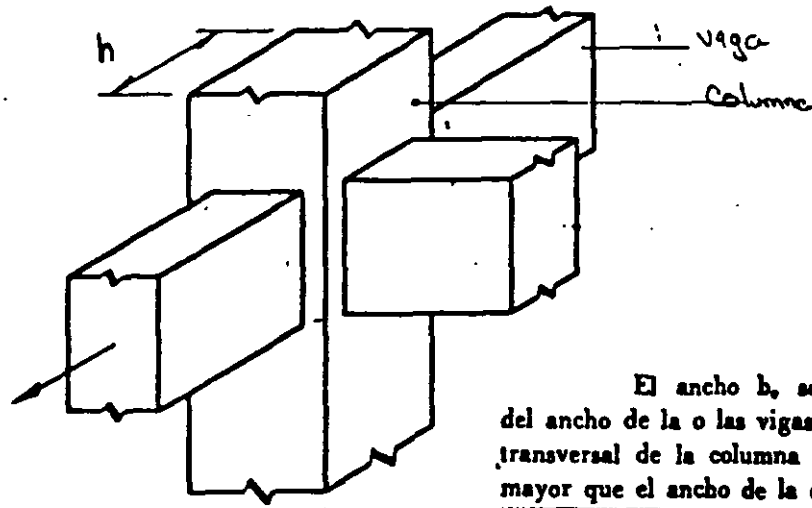


Si el núcleo está confinado por 4 traveses que llegan a él y el ancho de cada una es al menos igual a 0.75 veces el ancho respectivo de la columna, puede usarse la mitad del ref. transversal.

c) Resistencia a fuerza cortante.

La fuerza cortante se calculará en un plano horizontal a media altura del nudo.

en caso empalmados  $V_u = 5.5 F_u \sqrt{F'_c} b_e h$   
 otros casos  $V_u = 4.5 F_u \sqrt{F'_c} b_e h$



d) Ancho del refuerzo.

Los diámetros de las barras de vigas y columnas que pasen verticales a través de un nudo deben seleccionarse de modo que se cumplan las relaciones siguientes:

$$h(\text{col})/d_b(\text{barras de viga}) \geq 20$$

$$h(\text{viga})/d_b(\text{barras de col.}) \geq 20$$

$h(\text{col})$  es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de viga consideradas

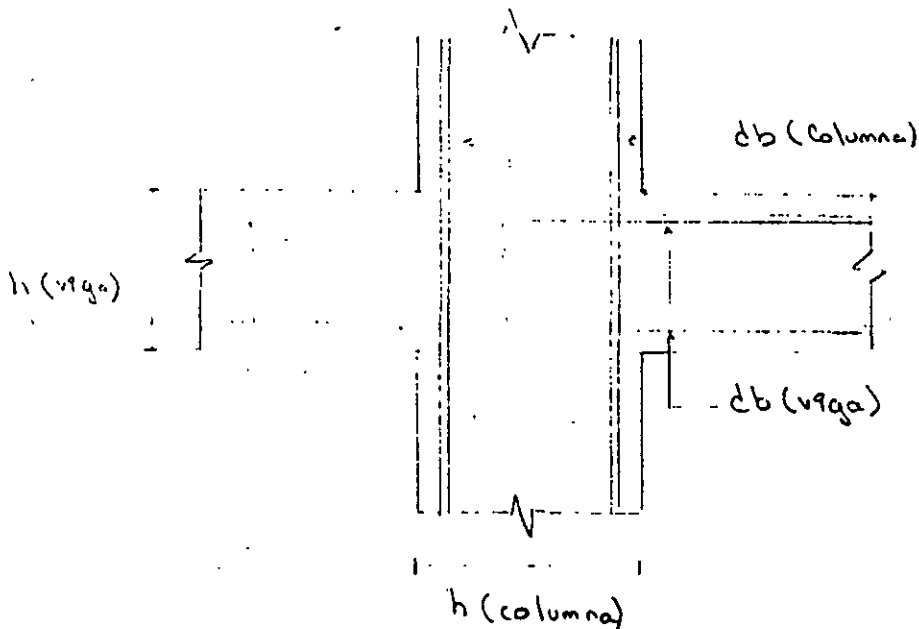
Es en la columna superior del nudo cumple:



$$\frac{P_u}{A_g f'_c} \geq 0.2$$

Entonces:  $h(\text{viga}) / d_b(\text{barias de col.}) \geq 15$

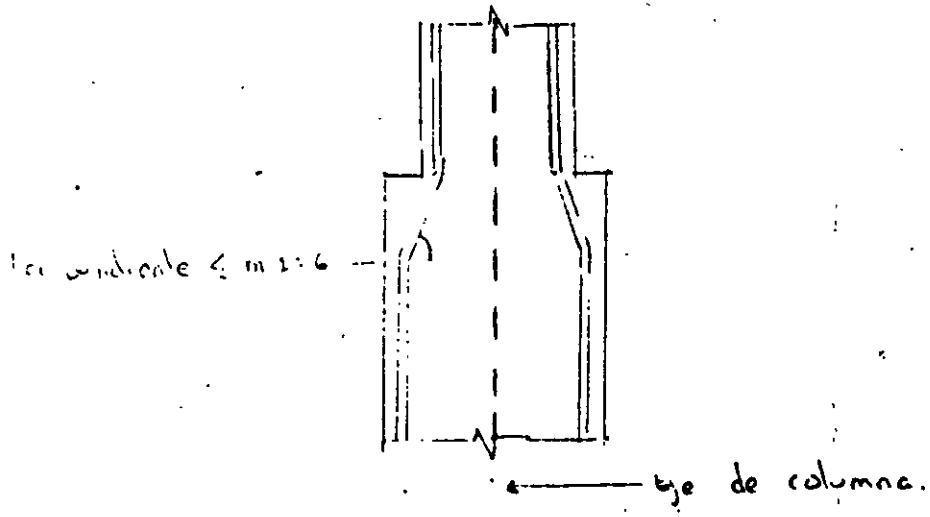
NOTA: También esta relación se cumplirá cuando en la estructura los muros de concreto reforzado resisten más del 50% de la fuerza lateral total.

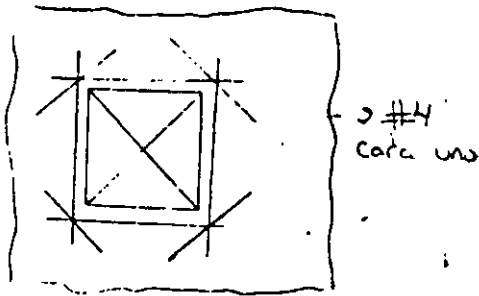


GENERALIDADES:

Seará de la misma manera que en la zona de confinamiento (el diámetro del ref. transversal no será menor que las usadas en la columna en las secciones próximas a dicha sección, Si igual que en la zona de confinamiento).

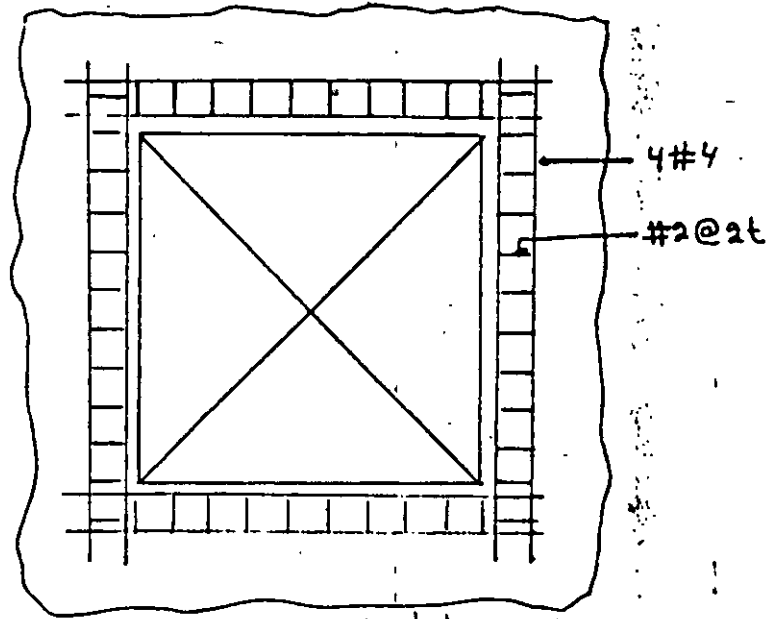
Si la intersección es excéntrica, deben tomarse en cuenta las fuerzas cortantes, momentos y torques causados por la excentricidad.





3 #4  
Cada uno

Refuerzo mínimo alrededor de aberturas pequeñas (la mayor dimensión del vano no supera 80 cm ni una cuarta parte de la dimensión de la pared)



Refuerzo mínimo alrededor de aberturas mayores.

Fig. 10.20 Detalles recomendados de refuerzo alrededor de aberturas en muros de concreto.

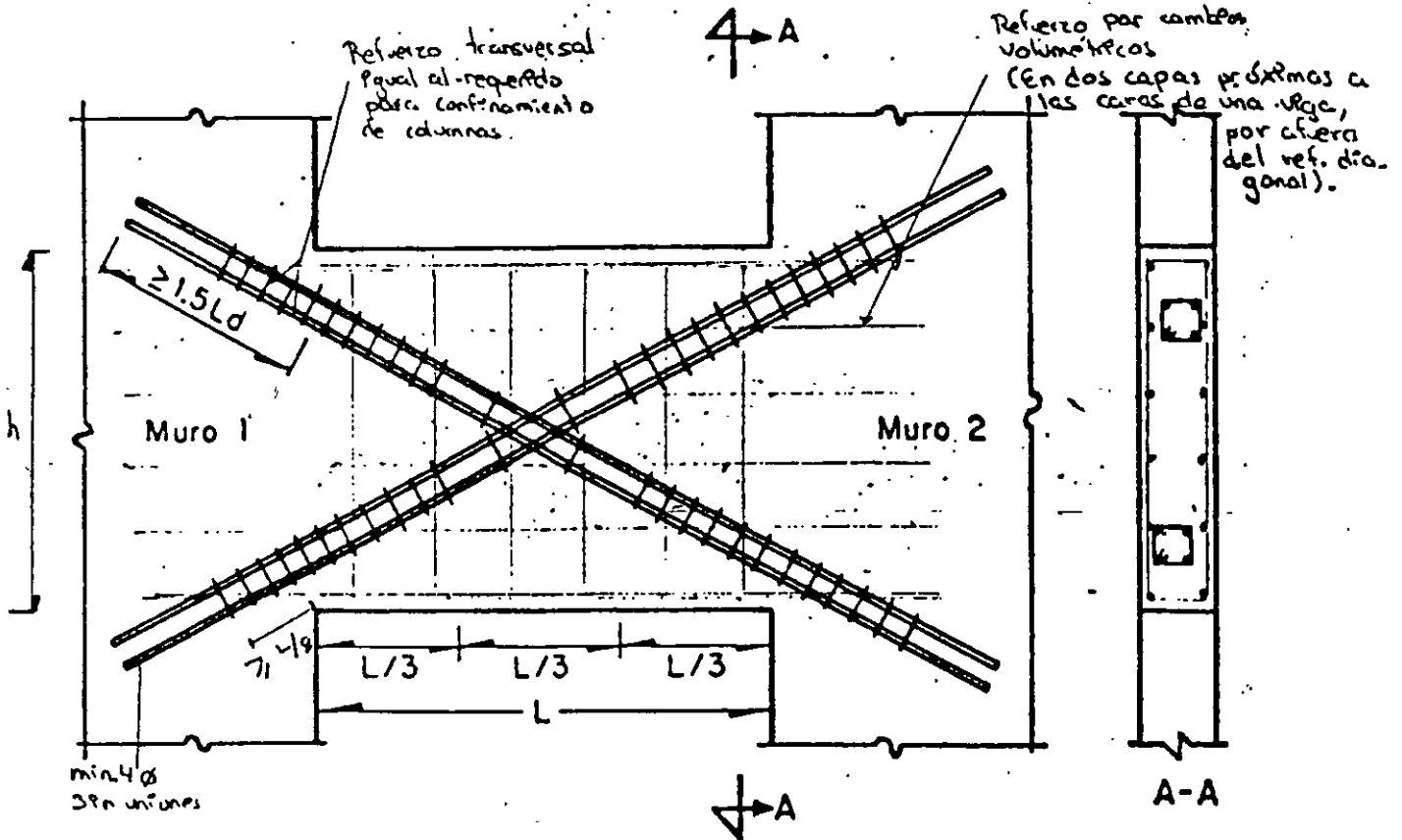
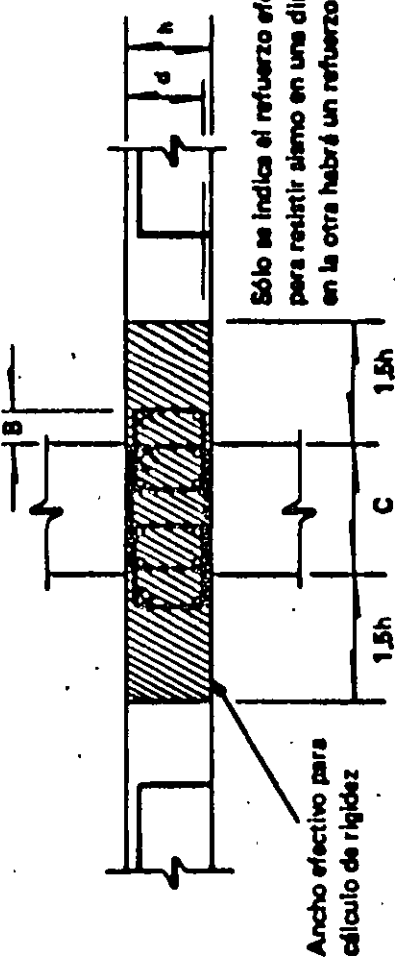
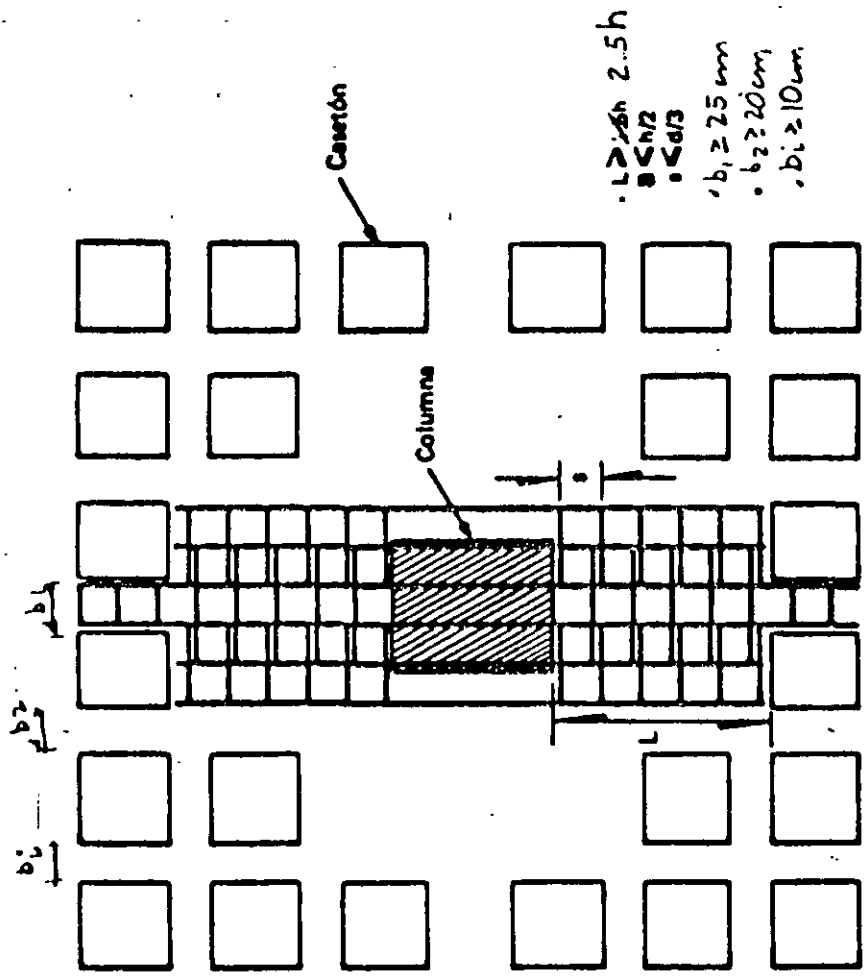


Fig. 10.21 Refuerzo de viga de acoplamiento que une muros de concreto (para  $L/h \leq 2$ )



$h(\text{columna})/d_b(\text{barras de losa}) \geq 20$   
 $h(\text{losa})/d_b(\text{barras de col.}) \geq 15$

Sólo se indica el refuerzo efectivo para resistir sismo en una dirección, en la otra habrá un refuerzo similar.

Fig 10.17 Refuerzo en la conexión losa-planta-columna.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**FLEXO COMPRESIÓN EN COLUMNAS  
DE CONCRETO REFORZADO**

**M. en I. JOSÉ LUIS TRIGOS SUAREZ  
PALACIO DE MINERÍA  
AGOSTO DE 1998**

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is crucial for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2.

3.

4.

5.

6.

7. The final section of the document provides a summary of the key findings and recommendations. It concludes that maintaining accurate records is essential for the long-term success and sustainability of the organization.

# DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO

## TEMA 4. FLEXOCOMPRESION EN COLUMNAS DE CONCRETO REFORZADO

M. EN I. JOSE LUIS TRIGOS\*

### C O N T E N I D O

- A. EL PROCESO DE DISEÑO Y CONSTRUCCION DE ESTRUCTURAS
  
- B. COLUMNAS DE CONCRETO REFORZADO
  - 1. Elementos "Columna"
  - 2. Acciones mecánicas
  - 3. Forma de la sección transversal
  - 4. Propiedades geométricas
  - 5. Condiciones de frontera
  - 6. Materiales. Concreto: Agregados grueso y fino, cemento, agua y aditivos; Acero de refuerzo
  - 7. Distribución del acero de refuerzo
  - 8. Detalles

---

\* Profesor, Facultad de Ingeniería, UNAM; Ingeniero Civil Consultor. Apartado Postal 74-171, México D. F. 09080, MEXICO

C. COMPORTAMIENTO EXPERIMENTAL

1. Columnas cortas
2. Efectos de esbeltez

D. COMPORTAMIENTO DE COLUMNAS DURANTE SISMIOS

1. "Olive View Medical Center Facilities", San Fernando, California, E. U. A., Febrero 9, 1971
2. "Imperial County Services Building", El Centro California, E. U. A., Octubre 24, 1980
3. México D. F., Septiembre 19 - 20, 1985.

E. PREDICCIÓN DE LA RESISTENCIA DE COLUMNAS Y DISEÑO

1. Resistencia de elementos cortos
2. Flexocompresión biaxial
3. Efectos de esbeltez
4. Cortante
5. Diseño
6. Detalles de conexión y refuerzo

F. AYUDAS DE DISEÑO

1. Tablas
2. Gráficas
3. Nomogramas
4. Programas para calculadora
5. Programas para computadora

G. EJEMPLOS



## REFERENCIAS

1. González, O. M. y Robles, F., "Aspectos fundamentales del concreto reforzado", Segunda edición, LIMUSA, 1985.
2. Wang, Ch. K. & Salmon, Ch. G., "Reinforced concrete design", Fourth edition, Harper & Row, 1985
3. Ferguson, P. M., "Reinforced concrete fundamentals", Wiley, 1981
4. Park, R. & Paulay, T., "Reinforced concrete structures", Wiley, 1975
5. Bresler, B., "Design criteria for reinforced concrete columns under axial load and biaxial bending", ACI Journal, V 57, N 5 November 1960, pp 481-490
6. Furlong, R. W., "Ultimate strength of square columns under biaxially excentric loads", ACI Journal, V 57, N 9, March 1961, pp 1129-1140
7. Parme, A. L., Nieves, J. M. & Gowens, A., "Capacity of reinforced rectangular columns subjected to biaxial bending", ACI Journal, V 63, N 9, September 1966, pp 911-923
8. Anónimo, "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Junio 17, 1987; Diario Oficial de la Federación, Julio 3, 1987
9. Anónimo, "Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto", Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal, Diciembre 12, 1987
10. Meli, R., "Columnas de concreto reforzado: Diseño a flexocompresión", Instituto de Ingeniería, UNAM, Publicación 176, Julio 1968
11. Meli R. y Rodriguez, M., "Gráficas para diseñar columnas de concreto reforzado", Instituto de Ingeniería, UNAM, Publicación 428, Septiembre 1980

12. American Concrete Institute, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete Structures and Commentary", ACI 318 - 83, (Traducción del IMCYC)
13. Portland Cement Association, "Notes on ACI 318 - 83, Chapters 10, 11 & 12", 1984, (Traducción del IMCYC)
14. American Concrete Institute, "Design Handbook, V 2: Columns", ACI Publication SP - 17 A, 1978
15. Neville, G. B., (Ed), "Simplified design: Reinforced concrete buildings of moderate size and height", Portland Cement Association, 1984, (Traducción del IMCYC)
16. Trigos, J. L., Loera, S., Meli, R. y Mendoza, C. J., "Manual para diseño y construcción de estructuras de concreto reforzado", Instituto de Ingeniería, UNAM, Patrocinado por la Comisión Coordinadora de la Industria Siderúrgica, Noviembre 1976
17. Nawy, E. G., "Reinforced concrete: A fundamental approach", Prentice Hall, 1985; (Edición en español: 1988)
18. Tzu, Ch. & Hsu, T., "Analysis and design of square and rectangular columns by equation of failure surface", ACI Structural Journal, March-April 1988, pp 167-179
19. Dinsmore, Ch. I., "Column analysis with a programmable calculator", ACI Concrete International, November 1982, pp32-36
20. Favister, M. D., "A computer program for exact analysis of reinforced concrete columns subjected to axial load and biaxial bending", ACI Concrete International July 1986, pp 56-61

## CAPÍTULO 6

### Flexión y carga axial

6.1 Introducción./6.2 Comportamiento y modos de falla de elementos sujetos a flexocompresión. 6.3 Cálculo de resistencia./6.4 Elementos con dos planos de simetría sujetos a carga axial y flexión en un plano cualquiera./6.5 Elementos sin planos de simetría sujetos a carga axial y flexión en un plano cualquiera./6.6 Flexotensión.

#### 6.1 Introducción

En este capítulo se presentan los procedimientos necesarios para determinar la resistencia de elementos de concreto reforzado sujetos a la acción de carga axial y momento flexionante. Se consideran aquí únicamente elementos muy cortos, en los que no existen problemas de esbeltez. Se supondrán conocidas la geometría del elemento, incluyendo la cantidad y distribución del acero de refuerzo, la calidad del concreto, definida por una cierta

resistencia nominal ( $f'_c$ ), y la calidad del acero, definida por su esfuerzo de fluencia ( $f_y$ ).

Considerando el problema de un modo general, se puede suponer que la carga axial,  $P$ , y el momento flexionante,  $M$ , varían independientemente. En la figura 6.1a se muestra una representación esquemática de un elemento bajo la acción de  $P$  y  $M$ , y en la figura 6.1b, un sistema estáticamente equivalente en el que  $M = Pe$ . Es importante señalar que en algunas estructuras  $P$  y  $M$  varían en la misma proporción en una sección transversal dada al variar las condiciones de carga externa. Esto equivale a afirmar que la excentricidad,  $e$ , permanece constante. Sin embargo, en otros casos  $P$  y  $M$  pueden variar en distinta forma y entonces  $e$  no es constante.

Un elemento puede alcanzar su resistencia bajo innumerables combinaciones de carga axial y momento flexionante. Estas combinaciones varían desde una carga axial máxima,  $P_o$ , de tensión o compresión, y un momento nulo, hasta un momento  $M_o$ , aunado a una carga axial nula. El lugar geométrico de las combinaciones de carga axial y momento flexionante con las que un elemento puede alcanzar su resistencia, se representa gráficamente por medio de un *diagrama de interacción*. La figura 6.2 muestra uno típico para una sección rectangular con refuerzo simétrico. Cualquier punto en la curva de trazo continuo representa una combinación de momento y carga axial que hace que el elemento alcance su resistencia.

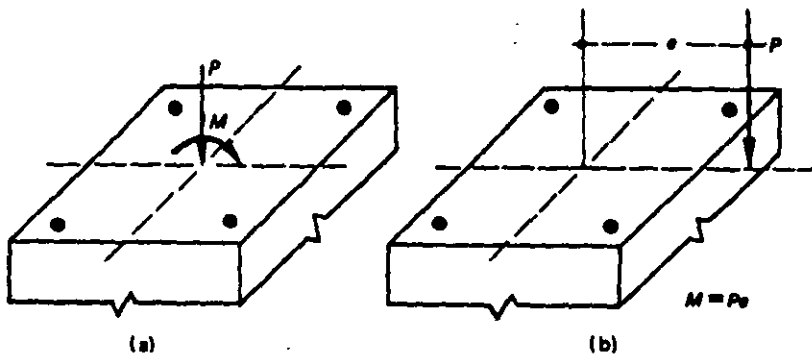


Figura 6.1 Elementos equivalentes sujetos a flexocompresión.

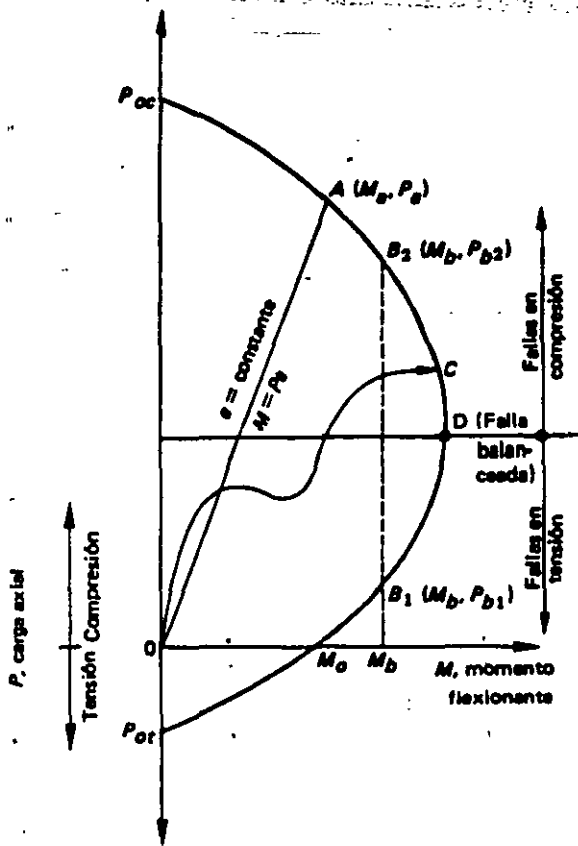


Figura 6.2 Diagrama de interacción típico para una sección rectangular.

Puede observarse que si únicamente se aplicara carga axial de compresión, el valor máximo, o resistencia, correspondería al punto  $P_{oc}$ . De igual manera, la carga axial máxima de tensión sería la correspondiente a  $P_{ot}$ . Si la sección se sujetara sólo a momento flexionante, el máximo que podría aplicarse sería el marcado con  $M_0$ . Nótese que el máximo momento flexionante que la sección es capaz de resistir no es el que corresponde a una carga axial nula.

Cuando al aumentar la carga externa el momento y la carga axial crecen en la misma proporción, la historia de carga queda representada por una recta desde el origen, con una pendiente igual al cociente  $P/M = 1/e$ . Para las combinaciones de carga representadas por la recta OA de la figura 6.2, la resistencia correspondería a la combinación  $M_a, P_a$ . En la figura

se observa también que para un mismo momento,  $M_b$ , existen dos valores de carga axial que hacen que la sección alcance su resistencia. Finalmente, la línea OC representa una historia de carga cualquiera.

El diagrama de interacción de la figura 6.2 corresponde a un elemento definido perfectamente en su geometría y materiales y representa el conjunto de valores de acciones interiores máximas que el elemento es capaz de soportar. El conocimiento necesario para llegar a esta representación se ha ido acumulando de investigaciones experimentales sobre el comportamiento de elementos de concreto reforzado sujetos a flexión y carga axial. Estos estudios abarcan desde ensayos en vigas simplemente apoyadas con cargas concentradas simétricas, hasta ensayos en elementos de concreto reforzado sujetos a compresión axial o a compresión excéntrica. También se han llevado a cabo algunos estudios, mucho más reducidos, de elementos sujetos a flexotensión. Con base en esta información, ha sido posible elaborar teorías apoyadas en hipótesis razonables, por medio de las cuales se puede predecir la resistencia de un elemento con un grado tolerable de precisión. Utilizando cualquiera de estas teorías se pueden obtener diagramas de interacción, como el mostrado en la figura 6.2.

En la actualidad se puede predecir la resistencia de un elemento de concreto reforzado sujeto a flexión y carga axial con un error no mayor del 25 por ciento de la capacidad real que se obtendría si dicho elemento se ensayase hasta la falla. En casos usuales, con flexión en torno a uno de los ejes principales, el error es el del orden del 10 por ciento. Esta aproximación es satisfactoria para fines de diseño estructural.

## 6.2 Comportamiento y modos de falla de elementos sujetos a flexocompresión

El tipo de espécimen usado en investigaciones de elementos sujetos a flexocompresión es semejante al que aparece en la figura 6.3, donde

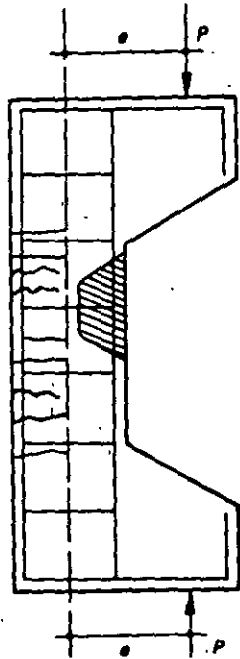


Figura 6.3 Espécimen para ensayo en flexocompresión con agrietamiento típico.

se indican esquemáticamente el refuerzo usual y una posible configuración de agrietamiento. Generalmente la carga  $P$  se aplica a una excentricidad constante. Esto hace que toda la zona prismática del espécimen esté sujeta a una carga axial y a un momento flexionante que crecen en la misma proporción, hasta el colapso.

Existen dos modos principales de falla de elementos sujetos a flexocompresión: falla en compresión y falla en tensión.

En el primer caso la falla se produce por aplastamiento del concreto. El acero del lado más comprimido fluye, en tanto que el del lado opuesto no fluye en tensión.

El segundo modo de falla se produce cuando el acero de un lado fluye en tensión antes de que se produzca el aplastamiento del concreto en el lado opuesto, más comprimido.

El tipo de falla depende esencialmente de la relación entre momento y carga axial en el colapso. En el diagrama de interacción mostrado en la figura 6.2, el punto  $D$  separa la zona de fallas en compresión de la de fallas en tensión; recibe el nombre de *punto de falla balanceada*.

Se ha observado que el efecto del refuerzo helicoidal sobre la resistencia disminuye apreciablemente en cuanto la carga axial tiene cierta excentricidad, aunque la hélice sigue aumentando la ductilidad del elemento.

También en este caso cabe notar que las mediciones de deformaciones han indicado que éstas varían linealmente a lo largo del peralte, es decir, las secciones transversales se mantienen planas antes y después de la deformación.

### 6.3 Cálculo de resistencia

#### 6.3.1 Determinación del diagrama de interacción

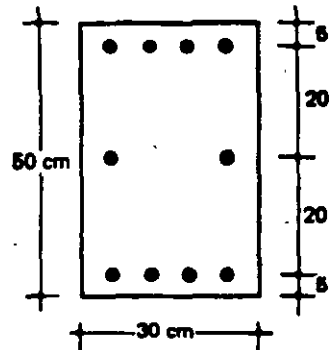
En la sección 6.1 se dijo que un diagrama de interacción es la representación gráfica del lugar geométrico de las combinaciones de carga axial y momento flexionante que hacen que un elemento alcance su resistencia. Así, si se cuenta con el diagrama de interacción de un elemento dado, se conocen todas las combinaciones de carga axial y momento que puede soportar.

El diagrama de interacción de un elemento puede obtenerse a partir de las hipótesis descritas en la sección 5.3 para el cálculo de la resistencia de elementos sujetos a flexión pura. Pueden usarse las hipótesis simplificadoras sobre la forma del diagrama de esfuerzos de compresión en el concreto y sobre la deformación unitaria máxima útil de concreto, o bien, puede aplicarse el procedimiento general descrito en la sección 5.6. El primer enfoque se ilustra en el ejemplo 6.1 y el segundo, en la figura 6.4.

El diagrama de interacción se obtiene determinando varios puntos que lo definan. El procedimiento para encontrar un punto cualquiera es, esencialmente, el mismo usado en flexión para calcular las fuerzas de compresión y de tensión, una vez supuesta la profundidad del eje neutro. Sin embargo, no es necesario hacer varios tanteos hasta igualar ambas fuerzas, ya que su diferencia representa la fuerza normal,  $P$ , y el momento respecto al eje geométrico

**EJEMPLO 6.1** Determinación del diagrama de interacción de una columna usando el bloque equivalente de esfuerzos (Hipótesis ACI 318-83).

**DATOS**

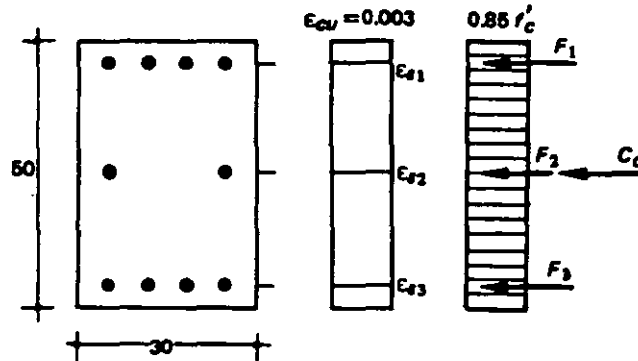


$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s = 10 \text{ barras del No. 8}$$

**OBTENCIÓN DE  $P_{oc}$  (PUNTO 1)**



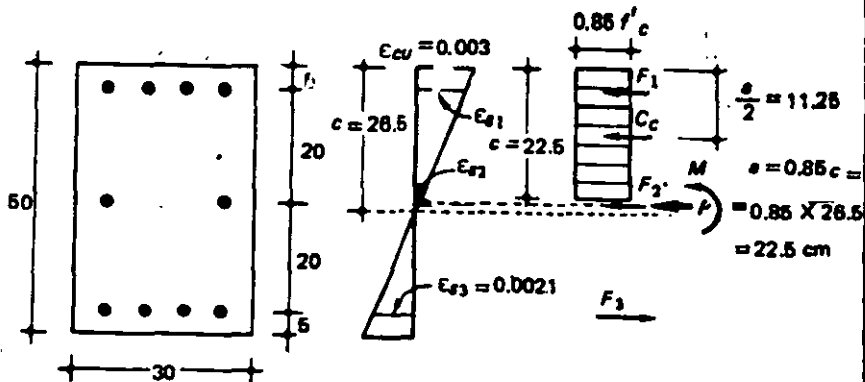
$$P_{oc} = 0.85 f'_c A_g + A_s f_y = C_c + F_1 + F_2 + F_3 \quad (\text{ecuación 4.1})$$

$$P_{oc} = 0.85 \times 200 \times 30 \times 50 + 50 \times 4 \times 200$$

$$P_{oc} = 255\,000 + 210\,000 = 465\,000 \text{ kg}$$

$P_{oc} = 465 \text{ ton}$

**OBTENCIÓN DEL PUNTO DE FALLA BALANCEADA (PUNTO 2)**



**EJEMPLO 6.1 (Continuación)**

Por triángulos semejantes:

$$c = \frac{\epsilon_{cu} \times d}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{s3}} = \frac{0.003 \times 45}{0.005} = 26.5 \text{ cm}$$

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 21.5}{26.5} = 0.00243 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 1.5}{26.5} = 0.000170 < \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s3} = 0.0021 = \epsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = E_s \epsilon_{s2} = 2 \times 10^6 \times 0.00017 = 340 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s3} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 20 \times 4200 = 84000 \text{ kg} = 84.0 \text{ ton}$$

$$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 10 \times 340 = 3400 \text{ kg} = 3.4 \text{ ton}$$

$$F_3 = A_{s3} f_{s3} = 20 \times 4200 = 84000 \text{ kg} = 84.0 \text{ ton}$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 0.85 f'_c ab = 0.85 \times 200 \times 0.85 \times 26.5 \times 30 = 114880 \text{ kg} = 114.9 \text{ ton}$$

Cálculo de  $P$ :

$$P = C_c + F_1 + F_2 - F_3 = 114.9 + 84.0 + 3.4 - 84.0 = 118.3 \text{ ton}$$

Cálculo de  $M$ :

Fuerza (ton)	Brazo (cm)*	Momento (ton-cm)
$C_c = 114.9$	11.25	1293
$F_1 = 84.0$	20.0	1680
$F_2 = 3.4$	0	0
$F_3 = 84.0$	20.0	1680

\*Distancias a un eje que pasa por el medio peralte.

$$M = 4653 \text{ ton-cm}$$

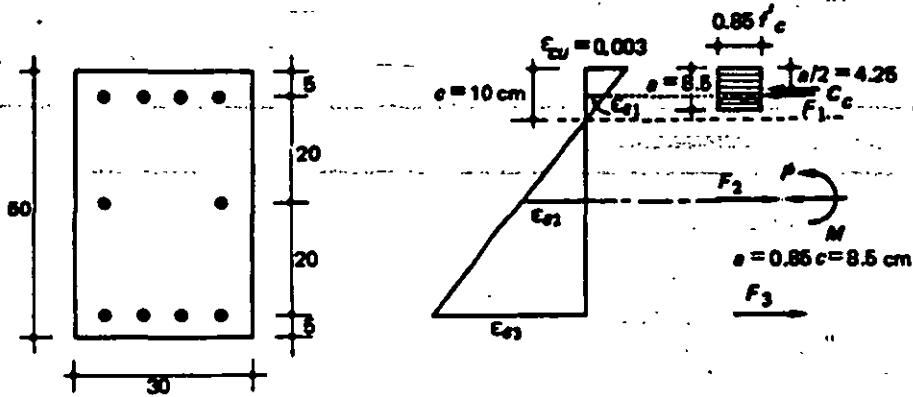
Para el punto 2:

$$P = 118.3 \text{ ton}$$

$$M = 46.5 \text{ ton-m}$$

**EJEMPLO 6.1 (Continuación)**

**DETERMINACION DE UN PUNTO CERCANO A  $M_0$  (PUNTO 3)**



Se supone  $c = 10$  cm

Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 5}{10} = 0.0015 < \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 15}{10} = 0.0045 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s3} = \frac{0.003 \times 35}{10} = 0.0105 > \epsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = E_s \epsilon_{s1} = 2 \times 10^6 \times 0.0015 = 3\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s3} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 20 \times 3\,000 = 60\,000 \text{ kg} = 60 \text{ ton}$$

$$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 10 \times 4\,200 = 42\,000 \text{ kg} = 42 \text{ ton}$$

$$F_3 = A_{s3} f_{s3} = 20 \times 4\,200 = 84\,000 \text{ kg} = 84 \text{ ton}$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 0.85 \times 200 \times 8.5 \times 30 = 43\,400 \text{ kg} = 43.4 \text{ ton}$$

Cálculo de  $P$ :

$$P = C_c + F_1 - F_2 - F_3 = 43.4 + 60.0 - 42.0 - 84.0 = -22.6 \text{ ton}$$



**EJEMPLO 6.1 (Continuación)**

Cálculo de  $M$ :

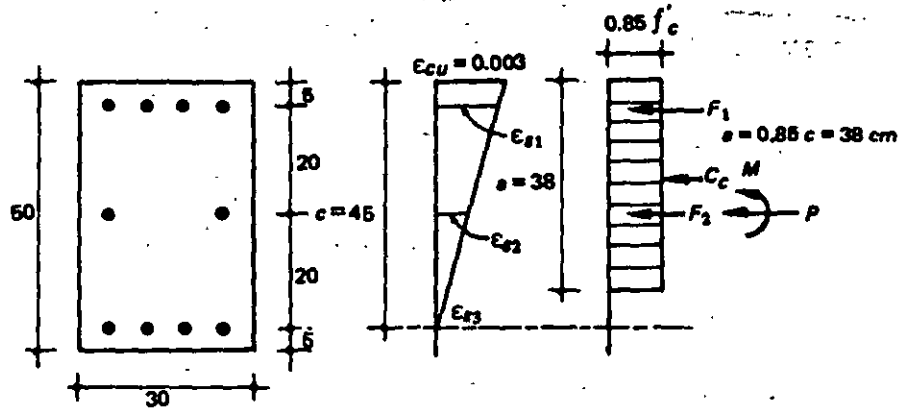
Fuerza (ton)	Brazo (cm)	Momento (ton-cm)
$C_c = 43.4$	20.8	900
$F_1 = 60.0$	20	1 200
$F_2 = 42.0$	0	0
$F_3 = 84.0$	20	1 680

$M = 3 780 \text{ ton-cm}$

Para el punto 3:

$P = - 22.6 \text{ ton (tensión)}$   
 $M = 37.8 \text{ ton-m}$

**OBTENCION DE UN PUNTO ENTRE EL (1) Y EL (2) (PUNTO 4)**



Se supone  $\epsilon_{s3} = 0$

Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 40}{45} = 0.00267 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 20}{45} = 0.01133 < \epsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = f_y = 4 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = E_s \epsilon_{s2} = 2 \times 10^6 \times 0.001133 = 2 267 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s3} = 0$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 20 \times 4 200 = 84 000 \text{ kg} = 84 \text{ ton}$$

$$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 10 \times 2 267 = 22 670 \text{ kg} = 22.7 \text{ ton}$$

$$F_3 = 0$$

**EJEMPLO 6.1 (Continuación)**

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 0.85 \times 200 \times 38 \times 30 = 194\,000 \text{ kg} = 194 \text{ ton}$$

Cálculo de  $P$ :

$$P = C_c + F_1 + F_2 = 194.0 + 84.0 + 26.7 = 304.7 \text{ ton}$$

Cálculo de  $M$ :

Fuerza (ton)	Brazo (cm)	Momento (ton-cm)
$C_c = 194.0$	6	1 164
$F_1 = 84.0$	20	1 680
$F_2 = 26.7$	0	0

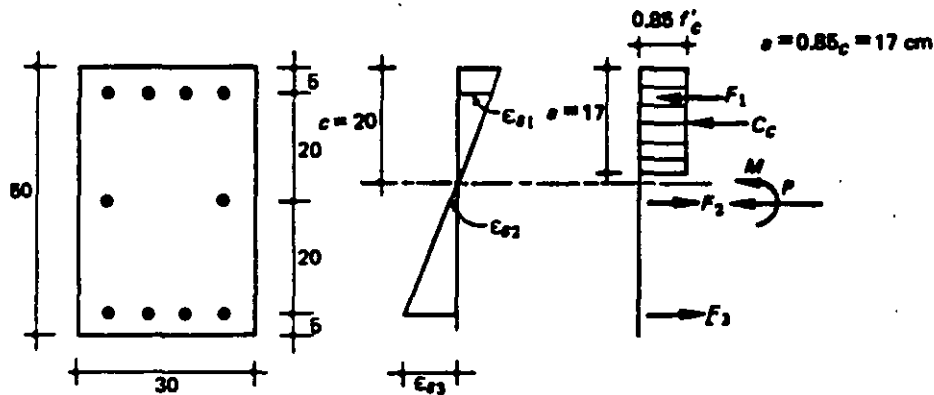
$$M = 2\,844 \text{ ton-cm}$$

Para el punto 4:

$$P = 304.7 \text{ ton}$$

$$M = 28.4 \text{ ton-m}$$

**OBTENCION DEL PUNTO 5 EN LA ZONA DE FALLA POR TENSION**



Se supone  $c = 20 \text{ cm}$

Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 15}{20} = 0.00225 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 5}{20} = 0.00075 < \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s3} = \frac{0.003 \times 25}{20} = 0.00375 > \epsilon_y$$

**EJEMPLO 6.1 (Continuación)**

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = E_s \epsilon_{s2} = 2 \times 10^6 \times 0.00075 = 1\,500 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s3} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 20 \times 4\,200 = 84\,000 \text{ kg} = 84 \text{ ton}$$

$$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 10 \times 1\,500 = 15\,000 \text{ kg} = 15 \text{ ton}$$

$$F_3 = A_{s3} f_{s3} = 20 \times 4\,200 = 84\,000 \text{ kg} = 84 \text{ ton}$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 0.85 \times 200 \times 17 \times 30 = 86\,700 \text{ kg} = 86.7 \text{ ton}$$

Cálculo de P:

$$P = C_c + F_1 - F_2 - F_3 = 86.7 + 84.0 - 15.0 - 84.0 = 71.7 \text{ ton}$$

Cálculo de M:

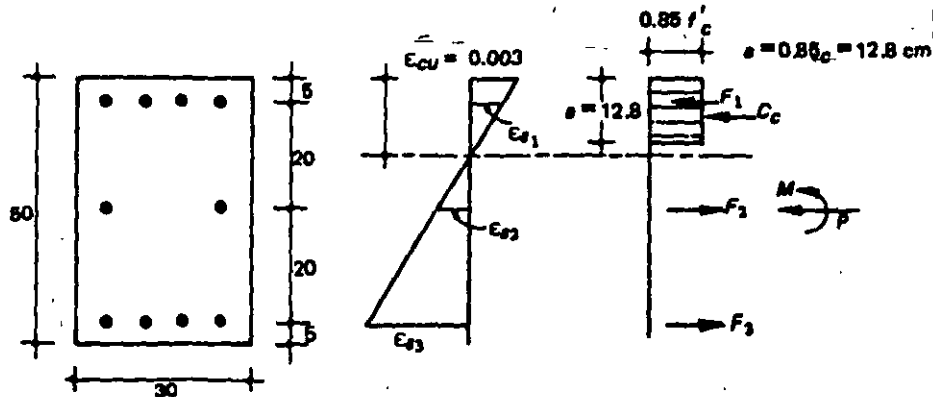
Fuerza (ton)	Brazo (cm)	Momento (ton-cm)
$C_c = 86.7$	16.5	1 430
$F_1 = 84.0$	20.0	1 680
$F_2 = 15.0$	0	0
$F_3 = 84.0$	20.0	1 680

$$M = 4\,790 \text{ ton-cm}$$

Para el punto 5:

$P = 71.7 \text{ ton}$
$M = 47.9 \text{ ton-m}$

**OBTENCION DEL PUNTO 6 EN LA ZONA DE FALLA POR TENSION**



Se supone  $c = 15 \text{ cm}$

**EJEMPLO 6.1 (Continuación)**

Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 10}{15} = 0.0020 < \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 10}{15} = 0.0020 = < \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s3} = \frac{0.003 \times 30}{15} = 0.0060 > \epsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = 4\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = 4\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s3} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 20 \times 4\,000 = 80\,000 \text{ kg} = 80 \text{ ton}$$

$$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 10 \times 4\,000 = 40\,000 \text{ kg} = 40 \text{ ton}$$

$$F_3 = A_{s3} f_{s3} = 20 \times 4\,200 = 84\,000 \text{ kg} = 84 \text{ ton}$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 0.85 \times 200 \times 12.8 \times 30 = 65\,000 \text{ kg} = 65 \text{ ton}$$

Cálculo de  $P$ :

$$P = C_c + F_1 - F_2 - F_3 = 65 + 80 - 40 - 84 = 21 \text{ ton}$$

Cálculo de  $M$ :

Fuerza (ton)	Brazo (cm)	Momento (ton-cm)
$C_c = 65$	18.6	1 210
$F_1 = 80$	20	1 600
$F_2 = 40$	0	0
$F_3 = 84$	20	1 680

$$M = 4\,490 \text{ ton-cm}$$

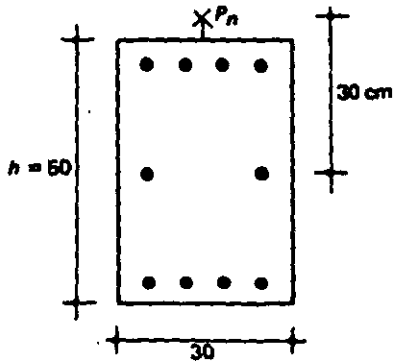
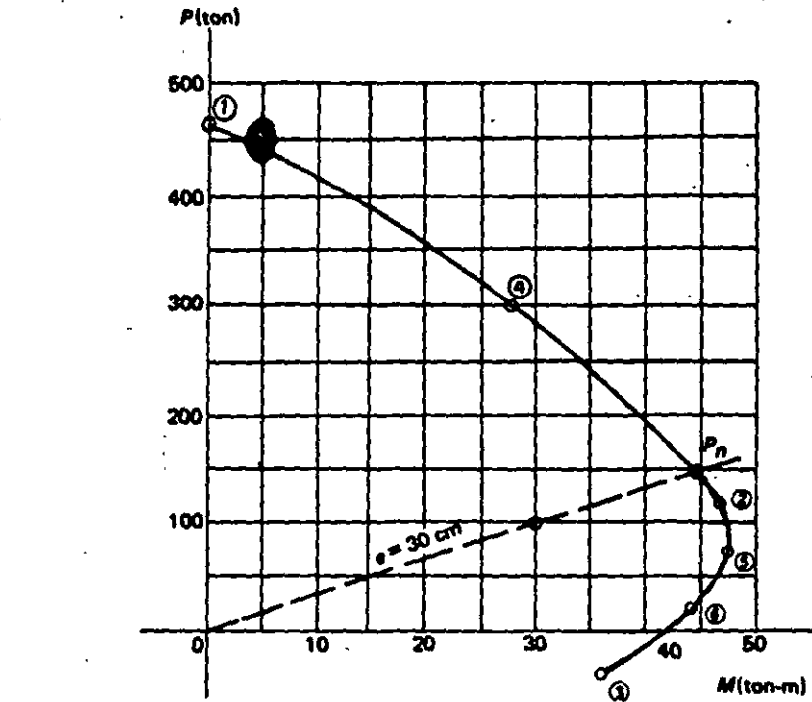
Para el punto 6:

$$P = 21 \text{ ton}$$

$$M = 44.9 \text{ ton-m}$$

repres  
corres  
termin  
neutr  
forma

EJEMPLO 6.1 (Continuación)



$$P_n = ?$$

$$e = 30 \text{ cm} = \frac{M}{P}$$

Para fijar la línea que corresponde a  $e = 30 \text{ cm}$ , se supone un valor cualquiera de  $P$  y se determina el de  $M$ : si  $P = 100 \text{ ton}$ ,  $M = 30 \text{ ton-m}$ .

Se determina ahora la intersección de la línea con el diagrama de interacción:

$$P_n = 150 \text{ ton}$$

representa el momento flexionante,  $M$ , que corresponden al estado de deformaciones determinado por la profundidad supuesta del eje neutro. Por lo tanto, para cada estado de deformaciones se obtiene un valor de  $P$  y uno de

$M$ , que definen un punto del diagrama de interacción.

Los diagramas de interacción tienen la forma general mostrada en la figura 6.2. Se puede definir un diagrama en forma aproximada esti-

mando los siguientes puntos, o puntos cercanos a ellos:

- a) El punto  $P_{oc}$ , que corresponde a carga axial de compresión pura, para el cual se supone un estado de deformaciones unitarias de compresión uniforme (en secciones simétricas).
- b) El punto  $D$ , que corresponde a la falla balanceada, para el cual se supone un estado de deformaciones unitarias definido por  $\epsilon_{cu}$  en la fibra extrema en compresión y por  $\epsilon_y$  en el acero de tensión. Este estado de deformaciones es el que se tiene cuando, simultáneamente, el concreto alcanza su deformación máxima útil y el acero su límite de fluencia.
- c) El punto  $M_o$ , que corresponde a momento sin carga axial, para el cual se supone un estado de deformaciones semejante a los obtenidos en el capítulo 5 para cálculos de resistencia a flexión.
- d) Un punto adicional entre los puntos  $P_{oc}$  y  $D$ , y otros dos puntos entre los puntos  $D$  y  $M_o$ .

En la mayoría de los casos, estos puntos son suficientes para definir con precisión adecuada el diagrama de interacción. En ocasiones se determinan puntos en la zona de flexotensión. La determinación de estos puntos se trata en la sección 6.6.

El procedimiento con hipótesis simplificadas se ilustra en el ejemplo 6.1, en el que se han usado las hipótesis simplificadas del Reglamento ACI 318-83. Se trata de calcular el diagrama de interacción de una sección con porcentajes iguales de refuerzo de compresión y de tensión, como es usual en columnas. La sección tiene también dos barras a medio peralte y en el ejemplo se ha considerado la contribución de estas barras.

El primer punto que se determina es el que corresponde a compresión sin momento (punto  $P_{oc}$  de la figura 6.1). Debido a que la sección es simétrica, el estado de deformaciones correspondiente es uniforme, como se muestra en el diagrama del ejemplo. Este caso resulta igual

al de una columna sujeta a carga axial pura (capítulo 4) y la resistencia puede calcularse con la ecuación 4.1, la cual expresa que la resistencia total es la suma de las contribuciones del concreto y del acero. En secciones no simétricas, si se supone un estado uniforme de deformaciones se obtiene también un momento, por lo que el punto que se calcula no cae sobre el eje de ordenadas del diagrama de interacción. Sin embargo, tal punto resulta útil, ya que por lo general está localizado cerca del eje de ordenadas y sirve para determinar gráficamente la intersección del diagrama con el eje.

A continuación se calcula en el ejemplo el punto correspondiente a la falla balanceada (punto  $D$  en la figura 6.2). El estado de deformaciones unitarias se fija de tal manera que la deformación en la fibra extrema en compresión es igual a la deformación máxima útil del concreto (0.003 según el Reglamento ACI 318-83) y la deformación en el acero de tensión más alejado del eje neutro es igual a la deformación de fluencia (0.0021 para acero de 4 200 kg/cm<sup>2</sup> de esfuerzo de fluencia). A partir del diagrama de deformaciones unitarias se calculan las deformaciones unitarias,  $\epsilon_s$ , en todos los lechos de refuerzo; después se calculan los esfuerzos en el acero, que son iguales al esfuerzo de fluencia cuando la deformación unitaria es mayor que la de fluencia, e iguales a  $\epsilon_s E_s$ , cuando es menor, y a continuación se calculan las fuerzas en los distintos lechos de acero,  $F_s$ , multiplicando las áreas de acero por los esfuerzos correspondientes. Por triángulos semejantes se calcula la profundidad del eje neutro,  $c$ , y a partir de ésta, la profundidad del bloque equivalente (0.85c en este caso) y la fuerza de compresión en el concreto,  $C_c$ . Para el estado de deformaciones supuesto, los dos lechos superiores de acero trabajan a compresión y el lecho inferior, a tensión. La suma algebraica de todas las fuerzas que actúan en la sección, da el valor de la fuerza normal,  $P$ , que resulta de compresión, y la suma de momentos alrededor del eje geométrico es el momento flexionante resistente,  $M$ . De esta manera se obtiene el punto de falla balanceada.

A continuación se calcula un punto cercano al punto  $M_0$  de la figura 6.2; o sea, al de momento sin carga axial.

Para obtener el punto  $M_0$  con precisión, sería necesario hacer varios tanteos hasta igualar las fuerzas de compresión con las de tensión, como en la determinación de la resistencia a flexión (capítulo 5); basta con obtener un punto cercano. En el caso de este punto (punto 3), se fijó la profundidad del eje neutro, y por triángulos semejantes se determinaron las deformaciones unitarias en todos los lechos de refuerzo. Por lo demás, el procedimiento es igual al del punto anterior. Con la profundidad del eje neutro supuesta, se obtuvo una carga axial de tensión de 16.6 ton, la cual es pequeña comparada con la de los dos puntos anteriores. Esto significa que el punto está ligeramente por debajo del eje de abscisas. Aun cuando la carga axial hubiera resultado de magnitud considerable, el punto hubiese servido para determinar el diagrama de interacción, ya que todos los puntos calculados de la manera descrita están sobre dicho diagrama.

El punto 4 se calculó para tener un punto intermedio entre el punto correspondiente a compresión pura y el de falla balanceada. El estado de deformaciones supuesto es tal que en el lecho inferior de acero se tiene una deformación nula. Esto simplifica un poco los cálculos. Por lo general, el diagrama no se aparta mucho de una línea recta en la zona considerada, y con un solo punto es suficiente para definirlo. Sin embargo, si se desea una gran precisión o si se observa que el diagrama dista mucho de ser lineal, pueden calcularse más puntos en esta zona suponiendo diagramas de deformaciones unitarias intermedios entre los dos puntos 1 y 2. Si no se necesita una gran precisión, los puntos de carga axial pura y de falla balanceada pueden unirse con una línea recta.

Para definir el diagrama entre los puntos de falla balanceada y de flexión pura, en el ejemplo se calcularon otros dos puntos suponiendo diagramas de deformaciones unitarias intermedias. En esta zona del diagrama es necesario,

por su gran curvatura, calcular dos puntos como mínimo para definirlo.

Al final del ejemplo se muestra un diagrama dibujado a escala con los valores obtenidos. Con este diagrama, puede conocerse la resistencia de la sección para cualquier combinación de  $P$  y  $M$ . Para fines de ilustración, al final del ejemplo 6.1 se muestra la obtención de la resistencia de la columna cuando la carga actúa con una excentricidad de 30 cm.

La carga obtenida de esta manera es la resistencia nominal de la columna usada en el ejemplo  $P_n$ . Para obtener la carga de diseño, sería necesario multiplicar la carga anterior por el factor de reducción,  $\phi$ , que, según el Reglamento ACI 318-83, para el caso de flexocompresión vale 0.70 para columnas de estribos y 0.75 para columnas con refuerzo helicoidal. El Reglamento citado permite incrementar el valor de  $\phi$ , hasta el valor que corresponde a flexión pura, cuando la carga axial es pequeña.

El procedimiento descrito anteriormente puede aplicarse a secciones de otras formas y con diferentes hipótesis simplificadoras. También puede aplicarse definiendo las características geométricas y mecánicas de la sección por medio de literales, lo cual tiene la ventaja de que se obtienen diagramas adimensionales que sirven para cualquier sección de esas características. Esto se ha hecho tanto con las hipótesis del Reglamento ACI 318-83 como con las NTC 77 del Reglamento del D. F., para obtener diagramas de interacción de uso general. En el Apéndice C se presentan algunos de los calculados por Roberto Meli y Mario Rodríguez [6.2], aplicando las hipótesis del D.F., para secciones rectangulares y circulares. Estos diagramas cubren la mayoría de las secciones que se encuentran normalmente y simplifican de manera notable el cálculo de resistencias a flexocompresión y flexotensión. Sólo es necesario calcular el diagrama de una sección dada cuando dicha sección difiere mucho de las que aparecen en los diagramas adimensionales disponibles y la precisión que se obtiene interpolando no es suficiente. Las NTC-77 contienen diagramas parecidos.

En la referencia 6.1 se proporcionan diagramas de interacción adimensionales basados en las hipótesis del Reglamento ACI 318-77, que son semejantes a las del Reglamento ACI 318-83.

La obtención de diagramas de interacción adimensionales como los de las referencias 6.1 y 6.2 se hace normalmente con la ayuda de computadoras electrónicas. Esto permite calcular fácilmente un gran número de puntos de cada diagrama, por lo que éstos quedan perfectamente definidos.

### 6.3.2 *Obtención de la resistencia por tanteos utilizando hipótesis simplificadoras*

El procedimiento descrito en la sección anterior, que consiste en obtener la resistencia a partir del diagrama de interacción, es apropiado cuando se va a determinar la resistencia de una sección para distintas combinaciones de  $P$  y  $M$ , o para distintas excentricidades de la carga aplicada. Cuando se trata de calcular la resistencia para una sola combinación de  $P$  y  $M$ , resulta más conveniente el procedimiento de tanteos descrito en esta sección.

Este procedimiento consiste en calcular los valores de  $P$  y de  $M$  para una configuración supuesta de deformaciones unitarias, de la misma manera que en el ejemplo 6.1. Se determina después la excentricidad,  $e = M/P$ , y se compara con la excentricidad de la carga externa. Si coinciden las dos excentricidades el problema está resuelto, y si no coinciden se hacen otros tanteos cambiando la configuración de deformaciones unitarias hasta lograr la coincidencia. Se ve que el procedimiento es básicamente el mismo que el usado en el capítulo 5 para calcular la resistencia en flexión. La diferencia estriba en que para flexión se procede a tantear hasta que  $C$  sea igual a  $T$  (lo cual equivale a la condición  $P = 0$  y  $e = \infty$ ), mientras que para flexocompresión se tantea hasta que  $M/P$  sea igual a la excentricidad buscada.

En el ejemplo 6.2 se ilustra este procedimiento aplicado a una sección rectangular con re-

fuerzo asimétrico. El ejemplo se ha resuelto mediante las hipótesis simplificadoras del Reglamento ACI 318-83. En el primer tanteo, la excentricidad que corresponde a los valores obtenidos de las acciones internas  $P$  y  $M$  es de 31.6 cm, la cual difiere de la excentricidad de la carga, que es de 40 cm, como se indica en los datos del problema. Para aumentar la excentricidad, en el segundo tanteo se disminuyó la profundidad del eje neutro, con lo que la excentricidad resultante coincidió con la excentricidad dada como dato. La carga que puede resistir la sección, por consiguiente, es el valor de  $P_n$  obtenido en el segundo tanteo, o sea 104.4 ton. La carga de diseño se obtendría multiplicando este valor de  $P_n$  por el factor de reducción  $\phi$  que, para este caso, vale 0.70.

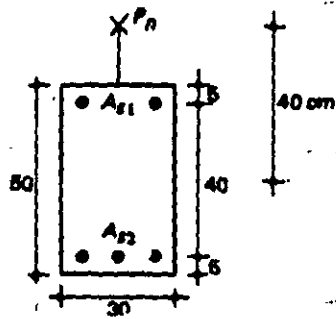
### 6.3.3 *Procedimiento general*

En las secciones anteriores se ha indicado la manera de obtener las acciones internas máximas en una sección, utilizando hipótesis simplificadoras referentes a la deformación unitaria máxima útil del concreto y al diagrama de esfuerzos de compresión. Es posible emplear también el procedimiento general descrito en la sección 5.6 para el caso de flexión, el cual es aplicable para cualquier diagrama esfuerzo-deformación tanto del concreto como del acero.

En la figura 6.4 se ilustra la obtención de los valores de  $P_n$  y  $M_n$  para una sección determinada suponiendo el estado de deformaciones unitarias indicado en la figura 6.4b. Las curvas esfuerzo-deformación del concreto y del acero son las de la figura 5.14 (capítulo 5). Aplicando el procedimiento para distintas configuraciones de deformaciones unitarias, se obtuvo el diagrama de interacción de la figura 6.5.

Debe observarse que, para obtener los valores correspondientes a las resistencias, es necesario hacer tanteos variando la deformación máxima en el concreto, pero manteniendo la excentricidad constante, hasta obtener un valor máximo de  $M_n$ , tal como se hizo en la sección 5.6 en el caso de flexión simple. De ahí que en la



**EJEMPLO 6.2 Obtención de la resistencia de una sección por tanteos****DATOS**

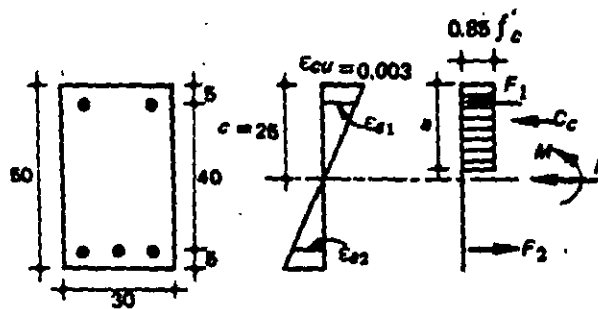
$$f'_c = 950 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

$$e = 40 \text{ cm}$$

$$A_{s1} = 2 \text{ barras del No. 6} = 5.8 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = 3 \text{ barras del No. 8} = 15 \text{ cm}^2$$

**1er. TANTEO ( $c = 25 \text{ CM}$ )**

$$a = \left(1.05 - \frac{f'_c}{1\,400}\right) c = \left(1.05 - \frac{950}{1\,400}\right) 25 = 0.8c = 20 \text{ cm (figura 5.6)}$$

Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 20}{25} = 0.0024 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 20}{25} = 0.0024 > \epsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = f_{s2} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 5.8 \times 4\,200 = 24\,400 \text{ kg} = 24.4 \text{ ton}$$

$$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 15 \times 4\,200 = 63\,000 \text{ kg} = 63.0 \text{ ton}$$

**EJEMPLO 6.2 (Continuación)**

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 0.85 \times 350 \times 20 \times 30 = 178\,000 \text{ kg} = 178 \text{ ton}$$

$$P = C_c + F_1 - F_2 = 178.0 + 24.4 - 63.0 = 139.4 \text{ ton}$$

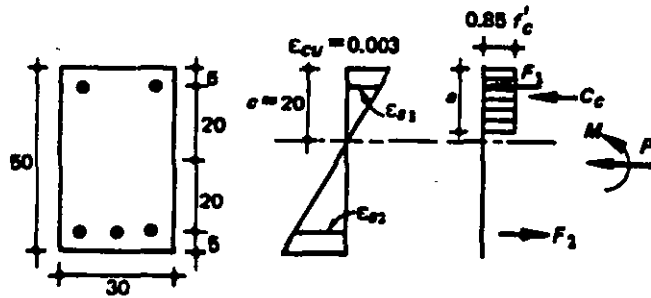
Cálculo del momento:

Fuerza (ton)	Brazo (cm)	Momento (ton-cm)
$C_c = 178.0$	15	2 670
$F_1 = 24.4$	20	488
$F_2 = 63.0$	20	1 260

$$M = 4\,418 \text{ ton-cm}$$

$$e = \frac{M}{P} = \frac{4\,418}{139.4} = 31.6 \text{ cm} \neq 40 \text{ cm}$$

2o. TANTEO ( $c = 20 \text{ CM}$ )



$$a = 0.8c = 0.8 \times 20 = 16 \text{ cm} \text{ (figura 5.6)}$$

Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 15}{20} = 0.00225 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 25}{20} = 0.00375 > \epsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = f_{s2} = f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

fig  
tar-  
de.  
dif  
en

6.4

6.4

má  
de  
ell

**EJEMPLO 6.2 (Continuación)**

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1}f_{s1} = 5.8 \times 4\,200 = 24\,400 \text{ kg} = 24.4 \text{ ton}$$

$$F_2 = A_{s2}f_{s2} = 15 \times 4\,200 = 63\,000 \text{ kg} = 63.0 \text{ ton}$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 0.85 \times 350 \times 16 \times 30 = 143\,000 \text{ kg} = 143 \text{ ton}$$

$$P_n = C_c + F_1 - F_2 = 143.0 + 24.4 - 63.0 = 104.4 \text{ ton}$$

Cálculo del momento:

Fuerza (ton)	Brazo (cm)	Momento (ton-cm)
$C_c = 143.0$	17	2 430
$F_1 = 24.4$	20	488
$F_2 = 63.0$	20	1 260

$$M_n = 4\,178 \text{ ton-cm}$$

$$e = \frac{M_n}{P_n} = \frac{4\,178}{104.4} = 40 \text{ cm}$$

Este valor coincide con la excentricidad de la carga. Por lo tanto:

$$P_n = 104.4 \text{ ton}$$

figura 6.5 los diagramas de deformaciones unitarias correspondientes a los distintos puntos del diagrama de interacción mostrados, tienen diferentes valores de deformación máxima en compresión.

#### 6.4 Elementos con dos planos de simetría sujetos a carga axial y flexión en un plano cualquiera

##### 6.4.1 Solución por tanteos

El problema consiste en encontrar el valor máximo de la carga axial  $P$  que actúa fuera de los planos de simetría, a distancias  $e_x$  y  $e_y$  de ellos. Esta condición es estáticamente equiva-

lente a considerar el elemento sujeto a una carga axial  $P$  y a dos momentos flexionantes,  $M_x = Pe_x$  y  $M_y = Pe_y$ .

Para un elemento de geometría y excentricidades dadas, aplicando las hipótesis simplificadas o el procedimiento básico a partir de características esfuerzo-deformación, por tanteos sucesivos se puede obtener el valor máximo de la carga  $P$  que actúa a las excentricidades dadas. En la figura 6.6 se presenta un cálculo típico para una posición supuesta del eje neutro que, junto con el valor de  $\epsilon_{cu} = 0.003$ , fija la distribución de deformaciones unitarias, las que tienen valores constantes en secciones paralelas al eje neutro supuesto. En este ejemplo la zona sujeta a compresión tiene forma trapecial. Se calculan las fuerzas, los brazos

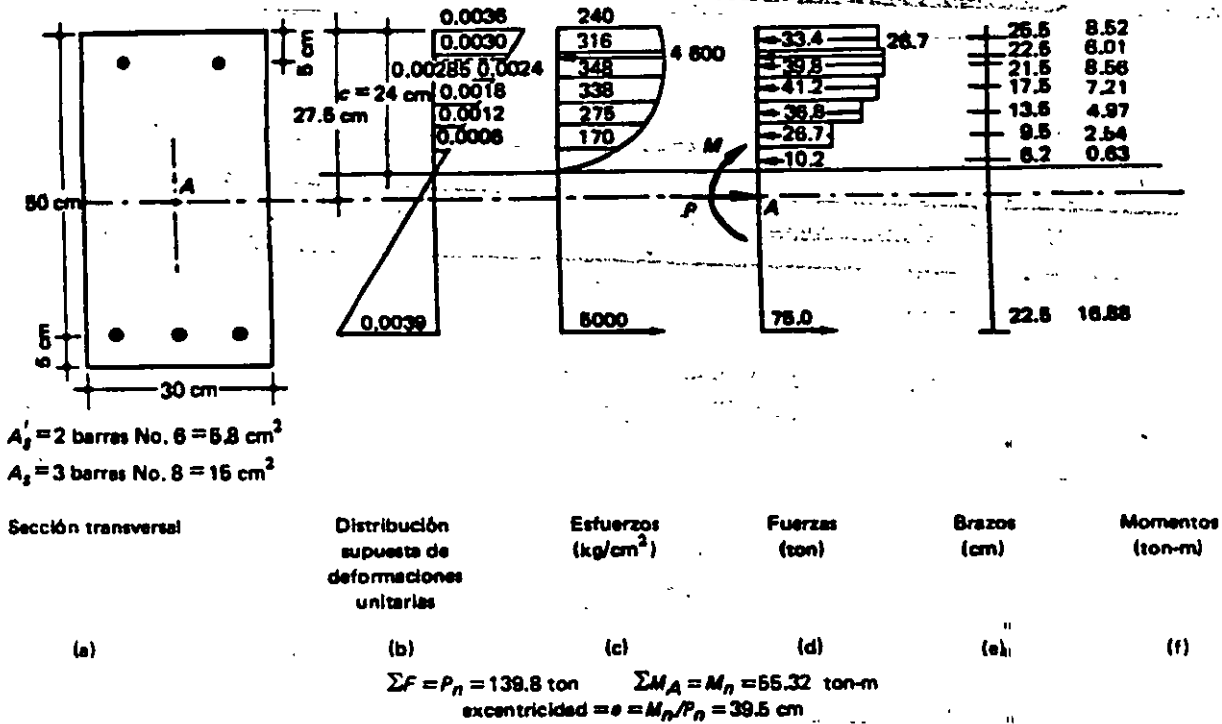


Figura 6.4 Evaluación de acciones interiores.

y los momentos referidos a los ejes  $x$  y  $y$ . Se obtienen entonces valores de  $P$ ,  $M_x$  y  $M_y$  para la posición supuesta del eje neutro. Si los valores de  $e_x = M_x/P$  y  $e_y = M_y/P$  coinciden con los dados, el problema está resuelto; si no, debe cambiarse la posición del eje neutro y repetirse el proceso hasta que se obtengan excentricidades que coincidan con las dadas. El cambio en la posición del eje neutro consistirá en general en una traslación y una rotación.

El proceso descrito predice satisfactoriamente la resistencia, pero es muy laborioso. La convergencia es lenta debido a que los valores de las excentricidades son muy sensibles a pequeñas variaciones en la posición del eje neutro. Sin embargo, para algunos casos particulares, se han desarrollado diagramas de interacción, mediante programas para computadora electrónica [6.2]. En la referencia 6.4 se presentan diagramas para resolver casos de columnas rectangulares y de columnas en forma de cruz. En la siguiente sección se presenta un procedimiento aproximado.

### 6.4.2 Fórmula de Bresler

Bresler [6.3] ha desarrollado una expresión sumamente simple para calcular los valores máximos de la carga de compresión que actúa a excentricidades  $e_x$  y  $e_y$  en secciones rectangulares con refuerzo simétrico. La expresión que propone es

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} - \frac{1}{P_o} \quad (6.1)$$

donde

- $P_n$  = carga normal máxima que actúa a excentricidades  $e_x$  y  $e_y$ ;
- $P_x$  = carga normal máxima a una excentricidad  $e_x$  contenida en un plano de simetría ( $e_y = 0$ );
- $P_y$  = carga normal máxima a una excentricidad  $e_y$  contenida en un plano de simetría normal al anterior ( $e_x = 0$ ), y
- $P_o$  = carga axial máxima que puede resistir el elemento ( $e_x = e_y = 0$ ).

