



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS**

**“CONTROL DE VIBRACIONES VERTICALES EN PUENTES PEATONALES
MEDIANTE AMORTIGUADORES DE MASA SINTONIZADOS”**

**T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:
IVÁN FRANCISCO HUERGO RÍOS**

**TUTOR:
DR. HUGO HERNÁNDEZ BARRIOS
FES ACATLÁN UNAM**

Ciudad universitaria, Cd.Mx.

Octubre 2016

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Roberto Meli Piralla
Secretario: Dr. Marcos Mauricio Chávez Cano
Vocal: Dr. Hugo Hernández Barrios
1 er. Suplente: Dr. Amador Terán Gilmore
2 d o. Suplente: Dr. Darío Rivera Vargas

Ciudad Universitaria, Cd.Mx.

**TUTOR DE TESIS:
DR. HUGO HERNÁNDEZ BARRIOS**

FIRMA

A mi familia y novia

por su apoyo incondicional y consejos

A Dios

*por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado
salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor*

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México por permitirme cursar los estudios de maestría y brindarme sus instalaciones durante la realización de los mismos.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por la beca proporcionada durante mis dos años de estudios de maestría.

Al Dr. Hugo Hernández Barrios por su valioso apoyo, motivación, orientación y dirección, durante todo el proceso de desarrollo de esta tesis.

A los sinodales: Dr. Roberto Meli Piralla, Dr. Darío Rivera Vargas, Dr. Amador Terán Gilmore, Dr. Marcos Mauricio Chávez Cano, por el tiempo dedicado para la revisión de este trabajo.



Índice

Índice.....	i
Índice de figuras.....	v
Índice de tablas.....	xiv
Lista de símbolos.....	xxi
Resumen.....	xxix
Abstract.....	xxx
Capítulo 1 Introducción.....	1
1.1 Antecedentes históricos.....	1
1.2 Objetivos.....	4
1.2.1 Objetivo general.....	4
1.2.2 Objetivos específicos.....	4
1.3 Descripción y alcance del trabajo.....	5
Capítulo 2 Normatividad existente.....	7
2.1 Introducción.....	7
2.2 Acciones dinámicas.....	8
2.2.1 Norma HIVOSS-SYNPEX.....	12
2.2.2 Norma ISO 10137.....	14
2.2.3 Norma UK N.A EN 1991-2.....	15
2.3 Frecuencias estructurales críticas.....	17
2.4 Amortiguamiento estructural.....	18
2.4.1 Norma HIVOSS-SYNPEX.....	19
2.4.2 Norma del SETRA.....	20
2.5 Rigidez vertical estructural.....	21
2.6 Criterios de confort.....	22
2.6.1 Norma BS 5400.....	24
2.6.2 Norma ONT 83.....	24
2.6.3 Norma ISO 10137.....	25
2.6.4 Norma del Setra.....	27
2.6.5 Norma HIVOSS-SYNPEX.....	28
2.6.6 Norma UK N.A EN 1991-2.....	29
2.6.7 Otras normas internacionales.....	30
2.7 Metodologías de diseño ante vibración inducida por peatones.....	31
2.7.1 Método de sintonización.....	31
2.7.2 Método propuesto por las normas BS 5400 y ONT 83.....	32



2.7.3	Cálculo de la respuesta dinámica límite para un peatón.....	33
2.7.4	Efecto de varios peatones.....	33
2.7.5	Métodos más detallados.....	34
2.8	Medidas correctivas.....	35
2.8.1	Aumento de rigidez.....	35
2.8.2	Aumento de amortiguamiento.....	35
2.8.2.1	Amortiguadores de masa sintonizados.....	36
Capítulo 3	Puentes peatonales estudiados.....	37
3.1	Introducción.....	37
3.2	Puente peatonal San Bartolo.....	38
3.3	Puente peatonal Salamanca.....	43
3.4	Puente peatonal Pátzcuaro	48
3.5	Puente peatonal tipo.....	52
3.6	Estimación empírica de la frecuencia del primer modo vertical de vibrar.....	58
3.7	Estimación analítica de las frecuencias de vibrar.....	61
3.7.1	Puente peatonal San Bartolo.....	65
3.7.2	Puente peatonal Salamanca.....	67
3.7.3	Puente peatonal Pátzcuaro.....	69
3.7.4	Puente peatonal tipo.....	71
3.8	Conclusiones.....	73
Capítulo 4	Pruebas de vibración ambiental y forzada.....	75
4.1	Introducción.....	75
4.2	Diseño de las pruebas de vibración.....	76
4.3	Análisis e interpretación de las señales.....	78
4.3.1	Puente peatonal San Bartolo.....	81
4.3.2	Puente peatonal Salamanca.....	83
4.3.3	Puente peatonal Pátzcuaro.....	87
4.4	Conclusiones.....	91
Capítulo 5	Modelo matemático simplificado.....	93
5.1	Introducción.....	93
5.2	Teoría básica de dinámica estructural.....	93
5.2.1	Vibración libre amortiguada.....	95
5.2.2	Vibración forzada.....	97
5.2.2.1	Excitación armónica.....	99
5.2.2.2	Excitación periódica.....	100
5.3	Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada.....	103
5.3.1	Vibración libre.....	105
5.3.2	Vibración forzada.....	109
5.3.2.1	Carga constante en movimiento.....	110
5.3.2.2	Carga armónica en movimiento.....	119



5.4	Viga uniforme Euler-Bernoulli con diferentes condiciones de apoyo.....	122
5.4.1	Vibración libre.....	122
5.4.2	Vibración forzada.....	125
5.4.2.1	Carga constante en movimiento.....	127
5.4.2.2	Carga armónica en movimiento.....	128
5.5	Modelo matemático simplificado de los puentes peatonales estudiados.....	130
5.5.1	Puente peatonal San Bartolo.....	136
5.5.2	Puente peatonal Salamanca.....	141
5.5.3	Puente peatonal Pátzcuaro.....	146
5.5.4	Puente peatonal tipo.....	151
5.6	Conclusiones.....	156
Capítulo 6 Modelo matemático simplificado con amortiguadores de masa sintonizados.....		159
6.1	Introducción.....	159
6.2	Control pasivo de vibraciones en estructuras.....	159
6.2.1	Amortiguadores de masa sintonizados en puentes peatonales.....	166
6.3	Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada con amortiguadores de masa sintonizados.....	172
6.3.1	Vibración libre.....	174
6.3.2	Vibración forzada.....	184
6.3.2.1	Carga constante en movimiento.....	188
6.3.2.2	Carga armónica en movimiento.....	189
6.4	Viga uniforme Euler-Bernoulli con diferentes condiciones de apoyo y amortiguadores de masa sintonizados.....	190
6.4.1	Vibración libre.....	190
6.4.2	Vibración forzada.....	192
6.4.2.1	Carga constante en movimiento.....	192
6.4.2.2	Carga armónica en movimiento.....	192
6.5	Modelo matemático simplificado de los puentes peatonales estudiados con amortiguadores de masas sintonizados.....	193
6.5.1	Puente peatonal San Bartolo.....	196
6.5.2	Puente peatonal Salamanca.....	202
6.5.3	Puente peatonal Pátzcuaro.....	208
6.5.4	Puente peatonal tipo.....	214
6.6	Conclusiones.....	220
Capítulo 7 Conclusiones y recomendaciones.....		223
Referencias bibliográficas.....		225
Apéndice A Momento de inercia de flexión de la sección compuesta.....		229
Apéndice B Código en Matlab: Viga Euler-Bernoulli sin amortiguamiento sometida a una excitación peatonal en movimiento.....		233



Apéndice C Código en Matlab: Viga Euler-Bernoulli con amortiguamiento sometida a una excitación peatonal en movimiento.....	247
Apéndice D Respuesta dinámica vertical de un puente peatonal ante una excitación peatonal en movimiento.....	259
Apéndice E Código en Matlab: Determinación de los parámetros óptimos de un TMD para una viga Euler-Bernoulli.....	271
Apéndice F Determinación de los parámetros óptimos de los TMD's de puentes peatonales en base a un modelo equivalente de dos grados de libertad.....	279
Apéndice G Código en Matlab: Cálculo de las frecuencias verticales de vibrar de vigas Euler-Bernoulli con TMD's.....	287
Apéndice H Matriz de coeficientes para vigas uniformes Euler-Bernoulli con múltiples TMD's.....	291



Índice de figuras

Figura 2.1	Funciones periódicas de caminata normal ejercidas por un peatón en las tres direcciones ortogonales (Živanović <i>et al.</i> , 2005).....	9
Figura 2.2	Componentes de la fuerza dinámica peatonal causante de la vibración de los puentes peatonales (Venuti y Bruno, 2008).....	10
Figura 2.3	Coefficientes de reducción para vibración vertical y longitudinal (HIVOSS-SYNPEX, 2007).....	14
Figura 2.4	Coefficientes de reducción para vibración lateral (HIVOSS-SYNPEX, 2007).....	14
Figura 2.5	Gráficas para la obtención del coeficiente de reducción (UK N.A. EN 1991-2).....	16
Figura 2.6	Respuesta dinámica vertical de algunos puentes peatonales para diferentes valores de amortiguamiento (Bachmann <i>et al.</i> , 1995).....	19
Figura 2.7	Respuesta dinámica vertical de algunos puentes peatonales en base a su rigidez vertical estructural (Bachmann <i>et al.</i> , 1995).....	22
Figura 2.8	Dirección de la vibración definida en ISO 2631, BS 6472 y BS 6841.....	23
Figura 2.9	Curva base ISO 2631/2 para vibración vertical (ISO 10137,2007).....	25
Figura 2.10	Curva base ISO 2631/2 para vibración horizontal/lateral (ISO 10137,2007).....	26
Figura 2.11	Curva para la obtención del parámetro de amortiguamiento de masas (UK N.A EN 1991-2).....	30
Figura 2.12	Factor de respuesta dinámica, ψ , en función del claro (Bachmann <i>et al.</i> , 1995).....	32
Figura 2.13	Factor de respuesta dinámica, ψ , debido a una fuerza sinusoidal resonante en movimiento a través de un claro simple (Bachmann <i>et al.</i> , 1995).....	34
Figura 2.14	Efecto de la instalación de un amortiguador de masa sintonizado sobre la respuesta dinámica vertical de un puente peatonal real (Bachmann <i>et al.</i> , 1995).....	36
Figura 3.1	Puente peatonal San Bartolo, municipio de Naucalpan, Edo. México (vista general).....	38
Figura 3.2 (a)	Sistemas de piso del puente peatonal San Bartolo (vista lateral).....	39
Figura 3.2 (b)	Sistemas de piso del puente peatonal San Bartolo (vista central).....	39



Figura 3.3	Columna estructural en rampas de acceso para el uso del puente peatonal San Bartolo.....	39
Figura 3.4	Rampas de acceso al puente peatonal San Bartolo (vista inferior).....	40
Figura 3.4	Rampas de acceso al puente peatonal San Bartolo (vista superior).....	40
Figura 3.5	Detalle de la sección transversal de la calzada peatonal del puente peatonal San Bartolo.....	40
Figura 3.6	Detalle de rampas de acceso al puente peatonal San Bartolo (vista lateral).....	41
Figura 3.7	Plano del puente peatonal San Bartolo (vista general).....	41
Figura 3.8	Puente peatonal Salamanca, municipio de Morelia, Edo. Michoacán de Ocampo (vista general).....	43
Figura 3.9 (a)	Marcos de apoyo de las rampas.....	44
Figura 3.9 (b)	Detalle de apoyo simple de los marcos de apoyo de las rampas del puente peatonal Salamanca.....	44
Figura 3.10	Descansos de las rampas de acceso al puente peatonal Salamanca.....	44
Figura 3.11	Detalle de rampas de acceso al puente peatonal Salamanca (vista lateral).....	45
Figura 3.12 (a)	Unión entre estructura principal y rampas de acceso del puente peatonal Salamanca (vista superior).....	45
Figura 3.12 (b)	Unión entre estructura principal y rampas de acceso del puente peatonal Salamanca (vista inferior).....	45
Figura 3.13	Detalle de vigas y columnas principales del puente peatonal Salamanca.....	46
Figura 3.14	Detalle de la sección transversal de la calzada peatonal del puente peatonal Salamanca.....	46
Figura 3.15	Plano del puente peatonal Salamanca (vista general).....	47
Figura 3.16	Dimensiones del claro principal del puente peatonal Salamanca (vista frontal).....	47
Figura 3.17	Puente peatonal Pátzcuaro, municipio de Morelia, Edo. Michoacán de Ocampo (vista general).....	49
Figura 3.18 (a)	Marcos de apoyo de las rampas.....	49
Figura 3.18 (b)	Detalle de apoyo simple de los marcos de apoyo de las rampas del puente peatonal Pátzcuaro.....	49



Figura 3.19	Detalle de rampas de acceso al puente peatonal Pátzcuaro (vista lateral).....	50
Figura 3.20	Detalle de arrostramiento por debajo del puente peatonal Pátzcuaro.....	50
Figura 3.21	Detalle de la sección transversal de la calzada peatonal del puente peatonal Pátzcuaro.....	51
Figura 3.22	Plano del puente peatonal Pátzcuaro (vista general).....	51
Figura 3.23	Dimensiones del claro principal del puente peatonal Pátzcuaro (vista frontal).....	51
Figura 3.24	Vista en alzado del puente peatonal tipo.....	53
Figura 3.25	Vista en planta del puente peatonal tipo.....	53
Figura 3.26	Detalle de unión entre vigas y columnas principales del puente peatonal tipo.....	54
Figura 3.27	Perfiles estructurales de sección variable del puente peatonal tipo.....	55
Figura 3.28	Contraventeo en nudo de columna principal (vista en alzado).....	55
Figura 3.29	Contraventeo en nudo de columna principal (vista en planta).....	56
Figura 3.30	Detalle de escaleras de acceso al puente peatonal tipo (vista lateral).....	56
Figura 3.31	Sección transversal del sistema de piso del puente peatonal tipo.....	57
Figura 3.32	Sujeción lateral del puente peatonal tipo (vista en planta).....	57
Figura 3.33	Jaula de protección (vista en planta).....	58
Figura 3.34	Jaula de protección (vista en alzado).....	58
Figura 3.35	Frecuencia del primer modo vertical de vibrar de un puente peatonal en función del claro (Bachmann <i>et al.</i> , 1995).....	59
Figura 3.36	Modelo analítico de un sistema de piso losa-acero (Smith <i>et al.</i> , 2009).....	62
Figura 3.37	Modelo estructural del puente peatonal San Bartolo en SAP 2000.....	65
Figura 3.38	Modelo estructural del puente peatonal Salamanca en SAP 2000.....	67
Figura 3.39	Modelo estructural del puente peatonal Pátzcuaro en SAP 2000.....	69
Figura 3.40	Modelo estructural del puente peatonal tipo en SAP 2000.....	71
Figura 4.1	Acelerómetro modelo FBA ES-T, Kinematics.....	76
Figura 4.2	Esquema de arreglo de acelerómetros (vista frontal).....	77



Figura 4.3 Vibración libre subamortiguada de un puente peatonal en cualquier dirección ortogonal durante $t > \tau$ (Bachmann <i>et al.</i> , 1995).....	80
Figura 4.4 Instrumentación del puente peatonal San Bartolo mediante acelerómetros FBA ES-T, Kinematics.....	82
Figura 4.5 Espectros promedio de Fourier normalizados del puente peatonal San Bartolo.....	82
Figura 4.6 Instrumentación del puente peatonal Salamanca mediante acelerómetros FBA ES-T, Kinematics.....	83
Figura 4.7 Espectros promedio de Fourier normalizados del puente peatonal Salamanca.....	84
Figura 4.8 Señales registradas al centro del claro del puente peatonal Salamanca (vibración ambiental).....	85
Figura 4.9 Instrumentación del puente peatonal Pátzcuaro mediante acelerómetros FBA ES-T, Kinematics.....	88
Figura 4.10 Espectros promedio de Fourier normalizados del puente peatonal Pátzcuaro.....	88
Figura 4.11 Señales registradas al centro del claro del puente peatonal Pátzcuaro (vibración ambiental).....	89
Figura 5.1 (a) Modelo de parámetros distribuidos.....	94
Figura 5.1 (b) Modelo de parámetros discretos.....	94
Figura 5.2 Vibración libre de sistemas amortiguados (Chopra, 2014).....	96
Figura 5.3 Tipos de excitación dinámica causantes de la vibración forzada (Bachmann <i>et al.</i> 1995).....	98
Figura 5.4 Ejemplo de una función periódica (Bachmann <i>et al.</i> 1995).....	101
Figura 5.5 Descomposición de Fourier de una función periódica (Bachmann <i>et al.</i> 1995).....	102
Figura 5.6 Espectro de amplitudes discreto de Fourier (coeficientes) de la función de la figura 5.4 (Bachmann <i>et al.</i> 1995).....	102
Figura 5.7 Viga continua Euler-Bernoulli simplemente apoyada con carga transversal al eje del elemento.....	103
Figura 5.8 Elemento diferencial de longitud de una viga de flexión y cargas actuantes.....	104



Figura 5.9 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada sujeta a una carga constante en movimiento.....	110
Figura 5.10 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada sujeta a una carga armónica en movimiento.....	119
Figura 5.11 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada sujeta simultáneamente a una carga constante y a una carga armónica en movimiento.....	131
Figura 5.12 Formas modales verticales del puente peatonal San Bartolo (modelo matemático).....	136
Figura 5.13 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo en $x = 15 m$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático).....	137
Figura 5.14 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo en $x = 15 m$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático).....	138
Figura 5.15 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo en $x = 15 m$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático).....	139
Figura 5.16 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo en $x = 15 m$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático).....	140
Figura 5.17 Formas modales verticales del puente peatonal Salamanca (modelo matemático).....	141
Figura 5.18 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 m$ y en $x = 37.0929 m$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático).....	142
Figura 5.19 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 m$ y en $x = 37.0929 m$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático).....	143
Figura 5.20 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 m$ y en $x = 37.0929 m$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático).....	144
Figura 5.21 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 m$ y en $x = 37.0929 m$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático).....	145
Figura 5.22 Formas modales verticales del puente peatonal Pátzcuaro (modelo matemático).....	146
Figura 5.23 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 m$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático).....	147
Figura 5.24 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 m$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático).....	148



Figura 5.25 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático).....	149
Figura 5.26 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático).....	150
Figura 5.27 Formas modales verticales del puente peatonal tipo (modelo matemático).....	151
Figura 5.28 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo en $x = 10 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático).....	152
Figura 5.29 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo en $x = 10 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático).....	153
Figura 5.30 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo en $x = 10 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático).....	154
Figura 5.31 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo en $x = 10 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático).....	155
Figura 6.1 Sistemas de reducción de vibraciones (Montanaro, 2002).....	160
Figura 6.2 Amortiguadores de fluido viscoso (FVD) en el puente peatonal Millennium, Londres.....	165
Figura 6.3 Amortiguadores de masa sintonizados (TMD) en el puente peatonal Millennium, Londres.....	166
Figura 6.4 Amortiguador de masa sintonizado (TMD).....	167
Figura 6.5 Modelo dinámico de un sistema primario con un sistema de amortiguamiento (Connor, 2003).....	168
Figura 6.6 Ejemplo del efecto del ξ_d en la respuesta dinámica de un sistema primario con $f = 4.8 \text{ Hz}$ (Bachmann <i>et al.</i> , 1995).....	171
Figura 6.7 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada con n sistemas masa-resorte (Wu y Chou, 1999).....	174
Figura 6.8 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada con n sistemas masa-resorte sometida a una carga constante en movimiento.....	188
Figura 6.9 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada con n sistemas masa-resorte sometida a una carga armónica en movimiento.....	189
Figura 6.10 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada con n sistemas masa-resorte sujeta simultáneamente a una carga constante y a una carga armónica en movimiento.....	193



Figura 6.11 Formas modales verticales del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x_1 = 15 m$ (modelo matemático).....	197
Figura 6.12 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 m$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón con $f_p = 3.65 Hz$ y $V_o = 6 m/s$ (modelo matemático).....	198
Figura 6.13 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 m$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones con $f_p = 3.65 Hz$ y $V_o = 6 m/s$ (modelo matemático).....	199
Figura 6.14 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 m$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones con $f_p = 3.65 Hz$ y $V_o = 6 m/s$ (modelo matemático).....	200
Figura 6.15 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 m$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones con $f_p = 3.65 Hz$ y $V_o = 6 m/s$ (modelo matemático).....	201
Figura 6.16 Formas modales verticales del puente peatonal Salamanca con un TMD en $x_1 = 14.064 m$ y $x_2 = 37.0929 m$ (modelo matemático).....	203
Figura 6.17 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca con un TMD en $x^* = 14.064 m$ y $x^* = 37.0929 m$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón con $f_p = 3.18 Hz$ y $V_o = 5 m/s$ (modelo matemático).....	204
Figura 6.18 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca con un TMD en $x^* = 14.064 m$ y $x^* = 37.0929 m$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones con $f_p = 3.18 Hz$ y $V_o = 5 m/s$ (modelo matemático).....	205
Figura 6.19 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca con un TMD en $x^* = 14.064 m$ y $x^* = 37.0929 m$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones con $f_p = 3.18 Hz$ y $V_o = 5 m/s$ (modelo matemático).....	206
Figura 6.20 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca con un TMD en $x^* = 14.064 m$ y $x^* = 37.0929 m$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones con $f_p = 3.18 Hz$ y $V_o = 5 m/s$ (modelo matemático).....	207
Figura 6.21 Formas modales verticales del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x_1 = 18 m$ (modelo matemático).....	209



Figura 6.22 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 m$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón con $f_p = 2.768 Hz$ y $V_o = 4 m/s$ (modelo matemático).....210

Figura 6.23 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 m$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones con $f_p = 2.768 Hz$ y $V_o = 4 m/s$ (modelo matemático).....211

Figura 6.24 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 m$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones con $f_p = 2.768 Hz$ y $V_o = 4 m/s$ (modelo matemático).....212

Figura 6.25 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 m$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones con $f_p = 2.768 Hz$ y $V_o = 4 m/s$ (modelo matemático).....213

Figura 6.26 Formas modales verticales del puente peatonal tipo con un TMD en $x_1 = 10 m$ (modelo matemático).....215

Figura 6.27 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 m$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón con $f_p = 3.4282 Hz$ y $V_o = 5.75 m/s$ (modelo matemático).....216

Figura 6.28 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 m$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones con $f_p = 3.4282 Hz$ y $V_o = 5.75 m/s$ (modelo matemático).....217

Figura 6.29 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 m$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones con $f_p = 3.4282 Hz$ y $V_o = 5.75 m/s$ (modelo matemático).....218

Figura 6.30 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 m$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones con $f_p = 3.4282 Hz$ y $V_o = 5.75 m/s$ (modelo matemático).....219

Figura 6.31 (a) Dimensionamiento final de los TMD's de los puentes peatonales estudiados (puente peatonal San Bartolo).....221

Figura 6.31 (b) Dimensionamiento final de los TMD's de los puentes peatonales estudiados (puente peatonal Salamanca).....221

Figura 6.31 (c) Dimensionamiento final de los TMD's de los puentes peatonales estudiados (puente peatonal Pátzcuaro).....222



Figura 6.31 (d) Dimensionamiento final de los TMD's de los puentes peatonales estudiados (puente peatonal tipo).....	222
Figura A.1 Modelo de sección transversal compuesta para cada viga longitudinal.....	229
Figura D.1 Formas modales verticales del puente peatonal Pátzcuaro del apéndice B (Fryba ,1999).....	261
Figura D.2 Formas modales verticales normalizadas del puente peatonal Pátzcuaro del apéndice C (Rao ,2007).....	262
Figura D.3 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático).....	266
Figura D.4 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático).....	267
Figura D.5 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático).....	267
Figura D.6 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático).....	268
Figura D.7 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0.0045$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático).....	269
Figura D.8 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0.0045$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático).....	269
Figura D.9 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0.0045$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático).....	270
Figura D.10 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0.0045$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático).....	270



Índice de tablas

Tabla 2.1 Frecuencias verticales de vibrar típicas ejercidas por los peatones (Bachmann <i>et al.</i> , 1995).....	8
Tabla 2.2 Fuerzas dinámicas peatonales normalizadas (Bachmann <i>et al.</i> , 1995).....	11
Tabla 2.3 Máxima amplitud de la acción de vibración sinusoidal de un solo peatón (HIVOSS-SYNPEX, 2007).....	13
Tabla 2.4 Número de peatones efectivos (HIVOSS-SYNPEX, 2007).....	13
Tabla 2.5 Máxima amplitud de la acción de vibración sinusoidal de un solo peatón (UK N.A EN 1991-2).....	15
Tabla 2.6 Clasificación de puentes peatonales (UK N.A EN 1991-2).....	16
Tabla 2.7 Frecuencias estructurales de vibrar críticas de varias normas del mundo (Sánchez <i>et al.</i> , 2011).....	17
Tabla 2.8 Valores comunes de amortiguamiento estructural de puentes peatonales (Bachmann <i>et al.</i> , 1995).....	18
Tabla 2.9 Amortiguamiento estructural de acuerdo al material de construcción para vibraciones grandes (HIVOSS-SYNPEX, 2007).....	20
Tabla 2.10 Amortiguamiento estructural de puentes peatonales de diversos materiales (SETRA, 2006).....	20
Tabla 2.11 Amortiguamiento estructural de acuerdo al material de construcción para vibraciones grandes (SETRA, 2006).....	21
Tabla 2.12 Indicador de los umbrales de percepción humana ante vibraciones armónicas verticales cuando las personas están de pie (Bachmann <i>et al.</i> , 1995).....	24
Tabla 2.13 Aceleraciones límite de confort (ISO 10137, 1997).....	26
Tabla 2.14 Determinación del tipo de puente peatonal en función de la densidad peatonal (SETRA, 2006).....	27
Tabla 2.15 Determinación del nivel de confort (SETRA, 2006).....	27
Tabla 2.16 Determinación del tipo de puente peatonal en función de la densidad peatonal (HIVOSS-SYNPEX, 2007).....	28
Tabla 2.17 Determinación del nivel de confort (HIVOSS-SYNPEX, 2007).....	29



Tabla 2.18 Aceleraciones límite de confort de otras normas internacionales (Sánchez <i>et al.</i> , 2011).....	31
Tabla 3.1 Perfiles estructurales de acero del puente peatonal San Bartolo.....	42
Tabla 3.2 Perfiles estructurales de acero del puente peatonal Salamanca.....	48
Tabla 3.3 Perfiles estructurales de acero del puente peatonal Pátzcuaro.....	52
Tabla 3.4 Estimación empírica de las frecuencias verticales del primer modo de vibrar de los puentes peatonales estudiados.....	60
Tabla 3.5 Propiedades mecánicas del acero estructural B-254 (ASTM A36).....	61
Tabla 3.6 Frecuencias y modos analíticos de vibrar verticales del puente peatonal San Bartolo.....	66
Tabla 3.7 Frecuencias y modos analíticos de vibrar verticales del puente peatonal Salamanca.....	68
Tabla 3.8 Frecuencias y modos analíticos de vibrar verticales del puente peatonal Pátzcuaro.....	70
Tabla 3.9 Frecuencias y modos analíticos de vibrar verticales del puente peatonal tipo.....	72
Tabla 3.10 Frecuencias estructurales críticas de vibrar de los puentes peatonales estudiados.....	74
Tabla 3.11 Actividades peatonales críticas para la vibración vertical de los puentes peatonales estudiados.....	74
Tabla 4.1 Número total de mediciones realizadas en el puente peatonal San Bartolo.....	77
Tabla 4.2 Número total de mediciones realizadas en los puentes peatonales Salamanca y Pátzcuaro.....	78
Tabla 4.3 Frecuencias críticas de vibrar del puente peatonal San Bartolo para cada dirección ortogonal.....	83
Tabla 4.4 Frecuencias críticas de vibrar del puente peatonal Salamanca para cada dirección ortogonal.....	84
Tabla 4.5 Aceleraciones máximas de las pruebas in situ de vibración ambiental del puente peatonal Salamanca.....	87
Tabla 4.6 Frecuencias críticas de vibrar del puente peatonal Pátzcuaro para cada dirección ortogonal.....	89



Tabla 4.7 Aceleraciones máximas de las pruebas in situ de vibración ambiental del puente peatonal Pátzcuaro.....	91
Tabla 4.8 Comparación de las frecuencias de vibrar críticas de los puentes peatonales estudiados obtenidas por modelos analíticos y pruebas de vibración ambiental.....	92
Tabla 5.1 Transformadas seno de Fourier (Frýba, 1999).....	113
Tabla 5.2 Transformadas Laplace-Carson (Frýba, 1999).....	115
Tabla 5.3 Eigenvalores para distintas condiciones de apoyo (Gonçalves <i>et al.</i> 2007).....	123
Tabla 5.4 Eigenvector para distintas condiciones de apoyo.....	124
Tabla 5.5 Deflexión estática máxima para vigas con distintas condiciones de apoyo (AWC, 2007).....	133
Tabla 5.6 Velocidades promedio constantes y frecuencias verticales típicas de excitación peatonal (Bachmann y Ammann, 1987).....	134
Tabla 5.7 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal San Bartolo (modelo matemático).....	136
Tabla 5.8 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo en $x = 15 m$ ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático).....	137
Tabla 5.9 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo en $x = 15 m$ ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático).....	138
Tabla 5.10 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo en $x = 15 m$ ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático).....	139
Tabla 5.11 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo en $x = 15 m$ ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático).....	140
Tabla 5.12 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal Salamanca (modelo matemático).....	141
Tabla 5.13 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 m$ y en $x = 37.0929 m$ ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático).....	142
Tabla 5.14 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 m$ y en $x = 37.0929 m$ ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático).....	143
Tabla 5.15 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 m$ y en $x = 37.0929 m$ ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático).....	144
Tabla 5.16 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 m$ y en $x = 37.0929 m$ ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático).....	145



Tabla 5.17 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal Pátzcuaro (modelo matemático).....	146
Tabla 5.18 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 m$ ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático).....	147
Tabla 5.19 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 m$ ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático).....	148
Tabla 5.20 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 m$ ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático).....	149
Tabla 5.21 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 m$ ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático).....	150
Tabla 5.22 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal tipo (modelo matemático).....	151
Tabla 5.23 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo en $x = 10 m$ ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático).....	152
Tabla 5.24 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo en $x = 10 m$ ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático).....	153
Tabla 5.25 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo en $x = 10 m$ ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático).....	154
Tabla 5.26 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo en $x = 10 m$ ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático).....	155
Tabla 5.27 Comparación de aceleraciones verticales máximas de los modelos matemáticos y pruebas de vibración forzada “in situ” de los puentes peatonales Salamanca y Pátzcuaro.....	157
Tabla 6.1 Matrices $[B_l]$ y $[B_r]$ para vigas uniformes Euler-Bernoulli con diferentes condiciones de apoyo.....	191
Tabla 6.2 Parámetros óptimos para varias propuestas de TMD del puente peatonal San Bartolo en $x^* = L/2$	196
Tabla 6.3 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal San Bartolo con un TMD óptimo en $x_1 = 15 m$ (modelo matemático).....	197
Tabla 6.4 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 m$ ante 1 peatón con $f_p = 3.65 Hz$ y $V_o = 6 m/s$ (modelo matemático).....	198



Tabla 6.5 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 m$ ante 2 peatones con $f_p = 3.65 Hz$ y $V_o = 6 m/s$ (modelo matemático).....	199
Tabla 6.6 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 m$ ante 4 peatones con $f_p = 3.65 Hz$ y $V_o = 6 m/s$ (modelo matemático).....	200
Tabla 6.7 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 m$ ante 8 peatones con $f_p = 3.65 Hz$ y $V_o = 6 m/s$ (modelo matemático).....	201
Tabla 6.8 Parámetros óptimos para varias propuestas de TMD del puente peatonal Salamanca en $x^* = 0.586 L$	202
Tabla 6.9 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal Salamanca con un TMD óptimo en $x_1 = 14.064 m$ y $x_2 = 37.0929 m$ (modelo matemático).....	203
Tabla 6.10 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca con un TMD en $x^* = 14.064 m$ y $x^* = 37.0929 m$ ante 1 peatón con $f_p = 3.18 Hz$ y $V_o = 5 m/s$ (modelo matemático).....	204
Tabla 6.11 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca con un TMD en $x^* = 14.064 m$ y $x^* = 37.0929 m$ ante 2 peatones con $f_p = 3.18 Hz$ y $V_o = 5 m/s$ (modelo matemático).....	205
Tabla 6.12 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca con un TMD en $x^* = 14.064 m$ y $x^* = 37.0929 m$ ante 4 peatones con $f_p = 3.18 Hz$ y $V_o = 5 m/s$ (modelo matemático).....	206
Tabla 6.13 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca con un TMD en $x^* = 14.064 m$ y $x^* = 37.0929 m$ ante 8 peatones con $f_p = 3.18 Hz$ y $V_o = 5 m/s$ (modelo matemático).....	207
Tabla 6.14 Parámetros óptimos para varias propuestas de TMD del puente peatonal Pátzcuaro en $x^* = L/2$	208
Tabla 6.15 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD óptimo en $x_1 = 18 m$ (modelo matemático).....	209
Tabla 6.16 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 m$ ante 1 peatón con $f_p = 2.768 Hz$ y $V_o = 4 m/s$ (modelo matemático).....	210



Tabla 6.17 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 m$ ante 2 peatones con $f_p = 2.768 Hz$ y $V_o = 4 m/s$ (modelo matemático).....	211
Tabla 6.18 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 m$ ante 4 peatones con $f_p = 2.768 Hz$ y $V_o = 4 m/s$ (modelo matemático).....	212
Tabla 6.19 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 m$ ante 8 peatones con $f_p = 2.768 Hz$ y $V_o = 4 m/s$ (modelo matemático).....	213
Tabla 6.20 Parámetros óptimos para varias propuestas de TMD del puente peatonal tipo en $x^* = L/2$	214
Tabla 6.21 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal tipo con un TMD óptimo en $x_1 = 10 m$ (modelo matemático).....	215
Tabla 6.22 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 m$ ante 1 peatón con $f_p = 3.4282 Hz$ y $V_o = 5.75 m/s$ (modelo matemático).....	216
Tabla 6.23 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 m$ ante 2 peatones con $f_p = 3.4282 Hz$ y $V_o = 5.75 m/s$ (modelo matemático).....	217
Tabla 6.24 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 m$ ante 4 peatones con $f_p = 3.4282 Hz$ y $V_o = 5.75 m/s$ (modelo matemático).....	218
Tabla 6.25 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 m$ ante 8 peatones con $f_p = 3.4282 Hz$ y $V_o = 5.75 m/s$ (modelo matemático).....	219
Tabla 6.26 Diseño final de los TMD's para los puentes peatonales estudiados.....	220
Tabla A.1 Datos de la sección transversal del puente peatonal Pátzcuaro.....	230
Tabla D.1 Masa distribuida por unidad de longitud del puente peatonal Pátzcuaro.....	259
Tabla D.2 Comparación de frecuencias de vibrar del puente peatonal Pátzcuaro por dos métodos distintos.....	260
Tabla D.3 Comparación de las respuestas dinámicas verticales máximas en resonancia del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0$) en $x = 18 m$ por dos métodos distintos (modelo matemático).....	265
Tabla D.4 Respuestas dinámicas verticales máximas en resonancia del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 m$ con $\xi_j = 0.0045$ (modelo matemático).....	268



Tabla F.1 Datos generales del puente peatonal Pátzcuaro.....	279
Tabla F.2 Parámetros generalizados del sistema de un grado de libertad del puente peatonal Pátzcuaro.....	282
Tabla F.3 Parámetros óptimos para varias propuestas de TMD del puente peatonal Pátzcuaro en $x^* = L/2$	286



Lista de símbolos

a_s	Aceleración límite de confort
a_j	Eigenvalor del j -ésimo modo de vibrar del puente peatonal
a_v	Aceleración RMS en la dirección vertical
a_H	Aceleración RMS en la dirección horizontal
b_{eff}	Ancho efectivo del sistema de piso losa-acero
c	Coefficiente de amortiguamiento viscoso
c_{cr}	Coefficiente de amortiguamiento crítico
c_d	Coefficiente de amortiguamiento viscoso del amortiguador de masa sintonizado
$c_{d,opt}$	Coefficiente óptimo de amortiguamiento viscoso del amortiguador de masa sintonizado
d	Distancia longitudinal de ubicación de la carga peatonal
f'_c	Resistencia a la compresión del concreto
f_d	Frecuencia de vibrar en Hz del amortiguador de masa sintonizado
$f_{d,opt}$	Frecuencia óptima de vibrar en Hz del amortiguador de masa sintonizado
f_j	Frecuencia de vibrar en Hz del j -ésimo modo de vibrar del puente peatonal
f_p	Frecuencia de excitación peatonal en Hz
f_y	Esfuerzo de fluencia del acero



f_u	Esfuerzo último del acero
\bar{f}_i	Frecuencia de vibrar en Hz del i -ésimo modo de vibrar del sistema vibratorio completo (puente peatonal con amortiguadores de masa sintonizados)
h	Profundidad equivalente de la sección compuesta
h_a	Peralte total de la viga de acero
h_c	Profundidad del concreto sobre la lámina de acero acanalada
i	1, 2, 3,...
i^2	Unidad imaginaria (-1)
j	1, 2, 3,...
k	Rigidez vertical del puente peatonal
k_d	Rigidez vertical del amortiguador de masa sintonizado
$k_{d,opt}$	Rigidez vertical óptima del amortiguador de masa sintonizado
\tilde{k}_j	Rigidez vertical generalizada del j -ésimo modo de vibrar del puente peatonal
l	Extremo izquierdo de la viga
m	Masa total del puente peatonal
m_d	Masa del amortiguador de masa sintonizado
$m_{eff,j}$	Masa modal efectiva del j -ésimo modo de vibrar del puente peatonal
\bar{m}	Masa distribuida por unidad de longitud del puente peatonal



\tilde{m}_j	Masa generalizada del j -ésimo modo de vibrar del puente peatonal
$\tilde{m}_{j,e}$	Masa modal efectiva del j -ésimo modo de vibrar del puente peatonal en x^*
n	Número total de amortiguadores de masa sintonizados del sistema vibratorio completo
n_{eff}	Número efectivo de peatones que caminan sincronizados
n_p	Número total de personas que conforman la carga peatonal
p	Variable en el plano complejo
r	Extremo derecho de la viga
t	Tiempo
t^*	Duración de tiempo de una carga impulsiva en la integral de Duhamel
u	Desplazamiento
\dot{u}	Velocidad
\ddot{u}	Aceleración
ω_d	Frecuencia circular de vibrar en rad/s del amortiguador de masa sintonizado
$\omega_{d,j}$	Frecuencia circular de vibrar amortiguada en rad/s del i -ésimo modo de vibrar
ω_j	Frecuencia circular de vibrar en rad/s del j -ésimo modo de vibrar del puente peatonal
$\bar{\omega}_i$	Frecuencia circular de vibrar en rad/s del i -ésimo modo de vibrar del sistema vibratorio completo (puente peatonal con amortiguadores de masa sintonizados)



x	Eje longitudinal del puente peatonal
x^*	Punto de anclaje del amortiguador de masa sintonizado
x_j	Distancia longitudinal de anclaje del j -ésimo amortiguador de masa sintonizado
y	Eje vertical del puente peatonal
$y_{el,a}$	Altura del eje neutro de la viga de acero
$y_{el,c}$	Altura del eje elástico neutro de la sección compuesta
y_o	Deflexión estática máxima del puente peatonal
\hat{y}	Máxima amplitud de desplazamiento del sistema primario
$y(x,t)$	Desplazamiento vertical del puente peatonal
\dot{y}	Velocidad vertical del puente peatonal
\ddot{y}	Aceleración vertical del puente peatonal
\hat{y}_d	Máxima amplitud de desplazamiento del amortiguador de masa sintonizado
$y_d(t)$	Desplazamiento vertical del amortiguador de masa sintonizado
$\dot{y}_d(t)$	Velocidad vertical del amortiguador de masa sintonizado
$\ddot{y}_d(t)$	Aceleración vertical del amortiguador de masa sintonizado
z	Eje lateral del puente peatonal
A_a	Área de la sección transversal de la viga de acero



A_c	Área transversal del concreto colado en la lámina de acero para el ancho efectivo
A_j	Constante de integración de la j -ésima forma modal del puente peatonal
B_j	Constante de integración de la j -ésima forma modal del puente peatonal
$[\bar{B}]$	Matriz de coeficientes de general del puente peatonal con amortiguadores de masa sintonizados
$[B_j]$	Matriz de coeficientes en el j -ésimo punto de anclaje
$[B_l]$	Matriz de coeficientes para el extremo izquierdo de la viga
$[B_r]$	Matriz de coeficientes para el extremo derecho de la viga
C	Fuerza de compresión en la sección compuesta
C_j	Constante de integración de la j -ésima forma modal del puente peatonal
C_{ji}	Constantes de integración para la viga con amortiguadores de masa sintonizados
$\{\bar{C}\}$	Eigenvector del puente peatonal con amortiguadores de masa sintonizados
D	Parámetro de amortiguamiento de masas
D_j	Constante de integración de la j -ésima forma modal del puente peatonal
DMF	Factor de amplificación dinámico
E	Módulo de elasticidad del puente peatonal
E_a	Módulo de elasticidad del acero



E_c	Módulo de elasticidad del concreto a lo largo de la viga de acero
E_{cx}	Módulo de elasticidad del concreto perpendicular al claro de la viga de acero
F_H	Fuerza dinámica peatonal en la dirección horizontal o lateral
F_L	Fuerza dinámica peatonal en la dirección longitudinal
F_V	Fuerza dinámica peatonal en la dirección vertical
G	Peso promedio de un peatón (700 N)
$H(x)$	Función de distribución Heaviside
I	Momento de inercia de flexión del puente peatonal
I_c	Momento de inercia de flexión de la sección compuesta
$I_{c,x}$	Momento de inercia del perfil de la losa por metro de anchura
I_z	Momento de inercia de flexión de la viga de acero
K	Factor de configuración
L	Longitud del claro del puente peatonal
M	Momento flexionante
P	Peso total de la carga peatonal
$\tilde{P}_j(t)$	Carga peatonal generalizada para el j -ésimo modo de vibrar
P_o	Máxima amplitud del i -ésimo armónico generado por la carga peatonal



$P(x,t)$	Excitación dinámica externa
T	Fuerza de tensión en la sección compuesta
$T_{d j}$	Periodo de vibrar amortiguado en segundos del j -ésimo modo de vibrar
T_j	Periodo de vibrar en segundos del j -ésimo modo de vibrar del puente peatonal
V	Fuerza cortante
V_{cr}	Velocidad crítica
V_o	Velocidad constante a la que se desplaza la carga peatonal
$Y_i(x)$	i -ésima forma modal del puente peatonal con amortiguadores de masa sintonizados
$Y(j,t)$	Transformada de Fourier del desplazamiento vertical
$\dot{Y}(j,t)$	Primera derivada con respecto del tiempo de $Y(j,t)$
$\ddot{Y}(j,t)$	Segunda derivada con respecto del tiempo de $Y(j,t)$
α	Parámetro de velocidad
α_i	Coeficiente de Fourier para el i -ésimo armónico peatonal
β_j	Constante dependiente de la j -ésima frecuencia de vibrar del puente peatonal
γ_j	Relación entre la frecuencia del sistema vibratorio completo y la frecuencia del amortiguador de masa sintonizado
Γ_i	Factor de participación del i -ésimo modo de vibrar



$\delta(x)$	Función delta de Dirac
$\eta_j(t)$	Desplazamiento vertical generalizado del j -ésimo modo de vibrar del puente peatonal
θ_j	Ángulo dependiente de la j -ésima frecuencia del sistema vibratorio completo
λ	Constante dependiente del amortiguador de masa sintonizado
Λ	Relación entre la frecuencia de la carga y la frecuencia estructural
μ_j	Relación entre la masa del amortiguador de masa sintonizado y la masa total del puente peatonal
ξ_d	Fracción de amortiguamiento crítico del amortiguador de masa sintonizado
$\xi_{d,opt}$	Fracción óptima de amortiguamiento crítico del amortiguador de masa sintonizado
ξ_e	Fracción de amortiguamiento crítico equivalente del puente peatonal con amortiguadores de masa sintonizados
ξ_j	Fracción de amortiguamiento crítico del j -ésimo modo de vibrar
τ	Tiempo de duración de la excitación peatonal
φ_i	Ángulo de fase del i -ésimo armónico peatonal
$\phi_j(x)$	J -ésimo modo de vibrar del puente peatonal
ψ	Coefficiente de reducción de la carga peatonal
Ψ	Factor de respuesta dinámica
Ω	Frecuencia circular de la excitación peatonal



Resumen

En la actualidad no existen normas mexicanas de diseño para puentes peatonales, por lo que los diseños estructurales no contemplan la revisión del estado límite de servicio para vibraciones excesivas inducidas por peatones. El cruce de las personas sobre los puentes peatonales genera frecuencias armónicas que en ocasiones pueden coincidir con alguna de las frecuencias estructurales, lo cual se traduce en vibraciones resonantes que pueden exceder el nivel de confort soportado por el ser humano. El trabajo comienza con una breve revisión de la normatividad internacional existente de puentes peatonales y el estado límite de servicio que éstas consideran ante la vibración inducida por peatones. En esta tesis se estudiaron tres puentes peatonales existentes en México, además de un puente tipo que muchas empresas constructoras utilizan como modelo preestablecido sin que se realice un diseño estructural previo. Los puentes peatonales estudiados fueron modelados analíticamente en un software comercial de elemento finito con objetivo de obtener las propiedades dinámicas de los mismos y posteriormente se realizaron pruebas in situ de vibración ambiental en los tres puentes peatonales existentes, con el objetivo de calibrar los resultados de los modelos analíticos. También se realizaron pruebas in situ de vibración forzada en dos de los tres puentes peatonales reales, con el objetivo de obtener su respuesta dinámica real ante distintos casos de excitación peatonal en movimiento. Las estructuras estudiadas resultaron ser más propensas a las vibraciones inducidas por peatones en la dirección vertical, por lo que posteriormente se modelaron matemáticamente dichas estructuras como vigas uniformes Euler-Bernoulli sometidas a una carga peatonal móvil con objetivo de comparar las propiedades y respuestas dinámicas obtenidas, y determinar bajo que cargas de excitación peatonal se satisface el nivel de confort. Por último se diseñó un sistema de amortiguadores de masa sintonizados capaz de reducir las vibraciones verticales inducidas por peatones, y se modelaron matemáticamente las estructuras estudiadas como vigas uniformes Euler-Bernoulli con masas resonantes adjuntas a ellas y sometidas a una excitación peatonal móvil; verificando que estos dispositivos de disipación de energía son capaces de cambiar las propiedades dinámicas de los puentes peatonales, y por ende, lograr una reducción significativa de las vibraciones verticales hasta alcanzar satisfacer los niveles de confort deseados.



Abstract

Currently there are no Mexican design standards for pedestrian bridges, so that structural designs do not include the revision of serviceability limit state for excessive vibrations induced by pedestrians. The crossing of people on pedestrian bridges generates harmonic frequencies that can sometimes match with one of the structural frequencies, which results in resonant vibrations that may exceed the comfort level supported by humans. The work begins with a brief review of existing international standards of pedestrian bridges and serviceability limit state that they consider for vibration induced by pedestrians. Three existing pedestrian bridges in Mexico were studied in this thesis, and also was studied a bridge type that many construction companies used as pre-established model without performing a preliminary structural design. Pedestrian bridges studied were modeled analytically in a commercial finite element software in order to obtain their dynamic properties and subsequently, environmental vibration tests were conducted on the three existing pedestrian bridges, in order to calibrate the results of analytical models. Forced vibration tests were also carried out in two of the three existing pedestrian bridges, in order to obtain their actual dynamic responses to different excitation cases of moving pedestrians. The structures studied were more susceptible to vertical vibrations induced by people, therefore, these structures were also modeled mathematically as uniform Euler-Bernoulli beams with a pedestrian load moving on these, in order to compare the dynamic properties and dynamic responses, and determine which cases of pedestrian excitation satisfy the comfort level. Finally, tuned mass dampers devices were designed to reduce vertical vibrations induced by people, and the structures studied were modeled mathematically as uniform Euler-Bernoulli beams carrying spring-mass systems with a pedestrian load moving on these; verifying that these energy dissipation devices are capable of changing the dynamic properties of pedestrian bridges, and therefore, achieve a significant reduction of vertical vibrations satisfying the desired levels of comfort.



Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes históricos

Un puente peatonal es una estructura que permite el paso de las personas sobre vías de tráfico o cuerpos de agua, y suelen construirse de diversos materiales como acero, concreto reforzado, concreto pretensado o diferentes materiales compuestos. Es importante mencionar que en esta tesis se abordan únicamente aquellos puentes peatonales que cruzan sobre vías de tráfico. Debido a la poca carga para la que están concebidas estas estructuras y a la limitada longitud que normalmente atraviesan, suelen diseñarse cada vez más esbeltos y ligeros con el fin de ser más estéticos y económicos. Los puentes peatonales modernos pueden entonces carecer de suficiente rigidez y amortiguamiento, generándose así problemas de vibración con el paso de los peatones una vez que son puestos en servicio. Las vibraciones inducidas por los peatones en estas estructuras suelen ser más problemáticas cuando la frecuencia de excitación peatonal es igual a la frecuencia estructural (resonancia), pudiéndose alcanzar niveles excesivos de vibración que sobrepasan los límites de confort que soporta el ser humano y en ocasiones poniendo en riesgo la seguridad estructural.

Frahm propuso en 1909 un dispositivo formado por una masa, un resorte y un amortiguador, que lograba reducir las vibraciones resonantes de una estructura. El invento de Frahm fue bautizado con el nombre de amortiguador de masa sintonizado o TMD (tuned mass damper), y su principio de funcionamiento se basaba en lograr que éste dispositivo vibrara en resonancia en lugar de la estructura, es decir, se lograba transferir la energía inferida a la estructura hacia al amortiguador de masa sintonizado.

Den Hartog (1956) fue el pionero en el estudio de absorsores dinámicos; él estudió sistemas simples no amortiguados con un grado de libertad, sometidos a excitaciones armónicas. A partir



de este estudio el autor obtuvo expresiones para la determinación de los parámetros óptimos de los amortiguadores de masa sintonizados.

En sus 90 años de vida, los amortiguadores de masa sintonizados (TMD's) han encontrado aplicación en muchos campos de la ingeniería como un dispositivo que reduce las vibraciones resonantes para cualquier modo de vibrar de interés, sin embargo, este tipo de dispositivos solían utilizarse para controlar otro tipo de excitaciones dinámicas, más no peatonales. El control de vibraciones inducidas por personas en puentes peatonales es un tema del cual se contaba con poca información hasta que en los últimos 20 años se empezó a investigar más en el mundo, sin embargo, aún se considera un tema novedoso y con poco desarrollo que permita solucionar problemas prácticos en la actualidad.

Los puentes peatonales suelen vibrar más en la dirección vertical debido a que el componente de fuerza vertical de las cargas móviles peatonales es mayor que el componente de fuerza lateral o longitudinal, por lo que en los años 90, se empezó a estudiar cómo controlar las vibraciones verticales de estas estructuras. En 1995, Hugo Bachmann estudió el efecto que causaban los amortiguadores de masa sintonizados en el control de las vibraciones verticales de los puentes peatonales y se comprobó que estos dispositivos lograban reducir considerable y satisfactoriamente dichas vibraciones.

Francesco Ricciardelli desarrolló en 1999 un modelo matemático para el análisis de la respuesta dinámica de estructuras tipo línea con TMD's, el cual puede ser aplicable a edificios. Distintos investigadores como Byung-Wan Jo, Ghi-Ho Tae y Du-Wha (2001); así como J.F. Wang, C.C. Lin, y B.L.Chen (2003) han utilizado respectivamente modelos matemáticos simplificados para puentes carreteros y ferroviarios, al considerarlos como vigas de parámetros distribuidos que trabajan a flexión (vigas Euler-Bernoulli) cuando son sometidas a cargas dinámicas en movimiento

En el siglo XX, la atención estaba centrada en las vibraciones verticales de los puentes peatonales debido a que en el siglo XIX se colapsó en Broughton un puente peatonal gracias a la marcha de los soldados, sin embargo, en el siglo XXI con la clausura del puente Millennium en Londres, la



atención se centró también en la vibración lateral debido a fenómenos de sincronización o resonancia. A partir de este suceso se empezó también a investigar cómo controlar adecuadamente las vibraciones laterales inducidas por personas mediante distintos dispositivos de amortiguamiento, ya que en ocasiones éstas pueden ser las problemáticas en los puentes peatonales; tal es el caso de la investigación realizada en el año 2005 por Anders Rönnquist, Einar Strømmen y Richard Birkelands, quienes estudiaron el efecto de las vibraciones laterales en el puente peatonal Lardal en Noruega. Sin embargo, las vibraciones verticales resonantes suelen ser mayores que las producidas en la dirección lateral; motivo por el cual en esta tesis se busca controlar únicamente las vibraciones resonantes verticales, ya que para el control de las vibraciones laterales resonantes, son más efectivos otro tipo de dispositivos como por ejemplo los amortiguadores de fluido viscoso (FVD's). En los últimos años se han efectuado también diferentes estudios de la manera en que deben modelarse las cargas peatonales, tal es el caso, de la investigación realizada por Fiammetta Venuti y Luca Bruno (2008); bajo la cual es posible obtener ecuaciones de las fuerzas dinámicas ejercidas por los peatones en la dirección vertical, lateral y longitudinal. Dichos modelos de carga peatonal suelen ser utilizados en las diferentes normas internacionales de diseño de puentes peatonales, y bajo los cuales Iemke Ross (2009) evaluó la respuesta dinámica de los puentes peatonales Goodwill y Milton Road, ubicados en Brisbane, Australia.

Durante estos últimos 20 años, diferentes investigadores han llegado a la conclusión de que los TMD's son dispositivos bastante eficientes para reducir las vibraciones verticales resonantes inducidas por personas en los puentes peatonales, por lo que resulta de vital importancia saber diseñar este tipo de dispositivos. Mustafa Kemal Ozkan (2010) realizó un estudio que se centra en la aplicación de un único o múltiples TMD's sobre vigas Euler-Bernoulli, y examina su eficacia basada en las características de vibración libre y forzada de las vigas. Este tipo de modelos pueden ser aplicados satisfactoriamente en puentes peatonales.

Debido a la nueva tendencia de construir puentes peatonales más esbeltos es entonces de vital importancia revisar que estas estructuras satisfagan los niveles de confort que es capaz de soportar el ser humano para así garantizar un estado de servicio adecuado de estas estructuras, sin



embargo, no existen normas mexicanas sobre el diseño de puentes peatonales bajo cargas dinámicas inducidas por personas, y difícilmente se intervienen en México estas estructuras con alguna medida correctiva que mitigue las vibraciones.

1.2 Objetivos

En esta tesis se hace una investigación general de cómo determinar si un puente peatonal es propenso a las vibraciones inducidas por personas en la dirección vertical, lateral y longitudinal; para lo cual se realizaron modelos analíticos y pruebas “in situ” de vibración ambiental que permitieron obtener las propiedades dinámicas de tres puentes peatonales existentes en México, así como su respuesta dinámica en las tres direcciones ante distintos casos de excitación peatonal en movimiento. También se realizó el modelo analítico de un puente peatonal tipo con el objetivo de determinar que los modelos prototipo de estas estructuras también pueden sufrir problemas de vibración inducida por peatones. Se realizaron también modelos matemáticos simplificados con y sin amortiguadores de masa sintonizados (TMD’s), con el objetivo de obtener las propiedades y respuesta dinámicas verticales de las cuatro estructuras estudiadas ante varios casos de excitación peatonal en movimiento; de esta manera, se comprobó que los TMD’s diseñados pueden reducir adecuadamente las vibraciones verticales resonantes de las estructuras estudiadas hasta lograr satisfacer los niveles de confort.

1.2.1 Objetivo general

Diseñar un sistema de amortiguadores de masa sintonizados que permita controlar las vibraciones verticales inducidas por personas en tres puentes peatonales existentes en México y en un puente peatonal tipo.

1.2.2 Objetivos específicos

En esta tesis se tienen diversos objetivos específicos:

- Comparar la distinta normatividad internacional existente con respecto a la vibración inducida por personas en puentes peatonales.



- Modelar analíticamente en un software de elemento finito (SAP 2000 versión 14) tres puentes peatonales existentes en México y un puente peatonal tipo, que fungirán como modelos de estudio de esta tesis, para poder determinar las propiedades dinámicas de los mismos en las tres direcciones: vertical, lateral y longitudinal.
- Realizar un estudio de vibración ambiental de los tres puentes peatonales existentes en México para obtener sus propiedades y respuestas dinámicas en sus tres direcciones: vertical, lateral y longitudinal. Así mismo, realizar pruebas “in situ” de vibración forzada bajo un número controlado de peatones que caminan y corren.
- Modelar matemáticamente las cuatro estructuras de estudio considerándolas como vigas uniformes tipo Euler-Bernoulli para poder determinar sus propiedades y respuesta dinámicas verticales ante distintos casos de excitación peatonal en movimiento.
- Diseñar un sistema de amortiguadores de masa sintonizados para los cuatro puentes peatonales estudiados y obtener matemáticamente las propiedades y respuestas dinámicas verticales de los mismos considerándolos como vigas uniformes tipo Euler-Bernoulli con sistemas de masa-resorte, para modelar los TMD’s adjuntos a ellas.

1.3 Descripción y alcance del trabajo

El alcance de esta tesis es hacer una investigación sobre el control de vibraciones verticales inducidas por personas en movimiento sobre puentes peatonales mediante amortiguadores de masa sintonizados (TMD’s), por lo que únicamente se menciona si los cuatro puentes peatonales estudiados en esta tesis pueden llegar a tener problemas de vibraciones inducidas por personas en la dirección lateral y longitudinal, más no se evalúa la respuesta dinámica de los mismos en dichas direcciones mediante modelos analíticos y matemáticos. Si se deseará disminuir también



Capítulo 1. Introducción

las vibraciones laterales en los puentes peatonales estudiados se tendría que evaluar la posibilidad de otro sistema de disipación de energía como es el caso de los amortiguadores de fluido viscoso (FVD's) y por consiguiente realizar otro tipo de modelos matemáticos simplificados.



Capítulo 2

Normatividad existente

2.1 Introducción

Las frecuencias de vibrar que ejercen los peatones al caminar y correr, en ocasiones coinciden con alguna de las frecuencias de vibración de la estructura, pudiendo dar lugar a fenómenos de resonancia que se traducen en altos niveles de vibración. Como respuesta a este problema, las normas actuales de diseño prestan cada día más atención a los posibles problemas dinámicos y al estado de servicio de los puentes peatonales.

Actualmente no existen normas de diseño mexicanas para puentes vehiculares y tampoco para estructuras que aparentemente suelen ser de menor importancia, como los puentes peatonales. Al no existir dichas normas es común que en la práctica se tomen modelos o prototipos de diseño de puentes peatonales, y se apliquen en distintas partes del país sin existir un diseño estructural previo. Sin embargo, al no existir normas de diseño de estas estructuras, es evidente suponer que tampoco hay lineamientos con respecto al problema de la vibración.

La normativa de diseño para puentes carreteros y peatonales proviene de países como Estados Unidos de América, Canadá, Australia, Japón y algunos países de la unión europea como España, Reino Unido, Alemania y Suiza. Dichas normas prestan cada vez más atención a los posibles problemas dinámicos y al análisis del estado de servicio de dichas estructuras. De manera general, dichas normas recomiendan evitar que los modos principales de vibrar de los puentes peatonales estén dentro de los intervalos de frecuencia de pasos típicos de los peatones (incluyendo caminar y correr), y establecen valores límite de aceleración vertical y lateral tal que se asegure el estado de servicio de la estructura. Por otro lado, en algunas normas como es el caso del Eurocódigo, se formulan diferentes estados de carga que deben ser analizados por el diseñador de la estructura (Carlos Mariano Casado-Sánchez, Jesús de Sebastián-Sanz, Iván Muñoz-Díaz, Alfonso Poncela-Méndez, Antolín Lorenzana-Ibán, 2011).



En este capítulo se comparan los lineamientos establecidos con respecto a la vibración inducida por personas en puentes peatonales en cada una de las principales normas existentes.

2.2 Acciones dinámicas

En la mayoría de los casos la vibración en puentes peatonales se trata de un problema de vibración forzada causada por el paso de los peatones sobre estas estructuras. Mediante diversas mediciones y estudios realizados se encontró que los peatones ejercen frecuencias de vibrar en tres direcciones ortogonales, cuyos valores probabilísticos más comunes se muestran en la tabla 2.1.

Tabla 2.1 Frecuencias de vibrar típicas ejercidas por los peatones
(Bachmann *et al.*, 1995)

Actividad peatonal	Frecuencia peatonal (Hz)		
	Vertical	Lateral	Longitudinal
Caminata lenta	1.7	0.85	1.7
Caminata normal	2	1	2
Caminata rápida	2.3	1.15	2.3
Carrera lenta	2.1	1.05	2.1
Carrera normal	2.5	1.25	2.5
Carrera rápida	3.2	1.6	3.2

En la tabla 2.1 se observa que la excitación dinámica que produce un peatón a un paso de caminata normal o promedio tiene una frecuencia vertical de vibrar de 2 Hz con una desviación estándar de 0.175 Hz. Esto significa que el 95 % de los peatones caminan con frecuencias verticales de vibrar de entre 1.65 y 2.35 Hz. En función del claro de la estructura solo un número finito de pasos es tomado en consideración en el cruce del puente peatonal. Como resultado la vibración es de naturaleza transitoria, evitando alcanzar así el estado estacionario en la vibración forzada. En ocasiones los peatones suelen correr sobre estas estructuras ejerciendo frecuencias



verticales de vibrar de hasta 3.5 Hz , pero usualmente no más allá de dicho valor. En la tabla 2.1 también se muestra la frecuencia de vibrar usual que suele tomarse en función del ritmo o intensidad de caminata o carrera, dependiendo si es lenta, normal o rápida. La frecuencia vertical del segundo y tercer armónico de la excitación dinámica peatonal de una caminata normal o promedio no se especifica en la tabla 2.1, pero suele estar entre 4 Hz y 6 Hz ; de tal manera que se pueden generar vibraciones verticales importantes cuando las frecuencias naturales de vibrar de la estructura coinciden con dichos valores, es decir, se puede presentar el fenómeno de resonancia en armónicos superiores. Los movimientos rítmicos del cuerpo humano con una duración de hasta 20 segundos y más conllevan a fuerzas dinámicas casi periódicas. En la figura 2.1 se muestran las fuerzas periódicas que ejerce un peatón cuando se desplaza en caminata normal.

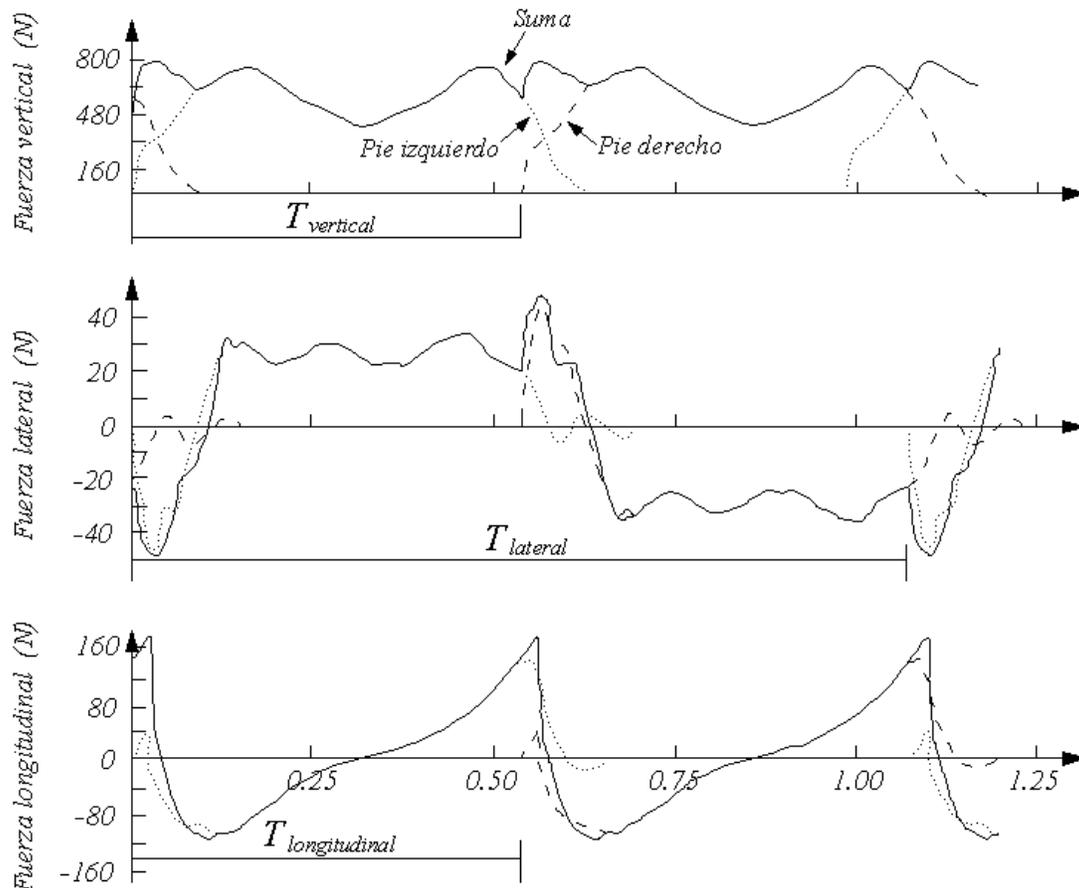


Figura 2.1 Fuerzas periódicas de caminata normal ejercidas por un peatón en las tres direcciones ortogonales (Živanović *et al.*, 2005)

La fuerza dinámica peatonal que pone a vibrar a estas estructuras puede descomponerse en 3 componentes de fuerza periódica (Figura 2.2): una fuerza en la dirección vertical denominada F_V , una fuerza horizontal o lateral denominada F_H , y una fuerza longitudinal denominada F_L .



Figura 2.2 Componentes de la fuerza dinámica peatonal causante de la vibración de los puentes peatonales (Venuti y Bruno, 2008)

Las tres fuerzas ortogonales pueden modelarse matemáticamente mediante series de Fourier como una sumatoria infinita de componentes armónicos, tal y como se muestra en las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3, donde G representa el peso promedio de un peatón ($G = 700 N$); α_i representa el coeficiente de Fourier del i -ésimo armónico; $G \alpha_i$ es la amplitud de fuerza del i -ésimo armónico; f_p es la frecuencia peatonal de vibrar en Hz ; y φ_i es el ángulo de fase del i -ésimo armónico.

$$F_V = G + \sum_{i=1}^{\infty} G \alpha_i \text{sen}(2\pi i f_p t - \varphi_i) \quad (2.1)$$

$$F_H = \sum_{i=1}^{\infty} G \alpha_i \text{sen}(\pi i f_p t - \varphi_i) \quad (2.2)$$



$$F_L = \sum_{i=1}^{\infty} G \alpha_i \text{sen}(2\pi i f_p t - \varphi_i) \quad (2.3)$$

Los coeficientes de Fourier y los ángulos de fase se obtienen de pruebas controladas y son utilizados para normalizar las fuerzas dinámicas peatonales.

Tabla 2.2 Fuerzas dinámicas peatonales normalizadas (Bachmann *et al.*, 1995)

Tipo de actividad representativa	Frecuencias de vibrar (Hz)		Coeficientes de Fourier y ángulos de fase					Densidad de diseño $\left(\frac{n_p}{m^2}\right)$
			α_1	α_2	φ_2	α_3	φ_3	
Caminando	Vertical	2	0.4	0.1	$\pi/2$	0.1	$\pi/2$	~ 1
		2.4	0.5					
	Longitudinal	2	0.2	0.1				
			$\alpha_{1/2} = 0.1$					
Horizontal/Lateral	2	$\alpha_{1/2} = 0.1$	$\alpha_{3/2} = 0.1$					
Corriendo		2 a 3	1.6	0.7		0.2	-	

El número de contribuciones armónicas que se deben tomar en consideración en la fuerza dinámica peatonal dependerá del valor de la frecuencia de vibrar de la estructura que puede vibrar en resonancia. Si alguna de las frecuencias verticales de vibrar de la estructura se encuentra entre el intervalo de 1.6 a 3.5 Hz, puede considerarse un solo armónico; si ésta es mayor, entonces pueden considerarse las contribuciones de armónicos superiores. Las frecuencias de vibrar de los puentes peatonales no suelen ser tan altas pero en caso de requerirse de cuatro contribuciones armónicas, se puede tomar el valor propuesto por Murray (1997) para el coeficiente de Fourier del cuarto armónico, α_4 , el cual equivale a 0.05. En los modelos de carga peatonal de las normas de diseño, usualmente se considera sólo el primer armónico y la fuerza resultante sinusoidal es aplicada en resonancia con el modo natural de vibrar de interés del puente peatonal.



En el caso del modelado de la acción de un grupo de peatones, las normas suelen multiplicar la acción del armónico de un solo peatón por el número efectivo de peatones. La fuerza del i -ésimo armónico generado por un grupo de peatones se obtiene mediante la ecuación:

$$F(t) = P_o \operatorname{sen}(2\pi i f_p t - \varphi_i) n_{eff} \psi \quad (2.4)$$

Donde n_{eff} es el número efectivo de peatones, ψ es el coeficiente de reducción, y P_o es la máxima amplitud de la acción de vibración sinusoidal de un solo peatón, la cual se obtiene mediante la ecuación:

$$P_o = G \alpha_i \quad (2.5)$$

Todos los parámetros de la ecuación 2.4 pueden obtenerse con diferentes criterios mediante los lineamientos establecidos en las distintas normas internacionales.

2.2.1 Norma HIVOSS-SYNPEX

Las normas HIVOSS (Human Induced Vibrations of Steel Structures) son el resultado de dos proyectos financiados en Europa en el año 2006 por el Fondo de Investigación del Carbón y del Acero, mejor conocido como RFCS (Research Fund for Coal and Steel). El primer proyecto se denominó Vibration of floors-Vof, y se enfocó en estudiar los problemas de vibración de sistemas de piso en edificios de acero ante diferentes fuentes de excitación dinámica. El segundo proyecto se denominó SYNPEX (Advanced Load Models for Synchronous Pedestrian Excitation and Optimised Design Guidelines for Steel Footbridges) y trata el problema de vibración en puentes peatonales de acero debido al paso de los peatones, incluyendo los efectos de resonancia o sincronización de frecuencias (lock in). Los resultados de ambos proyectos se publicaron en Europa en el año 2007 en una sola norma dividida en dos tomos y conocida como HIVOSS, la cual fue traducida en sus inicios a 4 idiomas (alemán, holandés, francés y portugués) y posteriormente al idioma inglés. Para el caso de puentes peatonales de acero únicamente los



resultados del proyecto SYNPEX son los que se tomarán en cuenta de todos los lineamientos establecidos en la Norma HIVOSS.

Con respecto a las acciones dinámicas de varios peatones, la norma HIVOSS-SYNPEX (2007) proporciona directamente el valor de P_o . Dicho parámetro varía en función de la dirección en la que se quiera obtener la fuerza periódica peatonal (Tabla 2.3).

Tabla 2.3 Máxima amplitud de la acción de vibración sinusoidal de un solo peatón (HIVOSS-SYNPEX, 2007)

Dirección ortogonal	Vertical	Longitudinal	Horizontal/lateral
$P_o (N)$	280	140	35

El número efectivo de peatones puede ser interpretado como un factor de sincronización y se calcula con base al supuesto probabilístico de que el número de peatones, que camina en sintonía con la frecuencia natural de vibrar del puente e igualmente distribuido a lo largo del piso del puente peatonal, produce el 95 % de la aceleración pico debido a corrientes de peatones aleatorias. El número de peatones efectivos se obtiene en función del número total de peatones, n_p , y de la fracción de amortiguamiento crítico estructural, ζ , tal y como se muestra en la tabla 2.4.

Tabla 2.4 Número de peatones efectivos (HIVOSS-SYNPEX, 2007)

n_{eff}	Densidad peatonal (Personas/m ²)
$10.8\sqrt{n_p \zeta}$	≤ 1
$1.85\sqrt{n_p}$	≥ 1

El coeficiente de reducción representa la probabilidad de ocurrencia de las frecuencias de paso de los peatones y se obtiene a partir de las frecuencias estructuras de vibrar (figuras 2.3 y 2.4).

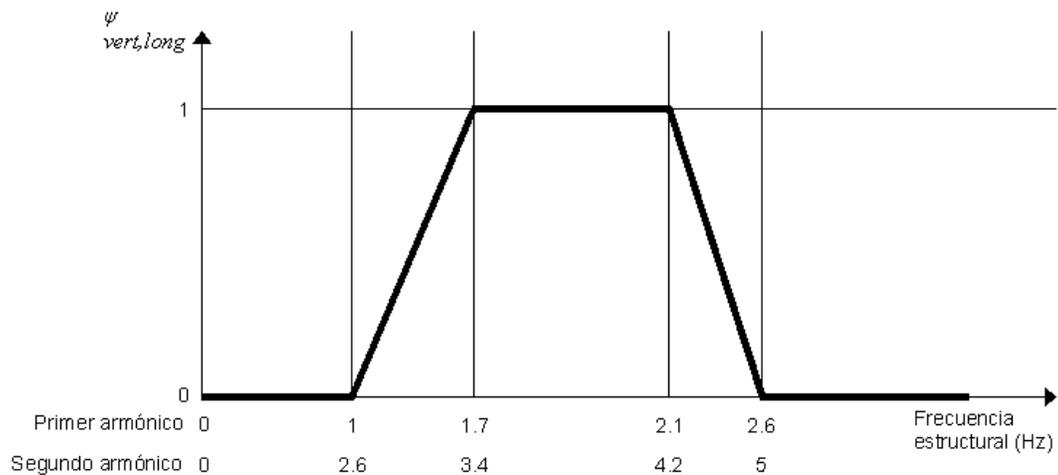


Figura 2.3 Coeficientes de reducción para vibración vertical y longitudinal (HIVOSS-SYNPEX, 2007)

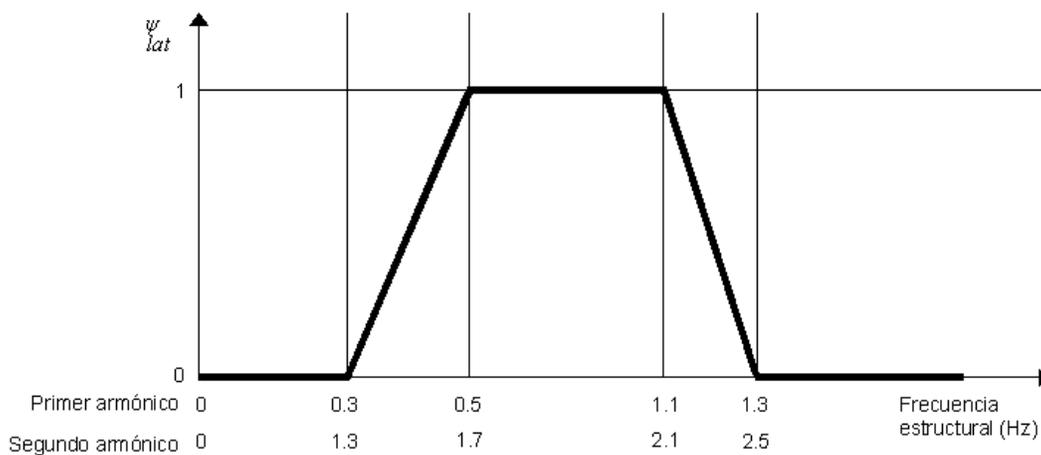


Figura 2.4 Coeficientes de reducción para vibración lateral (HIVOSS-SYNPEX, 2007)

2.2.2 Norma ISO 10137

Se trata de la norma número 10137 publicada en el 2007 por el Organismo Internacional de Normalización mejor conocido como ISO (International Organization of Standardization), la cual forma parte del Eurocódigo 5 y da recomendaciones sobre la evaluación de la capacidad de servicio contra las vibraciones de edificios y puentes peatonales dentro de los mismos o en el



exterior. La norma cubre 3 receptores de vibración: ocupación humana en edificios y puentes peatonales, el contenido de la construcción y por último, la estructura en sí. La norma no incluye puentes vehiculares, solamente peatonales. Esta norma aporta una forma diferente de calcular el número efectivo de peatones mediante la ecuación:

$$n_{eff} = \sqrt{n_p} \quad (2.6)$$

La ecuación 2.6 fue propuesta por Matsumoto (1978) y considera que los peatones no están correlacionados mediante una distribución de Poisson con frecuencias de resonancia y fases aleatorias. Este modelo no es adecuado para modelar la excitación lateral sincronizada o mejor conocida como SLE (synchronization lateral excitation), fenómeno que amplifica las vibraciones laterales debido a que la frecuencia de vibrar de los peatones es igual a la frecuencia lateral estructural.

2.2.3 Norma UK N.A EN 1991-2

La norma UK N.A EN 1991-2 fue creada en el Reino Unido y publicada en 1993 por la Institución Británica de Normas, mejor conocida como BSI (British Standards Institution). Se trata de un documento que aborda las cargas de tráfico en los puentes y fue publicado como un anexo al Eurocódigo-1 (1991). Esta norma solo considera la vibración en la dirección vertical y proporciona de manera directa el valor de P_o en función de la velocidad del peatón, V_o ; tal y como se muestra en la tabla 2.5.

Tabla 2.5 Máxima amplitud de la acción de vibración sinusoidal de un solo peatón
(UK N.A EN 1991-2)

Dirección ortogonal	Vertical		Lateral	Longitudinal
Actividad peatonal	Caminata	Carrera	-	-
V_o (m/s)	1.7	3	-	-
P_o (N)	280	910	-	-



Capítulo 2. Normatividad existente

En función del uso del puente, la norma propone el caso de carga peatonal, n_p , con el que se calcula el número efectivo de peatones, n_{eff} , (tabla 2.6); mientras que el coeficiente de reducción se obtiene de manera gráfica para la vibración vertical (figura 2.5).

Tabla 2.6 Clasificación de puentes peatonales (UK N.A EN 1991-2)

Clase de puente	Uso del puente	Caminando	Corriendo	Multitud de peatones (n_p/m^2)
A	Localidades rurales poco pobladas	$n_p = 2$	$n_p = 0$	$n_p = 0$
B	Ubicación suburbana sujetas a poca variación en el uso diario	$n_p = 4$	$n_p = 1$	0.4
C	Rutas urbanas sujetas a variación significativa en el uso diario	$n_p = 8$	$n_p = 2$	0.8
D	Acceso primario a estadios deportivos o grandes servicios de transporte público	$n_p = 16$	$n_p = 4$	1.5

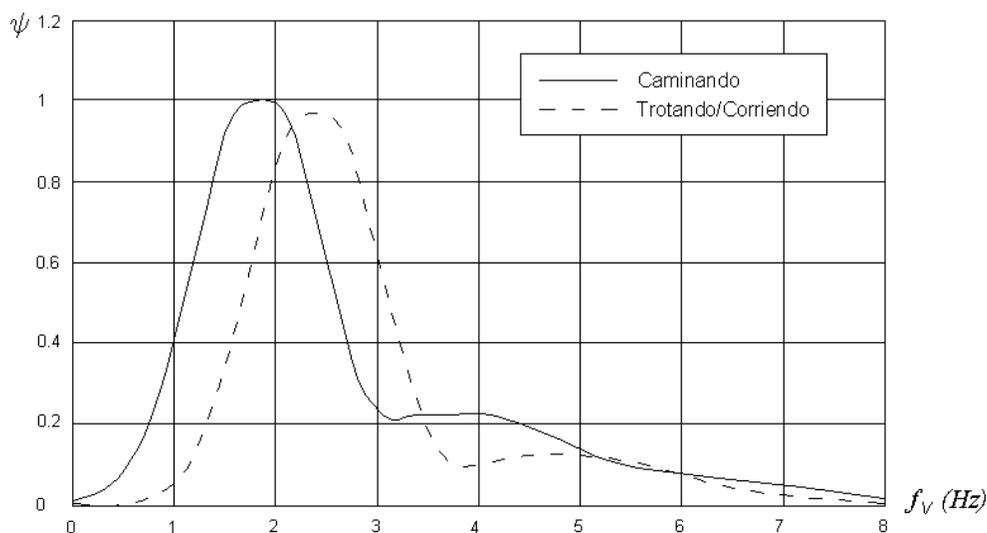


Figura 2.5 Gráficas para la obtención del coeficiente de reducción (UK N.A. EN 1991-2)



2.3 Frecuencias estructurales críticas

Las normas internacionales estipulan que los puentes peatonales deben diseñarse de tal manera que se evite que las frecuencias estructurales de vibrar coincidan con la frecuencia de excitación peatonal del primer armónico. De esta manera se evitaría que las estructuras desarrollen vibraciones resonantes que pueden rebasar el límite de confort soportado por el ser humano (Tabla 2.7).

Tabla 2.7 Frecuencias estructurales de vibrar críticas de varias normas del mundo
(Sánchez *et al.*, 2011)

Normas	Intervalo de frecuencias estructurales críticas (Hz)	
	Vertical	Lateral
Eurocódigo 0- Anexo 2 (EN 1990-Annex A2)	< 5	< 2.5
Eurocódigo 1 (EN 1991)	< 5	< 2.5
Eurocódigo 2 (ENV 1992-2)	1.6 – 2.4	0.8 – 1.2
Eurocódigo 5 (ENV 1995-2)	< 5	< 2.5
EAE (España)	1.6 – 2.4 3.5 – 4.5	0.6 – 1.2
BS 5400 (Reino Unido)	< 5	-
Din-Fachberitch 102 (Alemania)	1.6 – 2.4 3.5 – 4.5	-
SIA 260 (Suiza)	1.6 – 4.5	< 1.3
AASHTO 1997 (USA)	< 3	-
Austroroads (Australia)	1.5 - 3	-
Norma de puentes peatonales japonesa (1979)	1.5 – 2.3	-
ISO 10137	1.7 – 2.3	-
HIVOSS-SYNPEX (2007)	1.25 – 2.3 (Longitudinal)	0.5 – 1.2
CEB 209 Bulletin	1.65 – 2.35	0.8 – 1.2
Bachmann <i>et al.</i> , (1995)	1.6 – 2.4	0.8 – 1.2



2.4 Amortiguamiento estructural

Los puentes peatonales modernos particularmente contruidos a base de acero o concreto pretensado tienen muy poco amortiguamiento. Como resultado, las vibraciones pueden generarse abruptamente durante el paso de un peatón. El amortiguamiento estructural depende directamente del material del puente peatonal y de la amplitud del movimiento, y es independiente de la frecuencia. El amortiguamiento estructural aumenta cuando la amplitud de vibración aumenta y depende también de los detalles de construcción que pueden disipar la energía en mayor o menor medida, un ejemplo claro de esto es si las uniones están soldadas o con pernos. La masa y la rigidez de los puentes peatonales puede ser modelada con más precisión, sin embargo, el amortiguamiento estructural es un valor más difícil de obtener. Bachmann, Pretlove y Rainer (1995) estudiaron 43 puentes peatonales en el Reino Unido y determinaron cuales fueron los valores de amortiguamiento crítico estructural de dichos puentes cuando fueron sometidos a una carga compuesta por un peatón desplazándose con una frecuencia igual a la primer frecuencia vertical de la estructura. Los valores obtenidos en dicho estudio pueden usarse como valores comunes de amortiguamiento estructural de puentes bajo cargas peatonales (Tabla 2.8).

Tabla 2.8 Valores comunes de amortiguamiento estructural de puentes peatonales
(Bachmann *et al.*, 1995)

Tipo de construcción	Fracción de amortiguamiento crítico estructural (ζ)		
	Mínimo	Medio	Máximo
Concreto reforzado	0.8 %	1.3 %	2 %
Concreto pretensado	0.5 %	1 %	1.7 %
Compuesto	0.3 %	0.6 %	-
Acero	0.2 %	0.4 %	-

El estudio realizado por Bachmann, Pretlove y Rainer (1995) mostró que los puentes peatonales de acero tienen más problemas vibratorios que los de concreto, por tener menor amortiguamiento, tal y como se muestra en la figura 2.6.

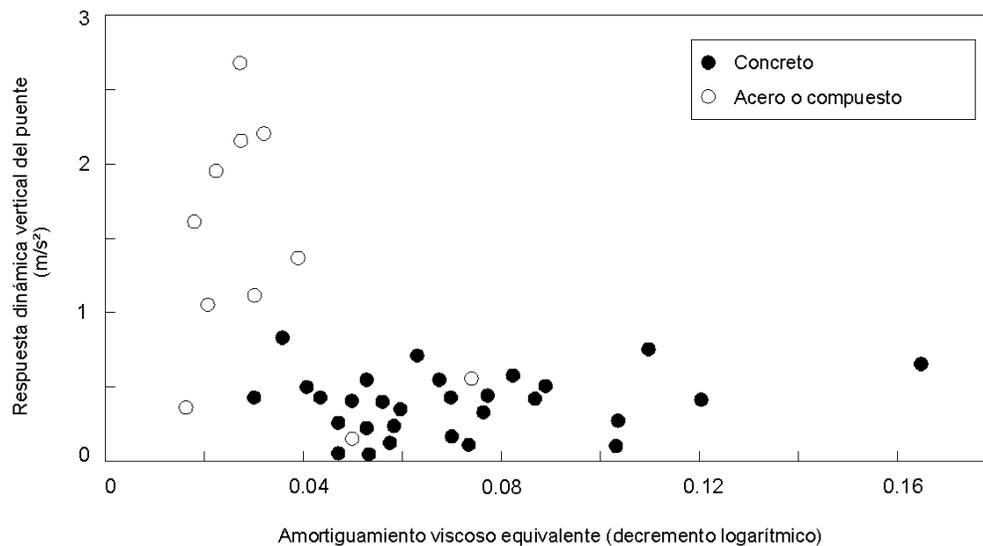


Figura 2.6 Respuesta dinámica vertical de algunos puentes peatonales para diferentes valores de amortiguamiento (Bachmann *et al.*, 1995)

Se concluyó que se presentaron respuestas dinámicas verticales mayores a 0.7 m/s^2 cuando el amortiguamiento estructural fue menor o igual a 0.006 (0.6 % del amortiguamiento crítico); valor que es equivalente a un decremento logarítmico de aproximadamente 0.04. A partir de este estudio muchas normas internacionales propusieron un valor límite de 0.7 m/s^2 para las aceleraciones verticales. Las distintas normas internacionales proponen sus propios valores de amortiguamiento estructural para que el diseñador se dé una idea de las probabilidades que un puente peatonal tiene de desarrollar vibraciones excesivas.

2.4.1 Norma HIVOSS-SYNPEX

La norma HIVOSS-SYNPEX (2007) establece los valores de amortiguamiento estructural de puentes peatonales propuestos por la norma EN 1998 para estudios dinámicos bajo carga sísmica (Tabla 2.9); esto quiere decir que el amortiguamiento estructural es mayor debido a las grandes amplitudes de movimiento que genera un sismo. Por lo tanto, los valores mostrados en la tabla 2.9 no son aptos para vibraciones inducidas por un pequeño grupo de peatones.



Tabla 2.9 Amortiguamiento estructural de acuerdo al material de construcción para vibraciones grandes (HIVOSS-SYNPEX, 2007)

Tipo de construcción	Intervalo de variación de ζ
Concreto	2 – 7 %
Acero	1 – 4 %

2.4.2 Normas del SETRA

El SETRA (Service d'Etudes Techniques des Routes et Autoroutes) es un departamento técnico francés creado en 1968 con jurisdicción del Ministerio de Ecología, Desarrollo Sustentable y Energía (MEDDE), cuya supervisión es ejercida por la Dirección General de Infraestructuras, Transportes y el Mar (DGITM). Dicho departamento opera en las áreas de carreteras, su infraestructura y el transporte en general en Francia; por lo cual ha desarrollado lineamientos sobre dichas áreas, incluyendo la vibración en puentes peatonales. En el año 2006 se creó una norma en París denominada “Assessment of Vibrational Behaviour of Footbridges Under Pedestrian Loading” que contiene lineamientos sobre el comportamiento vibratorio de puentes peatonales debido a la acción de los peatones. Los valores de amortiguamiento estructural propuestos por la norma SETRA (2006) para vibraciones inducidas por peatones se basan en el boletín CEB 209 y oscilan entre 0.1 % y 2 %, tal y como se muestra en la tabla 2.10.

