



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA DE SISTEMAS – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

**UN MÉTODO PARA RESOLVER EL PROBLEMA CONTINUO DE
LOCALIZACIÓN DE UN SERVICIO Y DETERMINAR LOS ARCOS DE
RECORRIDO DE LOS CLIENTES**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
ING. GUSTAVO IVAN RAMOS GUZMÁN

TUTOR PRINCIPAL
DRA. HÉRICA SÁNCHEZ LARIOS

MÉXICO D.F., OCTUBRE, 2016

Índice

Resumen.....	i
Objetivo general y objetivos específicos.....	ii
Capítulo 1. Introducción.....	1
1.1 Introducción.....	2
1.2 Estado del arte.....	8
Capítulo 2. Algunas definiciones.....	27
2.1. Función distancia generalizada.....	27
Capítulo 3. Conceptos de distancia.....	30
3.1. Conceptos de distancia.....	30
3.1.1 Distancia en términos de tiempo.....	31
3.1.1.1 Distancia en términos de tiempo en una ciudad.....	31
3.1.2 Distancia en términos monetarios.....	32
3.1.2.1. Trayectorias de costo mínimo.....	33
3.1.3. Distancia en términos monetarios y la teoría de localización.....	36
Capítulo 4. Problema de la ruta más corta.....	38
4.1. Problema de la ruta más corta.....	38
4.2. Métodos de solución.....	40
4.2.1. Arborescencia de rutas más cortas.....	41
4.2.1.1. Caso de redes con costos no negativos.....	41
4.2.1.2. Caso general.....	42
4.2.2. Ruta más corta entre todo par de vértices.....	43
Capítulo 5. Funciones distancia en problemas de localización de servicios.....	46
5.1. Estimación de distancias usando las normas L_p	46
5.2. Normas L_p como Funciones Estimadoras de Distancia.....	46
5.2.1. Normas ℓ_p	47
5.2.2. Clasificación de las Normas Redondas y de Bloque.....	48
Capítulo 6. Modelado de funciones distancia generalizadas.....	59
6.1. Modelado de Funciones Distancia.....	59

6.2. Antecedentes: Función métrica de una función distancia sobre una región continua M .	59
6.3. Procedimiento para modelar una función distancia sobre una región discreta N a partir de una función métrica.....	60
6.4. Obtención de una función métrica sobre la región discreta N	62
6.4.1. Distancias entre nodos vecinos.....	62
Capítulo 7. Aplicación de funciones distancia generalizadas en problemas de localización de servicios.....	66
7. 1. Introducción.	66
7. 2. El Problema Continuo de Localización de un Servicio (PCLS)	69
7.3. El Problema de Localización de Servicios Simple (PLSS) o Problema de Localización de Servicios Sin Restricciones de Capacidad.	72
7.4. Aplicación del modelado de funciones distancia generalizadas en el problema de localización de servicios sobre una región continua.....	74
7.4.1. Discretización de la región continua M	75
7.4.2. Determinación de la función métrica G en cada nodo de la red.....	77
7.4.3. Obtención de las distancias para cada par de puntos en la red.	79
7.4.4. Solución del Problema Discreto de Localización de Servicios Métrico Generalizado (PDLSMG).	82
7.5. Solución del PDLSMG.....	84
7.6 Ejemplos.....	84
7.6.1 Ejemplo 1. Ilustración del caso (i): Hay un cliente en cada celda de la discretización.	84
7.6.1.1 Solución del ejemplo 1 con el método propuesto	86
7.6.2 Ejemplo 2. Ilustración del caso (ii): No hay clientes en todas las celdas de la discretización.	88
7.6.2.1 Solución del ejemplo 2 con el método propuesto.....	90
7.6.3 Ejemplo 3. Otra ilustración del caso (ii): No hay clientes en todas las celdas de la discretización.	94
Solución del ejemplo 3 con el método propuesto.....	94
Conclusiones.....	98
Referencias Bibliográficas.....	101

Resumen

El objetivo de este trabajo de tesis es proponer un método para resolver problemas de localización de servicios que se presentan en la vida real en los que las distancias involucradas pueden ser asimétricas, no uniformes, no homogéneas, e incluso no positivas. El método propuesto resuelve (en algunos casos, de manera aproximada) el Problema de Localización de un Servicio en una región continua como un Problema de Localización de Servicios en una región discreta, utilizando funciones distancia más generales que las tradicionales métricas L_p usadas en los modelos de localización. Además de hallar la localización del servicio que se busca instalar, con el método propuesto se pueden determinar los arcos de los recorridos que harían los clientes desde su ubicación hasta los lugares de servicio.

En este trabajo se trata de profundizar en el concepto de “distancia”, y muestra que la distancia puede ser vista de diferentes formas, ya sea como la longitud que separa dos objetos, el tiempo requerido para llegar a un destino, el costo de mover o transportar un producto entre dos nodos en una red, la energía consumida en el recorrido desde un punto hasta otro, etc.

Objetivo general y objetivos específicos.

Objetivo general.

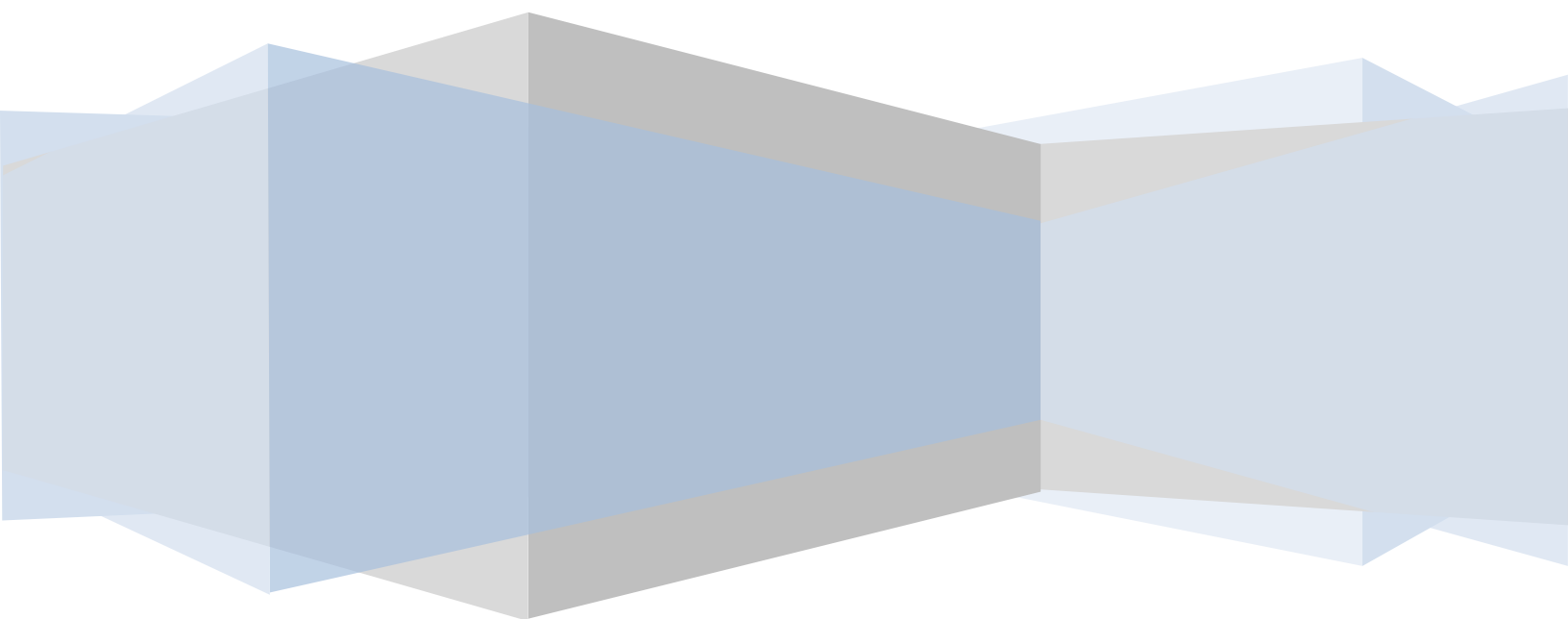
El objetivo general de este trabajo de tesis es proponer un método para resolver problemas de localización de servicios que se presentan en la vida real en los que las distancias involucradas pueden ser asimétricas, no uniformes, no homogéneas, y no positivas. En general, en los modelos de localización continua se han utilizado como funciones distancia, las tradicionales métricas L_p , o combinaciones lineales positivas de éstas, lo cual conduce a que las distancias modeladas por estas funciones sean simétricas y positivas. El uso de las métricas L_p en los modelos de localización ha sido por cuestiones matemáticas, ya que, en general, se tienen condiciones de convexidad. En particular, el método propuesto resuelve (en algunos casos, de manera aproximada) el Problema de Localización de un Servicio en una Región Continua como un Problema de Localización de Servicios en una Región Discreta, logrando con esto dos cosas: prescindir de una función distancia que modele las distancias de recorrido de los clientes, y manejar datos de distancias más generales que los datos derivados de las métricas L_p .

Objetivos específicos.

Como objetivos específicos, se busca modelar distancias que se presenten en la vida real, y que sean, por ejemplo, asimétricas, negativas, no uniformes, y/o no homogéneas. También se trata de profundizar y ampliar el concepto de distancia, y mostrar que la distancia puede ser vista de diferentes formas. En nuestro contexto, “distancia” puede referirse a longitud, tiempo, costo, energía, o cualquier atributo acumulativo.

CAPÍTULO UNO

INTRODUCCIÓN



1.1 Introducción.

En esta tesis se propone un método para resolver (en algunos casos, de manera aproximada) el Problema Continuo de Localización de un Servicio (PCLS) sobre una región M conformada por subregiones M_i las cuales podrían tener diferentes características de uniformidad, anisotropía y asimetría. Debido a esta conformación en subregiones M_i de la región de interés M , puede ser que *no se disponga de una única función distancia* que modele las distancias para todos los pares de puntos de la región M donde se encuentran localizados los clientes (y/o servicios ya existentes) y en la que se desea ubicar al nuevo servicio.

En el PCLS tradicional se considera como región de interés M el plano \mathbb{R}^2 en el que se tienen las mismas características de uniformidad, isotropía y simetría, por lo que en el modelado solamente se requiere una función distancia, la cual, en general, es alguna métrica L_p ($p \geq 1$), y en consecuencia, las distancias modeladas son simétricas, no negativas, y uniformes. Una ventaja de usar métricas L_p es por razones de simplicidad matemática, pues se tienen condiciones que podrían facilitar la búsqueda de la solución óptima del problema; sin embargo, esta simplicidad conduce a un modelado alejado de la realidad.

Si la función distancia involucrada en el PCLS es una métrica L_p ($p \geq 1$), entonces se puede resolver el problema usando el procedimiento de Weiszfeld (para más detalle, ver Love, 1988). Este procedimiento funciona muy bien por las propiedades matemáticas de las métricas L_p ($p \geq 1$): son funciones convexas, continuas, y diferenciables en casi todo su dominio, y por tanto tienen un óptimo global.

Hasta donde nosotros encontramos, en la literatura especializada solamente se generaliza el PCLS para el caso en que la región M es un plano inclinado (Hodgson, 1987). En este caso, las distancias no presentan simetría ni isotropía. Hodgson modeló una función distancia y resolvió el PCLS; sin embargo, aun cuando se están considerando condiciones más generales a las que definen a las métricas L_p , se tiene la limitante de que la región de interés es *en su totalidad* un plano inclinado. En la práctica, la región de interés M no es en su totalidad un mismo tipo de variedad; es decir M no es de uniformidad constante ni de isotropía constante,

sino más bien está compuesta por subregiones en las que en cada una de éstas se tienen ciertas características de uniformidad, asimetría e isotropía.

Si la región de interés tiene subregiones en las que hay diferentes características de asimetría, no uniformidad y/o anisotropía, entonces estamos en una situación más general que el caso del plano inclinado abordado por Hodgson (1987), y no se podría modelar **solamente una** función distancia que modele **todas** las distancias entre todos los pares de puntos de la región de interés. En su lugar, se debería tener una función distancia para cada subregión. En este trabajo de tesis se centra la atención a este caso. Es decir, el método propuesto en esta tesis, parte de suponer que **no existe una única función distancia continua** $d: M \times M \rightarrow R$ que modela las distancias **para todo** par de puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$.

Para obtener las funciones distancia que modelen las distancias en cada subregión, proponemos usar la estrategia de Vargas Estrada Eusebio (tesis de maestría, 2010, UNAM), la cual se detalla en esta tesis. Una vez que se modelan las funciones distancia para cada subregión, se procede a resolver el caso discreto del PCLS. El método propuesto involucra dos discretizaciones (una discretización para la región de interés, y otra para las direcciones de desplazamiento desde un punto hacia otros ciertos puntos). Los puntos candidatos para localizar el nuevo servicio son los puntos del centro de cada una de las celdas de la malla de la discretización de la región M , y por tanto, la solución, en ciertos casos podría ser aproximada. Entonces, el problema originalmente continuo pasa a ser uno discreto, que llamamos *Problema Discreto de Localización de Servicios Métrico Generalizado* (PDLSMG). Nuestro PDLSMG es una variante del conocido Problema de Localización de Servicios Simple (PLSS). El PLSS involucra en su función objetivo un cargo fijo que hace que el problema sea NP-duro. En nuestro modelo propuesto, consideramos constante este cargo fijo, y por tanto se puede eliminar del modelo, ganando una simplificación computacional importante. Otra variante de nuestro modelo discreto con respecto al PLSS, es que agregamos una restricción para establecer la condición de que solamente un servicio atienda a todos los clientes. Por último, queremos explicar por qué a nuestro modelo discreto le llamamos “métrico generalizado”: porque los datos de las distancias involucradas en nuestro problema son obtenidos de una función distancia más general que las tradicionales métricas L_p .

Por las discretizaciones que involucra nuestro método, además de resolver el PCLS, se pueden hallar los caminos poligonales de recorrido de los clientes hacia el servicio instalado.

En la función objetivo de nuestro PDLSMG se usarán datos de distancia obtenidos de varias funciones distancia generalizadas, cada una de estas funciones correspondiendo a una subregión M_i obtenidas de una cierta partición de la región de interés, como se trata de ilustrar en la figura 1.1.

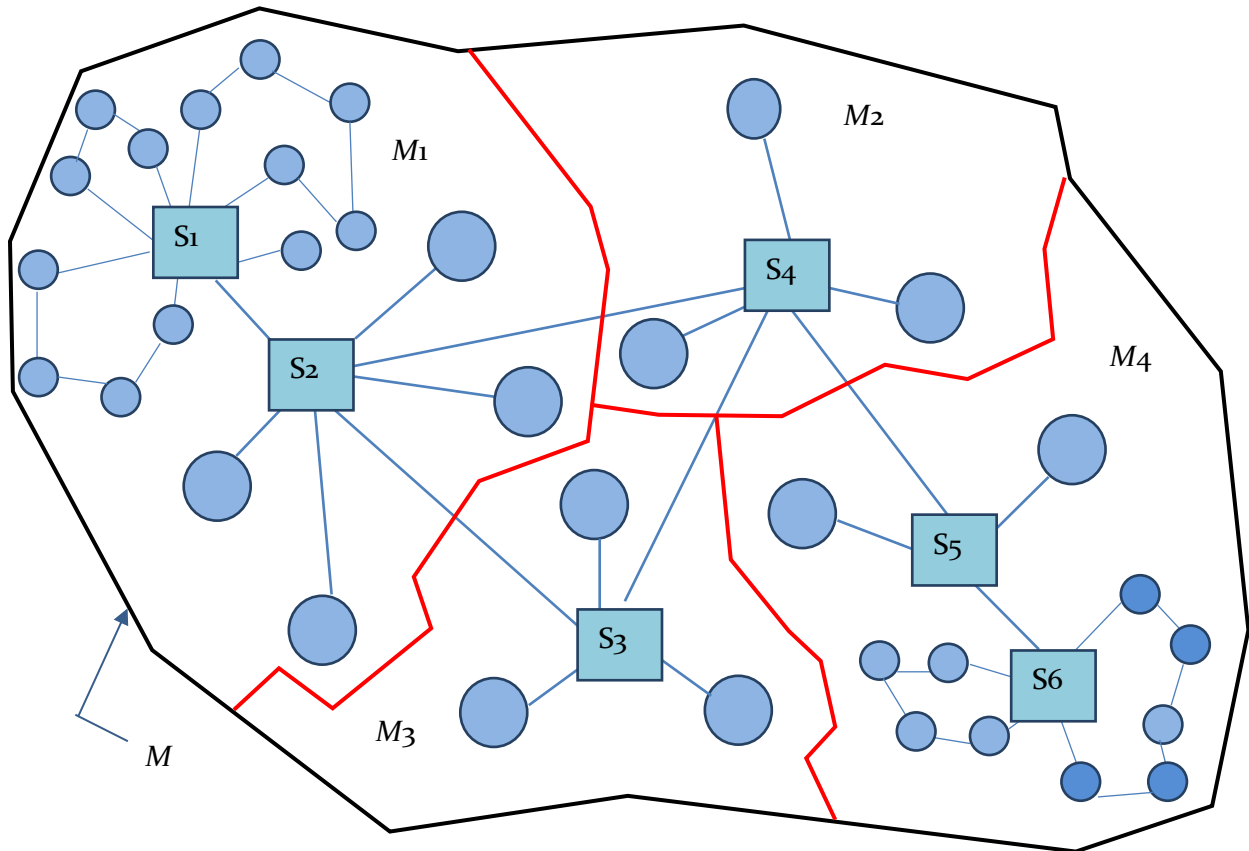


Fig.1.1 Partición de la región de interés M (delimitada por el polígono grande) en subregiones M_i delimitadas por las líneas rojas. En cada subregión M_i se tiene asociada una función distancia que modela las distancias entre los nodos de dicha subregión. Los nodos S_j representan a los servicios a localizar que satisfarán la demanda de los clientes (nodos circulares) distribuidos en la región M .

En la figura 1.1, la región de interés M es la delimitada por el contorno de color negro. En el interior de este contorno se tienen subregiones en las que en cada una de estas subregiones se tiene una función distancia generalizada que modela las distancias entre cualquier par de puntos que están en dicha subregión. En la figura 1.1, se ilustra con nodos circulares a los clientes (servicios ya instalados), y con nodos cuadrados a los servicios nuevos que satisfacen la demanda de los clientes.

En este trabajo de tesis, la función distancia se obtiene a partir del concepto de longitud de arco dado por $\int F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds$, y de definir *distancia* de \mathbf{a} a \mathbf{b} como la *longitud del arco más corto* que va de \mathbf{a} a \mathbf{b} ; es decir, la función distancia está dada por

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds, \quad (*)$$

donde $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ es una representación paramétrica del arco C que va de \mathbf{a} a \mathbf{b} y que denotamos por $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, y $\Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}$ son todos los arcos que van de \mathbf{a} a \mathbf{b} . A la función $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}(s))$ se le llama *función métrica*.

En la expresión (*) se observa que la función métrica F depende de cada punto \mathbf{x} y cada dirección \mathbf{v} , donde cada dirección \mathbf{v} . Así que, la idea de la que parte el método que se propone es, usando (*), determinar las distancias desde un punto dado \mathbf{x} hasta sus nodos vecinos de la red obtenida de discretizar la región de interés, y considerando solamente direcciones \mathbf{v} de desplazamiento desde el punto \mathbf{x} hacia ciertos nodos vecinos. En este sentido, para obtener las distancias desde un punto hasta sus nodos vecinos se requerirá previamente hacer dos discretizaciones: una discretización para la región de interés (por ejemplo, en forma de malla), y otra discretización para las direcciones \mathbf{v} de desplazamiento desde un punto dado \mathbf{x} hasta sus nodos vecinos. Desde el punto de vista de la región de interés, se propone construir una malla fina, tan fina, como la naturaleza del problema lo exija; y desde el punto de vista de las posibles direcciones de desplazamiento desde un punto dado \mathbf{x} , se propone considerar aquellas direcciones que conduzcan hacia un punto vecino en la malla obtenida, donde un nodo vecino, visto desde una perspectiva espacial, puede ser *vecino de primer orden* o *vecino de primer y segundo orden*. Estas clases de vecinos se ilustran en la figura 1.2.

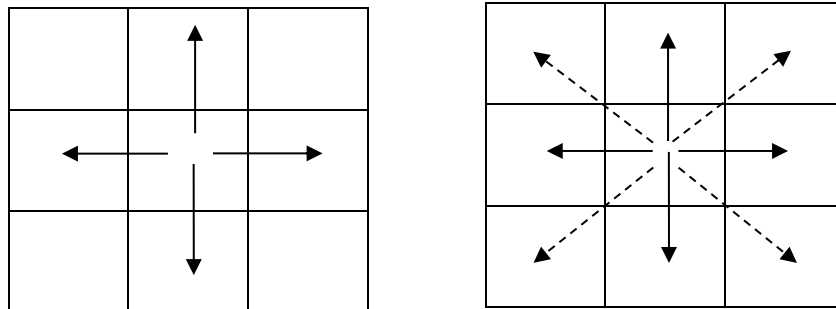


Figura 1.2 A la izquierda, se ilustran los vecinos de primer orden (4-conexos), y a la derecha, los vecinos de segundo orden (8-conexos)

Una vez que se determinan los valores de la función métrica F en cada punto \mathbf{x} para cada dirección considerada \mathbf{v} , se calculan las respectivas distancias usando la ecuación (*) arriba expresada. Después se aplica algún algoritmo de los existentes para la determinación del camino más corto entre cada par de nodos de la red. Cabe señalar que el proceso para la obtención de los valores de la función métrica $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ queda fuera del alcance de esta tesis. La obtención de estos valores podría ser mediante un proceso empírico en el que se consideren aspectos físicos como fricción, fuerza de gravedad, pendiente de la superficie, etc.

La precisión de la solución encontrada del problema de localización continua, dependerá de la refinación con que se diseñe la discretización de la región de interés, así como de la discretización de las direcciones de desplazamiento.

Con el método propuesto se busca modelar problemas de localización que se presentan en situaciones de la vida real, como por ejemplo, situaciones en las que los atributos de interés (tiempo, costo, energía, longitud, etc.) de los caminos de recorrido sean asimétricos (el camino de ida es diferente al de regreso), no homogéneos (el camino en una dirección es diferente al camino en otra dirección), negativos (para el caso de energía), etc.

Es importante señalar que el hecho de obtener, en el peor de los casos, una solución aproximada, no necesariamente significa que se sacrificó precisión en la solución del problema original de localización que se presentó en la vida real. No olvidemos que cuando se resuelve un problema localización de servicios de la vida real usando algunos de los modelos existentes, en general, no se obtienen soluciones muy precisas que digamos. Esto se debe al uso de las métricas L_p , las cuales tienen asociados caminos de recorrido que cumplen las propiedades de simetría, uniformidad, y no negatividad, lo cual, como bien sabemos, no siempre se dan en los recorridos que hacemos cuando nos desplazamos desde un lugar hasta otro.

Algunas de las ventajas de nuestro método propuesto son:

- Se modelan de mejor manera situaciones en las que se presentan distancias asimétricas, no homogéneas, negativas, y/o anisotrópicas.
- Se obtienen los caminos de recorrido que los clientes recorrerían desde su origen hasta el servicio que los atenderá.

En el Capítulo II de este trabajo, se dan algunas definiciones importantes que se requieren en el desarrollo de esta tesis, en particular, nos referimos al concepto de función distancia generalizada.

En el Capítulo III se aborda el concepto de distancia desde muy variados puntos de vista; dicho concepto tiene gran relevancia en este trabajo, debido a que entender las diferentes acepciones que éste puede tener, permite comprender la importancia de contar con funciones distancia que permitan modelar de forma más precisa las distancias que encontramos en diferentes campos y en la realidad. En este capítulo se dan a conocer conceptos tales como distancia en términos monetarios, distancia en términos de tiempo, etc.

En el Capítulo IV, se dan a conocer diferentes algoritmos empleados para resolver el Problema de la Ruta más Corta, así como la descripción de cada uno de ellos. Como se muestra en esta sección, tanto el algoritmo de Dijkstra como el de Floyd, se emplean para diferentes casos. Después, en el Capítulo VI, se presentan algunas funciones distancia utilizadas en problemas de localización de servicios. También se describen las normas ℓ_p , las cuales son una popular medida de distancia utilizada en la teoría de localización continua.

En el capítulo V se trata el tema de las normas L_p , que son las funciones distancia comúnmente usadas en los problemas continuos de localización de servicios.

En el Capítulo VI se aborda el modelado sobre una región discretizada de funciones distancia generalizadas en términos de la función métrica. En otras palabras, en este capítulo se muestra y detalla el procedimiento propuesto para modelar funciones distancia que cumplan condiciones más generales que las tradicionales, tales como asimetrías, no uniformidades y que puedan tomar valores negativos. Cabe señalar que el problema de cómo obtener la función métrica de la cual se deriva la función distancia generalizada, queda fuera del alcance de esta tesis.

En el Capítulo VII, se trata de resolver el problema de localización de servicios sobre una región continua a través del modelo propuesto de localización discreta, el cual es un caso particular del Problema de Localización de Servicios Simple (PLSS). En nuestro modelo se requieren datos de distancias, las cuales proponemos se obtengan aplicando el método propuesto en el capítulo anterior para obtener los datos de las “distancias”.

Finalmente, en el Capítulo VIII, se dan las conclusiones a las que se llegaron con este trabajo de tesis, así como los puntos más importantes del mismo.

1.2 Estado del arte.

Al realizar la revisión bibliográfica, se encontraron varios artículos en los cuales se utiliza la discretización de espacios continuos con el fin de llevar algunos problemas conocidos catalogados como “duros”, a instancias en las que pueden ser tratables computacionalmente. Dentro de estos artículos se abordan problemas de localización de servicios, modelado de redes de cadenas de suministro y distribución de planta, entre otros. Solo en algunos casos se profundiza en el uso de funciones distancia; sin embargo, los artículos recopilados guardan una importante relación con el tema central de este trabajo de tesis.

[Stefan Nickel \(1997\). **Bicriteria and Restricted 2-Facility Weber Problems.** Universitat Kaiserslautern, Kaiserslautern, Germany.](#)

En este artículo se analizan dos extensiones interesantes al Problema de 2 Servicios Clásico de Weber en \mathbb{R}^d . Al principio, se estudia el problema en el cual no se permite que las ubicaciones óptimas estén en una región específica, y se presentan algoritmos eficientes para este problema de Optimización Global, así como nuevos resultados estructurales. Después, se toman en cuenta los Problemas de Weber de 2 Servicios, con 2 tomadores de decisión, donde cada tomador de decisiones puede elegir sus propias preferencias para el problema de localización. Se da un algoritmo eficiente para determinar todas las ubicaciones de Pareto para este problema multicriterio, así como una descripción polinomial del conjunto de todas las ubicaciones de Pareto (en \mathbb{R}^{2d}).

Todos los resultados presentados en este artículo, se basan en una discretización del problema continuo original, utilizando argumentos geométricos y combinatorios. La complejidad de tiempo de todos los algoritmos presentados es de $O(dM \log M)$, donde M es el número de servicios existentes y d es la dimensión.

[D. R. Santos Peñate; R. Suárez Vega; P. Dorta González \(2006\). **The Leader-Follower Location Model.** Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión, Universidad Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas, España.](#)

Este artículo resume algunos resultados para el modelo de localización líder-seguidor en redes en varios escenarios a partir de discretizaciones para el problema $(r|Xp)$ -medianoide en redes, y el diseño de algoritmos que resuelven los problemas $(r|Xp)$ -medianoide y $(r|p)$ -centroide en espacios discretos, principalmente para demandas inelásticas. Derivado del modelo económico de Stackeleberg (1934), el problema de localización líder-seguidor consiste en determinar una estrategia óptima para dos firmas en competencia, las cuales toman decisiones secuencialmente. Una firma F_x , el líder, toma decisiones anticipando las acciones de una firma competidora F_y , el seguidor. La firma F_x , sabe que, una vez que la ubicación de su servicio es reconocido por el seguidor, éste abrirá sus servicios en los lugares que maximizan su cuota de mercado (o beneficio). El líder quiere determinar la estrategia que maximice su cuota de mercado tomando en cuenta la reacción del seguidor. Este problema líder-seguidor es un juego de Stackeleberg, y otros modelos de Stackelenberg resultan de los diferentes objetivos de los jugadores. Así, el problema $(r|p)$ -centroide formalizado por Hakimi (1983), es la estrategia óptima del líder cuando su objetivo es minimizar la máxima cuota de mercado del seguidor. El $(r|Xp)$ -medianoide es la solución óptima del problema del seguidor, cuyo objetivo es la maximización de su cuota de mercado. Usualmente, una solución de Stackelenberg se obtiene mediante un procedimiento recursivo. Primero, la reacción de la función del seguidor es calculada y entonces es incorporada al saldo del líder, el cual tiene que ser optimizado.

En este artículo se tratan modelos de localización secuencial en redes, y se considera el modelo líder-seguidor en muchos escenarios caracterizados por la regla de elección del cliente, el tipo de bienes servidos por las firmas, y el ambiente estático o dinámico.

Los autores formulan un modelo líder-seguidor estático asumiendo que la distancia es el único criterio de decisión, el cual modifican introduciendo funciones de atracción, la cuales incorporan atributos del servicio además de la distancia, para después tratar el problema líder-seguidor dinámico. En los modelos de redes, se asume que algún punto es candidato para ubicar algún servicio, sin embargo, la discretización permite reformular ciertos problemas de redes su discreto equivalente, lo que significa que una solución óptima en el espacio discreto es una solución óptima del problema en la red, el cual puede ser resuelto utilizando herramientas de optimización combinatoria.