**Elementos con dos planos de simetría sujetos a carga axial 123**

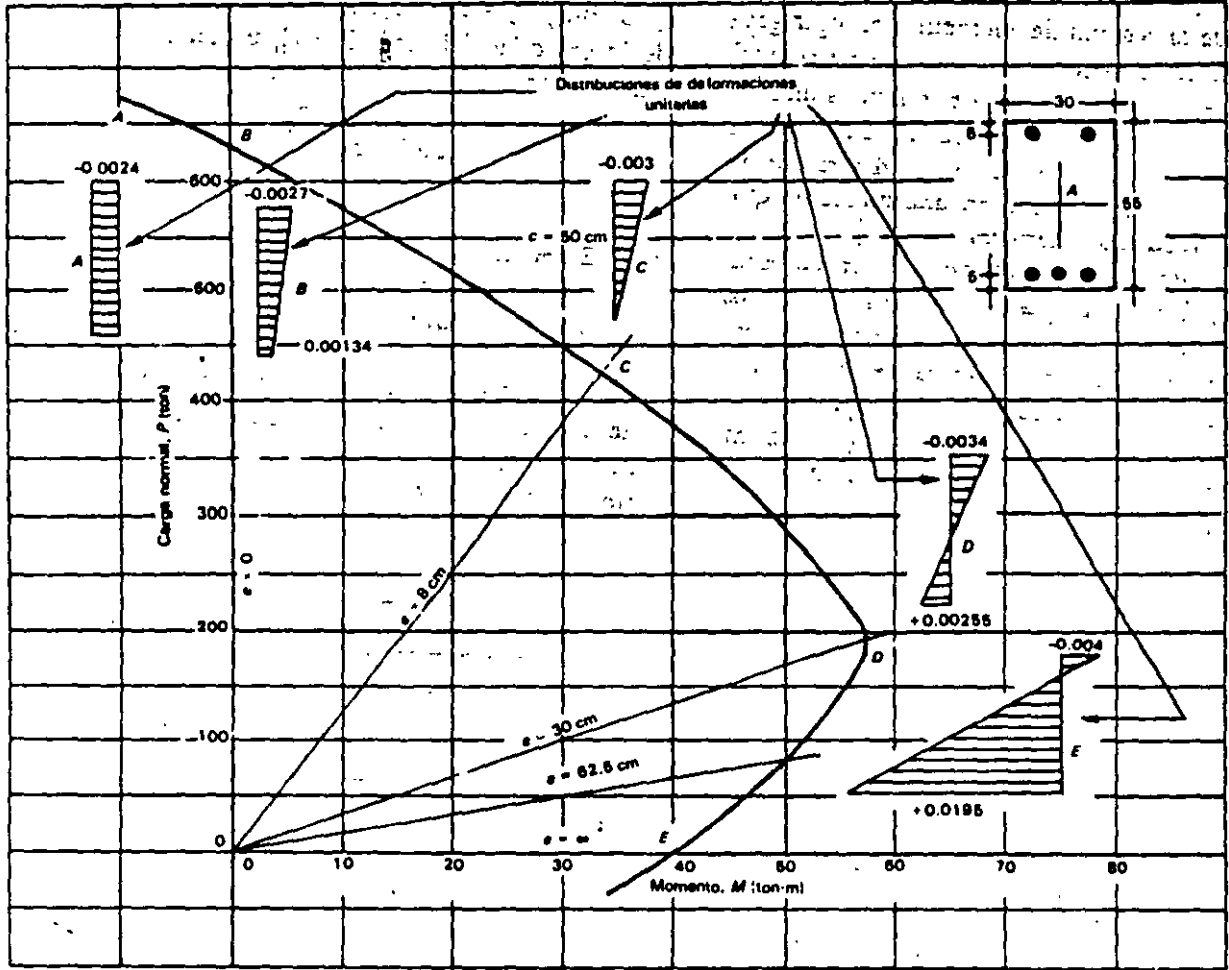


Figura 6.5 Diagrama de interacción para el elemento de la figura 6.4.

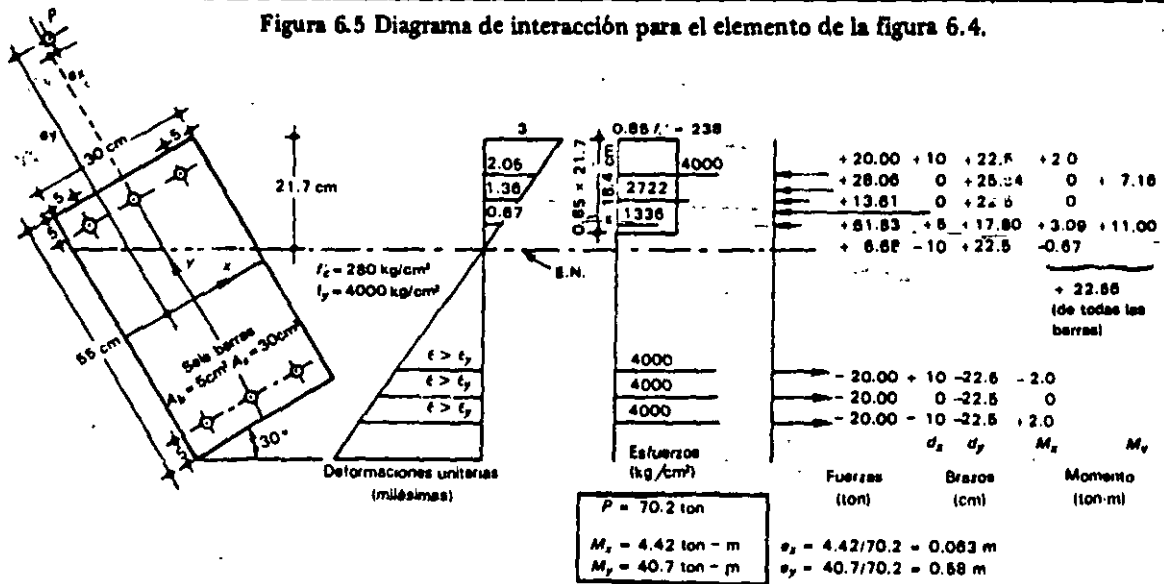


Figura 6.6 Cálculo típico para una posición cualquiera del eje neutro; flexión en dos direcciones.

Puede verse que la ecuación 6.1 reduce el problema a una combinación de soluciones más simples: dos de flexocompresión en un plano de simetría y una de compresión axial.

Para elementos simétricos, con una carga normal que actúe en un punto cualquiera del plano de la sección del elemento, el lugar geométrico de los valores máximos de carga axial que el elemento es capaz de resistir es una superficie de interacción (figura 6.7) cuyas trazas con los planos  $x$  y  $y$  serán los diagramas de interacción para flexión en una dirección que se han mostrado anteriormente.

La expresión propuesta por Bresler representa una familia de planos que aproximan los puntos de la superficie de interacción. Esta expresión es válida para valores de  $P_n$  mayores que  $0.1 P_o$ , aproximadamente. La ecuación 6.1 verifica los resultados de los ensayos disponibles dentro de un veinte por ciento de aproximación.

En la figura 6.6 se muestra que, para la posición del eje neutro escogida, la carga axial máxima se encuentra a  $e_x = 6.3$  cm y  $e_y = 58$  cm, y vale 70.2 ton. Como ilustración de la aproximación que da la fórmula de Bresler, se encontraron los valores de  $P_x = 295$  ton,  $P_y = 78.5$  ton y  $P_o = 514$  ton, usando los diagramas de interacción del Apéndice C, utilizando  $f_c'$  igual a  $238$  kg/cm<sup>2</sup> y  $f_y = 4000$  kg/cm<sup>2</sup>. Se encontró así  $P_n = 70.5$  ton, valor que coincide con el calculado con el procedimiento general.

### 6.5 Elementos sin planos de simetría sujetos a carga axial y flexión en un plano cualquiera

En este caso son aplicables tanto el procedimiento básico como las hipótesis simplificadas. Aunque es muy complicado resolver este tipo de problemas en una forma general, es

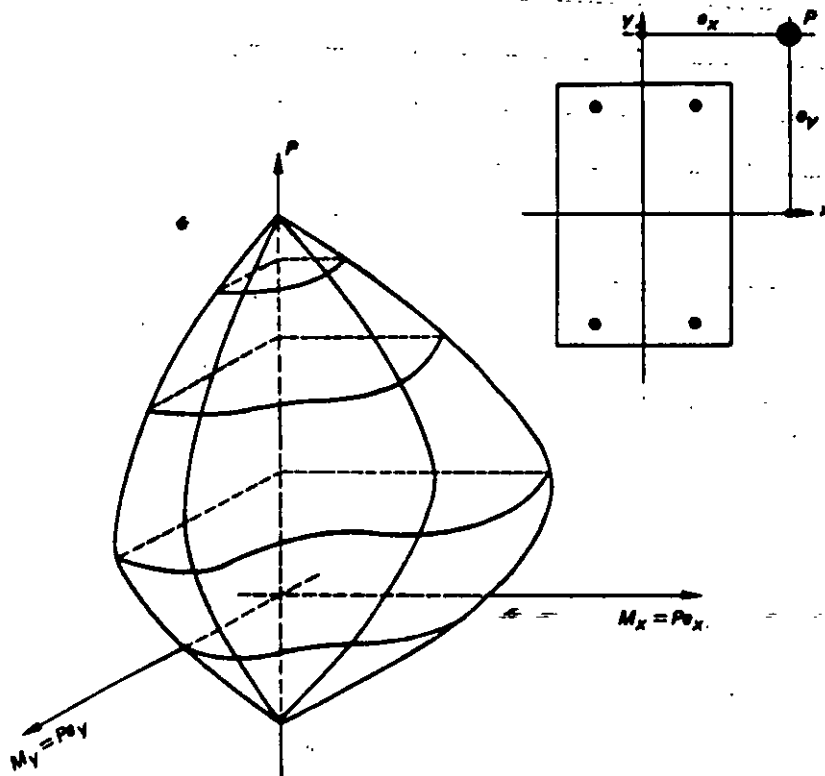


Figura 6.7 Superficie de interacción.

pos  
geo  
de  
nas  
algu  
Est  
cia

6.6

S  
suj  
tura  
elem  
La i  
sión  
guna  
resis  
diag  
tensi  
ante  
tos  
deta  
Si  
ual  
orm  
hacer  
varia  
de ur  
con  
varia  
Las  
figura  
Par  
(figur  
la sec  
el co  
orden  
da ún  
estado  
forma  
la car  
tante,  
aumer  
acero  
ción d

posible tratar casos particulares, definidos en geometría y refuerzo, para uno o varios planos de flexión. Un caso interesante es el de columnas en forma de *L*, las cuales se emplean con alguna frecuencia en las esquinas de edificios. Estas columnas vienen resueltas en la referencia 6.4.

### 6.6 Flexotensión

Si bien no es frecuente encontrar elementos sujetos a flexotensión, existen algunas estructuras, por ejemplo algunos depósitos, cuyos elementos están sometidos a este tipo de acción. La información experimental sobre flexotensión es muy escasa, por lo que no existe ninguna teoría ya comprobada para calcular la resistencia. Sin embargo, es posible obtener diagramas de interacción en la zona de flexotensión usando los procedimientos expuestos anteriormente para flexocompresión, con ciertos efectos particulares que se describen con detalle a continuación.

Si se admiten las hipótesis simplificadoras usuales, y se considera una curva esfuerzo-deformación elastoplástica para el acero, se puede hacer la siguiente descripción cualitativa de la variación de las condiciones de deformación de un elemento sujeto a una carga de tensión con excentricidad constante, cuando la carga varía desde cero hasta llegar a un valor máximo. Las etapas de deformación se muestran en la figura 6.8.

Para valores pequeños de la excentricidad (figura 6.8a), las deformaciones a lo largo de la sección son todas de tensión. Una vez que el concreto se agrieta a deformaciones del orden de 0.0001, la tensión externa es resistida únicamente por el acero de refuerzo. Este estado se representa por la distribución de deformaciones 1 de la figura 6.8a. Al aumentar la carga, manteniendo la excentricidad constante, las tensiones en los dos lechos de acero aumentan proporcionalmente, hasta que el acero del lado de la carga alcanza su deformación de fluencia (distribución 2). Puesto que

la excentricidad es fija, al no aumentar la tensión en el acero que fluye, la tensión en el acero del otro lecho permanece constante. Es decir, la línea que representa la distribución de deformaciones gira en torno al punto *A*, localizado en el acero menos deformado. Esta etapa continúa hasta que la deformación en la fibra superior es nula (distribución 3). Entre los estados 2 y 3 la carga externa no aumenta. Más allá del estado 3 se producen esfuerzos de compresión en la cara opuesta a la carga y se incrementa el esfuerzo en el acero de dicha cara. El incremento en tensión en este acero debe ser mayor que la compresión resultante en el concreto para que la tensión total aumente. El valor máximo de la carga se producirá cuando la deformación en el concreto alcance su valor máximo,  $\epsilon_{cu}$ . Esta condición se representa por la distribución 4 de la figura 6.8a. El incremento de carga entre los estados 3 y 4 generalmente es pequeño.

La figura 6.8b muestra las distintas distribuciones de deformaciones resultantes al incrementar el valor de la carga, para cargas de tensión con excentricidades relativamente grandes. Para una carga pequeña (distribución 1) se presentan deformaciones de tensión en el lado de la carga, y de compresión en el lado opuesto. Al aumentar la carga, manteniendo la excentricidad constante, las fuerzas de compresión y de tensión resultantes deben aumentar proporcionalmente. La diferencia entre estas dos fuerzas es pequeña, ya que se trata de excentricidades grandes. Durante este proceso el eje neutro tiende a moverse hacia la cara en compresión. Se llega así a la distribución de deformaciones 2, en que el acero del lado de tensión alcanza su esfuerzo de fluencia. Al aumentar la deformación, puesto que la tensión de dicho acero permanece constante, el incremento en la tensión total se debe a una disminución en la compresión total de la sección. Para que el incremento del momento sea proporcional al de la tensión, es necesario que la distribución de deformaciones cambie, como se muestra en el estado 3 de la figura 6.8b. Este proceso prosigue hasta el punto en que se

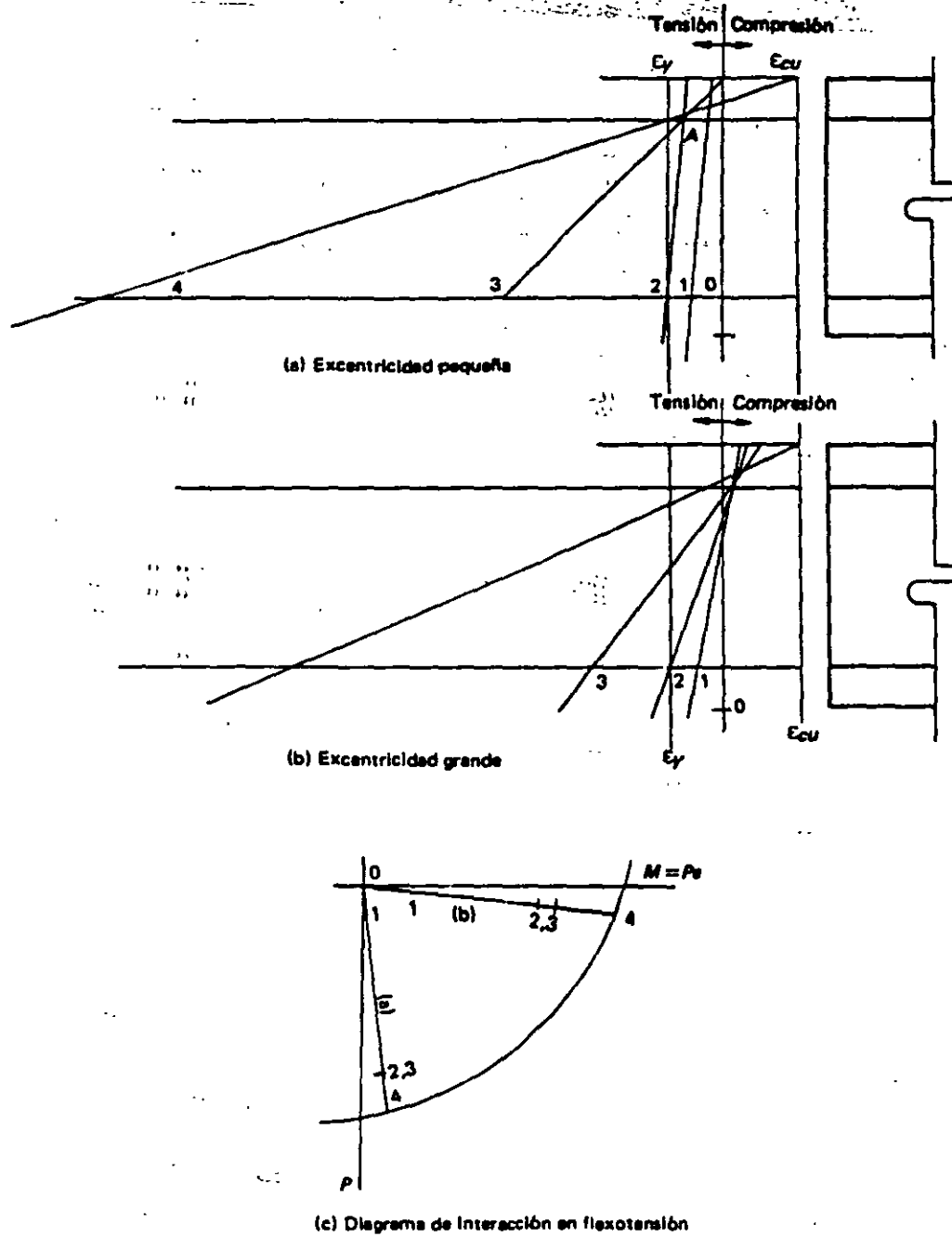


Figura 6.8 Condiciones de deformación unitaria en flexotensión en elementos sujetos a carga creciente con excentricidad constante.

alcanza la deformación máxima útil en compresión del concreto (distribución 4).

En la figura 6.8c se presenta un diagrama típico de interacción para la zona de flexotensión. Se indican en él los puntos correspon-

dientes a las distintas distribuciones de deformaciones que se han mencionado arriba.

Si el acero del lado opuesto a la carga está muy cerca de la superficie (lo que ocurre para relaciones pequeñas de recubrimiento a peral-



te), prácticamente no hay diferencia entre los valores de  $P$  que se obtienen de los estados 2, 3 y 4. Por el contrario si la relación recubrimiento-peralte es grande, puede haber diferencias del orden del diez por ciento entre las tensiones correspondientes a los estados 2 y 4.

La descripción anterior es simplista, pero de ella se concluye que las hipótesis simplificadoras son aplicables hasta un estado de tensión pura. En este caso, la tensión máxima que se puede desarrollar es la que resiste el acero,  $P = A_s f_y$ , ya que el concreto no resiste las deformaciones correspondientes.

De acuerdo con la descripción anterior, la resistencia en flexotensión se alcanza cuando el concreto se aplasta en compresión en un lado, al mismo tiempo que las deformaciones en tensión en el lado opuesto son considerables. La posibilidad de una fractura del acero a una carga menor es pequeña, ya que la deformación de fractura del acero es del orden de 30 a 100 veces la deformación máxima de compresión del concreto, para aceros torcidos en frío y aceros laminados ordinarios, respectivamente.

En estos cálculos se desprecia generalmente el endurecimiento debido a la deformación del acero de refuerzo. De tomarse en cuenta, cambiarían ligeramente los valores correspondientes de  $P$  y  $M$ , pero al despreciarlos se obtienen resultados del lado de la seguridad.

En resumen, aplicando rigurosamente las hipótesis simplificadoras se puede trazar fácilmente el diagrama de interacción, haciendo variar el valor de la carga normal desde un máximo en compresión hasta un máximo en tensión. A modo de ejemplo se ha hecho esto para una sección con igual área de acero en dos caras opuestas, utilizando las hipótesis ACI. El diagrama de interacción correspondiente se muestra en la fig. 6.9, donde se consignan también los datos de la sección. El diagrama se trazó, obteniendo parejas de valores  $(M, P)$  para distintas distribuciones de deformaciones unitarias.

Las líneas que representan estos estados de deformación giran todas alrededor del punto sobre la fibra superior en la cara de compresión que corresponde a una deformación máxima de compresión del concreto,  $\epsilon_{cu} = 0.003$ . Se puede observar que el diagrama de interacción en la zona de flexotensión sigue lógica y continuamente el trazo para flexocompresión, hasta llegar a un valor igual a  $A_s f_y$ , para el caso de tensión pura.

El diagrama de la figura 6.9 representa entonces el lugar geométrico de los valores máximos de carga normal que puede ser aplicada a una sección simétrica cuando la excentricidad de la carga respecto al centroide geométrico de la sección varía desde cero (punto 1), hasta infinito (punto 3) para una carga de compresión

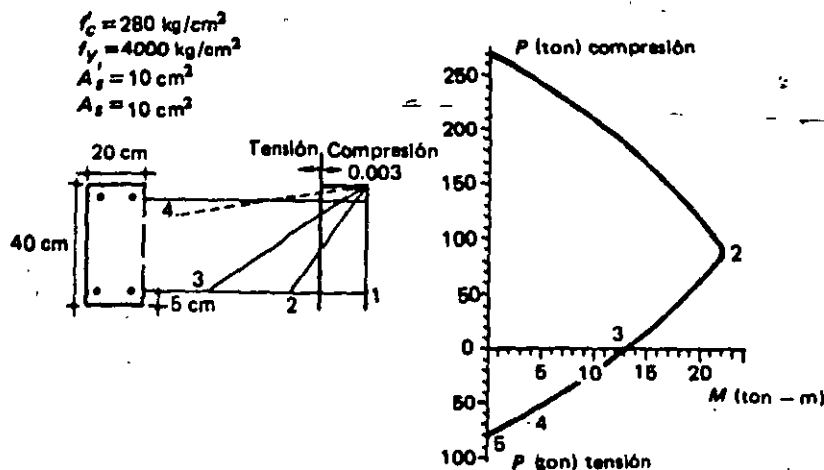


Figura 6.9 Diagrama de interacción para una sección simétrica (Hipótesis ACI).

sión, y desde infinito nuevamente hasta una excentricidad nula (punto 5), para una carga de tensión.

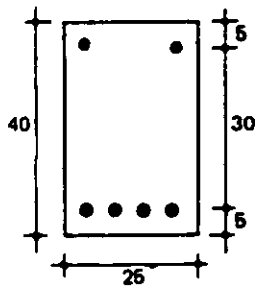
Los diagramas de interacción del Apéndice C se obtuvieron siguiendo un procedimiento semejante al descrito anteriormente.

Referencias

- 6.1 Comité ACI 318-77. *Design Handbook in Accordance with the Strength Design Method of ACI 318-77: Volume 2-Columns*. Detroit, American Concrete Institute, 1978.
- 6.2 Meli, R., y M. Rodríguez. *Gráficas para diseñar columnas de concreto reforzado*. México, D. F., Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, septiembre 1980.
- 6.3 Breaker, B. "Design Criteria for Reinforced Concrete Columns under Axial Load and Biaxial Bending". *Journal of the American Concrete Institute*. Detroit, enero 1961.
- 6.4 Marín, J. "Abacos, fórmulas y criterios para el cálculo de columnas de edificios de concreto armado". *Boletín IMME*. Caracas, enero-junio 1978.

Ejercicios

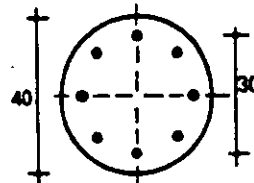
- 6.1 Utilizando el diagrama de interacción del ejemplo 6.1, calcular la carga que puede resistir la sección mostrada para excentricidades de 60 cm y de 5 cm. Calcular también el momento que puede resistir la sección bajo una carga axial de 250 ton.
- 6.2 Determinar por el procedimiento de tanteos y usando hipótesis simplificadas, la resistencia de la siguiente sección para una excentricidad de 20 cm hacia la cara con dos barras.
- 6.4 Calcular la carga axial que puede resistir la siguiente sección, usando las gráficas del Apéndice C con las hipótesis ACI, si está sometida a un momento de 20 ton-m.



$$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s = 6 \text{ barras del No. 6}$$

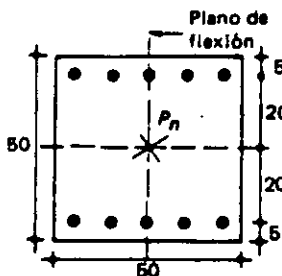


$$f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 3500 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s = 8 \text{ barras del No. 8}$$

- 6.3 Determinar el momento que puede resistir la siguiente sección por el procedimiento de tanteos, usando las hipótesis ACI o DF. Verificar el resultado obtenido con las gráficas del Apéndice C.

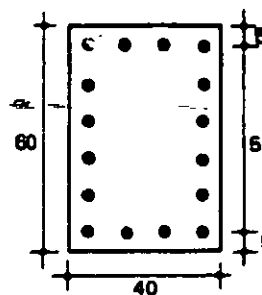


$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s = 10 \text{ barras del No. 8}$$

$$P_n = 300 \text{ ton}$$

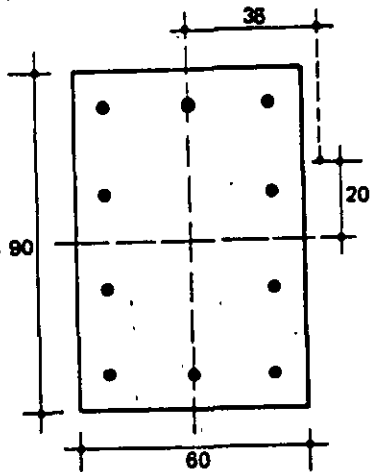


$$f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

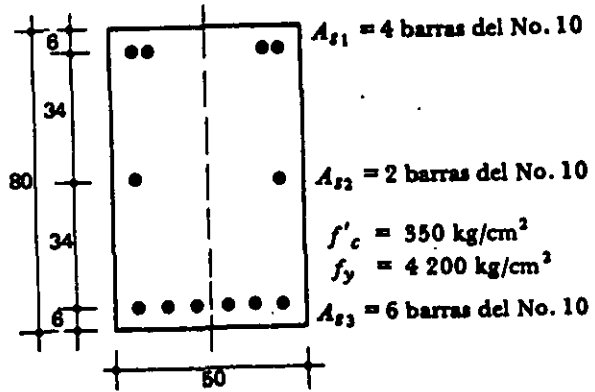
$$A_s = 16 \text{ barras del No. 6}$$

6.6 Calcular la resistencia de diseño de la siguiente sección.



$$\begin{aligned} f'_c &= 300 \text{ kg/cm}^2 \\ f_y &= 4\,200 \text{ kg/cm}^2 \\ A_s &= 10 \text{ barras del No. 10} \end{aligned}$$

6.7 Obtener un diagrama de interacción en flexo-compresión de la siguiente sección, usando hipótesis simplificadoras.



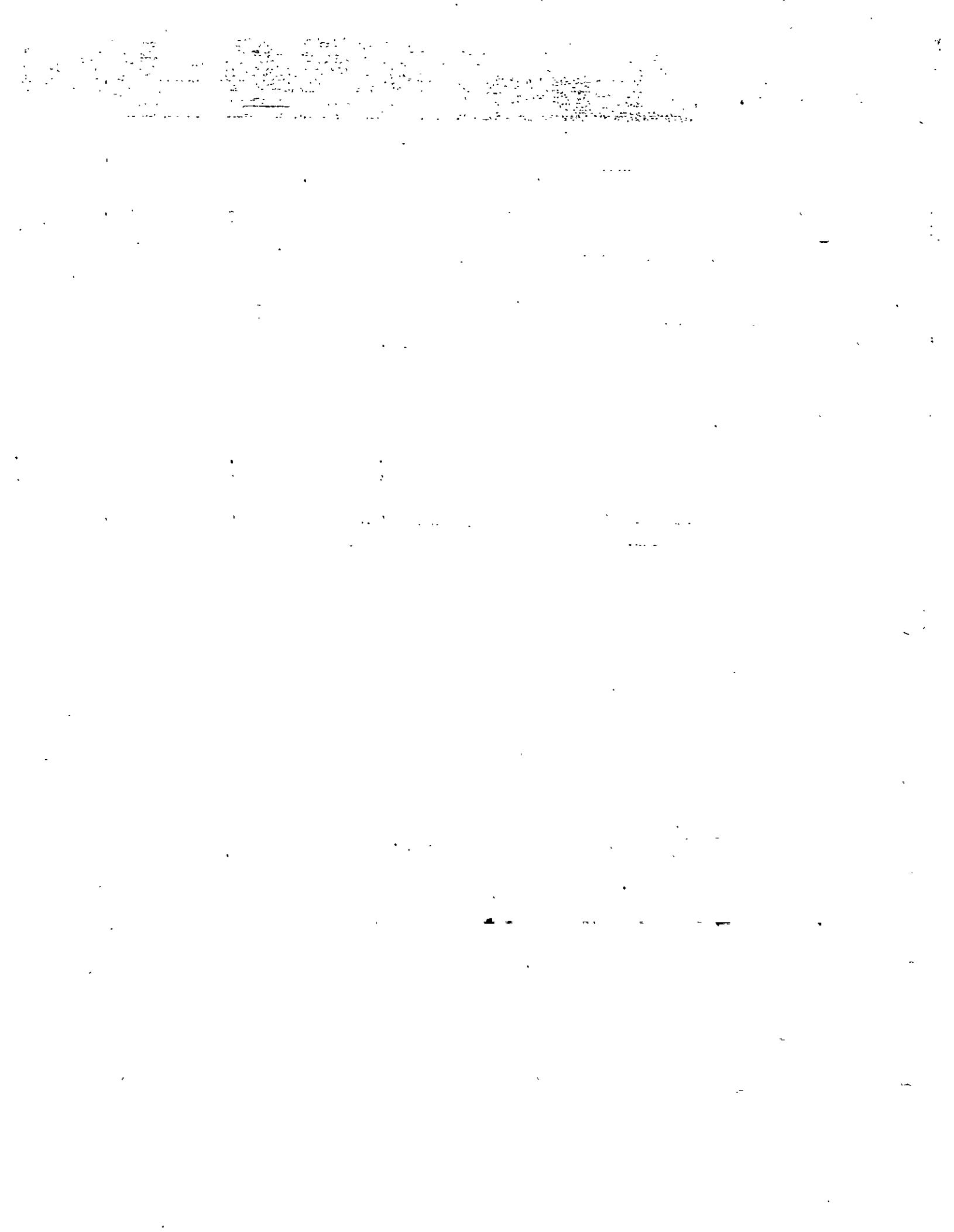
$$A_{s1} = 4 \text{ barras del No. 10}$$

$$A_{s2} = 2 \text{ barras del No. 10}$$

$$f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4\,200 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_{s3} = 6 \text{ barras del No. 10}$$



# CAPÍTULO 13

## Efectos de esbeltez

13.1 Introducción. / 13.2 Comportamiento y variables principales. / 13.3 Métodos de dimensionamiento. / 13.4 Cálculo de los efectos de esbeltez. / 13.5 Ejemplos.

### 13.1 Introducción

Se entiende por efecto de esbeltez la reducción de resistencia de un elemento sujeto a compresión axial o a flexo-compresión, debida a que la longitud del elemento es grande en comparación con las dimensiones de su sección transversal. Para ilustrar este efecto, considérese una columna articulada en sus extremos, sujeta a carga axial y momento flexionante (figura 13.1a). Esta columna es equivalente al sistema mostrado en la figura 13.1b, y tiene el diagrama de momentos flexionantes de la figura 13.1c. Al aplicar la carga  $P$  al sistema de la figura 13.1b, éste se deforma, como se mues-

tra en la figura 13.1d, y, como consecuencia de esta deformación, aumenta la distancia de la línea de acción de las cargas  $P$  al eje de la columna, lo cual equivale a que crezca la excentricidad de la carga en una cantidad  $y$ . Por lo tanto, el momento flexionante real en una sección cualquiera de la columna es:

$$M = Pe + Py = P(e + y)$$

El momento es máximo, para este ejemplo, a la mitad de la altura, donde alcanza el valor:

$$M = P(e + y_{máx})$$

Como consecuencia de los momentos adicionales  $Py$ , la resistencia del elemento se reduce respecto a la resistencia que tendría si sólo se aplicase el momento  $Pe$ . Esta reducción de resistencia se conoce como efecto de esbeltez. Este se presenta cualquiera que sea la longitud del elemento, pero es importante únicamente en elementos cuya relación longitud-peralte es grande, o sea, en elementos esbeltos. Sólo en estos elementos la magnitud de los momentos adicionales,  $Py$ , es significativa en relación con los momentos  $Pe$ .

La reducción de resistencia por esbeltez puede deberse también a desplazamiento lateral relativo entre los dos extremos de la columna, como sucede en marcos no contraventeados sujetos a carga lateral o que presentan asimetría en carga o en geometría. En la figura 13.2a se muestra un marco de este tipo. La columna  $A-B$  de este marco tiene el diagrama de momen-

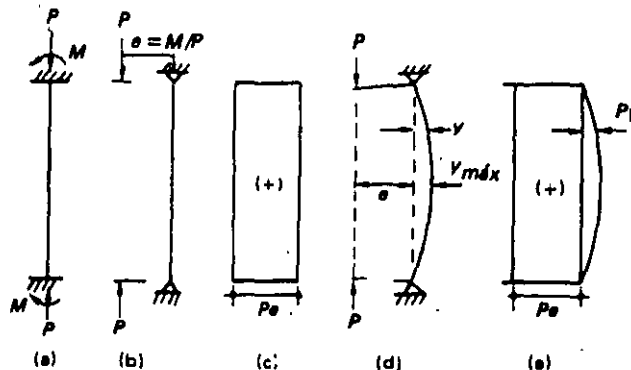


Figura 13.1 Momentos adicionales en una columna por efecto de esbeltez.

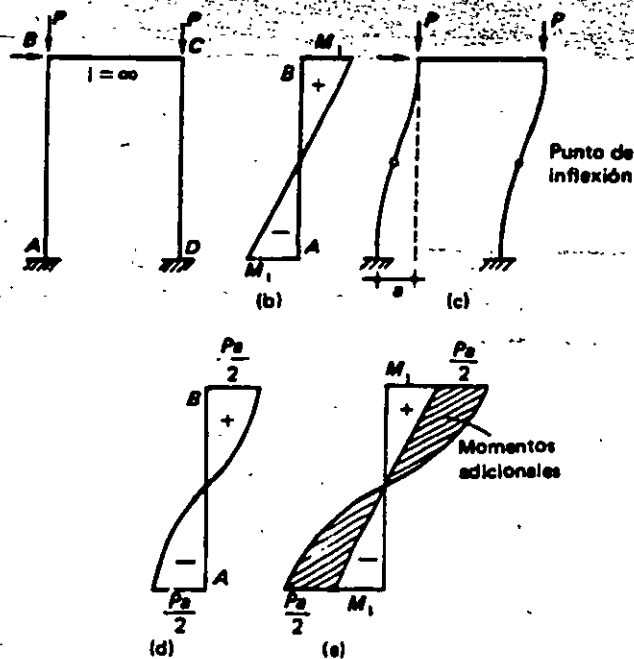


Figura 13.2 Momentos adicionales en una columna por efecto del desplazamiento lateral relativo (viga de rigidez infinita).

tos de primer orden mostrado en la figura 13.2b. (Se entiende por momentos de primer orden los que no consideran las deformaciones de la columna.) Por efecto del desplazamiento lateral relativo entre los extremos de la columna (figura 13.2c) se presentan en la columna A-B los momentos de segundo orden mostrados en la figura 13.2d. (Se entiende por momentos de segundo orden, los momentos adicionales debidos a las deformaciones de la columna.) El diagrama de momentos totales es el de la figura 13.2e. El caso representado en la figura

13.2 corresponde a un ejemplo hipotético en el que la rigidez de la viga superior es infinita, o sea, que la columna está empotrada en sus dos extremos. Cuando la rigidez de la viga es finita, los momentos adicionales son diferentes en los dos extremos de la columna, como se muestra en la figura 13.3. Los momentos adicionales se pueden calcular aplicando la carga  $P$  en el punto de inflexión de la columna, y multiplicando dicha carga por el desplazamiento de los extremos respecto al punto de inflexión. La reducción de resistencia por esbeltez

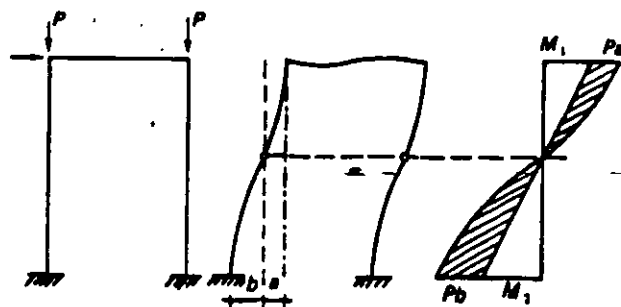


Figura 13.3 Momentos adicionales en una columna por efecto del desplazamiento lateral relativo (viga de rigidez finita).

es mayor cuando los extremos de la columna pueden sufrir desplazamiento lateral relativo, que cuando están restringidos contra el mencionado desplazamiento.

En la figura 13.4b se ha trazado con línea plena el diagrama de interacción de una columna corta en la que los efectos de esbeltez son despreciables. Si en esta columna se aumenta la carga progresivamente, manteniendo constante la excentricidad, las combinaciones de  $P$  y  $M$  quedan representadas por la recta 0-1. La intersección de la recta 0-1 con el diagrama de interacción representa la resistencia de la columna corta. Si en una columna esbelta, como la de la figura 13.4a, la carga aumenta progresivamente en la misma forma, las combinaciones de  $P$  y  $M$  quedan representadas por la curva 0-2. La diferencia en las abscisas de los puntos de las dos líneas correspondientes a un nivel dado de carga, se debe precisamente a los momentos adicionales  $P\gamma$ . La resistencia de la columna esbelta está representada por la intersección de la línea 0-2 con el diagrama de interacción. Como puede verse en la figura, es menor que la resistencia de la columna corta.

En la figura 13.4b se ha indicado también, con línea de punto y raya, la historia de carga de una columna sumamente esbelta que falla por inestabilidad. La característica de este tipo de falla, es que la carga aplicada alcanza su valor máximo antes de que la línea que representa la historia de carga corte al diagrama de interacción.

La falla, en este caso, ocurre por pandeo súbito del elemento, mientras que en el caso anterior, la falla ocurre por aplastamiento del concreto, en forma similar a la falla de una columna corta. Debido a que los elementos de concreto reforzado son de sección transversal relativamente grande, es raro que fallen por inestabilidad. De ordinario, se presenta únicamente una reducción de resistencia por efecto de esbeltez. En este capítulo se describen métodos para calcular esta reducción de resistencia.

### 13.2 Comportamiento y variables principales

El comportamiento de una columna que forma parte de una estructura de concreto reforzado es complejo, debido a que las estructuras generalmente son monolíticas y a que las columnas están restringidas por otros elementos estructurales que influyen en su comportamiento. Se han realizado ensayos de columnas esbeltas que forman parte de marcos de concreto. Sin embargo, la interpretación de su comportamiento requiere un estudio previo del comportamiento de estructuras hiperestáticas y cae fuera del alcance de este texto. Sólo se describirá aquí la influencia de algunas variables sobre la resistencia de columnas esbeltas que forman parte de estructuras.

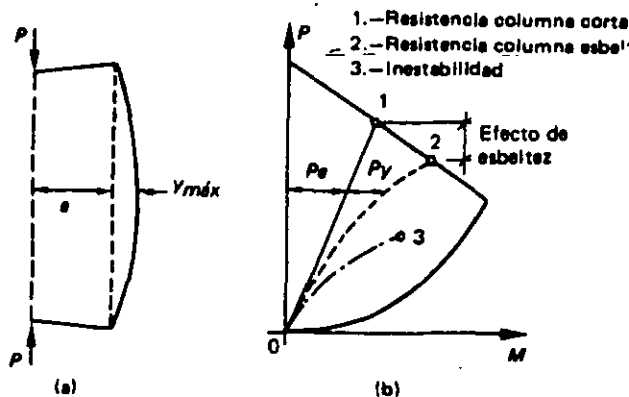


Figura 13.4 Comparación del comportamiento de una columna corta, de una columna esbelta y de una columna que falla por inestabilidad.

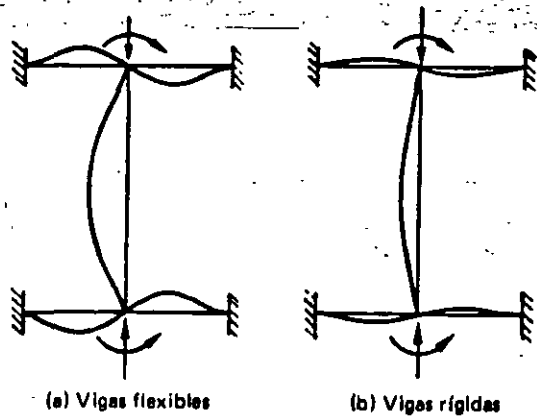


Figura 13.5 Efecto de la rigidez flexionante de las vigas que restringen a una columna.

a) Rigidez u flexión de las vigas que restringen a la columna

Mientras mayor sea esta rigidez a flexión, es mayor el grado de empotramiento o restricción de la columna en sus extremos y, por tanto, son menores las deflexiones de la columna y los momentos adicionales  $P\delta$ . Este efecto puede verse en la figura 13.5, en la cual se com-

paran una columna restringida por vigas flexibles (figura 13.5a) y otra restringida por vigas rígidas (figura 13.5b).

b) Rigidez a flexión de la columna

La rigidez a flexión de la propia columna tiene influencia sobre la reducción de resistencia por esbeltez, ya que mientras más rígida sea la columna, son menores sus deflexiones y, por lo tanto, el valor de los momentos adicionales  $P\delta$ . La rigidez a flexión de la columna depende principalmente del tamaño de la sección transversal, del módulo de elasticidad del concreto, del porcentaje de refuerzo longitudinal y de la longitud de la columna. El efecto combinado del tamaño de la sección transversal y de la longitud, suele tomarse en cuenta en los métodos de dimensionamiento mediante el parámetro llamado esbeltez de la columna, que se define como la relación entre la longitud y el radio de giro de la sección transversal. A veces, la esbeltez se define también en función de la relación entre la longitud y la dimensión menor de la columna.

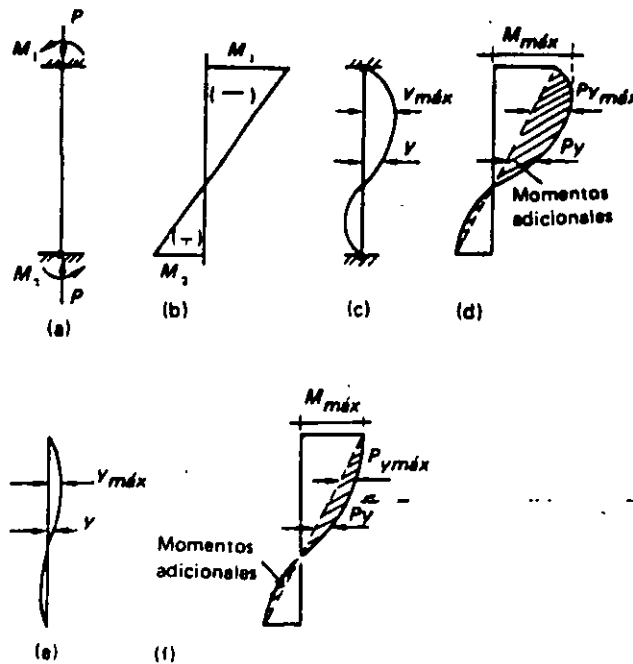


Figura 13.6 Efecto de esbeltez en columnas con doble curvatura.

e) Relació  
ext  
urt

La rela  
ción entr  
de la co  
las deflex  
tos adicio  
ejemplo,  
en el que  
son del n  
tos flexio  
en la fig  
ne la for  
diagrama  
sumando  
los mon  
en la fig  
caso, el  
el mome  
en secc  
siguient  
suma d  
y segun

hay  
olu  
momen  
grandes  
máximo  
Puede  
cienten  
plazam  
de resi



c) *Relación de excentricidades en los dos extremos de la columna y tipo de curvatura*

La relación de excentricidades, o sea, la relación entre los momentos en los dos extremos de la columna, influye en la magnitud de las deflexiones y, por lo tanto, en los momentos adicionales por esbeltez. Considérese, por ejemplo, el caso mostrado en la figura 13.6a, en el que los momentos de apoyo sobre barra son del mismo signo, y el diagrama de momentos flexionantes de primer orden es el indicado en la figura 13.6b. La columna deformada tiene la forma mostrada en la figura 13.6c, y el diagrama final de momentos, que se obtiene sumando el diagrama de la figura 13.6b con los momentos adicionales  $P\delta$ , es el mostrado en la figura 13.6d. Puede verse que, en este caso, el momento máximo de primer orden y el momento máximo adicional,  $P\delta_{máx}$ , ocurren en secciones diferentes de la columna. Por consiguiente, el momento máximo total no es la suma de los momentos máximos de primer y segundo orden, sino un valor menor. Para que haya reducción de resistencia por esbeltez en columnas de este tipo, es necesario que los momentos adicionales sean lo suficientemente grandes para desplazar la sección de momento máximo, como se muestra en la figura 13.6d. Puede suceder que la columna no sea lo suficientemente esbelta para que ocurra este desplazamiento. En este caso no habrá reducción de resistencia, como se muestra en las figuras

13.6e y 13.6f. Cuando hay reducción de resistencia, ésta es relativamente pequeña, ya que el momento máximo no difiere mucho del momento aplicado en el extremo.

Considérese ahora el caso en que los momentos de apoyo sobre barra son iguales y de signo contrario (figura 13.7a). Aquí, el momento flexionante de primer orden es constante a lo largo de la columna (figura 13.7b), y la columna se deforma con curvatura simple (figura 13.7c). El momento máximo es igual a la suma del momento constante y el momento adicional máximo  $P\delta_{máx}$ , que ocurre a la mitad de la altura (figura 13.7d). En estas columnas siempre hay reducción de resistencia por esbeltez, cualquiera que sea su longitud, y esta reducción es mayor que en el caso de la figura 13.6, puesto que el momento máximo total es la suma de los dos momentos máximos.

d) *Desplazamiento lateral relativo entre los dos extremos de la columna*

Se ha mencionado que las columnas pueden formar parte de marcos que no tengan posibilidad de sufrir deformaciones laterales, por estar contraventeados o unidos a otras estructuras muy rígidas, o de marcos cuya resistencia a cargas laterales dependa exclusivamente de la resistencia a flexión de sus miembros, y que, por lo tanto, puedan sufrir deformaciones laterales. También se ha mencionado que cuando los marcos pueden desplazarse lateralmente, los momentos adicionales son mayores que

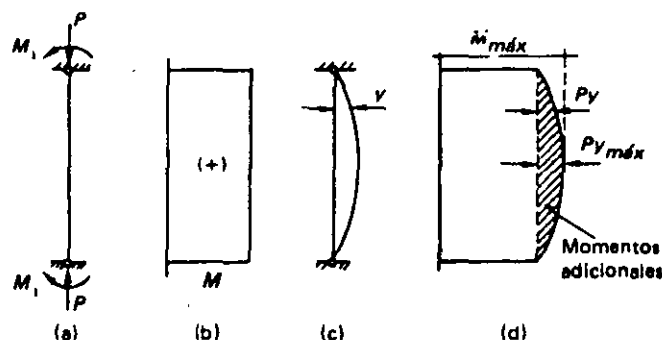


Figura 13.7 Efecto de esbeltez en columnas con curvatura simple.

cuando los marcos no pueden hacerlo. Esto se debe a que, en el primer caso, los momentos adicionales máximos se presentan generalmente donde son máximos los momentos de primer orden, como puede verse en las figuras 13.2 y 13.9.

La magnitud del desplazamiento lateral relativo depende de la rigidez a flexión de las columnas y de las vigas de los marcos. Si la rigidez a flexión de las vigas es pequeña, en relación con la rigidez a flexión de las columnas, la rotación de los extremos de las columnas es grande y aumenta, por lo tanto, el desplazamiento lateral relativo. El desplazamiento lateral también depende del tipo de carga que actúa sobre el marco. Por lo general, es mayor el desplazamiento cuando el marco está sujeto a cargas laterales que cuando está sujeto únicamente a cargas verticales.

Para valuar el desplazamiento lateral debe considerarse la estructura en conjunto y no solamente un marco por separado [13.11]. Por ejemplo, considérese la estructura de la figura 13.8, en la que existen muros rígidos en los ejes *A* y *D*. Si actúa la fuerza horizontal *F* sobre dicha estructura, los marcos *B* y *C* no sufrirán desplazamientos laterales importantes, a pesar de no estar contraventeados, ya que lo impiden los marcos *A* y *D* que son muy rígidos por la presencia de los muros. Se supone en este ejemplo que existe una losa de piso lo suficientemente rígida para obligar a que todos los marcos se deformen en conjunto. El análisis

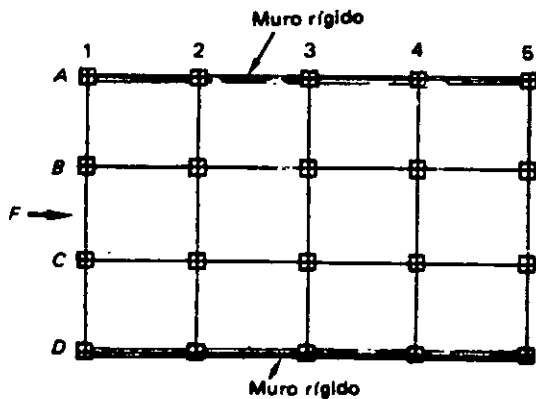


Figura 13.8 Estructura con muros rígidos.

detallado de estructuras para valuar los desplazamientos laterales está fuera del alcance de este texto.\*

#### e) Duración de la carga

Cuando la carga actúa por un periodo prolongado de tiempo, las deflexiones aumentan por efecto de la contracción y el flujo plástico del concreto. Por lo tanto, aumentan también los momentos adicionales y la reducción de resistencia por efecto de esbeltez. La influencia de la duración de la carga es más importante mientras mayores sean las deflexiones adicionales.

### 13.3 Métodos de dimensionamiento

Del análisis anterior sobre la influencia de las distintas variables en la reducción de resistencia por esbeltez, puede deducirse que la solución rigurosa del problema consiste en calcular las deflexiones adicionales y los momentos de segundo orden. La suma de estos momentos y de los de primer orden es igual a los momentos totales de diseño. Sin embargo, el cálculo de los momentos de segundo orden, que se conoce con el nombre de análisis estructural de segundo orden, resulta demasiado laborioso para fines de dimensionamiento de estructuras comunes.

Algunas de las razones que complican este análisis son las siguientes. Es difícil evaluar con precisión las deflexiones de los elementos de la estructura en todas las etapas de carga, ya que debe tomarse en cuenta el comportamiento inelástico del concreto reforzado y los efectos del agrietamiento, contracción y flujo plástico. Las rigideces relativas de los elementos varían con la etapa de carga, ya que algunos alcanzan su momento de fluencia antes que otros y, por lo tanto, pierden su rigidez más rápidamente. El análisis debe hacerse por aproximaciones suce-

\*El lector interesado puede consultar la siguiente referencia: E. Rosenblueth y L. Esteva, "Folleto Complementario del Reglamento del Distrito Federal, Análisis Sísmico", edición de la Revista Ingeniería, México.

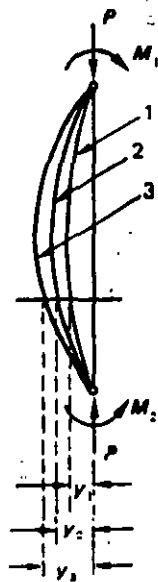


Figura 13.9 Incrementos sucesivos de deformaciones debidos a momentos de segundo orden.

sivas, ya que los momentos adicionales producen deflexiones adicionales, las que a su vez incrementan nuevamente los momentos. Por ejemplo, considérese que en la figura 13.9, la línea 1 representa la columna deformada por efecto de los momentos de primer orden; los momentos adicionales,  $Py_1$ , incrementan las deformaciones, y la columna deformada queda representada ahora por la línea 2; pero esto incrementa los momentos adicionales que ahora tienen el valor  $Py_2$ ; las deflexiones también vuelven a aumentar al aumentar los momentos adicionales, y así sucesivamente. El procedimiento de aproximaciones sucesivas se realiza calculando los momentos y las deformaciones de la manera descrita, hasta que los incrementos entre dos etapas sucesivas sean muy pequeños en comparación con los momentos totales. Puede suceder que el procedimiento no converja y entonces la estructura es inestable.

Las consideraciones anteriores indican que un análisis de segundo orden sólo puede hacerse en forma expedita con programas para computadora electrónica bastante elaborados. Por lo tanto, no suele usarse este procedimiento excepto en estructuras importantes en las que existan reducciones fuertes de resistencia por

esbeltez. En este texto no se presentan métodos de análisis de segundo orden. El lector interesado puede consultar las referencias 13.1 y 13.2.

El dimensionamiento de columnas esbeltas en estructuras comunes suele hacerse con métodos simplificados, en los que no es necesario desarrollar análisis de segundo orden. Dichos métodos simplificados pueden reunirse en los tres siguientes grupos.

#### a) Métodos de amplificación de momentos

Estos métodos consisten en obtener el valor de la carga axial,  $P$ , y el momento flexionante,  $M$ , en las columnas de una estructura por medio de un análisis de primer orden, y dimensionar las columnas para el mismo valor de  $P$  y para un momento amplificado,  $\delta M$ , donde  $\delta$  es un factor siempre mayor que la unidad. En la figura 13.10 se ilustra este concepto. Si se despreciase el efecto de esbeltez, la columna se dimensionaría para los valores de  $P$  y  $M$ , y su resistencia sería la correspondiente al punto 1 del diagrama de interacción mostrado con línea punteada. Los incrementos de carga con un valor constante de la excentricidad estarían representados por puntos sobre la línea recta 0-1. Para tomar en cuenta el efecto de esbeltez, la columna se diseña para los valores  $P$  y  $\delta M$ , y su resistencia es la que corresponde al punto 2

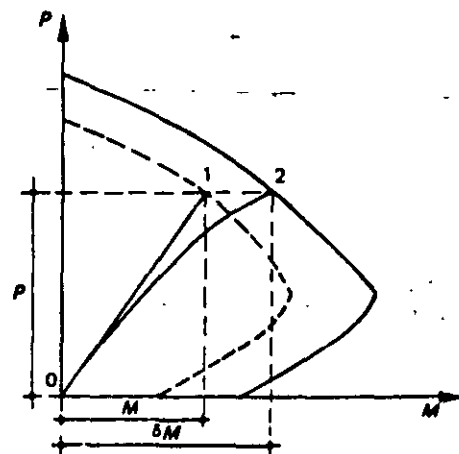


Figura 13.10 Valores de dimensionamiento en los métodos de amplificación de momentos.

del diagrama de interacción mostrado con línea llena. Los incrementos de carga están representados por puntos sobre la línea 0-2, en la cual la excentricidad aumenta con el nivel de carga, puesto que el valor de  $\delta$  depende, en estos métodos, del valor de la carga  $P$ .

Un ejemplo de estos métodos de amplificación de momentos es el presentado en el Reglamento ACI 318-83 y en las NCT-77 del Reglamento del Distrito Federal.

#### b) Métodos del momento complementario

En estos métodos, se calculan los valores  $P$  y  $M$  mediante un análisis de primer orden y a partir de estos valores se calcula la excentricidad  $e = M/P$  que tendría la columna si no hubiese efectos de esbeltez. A esta excentricidad,  $e$ , se agrega una excentricidad adicional,  $e_1$ , que es función de las principales variables que intervienen en la reducción de resistencia por esbeltez. Al aumentar la excentricidad, el dimensionamiento de la columna se hace para un momento total que es igual al momento de primer orden más un momento complementario que resulta de multiplicar la carga  $P$  por la excentricidad adicional  $e_1$ . El valor de la carga  $P$  no se modifica.

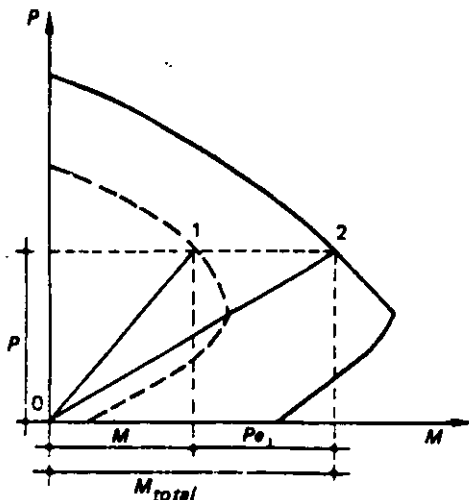


Figura 13.11 Valores de dimensionamiento en los métodos del momento complementario

En la figura 13.11 se muestra este concepto de dimensionamiento. El punto 1 del diagrama de interacción trazado con línea punteada corresponde a los valores de  $P$  y  $M$  con los que hay que diseñar la columna sin considerar el efecto de esbeltez. El punto 2 del diagrama de interacción trazado con línea llena corresponde a los valores de  $P$  y  $M$  con los que hay que diseñar la columna esbelta. Puesto que el valor de la excentricidad adicional es independiente del valor de  $P$ , la línea 0-2, que representa incrementos de carga de la columna esbelta, es una línea recta, a diferencia de la línea 0-1 de los métodos de amplificación de momentos, que es una línea curva. Sin embargo, los valores de dimensionamiento en ambos métodos, o sea, los puntos 2, son similares.

#### c) Métodos del factor de reducción

En estos métodos se supone que la carga axial y el momento que puede resistir una columna esbelta son iguales a los que puede resistir una columna corta, multiplicados por un factor de reducción  $\gamma$ , que siempre es menor que la unidad. Por lo tanto, para fines de dimensionamiento, los valores de  $P$  y  $M$  obtenidos de un análisis de primer orden se dividen entre el factor  $\gamma$ , con lo cual se obtienen valores amplificados, para los que se dimensiona la columna.

Este concepto de dimensionamiento se ilustra en la figura 13.12. El punto 1 corresponde a los valores de  $P$  y  $M$  con los que hay que diseñar la columna corta y el punto 2, a los de la columna larga.

En este caso, no se considera el cambio en la excentricidad causado por las deflexiones adicionales y los momentos de segundo orden. Por lo tanto, en estos métodos es menos precisa la representación del comportamiento de la columna que en los dos métodos anteriores. Por esta razón, actualmente se tiende a abandonar este enfoque del problema. El Reglamento ACI de 1963 presentaba un método basado en factores de reducción, el cual se sustituyó en 1971 por un método de amplificación de momentos.

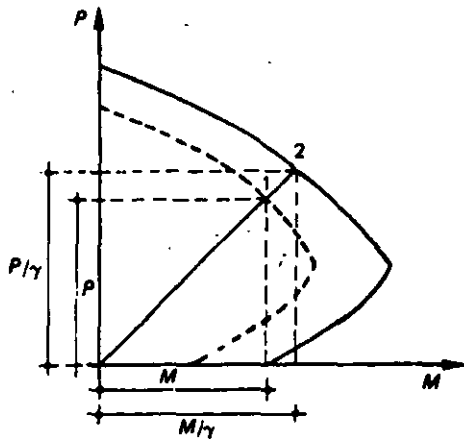


Figura 13.12 Valores de dimensionamiento en los métodos del factor de reducción.

La exposición detallada de los métodos de cada grupo resultaría demasiado extensa y de poca utilidad. Sólo se presentan aquí, por lo tanto, los métodos del Reglamento ACI 318-83 y de las NTC-77 del Reglamento del Distrito Federal, que son muy similares. En ambos casos, la presentación de este capítulo se limita al cálculo de los momentos amplificados con los cuales se deben dimensionar los elementos.

### 13.4 Cálculo de los efectos de esbeltez

#### 13.4.1 Método del Reglamento ACI 318-83

Es un método de momento complementario que está basado en el análisis elástico de elementos esbeltos sujetos a carga axial y flexión, los cuales se denominan frecuentemente "vigas-columna". El análisis riguroso de estos elementos se puede efectuar aplicando una ecuación diferencial de segundo orden o un procedimiento numérico de aproximaciones sucesivas. Sin embargo, el análisis simplificado indica que el momento máximo en una viga-columna que se deforma en curvatura simple puede calcularse aproximadamente con la ecuación:

$$M_{m\acute{a}x} = M_o + \frac{Pa_o}{1 - (P/P_c)} \quad (13.1)$$

donde  $M_o$  y  $a_o$  son el momento y la deflexión máxima de primer orden, respectivamente,  $P$  es la carga axial, y  $P_c$  es la carga crítica de Euler.\*

En el caso de vigas-columna que se deforman en curvatura simple, y que tienen momentos iguales en ambos extremos, la ecuación 13.1 puede aproximarse por la ecuación:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{M_o}{1 - (P/P_c)}, \quad (13.2)$$

y para otros casos, por la ecuación:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{C_m M_o}{1 - (P/P_c)}, \quad (13.3)$$

donde  $C_m$  es un factor que hace equivalente el diagrama de momentos flexionantes del elemento, al diagrama de un elemento con momentos iguales en ambos extremos. La ecuación 13.3 puede expresarse en la forma:

$$M_{m\acute{a}x} = \delta M_o, \quad (13.4)$$

donde

$$\delta = \frac{C_m}{1 - (P/P_c)} \quad (13.5)$$

El término  $\delta$  de la ecuación 13.4 es el factor de amplificación de momentos mencionado en la sección 13.3. Los resultados de análisis teóricos y las mediciones efectuadas en ensayos de marcos de concreto reforzado, indican la conveniencia de distinguir entre los momentos producidos por cargas que no provocan desplazamientos laterales de la estructura y los momentos producidos por cargas que sí los provocan, y de establecer factores de amplificación distintos para ambos tipos de momentos. Por lo tanto, el Reglamento ACI

\* Para un tratamiento del problema de pandeo, que incluya la definición de carga crítica de Euler, consúltase algún texto especializado, como por ejemplo, S. P. Timoshenko y J. M. Gere, "Theory of Elastic Stability". Segunda edición, McGraw-Hill, 1961, Nueva York.

318-89 establece que los elementos se dimensionen usando la carga axial,  $P_u$ , afectada del factor de carga y obtenida de un análisis elástico convencional de primer orden, y un momento amplificado  $M_c$  definido por la ecuación:

$$M_c = \delta_b M_{2b} + \delta_s M_{2s} \quad (13.6)$$

$M_{2b}$  es el mayor de los momentos en los extremos del elemento producido por cargas que no provocan desplazamiento lateral apreciable y  $M_{2s}$  es el correspondiente a cargas que sí provocan dicho desplazamiento. Al final de esta sección se hace un comentario sobre lo que puede considerarse un desplazamiento lateral apreciable.

Los factores de amplificación  $\delta$  quedan definidos por las siguientes ecuaciones:

$$\delta_b = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{\phi P_c}} \geq 1.0 \quad (13.7)$$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{\phi \sum P_c}} \geq 1.0 \quad (13.8)$$

Para estructuras no contraventeadas, o sea, que pueden sufrir desplazamientos laterales, deben calcularse  $\delta_b$  y  $\delta_s$ ; para estructuras contraventeadas puede considerarse que  $\delta_s$  vale cero. Puede verse que la ecuación 13.7 es igual a la 13.5 con la inclusión únicamente del factor de reducción  $\phi$  que tiene los valores indicados en la sección 6.3.1 para miembros sujetos a flexo-compresión. La ecuación 13.8 se deriva también de la 13.5, haciendo  $C_m$  igual a uno y sumando las cargas  $P_u$  y  $P_c$  de todas las columnas de un piso en vez de considerar cada columna en forma aislada. Esto último se hace para tomar en cuenta que cuando las columnas están unidas por una losa rígida que trabaja como diafragma horizontal, todas tienen el mismo desplazamiento lateral. A continuación se presenta la forma

de evaluar  $C_m$  y  $P_c$ , términos que aparecen en las ecuaciones 13.7 y 13.8.

**Valuación de  $C_m$ .** En el Método ACI se proponen las siguientes expresiones para calcularlo:

Para elementos sin posibilidad de desplazamiento lateral relativo y sin cargas transversales entre sus apoyos,

$$C_m = 0.6 + 0.4 (M_{1b}/M_{2b}) \quad (13.9)$$

pero no menor que 0.4.

Para elementos con posibilidad de desplazamiento lateral relativo o con cargas transversales entre sus apoyos,

$$C_m = 1. \quad (13.10)$$

Los momentos  $M_{1b}$  y  $M_{2b}$  son los momentos flexionantes en los extremos del elemento, siendo  $M_{2b}$  el momento numéricamente mayor. El término  $0.4 (M_{1b}/M_{2b})$  es positivo si el elemento se flexiona en curvatura simple y negativo si se flexiona en curvatura doble. Obsérvese que cuando  $M_{1b} = M_{2b}$ , y el elemento se flexiona en curvatura simple, el valor de  $C_m$  es igual a la unidad, y la ecuación 13.9 se transforma en la ecuación 13.2. Para el caso de columnas con desplazamiento lateral relativo entre sus extremos, el valor de  $C_m$  siempre es igual a la unidad, ya que en estas columnas el momento máximo de segundo orden ocurre en la misma sección que el momento máximo de primer orden, como sucede también en columnas con curvatura simple y momentos iguales en sus extremos.

**Valuación de  $P_c$ .** La siguiente ecuación da la carga crítica de pandeo o carga crítica de Euler de elementos de comportamiento lineal,

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k l_u)^2} \quad (13.11)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  $I$  es el menor momento de inercia de la

sección  
de pand  
mente  
reforzad  
lineal. E  
aproxim  
una de l

En e  
ticidad  
dad de  
sección  
refuerz  
na, y f  
ducido  
La ecu  
ecuaci  
colum  
fuerzo  
rigidez  
en tér  
cargas  
La l  
del gr  
extre  
plazar

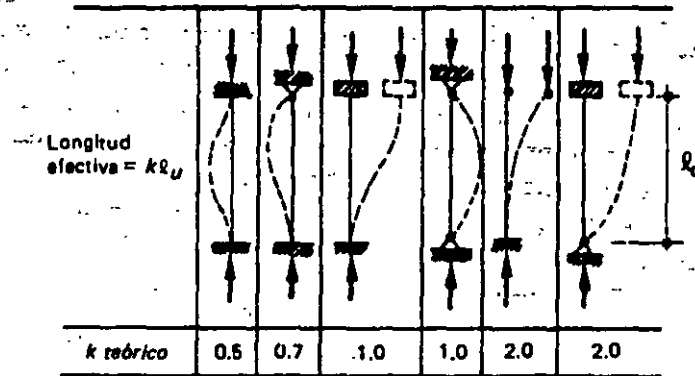


Figura 13.13 Longitud efectiva de pandeo para diferentes condiciones de apoyo.

sección transversal, y  $k l_u$  es la longitud efectiva de pandeo. La ecuación 13.11 no es rigurosamente aplicable a elementos de concreto reforzado, ya que su comportamiento no es lineal. Sin embargo, puede usarse, en forma aproximada, si el valor de  $EI$  se calcula con una de las siguientes ecuaciones,

$$EI = \frac{E_c I_g / 5 + E_s I_s}{1 + \beta_d} \quad (13.12)$$

ó,

$$EI = \frac{E_c I_g / 2.5}{1 + \beta_d} \quad (13.13)$$

En estas ecuaciones,  $E_c$  es el módulo de elasticidad del concreto,  $E_s$ , el módulo de elasticidad del acero,  $I_g$ , el momento de inercia de la sección gruesa,  $I_s$ , el momento de inercia del refuerzo respecto al eje centroidal de la columna, y  $\beta_d$  es la relación entre el momento producido por la carga muerta y el momento total. La ecuación 13.13 es más sencilla de usar que la ecuación 13.12 pero no se recomienda para columnas con relaciones muy elevadas de refuerzo. El término  $\beta_d$  toma en cuenta que la rigidez del elemento, la cual se puede medir en términos de  $EI$ , se reduce bajo la acción de cargas permanentes de larga duración.

La longitud efectiva de pandeo,  $k l_u$ , depende del grado de restricción de la columna en sus extremos y de la posibilidad de que exista desplazamiento lateral relativo. En la figura 13.13

se muestran las longitudes efectivas de pandeo de columnas con condiciones ideales de restricción (perfectamente articuladas o perfectamente empotradas). En estructuras de concreto reforzado, las columnas se encuentran restringidas parcialmente por los sistemas de piso, sin que existan articulaciones o empotramientos perfectos. El grado de restricción depende de la relación entre las rigideces de las columnas y del sistema de piso, la cual puede definirse en la siguiente forma:

$$\psi = \frac{\sum K_{col}}{\sum K_{piso}} \quad (13.14)$$

En esta ecuación,  $K$  es la rigidez  $EI/l$ ;  $\sum K_{col}$  se refiere a las columnas que concurren en un nudo en la estructura; y  $\sum K_{piso}$  se refiere a los elementos que forman el sistema de piso y que están contenidos en el plano del marco estructural que se analiza; o sea, que no se incluyen en la suma las rigideces de las vigas perpendiculares al marco.

El cálculo de la longitud efectiva de pandeo en función del grado de restricción,  $\psi$ , puede hacerse utilizando los nomogramas de la figura 13.14, en los que  $\psi_A$  y  $\psi_B$  son los valores de  $\psi$  en los extremos  $A$  y  $B$  de la columna. Para valores dados de  $\psi_A$  y  $\psi_B$ , las longitudes efectivas son mayores para columnas de marcos con posibilidad de desplazamiento lateral. Esto refleja el hecho de que los momentos de segundo orden son mayores en este tipo de marcos, como

ya se ha señalado anteriormente. La longitud efectiva de las columnas de estos marcos tiende a infinito cuando la rigidez del sistema de piso tiende a cero, o sea, cuando las columnas están articuladas. En este caso se tiene una columna inestable. En cambio, en columnas sin posibilidad de desplazamiento lateral, la longitud efectiva,  $k l_u$ , nunca es mayor que la longitud real,  $l_u$ . Los nomogramas de la figura 13.14 se desarrollaron para columnas de comportamiento lineal, pero pueden utilizarse en forma aproximada para columnas de concreto reforzado.

Una vez calculados los valores de  $C_m$  y de  $P_c$ , de la manera descrita, pueden determinarse los factores de amplificación,  $\delta$ , con las ecuaciones 13.7 y 13.8, y el momento máximo de diseño con la ecuación 13.6. En el caso de que los momentos máximos se presenten en los extremos de las columnas, los momentos de primer orden en los extremos del sistema de piso también deben incrementarse con el mismo factor de amplificación, ya que la resistencia del sistema de piso debe ser congruente con la de las columnas.

En el Reglamento ACI 318-83 se recomienda que se tomen en cuenta los efectos de esbel-

tez en columnas en las que el término  $k l_u/r$  es mayor que  $34 - 12 M_{1b}/M_{2b}$ , o que 22, según se trate, respectivamente, de marcos sin desplazamiento lateral o con desplazamiento lateral. El término  $r$  es el radio de giro de la sección, que puede estimarse como 0.30 veces el lado menor para columnas rectangulares, o 0.25 veces el diámetro para columnas circulares. Cuando el valor de  $k l_u/r$  es mayor que 100, no se permite el método simplificado descrito en esta sección, sino que debe usarse un análisis de segundo orden.

En este método se hace una diferenciación importante entre estructuras que puedan sufrir desplazamientos laterales importantes y las que no pueden. Es por lo tanto necesario distinguir ambos tipos de estructuras. Los sistemas estructurales a base de marcos no contraventeados o sin muros de cortante, que estén sujetos a cargas laterales de sismo o viento, sí sufren desplazamientos laterales y para ellas debe incluirse el factor de amplificación  $\delta$ . También debe incluirse en estructuras asimétricas en carga o geometría cuando la relación entre el desplazamiento lateral y altura de la columna es mayor de 1/1500. Cuando existen contra-

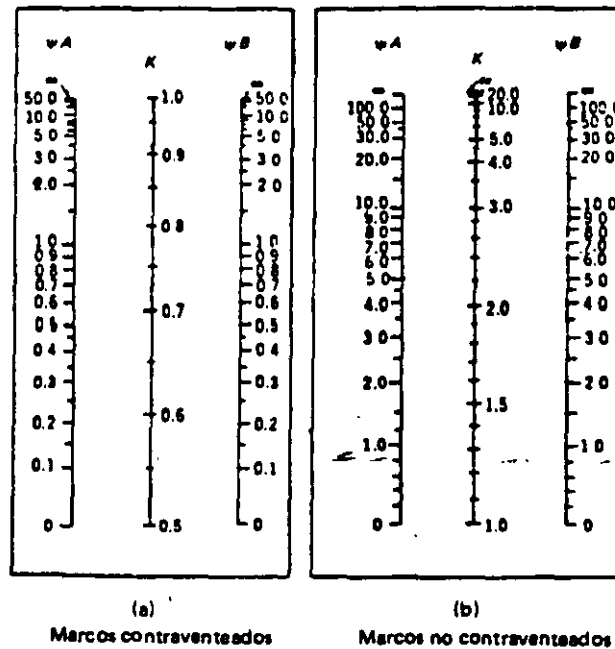


Figura 13.14 Factores para obtener las longitudes efectivas del pandeo.

vientos o  
res  
considera  
los contr  
ficientem  
mento A  
El pu  
índice d

donde  
 $\Delta_u =$

$H_u =$   
 $h_s =$

Si el  
puede  
a despi  
or cic  
ue  
mente

El s  
rigidez  
te y c  
column  
veces  
de col  
las rig  
tante  
divers  
se inc  
tarse  
bluet  
estru

13.4.

