



**UNIVERSIDAD
NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERÍA

“VERTEDEROS LABERINTICOS”

**TESIS
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO CIVIL**

**PRESENTA:
HUGO RIVERA MARTINEZ**

DIRECTOR DE TESIS: M. en I. IGNACIO ROMERO CASTRO



Ciudad Universitaria

Abril de 2008

AGRADECIMIENTOS

Siendo más joven hubiera dicho que cualquier éxito es fruto solamente del esfuerzo personal. Pero ahora sé que cualquier éxito que he tenido se lo debo a muchísimas personas que han estado conmigo a lo largo del camino. Este trabajo demuestra la verdad de esta aseveración. Todas las personas a las que les agradezco su apoyo han sabido compartir conmigo por lo menos dos cosas: su tiempo y talento. Unos me han apoyado directamente en la ejecución de este trabajo y otros indirectamente. A ambos grupos les estoy profundamente agradecido ya que su apoyo ha sido fundamental para la consecución de esta meta.

Los que han colaborado indirectamente en este trabajo merecen un lugar especial ya que me espolearon para iniciar y continuarlo. Con las familias Piradt en Chile y Vallvé en Perú tengo una deuda impagable. Ambas familias me supieron acoger como a un hijo en mi largo peregrinar por Sur América y siempre me hicieron recordar la importancia de culminar mi educación. En los Estados Unidos las familias McNaughton y Macarthur regularmente me preguntan acerca del avance de esta tesis. A todas estas familias les agradezco que hayan creído y crean en mis sueños. El origen de esta tesis se debe al Doctor Rameshwar Singh de la Universidad de San José, en California, ya que el me sugirió el tema. Esta tesis empezó a ser una realidad gracias a la Dra. María Antonieta Fernández McNaught. Su incondicional apoyo me llevó a iniciar el trabajo y concluirlo. Este trabajo es un humilde tributo a su gran paciencia y dedicación. Mi familia también ha tenido una contribución en este trabajo de manera indirecta. El apoyo de algunos de mis familiares ha sido crucial ya que sin ellos no hubiera estudiado ingeniería. En el segundo año de secundaria iba reprobando álgebra y gracias a las incontables tardes que mi tío Luis me dedicó pude aprobar con una nota sobresaliente. Aún más importante, fue el gusto que desarrollé por las matemáticas. Mi primo Arnulfo me ayudó a desarrollar un gusto por la física que a la fecha me ayuda. En esta tesis se refleja su esfuerzo y se los agradezco de todo corazón. Raymundo Herrera un gran amigo y compañero de la Facultad quien siempre me motivó a iniciar este proyecto y me ayudó a concluirlo.

Daniel Romero destaca de manera especial ya que sus conocimientos de computación contribuyeron a la solución de innumerables problemas de programación y edición.

He estado pensando a lo largo del desarrollo de este trabajo como agradecerle a mi papá y me he dado cuenta que no tengo palabras suficientes para transmitirle todo mi agradecimiento. Es la única persona que ha estado conmigo en todas las etapas de este trabajo. Hubo ocasiones en las que me sentía molesto que me insistiese en que iniciara la tesis. Ahora me doy cuenta que tenía razón. Gracias papá!

VERTEDEROS LABERÍNTICOS

Contenido	Páginas
Abstract	3
Introducción	6
Capítulo 1 Marco teórico general	10
1.1 Antecedentes teóricos	11
1.1.1 El principio de momento	12
1.1.2 El principio de energía	15
1.1.3 Razones de la diferencia de los Principios de Momento y Energía	18
1.2 Flujo en canal lateral	19
1.2.1 Criterio de Borghei	19
1.2.2 Criterio de Hager	21
1.2.3 Criterio de Ramamurthy y Carballada	23
1.3 Cresta oblicua al flujo	24
1.4 Perfiles de Cresta y Coeficientes de Descarga en Vertedores Lineales	25
1.4.1 Valor mínimo del Coeficiente de Descarga	26
1.4.2 Cresta Afilada y Corona Plana	27
1.4.3 Perfil de un Cuarto de Circunferencia	28
1.4.4 Perfil de Media Circunferencia	29
1.4.5 Perfil Nappe	34
Capítulo 2 Marco teórico específico	36
2.1 Introducción	37
2.1.1 Suposiciones para el flujo de aguas arriba	38
2.1.2 Suposiciones para el flujo de aguas abajo e interferencia	39
2.1.3 Momentum del flujo sobre la cresta del vertedor	40
2.1.4 Análisis del canal aguas arriba	41
2.1.5 Análisis del canal aguas abajo	42
2.1.6 Sección de control aguas arriba	44
2.1.7 Interferencia de Nappe	45
2.1.8 Desarrollo del análisis	45
2.1.9 Funcionamiento bajo condiciones atmosféricas	46
2.2 Coeficientes de Descarga en Vertedores Laberínticos	47
2.2.1 Planta Triangular Cresta de un Cuarto de Circunferencia Tullis	48
2.2.2 Planta Trapezoidal Cresta de un Cuarto de Circunferencia Darvas	53
2.2.3 Planta trapezoidal y planta triangular con Cresta Afilada Taylor	54
2.3 Elementos a Considerar en el Canal de Aguas Abajo	56
2.3.1 Ondas Supercríticas	56
2.3.2 Delantales	61
2.3.3 Sumergencia	62
2.4 Interferencia de Nappe	64
2.5 Sedimentación	71
2.6 Aeración	72
Capítulo 3 Diseño	76
3.1 Parámetros Significativos para Diseño	77
3.1.1 Relación Altura del Vertedor y Carga	77
3.1.2 Magnificación	78
3.1.3 Relación Angulo y Magnificación	78
3.1.4 Eficacia	81

3.1.5	Relación Vértice y Ancho	82
3.1.6	Forma de la Cresta	83
3.1.7	Relación de la Longitud de Interferencia	83
3.1.8	Condiciones de Aproximación del Flujo hacia el Vertedor	84
3.1.9	Canal de Aguas Abajo	85
3.1.10	Coeficiente de Descarga	85
3.2	Dimensionamiento y Cuantificación	86
3.2.1	Vertedor con planta trapezoidal con cresta cuarto de circunferencia Darvas	86
3.2.2	Vertedor con planta triangular con cresta cuarto de circunferencia Tullis	91
3.2.3	Cuantificación del vertedor con planta triangular	92
Capítulo 4	Conclusiones	98
	Referencias bibliográficas	103

ABSTRACT

Abstract del primer capítulo

El primer objetivo de este capítulo es utilizar los principios de momento y energía en un canal longitudinalmente uniforme con efluentes e influentes espacialmente variables con flujo gradualmente variado. Se busca determinar las diferencias que estos principios arrojan. En el apartado 1.1.3 se explican estas diferencias. Este trabajo es el fundamento teórico de los vertedores de canal lateral y de cresta oblicua al flujo. Este estudio es importante ya que los vertedores de canal lateral y de cresta oblicua al flujo son el antecedente directo al vertedor laberíntico.

El segundo objetivo de este capítulo es proporcionar los coeficientes de descarga para los distintos perfiles utilizados en vertedores de cresta recta. Los perfiles que se describen son los siguientes: cresta afilada y corona plana; un cuarto y media circunferencia y perfil Nappe.

Abstract del segundo capítulo

Taylor en su tesis doctoral es el primero en describir con detalle el funcionamiento de un vertedor laberíntico. Taylor analiza aguas arriba y abajo las implicaciones de este tipo de vertedor.

Tullis, Darvas y Taylor proponen coeficientes de descarga en vertedores laberínticos. Tullis analiza el caso de un vertedor con planta triangular con perfil de media circunferencia. Darvas uno de planta trapezoidal con perfil de media circunferencia. Y por último Taylor analiza las plantas trapezoidal y triangular con cresta afilada. El más reciente de estos estudios es el de Tullis y es el más utilizado.

Existen tres elementos a considerar en el diseño del canal aguas abajo del vertedor. Las ondas supercríticas, los delantales y la sumergencia del a cresta. Las ondas supercríticas deben ser consideradas en el diseño ya que al existir

flujos subcríticos existe la posibilidad de de ondas elípticas. Los delantales y la sumergencia generan ineficiencias por lo que se recomienda evitarlos.

La interferencia de Nappe en la cresta del vertedor es un fenómeno particular de los vertedores laberínticos, generando una disminución del gasto. Indlekofer y Falvey proponen métodos de cálculo.

Se podría pensar que la sedimentación es un problema en este tipo de vertedores, pero esto no es así. Estos vertedores son fáciles de mantener limpios.

Una aplicación importante de este tipo de vertedores es en tratamiento de aguas residuales. La gran turbulencia que estos vertedores generan en la cresta provoca una saturación significativa del flujo.

Abstract del tercer capitulo

El objetivo de este capítulo es proporcionar los parámetros necesarios para diseñar y cuantificar un vertedor laberíntico. Se incluyen dos ejemplos de diseño. El primero es de Darvas y el segundo pertenece a Tullis. El primer caso es un vertedor con planta trapezoidal y cresta de un cuarto de circunferencia. El segundo ejemplo es de planta triangular con cresta de un cuarto de circunferencia. El tipo de vertedor que Tullis plantea es el más utilizado en la actualidad.

INTRODUCCIÓN

La función primordial de cualquier tipo de vertedor es el de servir como una obra de excedencia en presas o en estructuras de aforo para gastos pequeños en laboratorio. Los vertedores laberínticos-de cresta curva- comparten esta función con los de cresta recta, pero además proporcionan una solución económica cuando se requiere modificar un vertedor ya existente para derivar un gasto mayor. Por ejemplo, cuando se hace imperativo modificar el vertedor al ocurrir una avenida mayor que la de diseño, o cuando se desea suministrar un gasto mayor a centros urbanos u obras de riego aguas abajo estos vertedores son sumamente útiles. Es sabido que la longitud de cresta es una de las variables que se pueden manipular para incrementar el gasto. El problema surge cuando se necesita incrementar la longitud de cresta donde se encuentra el vertedor, ya que esto acarrea la creación de transiciones, excavaciones, y costos adicionales. El vertedor laberíntico se convierte en este caso en una solución idónea, ya que evita todos los problemas antes mencionados. Esto se logra porque este tipo de vertedor comprime en un espacio reducido una longitud de cresta mayor que la de un vertedor de cresta recta. Al comprimir esta mayor longitud de cresta en el canal original se logra un ahorro substancial aunado a un mayor gasto descargado. Taylor presenta un ejemplo que demuestra la gran utilidad de los vertedores laberínticos. En Argelia en la presa de Beni Badhel se logró comprimir una longitud de cresta de 1,200 metros en un canal de 80 metros de ancho con una carga de diseño de 0.5 metros. Esto proporciona un gasto de $1,000 \text{ m}^3/\text{s}$. Un vertedor de cresta recta en un canal del mismo ancho y bajo la misma carga hidráulica solamente proporciona $95 \text{ m}^3/\text{s}$. Esto quiere decir que un vertedor laberíntico proporciona aproximadamente 10 veces más gasto en un canal del mismo ancho que un vertedor de cresta recta.

El primer capítulo propone una progresión teórica de los vertedores que anteceden al vertedor laberíntico. Este capítulo inicia aplicando los principios de momentum y energía a un canal longitudinalmente uniforme con efluentes e influentes espacialmente variables. A continuación se analiza el caso de un canal lateral. Varios autores han contribuido a la descripción teórica de este tipo

de canales. Entre los que destacan Borghei, Hager y Ramamurthy y Carballada. Después se presenta el caso de un canal con cresta oblicua al flujo. La siguiente parte del capítulo se aboca a describir las características hidráulicas de los diferentes perfiles de cresta y los coeficientes de descarga respectivos para vertedores de cresta recta. Esto se hace así porque los vertedores laberínticos toman como punto de comparación a un vertedor de cresta recta. Esto es precisamente lo que se hace con el ejemplo presentado en la introducción. Es de destacar que conforme se avanza la complejidad teórica se incrementa al aplicar los principios de momentum y energía a cada tipo de vertedor.

El segundo capítulo se dedica totalmente a las características hidráulicas de los vertedores laberínticos. En la primera parte del capítulo hago una sinopsis de la tesis doctoral de Taylor. Esta tesis es esencial para la comprensión de las características hidráulicas de los vertedores laberínticos. Taylor hizo una investigación muy minuciosa y exhaustiva la cual hasta la fecha sirve como punto de partida para más recientes publicaciones. En la siguiente parte del capítulo se proporcionan los coeficientes de descarga de los vertedores laberínticos para los distintos tipos de cresta. Los coeficientes de vertedores laberínticos se correlacionan con los coeficientes de vertedores de cresta recta.

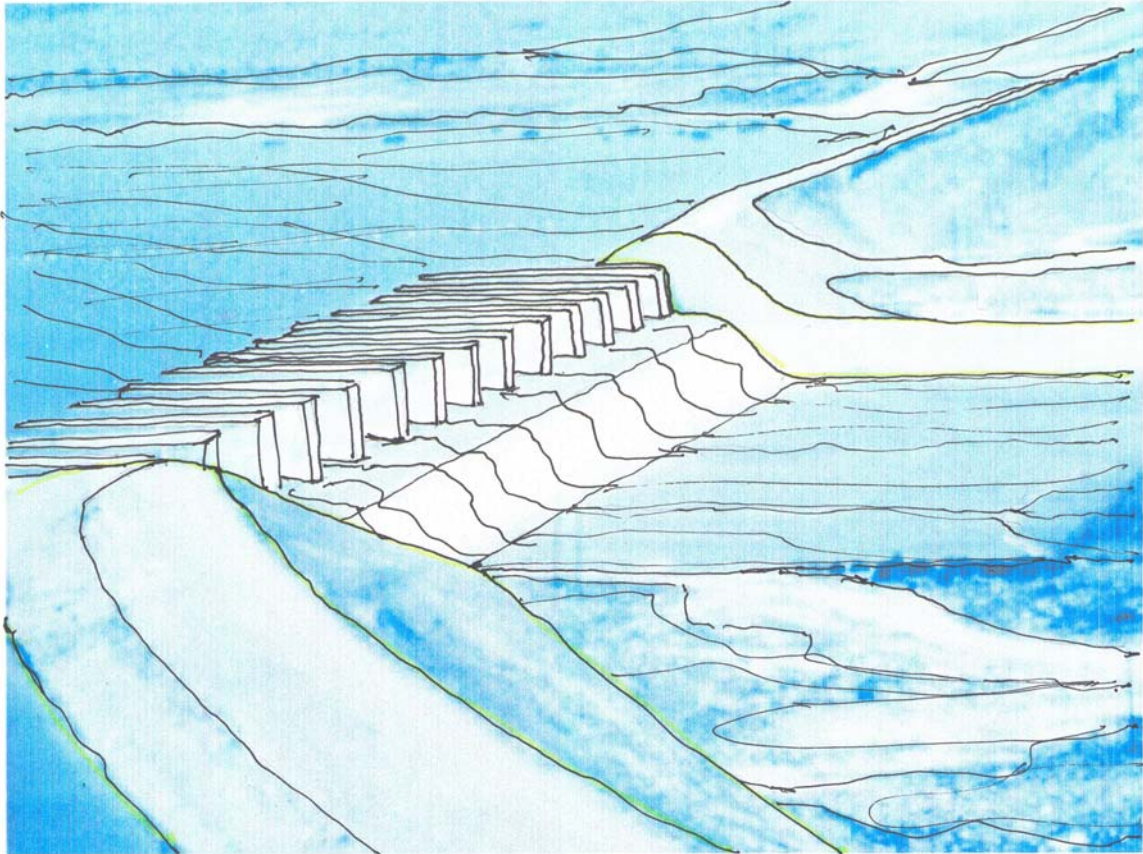
Distintos autores han propuesto coeficientes de descarga para vertedores laberínticos con los distintos tipos de cresta y geometría en planta del vertedor. Después se analizara diversos aspectos que se deben considerar en el canal aguas abajo del vertedor para que este tenga un funcionamiento óptimo. También se abordan los temas de ondas supercríticas, delantales, submergencia, e interferencia de Nappe. Por último describo los temas de sedimentación y aireación en el vertedor. Acerca del tema de aireación se debe señalar que otra de las aplicaciones de este tipo de vertedores es para tratamiento de aguas residuales ya que permite una mayor ventilación del flujo en comparación con otro tipo de vertedores.

El tercer capítulo muestra dos ejemplos de diseño aplicando los conceptos expuestos en el segundo capítulo. Otras aportaciones de este capítulo es definir los parámetros significativos para lograr un diseño apropiado de un vertedor laberíntico y señalar el tipo de geometría propia o adecuada para este tipo de vertedores. Finalmente se incluye una hoja de cálculo en Excel para agilizar el procedimiento preliminar de diseño.

En el capítulo cuatro se hace una sinopsis de la información vertida en este trabajo y se indican algunas recomendaciones de diseño.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO GENERAL



1.1. Introducción

En este capítulo se hace una descripción cronológica de la teoría que antecede al vertedor laberíntico, ya que existe una secuencia que comienza con el vertedor de canal lateral, continua con el vertedor en diagonal y culmina con el vertedor de geometría laberíntica.

Teóricamente, la base de este tipo de vertedores se encuentra en el trabajo de Yen y Wenzel, ya que en 1970 estos autores propusieron una serie de ecuaciones para flujo gradualmente variado. Por otro lado el vertedor de canal lateral ha sido abordado por Borghei, Hager, y Ramamurthy.

Los coeficientes de descarga para los vertedores de cresta recta están relacionados con los siguientes perfiles de cresta: corona plana; cuarto de circunferencia; media circunferencia y perfil Nappe, y sirven como base de comparación para los que se utilizan en los vertedores laberínticos, los cuales serán abordados en el siguiente capítulo.

Algo que se observa en el desarrollo teórico de este capítulo es la complicación progresiva de las ecuaciones de energía para cada caso, como producto de las características del flujo.

1.2. Antecedentes Teóricos

En 1970 Yen y Wenzel propusieron ecuaciones que explican el comportamiento dinámico de un fluido incompresible y viscoso, en este caso el fluido es agua, en un canal longitudinalmente uniforme con efluentes e influentes espacialmente variables. Este trabajo es la base para posteriores investigadores que realizaron estudios sobre el comportamiento de este fluido en canales laterales y diagonales.

1. Marco teórico general

La originalidad del trabajo de Yen y Wenzel se centra en abordar este tema desde una doble perspectiva, estos autores investigaron el tema utilizando los principios de energía y momentum, lo interesante de esta perspectiva es que los resultados son diferentes y esto ha sido desconcertante para muchos ingenieros hidráulicos. Al final de su investigación muestran la razón de esta diferencia.¹

1.2.1. El Principio de Momentum

El Principio de momentum se deriva de la segunda ley de Newton, aplicar esta ley a un sistema en movimiento de acuerdo a Munson², implica hacer una sumatoria de todas las fuerzas que actúan en el volumen de control incluyendo la fuerza de fricción y luego igualar esta sumatoria a la tasa de cambio ΔM del momento lineal del sistema. En el caso que nos ocupa las fuerzas a considerar son las siguientes: El peso del elemento en el eje x , el esfuerzo cortante en la frontera del elemento y las fuerzas de presión. Estas fuerzas se muestran en las ecuaciones (1), (2) y (3). La figura 1.1 muestra estas fuerzas y los ejes utilizados .

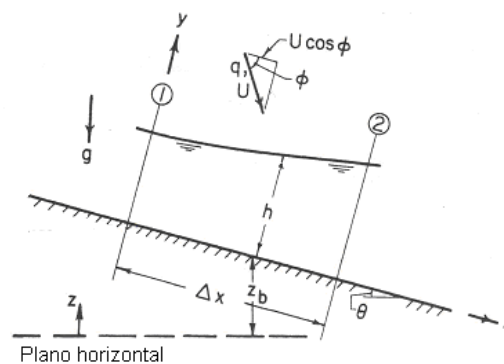


Figura 1.1³. Fuerzas y ejes para aplicar el principio de momento

¹ Yen, B.C., Wenzel, H.G., Dynamic equations for steady spatially varied flow, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1970, 96(3), p801.

² Munson, B.R., Young D.F., Okiishi, T.H., Fundamentals of fluid mechanics, John Wiley and Sons, Hoboken, USA, 2001, p.221.

³ Yen, B.C., Wenzel, H.G., Dynamic equations for steady spatially varied flow, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1970, 96(3), p.803.

1. Marco teórico general

Se omitirán los efectos debidos a turbulencia y tensión superficial, las fuerzas anteriormente mencionadas se calculan de la siguiente manera:

- S_0 es la pendiente hidráulica, dA representa el diferencial del área transversal al flujo, dx es el diferencial de la longitud, γ es el peso específico del agua. La fuerza debida al peso del fluido es:

$$\int_0^{AX} \int_A \gamma S_0 dA dx \quad (1)$$

- El promedio del esfuerzo cortante en la frontera esta definido por τ_{ox} , P es el perímetro mojado. El esfuerzo cortante total se define:

$$\int_0^{AX} \int_A \tau_{ox} P dx \quad (2)$$

- La fuerza de presión está dada por p . La fuerza debida a la presión:

$$\int_A p dx \quad (3)$$

- El siguiente paso es conocer la tasa de cambio, ΔM , del momentum lineal del sistema. Esta tasa está dada por la ecuación (4):
- El cambio de momentum en las secciones 1 y 2 está dado por M_2-M_1 , M_L representa el cambio de momentum lateral, ΔM se calcula con la siguiente expresión:

$$\Delta M = M_2 - M_1 + M_L \quad (4)$$

- El cambio de momentum entre las secciones 1 y 2 se define en la ecuación (5) donde v_x es la velocidad media en la dirección del eje x:

$$M_2 - M_1 = \int_A p v_x^2 dA \quad (5)$$

- El cambio de momentum lateral se calcula con la ecuación (6) donde U es la velocidad proveniente del flujo lateral, ϕ es el ángulo que este flujo lateral forma con el eje X, q es el gasto proveniente del flujo lateral:

$$M_L = p q \Delta x U \cos \phi \quad (6)$$

1. Marco teórico general

- Igualando la sumatoria de fuerzas que se describen en las ecuaciones (1), (2), y (3) y la tasa de cambio, ΔM , ecuación (4) se llega a la ecuación (7).

$$\frac{d}{dx} \left(\int \rho v_x^2 dA - p q U \cos \phi = \gamma S_0 dA - \tau_{0x} P - \int p dA \right) \quad (7)$$

Para llegar a la ecuación final de momentum se tienen que hacer las siguientes correcciones y suposiciones. Por convención se le agrega a la tasa de cambio, ΔM , dos factores de corrección: K y β . El factor K corrige la presión y el factor β corrige el cambio de momentum, haciendo las siguientes suposiciones:

- θ es constante
- $\cos \theta = 1$
- $U \cos \phi = 0$
- $\beta = 1$
- La distribución de presión es hidrostática
- El flujo es bidimensional, por lo que $K=0.5$.

Con las suposiciones anteriores se obtiene la ecuación (8) de momentum:⁴

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_0 - \frac{\tau_{0x}}{\gamma R} - \frac{2q v}{gA}}{1 - \frac{v^2}{gA}} \quad (8)$$

Donde:

R: radio hidráulico.

Q: flujo lateral.

A: es el área transversal al flujo.

G: gravedad.

⁴ Idem, p.802-804

1.2.2. El Principio de Energía

Este principio tiene como fundamento la primera ley de termodinámica. Esta ley establece lo siguiente: La tasa de incremento de la energía total acumulada en el sistema es igual a la tasa de adición de energía por transferencia de calor al sistema más la tasa de adición de energía por transferencia de trabajo al sistema.

En el caso particular que nos ocupa nos interesa conocer el trabajo y la transferencia de energía a través de toda la superficie que limita al volumen de control ; el trabajo realizado por la gravedad y la energía disipada dentro de este volumen.

Como primera aproximación al problema Yen y Wenzel utilizaron el principio de energía en una sola dimensión ya que es una práctica común en problemas de hidráulica. La tensión superficial se omite, así como la energía superficial. Es importante mencionar que se asume una distribución de presión hidrostática. Las variables que interesan en este caso son las siguientes:

- La tasa de disipación de energía dentro del elemento, E_D
- Cambio de energías E_1 , E_2
- Cambio de energía lateral, E_L
- Factor cinético de corrección del cambio de energía, α

Después de haber definido las variables involucradas el siguiente paso es obtener las relaciones matemáticas correspondientes, las cuales se expresan de la siguiente manera:

$$-E_D = (E_2) - (E_1) + E_L \quad (9)$$

$$E_L = \gamma q \Delta x (h_L \cos \theta + z_L + U^2/2g) \quad (10)$$

$$E_1 = \gamma Q_1 (h_L \cos \theta + z_L + \alpha_1 v^2/2g) \quad (11)$$

$$E_2 = \gamma Q_2 (h_L \cos \theta + z_L + \alpha_2 v^2/2g) \quad (12)$$

1. Marco teórico general

$$\alpha = \frac{1}{AV^3} \int v_x^3 dA \quad (13)$$

Donde:

L , carga piezométrica del flujo lateral cuando se une o se separa del flujo principal.

α_1 y α_2 : Factores de corrección.

H_{pL} carga piezométrica del flujo lateral medida con respecto al fondo del canal.

Después de varios desarrollos matemáticos con las ecuaciones (9) a (13) se obtiene la ecuación (14) la cual define el cambio del perfil de la superficie del agua, esta ecuación es para el caso particular en el que se cumplen las siguientes condiciones:

$$H_{pL} = h_L \cos \theta$$

$$U = \sqrt{\alpha V}$$

$$\cos \theta = 1$$

$d\alpha/dx$ es insignificante

Donde:

H_{pL} Carga piezométrica del flujo lateral medida con respecto al fondo del canal.

La ecuación(14) se presenta a continuación:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_0 - S_e - \alpha \frac{v(q)}{A(g)}}{1 - \frac{\alpha v^2}{g(D)}} \quad (14)$$

Donde:

S_e : gradiente de la energía disipada.

Yen y Wenzel mencionan que se pierde de vista el trabajo realizado por las fuerzas involucradas, la transformación de energía en la frontera y en el interior del fluido cuando se utiliza solamente una dimensión.

