



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**ONDAS CONTINUAMENTE REFRACTADAS
Y PROFUNDIDAD DE PENETRACIÓN EN
SISMOLOGÍA DE EXPLORACIÓN**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERA GEOFÍSICA

P R E S E N T A

JENNIFER IZQUIERDO HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS

SERGIO CHÁVEZ PÉREZ



Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2016

Jurado Asignado

Presidente M.I. Héctor Ricardo Castrejón Pineda

Vocal Dr. Sergio Chávez Pérez

Secretario Dr. Martín Cárdenas Soto

1^{er} suplente M.C. David Escobedo Zenil

2^{do} suplente Dr. Gorgonio García Molina

Índice

Resumen	1
Abstract	2
Introducción	3
Ondas continuamente refractadas	6
1.1 Representación de ondas continuamente refractadas	7
1.2 Ejercicio numérico	9
1.3 Cambio en el gradiente vertical de velocidad	11
Profundidad de penetración de ondas continuamente refractadas	14
2.1 Estimación de la profundidad de penetración a partir de ondas continuamente refractadas	15
Discusión	26
Conclusiones	33
Referencias	34
Apéndices	37

Resumen

Cuando la velocidad de propagación de ondas sísmicas incrementa con la profundidad, eventualmente una onda regresará, por ley de Snell, a la superficie. Éste es el caso de ondas continuamente refractadas (*diving waves*, en inglés). El problema de determinar su profundidad de penetración máxima es de gran interés en la adquisición moderna de datos de sismología de exploración con distancias fuente a receptor muy grandes y para estimación inicial de modelos de velocidad del subsuelo. En este trabajo muestro las ecuaciones que describen el comportamiento de estas ondas y la relación que existe entre profundidad de penetración y distancia fuente a receptor (*offset*, en inglés). Discuto implicaciones prácticas para fines de diseño de adquisición y estimación de modelos de velocidad, utilizando ejemplos que ilustran las características geométricas de estas ondas y su reproducibilidad computacional, factible para cualquier estudiante, profesor o profesional interesado en el tema.

Abstract

According to Snell's law, when seismic velocity increases linearly with depth, a wave will eventually return to the surface. Such events are known as diving waves. In exploration seismology data acquisition, there is a substantial interest to determine maximum depth penetration in large-offset surveys, and to estimate initial subsurface velocity models. This work shows the equations that describe the behavior of diving waves and the relationship between depth penetration and offset. I discuss practical implications in seismic data acquisition design and velocity model building, through examples that illustrate the geometric properties of diving waves and their computational reproducibility, feasible for any student, lecturer or professional with conventional computing resources.

Introducción

La sismología de exploración es una rama de la geofísica que estudia la propagación de ondas mecánicas a través del subsuelo. Durante su recorrido, las ondas sísmicas pueden experimentar reflexión, refracción, difracción y dispersión (Liner, 2004). Tradicionalmente, la sismología de exploración utiliza la sísmica de reflexión como base para estudios exploratorios, principalmente en exploración petrolera. Muchas veces, las zonas donde se encuentra almacenado el petróleo presentan alta complejidad geológica (e.g., estructuras salinas). Uno de los principales desafíos en sismología de exploración es la correcta iluminación de dichas zonas de interés. Sin embargo, las estructuras salinas tienen velocidad sísmica muy alta (4,500 m/s) y las trayectorias de rayo para ondas reflejadas tienden a perderse en esta zona y como consecuencia hay una pobre iluminación de las posibles estructuras de interés.

Asociadas con la presencia de estructuras salinas, existen distintas trayectorias de rayo que logran captar información potencialmente útil para fines exploratorios. Un ejemplo de este tipo de trayectorias es el caso de ondas continuamente refractadas (*diving waves*, en inglés) (Levin, 1996). Por otro lado, existen algunos tipos de trayectorias que se tornan más complejas, por ejemplo la trayectoria de ondas continuamente refractadas y reflejadas (*turning waves*, en inglés) (Hale *et al.*, 1992) y la trayectoria de ondas prismáticas o de prisma (*prism o prismatic waves*, en inglés) (Deeks y Lumley, 2015).

Determinar la profundidad de penetración máxima confiable para un estudio sísmico proporciona información relevante, útil en diseño de adquisición orientado a objetivos y en la estimación inicial de modelos de velocidad. En muchas ocasiones, la determinación de la profundidad de penetración máxima tiende a trivializarse al suponer una especie de regla de dedo a partir de la distancia fuente a receptor máxima disponible en el estudio sísmico.

Interesada en conocer la relación básica que existe entre la profundidad de penetración y la distancia fuente a receptor para ondas continuamente refractadas (*diving waves*, en inglés), elaboré este trabajo basada en material disponible en la literatura geofísica y en resultados numéricos realizados con paquetería computacional abierta, gratuita y reproducible.

Describo el desarrollo de Geldart y Sheriff (2004) de las ecuaciones que permiten calcular la distancia fuente a receptor mínima, profundidad de penetración y tiempo de viaje para ondas reflejadas en un medio con velocidad que varía linealmente con la profundidad. Asimismo, para el mismo medio, muestro el desarrollo descrito tanto por Geldart y Sheriff (2004), como por Stovas y Alkhalifah (2014), de las ecuaciones que rigen el comportamiento de ondas continuamente refractadas, tiempo de viaje, profundidad máxima de sondeo y distancia fuente a receptor mínima para registrar este tipo de eventos. Expongo dos maneras rápidas, prácticas y sencillas de estimar la profundidad de penetración máxima, así como la distancia fuente a receptor mínima para grabar ondas continuamente refractadas. Comparo, además, los resultados obtenidos a partir de dichas estimaciones.

Finalmente, menciono la relevancia e implicaciones prácticas del análisis de ondas continuamente refractadas para fines de adquisición de datos sísmicos y de estimación de modelos de velocidad.

Capítulo 1

Ondas continuamente refractadas

El análisis ya clásico de ondas continuamente refractadas y desarrollo de las ecuaciones que describen su comportamiento fue publicado por Slotnick en 1936. Posteriormente, este mismo desarrollo fue completado y publicado en el libro clásico “Lessons in Seismic Computing” (Slotnick, 1959).

En el Apéndice A describo el desarrollo propuesto por Geldart y Sheriff (2004) para calcular la profundidad de penetración, distancia fuente a receptor y tiempo de viaje de ondas reflejadas para un medio homogéneo, isótropo y de variación lineal de velocidad con respecto a la profundidad. En el Apéndice B presento las ecuaciones de ondas continuamente refractadas para un medio homogéneo, isótropo y de variación lineal de velocidad con respecto a la profundidad (Geldart y Sheriff, 2004). En el Apéndice C, muestro el código para reproducir las Figs. 1.1 y 1.2.

1.1 Representación de ondas continuamente refractadas

Muestro el desarrollo propuesto por Stovas y Alkahlifah (2014) para representar ondas continuamente refractadas. Para un modelo con gradiente vertical de velocidad

$$v(z) = v_0 + \alpha z. \quad (1.1)$$

La trayectoria de rayo para ondas continuamente refractadas corresponde a un arco de circunferencia (Slotnick 1936,1959) con radio $R = \frac{1}{p\alpha}$, donde α es el gradiente vertical de velocidad y p es el parámetro de rayo.

La circunferencia completa está dada por la ecuación

$$\left(z + \frac{v_0}{\alpha}\right)^2 + \left(x - \frac{\sqrt{1-p^2v_0^2}}{p\alpha}\right)^2 = \frac{1}{p^2\alpha^2}. \quad (1.2)$$

Las coordenadas geométricas del punto más profundo de penetración son

$$x_0 = \frac{\sqrt{1-p^2v_0^2}}{p\alpha}, \quad z_0 = -\frac{1-pv_0}{p\alpha}. \quad (1.3)$$

El tiempo de viaje desde la fuente (0,0) hasta el punto de penetración máxima (Ec. 1.3) está dado por la ecuación

$$t_0 = \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1-p^2v_0^2}{pv_0}} \right). \quad (1.4)$$

Cuando el gradiente vertical de velocidad es nulo ($\alpha = 0$), no existe presencia de trayectorias de rayo para ondas continuamente refractadas (Liner, 2004, Fig. 1.12, p. 19).

Finalmente, las ecuaciones propuestas por Slotnick (1936, 1959) y Stovas y Alkhalifah (2014) que gobiernan la cinemática de las ondas continuamente refractadas son equivalentes a las desarrolladas por Geldart y Sheriff (2004) (Apéndices A y B).

1.2 Ejercicio numérico

A continuación, reproduzco un ejercicio numérico dando valores iniciales a las ecuaciones descritas anteriormente. La representación de ondas continuamente refractadas depende del gradiente de velocidad y de la velocidad inicial v_0 (Stovas y Alkhalifah, 2014).

La Fig. 1.1 representa la circunferencia completa (Ec. 1.2), para un rayo con un ángulo de propagación inicial $\beta_0 = 30^\circ$, velocidad inicial $v_0 = 1,500 \text{ m/s}$ y un gradiente vertical de velocidad $\alpha = 0.55 \text{ s}^{-1}$, que es un valor común de gradiente vertical de velocidad para sedimentos de costa del Golfo de México (Hale *et al.*, 1992). El rayo continuamente refractado es el arco de una circunferencia. La línea horizontal negra representa la superficie y, a partir de los parámetros dados, la máxima profundidad de penetración es de 2,727.27 m y la distancia fuente a receptor mínima necesaria para grabar la trayectoria de ondas continuamente refractadas es de 9,447.54 m. Las Figs. 1.1 y 1.2 están calculadas y graficadas con la paquetería de laboratorio de matrices (*MATLAB*), disponible en <http://www.mathworks.com>.