E  
ACI

41



vientos o muros de cortante suficientemente rígidos se reducen los desplazamientos laterales a valores muy pequeños y entonces puede considerarse que  $\delta_s$  vale cero. Para calcular si los contravientos o muros de cortante son suficientemente rígidos, el Comentario al Reglamento ACI 318-83 recomienda dos métodos.

El primer método consiste en calcular el índice de estabilidad

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_u}{H_u h_s} \quad (13.15)$$

donde

$\Delta_u$  = desplazamiento lateral en el nivel de piso calculado en un análisis elástico de primer orden.

$H_u$  = fuerza cortante en el piso considerado.

$h_s$  = altura del entrepiso medida centro a centro de los pisos superior e inferior.

Si el índice de estabilidad es menor que 0.04 puede considerarse que los momentos debidos a desplazamientos laterales no exceden del 5 por ciento de los momentos de primer orden y que por lo tanto la estructura está suficientemente contraventeada.

El segundo método consiste en calcular la rigidez de los contravientos o muros de cortante y compararla con la rigidez del sistema de columnas. Si el primero es por lo menos seis veces mayor que el segundo, la estructura puede considerarse contraventeada. El cálculo de las rigideces de los contravientos, muros de cortante y sistema de columnas puede hacerse con diversos grados de precisión. Este cálculo no se incluye en el presente texto; puede consultarse la referencia ya mencionada de E. Rosenblueth y L. Esteva o algún texto de análisis estructural o de ingeniería sísmica.

#### 13.4.2 Método de las NTC-77 del Reglamento del Distrito Federal

Este método es semejante al del Reglamento ACI 318-83.

También distingue entre estructuras que pueden y que no pueden desplazarse lateralmente. Sin embargo, no separa los momentos debidos a las cargas que producen el desplazamiento lateral y los momentos por cargas que no lo producen. Por lo tanto, el momento amplificado se calcula siempre con la ecuación

$$M_c = F_a M_2 \quad (13.16)$$

donde  $F_a$  es el factor de amplificación y  $M_2$  es el mayor de los momentos en los extremos de la columna, o sea, es la suma de los momentos  $M_{2b}$  y  $M_{2s}$  de la ecuación 13.6.

Para miembros que no puedan desplazarse lateralmente, el factor de amplificación se calcula con la ecuación

$$F_a = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{P_c}} \geq 1.0 \quad (13.17)$$

la cual es igual a la ecuación 13.5. El término  $C_m$  se calcula con la ecuación 13.9, pero en vez de los momentos  $M_{1b}$  y  $M_{2b}$  se usan los momentos totales  $M_1$  y  $M_2$  en los extremos de las columnas. La carga crítica,  $P_c$ , se calcula con la ecuación

$$P_c = \frac{F_R \pi^2 EI'}{(H')^2} \quad (13.18)$$

Esta ecuación es igual a la 13.11, usando la notación  $H'$  para la longitud efectiva de pandeo e incluyendo el factor de reducción  $F_R$ . Para calcular  $EI$ , las NTC especifican la ecuación 13.13 únicamente.

Para miembros que puedan desplazarse lateralmente se utiliza la ecuación

$$F_a = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{\sum P_c}} \geq 1.0 \quad (13.19)$$

equivalente a la 13.8. También debe calcularse el factor de amplificación con la ecuación 13.17, como si la columna tuviera sus extre-

mos restringidos lateralmente, y tomarse el mayor de los dos factores.

Las recomendaciones respecto a los casos en que pueden desprejarse los efectos de esbeltez, aquellos en que se puede usar el método presentado anteriormente, y a las situaciones en que se requiere un análisis de segundo orden son iguales a las del Reglamento ACI 318-83, nada más sustituyendo  $M_{1b}$  y  $M_{2b}$  por  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente.

En las NTC-77, la estructura puede considerarse suficientemente contraventeada contra desplazamientos laterales si el índice de estabilidad calculado con la ecuación 13.15 es menor que 0.08, o si la rigidez de los contravientos o muros de cortante es por lo menos el 85 por ciento de la rigidez total de entrepiso. Se establece una restricción adicional respecto a la losa considerada como diafragma horizontal; su rigidez no debe ser menor que diez veces la rigidez de entrepiso del marco a que pertenece la columna en estudio. La rigidez de un diafragma horizontal con relación a un eje de columnas se define como la fuerza que debe aplicarse al diafragma en el eje en cuestión para producir una deflexión unitaria sobre dichos ejes, estando el diafragma libremente apoyado en los elementos que dan restricción lateral (muros, contravientos, etc.).

#### 13.4.3 *Comentarios sobre los métodos ACI y NTC*

Ambos métodos eran prácticamente iguales hasta que en el año de 1988 se introdujo en el Reglamento ACI la modificación que consiste en considerar por separado el momento para la situación de marco contraventeado y el momento para marco no contraventeado. Esta modificación se justificó sobre la base, principalmente, de que el efecto de esbeltez es mucho mayor cuando los marcos se pueden desplazar lateralmente. En algunos ensayos de marcos se detectó que al aplicar el mismo factor de amplificación a ambos tipos de momentos se obtenían resultados muy conservadores. Los factores de amplificación totales resultan menores

al hacer la diferenciación entre los dos momentos.

Sin embargo, como se ha planteado el método en el Reglamento ACI 318-83, se suman dos momentos,  $\delta_2 M_{2b}$  y  $\delta_2 M_{2t}$ , que pueden corresponder a secciones distintas de una columna, ya que no necesariamente el momento máximo con marco restringido lateralmente actúa en la misma sección que el momento máximo con marco no restringido. Por lo tanto, el momento que se obtiene con la ecuación 13.6 es en muchos casos mayor que el momento máximo. Esto hace que el método sea también conservador en este aspecto, pero en el Comentario al Reglamento ACI 318-83, al reconocer este hecho, se estima que el error que se comete no es muy grande ya que cuando hay desplazamientos laterales de la estructura los momentos  $M_2$ , son generalmente mucho mayores que los momentos  $M_{2b}$ .

### 13.5 Ejemplos

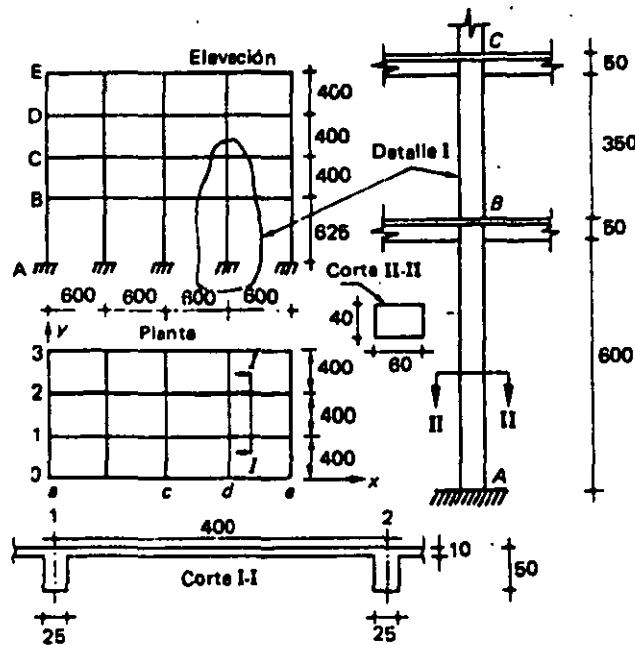
#### 13.5.1 *Método del Reglamento ACI 318-83*

En el ejemplo 13.1 se ilustra la aplicación del método descrito en la sección 13.4.1 a la obtención de los momentos de diseño de una columna interior de la planta baja de una estructura. Se ha supuesto que la estructura está sujeta a carga por gravedad y sismo simultáneamente, y que los resultados del análisis estructural (no incluido en el ejemplo) indican que la columna en cuestión tiene una carga axial de 150 ton, y momentos flexionantes de 50 ton-m y 80 ton-m en sus extremos superior e inferior, respectivamente; en el ejemplo se indica la parte que corresponde a la carga por gravedad y la parte que corresponde a sismo. También se ha supuesto que la estructura no está contraventeada lateralmente y que, por lo tanto, puede sufrir desplazamientos laterales.

El primer paso en la solución del problema es la determinación de las rigideces relativas del sistema de piso y de la columna.

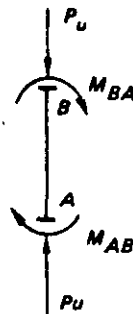
**EJEMPLO 13.1 Efecto de esbeltez en una columna por el método del Reglamento ACI 318-83**

**DATOS**



La estructura puede tener desplazamientos laterales y se analiza en la dirección 0 X.

**Acciones internas**



$P_u$  (cols. interiores) = 150 ton  
 $P_u$  (cols. de borde) = 80 ton  
 $P_u$  (cols. de esquina) = 45 ton

$(M_{BA})_b = 10$  ton-m

$(M_{BA})_t = 40$  ton-m

$(M_{AB})_b = 5$  ton-m

$(M_{AB})_t = 65$  ton-m

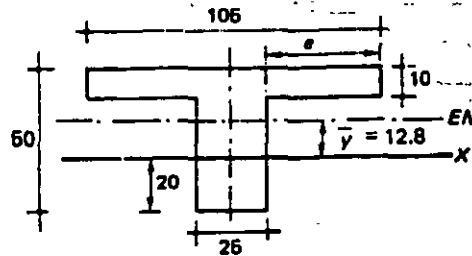
**Materiales**

Concreto,  $f'_c = 200$  kg/cm<sup>2</sup>  
 Acero,  $f_y = 4\ 200$  kg/cm<sup>2</sup>

## EJEMPLO 13.1 Continación

## MOMENTOS DE INERCIA

- a) Sistema de piso. Criterio de la estructura equivalente (capítulo 13, ACI 318-83).



$$e = 4 + 40 \text{ cm}$$

$$e = 4 \times 10 = 40$$

$$e = 40 \text{ cm}$$

Centroide:

$$\bar{y} = \frac{10 \times 105 \times 25}{25 \times 40 + 105 \times 10} = 12.8 \text{ cm}$$

Momento de inercia centroidal:

$$I_t = \frac{105 \times 10^3}{12} + 105 \times 10 \times 12.2^2 + \frac{25 \times 40^3}{12} + 25 \times 40 \times 12.8^2$$

$$I_t = 462\,000 \text{ cm}^4$$

b) Columna:

$$I_{AB} = I_{BC} = \frac{40 \times 60^3}{12}$$

$$I_{AB} = I_{BC} = 720\,000 \text{ cm}^4$$

## RIGIDECES

- a) Para todas las columnas de los ejes *b*, *c* y *d*

Nudo A:

$$\psi_A = 0, \text{ por tratarse de empotramiento}$$

Nudo B:

Rigidez del sistema de piso:

$$K_{trabe} = \frac{I_t}{l_t} = \frac{462\,000}{600} = 770 \text{ cm}^3$$

EJEMPLO 13.1 *Continuación*

Rigidez de columnas:

$$K_{BC} = \frac{I_{BC}}{l_{BC}} = \frac{720\,000}{400} = 1\,800 \text{ cm}^3$$

$$K_{BA} = \frac{I_{BA}}{l_{BA}} = \frac{720\,000}{625} = 1\,152 \text{ cm}^3$$

$$\psi_B = \frac{\sum K_{\text{cols}}}{\sum K_{\text{trabes}}} = \frac{1\,800 + 1\,152}{770 + 770} = 1.9$$

- b) Para todas las columnas de los ejes *a* y *e*  
 $\psi_A = 0$ , por tratarse de empotramiento

$$\psi_B = \frac{\sum K_{\text{cols}}}{\sum K_{\text{trabes}}} = \frac{1\,800 + 1\,152}{770} = 3.8$$

## LONGITUDES EFECTIVAS DE PANDEO

- a) Columnas de los ejes *b*, *c* y *d* sin desplazamiento lateral  
 Con  $\psi_A = 0$  y  $\psi_B = 1.9$ , se encuentra en la figura 13.14a:  
 $k = 0.64$ ,  $kl_u = 0.64 \times 600 = 384 \text{ cm}$
- b) Columnas de los ejes *b*, *c* y *d* con desplazamiento lateral  
 Con  $\psi_A = 0$  y  $\psi_B = 1.9$ , se encuentra en la figura 13.14b:  
 $k = 1.20$ ,  $kl_u = 1.20 \times 600 = 720 \text{ cm}$
- c) Columnas de los ejes *a* y *e* sin desplazamiento lateral  
 Con  $\psi_A = 0$  y  $\psi_B = 3.8$ , se encuentra en la figura 13.14a:  
 $k = 0.66$ ,  $kl_u = 0.66 \times 600 = 396 \text{ cm}$
- d) Columnas de los ejes *a* y *e* con desplazamiento lateral  
 Con  $\psi_A = 0$  y  $\psi_B = 3.8$ , se encuentra en la figura 13.14b:  
 $k = 1.39$ ,  $kl_u = 1.39 \times 600 = 834 \text{ cm}$

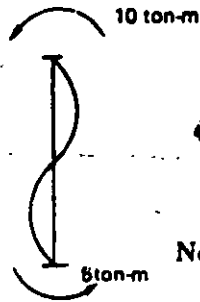
## VERIFICACION DE ESBELTEZ

- a) Radio de giro

$$r = 0.30 \times 60 = 18 \text{ cm}$$

- b) Sin desplazamiento lateral

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{384}{18} = 21.3$$

EJEMPLO 13.1 *Continuación*

$$34 - 12 \frac{M_{1b}}{M_{2b}} = 34 - 12 \left( -\frac{5}{10} \right) = 34 + 6 = 40$$

$$\frac{kl_u}{r} < 34 - 12 \frac{M_{1b}}{M_{2b}}$$

No es necesario considerar el efecto de esbeltez para este caso.

c) Con desplazamiento lateral

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{720}{18} = 40 > 22$$

Sí es necesario considerar el efecto de esbeltez para este caso. Además como  $kl_u/r < 100$  se puede aplicar este método.

## CALCULO DE FACTORES DE AMPLIFICACION

a)  $\delta_b = 1$  porque no es necesario considerar el efecto de esbeltez para este caso

$$b) \delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{\phi \sum P_c}} > 1.0 \quad (\text{ecuación 13.8})$$

$$\sum P_u = 150 \times 6 + 80 \times 10 + 45 \times 4 = 1880 \text{ ton}$$

$$0.10 f'_c A_g = 0.10 \times 200 \times 40 \times 60 = 48\,000 \text{ kg} < 150 \text{ ton}$$

$$\text{Luego } \phi = 0.70$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \quad (\text{ecuación 13.11})$$

$$EI = \frac{E_c I_g / 2.5}{1 + \beta_d} \quad (\text{ecuación 13.13})$$

$$E_c = 15\,000 \sqrt{f'_c} = 15\,000 \sqrt{200} = 212\,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_g = \frac{40 \times 60^3}{12} = 720\,000 \text{ cm}^4$$

**EJEMPLO 13.1 Continuación**

$$\beta_d = 0.10$$

$$EI = \frac{212\,000 \times 720\,000}{2.5(1 + 0.10)} = 5.55 \times 10^{10} \text{ kg-cm}^2$$

Para las columnas de los ejes *b*, *c* y *d*:

$$P_c = \frac{3.14^2 \times 5.55 \times 10^{10}}{720^2} = 10.57 \times 10^5 \text{ kg} = 1057 \text{ ton}$$

Para las columnas de los ejes *a* y *e*:

$$P_c = \frac{3.14^2 \times 5.55 \times 10^{10}}{834^2} = 10.57 \times 10^5 \text{ kg} = 1057 \text{ ton}$$

$$\Sigma P_c = 12 \times 1057 + 8 \times 787 = 18\,980 \text{ ton}$$

Sustituyendo en la ecuación 13.8:

$$\delta_i = \frac{1}{1 - \frac{1880}{0.70 \times 18\,980}} = 1.16$$

**CALCULO DEL MOMENTO AMPLIFICADO**

$$M_c = \delta_b M_{2b} + \delta_i M_{2i} \quad (\text{ecuación 13.6})$$

$$M_c = 1.0 \times 10 + 1.16 \times 65 = 85.4 \text{ ton-m}$$

La rigidez del sistema de piso depende de varios factores, los más importantes de los cuales son las dimensiones y la geometría de la viga y de la losa, el estado de agrietamiento de estos elementos, sus porcentajes de refuerzo y las características del concreto. Es difícil tomar en cuenta el efecto de todas estas variables, por lo que suele recurrirse a diversas hipótesis simplificadoras. Un problema especialmente complejo es el de definir la contribución de la losa a la rigidez del sistema de piso, en sistemas de losa y vigas.

Algunos estudios con computadora de estructuras idealizadas, constituidas por columnas y vigas rectangulares, indican que es conveniente considerar el momento de inercia de la sección agrietada y transformada [19.9, 19.10]. Sin embargo, no se han hecho estudios para determinar el ancho efectivo del patín, cuando existe una losa colada monolíticamente con la viga.

En el ejemplo se calculó el momento de inercia del sistema de piso, como el de una sección *T* homogénea, con un ancho efectivo del patín,

a cada lado del paño del alma, igual al menor de los dos valores siguientes: cuatro veces el espesor de la losa, o el peralte total de la viga menos el espesor de la losa. Este criterio es semejante al que se recomienda para calcular las rigideces de sistemas de piso para fines de determinación de momentos debidos a cargas verticales. El método tiene la ventaja de que no es necesario conocer previamente el porcentaje de refuerzo de la viga, ni determinar cuáles zonas de la viga se encuentran agrietadas y cuáles no.

Para calcular la rigidez de la columna pueden usarse las ecuaciones 13.12 ó 13.13, o puede calcularse el momento de inercia de la sección gruesa. De los estudios con computadora mencionados anteriormente, se deduce que se obtienen mejores resultados cuando se usa la ecuación 13.12. Sin embargo, el uso de esta ecuación presupone el conocimiento de la cantidad de acero que se va a emplear y del recubrimiento correspondiente, datos que no se conocen hasta después de varios tanteos. En el ejemplo se usó el momento de inercia de la sección gruesa de la columna. Siguiendo las recomendaciones del Reglamento ACI 318-83, se usaron la altura libre de la columna y el claro centro a centro de las vigas para determinar los valores de las rigideces relativas.

Después se calcularon los factores  $\psi$  que indican la relación entre las rigideces de las columnas y del sistema de piso con la ecuación 13.14. Aunque en el ejemplo sólo se analiza una columna, es necesario determinar el valor de  $\psi$  para todas las columnas del entrepiso ya que de él dependen la longitud efectiva de pandeo y la carga crítica, y al aplicar la ecuación 13.8 se necesita conocer la carga crítica de todas las columnas.

Los términos  $\psi$  se calcularon en ambos extremos de las columnas. En el extremo superior, el término  $\sum K_{col}$  incluye las rigideces relativas de las columnas en cuestión (columna A-B) y de las columnas del piso superior (columna B-C), ya que estas dos columnas concurren en el nudo. El término  $\sum K_{vigas}$  incluye dos vigas iguales que también concurren en el nudo, excepto para los ejes  $a$  y  $e$  en que sólo

concorre una viga. El extremo inferior de la columna está empotrado, por lo que puede considerarse que en dicho extremo existen vigas de rigidez infinita en comparación con la rigidez de la columna. Por lo tanto, el valor de  $\psi$  es nulo. Conocidos los valores de  $\psi$ , se determinaron en el nomograma de la figura 13.14 los valores del factor,  $k$ , los cuales, multiplicados por las longitudes reales de las columnas, dan las longitudes efectivas de pandeo.

Obsérvese que para cada columna se determinaron dos longitudes efectivas de pandeo, una para la condición en que no hay posibilidad de desplazamiento lateral y otra para la condición en que sí la hay. Esto se hizo así, ya que el Reglamento señala que para el cálculo de  $P_c$  en la ecuación 13.7 se use la longitud efectiva de pandeo que corresponde a la primera condición, mientras que para el cálculo de  $P_c$  en la ecuación 13.8 se use la que corresponde a la segunda condición.

Conocidas las longitudes efectivas de pandeo, se verificó si era necesario considerar el efecto de esbeltez y en caso afirmativo, si era posible usar este método o si se requería un análisis de segundo orden. Se encontró que para la condición de desplazamiento lateral restringido no era necesario considerar efecto de esbeltez, ya que el valor de  $kl_u/r$  resultó menor que el de 35-12  $M_{1b}/M_{2b}$ . El término  $M_{1b}/M_{2b}$  es negativo según puede verse en el croquis del ejemplo. Para la condición de desplazamiento lateral no restringido, el valor de  $kl_u/r$  quedó comprendido entre 22 y 100. Por lo tanto, sí es necesario considerar el efecto de esbeltez, pero no lo es efectuar un análisis de segundo orden.

Después se calcularon los factores de amplificación. El factor  $\delta_b$  es igual a uno ya que no hay efecto de esbeltez para esta condición de carga. El factor  $\delta_s$  se calculó con la ecuación 13.8. La suma de las cargas  $P_u$  se hizo para toda la planta de la estructura con las cargas mostradas en la sección de acciones internas del ejemplo.

Se revisó si era posible usar un factor de reducción intermedio entre el que corresponde

a flexió  
o /  
es  
la carga  
ejemplo  
respon  
Para  
Aunqu  
ecuació  
quiere  
ro y el  
anterio  
concre  
mento  
valor  
el mo  
y el p  
análisi  
suele  
está su  
tes, co  
tos er  
son m  
carga  
consi  
Se  
to  
ria en  
ción  
ampli  
mom  
extre  
ment  
cient  
El  
pues  
y ur  
el ca  
les c  
a co  
E  
esbe  
recc



a flexión pura y a flexocompresión; el Reglamento ACI permite hacerlo cuando el valor de  $\phi P_u$  es menor de  $0.10 f'_c A_g$ , o sea, cuando la carga axial es pequeña. No fue el caso del ejemplo y se usó un factor  $\phi$  de 0.70, que corresponde a columnas de estribos.

Para calcular  $EI$  se utilizó la ecuación 13.13. Aunque se obtienen mejores resultados con la ecuación 13.12, el empleo de esta última requiere conocer previamente la cantidad de acero y el recubrimiento, según se ha mencionado anteriormente. El módulo de elasticidad del concreto se obtuvo con la ecuación del Reglamento ACI para concreto de peso normal. El valor del término  $\beta_d$ , que es la relación entre el momento producido por carga permanente y el producido por carga viva, se obtuvo del análisis estructural y resultó de 0.10. Este valor suele ser muy pequeño cuando la estructura está sujeta a la acción de sismos o vientos fuertes, como en este ejemplo, ya que los momentos en las columnas debidos a estas acciones son mucho mayores que los producidos por las cargas permanentes. Es posible, en estos casos, considerar que  $\beta_d$  es igual a cero.

Se calcularon las cargas críticas de pandeo de todas las columnas para sustituir su sumatoria en la ecuación 13.8. El factor de amplificación  $\delta$ , resultó de 1.16 y el momento total amplificado, de 85.4 ton-m. Si se compara este momento con el de 70 ton-m que actúa en el extremo A de la columna, se ve que el incremento por efecto de esbeltez es de 22 por ciento.

El refuerzo de la columna debe calcularse, pues, para que resista una carga axial de 150 ton y un momento flexionante de 85.4 ton-m. En el capítulo 15 se ilustran los problemas generales del dimensionamiento de elementos sujetos a combinaciones de carga axial y momento.

En este ejemplo se ha calculado el efecto de esbeltez para una columna y en una sola dirección. Para la estructura completa deben re-

visarse todas las columnas en las dos direcciones.

### 13.5.2 Método de las NTC-77

En el ejemplo 13.2 se ha calculado el efecto de esbeltez para la misma columna del ejemplo 13.1 usando el método de las NTC-77 del Reglamento del Distrito Federal. Los cálculos de las rigideces de vigas y columnas, de los factores  $\psi$  y de las longitudes efectivas de pandeo son iguales y por lo tanto no se han repetido en este ejemplo. Los cálculos para verificar si es necesario considerar el efecto de esbeltez, sólo se hacen en este método para el caso de extremos con posibilidad de desplazamiento lateral y también son iguales al del ejemplo 13.1.

Se calculó primero el factor de amplificación de la estructura en su conjunto, o sea, considerando que todas las columnas se desplazan lateralmente la misma distancia. Para este caso, el factor de amplificación se calcula con la ecuación 13.19 en la que intervienen la suma de todas las cargas de columna y la suma de todas las cargas críticas. En el cálculo de la carga crítica se usó el factor de reducción  $k_R$  que corresponde a flexocompresión de columnas de estribos. Se usó también el módulo de elasticidad del concreto que señalan las NTC-77. El factor de amplificación que se obtuvo resultó de 1.25.

Después se calculó el factor de amplificación para el caso de la columna aislada con sus extremos restringidos contra desplazamiento lateral. Para este caso, el factor de amplificación resultó menor que la unidad, lo cual indica que el caso anterior es más desfavorable.

El momento amplificado resultó ligeramente mayor con este método que con el del Reglamento ACI 318-83, pero debe tomarse en cuenta que no son directamente comparables, sobre todo por la diferencia en los módulos de elasticidad del concreto.

**EJEMPLO 13.2 Resolución del ejemplo 13.1 con las NTC-77**

Las rigideces y longitudes efectivas de pandeo son iguales a las del ejemplo 13.1. La verificación de esbeltez es igual a la del caso con desplazamiento lateral.

**CALCULO DEL FACTOR DE AMPLIFICACION CONSIDERANDO EL MOVIMIENTO GENERAL DE LAS COLUMNAS**

$$F_a = \frac{1}{1 - \frac{\Sigma P_u}{\Sigma P_c}} \geq 1.0 \quad (\text{ecuación 13.19})$$

$$\Sigma P_u = 150 \times 6 + 80 \times 10 + 45 \times 4 = 1880 \text{ ton}$$

$$P_c = \frac{F_R \pi^2 EI}{(H')^2} \quad (\text{ecuación 13.18})$$

$$F_R = 0.75$$

$$EI = \frac{E_c I_g / 2.5}{1 + \beta_d} \quad (\text{ecuación 13.13})$$

$$E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c} = 10\,000 \sqrt{200} = 141\,400 \text{ kg/cm}^2$$

$$EI = \frac{141\,400 \times 720\,000}{2.5(1 + 0.10)} = 3.70 \times 10^{10} \text{ kg-cm}^2$$

Para las columnas de los ejes *b*, *c* y *d*:

$$P_c = \frac{0.75 \times 3.14^2 \times 3.70 \times 10^{10}}{720^2} = 5.28 \times 10^5 \text{ kg} = 528 \text{ ton}$$

Para las columnas de los ejes *a* y *e*.

$$P_c = \frac{0.75 \times 3.14^2 \times 3.70 \times 10^{10}}{834^2} = 3.94 \times 10^5 \text{ kg} = 394 \text{ ton}$$

$$\Sigma P_c = 12 \times 528 + 8 \times 394 = 9\,488 \text{ ton}$$

Sustituyendo en la ecuación 13.18:

$$F_a = \frac{1}{1 - \frac{1880}{9\,488}} = 1.25$$

## EJEMPLO 13.2 Continuación

## CALCULO DEL FACTOR DE AMPLIFICACION CONSIDERANDO LA COLUMNA AISLADA SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL

$$F_a = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{P_c}} > 1.0 \quad (\text{ecuación 13.17})$$

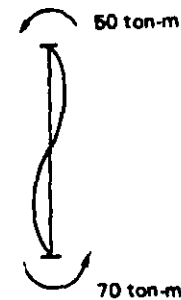
$$C_m = 0.6 + 0.4 (M_1/M_2) \geq 0.4 \quad (\text{ecuación 13.9})$$

$$C_m = 0.6 + 0.4 \left( -\frac{50}{70} \right) = 0.314 < 0.4$$

$$C_m = 0.4$$

$$F_a = \frac{0.4}{1 - \frac{150}{462}} = 0.592 < 1.0$$

$$F_a = 1.0$$



## CALCULO DEL MOMENTO AMPLIFICADO

$$M_c = F_a M_2 = 1.25 \times 70 = 87.5 \text{ ton-m}$$

## REFERENCIAS

- 13.1 Pfrang, E. O. "Behavior of Reinforced Concrete Columns with Sidesway". *Proceedings ASCE*, Vol. 92 ST-3. Nueva York, junio 1966.
- 13.2 Breen, J.E. "Computer Use in Studies of Frames with Long Columns". En *Flexural Mechanics of Reinforced Concrete (SP-12)*. Detroit, American Concrete Institute/American Society of Civil Engineers, 1965.
- 13.3 Comité ACI 318. *Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-83)*. Detroit, American Concrete Institute, 1983.
- 13.4 ———. *Diseño y construcción de estructuras de concreto, Normas técnicas complementarias del Reglamento de construcción para el Distrito Federal*. México, D.F., Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 1977.
- 13.5 Robles F.-V., F. *Manual de diseño de obras civiles, Sección H: Concreto reforzado*. México, D.F., Comisión Federal de Electricidad, Instituto de Investigaciones de la Industria Eléctrica, 1969.
- 13.6 ———. *Propuesta de Recomendaciones Internacionales CEB-IP para el Cálculo y la Ejecución de Obras de Hormigón*, 1970.
- 13.7 MacGregor, J. G., J.E. Breen y E.O. Pfrang. "Design of Slender Columns". *Journal of the American Concrete Institute*. Detroit, enero 1970.
- 13.8 Parme, A.L. "Capacity of Restrained Eccentrically Loaded Long Columns". En *Symposium on Reinforced Concrete Columns (SP-13)*. Detroit, American Concrete Institute, 1966.
- 13.9 Pagay, S.N., P.M. Ferguson y J.E. Breen. "Importance of Beam Properties on Concrete Column Behavior". *Journal of the American Concrete Institute*. Detroit, octubre 1970.
- 13.10 Okamura, H., S.N. Pagay, J.E. Breen y P.M. Ferguson. "Elastic Frame Analysis Corrections Necessary for Design of Short Concrete Columns in Braced Frames". *Journal of the American Concrete Institute*. Detroit, noviembre 1970.
- 13.11 Rosenblueth, E. "Efectos de esbeltez en edificios". *Ingeniería*. México, D.F., enero 1965.

### EJERCICIOS

13.1 Determinar el efecto de esbeltez en la columna del ejemplo 13.1, suponiendo que el marco está contraventeado.

13.2 Calcular el efecto de esbeltez en la columna localizada en la intersección de los ejes b-0 del ejemplo 13.1. Analice el efecto en la dirección

0, en el tramo inferior, suponiendo que las dimensiones de las columnas y las vigas sean las mismas que en el ejemplo 13.1. El marco no está contraventeado en la dirección 0,

13.3 Resuélvase el Ejercicio 13.2 suponiendo que el marco está contraventeado.

Di  
de

14.  
cre  
rab  
Di  
xi

14.1

14.1

U  
ño  
de l  
secc  
pie.  
nac  
car  
car  
se  
de  
cio  
res  
im  
te  
tu

C.  
si  
re  
c  
t  
B

# CAPÍTULO 15

## Dimensionamiento de columnas

15.1 Introducción. / 15.2 Recomendaciones para el dimensionamiento de columnas. / 15.3 Ayudas de diseño para el dimensionamiento de columnas. / 15.4 Ejemplos.

### 15.1 Introducción

En este capítulo se trata el dimensionamiento de columnas dados la carga axial y el momento que deben resistir. El comportamiento de columnas sometidas a combinaciones de carga axial y momento se analizó en el capítulo 6, donde también se expusieron diversos procedimientos para determinar la resistencia de columnas cortas de dimensiones y refuerzo dados. Los efectos de esbeltez fueron estudiados en el capítulo 13. En los ejemplos desarrollados en el presente capítulo se supone que dichos efectos de esbeltez ya están considerados en los valores de la carga axial y el momento para los cuales deben proponerse secciones adecuadas. Los métodos de dimensionamiento utilizados están basados en el uso de diagramas de interacción.

### 15.2 Recomendaciones para el dimensionamiento de columnas

#### ACERO MÍNIMO

Los porcentajes mínimos de refuerzo recomendados para columnas son, por lo general,

mayores que los recomendados para vigas. En los reglamentos de construcción suelen especificarse porcentajes mínimos del orden de uno por ciento. Las NTC-77 indican que la relación entre el área del refuerzo vertical y el área total de la sección no sea menor que  $20/f_y$ , estando  $f_y$  expresado en  $\text{kg/cm}^2$ . También se recomienda usar por lo menos una barra en cada esquina de columnas no circulares y un mínimo de seis barras en columnas circulares.

#### SEPARACIÓN ENTRE BARRAS

Suele especificarse que la separación libre entre las barras longitudinales no sea inferior a 1.5 veces el diámetro de la barra, 1.5 veces el tamaño máximo del agregado, ni que 4 cm.

#### HACES DE BARRAS

Debido a que los porcentajes de refuerzo usados en columnas son altos, a veces es necesario recurrir al empleo de haces o paquetes de barras, lo cual simplifica el armado, como se muestra en la figura 15.1. En general, se per-

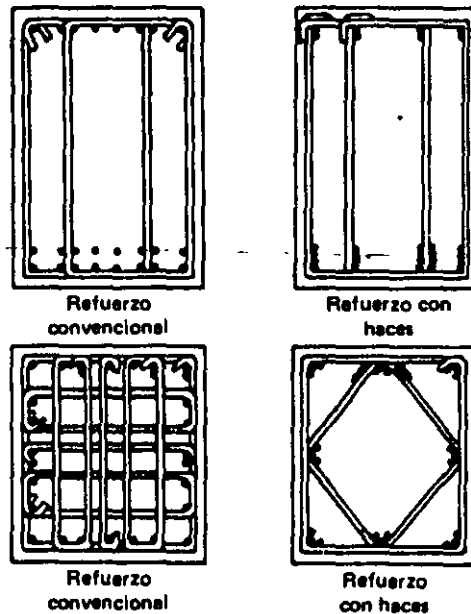


Figura 15.1 Sugerencias para el uso de haces de varillas en vigas y columnas.

míte utilizar hasta cuatro barras por haz. Las barras deben ligarse firmemente entre sí. Se considera que el área del haz es la suma de las áreas de las barras. La longitud de desarrollo del haz es igual a la de una barra individual incrementada en ciertos factores que dependen del número de barras por haz. Según el Reglamento ACI 318-83, el factor es 1.20 para haces de tres barras y 1.33 para haces de cuatro barras. Se recomienda no cortar todas las barras en un haz en la misma sección. Los haces evitan el congestionamiento del refuerzo, pero obligan a poner especial cuidado en los detalles de empalmes y dobleces. El recubrimiento de un haz debe ser el de una barra hipotética de tal diámetro que su área sea el área del haz. Para las separaciones entre haces se hacen recomendaciones semejantes.

#### DETALLES EN LOS CAMBIOS DE SECCIÓN

Es frecuente que se cambien las dimensiones de las columnas al pasar de un piso a otro de una estructura. En estos casos, las barras deben doblarse en forma gradual, para evitar componentes desfavorables de esfuerzos. En la figura 15.2 se muestran las recomendaciones que a

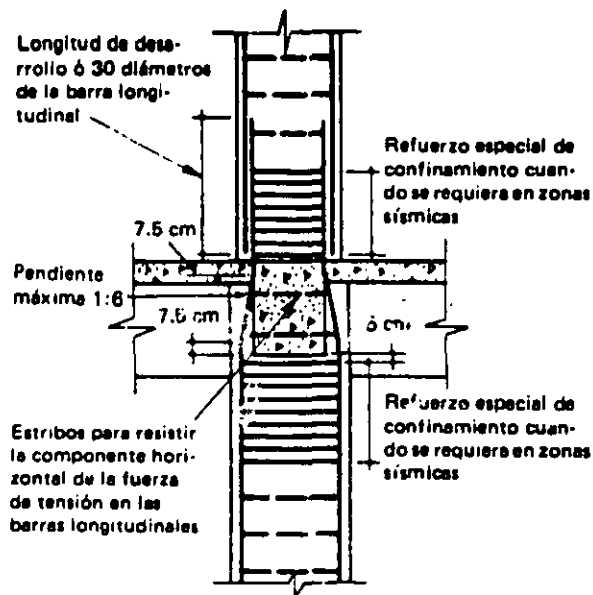


Figura 15.2 Detalles del refuerzo en los cambios de sección de columnas.

este respecto se presentan en la referencia 15.1, que son semejantes a las del Reglamento ACI 318-83. Según este reglamento, en la zona de cambio debe colocarse refuerzo transversal capaz de resistir una y media veces la componente horizontal de la fuerza que actúe en las porciones inclinadas de las barras de la columna.

#### REFUERZO MÁXIMO

Aunque en algunos reglamentos se permiten porcentajes máximos de refuerzo longitudinal del orden de 8 por ciento, pocas veces puede colocarse esta cantidad de refuerzo por restricciones de orden constructivo.

#### EXCENRICIDAD ACCIDENTAL

Las NTC-77 especifican que debe considerarse siempre una excentricidad accidental igual a  $0.05h \geq 2$  cm, siendo  $h$  la dimensión de la columna en la dirección de la flexión.

#### REFUERZO TRANSVERSAL

El refuerzo transversal puede consistir en hélices o en estribos.

En el caso de hélices, éstas deben anclarse en sus extremos mediante 2.5 vueltas según las NTC-77 y 1.5 vueltas según el Reglamento ACI. El esfuerzo de fluencia no debe ser superior a  $4200 \text{ kg/cm}^2$ . El diámetro y la separación de las hélices se calculan de acuerdo con lo indicado en el capítulo 4. Además deben respetarse ciertas limitaciones establecidas en los reglamentos que tienen por objeto asegurar una acción confinante efectiva y, al mismo tiempo, permitir la correcta colocación del concreto. Así, suele especificarse que la separación libre máxima entre vueltas consecutivas no exceda de 7 a 8 cm, mientras que la separación libre mínima se limite a unos 2.5 cm o a 1.5 veces el tamaño máximo del agregado.

En el caso de estribos, éstos deben colocarse de manera que restrinjan el pandeo lateral de las barras longitudinales. Tanto el Reglamento ACI como las NTC-77, especifican que todas las

barras de esquina y cada barra alternada estén restringidas por la esquina de un estribo con un ángulo interno máximo de  $135^\circ$ . La distancia libre de las barras no restringidas a las barras restringidas se limita a 15 cm. La separación centro a centro entre barras restringidas se suele limitar a unos 35 cm, como se aprecia en la figura 15.3. El significado de estos requisitos junto con detalles típicos de anclaje, se ilustran en la figura 15.3. En la figura 15.4 se muestran algunos arreglos típicos de estribos para columnas rectangulares.

Para proporcionar restricción lateral pueden usarse grapas en la forma representada en la figura 15.3b. Cuando las barras están colocadas en la periferia de un círculo, se puede usar un estribo circular. Como en el caso de vigas,

los estribos deben estar adecuadamente anclados en sus extremos.

Según el Reglamento ACI 318-83, la separación de los estribos no debe exceder de 16 veces el diámetro de la barra longitudinal, 48 veces el diámetro de los estribos, ni de la menor dimensión de la columna. En lugar de la primera de estas restricciones, las NTC-77 limitan la separación máxima a  $850/\sqrt{f_y}$  veces el diámetro de la barra (o de la barra de menor diámetro de un paquete), siendo  $f_y$  el esfuerzo de fluencia de las barras longitudinales en  $\text{kg/cm}^2$ . Las otras limitaciones se conservan iguales a las del Reglamento ACI. Además de ellas, las NTC-77 especifican que la separación máxima se reduzca a la mitad en una longitud no menor que la dimensión transversal máxima de la columna,

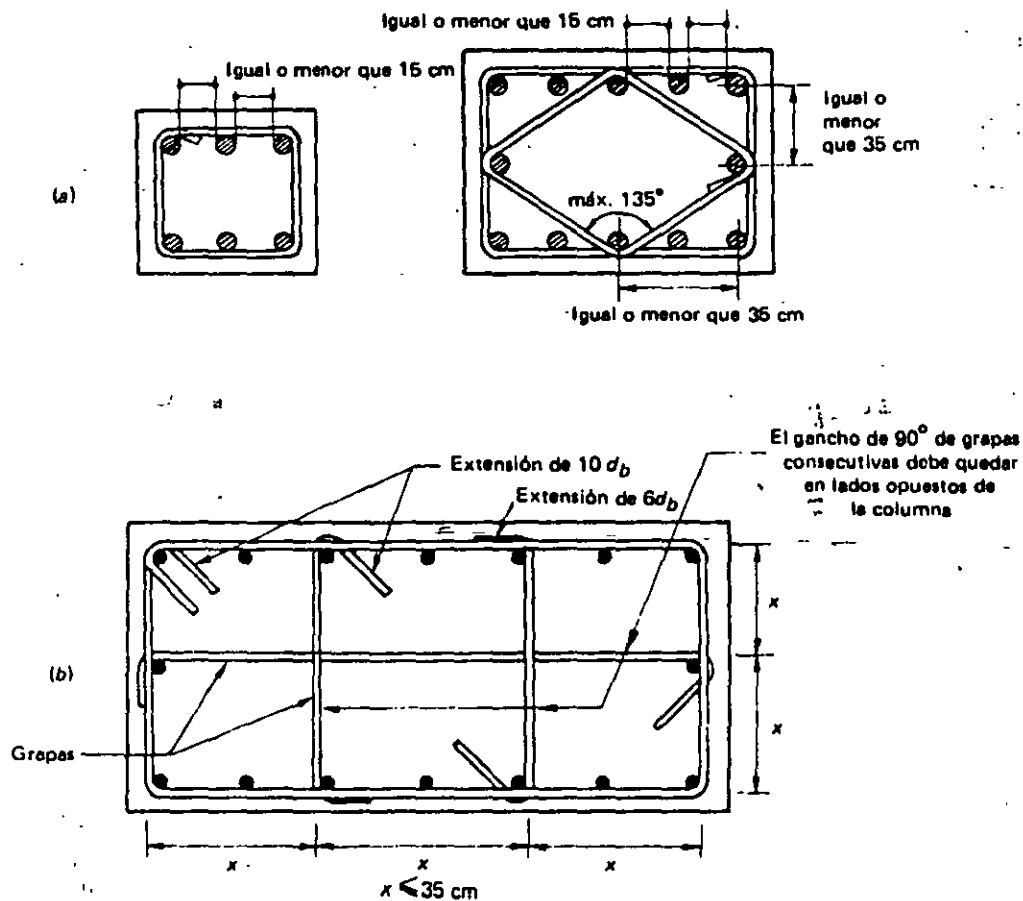


Figura 15.3 Detalles del refuerzo transversal de columnas.

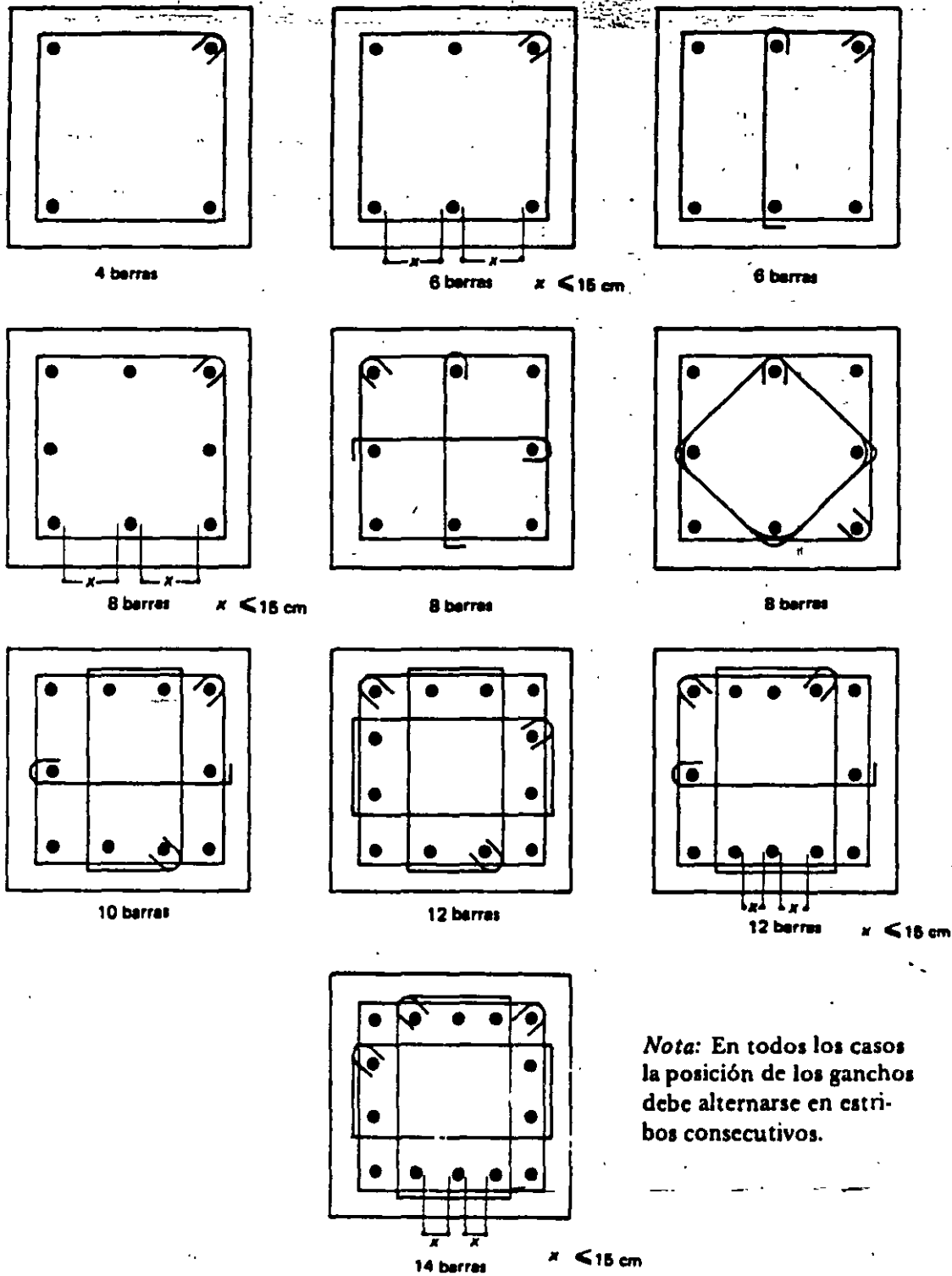


Figura 15.4 Arreglos típicos de estribos para columnas.

un sexto de  
debe de  
los. A  
estribo enc  
coloque a  
a partir de  
En cuar  
Reglament  
según el d  
Las NTC  
puede de  
que dos p  
la mayor  
por el estr  
Ademá  
arriba res  
proporcio  
las fuerza  
actuar so  
ras expue  
las recon  
cionan bi

15.3 Ay  
"in

ra d  
sionamie  
interacc  
mas de i  
donde t  
determi  
momen  
terística  
consiste  
refuerza  
axial y  
resolver  
interac  
como e  
te incia

En e  
gramas  
Meli y  
diagra  
NTC-7  
ampli:



un sexto de su altura, ni que 60 cm, encima y debajo de cada unión de columna con vigas o losas. El ACI se limita a indicar que el primer estribo encima o debajo de la losa o viga se coloque a la mitad de la separación máxima a partir de los paños de la unión.

En cuanto al diámetro de los estribos, el Reglamento ACI 318-83 especifica valores según el diámetro de las barras longitudinales. Las NTC exigen que la fuerza de fluencia que puede desarrollar un estribo no sea menor que dos por ciento de la fuerza de fluencia de la mayor barra o el mayor paquete restringido por el estribo.

Además de satisfacer los requisitos mínimos arriba reseñados, el refuerzo transversal debe proporcionar suficiente resistencia frente a las fuerzas cortantes o torsiones que pudieran actuar sobre la columna. En caso de estructuras expuestas a sismos, deben tenerse en cuenta las recomendaciones adicionales que se mencionan brevemente en el capítulo 20.

### 15.3 Ayudas de diseño para el dimensionamiento de columnas

Una de las ayudas más útiles para el dimensionamiento de columnas es el diagrama de interacción. La forma de construir los diagramas de interacción se describió en el capítulo 6, donde también se explica cómo se utilizan para determinar la resistencia a combinaciones de momento y carga axial de secciones de características conocidas. El problema inverso, consistente en determinar las dimensiones y el refuerzo requeridos para resistir una fuerza axial y un momento dados, puede también resolverse con la ayuda de los diagramas de interacción mediante un proceso de tanteos como el ilustrado en los ejemplos del siguiente inciso.

En el Apéndice C se reproducen algunos diagramas típicos tomados de los elaborados por Meli y Rodríguez para la referencia 15.2. Estos diagramas están basados en las hipótesis de las NTC-77. Constituyen una versión refinada y ampliada de los incluidos en las ayudas de

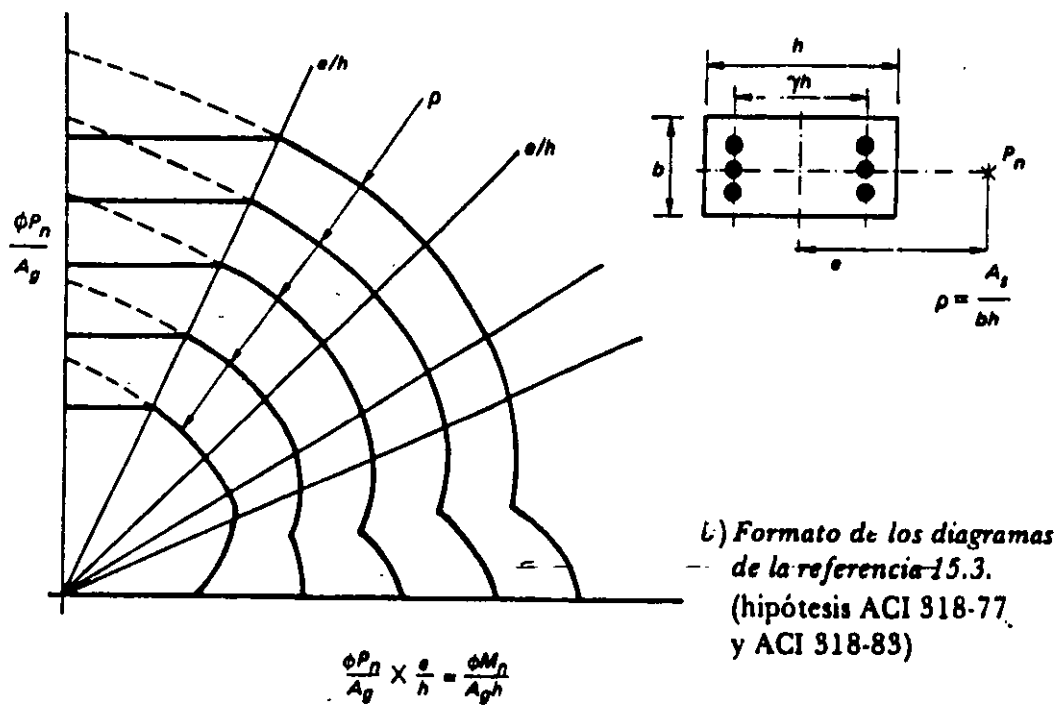
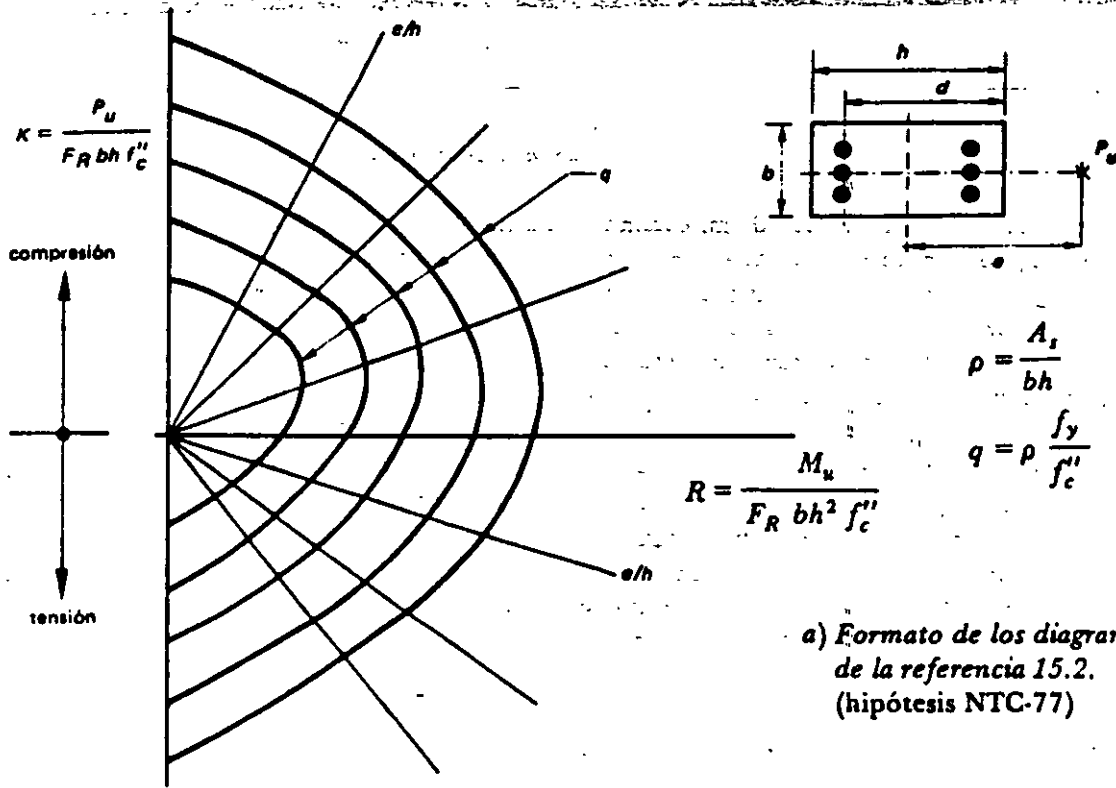
diseño que acompañan a las NTC-77. Abarcan una gran variedad de secciones, tipos de refuerzo y condiciones de carga, incluyendo algunos casos de flexión biaxial. Se consideran dos categorías de acero de refuerzo: acero con esfuerzos de fluencia iguales o menores que 4200 kg/cm<sup>2</sup> y aceros con esfuerzos de fluencia comprendidos entre 4200 y 6000 kg/cm<sup>2</sup>. Se proporcionan gráficas para distintos valores de  $d/h$ , en el caso de secciones rectangulares, y de  $d/D$ , en el de secciones circulares. (El significado de estas relaciones puede apreciarse en las gráficas del Apéndice C.)

Como las gráficas son adimensionales, pueden utilizarse para diseños con otros reglamentos siempre que se calculen los parámetros adimensionales con base en las hipótesis del reglamento correspondiente. Así, para dimensionar según el Reglamento ACI 318-83 deberá sustituirse el valor de  $f'_c$  por  $\beta_1 f'_c$ , donde  $\beta_1 = (1.05 - f'_c/1400)$ . (Véase la figura 5.6.) Además, en lugar de  $F_R$  deberá usarse el valor de  $\phi$  que especifica dicho reglamento para miembros sujetos a flexocompresión. El error en que se incurre suele ser poco significativo.

Los diagramas pueden utilizarse de distintas maneras. Considérese, por ejemplo, el diagrama de la figura 15.5a, que muestra esquemáticamente el formato empleado en los de la referencia 15.2.

Una forma de proceder puede consistir en suponer una sección y calcular los parámetros  $K$  y  $R$ . Estos parámetros definen un punto en el diagrama al que corresponderá un valor de  $q$ , del cual puede deducirse el valor de  $\rho$  necesario. Si este valor está comprendido entre límites aceptables, el problema está resuelto. De lo contrario es necesario ensayar otra sección. Debe cuidarse que el valor de  $M_u$  incluya el momento adicional debido a la excentricidad accidental que especifican las NTC-77. El valor del factor de resistencia  $F_R$  se supone igual a 0.75 si el núcleo no está confinado y la falla es de compresión, e igual a 0.85 si el núcleo cuenta con un confinamiento adecuado.

Otra forma de proceder consiste en suponer una sección y definir un punto en el diagrama



$$\frac{\phi P_n}{A_g} \times \frac{e}{h} = \frac{\phi M_n}{A_g h}$$

Figura 15.5 Formatos típicos de diagramas de interacción.

a partir del-  
 cui... y q  
 den...  
 Si se lim  
 puede calc  
 Se puede,  
 diagrama a  
 e/h: Se ha  
 ción super  
 valor de P  
 Además  
 contiene  
 cación.  
 El forn  
 ferencia  
 Estas grá  
 hipótesis  
 iguales a  
 se consi  
 como en  
 ron elab  
 f'c y f\_y  
 en valor  
 de refu  
 para rho  
 ce el R  
 excentr  
 id p  
 ami  
 siones:  
 Par.  
 phi P\_n (  
 Pa  
 phi P\_n  
 F  
 min  
 a 0  
 par  
 15.  
 tri  
 0.  
 m

a partir del parámetro  $K$  o  $R$  y la relación  $e/h$ , cuidando que  $e$  incluya la excentricidad accidental.

Si se limita la cuantía  $\rho$  a un valor dado, puede calcularse el valor de  $q$  correspondiente. Se puede, entonces, definir un punto en el diagrama a partir de este valor y de la relación  $e/h$ . Se harán los ajustes necesarios en la sección supuesta hasta encontrar una que dé un valor de  $P_u$  semejante al requerido.

Además de las gráficas, la referencia 15.2 contiene varios ejemplos que ilustran su aplicación.

El formato utilizado en las gráficas de la referencia 15.3 se muestra en la figura 15.5b. Estas gráficas se formularon con base en las hipótesis del Reglamento ACI 318-77, que son iguales a las del Reglamento ACI 318-83. No se considera en ellas el caso de flexo-tensión, como en las de Meli y Rodríguez [15.2]. Fueron elaboradas para diversas combinaciones de  $f'_c$  y  $f_y$ , lo que permitió construirlas con base en valores de la cuantía  $\rho$ , en lugar del índice de refuerzo,  $\omega$ . La parte plana de las curvas para  $\rho$  corresponde a la limitación que establece el Reglamento ACI para columnas con poca excentricidad, según la cual, la máxima capacidad para carga axial que puede atribuirse a columnas está dada por las siguientes expresiones:

Para columnas zunchadas:

$$\phi P_n (\text{máx}) = 0.85 \phi [0.85 f'_c (A_g - A_s) + f_y A_s] \quad (15.1)$$

Para columnas de estribos:

$$\phi P_n (\text{máx}) = 0.80 \phi [0.85 f'_c (A_g - A_s) + f_y A_s] \quad (15.2)$$

En estas expresiones  $P_n$  es la capacidad nominal. El factor de resistencia  $\phi$  se toma igual a 0.75 para columnas zunchadas e igual a 0.70 para columnas de estribos. Las expresiones 15.1 y 15.2 rigen respectivamente para excentricidades aproximadamente iguales a  $0.05h$  y  $0.10h$ , que corresponden a las excentricidades mínimas especificadas en versiones anteriores

del Reglamento ACI. Simplifican considerablemente el dimensionamiento de columnas con excentricidades pequeñas.

El quiebre en la parte inferior de las curvas para  $\rho$  refleja la especificación del Reglamento ACI según la cual, para cargas axiales bajas, el valor de  $\phi$  puede aumentarse linealmente hasta un valor de 0.90 al disminuir  $\phi P_n$  de  $0.10 f'_c A_g$  a 0.

Los diseñadores que se basen en las Recomendaciones Internacionales CEB-FIP pueden recurrir al texto de Jiménez Montoya [15.4] que incluye una gama muy amplia de diagramas de interacción basados en las hipótesis de dichas recomendaciones.

En la referencia 15.8 se presentan diagramas para secciones en cruz y otras secciones poco comunes.

Son útiles también las ayudas de diseño en forma de tablas que dan directamente la carga axial y el momento flexionante que puede resistir una sección de dimensiones dadas, con una cierta área de acero y con materiales de resistencias conocidas. Dados los valores de  $P_u$  y  $M_u$  requeridos pueden encontrarse en las tablas distintas alternativas de secciones, con el refuerzo correspondiente, que proporcionan una resistencia adecuada. Véanse, por ejemplo, las referencias 15.5 a 15.7.

## 15.4 Ejemplos

### Ejemplo 15.1. Dimensionamiento de una columna de sección circular zunchada

El dimensionamiento de la columna circular de este ejemplo está basado en las NTC-77. La columna forma parte de una estructura de marcos ortogonales, en la que el análisis indicó que la columna está sujeta a momentos en dos direcciones perpendiculares entre sí. Puesto que se trata de una columna circular, el problema de flexión biaxial puede reducirse a uno de flexión uniaxial, componiendo los momentos  $M_x$  y  $M_y$  vectorialmente. Los valores de las acciones dadas corresponden al nivel de servicio para las dos combinaciones de carga bá-

sica: a) carga muerta y carga viva, y b) carga muerta, carga viva y sismo. Por sencillez se supone que los momentos dados incluyen el efecto de la excentricidad accidental que especifican las NTC-77 ( $0.05D \geq 2$  cm) con base en tanteos previos.

Como se señaló en la sección 15.4, el dimensionamiento de columnas puede llevarse a cabo por un proceso de tanteos auxiliado por diagramas de interacción. El procedimiento implica proponer una sección e investigar, con la ayuda de los diagramas, si la sección propuesta puede resistir las cargas con una cuantía de refuerzo que esté comprendida entre los límites admisibles. En el ejemplo se presenta únicamente el tanteo final, que proporcionó una solución adecuada.

Para elegir el diagrama apropiado es necesario determinar la relación  $d/D$ , donde  $d$  es el diámetro de un círculo que pasa por los centros de las barras y  $D$  es el diámetro de la sección de la columna. Cuando el valor de  $d/D$  no coincide con los valores para los cuales existen diagramas, puede recurrirse a la inter-

polación, cuando se requiera precisión.

Se determinó un valor del índice  $q$  para cada una de las condiciones de carga consideradas, comprobándose que regía la de carga muerta, viva y sismo. Por tratarse de una columna zunchada se tomó  $F_R = 0.85$  para el cálculo de  $K$ . El valor de  $q$  correspondiente a la condición de carga muerta más viva resultó inferior a los que abarca el diagrama.

El área de acero requerida se proporcionó con ocho barras del No. 8, que pueden alojarse en la columna con suficiente holgura entre ellas aun cuando se prevea la posibilidad de hacer traslapes.

El área del núcleo utilizado para calcular la cuantía  $\rho$ , es la definida por un círculo que coincide con el paño exterior del zuncho, y cuyo diámetro, por lo tanto, será igual al diámetro de la columna menos dos veces el recubrimiento libre del zuncho. En cambio, el diámetro  $d$ , utilizado en la ecuación 4.2 es el diámetro de la hélice medido centro a centro. Generalmente los valores calculados del paso  $s$  se redondean a medio centímetro.

#### EJEMPLO 15.1 Dimensionamiento de una columna de sección circular, zunchada (NTC-77)

##### DATOS

##### Cargas

(Las cargas dadas son a nivel de servicio. Los momentos incluyen una estimación de los correspondientes a la excentricidad accidental que especifican las NTC 77.)

##### a) Condición carga muerta más carga viva

$$P = 150 \text{ ton}$$

$$M_x = 15 \text{ ton-m}$$

$$M_y = 3 \text{ ton-m}$$

## EJEMPLO 15.1 (Continuación)

b) Condición carga muerta más carga viva más sismo

$$P = 130 \text{ ton}$$

$$M_x = 35 \text{ ton-m}$$

$$M_y = 12 \text{ ton-m}$$

**Materiales**

$$\text{Concreto: } f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Acero: } f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Tamaño máximo agregado} = 2.5 \text{ cm}$$

Recubrimiento libre: 3 cm

Reglamento: NTC-77

Se pide: Determinar la sección y el refuerzo usando las gráficas del Apéndice C. Detallar el zuncho.

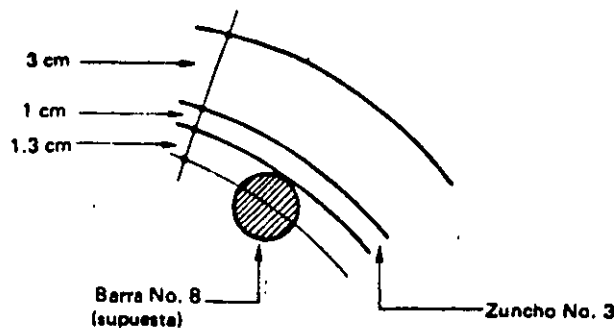
**DATOS PARA EL CALCULO**

$$f_c^* = 0.8 f'_c = 0.8 \times 300 = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c^{**} = 0.85 f_c^* = 204 \text{ kg/cm}^2$$

Estimación del recubrimiento  $r$ 

$$r = 3 + 1 + 1.3 = 5.3 \text{ cm} \approx 5.5 \text{ cm}$$



**EJEMPLO 15.1 (Continuación)****RESISTENCIAS REQUERIDAS****Composición de momentos**

Condición carga muerta más carga viva:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{15^2 + 9^2} = 15.3 \text{ ton-m}$$

Condición carga muerta más carga viva más sismo:

$$M = \sqrt{35^2 + 12^2} = 37.0 \text{ ton-m}$$

**Resistencias**

Condición carga muerta más carga viva:

$$P_u = F_c P = 1.4 \times 150 = 210 \text{ ton}$$

$$M_u = F_c M = 1.4 \times 15.3 = 21.4 \text{ ton-m}$$

$$e = 21.4/210 = 0.10 \text{ m}$$

Condición carga muerta más carga viva más sismo:

$$P_u = 1.1 \times 150 = 143 \text{ ton}$$

$$M_u = 1.1 \times 37 = 40.7 \text{ ton-m}$$

$$e = 40.7/143 = 0.28 \text{ m}$$

**DIMENSIONAMIENTO SECCION Y REFUERZO PRINCIPAL**Diámetro supuesto:  $D = 55 \text{ cm}$ 

$$d = D - 2r = 55 - 2 \times 5.5 = 44 \text{ cm}$$

$$d/D = 44/55 = 0.8 \therefore \text{ Usar figura C.11 del Apéndice C}$$

Condición carga muerta más viva

$$e/D = 0.10/0.55 = 0.18$$

$$K = P_u / F_R D^2 f'_c = \frac{210\,000}{0.85 \times 55^2 \times 204} = 0.40$$

$$q < 0.2$$

**EJEMPLO 15.1 (Continuación)***Condición carga muerta más viva más sismo*

$$e/D = 0.28/0.55 = 0.51$$

$$K = \frac{143\,000}{0.85 \times 55^2 \times 204} = 0.27$$

$$q = 0.4 \text{ (rige)}$$

$$\rho = q \frac{f'_c}{f_y} = 0.4 \frac{204}{4200} = 0.019$$

$$A_s = \rho \frac{\pi D^2}{4} = \frac{0.019 \times \pi \times 55^2}{4} = 45.1 \text{ cm}^2$$

Usar 9 barras No. 8 = 45.6 cm<sup>2</sup> > 45.1**DIMENSIONAMIENTO ZUNCHO**

$$\rho_s = 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} > 0.12 \frac{f'_c}{f_y} \quad \text{(ecuación 4.9)}$$

$$\frac{A_g}{A_c} = \frac{D^2}{(D - 2 \times 3)^2} = \frac{55^2}{(55 - 6)^2} = 1.26$$

└ recubrimiento libre

$$0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} = 0.45 (1.26 - 1) \frac{300}{4200} = 0.0084$$

$$0.12 \frac{f'_c}{f_y} = 0.12 \frac{300}{4200} = 0.0086 > 0.0084 \quad \therefore \rho_s = 0.0086$$

De la ecuación 4.2:

$$\rho_s = \frac{4 A_s}{s d_s}$$

 $(d_s = \text{diámetro del núcleo centro a centro de la hélice.})$  $A_s = \text{área zuncho}$ 

$$s = \frac{4 A_s}{\rho_s d_s}$$

**EJEMPLO 15.1 (Continuación)**

Para zuncho del No. 3:

$$s = \frac{4 \times 0.71}{0.0086 (55 - 4)} = 6.5 \text{ cm}$$

separación libre máxima = 7 cm > (6.5 - 1) = 5 cm

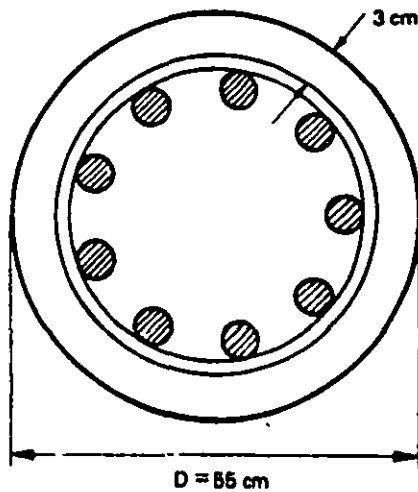
separación libre mínima = 1.5 × 2.5 = 4 cm < 5 cm

↳ tamaño máximo agregado

**SECCION ADOPTADA**

9 barras del No. 8.

Zuncho del No. 3 con un paso  $s = 6.5 \text{ cm}$



*Ejemplo 15.2 Dimensionamiento de una columna cuadrada con refuerzo en las cuatro caras*

El propósito de este ejemplo es ilustrar la aplicación de los diagramas de interacción de la referencia 15.3, que están basados en las

hipótesis del Reglamento ACI, al dimensionamiento de columnas. Las características de los materiales corresponden a una de las combinaciones previstas en la referencia citada.

Para hacer una primera estimación de la sección requerida se recurrió a la ecuación 15.2, considerando que sólo actúa la carga axial y

recia  
si  
do la pra  
centime  
la dimen  
Escog  
90 cm, s  
de e/h r  
fica. Pu  
mas de  
(= 1000  
mar el  
en kg/c  
Para  
calculó  
La dist.



despreciando la contribución del refuerzo. Resultó así una sección de 47 cm de lado. Siguiendo la práctica usual de usar múltiplos de cinco centímetros para las medidas de las columnas, la dimensión obtenida se redondeó a 50 cm.

Escogida tentativamente la sección de 50 X 50 cm, se calcularon los valores de  $\phi P_n/A_g$  y de  $e/h$  requeridos para poder entrar en la gráfica. Puesto que las ordenadas de los diagramas de la referencia 15.3 están dadas en kips (= 1000 lb) por pulg<sup>2</sup>, fue necesario transformar el valor obtenido para  $\phi P_n/A_g$ , expresado en kg/cm<sup>2</sup>, a dichas unidades.

Para seleccionar la gráfica apropiada se calculó el valor de  $\gamma$ , que es la relación entre la distancia entre las barras de los lados opues-

tos y la dimensión total de la columna, ambas medidas en la dirección paralela al plano de flexión. Se obtuvo un valor de  $\gamma = 0.74$  por lo que se utilizó la gráfica A-17 de la referencia 15.3, que corresponde a  $\gamma = 0.75$ . Dado lo parecido de los valores no se consideró necesario recurrir a la interpolación.

El valor de la cuantía  $\rho = 0.03$  obtenido de la gráfica, está comprendido entre los límites admisibles de manera que se aceptó la sección de 50 X 50 cm supuesta inicialmente. En los cálculos se tomó  $\phi = 0.7$  por tratarse de una columna de estribos. El refuerzo requerido se proporcionó con 12 barras del No. 9. La disposición de estribos propuesta puede apreciarse en el croquis al final del ejemplo.

### EJEMPLO 15.2 Dimensionamiento de una columna cuadrada con refuerzo en las cuatro caras (ACI 318-83)

#### DATOS

##### Cargas

$$P_u = 290 \text{ ton}$$

$$M_u = 45 \text{ ton-m}$$

##### Materiales

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2 = 4000 \text{ lb/pulg}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2 = 60\,000 \text{ lb/pulg}^2$$

Recubrimiento: 3.5 cm

Reglamento: ACI 318-83

Se pide: Determinar la sección y el refuerzo usando los diagramas de la referencia 15.3. Detallar los estribos.

$$\text{EXCENTRICIDAD: } e = M_u/P_u = 45/290 = 0.155 \text{ m}$$

**EJEMPLO 15.2 (Continuación)**

**ESTIMACION PRELIMINAR**

Suponer que sólo actúa  $P_u$  y que  $e = 0$ .