*Martino Luis; Said Salhi; Gábor Nagy (2008). **Region-rejection based heuristics for the capacitated multi-source Weber.** University of Kent at Canterbury, Canterbur, UK.*

Un nuevo tipo de heurísticas constructivas y adaptables es planteado para generar soluciones iniciales para el problema Weber multi-origen capacitado. Esta técnica se basada en guiar la búsqueda para la construcción de las regiones restringidas que prohíben nuevas ubicaciones a ser situadas muy cerca de las ubicaciones encontradas previamente. En este artículo, se propone una región restringida que es representada por un círculo cuyo radio es inicialmente ajustado a un valor fijo, basado en el esparcimiento de los clientes y en el número de servicios, y entonces un esquema que adjunta dinámicamente el radio a cada servicio. También se presenta una técnica de discretización que divide un espacio continuo en un número discreto de celdas mientras es incrustado el uso de regiones restringidas dentro de la búsqueda. El experimento muestra que los métodos región-rechazo propuestos, aunque simple y sencillos de entender, proveen resultados alentadores con respecto tanto a la calidad como al esfuerzo computacional.

El objetivo del enfoque presentado es discretizar el espacio continuo en un número fijo de celdas bien definidas. Cada celda actúa como una ubicación potencial y es representada por su centroide y su peso como la demanda total del cliente perteneciente a su celda. Para crear las celdas, inicialmente se define un plano rectangular. El primer paso es dividir igualmente a^1 – y a^2 – ejes dentro de M particiones igualmente divididas, creando M^2 celdas. La longitud (M_1) y el ancho (M_2) de una celda se calculan como sigue:

$$M_1 = \left\lfloor \frac{a_{max}^1 - a_{min}^1}{M} \right\rfloor \text{ y } M_2 = \left\lfloor \frac{a_{max}^2 - a_{min}^2}{M} \right\rfloor$$

La posición de la p -va celda en el a^1 – eje es determinada por:

$$\varphi_p = a_{min}^1 + (p - 1)M_1, \quad p = 1, 2, \dots, M + 1.$$

Y similarmente, en a^2 – eje, la posición de la q -va celda puede ser encontrada como:

$$\zeta_q = a_{min}^2 + (q - 1)M_2, \quad q = 1, 2, \dots, M + 1.$$

Permite C_{pq}^1 y C_{pq}^2 denotar las coordenadas delo centroide de la celda pq en a^1 – y a^2 – ejes, respectivamente. Esto se deriva como:

$$C_{pq}^1 = \varphi_p + \left(\frac{M_1}{2}\right) \text{ y } C_{pq}^2 = \zeta_q + \left(\frac{M_2}{2}\right), \quad \text{donde } p, q = 1, 2, \dots, M.$$

Simin Muang; Rajan Batta; Kathrin Klamroth; Rakesh Nagi (2005). **The K-Connection Location Problem in a PPlane**. Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión, Universidad Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas, España. Department of Industrial Engineering, Tsinghua University, Beijing, People's Republic of China. Department of Industrial Engineering, University at Buffalo (SUNY), Buffalo, USA. Institute of Applied Mathematics, University of Erlangen-Nuremberg, Martensstr, Germany.

Este artículo determina la localización óptima de k conexiones en un plano, donde una conexión vincula pares de servicios existentes, considerando tanto la versión capacitada como la versión no capacitada. Se considera un problema de localización en el cual los flujos entre pares de servicios deben de fluir a través de una conexión, y lo que se busca es localizar un número dado de conexiones y asignar flujos hacia ellos, con el objetivo de minimizar el costo de transporte. Tanto para el modelo capacitado como el no capacitado, se desarrollaron formulaciones matemáticas y se establecieron los resultados de una discretización, la cual lleva a un problema NP-duro. Para su solución, los autores desarrollan algoritmos heurísticos basados en el ajuste de flujo del camino más corto. Los desarrollos computacionales de dicho algoritmos fueron estudiados por la comparación de los resultados heurísticos y soluciones exactas o límites inferiores de la relajación lineal para pequeños problemas desarrollados aleatoriamente. Para los problemas grandes, los algoritmos fueron calificados en términos de su tiempo computacional.

Tres de los coautores de este artículo han considerado versiones discretas de este problema en trabajos pasados, en los cuales las ubicaciones potenciales proceden de un conjunto discreto, sin embargo el problema es NP-duro. Por lo tanto, en este artículo se utiliza un enfoque directo para abordar la versión planar del problema, lo que requiere nuevos análisis y procedimientos computacionales que constituyen la mayor contribución del artículo.

Los autores observan que el Problema de Localización de Conexión Planar, está relacionada con tres bien estudiados problemas de localización planar: el problema k -median planar, el problema de localización-asignación, y el problema de localización de hubs. Los autores suman cada uno de los problemas para desarrollar sus métodos de análisis y solución. El problema k -median planar busca ubicar un conjunto de nuevos servicios con respecto a un

conjunto de servicios existente en el plano para minimizar costos. El resultado es que las ubicaciones óptimas para las nuevas instalaciones sólo dependen de su relación geográfica con respecto a cada simple instalación existente, ya que se dan interacciones entre las nuevas instalaciones y las ya existentes. En el caso de este artículo, las ubicaciones óptimas para las conexiones dependen de cada par de servicios origen-destino, y se debe asignar a cada flujo una conexión específica; sin embargo, cuando se dan las asignaciones, el problema se reduce al problema k-median planar.

Otro problema cercanamente relacionado es el problema de localización-asignación, el cual se enfoca en localizar un conjunto de K nuevos servicios con el fin de minimizar el total de las distancias ponderadas. Cuando se permite que cada par de servicios de origen y destino sean el mismo servicio, el problema se reduce a un problema de localización-asignación planar. Las principales diferencias entre estos problemas son:

- El problema de localización de conexión tiene interacciones entre servicios existentes.
- Para M servicios existentes y K nuevos servicios o conexiones, el problema de localización-asignación debe asignar M demandas a los nuevos servicios. Sin embargo, el problema de localización de conexión debe asignar $M(M-1)$ pares de flujos de conexiones.
- La técnica de agregación es un enfoque común para reducir el tamaño del problema en el problema de localización-asignación. Este enfoque no es conveniente para el problema de localización de conexión, ya que no se pueden agrupar los flujos utilizando la proximidad como criterio.

Finalmente, el problema de localización de conexiones puede también ser visto como un problema de localización de hubs one-stop, el cual es un caso especial del problema de localización de hubs planar. Sin embargo, el problema de localización de conexiones, asume que no existen interacciones entre las conexiones. Esta restricción ayuda a estabilizar algunos resultados de la discretización y a desarrollar más algoritmos eficientes. Además, este artículo propone tanto el caso capacitado como el no capacitado, lo cuales no son considerados en el problema de localización de hubs planar.

Tanto para el problema localización de k-conexiones capacitado como para el no-capacitado, un límite inferior para el valor óptimo de la función objetivo es:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w_{ij} d(Ex_i, Ex_j).$$

Para estimadores poliédricos, el problema de localización de k-conexiones no-capacitado puede ser reducido a un problema k-media discreto con un conjunto dominante finito. Este resultado tiene las siguientes ventajas:

- Se pueden encontrar soluciones heurísticas eficientes para el problema k-median discreto.
- El problema k-median discreto puede ser formulado como un problema lineal entero, el cual puede ser resuelto óptimamente para problema de un tamaño relativamente pequeño con un solver estándar como CPLEX.
- Ayuda a buscar un buen conjunto de soluciones iniciales en el enfoque de solución propuesto.

Dado que tanto para la versión capacitada como para la no-capacitada muestran la misma función objetivo, para ambas versiones también es cierto que, con las variables de asignación óptimas conocidas, $w_{ijk}^*(P)$ es equivalente al problema k-median relacionado en el plano, y que además, este problema puede ser reducido a K problema 1-median independientes. Por lo tanto para ambos casos se obtiene el siguiente resultado de discretización: existe al menos una solución óptima del problema de localización con k-conexiones capacitado o no-capacitado con estimadores poliédricos para el cual cada punto de conexión es localizado en un punto de la malla de $G \cap \text{conv}\{Ex_i: i \in \{1, \dots, M\}\}$.

La eficiencia de los algoritmos propuestos es probada a través de la solución de problemas de diferentes tamaños generados aleatoriamente. Las coordenadas de cada ubicación de servicios existente se obtuvieron seleccionando valores aleatoriamente de una distribución uniforme $U(0, 1000)$. Para los problemas pequeños, se evaluó la exactitud de las soluciones heurísticas con las soluciones óptimas o la relajación lineal del límite inferior, que se pueden encontrar mediante la resolución de problemas median capacitados discretos (para el caso no-capacitado) o problemas median capacitados (para el caso capacitado) usando CPLEX 7.5 en una computadora Dell X86 Pentium 3 con 256 MB RAM. Los algoritmos fueron codificados en C++.

Peter Y. Zhang; David A. Romero; J. Christopher; Cristina H. Amon (2014). Solving wind farm layout optimization with mixed integer programs and constraint programs. Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Toronto, Toronto, Canada.

En este artículo se aborda la relación que existe entre el problema de distribución de una granja eólica con la localización óptima de turbinas en un área geográfica determinada para maximizar el beneficio bajo condiciones de viento estocásticas. Se presenta un modelo programación con restricciones (CP) y un modelo de programación entera mixta (MIP) que incorpora la no-linealidad de las interacciones aerodinámicas entre las múltiples turbinas de viento. Los resultados empíricos indican que el relativo desarrollo entre ambos modelos se invierte cuando se cambia (de uno simple a uno más complejo) el escenario del viento. Se incluyen las restricciones de la participación del terrateniente y las limitaciones del ruido, lo que hace que la descomposición basada en el MIP supere a la basada en CP e casi todos los casos. Finalmente se propone una mejora del modelo de diversidad máxima y se demuestra que el modelo mejorado resuelve más instancias del problema. Algunos métodos heurísticos existentes y modelos enteros mixtos, se han explorado este problema a través de la discretización.

El problema de distribución de una granja eólica se ocupa de la colocación óptima de turbinas en un campo eólico. Actualmente, este problema aparece únicamente en la literatura de investigación de ingeniería, donde se ha invertido mucho esfuerzo en el desarrollo de metaheurísticas y algoritmos glotones para las variaciones del problema.

En un parque eólico, los desarrolladores optimizan la distribución de las turbinas de acuerdo a los objetivos y las limitaciones prescritas en un proceso llamado micro-localización. En un caso típico, se trata de maximizar el beneficio esperado y minimizar los efectos secundarios peligrosos durante la construcción y la operación. Debido a la complicación de estas tareas, en este artículo se considera la maximización de la captación de energía de un parque eólico como único objetivo, puesto que está estrechamente relacionado con el beneficio a largo plazo de los parques eólicos. Además, se asume que el parque eólico es plano, y todas las turbinas son del mismo tipo. El objetivo, por tanto, es maximizar la capacidad global de generación de energía del parque eólico., y hay tres tipos de restricciones:

1. Proximidad: las turbinas deben ser ubicadas a cinco diámetros de rotor de turbina para evitar daños estructurales inducidos por interacciones aerodinámicas fuertes.
2. Límite: las turbinas deben ser ubicadas dentro de los límites del parque eólico.
3. Número de turbinas: El número de turbinas es fijo.

La razón por la que el número total de turbinas es fijo (en lugar de delimitada por un número máximo de turbinas) es debido a consideraciones prácticas. Durante el desarrollo del parque eólico, el número total de turbinas es determinado antes del proceso de diseño, por las regulaciones gubernamentales y la capacidad de la interconexión de la red eléctrica local, entre otros factores. Sin embargo, para el diseño espacial más profundamente, un modelo dado puede ser resuelto múltiples veces con números diferentes de turbinas.

Los autores utilizan una representación discreta del parque eólico: la tierra es descompuesta en un conjunto de células cuadradas, donde en cada célula únicamente se puede acomodar una turbina. Comparado con un enfoque continuo, el enfoque discreto es menos sensible a la discontinuidad en el campo eólico. Tal discontinuidad es común en la práctica debido a la infraestructura existente y las restricciones geográficas. En este artículo, las instancias problemáticas son los parques eólicos cuadrados con células cuadradas del mismo tamaño. En la literatura, es común la práctica de la discretización de los datos de las frecuencias de viento anual en múltiples direcciones y velocidades, de modo que el total de la producción de energía es la suma ponderada de la energía producida en cada estación de viento. Entonces, la potencia esperada sólo es diferente a la producción de energía anual esperada (AEP) por una constante (el número de segundos por año). Por lo tanto, los autores trabajan con la potencia esperada para simplificar los cálculos.

En la **Figura 1.3** se muestra una representación de una rosa de viento con un pseudo régimen de viento, la cual representa la velocidad del viento y la dirección de la discretización.

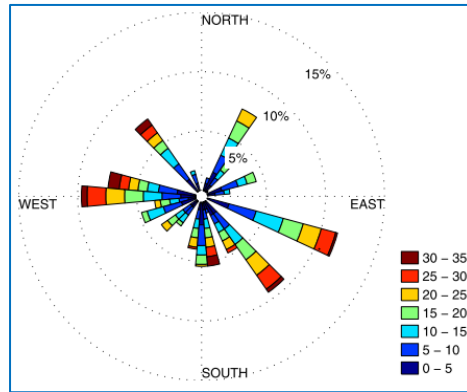


Figura 1.3

Hillel Bar-gera (2005). Continuous and Discrete Trajectory Models for Dynamic Traffic Assignment. Department of Industrial Engineering and Management, Ben-Gurion University.

Este artículo aborda las formulaciones analíticas, enfocándose en el caso de los modelos a gran escala de larga duración de áreas metropolitanas para la planificación Ab largo plazo. Se presenta una formulación general que pretende proveer un puente natural entre modelos individuales continuos de flujo de tráfico de enlace y modelos de redes de equilibrio dinámico de los usuarios. Esto se logra mediante la consideración de la red de transporte como un espacio topológico, en lugar de la representación gráfica combinatoria convencional.

Los modelos de predicción de viaje tradicionales asumen que los patrones de viaje son estáticos durante el periodo de tiempo en cuestión, a pesar de que este supuesto es claramente problemático. La demanda de viaje cambia considerablemente durante el día entre periodos pico y no pico. Una solución común es dividir el día en varios periodos de modelado y manejar cada periodo por separado. Esta “solución” está lejos de ser satisfactoria, ya que implica que los cambios en los flujos de la ruta se propaguen instantáneamente desde su origen a su destino. Como resultado, los modelos estáticos no logran captar la interacción entre los periodos de tiempo, causada por los viajes que empiezan durante un periodo y terminan durante el siguiente.

El principal objetivo de este artículo son los temas del modelado dinámico general. La practicidad del marco propuesto es demostrada a través de consideraciones específicas del modelo de onda cinemática simplificado, el cual se extiende a redes con los mismos principios usados por Daganzo (1995a) y Kuwahara y Akamatsu (2001) en sus modelos discretos. Y se da

principal atención en la definición exacta del modelo, con el fin de obtener un modelo exacto completo.

Al igual que otros modelos exactos, su solución exacta puede estar en infinitas dimensiones, mientras que las soluciones prácticas están en dimensiones finitas y por lo tanto discretas. Un enfoque típico en la literatura es elegir varias condiciones que serán satisfechas por el modelo discreto, independientemente de las implicaciones computacionales, y algunas otras que se satisfagan sólo aproximadamente. Las imprecisiones resultantes son a menudo ignoradas, aunque, dado el nivel de refinamiento de la discretización, estos errores no son propensos a ser de gran importancia.

En este artículo se propone un enfoque diferente, en el cual las condiciones que son elegidas para ser satisfechas con precisión, sólo si esto no conduce a un incremento en los requerimientos computacionales. Las demás condiciones son satisfechas solo de manera aproximada. Este enfoque ofrece a los usuarios la flexibilidad para determinar el nivel deseable de agregación en la discretización, una decisión que debe ser tomada en consideración tanto para las inexactitudes resultantes como para las implicaciones computacionales. En particular, se afirma que para la representación del flujo de tráfico a lo largo de una ruta, el uso de la discretización de la trayectoria es ventajoso. Se discuten las implicaciones de discretización trayectoria para los modelos dinámicos generales, así como para el modelo de onda cinemática simplificada.

Un modelo de trayectoria continua permite la formulación exacta del problema de asignación dinámica de tráfico. La formulación general mejora los modelos de asignación de tráfico dinámicos analíticos existentes mediante la incorporación de modelos de flujo de tráfico de enlace único continuos de manera general, coherente y relativamente intuitiva.

Por lo que se propone un modelo de trayectoria discreta como una aproximación del modelo continuo. El modelo discreto ofrece gran flexibilidad para elegir el nivel de agregación con respecto a los intervalos de tiempo, que van desde varias horas, como típicos en la práctica actual de modelos de predicción viajes a largo plazo, a un segundo o menos, como en simulaciones microscópicas. Un algoritmo para encontrar soluciones aproximadas discretas se presenta, así como medidas de precisión para evaluarlos. El efecto de la resolución del modelo en cuanto a tiempo y rendimiento es examinado a través de ejemplos numéricos, y se

concluye que la discretización de la trayectoria parece ser el enfoque más exacto-eficiente para la representación de dimensiones finitas de patrones de tráfico en las rutas. Este enfoque se puede utilizar en cualquier nivel elegido arbitrariamente de la agregación, de acuerdo con los requisitos de precisión y la disponibilidad de recursos computacionales. Los resultados numéricos demuestran que en un intervalo de pasos de tiempo entre un minuto y una hora, las precisiones alcanzadas por este modelo son bastante razonables, lo que corresponde a la resolución elegida.

Horst W. Hamacher; Kathrin Klamroth (2000). Planar Weber Location Problems with barriers and block norms. Universit"at Kaiserslautern, Kaiserslautern, Germany.

En este artículo se propone una discretización para los problemas de localización con barreras y normas de bloque. Los resultados implican el uso de un algoritmo polinomial para resolver el problema. Sin embargo, si la suma de las distancias ponderadas en este documento se sustituye por la maximización obtenemos una clase de problemas que hasta ahora ha sido insoluble.

El problema de Weber para un conjunto finito dado de servicios existentes $\epsilon_x = \{E_{x1}, E_{x2}, \dots, E_{xM}\} \subset \mathbb{R}^2$ con pesos positivos $w_m (m = 1, \dots, M)$ es encontrar un nuevo servicio $X^* \in \mathbb{R}^2$ tal que $\sum_{m=1}^M w_m d(X, |E_{xm})$ es minimizada por alguna función distancia d . En este artículo, se consideran distancias definidas por normas de bloque.

Una variación de este problema se obtiene si se introducen barreras, las cuales son subconjuntos poliédricos convexos del plano donde ni la localización de nuevos servicios ni viajes son permitidos. Tales barreras como lagos, regiones militares, parques nacionales o montañas, son frecuentemente encontradas en la práctica.

Desde un punto de vista matemático, los problemas con barreras son difíciles, ya que al presentarse estas, se destruye la convexidad de la función objetivo. No obstante, en este artículo se presenta una discretización: uno de los puntos de la cuadrícula que fue definida por los servicios existentes y las direcciones fundamentales de las distancias poliédricas, puede ser una ubicación óptima. Así, el problema con barreras puede ser resuelto con un algoritmo polinomial.

En el artículo se explica que la Teoría de Localización, al igual que muchas otras ramificaciones de la Investigación de Operaciones, es impulsada por dos enfoques: por un lado, las decisiones en administración, economía, planeación de la producción, etc., contienen muchas facetas, las cuales se relacionan con la “localización de servicios”. Por otro lado, la teoría de localización es por sí misma, una interesante y desafiante parte de las matemáticas con un conjunto de problemas en constante incremento, los cuales pueden no tener un trasfondo en el mundo real.

Los autores desarrollan algunos resultados que parecer importantes tanto teórica como prácticamente: utilizan normas de bloque (normas poliédricas, medidores poliédrico simétricos) para evaluar las distancias e introducir barreras, las cuales restringen el área disponible para ubicar servicios y no pueden ser cruzadas mientras se va de un servicio a otro (propiedad “prohibido el paso”). También proponen límites superiores para los problemas de localización con barreras, además del estudio de problemas de localización planar con barreras poliédricas y normas de bloque y se muestra como el problema con barreras puede ser reducido a un problema de localización discreto.

A pesar de que este artículo se centra principalmente en normas de bloque, los resultados pueden generalizarse a una clase más general de medidores poliédricos. En la **Figura 1.4** se observa un ejemplo de un medidor poliédrico que no es una norma de bloque con tres direcciones fundamentales y su extensión simétrica.

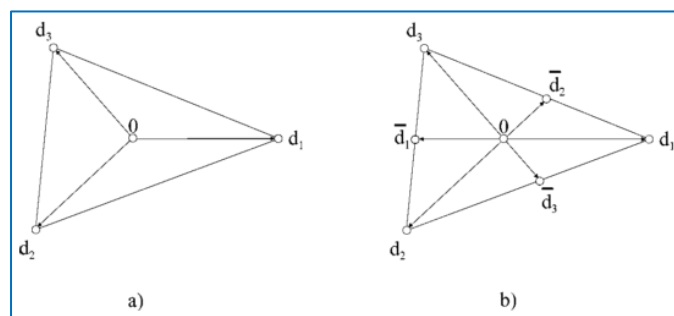


Figura 1.4

Sin embargo, debido a que los medidores poliédricos pueden ser no-simétricos, se tienen que hacer algunas consideraciones adicionales. En la **Figura 1.5**, se define una malla G utilizando las tres direcciones fundamentales d_1 , d_2 y d_3 de la figura anterior.

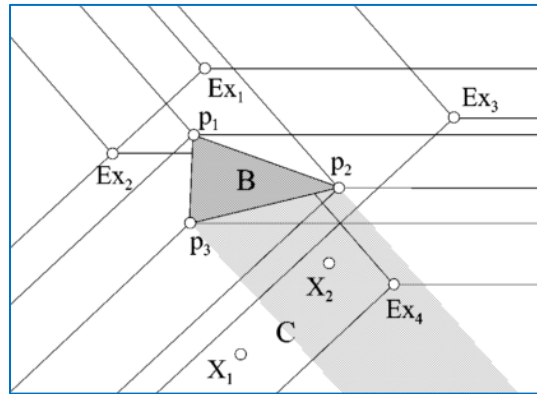


Figura 1.5

La construcción implica que un servicio existente puede ser γ – *visible* únicamente desde partes de una celda y no desde la celda completa. Se considera por ejemplo la existencia de un servicio E_{x1} , una celda C y los dos puntos X_1 , X_2 en C . Entonces la distancia más corta desde X_2 a E_{x1} es prolongada por la barrera B i. e., E_{x1} no es γ – *visible* desde X_2 , mientras que el mismo servicio existente E_{x1} es γ – *visible* desde X_1 (se da el caso de una función distancia no-simétrica en el que la distancia de X a Y puede ser diferente de la distancia de Y a X). Con el objetivo de superar esta dificultad, se introducen unas direcciones fundamentales redundantes \bar{d}_1 , \bar{d}_2 y \bar{d}_3 apuntando en direcciones opuestas de las direcciones fundamentales d_1 , d_2 y d_3 dadas. Estas direcciones fundamentales adicionales no influyen en la medida de las distancia con respecto a la malla poliédrica dada γ . Pero su existencia implica una malla más fina \bar{G} en la cual cada servicio existente que es γ – *visible* desde algún punto en el interior de una celda es γ – *visible* desde cada otro punto en alguna celda.

Luis Gouveia; Pedro Martins (2014). Solving the maximum edge-weight clique problem in sparse graphs with compact formulations. Faculty of Sciences, Operations Research Center (CIO), University of Lisbon, Lisbon, Portugal.

Este artículo estudia el comportamiento de formulaciones compactas para resolver el problema de camarillas de máximo peso-borde (MEWC por sus siglas en inglés) en grafos dispersos, el cual es un problema “duro”. Varias aplicaciones del MEWC en el mundo real se definen en grafos dispersos (en las redes sociales, redes financieras, redes de comercialización, redes biológicas, entre otras) donde los bordes faltantes se deben a algún proceso de umbral o porque no están aún supuestos en el grafo. Este tipo de situaciones se presentan a menudo

en las redes metabólicas de la celda, donde la cantidad de metabolitos compartidos entre las reacciones es un tema importante para entender los elementos predominantes de la celda. En este artículo se proponen nuevas formulaciones de nodos discretizados para el problema, los cuales son más compactos que otros modelos conocidos en la literatura. Los experimentos computacionales indican que las formulaciones con nodos discretizados son más eficientes para la resolución de grafos dispersos de gran tamaño. También se obtiene una nueva variante del problema MEWC donde el objetivo de maximizar incluye los bordes vecinos de la camarilla.

Los experimentos computacionales llevados a cabo sobre un conjunto de instancias y referencias del mundo real mostraron que los modelos se comportan de manera distinta de acuerdo a la densidad de los grafos subyacentes. La mayoría de los modelos con restricciones de extra fortalecimiento no son realmente eficaces debido a la cantidad de restricciones adicionales que ello supone. Esto sugiere que el uso de metodologías de corte de planos o enfoques de ramificación y corte, posiblemente, se puede mejorar la mayoría de los resultados reportados. Sin embargo, como alternativa a la utilización de métodos más sofisticados, las formulaciones compactas que presenta este artículo son muy atractivas para utilizarlas dentro de un paquete de programación lineal entera. Las formulaciones también se utilizaron para la discusión de la variante en la que la función objetivo maximiza el peso total de los bordes en un vecindario de la camarilla, denotado por el problema de camarillas de máximo peso-borde de vecindarios (MEWNC). En este caso, las soluciones del MEWNC identificaron un subconjunto de elementos fuertemente relacionado con la prevalencia pesada dentro de toda la red, mientras que la solución del problema MEWC simplemente se concentra en la cohesión de los elementos en la camarilla. La relevancia práctica de los dos problemas también fue motivada señalando varias aplicaciones del mundo real.

Shah Md. Toufiqur Rahman; Md Tausif Salim; Sultana Razia Syeda (2014). Facility layout optimization of an ammonia plant based on risk and economic analysis. Department of Chemical Engineering, Bangladesh University of Engineering and Technology, Bangladesh.

En este artículo el concepto de seguridad del procesamiento se incorpora en la configuración de una planta de amoníaco. Para esto, se utiliza un método basado en rejillas para determinar la disposición de las diferentes instalaciones dentro del área de procesamiento de la planta. Además, se utiliza un enfoque sistémico utilizando análisis económicos y de riesgo.

La metodología de optimización propuesta por los autores consta de los siguientes pasos:

1. Discretización del área de procesamiento y selección de las unidades críticas e instalaciones.
2. Mapeo del riesgo.
3. Optimización de la función objetivo.

Para optimizar la distribución de las diferentes instalaciones, toda la zona de procesamiento se discretiza en una serie de rejillas de tamaño fijo, en las cuales se localiza cada unidad y servicio. Por conveniencia, la discretización del área de **10,000 m²**, se realizó en dividiendo el área en 100 rejillas cuadradas de **10 m × 10 m**. Cuatro unidades de procesamiento críticas (reformador primario, reformador secundario, el convertidor de amoníaco y el convertidor de cambio de alta temperatura) fueron seleccionados como las fuentes de fuego / explosión y liberación de tóxicos con base en las presiones de funcionamiento, temperaturas y consecuencias peligrosas. Las ubicaciones de cada unidad dentro de las rejillas corresponden a la ubicación en la actual planta de procesamiento. Cuatro instalaciones (la sala de control, dos refugios para los operadores, y el acumulador de amoníaco) fueron seleccionadas para la determinación de su óptima distribución.

Las posiciones de cada servicio fueron determinadas utilizando la optimización de la calificación del riesgo, costos de capital y las restricciones de la distancia de separación. El mapeo de los riesgos para cada rejilla se evaluó utilizando ALOHA para escenarios de liberación tóxica y explosión de fuego. Tanto el daño estructural como la mortalidad y las lesiones fueron llevados a términos económicos utilizando funciones adecuadas de probabilidad, frecuencia y parámetros de los costos relacionados con daños a la propiedad y la indemnización a las víctimas mortales. El problema de optimización se resolvió mediante la programación entera mixta con el fin de encontrar los lugares óptimos de las diferentes instalaciones dentro de la planta de procesamiento. En la **Figura 1.6** se ilustra la distribución óptima de los 4 servicios dentro de la planta de amoníaco.

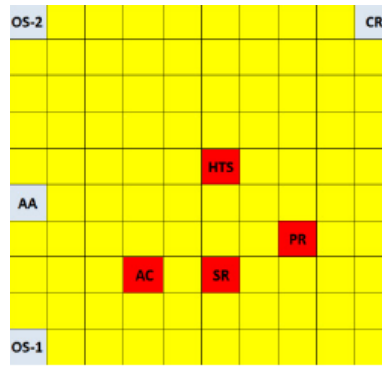


Figura 1.6

Peter H. Peeters; Frank Plastria (1998). Discretization results for the Huff and Pareto-Huff competitive location models on networks. Department of Management Informatics, Vrije Universiteit Brussel, Brussels, Belgium.

En este artículo se prueba que siempre existe un conjunto finito que incluye una solución óptima para los modelos competitivos Huff y Pareto-Huff en redes con la suposición de una función cóncava de la distancia. En el modelo Huff siempre hay un vértice en la red que pertenece al conjunto solución. Para el modelo Pareto-Huff, los autores prueban que siempre hay una solución óptima en un vértice o un punto equidistante.

En este trabajo se obtienen resultados de una discretización para cada uno de los modelos en una red, los cuales implican una función distancia cóncava. Para el modelo Huff se obtiene el resultado clásico de optimalidad del vértice, mientras que para el modelo Pareto-Huff aparecen dos nuevas características. Por un lado, el conjunto candidato debe ampliarse para incluir nuevos puntos llamados equidistantes, y por otro, se debe tener cuidado, ya que debido a la discontinuidad realmente no existe una solución óptima.

En el modelo Pareto-Huff, una población p sólo va a patrocinar un servicio f si este servicio es Pareto-óptimo para p con respecto al atractivo (a ser maximizado) y la distancia (a ser minimizada). Cada población p patrocina únicamente su servicio Pareto-óptimo con, similar al modelo Huff, una probabilidad proporcional a su atractivo e inversamente proporcional a alguna no-decreciente, función cóncava positiva g de la distancia a ellos.