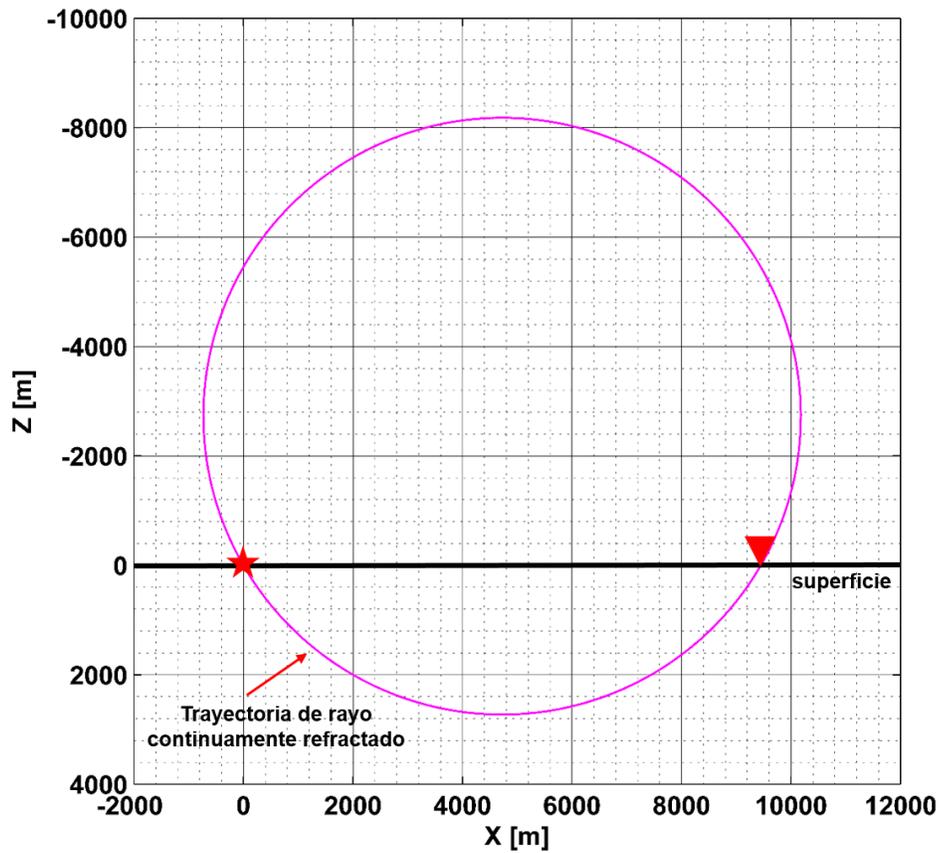


Figura 1.1: Circunferencia completa (Ec. 1.2). La flecha en rojo señala la trayectoria de viaje para una onda continuamente refractada que se propaga bajo la superficie ($Z = 0 \text{ m}$). La estrella representa la fuente sísmica en el origen de la gráfica (0 m , 0 m) y el triángulo invertido denota el receptor. La profundidad de penetración máxima es de $2,727.27 \text{ m}$ y la distancia fuente a receptor mínima necesaria para grabar la trayectoria de ondas continuamente refractadas es de $9,447.54 \text{ m}$ (reproducido de Stovas y Alkhalifah, 2014).

Al utilizar las fórmulas analíticas –ya sean las descritas por Slotnick (1936, 1959), Geldart y Sheriff (2004) o Stovas y Alkhalifah (2014) – es fácil obtener una estimación práctica, sencilla y rápida de la profundidad de penetración máxima para ondas continuamente refractadas.

1.3 Cambio en el gradiente vertical de velocidad

La Ec. 1.1 describe la relación que existe cuando la velocidad de ondas sísmicas aumenta de manera constante con la profundidad. Ahora, al introducir una variación –ya sea positiva o negativa– en el valor del gradiente vertical de velocidad $\Delta\alpha$, es decir, $v = v_0 + (\alpha + \Delta\alpha)$, el centro del círculo se mueve a lo largo del radio (Fig. 1.2) siguiendo la relación (Stovas y Alkhalifah, 2014)

$$z_0 = -\frac{px_{ocr}v_0}{\sqrt{1-p^2v_0}}. \quad (1.5)$$

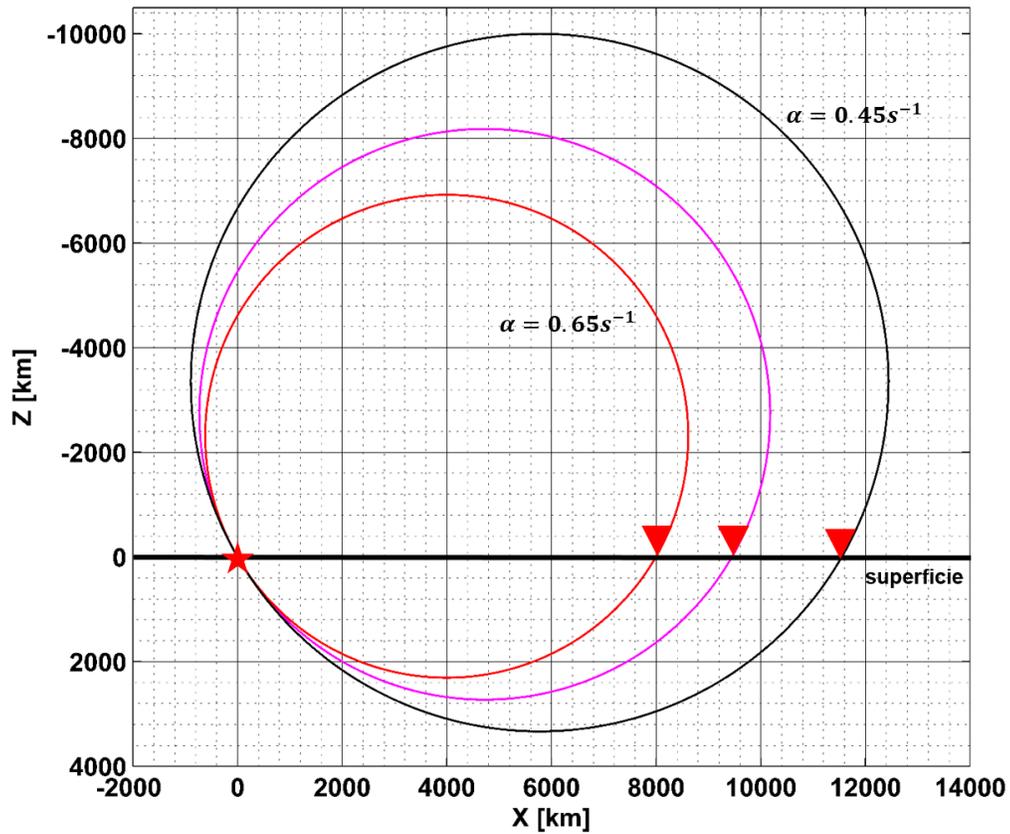


Figura 1.2: Cambio en trayectoria y profundidad del rayo continuamente refractado que se propaga bajo la superficie ($Z = 0 \text{ m}$) debido a variaciones en el gradiente vertical de velocidad. La estrella representa la fuente en el origen (0 m, 0 m) y los triángulos invertidos denotan los receptores. La circunferencia en color rojo tiene profundidad de penetración de 2,307.69 m y la distancia fuente a receptor mínima necesaria para grabar la trayectoria de rayo para ondas continuamente refractadas es de 7,994.06 m. La circunferencia en color negro tiene profundidad de penetración de 3,333.33 m y la distancia fuente a receptor mínima necesaria para grabar la trayectoria de rayo para ondas continuamente refractadas es de 11,547 m. La circunferencia en color magenta tiene las características de la Fig. 1.1. Reproducido de Stovas y Alkhalifah (2014).

La Fig. 1.2 muestra dos circunferencias (roja y negra, respectivamente) que representan la variación de trayectorias de viaje de ondas continuamente refractadas obtenidas al modificar el gradiente vertical de velocidad propuesto inicialmente.

Al introducir una variación positiva en el gradiente, cuyo valor inicial es $\alpha = 0.55 \text{ s}^{-1}$, es decir, $\Delta\alpha = 0.1$, obtengo la circunferencia en rojo con gradiente vertical $\alpha = 0.65 \text{ s}^{-1}$, que tiene menor profundidad de penetración ($h_{ocr} = 2,307.69 \text{ m}$) y, por tanto, menor distancia fuente a receptor ($x_{ocr} = 7,994.06 \text{ m}$). Las siglas *ocr* son la abreviación de ondas continuamente refractadas.

Por otro lado, la circunferencia negra presenta un decremento en el gradiente vertical de velocidad, es decir, $\Delta\alpha = -0.1$. El valor de gradiente vertical de velocidad $\alpha = 0.45 \text{ s}^{-1}$ resulta con mayor profundidad de penetración ($h_{ocr} = 3,333.33 \text{ m}$) y distancia fuente a receptor también mayor ($x_{ocr} = 11,547.00 \text{ m}$). A partir de la figura inicial (misma que en la Fig. 1.1) mostrada en color magenta, donde el valor de gradiente es de 0.55 s^{-1} , infiero que, para gradientes menores, el radio de la circunferencia que describe la trayectoria de propagación de ondas continuamente refractada incrementa, y la profundidad de penetración y distancia fuente a receptor aumentan. Para el caso de gradientes mayores, el radio de la circunferencia que describe la trayectoria de propagación de ondas continuamente refractadas disminuye y provoca un decremento en la profundidad de penetración y distancia fuente a receptor.

Capítulo 2

Profundidad de penetración de ondas continuamente refractadas

Con el fin de establecer otra forma de estimar de manera rápida la profundidad de penetración máxima para ondas continuamente refractadas, en este capítulo presento ejemplos que ilustran las características geométricas de este tipo de ondas y su reproducibilidad computacional (Fomel, 2015), factible para cualquier interesado en el tema.

Realicé los cálculos con *Madagascar*¹, surgido en 2006. Fomel *et al.* (2013) describen *Madagascar* como una paquetería diseñada para el análisis de datos sísmicos, y está basado en un principio de Unix: “escribe programas que hagan una cosa y que lo hagan bien”. Además, una de sus premisas es promover reproducibilidad computacional. La instalación de la paquetería puede ser en diferentes sistemas operativos, incluidos Linux, MacOS X, así como emuladores de Linux en Windows. La paquetería contiene una colección de módulos de cálculo, secuencias de procesamiento de datos y artículos de investigación útiles para cualquier estudiante de geofísica o carreras afines al manejo, procesamiento y análisis de datos sísmicos.