Tabla 2.10 Amortiguamiento estructural de puentes peatonales de diversos materiales (SETRA, 2006)

Tipo de construcción	Fracción de amortiguamiento crítico estructural (ζ)	
	Valor mínimo	Valor promedio
Concreto reforzado	0.8 %	1.3 %
Concreto pretensado	0.5 %	1 %
Acero	0.2 %	0.4 %
Compuesto	0.3 %	0.6 %
Madera	1.5 %	3 %



Cuando existen juntas mecánicas en el puente peatonal la norma SETRA (2006) menciona que los valores recomendados de amortiguamiento estructural son de 1 % ó 1.5 %. Cuando las amplitudes de vibración son altas, como es el caso de sismos, los porcentajes de amortiguamiento crítico son considerablemente más altos y necesitan ser revisados. Para amplitudes grandes de vibración, la norma SETRA (2006) propone los valores de amortiguamiento estructural con base a la Guía de Protección Sísmica de Puentes (AFPS 92, art. 4.2.3); mostrados en la tabla 2.11.

Tabla 2.11 Amortiguamiento estructural de acuerdo al material de construcción para vibraciones grandes (SETRA, 2006)

Material	Fracción de amortiguamiento crítico estructural (ζ)
Acero soldado	2 %
Acero atornillado	4 %
Concreto pretensado	2 %
Concreto no reforzado	3 %
Concreto reforzado	5 %
Elastómero reforzado	7 %

2.5 Rigidez vertical estructural

La rigidez de un puente peatonal es un factor que puede ser predicho con cierta precisión siempre y cuando las restricciones ofrecidas por los apoyos y columnas puedan ser definidas. Las rigideces medidas son generalmente menores para puentes peatonales de acero que los construidos a base de concreto reforzado. En general las normas establecen que las rigideces verticales se encuentran en el intervalo de 2 a 30 *KN/mm*.

La máxima respuesta dinámica del puente no sólo dependerá del amortiguamiento que éste tenga, sino que también depende de la rigidez del mismo; ya que entre más rígido sea el puente peatonal, menor será la vibración que este experimentará ante el paso de los peatones. El 95 % de los peatones en caminata normal suelen ejercer una frecuencia vertical de vibrar de 2 *Hz*, valor



El valor base de la aceleración de confort que puede ser percibida por una persona depende en gran medida de la dirección de incidencia del cuerpo humano (figura 2.8). En las normas, el valor límite de confort es mayor para la vibración vertical que para la vibración longitudinal o lateral, esto debido a que la dirección de la columna vertebral cuando el ser humano está de pie, lo hace menos sensible a las vibraciones verticales.

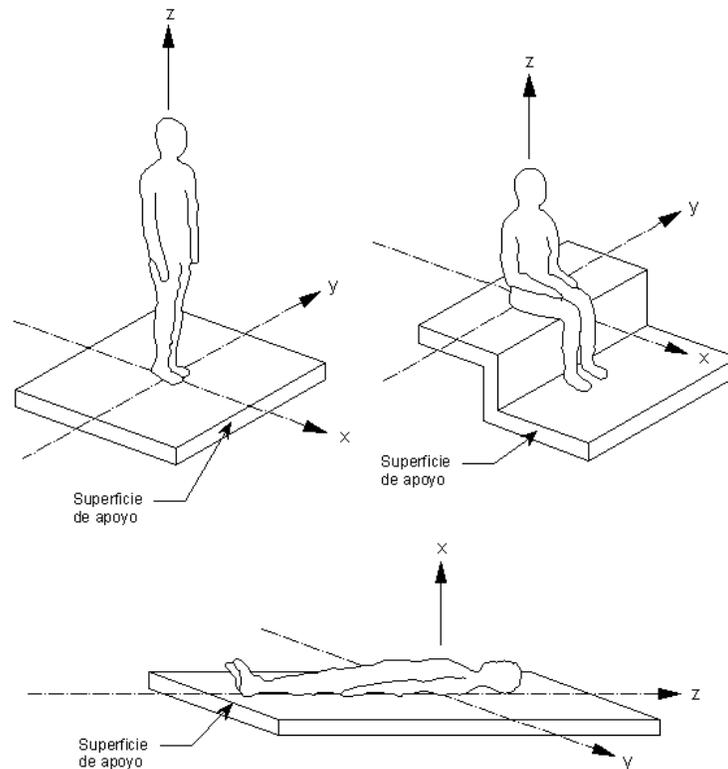


Figura 2.8 Dirección de la vibración definida en ISO 2631, BS 6472 y BS 6841

La intensidad de percepción ante vibraciones verticales ha sido investigada por muchos autores y sus resultados están generalmente en acuerdo con los valores propuestos por Pretlove y Rainer (1997). La tabla 2.12 contiene las aceleraciones máximas perceptibles en el intervalo de frecuencias de 1 a 10 Hz , y las velocidades máximas perceptibles en el intervalo de 10 a 100 Hz para un ser humano que está de pie. Para el caso de la vibración vertical inducida por peatones puede tomarse como valor límite de confort una aceleración de 0.7 m/s^2 , independientemente de que el peatón camine o corra.



Tabla 2.12 Indicador de los umbrales de percepción humana ante vibraciones armónicas verticales cuando las personas están de pie (Bachmann *et al.*, 1995)

Descripción	Aceleración máxima (mm/s^2)	Velocidad máxima (mm/s)
Poco perceptible	34	0.5
Claramente perceptible	100	1.3
Perturbador / desagradable	550	6.8
Intolerable	1800	13.8

Las diferentes normas existentes proponen valores tolerables de aceleración de servicio ante vibraciones, de tal manera que se satisfaga el confort de los usuarios del puente. A continuación se repasa lo propuesto por varias normas con respecto a los criterios de confort.

2.6.1 Norma BS 5400

La norma BS 5400 es el código británico que se desarrolló en 1990 para el diseño de puentes de concreto, acero y aquellos construidos a base de varios materiales (compuestos). Esta norma propone un límite de aceleración vertical de servicio mediante la siguiente ecuación:

$$a_s = 0.5(f_1^{0.5}) \quad (2.7)$$

Donde a_s es la aceleración límite de servicio en m/s^2 y f_1 es la primera frecuencia vertical del puente peatonal en Hz . El límite de confort propuesto por esta norma está declarado solamente cuando el puente peatonal es excitado por un único peatón.

2.6.2 Norma ONT 83

La norma ONT 83 es el código de puentes de la provincia de Ontario, Canadá, que fue publicado en el año de 1983. El límite de aceleración vertical de servicio se obtiene mediante la ecuación:



$$a_s = 0.25(f_1^{0.78}) \quad (2.8)$$

La ecuación 2.8 es conservadora ya que si se sustituye la frecuencia de vibrar promedio de un peatón que camina a paso normal ($f_1 = 2 \text{ Hz}$), se obtendría un límite de aceleración de servicio de 0.43 m/s^2 , lo cual es conservador con respecto al valor de 0.7 m/s^2 que ya fue mencionado anteriormente. De igual manera la ecuación 2.8 sólo es válida para un solo peatón.

2.6.3 Norma ISO 10137

En la norma ISO 10137 (2007) los valores de aceleraciones están referidos en términos de aceleraciones medias cuadráticas o aceleraciones RMS (root mean square), de tal manera que las aceleraciones son una medida estadística de la magnitud de dicha variable. A diferencia de las aceleraciones máximas, las aceleraciones RMS son un mejor indicador de la vibración con respecto del tiempo, y permiten que en un modo bajo de vibrar, los picos afilados en una respuesta sean menos significativos. Esta norma permite obtener las aceleraciones RMS vertical, a_v , y lateral/horizontal, a_H , en m/s^2 a partir las curvas base ISO 2631/2 (figuras 2.9 y 2.10).

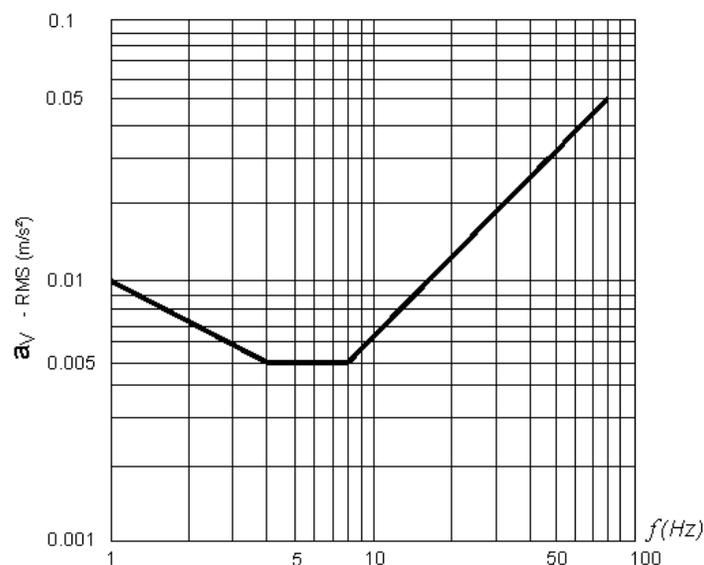


Figura 2.9 Curva base ISO 2631/2 para vibración vertical (ISO 10137,2007)

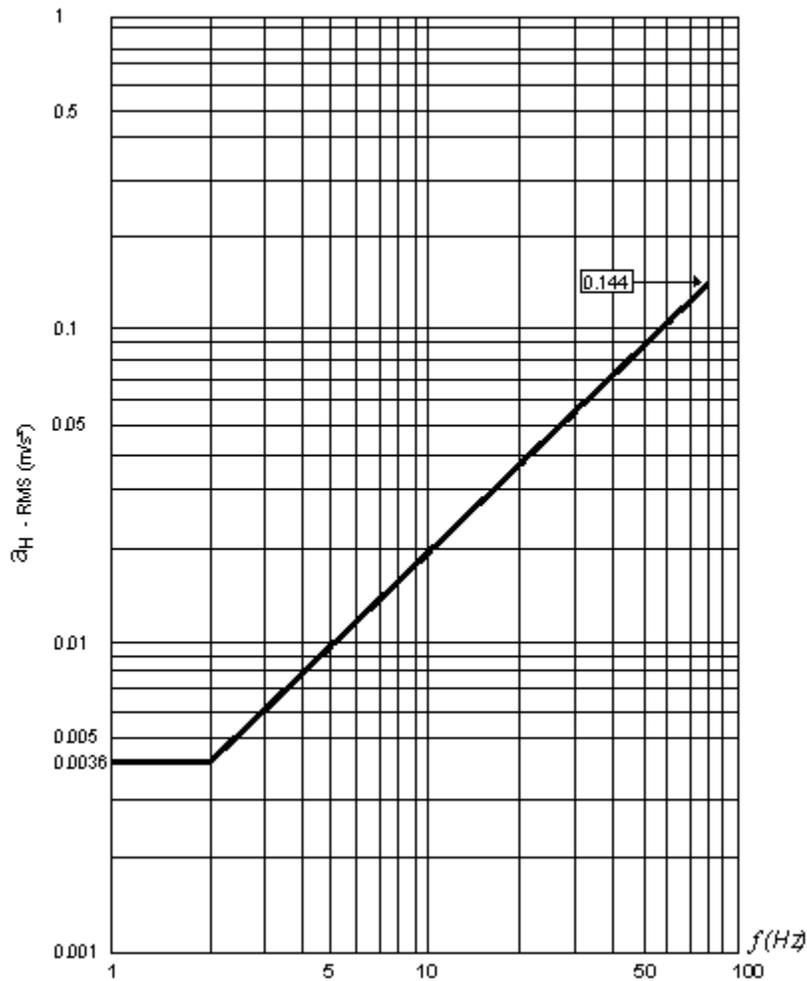


Figura 2.10 Curva base ISO 2631/2 para vibración horizontal/lateral (ISO 10137,2007)

Una vez que son obtenidas las aceleraciones RMS, deben de multiplicarse por un factor para poder obtener la aceleración límite de confort, a_s , tal y como se muestra en la tabla 2.13.

Tabla 2.13 Aceleraciones límite de confort (ISO 10137, 1997)

Caso	a_s (m/s^2)		
	Vertical	Longitudinal	Horizontal/Lateral
Peatones	$60 a_v$	$60 a_v$	$60 a_H$
Personas de pie	$30 a_v$	$30 a_v$	$30 a_H$



2.6.4 Normas del SETRA

La norma SETRA (2006) presenta requerimientos de confort que no son absolutos, sino que van en función del nivel de confort especificado por el propietario. Los criterios de confort se obtienen con base a 4 etapas que se deben seguir. La etapa uno de esta norma consiste en determinar el tipo de puente peatonal en función del posible tránsito peatonal (tabla 2.14).

Tabla 2.14 Determinación del tipo de puente peatonal en función de la densidad peatonal (SETRA, 2006)

Clase de tráfico	Densidad peatonal (personas/m ²)	Descripción
I	1	Puente peatonal urbano que conecta áreas de alta densidad peatonal o que es frecuentemente sometido a tráfico muy pesado
II	0.8	Puente peatonal urbano que conecta áreas pobladas, sometidos a tráfico pesado y que pueden ocasionalmente ser cargados a través de su área de apoyo
III	0.5	Puente peatonal para uso estándar, ocasionalmente atravesado por grandes grupos de personas, pero que nunca serán cargados a través de su área de apoyo
IV	-	Puente peatonal rara vez usado, que conecta zonas poco pobladas

La etapa dos consiste en determinar el nivel de confort tal y como se muestra en la tabla 2.15.

Tabla 2.15 Determinación del nivel de confort (SETRA, 2006)

Nivel de confort	Grado de confort	Nivel de aceleración vertical (m/s ²)	Nivel de aceleración lateral/horizontal (m/s ²)
1	Máximo	< 0.5	< 0.1 (resonancia)
2	Promedio	0.5 - 1	0.15 - 0.3
3	Mínimo	1 - 2.5	0.3 - 0.8
4	Incómodo	> 2.5	>0.8



La etapa tres consiste en determinar las frecuencias de vibrar de la estructura, precisamente para conocer si se puede presentar el fenómeno de sincronización o resonancia; mientras que la etapa cuatro consiste en calcular la respuesta dinámica de la estructura, siempre y cuando sea necesario.

2.6.5 Norma HIVOSS-SYNPEX

La norma HIVOSS-SYNPEX (2007) como primer paso clasifica el puente peatonal en función de la densidad peatonal, tal y como se muestra en la tabla 2.16.

Tabla 2.16 Determinación del tipo de puente peatonal en función de la densidad peatonal (HIVOSS-SYNPEX, 2007)

Clase de tráfico	Densidad peatonal	Descripción
TC 1	15 personas	Tráfico muy débil: 15 personas
TC 2	0.2 personas/m ²	Tráfico débil: Caminando cómodo y libre
TC 3	0.5 personas/m ²	Tráfico denso: Caminando sin restricciones, puede inhibirse el rebasar peatones
TC 4	1 personas/m ²	Tráfico muy denso: Situación incómoda, se obstruye la caminata
TC 5	1.5 personas/m ²	Tráfico excepcionalmente denso: Comienza el amontonamiento de peatones

El segundo paso consiste en determinar el nivel de confort tal y como se muestra en la tabla 2.17.



Tabla 2.17 Determinación del nivel de confort (HIVOSS-SYNPEX, 2007)

Nivel de confort	Grado de confort	Nivel de aceleración vertical (m/s^2)	Nivel de aceleración lateral/ horizontal (m/s^2)
CL 1	Máximo	< 0.5	< 0.1 (resonancia)
CL 2	Promedio	0.5 - 1	0.1 - 0.3
CL 3	Mínimo	1 - 2.5	0.3 - 0.8
CL 4	Incómodo	> 2.5	>0.8

Posteriormente se deben determinar las frecuencias estructurales del puente peatonal y evaluar su respuesta dinámica en caso de ser necesario.

2.6.6 Norma UK N.A EN 1991-2

La norma UK N.A EN 1991-2 determina la aceleración vertical límite mediante la ecuación:

$$a_s = k_1 k_2 k_3 k_4 \left(\frac{m}{s^2} \right) \quad (2.9)$$

Donde a_s representa la aceleración vertical límite de confort; k_1 representa el factor de uso de sitio del puente peatonal, es decir, si está próximo a un hospital, escuela, grandes centros urbanos, cruces suburbanos, medio rural; k_2 representa el factor de redundancia de ruta que depende de parámetros como si es el único medio de acceso, es ruta primaria, o son rutas alternativas fácilmente disponibles sin peligro adicional para el usuario; k_3 representa el factor de altura de la estructura, es decir, si es mayor a 8 m, entre 4 y 8 m, o menor a 4 m; y k_4 es el factor de exposición y tiene un valor de 1. El valor obtenido mediante la ecuación 2.9 no podrá ser menor o a $0.5 m/s^2$ ni mayor a $2 m/s^2$.



Esta norma establece un criterio de confort específico con respecto a la vibración lateral sincronizada, el cual se basa en la utilización de un parámetro de amortiguamiento de masas en lugar de un límite de aceleración lateral, el cual se calcula mediante la ecuación:

$$D = \frac{m_{\text{puente}} (\xi)}{m_{\text{peatonal}}} \quad (2.10)$$

En la ecuación 2.10, D representa el parámetro de amortiguamiento de masas (adimensional), m_{puente} representa la masa del puente peatonal, m_{peatonal} representa la masa peatonal y ξ representa el amortiguamiento estructural. El parámetro de amortiguamiento de masas puede obtenerse también de la figura 2.11, donde la inestabilidad implica que puede presentarse la resonancia lateral.

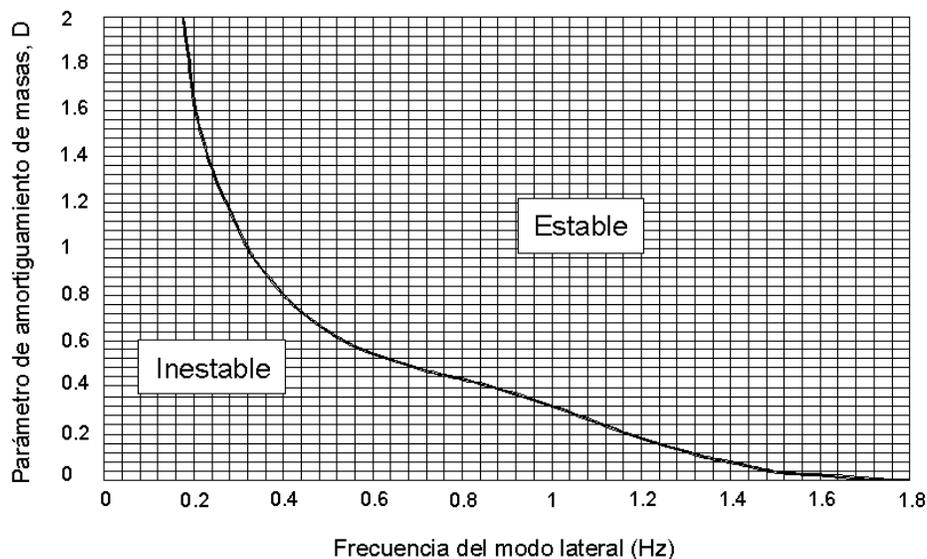


Figura 2.11 Curva para la obtención del parámetro de amortiguamiento de masas (UK N.A EN 1991-2)

2.6.7 Otras normas internacionales

En la tabla 2.18 se resumen los valores de aceleración límite de confort para puentes peatonales propuestos por otras normas internacionales.



Tabla 2.18 Aceleraciones límite de confort de otras normas internacionales (Sánchez *et al.*, 2011)

Normas	Aceleraciones límite de confort (m/s^2)	
	Vertical	Lateral
Eurocódigo 0- Anexo 2 (EN 1990-Annex A2)	0.7	0.2 (0.4)
Eurocódigo 1 (EN 1991)	$\min(0.5\sqrt{f_v}, 0.7)$	$\min(0.14\sqrt{f_h}, 0.15)$
Eurocódigo 5 (ENV 1995-2)	0.7	0.2
RPX95, RPM95 (España)	$0.5\sqrt{f_v}$	-
EAE (España)	$\min(0.5\sqrt{f_v}, 0.7)$	0.2 (0.4)
Din-Fachberitch 102 (Alemania)	$0.5\sqrt{f_v}$	-
Norma de puentes peatonales japonesa (1979)	1	-
AISC Guide 11	100 (Curva base ISO 2631-2)	-
VIDI 2057	$0.6 f_v$	0.214

2.7 Metodologías de diseño ante vibración inducida por peatones

La principal manera de evitar el problema de las vibraciones en los puentes peatonales es mediante un control de las frecuencias naturales de vibrar, amortiguamiento y rigidez de la estructura. Las normas establecen varias metodologías de diseño a seguir para controlar las vibraciones inducidas por peatones y se mencionan a continuación.

2.7.1 Método de sintonización

Consiste en utilizar todos los medios posibles en el diseño estructural para evitar que la primera frecuencia estructural vertical de vibrar de la estructura se encuentre entre el intervalo de 1.6 a 2.4 Hz y, en un grado menor, entre el intervalo de 3.5 a 4.5 Hz . Sin embargo, lo anterior no es tan fácil de lograr debido a que el claro del puente peatonal es un factor determinante en la frecuencia natural de vibrar de la estructura.



2.7.2 Método propuesto por las normas BS 5400 y ONT 83

Es un método propuesto particularmente en códigos como el BS 5400 (1990) y el ONT 83 (1983). El método consiste en determinar la máxima aceleración vertical resultante del paso de un peatón caminando con una frecuencia de vibrar igual a la primera frecuencia vertical de vibrar de la estructura (resonancia). Dicha respuesta dinámica máxima se determina mediante la ecuación:

$$a = 4 \pi^2 f_1^2 y K \Psi \left(\frac{m}{s^2} \right) \quad (2.11)$$

Dónde a es la aceleración máxima vertical en m/s^2 ; y es la deflexión estática en metros en el centro del claro ocasionada por una fuerza de $700 N$; K es el factor de configuración que es igual a uno cuando solo hay un claro, igual a 0.7 para un doble claro y entre 0.6 y 0.9 para un triple claro; f_1 es la primera frecuencia vertical de la estructura en Hz ; y Ψ es el factor de respuesta dinámica que se obtiene de la figura 2.12.

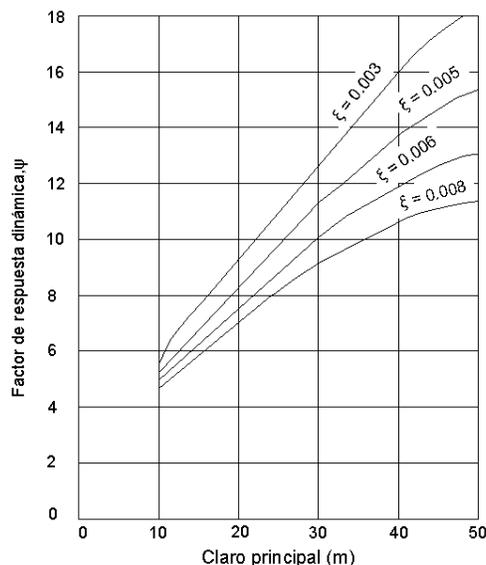


Figura 2.12 Factor de respuesta dinámica, ψ , en función del claro (Bachmann *et al.*, 1995)

El factor de respuesta dinámica, Ψ , no es el mismo término que el factor de amplificación dinámica que se utiliza en la teoría de la dinámica estructural cuando se trata el fenómeno de



resonancia que es equivalente a $1/2\xi$. El valor resultante de a de la ecuación 2.11 debe compararse con los valores de tolerancia o aceleración límite de confort propuestos por las normas BS 5400 (1990) y el ONT 83 (1983), obtenida mediante la ecuación 2.7 y 2.8, respectivamente.

2.7.3 Cálculo de la respuesta dinámica límite para un peatón

Una simple forma de calcular la deflexión límite máxima es mediante la teoría de la dinámica estructural con respecto a la vibración forzada. El peso estático del peatón y la rigidez central del puente se utilizan para calcular la deflexión estática. Luego la deflexión estática se multiplica por el coeficiente de Fourier, α_i , del armónico relevante de la frecuencia peatonal (tabla 2.2). Posteriormente se multiplica por el factor de amplificación dinámico de $1/2 \xi$. Este procedimiento dará una sobreestimación de la respuesta dinámica debido a que no se toman en cuenta factores como la eficacia limitada del peatón cuando éste no se encuentra en el centro del claro ni el número limitado de pasos (tiempo limitado) que le toma al peatón cruzar el claro del puente.

2.7.4 Efecto de varios peatones

Algunas consideraciones son necesitadas para el caso de la llegada arbitraria de peatones cuando ejercen frecuencias de vibrar correspondientes a una caminata. Si se supone una distribución de Poisson con respecto a la llegada de los peatones, un factor n_{eff} puede ser derivado de la raíz cuadrada del número de personas sobre el puente en cualquier tiempo, y posteriormente debe ser aplicada a la fuerza dinámica causada por un peatón. Las fuerzas dinámicas causadas por un solo peatón se obtienen mediante las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3 dependiendo del tipo de vibración que se desee obtener, mientras que la fuerza dinámica de un grupo de peatones se obtiene mediante la ecuación 2.4. La respuesta dinámica de varios peatones también debe ser afectada por un coeficiente de reducción, ψ , que puede ser obtenido de las figuras 2.3, 2.4 ó 2.5. No hay confirmación experimental sobre los resultados obtenidos mediante la modelación de un grupo de



peatones a través de la ecuación 2.4, sin embargo, algunos estudios de simulación han apoyado esta teoría.

2.7.5 Métodos más detallados

Un método más detallado y racional para la respuesta dinámica de puentes peatonales consiste en calcular la aceleración máxima resultante del paso de un peatón prácticamente igual que como con la ecuación 2.11, pero con ligeras modificaciones. Esto se hace mediante la ecuación:

$$a = 4 \pi^2 f_1^2 y \alpha_1 \Psi \left(\frac{m}{s^2} \right) \quad (2.12)$$

Donde a es la aceleración pico resultante del paso de un peatón en m/s^2 ; y es la deflexión estática en metros en el centro del claro ocasionada por una fuerza de $700 N$; f_1 es la primer frecuencia vertical de vibrar de la estructura en Hz ; α_i es el coeficiente de Fourier del primer armónico de una frecuencia peatonal, y Ψ es el factor de respuesta dinámica obtenido mediante la figura 2.13.

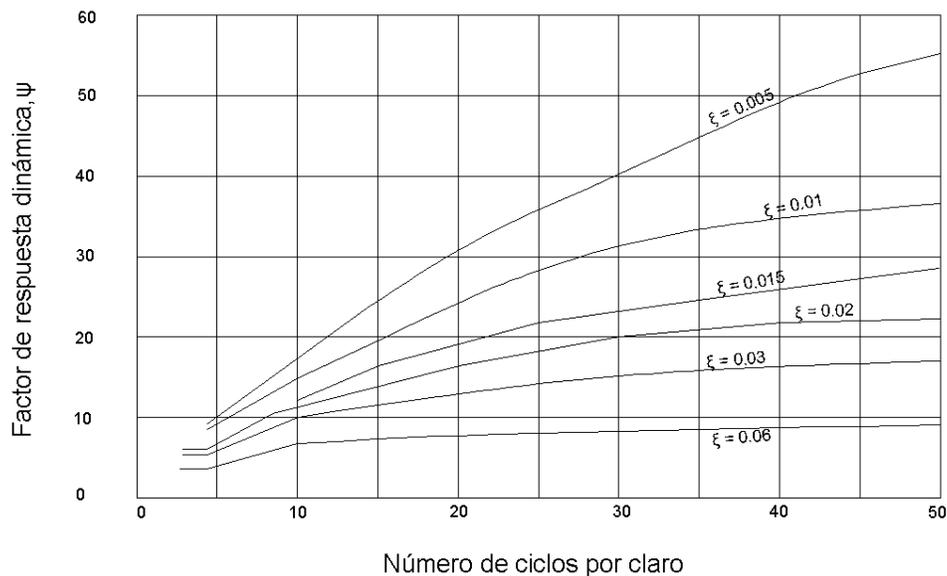


Figura 2.13 Factor de respuesta dinámica, ψ , debido a una fuerza sinusoidal resonante en movimiento a través de un claro simple (Bachmann *et al.*, 1995)



La aceleración pico resultante del paso de un peatón, a , se debe comparar con un valor máximo tolerable de aceleración confort, sin embargo, no existe tal valor en los métodos más avanzados de diseño. Aun así es claro que un valor límite de aceleración de 0.5 m/s^2 es apropiado. El método tiene la ventaja de permitir la introducción del actual coeficiente de Fourier medido de la función de fuerza tanto de un peatón caminando como corriendo. Adicionalmente, puede ser determinada la respuesta dinámica del puente para armónicos superiores. En este caso el número de ciclos por claro especificado en la figura 2.13 es el número de pasos por unidad de tiempo según el armónico considerado. Una longitud típica del paso de un peatón para una caminata normal a una frecuencia de 2 Hz es de 0.7 m ; mientras que para un peatón corriendo, la longitud del paso típico es de 1.2 m a una frecuencia de 2.5 Hz .

2.8 Medidas correctivas

En el caso de puentes peatonales que ya estén construidos no es posible cambiar el diseño de los mismos cuando éstos tienen problemas de vibración, sin embargo, existen diversas medidas correctivas que pueden ser utilizadas de manera satisfactoria.

2.8.1 Aumento de rigidez

Se ha visto que los puentes peatonales que tienen una rigidez vertical mayor a 8 kN/mm no deben tener riesgo con respecto a la vibración vertical. Sin embargo, aumentar la rigidez de un puente peatonal puede resultar ser una medida de intervención que no es económicamente viable.

2.8.2 Aumento de amortiguamiento

El aumento de amortiguamiento es la medida más económica y apropiada para controlar las vibraciones inducidas por peatones. La norma ONT 83 (1983) recomienda la inclusión de dispositivos para lograr este fin. El amortiguamiento o disipación de energía puede ser adicionado en una variedad de formas. Por ejemplo, pueden ser incorporados dispositivos en los cojinetes y soportes, o bien puede ser utilizado una capa gruesa de alta viscosidad de asfalto sobre la superficie. Aun así ninguna de estas opciones es a menudo factible.



2.8.2.1 Amortiguadores de masa sintonizados

Los amortiguadores de masas sintonizados han sido exitosamente usados en varios puentes peatonales alrededor del mundo. El principio de operación consiste en la adición de un sistema subsidiario de masa-resorte-amortiguador cuya frecuencia natural es casi la misma que la del puente. Sin embargo, el sistema subsidiario es mucho más pequeño que el puente mismo, teniendo una masa de 0.05 % a 1% de la masa del puente peatonal. El enfoque es usar un pequeño amortiguador de masa sintonizado que tenga un amortiguamiento optimizado. Esto tiene la ventaja de que el costo es mínimo debido al tamaño tan pequeño que tiene el dispositivo y porque se adapta relativamente fácil en cualquier estructura existente al ser de fácil colocación. Sin embargo, una desventaja del amortiguador de masa sintonizado es que cuando está trabajando con más eficiencia se pueden presentar altas amplitudes de movimiento en el dispositivo, de tal manera que debe existir espacio suficiente para que éste pueda ser alojado en la estructura. En la figura 2.14 se muestra como un amortiguador de masa sintonizado es capaz de reducir las vibraciones resonantes hasta lograr satisfacer los límites de confort soportados por el ser humano.

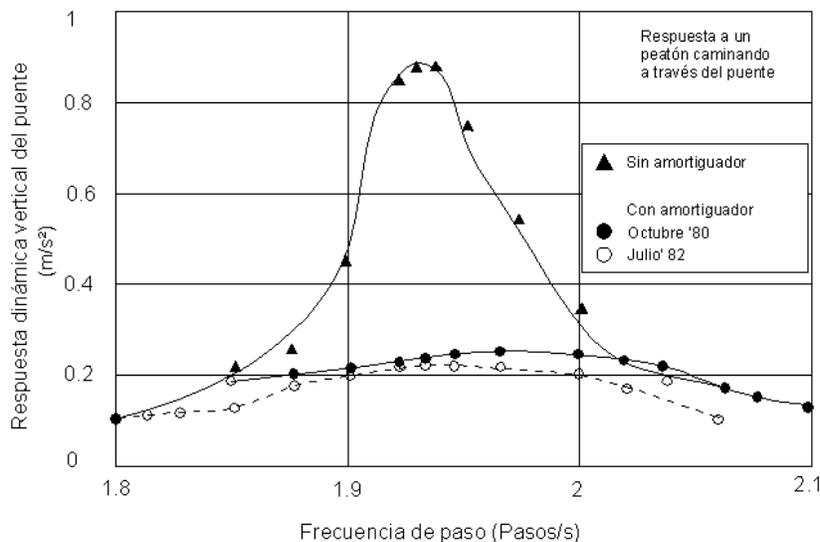


Figura 2.14 Efecto de la instalación de un amortiguador de masa sintonizado sobre la respuesta dinámica vertical de un puente peatonal real (Bachmann *et al.*, 1995)



Capítulo 3

Puentes peatonales estudiados

3.1 Introducción

Cualquier persona que haya caminado sobre un puente peatonal probablemente ha sentido pequeñas vibraciones en éste causadas por el paso de los demás peatones, por el viento o en casos más esporádicos por un sismo. La magnitud de estas vibraciones dependen de varios factores como son: la longitud del puente, rigidez, tipo de carga, magnitud y localización de la carga, entre otros. En general y sin obviar las cargas debidas al viento (Hernández-Vázquez, 2005), la principal fuente de vibraciones en los puentes peatonales son los propios peatones.

Los puentes peatonales modernos suelen ser cada vez más ligeros, esbeltos y menos rígidos, lo que ocasiona que el periodo de vibración fundamental y el amortiguamiento de estas estructuras cambie mucho y se generen así vibraciones que son más perceptibles al ser humano rebasando en ocasiones el nivel de confort o poniendo incluso en riesgo al usuario, sobre todo cuando la frecuencia de vibrar de la carga entra en resonancia con la frecuencia de vibrar del puente peatonal.

En México los puentes peatonales son estructuras a las que se les presta poca importancia a diferencia de otros países, y por lo general son estructuras que no suelen ser calculadas con minuciosidad inclusive a veces carecen de algún diseño estructural o se utilizan modelos “tipo” de los mismos.

En México el control de vibraciones en puentes peatonales es un problema importante que aún no se ha resuelto, por lo que en esta tesis se estudiaron tres puentes peatonales existentes en el país que tienen problemas de vibración. También se estudió un puente “tipo” de acero para demostrar que no es bueno tomar modelos o prototipos preestablecidos. Se decidió escoger puentes



peatonales que fueran de acero debido a que es el material que posee menor amortiguamiento; y además se escogieron puentes esbeltos para que sirvieran como excelentes modelos de puentes peatonales reales que presentan problemas de vibración.

En este capítulo se describe a detalle cuales son los tres puentes peatonales existentes y el puente tipo que sirvieron como modelos para estudiar el problema de la vibración vertical de este tipo de estructuras, y además se obtienen las primeras frecuencias verticales de vibrar de los mismos mediante ecuaciones empíricas. También se obtienen las propiedades dinámicas de las estructuras de estudio mediante modelos analíticos usando un software comercial de elemento finito (SAP 2000 versión 14), con el objetivo de determinar las frecuencias estructurales y modos de vibrar en las tres direcciones: vertical, lateral y longitudinal. En este capítulo se hace particular énfasis en las frecuencias verticales, ya que son las que se buscan controlar en los resultados de este trabajo.

3.2 Puente peatonal San Bartolo

El puente peatonal San Bartolo está ubicado en la intersección de la Av. Universidad y la Av. Gustavo Baz Prada en la colonia Industrial Tlatilco en el municipio de Naucalpan de Juárez en el Estado de México, y consiste en una estructura de acero tipo armadura que libra un claro de 30 *m* de longitud y está simplemente apoyada sobre las columnas de acero de perfil OC.



Figura 3.1 Puente peatonal San Bartolo, municipio de Naucalpan, Edo. México (vista general)



(a) Vista lateral



(b) Vista central

Figura 3.2 Sistemas de piso del puente peatonal San Bartolo

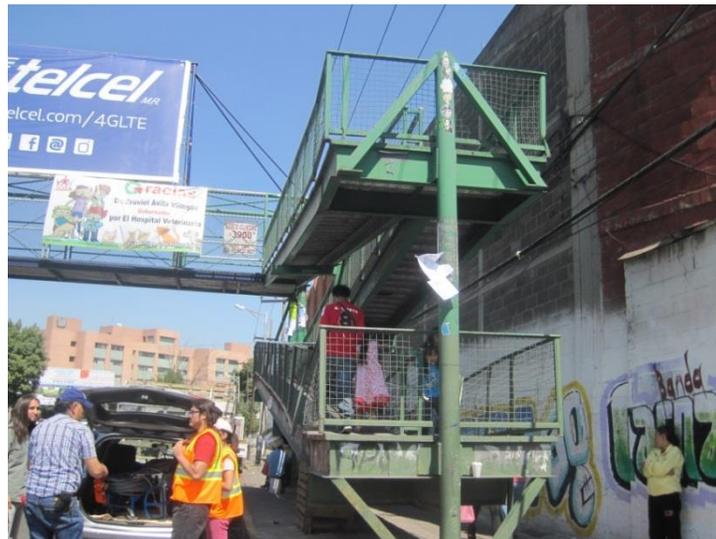


Figura 3.3 Columna estructural en rampas de acceso para el uso del puente peatonal San Bartolo



(a) Vista inferior



(b) Vista superior

Figura 3.4 Rampas de acceso al puente peatonal San Bartolo

Se realizó un levantamiento topográfico del puente para poder elaborar el plano estructural del mismo. La calzada peatonal está formada por un sistema de piso tipo losa-acero calibre 25 de 10 *cm* de espesor, de los cuales 3.6 *cm* son de capa de compresión de concreto. El ancho de calzada es de 2.1 *m* para la sección principal y de 1.1 *m* para las rampas de acceso (Figura 3.5).

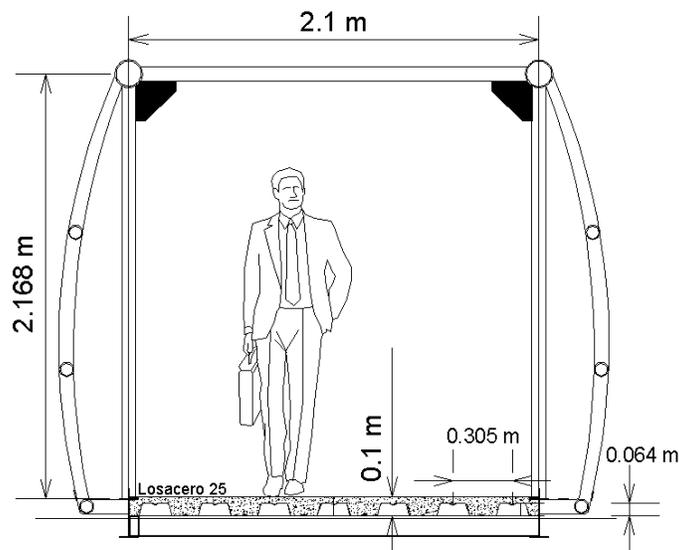


Figura 3.5 Detalle de la sección transversal de la calzada peatonal del puente peatonal San Bartolo



Las rampas de acceso al puente peatonal constan de 3 descansos (Figura 3.6).

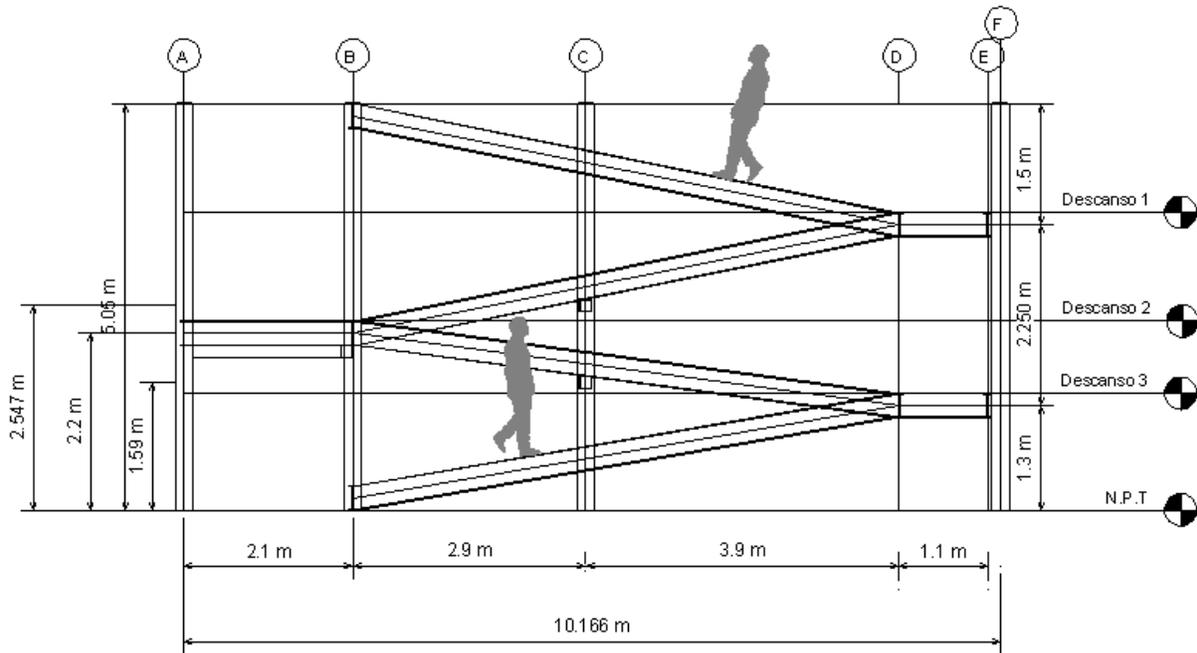


Figura 3.6 Detalle de rampas de acceso al puente peatonal San Bartolo (vista lateral)

Como ya se mencionó anteriormente, se realizó el plano estructural del puente San Bartolo, el cual se puede observar en la figura 3.7.

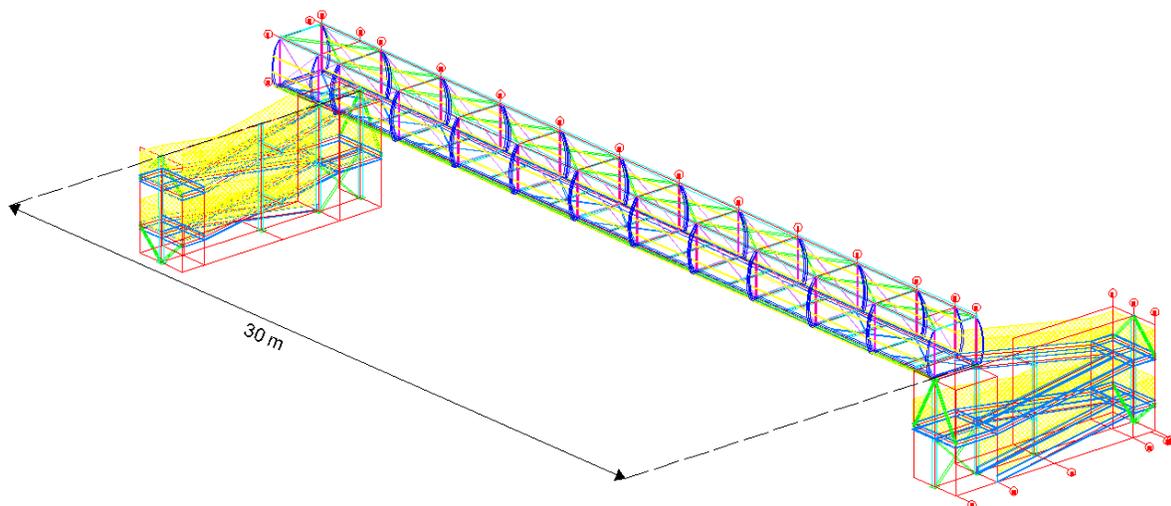


Figura 3.7 Plano del puente peatonal San Bartolo (vista general)



El puente está arriostrado de tal manera que forma una armadura de acero. Sobre la estructura principal (figura 3.7) se encuentra montada una superestructura que soporta un espectacular, la cual se puede observar en las figuras 3.1 y 3.2. Los tipos de perfiles estructurales de acero que tiene el puente se muestran en la tabla 3.1 en unidades del sistema técnico o gravitacional, acorde al Instituto Mexicano de la Construcción en Acero, A.C. (2010).

Tabla 3.1 Perfiles estructurales de acero del puente peatonal San Bartolo

Elemento	Sección	Designación
Vigas y largueros de rampa	IR	305 mm x 28.2 kgf/m
Diagonales en rampa	Placa	51 mm x 5 mm
Malla en barandal	Malla	51 mm x 51 mm
Diagonales en rampa de columnas	OC	73 mm x 5.16 mm
Viga principal (cuerda inferior)	IR	203 mm x 19.4 kgf/m
Ángulos (apoyo de losa-acero)	LI	51 mm x 3 mm
Barandal en rampas @ 1.20 m	OR	38 mm x 2.8 mm
Columnas de rampa	OC	168 m x 7.11 mm
Montantes	OC	73 mm x 5.16 mm
Cuerda superior	OC	141 mm x 6.55 mm
Diagonales de viga principal	Barra lisa	19 mm
Diagonales cuerda superior	OC	48 mm x 5.08 mm
Montante curvo	OC	73 mm x 5.16 mm
Barandal de viga principal	OC	60 mm x 3.91 mm
Larguero superior	OC	73 mm x 5.16 mm
Tubos verticales en espectacular	OC	102 mm x 5.74 mm
Largueros de cuerda inferior	OR	102 mm x 51 mm x 3.2 mm
Diagonales de cuerda inferior	Placa	51 mm x 5 mm
Larguero en rampa	OR	152 mm x 6.3 mm
Diagonales en columna de rampa	OR	89 mm x 3.2 mm
Columnas principales	OC	219 mm x 6.35 mm



3.3 Puente peatonal Salamanca

El puente peatonal Salamanca está ubicado en paseo de la Republica (carretera a Salamanca) en el municipio de Morelia, Michoacán, y conecta las colonias Barrio Alto y Lomas del Tecnológico. Se trata de una estructura de acero que tiene la peculiaridad de que libra un claro total de 51.13 *m* entre apoyos extremos, y posee dos apoyos intermedios entre dicho claro a una distancia horizontal de 23.99 *m*. Los dos claros son simétricos y están simplemente apoyados en dos puntos diferentes sobre un arco estructural de acero que funge como si fuera una columna pero que baja la carga en dos partes hacia el suelo, de tal manera que no se trata de un puente continuo. El apoyo simple en el arco estructural logra un ligero ángulo de inclinación con respecto a las columnas extremas del puente, las cuales se unen a las vigas longitudinales mediante nudos rígidos o empotrados. La vista general del puente se observa en la figura 3.8.



Figura 3.8 Puente peatonal Salamanca, municipio de Morelia, Edo. Michoacán de Ocampo (vista general)

Las rampas de acceso del puente peatonal están simplemente apoyadas sobre una sucesión de marcos que poseen diferente altura en función de la inclinación de las mismas rampas, tal y como se muestra en la figura 3.9. En la figura 3.10 se observa que las rampas de acceso únicamente poseen 2 descansos que permiten el cambio de pendiente.



(a)



(b)

Figura 3.9 (a) Marcos de apoyo de las rampas, (b) Detalle de apoyo simple de los marcos de apoyo de las rampas del puente peatonal Salamanca



Figura 3.10 Descansos de las rampas de acceso al puente peatonal Salamanca

El dimensionamiento de las rampas de acceso del puente peatonal se observa en la figura 3.11.

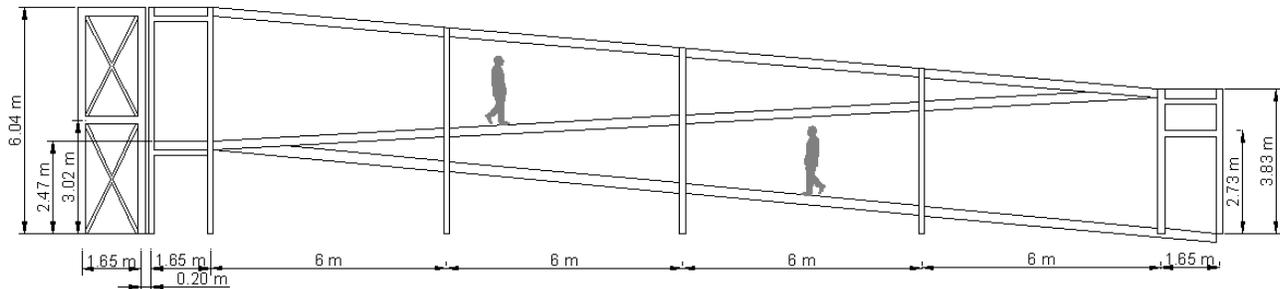


Figura 3.11 Detalle de rampas de acceso al puente peatonal Salamanca (vista lateral)

Existe una pequeña junta constructiva entre las rampas de acceso y la estructura principal, por lo que pueden considerarse ambas estructuras como aisladas e independientes. En las figuras 3.12 (a) y (b) se puede observar dicha junta constructiva, sobre la cual se colocó una placa de acero que evita que los peatones se tropiecen al pasar sobre ella.



(a) Vista superior



(b) Vista inferior

Figura 3.12 Unión entre estructura principal y rampas de acceso del puente peatonal Salamanca

Las vigas principales del puente peatonal se unen mediante un arriostamiento formado de perfiles estructurales tipo OR. Dicho arriostamiento puede observarse por debajo del sistema de piso (Figura 3.13), el cual proporciona rigidez lateral a la estructura.



Figura 3.13 Detalle de vigas y columnas principales del puente peatonal Salamanca

La calzada peatonal del puente está conformada por un sistema de piso losa-acero calibre 25 de 10 *cm* de espesor, de los cuales 3.6 *cm* corresponden a la capa de compresión de concreto. El ancho de calzada se mantiene constante en las rampas de acceso y en la estructura principal con un valor de 1.65 *m* (Figura 3.14).

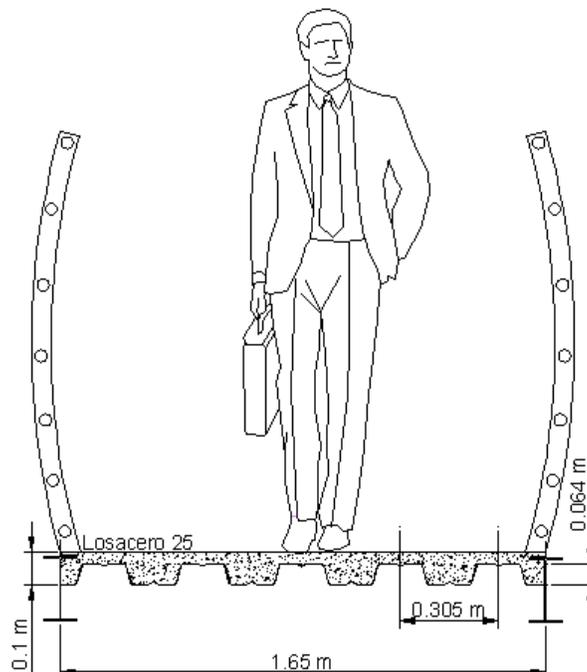


Figura 3.14 Detalle de la sección transversal de la calzada peatonal del puente peatonal Salamanca



Se realizó un levantamiento topográfico del puente para poder elaborar su plano estructural, el cual se observa en la figura 3.15.

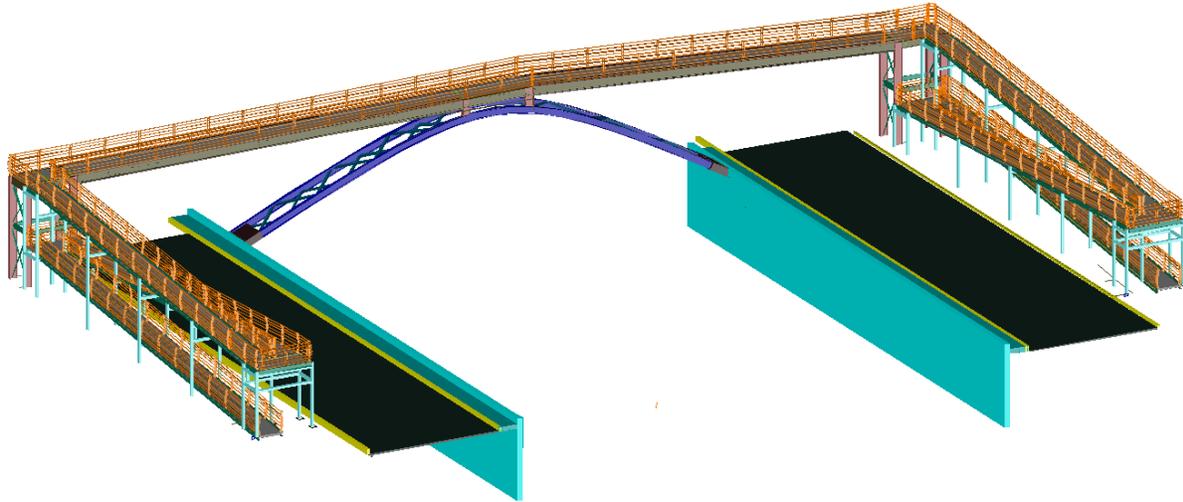


Figura 3.15 Plano del puente peatonal Salamanca (vista general)

En la figura 3.16 se muestran las dimensiones del claro principal del puente peatonal Salamanca, así como del apoyo intermedio en forma de arco estructural de acero. El ángulo de inclinación que logran los dos claros simétricos es de 2° con respecto a la horizontal.

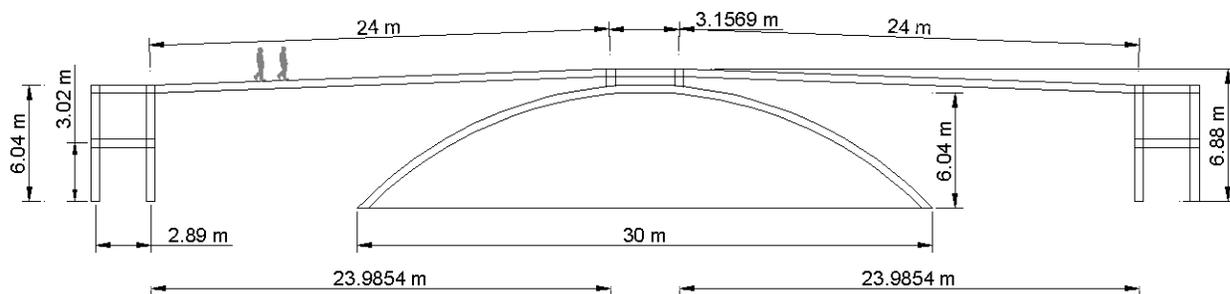


Figura 3.16 Dimensiones del claro principal del puente peatonal Salamanca (vista frontal)

Los tipos de perfiles estructurales de acero que tiene el puente peatonal Salamanca se muestran en la tabla 3.2 en unidades del sistema técnico o gravitacional, acorde al Instituto Mexicano de la Construcción en Acero, A.C. (2010).



Tabla 3.2 Perfiles estructurales de acero del puente peatonal Salamanca

Elemento	Sección	Dimensiones
Ángulos (apoyo de losa-acero)	LI	76 mm x 6 mm
Columnas principales del puente	IR	457 mm x 52.2 kgf/m
Vigas principales del puente	IR	406 mm x 74.4 kgf/m
Diagonales en columnas principales	LI	102 mm x 6 mm
Marcos de soporte de la rampa	OR	203 mm x 6.4 mm
Viga longitudinal de la rampa	IR	254 mm x 32.9 kgf/m
Vigas de unión de columnas principales	IR	203 mm x 22.5 kgf/m
Barandales	OC	73 mm x 5.16 mm
Placas en barandales	Placa	102 mm x 10 mm
Perfiles curvos del arco estructural	IR	406 mm x 74.4 kgf/m
Arrostramientos por debajo del puente	OR	51 mm x 3.2 mm
Arrostramientos del arco estructural	OR	127 mm x 6.3 mm

3.4 Puente peatonal Pátzcuaro

El puente peatonal Pátzcuaro se encuentra ubicado en Calzada la Huerta (carretera Morelia-Pátzcuaro) y conecta las colonias Arboleda de la Huerta y Bosques de la Huerta, en el municipio de Morelia, Michoacán. El puente peatonal consiste en una estructura de acero bastante esbelta, ya que posee un solo claro libre de 36 m de longitud con un ancho de calzada peatonal de 2 m. Las vigas longitudinales se unen a las columnas extremas mediante nodos rígidos que pueden suponerse como empotramientos. El puente peatonal Pátzcuaro se puede observar en la figura 3.17.



Figura 3.17 Puente peatonal Pátzcuaro, municipio de Morelia, Edo. Michoacán de Ocampo (vista general)

Las rampas de acceso del puente peatonal Pátzcuaro están simplemente apoyadas sobre una sucesión de marcos que poseen diferente altura en función de la inclinación de las mismas. En la figura 3.18 se puede observar la estructuración de dichas rampas.



(a)



(b)

Figura 3.18 (a) Marcos de apoyo de las rampas, (b) Detalle de apoyo simple de los marcos de apoyo de las rampas del puente peatonal Pátzcuaro



El detalle de las rampas de acceso se observa en la figura 3.19, dónde éstas también son una estructura independiente debido a la presencia de una junta constructiva de 15 *cm* con respecto a la estructura principal.

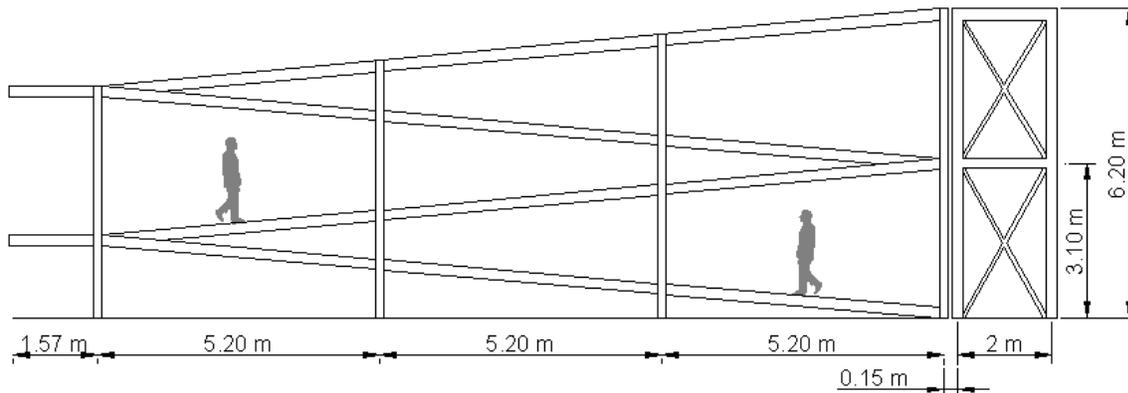


Figura 3.19 Detalle de rampas de acceso al puente peatonal Pátzcuaro (vista lateral)

La estructura principal se encuentra arriostrada por debajo del sistema de piso (Figura 3.20) mediante perfiles estructurales de acero que dotan al puente de mayor rigidez lateral y vertical.



Figura 3.20 Detalle de arriostramiento por debajo del puente peatonal Pátzcuaro

En sistema de piso es de tipo losa-acero calibre 22 con un peralte total de 11.35 *cm*, de los cuales 5 *cm* son de capa de compresión de concreto. El ancho de calzada en la estructura principal es de 2 *m* (Figura 3.21), y de 1.24 *m* para las rampas de acceso.

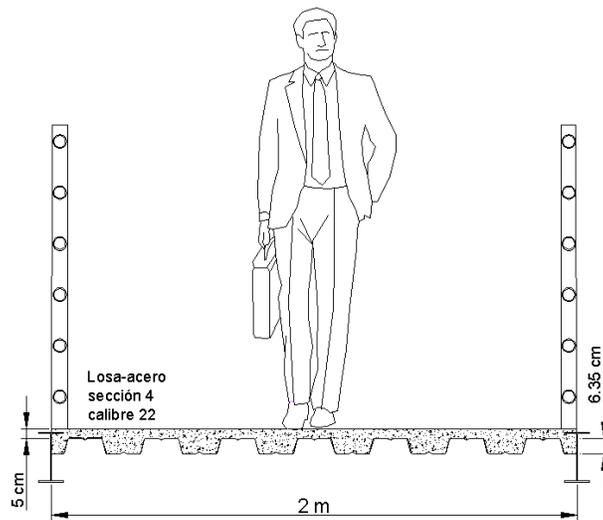


Figura 3.21 Detalle de la sección transversal de la calzada peatonal del puente peatonal Pátzcuaro

Se realizó un levantamiento topográfico del puente para poder elaborar su plano estructural, tal y como se muestra en la figura 3.22 y 3.23.

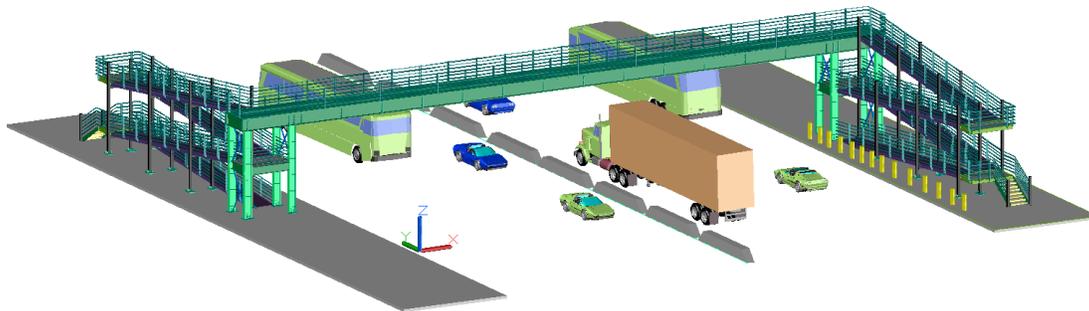
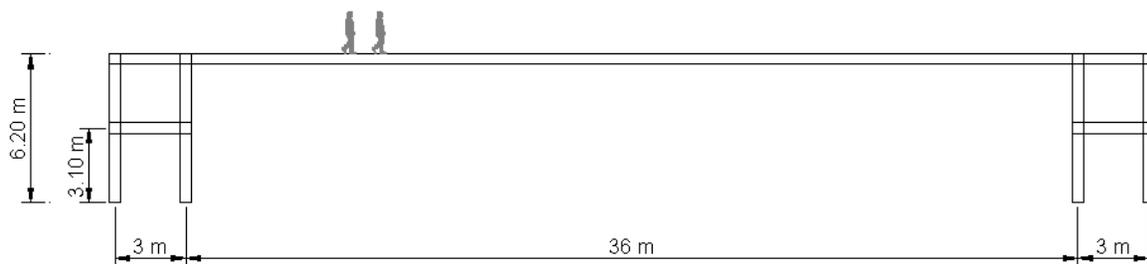


Figura 3.22 Plano del puente peatonal Pátzcuaro (vista general)



. Figura 3.23 Dimensiones del claro principal del puente peatonal Pátzcuaro (vista frontal)



Los tipos de perfiles estructurales de acero que tiene el puente peatonal Pátzcuaro se muestran en la tabla 3.3 en unidades del sistema técnico o gravitacional, acorde al Instituto Mexicano de la Construcción en Acero, A.C. (2010).

Tabla 3.3 Perfiles estructurales de acero del puente peatonal Pátzcuaro

Elemento	Sección	Dimensiones
Ángulos (apoyo de losa-acero)	OR	102 mm x 51 mm x 3.2 mm
Columnas principales del puente	IR	457 mm x 112.9 kgf/m
Vigas principales del puente	IR	686 mm x 217.3 kgf/m
Diagonales en columnas principales	LI	64 mm x 10 mm
Marcos de soporte de la rampa	OR	152 mm x 6.3 mm
Viga longitudinal de la rampa	IR	203 mm x 19.4 kgf/m
Barandales	OC	73 mm x 5.16 mm
Placas en barandales	Placa	102 mm x 10 mm
Arrostramientos lateral por debajo del puente	OR	102 mm x 51 mm x 3.2 mm
Arrostramientos vertical por debajo del puente	OR	51 mm x 3.2 mm

3.5 Puente peatonal tipo

En la práctica cotidiana suelen utilizarse modelos de puentes peatonales que ya han sido utilizados en varias partes de nuestro país y que han funcionado bien bajo la acción de cargas gravitacionales. La estructura no es diseñada sino simplemente se utilizan los mismos perfiles estructurales y dimensiones de algunos puentes peatonales existentes, debido a que son estructuras a las cuales no se les presta mucha atención y no se considera que deba realizarse un diseño estructural en particular. En las figuras 3.24 y 3.25 se muestran las dimensiones de un



puente peatonal de acero con estructuración convencional o “tipo” muy utilizado en México, cuyos nudos extremos son rígidos y pueden suponerse como empotrados.

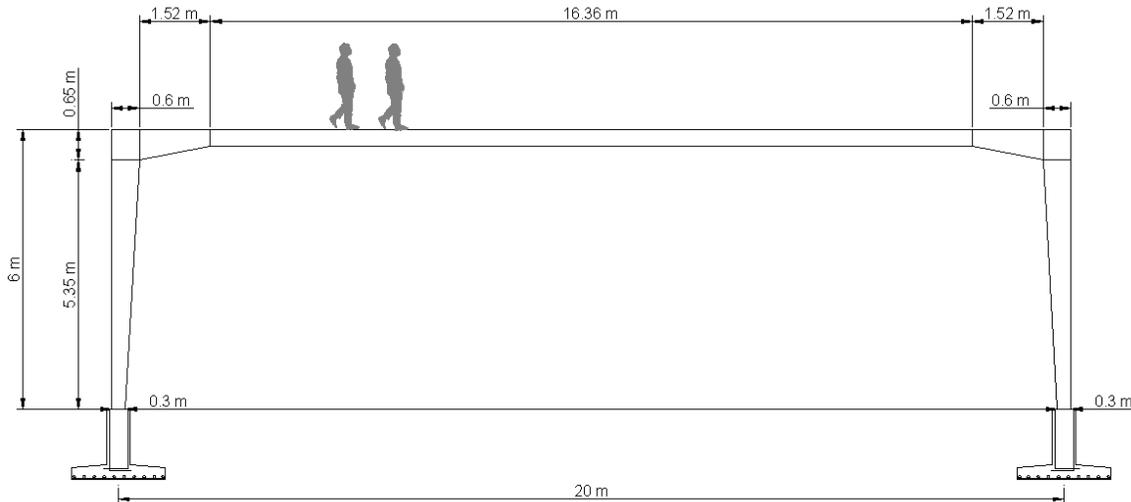


Figura 3.24 Vista en alzado del puente peatonal tipo

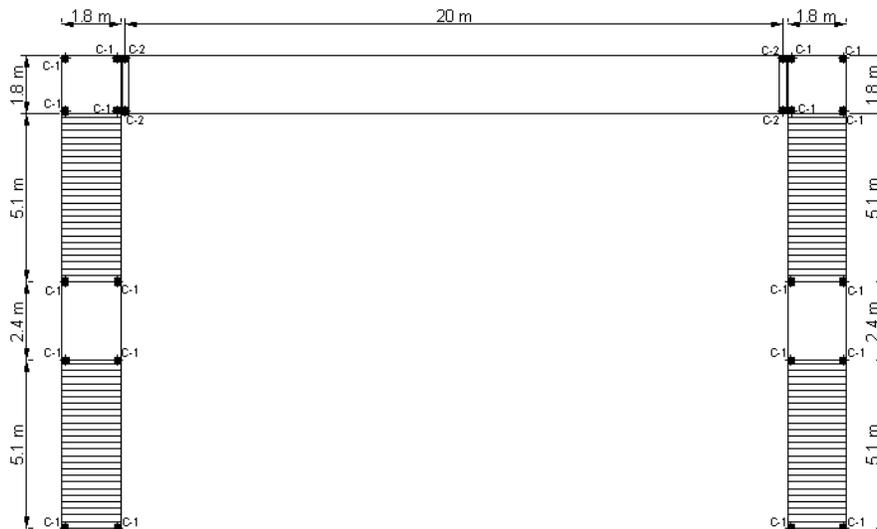


Figura 3.25 Vista en planta del puente peatonal tipo

En caso de que se quiera abarcar un claro más grande, muchas empresas constructoras sólo modifican el claro de las figura 3.24 y 3.25 sin cambiar los perfiles estructurales y realizan una



revisión básica en el puente peatonal para verificar que la estructura es capaz de soportar las cargas gravitacionales o sísmicas, sin embargo, bajo ninguna circunstancia suelen poner énfasis en el control de vibraciones inducidas por los peatones. En ocasiones algunas empresas convierten el puente peatonal tipo de las figuras 3.24 y 3.25 en un puente de tres claros para poder contemplar el ancho de las calles laterales a la vía principal de la carretera, sin embargo, el claro central no lo modifican y los perfiles estructurales siguen siendo los mismos ya que aparentemente están sobrados desde el punto de vista gravitacional

En la figura 3.25 se observa que las rampas de acceso están aisladas de la estructura principal, por lo que no es necesario modelar dichas rampas. En la figura 3.24 se observa que el puente peatonal posee sección variable en las uniones entre vigas y columnas principales (C-2), pudiéndose observar en detalle en la figura 3.26.

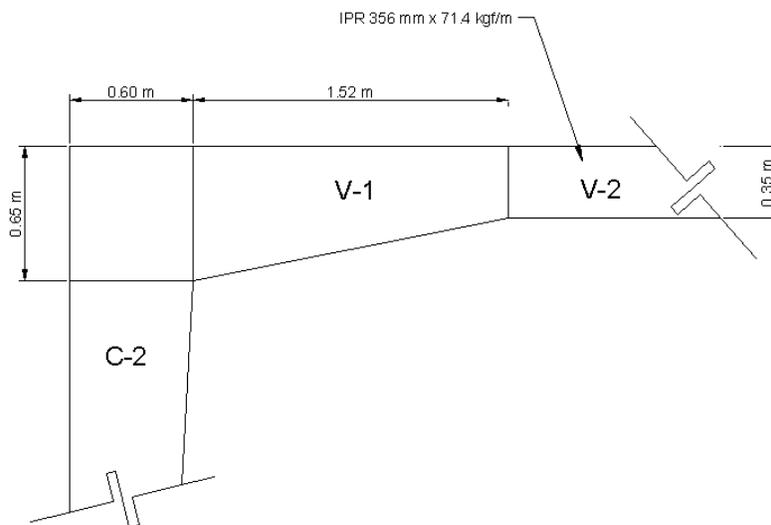
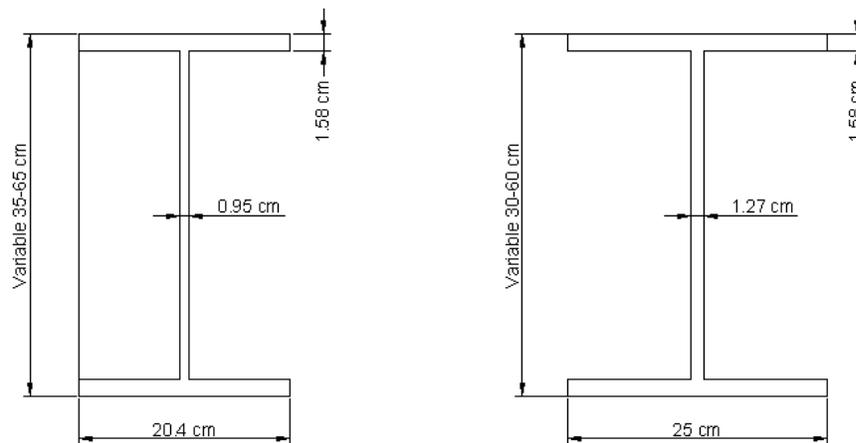


Figura 3.26 Detalle de unión entre vigas y columnas principales del puente peatonal tipo

Se observa que la sección variable solo corresponde a las vigas placa (V-1), las cuales sólo se utilizan para poder unir las vigas longitudinales del puente (V-2) a las columnas principales (C-2), sin embargo, el 82% del claro del puente peatonal tipo es de sección constante. Las columnas principales C-2 también son de sección variable. El dimensionamiento de los perfiles de sección variable pueden observarse en la figura 3.27.



(a) Viga V-1

(b) Columna C-2

Figura 3.27 Perfiles estructurales de sección variable del puente peatonal tipo

Las columnas principales (C-2) del puente peatonal tipo poseen un contraventeo en el nudo de las mismas en forma de una placa metálica de 9.5 mm de espesor unidas mediante una soldadura de 6 mm de espesor, tal y como se muestra en las figuras 3.28 y 3.29.

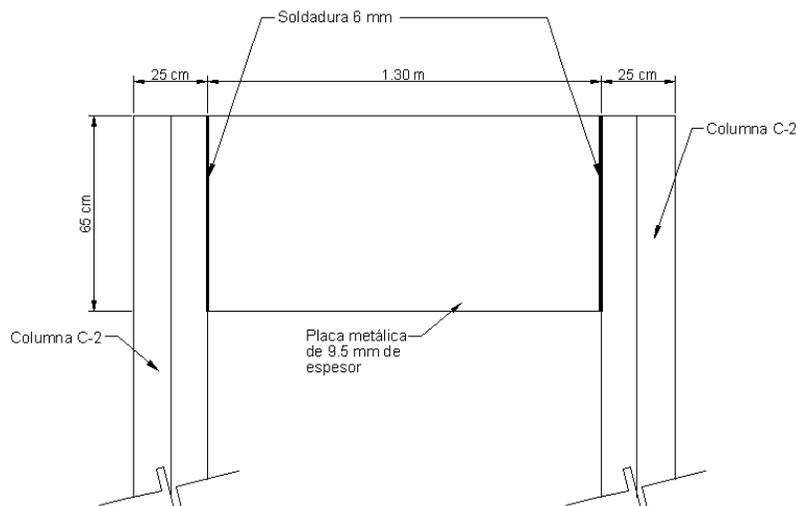


Figura 3.28 Contraventeo en nudo de columna principal (vista en alzado)

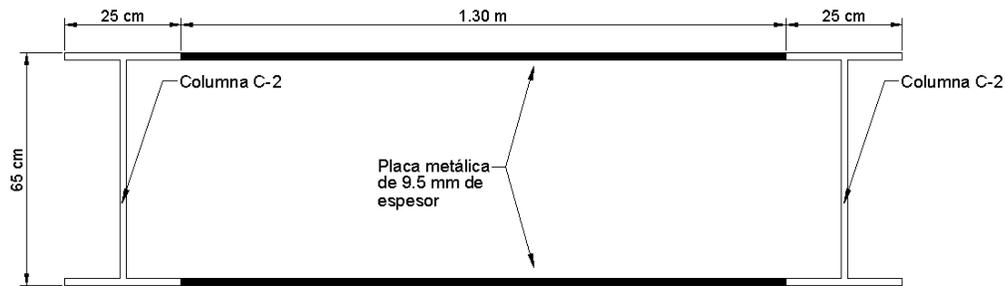


Figura 3.29 Contraventeo en nudo de columna principal (vista en planta)

Para acceder al puente peatonal tipo se debe subir por unas escaleras mostradas en la figura 3.30, donde las columnas de dichas estructuras de acceso (C-1) son de tipo OR de 254 mm x 152 mm x 6.4 mm.

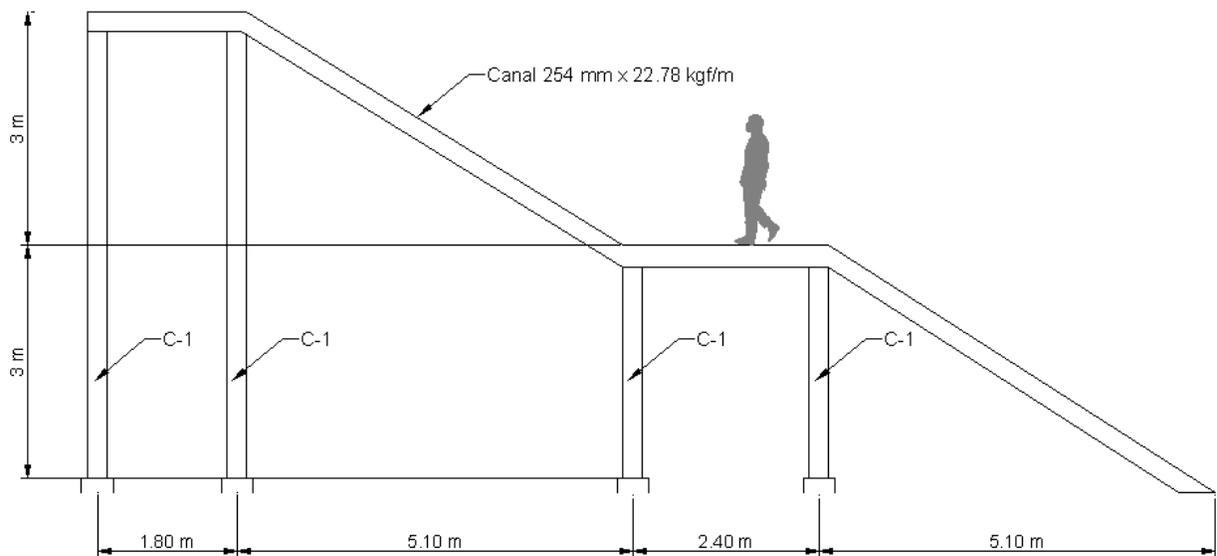


Figura 3.30 Detalle de escaleras de acceso al puente peatonal tipo (vista lateral)

La calzada peatonal posee 1.8 m de ancho y está compuesta por un sistema de piso tipo losa-acero sección 4 calibre 22 con un espesor total de 11.35 cm, de los cuales 5 cm son de capa de compresión de concreto. El puente peatonal posee soporte lateral mediante perfiles estructurales OR de 51 mm x 3.2 mm (figura 3.31).

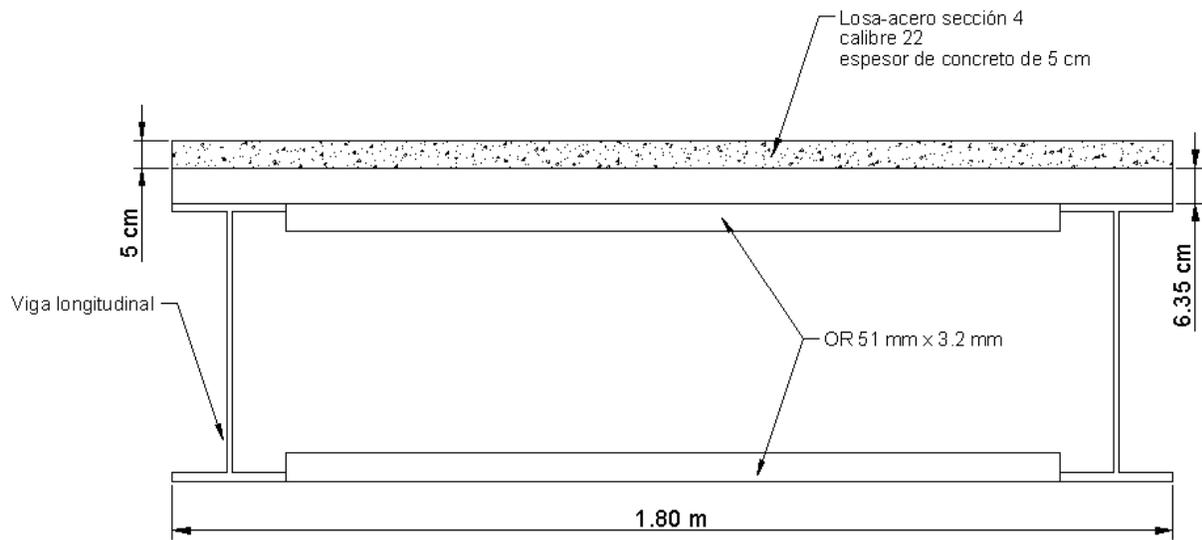


Figura 3.31 Sección transversal del sistema de piso del puente peatonal tipo

Los perfiles estructurales OR de la figura 3.31 están espaciados a cada 2 m, tal y como se muestra en figura 3.32.

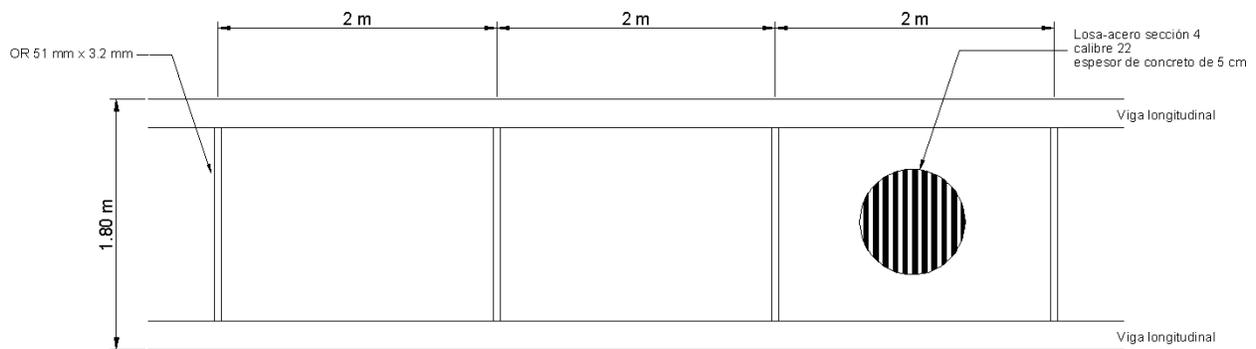


Figura 3.32 Sujeción lateral del puente peatonal tipo (vista en planta)

El puente peatonal en lugar de barandales posee una jaula de protección formada por perfiles estructurales OR de 51 mm x 32 mm, los cuales no tienen ninguna función estructural. El dimensionamiento de los barandales puede observarse en las figuras 3.33 y 3.34.

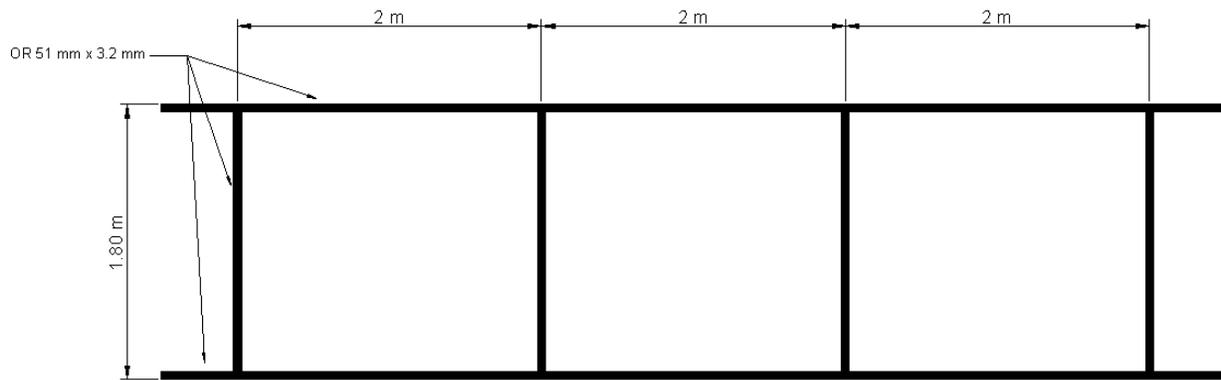


Figura 3.33 Jaula de protección (vista en planta)

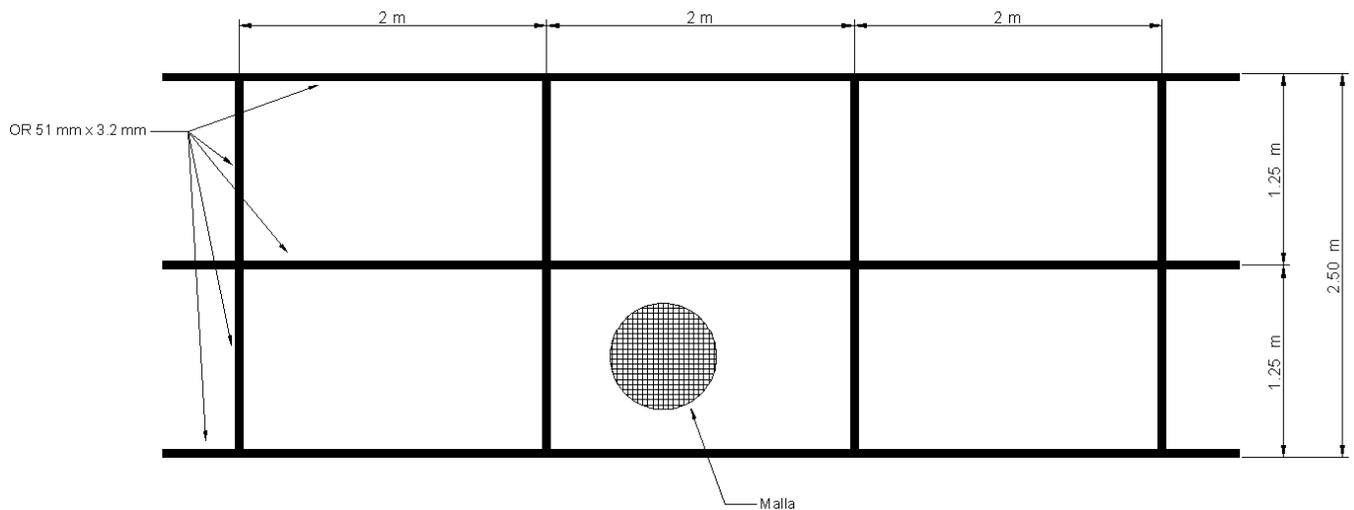


Figura 3.34 Jaula de protección (vista en alzado)

3.6 Estimación empírica de la frecuencia del primer modo vertical de vibrar

La condición que más debe de evitarse es cuando la frecuencia de caminata de los peatones concuerda con la frecuencia natural de vibrar de los puentes peatonales, fenómeno que se conoce como resonancia y que ocasiona un aumento considerable de las vibraciones. Bachmann, Pretlove y Rainer (1995) realizaron un estudio en el que obtuvieron las primeras frecuencias verticales de vibrar de 67 puentes peatonales de diferentes partes del mundo y construidos con



diferentes materiales. Los resultados obtenidos en dicha investigación se muestran en la figura 3.35.

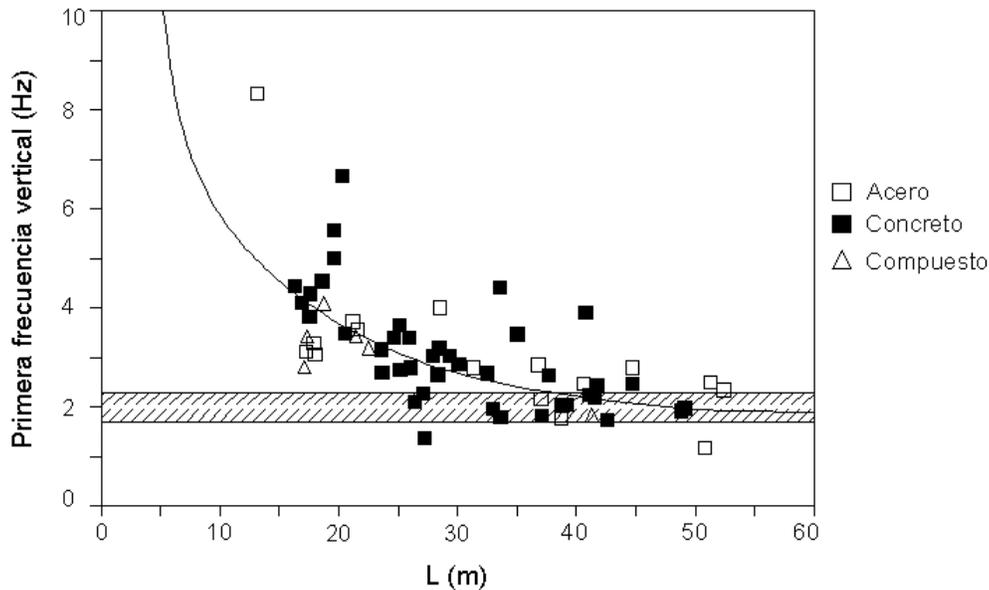


Figura 3.35 Frecuencia del primer modo vertical de vibrar de un puente peatonal en función del claro (Bachmann *et al.*, 1995)

En la figura 3.35 se muestra una banda en la frecuencia de 2 Hz, la cual representa la frecuencia de caminata normal esperada por el 95 % de la población peatonal; de tal manera que todos los puentes peatonales cuya frecuencia se encuentra en dicha banda tendrán problemas seguros de resonancia. La curva mostrada en la figura 3.35 es la tendencia de frecuencias verticales que siguen los 67 puentes peatonales y se obtiene mediante la ecuación:

$$f_1 = 33.6 L^{-0.73} \quad (3.1)$$

Dónde f_1 representa la primera frecuencia vertical de vibrar en Hz de la curva de tendencia de los 67 puentes peatonales de estudio, y L representa la longitud del claro del puente peatonal en metros.