Se muestra que para el modelo Huff, al menos una solución óptima se encuentra en un vértice de la red. Esta propiedad da lugar a un algoritmo que calcula el valor objetivo en cada vértice.

Una vez que se conocen los caminos más cortos de cada población p a todos los vértices se toma $O(b)$ para evaluar la función objetivo en un punto dado. Por lo tanto, este algoritmo tiene una complejidad de $O(bv \cdot \log(v) + bv) = O(b \cdot \log(v))$. Por otro lado, también se muestra que el modelo Pareto-Huff, se puede resolver al menos a la ϵ -**optimalidad** mediante la inspección de todos los vértices y puntos equidistantes. Puesto que hay v vértices y un máximo de 2 puntos equidistantes $2 \times e \times b \times s$, tal algoritmo tiene una complejidad de $O(bv \cdot \log(v) + b \cdot (v + ebs)) = O(bv \cdot \log(v) + seb^2)$.

Justo Puerto; Antonio M. Rodríguez-Chía (2009). On the structure of the solution set for the single facility location problem with average distances. Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, Sevilla, Spain; Facultad de Ciencias, Universidad de Cádiz, Puerto Real, Cádiz, Spain.

Este artículo analiza el problema de localización de servicios simple continuo, donde la demanda es definida aleatoriamente por una distribución de probabilidad dada. Para este tipo de problemas que abordan la minimización de las distancias medias, los autores obtuvieron caracterizaciones geométricas de todo el conjunto de soluciones óptimas. Para el importante caso de la poliedricidad total en el plano, desarrollaron algoritmos eficientes con complejidad pronominal acotada. También desarrollaron un esquema de discretización que proveen soluciones ϵ -**aproximadas** del problema original para resolver problemas de localización más simples con puntos como servicios de demanda. Esta discretización reduce el problema a un esquema más amigable que permite el uso de una gran cantidad de herramientas disponibles en la literatura de localización de servicios con respecto a servicios puntuales: algoritmos heurísticos, aproximados y exactos. Cabe señalar, que es imposible evitar la dificultad intrínseca del problema original, ya que la mejor de las precisiones la da la más fina discretización. En cualquier caso, bajo una poliedricidad total, estos problemas auxiliares son bastante simples ya que el cálculo de las integrales no es necesario. En consecuencia, se puede evitar la computación del dominio de integración de las distancias esperadas. Sin embargo, la subdivisión generada por la familia de conjuntos induce dominios de linealidad reales de las distancias (por ejemplo, las distancias no pueden ser cuadráticas en cualquiera de los elementos de la subdivisión).

Los resultados de la discretización son obtenidos para resolver el problema de localización con un número contable de puntos como servicios de demanda definidos por un conjunto A

(en ocasiones A es también utilizada en sí para sumatorias de indexación extendidas sobre sus propios elementos).

*R. Suárez Vega; D. R. Santos Peñate; P. Dorta González (2004). **Discretization and Resolution of the $(r|X_p)$ – Medianoid Problem Involving Quality Criteria.** Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de G.C., Spain.*

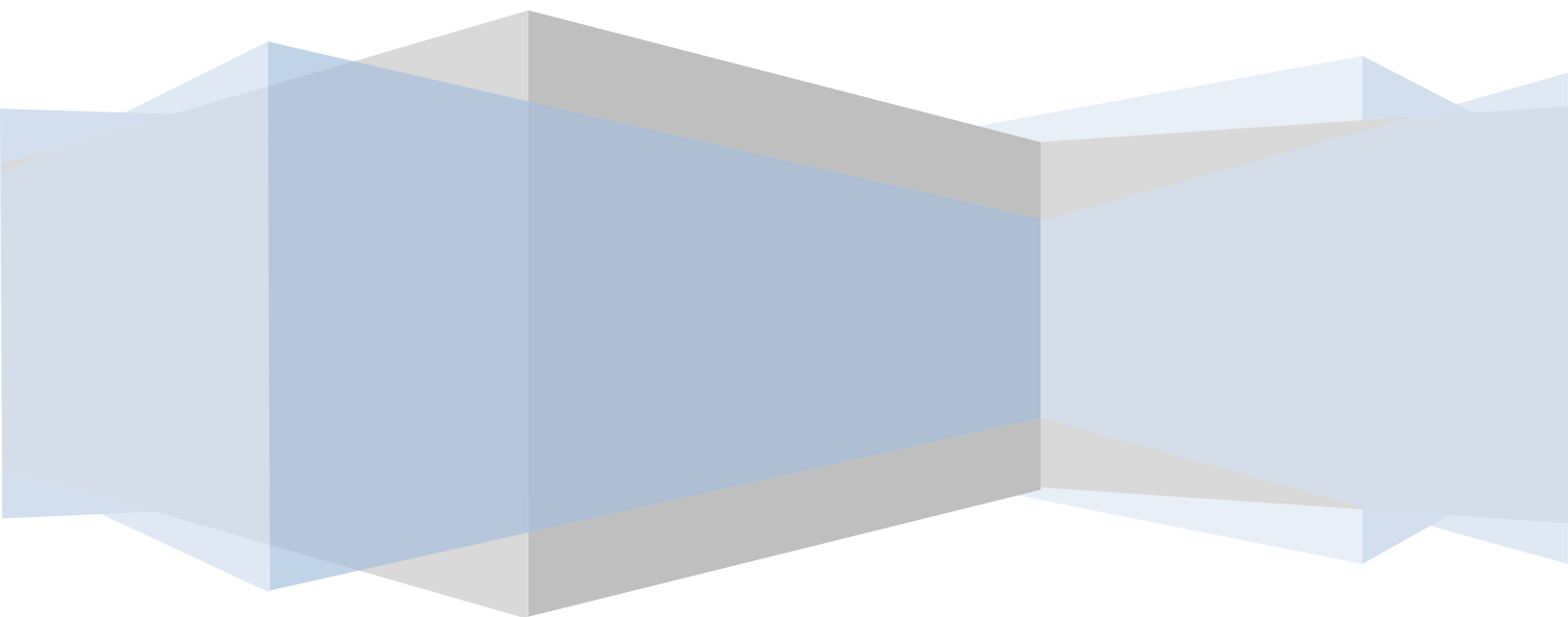
En este artículo se estudia una extensión del $(r|X_p)$ – **Medianoide** en redes introducido por Hakimi (1983). En esta extensión el cliente no considera únicamente la distancia, también algunas características de los servicios tales como el tamaño de la tienda, la calidad del servicio y el espacio de aparcamiento. Una nueva firma quiere establecer r nuevos servicios, los cuales tienen que competir con los p servicios ya existentes en el mercado. La firma entrante quiere encontrar sus ubicaciones y características que maximicen sus ganancias. Se consideran tres diferentes reglas de elección del cliente (preferencias binarias, parcialmente binarias y proporcionales). La existencia de una solución nodal fue probada en los problemas de redes parcialmente binarios y proporcionales. Se prueba que para las preferencias binarias, puede ser aplicada una discretización del problema de localización si se dan los niveles de atractivo.

El problema discretizado es resuelto combinando un algoritmo de búsqueda global basado en un procedimiento branch and bound con algunas heurísticas combinatorias (greedy, intercambio y búsqueda tabú). El problema de localización es resuelto por las heurísticas combinatorias y, dadas las ubicaciones, el máximo beneficio es obtenido utilizando el algoritmo branch and bound. En el caso binario, los niveles de atractivo óptimos pueden ser encontrados evaluando, a lo mucho, $(|V| + 1)^r$ candidatos.

Las tres heurísticas combinatorias fueron comparadas por la evaluación del porcentaje promedio de error con respecto a la mejor solución encontrada. El error para el GR varió entre 0.015 %, para las preferencias binarias, y 0.0005 %, para las preferencias parcialmente binarias. Los algoritmos TB y TS fueron corridos tomando la solución greedy como la solución inicial. Estos algoritmos reducen el error, especialmente el TS (con errores casi insignificantes).

CAPÍTULO DOS

ALGUNAS DEFINICIONES



2.1. Función distancia generalizada.

Se definen las siguientes propiedades o condiciones que puede cumplir una función binaria. Una función binaria $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ cumple la propiedad PX , si para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R^n$, y para toda $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S^n$, donde S^n es la n esfera euclidiana $S^n = \{\mathbf{u} \in R^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 = 1\} \subseteq R^n$.

P1. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b})$	(Desigualdad del triángulo).
P2. $d(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$	(Identidad).
P3. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$	(No negatividad).
P4. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$	(Simetría).
P5. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$	(Definitoreidad).
P6. $d(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	(Uniformidad).
P7. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$	(Antisimetría).
P8. $d(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{v}\lambda) = d(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{u}\lambda)$ para toda $\lambda > 0$ pequeña.	(Isotropía).
P9. $d(\lambda\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = \lambda d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ para toda $\lambda \in R$.	(Homogénea positiva de grado uno en $\lambda > 0$).

Tabla 2.1

En este trabajo se considera la definición de función distancia (generalizada) dada en el trabajo de Sánchez Larios y Guillén Burguete (2008b). En dicho trabajo, se considera que una **función distancia** es una función binaria $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ que cumple la propiedad de identidad (P2).

En el modelado del problema que se aborda en esta tesis, como ya se mencionó, la función distancia involucrada es más general que las funciones distancia tradicionalmente utilizadas en los problemas de localización continua (métricas L_p , con $p \geq 1$). En el método usado en esta tesis, la función distancia se obtiene a partir del concepto de la longitud de un camino dada por $\int F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds$, y de definir *distancia* de \mathbf{a} a \mathbf{b} como la *longitud del camino más corto* que va de \mathbf{a} a \mathbf{b} ; es decir, la función distancia está dada por

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[a,b]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds, \quad (*)$$

donde $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ es una representación paramétrica del arco C que va de \mathbf{a} a \mathbf{b} y que denotamos por $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, y $\Omega_{[a,b]}$ son todos los arcos que van de \mathbf{a} a \mathbf{b} . A la función $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}(s))$ se le llama *función métrica*.

Las expresiones anteriores, para el caso discreto se consideran las sumatorias, en lugar de integrales, es decir:

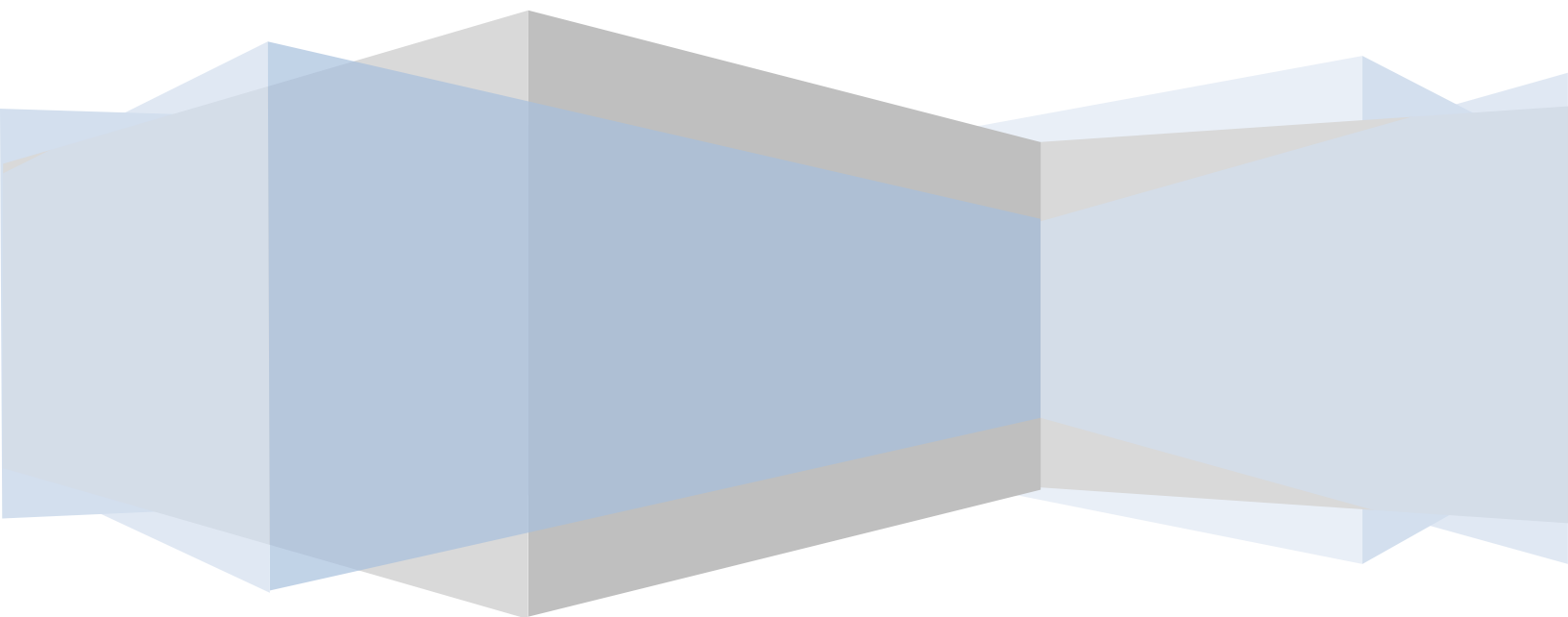
$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[a,b]}} \sum_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) \Delta(s), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in M, \quad (**)$$

donde $\sum F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) \Delta s$ es la longitud del camino poligonal que va de un punto a otro.

Una vez que se determinan los valores de la función métrica F en cada punto \mathbf{x} para cada dirección considerada \mathbf{v} , se calculan las respectivas distancias usando la ecuación (**). Después se aplica algún algoritmo de los existentes para la determinación del camino más corto entre cada par de nodos de la red. El proceso para la obtención de los valores de la función métrica $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ queda fuera del alcance de esta tesis. El cómo se obtienen los valores de la función F quedan fuera del alcance de esta tesis. En general, estos valores podrían obtenerse mediante un proceso empírico en el que se consideren aspectos físicos como fricción, fuerza de gravedad, pendiente de la superficie, etc.

CAPÍTULO TRES

CONCEPTOS DE DISTANCIA



3.1. Conceptos de distancia.

El interés de este capítulo es presentar un panorama general de los múltiples contextos en el que se usa el concepto de distancia. El concepto de *distancia* es uno de los conceptos básicos en la totalidad de la experiencia humana. En la vida diaria por lo general significa algún grado de cercanía entre dos objetos físicos o ideas, es decir, longitud, intervalo de tiempo, brecha, diferencia de rangos, cercanía o lejanía, mientras que el término *métrica* es en ocasiones usado como un estándar para una medición. Sin embargo, se deben considerar los significados matemáticos de estos términos. Las nociones matemáticas de *distancia-métrica* y de *espacio-métrico* se originaron hace un siglo por M. Fréchet (1906) y F. Hausdorff (1914) como un caso especial de un espacio topológico infinito. Los espacios métricos infinitos son considerados usualmente como una generalización de la métrica $|x - y|$ en los números reales.

Hoy en día las distancias-métricas finitas se han convertido en una herramienta esencial en muchas áreas de las matemáticas, y su aplicación incluye Geometría, Probabilidad, Estadística, Álgebra, Teoría de Codificación, Teoría de Grafos, Algoritmos de Agrupamiento, Análisis de Datos, Planos Digitales, Imágenes y Audio, Reconocimiento de Patrones, Redes, Ingeniería, Gráficos y Visión por Computadora, Astronomía, Cosmología, Geografía, Geofísica, Física, Química, Biología y muchas otras áreas de la ciencia. La tarea de elaborar las distancias-métricas más adecuadas se ha convertido en una tarea frecuente para los investigadores, y su búsqueda ocurre especialmente en la Genética, Análisis de Imágenes, Reconocimiento de Voz y Recuperación de Información. En ocasiones la misma distancia-métrica aparece independientemente en áreas muy diferentes; por ejemplo la distancia de edición entre palabras, la distancia evolutiva en Biología y la distancia Levenstein en Teoría de Codificación.

Los conceptos de distancia a los cuales se ha hecho referencia a lo largo de la historia (como son la distancia en términos de tiempo o la distancia en términos monetarios) al ser llevados a un dominio empírico, pocos o ninguno llegan a tener propiedades métricas, debido a que los términos están bien establecidos en la literatura, sin embargo, se conserva la palabra “distancia” a favor de la aún más precisa “disimilitud” (separación espacial) o “proximidad”.

Hasta cierto punto, puede parecer difícil separar discusiones como la de distancia en términos de tiempo de la de espacio de tiempo, puesto que, teniendo definido un conjunto de objetos (frecuentemente ubicaciones geográficas), se puede definir una relación en éste, y dicha relación se puede intentar representar en su totalidad enfocándose en los “espacios”; sin embargo, el enfoque podría hacerse su vez en un objeto y examinar la “distancia” entre él y otro miembro o miembros del conjunto.

Por lo tanto podemos decir que existen conceptos de distancia, y que la distancia se puede ver de diferentes formas, ya sea como la longitud que separa a dos objetos, el tiempo necesario para llegar a un destino, el costo de trasladar un producto entre dos nodos en una red o incluso el abismo cultural que existe entre una persona oriental y una occidental. Estos conceptos o acepciones que se le pueden dar al concepto de distancia son abordados en el trabajo de Gatrell Anthony (1983).

3.1.1 Distancia en términos de tiempo.

Dado un conjunto de ubicaciones en el espacio geográfico, se puede definir una relación en éste que represente el trayecto más rápido desde una ubicación a otra. Esta relación, representada como una matriz $\{t_{ij}\}$ de tiempos de viaje, es irreflexiva, no-simétrica, y no-transitiva.

Las matrices de tiempo de viaje pueden ser construidas a escalas geográficas variables, como las intra-urbanas e inter-urbanas, o la escala global que puede ser estudiada usando matrices de tiempo de viajes de vuelo internacionales. A su vez, se puede decir que existe una convergencia espacio-tiempo cuando, por ejemplo, se observan las distancias de tiempo desde una ciudad a otras.

3.1.1.1 Distancia en términos de tiempo en una ciudad.

El mapeo de tiempos de viaje desde ubicaciones fijas tales como los centros de las ciudades tiene un lugar establecido tanto dentro de la literatura geográfica como en muchos planes de transporte producidos para áreas urbanas. Estudios de tráfico se pueden utilizar para mapas de tiempo de trayectos así como las *isócronas*, líneas que unen puntos de igual distancia en términos de tiempo desde una locación singular. Claramente, si viajar fuera igualmente fácil en todas direcciones y proporcional a las distancias geográficas, las isócronas serían círculos

concéntricos igualmente separados. La configuración de carreteras urbanas produce isócronas altamente complicadas, y el aumento monótonico general en el tiempo de viaje con la distancia geográfica puede mostrar inversiones locales.

Estos mapas de isócronas plantean la transformación de mapas, por medio de la cual, la escala del mapa se transforma de minutos a millas o kilómetros. La construcción de tales mapas es, en principio, un ejercicio simple (Monmonier, 1977, p.21), aunque la interpolación de la información “de fondo” puede ser menos sencilla. En tales mapas las rutas mínimas son radios desde el centro, y algunas locaciones características del espacio geográfico pueden ser distorsionadas gravemente.

J. W. Clark (1977) describe un algoritmo para el mapeo de distancias de tiempo en mapas transformados designando a diferentes locaciones urbanas como el origen (“nodo raíz”), y produciendo transformaciones en la red de carreteras de modo que la distancia en términos de tiempo desde los nodos raíz se preserva con precisión. Por ejemplo, una autopista principal que va desde el norte hasta el sur de la ciudad, y viaja desde los nodos raíz o en sus alrededores, lleva a una distorsión extrema del mapa geográfico. Si el nodo raíz se encuentra bastante lejos de la autopista, la cantidad de deformación diferencial es relativamente leve y la distancia en términos de tiempo a lo largo de la red es razonable y fielmente representada en el no transformado mapa geográfico.

3.1.2 Distancia en términos monetarios.

Lowe y Moryadas (1975) definen la distancia en términos monetarios como el costo monetario incurrido en la superación de la distancia geográfica. El término “distancia en términos monetarios” es preferido al término “costo de distancia” ya que abarca tanto el costo del suministro de transporte como las tarifas que se cobran a los clientes.

La discusión del problema de encontrar la ruta a través del espacio geográfico que minimiza el costo de su construcción es una extensión lógica de la de “distancia en términos de tiempo”, ya que siendo conscientes del viejo adagio “el tiempo es dinero”, y de la literatura en economías de transporte y planeación, éstos frecuentemente tratan explícitamente la relación entre tiempo y costo. Para Ángel y Hyman (1976), por ejemplo, los dos son virtualmente intercambiables.

3.1.2.1. Trayectorias de costo mínimo.

La suposición de una superficie de transporte uniforme en la teoría clásica de localización significa que la trayectoria desde i hasta j que minimiza los costos es una línea recta. En cualquier área que es razonablemente homogénea en términos del terreno se puede esperar que el recorrido que une dos ubicaciones sea una línea recta; la distancia física y la distancia en costo son intercambiables, puesto que, dados los niveles estándar de construcción, los costos por metro por la construcción de la ruta serán cercanamente uniformes. ¿Qué se puede esperar de la trayectoria a costo mínimo cuando hay dos zonas de costo en vez de una, o hay varias zonas tales, o el costo de la superficie es continuo en vez de representado como un conjunto de zonas discretas?

Aunque otros investigadores han hecho la analogía anteriormente, fue Lösch (1954) quien popularizó la idea de que una ruta podría ser “refractada” a través del límite entre dos zonas de costo de forma muy similar así como la luz es refractada a través de dos medios. Dados los dos costos unitarios de construcción en cada zona, C_1 y C_2 , el problema de localización consiste en determinar el punto en el cual la ruta debería cruzar la frontera. Siguiendo la analogía formalmente, la Ley de Snell de estados de Refracción envuelve solución encontrando los dos ángulos, θ_1 y θ_2 tal que:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{C_1}{C_2}$$

Claramente, si $C_1 > C_2$ tiene sentido económico reducir el costo de longitud de la ruta de desplazamiento de la zona 1; mientras que, en el caso extremo, si C_1 es mucho más grande que C_2 la ruta a través de la zona 1 será ortogonal al límite zonal.

Werner (1968) planteó la pregunta para resolver el problema cuando hay n regiones de costo. De nuevo, los costos unitarios se asumen conocidos para todas las regiones, y el problema es encontrar una serie de segmentos de línea recta de longitud $L_j (j = 1, \dots, n)$ tal que el costo total de la ruta, C , se minimice:

$$\min C = \sum_j c_j l_j$$

Werner ofrece ambas soluciones, una formal matemática y un método gráfico para encontrar la trayectoria a costo mínimo. Como ejemplo establece claramente que la ruta óptima evita regiones de alto costo y “busca” zonas de menor costo.

Ciertamente, en algunas circunstancias puede ser rentable considerar la elección de una ruta peatonal como minimizador de costos “físicos”, como cuando áreas de daño real o percibido son evitadas por el caminante urbano. Allí puede estar un paisaje invisible que marca las rutas peatonales de baja tensión. (Gould y White, 1974, pp. 30-1).

Es importante conceptualizar las rutas siguiendo las trayectorias de menor “costo”, sin embargo estos costos pueden ser difíciles de estimar. Los beneficios derivados de tal conceptualización parecen tentadores. Mientras la trayectoria irregular tomada por alguna ruta del espacio geográfico parece, “en la superficie”, no estar ligada a una trayectoria de costo mínimo, quizás a un nivel más profundo es una trayectoria de menor costo, y una superficie o paisaje de invisibles pero no menos reales regiones de costo. Se puede recordar la parábola de la hormiga de Herbert Simon, en la cual, el camino de dicha hormiga a través de una playa azotada por olas tiene una trayectoria que es una secuencia de segmentos angulares e irregulares (no completamente al azar ya que tienen un sentido subyacente de dirección, apuntan a un objetivo). Visto como una figura geométrica, la trayectoria de la hormiga es irregular, compleja y difícil de describir. Pero su complejidad, es realmente una complejidad en la superficie de la playa, no una complejidad en la hormiga (Simon, 1981, 63-4).

Werner asume que las zonas de costo están dadas, el problema es encontrar las longitudes de los segmentos de las rutas tales que el costo total sea minimizado. Si se hace la suposición de que una trayectoria en el espacio geográfico es realmente, en algunos sentidos, una trayectoria de costo mínimo, entonces las longitudes de los segmentos en línea recta son dados (o pueden ser digitalizados) y el problema es encontrar las zonas de costo que subyacen del espacio geográfico. Una interesante pregunta es si es posible “invertir” la solución de Werner. Eastin (1975) indica una solución para el problema de Weber “inverso” de encontrar los pesos inferidos asociados a los puntos de demanda (suponiendo que la ubicación actual de un servicio representa una ubicación de costo mínimo).

Muchos años antes Warntz (1961) esbozó la solución de encontrar una trayectoria de costo mínimo, entre dos ubicaciones, sobre una superficie que es continua en vez de organizada en

una serie de regiones de costo discretas. El ilustra la solución usando el ejemplo de una aeronave navegando en una trayectoria óptima a través del Océano Atlántico, teniendo en cuenta en la trayectoria óptima necesariamente las velocidades de vuelo y las direcciones.

Cuando hay más de dos lugares a ser conectados, el problema anterior se complica por muchas razones. Primero tiene que ser construida una red entera en vez de una simple trayectoria. Además, los lugares pueden no ser del mismo tamaño o importancia, de manera que puede haber más tráfico entre ciertos pares de lugares que entre otros. Esto además significa que el interés no es simplemente por los costos de construcción sino también por los costos de circulación, y en consecuencia el tipo de red construida dependerá de la importancia relativa de cada una. Estos principios son ilustrados en la Figura 3.1, en la que tres lugares se asumen igualmente importantes. Cuando los costos de circulación son relativamente altos con respecto a los costos de construcción de la red, podemos esperar que todos los lugares estén conectados directamente. Si los costos de construcción superan con creces a los costos de circulación entonces surgirá una red en forma de Y. Si las diferencias entre los dos componentes del costo son menos marcadas, surge una “delta”, cuyo tamaño incrementa al incrementarse los costos de circulación relativos a los costos de construcción. Redes hipotéticas adicionales pueden ser vistas como suposiciones de que los centros del mismo tamaño son una relajación.

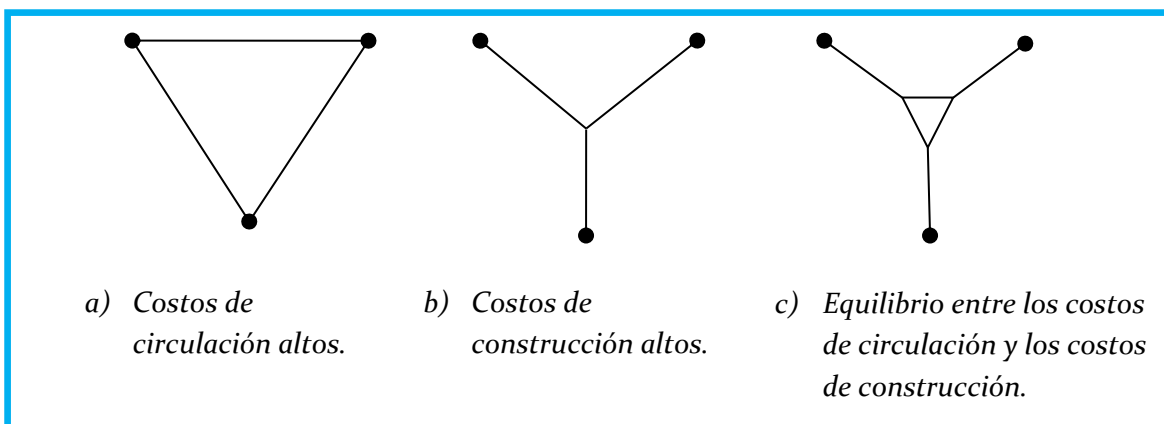


Figura 3.1

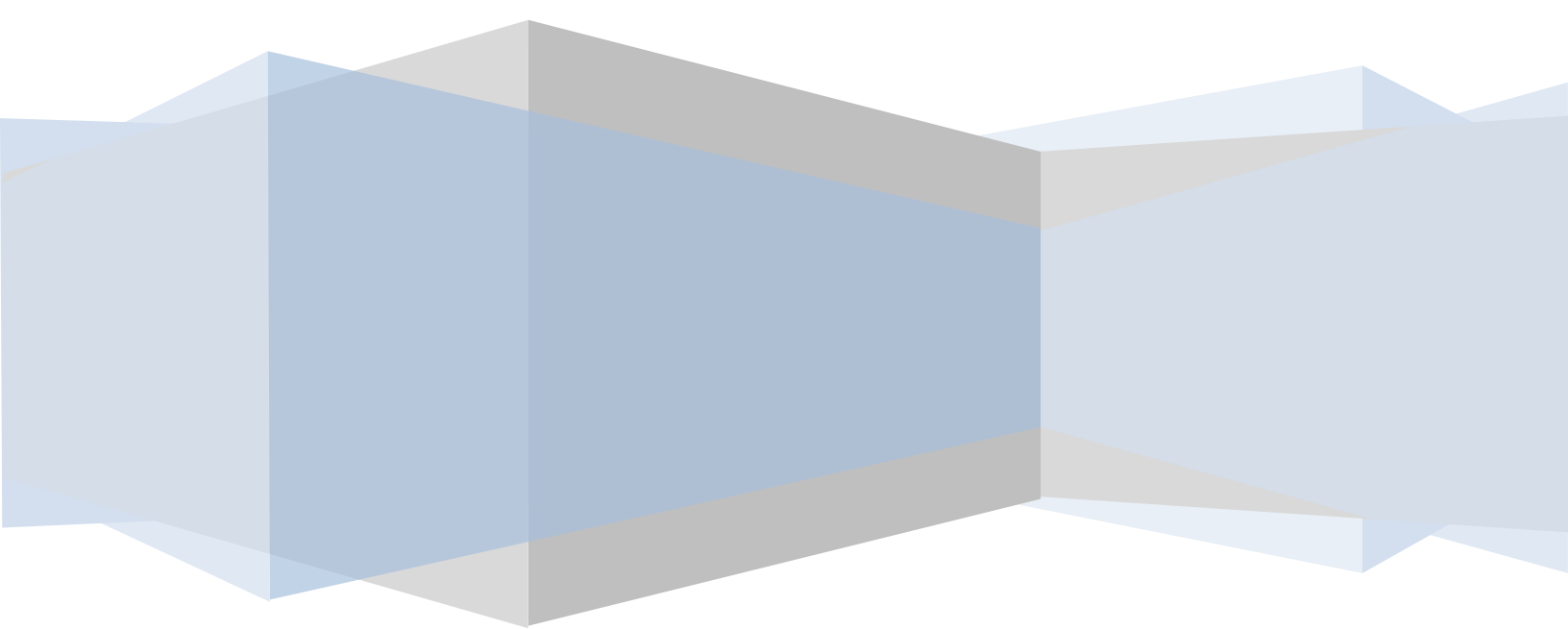
3.1.3. Distancia en términos monetarios y la teoría de localización.

