



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
HIDRÁULICA – INGENIERÍA CIVIL

EVALUACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN LA  
TRANSICIÓN DE UN CANAL

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ING. EDWIN JONATHAN PASTRANA

TUTOR PRINCIPAL:  
DR. ARIOSTO AGUILAR CHÁVEZ  
INSTITUTO MEXICANO DE TECNOLOGÍA DEL AGUA

JIUTEPEC, MORELOS, MÉXICO, SEPTIEMBRE 2016

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Francisco Javier Aparicio Mijares

Secretario: Dr. Nahún Hamed García Villanueva

Vocal: Dr. Ariosto Aguilar Chávez

1 er. Suplente: Dr. Víctor Manuel Arroyo Correa

2 d o. Suplente: M. I. Edmundo Pedroza González

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Ariosto Aguilar Chávez

---

**FIRMA**

*Dedicado con mucho cariño a:*

*Mis padres*

Verónica y Juan

Por creer en mí y haberme impulsado a seguir adelante, porque ellos siempre estuvieron a mi lado brindándome su apoyo incondicional y sus consejos para hacer de mí una mejor persona.

*Mi hermana*

Angela

Por su compañía, confianza en mí y por estar en los momentos más importantes de mi vida.

*Y para Adriana*

Por siempre estar a mi lado en las buenas y en las malas; por su paciencia, amor y ser mi inspiración, dándome la fuerza para seguir adelante.

# AGRADECIMIENTOS

A mi tutor Dr. Ariosto Aguilar Chávez por dirigir y sustentar este documento y un reconocimiento respetuoso a mis revisores:

Dr. Francisco Javier Aparicio Mijares

Dr. Nahun Hamed García Villanueva

Dr. Víctor Manuel Arroyo Correa

M. I. Edmundo Pedroza González

Toda mi gratitud y respeto a:

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)

Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA)

Por su apoyo durante la realización de esta tesis y haberme dado la oportunidad de cumplir mis metas profesionales.

También quiero agradecer a mis amigos que me han acompañado en este camino y me impulsaron a superar cualquier obstáculo: Isaí, Daniela, Josué, Carlos, Javier y Tania.



# ÍNDICE GENERAL

<b>RESUMEN .....</b>	<b>1</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>3</b>
1.1. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN .....	6
<b>2. ECUACIONES DE FLUJO A SUPERFICIE LIBRE .....</b>	<b>7</b>
2.1. ECUACIONES DE SAINT-VENANT .....	8
2.1.1. ANÁLISIS DE LOS TÉRMINOS INTEGRODIFERENCIALES PARA CANALES NATURALES.....	11
2.1.2. ANÁLISIS DE LOS TÉRMINOS INTEGRODIFERENCIALES PARA CANALES ARTIFICIALES.....	12
2.2. APLICACIÓN PARA UN CANAL ARTIFICIAL NO PRISMÁTICO.....	17
2.3. CONDICIONES DE FRONTERA .....	22
2.3.1. CONDICIÓN DE FRONTERA AGUAS ARRIBA .....	22
2.3.2. CONDICIÓN DE FRONTERA AGUAS ABAJO.....	23
2.4. CONDICIÓN INICIAL .....	25
<b>3. MODELO DISCRETO .....</b>	<b>29</b>
3.1. MODELOS PROPUESTOS .....	29
3.2. FORMULACIÓN DEL ESQUEMA DISCRETO DE PREISSMANN .....	32
3.2.1. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA DEL ESQUEMA DE PREISSMANN .....	36
3.2.2. ANÁLISIS DE CONSISTENCIA NUMÉRICA .....	36
3.2.3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD NUMÉRICA .....	39
3.3. PROGRAMACIÓN DEL ESQUEMA CON EL MÉTODO DE PICARD .....	59
3.4. PROGRAMACIÓN DEL ESQUEMA CON EL MÉTODO DE NEWTON RAPHSOON .....	64
3.5. MODELO PARA EVALUAR LA VARIACIÓN DE LA CONSERVACIÓN DE MASA Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.....	74



<b>4. MODELO NUMÉRICO DE SIMULACIÓN EN TRANSICIONES .....</b>	<b>79</b>
4.1. CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS.....	80
4.2. TOPOLOGÍA.....	80
4.3. CONDICIÓN INICIAL .....	83
4.4. CONDICIÓN TRANSITORIA .....	86
<b>5. PRUEBAS NUMÉRICAS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS .....</b>	<b>90</b>
5.1. SIMULACIÓN DE ESCENARIOS .....	91
5.1.1. PRUEBAS DE REDUCCIÓN Y AMPLIACIÓN SUAVE .....	93
5.1.2. PRUEBAS DE REDUCCIÓN Y AMPLIACIÓN ABRUPTA .....	101
5.1.3. PRUEBAS DE CAMBIO DE SECCIÓN .....	109
5.1.4. PRUEBA UTILIZANDO LA VERSIÓN DOS DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VENANT CONSERVATIVA DIFERENCIAL.....	117
5.2. COMPARACIÓN DE RESULTADOS ENTRE EL MODELO PROPUESTO Y HEC-RAS CONSIDERANDO UN FLUJO EN ESTADO NO PERMANENTE.....	120
<b>6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>124</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>127</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>130</b>
ANEXO A. PROGRAMACIÓN DE LA VERSIÓN DOS DE LAS ECUACIONES SAINT-VENANT CONSERVATIVAS EN SU VERSIÓN DIFERENCIAL CON EL ESQUEMA DE PREISSMANN BAJO LA ITERACIÓN NO LINEAL DE SEGUNDO ORDEN DE NEWTON-RAPHSON.....	130
ANEXO B. EXPANSIONES EN SERIE DE TAYLOR PARA CADA ESQUINA DEL ESQUEMA DE PREISSMANN .....	137
ANEXO C. DEMOSTRACIÓN DE LA CONSISTENCIA NUMÉRICA APLICADO A LA VERSIÓN DOS DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VENANT CONSERVATIVA DIFERENCIAL.....	139



# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Ejemplos de canales con transiciones. a) Ampliación suave. b) Reducción suave. <i>Google, 2016.</i> .....	3
Figura 2. Continuación Figura 1. c) Cambio de forma en la sección transversal. d) Ampliación abrupta entre una geometría y otra distinta. <i>Google, 2016.</i> .....	4
Figura 3. Esquema de aplicación del Teorema de equivalencia de Lax.....	6
Figura 4. Volumen de control en un canal. a) Corte longitudinal. b) Vista en planta. c) Sección transversal.....	9
Figura 5. Sección irregular de un cauce. ....	11
Figura 6. Características geométricas de un canal con sección trapezoidal. ....	12
Figura 7. Características geométricas de un canal prismático con sección rectangular. ....	18
Figura 8. Características geométricas de un canal prismático con sección triangular. ....	18
Figura 9. Espacio discreto .....	21
Figura 10. Tipos de hidrogramas de entrada. a) Escalón. b) Campana. ....	23
Figura 11. Ley de descarga (tirante-gasto) .....	24
Figura 12. Características geométricas de un canal artificial no prismático. a) Vista isométrica. b) Vista en planta. ....	26
Figura 13. Ejemplo de perfil de flujo gradualmente variado en una transición suave en una conducción con sección trapezoidal. ....	28
Figura 14. Representación del esquema de Preissmann en el plano $(x - t)$ , donde $\Psi$ y $\theta$ es el factor de peso espacial y temporal respectivamente (Aguilar, 2002; Cunge <i>et al.</i> , 1980; Abbott, 1979).....	32
Figura 15. Representación del mallado en el espacio de solución. ....	33
Figura 16. a) Perfil de flujo normalizado. b) Problema de escala grande. c) Problema de escala pequeña. ....	40
Figura 17. Regiones de estabilidad en el plano $(\Psi - \theta)$ , para $Cr > 0$ . ....	51
Figura 18. Retrato de amplitud, reducción suave y régimen de flujo subcrítico.....	53
Figura 19. Retrato de amplitud, reducción suave y régimen de flujo supercrítico.....	53
Figura 20. Retrato de amplitud, ampliación suave y régimen de flujo subcrítico.....	54
Figura 21. Retrato de amplitud, ampliación suave y régimen de flujo supercrítico.....	55
Figura 22. Retrato de fase, reducción suave y régimen de flujo subcrítico.....	57
Figura 23. Retrato de fase, reducción suave y régimen de flujo supercrítico.....	57
Figura 24. Retrato de fase, ampliación suave y régimen de flujo subcrítico.....	58
Figura 25. Retrato de fase, ampliación suave y régimen de flujo supercrítico.....	58
Figura 26. Diagrama de flujo del algoritmo para la evaluación de la de conservación de masa y cantidad de movimiento. $\#Tramo$ es el número de tramos en la conducción y $\#ST$ es el número de secciones en cada tramo. ....	78
Figura 27. Funcionamiento del simulador.....	79
Figura 28. Ejemplo de un tramo en un canal con transición (Reducción).....	82



Figura 29. Diagrama de flujo del algoritmo para la condición inicial. Donde  $\#Tramos$  es el número de tramos de la conducción y  $\#ST$  es el número de secciones en cada tramo. .... 84

Figura 30. a) Condición inicial para una conducción con transición. b) Evaluación de la conservación de masa y la cantidad de movimiento..... 85

Figura 31. a) Condición inicial para una conducción sin transición. b) Evaluación de la conservación de masa y la cantidad de movimiento..... 85

Figura 32. Diagrama de flujo del algoritmo de la condición transitoria..... 89

Figura 33. Condición de frontera aguas arriba. .... 92

Figura 34. a) Esquema de una reducción suave en una conducción con sección trapezoidal. b) Resultado de la condición inicial. Perfil de flujo. Vista en planta del ancho del fondo de la conducción. c) Comprobación de la condición inicial. Evaluación del error en la conservación de masa y cantidad de movimiento. d) Variación del área y la velocidad. .... 93

Figura 35. Resultados obtenidos de la simulación en un canal con sección trapezoidal con una reducción suave. a) Variación del gasto. b) Variación del área hidráulica..... 94

Figura 36. Continuación Figura 35. c) Variación de la velocidad. d) Variación del tirante. 95

Figura 37. Continuación Figura 35. e) Variación del error en la conservación de masa. f) Variación del error en la cantidad de movimiento. .... 96

Figura 38. a) Esquema de una ampliación suave en una conducción con sección triangular. b) Resultado de la condición inicial. Perfil de flujo. Vista en planta de los hombros de la conducción. c) Comprobación de la condición inicial. Evaluación del error en la conservación de masa y cantidad de movimiento. d) Variación del área y la velocidad. .... 97

Figura 39. Resultados obtenidos de la simulación en un canal con sección triangular con una ampliación suave. a) Variación del gasto. b) Variación del área hidráulica. .... 98

Figura 40. Continuación Figura 39. c) Variación de la velocidad. d) Variación del tirante. 99

Figura 41. Continuación Figura 39. e) Variación del error en la conservación de masa. f) Variación del error en la cantidad de movimiento. .... 100

Figura 42. a) Esquema de una reducción abrupta en una conducción con sección rectangular. b) Resultado de la condición inicial. Perfil de flujo. Vista en planta del ancho del fondo de la conducción. c) Comprobación de la condición inicial. Evaluación del error en la conservación de masa y cantidad de movimiento. d) Variación del área y la velocidad. .... 101

Figura 43. Resultados obtenidos de la simulación en un canal con sección rectangular con una reducción abrupta. a) Variación del gasto. b) Variación del área hidráulica. .... 102

Figura 44. Continuación Figura 43. c) Variación de la velocidad. d) Variación del tirante. .... 103

Figura 45. Continuación Figura 43. e) Variación del error en la conservación de masa. f) Variación del error en la cantidad de movimiento. .... 104

Figura 46. a) Esquema de una ampliación abrupta en una conducción con sección trapezoidal. b) Resultado de la condición inicial. Perfil de flujo. Vista en planta del ancho del fondo de la conducción. c) Comprobación de la condición inicial. Evaluación del error en la conservación de masa y cantidad de movimiento. d) Variación del área y la velocidad. .... 105

Figura 47. Resultados obtenidos de la simulación en un canal con sección trapezoidal con una ampliación abrupta. a) Variación del gasto. b) Variación del área hidráulica. .... 106





---

Figura 48. Continuación Figura 47. c) Variación de la velocidad. d) Variación del tirante. ....	107
Figura 49. Continuación Figura 47. e) Variación del error en la conservación de masa. f) Variación del error en la cantidad de movimiento. ....	108
Figura 50. a) Esquema de un cambio de sección con una transición suave de rectangular a trapezoidal. b) Resultado de la condición inicial. Perfil de flujo. Vista en planta del ancho del fondo de la conducción. c) Comprobación de la condición inicial. Evaluación del error en la conservación de masa y cantidad de movimiento. d) Variación del área y la velocidad. ..	109
Figura 51. Resultados obtenidos de la simulación en un canal con cambio de sección de un canal rectangular a trapezoidal. a) Variación del gasto. b) Variación del área hidráulica. ....	110
Figura 52. Continuación Figura 51. c) Variación de la velocidad. d) Variación del tirante. ....	111
Figura 53. Continuación Figura 51. e) Variación del error en la conservación de masa. f) Variación del error en la cantidad de movimiento. ....	112
Figura 54. a) Esquema de un cambio de sección con una transición suave de trapezoidal a triangular. b) Resultado de la condición inicial. Perfil de flujo. Vista en planta del ancho del fondo de la conducción. c) Comprobación de la condición inicial. Evaluación del error en la conservación de masa y cantidad de movimiento. d) Variación del área y la velocidad. ..	113
Figura 55. Resultados obtenidos de la simulación en un canal con cambio de sección de un canal trapezoidal a triangular. a) Variación del gasto. b) Variación del área hidráulica....	114
Figura 56. Continuación Figura 55. c) Variación de la velocidad. d) Variación del tirante. ....	115
Figura 57. Continuación Figura 55. e) Variación del error en la conservación de masa. f) Variación del error en la cantidad de movimiento. ....	116
Figura 58. Resultados obtenidos de la simulación en un canal con sección trapezoidal con una reducción suave utilizando la versión dos del sistema de ecuaciones de Saint-Venant conservativa diferencial. a) Variación del gasto. b) Variación del área hidráulica. ....	117
Figura 59. Continuación Figura 58. c) Variación de la velocidad. d) Variación del tirante. ....	118
Figura 60. Continuación Figura 58. e) Variación del error en la conservación de masa. f) Variación del error en la cantidad de movimiento. ....	119
Figura 61. Comparación de las variables hidráulicas de la condición inicial ( $t = 0$ ) entre el modelo de SMT y HEC-RAS. Evaluación del error de la conservación de masa y cantidad de movimiento. ....	120
Figura 62. Comparación de resultados entre el modelo SMT y HEC-RAS ( $t = 13$ s). ...	121
Figura 63. Ídem Figura 62 ( $t = 26$ s).....	121
Figura 64. Ídem Figura 62 ( $t = 39$ s).....	122
Figura 65. Ídem Figura 62 ( $t = 52$ s).....	122
Figura 66. Ídem Figura 62 ( $t = 65$ s).....	123



# ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 1. Evaluación de los términos de la ecuación (2.25) para los tres tipos de secciones transversales.....	21
Tabla 2 Valores de números de Courant .....	52
Tabla 3. Condiciones topológicas generales.....	52
Tabla 4. Datos generales de la sección (reducción suave, flujo subcrítico y supercrítico) ..	52
Tabla 5. Datos generales de la sección (ampliación suave, flujo subcrítico y supercrítico)	54
Tabla 6. Datos generales para la configuración de la geometría de la conducción.....	80
Tabla 7. Polinomios para tres diferentes secciones transversales (trapezoidal, rectangular y triangular) .....	81
Tabla 8. Parámetros generales en las pruebas numéricas. ....	90
Tabla 9. Descripción de pruebas numéricas .....	91
Tabla 10. Características geométricas de la transición para la prueba 1. ....	93
Tabla 11. Características geométricas de la transición para la prueba 2. ....	97
Tabla 12. Características geométricas de la transición para la prueba 3. ....	101
Tabla 13. Características geométricas de la transición para la prueba 4. ....	105
Tabla 14. Características geométricas de la transición para la prueba 5. ....	109
Tabla 15. Características geométricas de la transición para la prueba 6. ....	113



# NOMENCLATURA

$a$ , pequeña perturbación del área [ $L^2$ ]	$m$ , contador de iteraciones no lineales del método de Picard y Newton-Raphson
$A$ , matriz de coeficientes	$m$ , operador de la consistencia numérica de la cantidad de movimiento
$A$ , área hidráulica [ $L^2$ ]	$\eta$ , nivel de flujo medido de la plantilla del fondo del canal [ $L$ ]
$\bar{A}$ , solución de referencia del área [ $L^2$ ]	$n$ , como superíndice es contador temporal
$b_1$ , ancho del fondo del canal al inicio de la transición [ $L$ ]	$n$ , coeficiente de rugosidad de Manning
$b_2$ , ancho del fondo del canal al final de la transición [ $L$ ]	$N$ , número de intervalos computacionales de discretización temporal
$\underline{B}$ , vector de términos independientes	$P$ , perímetro mojado [ $L$ ]
$B$ , ancho de la superficie libre del agua [ $L$ ]	$Q$ , gasto [ $L^3T^{-1}$ ]
$Cr$ , número de Courant	$R$ , radio hidráulico [ $L$ ]
$D$ , tirante hidráulico [ $L$ ]	$S_o$ , pendiente del fon
$f$ , función discreta (método de Preissmann)	$S_f$ , pendiente de fricción
$Fr$ , número de Froude	$t$ , tiempo [ $T$ ]
$g$ , aceleración de la gravedad [ $LT^{-2}$ ]	$T$ , tiempo total de la simulación [ $T$ ]
$h$ , elevación de la superficie libre del agua medido desde un nivel de referencia [ $L$ ]	$T_{hidro}$ , tiempo de duración del hidrograma [ $T$ ]
$I$ , matriz identidad	$T_{inicio}$ , tiempo de inicio del hidrograma [ $T$ ]
$I_1$ , presión hidrostática sobre una sección transversal	$u$ , pequeña perturbación de la velocidad [ $LT^{-1}$ ]
$I_2$ , presión por efecto de las paredes	$U$ , velocidad media del flujo [ $LT^{-1}$ ]
$j$ , contador espacial	$\bar{U}$ , solución de referencia de la velocidad [ $LT^{-1}$ ]
$J$ , numero de intervalos computacionales de discretización espacial	$x$ , coordenada sobre el eje longitudinal del canal
$k_1$ , talud del canal al inicio de la transición	$\underline{X}$ , vector de solución
$k_2$ , talud del canal al final de la transición	$\dot{y}$ , pequeña perturbación del tirante [ $L$ ]
$L$ , longitud total de la conducción [ $L$ ]	$y$ , tirante en la sección transversal [ $L$ ]
$\ell$ , operador de la consistencia numérica de la conservación de masa	$y_c$ , tirante critico [ $L$ ]
$\mathcal{L}$ , operador de la ecuación de conservación de masa	$y_n$ , tirante normal [ $L$ ]
$\mathcal{M}$ , operador de la ecuación de cantidad de movimiento	$z_b$ , elevación de la plantilla del fondo del canal medido desde un nivel de referencia [ $L$ ]



$\Omega$ , espacio de solución

$\rho$ , relación de dispersión numérica

$\rho_A$ , relación de dispersión analítica o continua

$\Psi \in [0,1]$ , factor de peso espacial

$\theta \in [0,1]$ , factor de peso temporal

$\varepsilon_a$  y  $\varepsilon_u$ , tolerancia de convergencia de área y velocidad respectivamente

$\Delta t$ , tamaño de paso en el tiempo [ $T$ ]

$\Delta x$ , tamaño de paso en el espacio [ $L$ ]

$\Delta \mathcal{L}$ , error en la conservación de masa

$\Delta \mathcal{M}$ , error en la cantidad de movimiento

$\delta$ , ancho de la superficie libre del agua con respecto a  $\eta$  [ $L$ ]

$\delta_x$ , variación de la superficie libre del agua con respecto a  $\eta$  [ $L$ ]

$\phi$ , relación de fases

$\Pi_{1,2,3,4,5,6,7,8,9}$ , términos no lineales utilizados en la discretización con el esquema de Preissmann



# RESUMEN

---

El comportamiento del flujo a superficie libre en un cauce natural o artificial, entre otros factores, depende de las características geométricas de la sección transversal, la rugosidad y la pendiente del fondo del cauce. Cuando la sección transversal no es uniforme en el sentido espacial, el flujo presenta variaciones por este efecto. Estos cambios están en función de la forma en que se genera el cambio entre las secciones transversales y es importante tomarlas en cuenta en el diseño o análisis hidráulico.

Las variaciones en la sección transversal de un canal son: ampliaciones, reducciones en una misma forma geométrica, la transición entre una geometría y otra distinta o la combinación de ambas, que sería el cambio de forma y tamaño. También las transiciones pueden ser suaves o abruptas y está en función de la longitud que tengan respecto al ancho o profundidad de la conducción.

Las ecuaciones generales que describen el comportamiento de flujo a superficie libre son las ecuaciones de Saint-Venant (Abbott, 1979) y para analizar los efectos de los cambios de sección en zonas de transición se recomienda utilizar la versión conservativa integrodiferencial (Cunge *et al.*, 1980), debido a que este sistema de ecuaciones toma en cuenta la irregularidad de la conducción.

El sistema de ecuaciones de Saint-Venant no tiene una solución analítica directa, pero se puede resolver con un aceptable grado de aproximación en forma numérica. En este caso, se plantea aplicar un modelo discreto no lineal para resolver el sistema de ecuaciones (Abbott, 1979; Aguilar, 1979). El modelo discreto utilizado es de diferencias finitas implícito, construido con la propuesta del esquema de Preissmann (Abbott, 1979). El sistema discreto es no lineal, y para su solución se utiliza una técnica de convergencia sobre iteraciones no lineales (Szymkiewicz, 2010). Los métodos de convergencia no lineal utilizados son de orden uno o Picard y de Newton-Raphson como orden dos. Para la construcción de la formulación de la convergencia se aplica una expansión en serie de Fréchet-Taylor (Milne, 1980) sobre las variables dependientes de los operadores diferenciales de conservación de masa y cantidad de movimiento.

Para asegurar que el método de discretización fuera lo más semejante a una solución directa integrada del problema diferencial. Para lograr este objetivo, se utilizó el Teorema de equivalencia de Lax (Morton & Mayers, 2005), que de manera general establece la siguiente condición:



### ***Convergencia = Consistencia + Estabilidad***

Por principio este teorema sólo es aplicable en forma estricta a un problema lineal, y dado que en el principio caso el sistema de ecuaciones de Saint-Venant conservativas integrodiferenciales es un problema no lineal. En este caso, para aplicar el Teorema de equivalencia de Lax se realizó una linealización para poder determinar la condición de suficiencia (Morton & Mayers, 2005). Dicha linealización se realizó con un análisis perturbatorio y de localización, obteniéndose un sistema de ecuaciones lineal de valor inicial puro.

En forma práctica y operativa, el modelo discreto que representa el sistema de ecuaciones de Saint-Venant aplicable a un cauce consta de cinco subprocesos o módulos que son: geometría, topología, condición inicial, condición transitoria e impresión de resultados. Este modelo puede ser aplicado a problemas con ampliaciones, reducciones, cambios en la forma de la sección transversal y para transiciones suaves o abruptas.

Para verificar el funcionamiento del modelo de simulación se realizaron distintos escenarios de prueba: reducción suave y abrupta en un canal con sección trapezoidal y rectangular, ampliación suave y abrupta en un canal con sección triangular y trapezoidal; análisis del flujo para cambios de sección transversal de rectangular a trapezoidal y trapezoidal a triangular. Los análisis se realizaron para la construcción de la condición inicial, y los efectos sobre el tránsito de una avenida como una condición no permanente. Para evaluar los principios de conservación se construyó un algoritmo externo al cálculo, para determinar las variaciones de la conservación de masa y cantidad de movimiento en condición transitoria. El modelo de simulación se desarrolló únicamente para los casos en los que se tengan conducciones con secciones rectangulares, trapezoidales y triangulares, debido a que son los más empleados en la ingeniería hidráulica.

Además, se realizó una comparación de resultados considerando flujo subcrítico en estado no permanente entre el modelo propuesto y el modelo de HEC-RAS del *Hydraulic Engineering Center (HEC)* del *U.S. Army Corps of Engineers* en su versión 5.0.1. Las variables comparadas son el tirante, la velocidad, el área hidráulica y el gasto, así mismo se evalúa la conservación de masa y la cantidad de movimiento.

Como resultado de este trabajo se cuenta con un modelo computacional numéricamente confiable, para solucionar el sistema de ecuaciones de Saint-Venant aplicable en casos de ampliaciones, reducciones y cambios en la forma geométrica de la sección transversal, y ante la presencia de transiciones suaves o abruptas, así como construir un modelo transitorio de simulación que describe el comportamiento del flujo en zonas de transiciones.



# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

En el diseño hidráulico de canales a superficie libre, con frecuencia se requiere modificar la forma y las dimensiones de la sección transversal, o cambiar la dirección del trazo en planta o en la elevación de la plantilla del fondo del canal, con el fin de satisfacer requerimientos hidráulicos, topográficos o estructurales del trazo.

Las variaciones en la sección transversal de un canal son: ampliaciones o reducciones en una misma forma geométrica, la transición entre una geometría y otra distinta o la combinación de ambas, cambio de forma y tamaño. También las transiciones son suaves o abruptas en función de la longitud que tengan con respecto al ancho o profundidad de la conducción (véase Figura 1). En forma coloquial a estos cambios se le denominan transición o tramo de transición (Sotelo Avila, 1997).



a)



b)

Figura 1. Ejemplos de canales con transiciones. a) Ampliación suave. b) Reducción suave. *Google, 2016.*



c)



d)

Figura 2. Continuación Figura 1. c) Cambio de forma en la sección transversal. d) Ampliación abrupta entre una geometría y otra distinta. *Google, 2016.*

En el estudio de las transiciones es necesario establecer si en ellas se produce o no un cambio en el régimen de flujo, ya que en muchos de los casos el diseño y el funcionamiento se ve afectado de manera importante por la presencia de fenómenos exclusivos para cada tipo de régimen. En el caso de un régimen de flujo subcrítico, cualquier perturbación en la velocidad o en el nivel de flujo puede transmitirse hacia aguas arriba; en el caso de un régimen de flujo supercrítico, la transmisión es únicamente hacia aguas abajo (Sotelo Avila, 1997).

En la longitud de la conducción, los cambios en la geometría de la sección transversal, ya sea reducción o ampliación, definirán la magnitud de la pérdida de energía local, y ésta localizada en el sitio del cambio de la geometría (Eb Pareja, 2012). Estas pérdidas son consideradas nulas en muchos de los casos, pero adquieren importancia cuando la transición es en un tramo relativamente corto. Una forma de evaluar las pérdidas de energía local es mediante la ecuación de Borda-Carnot, en honor a Jean-Charles de Borda (1733-1799) y Lazare Carnot (1753-1823), esta ecuación es una descripción empírica de las pérdidas de energía mecánica de un fluido debidas a cambios en la geometría de la sección, tales como expansiones o reducciones abruptas (Ratía Sánchez, 2010).

Las ecuaciones generales de flujo de partículas de la mecánica de fluidos se conocen como las ecuaciones de Navier-Stokes. Este sistema de ecuaciones requiere que las condiciones de frontera estén bien establecidas. En el caso de flujo a superficie libre la frontera que existe entre el fluido del agua y el aire es una incógnita, entonces para solucionar esta frontera se propone una integración en la vertical, en donde el límite de la superficie libre es un modelo de onda cinemática (Yen, 1973).

El resultado de la integración en la vertical es el sistema de ecuaciones que se conoce como las ecuaciones de Saint-Venant en su versión conservativa integrodiferencial (Cunge *et al.*, 1980). Las ecuaciones integrodiferenciales se pueden resolver en forma numérica, en este caso, se plantea aplicar un esquema en diferencias finitas no lineal para resolver el problema (Aguilar, 2002) y plantear además un modelo integral para evaluar las capacidades en la estimación de la conservación de masa y cantidad de movimiento.

Este tipo de análisis unidimensional tienen la característica de poder tomar en cuenta las pérdidas de energía local, considerando los efectos de cambio de sección en un corto espacio





dimensional. Pero con un enfoque más sistemático, es importante tomar en cuenta la característica turbulenta del flujo en la transición y evaluar la validez de los términos integrodiferenciales.

La construcción del modelo discreto (aproximado) del problema diferencial se realizará por el Método de Diferencias Finitas aplicando el esquema de Preissmann (Abbott, 1979) al sistema de ecuaciones de Saint-Venant. Debido a que este sistema de ecuaciones es no lineal es necesario aplicar un método iterativo para asegurar la convergencia de los términos no lineales; existen diversos métodos para solucionar este problema, en este caso se utilizará el método de Picard y el método de Newton-Raphson (Szymkiewicz, 2010). Para la aplicación de este método, toma una expansión en serie de Fréchet-Taylor sobre las variables dependientes (Milne, 1980), generando así un modelo discreto, a este modelo se le adicionan los valores de condición inicial y de frontera (en forma discreta).

Para asegurar que el método de discretización resulte semejante a la solución directa (integración) se engloba el siguiente teorema:

Teorema de Equivalencia de Lax (Espinoza & Niño, 2001). Si se tiene un problema de valor inicial que está bien planteado, y además se tiene una aproximación de diferencias finitas que es consistente y su esquema es estable, entonces su solución converge hacia la solución del problema real, en forma general dice:

$$\textbf{Convergencia} = \textbf{Consistencia} + \textbf{Estabilidad}$$

Un esquema numérico es consistente a la ecuación diferencial si el error de aproximación se anula cuando disminuye el intervalo de discretización (Menéndez, 2010). Los errores de discretización son causados por el reemplazo de un problema continuo por uno discreto y se define como la diferencia entre la solución exacta de la ecuación diferencial parcial y la solución exacta de la aproximación de diferencias finitas, también conocido como error de truncamiento (Espinoza & Niño, 2001).

Por otro lado, un esquema es numéricamente estable cuando los errores de cualquier origen en el cálculo no crecen de un periodo a otro, por ejemplo, los errores de redondeo. Los errores de redondeo son los que se producen al conservar solo un número finito de dígitos durante las operaciones aritméticas (Menéndez, 2010).

Por lo tanto, un modelo numérico es convergente a una solución continua, si es consistente y estable. En la siguiente figura se muestra el proceso de convergencia numérica (Morton & Mayers, 2005). De forma esquemática, el Teorema de Equivalencia de Lax se puede visualizar en la Figura 3 (J. Fletcher, 1990).

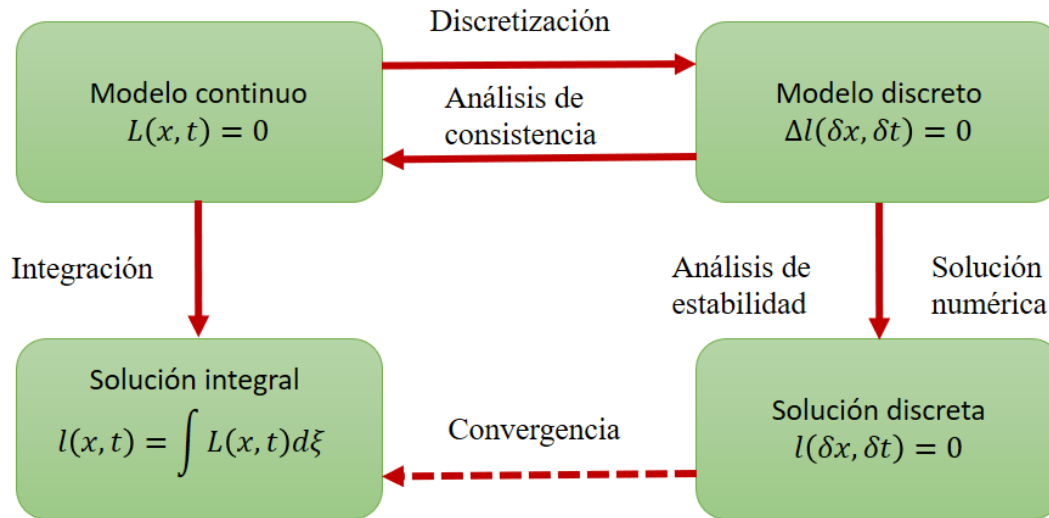


Figura 3. Esquema de aplicación del Teorema de equivalencia de Lax

## 1.1. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Resolver las ecuaciones de Saint-Venant conservativas en su versión integrodiferencial y diferencial que permita analizar adecuadamente los cambios de sección en canales artificiales no prismáticos.

Analizar la convergencia para el esquema de Preissmann (sistema discreto) y definir los límites de convergencia del sistema discreto de ecuaciones.

Desarrollar un algoritmo numérico que permita resolver las ecuaciones de Saint-Venant, además de evaluar la variación de la conservación de masa y cantidad de movimiento en zonas de transiciones en canales de riego, por ejemplo, en ampliaciones, reducciones y cambios de sección transversal, así como en los casos de transiciones suaves y abruptas.

La metodología que se siguió para cumplir con los objetivos fue la siguiente:

- a. Revisión del modelo conceptual de flujo unidimensional en canales
- b. Elaboración de esquemas numéricos con las versiones conservativas de las ecuaciones de Saint-Venant para la simulación de flujo a superficie libre
- c. Análisis de convergencia del esquema de discretización
- d. Desarrollo de un algoritmo para evaluar la variación de la conservación de masa y cantidad de movimiento en transiciones
- e. Pruebas numéricas y análisis de los resultados obtenidos



## CAPÍTULO 2

---

# ECUACIONES DE FLUJO A SUPERFICIE LIBRE

El flujo en un canal abierto tiene una superficie libre, y las ecuaciones que lo representan son complicadas de resolver de forma directa, ya sea en su condición espacial permanente o transitoria.

El flujo en un canal a superficie libre puede ser permanente o no permanente, también conocido como transitorio. Se considera un flujo permanente si la profundidad de flujo o la velocidad no cambia o puede suponerse constante durante un intervalo de tiempo. El caso más común de flujo permanente es aquel de un canal en que el gasto es constante en cualquier sección transversal del mismo; otro caso es cuando existen aportes o salidas de gasto (que no varían con el tiempo) a lo largo de todo el canal o en tramos; por ejemplo, los vertedores de canal lateral, las cunetas y bordillos en carreteras y los sistemas de drenaje en zonas de riego (Sotelo Avila, 1997). Si el nivel de flujo o la velocidad varía en un punto en el tiempo, entonces el flujo se denomina flujo transitorio. Ejemplos de flujos transitorios: el flujo en un río durante una avenida; la entrada de la marea en un puerto; los aumentos repentinos en los canales de alimentación, y las aguas de lluvias en los alcantarillados (D. Franz & S. Melching, 1997).

En la literatura se pueden encontrar diferentes versiones de las ecuaciones de Saint-Venant (Abbott, 1979; Cunge *et al.*, 1980), y estas se pueden clasificar en conservativas y no conservativas, en diferenciales e integrodiferenciales. En este capítulo se describirán algunas versiones de las ecuaciones de Saint-Venant, así como se analizarán los términos que en ellas aparecen.



## 2.1. ECUACIONES DE SAINT-VENANT

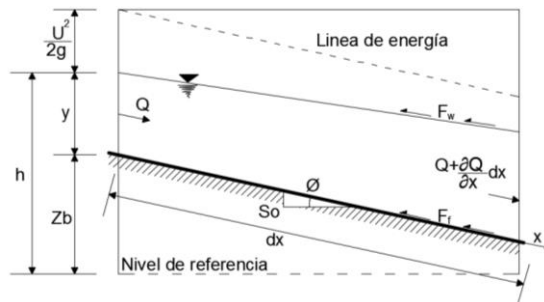
El comportamiento del flujo de agua en canales abiertos puede ser estudiado a través de las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento (segunda ley de Newton), suponiendo que la densidad y la temperatura del fluido son constantes.

Las ecuaciones generales que describen el comportamiento de flujos transitorios unidimensionales a superficie libre en cauces naturales<sup>1</sup> o artificiales<sup>2</sup> son conocidas como las ecuaciones de Saint-Venant, planteadas originalmente por Barré de Saint-Venant en 1871 (Cunge *et al.*, 1980).

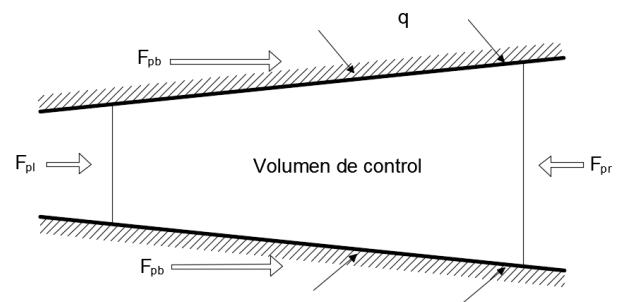
Las ecuaciones de Saint-Venant consideran las siguientes hipótesis (Cunge *et al.*, 1980; Adrighetti, 2007):

- I. El flujo es unidimensional, considerando que la velocidad es uniforme en cada sección transversal y, además, el nivel del agua (superficie libre del agua) en dirección normal al flujo es horizontal.
- II. La curvatura de las líneas de corriente es pequeña y las aceleraciones verticales son despreciables, por lo tanto, la distribución de presiones se considera hidrostática.
- III. Las fuerzas debido a la resistencia al flujo por la fricción de las paredes son descritas mediante leyes similares a las utilizadas en el flujo permanente
- IV. La pendiente promedio del canal es considerada pequeña, de tal manera que el coseno del ángulo que el canal hace con la horizontal es remplazado por la unidad. Se considera que un canal es de pendiente pequeña cuando el ángulo que se forma el fondo del canal con la horizontal es  $\theta \leq 8^\circ$  y  $\cos \theta \cong 1$ , coincidiendo la distribución de presiones con la hidrostática.

Con base en las hipótesis anteriores y aplicando los principios de conservación de masa y cantidad de movimiento que se derivan del principio de continuidad y la segunda Ley de Newton en un volumen de control infinitesimal como se muestra en la Figura 4 (Chow, 1959), se obtienen las ecuaciones de Saint-Venant como se muestra a continuación:



a)



b)

<sup>1</sup> Incluyen todos los cuerpos de agua que existen en forma natural sobre la tierra, tales como arroyos, ríos, etc.

<sup>2</sup> Incluyen todos los construidos por el hombre, tales como canales de navegación, canales de fuerza, canales de riego, obras de excedencias, etc.

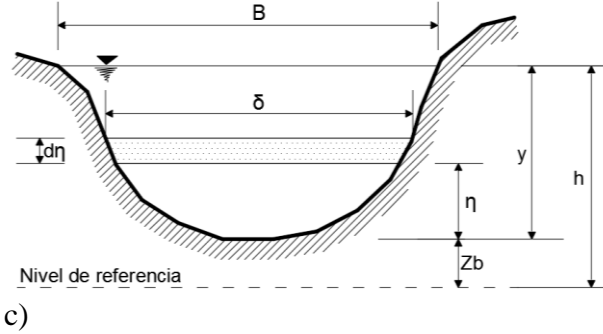


Figura 4. Volumen de control en un canal. a) Corte longitudinal. b) Vista en planta. c) Sección transversal.

De acuerdo a la Figura 4;  $Q$  es el gasto de entrada,  $q$  el gasto lateral,  $h$  la elevación de la superficie libre del agua medida desde un nivel de referencia,  $y$  el tirante medido desde la plantilla del fondo del canal,  $z_b$  la elevación de la plantilla del canal,  $S_o$  la pendiente de la plantilla,  $\theta$  el ángulo de inclinación de la plantilla,  $dx$  discretización espacial,  $B$  es el ancho de la superficie libre del agua,  $\eta$  el tirante medido de la plantilla del canal,  $d\eta$  diferencial de nivel,  $\delta$  es el ancho de la superficie libre del agua a un nivel  $\eta$ ,  $F_f$  la fuerza de fricción,  $F_w$  la fuerza cortante del viento en la superficie de agua,  $F_{pb}$  fuerza de contracción/expansión producida por los cambios abruptos en la sección transversal del canal y  $F_{pl}$  y  $F_{pr}$  es la fuerza hidrostática en el extremo izquierdo y derecho del volumen de control respectivamente (Te Chow, R. Maidment, & W. Mays, 1994).

*Ecuaciones de Saint-Venant conservativas en su versión integrodiferencial* (Cunge et al., 1980).

Ecuación de conservación de masa

$$\mathcal{L}(A, Q; x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$\mathcal{M}(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + g \frac{\partial I_1(A; x, t)}{\partial x} - g I_2(A; x, t) + g A [S_f(A, Q; x, t) - S_o] = 0 \quad (2.2)$$

donde

$$I_1(A; x, t) = \int_0^{y(A; x, t)} [y(A; x, t) - \eta] \delta(x, \eta) d\eta \quad (2.3)$$



$$I_2(A; x, t) = \int_0^{y(A;x,t)} [y(A; x, t) - \eta] \left. \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|_{(x,\eta)} d\eta \quad (2.4)$$

$$S_f(A, Q; x, t) = \frac{n^2 |Q| Q}{A^2 R^{4/3}} \quad (2.5)$$

$$R(A; x, t) = \frac{A(x, t)}{P(A; x, t)} \quad (2.6)$$

donde  $x$  es la coordenada en el sentido horizontal y  $t$  el tiempo, ambas variables independientes;  $A(x, t)$  el área hidráulica y  $Q(x, t)$  el gasto como variables dependientes, además  $A, Q: \Omega(x, t) = [0, L] \times [0, T]$ ; donde  $\Omega$  es el espacio de solución;  $L$  es la longitud de la conducción;  $T$  el tiempo final de la solución;  $I_1(A; x, t)$  el cambio de la presión hidrostática;  $I_2(A; x, t)$  la presión sobre las paredes del canal;  $y(A; x, t)$  el nivel de la superficie libre del agua medido a partir de la plantilla del fondo del canal;  $\eta$  es el nivel de flujo medido a partir de la plantilla del fondo del canal;  $\delta(x, \eta)$  el ancho de superficie libre respecto a un nivel  $\eta$  (véase Figura 4);  $\left. \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|_{(x,\eta)}$  es la variación espacial de la superficie libre del agua respecto a un nivel  $\eta$ ;  $g$  la aceleración de la gravedad;  $R(A; x, t)$  el radio hidráulico;  $P(A; x, t)$  el perímetro mojado;  $S_o(x)$  la pendiente del fondo del canal;  $S_f(A, Q; x, t)$  la pendiente de fricción (Chow, 1959), y  $n$  el coeficiente de rugosidad de Manning.

Según Cunge, *et al.* (1980) las ecuaciones (2.1) y (2.2) son ampliamente utilizadas en la práctica en la simulación de flujo a superficie libre en canales artificiales y naturales, incluyendo el caso de tener ampliaciones o reducciones suaves y abruptas, debido a que este sistema de ecuaciones toma en cuenta las variaciones de las características geométricas de la conducción. Se considera un canal artificial cuando las características geométricas de las secciones transversales en cualquier punto a lo largo de la conducción están bien definidas; por ejemplo: canales de riego. Un canal artificial se puede clasificar en prismático y no prismático; se considera un canal prismático cuando tiene sección transversal e inclinación de la plantilla constantes, y cuando existen variaciones en las características geométricas se considera un canal no prismático. En caso de que las características no sean conocidas, se considera un canal natural o irregular; por ejemplo: ríos, arroyos, etc.

Para propósitos de este trabajo se analizará en detalle la ecuación (2.3) que representa la fuerza debida a la presión del agua en una sección (efectos por la presión hidrostática), y de igual forma el término  $\frac{\partial I_1(A; x, t)}{\partial x}$  de la ecuación (2.2), que representa el cambio de la presión hidrostática entre dos secciones infinitesimales de un canal, así como la ecuación (2.4) que toma en cuenta los efectos de presión sobre las paredes.



En canales artificiales que no cambian de sección en el sentido longitudinal, el término  $I_2(A; x, t)$  es igual a cero. Este término en la ecuación (2.2) representa las fuerzas de presión debidas a la reacción de las paredes por causa de las variaciones de la anchura del canal con respecto a la distancia. La magnitud de esta fuerza dependerá de la variación de la sección (Alcrudo & García, 1995), como se muestra en la Figura 4.b.

### 2.1.1. ANÁLISIS DE LOS TÉRMINOS INTEGRODIFERENCIALES PARA CANALES NATURALES

Las ecuaciones (2.3) y (2.4) son aplicables a canales artificiales y naturales. En forma práctica cuando se tiene una sección irregular como la que se muestra en la Figura 5, para determinar las magnitudes de las ecuaciones (2.3) y (2.4) se puede seguir el siguiente criterio de cálculo propuesto por Aguilar-Suárez (2007).

Mediante la regla trapezoidal, para obtener estos parámetros se inicia teniendo una serie de coordenadas  $(x, y)$  de la sección del cauce, con el fin de dividir el cauce en trapecios y obtener de esto el área y el ancho de la superficie libre del agua de cada sección, como se muestra en la Figura 5.

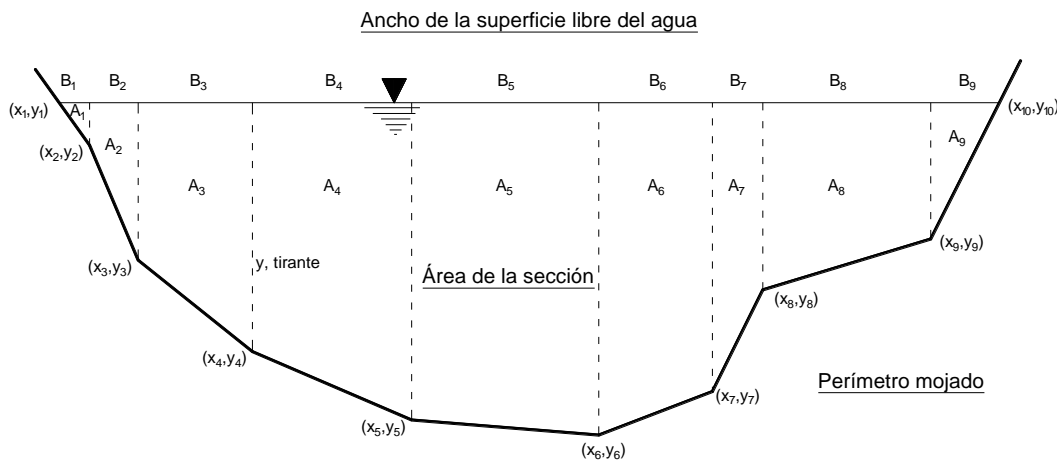


Figura 5. Sección irregular de un cauce.

La presión hidrostática se determina calculando el área de cada trapecio y la suma de su conjunto es la presión hidrostática total de la sección, y se puede expresar de la forma siguiente (Aguilar Suárez, 2007):

$$I_1 = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(y_k + y_{k+1})(x_{k+1} - x_k)}{4(x_{k+1} - x_k)} \quad (2.7)$$

donde  $j$  es la discretización espacial de la sección transversal.



La fuerza de presión que se ejerce en las paredes por efecto del cambio en la sección transversal se evalúa de la forma siguiente:

$$I_2 = \frac{1}{\Delta x} (I_1(y, x + \Delta x) - I_1(y, x)) \quad (2.8)$$

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) son una buena aproximación cuando la geometría en la sección es irregular y no sigue una forma uniforme en el sentido longitudinal.

### 2.1.2. ANÁLISIS DE LOS TÉRMINOS INTEGRODIFERENCIALES PARA CANALES ARTIFICIALES

En una conducción con ampliaciones o reducciones sin variaciones bruscas del fondo del canal para una sección prismática, entonces se tiene que  $\delta(x, \eta(x, t)) = B(x, t)$ , donde  $B(x, t)$  es el ancho de superficie libre del agua.

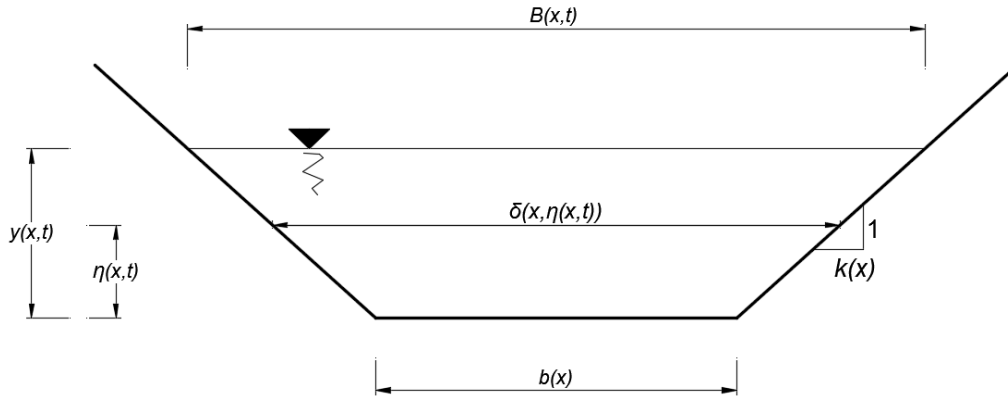


Figura 6. Características geométricas de un canal con sección trapezoidal.

De acuerdo a la Figura 6 la superficie libre del agua se evaluará como  $B(x) = b(x) + 2k(x)y(x)$  y el área de la sección transversal es  $A(y; x, t) = k(x)y(x)^2 + b(x)y(x)$ , entonces

$$\delta(x, t) = b + 2k\eta \quad (2.9)$$

$$\left. \frac{\partial \delta}{\partial x} \right|_{(x,\eta)} = \frac{\partial b}{\partial x} + 2 \frac{\partial k}{\partial x} \eta \quad (2.10)$$





En la ecuación anterior el termino  $\eta(x, t)$ , está localizado para la evaluación del elemento diferencial, entonces  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  es pequeño y  $\frac{\partial b}{\partial x}$  y  $\frac{\partial k}{\partial x}$  son las variaciones del ancho y el talud en la conducción.