De la ecuación 15.2:

$$P_u = \phi P_n = 0.80 \phi [0.85 f'_c (A_g - A_s) + f_y A_s]$$

$$A_g = \frac{P_u}{0.80 \phi (0.85) 280}$$

$$= \frac{290\,000}{0.8 \times 0.7 \times 0.85 \times 280} = 2176 \text{ cm}^2$$

$$b = \sqrt{2176} = 47 \text{ cm}$$

Ensayar una columna de 50 X 50 cm

**DETERMINACION DE  $e/h$  Y  $\phi P_n/A_g$  PARA ENTRAR EN EL DIAGRAMA DE INTERACCION**

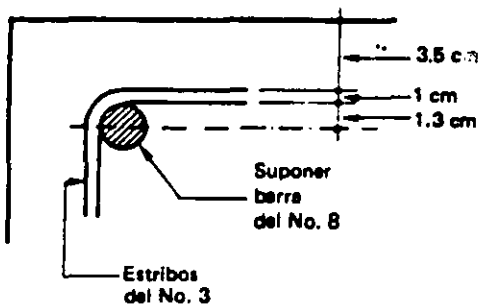
$$e/h = 15.5/50 = 0.31$$

Valor de  $\phi P_n/A_g$  requerido:

$$\frac{\phi P_n}{A_g} = \frac{P_u}{A_g} = \frac{290\,000}{50^2} = 116 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 1650 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}^2} = 1.65 \text{ ksi}$$

(ksi = kips por pulg<sup>2</sup> = 1000 lb/pulg<sup>2</sup>)

**ELECCION DE LA GRAFICA**



$$r = 3.5 + 1 + 1.3 = 5.8 \approx 6 \text{ cm}$$

$$\gamma h = h - 2r$$

$$= 50 - 2 \times 6 = 38 \text{ cm}$$

$$\gamma = \frac{38}{50} = 0.76$$

∴ Usar la gráfica A-17 de la referencia 15.3, para  $\gamma = 0.75$ ,  
 $f'_c = 4\,000 \text{ lb/pulg}^2$  y  
 $f_y = 60\,000 \text{ lb/pulg}^2$

Ejemp  
 colum  
 caras

Pu  
 tricci  
 nas,  
 de un  
 las c

**EJEMPLO 15.2 (Continuación)****DETERMINACION DEL REFUERZO LONGITUDINAL**

$$e/h = 0.31$$

$$\frac{\phi P_n}{A_g} = 1.65 \text{ ksi}$$

$$\rho = 0.03 \text{ (de la gráfica A-17)}$$

$$A_s = 0.03 \times 50^2 = 75 \text{ cm}^2$$

$$\text{Usar 12 barras del No. 9} = 76.7 \text{ cm}^2$$

**DETERMINACION DEL REFUERZO TRANSVERSAL**

Considerar estribos del No. 3

$$16 \times 2.9 = 46$$

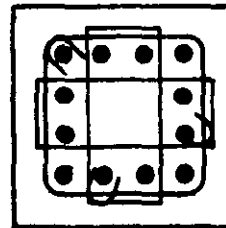
$$48 \times 1 = 48$$

$$b = 50 \text{ cm}$$

$\therefore$  usar estribos @ 46 cm

**SECCION ADOPTADA**

Sección 50 a 50 cm  
12 barras del No. 9  
estribos del No. 3 @ 46 cm.



**Ejemplo 15.3 Dimensionamiento de una columna cuadrada con refuerzo en dos caras para una cuantía dada de acero**

Puede suceder que se imponga como restricción para el dimensionamiento de columnas, el que la cuantía del refuerzo sea del orden de un valor prefijado. En el ejemplo, que sigue las especificaciones de las NTC-77, se esta-

blece la condición que la cuantía sea aproximadamente igual a 0.025.

Para resolver el problema se procedió por tanteos, suponiendo una sección y haciendo ajustes hasta encontrar una que tuviera la resistencia necesaria con una cuantía semejante a la especificada.

Se presenta en el ejemplo un tanteo para una sección de 40 X 40 cm. La excentricidad

calculada se corrigió agregando la excentricidad accidental. La relación  $d/h$ , que se requiere para escoger la gráfica, resultó ser 0.88. Por lo tanto se utilizó en el ejemplo la gráfica de la figura C.2 del Apéndice C, que corresponde a un valor de  $d/h = 0.90$ . En caso de desearse mayor precisión podría hacerse una interpolación entre los datos obtenidos con la figura C.2 y los que se deducen de la figura C.9, correspondiente a un valor de  $d/h = 0.85$ .

Utilizando el valor de  $q$  correspondiente a  $\rho = 0.025$  y el de la relación  $e/h$  se definió un punto en el diagrama cuya ordenada  $K$  fue igual a 0.63. Se comprobó que la resistencia era ligeramente inferior a la requerida. Se procedió entonces a hacer un ajuste en el acero definiendo un nuevo punto en el diagrama a

partir del valor de  $K$  necesario y de la relación  $e/h$ . La cuantía correspondiente a este nuevo tanteo fue sólo ligeramente superior a la especificada.

Los estribos del No. 3 propuestos cumplen ampliamente el requisito de que su fuerza de fluencia sea por lo menos igual al dos por ciento de la fuerza de fluencia de la mayor barra restringida. Conservadoramente se utilizó una grapa para las dos barras del No. 9, aunque estrictamente no es necesaria ya que la separación libre entre barras es menor que 15 cm.

La separación de 40 cm propuesta debe reducirse a la mitad en las porciones extremas de las columnas de acuerdo con lo indicado en la sección 15.2.

### EJEMPLO 15.3 Dimensionamiento de una columna cuadrada con refuerzo en dos caras para una cuantía dada de acero (NTC-77)

#### DATOS

##### Cargas

$$M_u = 23.5 \text{ ton-m}$$

$$P_u = 111 \text{ ton}$$

##### Materiales

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

##### Cuantía de acero

$$\rho \approx 0.025$$

##### Recubrimiento al centro del refuerzo

$$r \approx 5 \text{ cm}$$

**EJEMPLO 15.3 (Continuación)***Reglamento:* NTC-77*Se pide:* Determinar la sección y el refuerzo usando los diagramas del Apéndice C. Detallar los estribos.**DATOS PARA EL CALCULO**

$$f_c^* = 0.8 f_c' = 0.8 \times 200 = 160 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = 0.85 f_c^* = 0.85 \times 160 = 136 \text{ kg/cm}^2$$

**CALCULO DEL REFUERZO LONGITUDINAL***Tanteo inicial*

Suponer una sección de 40 X 40 cm

Excentricidad accidental:

$$e_a = 0.05h \geq 2 \text{ cm}$$

$$e_a = 0.05 \times 40 = 2 \text{ cm}$$

Excentricidad total:

$$e = \frac{23.5}{111} + 0.02 = 0.23 \text{ m}$$

Elección de diagrama:

$$\frac{d}{h} = \frac{40 - 5}{40} = 0.88 \quad \therefore \text{usar la figura C.2 del Apéndice C.}$$

$$q = \rho \frac{f_y}{f_c''} = 0.025 \frac{4200}{136} = 0.77$$

$$\frac{e}{h} = \frac{23}{40} = 0.58$$

$$K = 0.63$$

$$P_u = K F_R b h f_c'' = 0.63 \times 0.75 \times 40^2 \times 136 \\ = 103\,000 \text{ kg} < 111\,000 \text{ kg}$$

**EJEMPLO 15.3 (Continuación)**

*Ajuste del acero:*

$$K = \frac{P_u}{F_R b h f'_c} = \frac{111\,000}{0.75 \times 40^2 \times 196} = 0.68 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} q = 0.85$$

$$\frac{e}{h} = \frac{23}{40} = 0.58$$

$$\rho = q \frac{f'_c}{f_y} = 0.85 \frac{196}{4200} = 0.0275$$

$$A_s = 0.0275 \times 40^2 = 44.0 \text{ cm}^2$$

Usar: 4 barras No. 10 + 2 barras No. 9 = 44.6 cm<sup>2</sup> > 44 cm<sup>2</sup>

**REFUERZO TRANSVERSAL**

*Separación estribos:*

Considerar estribos No. 3

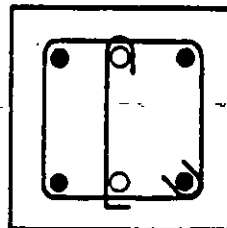
$$48 \times 1 = 48 \text{ cm}$$

$$\frac{850 d_b}{\sqrt{f_y}} = \frac{850 \times 3.2}{\sqrt{4200}} = 42 \text{ cm} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \therefore \text{separación estribos} = 40 \text{ cm}$$

$$b = 40 \text{ cm}$$

**SECCION ADOPTADA**

Sección 40 X 40 cm  
 4 barras del No. 10 y  
 2 barras del No. 9  
 Estribos del No. 3 @ 40 cm



mplo  
 in  
 efecto c

Las  
 acciones  
 cortan  
 siderar  
 versal  
 ilustra  
 NTC  
 Se  
 resiste  
 sufici  
 del N  
 fuerz  
 3, qu  
 las N

**Ejemplo 15.4 Dimensionamiento de una columna rectangular considerando el efecto de una fuerza cortante**

Las columnas de estructuras expuestas a acciones sísmicas pueden estar sujetas a fuerzas cortantes significativas cuyo efecto debe considerarse proporcionando un refuerzo transversal adecuado. En el presente ejemplo se ilustra cómo hacer esto de acuerdo con las NTC-77

Se propuso una sección de 35 X 40 cm, cuya resistencia a flexocompresión se comprobó ser suficiente utilizando como refuerzo seis barras del No. 6 distribuidas en dos caras. Para el refuerzo transversal se emplearon estribos del No. 3, que, de acuerdo con las especificaciones de las NTC-77, que fueron reseñadas en la sección

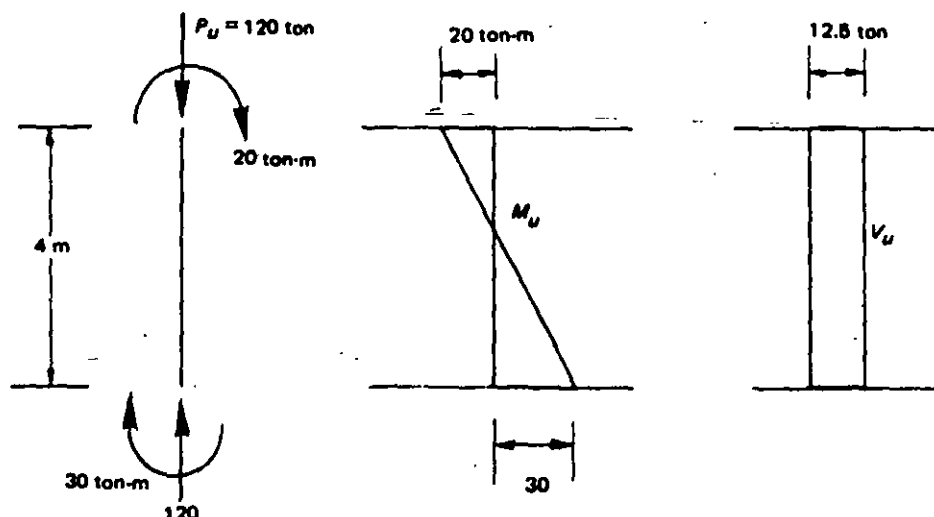
15.2, deben colocarse a 30 cm en la porción central de la columna y a la mitad de esta separación en los extremos.

La revisión del efecto de la fuerza cortante se efectuó de acuerdo con las indicaciones de la sección 7.6.2, que prevén la manera de tomar en cuenta la influencia favorable de la presencia de una fuerza de compresión. La separación de estribos calculada fue menor que la mínima especificada de  $d/2$  para miembros sometidos a fuerza cortante. Esta separación, que en el ejemplo fue igual a 20 cm, resultó mayor que la de 15 cm requerida en los extremos por especificación, por lo que se conservó esta última en dichas zonas. Dado que la fuerza cortante es constante en toda la longitud de la columna, en la porción central se utilizó la separación de 20 cm definida por los requisitos de fuerza cortante.

**EJEMPLO 15.4 Dimensionamiento de una columna rectangular considerando el efecto de una fuerza cortante (NTC-77)**

**DATOS**

*Acciones internas*



**EJEMPLO 15.4 (Continuación)**

(Los momentos incluyen una estimación del efecto de la excentricidad accidental.)

**Materiales**

Concreto:  $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$

Acero:  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Refuerzo en dos caras

Recubrimiento al centro de las barras:  $r = 5 \text{ cm}$

Reglamento: NTC-77

Se pide: Determinar la sección y el refuerzo teniendo en cuenta la influencia de la fuerza cortante. Detallar los estribos.

**DATOS PARA EL CALCULO**

$$f'_c = 0.80 f'_c = 0.80 \times 250 = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'_c = 0.85 f'_c = 0.85 \times 200 = 170 \text{ kg/cm}^2$$

**DIMENSIONAMIENTO POR FLEXION**

Suponer:  $b = 30 \text{ cm}$ ;  $h = 45 \text{ cm}$ ;  $d = 40 \text{ cm}$

$d/h = 40/45 = 0.89 \therefore$  usar figura C.2 del Apéndice C.

$$K = \frac{P_u}{F_R b h f'_c} = \frac{120\,000}{0.75 \times 30 \times 45 \times 170} = 0.70$$

$$R = \frac{M_u}{F_R b h^2 f'_c} = \frac{30 \times 10^5}{0.75 \times 30 \times 45^2 \times 170} = 0.39$$

$q = 0.85$

$$\rho = q \frac{f'_c}{f_y} = 0.85 \frac{170}{4200} = 0.0344$$



**EJEMPLO 15.4 (Continuación)**

$$A_s = 0.0344 \times 30 \times 45 = 46.4 \text{ cm}^2$$

$$\text{Usar 6 barras del No. 10} = 47.6 \text{ cm}^2 > 46.4 \text{ cm}^2$$

**REFUERZO TRANSVERSAL**

Considerar estribos del No. 3

$$48 \times 1 = 48 \text{ cm}$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$\frac{850 d_b}{\sqrt{f_y}} = \frac{850 \times 3.2}{\sqrt{4200}} = 42 \text{ cm}$$

∴ separación estribos = 30 cm

**SECCION PROPUESTA**

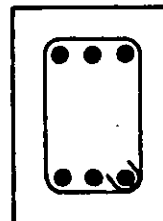
Sección de 30 X 45 cm

6 barras del No. 10

Estribos No. 3 @ 30 cm

en porción central, 5 @

15 cm en los extremos



$$h = 45 \text{ cm}$$

$$60 \text{ cm}$$

$$400/6 = 67$$

∴ la longitud en que debe mantenerse la separación de 15 cm debe ser igual o superior a 67 cm

**REVISIÓN POR CORTANTE**

(Ver sección 7.6.2)

$$0.7 f_c^* A_g + 2000 A_s = 0.7 \times 200 \times 30 \times 45 + 2000 \times 47.6$$

$$= 284\,200 \text{ kg} > P_u = 120\,000 \text{ kg}$$

$$\rho = \frac{A_s \text{ (cara de compresión mínima)}}{bd}$$

$$= \frac{23.8}{30 \times 40} = 0.0198 > 0.01$$

## EJEMPLO 15.4 (Continuación)

$$\begin{aligned} \therefore V_{CR} &= 0.5 F_R b d \sqrt{f_c'} \left( 1 + 0.007 \frac{P_u}{A_g} \right) \\ &= 0.5 \times 0.8 \times 30 \times 40 \times \sqrt{200} \left( 1 + 0.007 \frac{120\,000}{30 \times 45} \right) \\ &= 11\,000 \text{ kg} \\ s &= \frac{F_R A_v f_y d}{(V_u - V_{CR})} = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200 \times 40}{(12\,500 - 11\,000)} \\ s &= 127 \text{ cm} > \frac{F_R A_v f_y}{3.5 b} = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200}{3.5 \times 30} = 45 > \frac{d}{2} = 20 \text{ cm} \end{aligned}$$

*Refuerzo transversal adoptado*

En los extremos: 5 estribos del No. 3 @ 15 cm, que abarcan un tramo superior al mínimo especificado de 67 cm.

En la porción central: estribos del No. 3 @ 20 cm por los requisitos de cortante.

*Ejemplo 15.5 Dimensionamiento de una sección rectangular sujeta a compresión y flexión biaxial*

El problema de la flexión biaxial en secciones rectangulares se presenta con frecuencia en el dimensionamiento de estructuras de concreto. Considérese, por ejemplo, el caso de las columnas de edificios sujetas a acciones sísmicas, para las cuales el Reglamento del Distrito Federal [15.9] exige que se tome en cuenta el efecto total del sismo que actúa en una dirección principal, más el 30 por ciento del correspondiente al que pueda actuar en la otra dirección.

En el ejemplo, en que se han seguido las indicaciones de las NTC-77,  $P_R$  es la carga última que debe soportar la sección con las excentricidades indicadas.

El dimensionamiento se llevó a cabo con la ayuda de la fórmula de Bresler, cuya aplicación

se comentó en la sección 6.4.2. Podría haberse recurrido a los diagramas de interacción para flexión biaxial incluidos en la referencia 15.2. Sin embargo el uso de estos diagramas suele resultar tedioso debido a las interpolaciones que es necesario efectuar. Por otra parte, por regla general, la precisión de los resultados no es superior a la que se obtiene con la fórmula de Bresler.

El problema debe resolverse por tanteos. Se muestra en el ejemplo el tanteo final. Se procuró ajustar la cuantía al tres por ciento especificado en los datos. En el cálculo de  $P_{RO}$ ,  $P_{RX}$  y  $P_{RY}$  se utilizó como valor del factor de resistencia  $F_R = 0.75$ , el correspondiente a la falla en compresión. Los diagramas indicaron que, en efecto, ésta fue la modalidad de falla que rigió.

En el arreglo de estribos mostrado en el croquis de armado, se aprecia que no fue necesario proporcionar una grapa para restringir la

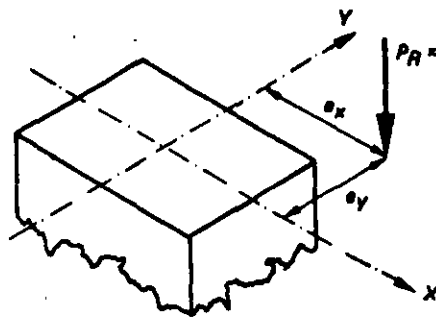
barra central del lado menor ya que la separación libre entre barras es menor que 15 cm. El estribo del No. 3 propuesto cumple ampliamente los requisitos de capacidad en la fluencia mencionados en la sección 15.2. La separación es la correspondiente a la porción central de

la columna. En los extremos, esta separación debe reducirse a la mitad en la forma indicada en la sección citada. No debe olvidarse que en caso de actuar fuerzas cortantes significativas, es necesario verificar que el refuerzo transversal proporcione la resistencia necesaria.

### EJEMPLO 15.5 Dimensionamiento de una sección rectangular sujeta a compresión y flexión biaxial (NTC-77)

#### DATOS

##### Carga



$$e_x = 95 \text{ cm}$$

$$e_y = 20 \text{ cm}$$

(Los valores de  $e_x$  y  $e_y$  incluyen las excentricidades accidentales.)

##### Materiales

Concreto:  $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$

Acero:  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Refuerzo en las cuatro caras

Recubrimiento al centro de las barras:  $r = 6 \text{ cm}$

$\rho \approx 0.03$

Reglamento: NTC-77

Se pide: Determinar las dimensiones y el refuerzo de una sección rectangular. Detallar los estribos.

**EJEMPLO 15.5 (Continuación)****METODO DE SOLUCION**

Fórmula de Bresler (ver sección 6.4.2)

$$P_R = \frac{1}{1/P_{RX} + 1/P_{RY} - 1/P_{RO}}$$

donde

$P_R$  = carga normal resistente de diseño, aplicada con las excentricidades  $e_x$  y  $e_y$

$P_{RO}$  = carga axial resistente de diseño suponiendo  $e_x = e_y = 0$

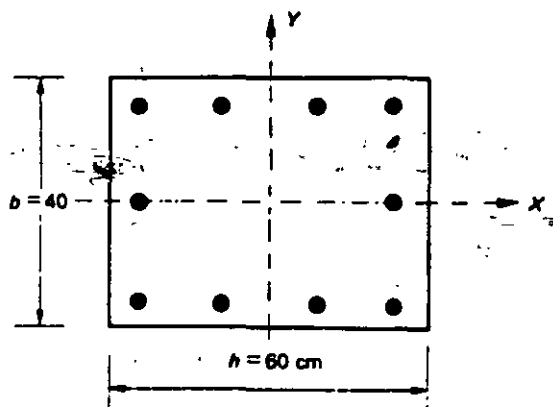
$P_{RX}$  = carga normal de diseño aplicada con la excentricidad  $e_x$ .

$P_{RY}$  = carga normal de diseño aplicada con la excentricidad  $e_y$ .

**DATOS PARA EL CALCULO**

$$f_c^* = 0.80 f_c' = 0.8 \times 300 = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = 0.85 f_c^* = 0.85 \times 240 = 204 \text{ kg/cm}^2$$

**SECCION SUPUESTA**Considerar  $\rho \approx 0.03$ 

$$A_s = 0.03 \times 40 \times 60 = 72 \text{ cm}^2$$

10 barras del No. 10 = 79.4 cm<sup>2</sup>

$$\therefore \rho = \frac{79.4}{40 \times 60} = 0.033$$

$$q = \rho \frac{f_y}{f_c''} = 0.033 \frac{4200}{204}$$

$$= 0.68$$

## EJEMPLO 15.5 (Continuación)

DETERMINACION DE LA RESISTENCIA  $P_R$ Cálculo de  $P_{RO}$ 

$$\begin{aligned}
 P_{RO} &= F_R (f'_c A_c + A_s f_y) \\
 &= 0.75 [204 (2400 - 79.4) + 79.4 \times 4200] \\
 &= 605\,200 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

Cálculo de  $P_{RX}$ 

$$d/h = \frac{60 - 6}{60} = 0.9 \quad \therefore \text{usar la figura C.6}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{e_x}{h} &= \frac{35}{60} = 0.58 \\
 q &= 0.68
 \end{aligned} \right\} K_x = 0.5$$

$$P_{RX} = K_x F_R b h f'_c = 0.5 \times 0.75 \times 2400 \times 204 = 183\,600 \text{ kg}$$

Cálculo de  $P_{RY}$ 

$$d/b = \frac{40 - 6}{40} = 0.85 \quad \therefore \text{usar la figura C.7}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{e_y}{b} &= \frac{20}{40} = 0.5 \\
 q &= 0.68
 \end{aligned} \right\} K_y = 0.55$$

$$P_{RY} = K_y F_R b h f'_c = 0.55 \times 0.75 \times 2400 \times 204 = 202\,000 \text{ kg}$$

Cálculo de  $P_R$ 

$$P_R = \frac{1}{\frac{1}{183\,600} + \frac{1}{202\,000} + \frac{1}{605\,200}} = 114\,000 \text{ kg} > 110\,000 \text{ kg}$$

$\therefore$  La sección propuesta es adecuada

## EJEMPLO 15.5 (Continuación)

## REFUERZO TRANSVERSAL

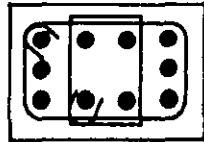
$$48 \times 1 = 48 \text{ cm}$$

$$b = 40 \text{ cm}$$

$$\frac{850 d_b}{\sqrt{f_y}} = \frac{850 \times 3.2}{\sqrt{4200}} = 42 \text{ cm}$$

separación estribos = 40 cm

## SECCION ADOPTADA



Sección de 40 X 60 cm  
10 barras del No. 10  
Estribos del No. 3 @ 40 cm

## REFERENCIAS

- 15.1 Blume, J.A., N. M. Newmark y L.N. Corning. *Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings*. Skokie, Ill., Portland Cement Association, 1961.
- 15.2 Meli, R., y M. Rodríguez. *Gráficas para diseñar columnas de concreto reforzado*. México, D.F., Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, septiembre 1980.
- 15.3 Comité ACI 340. *Design Handbook in Accordance with the Strength Design Method of ACI 318-77: Vol. 2 - Columns*. Detroit, American Concrete Institute, 1978.
- 15.4 Jiménez Montoya, P., et al. *Hormigón armado, Tomo II: Abacos para el cálculo de secciones en el estado último de agotamiento* (10a. edición). Barcelona, Gustavo Gilli, 1979.
- 15.5 González Cuevas, O. *Manual de Diseño de Concreto Reforzado, Vol. I: Flexocompresión y cor-*
- tante*. México, D.F., Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, 1970.
- 15.6 Comité ACI 340. *Design Handbook in Accordance with the Strength Design Method of ACI 318-77: Vol. 1-Beams, Slabs, Brackets, Footings, and Pile Caps*. Detroit, American Concrete Institute, 1978.
- 15.7 \_\_\_\_\_, *CRSI Handbook*. Chicago, Concrete Reinforcing Steel Institute, 1978.
- 15.8 Marín, J. "Abacos, fórmulas y criterios para el cálculo de edificios de concreto armado". *Boletín IMME*, Caracas, enero-junio 1978.
- 15.9 \_\_\_\_\_, *Requisitos de seguridad y servicio para las estructuras, Título IV del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal*. México, D.F., Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 1977.

## EJERCICIOS

(Observación: Los siguientes ejercicios pueden resolverse con las NTC-77 o con el Reglamento ACI 318-83, salvo cuando se indique lo contrario.)

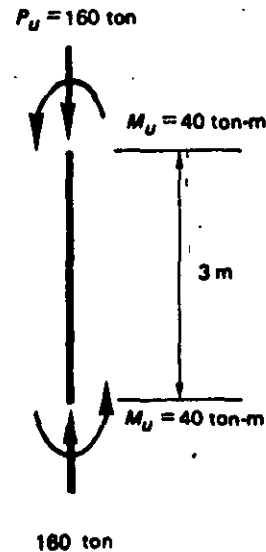
- 15.1 Utilizando los diagramas de la referencia 15.2, determinar los valores de  $P_u$  y  $M_u$  que resiste la sección dimensionada en el ejemplo 15.2.

15.2 Detallar  
de  
one  
se:  
y  $f_y = 42$   
15.3 Dimensi  
una carg  
de 70 t  
 $\rho \geq 0.0$   
15.4 Dimensi  
fuerzo  
ton y  
vel de  
 $f_y = 42$   
15.5 Dimensi  
fuerzo  
ma  $P_u$   
a 15 c  
kg/cm<sup>2</sup>  
15.6 Dimen  
refuer  
última  
 $M_u =$   
 $f_y = 4$   
15.7 Dimen  
refuer  
carga  
 $\epsilon_x =$

- 15.2 Detallar el refuerzo de una columna corta cuadrada de estribos para que resista una carga de 300 toneladas. Las dimensiones de la columna deben ser  $45 \times 45$  cm. Suponer  $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Detallar los estribos.
- 15.3 Dimensionar una columna corta cuadrada para una carga muerta de 100 ton y una carga viva de 70 ton, ambas a nivel de servicio. Suponer  $\rho \cong 0.025$ ,  $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ .
- 15.4 Dimensionar una columna circular corta con refuerzo helicoidal para una carga muerta de 80 ton y una carga viva de 140 ton, ambas a nivel de servicio. Suponer  $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Detallar el zuncho.
- 15.5 Dimensionar una columna circular corta con refuerzo helicoidal para que resista una carga última  $P_u = 200$  ton con una excentricidad igual a 15 cm. Suponer  $f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Detallar el zuncho.
- 15.6 Dimensionar una columna corta cuadrada, con refuerzo en las cuatro caras, que resista una carga última  $P_u = 250$  ton y un momento último  $M_u = 40$  ton-m. Suponer  $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Detallar los estribos.
- 15.7 Dimensionar una columna corta cuadrada, con refuerzo en las cuatro caras, que resista una carga última de 300 ton con una excentricidad  $e_x = 20$  en una de las direcciones principales y

una excentricidad  $e_y = 30$  cm en la otra dirección. Suponer  $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Detallar los estribos.

- 15.8 Dimensionar la columna del croquis como cuadrada, con refuerzo en las cuatro caras. Detallar los estribos. Revisar el efecto de la fuerza cortante. Suponer  $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ .



80







**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**COMENTARIOS A LAS NORMAS TECNICAS  
PARA DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO**


**DR. ROBERTO MELI PIRALLA  
PALACIO DE MINERÍA  
AGOSTO DE 1998**

## 5. MARCOS DUCTILES

### 5.1 Requisitos generales

Este capítulo es nuevo en las Normas; está basado esencialmente en el Apéndice A del Reglamento ACI de 1983 (ref ) y en algunos criterios de diseño neozelandeses (refs ). Se entiende por marco dúctil una estructura monolítica formada por columnas y vigas que bajo la acción del un sismo intenso puede soportar una serie de ciclos de comportamiento inelástico, sin menoscabo significativo de su capacidad de carga. Lo anterior se logra si en el marco puede formarse un mecanismo de falla en el que las zonas que funcionan como articulaciones plásticas poseen una considerable capacidad de giro ante acciones repetidas. La razón principal de usar estructuras dúctiles es que permiten ser diseñadas para resistencias menores que las que requerirían en un cierto sitio estructuras de comportamiento elástico. Esto ocurre así, entre otras razones, por la energía <sup>que</sup> durante un sismo disipa el marco dúctil en los ciclos histeréticos. Pero se debe estar consciente de que bajo sismos extraordinarios son de esperarse daños estructurales, principalmente en las vigas, que requerirán quizá de reparaciones de costo no despreciable; de manera que los responsables del proyecto y el propietario tienen que elegir entre usar el nivel de seguridad suministrado por el Reglamento y sus Normas Complementarias, o aumentar el costo inicial de la estructura para disminuir el riesgo de daños futuros.

La capacidad de giro <sup>en las articulaciones plásticas</sup> se logra suministrando confinamiento lateral al concreto por medio de estribos cerrados o zunchos suficientemente resistentes y próximos entre sí, y limitando la cuantía de refuerzo. El confinamiento lateral hace que aumente la capacidad de deformación longitudinal de compresión del concreto tanto directa como por flexión y, por tanto, que se incremente la capacidad de giro.

Las fallas no dúctiles, como las debidas a fuerza cortante o a menoscabo en la adherencia, se evitan mediante el uso de 

acero con fluencia definida. Si el acero fluye bajo una cierta fuerza, queda acotados los esfuerzos de adherencia y los momentos flexionantes; indirectamente también quedan acotadas las fuerzas cortantes. El obtener un comportamiento aceptablemente estable bajo cargas cíclicas como las que imponen los sismos se propicia manteniendo bajos los esfuerzos cortantes en los elementos del marco.

En general, los requisitos de este capítulo están encaminados a lograr, mediante requisitos de detalles de refuerzo y dimensiones, que el comportamiento del marco esté regido por el giro inelástico por flexión en las zonas que se consideran articulaciones plásticas sin que se presente antes otro tipo de falla, y que soporte ciclos de carga impuestos por sismos intensos.

De acuerdo con el criterio general adoptado en el artículo 207 del Reglamento y en las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo, a los edificios formados por marcos dúctiles les corresponde un factor de comportamiento sísmico,  $\Omega$ , igual a 4. También puede aplicarse este valor cuando se usan marcos y muros o contravientos, con tal que la fuerza sísmica resistida por los marcos <sup>en cada entrepiso</sup> sea por lo menos el 50 por ciento de la total. Se admite así porque <sup>aunque</sup> el muro tiene menos capacidad que un marco para deformarse sin fallar, en una estructura formada por marcos dúctiles y muros, si llegan a fallar éstos, los marcos representan una segunda defensa que puede evitar el derrumbe de la construcción.

Para revisar el requisito d que en cada entrepiso lo marcos sean capaces de resistir al menos el 50 por ciento de la fuerza cortante actuante, puede procederse en la forma siguiente:

a) Analícese la estructura y determinen las fuerzas cortantes que actúan en las columnas.

b) Si en cada entrepiso la suma de las fuerzas cortantes que actúan en las columnas que forman marcos al suponer que no existen los muros es al menos el 50 por ciento de la fuerza cortante total de ese entrepiso, se acepta que se cumple el requisito.

Este proceder se justifica porque al dimensionar se suministrará a esos marcos por lo menos el 50 por ciento de la resistencia necesaria de entrepiso.

Si al aplicar el procedimiento anterior <sup>no</sup> se cumple <sup>con</sup> el requisito, puede recurrirse al criterio general que consiste en comprobar que los marcos solos, suponiendo que los muros han fallado, son capaces de resistir en cada entrepiso al menos el 50 por ciento de la fuerza cortante actuante. Para esto, se analizan

los marcos sin los muros, bajo el 50 por ciento de las fuerzas laterales totales, y se diseñan para que lo resistan; o bien se diseña la estructura, incluyendo los muros, y después <sup>se</sup> se revisa que la resistencia de los marcos solos cumpla con el requisito. Este último proceder es más laborioso.

En cuanto a la condición 3 para usar  $\Omega = 4$  que aparecen en las normas para diseño por sismo en el sentido de que el mínimo cociente de la capacidad resistente de un entrepiso entre la acción de diseño no difiera en más de 35 por ciento del promedio de dicho cociente para todos los entrepisos, puede suponerse que la resistencia de un entrepiso  $\longrightarrow$

corresponde al mecanismo que en él se forme con articulaciones plásticas en los extremos de las columnas y que la resistencia del muro es la que tiene a fuerza cortante en el entrepiso. Este <sup>procedimiento</sup> sobrestima la resistencia de entrepiso, particularmente en edificios esbeltos donde las articulaciones se formen en las vigas y no en las columnas y el muro de concreto falle por flexión en su base. Sin embargo, se justifica hacerlo así porque la intención del requisito es evitar que haya discontinuidades importantes en las resistencias de los entrepisos, y no interesa tanto el valor real de esas resistencias, sino sus valores relativos. No vale la pena

tratar de valuar la resistencia real de entrepiso, pues cuando no se forma un mecanismo en el entrepiso que se trata sino que el mecanismo de falla del edificio está definido por articulaciones en las vigas, el concepto de resistencia de entrepiso pierde un tanto su significado. Si se deseara calcularla debería ser la fuerza cortante que actúa en ese entrepiso cuando se forma el mecanismo de falla general del edificio; lo anterior se complica aún más cuando existen muros de concreto *para sísmo*.

Así pues, para fines de revisar el requisito que se trata, basta aplicar la expresión siguiente:

$$V_{RE} = \frac{\Sigma M_c}{h} + V_R \text{ muro}$$

donde  $V_{RE}$  es la resistencia ficticia del entrepiso,  $\Sigma M_c$  es la

suma de los momentos resistentes en los extremos de las columnas y  $V_{R \text{ muro}}$  la resistencia del muro a fuerza cortante. Para evaluar  $M_c$  debe tomarse en cuenta la carga axial que actúa en la columna (pueden usarse los diagramas de interacción flexión-compresión). La resistencia del muro se determina de acuerdo con la sección 4.5.2c) de las Normas, considerando muro no esbelto; así se obtiene:

$$V_{R \text{ muro}} = 0.85 F_R \sqrt{f_c^*} tL + P_h (F_R f_y dt) \\ \leq 2F_R Lt \sqrt{f_c^*} .$$

Una de las características de un marco que influyen en su comportamiento y resistencia es la resistencia relativa entre columnas y vigas. La tendencia actual es propiciar que las columnas sean más resistentes en flexión que las vigas, a fin de evitar las fallas laterales de entrepiso por la formación de articulaciones plásticas en los extremos de las columnas; esto es, se llega a una estructura en que el mecanismo de falla ocurre por la formación de articulaciones inelásticas en las vigas y donde las columnas permanecen de hecho en la zona elástica excepto en sus bases. Bajo un cierto sismo, la demanda de giro en las articulaciones plásticas de una estructura cuyo mecanismo de falla está definido por articulaciones en las vigas es menor que el que se tiene en las articulaciones de un mecanismo de entrepiso; <sup>Es</sup> decir, la estructura *(con columnas más resistentes que las vigas)* tiene más probabilidades de sobrevivir durante un sismo de

por otra parte, a causa de la carga axial la capacidad de giro inelástico de las columnas es menor que la de las vigas.

intensidad extraordinaria. Además puesto que sus deformaciones laterales serán menores, disminuye el riesgo de que se haga inestable por los efectos de esbeltez.

El requisito de que los marcos que se diseñen con  $Q = 4$  sean monolíticos colados en el lugar se debe a que los detalles que se especifican están basados en ensayos realizados en especímenes monolíticos. Los requisitos para marcos prefabricados se dan en el cap 8.

Es importante revisar que se cumplan, además, todos los requisitos que para usar  $Q = 4$  se prescriben en las normas técnicas para diseño por sismo (ref ) y que no están mencionados en las normas para estructuras de concreto.

La condición de que cada marco debe resistir al menos el 25 por ciento de la fuerza horizontal que le correspondería si estuviera aislado prevé la posibilidad de que el sistema de piso no transmita adecuadamente las fuerzas de inercia a los elementos verticales más rígidos, por ejemplo porque se dañe durante un sismo violento. También toma en cuenta imprecisiones en el cálculo de las rigideces laterales de muros y columnas que puedan hacer pensar que algún marco toma menos fuerza

lateral que la que en realidad le corresponde.

Se pide que la resistencia especificada,  $f'_c$ , del concreto no sea menor de  $200 \text{ kg/cm}^2$  debido al efecto desfavorable que sobre la curvatura en la falla tiene el disminuir  $f'_c$ ; en una sección rectangular que tiene un cierto refuerzo, la profundidad del eje neutro en la falla es  $c = A_s f_y / b f'_c$ ; al disminuir  $f'_c$  aumenta  $c$  y la curvatura disminuye. 0.8

El uso de refuerzo longitudinal que no fluya francamente o que fluya bajo un esfuerzo considerablemente mayor que el aplicado al dimensionar puede conducir a fallas frágiles por fuerza cortante o por adherencia. Estos tipos de falla deben evitarse aunque ocurran bajo cargas mayores que las de diseño, de aquí el primer requisito que se pide para el refuerzo longitudinal de vigas y columnas. También es necesario que el esfuerzo real de fluencia del refuerzo de las vigas no exceda demasiado al de cálculo, para que efectivamente se mantenga la tendencia a que las articulaciones plásticas se formen en las vigas y no en las columnas.

El otro requisito relativo al acero de refuerzo pide que después de la fluencia el material tenga endurecimiento por deformación, de características tales que la resistencia real sea al menos 1.25 veces el esfuerzo real de fluencia. Considerando el caso extremo de que el acero fluyera y no tuviera endurecimiento por deformación, la fluencia ocurriría sólo en la



sección de momento máximo y de hecho no se formaría una zona que trabajara como articulación plástica, sino que la deformación del acero se concentraría en unos cuantos milímetros y rápidamente ocurriría su fractura, originando una falla frágil. Si el acero tiene endurecimiento por deformación, al llegar su deformación a la zona de endurecimiento el momento en la sección de momento máximo aumenta y también *lo hacen* los momentos en las secciones vecinas, con lo que la fluencia del acero se propaga y se forma una articulación plástica. El requisito de las normas tiende a asegurar que la fluencia ocurra en una cierta longitud, y lograr así una cierta capacidad de giro inelástico en esa zona.

## 5.2 Miembros a flexión

### 5.2.1 Requisitos geométricos

Se pide que la relación claro-peralte no sea menor que 4 porque hay evidencia experimental (ref ) de que bajo acciones repetidas el comportamiento de vigas peraltadas que no cumplan con el requisito es más desfavorable que el de vigas esbeltas.

Los requisitos que limitan las relaciones del ancho de una viga con la longitud no soportada lateralmente y con su peralte tienen la intención de evitar el pandeo lateral.

Los extremos de las vigas normalmente están bajo flexión negativa y la zona comprimida es rectangular. Bajo acciones repeti

tidas es probable que se desprenda el recubrimiento y sólo se cuente con el concreto contenido dentro de los estribos; por esta razón se requiere un ancho mínimo de 25 cm. Se pide que el ancho de la viga no sea mayor que el de la columna, para hacer lo más eficiente posible la transmisión de momento entre viga y columna.

La intención del último requisito geométrico para vigas es evitar momentos adicionales importantes en las columnas, causados por excentricidad de la carga vertical y que normalmente no se toman en cuenta en el análisis.

5.2.2 Refuerzo longitudinal

El primer requerimiento va encaminado a no dejar alguna sección con posibilidad de falla frágil por flexión de uno o de otro signo; esto último en vista de las incertidumbres en el análisis,

la posible ocurrencia de hundimientos diferenciales de apoyos, o acortamientos diferenciales en columnas a corto o a largo plazo, todo lo cual usualmente no se considera en el análisis, y también en vista de la posibilidad <sup>de</sup> que el sismo sea más intenso que lo previsto y haga que cambien los signos de los momentos.

Como se dice en 2.1.2a), el refuerzo mínimo obliga a que el momento resistente de la sección agrietada sea al menos 1.5 veces mayor que el momento bajo el cual se agrieta la viga, con lo que se evita que ésta falle bruscamente al agrietarse. El requisito

de que sean por lo menos dos barras en cada lecho se refiere más bien a la necesidad de ellas por razones de construcción.

Se mantuvo el límite de  $0.75 A_{sb}$  para el acero a tensión. <sup>seguido</sup>

Aunque el concepto de falla balanceada no es ya en rigo <sup>T</sup> aplicable a un viga sujeta a acciones que le provocan deformaciones cíclicas. inelásticas, la cuantía que tenga la sección con relación a la cuantía balanceada continúa siendo un índice de la ductilidad de la viga. Se sugiere que la cuantía no exceda de 0.025 a fin de evitar congestinamiento de las barras de refuerzo y de limitar, indirectamente, la fuerza cortante que puede generarse en la viga.

Se pide que en la unión con un nudo <sup>el</sup> momento resistente positivo de una viga sea por lo menos igual a la mitad del momento resistente negativo que se tenga en esa sección, para prever la posibilidad de que, aunque el análisis no lo indique, el momento positivo debido al sismo exceda al negativo causado por las cargas verticales. Esta situación puede verse propiciada por hundimientos diferenciales, o acortamientos diferenciales de las columnas. Además, el acero longitudinal en el lecho inferior tiene el efecto favorable de que bajo momento negativo ayuda al concreto a tomar las compresiones. El riesgo de que se invierta el signo del momento flexionante en los extremos de las vigas de un marco es mayor si los claros son pequeños.

Se pide que en las uniones por traslape se suministre refuerzo helicoidal o estribos cerrados, debido a la posible caída del recubrimiento lo que disminuiría la adherencia de las barras y debili

ría la unión traslapada. Las uniones traslapadas no se permiten en zonas donde se prevén zonas que funcionen como articulaciones plásticas, pues no son confiables bajo deformaciones cíclicas inelásticas.

En un paquete de dos barras es pequeño el menoscabo en la adherencia con el concreto. Debe buscarse que los esfuerzos de adherencia sean pequeños, ya que su deterioro bajo acciones cíclicas es una de las causas de la pérdida de rigidez de elementos y nudos de concreto reforzado bajo cargas cíclicas.

De los requisitos que deben satisfacer las uniones soldadas o con dispositivos mecánicos, se hace hincapié en el que pide que resistan al menos 1.25 veces la fuerza de fluencia de las barras que unen.

Al definir el diámetro, la cantidad y la distribución del refuerzo longitudinal, debe tenerse presente la facilidad de construcción, en particular <sup>respecto a</sup> las barras que llegan a las uniones con las columnas.

### 5.2.3 Refuerzo transversal para confinamiento

El refuerzo que se pide es para confinar el concreto en las zonas de articulaciones plásticas, a fin de aumentar su capacidad de deformarse sin fallar y de resistir acciones cíclicas. También tiene la función de restringir lateralmente al acero longitudinal que pueda trabajar a compresión. El diámetro del refuerzo para confinar estará de acuerdo con el tamaño de la viga. Como guía, se sugiere usar barras No.2.5 en vigas con peralte de

hasta 50 ó 60 cm, No 3 con peraltes de hasta 80 ó 90 cm, y No 4 o más gruesas para peraltes mayores.

El requisito relativo a las barras longitudinales de la periferia en las zonas de articulaciones plásticas significa que las barras de esquina y una de cada dos consecutivas deben tener el soporte lateral como se indica en 4.2.3, y que ninguna barra no soportada lateralmente debe distar <sup>a cada lado,</sup> más de 15 cm de una barra sí soportada.

#### 5.2.4 Requisitos para fuerza cortante

La forma de obtener las fuerzas cortantes en una viga de un marco dúctil se ilustra en la fig 1. Para evitar que ocurra la falla por fuerza cortante antes que aparezcan las articulaciones, <sup>a partir del equilibrio de la viga,</sup> las fuerzas cortantes de diseño se calculan suponiendo que ya se formaron las articulaciones plásticas en <sup>sus</sup> extremos. <sup>seguido</sup>  
 Los momentos de fluencia se calculan sin factor de reducción, porque así se tiene una condición más desfavorable ya que se obtienen fuerzas cortantes mayores. Además, se supone que las amplitudes de las rotaciones son tales que el acero puede llegar a tener endurecimiento por deformación, por lo que el momento se calcula con el esfuerzo en el acero igual a  $1.25 f_y$ .

La situación descrita en la fig - - puede ocurrir durante un sismo intenso: primero se forma la articulación en el extremo donde el momento del sismo se suma con el causado por las cargas de gravedad; después, al aumentar el efecto del sismo, se forma la articulación de momento positivo en el otro extremo.

En sistemas de piso viga-losa monolíticos, el momento resistente negativo de la viga aumenta con relación al teórico, a causa del refuerzo de la losa que trabaja a tensión junto con el refuerzo de la viga. Se recomienda tomar en cuenta esta incremento en vigas relativamente pequeñas (peralte menor de 50 cm, como guía) y también cuando la cuantía de refuerzo de la losa exceda de 0.006 ó 0.007 (ref. ).

Con el procedimiento optativo se pretende obtener el mismo resultado que con el general, es decir, evitar que la viga falle por fuerza cortante antes que se formen las articulaciones inelásticas en los extremos. El procedimiento optativo es más sencillo, aunque, como suele suceder en estos casos, puede conducir a un mayor consumo de acero en estribos.

### 5.3 Miembros a flexocompresión

Los miembros a flexocompresión con carga axial pequeña ( $P_u \leq A_g f'_c / 10$ ) se tratan como vigas.

Las razones para pedir un mínimo en la dimensión transversal de una columna son las siguientes: a) hacerlas menos vulnerables a errores constructivos, a impactos accidentales y a excentricidades accidentales de otra índole, y b) facilitar la colocación del refuerzo y del concreto, así como lograr cumplir con los recubrimientos necesarios sin disminuir demasiado la relación del área del núcleo al área transversal total.

La intención de que el área de la sección transversal sea al menos igual a  $P_u/0.5f'_c$  es garantizar una cierta capacidad de giro en zonas de la columna donde llegaren a formarse articulaciones plásticas. La capacidad de giro inelástico en una columna aumenta al disminuir la relación  $P_u/A_g f'_c$ .

Se pide que la relación entre la dimensión transversal mayor de la columna y la menor  $m$  exceda de 2.5, para que el elemento siga siendo propiamente una columna y no pase a tener características de muro con el consiguiente problema del pandeo lateral.

Para evitar que los efectos de esbeltez lleguen a ser causa de una disminución significativa de la ductilidad general de la estructura, <sup>a</sup> las disposiciones de 1.3.2 se adiciona el requisito de que la relación entre la altura libre y la menor dimensión transversal no exceda de 15.

### 5.3.2 Resistencia mínima a flexión

En la sección 5.3.2 explícitamente se trata de disminuir las probabilidades de que se presente fluencia en las columnas y, por tanto, de que se forme un mecanismo de falla lateral en algún entrepiso. El requisito de la sección propicia la formación de un mecanismo de falla definido por articulaciones plásticas en las vigas y en la base de las columnas (fig ).  
Bajo un mismo sismo, la demanda de giro en las articulaciones del segundo mecanismo es menor que la demanda de giro de las

articulaciones de un mecanismo de falla de entrepiso, a causa de que en éste último la disipación de energía sólo ocurre en las articulaciones plásticas de los extremos de las columnas del entrepiso que falla, en tanto que en el otro se disipa en un número mayor de articulaciones distribuidas en todo el edificio.)

→ Por otra parte, la capacidad de giro de una articulación formada en una viga es mayor que la de aquella que se forma en una columna, a causa de la carga axial. Además, y en particular si la falla lateral de entrepiso ocurre en la zona baja de la estructura, aumenta la importancia de los momentos de segundo orden en las columnas del entrepiso dañado, con el consiguiente incremento en el riesgo de derrumbe brusco del edificio. Lo anterior significa que una estructura donde las articulaciones se formen en las vigas y no en las columnas tiene más probabilidades de sobrevivir bajo un sismo de intensidad extraordinaria que otra en donde la fluencia ocurra en las columnas de un entrepiso y en él se forme un mecanismo de falla lateral.

Debe hacerse hincapié en que la importancia de que no se formen articulaciones plásticas en las columnas es mayor en los primeros entrepisos de edificios altos. En edificios de uno o dos niveles o en los últimos pisos de edificios de más altura se puede ser menos estricto en este aspecto. Así mismo, en un cierto caso podría admitirse fluencia en algunas columnas de un entrepiso a condición de que las restantes del entrepiso



permanezcan elásticas e impidan la formación de un mecanismo de falla lateral.

En rigor, no es posible asegurar que no se formen zonas inelásticas en las columnas, por lo que se debe suministrar en sus extremos el refuerzo de confinamiento prescrito en 5.3.4. Entre otras, las razones que pueden provocar la fluencia de las columnas es la sobrerresistencia de las vigas a causa del endurecimiento por deformación del acero de refuerzo y por la contribución al momento resistente negativo de la viga del acero de la losa adyacente.

Se pide duplicar la carga axial debida al sismo para prever que la fuerza sísmica horizontal excede de la obtenida dividiendo el coeficiente sísmico entre el factor de comportamiento sísmico,  $Q$ , igual a 4. Una de las razones para dividir entre  $Q$  es el supuesto comportamiento plástico de la estructura, pero éste se ve afectado por la sobrerresistencia de las vigas, la presencia de muros y por la no simultaneidad en la formación de las articulaciones plásticas, todo lo cual conduce a que la fuerza lateral que toma el edificio sea creciente con la deformación lateral, y, por consiguiente, a que aumenten los momentos de volteo y las cargas axiales en las columnas, incremento que no se toma en cuenta en el análisis.

Con el procedimiento optativo ( $F_R = 0.6$ ) se pretende obtener resultados equivalentes, esto es, tender a evitar la formación

de mecanismos de falla lateral de entrepiso.

Si se llega a formar el mecanismo definido por articulaciones en las vigas y en las bases de las columnas, la falla de la estructura estará gobernada por la falla de las bases de las columnas, por lo que resulta esencial que esa zona cuente con el adecuado refuerzo transversal de confinamiento. El confinamiento aumentará la capacidad de giro de las bases de las columnas y permitirá que soporte más ciclos de acciones sísmicas sin perder su capacidad de carga vertical.

### 5.3.3 Refuerzo longitudinal

El límite inferior para la cuantía de refuerzo longitudinal tiene el propósito de evitar que dicho refuerzo fluya en compresión a causa del flujo plástico (creep) del concreto. Al deformarse el concreto con el tiempo, va transfiriendo su carga al acero de refuerzo el cual puede llegar a fluir en compresión si su cuantía es muy pequeña; la columna se iría acortando al paso del tiempo se crearía<sup>las</sup> esfuerzos y deformaciones no previstas en vigas y en otras columnas. Otra razón para establecer una cuantía mínima de refuerzo longitudinal es suministrar una cierta resistenci<sup>a</sup> a flexión.

El límite superior para la cuantía de refuerzo longitudinal es en esencia para evitar que se congestione el refuerzo, particularmente en las intersecciones con las vigas. Si el refuerzo es excesivo, se dificultan su colocación y el colado del concreto.

Se limita a dos el número de barras por paquete a fin de disminuir el riesgo de fallas de adherencia en la columna y en especial en las intersecciones con las vigas. Por otra parte, se logra un mejor confinamiento del concreto del núcleo si las barras longitudinales están distribuidas en la periferia que si se concentran en paquetes. Esta disposición tiende a dejar fuera de uso la práctica anterior de concentrar la mayor parte del refuerzo longitudinal en las esquinas que, si bien aumenta la resistencia en flexión, propicia problemas de adherencia y de menoscabo en el confinamiento.

Al igual que en las vigas, las uniones de barras por traslape en columnas son vulnerables al desprendimiento del recubrimiento. Los traslapes sólo se permiten en la zona central de la columna donde es poco probable que se desprenda el recubrimiento. Las uniones soldadas o con dispositivos mecánicos no *presentan ese inconveniente y se permiten* en cualquier localización con tal que se cumpla con los requisitos que se incluyen sobre cantidad de uniones y separación entre ellas:

Se hace énfasis en la importancia de que se cumplan los requisitos de la sección 4.2 que no resulten modificados por el inciso 5.3.3.

#### 5.3.4 Refuerzo transversal

El refuerzo transversal de una columna tiene la función de suministrar la resistencia requerida a fuerza cortante y dar confinamiento adecuado al núcleo, así como restricción lateral al

refuerzo longitudinal. El confinamiento lateral <sup>hace</sup> que aumente considerablemente la capacidad del concreto para deformarse en la dirección longitudinal sin fallar, con lo cual se evita el comportamiento frágil de la columna. El refuerzo mínimo que se especifica en esta sección es el necesario para confinar el concreto del núcleo y restringir lateralmente las barras longitudinales; este refuerzo sólo se pide en las zonas donde es probable que ocurra comportamiento inelástico durante sismos intensos. No obstante la tendencia hacia evitar que las columnas sufran comportamiento inelástico, debe preverse la posibilidad de que esto ocurra, según se indica en los comentarios a la sección 5.3.2, de aquí la necesidad de suministrar el refuerzo transversal para confinamiento.

En toda sección de una columna el refuerzo transversal debe satisfacer el requisito que sea más estricto entre el necesario para confinamiento y el necesario para fuerza cortante, teniendo en cuenta que el primero únicamente es necesario en las zonas indicadas.

Las zonas en que cabe esperar comportamiento inelástico durante sismos extraordinarios son las próximas a las intersecciones con las vigas, por ser en ellas máximos los momentos causados por las fuerzas laterales. Para tomar en cuenta que en las columnas de planta baja normalmente el punto de inflexión se encuentra <sup>e</sup> más próximo a los nudos superiores, se pide que, además de cumplir con los requisitos generales que fijan la longitud confinada, ésta llegue por lo menos hasta media altura

de la columna; por otro lado, para dar continuidad a la columna dentro de su cimentación, a fin de evitar que allí el confinamiento deba depender de otros refuerzos, se especifica que el refuerzo para confinar se continúe en la cimentación. *aparte*

La cuantía volumétrica de refuerzo helicoidal,  $p_g$ , se define como el cociente del volumen de acero helicoidal entre el volumen del núcleo de concreto confinado por dicho acero

( $p_g = 4a_g / SD_c$ , donde  $D_c$  es el diámetro del núcleo, hasta la orilla exterior del refuerzo helicoidal).

La primera fórmula del inciso a) se obtiene de obligar a que la resistencia a carga axial de la columna antes de perder el recubrimiento sea igual a la resistencia del núcleo confinado por la hélice, la cual se alcanza bajo deformaciones grandes de compresión cuando ya se desprendió el recubrimiento.

Durante un sismo violento, normalmente lo que va a incrementarse y quizá variar cíclicamente es la magnitud de los momentos flexionantes que actúan en las columnas y no tanto la magnitud de la carga axial (si el edificio es esbelto, los incrementos de carga axial en los primeros entresijos debidos al sismo sí pueden ser importantes); sin embargo, se ha mantenido el criterio del inciso a), en vista de que el confinamiento logrado también mejora la ductilidad de la columna aunque haya flexiones importantes adicionales a la carga axial (ref. ). El límite  $0.12 f'_c / f_y$  rige en secciones grandes; en ellas  $A_g / A_c$  tiende a 1.0 y la cuantía suministrada por la primera fórmula tiende a cero.

Se admite que el confinamiento suministrado por estribos cerrados rectangulares según se establece en el inciso b) es equivalente al que proporciona el zuncho en columnas circulares. Se sabe, sin embargo, que en realidad el confinamiento que da el estribo rectangular es menos eficiente debido a que la barra se flexiona y su acción sobre el núcleo disminuye al alejarse de las esquinas del estribo. Este inconveniente se pretende compensar usando más refuerzo transversal y también por medio del uso de grapas intermedias, así como limitando las dimensiones de los estribos. En efecto, la cuantía volumétrica de refuerzo transversal rectangular del inciso b) es aproximadamente un tercio mayor que la obtenida con las fórmulas del inciso a) para columnas con zuncho circular, y la mayor dimensión de un estribo rectangular no debe exceder <sup>de</sup> 45 cm. Se recomienda el uso abundante de las grapas complementarias descritas en las Normas. En la fig se presenta un ejemplo de refuerzo transversal para confinamiento.

Los requisitos de separación máxima del refuerzo transversal y los relativos a la distancia entre ramas de estribos, entre éstas y grapas y de máxima dimensión de estribos sencillos que se establecen en esta sección, se refieren sólo al refuerzo para confinamiento.

#### 5.3.5. Requisitos para fuerza cortante

Estos requisitos tratan de evitar que las columnas fallen por

fuerza cortante antes que se formen articulaciones plásticas en las vigas, es decir, relacionan directamente la resistencia a fuerza cortante de las columnas con las articulaciones en las vigas y no con la formación de articulaciones en los extremos de la propia columna. Se optó por este procedimiento a fin de simplificar en cierto grado el diseño.

El valor de  $0.75 M_g$  para el momento que actúa en un extremo de una columna al considerar su equilibrio proviene de suponer que se cumple la condición de 5.3.2, como igualdad, y que los momentos en las dos columnas que llegan a un nudo son iguales; tambien por sencillez, se admite que  $M_g$  es el valor de diseño, es decir, está valuado con  $f_y$  e incluye a  $F_R$ . Este proceder es algo más sencillo que las operaciones que habría que realizar al considerar en el equilibrio de las columnas sus momentos resistentes obtenidos con sus dimensiones y refuerzos reales, y con la carga axial que conduce a la máxima resistencia a flexión.

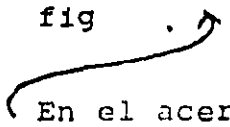
Existe una posibilidad desfavorable, que se presentaría cuando tanto las sumas de los momentos resistentes reales de las vigas y de las columnas fueran, cada una, mayores que  $1.5 M_g$ , (en las vigas a causa, por ejemplo, del refuerzo de la losa, y en las columnas porque rigiera el refuerzo mínimo). En tales condiciones, la falla se presentaría por fuerza cortante en las columnas. Esta circunstancia es poco probable, pero al diseñar debe tenerse en cuenta su posible ocurrencia y cuando

se juzgue que pueda *presentarse*, para obtener la fuerza cortante se debe plantear el equilibrio de la columna con sus momentos resistentes sin reducir, en lugar de con  $0.75 M_g$ ; se recomienda proceder así cuando rija el refuerzo longitudinal mínimo en la columnas.

5.4 Uniones viga-columna

5.4.1 Requisitos generales

Las condiciones de equilibrio horizontal de un nudo interior de una marco sujeto solo a carga lateral se muestran en la fig



En el acero a tensión que llega al nudo se supone un esfuerzo de  $1.25f_y$  debido a que ensayos han demostrado que los giros inelásticos debidos a sismo en las caras del nudo implican deformaciones en el refuerzo de flexión considerablemente mayores que las correspondientes a la primera fluencia y que bien pueden llegar a los que corresponden a la resistencia máxima del acero supuesta de  $1.25 f_y$  (para acero de grado 42, la deformación unitaria correspondiente al esfuerzo máximo es del orden de 0.08 a 0.10). La fuerza cortante calculada a media altura del nudo resulta igual a  $A_{s2}(1.25f_y) + A_{s1}(1.25f_y) - V$ .

Las uniones viga-columna son elementos críticos en un marco por lo que su diseño y detallado no debe descuidarse. Si un nudo se daña es muy difícil repararlo, y si pierde capacidad de carga vertical causa la falla de la columna que llega a él y quizá el derrumbe de la estructura; lo ideal es que la resis-



tencia del nudo sea mayor que la de los elementos que concurren en él.

Los principales problemas involucrados en el diseño de uniones viga-columna se refieren a su resistencia a fuerza cortante, al anclaje del refuerzo dentro de él, y al posible congestionamiento excesivo de refuerzo. La fuerza cortante causa que el nudo se agriete en diagonal según se muestra en la fig . Bajo las acciones cíclicas causadas por el sismo, el patrón de agrietamiento es en dos direcciones cruzadas (fig ). El anclaje en el nudo de las barras de vigas y columnas que llegan a él presenta el problema de que frecuentemente en una cara del nudo una cierta barra está a tensión y en la cara opuesta a compresión, lo que

provoca que se incremente la longitud de anclaje necesaria con relación a la requerida si sólo actuara la tensión. También se tiene el inconveniente de que al formarse en una viga una articulación plástica adyacente al nudo, la fluencia de las barras tiende a penetrar en éste provocando cierto menoscabo en la adherencia. Tdo lo anterior se ve agravado por el efecto de las acciones <sup>o</sup> cíclicas impuestas por el sismo, las cuales tienden a ir deteriorando la adherencia de las barras dentro del nudo. En buena medida se disminuyen los problemas de anclaje en los nudos evitando el uso de barras de diámetro grande. En el dimensionamiento y detallado del nudo debe buscarse un equilibrio entre su resistencia a fuerza cortante y el diámetro, la cantidad y la distribución de las barras que entran en él, a fin de evitar un congestionamiento excesivo del refuerzo que dificulte su habilitación y afecte la correcta colocación del concreto. A este

respecto, se recomienda tener en mente el detallado de los nudos desde que se dimensionan las columnas y vigas del marco. Generalmente da buen resultado mantener baja la cuantía de refuerzo longitudinal de las vigas. Elaborar dibujos amplios a escala de  $1/2$  disposición del refuerzo dentro de los nudos contribuye importantemente a evitar dificultades inesperadas en la obra.

Para el diseño de los nudos, en las Normas se optó por el criterio del Apéndice A del Reglamento ACI 318-83 (ref ); es un procedimiento sencillo que no origina congestionamientos excesivos de refuerzo y que tiene apoyo teórico y experimental (refs ).

El requisito de que las barras longitudinales de las vigas pasen dentro del núcleo de la columna obedece a que allí las condiciones para el anclaje son más favorables, a causa del confinamiento suministrado por el refuerzo transversal de la columna.

#### 5.4.2 Refuerzo transversal

El principal papel que desempeña el refuerzo transversal en un nudo es suministrar confinamiento al concreto del núcleo, a fin de aumentar su capacidad de deformarse y de resistir el efecto de acciones cíclicas, sin perder su capacidad de carga vertical. También tiene la función de contribuir a resistir la fuerza cortante que actúa en el nudo (fig ). <sup>Por otra parte, el</sup> confinamiento que da el refuerzo transversal mejora las condiciones de anclaje del refuerzo que allí llega. La fuerza cortante provoca tensiones principales inclinadas que causan agrietamiento diagonal en el nudo. El refuerzo transversal prescrito debe usarse siempre en todo el nudo,

aunque la fuerza cortante calculada resulte pequeña.

#### 5.4.3 Resistencia a fuerza cortante

Para revisar un nudo por fuerza cortante se admite prescindir del requisito de las Normas para Diseño por Sismo que pide cambiar la totalidad de los efectos de un componente del sismo con el 30 por ciento de los efectos del componente ortogonal; la revisión puede efectuarse en cada dirección principal en forma independiente. En la fig , la fuerza cortante horizontal calculada a media altura del nudo resulta igual a  $A_{s2}(1.25f_y) + A_{s1}(1.25f_y) - V$  (en la cara izquierda la suma de las compresiones en el concreto y en el acero es igual a la tensión en el acero inferior,  $A_{s2}(1.25f_y)$ , pues forman un par).

En la fig se ilustran las condiciones de trabajo de un nudo interior de un marco donde ampliamente predomina el efecto de las fuerzas laterales (se ha omitido la fuerza axial en la columna). La parte b) de la fig es el equilibrio de la porción de nudo limitada por la grieta diagonal inferior, y en ella se aprecia el papel que desempeñan el concreto y el refuerzo en la resistencia a fuerza cortante. El concreto trabaja a compresión formando básicamente un puntal en diagonal; el refuerzo horizontal y vertical trabaja a tensión y contribuye a mantener el equilibrio. En la fig se aprecia el efecto favorable de usar estribos transversales y también barras verticales intermedias en las columnas; sin estos refuerzos intermedios, aumentarían demasiado los esfuerzos de adherencia en las barras

longitudinales extremas de vigas y columnas que llegan al núcleo (así, el esfuerzo en las barras longitudinales inferiores de la viga tendría que pasar, en un pequeño tramo de anclaje,  $L_a$ , del de fluencia en tensión, a la izquierda de la grieta, a uno de compresión,  $C_s/A_s$ , mientras que con la presencia de los estribos horizontales la fuerza en las barras inferiores en lugar de ser la de fluencia sería igual a  $T - \sum a_{si} f_{si}$ , donde  $a_{si}$  son las áreas transversales de los estribos y  $f_{si}$  los respectivos esfuerzos.

Como se mencionó antes, el procedimiento para diseñar las uniones por fuerza cortante es el del Reglamento ACI 318-83; éste a su vez está basado en un estudio realizado en la Universidad de Texas (ref ). En dicho trabajo se concluyó que la resistencia de una unión a fuerza cortante es función básicamente de tres variables: la presencia de vigas transversales que lleguen al nudo, el refuerzo transversal y la resistencia del concreto. Se encontró que la variación de la resistencia no era muy sensible a cambios en el refuerzo transversal, por lo que optaron por hacerla depender, para fines de diseño, sólo de las dimensiones del nudo, de la resistencia a compresión del concreto, y de las vigas transversales; en cuanto al refuerzo transversal, optaron por usar una cierta cantidad mínima obligatoria.

En el diseño de uniones viga-columna de marcos dúctiles existen discrepancias importantes en los criterios adoptados en distintos países e instituciones.

Así, dentro del propio ACI el procedimiento propuesto por el Comité ACI-ASCE <sup>352</sup> (ref) lleva a una cantidad mayor de estribos que la obtenida de aplicar el apéndice A del Reglamento ACI 318-83. El procedimiento que se aplica en Nueva Zelanda es aún más conservador que el del Comité ACI-ASCE 352. En las Normas para el Distrito Federal se optó por el del Reglamento ACI 318-83, atendiendo a que tiene buen apoyo experimental, es sencillo y no conduce a congestionamientos excesivos de refuerzo. Para valuar el área del nudo, se <sup>207</sup> adoptó el criterio del Comité 352, que usa un ancho efectivo igual al promedio de los anchos de viga y columna.

Para el diseño por fuerza cortante de uniones debe usarse el valor de  $F_R$  general para cortante ( $F_R = 0.8$ ). Cuando la fuerza cortante de diseño exceda a la resistencia de diseño, el proyectista puede aumentar las dimensiones transversales de la columna, o aumentar el peralte de las vigas; con esto último disminuye el área de refuerzo longitudinal de las vigas y por consiguiente la fuerza cortante de diseño en el nudo.

En la fig se ilustra la determinación del ancho efectivo,  $b_e$ . Al haber limitado la relación de dimensiones transversales de las columnas a un máximo de 2.5, en realidad ya no tiene aplicación el requisito según el cual el ancho efectivo no debe ser mayor que el ancho de la o las vigas más  $h$ , y podría omitirse.

#### 5.4.4 Anclaje del refuerzo

De hecho, el primer párrafo de esta sección se refiere a nudos de columnas de orilla. Se optó por exigir que las barras longitudinales de las vigas se prolonguen hasta el fondo del núcleo de la columna, a fin de hacer más definido el trabajo en el nudo en el sentido de que las barras sigan la tendencia de las tensiones principales y se defina claramente la formación del puntal a compresión en el concreto (fig ). Si las barras cumplen con los otros requisitos de anclaje, pero no se llevan hasta la cara opuesta del núcleo sino que se doblan antes, se provoca una distribución de esfuerzos irregular que puede acelerar el deterioro del núcleo ante acciones repetidas. Se juzgó conveniente considerar en forma explícita que bajo acciones repetidas el recubrimiento de una columna se deteriora y deja de ser eficaz para contribuir al anclaje de las barras de las vigas (ref ); por esta razón, se pide que la sección crítica para anclaje sea en el plano externo del núcleo de la columna. La influencia de este requisito es mayor en columnas de sección pequeña.

El anclaje de las barras de una viga en un nudo presenta la circunstancia favorable de que tiene lugar dentro de una zona confinada por estribos y también generalmente por vigas transversales que llegan al nudo; por otro lado, se tiene el efecto desfavorable de las acciones repetidas impuestas por el sismo, y la penetración de la fluencia de las barras de las vigas dentro del núcleo cuando en éstas se <sup>forman</sup> articulaciones plásticas adya

centes al nudo. Al respecto, se adoptó el criterio del Reglamento ACI-318-83 que estima que tiene cierto predominio el efecto favorable del confinamiento, por lo que se admite reducir la longitud de desarrollo al 90 por ciento de la requerida en 3.1.1c). Debe aclararse que esta reducción no se aplica a la longitud recta de 12 diámetros que sigue al dobléz.

Las barras de vigas y columnas que pasan a través de un nudo tienen la particularidad desfavorable de que pueden estar a tensión en una cara del nudo y a compresión en la cara opuesta, la <sup>cual</sup> aumenta los esfuerzos de adherencia dentro del nudo.

No obstante, existen algunas atenuante al problema: a) el ya mencionado confinamiento suministrado por los estribos del nudo y las vigas transversales; b) si las barras de una viga llegan a perder su adherencia en el nudo, quedan ancladas en la viga opuesta; esto causa que aumenten las compresiones en dicha viga opuesta, pero no implica peligro inminente de derrumbe; c) es mínimo el riesgo de que las barras de las columnas tengan que fluir en tensión y en compresión en las caras horizontales del nudo, pues la tendencia del diseño es que más bien fluya el refuerzo de las vigas; por otra parte, la carga axial de las columnas tiende a evitar que sus barras fluyan en tensión.

Se juzga que las relaciones entre dimensiones de nudo y y diámetros de barras que se prescriben, conducen a un comportamiento tolerable de los nudos en cuanto al anclaje de las barras que los cruzan. Sin embargo, se está consciente de que no se

evita totalmente la posibilidad de que la adherencia sufra menoscabo si la estructura se ve sujeta a varios sismos intensos durante su vida. Este es uno de los aspectos débiles que tienen los marcos destinados a resistir sismo.



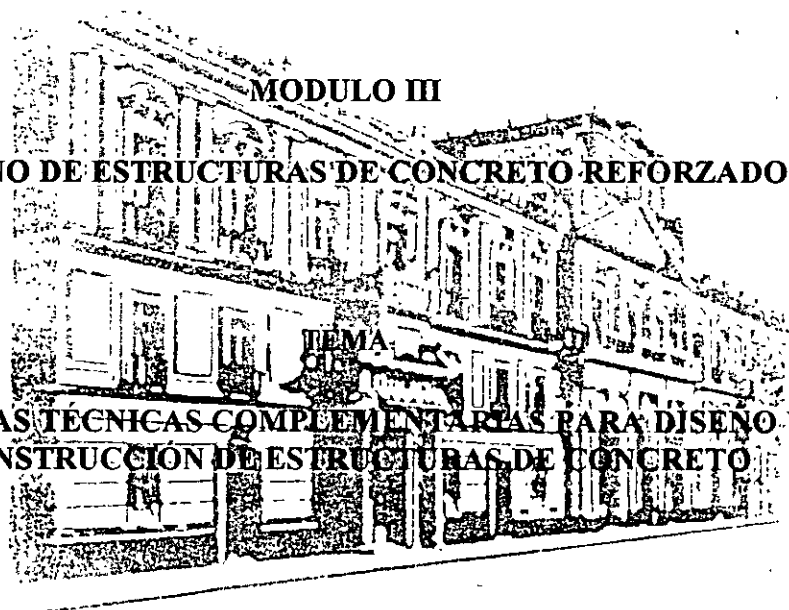


**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***



**M. en I. CARLOS J. MENDOZA ESCOBEDO  
PALACIO DE MINERÍA  
AGOSTO DE 1998**

## NORMAS TECNICAS COMPLEMENTARIAS, DDF. ESTRUCTURAS DE CONCRETO

PROPUESTA

27 de febrero, 1990

## 11.3 Concreto

## 11.3.1 Materiales componentes

La calidad y proporciones de los materiales componentes del concreto serán tales que se logren la resistencia, rigidez y durabilidad necesarias.

La calidad de todos los materiales componentes del concreto deberá verificarse antes del inicio de la obra y también cuando exista sospecha de cambio en las características de los mismos o haya cambio de las fuentes de suministro. Esta verificación de calidad se realizará a partir de muestras tomadas del sitio de suministro o del almacén del productor de concreto. El Corresponsable en Seguridad Estructural, o el Director de Obra cuando no se requiera Corresponsable, en lugar de esta verificación podrá admitir la garantía del fabricante del concreto de que los materiales fueron ensayados en un laboratorio autorizado por el Sistema Nacional de Acreditamiento de Laboratorios de Prueba (SINALP), y que cumplen con los requisitos establecidos en 1.4.1 y los que a continuación se indican; pero en este caso también podrá ordenar la verificación de la calidad de los materiales cuando lo juzgue procedente.

Los materiales pétreos, grava y arena, deberán cumplir con los requisitos de la norma NOM C-111, con las siguientes modificaciones y adiciones:

Propiedad	Concreto clase 1	Concreto clase 2
Coefficiente volumétrico de la grava, mín	0.20	---
Material más fino que la malla F 0.075 (No. 200) en la arena, porcentaje máx. en peso (NOM C 084).	15	15
Contracción lineal de los finos (pasan la malla No 40) de la arena y la grava, en la proporción en que éstas intervienen en el concreto, a partir del límite líquido, porcentaje máx.	2	3

En adición a la frecuencia de verificación estipulada para todos los materiales componentes al principio de este inciso, los requisitos especiales precedentes deberán verificarse cuando menos una vez por mes para el concreto clase 1.

Los límites correspondientes a estos requisitos especiales pueden modificarse si el fabricante del concreto demuestra, con pruebas realizadas en un laboratorio acreditado por el SINALP, que con los nuevos valores se obtiene concreto que cumpla con el requisito de módulo de elasticidad establecido en 11.3.4. - En tal caso, los nuevos límites serán los que se apliquen en la verificación de estos requisitos para los agregados específicamente considerados en dichas pruebas.