Christaller (1966, p. 22).argumentó que “la *distancia en términos monetarios* está determinada por el costo del flete, el seguro y el mantenimiento; el tiempo o la pérdida de espacio en el tránsito; y, en cuanto a los viajes de pasajeros el costo de transporte, el tiempo requerido y la incomodidad del viaje”. Este autor establece que el rango de un bien está determinado en parte por la distancia en términos monetarios.

Estos puntos se pueden llevar a la teoría de localización residencial intra-urbana. Watson (1955) hace algunas observaciones interesantes acerca de esto con respecto a Hamilton, Ontario, señalando que las áreas de mayor estatus están cerca del centro de la ciudad mientras que los distritos de la clase obrera están más alejados, una característica que está en desacuerdo con la hipótesis original de los burgueses. Sin embargo, las áreas de mayor estatus estando a lo largo de una ladera de una empinada escarpa, son más remotas del centro de la ciudad en términos de costo de acceso. La implicación es que, tratando de hacer coincidir la realidad con la teoría, se debe transformar la distancia geográfica en una media más apropiada de separación espacial.

CAPÍTULO CUATRO

PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA



4.1. Problema de la ruta más corta.

En este problema se busca una trayectoria de s a t que tenga costo mínimo, calculando el costo de la trayectoria como la suma de los costos de los arcos involucrados. Su planteamiento matemático en forma lineal es como sigue:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ & \text{Sujeto a: } \sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \text{ o } m \\ -1 & \text{si } i = m \end{cases} \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Las variables x_{ij} indican que cada arco está en la ruta o no está, y debido a que la matriz de incidencia nodo-arco asociada con las ecuaciones de conservación de flujo es totalmente unimodular, x_{ij} tomará valores enteros de 0 o 1.

Al problema de la ruta más corta, se le suele manejar como un problema de redes, y para esto, se le puede asociar una red $Y = [X, A, d]$ donde:

$X =$ Conjunto de todos los nodos de la red.

$A =$ Conjunto de todos los arcos de la red.

$d: A \rightarrow R$ donde, $\forall a \in A, d(a) =$ longitud o distancia del arco a .

En general, en una red $Y = [X, A, d]$, al número $d(a)$ asociado a cada arco se le llama longitud o costo de a . Por otro lado se define la longitud de una ruta o camino como la suma de las longitudes de los arcos que la forman; aquella ruta tal que su longitud sea mínima se le llama ruta más corta o camino más corto.

El problema de encontrar la ruta más corta entre dos vértices puede generalizarse a cualquier red puesto que la función de longitud d puede representar, además de distancia o tiempo, costos o alguna otra acepción.

1. Ruta más corta entre dos vértices específicos s y t .

Si la red contiene arcos con longitudes negativas pueden presentarse circuitos negativos (circuitos de longitud negativa). En este caso el problema puede ser no acotado puesto que dada cualquier ruta entre s y t que contenga el circuito negativo existe otra mejor, a saber aquella que contiene una vez más al circuito. Se concluye entonces que, para que el problema de la ruta más corta entre dos vértices específicos tenga solución, deberá cumplirse que:

- i. Exista algún camino entre s y t ;
- ii. No existan circuitos negativos tales que haya un camino de s a algún vértice del circuito y otro de algún vértice del circuito a t .

2. Ruta más corta entre un vértice específico s y todo vértice x en la red.

Si se requiere encontrar las rutas más cortas entre el nodo s y todos los demás nodos, primero se deben definir los siguientes conceptos.

Sea $G = [X, A]$ una gráfica dirigida y sea $s \in X$; entonces s se llama **raíz** de G si existe algún camino de s a x para todo $x \in X$. Una **arborescencia** es un árbol que tiene una raíz.

Sea $G = [X, A]$ una gráfica dirigida. Una **arborescencia de G** es un árbol expandido de G que tiene un vértice que es raíz. En una arborescencia de raíz s el camino de s a x , para todo $x \in X$, es único.

Existen ciertas propiedades de las arborescencias que son utilizadas en la búsqueda de la solución del problema de la arborescencia de rutas más cortas de raíz s . En el siguiente teorema se postulan las distintas caracterizaciones de este tipo de gráficas.

Teorema. Sea $G = [X, A]$ una gráfica con n vértices. Supóngase que $n \geq 2$. Los postulados siguientes son equivalentes y caracterizan una arborescencia.

- a. G es un árbol y tiene un vértice s que es raíz.
- b. Para todo vértice x existe un camino único de s a x .
- c. G tiene el vértice s que es raíz y si se elimina un arco entonces s ya no es raíz.
- d. G es conexa, $g^-(s) = 0$ y $g^-(x) = 1$, para todo vértice x distinto de s .
- e. G es acíclica, $g^-(s) = 0$ y $g^-(x) = 1$, para todo vértice x distinto de s .

- f. G tiene como raíz a s y es acíclica.
- g. G tiene como raíz a s y posee $n - 1$ arcos.

Considérese ahora una red $Y = [X, A, d]$. Una **arborescencia de rutas más cortas** de Y es aquella arborescencia tal que la única ruta de s a x , para todo $x \in X$, es una ruta más corta de s a x .

Una vez definidos estos conceptos, puede decirse que el problema es encontrar la arborescencia de rutas más cortas de raíz s de la red $Y = [X, A, d]$. Haciendo una analogía con el problema de la ruta más corta entre dos vértices específicos puede concluirse que para que exista la arborescencia de rutas más cortas de raíz s en una red cualquiera $Y = [X, A, d]$, ésta deberá cumplir que:

- i. Existen caminos de s a x , para todo $x \in X$. Es decir, que s sea raíz de la red.
- ii. No existen circuitos negativos en la red Y ; ya que de presentarse éstos el problema sería no acotado (por la misma razón expuesta para el problema de ruta más corta entre dos vértices específicos).

3. Ruta más corta entre todo par de vértices.

Se deben encontrar las rutas más cortas entre todo par de vértices en la red Y . Este problema es una generalización inmediata de los anteriores. Por esto se deduce que, exista solución en cualquier red $Y = [X, A, d]$, deberá cumplirse lo siguiente:

- i. Existe, al menos, un camino entre todo par de vértices.
- ii. No existen circuitos negativos en la red Y .

4.2. Métodos de solución.

Hay básicamente dos algoritmos para calcular las rutas más cortas desde un nodo dado hasta todos los demás nodos de una red: el algoritmo de Dijkstra y el algoritmo de Floyd. Estos algoritmos tienen cotas computacionales $O(V^2)$, y $O(V^3)$, respectivamente, donde V es el número de nodos en la red. Estos algoritmos tienen la ventaja de que, además de proporcionar la solución óptima cuando existe, detectan cuando ésta no existe; ya sea que dicha solución no exista porque s no es raíz de la red o por la presencia de circuitos negativos. Aunque el

algoritmo de Dijkstra es más eficiente que el de Floyd, el primero es aplicable solamente si los arcos son no negativos. Por tanto, para fines de considerar distancias negativas, se puede utilizar el algoritmo de Floyd.

4.2.1. Arborescencia de rutas más cortas.

4.2.1.1. Caso de redes con costos no negativos.

En la práctica existen una gran cantidad de problemas que involucran costos no negativos (tiempo, distancia, etc.); es por esta razón que se justifica el desarrollo de algoritmos que se aplican sólo a estos casos.

El método de solución presentado para el problema de la arborescencia de rutas más cortas en redes que tienen arcos con costos no negativos fue desarrollado por Dijkstra (1959) y está considerado como el método más eficiente para resolver este problema. Este método se basa en la asignación de etiquetas “permanentes” a los vértices para los cuales ya se conocen las longitudes de las rutas más cortas de la raíz a ellos.

Sea S este conjunto de vértices o nodos. Las etiquetas de los vértices de S representan precisamente las longitudes de las rutas más cortas buscadas.

El algoritmo consiste en una etiquetación de los vértices en la red que ira registrando el costo mínimo para llegar a dicho vértice desde el vértice s . También se constituirá una lista que indique, para cada vértice, cual es su predecesor en el camino.

En el caso en que se desee sólo la ruta más corta entre dos vértices específicos, se obtendrá la solución cuando se etiquete “permanentemente” el vértice final del camino buscado.

ALGORITMO DE DIJKSTRA

Propósito. Obtener la arborescencia de rutas más cortas de raíz s en una red $Y = [X, A, d]$ con *costos no negativos* en los arcos.

Descripción.

1. **(Inicialización de etiquetas).**

Sea $d(s) = 0$ y márquese esta etiqueta como permanente. Sea $d(x) = \infty, \forall x \neq s$ y considérese estas etiquetas como temporales.

Sean $a(x) = p$ (estas etiquetas indicarán el predecesor de x en la arborescencia). Sea $p = s$.

2. (Actualización de etiquetas).

Para todo $x \in \Gamma^+(p)$ (nodo sucesor de p) que tenga etiqueta temporal, actualizar las etiquetas de acuerdo a:

$$d(x) = \min\{d(x), d(p) + d(p, x)\}$$

Si $d(x)$ se modificó, hacer $a(x) = p$. Sea x^* tal que $d(x^*) = \min\{d(x) \mid d(x) \text{ es temporal}\}$. Si $d(x^*) \rightarrow \infty$, terminar. En este caso no existe arborescencia alguna de raíz s . En otro caso, marcar la etiqueta $d(x^*)$ como permanente. Sea $p = x^*$.

3. (i) (Si sólo se desea la ruta de s a t). Si $p = t$, terminar: $d(p)$ es la longitud del camino más corto. Si $p \neq t$, ir al paso 2.

(ii) (Si se desea la arborescencia). Si todos los vértices tienen etiquetas permanentes, terminar; esta es la longitud del camino deseado y el conjunto de arcos $(a(x), x)$ forman la arborescencia de caminos más cortos. En otro caso ir al paso 2.

4.2.1.2. Caso general.

Para resolver el problema de la arborescencia de rutas más cortas en una red donde se admiten arcos con **costos negativos** es necesario un método distinto al algoritmo de Dijkstra puesto que éste podría conducir a un error.

ALGORITMO GENERAL

Propósito. Obtener la arborescencia de rutas más cortas, de raíz s , en una red $Y = [X, A, d]$ que admite **cualquier costo**.

Descripción.

1. (Inicio).

Determinar una arborescencia cualquiera de raíz s en la red. Puede obtenerse ésta a partir del algoritmo de Dijkstra.

2. (Optimalidad).

Calcular, para todo arco (i, j) que no esté en la arborescencia, el escalar $d(i) + d(i, j)$. Si se cumple que $d(i) + d(i, j) \geq d(j)$ para todo $(i, j) \in A$, terminar. Se obtuvo la arborescencia de caminos más cortos.

De otra manera $d(i) + d(i, j) < d(j)$ para algún $(i, j) \in A$, ir al paso 3.

3. (Cambio de arborescencia).

Si $j = s$ terminar, ya que existe un circuito negativo.

En otro caso sea $(k, j) \in A$ el único arco, incidente a j , que está e la arborescencia.

Reemplazar dicho arco por (i, j) . Si la gráfica resultante es una arborescencia actualizar las etiquetas de todos los vértices x , para los cuales la ruta de s a x contenga a j como vértice intermedio o final de acuerdo con:

$$d(x) = d(x) - d'$$

donde $d' = d(j) - d(i) - d(i, j)$. Ir al paso 2. En otro caso terminar; existe un circuito negativo y por lo tanto no hay solución.

4.2.2. Ruta más corta entre todo par de vértices.

Una manera de resolver el problema de la ruta más corta entre todo par de vértices en una red $Y = [X, A]$ es encontrar la arborescencia de rutas más cortas de raíz x para todo $x \in X$. Sin embargo, existen procedimientos más eficientes, como el desarrollado por R. W. Floyd (1962), el cual es aplicable a redes que admiten cualquier costo en sus arcos. En dicho algoritmo se supondrá una numeración de los vértices de la red $1, 2, \dots, n$ y se utilizará una matriz C , de orden $n \times n$, para calcular las longitudes de las rutas más cortas entre cada par de vértices; al terminar de aplicar el algoritmo la longitud de la ruta más corta entre los nodos i y j está dada por el elemento (i, j) de C .

En el algoritmo de Floyd, en la k -ésima iteración se calcula la longitud de la ruta más corta entre i y j que puede admitir a los primeros k vértices, o a algunos de ellos, como vértices intermedios; este número se almacena en la entrada (i, j) de la matriz C .

ALGORITMO DE FLOYD

Propósito. Obtener las rutas más cortas entre todo par de vértices en una red $Y = [X, A, d]$ con n vértices.

Descripción.

1. Constrúyase la matriz $C_{n \times n}$ ($n = \text{número de nodos en la red}$), cuyos elementos C_{ij} se definen como:

$$C_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j \\ \infty, & \text{si } (i, j) \notin A \\ d(i, j), & \text{si } (i, j) \in A \end{cases}$$

Hágase $k = 0$

2. Hacer $k = k + 1$. Para todo $i \neq k$ tal que $C_{ik} \neq \infty$ y para todo $j \neq k$ tal que $C_{kj} \neq \infty$, hacer:

$$C_{ij} = \min\{C_{ij}, C_{ik} + C_{kj}\}$$

3. (i) Si $C_{ij} < 0$ para alguna i , se detiene el algoritmo. En este caso existe un circuito negativo que contiene al vértice i y por lo tanto no hay solución al problema.
- (ii) Si $C_{ij} \geq 0$ para toda i y $k = n$ se detiene el algoritmo; C_{ij} es la longitud del camino más corto de i a j .
- (iii) Si $C_{ij} \geq 0$ para toda i y $k < n$, ir al paso 2.

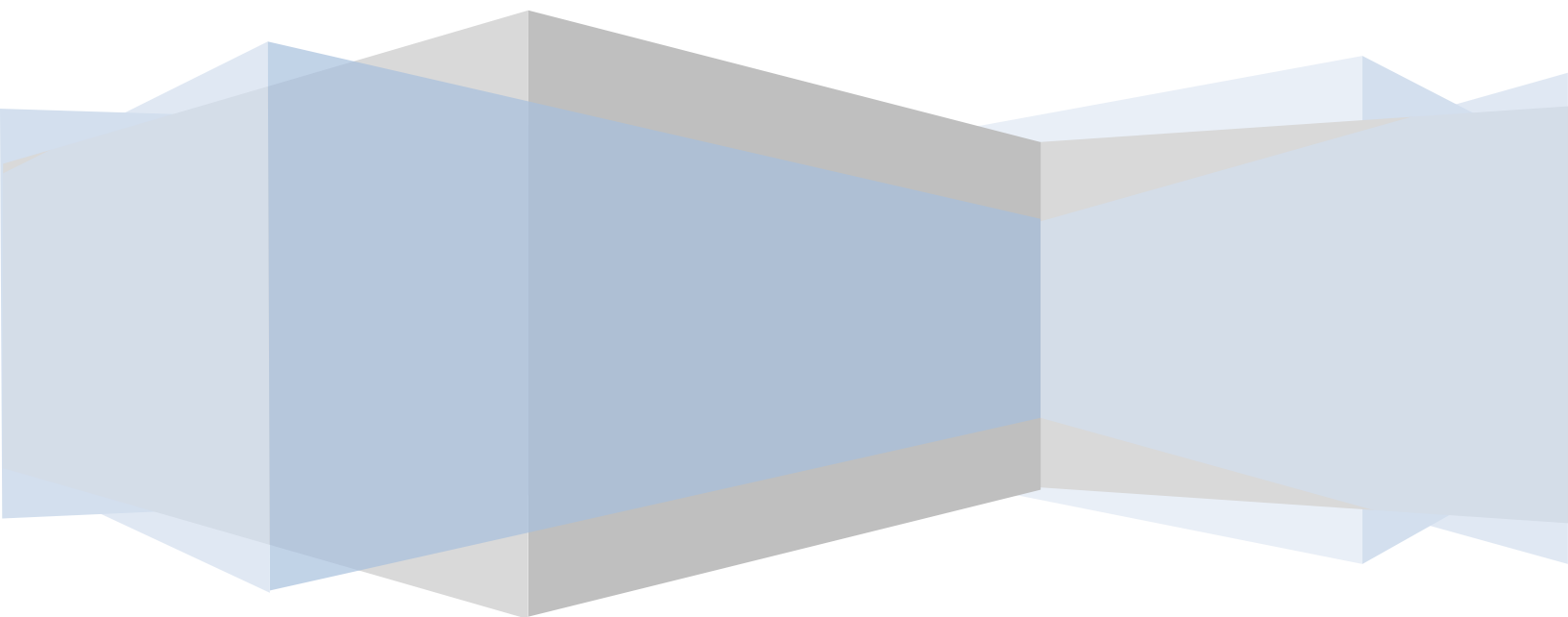
Recuperación de las rutas

Para recuperar las rutas más cortas puede construirse una matriz $Z_{n \times n}$; el elemento z_{ij} será el predecesor del vértice j en la ruta de i a j determinada en cada iteración. Dada la definición de $Z_{n \times n}$, sus entradas se inicializaran $z_{ij} = i$, para todo par $i, j = 1, \dots, n$. $Z_{n \times n}$ será modificada en el paso 2 de la k -ésima iteración de acuerdo con:

$$z_{ij} = \begin{cases} z_{kj}, & \text{si } C_{ik} + C_{kj} < C_{ij}. \\ \text{no cambia}, & \text{si } C_{ij} \leq C_{ik} + C_{kj}. \end{cases}$$

CAPÍTULO CINCO

FUNCIONES DISTANCIA EN PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS



5.1. Estimación de distancias usando las normas L_p .

Las aplicaciones de la localización de servicios tienen que ver con la localización de uno o más servicios de manera que se optimice un objetivo determinado, tal como la minimización de los costos de transporte o las distancias de recorrido, y se proporcione un servicio a un conjunto de clientes. Los problemas de localización de servicios dan lugar a desafiantes problemas geométricos y combinatorios. La investigación de los problemas de localización de servicios abarca muchos campos, tales como la investigación de operaciones/ciencia de la administración, ingeniería industrial, geografía, economía, matemáticas, mercadotecnia, ingeniería eléctrica planeación urbana, y otros campos relacionados.

Si los elementos de un conjunto de objetos sobre una región, tales como centros de actividades en una planta de producción, cajas de conexiones en un sistema eléctrico, centros de consumo, etc. se pueden representar como puntos sobre el espacio, entonces en este caso se puede utilizar una función distancia para transformar las coordenadas en una estimación de la distancia entre cada par de puntos.

Muchas áreas de aplicación para las funciones distancia que están evolucionando son: la verificación de las longitudes de arco entre nodos en datos de redes de carreteras proporcionando las distancias entre los nodos para modelos de localización continuos, modelos dinámicos de control de incendios, modelos de programación de camiones y recientemente, para proporcionar distancias en modelos del Sistema de Información Geográfica (GIS por sus siglas en inglés).

5.2. Normas L_p como Funciones Estimadoras de Distancia.

Las propiedades básicas que definen una norma en general las hace que no sean una buena opción para la estimación de distancias entre pares de puntos; excepto en los casos en que haya homogeneidad, uniformidad, simetría, no negatividad, y que se satisfaga la desigualdad del triángulo. Recordemos que cualquier función $k: R^n \rightarrow R$ que satisface las siguientes propiedades es llamada una norma:

- i. $k(x) \geq 0, \quad \forall x \in R^n$, (positividad).
- ii. $k(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$.

- iii. $k(cx) = |c|k(x), \quad \forall x \in R^n, c \in R^1, (\text{homogeneidad}).$
- iv. $k(x + y) \leq k(x) + k(y), \quad \forall x, y \in R^n, (\text{desigualdad del triángulo}).$
- v. La propiedad 3 implica que $k(-x) = k(x), (\text{propiedad de simetría}).$
- vi. $k(x, y) = k(x + z, y + z)|c|k(x), \quad \forall x, y \in R^n, (\text{uniformidad}).$

Por estas condiciones enlistadas, se tiene que cuando las normas son usadas como estimadores de distancia, las estimaciones no tienen, en general, las características de las distancias reales. Es decir, cuando se usan las normas para estimar distancias, éstas cumplen forzosamente las condiciones:

1. No-negatividad de las distancias.
2. Simetría: típicamente la distancia de viaje desde un punto A hasta el punto B es la misma que la distancia desde el punto B hasta el punto A .
3. La desigualdad del triángulo implica que uno siempre elige las rutas más cortas. Por ejemplo, un viaje desde A hasta cualquier punto inmediato B (denotado este por el vector $x = B - A$) y después desde B hasta C (vector $y = C - B$) no puede ser más corto que la ruta directa desde A hasta C (vector $x + y$).

Esto contradice lo que encontramos frecuentemente en problemas de la vida real, pues en muchos casos se tiene asimetría (la distancia de ida no es igual a la distancia de regreso), no siempre se cumple la desigualdad del triángulo (no siempre se puede ir directamente de un punto a otro, sino que se debe pasar por un tercer punto que nos hace “rodear” para llegar al punto destino), las distancias no son uniformes (esto significa que las distancias entre pares de puntos trasladados no se conservan), etc.

5.2.1. Normas ℓ_p .

La norma ℓ_p es una medida de distancia utilizada en teoría de localización continua. La forma funcional de la norma ℓ_p en el espacio Euclidiano N -dimensional (R^n) está dada por:

$$\ell_p(x) = \sqrt[p]{\sum_{t=1}^n |x_t|^p}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n, p \geq 1.$$

Típicamente en la literatura se considera que $p = 1$ o 2 , para los cuales obtenemos respectivamente las bien conocidas normas rectangular y euclidiana. Cuando $p = +\infty$,

tenemos la norma Tchebycheff, definida como $\ell_\infty(x) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Cuando $p < 1$, $\ell_p(\cdot)$ ya no tiene las propiedades de una norma, en particular no se cumple la desigualdad del triángulo.

Una de las funciones distancia más simples es la norma euclidiana *pesada* o $r\ell_2$. El parámetro individual r puede ser estimado al dividir la suma de las distancias reales entre los miembros de un conjunto de ubicaciones individuales (elegidos aleatoriamente de la región geográfica de interés) por la suma de las distancias euclidianas entre los mismos pares de ubicaciones. Sin embargo es deseable utilizar un modelo de distancia predictiva más exacto tal como el modelo de la norma ℓ_p *pesada*, o el modelo $r\ell_p$, entonces es necesario tener acceso a un programa de computadora especialmente escrito para estimar los dos parámetros r y p . De forma alternativa, estimaciones exactas de los parámetros r y p pueden ser obtenidas con cualquier paquete de software de regresión lineal estándar. Para hacer esto, el área de interés es primero modelada con la norma uno-dos *pesada* descrita por Brimberg y Love utilizando la regresión lineal. Los coeficientes de regresión así obtenidos son entonces utilizados para estimar los parámetros r y p del modelo de distancia $r\ell_p$ utilizando ecuaciones desarrolladas por Brimberg y Love.

Desde un punto de vista práctico, la función distancia elegida para modelar una red de transporte debería ser tan precisa como sea posible. Love y Morris presentan muchas medidas, las cuales son, para la mayoría de los casos, normas multiplicadas (ponderadas) por un factor de inflación que ayuda a explicar las colinas, curvas y otras formas tumultuosas en la red de transporte. Ellos llevan a cabo un estudio empírico en el cual los valores del mejor parámetro de ajuste son obtenidos por medio de conjuntos de datos de regiones urbanas y rurales.

5.2.2. Clasificación de las Normas Redondas y de Bloque.

Para caracterizar las normas de forma más detallada, definimos la unidad de bola B de una norma k que actúa sobre R^n como sigue: $B = \{x | k(x) \leq 1\}$.

Por lo tanto, B es el conjunto cerrado de puntos en R^n contenido por la unidad del contorno de k . la propiedad de simetría, $k(-y) = k(y)$, implica que si $y \in B$, entonces también $-y \in B$. Por lo tanto, B es un conjunto simétrico de puntos que contienen el origen.

Se hace la suposición de que x_1 y x_2 pertenecen a B , y se considera un punto $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ donde $\lambda \in [0,1]$. Es decir, y puede ser cualquier punto a lo largo del segmento de línea

que una x_1 y x_2 . Entonces, utilizando la desigualdad del triángulo y las propiedades de homogeneidad de las normas, tenemos que:

$$k(y) = k(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda k(x_1) + (1 - \lambda)k(x_2) \leq 1$$

Por lo tanto $y \in B$, y se concluye que la unidad de bola es un conjunto convexo. En resumen, la unidad de bola de cualquier norma es un conjunto simétrico cerrado acotado. Además, se puede demostrar que existe una correspondencia uno-a-uno entre las normas k y el conjunto convexo simétrico cerrado acotado B .

Thisse, Ward y Wendell usan la bola unitaria para distinguir entre las normas de bloque y las normas redondas. Ellos clasifican las normas de bloque como aquellas cuyos contornos son polítopos (polígonos en R^2), a diferencia de las normas redondas cuyos contornos no contienen puntos planos. Esta característica es ilustrada en la Figura 5.1 donde muestran ejemplos de contornos de varias normas. Refiriéndose a la Figura 5.1, al suponer que x_1 y x_2 denotan dos puntos en algún contorno C de la norma k . este contorno, que es la frontera de un conjunto convexo, está dado por $C = \{x | k(x) = b\}$, donde b es un escalar mayor que cero ($b > 0$). Observando que $k(z_1) = k(z_2) = b$ y procediendo como en la ecuación anterior obtenemos:

$$k(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) \leq b, \quad \lambda \in [0,1].$$

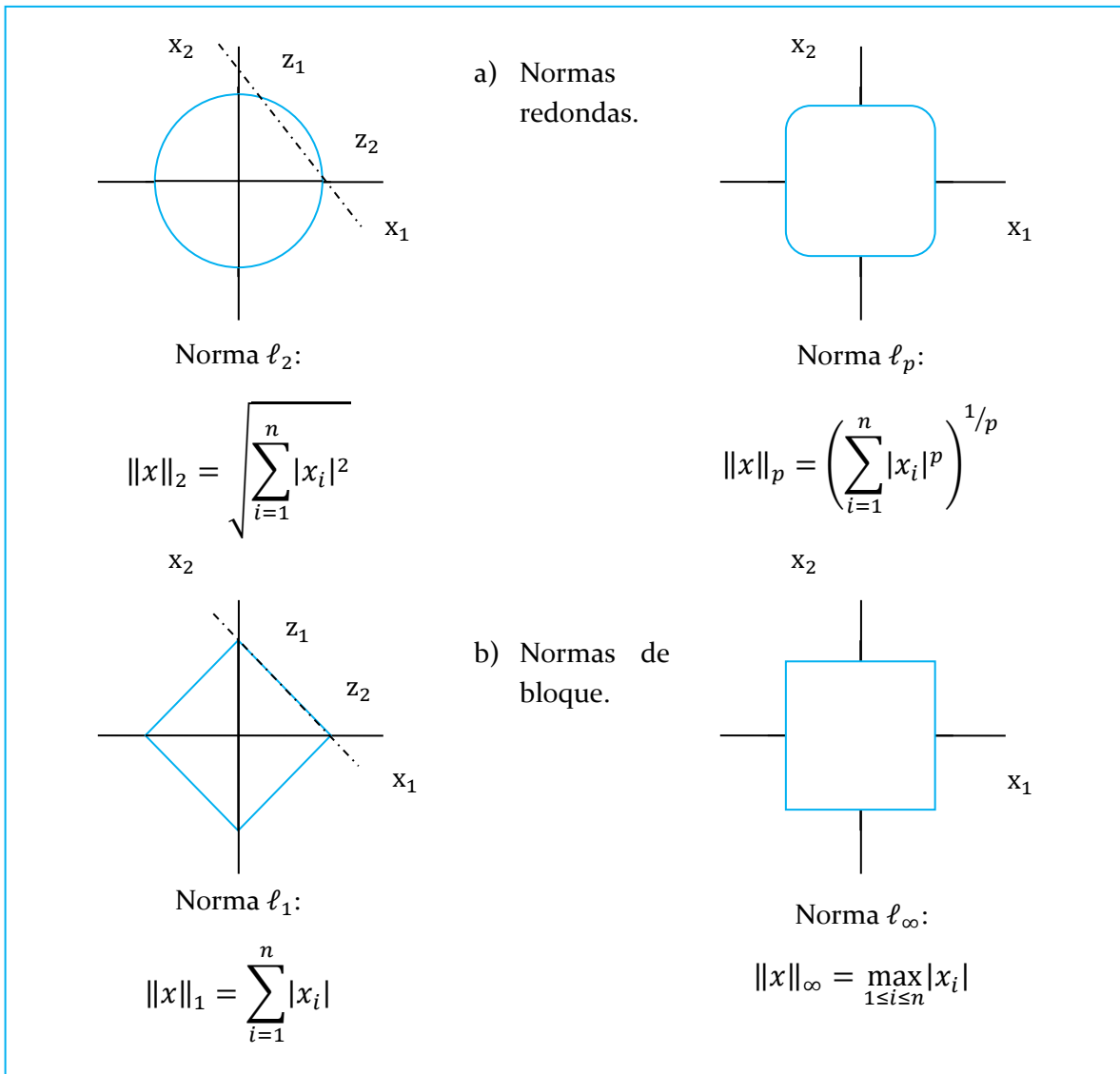


Figura 5.1. Contornos unitarios de las normas L_p en R^n .