1. Marco teórico general

Para el caso de dos dimensiones uno de los factores que más peso tiene es el gradiente de energía disipada, E_2-E_1 . el cual está influenciado por las siguientes ecuaciones:

El cambio de energía cinética,

$$\int (\rho (v^2/2) v_x) dA \quad (15)$$

La tasa de cambio del trabajo de las fuerzas externas de presión en la dirección,

$$\int (\gamma y \cos \theta v_x) dA \quad (16)$$

La tasa de cambio del trabajo de las fuerzas externas de presión en la dirección x, es:

$$\int (P v_x) dA \quad (17)$$

La tasa de cambio del trabajo realizado por la fuerza de gravedad,

$$\int_0^{\Delta x} \int_0^A (A \gamma S_0 v_x) dA dx \quad (18)$$

La energía debida al flujo lateral,

$$\gamma q_0 \Delta x \left(H_{pL} + \frac{U^2}{2g} dx \right) \quad (19)$$

Finalmente el gradiente de energía se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{-dE}{dx} = \frac{-d}{dx} \int \left(\frac{\rho V^2}{2} + p + \gamma y \cos \theta \right) v_x dA + \int \gamma S_0 v_x dA + \gamma q \left(H_{pL} + \frac{U^2}{2g} \right) \quad (20)$$

Donde:

p: intensidad de la presión

Esta ecuación es una aproximación del fenómeno físico ya que involucra las siguientes suposiciones:

- El trabajo realizado por los esfuerzos de viscosidad y Reynolds en las superficies transversales y la superficie libre es mínimo.
- El efecto de turbulencia es despreciable.
- La componente en el eje X normal a la superficie libre es mínima.
- La velocidad en el eje X, v_x , es mayor que en el eje Y, v_y .

1. Marco teórico general

Estas suposiciones implican que tanto la profundidad como la velocidad en el eje X varían gradualmente. Haciendo las suposiciones antes mencionadas se llega a la ecuación final (21) que describe el gradiente de energía, la cual hace uso de dos factores de corrección, α y η . Se presenta la ecuación (21):

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_0 - S_e + \frac{q}{A v} \left(H_{pL} + \frac{U^2}{2g} - 3\alpha \frac{v^2}{2g} - \eta h \cos \theta \right) - \frac{v^2}{2g} \frac{d\alpha}{dx} - h \frac{d(\eta \cos \theta)}{dx}}{H \cos \theta - \alpha \frac{v^2}{g d}} \quad (21)$$

Donde:

η , Factor de corrección del flujo de energía potencial.

Como se puede observar esta ecuación es muy compleja que la obtenida con el principio de momentum.⁵

1.2.3. Razones de la diferencia de los Principios de Momentum y Energía

La primera razón por la que las ecuaciones de momentum y energía son diferentes es porque los factores de corrección que se utilizan son distintos, por ejemplo: el factor k es diferente del factor η ; asimismo α y β son diferentes. La segunda razón de esta diferencia es que en la ecuación de momentum sólo se consideran las componentes de la velocidad del flujo principal y lateral mientras que en la ecuación de energía se utiliza la magnitud total de la velocidad. La tercera razón es que la energía potencial no tiene ningún efecto en la ecuación de momentum pero en la ecuación de energía es fundamental. La cuarta razón es que solamente dos gradientes son comunes en ambas ecuaciones y estos se describieron en las ecuaciones (1) y (21).

⁵ Idem, p.804-807

1.3. Flujo en canal lateral

Son varios los autores que han contribuido a este tema. Los más relevantes son Ramamurthy, Hager, y Borghei. Ramamurthy en 1980 se concentra en obtener ecuaciones para flujo subcrítico, Hager en 1987 para flujo supercrítico, y Borghei en 1999 propuso una variante al trabajo de Ramamurthy. En este caso se presenta la información mas reciente, es decir, primero se describirá el trabajo de Borghei, luego se pasará al de Hager, y por último se comentará el de Ramamurthy.

1.2.1. Borghei

De manera muy sucinta Borghei presentó las ecuaciones que describen el flujo en un canal lateral. En la figura 1.2 se detallan los ejes, las fuerzas, y la dirección de flujo.

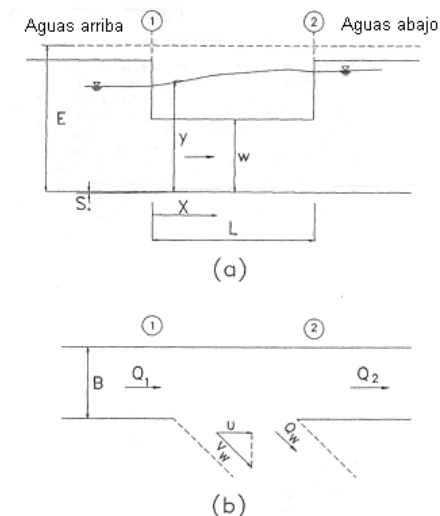


Figura 1.2. Variables en el análisis de Borghei⁶.

Borghei simplifica la ecuación de energía derivada por Yen y Wenzel. Presenta la siguiente ecuación:

⁶ Borghei, S.M., Jalili, M.R., Ghodsian, M., Discharge coefficient for sharp crested side weir in subcritical flow, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1999, 125(10), p.1052.

1. Marco teórico general

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \left(\frac{\alpha Q}{g A^2} \right) \left(\frac{dQ}{dx} \right)}{1 - \left(\frac{\alpha Q^2 B}{g A^3} \right)} \quad (22)$$

Donde:

S_f : Pendiente de la línea de la energía.

α : coeficiente de corrección de la energía cinética.

B: ancho del canal.

La siguiente propuesta de Borghei es una modificación al coeficiente de descarga de De-Marchi, C_M , para la ecuación de gasto. En donde L es la longitud del vertedor y B es el ancho del canal. Borghei⁷ está de acuerdo en que el número de Froude es importante, pero asimismo la relación L/B desempeña un rol fundamental en el coeficiente de descarga.

$$C_M = 0.7 - 0.48 F_1 + 0.3 \frac{w}{y_1} + 0.06 \frac{L}{B} \quad (23)$$

$$Q = \frac{2}{3} C_M (2g)^{1/2} (y - w)^{3/2} \quad (24)$$

Donde:

F_1 : es el número de Froude en la sección uno.

w: es la altura del vertedor, desde el nivel del terreno hasta la cresta.

y_1 : profundidad en la sección uno aguas arriba.

Es importante mencionar que este coeficiente de descarga es para flujo subcrítico, ver figura 1.3, ya que como el mismo autor menciona este tipo de flujo es muy útil para aplicaciones de ingeniería.⁸

⁷ Idem p.1053.

⁸ Borghei, S.M., Jalili, M.R., Ghodsian, M., Discharge coefficient for sharp crested side weir in subcritical flow, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1999, 125(10), 1051-1056

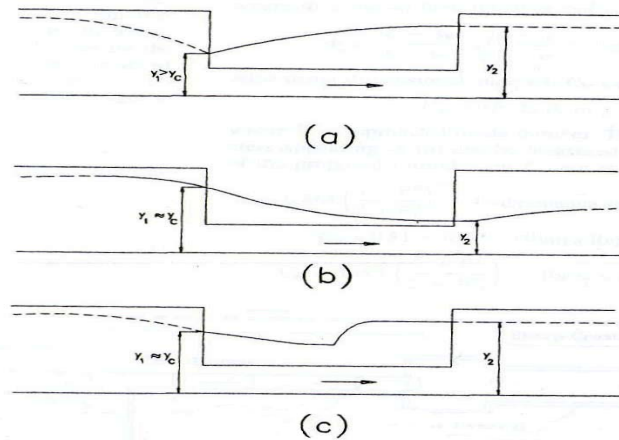


Figura 1.3. Perfil del flujo en canal lateral: (a) régimen subcrítico; (b) régimen supercrítico; (c) salto hidráulico⁹.

1.2.2. Hager

Este autor aborda el tema desde el caso particular de flujo supercrítico. Las figuras 1.4 y 1.5 sirven para clarificar las ideas de Hager y poder visualizar sus ecuaciones. Para obtener la ecuación de gasto menciona que son varios los efectos que deben considerarse son:

- La profundidad de flujo, H .
- La velocidad de aproximación, V .
- El ángulo, Φ , del efluente lateral
- La geometría del canal. En este caso con una contracción.
- La altura relativa, W , del vertedor.
- El factor, c , relativo a la cresta del vertedor.
- La profundidad, y , del flujo.
- El número de descargas laterales, n .
- El ángulo de convergencia del vertedor con el canal, θ .

⁹ Idem. P.1051.

1. Marco teórico general

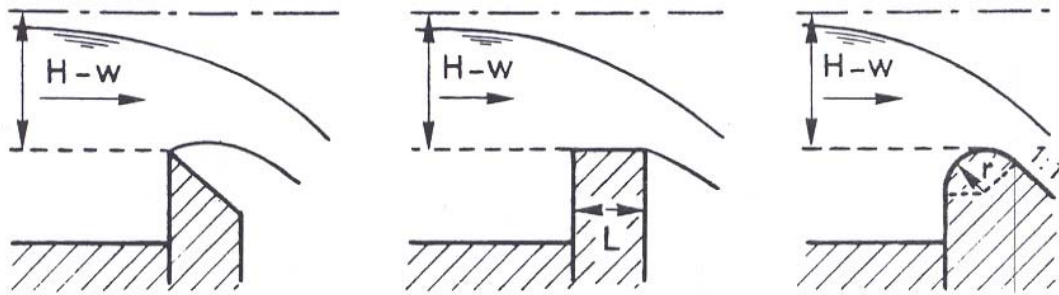


Figura 1.4. Flujo en el vertedor:(a) cresta afilada;(b)cresta ancha;(c) cresta redondeada¹⁰

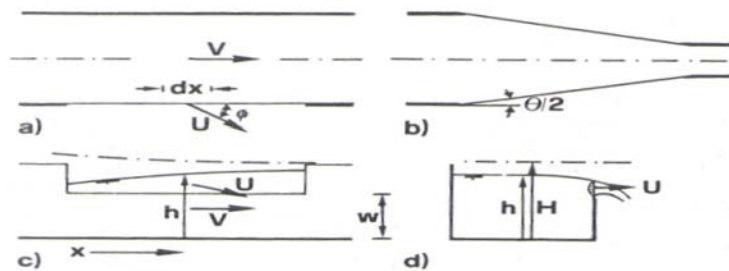


Figura 1.5. Geometría del efluente, (a)prismático;(b)no prismático;(c) sección longitudinal;(d) sección transversal.¹¹.

Dados los efectos previamente citados se llega a la expresión del gasto; es importante notar que se ha resumido el trabajo de Hager. La ecuación que se presenta a continuación no es fácil de utilizar, pero como Hager menciona es la que a su parecer mejor representa este tipo de flujo.

$$Q = \frac{3}{5} n (c) \sqrt{gH^3} \frac{1}{2} (y - W)^{3/2} \left(\frac{1 - W}{3 - 2y - W} \right)^{1/2} \left(1 - (\theta + S_0) \left(\frac{3 - 3y}{y - W} \right)^{1/2} \right) \quad (25)$$

Hager menciona que la fórmula usual para vertedores laterales es para un caso especial cuando el número de Froude tiende a cero, pero si se tiene un número

¹⁰ Hager, W.H., Lateral outflow over side weir, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1987, 113(4), p.493.

¹¹ Hager, W.H., Lateral outflow over side weir, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1987, 113(4), p.494.

1. Marco teórico general

de Froude mayor a uno los efectos mencionados previamente afectan significativamente el flujo lateral.¹²

1.2.3. Ramamurthy y Carballada

El trabajo de estos investigadores es para canales bajo régimen subcrítico en el canal de aguas arriba y con una cresta en el vertedor que alimenta al canal lateral igual o menor al canal principal. La figura 1.6 facilita la visualización de las variables involucradas en esta investigación. Las cuales se describen a continuación:

- La relación de velocidades, $\eta = V_1/V_J$.
- La relación geométrica, L/B
- El coeficiente de descarga, C_d

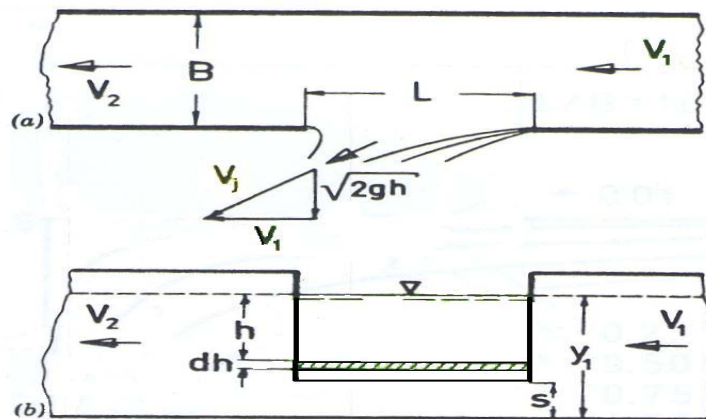


Figura 1.6. Variables, fuerzas, y planos de movimiento¹³

La relación de velocidades η depende de la velocidad en el canal principal, V_1 , y la velocidad V_J en el canal lateral. La velocidad V_J es en realidad la resultante vectorial de la velocidad V_1 y la velocidad debida a la carga hidráulica.

¹² Idem

¹³ Ramamurthy, A.S., Carballada, L., Lateral weir flow model, American Society of Civil Engineering, Journal of Irrigation and Drainage, Virginia, USA, 1980, 106(1), p.10.

1. Marco teórico general

La relación geométrica es entre el ancho del canal principal, B, y el ancho del canal lateral, L. El coeficiente de descarga depende de la relación de velocidades η .

Dadas las relaciones previamente citadas se llega a obtener el gasto de la siguiente forma:

$$Q_1 = \int V_J C_d L dh \quad (26)$$

Después de múltiples sustituciones y experimentación se llega a la siguiente expresión del gasto:

$$Q = 0.95 C_d L h_0 \left(\frac{V_J F_0^2}{3 \left(1 + \frac{2}{f F_0^2} \right)^{3/2} - 1} \right) \quad (27)$$

En la cual C_d y V_J son valores promedio. El valor de C_d varia en función del numero de Froude, la relación geométrica L/B y la altura del vertedor, S, la cual es medida con respecto al piso del canal.¹⁴

1.3. Cresta oblicua al flujo

Jain y Fischer¹⁵ en 1982 aplicaron la ecuación de energía en un canal con cresta oblicua al flujo, En la figura 1.7 se visualiza la ecuación y se hace la comparación con datos experimentales. Es posible observar que lo propuesto por estos investigadores está muy apegado a los resultados experimentales. La ecuación (28) propuesta por Jain y Fisher se presenta a continuación:

¹⁴ Ramamurthy, A.S., Carballada, L., Lateral weir flow model, American Society of Civil Engineering, Journal of Irrigation and Drainage, Virginia, USA, 1980, 106(1), 9-25.

¹⁵ Jain, S., Fischer, E.E., Uniform flow over skew side weir, American Society of Civil Engineering, Journal of Irrigation and Drainage, Virginia, USA, 1981, 108(2), 163-166.

1. Marco teórico general

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(E - y)}{\left(B_2 + (B_1 - B_2) \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right) (3y - 2E)} \frac{2C_m}{3\sqrt{E - y}} \left((y - s)^{3/2} - (B_1 - B_2) \frac{y}{L} \right) \quad (28)$$

Donde:

B_1 y B_2 : ancho del canal, con secciones 1 y 2 respectivamente.

S : altura del vertedor.

C_m : coeficiente de descarga.

E : energía específica.

La longitud del vertedor es paralelo al flujo, L .

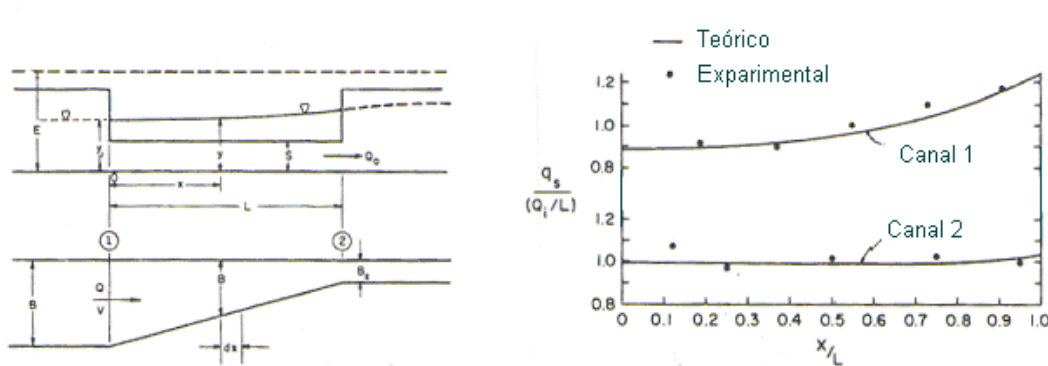


Figura 1.7. Sketch y comparación entre datos experimentales y teóricos.¹⁶

1.4 Perfiles de Cresta y Coeficientes de Descarga en Vertedores de cresta recta.

El perfil de la cresta de un vertedor es otro de los parámetros fundamentales de diseño; al estar vinculados el perfil, el coeficiente de descarga y el gasto es imperativo relacionar estos parámetros adecuadamente. Existen diversos perfiles, como: cresta afilada, corona plana, un cuarto de circunferencia, medio circunferencia, y perfil Nappe. En la figura 1.8 se presentan estos tipos de perfiles. Es importante mencionar que la carga piezométrica, h , y la carga total, H_0 , sobre la cresta del vertedor se utilizan en las siguientes ecuaciones para

¹⁶ Idem p.164.

1. Marco teórico general

obtener el gasto. En el apartado 3.1.1 se definirá cual carga, h ó H_0 , se va a utilizar en el diseño y las razones de esta elección.

Un punto a destacar en este capítulo es la razón de incluir un desarrollo de coeficientes de descarga para vertedores de cresta recta. Los autores que se refieren al tema de vertedores laberínticos que toman como referencia a los vertedores de cresta recta, y es por esta razón que se incluye en este apartado un desarrollo del coeficiente de descarga para dichos vertedores.

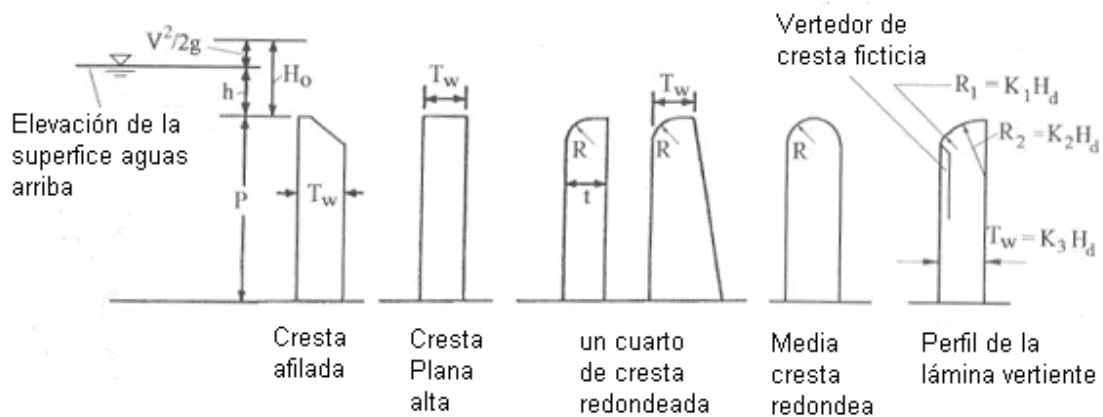


Figura 1.8. diferentes tipos de crestas: Afilada, plana, un cuarto de circunferencia, media circunferencia, Nappe.¹⁷.

1.4.1. Valor mínimo del coeficiente de descarga

Para poder saber el valor mínimo del coeficiente de descarga se utilizan la siguiente ecuación:

$$Q = C_d^{2/3} \sqrt{2g} L H_0^{3/2} \quad (29)$$

La ecuación (29) sirve para obtener el gasto. La ecuación (30) se utiliza cuando se esta hablando de una profundidad crítica¹⁸, es decir, cuando la relación P/H_0 es muy pequeña. La altura, P , de la pared del vertedor y la carga hidráulica H_0 se observan en la figura 1.8.

¹⁷ Falvey, Henry T., *Hydraulic design of labyrinth weirs*, ASCE Press, Virginia, USA, 2003. p.31.

¹⁸ Falvey, Henry T., *Hydraulic design of labyrinth weirs*, ASCE Press, Virginia, USA, 2003. p.32.

1. Marco teórico general

$$Q = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \sqrt{g} H_0^{3/2} \quad (30)$$

Al igualar las ecuaciones (29) y (30) se puede llegar a conocer el valor mínimo del coeficiente de descarga.

$$C_d^{2/3} \sqrt{2g} L H_0^{3/2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \sqrt{g} H_0^{3/2}$$

Con lo que se llega a:

$$C_d^{2/3} \sqrt{2g} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \sqrt{g}$$

$$C_d^{2/3} \sqrt{2} = (2/3)^{3/2}$$

$$C_d = 3/2 (2/3)^{3/2} 1/\sqrt{2} = 0.58$$

Este valor, 0.58, determina el mínimo coeficiente de descarga en cualquier tipo de cresta en un vertedor de cresta recta. Lo cual sirve para verificar cualquier resultado experimental, ya que no puede haber valores menores a 0.58 en cuanto a coeficientes de descarga. De cualquier forma es difícil llegar a medir este valor porque se presentan cargas hidráulicas muy bajas.¹⁹

1.4.2. Cresta Afilada y Corona Plana

En este tipo de cresta se utiliza la ecuación de gasto previamente presentada:

$$Q = C_d^{2/3} \sqrt{(2g)} L H_0^{3/2}$$

También se usa el coeficiente de Rehbock en el sistema métrico:

$$C_d = 0.605 + 0.08h/P + 1/h, \quad h \text{ (mm)} \quad (31)$$

Las ecuaciones (29) y (31) se puede utilizar directamente para obtener el gasto ya que el único parámetro necesario es la carga piezométrica sobre la cresta del vertedor, es decir, esta ecuación es útil cuando se utiliza el vertedor como instrumento de aforo.

¹⁹ Falvey, Henry T., Hydraulic design of labyrinth weirs, ASCE Press, Virginia, USA, 2003. p.32-33.

1. Marco teórico general

Con frecuencia se desconocen la carga H_0 y la velocidad sobre la cresta del vertedor lo cual trae como consecuencia que se tengan que utilizar las ecuaciones (29) y (32) como un sistema de ecuaciones.

$$H_0 = h + v^2/2g \quad (32)$$

Como puede verse las ecuaciones (29) y (32) tienen dos incógnitas: H_0 y v . Existen dos maneras de solucionar este problema, la primera es midiendo la carga h sobre el vertedor y la velocidad; de esta manera se obtiene el gasto Q y H_0 . El problema de esta solución es que se debe tener un modelo físico para poder usar esta forma de solución del problema. Si se carece del modelo, se puede recurrir al sistema de ecuaciones mencionado previamente.

1.4.3. Perfil de un Cuarto de Circunferencia

Tullis²⁰ menciona que la carga total sobre la cresta, H_t , el espesor, t , de la pared del vertedor y la forma de la cresta, en este caso, un cuarto de circunferencia, tienen una influencia decisiva en el coeficiente de descarga. En la figura 3.6 (página 88) se muestran todas las características geométricas de este tipo de vertedor. El mismo investigador menciona que el perfil de cresta de un cuarto de circunferencia es el más eficiente y práctico. Las dimensiones que fueron utilizadas en sus investigaciones para obtener el coeficiente de descarga son las siguientes. Un radio de curvatura, R , equivalente a $P/12$, siendo P la altura de la pared del vertedor. El espesor, t , de la parte superior de la pared del vertedor es igual a $P/6$. Es importante notar en la figura 1.9 que el coeficiente de descarga es pequeño en condiciones de baja carga, es decir, cuando H_t/P es menor a 0.2. Pero cuando esta relación, H_t/P , es mayor el coeficiente de descarga también crece. Este coeficiente de descarga crece hasta cierto punto y luego se hace constante, esto se aprecia en la figura 1.9. Lo que es interesante señalar es que el coeficiente se hace constante para un valor de $H_0 \cong 0.75$. Lo anterior significa que el gasto solo se va a reducir en un 25% aproximadamente cuando se tengan

²⁰ Tullis, J.P., Nosratollah, A., Waldron, D., *Design of labyrinth spillways*, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1995, 121(3), 248-250.

1. Marco teórico general

cargas altas sobre la cresta del vertedor. Con la ecuación (33) se obtiene la figura 1.9. En esta figura se puede observar que el límite superior es aproximadamente 0.85 y el inferior muy cercano a 0.58 como se demostró en el apartado 1.4.1.

$$C_d = 0.49 + 1.46 \left(\frac{H_t}{P} \right) - 2.56 \left(\frac{H_t}{P} \right)^2 + 1.44 \left(\frac{H_t}{P} \right)^3 \quad (33)$$

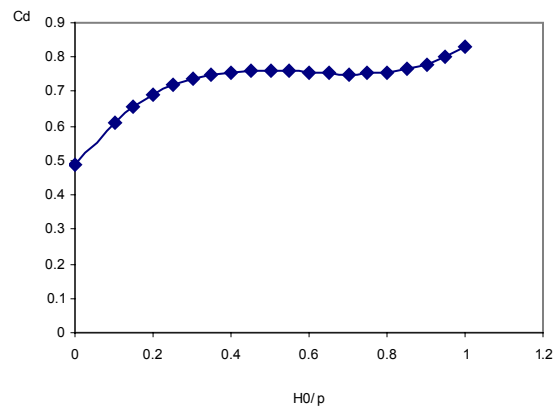


Figura 1.9. Coeficiente de descarga para un perfil de un cuarto de circunferencia.

1.4.4. Perfil de Media Circunferencia

Son varios los autores que han investigado el coeficiente de descarga para un perfil de media circunferencia. Los más relevantes son Amanian e Indlekofer. El coeficiente de descarga en este perfil se ve influenciado de manera muy significativa por el tipo de flujo que ocurre en la cresta. Existen cuatro posibilidades de flujo sobre la cresta según lo describe Falvey²¹. En su trabajo retoma las investigaciones de Amanian e Indlekofer. La primera posibilidad, es que sea a presión; la segunda, es que sea atmosférico; la tercera, es que sea cavitacional; la cuarta, es que sea subatmosférico.

²¹ Op cit., p.34-37.