### 11.3.2 Elaboración del concreto

El concreto podrá ser dosificado en una planta central y transportado a la obra en camiones revolvedores, o dosificado y mezclado en una planta central y transportado a la obra en camiones agitadores, o bien podrá ser elaborado directamente en la obra; en todos los casos deberá cumplir con los requisitos de elaboración que aquí se indican.

El concreto clase 1, premezclado o hecho en obra, deberá ser elaborado en una planta de dosificación y mezclado de acuerdo con los requisitos de elaboración establecidos en la norma NOM C-155.

El concreto clase 2, si es premezclado, deberá satisfacer los requisitos de elaboración de la mencionada norma NOM C-155. Si es hecho en obra, podrá ser dosificado en peso o en volumen, pero deberá ser mezclado en una revolvedora mecánica ya que no se permitirá la mezcla manual de concreto estructural.

### 11.3.3 Requisitos y control del concreto fresco

Al concreto en estado fresco, antes de su colocación en las cimbras, se le harán pruebas para verificar que cumple con los requisitos de revenimiento y peso volumétrico. Estas pruebas se realizarán al concreto muestreado en obra, con la siguiente frecuencia como mínimo:

Prueba y método	Concreto clase 1	Concreto clase 2
Revenimiento (NOM C-156)	Una vez por cada entrega, si es premezclado. Una vez por cada revoltura, si es hecho en obra.	Una vez por cada entrega, si es premezclado. Una vez por cada 5 revolturas, si es hecho en obra.

Prueba y método	Concreto clase 1	Concreto clase 2
Peso volumétrico (NOM C-162)	Una vez por cada día de colado, pero no menos de una vez por cada 20 m <sup>3</sup> de concreto.	Una vez por cada día de colado, pero no menos de una vez por cada 40 m <sup>3</sup> .

El revenimiento será el mínimo requerido para que el concreto fluya a través de las barras de refuerzo y para que pueda bombearse en su caso, así como para lograr un aspecto satisfactorio. El revenimiento nominal de los concretos no será mayor de 12 cm. Para permitir la colocación del concreto en condiciones difíciles, o para que pueda ser bombeado, se autoriza aumentar el revenimiento nominal hasta un máximo de 18 cm, mediante el uso de aditivo superfluidificante, de manera que no se incremente el contenido unitario de agua; en tal caso, la verificación del revenimiento se realizará en la obra antes y después de incorporar el aditivo superfluidificante, comparando con los valores nominales de 12 y 18 cm respectivamente; las demás propiedades, incluyendo las del concreto endurecido, se determinarán en muestras que ya incluyan dicho aditivo.

El Corresponsable en Seguridad Estructural, o el Director de Obra cuando no se requiera Corresponsable, podrá autorizar la incorporación del aditivo superfluidificante en la planta de premezclado para cumplir con revenimientos nominales mayores de 12 cm.

Si el concreto es premezclado y se surte con un revenimiento

nominal mayor de 12 cm, deberá ser entregado con un comprobante de incorporación del aditivo en planta; en la obra se medirá el revenimiento para compararlo con el nominal máximo de 18 cm.

Para que el concreto cumpla con el requisito de revenimiento, su valor determinado deberá concordar con el nominal especificado, con las siguientes tolerancias:

Revenimiento nominal, cm	Tolerancia, cm
menor de 5	$\pm 1.5$
de 5 a 10	$\pm 2.5$
mayor de 10	$\pm 3.5$

Estas tolerancias también se aplican a los valores nominales máximos de 12 y 18 cm.

Para que el concreto cumpla con el requisito de peso volumétrico en estado fresco, su valor determinado deberá ser mayor de 2200 kg/m<sup>3</sup> para el concreto clase 1, y no menor de 1900 kg/m<sup>3</sup> para el concreto clase 2.

#### 11.3.4 Requisitos y control del concreto endurecido

La calidad del concreto endurecido se verificará mediante pruebas de resistencia a compresión en cilindros elaborados, curado y probados de acuerdo con las normas NOM C 160 y NOM C 83, en un laboratorio acreditado por el SINALP.

Cuando la mezcla de concreto se diseña para obtener la resistencia especificada a 14 días, las pruebas anteriores se efectuarán

a esta edad; de lo contrario, las pruebas deberán efectuarse a los 28 días de edad.

Para verificar la resistencia a compresión de concreto de las mismas características y nivel de resistencia, se tomará como mínimo una muestra por cada día de colado, pero al menos una por cada cuarenta metros cúbicos; sin embargo, si el concreto se emplea para el colado de columnas, se tomará por lo menos una muestra por cada diez metros cúbicos. De cada muestra se elaborarán y ensayarán al menos dos cilindros; se entenderá por resistencia de una muestra el promedio de las resistencias de los cilindros que se elaboren de ella.

Para el concreto clase 1, se admitirá que la resistencia del concreto cumple con la resistencia especificada,  $f'_c$ , si ninguna muestra da una resistencia inferior a  $f'_c - 35 \text{ kg/cm}^2$ , y, además, si los promedios de resistencia de todos los conjuntos de tres muestras consecutivas, pertenecientes o no al mismo día de colado, no son menores que  $f'_c$ .

Para el concreto clase 2, se admitirá que la resistencia del concreto cumple con la resistencia especificada,  $f'_c$ , si ninguna muestra da una resistencia inferior a  $f'_c - 50 \text{ kg/cm}^2$ , y, además, si los promedios de resistencia de todos los conjuntos de tres muestras consecutivas, pertenecientes o no al mismo día de colado, no son menores que  $f'_c - 17 \text{ kg/cm}^2$ .

Si sólo se cuenta con dos muestras, el promedio de las resistencias de ambas no será inferior a  $f'_c - 13 \text{ kg/cm}^2$  para concreto

clase 1, ni a  $f'_c - 28 \text{ kg/cm}^2$  para clase 2, además de cumplir con el respectivo requisito concerniente a las muestras tomadas una por una.

Cuando el concreto no cumpla con el requisito de resistencia, el Corresponsable en Seguridad Estructural, o el Director de Obra cuando no se requiera Corresponsable, tomará las medidas conducentes a garantizar la seguridad de la estructura. Estas medidas estarán basadas principalmente en el buen criterio de los responsables mencionados; como factores de juicio deben considerarse, entre otros, el tipo de elemento en que no se alcanzó el nivel de resistencia especificado, el monto del déficit de resistencia y el número de muestras o grupos de ellas que no cumplieron. En ocasiones debe revisarse el proyecto estructural a fin de considerar la posibilidad de que la resistencia que se obtuvo sea suficiente.

Si subsiste la duda sobre la seguridad de la estructura se podrán extraer y ensayar corazones, de acuerdo con la norma NOM C 169, del concreto en la zona representada por los cilindros que no cumplieron. Se probarán tres corazones por cada incumplimiento con la calidad especificada. La humedad de los corazones al probarse debe ser representativa de la que tenga la estructura en condiciones de servicio.

El concreto representado por los corazones se considerará adecuado si el promedio de las resistencias de los tres corazones es mayor o igual que  $0.8 f'_c$  y si la resistencia de ningún corazón es



menor que  $0.7 f'_c$ . Para comprobar que los especímenes se extrajeron y ensayaron correctamente, se permite probar nuevos corazones de las zonas representadas por aquellos que hayan dado resistencias erráticas. Si la resistencia de los corazones ensayados no cumple con el criterio de aceptación que se ha descrito, el responsable en cuestión nuevamente debe decidir a su juicio y responsabilidad las medidas que han de tomarse. Puede optar por reforzar la estructura hasta lograr la resistencia necesaria, o recurrir a realizar pruebas de carga (artículos 239 y 240 del Reglamento) en elementos no destinados a resistir sismo, u ordenar la demolición de la zona de resistencia escasa, etc. Si el concreto se compra ya elaborado, en el contrato de compraventa se establecerán de común acuerdo entre el fabricante y el consumidor las responsabilidades del fabricante en caso de que el concreto no cumpla con el requisito de resistencia.

El concreto debe cumplir además con el requisito de módulo de elasticidad especificado a continuación\*:

		Clase 1	Clase 2
Módulo de elasticidad a 28 días de edad, kg/cm <sup>2</sup> , mín.	Una muestra cualquiera	$12500\sqrt{f'_c}$	$7000\sqrt{f'_c}$
	además, promedio de todos los conjuntos de dos muestras consecutivas	$13200\sqrt{f'_c}$	$7400\sqrt{f'_c}$

\* Debe cumplirse tanto el requisito relativo a una muestra cualquiera, como el que se refiere a los conjuntos de dos muestras consecutivas.

Para la verificación anterior, se tomará una muestra por cada 100 metros cúbicos, o fracción, de concreto, pero no menos de dos en una cierta obra. De cada muestra se fabricarán y ensayarán al menos tres especímenes. Se considerará como módulo de elasticidad de una muestra, el promedio de los módulos de los especímenes elaborados con ella.

El Corresponsable en Seguridad Estructural, o el Director de Obra cuando no se requiera Corresponsable, no estará obligado a exigir la verificación del módulo de elasticidad; sin embargo, si, a su criterio las condiciones de la obra lo justifican, podrá requerir su verificación, o la garantía escrita del fabricante de que el concreto cumple con él. Cuando proceda, la verificación se realizará en un laboratorio acreditado por el SINALP. En caso que el concreto no cumpla con el requisito mencionado, el responsable de la obra evaluará las consecuencias de la falta de cumplimiento y determinará las medidas que deberán tomarse. Si el concreto se compra ya elaborado, en el contrato de compraventa se establecerán de común acuerdo entre el fabricante y el consumidor las responsabilidades del fabricante por incumplimiento del requisito antedicho.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***

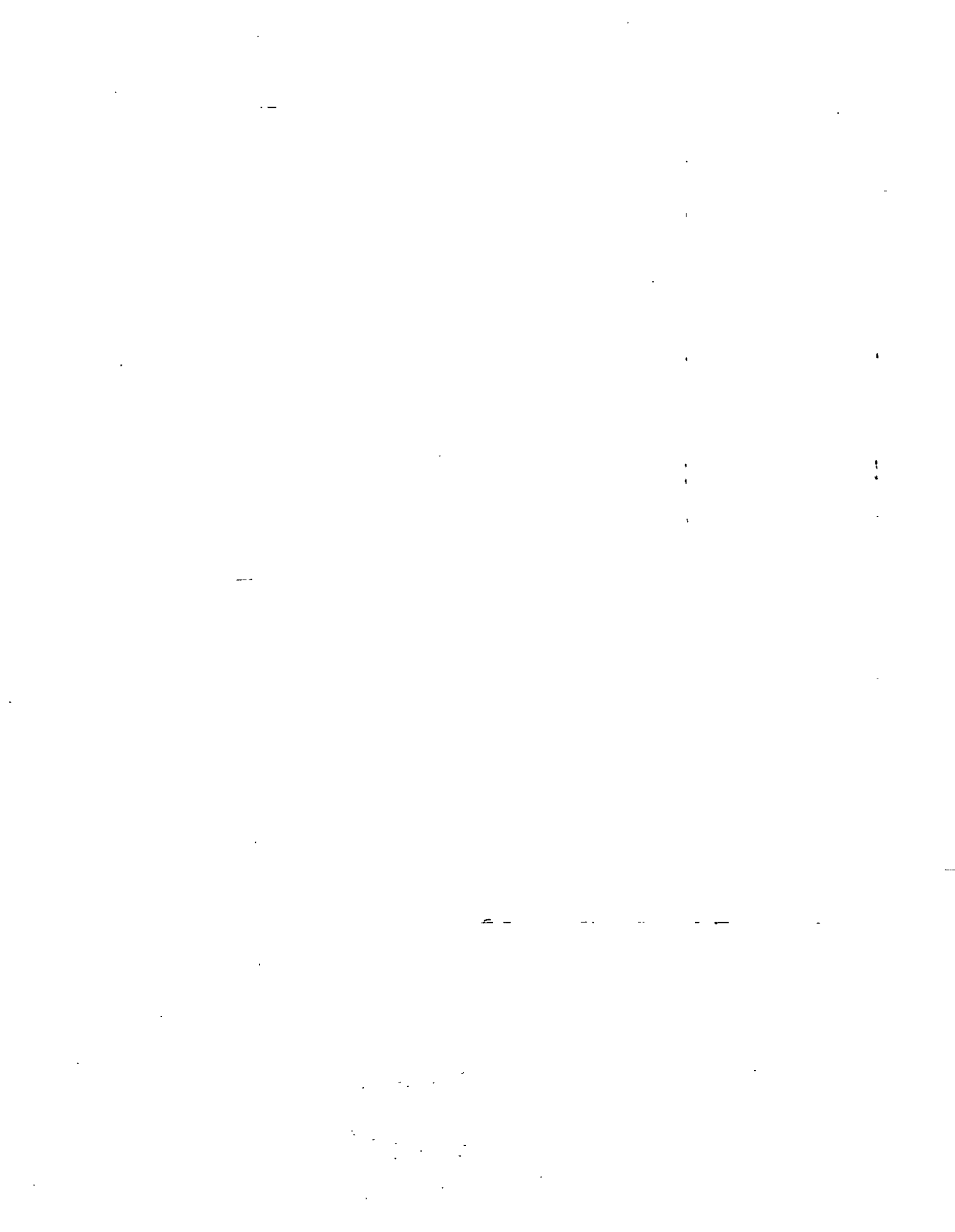
**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**FLEXIÓN**

**ING. MIGUEL ÁNGEL GUZMAN E.  
PALACIO DE MINERÍA  
AGOSTO DE 1998**



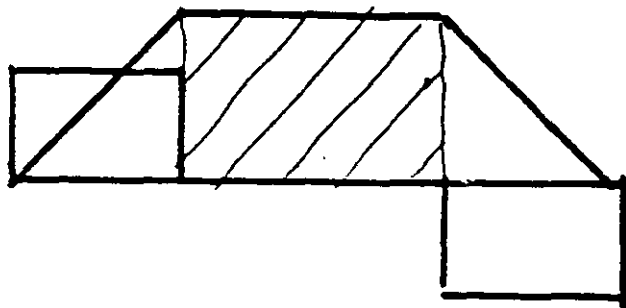
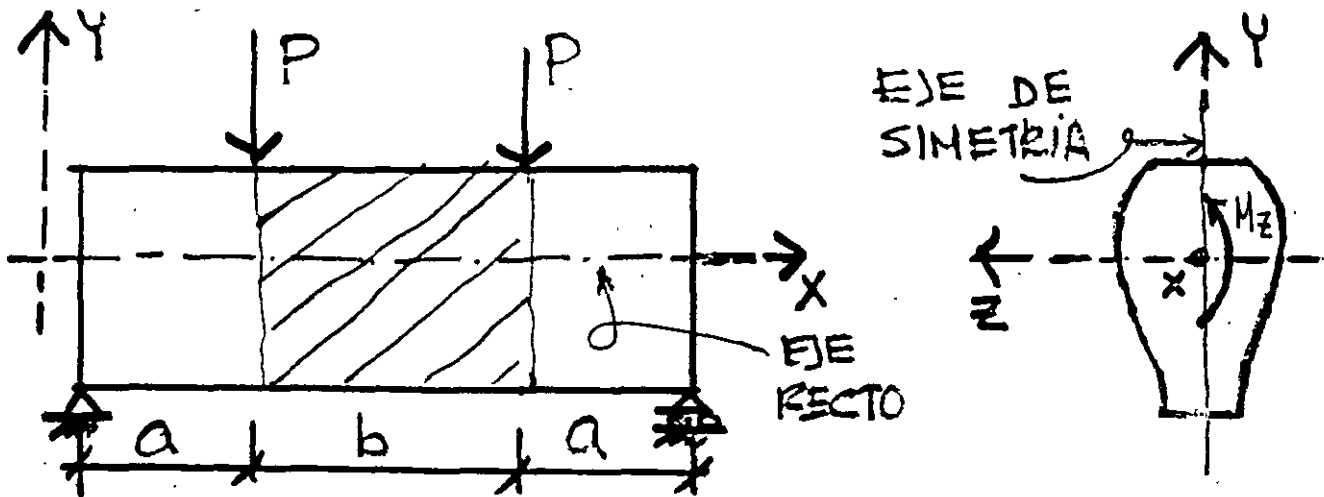
# 3.- FLEXION

## INTRODUCCION

### TEORIA CLASICA DE LA FLEXION

#### LIMITACIONES.

1.- VIGAS DE EJE RECTO HORIZONTAL QUE PASA POR TODAS LAS SECCIONES TRANSVERSALES DE LA VIGA.

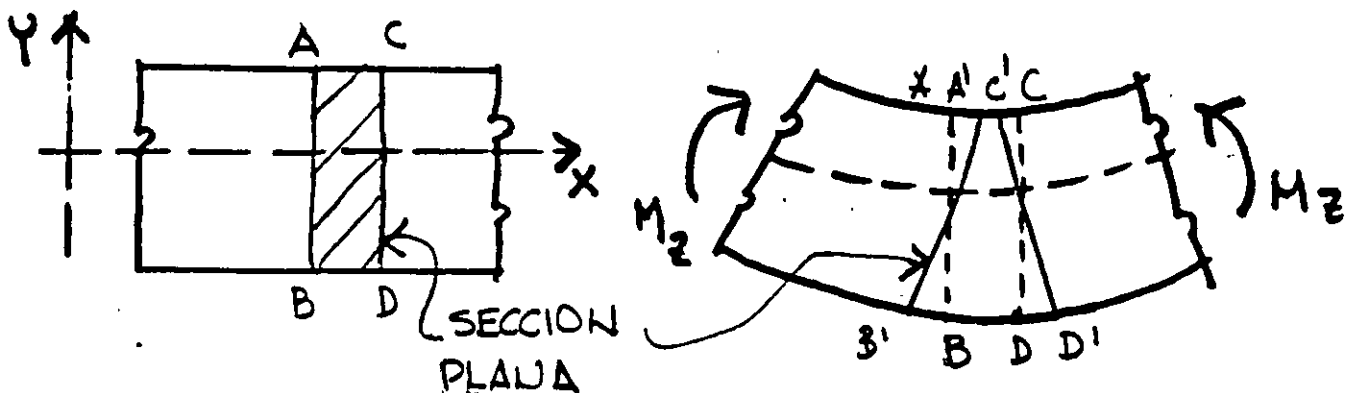


2.- LA SECCION TRANSVERSAL ES DE FORMA CUALQUIERA, PERO TIENE UN EJE VERTICAL DE SIMETRIA.

- 3.- SE CONSIDERA QUE EN LA SECCION QUE SE ANALIZA, SOLO EXISTE FLEXION.
- 4.- LA RELACION DE CLARO A ANCHO DE LA VIGA ES TAL QUE NO SE PRODUCE PUNDEO LATERAL.
- 5.- EL MOMENTO FLEXIONANTE  $M_z$ , ESTA EN EL MISMO PLANO DEL EJE DE SIMETRIA.
- 6.- EL MATERIAL DE LA VIGA ES HOMOGENEO.

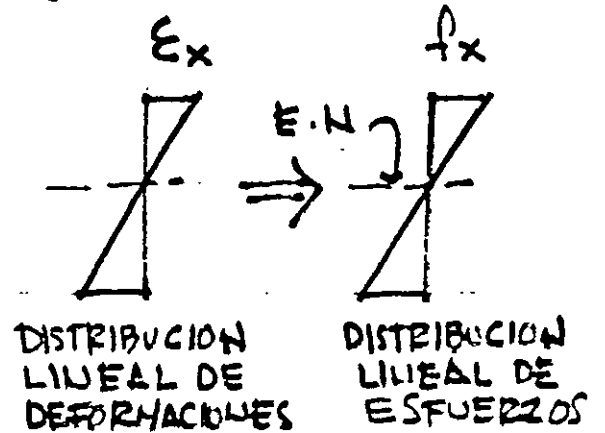
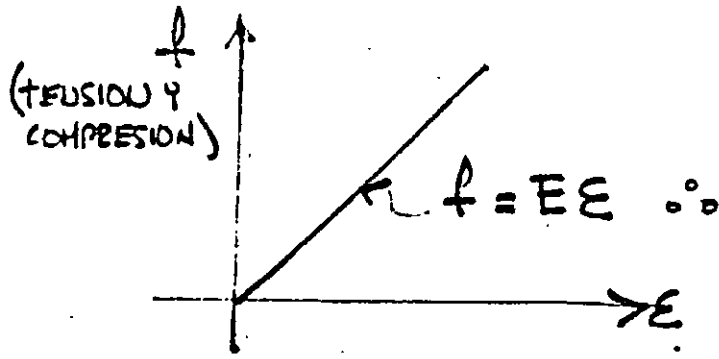
### HIPOTESIS BASICA

LAS SECCIONES PLANAS, NORMALES AL EJE DE LA VIGA, SIGUEN SIENDO PLANAS DESPUES DE APLICAR LA FLEXION (H. NAVIER).

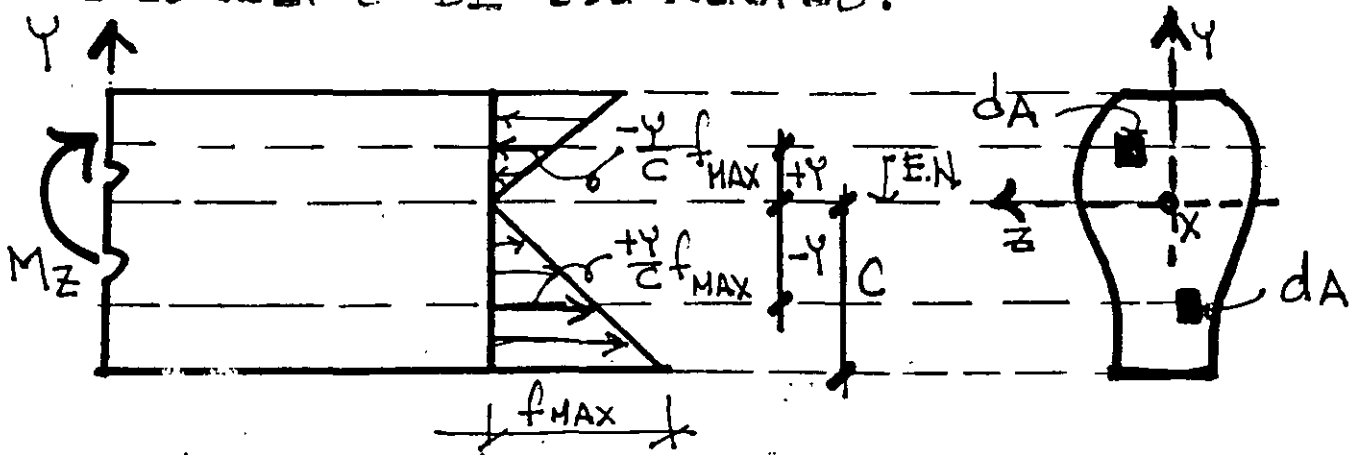


# FLEXION ELASTICA

SE CONSIDERA QUE EL MATERIAL TIENE UN COMPORTAMIENTO ELASTICO-LINEAL



LA CONDICION DE EQUILIBRIO  $\sum F_x = 0$  (C=T) ESTABLECE EL CONCEPTO DE EJE NEUTRO.



$$M_z = \int_A \underbrace{\left(-\frac{y}{c} f_{MAX}\right)}_{\text{ESFUERZO}} \underbrace{dA}_{\text{AREA}} \cdot \underbrace{y}_{\text{BRAZO}} = -\frac{f_{MAX}}{c} \int_A y^2 dA = -\frac{f_{MAX}}{c} I_z$$

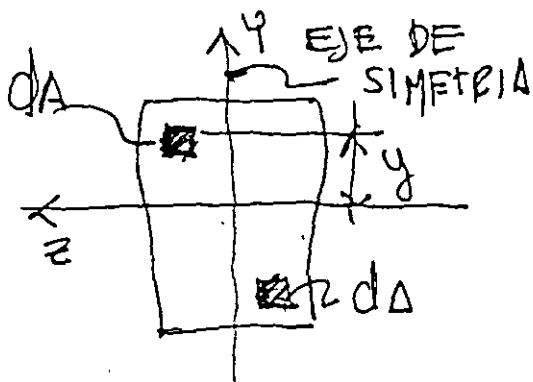
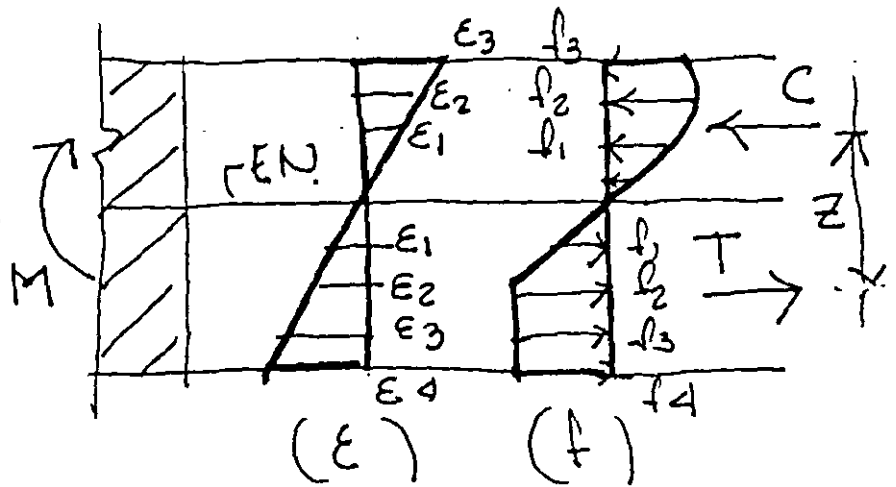
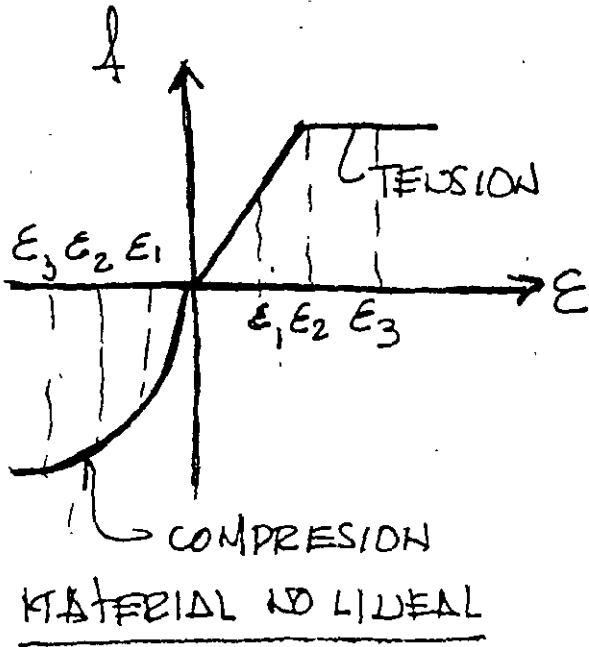
MOMENTO

$$M_z = -\frac{f_{MAX}}{c} I_z \Rightarrow \boxed{\rho_{f_{MAX}} = \frac{M_z}{I_z} c}$$

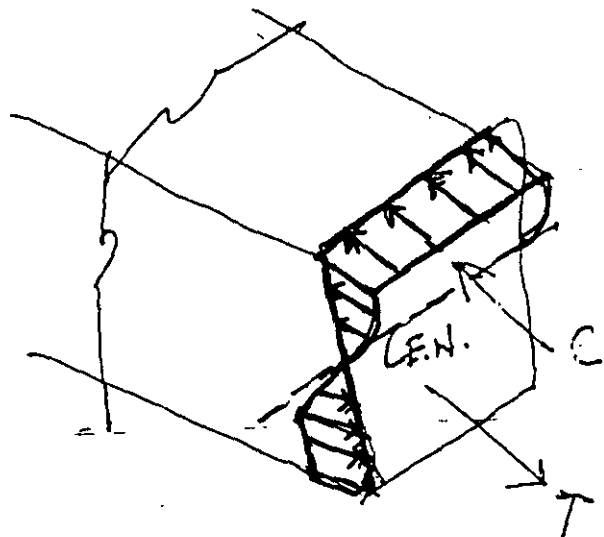
FORMULA DE LA FLEXION ELASTICA.

# FLEXION INELASTICA

SE CONSERVA LA HIPOTESIS BASICA DE SECCIONES PLANAS.



SECCION DE FORMA CUALQUIERA



EQUILIBRIO:

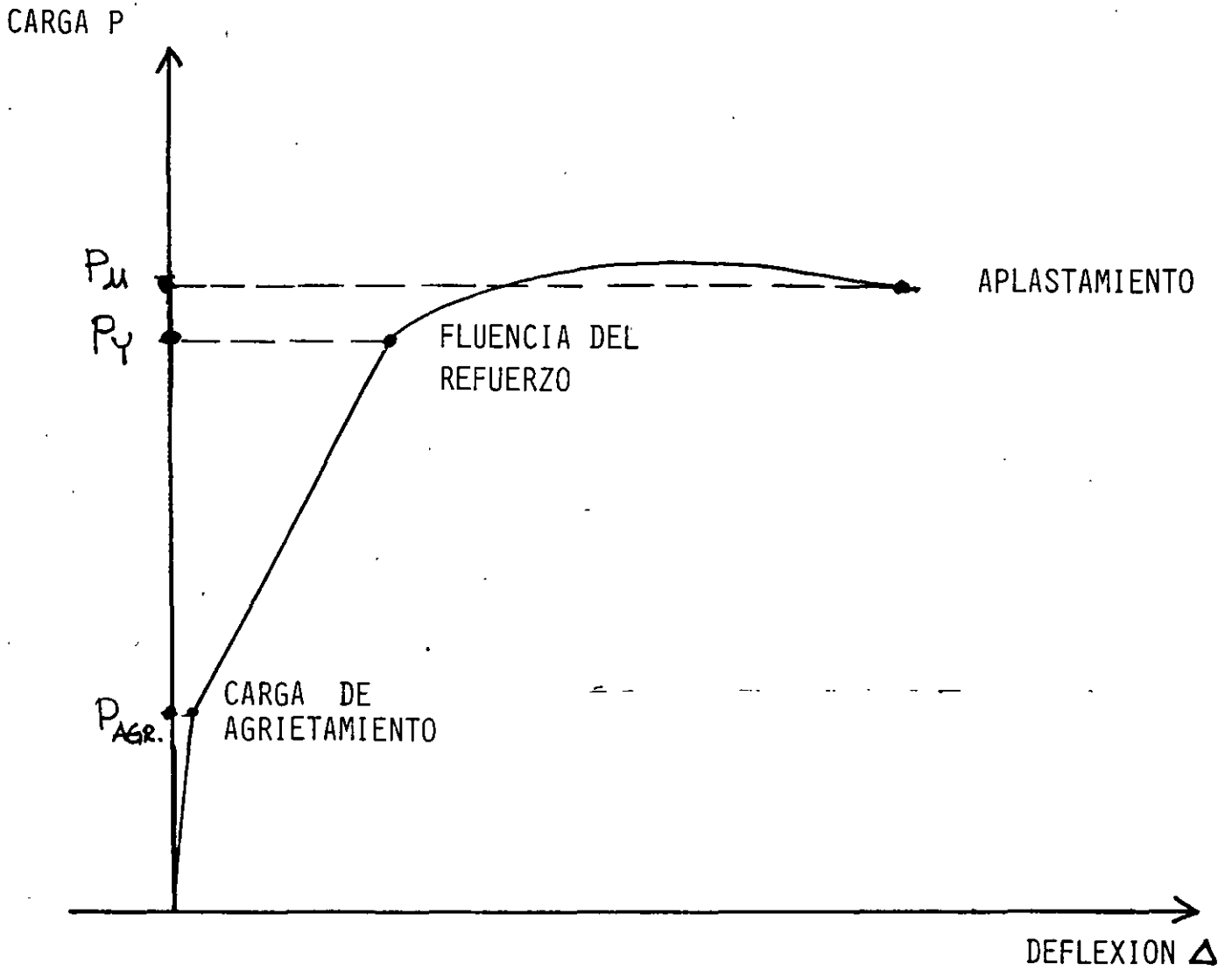
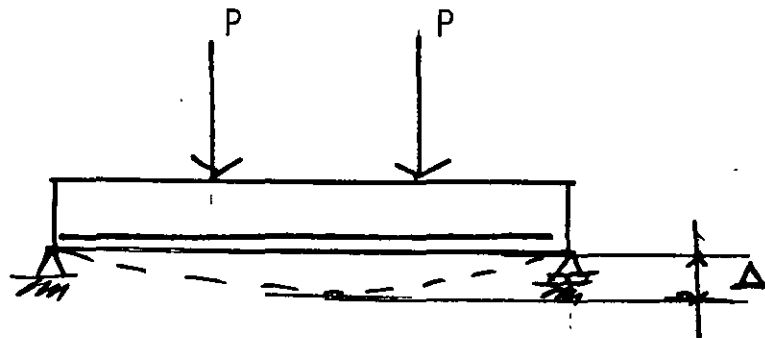
$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int_A f_x dA = 0 \quad (C=T)$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow \int_A f_x y dA = M_R$$



# FLEXION EN ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO

GRAFICA CARGA - DEFLEXION DE UN ELEMENTO CON UN PORCENTAJE USUAL DE ACERO DE REFUERZO.





**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

**TORSIÓN**

**M. en I. VICTOR M. PAVON R.  
PALACIO DE MINERÍA  
AGOSTO DE 1998**

El material que contiene esta sección  
fue traducido y adaptado del capítulo  
7, Torsión, de "Reinforced Concrete".  
Edward G. Nawy. Prentice Hall, Inc.,  
1985. Págs. 195-226.

## TORSION

### 7.1 INTRODUCCION

En las construcciones monolíticas de concreto, la torsión ocurre principalmente cuando la carga actúa a cierta distancia del eje longitudinal del elemento estructural. Una viga en el extremo de un tablero de piso, una viga de borde que recibe la carga de un solo lado, una marquesina, o una cubierta para parada de autobuses que se proyecta de una viga monolítica apoyada en columnas, vigas periféricas que circundan la abertura en un piso, o una escalera helicoidal, son ejemplos de elementos estructurales sujetos a momentos de torsión. Ocasionalmente, estos momentos provocan esfuerzos cortantes excesivos. Como resultado, puede desarrollarse un severo agrietamiento superior a los límites de serviceabilidad admisibles, a menos que se dote de un refuerzo especial para torsión. Las fotos 40 y 41 ilustran la cuantía del agrietamiento en la falla de una viga sujeta a torsión. Muestran el plano curvilíneo de torsión provocado por los momentos torsionantes impuestos. En las vigas de borde de un sistema estructural, normalmente no es tan severa la magnitud del daño debida a la torsión como se aprecia en las fotos 42 y 43. Ello se debe a la redistribución de esfuerzos en la estructura. Sin embargo, deberá siempre evitarse la pérdida de integridad debida a los esfuerzos torsionantes, mediante un diseño apropiado del refuerzo necesario para torsión.

La introducción al tema de la distribución de los esfuerzos de torsión debe iniciarse con el comportamiento elástico básico de las secciones sencillas, tales como las circulares y las rectangulares. La mayoría de las vigas de concreto sujetas a torsión son componentes de rectángulos. Estas son normalmente, secciones con patines, tales como las vigas en T o en L. Aun cuando las secciones circulares rara vez se consideran en la construcción normal de concreto, un comentario breve respecto de estas secciones circulares constituye una buena introducción al comportamiento torsional de otros tipos de secciones.

En las secciones circulares, al nivel elástico, el esfuerzo cortante es igual a la deformación unitaria de cortante multiplicada por el módulo de cortante. Igual que en el caso de la flexión, el esfuerzo es proporcional a su distancia al eje neutro (esto es: el centro de la sección circular) y es máximo en las fibras extremas. Si  $r$  es el radio del elemento,  $J = \pi r^4/2$ , su momento polar de inercia, y  $v_{te}$  el esfuerzo cortante elástico debido a un momento de torsión elástico  $T_e$ ,

$$v_{te} = \frac{T_e r}{J} \tag{a}$$

Quando tiene lugar la deformación en la barra circular, se supone que el eje del cilindro circular permanece recto. Todos los radios de una sección transversal también permanecen rectos (esto es: sin alabearse) y giran el mismo ángulo respecto al eje. Cuando el elemento circular empieza a tener un comportamiento plástico, el esfuerzo en el anillo plástico exterior se conserva constante, en tanto que el esfuerzo en el núcleo interior permanece elástico, como se muestra en la Fig. 7.1. Cuando toda la sección transversal se plastifica,  $b = 0$  y el esfuerzo cortante

$$v_{tf} = \frac{3 T_p r}{4 J} \quad (b)$$

donde  $v_{tf}$  es el esfuerzo cortante no lineal debido a un momento de torsión  $T_p$ , donde el índice  $f$  denota falla.

En las secciones rectangulares, el problema de la torsión es considerablemente más complicado. Las secciones planas originales experimentan un alabeo debido al momento torsionante aplicado. Este momento produce esfuerzos cortantes axiales así como circunferenciales, con valor cero en las esquinas de la sección y el centroide del rectángulo, y valores máximos en la periferia al centro de los lados, como se aprecia en la Fig. 7.2. El esfuerzo cortante torsional máximo ocurrirá en los puntos medios A y B de la mayor dimensión de la sección transversal. Estas complicaciones, además del hecho de que las secciones de concreto reforzado no son ni homogéneas ni isótropas, hacen difícil desarrollar formulaciones matemáticas exactas basadas en modelos físicos tales como las ecuaciones (a) y (b) para secciones circulares.

Por más de 60 años, el análisis torsional de los elementos de concreto se ha basado, en ya sea, (1) la teoría clásica de la elasticidad desarrollada a través de formulaciones matemáticas asociadas a las verificaciones de la analogía con la membrana (St. Venant), o (2) la teoría de la plasticidad representada por la analogía con el montón de arena (Nadai). Ambas teorías fueron esencialmente aplicadas al estado de torsión pura. Pero se descubrió experimentalmente que la teoría plástica no es enteramente satisfactoria para la predicción precisa del estado de esfuerzos del concreto en torsión pura. Se encontró que el comportamiento del concreto se representa mejor mediante el enfoque plástico. Consecuentemente, casi todos los desarrollos de la torsión aplicados al concreto y el concreto reforzado han tenido lugar en esta última dirección.

## 7.2 TORSION PURA EN LOS ELEMENTOS DE CONCRETO SIMPLE

### 7.2.1 Torsión en los Materiales Elásticos

En 1853 St. Venant presentó su solución al problema torsional elástico con alabeo debido a la torsión pura que se desarrolla en las secciones no circulares. En 1903, Prandtl demostró el significado físico de las formulaciones matemáticas mediante su modelo de la analogía con la membrana. El modelo establece relaciones particulares entre la superficie deformada de la membrana cargada y la distribución de los esfuerzos torsionantes en una barra sujeta a momentos de torsión. La Fig. 7.3 muestra el comportamiento de la analogía con la membrana para formas rectangulares y en L.

Para pequeñas deformaciones, puede demostrarse que la ecuación diferencial de la superficie de la membrana deformada tiene la misma forma que la ecuación que determina la distribución de esfuerzos en la sección transversal de la barra sujeta a esfuerzos de torsión. En forma similar, se puede demostrar que (1) la tangente a la línea de contorno en un punto cualquiera de la membrana deformada proporciona la dirección del esfuerzo cortante en la correspondiente sección transversal de la membrana real sujeta a torsión; (2) la pendiente máxima de la membrana en cualquier punto es proporcional a la magnitud del esfuerzo cortante en el punto correspondiente en el elemento real; (3) el momento de torsión al que está sujeto el miembro real es proporcional al doble del volumen bajo la membrana deformada.

Puede verse en las Figs. 7.2 y 7.3b que el esfuerzo cortante torsional es inversamente proporcional a la distancia entre las líneas de contorno. Mientras más próximas entre sí se encuentren las líneas, mayor es el esfuerzo, llevando a la conclusión antes expresada que el esfuerzo máximo de torsión ocurre al centro del lado mayor del rectángulo. De la analogía con la membrana, el esfuerzo máximo tiene que ser proporcional a la pendiente más pronunciada de las tangentes en los puntos A y B.

Si  $\delta$  = desplazamiento máximo de la membrana a partir de la tangente en el punto A, entonces de los principios básicos de la mecánica de la teoría de St. Venant,

$$\delta = b^2 G \theta \quad (7.1a)$$

donde  $G$  es el módulo de cortante y  $\theta$  es el ángulo de torsión. Pero  $v_{t(\max)}$  es proporcional a la pendiente de la tangente; por tanto:

$$v_{t(\max)} = k_1 b G \theta \quad (7.1b)$$

donde las k son constantes. El correspondiente momento torsionante  $T_e$  es proporcional al doble del volumen bajo la membrana, o

$$T_e \propto 2(2/3 \delta bh) = k_2 \delta bh$$

o

$$T_e = k_3 b^3 h G \tag{7.1c}$$

De las Ecs. 7.1b y 7.1c,

$$v_{t(max)} = \frac{T_{eb}}{k b^3 h} \approx \frac{T_{eb}}{J_1} \tag{7.1d}$$

El denominador  $k b^3 h$  en la Ec. 7.1d representa el momento polar de inercia  $J$  de la sección. La comparación de la Ec. 7.1d con la Ec. (a) para la sección circular muestra la similitud de las dos expresiones, excepto que el factor  $k$  de la ecuación para la sección rectangular toma en cuenta las deformaciones unitarias debidas al alabeo. La ecuación 7.1d puede simplificarse más aún para quedar:

$$v_{t(max)} = \frac{T_e}{k b^2 h} \tag{7.2}$$

También puede establecerse para proporcionar el esfuerzo en los planos dentro de la sección, tal como un rectángulo concéntrico de dimensiones  $x$  y  $y$ , donde  $x$  es el lado más corto, de tal manera que:

$$v_{t(max)} = \frac{T_e}{k x^2 y} \tag{7.3}$$

Al usar el enfoque de la analogía con la membrana, es importante notar que el esfuerzo cortante torsionante cambia de un punto a otro a lo largo del mismo eje como AB en la Fig. 7.3, a causa de la pendiente cambiante de la membrana análoga, tornando largos los cálculos para el esfuerzo cortante torsional.

### 7.2.2 Torsión en los Materiales Plásticos

Como se ha indicado antes, la analogía plástica del montón de arena proporciona una mejor representación del comportamiento de los elementos frágiles, tales las vigas de concreto sujetas a torsión pura. El momento torsional es también proporcional al doble del volumen bajo el montón y el esfuerzo cortante torsional máximo es proporcional a la pendiente del montón de arena. La figura 7.4 es una ilustración bi y tridimensional del montón de arena. El momento torsionante  $T_p$  en la Fig. 7.4d es proporcional al doble del volumen del montón rectangular que se muestra en las partes (b) y (c). También puede reconocerse que la pendiente de los lados del montón de arena como una medida del esfuerzo cortante torsional es

constante en el enfoque de la analogía con el montón de arena, en tanto que es continuamente variable en el de la analogía con la membrana. Esta característica del montón de arena simplifica las soluciones considerablemente.

### 7.2.3. La Analogía del Montón de Arena Aplicada a las Vigas en L

La mayoría de los elementos de concreto sujetos a torsión son secciones con patines, más comúnmente las vigas en L que comprenden las vigas externas de un piso estructural. Se elige la viga en L de la Fig. 7.5 para aplicar el enfoque del montón de arena plástico para evaluar su capacidad al momento torsionante y los esfuerzos cortantes a los que está sujeta.

El montón de arena se reparte en tres volúmenes:

$V_1$  = La pirámide que representa una forma cuadrada de la sección transversal =  $y_1 b_w^2 / 3$

$V_2$  = La porción en pabellón del alma que representa una forma rectangular de la sección transversal =  $y_1 b_w (h - b_w) / 2$

$V_3$  = El pabellón que representa el patín de la viga, transfiriendo la parte PDI a NQM =  $y_2 h_f (b - b_w) / 2$

El momento torsionante es proporcional al doble del volumen de los montones arena; por consiguiente:

$$T_p \approx 2 \left[ \frac{y_1 b_w^2}{3} + \frac{y_1 b_w (h - b_w)}{2} + \frac{y_2 h_f (b - b_w)}{2} \right] \quad (7.4)$$

También, el esfuerzo cortante torsional es proporcional a la pendiente de los montones de arena; por lo tanto:

$$y_1 = \frac{v_t b_w}{2} \quad (7.5a)$$

$$y_2 = \frac{v_t h_f}{2} \quad (7.5b)$$

Substituyendo  $y_1$  y  $y_2$  de las Ecs. 7.5a y 7.5b, en la Ec. 7.4, se obtiene:

$$v_t(\max) = \frac{T_p}{(b_w^2/6)(3h - b_w) + (h_f^2/2)(b - b_w)} \quad (7.6)$$



Si tanto el numerador como el denominador de la Ec. 7.6 se dividen por  $(b_w h)^2$  y se arreglan los términos, se obtiene:

$$v_{t(max)} = \frac{T_p h (b_w h)^2}{[1/6(3 - b_w/h)] + \frac{1}{2}(h_f/b_w)^2 (b/h - b_w/h)} \quad (7.7a)$$

si se supone que  $C_t$  es el denominador en la Ec. 7.7a y  $J_E = C_t (b_w h)^2$ , la Ec. 7.7a se convierte en

$$v_{t(max)} = \frac{T_p h}{J_E} \quad (7.7b)$$

donde  $J_E$  es el momento polar de inercia equivalente y una función de la forma de la sección transversal de la viga. Nótese que la Ec. 7.7b es similar en forma a la Ec. 7.1d de la analogía con la membrana, excepto por los valores diferentes de los denominadores  $J$  y  $J_E$ . La ecuación puede de esa forma aplicarse a secciones rectangulares haciendo que  $h_f = 0$ .

También debe reconocerse que el concreto no es un material perfectamente plástico; por consiguiente, la resistencia real a la torsión de la sección de concreto simple tiene un valor que yace entre los valores de las analogías con la membrana y la del montón de arena.

La ecuación 7.7b puede establecerse de nuevo designando  $T_p = T_c$  como la resistencia nominal a la torsión del concreto simple y  $v_{t(max)} = v_{tc}$ , empleando la terminología del ACI, de tal manera que

$$T_c = k_2 b^2 h v_{tc} \quad (7.8a)$$

$$T_c = k_2 x^2 y v_{tc} \quad (7.8b)$$

donde  $x$  es la menor dimensión de la sección rectangular.

El extenso trabajo de Hsu y confirmado por otros, ha establecido que  $k_2$  se puede tomar igual a  $1/3$ . Este valor se originó en la investigación de la teoría de la flexión oblicua del concreto simple. También se estableció que  $1.59 \sqrt{f'_c}$  se puede considerar como el valor límite de la resistencia a la torsión pura de un miembro sin refuerzo a la torsión. Utilizando un factor de reducción de 2.5 para la carga torsional en la primera grieta,  $v_{tc} = 0.64 \sqrt{f'_c}$ , e introduciendo  $k_2 = 1/3$  en la Ec. 7.8, resulta

$$T_c = 0.21 \sqrt{f'_c} x^2 y \quad (7.9)$$

donde  $x$  es el lado más corto de la sección rectangular. El alto factor de reducción de 2.5 tiene por objeto compensar algún efecto de los momentos flexionantes que pudiese estar presente.

Si la sección transversal es en T o en L, el área se puede descomponer en rectángulos, como en la Fig. 7.6, tal que

$$T_c = 0.21 \sqrt{f'_c} \sum x^2 y \quad (7.9b)$$

### 7.3 TORSION EN LOS LOS ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO

En las estructuras de concreto rara vez ocurre la torsión sin estar acompañada por la flexión y el cortante. Los párrafos precedentes deberán proporcionar un antecedente suficiente de la contribución del concreto simple en la sección, en lo que concierne a que resistan parte de los esfuerzos combinados que resultan de las fuerzas; de torsión, axiales, de cortante, o de flexión. La capacidad del concreto simple para resistir la torsión cuando está combinada con otras cargas podría, en muchos casos, ser menor a cuando resiste sólo, los mismos momentos factorizados de torsión externa.

La inclusión de refuerzo longitudinal y transversal para resistir parte de los momentos torsionantes, introduce un nuevo elemento en el conjunto de fuerzas y momentos que actúan en la sección. Si

$T_n$  = la resistencia torsional nominal total requerida de la sección incluyendo el refuerzo

$T_c$  = la resistencia torsional nominal del concreto simple

$T_s$  = la resistencia torsional del refuerzo

Entonces

$$T_n = T_c + T_s \quad (7.10a)$$

o

$$T_s = T_n - T_c \quad (7.10b)$$

Con objeto de estudiar la contribución de las varillas longitudinales de acero de tal manera que  $T_s$  pueda evaluarse, se tiene que analizar el sistema de fuerzas que actúan en las secciones transversales alabeadas del elemento estructural en el estado límite de falla. Básicamente, en la actualidad hay dos caminos aceptables:

1. La teoría de la flexión oblicua, que se basa en el enfoque de la deformación plana para las secciones planas sujetas a flexión y torsión.

2. La teoría de la analogía con la armadura y su extensión como teoría del campo de la compresión. Se aplica a los estribos para torsión, una analogía con la armadura modificada comparable a la utilizada en el diseño de los estribos para cortante.

### 7.3.1 La Teoría de la Flexión Oblicua

Esta teoría considera en detalle el desempeño de deformación interno de la serie de superficies transversalmente alabeadas a lo largo de la viga. Inicialmente propuesta por Lessig, ha tenido contribuciones subsecuentes de Collins, Hsu, Zia, Gesund, Mattock, y Elfgren, entre los diversos investigadores en este campo. T.T.C. Hsu hizo una contribución experimental importante para el desarrollo de la teoría de la flexión oblicua tal como se encuentra en la actualidad.

En su reciente libro (Ref. 7.12), Hsu detalla el desarrollo de la teoría de la torsión aplicada a las estructuras de concreto y de cómo la teoría de la flexión oblicua formó las bases de las actuales disposiciones para la torsión del reglamento ACI. La complejidad del problema torsional puede permitir en este libro de texto, tan sólo el siguiente breve comentario.

La superficie de falla de la sección transversal normal de una viga sujeta al momento flexionante  $M_u$ , permanece plana después de flexionarse, como se muestra en la Fig. 7.7a. Si el momento de torsión  $T_u$  se aplica también, excediendo la capacidad de la sección, se desarrollan grietas en los tres lados de la sección transversal de la viga y esfuerzos de compresión en porciones del cuarto lado a lo largo de la viga. Al continuar la carga torsional al estado límite en la falla, resulta una superficie oblicua de falla, debida a la combinación de los momentos; el torsionante  $T_u$  y el flexionante  $M_u$ . El eje neutro de la superficie oblicua y el área sombreada en la Fig. 7.7b que denota la zona de compresión, no continuarán rectos, sino que subtienden un ángulo  $\theta$  variable con el plano original de la sección transversal.

Antes del agrietamiento, ni las varillas longitudinales ni los estribos cerrados dan una contribución apreciable a la rigidez torsionante de la sección. En la etapa de carga posterior al agrietamiento se reduce la rigidez de la sección, pero se incrementa considerablemente su resistencia a la torsión, dependiendo de la cantidad y la distribución, tanto de las varillas longitudinales, como de los estribos cerrados. Debe subrayarse que sólo puede lograrse una poca resistencia torsional adicional a la capacidad del concreto simple en la viga, a menos que se empleen tanto varillas longitudinales, como estribos transversales.

La teoría de la flexión oblicua idealiza la zona de compresión considerándola de un peralte uniforme. Supone que las grietas en las restantes tres caras de la sección transversal están separadas uniformemente, con los estribos de acero en esas caras, soportando las fuerzas de tensión en las grietas y las varillas longitudinales resistiendo el cortante a través de acción de espiga con el concreto. La Fig. 7.8a muestra las fuerzas que actúan en el plano flexionado oblicuamente. El polígono de la Fig. 7.8b da la resistencia al cortante  $F_c$  del concreto, la fuerza  $T_1$  de las varillas de acero longitudinales activas en la zona de compresión, y el bloque de la fuerza normal de compresión  $C_c$ .

El momento torsionante  $T_c$  de la fuerza cortante resistente  $F_c$  generada por el área sombreada del bloque de compresión en la Fig. 7.8a, es por lo tanto:

$$T_C = \frac{F_C}{\cos 45^\circ} \times \text{su brazo respecto a las fuerzas } F_V \text{ en la Fig. 7.8a}$$

o

$$T_C = \sqrt{2} F_C (0.8x) \tag{7.11a}$$

en que  $x$  es el lado más corto de la viga. Pruebas extensas (Refs. 7.9 y 7.12) para evaluar  $F_C$  en términos del esfuerzo interno en el concreto,  $k_1 f'_c$ , y las constantes torsionales geométricas de la sección,  $k_2 x^2 y$ , llevaron a la expresión

$$T_C = \frac{2.4}{\sqrt{x}} x^2 y \sqrt{f'_c} \tag{7.11b}$$

Las fuerzas de espiga  $F_x$  y  $F_y$  se suponen proporcionales a las áreas de la sección transversal de estas varillas. Si se establece una relación entre la proporción de la resistencia dada por las fuerzas de espiga  $F_x$  y  $F_y$  y la resistencia torsional de las fuerzas  $F_C$  de los anillos, los momentos torsionantes serán las sumas

$$\Sigma F_V (\frac{1}{2} x_1), \Sigma F_X (\frac{1}{2} y_0), \Sigma F_Y (\frac{1}{2} x_0), \Sigma T_1 (\frac{1}{2} x_0)$$

Las dimensiones  $x_1$  y  $y_1$  son, respectivamente, la menor y la mayor dimensión centro a centro de los estribos rectangulares cerrados, y las dimensiones  $x_0$  y  $y_0$  son las correspondientes dimensiones centro a centro de las varillas longitudinales en las esquinas de los estribos. La expresión resultante para la resistencia torsional,  $T_s$ , suministrada por los anillos y el acero longitudinal en la sección rectangular, es

$$T_s = \alpha_1 \frac{x_1 y_1 A_t f_y}{s} \tag{7.12}$$

donde  $\alpha_1 = 0.66 + 0.33 y_1 / x_1$ , de tal manera que el momento torsionante nominal de resistencia, es  $T_n = T_C + T_s$ , o

$$T_n = \frac{2.4}{\sqrt{x}} x^2 y \sqrt{f'_c} + (0.66 + 0.33 \frac{y_1}{x_1}) \frac{x_1 y_1 A_t f_y}{s} \tag{7.13}$$

### 7.3.2 La Teoría de la Analogía con la Armadura en el Espacio

Esta teoría originalmente fue desarrollada por Ramsch y más tarde expandida por Lampert y Collins, con trabajo adicional de Hsu,

Thurliman, Elfgren, y otros. Un refinamiento posterior fue introducido por Collins y Mitchell (Ref. 7.11) como una teoría del campo de compresión. La analogía con la armadura en el espacio es una extensión del modelo usado en el diseño de los estribos que resisten cortante, en la que las grietas de tensión diagonal, una vez que empiezan a desarrollarse, son resistidas por los estribos. A causa de la forma no plana de las secciones transversales debida al momento de torsión, se utiliza como miembros a tensión diagonal, una armadura en el espacio compuesta por los estribos, y las fajas idealizadas de concreto a 45° entre las grietas se utilizan como los miembros a compresión, como se muestra en la Fig. 7.9.

En esta teoría se supone que la viga de concreto se comporta en torsión en forma similar a un cajón de paredes delgadas con un flujo de cortante constante en la sección transversal de la pared, produciendo un momento torsionante constante. El uso de secciones huecas en las paredes en vez de sólidas, demostró que se obtiene esencialmente el mismo momento torsionante último, siempre que las paredes no sean demasiado delgadas. Tal conclusión sale a relucir a partir de los ensayos que han mostrado que la resistencia a la torsión de las secciones sólidas está compuesta de la resistencia de la jaula de estribos cerrados, que consisten de barras longitudinales y estribos cerrados, y los idealizados puntales a compresión inclinados de concreto en el plano de las paredes de la jaula. Los puntales a compresión son las fajas inclinadas de concreto entre las grietas en la Fig. 7.9.

El reglamento CEB-FIP se basa en el modelo de la armadura en el espacio. En este código, el espesor efectivo de la viga hueca se toma como 1/6 D<sub>o</sub>, donde D<sub>o</sub> es el diámetro del círculo inscrito en el rectángulo que conecta las varillas longitudinales de las esquinas, o sea, D<sub>o</sub> = x<sub>o</sub> en la Fig. 7.9. En resumen, la ausencia del núcleo no afecta la resistencia en torsión de tales miembros, de ahí la aceptación del enfoque de la analogía con la armadura espacial basada en secciones huecas.

Si el flujo de cortante en las paredes de la sección en cajón es  $\tau t$ , donde  $\tau$  es el esfuerzo cortante, y F es la fuerza de tensión en cada varilla longitudinal en las esquinas, la ecuación del equilibrio de fuerzas sería

$$4F = 2 \frac{\tau t x_o}{\tan \phi} + 2 \frac{\tau t y_o}{\tan \phi} \tag{7.14}$$

y los momentos debidos a las fuerzas del flujo de cortante serían

$$T_n = \tau t y_o x_o + \tau t x_o y_o \tag{7.15}$$

Si A<sub>t</sub> es el área de la sección transversal del estribo, y f<sub>y</sub> es la resistencia de fluencia del estribo con separación a una distancia s, entonces

$$A_t f_y = \tau t s \tan \phi \tag{7.16a}$$

También, si  $A_1$  es el área total de las cuatro varillas longitudinales en las esquinas,

$$F = \frac{1}{4} A_1 f_y \tag{7.16b}$$

Resolviendo las Ecs. (7.14), (7.15), y (7.16a), se llega a

$$T_n = 2x_o y_o \sqrt{\frac{A_1 f_y A_t f_y}{2s(x_o + y_o)}} \tag{7.17}$$

Para el caso de volúmenes iguales de acero longitudinal y estribos transversales (esto es:  $\phi = 45^\circ$ ) el momento torsionante de resistencia  $T_n$  en la falla, sería

$$T_n = 2 \frac{A_t f_y}{s} x_o y_o \tag{7.18}$$

Nótese la similitud de la forma de la Ec. 7.12 desarrollada para la teoría de la flexión oblicua, con la de Ec. 7.18, desarrollada por la teoría de la analogía con la armadura espacial.

#### 7.4 DESEMPEÑO DEL CONCRETO BAJO LA ACCION COMBINADA DE TORSION, CORTANTE Y FLEXION

##### 7.4.1 Torsión y Cortante Combinados

Hasta ahora, esta discusión ha presentado el mecanismo resistente interno y las fuerzas acompañantes, momentos y esfuerzos en el concreto simple y en el refuerzo, cuando un elemento estructural unidimensional está sujeto a momentos torsionantes. Cuando la torsión externa está acompañada por cortante externo, la misma sección está sujeta a mayores esfuerzos cortantes debido al efecto combinado de los dos tipos de cargas al interactuar una con otra. La resistencia de una viga a la torsión y cortante combinados es menor que su resistencia a alguno de estos dos parámetros actuando solos. Consecuentemente, se torna necesaria una relación de interacción en una manera similar a la desarrollada para la combinación de la flexión y la carga axial, discutida en el Capítulo 9. La figura 7.10 representa la siguiente expresión no dimensional de interacción que relaciona la torsión al cortante:

1. Miembro sin acero en el alma:

$$\left( \frac{T_c}{T_{c0}}^2 + \frac{V_c}{V_{c0}} \right)^2 \leq 1.0 \tag{7.19a}$$

$T_c$  y  $V_c$  son la torsión y el cortante nominal externos cuando actúan simultáneamente.  $T_{c0}$  y  $V_{c0}$  son los valores nominales para la torsión y el cortante cuando cada uno actúa separadamente.

2. Miembros reforzados, para la combinación de torsión y cortante:

$$\left( \frac{T_n}{T_{n0}} \right)^2 + \left( \frac{V_n}{V_{n0}} \right)^2 \leq 1.0 \tag{7.19b}$$

$T_n$  y  $V_n$  representan las resistencias nominales de torsión y cortante para resistir  $T_u$  y  $V_u$  cuando actúan simultáneamente.  $T_{n0} = T_c + T_s$  representa la resistencia torsional nominal del alma reforzada cuando la torsión pura actúa sola en la sección;  $V_{n0} = V_c + V_s$  representa la resistencia nominal al cortante del alma reforzada cuando el cortante solo actúa en la sección. La ecuación 7.19a se puede anotar de nuevo utilizando el valor aproximado de  $T_c$  de la Ec. 7.11b y  $V_c$  de la Ec. 6.9 para el alma sin reforzar:

$$\left( \frac{T_c}{0.21\sqrt{f'_c} \sum x^2 y} \right)^2 + \left( \frac{V_c}{0.5\sqrt{f'_c} b_w d} \right)^2 \leq 1.0 \tag{7.20}$$

En el caso del alma reforzada sujeta a torsión y cortante combinados, tiene que establecerse un límite superior para  $T_{n0}$  y  $V_{n0}$  para asegurar que el refuerzo del alma fluya en el estado límite de falla. Con base en los resultados de ensayos,

$$T_{n0} \leq 3.2\sqrt{f'_c} \frac{\sum x^2 y}{3} \quad \text{y} \quad V_{n0} \leq 2.7\sqrt{f'_c} b_w d$$

Consecuentemente, la Ec. 7.19b se transforma en

$$\left( \frac{T_n}{\sqrt{f'_c} \sum x^2 y} \right)^2 + \left( \frac{V_n}{2.7\sqrt{f'_c} b_w d} \right)^2 \leq 1.0 \tag{7.21}$$

Al comparar las Ecs. 7.20 y 7.21 puede verse que  $T_n = 5T_c$ . El Reglamento ACI simplifica el procedimiento al requerir que

$$T_s \leq 4T_c \tag{7.22}$$

pues de otra manera, la sección deberá incrementarse.

#### 7.4.2 Torsión y Flexión Combinadas

Cuando la flexión actúa simultáneamente con la torsión, la capacidad a la flexión de la sección se reduce drásticamente. Como resultado, el agrietamiento debido al esfuerzo cortante torsional se genera a niveles bajos de la carga. La figura 7.11c muestra el vector resultante  $R_u$  para los momentos de flexión y torsión combinados que provocan el alabeo de la sección, como se muestra en la Fig. 7.7b.

De manera similar al caso de la torsión y el cortante combinados, se establece una relación de interacción relacionando la torsión con la flexión cuando ambas actúan simultáneamente. Tiene que suponerse que la sección está reforzada con acero de compresión y de tensión.

Se pueden desarrollar dos casos para los cuales son aplicables las siguientes expresiones de interacción:

1. Cuando fluye el acero de tensión en la zona de tensión,

$$\left( \frac{T_n}{T_{n0}} \right)^2 = r \left( 1 - \frac{M_n}{M_{n0}} \right) \quad (7.23a)$$

2. Cuando ocurre la fluencia de tensión en la zona de flexión de compresión,

$$\left( \frac{T_n}{T_{n0}} \right)^2 = 1 + r \frac{M_n}{M_{n0}} \quad (7.23b)$$

donde  $T_n$  = momento nominal torsional resistente equivalente a  $T_u/\phi$   
 $T_{n0}$  = resistencia nominal torsional del alma reforzada cuando actúa sola la torsión pura  
 $M_n$  = momento nominal resistente a flexión  $M_u/\phi$   
 $M_{n0}$  = resistencia nominal a la flexión cuando ésta actúa sola  
 $r = \frac{A_s f_y}{A'_s f_y}$

#### 7.4.3 Flexión, Cortante y Torsión Combinadas

Una combinación de estos tres parámetros resulta en una superficie tridimensional de interacción. El alcance del libro limita la posibilidad de una discusión profunda. La expresión aplicable resulta de la superposición del efecto de la torsión y el cortante combinados con el efecto de la flexión y la torsión combinadas a partir de los dos casos de interacción de las Secciones 7.4.1 y 7.4.2. El ACI requiere (1) el cálculo del acero transversal en el alma, para cortante; adicionándolo al acero transversal en el alma calculado para torsión; y (2) el cálculo de acero longitudinal para torsión, adicionándolo al acero de tensión para flexión, pero



distribuyéndolo simétricamente en todos los costados de la sección transversal.

## 7.5 DISEÑO DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO SUJETAS A LA COMBINACION DE TORSION, FLEXION Y CORTANTE

### 7.5.1 Desempeño Torsional de las Estructuras

El momento de torsión que actúa en un cierto componente estructural tal como una viga de orilla se puede calcular utilizando los procedimientos normales del análisis estructural. El diseño de un componente en particular necesita basarse en el estado límite de falla. Por consiguiente, el comportamiento no lineal de un sistema estructural después del agrietamiento torsional se debe identificar en una de las dos siguientes condiciones: (1) no hay redistribución de los esfuerzos de torsión a otros miembros después del agrietamiento, y (2) la redistribución de los esfuerzos y momentos torsionantes después del agrietamiento para que tenga efecto la compatibilidad de deformación entre los miembros que se intersectan.

Las resultantes de esfuerzos debidas a la torsión en las vigas estáticamente determinadas se pueden evaluar de las solas condiciones de equilibrio. Tales condiciones requieren un diseño para el momento total factorizado exterior de torsión, ya que no es posible la redistribución de los esfuerzos torsionantes. Con frecuencia a este estado se le llama *torsión de equilibrio*. Una viga de orilla que soporta una marquesina en voladizo, como en la Fig. 7.13, es un ejemplo de ello.

La viga de orilla tiene que diseñarse para que resista la totalidad del momento externo factorizado de torsión debido a la losa en voladizo; de otra forma, la estructura experimentará un colapso. La falla sería ocasionada por la viga al no satisfacer las condiciones de equilibrio de las fuerzas y los momentos que resultan de la gran torsión exterior.

En los sistemas estáticamente indeterminados, las suposiciones relativas a las rigideces, la compatibilidad de las deformaciones en las uniones, y la redistribución de los esfuerzos pueden afectar los esfuerzos resultantes, llevando a una reducción de los esfuerzos resultantes de cortante torsional. Se permite una reducción en el valor del momento factorizado que se utiliza en el diseño del miembro, si parte de este momento se puede redistribuir a los miembros que se intersectan. El Reglamento ACI permite un momento torsional factorizado máximo en la sección crítica  $d$  a partir del paño de los apoyos:

$$T_u = \phi \left( \sqrt{f'_c} \frac{\sum x^2 y}{3} \right) \quad (7.24)$$

El hacer caso omiso del efecto total de la torsión externa total en este caso, no conduce de hecho, a la falla de la estructura, pero puede tener por resultado un agrietamiento excesivo si  $\phi(\sqrt{f'_c} \sum x^2 y / 3)$  es de un valor considerablemente menor al momento real factorizado de torsión. En la Fig. 7.14 puede verse un ejemplo de la torsión de compatibilidad.

Las vigas  $B_2$  aplican momentos de torsión  $T_u$  en las secciones 1 y 2 de la viga de orilla AB en la Fig. 7.14b. Las magnitudes de las rigideces relativas de la viga AB y las transversales  $B_2$  determinan las magnitudes de la rotación en las juntas de intersección 1 y 2. A causa de la continuidad y la acción en dos direcciones, los momentos extremos de las vigas  $B_2$  en sus intersecciones con la viga de orilla AB, no se transmitirán totalmente como momentos de torsión a las columnas de apoyo A y B. Se reducirán en forma importante ya que las redistribuciones de momentos resultan en una transferencia de la mayor parte de los momentos flexionantes de los extremos 1 y 2 a 3 y 4, así como al centro de los claros de las vigas  $B_2$ .  $T_u$  en cada uno de los apoyos A y B de las vigas de orilla y en la sección crítica a una distancia  $d$  de estos apoyos se determina a partir de la Ec. 7.24.

$$T_u = \phi \left( \sqrt{f'_c} \frac{\sum x^2 y}{3} \right)$$

Si el momento torsionante factorizado real debido a las vigas  $B_2$  es menor que el dado por la Ec. 7.24, la viga se tiene que diseñar para un valor torsional menor. Sin embargo, los momentos de torsión se desprecian, si

$$T_u < \phi(0.13 \sqrt{f'_c} \sum x^2 y) \quad (7.25)$$

Cuando el momento torsionante factorizado  $T_u$  excede  $\phi(0.13 \sqrt{f'_c} \sum x^2 y)$ , el Reglamento ACI requiere que el alma de concreto simple se diseñe en secciones para

$$V_c = \frac{0.5 \sqrt{f'_c} b_w d}{\sqrt{1 + [2.5 C_t (T_u / V_u)]^2}} \quad (7.26a)$$

y

$$T_c = \frac{0.21 \sqrt{f'_c} \sum x^2 y}{\sqrt{1 + (0.4 V_u / C_t T_u)^2}} \quad (7.26b)$$

Las ecuaciones 7.26a y 7.26b se derivan de la Ec. 7.20 suponiendo que el cociente del momento torsionante respecto a la fuerza cortante permanece constante a través de la historia de carga. Cuando se toma en cuenta la contribución del refuerzo para torsión, el ACI limita la fuerza de torsión  $T_s$  resistida por el acero a un valor que no exceda  $4T_c$ , como se ve en la Ec. 7.22.

### 7.5.2 Refuerzo en el Alma para Torsión

Como se indica en la Sección 7.3.1, sólo se puede lograr una importante resistencia adicional a la torsión debida al refuerzo para torsión, si se emplean tanto estribos como varillas longitudinales. En forma ideal, deberán colocarse volúmenes iguales de acero tanto de estribos cerrados como de varillas longitudinales, de tal manera que ambos participen por igual para resistir los momentos de torsión. Este principio es la base de las expresiones de ACI para diseñar el acero torsional en el alma. Si  $s$  es la separación de los estribos,  $A_1$  es el área total del acero de las varillas longitudinales de la sección transversal, y  $A_t$  es la sección transversal de una rama del estribo, donde las dimensiones del estribo son  $x_1$  en la dirección corta y  $y_1$  en la dirección larga, entonces:

$$2A_t(x_1 + y_1) = A_1s \quad (7.27a)$$

de tal manera que

$$2A_t = \frac{A_1s}{x_1 + y_1} \quad (7.27b)$$

Por tanto, el acero torsional total en el alma, incluyendo tanto los estribos cerrados como las varillas longitudinales de las Ecs. 7.27a y 7.27b, se convierte en

$$A_{total} = 2A_t + \frac{A_1s}{x_1 + y_1} \quad (7.28a)$$

Pero, de la Ec. 7.12

$$A_t = \frac{T_s s}{\alpha_1 x_1 y_1 f_1} \quad (7.28b)$$

donde  $\alpha_1 = 0.66 + 0.33y_1/x_1 \leq 1.5$  y  $T_s$  es el momento torsionante resistente del acero torsionante del alma. Si  $T_c$  es la resistencia torsional nominal del concreto simple en el alma,

$$T_s = T_n - T_c \quad (7.29)$$

De la Ec. 7.27b, y empleando la expresión de ACI para  $A_t$  para la torsión y el cortante combinados, donde

$$2A_t = \frac{14 X s}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t}$$

el refuerzo torsional longitudinal se puede expresar como

$$A_l = \left( \frac{28 X s}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - 2A_t \right) \frac{x_1 X y_1}{s} \quad (7.30)$$

donde  $C_t = b_w d / \sum x^2 y$ . El término  $2A_t$  en la Ec. 7.30 no puede ser menor que  $3.5b_w s / f_y$ , puesto que este valor es el mínimo  $2A_t$  para que los estribos torsionales sean efectivos. En la ref. 7.12 se presenta una discusión completa y una derivación detallada de la Ec. 7.30.

Puede compensarse una reducción en los estribos mediante un incremento en el acero longitudinal siempre que el volumen del acero torsional total se mantenga el mismo. Si la separación  $s$  de los estribos es pequeña, de tal manera que  $2A_t$  sea considerablemente mayor que el valor mínimo  $3.5b_w s / f_y$ , no es poco común que  $A_l$  de la Ec. 7.30 dé un valor negativo, de tal manera que se invoque  $A_l$  mínimo de la Ec. 7.27a para volúmenes iguales de estribos y varillas longitudinales; esto es:

$$A_l = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s} \quad (7.31)$$

El área total  $A_{vt}$  de los estribos cerrados para la torsión y cortante combinados se convierte en

$$A_{vt} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} \geq \frac{3.5b_w s}{f_y} \quad (7.32)$$

### 7.5.3 Procedimiento de diseño para la Torsión y Cortante Combinados

Lo que sigue es un resumen de la secuencia recomendada de los pasos para el diseño. En la Fig. 7.15 se muestra un diagrama de flujo que describe la secuencia de las operaciones en forma gráfica.

1. Clasifique si la torsión aplicada es torsión de equilibrio o de compatibilidad. Determine la sección crítica y calcule el momento torsionante factorizado  $T_u$ . La sección crítica se toma a una distancia  $d$  del paño del apoyo. Si  $T_u$  es menor que  $\phi(0.13\sqrt{f'_c} \sum x^2 y)$ , se pueden despreciar los efectos de la torsión.
2. Calcule la resistencia nominal torsional  $T_c$  del alma de concreto simple:

$$T_c = \frac{0.21\sqrt{f'_c} \sum x^2 y}{\sqrt{1 + (0.4V_u/C_t T_u)^2}}$$

donde  $C_t = b_w d / \sum x^2 y$ . Los miembros sujetos a una tensión axial importante se pueden diseñar para un valor de  $T_c$

que se multiplica por  $(1 + N_u/35 A_g)$ , en que  $N_u$  es negativa para tensión.