De la curva obtenida con la ecuación 3.1 se puede observar en la figura 3.35 que existe una buena cantidad de propagación en los datos. Relaciones similares se pueden deducir en función de los distintos tipos de materiales a partir de las ecuaciones (Bachmann et al. 1995):

$$f_1 = 39 L^{-0.77} \tag{3.2}$$

$$f_1 = 35 L^{-0.73} \tag{3.3}$$

$$f_1 = 42 L^{-0.84} \tag{3.4}$$

La ecuación 3.2 se utiliza para puentes peatonales de concreto, la ecuación 3.3 para puentes peatonales de acero y la ecuación 3.4 únicamente se puede utilizar para los 6 puentes peatonales compuestos mostrados en la figura 3.35. De la figura 3.35 se observa que los puentes peatonales de concreto tienen más probabilidades de presentar problemas vibratorios inducidos por peatones cuando $L \geq 25 m$, mientras que los puentes peatonales de acero son más propensos cuando $L \geq 35 m$ (Bachmann *et al.* 1995). Los puentes peatonales estudiados en esta tesis están contruidos a base de acero, por lo que es posible utilizar la ecuación 3.3 para estimar empíricamente las primeras frecuencias verticales de vibrar en Hz de dichas estructuras, tal y como se muestra en la tabla 3.4. Los valores mostrados en la tabla 3.4 solo permiten obtener un resultado estimado de f_1 ; ya que la estimación correcta de dicha frecuencia depende de más factores, como el tipo de estructuración, condiciones de apoyo, entre otros.

Tabla 3.4 Estimación empírica de las frecuencias verticales del primer modo de vibrar de los puentes peatonales estudiados

Puente peatonal	L (m)	f_1 (Hz)
San Bartolo	30	2.9226
Salamanca	24	3.4396
Pátzcuaro	36	2.5584
Tipo	20	3.9293



3.7 Estimación analítica de las frecuencias de vibrar

Los puentes peatonales estudiados se modelaron en el software comercial de elemento finito conocido como SAP 2000 versión 14 (2009).

Debido a que los planos estructurales de los puentes peatonales de estudio se tuvieron que realizar mediante un levantamiento topográfico, se desconoce qué tipo de acero estructural es del que están hechos dichas estructuras; por lo que se modelaron considerando que los perfiles estructurales están hechos con acero B-254 (ASTM A36); denominado como acero B-254 por la Norma Mexicana y como acero A36 por la Sociedad Americana para Pruebas y Materiales mejor conocida como American Society for Testing and Materials (ASTM). El acero B-254 (ASTM A36) posee las propiedades mecánicas mostradas en la tabla 3.5.

Tabla 3.5 Propiedades mecánicas del acero estructural B-254 (ASTM A36)

Acero estructural B-254 (ASTM A36)							
E_a		f_y		f_u		Peso específico	
(GPa)	(kgf/cm ²)	(MPa)	(kgf/cm ²)	(MPa)	(kgf/cm ²)	(kN/m ³)	(kgf/m ³)
210	2100000	250	2530	400 a 550	4080 a 5620	77	7850

En la tabla 3.5, E_a representa el módulo de elasticidad del acero; f_y , el esfuerzo de fluencia del acero; y f_u , el esfuerzo último del acero. Las propiedades mecánicas contenidas en la tabla 3.5 están representadas tanto en unidades del sistema internacional como en el sistema técnico o gravitacional; sin embargo, en esta tesis se utilizará el sistema internacional de unidades.

Todos los diferentes perfiles estructurales de los puentes peatonales estudiados se modelaron como elementos tipo marco o frame de acero estructural B-254 (ASTM A36); mientras que los barandales de los puentes peatonales estudiados se modelaron mediante cargas distribuidas aplicadas sobre las vigas longitudinales de los puentes y de las rampas de acceso. Al realizar los modelos analíticos se observó que las rampas o escaleras de acceso no influían en las propiedades dinámicas verticales de los puentes estudiados, por lo que es posible omitirlas por tratarse de

estructuras independientes. El sistema de piso de los puentes peatonales se modeló mediante un elemento tipo cascarón o Shell de concreto, con resistencia a la compresión, f'_c , de $24516625 Pa$ ($250 kgf/cm^2$). Se tuvo que modificar la densidad del concreto para considerar también el material colado en las láminas de acero del sistema de piso, esto debido a que los elementos tipo cascarón se modelaron con un espesor correspondiente a la capa de compresión de concreto del sistema de piso losa-acero. Es preferente modelar el material de las losas como un material ortotrópico, ya que son losas de material mixto que utilizan láminas de acero acanaladas sobre las cuales se cuela el concreto, y por lo tanto la masa y módulo de elasticidad suelen ser diferentes en dos direcciones. Al modelar la losa-acero como material ortotrópico se permite considerar el peso y rigidez adicionales que proporcionan estos sistemas de piso; sin embargo, también es posible modelar las losas como un material isotrópico, siempre y cuando se modifique la rigidez a flexión de las vigas longitudinales mediante un factor que considere que trabajan como una sección compuesta en conjunto con el sistema de piso.

Smith, Hicks, y Devine (2009) desarrollaron un manual denominado *Design of Floors for Vibration: A New Approach*; en el cual desarrollan éstas dos formas de modelar analíticamente los sistemas de piso tipo losa-acero.

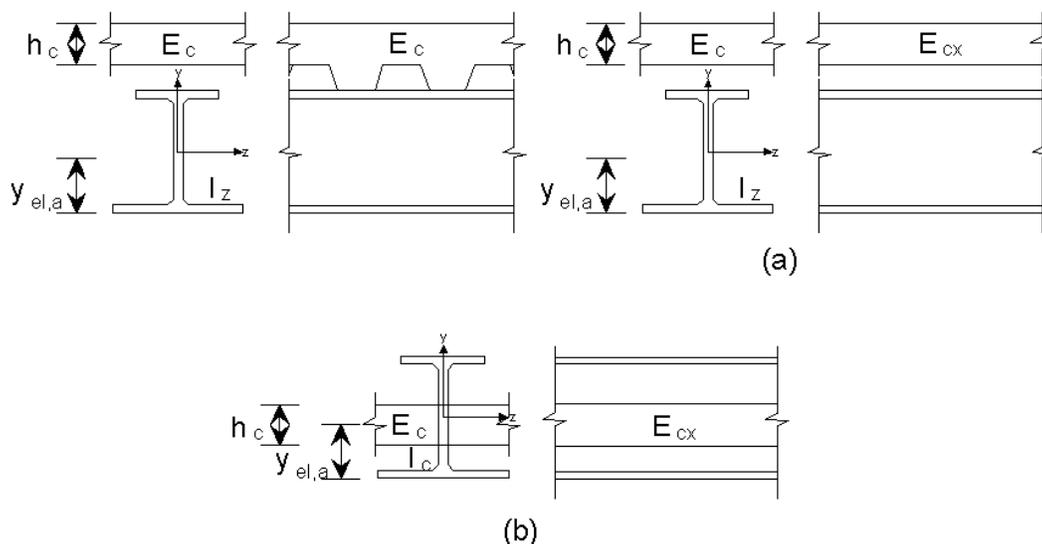


Figura 3.36 Modelo analítico de un sistema de piso losa-acero (Smith *et al*, 2009)



La figura 3.36 muestra dos posibles opciones (a) y (b) para modelar los sistemas de piso losa acero. El modelo (a) de la figura 3.36 considera los sistemas de piso losa acero como elementos shell ortotrópicos de una profundidad h_c con un módulo de elasticidad E_c a lo largo del claro de la viga de acero y un módulo de elasticidad E_{cx} perpendicular al claro de la viga de acero, el cual se obtiene mediante la ecuación:

$$E_{cx} = E_c \frac{12I_{c,x}}{h_c^3} \quad (3.5)$$

En la ecuación 3.5 ; $I_{c,x}$ representa el segundo momento de área o momento de inercia del perfil de la losa por metro de anchura en la dirección del claro, E_c representa el módulo elástico dinámico del concreto, y h_c representa la profundidad del concreto sobre la lámina de acero acanalada del sistema de piso losa acero o capa de compresión de concreto. El valor dinámico del módulo de elasticidad para el concreto, E_c , puede tomarse con un valor de 38 kN/mm^2 para el concreto de peso normal y 22 kN/mm^2 para concreto ligero (densidad seca de aproximadamente 2.350 kg/m^3 y 1.800 kg/m^3 respectivamente). En los modelos analíticos de los puentes peatonales estudiados se consideró que los sistemas de piso losa-acero poseen un concreto de peso normal.

El modelo (a) también usa un elemento viga con las mismas propiedades, debido a que los conectores de cortante del sistema de piso logran que este actúe como una sección compuesta junto con la viga, razón por la cual se toman las mismas propiedades. La profundidad equivalente de la sección compuesta, h_s , es:

$$h_s = h + h_a - y_{el,a} - \frac{h_c}{2} \quad (3.6)$$

En la ecuación 3.6 (Smith et al. 2009); h es la altura total del sistema de piso tipo losa acero (incluyendo la lámina de acero acanalada), h_a es la altura total de la viga de acero, y $y_{el,a}$ es la altura del eje neutro de la viga de acero. Se debe de tener en cuenta que se necesita aumentar la



densidad del concreto de tal manera que se tome en cuenta el peso del concreto que se cuela en los canales de la lámina de acero.

El modelo (b) de la figura 3.36 es menos preciso que el modelo (a), ya que usa las mismas propiedades de la losa del modelo (a) pero la viga no tiene una profundidad equivalente de la sección compuesta, h_s . En lugar de eso, el segundo momento de área o momento de inercia de la viga se calcula acorde a la ecuación 3.7 en donde se convierte el concreto de la losa a un material equivalente de acero:

$$I_c = I_z + A_a \left(h + h_a - y_{el,a} - \frac{h_c}{2} - y_{el,c} \right)^2 + \frac{b_{eff} h_c}{E_a / E_c} \left(y_{el,c} - \frac{h_c}{2} \right)^2 \quad (3.7)$$

En la ecuación 3.7; I_c es el momento de inercia de flexión de la sección compuesta, I_z es el momento de inercia de flexión de la viga de acero que para el sistema de ejes coordenados de la figura 3.36 corresponde al momento de inercia alrededor del eje z con respecto a los ejes centroidales de la viga de acero, E_a es el módulo de elasticidad del acero, $y_{el,c}$ es el eje elástico neutro de la sección compuesta, A_a es el área transversal de la viga de acero, y b_{eff} es el ancho equivalente del concreto (igual a un octavo del claro del puente o la mitad de la distancia al eje de la viga longitudinal adyacente, el que sea menor) que para los casos de los puentes peatonales estudiados en esta tesis corresponde a la mitad del ancho de la calzada.

Si no es posible modelar el sistema de piso tipo losa acero como material ortotrópico, la losa debe definirse con base a un material isotrópico con un módulo de elasticidad E_{cx} ; mientras que la viga de acero deber poseer el momento de inercia de la sección compuesta, I_c , definido en la ecuación 3.7. Además se tendrá que alterar la densidad del concreto para considerar aquel material que se coló en los canales de la lámina de acero del sistema de piso. En los modelos analíticos realizados en el software SAP 2000 se consideró el sistema de piso como material isotrópico de concreto con un módulo de elasticidad de 38 kN/mm^2 y se multiplicó el momento de inercia de flexión de la viga de acero, I_z , por un factor que considera que la viga trabaja de



manera compuesta con el sistema de piso. Los detalles del procedimiento para obtener la inercia compuesta de las vigas longitudinales de acero se muestran en el apéndice A.

No se consideraron los efectos de interacción suelo-estructura en los puentes peatonales de estudio, esto debido a que no se cuenta con un estudio de mecánica de suelos de los sitios donde están desplantadas estas estructuras; por lo tanto, éstas se consideraron empotradas al suelo. Antes de ejecutar el análisis modal, se le indicó al programa en la opción de “mass source” que considere como masa inercial de la estructura no sólo la carga muerta sino la masa correspondiente a todas las cargas puntuales y distribuidas. Una vez que se modelaron los puentes peatonales estudiados, se ejecutó únicamente el análisis modal, con el cual se pueden obtener los periodos y modos de vibrar de las estructuras, así como la masa modal efectiva en la dirección vertical, m_{eff} , ya que el número de modos a considerar en el análisis dinámico de los modelos matemáticos simplificados debe sumar una masa efectiva total de por lo menos 90 %.

3.7.1 Puente peatonal San Bartolo

El puente peatonal San Bartolo es simplemente apoyado y se modeló tomando en cuenta todas las consideraciones mencionadas en la sección 3.7. La superestructura del espectacular que se encuentra sobre el puente peatonal se modeló como una carga distribuida sobre la armadura. El modelo computacional generado se muestra en la figura 3.37.

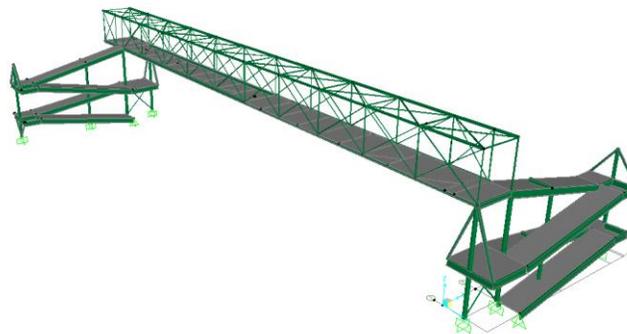
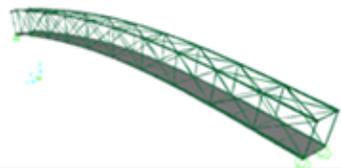
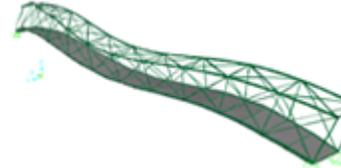
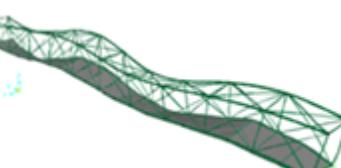
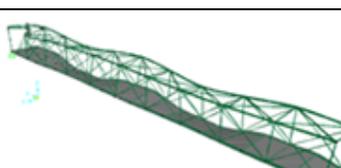


Figura 3.37 Modelo estructural del puente peatonal San Bartolo en SAP 2000



Una vez que se ejecutó el análisis modal se obtuvieron las frecuencias de vibrar del puente peatonal San Bartolo. En la tabla 3.6 se muestran las primeras cinco frecuencias y modos de vibrar verticales, ya que son las de interés debido a la masa modal efectiva.

Tabla 3.6 Frecuencias y modos analíticos de vibrar verticales del puente peatonal San Bartolo

j -ésimo modo de vibrar	Forma modal	$T_j (s)$	$f_j (Hz)$	$w_j (rad/s)$	$m_{eff,j} (%)$
1		0.2847	3.5125	22.0697	81.4002
2		0.0712	14.0500	88.2788	0.00000000177
3		0.0316	31.6125	198.6272	8.9064
4		0.0178	56.2000	353.1150	0.0000000055
5		0.0114	87.8125	551.7422	2.9137



En la tabla 3.6 se observa que con los primeros cinco modos verticales de vibrar se logra que la masa participe en un 93.2203 %, dónde el 81.4002 % participa sólo con el primer modo de vibrar vertical, por lo que bastaría con considerar cinco modos en el análisis dinámico. Para los modos de vibrar laterales y longitudinales si debe considerarse el puente como un marco. Los resultados del modelo analítico arrojan que para la vibración lateral no puede presentarse el fenómeno de la resonancia inducida por peatones, ya que su frecuencia más baja es de 2.143 Hz . Por otra parte, para la vibración longitudinal es de interés el segundo modo de vibrar, ya que éste puede vibrar en resonancia por poseer una frecuencia de vibrar de 1.98 Hz .

3.7.2 Puente peatonal Salamanca

El puente peatonal Salamanca se modeló tomando en cuenta todas las consideraciones mencionadas en la sección 3.7. Solo es necesario modelar uno de los tramos de 24 m de longitud, ya que no se trata de un puente continuo. El modelo computacional generado se muestra en la figura 3.38.

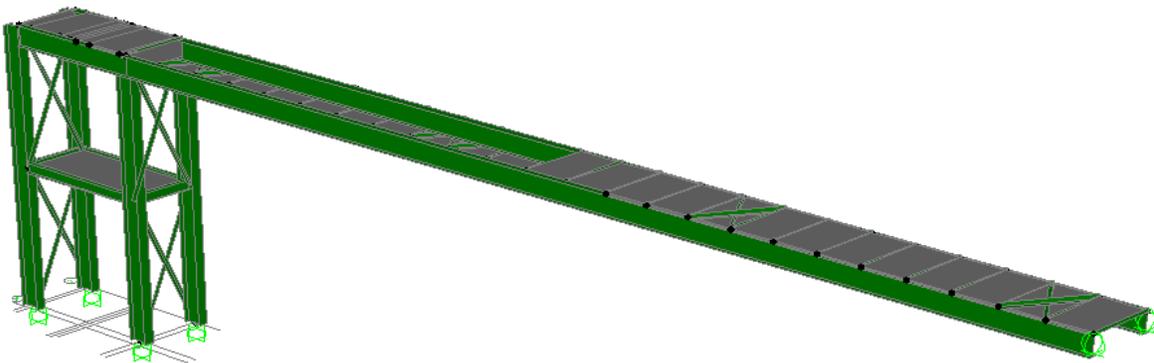
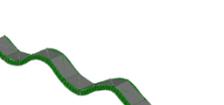


Figura 3.38 Modelo estructural del puente peatonal Salamanca en SAP 2000

Se puede considerar al puente peatonal Salamanca como dos claros simétricos e independientes de 24 m de longitud cada uno, los cuales están empotrados en un extremo y simplemente apoyados en el otro, cuyas propiedades dinámicas verticales se muestran en la tabla 3.7.



Tabla 3.7 Frecuencias y modos analíticos de vibrar verticales del puente peatonal Salamanca

j -ésimo modo de vibrar	Forma modal	T_j (s)	f_j (Hz)	w_j (rad/s)	$m_{eff,j}$ (%)
1		0.3232	3.0941	19.4408	73.2038
2		0.1018	9.8232	61.7210	0.9089
3		0.0503	19.8807	124.9141	11.6742
4		0.0305	32.7869	206.0062	0.39
5		0.0209	47.8469	300.6309	3.9502
6		0.0156	64.1026	402.7685	0.2682
7		0.0123	81.3009	510.8286	1.5898



En la tabla 3.7 se observa que con los primeros siete modos verticales de vibrar se logra que la masa participe en un 91.9851 %, dónde el 73.2038 % participa sólo con el primer modo de vibrar vertical, por lo que bastaría con considerar siete modos en el análisis dinámico. Para los modos de vibrar laterales y longitudinales si debe considerarse el puente como un marco, ya que esto influye significativamente en las frecuencias. No habrá vibración lateral resonante, ya que su frecuencia más baja es de 2.6060 Hz . Por otra parte, es de interés el primer modo de vibrar longitudinal, cuya frecuencia de vibrar de 3.12 Hz .

3.7.3 Puente peatonal Pátzcuaro

El puente peatonal Pátzcuaro se modeló tomando en cuenta todas las consideraciones mencionadas en la sección 3.7. El modelo computacional generado en el software SAP 2000 versión 14 se muestra en la figura 3.39.

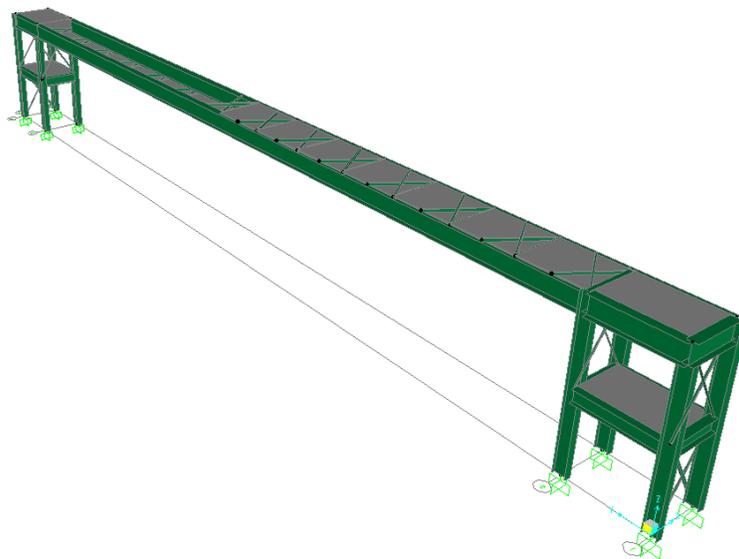


Figura 3.39 Modelo estructural del puente peatonal Pátzcuaro en SAP 2000

Una vez que se ejecutó el análisis modal se obtuvieron las frecuencias de vibrar del puente peatonal Pátzcuaro. En la tabla 3.8 se muestran las primeras siete frecuencias y modos de vibrar verticales, ya que son las de interés para esta tesis debido a la masa modal efectiva.



Tabla 3.8 Frecuencias y modos analíticos de vibrar verticales del puente peatonal Pátzcuaro

j -ésimo modo de vibrar	Forma modal	T_j (s)	f_j (Hz)	w_j (rad/s)	$m_{eff,j}$ (%)
1		0.3743	2.6717	16.7868	69.3482
2		0.1397	7.1582	44.9763	8.8×10^{-13}
3		0.0738	13.5501	85.1378	14.4932
4		0.0466	21.4592	134.8321	7.3×10^{-12}
5		0.0327	30.5810	192.1461	5.8914
6		0.0246	40.6504	255.4140	2.8×10^{-11}
7		0.0196	51.0204	320.5706	2.948



En la tabla 3.8 se observa que con los primeros siete modos verticales de vibrar se logra que la masa participe en un 92.6808 %, dónde el 69.3482 % participa sólo con el primer modo de vibrar vertical, por lo que bastaría con considerar siete modos en el análisis dinámico. Para los modos de vibrar laterales y longitudinales si debe considerarse el puente como un marco. No habrá vibración lateral resonante, ya que su frecuencia más baja es de 2.513 Hz . Por otra parte, es de interés el primer modo de vibrar longitudinal, ya que su frecuencia de vibrar es de 2.624 Hz .

3.7.4 Puente peatonal tipo

El puente peatonal tipo se modeló tomando en cuenta todas las consideraciones mencionadas en la sección 3.7. La jaula de protección del puente peatonal se modeló como una carga distribuida sobre la estructura. El modelo computacional generado se muestra en la figura 3.40.

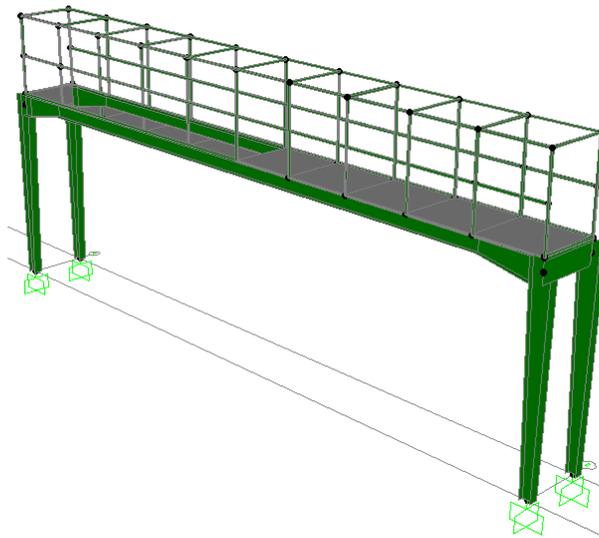
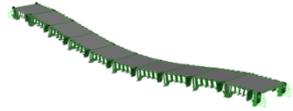
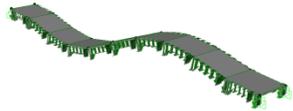
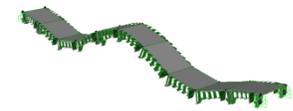
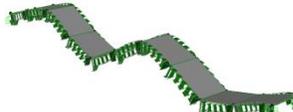
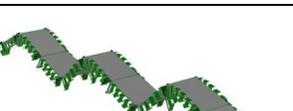


Figura 3.40 Modelo estructural del puente peatonal tipo en SAP 2000

Una vez que se ejecutó el análisis modal se obtuvieron las frecuencias de vibrar del puente peatonal tipo. En la tabla 3.9 se muestran las primeras siete frecuencias y modos de vibrar verticales, ya que son las de interés para esta tesis debido a la masa modal efectiva.



Tabla 3.9 Frecuencias y modos analíticos de vibrar verticales del puente peatonal tipo

j -ésimo modo de vibrar	Forma modal	T_j (s)	f_j (Hz)	w_j (rad/s)	$m_{eff,j}$ (%)
1		0.2917	3.4282	21.5400	69.0542
2		0.1060	9.4340	59.2881	9.1×10^{-13}
3		0.0571	17.5131	110.0381	13.4782
4		0.0360	27.7778	174.5331	9.3×10^{-12}
5		0.0256	39.0625	245.4369	5.7257
6		0.0199	50.2513	315.7382	4.7×10^{-11}
7		0.0166	60.2410	378.5054	2.7562



En la tabla 3.9 se observa que con los primeros siete modos verticales de vibrar se logra que la masa participe en un 91.0143 %, dónde el 69.0542 % participa sólo con el primer modo de vibrar vertical, por lo que bastaría con considerar siete modos en el análisis dinámico. Para los modos de vibrar laterales y longitudinales si debe considerarse el puente como un marco. Si existe posibilidad de vibración lateral resonante debido a que su frecuencia más baja es de 1.3084 *Hz*. Por otra parte, es de interés el primer modo de vibrar longitudinal, cuya frecuencia es de 2.8910 *Hz*.

3.8 Conclusiones

Las ecuaciones empíricas para el cálculo de la primera frecuencia vertical de vibrar solo sirven para darse una idea del intervalo de frecuencias estructurales a esperar, debido a que éstas sólo dependen del claro del puente. Por lo tanto, una manera precisa de obtener las propiedades dinámicas de puentes peatonales es mediante modelos analíticos en softwares comerciales de elemento finito.

De los resultados obtenidos de los modelos analíticos de los puentes peatonales estudiados se observó que los modos de vibrar verticales corresponden a los de una viga Euler-Bernoulli con diferentes condiciones de apoyo. Los cuatro puentes peatonales son propensos a vibraciones resonantes bajo la primera forma modal vertical; cuya máxima amplitud modal se da al centro del claro en los puentes peatonales San Bartolo, Pátzcuaro y tipo, y en $0.586L$ para el puente peatonal Salamanca. Las vibraciones resonantes en la dirección lateral sólo pueden presentarse en el puente peatonal tipo; mientras que las vibraciones resonantes longitudinales si pueden presentarse en todos los puentes, sin embargo, éstas suelen ser de mucho menor magnitud que las verticales.

Como ya se ha mencionado, los peatones ejercen frecuencias de vibrar entre 1.6 y 3.5 *Hz* en la dirección vertical y longitudinal, y entre 0.8 y 1.75 *Hz* en la dirección lateral. Por lo tanto, las frecuencias estructurales de vibrar críticas de los puentes peatonales estudiados se muestran en la tabla 3.10.



Tabla 3.10 Frecuencias estructurales críticas de vibrar de los puentes peatonales estudiados

Dirección	f (Hz)			
	San Bartolo	Salamanca	Pátzcuaro	Tipo
Vertical	3.5125	3.0941	2.6717	3.4282
Lateral	-	-	-	1.3084
Longitudinal	1.9800	3.1200	2.6240	2.8910

Todas las frecuencias de la tabla 3.10 corresponden al primer modo de vibrar en su dirección correspondiente, con excepción de la frecuencia estructural crítica longitudinal del puente peatonal San Bartolo que corresponde al segundo modo de vibrar en dicha dirección. Es evidente notar que los puentes peatonales estudiados son más propensos a desarrollar problemas vibratorios en la dirección vertical, cuya resonancia puede generarse por las actividades peatonales mostradas en la tabla 3.11.

Tabla 3.11 Actividades peatonales críticas para la vibración vertical de los puentes peatonales estudiados

Puente	San Bartolo	Salamanca	Pátzcuaro	Tipo
Actividad peatonal crítica	Carrera rápida	Carrera rápida	Carrera normal	Carrera rápida



Capítulo 4

Pruebas de vibración ambiental y forzada

4.1 Introducción

La manera más adecuada de determinar si un puente peatonal sufre problemas de vibración inducida por personas es mediante pruebas de vibración, ya que con éstas es posible medir la respuesta dinámica de los mismos ante vibración ambiental y forzada; sin embargo, no siempre son factibles de realizar ya que no siempre se cuenta con el equipo necesario para realizar dichas pruebas. Las pruebas de vibración no solo nos permiten obtener las respuestas dinámicas de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en las tres direcciones ortogonales posibles en que puede vibrar un puente peatonal, sino que también nos permiten obtener las propiedades dinámicas de los mismos mediante un análisis e interpretación de las señales obtenidas. Se realizaron pruebas de vibración en tres de los cuatro puentes peatonales estudiados, ya que uno de ellos sólo es un modelo “tipo” y no representa una estructura real en particular. En el puente peatonal San Bartolo únicamente se realizaron pruebas de vibración ambiental ocasionadas por el ruido aledaño a la estructura; esto con el objetivo de determinar las propiedades dinámicas del puente peatonal. En los puentes peatonales Salamanca y Pátzcuaro se realizaron pruebas de vibración ambiental y forzada bajo distintos grupos de carga peatonal móvil; esto con el objetivo de no sólo determinar las propiedades dinámicas de las estructuras, sino también obtener las respuestas dinámicas de las mismas en las tres direcciones ortogonales ante dichos casos de carga. Las pruebas de vibración forzada que se realizaron en los puentes peatonales Salamanca y Pátzcuaro contemplaron uno, dos, cuatro y ocho peatones caminando y corriendo en grupo. Los resultados e interpretación de las pruebas de vibración realizadas en los tres puentes peatonales estudiados se muestran en este capítulo.



4.2 Diseño de las pruebas de vibración

Las mediciones que se realizaron en los tres puentes peatonales estudiados se obtuvieron mediante acelerómetros modelo FBA ES-T fabricados por la compañía Kinematics. Los acelerómetros que se utilizaron se muestran en la figura 4.1.



Figura 4.1 Acelerómetro modelo FBA ES-T, Kinematics

Se observa que el acelerómetro de la figura 4.1 posee el sistema de ejes coordenados sobre él, de tal manera que es capaz de medir las vibraciones en las tres direcciones ortogonales posibles en función de cómo se coloque el sensor.

La primera forma modal vertical de cualquier puente peatonal siempre es la que aporta más porcentaje de masa modal efectiva en dichas vibraciones, por lo que usualmente el punto longitudinal de mayor interés del puente suele ser el centro del claro en estructuras simplemente apoyadas o doblemente empotradas; sin embargo, es preferible colocar acelerómetros en varios puntos longitudinales específicos con el objetivo de determinar si modos superiores de vibrar pueden vibrar en resonancia. Se utilizaron en total cinco acelerómetros en cada puente peatonal, de los cuales uno se colocó a nivel del suelo y cuatro se colocaron sobre el puente en $x = 0$, $x = \frac{L}{4}$, $x = \frac{L}{2}$ y $x = \frac{3L}{4}$; donde L es el claro total del puente. En el caso del puente peatonal



Salamanca L representa la longitud de uno de los claros, debido a que el puente no es continuo y no es necesario instrumentar ambos claros. La ubicación y numeración de los acelerómetros utilizados se muestra en el esquema de la figura 4.2.

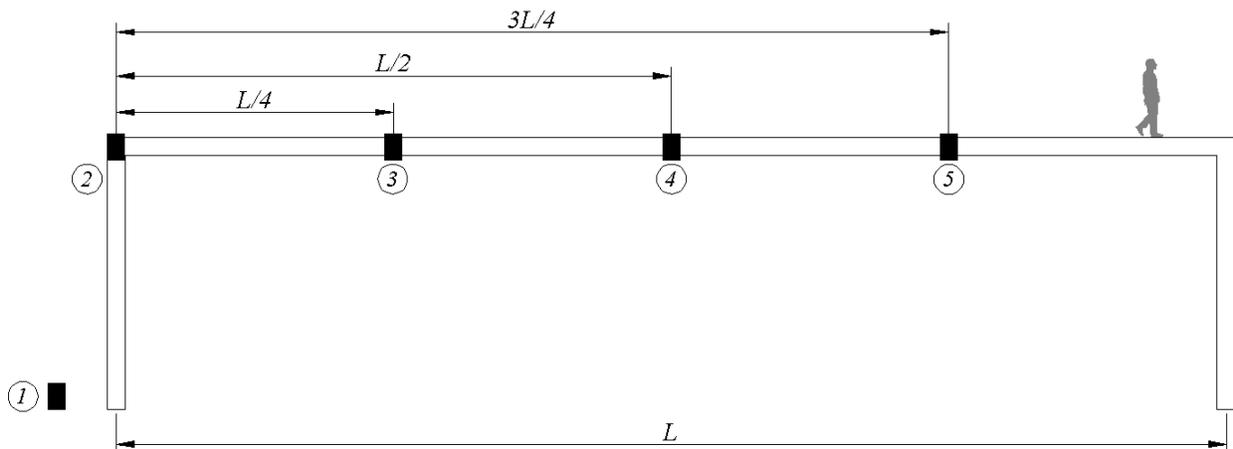


Figura 4.2 Esquema de arreglo de acelerómetros (vista frontal)

En la figura 4.2 se observa que el equipo 2 se colocó en uno de los apoyos del puente peatonal, dónde para el caso particular del puente peatonal Salamanca, éste corresponde al apoyo simple, es decir, donde se localiza el arco estructural. En las pruebas de vibración de los puentes peatonales estudiados sólo se realizó un arreglo de los equipos o acelerómetros (figura 4.2). En cada medición, los acelerómetros registraron una señal con una duración de 200 segundos; tiempo durante el cual se hizo cruzar a los peatones varias veces una vez que la vibración causada por la excitación peatonal anterior cesara debido al amortiguamiento estructural. Cada señal registrada por el acelerómetro es descompuesta en 3 señales ortogonales (vertical, lateral y longitudinal). El número total de mediciones registradas por los acelerómetros en los puentes peatonales estudiados se muestran en las tablas 4.1 y 4.2.

Tabla 4.1 Número total de mediciones realizadas en el puente peatonal San Bartolo

No. de medición	Número de peatones caminando en grupo	Número de peatones corriendo en grupo
1	0	0



Tabla 4.2 Número total de mediciones realizadas en los puentes peatonales Salamanca y Pátzcuaro

No. de medición	Número de peatones caminando en grupo	Número de peatones corriendo en grupo
1	0	0
2	1	0
3	0	1
4	2	0
5	0	2
6	4	0
7	0	4
8	8	0
9	0	8

La frecuencia de vibrar ejercida por los peatones varía en función de la velocidad constante a la que éstos se desplazan, sin embargo, no resulta práctico realizar mediciones para distintos casos de caminata y carrera a diferentes velocidades; ya que esto se traduciría en una excesiva cantidad de mediciones, además de que resulta particularmente difícil controlar la velocidad de cruce que ejercen los peatones de prueba. Por lo tanto, en este capítulo no se evalúa el efecto de la velocidad peatonal en la respuesta dinámica estructural, sin embargo, si resulta práctico evaluar su efecto mediante modelos matemáticos simplificados.

4.3 Análisis e interpretación de las señales

Las señales obtenidas en cada dirección ortogonal fueron analizadas mediante un programa realizado en Matlab por Román (2016); el cual está basado en la teoría de vibración ambiental expuesta por Wensel y Pichler (2005), y permite obtener las propiedades dinámicas de cualquier estructura mediante el análisis de sus correspondientes pruebas de vibración. Para obtener las propiedades y respuestas dinámicas en las tres direcciones de los puentes peatonales estudiados es necesario filtrar las señales registradas por los equipos; ya que las vibraciones medidas no sólo



son causadas por el paso de los peatones, sino también por otros factores externos aledaños a las estructuras, tales como el tráfico vehicular, ruido, viento, etc. Es importante que antes de filtrar las señales ya se conozca el intervalo de frecuencias entre los cuales puedan estar las frecuencias de vibrar de las estructuras, tal y como se realizó en el capítulo tres de esta tesis mediante modelos analíticos en un software de elementos finitos. El filtro utilizado para eliminar el ruido en las señales fue de tipo pasabanda, el cual permite filtrar las señales en un intervalo definido de frecuencias donde se espera que estén las frecuencias de vibrar de las estructuras; y posteriormente se corrigió la línea base de las señales.

Una vez que las señales de aceleraciones fueron filtradas y corregidas, se realizó un análisis de su contenido de frecuencias al obtener los espectros de Fourier de las mismas mediante la transformada de Fourier, es decir, se transformaron las señales del dominio del tiempo al dominio de las frecuencias. El espectro de Fourier relaciona las amplitudes máximas con las correspondientes frecuencias de vibrar en Hz , es decir, es una gráfica que presenta la distribución de amplitudes para cada frecuencia de un fenómeno ondulatorio resultante de la superposición de varias ondas, cada una con su respectiva frecuencia de vibrar; de tal manera que la frecuencia de vibrar fundamental de una señal es la que presenta la amplitud máxima de aceleración en el espectro de Fourier. Las frecuencias de vibrar de los puentes peatonales pueden ser obtenidas mediante los espectros de Fourier al identificar la frecuencia que desarrolla la amplitud máxima. En esta tesis se obtuvieron los espectros de Fourier mediante el programa desarrollado en Matlab por Román (2016), ya que éste arroja un solo espectro de Fourier para cada dirección ortogonal del movimiento con base al promedio y normalización de los espectros de Fourier obtenidos de cada acelerómetro. Resulta entonces más fácil visualizar las frecuencias de vibrar de los puentes peatonales con base a un espectro de Fourier promedio, ya que considera los resultados obtenidos por cada equipo para una medición. Solo son de interés los picos máximos que se obtienen del espectro de Fourier promedio, ya que en base a los modelos analíticos del capítulo 3 se obtuvo que sólo la primera forma modal de los puentes peatonales estudiados puede vibrar en resonancia; sin embargo, los picos consecutivos de máxima amplitud descendente corresponden a las frecuencias de vibrar de modos superiores.



El amortiguamiento estructural puede obtenerse con la técnica del ancho de banda mediante las dos frecuencias que delimitan la amplitud más alta de un cociente espectral, sin embargo, en ocasiones es difícil visualizar de manera correcta cuales son las frecuencias que delimitan dicha amplitud, por lo que conviene obtener el amortiguamiento estructural en base a la historia de aceleraciones registradas. Cuando la estructura es sometida a una carga peatonal móvil, ésta desarrolla la vibración forzada durante el tiempo de cruce, τ , es decir, durante $t \leq \tau$; posteriormente, la estructura entra en vibración libre hasta llegar al reposo debido al propio amortiguamiento estructural tal y como se muestra en la figura 4.3.

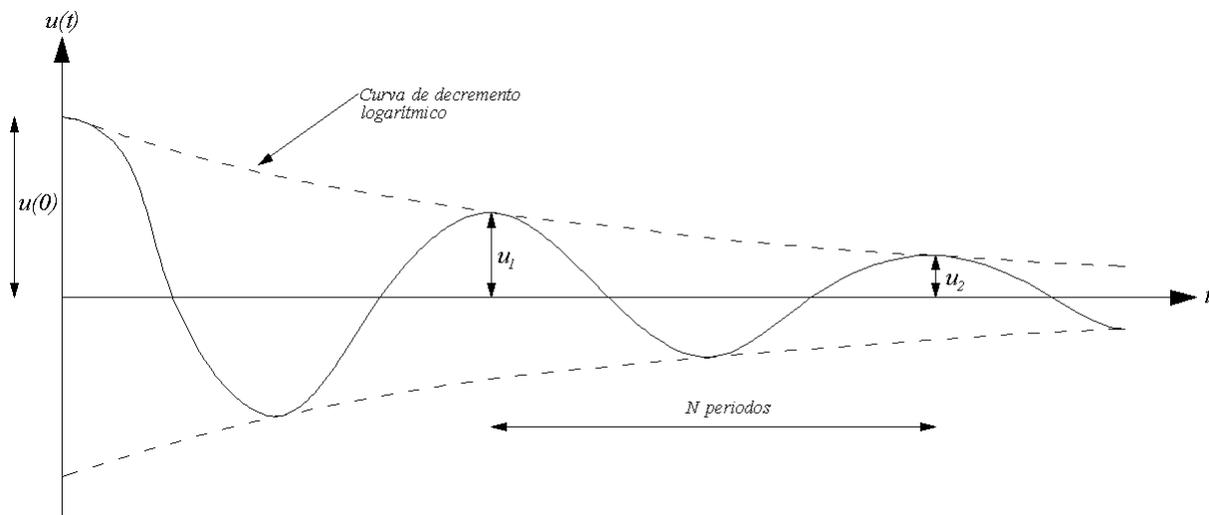


Figura 4.3 Vibración libre subamortiguada de un puente peatonal en cualquier dirección ortogonal durante $t > \tau$ (Bachmann *et al.*, 1995)

Todas las estructuras de interés en la ingeniería civil están dentro de la categoría de sistemas subamortiguados ya que, por lo general, su fracción de amortiguamiento crítico, ζ , es menor a 0.10, es decir, menor a 10 % del amortiguamiento crítico. En la figura 4.3 se muestra la vibración libre subamortiguada que desarrollan los puentes peatonales durante $t > \tau$ en cualquier punto longitudinal, x ; dónde $u(0)$ es el desplazamiento inicial en cualquier dirección ortogonal y que corresponde al desplazamiento $u(\tau)$ durante la vibración forzada y con el cual inicia la vibración libre subamortiguada, u_i es la amplitud máxima de desplazamiento del ciclo vibratorio i ; dónde



$i=1,2,3,\dots$, y N es el número de ciclos o periodos que separa a la amplitud máxima de desplazamiento u_i de la amplitud máxima de desplazamiento u_{i+N} . Con base a la figura 4.3 es posible obtener la fracción de amortiguamiento crítico, ξ , de los puentes peatonales estudiados mediante la ecuación:

$$\xi = \frac{\ln[u_i / u_{i+N}]}{2\pi N} \quad (4.1)$$

El amortiguamiento estructural obtenido con la ecuación 4.1 se aplicó en la respuesta dinámica combinada de los infinitos grados de libertad del puente peatonal, sin embargo, éste es un valor generalizado, por lo que, para evaluar el amortiguamiento estructural para cada modo de vibrar, debe entonces evaluarse de manera separada el decremento logarítmico en cada respuesta modal mediante descomposiciones en el dominio de la frecuencia de la respuesta dinámica combinada, sin embargo, éste es un tema fuera del alcance de esta tesis (Magalhães *et al.*, 2007).

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de las pruebas de vibración realizadas en los puentes peatonales San Bartolo, Salamanca y Pátzcuaro con base al análisis e interpretación de las señales obtenidas. En todos los puentes se determinaron las frecuencias de vibrar críticas en cada dirección y se evaluó si se satisfacía el confort en el caso de las pruebas con cargas peatonales controladas (puentes Salamanca y Pátzcuaro).

4.3.1 Puente peatonal San Bartolo

El puente peatonal San Bartolo sólo fue sometido a una prueba de vibración ambiental sin cargas peatonales. Por lo tanto, sólo resultaron de interés los espectros promedio de Fourier, con los cuales se identificaron las primeras frecuencias estructurales de vibrar en cada dirección ortogonal. En la figura 4.4 se muestra la instrumentación que se hizo en el puente peatonal San Bartolo.



Figura 4.4 Instrumentación del puente peatonal San Bartolo mediante acelerómetros FBA ES-T, Kinematics

Los espectros promedio de Fourier normalizados para cada componente ortogonal del movimiento del puente peatonal San Bartolo se muestran en la figura 4.5.

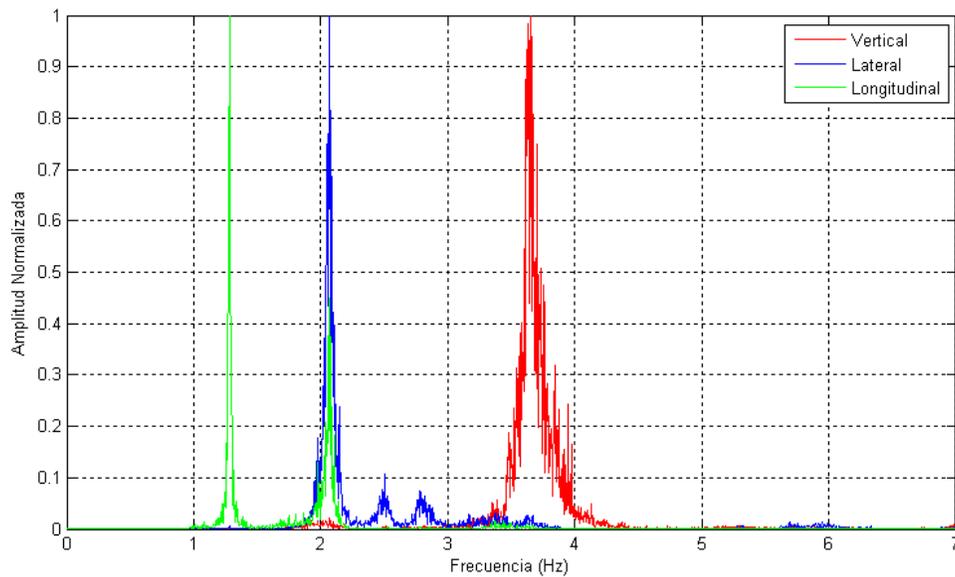


Figura 4.5 Espectros promedios de Fourier normalizados del puente peatonal San Bartolo

De la figura 4.5 se obtienen las frecuencias críticas de vibrar del puente, es decir, aquellas que pueden vibrar en resonancia bajo una carga peatonal móvil. Dichas frecuencias se muestran en la tabla 4.3, donde se omite la primera frecuencia lateral debido a que ésta posee un valor de 2.069 Hz.

Tabla 4.3 Frecuencias críticas de vibrar del puente peatonal San Bartolo para cada dirección ortogonal

Vertical		Lateral		Longitudinal	
j	f_j (Hz)	j	f_j (Hz)	j	f_j (Hz)
1	3.65	-	-	2	2.069

El valor general de la fracción de amortiguamiento crítico estructural, ζ , evaluada en las máximas respuestas dinámicas verticales resultó ser de 0.008 (0.8%).

4.3.2 Puente peatonal Salamanca

La instrumentación realizada en el puente peatonal Salamanca se observa en la figura 4.6.



Figura 4.6 Instrumentación del puente peatonal Salamanca mediante acelerómetros FBA ES-T, Kinometrics



Los espectros promedio de Fourier normalizados de todas las mediciones realizadas para cada componente ortogonal del movimiento se muestran en la figura 4.7.

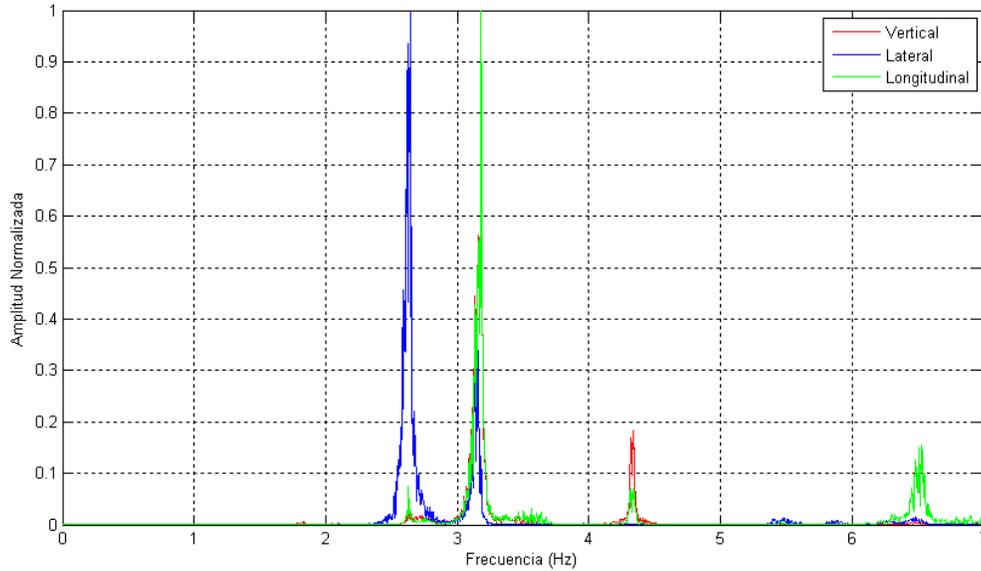


Figura 4.7 Espectros promedio de Fourier normalizados del puente peatonal Salamanca

De la figura 4.7 se obtienen las frecuencias críticas de vibrar del puente, es decir, aquellas que pueden vibrar en resonancia bajo una carga peatonal móvil. Dichas frecuencias se muestran en la tabla 4.4, donde se omite la primera frecuencia lateral debido a que ésta posee un valor de 2.643 Hz.

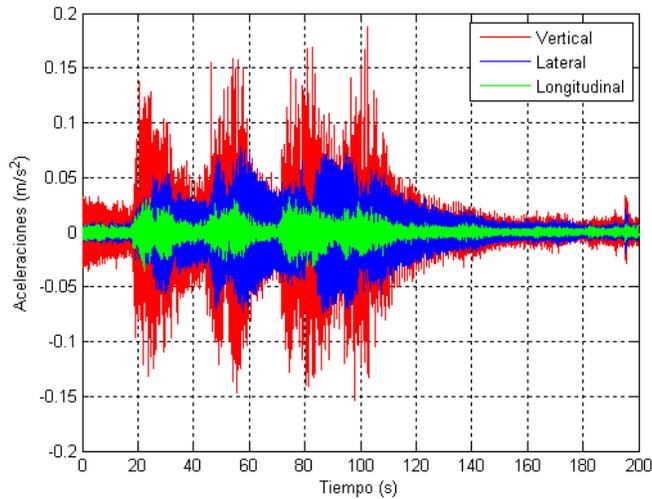
Tabla 4.4 Frecuencias críticas de vibrar del puente peatonal Salamanca para cada dirección ortogonal

Vertical		Lateral		Longitudinal	
j	f_j (Hz)	j	f_j (Hz)	j	f_j (Hz)
1	3.18	-	-	1	3.18

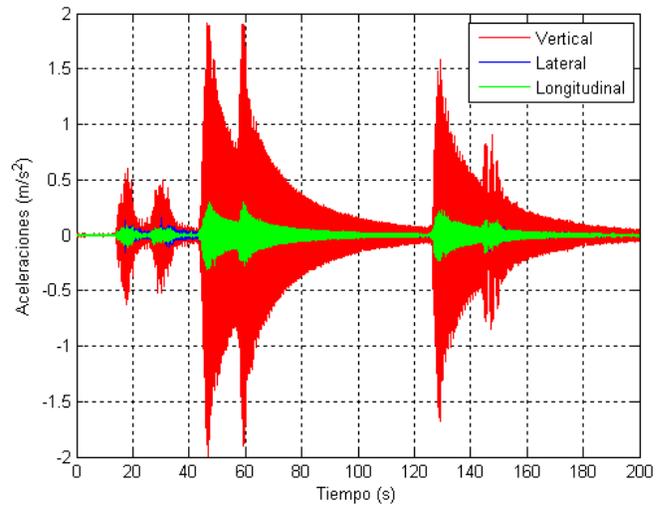
De las pruebas de vibración resultan de interés las mediciones que se realizaron con casos controlados de carga peatonal, ya que con ellas puede revisarse el nivel de confort. Se observó que las vibraciones predominantes se dan en la dirección vertical, donde los aceleraciones



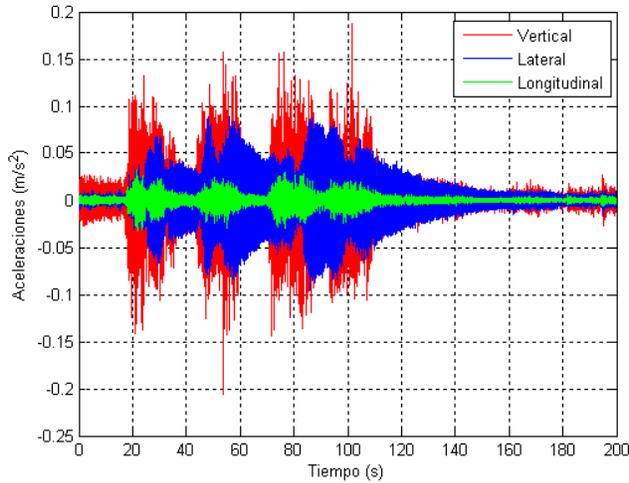
máximas registradas se dieron en el centro del claro; razón por la cual resultan de interés las señales registradas por el acelerómetro cuatro (Figura 4.8).



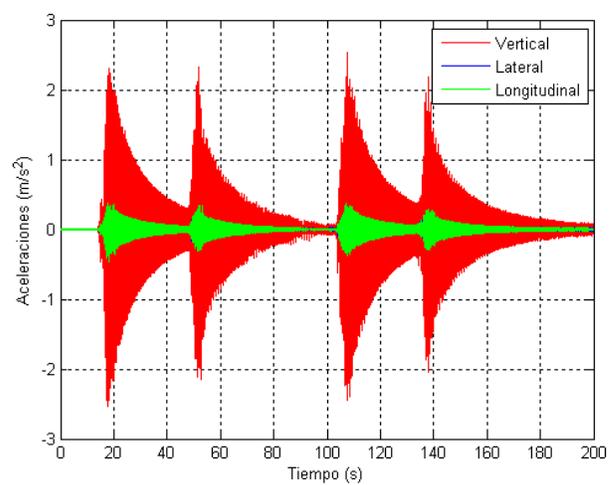
(a) 1 peatón caminando



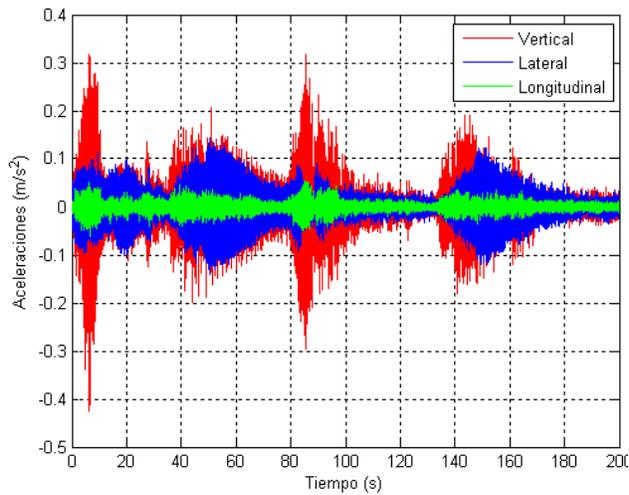
(b) 1 peatón corriendo



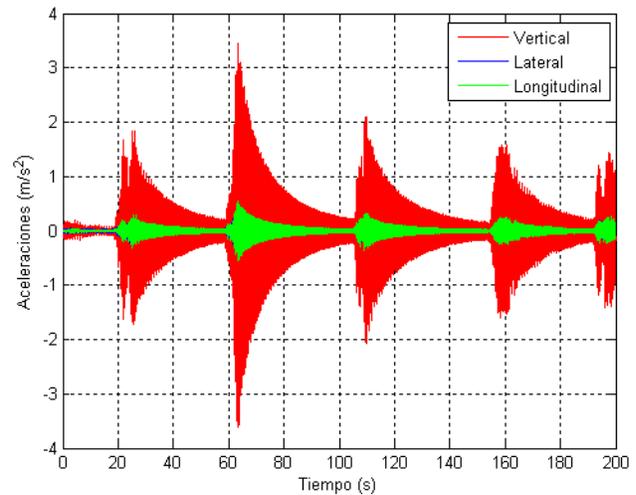
(c) 2 peatones caminando



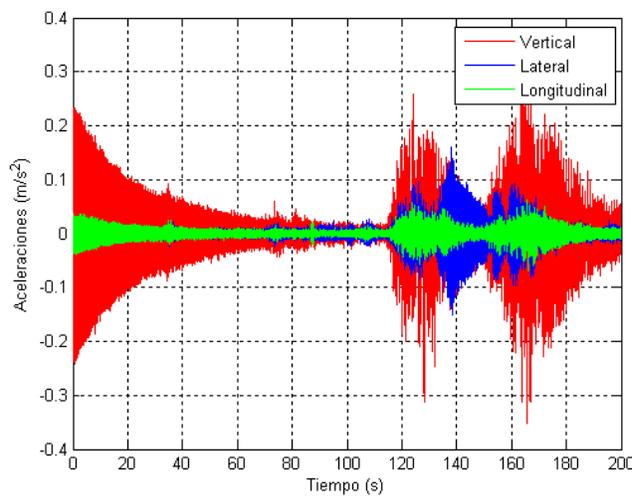
(d) 2 peatones corriendo



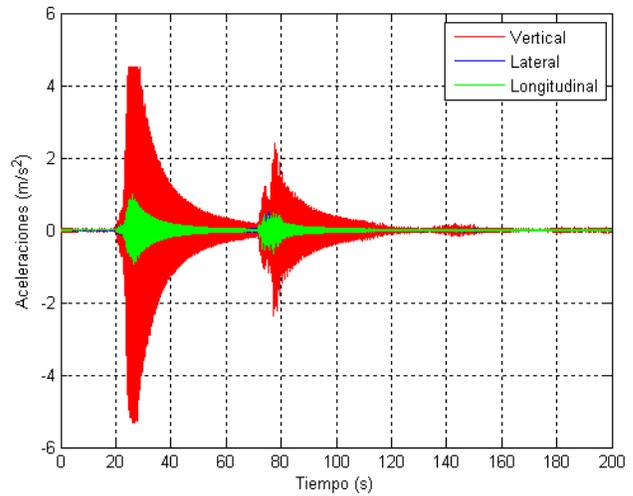
(e) 4 peatones caminando



(f) 4 peatones corriendo



(g) 8 peatones caminando



(h) 8 peatones corriendo

Figura 4.8 Señales registradas al centro del claro del puente peatonal Salamanca (vibración ambiental)

Las aceleraciones verticales máximas de las señales de la figura 4.8 se muestran en la tabla 4.5, dónde se verifica si se satisface el confort. El nivel de confort se considera adecuado cuando las aceleraciones máximas son menores a 0.7 m/s^2 para vibraciones en la dirección vertical y longitudinal, y menores a 0.4 m/s^2 para vibraciones en la dirección lateral.



Tabla 4.5 Aceleraciones máximas de las pruebas in situ de vibración ambiental del puente peatonal Salamanca

Tipo de prueba	Vertical		Lateral		Longitudinal	
	Aceleración máxima (m/s^2)	Nivel de confort aceptable	Aceleración máxima (m/s^2)	Nivel de confort aceptable	Aceleración máxima (m/s^2)	Nivel de confort aceptable
1 peatón caminando	0.1875	✓	0.0774	✓	0.0322	✓
1 peatón corriendo	1.9940	X	0.1731	✓	0.3047	✓
2 peatones caminando	0.2057	✓	0.0950	✓	0.0357	✓
2 peatones corriendo	2.5435	X	0.2538	✓	0.4649	✓
4 peatones caminando	0.4262	✓	0.1425	✓	0.0620	✓
4 peatones corriendo	3.6197	X	0.2819	✓	0.5423	✓
8 peatones caminando	0.3511	✓	0.1597	✓	0.0685	✓
8 peatones corriendo	5.3066	X	0.3737	✓	0.6582	✓

El valor general de la fracción de amortiguamiento crítico estructural, ζ , evaluada en las máximas respuestas dinámicas verticales resultó ser de 0.0037 (0.37%).

4.3.3 Puente peatonal Pátzcuaro

La instrumentación realizada en el puente peatonal Pátzcuaro se observa en la figura 4.9.



Figura 4.9 Instrumentación del puente peatonal Pátzcuaro mediante acelerómetros FBA ES-T, Kinometrics

Los espectros promedio de Fourier normalizados de todas las mediciones realizadas para cada componente ortogonal del movimiento se muestran en la figura 4.10.

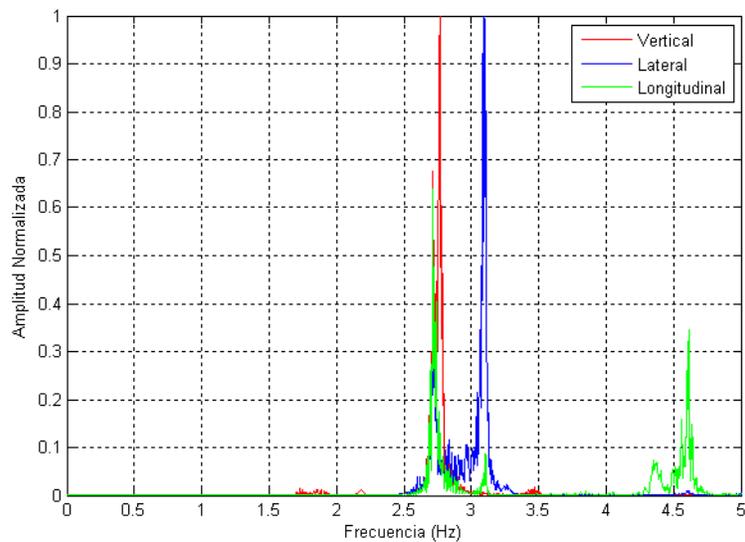


Figura 4.10 Espectros promedio de Fourier normalizados del puente peatonal Pátzcuaro

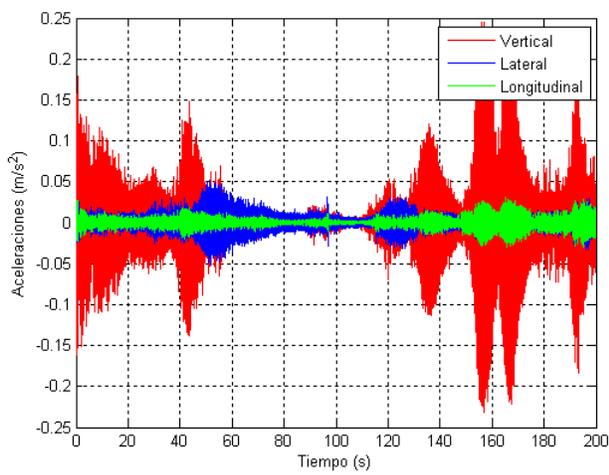
De la figura 4.10 se obtienen las frecuencias críticas de vibrar, es decir, aquellas que pueden vibrar en resonancia bajo una carga peatonal móvil. Dichas frecuencias se muestran en la tabla 4.6, donde se omite la primera frecuencia lateral debido a que ésta posee un valor de 2.716 Hz . Al



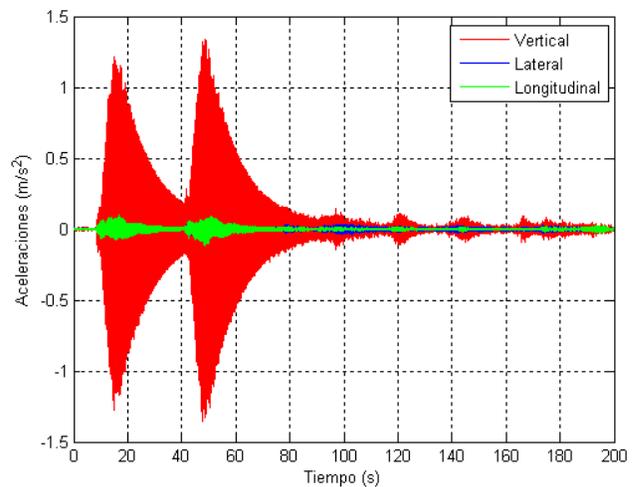
igual que con el puente peatonal Salamanca, se observa que resultan de interés las señales registradas por el acelerómetro cuatro (figura 4.11), debido a la primer forma modal vertical

Tabla 4.6 Frecuencias críticas de vibrar del puente peatonal Pátzcuaro para cada dirección ortogonal

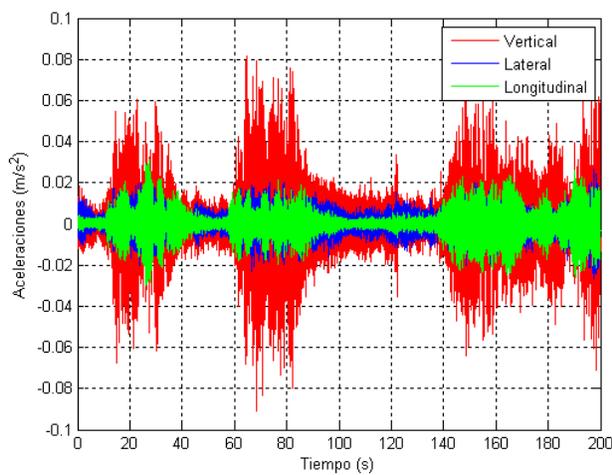
Vertical		Lateral		Longitudinal	
j	f_j (Hz)	j	f_j (Hz)	j	f_j (Hz)
1	2.768	-	-	1	2.716



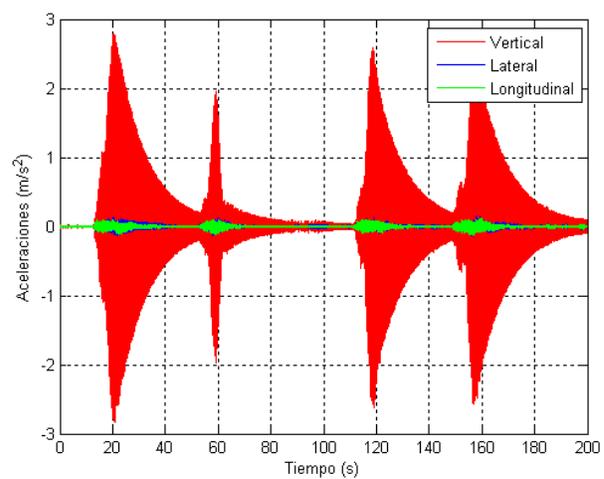
(a) 1 peatón caminando



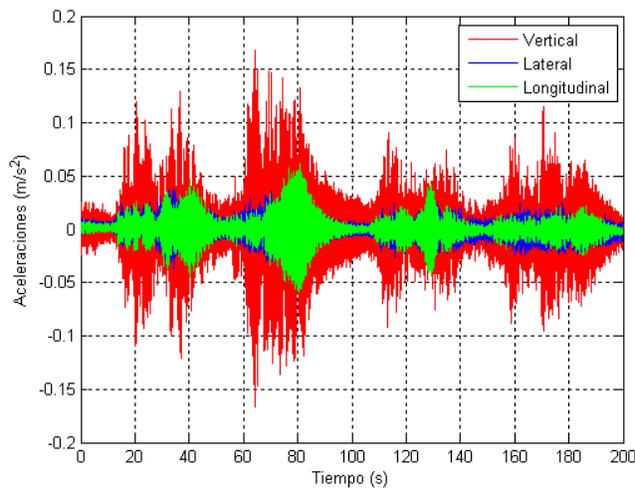
(b) 1 peatón corriendo



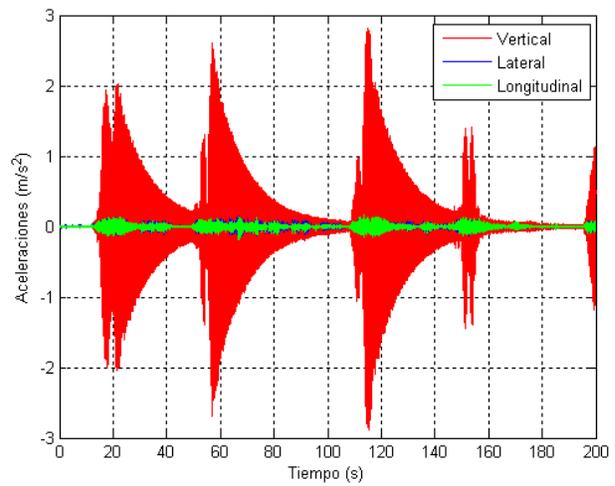
(c) 2 peatones caminando



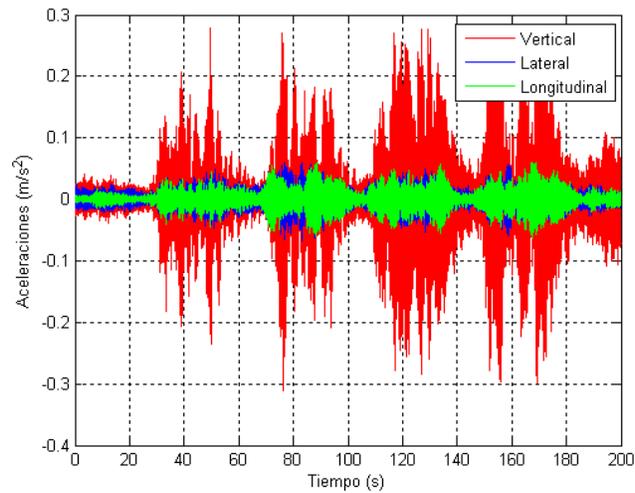
(d) 2 peatones corriendo



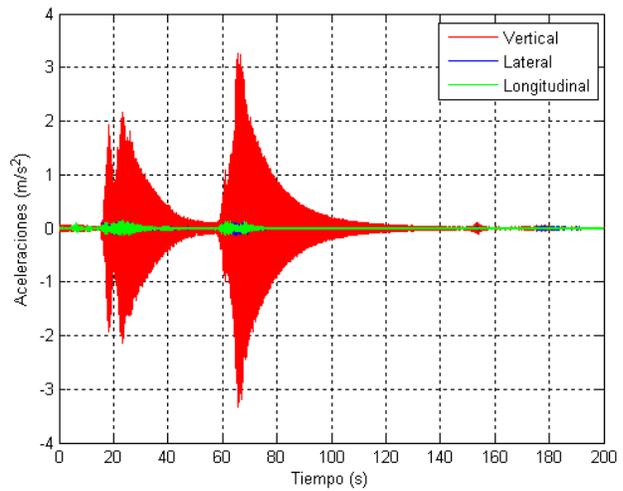
(e) 4 peatones caminando



(f) 4 peatones corriendo



(g) 8 peatones caminando



(h) 8 peatones corriendo

Figura 4.11 Señales registradas al centro del claro del puente peatonal Pátzcuaro (vibración ambiental)

Las aceleraciones verticales máximas de las señales de la figura 4.11 se muestran en la tabla 4.7, dónde se verifica si se satisface el confort. El nivel de confort se considera adecuado cuando las aceleraciones máximas son menores a 0.7 m/s^2 para vibraciones en la dirección vertical y longitudinal, y menores a 0.4 m/s^2 para vibraciones en la dirección lateral.



Tabla 4.7 Aceleraciones máximas de las pruebas in situ de vibración ambiental del puente peatonal Pátzcuaro

Tipo de prueba	Vertical		Lateral		Longitudinal	
	Aceleración máxima (m/s^2)	Nivel de confort aceptable	Aceleración máxima (m/s^2)	Nivel de confort aceptable	Aceleración máxima (m/s^2)	Nivel de confort aceptable
1 peatón caminando	0.2448	✓	0.0520	✓	0.0309	✓
1 peatón corriendo	1.3592	X	0.0503	✓	0.1141	✓
2 peatones caminando	0.0909	✓	0.0266	✓	0.0313	✓
2 peatones corriendo	2.8322	X	0.1570	✓	0.1350	✓
4 peatones caminando	0.1676	✓	0.0385	✓	0.0612	✓
4 peatones corriendo	2.8817	X	0.1641	✓	0.1929	✓
8 peatones caminando	0.3103	✓	0.0677	✓	0.0624	✓
8 peatones corriendo	3.3224	X	0.1532	✓	0.1406	✓

El valor general de la fracción de amortiguamiento crítico estructural, ζ , evaluada en las máximas respuestas dinámicas verticales para los modos críticos de vibrar resultó ser de 0.0045 (0.45%).

4.4 Conclusiones

En los tres puentes peatonales que fueron instrumentados se llegó a la conclusión de que pueden sufrir vibraciones resonantes inducidas por peatones en la dirección vertical y longitudinal, sin embargo, se comprobó que las vibraciones en la dirección longitudinal son mucho menores que



las causadas en la dirección vertical; al grado de que en ningún caso de carga peatonal se rebasa el nivel de confort aceptado para las vibraciones longitudinales. Por otra parte, las vibraciones laterales inducidas por peatones no son problemas para los tres puentes peatonales instrumentados, ya que dichas frecuencias de vibrar se encuentran fuera del intervalo crítico de frecuencias resonantes. Las vibraciones verticales inducidas por peatones son un problema en los tres puentes peatonales instrumentados, particularmente en los puentes peatonales Salamanca y Pátzcuaro; donde se observó en las pruebas de vibración ambiental que se rebasaba el nivel de confort aceptado en todos los casos de carga de peatones que corren. En la tabla 4.8 se comparan las frecuencias de vibrar críticas que se obtuvieron mediante los modelos analíticos en el software SAP 2000 versión 14 y las pruebas de vibración ambiental, notándose que el porcentaje de error entre ambas es muy bajo (entre 1.89 y 3.77 %). Todas las frecuencias de vibrar críticas de la tabla 4.8 corresponden a la primera forma modal en la dirección correspondiente, con excepción de la frecuencia crítica longitudinal del puente peatonal San Bartolo que corresponde al segundo modo de vibrar.

Tabla 4.8 Comparación de las frecuencias de vibrar críticas de los puentes peatonales estudiados obtenidas por modelos analíticos y pruebas de vibración ambiental

Dirección	<i>f</i> (Hz)							
	San Bartolo		Salamanca		Pátzcuaro		Tipo	
	SAP 2000	Vibración ambiental	SAP 2000	Vibración ambiental	SAP 2000	Vibración ambiental	SAP 2000	Vibración ambiental
Vertical	3.5125	3.65	3.0941	3.18	2.6717	2.768	3.4282	-
Lateral	-	-	-	-	-	-	1.3084	-
Longitudinal	1.98	2.069	3.12	3.18	2.6240	2.716	2.8910	-

El amortiguamiento estructural de los puentes peatonales estudiados resultó muy bajo; por lo tanto, la medida más efectiva y económica para controlar las vibraciones verticales inducidas por peatones es mediante la inclusión de amortiguadores de masa sintonizados.



Capítulo 5

Modelo matemático simplificado

5.1 Introducción

Una vez conocidas las propiedades dinámicas de los puentes peatonales estudiados se modelaron matemáticamente por medio de modelos simplificados con el objetivo de obtener nuevamente las propiedades dinámicas verticales, así como la respuesta dinámica en la dirección vertical ante una excitación peatonal. En este capítulo se representan los puentes peatonales estudiados mediante modelos matemáticos simplificados considerándolos como vigas tipo Euler-Bernoulli sometidas simultáneamente a cargas constantes y armónicas en movimiento. Posteriormente la respuesta dinámica vertical obtenida para varios estados de carga peatonal se compara con los límites de confort propuestos por algunas normas internacionales de la especialidad para determinar si las estructuras estudiadas satisfacen el estado límite de servicio.

5.2 Teoría básica de dinámica estructural

El estudio de la dinámica estructural requiere de un modelo o idealización simplificada de la realidad que represente adecuadamente a la estructura de estudio. Los puentes peatonales pueden idealizarse como modelos de vigas cuyas longitudes representan los claros reales que tiene la estructura. La masa, m , rigidez, k , y amortiguamiento, c , de cualquier estructura son propiedades denominadas como parámetros del sistema estructural y en función de las hipótesis que se manejen estos parámetros pueden ser distribuidos o discretos, tal y como se muestra en las figuras 5.1 (a) y 5.1 (b).

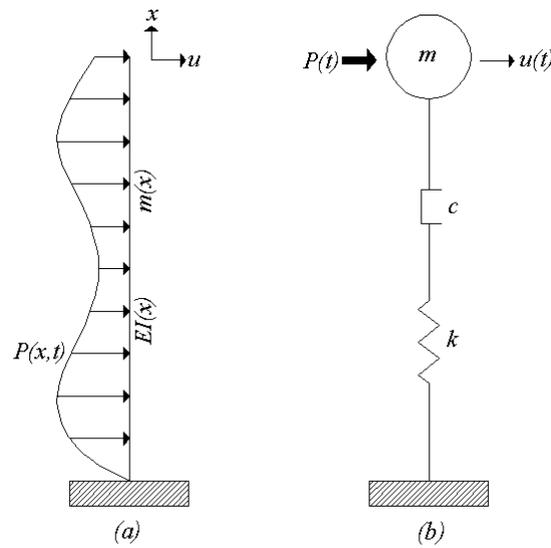


Figura 5.1 (a) Modelo de parámetros distribuidos, (b) Modelo de parámetros discretos

La figura 5.1 (a) es una idealización de un modelo donde tanto los parámetros del sistema (masa, rigidez y amortiguamiento) como la sollicitación o excitación dinámica, $P(t)$, son distribuidos a lo largo del elemento; tal es el caso de una torre que está empotrada en la base o un puente peatonal cuando las condiciones de apoyo cambian. Por otra parte, la figura 5.1 (b) concentra los parámetros en determinados puntos de la estructura; tal es el caso de un tanque elevado que concentra su masa en la parte superior y su rigidez en la estructura que lo soporta.

Un grado de libertad es una coordenada independiente necesaria para especificar la posición o configuración de un sistema estructural en cualquier instante, es decir, son los movimientos que puede tener una estructura. El número de grados de libertad que tenga el modelo o idealización de la estructura real dependerá de las coordenadas que sean de interés en el estudio de la dinámica estructural. Los modos de vibrar de una estructura son las formas en que ésta puede vibrar, y existirán tantos modos de vibrar como grados de libertad en el modelo matemático de la estructura. Los puentes peatonales son sistemas con masa y elasticidad distribuidas (figura 5.1 (a)) que se idealizan con infinitos grados de libertad, sin embargo, existen modelos generalizados de un grado de libertad que ofrecen buenas aproximaciones de la realidad de este tipo de sistemas.



5.2.1 Vibración libre amortiguada

Se dice que una estructura experimenta vibración libre amortiguada cuando es perturbada de su posición de equilibrio estático y después se deja vibrar sin ninguna excitación dinámica externa hasta que dicha vibración decae gracias al amortiguamiento propio que posee la estructura. La vibración libre de un sistema de un grado de libertad se caracteriza por la ecuación diferencial 5.1, donde u es el desplazamiento que experimenta el sistema.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (5.1)$$

De la ecuación 5.1 se tiene que la frecuencia circular fundamental, w_1 , es

$$w_1 = \sqrt{k/m} \quad (\text{rad/s}) \quad (5.2)$$

Dónde para sistemas con más grados de libertad se tiene que:

$$w_j = 2\pi f_j \quad (5.3)$$

La vibración libre tiende a decaer con el tiempo hasta cesar, esto gracias al amortiguamiento estructural, que es una medida de la energía disipada en un ciclo de vibración. El amortiguamiento en estructuras reales a menudo no es estrictamente viscoso (lineal) pero en la mayoría de los casos un coeficiente de amortiguamiento viscoso, c , puede ser usado con resultados satisfactorios. El amortiguamiento suele expresarse en la práctica común como una fracción del amortiguamiento crítico, ξ , y se obtiene mediante la ecuación:

$$\xi = \frac{c}{2mw_j} = \frac{c}{c_{cr}} \quad (5.4)$$

Dónde c_{cr} es el coeficiente de amortiguamiento crítico que representa el valor límite de amortiguamiento a partir del cual una estructura presentará o no movimiento oscilatorio. Este coeficiente se obtiene mediante la ecuación:



$$c_{cr} = 2m\omega_j = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega_j} \quad (5.5)$$

Las estructuras sometidas a vibración libre pueden presentar 3 tipos de movimiento o respuesta dinámica en función del tipo de amortiguamiento que posean (Figura 5.2).

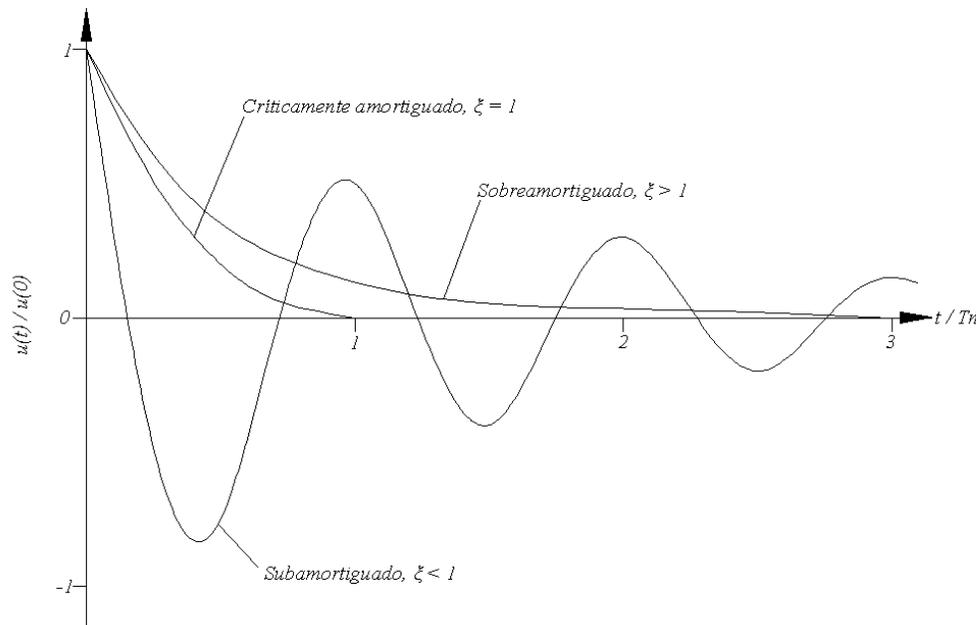


Figura 5.2 Vibración libre de sistemas amortiguados (Chopra, 2014)

En la figura 5.2 se observa que si $c < c_{cr}$ ó $\zeta < 1$, el sistema oscila alrededor de su posición de equilibrio con una amplitud que disminuye progresivamente. Si $c = c_{cr}$ ó $\zeta = 1$, el sistema vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar. Y por último se observa que si $c > c_{cr}$ ó $\zeta > 1$, de nuevo el sistema no oscila y regresa a su posición de equilibrio, como en el caso de $\zeta = 1$ pero a un ritmo más lento. Esto quiere decir que las vibraciones solo se presentarán con sistemas que son subamortiguados, es decir, que su porcentaje de amortiguamiento crítico es menor al 100 %. Todas las estructuras de interés en la ingeniería civil están dentro de la categoría de sistemas subamortiguados ya que, por lo general, su fracción de amortiguamiento crítico, ζ , es menor a 0.10, es decir, menor a 10 % del amortiguamiento crítico.



Para sistemas subamortiguados de un grado de libertad que experimentan vibración libre, la solución de la ecuación del movimiento (ecuación 5.1) está dada por la ecuación 5.6, donde φ es el ángulo de fase y X es la constante de amplitud para el movimiento:

$$u(t) = e^{-\xi w_1 t} X \operatorname{sen}(w_{d1} t + \varphi) \quad (5.6)$$

La frecuencia fundamental circular del sistema subamortiguado, w_{d1} , es:

$$w_{di} = w_j \sqrt{1 - \xi^2} \quad (5.7)$$

Cuando la fracción de amortiguamiento crítico es menor a 10 % ($\xi < 0.1$), se tiene que:

$$w_{dj} \approx w_j \quad (5.8)$$

Considerando como condiciones iniciales un desplazamiento y velocidad en el tiempo cero, la ecuación 5.6 equivale a:

$$u(t) = e^{-\xi w_i t} \left[u_{(0)} \cos(w_{di} t) + \frac{\dot{u}_{(0)} + \xi w_i u_{(0)}}{w_{di}} \operatorname{sen}(w_{di} t) \right] \quad (5.9)$$

Para sistemas con varios grados de libertad, el j -ésimo periodo de vibrar subamortiguado, T_{dj} , se obtiene mediante la ecuación 5.10, donde T_j es el j -ésimo periodo de vibrar sin amortiguamiento:

$$T_{dj} = \frac{T_j}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (5.10)$$

5.2.2 Vibración forzada

La vibración forzada es aquella que se produce en una estructura debido a una fuerza externa que varía con el tiempo, $P(t)$. La ecuación diferencial del movimiento de un sistema de un grado de libertad sometido a vibración forzada es:



$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) \quad (5.11)$$

Las excitaciones dinámicas causantes de la vibración forzada pueden clasificarse en 4 tipos de fuerzas, tal y como se muestra en las figuras 5.3.

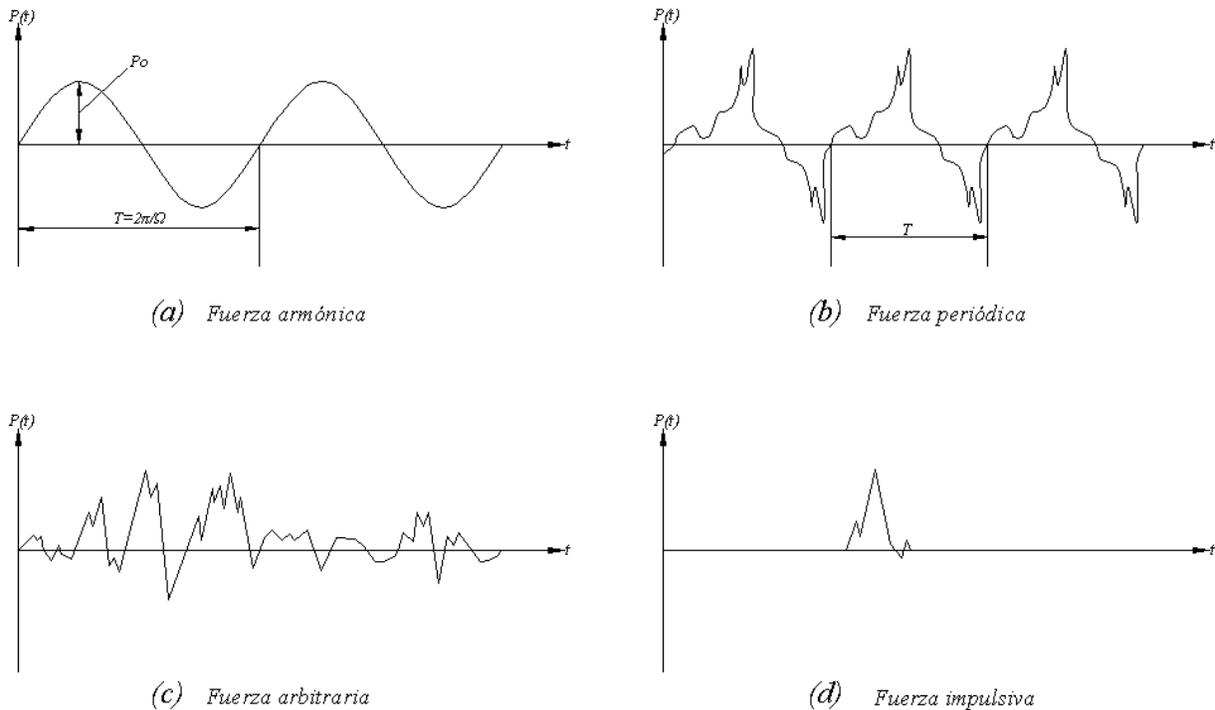


Figura 5.3 Tipos de excitación dinámica causantes de la vibración forzada (Bachmann *et al.* 1995)

La principal causa de vibración de los puentes peatonales es debida a las fuerzas ocasionadas por el paso de los peatones sobre la estructura, la cual es de carácter transitoria; esto quiere decir que no se alcanza el estado estacionario de la vibración forzada. El paso de los peatones consiste en un movimiento rítmico que cuando dura más de 20 segundos, puede considerarse como una fuerza casi periódica. Las fuerzas en función del tiempo causadas por el paso de un peatón se pueden obtener con base a las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3, donde las fuerzas periódicas se descomponen en componentes armónicas mediante series de Fourier. Es importante entonces comprender estos dos tipos de fuerzas dinámicas (armónicas y periódicas) para poder abordar la vibración inducida por peatones.