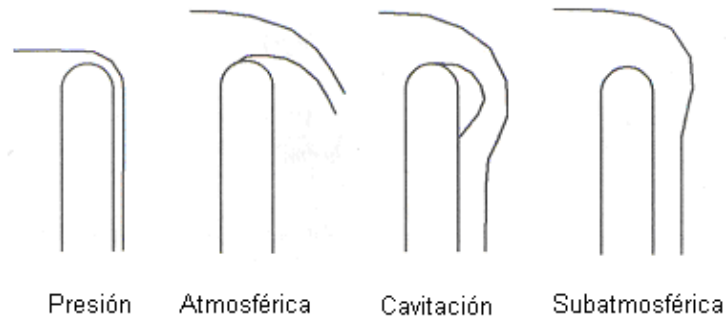


Figura 1.10. Tipos de flujo sobre la cresta del vertedor: a presión, atmosférico, cavitacional y subatmosférico²².

Una manera de entender la transición de un flujo a presión hacia uno subatmosférico es visualizando el efecto de la carga H_0 sobre la cresta. Esta carga pasa desde ser una carga menor que la de diseño hasta cargas mayores que la de diseño. El tipo de flujo que se produce en la cresta depende mayormente de la carga H_0 . Ocurre un flujo a presión en la cresta cuando la carga es menor que la carga de diseño H_0 . Al ser esta carga menor que la de diseño conlleva crear una presión mayor que la atmosférica, es decir, se crea una presión positiva a lo largo de la cresta. Cuando la carga H_0 comienza a incrementarse se llega a una condición de flujo atmosférica, la cual tiene un perfil de flujo similar al perfil Nape.

Si se continua aumentando la carga en la cresta se llega a un flujo subatmosférico. El flujo tiene la tendencia de adherirse a la pared del vertedor aguas abajo. Al establecerse un flujo subatmosférico existen dos opciones. La primera, si se logra ventilar el flujo aguas abajo se logra retornar a un flujo atmosférico. La segunda, si se ventila parcialmente el flujo aguas abajo el resultado es un flujo cavitacional. Un flujo cavitacional significa que se forman burbujas de vapor de agua en la pared del vertedor de aguas abajo, el flujo cavitacional es normalmente inestable; este tipo de flujo tiene la tendencia a variar entre un flujo atmosférico y uno subatmosférico.

²² Falvey, Henry T., Hydraulic design of labyrinth weirs, ASCE Press, Virginia, USA, 2003. p.34.

1. Marco teórico general

Otra forma de definir el flujo según Falvey es usando una ecuación que relaciona el tipo de flujo con la carga hidráulica en la cresta, H_0 presión en la cresta, P_c densidad del agua y matemáticamente esta relación se expresa en la ecuación (34).

$$B_p = \frac{(P_c/\gamma)}{Y_0} \quad (34)$$

Son tres los posibles valores de β . Esta variable, β , se define como el coeficiente de presión en la cresta. Si $\beta > 0$ se está refiriendo a un flujo a presión en la cresta. Si $\beta = 0$ se habla de un flujo atmosférico el cual como se mencionó anteriormente tiene un perfil Nappe. Si $\beta < 0$ implica un flujo subatmosférico.

El coeficiente de descarga para el perfil de media circunferencia está estrechamente vinculado con las características físicas del vertedor y el flujo. Estas características son las siguientes: El radio de curvatura, R , la altura de la pared del vertedor, P , y la carga sobre la cresta, H_0 . Estas tres variables están vinculadas como dos relaciones matemáticas, las cuales son:

$$H_0/R, H_0/P$$

La relación H_0/R es utilizada en dos situaciones. La primera, cuando se desea obtener el coeficiente de descarga para un flujo a presión sobre la cresta del vertedor. Este coeficiente de descarga se muestra en la figura 1.11

1. Marco teórico general

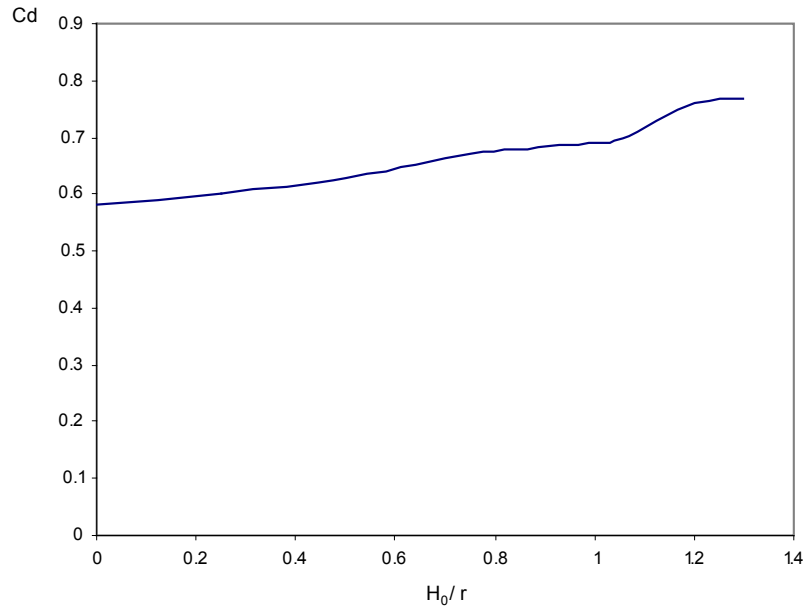


Figura 1.11. Perfil media circunferencia flujo a presión.

La segunda, cuando se busca conocer el coeficiente de descarga para un flujo subatmosférico. En figura 1.12 se muestran los valores del coeficiente de descarga para este perfil.

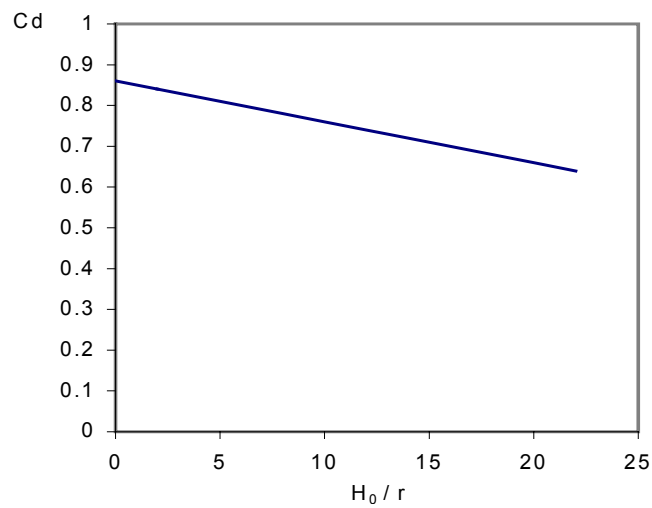


Figura 1.12. Perfil de media circunferencia flujo subatmosférico.

1. Marco teórico general

La relación entre H_0/P y el coeficiente de descarga se muestra en la figura 1.13

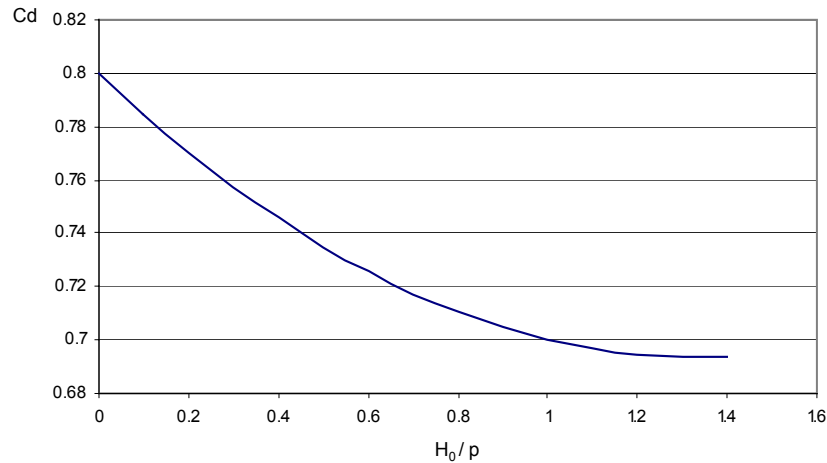


Figura 1.13. Perfil de media circunferencia flujo aireado.

El flujo cavitacional, como se mencionó previamente, es de carácter transitorio por lo cual el valor del coeficiente de descarga tiende a variar, las variaciones del coeficiente de descarga para este flujo están entre los valores correspondientes al flujo atmosférico y subatmosférico pero como se explicó previamente estos flujos, atmosférico y subatmosférico, utilizan distintas relaciones, al ser estas relaciones diferentes se deben hacer equivalentes para poder ser comparadas. El trabajo de Indlekofer y Rouve²³ se observa claramente que existen diferencias con el trabajo de Amanian ya que los valores del coeficiente de descarga no son iguales, Amanian se encargó de analizar los coeficientes de descarga para flujo atmosférico y subatmosférico²⁴. Comparando los trabajos de Amanian e Indlekofer se llega a pensar que para flujos atmosféricos y subatmosféricos Amanian podría proporcionar mejores valores del coeficiente de descarga en la figura 1.12 Amanian dado un flujo subatmosférico proporciona un coeficiente de descarga de 0.77 para una relación H_0/R de 10. Siendo el flujo atmosférico se observa en la figura 1.13 que el coeficiente de descarga es igual a 0.72 para una relación H_0/P de 0.60, con flujo a presión Indlekofer proporciona los valores del coeficiente de descarga.

²³ Indlekofer, H., Rouve, G., Discharge over polygonal weirs, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1975, 101(HY3), 385-401.

²⁴ Amanian, N., (1987). "Performance and design of labyrinth spillways." MSc thesis, Utah State University, Logan, Utah. p

1. Marco teórico general

Por ejemplo, Indlekofer en la figura 1.11 con una relación de H_0/R 0.60 el coeficiente de descarga es 0.65.

1.4.5. Perfil Nappe

Este tipo de cresta trata de seguir el perfil de una cresta Nappe atmosférica, es decir, aireada (figura 1.14). Si se puede seguir este perfil con una carga hidráulica; esta es llamada carga de diseño, H_d . Al variar la carga hidráulica en la cresta implica que se puede ir desde una condición en la cual exista presión en la cresta hasta una en la que se cree una presión subatmosférica en la misma. El fenómeno es muy similar al discutido en el caso de los vertedores con cresta de media circunferencia. El coeficiente de descarga para esta cresta se muestra en la figura 1.15.

Las características geométricas dependen de la velocidad del flujo, la carga H_0 y de la inclinación de la pared del vertedor aguas arriba. Geométricamente esta cresta se calcula con dos circunferencias de radios $R_1 = K_1 (H_d)$, $R_2 = K_2 (H_d)$, $T_w = K_3 (H_d)$. De acuerdo al USBR²⁵ los coeficientes $K_1 = 0.530$, $K_2 = 0.235$ y $K_3 = 0.284$ para el caso que se tenga una pared vertical aguas arriba y una velocidad cercana a cero.

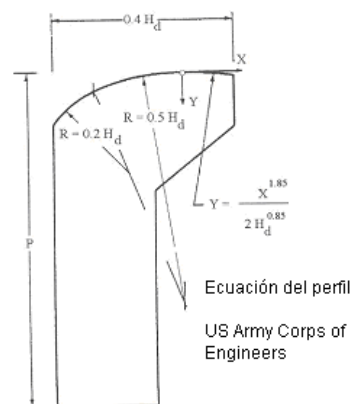


Figura 1.14. Cresta Nappe o cresta Ogee²⁶

²⁵ USBR (1987), "Design of Small Dams." USBR, Denver : U.S. Govt. Print. Office. p.409-416.

²⁶ Megalhaés, A.P. "Labyrinth weir spillway" 15th Congress ICOLD, Vol.VI Q59-R24.Laussane,1985.

1. Marco teórico general

De acuerdo con Falvey la cresta Ogee presenta dos problemas. El primero, funciona óptimamente solamente para la carga de diseño, H_d . El segundo, presenta interferencia de flujo cuando se siguen las recomendaciones de Megalhaés porque esta cresta soporta el flujo a mayor distancia incrementando la interferencia.²⁷

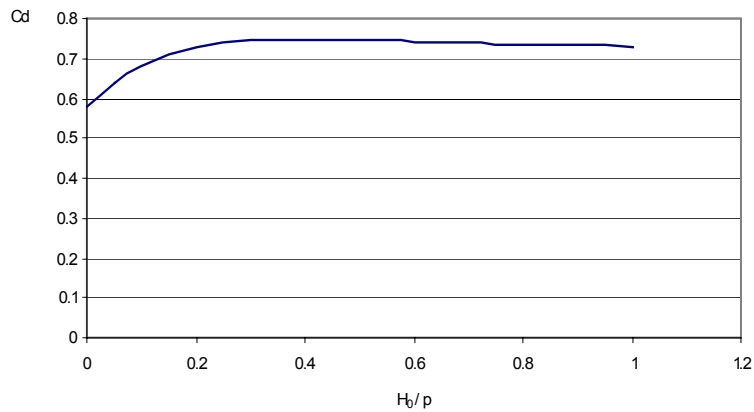
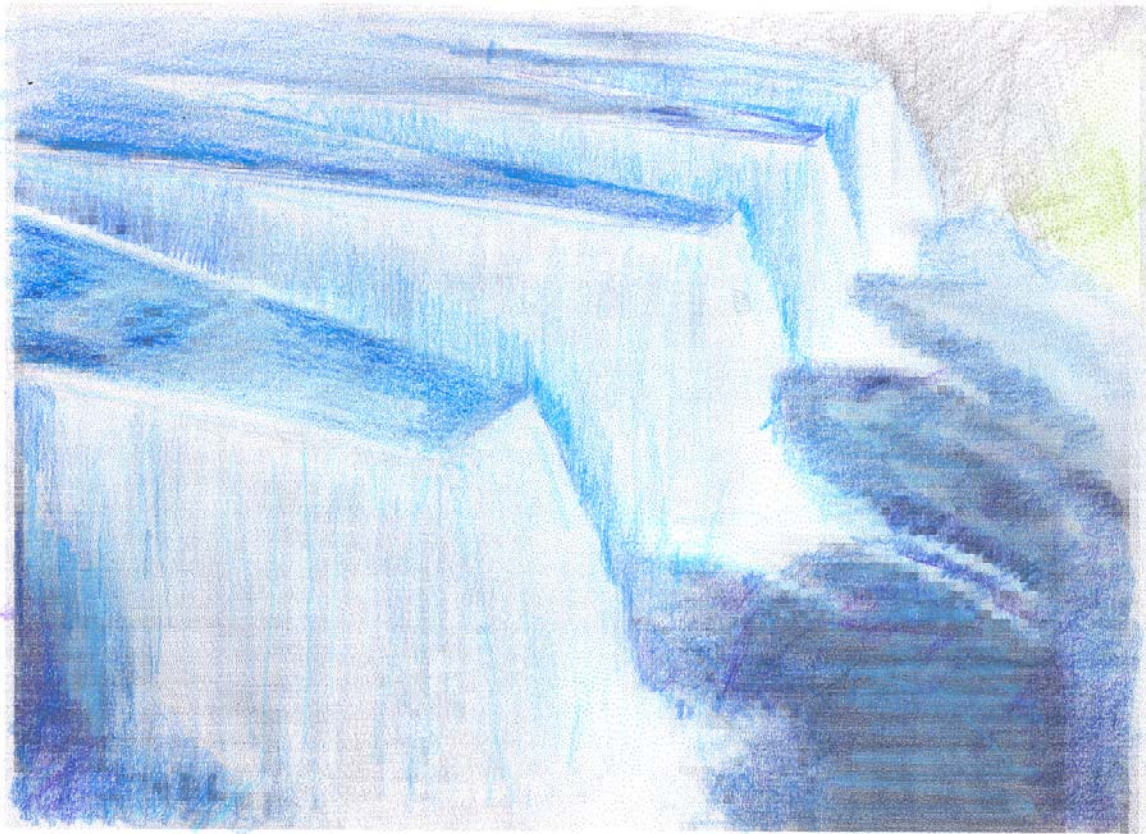


Figura 1.15. Perfil Nappe.

²⁷ Idem, p.38.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO ESPECÍFICO



2.1. Introducción

Taylor es el primero en producir en 1968 una tesis doctoral dedicada totalmente al estudio de vertedores laberínticos. Es una investigación exhaustiva, pero para estas fechas muchos autores han propuesto mejoras a los conceptos que expuso Taylor.

El capítulo doce de la tesis de Taylor está dedicado exclusivamente a la teoría de este tipo de vertedores. Este capítulo es una referencia obligada para tratar de comprender el comportamiento teórico de un vertedor laberíntico. Han pasado más de 40 años desde que Taylor publicara su tesis y nadie ha propuesto una ecuación que describa a cabalidad el fenómeno hidráulico en un vertedor laberíntico con mayor precisión que la utilizada por Taylor. La razón más plausible de esta falta de literatura tiene que ver con la complejidad del fenómeno. Salta a la vista en la solución que Taylor propone el uso de coeficientes empíricos para poder lograr una solución teórica aproximada.

El método de solución que Taylor plantea se basa en hacer un análisis teórico aguas arriba del vertedor asimismo como aguas abajo. Los detalles teóricos de este análisis son los siguientes:

- Cálculo de la ecuación de momentum del flujo
- Condiciones del flujo aguas arriba y análisis matemático
- Condiciones del flujo aguas abajo y análisis matemático
- Determinación de la sección de control aguas arriba
- Interferencia de Nappe

El desarrollo del análisis se presenta a continuación:

- Análisis bajo flujo aireado en la cresta del vertedor
- Evaluación del coeficiente por pérdida de energía
- Evaluación de la importancia de la interferencia de flujo

2. Marco teórico específico

2.1.1. Suposiciones para el flujo de aguas arriba

Taylor en el capítulo doce de su tesis proporciona una representación teórica del flujo en vertedores laberínticos¹ para poder hacer los cálculos que se requieren es indispensable hacer varias suposiciones con respecto al flujo, la primera tiene que ver con asumir un régimen subcrítico en la sección de aguas arriba; esto conlleva que la sección final de aguas abajo sea una sección de control que lamentablemente, en la copia de la tesis de Taylor que se obtuvo las gráficas correspondientes a las secciones de control no se encontraban ahí, razón por la cual no se incluyeron otras secciones de control. Otra suposición es la posición de una sección de control “O” equidistante de las paredes del vertedor y del vértice, ver figura 2.1.

La razón para esta suposición tiene que ver con la magnificación en la zona de la sección de control “O” al tener esta sección una magnificación muy reducida se puede asumir que el flujo esta dado por la ecuación general de un vertedor, $Q = C_d L H^{3/2} \sqrt{2g}$, tomando en cuenta que la longitud L es la de la cresta del vertedor.

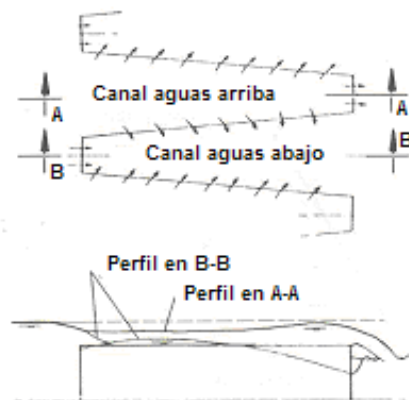


Figura 2.1. Perfil del flujo en la sección de control equidistante de las paredes del vertedor²

¹ Taylor, G., The performance of labyrinth weirs, PhD thesis, University of Nottingham, Nottingham, England, 1968. p.127-131.

² Falvey, Henry T., Hydraulic design of labyrinth weirs, ASCE Press, Virginia, USA, 2003. p.41.

2. Marco teórico específico

La carga en la sección “O” es propuesta, lo que da como resultado el gasto en esta sección al tener datos de la sección “O” se puede obtener las condiciones de flujo en la sección 3, siendo esta la entrada del canal.

El flujo q se define como el gasto por unidad de longitud de canal sobre los vértices y se asume como dependiente de la carga hidráulica aguas arriba del vertedor lo que implica utilizar un método iterativo para calcular lo que pasa en la sección 4. El método que Taylor utiliza es el de aproximaciones sucesivas, estas suposiciones implican un flujo aireado sin interferencia aguas abajo.

2.1.2. Suposiciones para el flujo de aguas abajo e interferencia

Taylor³ comenta que el perfil aguas abajo depende del flujo que pasa por la cresta del vertedor y este depende de las condiciones de flujo en el canal, como se podrá observar es un problema de características iterativas; lo anterior implica que cualquier intento de solución respecto a la interferencia de flujo debe pasar por un análisis en condiciones aguas arriba para poder determinar el perfil aguas abajo. Para realizar el análisis aguas abajo, Taylor se basa en sus resultados experimentales, estos demuestran que el desempeño de un vertedor laberíntico es independiente de la profundidad del flujo del canal aguas abajo; la única restricción es que la carga hidráulica no supere la cresta del vertedor. Entonces, se supone que la carga hidráulica aguas abajo es exactamente la altura de la cresta del vertedor. Esta suposición permite que el análisis se realice bajo condiciones de flujo subcrítico para la mayor parte del rango de gastos, si el flujo en el canal de aguas abajo excede la altura de la cresta se demuestra que hay interferencia, esto lleva a corregir por interferencia el análisis del perfil aguas arriba y sirve para recalcularlo hasta que en dos ciclos sucesivos sea similar por la tanto se acepta.

³ Idem, p. 131-136.

2. Marco teórico específico

2.1.3. Momentum del flujo sobre la cresta del vertedor

Taylor⁴ inicia su investigación con la ecuación desarrollada por Nimmo. La investigación que Nimmo realizó tiene que ver con el desarrollo de una ecuación que asume un canal estrecho con un vertedor lateral. Esto implica una velocidad igual en la cresta del vertedor, pero en el caso de un vertedor laberíntico el flujo se acelera conforme se aproxima de manera perpendicular a la cresta del vertedor, para simplificar el cálculo Taylor hace las siguientes suposiciones:

$$m = \int \frac{1}{g} w_s v dq \quad (35)$$

- La componente horizontal la cual es normal a la cresta se mantiene constante. Al existir un flujo atmosférico esta suposición es válida.
- La relación velocidad-presión son similares para todo las relaciones carga, h-altura de cresta, p.
- Existe un flujo atmosférico en todo el Nappe y el plano vertical.

La ecuación (35) es el punto de partida para determinar el momentum del flujo.

- w_s = peso específico del agua
- q = flujo unitario por longitud de cresta
- v = velocidad normal a la cresta
- g = aceleración local de la gravedad

$$dm = \frac{1}{g} w_s v dq \quad (36)$$

Después de varias suposiciones basadas en la investigación de otros autores Taylor llega a determinar que la ecuación (37) rige el momentum cuando existe un flujo aireado.

⁴ Idem, p. 136-141.

2. Marco teórico específico

$$V_h = \frac{1}{g} (q w_s) (V_u \cos^2 \alpha + v' \sin \alpha) \quad (37)$$

Donde:

V_h : componente horizontal efectiva de la velocidad en la dirección longitudinal.

V_u : vector velocidad en la dirección longitudinal

v' : velocidad efectiva normal a la cresta del vertedor

Ahora, cuando el flujo no es aireado la ecuación (38) rige.

$$V_h = \frac{1}{g} (q w_s) (V_u \cos^2 \alpha + v'_d \sin \alpha) \quad (38)$$

Donde:

V'_d : velocidad efectiva en la cresta bajo condiciones de ahogamiento.

2.1.4. Análisis del canal aguas arriba

En esta sección el objetivo de Taylor⁵ es determinar las fuerzas que intervienen entre las secciones 1 y 2 del canal aguas arriba utilizando el concepto de momentum, Después de hacer varias suposiciones y manipulaciones algebraicas se llega a la ecuación (39), para su solución requiere emplear el método de aproximaciones sucesivas de Newton.

Para efectuar este análisis Taylor hace el siguiente planteamiento:

- La existencia de un flujo uniforme.
- Velocidades horizontales en el flujo. Esto quiere decir que la velocidad que se manifiesta en el canal se desplaza independiente del fondo del mismo.
- Existe una presión hidrostática a todo lo largo del canal.
- El flujo esta delimitado por paredes verticales en la cresta del vertedor
- La superficie del liquido es horizontal en todas las secciones a considerar.
- Las perdidas pro fricción son poco significativas.

⁵ Idem, 141-144.

2. Marco teórico específico

- El Momentum del flujo esta determinado por las ecuaciones presentadas en el apartado 2.1.3
- El flujo entre dos secciones es determinado por el promedio de la carga hidráulica. El peso específico del agua se desprecia ya que algebraicamente se puede cancelar de todas las ecuaciones.

$$\Delta y' = \Delta y - \frac{f(\Delta y)}{f'(\Delta y)}$$

$$f(\Delta y) = F_2 - F_1 - F_s \text{ sen } \alpha - G \tan \phi - M_1 - M_3 + M_2 = 0$$

$$f'(\Delta y) = \frac{(dF_2 - dF_1 - dF_s \text{ sen } \alpha - dG \tan \phi - dM_1 - dM_3 + dM_2)}{d\Delta y} \quad (39)$$

Donde:

F_1 : Fuerza horizontal sección uno.

F_2 : fuerza horizontal sección dos.

F_3 Fuerza debida a las paredes laterales.

M_1 : Momentum sección uno.

M_2 : Momentum sección dos.

M_3 : Componente del momentum debido al desbordamiento.

Con estas ecuaciones se obtiene Δy , siendo $\Delta y = (y_1 - y_2)$ para una sección determinada.

2.1.5. Análisis del canal aguas abajo

El objetivo de Taylor⁶ es determinar las fuerzas que intervienen entre las secciones 5 y 6 del canal aguas abajo, utilizando nuevamente el concepto de momentum y este análisis es similar al anterior, pero algunas de sus hipótesis cambian y a continuación se presentan estas.

- La existencia de un flujo uniforme

⁶ Idem, p.144-146.

2. Marco teórico específico

- Velocidades paralelas al fondo del canal.
- Existe una presión hidrostática a todo lo largo del canal.
- Las pérdidas por fricción son poco significativas.
- El momentum del flujo esta determinado por las ecuaciones presentadas en el apartado 2.1.3
- La componente vertical de la velocidad se puede despreciar. Esto se justifica, según Taylor, porque se supone que el flujo ha caído una distancia vertical mínima.
- El peso específico del agua se desprecia ya que algebraicamente se puede cancelar de todas las ecuaciones.