Verifique si  $T_u$  excede  $\phi T_c$ . Si no es así, desprecie el efecto torsionante. Si así ocurre, calcule el valor  $T_s$  de esa porción del momento torsionante que será resistida por el refuerzo de acero. Para torsión de equilibrio

$$T_s = T_n - T_c$$

Para torsión de compatibilidad

$$T_s = \frac{\sqrt{f'_c} \sum x^2 y}{3} - T_c \quad \text{ó} \quad T_s = T_n - T_c$$

la que sea menor. El valor de  $T_n$  tiene que ser al menos equivalente a  $T_u/\phi$ . Si  $T_s > 4T_c$ , incremente el tamaño de la sección.

Seleccione los estribos cerrados que se emplearán como refuerzo transversal. Puede emplearse una varilla del No. 3 como mínimo (9.5 mm. de diámetro). Si  $s$  es una separación constante de los estribos, calcule el área de una rama del estribo para torsión, para la separación unitaria:

$$A_t = \frac{T_s}{\alpha_1 x_1 y_1 f_y}$$

- 3. Calcule el refuerzo  $A_v$  requerido para cortante por unidad de espaciamiento en una sección transversal.  $V_u$  es la fuerza cortante exterior factorizada en la sección crítica,  $V_c$  es la resistencia nominal al cortante del concreto en el ama, y  $V_s$  es la fuerza cortante que resisten los estribos:

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_y d}$$

donde  $V_s = V_n - V_c$  y

$$V_c = \frac{0.5 \sqrt{f'_c} b_w d}{\sqrt{1 + [2.5 C_t (T_u/V_u)]^2}}$$

- 4. El valor de  $V_n$  tiene que ser cuando menos igual a  $V_u/\phi$ . Obtenga el área total  $A_{vt}$  de los estribos cerrados para torsión y cortante, y diseñe los estribos de tal manera que

$$A_{vt} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} \geq \frac{3.5 b_w s}{f_y}$$

5. Calcule el área  $A_l$  del refuerzo longitudinal requerida para torsión, donde

$$A_l = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s}$$

o

$$A_l = \left( \frac{28xs}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - 2A_t \right) \frac{x_1 + y_1}{s}$$

la que sea mayor.  $A_l$  calculada empleando la segunda expresión no necesita ser mayor a

$$A_l = \left( \frac{28xs}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - \frac{3.5b_w s}{f_y} \right) \frac{x_1 + y_1}{s}$$

6. Arregle el refuerzo utilizando las siguientes directrices:

- La separación  $s$  de los estribos cerrados deberá ser menor a  $(x_1 + y_1)/4$  o 30 cm
- Las varillas longitudinales deberán quedar a separaciones iguales alrededor del perímetro de los estribos cerrados. La distancia entre las varillas deberá ser menor a 30 cm. y cuando menos una varilla longitudinal deberá colocarse en cada esquina.
- La resistencia a la fluencia del refuerzo para torsión no excederá de  $4,200 \text{ kg/cm}^2$ .
- Los estribos que se usen para refuerzo de torsión deberán anclarse a través de una distancia  $d$  desde las fibras extremas en compresión. Los anillos cerrados con ganchos en los estribos logran este efecto.
- El refuerzo para torsión se suministrará al menos una distancia  $(d + b)$  más allá del punto requerido teóricamente, con objeto de cubrir cualesquier esfuerzos cortantes excesivos potenciales.

#### 7.5.4 Ejemplo 7.1: Diseño del Refuerzo en el Alma para la Torsión y el Cortante Combinados en una sección en T

Una viga de sección en T tiene las dimensiones geométricas que se muestran en la Fig. 7.16. En la sección crítica actúa una fuerza cortante externa factorizada, que tiene un valor de  $V_u = 6,800 \text{ kg}$ . Está sujeta a los siguientes momentos de torsión:

- momento exterior torsionante factorizado de equilibrio  
 $T_u = 570,000 \text{ kg.cm}$ ;
- de compatibilidad factorizado,  $T_u = 86,200 \text{ kg.cm}$ ;
- de compatibilidad factorizado,  $T_u = 345,000 \text{ kg.cm}$ .

Dados:

Refuerzo para flexión  $A_s = 23.4 \text{ cm}^2$   
 $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ , concreto de peso normal  
 $f_y = 4,200 \text{ kg/cm}^2$

Diseño del refuerzo en el alma necesario para esta sección.

**Solución**

(a) Torsión de equilibrio:

Momento torsional factorizado (Paso 1)

Dado el momento torsional de equilibrio = 570,000 kg-cm.  
La totalidad del momento de torsión debe tomarse en cuenta para el diseño. De la Fig. 7.16:

$$\sum x^2y = 35^2 \times 65 + 2(10^2 \times 30) = 79,500 \text{ cm}^3$$

$$\phi(0.13\sqrt{f'_c} \sum x^2y) =$$

$$= 0.85 \times 0.13 \times 280 \times 79,500 = 146,997 \text{ kg-cm} < T_u$$

Por consiguiente, se deben colocar estribos

Diseño de estribos cerrados para torsión. (Paso 2)

$$T_n = \frac{T_u}{\phi} = \frac{570,000}{0.85} = 670,588 \text{ kg-cm}$$

$$T_c = \frac{0.21\sqrt{f'_c} \sum x^2y}{1 + (0.4V_u/C_t T_u)^2}$$

Supóngase un recubrimiento efectivo de 5.0 cm, y  $d = 60 - 5 = 55 \text{ cm}$

$$C_t = \frac{b_w d}{\sum x^2y} = \frac{35 \times 55}{79,500} = 0.024$$

$$T_c = \frac{0.21\sqrt{280} (79,500)}{\sqrt{1 + \left(\frac{0.4(6,800)}{0.024(570,000)}\right)^2}} = 274,089 \text{ kg-cm}$$

Suponga también que tanto  $T_c$  como  $V_c$  son constantes para todos los propósitos prácticos al centro del claro de la viga.

$$T_s = T_n - T_c = 670,588 - 274,089 \text{ kg-cm}$$

Supóngase un recubrimiento libre de 2.5 cm y estribos cerrados del #4.

$$x_1 = 35 - 2(2.5 + 0.64) = 28.73 \text{ cm}$$

$$y_1 = 60 - 2(2.5 + 0.64) = 53.72 \text{ cm}$$

$$\alpha_1 = 0.66 + 0.33(53.72/28.73) = 1.28 < 1.5$$

Emplée  $\alpha_1 = 1.28$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_s}{f_y \alpha_1 x_1 y_1} = \frac{396,499}{4,200(1.28)28.73(53.72)} = 0.048 \text{ cm}^2/\text{cm}/1 \text{ rama}$$

Diseño de los estribos para cortante (paso 3)

$$V_c = \frac{0.5 \sqrt{f'_c} b_w d}{\sqrt{1 + [2.5 C_t (T_u/V_u)]^2}} = \frac{0.5 \sqrt{280} (35) 55}{\sqrt{1 + [2.5 (0.024) 570,000/6,800]^2}}$$

$$= 3,141 \text{ kg}$$

$$V_s = V_n - V_c = \frac{6,800}{0.85} - 3,141 = 4,859 \text{ kg}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{s} = \frac{4,859}{4,200(55)} = 0.021 \text{ cm}^2/\text{cm}/\text{dos ramas}$$

Estribos cerrados para torsión y cortante combinados (Paso 4)

$$\frac{A_{vt}}{s} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} = 2(0.048) + 0.021 = 0.117 \text{ cm}^2/\text{cm}/ 2 \text{ ramas}$$

Pruébese con estribos cerrados del No. 3 (9.5 mm de diámetro). El área para las dos ramas = 1.42 cm<sup>2</sup>.

$$s = \frac{\text{área de la sección transversal del estribo}}{A_{vt}/s \text{ requerida}} = \frac{1.42}{0.117} =$$

$$= 12.1 \text{ cm}$$

$$\text{separación máxima permisible, } s_{\max} = \frac{x_1 + y_1}{4} = \frac{28.73 + 53.72}{4} =$$

$$= 20.6 \text{ cm} > 12.1 \text{ cm}$$

Utilice estribos cerrados del # 3 @ 12 cm c. a c.



$$\text{Area mínima de estribos requerida} = A_v + 2A_t = \frac{3.5b_w s}{f_y} = \frac{3.5(35)12}{4,200} = 0.35 \text{ cm}^2 < 1.42 \text{ cm}^2$$

Area proporcionada = 1.42 > 0.35 cm<sup>2</sup>

Diseño del acero longitudinal para torsión (Paso 5)

$$A_1 = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s} = 2(0.048)(28.73 + 53.720) = 7.92 \text{ cm}^2$$

También:

$$A_1 = \left( \frac{28xs}{f_y} \frac{T_u}{T_u + V_u/3C_t} - 2A_t \right) \frac{x_1 + y_1}{3s}$$

(O substituyendo 3.5b<sub>w</sub>s/f<sub>y</sub> por 2A<sub>t</sub>, aquella que controle):

$$\frac{3.5b_w s}{f_y} = 0.35 \text{ cm}^2 < 2A_t = 2(0.048)12 = 1.15 \text{ cm}^2$$

Use 2A<sub>t</sub> = 1.15 cm<sup>2</sup>. Por consiguiente:

$$A_1 = \left( \frac{28(35)12}{4,200} \frac{570,000}{570,000 + \frac{6,800}{3(0.024)}} - 1.15 \right) \frac{28.73 + 53.72}{12} = 8.12 \text{ cm}^2 > 7.92 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto, colóquese A<sub>1</sub> = 8.12 cm<sup>2</sup>

Distribución de las varillas longitudinales de torsión

El área del refuerzo longitudinal a distribuir es 8.12 cm<sup>2</sup>. Supóngase que ¼ A<sub>1</sub> se coloca en las esquinas superiores. Otro tanto en las esquinas inferiores, adicional a las varillas para flexión. El área requerida en cada esquina es = 8.12/4 = 2.03 cm<sup>2</sup>. El área requerida en cada costado vertical es también ¼ A<sub>1</sub> = 2.03 cm<sup>2</sup>, a una separación no mayor de 30 cm. c a c. Colóquense 2 varillas del No. 4 en cada zona.

$$\text{Al centro del claro } \sum A_s = \frac{A_1}{4} + A_s = 2.03 + 23.4 = 25.43 \text{ cm}^2$$

Colóquense 5 vars. del #8 en la zona de tensión; A<sub>s</sub> = 25.35 cm<sup>2</sup>  
La figura muestra la geometría de la sección transversal.

**Solución**

(b) Torsión de compatibilidad:

Momento torsional factorizado (Paso 1)

Dado  $T_u = 86,200$  kg-cm. Si se utilizan los resultados del caso (a), se tiene:

$$\phi(0.13\sqrt{f'_c}\sum x^2y) = 0.85(0.13)\sqrt{280}(79,500) = 146,997 \text{ kg-cm}$$

$$> T_u = 86,200 \text{ kg-cm}$$

Por consiguiente, pueden despreciarse los efectos de torsión.

**Solución**

(c) Torsión de compatibilidad:

Momento torsional factorizado (Paso 1)

Dado que  $T_u = 345,000$  kg-cm es mayor que  $\phi(0.13\sqrt{f'_c}\sum x^2y)$ , se deben suministrar estribos. Puesto que esta es una torsión de compatibilidad, la sección se puede diseñar para un momento torsionante de  $\phi(\sqrt{f'_c}\sum x^2y/3)$  si la torsión exterior excede este valor.

$$\phi(\sqrt{f'_c}\sum x^2y/3) = 0.85(280)79,500/3 = 376,915 > 345,000 \text{ kg-cm}$$

Por consiguiente, la sección se diseñará para  $T_u = 345,000$  kg-cm

Diseño de los estribos cerrados para torsión (Paso 2)

Utilizando la Ec. 7.26b,

$$T_c = \frac{0.21(\sqrt{280})79,500}{\sqrt{1 + \left[\frac{0.4(6,800)}{0.024(345,000)}\right]^2}} = 265,407 \text{ kg-cm}$$

$$T_s = T_n - T_c = 345,000/0.85 - 265,407 = 140,475 \text{ kg-cm}$$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_s}{f_y \alpha_1 x_1 y_1} = \frac{140,475}{4,200(1.28)28.73(53.72)} = 0.017 \text{ cm}^2/\text{cm} / 1 \text{ rama}$$

Diseño de los estribos para cortante (Paso 3)

$$V_c = \frac{0.5 f'_c b_w d}{\sqrt{1 + [2.5 C_t (T_u/V_u)]^2}} = \frac{0.5\sqrt{280} 35(55)}{\sqrt{1 + [2.5(0.024)(345,000/6,800)]^2}} = 5,026 \text{ kg}$$

$$V_s = V_n - V_c = 6,800/0.85 - 5,026 = 2,974 \text{ kg}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_y d} = \frac{2,974}{4,200(55)} = 0.013 \text{ cm}^2/\text{cm}/2 \text{ ramas}$$

Estribos cerrados combinados para torsión y cortante (Paso 4)

$$\frac{A_{vt}}{s} = \frac{2A_t}{s} + \frac{A_v}{s} = 2(0.017) + 0.013 = 0.047 \text{ cm}^2/\text{cm}/2 \text{ ramas}$$

Coloque estribos del #3 con un área de  $2 \times 0.71 = 1.42 \text{ cm}^2$  (9.5 mm. de diámetro), y se tiene:

$$s = \frac{\text{área del estribo } A_s}{\text{área requerida } A_{vt}/s} = 1.42 / 0.047 = 30 \text{ cm}$$

separación máxima permisible  $s_{\max} = (x_1 + y_1)/4 = 20 \text{ cm} < 30 \text{ cm}$

Por consiguiente, suministre estribos cerrados del #3 @ 20 cm c. a c.

$$\text{área mínima de estribos requerida} = 3.5(35)20/4,200 = 0.58 \text{ cm}^2$$

$$\text{área suministrada} = 1.42 > 0.58 \text{ cm}^2$$

Diseño del refuerzo longitudinal para torsión (Paso 5)

$$A_1 = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s} = 2(0.017) (28.73 + 53.72) = 2.80 \text{ cm}^2$$

$$\frac{3.5b_w s}{f_y} = \frac{3.5(35)20}{4,200} = 0.583 < 2A_t s = 2(0.017)20 = 0.68 \text{ cm}^2$$

Por consiguiente:

$$A_1 = \left( \frac{28(35)20}{4,200} - 0.68 \right) \frac{28.73 + 53.72}{20} = \frac{345,000 + 6,800}{3(0.024)} = 7.10 \text{ cm}^2 > 2.8 \text{ cm}^2$$

Por consiguiente  $A_1$  que se debe suministrar es igual a  $7.10 \text{ cm}^2$

Distribución de las varillas longitudinales. Considérese el mismo criterio que se siguió en (a).

**REFERENCIAS SELECTAS**

7.1 Timoshenko, S., *Strength of Materials, Part II: Advanced Theory*, D. Van Nostrand, New York, 1952, 501 págs.

7.2 Nadai, A., *Plasticity: A Mechanics of the Plastic State of Matter*, McGraw Hill, New York, 1931, 349 págs.

7.3 Cowan, H.J., "Design of Beams Subject to Torsion Related to the Australian Code," *Journal of the American Concrete Institute*, Proc. Vol. 56, January 1960, págs. 591-618.

7.4 Gesund, H., Schnette, F.J., Buchanan, G.R., and Gray, G.A., "Ultimate Strength in Combined Bending and Torsion of Concrete Beams Containing Both Longitudinal and Transverse Reinforcement," *Journal of the American Concrete Institute*, Proc. Vol. 61, December 1964, págs. 1509-1521.

7.5 Lessig, N.N., "Determination of Carrying Capacity of Reinforced Concrete Elements with Rectangular Cross-section Subjected to Flexure with Torsion," *Zhelezonbeton*, 1959, págs. 5-28.

7.6 Zia, P., "Tension Theories for Concrete Members," *Special Publication SP 18-4, American Concrete Institute*, Detroit, 1968, págs. 103-132.

7.7 Hsu, T.T.C., "Ultimate Torque of Reinforced Concrete Members," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 94, No. ST2, February 1968, págs. 485-510.

7.8 Rangan, B.V., and Hall, A.J., "Strength of Rectangular Prestressed Concrete Beams in Combined Torsion, Bending and Shear," *Journal of the American Concrete Institute*, Proc. Vol. 70, April 1973, págs. 270-279.

7.9 Wang, C.K., and Salmon, C.G., *Reinforced Concrete Design*, 3rd ed., Harper & Row, New York, 1979, 918 págs.

7.10 Thurliman, B., "Torsional Strength of Reinforced and Prestressed Concrete Beams - CEB Approach, U.S. and European Practices," *Special Publication, American Concrete Institute*, Detroit, 1979, págs. 117-143.

7.11 Collins, M.P., and Mitchell, D., "Shear and Torsion Design of Prestressed and Non-prestressed Concrete Beams," *Journal of the Prestressed Concrete Institute*, Proc. Vol. 25, No. 5, September-October 1980, págs. 32-100.

7.12 Hsu, T.C.C., *Torsion of Reinforced Concrete*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1983, 510 págs.

Fig. 7.2 Distribución de esfuerzos de torsión para en una sección rectangular.

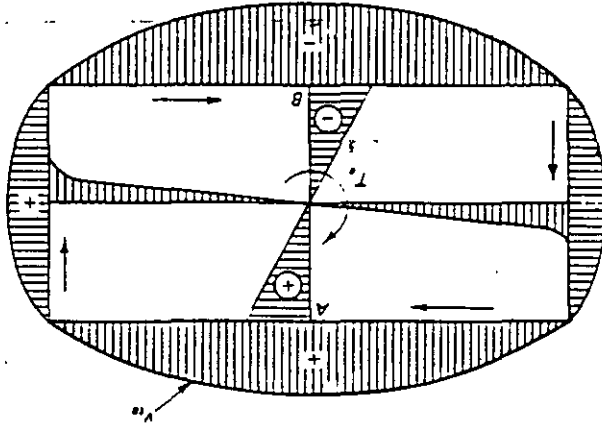
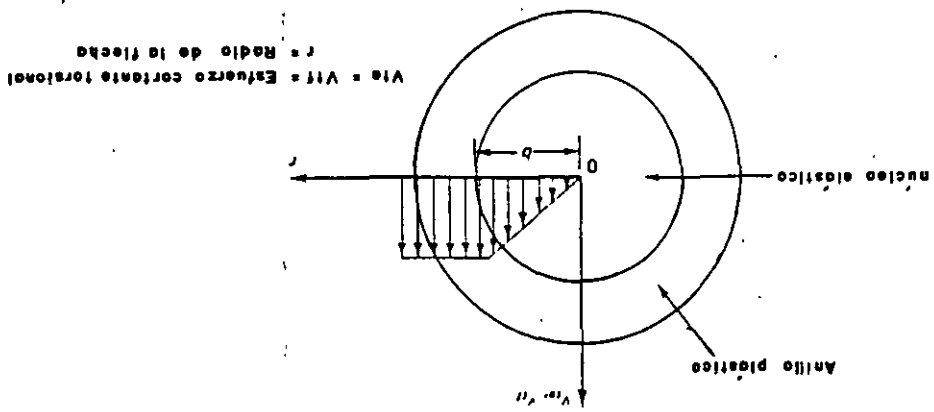


Fig. 7.1 Distribución de esfuerzos torsionales en una sección circular



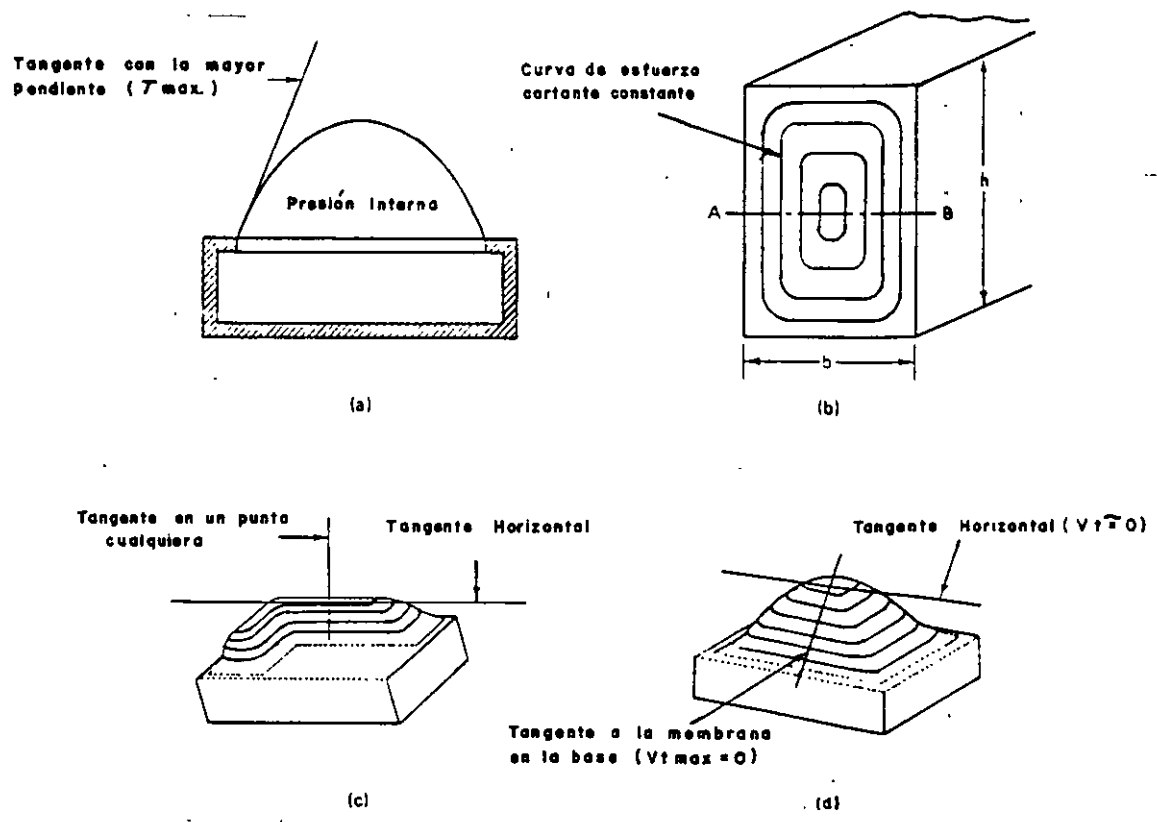


Fig. 7.3 Analogía con la membrana en la torsión pura elástica. (a) Membrana bajo presión; (b) Curvas en una viga real o en una membrana; (c) Sección L; (d) Sección rectangular.

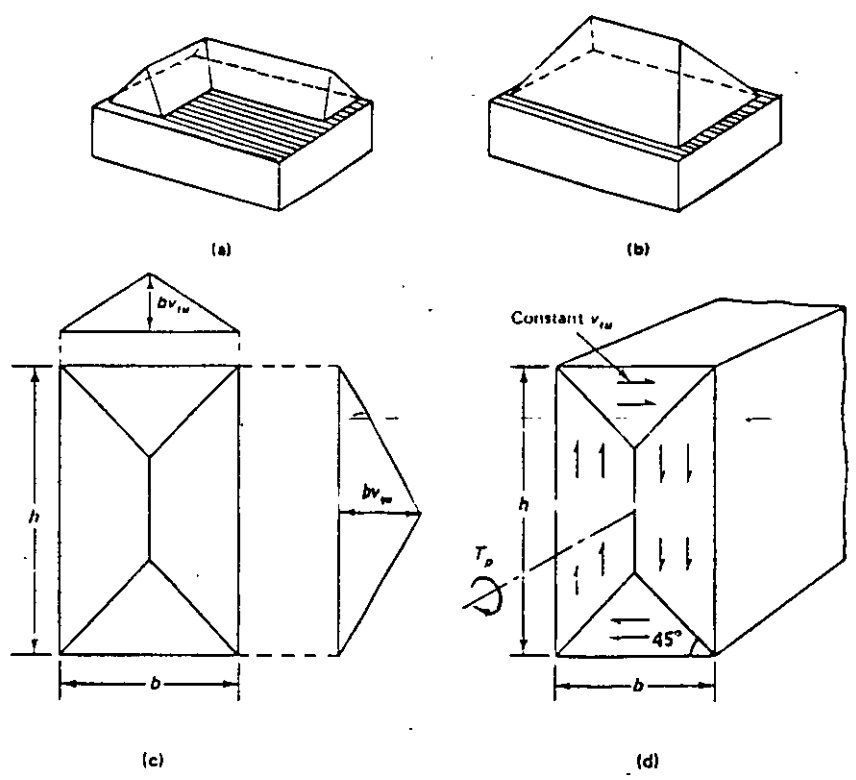


Fig. 7.4 Analogía con el montón de arena en torsión plástica pura. (a) Sección en L del montón de arena; (b) Sección rectangular del montón de arena; (c) Planta de la sección rectangular; (d) Esfuerzo cortante torsional

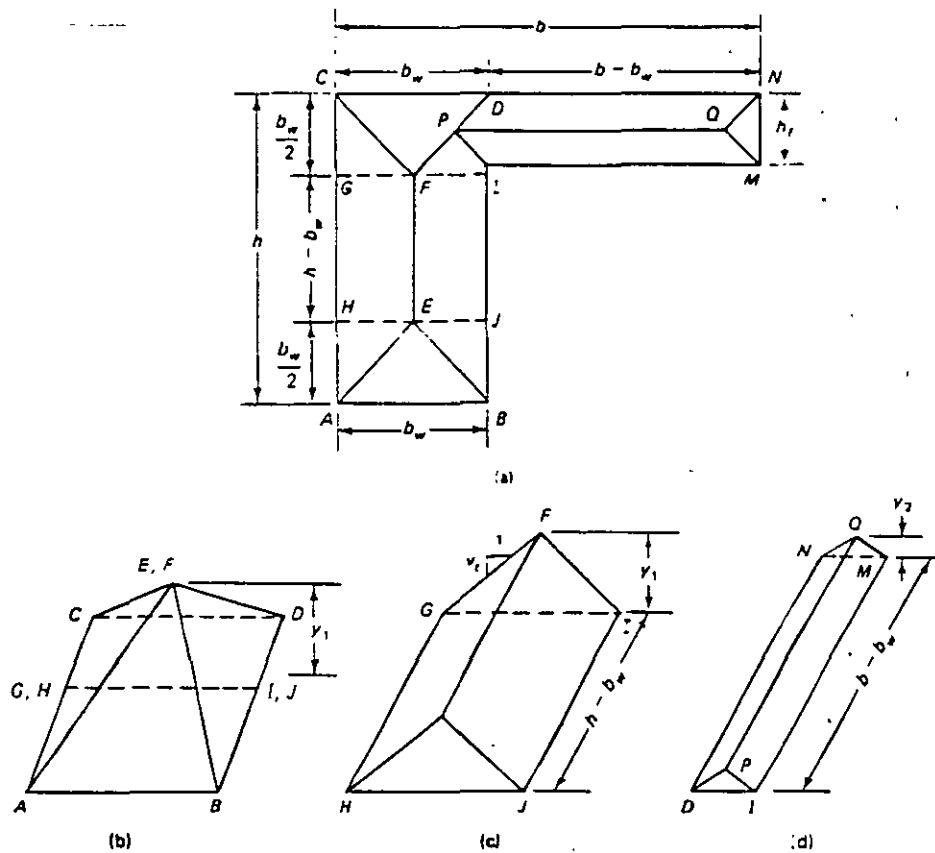


Fig. 7.5 Analogía con el montón de arena de la sección con patín (a) Montón de arena de la sección transversal en L; (b) Pirámide compuesta a partir del alma ( $V_1$ ); (c) Segmento en pabellón a partir del ala ( $V_2$ ); (d) Pabellón transformado del patín de la viga ( $V_3$ )

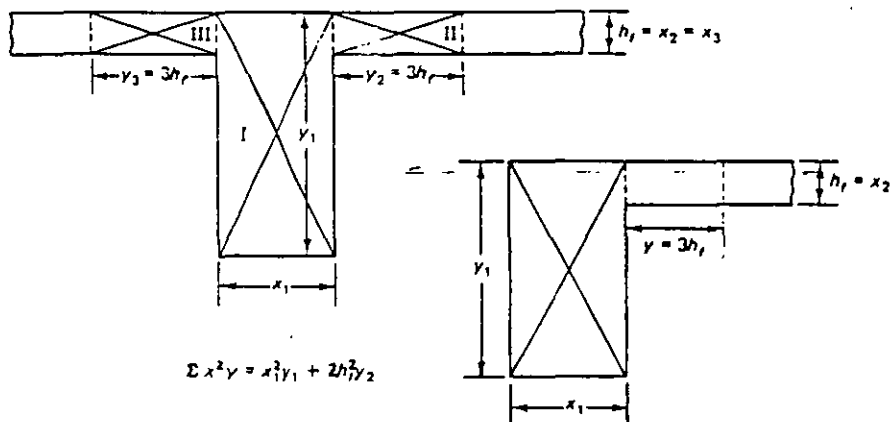


Fig. 7.6 Rectángulos compuestos para el cálculo de  $T_c$ .

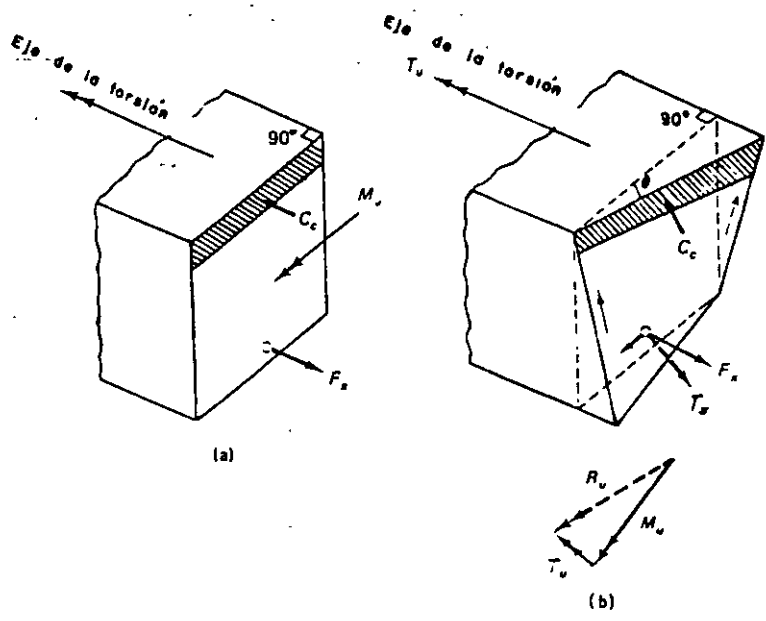
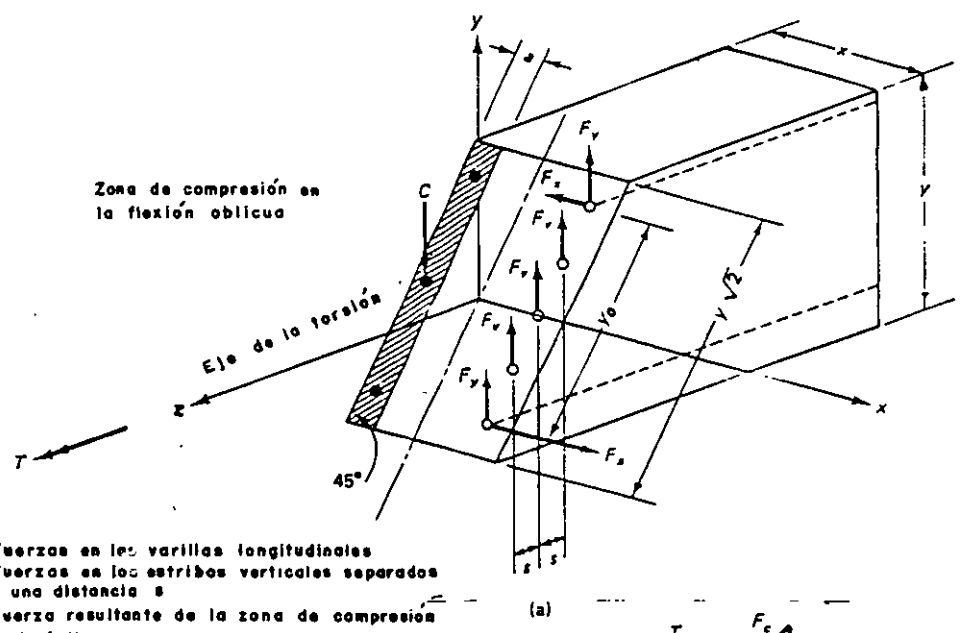


Fig. 7.7 Flexión oblicua debida a la torsión  
 (a) Flexión antes de la torsión; (b) Flexión y torsión



$F_x, F_y$  = Fuerzas en las varillas longitudinales  
 $F_v$  = Fuerzas en los estribos verticales separados o una distancia  $s$   
 $C$  = Fuerza resultante de la zona de compresión en la falla

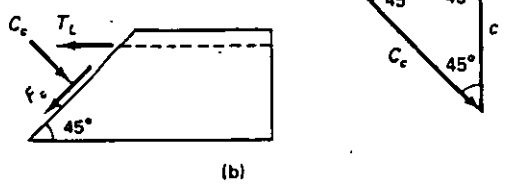
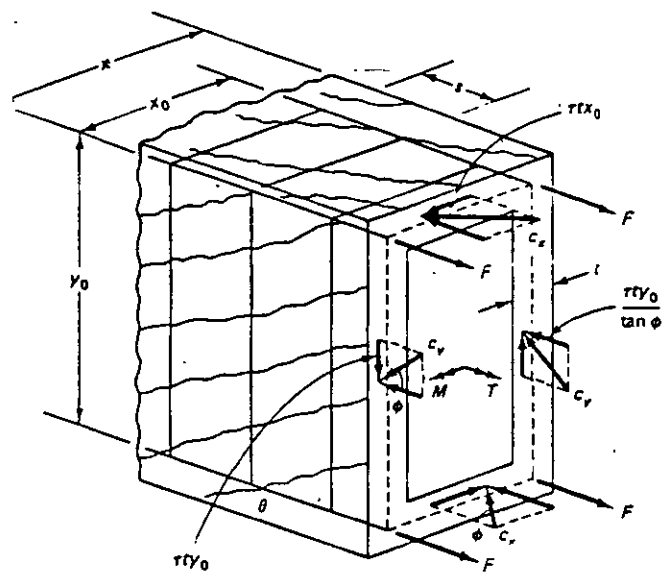


Fig. 7.8 Fuerza en los planos flexionados oblicuamente  
 (a) Todas las fuerzas actúan en un plano oblicuo en la falla; (b) Fuerza vectoriales en la zona de compresión.





$F$  = Fuerza de tensión en cada una de las varillas longitudinales  
 $C_x$  = Fuerza inclinada de compresión en la cara horizontal  
 $C_y$  = Fuerza inclinada de compresión en la cara vertical  
 $\tau$  = Fuerza de flujo de cortante por unidad de longitud de muro

Fig. 7.9 Fuerzas en la superficie del cajón hueco de concreto mediante la analogía con la armadura

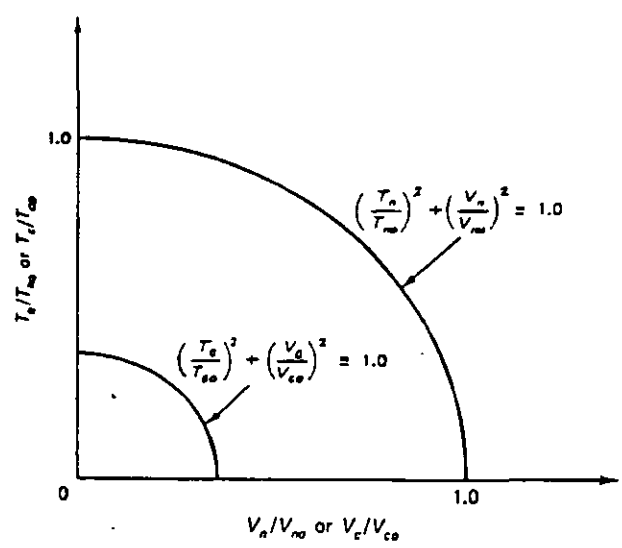


Fig. 7.10 Diagramas de Interacción para la combinación de torsión y cortante

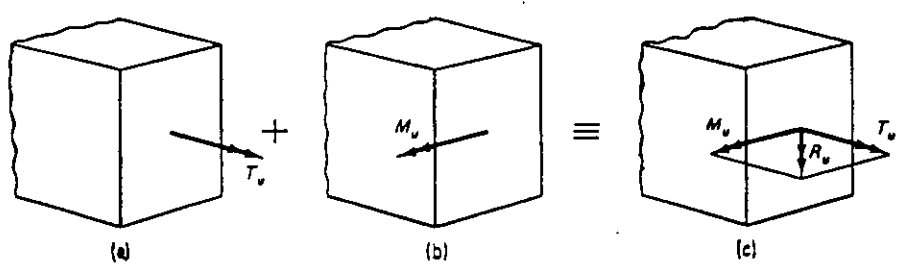


Fig. 7.11 Representación vectorial esquemática de la combinación de torsión con flexión: (a) Flexión; (b) Torsión; (c) Flexión y Torsión combinados

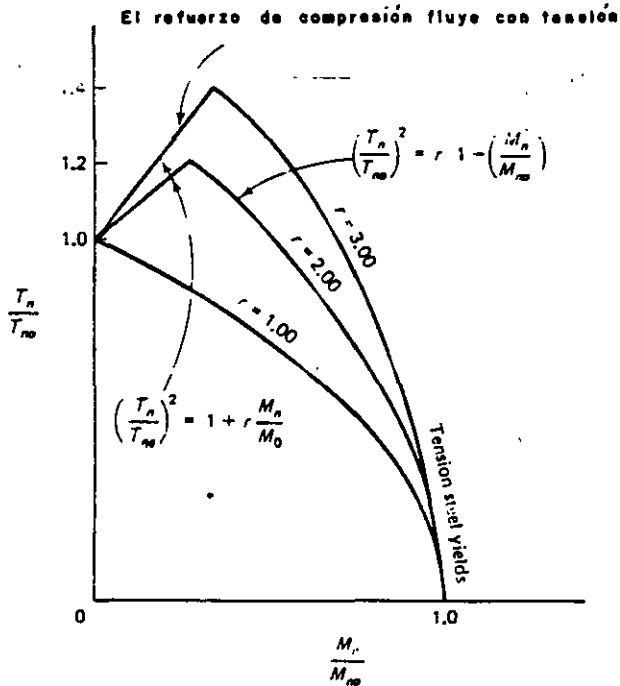


Fig. 7.12 Diagrama de interacción para combinación de torsión y flexión

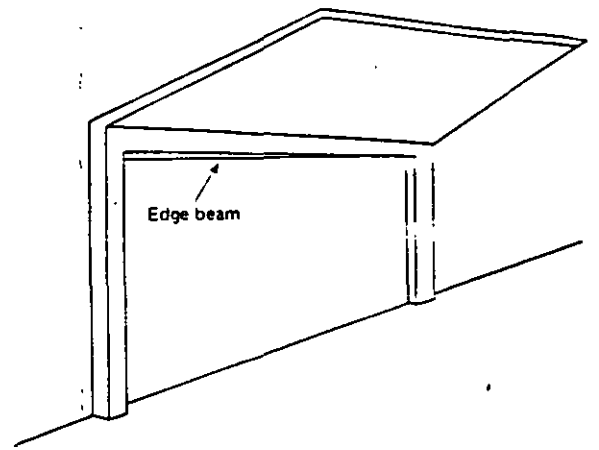
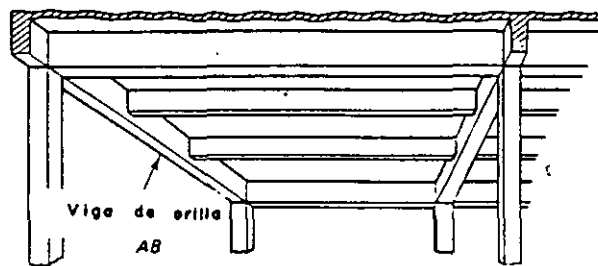
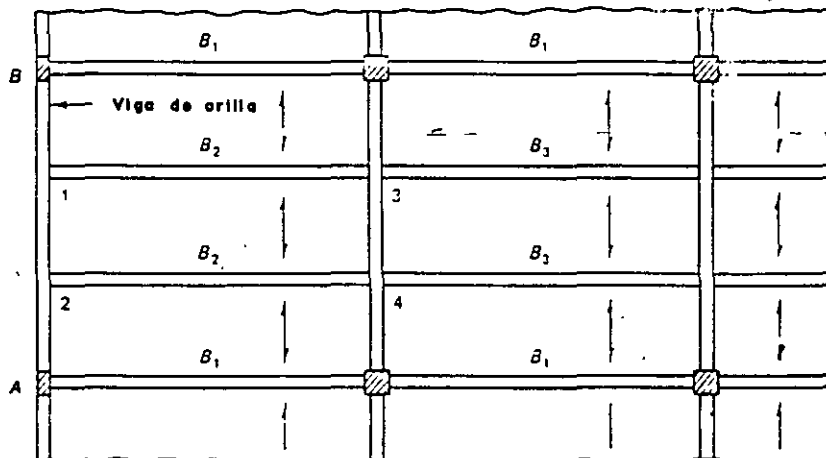


Fig. 7.13 No hay redistribución de la torsión (Torsión de equilibrio)



(a)



(b)

Fig. 7.14 Redistribución de la torsión (compatibilidad): (a) vista isométrica de un tablero de extremo; (b) Planta de un sistema típico de un sistema en un sentido.

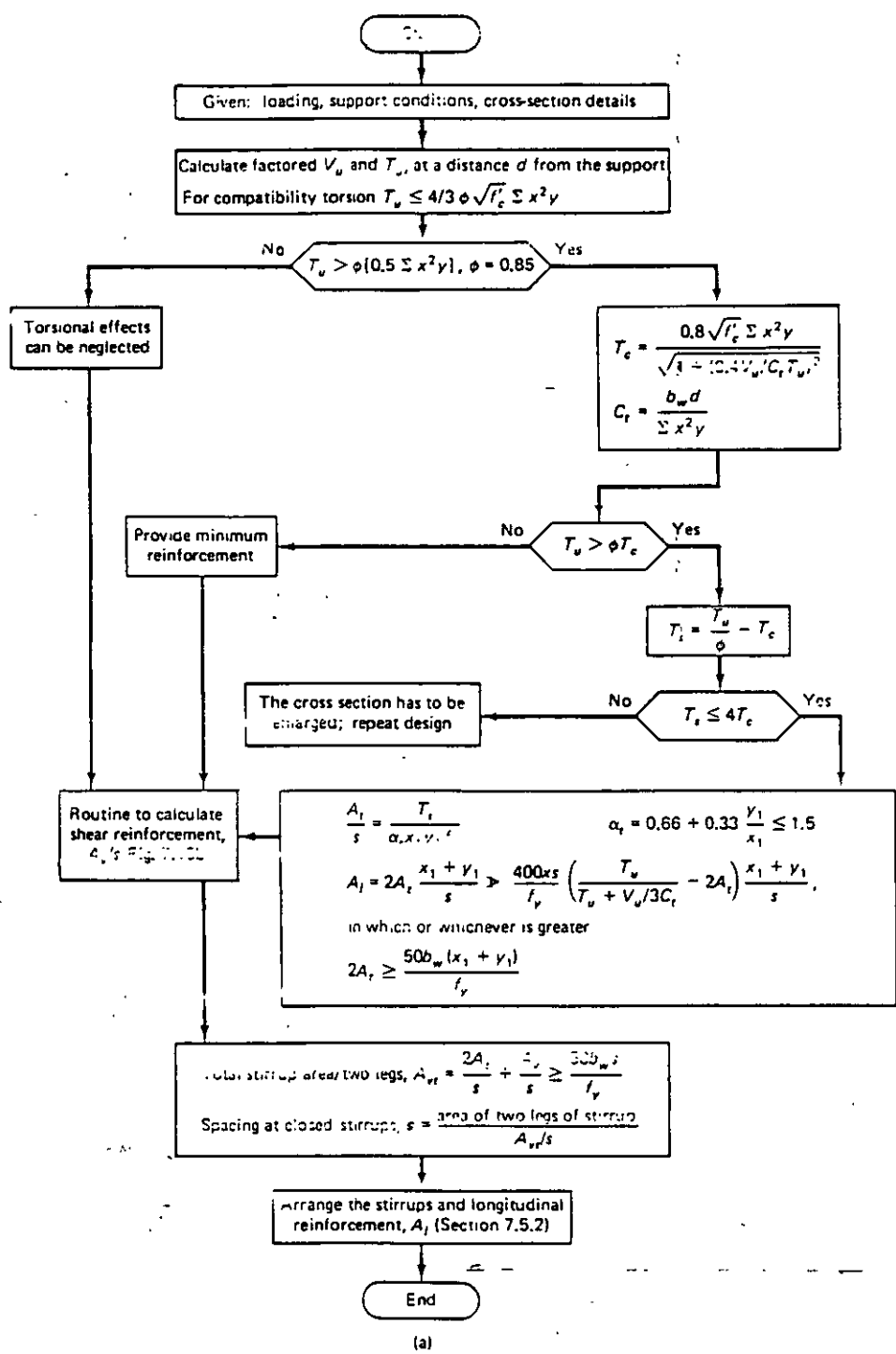


Fig. 7.15 Diagrama de flujo para diseñar el refuerzo para la combinación de cortante y torsión: (a) Acero torsional en el alma; (b) Acero para cortante en el alma.

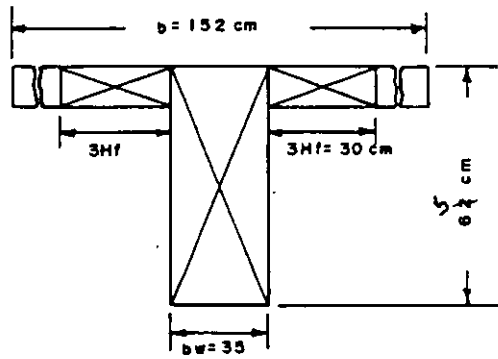
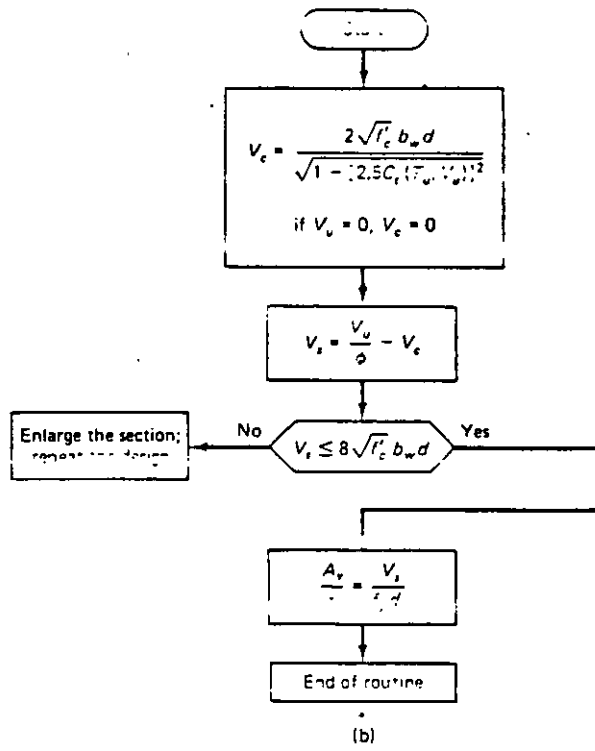


Fig. 7.16 Rectángulos componentes de una viga T.

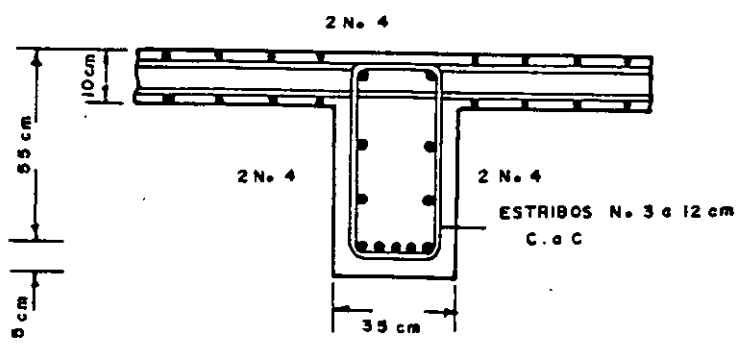


Fig. 7.17 Detalles del refuerzo en el alma, Ejemplo 7.1(a)



Photo 37 Simply supported beam prior to developing diagonal tension crack (load stage 11). (Test by Nagy et al.)



Photo 38 Principal diagonal tension crack at failure of beam in the preceding photograph (load stage 12).

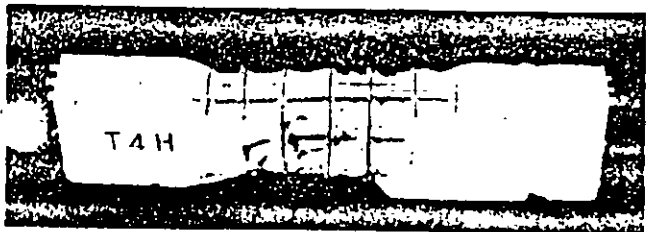


FOTO No 40 Viga de yeso reforzada en la falta de torsión pura

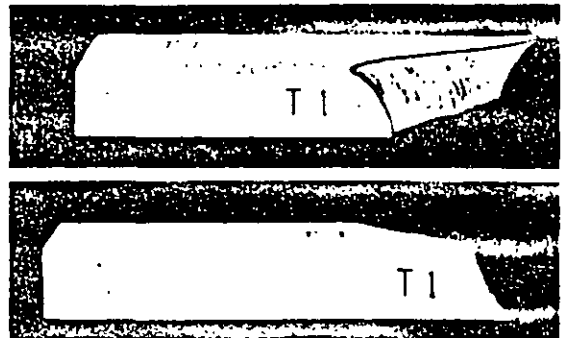


FOTO No 41 Viga de mortero simple en torsión pura (a) Vista superior ; (b) Vista inferior

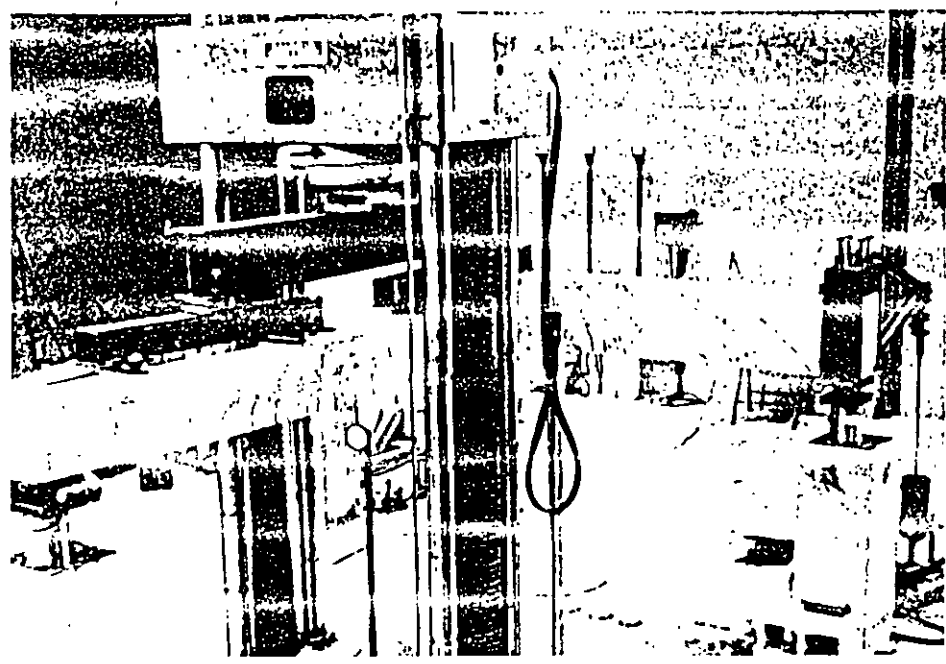


FOTO No 42 Viga de concreto reforzado en torsion pura. Disposición para el ensaye

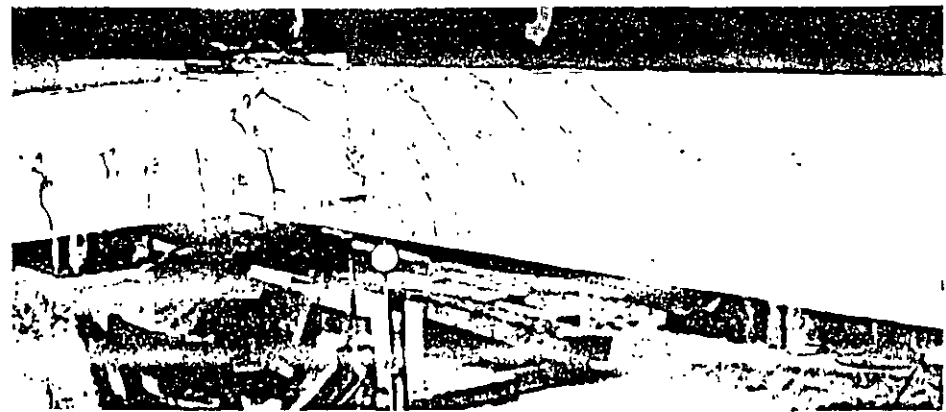


FOTO No 43 Acercamiento del agrietamiento por torsion de las vigas de la fotografía anterior

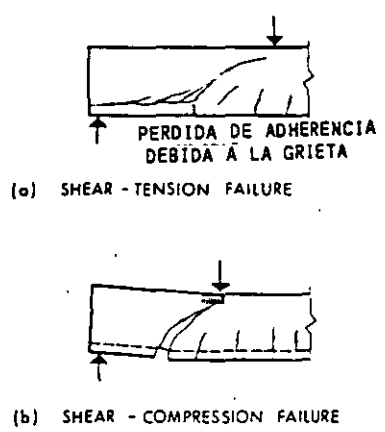
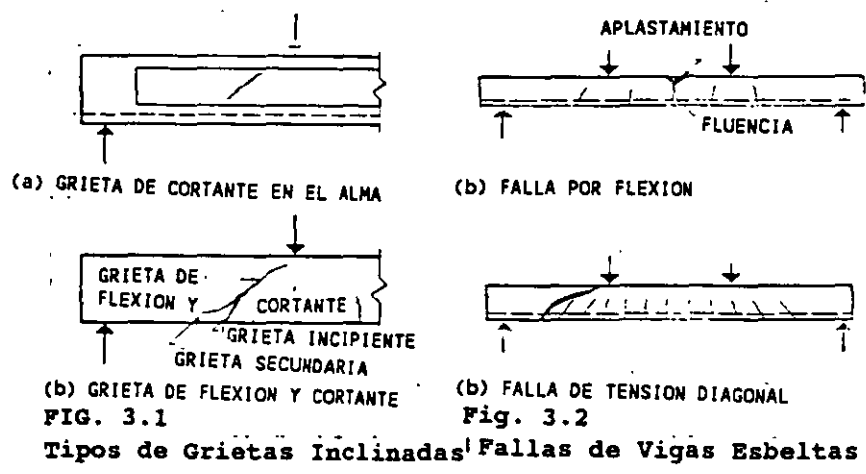


Fig. 3.3

Fallas Típicas de Cortante en las Vigas Cortas

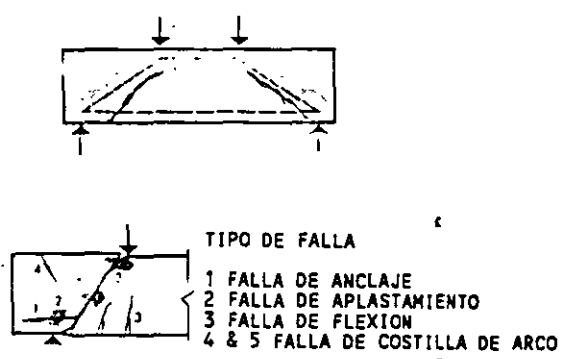


Fig. 3.4

Modelos de Falla de Vigas de Gran Peralte

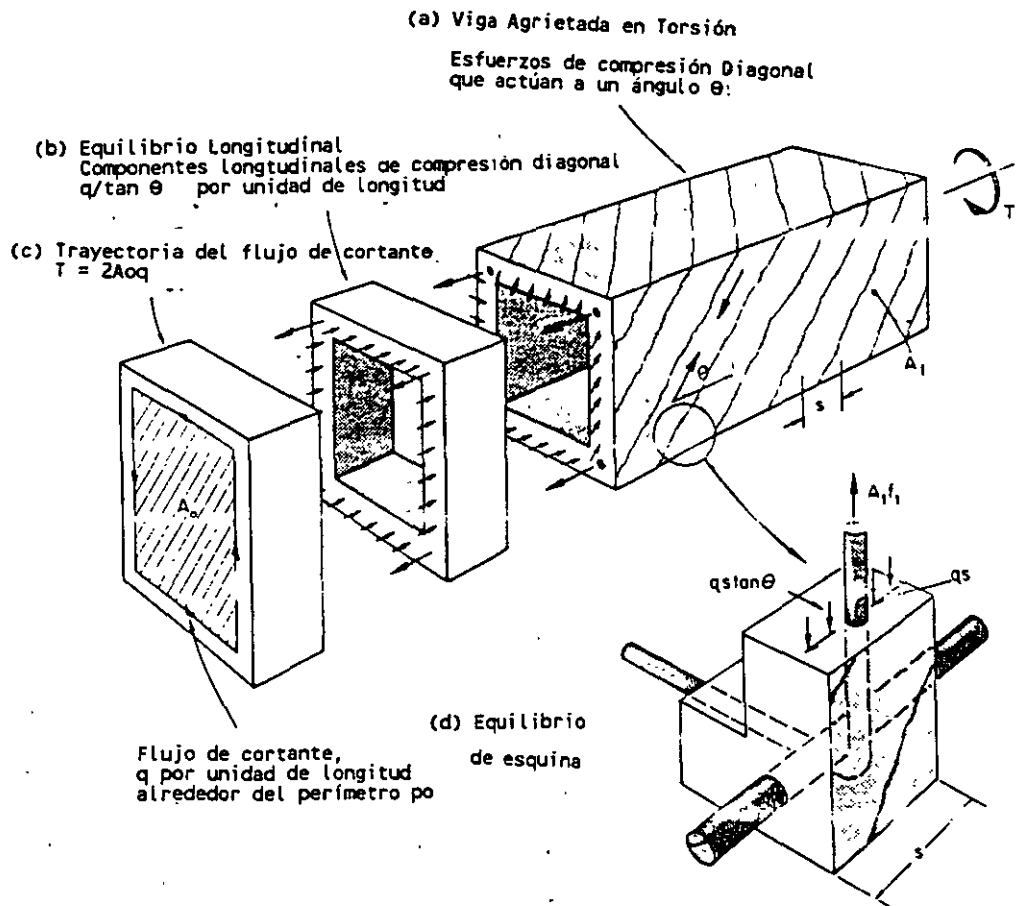
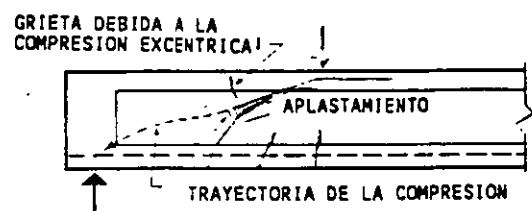
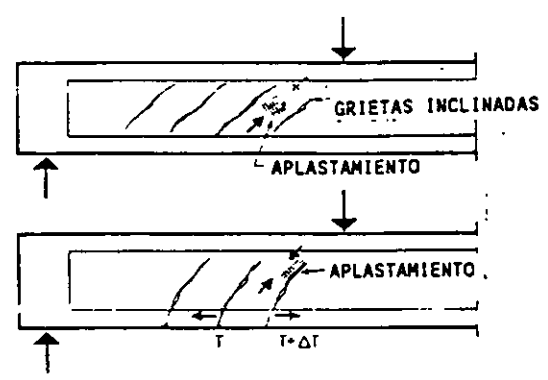


Fig. 3. Modelo de Armadura para Torsión que muestra las fuerzas que actúan en el elemento.





(a) ARCH-RIB FAILURE



(b) WEB-CRUSHING FAILURE

FIG. 3.5 Falla Típica de Cortante en las vigas I

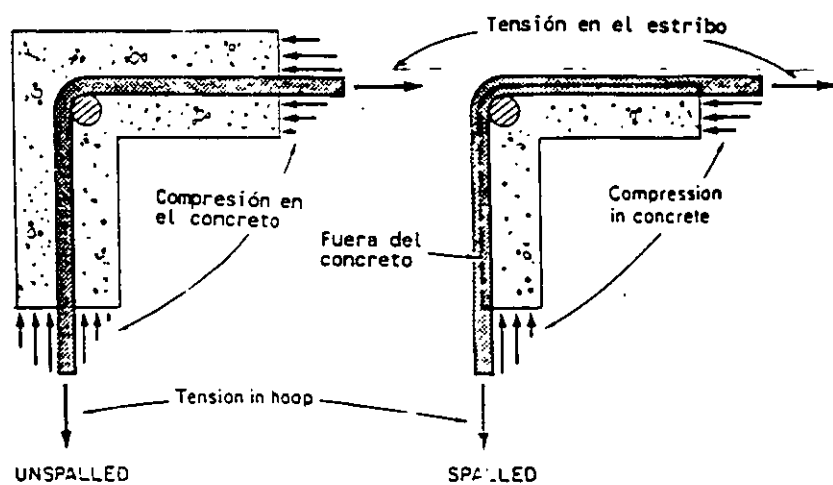


Fig. 4. Descascaramiento del recubrimiento del concreto debido a la torsión.

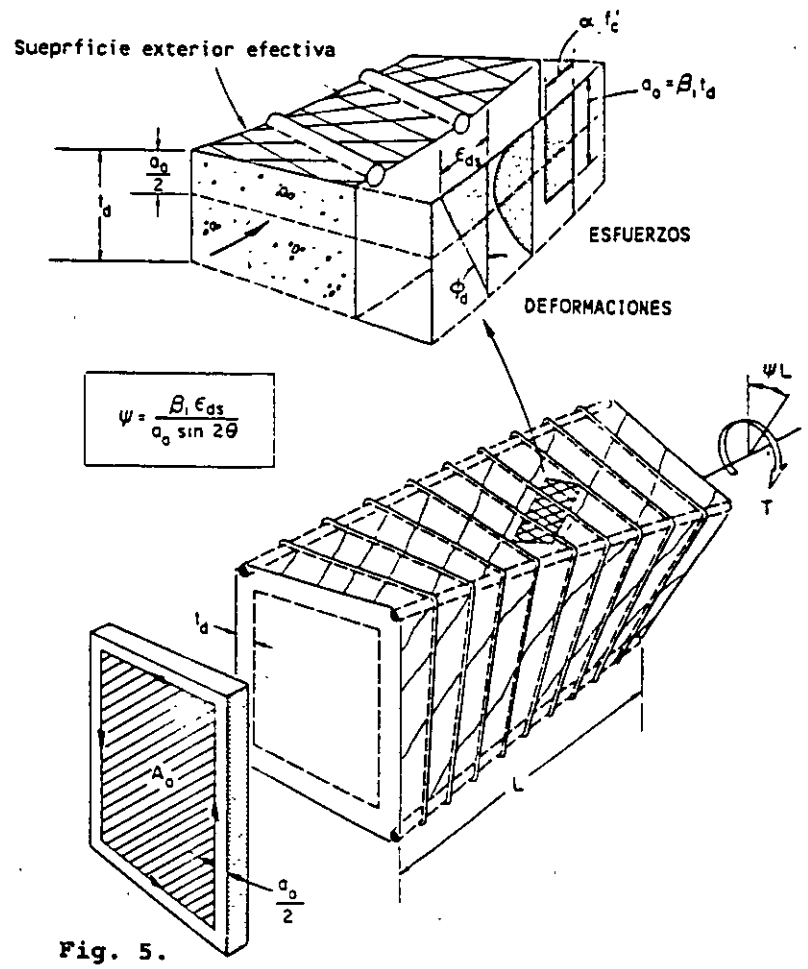


Fig. 5.  
Espesor efectivo de la pared de un miembro en torsión.

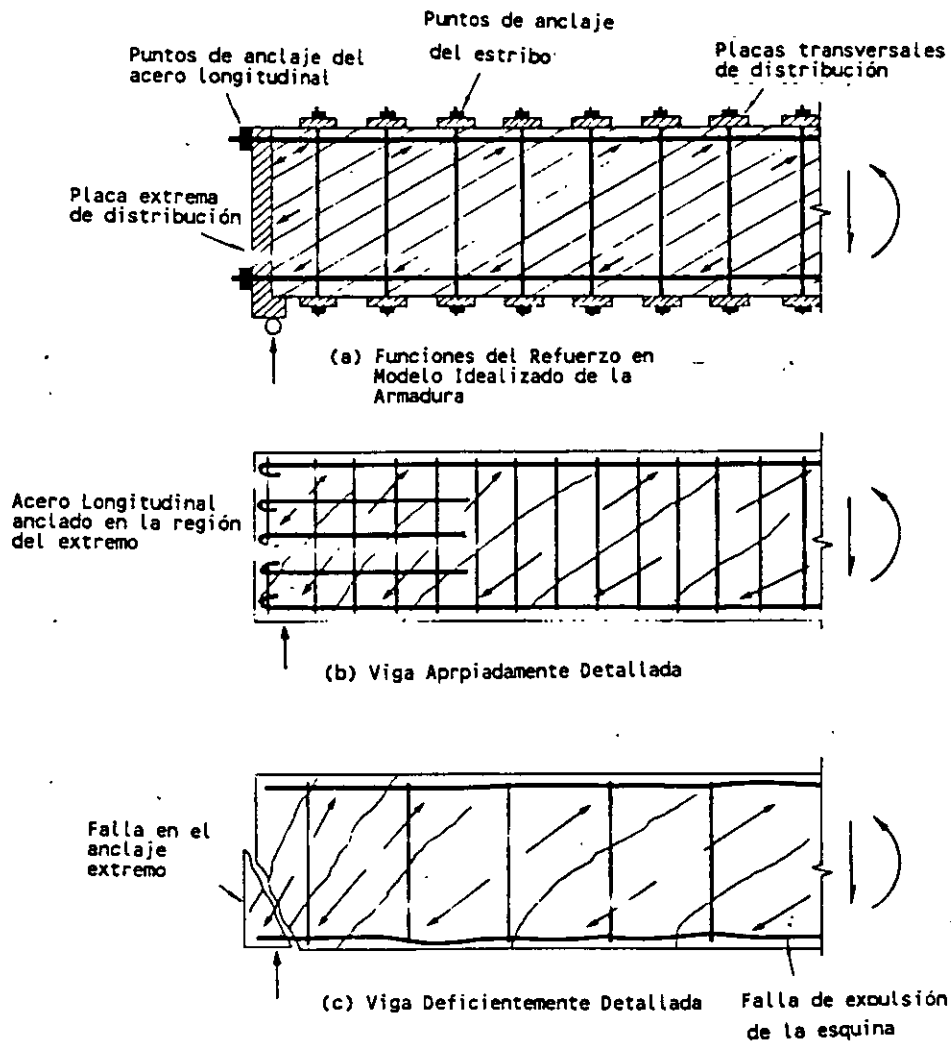


Fig. 18. Consideraciones de detallado para una viga sujeta a cortante y/o torsión.

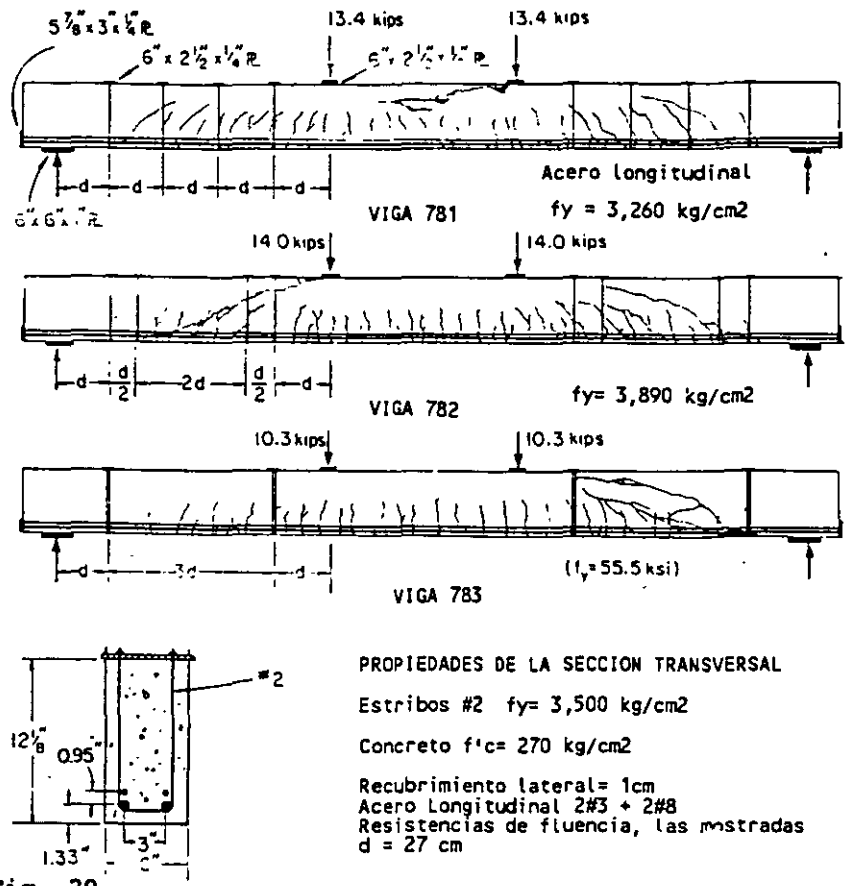


Fig. 20.  
 Tres vigas con separaciones grandes de los estribos.

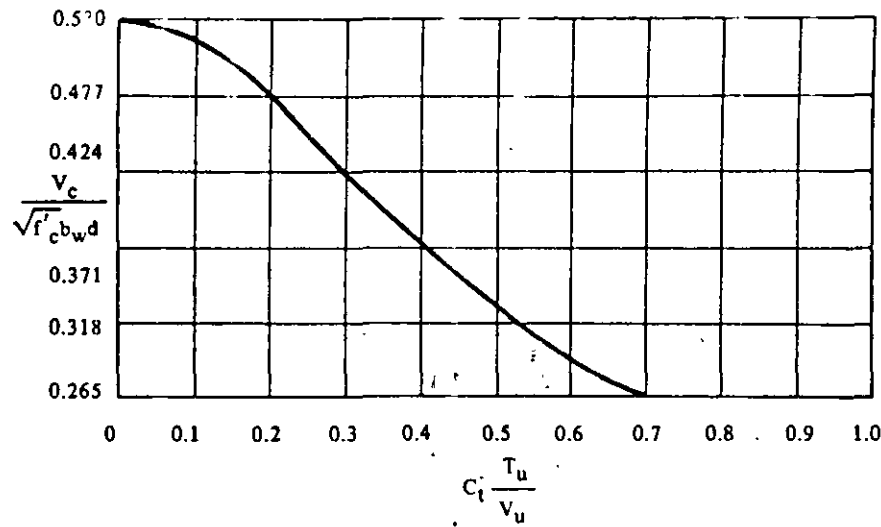


Fig. 13.6 Variación de  $V_c / \sqrt{f'_c} b_w d$  con la relación  $C_t T_u / V_u$ , según la ecuación 11.5.

En la figura 13.7 se ilustran diversos tipos de distribución del refuerzo por cortante, de acuerdo con las secciones 11.5.1.1 y 11.5.1.2.

11.5.5 Refuerzo mínimo por cortante

En general, todos los elementos de concreto sujetos a flexión deben tener una cantidad mínima de refuerzo por cortante, excepto para losas y zapatas, nervaduras y vigas anchas de poco peralte (sección 11.5.5.1). Para elementos no presforzados se calcula el refuerzo mínimo por cortante requerido a partir de:

$$A_v = 3.5 \frac{b_w s}{f_y} \quad \text{ecuación 11.14}$$

La esencia de la ecuación 11.14 consiste en que, cuando se utiliza el refuerzo mínimo por cortante, la resistencia total al cortante de una sección es  $V_c + 3.5 b_w d$ .

EJEMPLO 13.1 Diseño por cortante: Elementos sometidos solamente a cortante y flexión

Determinar el tamaño y la separación de los estribos verticales en U<sub>1</sub> para una viga simplemente apoyada, con un claro de 9.14 m.

$b_w = 33 \text{ cm}$

$f'_c = 211 \text{ kg/cm}^2$

$w_u = 6.7 \text{ ton/m.}$

$d = 51 \text{ cm}$

$f_y = 2810 \text{ kg/cm}^2$

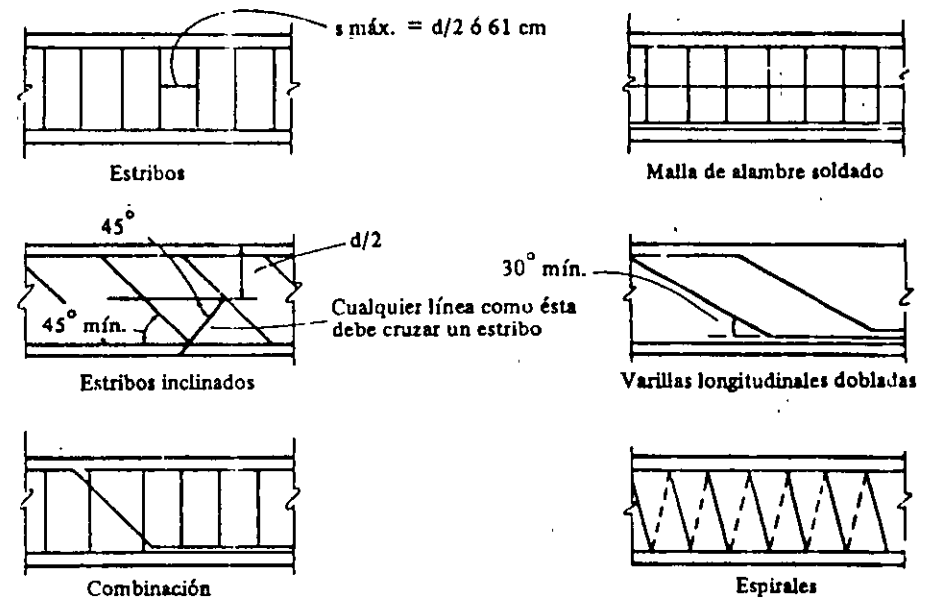


Fig. 13.7 Tipos y distribución del refuerzo por cortante.