¹ La paquetería, la bitácora electrónica (blog) así como la documentación están disponibles en http://www.ahay.org/wiki/Main_Page

2.1 Estimación de la profundidad de penetración a partir de ondas continuamente refractadas

Los ejemplos que muestro a continuación representan un subsuelo con gradiente vertical de velocidad, capas horizontales (sedimentos) con formas irregulares y velocidad de propagación conocida (Tabla 1).

Tipo de Material	Velocidad (m/s)
Lutitas	2000 – 4000
Areniscas	2000 – 5000
Carbón	2000 – 3500
Calizas	4000 – 6000
Sal	4500
Dolomías	5000 – 6500
Yeso y Anhidrita	5500 – 6500
Ígneos	5000 – 6000

Tabla 1: Mediciones de velocidad en distintos tipos de rocas. Valores reportados por Birch (1966). Modificado de Telford *et al.* (1990).

Los cálculos con *Madagascar* consisten en el trazado de rayos sobre un modelo de velocidad establecido. La herramienta utilizada fue *sfrays2*, que traza trayectorias de rayo basándose en la ecuación eikonal (Ec. 1.6), que es una solución cinemática

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x,z)}, \quad (1.6)$$

donde $\tau(x, z)$ es el tiempo de viaje en cada punto en el modelo de profundidad. Suponiendo que la amplitud de la onda sísmica y el tiempo de viaje son funciones separables, la Ec. 1.6 puede ser derivada directamente de la ecuación de onda; la suposición es válida para frecuencias presentes en sismología de exploración petrolera (Liner, 2004).

Los parámetros gradiente vertical de velocidad (α) y velocidad inicial v_0 son iguales para todos los modelos (Figs. 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4). El ángulo β_0 fue medido de manera gráfica.

La Fig. 2.1 representa algunas trayectorias de rayo (normales a frentes de onda) para un modelo de Tierra con gradiente vertical de velocidad $\alpha = 0.55 \text{ s}^{-1}$ y velocidad inicial $v_0 = 1,500 \text{ m/s}$. La fuente sísmica se encuentra en el origen de la gráfica y utilizo el mismo modelo de velocidad para una distancia fuente a receptor de 10 km (Fig. 2.1a) y 15 km (Fig. 2.1b). El trazado de rayos tiene una apertura de abanico de rayos de 50° y el número de rayos propagados es cien (densidad de rayos).

El lector debe notar que para un rayo que penetra alrededor de 4,800 m es necesaria una distancia fuente a receptor mínima de poco más de 14,000 m, siendo este el rayo más profundo presente en el modelo. Sin embargo, con el fin de hacer una comparación más justa entre los modelos que representan las Fig. 1.1 y 2.1, el rayo utilizado es el que penetra alrededor de 3,400 m con distancia fuente a receptor aproximada de 11,000 m.

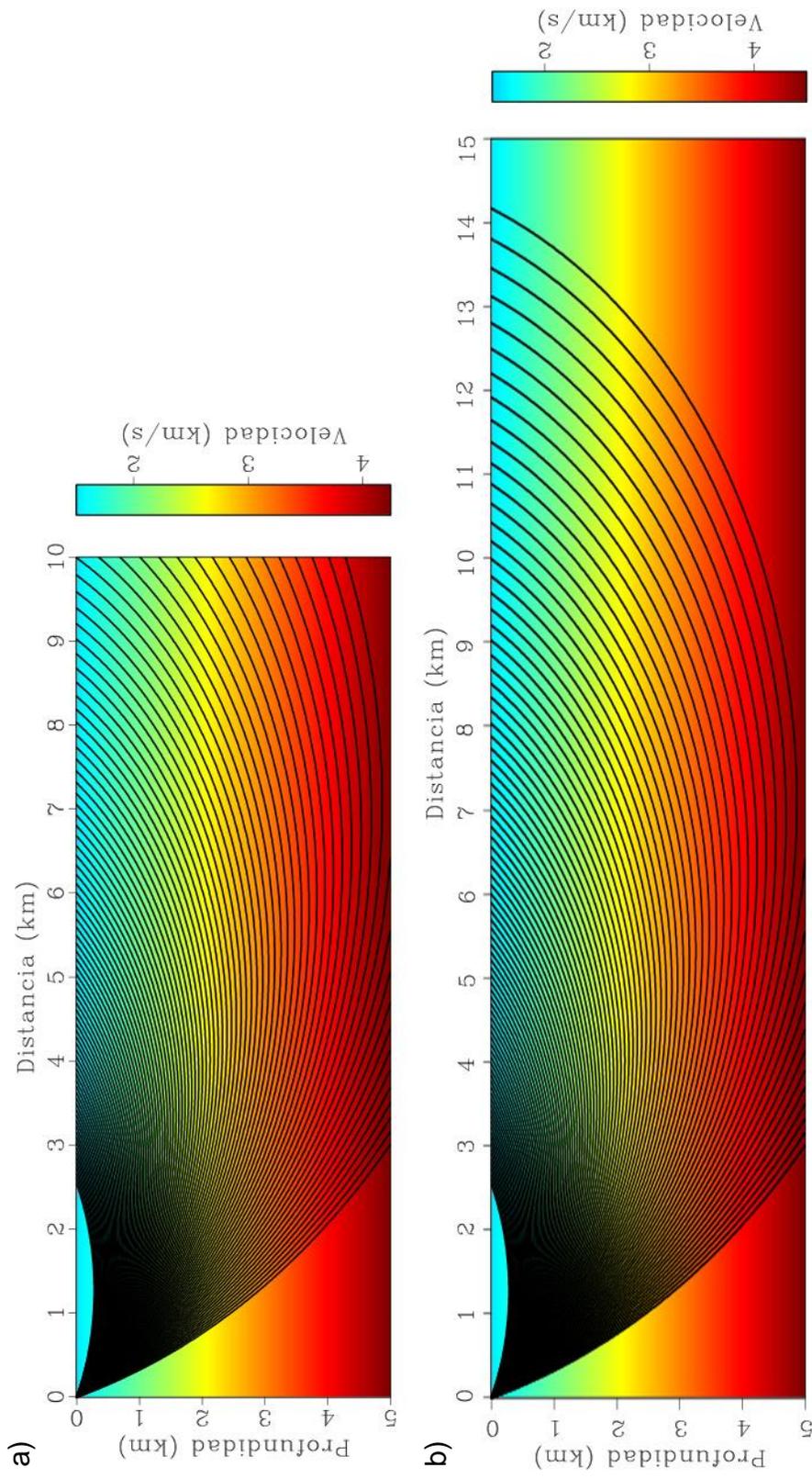


Figura 2.1: Ondas continuamente refractadas en un subsuelo con gradiente vertical de velocidad $\alpha = 0.55 \text{ s}^{-1}$. Comparación cualitativa entre distintas distancias fuente a receptor y profundidad máxima de sondeo. a) Modelo de velocidad con distancia fuente a receptor de 10 km. b) Modelo de velocidad con distancia fuente a receptor de 15 km. La distancia fuente a receptor mínima para registrar el rayo más profundo es de aproximadamente 14 km.

La Fig. 2.2 tiene capas con velocidad de propagación de ondas acústicas asociada con sedimentos arcillo-arenosos (Tabla 1). La fuente se encuentra en el origen y los rayos salen de esta posición.

Realicé pruebas de apertura de abanico de rayos para 30°, 40° y 50°, siendo el último valor el más adecuado para el modelo. El gradiente vertical de velocidad es de $\alpha = 0.55 \text{ s}^{-1}$ y velocidad inicial $v_0 = 1,500 \text{ m/s}$. El lector debe notar que para un rayo continuamente refractado que penetra alrededor de 3,700 m es necesaria una distancia fuente a receptor mínima de 11,500 m, y un sondeo sísmico limitado a solo 10,000 m (Fig. 2.2a) de distancia fuente a receptor, no permitiría grabar la trayectoria con mayor profundidad de penetración y en consecuencia no se registra información geológica a profundidades mayores.

En la Fig. 2.2 también hay presencia de ondas reflejadas, que tienen una mayor profundidad de penetración en comparación con las ondas continuamente refractadas y, muchas de ellas “escapan” (se refractan a mayor ángulo) al encontrar un cambio abrupto de velocidad, en este caso asociado con presencia salina