Considerando lo anterior las integrales  $I_1(A; x, t)$  y  $I_2(A; x, t)$  para un canal artificial (ecuaciones (2.3) y (2.4) respectivamente), son:

$$\begin{aligned}
 I_1(x, t) &= \int_0^{y(x,t)} [y(x, t) - \eta](b + 2k\eta) d\eta = \int_0^y (yb + 2yk\eta - b\eta - 2k\eta^2) d\eta \\
 &= y^2b + y^3k - \frac{by^2}{2} - \frac{2}{3}ky^3 \\
 I_1(x, t) &= y^2(x, t) \left[ \frac{b(x)}{2} + y(x, t) \frac{k(x)}{3} \right] \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2(x, t) &= \int_0^{y(x,t)} [y(x, t) - \eta] \left( \frac{\partial b}{\partial x} + 2 \frac{\partial k}{\partial x} \eta \right) d\eta \\
 &= \int_0^y \left( y \frac{\partial b}{\partial x} + 2y \frac{\partial k}{\partial x} \eta - \frac{\partial b}{\partial x} \eta - 2 \frac{\partial k}{\partial x} \eta^2 \right) d\eta \\
 &= y^2 \frac{\partial b}{\partial x} + y^3 \frac{\partial k}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x} \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} y^3 \\
 I_2(x, t) &= y^2(x, t) \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{y(x, t)}{3} \frac{\partial k}{\partial x} \right] \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

En la ecuación de cantidad de movimiento (2.2) el término que representa el cambio de la presión hidrostática entre dos secciones es  $g \frac{\partial I_1}{\partial x}$ , mismo que para una transición con sección prismática se evalúa de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 g \frac{\partial}{\partial x} (I_1) &= g \frac{\partial}{\partial x} \left[ y^2 \left( \frac{b}{2} + y \frac{k}{3} \right) \right] = g \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( y^2 \frac{b}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( y^3 \frac{k}{3} \right) \right] \\
 &= g \left[ \frac{y^2}{2} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{y^3}{3} \frac{\partial k}{\partial x} + (by + ky^2) \frac{\partial y}{\partial x} \right]
 \end{aligned}$$

O también

$$g \frac{\partial}{\partial x} (I_1) = gA(x, t) \frac{\partial y}{\partial x} + gI_2(A; x, t) \tag{2.13}$$



Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación de cantidad de movimiento (2.2), tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(A, Q; x, t) = & \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial y}{\partial x} + gI_2(A; x, t) - gI_2(A; x, t) \\ & + gA[S_f(A, Q; x, t) - S_o] = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

O bien

$$\mathcal{M}(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial y(A, x, t)}{\partial x} + gA[S_f(Q, A; x, t) - S_o] = 0 \quad (2.15)$$

La ecuación de cantidad de movimiento (2.2) expresa en forma estricta la conservación de cantidad de movimiento si y solo si la suma de los dos últimos términos de la ecuación (2.2) es igual a cero ( $-gI_2(A; x, t) + gA[S_f(A, Q; x, t) - S_o] = 0$ ), condición sin cambios de sección transversal y flujo uniforme. Cuando estos dos términos son diferentes de cero, la cantidad de movimiento ya no es conservada y los términos libres actúan como fuentes o sumideros (Adrighetti, 2007).

La ecuación de cantidad de movimiento (2.15) junto con la ecuación de conservación de masa (2.1), se conoce como las *ecuaciones de Saint-Venant conservativas en su versión diferencial*.

Ecuación de conservación de masa

$$\mathcal{L}(A, Q; x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.16)$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$\mathcal{M}(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h(A; x, t)}{\partial x} + gAS_f(A, Q; x, t) = 0 \quad (2.17)$$

donde  $h(A; x, t) = y(A; x, t) + z_b(x)$  es la elevación de la superficie libre del agua medida desde un nivel de referencia;  $y(A; x, t)$  es el tirante medido desde la plantilla del fondo del canal y  $z_b(x)$  la elevación de la plantilla del fondo del canal medida desde un nivel de referencia. Además,  $\frac{\partial h(A, x, t)}{\partial x} = \frac{\partial y(A, x, t)}{\partial x} + \frac{\partial z_b(x)}{\partial x} = \frac{\partial y(A, x, t)}{\partial x} - S_o$ .



### Definición del problema de valor inicial y condiciones de frontera

El sistema de ecuaciones de Saint-Venant conservativas en su versión integrodiferencial y diferencial (ecuaciones (2.1), (2.2), (2.16) y (2.17)) respectivamente, representan un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera que está sujeto a las condiciones iniciales, por ejemplo:  $A(y(x), 0) = A_0(y(x))$  y  $Q(x, 0) = Q_0(x)$ . Las condiciones de frontera se definen para un flujo subcrítico o supercrítico; para flujo subcrítico,  $A(y(L), t) = f(t)$  y  $Q(0, t) = g(t)$  para  $t > 0$  y para un flujo supercrítico,  $A(y(0), t) = f(t)$  y  $Q(0, t) = g(t)$  para  $t > 0$ .

El sistema de ecuaciones de Saint-Venant conservativas en su versión diferencial también se puede escribir de diferente forma, tomando en cuenta el concepto de velocidad media, que se define como:

$$U(x, t) = \frac{Q(x, t)}{A(x, t)} \quad (2.18)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en las ecuaciones de conservación de masa (2.16) y cantidad de movimiento (2.17) se tienen el siguiente sistema de ecuaciones conocidas de igual forma como las *ecuaciones de Saint-Venant conservativas en su versión diferencial*, pero el área de la sección transversal y la velocidad son las variables dependientes.

Ecuación de conservación de masa

$$\mathcal{L}(A, U; x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial UA}{\partial x} = 0 \quad (2.19)$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$\mathcal{M}(A, U; x, t) = \frac{\partial UA}{\partial t} + \frac{\partial(AU^2)}{\partial x} + gA \frac{\partial h(A; x, t)}{\partial x} + gAS_f(A, U; x, t) = 0 \quad (2.20)$$

$$S_f(A, U; x, t) = \frac{n^2|U|U}{R^{4/3}} \quad (2.21)$$

donde  $A(x, t)$  el área hidráulica y  $U(x, t)$  es la velocidad, como variables dependientes;  $S_f(A, U; x, t)$  la pendiente de fricción en función del área y la velocidad (Chow, 1959).



### Definición del problema de valor inicial y condiciones de frontera

El sistema de ecuaciones (2.19) y (2.20) representan un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera que está sujeto a las condiciones iniciales  $A(y(x), 0) = A_0(y(x))$  y  $U(x, 0) = U_0(x)$ . Las condiciones de frontera se definen para un flujo subcrítico y supercrítico, entonces para flujo subcrítico,  $A(y(L), t) = f(t)$  y  $U(0, t) = g(t)$  para  $t > 0$  y para un flujo supercrítico,  $A(y(0), t) = f(t)$  y  $U(0, t) = g(t)$  para  $t > 0$ .

Por último una forma para aplicar las ecuaciones de Saint-Venant en el caso de canales naturales o artificiales muy anchos y con un tirante pequeño, en donde se considera una sección transversal cuasi rectangular  $A(x, t) = By$ , donde  $B(y; x, t)$  es el ancho de la superficie libre del agua y  $y(x, t)$  es el tirante en la sección. Tomando en cuenta esto y aplicándolo a las ecuaciones (2.19) y (2.20), se tiene el sistema de *ecuaciones de Saint-Venant no conservativas en su versión diferencial* (Cunge *et al.*, 1980).

Ecuación de conservación de masa

$$\mathcal{L}(y, U; x, t) = B(y; x, t) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [U A(y; x, t)] = 0 \quad (2.22)$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$\mathcal{M}(y, U; x, t) = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} + g \frac{\partial z_b(x)}{\partial x} + g S_f(y, U; x, t) = 0 \quad (2.23)$$

$$S_f(y, U; x, t) = \frac{n^2 |U| U}{R(y; x, t)^{4/3}} \quad (2.24)$$

donde  $y(x, t)$  es el tirante y  $U(x, t)$  la velocidad, como variables dependientes;  $A(y; x, t)$  el área hidráulica y  $S_f(y, U; x, t)$  la pendiente de fricción en función del tirante y la velocidad.

### Definición del problema de valor inicial y condiciones de frontera

El sistema de ecuaciones (2.22) y (2.23) representan un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera que está sujeto a las condiciones iniciales  $y(x, 0) = y_0(x)$  y  $U(x, 0) = U_0(x)$ . Las condiciones de frontera se definen para un flujo subcrítico y supercrítico, entonces para flujo subcrítico,  $y(L, t) = f(t)$  y  $y(0, t) = g(t)$  para  $t > 0$  y para un flujo supercrítico,  $y(0, t) = f(t)$  y  $U(0, t) = g(t)$  para  $t > 0$ .



## 2.2. APLICACIÓN PARA UN CANAL ARTIFICIAL NO PRISMÁTICO

El sistema de ecuaciones de Saint-Venant en cualquiera de sus versiones son aplicables para canales artificiales y naturales. En este subcapítulo se realizará un análisis para la versión conservativa diferencial aplicado a un canal artificial no prismático.

En este caso el tercer término  $\left(\frac{\partial y(A(b,k))}{\partial x}\right)$  de la ecuación (2.15) se evaluará aplicando la regla de la cadena, debido a que la variación del nivel de flujo está en función de la geometría del canal (Freitag, 2003):

$$\frac{\partial y(A(b,k))}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} + \frac{\partial y}{\partial A} \frac{dA}{dx} \quad (2.25)$$

Donde los términos  $\frac{db}{dx}$  y  $\frac{dk}{dx}$  indican las variaciones del ancho del fondo del canal y del talud respectivamente a lo largo de la conducción.

La ecuación (2.25) se aplicara a tres tipos de secciones transversales:

- a. Trapezoidal
- b. Rectangular
- c. Triangular

Para el caso de canales con secciones circulares y de tipo herradura, la ecuación (2.25) requiere de un tratamiento diferentes.

Para resolver la ecuación (2.25) se considerará un canal con sección trapezoidal, como se muestra en la Figura 6, entonces para resolver el problema es necesario determinar el tirante.

La ecuación del área también se puede expresar de la forma siguiente:

$$k(x)y(x)^2 + b(x)y(x) - A(y; x, t) = 0 \quad (2.26)$$

Donde,  $k(x)$  es el talud,  $b(x)$  es el ancho del fondo del canal y  $B(x)$  es el ancho de superficie libre del agua.

Entonces la solución a la ecuación (2.26) es:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4kA}}{2k} \quad (2.27)$$



Si  $k > 0$  la solución a la ecuación (2.27) siempre es real, entonces el signo del radical para el caso de canales trapezoidales solo se tomará el signo positivo, ya que  $y > 0$ , por lo tanto, el valor del tirante en un canal con sección trapezoidal, para  $k(x), b(x) > 0$ , es:

$$y = \frac{-b}{2k} + \sqrt{\frac{b^2}{4k^2} + \frac{A}{k}} = y(b, k, A; x, t) \quad (2.28)$$

La ecuación anterior es válida para un canal trapezoidal y triangular, para la condición  $k(x) > 0$  y  $b(x) \geq 0$ , en el caso de un canal rectangular  $k(x) = 0$  y  $b(x) > 0$ , la ecuación (2.28) presenta una discontinuidad ya que en la ecuación (2.26) el término cuadrático es nulo, entonces la ecuación para calcular el tirante en una sección rectangular es la siguiente:

$$y(x, t) = \frac{A(x, t)}{b(x)} = y(b, A; x, t) \quad (2.29)$$

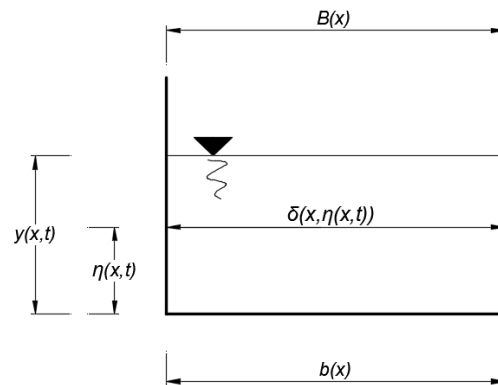


Figura 7. Características geométricas de un canal prismático con sección rectangular.

En este caso, el ancho de la superficie libre del agua se evaluará como  $B(x) = b(x)$  y el área de la sección transversal es  $A(y; x, t) = b(x)y(x)$ .

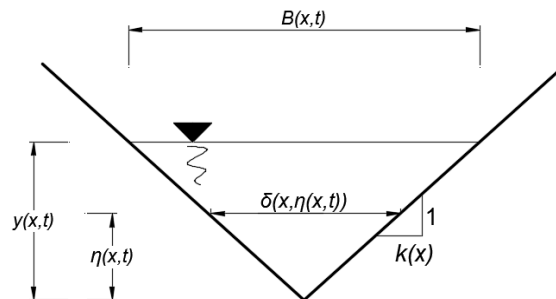


Figura 8. Características geométricas de un canal prismático con sección triangular.



En este caso, el ancho de la superficie libre del agua se evaluará como  $B(x) = 2k(x)y(x)$  y el área de la sección transversal es  $A(y; x, t) = k(x)y(x)^2$

En el caso de un canal con sección triangular, donde  $b(x) = 0$  y  $k(x) > 0$ . Entonces despejando el tirante  $y(x)$  de la ecuación del área, obtenemos:

$$y(x, t) = \sqrt{\frac{A(x, t)}{k(x)}} = y(k, A) \quad (2.30)$$

A su vez resolviendo las derivadas parciales de la ecuación (2.25) para los tres casos de secciones transversales; trapezoidal (Figura 6), rectangular (Figura 7) y triangular (Figura 8), tenemos que:

### Canal trapezoidal

$$\frac{\partial y}{\partial b} = \frac{-1}{2k} + \frac{b}{4k^2} \left( \frac{b^2}{4k^2} + \frac{A}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{b}{2k^2} + \left( \frac{b^2}{4k^2} + \frac{A}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{b^2}{4k^3} - \frac{A}{2k^2} \right) \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial y}{\partial A} = \frac{1}{B} \quad (2.33)$$

Entonces la ecuación (2.25) para un canal trapezoidal se puede escribir de la forma siguiente

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left[ \frac{-1}{2k} + \frac{b}{4k^2} \left( \frac{b^2}{4k^2} + \frac{A}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \frac{db}{dx} + \left[ \frac{b}{2k^2} + \left( \frac{b^2}{4k^2} + \frac{A}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{b^2}{4k^3} - \frac{A}{2k^2} \right) \right] \frac{dk}{dx} + \frac{1}{B} \frac{dA}{dx} \quad (2.34)$$

### Canal rectangular

$$\frac{\partial y}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left[ \frac{A}{b} \right] = -\frac{A}{b^2} \quad (2.35)$$



$$\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \left[ \frac{A}{b} \right] = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial y}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \left[ \frac{A}{b} \right] = \frac{1}{B} \quad (2.37)$$

Entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left( -\frac{A}{b^2} \right) \frac{db}{dx} + \left( \frac{1}{B} \right) \frac{dA}{dx} \quad (2.38)$$

**Canal triangular**

$$\frac{\partial y}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \left[ \left( \frac{A}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \left[ \left( \frac{A}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{A}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{A}{k^2} \right) = \left( -\frac{A}{2k^2} \right) \left( \frac{A}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial y}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \left[ \left( \frac{A}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{A}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{k} \right) = \left( \frac{1}{2k} \right) \left( \frac{A}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{B} \quad (2.41)$$

Entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left[ \left( -\frac{A}{2k^2} \right) \left( \frac{A}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \frac{dk}{dx} + \left( \frac{1}{B} \right) \frac{dA}{dx} \quad (2.42)$$

Los términos de variación geométrica del ancho del fondo de la conducción y de talud  $\left( \frac{db}{dx}, \frac{dk}{dx} \right)$  de la ecuación (2.25) son derivadas continuas y para conocer su valor se aplicará un modelo en diferencias finitas, sobre una malla discreta (véase Figura 9). Entonces las aproximaciones son las siguientes:



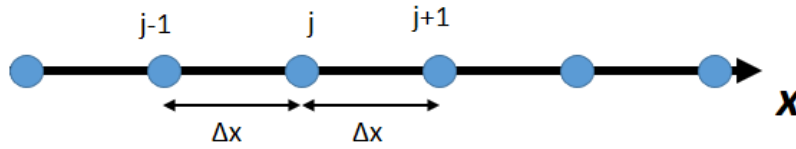


Figura 9. Espacio discreto

$$\frac{db}{dx} = \frac{b_{j+1} - b_j}{\Delta x} \quad (2.43)$$

Y también

$$\frac{dk}{dx} = \frac{k_{j+1} - k_j}{\Delta x} \quad (2.44)$$

En la Tabla 1 se muestra un resumen para evaluar los términos de la ecuación (2.25) para los tres diferentes tipos de secciones transversales.

Tabla 1. Evaluación de los términos de la ecuación (2.25) para los tres tipos de secciones transversales.

Término \ Tipo de sección	Trapezoidal	Rectangular	Triangular
$\frac{\partial y}{\partial b}$	$\frac{-1}{2k} + \frac{b}{4k^2} \left( \frac{b^2}{4k^2} + \frac{A}{k} \right)^{-\frac{1}{2}}$	$-\frac{A}{b^2}$	-
$\frac{\partial y}{\partial k}$	$\frac{b}{2k^2} + \left( \frac{b^2}{4k^2} + \frac{A}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{b^2}{4k^3} - \frac{A}{2k^2} \right)$	-	$\left( -\frac{A}{2k^2} \right) \left( \frac{A}{k} \right)^{-\frac{1}{2}}$
$\frac{\partial y}{\partial A}$	$\frac{1}{B}$	$\frac{1}{B}$	$\frac{1}{B}$

En el capítulo 3 se presentará un modelo de discretización del sistema de ecuaciones de Saint-Venant y los términos que se aplican para las ampliaciones y reducciones. En el caso de secciones prismáticas, los términos de variación de ancho del fondo del canal y talud se definirán conforme a la Tabla 1.



### 2.3. CONDICIONES DE FRONTERA

Debido a que el sistema de ecuaciones de Saint-Venant en cualquiera de sus versiones representan un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera. Es de suma importancia especificar las condiciones de frontera pues éstas definen el comportamiento del flujo en la condición transitoria. La ubicación de las condiciones de frontera se define por el tipo de régimen de flujo y son:

Régimen de flujo subcrítico

$$A(y(L), t) = f(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.45)$$

$$Q(0, t) = g(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.46)$$

Régimen de flujo supercrítico

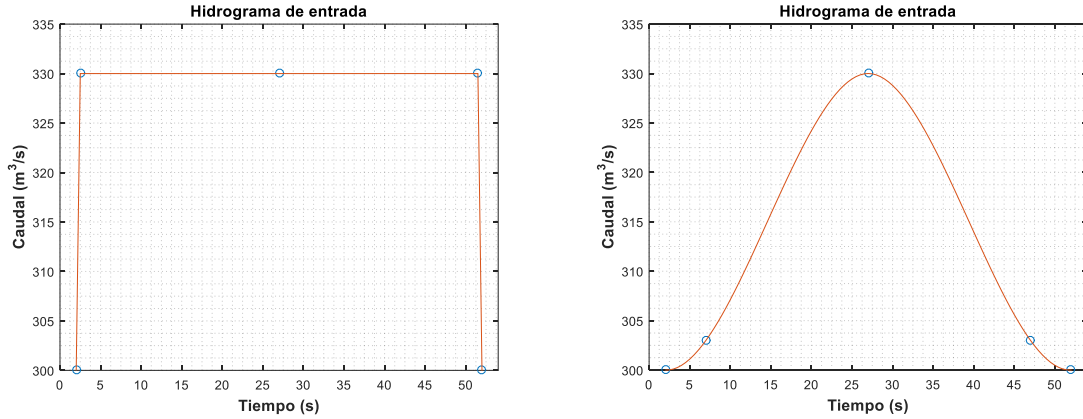
$$A(y(0), t) = f(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.47)$$

$$Q(0, t) = g(t) \quad ; \quad t > 0 \quad (2.48)$$

En este trabajo se estudiará un flujo en régimen subcrítico, entonces de acuerdo a lo anterior, es necesario definir una condición de frontera aguas arriba y una condición aguas abajo. Para la frontera aguas arriba se considerará la condición de gasto  $Q(0, t) = g(t)$ , definida por un hidrograma y para la frontera aguas abajo se considerará un área  $A(y(L), t) = f(t)$ . En los siguientes apartados se describirán estas condiciones de frontera.

#### 2.3.1. CONDICIÓN DE FRONTERA AGUAS ARRIBA

Como se mencionó anteriormente la condición aguas arriba está definida por una función del gasto conocida ( $Q(0, t) = g(t)$ ), y esto se puede representar con un hidrograma. A manera de ejemplo se muestra en la figura siguiente diferentes tipos de hidrogramas utilizados en las pruebas numéricas.



a) b)  
 Figura 10. Tipos de hidrogramas de entrada. a) Escalón. b) Campana.

### 2.3.2. CONDICIÓN DE FRONTERA AGUAS ABAJO

La condición de frontera aguas abajo de la conducción es de área ( $A(y(L), t) = f(t)$ ), por lo tanto es necesario definir el tirante, y en este trabajo se propusieron las siguientes formas para describir esta condición:

a) Ley de descarga (Cruz Mayo, 2015)

Consiste en proponer un gasto mínimo ( $Q_{min}$ ) y un gasto máximo ( $Q_{max}$ ), se propone un tirante mínimo ( $y_{min}$ ); posteriormente con el gasto máximo se define el tirante máximo ( $y_{max}$ ) como el tirante normal ( $y_n$ ) correspondiente al gasto máximo ( $Q_{max}$ ) (véase Figura 11). El tirante en la frontera aguas abajo se determina con la siguiente función:

$$y_f(Q) = m(Q - Q_{min}) + y_{min} \quad (2.49)$$

Donde

$$m = \frac{y_{máx} - y_{mín}}{Q_{max} - Q_{mín}} \quad (2.50)$$

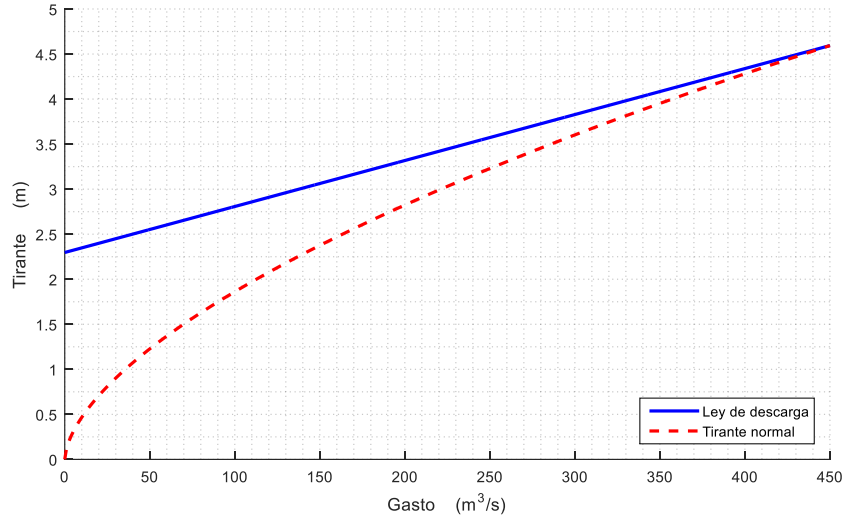


Figura 11. Ley de descarga (tirante-gasto)

Este tipo de condición de frontera se emplea cuando en la conducción se consideran estructuras de regulación, por ejemplo: compuertas.

b) Tirante fijo

En esta condición se considera un tirante fijo aguas abajo, definido por la condición inicial o por un tirante conocido en estado permanente, entonces

$$y_f = y_{ref} \quad (2.51)$$

c) Variación de tirante

Está definida por la siguiente función:

$$y_f = \frac{y_{J-1}^n + 2y_{J-2}^n + y_{J-3}^n}{4} \quad (2.52)$$

La ecuación (2.52) evalúa el promedio de los últimos tirantes calculados, en donde se considera una numeración de nodos donde  $J$  es el último nodo del tramo. Este tipo de condición de frontera no es recomendable utilizarse cuando se tiene una discretización espacial  $\Delta x$  muy grandes, ya que en el caso de que el perfil de flujo no sea completamente paralelo al fondo de la plantilla de la conducción podría introducir grandes cambios en la frontera.



## 2.4. CONDICIÓN INICIAL

Para calcular las condiciones de flujo en estado transitorio, es necesario conocer el nivel del flujo y la velocidad iniciales en todas las secciones del sistema. Si estas condiciones no son compatibles con las ecuaciones de Saint-Venant, entonces se generarán pequeñas ondas en cada sección cuando se calcule las condiciones transitorias (Chaudhry, 1986).

A partir de las ecuaciones de Saint-Venant conservativas en su versión diferencial (ecuaciones (2.16) y (2.17)) se obtendrá la ecuación que describa el flujo en condiciones iniciales. La condición inicial se determina para  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = 0$ , por lo que el principio de conservación de masa se cumple solo si no existen variaciones de gasto a lo largo de la conducción ( $\frac{dQ}{dx} = 0$  o  $Q_1 = Q_2$ ), entonces las ecuaciones de Saint-Venant se expresan de la forma siguiente:

Ecuación de conservación de masa

$$\mathcal{L}(A, Q; x) = \frac{dQ}{dx} = 0 \quad (2.53)$$

Ecuación de cantidad de movimiento

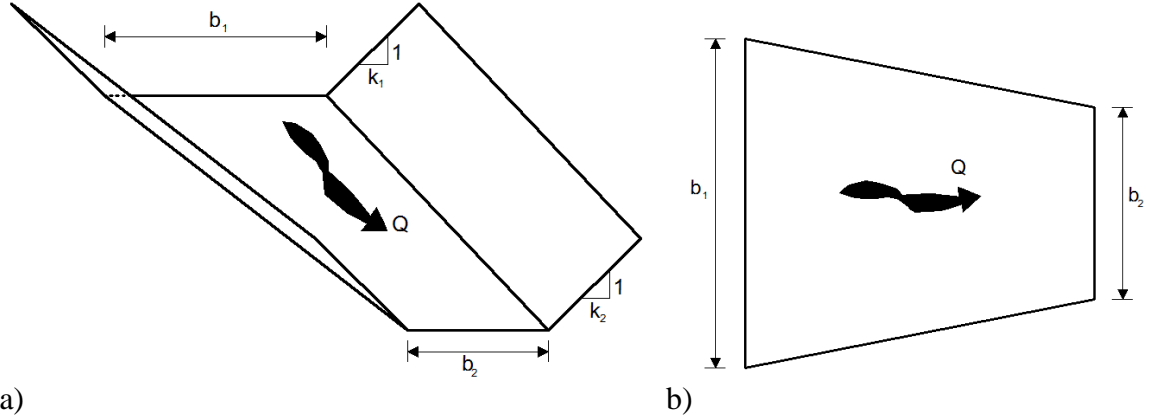
$$\mathcal{M}(A, Q; x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA(x) \frac{dy}{dx} + gA(S_f - S_o) = 0 \quad (2.54)$$

Evaluando el primer término de la ecuación de cantidad de movimiento

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{Q^2}{A} \right) = \frac{2Q}{A} \frac{dQ}{dx} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{dA}{dx} = - \frac{Q^2}{A^2} \frac{dA(y(x))}{dx} \quad (2.55)$$

En este análisis se evaluará la condición cuando la sección transversal tiene un cambio gradual en el espacio (véase Figura 12), donde  $b_1 \neq b_2$  y  $k_1 \neq k_2$ , entonces el área se evalúa de la forma siguiente:

$$A(x) = b(x)y(x) + k(x)y(x)^2 \quad (2.56)$$



a) b)  
Figura 12. Características geométricas de un canal artificial no prismático. a) Vista isométrica. b) Vista en planta.

Aplicando la regla de la cadena a la ecuación anterior (W. Jeppson, 1974), obtenemos:

$$\frac{dA(b, k, y(x))}{dx} = \frac{\partial A}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial A}{\partial k} \frac{dk}{dx} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (2.57)$$

Evaluando las derivadas de la ecuación anterior, se tiene que

$$\frac{\partial A}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} [by + ky^2] = y \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial A}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} [by + ky^2] = y^2 \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [by + ky^2] = b + 2ky = B \quad (2.60)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.58)-(2.60) en (2.57) y a su vez en (2.55) se tiene

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{Q^2}{A} \right) = -\frac{Q^2}{A^2} \left[ y \frac{db}{dx} + y^2 \frac{dk}{dx} + B \frac{dy}{dx} \right] \quad (2.61)$$

Sustituyendo la ecuación (2.61) en (2.54) tenemos

$$-\frac{Q^2}{A^2} \left[ y \frac{db}{dx} + y^2 \frac{dk}{dx} + B \frac{dy}{dx} \right] + gA \frac{dy}{dx} + gA(S_f - S_o) = 0 \quad (2.62)$$



Finalmente despejando el término  $\frac{\partial y}{\partial x}$  de la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f + \frac{Q^2}{gA^3} \left[ y \frac{db}{dx} + y^2 \frac{dk}{dx} \right]}{1 - Fr^2} \quad (2.63)$$

donde  $Fr$ , es el número de Froude y se evalúa de la forma siguiente (Chow, 1959):

$$Fr = \frac{U(x)}{\sqrt{g \frac{A(y; x)}{B(y; x)}}} \quad (2.64)$$

donde  $B(y; x)$ , es el ancho de la superficie libre del agua.

La ecuación (2.63) es conocida como la ecuación de flujo gradualmente variado en canales a superficie libre, pero esta ecuación incorpora los términos que evalúan la variación del nivel de flujo cuando existen transiciones a lo largo de la conducción, ya sea una ampliación, reducción o cambio en la forma geométrica de la sección transversal entre dos secciones. Si el canal tiene una forma regular (sin transiciones),  $\frac{db}{dx} = \frac{dk}{dx} = 0$  y la ecuación (2.63) se evalúa de la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - Fr^2} \quad (2.65)$$

La ecuación anterior expresa la forma clásica de flujo gradualmente variado.

En las ecuaciones (2.63) y (2.65) cuando se tiene  $Fr = 1$  se presenta una singularidad, entonces para solucionar este problema se tiene que considerar dos ramas de solución, cuando:

- $Fr > 1$ , se tiene un flujo supercrítico y se debe plantear una condición de frontera aguas arriba del canal.
- $Fr < 1$ , se tiene un flujo subcrítico y se debe plantear una condición de frontera aguas abajo del canal.

Las ecuaciones (2.63) y (2.65) son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, pero con términos altamente no lineales, tales como el término de fricción y el número de Froude. Para solucionar el problema planteado por las ecuaciones (2.63) y (2.65) se propone aplicar



el método numérico de disparo inicial de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) (Neuman, 2001; Burden & Faires, 2002), entonces se tiene:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\lambda}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \tag{2.66}$$

Donde  $\lambda$  es el tamaño del paso, además

$$\left. \begin{aligned}
k_1 &= \Delta x f(x_i, y_i) \\
k_2 &= \Delta x f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_1\right) \\
k_3 &= \Delta x f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_2\right) \\
k_4 &= \Delta x f(x_i + \Delta x, y_i + k_3) \\
f(x, y) &= \frac{dy}{dx}
\end{aligned} \right\} \tag{2.67}$$

La condición de disparo inicial para el método de RK4, para flujo subcrítico es definir un gasto a flujo permanente  $Q(x_0) = Q_0$  y el nivel del agua al final del canal  $y(x_L) = y_L$ , en el caso de un flujo supercrítico se cambia el lugar de la evaluación del nivel hacia el inicio del canal.

En la Figura 13 se muestra un ejemplo del cálculo de flujo gradualmente variado en un canal artificial no prismático con una longitud de 500 m y donde se ubica el nivel aguas abajo similar al tirante normalizado y una transición suave en un canal con sección trapezoidal entre el cadenamamiento 0+020-0+120.

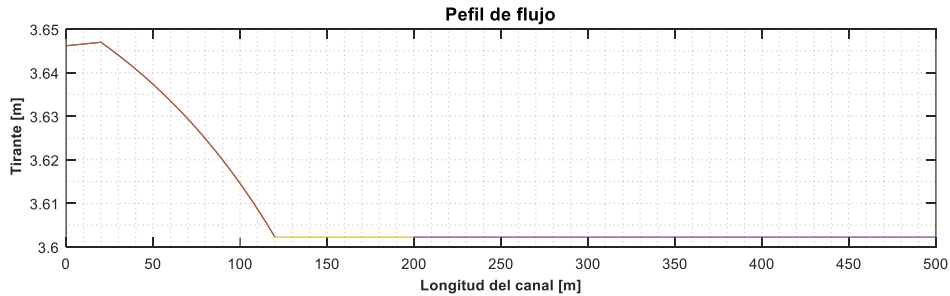


Figura 13. Ejemplo de perfil de flujo gradualmente variado en una transición suave en una conducción con sección trapezoidal.

Este cálculo muestra los efectos de los cambios de nivel a lo largo de una conducción cuando se tienen cambios en la sección transversal.





# CAPÍTULO 3

---

## MODELO DISCRETO

Los sistemas de ecuaciones diferenciales de Saint-Venant en cualquiera de sus versiones son modelos matemáticos que describen el flujo a superficie libre y están en función del tiempo y el espacio, por lo que estas ecuaciones se vuelven muy complejas para ser resueltas por métodos analíticos, por esto se propone una discretización (modelo discreto). Según Cunge (1980) se le llama discretización al proceso de expresar las ecuaciones generales de flujo, escritas para un medio continuo, en términos de valores discretos en un número finito de puntos en el campo del flujo.

Los modelos discretos permiten solucionar de forma aproximada las formulaciones matemáticas continuas, para condiciones de fronteras complejas, y también para problemas en las que contengan términos no lineales.

En la literatura se pueden encontrar cuatro clases de métodos de solución numérica: el método de las características, el método de elemento finito (FEM Finite Element Method), el método de diferencias finitas (FDM Finite Difference Method) y el método de volumen finito (FVM Finite Volume Method) (Szymkiewicz, 2010).

En este trabajo se aplicó un método de diferencias finitas para solucionar el problema no lineal del sistema de ecuaciones de Saint-Venant.

### 3.1. MODELOS PROPUESTOS

Tomando en cuenta las formas diferenciales de expresar las ecuaciones de Saint-Venant (véase capítulo 2.1), se construyeron dos modelos discretos para analizar los efectos de las transiciones. Los modelos numéricos se distinguen por las variables dependientes en que están evaluados los operadores diferenciales de masa y cantidad de movimiento, y son los siguientes:

- a. Versión uno: con variables dependientes de velocidad y área
- b. Versión dos: con variables dependientes de gasto y área



En este capítulo se hará únicamente el desarrollo completo de la versión uno de las ecuaciones de Saint-Venant conservativas y en el ANEXO A se muestra la programación de la versión dos. Durante el desarrollo del trabajo también se construyó un modelo considerando como variables dependientes la velocidad y el tirante, pero este modelo es no conservativo de origen, ya que no permite evaluar de forma directa las transiciones.

### Desarrollo de los términos de la versión uno de las ecuaciones de Saint-Venant conservativa en su versión diferencial (velocidad y área como variables dependientes)

Sean el sistema de ecuaciones de conservación de masa (2.19) y cantidad de movimiento (2.20). Considerando  $\frac{\partial h(A;x,t)}{\partial x} = \frac{\partial y(A;x,t)}{\partial x} + \frac{\partial z_b(x)}{\partial x} = \frac{\partial y(A;x,t)}{\partial x} - S_o$ , la ecuación (2.20) se puede escribir de la forma siguiente:

$$\mathcal{M}(A, U; x, t) = \frac{\partial UA}{\partial t} + \frac{\partial(AU^2)}{\partial x} + gA \frac{\partial y(A; x, t)}{\partial x} + gA(S_f(A, U; x, t) - S_o) = 0 \quad (3.1)$$

Desarrollando los términos no lineales de las ecuaciones (2.19) y (3.1)

$$\frac{\partial UA}{\partial x} = A \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial A}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial UA}{\partial t} + \frac{\partial(AU^2)}{\partial x} &= A \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial A}{\partial t} + 2AU \frac{\partial U}{\partial x} + U^2 \frac{\partial A}{\partial x} \\ \frac{\partial UA}{\partial t} + \frac{\partial(AU^2)}{\partial x} &= U \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial A}{\partial x} \right] + A \frac{\partial U}{\partial t} + AU \frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sustituyendo la ecuación (3.2) en (2.19)

$$\mathcal{L}(A, U; x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

Y la ecuación (3.4) en (3.3) y a su vez en la ecuación de cantidad de movimiento (3.1), obtenemos

$$\mathcal{M}(A, U; x, t) = A \frac{\partial U}{\partial t} + AU \frac{\partial U}{\partial x} + gA \frac{\partial y(A; x, t)}{\partial x} + gA(S_f(A, U; x, t) - S_o) = 0 \quad (3.5)$$



Dividiendo la ecuación (3.5) entre  $A$  se tiene:

$$\mathcal{M}(A, U; x, t) = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial y(A; x, t)}{\partial x} + g(S_f(A, U; x, t) - S_o) = 0 \quad (3.6)$$

Finalmente sustituyendo la ecuación (2.25) en la ecuación anterior, obtenemos

$$\mathcal{M}(A, U; x, t) = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{g}{B} \frac{\partial A}{\partial x} + g \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right) + g(S_f(A, U; x, t) - S_o) = 0 \quad (3.7)$$

O también se propone agrupar de la forma siguiente donde se ha hecho uso de la ecuación (2.24) para el término  $S_f(A, U; x, t)$ .

$$\mathcal{M}(A, U; x, t) = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{g}{B} \frac{\partial A}{\partial x} + U \left[ \frac{g n^2 |U|}{R^{4/3}} \right] + g \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} - S_o \right) = 0 \quad (3.8)$$

### Desarrollo de los términos de la versión dos de las ecuaciones de Saint-Venant conservativa en su versión diferencial (gasto y área como variables dependientes)

Sean el sistema de ecuaciones de conservación de masa (2.16) y cantidad de movimiento (2.17).

Desarrollando el segundo y tercer término de la ecuación de cantidad de movimiento (2.17)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) = \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (3.9)$$

$$h(A; x, t) = y(A; x, t) + z_b(x) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z_b}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} - S_o \quad (3.11)$$

donde  $S_o$  es la pendiente de la plantilla del canal.

Sustituyendo la ecuación (3.9) en (2.15)

$$\mathcal{M}(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} + gA \frac{\partial y(A; x, t)}{\partial x} + gA(S_f(A, Q; x, t) - S_o) = 0 \quad (3.12)$$



Y también sustituyendo la ecuación (2.25) en la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(A, Q; x, t) = & \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \left( gD - \frac{Q^2}{A^2} \right) + \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} \\ & + gA \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} + S_f(A, Q; x, t) - S_o \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $D = A/B$  es el tirante hidráulico.

### 3.2. FORMULACIÓN DEL ESQUEMA DISCRETO DE PREISSMANN

El esquema de Preissmann es un método de diferencias finitas implícito que toma en cuenta coeficientes de ponderación espacial y temporal como se muestra en la Figura 14.

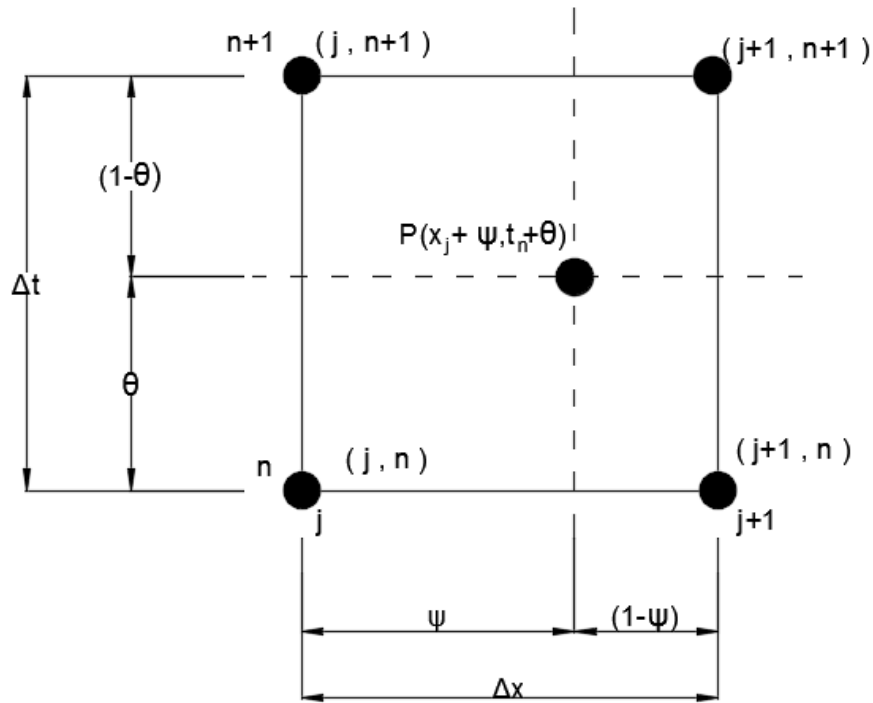


Figura 14. Representación del esquema de Preissmann en el plano  $(x - t)$ , donde  $\Psi$  y  $\theta$  es el factor de peso espacial y temporal respectivamente (Aguilar, 2002; Cunge *et al.*, 1980; Abbott, 1979).

Para discretizar el sistema continuo en un esquema de Preissmann, el espacio de solución  $\Omega(x, t)$  debe ser cubierto con una malla uniforme con un espaciado  $\Delta x$  para cualquier intervalo  $\Delta t$  (véase Figura 15), donde  $\Delta x = \frac{L}{J}$ ,  $\Delta t = \frac{T}{N}$ ;  $J$  y  $N$  son números enteros e indican



la cantidad de intervalos computacionales de discretización espacial y temporal respectivamente, por lo tanto, el espacio de solución en forma discreta se puede escribir como  $\Omega(x_j, t_n) = \Omega(j\Delta x, n\Delta t)$ .

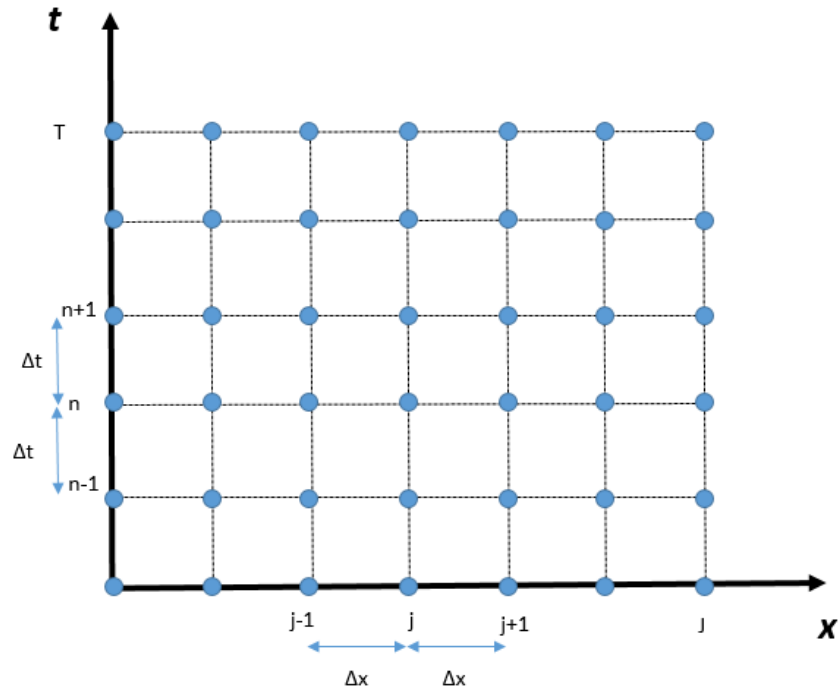


Figura 15. Representación del mallado en el espacio de solución.

Respecto a la malla, se deben notar los siguientes puntos (French, 1988):

1. Los nodos de la malla se presentan en las intersecciones de las líneas rectas paralelas a los ejes  $x$  y  $t$ .
2. Las líneas paralelas al eje  $t$  representan las ubicaciones a lo largo del canal, mientras que las paralelas al eje  $x$  representan los tiempos.
3. Las líneas de las ubicaciones se dibujan con una separación  $\Delta x$ , mientras que las líneas de tiempo se dibujan con una separación  $\Delta t$ . Por razones de conveniencia, en este desarrollo  $\Delta x$  y  $\Delta t$  se consideran constantes; en la práctica,  $\Delta x$  y  $\Delta t$  pueden variar en el espacio y en el tiempo.
4. El eje  $t$  puede considerarse como la condición de frontera aguas arriba, y la última línea paralela al eje  $t$  representa la condición de frontera aguas abajo.
5. Cada nodo de la malla se identifica con dos índices: un subíndice designa la posición  $x$  del nodo, mientras que el superíndice designa la ubicación del nodo en el tiempo.
6. En el tiempo  $t = t_0$ , se supone que se dispone de los valores iniciales de velocidad y área en todas las ubicaciones.



7. Se supone que en la frontera aguas arriba se dispone de un hidrograma de gasto. La frontera aguas abajo del canal se considera un área en función de un tirante.

Entonces, para la derivada espacial, temporal y términos adicionales se evaluarán de la forma siguiente (T. Shamaa & M. Karkuri, 2011):

Discretización de las derivadas temporales

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} (f_j^{n+1} - f_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^n) \quad (3.14)$$

donde  $\Psi \in [1,0]$ , es el factor de peso espacial

Discretización de las derivadas espaciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}) \quad (3.15)$$

donde  $\theta \in [1,0]$ , es el factor de peso temporal

Discretización de los términos adicionales

$$f = (1 - \theta)[(1 - \Psi)f_j^n + \Psi f_{j+1}^n] + \theta[(1 - \Psi)f_j^{n+1} + \Psi f_{j+1}^{n+1}] \quad (3.16)$$

Entonces aplicando las ecuaciones (3.14)-(3.16) a las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento (ecuaciones (3.4) y (3.8) respectivamente), además se propone separar los términos que producen la no linealidad mediante la notación  $\Pi_{ij}$ , por lo tanto el sistema de ecuaciones se puede escribir de la forma siguiente (Aguilar, 2002):

Ecuación de conservación de masa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A_j^n, U_j^n; x_j, t_n) &= \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} (A_j^{n+1} - A_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (A_{j+1}^{n+1} - A_{j+1}^n) \\ &+ \Pi_{1j} \left\{ \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (U_{j+1}^n - U_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}) \right\} \\ &+ \Pi_{2j} \left\{ \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1} - A_j^{n+1}) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$



## Ecuación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(A_j^n, U_j^n; x_j, t_n) &= \frac{(1-\Psi)}{\Delta t}(U_j^{n+1} - U_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t}(U_{j+1}^{n+1} - U_{j+1}^n) \\
&+ \Pi_{3j} \left\{ \frac{(1-\theta)}{\Delta x}(U_{j+1}^n - U_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x}(U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}) \right\} \\
&+ \Pi_{4j} \left\{ \frac{(1-\theta)}{\Delta x}(A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x}(A_{j+1}^{n+1} - A_j^{n+1}) \right\} \\
&+ \Pi_{5j} \{ (1-\theta)[(1-\Psi)U_j^n + \Psi U_{j+1}^n] + \theta[(1-\Psi)U_j^{n+1} + \Psi U_{j+1}^{n+1}] \} \\
&+ g \left\{ (1-\theta) \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\
&+ \theta \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^{n+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^{n+1} \right] \left. \right\} \left\{ \frac{db}{dx} \right\} \\
&+ \left\{ (1-\theta) \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\
&+ \theta \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^{n+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^{n+1} \right] \left. \right\} \left\{ \frac{dk}{dx} \right\} - S_o = 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

donde  $\Pi_{ij}$  son los términos que producen la no linealidad

$$\Pi_{1j} = (1-\theta)[(1-\Psi)A_j^n + \Psi A_{j+1}^n] + \theta[(1-\Psi)A_j^{n+1} + \Psi A_{j+1}^{n+1}] \tag{3.19}$$

$$\Pi_{2j} = (1-\theta)[(1-\Psi)U_j^n + \Psi U_{j+1}^n] + \theta[(1-\Psi)U_j^{n+1} + \Psi U_{j+1}^{n+1}] \tag{3.20}$$

$$\Pi_{3j} = (1-\theta)[(1-\Psi)U_j^n + \Psi U_{j+1}^n] + \theta[(1-\Psi)U_j^{n+1} + \Psi U_{j+1}^{n+1}] \tag{3.21}$$

$$\Pi_{4j} = (1-\theta) \left[ (1-\Psi) \left( \frac{g}{B} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{g}{B} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[ (1-\Psi) \left( \frac{g}{B} \right)_j^{n+1} + \Psi \left( \frac{g}{B} \right)_{j+1}^{n+1} \right] \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{5j} &= (1-\theta) \left[ (1-\Psi) \left( \frac{g n^2 |U|}{R^{4/3}} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{g n^2 |U|}{R^{4/3}} \right)_{j+1}^n \right] \\
&+ \theta \left[ (1-\Psi) \left( \frac{g n^2 |U|}{R^{4/3}} \right)_j^{n+1} + \Psi \left( \frac{g n^2 |U|}{R^{4/3}} \right)_{j+1}^{n+1} \right]
\end{aligned} \tag{3.23}$$



### 3.2.1. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA DEL ESQUEMA DE PREISSMANN

Una solución numérica es convergente si al hacer un refinamiento de la malla de cálculo el error de truncamiento disminuye, mientras que los errores de redondeo no incrementan. Es por esto que en la solución de un sistema discreto es necesario asegurar que los resultados numéricos obtenidos sean semejantes a los que se obtendrán después de aplicar una integración directa del sistema diferencial de origen (Cruz Mayo *et al.*, 2014).