5.2.2.1 Excitación armónica

Una excitación armónica puede ser causada de diversas formas, como es el caso de la fuerza generada por un motor de máquinas rotatorias. Una fuerza dinámica armónica se representa mediante la figura 5.3 (a) y se obtiene mediante la ecuación 5.12, donde P_o es la máxima amplitud de la fuerza y Ω es la frecuencia circular de la excitación armónica.

$$P(t) = P_o \text{sen}(\Omega t) \quad (5.12)$$

Ignorando el movimiento transitorio inicial, el movimiento estacionario en la vibración forzada se obtiene mediante la ecuación:

$$u(t) = \frac{P_o}{k} \cdot (DMF) \cdot \text{sen}(\Omega t - \varphi) \quad (5.13)$$

Dónde:

$$\tan \varphi = \frac{2\xi \Lambda}{(1 - \Lambda^2)} \quad (5.14)$$

$$\Lambda = \frac{\Omega}{w_1} = \frac{2\pi f_p}{w_1} \quad (5.15)$$

$$DMF = \frac{1}{[(1 - \Lambda^2)^2 + 4\xi^2 \Lambda^2]^{1/2}} \quad (5.16)$$

DMF es el factor de amplificación dinámico denominado así por sus siglas en inglés (Dynamic Magnification Factor), y expresa que tan grande es el desplazamiento dinámico en comparación con el estático (P_o/k). El valor máximo del factor de amplificación dinámico, DMF_{\max} , ocurre cuando:

$$\Omega = w_1(1 - 2\xi^2)^{1/2} \quad (5.17)$$



Cuando $\xi < 0.1$, situación más común en estructuras de la ingeniería civil, la ecuación 5.17 pasa a ser:

$$\Omega \approx \omega_1 \quad (5.18)$$

Dónde:

$$\varphi = 90^\circ \quad (5.19)$$

La ecuación 5.18 representa el fenómeno de la resonancia, bajo el cual:

$$DMF_{\max} \approx \frac{1}{2\xi} \quad (5.20)$$

5.2.2.2 Excitación periódica

Cualquier fuerza periódica como la mostrada en la figura 5.3 (b), posee un periodo de vibrar, T , que se repite de forma indefinida durante el tiempo que dura la excitación. Ésta fuerza puede ser descompuesta en una parte constante y en infinitas series de contribuciones de fuerza armónica, las cuales, cuando son superpuestas, resultan en el total de la función periódica dada. Ésta descomposición armónica se realiza mediante series de Fourier (Chopra, 2014):

$$P(t) = P + \sum_{i=1}^{\infty} [a_i \cos(i\Omega t) + b_i \text{sen}(i\Omega t)] \quad (5.21)$$

Dónde:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad (5.22)$$

$$a_i = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \cdot \cos(i\Omega t) dt \quad (5.23)$$

$$b_i = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \cdot \text{sen}(i\Omega t) dt \quad (5.24)$$



Una forma alternativa de escribir el i -ésimo componente armónico de la fuerza periódica es:

$$P_i(t) = a_i \cos(i\Omega t) + b_i \operatorname{sen}(i\Omega t) = A_i \operatorname{sen}(i\Omega t - \varphi_i) \quad (5.25)$$

Dónde:

$$A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \quad (5.26)$$

$$\varphi_i = -\tan^{-1}(a_i / b_i) \quad (5.27)$$

Para propósitos prácticos las series de Fourier son expresadas mediante la ecuación 5.28, la cual tiene la misma forma que la ecuación de la fuerza vertical ejercida por un peatón (ecuación 2.1).

$$P(t) = P + \sum_{i=1}^{\infty} P \alpha_i \operatorname{sen}(i\Omega t - \varphi_i) \quad (5.28)$$

La ecuación 5.28 es la representación de una función periódica, y puede representarse como se muestra en la figura 5.4.

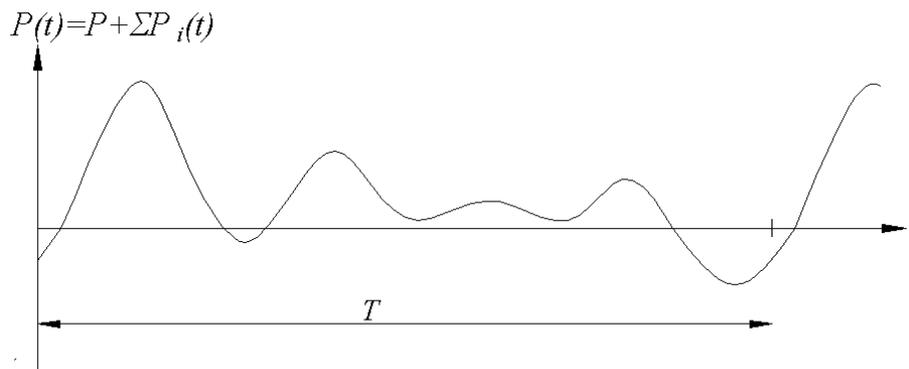


Figura 5.4 Ejemplo de una función periódica (Bachmann *et al.* 1995)

La función periódica mostrada en la figura 5.4 es el resultado de una superposición de varias ondas o componentes armónicos. En la figura 5.5 se muestra la descomposición de dicha función periódica como una sumatoria de 4 componentes armónicos más una fuerza constante P .

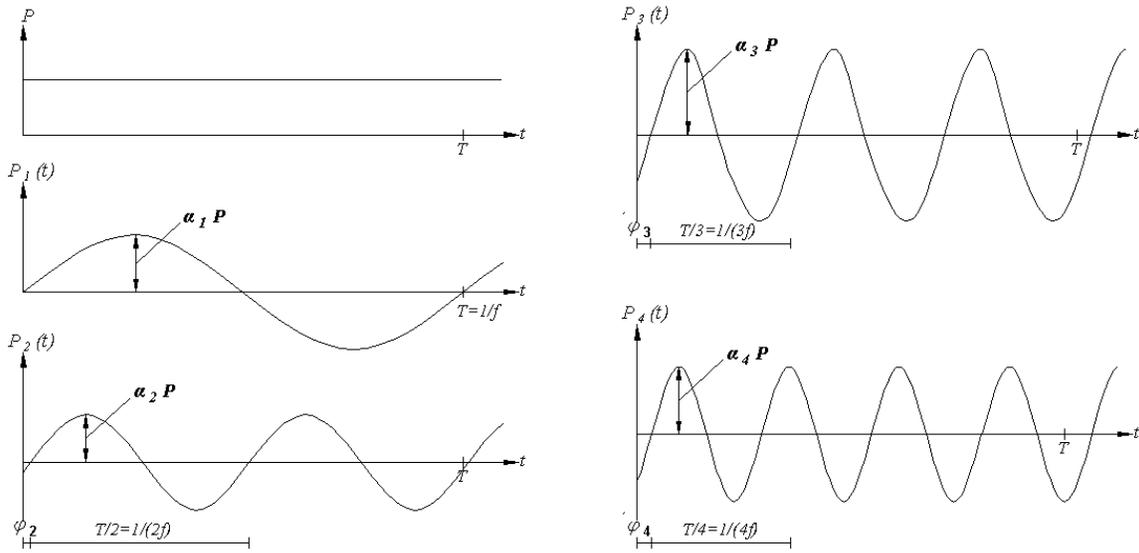


Figura 5.5 Descomposición de Fourier de una función periódica (Bachmann *et al.* 1995)

El número de componentes armónicas a considerar dependerá de la frecuencia estructural del puente peatonal que puede vibrar en resonancia. Aplicando la transformada discreta de Fourier a la función periódica de la figura 5.4, es posible obtener su espectro de amplitudes de Fourier (Figura 5.6), mediante el cual se muestra el contenido de frecuencias de dicha función.

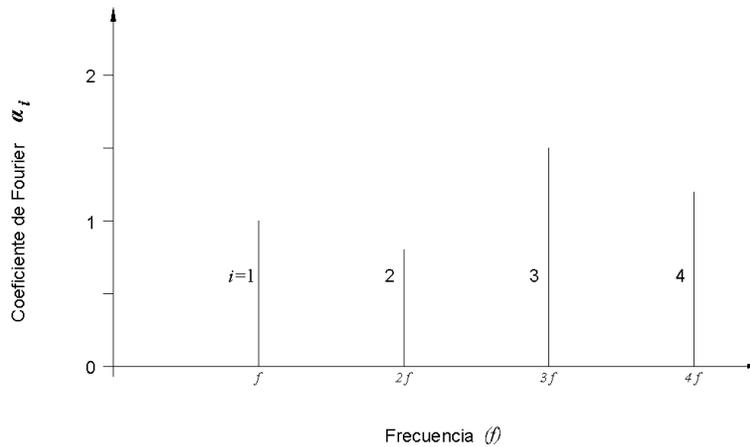


Figura 5.6 Espectro de amplitudes discreto de Fourier (coeficientes) de la función de la figura 5.4 (Bachmann *et al.* 1995)



5.3 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada

El análisis de una viga en voladizo, que trabaja a flexión (viga Euler-Bernoulli), es utilizado para modelar edificios con muros de corte; mientras que el estudio de marcos conformados por vigas y columnas pueden ser modelados como vigas en voladizo que trabajan a corte (viga de Timoshenko). Para estudiar edificios compuestos por vigas, columnas y muros de corte puede utilizarse el modelo de una viga de corte acoplada a una de flexión. La viga de flexión o Euler-Bernoulli es un sistema continuo de infinitos grados de libertad que se utiliza para modelar vigas muy esbeltas cuya falla suele ser por flexión, mientras que la viga de corte o Timoshenko se utiliza para modelar vigas gruesas cuya falla tiende a ser por cortante (Falconi, 2008).

Los puentes peatonales son estructuras esbeltas, es decir, su claro es muy grande con respecto a las dimensiones de su sección transversal, por lo tanto su comportamiento es a flexión y pueden ser modelados como vigas tipo Euler-Bernoulli.

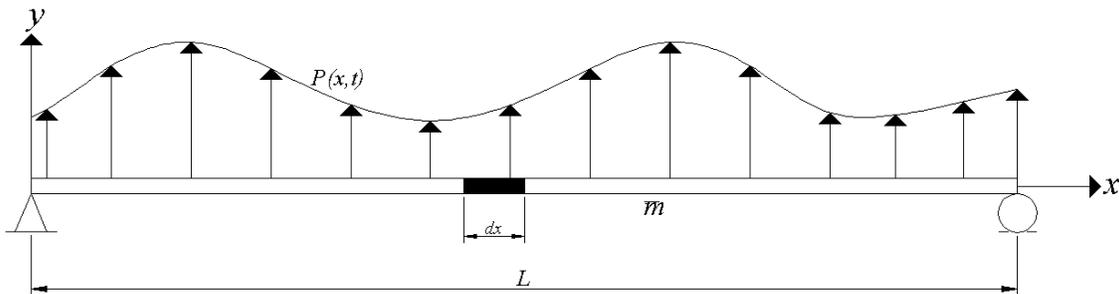


Figura 5.7 Viga Euler-Bernoulli simplemente apoyada con carga transversal al eje del elemento

La figura 5.7 representa un sistema continuo de infinitos grados de libertad de una viga de flexión (Euler-Bernoulli) simplemente apoyada con parámetros distribuidos; dónde $P(x,t)$ es la carga externa que varía con el tiempo y con respecto a la longitud de la viga, \bar{m} es la masa por unidad de longitud de la viga, y L es la longitud de la viga. Para encontrar la ecuación diferencial de movimiento es necesario considerar un elemento diferencial de longitud dx , como el mostrado en la figura 5.8, dónde V y M representan respectivamente la fuerza cortante y el momento flexionante a la izquierda del elemento diferencial, y dónde únicamente se representa el primer



término de variación de la serie de Taylor para el cortante y el momento flexionante a la derecha del elemento diferencial

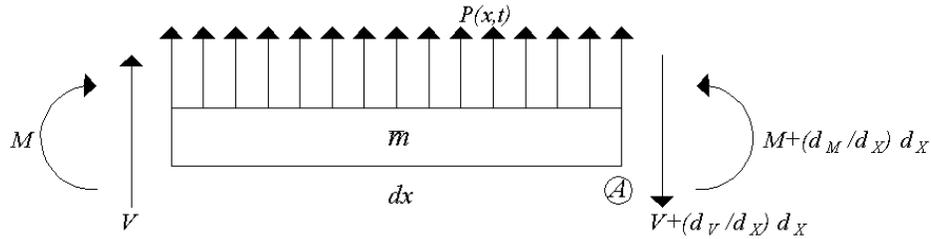


Figura 5.8 Elemento diferencial de longitud de una viga de flexión y cargas actuantes

Del equilibrio de fuerzas verticales se tiene que:

$$V - \left(V + \frac{dV}{dx} dx \right) + P dx - \bar{m} dx \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad (5.29)$$

Dónde $y(x,t)$ es el desplazamiento vertical en el punto longitudinal x y en el instante de tiempo t . Simplificando la ecuación 5.29 y dividiéndola entre dx se tiene que:

$$\frac{dV}{dx} = P - \bar{m} \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (5.30)$$

Del equilibrio de momentos con respecto al punto A en la figura 5.8, se tiene que:

$$V dx + M + \frac{P(dx)^2}{2} - \left(M + \frac{dM}{dx} dx \right) = 0 \quad (5.31)$$

Por ser un elemento diferencial, se puede considerar que dx elevado al cuadrado es igual a cero. Luego de simplificar los momentos y dividiendo por dx , se halla que:

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (5.32)$$

De la resistencia de materiales se conoce que:



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI(x)} \therefore M = EI(x) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (5.33)$$

Derivando esta última expresión se obtiene el cortante como sigue:

$$V = \frac{d}{dx} \left[EI(x) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \right] \therefore V = E \frac{dI(x)}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} + EI(x) \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} \quad (5.34)$$

Ahora al derivar la ecuación 5.34 y reemplazarla en la ecuación 5.30 se halla que:

$$EI(x) \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} + 2E \frac{dI(x)}{dx} \frac{d^3 y}{dx^3} + E \frac{d^2 I(x)}{dx^2} \frac{d^2 y}{dx^2} = P - \bar{m} \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (5.35)$$

La ecuación 5.35 es la ecuación diferencial general para una viga de flexión de inercia variable sin amortiguamiento estructural que está sujeta a cargas transversales al eje, dónde I es el momento de inercia de flexión de la sección transversal de la viga (con respecto al eje z), y E es el módulo de elasticidad del material. Para elementos de sección constante, la derivada del momento de inercia de flexión con respecto a x es cero, con lo que la ecuación 5.35 queda como:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + \bar{m} \frac{d^2 y}{dt^2} = P \quad (5.36)$$

Las derivadas de la ecuación 5.36 son parciales, ya que y es función de x y t . Por lo tanto, la ecuación 5.36 se escribe como:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P \quad (5.37)$$

5.3.1 Vibración libre

Para el caso de la vibración libre se tiene que la fuerza transversal $P = 0$. Por lo tanto, la ecuación diferencial de movimiento de una viga de flexión (Euler-Bernoulli) de sección transversal constante sin considerar el amortiguamiento estructural es:



$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + \bar{m} \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad (5.38)$$

Se puede plantear la solución de la ecuación 5.38 como el producto de una función modal $\phi(x)$ por una función del tiempo $\eta(t)$, denominada como desplazamiento generalizado; es decir, se aplica una separación de variables a la solución $y(x,t)$, tal como se muestra en la ecuación 5.39.

$$y(x,t) = \phi(x) \eta(t) \quad (5.39)$$

Al obtener la derivada cuarta de y con respecto de x , y la derivada segunda de y con respecto al tiempo, t , y al reemplazar en la ecuación 5.38 se halla que:

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4} y(t) + \frac{\bar{m}}{EI} \phi(x) \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad (5.40)$$

Al dividir la ecuación 5.40 entre $\phi(x)$ se halla que:

$$\frac{\frac{d^4 \phi}{dx^4}}{\phi(x)} = - \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\frac{d^2 y}{dt^2}}{y(t)} \quad (5.41)$$

El lado izquierdo de la ecuación 5.41 sólo depende de la variable x , y el lado derecho depende de la variable t . Luego para que se cumpla la ecuación 5.41 es importante y necesario que se iguale a una constante β^4 .

$$\frac{\frac{d^4 \phi}{dx^4}}{\phi(x)} = - \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\frac{d^2 y}{dt^2}}{y(t)} = \beta^4 \quad (5.42)$$

Entonces el problema de vibración libre definido en la ecuación 5.38 se ha desacoplado en 2 problemas que son:



$$\frac{d^4 \phi}{dx^4} = \beta^4 \therefore \frac{d^4 \phi}{dx^4} - \beta^4 \cdot \phi(x) = 0 \quad (5.43)$$

$$-\frac{\bar{m}}{EI} \frac{d^2 y}{dt^2} = \beta^4 \therefore \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{EI}{\bar{m}} \beta^4 \cdot y(t) = 0 \quad (5.44)$$

Se observa que la ecuación 5.44 representa un problema de vibración libre sin amortiguamiento en un sistema de un grado de libertad, pero para ello debe cumplirse que:

$$w_j^2 = \frac{EI}{\bar{m}} \beta^4 \quad (5.45)$$

Por lo tanto, para encontrar la j -ésima frecuencia circular del sistema, w_j , se debe calcular primero el valor de la constante β mediante la ecuación 5.43 cuya solución es:

$$\phi(x) = A \operatorname{sen}(\beta x) + B \cos(\beta x) + C \operatorname{senh}(\beta x) + D \operatorname{cosh}(\beta x) \quad (5.46)$$

La ecuación 5.46 permite obtener la forma modal de una viga de flexión, $\phi(x)$, donde A , B , C y D son las constantes de integración que dependen de las condiciones de frontera. Para el caso de una viga simplemente apoyada como la mostrada en la figura 5.7, las condiciones de frontera son:

$$i. \text{ En } x=0 \quad \phi(x)=0 \quad (5.47)$$

$$ii. \text{ En } x=0 \quad M(x)=0 \quad (5.48)$$

$$iii. \text{ En } x=L \quad \phi(x)=0 \quad (5.49)$$

$$iv. \text{ En } x=L \quad M(x)=0 \quad (5.50)$$

Las condiciones de frontera mostradas en las ecuaciones 5.47 a 5.50 conducen al planteamiento del siguiente sistema de ecuaciones:



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \operatorname{sen}(a) & \cos(a) & \operatorname{senh}(a) & \operatorname{cosh}(a) \\ -\operatorname{sen}(a) & -\cos(a) & \operatorname{senh}(a) & \operatorname{cosh}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = 0 \quad (5.51)$$

Mediante el procedimiento del determinante se halla que el polinomio característico es:

$$\operatorname{sen}(a) \operatorname{senh}(a) = 0 \quad (5.52)$$

Dónde:

$$a = \beta L \quad (5.53)$$

Las raíces de la ecuación 5.52 son:

$$a_1 = \pi \quad (5.54)$$

$$a_2 = 2\pi \quad (5.55)$$

$$a_3 = 3\pi \quad (5.56)$$

Las ecuaciones 5.54 a 5.56 representan las soluciones de la ecuación 5.52. En general se tiene que la solución de la ecuación 5.52 se puede expresar mediante la ecuación 5.57 donde j representa el número de modo de vibrar de interés.

$$a_j = j\pi \quad (5.57)$$

Reemplazando las ecuaciones 5.53 y 5.57 en la ecuación 5.45 se encuentra que las j -ésimas frecuencias circulares de vibrar de una viga tipo Euler-Bernoulli simplemente apoyada, se obtienen mediante la ecuación:

$$w_j = \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}} \left(\frac{j\pi}{L} \right)^4} \quad (5.58)$$



De las dos primeras condiciones de frontera se concluye que:

$$B = D = 0 \quad (5.59)$$

Luego quedan dos ecuaciones dependientes, al imponer $A=1$ se encuentra que:

$$C = -\frac{\text{sen}(a)}{\text{senh}(a)} \quad (5.60)$$

Para encontrar las formas modales se debe reemplazar el valor de las constantes de integración en la ecuación 5.46, de tal manera que las j -ésimas formas modales de una viga tipo Euler-Bernoulli simplemente apoyada se obtienen mediante la ecuación 5.61.

$$\phi_j(x) = \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) - \left[\frac{\text{sen}(j\pi)}{\text{senh}(j\pi)}\right] \text{senh}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \approx \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (5.61)$$

5.3.2 Vibración forzada

La vibración inducida por personas en puentes peatonales simplemente apoyados de sección transversal constante se puede obtener mediante modelos matemáticos simplificados de vigas Euler-Bernoulli donde la carga peatonal es modelada como una carga constante y una carga armónica que cruzan simultáneamente sobre el puente peatonal a una velocidad constante. El caso en que una viga Euler-Bernoulli es sometida a una carga constante en movimiento fue resuelto por A.N. Krylov y posteriormente por S.P.Timoshenko, C.E.Inglis y V.Kolousek; mientras que el caso en que una viga Euler-Bernoulli es sometida a una carga armónica en movimiento fue resuelto por S.P.Timoshenko y posteriormente trabajado en detalle por C.E.Inglis y V.Kolousek. Los resultados de ambos problemas fueron mostrados por Ladislav Frýba (1999) mediante la aplicación del método de las integrales transformadas y los extendió a todos los casos posibles de velocidad y amortiguamiento viscoso. La vibración vertical resultante ante cargas peatonales se obtiene mediante la superposición de la vibración forzada de ambos casos (carga constante en movimiento y carga armónica en movimiento).



5.3.2.1 Carga constante en movimiento

Una carga externa de magnitud constante, P , que se desplaza a una velocidad constante, V_o , sobre una viga uniforme tipo Euler-Bernoulli simplemente apoyada de longitud, L , se puede representar mediante la figura 5.9. Este problema fue resuelto por Frýba (1999).

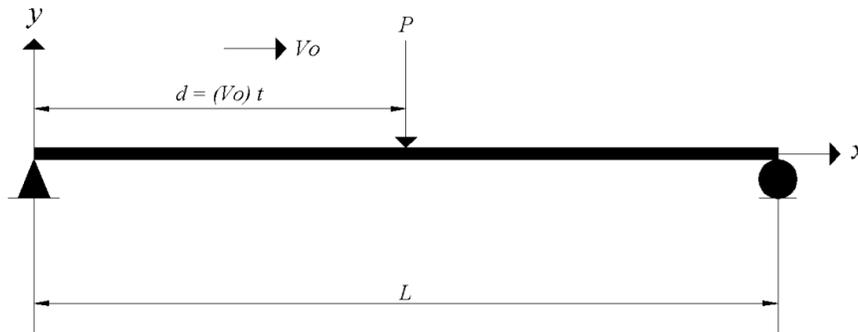


Figura 5.9 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada sujeta a una carga constante en movimiento

El sistema estructural mostrado en la figura 5.9 entrará en vibración debido a la carga constante en movimiento. Para plantear la ecuación diferencial de movimiento que gobierna este problema de vibración forzada es necesario tomar en cuenta las siguientes hipótesis:

- i. El comportamiento de la viga es descrito por la ecuación diferencial de Euler-Bernoulli deducida bajo el supuesto de la teoría de pequeñas deformaciones, ley de Hooke, la hipótesis de Navier y el principio de Saint-Venant. La viga es de sección transversal constante y masa constante por unidad de longitud.
- ii. La masa de la carga en movimiento es pequeña comparada con la masa de la viga; esto significa que solo se considerarán los efectos gravitacionales de la carga.
- iii. La carga se mueve a una velocidad constante de izquierda a derecha.
- iv. El amortiguamiento de la viga es proporcional a la velocidad de vibración.
- v. El cálculo se realizará para una viga simplemente apoyada, lo cual implica que en ambos extremos de la viga, la deflexión y el momento flexionante son cero. Adicionalmente, en



el instante de llegada de la fuerza, la viga está en reposo; de tal manera que antes de la llegada de la fuerza, la viga no posee deflexión ni velocidad.

Ante las hipótesis anteriores, la ecuación diferencial del movimiento que gobierna el problema dinámico de la figura 5.9 es la mostrada en la ecuación:

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + 2\bar{m} \xi w_1 \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \delta(x - V_o t) P \quad (5.62)$$

Dónde $\delta(x - V_o t)$ representa la función de Dirac, que es una función generalizada que expresa matemáticamente a la carga concentrada que se desplaza mediante la ecuación:

$$P(x,t) = \delta(x) \cdot P \quad (5.63)$$

La función de Dirac no es una función en el sentido convencional. Es llamada una función generalizada y puede ser definida como la derivada de la función de distribución Heaviside, mejor conocida como función de escalón unitario ($H(x)$). La función de Dirac puede representarse por medio de la ecuación:

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx} \quad (5.64)$$

Dónde:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (5.65)$$

Las ecuaciones 5.66 a 5.68 son relaciones válidas para la función de Dirac, dónde a, b, ε denotan constantes y $f(x)$ es una función continua en el intervalo $\langle a \ b \rangle$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (5.66)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x) \cdot dx = f(a) \quad (5.67)$$

$$\int_a^b \delta(x-\varepsilon)f(x) \cdot dx = \begin{cases} 0, & \varepsilon < a < b \\ f(\varepsilon), & a < \varepsilon < b \\ 0, & a < b < \varepsilon \end{cases} \quad (5.68)$$

Para la enésima derivada generalizada de la función de Dirac, ésta se expresa de manera general mediante la ecuación:

$$\int_a^b \delta^{(n)}(x-\varepsilon)f(x) \cdot dx = \begin{cases} 0, & \varepsilon < a < b \\ (-1)^n \cdot f^{(n)}(\varepsilon), & a < \varepsilon < b \\ 0, & a < b < \varepsilon \end{cases} \quad (5.69)$$

Substituyendo la función $\varphi(x)$ que tiene un valor de cero en un único punto ε [$\varphi(x) = 0$] se tiene que:

$$\partial[\varphi(x)] = \frac{1}{|\varphi'(\varepsilon)|} \delta(x-\varepsilon) \quad (5.70)$$

En el caso especial de $\varphi(x) = ax$ se tiene que:

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x) \quad (5.71)$$

Las ecuaciones 5.63 a 5.71 son propiedades de la función de Dirac que resultan de utilidad para resolver la ecuación 5.62. La viga de la figura 5.9 es simplemente apoyada por lo que las condiciones de frontera son las mismas que las expresadas en las ecuaciones 5.47 a 5.50; donde el momento flexionante, M , es la segunda derivada de $y(x,t)$ con respecto de x . Las condiciones iniciales para la viga simplemente apoyada tipo Euler-Bernoulli de la figura 5.9 se muestran en las ecuaciones 5.72 y 5.73.



$$y(x, t) = 0 \tag{5.72}$$

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \tag{5.73}$$

La ecuación 5.62 se resuelve tomando en cuenta las condiciones de frontera (ecuaciones 5.47 a 5.50) y las condiciones iniciales (ecuaciones 5.72 y 5.73) mediante el método de transformadas de Fourier, es decir, se lleva la ecuación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia y se resuelve. Cada término de la ecuación 5.62 será primero multiplicado por $\text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$, y posteriormente se integra con respecto a x desde 0 hasta L . Se hace uso de las relaciones fundamentales de la integral transformada seno de Fourier mostradas en las ecuaciones 5.74 y 5.75, dónde $Y(j, t)$ es la transformada de Fourier de $y(x, t)$, y $j = 1, 2, 3, \dots$.

$$Y(j, t) = \int_0^L y(x, t) \cdot \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx \tag{5.74}$$

$$y(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^{\infty} Y(j, t) \cdot \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \tag{5.75}$$

En base a las ecuaciones 5.74 y 5.75 es posible utilizar las transformadas de Fourier mostradas en las ecuaciones 5.76 a 5.79 de la tabla 5.1; dónde la ecuación 5.76 representa a las ecuaciones 5.74 y 5.75.

Tabla 5.1 Transformadas seno de Fourier (Frýba, 1999)

Original	Transformada	No. ecuación
$f(x) = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^{\infty} F(j) \cdot \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$	$F(j) = \int_0^L f(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) dx$	(5.76)



$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \text{ para } f_{(0)} = f_{(L)} = 0$	$-\frac{j^2 \pi^2}{L^2} F(j)$	(5.77)
$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} \text{ para } f_{(0)} = f_{(L)} = f''_{(0)} = f''_{(L)} = 0$	$\frac{j^4 \pi^4}{L^4} F(j)$	(5.78)
$\delta(x-a)$	$\text{sen}\left(\frac{j\pi a}{L}\right)$	(5.79)

Mediante el procedimiento definido, usando las condiciones de frontera, las condiciones iniciales, la propiedad de la función de Dirac mostrada en la ecuación 5.67 y las transformadas de Fourier de las ecuaciones 5.77 a 5.79, se obtiene a partir de la ecuación 5.62 la ecuación 5.80; dónde $\ddot{Y}(j,t)$ es la segunda derivada y $\dot{Y}(j,t)$ es la primer derivada de la transformada seno de Fourier $Y(j,t)$.

$$EI \frac{j^4 \pi^4}{L^4} Y(j,t) + \bar{m} \ddot{Y}(j,t) + 2\bar{m} \xi w_1 \dot{Y}(j,t) = P \text{sen}\left(\frac{j\pi V_o t}{L}\right) \quad (5.80)$$

La frecuencia circular del j -ésimo modo de vibrar de la viga Euler Bernoulli de la figura 5.9 se obtiene mediante la ecuación 5.58 y con base a ésta es posible obtener la j -ésima frecuencia de vibrar, f_j , en Hz mediante la ecuación:

$$f_j = \frac{w_j}{2\pi} = \frac{j^2 \pi}{2L^2} \left(\frac{EI}{\bar{m}}\right)^{1/2} \quad (5.81)$$

Usando la notación anterior se puede reordenar la ecuación 5.80 para reescribirla tal y como se muestra en la ecuación:

$$\ddot{Y}(j,t) + 2\xi w_1 \dot{Y}(j,t) + w_{(j)}^2 \cdot Y(j,t) = \frac{P}{\bar{m}} \text{sen}\left(\frac{j\pi V_o t}{L}\right) \quad (5.82)$$



Para resolver la ecuación 5.82 se aplica el método de la integral transformada de Laplace-Carson y multiplicándola por e^{-pt} , dónde p representa una variable en el plano complejo. Posteriormente se integra cada uno de estos términos con respecto a t desde 0 hasta ∞ , y luego se multiplican por p . En la tabla 5.2 se presentan las transformadas de Laplace-Carson dónde a, b, c son constantes, n es un contador entero, i representa un número imaginario cuyo valor es igual a $\sqrt{-1}$, $f(t)$ es la función original y $F(p)$ es la transformada de Laplace-Carson en el plano complejo de dicha función original.

Tabla 5.2 Transformadas Laplace-Carson (Frýba, 1999)

Transformada	Original	No. ecuación
$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$	$f_{(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp$	(5.83)
a	a	(5.84)
$p^n F(p) - p^n f_{(0_+)} - p^{n-1} \frac{df_{(0_+)}}{dt} - \dots - p \frac{d^{n-1} f_{(0_+)}}{dt^{n-1}}$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	(5.85)
$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \text{sen}(at)$	(5.86)
$\frac{p}{(p^2 + c^2) [(p+a)^2 + b^2]}$	$\frac{1}{(a^2 + b^2 - c^2)^2 + 4a^2 c^2} \left[\begin{array}{l} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c} \text{sen}(ct) - \\ \frac{b^2 - a^2 - c^2}{b} e^{-at} \text{sen}(bt) - \\ 2a(\cos(ct) - e^{-at} \cos(bt)) \end{array} \right]$	(5.87)

Aplicando la ecuación 5.83 a la ecuación 5.82 se obtienen las ecuaciones 5.88 y 5.89; dónde $Y^*(j, p)$ es la integral transformada de Laplace-Carson de la transformada $Y(j, t)$. a_0 significa que la integración es llevada a cabo a lo largo de una línea recta paralela al eje imaginario que se



extiende a la derecha de todas las singularidades de la función de la variable compleja $\frac{e^{pt} \cdot Y(j,t)}{p}$ (el argumento real de todas las singularidades es por consiguiente menor que a_0).

$$Y^*(j, p) = p \int_0^{\infty} Y(j, t) \cdot e^{-pt} dt \quad (5.88)$$

$$Y(j, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} e^{pt} \frac{Y^*(j, p)}{p} dp \quad (5.89)$$

Ahora se transforma la ecuación 5.82 en concordancia con las ecuaciones 5.88 y 5.89 mediante las condiciones iniciales (ecuaciones 5.72 y 5.73) y las ecuaciones 5.84 a 5.86; de tal manera que se obtiene la ecuación:

$$p^2 \cdot Y^*(j, p) + 2\xi w_1 p \cdot Y^*(j, p) + w_{(j)}^2 \cdot Y^*(j, p) = \frac{P j \pi V_o}{\bar{m} L} \frac{p}{p^2 + \frac{j^2 \pi^2 V_o^2}{L^2}} \quad (5.90)$$

La solución transformada de la ecuación 5.90 es:

$$Y^*(j, p) = \frac{P j \pi V_o}{\bar{m} L} \frac{p}{p^2 + \frac{j^2 \pi^2 V_o^2}{L^2}} \frac{1}{p^2 + 2\xi w_1 p + w_{(j)}^2} \quad (5.91)$$

El parámetro adimensional de velocidad, α , junto con la fracción de amortiguamiento crítico son de gran importancia para simplificar la solución general de la ecuación 5.62. El parámetro α se calcula mediante la ecuación 5.92, donde T_1 es el periodo fundamental de la viga en s, V_{cr} es la velocidad crítica y τ es el tiempo en segundos que tarda la carga constante en atravesar la viga.

$$\alpha = \frac{V_o}{2f_1 L} = \frac{T_1}{2\tau} = \frac{V_o L}{\pi} \left(\frac{\bar{m}}{EI} \right)^{1/2} = \frac{V_o}{V_{cr}} \quad (5.92)$$

V_{cr} y τ se calculan mediante la ecuaciones 5.93 y 5.94, respectivamente.



$$V_{cr} = \frac{2f_j L}{j} \approx \frac{\pi}{L} \left(\frac{EI}{\bar{m}} \right)^{1/2} \quad \text{para } j=1,2,3,\dots \quad (5.93)$$

$$\tau = \frac{L}{V_o} \quad (5.94)$$

La deflexión máxima estática, y_o , ocasionada por la carga constante, P , se genera al centro del claro de la viga y se obtiene mediante la ecuación:

$$y_o = \frac{PL^3}{48EI} \approx \frac{2P}{\bar{m}Lw_{(1)}^2} = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \quad (5.95)$$

La gran mayoría de las estructuras en la ingeniería civil son subamortiguadas ($\xi < 1$), y por lo tanto la frecuencia circular de una viga subamortiguada, $w'_{(j)}$, se obtiene mediante la ecuación:

$$w'_{(j)}{}^2 = w_{(j)}{}^2 - (\xi w_{(j)})^2 \quad (5.96)$$

En el caso de subamortiguamiento, los polos de la función 5.91 son $\pm i j w$, $-\xi w_{(j)} \pm i w'_{(j)}$. Desde que $p^2 + 2\xi w_{(j)} p + w_{(j)}^2 = (p + \xi w_{(j)})^2 + w'_{(j)}{}^2$, la transformada original $Y(j,t)$ puede ser calculada con la ayuda de la ecuación 5.87. Entonces la transformada de Fourier inversa de la ecuación 5.74 nos lleva a la ecuación 5.97, que es la solución de la ecuación 5.62 que gobierna el problema de la figura 5.9 para el caso básico donde $t \leq \tau$.

$$y(x,t) = y_o \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2 \left[j^2 (j^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2 \xi^2 \right]} \left[\begin{array}{l} j^2 (j^2 - \alpha^2) \sin\left(\frac{j\pi V_o t}{L}\right) - \\ j\alpha \left[j^2 (j^2 - \alpha^2) - 2\xi^2 \right] e^{-\xi w_{(j)} t} \text{sen}(w'_j t) - \\ 2j\alpha \xi \left(\cos\left(\frac{j\pi V_o t}{L}\right) - e^{-\xi w_{(j)} t} \cos(w'_j t) \right) \end{array} \right] \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (5.97)$$



Para el caso donde el amortiguamiento es muy pequeño, $\xi \ll 1$, y el parámetro de velocidad es diferente del modo de vibrar j , $\alpha \neq j$, los términos ξ y ξ^2 pueden ser omitidos en la ecuación 5.97 dando lugar a la solución mostrada en la ecuación:

$$y(x,t) \approx y_o \sum_{j=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \frac{1}{j^2(j^2 - \alpha^2)} \left(\text{sen}\left(\frac{j\pi v_o t}{L}\right) - \frac{\alpha}{j} e^{-\xi w_j t} \text{sen}(w_j t) \right) \quad (5.98)$$

Para el caso donde el amortiguamiento es muy pequeño, $\xi \ll 1$, y el parámetro de velocidad es igual al modo de vibrar j , $\alpha = j$, la solución de la ecuación 5.97 se reduce a:

$$y(x,t) \approx y_o \frac{1}{2\alpha^4} \left[e^{-\xi w_j t} \text{sen}\left(\frac{\alpha\pi V_o t}{L}\right) - \frac{\alpha^2}{\xi} \cos\left(\frac{\alpha\pi V_o t}{L}\right) (1 - e^{-\xi w_j t}) \right] \text{sen}\left(\frac{\alpha\pi x}{L}\right) \\ + y_o \sum_{j=1, j \neq \alpha}^{\infty} \frac{1}{j^2(j^2 - \alpha^2)} \left(\text{sen}\left(\frac{j\pi V_o t}{L}\right) - \frac{\alpha e^{-\xi w_j t}}{j} \text{sen}(w_j t) \right) \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (5.99)$$

A velocidades subcríticas, $\alpha < 1$, la máxima deflexión al centro del claro de la viga es producida durante el tiempo en que la carga constante, P , atraviesa la viga; mientras que a velocidades supercríticas, $\alpha \geq 1$, no se observa la máxima deflexión hasta que $t = \tau$, es decir, hasta cuando la fuerza en movimiento se aparta de la viga. La deflexión dinámica es rápidamente amortiguada por la vibración libre amortiguada una vez que la carga en movimiento sale de la viga. Ésta es la razón por la cual el caso donde $t > \tau$ no es de interés.

La mayoría de los puentes peatonales simplemente apoyados tienen una masa más grande que la masa de los peatones, y tienen bajas frecuencias naturales de vibrar porque son flexibles. Los efectos de los peatones se aproximan a cargas en movimiento. El amortiguamiento de los puentes peatonales de grandes claros es bajo, $\xi \ll 1$, al igual que la velocidad alcanzada por los peatones, $\alpha \ll 1$. Entonces la ecuación 5.98 se simplifica aún más, dando lugar a la ecuación 5.100, de la cual solo se tiene que considerar el primer término que representa el primer modo de vibrar, $j = 1$, porque los términos con $j > 1$ son insignificantes en comparación con el primer término.



$$y(x,t) = y_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi V_o t}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (5.100)$$

La ecuación 5.100 puede ser usada como una fórmula satisfactoria para calcular la deflexión dinámica de una viga Euler-Bernoulli con una carga de magnitud constante en movimiento, donde y_o se obtiene mediante la ecuación 5.95 cuando $x = L/2$.

5.3.2.2 Carga armónica en movimiento

Una carga externa armónica, $P_o \operatorname{sen}(\Omega t)$, que se desplaza a una velocidad constante, V_o , sobre una viga uniforme tipo Euler-Bernoulli simplemente apoyada de longitud, L , se puede representar mediante la figura 5.10. Este problema fue resuelto por Frýba (1999).

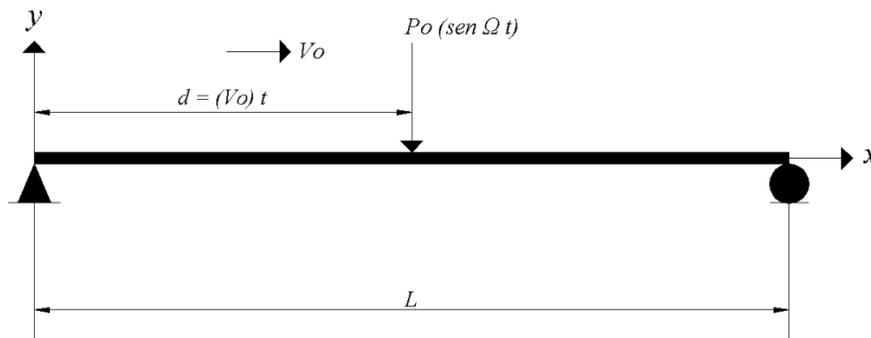


Figura 5.10 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada sujeta a una carga armónica en movimiento

La ecuación diferencial del movimiento que gobierna el problema dinámico de la figura 5.10 es:

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + 2\bar{m}\xi w_1 \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \delta(x - V_o t) \cdot P_o \operatorname{sen}(\Omega t) \quad (5.101)$$

La ecuación 5.101 se resuelve tomando en cuenta las condiciones de frontera (ecuaciones 5.47 a 5.50) y las condiciones iniciales (ecuaciones 5.72 y 5.73) mediante el método de las integrales



transformadas de Fourier. Utilizando las ecuaciones 5.74 y 5.75, la ecuación 5.101 da lugar a la ecuación:

$$\frac{d^2 Y(j, t)}{dt^2} + 2\xi w_1 \frac{dY(j, t)}{dt} + w_j^2 Y(j, t) = \frac{P_o}{\bar{m}} \text{sen}(\Omega t) \text{sen}\left(\frac{j\pi V_o t}{L}\right) \quad (5.102)$$

A la ecuación 5.102 se le aplica la transformada de Laplace-Carson mostrada en las ecuaciones 5.103 y 5.104, dónde $F(p)$ es la transformada compleja de la ecuación original $f(t)$, p es un número complejo, a y b son constantes, $r_1 = a + b$ y $r_2 = a - b$.

$$F(p) = \frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{p^2 + r_2^2} - \frac{1}{p^2 + r_1^2} \right) \quad (5.103)$$

$$f(t) = \text{sen}(at) \text{sen}(bt) \quad (5.104)$$

Aplicando la notación de la figura 5.10 a las ecuaciones 5.103 y 5.104 se tiene:

$$r_1 = \Omega + \frac{j\pi V_o}{L} \quad (5.105)$$

$$r_2 = \Omega - \frac{j\pi V_o}{L} \quad (5.106)$$

Aplicando las condiciones iniciales a la ecuación 5.102 por medio de las ecuaciones 5.88, 5.89, 5.103, 5.104, 5.105 y 5.106 se obtiene la ecuación:

$$Y^*(j, p) = \frac{P_o}{2\bar{m}} \left(\frac{1}{p^2 + r_2^2} - \frac{1}{p^2 + r_1^2} \right) \frac{p^2}{(p + \xi w_1)^2 + w'_{(j)}{}^2} \quad (5.107)$$

Posteriormente se aplica la transformada inversa a la ecuación 5.107 acorde a las ecuaciones 5.74, 5.75, 5.103, 5.104, 5.105 y 5.106 y se obtiene la ecuación 5.108 que representa la solución de la ecuación diferencial 5.102 para $t \leq \tau$.



$$y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_o}{\bar{m}L} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(w_j^2 - r_2^2)^2 + 4\xi^2 w_1^2 r_2^2} \left[\begin{array}{l} (w_j^2 - r_2^2) \cdot (\cos(r_2 t) - e^{-\xi w_1 t} \cos(w'_j t)) + \\ 2\xi w_1 r_2 \text{sen}(r_2 t) - \frac{\xi w_1}{w'_{(j)}} (w_j^2 + r_2^2) \cdot \\ \cdot e^{-\xi w_1 t} \text{sen}(w'_{(j)} t) \end{array} \right] - \\ \frac{1}{(w_j^2 - r_1^2)^2 + 4\xi^2 w_1^2 r_1^2} \left[\begin{array}{l} (w_j^2 - r_1^2) (\cos(r_1 t) - e^{-\xi w_1 t} \cos(w'_j t)) + \\ 2\xi w_1 r_1 \text{sen}(r_1 t) - \frac{\xi w_1}{w'_{(j)}} (w_j^2 + r_1^2) \cdot \\ \cdot e^{-\xi w_1 t} \text{sen}(w'_{(j)} t) \end{array} \right] \end{array} \right\} \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (5.108)$$

En estructuras como puentes peatonales los parámetros α y ξ son usualmente más pequeños que la unidad; además es totalmente satisfactorio sólo considerar el primer término, es decir, el primer modo de vibrar ($j=1$). Ya que en la práctica, una fuerza armónica es siempre acompañada por una fuerza constante, P , se introduce en la ecuación 5.108 la deflexión estática ocasionada al centro del claro, y_o , que se obtiene mediante la ecuación 5.95. La ecuación 5.108 se puede simplificar entonces a la ecuación:

$$y(x,t) = y_o \frac{P_o}{P} \frac{w_1^2}{\Omega^2} \frac{1}{\left(\frac{w_1^2}{\Omega^2} - 1\right)^2 + 4\left(\frac{\pi^2 V_o^2}{\Omega^2 L^2} + \frac{\xi^2 w_1^2}{\Omega^2}\right)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left[\left(\frac{w_1^2}{\Omega^2} - 1\right)^2 + 4\frac{\xi^2 w_1^2}{\Omega^2} \right]^{1/2} \text{sen}(\Omega t + \varphi) \text{sen}\left(\frac{\pi V_o t}{L}\right) \\ + 2\frac{\pi V_o}{\Omega L} \left(\cos(\Omega t) \cos\left(\frac{\pi V_o t}{L}\right) - e^{-\xi w_1 t} \cos(w_1 t) \right) \end{array} \right\} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (5.109)$$

La ecuación 5.109 sólo es válida para $\xi < 1$ y $\alpha < 1$, considerando únicamente el primer modo de vibrar, lo cual es completamente válido para los puentes peatonales, donde φ es el ángulo de fase de la respuesta dinámica y se obtiene mediante la ecuación:



$$\tan \varphi = -\frac{\frac{2\xi w_1}{\Omega}}{\frac{w_1^2}{\Omega^2} - 1} \quad (5.110)$$

La viga de la figura 5.10 alcanzará el estado de respuesta dinámica más alto en la región de resonancia, es decir, cuando la frecuencia circular de la carga armónica, Ω , sea igual a la frecuencia fundamental circular de la viga, w_1 . Ante dicha condición de resonancia ($w_1 = \Omega$), la ecuación 5.109 se puede simplificar aún más tal y como se muestra en la ecuación:

$$y(x,t) = y_o \frac{P_o w_1}{2P} \frac{\cos(w_1 t)}{\frac{\pi^2 V_o^2}{L^2} + \xi^2 w_1^2} \left[\frac{\pi V_o}{L} \left(\cos\left(\frac{\pi V_o t}{L}\right) - e^{-\xi w_1 t} \right) - \xi w_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi V_o t}{L}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (5.111)$$

5.4 Viga uniforme Euler-Bernoulli con diferentes condiciones de apoyo

Los puentes peatonales no siempre poseen apoyos simples, por lo que es necesario desarrollar un modelo matemático que permita considerar otras condiciones de apoyo. Este problema fue abordado por Frýba (1999) como un sistema continuo sin amortiguamiento estructural; mientras que Rao (2007) lo abordó como un sistema generalizado de un grado de libertad al cual se le puede incorporar el amortiguamiento estructural.

5.4.1 Vibración libre

Las j -ésimas frecuencias circulares de vibrar se obtienen mediante la ecuación:

$$w_j = \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} \beta_j^4 \quad (5.112)$$

Dónde:

$$\beta_j = \frac{a_j}{L} \therefore a_j = \beta_j L \quad (5.113)$$



Los j -ésimos modos de vibrar, $\phi_j(x)$, se obtienen mediante la ecuación:

$$\phi_j(x) = A_j \operatorname{sen}(\beta_j x) + B_j \operatorname{cos}(\beta_j x) + C_j \operatorname{senh}(\beta_j x) + D_j \operatorname{cosh}(\beta_j x) \quad (5.114)$$

Al sustituir las diferentes condiciones de frontera en la ecuación 5.114 se obtiene un sistema de ecuaciones que representa un problema de eigenvalores y eigenvectores; dónde los eigenvalores corresponden a las constantes a_j que pueden obtenerse por métodos numéricos (Tabla 5.3).

Tabla 5.3 Eigenvalores para distintas condiciones de apoyo (Gonçalves et al. 2007)

Condiciones de apoyo		j -ésimo modo de vibrar	a_j
$x = 0$	$x = L$		
Empotrado	Empotrado	1	4.73004
		2	7.85320
		3	10.9956
		4	14.1372
		5	17.2788
		6, 7, ...	$(2j+1)\pi/2$
Empotrado	Apoyo simple	1	3.92660
		2	7.06858
		3	10.2102
		4	13.3518
		5	16.4934
		6, 7, ...	$(4j+1)\pi/4$
Empotrado	Libre	1	1.87510
		2	4.69409
		3	7.85476
		4	10.9955
		5	14.1372
		6, 7, ...	$(2j-1)\pi/2$



Las constantes A_j , B_j , C_j y D_j de la ecuación 5.114 son constantes de integración que dependen de las condiciones de frontera de la viga, y representan el eigenvector (tabla 5.4).

Tabla 5.4 Eigenvector para distintas condiciones de apoyo

Condiciones de apoyo		Constantes de integración			
$x = 0$	$x = L$	A_j	B_j	C_j	D_j
Empotrado	Empotrado	1	$\frac{\sinh(a_j) - \sin(a_j)}{\cos(a_j) - \cosh(a_j)}$	-1	$-\frac{\sinh(a_j) - \sin(a_j)}{\cos(a_j) - \cosh(a_j)}$
Empotrado	Apoyo simple	1	$\frac{\sinh(a_j) - \sin(a_j)}{\cos(a_j) - \cosh(a_j)}$	-1	$-\frac{\sinh(a_j) - \sin(a_j)}{\cos(a_j) - \cosh(a_j)}$
Empotrado	Libre	1	$-\frac{\cos(a_j) + \cosh(a_j)}{\sinh(a_j) - \sin(a_j)}$	-1	$\frac{\cos(a_j) + \cosh(a_j)}{\sinh(a_j) - \sin(a_j)}$

Las j -ésimas frecuencias circulares y modos de vibrar se obtienen respectivamente mediante las ecuaciones 5.112 y 5.114 a partir de las tablas 5.3 y 5.4. También es posible obtener con excelente precisión los valores de w_j mediante un sistema generalizado de un grado de libertad (Rao, 2007), a partir de una j -ésima masa generalizada, \tilde{m}_j , y una j -ésima rigidez generalizada, \tilde{k}_j , mediante la ecuación:

$$w_j = \sqrt{\frac{\tilde{k}_j}{\tilde{m}_j}} \tag{5.115}$$

Dónde:

$$\tilde{m}_j = \bar{m} \int_0^L [\phi_j(x)]^2 dx \tag{5.116}$$



$$\tilde{k}_j = EI \int_0^L \left[\phi_j(x)'' \right]^2 dx \quad (5.117)$$

5.4.2 Vibración forzada

Ladislav Frýba (1999) resolvió el problema de vibración forzada de vigas uniformes Euler-Bernoulli con varias condiciones de apoyo sin considerar el amortiguamiento estructural cuando son sometidas a cargas constantes y cargas armónicas en movimiento. La vibración vertical resultante ante cargas peatonales se obtiene mediante la superposición de la vibración forzada de ambos casos (carga constante en movimiento y carga armónica en movimiento). Frýba (1999) utilizó el método generalizado de las integrales transformadas finitas, el cual conduce a resultados formalmente idénticos a los obtenidos con el método de la expansión en modos normales propuesto por Rao (2007). El método utilizado por Frýba está definido por las ecuaciones 5.118 y 5.119; donde $Y(j, t)$ representa la transformada de $y(x, t)$.

$$Y(j, t) = \int_0^L y(x, t) \phi_j(x) dx \quad (5.118)$$

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{m}}{V_j} Y(j, t) \phi_j(x) \quad (5.119)$$

Dónde:

$$V_j = \int_0^L \bar{m} \left[\phi_j(x) \right]^2 dx \quad (5.120)$$

La ecuación 5.121 se obtiene al sustituir las ecuaciones 5.113 y 5.114 en la ecuación 5.120 y posteriormente integrando la expresión; donde A_j , B_j , C_j y D_j se obtienen mediante las tablas 5.3 y 5.4, por lo que habrá un valor de V_j para cada modo de vibrar de la viga.



$$V_j = \frac{\bar{m}L}{2} \left\{ 1 + B_j^2 - C_j^2 + D_j^2 + \frac{1}{a_j} \left[\begin{aligned} &2D_j - 2B_j C_j - C_j D_j - \frac{1}{2}(1 - B_j^2) \text{sen}(2a_j) + \\ &2B_j \text{sen}^2(a_j) + (C_j^2 + D_j^2) \text{senh}(a_j) \text{cosh}(a_j) + \\ &2(C_j + B_j D_j) \text{cosh}(a_j) \text{sen}(a_j) + 2(-C_j + B_j D_j) \cdot \\ &\cdot \text{senh}(a_j) \text{cos}(a_j) + 2(D_j + B_j C_j) \text{senh}(a_j) \text{sen}(a_j) + \\ &2(-D_j + B_j C_j) \text{cosh}(a_j) \text{cos}(a_j) + C_j D_j \text{cosh}(2a_j) \end{aligned} \right] \right\} \quad (5.121)$$

La ecuación 5.121 es utilizada para resolver el problema de vibración forzada de vigas Euler-Bernoulli sin amortiguamiento cuando son sometidas a cargas en movimiento, sin embargo, la solución considerando el amortiguamiento estructural se encuentra mediante un sistema equivalente de un grado de libertad del puente peatonal (Rao, 2007). En dicho sistema equivalente se debe de obtener la masa generalizada con la ecuación 5.115 y posteriormente se debe de normalizar cada modo de vibrar de la ecuación 5.114 mediante la ecuación 5.122 (Bazán y Meli, 2008).

$$\phi_j(x) = \frac{\phi_j(x)}{\sqrt{\tilde{m}_j}} = \frac{A_j \text{sen}(\beta_j x) + B_j \text{cos}(\beta_j x) + C_j \text{senh}(\beta_j x) + D_j \text{cosh}(\beta_j x)}{\sqrt{\tilde{m} \int_0^L [A_j \text{sen}(\beta_j x) + B_j \text{cos}(\beta_j x) + C_j \text{senh}(\beta_j x) + D_j \text{cosh}(\beta_j x)]^2 dx}} \quad (5.122)$$

Posteriormente se debe de obtener la j -ésima carga generalizada, $\tilde{P}_j(t)$, para el sistema generalizado de un grado de libertad mediante la ecuación 5.123; dónde $P(x,t)$ representa la carga externa aplicada sobre la viga, y $\phi_j(x)$ debe de estar normalizado mediante la ecuación 5.122.

$$\tilde{P}_j(t) = \int_0^L P(x,t) \phi_j(x) dx \quad (5.123)$$



La solución del modelo generalizado de un grado de libertad (Rao, 2007), durante $t \leq \tau$ y con condiciones iniciales nulas, se obtiene mediante la integral de Duhamel (ecuación 5.124); dónde ξ_j es la fracción de amortiguamiento crítico del j -ésimo modo de vibrar, t^* es el tiempo de duración de un impulso unitario y $\phi_j(x)$ es el modo de vibrar normalizado (ecuación 5.122).

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{w_j} \int_0^t \tilde{P}_j(t^*) e^{-\xi_j w_j(t-t^*)} \text{sen}(w_j(t-t^*)) dt^* \right] \phi_j(x) \quad (5.124)$$

5.4.2.1 Carga constante en movimiento

Los desplazamientos de una viga uniforme Euler-Bernoulli sin amortiguamiento estructural con distintas condiciones de apoyo ante una carga constante en movimiento, P , durante $t \leq \tau$ se obtienen mediante la ecuación 5.125 (Frýba, 1999).

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P}{V_j} \phi_j(x) \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{w_j^2 - \left(\frac{a_j V_o}{L}\right)^2} \left[\begin{array}{l} \left(\text{sen}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) - \frac{a_j V_o}{w_j L} \text{sen}(w_j t) \right) \cdot \\ \cdot \left(-\cos(a_j) + B_j \text{sen}(a_j) \right) + \\ \left(\cos\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) - \cos(w_j t) \right) \cdot \\ \cdot \left(\text{sen}(a_j) + B_j \cos(a_j) \right) \end{array} \right] + \\ \left[\frac{1}{w_j^2 + \left(\frac{a_j V_o}{L}\right)^2} \left[\begin{array}{l} \left(\text{senh}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) - \frac{a_j V_o}{w_j L} \text{sen}(w_j t) \right) \cdot \\ \cdot \left(-C_j \text{cos h}(a_j) - D_j \text{senh}(a_j) \right) + \\ \left(\text{cos h}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) - \cos(w_j t) \right) \cdot \\ \cdot \left(C_j \text{senh}(a_j) + D_j \text{cos h}(a_j) \right) \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (5.125)$$



La ecuación 5.125 sólo es válida para casos sin amortiguamiento estructural; dónde $\phi_j(x)$ se obtiene con la ecuación 5.114, siendo $A_j = 1$, y dónde dichos modos de vibrar no deben ser normalizados. Los constantes a_j , B_j , C_j y D_j se obtienen de las tablas 5.3 y 5.4; mientras que V_j se obtiene mediante la ecuación 5.121 (Fryba, 1999).

Para considerar el amortiguamiento estructural se debe de resolver el problema como un sistema generalizado de un grado de libertad (Rao, 2007), dónde se debe normalizar cada modo de vibrar mediante la ecuación 5.122. La carga generalizada de la ecuación 5.123 para una carga constante en movimiento se obtiene mediante la ecuación 5.126, dónde P es la carga constante móvil, y dónde se aplica una de las propiedades de la función de Dirac (ecuación 5.68).

$$\tilde{P}_j(t) = \int_0^L P(x,t) \phi_j(x) dx = \int_0^L P \delta(x-d) \phi_j(x) dx = P \phi_j(d) = P \phi_j(V_o t) \quad (5.126)$$

La solución al problema generalizado de un grado de libertad (Rao, 2007) se encuentra al sustituir la ecuación 5.126 en la ecuación 5.124 y resolviendo la integral de Duhamel, dónde $\phi_j(x)$ está normalizado mediante la ecuación 5.122.

5.4.2.2 Carga armónica en movimiento

Los desplazamientos de una viga uniforme Euler-Bernoulli sin amortiguamiento estructural con distintas condiciones de apoyo durante $t \leq \tau$ ante una carga armónica en movimiento, $P_o \text{sen}(\Omega t)$, se obtienen mediante la ecuación 5.127; dónde $\phi_j(x)$ se obtiene con la ecuación 5.114, siendo $A_j = 1$, y dónde dichos modos de vibrar no deben ser normalizados. Los constantes a_j , B_j , C_j y D_j se obtienen de las tablas 5.3 y 5.4; mientras que V_j se obtiene mediante la ecuación 5.121 (Fryba, 1999).



$$y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_o}{2V_j w_j} \phi_j(x) \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{r_1^2 - \left(\frac{a_j V_o}{L}\right)^2} \left[\left(\frac{a_j V_o}{L}\right) \cos(w_j t) - r_1 \operatorname{sen}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) \operatorname{sen}(\Omega t) - \left(\frac{a_j V_o}{L}\right) \cdot \right. \right. \\ & \quad \cdot \cos\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) \cos(\Omega t) + B_j r_1 \operatorname{sen}(w_j t) - B_j r_1 \operatorname{sen}(\Omega t) \cdot \left. \right] + \\ & \quad \cdot \cos\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) + B_j \left(\frac{a_j V_o}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) \cos(\Omega t) \left. \right] \\ & + \frac{1}{r_1^2 + \left(\frac{a_j V_o}{L}\right)^2} \left[C_j \left(\frac{a_j V_o}{L}\right) \cos(w_j t) - C_j r_1 \operatorname{senh}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) \operatorname{sen}(\Omega t) - \right. \\ & \quad C_j \left(\frac{a_j V_o}{L}\right) \operatorname{cosh}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) \cos(\Omega t) + D_j r_1 \operatorname{sen}(w_j t) - \\ & \quad D_j r_1 \operatorname{cosh}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) \operatorname{sen}(\Omega t) - D_j \left(\frac{a_j V_o}{L}\right) \cos(\Omega t) \cdot \\ & \quad \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) \left. \right] \\ & + \frac{1}{r_2^2 - \left(\frac{a_j V_o}{L}\right)^2} \left[-\left(\frac{a_j V_o}{L}\right) \cos(w_j t) + r_2 \operatorname{sen}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) \operatorname{sen}(\Omega t) + \left(\frac{a_j V_o}{L}\right) \cdot \right. \\ & \quad \cdot \cos\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) \cos(\Omega t) + B_j r_2 \operatorname{sen}(w_j t) + B_j r_2 \operatorname{sen}(\Omega t) \cdot \\ & \quad \cdot \cos\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) - B_j \left(\frac{a_j V_o}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) \cos(\Omega t) \left. \right] \\ & + \frac{1}{r_2^2 + \left(\frac{a_j V_o}{L}\right)^2} \left[-C_j \left(\frac{a_j V_o}{L}\right) \cos(w_j t) + C_j r_2 \operatorname{senh}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) \operatorname{sen}(\Omega t) \right. \\ & \quad + C_j \left(\frac{a_j V_o}{L}\right) \operatorname{cosh}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) \cos(\Omega t) + D_j r_2 \operatorname{sen}(w_j t) \\ & \quad + D_j r_2 \operatorname{cosh}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) \operatorname{sen}(\Omega t) + D_j \left(\frac{a_j V_o}{L}\right) \cos(\Omega t) \cdot \\ & \quad \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{a_j V_o t}{L}\right) \left. \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.127)$$



Dónde:

$$r_1 = \Omega - w_j \quad (5.128)$$

$$r_2 = \Omega + w_j \quad (5.129)$$

Para considerar el amortiguamiento estructural se debe de resolver el problema como un sistema generalizado de un grado de libertad (Rao, 2007), dónde se debe normalizar cada modo de vibrar mediante la ecuación 5.122. La carga generalizada de la ecuación 5.123 para una carga armónica en movimiento se obtiene mediante la ecuación 5.130, dónde $P_o \text{sen}(\Omega t)$ es la carga armónica móvil, y dónde se aplica una de las propiedades de la función de Dirac (ecuación 5.68).

$$\begin{aligned} \tilde{P}_j(t) &= \int_0^L P(x,t) \phi_j(x) dx = \int_0^L P_o \text{sen}(\Omega t) \delta(x-d) \phi_j(x) dx = \\ &= P_o \text{sen}(\Omega t) \phi_j(d) = P_o \text{sen}(\Omega t) \phi_j(V_o t) \end{aligned} \quad (5.130)$$

Posteriormente se sustituye la ecuación 5.130 en la ecuación 5.124 y se resuelve la integral de Duhamel, dónde $\phi_j(x)$ está normalizado mediante la ecuación 5.122 (Rao, 2007).

5.5 Modelo matemático simplificado de los puentes peatonales estudiados

Los puentes peatonales estudiados en esta tesis se abordan únicamente ante el efecto de las vibraciones verticales inducidas por peatones, de tal manera que no se controlarán las vibraciones laterales ni las longitudinales. La fuerza dinámica vertical peatonal se obtiene mediante la ecuación 2.1, la cual tiene la forma de la ecuación 5.131 debido a que las frecuencias verticales de vibrar, f_j , de los puentes peatonales estudiados son bajas y se encuentran en el intervalo de frecuencias críticas susceptibles de resonancia únicamente por la primer contribución armónica de la fuerza dinámica vertical peatonal, para la cual $\varphi_1 = 0 \text{ rad}$ (Figura 5.5).

$$F_V = P + P_o \text{sen}(\Omega t - \varphi_1) = P + P_o \text{sen}(\Omega t) \quad (5.131)$$

Dónde:

$$P = n_p G \quad (5.132)$$

$$P_o = n_{eff} G \alpha_1 \psi = \sqrt{n_p} G \alpha_1 \psi \quad (5.133)$$

En las ecuaciones 5.132 y 5.133; P representa el peso total de la carga peatonal, n_p representa el número total de peatones que se desplaza en grupo, G representa el peso promedio de un peatón (700 N), P_o es la máxima amplitud armónica generada por el grupo de peatones, n_{eff} es el número efectivo de peatones que se desplazan sincronizados (ecuación 2.6), α_1 es el coeficiente de Fourier del primer armónico peatonal para la vibración vertical (tabla 2.2), ψ es el coeficiente de reducción que expresa la probabilidad de ocurrencia de la frecuencia peatonal (figura 2.5), y Ω es la frecuencia circular ejercida por los peatones que caminan sincronizados. La fuerza dinámica vertical peatonal se representa entonces mediante una carga constante en movimiento, P , actuando simultáneamente con una carga armónica en movimiento, $P_o \text{sen}(\Omega t)$. Los puentes peatonales uniformes simplemente apoyados cuando son sometidos a fuerzas dinámicas verticales en movimiento pueden representarse mediante el modelo de la figura 5.11.

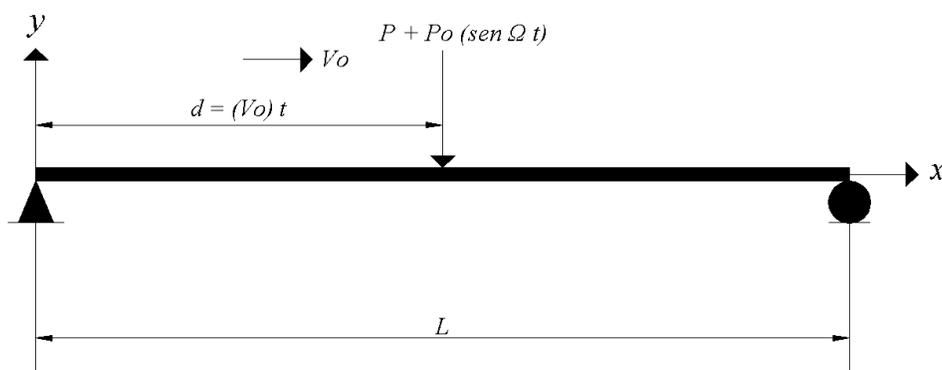


Figura 5.11 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada sujeta simultáneamente a una carga constante y a una carga armónica en movimiento



por Barbat y Canet (1994). Las correspondientes respuestas dinámicas verticales de velocidades y aceleraciones se obtuvieron respectivamente mediante la primera y segunda derivada con respecto del tiempo de la respuesta dinámica de desplazamientos mediante el método de diferenciación numérica de las diferencias centrales.

En la práctica, el coeficiente de amplificación dinámico, DMF , es un factor que representa el grado de amplificación de la deflexión dinámica máxima con respecto a la deflexión estática máxima de la viga, tal y como se muestra en la ecuación 5.136.

$$DMF = \frac{y_{\max}(x,t)}{y_o} \quad (5.136)$$

La ecuación 5.136 es escrita bajo la consideración de que una viga tipo Euler-Bernoulli de longitud, L , es atravesada simultáneamente por una carga constante y una carga armónica, que se desplazan a una velocidad constante, V_o . La deflexión estática máxima, y_o , referida al punto de máxima amplitud del primer modo de vibrar puede obtenerse a partir de la tabla 5.5 para puentes peatonales con diferentes condiciones de apoyo; dónde P es el peso total del peatón o grupo de peatones que se desplazan juntos.

Tabla 5.5 Deflexión estática máxima para vigas con distintas condiciones de apoyo (AWC, 2007)

Condiciones de apoyo		x	y_o
$x = 0$	$x = L$		
Apoyo simple	Apoyo simple	$\frac{L}{2}$	$\frac{PL^3}{48EI}$
Empotrado	Empotrado	$\frac{L}{2}$	$\frac{PL^3}{192EI}$
Empotrado	Apoyo simple	$0.586 L$	$\frac{PL^3}{102EI}$
Empotrado	Libre	L	$\frac{PL^3}{3EI}$



La respuesta dinámica de los puentes peatonales debe de considerar el número de modos necesarios para que por lo menos participe un 90% de la masa total de la estructura en la vibración resultante. Para ello es necesario determinar la masa modal efectiva participante en cada modo de vibrar, $m_{eff, j}$, mediante la ecuación 5.137.

$$m_{eff, j} = \frac{\left[\int_0^L \bar{m} \phi_j(x) dx \right]^2}{\int_0^L \bar{m} [\phi_j(x)]^2 dx} \tag{5.137}$$

La longitud de paso promedio para un peatón caminando es aproximadamente de 0.7 m, mientras que para un peatón corriendo es de 1.2 m aproximadamente, sin embargo, dicho valores suelen estar relacionados con la velocidad a la que se desplaza el peatón tal y como se muestra en la tabla 5.6. Las velocidades constantes promedio, V_o , a la que un peatón suele desplazarse se encuentran entre el intervalo de 1 a 5.5 m/s en función de si el peatón camina o corre. Las velocidades constantes promedio en función de la actividad peatonal que se consideraron en esta esta tesis se muestran en la tabla 5.6, dónde las frecuencias de vibrar típicas en Hz se obtuvieron de la tabla 2.1.

Tabla 5.6 Velocidades promedio constantes y frecuencias verticales típicas de excitación peatonal (Bachmann y Ammann, 1987)

Actividad peatonal	Velocidad promedio constante (m/s)	Frecuencia típica vertical de excitación peatonal (Hz)	Longitud de paso (m)
Caminata lenta	1.1	1.7	0.60
Caminata normal	1.5	2	0.75
Caminata rápida	2.2	2.3	1
Carrera lenta	2.5	2.1	1.15
Carrera normal	3.3	2.5	1.30
Carrera rápida	5.5	3.2	1.75



En la evaluación de la respuesta dinámica de los puentes peatonales estudiados se consideraron diferentes casos de densidad peatonal que considera la norma UK N.A EN 1991-2 mediante la tabla 2.6, ya que ésta proporciona el número de peatones, n_p , para el cálculo del número efectivo de peatones, n_{eff} . Es importante mencionar que las normas únicamente proponen analizar el caso en que el puente entra en resonancia por lo cual proponen el factor n_{eff} que es un parámetro de sincronización de frecuencias del número de peatones n_p , es decir, representa el porcentaje de peatones que caminan en sincronía, sin embargo, en esta tesis también se analizaron los casos en que los puentes peatonales estudiados no entran en resonancia y para dichos casos también debe utilizarse el factor n_{eff} para considerar el número de peatones del grupo que caminan sincronizados entre sí. Los puentes peatonales estudiados se analizaron para todos los casos de la tabla 5.6 y para la resonancia; además de que se analizaron para uno, dos, cuatro y ocho peatones caminando y corriendo en grupo, debido a que éstos corresponden a un puente tipo C acorde a la tabla 2.6. La fracción de amortiguamiento crítico, ξ , se despreció debido a que ésta tiene un valor muy pequeño y no se obtuvo el valor para cada modo de vibrar (capítulo 4); además de que ésta puede variar ligeramente en función de la excitación peatonal.

Se desarrollaron dos programas en el software Matlab para vigas uniformes Euler-Bernoulli de un solo claro con diferentes condiciones de apoyo sin y con amortiguamiento estructural, cuyos códigos se muestran respectivamente en los apéndices B y C ; mientras que en el apéndice D se muestra un ejemplo detallado de cómo deben de utilizarse dichos programas. En esta tesis se obtuvieron únicamente las respuestas dinámicas de los puentes peatonales estudiados en el punto longitudinal más crítico; el cual corresponde al de la máxima amplitud del primer modo de vibrar vertical, ya que es el modo que puede vibrar en resonancia. Las gráficas de las formas modales verticales se normalizaron a la unidad en el punto de máxima amplitud modal sólo con fines de una visualización más práctica. Las respuestas dinámicas se graficaron únicamente durante $t \leq \tau$; y sólo se muestran para las aceleraciones verticales dinámicas, en m/s^2 ; ya que es donde se revisa el nivel de confort (aceleraciones menores a $0.7 m/s^2$), sin embargo, las gráficas de desplazamientos y velocidades pueden obtenerse acorde a lo estipulado en los apéndices B, C y D. Las frecuencias y velocidades de cruce de los peatones fueron obtenidas en base a la tabla 5.6 con fines de obtener resultados más realistas.



5.5.1 Puente peatonal San Bartolo

El puente peatonal San Bartolo se representó como el modelo simplificado de la figura 5.11 cuyas formas modales se obtienen mediante la ecuación 5.61; dónde sólo basta con considerar las primeras cinco formas modales verticales de la estructura simplemente apoyada para obtener una masa efectiva de 93.3039 % (tabla 5.7). Las frecuencias y formas modales verticales de vibrar del puente peatonal San Bartolo se muestran en la tabla 5.7 y figura 5.12, respectivamente.

Tabla 5.7 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal San Bartolo (modelo matemático)

j -ésimo modo de vibrar	$T_j (s)$	$f_j (Hz)$	$w_j (rad/s)$	$m_{eff,j} (\%)$
1	0.2740	3.6500	22.9336	81.0564
2	0.0685	14.6000	91.7345	0.000000001974
3	0.0304	32.8500	206.4026	9.0058
4	0.0171	58.4000	366.9380	0.000000007895
5	0.0110	91.2500	573.3407	3.2417

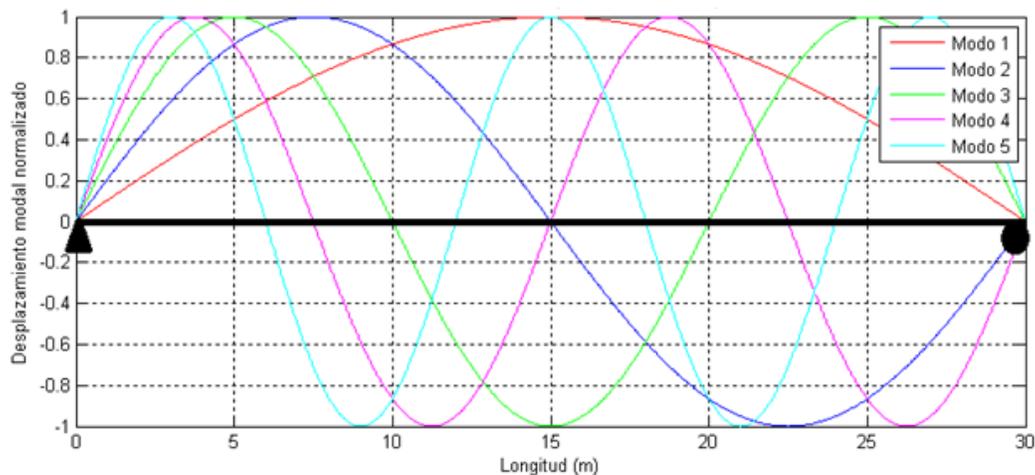


Figura 5.12 Formas modales verticales del puente peatonal San Bartolo (modelo matemático)

En las tablas 5.8 a 5.11, y figuras 5.13 a 5.16 se muestran los resultados matemáticos de la vibración forzada inducida por peatones móviles sin considerar el amortiguamiento estructural.



Tabla 5.8 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo en $x = 15\text{ m}$ ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.00017	0.0006	0.0069	1.5102	✓
Caminata normal	0.00018	0.0008	0.0107	1.5750	✓
Caminata rápida	0.00019	0.0011	0.0167	1.6685	✓
Carrera lenta	0.00037	0.0034	0.0463	3.2152	✓
Carrera normal	0.00044	0.0055	0.0889	3.8091	✓
Carrera rápida	0.00046	0.0071	0.1457	3.9704	✓
Resonancia	0.00095	0.0215	0.4912	8.1616	✓

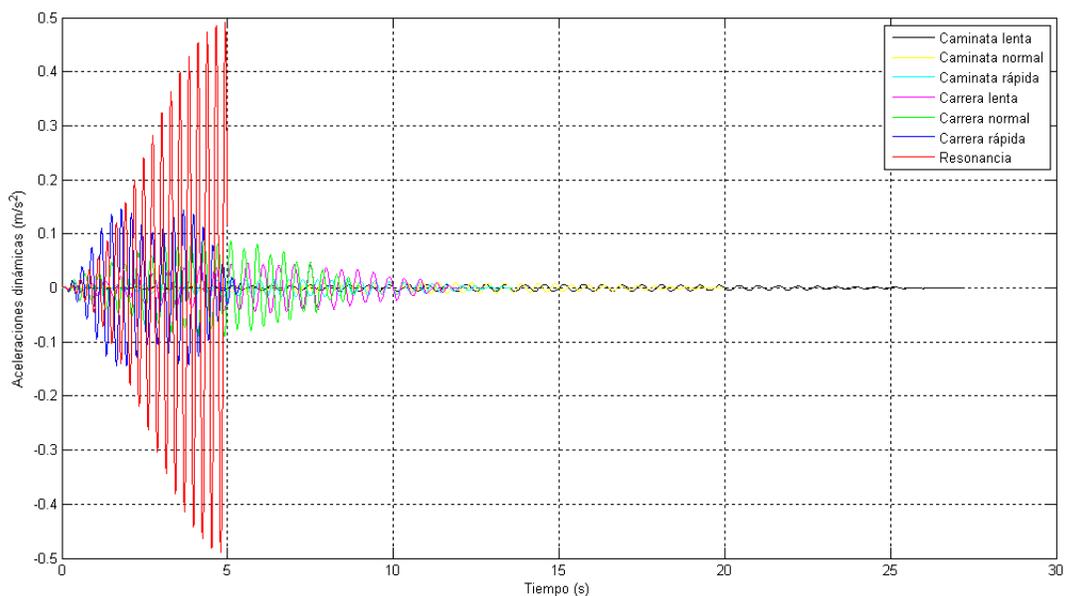


Figura 5.13 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo en $x = 15\text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático)



Tabla 5.9 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo en $x = 15\text{ m}$ ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s^2)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0003	0.0009	0.0098	1.3613	✓
Caminata normal	0.0003	0.0012	0.0152	1.4071	✓
Caminata rápida	0.0003	0.0016	0.0239	1.4748	✓
Carrera lenta	0.0006	0.0049	0.0657	2.5643	✓
Carrera normal	0.0007	0.0078	0.1258	2.9493	✓
Carrera rápida	0.0007	0.0100	0.2058	3.1003	✓
Resonancia	0.0014	0.0304	0.6947	5.8545	✓

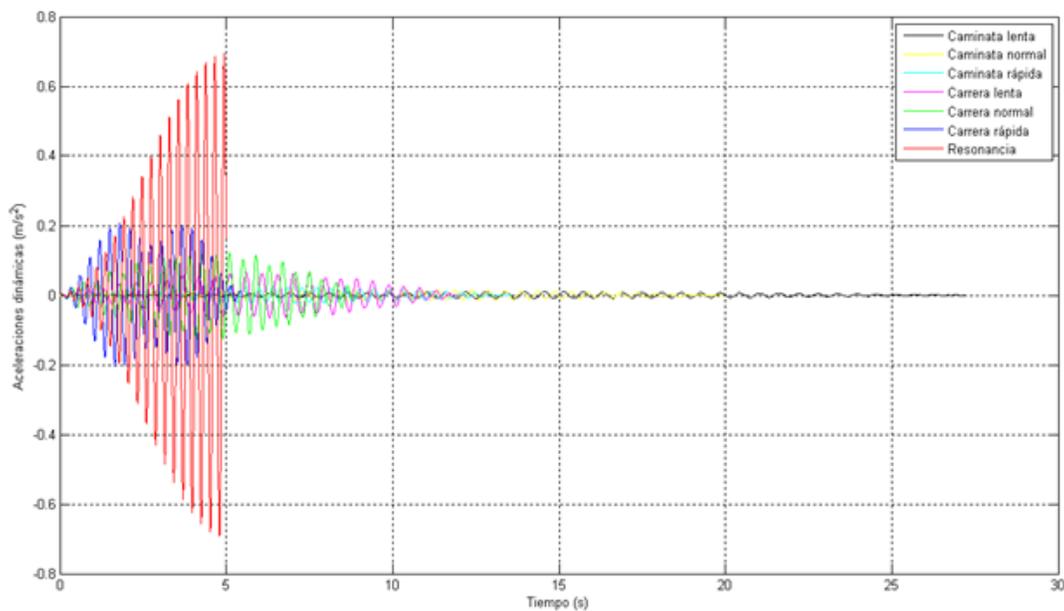


Figura 5.14 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo en $x = 15\text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático)



Tabla 5.10 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo en $x = 15\text{ m}$ ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s^2)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0006	0.0013	0.0142	1.2560	✓
Caminata normal	0.0006	0.0017	0.0220	1.2884	✓
Caminata rápida	0.0006	0.0023	0.0343	1.3379	✓
Carrera lenta	0.0010	0.0069	0.0933	2.1041	✓
Carrera normal	0.0011	0.0111	0.1781	2.3414	✓
Carrera rápida	0.0012	0.0141	0.2906	2.4854	✓
Resonancia	0.0020	0.0431	0.9825	4.2437	X

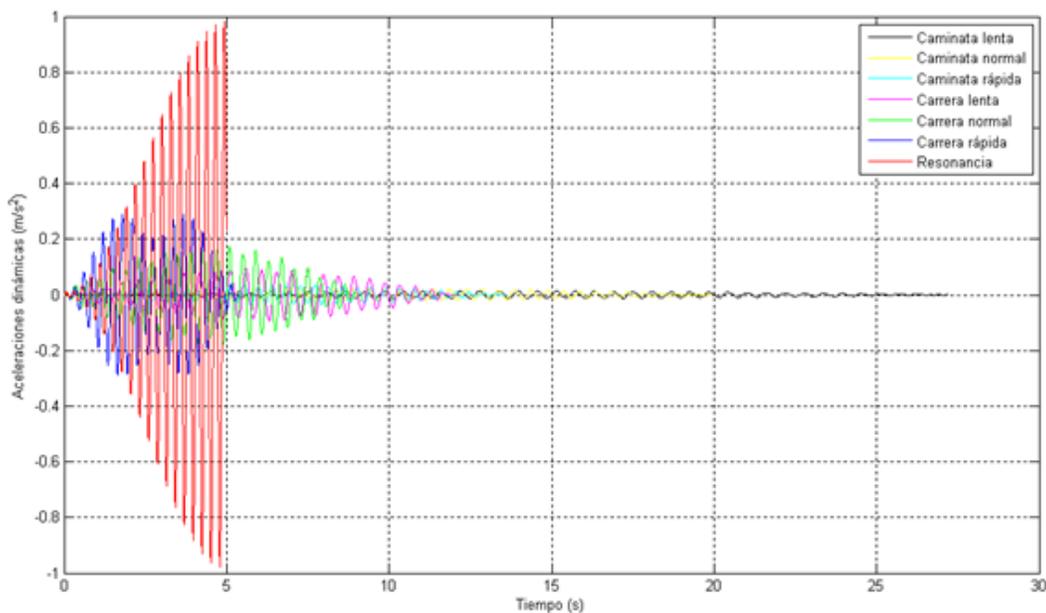


Figura 5.15 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo en $x = 15\text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático)



Tabla 5.11 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo en $x = 15\text{ m}$ ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s^2)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0011	0.0018	0.0207	1.1818	✓
Caminata normal	0.0011	0.0025	0.0319	1.2044	✓
Caminata rápida	0.0012	0.0033	0.0499	1.2411	✓
Carrera lenta	0.0017	0.0098	0.1328	1.7786	✓
Carrera normal	0.0018	0.0157	0.2525	1.9117	✓
Carrera rápida	0.0019	0.0200	0.4100	2.0506	✓
Resonancia	0.0029	0.0612	1.3896	3.1416	X

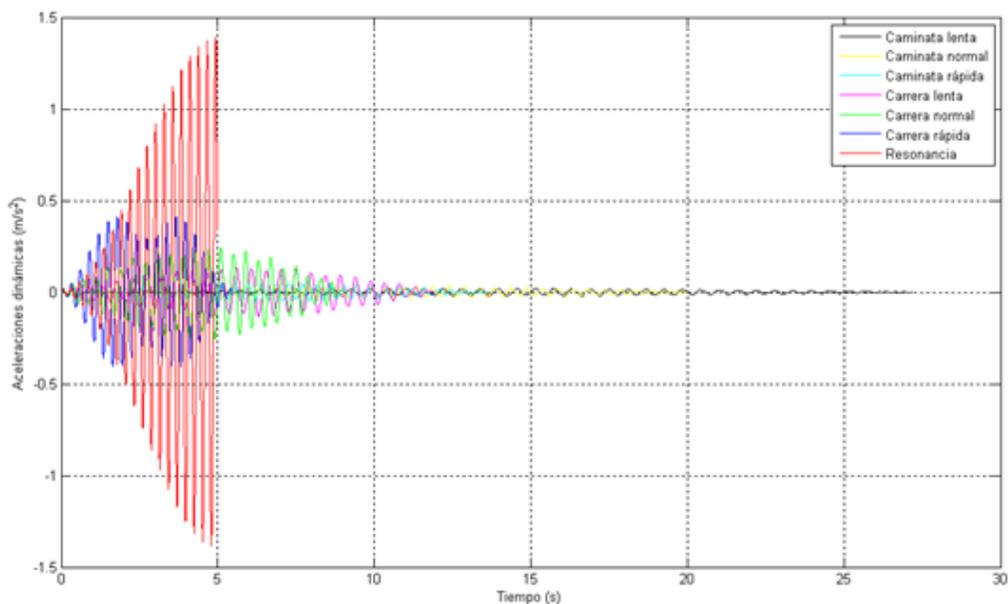


Figura 5.16 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo en $x = 15\text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático)



5.5.2 Puente peatonal Salamanca

El puente peatonal Salamanca se representó como una viga Euler-Bernoulli con un extremo empotrado y el otro simplemente apoyado sometida simultáneamente a una carga constante y armónica en movimiento; dónde sólo basta con considerar las primeras siete formas modales verticales (ecuación 5.114) para obtener una masa efectiva de 92.6379 % (tabla 5.12).

Tabla 5.12 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal Salamanca (modelo matemático)

j -ésimo modo de vibrar	$T_j (s)$	$f_j (Hz)$	$w_j (rad/s)$	$m_{eff,j} (%)$
1	0.3145	3.1800	19.9805	73.9601
2	0.0970	10.3052	64.7497	0.6828
3	0.0465	21.5012	135.0959	11.1815
4	0.0272	36.7683	231.0220	0.1925
5	0.0178	56.1066	352.5283	4.2851
6	0.0126	79.5158	499.6127	0.0890
7	0.0093	106.9965	672.2788	2.2469

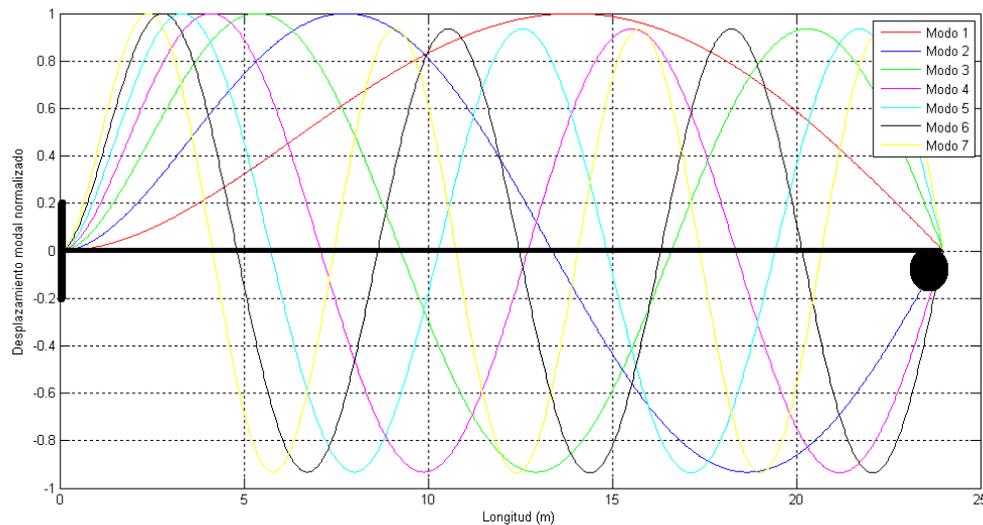


Figura 5.17 Formas modales verticales del puente peatonal Salamanca (modelo matemático)

En las tablas 5.13 a 5.16, y en las figuras 5.18 a 5.21 se muestran los resultados matemáticos de la vibración forzada inducida por peatones móviles sin considerar el amortiguamiento estructural.