En esta parte del análisis es importante mencionar que, según Taylor, el objetivo de esta investigación no es necesario proporcionar una información completa acerca del flujo aguas abajo sino mas bien determinar el efecto que este pueda tener en el flujo aguas arriba. En el apartado 2.1.2 se mencionó la interdependencia del flujo de aguas abajo con el de aguas arriba.

La ecuación (40) es el punto de partida del método de aproximaciones sucesivas.

$$f(\Delta y) = F_1 \cos \phi - F_2 \cos \phi + G \operatorname{sen} \phi - F_s \operatorname{sen} \alpha \cos \phi - M_2 + M_3 \cos \phi + M_1 = 0 \quad (40)$$

Después de hacer dichas estas y un cúmulo de manipulaciones algebraicas se obtiene la ecuación (41) aunado a la utilización del método de aproximaciones sucesivas de Newton, a continuación se presenta esta ecuación:

$$\Delta y' = \Delta y - \frac{f(\Delta y)}{f'(\Delta y)}$$
$$f(\Delta y) = F_1 \cos \phi - F_2 \cos \phi + G \operatorname{sen} \phi + F_s \operatorname{sen} \alpha \cos \phi - M_2 + M_3 \cos \phi + M_1 = 0$$
$$f'(\Delta y) = \frac{d(F_1 \cos \phi - F_2 \cos \phi + G \operatorname{sen} \phi + F_s \operatorname{sen} \alpha \cos \phi - M_2 + M_3 \cos \phi + M_1)}{d\Delta y} \quad (41)$$

2. Marco teórico específico

2.1.6. Sección de control aguas arriba

Este apartado proporciona las ecuaciones más importantes del trabajo de Taylor⁷, al comparar estas ecuaciones con las de los otros tipos de vertedores expuestos en el primer capítulo se puede observar la complejidad y el mayor número de teorías que propuso para lograr obtenerlas.

En el apartado 2.3.2 (página 61) los delantales pueden causar problemas, en el caso de la sección de control esto se manifiesta claramente y Taylor observa que existe una gran dificultad para aplicar el análisis cuando se han colocado delantales ya que estos provocan un régimen crítico en el canal aguas arriba; pero de acuerdo con Taylor se puede asumir que el flujo en el canal aguas arriba se efectúa bajo condiciones de energía constante.

La ecuación (42) refleja lo expuesto anteriormente.

$$H = z + y + \frac{Q^2}{2gw^2 y^2} \quad (42)$$

Derivando con respecto a x se obtiene la expresión (43):

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{Q}{gw^2 y^2} \frac{dQ}{dx} - \frac{Q^2}{gw^2 y^3} \frac{dy}{dx} - \frac{Q^2}{gw^3 y^2} \frac{dw}{dx} = 0 \quad (43)$$

La expresión (44) proporciona una relación entre el gasto y el diferencial con respecto al eje x. Esta se presenta a continuación:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{2}{\cos \alpha} \frac{2}{3} C h^{3/2} \sqrt{2g} \quad (44)$$

Donde:

C: coeficiente de descarga del vertedor

⁷ Idem, p.146-148.

2. Marco teórico específico

Es posible observar que las incógnitas son: “x” y “h”. Pero, si se define “h” es posible determinar “x”. Al hacer esto se determina la sección de control. Esta sección sirve como el punto de inicio para el análisis de aguas arriba.

2.1.7. Interferencia de Nappe

Taylor⁸ calculó la interferencia de Nappe que se genera en vertedores laberínticos con planta triangular, al ser muy complejo el fenómeno en vertedores con planta rectangular o trapezoidal Taylor menciona que no los va a describir en su tesis. Taylor hizo cálculos para cuantificar el efecto de interferencia, pero en el modelo matemático no fue incorporado este fenómeno, de cualquier manera en la actualidad otros autores han propuesto maneras de calcular este fenómeno. En el apartado 2.4 se describen dos trabajos que tratan de resolver el problema de interferencia de Nappe.

2.1.8. Desarrollo del análisis

En este capítulo se menciona que la gran complejidad del problema requiere el uso de coeficientes empíricos para una solución que sea lo suficientemente aproximada, la cuestión es de resaltar que Taylor resuelve el caso de un vertedor laberíntico con flujo aireado y sin interferencia.

Taylor menciona que estos coeficientes fueron introducidos en el modelo matemático para poder obtener resultados suficientemente cercanos a los experimentales, en su tesis incluye un diagrama de flujo donde indica el uso de estos coeficientes.

⁸ Idem 148-150.

2. Marco teórico específico

2.1.8.1. Funcionamiento bajo condiciones atmosféricas

Los coeficientes que tienen una importancia decisiva en el funcionamiento del vertedor investigado por Taylor⁹ bajo estas condiciones se describirán a continuación. Lo manjo de tal manera que los resultados experimentales y las curvas teóricas tuvieran una similitud en el programa de cómputo. Por lo tanto, los datos físicos del vertedor y los coeficientes son parte integral del algoritmo.

El coeficiente k_T es utilizado para asemejar el flujo teórico y real en el caso de cargas hidráulicas importantes en la cresta del vertedor, es importante recalcar que el flujo analizado no tiene interferencia de Nappe. Taylor propone que este coeficiente sea igual a 1.5, esto significa que la velocidad del flujo en vertedores laberínticos es 1.5 veces mayor que la ecuación para vertedores de cresta recta, es decir, este coeficiente multiplica la carga de velocidad por 1.5. El único problema se presenta con cargas hidráulicas bajas ya que incrementa la discrepancia entre los resultados experimentales y los teóricos.

El coeficiente k_2 trata de introducir el efecto de la velocidad de aproximación al vertedor, la contribución de este coeficiente es poco significativa ya que, de acuerdo con Taylor, el efecto en el análisis es muy pequeño. Esto es así ya que el coeficiente k_2 multiplica a $0.08 h/p$ en la ecuación que define el coeficiente de descarga del vertedor que es igual a:

$(0.605 + 0.08(k_2)(h/p) + 1/(320h - 3))(k_3)$. Siendo la relación h/p muy pequeña e implica que la contribución del coeficiente k_2 sea mínima.

El coeficiente de descarga k_3 es un valor importante ya que este multiplica a toda la ecuación y busca tomar en cuenta el efecto de flujo lateral, el valor asignado a $k_3 = 0.9$, esto es así ya que Taylor menciona que otros autores estiman que el coeficiente de descarga se ve reducido en un 10% cuando existe

⁹ Idem p.150-154.

2. Marco teórico específico

un flujo lateral; de manera similar al coeficiente k_1 este coeficiente desempeña un papel importante a cargas hidráulicas relevantes, pero a bajas cargas tiende a incrementar la desviación entre la curva teórica y experimental. Para determinar la pérdida de energía por contracción o expansión aguas arriba del vertedor se utilizaron dos coeficientes. Para tomar en cuenta pérdidas por contracción $h_{p_{cont}} = (k_4 V_3^2)/(2g)$ se utiliza el coeficiente k_4 . Taylor propone que $k_4 = 0.2$ aunque menciona que otros autores proponen valores cercanos a 0.1, como Formica. Taylor en su investigación delimita la aplicabilidad de este coeficiente para condiciones de flujo atmosférico y relaciones h/p con valores pequeños, además menciona que estos coeficientes (k_3 , k_4 y k_5) tienen el efecto de reducir la discrepancia entre los resultados experimentales y el programa de cómputo. También describe que en cuanto aparece interferencia del flujo aguas abajo la buena correlación que este coeficiente proporciona desaparece, las pérdidas por expansiones fueron tomadas en cuenta por el coeficiente k_5
 $h_{p_{exp}} = (k_5 (V_3 - V_4))/(2g)$.

Asimismo se refiere que los resultados experimentales muestran que el funcionamiento del vertedor es independiente de la profundidad aguas abajo, como conclusión a este apartado, Taylor describe que lo mas importante para una buena correlación entre las curvas teórico y prácticas bajo un flujo atmosférico es la utilización de los coeficientes por pérdida de energía debido a contracción y expansión. Ya que estos coeficientes probaron tener el mayor impacto en las soluciones obtenidas por el programa.

2.2. Coeficientes de Descarga en Vertedores laberínticos.

Los coeficientes de descarga en vertedores laberínticos, se clasifican de acuerdo con la sección:

- Planta Triangular Cresta de un Cuarto de Circunferencia Tullis
- Planta Trapezoidal Cresta de un Cuarto de Circunferencia Darvas

2. Marco teórico específico

- Planta trapezoidal y planta triangular con Cresta Afilada Taylor

Actualmente el coeficiente de descarga más utilizado es el relacionado con el vertedor de planta triangular de Tullis.

2.2.1. Planta Triangular Cresta de un Cuarto de Circunferencia Tullis

En 1995 Tullis¹⁰ obtiene valores del coeficiente de descarga que actualmente son los más utilizados para vertedores laberínticos de planta triangular con cresta de un cuarto de circunferencia.

El coeficiente de descarga es una de las variables más importantes para calcular el gasto, la figura 3.6, (página 88) muestra la geometría de este tipo de vertedor y dicho coeficiente depende de las siguientes variables:

- La configuración de la cresta
- El espesor de la pared, t , y el ancho del vértice A
- La relación Ht/P
- Aireación

En el apartado 1.4.3 se presentó la figura 1.9 que corresponde al perfil de un cuarto de circunferencia para vertedores lineales con aireación. Esta figura es de gran ayuda ya que proporciona los límites inferior y superior, 0.58 y 0.85 respectivamente, para los valores del coeficiente de descarga en vertedores laberínticos la ecuación de gasto que Tullis utiliza es:

$$Q = C_d \frac{2}{3} \sqrt{2g} L H_0^{3/2} \quad (44')$$

Las ecuaciones en las cuales esta basada la figura 2.2 se presentan a continuación:

¹⁰ Tullis, J.P., Nosratollah, A., Waldron, D., Design of labyrinth spillways, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1995, 121(3), 249-251.

2. Marco teórico específico

$$C_d = 0.49 - 0.24 \left(\frac{Ht}{P}\right) - 1.2 \left(\frac{Ht}{P}\right)^2 + 2.17 \left(\frac{Ht}{P}\right)^3 - 1.03 \left(\frac{Ht}{P}\right)^4 ; \alpha = 6^\circ \quad (45)$$

$$C_d = 0.4 + 1.08 \left(\frac{Ht}{P}\right) - 5.27 \left(\frac{Ht}{P}\right)^2 + 6.79 \left(\frac{Ht}{P}\right)^3 - 2.83 \left(\frac{Ht}{P}\right)^4 ; \alpha = 8^\circ \quad (46)$$

$$C_d = 0.49 + 1.06 \left(\frac{Ht}{P}\right) - 4.43 \left(\frac{Ht}{P}\right)^2 + 5.18 \left(\frac{Ht}{P}\right)^3 - 1.97 \left(\frac{Ht}{P}\right)^4 ; \alpha = 12^\circ \quad (47)$$

$$C_d = 0.49 + 1.00 \left(\frac{Ht}{P}\right) - 3.57 \left(\frac{Ht}{P}\right)^2 + 3.82 \left(\frac{Ht}{P}\right)^3 - 1.38 \left(\frac{Ht}{P}\right)^4 ; \alpha = 15^\circ \quad (48)$$

$$C_d = 0.49 + 1.06 \left(\frac{Ht}{P}\right) - 4.43 \left(\frac{Ht}{P}\right)^2 + 5.18 \left(\frac{Ht}{P}\right)^3 - 1.97 \left(\frac{Ht}{P}\right)^4 ; \alpha = 18^\circ \quad (49)$$

$$C_d = 0.49 + 1.51 \left(\frac{Ht}{P}\right) - 3.83 \left(\frac{Ht}{P}\right)^2 + 3.40 \left(\frac{Ht}{P}\right)^3 - 1.05 \left(\frac{Ht}{P}\right)^4 ; \alpha = 25^\circ \quad (50)$$

$$C_d = 0.49 + 1.69 \left(\frac{Ht}{P}\right) - 4.05 \left(\frac{Ht}{P}\right)^2 + 3.62 \left(\frac{Ht}{P}\right)^3 - 1.10 \left(\frac{Ht}{P}\right)^4 ; \alpha = 35^\circ \quad (51)$$

$$C_d = 0.49 + 1.46 \left(\frac{Ht}{P}\right) - 2.56 \left(\frac{Ht}{P}\right)^2 + 1.44 \left(\frac{Ht}{P}\right)^3 ; \frac{Ht}{P} < 0.7 \ \& \ \alpha = 90^\circ \quad (52)$$

Las ecuaciones anteriores son válidas si cumplen los siguientes parámetros:

- $t \leq A \leq 2t$
- $Ht/P \leq 0.9$
- $t = P/6$
- $R = P/12$
- Cresta cuarto de circunferencia

En el apartado 1.4 se hace referencia a los diferentes perfiles que se pueden utilizar en la cresta del vertedor, Tullis menciona que los perfiles de cresta plana y afilada no son recomendables porque proporcionan coeficientes de descarga menores que los de cresta redondeada; es importante recordar que el gasto es directamente proporcional al coeficiente de descarga, es decir, si el coeficiente se ve reducido el gasto seguirá igual a este. En 1987

2. Marco teórico específico

Amanian¹¹ concluye que el perfil más eficiente y práctico es el de un cuarto de circunferencia, esto es así porque este perfil es el más sencillo para construir y el que proporciona un coeficiente de descarga mayor para grandes cargas hidráulicas.

Amanian también recomienda que el espesor de la pared, t , de la cresta sea igual a $P/6$ o si se construye una pared que con un espesor decreciente se haga con un radio igual a $P/12$, el ancho del vértice, A , puede llegar a crear una disminución en la capacidad del vertedor por lo que Tullis recomienda que se disminuya este ancho lo más posible.

La altura del vertedor, P , y la carga sobre la cresta del vertedor, H_t , tienen una influencia decisiva en el coeficiente de descarga, en vertedores lineales y laberínticos el coeficiente de descarga depende de la relación H_t/P , ver figura 1.13. El coeficiente de descarga en vertedores de cresta recta alcanzan un máximo y luego se hace constante, en vertedores laberínticos es muy diferente el comportamiento del coeficiente de descarga y la relación H_t/P ; este comportamiento se observa en la siguiente gráfica:

¹¹ Op cit., p.

2. Marco teórico específico

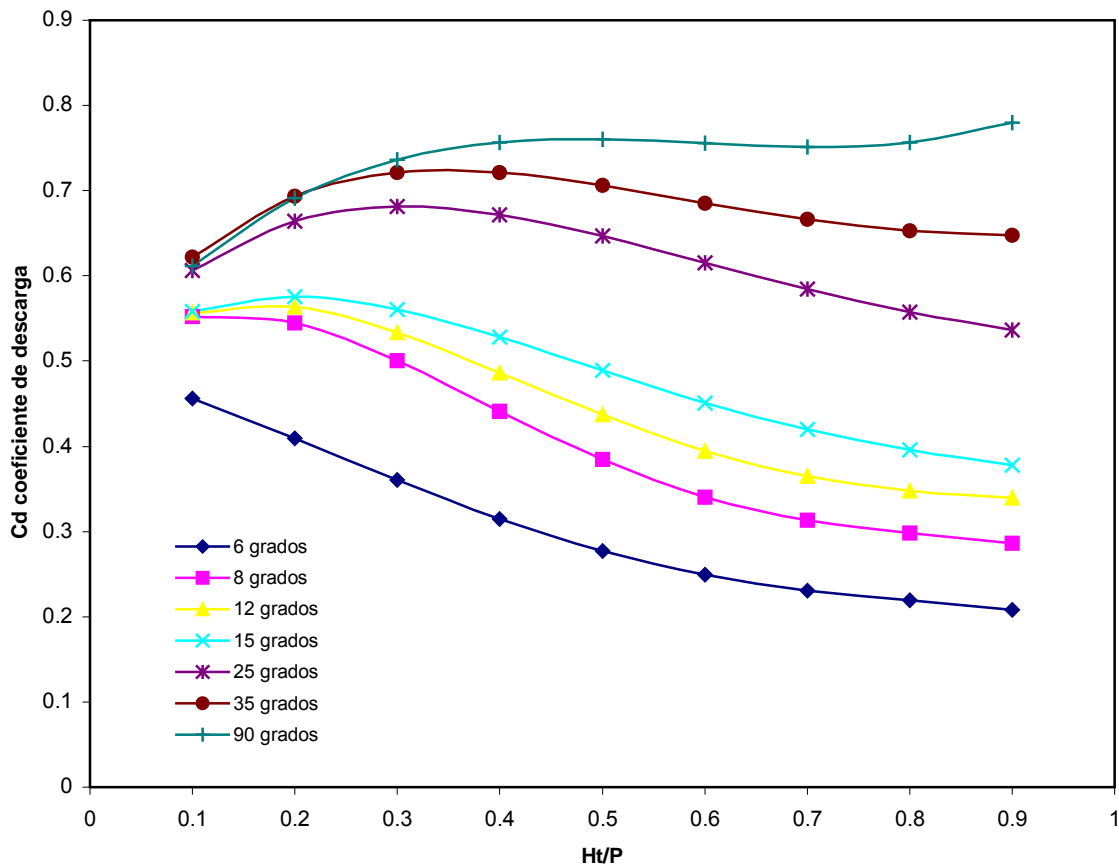


Figura 2.2. Coeficientes de descarga para vertedores laberínticos con planta triangular y cresta de un cuarto de circunferencia.

Lo que se observa en la figura 2.2 es que el coeficiente de descarga se reduce generalmente con el incremento de la relación Ht/P , dada esta característica de los vertedores laberínticos se hace imperativo reducir todo lo posible la relación Ht/P para poder obtener un coeficiente de descarga máximo. Otra forma de decir lo anterior es que el coeficiente de descarga es inversamente proporcional a la relación Ht/P y por lo tanto si se minimiza esta relación se obtiene un coeficiente de descarga máximo, lo cierto es que la decisión final será basada en una economía sustentada en el criterio anteriormente descrito; dada una cresta similar en vertedores laberínticos y de cresta recta el coeficiente de descarga en un vertedor laberíntico siempre será menor que uno de cresta recta. Esto se puede observar en las figuras 1.9 y 2.2 ya que la curva en el límite superior

2. Marco teórico específico

corresponde a un vertedor de cresta recta, esto se debe tener en cuenta ya que por errores de cálculo se pueden obtener coeficientes mayores en vertedores laberínticos que los que proporcionaría uno de cresta recta.

En cuanto a la aireación, Tullis menciona que este parámetro tiene una influencia decisiva en el coeficiente de descarga, si la cresta es aireada el valor del coeficiente de descarga es mínimo; esto es importante tenerlo en cuenta ya que si el flujo no es aireado o atmosférico el coeficiente de descarga tendrá un valor mas alto y en consecuencia el gasto será mayor aunque en la realidad esto no sea así. Precisamente por esta razón, según Tullis, los coeficientes de descarga que se proponen erran del lado de la seguridad, es decir, son menores que los que se dan en circunstancias de un flujo subatmosférico; las características del flujo subatmosférico fueron descritas en el apartado 1.3.4. Según Amanian y Waldron el coeficiente de descarga puede llegar a tener valores mayores a 0.75 cuando el flujo no es atmosférico, las relaciones H_t/P bajas, en particular con valores entre 0.1 y 0.2, se crea un flujo ligeramente negativo en vertedores laberínticos si es el caso en el cual la relación H_t/P es cercana a 0.2 será necesario hacer estudios en un modelo hidráulico para estimar un coeficiente de descarga adecuado.

Otro detalle que se puede observar en la figura 2.2 es que el coeficiente de descarga varía relativamente poco con un cambio pequeño en el ángulo α , según Tullis esto implica que se pueden hacer dos cosas: la primera, se pueden usar las ecuaciones previamente descritas en este apartado para variaciones menores a 1 sin ninguna interpolación; la segunda, para variaciones mayores a 1 se deben hacer interpolaciones lineales con las ecuaciones, este ultimo caso será cubierto con todo detalle en el apartado 3.2.3.

2. Marco teórico específico

Acerca de la precisión de las ecuaciones Tullis menciona lo siguiente:

- La desviación estándar para ángulos entre 6 y 18° fue menor a $\pm 3\%$
- Los valores entre 25 y 35° son valores interpolados y tienen una precisión de aproximadamente $\pm 10\%$

2.2.2. Planta Trapezoidal Cresta de un Cuarto de Circunferencia Darvas

En 1971 Darvas¹² propone modificaciones a lo desarrollado por Taylor en 1968. Darvas menciona que describir el flujo en un vertedor laberíntico es bastante complicado, siendo el flujo tridimensional dice que Taylor lo simplificó demasiado. La figura 2.3 es válida dentro de los siguientes parámetros:

- $1 \leq L/W \leq 8$
- $0.2 \leq h/p \leq 0.6$
- $\alpha \geq 0.8 \alpha_{\max}$

La ecuación que Darvas propone para determinar el gasto es:

$$Q = W C_w H^{3/2} \quad (53)$$

donde:

W: el ancho total del vertedor

L: longitud total del vertedor laberíntico

Cw: coeficiente de descarga

Las ecuaciones que definen el coeficiente de descarga, Cw, se obtuvieron con un ajuste polinomial ya que en el artículo de Darvas no proporciona las ecuaciones, estas ecuaciones son muy útiles en el apartado 3.2.1 porque permiten programarlas en hoja de cálculo, a continuación se presentan estas ecuaciones:

¹² Darvas, L.A., Discussion of 'Performance and design of labyrinth weirs', by Hay and Taylor., American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1971, 97(80), 1246-1251.

2. Marco teórico específico

$$C_w = 5.86 + 0.9514286 \left(\frac{L}{W} \right) - 0.10221429 \left(\frac{L}{W} \right)^2 + 0.02 \left(\frac{L}{W} \right)^3; \frac{H_o}{P} = 0.6 \quad (54)$$

$$C_w = 5.9714683 + 1.236944 \left(\frac{L}{W} \right) - 0.0997619 \left(\frac{L}{W} - 5 \right)^2 + 0.014722; \frac{H_o}{P} = 0.5 \quad (55)$$

$$C_w = 4.7664288 + 1.812619 \left(\frac{L}{W} \right) - 0.0680952 \left(\frac{L}{W} - 5 \right)^2 + 0.0116667; \frac{H_o}{P} = 0.4 \quad (56)$$

$$C_w = 3.0411032 + 2.594841 \left(\frac{L}{W} \right) - 0.0530595 \left(\frac{L}{W} - 5 \right)^2 + 0.0000278; \frac{H_o}{P} = 0.3 \quad (57)$$

$$C_w = 1.1811071 + 3.4098929 \left(\frac{L}{W} \right) + 0.0132143 \left(\frac{L}{W} - 5 \right)^2 + 0.00175; \frac{H_o}{P} = 0.2 \quad (58)$$

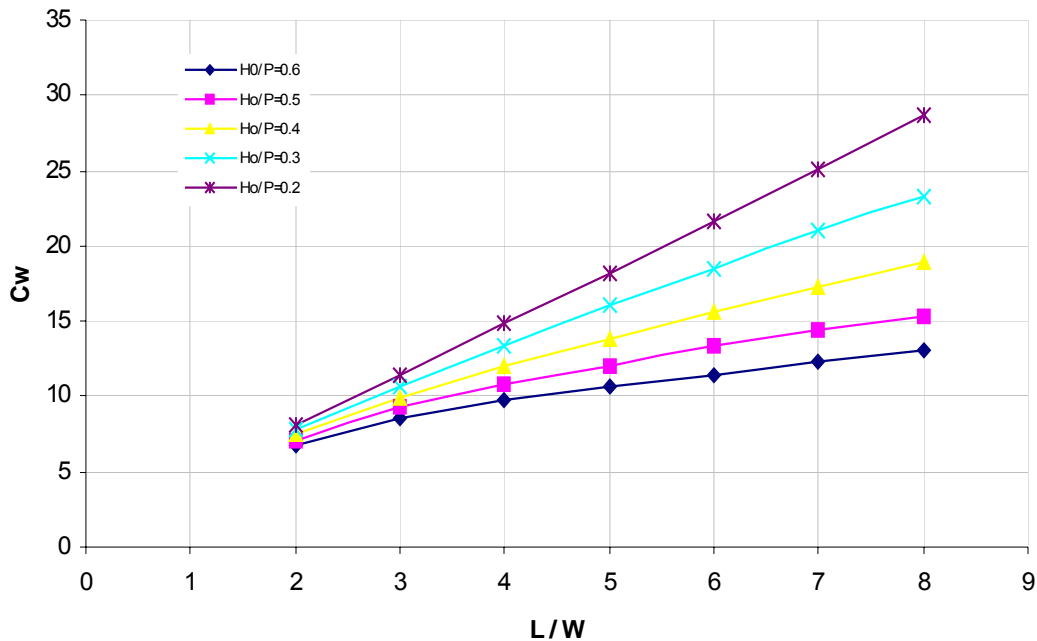


Figura 2.3. Coeficientes de descarga cresta cuarto de circunferencia planta trapezoidal.

2.2.3. Planta trapezoidal y planta triangular con Cresta Afilada Taylor

Hay y Taylor¹³ hacen una exhaustiva investigación de las características más relevantes relacionadas con vertedores laberínticos de cresta afilada, esta

¹³ Hay, N., Taylor, G., *Performance and design of labyrinth weirs*, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1970, 96(11), 2349-2351.

2. Marco teórico específico

investigación es un hito ya que todos los investigadores en este campo se refieren a su trabajo aún en la actualidad pero se han hecho muchas modificaciones a su propuesta ya que sus gráficas no se pueden apreciar adecuadamente para su utilización. Las gráficas de Taylor son interesantes desde un punto de vista histórico, pero para aplicaciones prácticas ya no son utilizadas y además Tullis¹⁴ comenta que generalmente las crestas afiladas no son adecuadas porque los coeficientes de descarga son menores que en los otros tipos de crestas.