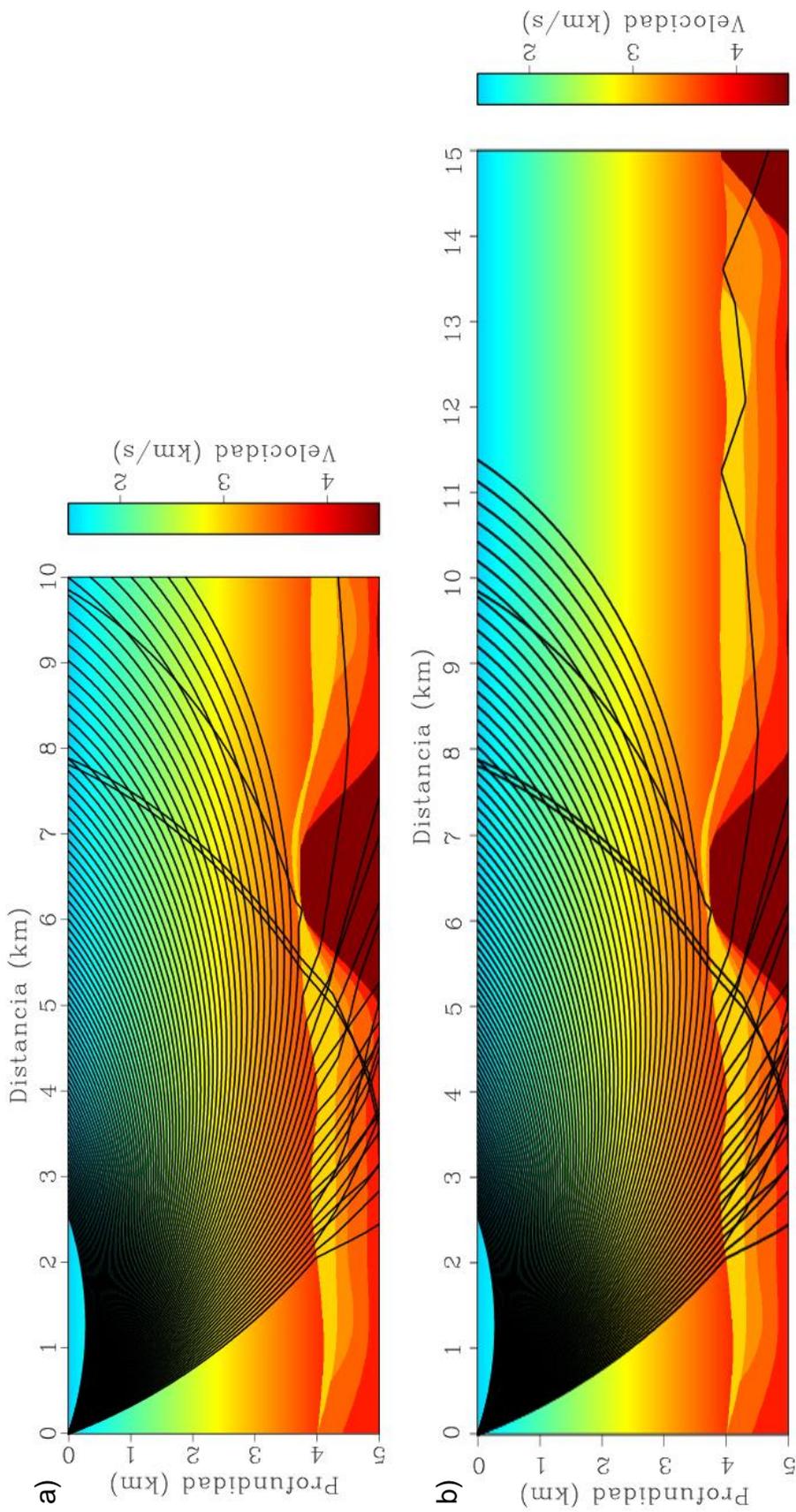


Figura 2.2: Ondas continuamente refractadas en un modelo de velocidad de cinco capas. Comparación cualitativa entre distintas distancias fuente a receptor y la profundidad máxima de sondeo. a) El rayo continuamente refractado más profundo no es visible a 10 km de distancia fuente a receptor. b) La distancia fuente a receptor mínima para registrar el rayo más profundo es de aproximadamente 11.5 km.

La Fig. 2.3 contiene capas con velocidad de propagación que varía de 1,500 m/s a 4,500 m/s , el gradiente vertical de velocidad es de $\alpha = 0.55 s^{-1}$. La fuente sísmica se encuentra en el origen y la apertura de abanico de rayos es de 50° . Aproximadamente, entre los 4,000 y 9,000 m de distancia fuente a receptor, existe un cuerpo con velocidad de 4,500 m/s asociado con una estructura salina de formas irregulares. El modelo es interesante ya que permite observar ondas que viajan por debajo de la sal, que potencialmente ofrecen información subsalina útil para fines exploratorios. También existen rayos que viajan por la cima de la sal, que conservan la trayectoria continuamente refractada a través del gradiente de velocidad, pero al encontrar una velocidad distinta cambian su trayectoria en el interior del cuerpo y, al salir, retoman la forma de rayo continuamente refractado.

El lector debe notar que para un rayo continuamente refractado que penetra alrededor de 2,600 m, es necesaria una distancia fuente a receptor de 9,400 m. Los rayos atraviesan la estructura salina y viajan por la parte superior de esta, alcanzan una profundidad aproximada de 3,200 m y distancia fuente a receptor aproximada de 10 km. Los rayos subsalinos con profundidad mayor que 4,000 m pueden grabarse a partir de 12,000 m (Fig. 2.3b).

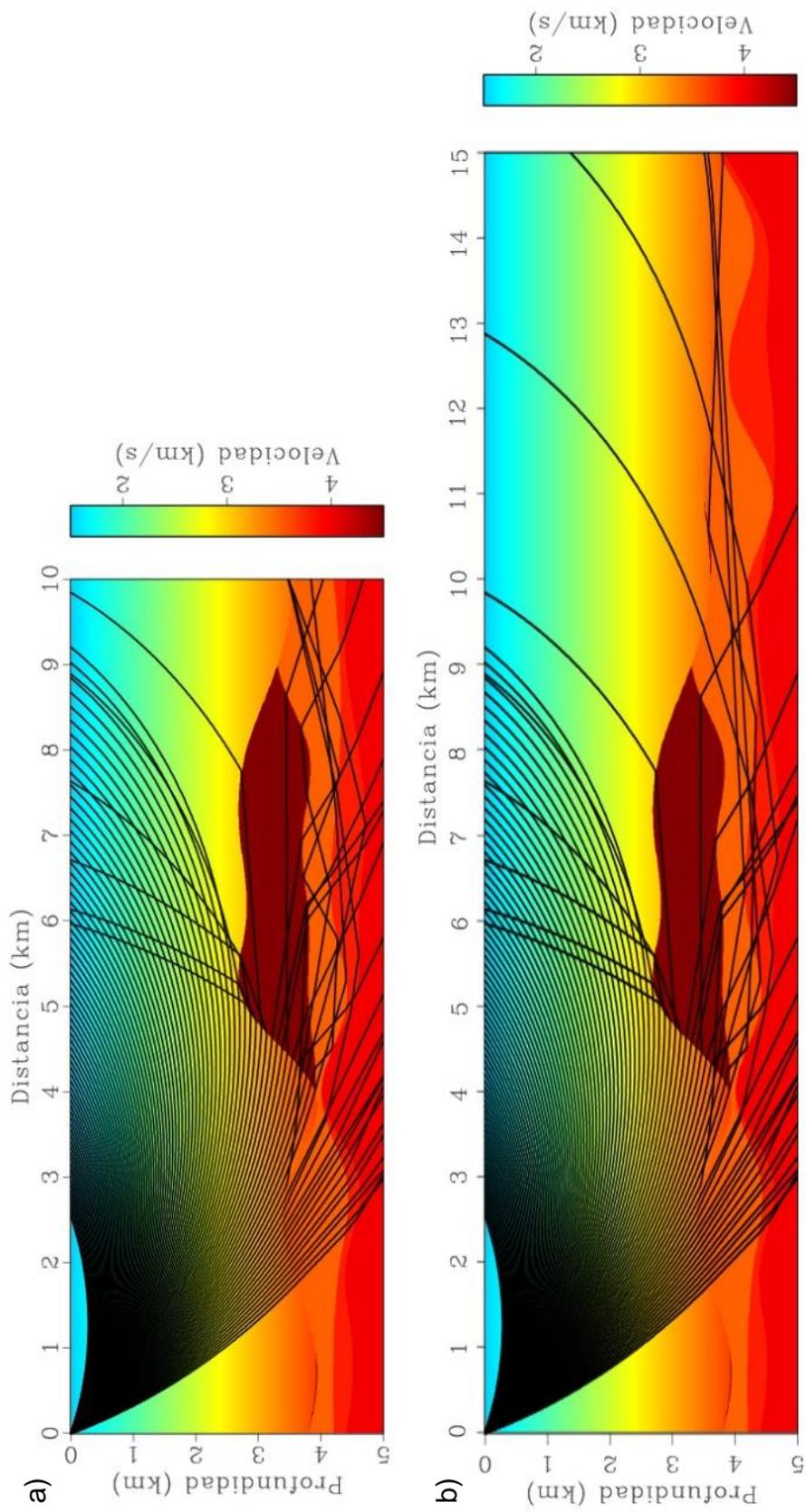


Figura 2.3: Ondas continuamente refractadas en un modelo de velocidad de cinco capas. Comparación cualitativa entre distintas distancias fuente a receptor y profundidad máxima de sondeo. a) Modelo de velocidad con distancia fuente a receptor de 10 km. b) La distancia fuente a receptor mínima para registrar el rayo más profundo es de aproximadamente 9,400 m.

La Fig. 2.4 representa un modelo de velocidad de 5 capas. Es un ejemplo canónico de geometría asociada con un domo salino y capas sedimentarias que lo rodean.

Los sedimentos son arcillo-arenosos (Tabla 1) y la forma de los sedimentos se debe a la intrusión salina. El modelo va de 1,500 m/s a 4,500 m/s con gradiente vertical de velocidad $\alpha = 0.55 s^{-1}$. El rayo continuamente refractado más profundo es de aproximadamente 3,200 m y para grabarlo es necesaria una distancia fuente a receptor de más de 10,500 m.

Asimismo, existen otros rayos que al propagarse con una velocidad tan alta se pierden dentro del domo salino y hay rayos que siguen la trayectoria continuamente refractada que al encontrar un cambio tan abrupto de velocidad se reflejan y se registran a distancias fuente a receptor más cortas, por ejemplo a 6,000 m (Fig. 2.4a). Además, las trayectorias de rayo que logran atravesar la estructura salina, lo hacen solo en la cima de la estructura, alcanzando una profundidad de casi 4,000 m y la distancia fuente a receptor mínima para grabarlas es de alrededor de 13,500 m (Fig. 2.4b).