Cálculo y análisis

Referencia en el Reglamento

Para este ejemplo, se supone que la carga viva está fija, de tal modo que el cortante de diseño en el centro del claro es igual a cero. (Se obtiene un cortante de diseño mayor que cero si se considera una carga viva parcial sobre el claro.)

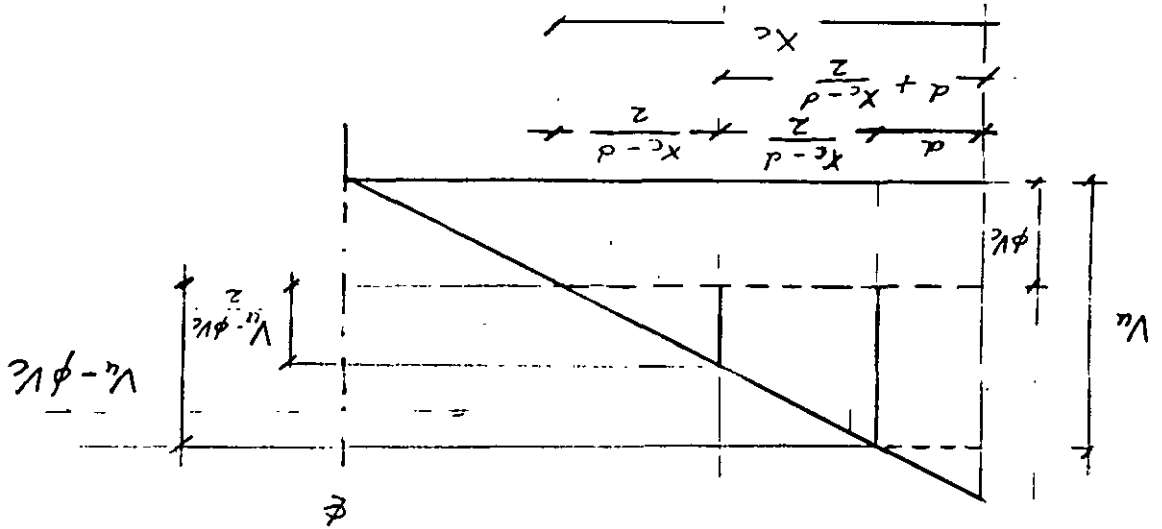
1. Determinar las fuerzas cortantes factorizadas @ apoyo:  $V_u = 6.7 \times 4.57 = 30.6 \text{ ton.}$   
 @ distancia  $d$  del apoyo:  $V_u = 30.6 - 6.7 \times 0.51 = 27.2 \text{ ton.}$  11.1.2.1

2. Determinar la resistencia al cortante proporcionada por el concreto.

$$\phi V_c = \phi 0.53 \sqrt{f'_c} b_w d \quad \text{ecuación 11.13}$$

$$= 0.85 \times 0.53 \sqrt{211} \times 33 \times 51 = 11\,013 = 11.01 \text{ ton}$$

44



En la misma forma se puede determinar  $X_M$

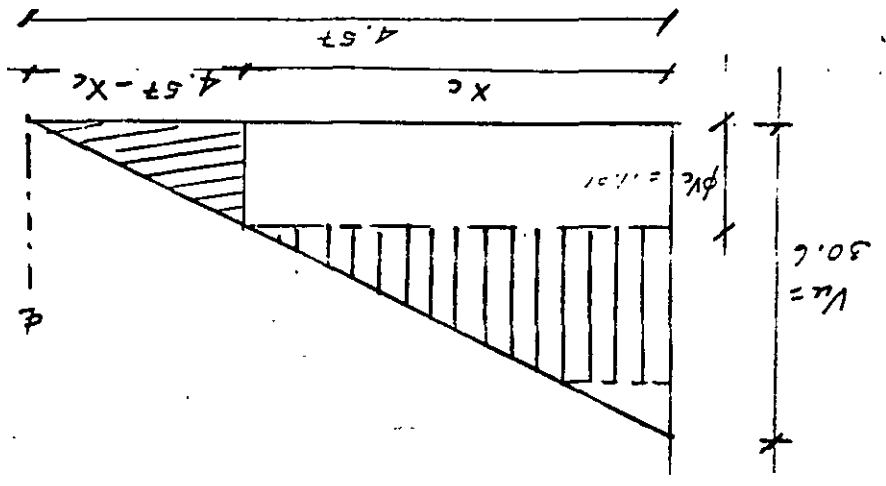
$$X_M = 4.57 \left( 1 - \frac{V_u}{\phi V_c / 2} \right) = 4.57 \left( 1 - \frac{30.6}{5.50} \right) = 3.75m$$

$$X_c = 4.57 \left( 1 - \frac{30.6}{11.01} \right) = 2.93m$$

$$4.57 - X_c = 4.57 \left( \frac{V_u}{\phi V_c} \right) ; 4.57 \left( 1 - \frac{V_u}{\phi V_c} \right) = X_c$$

$$\frac{4.57}{\phi V_c} = \frac{4.57}{4.57 - X_c} = \frac{V_u}{\phi V_c}$$

Por comparación de los semejantes:

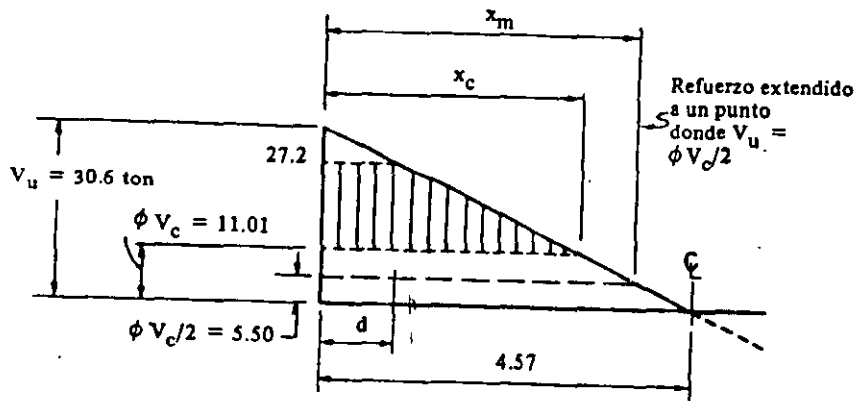


3. Determinar la distancia  $x_c$  desde el apoyo, más allá de la cual el concreto puede soportar el cortante total.

Del dibujo  $(4.57 - x_c)/4.57 = \phi V_c/V_u$  en el apoyo  
 $\therefore x_c = 4.57 [1 - (\phi V_c/V_u)] = 4.57 [1 - (11.01/30.6)] = 2.93 \text{ m}$

4. Determinar la distancia  $x_m$  desde el apoyo hasta donde sea preciso proporcionar refuerzo mínimo por cortante (es decir, hasta  $V_u = \phi V_c/2$ ). 11.5.5.1

$$x_m = 4.57 [(30.6 - 5.50)/30.6] = 3.75 \text{ m}$$



5/4

5. Determinar la separación requerida de los estribos en U.

$$s \text{ (requerida)} = \phi A_v f_y d / (V_u - \phi V_c)$$

Comentarios  
sección 11.5.6

Suponiendo estribos en U del #4 ( $A_v = 2.58 \text{ cm}^2$ ) apéndice F @ distancia  $d$  del apoyo:

$$s \text{ (requerida)} = 0.85 (2.58) 2.8 (51) / (27.2 - 11.01) = 19.4 \text{ cm}$$

Puesto que  $(V_u - \phi V_c)$  varía linealmente entre  $x = d$ ,  $x = x_c$  y la separación requerida varía inversamente con  $(V_u - \phi V_c)$ , la separación requerida en cualquier sección entre esos dos puntos se puede obtener directamente del valor  $s$  (requerido), correspondiente a  $x = d$ . Por ejemplo, en la sección:

$$x = d + [(x_c - d)/2] = 1.72 \text{ m del apoyo}$$

$$s \text{ (requerida)} = 19.4/0.5 = 38.8 \text{ cm}$$

6. Verificar la separación máxima permisible de los estribos.

$$s \text{ (máx)} \text{ de los estribos verticales} < d/2 = 25.5 \text{ cm} \quad 11.5.4.1$$

$$\text{o también } < 61 \text{ cm}$$

$s \text{ (máx)}$  de los estribos en U del #4 correspondiente a los requerimientos mínimos de áreas de refuerzo

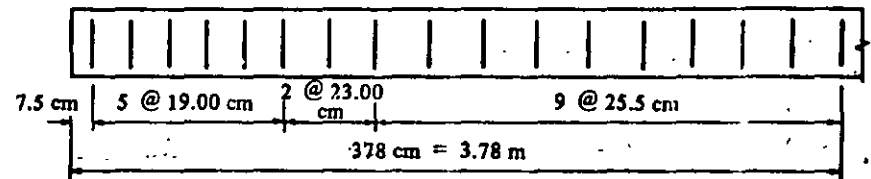
$$s \text{ (máx)} = A_v f_y / 3.5 b_w = 2.58 (2810) / 3.5 \times 33 \quad \text{ecuación 11.14}$$

$$= 63 \text{ cm}$$

$$\therefore s \text{ (max)} = 25.5 \text{ cm}$$

Resumen

Separación de los estribos utilizando estribos en U del #4:



6 estribos @ 19.00 cm

2 estribos @ 23.00 cm

9 estribos @ 25.5 cm

EJEMPLO 13.2 Diseño por cortante con tensión axial

Determinar la separación que se requiere para estribos verticales en U, para una viga sometida a tensión axial.

$$f'_c = 253 \text{ kg/cm}^2 \text{ (concreto ligero con arena; no se especifica } f_{ct})$$

$$f_y = 2810 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_d = 6.01 \text{ ton-m}$$

$$M_q = 4.42 \text{ ton-m}$$



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**CURSOS ABIERTOS**

***DIPLOMADO GENERAL EN PROYECTO Y  
CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS***

***DIPLOMADO EN PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN DE  
ESTRUCTURAS DE CONCRETO***

**MODULO III**

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO**

**TEMA**

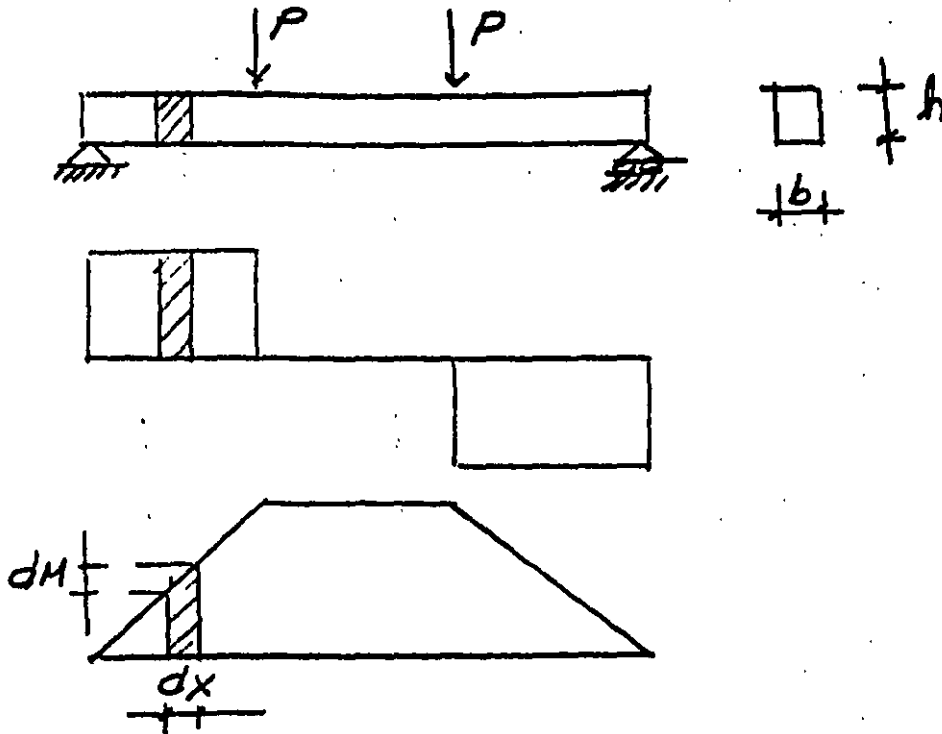
**CORTANTE**

**M. en I. VÍCTOR M. PAVÓN RODRÍGUEZ  
PALACIO DE MINERÍA  
AGOSTO DE 1998**

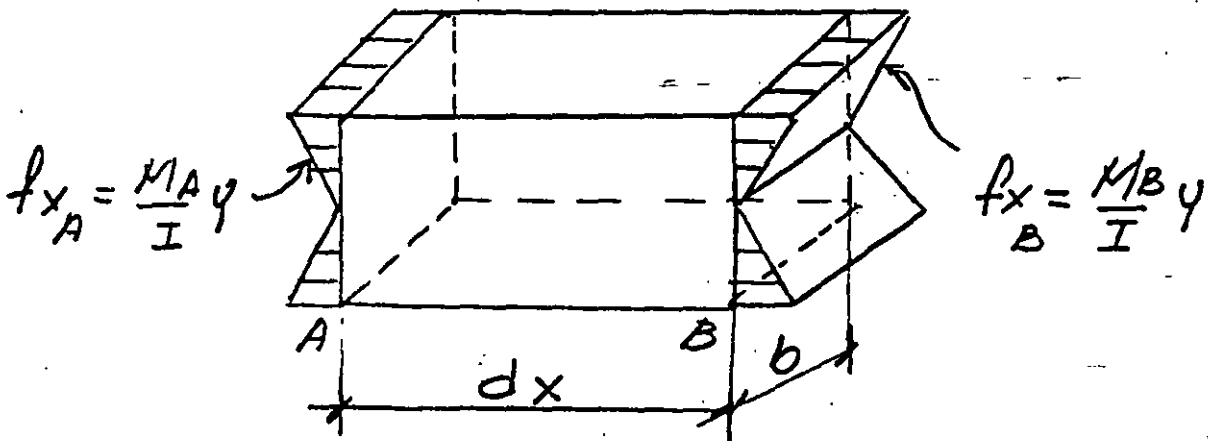


V.- CORTANTE .

1.- COMPORTAMIENTO ELASTICO



$M$  (shaded element)  $M + dM = M + P dx$   
 A | | B



$$U_{yx} = U_{xy} = \frac{VQ}{Ib}$$

$$V_{eff} = \frac{dP}{dM} = V$$

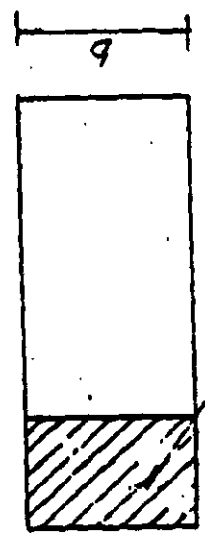
$$U_{yx} = \frac{dP}{dM} = \frac{dP}{dM} \cdot \frac{dM}{dP} = \frac{dM}{dP} \cdot \frac{dP}{dM}$$

$$dP = F_B - F_A = \frac{MA + dM}{Q} - \frac{MA}{Q} = \frac{dM}{Q}$$

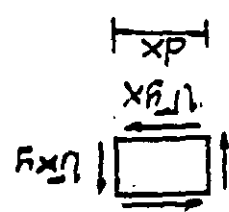
$$F_B = \frac{I}{MA + dM}$$

$$M_B = MA + dM$$

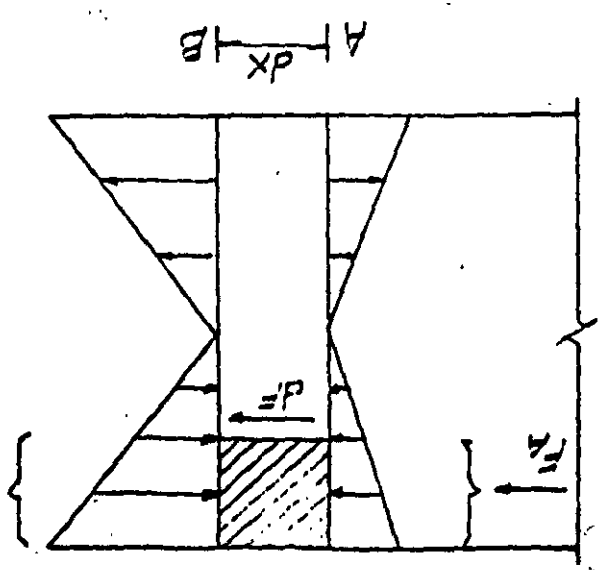
$$F_A = \int_{A_0}^{A_1} f_x dA = \int_{A_0}^{A_1} \frac{MA}{I} y dA = \frac{MA}{I} \int_{A_0}^{A_1} y dA = \frac{MA}{I} Q$$



$$U_{yx} = \frac{dP}{b dx}$$

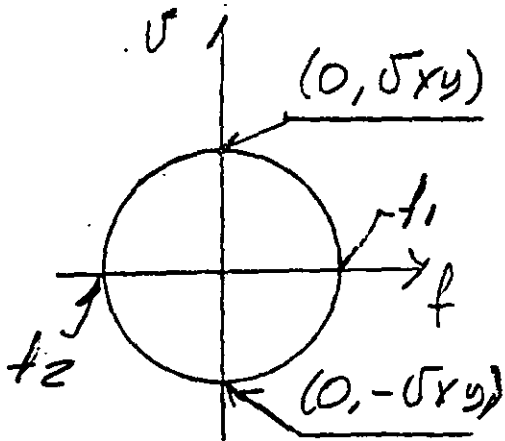
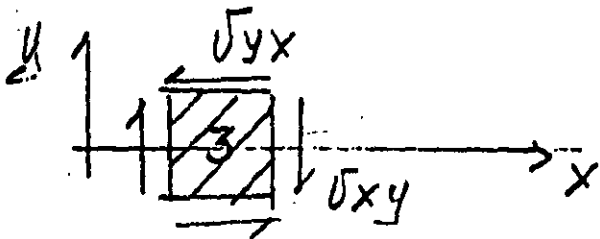
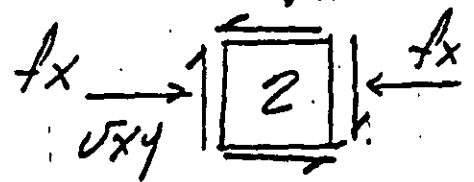
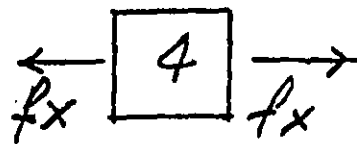
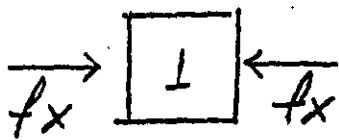
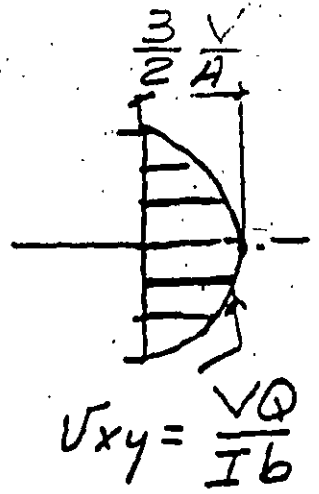
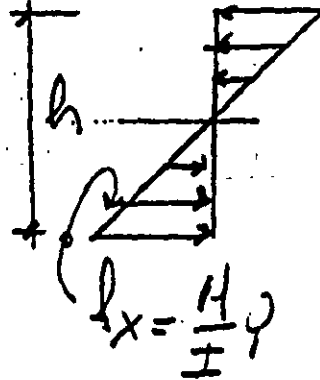
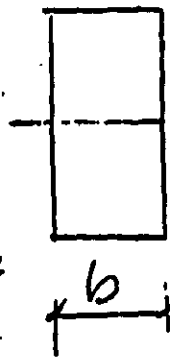
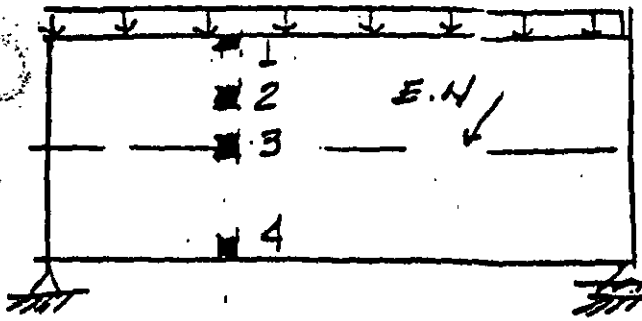


$$F_B = F_A + dP$$

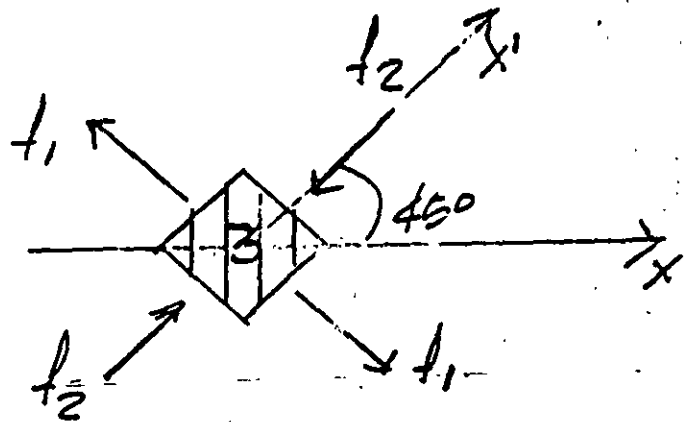


→ = = = =

ESFUERZOS PRINCIPALES:

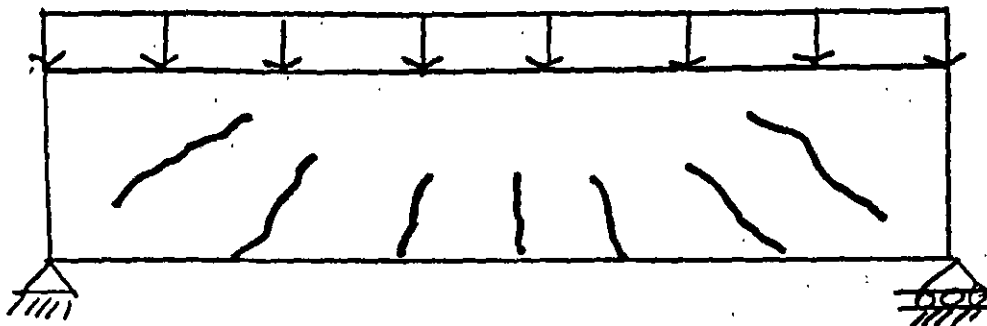
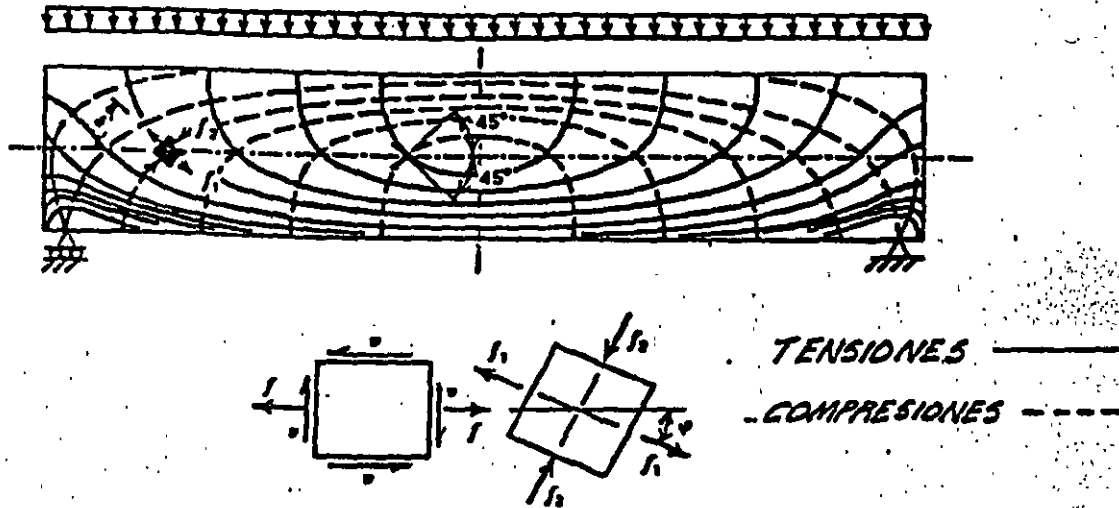


CIRCULO DE MOHR



$\sigma_1$  .- TENSION MAXIMA (DIAGONAL)

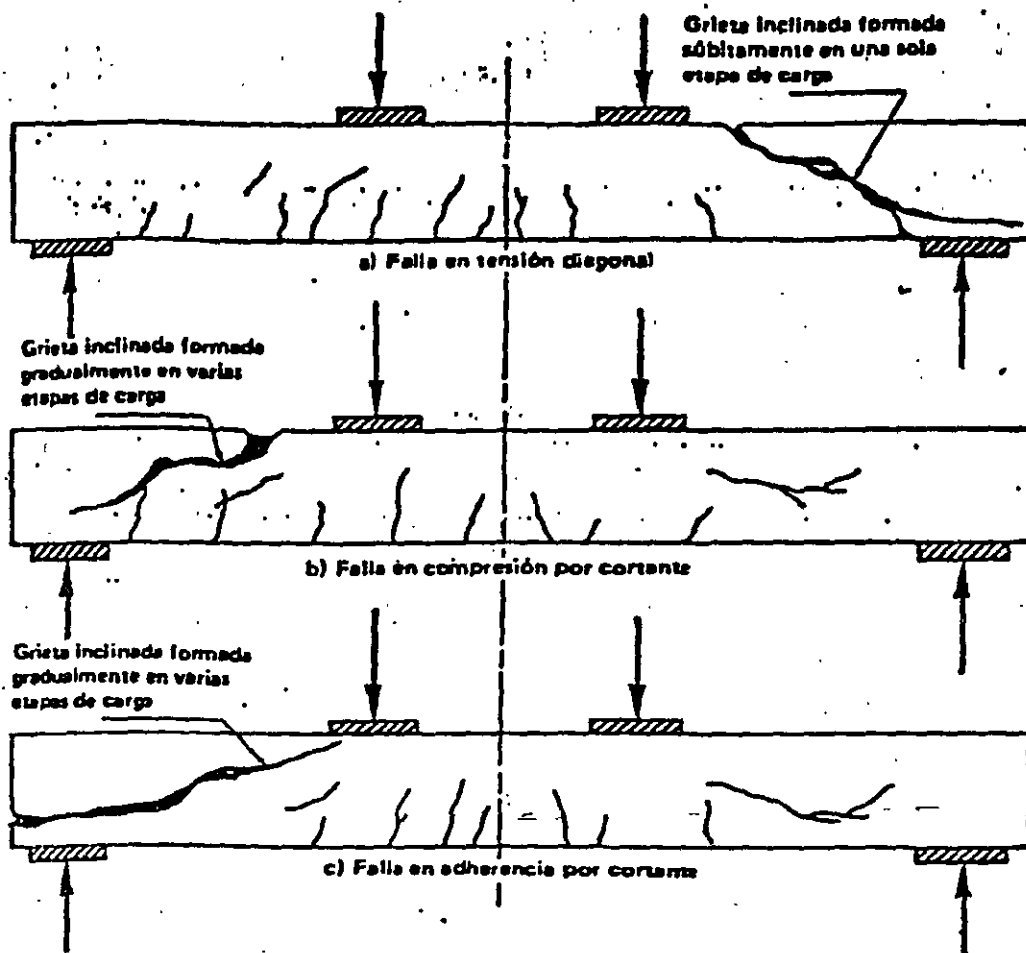
## TRAYECTORIAS DE ESFUERZOS PRINCIPALES



VIGA DE CONCRETO SIMPLE

LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS CAMBIA APRECIABLEMENTE SI SE EXCEDEN LAS TENSIONES QUE PUEDE SOPORTAR EL CONCRETO Y APARECEN LAS PRIMERAS GRIETAS. POR LO TANTO, A PARTIR DE ESTE MOMENTO NO ES POSIBLE PREDECIR SU COMPORTAMIENTO BAJO LAS HIPOTESIS DE MATERIAL ELASTICO Y HOMOGENEO.

## 2.- MODOS DE FALLA EN TRABES SIN REFUERZO TRANSVERSAL



## EFFECTOS DE LA GRIETA DIAGONAL.

- A) REDUCE LA ZONA DISPOBIBLE PARA TOMAR COMPRESIONES PARA FLEXION.
- B) AUMENTA SUBITAMENTE LA TENSION EN EL REFUERZO.
- C) REDUCE EL AREA DISPONIBLE PARA TOMAR CORTANTE.

## 3.- MIEMBROS CON REFUERZO TRANSVERSAL.

- A) ANTES DEL AGRIETAMIENTO DIAGONAL, EL COMPORTAMIENTO ES PRACTICAMENTE EL MISMO CON O SIN REFUERZO TRANSVERSAL.
- B) AL APARECER LAS GRIETAS, EL REFUERZO TRANSVERSAL SE DEFORMA HASTA ALCANZAR SU LIMITE DE FLUENCIA, PARA EVITAR ANCHOS EXCESIVOS DE GRIETAS LOS REGLAMENTS LIMITAN EL  $F_y$  DEL REFUERZO A  $4200 \text{ Kg/cm}^2$ .
- C) SI LOS ESTRIBOS SON VERTICALES Y CERRADOS, EL CONFINAMIENTO DEL CONCRETO MEJORA LA DUCTILIDAD DEL ELEMENTO Y LA ADHERENCIA DEL REFUERZO.

4.- CALCULO DE LA RESISTENCIA.

A) CONTRIBUCION DEL CONCRETO ( $V_c$ ).

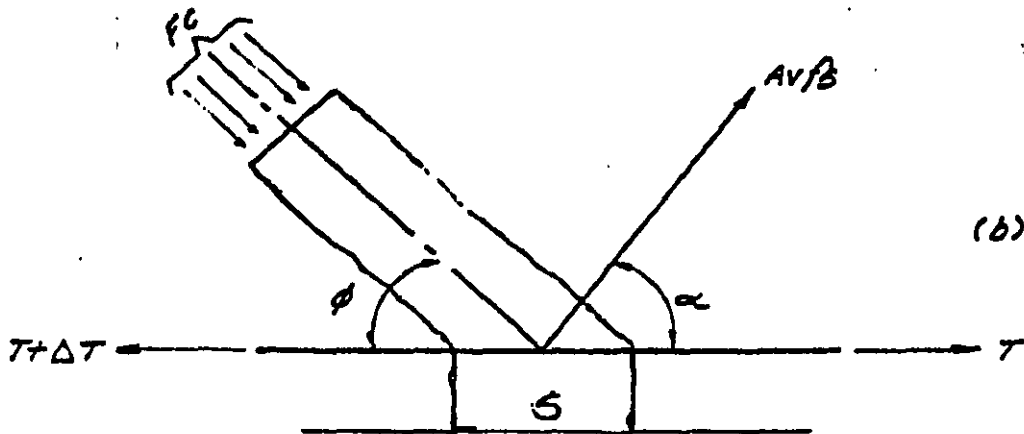
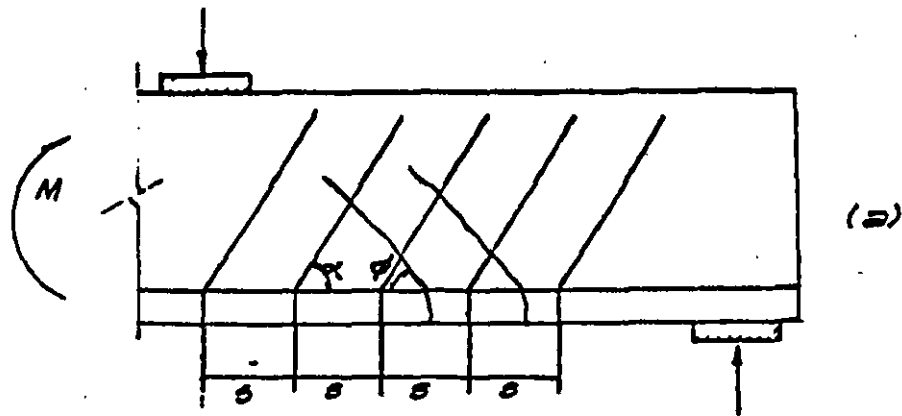
SE CONSIDERA QUE LA FUERZA CORTANTE QUE RESISTE - EL CONCRETO ES IGUAL A LA CARGA DE AGRIETAMIENTO-INCLINADO; Y ESTA ES FUNCION DE LA RESISTENCIA EN TENSION DEL CONCRETO, QUE A SU VEZ ES PROPORCIONAL A LA RAIZ CUADRADA DE SU RESISTENCIA EN COMPRESION.

POR TANTO:

$$V_c = K \sqrt{F'_c}$$

E) CONTRIBUCION DEL REFUERZO TRANSVERSAL. ( $V_s$ )

ANALOGIA DE LA ARMADURA



$$\sum F_y = 0; AV/s \text{ SEN } \alpha = FC \text{ SEN } \phi;$$

$$FC = \frac{AV/s \text{ SEN } \alpha}{\text{SEN } \phi}$$

$$\sum F_h = 0; \Delta T = AV/s \text{ COS } \alpha + FC \text{ COS } \phi$$

$$\Delta T = \frac{\Delta M}{z} = \frac{V_s}{z}$$

$$\Delta M = \frac{V \Delta x}{s}$$

$$\frac{V_s}{z} = AV/s \left( \text{COS } \alpha + \frac{\text{SEN } \alpha}{\text{TAN } \phi} \right)$$

$$V = \frac{AV/s z}{s} \left( \text{COS } \alpha + \frac{\text{SEN } \alpha}{\text{TAN } \phi} \right) \text{ si } \phi = 45^\circ$$

$$V = \frac{AV/s z}{s} (\text{SEN } \alpha + \text{COS } \alpha) \text{ si } f_s = f_y \text{ y } z = d$$

$$V_s = \frac{AV f_y d}{s} (\text{SEN } \alpha + \text{COS } \alpha)$$



5.- REGLAMENTO . D. F. 1987.  
 REVISION DEL ESTADO LIMITE DE FALLA POR CORTANTE

$$V_R \geq V_C + V_S$$

$$V_R \geq V_U$$

5.1 FUERZA CORTANTE ULTIMA ACTUANTE  $V_U$ .

A) FACTORES DE CARGA

$$V_U = F.C. V$$

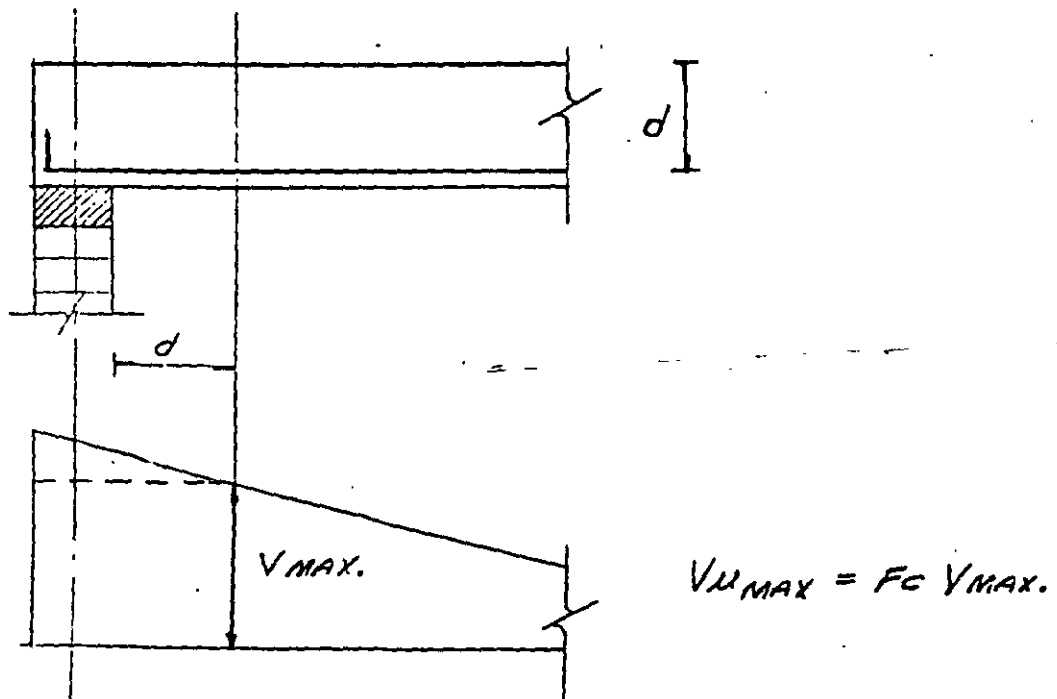
$$V_U = 1.4 (V_{CM} + V_{CV})$$

$$V_U = 1.5 (V_{CM} + V_{CV}) \longrightarrow \text{GRUPO A}$$

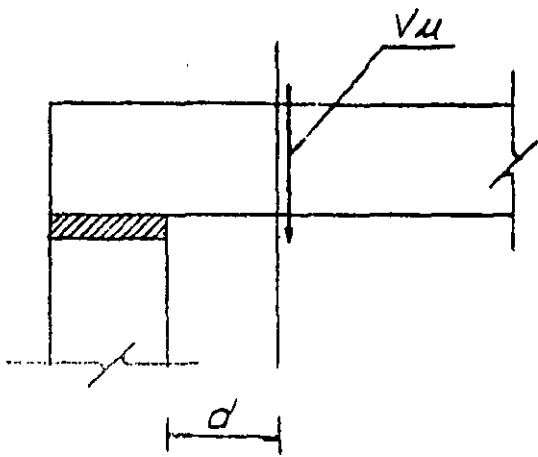
$$V_U = 1.1 (V_{CM} + V_{CV} + V_{CA})$$

B) FUERZA CORTANTE MAXIMA.

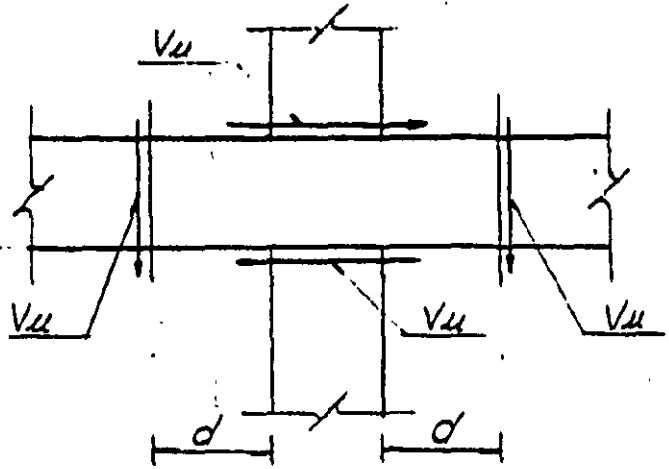
DETERMINACION DE  $V_{U \text{ MAX.}}$



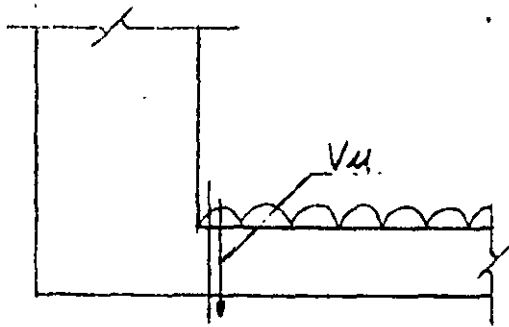
SOLO SI LAS CARGAS COMPAENEN DIRECTAMENTE  
 A LA VIGA



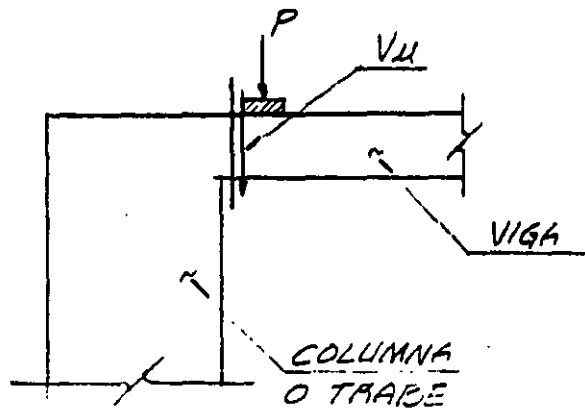
APOYO SIMPLE



NUDO MONOLITICO



LOSA APOYADA EN LECHO  
BAJO DE TRASE



CARGA CONCENTRADA

## 5.2 DETERMINACION DE $V_c$ .

A) SON APLICABLES LAS DISPOSICIONES PARA VIGAS EN QUE PREDOMINA LA FLEXION SI  $L/h > 5$ .

EN ESTE CASO:

$$V_c = V_{CR} \begin{cases} F_R (0.2 + 30 p) \sqrt{f^*c} \, bd & (\text{si } p \leq 0.01) \\ F_R (0.5) \sqrt{f^*c} \, bd & (\text{si } p > 0.01) \end{cases}$$

DONDE:  $p = \frac{A_s}{bd}$

$$y \, F_R = \begin{cases} 0.8 & (Q \leq 2) \\ 0.6 & (Q > 2) \end{cases}$$

B) RELACION PERALTE/ANCHO.

$$\text{si } \left\{ \begin{array}{l} h/b \leq 6 \\ h \leq 70 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow V_c = V_{CR}$$

$$\text{Si } h/b > 6 \quad V_c = 0.7 V_{CR}$$

$$\text{Si } h > 70 \text{ cm} \quad V_c = 0.7 V_{CR}$$

$$\text{si } \left\{ \begin{array}{l} h/b > 6 \\ h > 70 \text{ cm} \end{array} \right\} \quad V_c = 0.49 V_{CR}$$

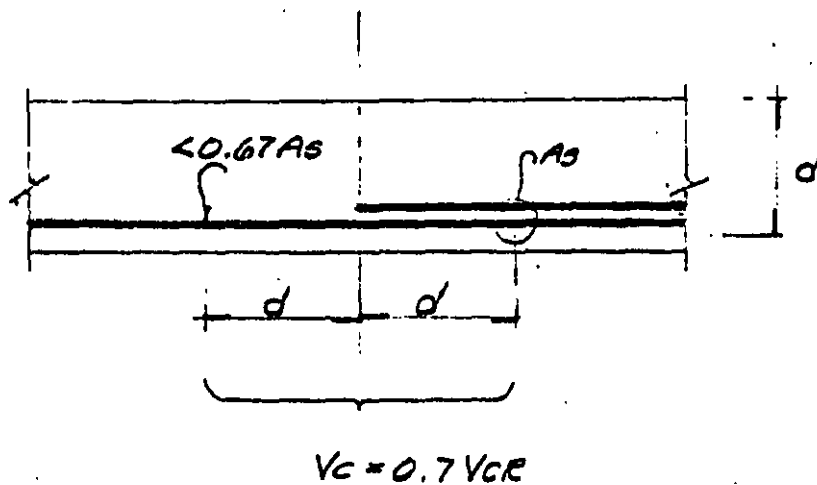
C) CONSIDERACION DE LA RELACION M/V

Si  $L/h < 4$

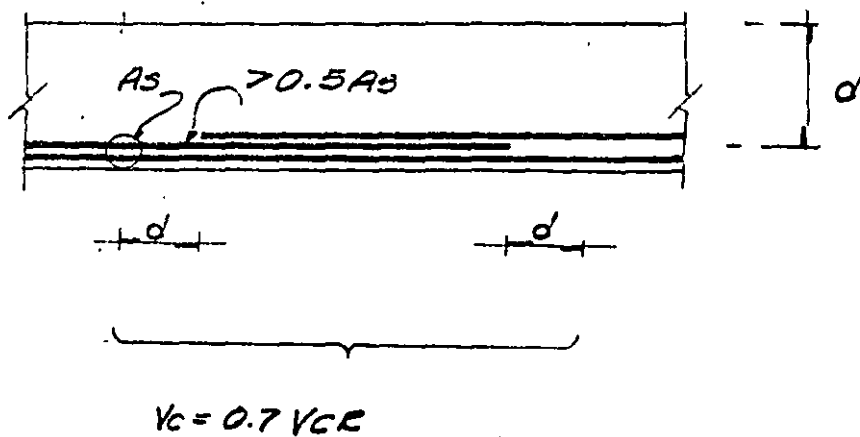
$$V_c = (3.5 - 2.5 \frac{M}{vd}) V_{CR}$$

PERO NO MAYOR QUE  $1.5 F_{Rbd} \sqrt{f^*c}$

D) INTERRUPCION DEL REFUERZO LONGITUDINAL



E) TRASLAPES DEL REFUERZO LONGITUDINAL



F) CORTANTE Y CARGA AXIAL

$$V_c = K V_{CR}$$

DONDE

$$K = 1 + 0.007 \frac{(P_u)}{A_c} \quad \text{COMPRESION}$$

$$K = 1 - 0.03 \frac{(P_u)}{A_c} \quad \text{TENSION}$$

G) ELEMENTOS ANCHOS

LOSAS, ZAPATAS Y MUROS

$$\text{SI } \left\{ \begin{array}{l} b \geq 4d \\ \frac{M}{vd} < 2 \end{array} \right\} \Rightarrow V_c = 0.5 FRbd \sqrt{f^*c}$$

INDEPENDIEMENTE DE P

EN CASO QUE NO SE CUMPLA ALGUNA DE LAS DOS CONDICIONES.

$$V_c = V_{CR}$$

### 5.3 CONTRIBUCION DEL REFUERZO TRANSVERSAL

si  $V_u > V_c$

#### A) ESTRIBOS VERTICALES

$$V_s = \frac{F_R A_v f_y d}{S}$$

$$S = \frac{F_R A_v f_y d}{V_u - V_c} \leq \frac{F_R A_v f_y}{3.5b}$$

#### B) ESTRIBOS INCLINADOS

$$S = \frac{F_R A_v f_y d}{V_u - V_c} (\sin\alpha + \cos\alpha) \leq \frac{F_R A_v f_y}{3.5 b}$$

#### C) VALOR MAXIMO DE $V_u$ .

$$V_u \leq 2 F_R b d \sqrt{f^*c}$$

#### D) SEPARACION MAXIMA EN FUNCION DE $V_u$ .

$$\text{Si } V_u > V_c \quad \text{PERO } < 1.5 F_R b d \sqrt{f^*c}$$

$$SEP_{MAX} = 0.5 d$$

$$\text{Si } V_u > 1.5 F_R b d \sqrt{f^*c} \quad \text{PERO } < 2 F_R b d \sqrt{f^*c}$$

$$SEP_{MAX} = 0.25d$$

E) SEPARACION MAXIMA EN FUNCION DE Q.

$$s = 0.25 d \quad \text{si} \quad (Q > 2)$$

$$s = 0.5 d \quad \text{si} \quad (Q \leq 2)$$

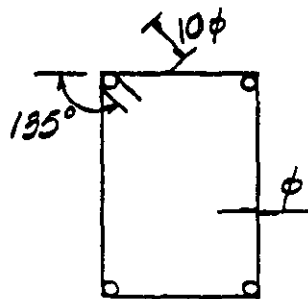
F) CARACTERISTICAS DEL REFUERZO DE ESTRIBOS

VIGAS PRINCIPALES

-  $f_y \leq 4200 \text{ Kg/cm}^2$

-  $\phi_{\text{mín}} = 6.3 \text{ mm} (1/4" \text{ o } \#2)$

- ANCLADOS  $10 \phi$  DESPUES DE UN DOBLEZ A  $135^\circ$  SOBRE UNA VARILLA DE ESQUINA DEL REFUERZO LONGITUDINAL.



ESTRIBOS INCLINADOS  $\alpha \geq 45^\circ$

BARRAS INCLINADAS  $\alpha \geq 30^\circ$

E) SEPARACION MAXIMA EN FUNCION DE Q.

$$s = 0.25 d \quad \text{SI} \quad (Q > 2)$$

$$s = 0.5 d \quad \text{SI} \quad (Q \leq 2)$$

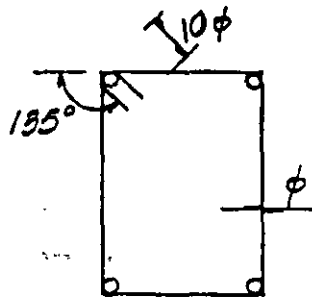
F) CARACTERISTICAS DEL REFUERZO DE ESTRIBOS

VIGAS PRINCIPALES

-  $f_y \leq 4200 \text{ Kg/cm}^2$

-  $\phi \text{ m\u00edn} = 6.3 \text{ mm} (1/4" \text{ o } \#2)$

- ANCLADOS  $10 \phi$  DESPUES DE UN DOBLEZ A  $135^\circ$  SOBRE UNA VARILLA DE ESQUINA DEL REFUERZO LONGITUDINAL.

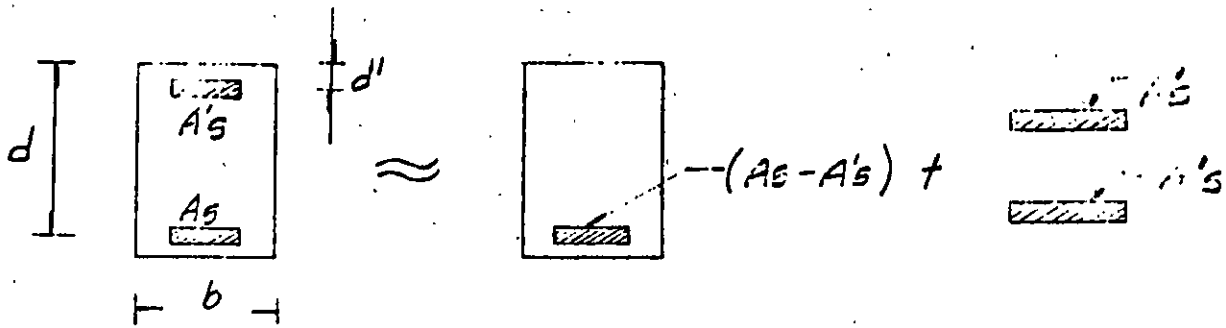


ESTRIBOS INCLINADOS  $\alpha \geq 45^\circ$

BARRAS INCLINADAS  $\alpha \geq 30^\circ$



B) SECCION RECTANGULAR CON ACERO DE COMPRESION



$$M_R = F_R \left[ (A_s - A_s') f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) + A_s' f_y (d - d') \right]$$

de  $C = T$

$$abf''c + A_s' f_y = A_s f_y$$

$$a = \frac{(A_s - A_s') f_y}{bf''c}$$

SOLO SI

$$(p - p') \geq \frac{4500}{6000 - f_y} \frac{d'}{d} \frac{f''c}{f_y}$$

CONDICION QUE IMPLICA QUE EL ACERO FLUYE EN TENSION Y COMPRESION.

$$V_{c2} = 5721.11 \times 0.7 = 4004.78 \text{ Kg}$$

### CÁLCULO DE $V_{c3}$

COMO  $P = 0.012 > 0.01$  ADEMÁS SE INTERRUMPE EL ACERO EN MÁS DEL 85 %

$$V_{c3} = V_{cr} 0.7 = (0.5 FR b d \sqrt{f'_c}) 70\% \times 70\%$$

$$V_{c3} = (0.5 \times 0.8 \times 30 \times 70 \sqrt{200}) 0.7 \times 0.7 = 5820.91$$

### CÁLCULO DE $V_{c4}$

COMO  $P = 0.012 > 0.01$

$$V_{c4} = V_{cr} 70\% = (0.5 FR b d \sqrt{f'_c}) 0.70$$

$$V_{c4} = (0.5 \times 0.8 \times 30 \times 70 \sqrt{200}) 0.70 = 8315.58$$

### 3).- CONTRIBUCION DE LOS ESTRIBOS

$$V' = \frac{FR A_v f_y d}{5} \quad ; \quad A_v = 2 \times 0.71 = 1.42 \text{ cm}^2$$

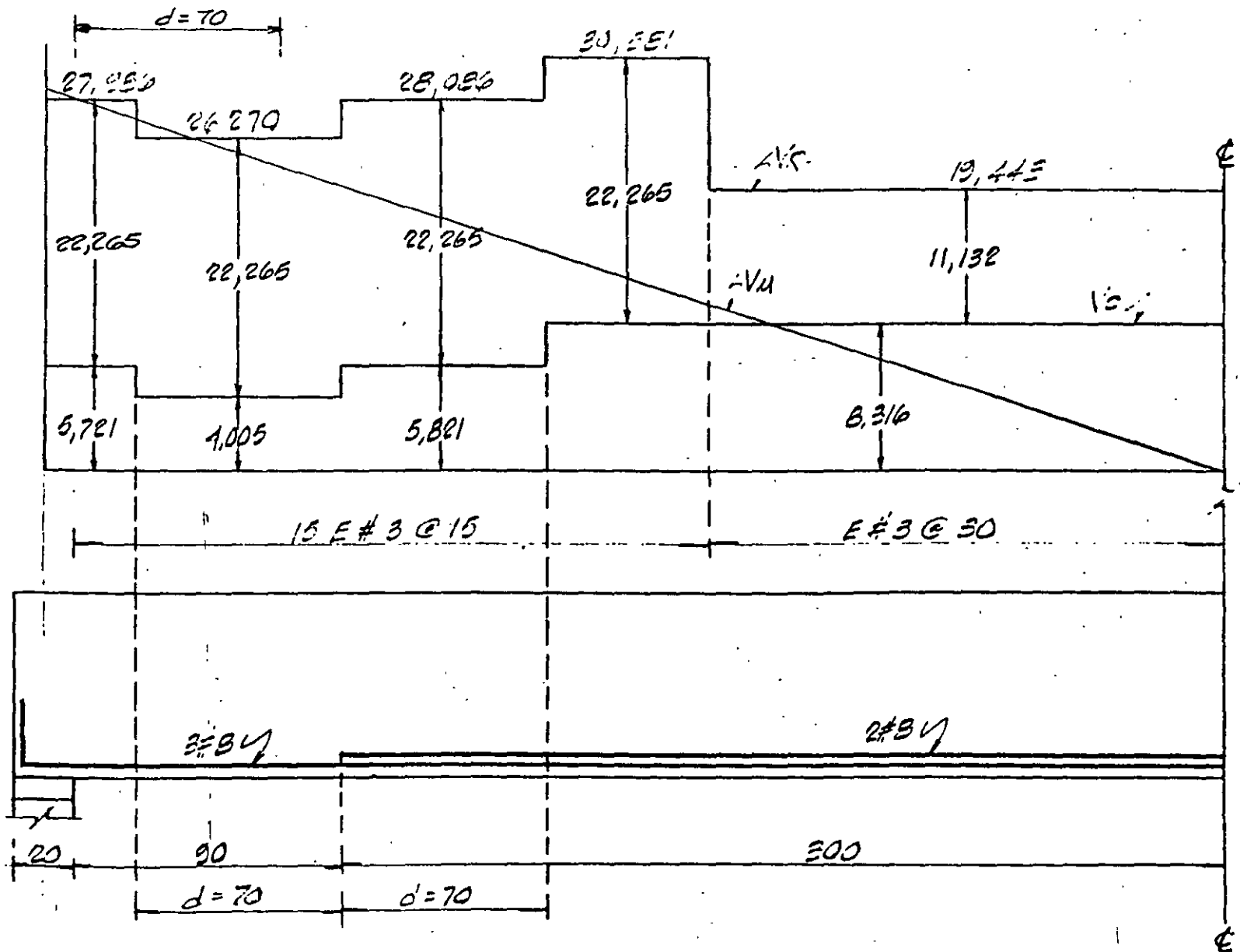
### CÁLCULO DE ESTRIBOS CON SEPARACION DE 15 cm.

$$V_{s15} = \frac{0.5 \times 1.42 \times 4200 \times 70}{15} = 22,265.60 \text{ Kg}$$

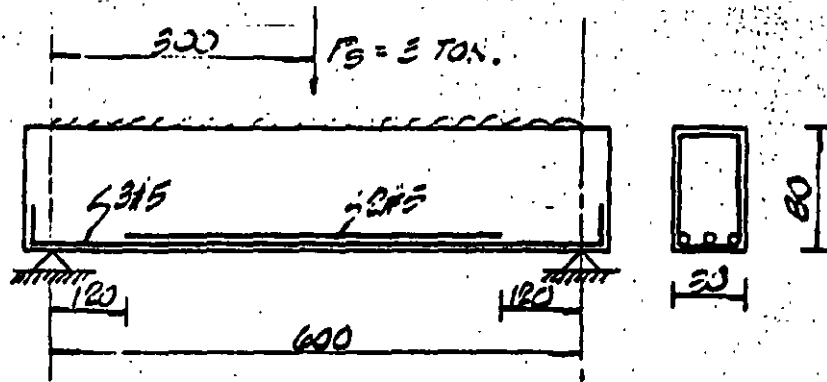
### CÁLCULO DE ESTRIBOS CON SEPARACION DE 30 cm.

$$V_{s30} = \frac{0.5 \times 1.42 \times 4200 \times 70}{30} = 11,132.80 \text{ Kg}$$

61



## 2.- DISEÑO FCF CORTE



$$f'_c = 220 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c = 170 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

### A: CONDICIONES

$$h = 80 \text{ cm} > 70 \text{ cm}$$

$$h = 80 \text{ cm} < 6b = 6(30) = 180$$

POR LO QUE  $V_{CR}$  SE REDUCIRÁ EN UN 30%

### B: CALCULO DE $V_{CR}$

COMO

$$\frac{L}{h} = \frac{600}{80} = 7.5 > 5$$

$$(3\#5) \rightarrow \rho = 0.00264 < 0.01$$

$$V_{CR} = (0.2 + 30\rho) F_r b d' \sqrt{f'_c}$$

$$V_{CR} = [(0.2 + 30(0.00264))] 0.8 \times 30 \times 75 \sqrt{200} = 7,107 \text{ Kg}$$

$$V_{CR} = V_{CR} 70\% = 7,107 \times 0.7 = 4,975 \text{ Kg POR TAMAÑO (h > 70)}$$

FOR INTERRUPCION DE VARILLAS

$$V_c = 0.7 \times 4.98 = 3.49 \text{ TON.}$$

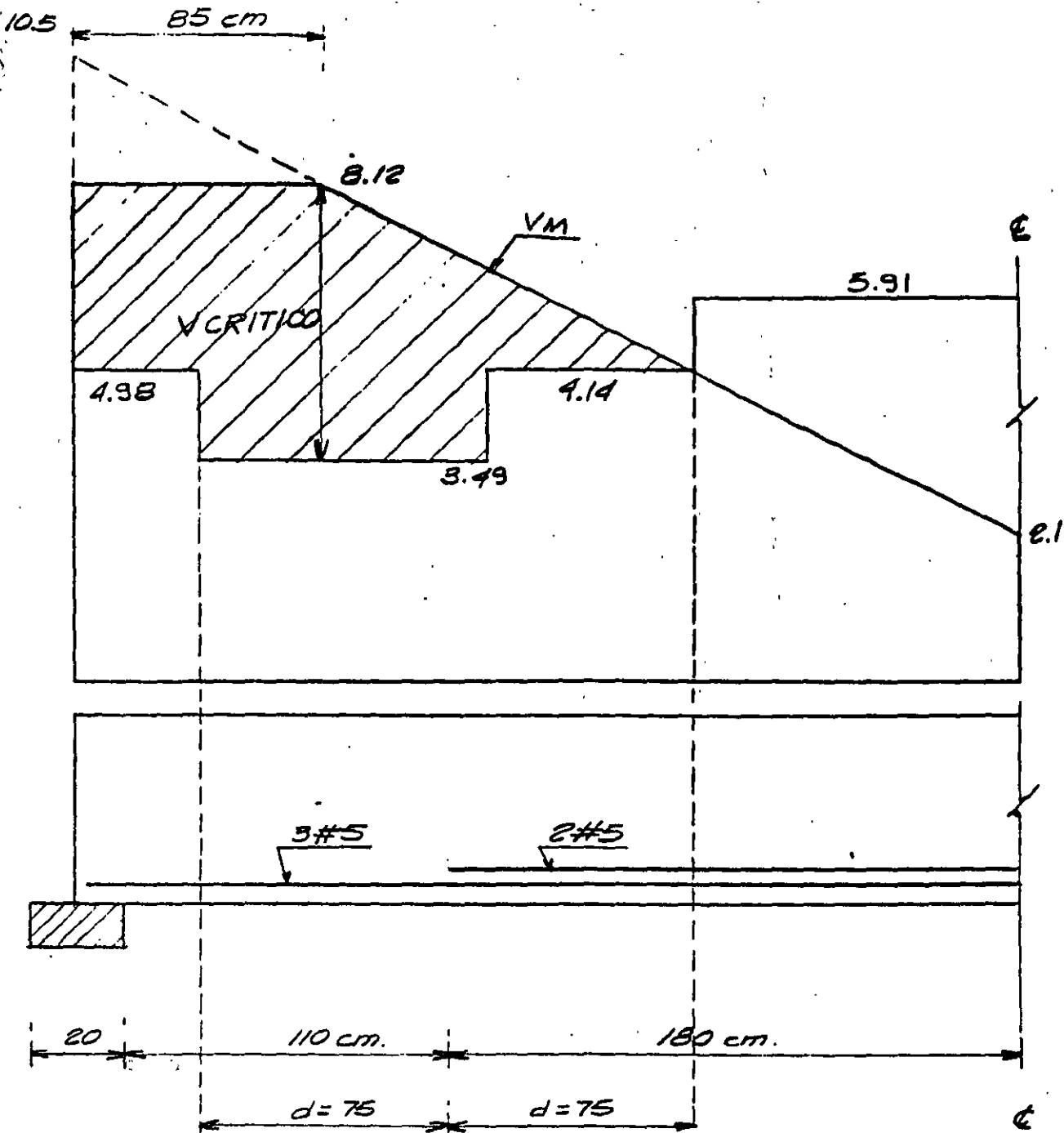
$$(3\#5) \rightarrow \rho = 0.0044 < 0.01$$

$$V_{CR} = 0.8 (0.2 + 30 \times 0.0044) \sqrt{200} \times 30 \times 75 = 8.45 \text{ TON.}$$

$$\text{POR TAMAÑO } V_c = 0.7 \times 8.45 = 5.91 \text{ T.}$$

$$\text{POR CORTE DE VARILLAS } V_c = 0.7 \times 5.91 = 4.14 \text{ T.}$$





¿Qué es concreto presforzado?

Una manera sencilla de entender el concreto presforzado es a través de su comparación con el concreto simple y con el concreto reforzado como pasos sucesivos de un proceso.

Si tenemos una viga de concreto simple como la mostrada en la figura (fig 1), esta tendrá una cierta capacidad de carga, mientras los esfuerzos normales de tensión en el concreto no sean mayores a la capacidad del concreto a la tensión ( $f't = 2\sqrt{f'c}$ ) que aunque pequeña, tiene un rango de existencia.

Durante este rango podemos suponer un comportamiento lineal del concreto y por lo tanto a partir de:

$$f = \frac{M}{I} y \quad M_{ag} = \frac{I}{y_i} f_t = 2\sqrt{f'c} \frac{I}{y_i}$$

para una sección rectangular:

$$M_{ag} = \frac{bh^2}{3} \sqrt{f'c} \quad \text{si } M = Pa$$
$$P = \frac{bh^2}{3a} \sqrt{f'c}$$

Si ahora armamos la viga anterior con acero de refuerzo en la zona de tensión, aumentaremos su capacidad con respecto al momento de agrietamiento-fig. (1).

Si tomamos como base las consideraciones básicas del R.D.D.F., obtendremos una carga de servicio del orden de 4.5 veces mayor que la correspondiente a la viga de concreto simple.

En las figuras (1) y (2) se muestran los diagramas correspondientes para ambos casos.

Como siguiente paso del mismo proceso, demos ahora a la misma viga un estado de deformaciones contrario al producido por las pzas. P, de tal suerte que las tensiones en el concreto desaparezcan.

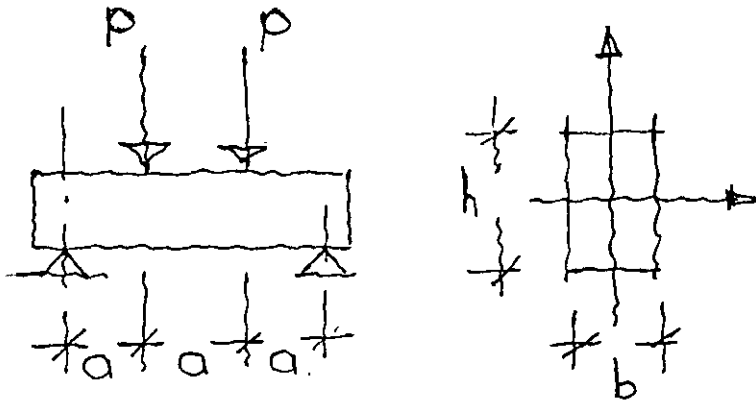
De esta manera, lograríamos una carga de servicio del orden de 7 veces mayor a la del concreto simple.

Es decir, si comparamos la misma sección, a través de concreto reforzado y presforzado, logramos con el segundo una capacidad mayor respecto al primero del orden de 1.55 veces.

Podemos ejemplificar lo anterior a través de un ejemplo sencillo.

v.g.

Si suponemos la siguiente viga:



$$b = 30 \text{ cm.}$$
$$h = 40 \text{ cm.}$$

La viga es de concreto simple con  $f'c = 400 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$

Si el valor de la carga  $P$  es de 10 tons.;

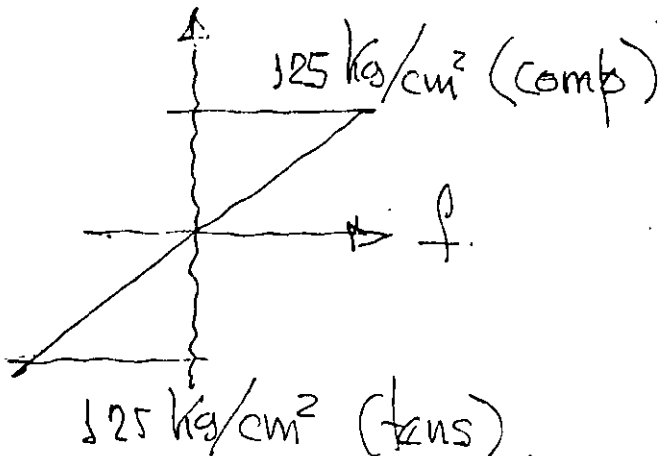
Entonces  $M = Pa = 10 \text{ Tm.}$

y los esfuerzos:

$$f = \frac{M}{S} = \frac{10 \ 00000}{8000} = 125 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}.$$

$$f = 125 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

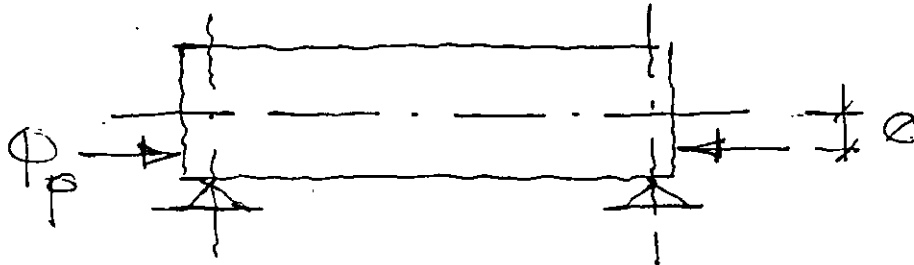
El diagrama de esfuerzos correspondiente es:





Es evidente que la viga fallaría puesto que las tensiones son excesivas.

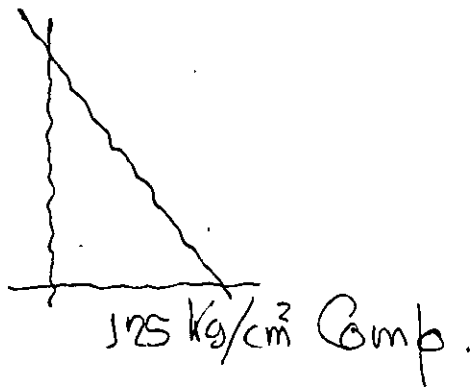
Sin embargo, si a la misma viga, a través de un medio mecánico le aplicamos la siguiente carga:



Siendo  $P_p = 75000$  Kgs.

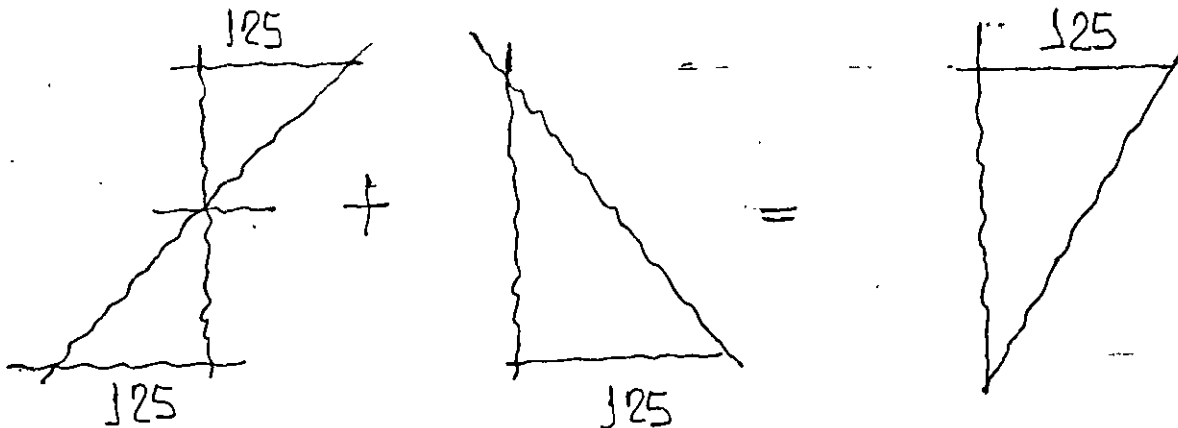
$e = 6.67$  cm.

de tal suerte que produzca el siguiente estado de esfuerzos



$125 \text{ Kg/cm}^2 \text{ comp.}$

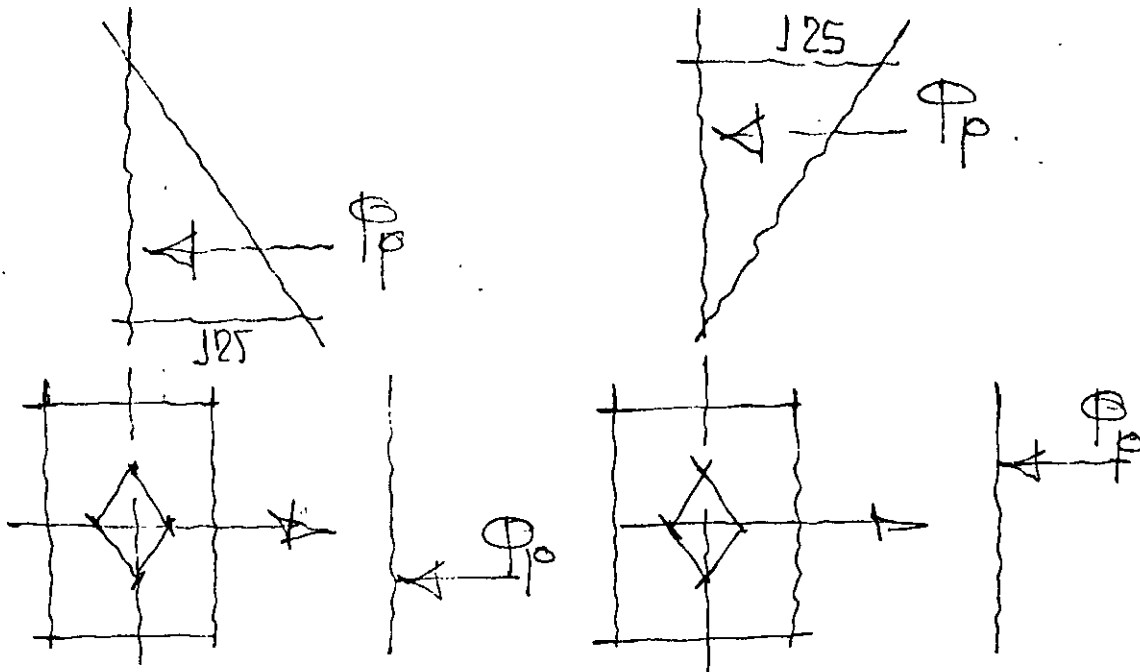
y sumamos ambos efectos tendremos la siguiente combinación de esfuerzos.



ahora es claro que el estado de esfuerzos es aceptable puesto que tan sólo hay compresiones y de una magnitud tal que son aceptables para el concreto.