En particular, si C es el contorno unitario, de modo que $b = 1$, la relación anterior se convierte en:

$$k(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) \leq 1, \quad \lambda \in [0,1].$$

Definición 1. Una norma k es una norma redonda si, y solo si,

$$k(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) < 1,$$

Para toda z_1, z_2 en el contorno unitario de k tal que $z_1 \neq z_2$, y toda λ en el intervalo abierto $(0,1)$.

Cabe señalar que la desigualdad estricta de la definición anterior implica que la unidad de bola B de una norma redonda es un conjunto estrictamente convexo. Esta interpretación geométrica es equivalente a la definición de S -normas dada por Pelegrin, Michelot y Plastria. La unidad de bola de una norma de bloque no es estrictamente convexa. Si z_1 y z_2 no están en la misma faceta de la unidad politopo de alguna norma de bloque k , entonces $k(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) = 1$. Por lo tanto, para una norma de bloque $k(x)$, el símbolo " $<$ " de la definición anterior debe ser remplazado por un símbolo " \leq ". El conjunto de normas redondas puede ser además dividido como sigue:

Definición 2. Una norma redonda $k(x)$ la cual es diferenciable para toda $x \in R^n$, excepto en $x = 0$ (el origen), es denominada norma redonda diferenciable. En otro caso, $k(x)$ es una norma redonda no diferenciable.

A partir de las propiedades definitorias, se sigue que todas las normas deben ser no diferenciables en el origen. La norma redonda diferenciable tiene la útil propiedad de que su primera derivada existe en cualquier punto. Sin embargo, esta propiedad no se cumple para normas redonda no diferenciables o para normas de bloque. Por ejemplo, si $k(x)$ es una norma de bloque, entonces $k(x)$ es claramente no diferenciable en las aristas del contorno de su politopo, mientras que es diferenciable en todos los otros puntos excepto en $x = 0$. En R^2 , esto significa que la norma de bloque es no diferenciable en los puntos esquina de sus contornos poligonales, mientras que es diferenciable en cualquier punto excepto en el origen. El análisis anterior conduce en resumen a una clasificación práctica de las normas utilizadas en modelos de localización. Este esquema de clasificación es mostrado en la Figura 5.2.

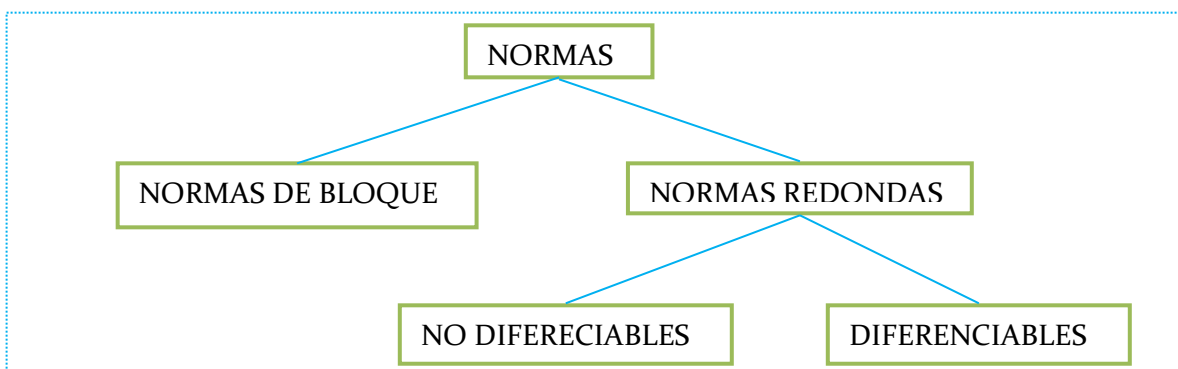


Figura 5.2. Esquema de clasificación práctico de las normas.

La clase general de las normas de bloque conduce a los modelos de localización que pueden ser resueltos por medio de la programación lineal y técnicas relacionadas. Los modelos de localización que utilizan normas redondas deben resolverse por métodos iterativos no lineales tales como el procedimiento Weiszfeld. Algoritmos de descenso iterativo tales como el procedimiento Weiszfeld requieren la diferenciabilidad de la función objetivo, y por lo tanto, funciones suaves tales como la aproximación hiperbólica y la aproximación hiperboloide se utilizan a menudo en lugar de las normas.

En la siguiente tabla se dan datos de trabajos desarrollados sobre localización de servicios en los que se han usado diversas funciones distancia, casi todas derivadas de las normas L_p . Como se puede observar en la tabla, se ha trabajado desde hace casi cien años en ambos temas: funciones distancia y problemas de localización de servicios.

AÑO DE PUBLICACIÓN	PROBLEMA	DISTANCIAS	AUTOR	REFERENCIAS
1909	Problema de localización continuo	Distancias Euclidianas	Weber	Hamacher y Nickel (1998)
1937	Problema de Localización Multiservicios	Distancias Euclidianas	Weiszfeld	Muñoz-Pérez y Saameno-Rodroguez (1999)
1963	Problema de Localización Multiservicios	Distancias Rectilíneas en una red de pasillos.	Francis	Munoz-Perez y Saameno-Rodroguez (1999)
1970	Modelos de localización de sectores públicos y privados	Distancia L_p	ReVelle et al.	Munoz-Perez y Saameno-Rodroguez (1999)
1973	Problema de Localización Multiservicios	Distancias Euclidianas y Rectilíneas	Eyster et al.	Munoz-Perez y Saameno-Rodroguez (1999)

1977	Problema de Localización del Agente Viajero	Distancias Rectilíneas	Chan, Hearn	Munoz-Perez y Saameno-Rodroguéz (1999)
1978	Problema de Localización de Plantas con carga fija (usando LP)	Distancias Euclidianas y Aleatorias	Morris	Schilling et al. (2000)
1980	Problema 1-maximin no ponderado en un poliedro acotado y convexo en R^n	Distancias Euclidianas	Dasarathy, White	Chae y Fromm (2005)
1980	Problema 1-maximin ponderado	Distancias Euclidianas	Drezner, Wesolowsky	Chae y Fromm (2005)
1981	Versiones Generalizadas de Modelos 1-maximin	Distancias Euclidianas	Hansen et al.	Munoz-Perez y Saameno-Rodroguéz (1999)
1981	Problema de Localización con barreras para problemas median	Distancias Euclidianas	Katz, Cooper	Plastria y Carrizosa (2004)
1982	Problema de Localización del Agente Viajero	Problemas rectilíneos, euclideanos y distancias L_p	Drezner, Wesolowsky	Munoz-Perez y Saameno-Rodroguéz (1999)
1983	Problema de Localización con barreras para problemas median	Distnacias rectilíneas	Larson, Sadiq	Plastria y Carrizosa (2004)
1986	Localización de un servicio no deseado	Distancia cuadrática inversa ponderada	Melachrinoudis, Cullinane	Munoz-Perez y Saameno-Rodroguéz (1999)

1986	Localización de un servicio no deseado	Distancias Euclidianas y Rectilíneas	Melachrinoudis, Cullinane	Munoz-Perez y Saameno-Rodroguéz (1999)
1986	Problema de localización de servicios simple	Minimización de la varianza de las distancias	Maimon	Chung et al. (2007)
1987	El problema de la ruta más corta median	Distancia de la ruta más corta	Current et al.	Hamacher y Nickel (1998)
1989	Asignación de máquinas a ubicaciones	Matriz de distancia	Sarker	Yu y Sarker (2003)
1992	Problema de Localización del Agente Viajero mejorado	Distancias rectilíneas	Tamir	Munoz-Perez y Saameno-Rodroguéz (1999)
1994	Localización de servicio Weber en presencia de regiones prohibidas	Distancia Lp	Aneja, Palar	Hamacher y Nickel (1998)
1994	Modelo de localización competitiva	Distancias Euclidianas	T. Drezner	Plastria y Carrizosa (2004)
1995	Localización de un servicio no deseado a través de planos de corte generalizados	Distancias Euclidianas	Plastria, Carrizosa	Hamacher y Nickel (1998)
1995	Problemas bi-objetivo, minimización de cuantil-maximización de cobertura	Distancias Euclidianas	Plastria, Carrizosa	Munoz-Perez y Saameno-Rodroguéz (1999)

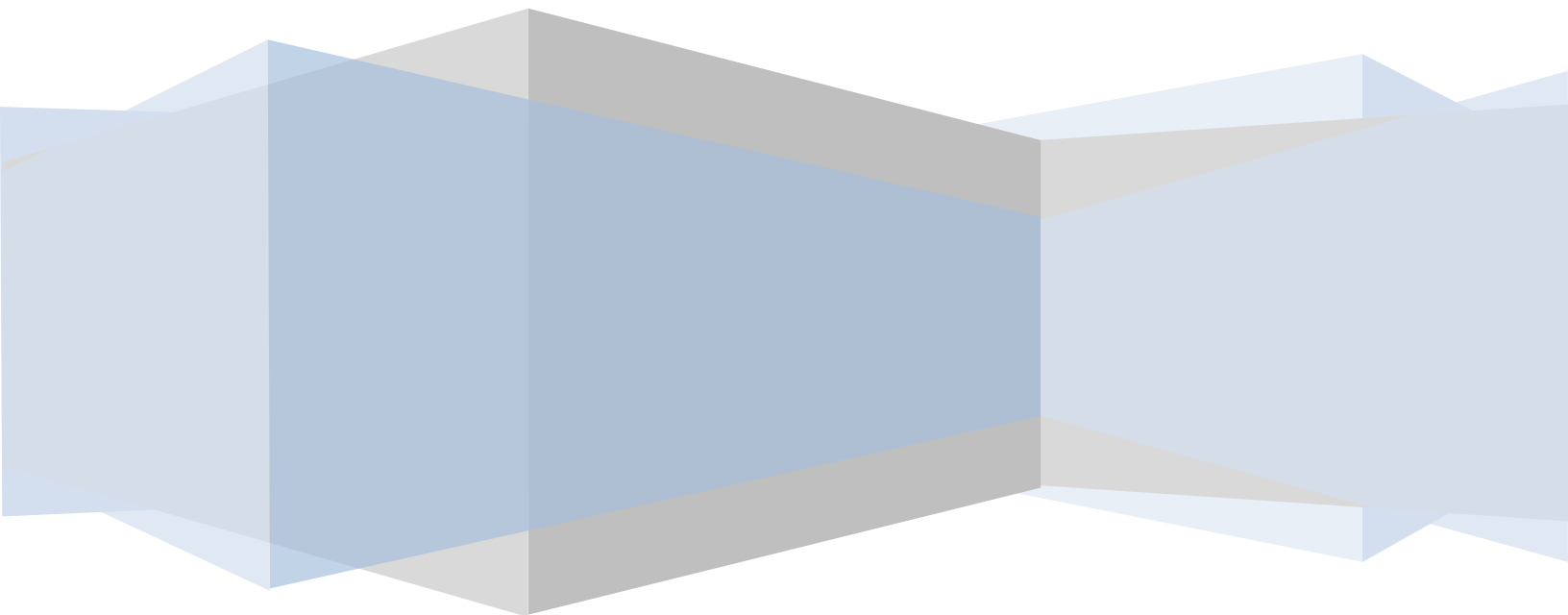
1996	Localización de un punto en una red	Distancia de la ruta más corta	Drezner, Wesolowsky	Munoz-Perez y Saameno-Rodroguéz (1999)
1996	Problema de Localización con barreras para problemas median	Distancias Euclidianas	Butt, Cavalier	Plastria y Carrizosa (2004)
1997	Problema P-Median (enfique de nuevas heurísticas)	Distancias Euclidianas	Dai, Cheung	Hamacher y Nickel (1998)
1998	Localización de un nuevo servicio en un ambiente competitivo	Distancias Euclidianas con corrección	Drezner T., Drezner Z.	Drezner y Drezner (1998)
1999	Una red de posicionamiento P-centro	Distancias Rectilíneas	Rayco et al.	Hamacher y Nickel (1998)
2000	Diseño de sistemas de distribución	Distancias Rectilíneas	Erlebacher, Meller	Hamacher y Nickel (1998)
2000	Problema de Localización con barreras para problemas median	Distancia Lp	Hamacher, Klamroth	Hamacher y Nickel (1998)
2001	El problema de localización multiservicio K-centrum	K distancias más grandes en un grafo	Tamir	Hamacher y Nickel (1998)
2002	Problema de Localización con barreras para el problema centro	Distancias rectilíneas	Dearing et al.	Dearing et al. (2005)

2008	Problema de asignación cuadrático	Número de cariables con diferentes valores en los miembros de una población (Ga)	Drezner Z.	Drezner (2008)
2010	Problema de localización de servicios bajo incertidumbre	Distancia Lp	Krokhmal, Zabrankin, Uryasev	Krokhmal, Zabrankin, Uryasev (2010)
2012	Problema de Localización de Servicios Weber con distancias limitadas y restricciones de ubicación	Distancias Euclidianas	I. Fernandes, D. Aloise	I. Fernandes, D. Aloise (2012)
2013	Problema (r p)-centroide discreto	Distancias Euclidianas	Alekseeva, Kochetov	Alekseeva, Kochetov (2013)
2014	Problema p-Median planar	Distancias Euclidianas	Z. Drezner	Z. Drezner (2014)
2015	Problema de Localización de Servicios Dimensionales en un espacio continuo	Distancias Euclidianas	A. Schöbel	A. Schöbel (2015)
2015	Problema Anti-cobertura	Distancias Euclidianas	Carrizosa y Boglárka	Carrizosa y Boglárka (2015)
2015	Problema p-Median planar incorporando reducción de vecindarios.	Distancias Euclidianas	Z. Drezner	Z. Drezner (2015)
2015	Problema k-central en el límite de un polígono convexo	Distancias Euclidianas	H. Du	H. Du (2015)

2015	Problema de localización de servicios no-capacitado y de propagación de afinidad	Distancias Euclidianas	Brusco y Steinley	Brusco y Steinley (2015)
2015	Problema de Localización de colección de depósitos y servicios simple	Distancias Euclidianas	Chen y He	Chen y He (2015)
2016	Problema de localización de hubs cíclicos	Distancias Euclidianas	Contreras, Tanash y Vidyarthi	Contreras, Tanash y Vidyarthi (2016)

CAPÍTULO SEIS

MODELADO DE FUNCIONES DISTANCIA GENERALIZADAS



6.1. Modelado de Funciones Distancia.

El modelado de funciones distancia tradicionalmente se ha enfocado al ajuste estadístico de parámetros de métricas ℓ_p , o de combinaciones lineales positivas de estas métricas. Esto ha sido muy limitativo porque las funciones así obtenidas necesariamente cumplen las condiciones que cumplen las métricas, tales como: simetría, no negatividad y uniformidad. Sin embargo las funciones distancia involucradas en problemas de la vida real, frecuentemente son asimétricas, no uniformes, y pueden tomar valores negativos. Las funciones distancia asimétricas y no uniformes se requieren, por ejemplo, en el modelado del desplazamiento de un vehículo en diferentes horarios, ya que en diferentes horas del día la distancia en términos de tiempo de recorrido de las calles o avenidas suele variar.

6.2. Antecedentes: Función métrica de una función distancia sobre una región continua M .

Toda función distancia d sobre una región continua M que cumple la condición de identidad y la desigualdad del triángulo, está determinada por una función F mediante

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in M \quad (1)$$

A la función F de la ecuación (1) la llamamos *función métrica* asociada a d . Una función distancia d obtenida de esta manera puede tomar valores negativos, ser asimétrica y, por supuesto, no ser uniforme (Sánchez Larios y Guillén Burguete, 2010). La ecuación (1) se obtiene de definir la distancia desde un punto \mathbf{a} hasta un punto \mathbf{b} como la longitud del arco más corto que conecta \mathbf{a} con \mathbf{b} , donde la longitud de un arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ que va desde \mathbf{a} hasta \mathbf{b} está dada por

$$l(C(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \int_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds.$$

donde $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ es una representación paramétrica del arco $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Para que el valor de cualquiera de las integrales anteriores no dependa de la parametrización del arco, se requiere que F sea homogénea positiva en su segundo argumento.

En Sánchez-Larios y Guillén-Burguete (2010) se describe un ejemplo de modelado de una función distancia generalizada sobre una superficie M , donde M es una región continua. Este ejemplo da una idea general del proceso de modelado de funciones distancia sobre una región continua; este proceso antecede al método propuesto en esta tesis de modelado de una función distancia generalizada sobre una región discreta el cual es aplicado a un problema de localización de servicios. En su trabajo, los autores modelan una función distancia d a partir de una función métrica F , y formulan a la función métrica F a partir de un problema físico simple el cual consiste de un objeto que se desliza sobre una superficie suave $f:Y^2 \rightarrow Y$ inmersa en Y^3 . La función métrica F en (1) la determinan especificando lo siguiente: (a) una función f que representa una superficie inmersa en Y^3 ; (b) una regla que asigna a cada par (\mathbf{x}, \mathbf{v}) el valor de $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, donde \mathbf{x} es un punto en Y^2 y $\mathbf{v} \in Y^2$ es una dirección emanando del punto \mathbf{x} . Esta regla se expresa en términos de dos cosas, la proyección de \mathbf{v} sobre el plano tangente a la superficie f en $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ y de las propiedades geométricas y físicas de una vecindad del punto $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ sobre la superficie f . Por tanto, excepto por valores de parámetros físicos y geométricos, la función métrica F está completamente determinada por la superficie f y la regla de asignación. Los parámetros físicos que se usan para modelar esta función distancia son el coeficiente de fricción entre la superficie y el objeto, la masa del objeto, y la constante de aceleración gravitacional. Cabe mencionar que la función distancia que los autores modelan, coincide con la obtenida por Hodgson (1987), en cuyo trabajo se aborda un problema de localización de servicios sobre un plano inclinado.

6.3. Procedimiento para modelar una función distancia sobre una región discreta N a partir de una función métrica.

Para modelar funciones distancia que permitan condiciones como no homogeneidad, asimetría y que puedan tomar valores negativos, sobre una región discreta obtenida de una región continua a través de una discretización, se propone el siguiente método.

Sea M una región continua sobre la cual está definida una función métrica $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. Supóngase que M se zonifica en regiones M_i , $i \in I$, ajenas entre sí (es decir, la intersección entre cualesquiera dos zonas es vacía), cuidando que en cada zona i exista una función $F_i(\mathbf{v})$ homogénea positiva de grado uno, que dependen solo de la dirección \mathbf{v} , de modo que

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = F_i(\mathbf{v}) \text{ si } \mathbf{x} \in M_i, \quad \text{para toda } \mathbf{x} \in M \quad (2)$$

Es decir, en cada punto del interior de cada zona la función F es la misma.

La determinación del arco de mínima longitud desde un punto \mathbf{a} hasta otro punto \mathbf{b} es como sigue:

1. Si ambos puntos están en una misma región $i \in I$, entonces, por la convexidad de F , el arco de mínima longitud es el segmento de recta que va desde \mathbf{a} hasta \mathbf{b} , el cual por la convexidad de M_i está contenido en la región M_i . A lo largo de este segmento de recta, F es constante porque el vector tangente $\dot{\mathbf{x}}(s)$ no cambia. Entonces, se obtiene:

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)) ds = F_i(\mathbf{v}) \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} ds = F_i(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \text{ para todo}$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$.

2. Si los puntos \mathbf{a}, \mathbf{b} están en regiones contiguas, $\mathbf{a} \in X_i, \mathbf{b} \in X_j$, entonces (1) viene a ser

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\rho_{ij} \in \phi(X_i, X_j)} \left[F_i(\rho_{ij} - \mathbf{a}) + F_j(\mathbf{b} - \rho_{ij}) \right] \text{ para todo } \mathbf{a} \in X_i, \mathbf{b} \in X_j, \text{ con } X_i, X_j \text{ contiguas} \quad (3)$$

donde $\phi(X_i, X_j)$ es la frontera de las regiones X_i y X_j .

Cuando hay isotropía, cada F_i es una constante que no depende de la dirección \mathbf{v} , y (3) es similar al planteamiento de Snell para explicar la refracción de la luz entre dos medios.

3. Si los puntos \mathbf{a}, \mathbf{b} están en regiones no contiguas, $\mathbf{a} \in X_i, \mathbf{b} \in X_n$, entonces $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es el mínimo de las longitudes de caminos de \mathbf{a} a \mathbf{b} , donde la expresión para cada camino tiene tantos términos como fronteras entre regiones que el camino cruza para ir de \mathbf{a} a \mathbf{b} :

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min \left[\begin{array}{l} \min_{\substack{\rho_{ij} \in \phi(X_i, X_j), \\ \rho_{jk} \in \phi(X_j, X_k), \dots, \\ \rho_{mn} \in \phi(X_m, X_n)}} \left[F_i(\rho_{ij} - \mathbf{a}) + F_j(\rho_{jk} - \rho_{kl}) + \dots + F_n(\mathbf{b} - \rho_{mn}) \right], \\ \vdots \\ \min_{\substack{\rho_{i'j'} \in \phi(X_{i'}, X_{j'}), \\ \rho_{j'k'} \in \phi(X_{j'}, X_{k'}), \dots, \\ \rho_{m'n} \in \phi(X_{m'}, X_n)}} \left[F_{i'}(\rho_{i'j'} - \mathbf{a}) + F_{j'}(\rho_{j'k'} - \rho_{k'l'}) + \dots + F_n(\mathbf{b} - \rho_{m'n}) \right] \end{array} \right] \quad (4)$$

El mínimo de los mínimos en (4) se puede determinar usando algún algoritmo de ruta más corta en redes, como el de Dijkstra, o cualquiera de los descritos en el capítulo 5.

Este método propuesto puede ser ilustrado con una región discretizada por una malla; dicha región tiene subregiones, y en cada subregión se utiliza una función métrica, que podría ser distinta, para determinar los arcos de mínima longitud que conectan a cada nodo \mathbf{x} con cada nodo vecino \mathbf{y} . Como ya se mencionó, para encontrar los arcos mínimos que unen uno o más puntos en la red se utiliza algún algoritmo como los descritos en el capítulo 4 para encontrar las rutas más cortas en redes.

6.4. Obtención de una función métrica sobre la región discreta N .

En un espacio discreto N cada nodo $\mathbf{x} \in N$ tiene asociado un conjunto de nodos vecinos de \mathbf{x} , que se denota por $D_{\mathbf{x}}N \subseteq N$. La función métrica para este espacio discreto, la cual se denota por $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, se relaciona con la función distancia discretizada d sobre N por

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ para todo } \mathbf{x} \in N, \mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N. \quad (5)$$

6.4.1. Distancias entre nodos vecinos.

Si para el nodo $\mathbf{x} \in N$ un nodo vecino de \mathbf{x} , $\mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N$ se cumple que

$$\mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N \Rightarrow G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + G(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{z} \in D_{\mathbf{x}}N. \quad (6)$$

entonces se dice que G es convexa en el nodo \mathbf{x} en la dirección de $\mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N$. Si G es convexa en $\mathbf{x} \in N$ en las direcciones de todos sus nodos vecinos $\mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N$, entonces se dice que G es convexa en $\mathbf{x} \in N$. Si G es convexa en todos los nodos de N entonces se dice que G es convexa. El interés por estos conceptos es que la convexidad de G así definida es condición necesaria y suficiente para que la distancia entre dos nodos cualesquiera sea igual a la longitud del arco más corto que los conecta, o equivalentemente, para que la función distancia a modelar d cumpla la desigualdad del triángulo sobre el espacio N . Por tanto, verificar que la condición (6) se cumple en cada nodo \mathbf{x} para todas las direcciones garantiza que la función d a modelar cumple la desigualdad del triángulo, lo cual es una ventaja computacional. Se observa que la función métrica G está dada por (5), y que sus valores son las distancias entre nodos vecinos, las cuales se determinan a través de mediciones empíricas o cálculos. Cualquier valor de la función distancia para nodos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N$ no vecinos $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, es la longitud del camino más corto en N que va desde \mathbf{x} hasta \mathbf{y} .

En la figura 6.1 se ilustran las discretizaciones, una para la región y otra para las direcciones de desplazamiento \mathbf{v} , así como la ruta más corta del punto **a** al punto **b**.

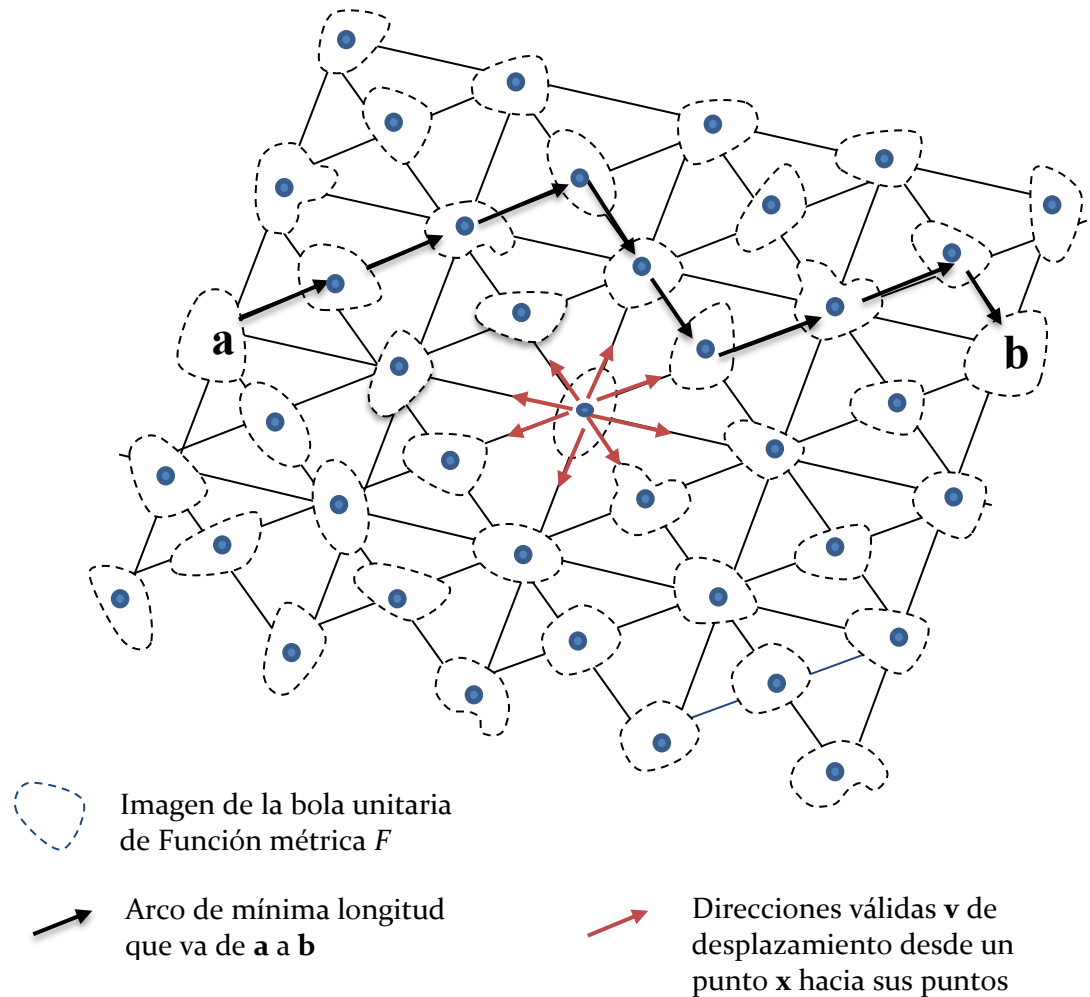


Figura 6.1. Discretización de la región de interés y de las direcciones de desplazamiento desde un punto hacia sus puntos vecinos de segundo orden.