Tabla 5.13 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 \text{ m}$ y en $x = 37.0929 \text{ m}$ ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s^2)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0004	0.0016	0.0169	1.4707	✓
Caminata normal	0.0004	0.0022	0.0273	1.5698	✓
Caminata rápida	0.0004	0.0032	0.0462	1.7405	✓
Carrera lenta	0.0009	0.0088	0.1161	3.4267	✓
Carrera normal	0.0013	0.0167	0.2642	4.9055	✓
Carrera rápida	0.0040	0.0795	1.5831	15.3777	X
Resonancia	0.0053	0.1057	2.1068	20.4813	X

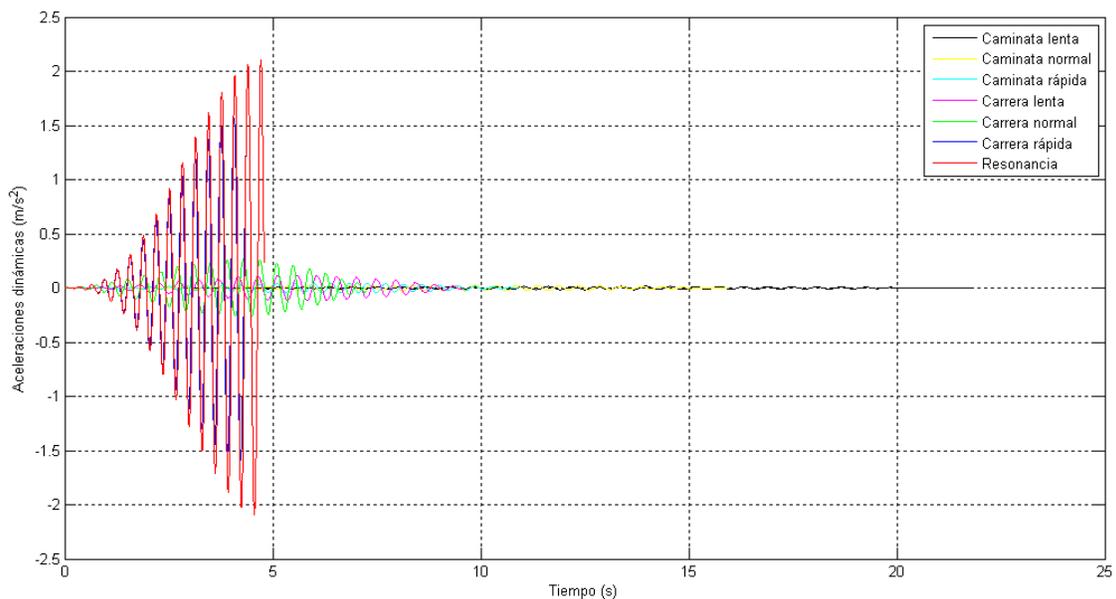


Figura 5.18 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 \text{ m}$ y en $x = 37.0929 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático)



Tabla 5.14 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 \text{ m}$ y en $x = 37.0929 \text{ m}$ ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0007	0.0023	0.0245	1.3245	✓
Caminata normal	0.0007	0.0032	0.0393	1.4019	✓
Caminata rápida	0.0008	0.0046	0.0665	1.5135	✓
Carrera lenta	0.0014	0.0126	0.1646	2.6882	✓
Carrera normal	0.0019	0.0237	0.3723	3.7123	✓
Carrera rápida	0.0056	0.1124	2.2380	10.8714	X
Resonancia	0.0075	0.1495	2.9792	14.4824	X

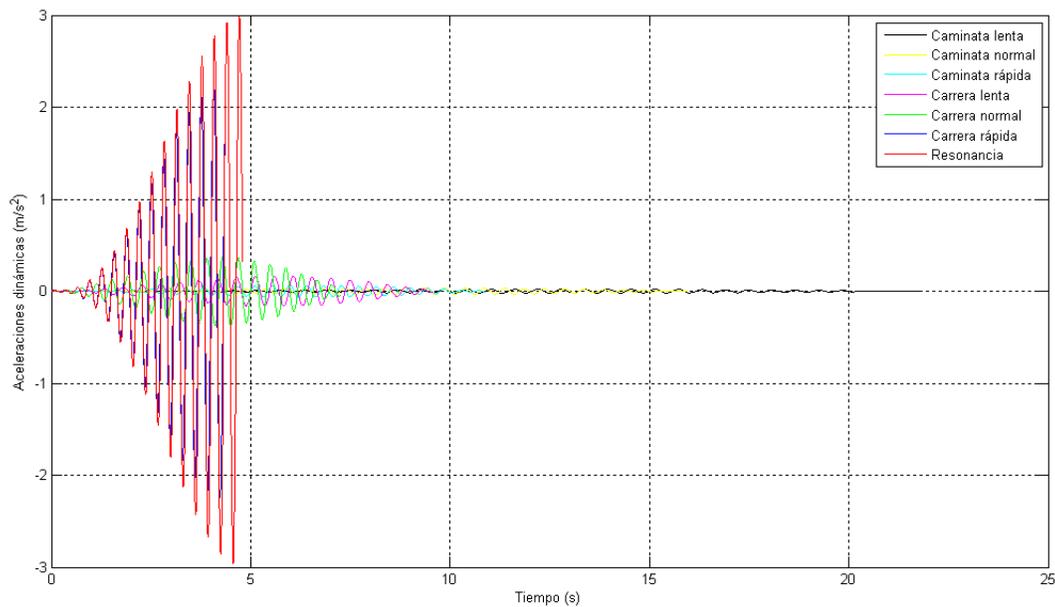


Figura 5.19 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 \text{ m}$ y en $x = 37.0929 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático)



Tabla 5.15 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 \text{ m}$ y en $x = 37.0929 \text{ m}$ ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s^2)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0013	0.0033	0.0356	1.2265	✓
Caminata normal	0.0013	0.0046	0.0570	1.2850	✓
Caminata rápida	0.0014	0.0067	0.0965	1.3608	✓
Carrera lenta	0.0022	0.0180	0.2337	2.1750	✓
Carrera normal	0.0030	0.0335	0.5236	2.8696	✓
Carrera rápida	0.0079	0.1589	3.1635	7.6849	X
Resonancia	0.0106	0.2115	4.2128	10.2405	X

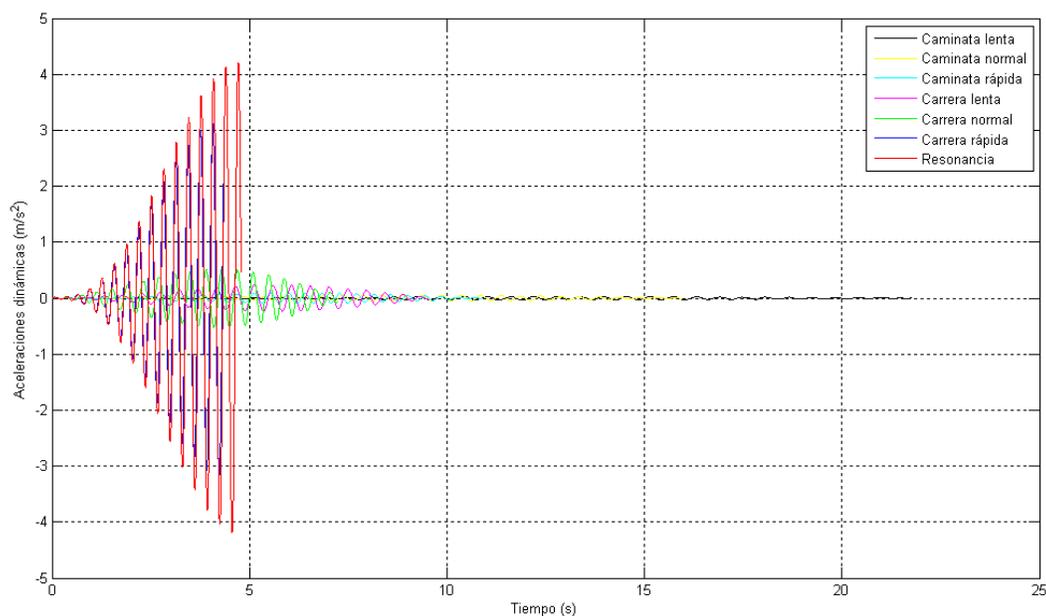


Figura 5.20 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 \text{ m}$ y en $x = 37.0929 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático)



Tabla 5.16 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 \text{ m}$ y en $x = 37.0929 \text{ m}$ ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0024	0.0048	0.0524	1.1587	✓
Caminata normal	0.0025	0.0067	0.0833	1.2024	✓
Caminata rápida	0.0026	0.0098	0.1412	1.2547	✓
Carrera lenta	0.0037	0.0258	0.3348	1.8121	✓
Carrera normal	0.0048	0.0473	0.7363	2.3093	X
Carrera rápida	0.0112	0.2246	4.4707	5.4318	X
Resonancia	0.0150	0.2991	5.9567	7.2410	X

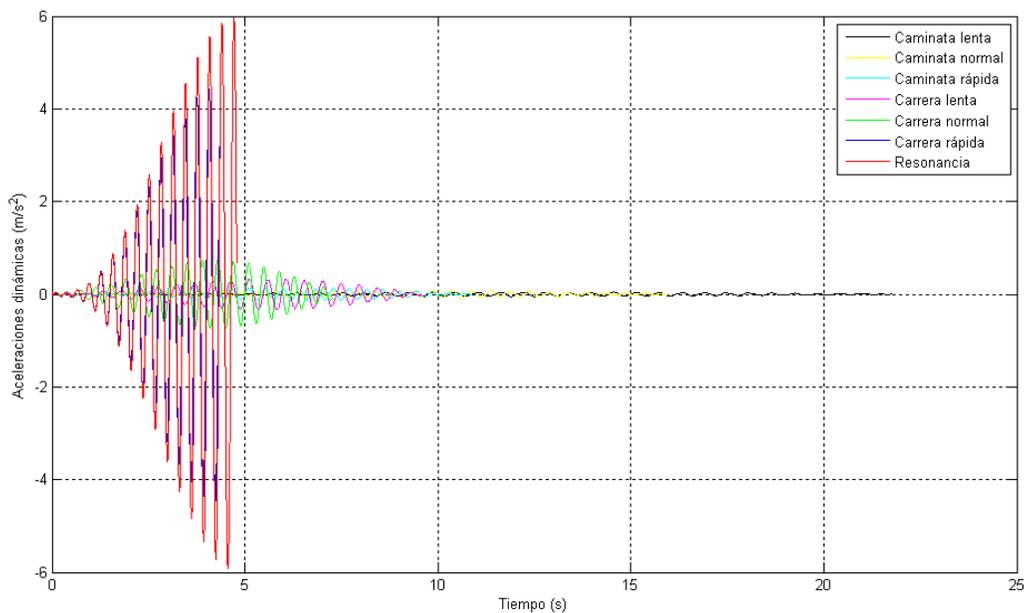


Figura 5.21 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca en $x = 14.064 \text{ m}$ y en $x = 37.0929 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático)



5.5.3 Puente peatonal Pátzcuaro

El puente peatonal Pátzcuaro se representó como una viga Euler-Bernoulli doblemente empotrada sometida simultáneamente a una carga constante y armónica en movimiento; dónde sólo basta con considerar las primeras siete formas modales verticales (ecuación 5.114) para obtener una masa efectiva de 90.5070 % (tabla 5.17).

Tabla 5.17 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal Pátzcuaro (modelo matemático)

j -ésimo modo de vibrar	T_j (s)	f_j (Hz)	w_j (rad/s)	$m_{eff,j}$ (%)
1	0.3613	2.7680	17.3919	69.0331
2	0.1311	7.6301	47.9413	9.5×10^{-14}
3	0.0669	14.9580	93.9841	13.2328
4	0.0404	24.7265	155.3614	9.89×10^{-13}
5	0.0271	36.9372	232.0831	5.3591
6	0.0194	51.5897	324.1476	4.267×10^{-12}
7	0.0146	68.6845	431.5574	2.8820

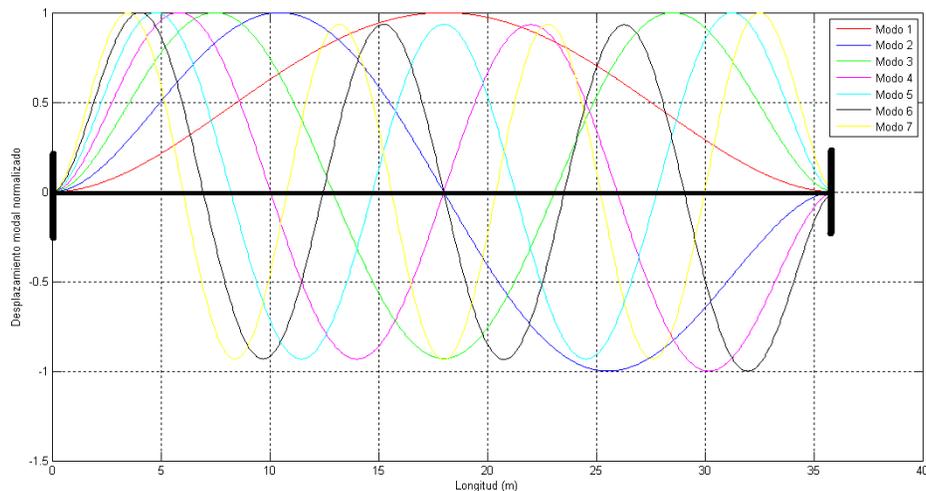


Figura 5.22 Formas modales verticales del puente peatonal Pátzcuaro (modelo matemático)

En las tablas 5.18 a 5.21, y en las figuras 5.23 a 5.26 se muestran los resultados matemáticos de la vibración forzada inducida por peatones móviles sin considerar el amortiguamiento estructural.



Tabla 5.18 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 \text{ m}$ ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s^2)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0003	0.0011	0.0114	1.6284	✓
Caminata normal	0.0003	0.0017	0.0208	1.8180	✓
Caminata rápida	0.0004	0.0030	0.0434	2.2708	✓
Carrera lenta	0.0007	0.0074	0.0977	4.4205	✓
Carrera normal	0.0015	0.0209	0.3284	8.9988	✓
Carrera rápida	0.0005	0.0061	0.1210	2.7913	✓
Resonancia	0.0088	0.1516	2.6262	53.1247	X

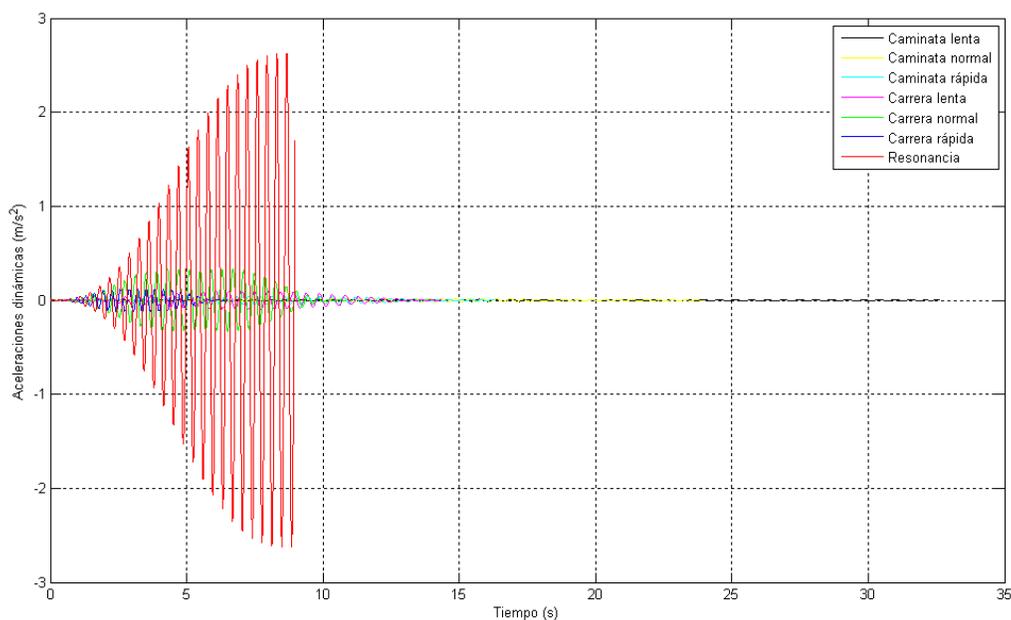


Figura 5.23 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático)



Tabla 5.19 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 \text{ m}$ ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s^2)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0005	0.0015	0.0161	1.4435	✓
Caminata normal	0.0005	0.0024	0.0294	1.5777	✓
Caminata rápida	0.0006	0.0043	0.0613	1.8977	✓
Carrera lenta	0.0011	0.0105	0.1381	3.4182	✓
Carrera normal	0.0022	0.0295	0.4645	6.6451	✓
Carrera rápida	0.0007	0.0087	0.1711	2.2609	✓
Resonancia	0.0124	0.2144	3.7140	37.5750	X

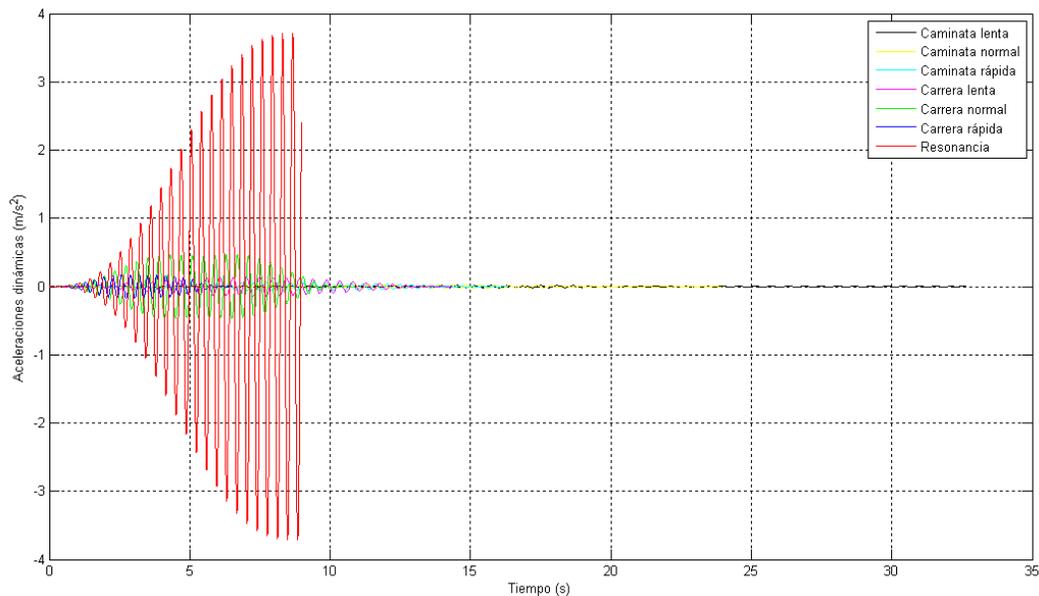


Figura 5.24 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático)



Tabla 5.20 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 \text{ m}$ ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s^2)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0009	0.0022	0.0228	1.3128	✓
Caminata normal	0.0009	0.0034	0.0415	1.4077	✓
Caminata rápida	0.0011	0.0061	0.0868	1.6338	✓
Carrera lenta	0.0018	0.0148	0.1953	2.7094	✓
Carrera normal	0.0033	0.0418	0.6570	4.9808	✓
Carrera rápida	0.0012	0.0123	0.2420	1.8872	✓
Resonancia	0.0175	0.3033	5.2524	26.5797	X

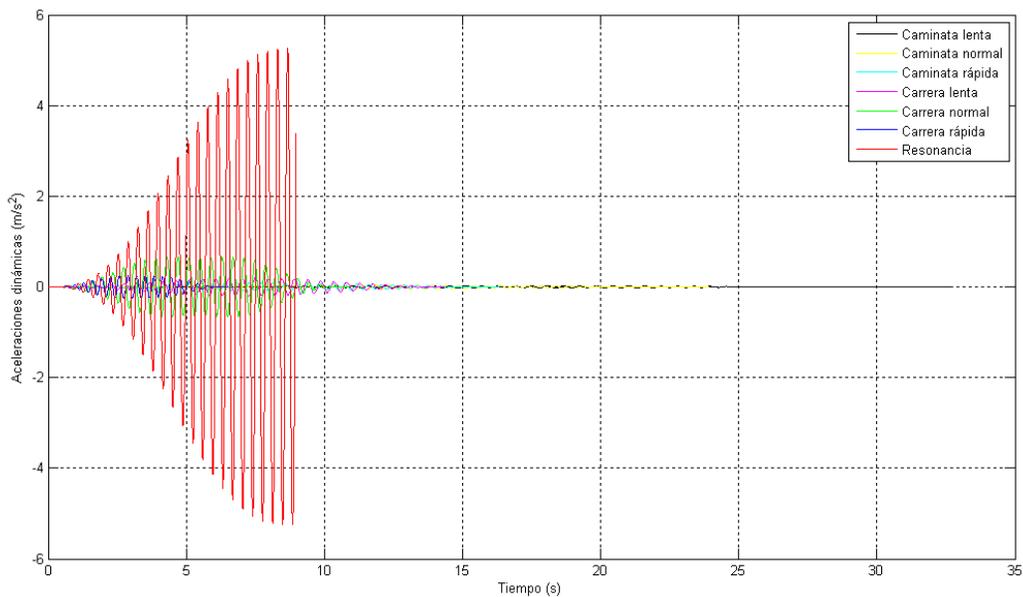


Figura 5.25 Aceleraciones dinámicas máximas del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático)



Tabla 5.21 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 \text{ m}$ ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s^2)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0016	0.0031	0.0323	1.2203	✓
Caminata normal	0.0017	0.0048	0.0587	1.2875	✓
Caminata rápida	0.0019	0.0086	0.1228	1.4473	✓
Carrera lenta	0.0029	0.0210	0.2763	2.2082	✓
Carrera normal	0.0050	0.0591	0.9292	3.8086	X
Carrera rápida	0.0021	0.0176	0.3421	1.6229	✓
Resonancia	0.0248	0.4289	7.4280	18.8048	X

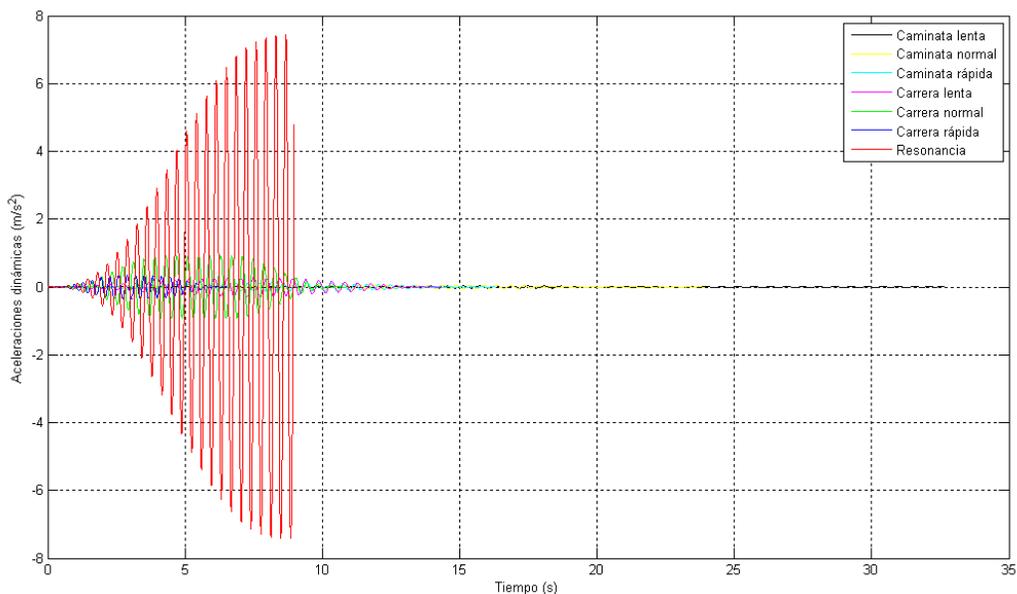


Figura 5.26 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático)



5.5.4 Puente peatonal tipo

El puente peatonal tipo se representó como una viga Euler-Bernoulli doblemente empotrada sometida simultáneamente a una carga constante y armónica en movimiento; dónde sólo basta con considerar las primeras siete formas modales verticales (ecuación 5.114) para obtener una masa efectiva de 90.5070 % (tabla 5.22).

Tabla 5.22 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal tipo (modelo matemático)

j -ésimo modo de vibrar	$T_j (s)$	$f_j (Hz)$	$w_j (rad/s)$	$m_{eff,j} (%)$
1	0.2917	3.4282	21.5400	69.0331
2	0.1058	9.4500	59.3758	9.5×10^{-14}
3	0.0540	18.5257	116.4003	13.2328
4	0.0327	30.6241	192.4169	9.89×10^{-13}
5	0.0219	45.7471	287.4376	5.3591
6	0.0157	63.8944	401.4605	4.267×10^{-12}
7	0.0118	85.0665	534.4889	2.8820

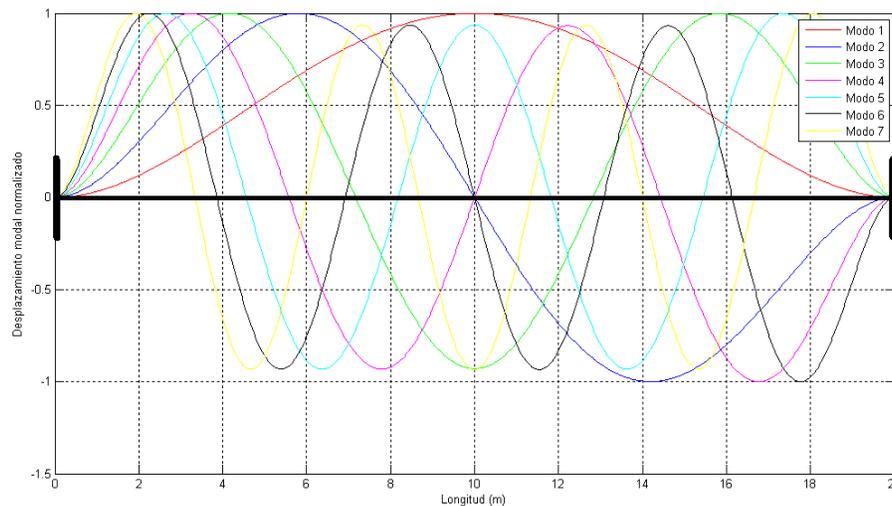


Figura 5.27 Formas modales verticales del puente peatonal tipo (modelo matemático)

En las tablas 5.23 a 5.26, y en las figuras 5.28 a 5.31 se muestran los resultados matemáticos de la vibración forzada inducida por peatones móviles sin considerar el amortiguamiento estructural.



Tabla 5.23 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo en $x = 10 \text{ m}$ ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s^2)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0005	0.0019	0.0199	1.5208	✓
Caminata normal	0.0005	0.0025	0.0316	1.5961	✓
Caminata rápida	0.0006	0.0035	0.0512	1.7183	✓
Carrera lenta	0.0011	0.0104	0.1374	3.3279	✓
Carrera normal	0.0014	0.0178	0.2838	4.2664	✓
Carrera rápida	0.0029	0.0570	1.2072	8.4916	X
Resonancia	0.0036	0.0771	1.6575	10.6150	X

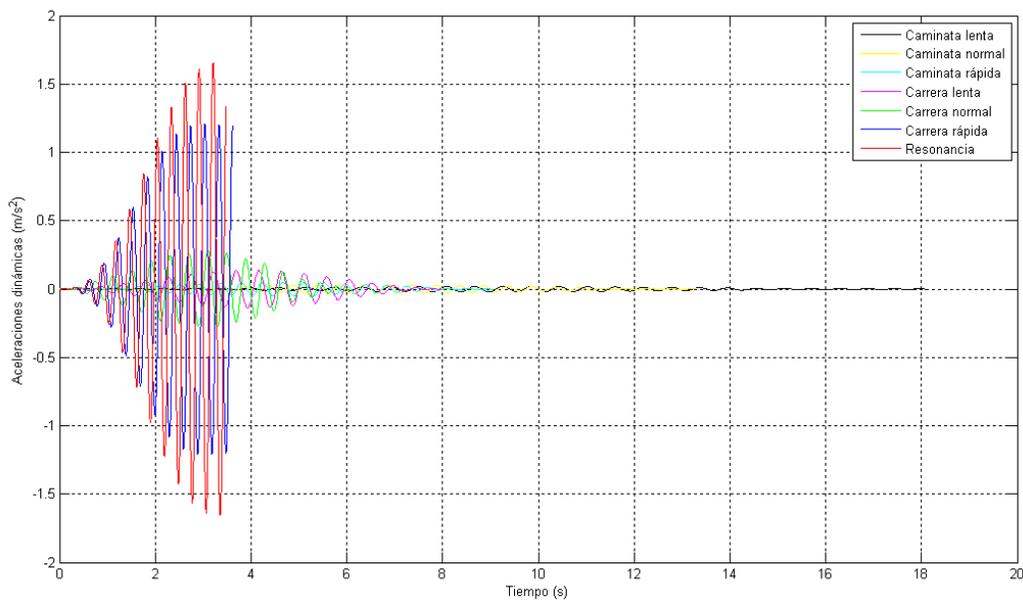


Figura 5.28 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo en $x = 10 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón en movimiento (modelo matemático)



Tabla 5.24 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo en $x = 10 \text{ m}$ ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s^2)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0009	0.0027	0.0282	1.3675	✓
Caminata normal	0.0010	0.0036	0.0448	1.4209	✓
Caminata rápida	0.0010	0.0050	0.0724	1.5071	✓
Carrera lenta	0.0018	0.0147	0.1943	2.6450	✓
Carrera normal	0.0022	0.0252	0.4013	3.3056	✓
Carrera rápida	0.0042	0.0808	1.7077	6.1851	X
Resonancia	0.0051	0.1091	2.3432	7.5442	X

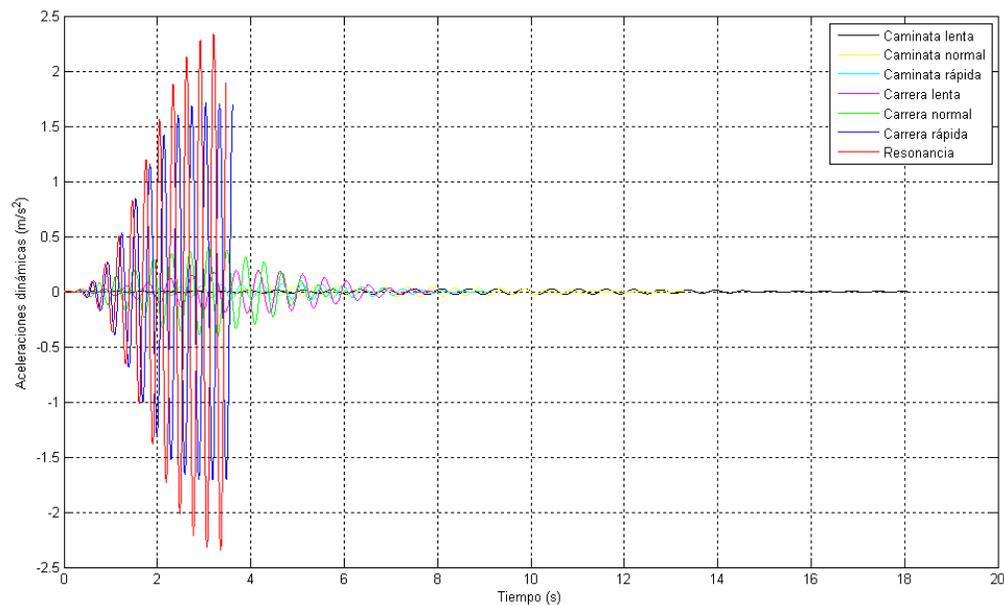


Figura 5.29 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo en $x = 10 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones en movimiento (modelo matemático)



Tabla 5.25 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo en $x = 10 \text{ m}$ ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s^2)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0017	0.0038	0.0399	1.2591	✓
Caminata normal	0.0018	0.0051	0.0633	1.2969	✓
Caminata rápida	0.0018	0.0071	0.1025	1.3577	✓
Carrera lenta	0.0029	0.0209	0.2747	2.1622	✓
Carrera normal	0.0036	0.0356	0.5674	2.6290	✓
Carrera rápida	0.0062	0.1147	2.4160	4.5542	X
Resonancia	0.0073	0.1542	3.3120	5.3746	X

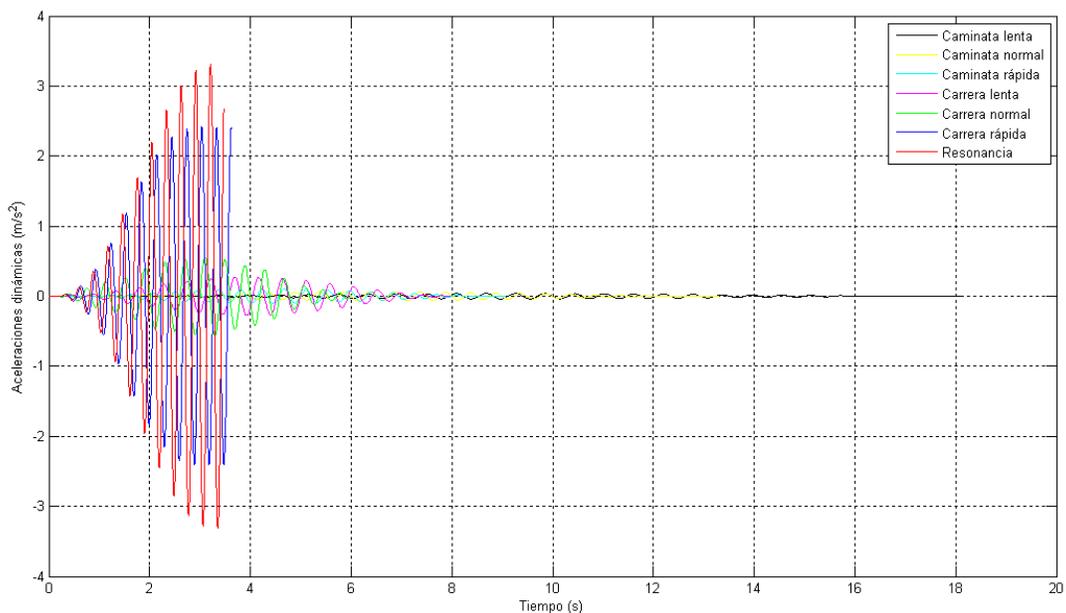


Figura 5.30 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo en $x = 10 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones en movimiento (modelo matemático)



Tabla 5.26 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo en $x = 10 \text{ m}$ ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático)

Actividad peatonal	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s^2)	DMF	Nivel de confort aceptable
Caminata lenta	0.0032	0.0054	0.0564	1.1824	✓
Caminata normal	0.0033	0.0072	0.0896	1.2093	✓
Caminata rápida	0.0034	0.0101	0.1452	1.2520	✓
Carrera lenta	0.0049	0.0296	0.3884	1.8208	✓
Carrera normal	0.0058	0.0502	0.8023	2.1506	X
Carrera rápida	0.0093	0.1628	3.4185	3.4404	X
Resonancia	0.0105	0.2181	4.6805	3.8929	X

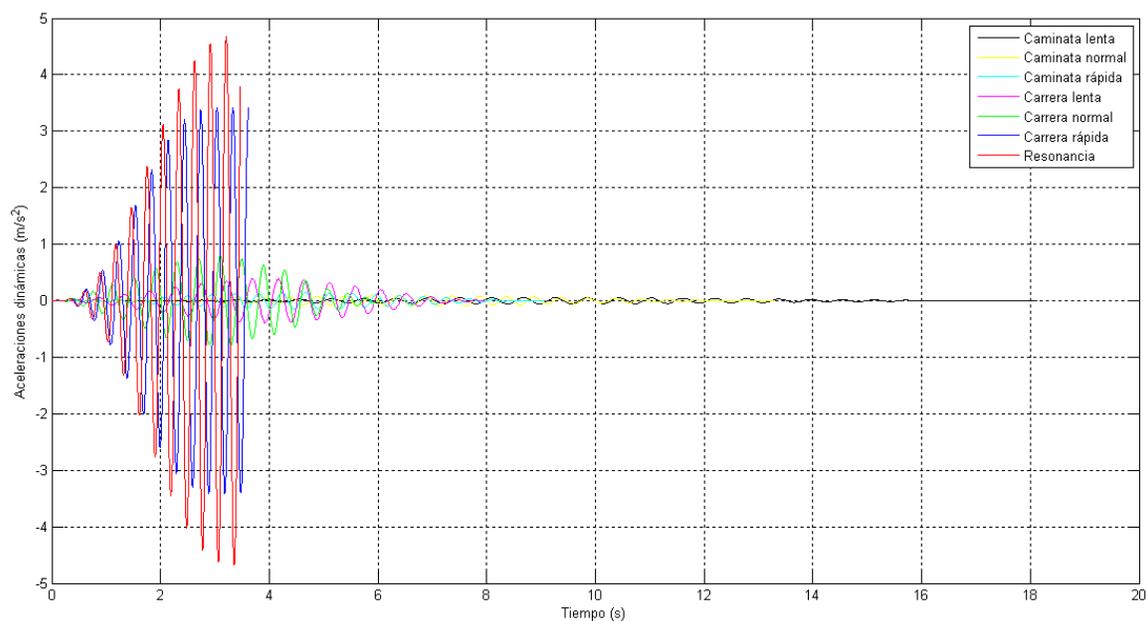


Figura 5.31 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo en $x = 10 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones en movimiento (modelo matemático)



5.6 Conclusiones

Se observó que las condiciones de apoyo de los puentes peatonales son un factor muy importante de considerar en los modelos matemáticos simplificados, ya que éstas influyen considerablemente en los modos y frecuencias verticales de vibrar, así como en las masas modales participantes.

La carga peatonal móvil fue modelada bajo varios supuestos mencionados en el capítulo 2, tales como el número efectivo de peatones y el coeficiente de reducción, los cuales reducen las fuerzas dinámicas peatonales; esto con el objetivo de no sobreestimar la respuesta dinámica, ya que sería muy poco probable que todos los peatones del grupo se desplacen ejecutando la misma frecuencia de vibrar, además de que la probabilidad de ejercer frecuencias fuera del intervalo crítico va disminuyendo en la realidad. Para el número efectivo de peatones se decidió utilizar la ecuación 2.6 de la norma ISO 10137 propuesta por Matsumoto (1978), la cual considera mediante una distribución de Poisson que los peatones no están correlacionados tomando en cuenta frecuencias de resonancia y fases aleatorias. Para la obtención del coeficiente de reducción se decidió utilizar el método propuesto por la norma UK N.A. EN 1991-2, ya que esta norma hace énfasis en el control de las vibraciones verticales, además de que permite considerar a los peatones caminando o corriendo (figura 2.5). Por otra parte, los coeficientes de Fourier (tabla 2.2) reducen la respuesta dinámica cuando los peatones se desplazan caminando, sin embargo, éstos la incrementan cuando los peatones se desplazan corriendo, ya que la fuerza ejercida por un peatón corriendo es mucho mayor por el contacto discontinuo que ejercen los pies sobre el suelo. Bajo todos los supuestos anteriores, es evidente notar que los valores máximos de respuesta dinámica obtenidos con los modelos matemáticos simplificados no pueden coincidir exactamente con los valores obtenidos in situ mediante las pruebas de vibración ambiental del capítulo 4 de esta tesis para los puentes peatonales Salamanca y Pátzcuaro (tabla 5.27), ya que en las pruebas de vibración ambiental que se realizaron no se controló la velocidad de cruce de los peatones, ni la frecuencia de vibrar ejercida por los mismos; además de que es posible que el número de peatones que se sincronizó pudo variar en comparación con el que se obtiene mediante la ecuación 2.6. Sin embargo, al comparar resultados se llega a la misma conclusión de que todos



los puentes son susceptibles a carreras peatonales que pueden generar vibraciones resonantes verticales y rebasar el límite de confort.

Tabla 5.27 Comparación de aceleraciones verticales máximas de los modelos matemáticos y pruebas de vibración forzada “in situ” de los puentes peatonales Salamanca y Pátzcuaro

Caso de carga peatonal	Puente peatonal Salamanca			Puente peatonal Pátzcuaro		
	Pruebas de vibración forzada “in situ”	Modelo matemático simplificado		Pruebas de vibración forzada “in situ”	Modelo matemático simplificado	
	Aceleración máxima (m/s^2)	Aceleración máxima (m/s^2)	Actividad peatonal	Aceleración máxima (m/s^2)	Aceleración máxima (m/s^2)	Actividad peatonal
1 peatón caminando	0.1875	0.0462	Caminata rápida	0.2448	0.0434	Caminata rápida
1 peatón corriendo	1.9940	2.1068	Resonancia	1.3592	2.6262	Resonancia
2 peatones caminando	0.2057	0.0665	Caminata rápida	0.0909	0.0613	Caminata rápida
2 peatones corriendo	2.5435	2.9792	Resonancia	2.8322	3.7140	Resonancia
4 peatones caminando	0.4262	0.0965	Caminata rápida	0.1676	0.0868	Caminata rápida
4 peatones corriendo	3.6197	4.2128	Resonancia	2.8817	5.2524	Resonancia
8 peatones caminando	0.3511	0.1412	Caminata rápida	0.3103	0.1228	Caminata rápida
8 peatones corriendo	5.3066	5.9567	Resonancia	3.3224	7.4280	Resonancia



Es de importancia mencionar que los valores de respuesta dinámica máxima de los modelos matemáticos simplificados mostrados en la tabla 5.27 no consideran el amortiguamiento estructural, debido a que éste no fue evaluado para cada modo de vibrar en el capítulo 4 de esta tesis mediante una descomposición modal de la respuesta dinámica en el dominio de la frecuencia; por lo tanto, los valores obtenidos de amortiguamiento estructural son una estimación del amortiguamiento estructural para los modos verticales de vibrar ante cargas peatonales muy cercanas a la resonancia. Sin embargo, aun así se observó que los valores obtenidos de amortiguamiento estructural se encuentran dentro de los intervalos de diseño propuestos por Bachmann *et al.*, (1995) en la tabla 2.8, y los cuales son muy reducidos; razón por la cual resulta viable omitir el amortiguamiento estructural, ya que éste no influirá de manera significativa en la respuesta dinámica de los puentes peatonales estudiados. Es posible obtener la respuesta dinámica de los puentes peatonales considerando el amortiguamiento estructural, mediante el programa realizado en el apéndice C. En el apéndice D de esta tesis se realiza un ejemplo detallado de la respuesta dinámica de uno de los puentes peatonales, sin y con amortiguamiento estructural, mediante los programas de los apéndices B y C, respectivamente. Mediante el programa del apéndice C es posible obtener los mismos resultados del programa del apéndice B, tal y como se demuestra en el apéndice D; de esta manera, se comprueba que el modelo generalizado de un grado de libertad (Rao, 2007) ofrece los mismos resultados que el modelo continuo desarrollado por Frýba (1999).

Al comparar los valores de respuesta dinámica máxima de las pruebas “in situ” de vibración forzada y los modelos matemáticos simplificados (tabla 5.27), se observa que particularmente en el puente peatonal Salamanca se lograron ejecutar vibraciones cercanas a la resonancia en las pruebas “in situ” de vibración forzada, y por lo tanto la ecuación 5.131 funge como un modelo bastante acertado de la excitación dinámica periódica que causan los peatones cuando se desplazan a lo largo de este tipo de estructuras.



Capítulo 6

Modelo matemático simplificado con amortiguadores de masa sintonizados

6.1 Introducción

Los puentes peatonales que sufren problemas vibratorios deben ser intervenidos con alguna medida correctiva que controle las respuestas dinámicas ocasionadas por los peatones, las cuales consisten principalmente en aumentar la rigidez mediante la modificación de la estructura o incrementar el amortiguamiento estructural mediante la inclusión de dispositivos especiales. La medida correctiva más económica y usual para controlar las vibraciones verticales de puentes peatonales es mediante la adición de un sistema de amortiguadores de masa sintonizados (TMD's) a la estructura primaria. En este capítulo se diseñan los amortiguadores de masa sintonizados que controlarán las vibraciones en los puentes peatonales estudiados y se obtuvieron las propiedades dinámicas verticales así como las respuesta dinámicas resonantes en la dirección vertical de las estructuras estudiadas mediante el modelo matemático simplificado del capítulo 5 con la adición de los respectivos amortiguadores de masa sintonizados.

6.2 Control pasivo de vibraciones en estructuras

En la actualidad existe una gran diversidad de sistemas que permiten reducir las vibraciones en las estructuras causadas por diferentes tipos de excitación dinámica tales como sismos, viento, impactos, fuerzas ocasionadas por los usuarios de las estructuras, entre otros. En función del tipo de excitación dinámica y la dirección de las vibraciones se debe de determinar cuál es el sistema más adecuado y económico que logre reducir las respuestas dinámicas de las estructuras de manera eficiente. En la figura 6.1 se muestran los diferentes tipos de sistemas capaces de reducir las vibraciones en las estructuras.

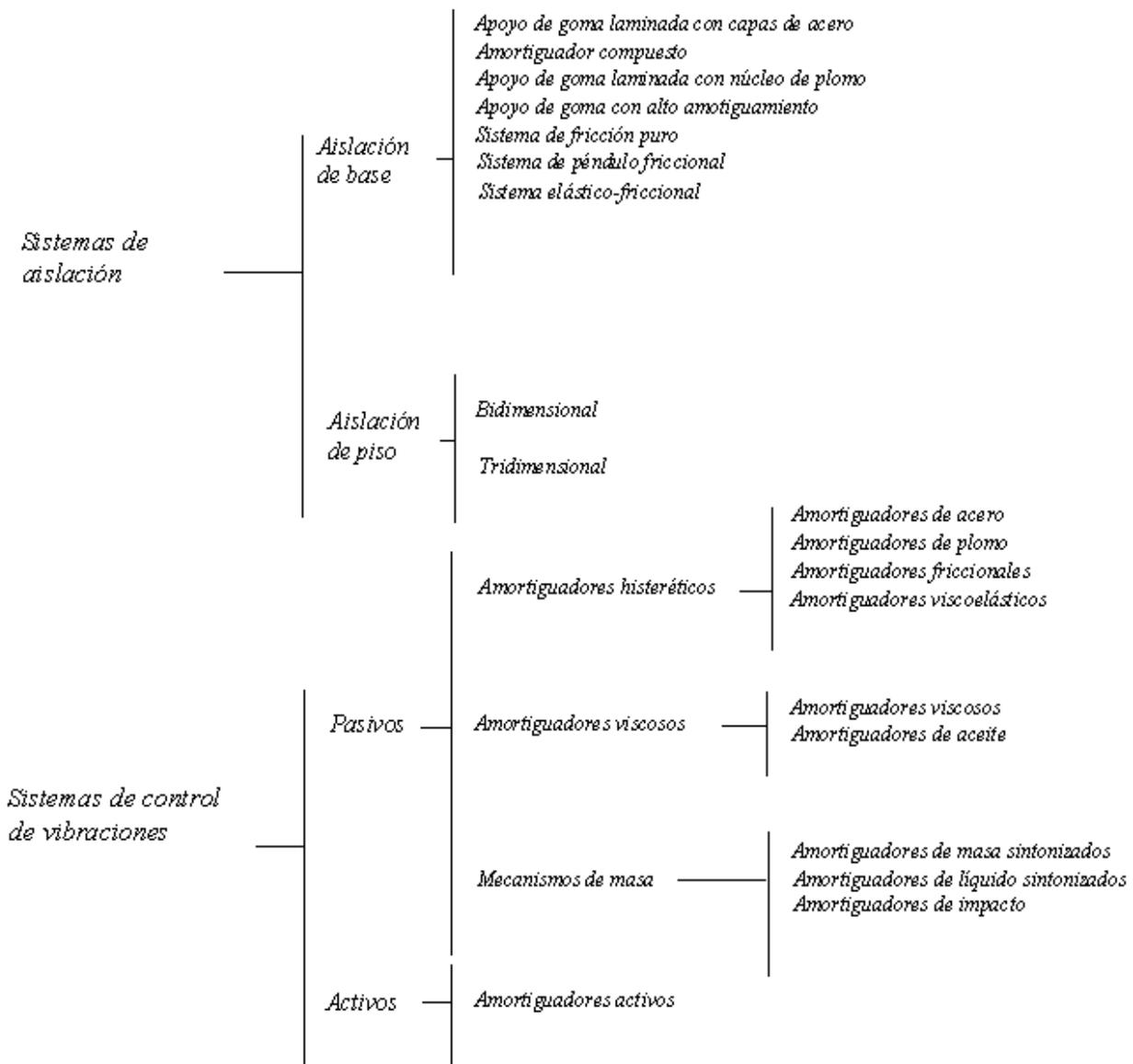


Figura 6.1 Sistemas de reducción de vibraciones (Montanaro, 2002)

El campo de aplicación de los sistemas de aislamiento suele restringirse a la aplicación sísmica, mientras que los sistemas de control de vibraciones suelen utilizarse para controlar las vibraciones producidas por diversas fuentes de excitación dinámica. Los sistemas de control de vibraciones pueden subdividirse en pasivos y activos tal y como se muestra en la figura 6.1.



El control pasivo de estructuras, a diferencia del control activo, conlleva a la modificación de sus características de masa, rigidez y/o amortiguamiento, en aras de reducir la respuesta dinámica aprovechando el propio movimiento y sin incluir actuadores alimentados de forma externa como en el caso de amortiguadores activos. Dependiendo de cuál de estas tres características o combinación de ellas se modifica, existen diferentes técnicas de control pasivo, abarcando desde la rigidización o el aumento de la masa estructural, hasta la inclusión de dispositivos concretos, que disipen o almacenen parte de la energía introducida por la fuente de excitación (Martínez, 2009).

La vía más económica y viable en puentes peatonales es utilizar amortiguadores que logren disipar la energía, ya que el amortiguamiento estructural suele ser muy bajo sobre todo en puentes peatonales de acero. El objetivo de reacondicionar la estructura mediante este tipo de dispositivos, es reducir la energía cinética y potencial adquirida por ésta (en caso de permanecer en el régimen elástico) o bien los daños estructurales acumulados (en caso de plastificación), almacenando o disipando energía a través de los elementos de disipación de energía (ED), complementando así la disipación por amortiguamiento estructural que es, por naturaleza, poco elevado.

Los sistemas de control activo o semi activo estructural, requieren de una fuente de alimentación externa que actúe sobre elementos de disipación activa (EDA), de naturaleza electromecánica, electroneumática, o electrohidráulica, entre otras. Estos elementos generan una vibración tal, que compensa total o parcialmente la de la propia estructura. El control activo conlleva a la instalación de sensores que miden el nivel y contenidos de la vibración a controlar, sistemas de tratamiento y proceso de señal y dispositivos de amplificación, que actúan sobre los elementos encargados físicamente de reducir la vibración.

Puesto que el objetivo de esta tesis es la reducción de las vibraciones verticales en puentes peatonales, se ha descartado el empleo de técnicas de control activo, debido a que los niveles de vibración alcanzados en los casos más desfavorables, no justifican la complejidad de estos sistemas, su elevado costo, necesidad de mantenimiento y ajuste continuado, así como la posible



falta de fiabilidad y robustez, que hacen necesaria la inclusión de elementos pasivos por si los activos fallaran.

En el marco de las técnicas de control pasivo, las vibraciones inadmisibles en puentes peatonales podrían a su vez ser reducidas a través de modificaciones estructurales, como sería el caso de un proceso de rigidización, que elevaría la frecuencia fundamental del puente y con ella la velocidad de resonancia de las composiciones, o bien un aumento de la masa del tablero para reducir de este modo el nivel de aceleraciones verticales. Este tipo de medidas correctivas, sin embargo, suponen en general la sustitución del tablero, lo cual puede tener un costo elevado dado que debe realizarse dicha operación en el menor tiempo posible para que la estructura esté en pronta disposición de los peatones; por lo tanto, la manera más económica y viable de reducir las vibraciones en puentes peatonales es mediante la inclusión de elementos de disipación pasiva (EDP), es decir, amortiguadores pasivos.

Entre los elementos de disipación pasiva (EDP) que hasta ahora se encuentran tecnológicamente desarrollados como para poder materializarse su implantación en una estructura, destacan los siguientes (Martínez, 2009):

- Disipadores metálicos por plastificación o extrusión (MD): En estos dispositivos se disipa la energía por deformación inelástica de elementos metálicos habitualmente de acero o plomo. Se trata de dispositivos muy robustos y poco dependientes de las condiciones medioambientales. No obstante deben ser sustituidos frecuentemente, ya que actuando como fusibles, acumulan daño durante su funcionamiento y fallan por fatiga.
- Disipadores por fricción (FD) En este tipo de elementos la energía disipada equivale al trabajo no recuperable de la fuerza tangencial necesaria para deslizar dos superficies entre sí, oponiéndose a la fricción sólida que aparece en la interfaz. El desarrollo de leyes constitutivas válidas para simular dicho proceso de fricción, depende en gran medida de resultados experimentales; en primer lugar porque no existe una teoría con rigor comparable a los modelos plásticos y visco elásticos que se emplean para predecir el comportamiento de los MD y VED; y en segundo lugar porque su respuesta depende del



estado superficial de los elementos que se deslizan y éste puede verse afectado fácilmente por efectos medioambientales, como son la aparición de capas de óxido a causa de la humedad, posibles fenómenos de corrosión, o la fusión localizada en puntos de contacto por exceso de temperatura si el número de ciclos es muy elevado. Además la respuesta de la estructura sobre la que se instalan tanto los FD como los MD, puede superar en algunos casos a la respuesta de la estructura sin reacondicionar, por lo que es necesaria la realización de análisis dinámicos no lineales, que aseguren que la selección de los parámetros de diseño de los amortiguadores es la adecuada.

- Disipadores visco-elásticos (VED): Están compuestos por copolímeros o sustancias vítreas que disipan energía al ser deformadas tangencialmente. Su comportamiento presenta una contribución de tipo elástico, por lo que aumenta la rigidez y por tanto la frecuencia de la estructura sobre la que se instalan, siendo ambos dependientes de la frecuencia de excitación y la temperatura exterior. A diferencia de los dos tipos de disipadores anteriores, su principio de funcionamiento no está basado en plastificación, fricción o algún otro mecanismo que degrade el material, por lo que no necesitan ser reemplazados con tanta frecuencia.
- Disipadores viscosos puros (FVD): Disipan energía al deformar un fluido con elevada viscosidad como el gel de silicona. Entre los diferentes tipos de FVD comerciales, los que proporcionan una mayor disipación de energía son los amortiguadores compactos en los que un pistón fuerza el flujo del fluido a través de orificios de pequeña sección, disipando energía por pérdida de carga. Un disipador viscoso puro aumenta de forma externa la tasa de amortiguamiento de la estructura sobre la que se instala, sin incrementar su rigidez, y su formato estanco hace que sea muy resistente a las condiciones medioambientales, al no encontrarse el fluido en contacto con la atmósfera. Puesto que su inclusión no modifica la rigidez ni prácticamente la masa de la estructura, y sólo aumentan el término de disipación viscosa, la respuesta estructural, reacondicionada con este tipo de elementos, siempre será menor que sin reacondicionar.



- Amortiguadores de masa sintonizados (TMD): Se trata de un sistema oscilatorio secundario, habitualmente compuesto por masas conectadas a la estructura principal a través de elementos con cierta rigidez como muelles, y en algunos casos amortiguadores viscosos o visco elásticos. Deben ser sintonizados a la frecuencia del modo o modos de la estructura cuya contribución se desea reducir, situándolos en el punto de máxima amplitud modal. El objetivo de su instalación es que al actuar la fuente de excitación, la vibración de la estructura principal sea transferida a los TMD's, reduciéndose las oscilaciones indeseables de la primera. Su rendimiento en resonancia es elevado, pero se reduce notoriamente en el resto de las situaciones. Como ventajas fundamentales de estos elementos cabe destacar que no necesitan estar conectados entre dos puntos con movimiento relativo, requieren de poco mantenimiento y las modificaciones que debe sufrir la estructura principal para albergarlos son mínimas.

A lo largo de la historia se han construido muchos puentes peatonales que han sufrido problemas de vibración debidos a efectos de resonancia; tal es el caso del puente Broughton que fue construido en Manchester, Inglaterra sobre el río Irwell y tenía un claro de 144 *m*. El puente Broughton colapsó en 1831 a raíz del paso de una tropa de soldados. Según fuentes históricas, unos 74 soldados iban marchando sobre el puente, lo cual ocasionó que entrara en resonancia en la dirección vertical y que colapsara. No hubo muertos, pero 20 soldados salieron heridos. A partir de ese momento, fue impuesta como medida obligatoria que los soldados debían romper el paso al cruzar puentes peatonales. El fallo del puente probablemente fue debido a la amplificación de cargas que ocurrió por el golpe sincronizado de los 74 soldados, independientemente de que el puente pudiera entrar en resonancia o no. Aun así, en la época moderna se mantiene la disposición de que los soldados rompan el paso al cruzar los puentes.

Otro caso muy conocido fue el del puente peatonal Millennium que cruza el río Támesis en Londres. El puente Millennium es un puente peatonal colgante de acero que tiene dos plataformas de soporte y está hecho en tres secciones de 80 *m*, 144 *m* y 108 *m* (de norte a sur) con una estructura resultante de 332 *m* de largo; la cubierta de aluminio mide 4 *m* de ancho y los cables que mantienen al puente en suspensión están tensados para poder sostener 2000 toneladas fuerza

de peso, lo suficiente para soportar a 5000 personas al mismo tiempo en el puente. El 10 de junio del 2000 se abrió al público e inmediatamente después se observaron vibraciones de la estructura, principalmente laterales (Dallard *et al.*, 2001). Como resultado, dos días después se cerró para realizar modificaciones que duraron casi dos años con un costo total de 6.25 millones de euros. La solución fue encajar discretamente 37 amortiguadores de fluido viscoso (fluid viscous damper o FVD) para mitigar el movimiento horizontal/lateral y 52 amortiguadores de masa sintonizados (tuned mass damper o TMD) debajo de la cubierta para controlar el movimiento vertical. En la figura 6.2 se pueden observar los amortiguadores de fluido viscoso que se colocaron en el puente Millennium, mientras que en la figura 6.3 se muestran los amortiguadores de masa sintonizados del mismo puente.



Figura 6.2 Amortiguadores de fluido viscoso (FVD) en el puente peatonal Millennium, Londres



Figura 6.3 Amortiguadores de masa sintonizados (TMD) en el puente peatonal Millennium, Londres

Los amortiguadores de masa sintonizados son excelentes dispositivos para controlar las vibraciones resonantes verticales en puentes peatonales, además de que son dispositivos de disipación pasiva más económicos en cuanto a costo, instalación y mantenimiento con respecto de otros dispositivos de disipación de energía pasiva; por lo tanto, se considera en esta tesis que son los dispositivos más aptos para controlar las vibraciones en los puentes peatonales estudiados.

6.2.1 Amortiguadores de masa sintonizados en puentes peatonales

Un amortiguador de masa sintonizado (TMD) es un subsistema vibratorio unido a un sistema de vibración primaria más grande (puente peatonal), el cual consiste en una masa, un resorte y un amortiguador que se sintonizan a la frecuencia de vibrar del puente peatonal que puede vibrar en



resonancia. La adición de un amortiguador al sistema masa-resorte lo hace eficiente no sólo para una única frecuencia, sino para un intervalo de frecuencias de vibrar (Živanović et al., 2005). La sintonización precisa de su frecuencia resulta en fuerzas de inercia inducidas por la masa del TMD, las cuales contrarrestan las fuerzas aplicadas al sistema primario, logrando reducir las vibraciones. Por lo tanto, la función práctica normal del TMD es reducir las vibraciones resonantes del sistema primario (aunque, en teoría, podría ser utilizado como un equilibrador de inercia en cualquier frecuencia, siempre que se sintonice con dicha frecuencia de modos superiores de vibrar). Mientras que las amplitudes de vibración del sistema primario se pueden suprimir en gran medida, las grandes amplitudes de desplazamiento deben ser aceptadas en el TMD. En la figura 6.4 se muestra un diseño típico de amortiguador de masa sintonizado.

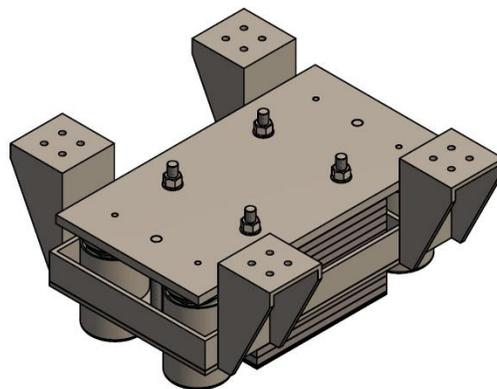


Figura 6.4 Amortiguador de masa sintonizado (TMD)

En la mayoría de los casos, la vibración de una frecuencia natural del sistema primario es problemática y requiere la atenuación. El puente peatonal se idealiza entonces como un sistema equivalente de un grado de libertad en función de la frecuencia que se quiera sintonizar, mientras que el sistema de amortiguación (TMD) se considera como un sistema adicional, de tal manera que con el sistema amortiguador la estructura se convierte en un sistema de dos grados de libertad equivalente. La figura 6.5 representa el modelo equivalente de dos grados de libertad cuando es excitado por una carga armónica vertical, donde m , c y k representan la masa, coeficiente de



amortiguamiento y rigidez del sistema primario, respectivamente; y m_d , c_d y k_d representan la masa, coeficiente de amortiguamiento y rigidez del amortiguador de masa sintonizado, respectivamente. Por otra parte, los desplazamientos verticales del sistema primario y del amortiguador de masa sintonizado se representan respectivamente mediante y y y_d .

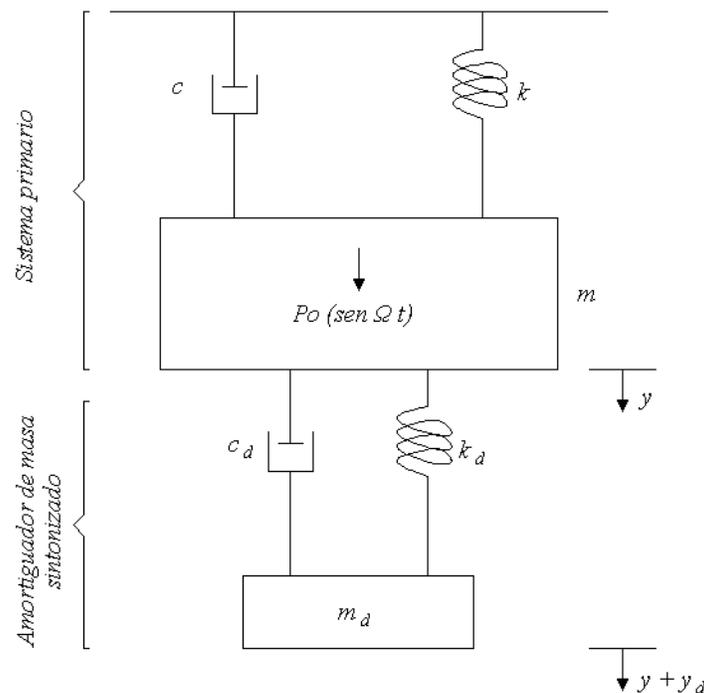


Figura 6.5 Modelo dinámico de un sistema primario con un sistema de amortiguamiento (Connor, 2003)

El sistema dinámico equivalente de dos grados de libertad de la figura 6.5 puede entonces representarse mediante dos ecuaciones diferenciales de movimiento: una ecuación de movimiento para el sistema primario y otra para el TMD:

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + k \cdot y - c_d \cdot \dot{y}_d - k_d \cdot y_d = P_o \text{sen}(\Omega t) \quad (6.1)$$

$$m_d \cdot (\ddot{y} + \ddot{y}_d) + c_d \cdot \dot{y}_d + k_d \cdot y_d = 0 \quad (6.2)$$

Dónde:



$$c = 2\xi w m \tag{6.3}$$

$$c_d = 2\xi_d w_d m_d \tag{6.4}$$

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.5}$$

$$w_d = \sqrt{\frac{k_d}{m_d}} \tag{6.6}$$

El sistema de ecuaciones anterior fue resuelto por Connor (2003) para la condición resonante:

$$y(t) = \left(\frac{P_o}{k \left(\frac{m_d}{m} \right)} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{2\xi}{\left(\frac{m_d}{m} \right)} + \frac{1}{2\xi_d} \right)^2}} \right) \text{sen}(\Omega t + \varphi_1) \tag{6.7}$$

$$y_d(t) = \left(\frac{P_o m}{2 k \xi_d m_d} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{2\xi}{\left(\frac{m_d}{m} \right)} + \frac{1}{2\xi_d} \right)^2}} \right) \text{sen}(\Omega t + \varphi_1 + \varphi_2) \tag{6.8}$$

Dónde:

$$\Omega = w \tag{6.9}$$



$$\varphi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\left(\frac{m_d}{m} \right) \xi_d + 4 \xi \xi_d^2}{2m \xi_d^2} \right) \quad (6.10)$$

$$\varphi_2 = \tan^{-1} \left(\frac{2 \left(\frac{m_d}{m} \right) \xi_d}{\left(\frac{m_d}{m} \right) + 4 \xi \xi_d} \right) \quad (6.11)$$

El rendimiento del TMD es muy elevado bajo la frecuencia resonante a la cual se sintoniza, sin embargo, Den Hartog (1956) demostró que el TMD mejorará su funcionamiento para frecuencias no resonantes cuando éste se diseña con parámetros óptimos. En el caso de un puente peatonal, la masa del sistema primario debe ser la equivalente a la masa efectiva del j -ésimo modo de vibrar que se quiere sintonizar, $\tilde{m}_{j,e}$, en el punto de anclaje del TMD, x^* . Aplicando las ecuaciones de Den Hartog (1956) a un puente peatonal, se pueden obtener los parámetros óptimos del TMD mediante las ecuaciones:

$$f_{d,opt} = \frac{f_j}{1 + \frac{m_d}{\tilde{m}_{j,e}}} \quad (6.12)$$

$$k_{d,opt} = (2\pi f_{d,opt})^2 m_d \quad (6.13)$$

$$w_{d,opt} = \sqrt{\frac{k_{d,opt}}{m_d}} \quad (6.14)$$

$$\xi_{d,opt} = \sqrt{\frac{3 \left(\frac{m_d}{\tilde{m}_{j,e}} \right)}{8 \cdot \left(1 + \frac{m_d}{\tilde{m}_{j,e}} \right)^3}} \quad (6.15)$$



$$c_{d,opt} = 2\xi_{d,opt} w_{d,opt} m_d \quad (6.16)$$

Dónde:

$$\tilde{m}_{j,e} = \frac{\tilde{m}_j}{\phi_j^2(x^*)} \quad (6.17)$$

La frecuencia óptima del TMD, $f_{d,opt}$, se ve que es ligeramente menor que la frecuencia resonante del puente peatonal ($\sim 95\%$ a 99% de f_j), y depende de la relación de masas, $m_d / \tilde{m}_{j,e}$, propuesta. La ecuación 6.15 fue desarrollada por Den Hartog (1956) para sistemas primarios sin amortiguamiento estructural, sin embargo, también puede ser usada con buena aproximación para un sistema primario amortiguado. La fracción de amortiguamiento crítico óptima del TMD, $\xi_{d,opt}$, puede también ser determinada por una variación gradual de ξ_d .

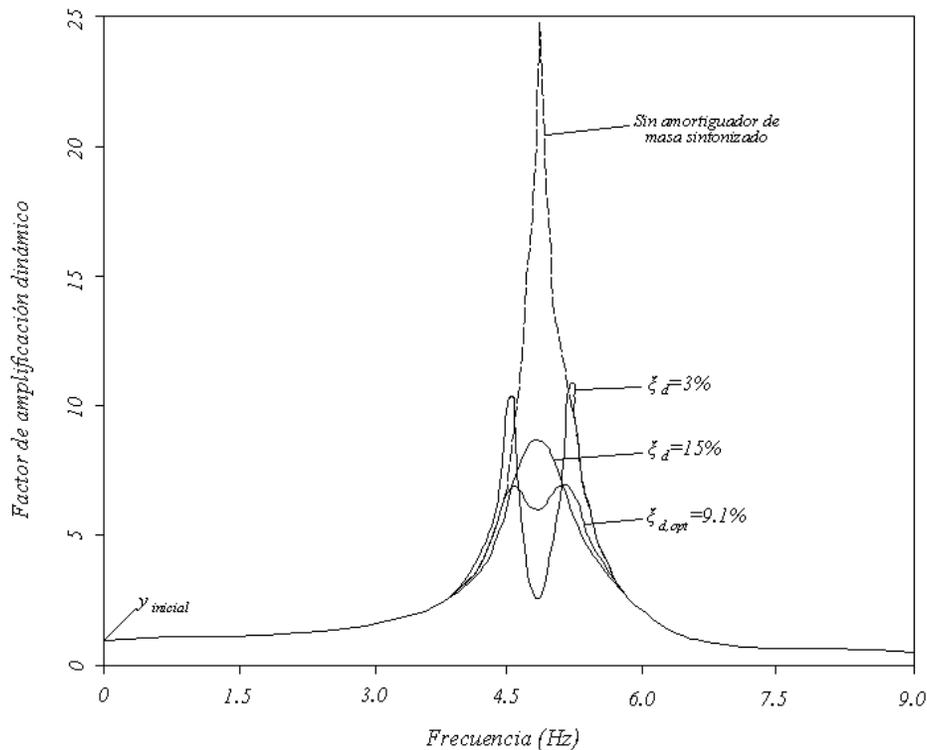


Figura 6.6 Ejemplo del efecto del ξ_d en la respuesta dinámica de un sistema primario con $f = 4.8 \text{ Hz}$ (Bachmann *et al.*, 1995)



El cálculo de la curva de respuesta en función de la frecuencia (Figura 6.6) muestra que la máxima amplitud de desplazamiento del sistema primario puede ser substancialmente reducida por un TMD con amortiguamiento óptimo, pero la reducción es sensible a pequeños cambios en la frecuencia del amortiguador de masa sintonizado. Esto demuestra que el diseño de TMD's con parámetros óptimos ofrece un mejor comportamiento general para el control de vibraciones, sin embargo, su eficacia puede reducir fuertemente debido a la pobre sintonía después de su instalación o a la desintonización causada con el tiempo por cambios en la rigidez del sistema primario o de los resortes del TMD, o por cambios en las masas. Por lo tanto, resulta importante realizar mantenimientos esporádicos a los TMD's, con el objetivo de verificar que siguen funcionando con la misma eficiencia

6.3 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada con amortiguadores de masa sintonizados

Los puentes peatonales son estructuras esbeltas, es decir, su claro es muy grande con respecto a las dimensiones de su sección transversal, por lo tanto su comportamiento es a flexión y cuando son simplemente apoyados éstos pueden ser modelados como vigas de parámetros distribuidos simplemente apoyadas tipo Euler-Bernoulli, donde la inercia rotacional y las deflexiones por cortante no se toman en consideración. Dicha teoría fue desarrollada por Mustafa Kemal Ozkan (2010) y se describe detalladamente en esta sección.

Las propiedades dinámicas de una viga tipo Euler-Bernoulli simplemente apoyadas son fáciles de obtener (ecuación 5.58 y 5.61), sin embargo, el problema se vuelve más difícil cuando lleva elementos tales como masas puntuales montadas elásticamente mediante resortes, las cuales simulan los amortiguadores de masa sintonizados (TMD's). Aunque hay varias técnicas que sirven para encontrar los eigenvalores (frecuencias naturales de vibrar) de vigas que tienen cualquier número de masas concentradas; éstas no suelen ser prácticas para aplicarse debido a que las expresiones matemáticas se complican entre más número de masas concentradas tenga el problema. Sin embargo, Wu y Chou (1999) encontraron, mediante un método numérico, las



frecuencias naturales y modos de vibrar de una viga uniforme con un solo claro y con cualquier número de masas puntuales elásticamente unidas a ésta. El método numérico de Wu y Chou (1999) consiste en obtener la ecuación de los eigenvalores o valores característicos $[\bar{B}]\{\bar{C}\} = 0$ para una viga uniforme Euler-Bernoulli con múltiples sistemas de masa-resorte. Los eigenvalores son obtenidos a través de Matlab mediante computación simbólica (apéndice G). Una matriz de coeficientes es compuesta por la parte izquierda y derecha de los puntos en los que se colocan los TMD's; de tal manera que dos o más matrices de coeficientes se generan para cada extremo de la viga en función del número de amortiguadores de masa sintonizados que posea el sistema. Se utiliza una técnica de elementos finitos para obtener la matriz global de coeficientes, $[\bar{B}]$, y por otro lado, las constantes de integración y el vector de los desplazamientos modales de los amortiguadores de masa sintonizados, $\{\bar{C}\}$. El determinante de la matriz de coeficientes igualada a cero permite obtener cualquier valor de la frecuencia circular, de la viga con los amortiguadores de masa sintonizados adjuntos a ella, $\bar{\omega}$. Por otra parte, cuando la frecuencia natural obtenida es introducida en la matriz de coeficientes, el vector $\{\bar{C}\}$, que satisface la ecuación de los eigenvalores o valores característicos, representa la forma modal correspondiente. Después de eso, la respuesta en vibración forzada ante diferentes tipos de carga puede ser encontrada.

En esta tesis los puentes peatonales estudiados se modelaron matemáticamente como vigas uniformes Euler-Bernoulli que puede poseer cualquier número de TMD's; sin embargo, Ozkan (2010) desarrolló, en base a la teoría de Wu y Chou (1999) y Rao (2007), modelos matemáticos de vigas Euler-Bernoulli uniformes y no uniformes con TMD's para distintas condiciones de apoyo y múltiples claros, por lo que pueden ser aplicados sus modelos matemáticos en función del tipo de puente peatonal que se quiera modelar. En esta sección se presenta el procedimiento desarrollado por Ozkan (2010) para obtener las propiedades y respuesta dinámicas de vigas uniformes simplemente apoyadas Euler-Bernoulli de un solo claro y con un número n de TMD's cuando son sujetas a cargas constantes y armónicas en movimiento. Es evidente notar que las frecuencias y formas modales de los puentes peatonales sin TMD's son los parámetros dinámicos más importantes de determinar, ya que de éstas depende el diseño adecuado de dichos TMD's.



6.3.1 Vibración libre

Basada en los estudios de Wu y Chou (1999), la figura 6.7 muestra el esquema de una viga uniforme simplemente apoyada tipo Euler-Bernoulli que lleva n sistemas masa-resorte. Toda la viga con longitud L es dividida en $n+1$ segmentos. La letra j encerrada en círculo y j en paréntesis representa respectivamente el punto de unión y el segmento correspondiente, de tal manera que también es un contador que sirve para determinar el número de sistema masa-resorte al cual se hace referencia. Por otra parte los extremos izquierdo y derecho de la viga se muestran mediante las letras l y r , respectivamente. El desplazamiento vertical de la viga, y , la rigidez del sistema masa-resorte, k_d , la masa del sistema masa-resorte, m_d , y el desplazamiento vertical del sistema masa-resorte, y_d , se muestran en la figura 6.7 asociados al correspondiente punto de unión j .

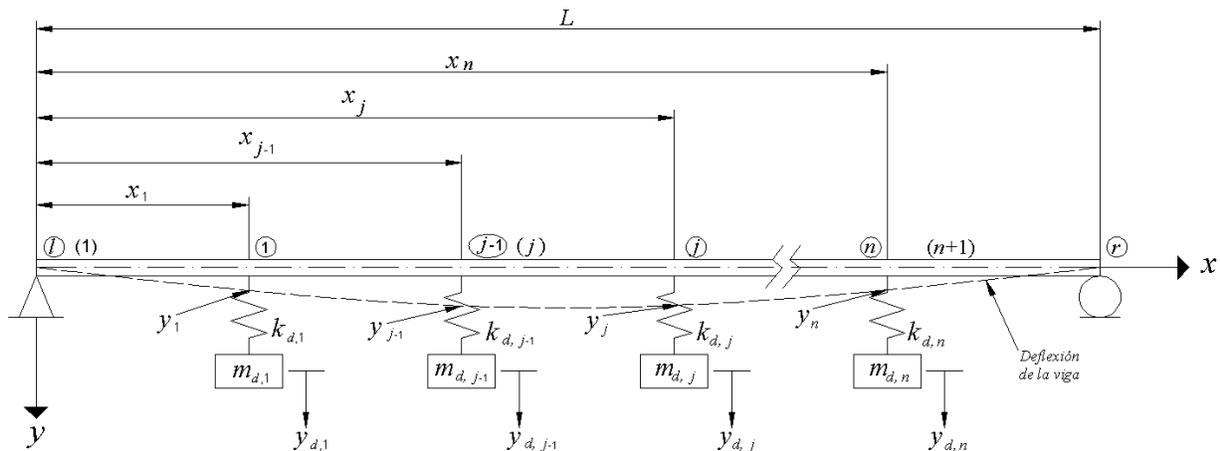


Figura 6.7 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada con n sistemas masa-resorte (Wu y Chou, 1999)

La ecuación de movimiento para la viga Euler-Bernoulli de la figura 6.7 se representa mediante la ecuación 6.18, que es la misma que la mostrada en la ecuación 5.38; mientras que la ecuación de movimiento para el j -ésimo sistema masa-resorte de la figura 6.7 está dada por la ecuación 6.19.



$$EI \frac{d^4 y(x,t)}{dx^4} + \bar{m} \frac{d^2 y(x,t)}{dt^2} = 0 \quad (6.18)$$

$$m_{d,j} \ddot{y}_{d,j} + k_{d,j} (y_{d,j} - y_j) = 0 \quad (6.19)$$

La continuidad de deformaciones en los puntos de unión requiere que:

$$y_j^l(x_j, t) = y_j^r(x_j, t) \quad (6.20)$$

$$y_j'^l(x_j, t) = y_j'^r(x_j, t) \quad (6.21)$$

$$y_j''^l(x_j, t) = y_j''^r(x_j, t) \quad (6.22)$$

Las ecuaciones 6.20, 6.21 y 6.22 muestran respectivamente las condiciones de deflexión, pendiente y curvatura que se deben de cumplir en los puntos de unión de los sistemas masa-resorte con la viga, dónde l y r representan el lado izquierdo y derecho respectivamente. El equilibrio de fuerzas en los puntos de unión de la figura 6.7 requiere que:

$$EI y_j'''^l(x_j, t) - EI y_j'''^r(x_j, t) = m_{d,j} \ddot{y}_{d,j} \quad (6.23)$$

Las condiciones de frontera para una viga simplemente apoyada:

$$y(0, t) = 0 \quad (6.24)$$

$$y''(0, t) = 0 \quad (6.25)$$

$$y(L, t) = 0 \quad (6.26)$$

$$y''(L, t) = 0 \quad (6.27)$$

La vibración libre de la viga y del j -ésimo sistema masa-resorte toman la forma mostrada en las ecuaciones 6.28 y 6.29, respectivamente; dónde $\bar{\omega}$ es la frecuencia circular de vibrar del sistema



vibratorio completo (viga Euler-Bernoulli con TMD's), i es un número imaginario cuyo valor equivale a $\sqrt{-1}$, $Y(x)$ es la amplitud modal del desplazamiento vertical de la viga con TMD's, $y_{d,j}$ es el desplazamiento vertical del TMD, y $Y_{d,j}$ es la amplitud modal de $y_{d,j}$.

$$y(x,t) = Y(x) e^{i\bar{\omega}t} \quad (6.28)$$

$$y_{d,j} = Y_{d,j} e^{i\bar{\omega}t} \quad (6.29)$$

Al sustituir la ecuación 6.28 en la ecuación 6.18, se obtiene:

$$EI \frac{d^4 (Y(x) e^{i\bar{\omega}t})}{dx^4} + \bar{m} \frac{d^2 (Y(x) e^{i\bar{\omega}t})}{dt^2} = 0 \quad (6.30)$$

$$Y''''(x) - \beta^4 Y(x) = 0 \quad (6.31)$$

Dónde:

$$\beta^4 = \frac{\bar{m} \bar{\omega}^2}{EI} \quad (6.32)$$

Al sustituir las ecuaciones 6.28 y 6.29 en la ecuación 6.19 se obtienen las ecuaciones 6.33 y 6.34, donde Y_j es la amplitud modal del desplazamiento vertical de la viga en el punto de unión j .

$$k_{d,j} Y_j - (k_{d,j} - m_{d,j} \bar{\omega}^2) Y_{d,j} = 0 \quad (6.33)$$

$$Y_j + \left(\frac{\bar{\omega}^2 m_{d,j}}{k_{d,j}} - 1 \right) Y_{d,j} = 0 \quad (6.34)$$

Si las ecuaciones 6.28 y 6.29 son sustituidas en las ecuaciones 6.20, 6.21, 6.22 y 6.23, entonces las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio de fuerzas en los puntos de unión son dadas por:

$$Y_j^l(x_j) = Y_j^r(x_j) \quad (6.35)$$



$$Y_j'^l(x_j) = Y_j'^r(x_j) \quad (6.36)$$

$$Y_j''^l(x_j) = Y_j''^r(x_j) \quad (6.37)$$

$$Y_j''''^l(x_j) - Y_j''''^r(x_j) + \frac{m_{d,j}}{m L^3} (\beta L)^4 Y_{d,j} = 0 \quad (6.38)$$

Dónde m es la masa total de la viga y se obtiene mediante la ecuación:

$$m = \bar{m} L \quad (6.39)$$

Al sustituir las ecuaciones 6.28 y 6.29 en las ecuaciones 6.24 a 6.27, se tiene que:

$$Y(0) = 0 \quad (6.40)$$

$$Y''(0) = 0 \quad (6.41)$$

$$Y(L) = 0 \quad (6.42)$$

$$Y''(L) = 0 \quad (6.43)$$

La solución de la ecuación diferencial 6.31 fue dada por Murphy (1960) mediante la ecuación:

$$Y(x) = C_1 \text{sen}(\beta x) + C_2 \cos(\beta x) + C_3 \text{senh}(\beta x) + C_4 \cosh(\beta x) \quad (6.44)$$

Para el j -ésimo segmento, la solución de la ecuación 6.44 puede ser reescrita como:

$$Y_j(\lambda) = C_{j1} \text{sen}(\beta L \lambda) + C_{j2} \cos(\beta L \lambda) + C_{j3} \text{senh}(\beta L \lambda) + C_{j4} \cosh(\beta L \lambda) \quad (6.45)$$

Dónde λ se obtiene a partir de la ecuación 6.46, en la que x_j es la distancia de ubicación de los TMD's medidos desde el extremo izquierdo de la viga.



$$\lambda = \frac{x_j}{L} \quad (6.46)$$

Las derivadas de $Y(x)$ pueden ser escritas como:

$$Y'(x) = \frac{dY}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{L} Y'(\lambda) \quad (6.47)$$

$$Y''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{L} Y'(\lambda) \right) = \frac{1}{L} \frac{dY'(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{L} \frac{dY'(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{L^2} Y''(\lambda) \quad (6.48)$$

$$Y'''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{L^2} Y''(\lambda) \right) = \frac{1}{L^2} \frac{dY''(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{L^2} \frac{dY''(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{L^3} Y'''(\lambda) \quad (6.49)$$

Por lo tanto, a partir de las ecuaciones 6.44 a 6.49 pueden ser escritas las ecuaciones:

$$Y_j'(x) = \frac{1}{L} Y_j'(\lambda) = \beta \left[C_{j_1} \cos(\beta L \lambda) - C_{j_2} \operatorname{sen}(\beta L \lambda) + C_{j_3} \operatorname{cosh}(\beta L \lambda) + C_{j_4} \operatorname{senh}(\beta L \lambda) \right] \quad (6.50)$$

$$Y_j''(x) = \frac{1}{L^2} Y_j''(\lambda) = \beta^2 \left[-C_{j_1} \operatorname{sen}(\beta L \lambda) - C_{j_2} \cos(\beta L \lambda) + C_{j_3} \operatorname{senh}(\beta L \lambda) + C_{j_4} \operatorname{cosh}(\beta L \lambda) \right] \quad (6.51)$$

$$Y_j'''(x) = \frac{1}{L^3} Y_j'''(\lambda) = \beta^3 \left[-C_{j_1} \cos(\beta L \lambda) + C_{j_2} \operatorname{sen}(\beta L \lambda) + C_{j_3} \operatorname{cosh}(\beta L \lambda) + C_{j_4} \operatorname{senh}(\beta L \lambda) \right] \quad (6.52)$$

Tal y como se muestra en la figura 6.7, el extremo izquierdo de la viga corresponde con el primer segmento de la viga. Si las condiciones de frontera del extremo izquierdo de la viga (ecuaciones 6.40 y 6.41) son sustituidas en las ecuaciones 6.45 y 6.51, se obtienen entonces de manera respectiva las ecuaciones:



$$Y(0) = C_{12} + C_{14} \quad (6.53)$$

$$Y''(0) = \beta^2(-C_{12} + C_{14}) = 0 \rightarrow \beta \neq 0 \rightarrow -C_{12} + C_{14} = 0 \quad (6.54)$$

Las ecuaciones 6.53 y 6.54 pueden ser escritas en forma de matriz mediante la ecuación 6.55, donde l indica que se trata del extremo izquierdo de la viga simplemente apoyada.

$$[B_l]\{C_l\} = 0 \quad (6.55)$$

Dónde:

$$[B_l] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix} \quad (6.56)$$

$$\{C_l\} = \left\{ \begin{matrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \\ C_{14} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \\ \bar{C}_4 \end{matrix} \right\} \quad (6.57)$$

Las ecuaciones 6.58 a 6.61 son obtenidas al sustituir las ecuaciones 6.20 a 6.23 en las ecuaciones 6.44 a 6.49. Los segmentos del lado izquierdo y derecho del j -ésimo punto de unión localizado en $x = x_j$ son representados por j y $j+1$, respectivamente. Por lo tanto, los coeficientes relacionados se muestran por $C_{j,i}$ y $C_{j+1,i}$ ($i=1 \sim 4$), respectivamente.

$$C_{j,1} \operatorname{sen}(\theta_j) + C_{j,2} \cos(\theta_j) + C_{j,3} \operatorname{senh}(\theta_j) + C_{j,4} \operatorname{cosh}(\theta_j) - C_{j+1,1} \operatorname{sen}(\theta_j) - C_{j+1,2} \cos(\theta_j) - C_{j+1,3} \operatorname{senh}(\theta_j) - C_{j+1,4} \operatorname{cosh}(\theta_j) = 0 \quad (6.58)$$

$$C_{j,1} \cos(\theta_j) - C_{j,2} \operatorname{sen}(\theta_j) + C_{j,3} \operatorname{cosh}(\theta_j) + C_{j,4} \operatorname{senh}(\theta_j) - C_{j+1,1} \cos(\theta_j) + C_{j+1,2} \operatorname{sen}(\theta_j) - C_{j+1,3} \operatorname{cosh}(\theta_j) - C_{j+1,4} \operatorname{senh}(\theta_j) = 0 \quad (6.59)$$



$$\begin{aligned}
 & -C_{j1} \operatorname{sen}(\theta_j) - C_{j2} \cos(\theta_j) + C_{j3} \operatorname{senh}(\theta_j) + C_{j4} \operatorname{cosh}(\theta_j) + C_{j+1,1} \operatorname{sen}(\theta_j) + \\
 & C_{j+1,2} \cos(\theta_j) - C_{j+1,3} \operatorname{senh}(\theta_j) - C_{j+1,4} \operatorname{cosh}(\theta_j) = 0
 \end{aligned} \tag{6.60}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{l} -C_{j1} \cos(\theta_j) + C_{j2} \operatorname{sen}(\theta_j) + C_{j3} \operatorname{cosh}(\theta_j) + C_{j4} \operatorname{senh}(\theta_j) + \\ C_{j+1,1} \cos(\theta_j) - C_{j+1,2} \operatorname{sen}(\theta_j) - C_{j+1,3} \operatorname{cosh}(\theta_j) - C_{j+1,4} \operatorname{senh}(\theta_j) \end{array} \right] + \frac{m_{d,j}}{m} (\beta L) Y_{d,j} = 0
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

Por otro lado, al sustituir la ecuación 6.45 en la ecuación 6.34 se obtiene:

$$C_{j1} \operatorname{sen}(\theta_j) + C_{j2} \cos(\theta_j) + C_{j3} \operatorname{senh}(\theta_j) + C_{j4} \operatorname{cosh}(\theta_j) + \left(\frac{\bar{w}^2 m_{d,j}}{k_{d,j}} - 1 \right) Y_{d,j} = 0 \tag{6.62}$$

Dónde:

$$\theta_j = \beta L \lambda \tag{6.63}$$

Si las ecuaciones 6.58 a 6.62 se escriben en forma de matriz se obtiene:

$$[B_j] \{C_j\} = 0 \tag{6.64}$$

Dónde:

$$[B_j] = \begin{bmatrix} 4j-3 & 4j-2 & 4j-1 & 4j & 4j+1 & 4j+2 & 4j+3 & 4j+4 & 4j+5 \\ \operatorname{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) & \operatorname{senh}(\theta_j) & \operatorname{cosh}(\theta_j) & -\operatorname{sen}(\theta_j) & -\cos(\theta_j) & -\operatorname{senh}(\theta_j) & -\operatorname{cosh}(\theta_j) & 0 \\ \cos(\theta_j) & -\operatorname{sen}(\theta_j) & \operatorname{cosh}(\theta_j) & \operatorname{senh}(\theta_j) & -\cos(\theta_j) & \operatorname{sen}(\theta_j) & -\operatorname{cosh}(\theta_j) & -\operatorname{senh}(\theta_j) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\theta_j) & -\cos(\theta_j) & \operatorname{senh}(\theta_j) & \operatorname{cosh}(\theta_j) & \operatorname{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) & -\operatorname{senh}(\theta_j) & -\operatorname{cosh}(\theta_j) & 0 \\ -\cos(\theta_j) & \operatorname{sen}(\theta_j) & \operatorname{cosh}(\theta_j) & \operatorname{senh}(\theta_j) & \cos(\theta_j) & -\operatorname{sen}(\theta_j) & -\operatorname{cosh}(\theta_j) & -\operatorname{senh}(\theta_j) & \frac{m_{d,j}}{m} (\beta L) \\ \operatorname{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) & \operatorname{senh}(\theta_j) & \operatorname{cosh}(\theta_j) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{w}^2 m_{d,j}}{k_{d,j}} - 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5j-2 \\ 5j-1 \\ 5j \\ 5j+1 \\ 5j+2 \end{matrix} \tag{6.65}$$



$$\{C_j\} = \begin{Bmatrix} C_{j1} \\ C_{j2} \\ C_{j3} \\ C_{j4} \\ C_{j+1,1} \\ C_{j+1,2} \\ C_{j+1,3} \\ C_{j+1,4} \\ Y_{d,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{C}_{4j-3} \\ \bar{C}_{4j-2} \\ \bar{C}_{4j-1} \\ \bar{C}_{4j} \\ \bar{C}_{4j+1} \\ \bar{C}_{4j+2} \\ \bar{C}_{4j+3} \\ \bar{C}_{4j+4} \\ \bar{C}_{4j+5} \end{Bmatrix} \quad (6.66)$$

El extremo derecho de la viga simplemente apoyada pertenece al segmento $(n+1)$, tal y como se muestra en la figura 6.7. Si las condiciones de frontera del extremo derecho de la viga (ecuaciones 6.42 y 6.43) son sustituidas en las ecuaciones 6.45 y 6.51, se obtienen entonces de manera respectiva las ecuaciones:

$$C_{n+1,1} \text{sen}(\beta L) + C_{n+1,2} \cos(\beta L) + C_{n+1,3} \text{senh}(\beta L) + C_{n+1,4} \cosh(\beta L) = 0 \quad (6.67)$$

$$-C_{n+1,1} \text{sen}(\beta L) - C_{n+1,2} \cos(\beta L) + C_{n+1,3} \text{senh}(\beta L) + C_{n+1,4} \cosh(\beta L) = 0 \quad (6.68)$$

Las ecuaciones 6.67 y 6.68 pueden ser escritas en forma de matriz mediante la ecuación 6.69, donde r indica que se trata del extremo derecho de la viga simplemente apoyada.

$$[B_r]\{C_r\} = 0 \quad (6.69)$$

Dónde:

$$[B_r] = \begin{bmatrix} 4n+1 & 4n+2 & 4n+3 & 4n+4 \\ \text{sen}(\beta L) & \cos(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \cosh(\beta L) \\ -\text{sen}(\beta L) & -\cos(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \cosh(\beta L) \end{bmatrix} \begin{matrix} p-1 \\ p \end{matrix} \quad (6.70)$$



$$\{C_r\} = \begin{Bmatrix} C_{n+1,1} \\ C_{n+1,2} \\ C_{n+1,3} \\ C_{n+1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{C}_{4n+1} \\ \bar{C}_{4n+2} \\ \bar{C}_{4n+3} \\ \bar{C}_{4n+4} \end{Bmatrix} \quad (6.71)$$

Dónde:

$$p = 5n + 4 \quad (6.72)$$

En la matriz mostrada en la ecuación 6.70, p representa el número total de ecuaciones. Hay cinco ecuaciones para cualquier punto de unión de un sistema masa-resorte con la viga, de las cuales tres son ecuaciones de compatibilidad, una es una ecuación de equilibrio de fuerzas y la otra es una ecuación gobernante para el sistema masa-resorte (TMD). Por otra parte, hay dos ecuaciones más para cada extremo de la viga. Por lo tanto, hay en total $5n + 4$ ecuaciones para la viga completa para obtener las constantes de integración C_{ji} y los desplazamientos modales $Y_{d,j}$, donde $j=1 \sim n$ e $i=1 \sim 4$. En otras palabras, basándose en la ecuación 6.45 y la ecuación gobernante del sistema masa-resorte (TMD), hay cuatro constantes de integración desconocidas para cada segmento de la viga y una incógnita adicional $Y_{d,j}$. Si hay n sistemas masa-resorte, esto significa que hay $n+1$ segmentos en toda la viga. Por lo tanto, el número total de incógnitas para la viga con n amortiguadores de masa sintonizados es igual a $4(n+1) + n = 5n + 4$ (n desconocido para $Y_{d,j}$ y $4(n+1)$ desconocido para las constantes de integración).