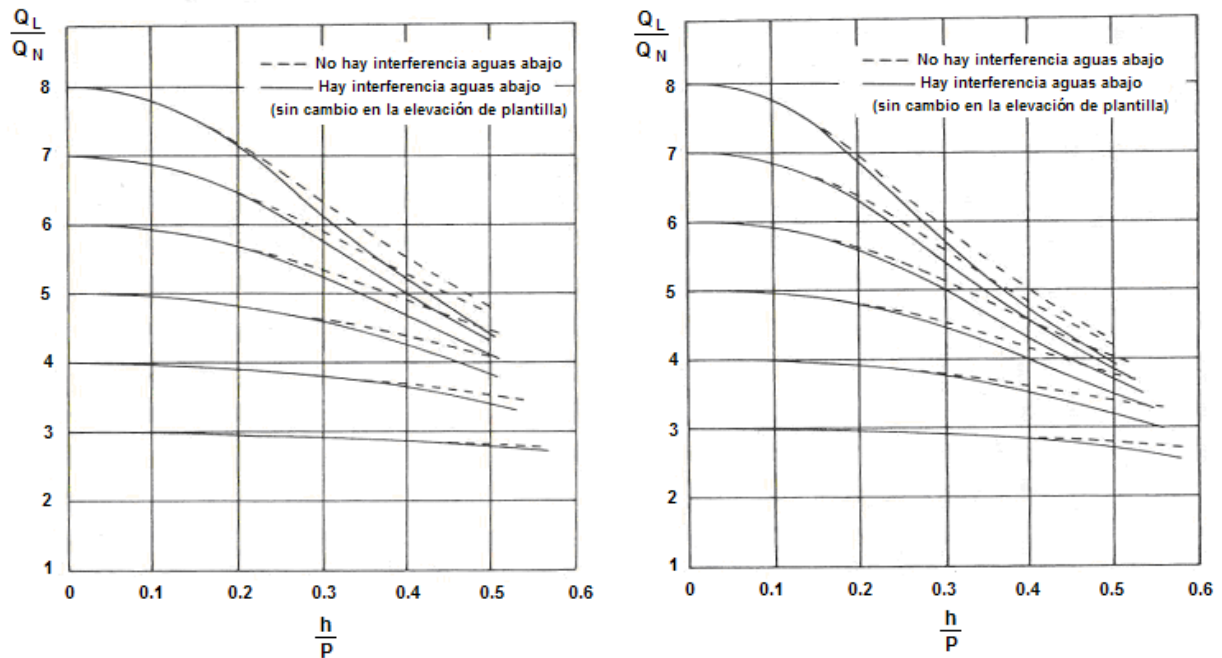


Figura 2.4. Coeficientes de descarga Taylor¹⁵

¹⁴ Tullis, J.P., Nosratollah, A., Waldron, D., Design of labyrinth spillways, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1995, 121(3), p.249.

¹⁵ Hay, N., Taylor, G., Performance and design of labyrinth weirs, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1970, 96(11),2351.

2.3. Elementos a Considerar en el Canal de Aguas Abajo.

Falvey¹⁶ define los elementos necesarios para un buen funcionamiento hidráulico del canal de aguas abajo y hace recomendaciones muy prácticas las cuales se describen a continuación, en cuanto al canal posterior al vertedor, si este canal es de un ancho menor al que tiene el vertedor es necesario construir una transición. Otro punto que se le debe poner atención es la submergencia ya que es uno de los elementos que pueden afectar de una manera negativa el funcionamiento hidráulico del vertedor, el último punto a considerar es lo relacionado a ondas supercríticas y estos tres elementos (submergencia, ondas supercríticas, y delantales) se discuten a continuación.

2.3.1. Ondas Supercríticas

Los flujos con régimen subcrítico se comportan de manera elíptica según Hager¹⁷, este tipo de régimen crea problemas de frontera, en cambio un flujo de régimen supercrítico involucra ondas de choque; estas ondas se pueden modelar matemáticamente con el método de incrementos finitos y el objetivo del modelado matemático de estas ondas es poder reducir las.

El primer caso que se analiza en el trabajo de Hager es un canal de ancho infinito, esto se hace para introducir posteriormente un canal de ancho finito; posteriormente se discuten canales con forma de embudo y abanico. Después se presenta una expansión y una curva para finalmente introducir el concepto de reducción de ondas en la parte posterior del flujo.

En el caso de una pared que tiene una deflexión θ con respecto al flujo, esta crea una perturbación que desvía el flujo de su dirección original con un

¹⁶ Op. Cit., 61-68.

¹⁷ Hager, W.H., Spillways, shockwaves and air entrainment, Boletín no. 81, Comité Internacional de Grandes Presas, 1992. p. 25-65.

2. Marco teórico específico

ángulo β este se conoce como ángulo de choque y la curva correspondiente como la curva de onda cruzada. La ecuación (59) sirve para determinar el número de Froude aguas abajo.

$$F_2^2 = \frac{F_1 \cos^2 \beta}{(2 \operatorname{sen} \beta) \left[1 - (2\sqrt{2}F_1 \operatorname{sen} \beta)^{-1} \right]} > 1 \quad (59)$$

donde:

F_1 : Número de Froude sección uno.

F_2 : Número de Froude sección dos.

Este número de Froude es importante porque con el se puede determinar la altura del tirante aguas abajo, supóngase un canal de ancho infinito en el cual se busca reducir las ondas cruzadas, dichas ondas se pueden reducir substancialmente utilizando el principio de interferencia de onda, una manera de aplicar este principio es al utilizar una onda de frecuencia negativa para anular una de frecuencia positiva. Von Karman y Knapp (referencia 10) propusieron ecuaciones que se derivan de este principio las cuales se detallaran posteriormente, la ecuación (66) es una de ellas.

Las contracciones en el canal aguas abajo se consideran importantes desde el punto de vista de ingeniería cuando la pendiente del fondo del canal se incrementa es importante lograr un flujo uniforme en la transición de lo contrario lo que se puede producir son ondas cruzadas las cuales incrementan de manera considerable la altura de las paredes aguas abajo, una contracción con forma de embudo puede provocar perturbaciones significativas en el canal de aguas arriba, esto se puede evitar escogiendo un ángulo θ que logre liberar de perturbaciones la superficie del flujo aguas arriba; la expresión (60) de Hager y Bretz cuando $\theta > 10^\circ$ logra relacionar el número de Froude, F_1 , la primera contracción, b_1 , la contracción de salida, b_3 :

$$a \tan \theta = \frac{1}{(2F_1)} \left(\frac{b_1}{b_3} - 1 \right) \quad (60)$$

2. Marco teórico específico

Una contracción con forma de abanico requiere considerar un abanico como transición. Las condiciones de flujo en esta zona son las siguientes:

- Ángulo, θ
- tirante, h_1
- velocidad promedio, V_1
- energía, H_1

La onda cruzada es la que determina la altura de la pared aguas abajo. Hartung y Knauss proponen las siguientes ecuaciones:

$$y_M = \frac{h_M}{H_1} \quad (61)$$

donde:

h_M : relación entre la máxima profundidad del flujo,

H_M : carga de energía H_1 .

y_m : máxima altura de la onda cruzada en el punto E y genera la altura h_m .

$$y_m = \frac{h_m}{H_1} \quad (62)$$

$$y_M = 3.66 y (2 + F_1^2)^{-1/2} \quad \text{válida para } 1 < F_1 < 3.5 ; S_0 \approx 10\% \quad (63)$$

$$y_M = 0.915 \left(1 - \left(1.278 - y - 2(2 + F_1^2)^{-1/2} \right)^{1/2} \right) \quad \text{válido para } F_1 \geq 3.5 \quad (64)$$

Estas ecuaciones sirven para obtener resultados preliminares, el diseño definitivo debe incluir una optimización de los siguientes parámetros:

- pendiente, S_0
- ángulo γ .
- radio de contracción, m.

Anastasi utiliza una geometría transversal curvada en el fondo del canal para solucionar el problema de ondas cruzadas en una contracción en forma de abanico, el principio en el cual se basa esta solución es la compensación de la fuerza centrífuga con la fuerza gravitacional.

2. Marco teórico específico

Las expansiones después del vertedor deben diseñarse teniendo en cuenta la transición si esta es abrupta se presentan ondas cruzadas de gran magnitud, en cambio si la transición es gradual es muy costosa.

Rouse propone una ecuación que determina la longitud de la transición, esta propuesta implica una transición muy larga y se requieren más estudios a este respecto para llegar a una ecuación que sea mas económica, a continuación se presenta la ecuación de Rouse:

$$\frac{L_t}{b_1 F_1} = 1 + 3.25 \left(\frac{b_2}{b_1} - 1 \right) \quad \text{válido para } \frac{b_2}{b_1} < 5 \quad (65)$$

donde:

L_t : es la longitud de transición.

b_2 : ancho del canal en la sección dos.

b_1 : ancho del canal en la sección uno.

Esta curva presenta características similares a las de una contracción y conlleva un patrón superficial complejo, lo que interesa es poder determinar la elevación máxima de la onda. Knapp propone la ecuación (66) para determinar la altura extrema de la onda, esta se presenta es la siguiente:

$$y_e = \left(1 \pm \left(\frac{b}{2R} \right) F_0^2 \right)^2 \quad \text{válido para } \frac{b}{R} < 0.5 \quad (66)$$

donde:

y_e : altura extrema de la onda.

R : radio de curvatura, en metros.

b : ancho del canal.

F_0 : Número de Froude.

La reducción de ondas en la parte posterior del flujo se basa en utilizar una pendiente transversal que contrarreste la fuerza centrífuga, una desventaja de

2. Marco teórico específico

utilizar un peralte es que la pendiente es directamente proporcional a la velocidad de aproximación y esta a su vez depende del gasto; Ippen-Knapp y Von Karman (referencia 10) hicieron estudios a este respecto los cuales son muy útiles para predecir la onda extrema, otros autores que han contribuido a este tema son los siguientes:

- Harrison encontró que canales rectangulares provocan la generación de ondas de menor magnitud.
- Lenau encontró una ecuación que determina la altura máxima de la onda en un canal trapezoidal.

Actualmente la tendencia es utilizar modelación numérica para obtener los parámetros de diseño.

2. Marco teórico específico

2.3.2. Delantales

Taylor¹⁸ menciona que los delantales, ver figura 2.5, son considerados como modificaciones de importancia secundaria en el diseño y además crean serios problemas en el vertedor.

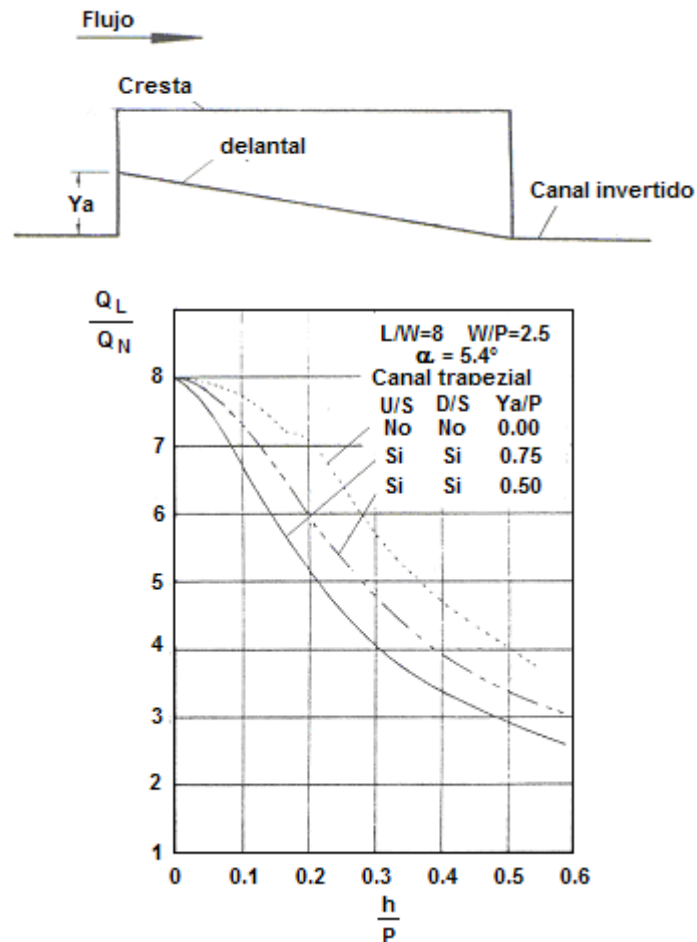


Figura 2.5. Delantal y efectos en el gasto¹⁹

El primero está relacionado con una disminución considerable del gasto, como se puede apreciar en la figura 2.5, que pasa por la cresta del vertedor; este estudio fue hecho colocando delantales aguas arriba y aguas abajo, si la

¹⁸ Hay, N., Taylor, G., *Performance and design of labyrinth weirs*, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1970, 96(11), 2337-2357.

¹⁹ Idem p. 2347.

2. Marco teórico específico

magnificación que el vertedor proporciona es grande, el efecto provocado por los delantales será aún más negativo; en caso de existir la necesidad de colocar un delantal en el canal de aguas abajo se debe tener cuidado en que la profundidad de cualquier punto en este canal sea menor que en el canal de aguas arriba, otra manera de decir lo anterior es que si existe la necesidad de utilizar un delantal aguas abajo, este debe tener una pendiente hidráulica supercrítica²⁰. Esto garantizará que no existan problemas de submergencia y fomentará una buena aireación en la cresta del vertedor, de cualquier manera, se debe recalcar que el uso de delantales para dirigir el flujo sobre un vertedor no son efectivos. Un ejemplo que Falvey²¹ menciona es el vertedor en Arnwell Magna en Gran Bretaña; a este vertedor se le agregó un delantal ocasionando que se presentará el fenómeno de sumergencia disminuyendo el gasto considerablemente.

El segundo problema que un delantal puede causar es sedimentación, esta es otra razón que hay que tener en cuenta cuando se requiere utilizar un delantal, en el apartado 2.5.1 el tema de sedimentación se aborda con más detalle.

2.3.3. Sumergencia

La sumergencia ocurre cuando el nivel de agua supera la cresta del vertedor aguas abajo, en otras palabras, Taylor²² muestra que al aumentar el ahogamiento del vertedor la sumergencia aumenta, esta conlleva una disminución del gasto; Falvey²³ proporciona la ecuación de Villemonte (67), la cual relaciona la carga hidráulica aguas arriba, h_u y aguas abajo, h_d con el gasto sumergido, Q_s y el gasto bajo condiciones normales, Q . La ecuación de Villemonte (67), se muestra a continuación.

²⁰ Tullis, J.P., Nosratollah, A., Waldron, D., *Design of labyrinth spillways*, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1995, 121(3), p. 250.

²¹ Op. Cit., p.64-66.

²² Op.cit., p.2349.

²³ Op. Cit., p.67.

2. Marco teórico específico

$$Q_s = Q \left(\left(1 - \frac{h_d}{h_u} \right)^{3/2} \right)^{0.385} \quad (67)$$

donde:

h_d : carga de diseño sobre el vertedor

h_u : carga sobre el vertedor

P : altura del vertedor

Un ejemplo de los efectos de la sumergencia utilizando la ecuación de Villemonte se muestra en la figura 2.6:

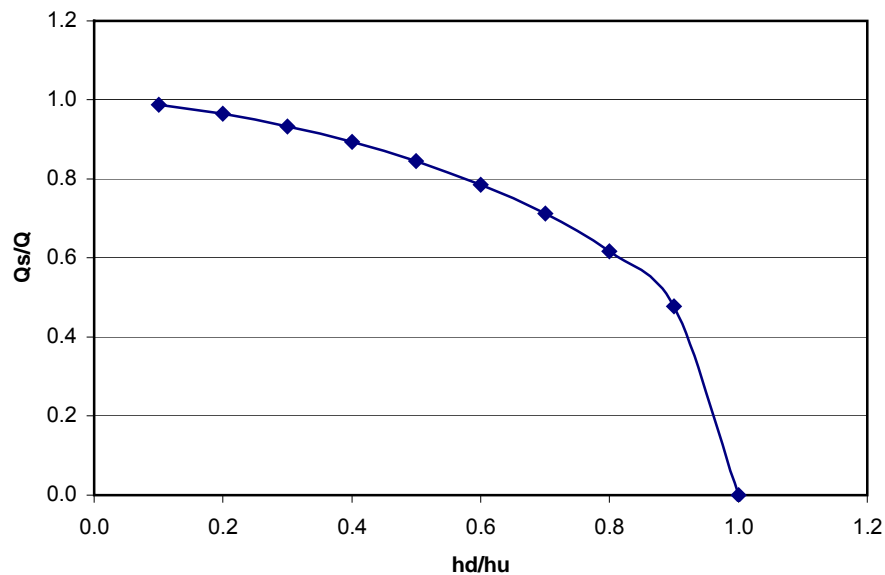


Figura 2.6. Sumergencia, según Villemonte.

Lo que se desprende de la figura 2.6 de Villemonte es que la descarga disminuye considerablemente por la cresta del vertedor cuando existe ahogamiento en la cresta.

En el estudio de Taylor donde se relaciona h/P y h_d/P es posible observar una diferencia muy marcada entre la ecuación (67) de Villemonte y los datos experimentales, la figura 2.7 de Taylor muestra que al acercarse los valores de

2. Marco teórico específico

h_d y h al valor de P estos valores se despegan de la grafica de Villemonte de una manera radical lo cual indica que se requiere más investigación para poder obtener una ecuación que describa mejor el efecto de ahogamiento.

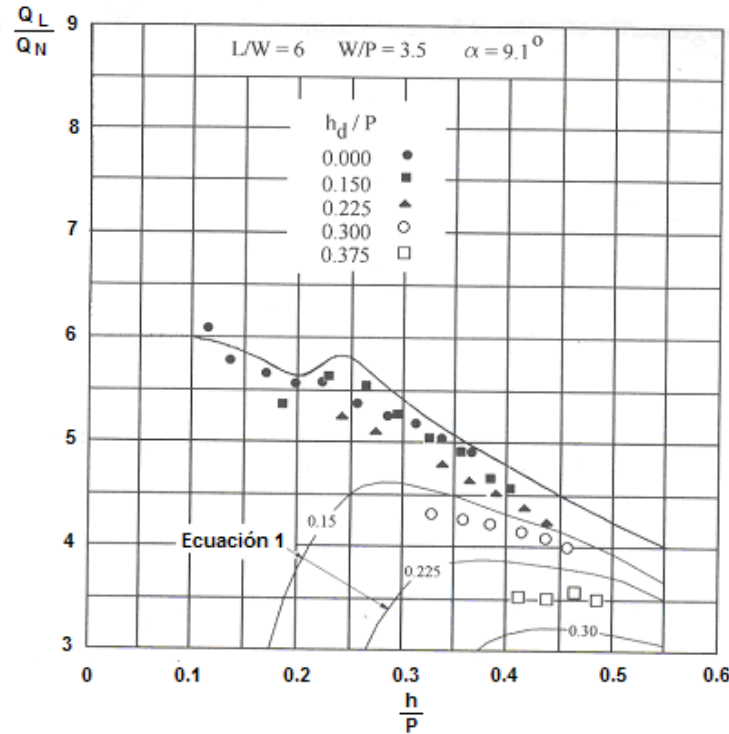


Figura 2.7. Efectos de sumergencia en la cresta²⁴

2.4. Interferencia de Nappe.

En el punto en el que convergen las paredes del vertedor, es decir en el vértice el flujo proveniente de las paredes adyacentes choca, esto crea una situación llamada interferencia de Nappe; esta interferencia tiende a disminuir el gasto que el vertedor descarga. Indlekofer en 1975 publicó los resultados de su investigación²⁵ la cual se sigue utilizando en la actualidad. Aunque Falvey²⁶ en 2003 propone otra manera de calcular esta interferencia, en esta sección se

²⁴ Hay, N., Taylor, G., Performance and design of labyrinth weirs, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1970, 96(11), 2337-2357.

²⁵ Indlekofer, H., Rouve, G., Discharge over polygonal weirs, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1975, 101(HY3), 385-401.

²⁶ Op. Cit., p.28-29.

2. Marco teórico específico

presentarán ambos métodos ya que el de Falvey que proporciona requiere más investigación para ser aceptado en el uso práctico.

El primer paso es definir las variables que determinan el grado de interferencia, es decir, se busca conocer los parámetros de los cuales depende ver figura 2.8, definiendo interferencia como la longitud de cresta en la cual el flujo de las paredes adyacentes se encuentra, Indlekofer hace uso de los siguientes parámetros:

- La carga sobre la cresta del vertedor, h
- La altura del vertedor, P
- El ángulo entre las paredes del vertedor, α

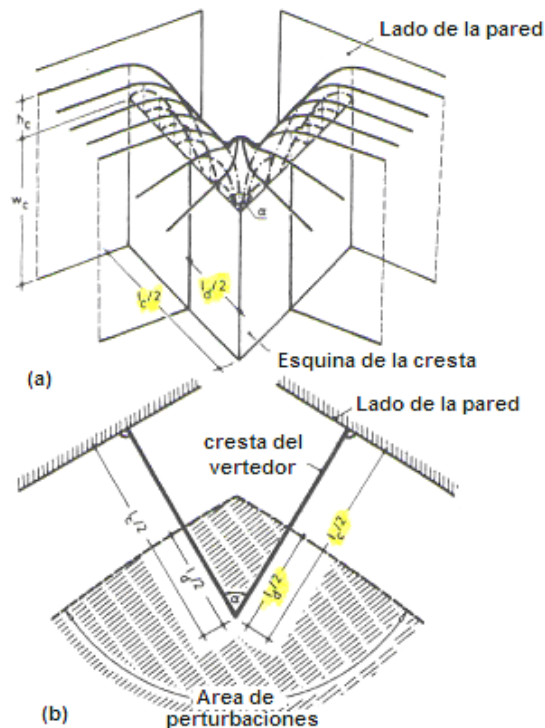


Figura 2.8. Isométrico de interferencia de Nappe²⁷

²⁷ Indlekofer, H., Rouve, G., Discharge over polygonal weirs, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1975, 101(HY3), p.386

2. Marco teórico específico

Después de obtener los parámetros lo siguiente es hallar las relaciones entre estas variables, la figura 2.9 proporciona una mejor idea de que se menciona a continuación.

- La longitud de interferencia está relacionada de manera lineal con la carga sobre la cresta del vertedor.
- Dada la complejidad del coeficiente de descarga para un flujo con interferencia se tuvo que recurrir a un coeficiente medio de descarga, C_m , esto se hace así porque este coeficiente esta relacionado con el ángulo α .
- El coeficiente de descarga para un vertedor laberíntico, C_L , depende del coeficiente de descarga reducido, C_r , debido al vertedor en laberinto y el coeficiente de descarga de un vertedor lineal, C_d .
- Se define L_{de} como longitud de interferencia efectiva y L_d como longitud de interferencia. Las relaciones entre estas variables se muestra a continuación.

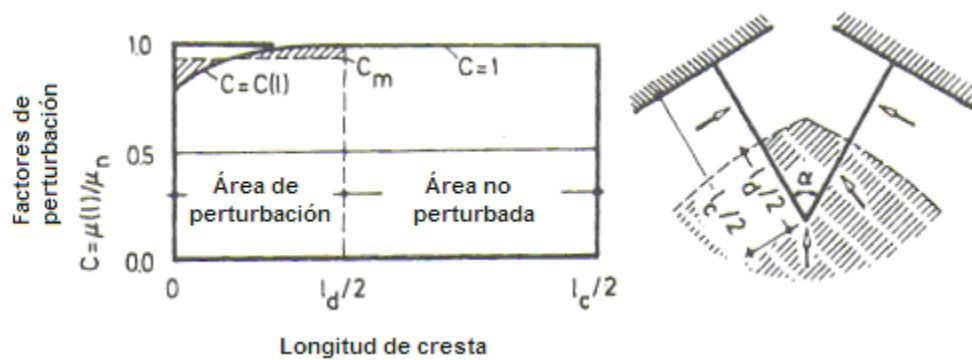


Figura 2.9. coeficiente medio de descarga y longitud de interferencia²⁸

Indlekofer halló las siguientes relaciones:

$$C_L = \frac{C_r}{C_d} \quad (68)$$

²⁸ Indlekofer, H., Rouve, G., Discharge over polygonal weirs, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1975, 101(HY3), p.387.

2. Marco teórico específico

$$L_{de} = B - \frac{3Q}{2 C_d \sqrt{2g} h^{3/2}} \quad (69)$$

$$L_{de} = (1 - C_m) L_d \quad (70)$$

$$L_{de} = 6.1e^{-0.052 \alpha} \quad (71)$$

Las ecuaciones 69, 70 y 71; la más útil para calcular la longitud efectiva de interferencia es la ecuación (71), esta ecuación será utilizada en el apartado 3.1.7 para calcular dicha longitud.

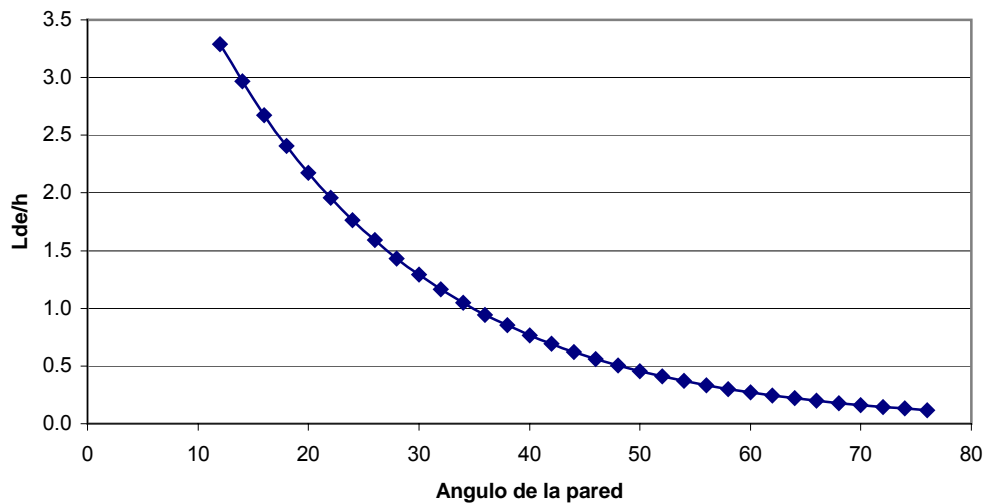


Figura 2.10. Longitud efectiva de interferencia

La figura 2.10 y la ecuación (71) fueron propuestas por Falvey basándose en el trabajo de Indlekofer, la figura 2.10 demuestra que la interferencia es muy marcada con ángulos agudos lo cual lleva a una recomendación de diseño muy simple: usar en lo posible aberturas mayores a 20°; esto se va a hacer evidente en el siguiente capítulo donde se proporciona un ejemplo de diseño. Esta recomendación se basa en que la longitud de interferencia depende del ángulo α , y este está involucrado en una función exponencial lo cual hace que crezca de manera muy drástica la longitud de interferencia a ángulos pequeños. Otra manera de explicar este fenómeno y la razón de usar ángulos superiores a 20° es que la función exponencial tiende al infinito cercanos a cero, y por razones constructivas es muy complicado utilizar ángulos tan cerrados.