Cabe señalar que en la figura 6.1, en realidad la imagen de las bolas unitarias de la función métrica F en cada punto tiene su frontera en forma poligonal, como se muestra en la figura 6.2 para el caso en que se permitieran 16 direcciones de desplazamiento \mathbf{v} :

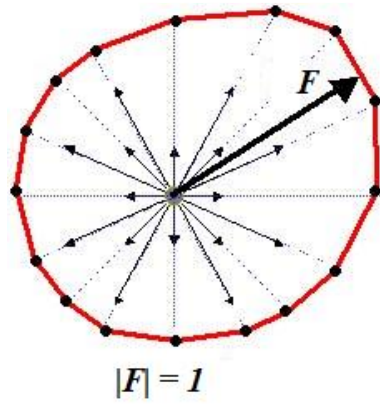
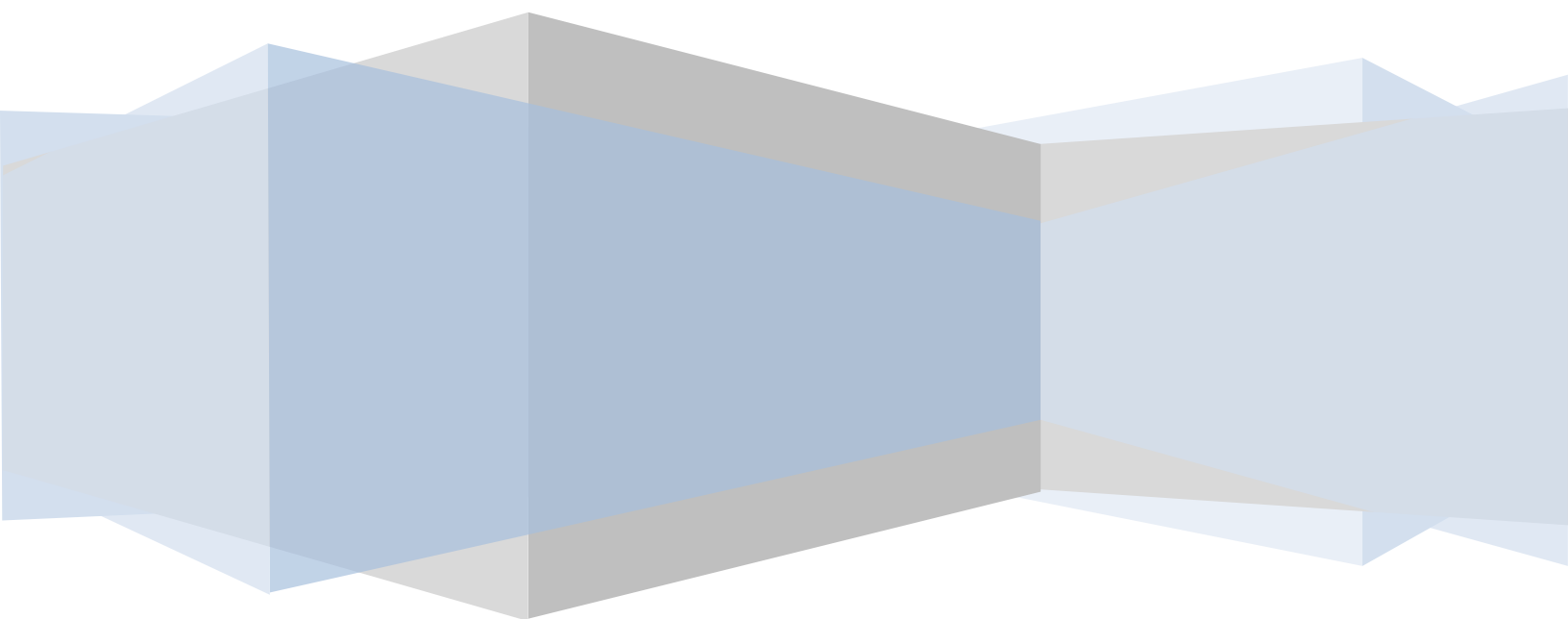


Figura 6.2. La frontera de la bola unitaria de la función métrica F está formada por segmentos de recta.

CAPÍTULO SIETE

APLICACIÓN DE FUNCIONES DISTANCIA GENERALIZADAS EN PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS



7. 1. Introducción.

La Teoría de Localización se puede aplicar a muchos problemas, tales como el problema de localizar un aeropuerto, escuelas, máquinas, bibliotecas, hospitales, almacenes, plantas de tratamiento de aguas, etc. Por su amplio espectro de aplicaciones, existe un interés interdisciplinario en el tema de localización de servicios. Existen varios objetivos que se usan en las decisiones de localización, por ejemplo, minimizar la suma de las distancias pesadas entre el (los) nuevo (s) servicio(s) y los existentes.

Los problemas de localización, en su forma más general, se pueden describir de la siguiente manera: un conjunto de clientes distribuidos espacialmente en un área geográfica demandan un cierto servicio o producto. La demanda de los clientes debe ser cubierta por uno o varios servicios (instalaciones). Los servicios o instalaciones pueden operar en un marco de cooperación o competencia dependiendo del bien o servicio que sea requerido por el cliente. El proceso de decisión establece dónde se deben ubicar las instalaciones (servicios) en la región dada, tomando en cuenta los requerimientos de los clientes y las restricciones geográficas.

En los problemas de localización se pueden identificar tres elementos importantes. Los *servicios (instalaciones)*, que denotan un conjunto de objetos que serán localizados para proporcionar un servicio o producto. Las *localizaciones*, que se refieren al conjunto de posibles puntos dónde se pueden situar los servicios. Finalmente, los *clientes*, que son los usuarios de las instalaciones que demandan ciertos servicios o productos.

El término instalación se utiliza para denotar una gran variedad de objetos para los cuales debemos determinar cierta posición, con el fin de optimizar su relación con respecto a otros objetos ya existentes. Ejemplos de objetos en la teoría de la localización son: plantas de producción, hospitales, escuelas, centros comerciales, edificios públicos, estaciones de bomberos, etc. Los problemas de localización surgen de la necesidad de localizar centros para la satisfacción óptima de la demanda de un conjunto de clientes. La palabra cliente se usa para denotar objetos que requieren accesibilidad a un servicio o que demandan un producto.

Las propiedades principales que caracterizan a las instalaciones son su número y tipo. En varios modelos de localización, el número de instalaciones está fijado *a priori*. En el caso más

simple sólo se puede localizar una instalación, en cuyo caso se dice que se trata de un modelo de un *solo servicio*. Si se admite más de una instalación, entonces el problema se llama de *múltiples servicios*. Otra propiedad importante para las instalaciones está dada por su *tipo*, esta propiedad especifica las características tales como capacidad, servicios y consideraciones sobre su estructura. En casos simples, los problemas de localización requieren que las instalaciones sean idénticas para poder proporcionar el mismo servicio o producto. Los modelos también se pueden identificar de acuerdo a si el servicio es único o multi-servicios, basándose en la capacidad de la instalación para proveer uno o varios tipos de servicios o productos. Algunos problemas de localización admiten instalaciones donde se considera que la capacidad de las instalaciones es ilimitada, mientras que otros buscan la mejor ubicación con una producción ilimitada, Por lo tanto, los problemas de localización también se pueden clasificar en *capacidad limitada* o *capacidad ilimitada*.

Otro elemento esencial para los modelos de localización es el lugar físico en donde se va a ubicar la instalación. El conjunto de ubicaciones se puede representar de manera continua, discreta o de red:

- Espacio discreto: cuando se especifica una lista de posibles lugares para ubicar las instalaciones. En este caso se proporciona flexibilidad ya que es posible incorporar características de tipo geográficas y económicas al modelo.
- Espacio continuo: son problemas que se consideran en el espacio euclidiano. El caso más típico considera un espacio euclidiano de dos dimensiones.
- Representación de redes: problemas de localización en los que se tiene que operar utilizando cierta infraestructura de red (red carretera, red vial, red ferroviaria, red aeroportuaria, oleoductos, etc.) que comúnmente se representa mediante una gráfica.

En este capítulo se propone un método para resolver un problema de localización de servicios sobre una región continua a través de la solución de un problema de localización de servicios sobre una región discretizada. Este problema discreto, no tiene restricciones de capacidad de los servicios ni restricciones de demanda de los clientes. Se puede establecer solamente un servicio, y hay un cargo fijo constante por instalar cada servicio i , $i = 1, \dots, m$, el cual, por simplicidad, se puede ignorar.

En general, el objetivo de un problema de localización sobre una región continua es “generar” sitios en un espacio continuo para localizar el nuevo servicio en relación a un conjunto de servicios existentes (clientes) ubicados en puntos dados en el espacio. Por tanto, los modelos de localización continua son también referidos como modelos “generadores de sitios” en contraste con su contraparte discreta donde los sitios candidatos son identificados con antelación como nodos sobre una gráfica (modelos “selección de sitios”). Los servicios existentes típicamente representan clientes, y están etiquetados como puntos de demanda o puntos fijos. Otra diferencia fundamental entre modelos de localización continua y discreta es que en el primer caso se debe seleccionar una función distancia para estimar las distancias (costos) entre puntos en el espacio, mientras que en el segundo caso, las distancias (costos) de recorrido que se pueden usar son las reales (no estimaciones). Los modelos continuos de localización, por un lado, son fáciles y rápidos de poner en práctica puesto que en este caso se evita desde el principio bases de datos grandes de distancias de recorrido y también se evita la determinación de rutas más cortas entre pares de puntos; por el otro lado, los problemas de localización continua son menos precisos que sus versiones discretas puesto que las distancias de recorrido (tiempo, costo, energía, etc.) solamente son aproximadas por la función distancia involucrada en el modelo. En muchas situaciones, la pérdida en precisión puede ser muy aceptable para el tomador de decisiones. Por ejemplo, en un ambiente urbano la función distancia rectangular (también conocida como distancia Manhattan) puede ser precisa para predecir las distancias de dicho lugar. Las ciudades cuyas redes de caminos se caracterizan por una malla rectangular, caen en esta categoría. Sin embargo, existen muchas ciudades cuyas redes de caminos no tienen la forma de una malla rectangular, y aquí es donde surge el problema de no poder contar con una función continua que modele las distancias entre todos los pares de puntos de una región dada.

En el método propuesto en esta tesis de solución del PCLS, la función distancia se obtiene a partir de la longitud de arco poligonal que va desde un punto \mathbf{a} hasta un punto \mathbf{b} , dada por $\sum F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))\Delta s$. Definimos distancia de \mathbf{a} a \mathbf{b} como la longitud del arco más corto que va de \mathbf{a} a \mathbf{b} , entonces la función distancia está dada por

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \sum_a^b F(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s))\Delta s$$

donde $\mathbf{x}: [a, b] \rightarrow R^n$ es una representación paramétrica del arco C que va de \mathbf{a} a \mathbf{b} y que denotamos por $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, y $\Omega_{[a,b]}$ son todos los arcos que van de \mathbf{a} a \mathbf{b} . A la función $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}(s))$ se le llama *función métrica*.

Puesto que la función métrica F depende de cada punto \mathbf{x} y cada dirección \mathbf{v} , entonces para obtener las distancias se requieren dos discretizaciones: una para la región de interés, y otra para las direcciones \mathbf{v} de movimiento desde un punto dado \mathbf{x} a otro punto. Desde el punto de vista de la región de interés, se propone construir una malla fina, tan fina, como la naturaleza del problema lo exija; y desde el punto de vista de las posibles direcciones de movimiento desde un punto dado, se propone considerar aquellas direcciones que conduzcan hacia un punto vecino desde tal punto. Una vez que se determinen los valores de la función métrica en cada punto para cada dirección, se aplicará algún algoritmo de los existentes para la determinación del camino más corto. Cabe señalar que el proceso para la obtención de los valores de la función métrica queda fuera del alcance de esta tesis. La obtención de estos valores podría ser de manera empírica para una región dada.

Aplicando el método propuesto en el capítulo anterior, el cual consiste en discretizar una región continua M a través de una malla, después de calcular la función métrica en cada punto X_i o P_j y aplicar algún algoritmo de redes para calcular la ruta más corta que conecta cada par de nodos. Una vez planteado el PDLSMG, se puede usar cualquier algoritmo conocido para resolverlo.

7. 2. El Problema Continuo de Localización de un Servicio (PCLS)

El problema tradicional de localización de servicios en una región continua fue propuesto por el alemán Alfred Weber en 1909 cuando publicó una solución para localizar un depósito buscando minimizar su distancia total con respecto a dos fuentes de materia prima y a un mercado consumidor.

Concebido como una minimización de los costos de transporte, el problema se formula de la siguiente forma:

$$\text{Minimizar } W(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n d_p(X_i, P_j) = \sum_{j=1}^n \left[(|x - a_j|^p + |y - b_j|^p)^{1/p} \right]$$

donde:

n = Número de servicios existentes (o puntos de demanda).

$X_i = (x, y)$ = La ubicación del nuevo servicio i sobre el plano.

$P_j = (a_j, b_j)$ = La ubicación del servicio existente o punto de demanda j .

$d_p(X_i, P_j)$ = La distancia entre el nuevo servicio i y el punto de demanda j , con $p \geq 1$.

Tradicionalmente los modelos de localización son aproximados a través de una representación discreta de los servicios y de los lugares de demanda del servicio. Esto se debe principalmente a las limitadas capacidades geométricas, la disponibilidad de datos, y la simplificación desde una perspectiva de modelado. Un área de demanda continua, tal como una unidad administrativa, es en ocasiones simplificada y/o congregada a un punto discreto. Los servicios también son considerados como puntos. En este contexto, los servicios deberían ser localizados entre un conjunto finito de ubicaciones disponibles para servir, y ubicar los lugares de demanda como puntos (discretos) de modo que se satisfagan criterios particulares. Sin embargo, puede haber problemas con el uso de los puntos discretos para representar sitios potenciales para los servicios y ubicaciones de demanda ya que el supuesto de puntos basados sobre la ubicación de la instalación puede ser demasiado simplista para representar objetos con áreas. Por el lado de los servicios, la discretización del espacio limita la búsqueda de una solución óptima sobre ubicaciones discretas y finitas. Por el lado de los puntos de demanda o consumo de los servicios, la representación del espacio como discreto podría conducir a pronunciar los errores de medición y cobertura, incluyendo imprecisiones en las mediciones de distancia, y la incertidumbre en la evaluación de la cobertura (Daskin *et al.* 1989; Current y Schilling, 1990; Drezner y Drezner, 1997; Murray *et al.* 2002, 2008). Murray y O'Kelly (2002) encontraron que una representación de punto de la demanda regional en un modelo de optimización de cobertura, generalmente resulta en una sobreestimación de la cobertura real proporcionada a una región continua para una configuración de instalación de servicio. Estas inexactitudes son el resultado de la representación espacial inapropiada de la demanda regional en el modelo de cobertura.

El problema de localización en un espacio continuo se remonta al problema de Weber (Weber, 1909), el cual es también conocido en la literatura como el problema minisum. El problema tiene como objetivo encontrar la ubicación de la instalación “minisum” en el plano continuo que minimiza la suma de la distancia Euclidiana ponderada desde sí misma a una serie de puntos de demanda fijos. El problema de Weber ha dado lugar a un gran número de enfoques de optimización espacial para la formulación y solución de problemas de localización en un espacio continuo.

Aunque la representación continua del espacio como continuo parece ser más razonable en muchas situaciones, es difícil adentrarse en los métodos discretos tradicionales para resolver los problemas continuos. En el caso discreto, tanto la localización de la demanda como las ubicaciones candidatas de las instalaciones son finitas, por lo que se pueden emplear técnicas de optimización estándar. Cuando el espacio de la localización es representado de forma continua, es imposible enumerar todos los puntos de demanda y lugares potenciales para ubicar servicios. Esto hace al problema de localización continuo complicado de resolver. La habilidad para direccionar este problema ha sido limitada por las capacidades analíticas asociadas con la computación geométrica (Suzuki y Okabe, 1995; Plastria, 2002). Un número de enfoques de solución han sido desarrollados en un intento de resolver problemas de localización continuos. Muchos utilizan propiedades matemáticas de la función objetivo (i. e. las condiciones de primer orden para la optimalidad) y formulan la solución como un procedimiento iterativo. Por ejemplo, (desarrollado por Weiszfeld (1937)) el llamado “procedimiento Weiszfeld” es la técnica usada más comúnmente para resolver el problema Weber, y entra en esta clase. Otros enfoques utilizan las propiedades geométricas de la región para atacar los problemas de localización en un espacio continuo. Algunos ejemplos incluyen el enfoque de solución al problema 1-central, un diagrama de Voronoi heurístico desarrollado para resolver el problema p -central en un espacio continuo, y el uso del eje medial para buscar la ubicación de un servicio en un plano continuo que maximiza la cobertura de un servicio. Otro enfoque de solución geométrica para resolver problemas de localización continuos puede ser encontrado en el trabajo de Hershberger (1993), Hochbaum y Shmoys (1985), Khuller y Sussmann (2000) y Sharir y Welzl (1996).

La mayoría del trabajo en espacios continuo anterior se enfoca en localización de servicios simple y/o y generalmente asume condiciones idealizadas. Esto limita la aplicación de los métodos propuestos en la práctica.

7.3. El Problema de Localización de Servicios Simple (PLSS) o Problema de Localización de Servicios Sin Restricciones de Capacidad.

Sea $I = \{1, \dots, m\}$ un conjunto finito de m posibles lugares para ubicar nuevos servicios (o reubicar servicios existentes). El PLSS trata de satisfacer la demanda de un conjunto de clientes $J = \{1, \dots, n\}$ con la capacidad u oferta de un subconjunto de esos servicios potenciales, ya sea desde un solo servicio o varios sin que más de un solo servicio satisfaga a un solo cliente, esto se debe a que el PLSS tiene la propiedad de una sola asignación. Los servicios se suponen que tienen capacidad ilimitada tal que en principio cualquier servicio puede satisfacer todas las demandas. Dados los costos asociados con los servicios y los costos de transporte por enviar desde los servicios hasta los clientes, se busca un plan de mínimo costo de producción y transporte (en términos del número de servicios establecidos, sus localizaciones y la cantidad enviada desde cada servicio hasta cada cliente) que satisfaga todas las demandas.

El PLSS tiene asociado un *costo fijo* no negativo a cada servicio potencial y se incurre en éste únicamente si algún servicio es establecido, y el número de servicios a establecer *no* está preestablecido.

Para formular un modelo para el PLSS, definimos la siguiente notación:

$m =$ Número de servicios indexados por $i, i = 1, \dots, m$.

$n =$ Número de clientes indexados por $j, j = 1, \dots, n$.

$x_{ij} =$ Fracción de la demanda j atendida por el servicio i .

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{si no se puede enviar nada desde el servicio } i, \text{ es decir, si el servicio } i \text{ es} \\ & \text{"cerrado"}. \\ 1 & \text{si se puede enviar cualquier cantidad desde el servicio } i, \text{ es decir, si el} \\ & \text{servicio } i \text{ es "abierto"}. \end{cases}$$

$c_{ij} = t_{ij}D_j$, donde t_{ij} es el costo de transportar desde el servicio i hasta el cliente j ,

incluyendo el costo de producción y D_j es la demanda del cliente j .

f_i = Costo fijo incurrido por abrir el servicio i . Este costo es no negativo e independiente de la cantidad enviada desde el servicio i .

Para las características anteriores, en este problema nos enfrentamos a dos tipos de restricciones:

Restricción 1:

Cada cliente debe ser atendido por un solo servicio, ya que cada servicio tiene capacidad ilimitada.

Para cada cliente $j = \{j = 1, \dots, n\}$ exactamente una de las variables $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}$ debe ser igual a 1, y las otras tienen que ser iguales a 0. Esto se puede lograr con la siguiente restricción para cada cliente: $\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1$. Esta restricción se debe a que el problema de localización de servicios simple tiene la **propiedad de una sola asignación**.

Restricción 2:

Si un cliente es atendido por un servicio, este servicio tiene que estar abierto.

Si $x_{ij} = 1$, es decir, que el cliente j es atendido por el servicio i , entonces y_i debe ser igual a 1. Por ejemplo, supóngase que $x_{12} = 1$, entonces, debe haber un servicio abierto en $i = 1$, y por lo tanto, se debe satisfacer $y_1 = 1$. Pero, si $x_{ij} = 0$, y_i puede ser 1 o 0. Esto se puede obtener con el siguiente tipo de restricción para cada servicio y para cada cliente: $x_{ij} \leq y_i$.

Si $x_{ij} = 1$, entonces la restricción anterior asegura que $y_i = 1$, como se quiere. En resumen, las restricciones tipo 2 aseguran que se va a pagar por abrir un servicio i si y solo si se usa el servicio i . Como vemos, la variable y_i es de carácter binario.

Teniendo en cuenta que el objetivo del problema es minimizar los costos totales, un modelo para formular el PLSS es el siguiente:

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i \quad (1)$$

s. a:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1; \quad \forall j \quad (2)$$

$$x_{ij} \leq y_i; \quad \forall i, j \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad \forall i, j \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^m y_i = 1, \quad (5)$$

En la solución óptima, exactamente n de las x_{ij} tomarán el valor de uno y todas las demás, tomarán el valor de cero.

7.4. Aplicación del modelado de funciones distancia generalizadas en el problema de localización de servicios sobre una región continua.

Como se ha mencionado, una función distancia aparece en la función objetivo de cualquier problema de optimización en el cual estén involucradas las “distancias” de los recorridos entre parejas de puntos de una región dada. Recabar tales distancias a través de simples mediciones resulta una tarea casi imposible. Cabe señalar que el término “distancia” es aplicable no solo a las distancias geométricas, sino también a cualquier atributo que sea aditivo a lo largo de un camino, como lo es el costo de transporte, la energía gastada, el tiempo de recorrido, etc.

El método propuesto en la tesis de maestría de Estrada Vargas Eusebio (2010) para modelar funciones distancia generalizadas se puede utilizar para obtener las distancias involucradas en problemas de localización de servicios en un espacio continuo. Estas distancias, por comodidad, pueden representar el costo por transportarse desde el servicio i hasta el cliente j .

En el método propuesto por Vargas, la función distancia se obtiene a partir de una discretización de la región de interés y de la correspondiente discretización de las direcciones de la función métrica $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, lo que convierte al problema de localización de servicios continuo en un problema de localización de servicios discreto.

Si la región de interés tiene subregiones en las que hay diferentes características de asimetría, no uniformidad y/o anisotropía, entonces estamos en una situación más general que el caso del plano inclinado propuesto por Hodgson (1987), y no se podría modelar **solamente una** función distancia que modele **todas** las distancias entre todos los pares de puntos de la región de interés. En su lugar, se debería tener una función distancia para cada subregión. En este trabajo de tesis se centra la atención a este caso. Para obtener las funciones distancia que modelen las distancias en cada subregión, proponemos usar la estrategia propuesta en la tesis de maestría de Vargas Estrada Eusebio (2010), la cual se detalla en esta tesis. Una vez que se modelan las funciones distancia para cada subregión, se procede a resolver de manera aproximada el PCLS. Decimos que la solución es aproximada porque se hace a través de una discretizaciones que más adelante se describirán. Entonces, el problema originalmente continuo pasa a ser uno discreto, que llamamos *Problema de Localización de Servicios Discreto Métrico Generalizado* (PDLSMG). Este PDLSMG no es más que el conocido Problema de Localización de Servicios Simple (PLSS) pero considerando constante el cargo fijo involucrado en su función objetivo, y que “generalizamos” en el sentido que los datos de las distancias involucradas en el problema son obtenidos de una función distancia más general que las tradicionales métricas L_p utilizadas para obtener estos datos de distancias involucradas en el PLSS.

En la función objetivo del PDLSMG se usarán datos de distancia obtenidos a partir de diversas funciones distancia *generalizadas*, cada una de ellas correspondiendo a una subregión de una cierta partición de la región de interés.

7.4.1. Discretización de la región continua M .

Para ilustrar la estrategia propuesta en esta tesis, se considerará el siguiente ejemplo hipotético: supóngase una región rectangular M en la cual un conjunto de puntos de demanda P_j debe ser satisfecho por los servicios. Para esto, se plantea ubicar servicios en puntos del conjunto de posibles ubicaciones X_i . Se trata de localizar uno o varios servicios tal que se satisfaga la demanda en los puntos donde ésta existe. Por tanto, los puntos X_i son los posibles puntos donde se localizará(n) el (los) servicio(s).

Por simplicidad, en este ejemplo se supondrá en toda la región continua M se tienen las mismas condiciones de uniformidad, asimetría y anisotropía. Es decir, no se requiere una

subdivisión de M en subregiones. Si se requiriera hacer una distinción de subregiones, entonces se procede para cada subregión de igual forma que la que se ilustrará.

Para discretizar esta región, se realiza un cuadrículado o malla con base en algún criterio; en este caso las dimensiones de la malla serían dadas en función del número de servicios que se está dispuesto a localizar. De esta forma, la región continua M pasa a ser una región discreta N . Esto corresponde al primer paso del método propuesto para resolver el PCLS, y que consiste en modelar una función distancia sobre una región discreta N a partir de una función métrica F .

Cada paso del procedimiento propuesto, para hacerlo más claro, se va ilustrando con el ejemplo hipotético. Primero se construye una malla sobre la región de interés, en la que se señalan los puntos de demanda (P_1, P_2, P_3) y los posibles puntos de localización de los nuevos servicios ($X_1, X_2, \dots, X_9, P_1, P_2, P_3$). Al mismo tiempo se deben discretizar las direcciones de desplazamiento, que en este caso tomaremos el *criterio de vecinos de primer y segundo orden*. En la figura 7.1 se ilustran ambas discretizaciones.

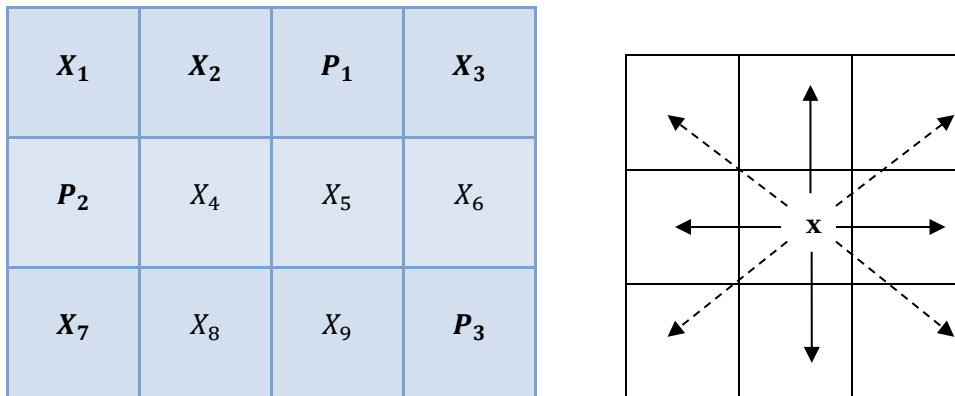


Figura 7.1. Del lado izquierdo se ilustra la discretización de la región, y del lado derecho, se ilustra la discretización de las direcciones de desplazamiento desde un punto x hacia sus puntos vecinos de segundo orden

Obsérvese que, en general, cada celda de la región discretizada es un candidato para localizar al nuevo servicio. Si la función distancia es convexa, entonces las celdas de interés serían aquellas cuyo centro cae en la cubierta convexa que forman los clientes (como se verá en el ejemplo 3 de este capítulo).

7.4.2. Determinación de la función métrica G en cada nodo de la red.

Para este ejemplo, en el espacio discretizado N cada nodo $\mathbf{x} \in N$ tiene asociado un conjunto de nodos vecinos de \mathbf{x} , denotado por $D_{\mathbf{x}}N \subseteq N$. La función métrica $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, se relaciona con la función distancia discretizada d sobre N por

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ para todo } \mathbf{x} \in N, \mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N.$$

Si para el nodo $\mathbf{x} \in N$ y un nodo vecino de \mathbf{x} , $\mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N$ se cumple que

$$\mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N \Rightarrow G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + G(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{z} \in D_{\mathbf{x}}N,$$

entonces se dice que G es convexa en el nodo \mathbf{x} en la dirección de $\mathbf{y} \in D_{\mathbf{x}}N$. Verificar que esta condición se cumple en cada nodo \mathbf{x} para todas las direcciones garantiza que la función d cumple la desigualdad del triángulo, lo que implica que la distancia obtenida corresponda a la distancia mínima entre el nodo \mathbf{x} y su nodo vecino \mathbf{y} . Los valores de la función métrica G son las distancias entre los nodos vecinos, las cuales se determinan a través de mediciones empíricas o cálculos. En la Figura 7.2 se ilustra de manera sencilla las distancias a partir de las funciones métricas en un punto de la región discretizada.

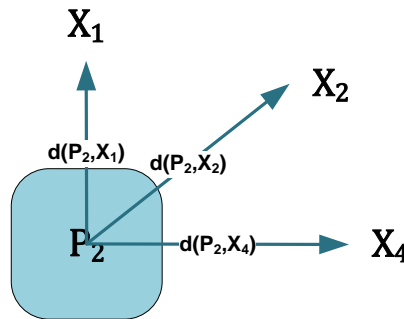


Figura 7.2

Las distancias se determinan en cada nodo de la red y éstas pueden ser asimétricas, ya que la función métrica permite que, por ejemplo, la distancia del punto P_2 al punto X_1 sea diferente a la distancia del punto X_1 al punto P_2 . En la Figura 7.3 se ilustra un ejemplo de cómo quedaría representada la malla:

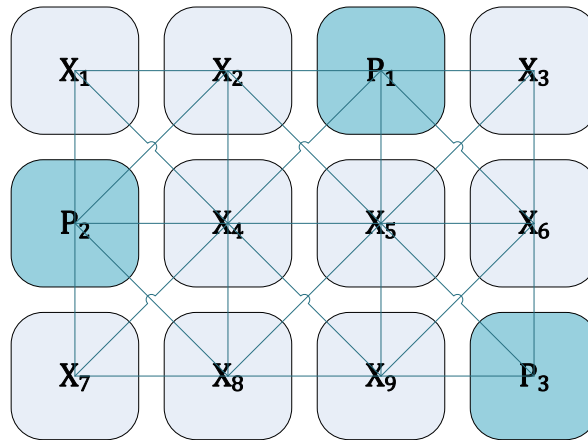


Figura 7.3

Por comodidad, los valores de las distancias obtenidas a partir de las funciones métricas en cada punto de la región se vacían en una matriz. Esta matriz puede ser asimétrica, y puede presentar no uniformidades en las distancias, gracias a que éstas se obtienen a través de la función métrica γ , como se mencionó en capítulos anteriores, la función métrica puede ser diferente para dos puntos que bajo una traslación el valor de este no sea el mismo. La función métrica también hace posible la obtención de “distancias” negativas.