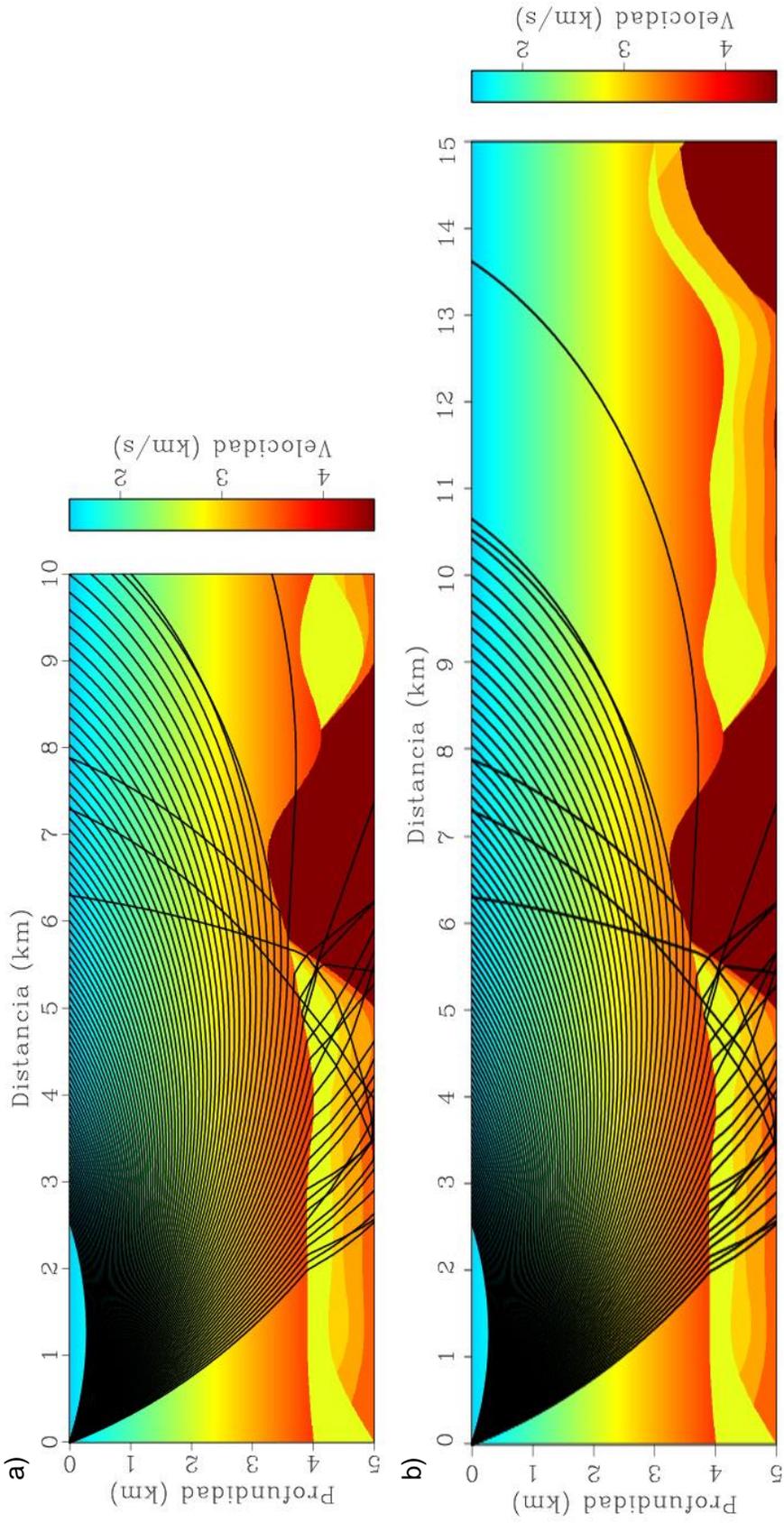


Figura 2.4: Ondas continuamente refractadas en un modelo de velocidad de cinco capas. Comparación cualitativa entre distintas distancias fuente a receptor y profundidad máxima de sondeo. a) Modelo de velocidad con distancia fuente a receptor de 10,000 m. b) La distancia fuente a receptor mínima para registrar el rayo más profundo (3,200 m) es de aproximadamente 10,000 m.

La representación sísmica de estructuras salinas no es fácil. Regularmente, como consecuencia del movimiento de la sal, se tienen cuerpos con formas complicadas, irregulares y con echados muy pronunciados, generando así trayectorias de rayo complejas (Fig. 2.5). Las limitaciones en cuanto a distancia fuente a receptor en la etapa de adquisición sísmica generan una pobre iluminación de este tipo de estructuras; asimismo, los flancos de los diapiros salinos tienden a ser cuasiverticales haciendo más difícil su correcta iluminación (Jones y Davison, 2014).

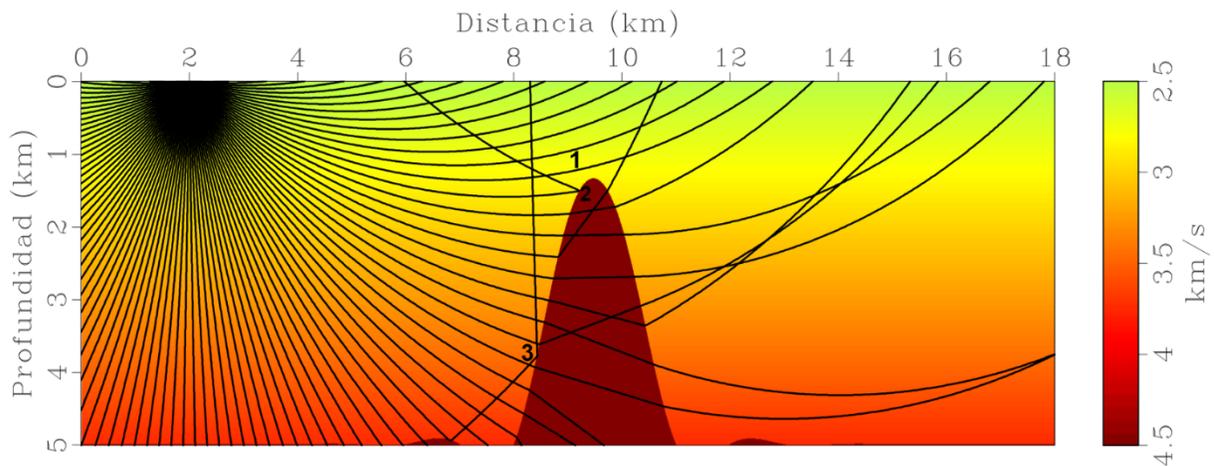


Figura 2.5: (1) Ondas continuamente refractadas, (2) ondas continuamente refractadas y reflejadas y (3) ondas prismáticas.

En este caso (Fig. 2.5), el valor asignado al parámetro gradiente vertical de velocidad es $\alpha = 0.3 \text{ s}^{-1}$ y el valor asignado a la velocidad inicial es $v_0 = 2,500 \text{ m/s}$. Esto con el fin de mostrar otras trayectorias de onda asociadas con presencia salina. Posteriormente, solo discutiré las trayectorias de ondas continuamente refractadas. Existen trayectorias continuamente refractadas –que son las que más aparecen en

las Figs. 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5-, también hay presencia de ondas continuamente refractadas y reflejadas (*turning waves*, en inglés) (Hale *et al.*, 1992) y ondas prismáticas o de prisma (*prismatic waves* o *prism waves*, en inglés) (Deeks y Lumley, 2015).

Es relevante mencionar que los cálculos computacionales de todos los modelos anteriores (Figs. 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5) son muy sencillos, su tiempo de cómputo es de pocos segundos, siendo así factibles de reproducir para cualquier interesado en el tema

Capítulo 3

Discusión

Con base en los cálculos obtenidos de manera analítica en el Capítulo 1 (Fig. 1.1) y con los resultados estimados en el Capítulo 2 (Figs. 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4), establezco la siguiente comparación (Tabla 2) entre los distintos valores de profundidad de penetración máxima y distancia fuente a receptor mínima de grabación de ondas continuamente refractadas.

Parámetros Modelos	α	v_0	β_0	Profundidad de penetración	Distancia fuente a receptor	Tipo de cálculo
Fig. 1.1	0.55 s^{-1}	1500 m/s	30°	$2,727.27 \text{ m}$	$9,447.54 \text{ m}$	Ecs. analíticas
Fig. 2.1	0.55 s^{-1}	1500 m/s	26°	$3,400 \text{ m}$	$11,000 \text{ m}$	Trazado de rayos mediante la ecuación eikonal
Fig. 2.2	0.55 s^{-1}	1500 m/s	25°	$3,700 \text{ m}$	$11,500 \text{ m}$	
Fig. 2.3	0.55 s^{-1}	1500 m/s	30°	$2,600 \text{ m}$	$9,400 \text{ m}$	
Fig. 2.4	0.55 s^{-1}	1500 m/s	27°	$3,200 \text{ m}$	$10,500 \text{ m}$	

Tabla 2: Comparación de parámetros iniciales para cada modelo de velocidad. Valores de profundidad máxima de penetración y distancia fuente a receptor mínima. La Fig. 1.1 es el modelo base para llevar a cabo las comparaciones entre los distintos valores de profundidad de penetración máxima y distancia fuente a receptor mínima.

La profundidad de penetración máxima para el modelo representado en la Fig. 2.1 es aproximadamente de 3,400 m. Al comparar este valor con la profundidad de penetración calculada en el modelo base, que es de 2,727.27 m, existe una diferencia de 672.72 m

En el modelo de la Fig. 2.2 la profundidad de penetración estimada es de 3,700 m; esto refleja una diferencia de 972.72 m entre ambos modelos. Esta diferencia es la más grande para todos los modelos.

Para el caso del modelo presentado en la Fig. 2.3 la diferencia entre el valor de profundidad estimado (2,600 m) y el valor calculado en la Fig. 1.1 (profundidad de penetración de 2,727.27 m) es de 127.27 m. En este caso, los parámetros iniciales para los modelos de las Figs. 1.1 y 2.3 son iguales. La diferencia entre ambos métodos se debe en gran medida a que el trazado de rayos en la Fig. 2.3 el gradiente vertical de velocidad es interrumpido por la presencia de capas horizontales (sedimentos).