Entonces para asegurar que la solución discreta se asemeje a la solución integral, se aplicará el Teorema de equivalencia de Lax, que en forma general enuncia (Morton & Mayers, 2005):

*“Cualquier esquema discreto lineal de un problema de valor inicial y de valores en la frontera bien planteado, es convergente si la propuesta discreta es consistente y además es estable”.*

Teorema de consistencia numérica (Aguilar, 2002):

*“La discretización aplicada a un sistema de ecuaciones es consistente numéricamente bajo cualquier norma  $\| \cdot \|$ , el error de truncado tiende a cero a medida que el espaciado de la malla tiende a cero, tal que  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ ”.*

Teorema de Condición de Estabilidad (Morton & Mayers, 2005; Abbot, 1979):

*“Un esquema discreto es estable si la condición de propagación de la relación de dispersión es menor o igual a la unidad, entonces  $|\rho| \leq 1$ , además si durante su aplicación los efectos acumulativos de todos los errores de redondeo son despreciables o están acotados”.*

En los subcapítulos siguientes se realizará el análisis de consistencia numérica y el análisis de estabilidad, necesarios para demostrar el Teorema de equivalencia de Lax, aplicados al esquema de Preissmann.

### 3.2.2. ANÁLISIS DE CONSISTENCIA NUMÉRICA

Este análisis evalúa las propiedades y los alcances del método de discretización (esquema de Preissmann) aplicado al sistema de ecuaciones de Saint-Venant.

A partir del sistema discreto de las ecuaciones de Saint-Venant (3.17) y (3.18), en estas ecuaciones las variables dependientes  $A_j^n, U_j^n$  solo tienen valores en la posición  $x_j, t_n$ . Entonces es necesario proponer una función polinomial que pase por cada punto de discretización del espacio, por lo tanto,  $A(x_j, t_n) = A_j^n, U(x_j, t_n) = U_j^n$ , y estas funciones polinomiales tienen un grado de continuidad  $f \in C^n$ , por lo que es permisible aplicar una expansión en serie de Taylor de grado  $n$ .





De acuerdo a lo anterior se propone aplicar una expansión en serie de Taylor para cada punto del esquema de Preissmann (Figura 14);  $F(x_j, t_{n+1})$ ,  $F(x_{j+1}, t_{n+1})$ ,  $F(x_j, t_n)$ ,  $F(x_{j+1}, t_n)$  (véase ANEXO B).

Entonces, la consistencia numérica de la derivada temporal (3.14), la derivada espacial (3.15) y los términos adicionales (3.16) del esquema de Preissmann se determinarán sustituyendo las expansiones en serie de Taylor (Aguilar, 2002).

Derivadas temporales

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f_t + \frac{(1-2\theta)}{2} \Delta t f_{tt} + \frac{\Psi(1-\Psi)}{3!} \Delta x^2 f_{xxt} + \frac{1-3\theta-3\theta^2}{3!} \Delta t^2 f_{ttt} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \quad (3.24)$$

Derivadas espaciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x + \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x f_{xx} + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 f_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 f_{xtt} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \quad (3.25)$$

Términos adicionales

$$f = f + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 f_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 f_{tt} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \quad (3.26)$$

Para facilitar el análisis de consistencia se consideró la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} &= F_x, & \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} &= F_t, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} &= F_{xx}, & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} &= F_{tt}, & \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_j, t_n} &= F_{xxx}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \Big|_{x_j, t_n} &= F_{ttt}, & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} &= F_{xtt}, & \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial t} \Big|_{x_j, t_n} &= F_{xxt}. \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.24)-(3.26) al sistema de ecuaciones de Saint-Venant (3.4) y (3.7), se tiene:

Ecuación de conservación de masa

$$\begin{aligned} \ell(A, U; x, t) &= A_t + \frac{(1-2\theta)}{2} \Delta t A_{tt} + \frac{\Psi(1-\Psi)}{3!} \Delta x^2 A_{xxt} + \frac{1-3\theta-3\theta^2}{3!} \Delta t^2 A_{ttt} \\ &+ \left[ A + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 A_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 A_{tt} \right] \left[ U_x + \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x U_{xx} \right. \\ &+ \left. \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 U_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 U_{xtt} \right] \\ &+ \left[ U + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 U_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 U_{tt} \right] \left[ A_x + \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x A_{xx} \right. \\ &+ \left. \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 A_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 A_{xtt} \right] + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \end{aligned} \quad (3.27)$$



Ecuación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned}
m(A, U; x, t) = & U_t + \frac{(1-2\theta)}{2} \Delta t U_{tt} + \frac{\Psi(1-\Psi)}{3!} \Delta x^2 U_{xxt} + \frac{1-3\theta-3\theta^2}{3!} \Delta t^2 U_{ttt} \\
& + \left[ U + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 U_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 U_{tt} \right] \left[ U_x + \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x U_{xx} \right. \\
& \left. + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 U_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 U_{xtt} \right] \\
& + g \left[ \frac{1}{B} + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 \left( \frac{1}{B} \right)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left( \frac{1}{B} \right)_{tt} \right] \left[ A_x \right. \\
& \left. + \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x A_{xx} + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 A_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 A_{xtt} \right] \quad (3.28) \\
& + g \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} \right) + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} \right)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} \right)_{tt} \right. \\
& + \left( \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right) + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 \left( \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left( \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right)_{tt} \\
& \left. + (S_f - S_o) + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 (S_f - S_o)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 (S_f - S_o)_{tt} \right] \\
& + O(\Delta x^3, \Delta t^3)
\end{aligned}$$

El desarrollo completo de la consistencia numérica aplicado al sistema de ecuaciones de Saint-Venant se muestra en el ANEXO C.

### Demostración:

La aplicación del esquema de Preissmann en el sistema de ecuaciones de Saint-Venant es consistente numéricamente bajo cualquier norma, cuando se tiene un refinamiento de la malla de forma que  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ .

Entonces en el ANEXO C se demuestra que:

$$\left. \begin{aligned}
\| \mathcal{L}(A, U; x, t) - \ell(A, U; x, t) \| &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \\
\| \mathcal{M}(A, U; x, t) - m(A, U; x, t) \| &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0
\end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

■



### 3.2.3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD NUMÉRICA

La estabilidad de una aproximación numérica no tiene relación con las ecuaciones diferenciales parciales, sino con los problemas de aproximación que pueden presentarse al realizar operaciones aritméticas para resolver las ecuaciones de diferencias finitas.

Para evaluar el comportamiento de la estabilidad del esquema continuo y discreto se utilizará el método de Fourier continuo y discreto respectivamente (Abbott, 1979). Para emplear este método es necesario que las ecuaciones de Saint-Venant conformen un sistema linealizado (J. Fletcher, 1990), y a este sistema se aplicarán las expansiones de Fourier para determinar las condiciones de estabilidad del sistema continuo y discreto.

Para realizar la linealización de las ecuaciones de Saint-Venant, es necesario aplicar un método de análisis perturbatorio y de localización (Aguilar, 2002).

#### 3.2.3.1. CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA PERTURBADO

En este análisis se determinará la propagación de perturbaciones, introduciendo una pequeña perturbación que actúa sobre las variables dependientes de área y velocidad del sistema de ecuaciones de Saint-Venant conservativas (ecuaciones (3.4) y (3.7)), entonces las ecuaciones perturbatorias se expresan de la forma siguiente:

$$A = \bar{A} + a \quad ; \quad \|\bar{A}\| \gg \|a\| \quad (3.30)$$

$$U = \bar{U} + u \quad ; \quad \|\bar{U}\| \gg \|u\| \quad (3.31)$$

Donde  $\bar{A}$  y  $\bar{U}$  son las soluciones de referencia que tienen una variación suave o de baja frecuencia dentro del dominio de solución (véase Figura 16.b), y  $a$  y  $u$  son pequeñas perturbaciones que actúan sobre los valores de referencia que tienen una variación brusca o de frecuencia alta (véase Figura 16.c).

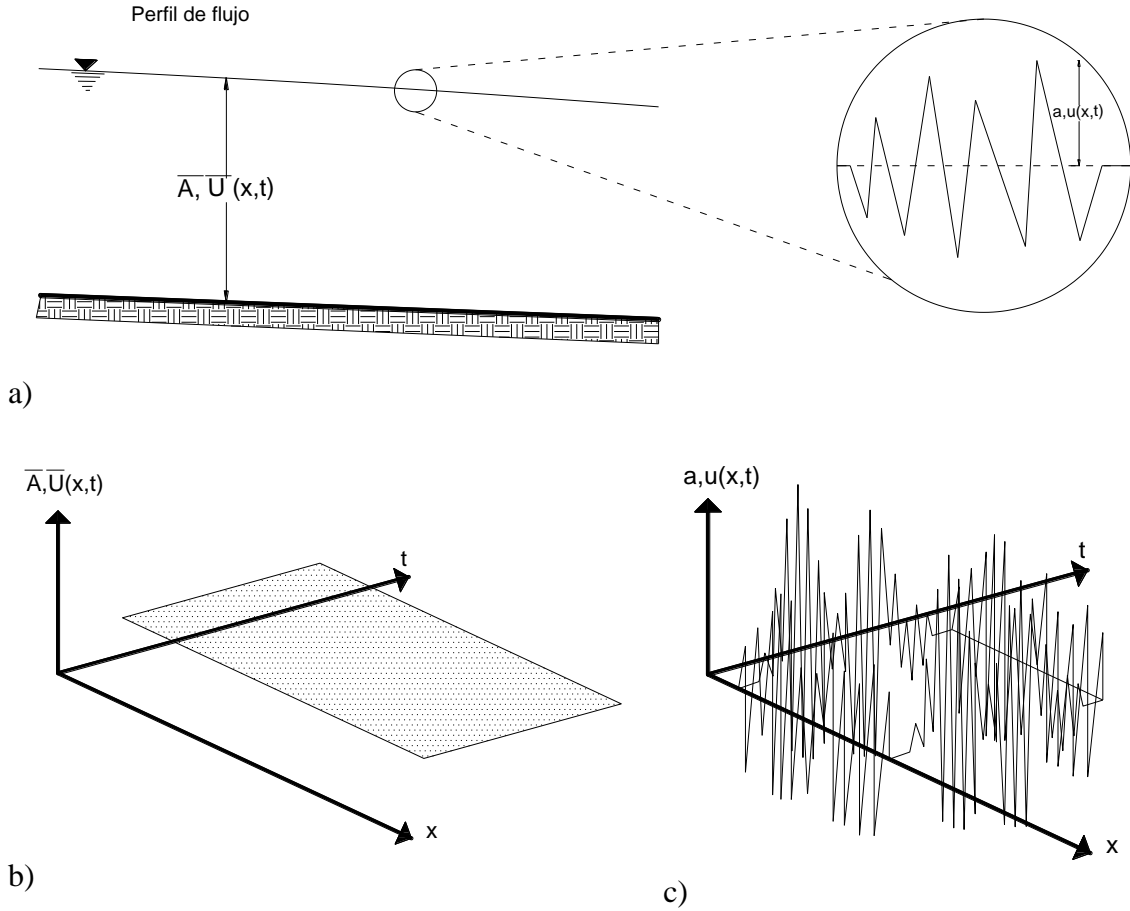


Figura 16. a) Perfil de flujo normalizado. b) Problema de escala grande. c) Problema de escala pequeña.

Sustituyendo las ecuaciones (3.30) y (3.31) en el sistema de ecuaciones de Saint-Venant (ecuaciones (3.4) y (3.7)), tenemos que:

$$\mathcal{L}(\bar{A} + a, \bar{U} + u) = \frac{\partial(\bar{A} + a)}{\partial t} + (\bar{A} + a) \frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial x} + (\bar{U} + u) \frac{\partial(\bar{A} + a)}{\partial x} = 0 \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\bar{A} + a, \bar{U} + u) &= \frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial t} + (\bar{U} + u) \frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial x} + \frac{g}{B} \frac{\partial(\bar{A} + a)}{\partial x} \\ &+ g \left( \frac{\partial y(\bar{A} + a)}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial y(\bar{A} + a)}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right) + g(S_f(\bar{A} + a, \bar{U} + u) - S_o) = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$



Desarrollando las ecuaciones anteriores, obtenemos:

Ecuación de conservación de masa

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \bar{A} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{U} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial t} + (\bar{A} + a) \frac{\partial u}{\partial x} + (\bar{U} + u) \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} = 0 \quad (3.34)$$

Debido a que la ecuación de cantidad de movimiento tiene términos no lineales y términos que tienen una dependencia con respecto a las dos variables de referencia de área y velocidad. Entonces se aplica una expansión en serie de Frechét-Taylor, como se muestra a continuación:

$$y(\bar{A} + a) = y(\bar{A}) + a \left. \frac{\partial y(A)}{\partial A} \right|_{\bar{A}} + O(\|a\|^2)$$

donde  $\left. \frac{\partial y(A)}{\partial A} \right|_{\bar{A}} = \frac{1}{B}$ , entonces

$$y(\bar{A} + a) = y(\bar{A}) + \frac{a}{B} + O(\|a\|^2) \quad (3.35)$$

Sustituyendo la ecuación (3.35), en los términos  $\frac{\partial y(\bar{A}+a)}{\partial b}$  y  $\frac{\partial y(\bar{A}+a)}{\partial k}$ , se obtiene

$$\frac{\partial y(\bar{A} + a)}{\partial b} = \frac{\partial y(\bar{A})}{\partial b} + \frac{1}{B} \frac{\partial a}{\partial b} + O(\|a\|^2) \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial y(\bar{A} + a)}{\partial k} = \frac{\partial y(\bar{A})}{\partial k} + \frac{1}{B} \frac{\partial a}{\partial k} + O(\|a\|^2) \quad (3.37)$$

Además

$$S_f(\bar{A} + a, \bar{U} + u) = S_f(\bar{A}, \bar{U}) + a \left. \frac{\partial S_f(A, U)}{\partial A} \right|_{\bar{A}, \bar{U}} + u \left. \frac{\partial S_f(A, U)}{\partial U} \right|_{\bar{A}, \bar{U}} + O[(\|a\|, \|u\|)^2]$$

Utilizando una forma más compacta de la ecuación anterior

$$S_f(\bar{A} + a, \bar{U} + u) = \bar{S}_f + a \bar{S}_{f_A} + u \bar{S}_{f_U} + O[(\|a\| + \|u\|)^2] \quad (3.38)$$



donde

$$\bar{S}_{f_A} = \left. \frac{\partial S_f(A, U)}{\partial A} \right|_{\bar{A}, \bar{U}} = -\frac{4}{3} \bar{S}_f \left[ \frac{1}{\bar{A}} - \frac{1}{\bar{B}\bar{P}} \frac{d\bar{P}}{d\bar{y}} \right] \quad (3.39)$$

$$\bar{S}_{f_U} = \left. \frac{\partial S_f(A, U)}{\partial U} \right|_{\bar{A}, \bar{U}} = \frac{2\bar{S}_f}{\bar{U}} \quad (3.40)$$

$$\bar{S}_f = \frac{n^2 |\bar{U}| \bar{U}}{\bar{R}^{4/3}} \quad (3.41)$$

Finalmente, la ecuación de cantidad de movimiento se puede escribir de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{g}{\bar{B}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + g \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right) + g(\bar{S}_f - S_o) + \frac{\partial u}{\partial t} + (\bar{U} + u) \frac{\partial u}{\partial x} \\ + u \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{g}{\bar{B}} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{g}{\bar{B}} \left( \frac{\partial a}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial a}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right) + g(a\bar{S}_{f_A} + u\bar{S}_{f_U}) \\ + O[(\|a\| + \|u\|)^2] = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Dado que  $\bar{A}$  y  $\bar{U}$  representan las soluciones de referencia, entonces:

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \bar{A} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{U} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{g}{\bar{B}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + g \left( \frac{\partial \bar{y}}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right) + g(\bar{S}_f - S_o) = 0 \quad (3.44)$$

Eliminando la condición de referencia (ecuaciones (3.43) y (3.44)) de las ecuaciones de conservación de masa (3.34) y cantidad de movimiento (3.42), obtenemos un sistema de ecuaciones que describe el comportamiento de las perturbaciones, entonces:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + (\bar{A} + a) \frac{\partial u}{\partial x} + (\bar{U} + u) \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} = 0 \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (\bar{U} + u) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{g}{\bar{B}} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{g}{\bar{B}} \left( \frac{\partial a}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial a}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right) + g(a\bar{S}_{f_A} + u\bar{S}_{f_U}) \\ + O[(\|a\| + \|u\|)^2] = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$



### 3.2.3.2. ANÁLISIS DE LOCALIZACIÓN

Para el análisis de localización sobre un punto arbitrario, se deduce que para las variables de referencia tienen un comportamiento suave o casi nula, y que las variables de perturbación tienen un comportamiento rápido o de gran variabilidad. Considerando esto, se dice que las variables de referencia pueden ser localizadas y las variables de perturbación no pueden ser localizadas.

Para las variables de escala grande, por ejemplo  $\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = 0$ , debido a que el flujo se considera que tiende a ser paralelo a la plantilla del fondo del canal (véase Figura 16.a), entonces se puede decir que no existen variaciones en el nivel del flujo a lo largo del eje horizontal y por lo consiguiente, las variaciones del área y la velocidad de referencia son nulas.

En el caso de los términos no lineales de las perturbaciones, por ejemplo  $u \frac{\partial a}{\partial x} = 0$  si  $\|\bar{A}\| \gg \|a\|$ , entonces la magnitud de los términos no lineales es  $O(a^2)$ . Entonces para los términos de orden uno de la ecuación perturbada (3.45) y (3.46).

Conservación de masa

$$\frac{\partial a}{\partial t} + A_o \frac{\partial u}{\partial x} + U_o \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \quad (3.47)$$

Cantidad de movimiento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_o \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g}{B_o} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{g}{B_o} \left( \frac{\partial a}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial a}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right) + g \left( a S_{f_{A_o}} + u S_{f_{U_o}} \right) = 0 \quad (3.48)$$

El sistema de ecuaciones anterior es un problema lineal de valor inicial puro bien planteado y de coeficientes constantes para un espacio de solución  $x \in (-\infty, \infty)$  (Aldama & Aguilar, 1996).

La ecuación (3.48) también se puede escribir de la forma siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_o \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g}{B_o} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{g}{B_o} \left( \frac{\partial a}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial a}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right) + g(a F_1 + u F_2) = 0 \quad (3.49)$$

donde

$$F_1 = S_{f_{A_o}} = -\frac{4}{3} S_{f_o} \left[ \frac{1}{A_o} - \frac{1}{B_o P_o} \frac{dP_o}{dy} \right] \quad (3.50)$$



$$F_2 = S_{f_{U_o}} = \frac{2S_{f_o}}{U_o} \quad (3.51)$$

$$S_{f_o} = \frac{n^2 |U_o| U_o}{R_o^{4/3}} \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} [b\dot{y} + k\dot{y}^2] = \dot{y} \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial a}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} [b\dot{y} + k\dot{y}^2] = \dot{y}^2 \quad (3.54)$$

Las ecuaciones (3.53) y (3.54), fueron obtenidas en la condición inicial (ecuaciones (2.58) y (2.59)) respectivamente.

Donde  $a(x, t)$  es el área mojada,  $u(x, t)$  la velocidad como variables dependientes y  $\dot{y}(x, t)$  es el tirante perturbado;  $x, t$  distancia y tiempo respectivamente como variables independientes;  $A_o$ , el área media;  $U_o$ , la velocidad media.

### 3.2.3.3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL SISTEMA CONTINUO

Las ecuaciones linealizadas obtenidas de conservación de masa (3.47) y cantidad de movimiento (3.49) pueden ser solucionadas por medio de una expansión en serie de Fourier continua para las variables dependientes:

$$a(x, t) = \hat{a}e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.55)$$

$$u(x, t) = \hat{u}e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.56)$$

donde  $\hat{a}$ ,  $\hat{u}$  es la amplitud de la variable,  $k$  es el número de onda y  $\omega$  la frecuencia, aplicado a un modo arbitrario de Fourier. Sustituyendo las ecuaciones (3.55) y (3.66) en el sistema de ecuaciones (3.47) y (3.49) se tiene:

Ecuación de conservación de masa

$$e^{i(kx - \omega t)} [\hat{a}\omega - A_o \hat{u}k - U_o \hat{a}k] = 0 \quad (3.57)$$





Ecuación de cantidad de movimiento

$$e^{i(kx-\omega t)} \left[ \hat{u}\omega - U_o\hat{u}k - \frac{g}{B_o} \hat{a}k + g(\hat{a}F_1 + \hat{u}F_2) \right] + \frac{g}{B_o} \left( \dot{y} \frac{db}{dx} + \dot{y}^2 \frac{dk}{dx} \right) = 0 \quad (3.58)$$

Agrupando las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento en forma matricial se tiene:

$$e^{i(kx-\omega t)} \begin{bmatrix} \omega - U_o k & -A_o k \\ -\frac{g}{B_o} k + gF_1 & \omega - U_o k + gF_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

donde  $\beta = \frac{g}{B_o} \left( \dot{y} \frac{db}{dx} + \dot{y}^2 \frac{dk}{dx} \right)$

Entonces el sistema de ecuaciones (3.59) tendrá una solución diferente a la trivial, si y solo si el determinante de la matriz de coeficientes es nulo, esto es:

$$\omega^2 + \omega(-2U_o k + gF_2) + U_o k(U_o k - gF_2) + A_o k \left( -\frac{g}{B_o} k + gF_1 \right) + \beta = 0 \quad (3.60)$$

Entonces la solución a la ecuación anterior es:

$$\omega = \frac{-B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (3.61)$$

La ecuación anterior representa la relación de dispersión continua (Abbott, 1979; Morton & Mayers, 2005).

donde

$$A = 1 \quad (3.62)$$

$$B = -2U_o k + gF_2 \quad (3.63)$$

$$C = U_o k(U_o k - gF_2) + A_o k \left( -\frac{g}{B_o} k + gF_1 \right) + \beta \quad (3.64)$$

**3.2.3.4. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL SISTEMA DISCRETO**

Aplicando el método de discretización de Preissmann en el sistema de ecuaciones localizadas, y sustituyendo los operadores de derivada temporal, espacial y de términos adicionales, ecuaciones (3.14)-(3.16), el sistema de ecuaciones se convierte en un sistema de ecuaciones discretas en diferencias finitas lineal de coeficientes constantes como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} (a_j^{n+1} - a_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (a_{j+1}^{n+1} - a_{j+1}^n) \\ & + A_o \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) \right] \\ & + U_o \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (a_{j+1}^n - a_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (a_{j+1}^{n+1} - a_j^{n+1}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) \\ & + U_o \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) \right] \\ & + \frac{g}{B_o} \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (a_{j+1}^n - a_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (a_{j+1}^{n+1} - a_j^{n+1}) \right] \\ & + gF_1 \{ (1-\theta) [(1-\Psi)a_j^n + \Psi a_{j+1}^n] + \theta [(1-\Psi)a_j^{n+1} + \Psi a_{j+1}^{n+1}] \} \\ & + gF_2 \{ (1-\theta) [(1-\Psi)u_j^n + \Psi u_{j+1}^n] + \theta [(1-\Psi)u_j^{n+1} + \Psi u_{j+1}^{n+1}] \} \\ & + \frac{g}{B_o} \left( y \frac{db}{dx} + y^2 \frac{dk}{dx} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Dado que el sistema es lineal de coeficientes constantes, entonces este sistema se puede solucionar aplicando una expansión en serie discreta de Fourier (Aldama & Aguilar, 1996), por lo que las componentes discretas de Fourier para las variables de perturbación son las siguientes:

$$a_j^n = a(j\Delta x, n\Delta t; m) = \hat{a}(k) \rho_m^n e^{ikj\Delta x} \quad (3.67)$$

$$u_j^n = u(j\Delta x, n\Delta t; m) = \hat{u}(k) \rho_m^n e^{ikj\Delta x} \quad (3.68)$$

donde  $\rho_m^n$ , es el factor de amplificación del  $m$  – ésimo modo de Fourier y  $k$  es el número de onda.



Sustituyendo los componentes de Fourier, para un nodo arbitrario de Fourier en el sistema de ecuaciones (3.65) y (3.66), se tiene que:

$$\rho^n e^{ikj\Delta x} \left\{ \hat{a} \left[ \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} (\rho-1) + \frac{\Psi}{\Delta t} e^{ik\Delta x} (\rho-1) \right] + A_o \hat{u} \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (e^{ik\Delta x} - 1) + \frac{\theta}{\Delta x} \rho (e^{ik\Delta x} - 1) \right] + U_o \hat{a} \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (e^{ik\Delta x} - 1) + \frac{\theta}{\Delta x} \rho (e^{ik\Delta x} - 1) \right] \right\} = 0 \quad (3.69)$$

$$\rho^n e^{ikj\Delta x} \left\{ \hat{u} \left[ \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} (\rho-1) + \frac{\Psi}{\Delta t} e^{ik\Delta x} (\rho-1) \right] + U_o \hat{u} \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (e^{ik\Delta x} - 1) + \frac{\theta}{\Delta x} \rho (e^{ik\Delta x} - 1) \right] + \frac{g}{B_o} \hat{a} \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (e^{ik\Delta x} - 1) + \frac{\theta}{\Delta x} \rho (e^{ik\Delta x} - 1) \right] + gF_1 \hat{a} \{ (1-\theta)[(1-\Psi) + \Psi e^{ik\Delta x}] + \theta[(1-\Psi)\rho + \Psi \rho e^{ik\Delta x}] \} + gF_2 \hat{u} \{ (1-\theta)[(1-\Psi) + \Psi e^{ik\Delta x}] + \theta[(1-\Psi)\rho + \Psi \rho e^{ik\Delta x}] \} \right\} + \frac{g}{B_o} \left( y \frac{db}{dx} + y^2 \frac{dk}{dx} \right) = 0 \quad (3.70)$$

Considerando una forma alternativa de representar los términos exponenciales, tal que:

$$e^{ik\Delta x} = \cos(k\Delta x) + i \operatorname{sen}(k\Delta x) \quad (3.71)$$

Sea  $c = \cos(k\Delta x)$ ,  $s = \operatorname{sen}(k\Delta x)$ ,  $\lambda = \Delta t/\Delta x$

Multiplicando el sistema de ecuaciones (3.69) y (3.70) por  $\Delta t$ , obteniendo

Ecuación de conservación de masa

$$\rho^n e^{ikj\Delta x} \left\{ \hat{a} (\rho-1) [(1-\Psi) + \Psi e^{ik\Delta x}] + A_o \hat{u} (e^{ik\Delta x} - 1) [\lambda(1-\theta) + \lambda\theta\rho] + \hat{a} (e^{ik\Delta x} - 1) [Cr(1-\theta) + Cr\theta\rho] \right\} = 0 \quad (3.72)$$



Ecuación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} \rho^n e^{ikj\Delta x} \left\{ \hat{u}[(1 - \Psi)(\rho - 1) + \Psi e^{ik\Delta x}(\rho - 1)] \right. \\ + U_o \hat{u}[\lambda(1 - \theta)(e^{ik\Delta x} - 1) + \lambda\theta\rho(e^{ik\Delta x} - 1)] \\ + \frac{g}{B_o} \hat{a}[\lambda(1 - \theta)(e^{ik\Delta x} - 1) + \lambda\theta\rho(e^{ik\Delta x} - 1)] \\ + \Delta t g F_1 \hat{a}\{(1 - \theta)[(1 - \Psi) + \Psi e^{ik\Delta x}] \\ + \theta[(1 - \Psi)\rho + \Psi\rho e^{ik\Delta x}]\} \\ + \Delta t g F_2 \hat{u}\{(1 - \theta)[(1 - \Psi) + \Psi e^{ik\Delta x}] \\ + \theta[(1 - \Psi)\rho + \Psi\rho e^{ik\Delta x}]\} \left. \right\} + \Delta t \frac{g}{B_o} \left( y \frac{db}{dx} + y^2 \frac{dk}{dx} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

donde  $Cr$  es el número de Courant<sup>3</sup>.

$$Cr = U_o \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.74)$$

Aplicando la ecuación (3.71) a las ecuaciones (3.72) y (3.73) y simplificando, tenemos:

$$\begin{aligned} \rho^n e^{ikj\Delta x} \left\{ \hat{a}\{(c + is - 1)[\Psi(\rho - 1) + Cr(1 - \theta) + Cr\theta\rho] + (\rho - 1)\} \right. \\ \left. + \hat{u}\{(c + is - 1)[\lambda A_o(1 - \theta + \theta\rho)]\} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \rho^n e^{ikj\Delta x} \left\{ \hat{a} \left\{ \frac{g}{B_o} [\lambda(1 - \theta)(c + is - 1) + \lambda\theta\rho(c + is - 1)] \right. \right. \\ + \Delta t g F_1 [(1 - \theta)[1 + \Psi(c + is - 1)] + \theta[\rho + \Psi\rho(c + is - 1)]] \left. \right\} \\ + \hat{u}\{[(\rho - 1)[1 + \Psi(c + is - 1)]] \\ + U_o [\lambda(1 - \theta)(c + is - 1) + \lambda\theta\rho(c + is - 1)] \\ + \Delta t g F_2 [(1 - \theta)[1 + \Psi(c + is - 1)] \\ + \theta[\rho + \Psi\rho(c + is - 1)]] \left. \right\} + \Delta t \frac{g}{B_o} \left( y \frac{db}{dx} + y^2 \frac{dk}{dx} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Para facilitar el cálculo, se considerará la siguiente notación:

$$\alpha = c + is - 1 \quad (3.77)$$

<sup>3</sup> El número de Courant, también llamado número de Courant, Friedrichs y Lewy (CFL) en honor a Richard Courant, Kurt Friedrichs y Hans Lewy (Courant, Friedrichs, & Lewy, 1928).



$$\beta = \Delta t \frac{g}{B_o} \left( y \frac{db}{dx} + y^2 \frac{dk}{dx} \right) \quad (3.78)$$

$$\delta = 1 + \Psi\alpha \quad (3.79)$$

$$\mu = \Delta t g F_1 \quad (3.80)$$

$$\xi = \Delta t g F_2 \quad (3.81)$$

Entonces, aplicando la notación anterior (3.77)-(3.81) a las ecuaciones (3.75) y (3.76), se obtiene

$$\begin{aligned} \rho^n e^{ikj\Delta x} \{ \hat{a} \{ \alpha [\Psi(\rho - 1) + Cr(1 - \theta) + Cr\theta\rho] + (\rho - 1) \} \\ + \hat{u} \{ \alpha [\lambda A_o(1 - \theta + \theta\rho)] \} \} = 0 \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \rho^n e^{ikj\Delta x} \left\{ \hat{a} \left\{ \frac{g}{B_o} [\lambda\alpha(1 - \theta + \theta\rho)] + \mu[\delta(1 - \theta + \theta\rho)] \right\} \right. \\ \left. + \hat{u} \{ (\rho - 1)\delta + U_o[\alpha(\lambda - \lambda\theta + \lambda\theta\rho)] + \xi[\delta(1 - \theta + \theta\rho)] \} \right\} + \beta = 0 \end{aligned} \quad (3.83)$$

En forma matricial las ecuaciones (3.82) y (3.83) se representa de la forma siguiente:

$$\rho^n e^{ikj\Delta x} \begin{bmatrix} \alpha[\Psi(\rho - 1) + Cr(1 - \theta) + Cr\theta\rho] + (\rho - 1) & \alpha[\lambda A_o(1 - \theta + \theta\rho)] \\ \frac{g}{B_o} [\lambda\alpha(1 - \theta + \theta\rho)] + \mu[\delta(1 - \theta + \theta\rho)] & (\rho - 1)\delta + U_o[\alpha(\lambda - \lambda\theta + \lambda\theta\rho)] + \xi[\delta(1 - \theta + \theta\rho)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Entonces calculando el determinante de la matriz de coeficientes e igualando a cero.

$$\begin{aligned} \{ \alpha[\Psi(\rho - 1) + Cr(1 - \theta) + Cr\theta\rho] + \rho - 1 \} \{ (\rho - 1)\delta + U_o[\alpha(\lambda - \lambda\theta + \lambda\theta\rho)] \\ + \xi[\delta(1 - \theta + \theta\rho)] \} \\ - \left\{ \frac{g}{B_o} [\lambda\alpha(1 - \theta + \theta\rho)] + \mu[\delta(1 - \theta + \theta\rho)] \right\} \{ \alpha[\lambda A_o(1 - \theta + \theta\rho)] \} \\ + \beta = 0 \end{aligned} \quad (3.85)$$

Simplificando la ecuación anterior, obtenemos:

$$\rho^2(\tau\Omega - \eta\sigma) + \rho(\tau\Pi + \Omega\Sigma - \eta\Phi - \varepsilon\sigma) + \Sigma\Pi - \varepsilon\Phi + \beta = 0 \quad (3.86)$$



Se utilizó la siguiente notación para facilitar operaciones:

$$\tau = \alpha\Psi + \alpha Cr\theta + 1 \quad (3.87)$$

$$\Sigma = \alpha Cr(1 - \theta) - \alpha\Psi - 1 \quad (3.88)$$

$$\Omega = \delta + U_o\alpha\lambda\theta + \xi\delta\theta \quad (3.89)$$

$$\Pi = U_o\alpha\lambda(1 - \theta) - \delta + \xi\delta(1 - \theta) \quad (3.90)$$

$$\eta = \frac{g}{B_o}\lambda\alpha\theta + \mu\delta\theta \quad (3.91)$$

$$\varepsilon = \frac{g}{B_o}\lambda\alpha(1 - \theta) + \mu\delta(1 - \theta) \quad (3.92)$$

$$\sigma = \alpha\lambda\theta \quad (3.93)$$

$$\Phi = \alpha\lambda(1 - \theta)A_o \quad (3.94)$$

La solución a la ecuación (3.86) es:

$$\rho = \frac{-B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (3.95)$$

La ecuación anterior representa la relación de dispersión discreta del esquema de Preissmann, donde

$$A = \tau\Omega - \eta\sigma \quad (3.96)$$

$$B = \tau\Pi + \Omega\Sigma - \eta\Phi - \varepsilon\sigma \quad (3.97)$$

$$C = \Sigma\Pi - \varepsilon\Phi + \beta \quad (3.98)$$

Aplicando la condición de estabilidad crítica para  $|\rho| \leq 1$  en la relación de dispersión (ecuación (3.95)).

$$|\rho| = \left| \frac{-B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right| \leq 1 \quad (3.99)$$

La ecuación anterior indica la condición de estabilidad límite del esquema de Preissmann, aplicado al sistema de ecuaciones de Saint-Venant conservativas en su versión diferencial.



La condición de estabilidad límite para los factores de peso en el espacio  $\Psi \in [0,1]$  y en el tiempo  $\theta \in [0,1]$ , y el número de Courant. De acuerdo con Lyn y Goodwin en (1987) para problemas homogéneos es:

$$\frac{\Psi - \frac{1}{2}}{Cr} + \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \quad (3.100)$$

La expresión anterior se puede expresar mediante el siguiente esquema (Lyn & Goodwin, 1987).

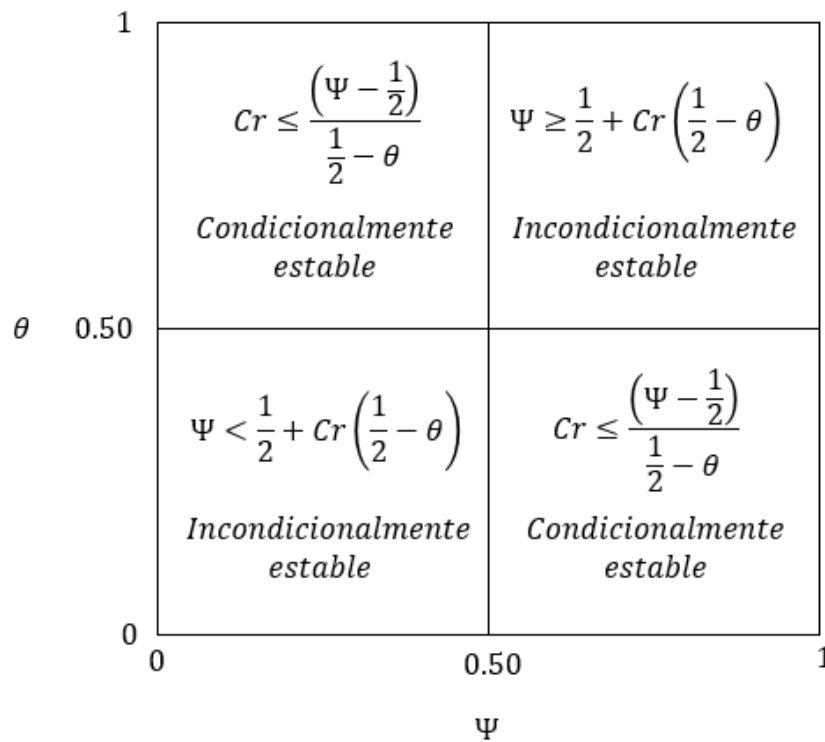


Figura 17. Regiones de estabilidad en el plano  $\Psi - \theta$ , para  $Cr > 0$ .

### 3.2.3.5. RETRATOS DE AMPLITUD

Los retratos de amplitud permiten examinar de manera visual la condición de estabilidad límite del esquema  $|\rho| \leq 1$  y se obtienen al graficar el módulo de la relación de dispersión discreta (3.99) en función de la longitud de onda  $k\Delta x$  (Morton & Mayers, 2005).



Para el cálculo y la graficación de los retratos de amplitud de la relación de dispersión numérica del esquema de Preissmann (ecuación (3.99)) se propondrán diferentes números de Courant (véase Tabla 2), así como para los factores de peso temporal  $\theta = 0.60$  y espacial  $\Psi = 0.50$ . Las condiciones de flujo se definirán para dos valores de la pendiente del fondo del canal, por lo que se evaluarán escenarios con flujo subcrítico (Sb1) y con flujo supercrítico (Sb2). Así mismo, se evaluarán para los casos de reducción y ampliación suave de la conducción para los dos tipos de regímenes de flujo.

Tabla 2 Valores de números de Courant

Número de Courant						
0.001	0.01	1.0	5.0	10.0	20.0	30.0

En la tabla siguiente se muestran las condiciones topológicas que se utilizarán para el caso de reducción y ampliación suave, así como para un régimen de flujo subcrítico y supercrítico.

Tabla 3. Condiciones topológicas generales

Parámetro	Unidades	Valor
Gasto	$m^3/s$	300
Rugosidad de Manning [n]	Adim.	0.014
Longitud del canal [L]	m	2000
Discretización espacial [ $\Delta x$ ]	m	0.1

A continuación, se muestran los valores geométricos de la conducción para el caso de una reducción suave para un régimen de flujo subcrítico y supercrítico.

Tabla 4. Datos generales de la sección (reducción suave, flujo subcrítico y supercrítico)

Parámetro	Unidades	Valor
Ancho de la base del canal en el tramo inicial [b1]	m	70
Ancho de la base del canal en el tramo final [b2]	m	50
Talud de la pared del canal en el tramo inicial [k1]	Adim.	4.0
Talud de la pared del canal en el tramo final [k2]	Adim.	1.0
<b>Condición Subcrítica</b>		
Pendiente del canal [Sb1]	Adim.	0.0001
Tirante normal [ $y_n$ ]	m	2.8299
Tirante crítico [ $y_c$ ]	m	1.2038
Número de Froude [Fr]	Adim.	0.2641
<b>Condición Supercrítica</b>		
Pendiente del canal [Sb2]	Adim.	0.01
Tirante normal [ $y_n$ ]	m	0.7303
Tirante crítico [ $y_c$ ]	m	1.2038
Número de Froude [Fr]	Adim.	2.1466



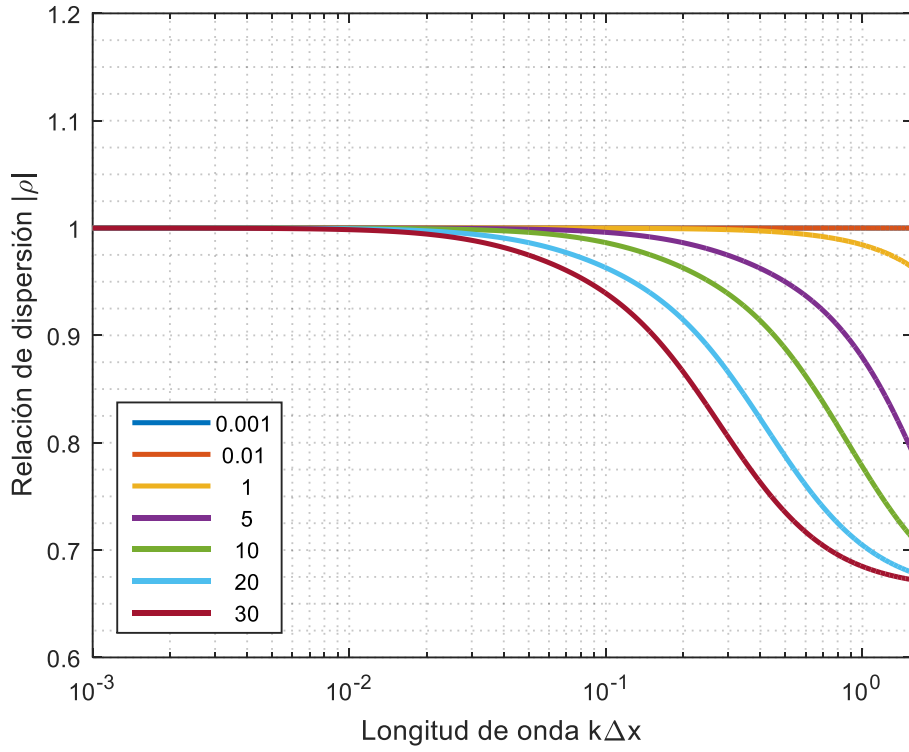


Figura 18. Retrato de amplitud, reducción suave y régimen de flujo subcrítico.

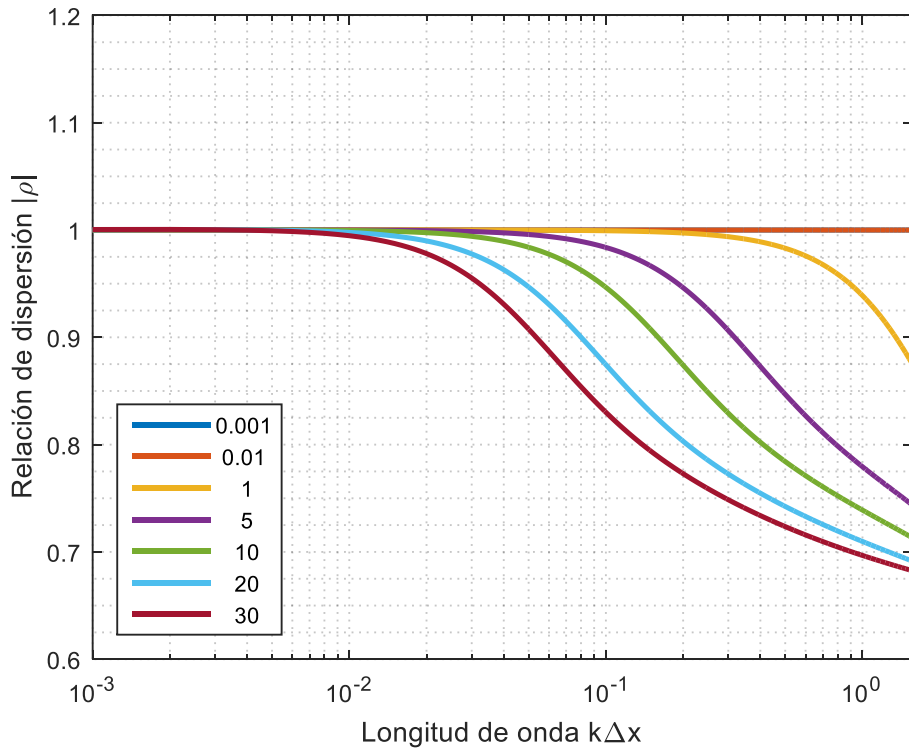


Figura 19. Retrato de amplitud, reducción suave y régimen de flujo supercrítico.



En la tabla siguiente se muestran los valores geométricos de la conducción para el caso de una ampliación suave para un régimen de flujo subcrítico y supercrítico.

Tabla 5. Datos generales de la sección (ampliación suave, flujo subcrítico y supercrítico)

Parámetro	Unidades	Valor
Ancho de la base del canal en el tramo inicial [b1]	m	50
Ancho de la base del canal en el tramo final [b2]	m	70
Talud de la pared del canal en el tramo inicial [k1]	Adim.	1.0
Talud de la pared del canal en el tramo final [k2]	Adim.	4.0
<b>Condición Subcrítica</b>		
Pendiente del canal [Sb1]	Adim.	0.0001
Tirante normal [ $y_n$ ]	m	3.6022
Tirante crítico [ $y_c$ ]	m	1.5266
Número de Froude [Fr]	Adim.	0.2700
<b>Condición Supercrítica</b>		
Pendiente del canal [Sb2]	Adim.	0.01
Tirante normal [ $y_n$ ]	m	0.9025
Tirante crítico [ $y_c$ ]	m	1.5266
Número de Froude [Fr]	Adim.	2.2141

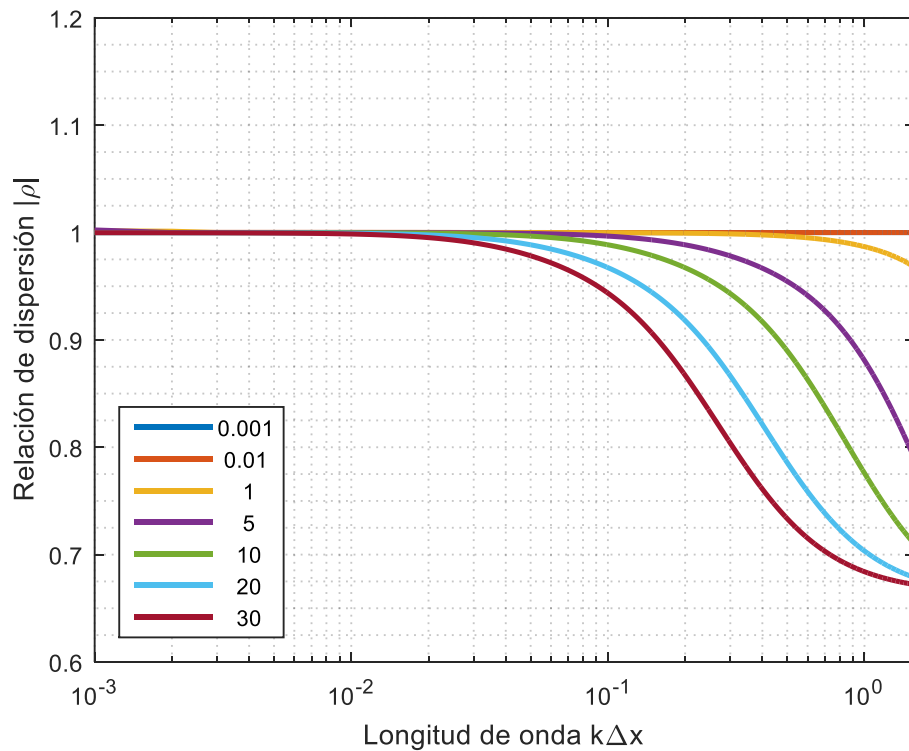


Figura 20. Retrato de amplitud, ampliación suave y régimen de flujo subcrítico.

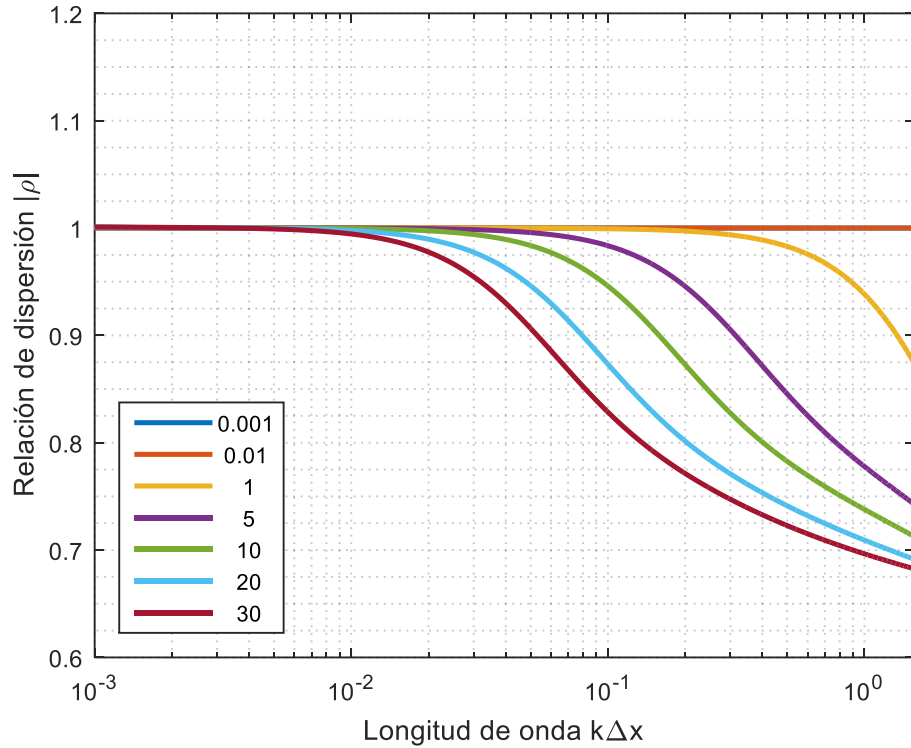


Figura 21. Retrato de amplitud, ampliación suave y régimen de flujo supercrítico.

Para analizar los retratos de amplitud realizadas, se dice que un esquema es libre de disipación para cualquier longitud de onda cuando el factor de amplificación  $|\rho| = 1$ , para valores mayores a la unidad  $|\rho| > 1$  la amplitud de las ondas incrementan en el tiempo (inestabilidad numérica), mientras que para valores menores a la unidad  $|\rho| < 1$  las ondas se amortiguan (Szymkiewicz, 2010). De acuerdo a esto, se concluye que el esquema de Preissmann resulta ser estable para los valores de los coeficientes de peso espacial y temporal  $\Psi = \frac{1}{2}$  y  $\theta \geq \frac{1}{2}$  y para diferentes números de Courant, así como para cualquier condición de flujo (subcrítico y supercrítico) y para cualquier tipo de transición, tales como reducción y ampliación suave.