En la Tabla 8.2 se muestra la matriz asociada a nuestro ejemplo hipotético. En esta matriz se puede observar que los recuadros que quedan en blanco son aquellos que representan las distancias entre nodos que no son vecinos y que, por lo tanto, deben ser obtenidas mediante algún algoritmo que determine la ruta más corta entre dos puntos. Los recuadros correspondientes a las distancias obtenidas entre dos nodos vecinos mediante la función métrica contienen un número real $a_{xy} \in R$, cuyo valor es la longitud del arco mínimo que conecta a un nodo x con un nodo vecino y , obtenida esta longitud con la ecuación

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min_{x \in \Omega_{[a,b]}} \sum_a^b F(x(s), \dot{x}(s)) \Delta(s), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$$

	P_1	P_2	P_3	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
P_1	-				$a_{P_1X_2}$	$a_{P_1X_3}$	$a_{P_1X_4}$	$a_{P_1X_5}$	$a_{P_1X_6}$			
P_2		-		$a_{P_2X_1}$	$a_{P_2X_2}$		$a_{P_2X_4}$			$a_{P_2X_7}$	$a_{P_2X_8}$	
P_3			-					$a_{P_3X_5}$	$a_{P_3X_6}$			$a_{P_3X_9}$
X_1		$a_{X_1P_2}$		-	$a_{X_1X_2}$		$a_{X_1X_4}$					
X_2	$a_{X_2P_1}$	$a_{X_2P_2}$		$a_{X_2X_1}$	-		$a_{X_2X_4}$	$a_{X_2X_5}$				
X_3	$a_{X_3P_1}$					-		$a_{X_3X_5}$	$a_{X_3X_6}$			
X_4	$a_{X_4P_1}$	$a_{X_4P_2}$		$a_{X_4X_1}$	$a_{X_4X_2}$		-	$a_{X_4X_5}$		$a_{X_4X_7}$	$a_{X_4X_8}$	$a_{X_4X_9}$
X_5	$a_{X_5P_1}$		$a_{X_5P_3}$		$a_{X_5X_2}$	$a_{X_5X_3}$	$a_{X_5X_4}$	-	$a_{X_5X_6}$		$a_{X_5X_8}$	$a_{X_5X_9}$
X_6	$a_{X_6P_1}$		$a_{X_6P_3}$			$a_{X_6X_3}$		$a_{X_6X_5}$	-			$a_{X_6X_9}$
X_7		$a_{X_7P_2}$					$a_{X_7X_4}$			-	$a_{X_7X_8}$	
X_8		$a_{X_8P_2}$					$a_{X_8X_4}$	$a_{X_8X_5}$		$a_{X_8X_7}$	-	$a_{X_8X_9}$
X_9			$a_{X_9P_3}$				$a_{X_9X_4}$	$a_{X_9X_5}$	$a_{X_9X_6}$		$a_{X_9X_8}$	-

Tabla 7.

7.4.3. Obtención de las distancias para cada par de puntos en la red.

Para obtener los arcos de mínima “longitud” que conectan a todos los puntos en la red, se utiliza algún algoritmo de redes que resuelve el problema de la ruta más corta. Por ejemplo, podría utilizarse el procedimiento desarrollado por R. W. Floyd (1962), el cual es aplicable a redes que admiten *cualquier* costo (distancia) en sus arcos. En dicho algoritmo se supondrá una numeración de los vértices de la red $1, 2, \dots, n$ y se utilizará una matriz C , de orden $n \times n$, para calcular las longitudes de las rutas más cortas entre cada par de vértices; al terminar de aplicar el algoritmo la longitud de la ruta más corta entre los nodos i y j está dada por el elemento (i, j) de C . La matriz C para el caso que se propone quedaría de la siguiente forma:

	P_1	P_2	P_3	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
P_1	-	$a_{P_1P_2}$	$a_{P_1P_3}$	$a_{P_1X_1}$	$a_{P_1X_2}$	$a_{P_1X_3}$	$a_{P_1X_4}$	$a_{P_1X_5}$	$a_{P_1X_6}$	$a_{P_1X_7}$	$a_{P_1X_8}$	$a_{P_1X_9}$
P_2	$a_{P_2P_1}$	-	$a_{P_2P_3}$	$a_{P_2X_1}$	$a_{P_2X_2}$	$a_{P_2X_3}$	$a_{P_2X_4}$	$a_{P_2X_5}$	$a_{P_2X_6}$	$a_{P_2X_7}$	$a_{P_2X_8}$	$a_{P_2X_9}$
P_3	$a_{P_3P_1}$	$a_{P_3P_2}$	-	$a_{P_3X_1}$	$a_{P_3X_2}$	$a_{P_3X_3}$	$a_{P_3X_4}$	$a_{P_3X_5}$	$a_{P_3X_6}$	$a_{P_3X_7}$	$a_{P_3X_8}$	$a_{P_3X_9}$
X_1	$a_{X_1P_1}$	$a_{X_1P_2}$	$a_{X_1P_3}$	-	$a_{X_1X_2}$	$a_{X_1X_3}$	$a_{X_1X_4}$	$a_{X_1X_5}$	$a_{X_1X_6}$	$a_{X_1X_7}$	$a_{X_1X_8}$	$a_{X_1X_9}$
X_2	$a_{X_2P_1}$	$a_{X_2P_2}$	$a_{X_2P_3}$	$a_{X_2X_1}$	-	$a_{X_2X_3}$	$a_{X_2X_4}$	$a_{X_2X_5}$	$a_{X_2X_6}$	$a_{X_2X_7}$	$a_{X_2X_8}$	$a_{X_2X_9}$
X_3	$a_{X_3P_1}$	$a_{X_3P_2}$	$a_{X_3P_3}$	$a_{X_3X_1}$	$a_{X_3X_2}$	-	$a_{X_3X_4}$	$a_{X_3X_5}$	$a_{X_3X_6}$	$a_{X_3X_7}$	$a_{X_3X_8}$	$a_{X_3X_9}$
X_4	$a_{X_4P_1}$	$a_{X_4P_2}$	$a_{X_4P_3}$	$a_{X_4X_1}$	$a_{X_4X_2}$	$a_{X_4X_3}$	-	$a_{X_4X_5}$	$a_{X_4X_6}$	$a_{X_4X_7}$	$a_{X_4X_8}$	$a_{X_4X_9}$
X_5	$a_{X_5P_1}$	$a_{X_5P_2}$	$a_{X_5P_3}$	$a_{X_5X_1}$	$a_{X_5X_2}$	$a_{X_5X_3}$	$a_{X_5X_4}$	-	$a_{X_5X_6}$	$a_{X_5X_7}$	$a_{X_5X_8}$	$a_{X_5X_9}$
X_6	$a_{X_6P_1}$	$a_{X_6P_2}$	$a_{X_6P_3}$	$a_{X_6X_1}$	$a_{X_6X_2}$	$a_{X_6X_3}$	$a_{X_6X_4}$	$a_{X_6X_5}$	-	$a_{X_6X_7}$	$a_{X_6X_8}$	$a_{X_6X_9}$
X_7	$a_{X_7P_1}$	$a_{X_7P_2}$	$a_{X_7P_3}$	$a_{X_7X_1}$	$a_{X_7X_2}$	$a_{X_7X_3}$	$a_{X_7X_4}$	$a_{X_7X_5}$	$a_{X_7X_6}$	-	$a_{X_7X_8}$	$a_{X_7X_9}$
X_8	$a_{X_8P_1}$	$a_{X_8P_2}$	$a_{X_8P_3}$	$a_{X_8X_1}$	$a_{X_8X_2}$	$a_{X_8X_3}$	$a_{X_8X_4}$	$a_{X_8X_5}$	$a_{X_8X_6}$	$a_{X_8X_7}$	-	$a_{X_8X_9}$
X_9	$a_{X_9P_1}$	$a_{X_9P_2}$	$a_{X_9P_3}$	$a_{X_9X_1}$	$a_{X_9X_2}$	$a_{X_9X_3}$	$a_{X_9X_4}$	$a_{X_9X_5}$	$a_{X_9X_6}$	$a_{X_9X_7}$	$a_{X_9X_8}$	-

Tabla 7.3. Matriz C.

Para recuperar las rutas más cortas se construye una matriz $Z_{n \times n}$, donde el elemento z_{ij} de esta matriz es el nodo predecesor del nodo j en la ruta que va de i a j determinada en cada iteración. Dada la definición de la matriz Z , sus entradas se inicializarán $z_{ij} = i$ para todo par de nodos i, j de la red. La matriz Z se modificará en el paso 2 de la k -ésima iteración de acuerdo a la siguiente asignación:

$$z_{ij} = \begin{cases} z_{kj} & \text{si } c_{ik} + c_{kj} < c_{ij} \\ \text{no cambia} & \text{si } c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj} \end{cases}$$

En la Tabla 7.4 puede verse la matriz Z asociada al ejemplo propuesto, en la que los elementos z_{ij} , representan puntos o nodos predecesores en la red.

	P_1	P_2	P_3	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
P_1	-	$Z_{P_1P_2}$	$Z_{P_1P_3}$	$Z_{P_1X_1}$	$Z_{P_1X_2}$	$Z_{P_1X_3}$	$Z_{P_1X_4}$	$Z_{P_1X_5}$	$Z_{P_1X_6}$	$Z_{P_1X_7}$	$Z_{P_1X_8}$	$Z_{P_1X_9}$
P_2	$Z_{P_2P_1}$	-	$Z_{P_2P_3}$	$Z_{P_2X_1}$	$Z_{P_2X_2}$	$Z_{P_2X_3}$	$Z_{P_2X_4}$	$Z_{P_2X_5}$	$Z_{P_2X_6}$	$Z_{P_2X_7}$	$Z_{P_2X_8}$	$Z_{P_2X_9}$
P_3	$Z_{P_3P_1}$	$Z_{P_3P_2}$	-	$Z_{P_3X_1}$	$Z_{P_3X_2}$	$Z_{P_3X_3}$	$Z_{P_3X_4}$	$Z_{P_3X_5}$	$Z_{P_3X_6}$	$Z_{P_3X_7}$	$Z_{P_3X_8}$	$Z_{P_3X_9}$
X_1	$Z_{X_1P_1}$	$Z_{X_1P_2}$	$Z_{X_1P_3}$	-	$Z_{X_1X_2}$	$Z_{X_1X_3}$	$Z_{X_1X_4}$	$Z_{X_1X_5}$	$Z_{X_1X_6}$	$Z_{X_1X_7}$	$Z_{X_1X_8}$	$Z_{X_1X_9}$
X_2	$Z_{X_2P_1}$	$Z_{X_2P_2}$	$Z_{X_2P_3}$	$Z_{X_2X_1}$	-	$Z_{X_2X_3}$	$Z_{X_2X_4}$	$Z_{X_2X_5}$	$Z_{X_2X_6}$	$Z_{X_2X_7}$	$Z_{X_2X_8}$	$Z_{X_2X_9}$
X_3	$Z_{X_3P_1}$	$Z_{X_3P_2}$	$Z_{X_3P_3}$	$Z_{X_3X_1}$	$Z_{X_3X_2}$	-	$Z_{X_3X_4}$	$Z_{X_3X_5}$	$Z_{X_3X_6}$	$Z_{X_3X_7}$	$Z_{X_3X_8}$	$Z_{X_3X_9}$
X_4	$Z_{X_4P_1}$	$Z_{X_4P_2}$	$Z_{X_4P_3}$	$Z_{X_4X_1}$	$Z_{X_4X_2}$	$Z_{X_4X_3}$	-	$Z_{X_4X_5}$	$Z_{X_4X_6}$	$Z_{X_4X_7}$	$Z_{X_4X_8}$	$Z_{X_4X_9}$
X_5	$Z_{X_5P_1}$	$Z_{X_5P_2}$	$Z_{X_5P_3}$	$Z_{X_5X_1}$	$Z_{X_5X_2}$	$Z_{X_5X_3}$	$Z_{X_5X_4}$	-	$Z_{X_5X_6}$	$Z_{X_5X_7}$	$Z_{X_5X_8}$	$Z_{X_5X_9}$
X_6	$Z_{X_6P_1}$	$Z_{X_6P_2}$	$Z_{X_6P_3}$	$Z_{X_6X_1}$	$Z_{X_6X_2}$	$Z_{X_6X_3}$	$Z_{X_6X_4}$	$Z_{X_6X_5}$	-	$Z_{X_6X_7}$	$Z_{X_6X_8}$	$Z_{X_6X_9}$
X_7	$Z_{X_7P_1}$	$Z_{X_7P_2}$	$Z_{X_7P_3}$	$Z_{X_7X_1}$	$Z_{X_7X_2}$	$Z_{X_7X_3}$	$Z_{X_7X_4}$	$Z_{X_7X_5}$	$Z_{X_7X_6}$	-	$Z_{X_7X_8}$	$Z_{X_7X_9}$
X_8	$Z_{X_8P_1}$	$Z_{X_8P_2}$	$Z_{X_8P_3}$	$Z_{X_8X_1}$	$Z_{X_8X_2}$	$Z_{X_8X_3}$	$Z_{X_8X_4}$	$Z_{X_8X_5}$	$Z_{X_8X_6}$	$Z_{X_8X_7}$	-	$Z_{X_8X_9}$
X_9	$Z_{X_9P_1}$	$Z_{X_9P_2}$	$Z_{X_9P_3}$	$Z_{X_9X_1}$	$Z_{X_9X_2}$	$Z_{X_9X_3}$	$Z_{X_9X_4}$	$Z_{X_9X_5}$	$Z_{X_9X_6}$	$Z_{X_9X_7}$	$Z_{X_9X_8}$	-

Tabla 7.4. Matriz Z.

En la Figura 7.4 se ilustra cómo esta recuperación facilita la construcción de la red, al identificarse los nodos que sigue cada una de las rutas más cortas entre cada par de puntos. Por lo tanto, se puede determinar la ruta de recorrido desde un punto a cualquier otro punto de la red.

Una vez que se tienen las distancias mínimas que conectan a todos los puntos de la red (los cuales representan al conjunto de puntos de demanda y posibles ubicaciones de los servicios que se instalarán), se procede a resolver el PDLMSG, el cual es un modelo de programación lineal.

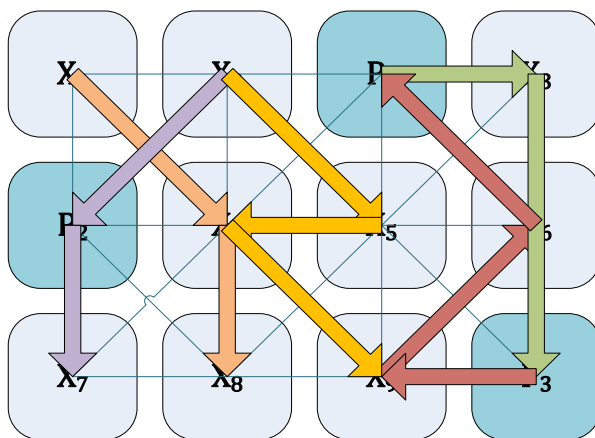


Figura 7.4

7.4.4. Solución del Problema Discreto de Localización de Servicios Métrico Generalizado (PDLSMG).

Para el caso que se propone, una vez discretizada la región a través de la malla, se obtiene una función distancia como se describió en el capítulo 7, calculándose para ello las distancias entre nodos vecinos en la red, para posteriormente encontrar los arcos de mínima longitud entre todos los puntos de dicha red por medio del algoritmo de la ruta más corta de Floyd (descrito en el capítulo 5 de esta tesis), lo cual determinaría las distancias para cada par de puntos en la red, obteniéndose así los d_{ij} de nuestro modelo PDLSMG.

Como ya se mencionó, en el PLSS se trata de satisfacer la demanda de un conjunto de clientes con la capacidad u oferta de un subconjunto de los servicios potenciales, ya sea desde un solo servicio o varios sin que más de uno solo satisfaga a un solo cliente, puesto que el PLSS tiene la propiedad de una sola asignación. En nuestro modelo discreto, como ya se mencionó, se agrega al PLSS la restricción de que solamente un servicio puede atender a todos los clientes.

Los servicios se suponen con capacidad ilimitada, por lo que cualquier servicio puede satisfacer todas las demandas. Dados los costos asociados con los servicios y los costos de transporte por enviar desde los servicios hasta los clientes, se busca un plan de mínimo costo de producción y transporte que satisfaga todas las demandas.

En el modelo se incorporará un costo t_{ij} asociado a cada punto X_i y cada punto de demanda P_j , el cual representará el costo de transportar desde el servicio potencial i hasta un punto de demanda j , incluyendo los costos de producción (estos costos son los obtenidos mediante el método propuesto).

$$t_{ij} = d(X_i, P_j), \quad \forall i, j.$$

Seguendo el modelo del PLSS, se debe multiplicar cada costo t_{ij} por la demanda D_j en cada punto P_j , y se reemplaza el costo t_{ij} por la distancia $d(X_i, P_j)$ que hay entre el nuevo servicio X_i y el punto de demanda P_j , obteniéndose la siguiente expresión:

$$c_{ij} = D_j t_{ij} = D_j d(X_i, P_j), \quad \forall i, j.$$

El PLSS tiene asociado un costo fijo $f_i \geq 0$ a cada servicio potencial X_i , al cual se incurre únicamente si algún servicio es establecido. En nuestro modelo estos costos fijos se considera que son los mismos para cada servicio (para cada celda de la malla), por lo tanto, se puede omitir esta parte de la función objetivo. De esta forma, el modelo para el PDLMSG con todas sus restricciones para nuestro ejemplo quedaría de la siguiente forma:

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d(X_i, P_j) x_{ij} \quad (1)$$

s. a:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1; \quad \forall j \quad (2)$$

$$x_{ij} \leq y_i; \quad \forall i, j \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad \forall i, j \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^m y_i = 1, \quad (5)$$

donde:

x_{ij} = Fracción de la demanda j atendida por el servicio i .

$c_{ij} = t_{ij} D_j$, donde t_{ij} es el costo de transportar desde el servicio i hasta el cliente j ,

incluyendo el costo de producción y D_j es la demanda del cliente j .

f_i = Costo fijo incurrido por abrir el servicio i . Este costo es no negativo e

independiente de la cantidad enviada desde el servicio i .

En este modelo, (1) es el mínimo de la suma de las distancias desde los clientes hasta el nuevo servicio a instalar. Las restricciones (2) aseguran que cada cliente sea atendido. Las restricciones (3) aseguran que los clientes deben ser atendidos por un servicio que sea potencial para instalarse. (4) son las condiciones de no negatividad de las variables x_{ij} ; y (5) asegura que solamente se instale un nuevo servicio.

7.5. Solución del PDLSMG.

El problema de localización de servicios discreto propuesto (PDLSMG) es un modelo simple de programación lineal. La estrategia de solución propuesta dependerá de cuál de los siguientes casos es el que se presenta.

i) En cada celda de la discretización hay un cliente. En este caso se resuelve un único modelo discreto.

ii) Hay celdas de la discretización en las que no hay un cliente. En este caso, primero se resuelve el modelo tomando como puntos candidatos al conjunto de puntos donde están los clientes. Denotemos por Z_c^* a la solución óptima de este modelo. Después se resuelve un modelo para cada celda de la discretización en donde no hay clientes, donde dicha celda es el lugar candidato para ubicar al nuevo servicio. Denotemos por Z_i^* a la solución óptima del modelo correspondiente a la celda i . El lugar óptimo para instalar el nuevo servicio del modelo PDLSMG será entonces el $\min \{ Z_c^*, Z_i^* \}$. (ver el ejemplo 2 de la sección 8.5).

7.6 Ejemplos

7.6.1 Ejemplo 1. Ilustración del caso (i): Hay un cliente en cada celda de la discretización.

Supongamos que la región de interés M es un subconjunto del plano cartesiano delimitado por los siguientes segmentos de recta: el segmento de recta que va del punto $(0, 0)$ al punto $(0, 2)$, el segmento de recta que va del punto $(0, 2)$ al punto $(2, 2)$, el segmento de recta que va del punto $(0, 0)$ al punto $(2, 0)$, y el segmento de recta que va del punto $(2, 0)$ al punto $(2, 2)$. Supongamos que en esta región están ubicados nueve clientes. Denotemos a los clientes por $a, b, c, d, e, f, g, h, y i$, cuyas coordenadas son $a(0, 0), b(2, 0), c(1, 2), d(0, 2), e(2, 2), f(0, 1), g(1, 1), h(2, 1), y i(1, 0)$, respectivamente. Supongamos que la función distancia que modela las

distancias en **toda** la región de interés es la métrica L_p con $p = 2$, es decir, la función distancia es la métrica euclidiana, la cual está dada por:

$$d(x, y) = (|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2)^{1/2}$$

En la figura 7.5 se muestra la ubicación de los nueve clientes en la región M .

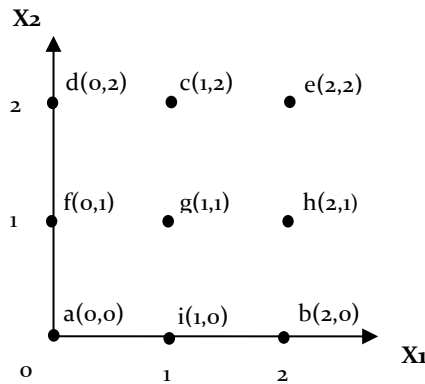


Figura 7.5 Ubicación en la región de interés de los clientes del ejemplo 1

Sea $X(x_1, x_2)$ el nuevo servicio que se desea instalar en la región de interés M . Nuestro problema consiste en encontrar las coordenadas (x_1, x_2) tal que se minimice la suma de las distancias desde cada cliente $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ hasta el nuevo servicio X .

Sustituyendo los datos, el Problema Continuo de Localización de Servicios (PCLS) viene a ser:

Minimizar $Z = ((x_1-1)^2 + (x_2-0)^2)^{0.5} + ((x_1-0)^2 + (x_2-1)^2)^{0.5} + ((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2)^{0.5} + ((x_1-2)^2 + (x_2-1)^2)^{0.5} + ((x_1-0)^2 + (x_2-2)^2)^{0.5} + ((x_1-2)^2 + (x_2-2)^2)^{0.5} + ((x_1-1)^2 + (x_2-2)^2)^{0.5} + ((x_1-2)^2 + (x_2-0)^2)^{0.5} + ((x_1)^2 + (x_2)^2)^{0.5}$

Como se puede observar, este problema es de programación no lineal, donde la función objetivo es una función convexa (ver Love, 1979, pág. 14), por lo que, matemáticamente hablando, no hay “complicaciones” para resolverlo. De hecho, se podría resolver con el procedimiento de Weiszfeld (ver Love, 1979, pág. 15).

La solución óptima obtenida con ayuda de LINGO es:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad Z^* = 9.656854$$

Es decir, el nuevo servicio X se debe localizar en (1, 1). Notemos que el punto óptimo coincide con el punto $g(1, 1)$ de la figura 7.5, que es el centro de gravedad de la cubierta convexa del conjunto que describen los clientes. En este ejemplo, la solución óptima también coincide con la ubicación de uno de los clientes (cliente g).

7.6.1.1 Solución del ejemplo 1 con el método propuesto

Como primer paso, se discretizan tanto la región de interés M como las direcciones de desplazamiento desde un punto hacia sus puntos vecinos. En este caso, una discretización de la región de interés pertinente a los datos del problema es la que corresponde a una malla tal que el centro de cada celda de la malla corresponda con la ubicación de un cliente. En la figura 7.6 se ilustran tanto la discretización de la región como la discretización de las direcciones de desplazamiento. Por los supuestos del ejemplo 1, tenemos condiciones de simetría, isotropía y uniformidad; y las bolas unitarias de la función métrica $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ son circunferencias centradas en \mathbf{x} , donde $\mathbf{x} = a, b, c, d, e, f, g, h, i$.

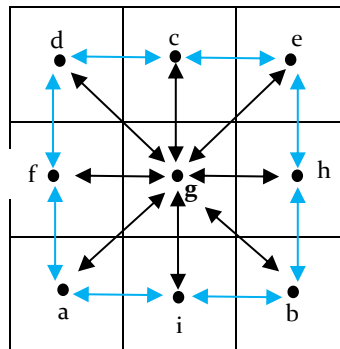


Figura 7.6 Discretización de la región M y discretización de las direcciones de desplazamiento desde un punto hacia los puntos vecinos de primer y segundo orden.

En este ejemplo, en cada celda de la región discretizada hay un cliente que debe ser atendido por el servicio a instalar. Como mencionamos en páginas anteriores, cada celda es un posible lugar para instalar al nuevo servicio, y por tanto, en este caso, la localización óptima del servicio coincidirá con la ubicación de alguno de los clientes. Para los datos de este ejemplo, las distancias desde un punto \mathbf{x} (ya sea $a, b, c, d, e, f, g, h, i$) hacia sus correspondientes puntos vecinos y (los que correspondan de los puntos $a, b, c, d, e, f, g, h, i$), usando como función distancia a la métrica euclidiana, calculadas como se describió en la sección 8.4.3, son:

$d(a, b) = 2, d(a, c) = 1+\sqrt{2}, d(a, d) = 2, d(a, e) = 2\sqrt{2}, d(a, f) = 1, d(a, g) = \sqrt{2}, d(a, h) = 1+\sqrt{2}, d(a, i) = 1, d(b, a) = 2, d(b, c) = 1+\sqrt{2}, d(b, d) = 2\sqrt{2}, d(b, e) = 2, d(b, f) = 1+\sqrt{2}, d(b, g) = \sqrt{2}, d(b, h) = 1, d(b, i) = 1, d(c, a) = 1+\sqrt{2}, d(c, b) = 1+\sqrt{2}, d(c, d) = 1, d(c, e) = 1, d(c, f) = \sqrt{2}, d(c, g) = 1, d(c, h) = 1, d(c, i) = \sqrt{2}, d(d, a) = 2, d(d, b) = 2\sqrt{2}, d(d, c) = 1, d(d, e) = 2, d(d, f) = 1, d(d, g) = \sqrt{2}, d(d, h) = \sqrt{2}, d(d, i) = 1+\sqrt{2}, d(e, a) = 2\sqrt{2}, d(e, b) = 2, d(e, c) = 1, d(e, d) = 2, d(e, f) = 1+\sqrt{2}, d(e, g) = \sqrt{2}, d(e, h) = 1, d(e, i) = 1+\sqrt{2}, d(f, a) = 1, d(f, b) = 1+\sqrt{2}, d(f, c) = \sqrt{2}, d(f, d) = 1, d(f, e) = 1+\sqrt{2}, d(f, g) = 1, d(f, h) = 2, d(f, i) = \sqrt{2}, d(g, a) = \sqrt{2}, d(g, b) = \sqrt{2}, d(g, c) = 1, d(g, d) = \sqrt{2}, d(g, e) = \sqrt{2}, d(g, f) = 1, d(g, h) = 1, d(g, i) = 1, d(h, a) = 1+\sqrt{2}, d(h, b) = 1, d(h, c) = \sqrt{2}, d(h, d) = 1+\sqrt{2}, d(h, e) = 1, d(h, f) = 2, d(h, g) = 1, d(h, i) = 1+\sqrt{2}, d(i, a) = 1, d(i, b) = 1, d(i, c) = 1+\sqrt{2}, d(i, d) = 1+\sqrt{2}, d(i, e) = 1+\sqrt{2}, d(i, f) = \sqrt{2}, d(i, g) = 1, d(i, h) = 1+\sqrt{2}.$

Por tanto, en este caso el modelo discreto de localización propuesto (PDLSMG) viene a ser:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z_c = & 2x_{ab} + 2.41421356x_{ac} + 2x_{ad} + 2.828427x_{ae} + x_{af} + 1.41421356x_{ag} + 2.41421356x_{ah} + \\
 & x_{ai} + 2x_{ba} + 2.41421356x_{bc} + 2.828427x_{bd} + 2x_{be} + 2.41421356x_{bf} + 1.41421356x_{bg} + x_{bh} + \\
 & x_{bi} + 2.41421356x_{ca} + 2.41421356x_{cb} + x_{cd} + x_{ce} + 1.41421356x_{cf} + x_{cg} + x_{ch} + 1.41421356x_{ci} + \\
 & 2x_{da} + 2.828427x_{db} + x_{dc} + 2x_{de} + x_{df} + 1.41421356x_{dg} + 1.41421356x_{dh} + 2.41421356x_{di} + \\
 & 2.828427x_{ea} + 2x_{eb} + x_{ec} + 2x_{ed} + 2.41421356x_{ef} + 1.41421356x_{eg} + x_{eh} + 2.41421356x_{ei} + \\
 & x_{fa} + 2.41421356x_{fb} + 1.41421356x_{fc} + x_{fd} + 2.41421356x_{fe} + x_{fg} + 2x_{fh} + 1.41421356x_{fi} + \\
 & 1.41421356x_{ga} + 1.41421356x_{gb} + x_{gc} + 1.41421356x_{gd} + 1.41421356x_{ge} + x_{gf} + x_{gh} + x_{gi} + \\
 & 2.41421356x_{ha} + x_{hb} + 1.41421356x_{hc} + 2.41421356x_{hd} + x_{he} + 2x_{hf} + x_{hg} + 1.41421356x_{hi} + x_{ia} \\
 & + x_{ib} + 2.41421356x_{ic} + 2.41421356x_{id} + 2.41421356x_{ie} + 1.41421356x_{if} + x_{ig} + 1.41421356x_{ih}
 \end{aligned}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
 x_{aa} + x_{ba} + x_{ca} + x_{da} + x_{ea} + x_{fa} + x_{ga} + x_{ha} + x_{ia} &= 1 \\
 x_{ab} + x_{bb} + x_{cb} + x_{db} + x_{eb} + x_{fb} + x_{gb} + x_{hb} + x_{ib} &= 1 \\
 x_{ac} + x_{bc} + x_{cc} + x_{dc} + x_{ec} + x_{fc} + x_{gc} + x_{hc} + x_{ic} &= 1 \\
 x_{ad} + x_{bd} + x_{cd} + x_{dd} + x_{ed} + x_{fd} + x_{gd} + x_{hd} + x_{id} &= 1 \\
 x_{ae} + x_{be} + x_{ce} + x_{de} + x_{ee} + x_{fe} + x_{ge} + x_{he} + x_{ie} &= 1 \\
 x_{af} + x_{bf} + x_{cf} + x_{df} + x_{ef} + x_{ff} + x_{gf} + x_{hf} + x_{if} &= 1 \\
 x_{ag} + x_{bg} + x_{cg} + x_{dg} + x_{eg} + x_{fg} + x_{gg} + x_{hg} + x_{ig} &= 1 \\
 x_{ah} + x_{bh} + x_{ch} + x_{dh} + x_{eh} + x_{fh} + x_{gh} + x_{hh} + x_{ih} &= 1
 \end{aligned}$$

$$x_{ai} + x_{bi} + x_{ci} + x_{di} + x_{ei} + x_{fi} + x_{gi} + x_{hi} + x_{ii} = 1$$

$x_{aa}-y_a \leq 0$	$x_{ba}-y_b \leq 0$	$x_{ca}-y_c \leq 0$	$x_{da}-y_d \leq 0$	$x_{ea}-y_e \leq 0$	$x_{fa}-y_f \leq 0$	$x_{ga}-y_g \leq 0$	$x_{ha}-y_h \leq 0$	$x_{ia}-y_i \leq 0$
$x_{ab}-y_a \leq 0$	$x_{bb}-y_b \leq 0$	$x_{cb}-y_c \leq 0$	$x_{db}-y_d \leq 0$	$x_{eb}-y_e \leq 0$	$x_{fb}-y_f \leq 0$	$x_{gb}-y_g \leq 0$	$x_{hb}-y_h \leq 0$	$x_{ib}-y_i \leq 0$
$x_{ac}-y_a \leq 0$	$x_{bc}-y_b \leq 0$	$x_{cc}-y_c \leq 0$	$x_{dc}-y_d \leq 0$	$x_{ec}-y_e \leq 0$	$x_{fc}-y_f \leq 0$	$x_{gc}-y_g \leq 0$	$x_{hc}-y_h \leq 0$	$x_{ic}-y_i \leq 0$
$x_{ad}-y_a \leq 0$	$x_{bd}-y_b \leq 0$	$x_{cd}-y_c \leq 0$	$x_{dd}-y_d \leq 0$	$x_{ed}-y_e \leq 0$	$x_{fd}-y_f \leq 0$	$x_{gd}-y_g \leq 0$	$x_{hd}-y_h \leq 0$	$x_{id}-y_i \leq 0$
$x_{ae}-y_a \leq 0$	$x_{be}-y_b \leq 0$	$x_{ce}-y_c \leq 0$	$x_{de}-y_d \leq 0$	$x_{ee}-y_e \leq 0$	$x_{fe}-y_f \leq 0$	$x_{ge}-y_g \leq 0$	$x_{he}-y_h \leq 0$	$x_{ie}-y_i \leq 0$
$x_{af}-y_a \leq 0$	$x_{bf}-y_b \leq 0$	$x_{cf}-y_c \leq 0$	$x_{df}-y_d \leq 0$	$x_{ef}-y_e \leq 0$	$x_{ff}-y_f \leq 0$	$x_{gf}-y_g \leq 0$	$x_{hf}-y_h \leq 0$	$x_{if}-y_i \leq 0$
$x_{ag}-y_a \leq 0$	$x_{bg}-y_b \leq 0$	$x_{cg}-y_c \leq 0$	$x_{dg}-y_d \leq 0$	$x_{eg}-y_e \leq 0$	$x_{fg}-y_f \leq 0$	$x_{gg}-y_g \leq 0$	$x_{hg}-y_h \leq 0$	$x_{ig}-y_i \leq 0$
$x_{ah}-y_a \leq 0$	$x_{bh}-y_b \leq 0$	$x_{ch}-y_c \leq 0$	$x_{dh}-y_d \leq 0$	$x_{eh}-y_e \leq 0$	$x_{fh}-y_f \leq 0$	$x_{gh}-y_g \leq 0$	$x_{hh}-y_h \leq 0$	$x_{ih}-y_i \leq 0$
$x_{ai}-y_a \leq 0$	$x_{bi}-y_b \leq 0$	$x_{ci}-y_c \leq 0$	$x_{di}-y_d \leq 0$	$x_{ei}-y_e \leq 0$	$x_{fi}-y_f \leq 0$	$x_{gi}-y_g \leq 0$	$x_{hi}-y_h \leq 0$	$x_{ii}-y_i \leq 0$

$$y_a + y_b + y_c + y_d + y_e + y_f + y_g + y_h + y_i = 1$$

La solución óptima obtenida con ayuda de LINDO es:

$$y_g = 1, x_{ga} = 1, x_{gb} = 1, x_{gc} = 1, x_{gd} = 1, x_{ge} = 1, x_{gf} = 1, x_{gh} = 1, x_{gi} = 1, Zc^* = 9.656854$$

Es decir, el servicio se debe ubicar en la celda correspondiente al punto g, y como lo muestran los valores de las variables $x_{ij} = 1$, todos los clientes serán atendidos por este servicio.