2. Marco teórico específico

Otro punto que merece ser mencionado es la relación que existe entre el número de ciclos en el vertedor y la interferencia de flujo, Taylor presenta en su tesis doctoral una figura que muestra de una manera muy clara la influencia del número de ciclos, la figura 2.11 muestra esta relación:

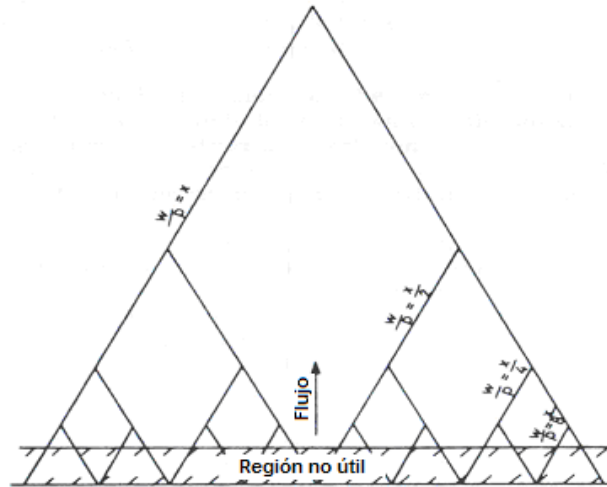


Figura 2.11. Diagrama que relaciona la longitud de interferencia y w/p ²⁹

En la figura 2.11 se puede observar que con ocho ciclos la relación $L_{de} / B = 0.5$ lo cual propicia una interferencia muy marcada, en cambio, con cuatro ciclos se puede observar que $L_{de} / B = 0.25$, esto es importante notarlo ya que de este comentario se deriva otra recomendación de diseño; tratar de lograr un compromiso en el número de ciclos, en el capítulo tres se hará uso de esta recomendación.

Falvey analizó la investigación de Indlekofer y halló lo siguiente:

- El flujo que se aproxima a un vertedor normalmente no es perpendicular al mismo.
- No se ha hecho ninguna investigación cuando el flujo no es perpendicular al vertedor.

²⁹ Hay, N., Taylor, G., Performance and design of labyrinth weirs, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1970, 96(11), p.2346.

2. Marco teórico específico

- Solamente Taylor había estudiado el efecto del canal de aguas abajo en el fenómeno de interferencia pero no se había usado esta idea en vertedores diseñados recientemente.

Con vertedores que están ya construidos Falvey utilizó lo propuesto por Indlekofer y obtuvo los siguientes resultados:

- La interferencia se incrementa de manera lineal al aumentar la carga hidráulica, esta observación esta de acuerdo con lo propuesto por Indlekofer y los ángulos que se usaron fueron entre 22° y 27° .
- El canal aguas abajo tiene un efecto decisivo en la interferencia, la variación en este caso no es lineal con la carga hidráulica sino más bien logarítmica.
- Delantales con pendiente producen menor interferencia que delantales sin pendiente.

Después de hacer un análisis bastante meticuloso Falvey propone una ecuación que cubre ángulos entre 7° y 23° ; los cuales no son considerados en la investigación de Indlekofer, Falvey menciona que a partir de los pocos casos que investigó se puede concluir lo siguiente:

- La interferencia efectiva empieza con una relación de H_0/P mayor a 0.1
- La ecuación que obtuvo es sólo válida para ángulos menores a 20°
- Indlekofer utiliza la carga piezométrica, h , sobre la cresta y Falvey propone utilizar la carga total, H_0 .

La ecuación, (72), que Falvey³⁰ propone relaciona la longitud efectiva de interferencia, L_{de} , con la longitud de la pared del vertedor, B , y esto esta en función del ángulo de la pared del vertedor, α , la carga H_0 , y la altura del vertedor, P .

³⁰ Op. Cit., p.28.

2. Marco teórico específico

$$\frac{L_{de}}{B} = C_1 \ln\left(\frac{H_0}{P}\right) + C_2 \quad (72)$$

$$C_1 = 0.224 \pm 0.053$$

$$C_2 = 0.94 - 0.3 \alpha$$

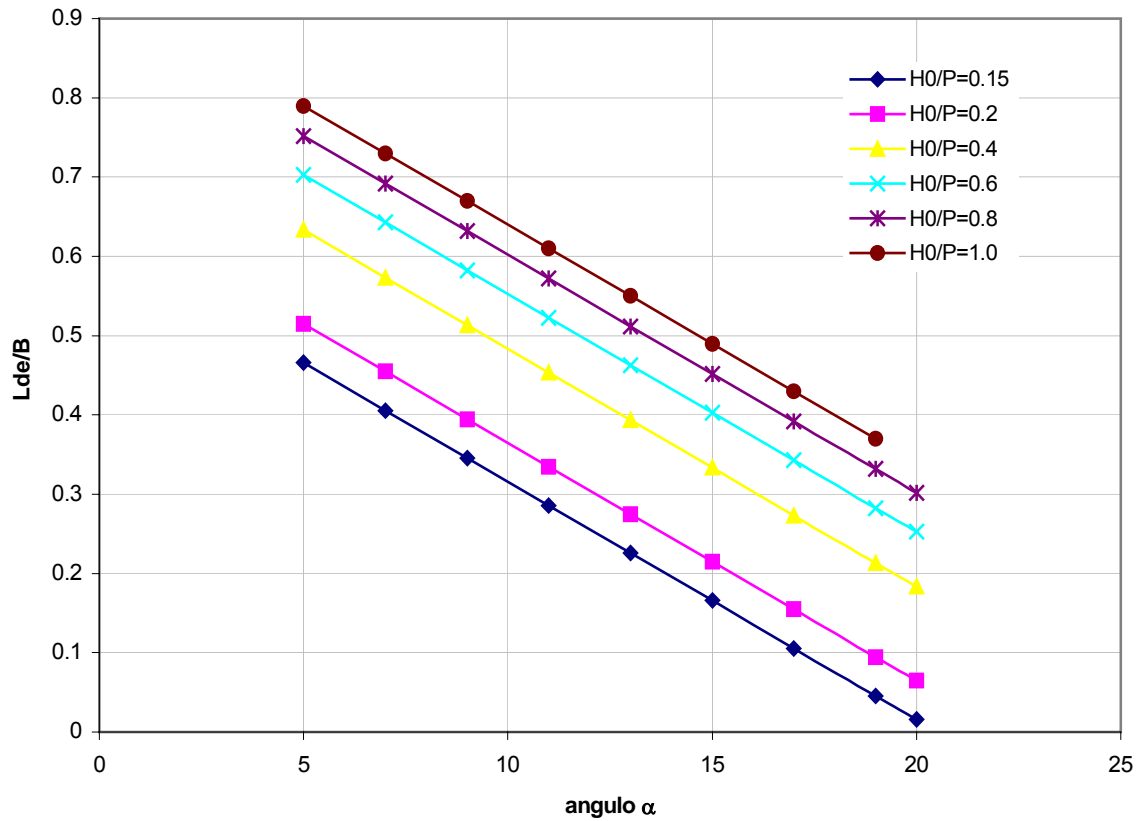


Figura 2.12. Longitud efectiva de interferencia y familia de curvas.

De la ecuación (72) propuesta por Falvey se puede construir una familia de curvas, esta familia de curvas se muestra en la figura 2.12.; con esta familia de curvas se pueden obtener diversas conclusiones entre ellas al saber el ángulo α , la relación H_0/P y B se puede obtener una longitud de interferencia.

2.5. Sedimentación

El tema de sedimentación es de importancia en cualquier obra de excedencia ya que puede causar disminuciones importantes en el funcionamiento hidráulico de un vertedor, en muchas ocasiones el agua que se aproxima a un vertedor que contiene una gran cantidad de partículas en suspensión; esta situación se puede deber a varias causas, pero una de las más factibles puede ser que las paredes que delimitan la obra sean de un material erosionable. Cuando se sabe que el flujo va a contener partículas en suspensión es imperativo saber que es lo que sucede en cuanto a sedimentación en dos situaciones, la primera ocurre cuando se tiene un gasto pequeño y la segunda a gastos mayores.

Taylor³¹ observó que al incrementarse la magnificación, es decir, la relación del gasto de un vertedor lineal a un vertedor laberíntico aunado a la colocación de delantales aguas arriba se observa una marcada disminución en el coeficiente de descarga. Ahora, si a lo expuesto anteriormente se añade el problema de sedimentación se puede llegar a una situación poco favorable para un funcionamiento idóneo de un vertedor laberíntico.

Falvey³² hace referencia al trabajo de Babb el cual analizó el efecto de sedimentación con diferentes diámetros medios en arena, este estudio fue realizado en el vertedor laberíntico de Boardman; esta obra se encuentra en el estado de Washington. Se realizaron dos pruebas: la primera con arena fina con un diámetro medio de 0.14 mm con esta prueba aproximadamente dos tercios del volumen de arena vertido paso por la cresta del vertedor, mientras el resto se depositó en las zonas de baja velocidad del canal de llamada; En la segunda prueba se utilizó arena con un diámetro medio de 1.77 mm en este caso la mayor parte de la arena se depositó en el canal aguas arriba.

³¹ Op. Cit., 2349-2350.

³² Op cit., p.96-97.

2. Marco teórico específico

Los siguientes estudios, Hellsgate y Garland, son mencionados en el trabajo de Falvey³³. Hellsgate tenía como objetivo determinar que sucedería si se utilizaba una arena con un diámetro medio de 1 cm y grandes gastos, en este estudio se utilizaron relaciones h/p de 0.1 y 0.4. Se pudo observar que cuando se usó la relación $h/p=0.4$ la remoción del sedimento fue extremadamente violenta.

El estudio de Garland es exactamente lo opuesto al de Hellsgate, ya que en este último estudio se debe utilizar una carga h/p tal que apenas rebasa la cresta del vertedor, esto se debe a que este vertedor tiene como uso primario proveer una carga constante para una turbina; bajo estas condiciones se acumula una gran cantidad de sedimento al crear una carga h/p mayor que la que se utiliza para la turbina se limpia de sedimento de manera muy simple este vertedor.

Como conclusión en este apartado se puede decir que este tipo de vertedores se limpian muy fácilmente, en otras palabras, no requieren un excesivo cuidado para un funcionamiento óptimo; este ocurre ya que cuando se utilizan grandes cargas hidráulicas se logra una acción tan turbulenta que logra limpiar este tipo de vertedores.

2.6. Aireación.

En el tratamiento de aguas residuales la cuestión de aireación del flujo es de extrema importancia, existen varios estudios que muestran la posibilidad de utilizar vertedores laberínticos para este propósito. Dos fenómenos contribuyen de manera significativa en cuanto a aireación, el primero es la turbulencia que existe en el flujo sobre un vertedor laberíntico y el segundo fenómeno es la saturación que puede generarse dentro del mismo flujo; como se podrá recordar la longitud de un vertedor laberíntico es mayor que la de un vertedor de cresta recta, razón por la cual se puede generar mayor turbulencia y saturación del flujo

³³ Op. Cit., p.97.

2. Marco teórico específico

Wormleaton y Tsang³⁴ han hecho estudios de aireación en vertedores laberínticos.

Las ecuaciones que describen el fenómeno de aeración se presentan a continuación, la ecuación (73) describe un déficit de saturación.

$$r = \frac{C_s - C_u}{C_s - C_{ds}} \quad (73)$$

Los parámetros de esta ecuación son los siguientes:

- La concentración de saturación, C_s
- La concentración aguas arriba del vertedor, C_u
- La concentración aguas abajo del vertedor, C_{ds}

La segunda (74) es una manera práctica de reportar este déficit con respecto a una hipotética eficiencia total, E . Este procedimiento simplifica de manera significativa la obtención de datos en el campo. La ecuación se presenta a continuación.

$$E = 1 - \frac{1}{r} = \frac{C_{ds} - C_u}{C_s - C_u} \quad (74)$$

Algo que es también importante recalcar es la altura desde la cual el flujo choca con la superficie ya que esto está relacionado con una aireación turbulenta, se podría pensar que estas dos variables, la altura y la turbulencia, están directamente relacionadas pero existe un punto en el que el flujo al caer de una altura máxima ya no genera una buena aireación, en otras palabras, ya no es eficiente. Otro punto que merece ser resaltado es que la aireación que también depende del tipo de vertedor que se utiliza, se presenta a continuación la figura 2.13. de Wormleaton.

³⁴ Wormleaton, P.R., and Tsang, C.C. aeration performance of rectangular platform labyrinth weirs, American Society of Civil Engineering, Journal of Environmental Engineering, Virginia, USA, 1980, 127(5), 456-465.

2. Marco teórico específico

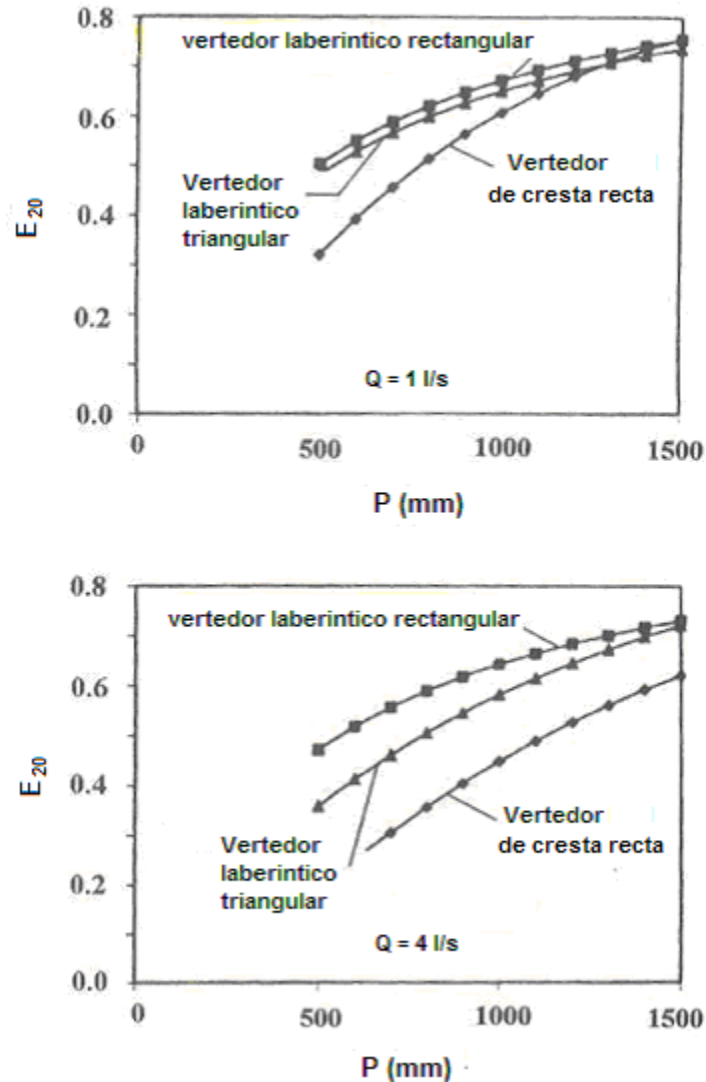


Figura 2.13. comparación eficiencia de aireación como una función del gasto.

De la figura 2.13 se observa lo siguiente:

- Los vertedores laberínticos con planta rectangular son más eficientes bajo diferentes gastos.
- Los vertedores laberínticos con planta triangular son menos eficientes que los de planta rectangular, una de las razones se debe al fenómeno de interferencia de flujo el cual se discute con amplitud en el apartado 2.4. ya que siendo el objetivo que exista una mejor inclusión de aire los

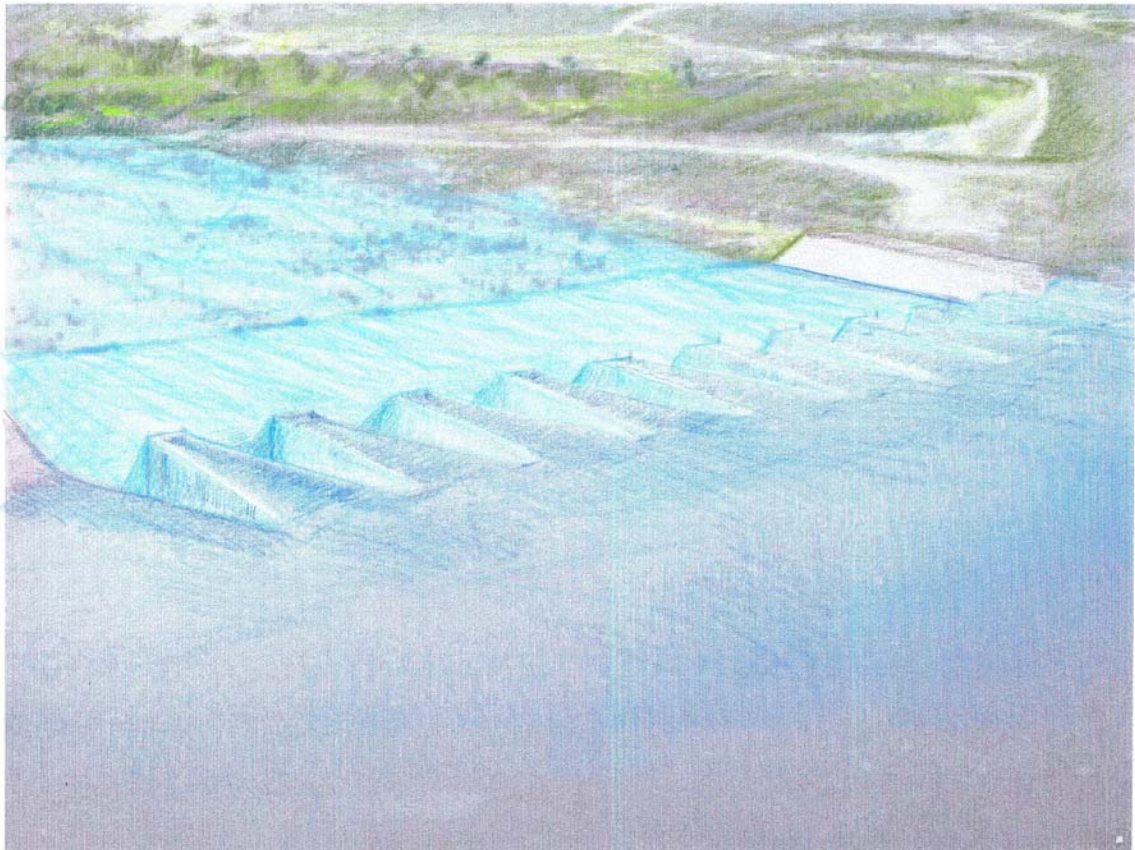
2. Marco teórico específico

vertedores de planta rectangular generan una mayor interferencia de Nappe y por lo tanto son mejores para esta aplicación.

- Los vertedores de cresta recta son los menos recomendados debido a su baja eficiencia.
- La máxima eficiencia que se espera de un vertedor es de aproximadamente un 75% con una altura del jet de 1500 mm y un gasto de 1 l/s , esta ocurre con un vertedor laberíntico de planta rectangular.

CAPÍTULO 3

DISEÑO



3.1. Parámetros significativos de diseño

En este capítulo se proporcionan los parámetros para diseñar un vertedor laberíntico, como son: Altura del vertedor y carga hidráulica; Magnificación; relación ángulo-magnificación; Eficiencia; relación vértice-ancho; forma de la cresta; longitud de interferencia; condiciones de aproximación.

Se proporcionan dos ejemplos de diseño de vertedores laberínticos el primero es el relacionado con un vertedor de planta trapezoidal dado por Darvas, el segundo es de planta triangular hecho por Tullis ambos ejemplos tienen una cresta de un cuarto de circunferencia.

Los parámetros que se describirán a continuación son importantes para un diseño exitoso.

3.1.1. Relación Altura del vertedor y Carga

Falvey¹ se refiere principalmente al estudio de Tullis para determinar la relación altura-carga en el vertedor, cuando se está hablando de carga sobre la cresta del vertedor se refiere a la carga total H_0 , es decir, se toma en cuenta la carga de posición más la velocidad de aproximación. En algunos estudios se utiliza solamente la carga de posición, así que es importante poner atención a la definición de carga que se utiliza en cada estudio, la altura del vertedor, P , es la otra variable que interesa en este caso. Cuando se hace el diseño se busca que la relación H_0/P tenga una relación máxima igual a 0.90, la razón de este

¹ Falvey, Henry T., Hydraulic design of labyrinth weirs, ASCE Press, Virginia, USA, 2003. p.77.

criterio es que muchos de los estudios han sido hechos para esta relación máxima pero en algunos casos la relación H_0/P llega a ser solamente 0.20 por lo expuesto anteriormente se recomienda utilizar valores de H_0/P en el rango de 0.2 a 0.9 ya que la mayoría de los estudios cubren este rango de aplicación. Utilizando un rango de $0.2 < H_0/P < 0.9$ se tendrá la posibilidad de estudiar diferentes geometrías del vertedor en el caso en que no se pueda cumplir con la relación máxima dada por las curvas de diseño se deberá hacer un modelo para poder obtener los parámetros físicos pertinentes.

3.1.2. Magnificación

De nueva cuenta Falvey² cita a Tullis para obtener una magnificación óptima $m = L/W$ se define como el cociente de la longitud de cresta, L , sobre el ancho de un ciclo, W , Falvey muestra que este cociente teóricamente puede variar en el rango de 1 a 10 en la figura 3.1, se ve claramente que con cocientes cercanos a 1 el ángulo α se aproxima a 90° ; es importante recalcar que el ángulo α es el que forma la pared del vertedor con la línea de simetría del ciclo entonces 2α es igual a 180° lo cual físicamente significa que se está hablando de una cresta recta como caso extremo, en la práctica se utilizan valores en el rango de 1.5 a 9.5 ya que las tablas de diseño han sido hechas con valores del ángulo α entre 6° y 35°

3.1.3. Relación ángulo y magnificación

Esta relación es entre la magnificación y el ángulo α que forma la línea central de flujo y la pared del vertedor. Falvey³ muestra en la figura 3.1 la relación entre el ángulo α y la magnificación, es importante señalar que esta figura está hecha para un vertedor triangular pero también se puede usar para un vertedor trapezoidal ya que las ecuaciones son parecidas, en la figura 3.2 se presentan las características geométricas de los vertedores triangulares y trapezoidales. En

² Idem, p. 78.

³ Op. Cit., p.78.

3. Diseño

la figura 3.1 se observa claramente cual es el rango de magnificación y el ángulo α para vertedores triangulares, es menor cuanto mayor es el ángulo y lo inverso es también cierto, es decir, la mayor se presenta con un menor ángulo.

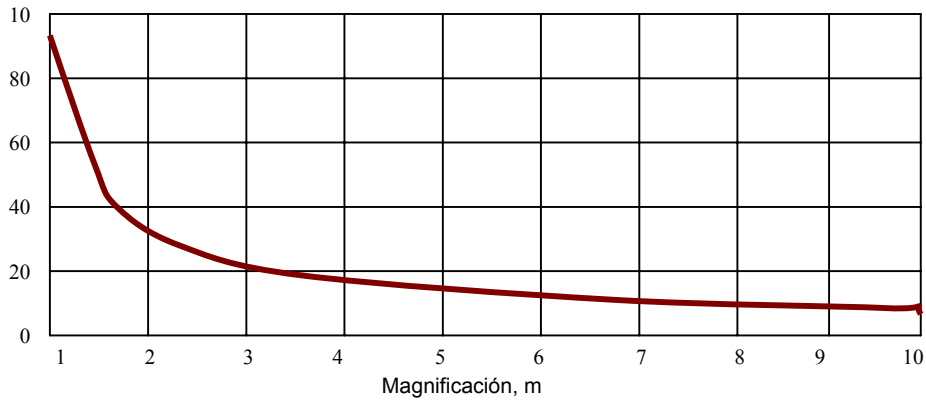


Figura 3.1. Relación ángulo-magnificación⁴

A continuación se muestran las ecuaciones que relacionan la geometría de los vertedores triangulares y trapezoidales, primero se muestran las ecuaciones para un vertedor triangular basándose en la figura 3.2 se llega a las siguientes ecuaciones (75) a (79):

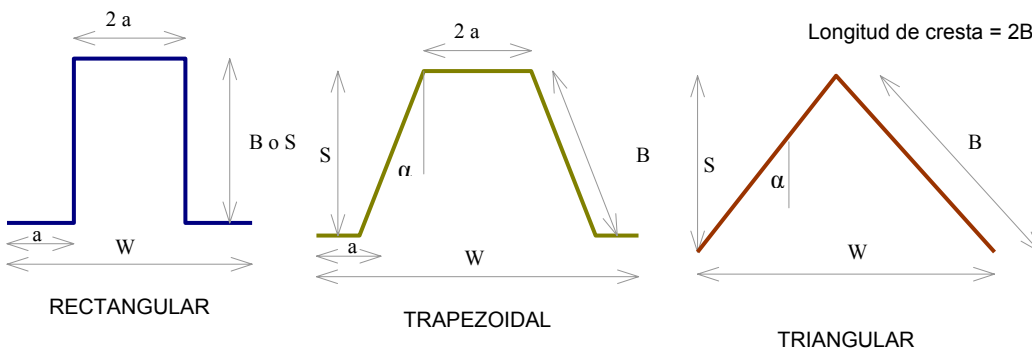


Figura 3.2. Geometría de los vertedores rectangular, trapezoidal y triangular⁵.

F
i
g

⁴ Falvey, Henry T., Hydraulic design of labyrinth weirs, ASCE Press, Virginia, USA, 2003. p.78.

⁵ Falvey, Henry T., Hydraulic design of labyrinth weirs, ASCE Press, Virginia, USA, 2003. p.42

3. Diseño

$$\text{sen } \alpha = \frac{W}{2B} \quad (75)$$

$$B = \frac{L}{2} \quad (76)$$

$$\frac{W}{L} = \frac{1}{M} \quad (77)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{m} \quad (78)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{W}{L} \quad (79)$$

Con esto se llega a tener la relación entre la magnificación y el ángulo α para un vertedor triangular.