### 3.2.3.6. RETRATOS DE FASE

Los modelos numéricos al ser aproximaciones a las soluciones exactas, pueden generar que las ondas de propagación discretas sean diferentes a las continuas. La forma de cuantificar estas diferencias en la propagación se realiza mediante la estimación de las relaciones de fase, que consideran los cambios en la propagación de las ondas, entre el sistema continuo (3.61) y el discreto (3.99).



Del análisis de estabilidad con el método de Fourier se tiene que el factor de amplificación es:

$$\rho_A = e^{-i\omega\Delta t} \quad (3.101)$$

Sustituyendo la relación de dispersión continua (3.61) en (3.101) se obtiene:

$$\rho_{cont} = e^{-i \left\{ \frac{-(-2U_0k + gF_2)}{2} \pm \sqrt{(-2U_0k + gF_2)^2 - 4 \left[ U_0k(U_0k - gF_2) + A_0k \left( -\frac{g}{B_0}k + gF_1 \right) + \beta \right]} \right\} \Delta t} \quad (3.102)$$

Por lo tanto, la fase del sistema continuo resulta:

$$\phi_{cont} = \arg(\rho_{cont}) \quad (3.103)$$

Para determinar la fase del sistema discreto se calcula el argumento de la relación de dispersión discreta obtenida (ecuación (3.99)), entonces:

$$\phi_{disc} = \arg(\rho_{disc}) \quad (3.104)$$

Para analizar los retratos de fase, se dice que el esquema numérico es libre de dispersión en la propagación de las ondas, si para cualquier componente de Fourier, el ángulo  $\phi_{disc}$  es constante, en caso contrario el esquema es dispersivo (Szymkiewicz, 2010).

Entonces al comparar las ecuaciones (3.103) y (3.104) en función de la longitud de onda para diferentes condiciones de flujo y números de Courant, se obtienen los retratos de fase mediante la siguiente relación:

$$\phi = |\phi_{cont}| - |\phi_{disc}| \quad (3.105)$$

Los datos utilizados para graficar los retratos de fase, son similares a los que se emplearon para la graficación de los retratos de amplitud para el caso de reducción suave (Tabla 4) y ampliación suave (Tabla 5) para el caso de un canal con sección trapezoidal.

De acuerdo a los resultados mostrados en los retratos de fase (Figura 22 - Figura 25), se determina que el esquema de Preissmann sobre el sistema de ecuaciones de Saint-Venant es libre de dispersión numérica para números de Courant pequeños  $Cr \approx 0$ .

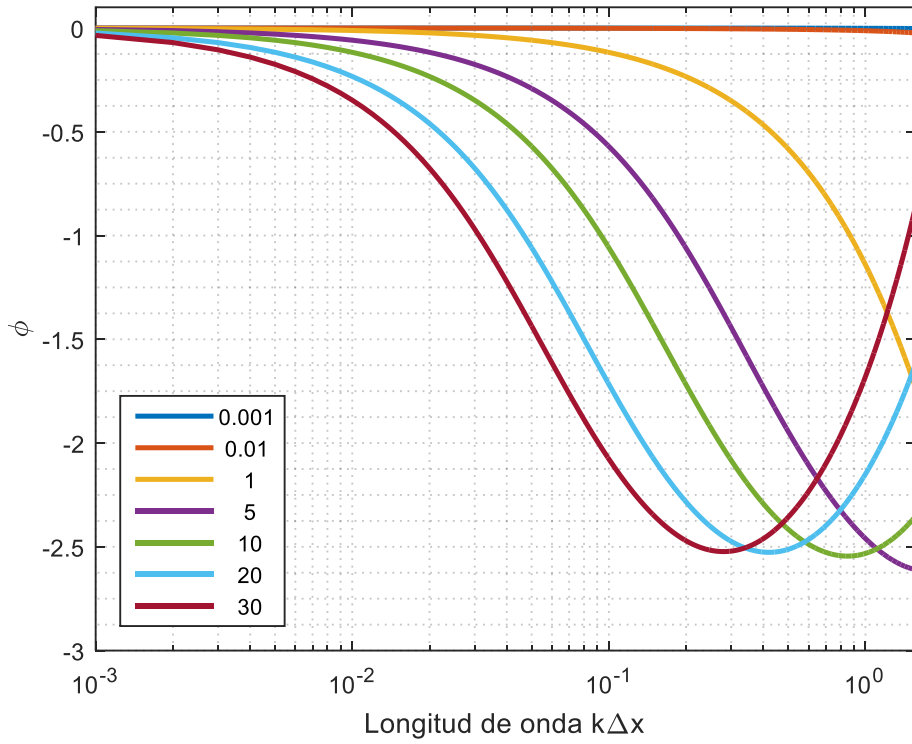


Figura 22. Retrato de fase, reducción suave y régimen de flujo subcrítico.

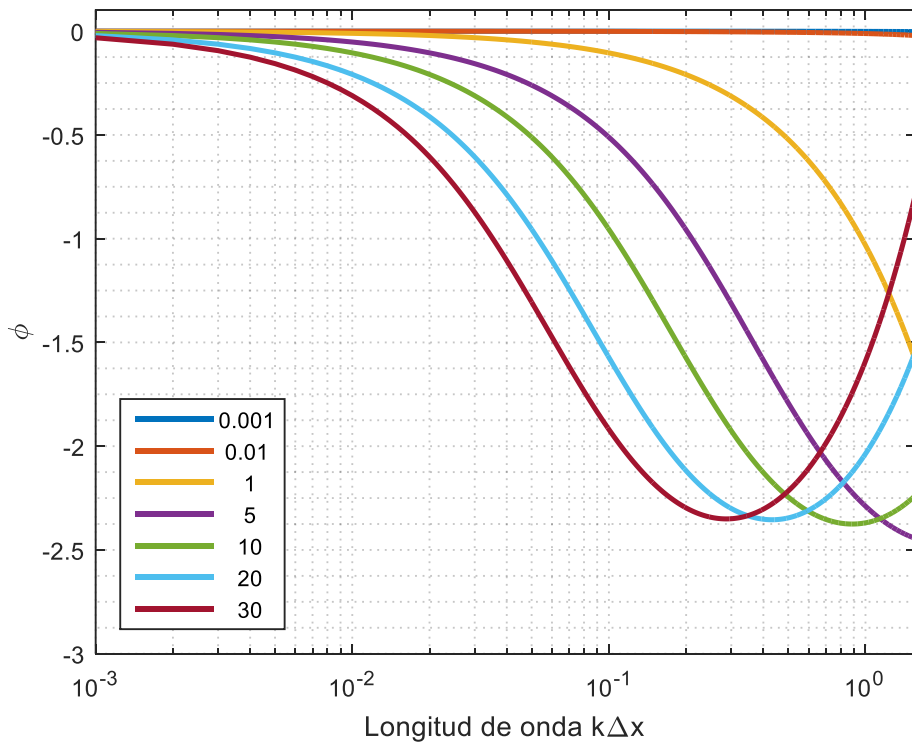


Figura 23. Retrato de fase, reducción suave y régimen de flujo supercrítico.

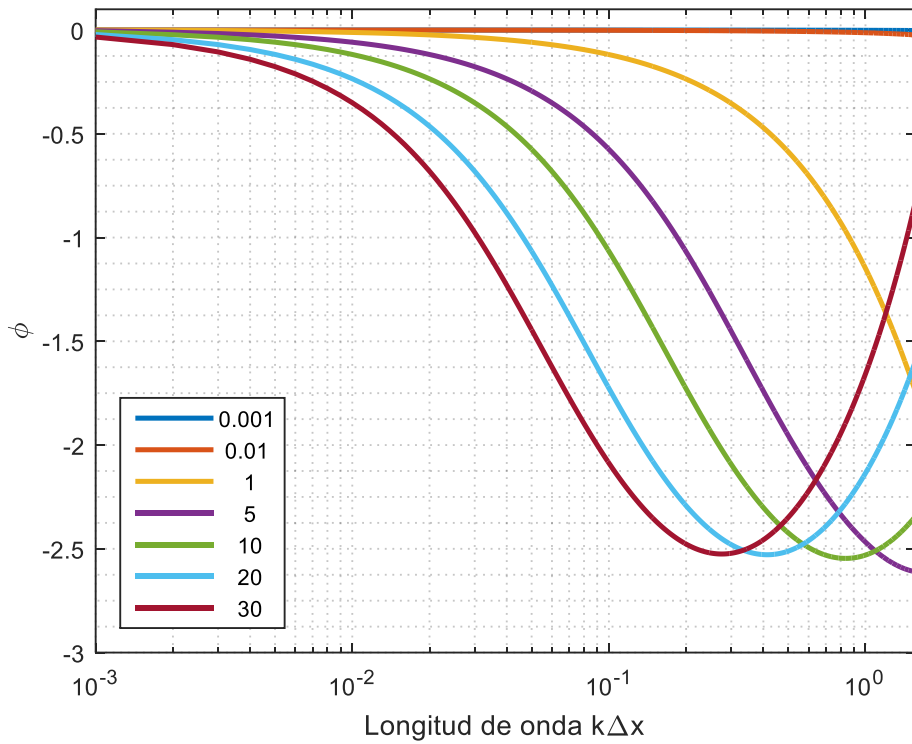


Figura 24. Retrato de fase, ampliación suave y régimen de flujo subcrítico.

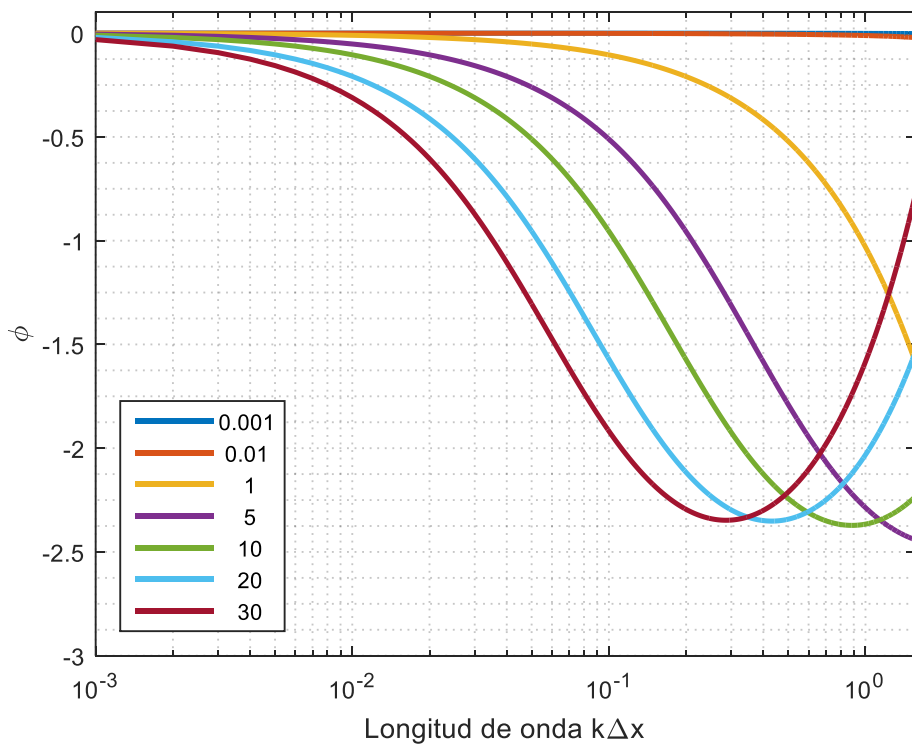


Figura 25. Retrato de fase, ampliación suave y régimen de flujo supercrítico.



### 3.3. PROGRAMACIÓN DEL ESQUEMA CON EL MÉTODO DE PICARD

De acuerdo al resultado obtenido del análisis de convergencia aplicado al sistema de ecuaciones de Saint-Venant, se demostró que el esquema es consistente y además estable numéricamente. Sin embargo, al aplicar el método de diferencias finitas con el esquema de Preissmann al problema original de ecuaciones diferenciales parciales no lineales se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas que también son no lineales; esto implica que para solucionar este problema es necesario emplear un algoritmo iterativo sobre los términos no lineales (Paniconi, *et al.*, 1991; Aguilar, 2002).

En este subcapítulo se construirá el algoritmo que permita generar el código de programación del esquema en diferencias finitas de Preissmann, aplicado al sistema de ecuaciones de Saint-Venant conservativas en su versión diferencial (ecuaciones (3.17) y (3.18)), y como primer caso se utilizará el método de Picard.

Para su programación se propone separar los términos que producen la no linealidad, indicando la iteración en que son resueltos y diferenciándolos con el subíndice  $m$  (Szymkiewicz, 2010). Con lo anterior, las ecuaciones de conservación de masa (3.17) y cantidad de movimiento (3.18) se pueden escribir de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} (A_j^{n+1,m+1} - A_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (A_{j+1}^{n+1,m+1} - A_{j+1}^n) \\ & + \Pi_{1j} \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (U_{j+1}^n - U_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (U_{j+1}^{n+1,m+1} - U_j^{n+1,m+1}) \right] \\ & + \Pi_{2j} \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1,m+1} - A_j^{n+1,m+1}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} (U_j^{n+1,m+1} - U_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (U_{j+1}^{n+1,m+1} - U_{j+1}^n) \\ & + \Pi_{3j} \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (U_{j+1}^n - U_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (U_{j+1}^{n+1,m+1} - U_j^{n+1,m+1}) \right] \\ & + \Pi_{4j} \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1,m+1} - A_j^{n+1,m+1}) \right] \\ & + \Pi_{5j} \{ (1-\theta) [(1-\Psi)U_j^n + \Psi U_{j+1}^n] \\ & + \theta [(1-\Psi)U_j^{n+1,m+1} + \Psi U_{j+1}^{n+1,m+1}] \} \\ & + g \left\{ (1-\theta) \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\ & + \theta \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^{n+1,m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^{n+1,m+1} \right] \left. \right\} \left\{ \frac{db}{dx} \right\} \\ & + \left\{ (1-\theta) \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\ & + \theta \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^{n+1,m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^{n+1,m+1} \right] \left. \right\} \left\{ \frac{dk}{dx} \right\} - S_o = 0 \end{aligned} \quad (3.107)$$



donde

$$\Pi_{1j} = (1 - \theta)[(1 - \Psi)A_j^n + \Psi A_{j+1}^n] + \theta[(1 - \Psi)A_j^{n+1,m} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m}] \quad (3.108)$$

$$\Pi_{2j} = (1 - \theta)[(1 - \Psi)U_j^n + \Psi U_{j+1}^n] + \theta[(1 - \Psi)U_j^{n+1,m} + \Psi U_{j+1}^{n+1,m}] \quad (3.109)$$

$$\Pi_{3j} = (1 - \theta)[(1 - \Psi)U_j^n + \Psi U_{j+1}^n] + \theta[(1 - \Psi)U_j^{n+1,m} + \Psi U_{j+1}^{n+1,m}] \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4j} = (1 - \theta) & \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{g}{B} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{g}{B} \right)_{j+1}^n \right] \\ & + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{g}{B} \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left( \frac{g}{B} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{5j} = (1 - \theta) & \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{g n^2 |U|}{R^{4/3}} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{g n^2 |U|}{R^{4/3}} \right)_{j+1}^n \right] \\ & + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{g n^2 |U|}{R^{4/3}} \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left( \frac{g n^2 |U|}{R^{4/3}} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \end{aligned} \quad (3.112)$$

En el sistema de ecuaciones (3.106) y (3.107) tienen términos que solo están en función de la iteración  $m + 1$ , y los términos  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ ,  $\Pi_4$  y  $\Pi_5$  se evalúan en la iteración  $m$ .

Para la solución de este sistema de ecuaciones es necesario dar un valor a las variables dependientes para la iteración  $m$  y evaluar los términos  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ ,  $\Pi_4$  y  $\Pi_5$ . Para la primera iteración se proponen los valores en el tiempo  $n$ , y en los casos siguientes el resultado que se tenga para la iteración  $m + 1$ , una vez conocidos los términos no lineales  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ ,  $\Pi_4$  y  $\Pi_5$ .

Entonces, el sistema de ecuaciones (3.106) y (3.107) se convierte en un problema lineal, por lo que es necesario satisfacer un criterio de convergencia para el sistema de ecuaciones de Saint-Venant, y la forma para evaluar el error en la convergencia no lineal para los términos dependientes es (Szymkiewicz, 2010):

$$\|A^{n+1,m+1} - A^{n+1,m}\| \leq \varepsilon_a \quad (3.113)$$

$$\|U^{n+1,m+1} - U^{n+1,m}\| \leq \varepsilon_u \quad (3.114)$$

donde  $A^{n+1,m}$  y  $U^{n+1,m}$ , son los vectores de valores del área y de la velocidad respectivamente dentro del espacio de solución  $\Omega(x_j, t_n)$ ,  $\varepsilon_a$  y  $\varepsilon_u$  es una tolerancia en la convergencia del área y la velocidad respectivamente.





Para facilitar el manejo de las ecuaciones de conservación de masa (3.106) y cantidad de movimiento (3.107), se propone agrupar los términos en función de las variables para el instante  $n + 1$  y la iteración  $m + 1$ , de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 & U_j^{n+1,m+1} \left[ -\Pi_{1j}^n \frac{\theta}{\Delta x} \right] + A_j^{n+1,m+1} \left[ \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} - \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} \right] + U_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \Pi_{1j} \frac{\theta}{\Delta x} \right] \\
 & + A_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} \right] \\
 & = \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} A_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} A_{j+1}^n + \Pi_{1j} \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (U_j^n - U_{j+1}^n) \\
 & + \Pi_{2j} \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (A_j^n - A_{j+1}^n)
 \end{aligned} \tag{3.115}$$

$$\begin{aligned}
 & U_j^{n+1,m+1} \left[ \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} - \Pi_{3j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{5j} \theta (1-\Psi) \right] + A_j^{n+1,m+1} \left[ -\Pi_{4j} \frac{\theta}{\Delta x} \right] \\
 & + U_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \Pi_{3j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{5j} \theta \Psi \right] + A_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \Pi_{4j} \frac{\theta}{\Delta x} \right] \\
 & = \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} U_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} U_{j+1}^n + \Pi_{3j} \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (U_j^n - U_{j+1}^n) \\
 & + \Pi_{4j} \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (A_j^n - A_{j+1}^n) \\
 & - \Pi_{5j} \{ (1-\theta) [(1-\Psi) U_j^n + \Psi U_{j+1}^n] \} \\
 & - g \left\{ (1-\theta) \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\
 & + \theta \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^{n+1,m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^{n+1,m+1} \right] \left. \right\} \left\{ \frac{db}{dx} \right\} \\
 & + \left\{ (1-\theta) \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\
 & + \theta \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^{n+1,m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^{n+1,m+1} \right] \left. \right\} \left\{ \frac{dk}{dx} \right\} - S_o
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

El sistema de ecuaciones (3.115) y (3.116) se puede escribir también de la siguiente forma:

$$a_1 U_j^{n+1,m+1} + b_1 A_j^{n+1,m+1} + c_1 U_{j+1}^{n+1,m+1} + d_1 A_{j+1}^{n+1,m+1} = e_1^n \tag{3.117}$$

$$a_2 U_j^{n+1,m+1} + b_2 A_j^{n+1,m+1} + c_2 U_{j+1}^{n+1,m+1} + d_2 A_{j+1}^{n+1,m+1} = e_2^n \tag{3.118}$$



donde

$$a_1 = -\Pi_{1j} \frac{\theta}{\Delta x} \quad (3.119)$$

$$b_1 = \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} - \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} \quad (3.120)$$

$$c_1 = \Pi_{1j} \frac{\theta}{\Delta x} \quad (3.121)$$

$$d_1 = \frac{\Psi}{\Delta t} + \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} \quad (3.122)$$

$$e_1 = \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} A_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} A_{j+1}^n + \Pi_{1j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (U_j^n - U_{j+1}^n) + \Pi_{2j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (A_j^n - A_{j+1}^n) \quad (3.123)$$

$$a_2 = \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} - \Pi_{3j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{5j} \theta (1 - \Psi) \quad (3.124)$$

$$b_2 = -\Pi_{4j} \frac{\theta}{\Delta x} \quad (3.125)$$

$$c_2 = \frac{\Psi}{\Delta t} + \Pi_{3j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{5j} \theta \Psi \quad (3.126)$$

$$d_2 = \Pi_{4j} \frac{\theta}{\Delta x} \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned} e_2 = & \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} U_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} U_{j+1}^n + \Pi_{3j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (U_j^n - U_{j+1}^n) + \Pi_{4j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (A_j^n - A_{j+1}^n) \\ & - \Pi_{5j} \{ (1 - \theta) [(1 - \Psi) U_j^n + \Psi U_{j+1}^n] \} \\ & - g \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\ & + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^{n+1, m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^{n+1, m+1} \right] \left. \right\} \left\{ \frac{db}{dx} \right\} \\ & + \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\ & + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^{n+1, m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^{n+1, m+1} \right] \left. \right\} \left\{ \frac{dk}{dx} \right\} - S_o \end{aligned} \quad (3.128)$$

El sistema de ecuaciones constituye un problema bien planteado de valor inicial y de valores en la frontera que está sujeto a las condiciones iniciales  $A(y(x), 0) = A_0(y(x))$  y  $U(Q(x), 0) = U_0(Q(x))$  y las condiciones de frontera se definen para:



Condición de frontera aguas arriba

$$U(Q(0), t) = g(t_{n+1}) \quad ; \quad t > 0 \quad (3.129)$$

Condición de frontera aguas abajo

$$A(y(L), t) = f(t_{n+1}) \quad ; \quad t > 0 \quad (3.130)$$

La forma de evaluar las condiciones de frontera fueron establecidas en el capítulo 2.3.

Tomando en cuenta las condiciones de frontera (3.129) y (3.130) en las ecuaciones (3.117) y (3.118), donde en este sistema de ecuaciones se conoce el valor de la velocidad en la frontera aguas arriba (primer nodo) y el valor del área en la frontera aguas abajo (último nodo);por lo tanto, se sustituye  $U_1^{n+1} = g(t_{n+1})$  y  $A_j^{n+1} = f(t_{n+1})$ , por lo que el sistema de ecuaciones (3.117) y (3.118) es aplicado sobre todos los nodos del dominio de solución  $\Omega(x_j, t_n)$ , para un flujo subcrítico se puede expresar en forma de una matriz pentadiagonal como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix}
 b_{11} & c_{11} & d_{11} & & & & & & & & 0 \\
 b_{21} & c_{21} & d_{21} & 0 & & & & & & & \\
 0 & a_{12} & b_{12} & c_{12} & d_{12} & & & & & & \\
 & a_{22} & b_{22} & c_{22} & d_{22} & 0 & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & & & 0 & a_{1jj-1} & b_{1jj-1} & c_{1jj-1} & d_{1jj-1} & & \\
 & & & & & a_{2jj-1} & b_{2jj-1} & c_{2jj-1} & d_{2jj-1} & 0 & \\
 & & & & & & 0 & a_{1jj} & b_{1jj} & c_{1jj} & \\
 0 & & & & & & & a_{2jj} & b_{2jj} & c_{2jj} & 
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_1 \\
 U_2 \\
 A_2 \\
 U_3 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 A_{j-2} \\
 U_{j-1} \\
 A_{j-1} \\
 U_j
 \end{bmatrix}
 \overset{n+1,m+1}{=}
 \begin{bmatrix}
 e_{11} - a_{11}g(t_{n+1}) \\
 e_{21} - a_{21}g(t_{n+1}) \\
 e_{12} \\
 e_{22} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 e_{1jj-1} \\
 e_{2jj-1} \\
 e_{1jj} - a_{1jj}f(t_{n+1}) \\
 e_{2jj} - d_{2jj}f(t_{n+1})
 \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

El sistema matricial (3.131) se tiene que  $jj = J - 1$ , donde  $jj$  es el número de ecuaciones que es necesario plantear para solucionar el problema.

El sistema se puede escribir como:

$$\underline{A} \cdot \underline{X}^{n+1,m+1} = \underline{B} \quad (3.132)$$

y conforma la solución para la iteración  $(m + 1)$ , se tiene que:

$$\underline{I} \cdot \underline{X}^{n+1,m+1} = \underline{A}^{-(n+1,m)} \cdot \underline{B}^{(n+1,m)} \quad (3.133)$$

La solución para un tiempo se encuentra cuando la diferencia entre  $\underline{A}^{n+1,m+1}$  y  $\underline{A}^{n+1,m}$  esta dentro de un error permitido.



### 3.4. PROGRAMACIÓN DEL ESQUEMA CON EL MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

En el apartado anterior en la construcción de la aproximación sobre los términos no lineales con el método de Picard, se definió el sistema algebraico de solución no lineal siguiente:

$$\underline{A} \cdot \underline{X}^{n+1,m+1} = \underline{B} \quad (3.134)$$

donde  $\underline{A}$  es la matriz de coeficientes,  $\underline{X}$  es el vector de soluciones y  $\underline{B}$  es el vector de términos independientes del lado derecho de la igualdad de las ecuaciones (3.117) y (3.118).

Una forma de evaluar el problema no lineal es considerar las actualizaciones no lineales de las variables dependientes sobre los operadores diferenciales, usando la siguiente función (Szymkiewicz, 2010):

$$F(\underline{X}^m) = 0 \quad (3.135)$$

Suponiendo que existe una solución aproximada de la ecuación (3.135), la solución exacta se obtiene con la siguiente expresión:

$$\underline{X} = \underline{X}^m + \delta\underline{X}^m \quad (3.136)$$

donde  $\underline{X}$  es la solución exacta,  $\underline{X}^m$  es la solución aproximada en la iteración  $m$  y  $\delta\underline{X}^m$  es el vector de diferencias entre la solución exacta y la aproximada.

Si las funciones que conforman  $F(\underline{X}^m)$  son continuas y diferenciales con respecto al vector de soluciones exactas  $\underline{X}$ , entonces la aproximación de las convergencias se puede expresar en términos de una expansión en serie de Frechét-Taylor (Milne, 1980) alrededor de  $\underline{X}^m$ , es decir

$$F(\underline{X}^m + \delta\underline{X}^m) = F(\underline{X}^m) + \delta\underline{X}^m \frac{\partial F(\underline{X}^m)}{\partial x} + O(\delta\underline{X}^{m2}) \quad (3.137)$$

Para la construcción del método de Newton Raphson o de segundo orden de aproximación sobre los términos no líneas no se tomarán en cuenta las derivadas de orden mayor a uno (Szymkiewicz, 2010).



Aplicando la relación (3.137) sobre los operadores de las ecuaciones (3.4) y (3.8).

$$\mathcal{L}(A + \delta A, U + \delta U) = 0 \quad (3.138)$$

$$\mathcal{M}(A + \delta A, U + \delta U) = 0 \quad (3.139)$$

Realizando una expansión en serie de Fréchet-Taylor a las ecuaciones (3.138) y (3.139), entonces:

$$\mathcal{L}(A + \delta A, U + \delta U) = \mathcal{L}(A, U) + \delta A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} + \delta U \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} + \dots + \quad (3.140)$$

$$\mathcal{M}(A + \delta A, U + \delta U) = \mathcal{M}(A, U) + \delta A \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial A} + \delta U \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial U} + \dots + \quad (3.141)$$

Evaluando las derivadas parciales de las ecuaciones (3.140) y (3.141)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (3.142)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} = \frac{\partial A}{\partial x} \quad (3.143)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial A} = g \left[ \frac{1}{B} + \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \frac{db}{dx} + \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \frac{dk}{dx} + \frac{\partial}{\partial A} (S_f) \right] = \Xi(A, U) \quad (3.144)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) = -\frac{b}{8k^3} \left( \frac{b^2}{4k^2} + \frac{A}{k} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (3.145)$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) = -\frac{1}{2k^2} \left( \frac{b^2}{4k^2} + \frac{A}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left( \frac{b^2}{4k^3} + \frac{A}{2k^2} \right) \left[ \frac{1}{2k} \left( \frac{b^2}{4k^2} + \frac{A}{k} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \quad (3.146)$$



Las ecuaciones (3.145) y (3.146) son únicamente aplicables para conducciones con sección trapezoidal (cuando  $k(x) > 0$  y  $b(x) > 0$ ), de acuerdo a las ecuaciones (2.31) y (2.32). Para el caso en que se tengan secciones rectangulares o triangulares las derivadas  $\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)$  y  $\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)$  se evaluarán de la forma siguiente:

Para el caso donde  $k(x) = 0$  y  $b(x) > 0$  (sección rectangular) y de acuerdo a las ecuaciones (2.35) y (2.36), obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) = \frac{\partial}{\partial A} \left[ -\frac{A}{b^2} \right] = -\frac{1}{b^2} \quad (3.147)$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) = \frac{\partial}{\partial A} [0] = 0 \quad (3.148)$$

En el caso donde  $k(x) > 0$  y  $b(x) = 0$  (sección triangular) y de acuerdo a las ecuaciones (2.39) y (2.40), obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) = \frac{\partial}{\partial A} [0] = 0 \quad (3.149)$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) = \frac{A}{2k^3} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{A}{k} \right)^{-\frac{3}{2}} + \left( \frac{A}{k} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (3.150)$$

Además

$$\frac{\partial S_f(A, U)}{\partial A} = -\frac{4}{3} S_f \left[ \frac{1}{A} - \frac{1}{BP} \frac{dP}{dy} \right] \quad (3.151)$$

También

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial U} = \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial S_f}{\partial U} = \Theta(A, Q) \quad (3.152)$$

donde

$$\frac{\partial S_f(A, U)}{\partial U} = 2 \frac{S_f}{U} \quad (3.153)$$



Entonces se tiene el siguiente sistema para la aproximación de Newton-Raphson

$$\mathcal{L}(A, U) = \mathcal{L}(A, U) + \delta A \frac{\partial U}{\partial x} + \delta U \frac{\partial A}{\partial x} + \dots + \quad (3.154)$$

$$\mathcal{M}(A, U) = \mathcal{M}(A, U) + \delta A[\Xi] + \delta U[\Theta] + \dots + \quad (3.155)$$

Previo a la discretización de los términos obtenidos como resultado de aplicar la expansión en serie de Frechét-Taylor se considera que la actualización no lineal se expresa como:

$$\delta f = (1 - \Psi)(f_j^{n+1,m+1} - f_j^{n+1,m}) + \Psi(f_{j+1}^{n+1,m+1} - f_{j+1}^{n+1,m}) \quad (3.156)$$

En las ecuaciones (3.154) y (3.155) se propone separar y renombrar los términos no lineales  $\Pi_i$  con la siguiente propuesta:

Ecuación de conservación de masa

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial A}{\partial x} + \delta A \frac{\partial U}{\partial x} + \delta U \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (3.157)$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{g}{B} \frac{\partial A}{\partial x} + U \left[ \frac{g n^2 |U|}{R^{4/3}} \right] + g \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} - S_o \right) + \delta A[\Xi] + \delta U[\Theta] = 0 \quad (3.158)$$

Entonces se tiene que

$$\Pi_1(A, U) = A \quad (3.159)$$

$$\Pi_2(A, U) = U \quad (3.160)$$

$$\Pi_3(A, U) = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (3.161)$$

$$\Pi_4(A, U) = \frac{\partial A}{\partial x} \quad (3.162)$$

$$\Pi_5(A, U) = U \quad (3.163)$$

$$\Pi_6(A, U) = \frac{g}{B} \quad (3.164)$$



$$\Pi_7(A, U) = \frac{g n^2 |U|}{R^{4/3}} \quad (3.165)$$

$$\Pi_8(A, U) = g \left[ \frac{1}{B} + \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \frac{db}{dx} + \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \frac{dk}{dx} + \frac{\partial}{\partial A} (S_f) \right] \quad (3.166)$$

$$\Pi_9(A, U) = \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial S_f}{\partial U} \quad (3.167)$$

Entonces las ecuaciones (3.157) y (3.158) se pueden expresar de la forma siguiente:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \Pi_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \Pi_2 \frac{\partial A}{\partial x} + \Pi_3 \delta A + \Pi_4 \delta U = 0 \quad (3.168)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \Pi_5 \frac{\partial U}{\partial x} + \Pi_6 \frac{\partial A}{\partial x} + \Pi_7 U + \Pi_8 \delta A + \Pi_9 \delta U + g \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} - S_o \right) = 0 \quad (3.169)$$

Entonces aplicando una metodología similar de discretización para la programar el método de Picard, las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento se pueden reescribir de la forma siguiente:

Ecuación de conservación de masa

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} (A_j^{n+1, m+1} - A_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (A_{j+1}^{n+1, m+1} - A_{j+1}^n) \\ & + \Pi_{1j} \left[ \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (U_{j+1}^n - U_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (U_{j+1}^{n+1, m+1} - U_j^{n+1, m+1}) \right] \\ & + \Pi_{2j} \left[ \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1, m+1} - A_j^{n+1, m+1}) \right] \\ & + \Pi_{3j} [(1 - \Psi)(A_j^{n+1, m+1} - A_j^{n+1, m}) + \Psi(A_{j+1}^{n+1, m+1} - A_{j+1}^{n+1, m})] \\ & + \Pi_{4j} [(1 - \Psi)(U_j^{n+1, m+1} - U_j^{n+1, m}) \\ & + \Psi(U_{j+1}^{n+1, m+1} - U_{j+1}^{n+1, m})] = 0 \end{aligned} \quad (3.170)$$





Agrupando los términos de la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
& U_j^{n+1,m+1} \left[ -\Pi_{1j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{4j}(1 - \Psi) \right] \\
& + A_j^{n+1,m+1} \left[ \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} - \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{3j}(1 - \Psi) \right] \\
& + U_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \Pi_{1j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{4j}\Psi \right] \\
& + A_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{3j}\Psi \right] \\
& = \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} A_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} A_{j+1}^n + \Pi_{1j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (U_j^n - U_{j+1}^n) \\
& + \Pi_{2j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (A_j^n - A_{j+1}^n) + \Pi_{3j} [(1 - \Psi)A_j^{n+1,m} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m}] \\
& + \Pi_{4j} [(1 - \Psi)U_j^{n+1,m} + \Psi U_{j+1}^{n+1,m}]
\end{aligned} \tag{3.171}$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned}
& \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} (U_j^{n+1,m+1} - U_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (U_{j+1}^{n+1,m+1} - U_{j+1}^n) \\
& + \Pi_{5j} \left[ \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (U_{j+1}^n - U_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (U_{j+1}^{n+1,m+1} - U_j^{n+1,m+1}) \right] \\
& + \Pi_{6j} \left[ \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1,m+1} - A_j^{n+1,m+1}) \right] \\
& + \Pi_{7j} \{ (1 - \theta) [(1 - \Psi)U_j^n + \Psi U_{j+1}^n] \\
& + \theta [(1 - \Psi)U_j^{n+1,m+1} + \Psi U_{j+1}^{n+1,m+1}] \} \\
& + \Pi_{8j} [(1 - \Psi)(A_j^{n+1,m+1} - A_j^{n+1,m}) + \Psi(A_{j+1}^{n+1,m+1} - A_{j+1}^{n+1,m})] \\
& + \Pi_{9j} [(1 - \Psi)(U_j^{n+1,m+1} - U_j^{n+1,m}) + \Psi(U_{j+1}^{n+1,m+1} - U_{j+1}^{n+1,m})] \\
& + g \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\
& + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^{n+1,m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^{n+1,m+1} \right] \left. \right\} \left\{ \frac{db}{dx} \right\} \\
& + \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\
& + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^{n+1,m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^{n+1,m+1} \right] \left. \right\} \left\{ \frac{dk}{dx} \right\} - S_o = 0
\end{aligned} \tag{3.172}$$



Agrupando los términos de la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
 U_j^{n+1,m+1} & \left[ \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} - \Pi_{5j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{7j} \theta (1-\Psi) + \Pi_{9j} (1-\Psi) \right] \\
 & + A_j^{n+1,m+1} \left[ -\Pi_{6j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{8j} (1-\Psi) \right] \\
 & + U_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \Pi_{5j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{7j} \theta \Psi + \Pi_{9j} \Psi \right] \\
 & + A_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \Pi_{6j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{8j} \Psi \right] \\
 & = \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} U_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} U_{j+1}^n + \Pi_{5j} \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (U_j^n - U_{j+1}^n) \\
 & + \Pi_{6j} \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (A_j^n - A_{j+1}^n) - \Pi_{7j} \{ (1-\theta) [(1-\Psi) U_j^n + \Psi U_{j+1}^n] \} \\
 & + \Pi_{8j} [(1-\Psi) A_j^{n+1,m} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m}] + \Pi_{9j} [(1-\Psi) U_j^{n+1,m} + \Psi U_{j+1}^{n+1,m}] \\
 & - g \left\{ (1-\theta) \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\
 & + \theta \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^{n+1,m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^{n+1,m+1} \right] \left. \right\} \left\{ \frac{db}{dx} \right\} \\
 & + \left\{ (1-\theta) \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\
 & + \theta \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^{n+1,m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^{n+1,m+1} \right] \left. \right\} \left\{ \frac{dk}{dx} \right\} - S_o
 \end{aligned} \tag{3.173}$$

El sistema de ecuaciones (3.171) y (3.173) se puede escribir de la misma forma que las ecuaciones (3.117) y (3.118), solamente es necesario actualizar todos los coeficientes, por lo tanto:

$$a_1 = -\Pi_{1j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{4j} (1-\Psi) \tag{3.174}$$

$$b_1 = \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} - \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{3j} (1-\Psi) \tag{3.175}$$

$$c_1 = \Pi_{1j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{4j} \Psi \tag{3.176}$$

$$d_1 = \frac{\Psi}{\Delta t} + \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{3j} \Psi \tag{3.177}$$

$$\begin{aligned}
 e_1 & = \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} A_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} A_{j+1}^n + \Pi_{1j} \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (U_j^n - U_{j+1}^n) + \Pi_{2j} \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (A_j^n - A_{j+1}^n) \\
 & + \Pi_{3j} [(1-\Psi) A_j^{n+1,m} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m}] \\
 & + \Pi_{4j} [(1-\Psi) U_j^{n+1,m} + \Psi U_{j+1}^{n+1,m}]
 \end{aligned} \tag{3.178}$$

$$a_2 = \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} - \Pi_{5j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{7j} \theta (1-\Psi) + \Pi_{9j} (1-\Psi) \tag{3.179}$$



$$b_2 = -\Pi_{6j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{8j}(1 - \Psi) \quad (3.180)$$

$$c_2 = \frac{\Psi}{\Delta t} + \Pi_{5j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{7j}\theta\Psi + \Pi_{9j}\Psi \quad (3.181)$$

$$d_2 = \Pi_{6j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{8j}\Psi \quad (3.182)$$

$$\begin{aligned} e_2 = & \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} U_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} U_{j+1}^n + \Pi_{5j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (U_j^n - U_{j+1}^n) + \Pi_{6j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (A_j^n - A_{j+1}^n) \\ & - \Pi_{7j} \{ (1 - \theta) [(1 - \Psi) U_j^n + \Psi U_{j+1}^n] \} \\ & + \Pi_{8j} [(1 - \Psi) A_j^{n+1,m} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m}] \\ & + \Pi_{9j} [(1 - \Psi) U_j^{n+1,m} + \Psi U_{j+1}^{n+1,m}] \\ & - g \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\ & \left. + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^{n+1,m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^{n+1,m+1} \right] \right\} \left\{ \frac{db}{dx} \right\} \\ & + \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\ & \left. + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^{n+1,m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^{n+1,m+1} \right] \right\} \left\{ \frac{dk}{dx} \right\} - S_o \end{aligned} \quad (3.183)$$

Además, únicamente se discretizarán los términos  $\Pi_{3j}, \Pi_{4j}, \Pi_{8j}$  y  $\Pi_{9j}$ , debido a que los términos  $\Pi_{1j}, \Pi_{2j}, \Pi_{5j}, \Pi_{6j}$  y  $\Pi_{7j}$  ya están definidos por (3.108)-(3.112), entonces:

$$\Pi_{3j} = \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (U_{j+1}^n - U_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (U_{j+1}^{n+1,m} - U_j^{n+1,m}) \quad (3.184)$$

$$\Pi_{4j} = \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1,m} - A_j^{n+1,m}) \quad (3.185)$$



$$\begin{aligned}
 \Pi_{8j} = g \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{1}{B} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{1}{B} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\
 + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{1}{B} \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left( \frac{1}{B} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \left. \right\} \\
 + \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \right)_{j+1}^n \right] \right. \\
 + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \left. \right\} \left\{ \frac{db}{dx} \right\} \quad (3.186) \\
 + \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \right)_{j+1}^n \right] \right. \\
 + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \left. \right\} \left\{ \frac{dk}{dx} \right\} \\
 + \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) (S_{fA})_j^n + \Psi (S_{fA})_{j+1}^n \right] \right. \\
 \left. + \theta \left[ (1 - \Psi) (S_{fA})_j^{n+1,m} + \Psi (S_{fA})_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{9j} = \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (U_{j+1}^n - U_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (U_{j+1}^{n+1,m} - U_j^{n+1,m}) \\
 + g \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) (S_{fU})_j^n + \Psi (S_{fU})_{j+1}^n \right] \right. \\
 \left. + \theta \left[ (1 - \Psi) (S_{fU})_j^{n+1,m} + \Psi (S_{fU})_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \quad (3.187)
 \end{aligned}$$

Además

$$S_{fj}^n = \frac{n^2 \operatorname{sgn}(U)_j^n U_j^n}{(R^{4/3})_j^n} \quad (3.188)$$

$$S_{fA_j}^n = -\frac{4}{3} S_{fj}^n \left[ \frac{1}{A_j^n} - \frac{1}{B_j^n P_j^n} \left( \frac{dP}{dy} \right)_j^n \right] \quad (3.189)$$

$$S_{fU_j}^n = \frac{2 n^2 \operatorname{sgn}(U)_j^n}{(R^{4/3})_j^n} \quad (3.190)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \right)_j^n = -\frac{b_j^n}{8(k^3)_j^n} \left( \frac{(b^2)_j^n}{4(k^2)_j^n} + \frac{A_j^n}{k_j^n} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (3.191)$$



$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \right)_j^n &= -\frac{1}{2(k^2)_j^n} \left( \frac{(b^2)_j^n}{4(k^2)_j^n} + \frac{A_j^n}{k_j^n} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &+ \left( \frac{(b^2)_j^n}{4(k^3)_j^n} + \frac{A_j^n}{2(k^2)_j^n} \right) \left[ \frac{1}{2k_j^n} \left( \frac{(b^2)_j^n}{4(k^2)_j^n} + \frac{A_j^n}{k_j^n} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \end{aligned} \quad (3.192)$$

Las ecuaciones (3.191) y (3.192) son aplicables únicamente cuando  $k(x) > 0$  y  $b(x) > 0$  (canal con sección trapezoidal), en el caso que se considere una sección rectangular o triangular la forma discreta de los términos  $\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)$  y  $\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)$ , se evaluarán de la forma siguiente:

Cuando  $k(x) = 0$  y  $b(x) > 0$  (sección rectangular) y de acuerdo a las ecuaciones (3.147) y (3.148), se tiene que

$$\left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \right)_j^n = -\frac{1}{(b^2)_j^n} \quad (3.193)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \right)_j^n = 0 \quad (3.194)$$

Y cuando  $k(x) > 0$  y  $b(x) = 0$  (sección triangular) y de acuerdo a las ecuaciones (3.149) y (3.150), se tiene que

$$\left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \right)_j^n = 0 \quad (3.195)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \right)_j^n = \frac{A}{2(k^3)_j^n} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{A_j^n}{k_j^n} \right)^{-\frac{3}{2}} + \left( \frac{A_j^n}{k_j^n} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (3.196)$$

El procedimiento de solución matricial y la evaluación de las condiciones de frontera no cambia con respecto a la metodología de Picard.



### 3.5. MODELO PARA EVALUAR LA VARIACIÓN DE LA CONSERVACIÓN DE MASA Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Este análisis se realiza en la simulación transitoria, para la evaluación de la conservación de masa, se realizará a partir de la ecuación (3.171). Se propone hacer una separación de la ecuación, separando los términos que contengan las variables dependientes de área y velocidad ( $A, U$ ).

Separando los términos que contienen la variable dependiente del área en la ecuación (3.171), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 A_j^{n+1,m+1} & \left[ \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} - \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{3j}(1-\Psi) \right] \\
 & + A_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{3j}\Psi \right] \\
 & = \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} A_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} A_{j+1}^n + \Pi_{2j} \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (A_j^n - A_{j+1}^n) \\
 & + \Pi_{3j} [(1-\Psi)A_j^{n+1,m} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m}]
 \end{aligned} \tag{3.197}$$

Donde se considera la siguiente notación, entonces

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{L}_A^{m+1} & = A_j^{n+1,m+1} \left[ \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} - \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{3j}(1-\Psi) \right] \\
 & + A_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{3j}\Psi \right]
 \end{aligned} \tag{3.198}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{L}_A^m & = \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} A_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} A_{j+1}^n + \Pi_{2j} \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (A_j^n - A_{j+1}^n) \\
 & + \Pi_{3j} [(1-\Psi)A_j^{n+1,m} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m}]
 \end{aligned} \tag{3.199}$$

Entonces la ecuación (3.197) se puede escribir de la forma siguiente:

$$\Delta \delta \mathcal{L}_A = \delta \mathcal{L}_A^{m+1} - \delta \mathcal{L}_A^m \tag{3.200}$$

donde  $\delta \mathcal{L}_A^{m+1}$  y  $\delta \mathcal{L}_A^m$  contienen los términos donde está involucrado el área en la iteración  $m + 1$  y  $m$  respectivamente y  $\Delta \delta \mathcal{L}_A$  es la diferencia entre ambos.



Entonces, los términos restantes de la ecuación (3.171), son los términos que contienen la variable dependiente de la velocidad, obteniendo:

$$U_j^{n+1,m+1} \left[ -\Pi_{1j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{4j}(1 - \Psi) \right] + U_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \Pi_{1j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{4j}\Psi \right] \\ = \Pi_{1j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (U_j^n - U_{j+1}^n) + \Pi_{4j} [(1 - \Psi)U_j^{n+1,m} + \Psi U_{j+1}^{n+1,m}] \quad (3.201)$$

Donde se tomará la siguiente notación, entonces obtenemos

$$\delta \mathcal{L}_U^{m+1} = U_j^{n+1,m+1} \left[ -\Pi_{1j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{4j}(1 - \Psi) \right] + U_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \Pi_{1j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{4j}\Psi \right] \quad (3.202)$$

$$\delta \mathcal{L}_U^m = \Pi_{1j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (U_j^n - U_{j+1}^n) + \Pi_{4j} [(1 - \Psi)U_j^{n+1,m} + \Psi U_{j+1}^{n+1,m}] \quad (3.203)$$

Entonces, la ecuación (3.201) se puede escribir como:

$$\Delta \delta \mathcal{L}_U = \delta \mathcal{L}_U^{m+1} - \delta \mathcal{L}_U^m \quad (3.204)$$

donde  $\delta \mathcal{L}_U^{m+1}$  y  $\delta \mathcal{L}_U^m$  contienen los términos donde está involucrada la velocidad en la iteración  $m + 1$  y  $m$  respectivamente y  $\Delta \delta \mathcal{L}_U$  es la diferencia entre ambos.

Finalmente, la variación de la conservación de masa se evaluará de la forma siguiente:

$$\Delta \mathcal{L} = \Delta \delta \mathcal{L}_A + \Delta \delta \mathcal{L}_U \quad (3.205)$$

donde  $\Delta \mathcal{L}$ , es el error en la conservación de masa en cada iteración durante la simulación.

La evaluación de la variación de la cantidad de movimiento se realizará a partir de la ecuación (3.173). Para este análisis se seguirá la misma metodología que se aplica para evaluar la variación de conservación de masa, separando los términos que contienen las variables dependientes ( $A, U$ ) en la ecuación, como sigue:

Separando los términos que contienen la variable dependiente  $A$  en la ecuación (3.173), tenemos que:

$$A_j^{n+1,m+1} \left[ -\Pi_{6j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{8j}(1 - \Psi) \right] + A_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \Pi_{6j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{8j}\Psi \right] \\ = \Pi_{6j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (A_j^n - A_{j+1}^n) + \Pi_{8j} [(1 - \Psi)A_j^{n+1,m} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m}] \quad (3.206)$$



Donde se considera que

$$\delta\mathcal{M}_A^{m+1} = A_j^{n+1,m+1} \left[ -\Pi_{6j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{8j}(1 - \Psi) \right] + A_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \Pi_{6j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{8j}\Psi \right] \quad (3.207)$$

$$\delta\mathcal{M}_A^m = \Pi_{6j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (A_j^n - A_{j+1}^n) + \Pi_{8j} [(1 - \Psi)A_j^{n+1,m} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m}] \quad (3.208)$$

Entonces la ecuación (3.206) se puede escribir como:

$$\Delta\delta\mathcal{M}_A = \delta\mathcal{M}_A^{m+1} - \delta\mathcal{M}_A^m \quad (3.209)$$

donde  $\delta\mathcal{M}_A^{m+1}$  y  $\delta\mathcal{M}_A^m$  contienen los términos donde está involucrada el área en la iteración  $m + 1$  y  $m$  respectivamente y  $\Delta\delta\mathcal{M}_A$  es la diferencia entre ambos.