Como se puede observar, el óptimo del problema discreto coincide con el óptimo del problema continuo.

Los arcos de recorrido de los clientes al nuevo servicio instalado son: si el cliente está en **a**, el arco de recorrido es el segmento de recta que va de **a** a **g**; si el cliente está en **b**, el arco de recorrido es el segmento de recta que va de **b** a **g**; si el cliente está en **c**, el arco de recorrido es el segmento de recta que va de **c** a **g**; si el cliente está en **d**, el arco de recorrido es el segmento de recta que va de **d** a **g**; si el cliente está en **e**, el arco de recorrido es el segmento de recta que va de **e** a **g**; si el cliente está en **f**, el arco de recorrido es el segmento de recta que va de **f** a **g**; si el cliente está en **h**, el arco de recorrido es el segmento de recta que va de **h** a **g**; si el cliente está en **i**, el arco de recorrido es el segmento de recta que va de **i** a **g**.

7.6.2 Ejemplo 2. Ilustración del caso (ii): No hay clientes en todas las celdas de la discretización.

Este ejemplo está tomado del artículo de Juel y Love (1985). En este caso se considera una función distancia que no cumple la desigualdad del triángulo, llamada *hiper-métrica* L_p , con $0 < p < 1$. Supongamos que la región de interés M es un subconjunto del plano cartesiano, y supongamos que en esta región están ubicados dos clientes. Denotemos a los clientes por **a** y **b**, cuyas coordenadas son **a**(0, 0), y **b**(1, 1). Supongamos que la función distancia que modela

las distancias en **toda** la región de interés es la hiper-métrica L_p con $p = 1/2$, es decir, la función distancia está dada por:

$$d(x, y) = (|x_1 - y_1|^{1/2} + |x_2 - y_2|^{1/2})^2$$

Esta función distancia no satisface la desigualdad del triángulo. En la figura 7.7 se muestra la ubicación de los clientes en la región de interés.

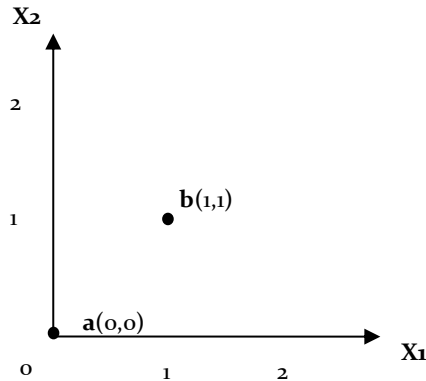


Figura 7.7. Ubicación de los clientes del el ejemplo 2

Sea $X(x_1, x_2)$ el nuevo servicio que se desea instalar en la región de interés M . Nuestro problema consiste en encontrar las coordenadas (x_1, x_2) tal que se minimice la suma de las distancias desde cada cliente hasta el servicio a instalar.

El Problema Continuo de Localización de Servicios (PCLS) viene a ser:

$$\text{Minimizar } ZC = (|x_1 - 0|^{1/2} + |x_2 - 0|^{1/2})^2 + (|x_1 - 1|^{1/2} + |x_2 - 1|^{1/2})^2$$

Este problema es de programación no lineal, donde la función objetivo **no satisface la desigualdad del triángulo**, y es **no convexa**, por lo que, matemáticamente hablando, sí hay “complicaciones” para resolverlo. De hecho, este problema no se podría resolver con el procedimiento de Weiszfeld (ver Love, 1979, pág. 15).

La solución óptima obtenida con ayuda de LINGO es:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad Z^* = 2$$

Es decir, el servicio X se debe localizar en $(0, 1)$. Notemos que el punto óptimo cae fuera de la cubierta convexa formada por los clientes **a** y **b**, esto se debe a la no convexidad de la función distancia. (Ver figura 7.8)

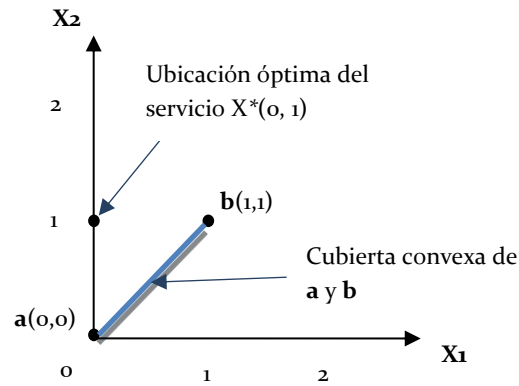


Figura 7.8. Una ubicación óptima X^* del nuevo servicio está fuera de la cubierta convexa de los clientes **a y **b**. En este caso, la cubierta convexa es el segmento de recta que une **a** con **b**.**

7.6.2.1 Solución del ejemplo 2 con el método propuesto

Una discretización pertinente, por la naturaleza de la función distancia (no es convexa) y los datos del problema, es la ilustrada en la figura 7.9. Como la función distancia no es convexa, es importante considerar en la discretización de la región celdas que están fuera de la cubierta convexa de los clientes existentes.

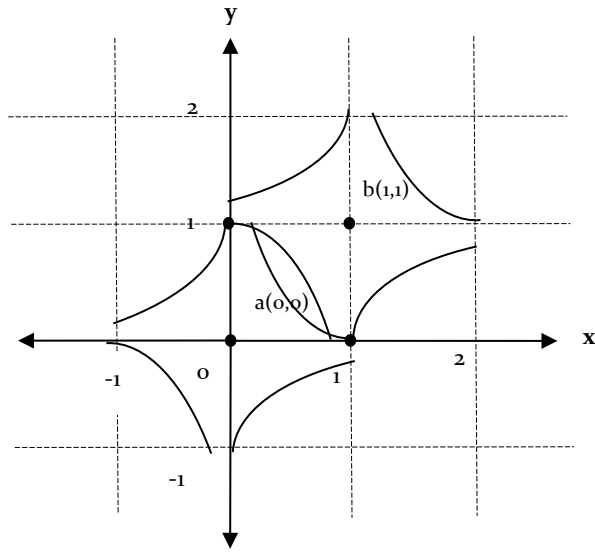


Figura 7.9 Discretización propuesta para el ejemplo 2. También se ilustran las bolas unitarias correspondientes a la hiper-métrica $L_{1/2}$.

En la figura 7.9 también se muestran las bolas unitarias de la hiper-métrica $L_{1/2}$. Como se puede observar, estas bolas unitarias no son convexas. Se puede demostrar que cuando esto ocurre, hay direcciones de desplazamiento en las que se minimiza la distancia de recorrido desde un punto hasta otro. En el caso de la hiper-métrica $L_{1/2}$, las direcciones de desplazamiento que minimizan la distancia desde un punto a otro punto vecino están conformadas por concatenaciones de múltiplos de los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$.

En este ejemplo no se tiene un cliente en cada celda de la discretización propuesta, pero como hemos mencionado, el centro de cada celda es un punto candidato para ubicar al nuevo servicio. Por tanto, los puntos candidatos para instalar al nuevo servicio son: $a(0,0)$, $b(1,1)$, $c(0,1)$, y $d(1,0)$. Es decir, se deben resolver tres modelos: un modelo en el que se toman como candidatos para instalar el nuevo servicio a los puntos donde están los clientes, otro modelo en el que el punto candidato es $(1,0)$, y un tercer modelo en el que el punto candidato para ubicar al nuevo servicio es $(0,1)$. El lugar óptimo de localización del nuevo servicio será el que corresponda con el modelo que arroje la menor Z^* .

Modelo 1: Considerando como puntos candidatos para instalar al nuevo servicio a los puntos donde hay clientes: $\mathbf{a} (0,0)$ y $\mathbf{b}(1, 1)$.

Los correspondientes datos de las distancias con la hiper-métrica $L1/2$ son:

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2, d(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = 2$$

El arco de recorrido de longitud mínima que va de \mathbf{a} a \mathbf{b} es el mostrado en rojo en la figura 7.10, que en este caso no es el segmento de recta que va de \mathbf{a} a \mathbf{b} , ya que el segmento de recta que va de \mathbf{a} a \mathbf{b} tiene una longitud de 4, mientras que la longitud del arco rojo de la figura es de 2.

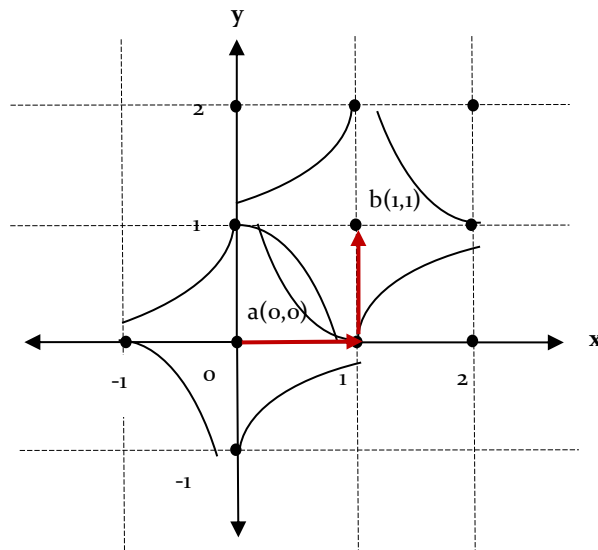


Figura 7. 10. Arco de recorrido óptimo (en rojo) que va de \mathbf{a} a \mathbf{b} .

El correspondiente PDLMSG para el Modelo 1 es:

$$\text{Minimizar } Z_c = 2x_{ab} + 2x_{ba}$$

Sujeto a:

$$x_{ab} + x_{ba} = 1$$

$$x_{ab} + x_{bb} = 1$$

$$x_{ab} - y_a \leq 0$$

$$x_{ba} - y_b \leq 0$$

$$y_a + y_b = 1$$

La solución óptima es: $Z_c^* = 2$, $x_{ba} = 1$, $y_b = 1$. Es decir, instalar el nuevo servicio donde está el cliente $\mathbf{b}(1, 1)$. Por la simetría de los datos del modelo 1, otra solución óptima sería: $x_{ab} = 1$, $y_a = 1$, y $Z_1^* = 2$; es decir, instalar el nuevo servicio en $\mathbf{a}(0, 0)$.

Modelo 2: Punto candidato para localizar al nuevo servicio: $\mathbf{c}(0,1)$ (ver figura 7.9).

Los correspondientes datos de las distancias con la hiper-métrica $L_{1/2}$ son:

$$d(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = 1, d(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = 1.$$

El correspondiente PDLSMG viene a ser:

$$\text{Min } Z_1 = 1x_{ca} + 1x_{cb}$$

Sujeto a:

$$x_{ca} = 1$$

$$x_{cb} = 1$$

$$x_{ca} - y_c \leq 0$$

$$x_{cb} - y_c \leq 0$$

$$y_c = 1$$

La solución óptima es inmediata: $Z_1^* = 2$, $x_{ca} = 1$, $x_{cb} = 1$, $y_c = 1$.

Modelo 3: Punto candidato para localizar al nuevo servicio: $\mathbf{d}(1,0)$

Los correspondientes datos de las distancias con la hiper-métrica $L_{1/2}$ son:

$$d(\mathbf{d}, \mathbf{a}) = 1, d(\mathbf{d}, \mathbf{b}) = 1.$$

El correspondiente PDLSMG viene a ser:

$$\text{Min } Z_2 = 1x_{da} + 1x_{db}$$

Sujeto a:

$$x_{da} = 1$$

$$x_{db} = 1$$

$$x_{da} - y_d \leq 0$$

$$x_{db} - y_d \leq 0$$

$$y_d = 1$$

La solución óptima es inmediata: $Z_2^* = 2$, $x_{da} = 1$, $x_{db} = 1$, $y_d = 1$.

Por tanto, la solución óptima del problema es:

$\text{Min} \{Z_c^*, Z_1^*, Z_2^*\} = \text{min} \{2, 2, 2\} = 2$. Es decir, la ubicación óptima del nuevo servicio puede ser cualquiera de los puntos: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ o $(0, 1)$. Como se observa, nuestro modelo discreto arroja una solución óptima que coincide con la solución óptima del correspondiente problema continuo.

7.6.3 Ejemplo 3. Otra ilustración del caso (ii): No hay clientes en todas las celdas de la discretización.

Se tienen 5 clientes ubicados como se muestra en la figura 7.11. Supongamos que la función distancia es la *métrica rectangular* (métrica L_p , con $p = 1$). El problema consiste en localizar un nuevo servicio $X(x_1, x_2)$, tal que se minimice la suma de las distancias desde los clientes hasta el nuevo servicio.

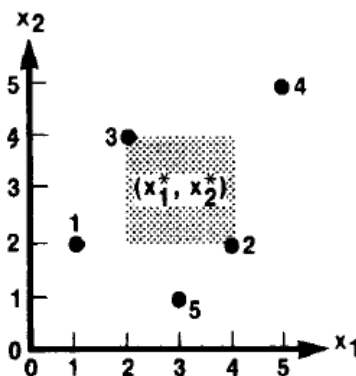


Figura 7.11. Ubicación de los clientes del ejemplo 3.

La solución óptima del problema de localización continuo (PCLS) es:

$$Z^* = 12, x_1 = 3, x_2 = 2.$$

Solución del ejemplo 3 con el método propuesto

Cuando la función distancia es convexa, entonces las celdas de interés para ubicar al nuevo servicio son aquellas cuyo punto del centro queda dentro de la cubierta convexa del conjunto de clientes. La discretización propuesta y los puntos candidatos (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, y l) para localizar al nuevo servicio, se muestran en la figura 7.12. Las coordenadas de f, g, h, i, j, k y l son $(2, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$, $(3, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 4)$, y $(4, 3)$, respectivamente.

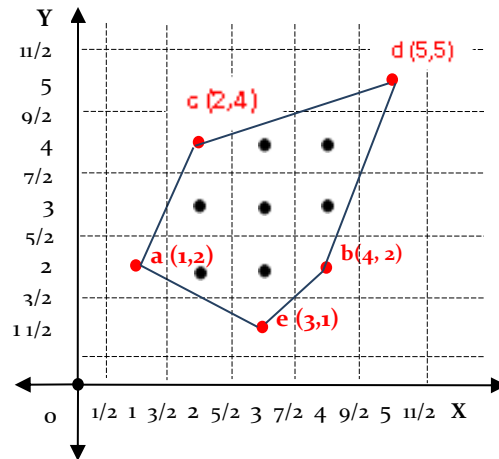


Figura 7.12 Dscretización para el ejemplo 3, En este caso, se consideran como candidatos los puntos dentro de la cubierta convexa de los clientes.

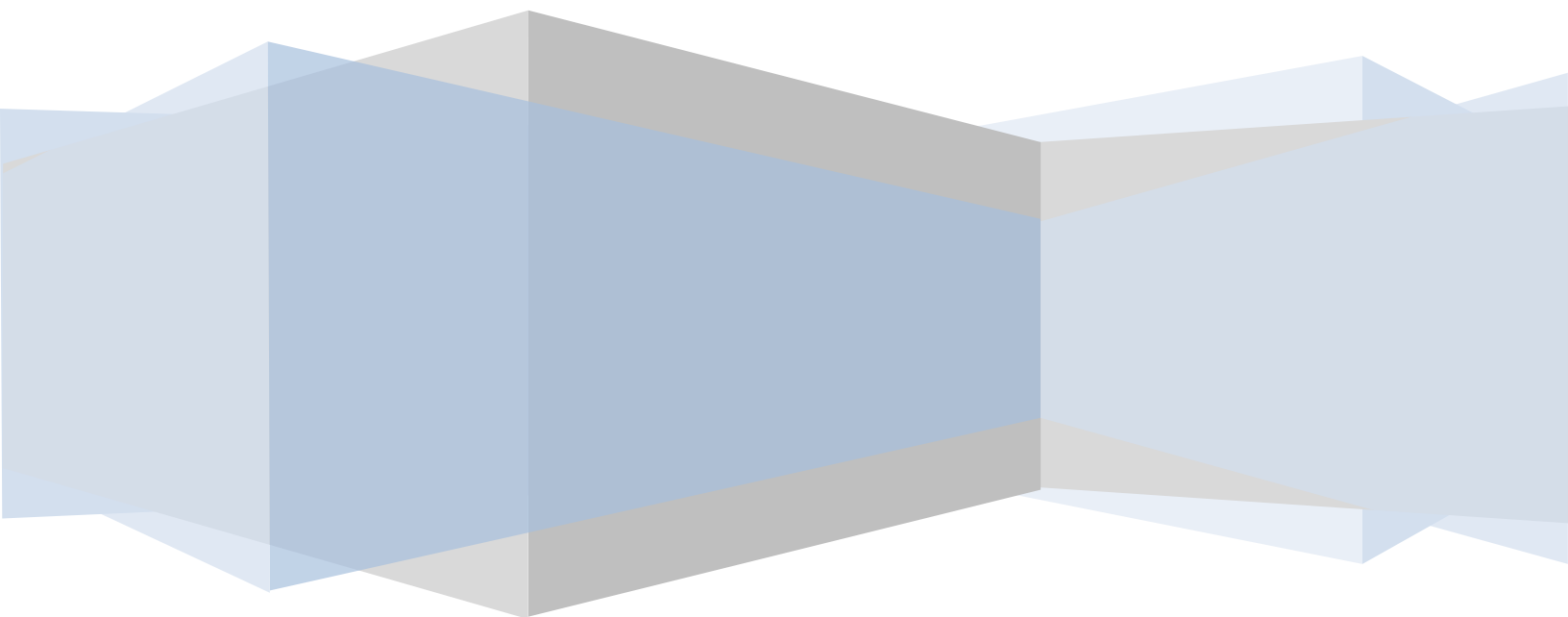
La matriz de distancias requeridas para los modelos discretos del ejemplo 3 es:

	a	b	c	d	e	Suma
a	0	3	3	7	3	16
b	3	0	4	4	2	13
c	3	4	0	4	4	15
d	7	4	4	0	6	21
e	3	2	4	6	0	15
f	2	3	1	5	3	14
g	1	2	2	6	2	13
h	4	3	1	3	3	14
i	3	2	2	4	2	13
j	2	1	3	5	1	12
k	5	2	2	2	4	15
l	4	1	3	3	3	14

La solución óptima es la que corresponde al punto j , es decir, el nuevo servicio se debe instalar en el punto $(3, 2)$, con $Z^* = 12$. Nuevamente, tenemos que la solución óptima del problema discretizado coincide con el óptimo del problema continuo.

En este caso, el arco de recorrido desde cada cliente hasta el nuevo servicio es cualquier arco monótono no decreciente que va desde el cliente hasta el servicio.

CONCLUSIONES



Conclusiones.

En esta tesis proponemos un método que nos permite resolver un Problema de Localización de Servicios Continuo como un Problema de Localización Discreto. Una de las ventajas de nuestro método de solución es que las distancias involucradas en la función objetivo del modelo discreto son más representativas de situaciones de la vida real (capítulo 7). Otra ventaja que ofrece nuestro modelo es que, además de arrojar la localización óptima del nuevo servicio, proporciona una forma sencilla de determinar los caminos de recorrido que harían los clientes para ir desde las ubicaciones donde están hasta el nuevo servicio. En ocasiones, la solución encontrada con el método propuesto en esta tesis, podría ser aproximada; sin embargo, este “error” consideramos que es compensado por las ventajas que acabamos de mencionar. Si el problema de localización de servicios continuo se resolviera como tal (como uno continuo), entonces también está involucrado un “error”, pues como bien sabemos, las funciones distancia que modelan las distancias en el mundo real, no son las métricas L_p , con $1 \leq p \leq \infty$, que son las métricas con las que generalmente se modela el problema de localización continuo. Por tanto, estamos en una situación en que el tomador de decisiones, tiene que valorar cuál “error” está dispuesto a aceptar tal que resuelva el problema real al que se está enfrentando.

En este trabajo, primeramente, se abordó el concepto de distancia y las diferentes acepciones que éste puede tener. Se dieron a conocer algunos algoritmos empleados para resolver el problema de la ruta más corta y se muestra cómo se han utilizado las funciones distancia en los problemas de localización de servicios, para después mostrar la metodología usada para modelar funciones distancia generalizadas a partir de dos discretizaciones: una discretización de la región de interés, y otra discretización de las direcciones de desplazamiento desde un punto hasta sus puntos vecinos. Se ilustraron ambas discretizaciones en la solución de algunos ejemplos de problemas de localización de servicios tomados de la literatura especializada.

A partir de la región continua de interés M , se llega a una región discreta N , obteniéndose así una red con nodos. Esta región discreta se puede obtener seleccionando, de acuerdo con algún criterio, un conjunto de puntos de una región continua M , y generando así una “malla”, la cual puede ser tan fina como se desee la precisión de la solución. En cada nodo de la red obtenida, se determina la función métrica F , que para el caso discreto la llamamos G . La distancia desde

un punto **a** hasta un punto **b** sobre la región discreta N es *la longitud del camino más corto* que los conecta. Por lo tanto, se pueden obtener las distancias entre cada par de nodos empleando algún algoritmo, como el de Dijkstra, para determinar la ruta más corta en la red obtenida de la discretización. Cabe señalar que las distancias con las que se va hallar la ruta más corta entre cada par de nodos son las obtenidas de la función métrica G , que es una función métrica generalizada, es decir, no necesariamente cumple las condiciones de desigualdad del triángulo, simetría, uniformidad, y no negatividad.

Por último, consideramos importante señalar que el modelo discreto de localización de servicios propuesto, es un caso particular del Problema de Localización de Servicios Simple (PLSS). Nuestro modelo, computacionalmente hablando, es más sencillo (no es Np-duro) que el PLSS, esto se debe a que no involucra el cargo fijo de la función objetivo del PLSS, que es lo que lo hace Np-duro.

Trabajos futuros:

Un trabajo futuro es generalizar el método propuesto en esta tesis para el caso del problema de localización continua con múltiples servicios. En relación con los arcos de recorrido encontrados en este trabajo de tesis, se deja como trabajo futuro considerar el caso en que en la región de interés existen obstáculos que impiden el libre paso de los clientes.

Podríamos también considerar como trabajos futuros, abordar problemas de optimización conocidos en sus versiones continuas con el fin de desarrollar metodologías mediante las cuales, a través de discretizaciones, sea posible encontrar soluciones óptimas a problemas derivados de situaciones de la vida real. Como ejemplo, se tiene el problema de corte y empaquetamiento, el cual ha existido en la industria desde hace varias décadas. La naturaleza del problema consta de varios objetos pequeños los cuales deben ser asignados y/o empacados en uno o varios objetos grandes dependiendo del problema a resolver; este tipo de problemas pertenecen a la clase de problemas NP-duros. El problema que se busca abordar para el problema general de corte y empaquetamiento se clasifica como el problema de la mochila en tres dimensiones. Dentro de las restricciones o condiciones que se toman para la ubicación o acomodo de los objetos pequeños se toman en cuenta su orientación, peso o estabilidad. La idea consiste en desarrollar una metodología para que, con base en las dimensiones de los objetos pequeños, los objetos o contenedores grandes puedan ser discretizados, generándose

así “ubicaciones” dentro de ellos, las cuales pueden ser o no ocupadas por los objetos pequeños con base en las restricciones o condiciones previamente establecidas.

Referencias Bibliográficas.

- Berens W., Körling F. *Estimating Road Distances by Mathematical Functions*. European Journal of Operations Research, 21: 54-56, 1985.
- Brimberg J., Love R. F. *A New Distance Functions for Modeling Travel Distances in a Transportation Network*. Transportation Science, 26 (2): 129-137, 1992.
- Brimberg J., Love R. F. *General Considerations on the Use of the Weighted L_p Norm as an Empirical Distance Measure*. Transportation Science, 27 (4): 341-349, 1993.
- Drezner Z. Weselowsky G. O. *The Asymmetric Distance Location Problem*. Transportation Science, 23 (3): 201- 207, 1989.
- Frederick S. Hillier y Gerald J. Lieberman. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. Novena Edición. McGraw Hill. 2010.
- Gatrell Anthony. *Distance and Space: A Geographical Perspective*. Oxford University Press, New York. 1983.
- Harvey M. Salkin y Kalmesh Mathur. *Foundations of Integer Programming* North-Holland. 1989.
- Hernández Ayuso M. del Cármen. *Introducción a la Teoría de Redes*. Segunda Edición, pp. 25-27 y 31-64. Sociedad Matemática Mexicana. 2005.
- M. J. Hodgson, R. T. Wong, J. Honsaker. *The p -centroid problem on an inclined plane*. Operations Research, 35 (1987):221-233.
- Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba. *Claculo Vectorial*, 1988.
- Juel H. y Love R. *The Facility Location Problem for Hyper-Rcetilinear Distances*, IIE Transactions, Vol. 17. No. 1, pp. 94-98. 1985.
- Love R. F., Morris J. G. *Mathematical Models of Road Travel Distances*. Management Sciences, 25: 130-139, 1979.
- Love R. F. Morris J. G., Wesolowsky G. *Facilities Location: Models and Methods*. Ed. North Holland, 1988.
- Sánchez-Larios H. y Guillén-Burguete S.T. *Funciones distancia asimétricas y no positivas definidas, Parte I: Marco Teórico*. Ingeniería Investigación y Tecnología, IX no. 4, 339-346, 2008.

- Sánchez-Larios H. y Guillén-Burguete S.T. *Funciones distancia asimétricas y no positivas definidas, Parte II: Modelado* Ingeniería Investigación y Tecnología, X no. 1, 75-83, 2009.
- Sánchez-Larios H. y Guillén-Burguete S.T. *Modeling of distance functions on a manifold*. Nonlinear Analysis: Real World Applications, XI, 3001-3007, 2010.
- Vargas Estrada Eusebio, *Funciones Distancia y Arcos de Mínima Longitud: Marco teórico, modelado y aplicaciones a problemas de optimización*. Tesis de maestría, UNAM. 2010.