La matriz de coeficientes, $[\bar{B}]$, del sistema vibratorio completo (viga con TMD's) es formada si las matrices $[B_l]$, $[B_j]$ y $[B_r]$ son ensambladas mediante la técnica de ensamble convencional usada por el método directo de la matriz de rigidez (Ozkan, 2010). La matriz de coeficientes para una viga uniforme simplemente apoyada tipo Euler-Bernoulli con un amortiguador de masa sintonizado se muestra en la ecuación 6.73, y es denominada como $[\bar{B}_1]$ debido a que la viga



solamente posee un sistema masa-resorte adherido a ella, dónde $m_{d,1}$ es la masa del TMD, $k_{d,1}$ es la rigidez vertical del TMD, m es la masa total de la viga, y $\bar{\omega}$ es la frecuencia circular del sistema vibratorio completo (viga con TMD's).

$$\begin{aligned}
 & \bar{C}_1 \quad \bar{C}_2 \quad \bar{C}_3 \quad \bar{C}_4 \quad \bar{C}_5 \quad \bar{C}_6 \quad \bar{C}_7 \quad \bar{C}_8 \quad \bar{C}_9 \\
 [\bar{B}_1] = & \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \text{sen}(\theta_1) & \text{cos}(\theta_1) & \text{senh}(\theta_1) & \text{cosh}(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & -\text{cos}(\theta_1) & -\text{senh}(\theta_1) & -\text{cosh}(\theta_1) & 0 \\
 \text{cos}(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & \text{cosh}(\theta_1) & \text{senh}(\theta_1) & -\text{cos}(\theta_1) & \text{sen}(\theta_1) & -\text{cosh}(\theta_1) & -\text{senh}(\theta_1) & 0 \\
 -\text{sen}(\theta_1) & -\text{cos}(\theta_1) & \text{senh}(\theta_1) & \text{cosh}(\theta_1) & \text{sen}(\theta_1) & \text{cos}(\theta_1) & -\text{senh}(\theta_1) & -\text{cosh}(\theta_1) & 0 \\
 -\text{cos}(\theta_1) & \text{sen}(\theta_1) & \text{cosh}(\theta_1) & \text{senh}(\theta_1) & \text{cos}(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) & -\text{cosh}(\theta_1) & -\text{senh}(\theta_1) & \frac{m_{d,1}}{m}(\beta L) \\
 \text{sen}(\theta_1) & \text{cos}(\theta_1) & \text{senh}(\theta_1) & \text{cosh}(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\omega}^2 m_{d,1}}{k_{d,1}} - 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\beta L) & \text{cos}(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\beta L) & -\text{cos}(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) & 0
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{6.73}$$

Los amortiguadores de masa sintonizados de las matrices de coeficientes $[\bar{B}_n]$, pueden estar localizados en cualquier punto longitudinal, x_j , de la viga, ya que el parámetro $\theta_j (1, 2, 3, \dots, n)$ depende del valor de λ , y éste a su vez del valor de x_j ; dónde n indica el número total de amortiguadores de masa sintonizados que tiene la viga, y $j = 1 \sim n$. Las matrices de coeficientes



para una viga uniforme con dos y tres amortiguadores de masa sintonizados se denominan entonces como $[\bar{B}_2]$ y $[\bar{B}_3]$, respectivamente. Las matrices de coeficientes para vigas simplemente apoyadas con más de un TMD pueden ensamblarse tal y como se muestra en el apéndice H. Por lo tanto, la ecuación 6.74 es obtenida si todas las incógnitas ($C_{j,i}$ y $Y_{d,j}$) indicadas en las ecuaciones 6.57, 6.66 y 6.71 son escritas como un vector columna $\{\bar{C}\}$ y las matrices $[B_l]$, $[B_j]$ y $[B_r]$ son ensambladas para formar la matriz de coeficientes, $[\bar{B}]$, del sistema vibratorio completo.

$$[\bar{B}]\{\bar{C}\} = 0 \quad (6.74)$$

La solución no trivial de la ecuación 6.74 es:

$$|\bar{B}| = 0 \quad (6.75)$$

Las frecuencias circulares naturales del sistema vibratorio completo, $\bar{\omega}_i$ ($i=1,2,3,\dots$), son obtenidas mediante la ecuación 6.75 al resolver el determinante de la matriz global de coeficientes, $[\bar{B}]$. Las constantes de integración, $\{\bar{C}\}$, son obtenidas al sustituir cada valor de $\bar{\omega}_i$ ($i=1,2,3,\dots$) en la ecuación 6.74. Una vez que las constantes de integración son obtenidas, éstas se sustituyen en la ecuación 6.44 para obtener los modos de vibrar asociados a cada frecuencia circular del sistema vibratorio completo.

6.3.2 Vibración forzada

Rao (2007) obtuvo la solución de vigas sometidas a vibración forzada a través del análisis modal y las condiciones de ortogonalidad. Posteriormente Ozkan (2010) aplicó el mismo procedimiento de Rao (2007) para obtener la solución de cualquier tipo de viga Euler-Bernoulli con amortiguadores de masa sintonizados adjuntos a ella.



La ecuación de movimiento de una viga uniforme Euler-Bernoulli con TMD's sujeta a una fuerza, $P(x,t)$, se representa por medio de la ecuación 6.76, la cual es la misma que la ecuación 5.37; dónde puede despreciarse el amortiguamiento estructural debido a que éste suele ser muy bajo en puentes peatonales y no afecta significativamente el valor de la respuesta dinámica máxima de los mismos ante vibración forzada.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + \bar{m} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = P(x,t) \quad (6.76)$$

La solución de la ecuación 6.76 puede ser definida como una combinación lineal de los modos de vibrar normalizados de la viga, tal y como se muestra en la ecuación 6.77; dónde $i = 1, 2, 3, \dots$, y donde $Y_i(x)$ y $\eta_i(t)$ son respectivamente los modos de vibrar (ecuación 6.44) y el desplazamiento modal generalizado de la viga con amortiguadores de masa sintonizados.

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x) \eta_i(t) \quad (6.77)$$

Para la vibración libre, la ecuación 6.76 queda entonces como se muestra en la ecuación 6.78, dónde $\bar{\omega}_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) son las frecuencias circulares de la viga con TMD's.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{\partial^2 Y_i(x)}{\partial x^2} \right] - \bar{m} \bar{\omega}_i^2 Y_i(x) = 0 \quad (6.78)$$

Si la ecuación 6.77 es sustituida en la ecuación 6.76 se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 Y_i(x)}{dx^2} \right] \eta_i(t) + \bar{m} \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x) \frac{\partial^2 \eta_i(t)}{\partial t^2} = P(x,t) \quad (6.79)$$

De la ecuación 6.77 y 6.78 se obtiene:



$$\bar{m} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{w}_i^2 Y_i(x) \eta_i(t) + \bar{m} \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x) \frac{\partial^2 \eta_i(t)}{\partial t^2} = P(x, t) \quad (6.80)$$

Con base a las condiciones de ortogonalidad, para una viga de longitud total L , se tiene que:

$$\int_0^L \bar{m} Y_i(x) Y_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (6.81)$$

Dónde δ_{ij} es la función delta de Kronecker, la cual adopta dos valores tal y como se muestra en las ecuaciones:

$$\delta_{ij} = 0 \rightarrow i \neq j \quad (6.82)$$

$$\delta_{ij} = 1 \rightarrow i = j \quad (6.83)$$

Si la ecuación 6.80 es multiplicada por $Y_j(x)$ e integrada de 0 a L , se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \int_0^L \bar{m} \bar{w}_i^2 Y_i(x) Y_j(x) dx + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \eta_i(t)}{dt^2} \int_0^L \bar{m} Y_i(x) Y_j(x) dx = \int_0^L Y_j(x) P(x, t) dx \quad (6.84)$$

Acorde a las ecuaciones 6.82 y 6.83, el lado izquierdo de la ecuación 6.84 sólo es válido si $i = j$, por lo que:

$$\frac{d^2 \eta_i(t)}{dt^2} + \bar{w}_i^2 \eta_i(t) = \tilde{P}_i(t) \quad (6.85)$$

Dónde, $\tilde{P}_i(t)$, es la carga generalizada de $\eta_i(t)$ y se obtiene mediante la ecuación 6.86; en la que $Y_i(x)$ debe estar normalizada de la misma forma como se realiza en la ecuación 5.122.



$$\tilde{P}_i(t) = \int_0^L P(x,t) Y_i(x) dx \quad (6.86)$$

La solución de la ecuación 6.85 es:

$$\eta_i(t) = A_i \cos(\bar{\omega}_i t) + B_i \text{sen}(\bar{\omega}_i t) + \frac{1}{\bar{\omega}_i} \int_0^t \tilde{P}_i(t^*) \text{sen}(\bar{\omega}_i(t-t^*)) dt^* \quad (6.87)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación 6.76 se obtiene al sustituir la ecuación 6.85 en la ecuación 6.77, tal y como se muestra en la ecuación:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[A_i \cos(\bar{\omega}_i t) + B_i \text{sen}(\bar{\omega}_i t) + \frac{1}{\bar{\omega}_i} \int_0^t \tilde{P}_i(t^*) \text{sen}(\bar{\omega}_i(t-t^*)) dt^* \right] Y_i(x) \quad (6.88)$$

En la ecuación 6.88, los primeros dos términos dentro de los corchetes representan la solución homogénea (vibración libre) de la ecuación 6.76, mientras que el tercer término indica la vibración forzada de la viga Euler-Bernoulli. Por otra parte, A_i y B_i son constantes que dependen de las condiciones iniciales de la viga. Los puentes peatonales estudiados en esta tesis se abordan desde las condiciones iniciales del reposo, por lo que:

$$y(x,0) = 0 \quad (6.89)$$

$$\dot{y}(x,0) = 0 \quad (6.90)$$

$$y(t) = A_i \cos(0) + B_i \text{sen}(0) = 0 \quad (6.91)$$

$$\dot{y}(t) = -A_i \text{sen}(0) + B_i \cos(0) = 0 \quad (6.92)$$

De las ecuaciones 6.91 y 6.92, se obtiene que A_i y B_i son iguales a cero. Por lo tanto, la ecuación 6.88 puede ser simplificada mediante la ecuación 6.93; la cual se observa que corresponde a la integral de Duhamel para una carga arbitraria sobre la viga, $P(x,t)$, dónde



dicha carga se descompone en infinitas cargas impulsivas de duración t^* , y dónde $Y_i(x)$ debe estar normalizada de la misma forma como se realiza en la ecuación 5.122.

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\bar{w}_i} \int_0^t \tilde{P}_i(t^*) \text{sen}(\bar{w}_i(t-t^*)) dt^* \right] Y_i(x) \quad (6.93)$$

6.3.2.1 Carga constante en movimiento

Una carga externa de magnitud constante, P , que se desplaza a una velocidad constante, V_o , sobre una viga uniforme tipo Euler-Bernoulli simplemente apoyada de longitud, L , con n amortiguadores de masa sintonizados se puede representar mediante la figura 6.8.

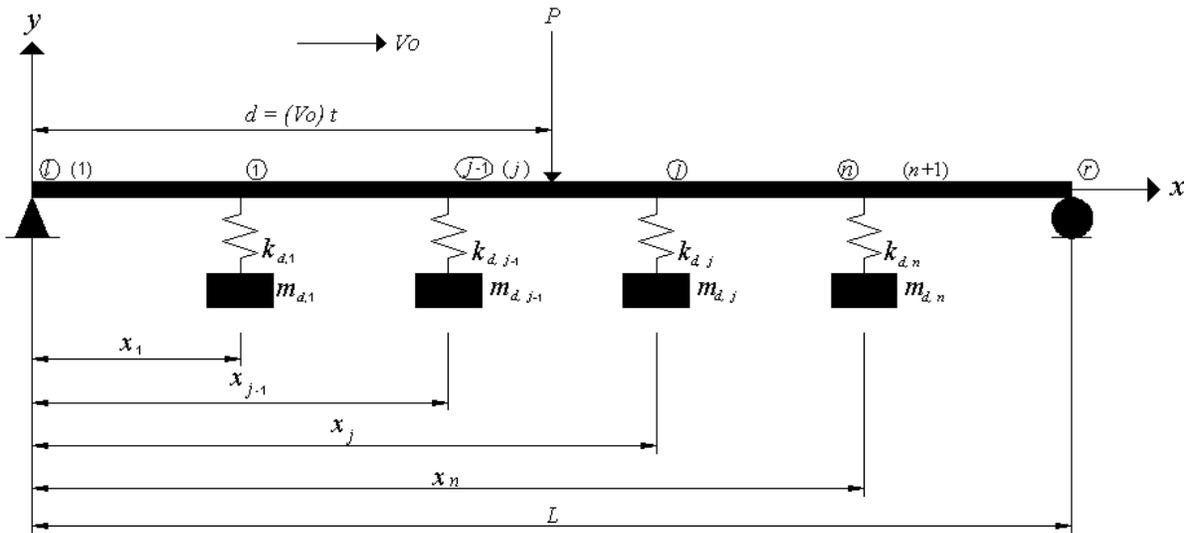


Figura 6.8 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada con n sistemas masa-resorte sometida a una carga constante en movimiento

La j -ésima fuerza externa generalizada para una carga constante en movimiento se obtiene mediante la ecuación 6.94, dónde $Y_i(x)$ debe estar normalizada de la misma forma como se realizó en la ecuación 5.122.



$$\tilde{P}_i(t) = \int_0^L P(x,t) Y_i(x) dx = \int_0^L P \delta(x-d) Y_i(x) dx = P Y_i(d) = P Y_i(V_o t) \quad (6.94)$$

La ecuación 6.94 debe sustituirse en la ecuación 6.93 y posteriormente se debe resolver la integral de Duhamel para encontrar la respuesta dinámica de desplazamientos durante $t \leq \tau$, tiempo durante el cual se presentará el desplazamiento máximo.

6.3.2.2 Carga armónica en movimiento

Una carga externa armónica, $P_o \text{sen}(\Omega t)$, que se desplaza a una velocidad constante, V_o , sobre una viga uniforme tipo Euler-Bernoulli simplemente apoyada de longitud, L , con n amortiguadores de masa sintonizados se puede representar mediante la figura 6.9.

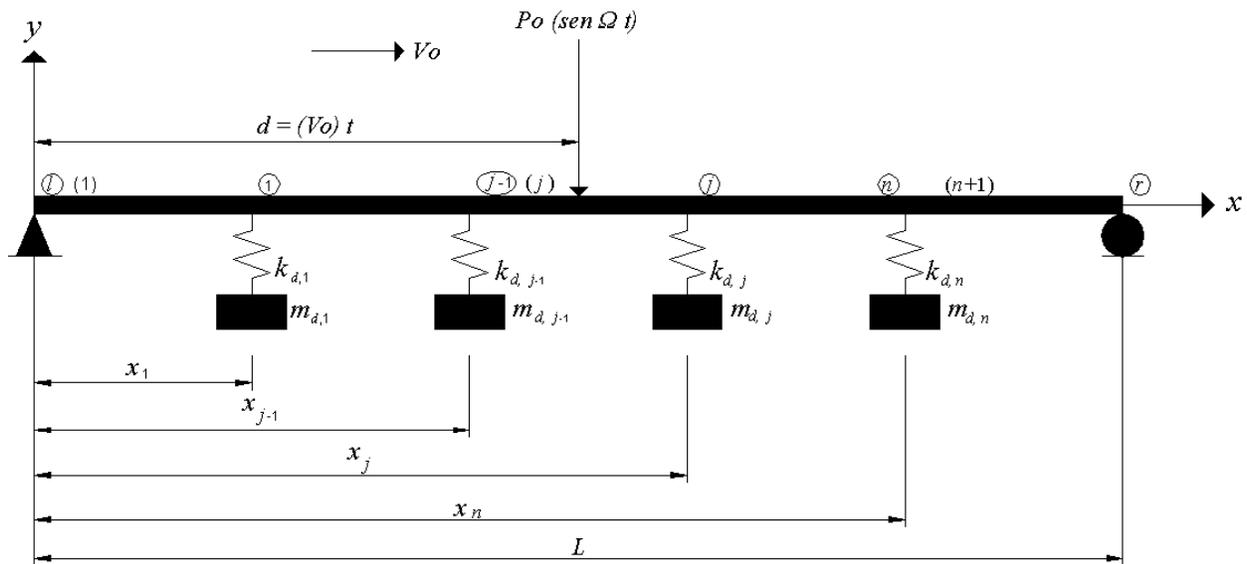


Figura 6.9 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada con n sistemas masa-resorte sometida a una carga armónica en movimiento

La j -ésima fuerza externa generalizada para una carga armónica en movimiento se obtiene mediante la ecuación:



$$\begin{aligned}\tilde{P}_i(t) &= \int_0^L P(x,t) Y_i(x) dx = \int_0^L P_o \text{sen}(\Omega t) \delta(x-d) Y_i(x) dx = \\ &= P_o \text{sen}(\Omega t) Y_i(d) = P_o \text{sen}(\Omega t) Y_i(V_o t)\end{aligned}\quad (6.95)$$

Dónde $Y_i(x)$ debe estar normalizada de la misma forma como se realizó en la ecuación 5.122. Posteriormente debe sustituirse la ecuación 6.95 en la ecuación 6.93, y debe de resolverse la integral de Duhamel para encontrar la respuesta dinámica de desplazamientos durante $t \leq \tau$, tiempo durante el cual se presentará el desplazamiento máximo.

6.4 Viga uniforme Euler-Bernoulli con diferentes condiciones de apoyo y amortiguadores de masa sintonizados

Ozkan (2010) pudo obtener las propiedades y respuestas dinámicas de vigas uniformes y no uniformes Euler-Bernoulli con cualquier número de claros, diferentes condiciones de apoyo y n amortiguadores de masa sintonizados cuando son sometidas a distintos tipos de excitaciones dinámicas mediante la teoría desarrollada por Wu y Chou (1999) y por Rao (2007). Las propiedades y respuesta dinámicas de vigas uniformes Euler-Bernoulli con diferentes condiciones de apoyo y con un claro cuando son sujetas a cargas constantes y armónicas en movimiento pueden obtenerse mediante el mismo procedimiento mostrado en la sección 6.3 de esta tesis.

6.4.1 Vibración libre

La matriz global de coeficientes, $[\bar{B}]$, depende de las condiciones de frontera de la viga. Las matrices $[B_l]$ y $[B_r]$ junto con la matriz $[B_j]$ de la ecuación 6.65 sirven para ensamblar dicha matriz de coeficientes. Las matrices $[B_l]$ y $[B_r]$ para diferentes condiciones de apoyo se muestran en la tabla 6.1; dónde l y r representan respectivamente el extremo izquierdo y derecho de la viga.



Tabla 6.1 Matrices $[B_l]$ y $[B_r]$ para vigas uniformes Euler-Bernoulli con diferentes condiciones de apoyo

Condiciones de apoyo		$[B_l]$	$[B_r]$
l	r		
Empotrado	Empotrado	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \text{sen}(\beta L) & \cos(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) \\ \cos(\beta L) & -\text{sen}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) & \text{senh}(\beta L) \end{bmatrix}$
Empotrado	Apoyo simple	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \text{sen}(\beta L) & \cos(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) \\ -\text{sen}(\beta L) & -\cos(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) \end{bmatrix}$
Empotrado	Libre	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\text{sen}(\beta L) & -\cos(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) \\ -\cos(\beta L) & \text{sen}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) & \text{senh}(\beta L) \end{bmatrix}$

La matriz global de coeficientes para una viga uniforme Euler-Bernoulli con distintas condiciones de apoyo y con un amortiguador de masa sintonizado se ensambla de la misma forma que se ensambló la matriz de la ecuación 6.73 pero en base a las matrices de la tabla 6.1 y la matriz $[B_j]$ de la ecuación 6.65. Las matrices globales de coeficientes para una viga uniforme con distintas condiciones de apoyo y más amortiguadores de masa sintonizados se ensamblan a partir de la matriz de coeficientes para un solo amortiguador de masa sintonizado siguiendo el mismo patrón que las matrices mostradas en el apéndice H de esta tesis.

Una vez que es obtenida la matriz global de coeficientes de la viga con n amortiguadores de masa sintonizados, es entonces posible obtener las propiedades dinámicas de la misma mediante las ecuaciones 6.74 y 6.75 (apéndice G).



6.4.2 Vibración forzada

La respuesta dinámica de desplazamientos de una viga uniforme Euler-Bernoulli con distintas condiciones de apoyo se obtiene de igual manera mediante la integral de Duhamel:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\bar{w}_i} \int_0^t \tilde{P}_i(t^*) \text{sen}(\bar{w}_i(t-t^*)) dt^* \right] Y_i(x) \quad (6.96)$$

Dónde $Y_i(x)$ debe estar normalizado mediante la ecuación:

$$Y_i(x) = \frac{Y_i(x)}{\sqrt{\bar{m} \int_0^L [Y_i(x)]^2 dx}} \quad (6.97)$$

6.4.2.1 Carga constante en movimiento

La j -ésima fuerza externa generalizada para una carga constante en movimiento, P , se obtiene mediante la ecuación 6.94, dónde $Y_i(x)$ debe estar normalizado mediante le ecuación 6.97. Posteriormente debe de sustituirse la ecuación 6.94 en la ecuación 6.96 y resolver la integral de Duhamel durante $t \leq \tau$.

6.4.2.2 Carga armónica en movimiento

La j -ésima fuerza externa generalizada para una carga constante en movimiento, $P_o \text{sen}(\Omega t)$, se obtiene mediante la ecuación 6.95, dónde $Y_i(x)$ debe estar normalizado mediante le ecuación 6.97. Luego se sustituye la ecuación 6.95 en la ecuación 6.96 y se resuelve la integral de Duhamel durante $t \leq \tau$.



6.5 Modelo matemático simplificado de los puentes peatonales estudiados con amortiguadores de masa sintonizados

Los puentes peatonales estudiados en esta tesis se abordan únicamente ante el efecto de las vibraciones verticales inducidas por peatones, de tal manera que no se controlarán las vibraciones laterales ni las longitudinales. La fuerza dinámica vertical ocasionada por un peatón se obtiene mediante la ecuación 5.131, de tal manera que el problema de un puente peatonal uniforme simplemente apoyado con n amortiguadores de masa sintonizados cuando éste es sometido a una fuerza vertical peatonal en movimiento se puede representar mediante la figura 6.10.

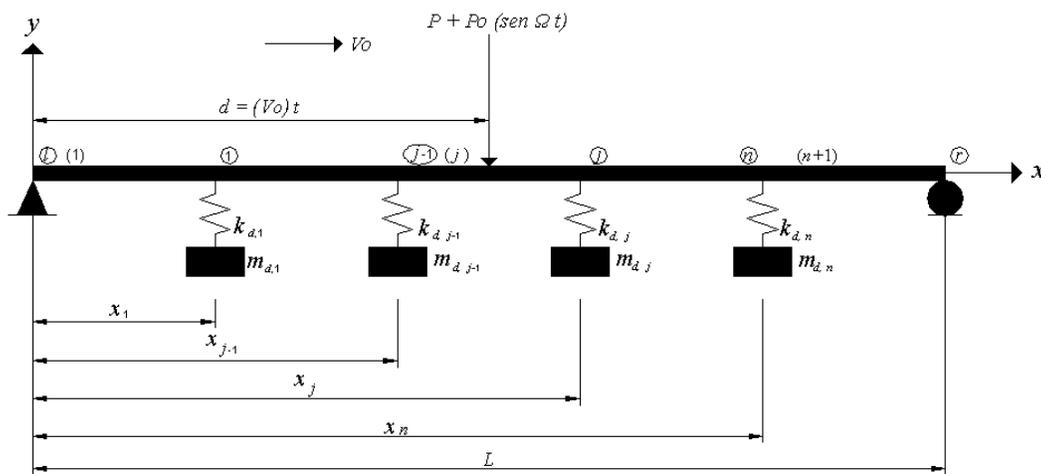


Figura 6.10 Viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada con n sistemas masa-resorte sujeta simultáneamente a una carga constante y a una carga armónica en movimiento

La vibración vertical resultante ante el problema de la figura 6.10 se obtiene mediante la suma de las respuestas dinámicas de la viga ante una carga constante y ante una carga armónica. Si el puente peatonal tiene condiciones de apoyo distintas a las de la viga mostrada en la figura 6.10, entonces la respuesta dinámica de desplazamientos de éste ante fuerzas peatonales verticales móviles también se obtiene al sumar las respuestas dinámicas ante una carga constante y ante una carga armónica, pero tomando en cuenta todas las consideraciones mostradas en la sección 6.4 de esta tesis. La fuerza dinámica vertical de un grupo de peatones es modelada mediante las ecuaciones 5.131 a 5.133 (apéndice D).



Los parámetros óptimos de los amortiguadores de masa sintonizados se obtuvieron con base a la teoría desarrollado por Den Hartog (1956) al considerar el sistema dinámico como un modelo equivalente de dos grados de libertad mediante las ecuaciones 6.12 a 6.17 (apéndice F). La función de un TMD es proporcionar mayor amortiguamiento al puente peatonal, y en base al modelo equivalente de dos grados de libertad es posible obtener el amortiguamiento equivalente total, ξ_e , que se le proporciona al puente peatonal con la adición del TMD (apéndices E y F); el cual se obtiene mediante la ecuación:

$$\xi_e = \frac{m_d}{2\tilde{m}_{j,e}} \sqrt{1 + \left(\frac{2\xi \tilde{m}_{j,e}}{m_d} + \frac{1}{2\xi_{d,opt}} \right)^2} \quad (6.98)$$

Para el análisis de los puentes peatonales ante vibración forzada es suficiente contar con un 90% de la masa modal participando en la respuesta dinámica, por lo que sólo será necesario considerar el número de modos que aporten dicha masa modal efectiva acumulada. Una vez que los modos de vibrar son normalizados, es posible obtener el factor de participación modal, Γ_i , mediante la ecuación:

$$\Gamma_i = \int_0^L \bar{m} Y_i(x) dx \quad (6.99)$$

La masa modal efectiva para el i -ésimo modo de vibrar, $m_{eff,i}$, se puede obtener mediante la ecuación:

$$m_{eff,i} = \frac{\left[\int_0^L \bar{m} Y_i(x) dx \right]^2}{\int_0^L \bar{m} [Y_i(x)]^2 dx} \quad (6.100)$$

Se verificó que era suficiente con considerar el mismo número de modos de vibrar que se utilizó en la evaluación de la respuesta dinámica de los puentes sin TMD's. Las respuestas dinámicas se



obtuvieron solamente en el punto longitudinal de máxima amplitud de la primera forma modal, ya que es el modo de vibrar resonante, y durante $t \leq \tau$; ya que es cuando se presenta la respuesta dinámica máxima. Las respuestas dinámicas de velocidades y aceleraciones se obtuvieron respectivamente mediante la primera y segunda derivada de la respuesta dinámica de desplazamientos de los mismos. Únicamente se consideró el primer armónico de la excitación peatonal vertical ya que es la que puede ocasionar la resonancia en los puentes peatonales estudiados en esta tesis. El caso más crítico en los puentes peatonales estudiados es la vibración resonante en el primer modo de vibrar ($w_1 = \Omega$); por lo que lograr satisfacer el nivel de confort para la condición resonante, logrará automáticamente controlar cualquier vibración vertical inducida por diferentes frecuencias peatonales ($w_1 \neq \Omega$), siempre y cuando el TMD se diseñe de con parámetros óptimos (Den Hartog, 1956). Por lo tanto en este apartado sólo se analizaron los puentes peatonales estudiados bajo la condición resonante ($w_1 = \Omega$).

Con respecto a los modos de vibrar es importante mencionar que si n amortiguadores de masa sintonizados son colocados en el puente peatonal, entonces los primeros n modos de vibrar estarán bajo la influencia de los n amortiguadores de masa sintonizados; de tal manera que el modo $n+1$ del puente peatonal con TMD's es en realidad el primer modo del puente peatonal sin TMD's. Por lo tanto, la frecuencia natural de cada TMD adicional es sintonizada a la frecuencia natural del modo $n+1$ del puente peatonal con un TMD menos del que se coloca; por ejemplo, si la frecuencia natural de un TMD se sintoniza con la primera frecuencia vertical de un puente peatonal sin TMD's, entonces si se coloca un TMD adicional a dicho puente, éste se sintonizará con la segunda frecuencia vertical del puente peatonal que lleva un TMD.

En los últimos años se ha demostrado que la máxima eficiencia de los TMD's se logra cuando éstos se colocan en los puntos longitudinales de máxima amplitud del modo de vibrar resonante, de tal manera que el número de TMD's estará relacionado con el modo de vibrar del puente peatonal que puede vibrar en resonancia. En los puentes peatonales estudiados en estas tesis sólo será necesario colocar un TMD en el punto longitudinal de máxima amplitud de la primera forma modal, ya que es la que puede desarrollar vibraciones resonantes inducidas por peatones. La



colocación de más de un TMD en el puente peatonal con el objetivo de controlar las vibraciones resonantes del primer modo se traduce en una reducción insignificante de las vibraciones verticales resonantes. Usualmente en la práctica se suelen diseñar TMD's cuya masa es entre 2 y 7 % de la masa modal efectiva del j -ésimo modo de vibrar resonante, $\tilde{m}_{j,e}$, del sistema de un grado de libertad equivalente (apéndice F). Cabe mencionar que la masa de los TMD, m_d , también fue expresada en función de la masa total del puente peatonal ($m = \bar{m} L$). Las gráficas de las formas modales verticales se normalizaron a la unidad en el punto de máxima amplitud modal sólo con fines de una mejor visualización.

6.5.1 Puente peatonal San Bartolo

El puente peatonal San Bartolo se representó como el modelo simplificado de la figura 6.10, pero con un solo TMD colocado en $x = L/2$; ya que las vibraciones resonantes inducidas por peatones se generan en el primer modo de vibrar ($f_1 = 3.65 \text{ Hz}$), cuya máxima amplitud se da al centro del claro. Se hicieron varias propuestas para el TMD (apéndices E y F), cuyos parámetros óptimos se muestran en la tabla 6.2, y las formas modales correspondientes se muestran en la figura 6.11.

Tabla 6.2 Parámetros óptimos para varias propuestas de TMD del puente peatonal San Bartolo en

$$x^* = L/2$$

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	$f_{d,opt} \text{ (Hz)}$	$m_d \text{ (kg)}$	$k_{d,opt} \left(\frac{N}{m} \right)$	$c_{d,opt} \left(\frac{N \cdot s}{m} \right)$	$\xi_e \text{ (\%)}$
0.005	0.01	3.6139	115.9192	59766.5352	317.5926	4.9691
0.01	0.02	3.5784	231.8383	117200.7244	876.4317	6.8213
0.025	0.05	3.4762	579.5958	276498.0583	3222.2211	10.9121
0.05	0.1	3.3182	1159.1916	503866.2958	8113.1942	16.4713
0.1	0.2	3.0417	2318.3832	846775.3014	18461.4352	26.7402

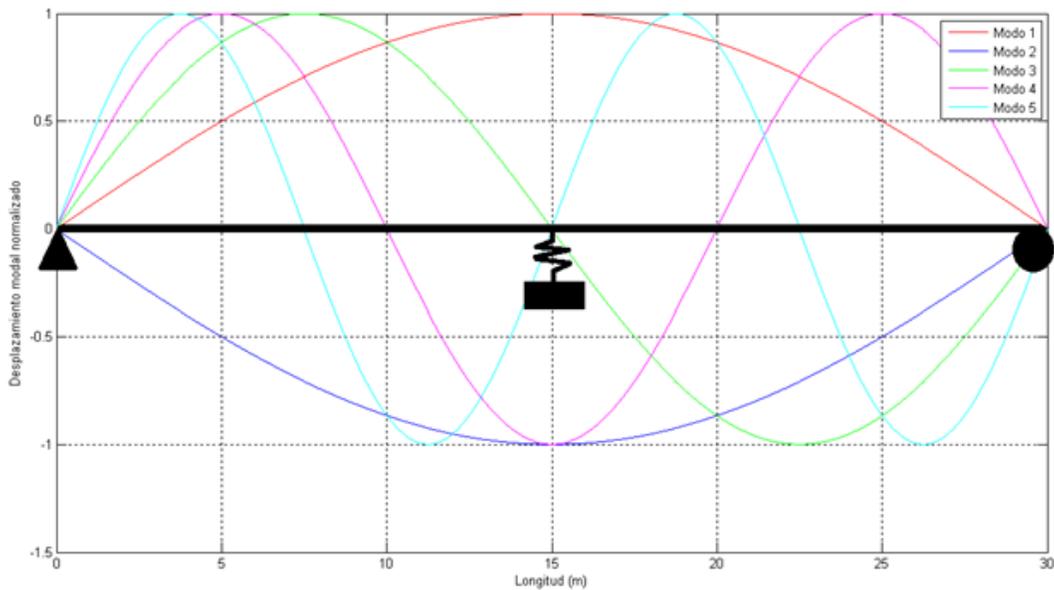


Figura 6.11 Formas modales verticales del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x_1 = 15\text{ m}$ (modelo matemático)

Las i -ésimas frecuencias de vibrar en Hz del sistema compuesto, \bar{f}_i , de la figura 6.11 se muestran en la tabla 6.3 para los TMD's de parámetros óptimos de la tabla 6.2.

Tabla 6.3 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal San Bartolo con un TMD óptimo en $x_1 = 15\text{ m}$ (modelo matemático)

m_d / m	$f_{d,opt}$ (Hz)	\bar{f}_1 (Hz)	\bar{f}_2 (Hz)	\bar{f}_3 (Hz)	\bar{f}_4 (Hz)	\bar{f}_5 (Hz)
0.005	3.6139	3.4547	3.8179	14.6000	32.8500	58.4000
0.01	3.5784	3.3671	3.8782	14.6000	32.8500	58.4000
0.025	3.4762	3.1856	3.9821	14.6000	32.8500	58.4000
0.05	3.3182	2.9720	4.0726	14.6000	32.8500	58.4000
0.1	3.0417	2.6677	4.1576	14.6000	32.8500	58.4000

Las gráficas de respuestas dinámicas verticales del sistema vibratorio compuesto, así como sus valores máximos se muestran respectivamente en las figuras 6.12 a 6.15 y tablas 6.4 a 6.7.



Tabla 6.4 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 \text{ m}$ ante 1 peatón con $f_p = 3.65 \text{ Hz}$ y $V_o = 6 \text{ m/s}$ (modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0009508	0.0215	0.4912	8.1616	✓
0.005	0.01	0.0003773	0.0083	0.1985	3.2385	✓
0.01	0.02	0.0002365	0.0038	0.0881	2.0304	✓
0.025	0.05	0.0001824	0.0014	0.0316	1.5655	✓
0.05	0.1	0.0001692	0.0010	0.0220	1.4526	✓
0.1	0.2	0.0001637	0.0008	0.0175	1.4054	✓

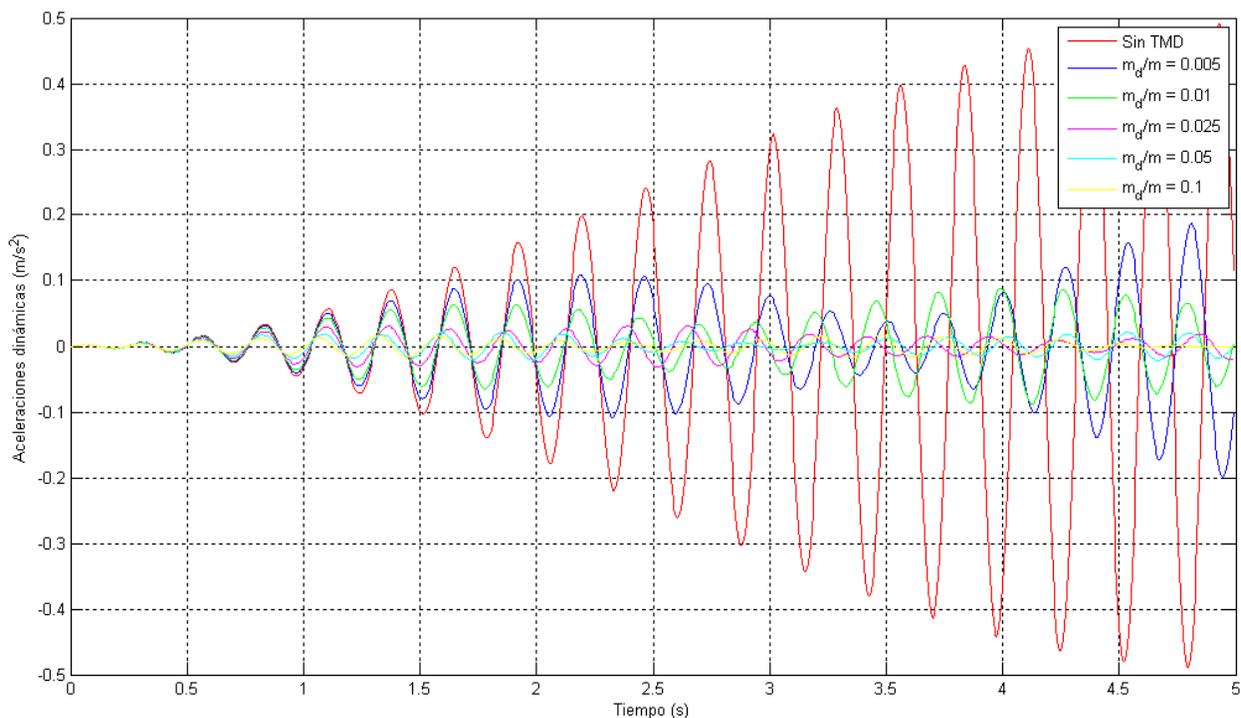


Figura 6.12 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón con $f_p = 3.65 \text{ Hz}$ y $V_o = 6 \text{ m/s}$ (modelo matemático)



Tabla 6.5 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 m$ ante 2 peatones con $f_p = 3.65 Hz$ y $V_o = 6 m/s$ (modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0014	0.0304	0.6947	5.8545	✓
0.005	0.01	0.00054	0.0117	0.2810	2.3001	✓
0.01	0.02	0.00039	0.0054	0.1249	1.6678	✓
0.025	0.05	0.00034	0.0020	0.0452	1.4192	✓
0.05	0.1	0.00033	0.0014	0.0319	1.4175	✓
0.1	0.2	0.00031	0.0012	0.0255	1.3124	✓

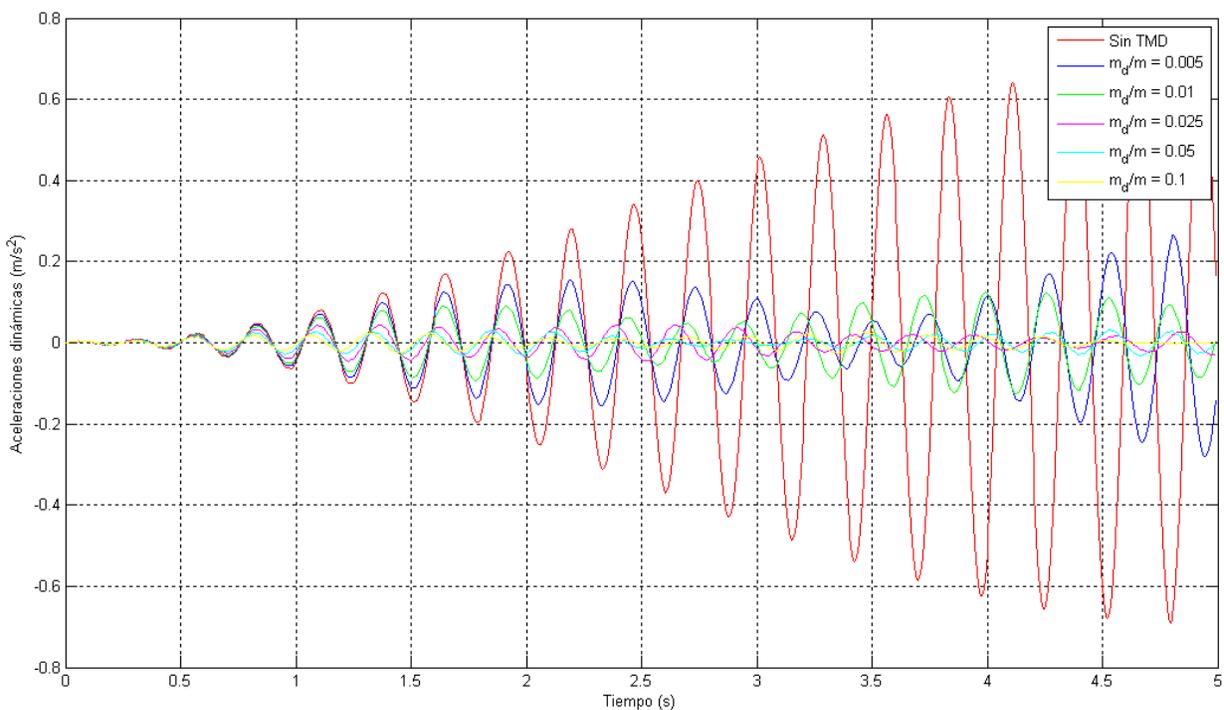


Figura 6.13 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 m$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones con $f_p = 3.65 Hz$ y $V_o = 6 m/s$ (modelo matemático)



Tabla 6.6 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 m$ ante 4 peatones con $f_p = 3.65 Hz$ y $V_o = 6 m/s$ (modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0020	0.0431	0.9825	4.2437	X
0.005	0.01	0.00088	0.0166	0.3980	1.8948	✓
0.01	0.02	0.00069	0.0078	0.1775	1.4717	✓
0.025	0.05	0.00065	0.0029	0.0656	1.3928	✓
0.05	0.1	0.00061	0.0022	0.0466	1.3163	✓
0.1	0.2	0.00058	0.0018	0.0376	1.2484	✓

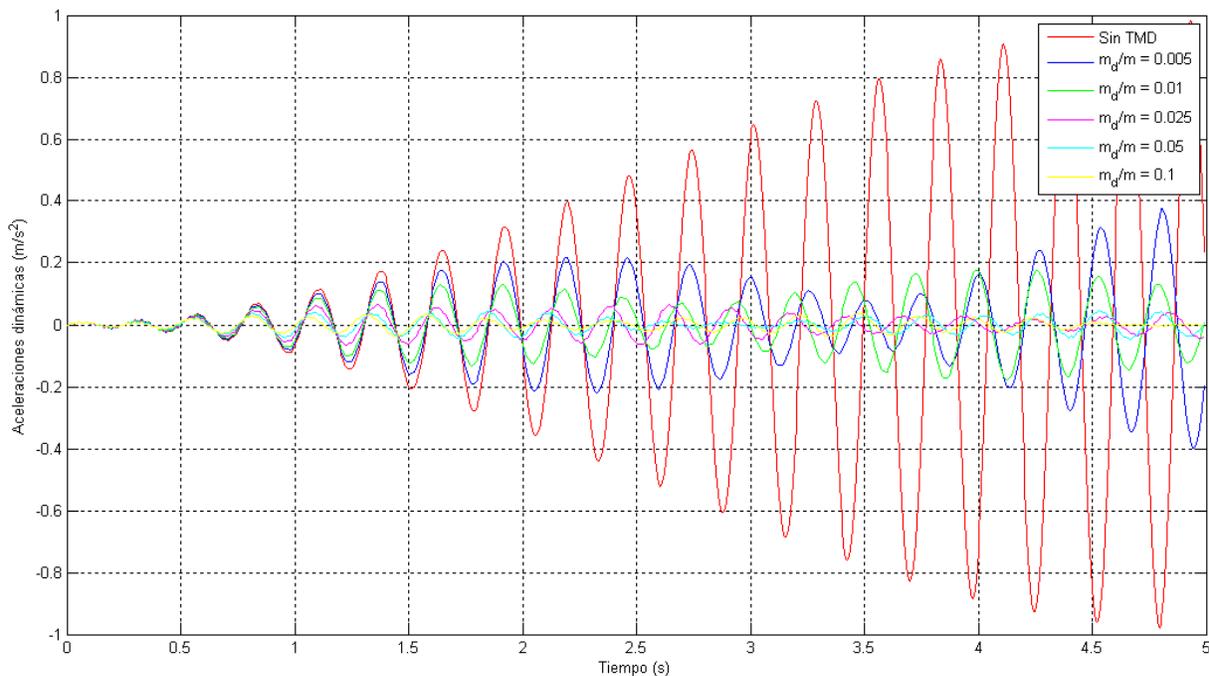


Figura 6.14 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 m$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones con $f_p = 3.65 Hz$ y $V_o = 6 m/s$ (modelo matemático)



Tabla 6.7 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 m$ ante 8 peatones con $f_p = 3.65 Hz$ y $V_o = 6 m/s$ (modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0029	0.0612	1.3896	3.1416	X
0.005	0.01	0.00153	0.0237	0.5639	1.6374	✓
0.01	0.02	0.00128	0.0112	0.2535	1.3753	✓
0.025	0.05	0.00124	0.0044	0.0967	1.3331	✓
0.05	0.1	0.00116	0.0034	0.0688	1.2434	✓
0.1	0.2	0.00113	0.0029	0.0578	1.2171	✓

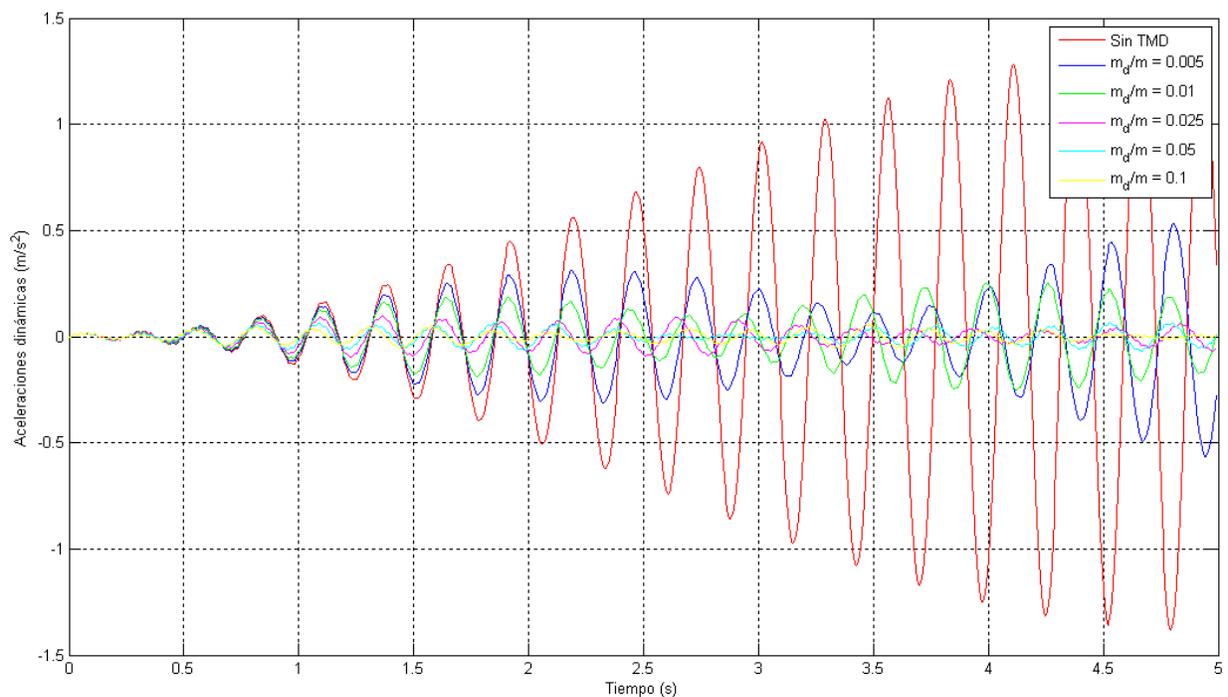


Figura 6.15 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal San Bartolo con un TMD en $x^* = 15 m$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones con $f_p = 3.65 Hz$ y $V_o = 6 m/s$ (modelo matemático)



6.5.2 Puente peatonal Salamanca

El puente peatonal Salamanca se representó como una viga Euler-Bernoulli con un extremo empotrado y el otro simplemente apoyado sometida simultáneamente a una carga constante y armónica en movimiento; y con un solo TMD colocado en $x = 0.586 L$ (medido desde el extremo empotrado), ya que las vibraciones resonantes inducidas por peatones se generan en el primer modo de vibrar ($f_1 = 3.18 \text{ Hz}$). Se debe recordar que el puente peatonal no es continuo, por lo que los resultados obtenidos en uno de los tramos son los mismos para el otro tramo. Se hicieron varias propuestas para el TMD (apéndices E y F), cuyos parámetros óptimos se muestran en la tabla 6.8.

Tabla 6.8 Parámetros óptimos para varias propuestas de TMD del puente peatonal Salamanca en $x^* = 0.586 L$

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	$f_{d,opt} \text{ (Hz)}$	$m_d \text{ (kg)}$	$k_{d,opt} \left(\frac{N}{m} \right)$	$c_{d,opt} \left(\frac{N \cdot s}{m} \right)$	$\xi_e \text{ (\%)}$
0.00439028	0.01	3.1423	69.4085	27055.4829	165.3190	4.5422
0.00878056	0.02	3.1115	138.817	53055.5334	456.2201	6.3972
0.02195140	0.05	3.0226	347.0425	125170.2394	1677.3451	10.4954
0.04390280	0.1	2.8852	694.085	228106.5020	4223.5306	16.0640
0.08780561	0.2	2.6449	1388.17	383366.2851	9611.2187	26.3439

Las formas de vibrar del sistema vibratorio compuesto del puente peatonal Salamanca son independientes de los valores de los parámetros de los TMD propuestos, las cuales se muestran en la figura 6.16, dónde se observa que el primer modo de vibrar es el que está bajo la influencia del TMD; mientras que el segundo modo corresponde al primer modo del puente peatonal Salamanca sin el TMD, cuya frecuencia aumenta debido a la presencia del TMD que rigidiza al puente peatonal.

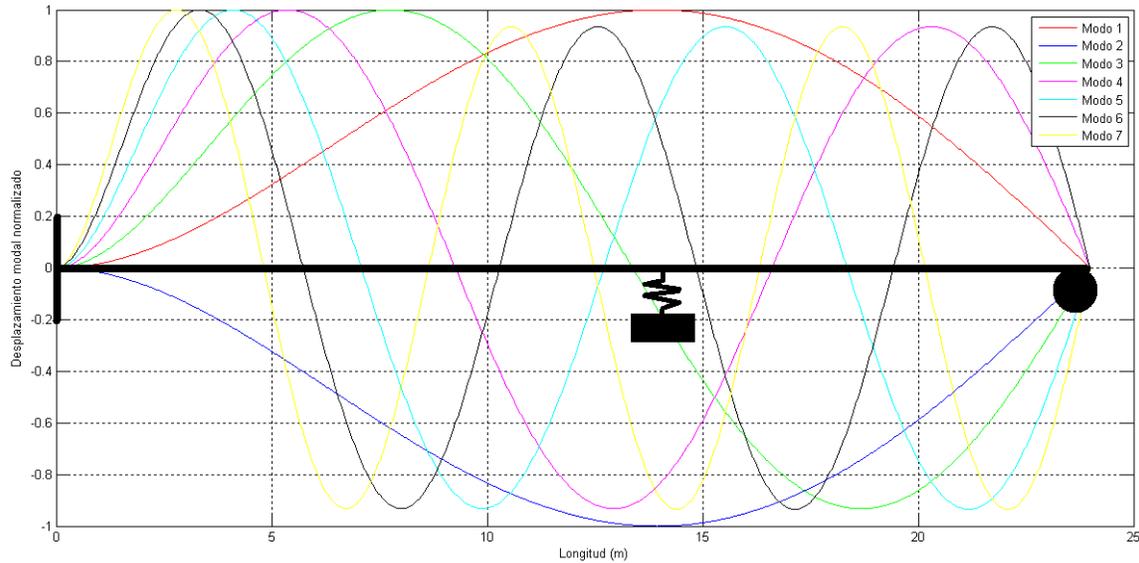


Figura 6.16 Formas modales verticales del puente peatonal Salamanca con un TMD en $x_1 = 14.064 m$ y $x_2 = 37.0929 m$ (modelo matemático)

Las i -ésimas frecuencias de vibrar en Hz del sistema compuesto, \bar{f}_i , de la figura 6.16 se muestran en la tabla 6.9 para los TMD's de parámetros óptimos de la tabla 6.8.

Tabla 6.9 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal Salamanca con un TMD óptimo en $x_1 = 14.064 m$ y $x_2 = 37.0929 m$ (modelo matemático)

m_d / m	$f_{d,opt} (Hz)$	$\bar{f}_1 (Hz)$	$\bar{f}_2 (Hz)$	$\bar{f}_3 (Hz)$	$\bar{f}_4 (Hz)$	$\bar{f}_5 (Hz)$	$\bar{f}_6 (Hz)$	$\bar{f}_7 (Hz)$
0.0044	3.1423	3.0067	3.3230	10.3052	21.5012	36.7683	56.1066	79.5158
0.0088	3.1115	2.9305	3.3758	10.3052	21.5012	36.7683	56.1066	79.5158
0.022	3.0226	2.7720	3.4658	10.3052	21.5012	36.7683	56.1066	79.5158
0.044	2.8852	2.5859	3.5445	10.3052	21.5012	36.7683	56.1066	79.5158
0.088	2.6449	2.3205	3.6184	10.3052	21.5012	36.7683	56.1066	79.5158

Las gráficas de respuestas dinámicas verticales del sistema vibratorio compuesto, así como sus valores máximos se muestran respectivamente en las figuras 6.17 a 6.20 y tablas 6.10 a 6.13.



Tabla 6.10 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca con un TMD en

$$x^* = 14.064 \text{ m y } \dot{x}^* = 37.0929 \text{ m} \text{ ante 1 peatón con } f_p = 3.18 \text{ Hz y } V_o = 5 \text{ m/s}$$

(modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0053	0.1057	2.1068	20.4813	X
0.0044	0.01	0.0027	0.0326	0.6525	7.3013	✓
0.0088	0.02	0.0019	0.0215	0.4535	4.3173	✓
0.022	0.05	0.0011	0.0113	0.2289	2.9097	✓
0.044	0.1	0.0008	0.0061	0.1258	2.2430	✓
0.088	0.2	0.0006	0.0043	0.0885	2.0391	✓

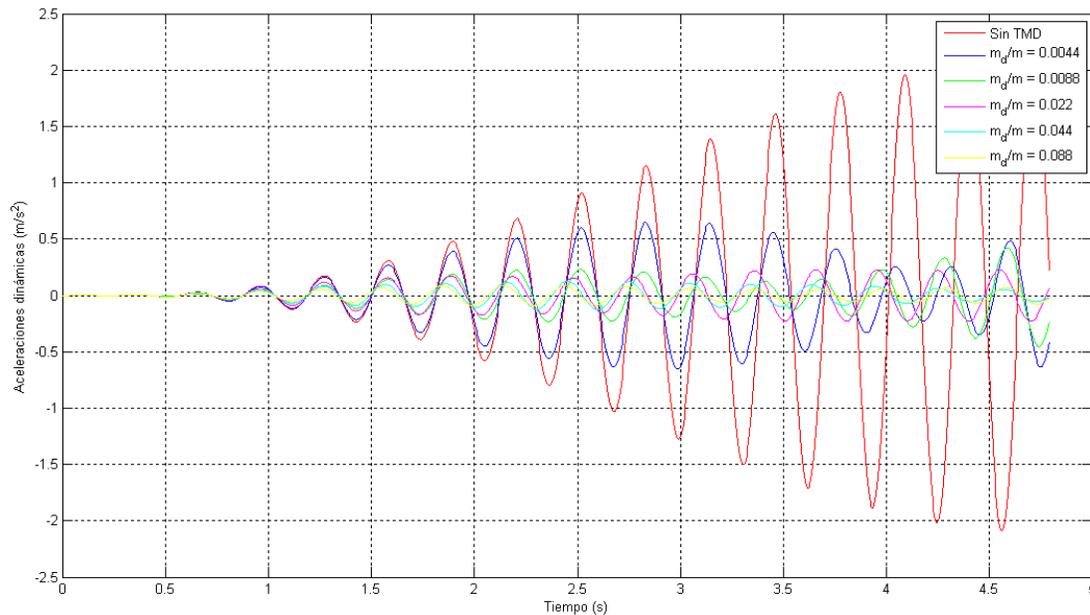


Figura 6.17 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca con un TMD en $x^* = 14.064 \text{ m}$ y $\dot{x}^* = 37.0929 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón con $f_p = 3.18 \text{ Hz}$ y $V_o = 5 \text{ m/s}$

(modelo matemático)



Tabla 6.11 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca con un TMD en

$x^* = 14.064 \text{ m}$ y $x^* = 37.0929 \text{ m}$ ante 2 peatones con $f_p = 3.18 \text{ Hz}$ y $V_o = 5 \text{ m/s}$

(modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0075	0.1495	2.9792	14.4824	X
0.0044	0.01	0.0028	0.0461	0.9229	5.4595	X
0.0088	0.02	0.0016	0.0304	0.6414	3.0617	✓
0.022	0.05	0.0012	0.0161	0.3238	2.3218	✓
0.044	0.1	0.0010	0.0086	0.1781	1.9172	✓
0.088	0.2	0.0009	0.0062	0.1249	1.8179	✓

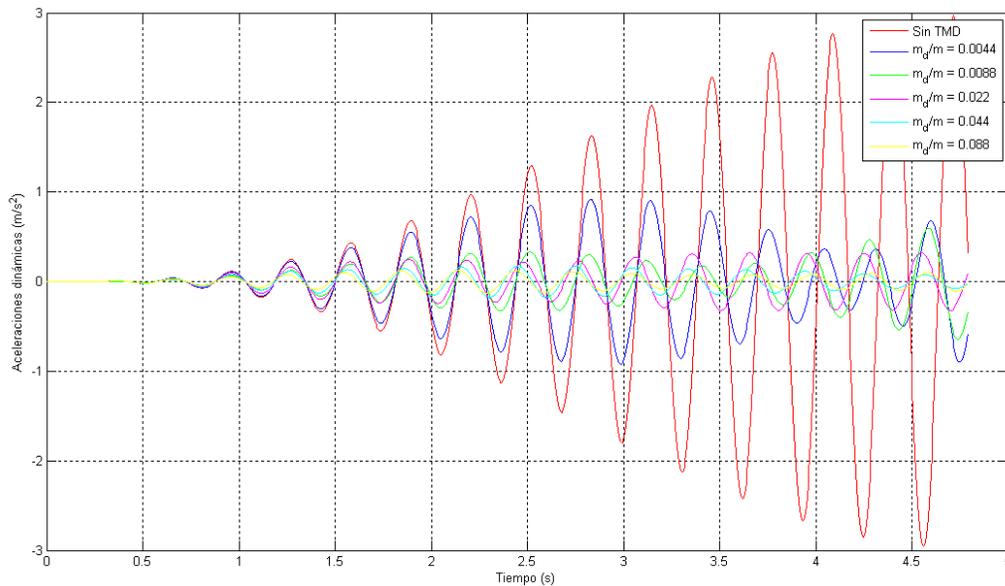


Figura 6.18 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca con un TMD en $x^* = 14.064 \text{ m}$ y $x^* = 37.0929 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones con $f_p = 3.18 \text{ Hz}$ y $V_o = 5 \text{ m/s}$

(modelo matemático)



Tabla 6.12 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca con un TMD en

$$x^* = 14.064 \text{ m y } x^* = 37.0929 \text{ m ante 4 peatones con } f_p = 3.18 \text{ Hz y } V_o = 5 \text{ m/s}$$

(modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0106	0.2115	4.2128	10.2405	X
0.0044	0.01	0.0043	0.0651	1.3057	4.1572	X
0.0088	0.02	0.0022	0.0428	0.9072	2.1739	X
0.022	0.05	0.0020	0.0230	0.4580	1.9310	✓
0.044	0.1	0.0017	0.0123	0.2520	1.6868	✓
0.088	0.2	0.0017	0.0089	0.1766	1.6614	✓

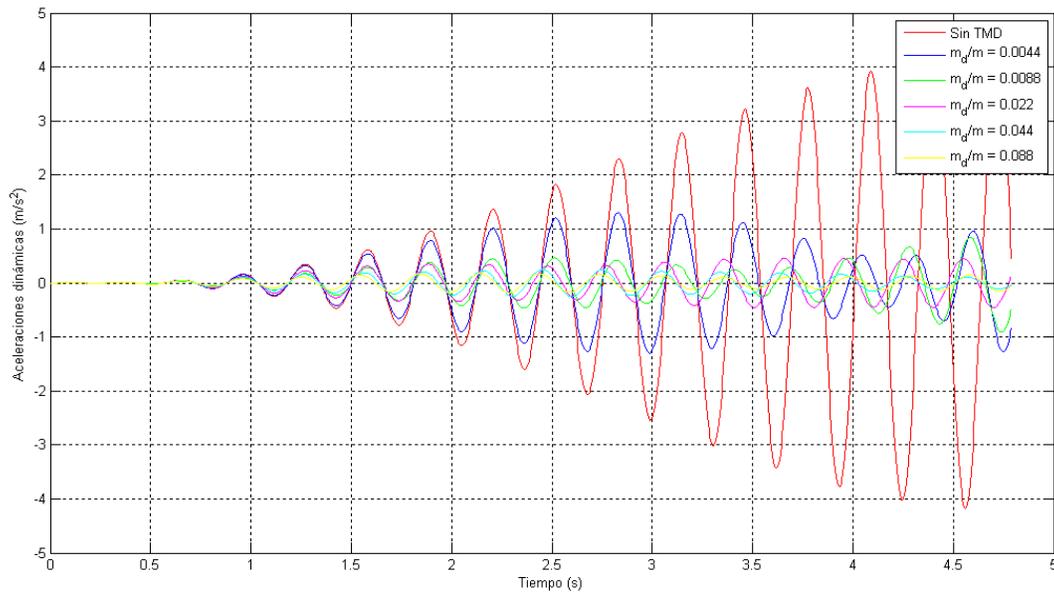


Figura 6.19 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca con un TMD en

$$x^* = 14.064 \text{ m y } x^* = 37.0929 \text{ m, durante } t \leq \tau, \text{ ante 4 peatones con } f_p = 3.18 \text{ Hz y } V_o = 5 \text{ m/s}$$

(modelo matemático)



Tabla 6.13 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Salamanca con un TMD en

$$x^* = 14.064 \text{ m y } x^* = 37.0929 \text{ m ante 8 peatones con } f_p = 3.18 \text{ Hz y } V_o = 5 \text{ m/s}$$

(modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0150	0.2991	5.9567	7.2410	X
0.0044	0.01	0.0067	0.0921	1.8475	3.2363	X
0.0088	0.02	0.0034	0.0602	1.2833	1.6641	X
0.022	0.05	0.0032	0.0330	0.6480	1.5510	✓
0.044	0.1	0.0032	0.0175	0.3568	1.5461	✓
0.088	0.2	0.0032	0.0130	0.2498	1.5239	✓

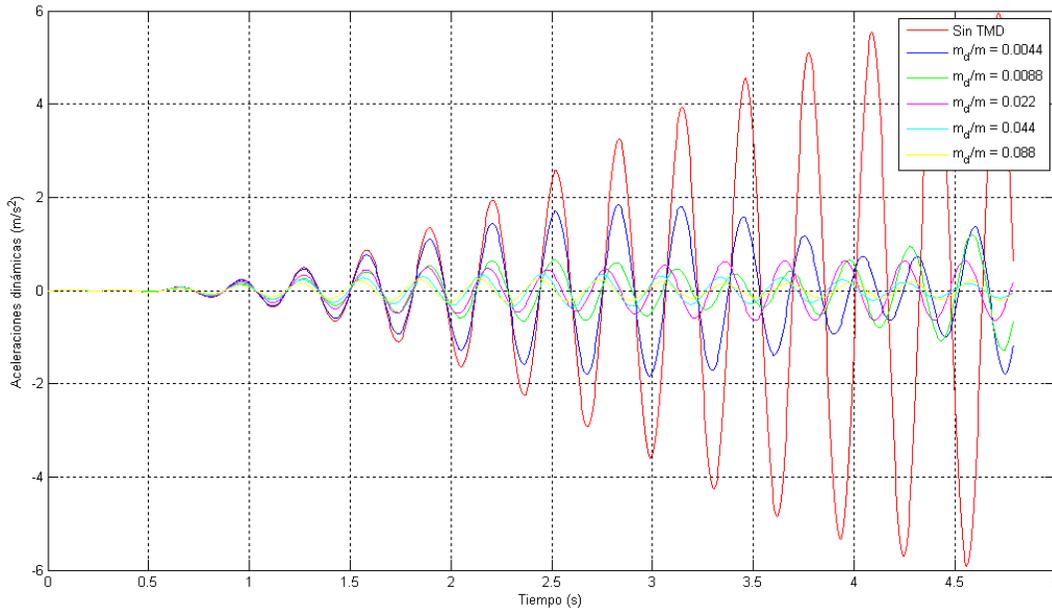


Figura 6.20 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Salamanca con un TMD en $x^* = 14.064 \text{ m y } x^* = 37.0929 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones con $f_p = 3.18 \text{ Hz y } V_o = 5 \text{ m/s}$

(modelo matemático)



6.5.3 Puente peatonal Pátzcuaro

El puente peatonal Pátzcuaro se representó como una viga Euler-Bernoulli doblemente empotrada sometida simultáneamente a una carga constante y armónica en movimiento; y con un solo TMD colocado en $x = L/2$, ya que las vibraciones resonantes inducidas por peatones se generan en el primer modo de vibrar ($f_1 = 2.768 \text{ Hz}$), cuya máxima amplitud se da al centro del claro. Se hicieron varias propuestas para el TMD (apéndices E y F), cuyos parámetros óptimos se muestran en la tabla 6.14.

Tabla 6.14 Parámetros óptimos para varias propuestas de TMD del puente peatonal Pátzcuaro en

$$x^* = L/2$$

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	$f_{d,opt} \text{ (Hz)}$	$m_d \text{ (kg)}$	$k_{d,opt} \left(\frac{N}{m} \right)$	$c_{d,opt} \left(\frac{N \cdot s}{m} \right)$	$\xi_e \text{ (\%)}$
0.00396478	0.01	2.7351	145.1492	42868.0343	300.98	4.6210
0.00792956	0.02	2.7083	290.2983	84063.21	830.588	6.4753
0.0198239	0.05	2.6309	725.7459	198320.5526	3053.6751	10.5717
0.0396478	0.1	2.5114	1451.4917	361402.3293	7688.8140	16.1382
0.079296	0.2	2.3021	2902.9834	607356.6922	17495.7653	26.4160

Las formas de vibrar del sistema vibratorio compuesto del puente peatonal Pátzcuaro son independientes de los valores de los parámetros de los TMD propuestos, las cuales se muestran en la figura 6.21, donde se observa que el primer modo de vibrar es el que está bajo la influencia del TMD; mientras que el segundo modo corresponde al primer modo del puente peatonal Pátzcuaro sin el TMD, cuya frecuencia aumenta debido a la presencia del TMD que rigidiza al puente peatonal.

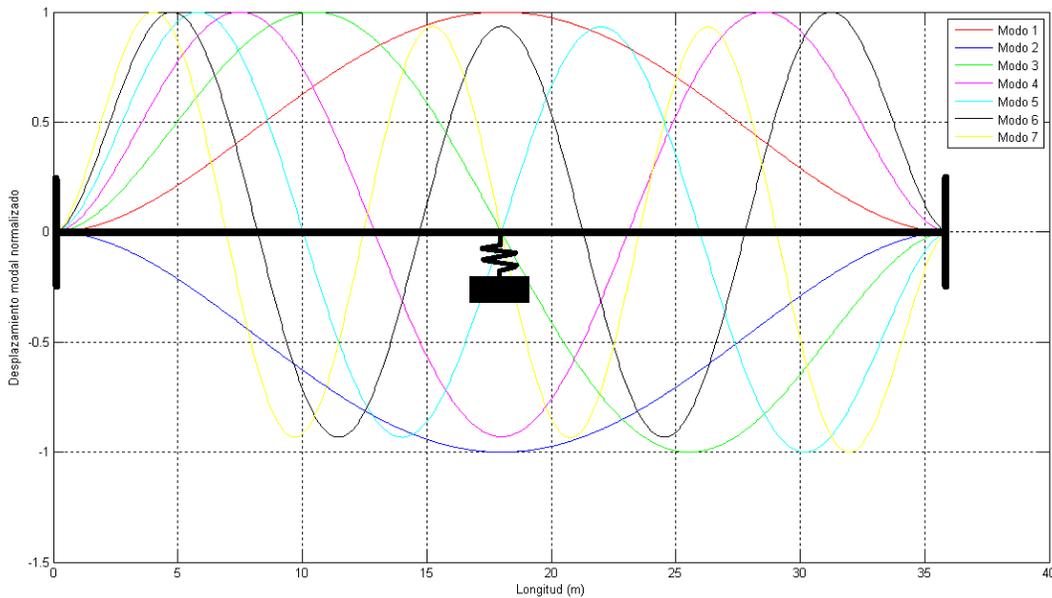


Figura 6.21 Formas modales verticales del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x_1 = 18 m$ (modelo matemático)

Las i -ésimas frecuencias de vibrar en Hz del sistema compuesto, \bar{f}_i , de la figura 6.21 se muestran en la tabla 6.15 para los TMD's de parámetros óptimos de la tabla 6.14.

Tabla 6.15 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD óptimo en $x_1 = 18 m$ (modelo matemático)

m_d / m	$f_{d,opt} (Hz)$	$\bar{f}_1 (Hz)$	$\bar{f}_2 (Hz)$	$\bar{f}_3 (Hz)$	$\bar{f}_4 (Hz)$	$\bar{f}_5 (Hz)$	$\bar{f}_6 (Hz)$	$\bar{f}_7 (Hz)$
0.004	2.7351	2.6170	2.8925	7.6301	14.9580	24.7265	36.9372	51.5897
0.008	2.7083	2.5505	2.9382	7.6301	14.9580	24.7265	36.9372	51.5897
0.02	2.6309	2.4123	3.0164	7.6301	14.9580	24.7265	36.9372	51.5897
0.04	2.5114	2.2502	3.0849	7.6301	14.9580	24.7265	36.9372	51.5897
0.08	2.3021	2.0188	3.1489	7.6301	14.9580	24.7265	36.9372	51.5897

Las gráficas de respuestas dinámicas verticales del sistema vibratorio compuesto, así como sus valores máximos se muestran respectivamente en las figuras 6.22 a 6.25 y tablas 6.16 a 6.19.



Tabla 6.16 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 m$ ante 1 peatón con $f_p = 2.768 Hz$ y $V_o = 4 m/s$ (modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0088	0.1516	2.6262	53.1247	X
0.004	0.01	0.0028	0.0476	0.8320	16.6984	X
0.008	0.02	0.0011	0.0181	0.3201	6.8538	✓
0.02	0.05	0.0005	0.0061	0.1091	3.1022	✓
0.04	0.1	0.0004	0.0039	0.0696	2.5196	✓
0.08	0.2	0.0004	0.0036	0.0642	2.2078	✓

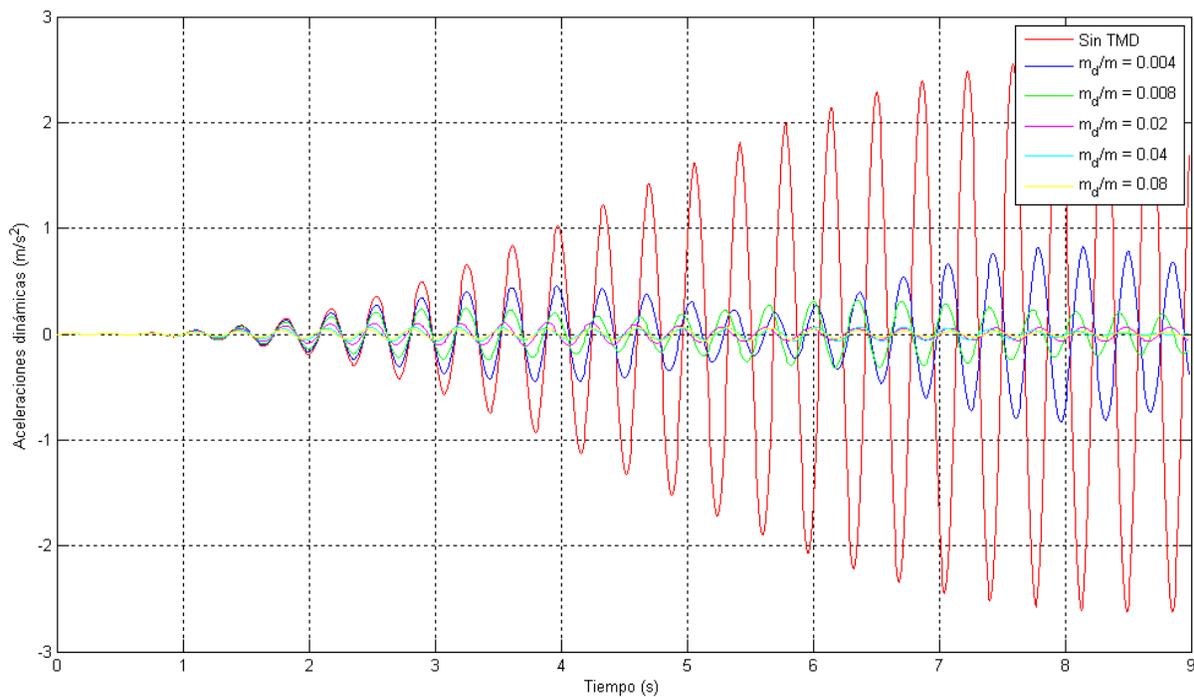


Figura 6.22 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 m$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón con $f_p = 2.768 Hz$ y $V_o = 4 m/s$ (modelo matemático)



Tabla 6.17 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 m$ ante 2 peatones con $f_p = 2.768 Hz$ y $V_o = 4 m/s$ (modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0124	0.2144	3.7140	37.5750	X
0.004	0.01	0.0039	0.0674	1.1766	11.8482	X
0.008	0.02	0.0017	0.0256	0.4527	5.0549	✓
0.02	0.05	0.0008	0.0086	0.1543	2.5001	✓
0.04	0.1	0.0007	0.0056	0.0985	2.1571	✓
0.08	0.2	0.0006	0.0052	0.0908	1.8496	✓

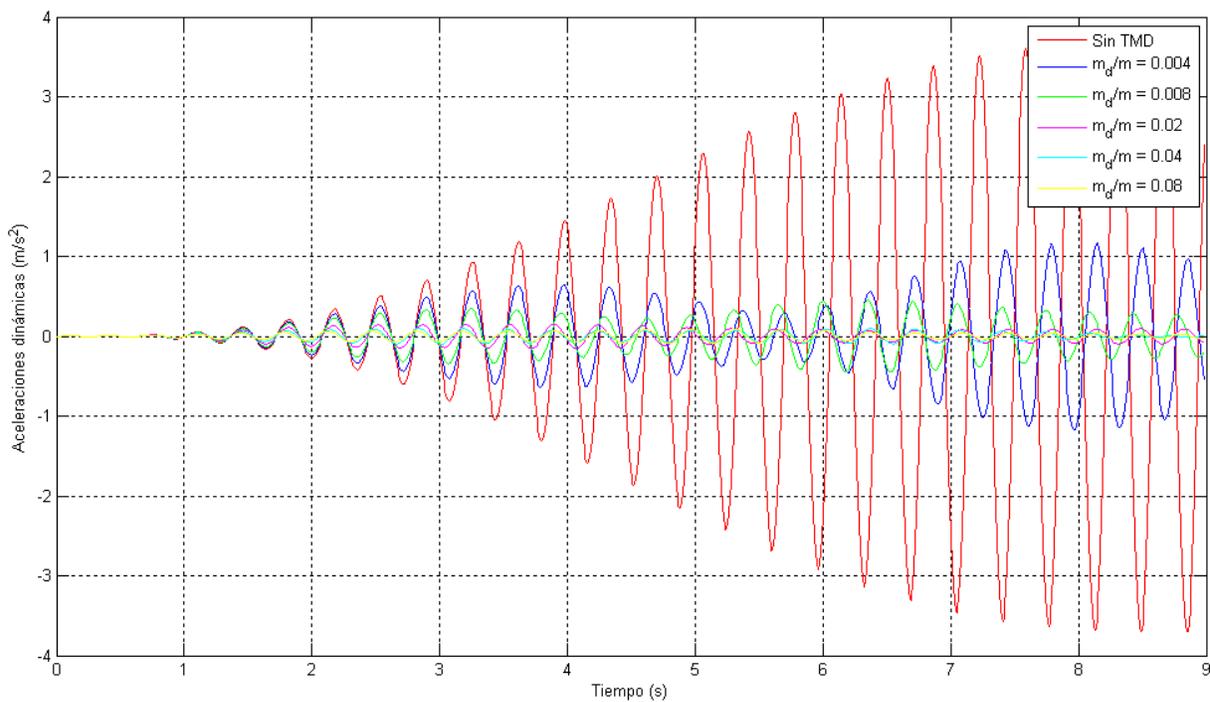


Figura 6.23 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 m$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones con $f_p = 2.768 Hz$ y $V_o = 4 m/s$ (modelo matemático)



Tabla 6.18 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 \text{ m}$ ante 4 peatones con $f_p = 2.768 \text{ Hz}$ y $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0175	0.3033	5.2524	26.5797	X
0.004	0.01	0.0055	0.0954	1.6640	8.4186	X
0.008	0.02	0.0025	0.0363	0.6402	3.7830	✓
0.02	0.05	0.0014	0.0123	0.2182	2.0744	✓
0.04	0.1	0.0013	0.0080	0.1393	1.9008	✓
0.08	0.2	0.0011	0.0073	0.1283	1.6408	✓

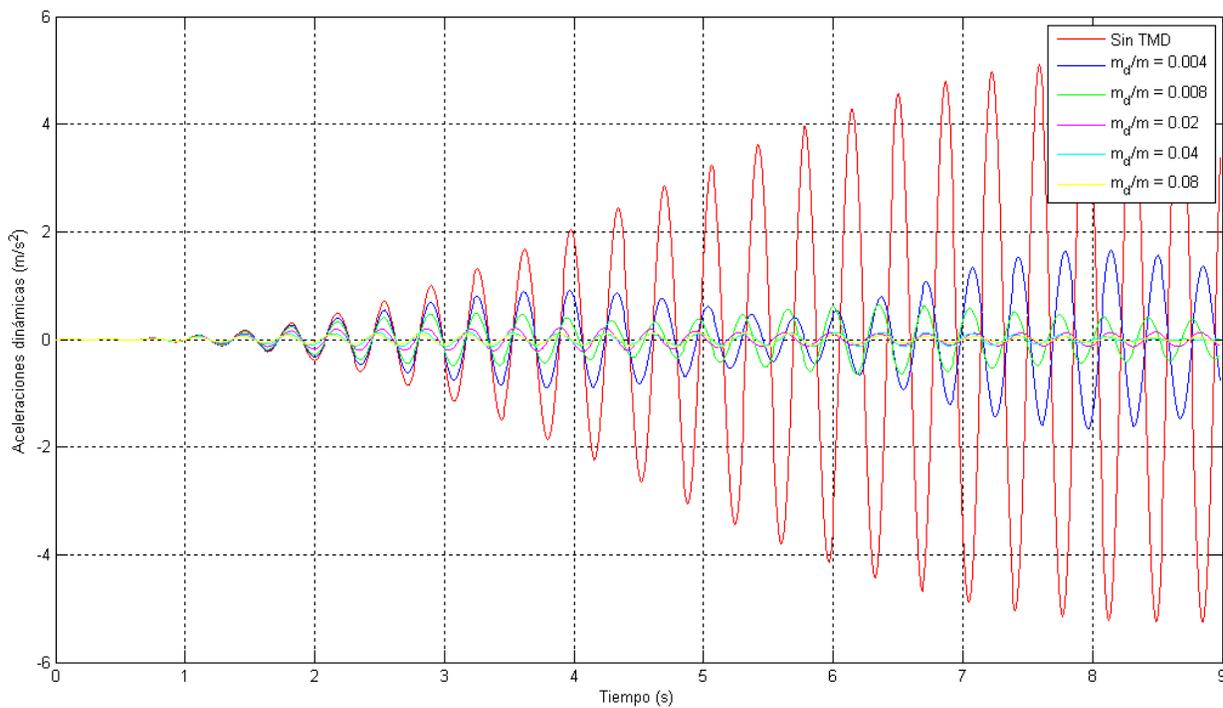


Figura 6.24 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones con $f_p = 2.768 \text{ Hz}$ y $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático)



Tabla 6.19 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 m$ ante 8 peatones con $f_p = 2.768 Hz$ y $V_o = 4 m/s$ (modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0248	0.4289	7.4280	18.8048	X
0.004	0.01	0.0079	0.1350	2.3533	5.9935	X
0.008	0.02	0.0038	0.0514	0.9054	2.8835	X
0.02	0.05	0.0023	0.0174	0.3085	1.7733	✓
0.04	0.1	0.0023	0.0115	0.1970	1.7196	✓
0.08	0.2	0.0020	0.0104	0.1812	1.4951	✓

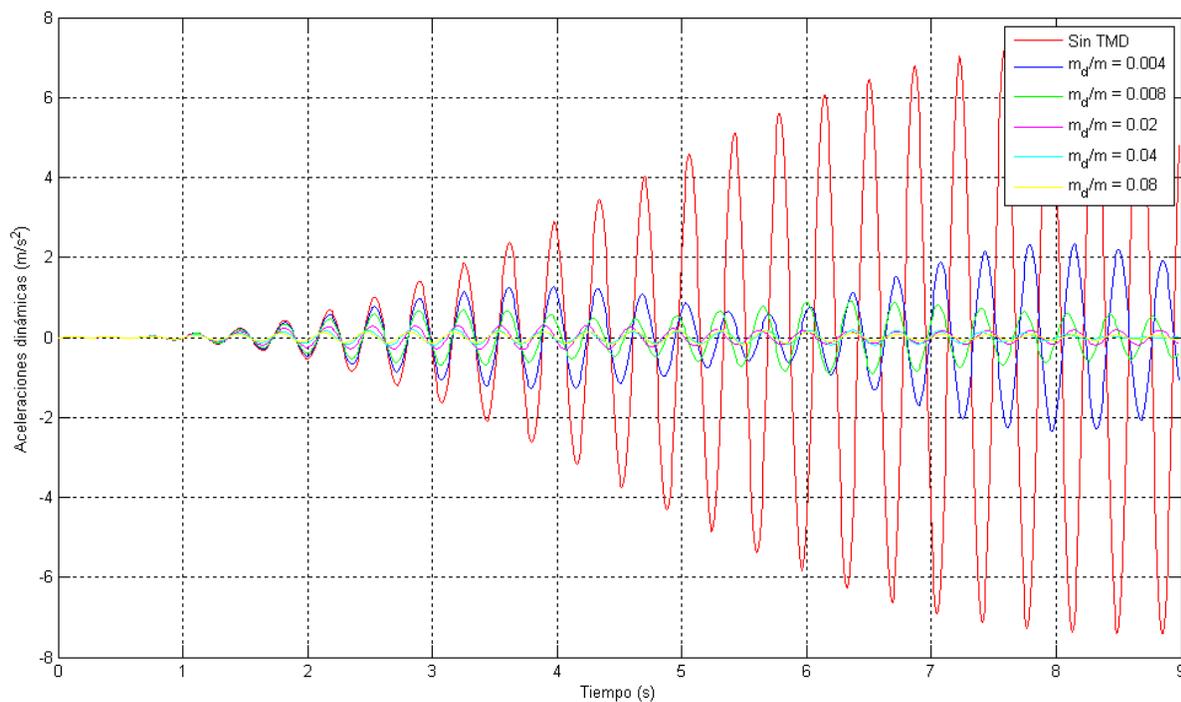


Figura 6.25 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal Pátzcuaro con un TMD en $x^* = 18 m$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones con $f_p = 2.768 Hz$ y $V_o = 4 m/s$ (modelo matemático)



6.5.4 Puente peatonal tipo

El puente peatonal tipo se representó como una viga Euler-Bernoulli doblemente empotrada sometida simultáneamente a una carga constante y armónica en movimiento; y con un solo TMD colocado en $x = L/2$, ya que las vibraciones resonantes inducidas por peatones se generan en el primer modo de vibrar ($f_1 = 3.4282 \text{ Hz}$), cuya máxima amplitud se da al centro del claro. Se hicieron varias propuestas para el TMD (apéndices E y F), cuyos parámetros óptimos se muestran en la tabla 6.20.