Para un vertedor trapezoidal las relaciones geométricas están representadas por las siguientes ecuaciones (80) a (83):

$$\text{sen } \alpha = \frac{W - 4a}{B} \quad (80)$$

$$L = 4a + 2bL \quad (81)$$

$$B = \frac{L - 4a}{2} \quad (82)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{W - 4a}{BL - 4a} \quad (83)$$

Se puede apreciar que las ecuaciones anteriormente señaladas son muy parecidas a las del vertedor de planta triangular ya que la que se refiere al vertedor trapezoidal se le resta $(4a)$ a ambos miembros lo que la hace menor que la del vertedor triangular; por lo cual la curva que describe la relación de magnificación y el ángulo α para el vertedor trapezoidal va debajo de la del vertedor triangular.

3. Diseño

3.1.4. Eficiencia

La eficiencia es uno de los parámetros más importantes en un vertedor laberíntico porque con ella se puede comparar la relación que existe entre el gasto de un vertedor laberíntico y uno de cresta recta, es importante mencionar que el propósito principal de un vertedor laberíntico es poder descargar mayor gasto en un canal del mismo ancho que un vertedor de cresta recta. Taylor calcula el cociente Q_L/Q_N siendo Q_L el gasto de un vertedor laberíntico y Q_N el de un vertedor de cresta recta; Falvey⁶ propone una manera más adecuada para poder involucrar más fácilmente los parámetros de mayor relevancia en un vertedor laberíntico Falvey dice que interesan los de la magnificación y el ángulo α , lo cual parece muy razonable.

La ecuación, que propone Falvey es:

$$\varepsilon = \frac{C_d \alpha M}{C_d(90^\circ)} \quad (84)$$

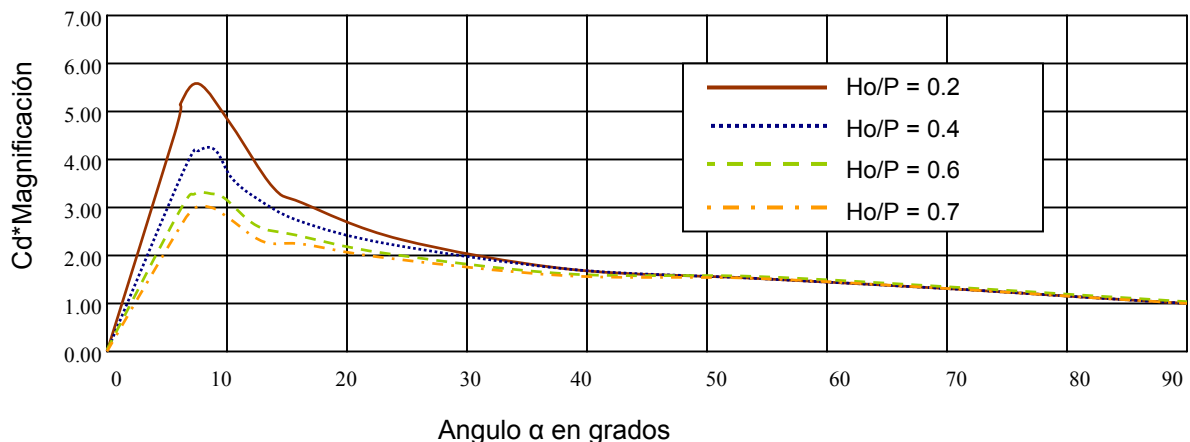


Figura 3.3. Eficiencia*.

⁶ Op. Cit., p.79-80.

*Falvey, Henry T., Hydraulic design of labyrinth weirs, ASCE Press, Virginia, USA, 2003. p.79.

Es de destacar que la figura 3.3 está hecha para vertedores con planta triangular y cresta de un cuarto de circunferencia, aunque también es posible utilizar esta figura en vertedores con planta trapezoidal.

Es interesante notar la estrecha relación entre las figuras 3.1 y 3.3. al variar el número de ciclos, W , cambia el ángulo α , lo cual a su vez determina la magnificación, por esta razón la ecuación que Falvey propone es más útil que la de Taylor. Analizando con detenimiento las figuras 3.1 y 3.3 que Falvey publicó se observan varios detalles de importancia, el primero el ángulo α donde se encuentra la mayor eficiencia es aproximadamente 8° ; el segundo detalle es la carga sobre la cresta del vertedor, a menor relación carga-altura, el vertedor es más eficiente, una de las características de los vertedores laberínticos es un funcionamiento muy eficiente con relaciones carga-altura pequeñas.

3.1.5. Relación Vértice y Ancho

Este cociente se refiere a la relación ancho del vértice y el ancho del ciclo, $2a/W < 0.08$ se puede decir que la interferencia será mínima, analizando se podrá observar que el vertedor triangular de acuerdo a Falvey⁷ es el más eficiente en cuanto a este criterio ya que el ancho del vértice es cercano a cero, pero por razones de construcción se utilizan vértices achatados lo cual hace que esta relación sea mayor a cero. Es de notar que esto implica que en los vértices aguas arriba existirá interferencia, pero esta ocurrirá de cualquier forma ya que siempre existirá una longitud de interferencia sin importar el tipo de vértice aguas arriba. El vértice aguas abajo es siempre una zona de estancamiento así que no es importante buscar tanta precisión en este vértice, en pocas palabras es minimizar esta relación para así lograr un vertedor más eficiente.

⁷ Op. Cit., p.81.

3.1.6. Forma de la Cresta

El efecto de la forma de la cresta en la variación del coeficiente de descarga es evidente, se demostró en el subcapítulo 2.2 la importancia de este parámetro. La figura 1.8 muestra los diferentes tipos de crestas utilizadas, Falvey y Tullis mencionan que las crestas de un cuarto y media circunferencia son las más empleadas; Falvey propone que la cresta Nappe podría mantenerse aireada a mayor carga hidráulica que las anteriormente mencionadas, Tullis señala que la cresta de un cuarto de circunferencia tiene un coeficiente de descarga menor a cargas hidráulicas bajas, pero esto se compensa al haber cargas hidráulicas altas, esto produce un coeficiente de descarga mayor. Tullis muestra que existe otro punto a favor de la cresta de un cuarto de circunferencia, es más sencillo construirla que la de media circunferencia. Falvey también señala que hay dos razones por las que la cresta Nappe completa no es recomendable, la primera tiene mayor interferencia de flujo a mayor carga. La segunda, al colocar una masa tan grande en la cresta el diseño estructural se vuelve más complicado y la posibilidad que esta masa ocasione vibraciones es mayor.

3.1.7. Relación de la longitud de interferencia y la longitud de la pared

La relación es entre la longitud de interferencia, L_{de} , y la longitud de la pared, B ; es claro que se debe limitar el efecto como ya se discutió en el apartado 2.4. También en este mismo subcapítulo Falvey propuso la ecuación (72) que está basada en estudios de varios modelos hidráulicos, para ello se va a utilizar la ecuación (71) de Indlekofer⁸ porque la que Falvey propone necesita más investigación.

En este caso α se debe usar en grados, habiendo hecho este cálculo lo que resta por hacer es obtener la relación que de esta manera se limita el efecto de interferencia. La ecuación (85) muestra esta relación.

⁸ Indlekofer, H., Rouve, G., Discharge over polygonal weirs, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1975, 101(HY3), 385-401.

$$\frac{L_{de}}{B} \leq 0.3 \quad (85)$$

Tullis⁹ incorpora esta ecuación en la figura 3.4., es importante señalar la estrecha relación entre las figuras 3.3 y 3.4 ya que estas figuras tienen un común denominador: la relación H_0/P .

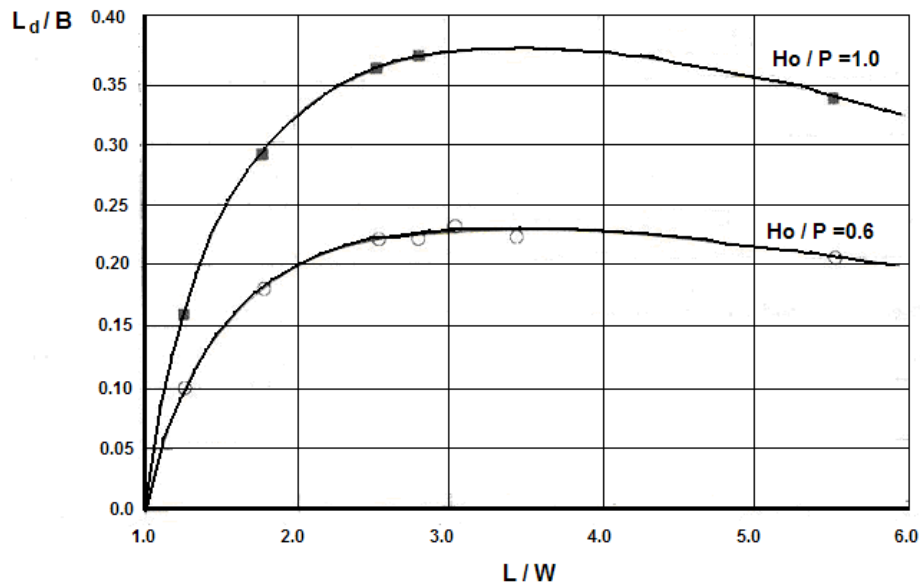


Figura 3.4. Relaciones de interferencia máxima**.

3.1.8. Condiciones de aproximación del flujo hacia el vertedor

Existen varias configuraciones para un vertedor laberíntico las cuales pueden ser observadas en la figura 3.5. el vertedor puede estar en la posición normal o invertido a la entrada del canal de descarga o proyectándose hacia dentro del embalse, Falvey¹⁰ hace referencia al estudio de Houston con estas configuraciones y observa que una magnificación de 5 y la orientación normal se lograba una descarga 9% mayor que en la posición invertida. Este fenómeno puede ser debido a que existe una mayor fricción del flujo con las paredes del

⁹ Tullis, J.P., Nosratollah, A., Waldron, D., Design of labyrinth spilways, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1995, 121(3), 247-255.

¹⁰ Op. Cit., p.83.

**Tullis, J.P., Nosratollah, A., Waldron, D., Design of labyrinth spilways American Society of Civil Engineers, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1995, 121(3), 247-255.

3. Diseño

canal, otro dato importante del trabajo de Houston es que si se coloca el vertedor en al posición invertida y proyectándose hacia dentro del embalse se logra una descarga 20% mayor que si se coloca en la posición normal, es decir, proyectándose hacia fuera del embalse.

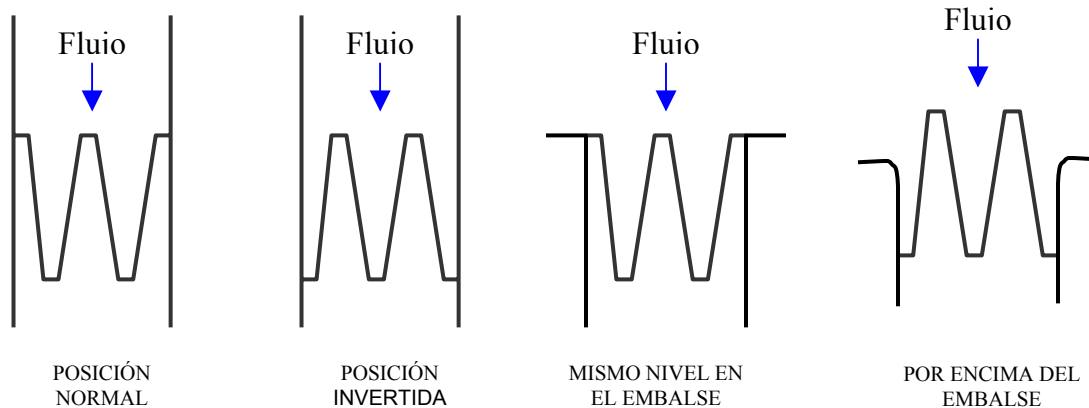


Figura 3.5. Diversas configuraciones del vertedor con respecto al embalse***.

3.1.9. Canal de aguas abajo

Las consideraciones pertinentes al canal de aguas abajo fueron discutidas a profundidad en el subcapítulo 2.3.

3.1.10. Coeficiente de descarga

El coeficiente de descarga se calcula dependiendo del tipo de perfil que tenga la cresta y el tipo de planta que tenga el vertedor, esta planta puede ser triangular o trapezoidal. Estos cálculos se detallaron en el subcapítulo 2.2. es conveniente recalcar que las curvas de Tullis¹¹ están diseñadas para un vertedor de planta triangular y cresta de un cuarto de circunferencia; las curvas de Darvas son para un vertedor con planta trapezoidal y cresta de un cuarto de circunferencia.

¹¹ op. Cit., p.250.

***Falvey, Henry T., Hydraulic design of labyrinth weirs, ASCE Press, Virginia, USA, 2003. p.83.

3.2. Dimensionamiento y cuantificación.

A continuación se hace una descripción del Vertedor con planta trapezoidal Darvas y se ejemplifica numéricamente el diseño de vertedor con planta triangular.

3.2.1. Vertedor con planta trapezoidal Darvas.

Lo primero a describir es la geometría de este tipo de vertedor, en la figura 3.6 se pueden observar los detalles pertinentes a un vertedor de planta trapezoidal observando con cuidado esta figura es posible notar que la diferencia entre un vertedor trapezoidal y triangular es mínima, es decir, el aspecto que los hace diferentes es el valor de $2a$; en un vertedor triangular este valor es pequeño mientras que en el vertedor trapezoidal es mayor.

Dada la geometría que se muestra en la figura 3.6 se llega a las relaciones siguientes:

- El ancho de cada ciclo, W , se calcula como el cociente del ancho del canal, W_c , sobre el número de ciclos, n , del vertedor:

$$W = \frac{W_c}{n} \quad (86)$$

- La longitud de cresta de cada ciclo, L , se calcula como el producto de la magnificación, m , por el ancho de cada ciclo, W , donde:

$$L = mW \quad (87)$$

- La Longitud de la pila de cada ciclo, B , se calcula sabiendo la longitud de cresta de cada ciclo, L , el ancho del vértice, $2a$. Las siguientes ecuaciones proporcionan la longitud B :

$$L = 2B + 2(2a) \quad (88)$$

3. Diseño

$$B = \frac{(L - 2(2a))}{2} \quad (89)$$

- El ángulo α es el formado por la pila B y una línea paralela al flujo que intersecta el vértice, dicho de otra manera, el ángulo α se forma cuando la pila B se desplaza de una línea paralela al flujo teniendo como pivote el vértice.

$$\text{sen } \alpha = \frac{(W - 2(2a))/2}{B} \quad (90)$$

$$\alpha = \text{sen}^{-1} \frac{W - 4a}{2B} \quad (91)$$

- Profundidad del vertedor, S, esta es medida en planta, como:

$$s^2 + ((W - 2a)/2)^2 = B^2 \quad (92)$$

$$s = \left((B^2 - (W - 2(2a))/2)^2 \right)^{1/2} \quad (93)$$

La tabla 3.1 muestra los datos necesarios para realizar los cálculos básicos y obtener el gasto y otros parámetros de diseño, una descripción detallada de las tablas 3.1 y 3.3 se efectúa en el apartado 3.2.3 ya que ambas tablas comparten muchas similitudes aunque se debe notar que existen ciertas diferencias como son las siguientes:

- El valor de S es mayor para el vertedor trapezoidal
- El ángulo α es mayor para el vertedor triangular
- La longitud de interferencia es mayor en el vertedor trapezoidal
- Los coeficientes de descarga están dados en diferentes unidades y por lo tanto no se compatibles
- La eficiencia es bastante similar
- El gasto es mayor en el vertedor trapezoidal
- La magnificación de ambos vertedores es igual

3. Diseño

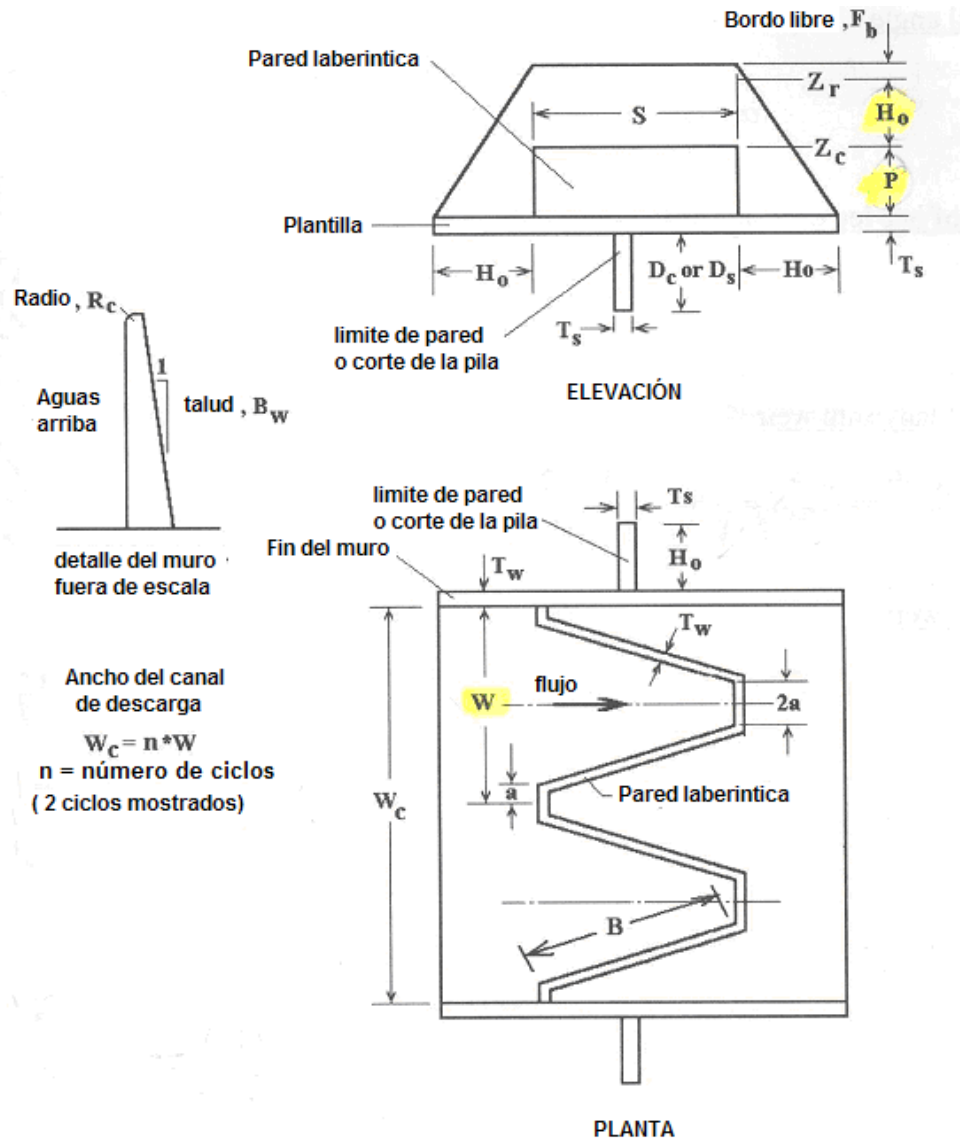


Figura 3.6. Geometría de vertedor con planta trapezoidal¹²

¹² Falvey, Henry T., Hydraulic design of labyrinth weirs, ASCE Press, Virginia, USA, 2003.p.85.

3. Diseño

Datos	Análisis	Observaciones
Elevacion Maxima del embalse m	1425.90	
Elevacion de la cresta del vertedor, Zc	1424.00	
Elevacion minima del vertedor, Zf	1420.40	
Ancho del vertedor, Ws	18.29	
Ancho del vertice, 2a	1.22	
Número de ciclos, n	2.00	
magnificacion L/W	4.95	buen dato
Espesor de la pared envolvente del vertedor, Tw	0.31	
Espesor de la losa, Ts	0.31	
Espesor de la pared pilote, Dc	1.25	
Bordo libre	0.40	

Calculo	Análisis	Observaciones
P	3.60	
H ₀	1.90	
W	9.15	
L	45.27	
B	21.41	
S	21.15	
tan(α)	0.16	
α en radianes	0.16	
α en grados	8.90	buen dato
L _d	7.30	
C _d	6.44	
Eficiencia	41.97	buen dato
Gasto	308.35	

Checando relaciones	Análisis	Observaciones
H ₀ /P	0.53	buen dato
L _d /B	0.34	buen dato

Cuantificacion de materiales	Análisis	Observaciones
Pared del vertedor m ³	101.04	
Paredes laterales m ³	84.32	
Losa m ³	141.46	
Pared envolvente m ³	10.53	
Total m ³	337.35	

Tabla 3.1. Diseño vertedor laberíntico en planta trapezoidal.

Los resultados que se muestran en la tabla 3.2 están basados en las ecuaciones que se obtuvieron por ajuste polinomial de la figura 2.3 que Darvas proporciona en el apartado 2.2.2., las ecuaciones de Darvas se programaron en Excel de tal manera que se pudiese interpolar un coeficiente de descarga apropiado para cada relación H₀/P; Cabe destacar que el coeficiente de descarga tiene como unidades m^{1/2}/s y que el gasto se calcula usando la ecuación que se muestra en el apartado 2.2.2.

3. Diseño

H (m)	P (m)	L (m)	W (m)	H/P	L/W	0.2H/P	0.3H/P	0.4H/P	0.5H/P	0.6H/P	Cw (m ^{0.5} /s)	Q (m ³ /s)	Embalse (m)
1.9	3.6	45.27	9.15	0.53	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	6.4	308.35	1425.90
1.9	3.6	45.27	9.15	0.51	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	6.6	301.96	1425.85
1.8	3.6	45.27	9.15	0.50	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	6.7	295.28	1425.80
1.8	3.6	45.27	9.15	0.49	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	6.8	288.39	1425.75
1.7	3.6	45.27	9.15	0.47	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	6.9	281.22	1425.70
1.7	3.6	45.27	9.15	0.46	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	7.1	273.79	1425.65
1.6	3.6	45.27	9.15	0.44	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	7.2	266.10	1425.60
1.6	3.6	45.27	9.15	0.43	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	7.3	258.17	1425.55
1.5	3.6	45.27	9.15	0.42	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	7.4	250.00	1425.50
1.5	3.6	45.27	9.15	0.40	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	7.6	241.63	1425.45
1.4	3.6	45.27	9.15	0.39	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	7.7	233.98	1425.40
1.4	3.6	45.27	9.15	0.38	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	7.9	226.26	1425.35
1.3	3.6	45.27	9.15	0.36	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	8.1	218.25	1425.30
1.3	3.6	45.27	9.15	0.35	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	8.2	209.97	1425.25
1.2	3.6	45.27	9.15	0.33	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	8.4	201.44	1425.20
1.2	3.6	45.27	9.15	0.32	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	8.5	192.68	1425.15
1.1	3.6	45.27	9.15	0.31	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	8.7	183.71	1425.10
1.1	3.6	45.27	9.15	0.29	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	8.9	174.59	1425.05
1.0	3.6	45.27	9.15	0.28	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	9.0	165.32	1425.00
1.0	3.6	45.27	9.15	0.26	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	9.2	155.90	1424.95
0.9	3.6	45.27	9.15	0.25	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	9.4	146.35	1424.90
0.9	3.6	45.27	9.15	0.24	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	9.5	136.72	1424.85
0.8	3.6	45.27	9.15	0.22	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	9.7	127.01	1424.80
0.8	3.6	45.27	9.15	0.21	4.95	18.1	15.9	13.8	12.1	10.5	9.9	117.27	1424.75

Tabla 3.2. Cálculo gasto-elevación del vertedor en planta trapezoidal.

Dado que las relaciones de H_0/P que Darvas proporciona no van más allá de $H_0/P = 0.2$ no es posible determinar totalmente la gráfica de gasto-elevación. Pero de cualquier manera se puede determinar un gasto máximo y compararlo con la figura 3.8.

3. Diseño

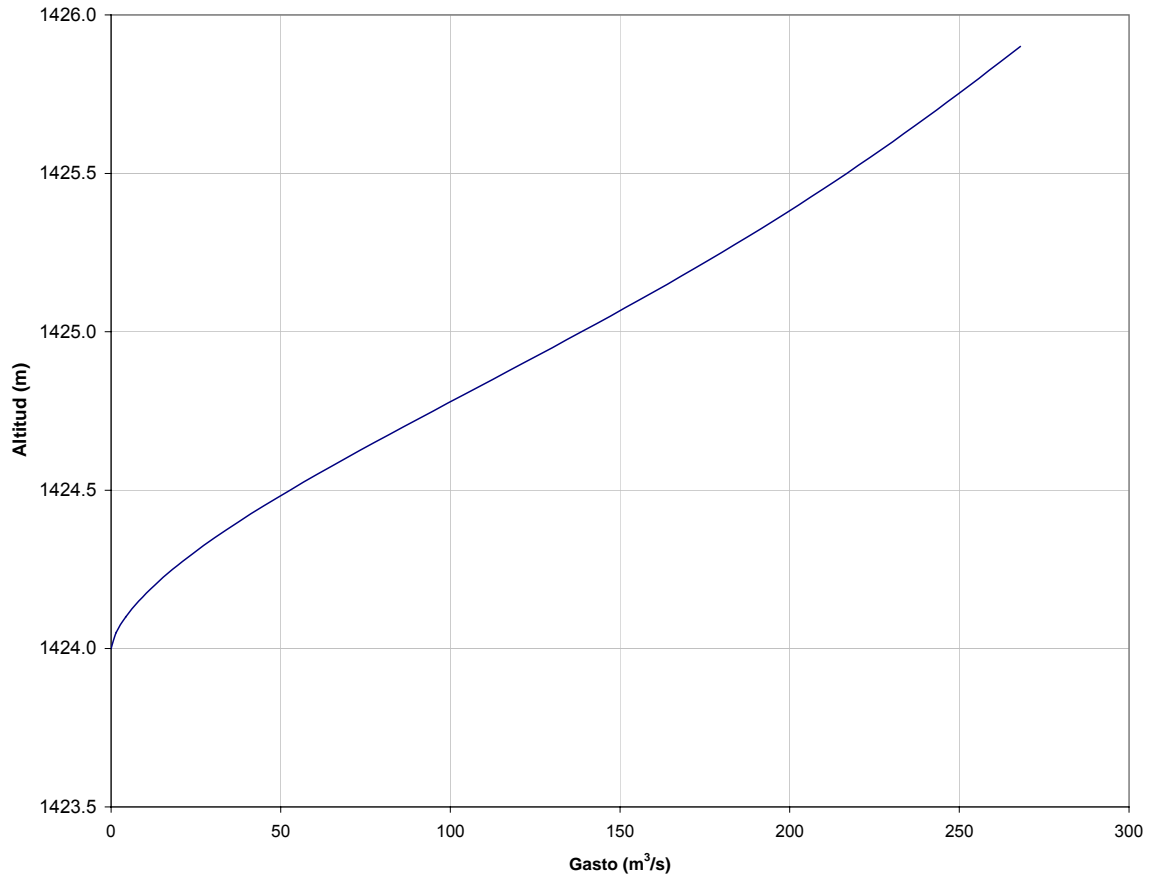


Figura 3.7. Gasto Elevación vertedor planta trapezoidal

3.2.2. Ejemplo de diseño de vertedor con planta triangular.

Lo primero que se requiere es describir la geometría que este tipo de vertedor presenta, en la figura 3.6 se pueden observar los detalles pertinentes a un vertedor de planta triangular dada la geometría que se muestra en la figura 3.6 se llega a las siguientes relaciones:

Ancho de cada ciclo:

$$W = \frac{W_c}{n} \quad (94)$$

La longitud de cresta de cada ciclo,

$$L = mW \quad (95)$$

La longitud de la pila, B, de cada ciclo:

$$B = \frac{L}{2} \quad (96)$$

El ángulo,

$$\alpha = \text{sen}^{-1} \left(\frac{W}{2B} \right) \quad (97)$$

Profundidad del vertedor,

$$S^2 + \left(\frac{W}{2} \right)^2 = B^2 \quad (98)$$

también es,

$$S = \left(B^2 - \left(\frac{W}{2} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (99)$$

Es importante recalcar que esta geometría se asemeja bastante a la de un vertedor con planta trapezoidal pero por razones constructivas hacer un vertedor con una proyección en planta totalmente triangular no es factible, lo que se busca de acuerdo a Tullis es minimizar el ancho $2a$ ¹³ para así lograr un vertedor triangular.