Separando los términos que contienen la variable dependiente  $U$  en la ecuación (3.173), tenemos que:

$$\begin{aligned} U_j^{n+1,m+1} & \left[ \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} - \Pi_{5j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{7j}\theta(1 - \Psi) + \Pi_{9j}(1 - \Psi) \right] \\ & + U_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \Pi_{5j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{7j}\theta\Psi + \Pi_{9j}\Psi \right] \\ & = \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} U_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} U_{j+1}^n + \Pi_{5j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (U_j^n - U_{j+1}^n) \\ & - \Pi_{7j} \{ (1 - \theta) [(1 - \Psi)U_j^n + \Psi U_{j+1}^n] \} \\ & + \Pi_{9j} [(1 - \Psi)U_j^{n+1,m} + \Psi U_{j+1}^{n+1,m}] \\ & - g \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\ & \left. + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^{n+1,m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^{n+1,m+1} \right] \right\} \left\{ \frac{db}{dx} \right\} \\ & + \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\ & \left. + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^{n+1,m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^{n+1,m+1} \right] \right\} \left\{ \frac{dk}{dx} \right\} - S_o \end{aligned} \quad (3.210)$$

Donde se considera que:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{M}_U^{m+1} & = U_j^{n+1,m+1} \left[ \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} - \Pi_{5j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{7j}\theta(1 - \Psi) + \Pi_{9j}(1 - \Psi) \right] \\ & + U_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \frac{\Psi}{\Delta t} + \Pi_{5j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{7j}\theta\Psi + \Pi_{9j}\Psi \right] \end{aligned} \quad (3.211)$$





$$\delta\mathcal{M}_U^m = \frac{(1-\Psi)}{\Delta t}U_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t}U_{j+1}^n + \Pi_{5j}\frac{(1-\theta)}{\Delta x}(U_j^n - U_{j+1}^n) - \Pi_{7j}\{(1-\theta)[(1-\Psi)U_j^n + \Psi U_{j+1}^n]\} + \Pi_{9j}[(1-\Psi)U_j^{n+1,m} + \Psi U_{j+1}^{n+1,m}] \quad (3.212)$$

$$\Lambda = -g \left\{ (1-\theta) \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^{n+1,m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^{n+1,m+1} \right] \right\} \left\{ \frac{db}{dx} \right\} + \left\{ (1-\theta) \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^n \right] + \theta \left[ (1-\Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^{n+1,m+1} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^{n+1,m+1} \right] \right\} \left\{ \frac{dk}{dx} \right\} - S_o \quad (3.213)$$

Entonces la ecuación (3.210) se puede escribir como:

$$\Delta\delta\mathcal{M}_U = \delta\mathcal{M}_U^{m+1} - \delta\mathcal{M}_U^m - \Lambda \quad (3.214)$$

donde  $\delta\mathcal{M}_U^{m+1}$  y  $\delta\mathcal{M}_U^m$  contienen los términos donde está involucrada la velocidad en la iteración  $m + 1$  y  $m$  respectivamente y  $\Delta\delta\mathcal{M}_U$  es la diferencia entre ambos.

Finalmente, la variación de la cantidad de movimiento se evaluará de la forma siguiente:

$$\Delta\mathcal{M} = \Delta\delta\mathcal{M}_A + \Delta\delta\mathcal{M}_U \quad (3.215)$$

donde  $\Delta\mathcal{M}$ , es el error en la cantidad de movimiento en cada iteración durante la simulación.

Para complementar este análisis, en la Figura 26 se muestra el diagrama de flujo que ejemplifica el proceso y el orden de cálculo de las ecuaciones.

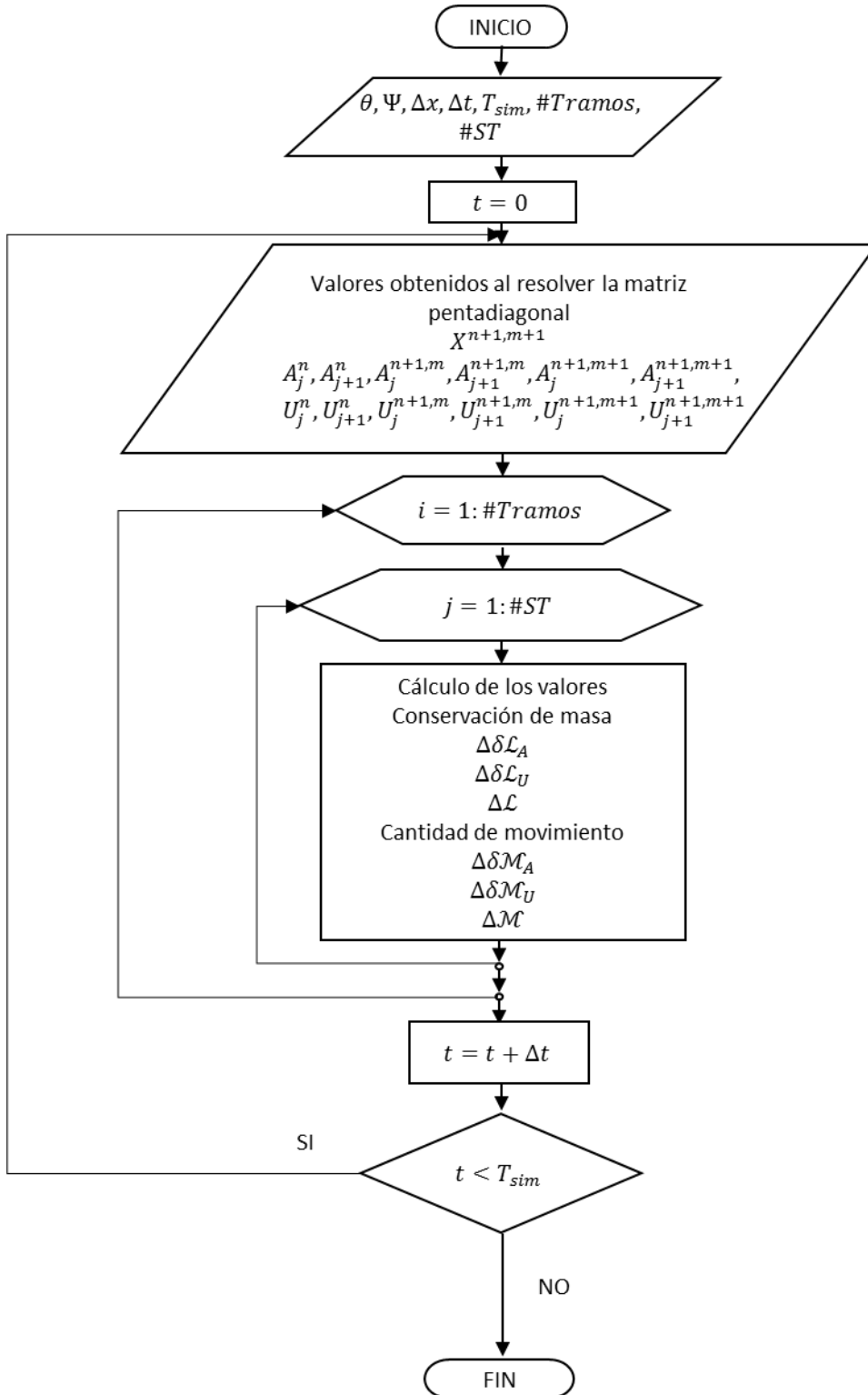


Figura 26. Diagrama de flujo del algoritmo para la evaluación de la de conservación de masa y cantidad de movimiento.  $\#Tramo$  es el número de tramos en la conducción y  $\#ST$  es el número de secciones en cada tramo.



# CAPÍTULO 4

## MODELO NUMÉRICO DE SIMULACIÓN EN TRANSICIONES

El modelo numérico para la simulación de canales con transiciones, también conocido como “Modelo numérico de Simulación de Múltiples Tramos (SMT)” (Cruz Mayo, 2015) cuenta con pre-procesos: Geometría (geo.), Topología (topo.) y la Condición Inicial (hidra.), el proceso de la modelación transitoria mediante la Condición Transitoria y, por último, el post-proceso de la visualización de los resultados mediante gráficos. Para una mejor visualización de estos procesos se muestra el siguiente esquema.

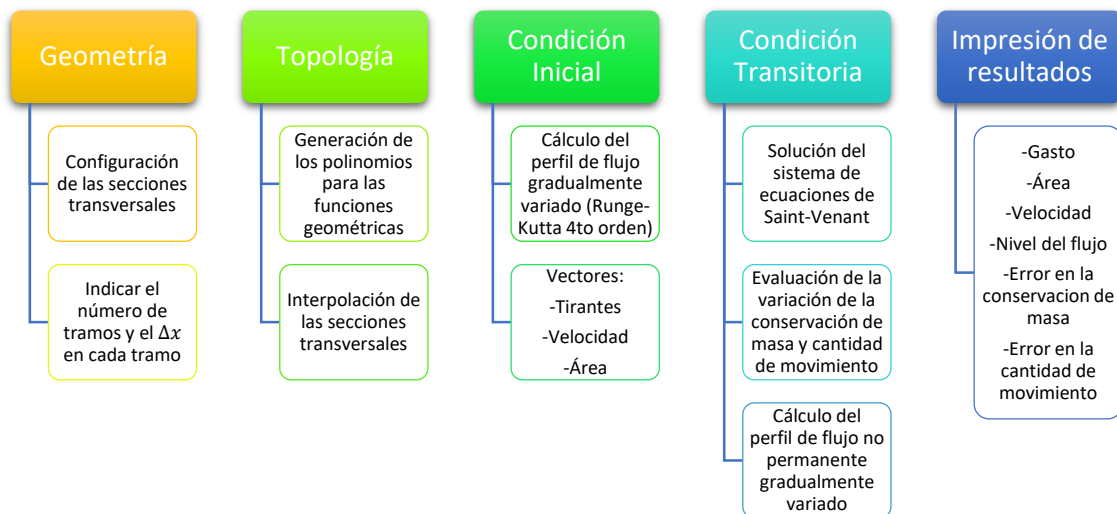


Figura 27. Funcionamiento del simulador

A continuación, se describirá el funcionamiento de cada proceso que se señala en el esquema anterior.



#### 4.1. CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS

En esta parte del proceso es donde se definen todas las características geométricas que se tendrá a lo largo de la conducción, por ejemplo, si se tienen ampliaciones, reducciones y/o cambios de sección, para el caso de transiciones suaves y abruptas, así como también se definen el número de tramos que tendrá el canal, y el número de secciones que tendrá cada tramo. Es decir, cada tramo puede presentar una configuración diferente que los otros tramos. En la siguiente tabla se muestran los datos necesarios que debe tener la conducción.

Tabla 6. Datos generales para la configuración de la geometría de la conducción.

Parámetros	Notación	Unidad
<i>Datos de la conducción</i>		
Número de tramos	$i$	
Número de secciones por tramo	$j$	
Discretización espacial de cada tramo	$\Delta x$	m
<i>Datos de cada sección del canal</i>		
Elevación del fondo	$z$	m
Elevación del hombro		m
Cadenamiento	$L$	m
Tipo de sección transversal: Trapezoidal, rectangular y/o triangular		
Base del fondo	$b$	m
Talud	$k$	Adim.
Coeficiente de rugosidad de Manning	$n$	Adim.

Los datos generados en este pre-proceso son guardados en el módulo “geo.”.

#### 4.2. TOPOLOGÍA

Con los datos geométricos se procede a generar los polinomios para las funciones geométricas y la interpolación de secciones. El procedimiento de cálculo es generar los ajustes de la curva de área, perímetro y ancho de la superficie libre del agua de cada tramo y para cada sección, lo cual son necesarios para el cálculo del tirante  $y$ .

Se proponen los polinomios de ajuste de grado  $n$  para las funciones geométricas y para las derivadas de las mismas. Entonces,

$$f(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots + a_ny^n \quad (4.1)$$



$$f'(y) = a_1 + 2a_2y + \dots + na_ny^{n-1} \quad (4.2)$$

donde  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  son los coeficientes para las funciones geométricas.

En la Tabla 7 se muestran los polinomios de ajuste de grado 3 para las secciones transversales: trapezoidal, rectangular y triangular.

Tabla 7. Polinomios para tres diferentes secciones transversales (trapezoidal, rectangular y triangular)

Sección transversal	Trapezoidal	Rectangular	Triangular
<b>Área por sección</b>			
$f(y)$	$by + ky^2$	$by$	$ky^2$
<b>Perímetro mojado por sección</b>			
$f(y)$	$b + 2y\sqrt{1 + k^2}$	$b + 2y$	$2y\sqrt{1 + k^2}$
$f'(y)^4$	$2\sqrt{1 + k^2}$	2	$2\sqrt{1 + k^2}$
<b>Ancho de la superficie libre del agua por sección</b>			
$f(y)$	$b + 2ky$	$b$	$2ky$

Después de definir los polinomios de ajuste se definen los valores de interpolación entre cada sección, esto depende del número de tramos del canal y de la discretización espacial  $\Delta x$  que se consideró en cada tramo, calculados a partir de la geometría de la conducción (pre-proceso geo.).

La interpolación ajusta los datos en cada sección ( $j$ ) de cada tramo ( $i$ ) de la conducción, la cual es requerida para los nodos de la malla de discretización espacial.

Entonces se considera que

$$nj = \frac{\text{cadenamiento}_{i,j+1} - \text{cadenamiento}_{i,j}}{\Delta x_i} \quad (4.3)$$

A partir de la ecuación (4.3) se calculan los incrementos o decrementos de las características geométricas de las secciones de la conducción

$$dz = \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j}}{nj} \quad (4.4)$$

<sup>4</sup> La derivada del perímetro mojado es necesario para el cálculo del término no lineal por el método de Newton-Raphson (ecuación (3.151)).



$$dh = \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j}}{nj} \quad (4.5)$$

$$db = \frac{b_{i,j+1} - b_{i,j}}{nj} \quad (4.6)$$

$$dk = \frac{k_{i,j+1} - k_{i,j}}{nj} \quad (4.7)$$

También se calculan las variaciones del ancho del fondo del canal y del talud con respecto al eje  $x$ .

$$\frac{db}{dx} = \frac{b_{i,j+1} - b_{i,j}}{\Delta x_i} \quad (4.8)$$

$$\frac{dk}{dx} = \frac{k_{i,j+1} - k_{i,j}}{\Delta x_i} \quad (4.9)$$

La aplicación de las ecuaciones (4.3)-(4.9) se realiza a partir de un punto de inicio (posición  $x = 0$  del cadenamamiento) y se va determinando cada una de las características geométricas a cada incremento espacial  $\Delta x_i$  de cada tramo  $j$ .

En la figura siguiente se muestra un ejemplo de una interpolación entre dos secciones de diferentes características geométricas ( $b_1 \neq b_2$  y  $k_1 \neq k_2$ ).

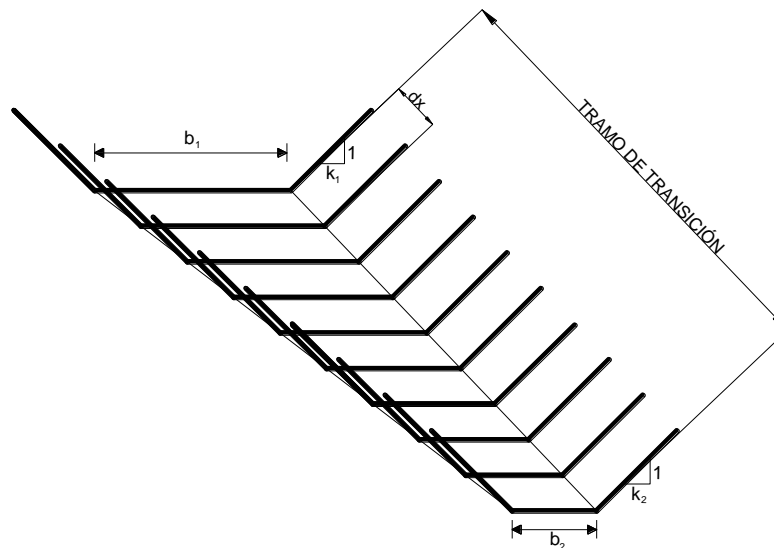


Figura 28. Ejemplo de un tramo en un canal con transición (Reducción).

Los datos generados en este pre-proceso son guardados en el módulo "topo."



### 4.3. CONDICIÓN INICIAL

La condición inicial tiene como objetivo principal solucionar la ecuación de flujo gradualmente variado (ecuación (2.63)). Para resolver esta ecuación se sigue el siguiente procedimiento:

- a) Cargar los datos de la geometría (*geo.*) y la topología (*topo.*) de la conducción
- b) Establecer el gasto  $Q$  que está circulando en su condición permanente; debido a que la variación del gasto a lo largo de la conducción es nula ( $\frac{dQ}{dx} = 0$ ), con definir el gasto de ingreso es suficiente
- c) Se calculan el tirante crítico  $y_c$  y el tirante normal  $y_n$ . Para el cálculo de los tirantes se aplicará el Método de Newton-Raphson, que es el más empleado, ya que es un método con un orden de convergencia mucho mayor (Zarabozo, 2012)
- d) Se define la condición de frontera aguas abajo  $y_f$  (véase subcapítulo 2.3)
- e) Se verifica el tipo de régimen de flujo y el sentido del cálculo:
  - Si  $y_c < y_n$ , se presenta un flujo subcrítico, el sentido del cálculo es de aguas abajo a aguas arriba
  - Si  $y_c > y_n$ , se presenta un flujo supercrítico, el sentido del cálculo es de aguas arriba a aguas abajo
- f) Se resuelve la ecuación de flujo gradualmente variado (ecuación (2.63)) utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4).
- g) Se verifica la condición inicial con la ecuación de conservación de masa (2.53) de cantidad de movimiento (2.62)
- h) Graficación de resultados y guardado de tirantes, áreas y velocidades
- i) Los datos generados en este pre-proceso son guardados en el módulo “*hidra.*”

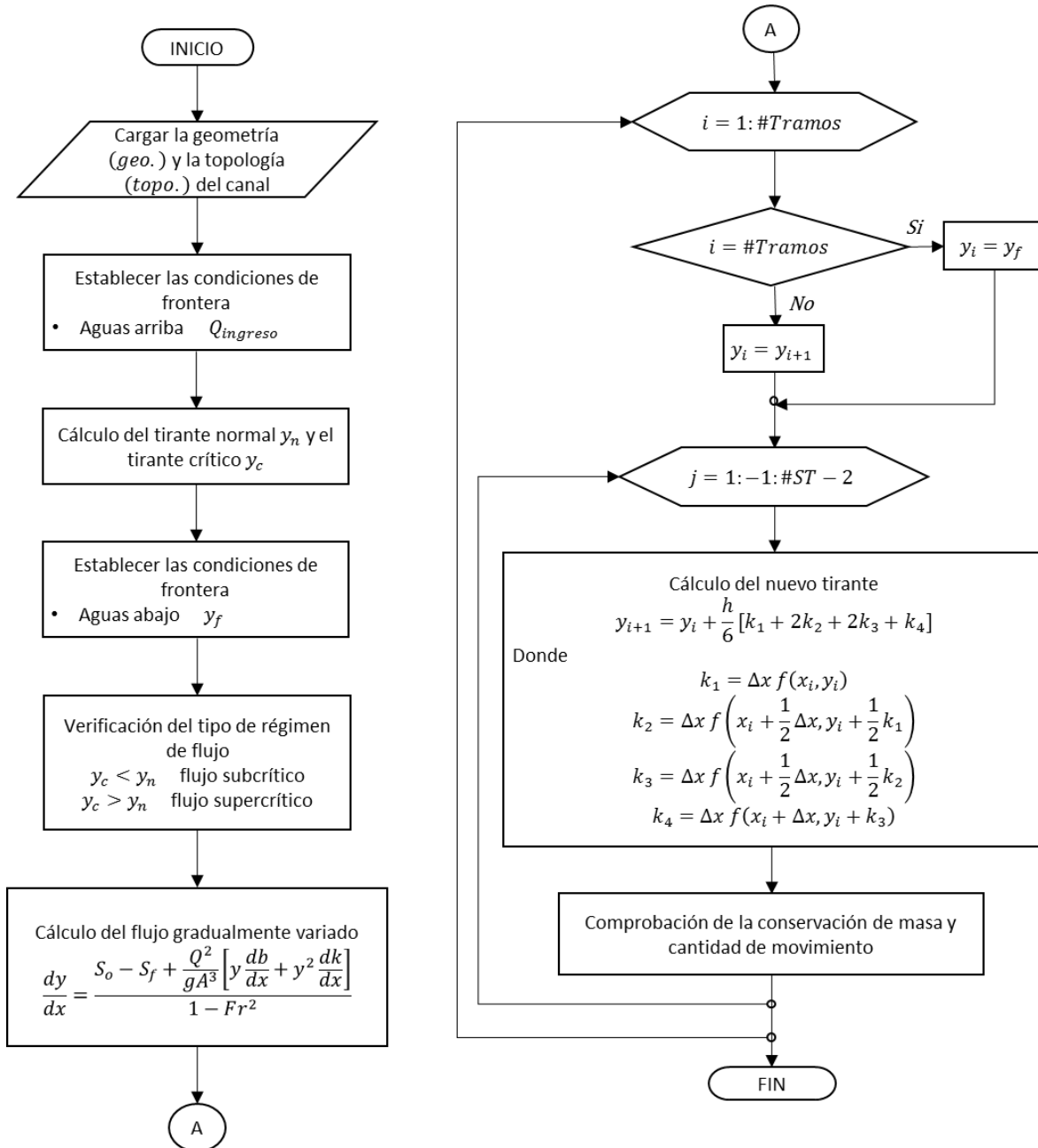


Figura 29. Diagrama de flujo del algoritmo para la condición inicial. Donde #Tramos es el número de tramos de la conducción y #ST es el número de secciones en cada tramo.





La aplicación del algoritmo de la condición inicial como se visualiza en el diagrama de flujo (Figura 29) permite evaluar un canal con variaciones en el ancho del fondo del canal y en el talud (Figura 30) o sin variaciones (Figura 31). Así mismo, la variación de la conservación de masa y la cantidad de movimiento a lo largo de la conducción.

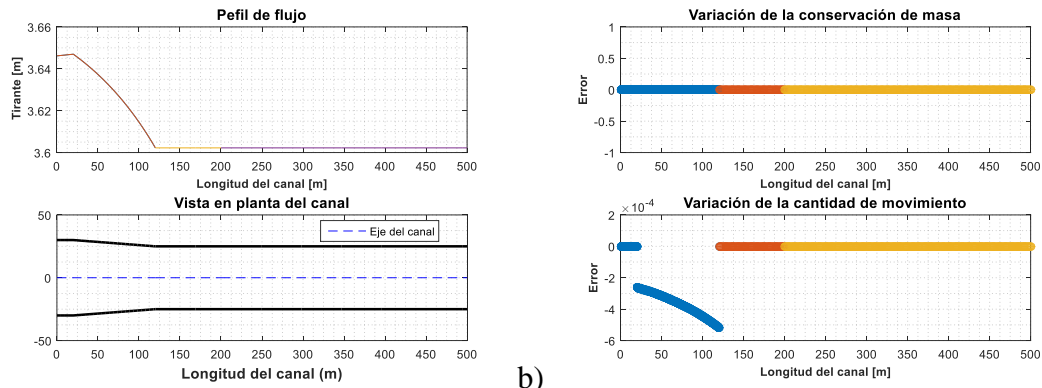


Figura 30. a) Condición inicial para una conducción con transición. b) Evaluación de la conservación de masa y la cantidad de movimiento.

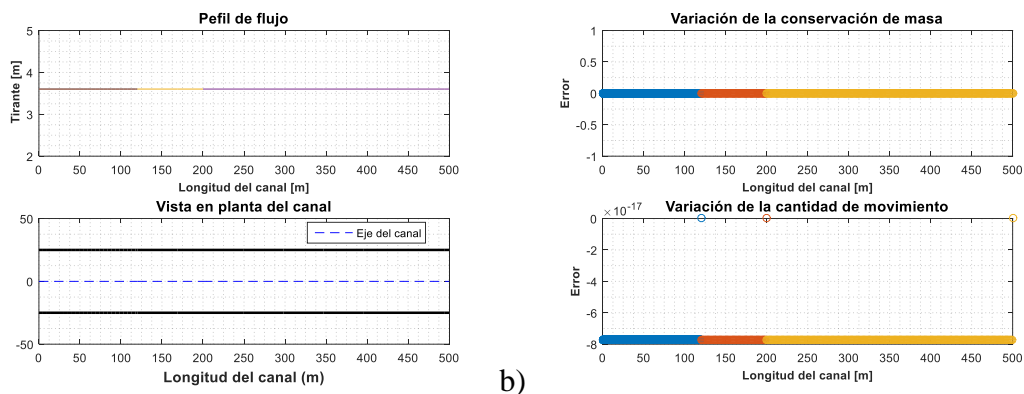


Figura 31. a) Condición inicial para una conducción sin transición. b) Evaluación de la conservación de masa y la cantidad de movimiento.



#### 4.4. CONDICIÓN TRANSITORIA

Para la solución de la condición transitoria del canal de múltiples tramos con transiciones se sigue el procedimiento mostrado a continuación:

- a) Cargar los datos obtenidos en la condición inicial (*hidra.*); se obtiene el perfil de flujo, gasto, área y velocidad en cada sección.
- b) Se definen las variables transitorias tales como el número de Courant  $Cr$ , factores de peso espacial  $\Psi$  y temporal  $\theta$ , los valores de los factores de peso se utilizarán los definidos por Aldama y Aguilar (1996). Los errores de convergencia sobre la iteración no lineal y el tiempo de la simulación  $T$ .
- c) Se establece la condición de frontera aguas arriba. Definiendo la entrada de un hidrograma al canal, como se definió en el subcapítulo 2.3.1, así como el tiempo de duración  $T_{hidro}$  y el tiempo de entrada del hidrograma  $T_{inicio}$ .
- d) Se realiza una revisión de la condición de estabilidad, calculando el número de Courant:  $Cr = \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_0 + \sqrt{gD_0})$ , donde  $U_0$  es la velocidad media y  $D_0$  es el tirante hidráulico medio. De acuerdo con este número se calcula el retardo teórico del canal y con base en este se definen los tiempos de acción (incremento temporal) del algoritmo de control global:  $\Delta t = \frac{\Delta x Cr}{(V_0 + \sqrt{gD_0})}$ .
- e) Se define la dimensión de la matriz de coeficientes y la posición de los coeficientes en la matriz **A**.
- f) Al inicio del análisis de la simulación transitoria, cuando  $t > 0$ , se hace una actualización en el tiempo

$$\begin{aligned}y^n &= y^{n+1,m+1} \\U^n &= U^{n+1,m+1} \\A^n &= A^{n+1,m+1}\end{aligned}\tag{4.10}$$

- g) Se actualiza la condición de frontera aguas arriba, calculando el gasto que ingresa al canal  $Q_1^{n+1,m+1}$ .
- h) Se calcula el tirante futuro al final de cada tramo  $y_j^{n+1,m+1}$ .



- i) Se actualizan los valores del perímetro, ancho de superficie libre, la pendiente de fricción, derivada del perímetro y los términos de la Tabla 1 de acuerdo con  $y^n$ ,  $A^n$  y  $U^n$ .
- j) Se inicia la metodología del método de Newton-Raphson para la solución de los términos no lineales, en donde se calcula:

$$A_J^{n+1,m} = A_J^{n+1,m+1} \quad (4.11)$$

$$U_J^{n+1,m} = U_J^{n+1,m+1} \quad (4.12)$$

Además, a partir de esto se calculan las ecuaciones (3.188)-(3.196) para el tiempo  $n + 1$  y la iteración  $m$ .

- k) A continuación se calculan los términos no lineales  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_7, \Pi_8$  y  $\Pi_9$ , así como también se calculan los coeficientes  $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, a_2, b_2, c_2, d_2, y e_2$ .
- l) Se calcula el vector  $\underline{B}$ , donde

Condición de frontera aguas arriba

$$\begin{aligned} e_{1j}^n - a_1 U_1^{n+1,m+1} \\ e_{2j}^n - a_2 U_1^{n+1,m+1} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Condición de frontera aguas abajo

$$\begin{aligned} e_{1j}^n - d_1 A_J^{n+1,m+1} \\ e_{2j}^n - d_2 A_J^{n+1,m+1} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nodos centrales

$$\begin{aligned} e_{1j}^n \\ e_{2j}^n \end{aligned} \quad (4.15)$$

- m) Finalmente, teniendo los coeficientes en su posición correspondiente se completa la matriz  $A$  y las condiciones de frontera en el vector  $\underline{B}$ , se soluciona el sistema de ecuaciones (3.133).



- n) Se hace una prueba de convergencia de los términos no lineales, en caso de ser negativa se repiten los pasos *f)* y *g)* hasta lograr la convergencia definida por las ecuaciones (3.113) y (3.114), en el que se define un número máximo de iteraciones.
- o) Se realiza una evaluación de la conservación de masa y cantidad de movimiento como se definió en el subcapítulo 3.5.
- p) Impresión de los resultados obtenidos del perfil de flujo, área, velocidad y la variación de la conservación de masa y cantidad de movimiento.
- q) Se guardan las variables de gasto, área, tirante, velocidad, error en la conservación de masa y error en la cantidad de movimiento en cada tiempo *t*.
- r) Se hace un incremento en el tiempo  $t = t + \Delta t$
- s) Se repite el procedimiento desde el punto *f)* hasta que se cumpla  $t \geq T$ .
- t) Una vez que se cumple el punto anterior se guardan todos los resultados en el archivo "*Impr\_res\_Prueba#.mat*". En este post-proceso se presentarán los resultados obtenidos en la condición inicial; perfil de flujo gradualmente variado, comprobación de la condición inicial y las variaciones del área y velocidad a lo largo de la conducción, así como en la condición no permanente o transitoria; las variaciones en el tiempo del gasto, área, velocidad, nivel del flujo, error en la conservación de masa y cantidad de movimiento a lo largo de la conducción.

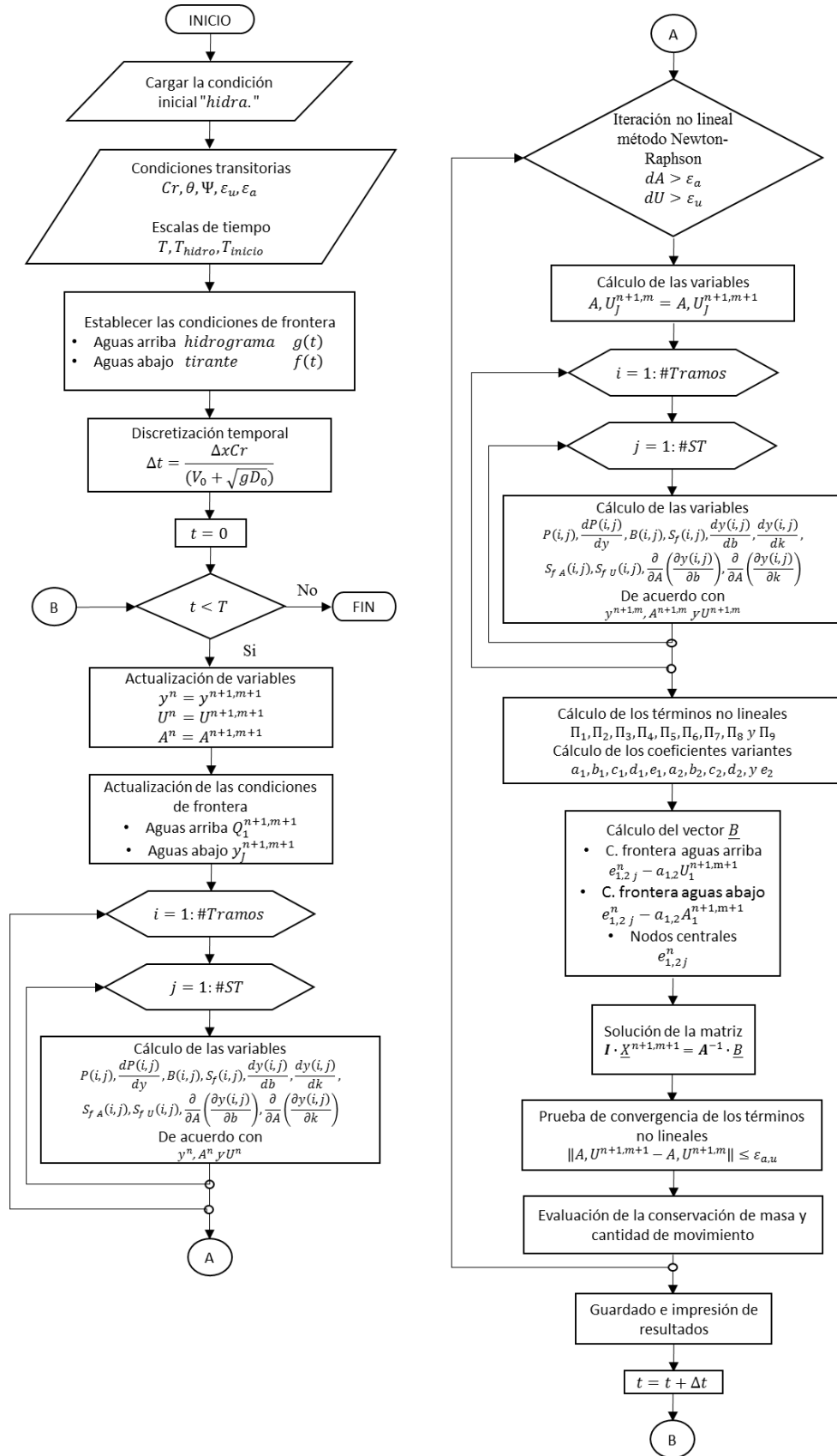


Figura 32. Diagrama de flujo del algoritmo de la condición transitoria



# CAPÍTULO 5

## PRUEBAS NUMÉRICAS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se realizaron distintas pruebas con la que se demuestra el funcionamiento del modelo numérico. Las pruebas que se realizaron fueron con un régimen de flujo subcrítico. Todas las pruebas que se realizaron fueron con tres tramos. En la tabla siguiente se muestran los datos generales que se utilizaron en todos los escenarios de la simulación.

Tabla 8. Parámetros generales en las pruebas numéricas.

Parámetro	Unidades	Valor
<b>Gasto</b>	$m^3/s$	300
<b>Pendiente del fondo del canal</b>	<i>adim.</i>	0.0001
<b>Coefficiente de rugosidad de Manning</b>	<i>adim.</i>	0.014
<b>Discretización espacial <math>\Delta x</math> en la zona de la transición</b>	<i>m</i>	0.1
<b>Discretización espacial <math>\Delta x</math> fuera de la zona de la transición</b>	<i>m</i>	1.0



La Tabla 9 muestra un resumen de las diferentes pruebas numéricas que se realizaron en este trabajo.

Tabla 9. Descripción de pruebas numéricas

Numero de prueba	Tipo de transición	Tipo de sección
<b>Prueba 1</b>	Reducción suave	Trapezoidal
<b>Prueba 2</b>	Ampliación suave	Triangular
<b>Prueba 3</b>	Reducción abrupta	Rectangular
<b>Prueba 4</b>	Ampliación abrupta	Trapezoidal
<b>Prueba 5</b>	Cambio de sección	Rectangular-Trapezoidal
<b>Prueba 6</b>	Cambio de sección	Trapezoidal-Triangular
<b>Prueba 7</b>	Reducción suave	Trapezoidal

Las pruebas 1-6 fueron realizadas con el modelo numérico elaborado con la versión uno del sistema de ecuaciones, tal como se definió en el subcapítulo 3.1, y la prueba 7 fue elaborada con la versión dos de las ecuaciones de Saint-Venant (véase Anexo A).

## 5.1. SIMULACIÓN DE ESCENARIOS

En los subcapítulos siguientes se muestran las características y resultados obtenidos de cada escenario de simulación que se realizaron en este trabajo de acuerdo con los parámetros generales que se definieron en la Tabla 8, para los casos de ampliaciones y reducciones en la geometría de la sección, tanto suaves como abruptas, y también para cambios de sección aplicados a los tres diferentes tipos de secciones transversales; trapezoidal, rectangular y triangular.

A continuación, se especificarán las características generales que se emplearon en la condición inicial y en la condición transitoria en las pruebas realizadas en este trabajo.

### *a. Condición inicial*

La condición inicial se generó en el modulo "*hidra.*", de acuerdo al procedimiento descrito en el subcapítulo 4.3. Se definió un gasto en estado permanente  $Q = 300 \text{ m}^3/\text{s}$ , así mismo se definió una condición de frontera aguas abajo  $y_f$  (véase subcapítulo 2.3.2), debido a que se estableció un régimen de flujo subcrítico.



### b. Condición transitoria

El procedimiento que se siguió se describe en el subcapítulo 4.4. Se definieron las condiciones de frontera aguas arriba con un hidrograma de entrada de tipo escalón como se muestra en la Figura 33 con las siguientes características: *Tiempo de inicio* = 2 s; *Duración del hidrograma* = 50 s; *Gasto máximo* = 330 m<sup>3</sup>/s. Para la frontera aguas abajo, se considera un tirante fijo  $y_f$  (ecuación (2.51)). Se realizaron las pruebas considerando la solución con el método de Newton-Raphson. De acuerdo a la estabilidad se utilizó un numero de Courant de  $Cr = 1$ ,  $\Psi = 0.50$  y  $\theta = 0.60$ , donde  $\Psi$  y  $\theta$  son los factores de peso espacial y el factor de peso temporal respectivamente.

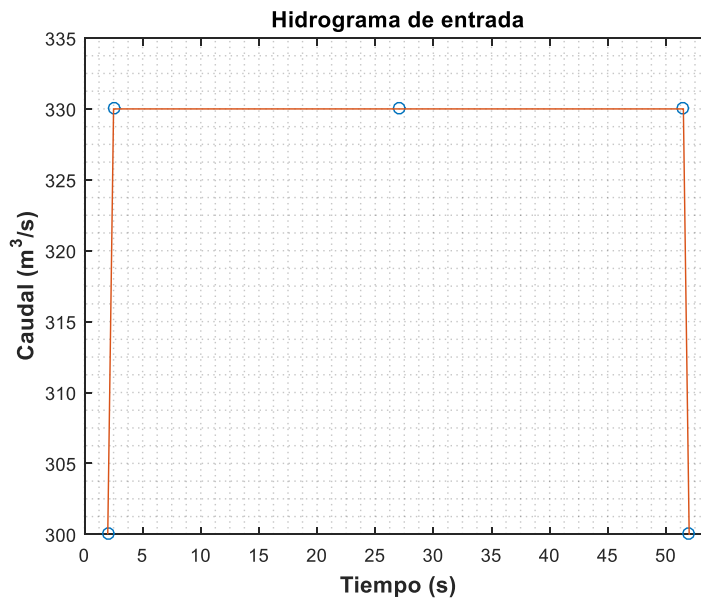


Figura 33. Condición de frontera aguas arriba.

### c. Impresión de resultados

Los resultados obtenidos en la condición inicial muestran los valores iniciales, tales como el perfil de flujo, área y velocidad a lo largo de la conducción, así como el error al realizar la comprobación de la conservación de masa y cantidad de movimiento de la condición inicial. Y los resultados que se obtuvieron en la simulación transitoria muestran las variaciones de gasto, área, velocidad, tirante, error en la conservación de masa y error en la cantidad de movimiento en el tiempo.

Las características establecidas en la condición inicial y en la condición transitoria, así como la impresión de resultados fueron las utilizadas en todas las pruebas que se realizaron en este trabajo.





### 5.1.1. PRUEBAS DE REDUCCIÓN Y AMPLIACIÓN SUAVE

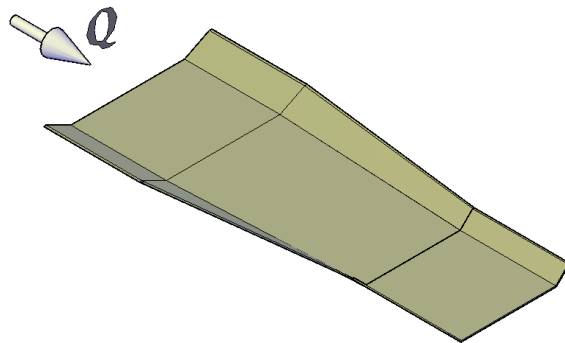
#### 5.1.1.1. PRUEBA 1. REDUCCIÓN SUAVE EN SECCIÓN TRAPEZOIDAL

Descripción de la prueba:

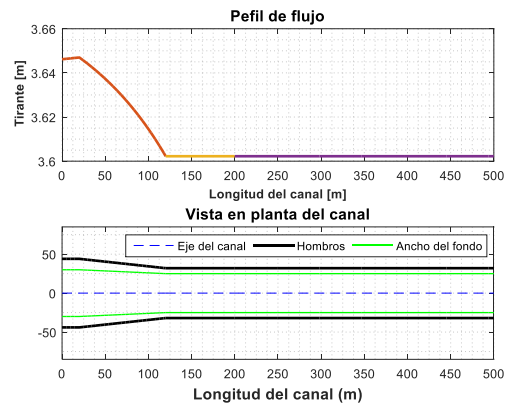
Canal con sección trapezoidal con una reducción suave de la sección transversal, con una longitud total de la conducción de 500 m y la longitud de la transición es de 100 m. Las características geométricas de la sección inicial y final de la transición se describen en la tabla siguiente. Los resultados obtenidos en la condición inicial se muestran en la Figura 34.

Tabla 10. Características geométricas de la transición para la prueba 1.

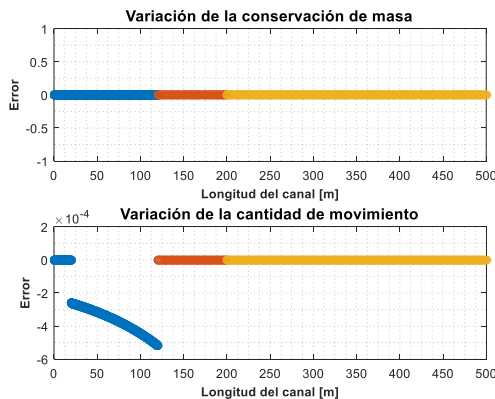
	Sección inicial	Sección final
Ancho del fondo (m)	60	50
Talud (adim)	2	1



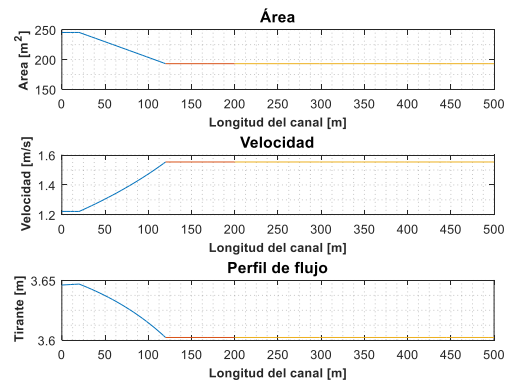
a)



b)

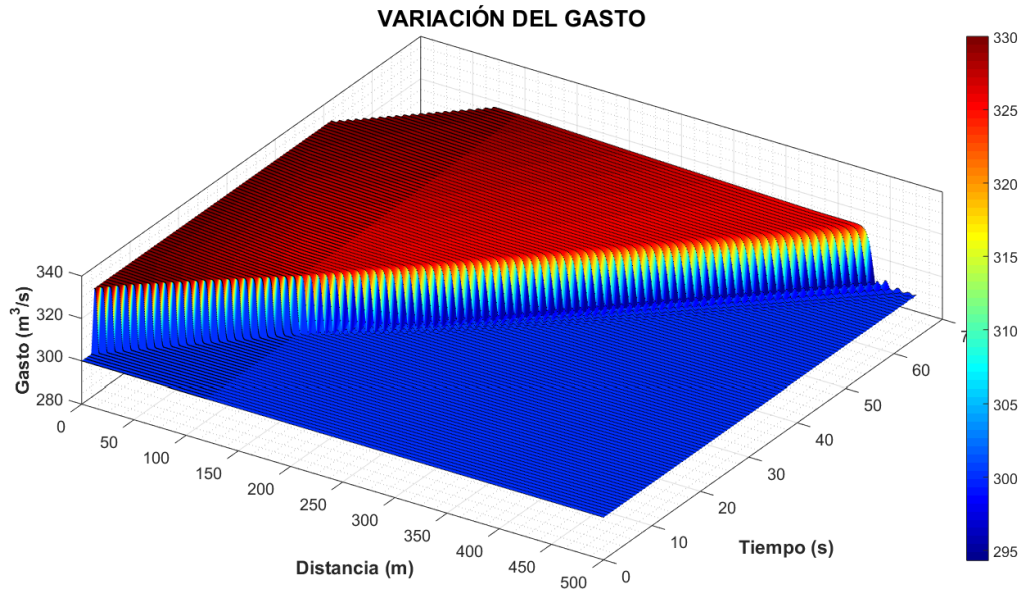


c)

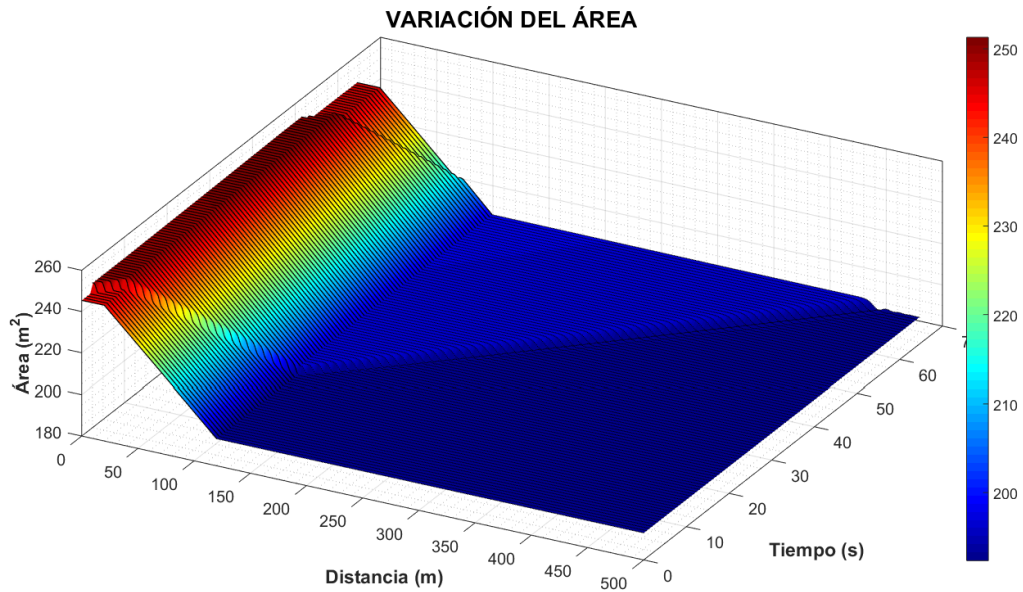


d)

Figura 34. a) Esquema de una reducción suave en una conducción con sección trapezoidal. b) Resultado de la condición inicial. Perfil de flujo. Vista en planta del ancho del fondo de la conducción. c) Comprobación de la condición inicial. Evaluación del error en la conservación de masa y cantidad de movimiento. d) Variación del área y la velocidad.

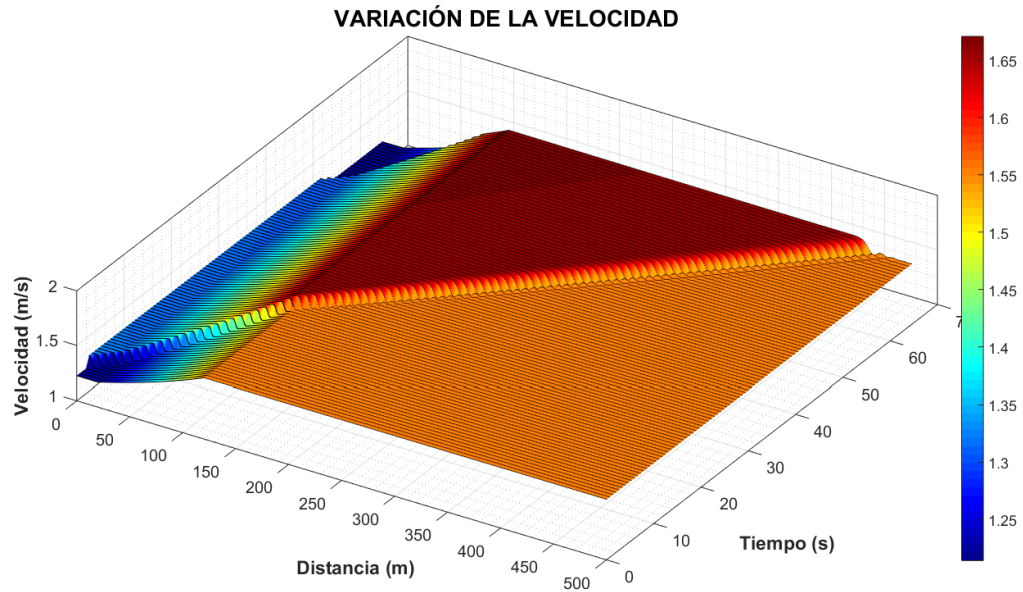


a)

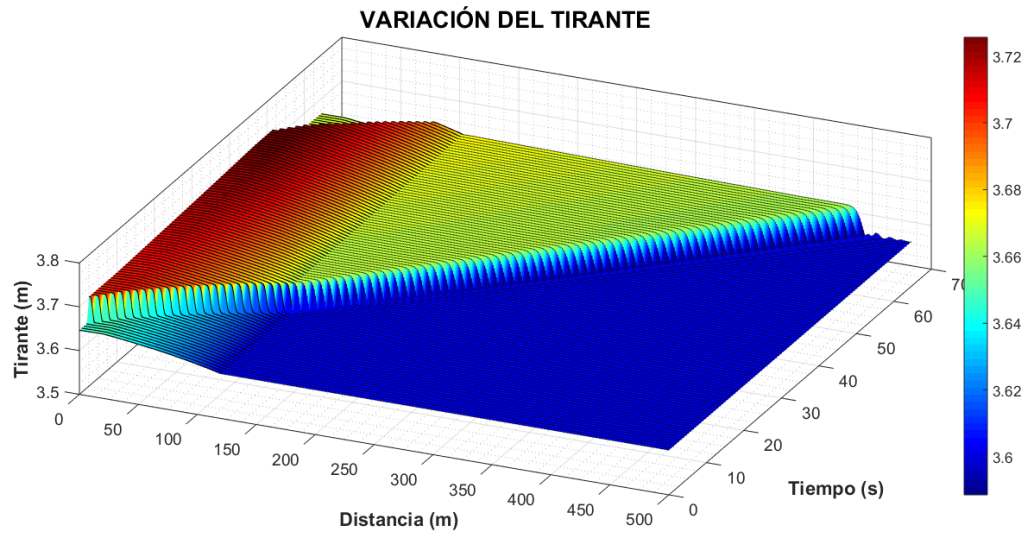


b)

Figura 35. Resultados obtenidos de la simulación en un canal con sección trapezoidal con una reducción suave. a) Variación del gasto. b) Variación del área hidráulica.