Tabla 6.20 Parámetros óptimos para varias propuestas de TMD del puente peatonal tipo en

$$x^* = L/2$$

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	$f_{d,opt} \text{ (Hz)}$	$m_d \text{ (kg)}$	$k_{d,opt} \left(\frac{N}{m} \right)$	$c_{d,opt} \left(\frac{N \cdot s}{m} \right)$	$\xi_e \text{ (\%)}$
0.00396478	0.01	3.3875	46.1893	20924.7614	118.6219	4.5713
0.00792956	0.02	3.3635	92.3786	41259.2231	328.2515	6.4259
0.0198239	0.05	3.2585	230.9465	96804.2977	1203.5105	10.5231
0.0396478	0.1	3.1103	461.893	176407.8174	3030.3051	16.0906
0.079296	0.2	2.8511	923.786	296463.0956	6895.4064	26.3697

Las formas de vibrar del sistema vibratorio compuesto del puente peatonal tipo son independientes de los valores de los parámetros de los TMD propuestos, las cuales se muestran en la figura 6.26, donde se observa que el primer modo de vibrar es el que está bajo la influencia del TMD; mientras que el segundo modo corresponde al primer modo del puente peatonal tipo sin el TMD, cuya frecuencia aumenta debido a la presencia del TMD que rigidiza al puente peatonal.

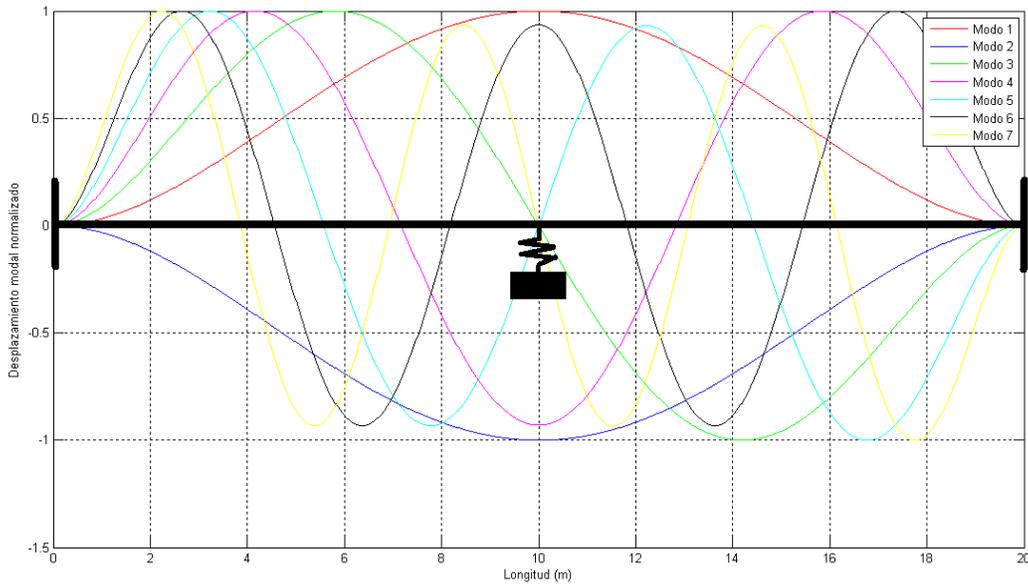


Figura 6.26 Formas modales verticales del puente peatonal tipo con un TMD en $x_1 = 10\text{ m}$ (modelo matemático)

Las i -ésimas frecuencias de vibrar en Hz del sistema compuesto, \bar{f}_i , de la figura 6.26 se muestran en la tabla 6.21 para los TMD's de parámetros óptimos de la tabla 6.20.

Tabla 6.21 Frecuencias de vibrar verticales del puente peatonal tipo con un TMD óptimo en $x_1 = 10\text{ m}$ (modelo matemático)

m_d / m	$f_{d,opt} (\text{Hz})$	$\bar{f}_1 (\text{Hz})$	$\bar{f}_2 (\text{Hz})$	$\bar{f}_3 (\text{Hz})$	$\bar{f}_4 (\text{Hz})$	$\bar{f}_5 (\text{Hz})$	$\bar{f}_6 (\text{Hz})$	$\bar{f}_7 (\text{Hz})$
0.004	3.3875	3.2412	3.5824	9.4500	18.5257	30.6241	45.7471	63.8944
0.008	3.3635	3.1636	3.6436	9.4500	18.5257	30.6241	45.7471	63.8944
0.02	3.2585	2.9878	3.7359	9.4500	18.5257	30.6241	45.7471	63.8944
0.04	3.1103	2.7870	3.8206	9.4500	18.5257	30.6241	45.7471	63.8944
0.08	2.8511	2.5003	3.8999	9.4500	18.5257	30.6241	45.7471	63.8944

Las gráficas de respuestas dinámicas verticales del sistema vibratorio compuesto, así como sus valores máximos se muestran respectivamente en las figuras 6.27 a 6.30 y tablas 6.22 a 6.25.



Tabla 6.22 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 m$ ante 1 peatón con $f_p = 3.4282 Hz$ y $V_o = 5.75 m/s$ (modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0036	0.0771	1.6575	10.6150	X
0.004	0.01	0.0010	0.0185	0.4003	2.9979	✓
0.008	0.02	0.0008	0.0184	0.3726	2.3235	✓
0.02	0.05	0.0004	0.0073	0.1590	1.9367	✓
0.04	0.1	0.0003	0.0041	0.0919	1.8429	✓
0.08	0.2	0.0003	0.0030	0.0670	1.6980	✓

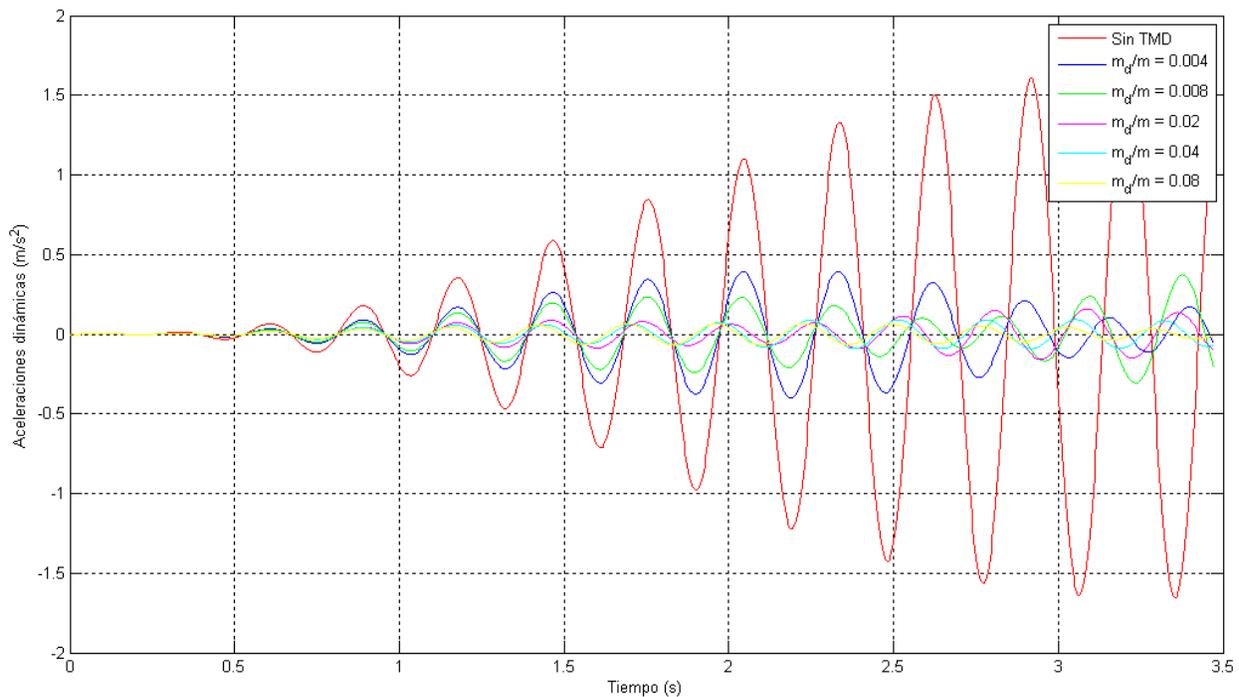


Figura 6.27 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 m$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón con $f_p = 3.4282 Hz$ y $V_o = 5.75 m/s$ (modelo matemático)



Tabla 6.23 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 \text{ m}$ ante 2 peatones con $f_p = 3.4282 \text{ Hz}$ y $V_o = 5.75 \text{ m/s}$ (modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0051	0.1091	2.3432	7.5442	X
0.004	0.01	0.0015	0.0263	0.5664	2.2507	✓
0.008	0.02	0.0011	0.0260	0.5272	2.1423	✓
0.02	0.05	0.0005	0.0103	0.2251	1.7559	✓
0.04	0.1	0.0005	0.0058	0.1302	1.6173	✓
0.08	0.2	0.0005	0.0043	0.0948	1.5003	✓

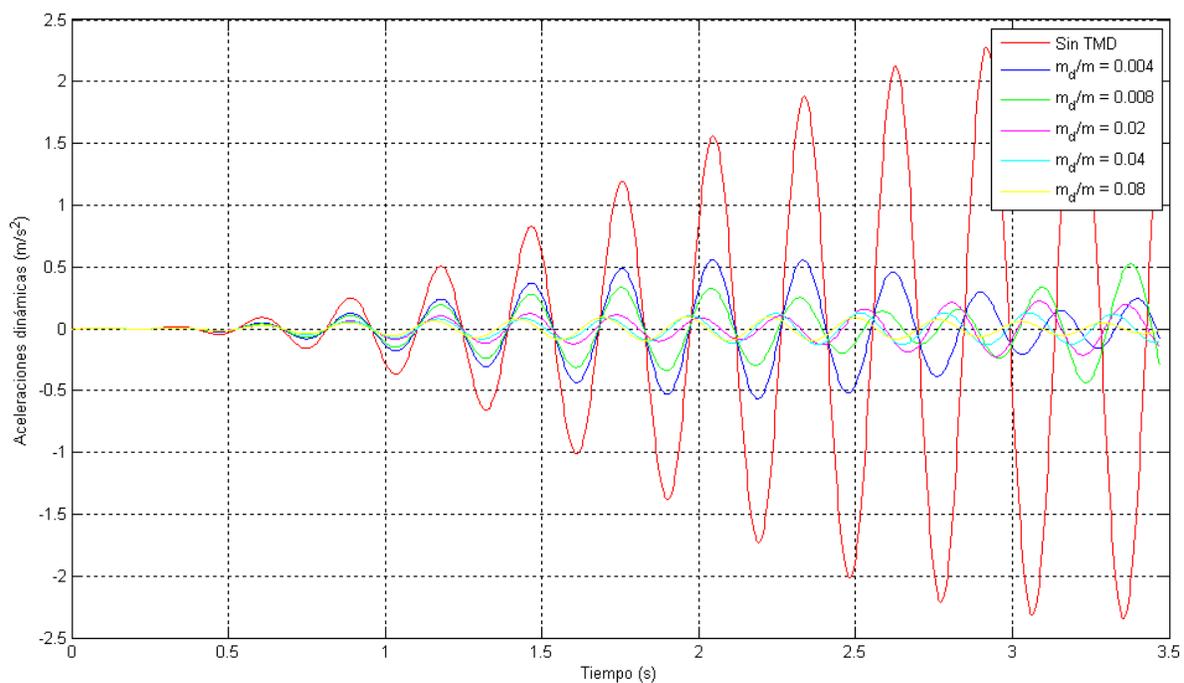


Figura 6.28 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones con $f_p = 3.4282 \text{ Hz}$ y $V_o = 5.75 \text{ m/s}$ (modelo matemático)



Tabla 6.24 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 m$ ante 4 peatones con $f_p = 3.4282 Hz$ y $V_o = 5.75 m/s$ (modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0073	0.1542	3.3120	5.3746	X
0.004	0.01	0.0023	0.0374	0.8017	1.7224	X
0.008	0.02	0.0017	0.0367	0.7460	1.5256	✓
0.02	0.05	0.0010	0.0147	0.3185	1.3994	✓
0.04	0.1	0.0008	0.0083	0.1846	1.3615	✓
0.08	0.2	0.0008	0.0063	0.1345	1.2941	✓

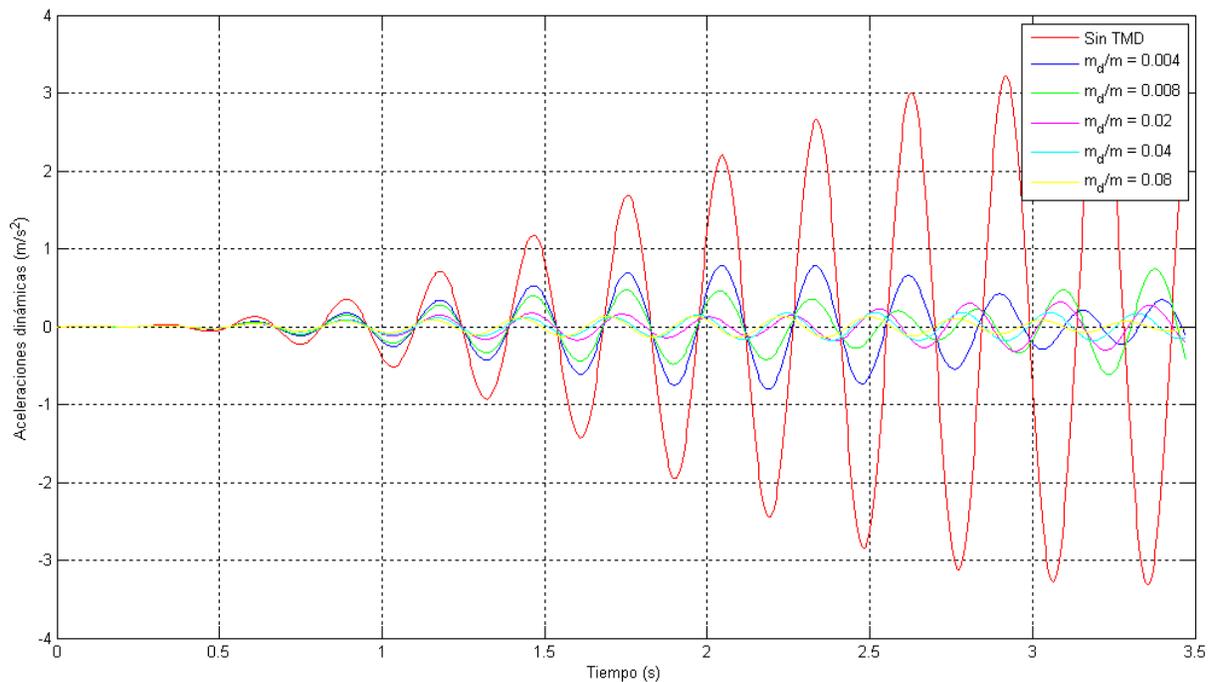


Figura 6.29 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 m$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones con $f_p = 3.4282 Hz$ y $V_o = 5.75 m/s$ (modelo matemático)



Tabla 6.25 Respuestas dinámicas verticales máximas del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 m$ ante 8 peatones con $f_p = 3.4282 Hz$ y $V_o = 5.75 m/s$ (modelo matemático)

m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	Desplazamiento máximo (m)	Velocidad máxima (m/s)	Aceleración máxima (m/s ²)	DMF	Nivel de confort aceptable
0	0	0.0105	0.2181	4.6805	3.8929	X
0.004	0.01	0.0037	0.0532	1.1350	1.3661	X
0.008	0.02	0.0027	0.0519	1.0560	1.2732	X
0.02	0.05	0.0018	0.0210	0.4510	1.2232	✓
0.04	0.1	0.0015	0.0121	0.2619	1.1966	✓
0.08	0.2	0.0014	0.0093	0.1911	1.1502	✓

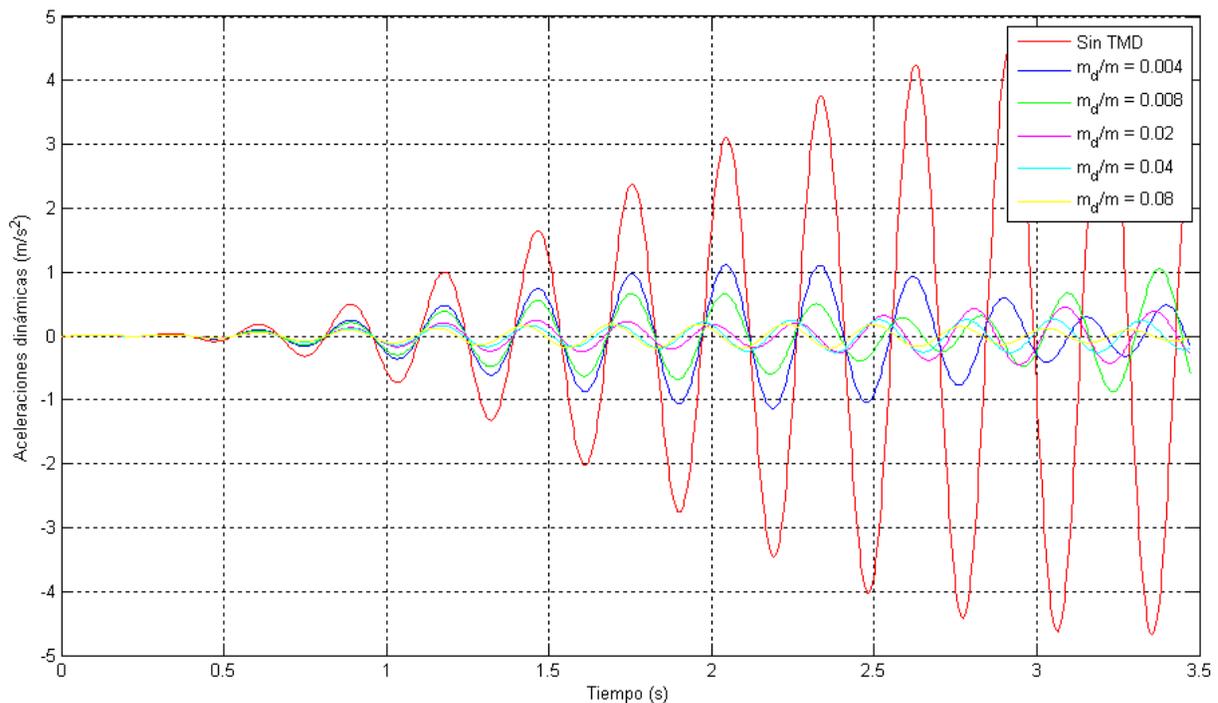


Figura 6.30 Aceleraciones dinámicas verticales del puente peatonal tipo con un TMD en $x^* = 10 m$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones con $f_p = 3.4282 Hz$ y $V_o = 5.75 m/s$ (modelo matemático)



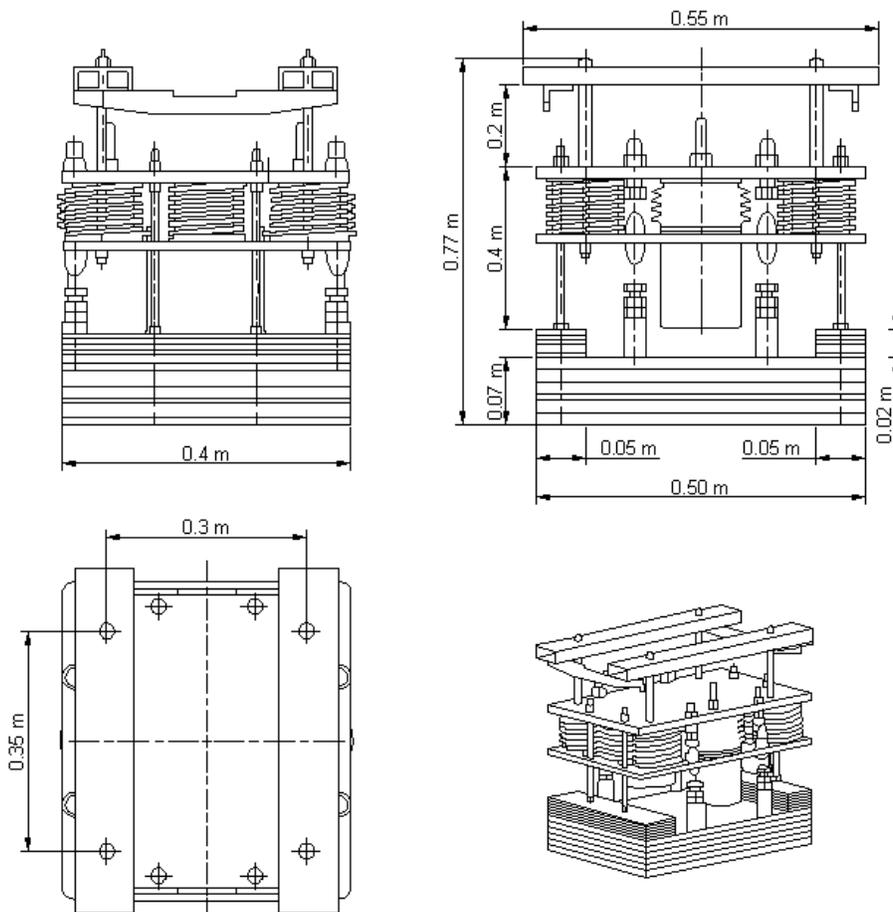
6.6 Conclusiones

La elección final de los parámetros óptimos del TMD se hace con base al TMD de menor masa que logre satisfacer el confort para todos los casos de carga peatonal móvil, tal y como se muestra en la tabla 6.26.

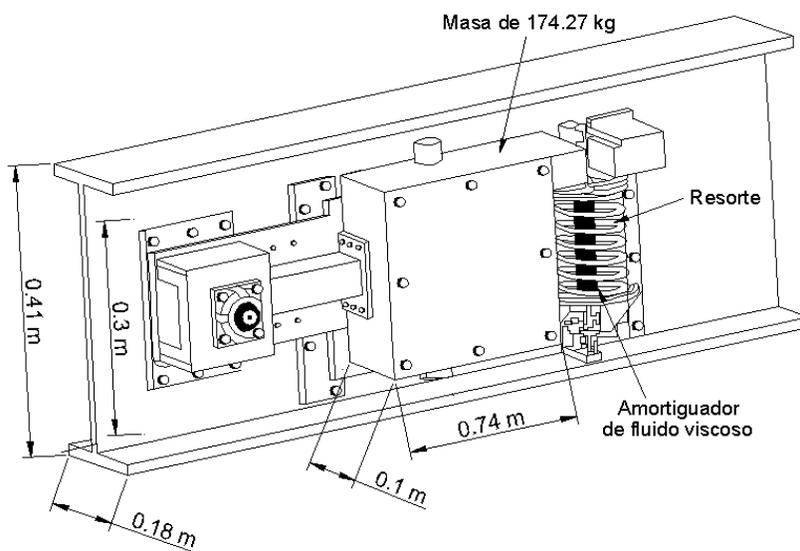
Tabla 6.26 Diseño final de los TMD's para los puentes peatonales estudiados

Puente peatonal	m_d / m	$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	$f_{d,opt}$ (Hz)	m_d (kg)	$k_{d,opt}$ $\left(\frac{N}{m}\right)$	$c_{d,opt}$ $\left(\frac{N \cdot s}{m}\right)$	x^* (m)
San Bartolo	0.005	0.01	3.6139	115.9192	59766.5352	317.5926	15
Salamanca	0.02195140	0.05	3.0226	347.0425	125170.2394	1677.3451	14.064
	0.02195140	0.05	3.0226	347.0425	125170.2394	1677.3451	37.0929
Pátzcuaro	0.0198239	0.05	2.6309	725.7459	198320.5526	3053.6751	18
Tipo	0.0198239	0.05	3.2585	230.9465	96804.2977	1203.5105	10

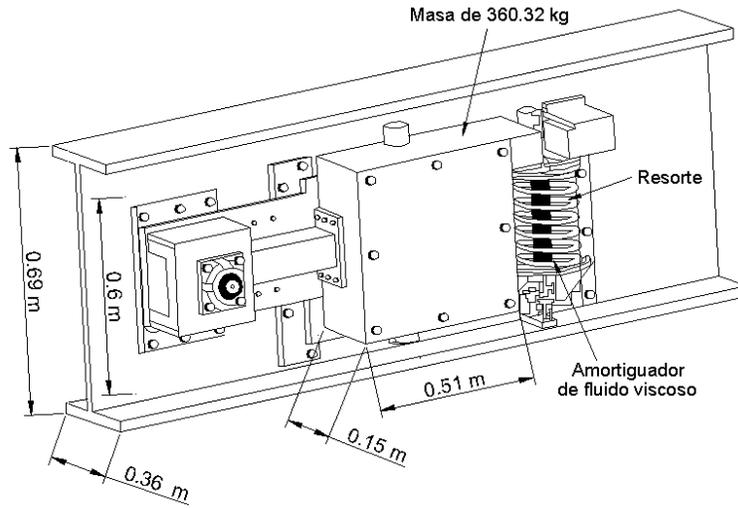
El diseño final de los TMD's se muestra en la figura 6.31, dónde la masa de los dispositivos es proporcionada por un paquete de paneles de acero cuya densidad es de $7850 \text{ kg} / \text{m}^3$, los cuales pueden ser desmontados con facilidad para ajustar la frecuencia del TMD con la frecuencia del primer modo de vibrar de los puentes peatonales. La rigidez vertical del TMD es proporcionada por un arreglo de resortes, mientras que el amortiguamiento es proporcionado por amortiguadores viscosos. Los puentes San Bartolo y tipo poseen vigas de menor peralte y no poseen arriostamiento por debajo del tablero que impidan la colocación del diseño propuesto. Los puentes Salamanca y Pátzcuaro poseen arriostamiento por debajo del sistema de piso, el cual impide utilizar un diseño similar al de los puentes San Bartolo y Pátzcuaro, sin embargo, poseen vigas longitudinales muy peraltadas que pueden albergar con facilidad a los TMD's. Los TMD's de los puentes Salamanca y Pátzcuaro se colocarán en ambas vigas longitudinales a la misma distancia longitudinal de anclaje; ésta es la razón por la cual las masas de la figuras 6.31 (b) y 6.31 (c) equivalen a la mitad de los valores mostrados en la tabla 6.26.



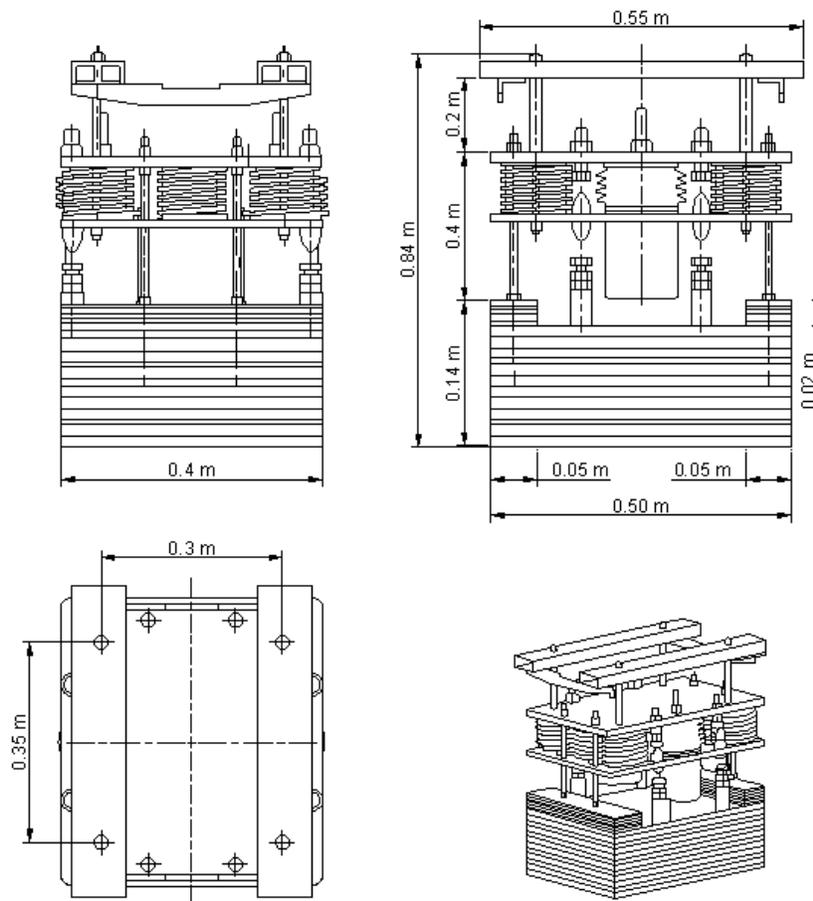
(a) Puente peatonal San Bartolo



(b) Puente peatonal Salamanca



(c) Puente peatonal Pátzcuaro



(d) Puente peatonal tipo

Figura 6.31 Dimensionamiento final de los TMD's de los puentes peatonales estudiados



Capítulo 7

Conclusiones y recomendaciones

Este estudio presenta una metodología para determinar la susceptibilidad de los puentes peatonales a las vibraciones inducidas por personas, con un enfoque particular en el control de las vibraciones resonantes verticales mediante TMD's. Las conclusiones generales son las siguientes:

- Tal y como sugieren las normas internacionales, los puentes peatonales son más susceptibles a presentar vibraciones resonantes inducidas por peatones en movimiento cuando éstos poseen frecuencias estructurales entre 1.6 y 3.5 Hz para modos de verticales y longitudinales; y entre 0.8 y 1.75 Hz para modos de vibrar laterales. Por lo tanto, se recomienda que los puentes peatonales sean diseñados de tal manera que éstos posean frecuencias estructurales alejadas de dichos intervalos, lo cual puede verificarse mediante modelos analíticos. Se recomienda evitar utilizar diseños tipo de puentes peatonales sin antes revisar sus frecuencias estructurales.
- Se debe de evaluar la respuesta dinámica resonante en la dirección vertical, lateral y longitudinal de cualquier puente peatonal que se esté diseñando, y verificar que se satisfagan los niveles de confort establecidos por las normas internacionales. Para evaluar la respuesta dinámica resonante en la dirección vertical puede utilizarse el modelo matemático de Frýba (1999) o el modelo generalizado de un grado de libertad (Rao, 2007), tomando en cuenta los casos de excitación peatonal estipulados en las normas internacionales en función del uso del puente. La velocidad de cruce de las cargas peatonales puede tomarse de los valores obtenidos por Bachmann y Ammann (1987). Se concluye que el amortiguamiento estructural de puentes peatonales suele ser muy pequeño y no influye considerablemente en la evaluación de la respuesta dinámica.
- Cuando un puente peatonal tenga problemas de vibraciones inducidas por personas, se recomienda realizar estudios de vibración ambiental y forzada, con el objetivo de obtener



de manera precisa las propiedades y respuestas dinámicas de los mismos; ya que de éstas dependerá el diseño adecuado de un absorber de vibraciones resonantes.

- Una medida correctiva muy eficiente para el control de las vibraciones verticales resonantes inducidas por peatones es colocar amortiguadores de masa sintonizados (TMD's) en los puntos de máxima amplitud del modo de vibrar resonante. Se recomienda que los TMD's se diseñen con parámetros óptimos (Den Hartog, 1956) con el objetivo de tener una mejor eficiencia en un intervalo más amplio de frecuencias de vibrar. El diseño inicial de los TMD's puede comenzar con una masa de entre 2 % y 7 % de la masa modal efectiva del puente peatonal en el punto de anclaje del absorber, sin embargo, el diseño final será aquel TMD de menor masa que logre satisfacer el nivel de confort (aceleraciones menores a 0.7 m/s^2) bajo los distintos casos de carga peatonal móvil establecidos en las normas internacionales. El diseño final de los TMD's de los puentes peatonales estudiados en esta tesis se basó en una carga máxima de 8 peatones corriendo, sin embargo, las normas no suelen utilizar más de 4 peatones corriendo en grupo para un puente ubicado en condiciones de máximo tránsito posible; aun así, el diseño final obtenido es práctico y fácil de colocar y podrá satisfacer condiciones de confort en algún caso de carga peatonal más extraordinario. Quedan fuera del alcance de esta tesis las cargas peatonales distribuidas a lo largo de los puentes, y las cuales pueden considerarse como cargas no móviles.
- Los modelos matemáticos con TMD's utilizados en esta tesis no contemplan el amortiguamiento de éstos dispositivos, por lo que un modelo matemático que logre discretizar la masa distribuida en un número finito de masas concentradas podría considerar dicha aportación del amortiguamiento en la reducción de las vibraciones verticales resonantes, y por ende, llevar a la elección de un TMD de menor masa. Dichos modelos involucran en la ecuación de movimiento una matriz de masas, una matriz de rigidez y una matriz de amortiguamiento que contemplan los parámetros de los TMD's y cuya solución se puede obtener con el método de la variable estado debido a que las matrices no son diagonales.



Referencias bibliográficas

American Wood Council. (2007). *Beam Formula with Shear and Moment Diagrams*. Washington, DC: American Forest & Paper Association, Inc.

Bachmann, H. y Ammann, W. (1987). *Vibrations in Structures: Induced by Man and Machines, Structural Engineering Document 3e*. Zürich, Suiza: International Association for Bridge and Structural Engineering.

Bachmann, H., Ammann, W., Deischl, F., Eisenmann, J., Floegl, I., Hirsch, G. H., et al. (1995). *Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines* (2nd ed.). Berlín: Birkhäuser.

Barbat, A.H. y Canet, J.M. (1994). *Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas: Cálculo por Ordenador* (2nd ed.). Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.

Bazán, E., y Meli, R. (2008). *Diseño Sísmico de Edificios*. Ciudad de México: Limusa.

British Standard (2002). *Steel, concrete and composite bridges*. University of Sheffield, Inglaterra.

Chopra, A.K. (2014). *Dinámica de estructuras* (4th ed.). Naucalpan de Juárez, Estado de México: Pearson.

Connor, J.J. (2003). *Introduction to Structural Motion Control*. Prentice Hall.

Dallard, P., Fitzpatrick, T., Flint, A., Low, A., Ridsdill, R., Willford, M., y Roche, M. (2001). London Millennium Bridge: Pedestrian-Induced Lateral Vibration. *Journal of Bridge Engineering*, 6 (6), 412-417.

Den Hartog, J. P. (1956). *Mechanical Vibrations* (4th ed.). Nueva York: McGraw-Hill.

Falconi, R.A. (2008). *Dinámica de Estructuras con Matlab*. Quito.

Fryba, L. (1999). *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads* (3rd ed.). Praga, República Checa: Thomas Telford.



Gonçalves, P.J.P., Brennan, M.J., y Elliott, S.J. (2007). Numerical evaluation of high-order modes of vibration in uniform Euler-Bernoulli beams. *Journal of Sound and Vibration*, 301, 1035-1039.

Instituto Mexicano de la Construcción en Acero, A.C. (2010). *Manual de Construcción en Acero: Diseño por Esfuerzos Permisibles* (4th ed.). Ciudad de México: Limusa.

International Organization for Standardization 10137 (2007). *Bases for design of structures- Serviceability of buildings and walkways against vibrations*.

Jo, B.W., Tae, G.H. y Wha, D. (2001). Structural vibration of tuned mass damper-installed three-span steel box bridge. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 78, 667-675.

Magalhães, F., Brincker, R., y Cunha, Á. (2007). Damping Estimation Using Free Decays and Ambient Vibration Tests. In R. Brincker, & N. Møller (Eds.), *Proceedings of the 2nd International Operacional Modal Analysis Conference*, 2, 513-521

Martínez, M.D. (2009). *Atenuación de vibraciones resonantes en puentes de ferrocarril de Alta Velocidad mediante amortiguadores fluido-viscosos*. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.

Matsumoto, Y., Nishioka, T., Shiojiri, H., y Matsuzaki, K. (1978). Dynamic design of footbridges. *International Association for Bridge and Structural Engineering*, 1-15.

Montanaro, M.I. (2002). Sistemas de Control de Vibraciones en Estructuras de Gran Altura. *Informes de la Construcción*, 53 (477).

Murphy, G. M. (1960). *Ordinary Differential Equations and Their Solutions* (1st ed.). D. Van Nostrand Company, Inc.

Murray, T. M., Allen, D. E., y Ungar, E. E. (1997). *Steel Design Guide 11-Floor Vibrations Due to Human Activity*. American Institute of Steel Construction.

Ozkan, M. K. (2010). *Dynamic Response of Beams with Passive Tuned Mass Dampers*. Tesis de maestría, Purdue University, West Lafayette, Indiana.



Rao, S.S. (2007). *Vibration of Continuous Systems* (1st ed.). Nueva Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Research Fund for Coal and Steel (2007). *Human Induced Vibrations of Steel Structures: Design of footbridges*.

Ricciardelli, F. (1999). A linear model for structures with Tuned Mass Dampers. *Wind and Structures*, 2 (3) ,151-171.

Román, I.M. (2016). *Identificación de propiedades dinámicas en puentes peatonales mediante pruebas de vibración ambiental*. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México.

Rönnquist, A. (2005). *Pedestrian Induced Lateral Vibrations of Slender Footbridges*. Tesis doctoral, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Noruega.

Roos, I. (2009). *Human Induced Vibrations on Footbridges: Application & comparison of pedestrian load models*. Tesis de maestría, Delft University of Technology, Brisbane, Australia.

Sánchez, C.M.C., Sanz, J.S., Díaz, I.M., Méndez, A.P., e Ibán, A.L. (2011). *Control de vibraciones en pasarelas peatonales*. Universidad de Valladolid, Valladolid, España.

SAP2000 versión 14. (2009). *Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures*. Berkeley California, USA: Computers and Structures, Inc.

Service d'Etudes Techniques des Routes et Autoroutes (2006). *Technical guide footbridges: Assessment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian loading*. París.

Smith, A.L., Hicks, S.J., y Devine, P.J. (2009). *Design of Floors for Vibration: A New Approach*. The Steel Construction Institute. Londres

Venuti, F. y Bruno, L. (2008). *Pedestrian Loads and Dynamic Performance of Lively Footbridges: an Overview*. Politecnico di Torino, Taormina, Italia.



Wang, J.F., Lin, C.C. y Chen, B.L. (2003) Vibration suppression for high-speed railway bridges using tuned mass dampers. *International Journal of Solids and Structures*, 40, 465-491.

Wensel, H. y Pichler, D. (2005). *Ambient Vibration Monitoring*. Chichester, Inglaterra: John Wiley & Sons Ltd.

Wu, J. S., y Chou, H. M. (1999). A new approach for determining the natural frequencies and mode shapes of a uniform beam carrying any number of sprung masses. *Journal of Sound and Vibration*, 220 (3), 451-468.

Živanović, S., Pavić, A., y Reynolds, P. (2005). Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review. *Journal of Sound and Vibration*, 279, 1-74.

Apéndice A

Momento de inercia de flexión de la sección compuesta

Las vigas longitudinales de acero de los puentes peatonales trabajan de manera compuesta con el sistema de piso losa-acero, por lo que la inercia de flexión de la viga debe multiplicarse por un factor que considere dicho efecto y el cual puede ser introducido en el modelo analítico que se realice en el software SAP 2000. En este apéndice se obtendrá dicho factor para el puente peatonal Pátzcuaro, el cual fungirá de ejemplo y cabe mencionar que posee un claro total, L , de 36 m y un ancho de calzada de 2 m . La sección compuesta por cargas gravitacionales experimenta una flexión positiva y debe encontrarse el momento de inercia compuesto para el ancho efectivo, b_{eff} , es decir para el ancho que define cuanta carga del sistema de piso es transmitida a cada viga longitudinal. El problema se aborda entonces como se muestra en la figura A.1; dónde I_z es el momento de inercia de flexión de la viga longitudinal, A_a es el área de la sección transversal de la viga longitudinal, b_{eff} es el ancho efectivo de la losa (igual a un octavo del claro del puente o la mitad de la distancia al eje de la viga longitudinal adyacente, el que sea menor), A_c es el área transversal del concreto colado en la lámina de acero del sistema de piso losa-acero para el ancho efectivo, y $y_{el,c}$ es la profundidad del eje neutro de la sección transversal compuesta.

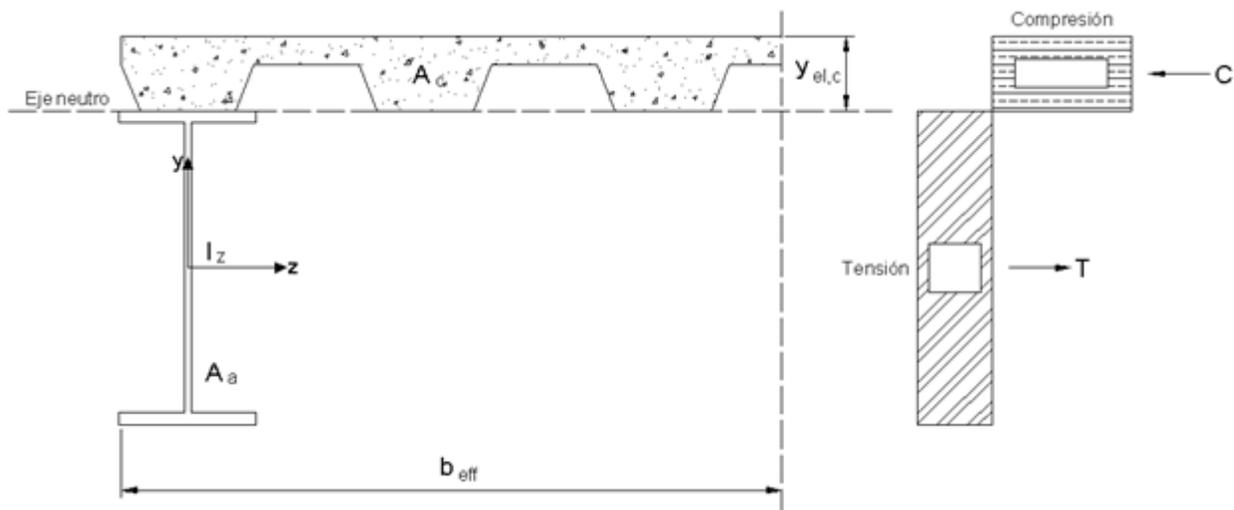


Figura A.1 Modelo de sección transversal compuesta para cada viga longitudinal



Utilizando las unidades del sistema internacional se tiene que los datos requeridos para la sección transversal compuesta son:

Tabla A.1 Datos de la sección transversal del puente peatonal Pátzcuaro

I_z	0.002323 m^4
A_a	0.0275 m^2
b_{eff}	1 m
A_c	0.08533581 m^2

Es importante mencionar que si los canales de lámina de acero se colocan en sentido opuesto al mostrado en la figura A.1, entonces debe considerarse únicamente el área transversal de concreto correspondiente al espesor de la capa de compresión, h_c , para el ancho efectivo. Para el puente peatonal Pátzcuaro, la capa de compresión del concreto, h_c , es de 5 cm , que junto con el concreto colado en los canales de la lámina de acero dan un espesor total del sistema de piso, h , de 11.35 cm . El peralte total de las vigas longitudinales de acero, h_a , es de 69.5 cm .

Se debe obtener la profundidad correcta del eje neutro, $y_{el,c}$, para lo cual se propone que dicha profundidad se localiza a 11.35 cm medidos desde la fibra extrema superior de compresión, es decir, únicamente se comprime el sistema de piso losa-acero (Figura A.1). Ante esta suposición se tiene que la fuerza de tensión, T , de la sección compuesta (Figura A.1) se genera únicamente en la viga longitudinal de acero:

$$T = A_a f_y = (0.0275 \text{ m}^2)(250000000 \text{ Pa}) = 6875000 \text{ N} \quad (\text{A.1})$$

La fuerza de compresión, C , para una profundidad del eje neutro de 11.35 cm es:

$$C = 0.85(f'_c)(A_c) = 0.85(24516625 \text{ Pa})(0.08533581 \text{ m}^2) = 1778324.145 \text{ N} \quad (\text{A.2})$$

Al comparar la fuerza de tensión de la ecuación A.1 con la fuerza de compresión de la ecuación A.2 se observa que la tensión en la sección compuesta es mayor que la compresión, por lo que la profundidad del eje neutro propuesta es incorrecta y debe aumentarse. La profundidad del eje



neutro debe variarse continuamente hasta lograr el equilibrio de fuerzas, es decir, que la compresión y la tensión en la sección compuesta de la figura A.1 sean iguales. Si el eje neutro se encontrara dentro de la sección transversal de concreto, debe omitirse la aportación a tensión que el concreto pueda proporcionar ya que es prácticamente nula, sin embargo, si el eje neutro se encontrara en la sección transversal de la viga longitudinal de acero, si debe considerarse la aportación a la compresión que proporciona la viga longitudinal de acero.

Después de realizar varios tanteos se obtuvo que la profundidad del eje neutro, $y_{el,c}$, se localiza a una profundidad de 22.85 cm medida desde la fibra extrema superior de compresión. Es evidente notar entonces que una parte de la sección transversal de la viga longitudinal de acero se comprime también por lo que la fuerza de compresión total de la sección compuesta se obtiene al sumar la compresión ejercida por el concreto con la compresión ejercida en dicho tramo de la sección transversal de la viga longitudinal de acero, tal y como se muestra en la ecuación A.3.

$$C = 0.85(f'_c)(A_c) + A_s(f_y) = 0.85(24516625 Pa)(0.08533581 m^2) + 0.01019308 m^2(250000000 Pa) = 4326594.145 N \quad (A.3)$$

La fuerza de tensión para una profundidad del eje neutro de 22.85 cm se ejerce sobre el tramo restante de la sección transversal de la viga longitudinal de acero, es decir, aquella área de sección transversal que queda por debajo del eje neutro, tal y como se muestra en la ecuación A.4.

$$T = A_a f_y = (0.01730692 m^2)(250000000 Pa) = 4326730 N \quad (A.4)$$

Al comparar la ecuación A.3 con la ecuación A.4 se comprueba que $C \approx T$, por lo que se ha logrado el equilibrio de fuerzas y se deduce que la profundidad del eje neutro propuesta es correcta. El momento de inercia de flexión de la sección compuesta de la figura A.1 se obtiene entonces mediante la ecuación A.5, donde la sección transversal de concreto se convierte a una sección equivalente de acero.



$$\begin{aligned}
 I_c = I_z + A_a \left(h + h_a - y_{el,a} - \frac{h_c}{2} - y_{el,c} \right)^2 + \frac{b_{eff} h_c}{E_a / E_c} \left(y_{el,c} - \frac{h_c}{2} \right)^2 = 0.002323 m^4 + \\
 0.0275 m^4 \left(0.1135 m + 0.695 m - \frac{0.695 m}{2} - \frac{0.05 m}{2} - 0.2285 m \right)^2 + \\
 \frac{(1 m)(0.05 m)}{\left(\frac{2.1 \cdot 10^{11} Pa}{3.8 \cdot 10^{10} Pa} \right)} \left(0.2285 m - \frac{0.05 m}{2} \right)^2 = 0.003881729137 m^4
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Entonces se obtiene la relación entre el momento de inercia de la sección compuesta, I_c , de la figura A.1 y el momento de inercia de la viga longitudinal de acero, I_z , mediante la ecuación A.6.

$$\frac{I_c}{I_z} = \frac{0.003881729137 m^4}{0.002323 m^4} = 1.670998337 \therefore I_c \approx 1.6701(I_z) \tag{A.6}$$

El factor obtenido en la ecuación A.6 es de 1.6701 y se debe de ingresar en el modelo analítico realizado en el software SAP 2000 versión 14 como un factor multiplicativo que incremente el momento de inercia de flexión de ambas vigas longitudinales del puente peatonal Pátzcuaro. Se debe ahora obtener el momento de inercia de la sección transversal compuesta de toda la estructura, ya que ésta es la que se utiliza en los modelos matemáticos simplificados del puente peatonal. Dicho momento de inercia resulta no tan práctico de obtener con la ecuación A.5, ya que ésta ecuación sólo considera el efecto compuesto de la losa con la viga de acero, y por lo tanto no se están considerando otros factores como el arrojamiento del puente, el cual puede modificar la ubicación centroidal de la sección total compuesta del puente. Sin embargo, en base al modelo analítico realizado en el software SAP 2000, que considera el efecto de la ecuación A.6, es posible obtener las frecuencias de vibrar verticales del puente y en base a la teoría de medios continuos del capítulo 5 puede despejarse el momento de inercia real de toda la sección compuesta, verificando que los periodos de vibrar coincidan con los obtenidos mediante pruebas in situ de vibración ambiental. Para el caso del puente peatonal Pátzcuaro, el momento de inercia de la sección transversal compuesta de toda la estructura, I , es de $0.004914918767 m^4$.



Apéndice B

Código en Matlab: Viga Euler-Bernoulli sin amortiguamiento sometida a una excitación peatonal en movimiento

```
clear,clc
format short

%Datos del puente peatonal
masa_distribuida=input('Ingrese la masa por unidad de longitud del puente peatonal:');
L=input('Ingrese la longitud del puente peatonal:');
E=input('Ingrese el módulo de elasticidad del material del puente peatonal:');
I=input('Ingrese el momento de inercia de flexión del puente peatonal:');

fprintf('\n\n');
disp('Defina las condiciones de apoyo del puente peatonal');
fprintf('\n\n');
disp('Opción 1: Simplemente apoyado');
disp('Opción 2: Doblemente empotrado');
disp('Opción 3: Empotrado en un extremo y simplemente apoyado en el otro');
disp('Opción 4: En voladizo');
fprintf('\n\n');
condiciones_contorno=input('Presione 1,2,3 ó 4 según sea el caso a elegir:');

if condiciones_contorno==1

%Cálculo de modos de vibrar

fprintf('\n\n');
fprintf('\n\n');
Numero_modos=input('Ingrese el número de modos que desea considerar:');
a = ones(Numero_modos,1);
p = ones(Numero_modos,1);
A=ones(Numero_modos,1);
B=ones(Numero_modos,1);
C=ones(Numero_modos,1);
D=ones(Numero_modos,1);

for i=1:Numero_modos
    a(i) = i*pi;
```



```

        p(i)=a(i)/L;
        A(i)=1;
        B(i)=0;
        C(i)=-sin(a(i))/sinh(a(i));
        D(i)=0;
    end

    dx=L/1000;
    x=ones(1000,1);

    forma_modal=ones(1000,Numero_modos);

    for j=1:Numero_modos
        for i=1:1000
            x(i)=i*dx;

            forma_modal(i,j)=A(j)*sin(x(i)*p(j))+B(j)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*sinh(x(i)*p(j))+
            D(j)*cosh(x(i)*p(j));
        end
    end

    end

    %Cálculo de frecuencias de vibrar

    fprintf('\n\n');
    w=ones(Numero_modos,1);
    f=ones(Numero_modos,1);
    T=ones(Numero_modos,1);
    for i=1:Numero_modos
        w(i)=sqrt((E*I)/masa_distribuida*(p(i)^4));
        f(i)=w(i)/(2*pi);
        T(i)=1/f(i);
    end

    end

    elseif condiciones_contorno==2

    %Cálculo de modos de vibrar

    fprintf('\n\n');
    fprintf('\n\n');
    Numero_modos=input('Ingrese el número de modos que desea considerar:');
    a = ones(Numero_modos,1);
    p = ones(Numero_modos,1);
    A=ones(Numero_modos,1);
    B=ones(Numero_modos,1);
    C=ones(Numero_modos,1);

```



```

D=ones(Numero_modos,1);
a(1)=4.73004;
a(2)=7.85320;
a(3)=10.9956;
a(4)=14.1372;
a(5)=17.2788;

for i=6:100
    a(i)=((2*i)+1)*pi/2;
end

for i=1:Numero_modos
    p(i)=a(i)/L;
    A(i)=1;
    B(i)=(sinh(a(i))-sin(a(i)))/(cos(a(i))-cosh(a(i)));
    C(i)=-1;
    D(i)=-((sinh(a(i))-sin(a(i)))/(cos(a(i))-cosh(a(i))));
end

dx=L/1000;
x=ones(1000,1);

forma_modal=ones(1000,Numero_modos);

for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        x(i)=i*dx;

forma_modal(i,j)=A(j)*sin(x(i)*p(j))+B(j)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*sinh(x(i)*p(j))+
D(j)*cosh(x(i)*p(j));
        end
    end

end

%Cálculo de frecuencias de vibrar

fprintf('\n\n');
w=ones(Numero_modos,1);
f=ones(Numero_modos,1);
T=ones(Numero_modos,1);
for i=1:Numero_modos
    w(i)=sqrt((E*I)/masa_distribuida)*(p(i)^4);
    f(i)=w(i)/(2*pi);
    T(i)=1/f(i);
end

```



```

elseif condiciones_contorno==3

%Cálculo de modos de vibrar

fprintf('\n\n');
fprintf('\n\n');
Numero_modos=input('Ingrese el número de modos que desea considerar:');
a = ones(Numero_modos,1);
p = ones(Numero_modos,1);
A=ones(Numero_modos,1);
B=ones(Numero_modos,1);
C=ones(Numero_modos,1);
D=ones(Numero_modos,1);
a(1)=3.92660;
a(2)=7.06858;
a(3)=10.2102;
a(4)=13.3518;
a(5)=16.4934;

for i=6:100
    a(i)=(((4*i)+1)*pi)/4;
end

for i=1:Numero_modos
    p(i)=a(i)/L;
    A(i)=1;
    B(i)=(sinh(a(i))-sin(a(i)))/(cos(a(i))-cosh(a(i)));
    C(i)=-1;
    D(i)=-((sinh(a(i))-sin(a(i)))/(cos(a(i))-cosh(a(i))));
end

dx=L/1000;
x=ones(1000,1);

forma_modal=ones(1000,Numero_modos);

for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        x(i)=i*dx;

forma_modal(i,j)=A(j)*sin(x(i)*p(j))+B(j)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*sinh(x(i)*p(j))+
D(j)*cosh(x(i)*p(j));
    end
end

%Cálculo de frecuencias de vibrar

fprintf('\n\n');

```



```

w=ones(Numero_modos,1);
f=ones(Numero_modos,1);
T=ones(Numero_modos,1);
for i=1:Numero_modos
    w(i)=sqrt(((E*I)/masa_distribuida)*(p(i)^4));
    f(i)=w(i)/(2*pi);
    T(i)=1/f(i);
end

elseif condiciones_contorno==4

%Cálculo de modos de vibrar

fprintf('\n\n');
fprintf('\n\n');
Numero_modos=input('Ingrese el número de modos que desea considerar:');
a = ones(Numero_modos,1);
p = ones(Numero_modos,1);
A=ones(Numero_modos,1);
B=ones(Numero_modos,1);
C=ones(Numero_modos,1);
D=ones(Numero_modos,1);
a(1)=1.87510;
a(2)=4.69409;
a(3)=7.85476;
a(4)=10.9955;
a(5)=14.1372;

for i=6:100
    a(i)=((2*i)-1)*pi/2;
end

for i=1:Numero_modos
    p(i)=a(i)/L;
    A(i)=1;
    B(i)=-((cos(a(i))+cosh(a(i)))/(sinh(a(i))-sin(a(i))));
    C(i)=-1;
    D(i)=(cos(a(i))+cosh(a(i)))/(sinh(a(i))-sin(a(i)));
end

dx=L/1000;
x=ones(1000,1);

forma_modal=ones(1000,Numero_modos);

for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        x(i)=i*dx;
    end
end

```



```
forma_modal(i,j)=A(j)*sin(x(i)*p(j))+B(j)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*sinh(x(i)*p(j))+
D(j)*cosh(x(i)*p(j));
    end
```

```
end
```

```
%Cálculo de frecuencias de vibrar
```

```
fprintf('\n\n');
w=ones(Numero_modos,1);
f=ones(Numero_modos,1);
T=ones(Numero_modos,1);
for i=1:Numero_modos
    w(i)=sqrt((E*I)/masa_distribuida)*(p(i)^4);
    f(i)=w(i)/(2*pi);
    T(i)=1/f(i);
end
```

```
end
```

```
%Resultados de las frecuencias y modos de vibrar
```

```
fprintf('\n\n');
disp('Las frecuencias circulares de vibrar de la viga en rad/s para los modos
escogidos son:');
w
fprintf('\n');
disp('Las frecuencias de vibrar de la viga en Hz para los modos escogidos
son:');
f
fprintf('\n');
disp('Los periodos de vibrar de la viga en segundos para los modos escogidos
son:');
T
fprintf('\n\n');
```

```
disp('El primer modo de vibrar se muestra en color rojo');
```

```
plot(x,forma_modal(:,1),'r-');
hold on
```

```
for i=2:Numero_modos
```

```
    plot(x,forma_modal(:,i),'-');
```

```
end
```

```
xlabel('Longitud');
```



```

ylabel('Desplazamiento modal');
title('Formas modales verticales del puente')
grid on
set(gcf, 'Color', 'w');
legend('Modo 1');
hold off

%Cálculo de masas modales efectivas

v=ones(1000,Numero_modos);
num=ones(Numero_modos,1);
den=ones(Numero_modos,1);
porcentaje_masas_modales_efectivas=ones(Numero_modos,1);
for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        v(i,j)= forma_modal(i,j)* forma_modal(i,j);
    end
    num(j)=trapz(x, forma_modal(:,j));
    den(j)=trapz(x, v(:,j));
    porcentaje_masas_modales_efectivas(j)=(num(j)*num(j))/(den(j)*L)*100;
end
porcentaje_masa_total_participante=sum(porcentaje_masas_modales_efectivas);
fprintf('\n\n');
disp('Los porcentajes de masas modales efectivas para cada modo de vibrar
vertical son:');
porcentaje_masas_modales_efectivas
fprintf('\n\n');
disp('El porcentaje de la masa total que participa con el número de modos
elegidos es:');
porcentaje_masa_total_participante
fprintf('\n\n');
disp('"Para estimar la respuesta dinámica de manera adecuada se requiere por
lo menos que participe un');
disp(' 90% de la masa total del puente peatonal; de tal manera que si ésta
fuera menor al 90%, sería');
disp(' necesario considerar más modos verticales de vibrar en el
análisis");

%Datos de la excitación peatonal móvil

fprintf('\n\n');
f_peaton=input('Introduzca la frecuencia vertical de vibrar en Hz ejercida por
la carga peatonal:');
P=input('Introduzca el peso total del peatón o grupo de peatones:');
Po=input('Introduzca la amplitud máxima del armónico generado por el peatón o
grupo de peatones:');
Vo=input('Introduzca la velocidad constante a la que cruza el peatón o grupo
de peatones:');
X=input('Introduzca la longitud medida de izquierda a derecha donde quiere
obtener la respuesta dinámica del puente:');

```



```

%Respuestas dinámicas del puente peatonal

w_peaton=2*pi*(f_peaton);
if X==0
for i=1:Numero_modos

forma_modal(1,i)=A(j)*sin(0*p(j))+B(j)*cos(0*p(j))+C(j)*sinh(0*p(j))+D(j)*cosh
(0*p(j));
end
X=1;
Tiempo_cruce=L/Vo;
dt=Tiempo_cruce/1000;
u1=ones(Numero_modos,1);
u2=ones(Numero_modos,1);
u3=ones(Numero_modos,1);
r1=ones(Numero_modos,1);
r2=ones(Numero_modos,1);
r3=ones(Numero_modos,1);
r4=ones(Numero_modos,1);
r5=ones(Numero_modos,1);
r6=ones(Numero_modos,1);
for i=1:Numero_modos
    u1(i)=(a(i)*Vo)/L;
    u2(i)=1/((w(i)*w(i))-(u1(i)*u1(i)));
    u3(i)=1/((w(i)*w(i))+(u1(i)*u1(i)));
    r1(i)=w_peaton-w(i);
    r2(i)=w_peaton+w(i);
    r3(i)=1/((r1(i)*r1(i))-(u1(i)*u1(i)));
    r4(i)=1/((r1(i)*r1(i))+(u1(i)*u1(i)));
    r5(i)=1/((r2(i)*r2(i))-(u1(i)*u1(i)));
    r6(i)=1/((r2(i)*r2(i))+(u1(i)*u1(i)));
end
V=ones(Numero_modos,1);
t=ones(1000,1);
y_constante=ones(1000,Numero_modos);
y_constante_total=ones(1000,1);
y_armonico=ones(1000,Numero_modos);
y_armonico_total=ones(1000,1);
y=ones(1000,1);

for j=1:Numero_modos
    V(j)=((masa_distribuida*L)/2)*(1+(B(j)*B(j))-
(C(j)*C(j))+(D(j)*D(j))+((1/a(j))*((2*D(j))-2*B(j)*C(j))-(C(j)*D(j))-(0.5*(1-
(B(j)*B(j)))*sin(2*a(j)))+(2*B(j)*(sin(a(j))*sin(a(j))))+(((C(j)*C(j))+(D(j)*D
(j))*sinh(a(j))*cosh(a(j)))+(2*(C(j)+(B(j)*D(j)))*cosh(a(j))*sin(a(j)))+(2*(-
C(j)+(B(j)*D(j)))*sinh(a(j))*cos(a(j)))+(2*(D(j)+(B(j)*C(j)))*sinh(a(j))*sin(a
(j)))+(2*(-
D(j)+(B(j)*C(j))*cosh(a(j))*cos(a(j)))+(C(j)*D(j)*cosh(2*a(j)))));
        for i=1:1000
            t(i)=i*dt;

```



```

y_constante(i,j)=(P/V(j))*forma_modal(X,j)*((u2(j)*((sin(u1(j)*t(i))-
((u1(j)/w(j))*sin(w(j)*t(i))))*(-
cos(a(j))+B(j)*sin(a(j))))+(cos(u1(j)*t(i))-
cos(w(j)*t(i))*sin(a(j))+B(j)*cos(a(j)))))+(u3(j)*((sinh(u1(j)*t(i))-
((u1(j)/w(j))*sin(w(j)*t(i))))*(-C(j)*cosh(a(j))-
(D(j)*sinh(a(j)))))+(cosh(u1(j)*t(i))-
cos(w(j)*t(i))*((C(j)*sinh(a(j)))+(D(j)*cosh(a(j)))))))));

y_armonico(i,j)=(Po/(2*V(j)*w(j)))*forma_modal(X,j)*((r3(j)*((u1(j)*cos(w(j)*t
(i))-r1(j)*sin(u1(j)*t(i))*sin(w_peaton*t(i))-
(u1(j)*cos(u1(j)*t(i))*cos(w_peaton*t(i))+B(j)*((r1(j)*sin(w(j)*t(i))-
(r1(j)*cos(u1(j)*t(i))*sin(w_peaton*t(i))+u1(j)*sin(u1(j)*t(i))*cos(w_peaton
*t(i)))))+(r4(j)*((C(j)*((u1(j)*cos(w(j)*t(i))-
(r1(j)*sinh(u1(j)*t(i))*sin(w_peaton*t(i))-
(u1(j)*cosh(u1(j)*t(i))*cos(w_peaton*t(i)))))+(D(j)*((r1(j)*sin(w(j)*t(i))-
(r1(j)*cosh(u1(j)*t(i))*sin(w_peaton*t(i))-
(u1(j)*sinh(u1(j)*t(i))*cos(w_peaton*t(i)))))+(r5(j)*((-
u1(j)*cos(w(j)*t(i))+r2(j)*sin(u1(j)*t(i))*sin(w_peaton*t(i))+u1(j)*cos(u1
(j)*t(i))*cos(w_peaton*t(i))+B(j)*((r2(j)*sin(w(j)*t(i))+r2(j)*cos(u1(j)*t
(i))*sin(w_peaton*t(i))-
(u1(j)*sin(u1(j)*t(i))*cos(w_peaton*t(i)))))+(r6(j)*((C(j)*((-
u1(j)*cos(w(j)*t(i))+r2(j)*sinh(u1(j)*t(i))*sin(w_peaton*t(i))+u1(j)*cosh(
u1(j)*t(i))*cos(w_peaton*t(i)))))+(D(j)*((r2(j)*sin(w(j)*t(i))+r2(j)*cosh(u1
(j)*t(i))*sin(w_peaton*t(i))+u1(j)*sinh(u1(j)*t(i))*cos(w_peaton*t(i))))))
;
        end

end

for i=1:1000
    y_constante_total(i)=sum(y_constante(i,:));
    y_armonico_total(i)=sum(y_armonico(i,:));
    y(i)=y_constante_total(i)+y_armonico_total(i);
end

velocidad=ones(length(y)-1,1);
velocidad(1)=y(1);
for i=2:length(y)-1
    velocidad(i)=(y(i+1)-y(i-1))/(2*dt);
end
aceleracion=ones(length(velocidad)-1,1);
aceleracion(1)=velocidad(1);
for i=2:length(velocidad)-1
    aceleracion(i)=(velocidad(i+1)-velocidad(i-1))/(2*dt);
end
for i=1:999
    t2(i)=t(i);
end
for i=1:998
    t3(i)=t2(i);
end
subplot(3,1,1);

```



```

plot(t,y)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Desplazamientos dinámicos')
title('Respuesta dinámica de desplazamientos ante cargas peatonales móviles')
grid on
set(gcf,'Color','w')

subplot(3,1,2);
plot(t2,velocidad)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Velocidades dinámicas')
title('Respuesta dinámica de velocidades ante cargas peatonales móviles')
grid on
set(gcf,'Color','w')

subplot(3,1,3);
plot(t3,aceleracion)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Aceleraciones dinámicas')
title('Respuesta dinámica de aceleraciones ante cargas peatonales móviles')
grid on
set(gcf,'Color','w')

else
X=(X*1000)/L;
X=round(X);
Tiempo_cruce=L/Vo;
dt=Tiempo_cruce/1000;
u1=ones(Numero_modos,1);
u2=ones(Numero_modos,1);
u3=ones(Numero_modos,1);
r1=ones(Numero_modos,1);
r2=ones(Numero_modos,1);
r3=ones(Numero_modos,1);
r4=ones(Numero_modos,1);
r5=ones(Numero_modos,1);
r6=ones(Numero_modos,1);
for i=1:Numero_modos
    u1(i)=(a(i)*Vo)/L;
    u2(i)=1/((w(i)*w(i))-(u1(i)*u1(i)));
    u3(i)=1/((w(i)*w(i))+(u1(i)*u1(i)));
    r1(i)=w_peaton-w(i);
    r2(i)=w_peaton+w(i);
    r3(i)=1/((r1(i)*r1(i))-(u1(i)*u1(i)));
    r4(i)=1/((r1(i)*r1(i))+(u1(i)*u1(i)));
    r5(i)=1/((r2(i)*r2(i))-(u1(i)*u1(i)));
    r6(i)=1/((r2(i)*r2(i))+(u1(i)*u1(i)));
end
V=ones(Numero_modos,1);
t=ones(1000,1);
y_constante=ones(1000,Numero_modos);

```



```

y_constante_total=ones(1000,1);
y_armonico=ones(1000,Numero_modos);
y_armonico_total=ones(1000,1);
y=ones(1000,1);

for j=1:Numero_modos
    V(j)=(masa_distribuida*L)/2)*(1+(B(j)*B(j))-
    (C(j)*C(j))+(D(j)*D(j))+((1/a(j))*((2*D(j))-2*B(j)*C(j))-
    (C(j)*D(j))-(0.5*(1-(B(j)*B(j))))*sin(2*a(j))))+
    (2*B(j)*(sin(a(j))*sin(a(j))))+(((C(j)*C(j))+
    (D(j)*D(j)))*sinh(a(j))*cosh(a(j)))+(2*(C(j)+
    (B(j)*D(j)))*cosh(a(j))*sin(a(j)))+(2*(-
    C(j)+(B(j)*D(j)))*sinh(a(j))*cos(a(j)))+(2*(
    D(j)+(B(j)*C(j)))*sinh(a(j))*sin(a(j)))+(2*(-
    D(j)+(B(j)*C(j)))*cosh(a(j))*cos(a(j)))+(
    C(j)*D(j)*cosh(2*a(j)))));
    for i=1:1000
        t(i)=i*dt;

y_constante(i,j)=(P/V(j))*forma_modal(X,j)*((u2(j)*
    ((sin(u1(j))*t(i))-((u1(j)/w(j))*sin(w(j))*t(i))))*
    (-cos(a(j))+(B(j)*sin(a(j))))+((cos(u1(j))*t(i))-
    cos(w(j))*t(i))*sin(a(j))+(B(j)*cos(a(j)))))+
    (u3(j)*((sinh(u1(j))*t(i))-((u1(j)/w(j))*sin(w(j))*t(i))))*
    ((-C(j)*cosh(a(j))-(D(j)*sinh(a(j))))+
    ((cosh(u1(j))*t(i))-cos(w(j))*t(i))*
    ((C(j)*sinh(a(j))+(D(j)*cosh(a(j))))))););

y_armonico(i,j)=(Po/(2*V(j)*w(j)))*forma_modal(X,j)*
    ((r3(j)*((u1(j))*cos(w(j))*t(i)))-(r1(j)*sin(u1(j))*t(i))*
    sin(w_peaton*t(i))-(u1(j))*cos(u1(j))*t(i))*cos(w_peaton*t(i)))+
    (B(j)*((r1(j))*sin(w(j))*t(i))-(r1(j))*cos(u1(j))*t(i))*
    sin(w_peaton*t(i))+(u1(j))*sin(u1(j))*t(i))*cos(w_peaton*
    t(i))))+(r4(j)*((C(j))*((u1(j))*cos(w(j))*t(i)))-
    (r1(j))*sinh(u1(j))*t(i))*sin(w_peaton*t(i)))-
    (u1(j))*cosh(u1(j))*t(i))*cos(w_peaton*t(i)))+(D(j))*
    ((r1(j))*sin(w(j))*t(i))-(r1(j))*cosh(u1(j))*t(i))*
    sin(w_peaton*t(i))-(u1(j))*sinh(u1(j))*t(i))*cos(w_peaton*
    t(i))))+(r5(j)*((-u1(j))*cos(w(j))*t(i))+(r2(j))*sin(u1(j))*t(i))*
    sin(w_peaton*t(i))+(u1(j))*cos(u1(j))*t(i))*cos(w_peaton*
    t(i))+(B(j))*((r2(j))*sin(w(j))*t(i))+(r2(j))*cos(u1(j))*t(i))*
    sin(w_peaton*t(i)))-
    (u1(j))*sin(u1(j))*t(i))*cos(w_peaton*t(i))))+(r6(j))*
    ((C(j))*((-u1(j))*cos(w(j))*t(i))+(r2(j))*sinh(u1(j))*t(i))*
    sin(w_peaton*t(i))+(u1(j))*cosh(u1(j))*t(i))*cos(w_peaton*
    t(i)))+(D(j))*((r2(j))*sin(w(j))*t(i))+(r2(j))*cosh(u1(j))*t(i))*
    sin(w_peaton*t(i))+(u1(j))*sinh(u1(j))*t(i))*cos(w_peaton*
    t(i)))));
    ;
    end

end

for i=1:1000
    y_constante_total(i)=sum(y_constante(i,:));
    y_armonico_total(i)=sum(y_armonico(i,:));
    y(i)=y_constante_total(i)+y_armonico_total(i);
end

velocidad=ones(length(y)-1,1);
velocidad(1)=y(1);

```



```
for i=2:length(y)-1
    velocidad(i)=(y(i+1)-y(i-1))/(2*dt);
end
aceleracion=ones(length(velocidad)-1,1);
aceleracion(1)=velocidad(1);
for i=2:length(velocidad)-1
    aceleracion(i)=(velocidad(i+1)-velocidad(i-1))/(2*dt);
end
for i=1:999
    t2(i)=t(i);
end
for i=1:998
    t3(i)=t2(i);
end

subplot(3,1,1);
plot(t,y)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Desplazamientos dinámicos')
grid on
set(gcf,'Color','w')

subplot(3,1,2);
plot(t2,velocidad)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Velocidades dinámicas')
grid on
set(gcf,'Color','w')

subplot(3,1,3);
plot(t3,aceleracion)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Aceleraciones dinámicas')
grid on
set(gcf,'Color','w')
end

% Valores máximos de respuestas dinámicas

fprintf ('\n\n "El desplazamiento máximo absoluto es:");
Sd=max(abs(y))
fprintf ('\n\n "La velocidad máxima absoluta es:");
Sv=max(abs(velocidad))
fprintf ('\n\n "La aceleración máxima absoluta es:");
```



```
Sa=max(abs(acceleracion))
```

```
% Coeficiente de amplificación dinámico

if condiciones_contorno==1
    if X==500
        yo=(P*(L^3))/(48*E*I);
        fprintf ('\n\n "El coeficiente de amplificación dinámico es:");
        DMF=Sd/yo
    else
        fprintf('\n\n');
        disp('"Para obtener el factor de amplificación dinámico debe introducir
como punto longitudinal la');
        disp(' distancia donde se genera la máxima amplitud del primer modo de
vibrar. Vuelva a correr');
        disp(' el programa y obtenga la respuesta dinámica a una
distancia de 0.5 L');
    end

elseif condiciones_contorno==2
    if X==500
        yo=(P*(L^3))/(192*E*I);
        fprintf ('\n\n "El coeficiente de amplificación dinámico es:");
        DMF=Sd/yo
    else
        fprintf('\n\n');
        disp('"Para obtener el factor de amplificación dinámico debe introducir
como punto longitudinal la');
        disp(' distancia donde se genera la máxima amplitud del primer modo de
vibrar. Vuelva a correr');
        disp(' el programa y obtenga la respuesta dinámica a una
distancia de 0.5 L');
    end

elseif condiciones_contorno==3
    if X==586
        yo=(P*(L^3))/(102*E*I);
        fprintf ('\n\n "El coeficiente de amplificación dinámico es:");
        DMF=Sd/yo
    else
        fprintf('\n\n');
        disp('"Para obtener el factor de amplificación dinámico debe introducir
como punto longitudinal la');
        disp(' distancia donde se genera la máxima amplitud del primer modo de
vibrar. Vuelva a correr');
```



```
disp('          el programa y obtenga la respuesta dinámica a una
distancia de 0.586 L');
end

elseif condiciones_contorno==4
    if X==1000
        yo=(P*(L^3))/(3*E*I);
        fprintf ('\n\n "El coeficiente de amplificación dinámico es:");
        DMF=Sd/yo
    else
        fprintf('\n\n');
        disp('"Para obtener el factor de amplificación dinámico debe introducir
como punto longitudinal la');
        disp(' distancia donde se genera la máxima amplitud del primer modo de
vibrar. Vuelva a correr');
        disp('          el programa y obtenga la respuesta dinámica a una
distancia de L');
        end
end

end
```



Apéndice C

Código en Matlab: Viga Euler-Bernoulli con amortiguamiento sometida a una excitación peatonal en movimiento

```
clear,clc
format short

%Datos del puente peatonal

masa_distribuida=input('Ingrese la masa por unidad de longitud del puente
peatonal:');
L=input('Ingrese la longitud del puente peatonal:');
E=input('Ingrese el módulo de elasticidad del material del puente peatonal:');
I=input('Ingrese el momento de inercia de flexión del puente peatonal:');
amort=input('Ingrese la fracción de amortiguamiento crítico en decimales del
puente peatonal:');

fprintf('\n\n');
disp('Defina las condiciones de apoyo del puente peatonal');
fprintf('\n\n');
disp('Opción 1: Simplemente apoyado');
disp('Opción 2: Doblemente empotrado');
disp('Opción 3: Empotrado en un extremo y simplemente apoyado en el otro');
disp('Opción 4: En voladizo');
fprintf('\n\n');
condiciones_contorno=input('Presione 1,2,3 ó 4 según sea el caso a elegir:');

if condiciones_contorno==1
fprintf('\n\n');
fprintf('\n\n');
Numero_modos=input('Ingrese el número de modos que desea considerar:');
a = ones(Numero_modos,1);
p = ones(Numero_modos,1);
A=ones(Numero_modos,1);
```



```

B=ones(Numero_modos,1);
C=ones(Numero_modos,1);
D=ones(Numero_modos,1);

for i=1:Numero_modos
    a(i) = i*pi;
    p(i)=a(i)/L;
    A(i)=1;
    B(i)=0;
    C(i)=-sin(a(i))/sinh(a(i));
    D(i)=0;
end
forma_modal=ones(1000,Numero_modos);
forma_modal_2=ones(1000,Numero_modos);
x=ones(1000,1);

dx=L/1000;

for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        x(i)=i*dx;

forma_modal(i,j)=A(j)*sin(x(i)*p(j))+B(j)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*sinh(x(i)*p(j))+
D(j)*cosh(x(i)*p(j));
        forma_modal_2(i,j)=-A(j)*(p(j)^2)*sin(x(i)*p(j))-
B(j)*(p(j)^2)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*(p(j)^2)*sinh(x(i)*p(j))+D(j)*(p(j)^2)*cosh(
x(i)*p(j));
    end

end

elseif condiciones_contorno==2
fprintf('\n\n');
fprintf('\n\n');
Numero_modos=input('Ingrese el número de modos que desea considerar:');
a = ones(Numero_modos,1);
p = ones(Numero_modos,1);
A=ones(Numero_modos,1);
B=ones(Numero_modos,1);
C=ones(Numero_modos,1);
D=ones(Numero_modos,1);
a(1)=4.73004;
a(2)=7.85320;
a(3)=10.9956;
a(4)=14.1372;
a(5)=17.2788;

for i=6:100
    a(i)=((2*i)+1)*pi/2;
end

```



```

for i=1:Numero_modos
    p(i)=a(i)/L;
    A(i)=1;
    B(i)=(sinh(a(i))-sin(a(i)))/(cos(a(i))-cosh(a(i)));
    C(i)=-1;
    D(i)=-((sinh(a(i))-sin(a(i)))/(cos(a(i))-cosh(a(i))));
end
forma_modal=ones(1000,Numero_modos);
forma_modal_2=ones(1000,Numero_modos);

x=ones(1000,1);

dx=L/1000;

for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        x(i)=i*dx;

forma_modal(i,j)=A(j)*sin(x(i)*p(j))+B(j)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*sinh(x(i)*p(j))+
D(j)*cosh(x(i)*p(j));
        forma_modal_2(i,j)=-A(j)*(p(j)^2)*sin(x(i)*p(j))-
B(j)*(p(j)^2)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*(p(j)^2)*sinh(x(i)*p(j))+D(j)*(p(j)^2)*cosh(
x(i)*p(j));
    end

end

elseif condiciones_contorno==3
fprintf('\n\n');
fprintf('\n\n');
Numero_modos=input('Ingrese el número de modos que desea considerar:');
a = ones(Numero_modos,1);
p = ones(Numero_modos,1);
A=ones(Numero_modos,1);
B=ones(Numero_modos,1);
C=ones(Numero_modos,1);
D=ones(Numero_modos,1);
a(1)=3.92660;
a(2)=7.06858;
a(3)=10.2102;
a(4)=13.3518;
a(5)=16.4934;

for i=6:100
    a(i)=((4*i)+1)*pi/4;
end

```



```

for i=1:Numero_modos
    p(i)=a(i)/L;
    A(i)=1;
    B(i)=(sinh(a(i))-sin(a(i)))/(cos(a(i))-cosh(a(i)));
    C(i)=-1;
    D(i)=-((sinh(a(i))-sin(a(i)))/(cos(a(i))-cosh(a(i))));
end
forma_modal=ones(1000,Numero_modos);
forma_modal_2=ones(1000,Numero_modos);

x=ones(1000,1);

dx=L/1000;

for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        x(i)=i*dx;

forma_modal(i,j)=A(j)*sin(x(i)*p(j))+B(j)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*sinh(x(i)*p(j))+
D(j)*cosh(x(i)*p(j));
        forma_modal_2(i,j)=-A(j)*(p(j)^2)*sin(x(i)*p(j))-
B(j)*(p(j)^2)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*(p(j)^2)*sinh(x(i)*p(j))+D(j)*(p(j)^2)*cosh(
x(i)*p(j));
    end

end

elseif condiciones_contorno==4
fprintf('\n\n');
fprintf('\n\n');
Numero_modos=input('Ingrese el número de modos que desea considerar:');
a = ones(Numero_modos,1);
p = ones(Numero_modos,1);
A=ones(Numero_modos,1);
B=ones(Numero_modos,1);
C=ones(Numero_modos,1);
D=ones(Numero_modos,1);
a(1)=1.87510;
a(2)=4.69409;
a(3)=7.85476;
a(4)=10.9955;
a(5)=14.1372;

for i=6:100
    a(i)=(((2*i)-1)*pi)/2;
end

```



```

for i=1:Numero_modos
    p(i)=a(i)/L;
    A(i)=1;
    B(i)=-((cos(a(i))+cosh(a(i)))/(sinh(a(i))-sin(a(i))));
    C(i)=-1;
    D(i)=(cos(a(i))+cosh(a(i)))/(sinh(a(i))-sin(a(i)));
end
forma_modal=ones(1000,Numero_modos);
forma_modal_2=ones(1000,Numero_modos);
x=ones(1000,1);

dx=L/1000;

for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        x(i)=i*dx;

forma_modal(i,j)=A(j)*sin(x(i)*p(j))+B(j)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*sinh(x(i)*p(j))+
D(j)*cosh(x(i)*p(j));
        forma_modal_2(i,j)=-A(j)*(p(j)^2)*sin(x(i)*p(j))-
B(j)*(p(j)^2)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*(p(j)^2)*sinh(x(i)*p(j))+D(j)*(p(j)^2)*cosh(
x(i)*p(j));
    end

end

end

m=ones(Numero_modos,1);
k=ones(Numero_modos,1);
theta_L=ones(Numero_modos,1);
T=ones(Numero_modos,1);
f=ones(Numero_modos,1);
w=ones(Numero_modos,1);
v=ones(1000,Numero_modos);
v_2=ones(1000,Numero_modos);

for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        v(i,j)=forma_modal(i,j)*forma_modal(i,j);
        v_2(i,j)=forma_modal_2(i,j)*forma_modal_2(i,j);
    end
    m(j)=masa_distribuida*(trapz(x,v(:,j)));
    k(j)=E*I*(trapz(x,v_2(:,j)));
end
for i=1:Numero_modos
    f(i)=(1/(2*pi))*((k(i)/m(i))^(1/2));
    T(i)=1/f(i);
    w(i)=f(i)*2*pi;
end

```



```
%Resultados de las frecuencias y modos de vibrar

fprintf('\n\n');
disp('Las frecuencias circulares de vibrar de la viga en rad/s para los modos
escogidos son:');
w

fprintf('\n');
disp('Las frecuencias de vibrar de la viga en Hz para los modos escogidos
son:');
f

fprintf('\n');
disp('Los periodos de vibrar de la viga en segundos para los modos escogidos
son:');
T

fprintf('\n\n');

%Normalización de los modos de vibrar

for i=1:Numero_modos
    forma_modal(:,i)=forma_modal(:,i)/(m(i)^(1/2));
end

disp('El primer modo de vibrar se muestra en color rojo');

plot(x,forma_modal(:,1),'r-');
hold on

for i=2:Numero_modos

    plot(x,forma_modal(:,i),'-');

end

xlabel('Longitud');
ylabel('Desplazamiento modal normalizado');
title('Formas modales verticales normalizadas del puente')
grid on
set(gcf,'Color','w');
legend('Modo 1');
hold off
```



```

%Cálculo de masas modales efectivas

v=ones(1000,Numero_modos);
num=ones(Numero_modos,1);
den=ones(Numero_modos,1);
porcentaje_masas_modales_efectivas=ones(Numero_modos,1);
for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        v(i,j)= forma_modal(i,j)* forma_modal(i,j);
    end
    num(j)=trapz(x,forma_modal(:,j));
    den(j)=trapz(x,v(:,j));
    porcentaje_masas_modales_efectivas(j)=((num(j)*num(j))/(den(j)*L))*100;
end
porcentaje_masa_total_participante=sum(porcentaje_masas_modales_efectivas);
fprintf('\n\n');
disp('Los porcentajes de masas modales efectivas para cada modo de vibrar
vertical son:');
porcentaje_masas_modales_efectivas
fprintf('\n');
disp('El porcentaje de la masa total que participa con el número de modos
elegidos es:');
porcentaje_masa_total_participante
fprintf('\n\n');
disp('"Para estimar la respuesta dinámica de manera adecuada se requiere por
lo menos que participe un');
disp(' 90% de la masa total del puente peatonal; de tal manera que si ésta
fuera menor al 90%,sería');
disp(' necesario considerar más modos verticales de vibrar en el
análisis"');

%Datos de la excitación peatonal móvil

fprintf('\n\n');
P=input('Introduzca el peso total del peatón o grupo de peatones:');
Po=input('Introduzca la amplitud del armónico generado por el peatón o grupo
de peatones:');
Vo=input('Introduzca la velocidad constante a la que cruza el peatón o grupo
de peatones:');
f_peaton=input('Introduzca la frecuencia vertical de vibrar en Hz ejercida por
la carga peatonal:');
X=input('Introduzca la longitud medida de izquierda a derecha donde quiere
obtener la respuesta dinámica del puente:');
if X==0
    for i=1:Numero_modos

```



```

forma_modal(1,i)=A(j)*sin(0*p(j))+B(j)*cos(0*p(j))+C(j)*sinh(0*p(j))+D(j)*cosh
(0*p(j));
    end
    X=1;
else
    X=(X*1000)/L;
    X=round(X);
end

```

%Respuesta dinámica del puente peatonal

```

w_peaton=2*pi*(f_peaton);
Tiempo_cruce=L/Vo;
dt=Tiempo_cruce/1000;
t=ones(1000,1);
carga_movil_constante=ones(1000,Numero_modos);
carga_movil_armonica=ones(1000,Numero_modos);

```

```

for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        t(i)=i*dt;

```

```

carga_movil_constante(i,j)=P*((A(j)*sin(Vo*t(i)*p(j))+B(j)*cos(Vo*t(i)*p(j))+C
(j)*sinh(Vo*t(i)*p(j))+D(j)*cosh(Vo*t(i)*p(j)))/(m(j)^(1/2)));

```

```

carga_movil_armonica(i,j)=Po*((A(j)*sin(Vo*t(i)*p(j))+B(j)*cos(Vo*t(i)*p(j))+C
(j)*sinh(Vo*t(i)*p(j))+D(j)*cosh(Vo*t(i)*p(j)))/(m(j)^(1/2)))*sin(w_peaton*t(i
));

```

```

        end

```

```

end

```

```

ASUM_c=ones(Numero_modos,1);
BSUM_c=ones(Numero_modos,1);
ASUM_a=ones(Numero_modos,1);
BSUM_a=ones(Numero_modos,1);
y_constante=ones(1000,Numero_modos);
y_armonica=ones(1000,Numero_modos);
y_constante_total=ones(1000,1);
y_armonica_total=ones(1000,1);
y=ones(1000,1);
wd=w*((1-(amort^2))^(1/2));

```

```

for j=1:Numero_modos
    ASUM_c(j)=0;
    BSUM_c(j)=0;
    y_constante(1,j)=0;
    for i=2:1000

```



```

A1_c(j)=carga_movil_constante(i-1,j);
T1=t(i-1);
A2_c(j)=carga_movil_constante(i,j);
T2=t(i);
s(j)=(A2_c(j)-A1_c(j))/(T2-T1);

ASUM_c(j)=ASUM_c(j)+(((exp(1)^(amort*w(j)*T2))/(w(j)^2))*(((amort*w(j)*A2_c(j))+(s(j)*(1-(2*amort*amort))))*cos(wd(j)*T2))+((wd(j)/w(j))*((w(j)*A2_c(j))-(2*amort*s(j)))*sin(wd(j)*T2))))-
(((exp(1)^(amort*w(j)*T1))/(w(j)^2))*(((amort*w(j)*A1_c(j))+(s(j)*(1-(2*amort*amort))))*cos(wd(j)*T1))+((wd(j)/w(j))*((w(j)*A1_c(j))-(2*amort*s(j)))*sin(wd(j)*T1)))));

BSUM_c(j)=BSUM_c(j)+(((exp(1)^(amort*w(j)*T2))/(w(j)^2))*(((amort*w(j)*A2_c(j))+(s(j)*(1-(2*amort*amort))))*sin(wd(j)*T2))-((wd(j)/w(j))*((w(j)*A2_c(j))-(2*amort*s(j)))*cos(wd(j)*T2))))-
(((exp(1)^(amort*w(j)*T1))/(w(j)^2))*(((amort*w(j)*A1_c(j))+(s(j)*(1-(2*amort*amort))))*sin(wd(j)*T1))-((wd(j)/w(j))*((w(j)*A1_c(j))-(2*amort*s(j)))*cos(wd(j)*T1)))));
    y_constante(i,j)=(((exp(1)^(-
amort*w(j)*T2))/wd(j))*((ASUM_c(j)*(sin(wd(j)*T2)))-
(BSUM_c(j)*(cos(wd(j)*T2)))))*forma_modal(X,j);
    end
end

for j=1:Numero_modos
    ASUM_a(j)=0;
    BSUM_a(j)=0;
    y_armonica(1,j)=0;
    for i=2:1000
        A1_a(j)=carga_movil_armonica(i-1,j);
        T1=t(i-1);
        A2_a(j)=carga_movil_armonica(i,j);
        T2=t(i);
        s_a(j)=(A2_a(j)-A1_a(j))/(T2-T1);

ASUM_a(j)=ASUM_a(j)+(((exp(1)^(amort*w(j)*T2))/(w(j)^2))*(((amort*w(j)*A2_a(j))+(s_a(j)*(1-(2*amort*amort))))*cos(wd(j)*T2))+((wd(j)/w(j))*((w(j)*A2_a(j))-(2*amort*s_a(j)))*sin(wd(j)*T2))))-
(((exp(1)^(amort*w(j)*T1))/(w(j)^2))*(((amort*w(j)*A1_a(j))+(s_a(j)*(1-(2*amort*amort))))*cos(wd(j)*T1))+((wd(j)/w(j))*((w(j)*A1_a(j))-(2*amort*s_a(j)))*sin(wd(j)*T1)))));

BSUM_a(j)=BSUM_a(j)+(((exp(1)^(amort*w(j)*T2))/(w(j)^2))*(((amort*w(j)*A2_a(j))+(s_a(j)*(1-(2*amort*amort))))*sin(wd(j)*T2))-((wd(j)/w(j))*((w(j)*A2_a(j))-(2*amort*s_a(j)))*cos(wd(j)*T2))))-
(((exp(1)^(amort*w(j)*T1))/(w(j)^2))*(((amort*w(j)*A1_a(j))+(s_a(j)*(1-(2*amort*amort))))*sin(wd(j)*T1))-((wd(j)/w(j))*((w(j)*A1_a(j))-(2*amort*s_a(j)))*cos(wd(j)*T1)))));
        y_armonica(i,j)=(((exp(1)^(-
amort*w(j)*T2))/wd(j))*((ASUM_a(j)*(sin(wd(j)*T2)))-
(BSUM_a(j)*(cos(wd(j)*T2)))))*forma_modal(X,j);
    end
end

```



```
end

for i=1:1000
    y_constante_total(i)=sum(y_constante(i,:));
    y_armonica_total(i)=sum(y_armonica(i,:));
    y(i)=y_constante_total(i)+y_armonica_total(i);
end
velocidad=ones(length(y)-1,1);
velocidad(1)=y(1);
for i=2:length(y)-1
    velocidad(i)=(y(i+1)-y(i-1))/(2*dt);
end
aceleracion=ones(length(velocidad)-1,1);
aceleracion(1)=velocidad(1);
for i=2:length(velocidad)-1
    aceleracion(i)=(velocidad(i+1)-velocidad(i-1))/(2*dt);
end
for i=1:length(y)-1
    t2(i)=t(i);
end
for i=1:length(velocidad)-1
    t3(i)=t2(i);
end

subplot(3,1,1);
plot(t,y)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Desplazamientos dinámicos')
grid on
set(gcf,'Color','w')

subplot(3,1,2);
plot(t2,velocidad)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Velocidades dinámicas')
grid on
set(gcf,'Color','w')

subplot(3,1,3);
plot(t3,aceleracion)
xlabel('Tiempo')
ylabel('Aceleraciones dinámicas')
grid on
set(gcf,'Color','w')
```



```

% Valores máximos de respuestas dinámicas

fprintf ('\n\n "El desplazamiento máximo absoluto es:");
Sd=max(abs(y))
fprintf ('\n\n "La velocidad máxima absoluta es:');
Sv=max(abs(velocidad))
fprintf ('\n\n "La aceleración máxima absoluta es:');
Sa=max(abs(acceleracion))

% Coeficiente de amplificación dinámico

if condiciones_contorno==1
    if X==500
        yo=(P*(L^3))/(48*E*I);
        fprintf ('\n\n "El coeficiente de amplificación dinámico es:');
        DMF=Sd/yo
    else
        fprintf('\n\n');
        disp('"Para obtener el factor de amplificación dinámico debe introducir
como punto longitudinal la');
        disp(' distancia donde se genera la máxima amplitud del primer modo de
vibrar. Vuelva a correr');
        disp(' el programa y obtenga la respuesta dinámica a una
distancia de 0.5 L');
        end
    end

elseif condiciones_contorno==2
    if X==500
        yo=(P*(L^3))/(192*E*I);
        fprintf ('\n\n "El coeficiente de amplificación dinámico es:');
        DMF=Sd/yo
    else
        fprintf('\n\n');
        disp('"Para obtener el factor de amplificación dinámico debe introducir
como punto longitudinal la');
        disp(' distancia donde se genera la máxima amplitud del primer modo de
vibrar. Vuelva a correr');
        disp(' el programa y obtenga la respuesta dinámica a una
distancia de 0.5 L');
        end
    end

elseif condiciones_contorno==3
    if X==586
        yo=(P*(L^3))/(102*E*I);

```



```
fprintf ('\n\n "El coeficiente de amplificación dinámico es:");
DMF=Sd/yo
else
fprintf('\n\n');
disp('"Para obtener el factor de amplificación dinámico debe introducir
como punto longitudinal la');
disp(' distancia donde se genera la máxima amplitud del primer modo de
vibrar. Vuelva a correr');
disp(' el programa y obtenga la respuesta dinámica a una
distancia de 0.586 L");
end

elseif condiciones_contorno==4
if X==1000
yo=(P*(L^3))/(3*E*I);
fprintf ('\n\n "El coeficiente de amplificación dinámico es:");
DMF=Sd/yo
else
fprintf('\n\n');
disp('"Para obtener el factor de amplificación dinámico debe introducir
como punto longitudinal la');
disp(' distancia donde se genera la máxima amplitud del primer modo de
vibrar. Vuelva a correr');
disp(' el programa y obtenga la respuesta dinámica a una
distancia de L");
end

end
```



Apéndice D

Respuesta dinámica vertical de un puente peatonal ante una excitación peatonal en movimiento

En este apéndice se utiliza como ejemplo el puente peatonal Pátzcuaro, el cual será sometido a una excitación de uno, dos, cuatro y ocho peatones desplazándose en resonancia sobre la estructura. El puente peatonal Pátzcuaro posee un claro total, L , de 36 m de longitud y puede modelarse como una viga uniforme Euler-Bernoulli doblemente empotrada debido a las conexiones rígidas en sus extremos que generan momento flexionante. La estructura está construida de acero A36, por lo que su módulo de elasticidad, E , se considera con un valor de $2.1 \cdot 10^{11}$ Pa. La masa distribuida del puente peatonal Pátzcuaro por unidad de longitud (tabla D.1) se obtiene con base a los perfiles estructurales de acero que lo componen (tabla 3.3) así como de sus dimensiones y pesos volumétricos. El sistema de piso losa-acero también es tomado en cuenta para el cálculo de la masa distribuida por unidad de longitud del puente.