3.2.3. Cuantificación del vertedor con planta triangular

- El volumen de las paredes del vertedor, V_w , se calcula a partir del número de ciclos, n , la longitud de cresta de cada ciclo, L , la profundidad de la pared del vertedor, P , y el ancho de la pared de cada ciclo, T_w .

$$V_w = nL P T_w \quad (100)$$

- El volumen de las paredes laterales, V_e , se calcula a partir de la profundidad de la pared del vertedor, P , la carga sobre la cresta, H_0 , el bordo libre, F_b , la profundidad del vertedor, S , y el ancho de la pared de cada ciclo, T_w .

$$V_e = (P + H_0 + F_b) (S + H_0) H_2 T_w \quad (101)$$

¹³ Op. Cit. p. 250.

3. Diseño

- El volumen de la losa, V_s , se calcula a partir de la profundidad del vertedor, S , la carga sobre la cresta, H_0 , el ancho del canal, W_c , y el ancho de la losa, T_s .

$$V_e = (P + H_0 + F_b) (S + H_0) H_2 T_w \quad (101)$$

$$V_e = (S + 2 H_0) W_s T_s \quad (102)$$

- El volumen de la pared envolvente, V_c , se calcula a partir de la profundidad del pilote, D_c , el ancho del canal, W_c , el espesor de la lamina del pilote, T_s , los parámetros T_s , P , H_0 , y F_b han sido presentados previamente.

$$V_c = (W_c D_c + 2 (D_c + T_s + P + H_0 + F_b) H_0) T_s \quad (103)$$

Las tablas 3.3 y 3.4 muestran los resultados de cálculo para un vertedor de un cuarto de circunferencia con planta triangular, en la tabla 3.3 se muestran los datos que se requieren para calcular un vertedor de planta triangular, asimismo se utilizan las relaciones descritas en este subcapítulo para realizar los cálculos pertinentes. En el anexo se muestra la hoja de cálculo que se utilizo para obtener los valores que se muestran en la tabla 3.3.; un comentario que es importante hacer en cuanto a la tabla 3.3 es que la última columna, llamada análisis, tiene como objetivo discernir si los valores propuestos están dentro del rango de aplicabilidad del modelo teórico. A continuación se analiza cada caso:

- En cuanto a magnificación el valor mínimo utilizado es dos y el máximo 9.5, la razón para esto se encuentra en la figura 3.3 ya que se puede apreciar que alrededor de estos valores se presenta la mayor eficiencia. Lo cual no quiere decir que no se puedan utilizar otros valores pero la hoja de cálculo fue programada para estos valores. El valor de 4.95 significa que este vertedor proporciona aproximadamente cinco veces el gasto de un vertedor de cresta recta.
- El siguiente valor que se analiza es el ángulo α en la figura 3.1 se puede observar que si se desea una magnificación máxima del gasto se deben

utilizar valores cercanos a 10° , en la hoja de cálculo se utilizaron valores en el rango de 6° a 35° ya que estos son los que se pueden usar con las ecuaciones de Tullis. Pero si se combina la información proporcionada por las figuras 3.1 y 3.3 es posible observar que un ángulo cercano a 9° proporciona una magnificación junto con una máxima eficiencia, este vertedor tiene un ángulo de 9 grados.

- La eficiencia es de fundamental importancia para determinar la bondad del diseño, en el caso que nos ocupa se propuso una relación $H_0/P = 0.53$ y un valor de eficiencia igual a 2.51 aunado a un ángulo igual de 9° se puede observar en la figura 3.3 que la curva correspondiente a estos datos registra un valor máximo, es decir, se logra una eficiencia máxima.
- El siguiente valor que se analiza es la relación H_0/P , y como se menciona en el apartado 3.1.1 el valor de H_0/P debe variar en el rango de 0.2 a 0.9 las razones para estos valores se encuentran en el dicho apartado, en la hoja de cálculo se incluye este análisis y como se puede observar se obtiene un valor de 0.54 y esta comprendido dentro del rango mencionado.
- El último valor que se revisa es el relativo a interferencia, en los apartados 2.4 y 3.1.7 se hace un análisis detallado de este parámetro, pero para efectos prácticos la relación L_d/B , longitud de interferencia, debe ser cercana a 0.3. La hoja de cálculo también revisa este parámetro como se puede observar el valor de 0.34 que es lo suficientemente cercano a 0.3 para ser aceptado.

3. Diseño

Datos	Análisis	Observaciones
Elevación Máxima del embalse m	1425.90	
Elevación de la cresta del vertedor,	1424.00	
Elevación mínima del vertedor, Zf	1420.40	
Ancho del vertedor, Ws	18.29	
Ancho del vértice, 2a	1.22	
Número de ciclos, n	2.00	
magnificación L/W	4.95	Buen dato
Espesor de la pared envolvente del	0.31	
Espesor de la losa, Ts	0.31	
Espesor de la pared pilote, Dc	1.25	
Bordo libre	0.40	

Calculo	Análisis	Observaciones
P	3.60	
H ₀	1.90	
W	9.15	
L	45.27	
B	21.41	
S	21.04	
Tan(α)	0.16	
α en radianes	0.16	
α en grados	9.05	Buen dato
Ld	7.24	
Cd	0.38	
Eficiencia	2.51	Buen dato
Gasto	269.38	

Checando relaciones	Análisis	Observaciones
Ho/P	0.53	buen dato
Ld/B	0.34	buen dato

Cuantificacion de materiales	Análisis	Observaciones
Pared del vertedor m ³	101.04	
Paredes laterales m ³	83.93	
Losa m ³	140.86	
Pared envolvente m ³	10.53	
Total m ³	336.36	

Tabla 3.3. Diseño vertedor laberíntico planta triangular

Los resultados que se muestran en la tabla 3.4 están basados en las ecuaciones que Tullis proporciona en el apartado 2.2.1, Es importante notar que las ecuaciones de Tullis se programaron en Excel de tal manera que se pudiese interpolar un coeficiente de descarga apropiado para cada relación H₀/P.

3. Diseño

H (m)	P (m)	ángulo (°)	6°	8°	12°	15°	18°	25°	35°	90°	Cd	Q (m³/s)	Embalse (m)
1.90	3.6	8.898	0.268	0.371	0.424	0.478	0.543	0.638	0.701	0.759	0.38	267.94	1425.90
1.85	3.6	8.898	0.272	0.377	0.430	0.483	0.548	0.643	0.703	0.760	0.39	261.89	1425.85
1.80	3.6	8.898	0.277	0.384	0.437	0.489	0.554	0.647	0.706	0.760	0.40	255.77	1425.80
1.75	3.6	8.898	0.282	0.392	0.443	0.494	0.559	0.651	0.709	0.760	0.40	249.58	1425.75
1.70	3.6	8.898	0.286	0.399	0.450	0.500	0.564	0.655	0.711	0.760	0.41	243.30	1425.70
1.65	3.6	8.898	0.291	0.407	0.457	0.505	0.569	0.659	0.714	0.760	0.42	236.90	1425.65
1.60	3.6	8.898	0.297	0.415	0.464	0.511	0.575	0.662	0.716	0.760	0.43	230.36	1425.60
1.55	3.6	8.898	0.302	0.423	0.471	0.516	0.580	0.665	0.718	0.759	0.43	223.68	1425.55
1.50	3.6	8.898	0.308	0.431	0.478	0.522	0.584	0.669	0.720	0.758	0.44	216.84	1425.50
1.45	3.6	8.898	0.313	0.439	0.485	0.527	0.589	0.671	0.721	0.757	0.45	209.82	1425.45
1.40	3.6	8.898	0.319	0.448	0.492	0.532	0.594	0.674	0.722	0.755	0.46	202.63	1425.40
1.35	3.6	8.898	0.325	0.456	0.499	0.537	0.598	0.676	0.723	0.753	0.47	195.25	1425.35
1.30	3.6	8.898	0.332	0.464	0.506	0.542	0.602	0.678	0.724	0.751	0.47	187.69	1425.30
1.25	3.6	8.898	0.338	0.473	0.512	0.547	0.606	0.680	0.724	0.749	0.48	179.94	1425.25
1.20	3.6	8.898	0.344	0.481	0.519	0.551	0.610	0.681	0.724	0.746	0.49	172.01	1425.20
1.15	3.6	8.898	0.351	0.489	0.525	0.555	0.613	0.681	0.723	0.742	0.50	163.91	1425.15
1.10	3.6	8.898	0.358	0.497	0.531	0.559	0.616	0.682	0.722	0.738	0.50	155.64	1425.10
1.05	3.6	8.898	0.364	0.505	0.537	0.563	0.618	0.681	0.720	0.734	0.51	147.23	1425.05
1.00	3.6	8.898	0.371	0.512	0.542	0.566	0.620	0.681	0.718	0.729	0.52	138.69	1425.00
0.95	3.6	8.898	0.378	0.519	0.547	0.569	0.621	0.679	0.715	0.723	0.53	130.04	1424.95
0.90	3.6	8.898	0.385	0.526	0.551	0.571	0.622	0.677	0.712	0.718	0.53	121.31	1424.90
0.85	3.6	8.898	0.392	0.532	0.555	0.573	0.623	0.675	0.707	0.711	0.54	112.52	1424.85
0.80	3.6	8.898	0.399	0.537	0.559	0.574	0.622	0.671	0.703	0.704	0.54	103.72	1424.80
0.75	3.6	8.898	0.406	0.542	0.562	0.575	0.621	0.667	0.697	0.696	0.55	94.93	1424.75
0.70	3.6	8.898	0.412	0.547	0.564	0.576	0.620	0.662	0.691	0.688	0.55	86.19	1424.70
0.65	3.6	8.898	0.419	0.550	0.565	0.575	0.617	0.657	0.683	0.679	0.55	77.56	1424.65
0.60	3.6	8.898	0.426	0.553	0.566	0.574	0.614	0.650	0.675	0.669	0.56	69.06	1424.60
0.55	3.6	8.898	0.433	0.555	0.566	0.572	0.610	0.643	0.666	0.658	0.56	60.76	1424.55
0.50	3.6	8.898	0.439	0.555	0.565	0.570	0.604	0.635	0.656	0.647	0.56	52.71	1424.50
0.45	3.6	8.898	0.445	0.555	0.563	0.566	0.598	0.625	0.645	0.635	0.56	44.95	1424.45
0.40	3.6	8.898	0.451	0.554	0.560	0.562	0.591	0.615	0.633	0.623	0.56	37.55	1424.40
0.35	3.6	8.898	0.457	0.551	0.556	0.557	0.583	0.604	0.619	0.609	0.55	30.57	1424.35
0.30	3.6	8.898	0.463	0.547	0.550	0.551	0.574	0.591	0.605	0.595	0.55	24.07	1424.30
0.25	3.6	8.898	0.468	0.542	0.544	0.543	0.563	0.578	0.589	0.580	0.54	18.12	1424.25
0.20	3.6	8.898	0.473	0.535	0.536	0.535	0.551	0.563	0.572	0.563	0.54	12.80	1424.20
0.15	3.6	8.898	0.478	0.526	0.527	0.526	0.538	0.547	0.554	0.546	0.53	8.18	1424.15
0.10	3.6	8.898	0.482	0.516	0.516	0.515	0.524	0.529	0.534	0.529	0.52	4.36	1424.10
0.05	3.6	8.898	0.486	0.504	0.504	0.503	0.508	0.510	0.513	0.510	0.50	1.51	1424.05
0.00	3.6	8.898	0.490	0.490	0.490	0.490	0.490	0.490	0.490	0.490	0.49	0.00	1424.00

Tabla 3.4. Cálculo de gasto-elevación, del vertedor en planta triangular

La gráfica que se presenta en la figura 3.8 proviene de los resultados de la tabla de cálculo mostrada en la tabla 3.4.

3. Diseño

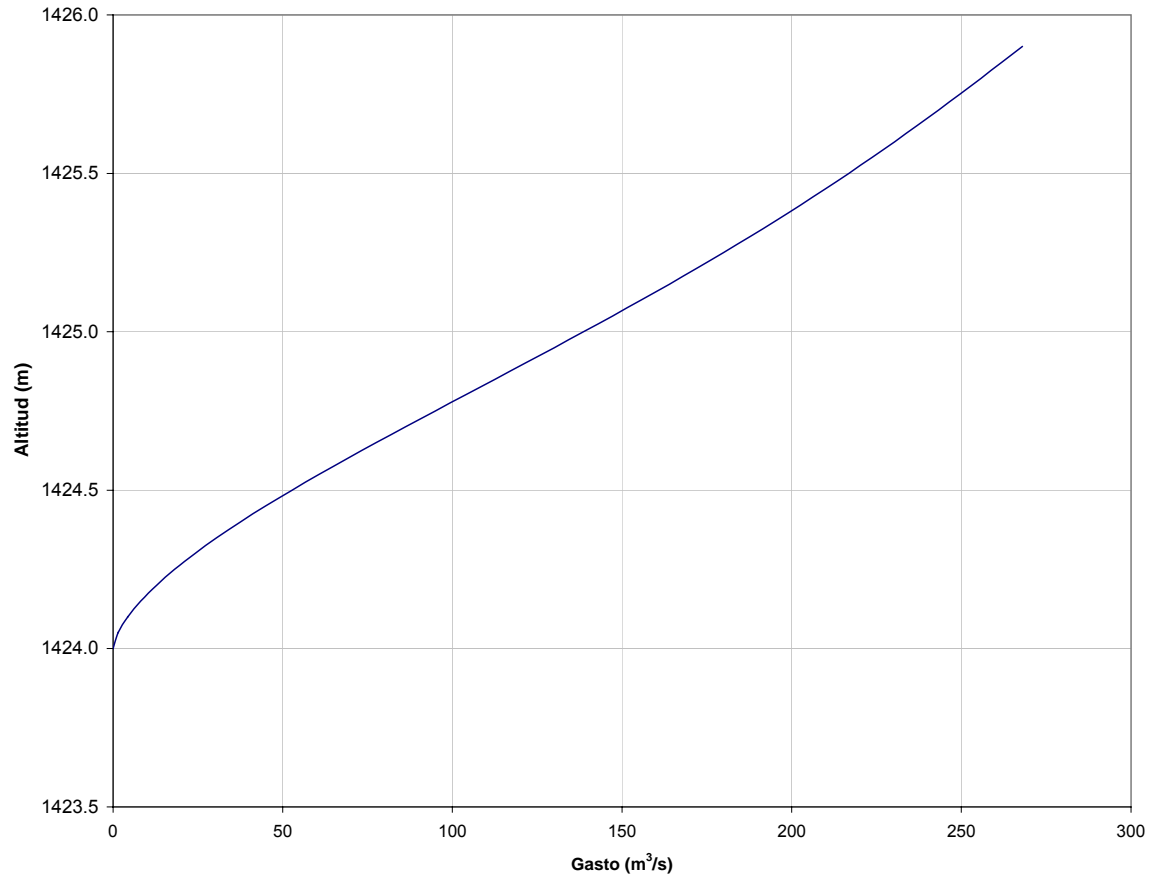


Figura 3.8. Curva gasto-elevación del vertedor en planta triangular.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

4. Conclusiones

Las conclusiones están enfocadas en proveer una versión condensada de todos los puntos relacionados con el diseño de vertedores laberínticos.

Desde el punto de vista teórico describir el patrón de flujo en un vertedor laberíntico es muy complejo, es por esto mismo que hasta la fecha se utilizan aproximaciones empíricas para tratar de describir el fenómeno. Es esencial mencionar que el diseño que se recomienda utilizar es el propuesto por Tullis ya que es el más actual y además el que proporciona ecuaciones más precisas para realizar los cálculos en Excel, por lo tanto todas las recomendaciones de diseño que se hacen en estas conclusiones van encaminadas al vertedor con planta triangular con cresta de un cuarto de circunferencia.

Como se mencionó en el apartado 3.1.1 la relación altura-carga es de fundamental importancia para un funcionamiento eficaz del vertedor, esto se nota claramente en la figura 2.2 presentada en el apartado 2.2.1. En esta se observa que el coeficiente de descarga es máximo si la relación altura-carga esta en el rango 0.1 a 0.2, en otras palabras los vertedores laberínticos funcionan de manera optima bajo cargas hidráulicas bajas por lo que Falvey¹ sugiere que la carga hidráulica, H_0 , que se debe utilizar para el calculo es la carga hidráulica total.

En los apartados 3.1.2 y 3.1.3 se presentan los conceptos de magnificación y la relación ángulo-magnificación. Estos involucran varios parámetros los cuales son descritos con detalle en el apartado 3.2.2. Estos parámetros se mencionan a continuación:

- El ángulo, α
- La longitud total de la cresta, L
- El ancho de un ciclo, W

¹ Op. Cit. p.43.

4. Conclusiones

En la figura 3.1, la cual se refiere a la relación ángulo-magnificación, se puede observar que el ángulo máximo, el cual es aproximadamente 35° , corresponde a una magnificación igual a dos. El ángulo mínimo utilizado para este tipo de vertedores es de aproximadamente 8° el cual corresponde a una magnificación de 9.5. Esto quiere decir que un ángulo cercano a 8° proporciona una magnificación máxima.

Es imprescindible conocer la eficiencia de un vertedor laberíntico ya que el objetivo es maximizar el gasto en comparación con un vertedor de cresta recta. La eficiencia se trata con mas detalle en el apartado 3.1.4. En anteriores párrafos se menciona la correlación entre carga, ángulo, longitud de cresta, y el ancho de ciclo, el concepto de eficiencia dado como una ecuación es la contribución de Falvey al estudio de los vertedores laberínticos; esta ecuación engloba todo estos parámetros de una manera muy coherente. En la figura 3.3 que se adjunta en el apartado 3.1.4 se aprecian claramente las relaciones entre estos parámetros, lo que es importante señalar aquí es que la máxima eficiencia se presenta con un ángulo cercano a 8° junto con una relación carga-altura igual a 0.2. Lo anterior implica una magnificación de 7 veces. Esto quiere decir que un vertedor laberíntico puede pasar hasta 7 veces más gasto que uno de cresta recta en un canal del mismo ancho dadas las condiciones anteriores, la mayor eficiencia de un vertedor laberíntico es precisamente lo que hace a este vertedor superior a uno de cresta recta.

Para lograr un vertedor de máxima eficiencia es necesario minimizar la relación vértice-ancho, es decir, se necesita lograr una geometría con un vértice mínimo, En el apartado 3.1.5 se observa que la manera de lograr esto es con un vertedor de planta triangular; aunque es necesario notar que un vertedor de vértice estrictamente triangular no es sencillo construirlo y es por eso que este vértice tiene cierto ancho.

4. Conclusiones

La geometría del vertedor desempeña un papel crucial en el coeficiente de descarga, en el apartado 3.1.6 se menciona que la forma más práctica es un cuarto de circunferencia. En los apartados 1.4 y 2.2.1 se describe la geometría de este tipo de cresta y se debe destacar que Tullis es el investigador con más conocimiento acerca de este tipo de cresta aplicada a un vertedor laberíntico con planta triangular.

En los apartados 2.4 y 3.1.7 se describen las características geométricas y físicas relacionadas con la relación longitud de interferencia y la longitud de la pared, B ; este fenómeno es conocido también como interferencia de Nappe. La figura 2.8 muestra un isométrico con este fenómeno, la figura 2.10 muestra lo que intuitivamente se supone: a un menor ángulo la interferencia es mayor; lo que es importante mencionar es que Falvey propuso nuevas ecuaciones para calcular la longitud de interferencia estas ecuaciones son validas para una relación H_o/P mayor a 0.1 y ángulos menores a 20° , aunque como se menciona en el apartado 2.4 las ecuaciones propuestas por Falvey requieren más investigación.

Las condiciones de aproximación del flujo al vertedor son de especial importancia, en el apartado 3.1.8 Houston proporciona dos datos muy importantes: el primero, si se coloca el vertedor en una posición invertida se logra un aumento del 9% del gasto en comparación con la posición normal; la segunda, si un vertedor en posición invertida se proyecta hacia dentro del embalse se logra aumentar el gasto en un 20% más, La figura 3.5 muestra las diferentes configuraciones de un vertedor laberíntico con respecto al embalse.

En el apartado 2.3 se habla de los elementos que tienen una influencia decisiva en el canal de aguas abajo, eliminar las ondas supercríticas debe ser una prioridad en el diseño del canal de aguas abajo. En el apartado 2.3.1 se menciona el origen de las ondas supercríticas y la manera de eliminarlas.

4. Conclusiones

Actualmente se utilizan modelos matemáticos para solucionar este problema, en el apartado 2.3.2 son tratados los problemas que ocasionan la adición de delantales. Autores como Falvey y Taylor sugieren no utilizar delantales ya que pueden generar sumergencia de la cresta del vertedor. La figura 2.5 muestra los efectos que genera la adición de delantales en la cresta del vertedor, en el apartado 2.3.3 se trata el fenómeno de sumergencia. La figura 2.6 hace referencia a la investigación de Villemonte y la figura 2.7 corresponde a Taylor; al existir ahogamiento, sumergencia, de la cresta se disminuye considerablemente el gasto que pasa por la cresta del vertedor, Villemonte y Taylor han realizado estudios a este respecto, pero como lo demuestra Taylor se necesita mas investigación. La razón de este comentario es que al incrementarse la carga hidráulica y llegar a valores cercanos a la altura de la pared del vertedor los datos divergen radicalmente de la ecuación propuesta por Villemonte. La interferencia de Nappe es otro fenómeno que se presenta en el canal de aguas abajo y ya se ha discutido.

Como punto final es imprescindible regresar a la hipótesis de trabajo y mencionar que sin ninguna duda un vertedor laberíntico presenta una economía de recursos lo cual hace a este tipo de vertedor una excelente alternativa.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Amanian, N., (1987). "*Performance and design of labyrinth spillways*." MSc thesis, Utah State University, Logan, Utah.
2. Borghei, S.M., Jalili, M.R., Ghodsian, M., *Discharge coefficient for sharp crested side weir in subcritical flow*, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1999, 125(10), 1051-1056.
3. Falvey, Henry T., *Hydraulic design of labyrinth weirs*, ASCE Press, Virginia, USA, 2003.
4. Darvas, L.A., *Discussion of 'Performance and design of labyrinth weirs', by Hay and Taylor.*, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1971, 97(80), 1246-1251.
5. Hager, W.H., *Lateral outflow over side weir*, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1987, 113(4), 491-504.
6. Hager, W.H., *Spillways, shockwaves and air entrainment*, Boletín no. 81, Comité Internacional de Grandes Presas, 1992.
7. Hay, N., Taylor, G., *Performance and design of labyrinth weirs*, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1970, 96(11), 2337-2357.
8. Indlekofer, H., Rouve, G., *Discharge over polygonal weirs*, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1975, 101(HY3), 385-401.
9. Jain, S., Fischer, E.E., *Uniform flow over skew side weir*, American Society of Civil Engineering, Journal of Irrigation and Drainage, Virginia, USA, 1981, 108(2), 163-166.
10. Munson, B.R., Young D.F., Okiishi, T.H., *Fundamentals of fluid mechanics*, John Wiley and Sons, Hoboken, USA, 2001.
11. Ramamurthy, A.S., Carballada, L., *Lateral weir flow model*, American Society of Civil Engineering, Journal of Irrigation and Drainage, Virginia, USA, 1980, 106(1), 9-25.
12. Taylor, G., *The performance of labyrinth weirs*, PhD thesis, University of Nottingham, Nottingham, England, 1968.
13. Tullis, J.P., Nosratollah, A., Waldron, D., *Design of labyrinth spilways*, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1995, 121(3), 247-255.
14. USBR, "Design of Small Dams." USBR, Denver : U.S. Govt. Print. Office, 1987.
15. Wormleaton, P.R., and Tsang, C.C. *aereation performance of rectangular platform labyrinth weirs*, American Society of Civil Engineering, Journal of Environmental Engineering, Virginia, USA, 1980, 127(5), 456-465.
16. Yen, B.C., Wenzel, H.G., *Dynamic equations for steady spatially varied flow*, American Society of Civil Engineering, Journal of Hydraulic Engineering, Virginia, USA, 1970, 96(3), 801-814.