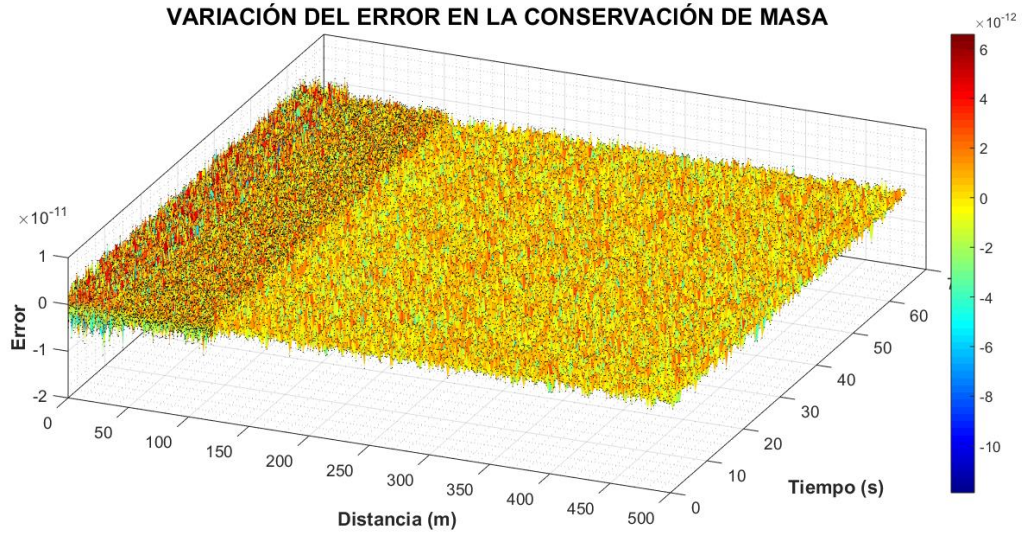


c)

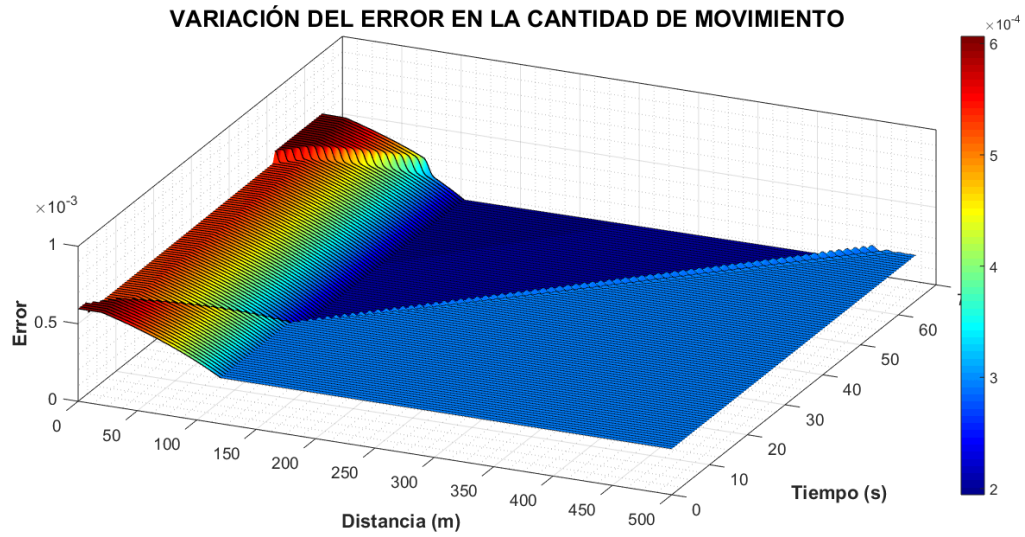


d)

Figura 36. Continuación Figura 35. c) Variación de la velocidad. d) Variación del tirante.



e)



f)

Figura 37. Continuación Figura 35. e) Variación del error en la conservación de masa. f) Variación del error en la cantidad de movimiento.



### 5.1.1.2. PRUEBA 2. AMPLIACIÓN SUAVE EN SECCIÓN TRIANGULAR

Descripción de la prueba:

Canal con sección triangular con una ampliación suave de la sección transversal, con una longitud total de la conducción de 500 m y la longitud de la transición es de 100 m. Las características geométricas de la sección inicial y final de la transición se describen en la tabla siguiente.

Tabla 11. Características geométricas de la transición para la prueba 2.

	Sección inicial	Sección final
Talud (adim)	1.50	3

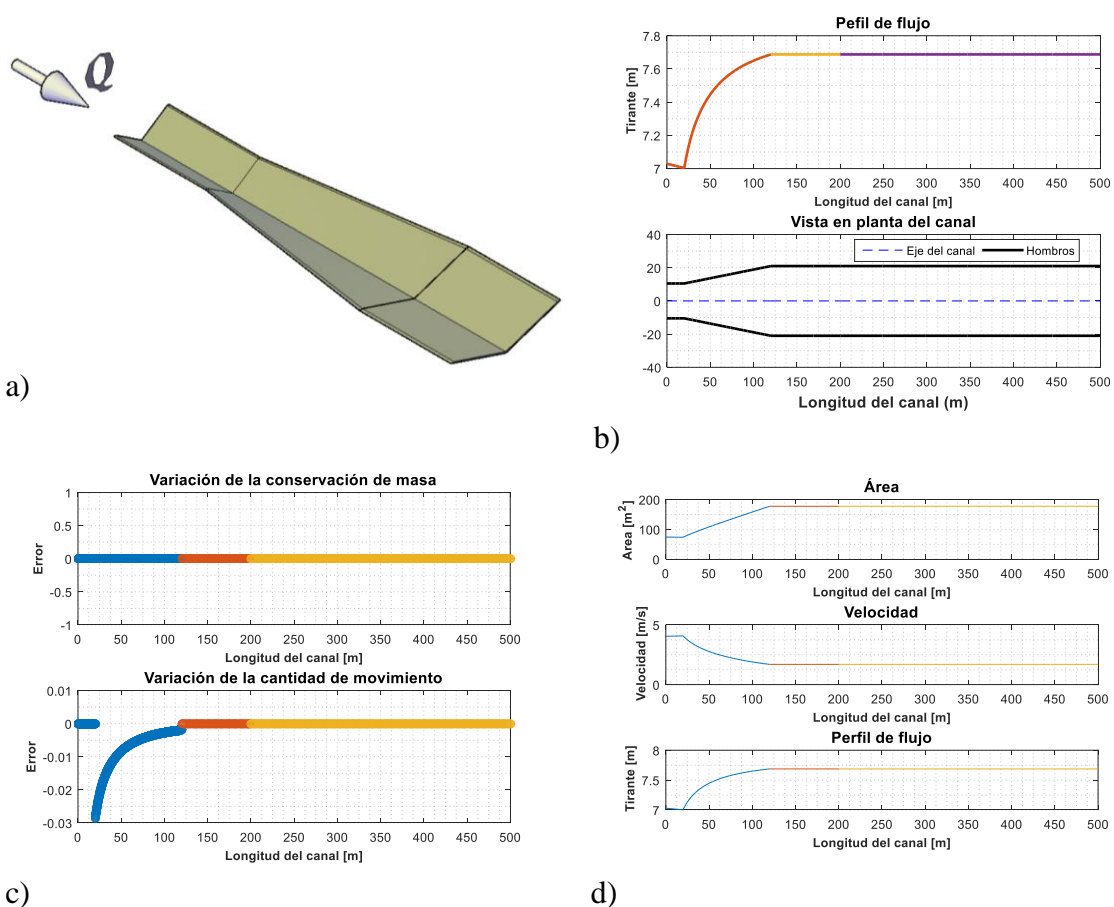
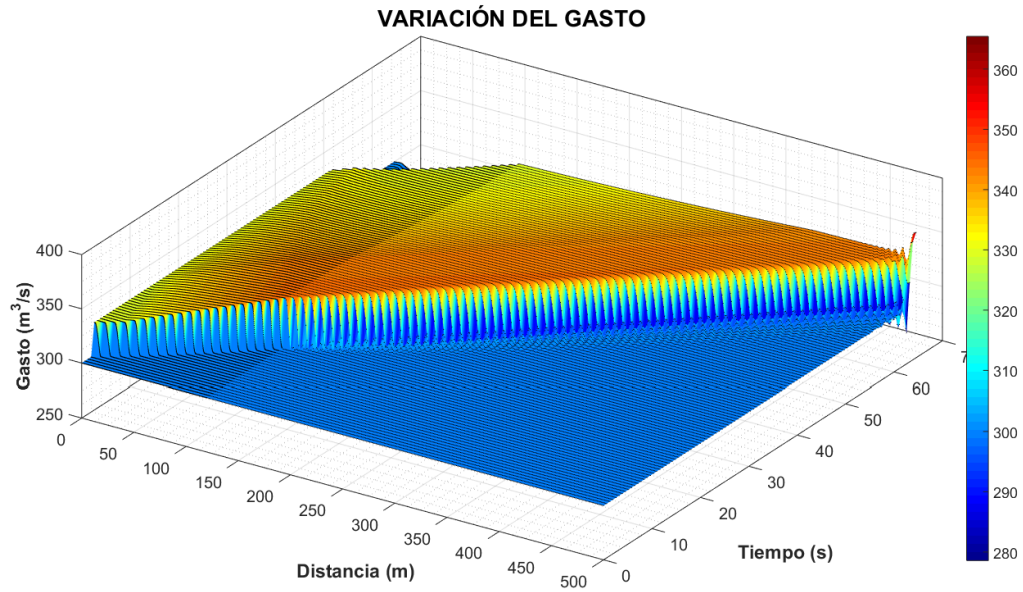
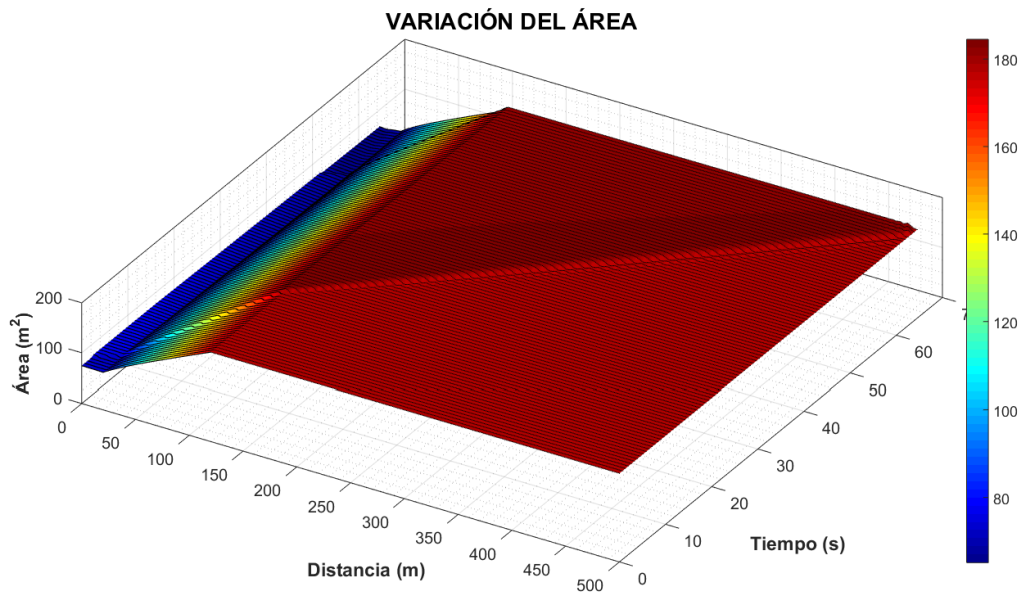


Figura 38. a) Esquema de una ampliación suave en una conducción con sección triangular. b) Resultado de la condición inicial. Perfil de flujo. Vista en planta de los hombros de la conducción. c) Comprobación de la condición inicial. Evaluación del error en la conservación de masa y cantidad de movimiento. d) Variación del área y la velocidad.

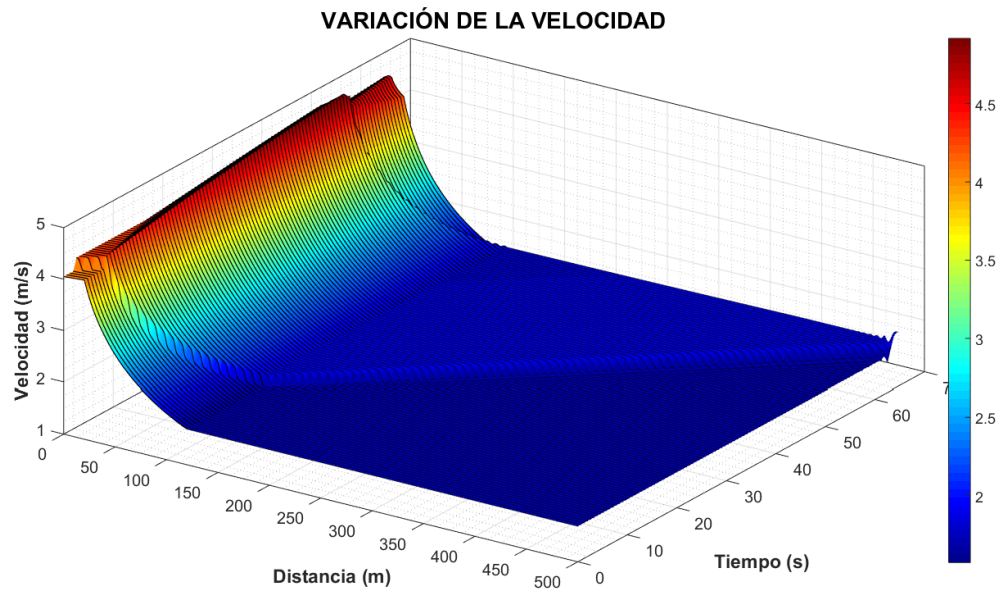


a)

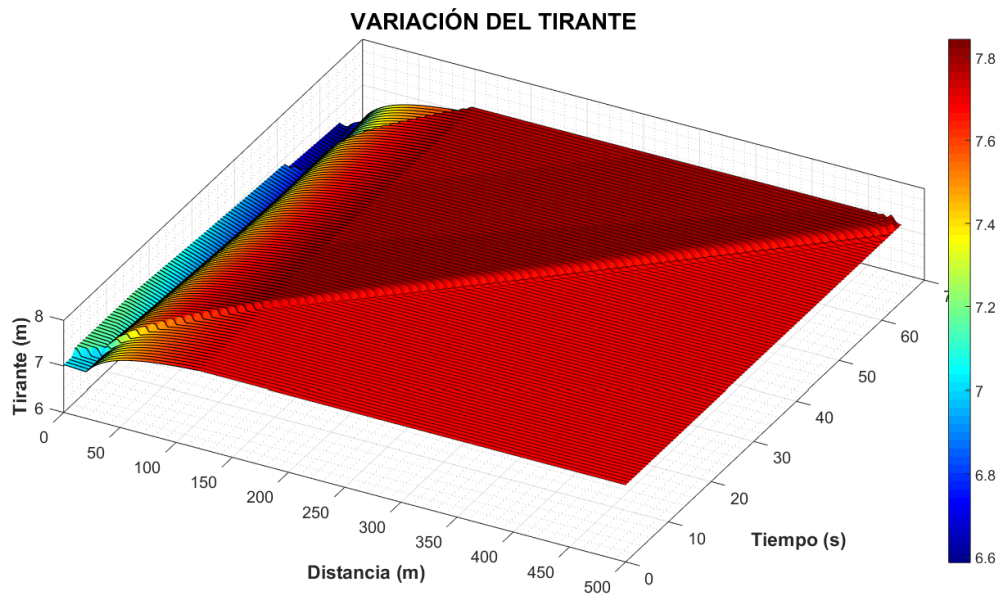


b)

Figura 39. Resultados obtenidos de la simulación en un canal con sección triangular con una ampliación suave. a) Variación del gasto. b) Variación del área hidráulica.

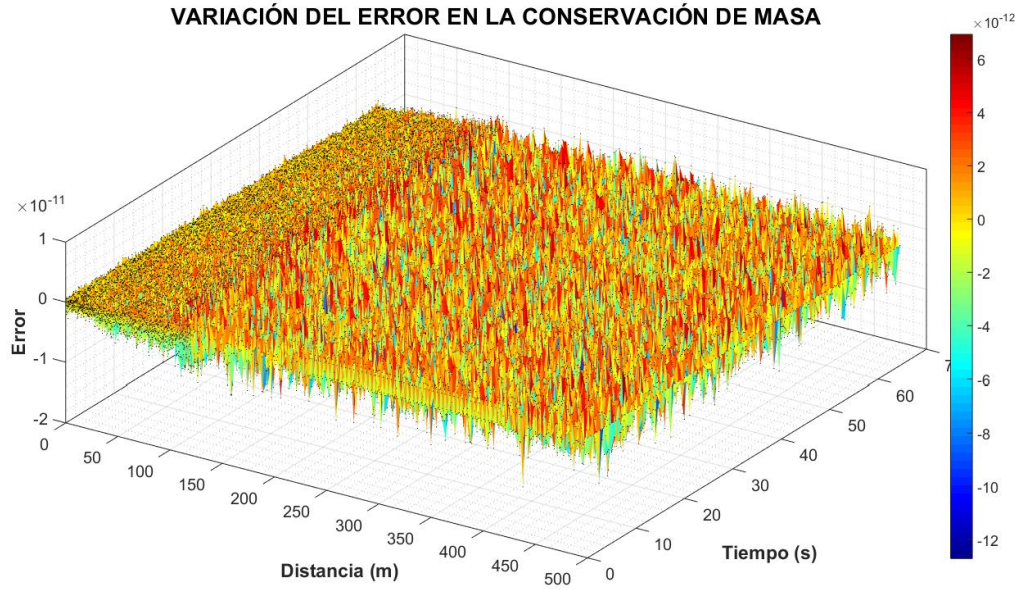


c)

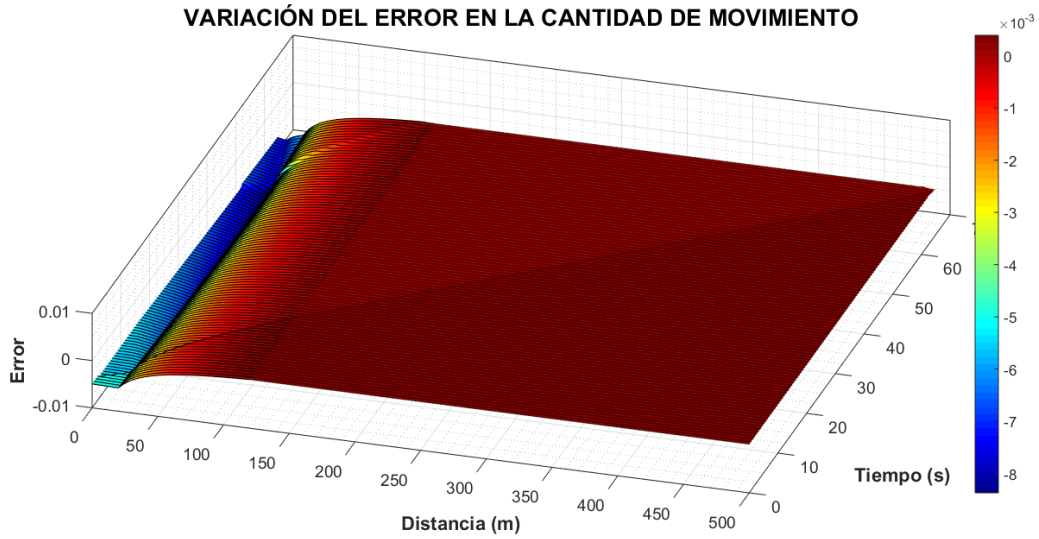


d)

Figura 40. Continuación Figura 39. c) Variación de la velocidad. d) Variación del tirante.



e)



f)

Figura 41. Continuación Figura 39. e) Variación del error en la conservación de masa. f) Variación del error en la cantidad de movimiento.





### 5.1.2. PRUEBAS DE REDUCCIÓN Y AMPLIACIÓN ABRUPTA

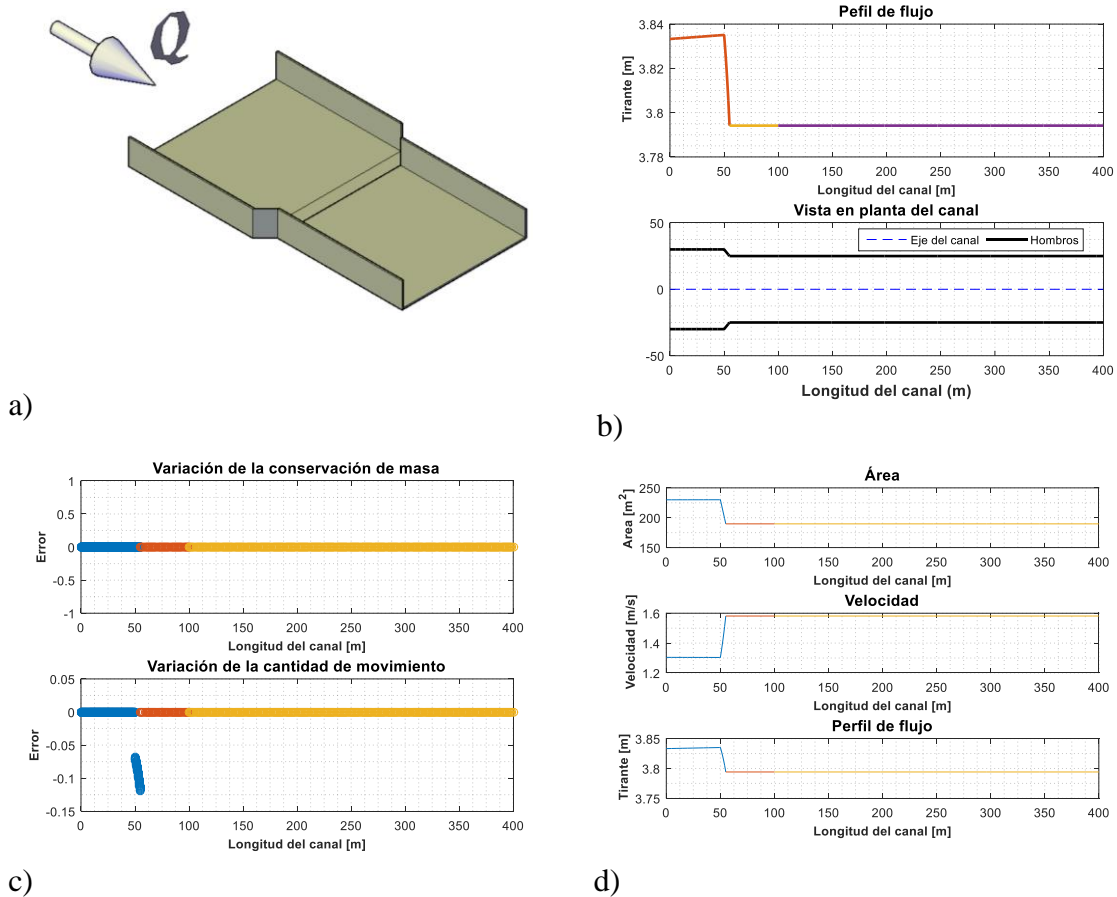
#### 5.1.2.1. PRUEBA 3. REDUCCIÓN ABRUPTA EN SECCIÓN RECTANGULAR.

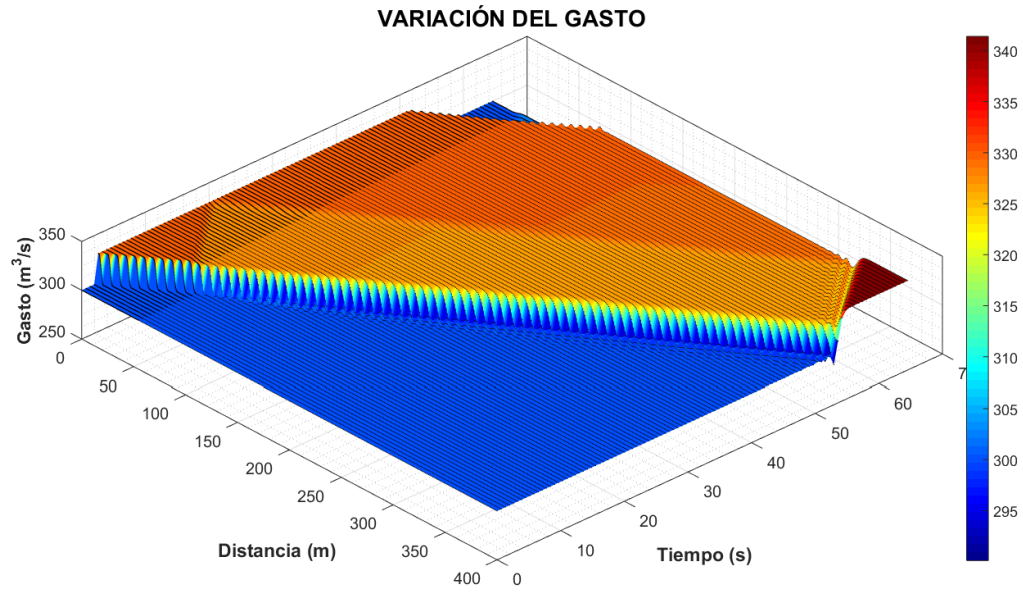
Descripción de la prueba:

Canal con sección rectangular con una reducción abrupta de la sección transversal, con una longitud total de la conducción de 400 m y la longitud de la transición es de 5 m. Las características geométricas de la sección inicial y final de la transición se describen en la tabla siguiente.

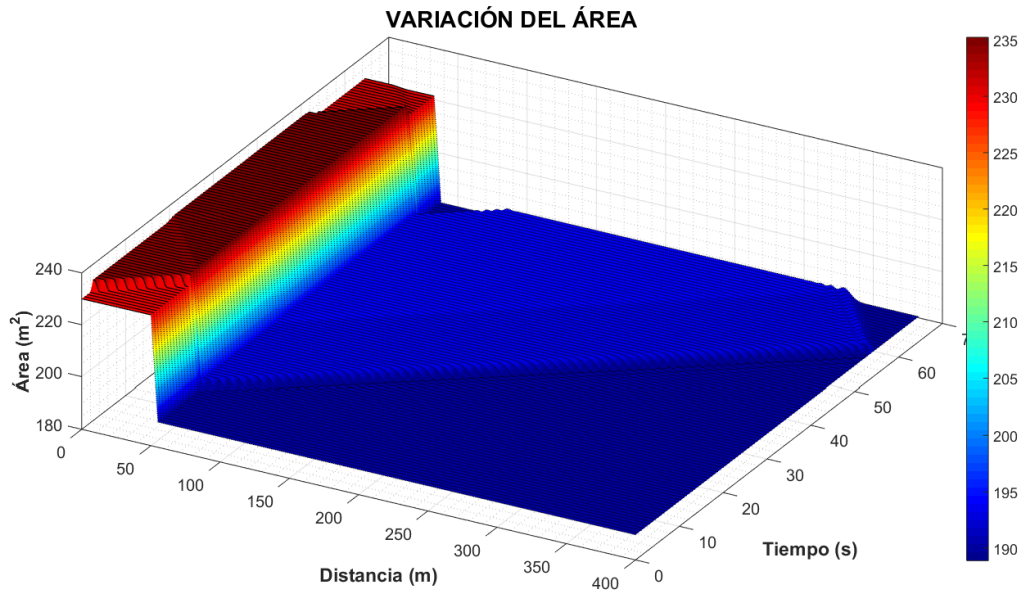
Tabla 12. Características geométricas de la transición para la prueba 3.

	Sección inicial	Sección final
Ancho del fondo (m)	60	50



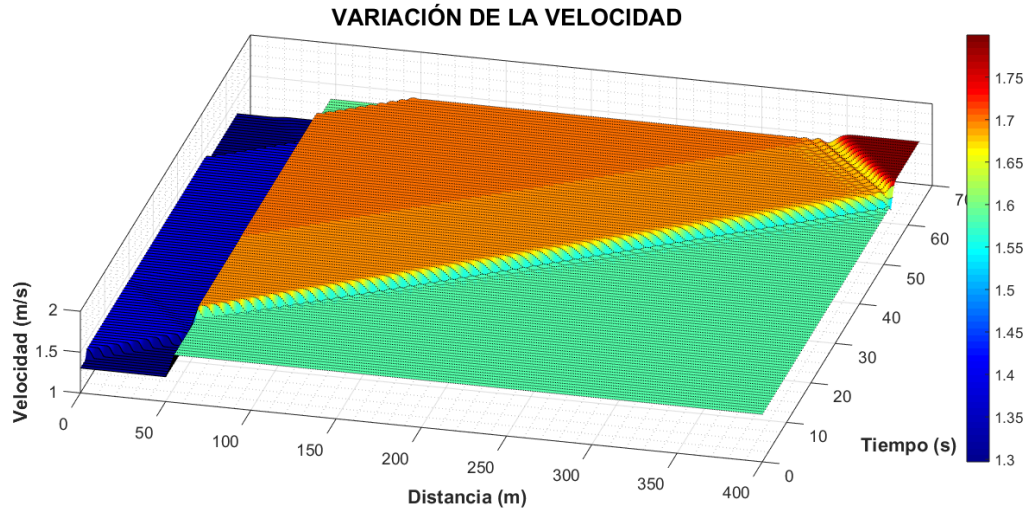


a)

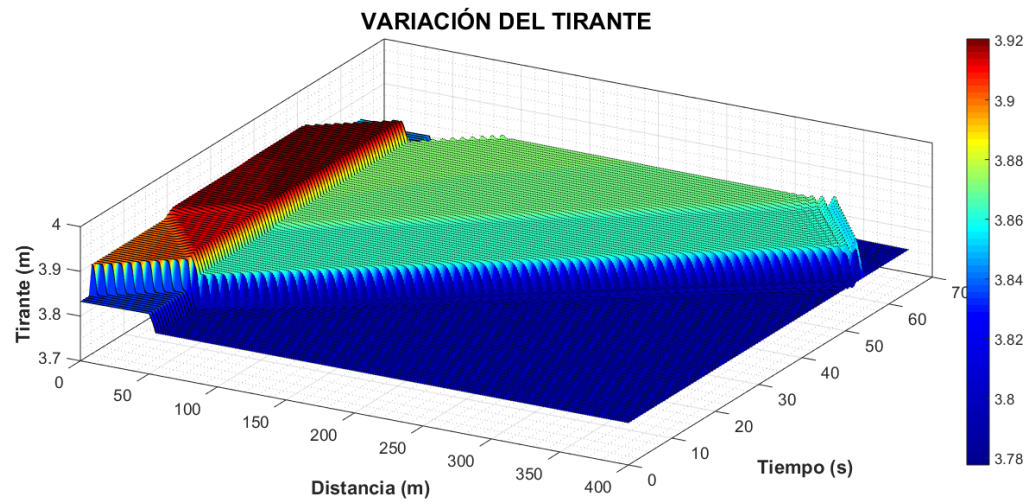


b)

Figura 43. Resultados obtenidos de la simulación en un canal con sección rectangular con una reducción abrupta. a) Variación del gasto. b) Variación del área hidráulica.

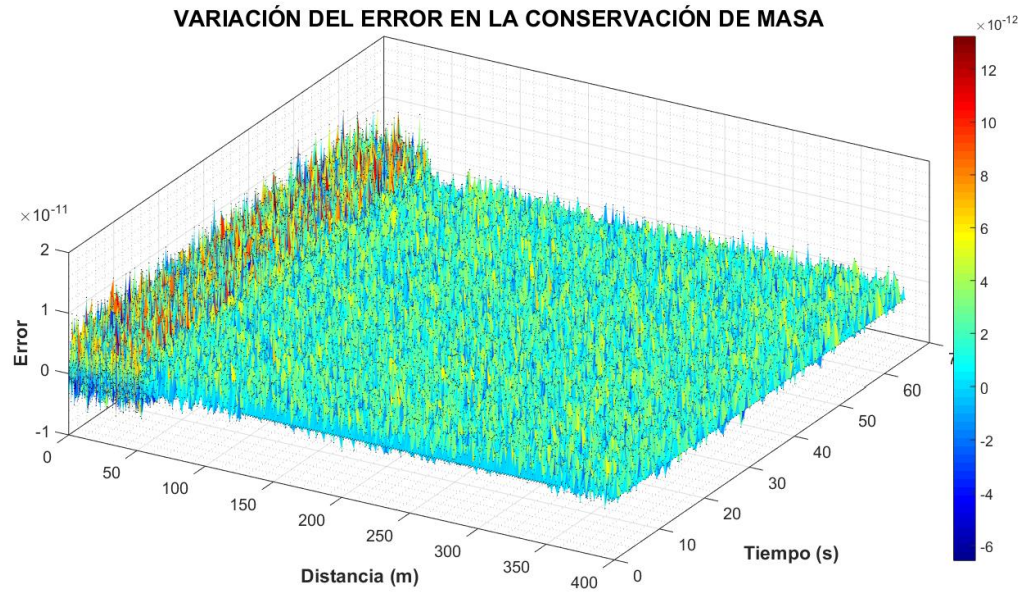


c)

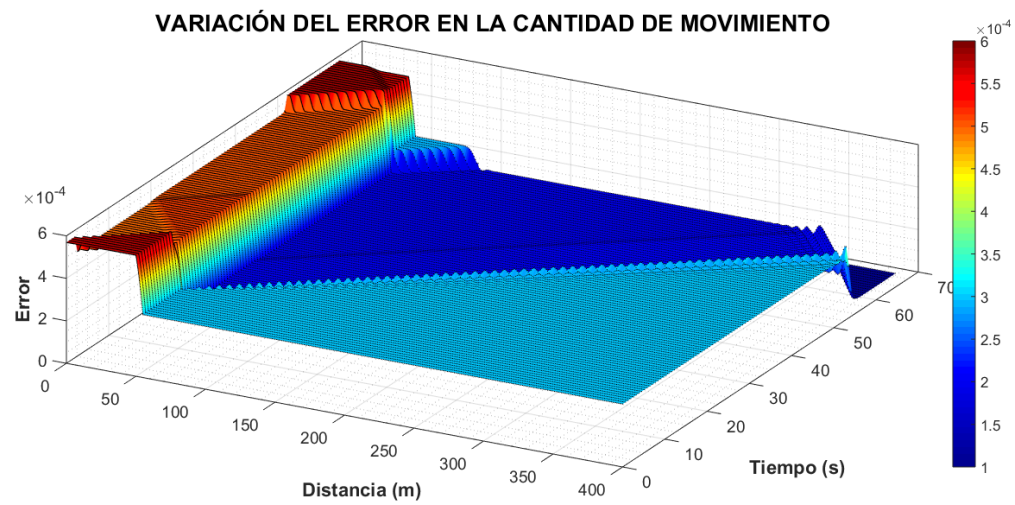


d)

Figura 44. Continuación Figura 43. c) Variación de la velocidad. d) Variación del tirante.



e)



f)

Figura 45. Continuación Figura 43. e) Variación del error en la conservación de masa. f) Variación del error en la cantidad de movimiento.



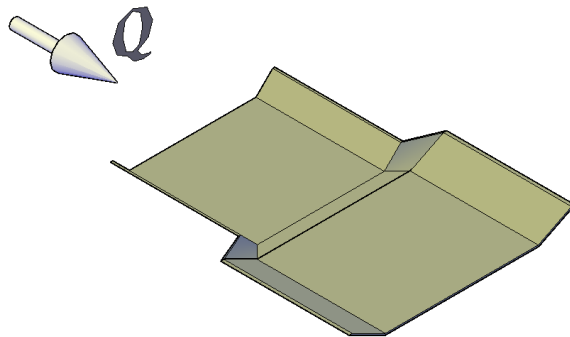
### 5.1.2.2. PRUEBA 4. AMPLIACIÓN ABRUPTA EN SECCIÓN TRAPEZOIDAL

Descripción de la prueba:

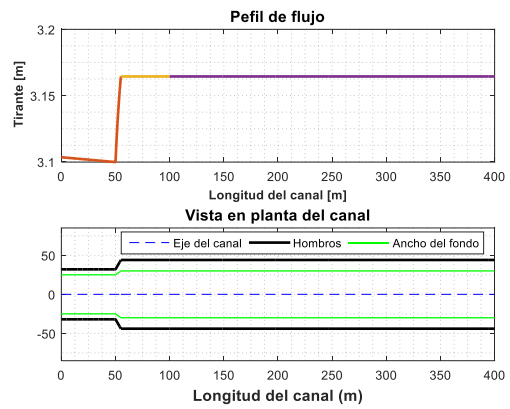
Canal con sección trapezoidal con una ampliación abrupta de la sección transversal, con una longitud total de la conducción de 400 m y la longitud de la transición es de 5 m. Las características geométricas de la sección inicial y final de la transición se describen en la tabla siguiente.

Tabla 13. Características geométricas de la transición para la prueba 4.

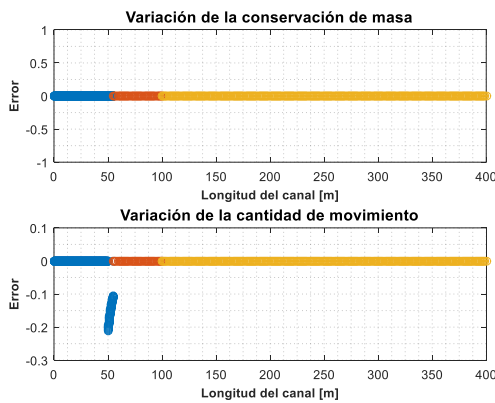
	Sección inicial	Sección final
Ancho del fondo (m)	50	60
Talud (adim)	1	2



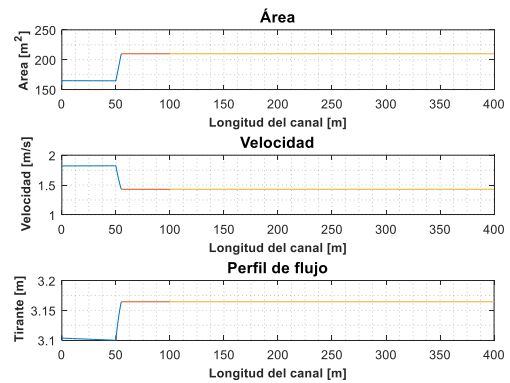
a)



b)

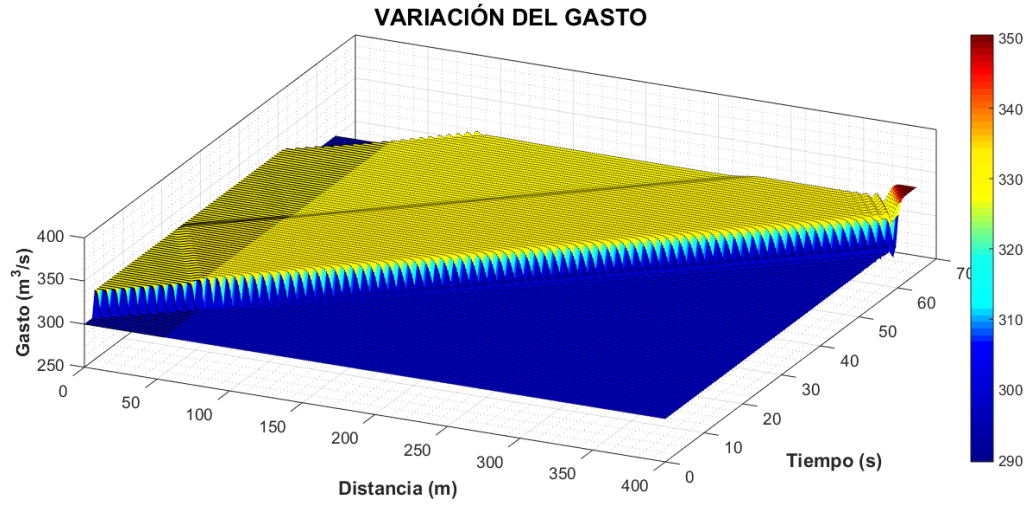


c)

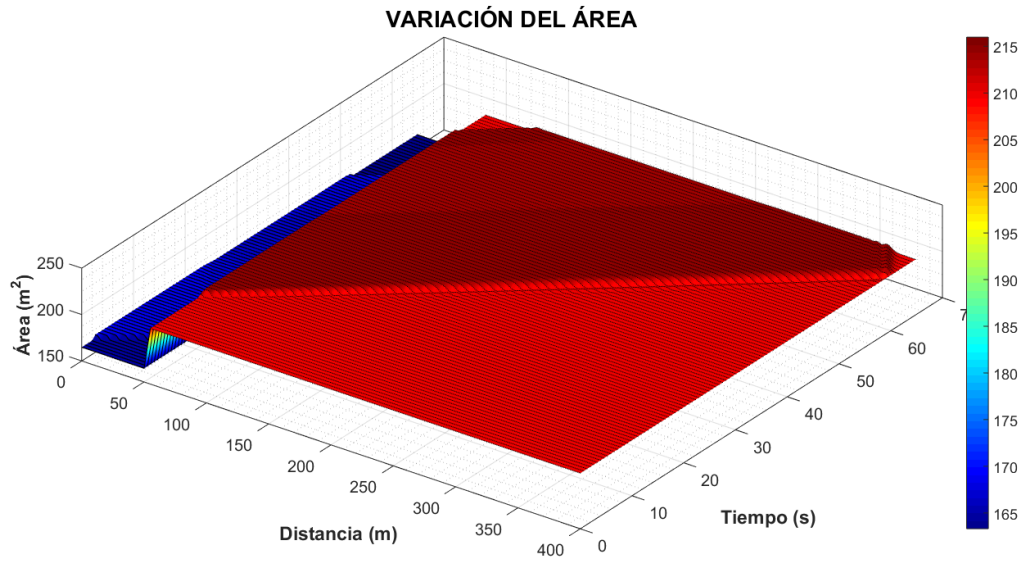


d)

Figura 46. a) Esquema de una ampliación abrupta en una conducción con sección trapezoidal. b) Resultado de la condición inicial. Perfil de flujo. Vista en planta del ancho del fondo de la conducción. c) Comprobación de la condición inicial. Evaluación del error en la conservación de masa y cantidad de movimiento. d) Variación del área y la velocidad.

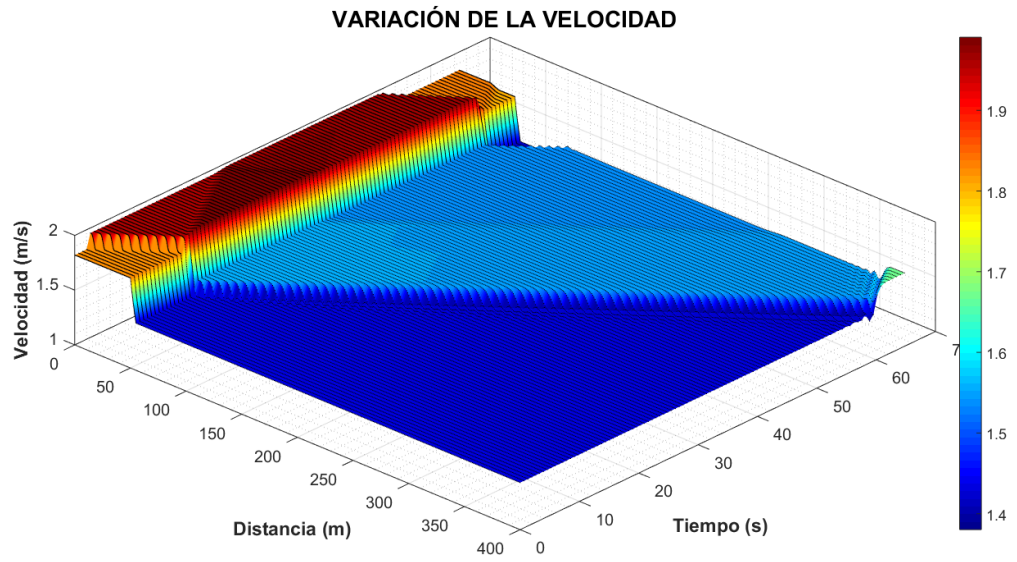


a)

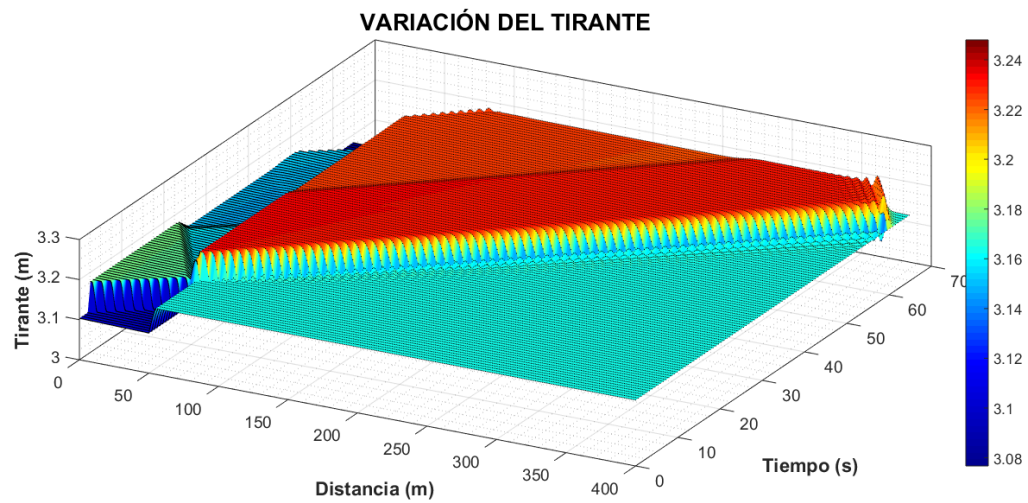


b)

Figura 47. Resultados obtenidos de la simulación en un canal con sección trapezoidal con una ampliación abrupta. a) Variación del gasto. b) Variación del área hidráulica.

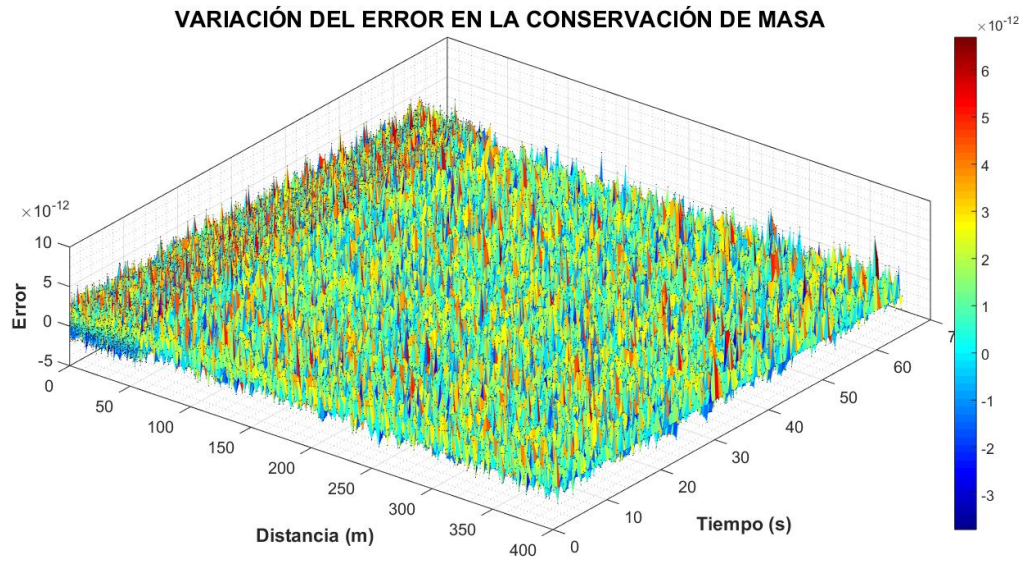


c)

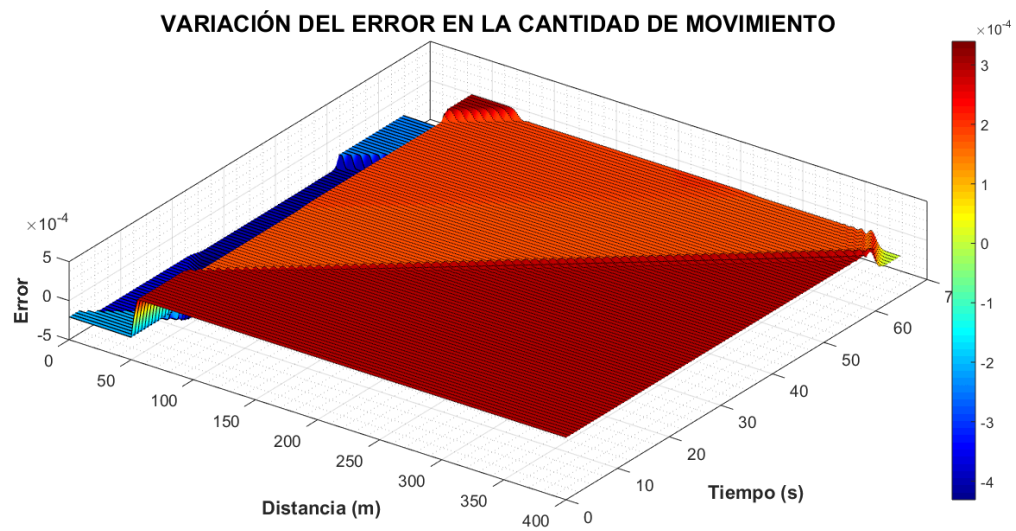


d)

Figura 48. Continuación Figura 47. c) Variación de la velocidad. d) Variación del tirante.



e)



f)

Figura 49. Continuación Figura 47. e) Variación del error en la conservación de masa. f) Variación del error en la cantidad de movimiento.