Tabla D.1 Masa distribuida por unidad de longitud del puente peatonal Pátzcuaro

Concepto	Masa por unidad de longitud (kg / m)
Vigas principales del puente	434.6
Arrostramientos por debajo del puente	29.8166
Sistema de piso losa-acero	428
Barandales	124.5179
Total	1016.9345

De la tabla D.1 se obtiene que la masa distribuida total por unidad de longitud del puente peatonal Pátzcuaro, \bar{m} , es de 1016.9345 kg / m . El sistema de piso tipo losa-acero tiene concreto colado sobre ella, sin embargo, se obtuvo el momento de inercia de flexión de la sección



compuesta transformada en acero , I , en base a lo estipulado en al apéndice A de esta tesis y el cual resultó con un valor de $0.004914918767 m^4$.

Los valores de L, E, I y \bar{m} se deben de proporcionar a cualquiera de los programas realizados en Matlab (apéndices B y C), y posteriormente éste preguntará por las condiciones de contorno del puente peatonal, que para este ejemplo debe escogerse la opción de una viga Euler-Bernoulli doblemente empotrada (opción 2). Después se debe de ingresar al programa el número de modos de vibrar que se desea considerar en el análisis dinámico y posteriormente este arrojará los valores de las frecuencias verticales de vibrar así como las gráficas de los modos de vibrar para el número de modos seleccionado. El programa indicará la masa modal participante para cada modo, así como la masa participante total con el número de modos seleccionados, que en el caso de que esta sea menor al 90 % debería volver a correrse el programa y considerar más modos de vibrar. Para el caso del puente peatonal Pátzcuaro basta con considerar siete modos de vibrar, ya que con dicho número de modos se obtiene una masa total participante del 90.5070 %. Las siete frecuencias y modos de vibrar del puente peatonal Pátzcuaro obtenidas con los programa de los apéndices B (ecuación 5.112) y C (ecuación 5.117) se muestran en la tabla D.2, donde se observa que ambos métodos arrojan prácticamente los mismos resultados.

Tabla D.2 Comparación de frecuencias de vibrar del puente peatonal Pátzcuaro por dos métodos distintos

j -ésimo modo de vibrar	Sistema continuo (apéndice B)			Sistema generalizado de un grado de libertad (apéndice C)		
	$T_j (s)$	$f_j (Hz)$	$w_j (rad/s)$	$T_j (s)$	$f_j (Hz)$	$w_j (rad/s)$
1	0.3613	2.7680	17.3919	0.3620	2.7625	17.3572
2	0.1311	7.6301	47.9413	0.1313	7.6150	47.8463
3	0.0669	14.9580	93.9841	0.0670	14.9285	93.7985
4	0.0404	24.7265	155.3614	0.0405	24.6781	155.0570
5	0.0271	36.9372	232.0831	0.0271	36.8651	231.6302
6	0.0194	51.5897	324.1476	0.0194	51.4892	323.5162
7	0.0146	68.6845	431.5574	0.0146	68.5513	430.7204



Se observa que los valores obtenidos en la tabla D.2 coinciden con los valores obtenidos mediante las pruebas de vibración ambiental in situ de dicho puente. En el capítulo 5 y con motivos de una mejor visualización práctica, las formas modales fueron normalizadas de tal manera que la amplitud máxima de desplazamiento de todos los j -ésimos modos de vibrar fuera igual a la unidad. Sin embargo, para la evaluación de la respuesta dinámica de los puentes peatonales, deben de tomarse las amplitudes modales obtenidas mediante los programas de los apéndices B y C, en función del método de cálculo que desee utilizarse.

El método del apéndice B (Frýba, 1999) requiere calcular las formas modales mediante la ecuación 5.114, dónde $A_j = 1$, y dónde B_j , C_j y D_j son constantes de integración que dependen de las condiciones de frontera (tablas 5.3 y 5.4). Por lo tanto, las formas modales verticales del puente peatonal Pátzcuaro obtenidas mediante el programa del apéndice B se muestran en la figura D.1.

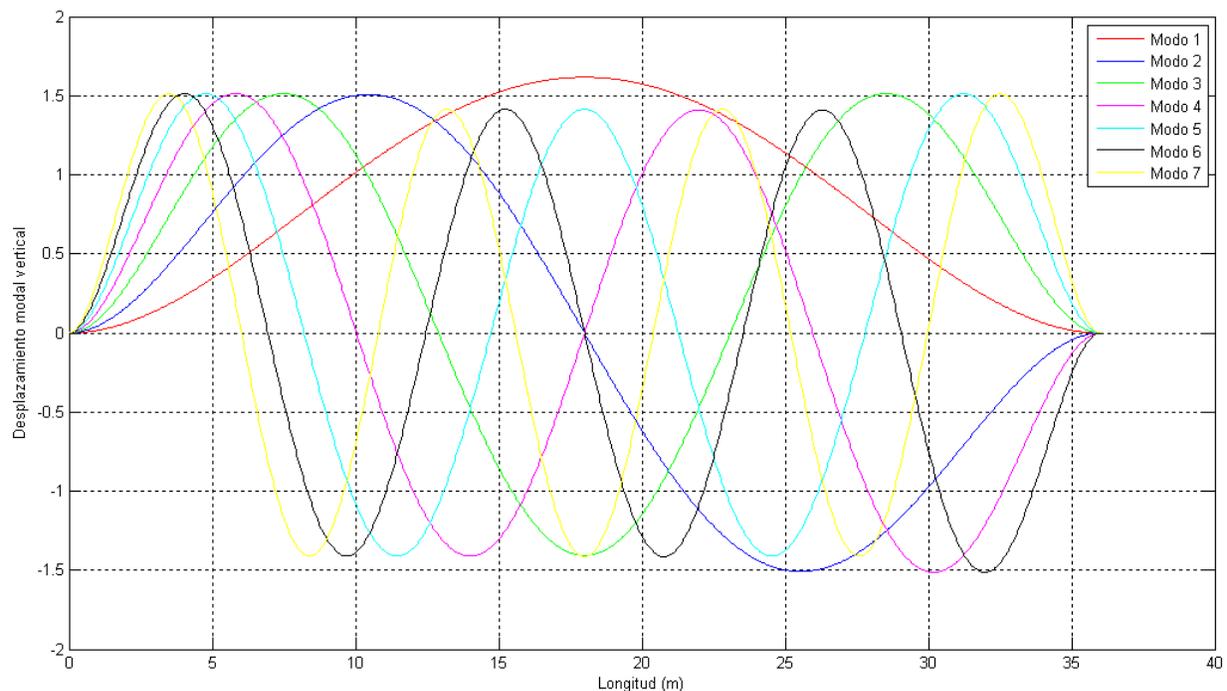


Figura D.1 Formas modales verticales del puente peatonal Pátzcuaro del apéndice B (Frýba ,1999)



El método del apéndice C se basa en un sistema generalizado de un grado de libertad (Rao, 2007) y requiere que las formas modales obtenidas mediante la ecuación 5.114 se normalicen al dividir las entre la raíz cuadrada de la masa generalizada del j -ésimo modo de vibrar (ecuación 5.122). Por lo tanto, las formas modales verticales normalizadas del puente peatonal Pátzcuaro obtenidas mediante el programa del apéndice C se muestran en la figura D.2.

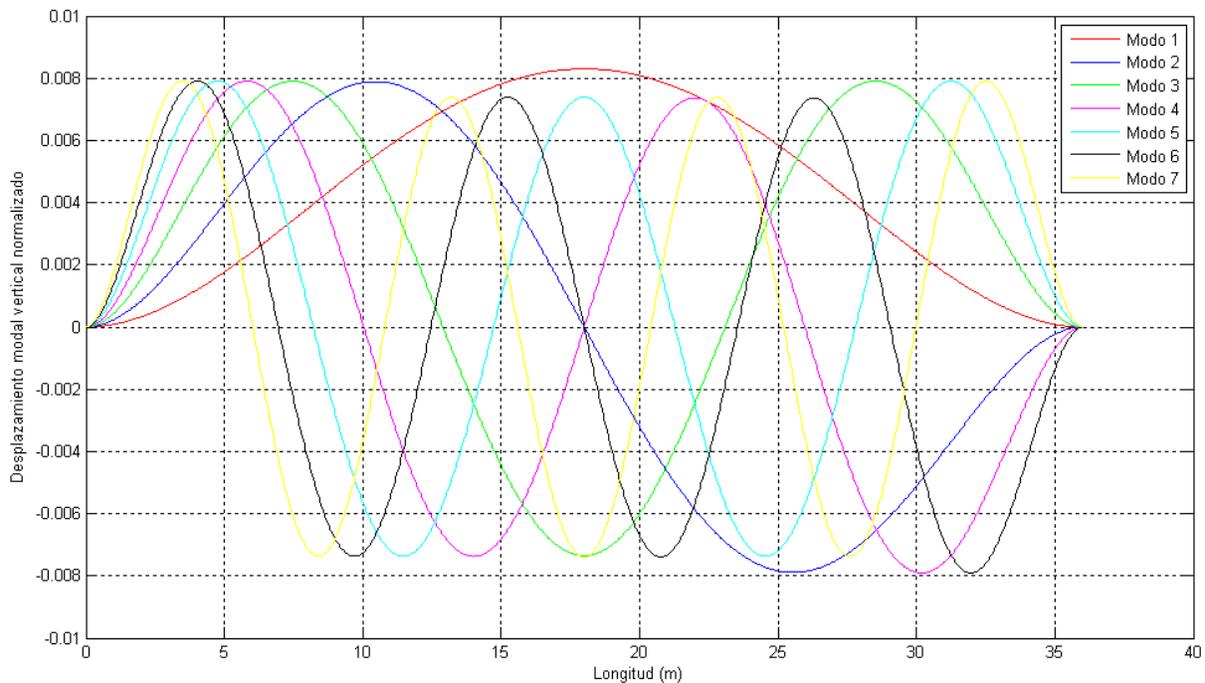


Figura D.2 Formas modales verticales normalizadas del puente peatonal Pátzcuaro del apéndice C (Rao, 2007)

En base a la tabla D.2 se observa que únicamente la primera forma modal del puente peatonal Pátzcuaro es la que puede vibrar en resonancia ante una excitación peatonal móvil (tabla 2.1); por lo tanto, las respuestas dinámicas máximas de dicha estructura se generarán en el centro del claro (figuras D.1 y D.2), es decir, a una distancia $x = 18 \text{ m}$. Podemos entonces considerar que la frecuencia peatonal, f_p , causante de la resonancia tendrá un valor de 2.76 Hz ; la cual tiene más probabilidades de ejecutarse ante una carrera normal (tabla 5.6). En el capítulo 5 de esta tesis se analizaron no sólo los casos de vibraciones verticales resonantes, esto con el objetivo de comparar la magnitud entre los diversos casos posibles de excitaciones dinámicas peatonales; sin



embargo, tal y como sugieren las normas internacionales, en este ejemplo se analizó únicamente el caso en que el puente peatonal Pátzcuaro vibra en resonancia en la dirección vertical, ya que es cuando se presentarán las máximas respuestas dinámicas de la estructura. La frecuencia peatonal resonante, f_p , se ejercerá a una velocidad constante de 4 m/s; ya que es el valor resultante aproximado de la interpolación lineal entre la velocidad típica de una carrera normal (3.3 m/s) y una carrera rápida (5.5 m/s), acorde a lo estipulado en la tabla 5.6.

La excitación peatonal vertical en movimiento toma entonces la forma de la ecuación 5.131, dónde solamente la primera contribución armónica se toma en consideración debido a que es la que puede ocasionar la vibración resonante en la estructura. La frecuencia circular de excitación peatonal, Ω , será entonces igual a la frecuencia circular estructural asociada a la frecuencia de 2.76 Hz del primer modo de vibrar vertical de la estructura; esto para considerar que el puente peatonal vibra en resonancia en la dirección vertical. El valor de Ω puede entonces obtenerse mediante la ecuación D.1.

$$\Omega = 2\pi f_p = 2\pi(2.76 \text{ Hz}) = 17.3416 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (\text{D.1})$$

En este ejemplo se analizó el caso en que uno, dos, cuatro y ocho peatones se desplazan en resonancia con el puente peatonal Pátzcuaro, y cuyas fuerzas dinámicas verticales se obtienen en base a lo estipulado en la sección 5.5 de esta tesis, y en base a las ecuaciones 5.131, 5.132 y 5.133. La fuerza dinámica vertical cuando uno, dos, cuatro y ocho peatones corren en resonancia con el puente peatonal Pátzcuaro se muestran respectivamente en las ecuaciones D.2, D.3, D.4 y D.5.

$$\begin{aligned} F_V &= P + P_o \text{sen}(\Omega t - \varphi_1) = n_p G + n_{\text{eff}} G \alpha_1 \psi \text{sen}(\Omega t - \varphi_1) = \\ &= n_p G + \sqrt{n_p} G \alpha_1 \psi \text{sen}(\Omega t - \varphi_1) = 700 \text{ N} + (700 \text{ N} \cdot 1.6 \cdot 0.84) \text{sen}\left(17.3416 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t - 0 \text{ rad}\right) = \\ &= 700 \text{ N} + (940.8 \text{ N}) \text{sen}\left(17.3416 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t\right) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$



$$\begin{aligned}
 F_V &= P + P_o \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_1) = n_p G + n_{\text{eff}} G \alpha_1 \psi \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_1) = \\
 &= n_p G + \sqrt{n_p} G \alpha_1 \psi \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_1) = (2 \cdot 700 N) + (\sqrt{2} \cdot 700 N \cdot 1.6 \cdot 0.84) \operatorname{sen}\left(17.3416 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t - 0 \text{ rad}\right) = \\
 &= 1400 N + (1330.4921 N) \operatorname{sen}\left(17.3416 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t\right)
 \end{aligned}
 \tag{D.3}$$

$$\begin{aligned}
 F_V &= P + P_o \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_1) = n_p G + n_{\text{eff}} G \alpha_1 \psi \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_1) = \\
 &= n_p G + \sqrt{n_p} G \alpha_1 \psi \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_1) = (4 \cdot 700 N) + (\sqrt{4} \cdot 700 N \cdot 1.6 \cdot 0.84) \operatorname{sen}\left(17.3416 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t - 0 \text{ rad}\right) = \\
 &= 2800 N + (1881.6 N) \operatorname{sen}\left(17.3416 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t\right)
 \end{aligned}
 \tag{D.4}$$

$$\begin{aligned}
 F_V &= P + P_o \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_1) = n_p G + n_{\text{eff}} G \alpha_1 \psi \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_1) = \\
 &= n_p G + \sqrt{n_p} G \alpha_1 \psi \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi_1) = (8 \cdot 700 N) + (\sqrt{8} \cdot 700 N \cdot 1.6 \cdot 0.84) \operatorname{sen}\left(17.3416 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t - 0 \text{ rad}\right) = \\
 &= 5600 N + (2660.9842 N) \operatorname{sen}\left(17.3416 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t\right)
 \end{aligned}
 \tag{D.5}$$

Entonces cuando el programa pida que se ingrese la frecuencia de vibrar ejercida en Hz por la carga peatonal debe de ingresarse el valor de $2.76 Hz$ ya que se está evaluando la vibración resonante en este ejemplo. Después debe ingresarse el valor de P como el peso total del grupo de peatones, y el valor de P_o como la amplitud máxima del armónico generado por el grupo de peatones. Posteriormente se ingresará la velocidad constante a la que cruza el grupo de peatones que para este ejemplo corresponde a $4 m/s$; y después se ingresará la longitud medida desde el extremo izquierdo donde desea calcularse la respuesta dinámica, que para este caso corresponde a $18 m$ (centro del claro). Se debe aclarar que los programas de los apéndices B y C funcionan para cualquier sistema de unidades, cuidando que éstas sean consistentes con las unidades de los j -ésimos periodos de vibrar, T_j , frecuencias de vibrar, f_j , y frecuencias circulares de vibrar, w_j ; las



cuales deben expresarse respectivamente en s , Hz y rad/s . Una vez hecho esto, el programa arrojará las gráficas de respuestas dinámicas de desplazamiento, velocidad y aceleración durante $t \leq \tau$ en el punto longitudinal, x , elegido; así como los valores máximos de dichas gráficas y el factor de amplificación dinámico.

En esta tesis se evaluó la respuesta dinámica de los puentes peatonales sin considerar el amortiguamiento estructural, ya que éste es muy pequeño y no afecta de manera significativa la respuesta dinámica de dichas estructuras. La respuesta dinámica puede ser obtenida con cualquiera de los programas de los apéndices B y C, con la diferencia de que el programa del apéndice B no considera el amortiguamiento estructural, ξ ; mientras que el programa del apéndice C si lo contempla. Si desea omitirse el amortiguamiento estructural en el programa del apéndice C, sólo debe ingresarse un valor de cero cuando el programa pregunte por la fracción de amortiguamiento crítico. La comparación de respuestas dinámicas del puente peatonal Pátzcuaro sin considerar el amortiguamiento estructural mediante los programas de los apéndices B (Frýba, 1999) y C (Rao, 2007) se muestran en la tabla D.3; dónde y_{\max} , \dot{y}_{\max} y \ddot{y}_{\max} representan respectivamente el desplazamiento, velocidad y aceleración dinámicas máximas, y dónde n_p representa el número de peatones que conforman la carga dinámica móvil, y $f_1 = f_p$.

Tabla D.3 Comparación de las respuestas dinámicas verticales máximas en resonancia del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0$) en $x = 18\ m$ por dos métodos distintos (modelo matemático)

n_p	Sistema continuo (apéndice B)				Sistema generalizado de un grado de libertad (apéndice C)			
	y_{\max} (m)	\dot{y}_{\max} (m/s)	\ddot{y}_{\max} (m/s^2)	DMF	y_{\max} (m)	\dot{y}_{\max} (m/s)	\ddot{y}_{\max} (m/s^2)	DMF
1	0.0088	0.1516	2.6262	53.1247	0.0088	0.1514	2.6178	53.1683
2	0.0124	0.2144	3.7140	37.5750	0.0124	0.2142	3.7021	37.6049
4	0.0175	0.3033	5.2524	26.5797	0.0175	0.3029	5.2355	26.5999
8	0.0248	0.4289	7.4280	18.8048	0.0248	0.4284	7.4041	18.8182



De la tabla D.3, se observa que ambos métodos arrojan prácticamente los mismos resultados, por lo que es apto utilizar cualquiera de los dos en la evaluación de la respuesta dinámica ante excitaciones peatonales móviles. Es importante aclarar que el factor de amplificación dinámica, DMF , disminuye conforme aumenta el número de peatones, n_p , que conforman el grupo; esto se debe a que el número efectivo de peatones que caminan en sintonía con el puente, n_{eff} , se obtiene mediante la raíz cuadrada del número total de peatones, n_p , y por ende el valor de la máxima amplitud del armónico peatonal, P_o , no incrementa en la misma proporción como incrementa el peso total de los peatones, P , con la cual se calcula la deflexión estática máxima, y_o . Esto quiere decir entonces que conforme aumenta n_p , la respuesta dinámica máxima de desplazamientos, y_{max} , no aumenta en la misma proporción.

Las gráficas de respuestas dinámicas de desplazamiento, velocidad y aceleración del puente peatonal Pátzcuaro correspondientes a la tabla D.3 se muestran respectivamente en las figuras D.3 a D.6.

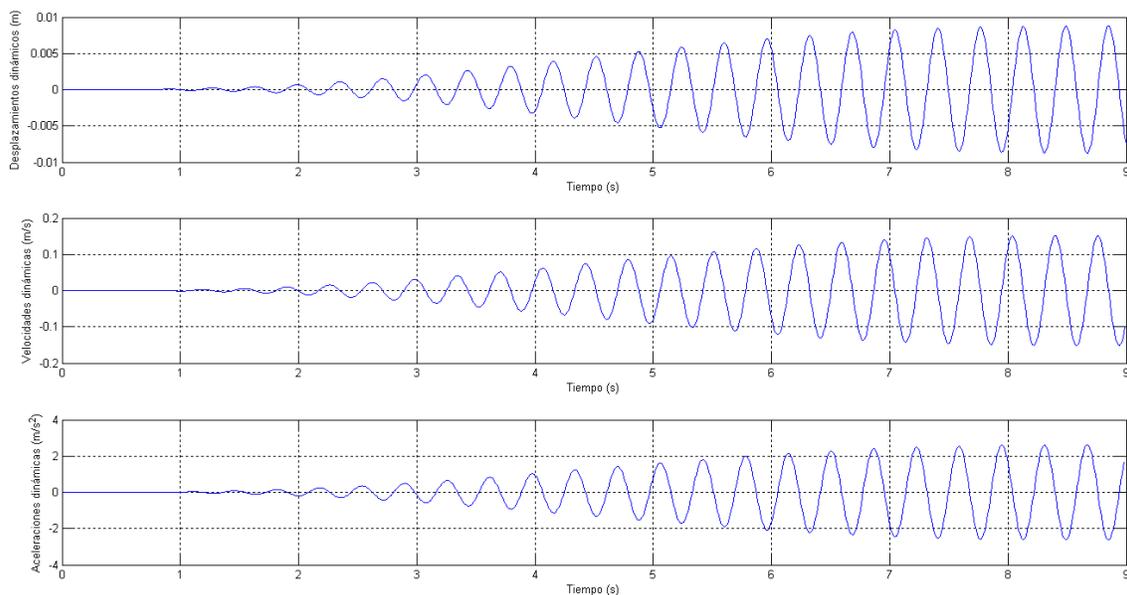


Figura D.3 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático)

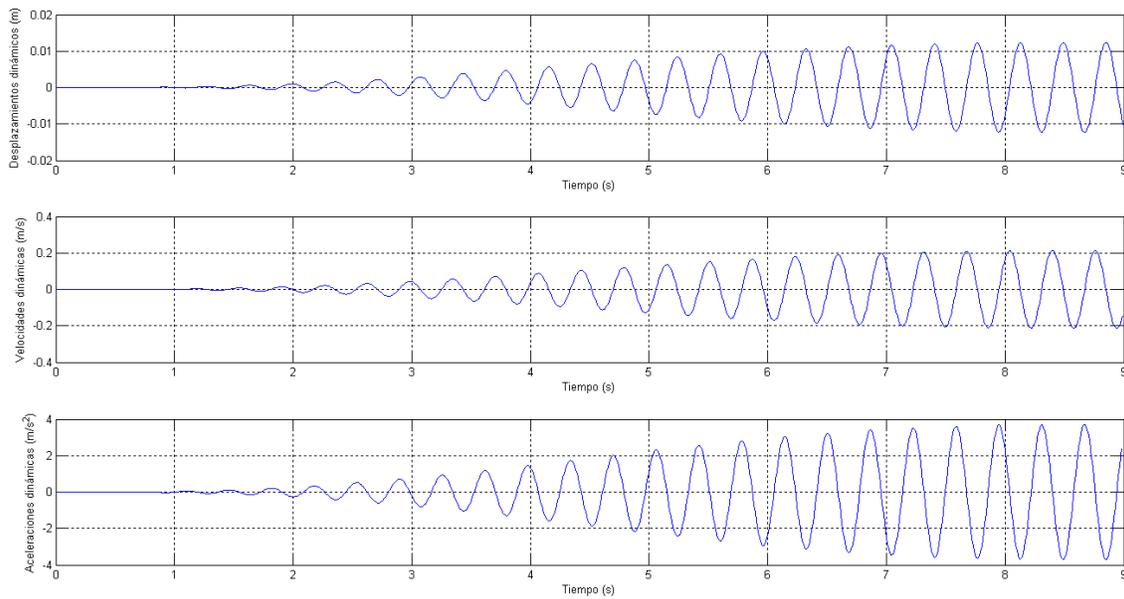


Figura D.4 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático)

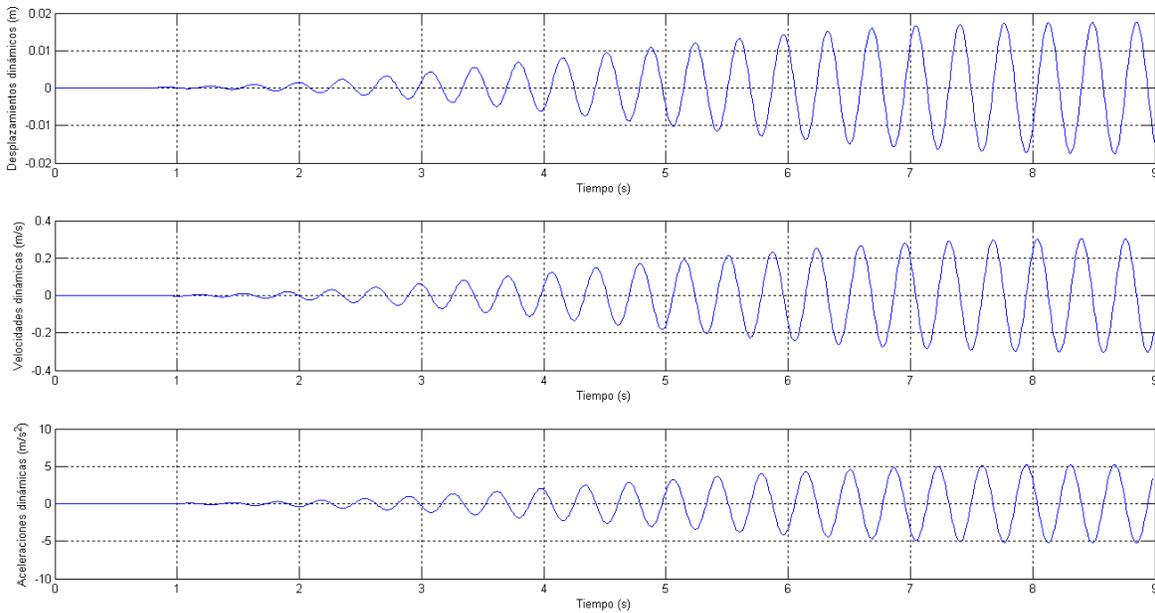


Figura D.5 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático)

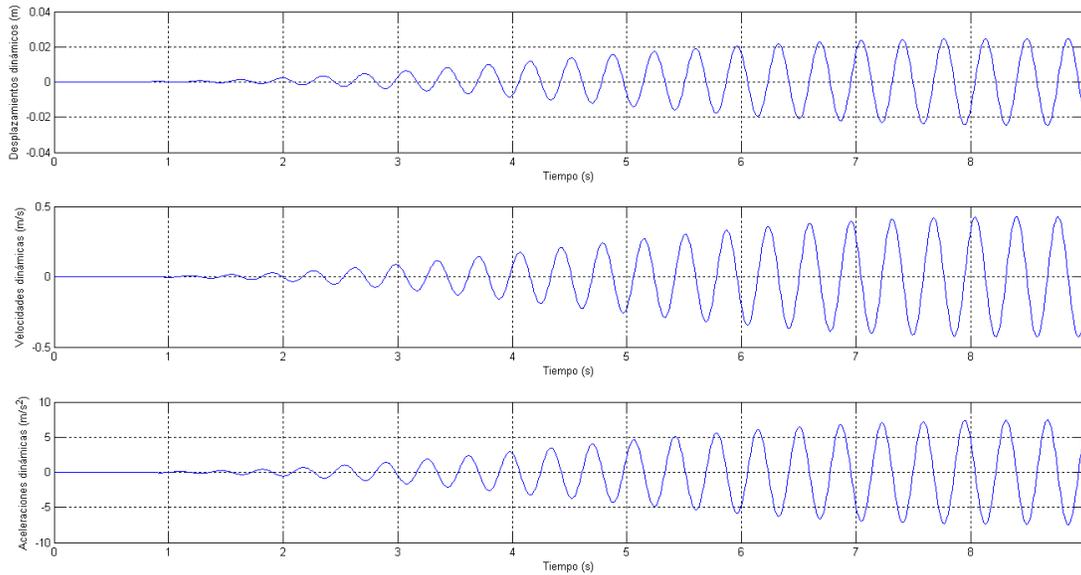


Figura D.6 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático)

Si se considera que $\xi_j = 0.0045$ en el puente peatonal Pátzcuaro, entonces las respuestas dinámicas máximas son las mostradas en la tabla D.4, donde los valores no difieren significativamente de los de la tabla D.3. Las gráficas correspondientes a los valores de la tabla D.4 se muestran respectivamente en las gráficas D.7 a D.10.

Tabla D.4 Respuestas dinámicas verticales máximas en resonancia del puente peatonal Pátzcuaro en $x = 18 \text{ m}$ con $\xi_j = 0.0045$ (modelo matemático)

n_p	Sistema generalizado de un grado de libertad (apéndice C)			
	y_{\max} (m)	\dot{y}_{\max} (m/s)	\ddot{y}_{\max} (m/s ²)	DMF
1	0.0067	0.1156	1.9979	40.7942
2	0.0095	0.1635	2.8255	28.9286
4	0.0135	0.2312	3.9958	20.5383
8	0.0193	0.3271	5.6509	14.6055

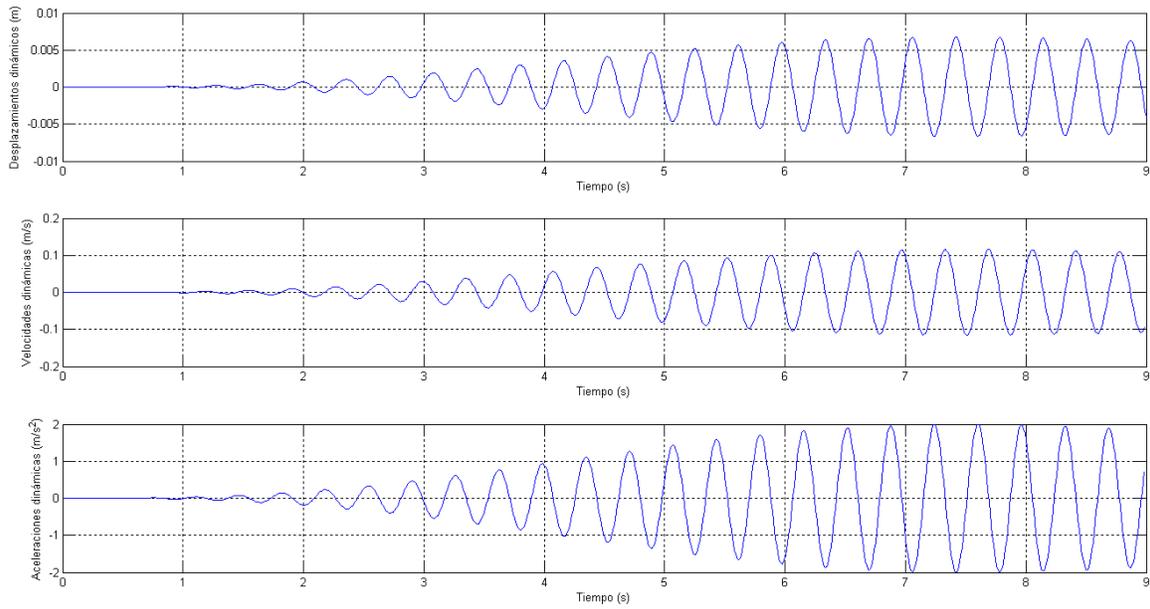


Figura D.7 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0.0045$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 1 peatón con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático)

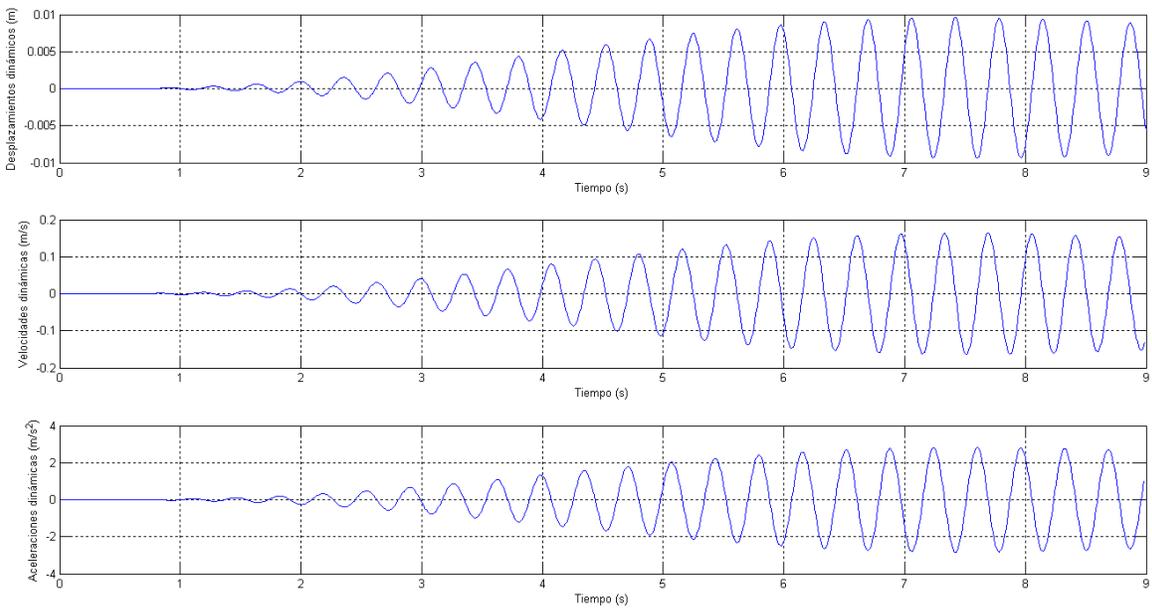


Figura D.8 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0.0045$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 2 peatones con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático)

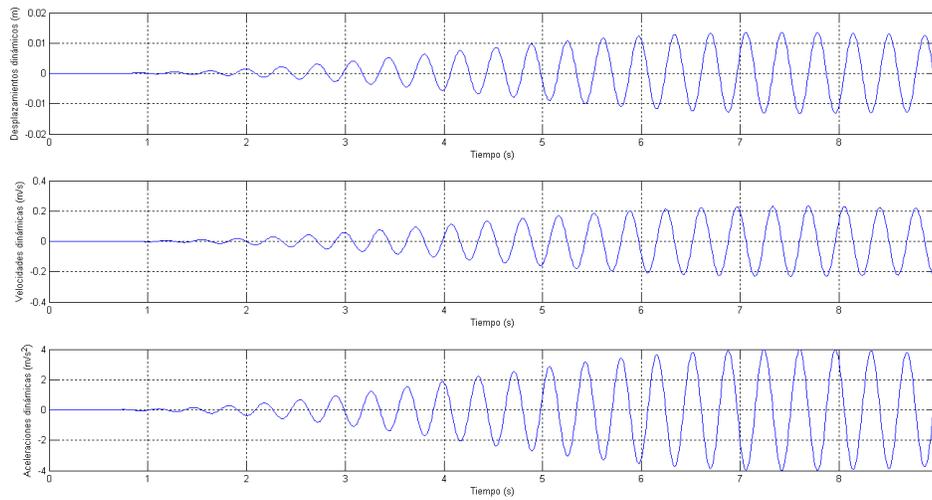


Figura D.9 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0.0045$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 4 peatones con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático)

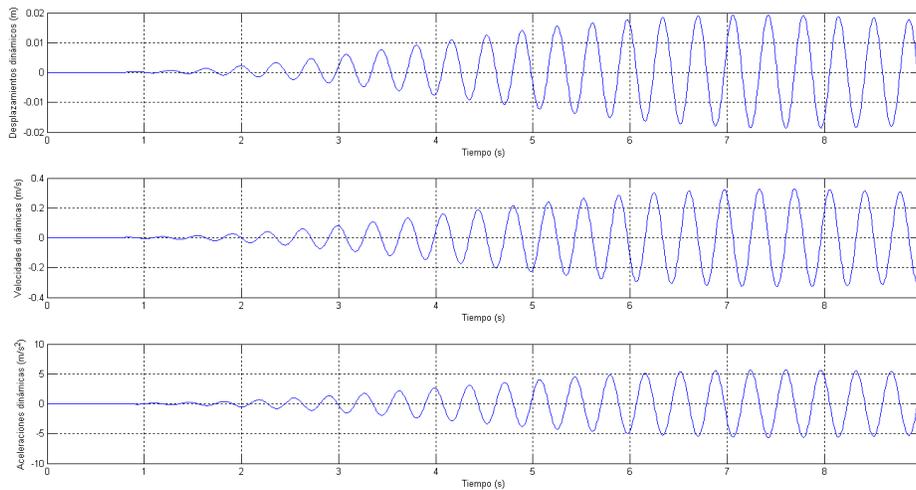


Figura D.10 Respuestas dinámicas verticales resonantes del puente peatonal Pátzcuaro ($\xi_j = 0.0045$) en $x = 18 \text{ m}$, durante $t \leq \tau$, ante 8 peatones con $V_o = 4 \text{ m/s}$ (modelo matemático)

En la realidad conforme aumentan los modos de vibrar, suele haber una pequeña reducción del amortiguamiento modal, por lo que en realidad la respuesta dinámica amortiguada será un poco mayor. Aun así se concluye que la consideración del amortiguamiento estructural no influirá significativamente en la selección del TMD que se busca implementar.



Apéndice E

Código en Matlab: Determinación de los parámetros óptimos de un TMD para una viga Euler-Bernoulli

```
clear,clc
format long

%Datos del puente peatonal

masa_distribuida=input('Ingrese la masa por unidad de longitud del puente
peatonal:');
L=input('Ingrese la longitud del puente peatonal:');
E=input('Ingrese el módulo de elasticidad del material del puente peatonal:');
I=input('Ingrese el momento de inercia de flexión del puente peatonal:');
amort=input('Ingrese en decimales la fracción de amortiguamiento crítico del
puente peatonal:');

%Frecuencias y modos de vibrar del puente peatonal

fprintf('\n\n');
disp('Defina las condiciones de apoyo del puente peatonal');
fprintf('\n\n');

disp('Opción 1: Simplemente apoyado');
disp('Opción 2: Doblemente empotrado');
disp('Opción 3: Empotrado en un extremo y simplemente apoyado en el otro');
disp('Opción 4: En voladizo');
fprintf('\n\n');

condiciones_contorno=input('Presione 1,2,3 ó 4 según sea el caso a elegir:');

if condiciones_contorno==1

fprintf('\n\n');
fprintf('\n\n');
Numero_modos=input('Ingrese el número de frecuencias de vibrar que quiere
obtener:');
a = ones(Numero_modos,1);
p = ones(Numero_modos,1);
A=ones(Numero_modos,1);
B=ones(Numero_modos,1);
C=ones(Numero_modos,1);
```



```

D=ones(Numero_modos,1);

for i=1:Numero_modos
    a(i) = i*pi;
    p(i)=a(i)/L;
    A(i)=1;
    B(i)=0;
    C(i)=-sin(a(i))/sinh(a(i));
    D(i)=0;
end
forma_modal=ones(1000,Numero_modos);
forma_modal_2=ones(1000,Numero_modos);
maximos=ones(Numero_modos,1);
maximos_2=ones(Numero_modos,1);
x=ones(1000,1);

dx=L/1000;

for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        x(i)=i*dx;

forma_modal(i,j)=A(j)*sin(x(i)*p(j))+B(j)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*sinh(x(i)*p(j))+
D(j)*cosh(x(i)*p(j));
        forma_modal_2(i,j)=-A(j)*(p(j)^2)*sin(x(i)*p(j))-
B(j)*(p(j)^2)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*(p(j)^2)*sinh(x(i)*p(j))+D(j)*(p(j)^2)*cosh(
x(i)*p(j));
        end
        maximos(j)=max(forma_modal(:,j));
        maximos_2(j)=max(forma_modal_2(:,j));
    end
for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        forma_modal(i,j)=forma_modal(i,j)/maximos(j);
        forma_modal_2(i,j)=forma_modal_2(i,j)/maximos_2(j);
    end
end

elseif condiciones_contorno==2

fprintf('\n\n');
fprintf('\n\n');
Numero_modos=input('Ingrese el número de frecuencias de vibrar que quiere
obtener:');
a = ones(Numero_modos,1);
p = ones(Numero_modos,1);
A=ones(Numero_modos,1);
B=ones(Numero_modos,1);
C=ones(Numero_modos,1);
D=ones(Numero_modos,1);

```



```

a(1)=4.73004;
a(2)=7.85320;
a(3)=10.9956;
a(4)=14.1372;
a(5)=17.2788;

for i=6:100
    a(i)=((2*i)+1)*pi)/2;
end

for i=1:Numero_modos
    p(i)=a(i)/L;
    A(i)=1;
    B(i)=(sinh(a(i))-sin(a(i)))/(cos(a(i))-cosh(a(i)));
    C(i)=-1;
    D(i)=-((sinh(a(i))-sin(a(i)))/(cos(a(i))-cosh(a(i))));
end
forma_modal=ones(1000,Numero_modos);
forma_modal_2=ones(1000,Numero_modos);
maximos=ones(Numero_modos,1);
maximos_2=ones(Numero_modos,1);
x=ones(1000,1);

dx=L/1000;

for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        x(i)=i*dx;

forma_modal(i,j)=A(j)*sin(x(i)*p(j))+B(j)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*sinh(x(i)*p(j))+
D(j)*cosh(x(i)*p(j));
        forma_modal_2(i,j)=-A(j)*(p(j)^2)*sin(x(i)*p(j))-
B(j)*(p(j)^2)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*(p(j)^2)*sinh(x(i)*p(j))+D(j)*(p(j)^2)*cosh(
x(i)*p(j));
    end
    maximos(j)=max(forma_modal(:,j));
    maximos_2(j)=max(forma_modal_2(:,j));
end
for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        forma_modal(i,j)=forma_modal(i,j)/maximos(j);
        forma_modal_2(i,j)=forma_modal_2(i,j)/maximos_2(j);
    end
end

elseif condiciones_contorno==3

fprintf('\n\n');
fprintf('\n\n');

```



```

Numero_modos=input('Ingrese el número de frecuencias de vibrar que quiere
obtener:');
a = ones(Numero_modos,1);
p = ones(Numero_modos,1);
A=ones(Numero_modos,1);
B=ones(Numero_modos,1);
C=ones(Numero_modos,1);
D=ones(Numero_modos,1);
a(1)=3.92660;
a(2)=7.06858;
a(3)=10.2102;
a(4)=13.3518;
a(5)=16.4934;

for i=6:100
    a(i)=(((4*i)+1)*pi)/4;
end

for i=1:Numero_modos
    p(i)=a(i)/L;
    A(i)=1;
    B(i)=(sinh(a(i))-sin(a(i)))/(cos(a(i))-cosh(a(i)));
    C(i)=-1;
    D(i)=-((sinh(a(i))-sin(a(i)))/(cos(a(i))-cosh(a(i))));
end
forma_modal=ones(1000,Numero_modos);
forma_modal_2=ones(1000,Numero_modos);
maximos=ones(Numero_modos,1);
maximos_2=ones(Numero_modos,1);
x=ones(1000,1);

dx=L/1000;

for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        x(i)=i*dx;

forma_modal(i,j)=A(j)*sin(x(i)*p(j))+B(j)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*sinh(x(i)*p(j))+
D(j)*cosh(x(i)*p(j));
        forma_modal_2(i,j)=-A(j)*(p(j)^2)*sin(x(i)*p(j))-
B(j)*(p(j)^2)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*(p(j)^2)*sinh(x(i)*p(j))+D(j)*(p(j)^2)*cosh(
x(i)*p(j));
    end
    maximos(j)=max(forma_modal(:,j));
    maximos_2(j)=max(forma_modal_2(:,j));
end
for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        forma_modal(i,j)=forma_modal(i,j)/maximos(j);
        forma_modal_2(i,j)=forma_modal_2(i,j)/maximos_2(j);
    end
end
end

```



```

elseif condiciones_contorno==4

fprintf('\n\n');
fprintf('\n\n');
Numero_modos=input('Ingrese el número de frecuencias de vibrar que quiere
obtener:');
a = ones(Numero_modos,1);
p = ones(Numero_modos,1);
A=ones(Numero_modos,1);
B=ones(Numero_modos,1);
C=ones(Numero_modos,1);
D=ones(Numero_modos,1);
a(1)=1.87510;
a(2)=4.69409;
a(3)=7.85476;
a(4)=10.9955;
a(5)=14.1372;

for i=6:100
    a(i)=((2*i)-1)*pi/2;
end

for i=1:Numero_modos
    p(i)=a(i)/L;
    A(i)=1;
    B(i)=-((cos(a(i))+cosh(a(i)))/(sinh(a(i))-sin(a(i))));
    C(i)=-1;
    D(i)=(cos(a(i))+cosh(a(i)))/(sinh(a(i))-sin(a(i)));
end
forma_modal=ones(1000,Numero_modos);
forma_modal_2=ones(1000,Numero_modos);
maximos=ones(Numero_modos,1);
maximos_2=ones(Numero_modos,1);
x=ones(1000,1);

dx=L/1000;

for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        x(i)=i*dx;

forma_modal(i,j)=A(j)*sin(x(i)*p(j))+B(j)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*sinh(x(i)*p(j))+
D(j)*cosh(x(i)*p(j));
        forma_modal_2(i,j)=-A(j)*(p(j)^2)*sin(x(i)*p(j))-
B(j)*(p(j)^2)*cos(x(i)*p(j))+C(j)*(p(j)^2)*sinh(x(i)*p(j))+D(j)*(p(j)^2)*cosh(
x(i)*p(j));
        end
        maximos(j)=max(forma_modal(:,j));
        maximos_2(j)=max(forma_modal_2(:,j));
    end
end

```



```

for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        forma_modal(i,j)=forma_modal(i,j)/maximos(j);
        forma_modal_2(i,j)=forma_modal_2(i,j)/maximos_2(j);
    end
end

end

m=ones(Numero_modos,1);
k=ones(Numero_modos,1);
theta_L=ones(Numero_modos,1);
T=ones(Numero_modos,1);
f=ones(Numero_modos,1);
w=ones(Numero_modos,1);
v=ones(1000,Numero_modos);
v_2=ones(1000,Numero_modos);
for j=1:Numero_modos
    for i=1:1000
        v(i,j)= forma_modal(i,j)* forma_modal(i,j);
        v_2(i,j)=forma_modal_2(i,j)* forma_modal_2(i,j);
    end
    m(j)=masa_distribuida*(trapz(x,v(:,j)));
    k(j)=E*I*(trapz(x,v_2(:,j)));
end
for i=1:Numero_modos
    f(i)=(1/(2*pi))*((k(i)/m(i))^(1/2));
    T(i)=1/f(i);
    w(i)=f(i)*2*pi;
end

fprintf('\n');
disp('Las masas generalizadas para cada modo de vibrar son:');
m

fprintf('\n');
disp('Las rigideces generalizadas para cada modo de vibrar son:');
k

fprintf('\n\n');
disp('Los periodos de vibrar en segundos para cada modo son:');
T

fprintf('\n');
disp('Las frecuencias de vibrar en Hz para cada modo son:');
f

fprintf('\n');
disp('Las frecuencias circulares de vibrar en rad/s para cada modo son:');
w

```



```
fprintf('\n\n');
Modo_resonante=input('Introduzca el número de modo que puede vibrar en
resonancia:');
fprintf('\n\n');

disp('La forma modal que puede vibrar en resonancia es:');
plot(x,forma_modal(:,Modo_resonante));
xlabel('Longitud');
ylabel('Desplazamiento modal vertical normalizado a la unidad');
legend('Modo de vibrar resonante');
grid on
set(gcf,'Color','w')

fprintf('\n\n');
disp('"Se recomienda colocar TMD's en todos los puntos longitudinales de
máxima amplitud del modo de vibrar resonante"');
fprintf('\n\n');

X=input('Introduzca la distancia longitudinal en la cual se colocará el
TMD:');
    if X==0
        X=1;
    else
        X=(X*1000)/L;
        X=round(X);
    end
fprintf('\n\n');
disp('La masa modal efectiva del modo de vibrar resonante en el punto
longitudinal elegido es:');
me=m(Modo_resonante)/((forma_modal(X,Modo_resonante))^2)
fprintf('\n\n');

%Parámetros óptimos de los TMD's

fprintf('\n\n');
md=input('Ingrese la masa del TMD:');

fprintf('\n\n');
mu=md/me;

fprintf('\n');
disp('La frecuencia óptima en Hz del TMD es:');
fd=f(Modo_resonante)*(1/(1+mu))

fprintf('\n');
disp('La rigidez óptima del TMD es:');
```



```
kd=((fd*2*pi)^2)*md

fprintf('\n');
disp('La fracción de amortiguamiento óptima en decimales del TMD es:');
amortd=((3*mu)/(8*((1+mu)^3)))^(1/2)

fprintf('\n');
disp('La constante de amortiguamiento óptima del TMD es:');
cd=2*amortd*md*(fd*2*pi)

fprintf('\n');
disp('El amortiguamiento equivalente del puente con TMD en decimales es:');
amort_e=(md/(2*me))*((1+(((2*amort*me)/md)+(1/(2*amortd)))^2))^(1/2)
```



Apéndice F

Determinación de los parámetros óptimos de los TMD's de puentes peatonales en base a un modelo equivalente de dos grados de libertad

En este apéndice se obtienen los parámetros óptimos de los amortiguadores de masa sintonizados del puente peatonal Pátzcuaro, en base al programa realizado en Matlab del apéndice E. El programa del apéndice E funciona para cualquier sistema de unidades, cuidando que éstas sean consistentes con las unidades de los j -ésimos periodos de vibrar, T_j , frecuencias de vibrar, f_j , y frecuencias circulares de vibrar, w_j ; las cuales deben expresarse respectivamente en s , Hz y rad/s . Los puentes peatonales pueden modelarse como un sistema de un grado de libertad equivalente; al cual se le añaden los amortiguadores de masa sintonizados, convirtiéndose entonces en un sistema de dos grados de libertad equivalente (figura 6.5). Los amortiguadores de masa sintonizados (TMD's) deben colocarse en los puntos de máxima amplitud del modo de vibrar que puede vibrar en resonancia ante una excitación peatonal móvil, ya que en dichos puntos se darán las respuestas dinámicas máximas. Los datos generales del puente peatonal Pátzcuaro que se toma como ejemplo en este apéndice se muestran en la tabla F.1.

Tabla F.1 Datos generales del puente peatonal Pátzcuaro

\bar{m}	1016.9345 kg/m
L	36 m
E	210000000000 Pa
I	0.004914918767 m^4
ξ	0.0045



Los puentes peatonales son sistemas continuos con masa y elasticidad distribuidas, y por lo tanto cuentan con infinitos grados de libertad; sin embargo, la solución de la ecuación del movimiento de éste sistema continuo, cuando es sometido a una carga externa arbitraria, puede encontrarse mediante la combinación modal de las respuestas dinámicas de un sistema generalizado de un grado de libertad. El sistema generalizado de un grado de libertad permite obtener las respuestas dinámicas máximas en los puntos longitudinales de interés mediante una separación de variables, tal y como se muestra en la ecuación F.1; dónde x^* representa el punto longitudinal de interés donde se colocará el TMD, $y(x^*, t)$ es el desplazamiento dinámico vertical del puente peatonal en x^* , $\eta_j(t)$ es el desplazamiento dinámico generalizado del j -ésimo modo de vibrar, y $\phi_j(x^*)$ es la amplitud en x^* de la j -ésima forma modal vertical normalizada del puente peatonal (ecuación 5.122).

$$y(x^*, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x^*) \eta_j(t) \quad (\text{F.1})$$

El desplazamiento dinámico modal generalizado, $\eta_j(t)$, se encuentra al solucionar la ecuación del movimiento para un sistema de un grado de libertad equivalente; de tal manera, que habrá una ecuación de un grado de libertad equivalente para cada j -ésimo modo de vibrar. Si el sistema de un grado de libertad equivalente es sometido a una carga externa arbitraria, $P(x, t)$, entonces dicha ecuación se ensambla con parámetros modales generalizados: una masa generalizada, \tilde{m}_j , una rigidez generalizada, \tilde{k}_j , y una carga dinámica generalizada, $\tilde{P}_j(t)$, para el j -ésimo modo de vibrar; dónde el amortiguamiento modal generalizado puede omitirse debido a que éste suele ser muy pequeño en puentes peatonales y no influye significativamente en la respuesta dinámica. La ecuación equivalente de un grado de libertad se muestra en la ecuación F.2.

$$\tilde{m}_j \cdot \ddot{\eta}_j(t) + \tilde{k}_j \cdot \eta_j(t) = \tilde{P}_j(t) \quad (\text{F.2})$$



Dónde:

$$\tilde{m}_j = \bar{m} \int_0^L [\phi_j(x)]^2 dx \quad (\text{F.3})$$

$$\tilde{k}_j = EI \int_0^L [\phi_j(x)''']^2 dx \quad (\text{F.4})$$

$$\tilde{P}_j(t) = \int_0^L P(x,t) \phi_j(x) dx \quad (\text{F.5})$$

La solución de la ecuación generalizada de un grado de libertad (F.2) puede obtenerse para cualquier tipo de carga externa arbitraria mediante la integral de Duhamel. Para el caso de puentes peatonales con cargas peatonales verticales móviles, la respuesta dinámica resultante de la combinación modal (ecuación F.1) se puede encontrar mediante los apéndices B, C y D de esta tesis. Los puentes peatonales deben de rehabilitarse con amortiguadores de masa sintonizados (TMD's) cuando las aceleraciones inducidas por peatones exceden de 0.7 m/s^2 .

Las formas modales de los puentes peatonales con diferentes condiciones de apoyo pueden obtenerse mediante la ecuación 5.114. El diseño adecuado del TMD dependerá de la frecuencia de vibrar del modo que puede vibrar en resonancia ante una carga peatonal vertical móvil, por lo cual es necesario estimar adecuadamente los valores de \tilde{m}_j y \tilde{k}_j . Una vez que se conoce la masa y rigidez generalizadas de los j -ésimos modos de vibrar, es posible obtener la j -ésima frecuencia de vibrar en Hz del sistema equivalente de un grado de libertad mediante la ecuación 6.9, tal y como se muestra en la ecuación F.6.

$$f_j = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\tilde{k}_j}{\tilde{m}_j}} \quad (\text{F.6})$$

El puente peatonal Pátzcuaro está doblemente empotrado en sus extremos, cuyas masas y rigideces generalizadas de los primeros siete modos de vibrar se muestran en la tabla F.2, así



como las correspondientes frecuencias de vibrar; las cuales fueron obtenidas mediante las ecuaciones F.3, F.4 y F.6 en base al programa realizado en Matlab del apéndice E.

Tabla F.2 Parámetros generalizados del sistema de un grado de libertad del puente peatonal Pátzcuaro

j -ésimo modo de vibrar	\tilde{m}_j (kg)	\tilde{k}_j (N/m)	f_j (Hz)
1	14514.917	4372968.1849	2.7625
2	16072.82	36794923.4180	7.6150
3	16002.3309	140791096.6288	14.9285
4	16005.7275	384820301.1288	24.6781
5	16005.2282	858721155.8111	36.8651
6	16005.2431	1675152334.1075	51.4892
7	16005.1472	2969275545.1489	68.5513

Es importante mencionar que los parámetros generalizados (\tilde{m}_j y \tilde{k}_j) de la tabla F.2 fueron calculados bajo formas modales normalizadas de tal manera que las amplitudes máximas de todos los modos de vibrar tuvieran un valor de uno (figura 5.22). Esto quiere decir, que si se escalan las formas modales a cualquier valor arbitrario, entonces los valores de las masas y rigideces generalizadas también cambiarán. Sin embargo, el valor de las j -ésimas frecuencias de vibrar, f_j , no cambiará debido a que éste es independiente de la escala utilizada en las formas modales; ya que el cociente k_j / m_j de la ecuación F.6 siempre se mantendrá constante.

Al comparar la tabla F.2 con la tabla D.2 se comprueba que las frecuencias de vibrar del sistema generalizado de un grado de libertad coinciden independientemente de la escala utilizada en la forma modal. Sin embargo, para la evaluación de la respuesta dinámica de los puentes peatonales no puede utilizarse cualquier escala arbitraria en las formas modales; de tal manera que para el modelo matemático como sistema continuo deben utilizarse las formas modales de la figura D.1 (Frýba, 1999), mientras que para la evaluación de la respuesta dinámica como un sistema



generalizado de un grado de libertad deben utilizarse las formas modales de la figura D.2 (Rao, 2007).

Al observar la tabla F.2 se concluye que solamente la primera forma modal del puente peatonal Pátzcuaro puede vibrar en resonancia ante una posible carrera a velocidad normal de un grupo de peatones. Por lo tanto solo será necesario colocar un TMD al centro del claro, ($x^* = L/2$), ya que es el punto longitudinal donde se genera la máxima amplitud del primer modo de vibrar. En dado caso de que el segundo modo de vibrar de un puente peatonal pueda vibrar en resonancia, entonces se deberán colocar dos TMD's con parámetros óptimos en los puntos de máxima amplitud modal, es decir, en $x^* = L/4$ y $x^* = 3L/4$, los cuales tendrían que estar sintonizados a la segunda forma modal; y así sucesivamente para modos de vibrar superiores.

Entre más masa tenga el TMD, mayor será el amortiguamiento que este le proveerá a la estructura; sin embargo, una masa demasiado grande es impráctica en su colocación por lo que usualmente se usan valores entre 2 % y 7 % de la masa modal efectiva, $\tilde{m}_{j,e}$, del puente peatonal en el punto de anclaje, x^* . Por ejemplo, si en el puente peatonal Pátzcuaro se coloca un TMD en $x^* = L/2$, cuya masa, m_d tiene un valor de 1 % de la masa modal efectiva que puede vibrar en resonancia, $\tilde{m}_{1,e}$, del puente peatonal Pátzcuaro; entonces m_d se obtiene mediante la ecuación F.7, donde $\phi_1^2(x^*)=1$ (figura 5.22) debido a que ésta fue normalizada a la unidad en los puntos de máxima amplitud (apéndice E).

$$m_d = 0.01(\tilde{m}_{1,e}) = 0.01 \left(\frac{\tilde{m}_1}{\phi_1^2(x^*)} \right) = 0.01(14514.917 \text{ kg}) = 145.14917 \text{ kg} \quad (\text{F.7})$$

Es importante mencionar que el valor de la masa modal efectiva en el punto de anclaje del TMD, $\tilde{m}_{j,e}$, es independiente de la escala utilizada en las formas modales, $\phi_j(x)$; ya que el cociente

$\frac{\tilde{m}_j}{\phi_j^2(x^*)}$ siempre se mantendrá constante.



La masa del TMD de la ecuación F.7 debe colocarse al centro del claro ($x^* = L/2$) del puente peatonal Pátzcuaro para lograr reducir las vibraciones verticales resonantes del primer modo de vibrar ante una excitación peatonal móvil. Los parámetros óptimos en un TMD ofrecen un mejor comportamiento (figura 6.6) de disipación de energía que cuando éste se sintoniza exactamente a la frecuencia de vibrar resonante de la estructura; ya que un diseño óptimo del TMD logrará reducir las vibraciones en un intervalo más amplio de frecuencias de vibrar. La frecuencia óptima del TMD, $f_{d,opt}$, de la ecuación F.7 se obtiene mediante la ecuación 6.7, tal y como se muestra en la ecuación F.8; dónde dicha frecuencia es ligeramente menor que la frecuencia resonante del puente peatonal Pátzcuaro ($\sim 95\%$ a 99% de f_1 , para $0.01 \leq m_d / \tilde{m}_{1,e} \leq 0.05$).

$$f_{d,opt} = \frac{f_1}{1 + \frac{m_d}{\tilde{m}_{1,e}}} = \frac{2.7625 \text{ Hz}}{1 + 0.01} = 2.7351 \text{ Hz} \quad (\text{F.8})$$

La rigidez óptima del TMD, $k_{d,opt}$, de la ecuación F.7 se obtiene en base a la ecuación 6.8, tal y como se muestra en la ecuación F.9.

$$k_{d,opt} = (2\pi f_{d,opt})^2 m_d = (2\pi \cdot 2.7351 \text{ Hz})^2 (145.14917 \text{ kg}) = 42866.7652 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (\text{F.9})$$

La fracción de amortiguamiento crítico óptimo, $\xi_{d,opt}$, que debe tener el TMD de la ecuación F.7, se obtiene mediante la ecuación 6.11, tal y como se muestra en la ecuación F.10.

$$\xi_{d,opt} = \frac{\sqrt{3 \left(\frac{m_d}{\tilde{m}_{1,e}} \right)}}{\sqrt{8 \cdot \left(1 + \frac{m_d}{\tilde{m}_{1,e}} \right)^3}} = \frac{\sqrt{3(0.01)}}{\sqrt{8 \cdot (1 + 0.01)^3}} = 0.060330 = 6.0330 \% \quad (\text{F.10})$$

La constante de amortiguamiento del TMD, $c_{d,opt}$, de la ecuación F.7, se obtiene mediante la ecuación 6.4, tal y como se muestra en la ecuación F.11.



$$c_{d,opt} = 2\xi_{d,opt} w_{d,opt} m_d = 2(0.060330)(2\pi \cdot 2.7351Hz)(145.1492 kg) = 300.9754 \frac{N \cdot s}{m} \quad (F.11)$$

Es posible obtener el amortiguamiento total equivalente, ξ_e , que el TMD de 145.1492 kg le proporcionará al puente peatonal Pátzcuaro, es decir, el amortiguamiento total que tendrá la estructura una vez que se coloca dicho TMD. Dicho amortiguamiento total equivalente se obtiene mediante la ecuación 6.179, tal y como se muestra en la ecuación F.12.

$$\xi_e = \frac{m_d}{2\tilde{m}_{1,e}} \sqrt{1 + \left(\frac{2\xi \tilde{m}_{1,e}}{m_d} + \frac{1}{2\xi_{d,opt}} \right)^2} = \frac{145.1492 kg}{2(14514.9170 kg)} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2(0.0045)(14514.917 kg)}{145.14917 kg} + \frac{1}{2(0.060330)} \right)^2} = 0.046210 = 4.6210 \% \quad (F.12)$$

Se tiene entonces que el TMD de 145.1492 kg colocado al centro del claro del puente peatonal Pátzcuaro, se sintonizará con la primera forma modal de la estructura y logrará incrementar su amortiguamiento estructural de 0.45 % a 4.6210 %. Los parámetros óptimos, $f_{d,opt}$, $k_{d,opt}$ y $c_{d,opt}$, del TMD de la ecuación F.7, cambiarán en función del valor propuesto de m_d , sin embargo, independientemente del valor de m_d , el TMD logrará absorber considerablemente las vibraciones resonantes por sintonizarse con la frecuencia de vibrar resonante del puente peatonal Pátzcuaro, f_1 .

La selección final del TMD para un puente peatonal se hace en función del valor menor de m_d que logre satisfacer todas las condiciones de confort para los distintos casos de carga peatonal que establecen las normas internacionales; sin embargo, suelen proponerse TMD's con valores de m_d entre 2 % y 7 % de $\tilde{m}_{j,e}$. En base al programa del apéndice E es posible obtener los parámetros óptimos para cualquier masa propuesta del TMD del puente peatonal Pátzcuaro en cualquier punto de anclaje x^* , en base a las ecuaciones F.7 a F.12, tal y como se muestra en la tabla F.3.



Tabla F.3 Parámetros óptimos para varias propuestas de TMD del puente peatonal Pátzcuaro en

$$x^* = L/2$$

$m_d / \tilde{m}_{1,e}$	$f_{d,opt}$ (Hz)	m_d (kg)	$k_{d,opt}$ $\left(\frac{N}{m}\right)$	$c_{d,opt}$ $\left(\frac{N \cdot s}{m}\right)$	ξ_e (%)
0.01	2.7351	145.1492	42868.0343	300.98	4.6210
0.02	2.7083	290.2983	84063.21	830.588	6.4753
0.05	2.6309	725.7459	198320.5526	3053.6751	10.5717
0.1	2.5114	1451.4917	361402.3293	7688.8140	16.1382
0.2	2.3021	2902.9834	607356.6922	17495.7653	26.4160

Posteriormente debe de evaluarse la respuesta dinámica del puente peatonal Pátzcuaro mediante el modelo simplificado con TMD's del capítulo 6 para cada una de las propuestas mostradas en la tabla F.3. Como ya se mencionó anteriormente, la elección final del TMD se hará seleccionando el TMD de menor masa de la tabla F.3 que logre satisfacer las condiciones de confort para todos los casos de carga peatonal móvil.



Apéndice G

Código en Matlab: Cálculo de las frecuencias verticales de vibrar de vigas Euler-Bernoulli con TMD's

Se desarrolló un programa en Matlab que permite obtener las frecuencias de vibrar de una viga Euler-Bernoulli con TMD's en base al método numérico de la bisección, el cual está basado en el teorema del valor intermedio. El teorema del valor intermedio dice que siendo $f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$ y suponiendo que $f(a) < f(b)$. Entonces para cada z tal que $f(a) < z < f(b)$, existe un $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = z$. La misma conclusión se obtiene para el caso que $f(a) > f(b)$. Básicamente el teorema del valor intermedio nos dice que toda función continua en un intervalo cerrado, una vez que alcanzó ciertos valores en los extremos del intervalo, debe alcanzar todos los valores intermedios. En particular, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces un valor intermedio es precisamente $z = 0$, y por lo tanto, el teorema del valor intermedio nos asegura que debe existir $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = 0$, es decir, debe haber por lo menos una raíz de $f(x)$ en el intervalo (a, b) .

Para el caso de vigas Euler-Bernoulli con TMD's, la función $f(x)$ es representada por el determinante de la matriz de coeficientes, $|\bar{B}|$, donde \bar{w} representa las incógnitas o raíces a obtener. Las frecuencias de vibrar del sistema vibratorio completo, \bar{w} , se obtienen al resolver la ecuación $|\bar{B}| = 0$; donde debe de cumplirse que el determinante de la matriz evaluada en a y en b tengan signos opuestos para garantizar que el valor obtenido de \bar{w} satisface la ecuación $|\bar{B}| = 0$.

Se realizó un programa en Matlab que permite obtener los valores de \bar{w} para vigas Euler-Bernoulli con distintas condiciones de apoyo con un amortiguador de masa sintonizado



localizado en cualquier punto longitudinal de anclaje, x^* . El programa pide que se le ingresen los datos de $\bar{m}, L, E, I, m_d, k_d$ y x^* , y posteriormente se deben de escoger las condiciones de apoyo del puente peatonal. Posteriormente se debe de ingresar el límite inferior del intervalo supuesto, es decir, el valor de a , para el cual se va a evaluar el determinante de la matriz de coeficientes. Luego se debe de ingresar el límite superior del intervalo supuesto, es decir, el valor de b , para el cual se va a evaluar el determinante de la matriz de coeficientes. Si el determinante evaluado en a tiene signo opuesto al valor del determinante evaluado en b , entonces el programa correrá sin problema alguno y arrojará el valor de la frecuencia de vibrar obtenida en dicho intervalo. Para frecuencias de vibrar de modos superiores debe de volver a correrse el programa y variar el intervalo $[a, b]$ donde estará la siguiente raíz o solución de la ecuación $|\bar{B}| = 0$.

Por ejemplo, para el puente peatonal Pátzcuaro sabemos que para un TMD de $m_d / \tilde{m}_{1,e} = 0.01$ (tabla 6.14), la frecuencia de vibrar del primer modo del sistema vibratorio completo es de $\bar{f}_1 = 2.7170 \text{ Hz}$, lo cual equivale a una frecuencia circular de $\bar{\omega}_1 = 16.4431 \text{ rad/s}$; mientras que la frecuencia de vibrar del segundo modo del sistema vibratorio completo es de $\bar{f}_2 = 2.8925 \text{ Hz}$, lo cual equivale a una frecuencia circular de $\bar{\omega}_2 = 18.1741 \text{ rad/s}$ (tabla 6.15). Esto quiere decir que para encontrar el valor de $\bar{\omega}_1$, debe de introducirse como límite inferior un valor $0 < a < 16.4431$; y como límite superior, un valor $16.4431 < b < 18.1741$. De esta manera el valor del determinante de la matriz de coeficientes evaluado en a tendrá signo opuesto al mismo determinante pero evaluado en b , y por lo tanto se arrojará la solución $\bar{\omega}_1$ que satisface la ecuación $|\bar{B}| = 0$. Por lo tanto, para modos de vibrar superiores debe de variarse el intervalo $[a, b]$ de frecuencias circulares de vibrar. El programa realizado en Matlab se hizo únicamente para matrices de vigas Euler-Bernoulli con varias condiciones de apoyo y un solo TMD. Por lo tanto, el programa debe ser modificado acorde a lo estipulado en el apéndice H para considerar más TMD's. El programa realizado en Matlab se muestra a continuación.



```

clear,clc

format short

%Cálculo de las frecuencias verticales de vibrar con un TMD
fprintf('\n\n');
m_distribuida=input('Introduzca la masa por unidad de longitud del puente
peatonal:');
L=input('Introduzca la longitud del puente peatonal:');
m=m_distribuida*L;
E=input('Introduzca el módulo de elasticidad del puente peatonal:');
I=input('Introduzca el momento de inercia de la sección transversal del
puente:');
md=input('Introduzca la masa del TMD:');
kd=input('Introduzca la rigidez vertical del TMD:');
xd=input('Introduzca la distancia longitudinal de ubicación del TMD:');
relacion_masas=md/m;
syms w
beta=((m_distribuida*(w^2))/(E*I))^(1/4);
phi=beta*xd;
relacion_frecuencias=w/((kd/md)^(1/2));

fprintf('\n\n');
disp('Defina las condiciones de apoyo del puente peatonal');
fprintf('\n\n');
disp('Opción 1: Simplemente apoyado');
disp('Opción 2: Doblemente empotrado');
disp('Opción 3: Empotrado en un extremo y simplemente apoyado en el otro');
disp('Opción 4: En voladizo');
fprintf('\n\n');
condiciones_contorno=input('Presione 1,2,3 ó 4 según sea el caso a elegir:');

if condiciones_contorno==1
    Matriz=[0 1 0 1 0 0 0 0 ; 0 -1 0 1 0 0 0 0 ; sin(phi) cos(phi)
sinh(phi) cosh(phi) -sin(phi) -cos(phi) -sinh(phi) -cosh(phi) 0 ; cos(phi) -
sin(phi) cosh(phi) sinh(phi) -cos(phi) sin(phi) -cosh(phi) -sinh(phi) 0 ; -
sin(phi) -cos(phi) sinh(phi) cosh(phi) sin(phi) cos(phi) -sinh(phi) -cosh(phi)
0 ; -cos(phi) sin(phi) cosh(phi) sinh(phi) cos(phi) -sin(phi) -cosh(phi) -
sinh(phi) (relacion_masas*beta*L) ; sin(phi) cos(phi) sinh(phi) cosh(phi) 0 0
0 0 ((relacion_frecuencias^2)-1) ; 0 0 0 0 sin(beta*L) cos(beta*L)
sinh(beta*L) cosh(beta*L) 0 ; 0 0 0 0 -sin(beta*L) -cos(beta*L) sinh(beta*L)
cosh(beta*L) 0];
elseif condiciones_contorno==2
    Matriz=[0 1 0 1 0 0 0 0 ; 1 0 1 0 0 0 0 0 ; sin(phi) cos(phi)
sinh(phi) cosh(phi) -sin(phi) -cos(phi) -sinh(phi) -cosh(phi) 0 ; cos(phi) -
sin(phi) cosh(phi) sinh(phi) -cos(phi) sin(phi) -cosh(phi) -sinh(phi) 0 ; -
sin(phi) -cos(phi) sinh(phi) cosh(phi) sin(phi) cos(phi) -sinh(phi) -cosh(phi)
0 ; -cos(phi) sin(phi) cosh(phi) sinh(phi) cos(phi) -sin(phi) -cosh(phi) -
sinh(phi) (relacion_masas*beta*L) ; sin(phi) cos(phi) sinh(phi) cosh(phi) 0 0
0 0 ((relacion_frecuencias^2)-1) ; 0 0 0 0 sin(beta*L) cos(beta*L)
sinh(beta*L) cosh(beta*L) 0 ; 0 0 0 0 cos(beta*L) -sin(beta*L) cosh(beta*L)
sinh(beta*L) 0];
elseif condiciones_contorno==3

```



```

Matriz=[0 1 0 1 0 0 0 0 0 ; 1 0 1 0 0 0 0 0 0 ; sin(phi) cos(phi)
sinh(phi) cosh(phi) -sin(phi) -cos(phi) -sinh(phi) -cosh(phi) 0 ; cos(phi) -
sin(phi) cosh(phi) sinh(phi) -cos(phi) sin(phi) -cosh(phi) -sinh(phi) 0 ; -
sin(phi) -cos(phi) sinh(phi) cosh(phi) sin(phi) cos(phi) -sinh(phi) -cosh(phi)
0 ; -cos(phi) sin(phi) cosh(phi) sinh(phi) cos(phi) -sin(phi) -cosh(phi) -
sinh(phi) (relacion_masas*beta*L) ; sin(phi) cos(phi) sinh(phi) cosh(phi) 0 0
0 0 ((relacion_frecuencias^2)-1) ; 0 0 0 0 sin(beta*L) cos(beta*L)
sinh(beta*L) cosh(beta*L) 0 ; 0 0 0 0 -sin(beta*L) -cos(beta*L) sinh(beta*L)
cosh(beta*L) 0];
elseif condiciones_contorno==4
Matriz=[0 1 0 1 0 0 0 0 0 ; 1 0 1 0 0 0 0 0 0 ; sin(phi) cos(phi)
sinh(phi) cosh(phi) -sin(phi) -cos(phi) -sinh(phi) -cosh(phi) 0 ; cos(phi) -
sin(phi) cosh(phi) sinh(phi) -cos(phi) sin(phi) -cosh(phi) -sinh(phi) 0 ; -
sin(phi) -cos(phi) sinh(phi) cosh(phi) sin(phi) cos(phi) -sinh(phi) -cosh(phi)
0 ; -cos(phi) sin(phi) cosh(phi) sinh(phi) cos(phi) -sin(phi) -cosh(phi) -
sinh(phi) (relacion_masas*beta*L) ; sin(phi) cos(phi) sinh(phi) cosh(phi) 0 0
0 0 ((relacion_frecuencias^2)-1) ; 0 0 0 0 -sin(beta*L) -cos(beta*L)
sinh(beta*L) cosh(beta*L) 0 ; 0 0 0 0 -cos(beta*L) sin(beta*L) cosh(beta*L)
sinh(beta*L) 0];
end

fprintf('\n\n');
Determinante=det(Matriz);

w_baja=input('Ingrese el límite inferior del intervalo supuesto:');
w_alta=input('Ingrese el límite superior del intervalo supuesto:');
Det_w_baja=subs(Determinante,w,w_baja)
Det_w_alta=subs(Determinante,w,w_alta)
fprintf('\n\n');
disp('"Si Det_w_baja >0 y Det_w_alta <0, ó Det_w_baja <0 y Det_w_alta >0 ;
entonces es correcto el intervalo supuesto"');
fprintf('\n\n');
w_media=(w_baja+w_alta)/2;

while abs(subs(Determinante,w,w_media))>0.01
    if (subs(Determinante,w,w_media))*(subs(Determinante,w,w_alta))<0
        w_baja=w_media;
    else
        w_alta=w_media;
    end
    w_media=(w_alta+w_baja)/2;
end

fprintf('\n\n La frecuencia circular de vibrar en rad/s para dicho intervalo
es:');
wj=w_media
fprintf('\n\n La frecuencia de vibrar en Hz para dicho intervalo es:');
fj=wj/(2*pi)
fprintf('\n\n El periodo de vibrar en segundos para dicho intervalo es:');
Tj=1/fj

```



Apéndice H

Matriz de coeficientes para vigas uniformes Euler-Bernoulli con múltiples TMD's

En este apéndice se muestran las matrices de coeficientes para dos y tres amortiguadores de masa sintonizados, las cuales fueron armadas por Mustafa Kemal Ozkan (2010) acorde a lo estipulado en el capítulo 6 de esta tesis; dónde:

$$\mu_j = \frac{m_{d,j}}{m} \quad (\text{H.1})$$

$$\gamma_j^2 = \left(\frac{\bar{w}}{w_{d,j}} \right)^2 = \frac{\bar{w}^2 m_{d,j}}{k_{d,j}} \quad (\text{H.2})$$

$$\theta_j = \beta L \lambda = \beta x_j = x_j \left(\frac{\bar{m} \bar{w}^2}{EI} \right)^{1/4} \quad (\text{H.3})$$

Las ecuaciones H.1, H.2 y H.3 permiten simplificar algunos términos de las matrices de coeficientes de vigas con múltiples amortiguadores de masa sintonizados; dónde j es un contador que indica el número de amortiguador de masa sintonizado al que se está haciendo referencia, μ_j es la relación entre la masa del amortiguador de masa sintonizado j ($m_{d,j}$) y la masa total de la viga ($m = \bar{m}L$), γ_j es la relación entre la frecuencia circular del sistema vibratorio completo y la frecuencia circular del amortiguador de masa sintonizado j ($w_{d,j}$), \bar{m} es la masa distribuida por unidad de longitud de la viga, y x_j es la distancia a la cual se encuentra ubicado el amortiguador de masa sintonizado j medido desde el extremo izquierdo de la viga.



Las matrices de coeficientes para una viga uniforme Euler-Bernoulli simplemente apoyada con dos y tres amortiguadores de masa sintonizados se muestran en las ecuaciones H.4 y H.5, respectivamente.

$$\begin{aligned}
 \left[\bar{B}_2 \right] = & \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & \sinh(\theta_1) & \cosh(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) & -\sinh(\theta_1) & -\cosh(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & \cosh(\theta_1) & \sinh(\theta_1) & -\cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & -\cosh(\theta_1) & -\sinh(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) & \sinh(\theta_1) & \cosh(\theta_1) & \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & -\sinh(\theta_1) & -\cosh(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & \cosh(\theta_1) & \sinh(\theta_1) & \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & \cosh(\theta_1) & -\sinh(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & \sinh(\theta_1) & \cosh(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & \sinh(\theta_2) & \cosh(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) & -\sinh(\theta_2) & -\cosh(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & \cosh(\theta_2) & \sinh(\theta_2) & -\cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & -\cosh(\theta_2) & -\sinh(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) & \sinh(\theta_2) & \cosh(\theta_2) & \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & -\sinh(\theta_2) & -\cosh(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & \cosh(\theta_2) & \sinh(\theta_2) & -\cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & \cosh(\theta_2) & -\sinh(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & \sinh(\theta_2) & \cosh(\theta_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\beta_1 l) & \cos(\beta_1 l) & \sinh(\beta_1 l) & \cosh(\beta_1 l) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\beta_1 l) & -\cos(\beta_1 l) & \sinh(\beta_1 l) & \cosh(\beta_1 l) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(H.4)



Apéndice H

Las matrices de coeficientes vigas Euler-Bernoulli simplemente apoyadas para más amortiguadores de masa sintonizados se ensamblan siguiendo el mismo patrón de las matrices mostradas en las ecuaciones H.4 y H.5. Las matrices de coeficientes para vigas Euler-Bernoulli con múltiples TMD's y diferentes condiciones de apoyo se ensamblan de la misma manera, pero sustituyendo las correspondientes matrices $[B_l]$ y $[B_r]$ de la tabla 6.1.