Para este ejemplo hemos supuesto que el concreto no tiene capacidad alguna a la tensión.

Si analizamos los diagramas correspondientes al efecto mecánico externo - de la carga  $P_p$  y al estado final:

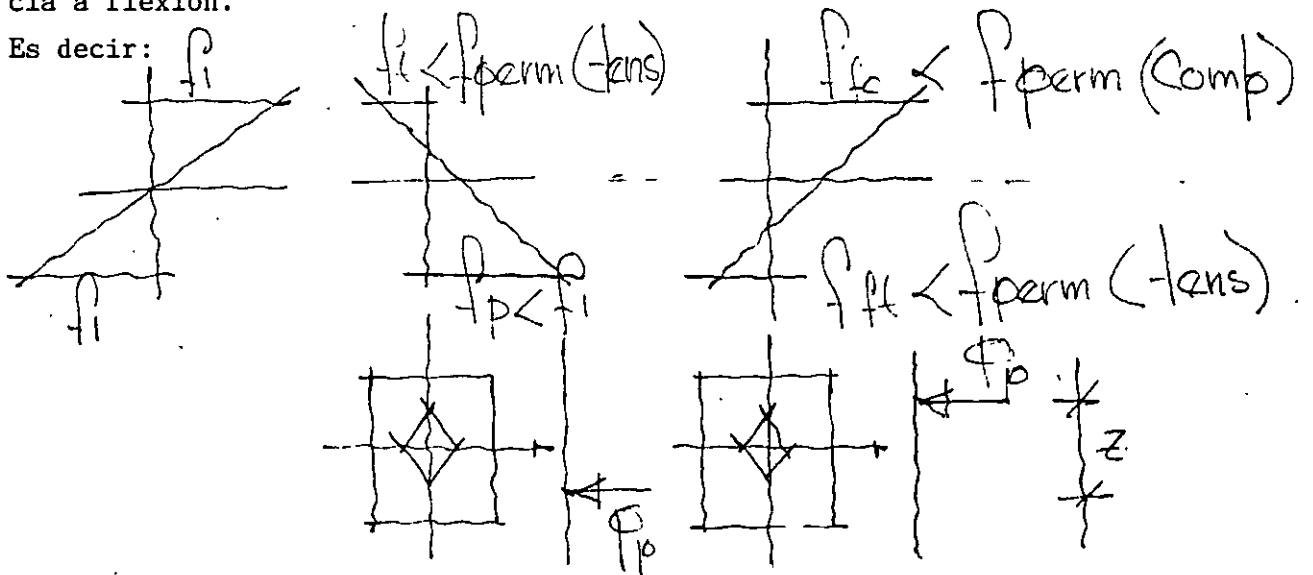


Vemos que la pza.  $P_p$  viajó del borde inferior del núcleo central, al superior.

Por lo tanto aquella sección con los bordes del núcleo central mas alejados será una sección mas eficiente desde el punto de vista de flexión.

Si ahora permitiésemos trabajar al concreto con tensiones, aún cuando menores a ciertos límites (controlados por el agrietamiento), tendríamos un mayor rango para el recorrido de  $P_p(z)$  y por lo tanto una mayor eficiencia a flexión.

Es decir:



Estos esfuerzos permisibles estan reglamentados.

El efecto externo, de hecho de flexo compresión, constituye precisamente el presfuerzo. Es decir esfuerzos anteriores a los esfuerzos de trabajo.

Existen varias modalidades para el presfuerzo, siendo las mas comunes:

- a) pretensado
- b) postensado

El "pre" y el "post" se refieren a si el tensado del acero es anterior o posterior al colado y fraguado del elemento.

El hecho de trabajar con esfuerzos iguales o menores a los esfuerzos permisibles nos situa dentro del rango lineal y elástico y por lo tanto es válida la fórmula de la escuadria.

Diferencias básicas y rangos de utilización entre concreto pretensado y postensado.

Ventajas y desventajas:

Materiales:

Concreto.  
Acero.

Perdidas de presfuerzo  
Etapas de trabajo.

\*\*\*\*\*  
 \* DISEÑO DE ELEMENTOS PRESFORZADOS \*  
 \*\*\*\*\*

LOS DATOS SON EN KGS. Y EN CMS. FECHA: 18-Abr-89

\* NOMBRE DE LA PIEZA ? \* =LOSA TT 247.5/60 H. VAZQUEZ

\*\*\* CONCRETOS \*\*\*      \*\*\* ACEROS \*\*\*

f'c PRES.=	350 Kg./cm <sup>2</sup> .	fpu PRES.=	17500 Kg./cm <sup>2</sup> .
f'c REF. =	200 Kg./cm <sup>2</sup> .	Es PRES. =	2000000 Kg./cm <sup>2</sup> .
f'ci DET.=	250 Kg./cm <sup>2</sup> .	as PRES. =	0.55 cm <sup>2</sup> .
		C. PERD. =	0.80
		C. TENS. =	0.75

\*\*\* ETAPAS DE CARGA \*\*\*

CUANTAS ETAPAS SON = 4

SECCION SIMPLE = 1

SECCION COMPUESTA = 2

ETAPA	SECCION	S/C	W	
1	1		613.8	KG./ML.
2	1		420.8	KG./ML.
3	2		742.5	KG./ML.
4	2		400.0	KG./ML.

\*\*\* PROPIEDADES GEOMETRICAS \*\*\*

UNIDADES=cm<sup>2</sup>

LAS AREAS SE DEBEN DAR DE ABAJO HACIA ARRIBA

PROPIEDADES GEOMETRICAS

++++ SECCION SIMPLE +++++

CUANTAS AREAS SON= 2

AREA=	2557.50 cm <sup>2</sup> .
I TOTAL=	818766.30 cm <sup>4</sup> .
Y INF=	43.20 cm.
Y SUP=	16.80 cm.
S INF=	18953.40 cm <sup>3</sup> .
S SUP=	48732.97 cm <sup>3</sup> .

BASE INFERIOR	BASE SUPERIOR	ALTURA
cm.	cm.	cm.
1 18.00	30.00	55.00
2 247.50	247.50	5.00

++++ SECCION COMPUESTA +++++

CUANTAS AREAS SON= 1

ARFA=	3492.96 cm <sup>2</sup> .
I TOTAL=	1075874.22 cm <sup>4</sup> .
Y INF=	48.37 cm.
Y SUP=	16.63 cm.
S INF=	22243.51 cm <sup>3</sup> .
S SUP=	64687.05 cm <sup>3</sup> .

BASE INFERIOR	BASE SUPERIOR	ALTURA
cm.	cm.	cm.
1 247.50	247.50	5.00

\*\*\* CABLES DE PRESFUERZO. NUMERO, POSICION Y CLARO \*\*\*

NUMERO DE CABLES = 6.0 CLARO (MTS.) = 10.81

CENTROIDE, (cm.) = 6.5

\*\*\* REVISION DE ESFUERZOS PERMISIBLES \*\*\*

LOS ESFUERZOS SON: PARA LA ETAPA

1	FS(1)=	18.40 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(1)=	-47.30 Kg./cm <sup>2</sup> .
2	FS(2)=	12.61 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(2)=	-32.43 Kg./cm <sup>2</sup> .
3	FS(3)=	11.73 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(3)=	-48.76 Kg./cm <sup>2</sup> .
4	FS(4)=	6.32 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(4)=	-26.27 Kg./cm <sup>2</sup> .

LOS TOTALES FS T = 49.05 Kg./cm<sup>2</sup>. FI T = -154.76 Kg./cm<sup>2</sup>.  
 PRESFUERZO FS P = -16.73 Kg./cm<sup>2</sup>. FI P = 107.52 Kg./cm<sup>2</sup>.  
 PERMISIBLE 1a ETAPA FC= 120.00 Kg./cm<sup>2</sup>. FT= -10.12  
 PERMISIBLE DE SERVICIO FC= 157.50 Kg./cm<sup>2</sup>. FT= -59.87

LA COMBINACION DE ESFUERZOS ES : PARA LA ETAPA

1	FS(1)=	1.67 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(1)=	60.27 Kg./cm <sup>2</sup> .
2	FS(2)=	14.28 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(2)=	27.79 Kg./cm <sup>2</sup> .
3	FS(3)=	26.01 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(3)=	-20.97 Kg./cm <sup>2</sup> .
4	FS(4)=	32.33 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(4)=	-47.74 Kg./cm <sup>2</sup> .

\*\*\* REVISION DE FLECHAS \*\*\*

LA SUMA DE FLECHAS ES : 2.210 cm.  
 LA CONTRAFLECHA POR PRESFUERZO ES : -1.617 cm.  
 \* \* \* LA FLECHA PERMISIBLE ES : 2.662 cm.  
 PARA LA ETAPA: FLECHAS: COMBINACION:

1	D =	0.712 cm.	CD =	-0.904 cm.
2	D =	0.488 cm.	CD =	-0.416 cm.
3	D =	0.656 cm.	CD =	0.740 cm.
4	D =	0.353 cm.	CD =	0.593 cm.

\*\*\* REVISION A LA RUPTURA \*\*\*

AREA DE ACERO DE REFUERZO : 2.84 cm<sup>2</sup>.  
 ESFUERZO DE FLUENCIA DEL ACERO DE REFUERZO : 4200.00 Kg./cm<sup>2</sup>  
 CENTROIDE DEL ACERO DE REFUERZO : 4.00 cm.

FLUYE EL ACERO DE PRESFUERZO ( SI=1, NO=0 ) : 1  
 FLUYE EL ACERO DE REFUERZO ( SI=1, NO=0 ) : 1  
 EL MOMENTO RESISTENTE : 46.037 Ton.-m  
 EL MOMENTO ACTUANTE : 31.800 Ton.-m.  
 EL FACTOR DE SEGURIDAD : 1.448  
 EL VALOR DE A= 2.642 cm.



LOS TOTALES FS T = 150.96 Kg./cm<sup>2</sup>. FI T = -134.26 Kg./cm<sup>2</sup>.  
 PRESFUERZO - FS P = -34.95 Kg./cm<sup>2</sup>. FI P = 85.42 Kg./cm<sup>2</sup>.  
 PERMISIBLE 1a ETAPA FC= 120.00 Kg./cm<sup>2</sup>. FT= -10.12  
 PERMISIBLE DE SERVICIO FC= 157.50 Kg./cm<sup>2</sup>. FT= -59.87

LA COMBINACION DE ESFUERZOS ES : PARA LA ETAPA

1	FS(1)=	-10.78 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(1)=	65.04 Kg./cm <sup>2</sup> .
2	FS(2)=	50.14 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(2)=	13.66 Kg./cm <sup>2</sup> .
3	FS(3)=	88.89 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(3)=	-19.01 Kg./cm <sup>2</sup> .
4	FS(4)=	116.02 Kg./cm <sup>2</sup> .	FI(4)=	-48.85 Kg./cm <sup>2</sup> .

\*\*\* REVISION DE FLECHAS \*\*\*

LA SUMA DE FLECHAS ES : 2.021 cm.  
 LA CONTRAFLECHA POR PRESFUERZO ES : -1.023 cm.  
 \* \* \* LA FLECHA PERMISIBLE ES : 2.580 cm.  
 PARA LA ETAPA: FLECHAS: COMBINACION:

1	D =	0.316 cm.	CD =	-0.708 cm.
2	D =	0.296 cm.	CD =	0.088 cm.
3	D =	0.506 cm.	CD =	0.594 cm.
4	D =	0.404 cm.	CD =	0.998 cm.

\*\*\* REVISION A LA RUPTURA \*\*\*

AREA DE ACERO DE REFUERZO : 3.96 cm<sup>2</sup>.  
 ESFUERZO DE FLUENCIA DEL ACERO DE REFUERZO : 4200.00 Kg./cm<sup>2</sup>.  
 CENTROIDE DEL ACERO DE REFUERZO : 4.00 cm.

FLUYE EL ACERO DE PRESFUERZO ( SI=1. NO=0 ) : 1  
 FLUYE EL ACERO DE REFUERZO ( SI=1. NO=0 ) : 1  
 EL MOMENTO RESISTENTE : 123.119 Ton.-m.  
 EL MOMENTO ACTUANTE : 77.902 Ton.-m.  
 EL FACTOR DE SEGURIDAD : 1.580  
 EL VALOR DE A= 24.065 cm.

18.2.6 Al calcular las propiedades de la sección, previas a la adherencia de los cables de presfuerzo, debe considerarse el efecto de la pérdida del área debida a ductos abiertos.

18.3 Suposiciones de diseño

18.3.1 El diseño por resistencia de miembros presforzados para cargas axiales y de flexión debe basarse en las suposiciones de la Sección 10.2, excepto que la Sección 10.2.4 se aplica únicamente al refuerzo que cumpla con lo señalado en la Sección 3.5.3.

18.3.2. Para el cálculo de esfuerzos en la transferencia del presfuerzo, bajo cargas de servicio y para las cargas de agrietamiento, se puede emplear la teoría elástica con las suposiciones siguientes:

18.3.2.1 Las deformaciones varían linealmente con la profundidad en todas las etapas de carga.

18.3.2.2 En secciones agrietadas el concreto no resiste ninguna tensión.

18.4 Esfuerzos permisibles en el concreto-Miembros sujetos a flexión

18.4.1 Los esfuerzos en el concreto inmediatamente después de la transmisión del presfuerzo (antes de las pérdidas de presfuerzo dependientes del tiempo) no deben exceder de lo siguiente:

- a) esfuerzo de la fibra extrema en compresión..... $0.60f'_{ci}$
- b) esfuerzo de la fibra extrema en tensión excepto en lo permitido por (c) .....  $0.80 \sqrt{f'_{ci}}$
- c) esfuerzo de la fibra extrema en tensión en los extremos de miembros simplemente apoyados..... $1.6 \sqrt{f'_{ci}}$

Cuando los esfuerzos calculados de tensión excedan de estos valores, debe proporcionarse refuerzo auxiliar de adherencia (no presforzado o presforzado) en la zona de tensión para resistir la fuerza total de tensión en el concreto, calculada con la suposición de una sección no agrietada.

18.4.2 Los esfuerzos en el concreto bajo las cargas de servicio (después de que se presenten todas las pérdidas de presfuerzo) no deben exceder de los siguientes valores:

- a) esfuerzo de la fibra extrema en compresión..... $0.45f'_c$
- b) esfuerzo de la fibra extrema en tensión en la zona de tensión pre-comprimida .....  $1.6 \sqrt{f'_c}$
- c) esfuerzo de la fibra extrema en tensión en la zona de tensión pre-comprimida de los miembros (excepto en sistemas de losas en dos direcciones) en los cuales el análisis basado en las secciones transformadas agrietadas y en las relaciones bilineales momento-deflexión demuestren que las deflexiones inmediatas y a largo plazo cumplen con los requisitos de la Sección 7.7.3.2 .....  $3.2 \sqrt{f'_c}$

18.4.3 Los esfuerzos permisibles en el concreto de las Secciones 18.4.1 y 18.4.2 pueden sobrepasarse cuando se demuestre mediante pruebas o análisis que no se perjudica el comportamiento.

18.5 Esfuerzos permisibles en los cables de presfuerzo

18.5.1 El esfuerzo de tensión en los cables de presfuerzo no debe exceder de lo siguiente:

- a) Debido a la fuerza del gato..... $0.80f_{pu}$  o  $0.94f_{py}$  el que sea menor, pero no mayor que el valor máximo recomendado por el fabricante de los cables de presfuerzo o de los anclajes.
- b) Cables de pretensado inmediatamente después de la transferencia del presfuerzo..... $0.70f_{pu}$
- c) Cables de postensado inmediatamente después del anclaje de los cables .....  $0.70f_{pu}$

18.6 Pérdidas de presfuerzo

18.6.1 Para determinar el presfuerzo efectivo  $f_{se}$ , deben considerarse las siguientes fuentes de pérdidas de presfuerzo:

- a) Pérdida por asentamiento del anclaje
- b) Acortamiento elástico del concreto



- c) Fluencia del concreto
- d) Contracción del concreto
- e) Relajación del esfuerzo en los cables
- f) Pérdidas por fricción debidas a curvatura intencional o accidental de los cables de postensado

18.6.2 Pérdidas por fricción en los cables de postensado.

18.6.2.1 El efecto de la pérdida por fricción en los cables de postensado debe calcularse por medio de

$$P_s = P_{xe} (K\ell + \mu \alpha) \quad (18-1)$$

Cuando  $(K\ell + \mu \alpha)$  no sea mayor que 0.3, el efecto de la pérdida por fricción puede calcularse por medio de

$$P_s = P_x (1 + K\ell + \mu \alpha) \quad (18-2)$$

18.6.2.2 Las pérdidas por fricción deben basarse en los coeficientes de fricción por curvatura  $\mu$  y por excentricidad  $K$  determinados experimentalmente y deben verificarse durante las operaciones de tensado del cable.

18.6.2.3 Los valores de los coeficientes por curvatura y por excentricidad usados en el diseño y los rangos aceptables para las fuerzas producidas por el gato en los cables, al igual que el alargamiento de los cables, debe indicarse en los planos de diseño.

18.6.3 Cuando pueda ocurrir pérdida de presfuerzo en un miembro debido a la conexión del mismo con una construcción adyacente, dicha pérdida de presfuerzo debe tomarse en consideración en el diseño.

18.7 Resistencia a la flexión

18.7.1 La resistencia de diseño a flexión de los miembros sujetos a tal efecto se calculará con los métodos de diseño de resistencia de este regla-

mento. Para los cables de presfuerzo,  $f_{ps}$  se sustituirá por  $f_y$  en los cálculos de resistencia.

18.7.2 En lugar de efectuar una determinación más precisa de  $f_{ps}$  con base en la compatibilidad de deformaciones y siempre que  $f_{se}$  no sea menor que  $0.5f_{pu}$ , se pueden utilizar los siguientes valores aproximados:

- a) Para miembros con cables de presfuerzo adheridos.

$$f_{ps} = f_{pu} \left( 1 - 0.5 \rho_p \frac{f_{pu}}{f'_c} \right) \quad (18-3)$$

- b) Para miembros con cables de presfuerzo no adheridos.

$$f_{ps} = f_{se} + 700 + \frac{f'_c}{100 \rho_p} \quad (18-4)$$

pero en la Ec. (18-4),  $f_{ps}$  no debe tomarse mayor de  $f_{py}$  ni de  $(f_{se} + 4,200)$ .

18.7.3 Se puede considerar que el refuerzo no presforzado, conforme a las Secciones 3.5.3, en caso de utilizarse con cables de presfuerzo, contribuye a la fuerza de tensión y se puede incluir en los cálculos de resistencia a flexión con un esfuerzo igual a la resistencia especificada a la fluencia  $f_y$ . Otro refuerzo no presforzado se puede incluir en los cálculos de resistencia únicamente si se efectúa un análisis de compatibilidad de deformaciones con el fin de determinar el esfuerzo en dicho refuerzo.

18.8 Límites de refuerzo en miembros sujetos a flexión

18.8.1 Excepto por lo dispuesto en la Sección 18.8.2, la relación entre el refuerzo presforzado y el refuerzo no presforzado, usada para los cálculos de resistencia a flexión de un miembro será tal que  $\omega_p (\omega + \omega_p - \omega')$  o  $(\omega_w + \omega_{pw} - \omega'_w)$ , no sean mayores de 0.30, excepto en lo previsto por la Sección 18.8.2.

18.8.2 Cuando se proporciona una relación de refuerzo mayor que la especificada en la Sección 18.8.1, la resistencia del diseño a flexión

Deduct deflection caused by weight of member:

$$\Delta \downarrow = \frac{5 w l^4}{384 E_{ci} I}$$

$$= \frac{5 \left( \frac{0.418}{12} \right) (70 \times 12)^4}{384 (3587) (20,985)} = 3.00 \text{ in.} \downarrow$$

$$\text{Net camber at release} = 4.41 \uparrow - 3.00 \downarrow = 1.41 \text{ in.} \uparrow$$

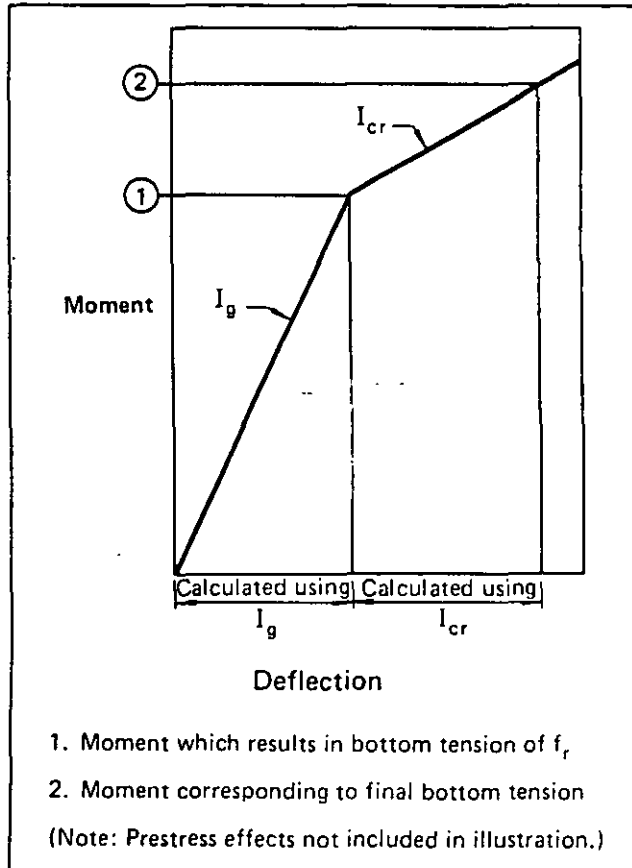
### 3.4.2 Elastic Deflections

Calculation of instantaneous deflections caused by superimposed service loads follow classical methods of mechanics. Design equations for various load conditions are given in Chapter 8 of this Handbook. If the bottom tension in a simple span member does not exceed the modulus of rupture, the deflection is calculated using the uncracked moment of inertia of the section. The modulus of rupture of concrete is defined in Chapter 9 of the Code as:

$$f_r = 7.5 \lambda \sqrt{f'_c} \quad (\text{Eq. 3.4-1})$$

(See Sect. 3.3.2 for definition of  $\lambda$ )

Fig. 3.4.1 Bilinear moment-deflection relationship



### 3.4.2.1 Bilinear Behavior

Section 18.4.2 of the Code requires that "bilinear moment-deflection relationships" be used to calculate instantaneous deflections when the bottom tension exceeds  $6 \sqrt{f'_c}$ . This means that the deflection before the member has cracked is calculated using the gross (uncracked) moment of inertia ( $I_g$ ) and the *additional* deflection after cracking is calculated using the moment of inertia of the cracked section. This is illustrated graphically in Fig. 3.4.1.

In lieu of a more exact analysis, the empirical relationship:

$$I_{cr} = n A_{ps} d^2 (1 - \sqrt{\rho_p}) \quad (\text{Eq. 3.4-2})^*$$

may be used to determine the cracked moment of inertia. Table 3.9.19 gives coefficients for use in solving this equation.

**Example 3.4.2** — Deflection calculation using bilinear moment-deflection relationships

*Given:*

8DT24 of Examples 3.2.8 and 3.4.1

*Problem:*

Determine the total instantaneous deflection caused by the specified uniform live load.

*Solution:*

$$\text{Determine } f_r = 7.5 \sqrt{f'_c} = 530 \text{ psi}$$

From Example 3.2.8, the final tensile stress is 782 psi, which is more than 530 psi, so the bilinear behavior must be considered.

Determine  $I_{cr}$  from Table 3.9.19

$$A_{ps} = 2.142 \text{ sq in. (See Ex. 3.2.8)}$$

$$d \text{ at midspan} = e_c + y_t = 13.65 + 6.85 = 20.5 \text{ in.}^\dagger$$

$$\rho_p = \frac{A_{ps}}{bd} = \frac{2.142}{(96)(20.5)} = 0.00109$$

$$C = 0.0067$$

$$I_{cr} = Cbd^3 = 0.0067 (96)(20.5)^3 = 5541 \text{ in.}^4$$

\*"Allowable Tensile Stresses for Prestressed Concrete," *PCI Journal*, Feb, 1970.

†It is within the precision of the calculation method and observed behavior to use midspan  $d$  and to calculate the deflection at midspan, although the maximum tensile stress in this case is assumed at  $0.4 \ell$ .

Determine the portion of the live load that would result in a bottom tension of 530 psi.

$$782 - 530 = 252 \text{ psi}$$

The tension caused by live load alone is 1614 psi, therefore, the portion of the live load that would result in a bottom tension of 530 psi is:

$$\frac{1614 - 252}{1614} (0.280) = 0.236 \text{ kips/ft}$$

and

$$\Delta_g = \frac{5 w \ell^4}{384 E_c I_g} = \frac{5 \left( \frac{0.236}{12} \right) (70 \times 12)^4}{384 (4287)(20,985)}$$

$$= 1.42 \text{ in.}$$

$$\Delta_{cr} = \frac{5 \left( \frac{0.044}{12} \right) (70 \times 12)^4}{384 (4287)(5541)} = 1.00 \text{ in.}$$

$$\text{Total deflection} = 1.42 + 1.00 = 2.42 \text{ in.}$$

### 3.4.2.2 Effective Moment of Inertia

The Code allows an alternative to the method of calculation described in the previous section. An effective moment of inertia,  $I_e$ , can be determined and the deflection then calculated by substituting  $I_e$  for  $I_g$  in the deflection calculation.

The equation for effective moment of inertia is:

$$I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \quad (\text{Eq. 3.4-3})$$

The difference between the bilinear method and the  $I_e$  method is illustrated in Fig. 3.4.2.

The use of  $I_e$  with prestressed concrete members is described in a paper by Branson.\* The value of  $M_{cr}/M_a$  for use in determining live load deflections can be expressed as:

$$\frac{M_{cr}}{M_a} = 1 - \left( \frac{f_{t\ell} - f_r}{f_\ell} \right) \quad (\text{Eq. 3.4-4})$$

where  $f_{t\ell}$  = final calculated total stress in the member

$f_\ell$  = calculated stress due to live load

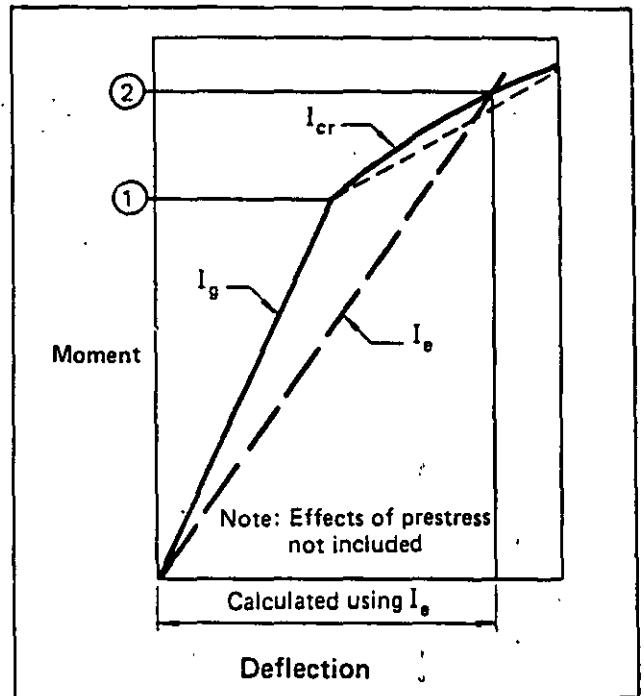
#### Example 3.4.3 – Deflection calculation using effective moment of inertia

Given:

Same section and loading conditions of Example 3.4.2

\*Branson, D. E., "The Deformation of Noncomposite and Composite Prestressed Concrete Members" *Deflections of Concrete Structures*, SP-43, American Concrete Institute.

Fig. 3.4.2 Effective moment of inertia



Problem:

Determine the deflection caused by live load using the  $I_e$  method.

Solution:

From the table of stresses in Example 3.2.8:

$$f_{t\ell} = 782 \text{ psi (tension)}$$

$$f_\ell = 1614 \text{ psi (tension)}$$

$$f_r = 7.5 \sqrt{f'_c} = 530 \text{ psi (tension)}$$

$$\frac{M_{cr}}{M_a} = 1 - \left( \frac{782 - 530}{1614} \right) = 0.844$$

$$\left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 = (0.844)^3 = 0.601$$

$$1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 = 1 - 0.601 = 0.399$$

$$I_e = 0.601 (20,985) + 0.399 (5541) = 14,823 \text{ in.}^4$$

$I_e$  can also be found using Fig. 3.9.20

$$f_e = 782 - 530 = 252 \text{ psi}$$

$$\frac{f_e}{f_\ell} = \frac{252}{1614} = 0.16$$

$$\frac{I_{cr}}{I_g} = \frac{5541}{20,985} = 0.26$$

Follow arrows on the chart

$$\frac{I_e}{I_g} = 0.70$$

$$I_e = 0.70 (20,985) = 14,690 \text{ in.}^4$$

$$\Delta l = \frac{5 w l^4}{384 E_c I_e} = \frac{5 \left( \frac{0.280}{12} \right) (70 \times 12)^4}{384 (4287) (14,823)} = 2.38 \text{ in.}$$

### 3.4.3 Long-Time Camber/Deflection

ACI 318-77 provides a convenient equation for estimating the additional long-time deflection of non-prestressed reinforced concrete members (Section 9.5.2.5):

$$[2 - 1.2 (A'_s/A_s)] \geq 0.6, \text{ where}$$

$A'_s$  is the compressive reinforcement and  $A_s$  is the tensile reinforcement. No such convenient guide is given for prestressed concrete.

The determination of long-time cambers and deflections in precast, prestressed members is somewhat more complex because of (1) the effect of prestress and the loss of prestress over time, (2) the strength gain of concrete after release of prestress, and because (3) the camber or deflection is important not only at the "initial" and "final" stages, but also at erection, which occurs at some intermediate stage, usually from 30 to 60 days after casting.

It has been customary in the design of precast, prestressed concrete to estimate the camber of a member after a period of time by multiplying the initial calculated camber by some factor, usually

based on the experience of the designer. To properly use these "multipliers," the upward and downward components of the initial calculated camber should be separated in order to take into account the effects of loss of prestress, which only affect the upward component.

Table 3.4.1 provides suggested multipliers which can be used as a guide in estimating long-time cambers and deflections for typical members, i.e., those members which are within the span-depth ratios recommended in this Handbook. Derivation of these multipliers is contained in a paper by Martin.\*

Long-time effects can be substantially reduced by adding non-prestressed reinforcement near the level of the prestressing steel. The reduction effects proposed by Shaikh and Branson† can be applied to the approximate multipliers of Table 3.4.1 as follows:

$$C_2 = \frac{C_1 + A_s/A_{ps}}{1 + A_s/A_{ps}}$$

where  $C_1$  = multiplier from Table 3.4.1

$C_2$  = revised multiplier

$A_s$  = area of non-prestressed reinforcement

$A_{ps}$  = area of prestressed steel

\*Martin, L. D. "A Rational Method for Estimating Camber and Deflection of Precast, Prestressed Concrete Members" *PCI Journal*, Jan-Feb, 1977.

†Shaikh, A. F., and Branson, D. E., "Non-Tensioned Steel in Prestressed Concrete Beams," *PCI Journal*, Feb, 1970.

**Table 3.4.1 Suggested multipliers to be used as a guide in estimating long-time cambers and deflections for typical members**

	Without Composite Topping	With Composite Topping
<i>At erection:</i>		
(1) Deflection (downward) component — apply to the elastic deflection due to the member weight at release of prestress	1.85	1.85
(2) Camber (upward) component — apply to the elastic camber due to prestress at the time of release of prestress	1.80	1.80
<i>Final:</i>		
(3) Deflection (downward) component — apply to the elastic deflection due to the member weight at release of prestress	2.70	2.40
(4) Camber (upward) component — apply to the elastic camber due to prestress at the time of release of prestress	2.45	2.20
(5) Deflection (downward) — apply to elastic deflection due to superimposed dead load only	3.00	3.00
(6) Deflection (downward) — apply to elastic deflection caused by the composite topping	—	2.30

Alternately using Table 5.20.4, for  $b = 16$  in. and  $A_{vf} + A_n = 4 - \#6$ , read:

$$A_{sh} = 0.37 \text{ sq in.}$$

Note: Table 5.20.4 will usually be more conservative because it assumes  $A_{vf}$  to be the steel provided rather than the steel required.

### 5.9 Dapped-End Connections (EXCLUDED FROM TABLE 5.20.4)

Design of connections which are recessed, or dapped into the end of the member, requires the investigation of several potential failure modes. These are illustrated in Fig. 5.9.1 and listed below with the reinforcement required for each consideration.

- 1) Flexure (cantilever bending) and axial tension in the extended end. Provide flexural reinforcement,  $A_s$ , plus axial tension reinforcement,  $A_n$ .
- 2) Direct shear at the junction of the dap and the main body of the member. Provide shear-friction reinforcement composed of  $A_s$  and  $A_{vh}$ , plus axial tension reinforcement,  $A_n$ .
- 3) Diagonal tension emanating from the reentrant corner. Provide shear reinforcement,  $A_{sh}$ .
- 4) Diagonal tension in the extended end. Provide shear reinforcement composed of  $A_{vh}$  and  $A_v$ .
- 5) Bearing on the extended end. If plain concrete bearing strength is exceeded, use  $A_s$  as shear-friction reinforcement.

Each of these potential failure modes should be investigated separately. The reinforcement requirements are not cumulative, that is,  $A_s$  is the greater of that required by 1, 2 or 5, not the sum.  $A_{vh}$  is the greater of that required by 2 or 4.

#### 5.9.1 Flexure and Axial Tension in the Extended End

The flexural and axial tension horizontal reinforcement can be determined by:

$$A_s + A_n = \frac{1}{\phi f_y} \left[ \frac{V_u a + N_u (h - d)}{d} + N_u \right] \quad (\text{Eq. 5.9-1})$$

where:

$$\phi = 0.85^*$$

$$a = \text{shear span, in. (can be assumed} = 3/4 \ell_p)$$

$$\ell_p = \text{dap projection, in.}$$

$h$  = depth of the member above the dap, in.

$d$  = distance from top to center of the reinforcement,  $A_s$ , in.

$f_y$  = yield strength of the flexural reinforcement, psi

For design convenience, Eq. 5.9-1 can be rearranged as follows:

$$A_s + A_n = \frac{1}{\phi f_y} \left[ V_u \left( \frac{a}{d} \right) + N_u \left( \frac{h}{d} \right) \right] \quad (\text{Eq. 5.9-1a})$$

Table 5.20.5 may be used to determine the steel requirements.

#### 5.9.2 Direct Shear

The potential vertical crack shown in Fig. 5.9.1 is resisted by a combination of  $(A_s + A_n)$  and  $A_{vh}$ . This reinforcement can be calculated by Eqs. 5.9.2 through 5.9.4:

$$A_s = \frac{2V_u}{3\phi f_y \mu_e} \quad (\text{Eq. 5.9-2})$$

$$A_n = \frac{N_u}{\phi f_y} \quad (\text{Eq. 5.9-3})$$

$$A_{vh} = \frac{V_u}{3\phi f_{yv} \mu_e} \quad (\text{Eq. 5.9-4})$$

where

$$\phi = 0.85$$

$f_y$  = yield strength of  $A_s$  and  $A_n$ , psi

$f_{yv}$  = yield strength of  $A_{vh}$ , psi

$$\mu_e = \frac{1000 \lambda^2 b h \mu}{V_u} \quad (\text{Eq. 5.9-5})$$

(See Sect. 5.6 for definition of  $\lambda$ )

The recommended minimum reinforcement requirements are:

$$A_s \text{ (min)} = \frac{80 b h}{f_y} \quad (\text{Eq. 5.9-6})$$

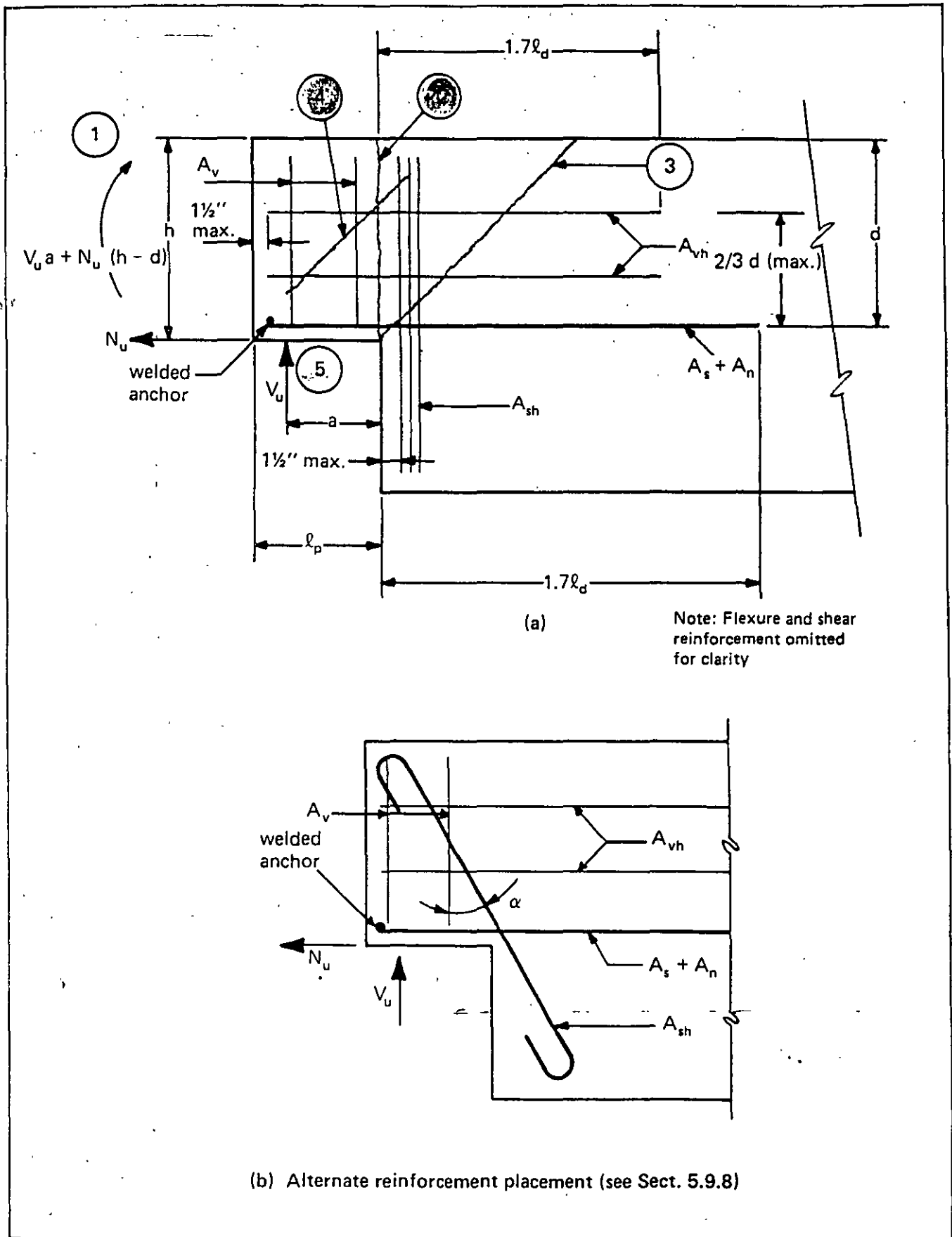
$$A_{vh} \text{ (min)} = \frac{40 b h}{f_{yv}} \quad (\text{Eq. 5.9-7})$$

unless one-third more than that required by either Eq. 5.9-2 or 5.9-4 is provided.

Reinforcement  $A_{vh}$  should be uniformly distributed within  $2/3 d$  of reinforcement  $A_s + A_n$ .

\* To be theoretically correct, Eq. 5.9-1 should have  $j_u d$  in the denominator. The use of  $\phi = 0.85$  instead of 0.90 (flexure) compensates for this approximation.

Fig. 5.9.1 Required reinforcement in dapped-end connections



For design convenience, Eq. 5.9-5 can be combined with Eqs. 5.9-2 and 5.9-4 to yield:

$$A_s = \frac{V_u^2}{1.78 f_y \lambda^2 b h} \quad (\text{Eq. 5.9-2a})$$

$$A_{vh} = \frac{V_u^2}{3.57 f_{yv} \lambda^2 b h} \quad (\text{Eq. 5.9-4a})$$

where

$$\mu = 1.4$$

$V_u$  is in kips

$f_y$  and  $f_{yv}$  are in ksi

### 5.9.3 Diagonal Tension at Reentrant Corner

The reinforcement required to resist diagonal tension cracking starting from the reentrant corner can be calculated from:

$$A_{sh} = \frac{V_u}{\phi f_{ys}} \quad (\text{Eq. 5.9-8})$$

where

$$\phi = 0.85$$

$V_u$  = applied factored load, lb

$A_{sh}$  = vertical or diagonal bars across potential diagonal tension crack, sq in.

$f_{ys}$  = yield strength of  $A_{sh}$ , psi

$V_u/\phi b d$  should not exceed  $8\lambda\sqrt{f'_c}$ .

### 5.9.4 Diagonal Tension in the Extended End

Additional reinforcement is required in the extended end, as shown in Fig. 5.9.1, such that:

$$\phi V_n = \phi (A_v f_v + A_{vh} f_{yv} + 2 \lambda b d \sqrt{f'_c}) \quad (\text{Eq. 5.9-9})$$

where

$f_v$  = yield strength of  $A_v$

Tests on dapped-end beams\* indicate that at least one half of the reinforcement required in this area should be placed vertically. Thus:

$$\min A_v = \frac{1}{2 f_v} \left( \frac{V_u}{\phi} - 2 \lambda b d \sqrt{f'_c} \right) \quad (\text{Eq. 5.9-10})$$

### 5.9.5 Bearing on the Extended End

The bearing on the extended end should be checked against the plain concrete bearing limita-

\* Test performed by Raths, Raths and Johnson, Hinsdale, IL (results unpublished).

tion of Eq. 5.7.1. If the limits are exceeded, then the capacity should be checked for reinforced concrete bearing as described in Sect. 5.8:

$$A_s + A_n = \frac{1}{\phi f_y} \left( \frac{V_u \cos \theta}{\mu_e} + N_u \right) \quad (\text{Eq. 5.9-11})$$

$$A_{sh} f_{ys} + A_v f_v = \frac{A_s f_y}{\mu_e} \quad (\text{Eq. 5.9-12})$$

### 5.9.6 Anchorage of Reinforcement

Horizontal bars  $A_s + A_n$  should be extended a minimum of  $1.7\ell_d$  past the end of the dap, and anchored at the end of the beam by welding to cross bars, angles or plates. Horizontal bars  $A_{vh}$  should be extended a minimum of  $1.7\ell_d$  past the end of the dap, and anchored at the end of the beam by hooks or other suitable means. Vertical or diagonal bars  $A_{sh}$  and  $A_v$  should be properly anchored by hooks as required by ACI 318-77. Welded wire fabric may be used for reinforcement, and should be anchored in accordance with ACI 318-77.

### 5.9.7 Detailing Considerations

Experience has shown that the depth of the extended end should not be less than one-half the depth of the beam, unless the beam is significantly deeper than necessary for architectural reasons.

Diagonal tension reinforcement,  $A_{sh}$ , should be placed as closely as practical to the reentrant corner. This reinforcement requirement is not additive to other shear reinforcement requirements.

Reinforcement requirements may be met with welded headed studs, deformed bar anchors or welded wire fabric.

If the flexural stress, calculated for the full depth of section using factored loads and gross section properties, exceeds  $6\sqrt{f'_c}$  immediately beyond the dap, longitudinal reinforcement should be placed in the beam to develop the required flexural strength.

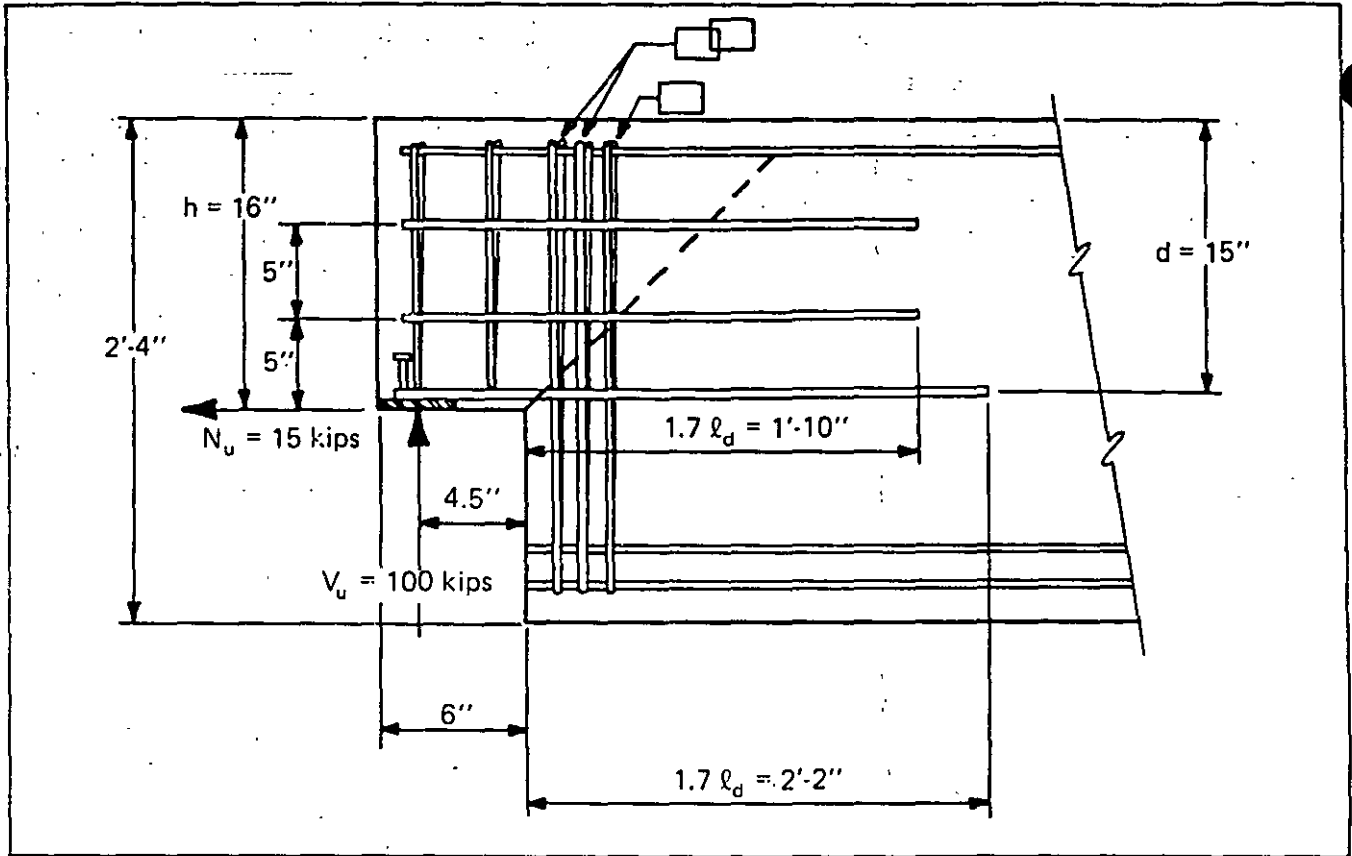
### 5.9.8 Alternate Placement of Reinforcement

As an alternate to placing reinforcement as shown in Fig. 5.9.1a, diagonal bars can be placed as shown in Fig. 5.9.1b. The requirements for reinforcement placed in this manner can be determined by:

$$A_{sh} = \frac{V_u}{\phi f_{ys} \cos \alpha} \approx \frac{V_u \sqrt{a^2 + d^2}}{\phi f_{ys} d} \quad (\text{Eq. 5.9-13})$$

$$A_s + A_n = \frac{N_u h}{\phi f_y d} \quad (\text{Eq. 5.9-14})$$

Fig. 5.9.2 Dapped-end beam of Example 5.9.1



but not less than that determined in sections 5.9.2 or 5.9.5.

If the diagonal bars can be adequately anchored into the extended end, they may also be used as at least partial replacement for  $A_v$  and  $A_{vh}$  requirements shown in Sect. 5.9.4.

**Example 5.9.1 Reinforcement for dapped-end beam**

*Given:* The 16RB28 beam with a dapped end as shown in Fig. 5.9.2.

$V_u = 100$  kips (includes all load factors)

$N_u = 15$  kips

$f'_c = 5000$  psi (normal weight)

$f_y$  for all reinforcement = 60 ksi (weldable)

**Problem:** Determine the requirements for reinforcement  $A_s + A_n$ ,  $A_{vh}$ ,  $A_{ch}$ , and  $A_v$  shown in Fig. 5.9.1.

**Solution:**

Assume: Shear span,  $a = 3/4 (6) = 4.5$  in.

$d = 15$  in.

1) Flexure in extended end:

By Eq. 5.9-1a:

$$A_s + A_n = \frac{1}{\phi f_y} \left[ V_u \left( \frac{a}{d} \right) + N_u \left( \frac{h}{d} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{0.85 \times 60} \left[ 100 \left( \frac{4.5}{15} \right) + 15 \left( \frac{16}{15} \right) \right] = 0.90 \text{ sq in.}$$

Use 3 - #5,  $A_s = 0.93$  sq in.

This could also be obtained from Table 5.20.5

2) Direct shear:

By Eq. 5.9-2a:

$$A_s = \frac{V_u^2}{1.78 f_y \lambda^2 b h} = \frac{(100)^2}{1.78 (60) (1) (16) (16)}$$

$$= 0.37 \text{ sq in.}$$

By Eq. 5.9-6:

$$A_s (\text{min}) = \frac{80 b h}{f_y} = \frac{80 (16) (16)}{60,000}$$

$$= 0.34 \text{ sq in.} < 0.37$$



By Eq. 5.9-3:

$$A_n = \frac{N_u}{\phi f_y} = \frac{15,000}{(0.85)(60,000)} = 0.29 \text{ sq in.}$$

$$A_s + A_n = 0.37 + 0.29 = 0.66 \text{ sq in.} < 0.93$$

Therefore, flexure governs.

By Eq. 5.9-4a:

$$A_{vh} = \frac{V_u^2}{3.57 f_{yv} \lambda^2 bh}$$

$$= \frac{(100)^2}{3.57 (60)(1)(16)(16)} = 0.18 \text{ sq in.}$$

From Eq. 5.9-7:

$$A_{vh} (\text{min}) = \frac{40 bh}{f_y} = \frac{40 (16)(16)}{60,000}$$

$$= 0.17 \text{ sq in.} < 0.18 \text{ sq in.}$$

Try 2 - #3 U-bars,  $A_{vh} = 0.44 \text{ sq in.}$

3) Diagonal tension at reentrant corner:

By Eq. 5.9-8:

$$A_{sh} = \frac{V_u}{\phi f_y} = \frac{100}{0.85(60)} = 1.96 \text{ sq in.}$$

Use 5 - #4 closed ties = 2.00 sq in.

$$\text{Check } V_u / \phi bd = 100 / (0.85 \times 16 \times 15)$$

$$= 0.490 \text{ ksi} < 8\sqrt{f'_c} = 0.566 \text{ ksi OK}$$

4) Diagonal tension in the extended end:

$$\text{Concrete capacity} = 2\lambda\sqrt{f'_c} bd$$

$$= 2(1)\sqrt{5000}(16)(15)/1000 = 33.9 \text{ kips}$$

By Eq. 5.9-10:

$$A_v = \frac{1}{2f_y} \left( \frac{V_u}{\phi} - 2\lambda\sqrt{f'_c} bd \right)$$

$$= \frac{1}{2(60)} \left( \frac{100}{0.85} - 33.9 \right) = 0.70 \text{ sq in.}$$

Try 2 - #4 = 0.80 sq in.

Check Eq. 5.9-9

$$\phi V_n = \phi (A_v f_y + A_{vh} f_{yv} + 2\lambda\sqrt{f'_c} bd)$$

$$= 0.85 [0.80(60) + 0.44(60) + 33.9]$$

$$= 92.1 \text{ kips} < 100$$

Change  $A_{vh}$  to 2 - #4

$$\phi V_n = 110.4 \text{ kips} > 100 \text{ OK}$$

5) Check concrete bearing by Eq. 5.7-1:

$$w = 4.5 \text{ in.}$$

$$s = 4.5/2 \text{ (worst case)}$$

$$sw = 4.5(4.5/2) = 10.1, \text{ use 9 max}$$

$$s/w = 0.5$$

$$C_r = \left( \frac{sw}{200} \right)^{N_u/V_u} = (9/200)^{0.15} = 0.63$$

$$\phi V_n = \phi C_r 70 \lambda \sqrt{f'_c} (s/w)^{1/3} bw$$

$$\phi V_n = 0.7(0.63)(70)(1)\sqrt{5000}(0.5)^{1/3}$$

$$(16)(4.5)/1000 = 124.7 \text{ kips} > 100 \text{ OK}$$

Reinforcement is not required for bearing  
(Could also be determined from Table 5.20.1)

6) Check anchorage requirements:

$A_s + A_n$  bars:

From Table 8.2.7:

$$f_y = 60,000 \text{ psi, } f'_c = 5000 \text{ psi, #5 bars}$$

$$1.7\ell_d = 26 \text{ in. beyond dap}$$

$A_{vh}$  bars:

From Table 8.2.7, for #4 bars,

$$1.7\ell_d = 20 \text{ in. beyond dap}$$

## 5.10 Beam Ledges

The design shear strength of continuous beam ledges supporting concentrated loads, as illustrated in Fig. 5.10.1, can be determined by the lesser of Eq. 5.10-1 and 5.10-2:

for  $s > b + h$

$$\phi V_n = 3\phi h \lambda \sqrt{f'_c} (2\ell_p + b + h) \quad (\text{Eq. 5.10-1})$$

$$\phi V_n = \phi h \lambda \sqrt{f'_c} (2\ell_p + b + h + 2d_e) \quad (\text{Eq. 5.10-2})$$

for  $s < b + h$ , and equal concentrated loads, use the lesser of Eqs. 5.10-1a, 5.10-2a or 5.10-3

$$\phi V_n = 1.5\phi h \lambda \sqrt{f'_c} (2\ell_p + b + h + s) \quad (\text{Eq. 5.10-1a})$$

$$\phi V_n = \phi h \lambda \sqrt{f'_c} (\ell_p + \frac{b+h}{2} + d_e + s) \quad (\text{Eq. 5.10-2a})$$

where:

$h$  = depth of the beam ledge, in.

$\ell_p$  = ledge projection, in.

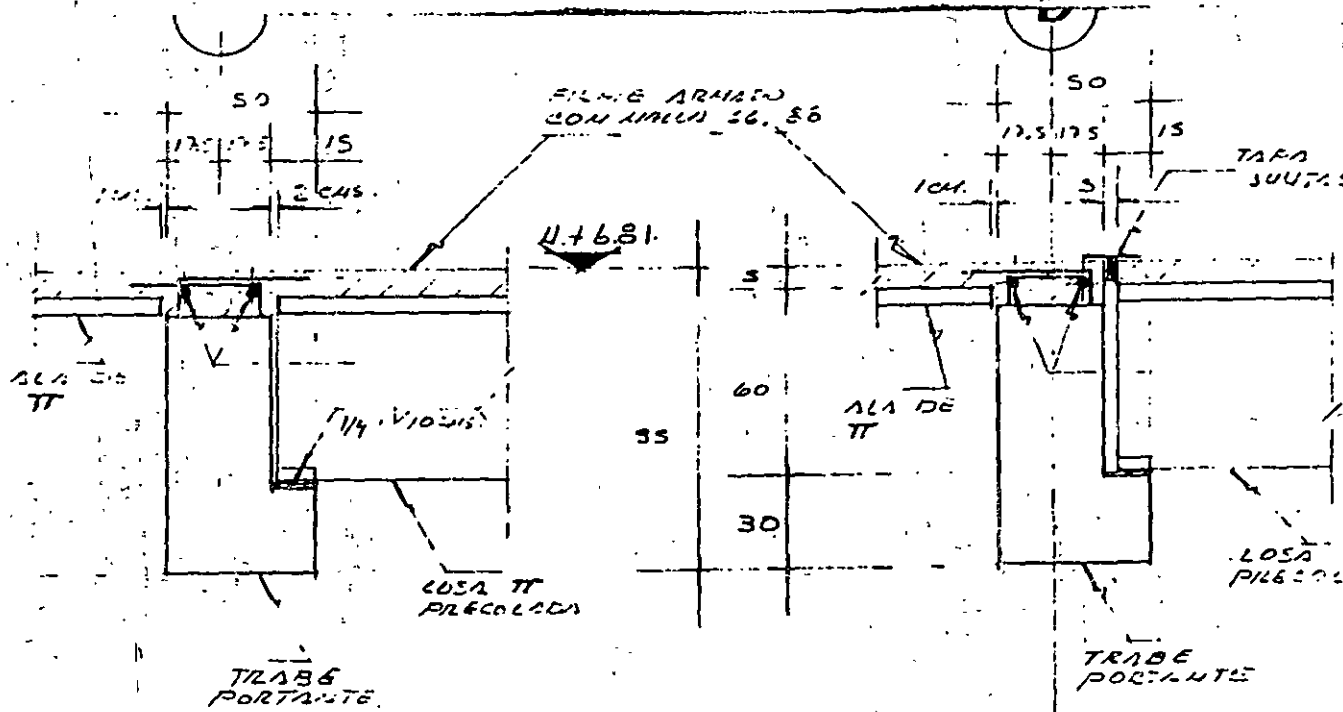
$b$  = width of bearing area, in.

$s$  = spacing of concentrated loads, in.

$d_e$  = distance from center of load to the end of the beam, in.

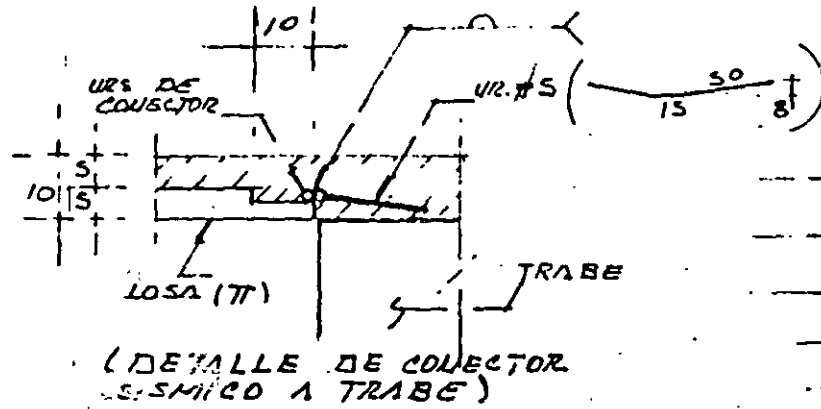
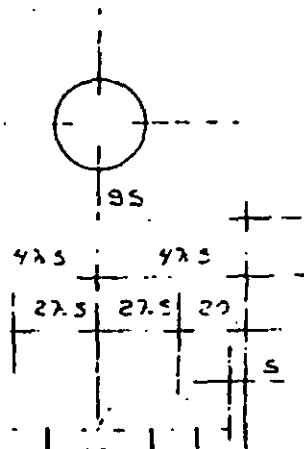
DET. 4

1/2

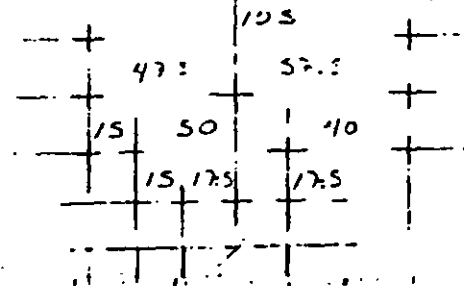
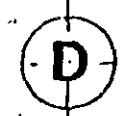


CORTE AA

CORTE BB



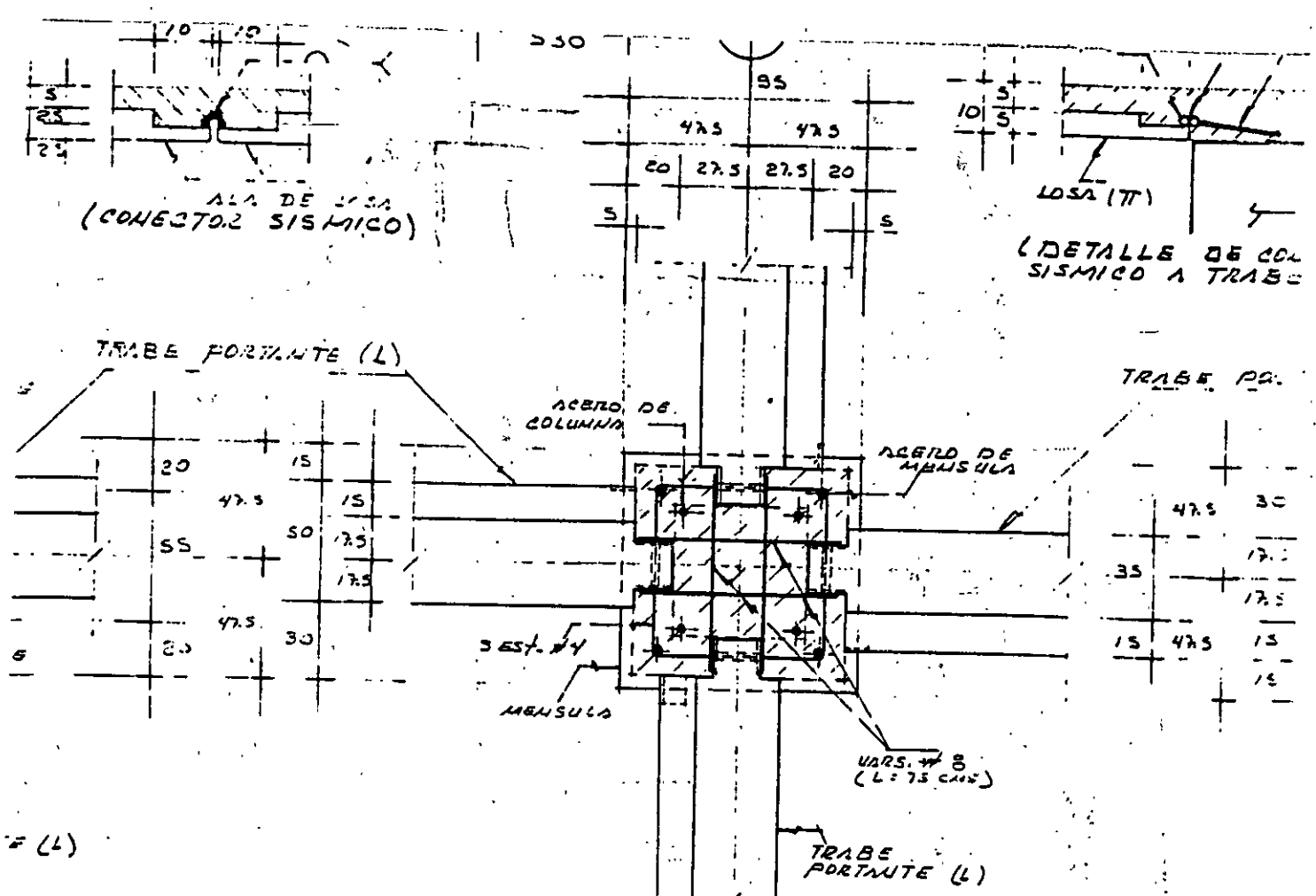
(DETALLE DE COLECTOR SISMICO A TRABE)



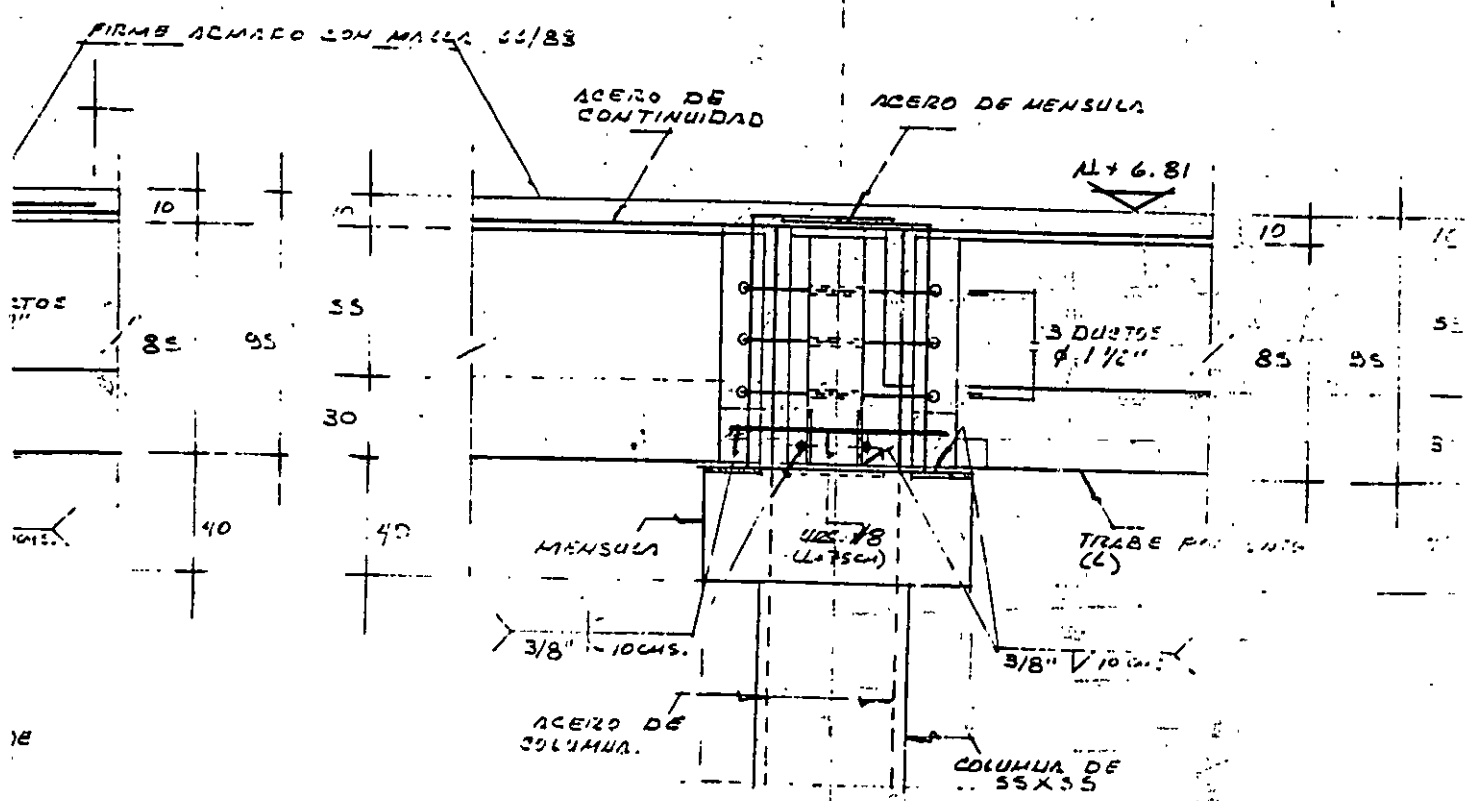
2 PL. DE  
10x20x1

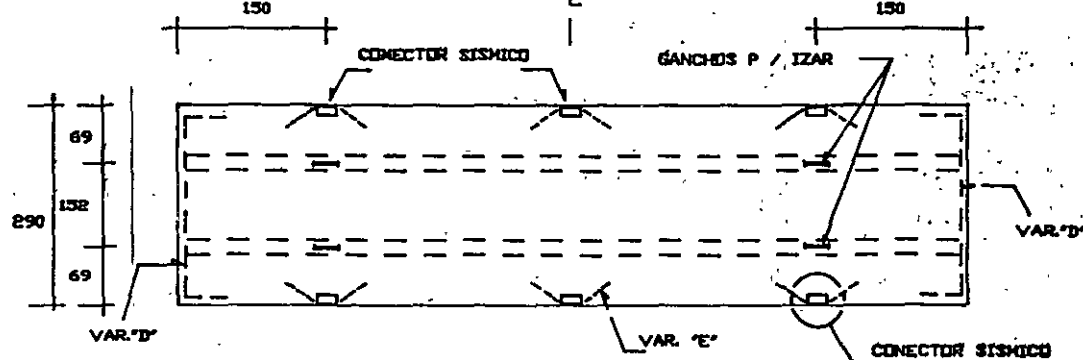
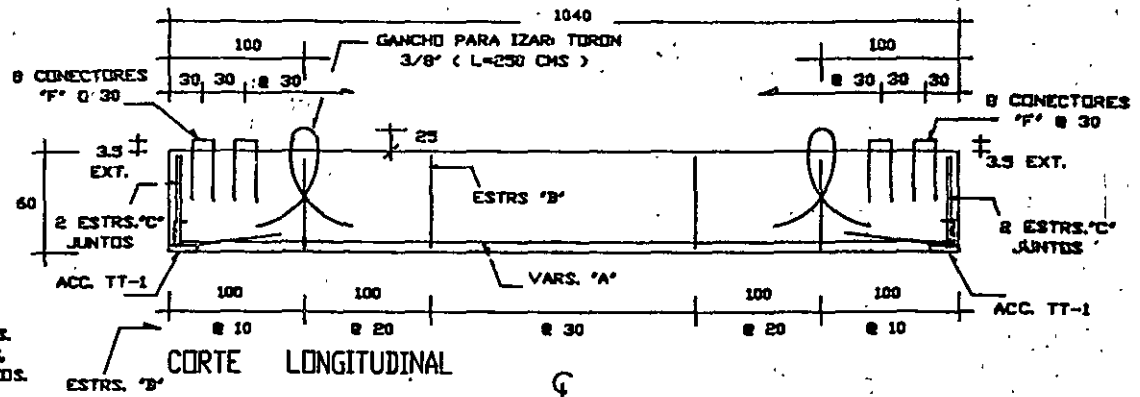
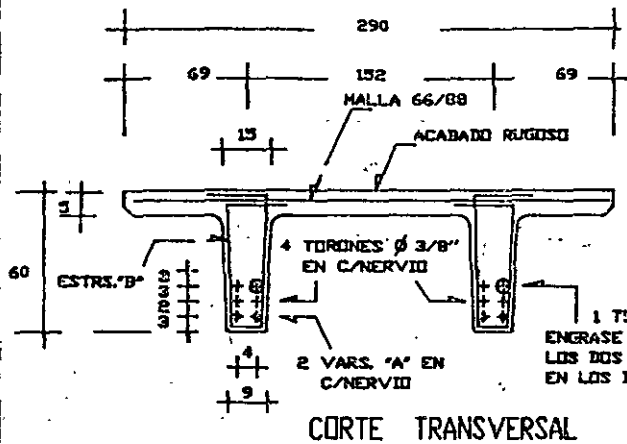
PL. DE  
20x25x31

2 PCS. DE  
10x20x3/8



PLANTA





9/1

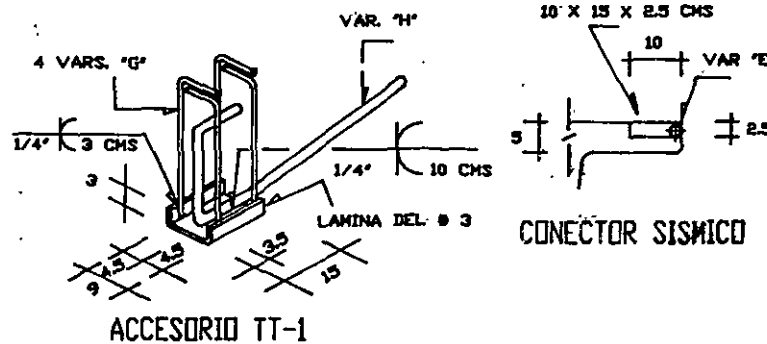
TABLA DE CUBICACION					
VAR.	#	LONG. CHS.	CANT. PZAS.	PESO KGS.	CROQUIS EN CHS.
A	3	1037	4	23.2	1037
B	2	179.5	100	44.9	5.5 32
C	2	140.5	8	2.8	5.5 7 11
D	3	335	2	3.6	25 25
E	5	135	6	12.6	60 15 60
F	3	90	32	16.1	35 20 35
G	3	64	16	5.7	32 12
H	5	109	4	6.8	12 25 60 10

NOTA 1: LAS COTAS DE LOS CROQUIS SON A CARAS INTERIORES DE VARILLA.

VISTA SUPERIOR  
( SIN CONSIDERAR CONECTORES 'F' )

NOTAS:

- COTAS Y MEDIDAS EN CHS. SALVO INDICACION.
- CONCRETO:  $f'c = 250 \text{ KG/CM}^2$ .
- ACERO: PRESFUERZO:  $fpu = 18,900 \text{ KG/CM}^2$ .
- ACERO: REFUERZO:  $fy = 4,200 \text{ KG/CM}^2$ .
- MALLA:  $fy = 5,000 \text{ KG/CM}^2$ .
- TAMAÑO MÁXIMO DEL AGREGADO = 3/4"



OBRERA:		CIA. HNOS. VAZQUEZ		PLANO
FABRICA:		VIBOSA		F-22
PIEZA TIPO:	TT-22	CANT. PZAS:	2	VOL. / PZA:
				2.9 M <sup>3</sup>
CALCULO:	DIEST	DEBIDO:	AVILLEGAS	APROBADO:
				J. GAYA
				FECHA:
				FEB / 89