### 5.1.3. PRUEBAS DE CAMBIO DE SECCIÓN

#### 5.1.3.1. PRUEBA 5. CAMBIO DE SECCIÓN DE RECTANGULAR A TRAPEZOIDAL.

Descripción de la prueba:

Canal con una sección rectangular al inicio y una trapezoidal al final de la transición, con una longitud total de la conducción de 500 m y la longitud de la transición es de 100 m. Las características geométricas de la sección inicial y final de la transición se describen en la tabla siguiente.

Tabla 14. Características geométricas de la transición para la prueba 5.

	Sección inicial	Sección final
Ancho del fondo (m)	50	50
Talud (adim)	0	3

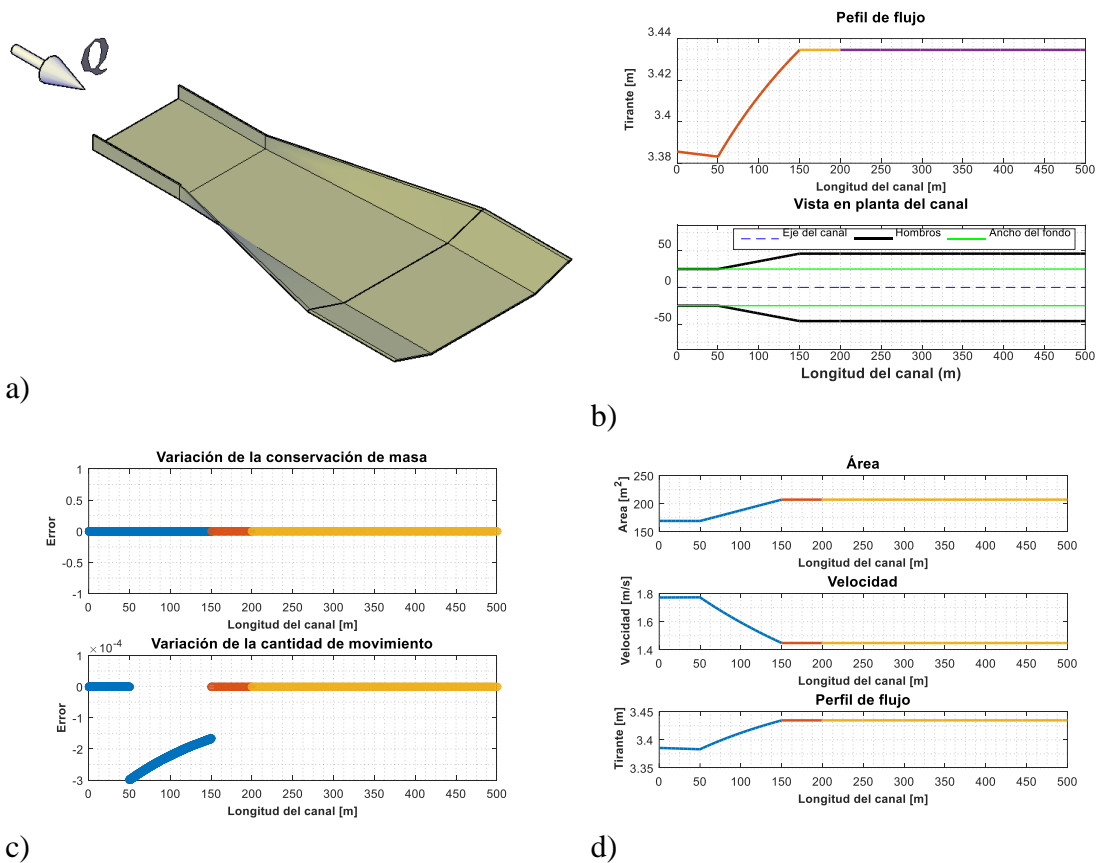
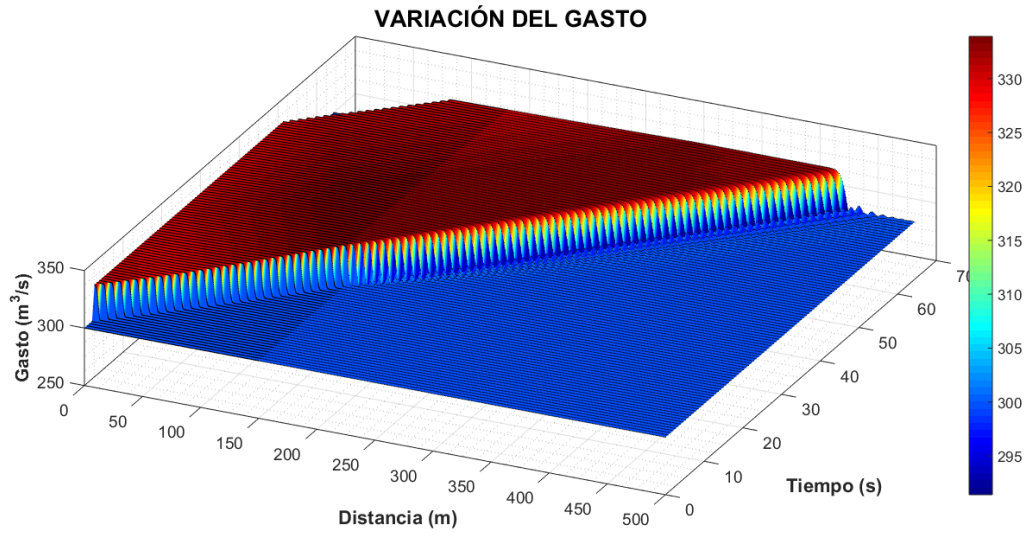
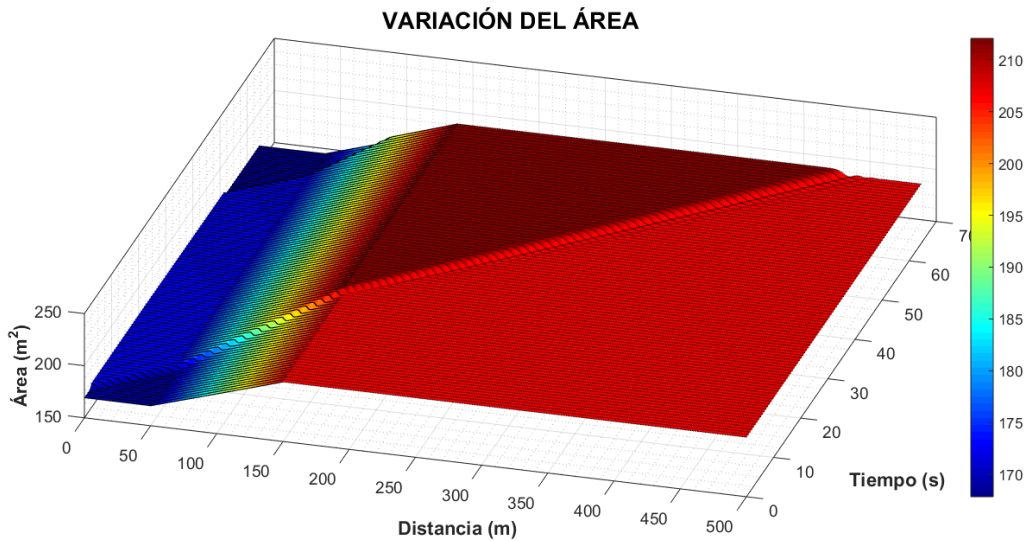


Figura 50. a) Esquema de un cambio de sección con una transición suave de rectangular a trapezoidal. b) Resultado de la condición inicial. Perfil de flujo. Vista en planta del ancho del fondo de la conducción. c) Comprobación de la condición inicial. Evaluación del error en la conservación de masa y cantidad de movimiento. d) Variación del área y la velocidad.

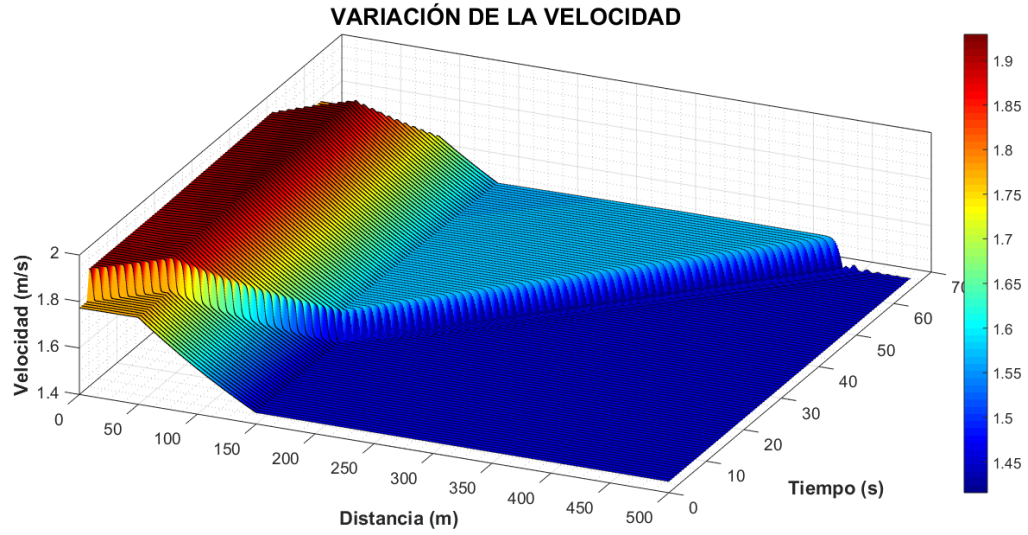


a)

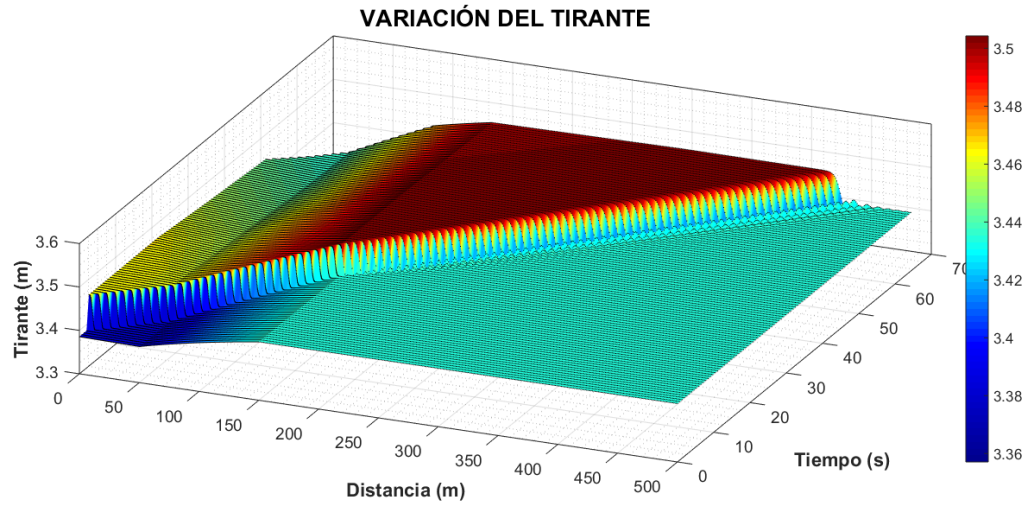


b)

Figura 51. Resultados obtenidos de la simulación en un canal con cambio de sección de un canal rectangular a trapezoidal. a) Variación del gasto. b) Variación del área hidráulica.

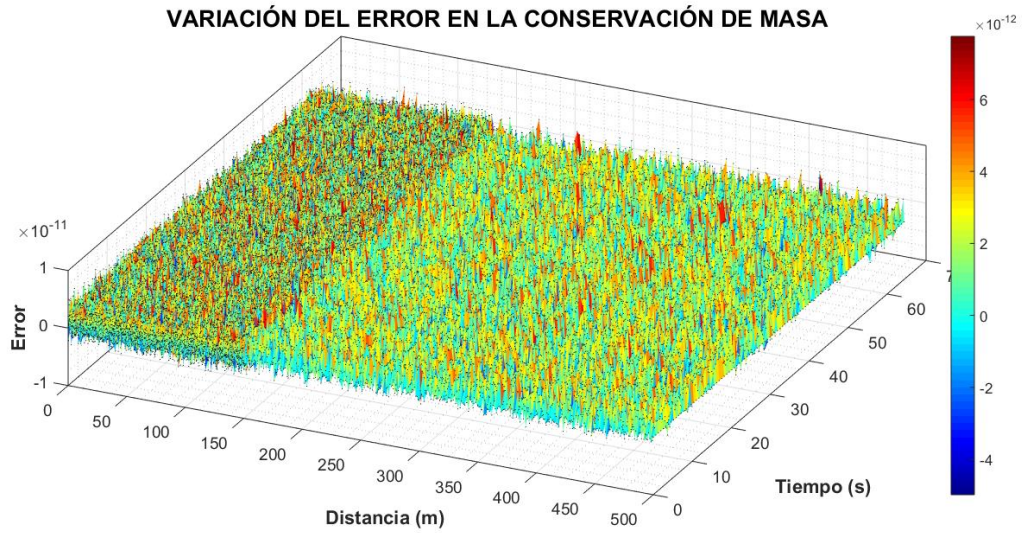


c)

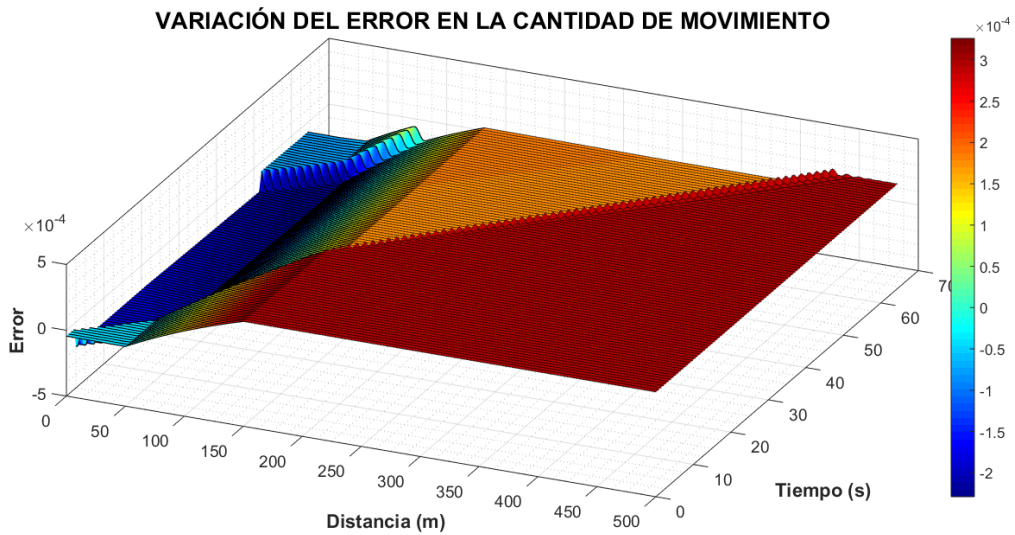


d)

Figura 52. Continuación Figura 51. c) Variación de la velocidad. d) Variación del tirante.



e)



f)

Figura 53. Continuación Figura 51. e) Variación del error en la conservación de masa. f) Variación del error en la cantidad de movimiento.



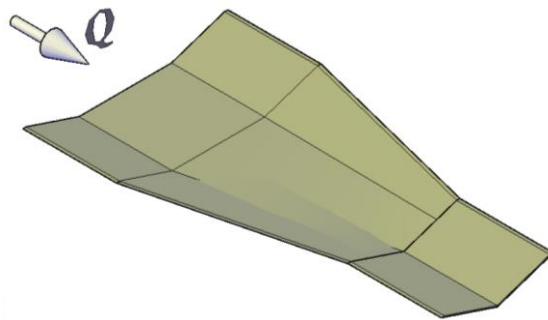
### 5.1.3.2. PRUEBA 6. CAMBIO DE SECCIÓN DE TRAPEZOIDAL A TRIANGULAR

Descripción de la prueba:

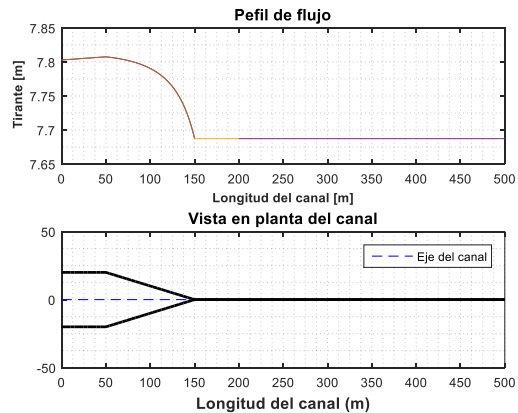
Canal con una sección trapezoidal al inicio y una triangular al final de la transición, con una longitud total de la conducción de 500 m y la longitud de la transición es de 100 m. Las características geométricas de la sección inicial y final de la transición se describen en la tabla siguiente.

Tabla 15. Características geométricas de la transición para la prueba 6.

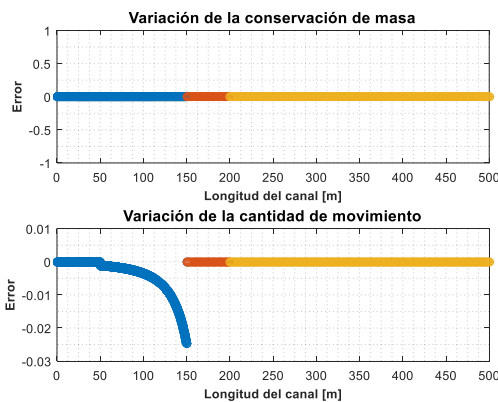
	<i>Sección inicial</i>	<i>Sección final</i>
<i>Ancho del fondo (m)</i>	40	0
<i>Talud (adim)</i>	3	3



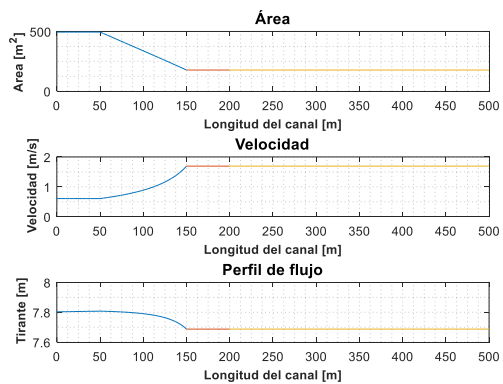
a)



b)

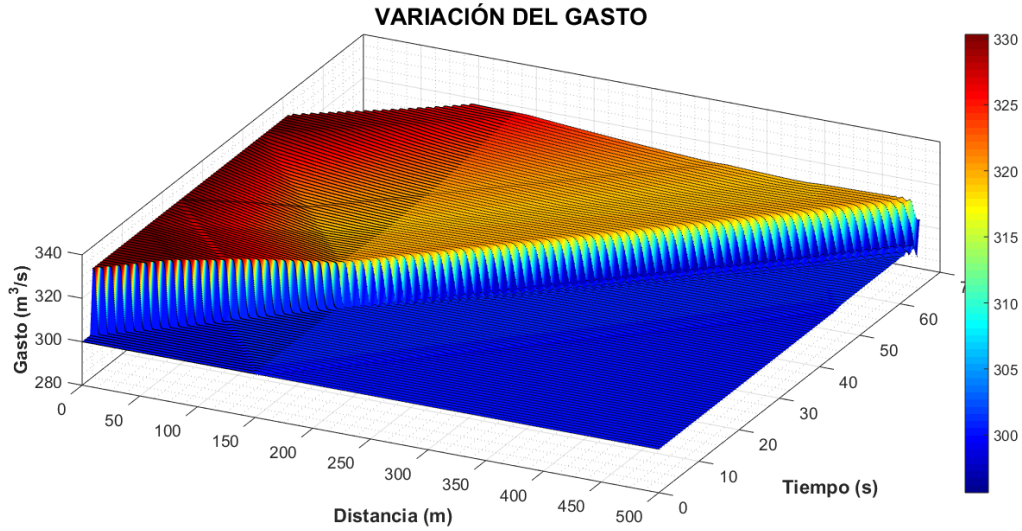


c)

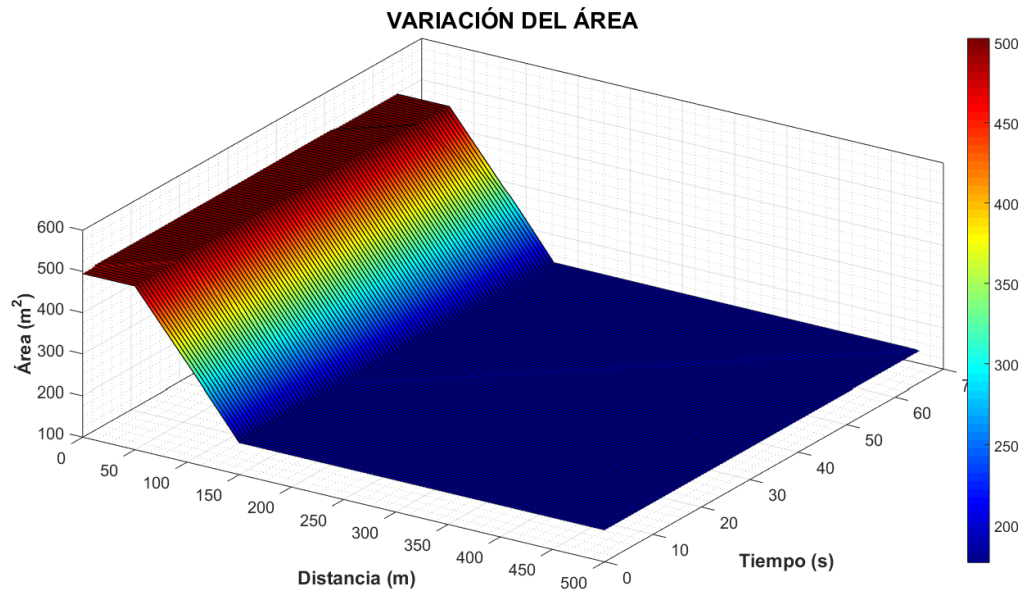


d)

Figura 54. a) Esquema de un cambio de sección con una transición suave de trapezoidal a triangular. b) Resultado de la condición inicial. Perfil de flujo. Vista en planta del ancho del fondo de la conducción. c) Comprobación de la condición inicial. Evaluación del error en la conservación de masa y cantidad de movimiento. d) Variación del área y la velocidad.

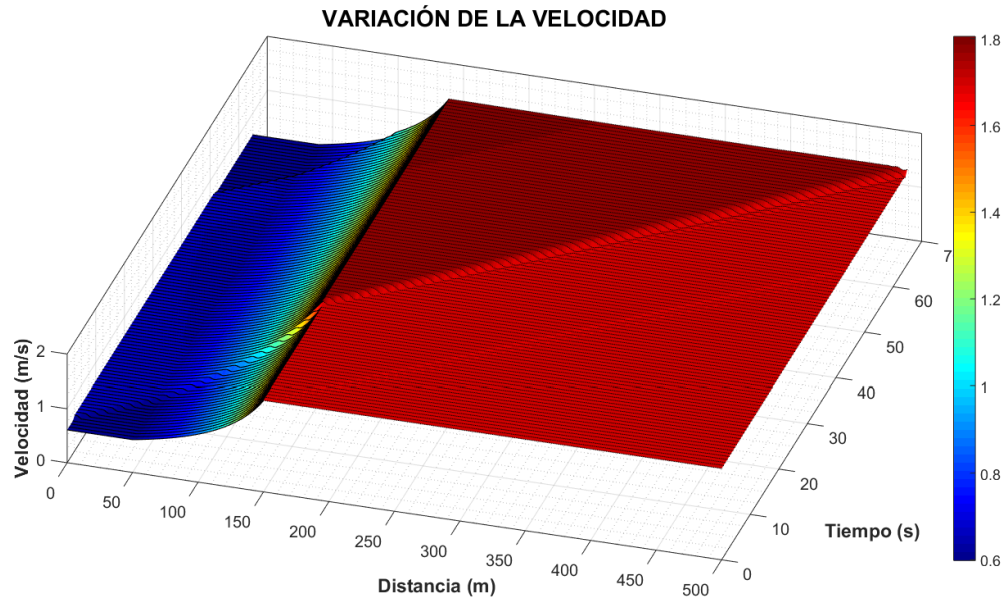


a)

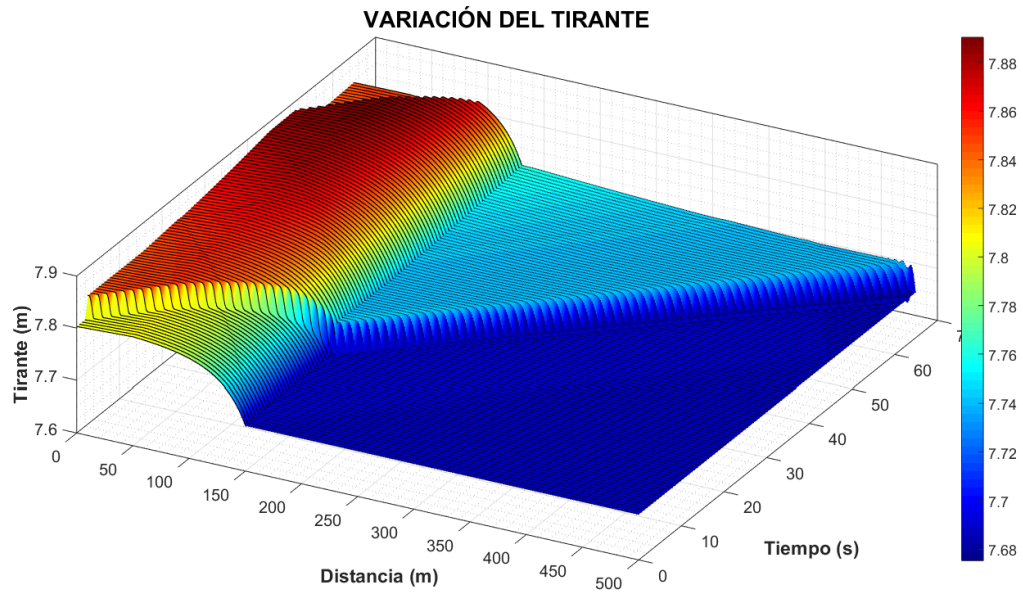


b)

Figura 55. Resultados obtenidos de la simulación en un canal con cambio de sección de un canal trapezoidal a triangular. a) Variación del gasto. b) Variación del área hidráulica.

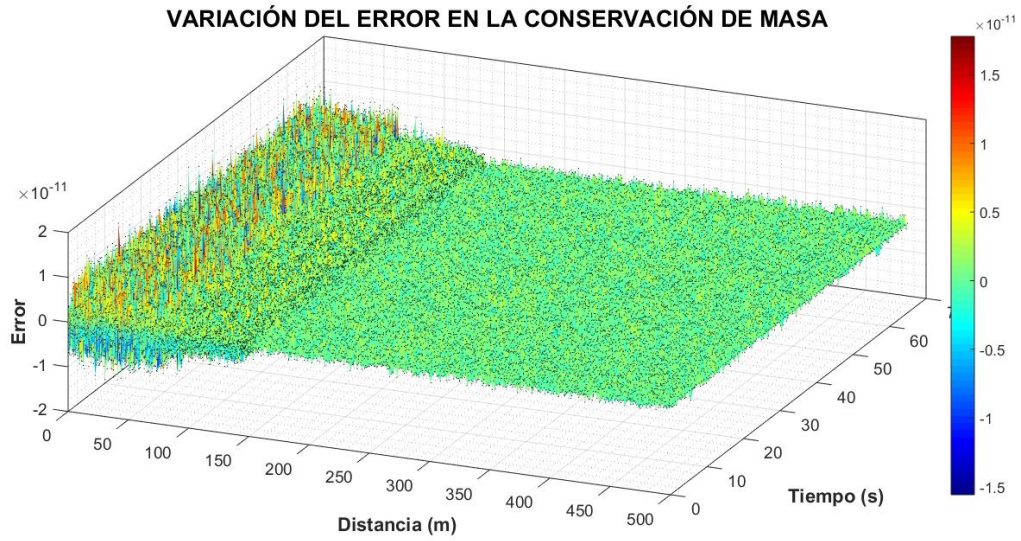


c)

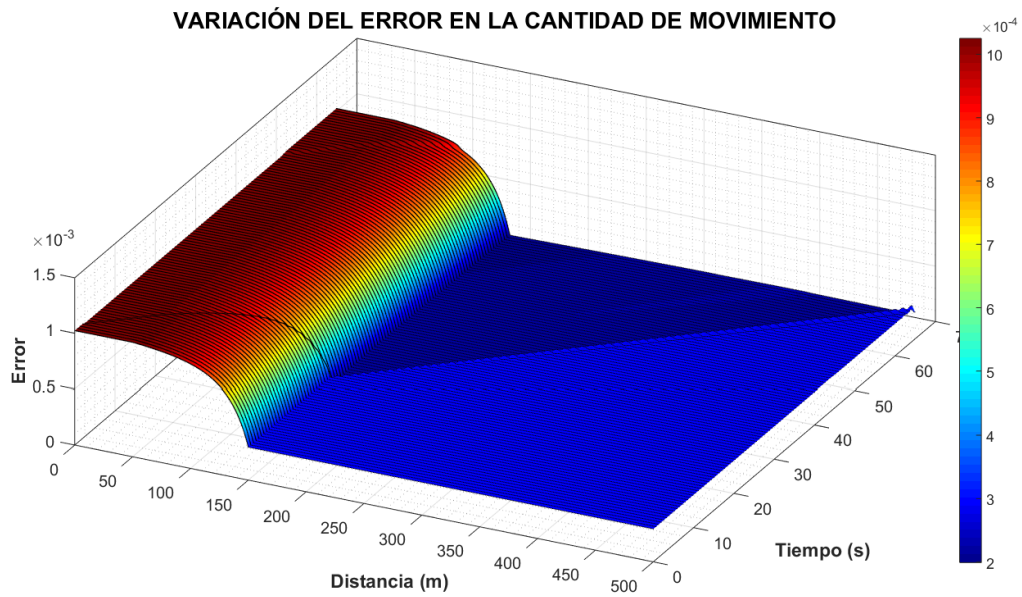


d)

Figura 56. Continuación Figura 55. c) Variación de la velocidad. d) Variación del tirante.



e)



f)

Figura 57. Continuación Figura 55. e) Variación del error en la conservación de masa. f) Variación del error en la cantidad de movimiento.

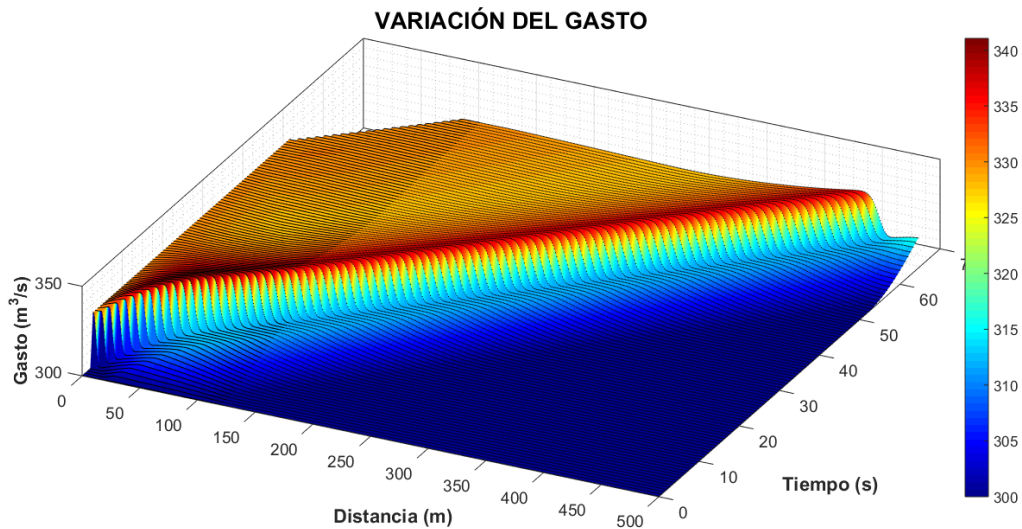




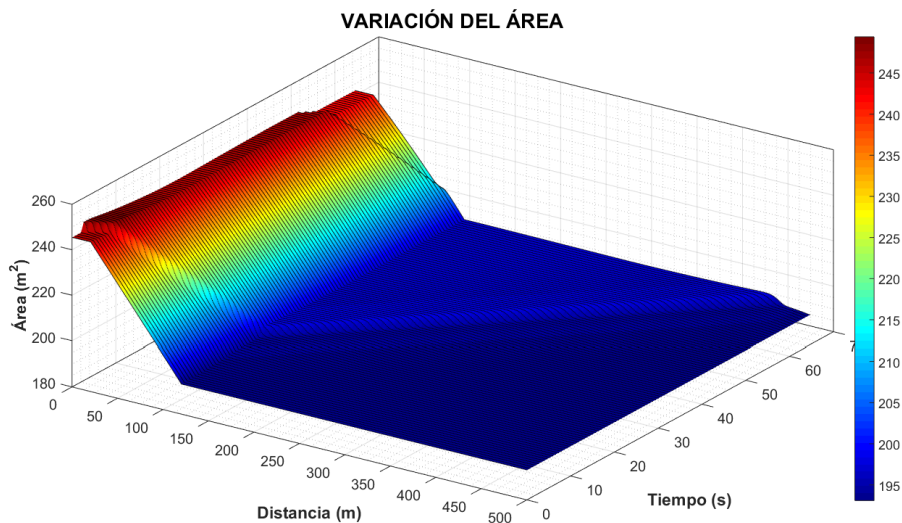
### 5.1.4. PRUEBA UTILIZANDO LA VERSIÓN DOS DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VENANT CONSERVATIVA DIFERENCIAL

#### 5.1.4.1. PRUEBA 7. REDUCCIÓN SUAVE EN SECCIÓN TRAPEZOIDAL

Las características geométricas son similares a las utilizadas en la Prueba 1 (véase Tabla 10), así como los resultados obtenidos en la condición inicial, como se muestran en la Figura 34. A continuación, se muestran los resultados obtenidos en la condición transitoria.

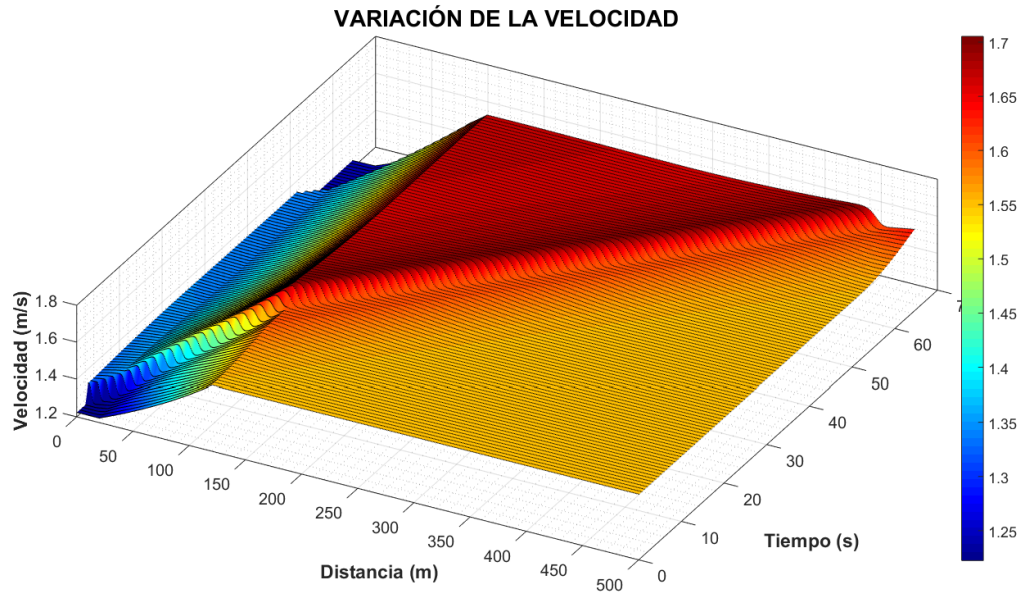


a)

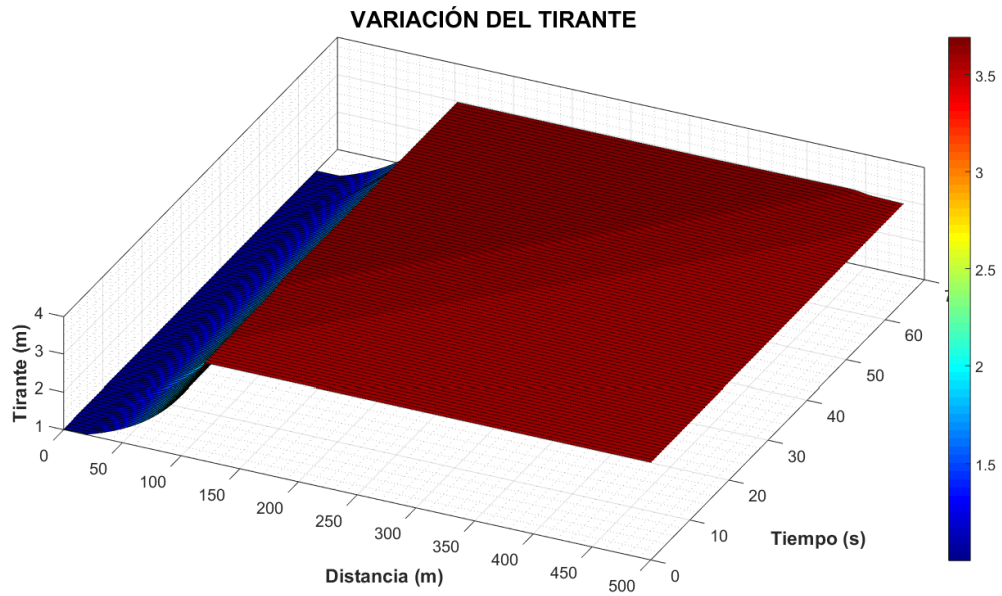


b)

Figura 58. Resultados obtenidos de la simulación en un canal con sección trapezoidal con una reducción suave utilizando la versión dos del sistema de ecuaciones de Saint-Venant conservativa diferencial. a) Variación del gasto. b) Variación del área hidráulica.

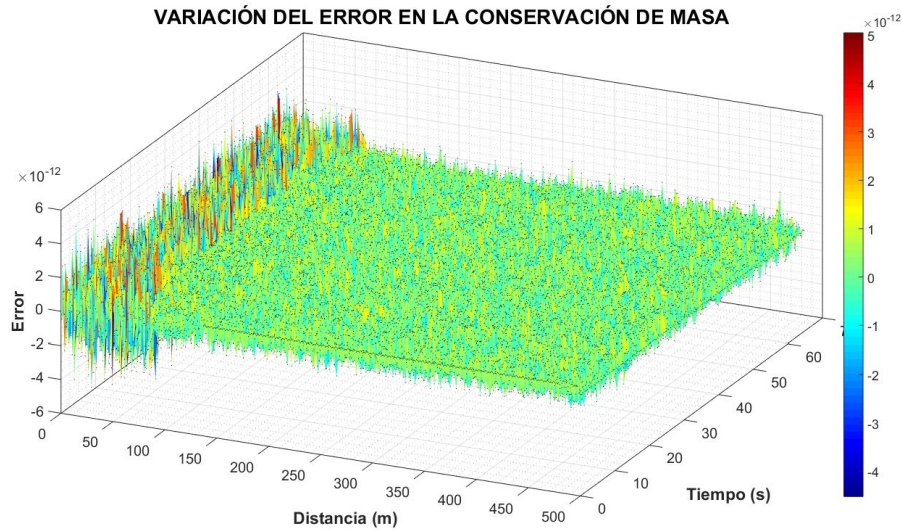


c)

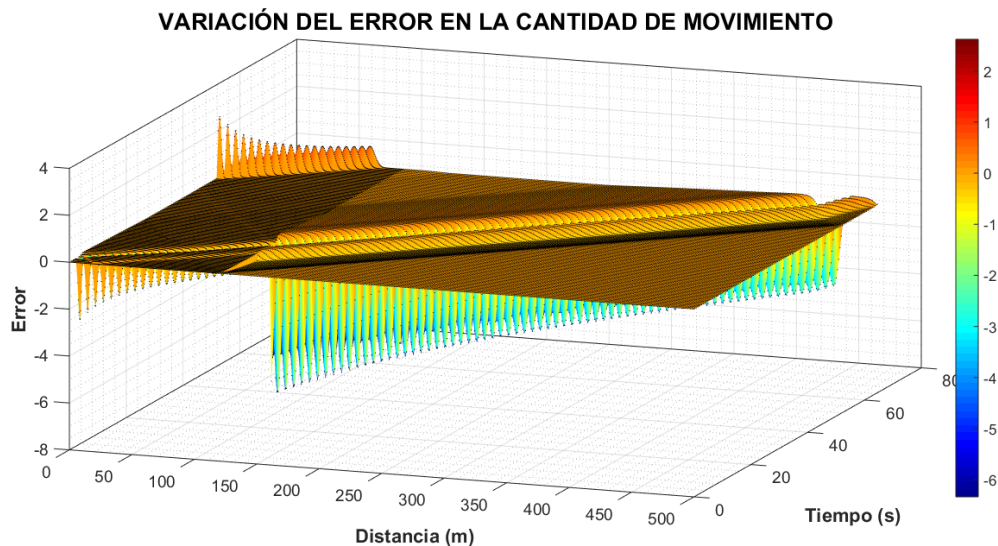


d)

Figura 59. Continuación Figura 58. c) Variación de la velocidad. d) Variación del tirante.



e)



f)

Figura 60. Continuación Figura 58. e) Variación del error en la conservación de masa. f) Variación del error en la cantidad de movimiento.

La secuencia de imágenes (Figuras 58-60), muestra los resultados de la prueba 7, la cual se desarrolla utilizando la versión dos del sistema de ecuaciones de Saint-Venant en la condición transitoria. En las imágenes se observa que al ingresar el hidrograma en la zona de transición, el error en la variación de la cantidad de movimiento aumenta (véase Figura 60.f), lo anterior debido a que el sistema de ecuaciones no converge cuando existen zonas de transición en el canal de conducción, puesto que estos no cumplen con los principios de conservación. Al comparar la Prueba 7 con la Prueba 1, se observa que los errores son mayores al utilizar la versión dos, lo cual se concluye que esta no evalúa correctamente las ecuaciones cuando existen zonas de transición, considerando la magnitud del error en la cantidad de movimiento no aceptable.



## 5.2. COMPARACIÓN DE RESULTADOS ENTRE EL MODELO PROPUESTO Y HEC-RAS CONSIDERANDO UN FLUJO EN ESTADO NO PERMANENTE

Para evaluar el funcionamiento del modelo, se realizó una comparación de resultados entre el modelo propuesto, denominado *Modelo Numérico de Simulación de Múltiples Tramos* (SMT) (Cruz Mayo, 2015), y el modelo HEC-RAS del *Hydraulic Engineering Center* (HEC) del *U.S. Army Corps of Engineers* en su versión 5.0.1.

Las condiciones hidráulicas y físicas que se consideraron fueron; flujo no permanente en régimen subcrítico, por lo que se consideró para la condición de frontera aguas arriba un hidrograma de entrada, como se muestra en la Figura 33 y para la frontera aguas abajo un tirante fijo  $y_f$  (ecuación (2.51)). Las condiciones físicas consideradas fue una reducción suave en un canal con sección trapezoidal, tal como se describe en la Prueba 1, así como las características geométricas mostradas en la Tabla 10.

En la Figura 61 se muestran los resultados obtenidos en la condición inicial del modelo propuesto y el modelo de HEC-RAS, así como la comprobación de la condición inicial mediante las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento. las variables que se comparan son el tirante, la velocidad, el área y el gasto, así mismo la conservación de masa y cantidad de movimiento.

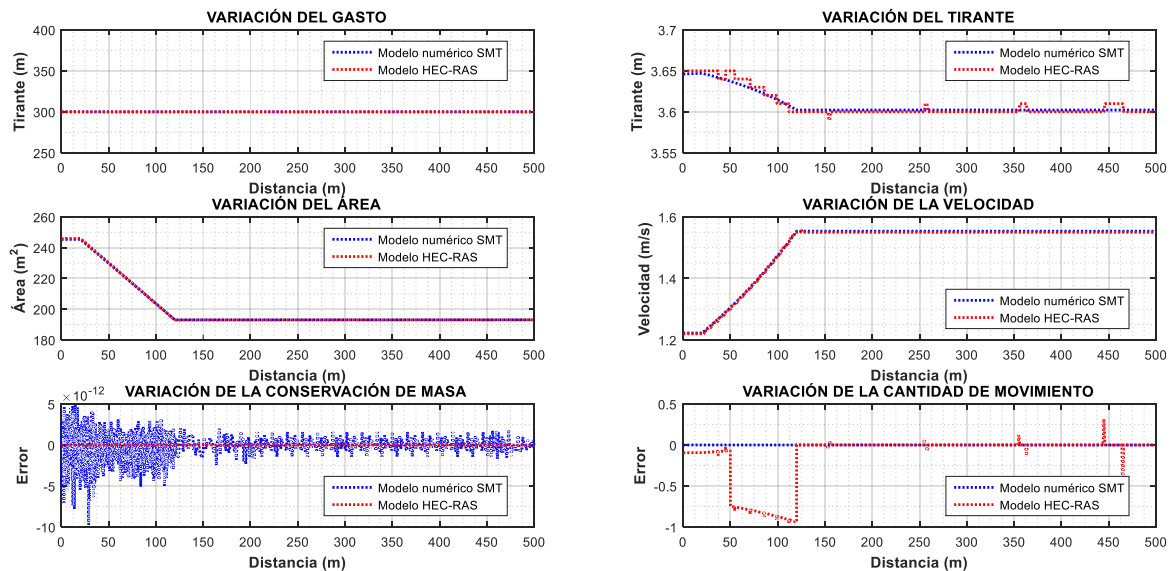


Figura 61. Comparación de las variables hidráulicas de la condición inicial ( $t = 0$ ) entre el modelo de SMT y HEC-RAS. Evaluación del error de la conservación de masa y cantidad de movimiento.



En las siguientes imágenes se muestran los resultados obtenidos en la condición transitoria del modelo propuesto SMT y el modelo HEC-RAS.

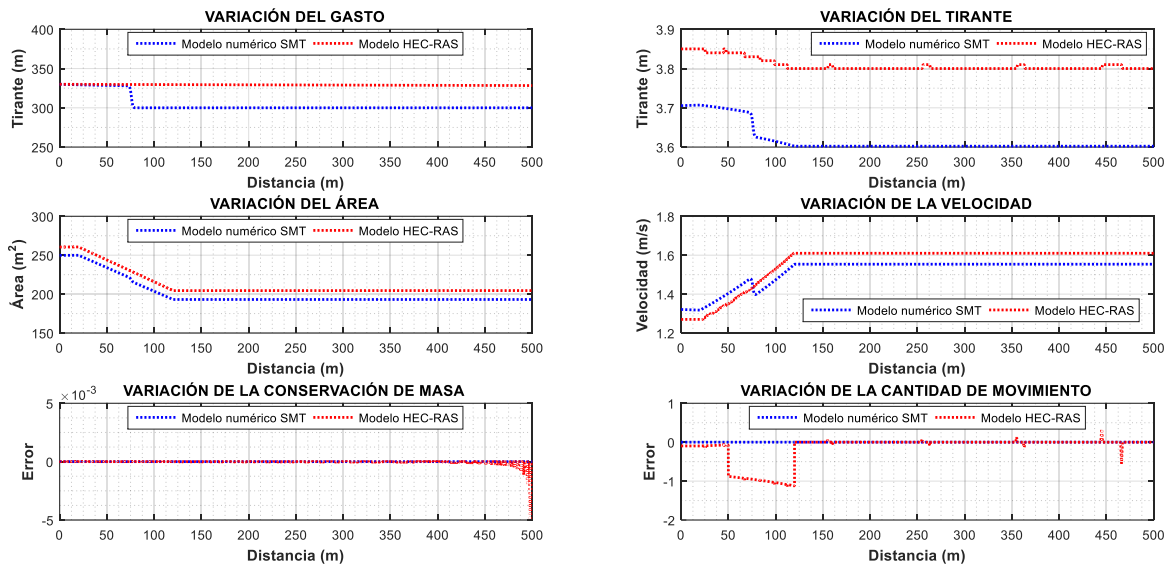


Figura 62. Comparación de resultados entre el modelo SMT y HEC-RAS ( $t = 13$  s).