Del modelo de velocidad que representa la Fig. 2.4, estimo una profundidad de penetración de 3,200 m; la diferencia entre el valor estimado y el valor calculado a partir de asignar valores a las ecuaciones que rigen la geometría de ondas continuamente refractadas (Fig. 1.1) es de aproximadamente 472.72 m.

Exceptuando el modelo mostrado en la Fig. 2.3, en los modelos de velocidad presentados en la Tabla 1, la distancia fuente a receptor mínima para grabar ondas continuamente refractadas debe ser mayor a 10 km.

Los parámetros gradiente vertical de velocidad (α) y velocidad inicial (v_0) son iguales para todos los modelos de la Tabla 2. El parámetro β_0 (ángulo de propagación inicial o ángulo de despegue –*take off angle*, en inglés-) es fijo en la Fig. 1.1. Para los demás casos –como mencioné en el Capítulo 2- el trazado de rayos tiene una apertura de abanico de rayos de 50° . Para obtener el valor del parámetro β_0 , dentro de este abanico de rayos, seleccioné el rayo continuamente refractado con ángulo inicial de 30° (aproximadamente) y lo medí gráficamente.

Nótese que, para todos los ejemplos mostrados en los Capítulos 1 y 2, la relación entre la distancia fuente a receptor mínima y la profundidad de penetración máxima es de aproximadamente $1/3$, lo cual no significa que pueda extenderse como una regla simplificada. La profundidad de penetración máxima de ondas sísmicas en estudios de sismología de exploración depende en gran medida de la distribución geométrica de fuentes y receptores e igualmente de la distribución de velocidades en el subsuelo.

De la Tabla 2, infiero que las diferencias entre valores de profundidad de penetración máxima y distancia fuente a receptor mínima para ondas continuamente refractadas se deben, en gran medida a la complejidad geológica de los modelos de velocidad mostrados en el Capítulo 2. Además, al identificar el rayo continuamente refractado que se propaga con el mismo ángulo propuesto para calcular la profundidad de penetración máxima y distancia fuente a receptor mínima a partir de las Ecs. 1.2 y 1.3 mediante un análisis visual, incrementa la posibilidad de cometer errores durante la interpretación.

La Fig. 2.1 ilustra el caso simplificado para la existencia de trayectorias de ondas continuamente refractadas, es decir, un subsuelo que supone un gradiente vertical de velocidad sin variaciones laterales de velocidad. Sin embargo, los modelos de velocidad representados en las Figs. 2.2, 2.3 y 2.4 rompen con esta premisa al presentar cambios laterales de velocidad producidos por la presencia de estratigrafía e interfaces (o reflectores) no horizontales o con relieve o deformación. No obstante, la trayectoria de ondas continuamente refractadas es visible en la zona somera del modelo de velocidad, donde el medio presenta un gradiente de velocidad vertical.

La manera formal (hablando de la industria petrolera) para llevar a cabo este tipo de estimaciones implica modelado con ondas en lugar de rayos, los cuales son aproximaciones de alta frecuencia (Jones, 2010). Sin embargo, de esta forma, muestro dos maneras sencillas, prácticas y factibles para estimar, *grosso modo*, profundidad de penetración máxima y distancia fuente a receptor mínima necesaria para grabar trayectorias de ondas continuamente refractadas en estudios de sismología de exploración.

Stovas y Alkhalifah (2014) mencionan que los parámetros más influyentes en la representación de ondas continuamente refractadas son el gradiente vertical de velocidad (α) y la velocidad inicial (v_0). Con base en mi experiencia, puedo sugerir que otro parámetro importante en la representación de ondas continuamente refractadas es el ángulo de propagación inicial β_0 , ya que entre menor sea, la profundidad de penetración será mayor, pero es necesaria una mayor distancia fuente a receptor para grabarlas.

El parámetro gradiente vertical de velocidad(α) es muy importante. No es sencillo asignar un valor único de gradiente vertical de velocidad que sea representativo de todo el modelo de velocidad. En muchos casos, el procesamiento de datos sísmicos que contienen registros de ondas continuamente refractadas, contempla un valor distinto –comparado contra el valor de gradiente utilizado en el modelo de velocidad inicial –de gradiente vertical de velocidad, el cual adaptan al tipo de procesamiento empleado con el fin de mantener la información del subsuelo que proporcionan las trayectorias de ondas continuamente refractadas (Hale *et al.*, 1992).

La relevancia de ondas continuamente refractadas no es reciente. Sheriff y Geldart (1995) mencionan que, para ese tiempo, el análisis de ondas continuamente refractadas en sismología de exploración era utilizado con poca frecuencia, debido a que rara vez se contaba con suficiente información sobre este tipo de eventos. En gran medida, la mayor limitante era la distancia fuente a receptor máxima disponible. Por el contrario, en sismología de terremotos, el análisis de ondas continuamente refractadas era (y sigue siendo) útil para estudios corticales (Stadtlander y Brown, 1997) (Lawyer *et al.*, 2001). Por ejemplo, para determinar la velocidad en el manto y el núcleo de la Tierra.

Zhu (1994) utiliza ondas continuamente refractadas para estimar los parámetros de adquisición de datos sísmicos (*e.g.* tiempo de grabación, distancia fuente a receptor máxima) para representar cuerpos asociados con presencia salina. La representación de domos salinos no es trivial. Zhu (1994) indica que es necesario tener eventos continuamente refractados con ángulos que incidan a aproximadamente 120° en el cuerpo salino y así representar mejor la estructura.

Ángulos de incidencia de este tipo, requieren gran distancia fuente a receptor (al menos 15 km) y también mayor tiempo de grabación.

Las trayectorias de ondas continuamente refractadas son de gran interés para la adquisición moderna de datos sísmicos marinos debido a la creciente distancia fuente a receptor necesaria para representar estructuras geológicas complejas (e.g. domos salinos). Los avances recientes en dicho rubro permiten voltear a ver y utilizar la información proporcionada por la trayectoria de ondas continuamente refractadas.

Entre las implicaciones prácticas de este tipo de eventos, está el diseño de adquisición orientado a objetivos. Duval y Firth (2015) mencionan que al utilizar ondas continuamente refractadas, éstas proporcionan mayor cobertura (asociado con la densidad de rayos) y mayor certidumbre en la zona somera del modelo de velocidad. Esto se puede corroborar en las Figs. 2.2, 2.3 y 2.4.

Por otro lado, con el fin de estimar y actualizar los modelos de velocidad, es posible determinar horizontes estructurales a partir del cálculo de la profundidad máxima de penetración de ondas continuamente refractadas (Mothi *et al.*, 2013). Así, la actualización de los modelos de velocidad permite tener mucha mejor representación sísmica del subsuelo.

Es importante mencionar que los cálculos de este tipo de ejercicios son sencillos, nótese que para obtenerlos solo hacen falta un par de segundos y cualquier estudiante o profesional interesado en el tema puede reproducirlos

Finalmente, si bien los ejemplos mostrados en los Capítulos 1 y 2 representan casos sencillos para el estudio de ondas continuamente refractadas, este tipo de ejercicios permiten un cálculo sencillo, práctico y rápido de la profundidad de penetración y distancia fuente a receptor.

Capítulo 4

Conclusiones

- Es posible estimar, de manera analítica y gráfica, la profundidad de penetración a partir de ondas continuamente refractadas.
- La estimación de profundidad de penetración es sencilla, rápida y reproducible con herramientas computacionales convencionales.
- La estimación está restringida al uso de un gradiente vertical de velocidad fijo, por ello no es factible proponer una regla simplificada que relacione la profundidad de penetración y la distancia fuente a receptor máxima.

Referencias

Birch, F., 1966, Handbook of Physical Constants: Geological Society of America Memoir 97, pp. 97-173.

Deeks, J. y D. Lumley, 2015, Prism waves in seafloor canyons and their effects on seismic imaging: *Geophysics*, 80, S213-S222.

Duval, G. y J. Firth, 2015, G&G Integration enhances acquisition of multient studies offshore Gabon: *World Oil*, 236, No. 7, 57-61.

Fomel, S., 2015, Reproducible research as a community effort: Lessons from the Madagascar project: *Computing in Science and Engineering*, v. 17, 20-26.

Fomel, S., P. Sava, I. Vlad, Y. Liu y V. Bashkardin, 2013, Madagascar: open-source software project for multidimensional data analysis and reproducible computational experiments: *Journal of Open Research Software*, v. 1, e8. Disponible en: <http://openresearchsoftware.metajnl.com/articles/10.5334/jors.ag/>

Geldart, L. P. y R. E. Sheriff, 2004, Problems in Exploration Seismology and their Solutions: Society of Exploration Geophysicists, pp. 114-126, 267-270.

Hale, D., N. R. Hill y J. Stefani, 1992, Imaging salt with turning seismic waves: *Geophysics*, 57, 1453-1462.

Jones, I.F., 2010, An Introduction to: Velocity Model Building: EAGE Publications.

Jones I.F., I. Davison, 2014, Seismic imaging in and around salt bodies: *Interpretation*, Vol. 2, No. 4. P. SL1-SL20.

Kazei V. V., V. N. Troyan, B. M. Kashtan y W. A. Mulder, 2013, On the role of reflections, refractions and diving waves in full-waveform inversion: *Geophysical Prospecting*, 61, 1252-1263.

Lawyer, L. C., C.C. Bates, y R. B. Rice, 2001, Geophysics in the Affairs of Mankind: Society of Exploration Geophysicists, p. 187.

Levin, F.K., 1996, Anatomy of Diving Waves: Geophysics, 61, 1417-1424.

Liner, C., 2004, Elements of 3D Seismology, PennWell Publishing, pp. 3-5,19,356.

Margrave, G. F., 2003, Numerical Methods of Exploration Seismology with algorithms in MATLAB: Universidad de Calgary, pp. 91-105. Disponible en: <https://www.crewes.org/ResearchLinks/FreeSoftware/NumMeth.pdf>

Mothi S., K. Shwarz y H. Zhu, 2013, Full-waveform inversion clarifies geology: Offshore Engineer, Septiembre 2013. Disponible en: <http://www.oedigital.com/>

Sheriff, R.E., y L. P. Geldart, 1995, Exploration Seismology: Cambridge University Press, pp. 135,136.

Slotnick, M. M., 1936, On seismic computations, with applications: Geophysics, 1, 299-305.

Slotnick, M. M., 1959, Lessons in Seismic Computing: Society of Exploration Geophysicists.

Stadtlander, R., y L. Brown, 1997, Turning waves and crustal reflection profiling: Geophysics, 62, 335-341.

Stovas, A., y T. Alkhalifah, 2014, Analytical approximations of diving wave imaging in constant-gradient medium: Geophysics, 79, S131-S140.

Telford, W. M., L. P. Geldart, y R. E. Sheriff, 1990, Applied Geophysics: Cambridge University Press, pp. 158,159.

Zhu, X. 1994, Survey parameters for imaging salt domes: The Leading Edge, 13(8), 888-892.

Agradecimientos

A Sergio Chávez Pérez y Liliana Vargas Meleza por el tiempo invertido, el apoyo brindado y por todas las lecciones compartidas que dieron forma a este trabajo y sin duda serán de gran ayuda en mi formación y futuro profesional. Ambos han sido grandes guías para mí.

A Douglas Alberto Gómez Reyes y Mario Alfonso Centeno Miranda por el trabajo previo en este tema, vital para este trabajo.

Al Instituto Mexicano del Petróleo, por brindarme acceso a sus instalaciones y apoyo durante la realización de este trabajo.

A mi familia, por impulsarme a cumplir mis sueños. A mis padres, Freddy y Maricruz, por su amor e invaluable esfuerzo. A mi hermano, David, gracias por estar siempre conmigo, por tu amistad y por ser mi fuerza. A mis abuelos, por el gran ejemplo de vida que han sido para mí. A mis tíos, Candelaria, Julio y Javier, por su apoyo incondicional y estar siempre pendiente de mí. A mi prima, Paulina, gracias por la motivación durante este trabajo.

A mis amigos de la Facultad de Ingeniería, por todas las experiencias y gratos momentos vividos durante nuestra formación.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, es un privilegio ser parte de esta gran institución.

Apéndices

Apéndice A

Distancia fuente a receptor, tiempo de viaje y profundidad de penetración en un semiespacio con gradiente vertical de velocidad

Cuando la velocidad de ondas sísmicas incrementa de manera constante con la profundidad se tiene la relación

$$v(z) = v_0 + \alpha z, \quad (\text{A1})$$

donde v es la velocidad final de propagación, v_0 es la velocidad inicial del modelo y α es un valor constante. La ecuación A1 es semejante a la ecuación general de la recta, $y = mx + b$, donde α , equivalente a la pendiente m , es el gradiente, con unidades de s^{-1} (Slotnick, 1936,1959).

Geldart y Sheriff (2004) plantean y solucionan el problema analítico de determinar la distancia fuente a receptor (*offset*, en inglés) x y el tiempo de viaje t al dividir un semiespacio en capas horizontales de espesores infinitesimales (Fig. A1).

$$\Delta x_n = \Delta z_n \tan \beta_n \quad (\text{A2})$$

$$\Delta t_n = \frac{\Delta z_n}{v_n \cos \beta_n} \quad (\text{A3})$$

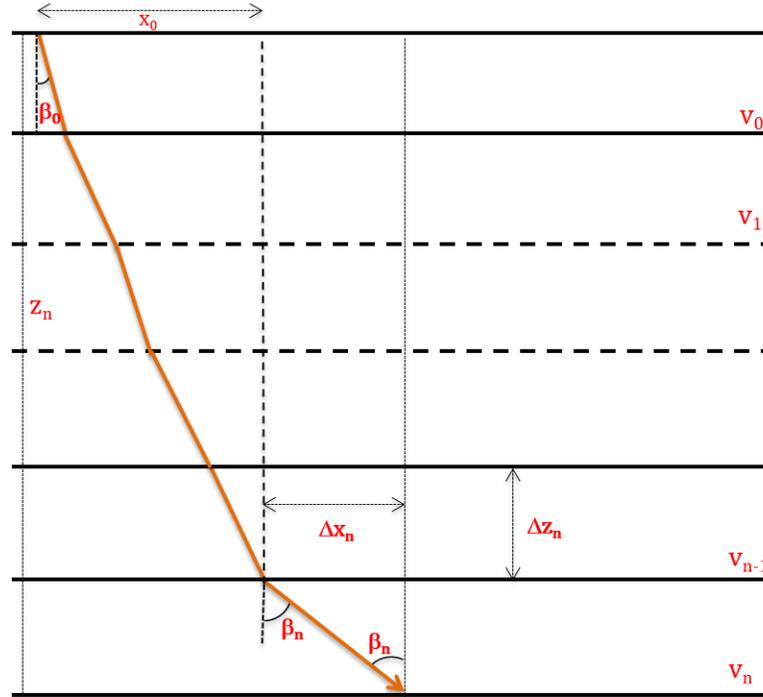


Figura A1. Trayectoria de viaje de un rayo en un semiespacio homogéneo e isótropo (modificado de Geldart y Sheriff, 2004).

A partir de la Ley de Snell es posible definir el parámetro de rayo p , el constante para cualquier rayo. A la ecuación A4 también se le conoce como Segunda Ley de Snell (Margrave, 2003)

$$\frac{\text{sen } \beta_n}{v_n} = \frac{\text{sen } \beta_0}{v_0} = p, \quad (\text{A4})$$

donde β_n es el ángulo de incidencia, β_0 es el ángulo de despegue y v_n es la velocidad de la capa de reflexión. En el límite, $\Delta x_n \rightarrow 0$ y $\Delta z_n \rightarrow 0$, se tienen las integrales de la distancia fuente a receptor x y el tiempo de viaje t

$$x = \int_0^z \tan \beta_n dz, \quad (\text{A5})$$

$$t = \int_0^z \frac{dz}{v \cos \beta_n}. \quad (\text{A6})$$

Para resolver las ecuaciones A5 y A6, hay que partir de la ecuación A4 y realizar un cambio de variable, donde

$$u = pv_n = \text{sen } \beta_n, \quad (\text{A7})$$

$$dz = \frac{dv_n}{\alpha} = \frac{du}{p\alpha}. \quad (\text{A8})$$

De las identidades trigonométricas

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1 \text{ y } \tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta},$$

y la ecuación A7, es posible obtener

$$\tan \beta = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (\text{A9})$$

El siguiente paso es sustituir las ecuaciones A7, A8 y A9 en las ecuaciones A5 y A6. La solución analítica obtenida por Geldart y Sheriff (2004) para determinar la distancia fuente a receptor x y el tiempo de viaje t

$$x = \int_{u_0}^u \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{p\alpha} = \frac{1}{p\alpha} \int_{u_0}^u \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{p\alpha} \Big| = \frac{1}{p\alpha} (\text{cos } \beta_0 - \text{cos } \beta_n), \quad (\text{A10})$$

$$t = \frac{1}{\alpha} \int_{u_0}^u \frac{udu}{u\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\alpha} \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\left(\frac{\text{sen } \beta_n}{\text{sen } \beta_0} \right) \left(\frac{1+\cos \beta_0}{1+\cos \beta_n} \right) \right] = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\tan \frac{\beta_n}{2}}{\tan \frac{\beta_0}{2}} \right). \quad (\text{A11})$$

La profundidad de penetración está dada por la solución de la Ec. A1

$$z = \frac{v_n - v_0}{\alpha} = \frac{\text{sen } \beta_n - \text{sen } \beta_0}{p\alpha}. \quad (\text{A12})$$

En resumen,

- Distancia fuente a receptor

$$x = \frac{1}{p\alpha} (\cos \beta_0 - \cos \beta_n), \quad (\text{A13})$$

- Profundidad de sondeo

$$z = \frac{\text{sen } \beta_n - \text{sen } \beta_0}{p\alpha}, \quad (\text{A14})$$

- Tiempo de viaje

$$t = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\tan \frac{\beta_n}{2}}{\tan \frac{\beta_0}{2}} \right). \quad (\text{A15})$$

Apéndice B

Distancia fuente a receptor, tiempo de viaje y profundidad de penetración de ondas continuamente refractadas

Cuando la velocidad incrementa linealmente con respecto a la profundidad, eventualmente los frentes de onda retornarán a la superficie. Es el caso de ondas continuamente refractadas o diving waves (Kazei *et al.*, 2013). Cuando el medio está constituido por capas horizontales y la velocidad varía de manera lineal con la profundidad (Fig. B1), la trayectoria de rayo es simétrica con respecto al punto de máxima profundidad de sondeo y la geometría corresponde al arco de una circunferencia.

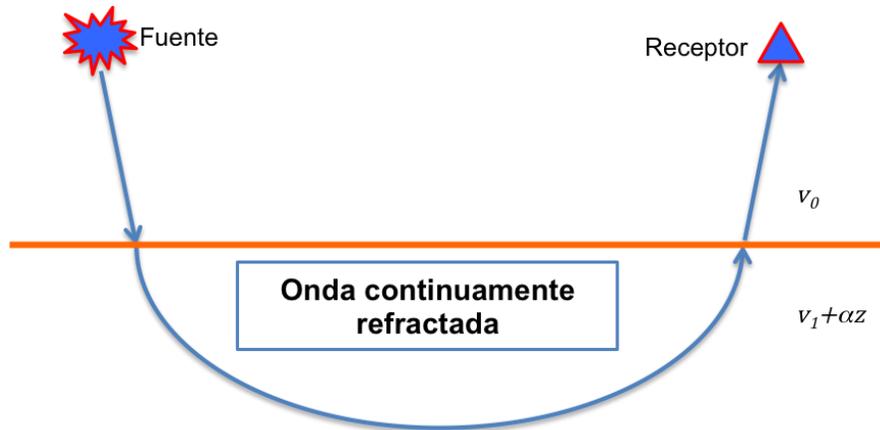


Figura B1. Onda continuamente refractada (modificado de Kazei *et al.*, 2013).

Debido a que la geometría de las ondas continuamente refractadas es simétrica con respecto al punto medio (Fig. B2), es posible determinar x_{ocr} y t_{ocr} para el punto medio y, posteriormente, multiplicar por dos los valores obtenidos, cubriendo así toda la trayectoria del rayo.

En el punto medio, el rayo viaja de forma horizontal, por lo que el valor del ángulo β es 90° .

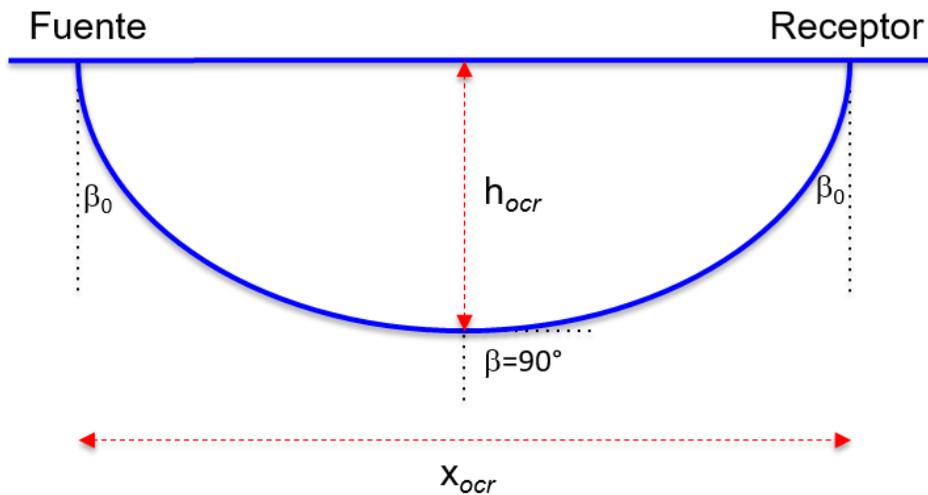


Figura B2. Trayectoria de viaje de una onda continuamente refractada en un medio con variación vertical de velocidad (modificado de Geldart y Sheriff, 2004).

Sustituyendo en las ecuaciones A10 y A11, surgen

$$x_{ocr} = \frac{2}{p\alpha} (\cos \beta_0 - \cos 90^\circ) = \frac{2}{p\alpha} \cos \beta_0 = 2 \frac{v_0}{\alpha} \cot \beta_0, \quad (\text{B1})$$

$$t_{ocr} = \frac{2}{\alpha} \ln \left(\frac{\tan 45^\circ}{\tan \frac{\theta_0}{2}} \right) = \frac{2}{\alpha} \ln \left(\cot \frac{\beta_0}{2} \right), \quad \cot \frac{\beta_0}{2} = e^{\frac{\alpha t}{2}}. \quad (\text{B2})$$

De la identidad trigonométrica $\cot 2\phi = \frac{1}{2}(\cot \phi - \tan \phi)$ y la identidad trigonométrica hiperbólica $\sinh \phi = \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi})$, la ecuación A12 resulta

$$x_{ocr} = \frac{2v_0}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \left[e^{\frac{\alpha t}{2}} - e^{-\frac{\alpha t}{2}} \right] \right) = 2 \frac{v_0}{\alpha} \sinh \frac{\alpha t}{2}. \quad (\text{B3})$$

La profundidad máxima del sondeo h_{ocr} está dada al obtener el valor de z cuando $\beta_n = 90^\circ$. Retomando la ecuación A12,

$$h_{ocr} = \frac{1}{p\alpha} (\sin 90^\circ - \sin \beta_0) = \frac{1}{p\alpha} (1 - \sin \beta_0) = \frac{v_0}{\alpha} \left(\frac{1}{\sin \beta_0} - 1 \right). \quad (\text{B4})$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$; de la ecuación B4, el

término $\frac{1}{\sin \beta_0}$ puede reescribirse como

$$\frac{1}{\sin \beta_0} = \frac{1}{2} \cot \frac{\beta_0}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{\beta_0}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\cot \frac{\beta_0}{2} + \tan \frac{\beta_0}{2} \right). \quad (\text{B5})$$

Así, con la identidad trigonométrica hiperbólica $\cosh \theta = \frac{1}{2}(e^\theta + e^{-\theta})$ la profundidad de sondeo máxima para ondas continuamente refractadas está definida como

$$h_{ocr} = \frac{v_0}{\alpha} \left[\frac{1}{2} \left(e^{\frac{\alpha t}{2}} - e^{-\frac{\alpha t}{2}} \right) - 1 \right] = \frac{v_0}{\alpha} \left(\cosh \frac{\alpha t}{2} - 1 \right). \quad (\text{B6})$$

En resumen,

- Distancia fuente a receptor mínima para registrar ondas continuamente refractadas

$$x_{ocr} = 2 \frac{v_0}{\alpha} \cot \beta_0, \quad (\text{B7})$$

- Profundidad de sondeo máxima de ondas continuamente refractadas

$$h_{ocr} = \frac{v_0}{\alpha} \left(\cosh \frac{\alpha t}{2} - 1 \right), \quad (\text{B8})$$

- Tiempo de viaje de ondas continuamente refractadas

$$t_{ocr} = \frac{2}{\alpha} \ln \left(\cot \frac{\beta_0}{2} \right). \quad (\text{B9})$$

Apéndice C

Comandos en *MATLAB* para reproducir las Figs. 1.1 y 1.2

Código modificado a partir del trabajo de Douglas Gómez Reyes y Mario Centeno Miranda.

```
close all
clear
clc
beta=30;
v0=1500;
p=sin(pi*beta/180)/v0; %parámetro de rayo
G=0.55; %gradiente
z=-4000:500:8500; %profundidad
v=v0+(G*z);
r= 1.0/(p*G); %radio
r2=r*r; %radio cuadrado
cs=cos(pi*beta/180);
cx= sqrt(1.0-p*p*v0*v0)/(p*G); %Centro x
cz= v0/G; %Centro z
x0max=sqrt((1-p*p*v0*v0)/(p*G));
z0max=(1-p*v0)/(p*G);
x=cx-r-0.01:0.01:cx+r+0.01; %distancia en x

circ_pos=sqrt(r2 - (x-cx).^2) - cz;
circ_neg=-sqrt(r2 - (x-cx).^2) - cz;

figure(1);
plot(x,real(circ_pos), 'm');
hold on
figure(1);
plot(x,real(circ_neg), 'm');
set(gca, 'Ydir', 'reverse');
xlabel('X [m]', 'fontsize', 12, 'fontweight', 'bold');
ylabel('Z [m]', 'fontsize', 12, 'fontweight', 'bold');
grid on;
axis equal
set(gca, 'fontsize', 12, 'fontweight', 'bold');
h=figure(1);
print(h, '-dpng', '-r1200', 'Gradiente_abril.png');

%CAMBIO EN EL GRADIENTE

dG_pos=0.1
dG_neg=-0.1

%Perturbación positiva
r_pert_pos= 1.0/(p*(G+dG_pos)); %radio
r2_pert_pos=r_pert_pos*r_pert_pos; %radio2

cx_pert_pos= sqrt(1.0-p*p*v0*v0)/(p*(G+dG_pos)); %Centro x
cz_pert_pos= v0/(G+dG_pos); %Centro z
```

```

x0max_pert_pos=sqrt((1-p*p*v0*v0)/(p*(G+dG_pos)));
z0max_pert_pos=(1-p*v0)/(p*(G+dG_pos));
x_pert_pos=cx_pert_pos-r_pert_pos-0.01:0.01:cx_pert_pos+r_pert_pos+0.01;
%distancia en x

circ_pos_pert_pos=sqrt(r2_pert_pos - (x_pert_pos-cx_pert_pos).^2) -
cz_pert_pos;
circ_neg_pert_pos=-sqrt(r2_pert_pos - (x_pert_pos-cx_pert_pos).^2) -
cz_pert_pos;

figure(1);
plot(x_pert_pos,real(circ_pos_pert_pos),'r');
h=figure(1);
hold on
figure(1);
plot(x_pert_pos,real(circ_neg_pert_pos),'r');
set(gca,'Ydir','reverse');
xlabel('X [km]','fontsize',12,'fontweight','bold');
ylabel('Z [km]','fontsize',12,'fontweight','bold');

grid on;
axis equal
set(gca,'fontsize',12,'fontweight','bold');

%Perturbación Negativa
r_pert_neg= 1.0/(p*(G+dG_neg)); %radio
r2_pert_neg=r_pert_neg*r_pert_neg; %radio2

cx_pert_neg= sqrt(1.0-p*p*v0*v0)/(p*(G+dG_neg)); %Centro x
cz_pert_neg= v0/(G+dG_neg); %Centro z
x0max_pert_neg=sqrt((1-p*p*v0*v0)/(p*(G+dG_neg)));
z0max_pert_neg=(1-p*v0)/(p*(G+dG_neg));
x_pert_neg=cx_pert_neg-r_pert_neg-0.01:0.01:cx_pert_neg+r_pert_neg+0.01;
%distancia en x

circ_pos_pert_neg=sqrt(r2_pert_neg - (x_pert_neg-cx_pert_neg).^2) -
cz_pert_neg;
circ_neg_pert_neg=-sqrt(r2_pert_neg - (x_pert_neg-cx_pert_neg).^2) -
cz_pert_neg;

figure(1);
plot(x_pert_neg,real(circ_pos_pert_neg),'k');

hold on
figure(1);
plot(x_pert_neg,real(circ_neg_pert_neg),'k');
set(gca,'Ydir','reverse');
xlabel('X [km]','fontsize',12,'fontweight','bold');
ylabel('Z [km]','fontsize',12,'fontweight','bold');

h=figure(1);
grid on;
axis equal
figure(1);
set(gca,'fontsize',12,'fontweight','bold');
print(h,'-dpng','-r1200','blaaah.png');

```