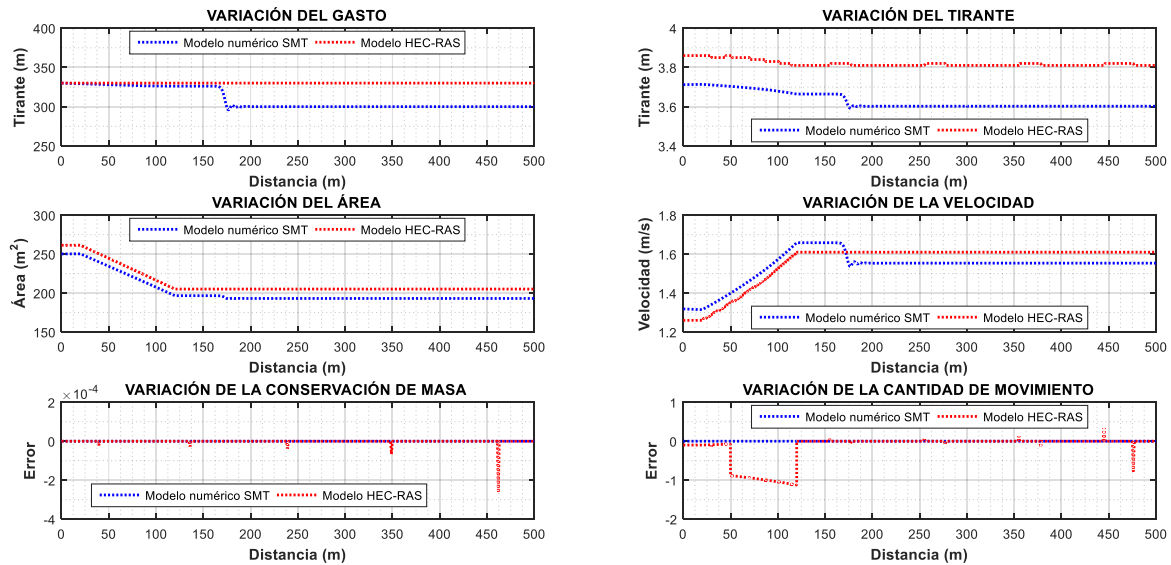


Figura 63. Ídem Figura 62 ( $t = 26$  s).

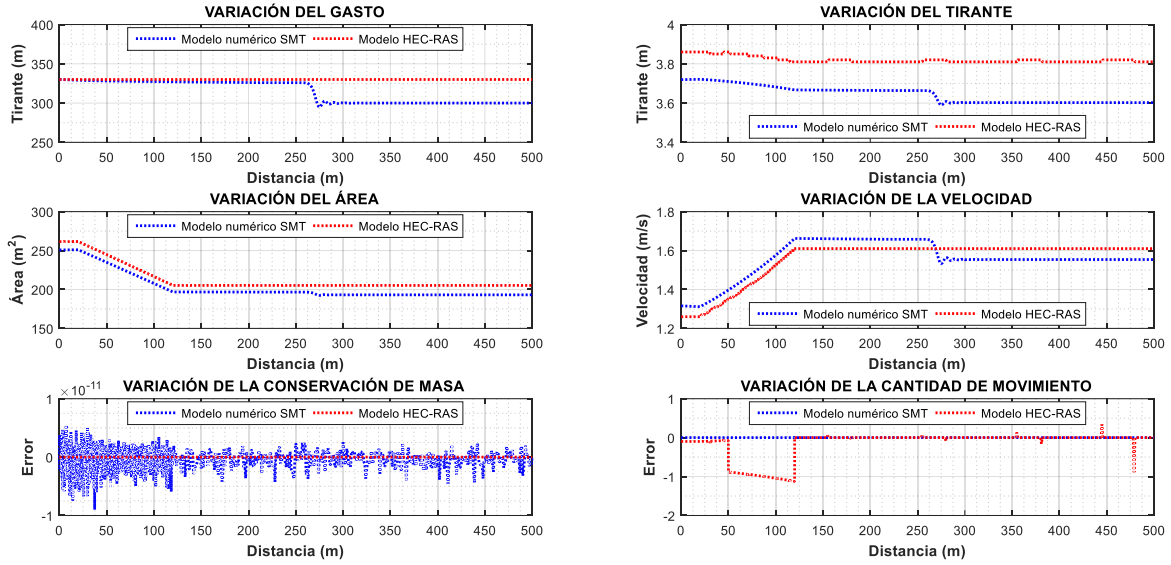


Figura 64. Ídem Figura 62 ( $t = 39$  s).

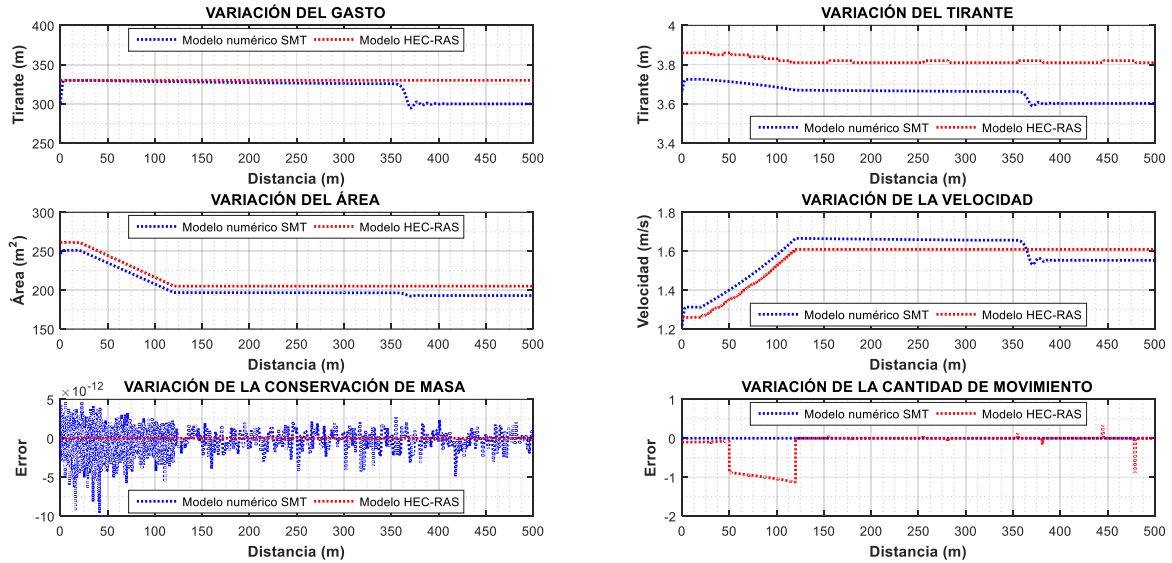


Figura 65. Ídem Figura 62 ( $t = 52$  s).

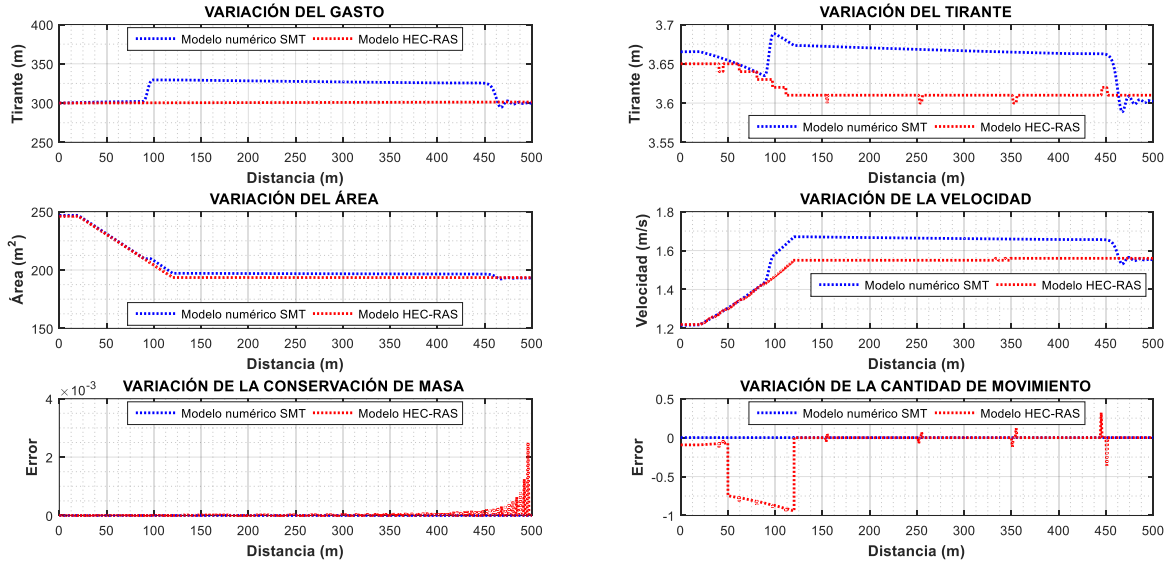


Figura 66. Ídem Figura 62 ( $t = 65 s$ ).

De acuerdo a los resultados obtenidos al realizar la comparación de resultados entre el modelo numérico que se propone en este trabajo y el modelo existente de HEC-RAS, en la secuencia de imágenes (Figura 61-Figura 66) se observa que la variación del tirante utilizando el modelo de HEC-RAS presenta inestabilidades, así como la velocidad en la zona de la transición, debido a esto existe un mayor error en la cantidad de movimiento, tal como se muestra en los resultados (véase Figura 61-Figura 66). También se puede observar que en el instante en que el hidrograma ingresa a la conducción, el modelo de HEC-RAS considera el gasto pico ( $Q = 330 m^3/s$ ) del hidrograma uniforme en toda la conducción, como se muestra en la Figura 62.



## CAPÍTULO 6

---

# CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Para el estudio del comportamiento del flujo en zonas de transición en conducciones a superficie libre, en este trabajo se construyó un modelo de simulación, a partir del sistema de ecuaciones de Saint-Venant conservativas en su versión integrodiferencial aplicado a un canal artificial.

El modelo de simulación es en diferencias finitas de tipo implícito con el esquema de Preissmann y tiene un algoritmo de convergencia de los términos no lineales tipo Picard y Newton-Raphson. Además, se construyó un modelo que evalúa las variaciones de la conservación de masa y la cantidad de movimiento en zonas de transición. Estos modelos demuestran que es posible construir y simular el flujo en una conducción con transiciones suaves y abruptas, además con múltiples tramos y diferentes formas de evaluar las condiciones de frontera aguas arriba y aguas abajo, como se muestra en el subcapítulo 2.3.

Para evaluar si el método de discretización propuesto se asemeja a la solución directa, se determinó la condición de convergencia del sistema discreto aplicando el Teorema de equivalencia de Lax. Debido a que el modelo de flujo del sistema de ecuaciones de Saint-Venant son altamente no lineales, en el desarrollo del análisis de consistencia y estabilidad se realizó un análisis perturbatorio y de localización, con el fin de convertir el sistema de ecuaciones no lineal en un sistema lineal de valor inicial puro y de coeficientes constantes.

El resultado del análisis de convergencia se demostró que para los valores de los coeficientes de peso espacial y temporal  $\Psi = \frac{1}{2}$  y  $\theta \geq \frac{1}{2}$ , el esquema es estable y convergente para diferentes números de Courant, para cualquier condición de flujo y para cualquier tipo de transición que se presente en la conducción, tales como reducción y ampliación suave. Estos resultados se muestran en la Figura 18 y Figura 19 para el caso de una reducción suave en flujo subcrítico y supercrítico, además la Figura 20 y Figura 21 para el caso de una ampliación suave en flujo subcrítico y supercrítico. De acuerdo a los retratos de amplitud se observa que el esquema se mantiene estable para diferentes números de Courant y para un régimen de flujo subcrítico y supercrítico, y también para los casos de ampliaciones y reducciones





suaves, además en los retratos de fase se observa que el modelo es libre de disipación y dispersión en las ondas para valores bajos del número de Courant.

Para evaluar el funcionamiento del modelo numérico de simulación en transiciones se realizaron distintas pruebas. En el capítulo 5 se describen las pruebas que se realizaron en este trabajo, así como los resultados obtenidos en la condición inicial y en la condición transitoria.

En este trabajo se muestran los resultados que se obtuvieron considerando una condición de frontera aguas arriba de un hidrograma de entrada de tipo escalón como se muestra en la Figura 10.a, y para la condición de frontera aguas abajo un tirante fijo (ecuación (2.51)). Para verificar que los resultados obtenidos en la condición inicial de las pruebas fuesen correctos, se realizó una comprobación con las ecuaciones de conservación de masa (2.56) y cantidad de movimiento (2.62), obteniendo errores que varían de  $[1 \times 10^{-2} \text{ a } 1 \times 10^{-4}]$ , cuya magnitud de error se consideran aceptables

A continuación, se muestran las pruebas realizadas a manera de resumen:

- a) Prueba 1. Reducción suave con sección trapezoidal
- b) Prueba 2. Ampliación suave con sección triangular
- c) Prueba 3. Reducción abrupta con sección rectangular
- d) Prueba 4. Ampliación abrupta con sección trapezoidal
- e) Prueba 5. Cambio de sección de rectangular a trapezoidal
- f) Prueba 6. Cambio de sección de trapezoidal a triangular
- g) Prueba 7. Reducción suave con sección trapezoidal

Para estas pruebas se consideró una discretización espacial de 1.0 m y en las zonas de la transición de 0.10 m, este criterio de discretización fue debido a que si se utilizaba una discretización de 1.0 m en forma regular a lo largo de la conducción, en las zonas de transición el esquema no converge sobre las iteraciones no lineales, esto indica que no se conserva masa ni cantidad de movimiento.

Por lo tanto, de acuerdo con lo que se observó se recomienda utilizar una malla fina en las zonas de transición, con el fin de que se mantengan los principios de conservación y el sistema sea convergente.

La segunda propuesta para la solución del modelo transitorio fue utilizar y desarrollar la versión dos de las ecuaciones de Saint-Venant, con las variables dependientes de gasto y área como se muestra en el ANEXO A, entonces se programó el modelo y en las pruebas numéricas se observa que el sistema no convergía cuando existen zonas de transiciones, ya que habría creación y destrucción de masa en los casos de ampliaciones y reducciones respectivamente, por lo que no se cumplen los principios de conservación, tal como se muestran en la Prueba 7. Tomando en cuenta esto, para los casos en los que se tengan



conducciones con transiciones, esta versión de las ecuaciones de Saint-Venant no son recomendables utilizarlas.

Para poder verificar el funcionamiento del modelo propuesto, denominado Modelo Numérico de Simulación de Múltiples Tramos (SMT) (Cruz Mayo, 2015) se realizó una comparación de resultados con el modelo de HEC-RAS (véase subcapítulo 5.2), en la que se observa que existe una inestabilidad en la variación del tirante y en la velocidad en la zona de la transición utilizando el modelo de HEC-RAS, tal como se muestra en las secuencia de imágenes (véase Figura 61-Figura 66). Esta inestabilidad se ve reflejada al realizar la evaluación de la cantidad de movimiento, en la cual se observa un error mayor en comparación con el modelo SMT, como se muestra en los resultados mostrados en el subcapítulo 5.2. De acuerdo a los resultados obtenidos en la comparación entre ambos modelos, se concluye que existe mayor variación en la cantidad de movimiento en zonas de transición al utilizar el modelo HEC-RAS.

Finalmente se concluye que fue posible desarrollar el modelo de condición inicial, solución de la ecuación diferencial ordinaria no lineal de flujo gradualmente variado para conducciones con transiciones suaves y abruptas, así como el modelo de simulación transitoria, solución de las ecuaciones de Saint-Venant conservativas en su versión integrodiferencial, utilizando el esquema de discretización de Preissmann. Además, se demostró con el análisis de convergencia que el modelo es incondicionalmente estable tanto para un régimen de flujo subcrítico como supercrítico, además de ampliaciones y reducciones suaves. Para la solución de los términos no lineales se aplicó la metodología de Picard y de Newton-Raphson. Así como la construcción del modelo que evalúa las variaciones de los errores en la conservación de masa y cantidad de movimiento en las zonas de transición. Por último, se demostró que el modelo propuesto evalúa de mejor manera el flujo en estado no permanente en conducciones cuando se tienen zonas de transición que el modelo de HEC-RAS, tal como se muestra en el subcapítulo 5.2.

#### *Trabajo a futuro*

Cabe mencionar que el desarrollo del presente trabajo no toma en cuenta las incorporaciones y/o extracciones de gasto (descargas laterales) (Covarrubias Herrera, 2016), por lo que es necesario incorporarlas, así como también tomar en cuenta las estructuras de regulación (Cruz Mayo, 2015).



# BIBLIOGRAFÍA

---

- Abbott, M. (1979). *Computational Hydraulics. Elements of the Theory of Free Surface Flows*. Londres: PITMAN.
- Adrighetti, E. (2007). *Computational Hydraulic Techniques for the Saint Venant Equations in Arbitrarily Shaped Geometry*. Italia: Universidad de Trento.
- Aguilar Suárez, M. (2007). *Cálculo de Flujo No Permanente en el Tránsito de Avenidas en Corrientes Naturales con Pendiente Caótica* (Vol. Tesis Doctoral). México, D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Aguilar, A. (2002). *Propiedades de Propagación de Esquemas Numéricos para la Simulación de Flujos a Superficie Libre* (Vol. Tesis Doctoral). México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Alcrudo, F., & García, P. (Abril de 1995). Simulación de flujo Transitorio en cauces Naturales. *Ingeniería del Agua*, 2(1), 7-18.
- Aldama, A., & Aguilar, A. (1996). Stability analysis of a general Preissmann scheme. *Computational Methods in Surface Flow and Transport Problems, Volume 2*, 37-44.
- Barré de Saint-Venant, A.-J.-C. (1871). Théorie du Mouvement Non Permanent des Eaux, avec Application aux Crues des Rivières et à l'Introduction des Marées dans leur Lit. *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences: Paris, France*, 147-154.
- Burden, R., & Faires, J. (2002). *Análisis Numérico* (Septima ed.). Estados Unidos de América: Thomson Trad.
- Chaudhry, M. (1986). *Applied Hydraulic Transients* (Segunda ed.). New York: Van Nostrand Reinhold Company.
- Chow, V. T. (1959). *Open-Channel Hydraulics*. New York: Mc. Graw-Hill.
- Chow, V. T., & Maidment, D. R. (1994). *Hidrología Aplicada*. Illinois, USA: McGraw-Hill.
- Courant, R., Friedrichs, K., & Lewy, H. (1928). Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 32-74.
- Covarrubias Herrera, C. (2016). *Modelo Numérico para Analizar el Flujo en Bifurcaciones en Canales*. Jiutepec: Tesis Maestría UNAM.
- Cruz Mayo, P. (2015). *Modelo Hidrodinámico de Canales de Riego con Compuertas de Regulación*. Ciudad de México: (Tesis maestría) Universidad Nacional Autónoma de México.



- Cruz Mayo, P., López Gómez, N. F., & Aguilar Chávez, A. (2014). Estudio de Convergencia Limite del Esquema de Leendertse para Flujos Transitorios. *XXIII Congreso nacional de Hidráulica*, 6.
- Cunge, J., Holly, F., & Verwey, A. (1980). *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Londres: Pitman Publishing Limited.
- D. Franz, D., & S. Melching, C. (1997). *Full Equations (FEQ) Model for the Solution of the Full. Dynamic Equations of Motion for One-Dimensional Unsteady Flow in Open Channels and through Control Structures*. Urbana, Illinois: U. S. Geological Survey.
- Eb Pareja, J. E. (2012). *Análisis Experimental de algunas Pérdidas Locales de Energía en Canales de Sección Rectangular Abiertos*. México, D.F.: Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Espinoza, C., & Niño, Y. (2001). *Metodos de Diferencias Finitas*. Chile: Modelacion Numerica en Ingenieria Hidraulica y Ambiental.
- Freitag, M. (2003). *Transcritical Flow Modelling with the Box Scheme*. Bath, Inglaterra: Department of Mathematical Sciences MSc in Modern Applications of Mathematics, Univerity of Bath.
- French, R. (1988). *Open-Channel Hydraulics*. (A. Friedman, Trad.) U.S.A.: Mc GRAW-HILL.
- J. Fletcher, C. (1990). *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1: Fundamental and General Techniques*. Sydney: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Lyn, D., & Goodwin, P. (1987). Stability of a General Preissmann Scheme. *Journal of Hydraulic Engineering*(113), 16-28.
- Menéndez, A. (2010). *Errores en la Solucion Numerica de Ecuaciones Diferenciales*. Ezeiza, Buenos Aires, Argentina: Instituto Nacional de Ciencia y Técnica Hídrica.
- Menéndez, A. (2010). *Errores en la Solucion Numerica de Ecuaciones Diferenciales*. Ezeiza, Buenos Aires, Argentina: Instituto Nacional de Ciencia y Técnica Hídrica.
- Milne, R. (1980). *Applied functional analysis, An introduction treatment*. Londres: Pitman Publishing Limited.
- Morton, K. W. (2003). *Transcritical flow modelling with the Box Scheme*. University of Bath: Department of mathematical sciences MSc in modern applications of mathematics.
- Morton, K., & Mayers, D. (2005). *Numerical Solution of Partial Differential Equations* (2nd ed.). Cambridge, New York: Cambridge University Press.
- Neuman, E. (2001). *Análisis Numérico de Integrales y Ecuaciones diferenciales* (Segunda ed.). Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional del Litoral.



- Paniconi, C., Aldama, A. A., & Wood, E. F. (June de 1991). Numerical Evaluation of Iterative and Noniterative Methods for the Solution of the Nonlinear Richards Equation. *Water Resources Research*, 27(6), 1147-1163.
- Ratía Sánchez, H. (2010). *Modelización del Flujo Circulante en Estructuras Hidráulicas en canales y Ríos*. Zaragoza: Departamento de Ciencia y Tecnología de Materiales y Fluidos. Área de Mecánica de Fluidos.
- Sotelo Avila, G. (1997). *Apuntes de Hidráulica II*. México, D.F.: Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Szymkiewicz, R. (2010). *Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics*. Poland: Springer.
- T. Shamaa, M., & M. Karkuri, H. (2011). Implicit Numerical Scheme for Regulating Unsteady Flow in Open Channel. *Fifteenth International Water Technology Conference*, 12.
- Te Chow, V., R. Maidment, D., & W. Mays, L. (1994). *Hidrología Aplicada*. Santafé de Bogotá, Colombia: McGraw-Hill Interamericana, S.A.
- W. Jeppson, R. (1974). *Simulation of Steady and Unsteady Flows in Channels and Rivers*. Utah: Utah State University.
- Yen, B. (October de 1973). Open-Channel Flow Equations Revisted. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 99(EM5), 979-1009.
- Zarabozo, A. (2012). *Métodos Numéricos. Apuntes*. Catalunya: Universidad Politecnica de Catalunya.
- Zetina Robleda, E. (2015). *Simulación de Flujo en Tuberías Aplicando un Modelo de Fricción Transitorio*. México, D.F.: (Tesis maestría) Universidad Nacional Autónoma de México.



# ANEXOS

## ANEXO A. PROGRAMACIÓN DE LA VERSIÓN DOS DE LAS ECUACIONES SAINT-VENANT CONSERVATIVAS EN SU VERSIÓN DIFERENCIAL CON EL ESQUEMA DE PREISSMANN BAJO LA ITERACIÓN NO LINEAL DE SEGUNDO ORDEN DE NEWTON-RAPHSON

Sean la versión dos del sistema de ecuaciones de conservación de masa (2.16) y cantidad de movimiento (3.13) de Saint-Venant.

$$\mathcal{L}(A, Q; x, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{M}(A, Q; x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{gA}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \right) + \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + gA \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} + S_f - S_o \right) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Para la construcción de la aproximación de Newton-Raphson, se introducen pequeñas perturbaciones sobre las variables dependientes en los operadores de conservación de masa y de cantidad de movimiento, por lo tanto

$$\mathcal{L}(A + \delta A, Q + \delta Q) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{M}(A + \delta A, Q + \delta Q) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Realizando una expansión en serie de Fréchet-Taylor sobre los operadores continuos a las ecuaciones (A.3) y (A.4), entonces:

$$\mathcal{L}(A + \delta A, Q + \delta Q) = \mathcal{L}(A, Q) + \delta A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} + \delta Q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} + \dots + \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{M}(A + \delta A, Q + \delta Q) = \mathcal{M}(A, Q) + \delta A \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial A} + \delta Q \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial Q} + \dots + \quad (\text{A.6})$$

Evaluando las derivadas parciales de las ecuaciones anteriores, se obtiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = 0 \quad (\text{A.7})$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial A} = \Xi(A, Q) = & g \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A^2} \right) + g \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} + S_f - S_o \right) \\ & + gA \left[ \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \frac{db}{dx} + \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \frac{dk}{dx} + \frac{\partial S_f}{\partial A} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Además

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial Q} = \Theta(A, Q) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{A} \right) + gA \frac{\partial S_f}{\partial Q} \quad (\text{A.9})$$

Donde  $\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)$  y  $\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)$  están definidos en subcapítulo 3.4 para diferentes secciones transversales.

$$\frac{\partial S_f(A, Q)}{\partial A} = -\frac{2}{3} S_f \left[ \frac{5}{A} - \frac{2}{BP} \frac{dP}{dy} \right] \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial S_f(A, Q)}{\partial Q} = 2 \frac{S_f}{Q} \quad (\text{A.11})$$

Entonces se tiene el siguiente sistema de ecuaciones para la aproximación de Newton-Raphson

$$\mathcal{L}(A, Q) = \mathcal{L}(A, Q) \quad (\text{A.12})$$

$$\mathcal{M}(A, Q) = \mathcal{M}(A, Q) + \delta A [\Xi] + \delta Q [\Theta] + \dots + \quad (\text{A.13})$$

### **Construcción del esquema numérico bajo el esquema de Preissmann**

La ecuación (A.13) se propone separar los términos no lineales con la siguiente propuesta:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \Pi_1 \frac{\partial A}{\partial x} + \Pi_2 \frac{\partial Q}{\partial x} + \Pi_3 A + \Pi_4 \delta A + \Pi_5 \delta Q = 0 \quad (\text{A.14})$$

Donde

$$\Pi_1(A, Q) = \frac{gA}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \quad (\text{A.15})$$

$$\Pi_2(A, Q) = \frac{2Q}{A} \quad (\text{A.16})$$



$$\Pi_3(A, Q) = \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} + S_f - S_o \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \Pi_4(A, Q) = g \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A^2} \right) + g \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} + S_f - S_o \right) \\ + gA \left[ \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial S_f}{\partial A} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\Pi_5(A, Q) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{A} \right) + gA \frac{\partial S_f}{\partial Q} \quad (\text{A.19})$$

Entonces aplicando la discretización en diferencias finitas de Preissmann para la derivada espacial, temporal y los términos independientes (ecuaciones (3.14)-(3.16)) a las ecuaciones (A.1) y (A.14).

Se propone las siguientes reglas para la convergencia no lineal:

- i. Los términos lineales de conservación de masa (A.1) para el tiempo  $(n + 1)$ , esto en la iteración  $(m + 1)$ , de igual forma el primer término de la ecuación de cantidad de movimiento (A.14).
- ii. Los términos no lineales en la ecuación (A.14) (lado izquierdo) se evalúan para  $(n + 1)$  en  $(m + 1)$  y en los términos  $\pi_i$  para  $(n + 1)$  en  $(m)$ .

Entonces el sistema discreto para las ecuaciones (A.1) y (A.14) es:

Ecuación de conservación de masa

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} (A_j^{n+1, m+1} - A_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (A_{j+1}^{n+1, m+1} - A_{j+1}^n) + \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \\ + \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{j+1}^{n+1, m+1} - Q_j^{n+1, m+1}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Agrupando la ecuación anterior

$$\begin{aligned} Q_j^{n+1, m+1} \left( -\frac{\theta}{\Delta x} \right) + A_j^{n+1, m+1} \left( \frac{1 - \Psi}{\Delta t} \right) + Q_{j+1}^{n+1, m+1} \left( \frac{\theta}{\Delta x} \right) + A_{j+1}^{n+1, m+1} \left( \frac{\Psi}{\Delta t} \right) \\ = \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} A_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} A_{j+1}^n + \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (Q_j^n - Q_{j+1}^n) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$





Ecuación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned}
& \frac{(1-\Psi)}{\Delta t} (Q_j^{n+1,m+1} - Q_j^n) + \frac{\Psi}{\Delta t} (Q_{j+1}^{n+1,m+1} - Q_{j+1}^n) \\
& + \Pi_{1j} \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (A_{j+1}^n - A_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (A_{j+1}^{n+1,m+1} - A_j^{n+1,m+1}) \right] \\
& + \Pi_{2j} \left[ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) + \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{j+1}^{n+1,m+1} - Q_j^{n+1,m+1}) \right] \\
& + \Pi_{3j} [(1-\theta)[(1-\Psi)A_j^n + \Psi A_{j+1}^n] \\
& + \theta[(1-\Psi)A_j^{n+1,m+1} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m+1}]] \\
& + \Pi_{4j} [(1-\Psi)(A_j^{n+1,m+1} - A_j^{n+1,m}) + \Psi(A_{j+1}^{n+1,m+1} - A_{j+1}^{n+1,m})] \\
& + \Pi_{5j} [(1-\Psi)(Q_j^{n+1,m+1} - Q_j^{n+1,m}) + \Psi(Q_{j+1}^{n+1,m+1} - Q_{j+1}^{n+1,m})] = 0
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Agrupando la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
& Q_j^{n+1,m+1} \left[ \left( \frac{1-\Psi}{\Delta t} \right) - \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{5j} (1-\Psi) \right] \\
& + A_j^{n+1,m+1} \left[ -\Pi_{1j} \left( \frac{\theta}{\Delta x} \right) + \Pi_{3j} \theta (1-\Psi) + \Pi_{4j} (1-\Psi) \right] \\
& + Q_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \left( \frac{\Psi}{\Delta t} \right) + \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{5j} \Psi \right] \\
& + A_{j+1}^{n+1,m+1} \left[ \Pi_{1j} \left( \frac{\theta}{\Delta x} \right) + \Pi_{3j} \theta \Psi + \Pi_{4j} \Psi \right] \\
& = \left( \frac{1-\Psi}{\Delta t} \right) Q_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} Q_{j+1}^n + \Pi_{1j} \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (A_j^n - A_{j+1}^n) \\
& + \Pi_{2j} \frac{(1-\theta)}{\Delta x} (Q_j^n - Q_{j+1}^n) - \Pi_{3j} (1-\theta) [(1-\Psi)A_j^n + \Psi A_{j+1}^n] \\
& + \Pi_{4j} [(1-\Psi)A_j^{n+1,m} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m}] \\
& + \Pi_{5j} [(1-\Psi)Q_j^{n+1,m} + \Psi Q_{j+1}^{n+1,m}]
\end{aligned} \tag{A.23}$$

El sistema de ecuaciones (A.21) y (A.23) se puede escribir ordenando ambas ecuaciones en función de las variables para el instante  $n + 1$  y de la iteración  $m + 1$ , como se muestra a continuación:

$$a_1 Q_j^{n+1,m+1} + b_1 A_j^{n+1,m+1} + c_1 Q_{j+1}^{n+1,m+1} + d_1 A_{j+1}^{n+1,m+1} = e_{1j}^n \tag{A.24}$$

$$a_2 Q_j^{n+1,m+1} + b_2 A_j^{n+1,m+1} + c_2 Q_{j+1}^{n+1,m+1} + d_2 A_{j+1}^{n+1,m+1} = e_{2j}^n \tag{A.25}$$



Donde

$$a_1 = -\frac{\theta}{\Delta x} \quad (\text{A.26})$$

$$b_1 = \frac{1 - \Psi}{\Delta t} \quad (\text{A.27})$$

$$c_1 = \frac{\theta}{\Delta x} \quad (\text{A.28})$$

$$d_1 = \frac{\Psi}{\Delta t} \quad (\text{A.29})$$

$$e_1 = \frac{(1 - \Psi)}{\Delta t} A_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} A_{j+1}^n + \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (Q_j^n - Q_{j+1}^n) \quad (\text{A.30})$$

$$a_2 = \left( \frac{1 - \Psi}{\Delta t} \right) - \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{5j} (1 - \Psi) \quad (\text{A.31})$$

$$b_2 = -\Pi_{1j} \left( \frac{\theta}{\Delta x} \right) + \Pi_{3j} \theta (1 - \Psi) + \Pi_{4j} (1 - \Psi) \quad (\text{A.32})$$

$$c_2 = \left( \frac{\Psi}{\Delta t} \right) + \Pi_{2j} \frac{\theta}{\Delta x} + \Pi_{5j} \Psi \quad (\text{A.33})$$

$$d_2 = \Pi_{1j} \left( \frac{\theta}{\Delta x} \right) + \Pi_{3j} \theta \Psi + \Pi_{4j} \Psi \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} e_2 = & \left( \frac{1 - \Psi}{\Delta t} \right) Q_j^n + \frac{\Psi}{\Delta t} Q_{j+1}^n + \Pi_{1j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (A_j^n - A_{j+1}^n) \\ & + \Pi_{2j} \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} (Q_j^n - Q_{j+1}^n) - \Pi_{3j} [(1 - \theta) [(1 - \Psi) A_j^n + \Psi A_{j+1}^n]] \\ & + \Pi_{4j} [(1 - \Psi) A_j^{n+1,m} + \Psi A_{j+1}^{n+1,m}] \\ & + \Pi_{5j} [(1 - \Psi) Q_j^{n+1,m} + \Psi Q_{j+1}^{n+1,m}] \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Además la forma discreta de los términos no lineales  $\Pi_{ij}$  de la ecuación de cantidad de movimiento (A.23) es:

$$\begin{aligned} \Pi_{1j} = (1 - \theta) & \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{gA}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{gA}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \right)_{j+1}^n \right] \\ & + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{gA}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left( \frac{gA}{B} - \frac{Q^2}{A^2} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$



$$\Pi_{2j} = 2(1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{Q}{A} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{Q}{A} \right)_{j+1}^n \right] + 2\theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{Q}{A} \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left( \frac{Q}{A} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} \Pi_{3j} = g \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\ \left. + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \left\{ \frac{(b_{j+1} - b_j)}{\Delta x} \right\} \\ + \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\ \left. + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \left\{ \frac{(k_{j+1} - k_j)}{\Delta x} \right\} \\ + \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) S_{f_j}^n + \Psi S_{f_{j+1}}^n \right] \right. \\ \left. + g\theta \left[ (1 - \Psi) S_{f_j}^{n+1,m} + \Psi S_{f_{j+1}}^{n+1,m} \right] \right\} - S_o \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} \Pi_{4j} = g \left\{ \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} [(y)_{j+1}^n - (y)_j^n] + \frac{\theta}{\Delta x} [(y)_{j+1}^{n+1,m} - (y)_j^{n+1,m}] \right\} \\ - \left\{ \frac{(1 - \theta)}{\Delta x} \left[ \left( \frac{Q^2}{A^2} \right)_{j+1}^n - \left( \frac{Q^2}{A^2} \right)_j^n \right] + \frac{\theta}{\Delta x} \left[ \left( \frac{Q^2}{A^2} \right)_{j+1}^{n+1,m} - \left( \frac{Q^2}{A^2} \right)_j^{n+1,m} \right] \right\} \\ + g \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\ \left. + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \left\{ \frac{(b_{j+1} - b_j)}{\Delta x} \right\} \\ + \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^n \right] \right. \\ \left. + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \left\{ \frac{(k_{j+1} - k_j)}{\Delta x} \right\} \\ + \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) (S_f)_j^n + \Psi (S_f)_{j+1}^n \right] \right. \\ \left. + g\theta \left[ (1 - \Psi) (S_f)_j^{n+1,m} + \Psi (S_f)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} - S_o \\ + g \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) (A)_j^n + \Psi (A)_{j+1}^n \right] \right. \\ \left. + \theta \left[ (1 - \Psi) (A)_j^{n+1,m} \right. \right. \\ \left. \left. + \Psi (A)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \right)_{j+1}^n \right] \right. \\ \left. + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial b} \right) \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \left\{ \frac{(b_{j+1} - b_j)}{\Delta x} \right\} \\ + \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \right)_j^n + \Psi \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \right)_{j+1}^n \right] \right. \\ \left. + \theta \left[ (1 - \Psi) \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \right)_j^{n+1,m} + \Psi \left( \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial y}{\partial k} \right) \right)_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \left\{ \frac{(k_{j+1} - k_j)}{\Delta x} \right\} \\ + \left\{ (1 - \theta) \left[ (1 - \Psi) (S_{fA})_j^n + \Psi (S_{fA})_{j+1}^n \right] \right. \\ \left. + \theta \left[ (1 - \Psi) (S_{fA})_j^{n+1,m} + \Psi (S_{fA})_{j+1}^{n+1,m} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$



$$\begin{aligned} \Pi_{5j} = 2 \left\{ \frac{(1-\theta)}{\Delta x} \left[ \left( \frac{Q}{A} \right)_{j+1}^n - \left( \frac{Q}{A} \right)_j^n \right] + \frac{\theta}{\Delta x} \left[ \left( \frac{Q}{A} \right)_{j+1}^{n+1,m} - \left( \frac{Q}{A} \right)_j^{n+1,m} \right] \right. \\ \left. + g \{ (1-\theta) [(1-\Psi)(A)_j^n + \Psi(A)_{j+1}^n] \right. \\ \left. + \theta [(1-\Psi)(A)_j^{n+1,m} + \Psi(A)_{j+1}^{n+1,m}] \right\} \left\{ [(1-\Psi)(S_{fQ})_j^n + \Psi(S_{fQ})_{j+1}^n] \right. \\ \left. + \theta [(1-\Psi)(S_{fQ})_j^{n+1,m} + \Psi(S_{fQ})_{j+1}^{n+1,m}] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Además

$$Sf_j^n = n^2 \frac{\text{sgn}(Q)_j^n (Q)_j^n}{(A^2)_j^n (Rh^{\frac{4}{3}})_j^n} \quad (\text{A.41})$$

$$Sf_{Aj}^n = -\frac{2}{3} Sf_j^n \left[ \frac{5}{A_j^n} - \frac{2}{B_j^n P_j^n} \left( \frac{dp}{dy} \right)_j^n \right] \quad (\text{A.42})$$

$$Sf_{Qj}^n = 2n^2 \frac{\text{sgn}(Q)_j^n}{(A^2)_j^n (Rh^{\frac{4}{3}})_j^n} = 2 \frac{Sf_j^n}{(Q)_j^n} \quad (\text{A.43})$$

El procedimiento de solución y la evaluación de las condiciones de frontera no cambia con respecto a la metodología de Picard (véase subcapítulo 3.3).



## ANEXO B. EXPANSIONES EN SERIE DE TAYLOR PARA CADA ESQUINA DEL ESQUEMA DE PREISSMANN

Entonces aplicando las expansiones en serie de Taylor y desarrollando, se tiene

Esquina superior izquierda:

$$\begin{aligned}
 F(x_j, t_{n+1}) &= F(x - \Psi\Delta x, t + (1 - \theta)\Delta t) \\
 &= F(x, t) - \Psi\Delta x F_x + (1 - \theta)\Delta t F_t + \frac{\Psi^2\Delta x^2}{2!} F_{xx} \\
 &\quad - \Psi(1 - \theta)\Delta x\Delta t F_{xt} + \frac{(1 - \theta)^2\Delta t^2}{2!} F_{tt} - \frac{\Psi^3\Delta x^3}{3!} F_{xxx} \\
 &\quad + \frac{\Psi^2(1 - \theta)\Delta x^2\Delta t}{2} F_{xxt} - \frac{\Psi(1 - \theta)^2\Delta x\Delta t^2}{2} F_{xtt} \\
 &\quad + \frac{(1 - \theta)^3\Delta t^3}{3!} F_{ttt} + O[(\Delta x, \Delta t)^4]
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Esquina superior derecha:

$$\begin{aligned}
 F(x_{j+1}, t_{n+1}) &= F(x + (1 - \Psi)\Delta x, t + (1 - \theta)\Delta t) \\
 &= F(x, t) + (1 - \Psi)\Delta x F_x + (1 - \theta)\Delta t F_t + \frac{(1 - \Psi)^2\Delta x^2}{2!} F_{xx} \\
 &\quad + (1 - \Psi)(1 - \theta)\Delta x\Delta t F_{xt} + \frac{(1 - \theta)^2\Delta t^2}{2!} F_{tt} \\
 &\quad + \frac{(1 - \Psi)^3\Delta x^3}{3!} F_{xxx} + \frac{(1 - \Psi)^2(1 - \theta)\Delta x^2\Delta t}{2} F_{xxt} \\
 &\quad + \frac{(1 - \Psi)(1 - \theta)^2\Delta x\Delta t^2}{2} F_{xtt} + \frac{(1 - \theta)^3\Delta t^3}{3!} F_{ttt} \\
 &\quad + O[(\Delta x, \Delta t)^4]
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Esquina inferior izquierda:

$$\begin{aligned}
 F(x_j, t_n) &= F(x - \Psi\Delta x, t - \theta\Delta t) \\
 &= F(x, t) - \Psi\Delta x F_x - \theta\Delta t F_t + \frac{\Psi^2\Delta x^2}{2!} F_{xx} + \Psi\theta\Delta x\Delta t F_{xt} \\
 &\quad + \frac{\theta^2\Delta t^2}{2!} F_{tt} - \frac{\Psi^3\Delta x^3}{3!} F_{xxx} - \frac{\Psi^2\theta\Delta x^2\Delta t}{2} F_{xxt} - \frac{\Psi\theta^2\Delta x\Delta t^2}{2} F_{xtt} \\
 &\quad - \frac{\theta^3\Delta t^3}{3!} F_{ttt} + O[(\Delta x, \Delta t)^4]
 \end{aligned} \tag{B.3}$$



Esquina inferior derecha:

$$\begin{aligned} F(x_{j+1}, t_n) &= F(x + (1 - \Psi)\Delta x, t - \theta\Delta t) \\ &= F(x, t) + (1 - \Psi)\Delta x F_x - \theta\Delta t F_t + \frac{(1 - \Psi)^2 \Delta x^2}{2!} F_{xx} \\ &\quad - (1 - \Psi)\theta\Delta x\Delta t F_{xt} + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{2!} F_{tt} + \frac{(1 - \Psi)^3 \Delta x^3}{3!} F_{xxx} \\ &\quad - \frac{(1 - \Psi)^2 \theta \Delta x^2 \Delta t}{2} F_{xxt} + \frac{(1 - \Psi)\theta^2 \Delta x \Delta t^2}{2} F_{xtt} - \frac{\theta^3 \Delta t^3}{3!} F_{ttt} \\ &\quad + O[(\Delta x, \Delta t)^4] \end{aligned} \tag{B.4}$$

Para facilitar el análisis de consistencia se consideró la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_j, t_n} &= F_x, & \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_j, t_n} &= F_t, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t_n} &= F_{xx}, & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} &= F_{tt}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Big|_{x_j, t_n} &= F_{xt}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_j, t_n} &= F_{xxx}, & \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \Big|_{x_j, t_n} &= F_{ttt}, & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial t^2} \Big|_{x_j, t_n} &= F_{xtt}, & \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial t} \Big|_{x_j, t_n} &= F_{xxt}. \end{aligned}$$



## ANEXO C. DEMOSTRACIÓN DE LA CONSISTENCIA NUMÉRICA APLICADO A LA VERSIÓN DOS DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE SAINT-VENANT CONSERVATIVA DIFERENCIAL

Sustituyendo las ecuaciones (3.24)-(3.26) al sistema de ecuaciones de Saint-Venant (3.4) y (3.7), entonces

Ecuación de conservación de masa

$$\begin{aligned} \ell(A, U; x, t) = & A_t + \frac{(1-2\theta)}{2} \Delta t A_{tt} + \frac{\Psi(1-\Psi)}{3!} \Delta x^2 A_{xxt} + \frac{1-3\theta-3\theta^2}{3!} \Delta t^2 A_{ttt} \\ & + \left[ A + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 A_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 A_{tt} \right] \left[ U_x + \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x U_{xx} \right. \\ & \left. + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 U_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 U_{xtt} \right] \\ & + \left[ U + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 U_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 U_{tt} \right] \left[ A_x + \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x A_{xx} \right. \\ & \left. + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 A_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 A_{xtt} \right] + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \end{aligned}$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} m(A, U; x, t) = & U_t + \frac{(1-2\theta)}{2} \Delta t U_{tt} + \frac{\Psi(1-\Psi)}{3!} \Delta x^2 U_{xxt} + \frac{1-3\theta-3\theta^2}{3!} \Delta t^2 U_{ttt} \\ & + \left[ U + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 U_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 U_{tt} \right] \left[ U_x + \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x U_{xx} \right. \\ & \left. + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 U_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 U_{xtt} \right] \\ & + g \left[ \frac{1}{B} + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 \left( \frac{1}{B} \right)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left( \frac{1}{B} \right)_{tt} \right] \left[ A_x + \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x A_{xx} \right. \\ & \left. + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 A_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 A_{xtt} \right] \\ & + g \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} \right) + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} \right)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} \right)_{tt} + \left( \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 \left( \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left( \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right)_{tt} + (S_f - S_o) \right. \\ & \left. + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 (S_f - S_o)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 (S_f - S_o)_{tt} \right] + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \end{aligned}$$



O también las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento se pueden escribir de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \ell(A, U; x, t) = & A_t + AU_x + UA_x + \frac{(1-2\theta)}{2} \Delta t A_{tt} + \frac{\Psi(1-\Psi)}{3!} \Delta x^2 A_{xxt} \\ & + \frac{1-3\theta-3\theta^2}{3!} \Delta t^2 A_{ttt} \\ & + \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 A_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 A_{tt} \right] \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x U_{xx} \right. \\ & \left. + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 U_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 U_{xtt} \right] \\ & + A \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x U_{xx} + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 U_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 U_{xtt} \right] \\ & + U_x \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 A_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 A_{tt} \right] \\ & + \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 U_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 U_{tt} \right] \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x A_{xx} \right. \\ & \left. + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 A_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 A_{xtt} \right] \\ & + U \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x A_{xx} + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 A_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 A_{xtt} \right] \\ & + A_x \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 U_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 U_{tt} \right] + O(\Delta x^3, \Delta t^3) \end{aligned} \tag{C.1}$$

(C.2)





$$\begin{aligned}
 m(A, U; x, t) = & U_t + UU_x + \frac{g}{B}A_x + g \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right) + g(S_f - S_o) + \frac{(1-2\theta)}{2} \Delta t U_{tt} \\
 & + \frac{\Psi(1-\Psi)}{3!} \Delta x^2 U_{xxt} + \frac{1-3\theta-3\theta^2}{3!} \Delta t^2 U_{ttt} \\
 & + \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 U_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 U_{tt} \right] \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x U_{xx} \right. \\
 & \left. + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 U_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 U_{xtt} \right] \\
 & + U \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x U_{xx} + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 U_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 U_{xtt} \right] \\
 & + U_x \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 U_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 U_{tt} \right] \\
 & + g \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 \left( \frac{1}{B} \right)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left( \frac{1}{B} \right)_{tt} \right] \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x A_{xx} \right. \\
 & \left. + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 A_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 A_{xtt} \right] \\
 & + \frac{g}{B} \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x A_{xx} + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 A_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 A_{xtt} \right] \\
 & + A_x \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 \left( \frac{1}{B} \right)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left( \frac{1}{B} \right)_{tt} \right] \\
 & + g \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} \right)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} \right)_{tt} \right. \\
 & \left. + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 \left( \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left( \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right)_{tt} \right. \\
 & \left. + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 (S_f - S_o)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 (S_f - S_o)_{tt} \right] + O(\Delta x^3, \Delta t^3)
 \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema de consistencia numérica

$$\left. \begin{aligned}
 & \|\mathcal{L}(A, U; x, t) - \ell(A, U; x, t)\| \rightarrow 0 \\
 & \|\mathcal{M}(A, U; x, t) - m(A, U; x, t)\| \rightarrow 0
 \end{aligned} \right\} \quad (C.3)$$

Entonces sustituyendo las ecuaciones de conservación de masa (C.1) y cantidad de movimiento (C.2) en (C.3), así como también las ecuaciones (3.4) y (3.7), resolviendo, obtenemos



$$\begin{aligned}
 & \|\mathcal{L}(A, U; x, t) - \ell(A, U; x, t)\| \\
 &= \left\| -\frac{(1-2\theta)}{2} \Delta t A_{tt} - \frac{\Psi(1-\Psi)}{3!} \Delta x^2 A_{xxt} - \frac{1-3\theta-3\theta^2}{3!} \Delta t^2 A_{ttt} \right. \\
 & \quad - \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 A_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 A_{tt} \right] \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x U_{xx} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 U_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 U_{xtt} \right] \\
 & \quad - A \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x U_{xx} + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 U_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 U_{xtt} \right] \\
 & \quad - U_x \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 A_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 A_{tt} \right] \\
 & \quad - \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 U_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 U_{tt} \right] \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x A_{xx} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 A_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 A_{xtt} \right] \\
 & \quad - U \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x A_{xx} + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 A_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 A_{xtt} \right] \\
 & \quad \left. - A_x \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 U_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 U_{tt} \right] - O(\Delta x^3, \Delta t^3) \right\| \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{C.4}$$



$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{M}(A, U; x, t) - m(A, U; x, t)\| \\
&= \left\| -\frac{(1-2\theta)}{2} \Delta t U_{tt} - \frac{\Psi(1-\Psi)}{3!} \Delta x^2 U_{xxt} - \frac{1-3\theta-3\theta^2}{3!} \Delta t^2 U_{ttt} \right. \\
&\quad - \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 U_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 U_{tt} \right] \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x U_{xx} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 U_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 U_{xtt} \right] \\
&\quad - U \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x U_{xx} + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 U_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 U_{xtt} \right] \\
&\quad - U_x \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 U_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 U_{tt} \right] \\
&\quad - g \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 \left( \frac{1}{B} \right)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left( \frac{1}{B} \right)_{tt} \right] \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x A_{xx} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 A_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 A_{xtt} \right] \\
&\quad - \frac{g}{B} \left[ \frac{(1-2\Psi)}{2} \Delta x A_{xx} + \frac{1-3\Psi-3\Psi^2}{3!} \Delta x^2 A_{xxx} - \frac{\theta(1-\theta)}{3!} \Delta t^2 A_{xtt} \right] \\
&\quad - A_x \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 \left( \frac{1}{B} \right)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left( \frac{1}{B} \right)_{tt} \right] \\
&\quad - g \left[ \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} \right)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left( \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dx} \right)_{tt} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 \left( \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 \left( \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{dx} \right)_{tt} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Psi(1-\Psi)}{2} \Delta x^2 (S_f - S_o)_{xx} + \frac{\theta(1-\theta)}{2} \Delta t^2 (S_f - S_o)_{tt} \right] - O(\Delta x^3, \Delta t^3) \Big\|
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Entonces se demuestra el Teorema de consistencia numérica, ya que el esquema es consistente cuando se tiene un refinamiento de la malla,  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ .