



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

# **Diseño, construcción y control de una aeronave tipo dron**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Mecatrónico**

**P R E S E N T A N**

Héctor Alberto Fernández Bobadilla

Isaí Jonathán Torres Landín

Ulises Ramírez Carmona

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2016**

*Es necesario dar gracias a Dios de estar descontento con uno mismo.  
¡Ojalá pueda uno estarlo siempre! El desacuerdo de la vida con lo que debería ser,  
es precisamente el signo de la vida, el movimiento ascendente  
de lo más pequeño a lo más grande, de lo peor a lo mejor.  
Y este desacuerdo es la condición del bien. Cuando el hombre permanece  
tranquilo y satisfecho de sí mismo, esto es un mal.*

**León Tolstoi.**  
**(1828-1910)**

*Aquel que deja de ser mejor, deja de ser bueno.*

**Oliver Cromwell**  
**(1599-1658)**

*No tenía ningún recuerdo consciente de lo que había visto;  
pero aquella noche, sentado caviloso a la entrada de su cubil,  
con el oído aguzado a los ruidos del mundo que le rodeaba,  
sintió las primeras punzadas de una nueva y poderosa emoción.  
Era una vaga y difusa sensación de envidia... o de insatisfacción con su vida.  
No tenía la menor idea de su causa, y menos aún de su remedio;  
pero el descontento había penetrado en su alma,  
y había dado un pequeño paso hacia la humanidad.*

**2001. A Space Odissey.**  
**Arthur C. Clarke.**  
**(1917-2008)**

*Pero el hombre no está hecho para la derrota.  
Un hombre puede ser destruido, pero no derrotado.*

**El Viejo y el Mar.**  
**Ernest Hemingway.**  
**(1899-1961)**

*La excelencia es un arte ganado por dedicación y habituación.  
No actuamos correctamente porque tengamos virtud o excelencia,  
sino que poseemos éstas porque hemos actuado correctamente.  
Somos lo que hacemos repetidamente. La excelencia,  
entonces, no es un acto, sino un hábito.*

**Ética Nicomaquea**  
**Aristóteles.**  
**(384 a.C. - 322 a.C.)**



# Agradecimientos

---

Los autores del presente trabajo deseamos expresar el más profundo agradecimiento, en primer lugar, a nuestra *alma mater*, la Universidad Nacional Autónoma de México, institución que nos acogió y formó desde el bachillerato.

También, es preciso agradecer a la Facultad de Ingeniería y a todos los profesores que compartieron sus conocimientos con nosotros, instruyéndonos en esta noble profesión.

En particular, extendemos este agradecimiento a nuestro director de tesis, Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl, y a todos los sinodales que revisaron el presente documento, mejorándolo con sus aportaciones y correcciones.

Por último, merece una mención especial el Ing. Aldo Vargas, quien actualmente se encuentra adscrito a la University of Glasgow en el Reino Unido. A pesar de la distancia, siempre tuvo la mejor disposición de ayudarnos. Su orientación y experiencia en el campo de los UAV's fue de vital importancia para el desarrollo de este proyecto.

### **Héctor Fernández**

Dedico este trabajo a mi familia, mis amigos y a todas aquellas personas que me han apoyado y alentado a lo largo de mis estudios y durante toda mi vida. Quiero expresarles mi profundo agradecimiento y hacerlos partícipes de este triunfo, el cual también les pertenece, ya que todo lo que soy es gracias a ustedes.

### **Isaí Torres**

Dedico este escrito a mi madre, quien me enseñó que aunque los sueños parezcan locos e imposibles se pueden realizar, solo se necesita que tengamos la capacidad de creer en nosotros mismos, a mi padre el cual me mostró la importancia de nunca rendirnos ante nada, a mis hermanos por darme fuerza y coraje, a mi novia quien me enseñó que todos los sacrificios realizados son para poder obtener un futuro mejor y a mis amigos quienes me dieron su apoyo y confianza a lo largo de mi formación ingenieril.

### **Ulises Ramírez**

Dedico este escrito a mis padres quienes, a pesar de las dificultades, siempre me alentaron a terminar mis estudios; a mis amigos que me han impulsado a ser mejor cada día y quienes le han dado sentido a mi vida. Y finalmente, a mi segunda familia por el apoyo incondicional que me ha brindado. A todos ustedes, les agradezco enormemente por haber contribuido a que este logro haya sido posible.



# Contenido

---

<b>Índice de Tablas y Figuras .....</b>	<b>v</b>
<b>Introducción .....</b>	<b>xiii</b>
Objetivo General.....	xiii
Planteamiento.....	xiii
<b>Capítulo 1. Estado del Arte.....</b>	<b>1</b>
Objetivos.....	1
Descripción General.....	1
Breve desarrollo histórico de la Aeronáutica .....	2
Aeronaves RC y UAV's .....	5
Aplicaciones .....	6
Clasificación de los UAV's.....	7
Helicópteros y multicopteros .....	8
Legislación para el Uso de Drones en México.....	11
Aplicabilidad .....	11
Descripción General del Sistema de Aeronave Pilotada a Distancia.....	12
Clasificación de los Sistemas de Aeronaves Pilotadas a Distancia (RPAS) y Requerimientos y Limitaciones Generales.....	12
<b>Capítulo 2. Diseño Conceptual .....</b>	<b>17</b>
Objetivos.....	17
Descripción General.....	17
Requerimientos .....	18
Requerimientos de diseño mecánico.....	19
Requerimientos de diseño electrónico y de control .....	19
Especificaciones.....	20
Árbol de objetivos .....	22
Diagrama funcional.....	23
Selección del concepto .....	27

<b>Capítulo 3. Diseño Mecánico y Electrónico.....</b>	<b>31</b>
Objetivos.....	31
Descripción General.....	31
Selección de componentes .....	32
Estructura (Frame) .....	33
Controlador de Vuelo (Flight Controller, FC) .....	38
Microcontrolador.....	40
Dispositivo de Comunicación .....	41
Fuente de alimentación .....	46
Actuadores .....	53
Controladores Electrónicos de Velocidad (Electronic Speed Control, ESC).....	58
Hélices .....	61
Cálculo de la masa soportada por el sistema .....	65
Comprobación del sistema diseñado .....	72
Modelo CAD .....	75
Análisis estructural .....	77
Manufactura.....	84
<b>Capítulo 4. Modelado Matemático .....</b>	<b>85</b>
Objetivos.....	85
Descripción General.....	85
Definiciones Básicas .....	86
Sistema.....	86
Sistema o marco de referencia .....	88
Sistema de referencia inercial.....	89
Sistema de coordenadas.....	89
Grados de libertad .....	89
Ángulos de navegación .....	89
Matriz de rotación .....	91
Formulación lagrangiana del modelo matemático .....	94
Representación en el Espacio de Estados .....	105
Linealización.....	106



<b>Capítulo 5. Control .....</b>	<b>111</b>
Objetivos.....	111
Descripción General.....	111
Validación del modelo matemático .....	112
Modo de operación RC .....	115
Diseño del algoritmo de control.....	118
Estabilización.....	118
Simulación .....	124
Implementación del controlador .....	135
Resultados.....	138
 <b>Capítulo 6. Conclusiones .....</b>	 <b>149</b>
Objetivos.....	149
Resumen .....	149
Análisis de resultados y conclusiones.....	151
Trabajo a futuro .....	154
 <b>Apéndices</b>	
 <b>Apéndice 1. Planos de Proyecto.....</b>	 <b>A1</b>
 <b>Apéndice 2. Deducción de las Ecuaciones Integrales de la Mecánica de Fluidos .....</b>	 <b>A11</b>
Teorema de Transporte de Reynolds .....	A11
Ecuación de la Conservación de la Masa .....	A15
Ecuación de la Energía para régimen de flujo unidimensional y permanente .....	A16
Ecuación de la Cantidad de Movimiento.....	A19
 <b>Apéndice 3. Obtención de las Ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de la Teoría de Variaciones.....</b>	 <b>A23</b>
Funcional Integral .....	A23
Principio Variacional.....	A24
Principio de Acción Mínima.....	A25
Forma General de las Ecuaciones de Euler-Lagrange.....	A28

<b>Apéndice 4. Obtención Experimental de las Constantes de Sustentación y Arrastre del Sistema Motor-Propela .....</b>	<b>A31</b>
Banco de pruebas .....	A32
Prueba para determinar la constante de sustentación $k$ .....	A33
Prueba para determinar la constante de arrastre $b$ .....	A35
Calibración y correcta utilización de los Controladores Electrónicos de Velocidad (ESC) .....	A37
Resultados.....	A40
<b>Apéndice 5. Protocolo de Comunicación Serial Multiwii (MSP) .....</b>	<b>A43</b>
<b>Apéndice 6. Códigos de Programación .....</b>	<b>A49</b>
Controlador LQR .....	A50
Controlador LQR con Observador de Orden Reducido .....	A56
<b>Referencias .....</b>	<b>R1</b>

# Índice de Tablas y Figuras

---

## Capítulo 1

Referencia	Título	Página
Figura 1-1	Mito de Dédalo e Ícaro. (Tomada de: <a href="http://oliverbuffon.blogspot.mx">http://oliverbuffon.blogspot.mx</a> )	2
Figura 1-2	El inventor italiano Leonardo da Vinci y sus bosquejos para máquinas voladoras. (Tomada de: <a href="http://www.theartwolf.com">http://www.theartwolf.com</a> <a href="https://ingaeronautica.wordpress.com">https://ingaeronautica.wordpress.com</a> )	3
Figura 1-3	Los hermanos Wright en el primer vuelo del Flyer. (Tomada de: <a href="http://nicoxcobrelola.blogspot.mx/">http://nicoxcobrelola.blogspot.mx/</a> )	4
Figura 1-4	Aeronaves modernas. (Tomada de: <a href="https://unieducar.org.br">https://unieducar.org.br</a> <a href="http://www.thetrenders.com">http://www.thetrenders.com</a> )	5
Figura 1-5	Aplicaciones de las aeronaves RC y UAV's. (Tomada de: <a href="http://www.revistaemprende.cl/">http://www.revistaemprende.cl/</a> )	6
Figura 1-6	Tricóptero. (Tomada de: <a href="http://splintercell.wikia.com">http://splintercell.wikia.com</a> )	9
Figura 1-7	Cuadricóptero. (Tomada de: <a href="http://tienda.siliceo.es">http://tienda.siliceo.es</a> <a href="http://www.grupoaviacionyturismo.com">http://www.grupoaviacionyturismo.com</a> )	9
Figura 1-8	Hexacóptero. (Tomada de: <a href="http://www.goweb.tv">http://www.goweb.tv</a> <a href="http://www.amazon.com">http://www.amazon.com</a> )	10
Figura 1-9	Octacóptero. (Tomada de: <a href="http://www.4kafrica.com">http://www.4kafrica.com</a> <a href="http://ratherexposethem.blogspot.mx">http://ratherexposethem.blogspot.mx</a> )	10
Tabla 1-1	Clasificación de RPAS.	12
Tabla 1-2	Relación peso velocidad máxima en un RPAS Micro.	14

## Capítulo 2

Referencia	Título	Página
Tabla 2-1	Requerimientos de diseño mecánico.	19
Tabla 2-2	Requerimientos de diseño electrónico y de control.	20
Tabla 2-3	Especificaciones de diseño.	21
Figura 2-1	Árbol de objetivos.	23
Figura 2-2	Función global y señales de entrada-salida.	24
Figura 2-3	Interconexión de funciones secundarias.	24
Figura 2-4	Dron como función global del sistema.	25
Figura 2-5	Diagrama funcional del dron.	26
Tabla 2-4	Matriz de selección de concepto.	30

## Capítulo 3

Referencia	Título	Página
Figura 3-1	Diagrama general del proyecto.	32
Tabla 3-1	Componentes seleccionados.	33
Figura 3-2	Configuraciones en cruz (+) y equis (X) de cuadricóptero. (Tomada de: <a href="http://www.rcgroups.com">http://www.rcgroups.com</a> )	34
Figura 3-3	Frame de cuadricóptero clase 330. (Tomada de: <a href="http://dronesdecarreras.com/">http://dronesdecarreras.com/</a> )	35
Tabla 3-2	Propiedades mecánicas del plástico ABS.	36
Tabla 3-3	Propiedades mecánicas del plástico PLA.	37
Figura 3-4	Tarjeta Controladora de Vuelo AIO V2. (Tomada de: <a href="http://deflydrone.com">http://deflydrone.com</a> )	39
Figura 3-5	Tarjeta de desarrollo Teensy 3.1. (Tomada de: <a href="https://www.spar12646kfun.com">https://www.spar12646kfun.com</a> )	41
Tabla 3-4	Clasificación de señales electromagnéticas de acuerdo con su frecuencia.	43
Figura 3-6	Modulación de una señal electromagnética. (Tomada de: <a href="http://www.analfatecnicos.net">http://www.analfatecnicos.net</a> )	43
Figura 3-7	Modulación AM. (Tomada de: <a href="https://sltecnologia.wikispaces.com">https://sltecnologia.wikispaces.com</a> )	44
Figura 3-8	Modulación FM. (Tomada de: <a href="https://sltecnologia.wikispaces.com">https://sltecnologia.wikispaces.com</a> )	44

Figura 3-9	Módulo de telemetría por radiofrecuencia HKPilot V2. (Tomada de: <a href="http://buildfpv.com">http://buildfpv.com</a> )	45
Figura 3-10	Pilas y baterías. (Tomada de: <a href="http://www.electronica-basica.com">http://www.electronica-basica.com</a> )	47
Figura 3-11	Baterías LiPo. (Tomada de: <a href="http://www.rc-monster-trucks.de">http://www.rc-monster-trucks.de</a> <a href="http://hobbyracingrc.com">http://hobbyracingrc.com</a> )	50
Tabla 3-5	Relación de tensión en función al número de celdas de una batería LiPo.	50
Figura 3-12	Batería LiPo Turnigy nano-tech 1300 mAh. (Tomada de: <a href="http://dronesdecarreras.com">http://dronesdecarreras.com</a> )	52
Figura 3-13	Motor Brushless en configuración inrunner. (Tomada de: <a href="http://automodelismoparatodos.blogspot.mx">http://automodelismoparatodos.blogspot.mx</a> <a href="http://2bfly.com">http://2bfly.com</a> )	54
Figura 3-14	Motor Brushless en configuración outrunner. (Tomada de: <a href="http://2bfly.com">http://2bfly.com</a> <a href="http://www.vuelarc.com">http://www.vuelarc.com</a> )	54
Figura 3-15	Configuraciones de los embobinados de un motor Brushless. (a) Conexión Y. (b) Conexión $\Delta$ . (Tomada de: <a href="http://ingenieromecanicoelectricista.blogspot.mx">http://ingenieromecanicoelectricista.blogspot.mx</a> )	55
Figura 3-16	Motores brushless Multistar 2206 V2 "Baby Beast". (Tomada de: <a href="http://www.surhobbies.com.ar/?prd=918">http://www.surhobbies.com.ar/?prd=918</a> )	58
Figura 3-17	Diagrama de conexiones de un ESC.	59
Figura 3-18	Controladores electrónicos de velocidad ESC Afro 12A. (Tomada de: <a href="http://www.surhobbies.com.ar/?prd=918">http://www.surhobbies.com.ar/?prd=918</a> )	60
Figura 3-19	Pitch de una propela. (Tomada de: <a href="http://cuadricoptero.net">http://cuadricoptero.net</a> <a href="http://www.navegar.com">http://www.navegar.com</a> )	62
Figura 3-20	Designación de hélices.	62
Figura 3-21	Raíz y punta de un álabe.	63
Figura 3-22	Hélices horarias y antihorarias. (Tomada de: <a href="http://ardupilot.org">http://ardupilot.org</a> )	64
Figura 3-23	Propelas seleccionadas. Hélices Gemfan 5040. (Tomada de: <a href="http://www.hobbytest.com">http://www.hobbytest.com</a> )	65
Figura 3-24	Diagrama de fuerzas para el volumen de control Motor- Propela.	65
Figura 3-25	Fuerza aplicada al fluido por el conjunto Motor-Propela.	68
Figura 3-26	Tercera Ley de Newton aplicada al conjunto Motor-Propela.	70
Tabla 3-6	Masa total soportada para diferentes valores de eficiencia.	71
Figura 3-27	Masa total soportada vs. Eficiencia.	72
Tabla 3-7	Estimación de masa del sistema.	73
Figura 3-28	Resultados obtenidos con la calculadora online eCalc para el sistema.	74

Figura 3-29	<i>Curvas de desempeño para los motores obtenidas con la herramienta eCalc.</i>	75
Figura 3-30	<i>Modelo CAD del dron generado en UNIGRAPHICS NX 8.5.</i>	76
Figura 3-31	<i>Análisis estructural estático de un brazo durante reposo. (a) Configuración de cargas. (b) Distribución de esfuerzos. (c) Distribución de deformaciones.</i>	79
Figura 3-32	<i>Análisis estructural estático de la placa central del dron durante reposo. (a) Configuración de cargas. (b) Distribución de esfuerzos. (c) Distribución de deformaciones.</i>	79
Figura 3-33	<i>Análisis estructural estático de la placa inferior del dron durante reposo. (a) Configuración de cargas. (b) Distribución de esfuerzos. (c) Distribución de deformaciones.</i>	80
Figura 3-34	<i>Análisis estructural estático del brazo del dron durante sustentación en vuelo: (a) Configuración de cargas. (b) Distribución de esfuerzos. (c) Distribución de deformaciones.</i>	80
Figura 3-35	<i>Análisis estructural estático de la placa central del dron durante sustentación en vuelo (a) Configuración de cargas. (b) Distribución de esfuerzos. (c) Distribución de deformaciones.</i>	81
Figura 3-36	<i>Análisis estructural estático de la placa inferior del dron durante sustentación en vuelo. (a) Configuración de cargas. (b) Distribución de esfuerzos. (c) Distribución de deformaciones.</i>	81
Tabla 3-8	<i>Resultados por componentes del análisis estructural estático.</i>	82
Tabla 3-9	<i>Factores de seguridad por tipo de carga y material.</i>	83
Figura 3-37	<i>Ensamble final del dron.</i>	84

#### Capítulo 4

<b>Referencia</b>	<b>Título</b>	<b>Página</b>
Figura 4-1	<i>Elementos de un modelo matemático.</i>	87
Figura 4-2	<i>Sistema de transmisión de un automóvil. (Tomada de: <a href="http://www.aficionadosalamecanica.net">http://www.aficionadosalamecanica.net</a>)</i>	87
Figura 4-3	<i>Sistema visto como mapeo.</i>	88
Figura 4-4	<i>Sistema de control por retroalimentación.</i>	88

	(Tomada de [34])	
Figura 4-5	Ángulos de navegación. (Tomada de: <a href="https://geektimes.ru">https://geektimes.ru</a> )	91
Tabla 4-1	Resumen de ángulos de navegación.	91
Figura 4-6	Sistemas de referencia fijo y sujeto a rotación.	92
Figura 4-7	Marcos de referencia inercial y fijo en el cuerpo para un cuadricóptero. (Modificada de [27])	95
Figura 4-8	Secuencia de rotación y propagación de velocidades para el cuadricóptero. (Tomada y modificada de [1])	97
Tabla 4-2	Valores numéricos de los parámetros.	108

## Capítulo 5

Referencia	Título	Página
Tabla 5-1	Datos experimentales de $T_{alto}$ vs $\omega$ .	114
Figura 5-1	Gráfica de $T_{alto}$ vs $\omega$ .	114
Figura 5-2	Panel frontal del programa en LabVIEW para validar el modo de operación RC.	117
Figura 5-3	Sistema de control por retroalimentación de estados.	119
Figura 5-4	Bloque de subsistema que representa al dron no lineal.	124
Figura 5-5	(a) Bloque de subsistema que representa al dron lineal. (b) Interior del bloque de subsistema.	125
Figura 5-6	Posición y velocidad verticales.	126
Figura 5-7	(a) Ángulos de Navegación. (b) Velocidades angulares.	127
Figura 5-8	Señales de control. (a) Velocidad angular. (b) Tiempo en alto. (c) Porcentaje de PWM.	128
Figura 5-9	Posición y velocidad en el plano xy. (a) Condiciones iniciales de ángulos no nulas. (b) Condiciones iniciales de ángulos nulas.	129
Figura 5-10	Comparación de alturas para los sistemas lineal y no lineal.	131
Figura 5-11	Altura z con error de medición.	132
Figura 5-12	Posición y velocidad verticales con ruido de medición en z.	132
Figura 5-13	(a) Ángulos de Navegación con ruido en z. (b) Velocidades angulares con ruido en z.	133
Figura 5-14	Señales de control con ruido en z. (a) Velocidad angular. (b) Tiempo en alto. (c) Porcentaje de PWM.	134
Figura 5-15	Interconexión de elementos del sistema de control.	136

Figura 5-16	Diagrama de transición de estados para el proceso general del sistema de control.	137
Figura 5-17	Panel frontal de la terminal en tierra.	138
Figura 5-18	Marcos de referencia inercial y fijo en el cuerpo para un cuadricóptero.	139
Figura 5-19	Prueba manual para la estabilización de alabeo.	140
Figura 5-20	Prueba manual para la estabilización de cabeceo.	141
Figura 5-21	Prueba manual para la estabilización de guiñada.	143
Figura 5-22	Primera prueba de vuelo del sistema. (a) Posición y velocidad vertical. (b) Ángulos de navegación.	144
Figura 5-23	Segunda prueba de vuelo del sistema. (a) Posición y velocidad vertical. (b) Ángulos de navegación.	146

## Capítulo 6

Referencia	Título	Página
Tabla 6-1	Especificaciones de producto.	153

## Apéndices

Referencia	Título	Página
Figura A.2-1	Flujo unidimensional en una tubería. (Tomada de [49])	A13
Figura A.4-1	Banco de pruebas para caracterizar un sistema Motor-Propela.	A32
Figura A.4-2	Diagrama del sistema para determinar $k$ .	A33
Tabla A.4-1	Tabla de mediciones para determinar el parámetro $k$ .	A35
Figura A.4-3	Diagrama del sistema para determinar $b$ .	A36
Tabla A.4-2	Tabla de mediciones para determinar el parámetro $b$ .	A37
Tabla A.4-3	Datos experimentales para la determinación de la constante de sustentación $k$ .	A40
Figura A.4-5	Gráfica de empuje contra velocidad angular para el par motor-propela.	A40
Figura A.4-6	Gráfica de empuje contra el cuadrado de la velocidad angular para el par motor-propela.	A41
Tabla A.4-4	Datos experimentales para la determinación de la constante de arrastre $b$ .	A41
Figura A.4-7	Gráfica de empuje contra el cuadrado de la velocidad angular para el par motor-propela.	A42



<i>Tabla A.5-1</i>	<i>Comandos MSP.</i>	<i>A47</i>
<i>Figura A.5-1</i>	<i>Máquina de estados para el MSP.</i>	<i>A47</i>



A lo largo de este documento, se presenta el trabajo desarrollado por los autores como tesis para obtener el grado de Ingeniero Mecatrónico. El tópico aquí abordado versa, como el título indica, sobre el diseño, construcción y control de una aeronave con ciertas características de vuelo autónomo.

## Objetivo General

Realizar el diseño, tanto conceptual como mecánico y electrónico, de una aeronave tipo dron; construir dicho sistema y establecer una estrategia de control que permita la estabilización en vuelo del mismo, así como la regulación de altura.

## Planteamiento

La idea detrás del presente proyecto fue generar un prototipo que pudiera ser utilizado como planta para el Laboratorio de Control (actualmente en fase de desarrollo) en la carrera de Ingeniería Mecatrónica impartida en la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

Dentro de esta misma institución, se han desarrollado trabajos similares a éste; pueden mencionarse como los más recientes, las referencias [8], [26] y [28]. Los objetivos perseguidos en prácticamente todos estos proyectos consistieron en la implementación de nuevos controladores en plantas ya existentes, a excepción del descrito en [26], el cual considera el diseño y construcción del sistema, para ser empleado como medio para la recopilación de datos atmosféricos.

La principal diferencia en este nuevo trabajo respecto a los anteriores es que aquí se plantea el desarrollo del proyecto desde el comienzo, abarcando la investigación del estado del arte, el diseño conceptual, así como el mecánico y electrónico del dispositivo, la derivación de su modelo matemático y el establecimiento de un algoritmo de control para estabilización y regulación. Al ser ésta una planta pensada para su utilización como herramienta pedagógica, sus requerimientos mecánicos difieren de aquellos considerados en las anteriores referencias.

El alcance de esta tesis considera desde el diseño conceptual hasta la implementación del algoritmo de control para estabilización y regulación. Los objetivos particulares necesarios para alcanzar la meta general del proyecto, se mencionan al inicio de cada capítulo.



# Estado del Arte

---

*Lo que distingue al hombre del animal es la razón:  
confinado en el presente, se vuelve hacia  
el pasado y sueña con el porvenir.*

**Arthur Schopenhauer**  
**(1788-1860)**

*...pues aunque era el amo del mundo, no estaba del todo  
seguro sobre lo que hacer a continuación.  
Mas ya pensaría en algo.*

**Arthur C. Clarke**  
**(1917-2008)**

## Objetivos

- Realizar una investigación sobre los Vehículos Aéreos No Tripulados (UAV's), tomando en cuenta el devenir histórico, clasificación, aplicaciones y características generales de este tipo de sistemas.
- Presentar los aspectos más relevantes de la reglamentación para Vehículos Aéreos No Tripulados vigente en México.

## Descripción General

En este apartado se revisan sucintamente algunos conceptos básicos acerca de los vehículos aéreos, iniciando por una pequeña reseña histórica de la aviación. Posteriormente, se abordan los temas de aeronaves RC y UAV's, resaltando sus principales características y diferencias, así como sus aplicaciones y clasificación.

También se presenta el concepto de multicóptero, explicando brevemente algunos de los miembros más representativos de esta familia de aeronaves, así como sus características mecánicas y sus posibles usos.

Finalmente, se abordan los puntos más importantes de un documento que establece la normatividad de los Vehículos Aéreos No Tripulados, emitido por Dirección General de Aeronáutica Civil. En dicho apartado se presenta una nueva clasificación de vehículos aéreos que atiende principalmente a su masa máxima de despegue.

### Breve desarrollo histórico de la Aeronáutica

Desde los albores de la Humanidad, uno de los más grandes sueños de ésta ha sido poder volar. Las más primitivas y precarias tentativas consistieron en observar el vuelo natural de las aves, para posteriormente emularlo a partir de mecanismos similares a alas, hechas con materiales como madera y plumas, con resultados insatisfactorios, por lo menos, hasta fatales.

Un claro ejemplo de este hecho se ilustra en el antiguo mito griego de Dédalo e Ícaro. En éste, el ingenioso arquitecto, mecánico y escultor, Dédalo, después de edificar el laberinto para encerrar al Minotauro de la isla de Creta, viéndose prisionero de Minos, rey del lugar, construyó dos pares de alas de cera y plumas para escapar, junto con su hijo Ícaro. En este punto, el padre previno al joven para que evitara volar muy bajo, cerca del agua, o muy alto, cerca del sol, pues de lo contrario, sus alas se estropearían. Mas la imprudencia de Ícaro al verse capaz de volar lo hizo desobedecer a su padre, ocasionando su muerte [36].



*Figura 1-1. Mito de Dédalo e Ícaro.*

Dentro de la tradición cristiana, otro intento del hombre para conquistar las alturas fue la construcción de la llamada Torre de Babel, la cual sería una edificación tan alta que su cúspide llegaría al cielo. Sin embargo, Yahveh, al ver la blasfemia y la arrogancia del ser humano, confundió a los constructores de la torre, haciendo que todos hablasen una lengua distinta y dispersándolos por la Tierra [21].

En la cultura china encontramos básicamente dos aportaciones; en primer lugar, *la linterna de Kong Ming*, precursora del globo aerostático, empleada para amedrentar a las tropas enemigas en el campo de batalla. La segunda es la invención del cometa, el cual data del año 300 a.C., el cual se puede clasificar como un tipo de planeador. Incluso hay registros de pruebas de vuelo realizadas por seres humanos, usando cometas.

En épocas más recientes, el ingeniero, constructor, artista y pensador italiano Leonardo Da Vinci (1452-1519) diseñó diversos mecanismos planeadores y voladores, basándose en las extremidades propulsoras de las aves. Realizó bocetos de estos dispositivos, sin llegar nunca a construirlos. Sin embargo, algunos de sus diseños fueron retomados posteriormente y brindaron puntos de partida en la aviación moderna [50].

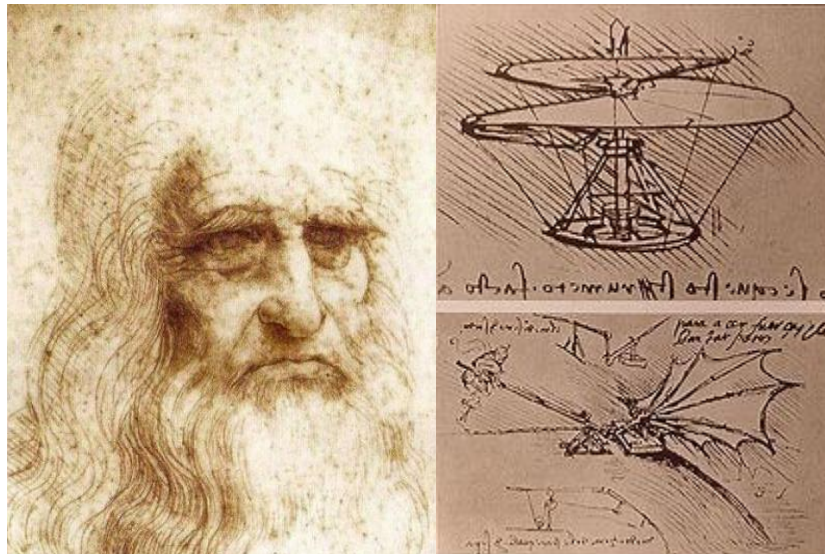


Figura 1-2. El inventor italiano Leonardo da Vinci y sus bosquejos para máquinas voladoras.

Durante la Revolución Industrial (s. XVIII - s. XIX), se llevaron a cabo nuevas contribuciones al mundo de la aeronáutica, destacándose principalmente la creación del globo aerostático tripulado y del dirigible.

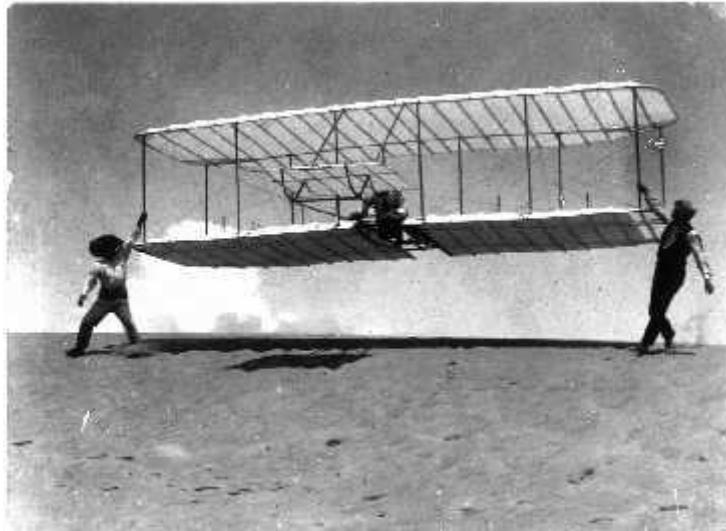
En el año de 1716, se publicó el *Sketch of a Machine for Flying in the Air*, escrito por Emanuel Swedenborg, el cual se considera como el primer estudio formal de aviación. En éste se planteaba el diseño de una máquina hipotética capaz de volar; sin embargo, el estado de la mecánica y la tecnología existente en ese momento, imposibilitaba su construcción.

Sin embargo, no fue sino hasta 1903 cuando los hermanos Orville y Wilbur Wright, de Carolina del Norte, en Estados Unidos, pudieron realizar <<el primer vuelo sostenido en una máquina más pesada que el aire propulsada por medios propios>> [13].

#### 4 Diseño, construcción y control de una aeronave tipo dron

---

El *Flyer* de los hermanos Wright era un biplano construido de madera de abeto autóctono de la zona para la estructura, y tela como recubrimiento de las alas. Tenía una longitud de 6.4 [m], una altura de 2.7 [m] y 12.3 [m] de envergadura, pudiendo soportar el peso de una sola persona. Estaba impulsado por un motor de diseño y fabricación propios, con 12 [HP] de potencia y una velocidad de 1090 [rpm], además de dos conjuntos de hélices de 2550 [mm] de diámetro.



*Figura 1-3. Los hermanos Wright en el primer vuelo del Flyer.*

A partir del vuelo de los hermanos Wright, se marcó un hito en la historia de la aviación moderna. Desde ese entonces, fueron diseñados y construidos gran variedad de aeronaves, mejorando la idea original de los estadounidenses, y explorando nuevas configuraciones y alternativas, en forma paralela con el avance de la Física y la Ingeniería.

El campo de la aeronáutica tuvo grandes avances durante la Primera y la Segunda Guerras Mundiales, conflictos bélicos en los cuales por vez primera fueron utilizadas aeronaves para propósitos militares. Durante estos periodos, además del comprendido entre guerras, los aviones fueron utilizados con fines de reconocimiento y patrullaje, además de como bombarderos y aviones caza, principalmente.

Debido a los conflictos armados suscitados a lo largo de todo el siglo XX, la aeronáutica vio grandes y aceleradas innovaciones, que van desde desarrollo y mejoras en el diseño mecánico y materiales, potencia y eficiencia, procesos de manufactura, sistemas de comunicaciones, sistemas de navegación, hasta la instrumentación, control y automatización de aeronaves.



En la actualidad, encontramos aviones y todo tipo de sistemas de vuelo en gran parte de los aspectos de la vida moderna, no sólo en ámbitos militares, sino también en aplicaciones civiles. Desde la popularización del avión como medio de transporte masivo de personas y mercancía, la utilización de helicópteros para labores de reconocimiento, rescate y transporte; el advenimiento de la era aeroespacial, con el desarrollo de vehículos capaces de traspasar la atmósfera terrestre y la puesta en órbita de satélites para telecomunicaciones, hasta llegar a la miniaturización de aeronaves, con el surgimiento de dispositivos voladores controlados por radiofrecuencia, así como los relativamente modernos UAV's o drones, capaces de realizar rutinas de vuelo de forma totalmente autónoma.



Figura 1-4. Aeronaves modernas.

La mayor parte de estos avances e innovaciones en la aeronáutica han sido posibles gracias al desarrollo de la mecánica, la electrónica, la computación, instrumentación, control, entre otras ramas de la ciencia y la ingeniería.

### Aeronaves RC y UAV's

Dentro de los sistemas y dispositivos voladores en pequeña escala, encontramos dos grandes grupos: las aeronaves controladas de forma remota, generalmente gracias a algún sistema de radiofrecuencia, y los *Vehículos Aéreos no Tripulados* (UAV's, *Unmanned Aerial Vehicle*, por sus siglas en inglés), también conocidos como *drones* [43].

Cabe resaltar que la diferencia entre estos dos grupos de aeronaves no se encuentra en la configuración mecánica, ya que un mismo tipo de sistema en particular podría clasificarse en cualquier categoría, sino en la forma de controlar dicho dispositivo.

En los vehículos controlados remotamente (RC), es necesaria la intervención de un operador humano, el cual supervisa y controla el funcionamiento y los procesos llevados a cabo por el sistema en todo momento.

Visto desde una perspectiva de control, puede pensarse en las aeronaves RC como en plantas en las cuales el operador proporciona la retroalimentación y el controlador, cerrando el lazo de control.

Por otra parte, los UAV's son sistemas de control en lazo cerrado, es decir, tienen la capacidad de cumplir rutinas de vuelo de forma completamente autónoma, incluyendo despegue, seguimiento de trayectorias y aterrizaje. Para lograr esto, un sistema de este tipo requiere la implementación de distintos sensores que le permitan determinar su posición y orientación, además de un algoritmo de control que le permita interpretar la información recibida de los sensores y tomar así las decisiones pertinentes para cumplir con la tarea asignada.

### Aplicaciones

En términos generales, el término UAV se aplica comúnmente para dispositivos de uso militar, mientras que las aeronaves RC se encuentran en su mayor parte dentro de las aplicaciones civiles.



Figura 1-5. Aplicaciones de las aeronaves RC y UAV's.

Los sistemas RC y los UAV's son empleados principalmente para:

- Labores de reconocimiento y monitoreo en zonas peligrosas o de difícil acceso.
- Búsqueda y localización de víctimas en zonas de desastre.
- Patrullaje y vigilancia.
- Adquisición de datos, imágenes, fotografías y video, con fines científicos o artísticos.
- Monitoreo atmosférico.
- Transporte de mercancía a muy baja escala.
- Fines educativos y de investigación.
- Aeromodelismo.
- Ocio y entretenimiento.

### Clasificación de los UAV's

Los Vehículos Aéreos no Tripulados pueden clasificarse de distintas formas, de acuerdo con el criterio que se emplee. Una primera clasificación se basa en las características del mecanismo de propulsión que posea el dispositivo, encontrándose principalmente [15]:

- **UAV's de ala fija:** Estructuras similares a aviones de aeromodelismo.
- **UAV's de rotores:** Entre estos encontramos aeronaves como helicópteros, tricópteros, cuadricópteros, etc.
- **UAV's de aleteo:** Aquellos propulsados por alas abatibles, similares a ciertos insectos.

De acuerdo con su aplicación, se clasifican los UAV's como:

- **De blanco:** Se utilizan para simular aeronaves enemigas en pruebas de sistema de defensa de aire o tierra.
- **Reconocimiento:** Estos son utilizados para proporcionar información táctica e inteligencia en misiones. Entre estos, los *Micro Unmanned Aerial Vehicle* (MUAV) resultan especialmente útiles, por sus pequeñas dimensiones y su capacidad para pasar inadvertidos.
- **Combate:** Los *Unmanned Combat Aerial Vehicle* (UCAV), se utilizan como armas dentro de campos de batalla, y proporcionan fuego de asistencia en misiones peligrosas.
- **Transporte:** Se utilizan para abastecer provisiones a las tropas en el campo de batalla.
- **Investigación y desarrollo:** Se utilizan para probar y evaluar sistemas en fase de desarrollo, así como los algoritmos de control.
- **Comerciales y de uso civil.**

Finalmente, de acuerdo a la altura máxima que pueden alcanzar, se divide a los UAV's en:

- **Handheld:** 2 000 ft de altitud, hasta 2 km de alcance.
- **Close:** 5000 ft de altitud, hasta 10 km de alcance.
- **NATO:** 10 000 ft de altitud, hasta 50 km de alcance.
- **Tactical:** hasta 18 000 ft de altitud, hasta 160 km de alcance.
- **MALE:** 30 000 ft de altitud y un alcance de unos 200 km.
- **HALE:** Sobre 30 000 ft de altura y alcance indeterminado.
- **HYPERSONIC:** Alta velocidad, supersónico (Mach 1-5) o hipersónico (Mach 5 o más), 50 000 ft de altitud o altitud suborbital, alcance de 200 km.
- **ORBITAL:** Para órbitas bajas terrestres (Mach 25 o superior).
- **CIS Lunar:** Para viajes entre la Tierra y la Luna.

### Helicópteros y multicópteros

Dentro de los sistemas voladores propulsados por rotores se encuentran incluidos un gran número de dispositivos, desde aeronaves de uno o dos rotores, como los helicópteros, hasta vehículos de un gran número de dichos mecanismos, como los hexacópteros y octacópteros.

Debido a esto, fue necesaria la introducción del concepto de multicóptero, el cual se define como un vehículo aéreo propulsado por múltiples rotores (3 o más), distribuidos en alguna configuración regular, y que carece de un rotor de cola. Ésta última característica es la que diferencia a los multicópteros de cierta clase de helicópteros.

Los multicópteros resultan ser sistemas inherentemente inestables, por lo cual, para su correcto funcionamiento, resulta necesaria la implementación de un algoritmo de control que pueda estabilizar su orientación. El movimiento de estos dispositivos generalmente se realiza gracias a cambios en la velocidad de sus propulsores, lo cual exige sofisticadas estrategias de control y programación.

Es preciso resaltar que los multicópteros pueden encontrarse tanto dentro de la categoría de los vehículos RC, en cuyo caso un operador es el encargado de su control, como en la de los UAV's, con lo cual tendría capacidad de vuelo autónomo.

Algunas configuraciones comunes de multicópteros son las siguientes:

#### Tricóptero

Este sistema se encuentra caracterizado por una distribución en "Y" de tres rotores (dos en la parte frontal y uno en la parte posterior), con una separación de 120° entre cada uno de ellos.

Además de esto, cuenta con un servomotor que controla la inclinación del rotor trasero, esto con el fin de proporcionar al sistema la capacidad de rotar alrededor de un eje vertical.



Figura 1-6. Tricóptero.

Un conjunto de hélices gira en sentido dextrógiro, mientras que los otros dos lo hacen en sentido levógiro, para contrarrestar el torque y evitar la rotación del vehículo. Un grupo de sensores, como acelerómetros, giroscopios y controladores de velocidad trabajan en conjunto para proporcionar información sobre el estado del sistema, misma que es empleada para estabilizar al tricóptero y permitir que éste asuma una posición y orientación estables.

### Cuadricóptero

Consiste en una distribución en forma de paralelogramo de cuatro rotores, dos de los cuales giran en sentido dextrógiro y dos en sentido levógiro, con lo cual se anulan las reacciones de los pares producidos y se evita la rotación del dispositivo.

Consta de una estructura central con cuatro brazos, sobre los cuales se montan los rotores y las hélices respectivas. Mecánicamente, esta configuración es más sencilla que la del tricóptero, ya que no requiere del acoplamiento de un servomotor para inclinar uno de los rotores. El propulsor extra incrementa el empuje vertical, lo cual brinda una mayor estabilidad de vuelo, así como una mayor autonomía y menor exigencia a los actuadores. Las distribuciones de rotores más usuales para estos dispositivos son en forma de cruz (+), equis (x) y puente (H). Se caracterizan por ser pequeños, ligeros, rápidos y maniobrables.



Figura 1-7. Cuadricóptero.

## Hexacóptero

Consta de seis rotores y hélices, los cuales pueden distribuirse en un arreglo circular, resultando así la configuración estándar, más común, o en configuración coaxial, en la cual se tienen tres pares de rotores, cada uno montado sobre el mismo eje, girando en sentidos contrarios.



*Figura 1-8. Hexacóptero.*

Un hexacóptero es una alternativa más estable de multicóptero, ya que posee mayor fuerza de empuje y más potencia, lo cual le permite soportar cargas superiores a las de un cuadricóptero. Además, resulta más maniobrable y versátil, gracias a la redundancia de los motores, permitiéndole volar incluso si uno de éstos falla, perdiéndose únicamente un grado de libertad.

## Octacóptero

Es similar al hexacóptero, sólo que con un par extra de rotores. Puede encontrarse en las configuraciones estándar y coaxial.

Los dos propulsores adicionales incrementan el empuje y la potencia, con el consecuente aumento de las prestaciones del dispositivo. Sin embargo, debido a consideraciones de tamaño, se requiere la utilización de hélices de menor diámetro, con lo que se incrementa la exigencia a los actuadores.



*Figura 1-9. Octacóptero.*

Los vehículos aéreos con más de ocho rotores no reciben un nombre particular, por lo cual se les denomina simplemente multicópteros. Teóricamente, al incrementarse el número de elementos propulsores, se incrementa la potencia y capacidad de carga del vehículo. Asimismo, la propiedad de redundancia proporciona mayor estabilidad de vuelo. Sin embargo, en la práctica se presenta un compromiso entre la cantidad de motores y el tamaño del dispositivo. Por tanto, se requiere la utilización de hélices más pequeñas y actuadores con una enorme velocidad de respuesta.

## Legislación para el Uso de Drones en México

Anteriormente se describieron algunas de las aplicaciones comunes de los Vehículos Aéreos no Tripulados en el ámbito civil, mencionándose que éstos podían ser empleados en el patrullaje o vigilancia, en la adquisición de datos, fotografías o video con fines científicos, o en el transporte de mercancía a muy baja escala, entre otras.

Sin embargo, al igual que cualquier otro instrumento tecnológico, los drones también pueden ser utilizados de forma incorrecta, ya sea deliberadamente, como es el caso del espionaje y el transporte de drogas o explosivos, o accidentalmente, al dañar espacios o mobiliario, tanto públicos como privados. Es por ello que en diversos países se están tomando medidas para reglamentar la utilización de este tipo de vehículos, y México no es la excepción.

El organismo encargado de establecer dicha reglamentación en nuestro país es la Dirección General de Aeronáutica Civil, perteneciente a la Secretaría de Comunicaciones y Transportes. El pasado 8 de abril de 2015, dicha institución emitió la Circular Obligatoria CO AV-23/10 R2, que establece los requerimientos para operar un Sistema de Aeronave Pilotada a Distancia (RPAS) [17].

A continuación se abordan brevemente los puntos más importantes que se incluyen en el citado documento, con la finalidad de brindar al lector una perspectiva general sobre dicha normatividad.

## Aplicabilidad

La Circular Obligatoria aplica a toda persona física o moral que opere o pretenda operar un Sistema de Aeronave Pilotada a Distancia (RPAS), así como a los RPAS de Estado, excepto a los militares, policiales, patrullas fronterizas o marítimas y similares. Sin embargo, éstos deben de regirse por las disposiciones de tráfico aéreo de la Ley de Aviación Civil. La circular no aplica a RPAS autónomos, incluyendo los globos libres no tripulados.

### Descripción General del Sistema de Aeronave Pilotada a Distancia

Un RPAS está conformado por un Aeronave Pilotada a Distancia (RPA) y por dispositivos de soporte que le brindan la asistencia necesaria para operar correctamente, tales como, una estación de control, datos de enlace, telemetría, equipo de navegación y comunicación, mecanismo de lanzamiento y recuperación, entre otros.

La RPA debe ser la parte ejecutora del vuelo del sistema. Ésta será controlada por una persona denominada “piloto en tierra”, mediante un sistema de control en la superficie terrestre, y cuando aplique, con apoyo de equipo de cómputo y elementos adicionales para la operación segura del vehículo aéreo.

### Clasificación de los Sistemas de Aeronaves Pilotadas a Distancia (RPAS) y Requerimientos y Limitaciones Generales

La Autoridad Aeronáutica clasifica las Aeronaves Pilotadas a Distancia con base en dos criterios, que son: 1) su masa máxima de despegue y 2) su uso, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Masa máxima de despegue	Denominación	Uso
2 [kg] o menos	RPAS Micro	Recreativo
		Comercial
Más de 2 [kg] hasta 25 [kg]	RPAS Ligero	Recreativo
		Comercial
Más de 25 [kg]	RPAS Pesado	Recreativo
		Comercial

Tabla 1-1. Clasificación de RPAS.

A pesar de que cada categoría de RPAS tiene sus propias normas, existen ciertas medidas que deben cumplir todas las Aeronaves no Tripuladas. A continuación se enlistan las disposiciones que presentan mayor relevancia.

- Ningún operador puede dejar caer y/o arrojar objetos (aunque tengan paracaídas) que puedan causar algún daño a cualquier persona o propiedad, desde el RPA.
- La persona encargada de un RPAS no puede operar la aeronave si el vuelo no puede realizarse de forma segura.



- En todo momento deberán operar en el espacio aéreo G, es decir, en la zona aérea que no cuenta con control de tráfico aéreo.
- No se debe de operar un RPAS en zonas peligrosas, restringidas o prohibidas.
- No se deben de emplear para transportar mercancías peligrosas y/o sustancias ilegales, así como armamento o explosivos.
- El operador debe mantener bajo control la trayectoria de la Aeronave Pilotada a Distancia en todo momento.
- El piloto en tierra se hace responsable del manejo de la RPA, y en caso de accidente, de los daños colaterales causados por la misma.
- El operador de la RPA se hace responsable por el manejo incorrecto de la información recabada durante el funcionamiento de la misma.
- El operador no debe de manejar de forma negligente o temeraria el Vehículo Aéreo, es decir, exponiendo la vida o la propiedad de terceros.
- Los RPAS deben de ser operados durante las horas oficiales, entre la salida y la puesta de sol, salvo que obtengan una autorización especial para vuelos nocturnos.
- El operador de la RPA debe de ceder el paso en todo momento, y sin excepción alguna, a cualquier aeronave no tripulada, a menos que se encuentre en un vuelo coordinado con la misma.
- Los RPAS deben de ser operados desde una estación fija, a menos que la estación de control se encuentre en un vehículo acuático, y esto sea indispensable para su funcionamiento.
- Los RPAS con matrícula, registro u operador extranjeros, con fines científicos, deberán de solicitar autorización a la Secretaría de la Defensa Nacional.

### **Requerimientos y limitaciones de los RPAS Micro**

Como se muestra en la *Tabla 1-1*, los Sistema de Aeronaves Pilotadas a Distancia Micro, poseen una masa inferior a 2 [kg]; por tanto, poseen una serie de reglas que atienden a sus dimensiones y características intrínsecas. A continuación se presentan las disposiciones más importantes, que se mencionan en la legislación para uso de drones Micro en México.

## 14 Diseño, construcción y control de una aeronave tipo dron

- La altitud máxima de vuelo será de 122 [m] (aproximadamente 400 [ft]), medidos a partir del nivel del suelo.
- El vehículo no deberá operarse fuera del campo visual del piloto al mando. El RPAS Micro no puede encontrarse más allá de 457 [m] o 1,500 [ft] de distancia horizontal del piloto.
- Deberá operarse al menos a 9.2 [km] de distancia de cualquier aeropuerto controlado, a 3.7 [km] de cualquier aeródromo y a 0.9 [km] de cualquier helipuerto.
- Los materiales de construcción del vehículo aéreo deberán ser frágiles, de forma tal que se rompan, distorsionen o cedan al impacto, con el fin de presentar un riesgo mínimo para cualquier persona u objeto cuando la RPAS choque con ellos.
- Los RPAS Micro de uso comercial deberán contar con una Póliza de Seguro de Seguridad Civil por daños a terceros.

En la siguiente tabla se muestran las velocidades máximas de los RPAS Micro de acuerdo con su masa máxima de despegue.

Peso máximo de despegue [kg]	Velocidad operacional máxima [km/h]	Peso máximo de despegue [kg]	Velocidad operacional máxima [km/h]	Peso máximo de despegue [kg]	Velocidad operacional máxima [km/h]
0.001	55	0.7	35.31	1.5	24.12
0.01	55	0.8	33.03	1.6	23.36
0.1	55	0.9	31.14	1.7	22.66
0.2	55	1	29.54	1.8	22.02
0.3	53.94	1.1	28.17	1.9	21.43
0.4	46.71	1.2	26.97	2	20.89
0.5	41.78	1.3	25.91		
0.6	38.14	1.4	24.97		

Tabla 1-2. Relación peso velocidad máxima en un RPAS Micro.

### Requerimientos y limitaciones del RPAS Ligero

En la *Tabla 1-1*, se establecen dos tipos de RPAS ligero según su uso, uno de tipo recreativo y otro comercial. Cada uno de ellos posee distintas restricciones; a continuación se mostrará un resumen de éstas.

#### RPAS Ligero de uso recreativo

- Todos los RPAS de esta categoría no requieren una autorización especial expedida por alguna dependencia gubernamental para operar.

- El vehículo no deberá operarse fuera del campo visual del piloto al mando. El RPAS Ligero de uso recreativo no puede encontrarse más allá de 457 [m] o 1,500 [ft] de distancia horizontal del piloto.
- Deberá operarse al menos a 9.2 [km] de distancia de cualquier aeropuerto controlado, a 3.7 [km] de cualquier aeródromo y a 0.9 [km] de cualquier helipuerto.
- La aeronave sólo podrá operar si se encuentra dentro los Clubes de Aeromodelismo autorizados por dependencias de gobierno enfocadas a la aeronáutica. También, deberá cumplir los reglamentos establecidos por dichos clubes así como planear solo en espacios asignados.
- EL RPA no podrá exceder la velocidad de  $161 \left[ \frac{km}{h} \right]$ .
- El operador del RPAS Ligero de uso recreativo debe contar con conocimientos apropiados de aeronáutica.

#### RPAS Ligero de uso comercial

- Deberán operarse al menos a 9.2 [km] de distancia de cualquier aeropuerto controlado, a 3.7 [km] de cualquier aeródromo y a 0.9 [km] de cualquier helipuerto.
- No podrán exceder la velocidad de  $161 \left[ \frac{km}{h} \right]$ .
- El operador del RPAS Ligero de uso recreativo debe contar con conocimientos apropiados de aeronáutica.
- Todos los RPAS de esta categoría deberán contar con un registro y placa de identificación. El registro se expide ante la Dirección General Adjunta de Transporte y Control Aeronáutico. Además, debe solicitarse el documento de Autorización de Operación ante las autoridades correspondientes.
- Deberán estar contruidos y programados de tal forma que contengan procedimientos de evasión de cualquier aeronave a fin de evitar colisiones y/o accidentes.

## **Requerimientos y limitaciones del RPAS Pesado**

Al igual que los RPAS Ligeros, los RPAS Pesados se dividen según su uso. La normatividad establece distintas reglas y restricciones para cada una de las diferentes clasificaciones. A continuación se enuncian las más importantes:

### *RPAS Pesado de uso recreativo*

Los RPAS Pesados para uso recreativo contarán con las mismas restricciones y reglas que los RPAS Ligeros de uso recreativo, las cuales fueron enunciadas previamente.

### *RPAS Pesado de uso comercial*

- Todos los RPAS de esta categoría deberán contar con un registro. El registro se expide ante la Dirección General Adjunta de Transporte y Control Aeronáutico. Además, deben contar con una Aprobación de tipo RPAS y Autorización de Operación. Ambos documentos pueden consultarse en [17], específicamente en la página 6 en el punto 10.2.2. y en la página 7 en el punto 10.2.3., respectivamente.
- Deberán estar contruidos y programados de tal forma que contengan procedimientos de evasión de cualquier aeronave a fin de evitar colisiones y/o accidentes.
- Los requisitos de carácter administrativo para operar un RPAS Pesado de uso comercial pueden ser consultados en [17].

## Diseño Conceptual

---

*La verdadera señal de inteligencia  
no es el conocimiento, sino la imaginación.*

**Albert Einstein**  
**(1879-1955)**

*Todos los impulsos del sentimiento deberían  
ser guiados por la razón.*

**Jane Austen**  
**(1775-1817)**

### Objetivos

- Realizar el diseño conceptual para el desarrollo del proyecto, siguiendo una metodología establecida.
- Definir requerimientos y especificaciones de diseño.
- Generar el árbol de objetivos y el diagrama funcional del sistema a diseñar.
- Realizar la selección del concepto solución.

### Descripción General

Un dron o UAV es una aeronave en pequeña escala, la cual posee ciertas características que le proporcionan un nivel relativo de autonomía. Esto significa que el sistema es capaz de efectuar algunas o todas las rutinas de vuelo sin necesidad de un operador. Como tal, este tipo de dispositivos son el resultado de la sinergia de diferentes ramas de la Ingeniería.

Por ejemplo, es necesario efectuar un apropiado diseño mecánico del sistema y sus componentes, prestando atención a las propiedades que son deseables en el producto final. Debe considerarse a los elementos eléctricos y electrónicos que estarán presentes en el dispositivo y que permiten controlarlo a partir de algoritmos basados en modelos matemáticos e implementados generalmente a partir del uso de software.

Se observa que tal sistema no se encuentra supeditado a la mera conjunción de los elementos anteriormente mencionados, sino que su correcto funcionamiento implica la unión íntima e interdependencia de todos éstos. Por tanto, puede aseverarse que un dron es un ejemplo de un sistema mecatrónico.

En el presente capítulo se abordarán ciertos tópicos relacionados con el diseño conceptual del dron, obteniéndose como resultado la definición y delimitación apropiada del sistema, así como una solución al problema planteado.

Para desarrollar el diseño conceptual de un proyecto, es necesario realizar una investigación previa acerca de los antecedentes y las tendencias dentro del área. En este caso, la información recopilada se presenta en el estado del arte, comprendido en el capítulo anterior.

Posteriormente, deben definirse los requerimientos con los cuales debe de cumplir el dispositivo a desarrollar, así como una jerarquización de éstos, en función de su importancia relativa para su correcto desempeño. Para corroborar en qué grado se logra el cumplimiento de los requerimientos, es necesario traducirlos de un lenguaje inherentemente cualitativo a parámetros mesurables; tal proceso conlleva la generación de especificaciones de diseño.

Una vez que se cuenta con información cuantitativa del sistema, es preciso delimitar los objetivos que éste ha de satisfacer, así como los mecanismos a partir de los cuales logrará estas metas. Es por esta razón que se plantea un árbol de objetivos en el que se clarifica qué es lo que se pretende lograr con el proyecto y posibles tentativas de solución.

Una cuestión intrínsecamente relacionada con el árbol de objetivos es el diagrama funcional, en el cual se presentan las subrutinas necesarias para el cumplimiento de la tarea, así como los medios involucrados en éstas.

Una vez en este punto, es posible la generación de conceptos de solución, los cuales deben basarse en la información producida en las etapas anteriores, cuidando que cumplan con los requerimientos establecidos y resaltando la forma de resolución a la problemática. De entre estos conceptos, debe seleccionarse aquel que cumpla con los objetivos propuestos, de forma eficaz y eficiente.

### Requerimientos

Los requerimientos son los aspectos con los cuales debe cumplir el dispositivo generado como solución. Por tanto, es común que éstos estén dados en lenguaje coloquial, sin hacer una referencia directa a la forma en la cual se verificará su cumplimiento. Estos requerimientos determinan los lineamientos básicos para la generación de conceptos.

Dentro de ellos, existen algunos cuyo cumplimiento es vital para la resolución de la necesidad, mientras que otros proporcionan un valor agregado al producto, aunque no es indispensable para el correcto desempeño del sistema. Los primeros se denominan necesarios, mientras que los segundos son deseables.

También, es necesario realizar una jerarquización de los requerimientos, para conocer cuáles son aquellos en los que debe centrarse el diseño, de acuerdo con su importancia para el cumplimiento y satisfacción de las necesidades. En este proyecto se plantearán los principales requerimientos para el desarrollo de un dron, considerando aspectos mecánicos, electrónicos y de control.

### Requerimientos de diseño mecánico

En la *Tabla 2-1*, se presenta una tabla donde se presentan los requerimientos en cuanto a diseño mecánico del sistema.

<b>Número</b>	<b>Requerimiento</b>	<b>Importancia relativa [%]</b>	<b>Necesario/ Deseable</b>
1	El dispositivo es ligero.	35	N
2	El dispositivo es de dimensiones reducidas.	20	N
3	El dispositivo posee una constitución robusta.	15	N
4	El dispositivo posee resistencia estructural.	15	N
5	Los componentes del dispositivo están protegidos contra daños debido a caídas desde alturas pequeñas.	10	D
6	El dispositivo es visualmente estético.	5	D
<b>TOTAL</b>		<b>100</b>	

*Tabla 2-1. Requerimientos de diseño mecánico.*

### Requerimientos de diseño electrónico y de control

En la *Tabla 2-2* se resumen los requerimientos dentro de los ámbitos de electrónica y control.

<b>Número</b>	<b>Requerimiento</b>	<b>Importancia relativa [%]</b>	<b>Necesario/ Deseable</b>
7	El dispositivo es capaz de levantar su propio peso.	25	N
8	El dispositivo es capaz de despegar de la superficie.	20	N
9	El dispositivo es capaz de medir y estabilizarse a una altura determinada.	20	N
10	El dispositivo tiene autonomía energética razonable.	15	N
11	El dispositivo es robusto ante perturbaciones ligeras en la vertical.	10	D
12	El dispositivo es capaz de efectuar movimiento horizontal teleoperado.	10	D
<b>TOTAL</b>		<b>100</b>	

Tabla 2-2. Requerimientos de diseño electrónico y de control.

## Especificaciones

Como se ha mencionado anteriormente, los requerimientos son los atributos y características que debe cumplir un diseño. Sin embargo, en general, estos requerimientos se enuncian en función de cualidades deseadas de un sistema, en un lenguaje no técnico, sino común.

Durante el proceso de diseño, es importante saber en qué medida una posible propuesta de solución satisface los requerimientos establecidos; lo anterior también proporciona un primer criterio de comparación y selección entre alternativas. Es por esta razón que los requerimientos han de ser traducidos a un lenguaje cuantitativo que permita establecer información concreta y objetiva sobre las características del sistema a diseñar. Al proceso de transición de requerimientos cualitativos en características técnicas se le conoce como formulación de especificaciones.

Las especificaciones son atributos medibles o verificables de un diseño, a partir de las cuales se busca lograr los requerimientos establecidos. El hecho de ser medible implica que una especificación puede expresarse mediante un valor de cierta magnitud física, es decir, a través de un número. En ocasiones, el cumplimiento de un requerimiento depende únicamente de la capacidad del sistema diseñado para realizar cierta acción; en este caso, la especificación puede no estar expresada en términos numéricos, sino en función de lo que el resultado del proceso de diseño debe ser capaz de realizar. Tales especificaciones se denominan binarias, dado el comportamiento discreto del cumplimiento de éstas (se satisface o no se satisface). Es en esta clase de especificación donde se aprecia especialmente la característica de ser verificables.



Finalmente, existen ciertas especificaciones que se denominan subjetivas, para las cuales es imposible establecer una medida o un criterio de cumplimiento. Estas se presentan debido a requerimientos que son de carácter inherentemente ambiguo, sobre los que no existe consenso, o que dependen de las preferencias del cliente o del usuario final. Ejemplos clásicos de esto son características como estética, belleza, comodidad, entre otras.

Cabe destacar en este punto que, dado que el objetivo primordial de las especificaciones es verificar el cumplimiento de los requerimientos, es preciso que cada uno de estos se encuentre considerado en por lo menos una de las especificaciones propuestas. Para asegurar lo anterior, existen gran cantidad de técnicas y metodologías, entre las que destacan las matrices de selección y de despliegue de calidad, en las cuales se establece una correlación entre los requerimientos y sus correspondientes especificaciones.

<b>Especificación</b>	<b>Medida</b>	<b>Requerimientos considerados</b>
Masa total del dispositivo.	< 0.8 [kg]	1
Largo y ancho máximos del dispositivo.	40 [cm] por 40 [cm]	2
Altura máxima de caída segura.	2 [cm]	3, 4, 5
Deflexión máxima de la estructura de soporte.	3 [mm]	3, 4
Fuerza de empuje mínima de los rotores en conjunto.	1 [kg]	7, 8
Tiempo mínimo de autonomía en estabilización vertical.	1 [min]	9, 10
Porcentaje de sobrepaso máximo en regulación vertical.	20 [%]	9
Capacidad de despegue.	Cumple / No cumple	8
Capacidad de medición de altura y estabilización.	Cumple / No cumple	9
Robustez ante perturbaciones verticales pequeñas.	Cumple / No cumple	11
Capacidad de movimiento horizontal teleoperado.	Cumple / No cumple	12
Estética.	Subjetiva	6

Tabla 2-3. Especificaciones de diseño.

Por último, también se debe aclarar que las especificaciones utilizadas durante el proceso de diseño pueden variar ligeramente respecto a aquellas que posee el producto final, debido a gran cantidad de factores externos, por ejemplo, tolerancias en manufactura, ajuste a valores de elementos comerciales, incertidumbre en mediciones, cambios subsecuentes en el diseño, entre muchos otros. A las primeras se les denomina *especificaciones de diseño*, mientras que se llaman *especificaciones de producto* a aquellas resultantes después de la manufactura o implementación, proporcionadas al usuario final.

Para este caso en particular, se proponen las especificaciones de diseño mostradas en la *Tabla 2-3*, con base en los requerimientos establecidos previamente. Además de ello, se muestra la forma en la cual ha de ser comprobado el cumplimiento éstas y, finalmente, cuáles de los requerimientos considera cada especificación.

### Árbol de objetivos

El método del árbol de objetivos se utiliza comúnmente durante el proceso de diseño para explicitar las características que debe satisfacer el dispositivo o sistema que se diseña (objetivos), así como la jerarquización de éstas y los medios necesarios para alcanzarlas.

En primera instancia, los objetivos se establecen con base en los requerimientos impuestos sobre el diseño, y posteriormente, éstos variarán conforme avance el proceso de diseño, dependiendo de la complejidad del problema y las estrategias de solución.

La estructura en la cual se construye un árbol de objetivos permite obtener una valiosa interpretación de la información mostrada. Por un lado, si éste se lee en orden descendente, indicará los mecanismos a seguir para lograr el objetivo; en orden inverso, proporciona las razones que motivan ciertas decisiones en el diseño.

En otras palabras, leído de arriba hacia abajo, el árbol de objetivos nos muestra cómo lograr dichas metas, mientras que en sentido ascendente da información del porqué de estas elecciones.

Con base en lo expuesto anteriormente, y considerando los requerimientos y especificaciones analizados en secciones anteriores, se desarrolla el árbol de objetivos para el presente caso, mostrado en la *Figura 2-1*.

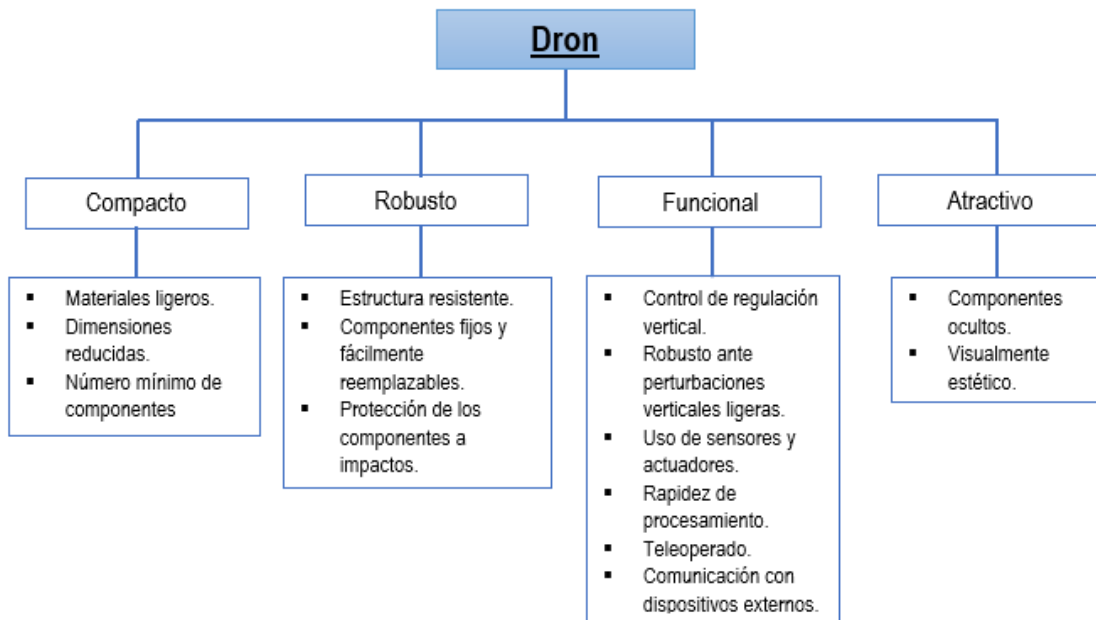


Figura 2-1. Árbol de objetivos.

## Diagrama funcional

Otra técnica útil para realizar el diseño conceptual de un proyecto es a partir del diagrama funcional; en éste, se divide el sistema en los subprocesos involucrados durante su operación y se muestra la interrelación existente entre las entradas y salidas de dichas rutinas.

Se puede establecer una analogía entre un diagrama de bloques (representación común de sistemas de control) y un diagrama funcional. En un diagrama de bloques, los sistemas se representan a través de rectángulos, los cuales reciben ciertas señales de entrada y las transforman en salidas.

En este esquema, el bloque actúa como una “caja negra”; esto quiere decir que solamente se conoce la relación entrada-salida del sistema, sin importar la forma en que éste transforma dichas señales.

Para un diagrama funcional, los bloques representarían a las funciones, entendiéndose éstas como tareas o subrutinas que ejecutan los componentes de un dispositivo para su correcto funcionamiento. Las funciones serían, en este sentido, análogas a los sistemas; de forma similar, las señales de entrada y salida de un sistema encuentran su equivalente en los medios que recibe y entrega una función.

El algoritmo para realizar un diagrama funcional consta de los siguientes pasos:

1. Expresar la función global del diseño en términos de la conversión de entradas y salidas.

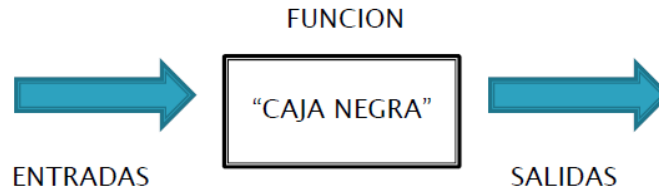


Figura 2-2. Función global y señales de entrada-salida.

2. Descomponer la función global en un conjunto de funciones secundarias necesarias. Al realizar este proceso, es conveniente plantearlas con un verbo y un sustantivo; por ejemplo: "amplificar señal", "contar artículos", etc. Debe recordarse que cada función secundaria tendrá sus propias entradas y salidas.
3. Dibujar un diagrama de bloques que muestre las interacciones entre las funciones secundarias.

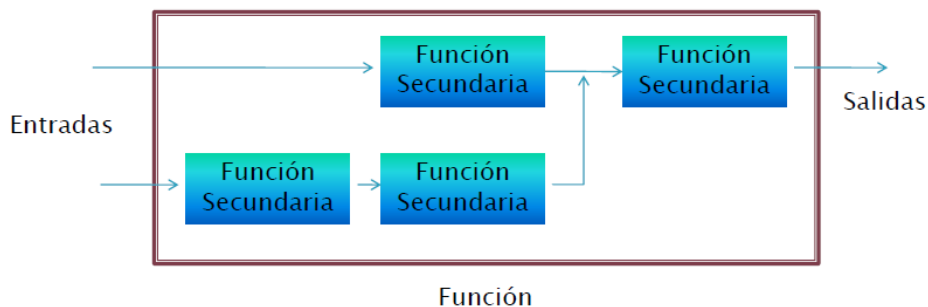


Figura 2-3. Interconexión de funciones secundarias.

4. Establecer los límites del sistema, definiendo los alcances de cada función para el dispositivo diseñado. Es necesario resaltar que en el diagrama no pueden existir señales desconectadas en el interior del sistema; todas deben de ser la entrada o salida de alguna función secundaria. Las únicas señales que pueden estar desconectadas son aquellas que provienen del exterior de la función global, o que ésta entrega como salidas. Frecuentemente, las restricciones a las funciones dependen de los requerimientos.

5. Una vez establecidas las funciones secundarias, deben de buscarse soluciones para cada una de ellas; esto es, se debe de plantear de qué forma puede realizarse dicha tarea, incluyendo los mecanismos y medios necesarios para tal fin. Es en esta etapa donde generalmente se definen los componentes que han de ser utilizados en el diseño (sistema mecánico, eléctrico, electrónico, software, sensores, actuadores, etc.).

Para ilustrar el procedimiento anterior, se realizará el diagrama funcional del presente proyecto. Como primer paso, se plantea el sistema diseñado como la función global; en este caso, se encuentra determinada por el dron en su conjunto. Éste a su vez tiene como entrada una posición de referencia y entrega como salida una posición real.

De acuerdo con los lineamientos establecidos previamente, la referencia de posición está constituida de dos partes; la primera es vertical y será alcanzada mediante un control de regulación, mientras que la segunda es una referencia de posición angular, la cual implica un control de estabilización. Ambas referencias son independientes. En este diseño no se le prestará importancia a la medición de la posición horizontal.



Figura 2-4. Dron como función global del sistema.

A continuación, deben establecerse las funciones secundarias que se requieren para alcanzar la función global, y con ello, el correcto funcionamiento del sistema. En el caso del presente proyecto, dichas subrutinas son:

- Acondicionar alimentación de la etapa de potencia.
- Leer referencia de posición vertical y angular.
- Acondicionar referencias de posición.
- Sensar altura y orientación actuales del sistema.
- Acondicionar mediciones de altura y ángulos.
- Comparar orientación actual con la referencia y generar una señal de error de orientación.
- Corregir error de orientación.
- Comparar altura actual con la referencia y generar una señal de error de altura.
- Corregir error de altura.
- Generar señal de control.
- Acondicionar señal de control.
- Accionar los rotores.

Conociendo las funciones secundarias, se está en posición de plantear el diagrama funcional, considerando los límites de cada subrutina individual, así como los del sistema en su conjunto. En la *Figura 2-5* se muestra el diagrama funcional generado.

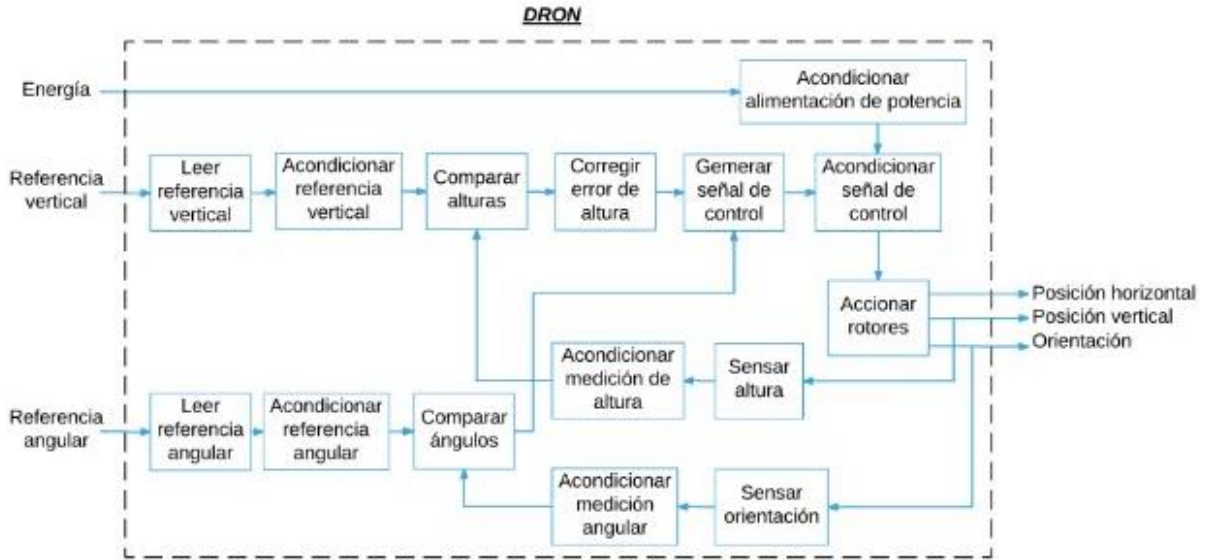


Figura 2-5. Diagrama funcional del dron.

Una vez obtenido el diagrama funcional, es factible proponer soluciones para cada uno de los subprocesos involucrados. Esta técnica es útil precisamente porque permite dividir un problema grande de diseño en múltiples tareas más pequeñas y sus interrelaciones, lo cual es más fácil de analizar y resolver.

Para las funciones de lectura de referencias de posición se requiere utilizar algún dispositivo de comunicación, cuyo receptor debe hallarse montado sobre la estructura del vehículo. Esto implica también la implementación de un protocolo de comunicación.

El acondicionamiento señales incluye filtrado, amplificación, atenuación, aislamiento eléctrico, entre otros procesos, y típicamente se lleva a cabo mediante la utilización de amplificadores operacionales, además de otros componentes electrónicos, por ejemplo, optoacopladores e, incluso, microcontroladores y software especializado.

Para mover los rotores se requiere un acondicionamiento adicional, consistente en una etapa de potencia, la cual proporcionará la corriente necesaria. Algunos ejemplos típicos de circuitos de potencia incluyen puentes H, etapas A, B y A-B de transistores y amplificadores operacionales de tarea dedicada a potencia.

En este caso, puede hacerse uso de los denominados ESC (Electronic Speed Controller); estos consisten en circuitos eléctricos cuya función es alimentar motores brushless, los cuales son ampliamente utilizados para la construcción de

multicópteros debido a sus características de par y velocidad. Un ESC recibe una señal PWM, generalmente proveniente de un microcontrolador, y entrega a la salida una señal trifásica de voltaje que proporciona la potencia necesaria a los actuadores.

La medición de la altura del dispositivo, necesaria para el lazo cerrado de control, implica inexorablemente el uso de un sensor especializado. Dentro de éstos existe gran variedad, distinguiéndose especialmente los ultrasónicos, los fotoeléctricos y altímetros barométricos por su extendido uso en UAV's y otras aeronaves.

Para efectuar la medición de la posición angular, se encuentran disponibles múltiples sensores, por ejemplo, magnetómetros y acelerómetros. La utilización de una IMU (*Inertial Measurement Unit*) o de una MPU (*Motion Processing Unit*), permite conocer al mismo tiempo la velocidad angular mediante el uso de giroscopios.

El procesamiento de la información, así como la implementación del algoritmo de control puede llevarse a cabo tanto de manera analógica como digital. En el primer caso, se requeriría el uso de diversos circuitos de amplificadores operacionales, principalmente, en múltiples configuraciones, para realizar las tareas de comparación y corrección, así como la generación de la señal de control.

Por otro lado, empleando microcontroladores digitales, tales procesos pueden programarse directamente sin necesidad de hardware adicional, ahorrando espacio y componentes electrónicos. Aunque, en este caso, se debe tener en cuenta el procesamiento digital de las señales.

Finalmente, todos los procesos involucrados requieren de energía para poder funcionar, por lo cual se hace necesaria una fuente de alimentación que se encuentre fija dentro del sistema. Para lograr esto suelen utilizarse baterías, generalmente de tipo Li-Po, cuyo uso es muy extendido en el campo de las aeronaves de pequeña escala gracias a sus buenas características de almacenamiento. Evidentemente, el voltaje entregado por la fuente debe de acondicionarse para los requerimientos de los sistemas lógicos y de potencia.

### Selección del concepto

En el capítulo previo se comentaron diversos tipos y configuraciones de multicópteros, así como las características principales de los elementos más representativos. Todos estos satisfacen los requerimientos básicos de un dron; sin embargo, para seleccionar un posible concepto de solución para el presente proyecto deben establecerse ciertos lineamientos, con base en los cuales se evaluará la conveniencia de una u otra alternativa.

A continuación, se presentan los criterios a considerar para realizar la selección de concepto solución, así como su ponderación, de acuerdo con su relevancia:

- Simplicidad mecánica
- Disponibilidad de componentes comerciales
- Capacidad de sustentación
- Menor complejidad matemática del sistema
- Menores dimensiones
- Menor peso
- Menor exigencia del controlador hacia los actuadores
- Maniobrabilidad
- Eficiencia energética
- Mayor empuje vertical
- Viabilidad del proyecto

Por *simplicidad mecánica* debe entenderse la facilidad para construir y ensamblar el dispositivo, así como un menor número de componentes.

La *disponibilidad de componentes comerciales* implica que existan a la venta partes necesarias para la construcción del sistema, así como que dichas piezas puedan adquirirse de una manera sencilla.

El criterio de *capacidad de sustentación* se refiere a la eficacia del dispositivo para mantenerse en vuelo, gracias únicamente a su configuración geométrica y mecánica.

La *complejidad matemática* del sistema incluye tanto al modelo del sistema físico como al diseño de la ley de control. Un modelo matemático complicado exige la implementación de un controlador sofisticado.

Los criterios de *menores dimensiones y peso* se derivan de la necesidad de que el sistema sea compacto y ligero para asegurar su correcto funcionamiento.

Una *menor exigencia del controlador a los actuadores* significa que la señal de control se encontrará acotada en intervalos de amplitud moderada; así mismo, los cambios de dicha señal no deben ocurrir de manera abrupta, para evitar daños a los actuadores.

La *maniobrabilidad* se refiere a la versatilidad de vuelo del dispositivo, así como a la facilidad que éste presenta para ser operado de forma remota.

La *eficiencia energética* implica un correcto aprovechamiento de la energía para satisfacer apropiadamente las necesidades de movimiento del sistema, así como para asegurar un tiempo de autonomía en vuelo razonable.



El *empuje vertical* hace alusión a la capacidad de los actuadores para sustentar en vuelo el peso total del sistema. Implica una distribución uniforme de la fuerza de sustentación generada por los rotores, así como la anulación de los pares internos producidos como reacción a los actuadores.

La *viabilidad* del proyecto se establece con base en la cantidad de recursos necesarios para desarrollar el dispositivo. Principalmente, se consideran los costos y la cantidad de tiempo estimados para concluir satisfactoriamente el proyecto.

Las posibles alternativas de solución comprenden los siguientes sistemas:

- Tricóptero.
- Cuadricóptero.
- Hexacóptero estándar
- Hexacóptero coaxial.
- Octacóptero estándar.
- Octacóptero coaxial.

Se procedió a evaluar dichas opciones mediante una matriz de selección. Para ello, se consultó la opinión de diversas personas con experiencia en áreas afines, con el objetivo de evitar sesgo en la selección, así como que ésta fuese la opción más apropiada, dados los fines perseguidos.

Con dicho propósito, se diseñó una encuesta, en la cual cada una de las personas consultadas estableció una jerarquización para los criterios de selección, tomando en cuenta que un valor igual a 5 implica la máxima importancia, mientras que una ponderación de 1 significa que el criterio no es relevante. Así mismo, se calificó en qué grado los sistemas anteriores cumplen los lineamientos, de la siguiente forma:

- 1: No cumple, o lo hace deficientemente.
- 3: Cumple aceptablemente.
- 5: Cumple satisfactoriamente.

Una vez recabada la información necesaria, se efectuó un tratamiento estadístico de los datos, de donde se obtuvieron los resultados presentados en la *Tabla 2-4*; con base en éstos, el concepto que mejor satisface los criterios de selección establecidos es el cuadricóptero.

Cabe resaltar que los resultados anteriores son el producto de una consulta a expertos en áreas de la ingeniería afines al proyecto a desarrollar. Desde el punto de vista de los autores del presente escrito, se considera que esta selección es acertada, ya que el concepto satisface apropiadamente las directrices planteadas, al mismo tiempo que representa un equilibrio entre los requerimientos establecidos y la viabilidad del proyecto, tal como se definió anteriormente.

### 30 Diseño, construcción y control de una aeronave tipo dron

Criterio	P	Tricóptero		Cuadricóptero		Hexacóptero estandar		Hexacóptero coaxial		Octacóptero estandar		Octacóptero coaxial	
		C	E	C	E	C	E	C	E	C	E	C	E
Simplicidad mecánica	10	4	40	5	50	3	30	1.5	15	1	10	1	10
Disponibilidad de componentes comerciales	10	4	40	4	40	3.5	35	2.5	25	2	20	2	20
Capacidad de sustentación	12	1.5	18	3.5	42	4	48	3.5	42	4	48	4	48
Menor complejidad matemática del sistema	8	3	24	4.5	36	2	16	1.5	12	1.5	12	1.5	12
Menores dimensiones	5	4	20	4	20	2.5	12.5	2	10	1	5	1	5
Menor peso	7	3.5	24.5	4.5	31.5	3	21	2.5	17.5	1	7	1	7
Menor exigencia del controlador a los actuadores	7	2.5	17.5	3.5	24.5	3.5	24.5	3	21	3	21	3	21
Maniobrabilidad	12	1.5	18	2.5	30	4	48	3.5	42	4	48	4	48
Eficiencia energética	10	2.5	25	4	40	3	30	2.5	25	2.5	25	2.5	25
Mayor empuje vertical	7	1.5	10.5	2.5	17.5	3.5	24.5	3.5	24.5	3.5	24.5	4	28
Viabilidad del proyecto	12	3	36	5	60	3.5	42	3	36	2	24	2	24
<b>Total</b>	<b>100</b>	<b>Total</b>	<b>273.5</b>	<b>Total</b>	<b>391.5</b>	<b>Total</b>	<b>331.5</b>	<b>Total</b>	<b>270</b>	<b>Total</b>	<b>244.5</b>	<b>Total</b>	<b>248</b>
<b>Calificación final</b>		<b>70</b>		<b>100</b>		<b>85</b>		<b>69</b>		<b>62</b>		<b>63</b>	

<b>P: Ponderación</b>
<b>C: Cumplimiento</b>
<b>E: Evaluación (C x P)</b>

Tabla 2-4. Matriz de selección de concepto.

Además de lo ya mencionado, es conveniente resaltar que existe gran cantidad de información acerca de los modelos matemáticos y controladores de un cuadricóptero. También, es posible obtener diferentes componentes comerciales de forma sencilla, incluyendo estructuras de soporte diseñadas *ex profeso*. Por ende, la selección del concepto resulta ventajosa y conveniente.

## *Diseño Mecánico y Electrónico*

---

*Divide cada dificultad en tantas partes  
como sea factible y necesario para resolverla.*

**René Descartes**  
(1596-1650)

*La preocupación por el hombre y su destino  
siempre debe ser el interés primordial de todo esfuerzo técnico.  
Nunca olvides esto entre tus diagramas y ecuaciones.*

**Albert Einstein**  
(1879-1955)

### Objetivos

- Seleccionar los componentes, tanto mecánicos como electrónicos, necesarios para la construcción del dispositivo.
- Generar el modelo CAD del sistema, incluyendo todos sus componentes, con fines de análisis y miras a su subsecuente fabricación.

### Descripción General

En el capítulo anterior se empleó una metodología de diseño conceptual para establecer los requerimientos y especificaciones del proyecto a desarrollar, de forma tal que fungieran como directrices durante las etapas subsecuentes del proceso.

Asimismo, a partir de técnicas establecidas dentro de la misma metodología, se generaron esquemas y diagramas que permiten determinar los objetivos y descomponer el proyecto en tareas más pequeñas y manejables. Por último, se logró seleccionar el concepto solución que mejor satisface los parámetros propuestos.

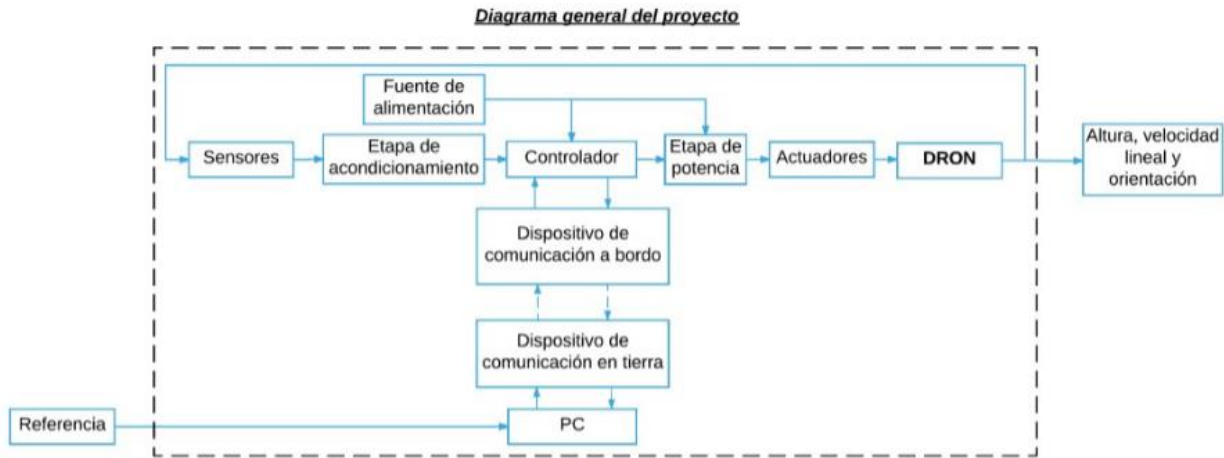
La siguiente fase dentro del proceso consiste en el diseño mecánico y electrónico del dispositivo, también llamado diseño de detalle. En éste, se establecen las características definitivas que tendrá el producto final; en forma análoga, deben seleccionarse los elementos y componentes que serán necesarios para el correcto funcionamiento del mismo.

La selección de los componentes utilizados en el presente proyecto está basada en las recomendaciones del Ing. Aldo Vargas, residente de la University of Glasgow, en el Reino Unido, quien posee una amplia experiencia en el campo de los UAV's, y a quien los autores agradecen enormemente su asesoría.

Como resultado final de esta etapa de diseño, se generó el modelo CAD del sistema completo, considerando todos los elementos que lo constituyen. A partir de éste, fue posible realizar análisis estructurales sobre el dispositivo, además de constituir un auxiliar fundamental para la subsecuente manufactura.

### Selección de componentes

En la *Figura 3-1* se presenta el diagrama general del proyecto, en el cual se muestran los principales elementos involucrados para el correcto funcionamiento del dron, así como sus correspondientes funciones. Con base en este esquema, es posible establecer qué componentes son aquellos que deben seleccionarse para satisfacer cada una de las tareas mencionadas.



*Figura 3-1. Diagrama general del proyecto.*

Como ya se mencionó, los componentes seleccionados para el desarrollo del sistema corresponden a las recomendaciones del Ing. Aldo Vargas; como tal, la labor de los autores consistió en validar dicho diseño y verificar que cumpliera con las características planteadas durante la etapa de diseño conceptual.

En la *Tabla 3-1* se resumen todos los componentes necesarios para la construcción de la planta. Las características principales de cada uno de ellos se explican más adelante, a lo largo del presente capítulo.

Función	Componente
Estructura	<i>Frame</i> GPL modificado con base en el diseño original del Ing. Aldo Vargas
Sensado y Acondicionamiento	Tarjeta Controladora de Vuelo Multiwii AIO V2
Controlador	Microcontrolador Teensy 3.1
Comunicación	Módulo de telemetría por radiofrecuencia HKPilot V2
Fuente de Alimentación	Batería LiPo Turnigy nano-tech 1300 mAh
Etapa de Potencia	Controlador Electrónico de Velocidad ESC Afro 12 A
Actuador	Motores brushless Multistar 2206 V2 "Baby Beast"
	Hélices Gemfan 5040 de dos palas

*Tabla 3-1. Componentes seleccionados.*

### Estructura (*Frame*)

Este es un componente fundamental para toda aeronave, puesto que su función consiste en proporcionar estructura al dispositivo y a la vez fungir como soporte de todos los elementos que lo constituyen.

Comúnmente, un *frame* para dispositivo multirrotor se encuentra formado por dos grupos de piezas: el centro y los brazos. El centro del vehículo consta de los elementos que soportan tanto a los componentes electrónicos (tales como el FC, el receptor GPS y la cámara, etc), como a la fuente de alimentación. Por otro lado, los actuadores, controladores de velocidad y hélices están montados en los brazos. En el mercado se encuentran disponibles estructuras de distintas configuraciones, tamaños y materiales, los cuales poseen diferentes propiedades mecánicas.

## Configuraciones

La configuración de una aeronave mult rotor determina qué parte del dispositivo corresponderá al frente del mismo y, además, permite establecer la distribución apropiada de las propelas.

Debido a que en el presente trabajo se plantea la construcción de un cuadricóptero, solamente se presentan las configuraciones que corresponden a este tipo de vehículos aéreos: en cruz (+) y en equis (X).

La disposición en + se caracteriza por tener un motor en la parte delantera del dispositivo, que a su vez cuenta con una propela horaria. Debido a esta razón, si se desea que el sistema avance hacia cierta dirección, se debe de incrementar la fuerza empuje producida por el motor situado en la posición contraria al movimiento.

Por ejemplo, para que el vehículo avance hacia adelante, el motor trasero deberá de proporcionar una fuerza de empuje mayor a la producida por los motores restantes.

Por otra parte, la característica principal de la configuración en X es que asigna dos motores a la parte frontal del cuadricóptero, cuyo sentido de giro es tal que apuntan hacia la parte delantera del centro del dispositivo; lo anterior permite que éste sea más fácil de maniobrar.

Si se desea avanzar en algún sentido, los dos motores situados en la posición opuesta a la dirección de movimiento deberán de girar más rápido. Es decir, si se quiere que el dron se desplace hacia enfrente, los dos motores traseros deberán de girar a mayor velocidad que los motores delanteros.

En la siguiente figura se muestran ambas configuraciones, así como la disposición de sus propelas.

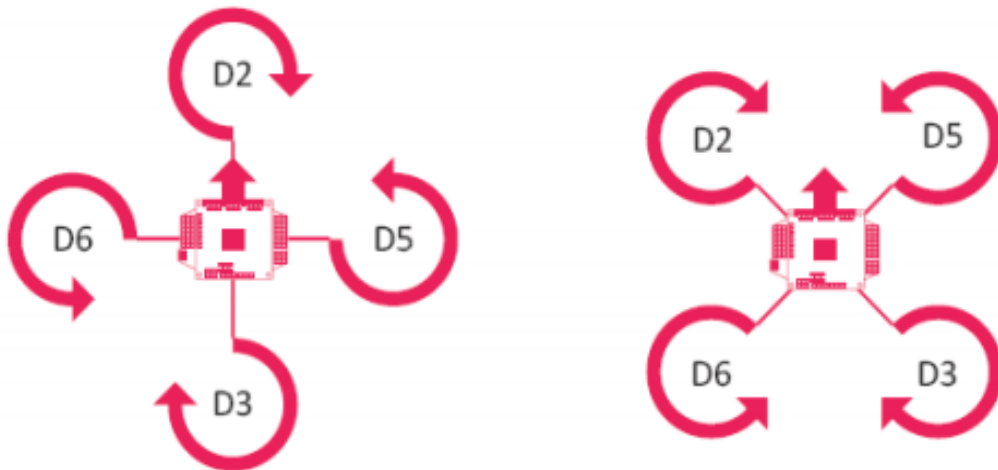


Figura 3-2. Configuraciones en cruz (+) y equis (X) de cuadricópteros.

## Clase

Es un parámetro que designa la distancia máxima que existe de rotor a rotor en un cuadricóptero. Definir esta dimensión permite al diseñador seleccionar adecuadamente el diámetro de las propelas, asegurando que éstas no choquen cuando el dispositivo se encuentre en operación. Por ejemplo, si se tiene un *frame* de clase 250, significa que existe una diagonal de rotor a rotor de 250 [mm]. En la *Figura 3-3* se muestra un ejemplo de un cuadricóptero clase 330.



*Figura 3-3. Frame de cuadricóptero clase 330.*

## Materiales

Los materiales que se emplean comúnmente en la construcción de estructuras para cuadricópteros son el plástico ABS, plástico PLA, madera, aluminio, fibra de carbono y fibra de vidrio. Todos éstos poseen una baja densidad y, además, se caracterizan por tener una alta resistencia al impacto.

Resulta conveniente manufacturar el *frame* mediante el proceso de impresión 3D, ya que de esta forma se diseña *ex profeso* para adaptarse a las especificaciones definidas anteriormente; adicionalmente, este método permite, en caso necesario, fabricar piezas de repuesto fácilmente. Por tanto, en este trabajo únicamente se abordan los dos materiales de uso común apropiados para este proceso: el plástico ABS y el PLA. A continuación, se presenta una descripción mínima de las propiedades mecánicas de los citados compuestos, con la finalidad de seleccionar el adecuado para el presente proyecto.

*Acrlonitrilo Butadieno Estireno (Plástico ABS)*

Es un plástico amorfo ampliamente utilizado en la industria. Se conoce como plástico de ingeniería, debido a su amplia gama de aplicaciones. El principal inconveniente de este material es que su síntesis es ligeramente más compleja que la de otros polímeros comunes.

La característica más importante del plástico ABS es su gran tenacidad, incluso a baja temperatura (-40 [°C]). Además, es duro, rígido y cuenta con una alta resistencia al impacto. Su reactividad química es relativamente baja; cuenta con una absorción mínima de agua, lo cual lo vuelve dimensionalmente estable. Es altamente resistente a la abrasión y puede recubrirse fácilmente con una capa metálica [50]. Las principales propiedades mecánicas del plástico ABS se muestran en la *Tabla 3-2*:

<b>Propiedad mecánica</b>	<b>Valor</b>
Alargamiento a la fractura ( % )	45
Coefficiente de Fricción	0.5
Módulo de Tracción ( GPa )	2.1-2.4
Resistencia última a Tracción ( MPa )	41-45
Resistencia al Impacto Izod ( J / m )	200-400
Absorción de Agua ( % en 24 horas)	0.3-0.7
Densidad ( kg / m <sup>3</sup> )	1 050
Resistencia a la Radiación	Aceptable
Resistencia a luz Ultravioleta	Mala

*Tabla 3-2. Propiedades mecánicas del plástico ABS.*

*Poliácido Láctico (PLA)*

Es un polímero constituido por moléculas de ácido láctico que posee propiedades análogas a las del Tereftalato de Polietileno (PET), el cual se emplea para fabricar envases. El PLA, sin embargo, cuenta con la ventaja adicional de ser biodegradable (se degrada fácilmente en agua y óxido de carbono).

El PLA puede ser conformado mediante diversos procesos de manufactura, entre los cuales se pueden mencionar la extrusión, el moldeo por inyección, la impresión 3D, y el laminado, lo cual lo hace muy útil en la industria. Además, por su baja toxicidad, también suele ser empleado para implantes médicos [50]. En la *Tabla 3-3* se presentan dos propiedades mecánicas del PLA.



<b>Propiedad mecánica</b>	<b>Valor</b>
Módulo de Tracción ( GPa )	2.7–16
Densidad ( kg / m <sup>3</sup> )	1 210-1 430

Tabla 3-3. Propiedades mecánicas del plástico PLA.

Dadas las características y especificaciones definidas previamente para el presente proyecto, se decidió que una estructura idónea es la de un cuadricóptero clase 250 en configuración X. Recapitulando a partir de lo anteriormente mencionado, esto implica que la distancia diagonal entre rotores será de aproximadamente 250 [mm] y que el desplazamiento en cualquier dirección del sistema estará dado por el cambio en la velocidad de rotación de dos motores simultáneamente.

La clase 250 es de las más pequeñas entre los vehículos aéreos no tripulados y fue seleccionada debido a que se requiere que el dispositivo diseñado sea de dimensiones reducidas, así como muy ligero, para asegurar su buen funcionamiento y sustentación. Además, como el objetivo fundamental de este proyecto es la regulación vertical, no se requiere un sistema demasiado grande; por el contrario, mientras más pequeño y liviano sea éste, se sustentará en vuelo con mayor facilidad, y, por ende, su control será más sencillo.

El proceso de manufactura a partir del cual se generará la estructura será mediante impresión 3D, en plástico ABS; dicha elección está basada en la sencillez del proceso y en las buenas características mecánicas del material, las cuales satisfacen las necesidades del proyecto. El ABS es un material ligero, de baja densidad y con gran resistencia mecánica, tanto a la tracción como al impacto. Además de lo anterior, la impresión 3D permite generar piezas individuales de una forma rápida y sencilla, lo cual resulta conveniente en caso de que se requiera algún repuesto.

El *frame* a utilizar se basa en un modelo CAD de licencia gratuita (*General Public License, GPL*), desarrollado por el Ing. Aldo Vargas, el cual posee dimensiones muy reducidas y una estructura ligera. Adicionalmente, está provisto con un tipo de conectores especiales, impresos en 3D, basados en la tecnología desarrollada por la compañía inglesa *Rotite®*, los cuales permiten unir las diversas partes del vehículo sin necesidad de tornillos u otras piezas, reduciendo así la masa total del sistema.

## Controlador de Vuelo (*Flight Controller, FC*)

Un Controlador de Vuelo (*Flight Controller, FC* por sus siglas en inglés), es un dispositivo electrónico de vital importancia para los vehículos aéreos, cuya función principal consiste en generar las señales de control necesarias para un adecuado funcionamiento.

Las tarjetas FC incorporan los sensores que se utilizan comúnmente en sistemas de aeronaves RC y UAV's; entre estos, pueden mencionarse barómetros de precisión, acelerómetros, magnetómetros y giroscopios. Así mismo, los FC incluyen entradas *ex profeso* para la interconexión con otros dispositivos, tales como Controladores Electrónicos de Velocidad (*Electronic Speed Controller, ESC*) y batería LiPo, así como módulos adicionales, los cuales permiten ampliar sus funcionalidades; entre estos se encuentran GPS, telemetría, cámara, etc.

Por otra parte, cabe destacar que un FC es el resultado de la sinergia entre dos elementos presentes en todo sistema de control: los sensores y el controlador. Al emplear una tarjeta controladora de vuelo, se reduce enormemente el tiempo asignado al diseño de la parte electrónica, puesto que se elimina la tarea de seleccionar independientemente el microcontrolador y los sensores, así como la ardua labor que conlleva su interconexión, acondicionamiento de las señales y el filtrado del ruido eléctrico.

Existen diversas tarjetas controladoras de vuelo disponibles en el mercado, con muy diversas características y especificaciones técnicas. Respecto a la parte relativa al software, existen, principalmente, dos opciones, las cuales poseen además la ventaja de ser código abierto, compatibles con múltiples tarjetas controladoras de vuelo; éstos son los proyectos MultiWii y Ardupilot. Además, ambos están basados en el proyecto de hardware libre Arduino; por tanto, su programación es accesible al público con experiencia en desarrollo de aplicaciones con dicha plataforma. Para el presente proyecto, se optó por el software de Multiwii.

### **MultiWii**

Es un proyecto de código abierto de propósito general para controlar vehículos aéreos RC (Radio Control). Originalmente, nació con la finalidad de reutilizar los sensores de los controles WiiMote de Nintendo Wii e incorporarlos, junto con una tarjeta de desarrollo Arduino mini, a un tricóptero, para de esta forma controlar las rutinas de vuelo del mismo.

Sin embargo, una vez que sus desarrolladores liberaron el código, se extendió su popularidad y algunos fabricantes de electrónica decidieron crear placas controladoras de vuelo que incorporaran compatibilidad con dicho entrono.

Posteriormente, otras versiones del código fuente de MultiWii implementaron la capacidad de controlar diferentes tipos de vehículos aéreos multirrotor, con lo cual se ampliaron enormemente sus prestaciones [32].

### Tarjeta controladora de vuelo AIO V2.0

Para cumplir la función de los sensores, se seleccionó la tarjeta AIO Flight Controller V2.0, la cual es compatible con la plataforma de software Multiwii. Entre los componentes incluidos en este dispositivo se encuentra un microcontrolador ATmega 2560 con una arquitectura RISC de 8 bits y una frecuencia máxima de operación de 16 [MHz], además de todos los sensores necesarios para controlar un vehículo aéreo.

Entre dichos sensores se cuenta con una Unidad de Procesamiento de Movimiento (*Motion Processing Unit, MPU*) constituida por giroscopios y acelerómetros de 6 ejes, un magnetómetro digital de 3 ejes y un altímetro barométrico de precisión con una resolución de hasta 0.01 [mbar]. Una ventaja del FC es que posee acondicionamiento interno para las señales de los sensores; por tanto, no se requiere ningún dispositivo electrónico adicional.

Esta tarjeta cuenta con interfaces dedicadas para comunicación con módulos GPS, liberando terminales para su utilización en otros periféricos. Adicionalmente, sus dimensiones son sumamente reducidas (50 X 50 X 11.6 [mm]) y es bastante ligera (14.2 [g]).

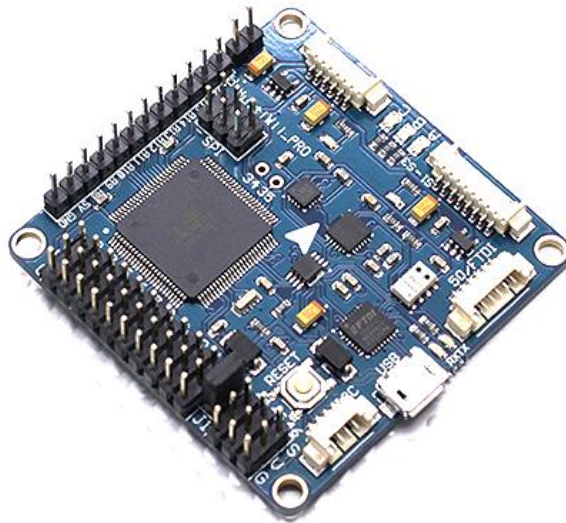


Figura 3-4. Tarjeta Controladora de Vuelo AIO V2.

Las características principales de este elemento son:

- Compatibilidad con plataforma de firmware Multiwii.
- Microcontrolador Atmega 2560 integrado.
- Capacidad para controlar más de 8 rotores simultáneamente.
- Unidad de Procesamiento de Movimiento MPU6050 con acelerómetro y giroscopio de 6 ejes.
- Magnetómetro digital HMC5883L de 3 ejes.
- Altimetro barométrico de alta precisión MS5611-01BA01.
- Receptáculo para Micro USB FT232RQ USB-UART.
- 4 puertos seriales independientes de tarea dedicada para depuración, comunicación Bluetooth, OSD, GPS y telemetría.
- Un puerto I2C para sensor o dispositivo extensión.
- 8 canales de entrada para receptores RC estándar.
- 6 salidas analógicas adicionales para extensión.
- 2 salidas para servo de control de ángulos pitch y roll de una cámara.
- Una salida servo adicional para accionar el disparador de una cámara.
- Reguladores de voltaje independientes de 3.3 [V] y 5 [V].

### Microcontrolador

Para llevar a cabo la implementación del controlador, se hizo uso de la tarjeta de desarrollo *Teensy 3.1*, la cual posee las siguientes características:

- Procesador MK20DX256VLH7 con núcleo Cortex-M4.
- Frecuencia nominal de operación de 72 [MHz] (hasta 96 [MHz] alcanzables en modo *Overclock*).
- Memoria RAM de 64 [kB].
- Memoria EEPROM de 2 [kB].
- Un total de 34 terminales digitales de entrada-salida, con voltaje nominal de salida de 3.3 [V] y con tolerancia de hasta 5 [V] a la entrada.
- Un total de 21 terminales de entrada analógica con convertidores analógico-digitales con 13 bits de resolución.
- Una salida analógica real DAC con 12 bits de resolución.
- Tres puertos de comunicación serial, a 3.3 [V].
- Frecuencia PWM de 50 [Hz].
- Puerto de comunicación USB, completamente independiente de los puertos seriales, para depuración y programación.
- Compatibilidad con la IDE Arduino.



Figura 3-5. Tarjeta de desarrollo Teensy 3.1.

La razón por la cual se prefirió implementar el algoritmo de control en un microcontrolador adicional, en lugar de hacerlo en la tarjeta FC se debe a que el código de la plataforma Multiwii es muy complejo, por lo que no resulta sencillo ni práctico modificar la programación original. En lugar de eso, la tarjeta controladora de vuelo únicamente se utiliza para obtener la información de los sensores, la cual se transmite vía comunicación serial al microcontrolador. Es aquí donde se hace el tratamiento de los datos y se ejecuta el algoritmo de control; también es este elemento el que genera las señales de control PWM para los ESC, encargados de accionar los motores.

Adicionalmente, el microcontrolador seleccionado posee una frecuencia de operación mucho mayor a aquél que se encuentra integrado en la tarjeta FC, y mejores características y prestaciones. Dado que la ley de control a ejecutar requiere ejecutarse con rapidez, esto representa una gran ventaja.

### Dispositivo de Comunicación

Al ser la implementación de un controlador de estabilización vertical para el vehículo aéreo a construir el objetivo fundamental del presente trabajo, es deseable que puedan modificarse ciertos parámetros del sistema, por ejemplo, el punto de operación del cuadricóptero, cuando éste se encuentre en pleno vuelo.

Para realizar dicha tarea, es necesario el empleo de un dispositivo de comunicación inalámbrica entre el vehículo aéreo y una estación en tierra, que permita la transmisión de datos al dron, así como la recepción de la información correspondiente al estado de las variables físicas medidas a bordo.

En el mercado se encuentran disponibles diversas tecnologías que permiten el establecimiento de una comunicación inalámbrica entre dispositivos electrónicos; por citar algunas de ellas, existen dispositivos Bluetooth, radiocontroles, XBee, Wi-Fi, entre otras. Sin embargo, no todas éstas se ajustan a los requerimientos del presente proyecto. En este caso, se optó por la telemetría por radiofrecuencia.

## Telemetría por radiofrecuencia

La telemetría, palabra proveniente de las raíces griegas *τῆλε* (*tele*, distancia) y *μετρον* (*metrón*, medida), se refiere a todas aquellas técnicas y tecnologías que permiten la medición remota de magnitudes físicas, y su posterior envío a la unidad de monitoreo y control del sistema [50]; a todos aquellos dispositivos que intervienen en este proceso se le conocen como telémetros. Si la transmisión de información se da a través de ondas de radio, se dice que se tiene un sistema de telemetría por radiofrecuencia.

La telemetría ha tenido un enorme impacto en todas las áreas de la vida moderna, desde telecomunicaciones, industria, transporte, informática, meteorología, ciencia y tecnología, entre otras. Dentro del campo de la aeronáutica a baja escala y los sistemas UAV, es muy común encontrar dispositivos de telemetría que operan por medio de señales de radiofrecuencia.

## Normatividad para el uso del espectro de frecuencias en México

El espectro de frecuencia electromagnética se encuentra dividido en diferentes bandas, las cuales se utilizan para aplicaciones específicas. En nuestro país existe una norma que regula el uso de frecuencias de señales electromagnéticas, la cual se encuentra avalada por el Instituto Federal de Telecomunicaciones y consistente con la normativa internacional.

Ciertas bandas de frecuencia están reservadas para su uso exclusivo en actividades gubernamentales, como telecomunicaciones nacionales en aeropuertos, por lo que es ilegal el uso de dispositivos que operen dentro de este rango de frecuencia. Por otro lado, también existen bandas dedicadas a la transmisión de datos para televisión y radio.

En la referencia [25] puede consultarse el Cuadro Nacional de Distribución de Frecuencias; en dicho documento se establece que la banda de frecuencia UHF (*Ultra High Frequency*, 902-928 [MHz]) es libre para su utilización por parte de aficionados. Por ende, cualquier dispositivo de telemetría por radiofrecuencia empleado en aplicaciones de aeromodelismo deberá operar en dicho intervalo de frecuencias.

## Clasificación de las señales electromagnéticas

Existen diversos criterios para establecer una clasificación de las señales electromagnéticas. A continuación, se mencionarán los dos más relevantes.

Clasificación por frecuencia

En la *Tabla 3-4* se muestran los diferentes tipos de señales de acuerdo con los ciclos por segundo en que éstas son transmitidas, así como las principales aplicaciones de cada una de ellas.

Nombre	Significado	Rango de frecuencia [MHz]	Aplicaciones
MF	Frecuencia media	0.3 - 2.99	Radiodifusión AM.
HF	Frecuencia alta	3 - 29.99	Reservada para fuerzas de seguridad y defensa.
VHF	Frecuencia muy alta	30 - 299.99	Control de tráfico marítimo. Satélites meteorológicos.
UHF	Frecuencia ultra alta	300 - 2999	Frecuencias libres para aficionados. Canales de televisión.

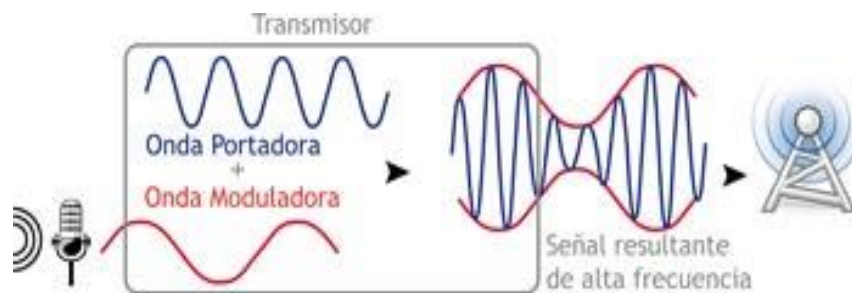
*Tabla 3-4. Clasificación de señales electromagnéticas de acuerdo con su frecuencia.*

Como se mencionó previamente, cualquier sistema de telemetría para aeromodelismo deberá funcionar en la banda de frecuencia UHF.

Clasificación por modulación

Una de las características fundamentales de las señales dentro de un sistema telemétrico es la forma en la que la central de control codifica la información. A este proceso se le denomina *modulación*.

Para entender este concepto, considérese la *Figura 3-6*. La señal que contiene la información útil se conoce como onda portadora, la cual generalmente es de alta frecuencia; para transmitirse, dicha señal se monta en otra de menor frecuencia, llamada onda moduladora. De esta forma, se codifican los datos antes de la transmisión y, una vez que llegan al equipo receptor, se decodifican, recuperándose la señal original, con su información íntegra.



*Figura 3-6. Modulación de una señal electromagnética.*

La forma en la que la onda moduladora modifica a la onda portadora se conoce como codificación de la información. Existen esencialmente dos formas de codificar la información: amplitud modulada (AM) y frecuencia modulada (FM).

### *Amplitud Modulada (AM)*

Es la forma más simple y antigua de codificar una señal, que consiste en variar la amplitud de la señal portadora [43]. Los cambios de nivel en la señal moduladora y en la señal portadora deberán estar en sincronía, manteniendo una fase y frecuencia constantes para ambas señales.

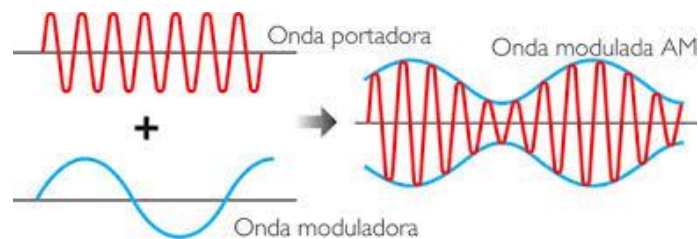


Figura 3-7. Modulación AM.

La principal ventaja de los sistemas AM consiste en que la demodulación de la señal es muy sencilla; por ende, los receptores no requieren de funciones complicadas, lo cual los vuelve sumamente económicos y fáciles de operar.

### *Frecuencia Modulada (FM)*

Es una técnica de modulación que permite transmitir información a través de una onda portadora variando su frecuencia, manteniendo la amplitud constante [50]. Una de sus principales ventajas es que las ondas codificadas en FM son menos sensibles a las interferencias; por lo tanto, resulta más eficiente que la modulación AM.

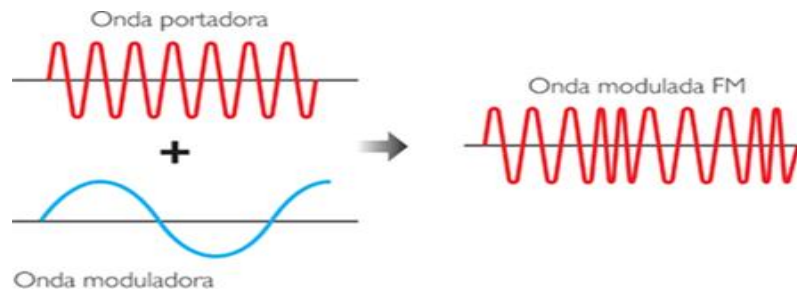


Figura 3-8. Modulación FM.

Las principales aplicaciones de la frecuencia modulada se encuentran en la radiodifusión, el sonido de la televisión analógica y el aeromodelismo.



### Módulo de telemetría por radiofrecuencia HKPilot V2

Para llevar a cabo la comunicación con el vehículo, se optó por utilizar el módulo de telemetría por radiofrecuencia HKPilot V2, el cual opera a una frecuencia de 915 [MHz] de frecuencia modulada con conexión full-dúplex. Este sistema permite el enlace entre un controlador de vuelo (es compatible con la plataforma Multiwii) y cualquier dispositivo que cuente con una entrada USB.

El módulo consta de dos transceptores intercambiables, ya que ambos pueden utilizar tanto conexiones USB como UART; esto significa que cualquiera de ellos puede utilizarse, indistintamente, como unidad de a bordo o en tierra. Adicionalmente, utiliza software *open source* basado en MAVlink, lo cual permite a la estación en tierra no únicamente monitorear datos de navegación en tiempo real, sino además modificar las configuraciones y parámetros de vuelo sin necesidad de aterrizar el sistema.



Figura 3-9. Módulo de telemetría por radiofrecuencia HKPilot V2.

Las principales prestaciones de este elemento son las siguientes:

- Comunicación bidireccional full-dúplex.
- Frecuencia de operación de 915 [MHz].
- Modulación FM.
- Compatible con plataforma Multiwii.
- Potencia máxima de salida ajustable de 100 [mW].
- Sensibilidad de recepción de -117 [dBm].
- Interfaz serial 3.3 [V] UART.
- Voltaje de alimentación de 3.7 [V] a 6 [V].
- Corriente de transmisión de 100 [mA] a 20 [dBm].
- Corriente de recepción de 25 [mA].
- Dimensiones reducidas (25.5 X 53 X 11 [mm] y 11.5 [g], sin antena)

## Fuente de alimentación

Un UAV es, por definición, un sistema mecatrónico no fijo (móvil); es por esta razón que, para proporcionar la energía eléctrica requerida para su correcto funcionamiento, se hace necesaria la implementación de una fuente de alimentación portátil, montada directamente en el dispositivo.

La batería de una aeronave es uno de los componentes de mayor importancia desde el punto de vista de diseño, ya que debe de satisfacer las exigencias energéticas del sistema sin incrementar desproporcionadamente las dimensiones y la masa de éste. Dicho de otra forma, existe una interdependencia entre el peso del dispositivo y su consumo de energía.

Esto puede ejemplificarse de una forma muy sencilla; en el caso de un multirroto, el conjunto hélices-motores debe de proporcionar el empuje suficiente para permitir que el vehículo despegue, se sustente en vuelo y ejecute movimientos y maniobras durante una cierta cantidad de tiempo. Para ello, los motores requieren de una cantidad considerable de corriente, lo que se traduce en una solicitud continua de energía para la fuente de alimentación.

Resulta evidente que la capacidad de almacenamiento de carga de una batería es proporcional a su tamaño y masa. Por tanto, el uso de baterías gran capacidad conlleva un incremento considerable de las dimensiones y el peso del sistema global, exigiendo actuadores más grandes con un mayor consumo energético.

Como resultado, el proceso de selección se vuelve recursivo. Ésta es también la razón por la cual, en la actualidad, se busca incrementar la eficiencia de las baterías, para que éstas puedan almacenar mayores cantidades de carga con dimensiones cada vez menores.

## Pilas y baterías

A pesar de que ambos términos suelen utilizarse como sinónimos, estrictamente una pila es diferente a una batería. Se conoce como *pila* a un dispositivo, generalmente pequeño, en el que la energía química se transforma en eléctrica. Por otro lado, una batería es un aparato electromagnético capaz de acumular energía eléctrica y suministrarla; normalmente se encuentra constituida por placas de plomo que separan compartimentos con ácido.

Dicho de otra forma, una batería es un conjunto de pilas, interconectadas entre sí; esta conexión puede ser de dos maneras: en serie, si lo que se busca es incrementar la tensión de la salida a un mismo consumo de corriente, o en paralelo, para extender el tiempo de uso de la batería con una diferencia de potencial fija.

En general, las pilas se utilizan como fuente de energía para aparatos pequeños, por ejemplo, juguetes, calculadoras, relojes, etc. Cuando la aplicación exige un mayor suministro de corriente por tiempos prolongados, se hace necesaria la implementación de una batería; tal es el caso, por ejemplo, de los automóviles, los cuales tienen una alta exigencia de corriente durante el arranque.



Figura 3-10. Pilas y baterías.

Con base en lo que se ha mencionado anteriormente, puede concluirse que todas las pilas proporcionan una tensión máxima de 1.5 [V], aproximadamente; en general, la mayoría de las aplicaciones requieren una diferencia de potencial mayor, además de un suministro considerable de corriente. Para subsanar las deficiencias de las pilas, se utilizan conjuntos de éstas, conocidos como baterías.

Por ejemplo, las baterías de plomo y ácido, típicamente utilizadas en automóviles, proporcionan un voltaje de 12 [V] entre sus terminales, y poseen capacidad de hasta 40 [Ah]. Puede observarse que las características de tensión y carga incrementan considerablemente en una batería.

### Parámetros de selección para baterías

Existen diversas características importantes de las baterías, las cuales pueden utilizarse para comparar cuantitativamente su desempeño; a continuación, se presentarán las más relevantes.

#### Tensión

Se refiere a la diferencia de potencial que una batería es capaz de proporcionar; como tal, es el principal parámetro a considerar en el momento de la selección. Es conveniente recordar que este concepto representa la energía potencial eléctrica por unidad de carga y se mide en volts [V].

### Capacidad

Es la cantidad total de carga que es capaz de almacenar una batería y su unidad en el SI es el coulomb [C]; también suele medirse en amperes-hora [Ah], lo cual resulta el estándar para la especificación de las baterías [43]. Este parámetro se encuentra sumamente relacionado con el tiempo de funcionamiento del dispositivo que se energiza.

### Resistencia

Todas las baterías poseen una resistencia interna que tiende a reducir el nivel de voltaje a corrientes elevadas. En términos generales, estas resistencias son muy pequeñas, del orden de miliohms; por ejemplo, una batería de plomo-ácido tiene una resistencia de 6 [mΩ], mientras que en una de níquel-cadmio este parámetro es de aproximadamente 9 [mΩ]. Este hecho permite a las baterías suministrar grandes cantidades de corriente, especialmente durante los periodos transitorios.

### Eficiencia

Se define como la relación entre la energía eléctrica recibida durante el proceso de carga y aquella que es entregada por la batería en el ciclo de descarga. Una batería de níquel-cadmio, por ejemplo, tiene una eficiencia de aproximadamente 83%, mientras que una de plomo-ácido supera el 90%.

### Constante de carga/descarga (C)

Es un parámetro empleado por los fabricantes que depende de la capacidad de almacenamiento de carga especificada en la batería y que se usa para poder señalar fácilmente la intensidad de corriente a la que ésta debe cargarse o descargarse para que no sufra daños [50].

La expresión matemática que define a dicha constante es la siguiente:

$$C = \frac{Q}{1000}$$

Donde:

Q: Capacidad de carga de la batería en [mAh]

C: Constante de carga/descarga en [A]

Del análisis dimensional, se sabe que el denominador tiene unidades de  $\left[\frac{mAh}{A}\right]$ .

Por ejemplo, para una batería LiPo de 1200 [mAh], se tendría que:

$$C = \frac{1200 \text{ [mAh]}}{1000 \left[ \frac{\text{mAh}}{\text{A}} \right]} = 1.2 \text{ [A]}$$

Por ende, si el fabricante indica que la tasa de carga recomendada es de 1C, no debe excederse 1.2 [A] de corriente durante este proceso; del mismo modo, una rapidez de descarga máxima de 7C indica que no debe utilizarse dicha batería para alimentar dispositivos que exijan más de 8.4 [A] de corriente (7 X 1.2 =8.4).

Este término también suele utilizarse para calcular el tiempo de carga o descarga de una batería; si ésta se carga a una tasa de 1C, tardará aproximadamente una hora en alcanzar su capacidad máxima. Por otro lado, si la tasa de descarga es de 2C, tomará aproximadamente media hora consumir toda la carga de la batería; dicho de otra forma, bajo este régimen de corriente, se consumirán dos baterías completas en una hora.

### Efecto de memoria

Es una característica de histéresis no deseada que afecta a las baterías que provoca que la capacidad o el nivel de tensión disminuyan en cada ciclo de carga-descarga: Los principales factores que favorecen este fenómeno son tiempos prolongados de uso, la exposición a altas temperaturas y la exigencia de grandes cantidades de corriente [50].

### **Baterías Polímero de Litio (LiPo)**

Son un tipo de baterías recargables de última generación, derivadas de las baterías Li-ion, ampliamente utilizadas en sistemas eléctricos de radiocontrol, especialmente en aviones, helicópteros y multicópteros.

Su importancia radica en que han revolucionado el mundo del aeromodelismo, haciendo del vuelo eléctrico una opción viable respecto a los modelos que funcionan con combustible [19].

La principal propiedad de las baterías LiPo es su excelente relación entre peso, volumen, capacidad y tensión [47]. También posee características superiores a las baterías de Ni-Cd y las de Ni-MH, debido a que su capacidad de carga máxima es aproximadamente el doble de éstas.



Figura 3-11. Baterías LiPo.

Las baterías de polímero de litio están conformadas por múltiples celdas interconectadas entre sí; el valor de tensión a la salida depende del número de celdas, de acuerdo con la siguiente tabla:

Número de celdas	Tensión [V]
1	3.7
2	7.4
3	11.1
4	14.8

Tabla 3-5. Relación de tensión en función al número de celdas de una batería LiPo.

### Ventajas de las baterías LiPo

El desarrollo y evolución de nuevas tecnologías ha hecho posible que estas baterías posean dimensiones idóneas para aplicaciones de radiocontrol, aeromodelismo, UAV's, entre otras; pueden adaptarse a casi cualquier tipo de forma y tamaño, además de ser sumamente ligeras.

Otra ventaja estriba en que poseen capacidades de descargas muy altas, lo cual les permite alimentar dispositivos que demandan grandes cantidades de energía; esta característica las convierte en la opción apropiada para su implementación en multicopteros, ya que dichos sistemas requieren un considerable suministro de corriente durante un tiempo prolongado.

De la misma forma, su elevada capacidad de almacenamiento de carga proporciona la cantidad de energía necesaria para un tiempo razonable de autonomía.

### Desventajas de las baterías LiPo

La principal desventaja de las baterías LiPo consiste en que, en caso de que el nivel de tensión para alguna celda caiga por debajo de 3 [V], éstas quedan completamente inutilizables. Por ende, debe verificarse constantemente la salida de voltaje y el nivel de carga.

Otro inconveniente relevante es que existe riesgo de incendio o explosión si la batería es sobrecargada, o si este proceso se lleva a cabo a una diferencia de potencial mayor a la nominal. De igual forma, deben evitarse los circuitos cortos, para reducir la probabilidad de accidente, así como un probable daño al resto del sistema.

Cabe mencionar que se debe ser sumamente cuidadoso con el proceso de carga de la batería, ya que, si no se lleva a cabo de manera correcta, ésta puede sufrir daños. Es necesario utilizar únicamente cargadores apropiados, lo cual implica un costo adicional. Además de esto, debe existir un periodo de espera entre los ciclos de carga y descarga, para evitar los efectos de histéresis.

Puede concluirse que, pese a sus inconvenientes y riesgos, las baterías LiPo son la mejor opción para el desarrollo del presente proyecto, gracias a sus excelentes características en cuanto a dimensiones, peso, constante de tasa/descarga y capacidad de almacenamiento, las cuales se ajustan satisfactoriamente a las necesidades energéticas del sistema diseñado.

### **Batería LiPo Turnigy nano-tech 1300mAh**

La batería seleccionada para el desarrollo de este sistema es la LiPo Turnigy nano-tech 1300mAh, la cual utiliza nanotecnología de sustrato LiCo que permite un flujo más libre de electrones entre ánodo y cátodo, disminuyendo la impedancia interna. Esto se ve reflejado en una menor caída de voltaje y en tasas de descarga mayores a baterías LiPo similares.

Las características principales de este componente son:

- Capacidad: 1300 [mAh]
- Voltaje: 11.1 [V] (3S1P 3 Celdas).
- Tasa de descarga: 45C Constante / 90C Pico
- Tasa máxima de carga: 10C
- Masa: 119 [g] (Cables, conector y empaque incluidos)
- Dimensiones: 72 [mm] X 23 [mm] X 35 [mm]



Figura 3-12. Batería LiPo Turnigy nano-tech 1300 mAh.

La implementación de aditivos conductores nanométricos permite formar redes de conducción de electrones sumamente fuertes entre los electrodos, lo cual incrementa la conductividad general de la batería, reduciendo consecuentemente la impedancia de salida. Algunas ventajas sobre la tecnología LiPo convencional son las siguientes:

- Mejor relación potencia/masa (hasta 7.5 [kW/kg])
- Menor caída de voltaje a altas tasas de descarga, proporcionando mayor potencia a la carga.
- Baja impedancia interna (1.2 [mΩ]), respecto a las baterías LiPo tradicionales (superior a 3 [mΩ]).
- Control térmico mejorado.
- Tasas de carga y descarga más altas.
- Mayor ciclo de vida, casi el doble que la tecnología LiPo convencional.

A partir de las especificaciones de la batería, puede calcularse la corriente máxima que ésta es capaz de proporcionar. Para ello, debe calcularse en primer lugar su constante de carga/descarga:

$$C = \frac{Q}{1000 \left[ \frac{mAh}{A} \right]} = \frac{1300 [mAh]}{1000 \left[ \frac{mAh}{A} \right]} = 1.3 [A]$$

Por otro lado, los datos del fabricante indican que la tasa de descarga constante recomendada es de 45C, mientras que la corriente pico es de hasta 90C; esto equivale a 58.5 [A] de suministro constante hasta 117 [A] de corriente como máximo. Debido a que el mayor consumo de corriente por parte de los actuadores es de 40 [A] (10 [A] por motor), se observa que las características energéticas de la batería son apropiadas para este proyecto.



Del mismo modo, es posible calcular el tiempo mínimo de autonomía del sistema, como sigue:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad \text{si } i = I_{max} = 40 [A]$$

$$I_{max} = \frac{Q}{t_{min}} \rightarrow t_{min} = \frac{Q}{I_{max}} = \frac{1300 [mAh]}{40 [A]} = \frac{1.3 [Ah]}{40 [A]}$$

$$t_{min} = 0.0325 [h] = 1.95 [min]$$

En el capítulo relativo al diseño conceptual se estableció la especificación de tiempo mínimo de autonomía a 1 [min]; tomando como base los cálculos anteriores, puede observarse que dicha especificación se supera ampliamente con los componentes seleccionados. Adicionalmente, cabe mencionar que se llegó a este resultado bajo la consideración de que el sistema solicitará el máximo de corriente (40 [A]) de forma continua; ya que en realidad el consumo será menor, el tiempo de vuelo del dispositivo se extenderá consecuentemente.

## Actuadores

Dentro del campo del aeromodelismo y UAV's, los actuadores más comúnmente utilizados son los motores brushless; éstos son motores síncronos de corriente directa (DC), los cuales, tal y como su nombre lo indica, carecen de escobillas.

En motores DC convencionales con escobillas (Brushed Motors), éstas tendrían la función de realizar el cambio de polaridad necesario para el movimiento del rotor. En un motor brushless, dicha conmutación se da gracias a la acción de un circuito conmutador/inversor, el cual proporciona una señal eléctrica de corriente alterna (AC) que dirige el movimiento del motor. Por esta razón, son también conocidos como *motores conmutados electrónicamente*. Cabe resaltar que esta señal de AC debería ser, idealmente, una onda sinusoidal; sin embargo, en general se tiene un flujo bidireccional de corriente sin restricciones en su forma.

## Construcción y clasificación

Al igual que cualquier otra máquina eléctrica, los motores brushless se encuentran compuestos por dos partes fundamentales: estator y rotor. El *estator* abarca todo el conjunto de piezas inmóviles o estáticas dentro del motor; a menudo este término suele referirse únicamente a los elementos electromagnéticos fijos al interior de la coraza, sin embargo, en rigor el concepto incluye todas aquellas partes de la máquina que no desarrollan movimiento. Por otro lado, el *rotor*, como lo indica su nombre, hace referencia a todas aquellas piezas que experimentan un movimiento rotacional [38].

En el caso particular de un motor brushless típico, el estator se encuentra conformado por un conjunto de embobinados interconectados entre sí, mientras que el rotor consta de un arreglo de imanes permanentes.

El movimiento se produce gracias a un campo magnético variable inducido en las bobinas, debido a la señal de AC proporcionada por el circuito de conmutación. La velocidad de rotación del motor depende directamente de la frecuencia de los pulsos en las bobinas. Del mismo modo, para cambiar la dirección del movimiento, basta con invertir la secuencia de pulsos.

Dependiendo de la ubicación de los imanes en el estator, los motores brushless pueden clasificarse en *inrunners* y *outrunners*. La configuración *inrunner* es la más común, y se caracteriza porque los imanes permanentes se encuentran montados directamente en la flecha y giran junto con ésta; las bobinas del estator rodean el rotor.

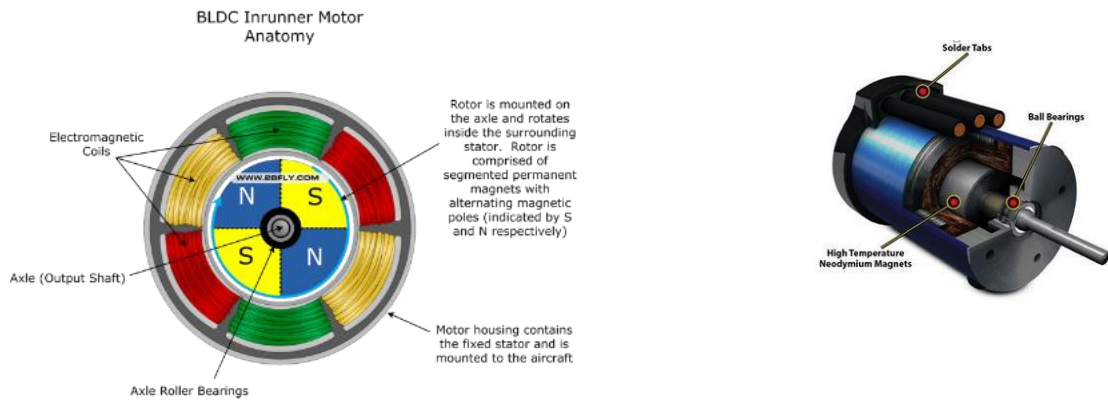


Figura 3-13. Motor Brushless en configuración inrunner.

En un motor brushless outrunner (también llamado de rotor externo), se invierte la dirección radial entre el estator y el rotor; esto significa que las bobinas fijas se ubican en el núcleo del motor, mientras los imanes permanentes son montados en la estructura que rodea al estator y giran junto con ésta.

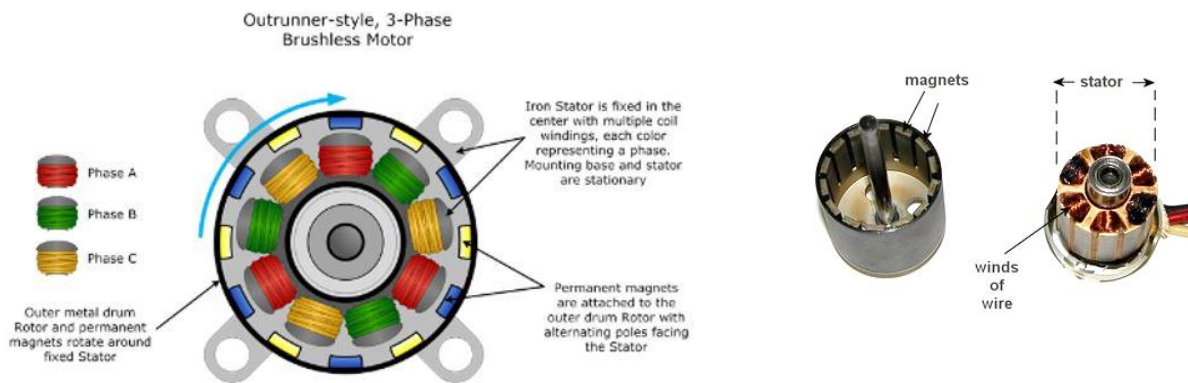


Figura 3-14. Motor Brushless en configuración outrunner.

En términos generales, los motores *inrunners* pueden desarrollar velocidades angulares bastante elevadas con bajo par, mientras que en la configuración *outrunner*, al girar la cubierta exterior al estator, ésta actúa como volante de inercia, incrementando el par, pero impidiendo que se desarrollen grandes velocidades.

Adicionalmente, existen dos configuraciones eléctricas en las cuales pueden interconectarse los embobinados del estator. La primera de ellas es la conexión en delta ( $\Delta$ ), en la cual las bobinas se conectan en serie y el pulso eléctrico es aplicado en los nodos de unión entre las bobinas.

La segunda configuración es la conexión Y, también llamada en estrella; en ésta, las bobinas se conectan en paralelo a un nodo central y la señal eléctrica se aplica a cada una de las terminales libres.

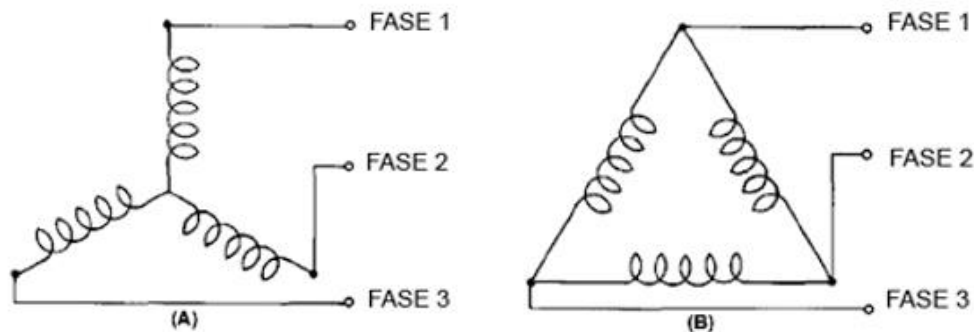


Figura 3-15. Configuraciones de los embobinados de un motor Brushless.  
(a) Conexión Y. (b) Conexión  $\Delta$ .

Generalmente, la conexión Y es más eficiente que la  $\Delta$ , ya que en ésta última se incrementan las pérdidas resistivas debido a corrientes parásitas que circulan a través de los embobinados del motor. Al no contener ningún lazo cerrado, estas corrientes no pueden producirse en la conexión Y. Desde el punto de vista de control, ambas configuraciones funcionan de la misma forma.

### Principales características

Los motores brushless poseen características que los vuelven sumamente eficientes respecto a su contraparte, los motores DC con escobillas (brushed motors).

En primer lugar, debido a la ausencia de rozamiento en las escobillas, se minimiza el desgaste mecánico y las pérdidas por fricción. Esto conlleva un inherente incremento en la eficiencia global. Además de esto, se eliminan los riesgos e inconveniencias derivados de la generación de chispas en las escobillas.

Sin embargo, estos beneficios aparecen con el costo de la implementación de un circuito electrónico de control necesario para realizar la conmutación en las bobinas. Como se mencionó anteriormente, la velocidad de rotación del motor depende directamente de la frecuencia de los pulsos eléctricos proporcionados por este circuito. También, el sentido de giro depende del orden en el cual se dé esta secuencia de pulsos.

La función principal de dicho circuito de control consiste en energizar dos bobinas del estator al mismo tiempo, con polaridades opuestas y de la misma magnitud; una de ellas atrae el rotor mientras la otra lo repele, generando el movimiento.

Para detectar la posición angular de la flecha del motor relativa a las bobinas del estator, pueden utilizarse diversos dispositivos, tales como encoders rotatorios o sensores de efecto Hall; éstos últimos determinan cuáles bobinas se encuentran energizadas en cada instante, información que puede emplearse para obtener la posición. También existen técnicas que detectan el campo electromagnético de reacción generado en las bobinas para definir la posición. Este tipo de controladores se denomina *sin sensor*.

Los circuitos controladores de los motores brushless pueden implementarse empleando circuitos digitales, (FPGA, microcontroladores, etc), o a partir de electrónica analógica, por ejemplo, mediante comparadores de voltaje. En general, los circuitos lógicos digitales resultan más eficientes y fiables, además de que permiten un control sumamente preciso.

Otras ventajas que distinguen a los motores brushless que pueden mencionarse son las siguientes:

- Una alta relación de par contra peso. Esto significa que se pueden alcanzar pares similares a los de un motor DC brushed con motores brushless más pequeños.
- Relación par-velocidad lineal en un rango muy amplio, lo cual permite una excelente regulación.
- Rotación suave, sin par de retención.
- Pueden desarrollar velocidades muy elevadas, incluso a tensiones bajas. Un motor brushless es capaz de alcanzar fácilmente velocidades de hasta 100 000 [rpm].
- Vida útil prolongada (aproximadamente 20 000 horas a carga máxima) y alta capacidad de prestación.
- Alta eficiencia (alrededor del 90%), gracias a la minimización de desgaste mecánico y pérdidas por fricción.
- Gran capacidad de disipación de calor. Esto permite aplicar grandes diferencias de potencial y la circulación de corrientes elevadas por las bobinas, lo que incrementa la potencia del motor.

- Prácticamente no requieren de mantenimiento al estar sellados hacia el exterior. Esto evita que se introduzca polvo o suciedad dentro del motor.

Una característica importante para calificar el desempeño de los motores brushless es su factor Kv, el cual representa la cantidad de revoluciones por minuto por volt que es capaz de desarrollar un motor en particular. Por ejemplo, si se tiene un motor con una constante Kv de 1000, entonces, al aplicar una diferencia de potencial de 10 [V], éste girará a 10 000 [rpm].

Las principales desventajas de los motores sin escobillas respecto a aquellos con escobillas radican básicamente en la necesidad de un circuito de control para conmutación y en un mayor costo.

### **Aplicaciones**

Debido a su desempeño y propiedades, los motores brushless son ampliamente utilizados en diferentes ramas. Resultan particularmente útiles para operaciones de alta velocidad, o en ambientes donde se corre riesgo de explosión por chispas, entornos limpios de ruido eléctrico e interferencias electromagnéticas y cualquier otra aplicación en la que se requiera una larga vida de servicio y un mantenimiento mínimo.

Entre las principales áreas donde pueden encontrarse los motores brushless, destacan las siguientes:

- Transporte: Vehículos eléctricos e híbridos.
- Industria: Aplicaciones de alta velocidad, larga prestación de servicio.
- Refrigeración: Ventiladores de gran velocidad y capacidad.
- Sistemas de control de movimiento: Posicionamiento y actuación de dispositivos robóticos.
- Hidráulica: Bombas centrifugas de gran velocidad.
- Aeronáutica: Aeromodelismo, aeronaves RC y UAV's.

### **Motores brushless Multistar 2206 V2 “Baby Beast”**

Para el desarrollo del presente proyecto, se utilizarán cuatro motores brushless Multistar 2206 V2 “Baby Beast”, los cuales poseen las siguientes prestaciones:

- Factor Kv: 2150 [rpm/V]
- Voltaje de operación: 7 [V] -12 [V]
- Potencia máxima: 120 [W]
- Máximo consumo de corriente: 10 [A]
- Dimensiones (Diámetro X Longitud): 27 [mm] X 17 [mm]
- Masa: 30 [g]

Este motor es compatible con baterías LiPo de 2 y 3 celdas, además de que es posible su fácil acoplamiento con hélices comerciales de 5 a 6 pulgadas de diámetro, gracias a los conectores de bala en la flecha.



Figura 3-16. Motores brushless Multistar 2206 V2 “Baby Beast”.

### Controladores Electrónicos de Velocidad (*Electronic Speed Control, ESC*)

Como se mencionó anteriormente, una de las características de los motores brushless es que requieren de un circuito electrónico para llevar a cabo la conmutación necesaria para la rotación. En un sentido más amplio, tenemos que los Controladores Electrónicos de Velocidad (ESC, por sus siglas en inglés) son circuitos especializados que cumplen la función de controlar la dirección y la velocidad de un motor.

En términos generales, los ESC son circuitos que conducen un motor eléctrico a partir de una señal de control (generalmente PWM), proporcionando la potencia requerida. Dicha señal PWM por lo regular tiene una frecuencia de 50 [Hz], con un ancho de pulso de 1 [ms] a 2 [ms]; de acuerdo con ésta, el ESC varía la velocidad del motor, de forma aproximadamente lineal, implicando esto una rapidez nula para un pulso de 1 [ms] y la máxima velocidad a 2 [ms] de ancho de pulso.

Los circuitos ESC diseñados para motores con escobillas (brushed), difieren de aquellos hechos *ex profeso* para motores brushless; como consecuencia de esto, debe prestarse especial atención al momento de seleccionar el ESC para un motor en particular.

Los ESC para motores brushless proveen una fuente de energía de bajo voltaje con pulsos trifásicos sinusoidales electrónicamente generados para controlar el motor [43]. Estas señales se conectan a las terminales de las bobinas del motor, generando una FEM inducida en éstas, lo cual a su vez atrae o repele a los imanes permanentes del rotor, produciéndose así el movimiento.

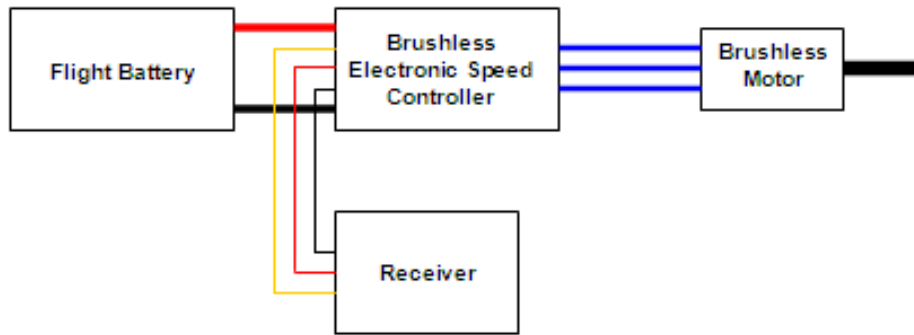


Figura 3-17. Diagrama de conexiones de un ESC.

La secuencia de los pulsos depende de la posición del rotor respecto a las bobinas del estator. Por ello, para controlar apropiadamente el movimiento, el ESC debe de ser capaz de determinar la posición angular de la flecha del motor. Generalmente, los controladores utilizan la fuerza contraelectromotriz proveniente del motor para determinar la posición; sin embargo, existen otros modelos que emplean sensores de efecto Hall o *encoders* ópticos para este propósito.

Para regular la velocidad de rotación, el ESC mide la frecuencia de los pulsos y ajusta la corriente (la cual representaría la señal de control del sistema en lazo cerrado), para alcanzar una referencia de velocidad, dada por la señal PWM.

Los ESC pueden implementarse a partir de circuitos analógicos (principalmente amplificadores operacionales comparadores de voltaje) o mediante circuitos lógicos digitales, por ejemplo, microcontroladores. Éstos últimos resultan ser actualmente más comunes, ya que permiten un control más preciso, además de que pueden programarse por el usuario para satisfacer necesidades específicas, como establecer límites de tensión, rampas de velocidad, rutinas de paro de emergencia, entre otras.

Los ESC se seleccionan de acuerdo con la corriente máxima que son capaces de proporcionar, lo cual depende de los motores utilizados y de la tarea a realizar. Mientras mayor sea su capacidad, tienden a aumentar sus dimensiones y su peso; esto es un factor importante cuando se busca seleccionar un controlador para los motores de una aeronave. Los ESC modernos son compatibles con baterías de alto rendimiento, tales como Ni-Cd y LiPo.

Otra ventaja de los ESC es que generalmente incluyen un circuito regulador de batería (*Battery Eliminator Circuit*, BEC), el cual es un regulador lineal de tensión que se utiliza para alimentar la lógica interna del controlador, y que puede emplearse para energizar otros dispositivos que no requieren demasiada corriente, por ejemplo, un receptor RC (lo cual resulta muy útil para aplicaciones de aeromodelismo). Sin embargo, en ocasiones esto puede introducir ruido eléctrico, por lo cual debe valorarse la conveniencia de hacer uso del BEC incluido en el circuito controlador.

Algunas características adicionales de los ESC se mencionan a continuación:

- Arranque suave: Indica que la velocidad del motor variará lentamente desde el reposo hasta su máxima rapidez.
- Freno: Esta característica obliga al motor a dejar de girar una vez que el controlador deja de enviar energía.
- Corte de voltaje automático: Esta característica se utiliza principalmente en los controladores que incluyen BEC. Cuando la batería esté cerca de agotarse, el ESC dejará de proporcionar energía al motor; de esta forma, se reserva la carga necesaria para que los circuitos de pequeña señal, por ejemplo, un receptor RC, continúen funcionando.
- Aislamiento eléctrico: Ciertos controladores que incluyen BEC poseen además un optoacoplador para separar las señales de control de la parte de potencia. Con esto se reduce la interferencia por ruido eléctrico.

### ESC Afro 12A

Para la etapa de potencia de los motores se utilizarán los controladores de velocidad ESC Afro 12A, con las siguientes características:

- Consumo máximo de corriente: 12 [A]
- Voltaje: 7.4 [V] – 14.8 [V] (LiPo 2-4s)
- BEC: 0.5 [A] Lineal 5.0 [V]
- Frecuencia PWM: 50 [Hz]
- Masa: 10 [g] (Cables, conector y disipador de calor incluidos)
- Dimensiones: 25 [mm] X 20 [mm] X 6 [mm]

Los ESC Afro son altamente eficientes, con un diseño basado en tecnología MOSFET de canal N, incluyen disipador de calor y proporcionan una respuesta suave y eficaz. Incluyen una versión precargada de Firmware SimonK y puede ser actualizado vía USB gracias a la aplicación adicional Turnigy Linker.



Figura 3-18. Controladores electrónicos de velocidad ESC Afro 12A.



Los controladores de velocidad seleccionados proporcionan una corriente máxima de hasta 12 [A]; ya que el consumo pico de los motores es de 10 [A], se observa que resultan adecuados para esta aplicación.

## Hélices

Una hélice o propela es un elemento mecánico que convierte movimiento rotacional en empuje estático. Se encuentra constituida por cierto número de palas o álabes montados de forma concéntrica sobre una flecha; el diseño de éstos es de forma tal que al girar en un medio fluido se genera una diferencia de presión entre sus superficies delantera y trasera, lo cual produce una fuerza de empuje hidrostático en un plano perpendicular al de rotación.

A pesar de que el término propela se asocia principalmente a barcos y demás vehículos acuáticos, también puede aplicarse a los sistemas voladores, como aeronaves, helicópteros y multihélices.

### Principales características

Los parámetros esenciales a considerar al momento seleccionar una propela son los siguientes:

#### Diámetro

Este se define como aquel que tendría la circunferencia imaginaria que describen los álabes en su rotación. Por ejemplo, en una hélice de dos palas, coincidiría con la distancia entre las puntas de éstas. Generalmente, su valor se da en pulgadas.

Debe prestarse especial atención a este parámetro durante la selección; un diámetro grande conlleva una disminución de la velocidad de rotación de la propela, lo cual repercute en la carga aplicada al motor; también, al aumentar sus dimensiones, se incrementa consecuentemente la masa de la hélice.

Por otro lado, si una propela es de diámetro pequeño, podrá alcanzar velocidades angulares más elevadas, debido a la reducción de su masa. Sin embargo, este hecho podría afectar a los actuadores y generar un ruido excesivo; además, existe el riesgo de que la hélice no pueda desplazar el volumen necesario de fluido para producir la fuerza de empuje requerida.

#### Ángulo de ataque (Pitch)

Se refiere al desplazamiento que produce una propela en una revolución completa. Esto quiere decir, por ejemplo, que una hélice con un valor de *pitch* de 40 [in] recorrerá esta misma distancia por cada revolución.

Evidentemente, esta definición se basa en la idealización de que no existen pérdidas por deslizamiento (por ejemplo, en un medio sólido); en un fluido, el desplazamiento real será menor al indicado por el valor de *pitch*. El valor de este parámetro se da comúnmente en pulgadas.

Este concepto resulta análogo al de paso para tornillos. De hecho, el término “propela de tornillo”, hace referencia a que el funcionamiento de estos dos elementos es sumamente similar.

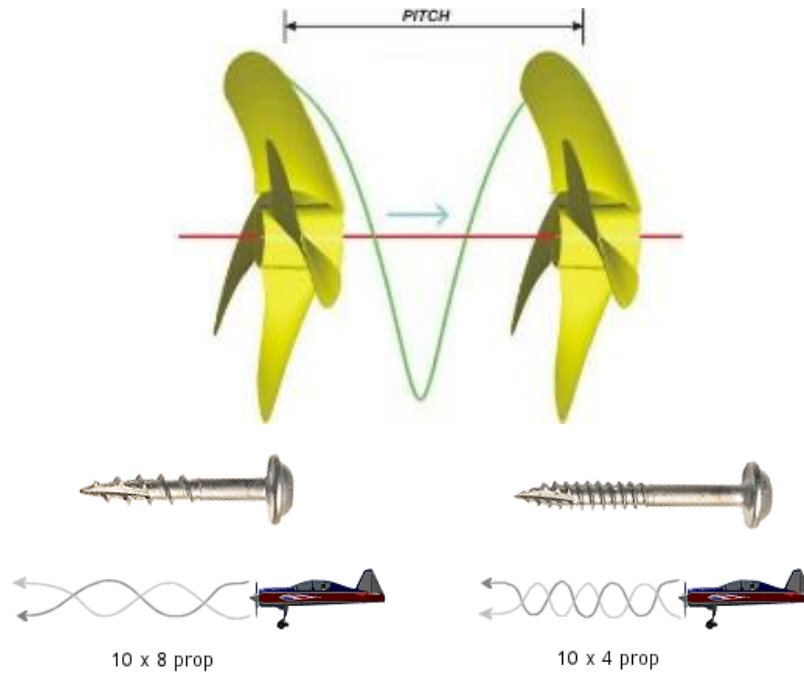


Figura 3-19. Pitch de una propela.

El ángulo de ataque es importante para el desempeño general de una hélice; si el *pitch* es muy grande, el avance será mayor, pero la propela representará una carga considerable para el motor; por el contrario, si éste es muy pequeño, no se aprovechará apropiadamente la potencia de los actuadores.

Se ha establecido una convención para designar a las hélices con base en los dos parámetros anteriores, especificando en primer lugar el diámetro y en segundo lugar el *pitch*, ambos expresados en pulgadas. De esta forma, por ejemplo, una propela designada como 10 X 14 indica que tiene 10 [in] de diámetro y 14[in] de *pitch*.



Figura 3-20. Designación de hélices.

### Número de álabes

La mayoría de las hélices utilizadas para aplicaciones de aeromodelismo y radiocontrol son de dos palas; sin embargo, en el mercado también se encuentran disponibles propelas de tres y cuatro palas.

En términos generales, incrementar el número de álabes reduce la eficiencia global de la hélice. Esto se debe a que cada una de las palas debe desplazarse a través de un medio perturbado y turbulento. De hecho, la máxima eficiencia se alcanzaría con una sola pala; sin embargo, esto conllevaría una distribución desequilibrada de la masa de la propela, por lo cual este tipo no es común en la práctica.

Si se selecciona una hélice con tres o cuatro álabes, una regla común es disminuir el diámetro en una pulgada e incrementar el pitch en una pulgada, respecto a la propela de dos palas para la misma aplicación. Sin embargo, es conveniente realizar un análisis del empuje requerido para determinar las propiedades adecuadas del elemento.

### **Diseño**

Las propelas suelen fabricarse en diferentes materiales, principalmente metales y plásticos, dependiendo de la aplicación en particular en la que será utilizada y de las propiedades mecánicas requeridas.

Como se mencionó anteriormente, la forma en la cual se diseña una hélice es lo que le permite cumplir la función de transformar el movimiento rotacional en fuerza de empuje, a un ángulo de ataque específico.

En general, una propela consiste en un conjunto de palas, las cuales son superficies alabeadas, montadas de manera concéntrica en una flecha. El cuerpo de los álabes se divide en dos secciones, denominadas raíz y punta. La primera de ellas abarca desde el empotramiento con la flecha hasta aproximadamente el 80% de la longitud total de la pala. El 20% restante constituye la punta del álabe.

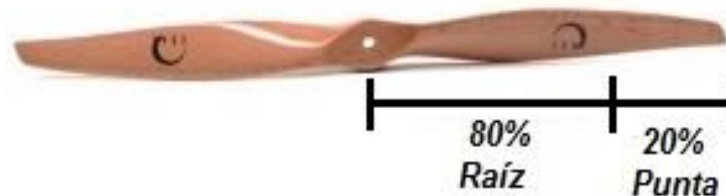


Figura 3-21. Raíz y punta de un álabe.

## Tipos de hélices

Las propelas pueden tener varias clasificaciones de acuerdo con la característica de interés y su aplicación. La más importante distinción se da en función al sentido de giro, dividiéndose las hélices en horarias (también denominadas derechas, dextrógiras o *pushers*) y en antihorarias (izquierdas, levógiras o *tractors*).

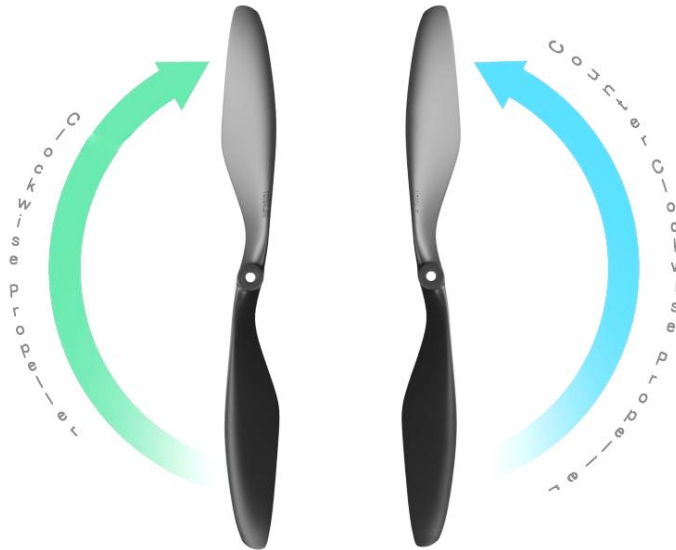


Figura 3-22. Hélices horarias y antihorarias.

El criterio de clasificación es el siguiente: considérese que se observa la propela de frente, montada en el motor y girando en sentido horario (Clockwise, CW); si el aire es impulsado hacia el observador, entonces se trata de una hélice derecha.

Si ocurre el mismo fenómeno, pero con un giro en sentido antihorario (Counter Clockwise CCW), la propela es izquierda. En general, para que una aeronave mult rotor pueda funcionar, se requieren ambos tipos de propelas, distribuidas de apropiadamente en la estructura del cuadricóptero.

### Hélices Gemfan 5040

Para este proyecto, se emplearán cuatro hélices Gemfan 5040 (5 X 4 2CW-2CCW) de dos palas, fabricadas en plástico ABS. Recordando la convención anteriormente mencionada en el apartado correspondiente, estas propelas tienen un diámetro de 5 [in] (12.7 [cm]) y un pitch de 4 [in] (10.16 [cm]).

Los motores y propelas anteriormente mencionados son comunes en la construcción de cuadricópteros de clase 250, como en el caso del presente trabajo.



Figura 3-23. Propelas seleccionadas. Hélices Gemfan 5040.

### Cálculo de la masa soportada por el sistema

Anteriormente fueron seleccionados los componentes propulsores a utilizar en el vehículo aéreo; sin embargo, es preciso disponer de cierta información sobre la fuerza de empuje desarrollada por el conjunto motor-hélice, y, por ende, de la masa máxima que el sistema será capaz de soportar.

En esta sección se presentan los elementos teóricos necesarios para calcular dicha fuerza. La deducción de las fórmulas correspondientes a la Mecánica de Fluidos empleadas en este apartado se incluye en el *Apéndice 2*.

En primer lugar, considérese la *Figura 3-24*, la cual presenta el diagrama de fuerzas para un volumen de control que rodea al subsistema motor-hélice.

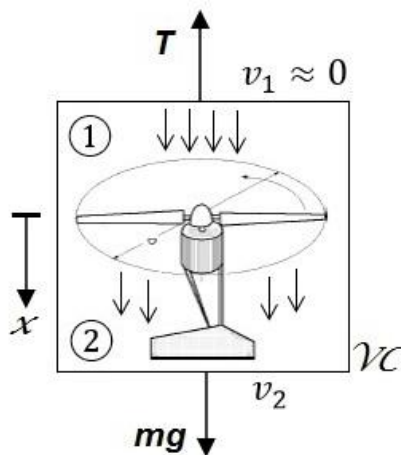


Figura 3-24. Diagrama de fuerzas para el volumen de control Motor-Propela.

Para el caso estático, la aplicación directa de la Segunda Ley de Newton conduce a:

$$\sum F_x = m \frac{d(mv)}{dt} = 0$$

$$mg - T = 0$$

$$m = \frac{T}{g}$$

Donde  $T$  es el empuje total (*thrust*) producido por los actuadores que actúa sobre la aeronave. La masa máxima que será soportada por el sistema  $m_{max}$  es:

$$m_{max} = \frac{T}{g} \dots (1)$$

Para determinar la potencia máxima transmitida al aire, se empleará la Ecuación de la Energía entre los puntos ① y ② :

$$\frac{P_1}{\gamma_1} + \frac{1}{2g} v_1^2 + h_1 + h_{aire} = \frac{P_2}{\gamma_2} + \frac{1}{2g} v_2^2 + h_2 \dots (2)$$

En la expresión anterior,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son los pesos específicos del fluido ( $\gamma = \rho g$ ),  $h_1$  y  $h_2$ , corresponden con la energía por unidad de peso,  $v_1$  y  $v_2$  son las rapidezces del fluido, todo lo anterior en los puntos ① y ②, respectivamente;  $h_{aire}$  representa la energía por unidad de peso que el actuador transfiere al aire, debida principalmente al incremento de velocidad. Dado que la diferencia de altura es despreciable, se ignorará el cambio en la energía potencial. Además, la presión en ambos puntos es aproximadamente igual.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, se tiene:

$$\frac{1}{2g} v_1^2 + h_{aire} = \frac{1}{2g} v_2^2$$

$$h_{aire} = \frac{1}{2g} (v_2^2 - v_1^2)$$

Estableciendo que el aire a la entrada de la propela se encuentra en reposo ( $v_1 \approx 0$ ), la ecuación se transforma la siguiente:

$$h_{aire} = \frac{1}{2g} v_2^2 \dots (3)$$

Además, se requiere conocer la potencia máxima  $\dot{W}_{max}$  que es transferida al aire, dada por la ecuación (4):

$$\dot{W}_{max} = \dot{m}h_{aire}g \dots (4)$$

Recordando que el flujo másico se calcula como  $\dot{m} = \rho A_2 v_2$ , se tiene lo siguiente:

$$\dot{W}_{max} = \rho A_2 v_2 g h_{aire} \dots (5)$$

Sustituyendo la expresión (3) en (5):

$$\begin{aligned} \dot{W}_{max} &= \rho A_2 v_2 g \left( \frac{1}{2g} \right) v_2^2 \\ \dot{W}_{max} &= \frac{1}{2} \rho A_2 v_2^3 \dots (6) \end{aligned}$$

La ecuación (6) es conocida como el *Teorema de Betz* e indica la potencia máxima que puede extraerse de un fluido. Para este caso, la expresión anterior se utilizará a la inversa, considerando como potencia máxima aquella entregada por el motor. Del mismo modo,  $v_2$  es la velocidad máxima del aire en el punto ② y el área es  $A_2 = \frac{\pi}{4} D^2$ . Por ende:

$$\dot{W}_{max} = \frac{\pi}{8} \rho D^2 v_2^3$$

Despejando la velocidad máxima del aire para el punto ②, se tiene:

$$\begin{aligned} v_2^3 &= \frac{8\dot{W}_{max}}{\pi \rho D^2} \\ v_2 &= \sqrt[3]{\frac{8\dot{W}_{max}}{\pi \rho D^2}} \dots (7) \end{aligned}$$

Considerando el valor numérico de la potencia, junto con los parámetros de diámetro de la propela y densidad del aire:

$$\dot{W}_{max} = V_{bateria} I_{motor} = (11.1 [V])(10 [A]) = 111 [W]$$

$$D = 5 [in] = 0.127 [m]$$

$$\rho = 1.225 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$$

Sustituyendo los datos anteriores en la expresión (7), se obtiene la velocidad máxima del aire a la salida de la hélice:

$$v_2 = 24.27 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Ahora se calculará la fuerza  $\vec{F}$  que actúa sobre el aire, cuya reacción proporciona la fuerza de empuje para sustentar el sistema. Para ello, se recurrirá a la Ecuación de la Cantidad de Movimiento:

$$\sum \vec{F} - m \frac{d\vec{v}_{vc}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho \vec{V} dV + \int_{sc} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

Considérese la *Figura 3-25*, en la que se muestra esquemáticamente la fuerza que se desarrolla en el fluido.

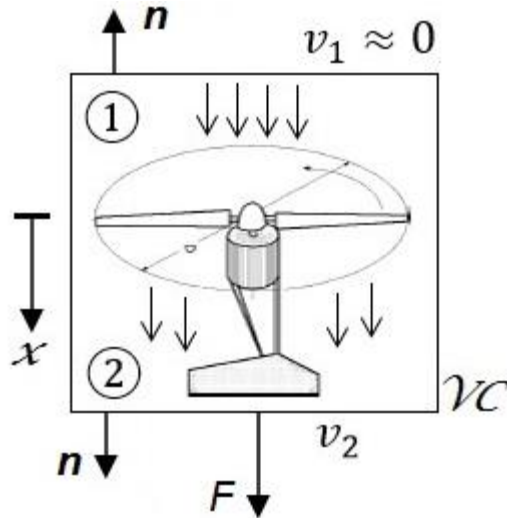


Figura 3-25. Fuerza aplicada al fluido por el conjunto Motor-Propela.

Como se está considerando un volumen de control fijo, entonces su velocidad es nula ( $\vec{v}_{vc} = 0$ ), y por lo tanto  $\frac{d\vec{v}_{vc}}{dt} = 0$ . Además, como la fuerza solo tiene componentes a lo largo de la dirección  $x$ , la ecuación vectorial adquiere un carácter escalar.

$$\sum F_x = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho V_x dV + \int_{sc} \rho V_x (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$



Debido a que se considera régimen permanente de flujo, no hay cambio en la cantidad de movimiento del volumen de control, es decir:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho V_x dV = 0$$

Con lo cual la expresión anterior se transforma en:

$$F = \int_{SC} \rho V_x (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

Por otra parte, el flujo es unidimensional y se tiene únicamente una entrada y una salida de fluido. Por tanto:

$$F = - \left( \int_{SC} \rho V_x dA \right)_{in} + \left( \int_{SC} \rho V_x dA \right)_{out} = - \int_{S1} \rho v_1^2 dA + \int_{S2} \rho v_2^2 dA$$

Por último, la densidad y la rapidez a la entrada y a la salida permanecen constantes, con lo que resulta:

$$F = -\rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2$$

Como se mencionó anteriormente, se supone que se transfiere la máxima potencia al aire, lo que significa que  $v_1 \approx 0$ . Por ende:

$$F = \rho v_2^2 A_2 \dots (8)$$

Sustituyendo la ecuación (7) en (8) es posible obtener una expresión general para determinar la fuerza que actúa en el aire:

$$F = \rho \left( \sqrt[3]{\frac{8\dot{W}_{max}}{\pi\rho D^2}} \right)^2 A_2$$

$$F = \rho \left( \frac{8\dot{W}_{max}}{\pi\rho D^2} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{\pi}{4} D^2 \right)$$

$$F = \left( \pi^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} D \dot{W}_{max} \right)^{\frac{2}{3}} \dots (9)$$

Con base en la Tercera Ley de Newton, se sabe que la fuerza  $F$  obtenida en (9) es igual en magnitud al empuje  $T$  que experimentará la propela, por lo cual:

$$T = F \dots (10)$$

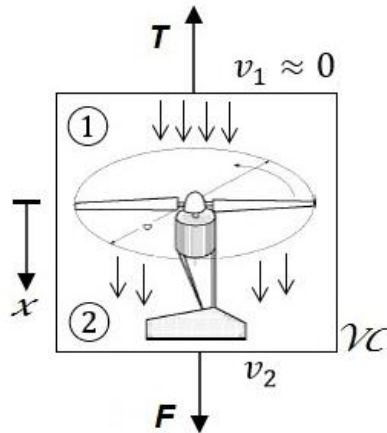


Figura 3-26. Tercera Ley de Newton aplicada al conjunto Motor-Propela.

Finalmente, considerando las ecuaciones (1), (9) y (10):

$$m_{max} = \frac{F}{g}$$

$$m_{max} = \frac{\left( \pi^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} D \dot{W}_{max} \right)^{\frac{2}{3}}}{g} \dots (11)$$

Sustituyendo valores, se obtiene que la masa máxima por propela es:

$$m_{max} = 0.93 [kg]$$

Como se tienen 4 rotores, la masa total máxima es el cuádruple de la cantidad anterior:

$$m_{T_{max}} = 3.73 [kg]$$

Es necesario recordar que los valores anteriores se dan si se considera una eficiencia de conversión del 100 [%] en el conjunto motor-propela. Es posible modificar la ecuación (11) para considerar diferentes valores de eficiencia  $\eta$ , como sigue:

$$\dot{W} = \eta \dot{W}_{max}$$

$$m_{max\eta} = \frac{\left(\pi^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}D \eta \dot{W}_{max}\right)^{\frac{2}{3}}}{g} \dots (12)$$

Estableciendo que la eficiencia es del 50 [%] (estimación bastante conservadora), de la ecuación (12) se obtiene una masa total máxima de 2.35 [kg], la cual todavía se encuentra por encima de la masa del sistema con carga.

En la *Tabla 3-6* se presentan las masas totales que podría soportar la aeronave para diferentes valores de eficiencia. Estos resultados se presentan también de forma gráfica en la *Figura 3-27*.

La masa estimada para el dron es de aproximadamente 500 [g]. Con base en la información previa, se observa que aún con una eficiencia de 10 [%] es posible sustentar el peso de la aeronave. Por ende, se concluye que los actuadores seleccionados son apropiados para el presente proyecto.

Datos		Eficiencia [%]	Potencia Estimada [W]	Masa Total Soportada [kg]
Diámetro [in]	5.00	100	111.00	3.73
Diámetro [m]	0.13	90	99.90	3.48
Corriente [A]	10.00	80	88.80	3.21
Voltaje [V]	11.10	70	77.70	2.94
Potencia Máxima [W]	111.00	60	66.60	2.65
Densidad del aire [kg/m <sup>3</sup> ]	1.23	50	55.50	2.35
Aceleración gravitacional (g) [m/s <sup>2</sup> ]	9.81	40	44.40	2.02
		30	33.30	1.67
		20	22.20	1.28
		10	11.10	0.80

Tabla 3-6. Masa total soportada para diferentes valores de eficiencia.

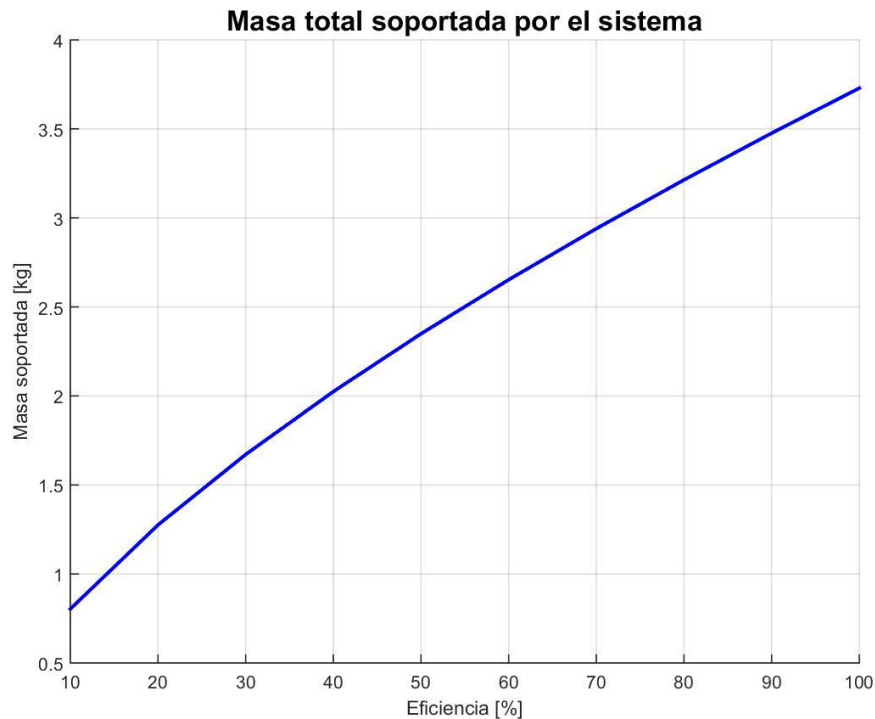


Figura 3-27. Masa total soportada vs. Eficiencia.

### Comprobación del sistema diseñado

Una vez que han sido seleccionados los componentes del sistema, es necesario verificar la probabilidad de éxito del diseño. Una parte de dicha comprobación se encuentra basada en los resultados de cálculos desarrollados para ciertos elementos, los cuales indican que se satisfacen las especificaciones planteadas.

La opinión de personas expertas en el área también es útil al momento de corroborar un diseño; nuevamente, los autores de este trabajo agradecemos al Ing. Aldo Vargas de la University of Glasgow por toda la ayuda y asesoría que amablemente nos proporcionó durante este proceso.

En el campo del aeromodelismo y UAV's, existen además otras herramientas que permiten verificar la viabilidad de un sistema diseñado; entre éstas se encuentran diversas aplicaciones y calculadoras online que predicen el comportamiento de un vehículo de acuerdo con sus componentes y características, con base en datos experimentales fidedignos.

Para el presente proyecto se hizo uso de la calculadora en línea eCalc, disponible en la dirección web <http://www.ecalc.ch/>. Ésta herramienta se especializa en la evaluación de todo tipo de aeronaves y vehículos RC, así como UAV's. Con base en los datos introducidos respecto a los elementos que conforman el sistema y a

sus especificaciones, entrega resultados estimados y aproximados sobre su funcionamiento, utilizando para ello datos experimentales proporcionados por los fabricantes. Dicha aplicación también efectúa un diagnóstico de falla e indica cuáles son los componentes críticos del sistema.

Para utilizar esta herramienta se requiere conocer la masa estimada del sistema completo, así como sus dimensiones aproximadas. Se ha mencionado anteriormente que el dispositivo a construir será un cuadricóptero clase 250, es decir, la estructura tendrá una distancia diagonal entre rotores de 250 [mm], aproximadamente. En la *Tabla 3-7* se presenta la estimación de la masa del dispositivo y sus componentes:

<b>Componente</b>	<b>Cantidad</b>	<b>Masa unitaria [g]</b>	<b>Masa total [g]</b>
Frame	1	100	100
Motores	4	30	120
Propelas	4	12	48
ESC	4	10	40
FC	1	8	14.2
Radio	1	30	30
Batería	1	119	119
<b>TOTAL</b>			<b>471.2</b>

*Tabla 3-7. Estimación de masa del sistema.*

Respecto a la tabla anterior, es pertinente explicar con mayor detalle la obtención de ciertos valores numéricos; en particular, la masa del frame se determinó a partir del volumen de éste, obtenido del modelo CAD (véase apartado correspondiente), y del valor de la densidad del plástico ABS con el cual será construido; adicionalmente, dentro de este concepto se incluyen otros elementos no considerados explícitamente, como aquellos que serán utilizados para sujetar los demás componentes a la estructura. Por ende, el valor reportado es una estimación bastante conservadora de este parámetro; en el modelo físico, es probable que éste sea menor.

Una vez obtenidos todos los datos necesarios tanto de la estructura como de los componentes, éstos se introducen en la aplicación online y ésta calcula el desempeño probable del dispositivo. En la *Figura 3-28* se muestra una imagen con los valores de entrada y los resultados obtenidos mediante esta herramienta.



xcopter:Calc - Calculador de Multicópteros

<b>General</b>	Refrigeración del Motor: <input type="text" value="media"/>	Nº de rotores: <input type="text" value="4"/> simple	Peso del modelo: <input type="text" value="1000"/> g / <input type="text" value="35.3"/> oz	Tamaño del armazón: <input type="text" value="250"/> mm / <input type="text" value="9.84"/> inch	Límite de inclinación de la FCU: <input type="text" value="20°"/>	Altura del campo: <input type="text" value="500"/> m ASL / <input type="text" value="1640"/> ft ASL	Temp. aire: <input type="text" value="25"/> °C / <input type="text" value="77"/> °F	Presión (ONH): <input type="text" value="1013"/> hPa / <input type="text" value="29.91"/> inHg
<b>Celdas batería</b>	Tipo (Cont. / max. C) - nivel de carga: <input type="text" value="LIPo 1200mAh - 45/60C"/> - <input type="text" value="media"/>	Configuración: <input type="text" value="3"/> S <input type="text" value="1"/> P	Capacidad por celda: <input type="text" value="1200"/> mAh	Capacidad Total: <input type="text" value="1200"/> mAh	Resistencia: <input type="text" value="0.0103"/> Ohm	Voltaje: <input type="text" value="3.7"/> V	capacidad C de descarga: <input type="text" value="45"/> C continua / <input type="text" value="80"/> C de pico	Peso: <input type="text" value="34"/> g / <input type="text" value="1.2"/> oz
<b>Variador</b>	Tipo: <input type="text" value="max 10A"/>	Corriente constante: <input type="text" value="10"/> A	Corriente máxima: <input type="text" value="10"/> A	Resistencia: <input type="text" value="0.015"/> Ohm				Peso: <input type="text" value="13"/> g / <input type="text" value="0.5"/> oz
<b>Motor</b>	Fabricante - Tipo (Kv): <input type="text" value="Turnigy"/> <input type="text" value="Multistar 2206-2150 V2 (2150)"/> <input type="text" value="Asistente Kv/hélice"/>	KV (w/o torque): <input type="text" value="2150"/> rpm/V	Corriente sin hélice: <input type="text" value="0.7"/> A @ <input type="text" value="5"/> V	Límite (hasta 15s): <input type="text" value="120"/> W	Resistencia: <input type="text" value="0.094"/> Ohm	Longitud caja: <input type="text" value="17"/> mm / <input type="text" value="0.67"/> inch	nº Polos mag.: <input type="text" value="12"/>	Peso: <input type="text" value="30"/> g / <input type="text" value="1.1"/> oz
<b>Hélice</b>	Tipo de hélice: <input type="text" value="GemFan"/>	Díámetro: <input type="text" value="5"/> inch	Paso: <input type="text" value="3"/> inch	número de palas: <input type="text" value="2"/>	Const. de Potencia/Empuje: <input type="text" value="1.13"/> / <input type="text" value="1.0"/>	Gear Ratio: <input type="text" value="1"/> : <input type="text" value="1"/>		<input type="button" value="Calcular"/>

**Observaciones:**

- Para una maniobrabilidad mínima se necesita Throttle de menos del 80%.

<b>Batería</b>	Carga: <input type="text" value="25.89"/> C	Corriente: <input type="text" value="11.21"/> A	Motor a eficiencia óptima	Corriente: <input type="text" value="7.77"/> A	Motor @ Hover	Corriente: <input type="text" value="5.79"/> A	Motorización Total	Peso de la Motorización: <input type="text" value="301"/> g / <input type="text" value="10.6"/> oz	Multicóptero	Peso total: <input type="text" value="1000"/> g / <input type="text" value="35.3"/> oz
Voltaje: <input type="text" value="10.14"/> V	Voltaje: <input type="text" value="9.55"/> V	Voltaje: <input type="text" value="18062"/> rpm	Voltaje: <input type="text" value="10.02"/> V	Voltaje: <input type="text" value="10.29"/> V	Voltaje: <input type="text" value="10.29"/> V	Voltaje: <input type="text" value="10.29"/> V	Corriente en estacionario: <input type="text" value="23.15"/> A	máximo peso adicional: <input type="text" value="-"/> g		
Tensión nominal: <input type="text" value="11.10"/> V	Revoluciones*: <input type="text" value="18062"/> rpm	Revoluciones*: <input type="text" value="19946"/> rpm	Revoluciones*: <input type="text" value="19946"/> rpm	Revoluciones*: <input type="text" value="16185"/> rpm	Revoluciones*: <input type="text" value="16185"/> rpm	Revoluciones*: <input type="text" value="82"/> rpm	Pot (entrada) en estacionario: <input type="text" value="257.0"/> W	inclinación máxima: <input type="text" value="&lt; 5°"/>		
Capacidad: <input type="text" value="1200"/> mAh	Potencia eléctrica: <input type="text" value="107.0"/> W	Potencia eléctrica: <input type="text" value="77.9"/> W	Potencia eléctrica: <input type="text" value="77.9"/> W	Acelerador (log): <input type="text" value="80"/> %	Acelerador (lineal): <input type="text" value="80"/> %	Acelerador (lineal): <input type="text" value="80"/> %	Pot (salida) en estacionario: <input type="text" value="185.9"/> W	velocidad máxima: <input type="text" value="-"/> km/h		
Energía: <input type="text" value="13.32"/> Wh	Potencia mecánica: <input type="text" value="84.1"/> W	Potencia mecánica: <input type="text" value="59.3"/> W	Potencia mecánica: <input type="text" value="59.3"/> W	Potencia eléctrica: <input type="text" value="59.6"/> W	Potencia eléctrica: <input type="text" value="59.6"/> W	Potencia eléctrica: <input type="text" value="46.5"/> W	Eficiencia en estacionario: <input type="text" value="72.3"/> %			
Tiempo de vuelo: <input type="text" value="2.3"/> min	Eficiencia: <input type="text" value="78.6"/> %	Temperatura ext.: <input type="text" value="45"/> °C	Temperatura ext.: <input type="text" value="45"/> °C	Temperatura est.: <input type="text" value="39"/> °C	Temperatura est.: <input type="text" value="39"/> °C	Temperatura est.: <input type="text" value="39"/> °C	Corriente al máximo: <input type="text" value="31.07"/> A			
Tiempo medio de vuelo: <input type="text" value="2.4"/> min							Potencia (entrada) al máximo: <input type="text" value="344.9"/> W	Trepada estimada: <input type="text" value="118"/> ft/min		
Tiempo de vuelo estacionario: <input type="text" value="2.6"/> min							Potencia (salida) al máximo: <input type="text" value="237.2"/> W	Fallo del motor: <input type="text" value="X"/>		
Peso: <input type="text" value="102"/> g							Empuje al máximo: <input type="text" value="68.8"/> %			
							Empuje específico: <input type="text" value="0.15"/> oz/W			

Figura 3-28. Resultados obtenidos con la calculadora online eCalc para el sistema.

El peso del modelo fue redondeado hacia arriba hasta 1000 [g], con lo cual la calculadora arroja una advertencia, indicando que el parámetro Aceleración (log) con un valor de 82% rebasa ligeramente el máximo (80%) para asegurar una maniobrabilidad aceptable en vuelo. Si se introduce un peso del modelo de 975 [g], dicha alerta no se presenta. Debido a que los anteriores valores de masa son superiores al que tendrá realmente el sistema físico, se considera que no existe conflicto alguno en este aspecto.

Con respecto a todos los demás resultados, la calculadora no arroja ningún error, concluyendo que el sistema tiene grandes probabilidades de funcionar apropiadamente.

Adicionalmente, esta herramienta también proporciona las curvas de desempeño de los motores, indicando parámetros como la potencia eléctrica, la eficiencia, la velocidad y la temperatura de la carcasa. Dicha gráfica se muestra en la *Figura 3-29*.

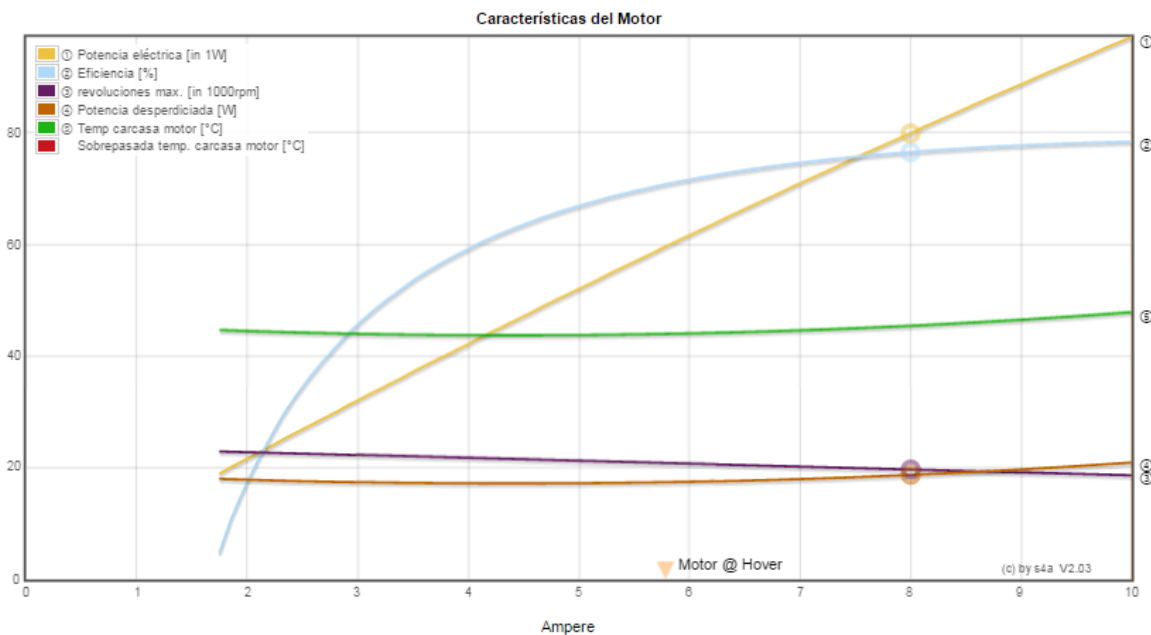


Figura 3-29. Curvas de desempeño para los motores obtenidas con la herramienta eCalc.

### Modelo CAD

CAD son las siglas en inglés de *Computer-Aided Design* (Diseño Asistido por Computadora); este concepto se basa en la utilización de programas computacionales como apoyo durante el proceso de diseño, principalmente en la generación de representaciones bidimensionales y tridimensionales de objetos físicos [44].

El software CAD puede ser especializado para usos y aplicaciones específicas. Es ampliamente utilizado para la animación computacional y efectos especiales en películas, publicidad y productos de diferentes industrias, donde el software realiza cálculos para determinar una forma y tamaño óptimos para una variedad de productos y aplicaciones de diseño industrial.

También se emplea en los procesos de Ingeniería, desde el diseño conceptual hasta la generación de planos de manufactura; resulta sumamente útil para aplicaciones de modelado, ensamble, análisis estático y dinámico, entre otras. Su mayor ventaja radica en el hecho de que permite analizar interactiva y automáticamente múltiples variantes de diseño, para encontrar aquella que resulte óptima para su manufactura, minimizando así la necesidad de generar prototipos físicos.

### **Beneficios de la tecnología CAD**

Los beneficios del CAD incluyen menores costos de desarrollo de productos, aumento de la productividad, mejora en la calidad del producto y un menor tiempo de lanzamiento al mercado. Posee además las siguientes ventajas:

- Mejora la visualización del producto final, los sub-ensambles parciales y los componentes en un sistema.
- Ofrece gran exactitud, de forma que se reducen los errores.
- Brinda una documentación más sencilla y robusta del diseño, incluyendo geometría y dimensiones, lista de materiales, etc.
- Permite una reutilización sencilla de diseños previos.



*Figura 3-30. Modelo CAD del dron generado en UNIGRAPHICS NX 8.5.*



Durante el desarrollo del presente proyecto se hizo uso del software CAD UNIGRAPHICS NX 8.5 como herramienta para el modelado de las piezas componentes de la estructura, así como para visualizar el ensamble de todos los elementos y disponer de una vista preliminar del sistema completo. También se empleó para llevar a cabo un análisis estructural estático del vehículo y para generar los planos de fabricación.

En la *Figura 3-30* se muestra una imagen del modelo CAD del sistema diseñado. Asimismo, en el *Apéndice 1* del presente trabajo pueden consultarse los diversos planos de fabricación para este proyecto.

### Análisis estructural

Para comprobar la robustez de los elementos mecánicos que conformarán la estructura del vehículo y asegurar que ésta soportará las diversas solicitaciones que se presentarán durante el uso del dispositivo, se llevó a cabo un análisis estructural en cada uno de los componentes que conforman el *frame*.

Cabe señalar que los resultados siguientes corresponden a un análisis estático, es decir, aquel en el cual las cargas aplicadas no varían a lo largo del tiempo. Un análisis dinámico que considere cargas repetidas, fluctuantes en el tiempo o de impacto va más allá de los alcances del presente trabajo.

Dentro del mencionado análisis estructural estático se consideraron dos casos de interés primordial para el desempeño del vehículo diseñado. En primer lugar, se estudió la respuesta del *frame* en estado de reposo, es decir, mientras se encuentra en tierra, apoyado en sus soportes inferiores. Posteriormente, se analizó el caso de vuelo estático estable, durante el cual la aeronave se encuentra flotando en una altura determinada, en estado estacionario. Para ambas configuraciones se desarrolló el caso límite en el cual el vehículo soportaría una carga de perturbación consistente en una masa suspendida de 500 [g].

Antes de presentar los resultados obtenidos, conviene analizar qué tipos de esfuerzos se presentarán fundamentalmente en la estructura, así como las idealizaciones que se consideran acerca del material del cual ésta se encontrará construida.

Tanto en su estado de reposo como en vuelo estable, los componentes del *frame* se encontrarán principalmente sometidos a cargas de flexión (en los brazos y placas centrales) y de compresión (en los soportes). Como se sabe del estudio de la mecánica de sólidos, los esfuerzos resultantes de este tipo de configuración de solicitaciones son de tracción y de compresión. Los posibles esfuerzos cortantes que se presenten resultan despreciables con respecto a lo anteriormente mencionados.

Aun así, los valores obtenidos con el software CAD corresponden a esfuerzos efectivos, también llamados de Von Mises, calculados por el método de elemento finito, y por ende consideran todos los posibles efectos que puedan producir las sollicitaciones sobre la estructura.

Por otro lado, se considerará que el material en análisis (plástico ABS) es un sólido elástico, lineal, homogéneo e isotrópico. Todas estas idealizaciones se asumen válidas, ya que, como se verá posteriormente, ningún esfuerzo presente en la estructura rebasará el rango elástico. Por ende, los resultados obtenidos mediante este modelo del material son válidos y representan apropiadamente al sistema físico real.

De acuerdo con la información reportada en la *Tabla 3-2*, la resistencia última a la tracción del plástico ABS oscila entre los 41[MPa] y 45 [MPa]. Sin pérdida de generalidad y con base en las idealizaciones hechas, se considerará que la resistencia a la compresión se encuentra en ese mismo intervalo. Por tanto, mientras los esfuerzos desarrollados en el *frame* permanezcan por debajo de dichos valores, no se presentará falla estructural.

En primer término, se discutirá la configuración de reposo de la aeronave; en ésta, el vehículo es sostenido por sus cuatro soportes inferiores, fijos respecto a la tierra; cada uno de los brazos se encuentra rígidamente unido al cuerpo central del dron por uno de sus extremos, mientras en el otro soporta la carga flexionante correspondiente al peso del motor; además de ello, también se considera la sollicitación relativa al peso del controlador de velocidad (ESC).

La placa central del vehículo sostiene a los cuatro brazos, junto con los demás componentes del sistema, como la batería, el controlador de vuelo y una segunda placa que soportará tanto al dispositivo de comunicación como a la carga de perturbación. Evidentemente, todo el cuerpo en su conjunto se encuentra bajo la influencia del campo gravitacional terrestre, por lo que es necesario considerar también este efecto.

En la *Figura 3-31* se aprecian las restricciones y cargas aplicadas a uno de los brazos, correspondientes al estado de reposo. Posteriormente se muestran también los resultados obtenidos mediante el software para la distribución de esfuerzos y deformaciones relativas a dicha configuración de cargas. Se observa que los esfuerzos máximos se concentran en la zona de unión con la masa central del dron, y sus valores oscilan alrededor de los 0.83 [MPa]. Este valor se encuentra muy por debajo de la resistencia a la tracción del material. Por ende, no existe riesgo de falla en este elemento. Adicionalmente, se muestra que la deflexión máxima es de aproximadamente 0.39 [mm], y se presenta en el sitio en donde se encuentran asentados los motores, como era de esperarse.

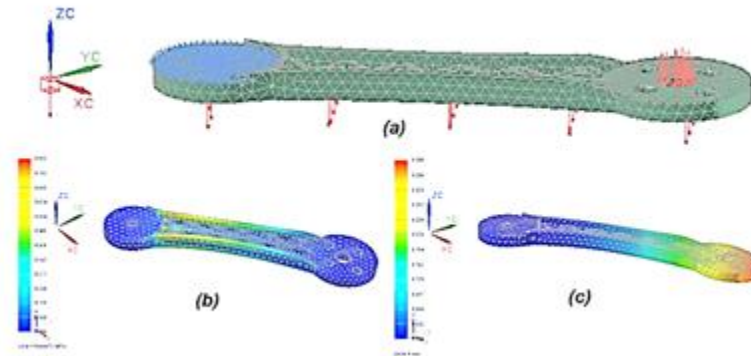


Figura 3-31. Análisis estructural estático de un brazo durante reposo.  
 (a) Configuración de cargas. (b) Distribución de esfuerzos. (c) Distribución de deformaciones.

El siguiente elemento a ser analizado es la placa central, la cual soporta a todos los demás elementos. Abajo se muestra la configuración de cargas, así como la distribución de esfuerzos y deformaciones. Se observa que el valor máximo de esfuerzo es de aproximadamente 0.20 [MPa], mientras la mayor deformación tiene un valor de 0.02 [mm] y se presenta en los extremos de los brazos. Nuevamente, el esfuerzo desarrollado es mucho menor a la resistencia del material, por lo que tampoco se presentará una falla en este caso.

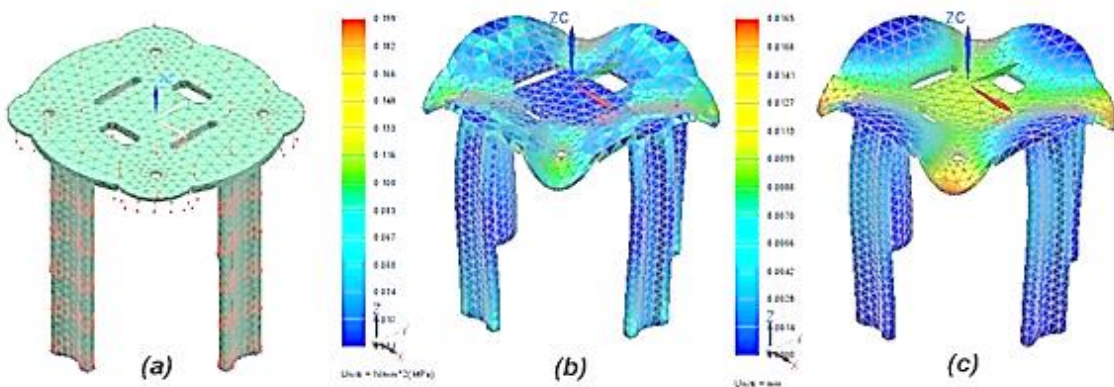


Figura 3-32. Análisis estructural estático de la placa central del dron durante reposo.  
 (a) Configuración de cargas. (b) Distribución de esfuerzos. (c) Distribución de deformaciones.

Finalmente, la placa inferior, que soportará directamente la carga de perturbación y el peso del dispositivo de comunicación presenta un esfuerzo máximo de 0.45 [MPa] y una deflexión de 0.03 [mm] en la zona central, debida a la considerable acción de la masa suspendida. A pesar de ello, los estos valores se encuentran muy por debajo de los límites tolerables.

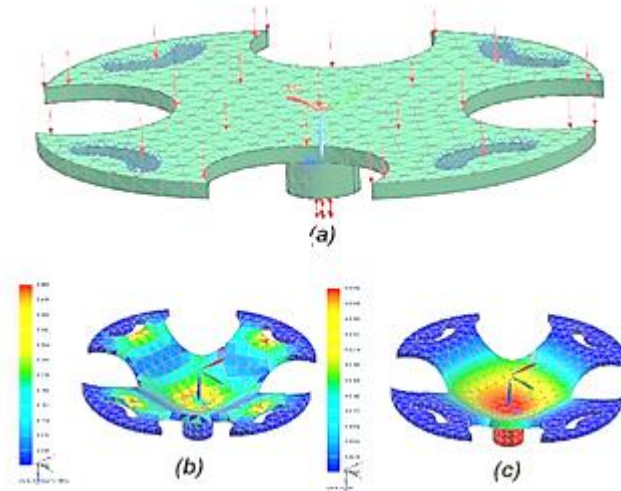


Figura 3-33. Análisis estructural estático de la placa inferior del dron durante reposo.  
 (a) Configuración de cargas. (b) Distribución de esfuerzos. (c) Distribución de deformaciones.

Posteriormente se procedió a analizar el caso de sustentación en vuelo estático, en la cual los actuadores proporcionan la fuerza de empuje necesaria para soportar a la aeronave. Por ende, los puntos fijos en esta configuración se encuentran en los extremos de los brazos en donde se hayan apostados los motores. La distribución de cargas es similar al estado de reposo, previamente discutido, con la principal diferencia de que en este caso el peso del cuerpo central del sistema debe ser sostenido en su totalidad por los brazos, en vez de por los soportes inferiores, los cuales ahora no se encuentran restringidos de ninguna forma.

De acuerdo con lo anterior, es lógico que los resultados de esfuerzos hayan arrojado un máximo de 6.03 [MPa], superior al caso previo, para los brazos, concentrado alrededor del área de los motores. La deflexión máxima, con un valor de 2.06 [mm], ahora se presenta en la región conectada con la masa central del sistema.

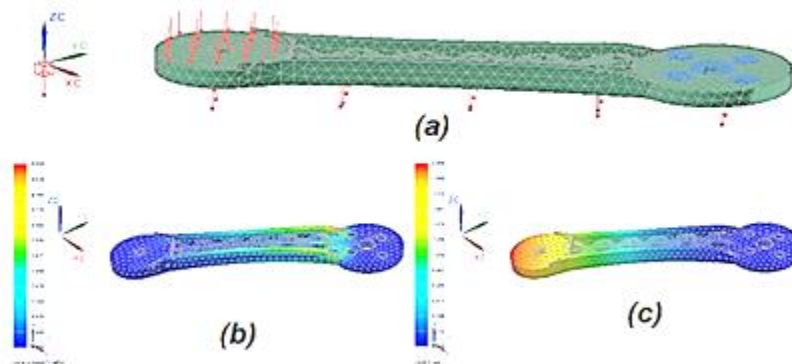


Figura 3-34. Análisis estructural estático del brazo del dron durante sustentación en vuelo.  
 (a) Configuración de cargas. (b) Distribución de esfuerzos. (c) Distribución de deformaciones.

Los valores de esfuerzo máximo para la placa central y la inferior del dron son de aproximadamente 0.28 [MPa] y 0.45 [MPa], respectivamente, mientras las deformaciones correspondientes son de 0.03 [mm] y 0.33 [mm].

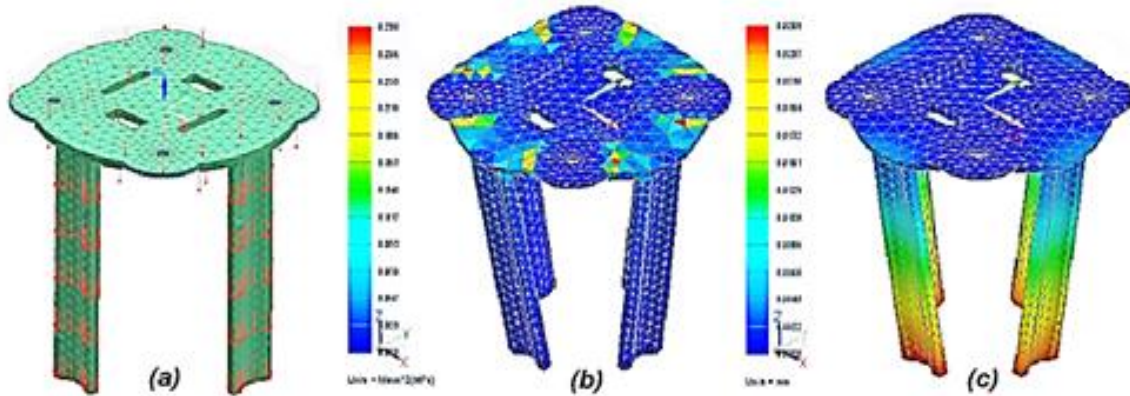


Figura 3-35. Análisis estructural estático de la placa central del dron durante sustentación en vuelo. (a) Configuración de cargas. (b) Distribución de esfuerzos. (c) Distribución de deformaciones.

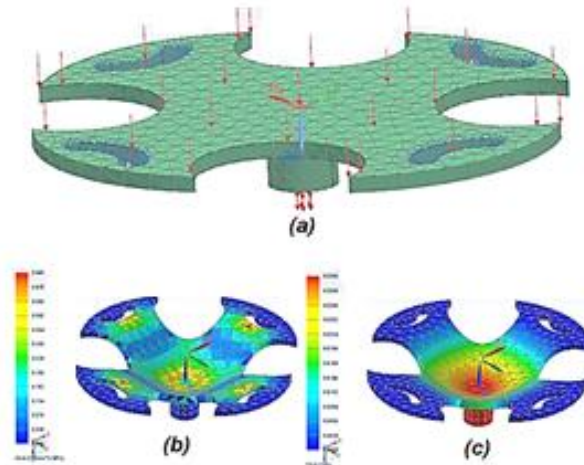


Figura 3-36. Análisis estructural estático de la placa inferior del dron durante sustentación en vuelo. (a) Configuración de cargas. (b) Distribución de esfuerzos. (c) Distribución de deformaciones.

Aunque el máximo nivel de esfuerzo en esta última configuración es mayor, éste es aún inferior al límite de resistencia del material, por lo cual es posible asegurar con un muy alto grado de confianza que no existirá falla estructural en el sistema.

De la misma forma, las deformaciones máximas que desarrollará la estructura se encuentran por debajo del límite establecido en las especificaciones durante el diseño conceptual. Por ende, el diseño cumple con los parámetros estructurales previamente establecidos.

En la *Tabla 3-8* se reportan los valores de esfuerzos y deformaciones obtenidos como resultado del anterior análisis estático, así como el diagnóstico de falla.

Elemento	Configuración de carga					
	Reposo			Sustentación en vuelo		
	Esfuerzo Máximo [MPa]	Deformación Máxima [mm]	Falla	Esfuerzo Máximo [MPa]	Deformación Máxima [mm]	Falla
Placa central	0.199	0.0169	NO	0.28	0.0269	NO
Brazo	0.832	0.388	NO	6.034	2.068	NO
Placa inferior	0.455	0.0336	NO	0.455	0.336	NO

*Tabla 3-8. Resultados por componentes del análisis estructural estático.*

Para terminar con este apartado dedicado al análisis estructural del sistema, es conveniente mencionar algunos aspectos sobre el factor de seguridad del diseño. En términos generales, los niveles de esfuerzo a los que está sometido un elemento estructural son mucho menores que el esfuerzo último  $\sigma_u$  que éste es capaz de soportar antes de que se presente la falla. Idealmente, sólo una porción de la capacidad de carga del componente es utilizada durante su servicio, mientras que el resto permanece como una reserva para asegurar un funcionamiento seguro. A este nivel de esfuerzo más pequeño se conoce como esfuerzo permisible o esfuerzo de diseño  $\sigma_d$ .

El *factor de seguridad*  $FS$  se define como la razón del esfuerzo último del elemento al esfuerzo de diseño [10]; esto es:

$$FS = \frac{\text{esfuerzo último}}{\text{esfuerzo de diseño}} = \frac{\sigma_u}{\sigma_d}$$

Este valor es una medida de la seguridad que tiene el diseño ante condiciones inesperadas de servicio, solicitudes no consideradas e incertidumbres paramétricas relativas a las propiedades del material.

El factor de seguridad recomendado para un elemento estructural en particular varía en función del tipo de carga que este ha de soportar, así como del material del que está hecho. Asimismo, el esfuerzo último a emplearse en el cálculo del factor de seguridad también cambia dependiendo del material; para materiales dúctiles, comúnmente se emplea la resistencia a la cedencia  $s_y$ , mientras que en el caso de un material frágil se prefiere considerar su resistencia a la fractura, también llamada resistencia última  $s_u$ .

En la *Tabla 3-9* se presentan los factores de seguridad típicos recomendados [30] para elementos estructurales, de acuerdo con el material del que fueron fabricados y al tipo de carga que soportaran durante su servicio.

Tipo de Carga	Factor de Seguridad	
	Material Dúctil	Material Frágil
	$FS = \frac{s_y}{\sigma_d}$	$FS = \frac{s_u}{\sigma_d}$
Estática	2	6
Repetida	8	10
Impacto	12	15

Tabla 3-9. Factores de seguridad por tipo de carga y de material.

Para el caso del presente proyecto, es posible calcular el factor de seguridad de la estructura. Dado que el plástico ABS es un material frágil, se utilizará como esfuerzo último la resistencia a la fractura  $s_u$ . De la *Tabla 3-8* se observa que el máximo esfuerzo  $\sigma_d$  que se presenta en el *frame* se da en cada uno de los brazos durante la sustentación en vuelo, y tiene un valor de 6.034 [MPa]. También, de la *Tabla 3-2*, se tiene que la resistencia última  $s_u$  del material es de 41[MPa], aproximadamente. Por tanto, el factor de seguridad para la estructura es:

$$FS = \frac{s_u}{\sigma_d} = \frac{41 \text{ [MPa]}}{6.034 \text{ [MPa]}} = 6.79$$

El factor de seguridad anterior predice que el elemento crítico del diseño (brazo) soportará su régimen de solicitaciones para cargas estáticas, por ejemplo, durante la sustentación en vuelo, precisamente el caso considerado en el presente trabajo. Sin embargo, es altamente probable que la pieza falle (por fractura, ya que es un material frágil) para cargas de impacto, cerca de la unión con la placa central. Esto es conveniente, ya que, por motivos de seguridad y normatividad, un UAV de pequeña escala debe de romperse y dejar de funcionar en caso de una caída.

Para cualquier otro elemento de la estructura, el nivel de esfuerzo experimentado es mucho menor, y, por consiguiente, el factor de seguridad se incrementa enormemente. Esto garantiza que el resto de los componentes soportarán el régimen de cargas impuesto, incluso en caso de impacto.

## Manufactura

Como se mencionó previamente, el proceso de manufactura empleado para construir el frame de la aeronave fue la impresión 3D, y el material utilizado fue plástico ABS. Una vez construida la estructura mecánica, fue posible fijar todos los componentes electrónicos en ésta, con lo cual se concluyó la fabricación de la planta. En la *Figura 3-37* muestra una imagen del sistema físico construido.



*Figura 3-37. Ensamble final del dron.*



# Modelado Matemático<sup>1</sup>

---

*Cum Deus Calculat Fit Mundus  
(Según Dios calcula se va creando el mundo)*

**Gottfried Wilhelm Leibniz**  
**(1646-1716)**

*Las Matemáticas son el lenguaje  
con el que Dios ha escrito el Universo.*

**Galileo Galilei**  
**(1564-1642)**

## Objetivos

- Obtener el modelo matemático del sistema en variables de estado, a partir del método de Euler-Lagrange.
- Determinar los parámetros de los elementos involucrados en el modelo matemático.

## Descripción General

A lo largo del capítulo anterior se llevó a cabo el diseño mecánico y electrónico del sistema. Lo anterior implica que se establecieron los diversos elementos y dispositivos que conformarán el vehículo y las relaciones que existen entre ellos. Esto representa un gran avance en el desarrollo general del proyecto.

---

<sup>1</sup> El modelado matemático presentado en este capítulo se obtuvo utilizando el software Wolfram Mathematica 10. En el sitio <https://github.com/uli-rcm/Dron-FIUNAM> puede encontrarse el programa completo generado para tal propósito.

En el presente capítulo se aborda el modelado matemático del sistema diseñado, el cual constituirá el punto de partida para generar diferentes estrategias de control que permitan lograr el objetivo fundamental de regulación vertical.

Un modelo matemático es, en última instancia, una versión simplificada de la realidad, cuyo comportamiento coincide con ésta en una medida aceptable para alguna aplicación en particular. Para un sistema físico dado, pueden existir un gran número de modelos, dependiendo del enfoque con el que se lleve a cabo el análisis, las simplificaciones y consideraciones hechas, y también de la técnica en particular que se utilice para obtener dichas representaciones matemáticas.

En el desarrollo de este capítulo se obtendrá el modelo matemático del dron diseñado, empleando el método de Euler-Lagrange para derivar las ecuaciones de movimiento y, a partir de éstas, encontrar una representación en el espacio de estados para el sistema, la cual será de gran utilidad, posteriormente, para el análisis del mismo y para la elaboración de algoritmos de control. En su momento se establecerá el enfoque y las consideraciones hechas para generar el modelo.

El siguiente paso a seguir será determinar los valores numéricos de todos los parámetros involucrados en el modelo matemático, que es preciso conocer para resolver éste numéricamente. Muchas de estas constantes pueden ser obtenidas mediante medición directa o a partir del modelo CAD generado para el sistema. Sin embargo, algunas otras deberán encontrarse experimentalmente.

Finalmente, debe validarse el modelo matemático desarrollado, para corroborar que su comportamiento coincide con el del sistema físico real en una medida apropiada a los fines del proyecto. Este paso (abordado en el *Capítulo 5*) será realizado mediante simulaciones numéricas computacionales y ensayos experimentales.

### Definiciones Básicas

En la *Figura 4-1* se muestran los elementos necesarios y pasos a seguir para derivar el modelo matemático de cualquier sistema físico. Antes de ahondar en la obtención del modelo matemático del dron, conviene recordar algunos conceptos mencionados para asegurar así una mejor comprensión del mismo.

### Sistema

Definir el concepto *sistema* es una labor complicada, ya que ésta varía de acuerdo al enfoque particular utilizado. Para fines del presente proyecto, se entenderá como *sistema a un conjunto de elementos interrelacionados entre sí que cumplen con una tarea específica*. Como se está tratando con sistemas físicos, los componentes a los que alude la definición anterior serán de tipo mecánico, electromagnético, electrónico, térmico, hidráulico, neumático, etc.

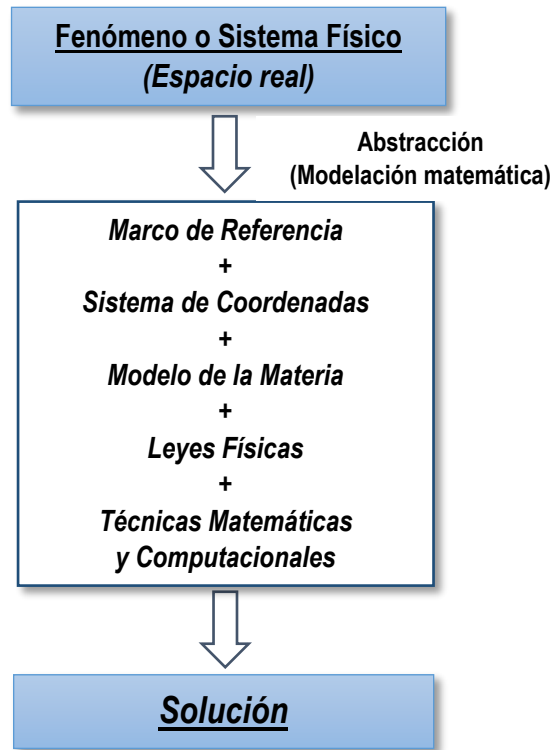


Figura 4-1. Elementos de un modelo matemático.

Como un ejemplo de sistema, considérese una transmisión de automóvil, como se muestra en la *Figura 4-2*; dentro de ella, interactúan gran cantidad de elementos (engranes, bandas, levas, entre otros), con el fin de transmitir potencia y lograr que el vehículo se mueva.

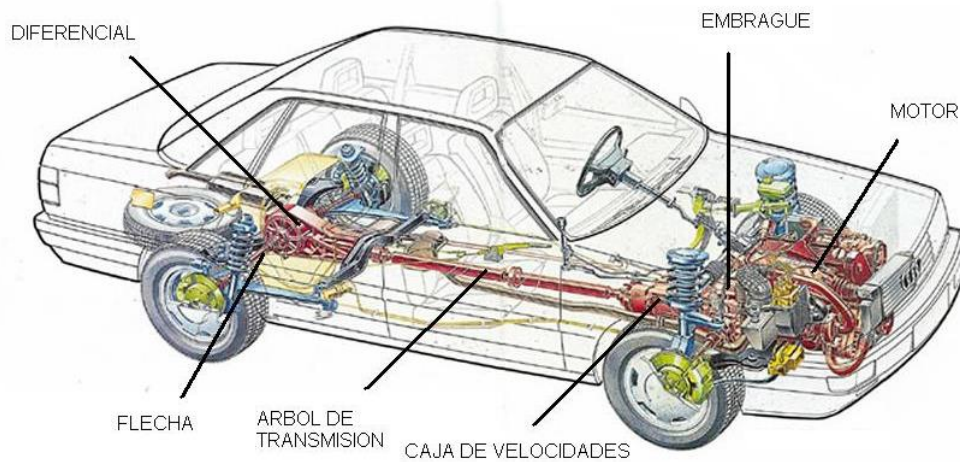


Figura 4-2. Sistema de transmisión de un automóvil.

También puede considerarse un sistema como *una función, la cual mapea sus señales de entrada en señales de salida*. Es decir, aquí se ve al sistema como una entidad que establece una relación unívoca dos grupos de señales, de la misma forma en que una función lo hace con dos conjuntos. La definición anterior hace hincapié en las entradas y salidas, y ve al sistema únicamente como un elemento intermedio.

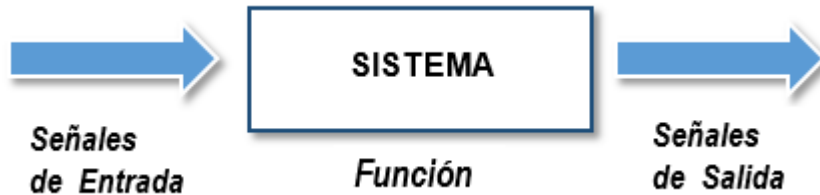


Figura 4-3. Sistema visto como mapeo.

Para propósitos del presente proyecto, conviene definir el caso particular de un *sistema de control*, el cual *consta de una planta o proceso y tiende a mantener una relación preestablecida entre la salida y la entrada de referencia* [34]. Si esto se logra usando como parámetro la comparación entre las señales anteriores (error), se trata de un *sistema de control por realimentación o en lazo cerrado*.



Figura 4-4. Sistema de control por retroalimentación (Tomada de [34]).

El término *planta* se refiere a un grupo de elementos que actúan conjuntamente para realizar una tarea determinada (sistema). Por otro lado, un *proceso* es una operación o desarrollo natural, progresivamente continua, caracterizada por una serie de cambios graduales dirigidos sistemáticamente hacia un resultado o fin deseado.

### Sistema o marco de referencia

Es una entidad matemática que se utiliza convencionalmente para ubicar puntos o cuerpos en espacios  $n$ -dimensionales. En Mecánica Clásica, los sistemas de referencia más usuales son bidimensionales y tridimensionales.

## Sistema de referencia inercial

Es aquel en el cual se cumplen las Leyes de Newton. Esto implica necesariamente que un sistema de referencia inercial no se encuentra acelerado, pudiendo estar en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.

El uso de este tipo de marcos de referencia proporciona explicaciones y resultados satisfactorios para todos los fenómenos que aparecen en la Mecánica Clásica. Generalmente, se considera un sistema de referencia inercial fijo en las estrellas.

## Sistema de coordenadas

Es un conjunto de parámetros que definen una métrica dentro de un espacio  $n$ -dimensional referido a un sistema de referencia, estableciendo una relación biunívoca entre cada punto dentro de este espacio y un conjunto único de  $n$  números reales. A este conjunto de números se le conoce como las *coordenadas* del punto, respecto al sistema de referencia.

Dicho de otra forma, un sistema de coordenadas permite identificar numéricamente cada posición dentro de un espacio; así mismo, determina la forma en que ésta ha de ser medida, respecto al sistema de referencia.

Cabe señalar que una elección apropiada del sistema de coordenadas, acorde con las características geométricas del problema, conducirá a una representación matemática más sencilla.

## Grados de libertad

Los *grados de libertad* de un cuerpo o conjunto de cuerpos interconectados son la cantidad mínima de parámetros independientes que se requieren para definir de manera única su posición en el espacio, en cualquier instante de tiempo [20].

Un cuerpo rígido con movimiento general en el espacio posee seis grados de libertad, tres correspondientes a su posición y los tres restantes a su orientación.

## Ángulos de navegación

Para determinar completamente la posición y la orientación de una aeronave en el espacio, se considera a ésta como un cuerpo rígido; por tanto, se sabe que tiene seis grados de libertad.

La posición de la aeronave puede determinarse unívocamente a partir de las coordenadas de su centro de gravedad (o de cualquier otro punto conveniente), mientras que su orientación se define a partir de sus ángulos de navegación, a saber: *roll*, *pitch* y *yaw* (alabeo, cabeceo y guiñada, respectivamente).

Para definir estos ángulos, considérese un sistema de referencia cartesiano tridimensional (ejes  $x, y, z$ ), unido a un avión, con el origen coincidente con el centro de gravedad de éste y con el sentido positivo del eje  $x$  apuntando hacia la dirección de movimiento del vehículo, el sentido positivo de  $z$  apuntando en dirección vertical hacia arriba y el sentido positivo de  $y$  determinado de tal forma que el sistema resultante sea derecho.

Considerando la configuración anterior, pueden asignarse los ángulos de navegación de la siguiente forma:

### **Roll ( $\phi$ )**

Es el ángulo formado entre un plano horizontal (plano  $xy$ , de acuerdo con la convención establecida) y las alas del avión, medido desde la parte positiva del eje  $y$ .

Se podría interpretar el roll como una rotación en sentido antihorario del avión alrededor de un eje longitudinal, que va desde la cola a la punta del avión (eje  $x$ ). Dicho movimiento se conoce como alabeo.

### **Pitch ( $\theta$ )**

Es el ángulo de inclinación existente entre el plano horizontal (plano  $xy$ ) y la punta del avión, medido desde la parte positiva del eje  $x$ . Puede interpretarse como una rotación antihoraria del avión alrededor de un eje transversal que sería paralelo a las alas (eje  $y$ ). Dicho movimiento se conoce como cabeceo.

### **Yaw ( $\psi$ )**

Es el ángulo de inclinación existente entre el plano vertical (plano  $xz$ ) y la punta del avión, medido desde la parte positiva del eje  $x$ . Puede interpretarse como una rotación antihoraria del avión alrededor de un eje vertical (eje  $z$ ). Dicho movimiento se conoce como guiñada.

La *Figura 4-5* muestra esquemáticamente los ángulos de navegación para una aeronave.

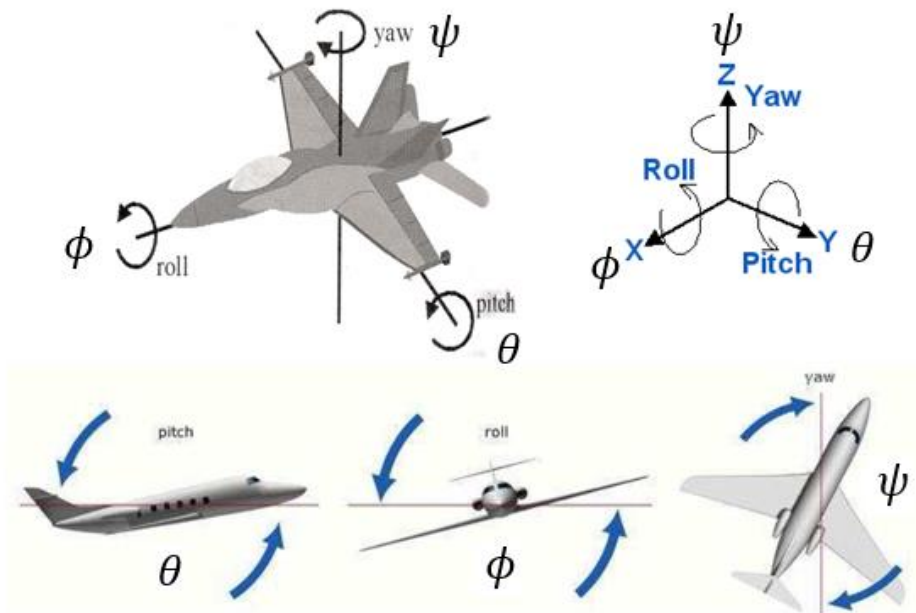


Figura 4-5. Ángulos de navegación.

Para resumir todo lo anterior, considérese la *Tabla 4-1*:

Ángulo	Eje de rotación	Eje de referencia	Símbolo
Roll (Alabeo)	$x$ (Longitudinal)	$y$	$\phi$
Pitch (Cabeceo)	$y$ (Transversal)	$x$	$\theta$
Yaw (Guiñada)	$z$ (Vertical)	$x$	$\psi$

Tabla 4-1. Resumen de ángulos de navegación.

### Matriz de rotación

Una *matriz de rotación* es un ente matemático que representa una transformación de coordenadas y, por tanto, proporciona información acerca de la orientación un cuerpo, con respecto a un sistema de referencia.

Considérese un sistema de referencia inercial fijo  $A$ , definido por la base ortonormal de vectores  $\{\hat{x}_A, \hat{y}_A, \hat{z}_A\}$ . Posteriormente, sea un sistema de referencia  $B$ , definido por la base ortonormal  $\{\hat{x}_B, \hat{y}_B, \hat{z}_B\}$ , unido al cuerpo en alguna orientación conocida y cuyo origen es coincidente con el centroide o algún otro punto conveniente dentro del cuerpo. Véase la *Figura 4-6*.

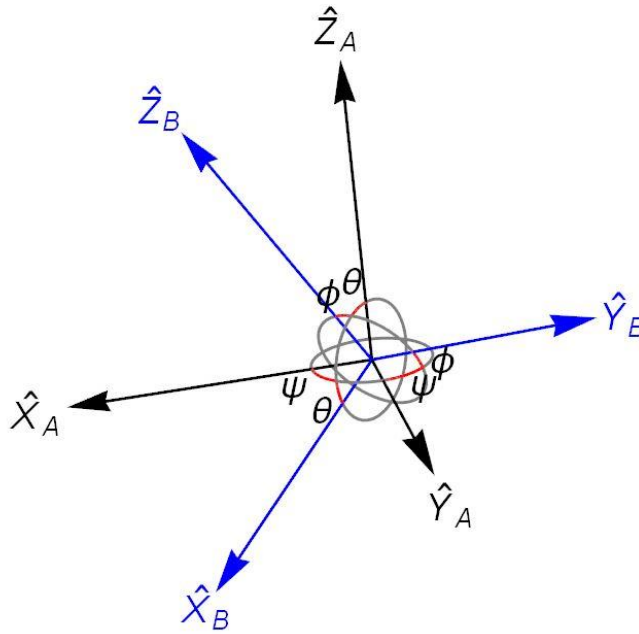


Figura 4-6. Sistemas de referencia fijo y sujeto a rotación.

En el caso de que el cuerpo cambie su orientación, las proyecciones de los vectores de  $B$  respecto a los de  $A$  (recuérdese que éste es un sistema que se supone fijo, es decir, nunca cambia su orientación) variarán consecuentemente. Como se sabe, la proyección escalar entre dos vectores unitarios se obtiene a partir de un producto interno, definido dentro del espacio vectorial en el que se esté trabajando. El producto interno utilizado será el producto punto usual entre dos vectores pertenecientes a  $\mathbb{R}^3$ . Es decir, dados dos vectores

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

el producto punto entre ellos se expresa como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Por lo tanto, la matriz de rotación asociada al sistema de referencia  $B$  referida al sistema de referencia  $A$  se obtiene como las proyecciones de los vectores base de  $B$  sobre los vectores base de  $A$ , es decir:

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} \hat{x}_B \cdot \hat{x}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{x}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{x}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{y}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{y}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{y}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{z}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{z}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{z}_A \end{bmatrix}$$



La matriz resultante determina una transformación de coordenadas de un vector representado en la base  $B$  a su representación en la base  $A$ . La transformación inversa se obtiene al transponer la matriz de rotación (gracias a que ésta es ortogonal).

$${}^B_A R = {}^A_B R^T = [\hat{x}_A^B \quad \hat{y}_A^B \quad \hat{z}_A^B] = \begin{bmatrix} \hat{x}_B \cdot \hat{x}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{x}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{x}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{y}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{y}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{y}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{z}_A & \hat{y}_B \cdot \hat{z}_A & \hat{z}_B \cdot \hat{z}_A \end{bmatrix}^T$$

En el presente análisis, nos interesa obtener las matrices de rotación asociadas a los movimientos de alabeo, cabeceo y guiñada de una aeronave. Haciendo referencia a la *Tabla 4-1*, y después de efectuar los productos punto indicados, se observa que las matrices de rotación se encuentran dadas en función de los ángulos *roll*, *pitch*, *yaw* ( $\phi, \theta, \psi$ ), de la siguiente forma:

Alabeo (Rotación en  $x$ ):

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

Cabeceo (Rotación en  $y$ ):

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Guiñada (Rotación en  $z$ ):

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el caso general de una aeronave con movimiento libre en el espacio, puede obtenerse su orientación respecto a un sistema de referencia inercial fijo, mediante la aplicación sucesiva y ordenada de las tres rotaciones anteriores.

En el presente trabajo, primeramente, se considerará el movimiento de *yaw* (rotación en  $z$ ), posteriormente el *pitch* (rotación en  $y$ ) y finalmente el *roll* (rotación en  $x$ ). De esta forma, la matriz de rotación correspondiente será:

$$R = R(\Phi, \theta, \psi) = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi + \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \theta \sin \phi & -\cos \theta \sin \phi \\ \sin \psi \sin \phi - \cos \psi \sin \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi + \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}$$

Dado que las matrices de rotación son ortogonales, se cumple que:

$$R^{-1} = R^T$$

### Formulación lagrangiana del modelo matemático

Anteriormente se definieron los ángulos de navegación como entes matemáticos que se utilizan para determinar la orientación de una aeronave, referida a un sistema de referencia; de la misma forma, se discutió el concepto de matriz de rotación, la cual representa una transformación de coordenadas que permite describir puntos expresados en un cierto marco de referencia en términos de otro, cuyos ejes tienen una orientación diferente.

La razón por la cual dichos conceptos fueron introducidos radica en que se hará uso de los mismos para derivar el modelo matemático del sistema. Como se mencionó previamente, este desarrollo se realizará empleando el método de Euler-Lagrange. En el *Apéndice 3* se encuentra una descripción detallada de la fundamentación teórica de esta formulación y las ecuaciones que intervienen en la misma.

Antes de comenzar con la derivación del modelo matemático, es necesario definir el importante concepto de coordenadas generalizadas, las cuales son un conjunto de  $n$  parámetros independientes que se requieren para determinar completamente la posición o el estado de los elementos de un sistema. Generalmente, las coordenadas generalizadas y la formulación lagrangiana se utilizan para modelar sistemas mecánicos, aunque puede extenderse fácilmente a todo tipo de sistema físico.

Considérese un sistema de  $N$  partículas; las posiciones de éstas se encuentran completamente determinadas por  $3N$  coordenadas. Esto es, los vectores de posición de los elementos del sistema son:

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, N$$



$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{roll} \\ \text{pitch} \\ \text{yaw} \end{bmatrix}$$

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}$$

Las velocidades lineal y angular medidas *desde el sistema de referencia del cuerpo* se denotarán como  $V_B$  y  $\omega_B$ , respectivamente:

$$V_B = \begin{bmatrix} v_{x_B} \\ v_{y_B} \\ v_{z_B} \end{bmatrix} \quad \omega_B = \begin{bmatrix} \omega_{\phi_B} \\ \omega_{\theta_B} \\ \omega_{\psi_B} \end{bmatrix}$$

Previamente se definió el orden en el cual se analizaría la rotación del vehículo ( $z - y - x$ ), así como la matriz de transformación asociada  $R(\phi, \theta, \psi)$  y su inversa. Cualquier orientación que asuma el cuerpo puede ser descrita mediante la secuencia de giros anterior. En este sentido, la matriz  $R$  transforma un vector expresado en términos del sistema de referencia del cuerpo a uno en términos del marco inercial. Recíprocamente, al multiplicar  $R^T$  por un vector expresado respecto al sistema de referencia inercial, se obtiene como resultado el mismo vector visto desde el sistema fijo al cuerpo.

Para el análisis cinemático y dinámico del cuadricóptero, es necesario encontrar una expresión para las velocidades lineales y angulares vistas desde el marco inercial. En el primer caso la velocidad lineal absoluta del sistema es:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

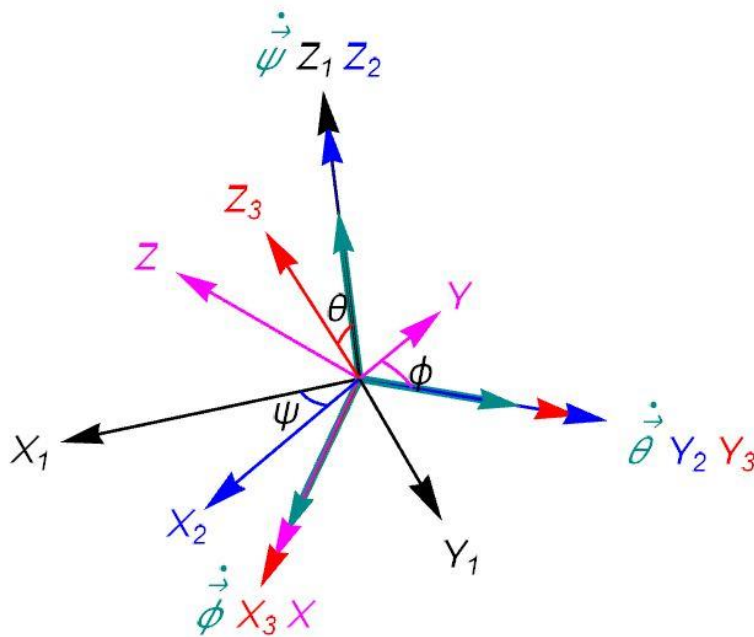
Por otro lado, para determinar la velocidad angular del cuerpo en términos del sistema inercial, es necesario tomar en cuenta los efectos rotacionales. Al girar el vehículo, la resultante vectorial  $\vec{\omega}$  de la velocidad angular no se encuentra, en general, en ninguno de los ejes originales, sino en una dirección arbitraria; sin embargo, dado que se sabe que el movimiento es equivalente a tres rotaciones sucesivas, puede expresarse dicha velocidad como la *suma vectorial* de tres componentes, *cada una de ellas con una dirección dada por los ejes en el instante correspondiente a la rotación*, de forma tal que:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\phi}$$

Considérese la *Figura 4-8*; en ella se tiene un diagrama que representa la forma en la cual se lleva a cabo un giro arbitrario del vehículo, visto como una descomposición en una secuencia ordenada de rotaciones alrededor de los ejes.

El estado inicial está dado por los ejes  $\{X_1, Y_1, Z_1\}$ , los cuales coinciden con el marco de referencia del cuerpo. En esta configuración, se aplica la primera rotación, correspondiente al ángulo  $\psi$ , alrededor del eje  $Z_1$ , con una velocidad angular vectorial  $\dot{\psi}$  en dicha dirección. Con esto, el sistema tiene una orientación dada por  $\{X_2, Y_2, Z_2\}$ .

Posteriormente, se tiene una segunda rotación de un ángulo  $\theta$  con velocidad angular  $\dot{\theta}$  alrededor del eje  $Y_2$  correspondiente a la orientación actual ( $Y_2$ ), quedando entonces la configuración descrita por los ejes  $\{X_3, Y_3, Z_3\}$ .



*Figura 4-8. Secuencia de rotación y propagación de velocidades para el cuadricóptero. (Tomada y modificada de [1])*

Finalmente, ocurre la última rotación, alrededor del eje  $X_3$ , a un ángulo  $\phi$  con velocidad angular  $\dot{\phi}$ , con lo cual el sistema alcanza su orientación final, determinada por el marco de referencia inercial  $\{X, Y, Z\}$ . Puede deducirse fácilmente que, en general, las componentes vectoriales de la velocidad angular no tienen por qué ser ortogonales. Al proyectar estos en los ejes del último sistema de referencia, se obtienen las siguientes expresiones, las cuales relacionan las velocidades angulares en ambos sistemas de referencia:

$$\omega_{\phi_B} = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta$$

$$\omega_{\theta_B} = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi$$

$$\omega_{\psi_B} = \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi$$

O, en sentido inverso:

$$\dot{\phi} = \omega_{\phi_B} + (\omega_{\theta_B} \sin \phi + \omega_{\psi_B} \cos \phi) \tan \theta$$

$$\dot{\theta} = \omega_{\theta_B} \cos \phi - \omega_{\psi_B} \sin \phi$$

$$\dot{\psi} = (\omega_{\theta_B} \sin \phi + \omega_{\psi_B} \cos \phi) \sec \theta$$

Las expresiones anteriores definen la siguiente matriz de propagación de velocidades  $W_\eta$  entre los marcos de referencia:

$$\omega_B = W_\eta \dot{\eta}, \quad \begin{bmatrix} \omega_{\phi_B} \\ \omega_{\theta_B} \\ \omega_{\psi_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\eta} = W_\eta^{-1} \omega_B, \quad \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sec \theta \sin \phi & \sec \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{\phi_B} \\ \omega_{\theta_B} \\ \omega_{\psi_B} \end{bmatrix}$$

La matriz  $W_\eta^{-1}$  existe siempre que  $\theta \neq \frac{(2n-1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ . Se reconocen los puntos donde dicha matriz no esté definida como singularidades del sistema.

Por otro lado, se tiene que la fuerza de empuje producida por cada rotor es proporcional al cuadrado de la velocidad angular, es decir:

$$f_i = k_i \omega_i^2 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

De la misma forma, el par generado por cada rotor es:

$$\tau_{M,j} = b_j \omega_j^2 + I_{M,j} \dot{\omega}_j$$

Donde  $I_{M,j}$  es el momento polar de inercia del elemento. Se sabe que la aportación al par de dicho sumando es de aproximadamente el 10% respecto al término proporcional al cuadrado de la velocidad angular [12]. Además, se observa que el segundo sumando depende de la razón de cambio de la velocidad de rotación, lo que significa que, a rapidez constante, dicho término se anula.

Resulta evidente que este componente únicamente es relevante durante la etapa transitoria, antes de alcanzarse un régimen permanente de velocidad. Como su aportación es muy pequeña y de corta duración, se despreciará su efecto. Por tanto, se asumirá que:

$$\tau_{M,j} = b_j \omega_j^2 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

El parámetro  $k$  se denomina *constante de sustentación*, mientras que  $b$  se conoce como *constante de arrastre*. La superposición de las fuerzas en cada rotor crea un empuje  $E$  dirigido en la dirección  $z$  del sistema de referencia del cuerpo.

$$E = \sum_{j=0}^4 f_j = \sum_{j=0}^4 k_j \omega_j^2 \quad , \quad \mathbf{E}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}$$

Ahora, los pares que actúan *sobre el vehículo* generados por los rotores, vistos desde el sistema del cuerpo son:

$$\boldsymbol{\tau}_B = \begin{bmatrix} \tau_{\phi_B} \\ \tau_{\theta_B} \\ \tau_{\psi_B} \end{bmatrix}$$

Analizando la *Figura 4-7*, se obtiene que:

$$\tau_{\phi_B} = d(f_2 + f_3 - f_1 - f_4) = d(k_2 \omega_2^2 + k_3 \omega_3^2 - k_1 \omega_1^2 - k_4 \omega_4^2)$$

$$\tau_{\theta_B} = d(f_1 + f_2 - f_3 - f_4) = d(k_1 \omega_1^2 + k_2 \omega_2^2 - k_3 \omega_3^2 - k_4 \omega_4^2)$$

$$\tau_{\psi_B} = (\tau_{M,2} + \tau_{M,4}) - (\tau_{M,1} + \tau_{M,3}) = (b_2 \omega_2^2 + b_4 \omega_4^2 - b_1 \omega_1^2 - b_3 \omega_3^2)$$

En donde  $d = l \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}l}{2}$ , y  $l$  es la longitud de los brazos. Se observa en las expresiones anteriores que para mover un ángulo específico de la aeronave deben modificarse las velocidades de los cuatro rotores; además, dichos ángulos son interdependientes entre sí, ya que al alterar uno de ellos se modifican consecuentemente los otros dos.

Una vez que se han obtenido los resultados anteriores, se está en posición de plantear la función lagrangiana del sistema, la cual, como es bien sabido, consiste en la diferencia de la energía cinética total y la energía potencial total. Esto es:

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) - V(\vec{q}; t)$$

Donde  $T$  es la energía cinética total y  $V$  es la energía potencial total del sistema:

$$T = T_{translacional} + T_{rotacional}$$

$$V = V_{grav} + V_{elast} + V_{quim} + \dots$$

En este caso en particular, se tiene que:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \omega_B^T I \omega_B$$

$$V = mgz = mg [0 \ 0 \ 1] \xi$$

En donde  $m$  es la masa total del sistema y  $I$  es el tensor de inercia. Dado que se considera que el vehículo es simétrico respecto a los ejes  $x$  y  $y$ , además de que la masa está uniformemente distribuida, se tiene que:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Con  $I_{xx} = I_{yy}$ . Este tensor de inercia se encuentra referido al marco de referencia del cuerpo. Dado que la energía cinética traslacional se encuentra expresada en términos del sistema inercial, es deseable que la energía rotacional también lo esté. Lo anterior se puede lograr recurriendo a la matriz de propagación de velocidad, obtenida previamente:

$$T_{rotacional} = \frac{1}{2} \omega_B^T I \omega_B = \frac{1}{2} (W_\eta \dot{\eta})^T I (W_\eta \dot{\eta})$$

$$T_{rotacional} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T (W_\eta^T I W_\eta) \dot{\eta} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta}$$

En donde  $\dot{\eta}$  representa la velocidad angular vista desde el marco inercial y

$$J = W_\eta^T I W_\eta$$

Considerando lo anterior, el lagrangiano del sistema es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta} - mg [0 \ 0 \ 1] \xi$$



Realizando las operaciones, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ & + \frac{1}{2}(I_{yy}\cos^2\phi \dot{\theta}^2 + I_{zz}\sin^2\phi \dot{\theta}^2 + I_{xx}\dot{\phi}^2 + (I_{yy} - I_{zz})\cos\theta \sin 2\phi \dot{\theta}\dot{\psi} \\ & - 2I_{xx}\sin\theta \dot{\phi}\dot{\psi} + (I_{zz}\cos^2\theta \cos^2\phi + I_{xx}\sin^2\theta + I_{yy}\cos^2\theta \sin^2\phi)\dot{\psi}^2) \\ & - mgz \end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a la expresión anterior para derivar las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial D_R}{\partial\dot{q}_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

Dado que en el presente sistema no se consideran fuerzas de fricción viscosas, la función de disipación es nula  $D_R = 0$ . Por tanto:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

Dado que la posición y la orientación son independientes entre sí, la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange conducirá a un sistema de ecuaciones diferenciales desacoplado.

El vector de fuerzas generalizadas  $\mathbf{Q}$  puede expresarse como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix}$$

El vector  $\mathbf{f}$  actúa sobre los grados de libertad  $\{x, y, z\}$ , y corresponde a la transformación de la fuerza de empuje  $\mathbf{E}_B$  en el marco del cuerpo hacia el sistema de referencia inercial, es decir:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = R\mathbf{E}_B$$

Donde:

$$f_x = \sin \theta (k_1 \omega_1^2 + k_2 \omega_2^2 + k_3 \omega_3^2 + k_4 \omega_4^2)$$

$$f_y = -\cos \theta \sin \phi (k_1 \omega_1^2 + k_2 \omega_2^2 + k_3 \omega_3^2 + k_4 \omega_4^2)$$

$$f_z = \cos \theta \cos \phi (k_1 \omega_1^2 + k_2 \omega_2^2 + k_3 \omega_3^2 + k_4 \omega_4^2)$$

Por otro lado, el vector  $\tau$  se encuentra asociado a los ángulos de navegación  $\{\phi, \theta, \psi\}$ . Anteriormente, se obtuvieron los pares que actúan sobre dichas coordenadas en el marco de referencia del cuerpo; resulta evidente, entonces, que dichos momentos ya se encuentran en su correspondiente grado de libertad. Por tanto:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \tau_B$$

Al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange en cada coordenada generalizada, se llega al siguiente conjunto de ecuaciones de movimiento:

- Para  $q_1 = x$

$$m\ddot{x} = f_x$$

- Para  $q_2 = y$

$$m\ddot{y} = f_y$$

- Para  $q_3 = z$

$$m\ddot{z} + mg = f_z$$

- Para  $q_4 = \phi$

$$(I_{yy} - I_{zz}) \cos \phi \sin \phi \dot{\theta}^2 - \cos \theta (I_{xx} + (I_{yy} - I_{zz}) \cos 2\phi) \dot{\theta} \dot{\psi} - (I_{yy} - I_{zz}) \cos^2 \theta \cos \phi \sin \phi \dot{\psi}^2 + I_{xx} (\ddot{\phi} - \sin \theta \ddot{\psi}) = \tau_\phi$$

- Para  $q_5 = \theta$

$$(I_{zz} - I_{yy}) \sin 2\phi \dot{\theta} \dot{\phi} + \cos \theta (I_{xx} + (I_{yy} - I_{zz}) \cos 2\phi) \dot{\phi} \dot{\psi} + (I_{zz} \cos \theta \cos^2 \phi \sin \theta + I_{yy} \cos \theta \sin \theta \sin^2 \phi - I_{xx} \cos \theta \sin \theta) \dot{\psi}^2 + (I_{yy} \cos^2 \phi + I_{zz} \sin^2 \phi) \ddot{\theta} + (I_{yy} - I_{zz}) \cos \theta \cos \phi \sin \phi \ddot{\psi} = \tau_\theta$$

- Para  $q_6 = \psi$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} & \left( (I_{zz} - I_{yy}) \sin \theta \sin 2\phi \dot{\theta}^2 + 2(I_{yy} - I_{zz}) \cos^2 \theta \sin 2\phi \dot{\phi} \dot{\psi} \right. \\ & - 2\dot{\theta} (\cos \theta (I_{xx} + (I_{zz} - I_{yy}) \cos 2\phi) \dot{\phi} \\ & + \sin 2\theta (-I_{xx} + I_{zz} \cos^2 \phi + I_{yy} \sin^2 \phi) \dot{\psi}) + (I_{yy} - I_{zz}) \cos \theta \sin 2\phi \ddot{\theta} \\ & - 2I_{xx} \sin \theta \ddot{\phi} + (2I_{zz} \cos^2 \theta \cos^2 \phi + 2I_{xx} \sin^2 \theta \\ & \left. + 2I_{yy} \cos^2 \theta \sin^2 \phi) \ddot{\psi} \right) = \tau_\psi \end{aligned}$$

Es relativamente sencillo corroborar las tres primeras ecuaciones de movimiento anteriores, las cuales corresponden a la posición. Si se toma la suma de fuerzas que actúan sobre el cuadricóptero, vistas desde el sistema inercial, y aplicando la Segunda Ley de Newton, se tiene que:

$$RT_B - mg\hat{k} = m\ddot{\xi}$$

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En donde  $RT_B$  es la transformación de las fuerzas producidas en los rotores al sistema de referencia inercial,  $mg\hat{k}$  es el peso del vehículo y  $\ddot{\xi}$  es el vector de aceleración del centro de gravedad. Entonces, el vector de fuerzas externas generalizadas  $f$  es:

$$f = m\ddot{\xi} + mg\hat{k}$$

Expresión equivalente a las ecuaciones de movimiento para  $x, y, z$  obtenidas mediante la formulación lagrangiana. En el caso de las tres restantes coordenadas, se aprecia que su interrelación es mucho más compleja; es aquí en donde se observa la ventaja del método de Euler-Lagrange sobre el newtoniano.

Los modelos matemáticos de sistemas físicos derivados mediante la formulación lagrangiana son susceptibles de representarse matricialmente, de la siguiente forma:

$$M(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + C(\vec{q}, \dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} + D(\dot{\vec{q}}) + K(\vec{q}) + G(\vec{q}) = Q(t)$$

Donde:

$\mathbf{M}(\vec{q})$  : Matriz de inercia

$\mathbf{C}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$  : Matriz de Coriolis.

$\mathbf{D}(\dot{\vec{q}})$  : Vector de fuerzas disipativas.

$\mathbf{K}(\vec{q})$  : Vector de fuerzas elásticas.

$\mathbf{G}(\vec{q})$  : Vector de términos gravitacionales.

$\mathbf{Q}(t)$  : Vector de fuerzas generalizadas externas.

En el caso particular del presente proyecto, la matriz de inercia  $\mathbf{M}_{(6 \times 6)}$  contiene únicamente los siguientes elementos no nulos:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= m & M_{56} &= (I_{zz} - I_{yy}) \cos \theta \cos \phi \sin \phi \\
 M_{22} &= m & M_{64} &= -I_{xx} \sin \theta \\
 M_{33} &= m & M_{65} &= (I_{yy} - I_{zz}) \cos \theta \cos \phi \sin \phi \\
 M_{44} &= I_{xx} & M_{66} &= (I_{xx} + I_{yy} \cos^2 \theta) \sin^2 \phi \\
 & & & + I_{zz} \cos^2 \phi \cos^2 \theta \\
 M_{46} &= -I_{xx} \sin \theta \\
 M_{55} &= I_{yy} \cos^2 \phi + I_{zz} \sin^2 \phi
 \end{aligned}$$

De forma análoga, los únicos elementos diferentes de cero para la matriz de Coriolis  $\mathbf{C}_{(6 \times 6)}$  son:

$$\begin{aligned}
 C_{45} &= (I_{yy} - I_{zz})(\cos \phi \sin \phi \dot{\theta} + \cos \theta \sin^2 \phi \dot{\psi}) \\
 &+ \left( (I_{zz} - I_{yy}) \cos \theta \cos^2 \phi - I_{xx} \cos \theta \right) \dot{\psi} \\
 C_{46} &= (I_{zz} - I_{yy}) \cos^2 \theta \cos \phi \sin \phi \dot{\psi} \\
 C_{54} &= (I_{zz} - I_{yy})(\cos \phi \sin \phi \dot{\theta} + \cos \theta \sin^2 \phi \dot{\psi}) \\
 &+ (I_{xx} + (I_{yy} - I_{zz}) \cos^2 \phi) \cos \theta \dot{\psi} \\
 C_{55} &= (I_{zz} - I_{yy}) \cos \phi \sin \phi \dot{\phi} \\
 C_{56} &= (I_{zz} \cos^2 \phi + I_{yy} \sin^2 \phi - I_{xx}) \cos \theta \sin \theta \dot{\psi} \\
 C_{64} &= (I_{yy} - I_{zz}) \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi \dot{\psi} - I_{xx} \cos \theta \dot{\theta} \\
 C_{65} &= (I_{zz} - I_{yy})(\cos \phi \sin \phi \sin \theta \dot{\theta} + \cos \theta \sin^2 \phi \dot{\phi}) + (I_{yy} - I_{zz}) \cos^2 \phi \cos \theta \dot{\phi} \\
 &+ (I_{xx} - I_{zz} \cos^2 \phi - I_{yy} \sin^2 \phi) \sin \theta \cos \theta \dot{\psi} \\
 C_{66} &= (I_{xx} - I_{zz} \cos^2 \phi - I_{yy} \sin^2 \phi) \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} + (I_{yy} - I_{zz}) \cos \phi \sin \phi \cos^2 \theta \dot{\phi}
 \end{aligned}$$

Finalmente, los vectores de fuerzas disipativas  $D_{(6 \times 1)}$ , fuerzas elásticas  $K_{(6 \times 1)}$  y términos gravitacionales  $G_{(6 \times 1)}$  son, respectivamente:

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### Representación en el Espacio de Estados

Una vez que se ha obtenido el modelo matemático de un sistema mediante el método lagrangiano en su forma matricial, es sencillo encontrar una representación del mismo en términos de variables de estado. Sea el vector de estados que incluye las coordenadas y velocidades generalizadas:

$$x = \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \dot{\vec{q}} \end{bmatrix}$$

Entonces, la derivada respecto al tiempo de los estados está dada por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{q}} \\ \ddot{\vec{q}} \end{bmatrix}$$

De acuerdo con la representación matricial del modelo matemático, se observa que:

$$\ddot{\vec{q}} = M^{-1}(\vec{q}) \left( Q(t) - C(\vec{q}, \dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} - D(\dot{\vec{q}}) - K(\vec{q}) - G(\vec{q}) \right)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la derivada del vector de estados, se llega a:

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{\vec{q}} \\ M^{-1}(\vec{q}) \left( Q(t) - C(\vec{q}, \dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} - D(\dot{\vec{q}}) - K(\vec{q}) - G(\vec{q}) \right) \end{bmatrix}$$

Esta ecuación constituye el modelo matemático del sistema expresado en el espacio de estados  $x$ . En términos generales, se tendrá una relación no lineal de las variables involucradas.

Para el presente proyecto, se obtuvo la representación no lineal del modelo matemático del dron, resultando éste un sistema de orden doce, consistente con los seis grados de libertad de que dispone el vehículo. Las ecuaciones se omiten en este trabajo por ser demasiado extensas.

## Linealización

Un sistema no lineal cualquiera puede representarse en el espacio de estados como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\end{aligned}$$

En donde  $\mathbf{x}(t)$  es el vector de estados,  $\mathbf{x}_0$  son las condiciones iniciales de los estados,  $\mathbf{u}(t)$  es el vector de señales de control o entradas,  $\mathbf{y}(t)$  es el vector de salidas y  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  representa la primera derivada respecto al tiempo  $t$  del vector  $\mathbf{x}$ .

Es conveniente recordar que un punto de equilibrio (también llamado punto de operación si  $\mathbf{u}_{eq} \neq \mathbf{0}$ ) se define como el valor constante de estados y entradas  $\mathbf{x}_{eq}$ ,  $\mathbf{u}_{eq}$  para el cual se cumple que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) = \mathbf{y}_{eq}$$

Lo anterior implica que, si se cumple que en  $t = 0$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{eq}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{eq}, \quad \forall t \geq 0$$

Entonces,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{eq}, \quad \forall t \geq 0$$

La definición anterior establece que un punto de equilibrio es aquel valor de estados y entradas para el cual el sistema puede permanecer indefinidamente, en ausencia de perturbaciones.

Como se sabe de la Teoría de Control Lineal, un sistema linealizado en torno a un punto de equilibrio posee una representación en el espacio de estados de la forma:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{eq}, \quad \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{eq}$$

Donde  $x_{eq}, u_{eq}, y_{eq}$  son los vectores de estados, entradas y salida de equilibrio, respectivamente. Las matrices  $A, B, C, D$  representan los jacobianos de las funciones  $f$  y  $h$ , respecto a los estados y las entradas, evaluados en el punto de equilibrio.

Para el presente proyecto, resulta particularmente útil una linealización respecto al punto de operación:

$$x_{eq} = [X \ Y \ Z \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

El cual representa una posición arbitraria  $\{X, Y, Z\}$  en el espacio, con todos los ángulos de navegación en cero y velocidades nulas. En dicho punto de equilibrio, el dron se encontraría en vuelo estacionario, lo cual representa uno de los objetivos principales de este trabajo.

Realizando las consideraciones anteriores, es posible obtener las entradas de equilibrio  $\Omega_i$  (velocidades angulares de los rotores) que teóricamente permitirían al sistema sustentarse en vuelo de forma indefinida:

$$\Omega_1 = 1211.85 \left[ \frac{rad}{s} \right] \qquad \Omega_2 = 1211.85 \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

$$\Omega_3 = 1211.85 \left[ \frac{rad}{s} \right] \qquad \Omega_4 = 1211.85 \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

$$u_{eq} = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3 \ \Omega_4]^T$$

A continuación, se presenta el modelo linealizado en torno al punto de equilibrio mencionado arriba. Para la evaluación numérica de los parámetros, se utilizaron los valores reportados en la *Tabla 4-2*; algunos de éstos fueron obtenidos mediante medición directa, mientras que otros pudieron encontrarse a partir del modelo CAD.

En particular, las constantes de sustentación  $k_i$  y las constantes de arrastre  $b_i$  para cada motor fueron determinadas con base en los resultados de pruebas experimentales realizadas, como se describe detalladamente en el *Apéndice 4*.





$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0040 & 0.0040 & 0.0040 & 0.0040 \\ -0.0973 & 0.0973 & 0.0973 & -0.0973 \\ 0.0965 & 0.0965 & -0.0965 & -0.0965 \\ -0.0501 & 0.0501 & -0.0501 & 0.0501 \end{bmatrix}$$

Adicionalmente, si se toman como salida del sistema los propios estados, se tiene que:

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}$$

En donde  $C = I_{12 \times 12}$  y  $D = O_{12 \times 4}$

Sin embargo, no se tiene la capacidad de medir directamente algunos de los estados, específicamente las posiciones en  $x$  y en  $y$ , así como sus correspondientes velocidades. Por tanto, se hará uso de un modelo reducido que no tomará en cuenta los estados no medibles. La justificación de esta reducción estriba en que el objetivo fundamental de este trabajo sólo contempla el control de altitud (no de la posición en  $xy$ ), y el modelo reducido aún permite cumplirlo.

Evidentemente, dicha consideración conllevará la pérdida de controlabilidad del sistema en el movimiento plano horizontal, debido a que los estados correspondientes serán omitidos del modelo, y, por ende, no serán considerados en el diseño del controlador.

Como trabajo a futuro, y en el caso de que se dispusiera de equipo apropiado (por ejemplo, un sistema de cámaras para determinar la posición), podría realizarse el control del sistema en todos los grados de libertad, ya que se derivó el modelo matemático completo y se encuentra disponible en el presente trabajo.

Considerando lo anterior, las matrices que representan al sistema linealizado reducido en torno al punto de equilibrio propuesto son:

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r u$$

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0040 & 0.0040 & 0.0040 & 0.0040 \\ -0.0973 & 0.0973 & 0.0973 & -0.0973 \\ 0.0965 & 0.0965 & -0.0965 & -0.0965 \\ -0.0501 & 0.0501 & -0.0501 & 0.0501 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$x_r(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \phi(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \\ \dot{z}(t) \\ \dot{\phi}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} \quad \dot{x}_r(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{\phi}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \ddot{z}(t) \\ \ddot{\phi}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix}$$

Y, tomando como salidas a los estados, a excepción de la velocidad lineal vertical  $\dot{z}$  (estado que posiblemente deba ser observado), las matrices de la ecuación de salida  $C$  y  $D$  son:

$$y_r = C_r x_r + D_r u$$

$$C_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Empleando la representación anterior del sistema, se calcularon las matrices de controlabilidad y observabilidad para el mismo, dadas respectivamente por:

$$C = [B_r \quad A_r B_r \quad A_r^2 B_r \quad \dots \quad A_r^{n-1} B_r], \quad O = [C_r \quad C_r A_r \quad C_r A_r^2 \quad \dots \quad C_r A_r^{n-1}]^T$$

Las dos matrices anteriores son de rango completo (rango 8, en este caso), lo cual implica que el sistema reducido es totalmente controlable y totalmente observable.

## Capítulo 5

# Control<sup>2</sup>

---

*Los encantadores hechizos de esta sublime ciencia  
se revelan sólo a aquellos que tienen  
el coraje de profundizar en ella.*

**Carl Friedrich Gauss**  
(1777-1855)

*La frase más emocionante de escuchar en ciencia,  
la que anuncia nuevos descubrimientos,  
no es “¡Eureka!” sino “Es divertido”.*

**Isaac Asimov**  
(1920-1992)

### Objetivos

- Validar cualitativamente el modelo matemático del dron, obtenido en el capítulo anterior.
- Desarrollar una estrategia de control que permita lograr la estabilización vertical del vehículo; evaluar el desempeño y eficacia de la misma.

### Descripción General

En el capítulo anterior se obtuvo el modelo matemático del sistema a partir del método de Euler-Lagrange. Con base en las ecuaciones diferenciales resultantes, se llegó a una representación matricial en términos de variables de estado, la cual, en primera instancia, es no lineal; posteriormente, se definió un punto de equilibrio y se efectuó una linealización del modelo en torno del mismo.

---

<sup>2</sup> Se recuerda al lector que los códigos de todos los programas desarrollados durante la etapa de modelado matemático y control se encuentran disponibles para su consulta en el sitio:

<https://github.com/uli-rcm/Dron-FIUNAM>.

Al ser considerada la aeronave como un cuerpo rígido sin restricción en el espacio, el sistema posee seis coordenadas generalizadas, tres correspondientes a la posición y tres relativas a la orientación.

Como consecuencia, se tienen doce variables de estado (considerando las respectivas posiciones y velocidades), y un sistema no lineal de orden doce, del cual se derivó un modelo lineal en torno a un punto de equilibrio.

Debido a que no se dispone de equipo para determinar la posición horizontal de la aeronave, se recurrió a un modelo reducido de ocho variables de estado. Con base en éste, se analizaron las diferentes características relevantes del sistema, a saber, su estabilidad, controlabilidad y observabilidad. Se determinó que la planta estudiada es inestable en la posición de sustentación en vuelo; además, mediante las correspondientes matrices de controlabilidad y observabilidad, se estableció que el modelo reducido es totalmente controlable y observable.

Lo anterior significa que el sistema no podrá permanecer en una posición de vuelo por sí mismo, lo cual resulta evidente; sin embargo, la condición de controlabilidad implica que es posible encontrar valores de las entradas, en este caso, la velocidad de los rotores, para llevar la aeronave hasta dicho punto de equilibrio inestable y mantenerla ahí. Asimismo, la propiedad de observabilidad establece puede predecirse el comportamiento de cada uno de los estados del vehículo únicamente a partir de la información de las variables de control y de la salida.

Como tal, resulta evidente que, para satisfacer el objetivo general del presente proyecto (la estabilización vertical del dispositivo), es absolutamente necesario emplear técnicas de control que permitan al sistema sustentarse por sí mismo.

A lo largo del presente capítulo, se pretende diseñar una ley de control, la cual, en conjunto con todas las características que conforman al sistema, permita lograr la estabilización vertical, evaluando al mismo tiempo la eficiencia de dicho algoritmo, así como sus ventajas e inconvenientes

### Validación del modelo matemático

Antes de iniciar con el diseño de leyes de control de cualquier sistema físico, resulta conveniente verificar qué tan fielmente reproduce el modelo matemático las características del mismo. Como se mencionó previamente, un modelo es únicamente una aproximación de la realidad, la cual sirve para comprender el comportamiento de los fenómenos y de los sistemas. La utilidad de dicha representación depende de en qué medida explica la realidad en la cual está basada.

En el caso del presente proyecto, la validación experimental del sistema se vuelve complicada, debido a la naturaleza eminentemente inestable del mismo. No es posible aquí permitir que la planta tienda libremente al equilibrio a partir de una condición inicial arbitraria y observar su respuesta, para después compararla con aquella obtenida a partir del modelo matemático. Tampoco resulta conveniente excitar al sistema con una entrada cualquiera y analizar el comportamiento de la salida.

En el análisis de plantas inestables, las dos prácticas anteriormente descritas (ampliamente utilizadas para validar modelos de sistemas estables) resultan inapropiadas, y pueden derivar en grandes daños al propio dispositivo, e incluso, constituir una amenaza a la seguridad de las instalaciones de prueba y de las personas que se encuentren en ésta.

En dichas situaciones, únicamente puede validarse completamente la exactitud del modelo matemático a partir de la implementación de una ley de control que permita una operación segura del sistema. Si la aplicación correcta de dicho algoritmo conlleva la respuesta prevista, entonces puede afirmarse que el modelo es correcto.

Sin embargo, en ciertos casos es posible efectuar una validación parcial de la representación matemática de la planta, con base en la posible respuesta que ésta presentaría ante ciertas condiciones. En el *Capítulo 4*, se menciona que, de acuerdo con los resultados obtenidos del modelo matemático y de la caracterización de los diferentes elementos que conforman el vehículo, la velocidad de rotación teórica de los motores para que el sistema se mantenga en un estado de sustentación de forma indefinida es:

$$\Omega = 1211.85 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Dicho de otra forma, si los cuatro rotores girasen a esta velocidad, el dron debería de poder sustentar su posición. A partir de dicha hipótesis, se concluye que una validación parcial del modelo consiste en observar el comportamiento de la aeronave cuando la velocidad de los motores se acerca a la anteriormente mencionada; si el sistema muestra una tendencia a elevarse, entonces se confirma la predicción obtenida con el modelo, y puede establecerse que, aún de forma cualitativa, éste describe apropiadamente el comportamiento de la planta.

En última instancia, la señal de control empleada corresponde al ancho de pulso (tiempo en alto) de la señal PWM necesaria para accionar los ESC, generada por el microcontrolador. En el *Capítulo 3* se mencionó que la frecuencia de esta señal es de 50 [Hz] y que el tiempo en alto debe variar entre 1000 [µs] (0 [% PWM]) para una velocidad de rotación nula de los motores y 2000 [µs] a máxima velocidad (100 [% PWM]).

Por tanto, fue necesario encontrar una relación entre la velocidad angular de los motores y el ancho de pulso, o tiempo en alto, de la señal PWM de control. En la *Tabla 5-1* se resumen los datos experimentales recabados.

Posteriormente, en la *Figura 5-1* se despliegan gráficamente las mediciones y se obtiene una curva de tendencia que establece la relación entre las variables involucradas.

Puede observarse, además, que el coeficiente de determinación  $R^2$  es muy cercano a la unidad, lo que significa que el ajuste realizado explica satisfactoriamente la dispersión de datos.

Medición	$T_{alto}$ [ $\mu$ s]	$\omega$ [rev/min]	$\omega$ [rad/s]
0	1000	0	0.0000
1	1100	5334	558.5752
2	1200	8015	839.3288
3	1300	10100	1057.6695
4	1400	11715	1226.7919
5	1499	12840	1344.6017
6	1601	13950	1460.8406
7	1701	15100	1581.2683
8	1799	16420	1719.4984

Tabla 5-1. Datos experimentales de  $T_{alto}$  vs  $\omega$ .

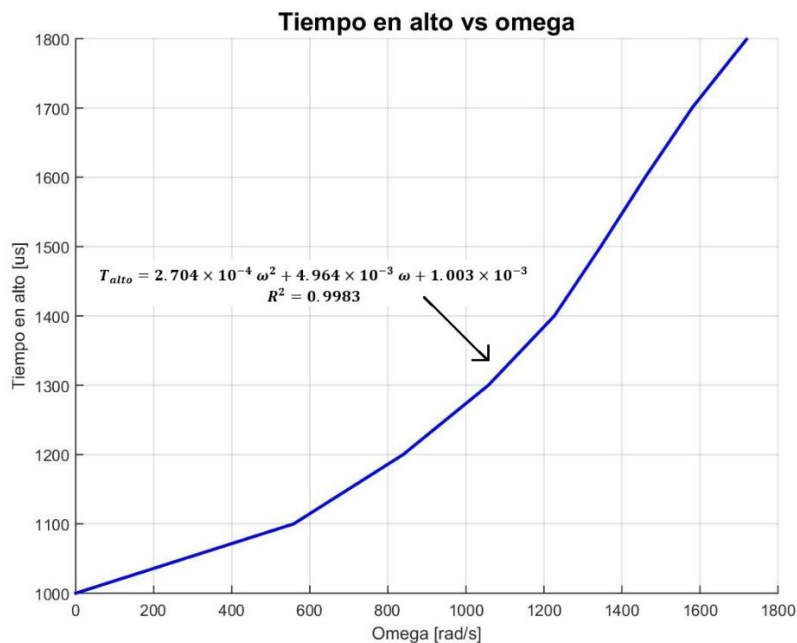


Figura 5-1. Gráfica de  $T_{alto}$  vs  $\omega$ .

Con base en la ecuación de la curva de ajuste, el ancho de pulso que debe tener la señal de control para alcanzar la velocidad de sustentación es:

$$T_{alto,sust} = 1406.12 [\mu s]$$

Este valor de tiempo en alto corresponde aproximadamente al 40.61 [%] del PWM máximo. Para corroborar lo anterior, se generó un programa muy sencillo en la plataforma LabVIEW, el cual únicamente se utiliza para enviar al dron la información del tiempo en alto de los motores brushless, vía comunicación serial mediante el set de telemetría por radiofrecuencia.

Durante el desarrollo de esta prueba, fue posible observar que, para señales con un tiempo en alto menor a los 1200 [ $\mu s$ ] (20 [%PWM]), el vehículo prácticamente no experimentaba ninguna alteración en su estado. A partir de los 1300 [ $\mu s$ ] (30 [%PWM]), el dron comenzó a moverse en un plano horizontal, todavía en contacto con el suelo. La prueba tuvo que ser detenida con una señal de 1350 [ $\mu s$ ] de ancho de pulso por cuestiones de seguridad.

A partir de lo anteriormente expuesto, puede notarse que las predicciones obtenidas mediante el modelo matemático, corresponden aproximadamente con el comportamiento real de la planta, con lo cual queda validado cualitativamente el modelo obtenido.

### Modo de operación RC

La siguiente fase del desarrollo del proyecto consistió en verificar la capacidad de sustentación del dispositivo, así como la funcionalidad de la estructura mecánica. Para ello, se implementó un modo de operación del vehículo como radiocontrol (RC).

Con el fin de lograr lo anterior, se hizo uso de la plataforma de software Multiwii, la cual consta de múltiples librerías de código abierto que permiten, en conjunto con una tarjeta de vuelo compatible y un control remoto emisor de radiofrecuencia, operar múltiples aeronaves RC de forma transparente para el usuario.

Es conveniente señalar en este punto que Multiwii es ampliamente utilizado alrededor del mundo por aficionados y diseñadores de aeronaves RC. Su código principal se encuentra programado en C/C++ y es sumamente complejo. No únicamente permite operar vía radiocontrol vehículos aéreos de diferente número de rotores y distintas configuraciones, sino que además proporciona múltiples funcionalidades y características adicionales, como la capacidad de leer los datos de los sensores incluidos en la tarjeta controladora de vuelo, compatibilidad con dispositivos de radio y GPS, rutinas para cámaras fotográficas a bordo, entre otras.

El código de *Multiwii* incluye un controlador PID embebido, el cual permite estabilizar los diversos ángulos de navegación de la aeronave, logrando así que ésta se sustente en vuelo. En general, los usuarios no necesitan involucrarse en esta parte del programa; únicamente se requiere de ciertas configuraciones básicas (especificar la tarjeta controladora de vuelo, definir el tipo y configuración del vehículo multirotor, etc), y se estará en condiciones de efectuar pruebas de vuelo. Por todas las razones anteriores, la plataforma *Multiwii* resulta sumamente amigable para el usuario, y su versatilidad y robustez la han convertido en un referente para el mundo de la aeronáutica RC.

Ya se ha mencionado que el software *Multiwii* permite la operación radiocontrolada de una aeronave multirotor. Para ello, es necesario utilizar un control remoto emisor de radiofrecuencia. Dicho dispositivo se comunica con un receptor a bordo, el cual se conecta directamente a la tarjeta controladora de vuelo en la que se encuentra cargada el código de *Multiwii*.

Mediante la estación emisora, el usuario puede modificar el parámetro *throttle* (aceleración) del vehículo, así como los valores de (velocidad para) los ángulos de navegación, *roll*, *pitch* y *yaw* (alabeo, cabeceo y guiñada), los cuales ya se han definido previamente.

En última instancia, la tarjeta FC recibe señales PWM de 50 [Hz] con un ancho de pulso de 1000[ $\mu$ s] a 2000 [ $\mu$ s] a través del receptor a bordo, el cual se encuentra conectado a los canales correspondientes. Para el *throttle*, un ancho de pulso de 1000 [ $\mu$ s] representa una aceleración nula, con lo cual los motores no giran, mientras que a 2000 [ $\mu$ s] se tiene la máxima velocidad en los rotores. En el caso de los ángulos, a un ancho de pulso de 1500 [ $\mu$ s] le corresponde una posición de cero grados, mientras que los valores extremos de 1000 [ $\mu$ s] y 2000 [ $\mu$ s] representan las máximas desviaciones angulares respecto a la media (aproximadamente 30°), en sentidos opuestos.

En el caso del presente proyecto, no se disponía de una unidad de radiocontrol, por lo cual ésta hubo de emularse empleando nuevamente LabVIEW, junto con una tarjeta de desarrollo Arduino Mini Pro, montada a bordo de la aeronave.

En la *Figura 5-2* se muestra el panel frontal de la aplicación desarrollada para esta prueba. A partir de los controles presentes en la interfaz de usuario, se modificaban los diversos parámetros de vuelo, tal y como se haría con una emisora RC. Posteriormente, empleando el kit de telemetría por radiofrecuencia, dichos valores eran enviados al microcontrolador Arduino, el cual interpretaba la información recibida y generaba las señales de PWM correspondientes, para posteriormente alimentar a la tarjeta controladora de vuelo con éstas, brindando así la información necesaria para el vuelo.



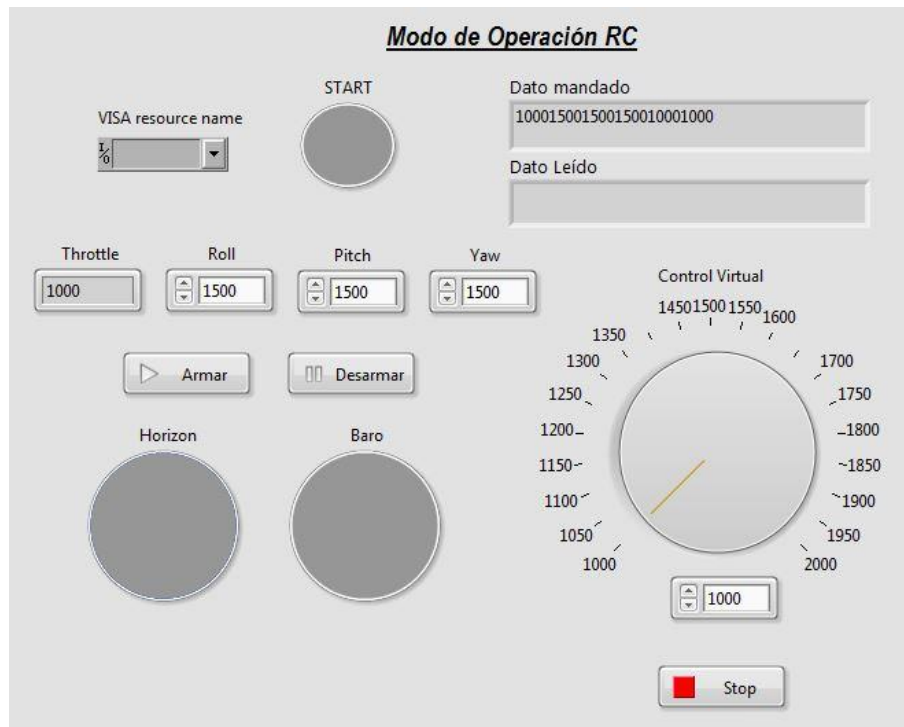


Figura 5-2. Panel frontal de la aplicación en LabVIEW para el modo de operación RC.

En la imagen anterior, se aprecian otros controles además de los ya mencionados. En particular, los botones *Armar* y *Desarmar* se utilizan para habilitar o deshabilitar los ESC's; esto es útil por motivos de seguridad, evitando así un arranque imprevisto. La operación de armado se efectúa al enviar pulsos con una amplitud de 1000  $\mu\text{s}$  y 2000  $\mu\text{s}$  a los canales *throttle* y *yaw*, respectivamente. Para desarmar, deben enviarse pulsos de 1000  $\mu\text{s}$  a los canales anteriores. Cuando los ESC se encuentren desarmados, los motores no girarán, aún si reciben una señal de *throttle* mayor a 1000  $\mu\text{s}$ .

Los controles *Baro* y *Horizon* sirven para activar o desactivar las correspondientes modalidades de vuelo permitidas por Multiwii, cada una de las cuales proporciona funciones acrobáticas distintas a la aeronave.

El objetivo del modo de operación como vehículo RC fue, como se mencionó anteriormente, corroborar la capacidad de sustentación del sistema, así como la resistencia de la estructura mecánica diseñada. Durante las pruebas efectuadas en esta modalidad, fue posible verificar que el dispositivo efectivamente posee la capacidad de despegar y que los actuadores proporcionan el empuje suficiente para elevar y mantener en vuelo al mismo, así como para desplazarlo en diferentes direcciones.

Sin embargo, al ser ésta una configuración de funcionamiento sin control en ninguna coordenada lineal, resultó sumamente complicado mantener el dominio sobre la trayectoria del vehículo. Asimismo, el aterrizaje presenta bastantes problemas, debido principalmente a la dificultad de operación y a incapacidad de controlar la velocidad de descenso del dispositivo.

## Diseño del algoritmo de control

Una vez verificada la capacidad de sustentación, fue posible diseñar la ley de control que permitiera al dron alcanzar el objetivo fundamental de regulación y estabilización vertical. Para ello, se optó por un controlador por retroalimentación de estados. Dicha técnica de control fue seleccionada debido a su eficiencia para controlar plantas inestables, su robustez, su fiabilidad y por su relativamente sencilla implementación.

## Estabilización

En el *Capítulo 4* se derivó el modelo matemático del sistema, encontrándose que éste es de orden doce, consecuente con un cuerpo en el espacio con seis grados de libertad. En un principio, el modelo es no lineal; posteriormente, fue linealizado en torno a un punto de equilibrio que resultó ser, como resulta lógico, inestable.

Por razones expuestas en ese mismo apartado, fue necesario llevar a cabo una reducción de orden del sistema completo, omitiéndose los estados correspondientes a la posición y velocidad horizontal. También fueron calculadas las matrices de controlabilidad y observabilidad para este sistema reducido, encontrándose que es totalmente controlable y observable.

Si un sistema es controlable, entonces existe una ley de control  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  tal que el vector de estados  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  pueda alcanzar cualquier valor deseado en un tiempo finito. La estructura de control por retroalimentación de estados corresponde a la siguiente ecuación:

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{K} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{r}(t)$$

En donde  $\mathbf{K}$  es una matriz de ganancias del controlador y  $\mathbf{r}(t)$  es el vector de señales de referencia, el cual permite manipular el punto de equilibrio al que se desea converger:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{K} \mathbf{x}_{eq} + \mathbf{u}_{eq}$$

De esta forma, el sistema de control realimentado, en donde  $\mathbf{r}(t)$  es una nueva entrada, resulta en:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{r}(t)$$

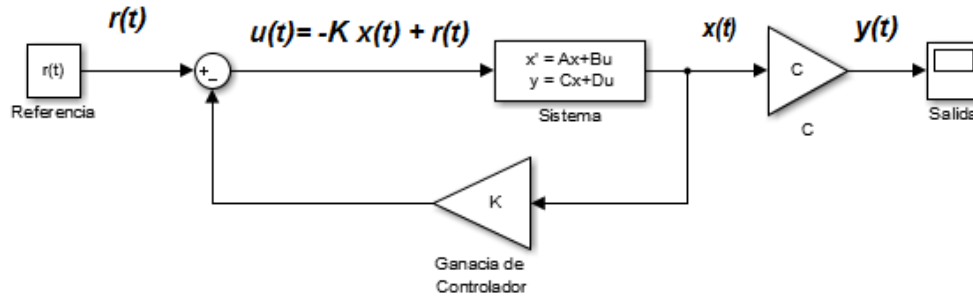


Figura 5-3. Sistema de control por retroalimentación de estados.

Para asegurar la convergencia asintótica al punto de equilibrio deseado, debe cumplirse que la matriz  $A - BK$  sea una matriz Hurwitz, es decir:

$$Re\{\lambda_i(A - BK)\} < 0, \quad \forall i$$

Con esto se logra la estabilidad del sistema de control realimentado. Entonces, el diseño del controlador se limita a la obtención de la matriz de ganancias  $K$  que haga que el sistema sea estable. Existen muchas maneras para encontrar dicha matriz. En el presente proyecto, se empleó una técnica de control óptimo conocida como control LQR (*Linear Quadratic Regulator*).

Los controladores diseñados por métodos de optimización buscan minimizar una funcional de costo  $J$  dependiente de los estados, de las entradas, del punto de equilibrio seleccionado y del tiempo.

$$J = J(x(t), u(t), x_{eq}, u_{eq}, t)$$

En el caso de un controlador LQR, el funcional de costo es una forma cuadrática de los estados y de las entradas:

$$J = \int_0^t (\bar{x}^T Q \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u}) dt$$

En donde  $Q$  es una matriz de ponderación del error de estados y  $R$  es la matriz de ponderación para la energía del controlador. Tanto  $Q$  como  $R$  deben ser positivas definidas y simétricas:

$$Q \geq 0, \quad Q = Q^T$$

$$R > 0, \quad R = R^T$$

Puede demostrarse [23] que la utilización de la funcional de costo anterior conduce a la ecuación de Riccati continua:

$$-\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t)A + Q - P(t)B R^{-1} B^T P(t)$$

Donde  $P(t)$  es una matriz simétrica y positiva definida. Con base en lo anterior, la matriz de ganancia puede obtenerse como:

$$K(t) = R^{-1}B^T P(t)$$

Si en la funcional de costo  $J$  permitimos que  $t \rightarrow \infty$ , se obtiene el control LQR con horizonte de tiempo infinito:

$$J = \int_0^{\infty} (\bar{x}^T Q \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u}) dt$$

Cuyas soluciones están dadas por la ecuación algebraica de Riccati:

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0$$

$$K = R^{-1} B^T P$$

El control LQR con horizonte de tiempo infinito proporciona una alternativa para obtener la matriz de ganancias  $K$  del sistema de control realimentado. Además, constituye un algoritmo de control estable y robusto.

Para encontrar dicha ganancia, únicamente hay que proponer las matrices de peso  $Q$  y  $R$  que produzcan el comportamiento de estados deseado. En este punto, cabe mencionar que existe siempre un compromiso entre el desempeño del controlador y el esfuerzo exigido a los actuadores. Por ende, las matrices de peso deben ser tales que logren un balance entre los dos aspectos anteriores.

Una vez definidos todos los parámetros numéricos del sistema, se probaron diferentes matrices de peso hasta encontrar aquellas que brindaran un desempeño de los estados satisfactorio y un esfuerzo moderado para los actuadores.

Los parámetros que se consideraron para evaluar el desempeño fueron el tiempo de asentamiento de los estados y la magnitud de la señal de control. Las matrices de peso seleccionadas son las siguientes:

$$Q = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con estas matrices de ponderación, se tiene que la respuesta transitoria de la altura  $z$  corresponde a la de un sistema sobreamortiguado con un tiempo de asentamiento de los estados es cercano a los 10 [s]. Por último, la señal PWM de control se satura por arriba durante menos de 0.5 [s], convergiendo a los 3 [s] a su valor de equilibrio de 1406.12 [ $\mu$ s] (40.61 [%PWM]).

Estos valores resultan satisfactorios porque conducen a una respuesta controlada del sistema en un tiempo apropiado, sin exigir mucho esfuerzo a los actuadores. Más adelante, en el apartado correspondiente a la simulación, podrán observarse las gráficas que muestran el comportamiento del sistema.

También es conveniente mencionar que en la matriz de ponderación de estados  $Q$  se dio mayor peso a los ángulos  $\phi$  y  $\theta$ , los cuales juegan un papel decisivo en la estabilización de la aeronave. La rápida estabilización del ángulo  $\psi$ , aunque deseable, no es tan importante para el correcto funcionamiento del dispositivo, e inclusive es tolerable una pequeña desviación respecto al valor de equilibrio.

Dado que la implementación del algoritmo de control se realizó a partir de medios digitales, en particular con el uso de un microcontrolador a bordo de la aeronave, fue necesario obtener la matriz de ganancia de controlador en tiempo discreto. Más adelante, en el apartado de *Implementación*, se profundizará en estos detalles.

Haciendo uso del algoritmo de discretización exacta con un retén de orden cero (*zoh, zero-order hold*) para un tiempo de muestreo  $T_s$  [23], las matrices continuas de un sistema ( $A, B, C, D$ ) se convierten en su equivalente discreto ( $A_d, B_d, C_d, D_d$ ), y se encuentran dadas por:

$$A_d = e^{AT_s}$$

$$B_d = \begin{cases} \int_0^{T_s} e^{A\alpha} d\alpha, & \text{si } \nexists A^{-1} \\ A^{-1} (A_d - I)B, & \text{si } \exists A^{-1} \end{cases}$$

$$C_d = C, \quad D_d = D$$

Una vez establecido en el presente capítulo que la estrategia de control a emplearse será un controlador por retroalimentación de estados, resulta evidente el por qué es preciso efectuar la mencionada reducción: para poder implementar un controlador para el sistema completo, deben de disponerse de mediciones de los estados.

La anterior carencia no puede ser subsanada ni siquiera mediante la implementación de un observador, ya que los estados  $x$  y  $y$  no son observables con la información entrada-salida de la que se dispone. Si se tuviesen mediciones de estos estados, sí sería factible observar las correspondientes velocidades y entonces diseñar un algoritmo de control para el sistema completo, es decir, sin reducción de orden.

También se había mencionado previamente que la consideración anterior conlleva inherentemente a la pérdida de controlabilidad en cuatro estados, a saber:  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ . Sin embargo, el objetivo fundamental del presente trabajo, la regulación en el grado de libertad  $z$ , aún es factible.

Para el cálculo de la matriz de ganancias  $K$  se empleó el modelo reducido de orden 8 dado por las matrices  $A_r, B_r, C_r, D_r$ , las matrices de peso  $Q, R$  mostradas anteriormente y un valor para el tiempo de muestreo  $T_s = 20$  [ms], correspondiente a una frecuencia de ciclo del microcontrolador de 50 [Hz].

Con estos valores, la matriz de ganancias discretas calculada es:

$K =$

$$\begin{bmatrix} 49.25 & -91.13 & 91.26 & -14.30 & 92.35 & -46.14 & 46.24 & -46.78 \\ 49.25 & 91.13 & 91.26 & 14.30 & 92.35 & 46.14 & 46.24 & 46.78 \\ 49.25 & 91.13 & -91.26 & -14.30 & 92.35 & 46.14 & -46.24 & -46.78 \\ 49.25 & -91.13 & -91.26 & 14.30 & 92.35 & -46.14 & -46.24 & 46.78 \end{bmatrix}$$

Los polos característicos de tiempo discreto de lazo cerrado (eigenvalores de la matriz  $A - BK$ ) son:

$$\lambda = \{0.985 \pm 0.0097j, 0.6775, 0.6798, 0.8181, 0.9856, 0.9930, 0.9937, 0.9560, 0.9560\}$$

Recuérdese que los anteriores son polos en lazo cerrado discretos, por lo que la condición de estabilidad es que todos estos se encuentren dentro del círculo unitario en el plano complejo, es decir:

$$|\lambda_i| < 1, \forall i$$

Lo cual puede verificarse fácilmente para los valores obtenidos. Por tanto, se concluye que, con la matriz de ganancias calculadas, el sistema en lazo cerrado es estable alrededor del punto de operación propuesto y se ha logrado el objetivo de regulación de la altura.

Una vez diseñada la ley de control, se está en posición de analizar en qué forma ésta ha de implementarse, además de verificar si se dispone de toda la información necesaria para el controlador.

En este caso, es importante considerar si es posible obtener mediciones directas y fiables de los estados, ya que el algoritmo diseñado depende directamente de estos datos.

En el *Capítulo 3*, se mencionó que se haría uso de una tarjeta controladora de vuelo (FC, Flight Controller) AIO V2, compatible con *Multiwii*. También en éste apartado se especificaron las características técnicas de dicho elemento, junto con los sensores y funcionalidades con los que cuenta.

Particularmente, la tarjeta tiene integrada una Unidad de Procesamiento de Movimiento MPU6050, con acelerómetro y giroscopio de 6 ejes. Este sensor es capaz de medir las velocidades angulares necesarias para el controlador. Además, el magnetómetro digital embebido HMC5883L de 3 ejes proporcionará el valor de los ángulos de navegación *roll*, *pitch* y *yaw*. Finalmente, el altímetro barométrico MS5611-01BA01 brinda la altura del vehículo y su velocidad lineal en dicho grado de libertad.

Con lo anterior, se dispone de mediciones para los ocho estados de los cuales consta el modelo reducido para el dron. Más adelante, en la sección correspondiente a la implementación del controlador, se profundizará en cómo han de obtenerse estos datos a partir de la tarjeta FC.

Sin embargo, se tiene que las mediciones del último sensor mencionado, el altímetro barométrico, no son muy precisas. Las especificaciones técnicas de dicho dispositivo mencionan que los valores leídos pueden oscilar en un rango de  $\pm 10$  [cm] del valor real (dato corroborado mediante pruebas). En particular, el sensor es bastante susceptible a la variación de luz, lo cual afecta en buena medida su funcionamiento.

Este hecho, sin embargo, no es un obstáculo insalvable para la adecuada implementación del controlador. El efecto que se tendrá en la aeronave si las mediciones de altura varían en un cierto intervalo será que el nivel del dron oscilará alrededor de la posición de referencia, teniendo así un comportamiento controlado. Lo anterior sólo podrá verificarse después de la implementación, durante las pruebas de vuelo.

Es necesario destacar que ésta es una falla debida a hardware; si se dispusiera de equipo para medir la posición del dispositivo de una forma más precisa (nuevamente, una alternativa sería un sistema de cámaras), se estaría en posibilidad de alcanzar un control con un margen de tolerancia mucho más cerrado, no únicamente en la altura  $z$ , sino en las coordenadas planas  $xy$ . El punto previo puede considerarse como un factor a considerar para el trabajo a futuro del presente proyecto.

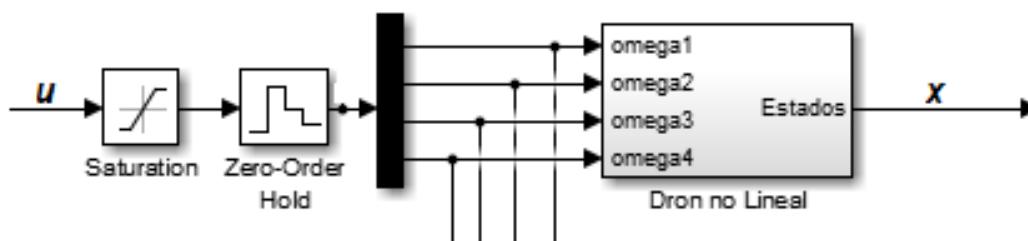
## Simulación

Una de las herramientas más útiles y que más beneficios ha reportado para la Ciencia y la Ingeniería es la simulación por computadora. Gracias a ella resulta posible resolver problemas que de otra manera serían inexpugnables; permite concentrar la atención en los aspectos fundamentales de un problema, convirtiendo complicados, largos, repetitivos y tediosos cálculos matemáticos en tareas rutinarias. A través de ella puede obtenerse información cualitativa útil para analizar el comportamiento de algún fenómeno, sin necesidad de resolver el modelo matemático directamente.

En el presente proyecto, se dispone del modelo matemático no lineal del sistema, así como una linealización del mismo en torno a un punto de operación. Dado que el modelo no lineal es una representación más fiel de la realidad física del sistema, toda ley de control generada, para ser válida, debe ser capaz de estabilizar y regular la altura para el dron no lineal.

Sin embargo, por motivos de simplicidad matemática, el algoritmo de control se diseña para un sistema linealizado en torno a un punto de equilibrio. La justificación matemática de esto se encuentra en el Método Indirecto de Lyapunov (también conocido como el Segundo Teorema de Lyapunov), el cual establece que, si un punto de equilibrio de un sistema linealizado en torno a éste es estable, entonces dicho punto de equilibrio también será estable para el sistema no lineal original.

En la *Figura 5-4* se presenta el bloque generado para representar el dron no lineal. Al interior de éste se han programado las ecuaciones de estado obtenidas a partir de la representación matricial de las ecuaciones de movimiento resultantes de la formulación lagrangiana del modelo.



*Figura 5-4. Bloque de subsistema que representa al dron no lineal.*

Se observa en la figura anterior que las señales de entrada para el sistema corresponden a las velocidades angulares de los rotores, mientras que las señales de salida son los propios estados. Además, es posible notar que, con el fin de hacer la simulación más parecida al sistema real, se ha incluido un bloque de saturación para la variable de control. Finalmente, la naturaleza discreta de la implementación está representada por el bloque muestreador con retén de orden cero.



En la *Figura 5-5* se muestra el bloque que representa al sistema linealizado. Como se mencionó, éste queda completamente definido por un espacio de estados con matrices  $A_r, B_r, C_r, D_r$ .

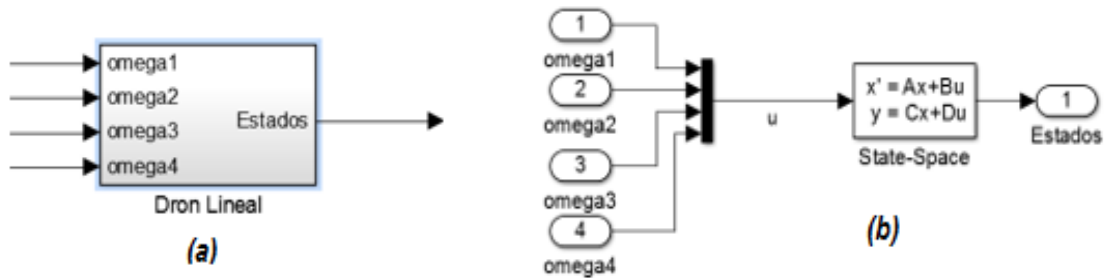


Figura 5-5. (a) Bloque de subsistema que representa al dron lineal. (b) Interior del bloque de subsistema.

Para el dron analizado, se ha diseñado un sistema de control en lazo cerrado que consta de un controlador por realimentación de estados. Éste ha sido obtenido considerando que la implementación final del algoritmo se llevará a cabo mediante medios digitales, particularmente con el uso de un microcontrolador.

A continuación, se presentan las diversas gráficas que constituyen los resultados de la simulación, correspondientes al dron no lineal. Para ésta, además de los diversos parámetros numéricos relativos al sistema y que ya han sido discutidos, se ha empleado el siguiente punto de equilibrio y el siguiente vector de condiciones iniciales:

$$x_{eq} = \begin{bmatrix} z_{ref} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_{ref} = 1, \quad x_0 = \begin{bmatrix} z_0 \\ \phi_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \\ \dot{z}_0 \\ \dot{\phi}_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\psi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.175 \\ -0.87 \\ 0.262 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde todos los valores para la altura  $z$  están dados en metros y en metros sobre segundo para  $\dot{z}$ , en radianes para los ángulos y en radianes sobre segundo para las velocidades angulares. Obsérvese también que las condiciones iniciales  $\phi_0, \theta_0, \psi_0$  corresponden aproximadamente a  $10^\circ, -5^\circ$  y  $15^\circ$ , respectivamente. El punto de equilibrio seleccionado, así como las condiciones iniciales propuestas coinciden con circunstancias compatibles con una prueba física del sistema real.

En primer término, se muestra la respuesta de los estados  $z$  y  $\dot{z}$  :

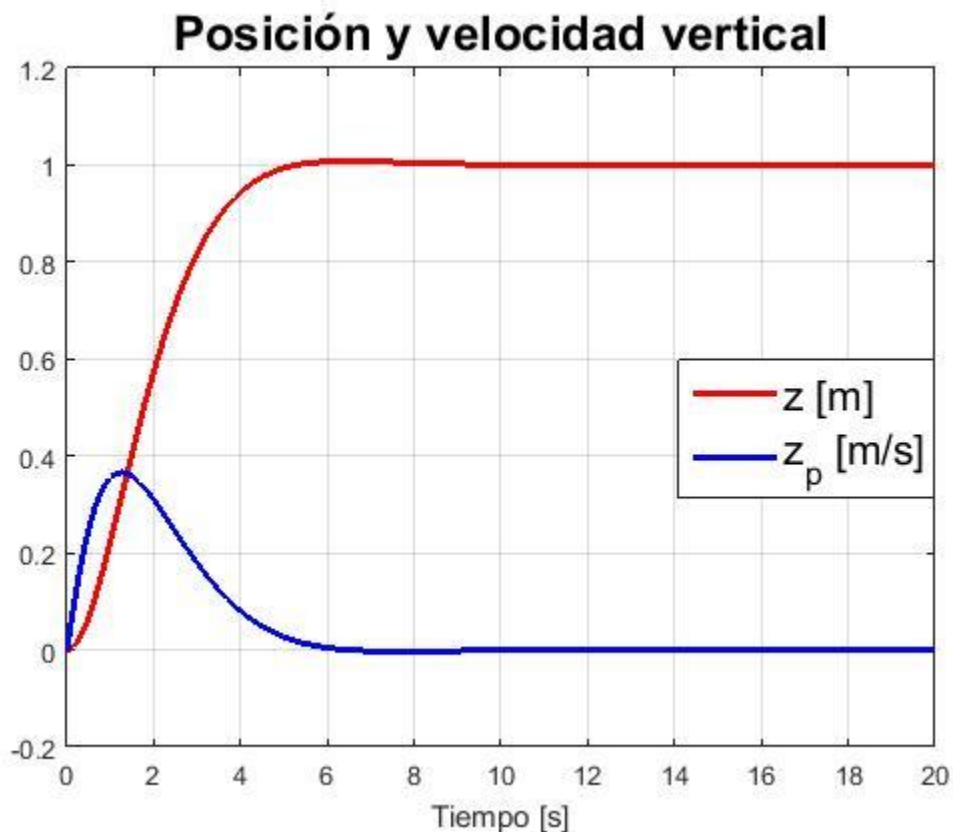
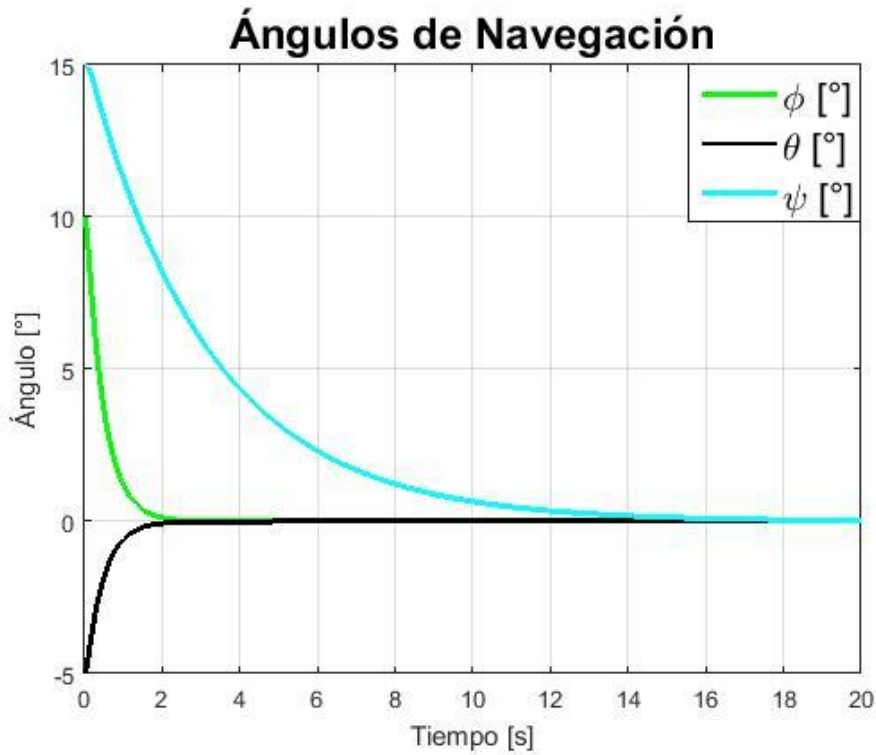


Figura 5-6. Posición y velocidad verticales.

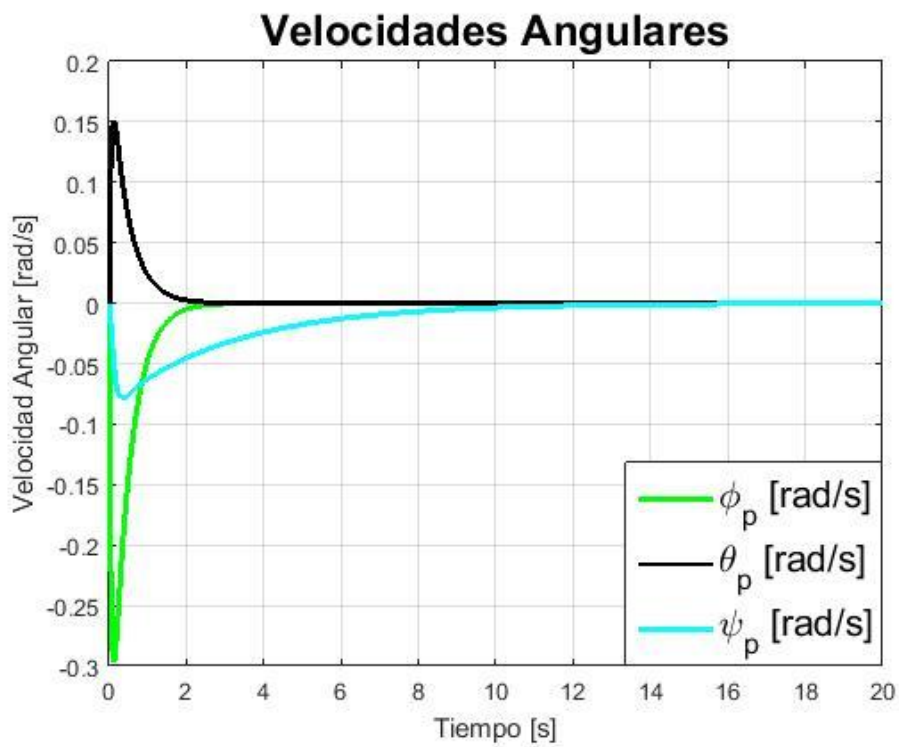
Analizando la *Figura 5-9*, es posible observar que la ley de control logra estabilizar al sistema en alrededor de 10 [s], regulando apropiadamente la altura. Gracias a la acción de la matriz de precompensación, se tiene un error en estado permanente nulo. Como se desea, la velocidad después del transitorio es cero.

La *Figura 5-7(a)* muestra el comportamiento de los ángulos de navegación, mientras que en la *Figura 5-7(b)* se presentan las respectivas velocidades angulares. Se aprecia que los ángulos parten de la condición inicial definida y logran estabilizarse en aproximadamente el mismo tiempo que la altura. Lo mismo ocurre con la velocidad angular. Las dos figuras anteriores prueban que, teóricamente, el controlador diseñado es capaz de lograr todos los objetivos planteados.

Un factor que es importante considerar es el esfuerzo que se solicita a los actuadores para estabilizar el sistema. Esta información se incluye en la *Figura 5.8*, donde se muestran las señales de control para cada uno de los actuadores, tanto en velocidad de rotación como en tiempo en alto. Se observa que únicamente existe saturación por arriba durante un breve lapso, y después la señal de control tiende a un valor constante.

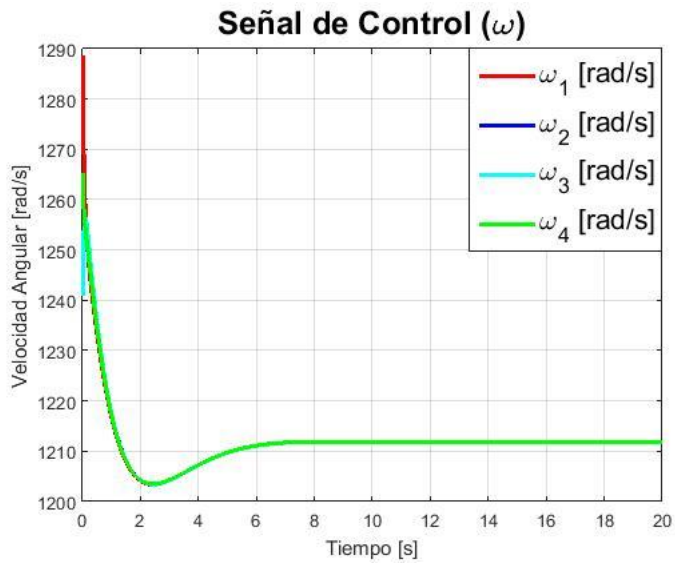


(a)

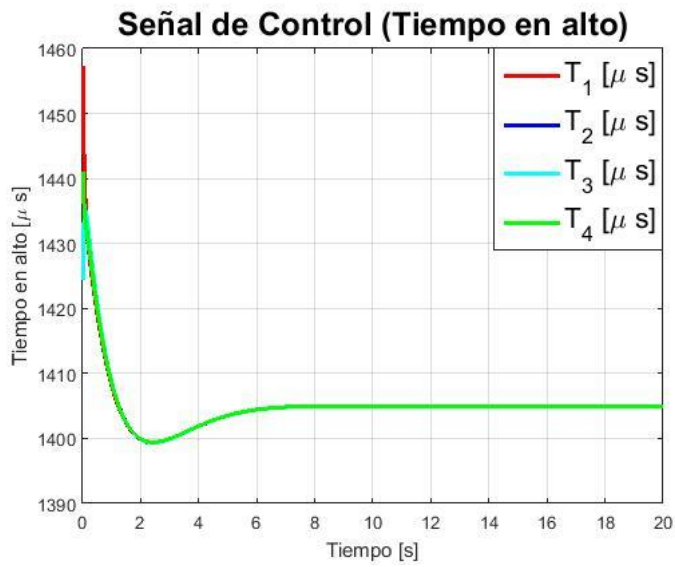


(b)

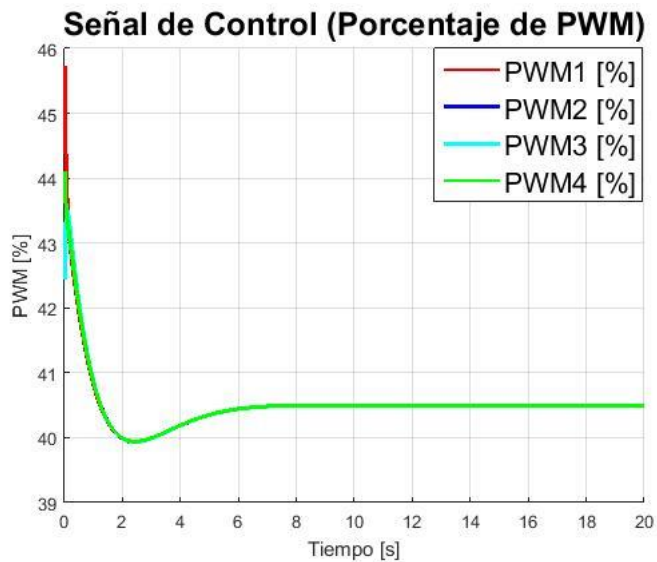
Figura 5-7. (a) Ángulos de Navegación. (b) Velocidades angulares.



(a)



(b)



(c)

Figura 5-8. Señales de control. (a) Velocidad angular. (b) Tiempo en alto. (c) Porcentaje de PWM.

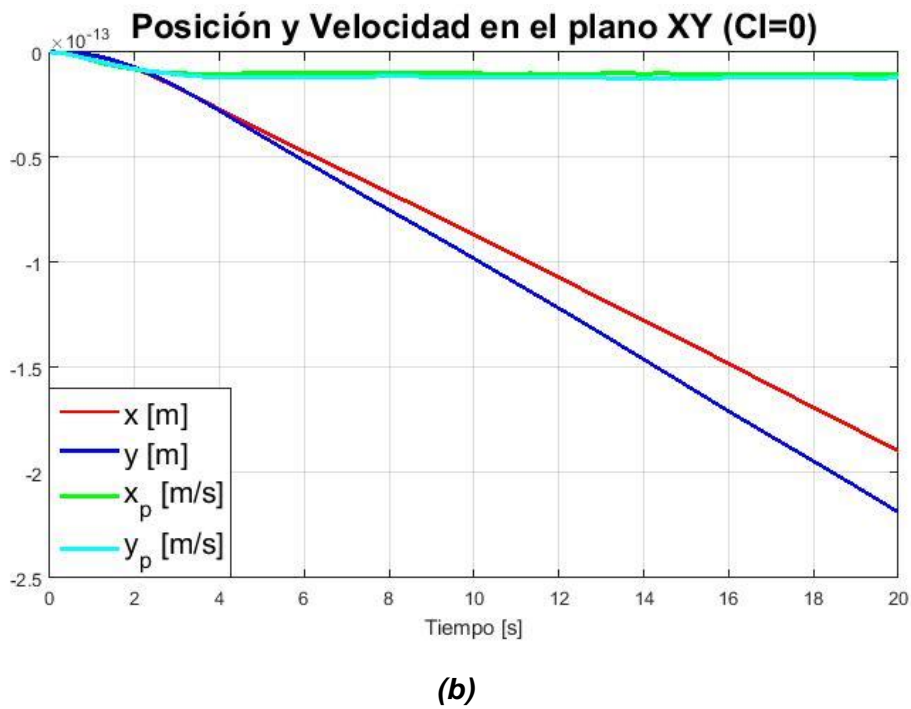
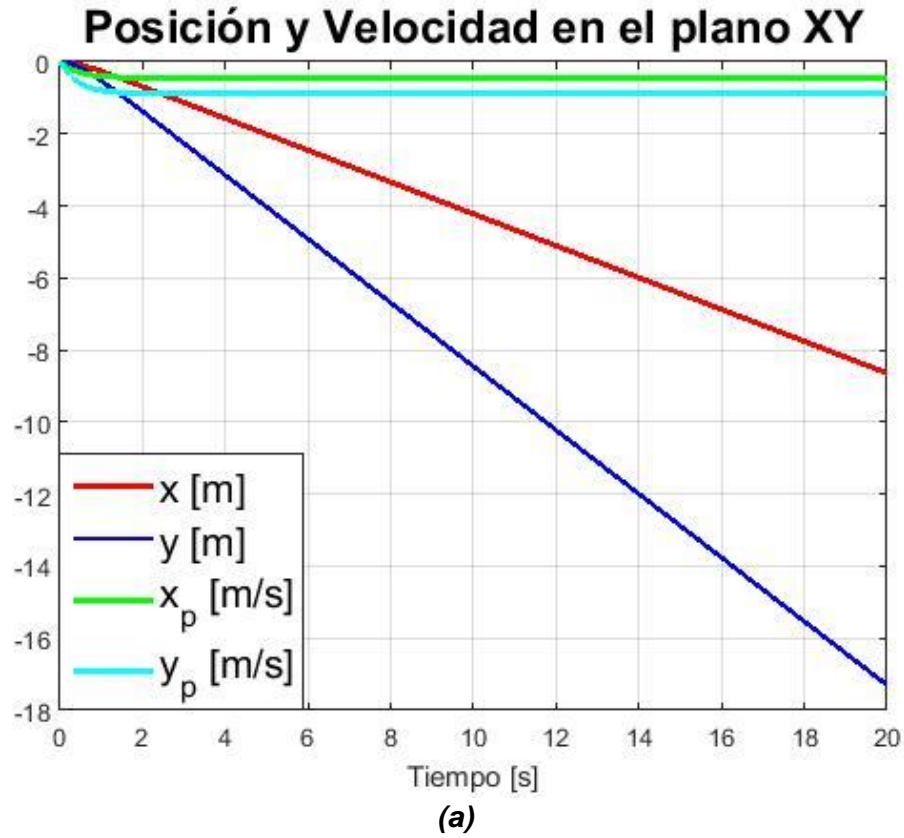


Figura 5-9. Posición y velocidad en el plano  $xy$ .  
 (a) Condiciones iniciales de ángulos no nulas. (b) Condiciones iniciales de ángulos nulas.

Un aspecto que vale la pena resaltar de la *Figura 5.8* corresponde a los valores de equilibrio de las señales de control. Durante la validación experimental del modelo matemático, se había mencionado que la velocidad angular en los rotores necesaria para sustentar una posición de equilibrio en vuelo era:

$$\Omega = 1211.85 \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

Lo cual corresponde a un tiempo en alto de la señal de PWM de:

$$T_{alto,sust} = 1406.12 [\mu s]$$

En la *Figura 5.8* se muestra que las señales de control, dadas en las unidades correspondientes, tienden a valores que coinciden con los anteriormente señalados. De esta forma, una vez más, se corrobora que los resultados obtenidos previamente son consistentes.

Por último, resulta conveniente analizar el comportamiento de la posición y la velocidad en el plano horizontal  $xy$ , a pesar de que el control de estos estados no entra en los alcances del presente proyecto. La *Figura 5-9(a)* muestra los estados mencionados cuando se parte de las condiciones iniciales definidas previamente. Como era de esperarse, al no ser considerados dichos estados en el modelo reducido, no se tiene controlabilidad sobre los mismos; consecuentemente, estos divergen a una velocidad constante.

Es necesario mencionar que, bajo condiciones iniciales nulas en los ángulos, la posición y velocidad en el plano  $xy$  serán ambas nulas, como se observa en la *Figura 5-9(b)* (Nótese que la escala del eje vertical se encuentra multiplicada por un factor de  $10^{-13}$ ). Sin embargo, bajo circunstancias reales, dicha condición es sumamente improbable.

Finalmente, y sólo con fines comparativos, se presenta la gráfica con las alturas para el sistema lineal y no lineal. Se observa que la ley de control logra estabilizar a la planta linealizada, en aproximadamente el mismo tiempo que al sistema no lineal.

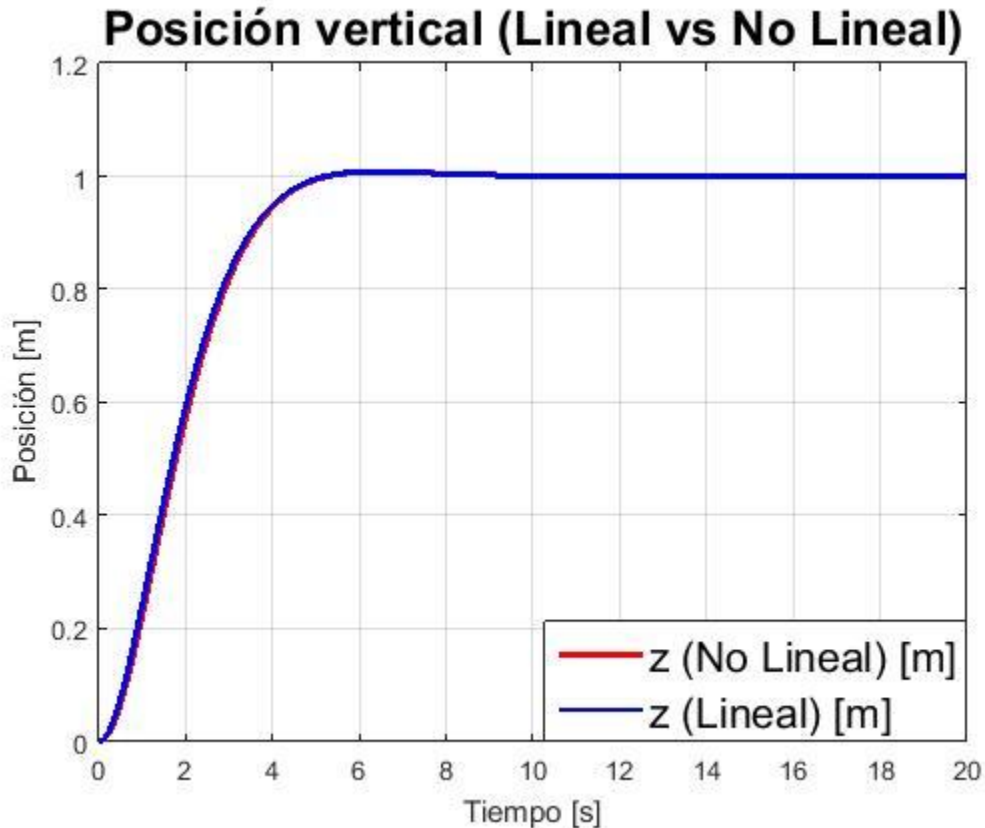


Figura 5-10. Comparación de alturas para los sistemas lineal y no lineal.

Las gráficas anteriores corresponden al comportamiento del sistema ante un controlador LQR, considerando condiciones ideales en la adquisición de los datos; esto implica que no se han tomado en cuenta los efectos que producirían el ruido o las perturbaciones en los estados del sistema.

Como se mencionó anteriormente, el sensor de altura presenta variaciones considerables a medida que el tiempo aumenta. En un instante, la lectura tiene un valor determinado, y en el instante posterior la medición puede cambiar drásticamente, a pesar que la altura del dron permanezca constante. Por la razón anterior, debe de verificarse computacionalmente que el controlador estabilice al sistema, no obstante el comportamiento errático de dicho sensor.

Para simular el comportamiento estocástico del sensor, se añadió una componente aleatoria a la señal correspondiente a la medición de la altura  $z$ . Para ello, simplemente se utilizó un bloque de señal aleatoria acotada con valores de  $\pm 0.1$  [m], los cuales corresponden con la resolución del sensor y cuya implementación puede apreciarse en la *Figura 5-11*.

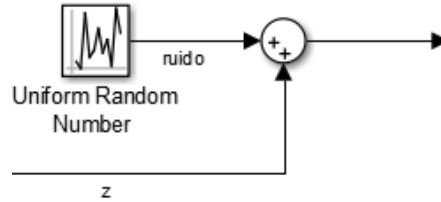


Figura 5-11. Altura  $z$  con error de medición.

Después de realizar dicha modificación y simular nuevamente el comportamiento del sistema, empleando las mismas condiciones iniciales y el mismo controlador, se obtuvieron las gráficas que se presentan a continuación.

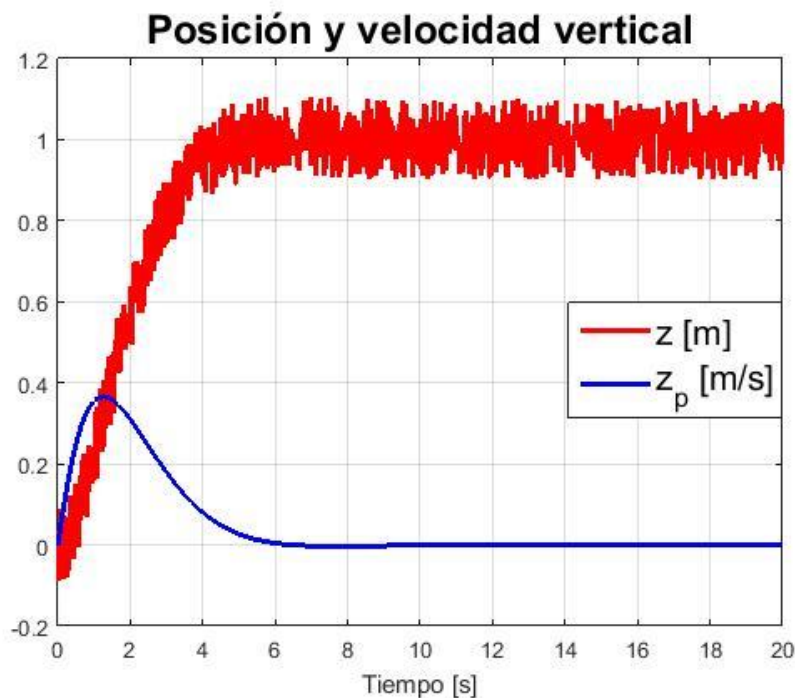
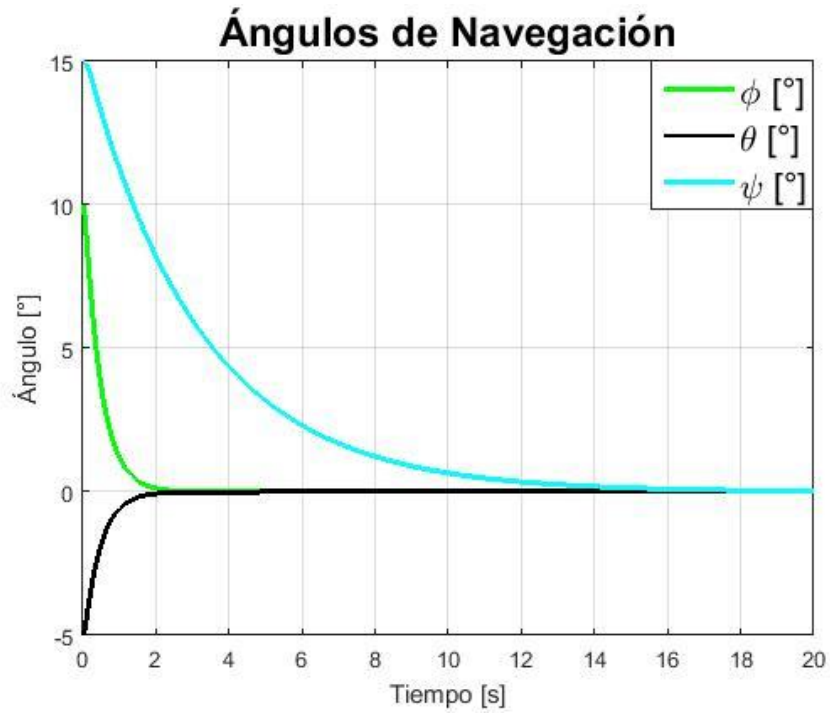


Figura 5-12. Posición y velocidad verticales con ruido de medición en  $z$ .

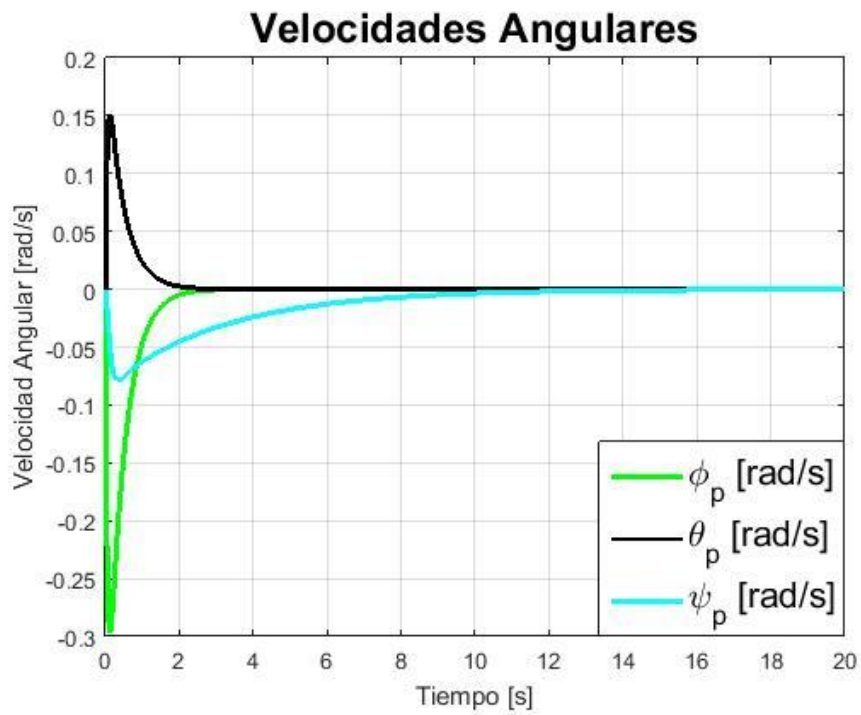
Como se puede observar en la *Figura 5-12*, la posición y velocidad verticales no convergen asintóticamente al punto de equilibrio. Sin embargo, la altura oscila alrededor de 1.1 [m] con una amplitud de 0.05 [m] y la velocidad alrededor de 0 [m/s] con una amplitud de aproximadamente 0.02 [m/s], lo cual indica que el controlador es capaz de regular relativamente bien la altura y de estabilizar el error.

La *Figura 5-13* muestra que los ángulos de navegación y las velocidades angulares siguen convergiendo al origen de forma asintótica, aunque los tiempos de asentamiento incrementaron a más del doble de su valor sin ruido de medición.





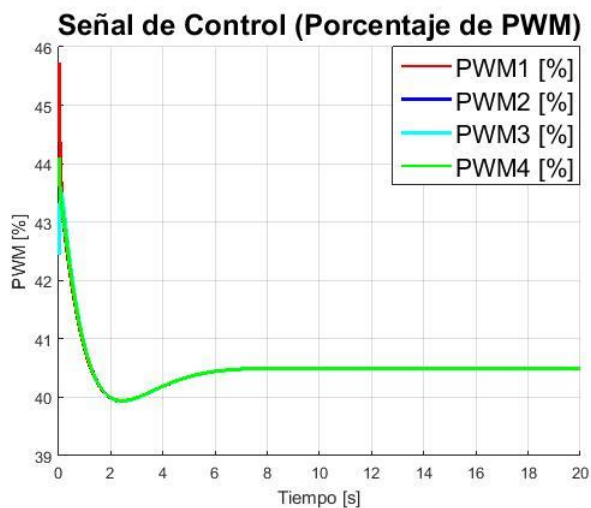
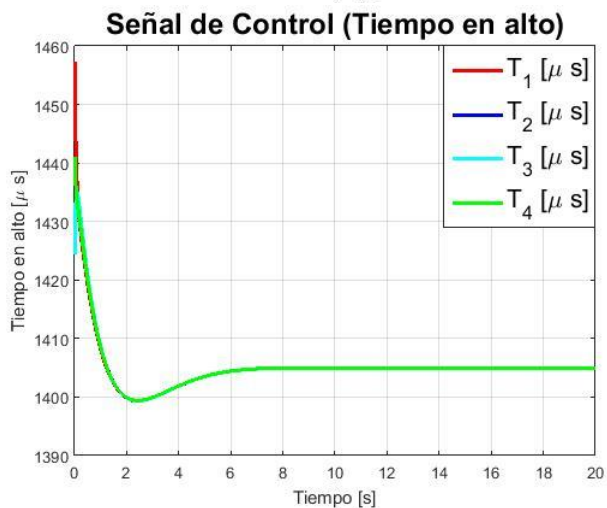
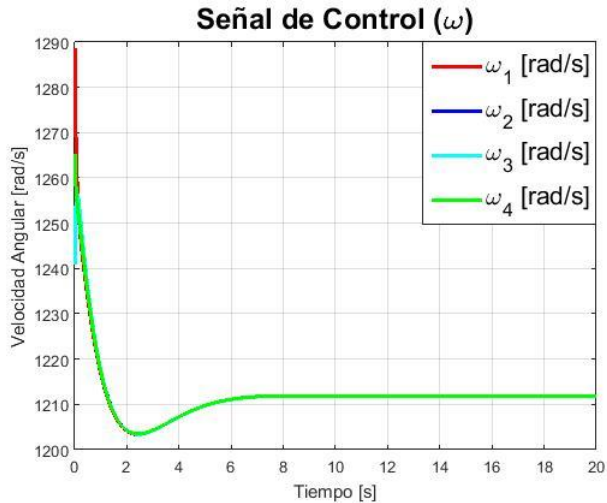
(a)



(b)

Figura 5-13. (a) Ángulos de Navegación con ruido en z. (b) Velocidades angulares con ruido en z.

En la *Figura 5-14* se observa claramente que, a pesar de que la medición de la altitud presenta un comportamiento muy ruidoso, las señales de control no. También, es posible apreciar que la media del tiempo en alto se encuentra aproximadamente en 1400 [ms], el cual está muy cerca del valor de equilibrio.



*Figura 5-14. Señales de control con ruido en z. (a) Velocidad angular. (b) Tiempo en alto. (c) Porcentaje de PWM.*

Con las gráficas anteriores es posible inferir que el comportamiento del cuadricóptero será aceptable con respecto a la regulación de altura  $z$ , ya que el error máximo en  $z$  después de 5 [s] será menor de 0.2 [m].

### Implementación del controlador

En el apartado anterior, se llevó a cabo la simulación del algoritmo de control diseñado para la estabilización de la aeronave, obteniéndose la importante conclusión de que, al menos teóricamente, el controlador es capaz de regular apropiadamente la altura, permitiéndole así al sistema mantener una posición de sustentación en vuelo estable.

La siguiente fase, naturalmente, consistió en la implementación del controlador en el sistema físico real, para poder así verificar su funcionamiento. Con este objetivo, se generó un código programado en la interfaz de Arduino, en el cual se incluye el algoritmo de control y el protocolo de comunicación serial empleado para leer los datos provenientes de los sensores, embebidos en la tarjeta FC. Ésta constituye la información sobre los estados, indispensable para el funcionamiento del controlador. Véase el *Apéndice 6*.

El Protocolo de Comunicación Serial Multiwii (*MSP, Multiwii Serial Protocol*) permite efectuar solicitudes de información y ejecutar comandos en tarjetas controladoras de vuelo compatibles con la plataforma de software *Multiwii*, la que ya ha sido mencionada previamente en este trabajo. En particular, este protocolo permite obtener la información recabada por los sensores a bordo de la aeronave, razón por la cual se incluyeron rutinas dentro del código principal para la comunicación. Para más detalles acerca de *MSP*, referirse al *Apéndice 5*.

La interconexión de los diferentes elementos que conforman el sistema se muestra esquemáticamente en la *Figura 5-15*. El código principal se implementó en la tarjeta *Teensy*, la cual se encarga de calcular las señales de control de acuerdo con la ley diseñada y posteriormente envía éstas a los actuadores, a través de los circuitos variadores de velocidad ESC, los cuales constituyen la etapa de potencia. La información relativa a los estados se obtiene vía comunicación serial (Puerto *Serial1*), desde la tarjeta controladora de vuelo, mediante el protocolo MSP.

Finalmente, una aplicación en LabVIEW fue diseñada para fungir como estación en tierra. A partir de ésta, se tiene control del flujo del proceso y es posible enviar la referencia vertical deseada. Este programa se comunica con el dron mediante comunicación serial (Puerto *Serial2*), empleando el kit de telemetría por radiofrecuencia.

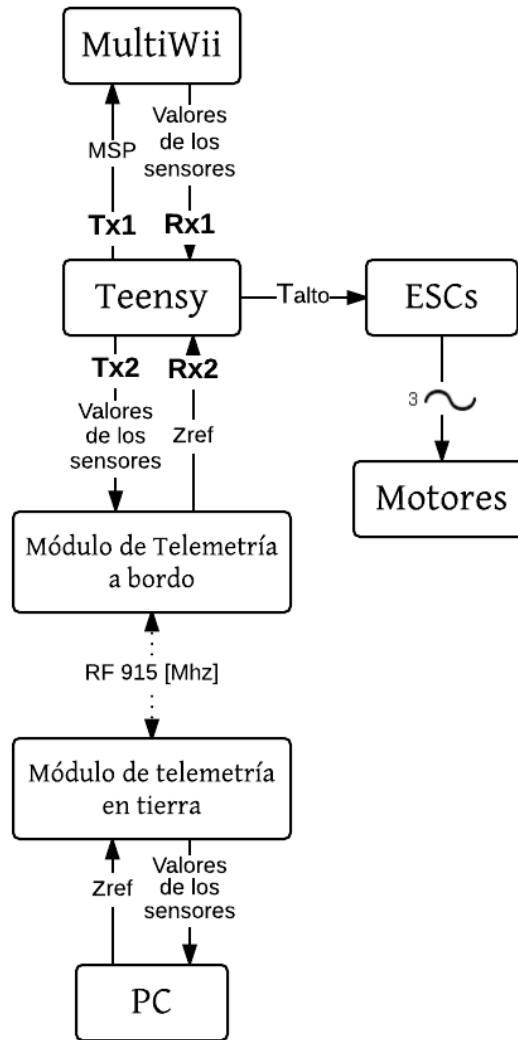


Figura 5-15. Interconexión de elementos del sistema de control.

El funcionamiento general del proceso fue diseñado bajo el esquema de una máquina de estados, programada mediante LabVIEW, como se aprecia en la Figura 5-16.

En el estado **INICIO**, comienza todo el proceso del sistema; en éste, se leen los datos de los sensores, provenientes del FC mediante el protocolo MSP; posteriormente, en el estado **PROCESAR DATOS**, se efectúan los cálculos necesarios para dar un formato apropiado a la información y desplegarla en la interfaz de usuario. La sucesión de estados anterior se repite continuamente hasta que se presente la señal **Iniciar Transmisión**, la cual da la pauta para la transición hacia la fase de activación. Mientras el proceso se encuentre en los dos primeros estados, los motores no girarán y el algoritmo de control no tendrá ningún efecto.

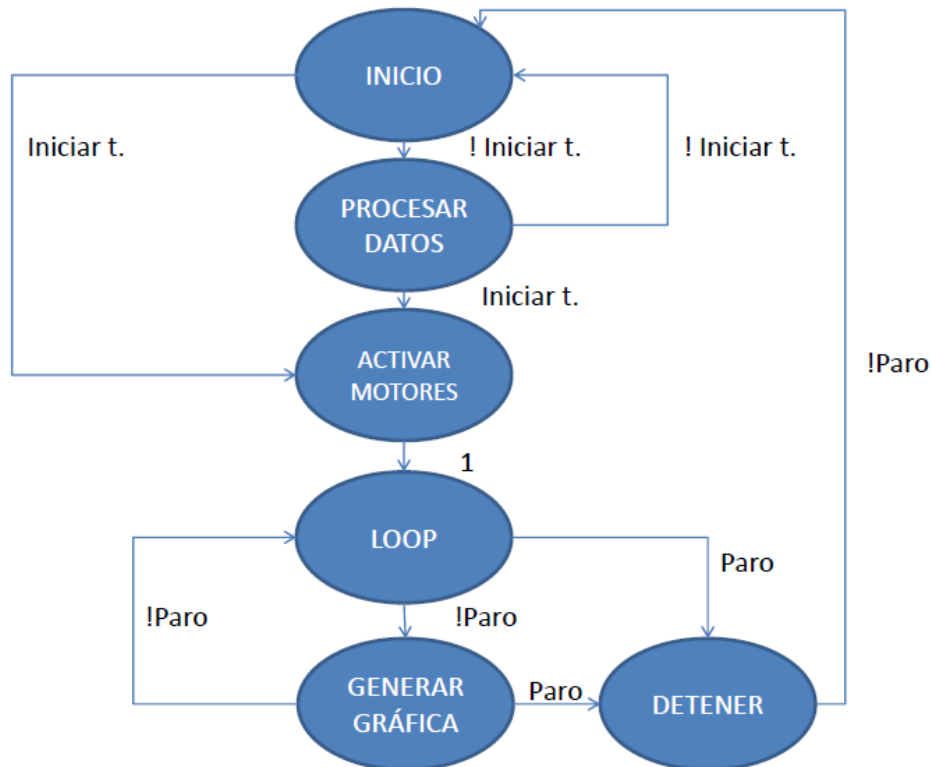


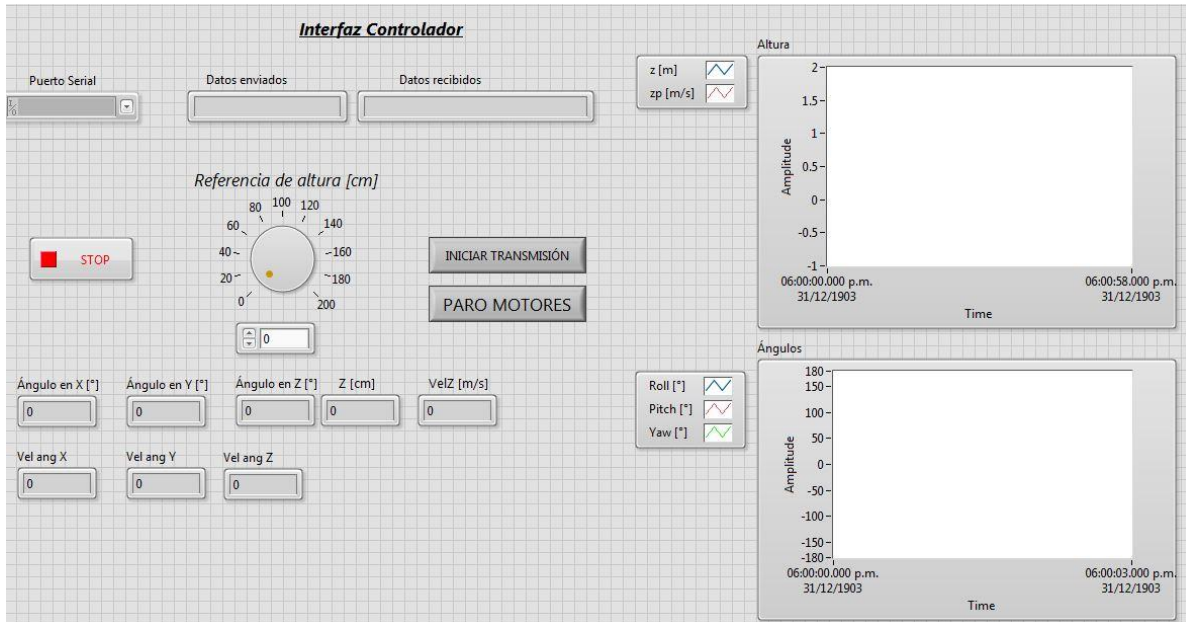
Figura 5-16. Diagrama de transición de estados para el proceso general del sistema de control.

Una vez que se presiona el botón **Iniciar Transmisión**, el flujo de proceso pasa al estado **ACTIVAR MOTORES**, en el cual los rotores comienzan a girar paulatinamente hasta llegar a una velocidad cercana a la de equilibrio, sin que todavía la aeronave tienda a elevarse. Adicionalmente, se envía una señal a la estación a bordo para indicar a ésta que se debe iniciar el cálculo de las señales de control y el envío de las mismas a los actuadores.

Del estado anterior se pasa incondicionalmente al estado **LOOP**, en el cual constantemente se envía la referencia de altura y se reciben los datos correspondientes a la posición y orientación del dron, desde la terminal a bordo. Posteriormente, en el estado **GENERAR GRÁFICAS**, los datos son procesados y desplegados, tanto en indicadores numéricos como en gráficas.

La sucesión de estados anterior se repetirá mientras no se presione el botón **Parar Motores**, señal con la cual se detienen los rotores al pasar el flujo de proceso al estado **DETENER**. Finalmente, al desaparecer la señal **Parar Motores**, el sistema vuelve al estado **INICIO**. Si en cualquier momento se presiona el botón **STOP**, el programa detendrá su ejecución.

En la *Figura 5-17*, se muestra el panel frontal de la aplicación desarrollada en LabVIEW, descrita anteriormente.



*Figura 5-17. Panel frontal de la terminal en tierra.*

## Resultados

Una vez concluido todo el desarrollo anterior, fue posible realizar pruebas de funcionamiento sobre el sistema físico real; esto para corroborar la eficacia del controlador para estabilizar los ángulos de navegación y regular la altura.

Un primer ensayo del algoritmo de control consistió en una prueba manual, en la cual se pretendía observar la respuesta del sistema realimentado ante una variación en su orientación. Para entender apropiadamente la prueba realizada, resulta conveniente analizar la *Figura 4-7*, la cual, por comodidad, se repite en la *Figura 5-18*. En ésta, se muestran los marcos de referencia inercial y fijo en el cuerpo para el cuadricóptero los ángulos de navegación *roll*, *pitch* y *yaw*  $\{\phi, \theta, \psi\}$ , y las velocidades angulares y fuerzas de empuje desarrolladas en cada rotor.

En el *Capítulo 4* relativo al modelado matemático, se explicó detalladamente cómo es que la variación en la velocidad de rotación de los motores compensa una variación angular específica.

Por un momento, considérese que todos los ángulos de navegación son cero, lo cual significa que el vehículo se encuentra en una posición perfectamente horizontal respecto al suelo; si se incrementa el ángulo  $\phi$ , se presenta un movimiento de alabeo, que produce que los motores 2 y 3 tiendan a subir, mientras que los motores 1 y 4 tenderían a disminuir su altitud.

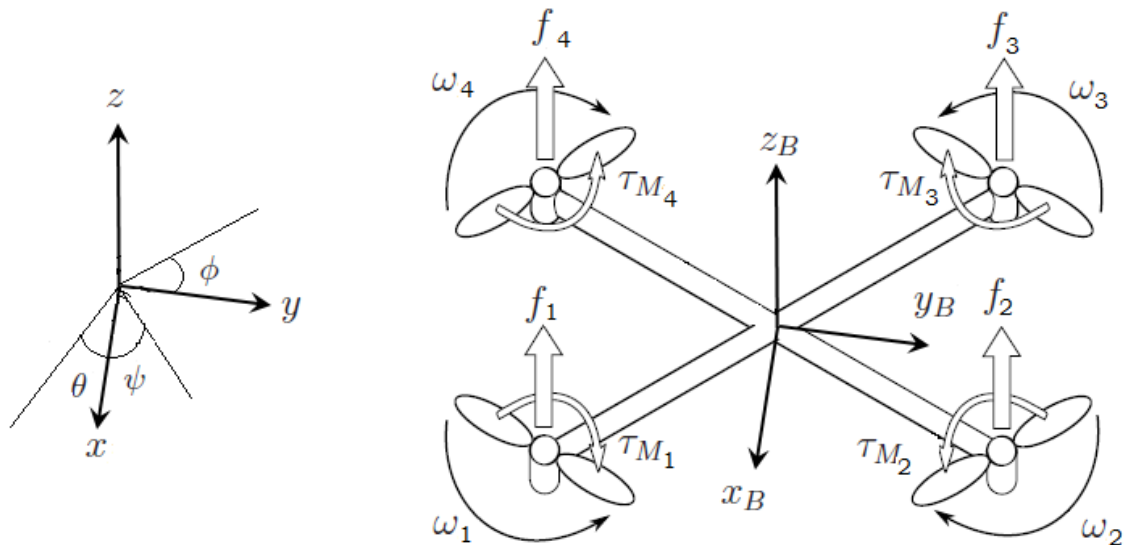


Figura 5-18. Marcos de referencia inercial y fijo en el cuerpo para un cuadricóptero.

Para compensar esto, la velocidad angular de los motores 1 y 4 deberá aumentar, mientras ésta disminuye en los motores 2 y 3; con esto, se incrementarán las fuerzas respectivas 1 y 4, lo que producirá un par que estabilizará nuevamente el ángulo  $\phi$ . Si dicho ángulo es ahora negativo, deberá tomarse la acción contraria, es decir, aumentar la velocidad en los motores 2 y 3 y disminuirla en los motores 1 y 4.

Las Figura 5-19 muestra la variación angular del cuadricóptero durante la prueba manual, en la cual se observó la respuesta del sistema ante un movimiento de alabeo. Puede verificarse que la ley de control implementada compensó apropiadamente estas variaciones, de manera consistente con lo que se explicó más arriba.

La señal de control, en este caso, se encuentra expresada en tiempo en alto y en porcentaje de PWM para cada actuador, el cual, como se ha mencionado anteriormente, está directamente relacionado con la velocidad de rotación de los motores.

Pruebas similares fueron efectuadas para corroborar la acción de la ley de control en la estabilización de los ángulos *pitch* y *yaw*. En el primer caso, y de acuerdo con la Figura 5-18, a una variación angular positiva le corresponde un incremento de velocidad en los motores 3 y 4 y una disminución de velocidad en los motores 1 y 2; si, por el contrario, se tiene una posición de pitch negativa, la velocidad de los motores 3 y 4 debe disminuir y aumentar la de los motores 1 y 2. Todo esto se muestra gráficamente en la Figura 5-20.

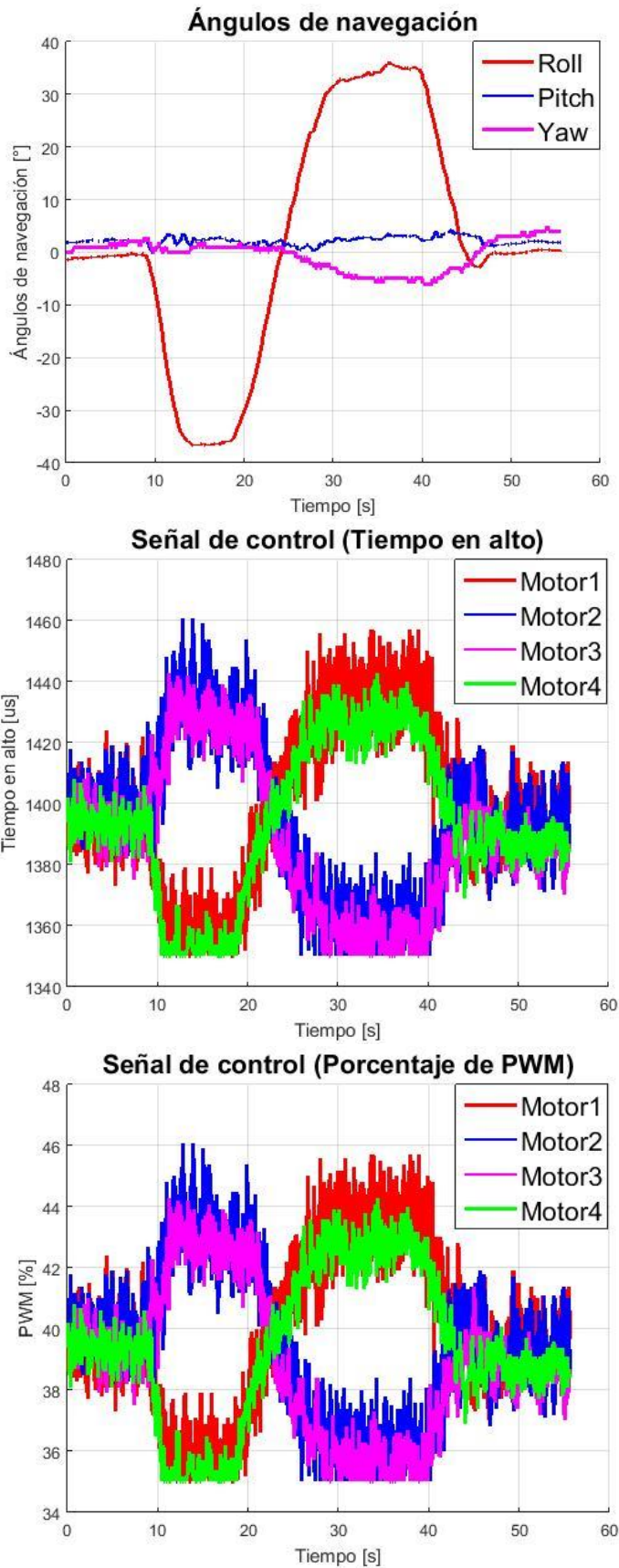


Figura 5-19. Prueba manual para la estabilización de alabeo.



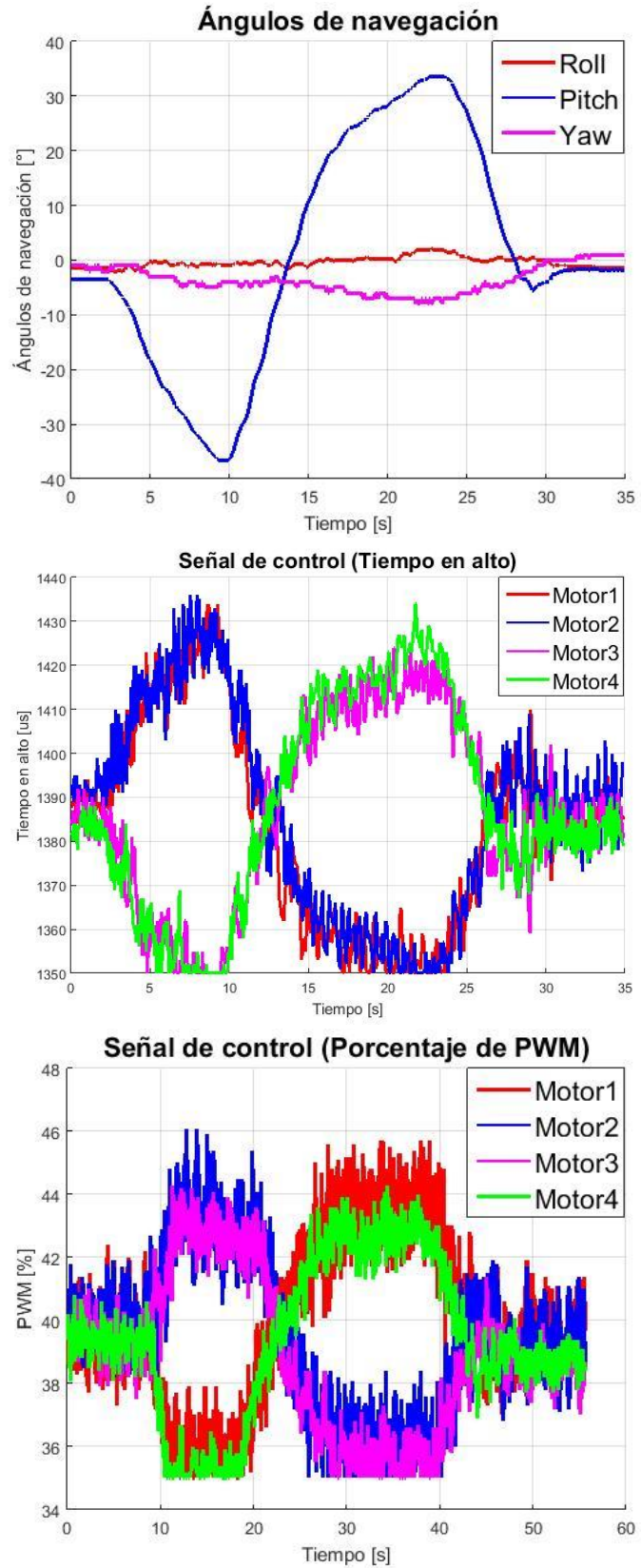


Figura 5-20. Prueba manual para la estabilización de cabeceo.

Finalmente, en el caso de una desviación positiva del ángulo  $\psi$ , debe incrementarse la velocidad de los motores 1 y 3 y disminuirse la velocidad en los motores 2 y 4. Para una desviación negativa, se debe tomar la acción contraria, es decir, incrementar la velocidad en los motores 2 y 4 y disminuirla en los motores 1 y 3. Los resultados de la prueba se observan en la *Figura 5-21*.

Puede notarse que, para este ángulo, los valores de la señal de control son menores; esto se debe a que la matriz de peso de error de estados  $Q$  empleada para diseñar el controlador LQR da prioridad a la estabilización de los ángulos *roll* y *pitch*, mientras que la ponderación para el *yaw* es cinco veces menor.

Adicionalmente, es posible observar en todas las gráficas anteriores que la señal de control asume, en cada caso, valores moderados; también conviene notar que nunca se alcanza la saturación superior, mientras que la inferior se presenta durante intervalos cortos de tiempo. Por último, los valores de tiempo en alto tienden al valor de equilibrio cuando la desviación angular es nula.

Las pruebas manuales anteriores muestran que la acción de control efectuada en cada caso es apropiada, con lo cual se corrobora cualitativamente la eficacia del algoritmo diseñado para lograr la estabilización de los ángulos de navegación.

La fase final de pruebas consistió en ensayos de vuelo en el sistema físico real, una vez implantado el sistema de control. En éstos, se verificó experimentalmente la validez del modelo matemático obtenido, así como la capacidad de la ley de control para estabilizar el dispositivo y regular la altura.

Lamentablemente, no se disponía de las condiciones propicias ni de las instalaciones adecuadas para una prueba que arrojara resultados concluyentes. La falta de controlabilidad en el plano horizontal (debida, como ya fue mencionado, a la incapacidad de medir la posición en los grados de libertad  $x$  y  $y$ ), produjo un desplazamiento no deseado que obligó a interrumpir el ensayo prematuramente, para evitar percances.

Dicho desplazamiento horizontal ya ha sido discutido anteriormente, en el apartado correspondiente a la simulación; en éste, se explicó que, si las condiciones iniciales de los ángulos no eran nulas, la aeronave tendería a moverse en el plano  $xy$ . También aquí se comentó que el modelo reducido del controlador no considera dichos grados de libertad, por lo cual no podría tomarse ninguna acción para compensar este movimiento.

A pesar de que las pruebas no pudieron desarrollarse hasta el final, sí fue posible obtener algunos resultados que verifican el desempeño del controlador. Específicamente, se realizaron dos ensayos de vuelo del dron; en la siguiente figura, se presentan los datos recabados durante el primero de ellos.

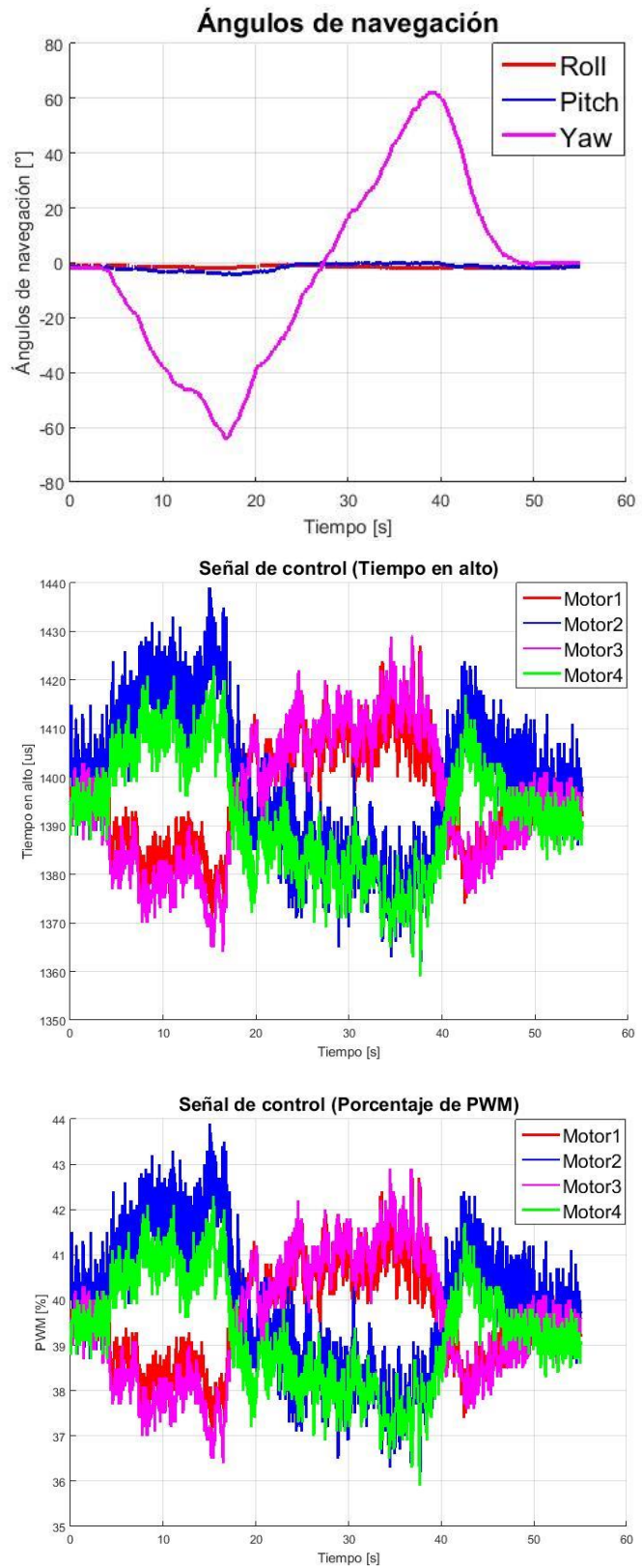
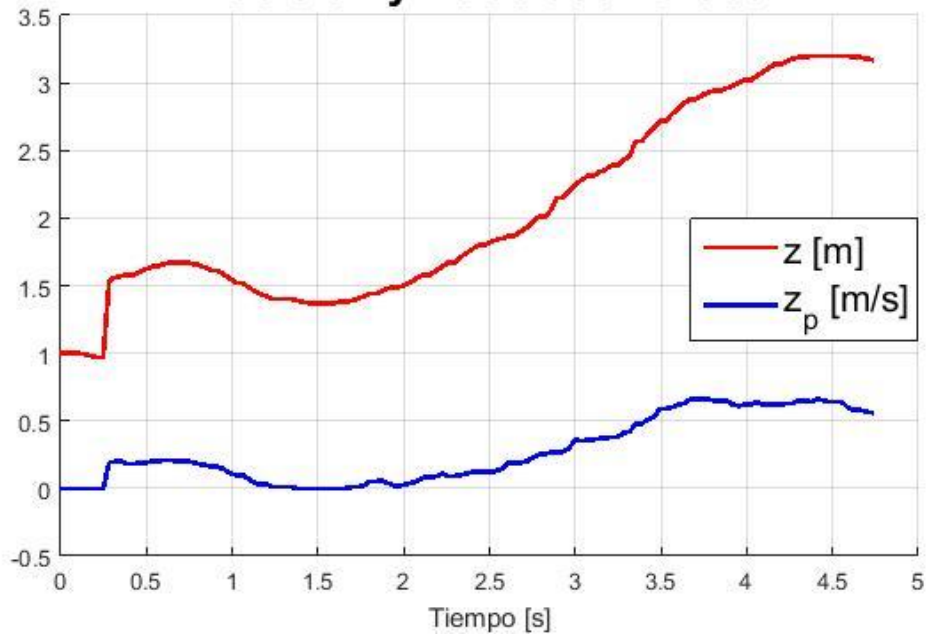


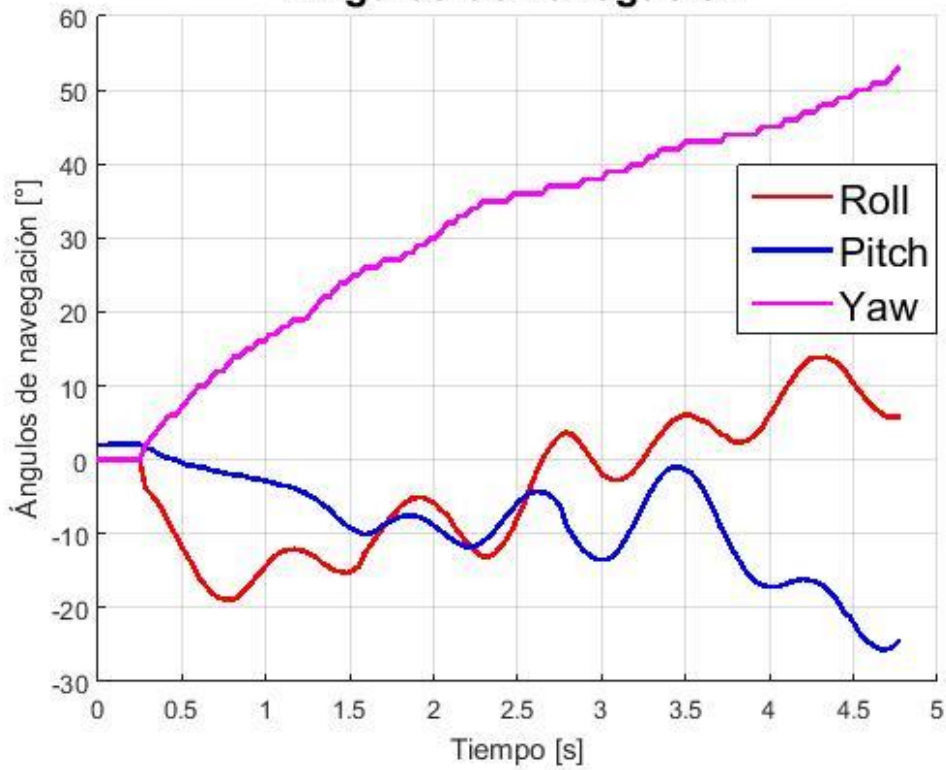
Figura 5-21. Prueba manual para la estabilización de guiñada.

### Posición y velocidad vertical



(a)

### Ángulos de navegación



(b)

Figura 5-22. Primera prueba de vuelo del sistema.  
 (a) Posición y velocidad vertical. (b) Ángulos de navegación.

En la *Figura 5-22* se aprecia que la duración aproximada de la prueba fue de 4.66 [s]. En los resultados obtenidos de la simulación a computadora, se establece que el tiempo de asentamiento del sistema es de aproximadamente 10 [s]; por tanto, se tiene que el ensayo tuvo que ser interrumpido antes de alcanzar un régimen estacionario de operación.

En la *Figura 5-22(a)*, se aprecia que la altura inicial del sistema fue de aproximadamente 1 [m]; esto se debe a un error aleatorio de offset por parte del sensor de altura, el cual no fue posible corregir. La referencia de altura enviada a la aeronave fue de 2.5 [m]. Se observa que el vehículo alcanza dicho valor en aproximadamente 3.4 [s]; posteriormente, se da un sobrepaso en el que se llega a un máximo de altura de 3.2 [m], en un tiempo de 4.5 [s]. Lo último que es posible inferir de los datos es la tendencia de la altura por disminuir.

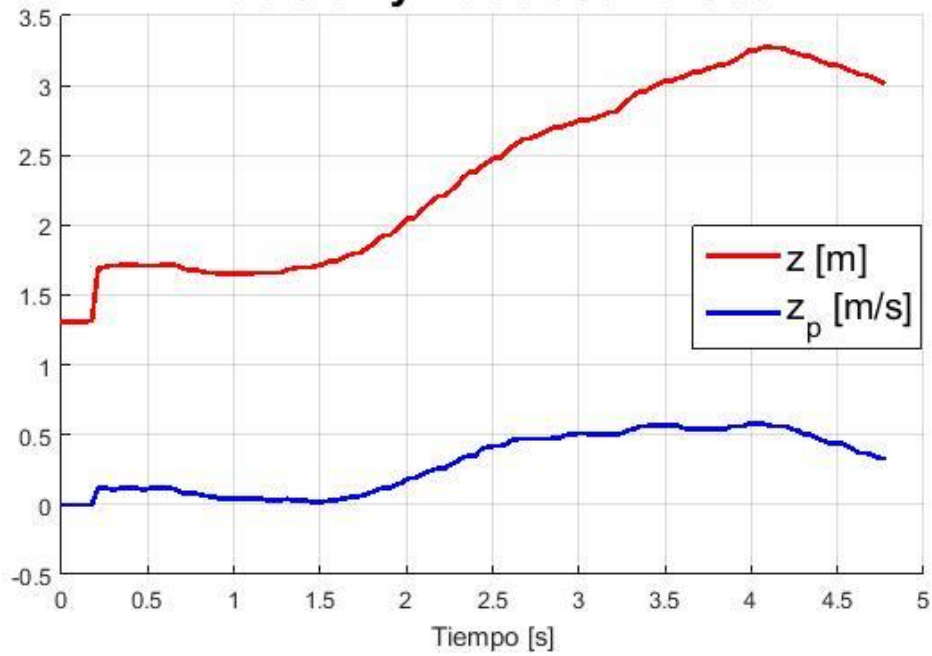
También en esta imagen se muestra el comportamiento de la velocidad vertical, la cual se mantiene en valores moderados. En un principio, se presenta un incremento de velocidad, consistente con el incremento de elevación del sistema. Se alcanza un máximo de 0.6 [m/s] en un tiempo de 3.7 [s], para posteriormente disminuir.

La *Figura 5-22(b)* presenta los valores de los ángulos de navegación del dron. Se aprecia que los ángulos de *roll* y *pitch* presentan oscilaciones alrededor de cero, mientras que el *yaw* tiende a incrementarse, lo que se reflejó en una tendencia del sistema a girar y describir una trayectoria curva.

A pesar de poca duración de la prueba, el vehículo exhibió un comportamiento controlado. El dispositivo logró despegar del nivel del suelo y elevarse hasta mantener un nivel de altura relativamente constante; asimismo, asumió una orientación que le permitió sustentarse en vuelo durante el resto del ensayo. Cabe señalar que los valores de posición para la altura, *roll* y *pitch*, así como la velocidad vertical, se mantuvieron en niveles moderados, sin presentar tendencia a divergir. Una posible explicación para el comportamiento del ángulo *yaw* se encuentra en la matriz de peso para los estados seleccionada, la cual, como se ha venido mencionando, da prioridad a los ángulos *roll* y *pitch*.

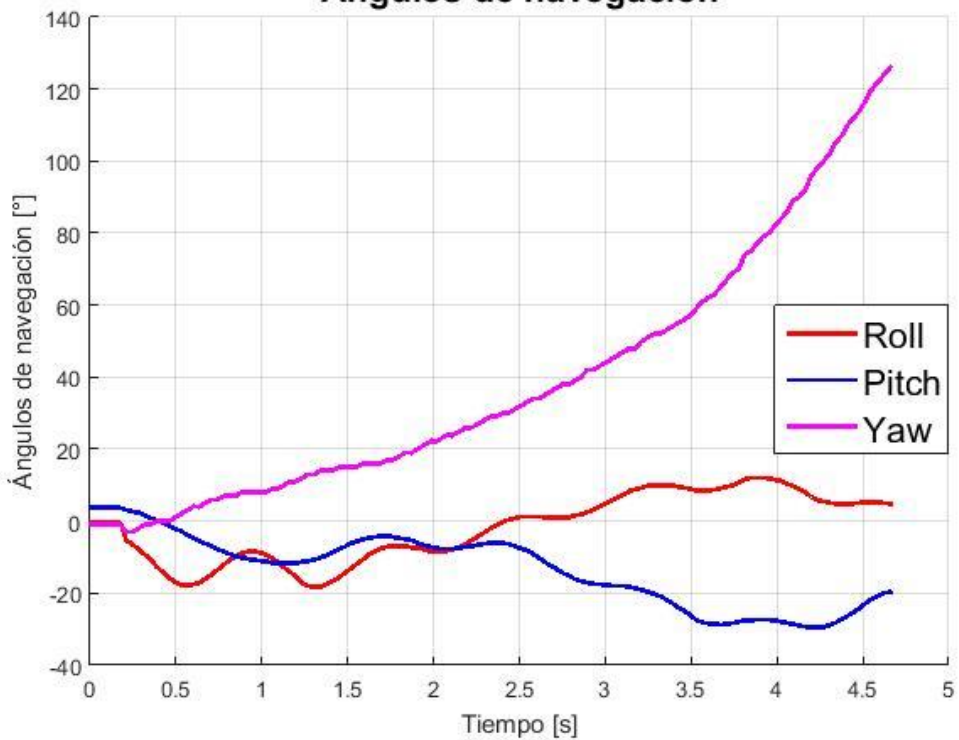
Posteriormente, se realizó otro ensayo de vuelo en el sistema, cuyos resultados coinciden con los obtenidos previamente. La *Figura 5-23* presenta esta información. En primer lugar, se tiene que la altura inicial detectada por el dispositivo es de 1.3 [m], lo cual se debe al error de desvío (*offset*) ya mencionado. Al igual que en el caso anterior, la referencia de altura fue de 2.5 [m], valor alcanzado por el vehículo en aproximadamente 2.54 [s]; posteriormente se presenta el sobrepaso, alcanzándose un máximo de altura de 3.3 [m] a los 4.09 [s] de iniciado el experimento. Finalmente, se presenta la tendencia a disminuir el nivel en *z*. La prueba es interrumpida a los 4.66 [s], valor menor al tiempo de asentamiento de la altura, esto con el fin de evitar accidentes.

### Posición y velocidad vertical



(a)

### Ángulos de navegación



(b)

Figura 5-23. Segunda prueba de vuelo del sistema.  
 (a) Posición y velocidad vertical. (b) Ángulos de navegación.

La curva de velocidad vertical es muy parecida a la del ensayo anterior, con una tendencia inicial a incrementarse, debido al aumento de altitud. Posteriormente, se alcanza un máximo de 0.58 [m/s] a los 4.02 [s], para finalmente disminuir.

De la misma forma, los ángulos *roll* y *pitch* presentan las ya comentadas oscilaciones alrededor de cero, mientras que el *yaw* se incrementa, produciendo que la aeronave describa una trayectoria curva. Estos resultados coinciden cualitativamente con los obtenidos en la prueba anterior.





## Conclusiones

---

*...pues, aunque era el amo del mundo,  
no estaba del todo seguro sobre  
lo que hacer a continuación.  
Mas ya pensaría en algo.*

**2001. A Space Odyssey  
Arthur C. Clarke  
(1917-2008)**

*La integridad sin conocimiento es débil e inútil,  
mientras que el conocimiento sin integridad  
es peligroso y horrible*

**Samuel Jackson  
(1948-)**

### Objetivos

- Presentar las conclusiones del proyecto, con base en los resultados obtenidos.
- Establecer posibles puntos de trabajo a futuro para mejorar el sistema diseñado.

### Resumen

A lo largo de este documento, se ha presentado el desarrollo de un proyecto, consistente en el diseño, construcción, modelado matemático y control de estabilización para una aeronave multirotor.

En el *Capítulo 1* se efectuó una investigación acerca de la situación pasada y presente de la aeronáutica, prestando especial atención al tipo de vehículo anteriormente mencionado. Posteriormente, se establecieron las principales características, clasificaciones y aplicaciones (actuales y potenciales) de los vehículos voladores de múltiples rotores. En este apartado, también se definió el concepto de Vehículo Aéreo No Tripulado (UAV), también llamado dron, y su diferencia con una nave RC. Al final del mismo, se presentaron algunos aspectos sobre la legislación para el uso de drones en nuestro país.

Después de recabar la información relevante en la investigación del estado del arte, se prosiguió con la etapa del diseño conceptual, abordado en el *Capítulo 2*. En éste, se establecieron los requerimientos que habría de cumplir el dispositivo, los cuales sentarían las directrices para todo el proceso de diseño. Dichos requerimientos, posteriormente, fueron traducidos a parámetros mensurables, con el fin de verificar su cumplimiento y evaluar su desempeño. Lo anterior se logra a partir de la definición de especificaciones de diseño.

El siguiente paso consistió en plantear el árbol de objetivos que éste había de cumplir; lo anterior dio la pauta para establecer las diversas funciones que debían efectuarse para lograr la operación correcta del sistema, con lo cual se dividió un problema grande y complicado de diseño en múltiples tareas individuales interconectadas entre sí, más fáciles de analizar y resolver.

Por último, se presentaron diversas propuestas de solución, las cuales fueron evaluadas (tanto por los autores del presente trabajo como por un grupo de ingenieros con gran experiencia), dando por resultado el concepto que mejor satisfizo las necesidades del proyecto, el cual resultó ser un cuadricóptero.

A lo largo del *Capítulo 3*, se abordó el problema de diseño, tanto mecánico como electrónico, del sistema seleccionado. En primera instancia, se realizó una investigación sobre las características de los componentes necesarios para el desarrollo del proyecto. Posteriormente, fueron obtenidos los planos de fabricación para el *frame* del vehículo. En este mismo apartado, se realizaron diversos cálculos, análisis y pruebas para garantizar que el diseño cumpliera con los objetivos planteados. El producto final de esta fase fue la obtención de la planta.

Una vez construido el sistema físico, resultó necesario modelarlo matemáticamente, para poder conocer sus principales características y estar en condiciones de generar una estrategia de control adecuada que permitiera cumplir las metas establecidas. Este tópico se aborda en el *Capítulo 4* del presente trabajo, en el cual se deriva el modelo matemático del dron a partir del formalismo lagrangiano.

Por último, en el *Capítulo 5*, se diseñó una ley de control con miras a lograr la estabilización en vuelo del dispositivo y la regulación de la altura. Una vez hecho esto, se llevaron a cabo diversas simulaciones computacionales y ensayos experimentales para corroborar la efectividad del algoritmo de control propuesto.

Es conveniente hacer notar que el desarrollo de este proyecto incluyó aspectos relacionados con todas las áreas de conocimiento que constituyen a la Ingeniería Mecatrónica.

## Análisis de resultados y conclusiones

El proyecto desarrollado a lo largo de este trabajo de tesis puede dividirse en dos grandes fases; la primera de ellas involucró el diseño y construcción de la planta, tópicos que se consideran en los tres primeros capítulos de este documento. La segunda etapa consistió en el análisis de las características del sistema físico, a partir de su modelación matemática. Con base en lo anterior, fue posible proponer, diseñar e implementar un algoritmo de control que permitiera lograr los objetivos planteados al inicio del proyecto. Los capítulos 4 y 5 abordan estas importantes cuestiones.

De cada una de estas etapas se obtuvo un resultado final; para la primera de ellas, el producto derivado fue la construcción de la planta, la cual poseía las características mecánicas y elementos electrónicos apropiados para que pudiera cumplir la tarea asignada.

Antes de ser desarrollada una ley de control para el dispositivo, éste había demostrado poseer la capacidad de elevarse y sustentarse en vuelo, por lo que se considera que la primera fase de este trabajo fue cumplida satisfactoriamente, al haberse diseñado y construido una planta funcional.

En el *Capítulo 4* se derivó el modelo matemático del sistema a partir del método de Euler-Lagrange, resultado indispensable para generar la estrategia de control que lograría los objetivos establecidos. El diseño de ésta, su simulación computacional, así como todos los pasos necesarios para su implementación en la planta (adquisición de datos de sensores, programación del controlador, comunicación entre el sistema y la estación en tierra, etc.), constituyen el resultado final de esta etapa del proyecto, y se detallan en el *Capítulo 5*.

Los datos emanados de la simulación del sistema de control por retroalimentación de estados con precompensador muestran que este algoritmo tiene la capacidad de estabilizar y regular la altitud de la planta, aun en presencia de una señal de ruido en la medición de la altura. En la última parte de ese mismo apartado, se presentan los resultados obtenidos a partir de las pruebas de funcionamiento del algoritmo de control en el sistema físico.

El primer ensayo, en el cual se modificaron manualmente los valores de los ángulos de navegación, demuestra que el controlador procesa apropiadamente los datos correspondientes a la orientación de la aeronave, y produce una salida de control que compensa apropiadamente la desviación angular respecto al punto de equilibrio, lo que permite la estabilización de la nave, uno de los principales objetivos de este trabajo.

Finalmente, se efectuaron pruebas de vuelo del sistema físico, una vez implantado el algoritmo de control. A pesar de que los resultados de estos experimentos no fueron los esperados, fue posible observar el comportamiento de la planta en vuelo<sup>3</sup>, notándose que ésta posee la capacidad de despegar y de generar suficiente empuje vertical para sustentarse en vuelo de forma autónoma, lo cual valida nuevamente el diseño de la estructura mecánica y la selección de los componentes.

Además de lo anterior, el sistema tendió a estabilizar apropiadamente los ángulos de *roll* y *pitch*, lo cual es absolutamente necesario para la sustentación. Por otro lado, el nivel de altitud permaneció aproximadamente constante durante toda la prueba.

Es necesario mencionar nuevamente que los resultados de estas pruebas no fueron los que se esperaban. Posibles razones para esto son, principalmente, la carencia de un sensor de altitud más preciso y confiable, así como la incapacidad de medir la posición del vehículo en las coordenadas  $xy$ , lo que derivó en pérdida de controlabilidad en estos grados de libertad. El desplazamiento no controlado en el plano horizontal obligó a interrumpir las pruebas de vuelo antes de que se alcanzara un régimen estacionario de operación, por lo cual los resultados obtenidos de estos ensayos no son concluyentes.

Adicionalmente, la tendencia a incrementar del ángulo *yaw* produjo que la aeronave describiera una trayectoria curva en un plano horizontal. Lo anterior puede deberse a desviaciones en las condiciones iniciales de la planta (mismas que estuvieron alejadas del punto de operación), imperfecciones mecánicas y al poco peso que se le dio a este grado de libertad respecto a los otros dos ángulos de navegación en la matriz de ponderación empleada para el diseño del controlador LQR.

Aún con todos estos inconvenientes, puede concluirse que la aeronave fue capaz de sustentarse en vuelo mediante la ley de control propuesta. El controlador para estabilización y regulación fue diseñado e implementado adecuadamente en la planta, y se demostró que procesa correctamente la información sobre los estados para producir una señal de control apropiada. La prueba de vuelo muestra, además, que el comportamiento de la planta es controlado y satisface cualitativamente los objetivos planteados, bajo las circunstancias dadas y limitantes inherentes.

---

<sup>3</sup> Los videos de funcionamiento se encuentran disponibles en <https://github.com/uli-rcm/Dron-FIUNAM>.

Por último, en la *Tabla 6-1*, se presentan las especificaciones finales del dispositivo diseñado, junto con aquellas propuestas al inicio del proceso. También en ésta se presentan los requerimientos que cubren cada una de dichas especificaciones. Para más detalles, consúltese el *Capítulo 2 Diseño Conceptual*, en particular la *Tabla 2-1* y la *Tabla 2-2*.

<b>Especificación</b>	<b>Diseño</b>	<b>Producto</b>	<b>Requerimientos considerados</b>
Masa total máxima del dispositivo.	<0.8 [kg]	0.4625 [kg]	1
Largo y ancho máximos del dispositivo.	40 [cm] por 40 [cm]	18 [cm] por 18 [cm]	2
Altura máxima de caída segura.	2 [cm]	10 [cm]	3, 4, 5
Deflexión máxima de la estructura de soporte.	3 [mm]	0.39 [mm]	3, 4
Fuerza de empuje de los rotores en conjunto.	1 [kg <sub>f</sub> ] mínimo	1.15 [kg <sub>f</sub> ] @T <sub>alto</sub> =2000 [μs]	7, 8
Tiempo mínimo de autonomía en estabilización vertical.	1 [min]	1.95 [min] a corriente máxima	9, 10
Porcentaje de sobrepaso máximo en regulación vertical.	20 [%]	11.5 [%]	9
Capacidad de despegue.	Cumple/No Cumple	Cumple	8
Capacidad de medición de altura y estabilización.	Cumple/No Cumple	Cumple	9
Robustez ante perturbaciones verticales pequeñas.	Cumple/No Cumple	No cumple	11
Capacidad de movimiento horizontal teleoperado.	Cumple/No Cumple	No cumple	12
Estética.	Subjetiva	Cumple	6

*Tabla 6-1. Especificaciones de producto.*

## Trabajo a futuro

Para concluir, se discuten en esta sección los principales puntos en los cuales es factible optimizar el sistema diseñado, para que de esta forma mejore su desempeño, e inclusive se amplíen sus capacidades y funciones.

Se ha mencionado a lo largo de este trabajo que uno de los principales inconvenientes del dispositivo es que el sensor empleado para la medición de la altura (altímetro barométrico MS5611-01BA01), no resultó ser muy apropiado para un control preciso. Además de su intervalo diferencial en la adquisición de la altitud es considerable ( $\pm 0.1$  [m]) y de que la señal de medición contiene componentes de ruido, el sensor presenta desviaciones significativas en sus valores conforme avanza el tiempo, aun cuando el nivel del vehículo cambie levemente. Aunado a una sensibilidad excesiva a las variaciones de luz, todas las características previas hacen que la información proporcionada por este elemento no sea fiable, además de que los errores de medición en este estado repercuten enormemente en el algoritmo de control y en el desempeño en vuelo de la planta.

Por ende, un punto importante de oportunidad para este sistema se tiene en la mejora de la instrumentación, particularmente del sensor de altitud. Un dispositivo con mejores características que proporcionara información confiable optimizaría en gran medida el funcionamiento del dron. Si al aspecto anterior se suma un medio para medir la posición horizontal de la aeronave, sería posible controlar todos los grados de libertad, así como sus correspondientes estados, lo cual ampliaría las capacidades de la nave. Una posible alternativa de solución para este problema es un sistema de cámaras o cualquier otro que permitiera el posicionamiento absoluto del dron, respecto de alguna referencia, con un grado aceptable de precisión.

Respecto al algoritmo de control diseñado, es factible probar con otras matrices de peso que compensen de una mejor manera los errores de los estados. Esto sería particularmente útil para mejorar el comportamiento del ángulo *yaw*. Asimismo, la programación del controlador es tal que únicamente se requiere introducir los valores respectivos de la matriz de ganancias para los estados; por ende, si ésta se obtiene mediante otro método diferente al control LQR, sólo sería necesaria cambiar los respectivos valores para implementar la nueva ley de control.

Por otra parte, el diseño mecánico y electrónico es funcional, por lo que pueden diseñarse controladores de otro tipo (por ejemplo, PID), y únicamente adaptar la programación para esta nueva variante.

Dentro de la parte de implementación, la escritura de las señales de control se llevó a cabo empleando la función del microcontrolador `WriteMicroseconds()`, la cual se utiliza para producir una señal PWM de 50 [Hz], con un ancho de pulso correspondiente al argumento de dicha instrucción. Sin embargo, en lugar de lo

anterior, es factible emplear timers para generar dichas señales, lo cual optimizaría el manejo de tiempo y haría más eficiente el programa.

En lo concerniente a la caracterización de los diversos componentes, podría resultar beneficioso el efectuar de nuevo la prueba para la obtención de la constante de arrastre  $b$ , la cual no pudo determinarse con la suficiente precisión debido a la falta de resolución en el banco de pruebas diseñado. Sin embargo, es probable que la variación en este parámetro no refleje cambios sustanciales en el funcionamiento global del sistema.

Finalmente, la estructura mecánica y los componentes electrónicos podrían modificarse en función de la aplicación que se pretenda dar al dispositivo. Por esta razón, resulta ventajoso que las piezas que constituyen el frame puedan desmontarse e intercambiarse, gracias al proceso de manufactura con el cual fue construido el dron. Asimismo, se dispone del modelo CAD de la estructura, a partir del cual pueden imprimirse nuevas piezas en caso de ser requeridas como repuesto, o ser modificadas para adaptarse a una nueva aplicación.





# Apéndices

---

**Apéndice 1:** Planos de Proyecto.

**Apéndice 2:** Deducción de las Ecuaciones Integrales de la Mecánica de Fluidos.

**Apéndice 3:** Obtención de las Ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de la Teoría de Variaciones.

**Apéndice 4:** Obtención Experimental de las Constantes de Sustentación y Arrastre del Sistema Motor-Propela.

**Apéndice 5:** Protocolo de Comunicación Serial Multiwii (MSP).

**Apéndice 6:** Códigos de Programación. <sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> Todos los códigos desarrollados en este proyecto durante las etapas de modelado matemático y control se encuentran disponibles para su consulta en el sitio web <https://github.com/uli-rcm/Dron-FIUNAM>.







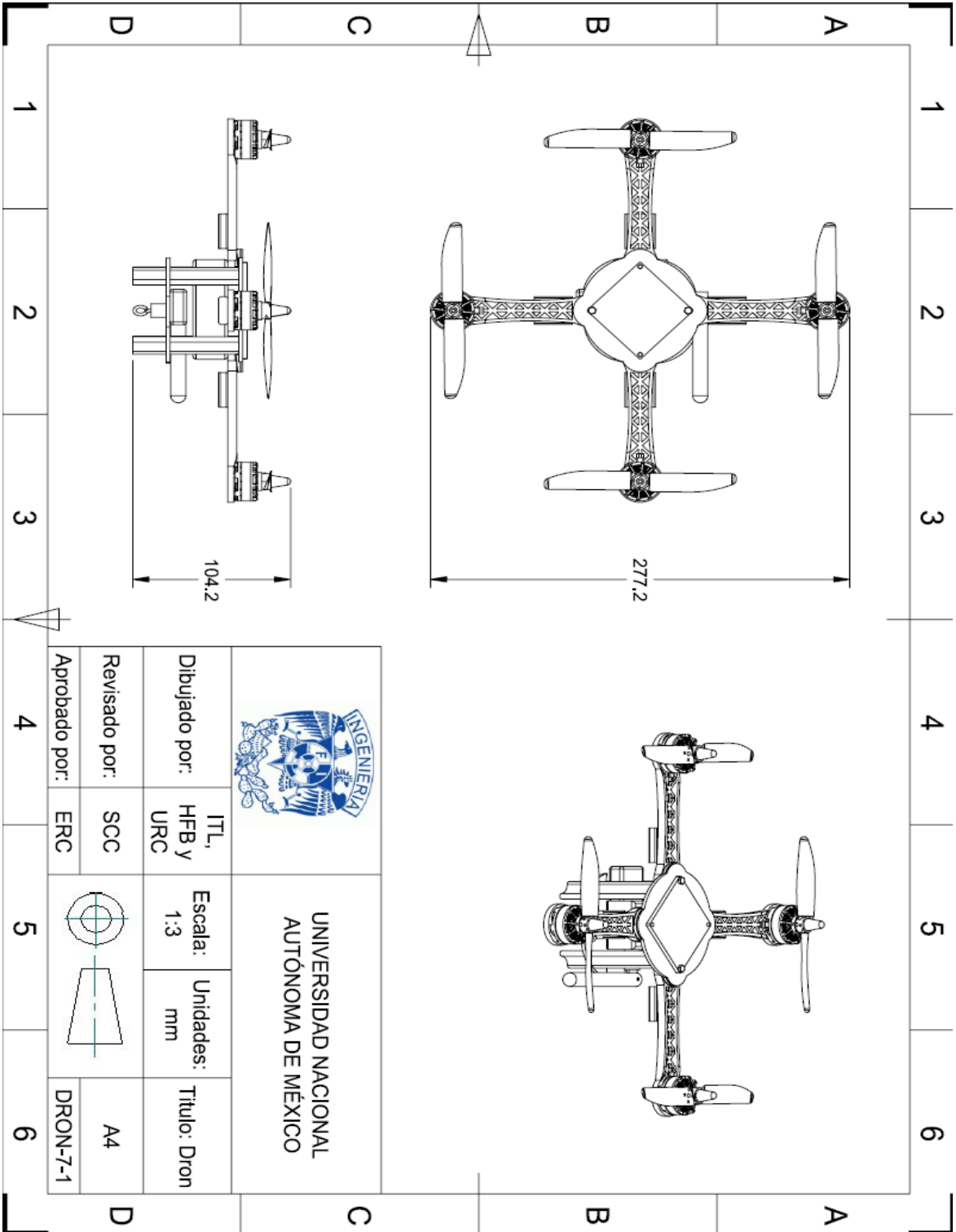
## *Planos de Proyecto<sup>5</sup>*

<b>Número</b>	<b>Título</b>	<b>Designación</b>
1	Dron	DRON-7-1
2	Ensamble Dron	DRON-7-2
3	Ensamble Brazo	DRON-7-3
4	Brazo	DRON-7-4
5	Placa Central	DRON-7-5
6	Placa Base	DRON-7-6
7	Flight Controller	DRON-7-7
8	Lista de Materiales (Bills of Materials)	BOM

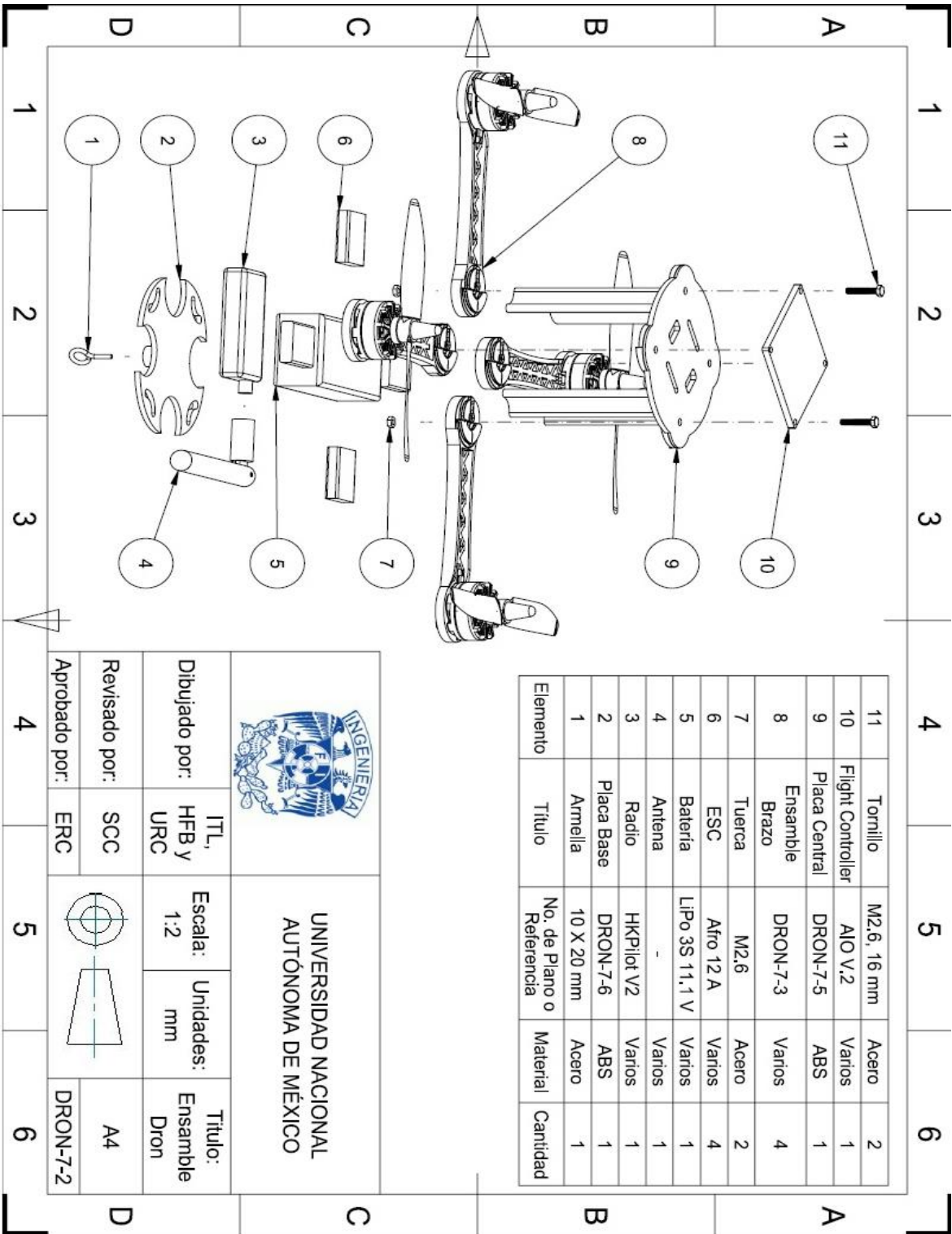
---

<sup>5</sup> Los presentes planos están basados en el diseño original del Ing. Aldo Vargas, quien amablemente nos compartió su trabajo y permitió que lo utilizáramos para este proyecto. Si el lector está interesado en conocer más acerca de su labor, puede consultar la siguiente liga: <https://altax.net/>.






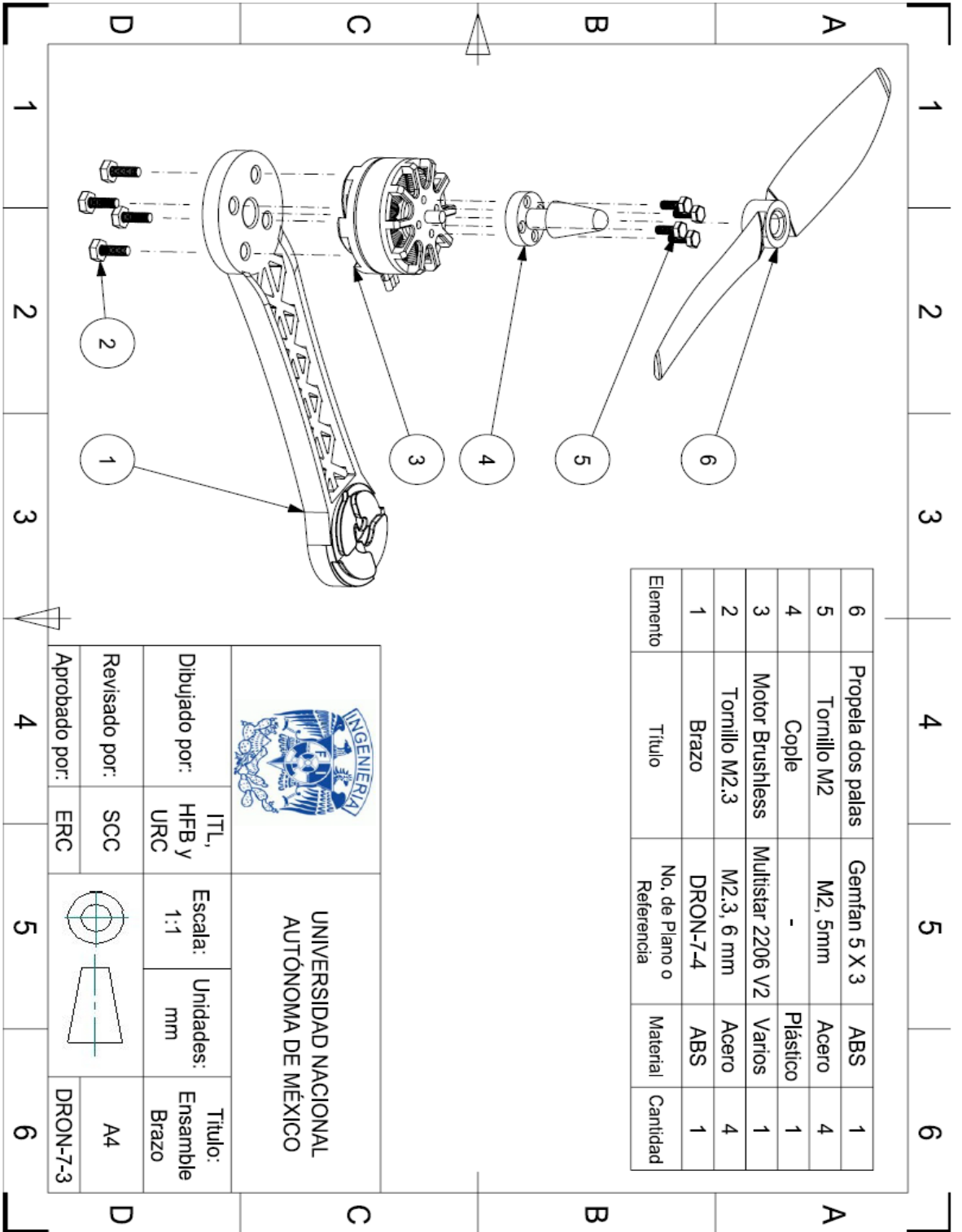
		UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO	
		Escala: 1:3	Unidades: mm
Dibujado por:	ITL, HFB y URC	Título: Dron	
Revisado por:	SCC	A4	
Aprobado por:	ERC	DRON-7-1	



Elemento	Título	No. de Plano o Referencia	Material	Cantidad
11	Tornillo	M2.6, 16 mm	Acero	2
10	Flight Controller	AIO V.2	Varios	1
9	Placa Central	DRON-7-5	ABS	1
8	Ensamble Brazo	DRON-7-3	Varios	4
7	Tuerca	M2.6	Acero	2
6	ESC	Afro 12 A	Varios	4
5	Batería	LiPo 3S 11.1 V	Varios	1
4	Antena	-	Varios	1
3	Radio	HKPilot V2	Varios	1
2	Placa Base	DRON-7-6	ABS	1
1	Armella	10 X 20 mm	Acero	1

 <p>UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO</p>							
Dibujado por:	ITL, HFB y URC	Escala:	1:2	Unidades:	mm	Título:	Ensamble Dron
Revisado por:	SCC						A4
Aprobado por:	ERC						DRON-7-2



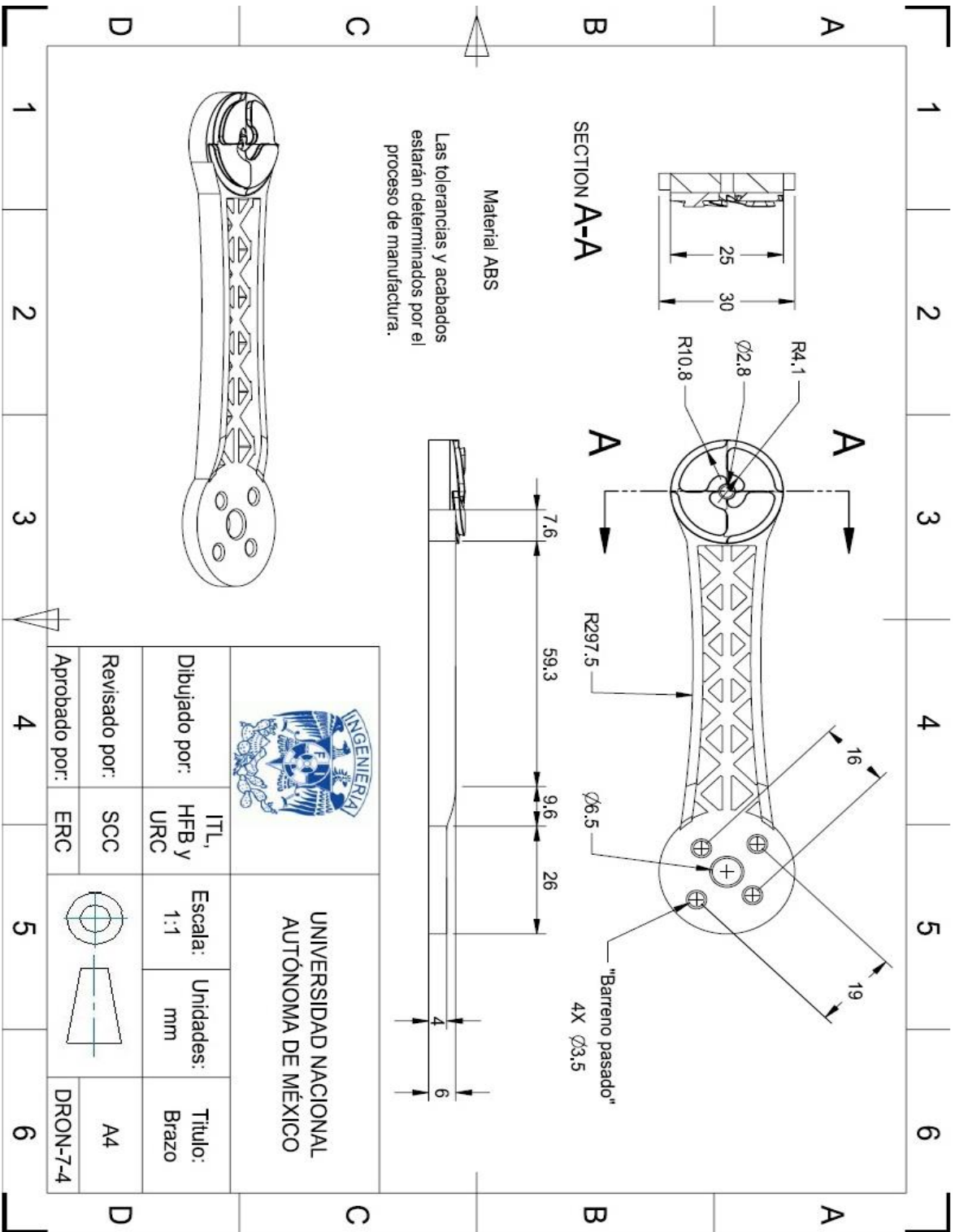


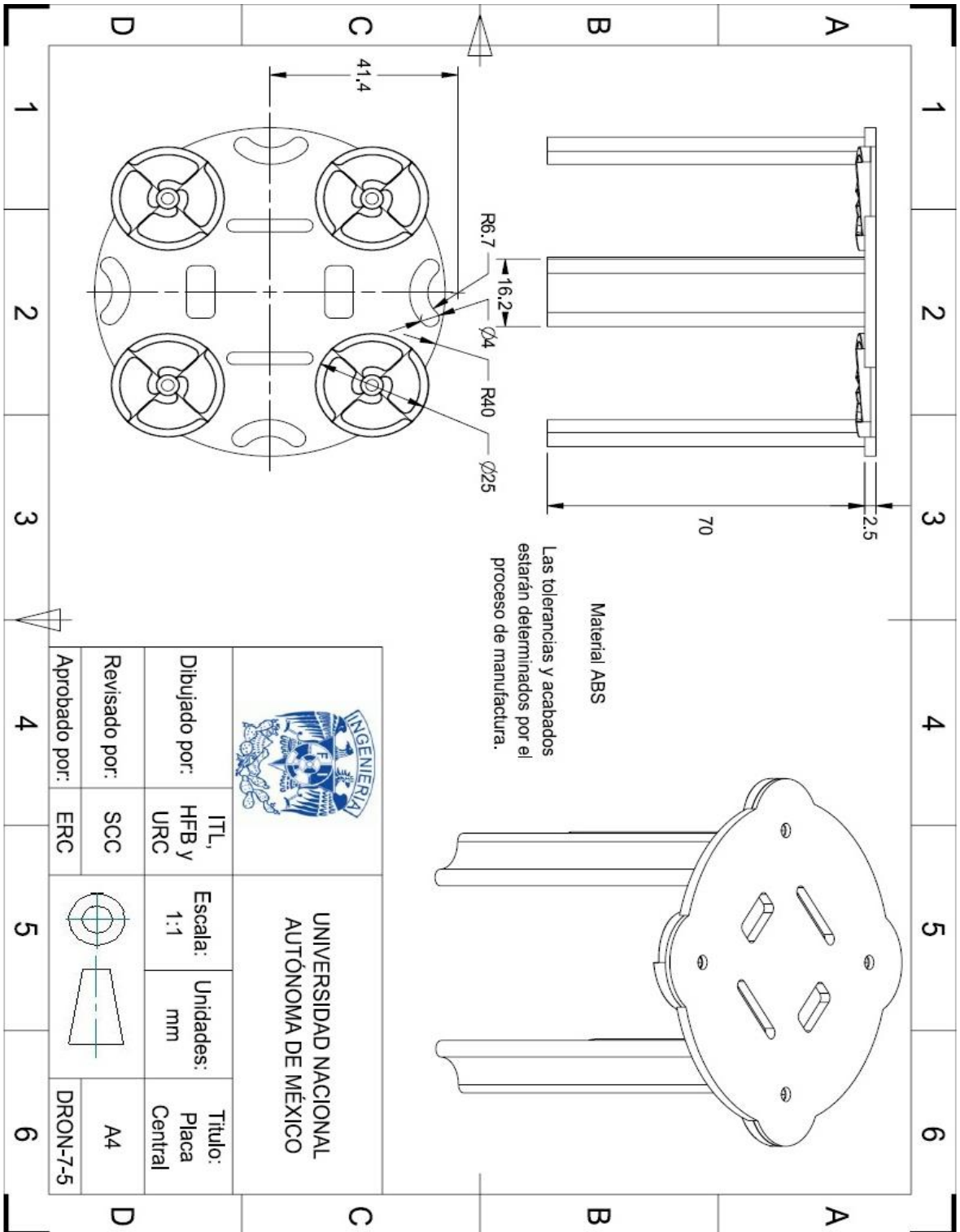
6	Propela dos palas	Gemfan 5 X 3	ABS	1
5	Tornillo M2	M2, 5mm	Acero	4
4	Cople	-	Plástico	1
3	Motor Brushless	Multistar 2206 V2	Varios	1
2	Tornillo M2.3	M2.3, 6 mm	Acero	4
1	Brazo	DRON-7-4	ABS	1
Elemento	Título	No. de Plano o Referencia	MATERIAL	Cantidad

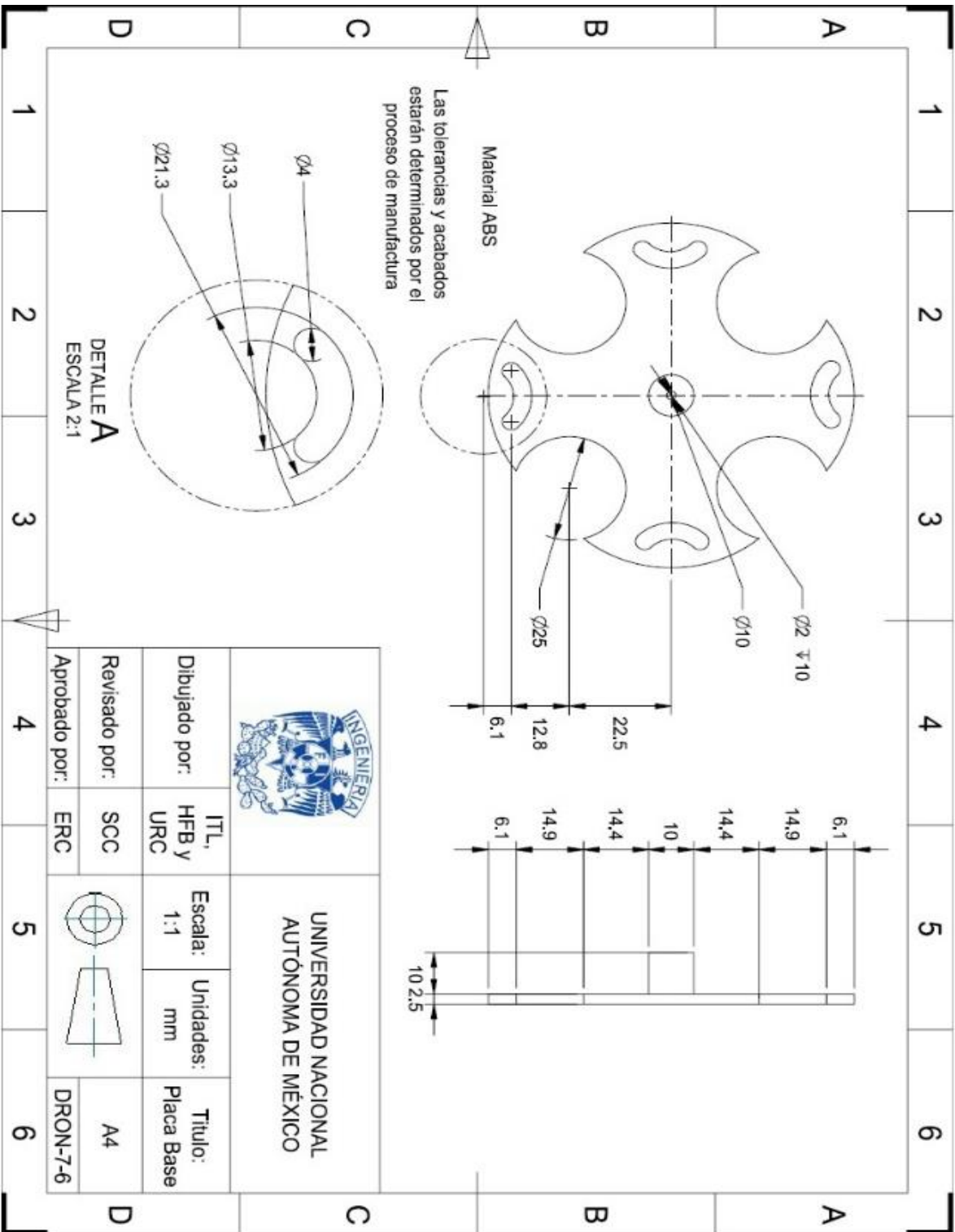


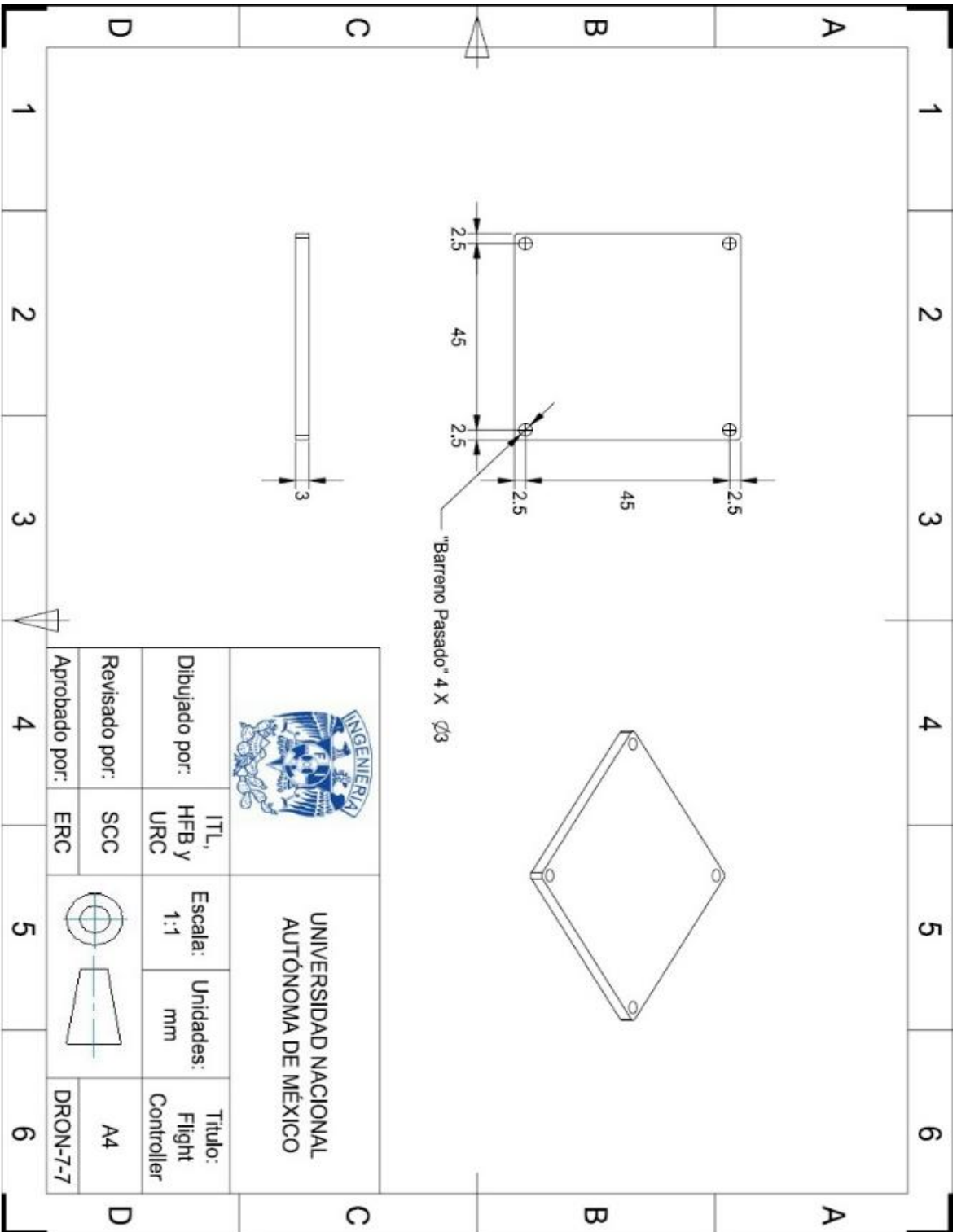
UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

Dibujado por:	ITL, HFB y URC	Escala: 1:1	Unidades: mm	Título: Ensamble Brazo
Revisado por:	SCC			A4
Aprobado por:	ERC			DRON-7-3









**LISTA DE MATERIALES (BILL OF MATERIALS)**

EQUIPO: TEAM:	PROYECTO "DRON"	CENTRO DE INGENIERÍA AVANZADA		REALIZÓ:	REVISÓ: (REV)	APROBÓ: (APP)		
		CIENTE: CUSTOMER:	DEPARTAMENTO DE MECATRÓNICA	ITL, HFB y URC	SCC	ERC		
SISTEMA: SYSTEM:	DRON	DESCRIPCIÓN Y ESPECIFICACIONES DESCRIPTION AND SPECIFICATIONS	REF. DIB. REF. DWG.	FECHA	FECHA	FECHA		
PARTE ITEM	REQ. QUANTITY	MED.	PROVEEDOR VENDOR	24/09/2015	19/10/2015	03/11/2015		
			MONEDA CURRENCY	C. U. UNIT. COST.	C. T. TOTAL COST			
1	1	PIEZA	Flight Controller AIO V2	DRON-7-7	ebay	MXN	714.72	714.72
2	2	PIEZA	Batería LiPo 3S 11.1 V Turnigy Nanotech 1300		HobbyKing	MXN	374.33	748.66
3	1	PIEZA	Combo Pack (4 Motores Brushless Multistar 2206 + 4 ESC Afro 12 A)		HobbyKing	MXN	1874.00	1874.00
4	1	PIEZA	Radio HKPilot V2		HobbyKing	MXN	837.21	837.21
5	1	PIEZA	Paquete de propelas ABS Gemfan 5040 dos palas (10 pares CCW y CW)		HobbyKing	MXN	266.11	266.11
6	2	PIEZA	Cables de distribución Multistar XT30 a Bullet 4x2 mm con JST		HobbyKing	MXN	160.87	321.74
7	1	PIEZA	Conectores XT60 macho (Paquete con 5)		HobbyKing	MXN	155.62	155.62
8	1	PIEZA	Cargador para batería LiPo Turnigy E3 Compact 2S/3S		HobbyKing	MXN	336.79	336.79
9	1	PIEZA	Placa Central (Impresión 3D en ABS)		CDMIT FI UNAM	MXN	926.67	926.67
10	1	PIEZA	Placa Base (Impresión 3D en ABS)		CDMIT FI UNAM	MXN	251.92	251.92
11	4	PIEZA	Brazo (Impresión 3D en ABS)		CDMIT FI UNAM	MXN	277.61	1110.44
12	1	PIEZA	Armella de acero cerrada 10X20 mm			MXN	1.50	1.50
13	4	PIEZA	Tornillos M2, 16 mm con tuerca			MXN	6.50	26.00
14	20	PIEZA	Cinchos industriales			MXN	1.00	20.00
15	1	PIEZA	Banco de pruebas			MXN	488.00	488.00
16	1	PIEZA	Multímetro digital			MXN	60.00	60.00
17	1	PIEZA	Arduino Pro Mini + Grabador			MXN	230.00	230.00
18	1	PIEZA	Teensy V3.1 + Headers			MXN	450.00	450.00
19	1	PIEZA	Repuestos		HobbyKing	MXN	1554.84	1554.84

**TOTAL (MXN) 10374.22**

# *Deducción de las Ecuaciones Integrales de la Mecánica de Fluidos*

*Los fluidos son mucho más sencillos  
de beber que de entender*

**Alan C. Newell**  
(1941-)

En esta sección se abordará la deducción de las relaciones integrales para un volumen de control utilizadas en el presente trabajo, a partir de la Mecánica Clásica.

La primera expresión que se incluirá es el Teorema de Transporte de Reynolds para un volumen de control fijo; posteriormente, se aplicará el resultado obtenido para derivar la Ecuación de la Conservación de la Masa y la Ecuación de la Energía para un volumen de control; finalmente, se culminará con la deducción de la Ecuación de la Cantidad de Movimiento.

## Teorema de Transporte de Reynolds

Un problema de Mecánica de Fluidos puede ser analizado desde dos perspectivas distintas: la *Lagrangiana* y la *Euleriana*. La primera de ellas (también conocida como formulación en *coordenadas materiales*) describe el comportamiento de una masa de control, es decir, parte de un sistema de masa conocida, cuyo análisis se lleva a cabo siguiendo cada partícula a lo largo de toda su trayectoria. La estrategia anterior es muy similar al enfoque propuesto por Newton, en el cual se estudia una porción de fluido como si se tratase de un cuerpo moviéndose en el espacio.

Por otra parte, en la formulación Euleriana (*coordenadas espaciales*) se analiza el comportamiento de una porción del espacio, conocida como un *volumen de control*. Este es un concepto análogo al de diagrama de cuerpo libre, ya que dicha región se aísla del espacio para su estudio, y todos los elementos que están fuera se incluyen como agentes externos.

En este escrito se optará por el punto de vista Euleriano, ya que resulta más útil para los fines del presente proyecto. Sin embargo, el empleo de esta descripción implica la imposibilidad de utilizar directamente las Leyes de Newton, al igual que todas las leyes de conservación desarrolladas para partículas y cuerpos rígidos.

Por lo anterior, es necesario desarrollar un método que permita relacionar las propiedades de una masa de control, con las que posee un fluido en un volumen de control. Este importante resultado es conocido como Teorema de Transporte de Reynolds.

### **Teorema (de Transporte de Reynolds)**

Sea  $B$  una propiedad de algún fluido (energía, momentum, etc.), dentro de un volumen de control y sea  $\beta = \frac{dB}{dm}$  el valor intensivo de la cantidad  $B$  en una pequeña porción del mismo. El cambio temporal de  $B$  en el volumen de control está dado por:

$$\frac{d}{dt}(B_{sys}) = \frac{d}{dt} \left( \int_{vc} \beta \rho dV \right) + \int_{sc} \beta \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \dots (1)$$

### **Demostración**

Considérese la *Figura A.2-1*, en la cual se muestra un flujo unidimensional en una tubería; en ésta se ha seleccionado como volumen de control el espacio ocupado por el Sistema 2 en el instante de tiempo  $t$ . De acuerdo con el enunciado del Teorema, la cantidad total de  $B$  en el volumen de control es:

$$B_{vc} = \int_{vc} \beta dm = \int_{vc} \beta \rho dV \dots (2)$$

Donde,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $dV$  es el diferencial de volumen, y el subíndice  $vc$  hace alusión a que la integral debe de evaluarse en todo el volumen de control. Se requiere relacionar el cambio de la propiedad  $B$  en el volumen de control ( $B_{vc}$ ) con el cambio de la cantidad de  $B$  en el Sistema 2. Recuérdese que en el instante de tiempo  $t$ , las propiedades del fluido que se encuentra dentro del volumen de control coinciden con las del Sistema 2, es decir:

$$B_{vc}(t) = B_2(t)$$



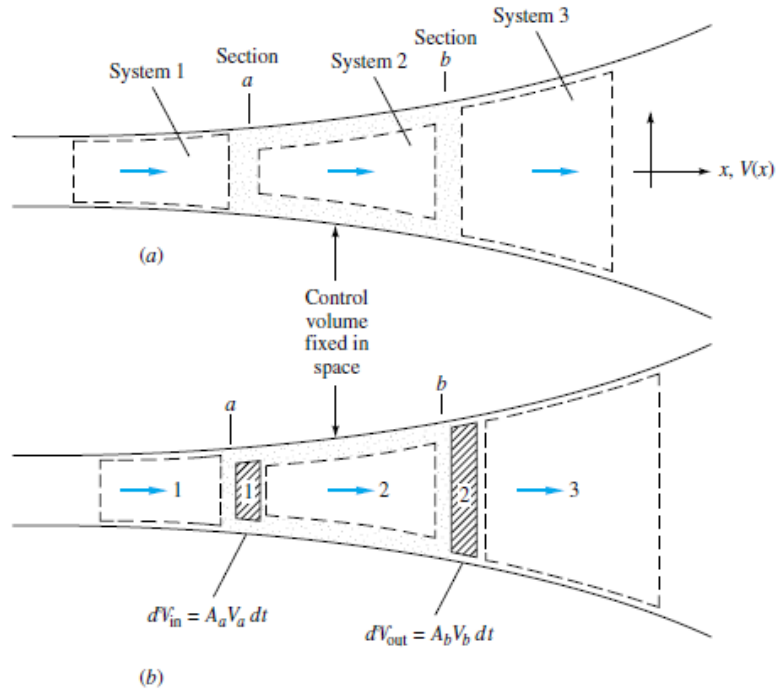


Figura A.2-1. Flujo unidimensional en una tubería.

Ahora, se trabajará con la expresión de la derivada con respecto del tiempo de  $B_{vc}$ , empleando su definición como límite. Esto es:

$$\frac{d}{dt}(B_{vc}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{vc}(t + \Delta t) - B_{vc}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d}{dt}(B_{vc}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{vc}(t + \Delta t)}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{vc}(t)}{\Delta t} \dots (3)$$

Si se analiza el flujo de la cantidad a través de la región en estudio, se tiene que:

$(\beta\rho\Delta V)_{in}$ : Cantidad total de la propiedad  $B$  que entra al volumen de control.

$(\beta\rho\Delta V)_{out}$ : Cantidad total de la propiedad  $B$  que sale del volumen de control.

Por tanto, para un instante  $t + \Delta t$ :

$$B_{vc}(t + \Delta t) = B_2(t + \Delta t) + (\beta\rho\Delta V)_{in} - (\beta\rho\Delta V)_{out}$$

Sustituyendo la expresión anterior en (3):

$$\frac{d}{dt}(B_{vc}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_2(t + \Delta t) + (\beta\rho\Delta V)_{in} - (\beta\rho\Delta V)_{out}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_2(t)}{\Delta t}$$

Reordenando términos, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}(B_{vc}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_2(t + \Delta t) - B_2(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\beta\rho\Delta V)_{in} - (\beta\rho\Delta V)_{out}}{\Delta t}$$

$$\frac{d}{dt}(B_{vc}) = \frac{d}{dt}(B_2) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\beta\rho\Delta V)_{in} - (\beta\rho\Delta V)_{out}}{\Delta t} \dots (4)$$

Por otro lado, el incremento de volumen puede expresarse en términos del área de sección transversal como sigue:

$$\Delta V = A\Delta x$$

Donde  $\Delta x$  es un incremento a lo largo de la dirección del flujo. En (4):

$$\frac{d}{dt}(B_{vc}) = \frac{d}{dt}(B_2) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\beta\rho A\Delta x)_{in} - (\beta\rho A\Delta x)_{out}}{\Delta t}$$

$$\frac{d}{dt}(B_{vc}) = \frac{d}{dt}(B_2) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\beta\rho A\Delta x)_{in}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\beta\rho A\Delta x)_{out}}{\Delta t} \dots (5)$$

Pero, se tiene que:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = V$$

Donde,  $V$  es la rapidez del fluido a lo largo de la dirección  $x$ . Por ende:

$$\frac{d}{dt}(B_{vc}) = \frac{d}{dt}(B_2) + (\beta\rho AV)_{in} - (\beta\rho AV)_{out} \dots (6)$$

Ahora se despejará a  $\frac{d}{dt}(B_2)$  de (6), y se le asignará el subíndice  $sys$ , para indicar que se trata de la variación del sistema que coincide con el volumen de control en el tiempo  $t$ :

$$\frac{d}{dt}(B_{sys}) = \frac{d}{dt}(B_{vc}) + (\beta\rho AV)_{out} - (\beta\rho AV)_{in} \dots (7)$$

Si se sustituye la expresión obtenida para  $B_{vc}$  de la ecuación (2) en (7), resulta lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}(B_{sys}) = \frac{d}{dt} \left( \int_{vc} \beta \rho dV \right) + (\beta \rho AV)_{out} - (\beta \rho AV)_{in} \dots \text{(8)}$$

La expresión (8) es el Teorema de Transporte de Reynolds para flujo unidimensional. Esta ecuación establece la relación existente entre las propiedades de un sistema, y las del volumen de control que coincide con éste en el instante de tiempo  $t$ . Los tres términos del miembro derecho de la ecuación representan, respectivamente:

1. La razón de cambio de  $B$  en el volumen de control.
2. El flujo de  $B$  que sale de la superficie de control.
3. El flujo de  $B$  que entra a la superficie de control.

Si ahora se considera que existe un conjunto de entradas y salidas en una superficie de control (superficie cerrada que rodea al volumen de control), con flujo no necesariamente unidimensional, se vuelve necesaria la utilización de una integral de área para evaluar el flujo de la propiedad  $B$  a través de dicha superficie.

Con esta modificación, el Teorema de Transporte de Reynolds se transforma en la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt}(B_{sys}) = \frac{d}{dt} \left( \int_{vc} \beta \rho dV \right) + \int_{sc} \beta \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

Donde,  $\vec{V}$  es la velocidad del fluido en la superficie de control, y  $\vec{n}$  es el vector normal a la superficie de control que apunta hacia afuera de la misma. En este caso, el producto interno  $\vec{V} \cdot \vec{n}$  indica directamente la dirección del flujo de la propiedad. ■

### Ecuación de la Conservación de la Masa

En este apartado se obtendrá una expresión que relacione el cambio en la masa de un sistema, con la variación de la misma en un volumen de control. Para ello se recurrirá al Teorema de Transporte de Reynolds que se dedujo anteriormente, ecuación (1):

$$\frac{d}{dt}(B_{sys}) = \frac{d}{dt} \left( \int_{vc} \beta \rho dV \right) + \int_{sc} \beta \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

Para obtener la expresión deseada, únicamente se deben de sustituir correctamente las cantidades  $B_{sys}$  y  $\beta$  en la expresión anterior. Dado que  $B_{sys}$  es la masa del sistema ( $B_{sys} = m_{sys}$ ) la correspondiente  $\beta = \frac{dB_{sys}}{dm} = \frac{dm_{sys}}{dm}$  es igual a 1. Adicionalmente, como se estableció que la masa del sistema es constante, la derivada de dicha propiedad con respecto al tiempo será nula, es decir,  $\frac{dB_{sys}}{dt} = 0$ . Tomando en cuenta lo anterior, la ecuación (1) se transforma en la siguiente:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{vc} \rho dV \right) + \int_{sc} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

La expresión resultante es la *Ecuación de la Conservación de la Masa para un volumen de control fijo deformable*. Es posible obtener casos especiales de la misma. Por ejemplo, si se considera que la densidad es constante, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\text{Si } \rho = \text{constante}, \quad \frac{dV}{dt} + \int_{sc} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

La ecuación anterior sigue siendo válida aún si el volumen de control es deformable. Por otra parte, si se tiene la condición de flujo permanente, no existen cambios en la masa del volumen de control, es decir,  $\frac{d}{dt} \left( \int_{vc} \rho dV \right) = 0$ , con lo cual la expresión se convierte en la siguiente:

$$\int_{sc} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

La relación anterior es la *Ecuación de la Conservación de la Masa para un volumen de control fijo y no deformable*. Indica que la masa que ingresa es igual a la que se expulsa de dicha región, es decir, que la cantidad neta de fluido que entra al volumen de control es nula.

### Ecuación de la Energía para régimen de flujo unidimensional y permanente

Se derivará ahora la Ecuación de la Energía, empleando el Teorema de Transporte de Reynolds, con la finalidad de ilustrar la aplicación del mismo. De (1) se tiene que:

$$\frac{d}{dt} (B_{sys}) = \frac{d}{dt} \left( \int_{vc} \beta \rho dV \right) + \int_{sc} \beta \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

Para este caso, se tiene que  $B = E$  (energía del sistema), y por tanto  $\beta = \frac{dE}{dm} = e$  es la energía específica. Además, supóngase que se tiene un volumen de control fijo con régimen permanente de flujo. La anterior consideración significa que:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{vc} \beta \rho dV \right) = 0 \dots (9)$$

Aplicando el Teorema de Transporte de Reynolds para este caso en particular, y considerando (9), se tiene:

$$\frac{d}{dt} (E_{sys}) = \int_{sc} e \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

La Primera Ley de la Termodinámica establece que  $E_{sys} = Q + W$ , donde  $Q$  y  $W$  representan el calor y el trabajo transferidos al sistema, respectivamente. Por ende, la expresión anterior se convierte en la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (Q + W - W_{flujo}) &= \int_{sc} e \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \\ \dot{Q} + \dot{W} &= \int_{sc} e \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \dot{W}_{flujo} \end{aligned}$$

La tasa de trabajo de flujo por unidad de tiempo está dada por:

$$\dot{W}_{flujo} = \int_{sc} P (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

Donde  $P$  es la presión del sistema. Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{Q} + \dot{W} &= \int_{sc} e \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA + \int_{sc} P (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \\ \dot{Q} + \dot{W} &= \int_{sc} \left( e + \frac{P}{\rho} \right) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \end{aligned}$$

Como además se estableció que el flujo sería unidimensional, la integral anterior se transforma en la diferencia entre flujos de energía a la entrada y a la salida, es decir:

$$\dot{Q} + \dot{W} = \left( \left( e + \frac{P}{\rho} \right) pVA \right)_{out} - \left( \left( e + \frac{P}{\rho} \right) pVA \right)_{in}$$

El flujo másico  $\dot{m} = pVA$  es el mismo en la entrada y en la salida para flujo unidimensional; por tanto, puede factorizarse dicho término en el miembro derecho de la ecuación:

$$\dot{Q} + \dot{W} = \dot{m} \left( \left( e + \frac{P}{\rho} \right)_{out} - \left( e + \frac{P}{\rho} \right)_{in} \right)$$

Dividiendo entre el flujo másico, se obtiene:

$$q + w = e_{out} + \frac{P_{out}}{\rho} - e_{in} - \frac{P_{in}}{\rho} \dots (10)$$

Por otra parte, la energía específica del sistema está conformada por la suma de su energía cinética, potencial e interna:

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz \dots (11)$$

Sustituyendo (11) en (10), se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} q + w &= u_{out} + \frac{V_{out}^2}{2} + gz_{out} + \frac{P_{out}}{\rho} - \left( u_{in} + \frac{V_{in}^2}{2} + gz_{in} \right) - \frac{P_{in}}{\rho} \\ u_{in} + \frac{V_{in}^2}{2} + gz_{in} + \frac{P_{in}}{\rho} + q + w &= u_{out} + \frac{V_{out}^2}{2} + gz_{out} + \frac{P_{out}}{\rho} \\ \frac{V_{in}^2}{2} + gz_{in} + \frac{P_{in}}{\rho} + q + u_{in} - u_{out} + w &= \frac{V_{out}^2}{2} + gz_{out} + \frac{P_{out}}{\rho} \end{aligned}$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre la aceleración de gravedad  $g$ , resulta:

$$\frac{V_{in}^2}{2g} + z_{in} + \frac{P_{in}}{\gamma} + \frac{q + u_{in} - u_{out}}{g} + \frac{w}{g} = \frac{V_{out}^2}{2g} + z_{out} + \frac{P_{out}}{\gamma} \dots (12)$$

Por último, si se definen las cargas por pérdidas y ganancias de energía en el fluido como:

$$h_{pérdidas} = -\frac{q + u_{in} - u_{out}}{g}$$

$$h_w = \frac{w}{g}$$

La ecuación (12) adopta la forma:

$$\frac{V_{in}^2}{2g} + z_{in} + \frac{P_{in}}{\gamma} - h_{pérdidas} + h_w = \frac{V_{out}^2}{2g} + z_{out} + \frac{P_{out}}{\gamma} \dots (13)$$

La ecuación (13) es conocida como la *Ecuación de la Energía para flujo unidimensional permanente*; las dimensiones de cada término son de energía por unidad de peso. En la expresión anterior,  $h_{pérdida}$  y  $h_w$  representan la energía por unidad de peso que entrega y recibe el sistema, respectivamente.

### Ecuación de la Cantidad de Movimiento

Sea un volumen de control que se mueve a una velocidad  $\vec{v}_{vc}$ , y sea  $\vec{V}$  la velocidad del fluido medida desde dicho sistema de referencia móvil. La velocidad neta del fluido, medida desde un sistema de referencia fijo, será:

$$\vec{v} = \vec{v}_{vc} + \vec{V} \dots (14)$$

La segunda ley de Newton aplicada a una masa de control es:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{v})_{sys}$$

Recordando que, para evaluar la cantidad de movimiento lineal de un fluido, es necesario calcular la superposición de la cantidad de movimiento de todas las partículas que lo componen, por lo cual la cantidad de movimiento total se calcula de la siguiente forma:

$$(m\vec{v})_{sys} = \int_{\Omega} \rho \vec{v} dV$$

Por lo cual:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho \vec{v} dV \right) \dots (15)$$

Sustituyendo la expresión para  $\vec{v}$  de la ecuación (14) en (15):

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho (\vec{v}_{vc} + \vec{V}) dV \right)$$

Separando la integral anterior en dos partes:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho \vec{v}_{vc} dV \right) + \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho \vec{V} dV \right) \dots (16)$$

Como  $\vec{v}_{vc}$  no depende del volumen de fluido, es posible realizar la integral directamente, como sigue:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho \vec{v}_{vc} dV \right) = \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_{vc} \int_{\Omega} \rho dV \right) = \frac{d}{dt} (m \vec{v}_{vc})$$

Sustituyendo la expresión anterior en (16) resulta:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \frac{d}{dt} (m \vec{v}_{vc}) + \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho \vec{V} dV \right) \\ \sum \vec{F} - \frac{d}{dt} (m \vec{v}_{vc}) &= \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho \vec{V} dV \right) \end{aligned}$$

Como además se considera que la masa del sistema permanece constante:

$$\sum \vec{F} - m \vec{a}_{vc} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho \vec{V} dV \right) \dots (17)$$

Ahora, se empleará el Teorema de Transporte de Reynolds, para expresar el segundo miembro de la ecuación (17). Se sustituirá la variable muda  $B$  por la cantidad de movimiento  $\vec{p} = \int_{\Omega} \rho \vec{V} dV$ . Por tanto, la variable  $\beta = \frac{dB}{dm}$  será la velocidad  $\vec{V}$  promedio del fluido, medida desde el sistema de referencia móvil.



De la ecuación (1), se tiene:

$$\frac{d}{dt}(B_{sys}) = \frac{d}{dt} \left( \int_{vc} \beta \rho dV \right) + \int_{sc} \beta \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

Sustituyendo B por la cantidad de movimiento:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho \vec{V} dV \right) = \frac{d}{dt} \left( \int_{vc} \vec{V} \rho dV \right) + \int_{sc} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \dots (18)$$

Sustituyendo (18) en (17) se llega a:

$$\sum \vec{F} - m \vec{a}_{vc} = \frac{d}{dt} \left( \int_{vc} \vec{V} \rho dV \right) + \int_{sc} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \dots (19)$$

La expresión (19) es la *Ecuación de la Cantidad de Movimiento* para un volumen de control con aceleración  $\vec{a}_{vc}$ . Es conveniente resaltar que dicha relación es vectorial, por lo cual deben de calcularse tres términos.



## Obtención de las Ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de la Teoría de Variaciones

*...a saber, puesto que la forma de todo el Universo es la más perfecta y, de hecho, está diseñada por el creador más sabio, nada ocurrirá en el mundo sin que salga a relucir, de alguna manera, una regla máxima o mínima.*

**Leonhard Euler**  
(1707-1783)

En este apartado se justificará la formulación lagrangiana del modelo matemático de un sistema físico, a partir de la Teoría de Variaciones. Para ello, en primer término se discutirá el concepto de *funcional integral* o *distribución*. Posteriormente, se analizarán las variaciones a primer orden de dichos funcionales, así como su optimización, obteniéndose las Ecuaciones de Euler-Lagrange para el caso general del Cálculo Variacional.

Por último, se aplicará el resultado anterior para optimizar la Integral de Acción, de acuerdo con el Principio Hamiltoniano de Acción Mínima, derivando esto en las Ecuaciones de Euler-Lagrange que comúnmente se emplean en el modelado de sistemas físicos.

### Funcional Integral

Un funcional integral (también llamado *distribución*)  $A[q, \dot{q}]$  es una expresión que asigna un escalar a cada función  $f$ , y que tiene la siguiente forma:

$$A[q, \dot{q}] = \int_{t_1}^{t_2} f(q, \dot{q}; t) dt \quad \dots (1)$$

$A[q, \dot{q}]$  asigna un número real a cada función  $q(t)$  definida en un intervalo  $[t_1, t_2]$ .

## Principio Variacional

La gran semejanza que los funcionales tienen con las funciones, sugiere inmediatamente la idea de extender a aquellos el cálculo de máximos y mínimos, o más generalmente, de puntos estacionarios. De ello se ocupa la rama de las Matemáticas conocida como Cálculo de Variaciones.

Se dice que una función  $q(t)$  sufre una variación a primer orden  $\delta q$  si cambia a  $\hat{q} = q + \delta q$ . En el presente trabajo, nos limitaremos a variaciones que se anulen en los extremos del intervalo de integración, es decir:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad \dots (2)$$

Por tanto,  $q$  y  $\hat{q}$  son trayectorias próximas que conectan los puntos  $(t_1, q(t_1))$  y  $(t_2, q(t_2))$ . La variación de  $q$  produce, consecuentemente, una variación en  $\dot{q}$ , de forma que:

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} (\delta q) \quad \dots (3)$$

Es por ello que, naturalmente, se puede definir la variación de  $A[q, \dot{q}]$  como:

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} [f(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - f(q, \dot{q}, t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} [\delta f(q, \dot{q}, t)] dt$$

De forma análoga a un diferencial total para una función de varias variables, la variación de  $f$  puede expresarse como:

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial q} \delta q + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt \quad \dots (4)$$

Tomando en cuenta (3) e integrando por partes el segundo término del integrando de (4), se obtiene lo siguiente:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q(t)) \right) dt = \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt$$

Considerando las condiciones especificadas en (2), la expresión anterior se reduce a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt \dots (5)$$

Sustituyendo (5) en (4):

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt \dots (6)$$

Para que  $A[q, \dot{q}]$  alcance un punto estacionario (y por tanto  $\delta A = 0$  para todas las variaciones  $\delta q$ ), es necesario que se anule el integrando en (6). Como consecuencia de lo anterior, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \dots (7)$$

La expresión (7) se conoce como la Ecuación de Euler-Lagrange, la cual es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, en la que  $q$  es la variable dependiente y  $t$  la independiente. La solución dependerá de dos constantes arbitrarias que se fijan de modo tal que  $q(t_1) = q_1$  y  $q(t_2) = q_2$ .

En general, para funcionales de varias variables  $q_j, \dot{q}_j$ , la condición de punto estacionario se convierte en:

$$\frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \dots (8)$$

La expresión (8) representa un conjunto de  $n$  ecuaciones de Euler-Lagrange, teniéndose una ecuación para cada variable  $q_j$ .

### Principio de Acción Mínima

A lo largo de la Historia, han existido diversos postulados indicando que siempre que un proceso físico tiene lugar, éste se da de forma tal que tiende a minimizar alguna magnitud importante relacionada con dicho fenómeno. A estos postulados se les llamó *principios mínimos*.

Los primeros indicios de dichos postulados se encuentran en el campo de la Óptica; el Principio de Trayectoria Mínima da la pauta para la formulación de las leyes de reflexión (establecidas por Herón de Alejandría), mientras que el Principio de Tiempo Mínimo, propuesto por Fermat en 1657, conduce naturalmente a las Leyes de Snell para la reflexión y refracción de ondas electromagnéticas.

Entre 1834 y 1835, el matemático y astrónomo irlandés, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) estableció el principio dinámico a partir del cual es posible desarrollar la Mecánica y la mayor parte de toda la Física Clásica:

*“De todas las posibles trayectorias a través de las cuales un sistema dinámico puede moverse de un punto a otro en un intervalo especificado de tiempo (consistente con sus restricciones), la trayectoria que se seguirá es tal que minimiza la integral de la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial.”*

El enunciado anterior se conoce como el *Principio de Hamilton*, también llamado *Principio de Acción Mínima*.

Se define como *acción* ( $S$ ) a la magnitud física que expresa el producto del cambio de energía implicada en un proceso por la duración del mismo. La acción posee dimensiones de energía por tiempo, y sus unidades en el SI son  $[J \cdot s]$ .

Debido a su uso extendido en Mecánica Cuántica, la acción tiene una unidad especial perteneciente al Sistema Natural de Unidades (SN). En dicho sistema, la acción se mide en múltiplos de la constante de Planck ( $h$ ).

$$h = 6.63 \times 10^{-34} [J \cdot s]$$

Para un sistema mecánico, el cambio total de la energía está dado por la diferencia de la energía cinética y la energía potencial. De tal forma, puede establecerse el diferencial de acción como:

$$dS = \Delta E dt = (T - V)dt$$

Donde  $T$  corresponde a la energía cinética y  $V$  a la energía potencial total del sistema. Integrando en un intervalo de tiempo, se tiene:

$$\int_1^2 dS = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt$$
$$S_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt \dots (9)$$

La expresión (9) se conoce como la *Integral de Acción*. En términos de la Teoría de Variaciones, el Principio de Hamilton establece que la trayectoria que sigue un sistema dinámico es tal que siempre minimiza la integral de acción.

Simbólicamente, esto es:

$$\delta S_{1 \rightarrow 2} = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \dots (10)$$

Definiendo  $\mathcal{L} = T - V$  como la *Función Lagrangiana* o simplemente como el *Lagrangiano* del sistema, la expresión (10) se convierte en:

$$\delta S_{1 \rightarrow 2} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \dots (11)$$

Se reconoce en (11) la variación a primer orden de la distribución  $S_{1 \rightarrow 2}$ . Para que la expresión anterior se cumpla, se requiere que  $\mathcal{L}$  alcance un punto estacionario (no necesariamente mínimo, aunque generalmente ese es el caso). De acuerdo con los resultados obtenidos en (6) y (7), este hecho implica forzosamente que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \dots (12)$$

En (12), las variables  $q_j$  son las coordenadas generalizadas en términos de las cuales puede describirse toda la dinámica del sistema, mientras que  $n$  corresponde al número de grados de libertad del mismo.

En términos generales, tanto la energía cinética como la potencial, y por ende el lagrangiano del sistema, son funciones de las coordenadas generalizadas y de sus derivadas con respecto al tiempo. Esto es:

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) - V(\vec{q}; t) \dots (13)$$

Donde:

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Son los vectores de coordenadas y velocidades generalizadas, respectivamente. Si el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo ni de alguna función de excitación, se dice que el sistema es autónomo.

Cabe señalar que la función lagrangiana de un sistema no es única. Considérese, por ejemplo, la función definida por:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d\phi(\vec{q}; t)}{dt}$$

Donde  $\phi(\vec{q}; t)$  es una función arbitraria de las coordenadas generalizadas y del tiempo. Puede demostrarse que  $\mathcal{L}'$  es también un lagrangiano del sistema.

Por otro lado, a pesar de la no unicidad de la función lagrangiana, el conjunto de ecuaciones de movimiento derivado de cualquiera de ellas es siempre el mismo, y por tanto la solución del sistema sí es única.

La expresión (12) corresponde a las Ecuaciones de Euler-Lagrange, un conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, comúnmente utilizadas en el modelado de sistemas físicos. Se observa que la derivación de estas fórmulas constituye el caso particular de la aplicación de los resultados de la Teoría de Variaciones a la Mecánica, específicamente a la optimización de la integral de acción.

### Forma General de las Ecuaciones de Euler-Lagrange

El conjunto de ecuaciones (12) resulta útil cuando en el sistema no actúan fuerzas de disipación no conservativas ni fuerzas externas que no provengan de alguna función potencial. Puede extenderse el conjunto de Ecuaciones de Euler-Lagrange para considerar también estos casos.

De una forma más general, las Ecuaciones de Euler-Lagrange se escriben como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{\partial D_R}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \dots (14)$$

Donde:

$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t)$ : Función lagrangiana del sistema.

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) - V(\vec{q}; t)$$

$T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t)$ : Energía cinética total del sistema (traslacional y rotacional).

$V(\vec{q}; t)$ : Función o energía potencial total del sistema (gravitacional, elástica, etc.)

$D_R$ : Función de disipación de Rayleigh.

$Q_j$ : Fuerzas generalizadas no dependientes de un potencial (generalmente son las proyecciones de las fuerzas externas sobre el grado libertad  $j$ ).



La función de disipación se emplea cuando existen fuerzas de fricción proporcionales a alguna velocidad, como en el caso de la fricción viscosa. Es decir:

$$f_k = -b_k \dot{\delta}_k$$

$$D_R = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m b_k (\dot{\delta}_k)^2 \dots (15)$$

En ésta,  $m$  representa el número de disipadores,  $b_k$  y  $\dot{\delta}_k$  son los coeficientes de fricción viscosa y la diferencia de velocidades en el  $k$ -ésimo amortiguador, respectivamente.

Típicamente, el modelado realizado por ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas no autónomos, disipativos e invariantes con el tiempo, resulta en una ecuación matricial de la forma:

$$\mathbf{M}(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + \mathbf{C}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} + \mathbf{D}(\dot{\vec{q}}) + \mathbf{K}(\vec{q}) + \mathbf{G}(\vec{q}) = \mathbf{Q}(t)$$

Donde:

$\mathbf{M}(\vec{q})$  : Matriz de inercia

$\mathbf{C}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$  : Matriz de Coriolis.

$\mathbf{D}(\dot{\vec{q}})$  : Vector de fuerzas disipativas.

$\mathbf{K}(\vec{q})$  : Vector de fuerzas elásticas.

$\mathbf{G}(\vec{q})$  : Vector de términos gravitacionales.

$\mathbf{Q}(t)$  : Vector de fuerzas generalizadas externas.

Las Ecuaciones de Euler-Lagrange son ampliamente utilizadas en el modelado de sistemas físicos, particularmente mecánicos. La razón de su éxito estriba en que la formulación lagrangiana es un método alternativo al newtoniano, basado en consideraciones energéticas, lo cual hace innecesaria la determinación de las fuerzas de restricción o ligadura entre los elementos que constituyen el sistema, las cuales, en la mayor parte de los casos, no tienen una representación sencilla.

Cabe señalar que el método de Lagrange solamente puede aplicarse si las restricciones del sistema son holonómicas, es decir, aquellas que poseen una representación como función analítica de la posición (coordenadas generalizadas). Es posible ampliar aún más el método para considerar restricciones no holonómicas de tipo diferencial lineal, mediante la aplicación de los multiplicadores indeterminados de Lagrange. Sin embargo, este tópico cae fuera del alcance del presente trabajo.



## *Obtención Experimental de las Constantes de Sustentación y Arrastre del Sistema Motor-Propela*

*Cuando se examinan inteligentemente incluso los más inútiles experimentos, éstos pueden abrir el camino hacia los más sensacionales hallazgos.*

**Max Planck  
(1858-1947)**

*Ningún experimento es tan tonto que no merezca la pena intentarlo.*

**Hermann Von Helmholtz  
(1821-1894)**

En el *Capítulo 4* se obtuvo el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del dron, es decir, un sistema de ecuaciones diferenciales que contienen la información de todos los elementos que lo conforman, tanto individualmente como en conjunto.

Sin embargo, algunos de dichos dispositivos poseen parámetros característicos que aparecen en el modelo, los cuales deben de ser determinados a través de su medición directa o de forma experimental. Tal es el caso de las constantes de sustentación  $k$  y de arrastre  $b$  que relacionan el empuje y el par con la velocidad angular del rotor, respectivamente.

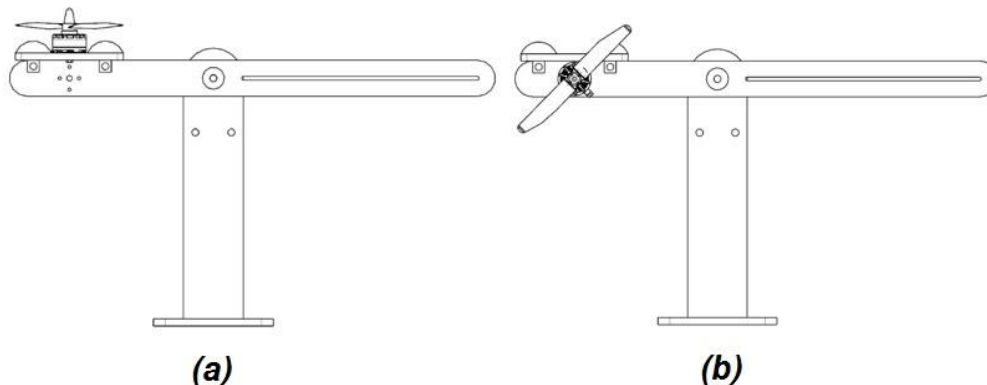
Dichas constantes no pueden ser obtenidas directamente, por lo cual fue necesario el diseño y la construcción de un banco de pruebas que permitiera calcular sus valores numéricos experimentalmente. En este apartado se describe el funcionamiento de dicho banco de pruebas, así como el procedimiento que se siguió para obtener los parámetros  $k$  y  $b$ , con base en los datos recabados con el mismo.

## Banco de pruebas

Como se mencionó previamente, fue necesaria la determinación de los valores de dos constantes para caracterizar el sistema Motor-Propela, ya que éstas son fundamentales para tener un modelo matemático que representase apropiadamente al sistema y para generar leyes de control para el vehículo aéreo.

Por dicha razón, se requirió construir un banco de pruebas que permitiera obtener estos valores de forma fiable. Se decidió que dicho sistema tuviera como principio de funcionamiento el equilibrio de pares, es decir, que operara de forma similar a como lo hace una balanza.

Por otra parte, resultaba conveniente que la orientación del motor pudiera ser modificada, con la finalidad obtener ambas constantes sin necesidad de construir dos sistemas de medición. En la *Figura A.4-1* se muestra un esquema del sistema de pruebas diseñado, así como los modos de operación que éste posee.



*Figura A.4-1. Banco de pruebas para caracterizar un sistema Motor-Propela.  
(a) Configuración para determinar  $k$ . (b) Configuración para determinar  $b$ .*

El banco de pruebas está conformado por un soporte vertical empotrado en una base. Éste tiene sujeto un eje, el cual es insertado en la parte interna de un rodamiento rígido de bolas. La parte externa del rodamiento está fija a un balancín que puede rotar libremente dentro del intervalo de  $\pm 50^\circ$ , aproximadamente, limitado por un par de topes mecánicos. Esto último con el fin de evitar alguna colisión entre la hélice y cualquier otra parte de la estructura.

Como puede apreciarse, en ambas configuraciones es posible colocar un motor, el cual, debido a su peso, producirá un momento en el balancín. Adicionalmente, al girar el rotor, el balancín experimentará un par adicional, mismo que será ajustado para que tener el mismo sentido que el anterior.

La parte derecha del balancín cuenta con una ranura para colocar una corredera a la cual se sujetará una masa conocida, con la finalidad de equilibrar el par total producido por el motor y la propela. Con base en estos datos y en la medición de la velocidad angular del rotor, se determinarán los valores de las constantes de sustentación y arrastre.

### Prueba para determinar la constante de sustentación $k$

Como se abordó en el apartado de modelado matemático, cada conjunto formado por un motor y una propela produce un empuje estático que es proporcional al cuadrado de la velocidad angular, esto es:

$$T = k\omega^2 \dots (1)$$

Donde  $T$  es el empuje producido por la propela, y  $\omega$  es la velocidad angular del rotor. Se había mencionado anteriormente que se ajustará el sentido de giro del motor para que la fuerza de empuje apunte hacia abajo y, por ende, tenga la misma dirección que el peso.

Para obtener el valor de la constante  $k$ , se recurrirá a la determinación experimental del par presente en el balancín, producido por el empuje. Por tanto, es necesaria una expresión que relacione estas dos cantidades.

Considérese la *Figura A.4-2*, en la cual se muestra tanto la configuración del banco de pruebas para determinar  $k$ , como el conjunto de fuerzas y momentos que intervienen en la prueba.

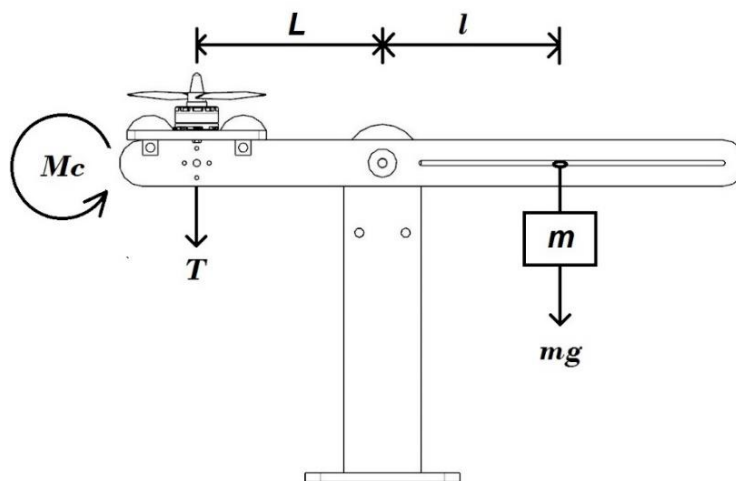


Figura A.4-2. Diagrama del sistema para determinar  $k$ .

**Momento de calibración  $M_c$** 

La primera actividad que se debe realizar es colocar el motor en reposo y ajustar la masa  $m_0$  a una distancia  $l_0$ , de forma tal que se consiga el equilibrio. En dicha situación el empuje estático será nulo ( $T = 0$ ) y con ello se obtendrá un *momento de giro de calibración*  $M_c$ , mismo que se calcula de la siguiente forma:

$$M_c = m_0 g l_0 \dots (2)$$

**Cálculo del empuje  $T$** 

Ahora, si se considera que el motor tiene una velocidad angular distinta de cero, se encontrará presente la fuerza de empuje  $T$ . Cabe mencionar que, al igual que en la etapa de calibración, es necesario colocar una nueva masa  $m$  a la distancia apropiada para equilibrar el balancín.

Si se toma la suma de pares respecto al centro del balancín, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Sigma M_o &= 0 \\ M_c + TL - mgl &= 0 \dots (3) \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en (3) se obtiene lo que sigue:

$$m_0 g l_0 + TL - mgl = 0 \dots (4)$$

Despejando el empuje, se llega a la siguiente expresión:

$$T = \frac{g}{L} (ml - m_0 l_0) \dots (5)$$

La ecuación (5) es muy importante, ya que permite calcular directamente la fuerza de empuje producida por un motor y una propela en particular, a partir de las distancias  $l_0$  y  $l$  obtenidas.

**Obtención del parámetro  $k$** 

Para que el experimento sea llevado a cabo de forma satisfactoria, es necesaria la obtención de un número suficiente de mediciones para el empuje  $T_i$ , en conjunto con su respectiva velocidad angular  $\omega_i$ . Resulta entonces conveniente reportar los datos obtenidos de la prueba en una tabla como la que se muestra en la *Tabla A.4-1*.

Medición	m	l	$\omega$	T
1	$m_1$	$l_1$	$\omega_1$	$T_1$
2	$m_2$	$l_2$	$\omega_2$	$T_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	$m_i$	$l_i$	$\omega_i$	$T_i$

Tabla A.4-1. Tabla de mediciones para determinar el parámetro  $k$ .

Una vez recabada la información, para obtener el valor de  $k$ , es necesario realizar una regresión lineal a una curva de segundo grado, lo cual conducirá a una aproximación de la siguiente forma:

$$T = k\omega^2 + e_1\omega + e_2 \dots (6)$$

Donde  $e_1$  y  $e_2$ , en conjunto, son términos que desplazan el vértice de la parábola; por ello su valor deberá ser sumamente pequeño, es decir  $e_1, e_2 \approx 0$ .

Para asegurar que el experimento es correcto, es necesario corroborar que el coeficiente de determinación sea muy cercano a uno ( $r^2 \approx 1$ ), ya que este indica la bondad del ajuste, es decir, representa la medida en que la expresión (6) explica los datos obtenidos durante la prueba.

### Prueba para determinar la constante de arrastre $b$

De forma análoga al caso anterior, el par producido por el motor y la propela depende del cuadrado de la velocidad angular del rotor, es decir:

$$\tau_M = b\omega^2 \dots (7)$$

Como se sabe, el par  $\tau_M$  contribuye a la rotación del vehículo alrededor del eje  $z$ , es decir, modifica el ángulo  $\psi$ . Dicho término se conoce como *par de reacción en el motor*. Éste surge debido a que, al operar, el motor aplica un par de giro al rotor, y éste último a su vez impulsa al motor en la dirección contraria tal como lo dicta la Tercera Ley de Newton.

En la *Figura A.4-3* se muestra un esquema en el que se ilustra la configuración del banco de pruebas y el conjunto de fuerzas y momentos que intervienen en el presente experimento.

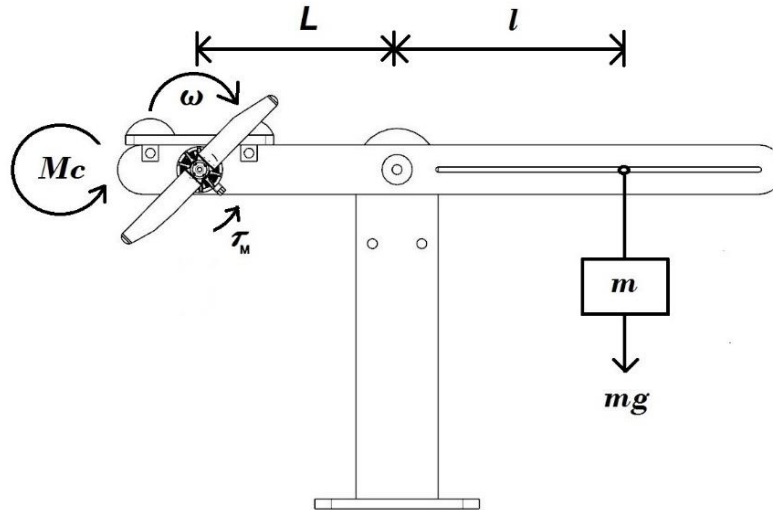


Figura A.4-3. Diagrama del sistema para determinar  $b$ .

Como las ecuaciones (1) y (7) son similares, es posible utilizar los resultados obtenidos anteriormente para obtener el valor de la constante  $b$ . Es por ello que se propone un par calibración que se calcula de la misma forma que en (2).

#### Cálculo del par en el motor $\tau_M$

Un par cualquiera aplicado a un cuerpo rígido produce los mismos efectos sin importar el lugar en el que éste se aplique; es por ello que el par  $\tau_M$  que se desea calcular se medirá con respecto al centro del balancín y no en el motor.

Realizando el equilibrio de momentos en el balancín, se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\sum M_o &= 0 \\ M_c + \tau_M - mgl &= 0 \dots (8)\end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en (8) se obtiene el siguiente resultado:

$$m_0gl_0 + \tau_M - mgl = 0 \dots (9)$$

Despejando a  $\tau_M$  se llega a:

$$\tau_M = g(ml - m_0l_0) \dots (10)$$

La ecuación (10) permite calcular el par  $\tau_M$  en función de la masa  $m$  y de la distancia  $l$  de ésta respecto al centro del balancín.



### Obtención del parámetro $b$

Al igual que en el experimento para determinar la constante de sustentación, es necesario tomar un número apropiado de mediciones para encontrar correctamente el valor de  $b$ . Para ello se deberán de introducir los datos en una tabla como la que se muestra a continuación.

Medición	$m$	$l$	$\omega$	$\tau_M$
1	$m_1$	$l_1$	$\omega_1$	$\tau_{M1}$
2	$m_2$	$l_2$	$\omega_2$	$\tau_{M2}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$i$	$m_i$	$l_i$	$\omega_i$	$\tau_{Mi}$

Tabla A.4-2. Tabla de mediciones para determinar el parámetro  $b$ .

Es importante mencionar nuevamente que, una vez que se obtenga la regresión lineal, debe verificarse que el coeficiente de determinación tenga un valor cercano a la unidad ( $R^2 \approx 1$ ). Lo anterior, para asegurar que el ajuste es válido.

### Calibración y correcta utilización de los Controladores Electrónicos de Velocidad (ESC)

En el *Capítulo 3*, correspondiente al Diseño Mecánico y Electrónico, se plantea la utilización de Controladores Electrónicos de Velocidad (ESC) como etapa de potencia para los motores brushless. Estos dispositivos se encargan de proporcionar la corriente necesaria para el movimiento de los actuadores, además de regular su velocidad de rotación, con base en una señal de control recibida desde el controlador de vuelo. Dicha señal consiste en un pulso PWM con una frecuencia aproximada de 50 [Hz]; la velocidad del motor varía conforme se incrementa el tiempo en alto del pulso de 1 [ms] a 2 [ms].

Para poder utilizar un ESC apropiadamente, resulta necesario efectuar ciertas configuraciones previas, específicamente las operaciones de armado y calibración. Se dice que un ESC se encuentra armado cuando está a la espera de una señal de control para empezar a mover el motor. Dicho de otra forma, el armado es la inicialización necesaria para que el circuito controlador pueda realizar correctamente su tarea. La calibración consiste en especificar los límites de operación entre los cuales ha de funcionar el dispositivo, y que corresponden directamente con una velocidad de rotación nula y aquella que alcanzará el motor a máxima capacidad. Si el ESC se encuentra descalibrado, no se producirá el armado del circuito, y por ende, éste no funcionará.

Estas dos operaciones pueden efectuarse de una manera muy sencilla. Considérese la configuración mostrada en la *Figura A.4-4*. En ella se muestran un potenciómetro alimentado con 5 [V] en sus extremos, y cuya terminal central se conecta a una entrada analógica de un microcontrolador, a partir del cual se envía una señal de control PWM hacia el ESC, que se encuentra conectado al motor brushless mediante las tres terminales correspondientes.

El proceso de armado se da mediante el siguiente algoritmo: en primer término, debe enviarse la señal de armado al ESC, la cual consiste en un pulso de aproximadamente 1 [ms] de tiempo en alto, con la ya sabida frecuencia de 50 [Hz].

Si se utiliza la plataforma Arduino, lo anterior puede lograrse mediante la llamada al método `write(0)` (o, equivalentemente `writeMicroSeconds(1000)`) para un objeto del tipo `Servo`, encontrado en la librería `Servo.h`. Para esto, previamente debe haberse creado dicho objeto y declarado la terminal que se utilizará para enviar la señal de control. Más adelante, se muestra el código generado en la IDE de Arduino para efectuar la calibración de los ESC y la caracterización de los motores en el presente proyecto.

Para la calibración debe enviarse la máxima señal PWM admisible, correspondiente con un pulso con un tiempo en alto de aproximadamente 2 [ms]. Esto se logra si previamente se posiciona el potenciómetro en el extremo en el cual el potencial en la terminal central sea máximo. Mediante el microcontrolador, se lee esta señal de tensión, se calcula el correspondiente tiempo en alto, y se envía al ESC sin alimentar.

Una vez hecho esto, se procede a conectar el ESC a la batería o fuente de alimentación, y se cambia rápidamente la posición del potenciómetro hasta el extremo opuesto. En este punto, debe escucharse una serie de pitidos emitidos por el motor y, adicionalmente, se encenderá un LED en el ESC; lo anterior indica que éste ha sido calibrado apropiadamente. Si ahora se modifica la posición angular del potenciómetro, el motor debe girar con una velocidad proporcional al potencial de la terminal central.

Si se dispone de un radiocontrol y de un dispositivo receptor de radiofrecuencia, puede realizarse este mismo procedimiento, conectando directamente la terminal *throttle* del receptor a la señal del ESC. De esta forma, el joystick del radiocontrol realizará la función del potenciómetro.

A continuación, se presenta el código fuente del programa generado en la plataforma Arduino para la calibración de los ESC y para realizar las pruebas de caracterización. Para ello, se utilizó el microcontrolador ATmega 2560, incorporado en la tarjeta Flight Controller MultiWii AIO V2, cuyas características se presentan en el *Capítulo 3*.

```

//Programa para calibración de ESC y calibración de motores brushless

#include <Servo.h>           //Incluir la librería Servo.h

//Definición de constantes
#define PINMOTOR 3
#define MAXIMOPWM 2000
#define MINIMOPWM 1000
#define BAUD 9600

int Pot = A0;               //Entrada analógica del potenciómetro
Servo Mot;                 //Declaración del objeto Mot de la librería
                           //Servo

//Declaración de variables
int val=0;
int auxiliar=0;

//Función de configuración setup()
void setup()
{
    Serial.begin(BAUD);     //Inicialización de la comunicación serial
    pinMode(Pot, INPUT);   //Declaración de la terminal Pot como entrada
    Mot.attach(PINMOTOR);  //Declaración de la terminal PINMOTOR como
                           //salida asociada al objeto servo MOT
    Mot.write(0);          //Instrucción de armado
    delay(500);            //Retardo de 500 [ms]
}

//Fin de la función de configuración

//Función principal loop()
void loop()
{
    //Lectura del valor analógico de Pot, mapeo y restricción al intervalo de
    //MINIMOPWM (1000) a MAXIMOPWM (2000). Envío del tiempo en alto de //la
    //señal PWM hacia el ESC
    val = analogRead(Pot);
    val=map(val,0,1023,MINIMOPWM,MAXIMOPWM);
    val=constrain(val,MINIMOPWM,MAXIMOPWM);
    Mot.writeMicroseconds(val);
    delay(15);

    //Despliegue de datos por puerto serial sólo si el valor cambia
    if(Serial.available()>0)
    {
        auxiliar=Serial.read();
        Serial.println(val);
    }
}
//Fin de la función principal loop()

```

## Resultados

En la *Tabla A.4-3* se presentan los resultados obtenidos en la prueba para la determinación de la constante de sustentación  $k$  de los motores brushless. Los valores obtenidos para todos los actuadores son idénticos.

Constantes		Determinación de la constante de sustentación $k$							
L [m]	0.12	Medición	m [kg]	l [m]	T <sub>alto</sub> [μs]	ω [rev/min]	ω [rad/s]	ω <sup>2</sup> [rad/s] <sup>2</sup>	T [N]
g [kg·m/s <sup>2</sup> ]	9.78	0	0.14591	0.043	1000	0	0.0000	0.0000	0.0000
l <sub>0</sub> [m]	0.043	1	0.14591	0.064	1100	5334	558.5752	312006.2248	0.2497
m <sub>0</sub> [kg]	0.14591	2	0.14591	0.091	1200	8015	839.3288	704472.8971	0.5708
		3	0.14591	0.118	1300	10100	1057.6695	1118664.8277	0.8919
		4	0.14591	0.144	1400	11715	1226.7919	1505018.4425	1.2011
		5	0.14591	0.163	1499	12840	1344.6017	1807953.6126	1.4270
		6	0.14591	0.183	1601	13950	1460.8406	2134055.2116	1.6648
		7	0.25158	0.121	1701	15100	1581.2683	2500409.4439	1.9696
		8	0.25158	0.136	1799	16420	1719.4984	2956674.6756	2.2772

Tabla A.4-3. Datos experimentales para la determinación de la constante de sustentación  $k$ .

Como se había mencionado anteriormente, el empuje en función de la velocidad angular producido por un conjunto rotor-propela se ajusta a una curva polinomial de segundo grado de la forma dada por (6). A partir de los datos recabados en la tabla anterior, se puede apreciar gráficamente esta tendencia en la *Figura A.4-5*.



Figura A.4-5. Gráfica de empuje contra velocidad angular para el par motor-propela.

La simplificación adicional más frecuente del modelo anterior consiste en despreciar los términos de orden uno y cero, y asumir que la fuerza de empuje es proporcional al cuadrado de la velocidad angular, tal como en la expresión (1). Realizando un ajuste lineal entre el empuje y el cuadrado de la velocidad angular, con base en los datos obtenidos, se obtiene la siguiente gráfica:

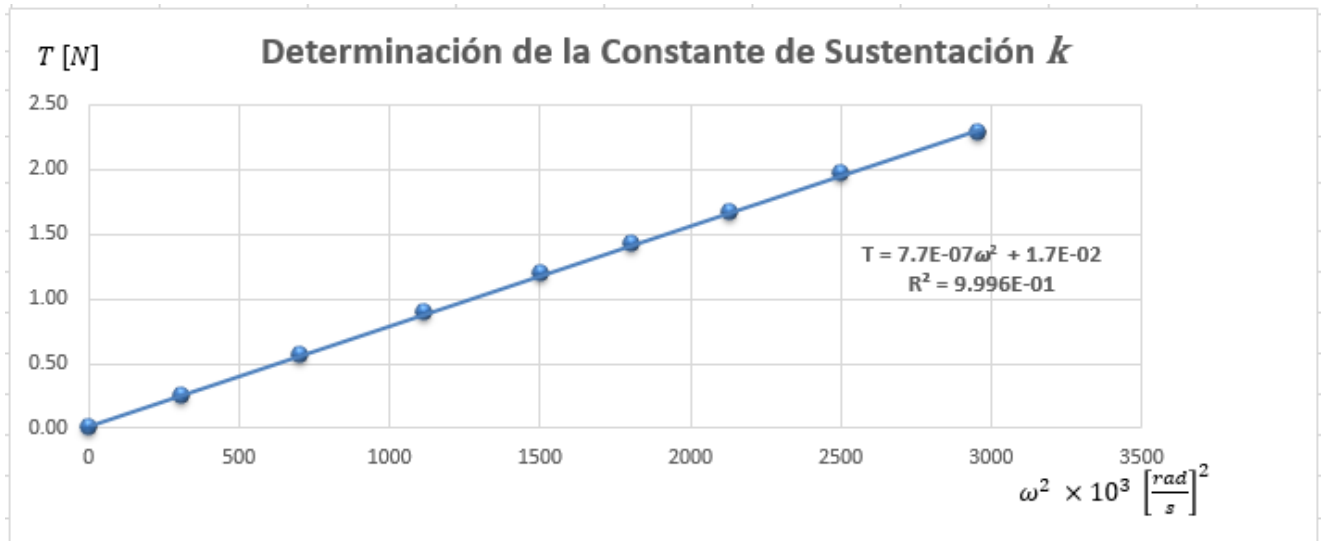


Figura A.4-6. Gráfica de empuje contra el cuadrado de la velocidad angular para el par motor-propela.

En las dos gráficas anteriores, se observa que el coeficiente del término cuadrático es el mismo. Dicho valor representa la constante de sustentación para el par motor-propela:

$$k = 7.7 \times 10^{-7} \text{ [N} \cdot \text{s}^2\text{]}$$

De igual forma, se tiene que el coeficiente de determinación  $R^2$  es muy cercano a la unidad en ambos casos, lo cual indica que el ajuste efectuado explica satisfactoriamente la dispersión de datos recopilados durante la prueba.

Por otro lado, para el caso de la constante de arrastre  $b$ , se tienen los siguientes resultados experimentales:

Constantes		Determinación de la constante de arrastre $b$						
L [m]	0.12	Medición	m [kg]	l [m]	$\omega$ [rev/min]	$\omega$ [rad/s]	$\omega^2$ [rad/s] <sup>2</sup>	$\tau$ [N·m]
g [kg·m/s <sup>2</sup> ]	9.78	0	0.14591	0.043	0	0.0000	0.0000	0.0000
l <sub>0</sub> [m]	0.043	1	0.14791	0.16	15905	1665.5677	2774115.7805	0.1701
m <sub>0</sub> [kg]	0.14591							

Tabla A.4-4. Datos experimentales para la determinación de la constante de arrastre  $b$ .

La razón por la cual se tienen tan pocos datos en esta prueba es que el par producido por el motor prácticamente no varía respecto a la velocidad angular; debido a esto, el banco de pruebas diseñado no posee suficiente resolución para detectar dicho cambio. Con base en los datos anteriores, se tiene la siguiente gráfica:

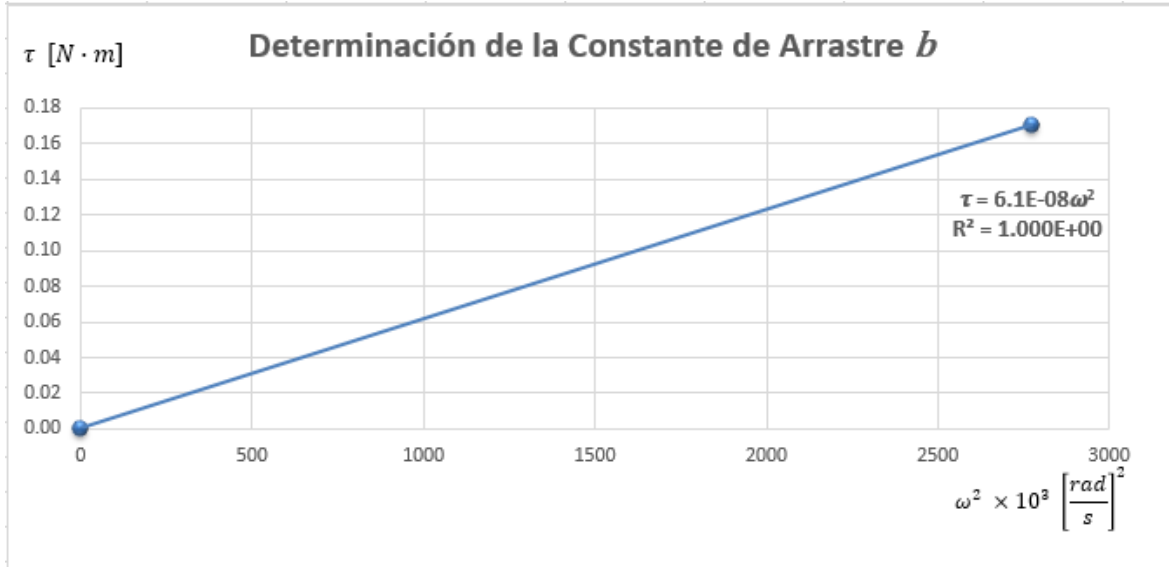


Figura A.4-7. Gráfica de empuje contra el cuadrado de la velocidad angular para el par motor-propela.

De acuerdo con (7), la constante de proporcionalidad que relaciona el par del motor y el cuadrado de la velocidad angular se denomina constante de arrastre  $b$ ; de la gráfica anterior, se observa que:

$$b = 6.1 \times 10^{-8} [N \cdot m \cdot s^2]$$

## *Protocolo de Comunicación Serial Multiwii (MSP)*

*El mayor problema en la comunicación  
es la ilusión de que ésta se ha logrado.*

**George Bernard Shaw**  
(1856-1950)

*Las palabras ‘ información ’ y ‘ comunicación ’  
a menudo se utilizan como sinónimos,  
pero significan cosas muy diferentes.  
Información es dar; comunicación es entender.*

**Sydney J. Harris**  
(1917-1986)

El Protocolo de Comunicación Serial Multiwii (*MSP, Multiwii Serial Protocol*), es un algoritmo creado para efectuar solicitudes de información y ejecutar instrucciones y comandos en Tarjetas Controladoras de Vuelo (*FC, Flight Controller*) compatibles con la plataforma de software *Multiwii*, la cual es ampliamente utilizada por aficionados y diseñadores de aeronaves multirrotor alrededor del mundo.

Las características principales de *MSP* son las siguientes:

- Ligero y portable.
- Genérico, amigable y transparente al usuario. No requiere software especial para su ejecución.
- Embebido dentro del código principal de *Multiwii*.
- Eficiente para la transmisión de información: únicamente los datos solicitados son enviados en un formato binario. Lo anterior permite un manejo y procesamiento más ordenado de la información, evitando saturación y uso excesivo de recursos.
- Seguro. Los datos se verifican a través de verificación por redundancia cíclica (CRC), lo que permite garantizar la integridad de la información transmitida.

- Metódico y estructurado. Posee un preludeo o cabecera específico para el envío o recepción de datos. Esto es útil, además, debido a que puede utilizarse en paralelo con otros protocolos de comunicación (GPS, Bluetooth, etc) sin que exista colisión de datos ni conflicto alguno.
- Diseño multiplataforma con baja sensibilidad ante evolución de versiones de software.

Un aspecto que es fundamentalmente importante en el funcionamiento de *MSP* es que éste nunca envía información o ejecuta instrucciones por sí mismo; siempre debe hacerse una solicitud externa para transmitir datos o realizar alguna acción en el *FC*. Esto permite un mayor control sobre el flujo de datos y hace del protocolo una herramienta fiable y eficiente.

Existen dos tipos básicos de solicitudes por parte del usuario hacia el *MSP*. La primera de ellas es una llamada para acceder a datos internos del *FC* (por ejemplo, valores de lecturas de los sensores), mientras que la segunda se utiliza para enviar comandos predeterminados que ejecutan acciones sobre el sistema, así como para fijar nuevos parámetros para la operación del mismo.

Sin importar de cuál de los dos casos anteriores se trate, el mensaje de solicitud debe de tener el siguiente formato:

***[Cabecera] [Longitud del arreglo de datos] [Código de Comando] [Datos] [CRC]***

La cabecera es el inicio de todo mensaje de comunicación en *MSP*. Consta de tres datos con un tamaño de ocho bits cada uno: el carácter '\$' seguido de los caracteres 'M' y '<' (recuérdese que el código ASCII establece un valor de ocho bits, esto es, de 0 a 255, para los caracteres más comunes). El carácter '<' indica la dirección de flujo de la información. En este caso, significa que los datos entran al sistema de *Multiwii*.

Posteriormente, la longitud del arreglo indica a *MSP* el número de datos que debe esperar. En caso de que el mensaje corresponda a una solicitud de información hacia *Multiwii*, la longitud de la cadena deberá ser igual a cero.

A continuación, el código de comando es un número entero de ocho bits el cual especifica al sistema qué tarea ha de ser ejecutada. Dentro de éstos se incluyen instrucciones muy diversas, que van desde preguntar por la versión del software o por datos de sensores y variables internas, hasta fijar parámetros de operación, como el valor de *throttle* (aceleración) para cada rotor o la magnitud de las constantes del controlador PID embebido para la estabilización de ángulos de navegación.



En el presente proyecto, únicamente se utilizaron comandos para leer los datos de los sensores integrados en la tarjeta *FC*, por lo cual sólo éstos serán discutidos aquí. Para mayor información acerca de las instrucciones de *MSP* y sus códigos, remitirse a los sitios web oficiales <http://www.multiwii.com/forum/viewtopic.php?f=8&t=1516> y [http://www.multiwii.com/wiki/index.php?title=Multiwii\\_Serial\\_Protocol](http://www.multiwii.com/wiki/index.php?title=Multiwii_Serial_Protocol).

Por último, la cadena de datos debe estar constituida por una secuencia de valores de ocho bits, consistente con la longitud establecida y con los argumentos necesarios para la ejecución del comando invocado. Como se mencionó previamente, en caso de una simple solicitud de información, la longitud de la cadena es de cero, por ende, ningún dato debe ser enviado.

El CRC es el mecanismo de verificación del protocolo, y se calcula como la operación OR excluyente ( $XOR, \oplus$ ) sobre los bytes correspondientes a la longitud del arreglo de datos, el código de comando y los propios datos enviados.

Para comprender mejor el funcionamiento de las solicitudes hacia *MSP* considérese el caso de una solicitud de información para conocer el valor de los ángulos de navegación *roll*, *pitch* y *yaw*. Como antes, todo mensaje de comunicación debe iniciar con la cabecera, conformada por los caracteres '\$' 'M' y finalizando con '<', ya que se tiene flujo de información hacia el *Multiwii*.

Debido a que se trata de una solicitud de información, el tamaño de la cadena de datos a enviar es de cero. Posteriormente, el comando correspondiente a la tarea deseada se conoce como *MSP\_ATTITUDE*, y tiene asociado el código 108. Como ya se explicó, no se requiere del envío de ninguna cadena de datos. Finalmente, el CRC correcto para esta operación se calcula como la operación XOR sobre los bytes de longitud, código y datos. En este caso:

$$CRC = 0 \oplus 108 \oplus 0 = 108$$

Por tanto, el mensaje de solicitud a enviar a *MSP* para conocer los valores de los ángulos de navegación debe ser:

**\$M<0108108**

El sistema *Multiwii* interpretará la instrucción anterior y responderá con la información requerida. El formato de las respuestas por parte del software es muy idéntico al usado para efectuar las solicitudes:

**[Cabecera] [Longitud del arreglo de datos] [Código de Comando] [Datos] [CRC]**

En este caso, la cabecera está formada por los caracteres '\$', 'M' y '>', indicando éste último que el flujo de información es hacia fuera de *Multiwii*. Posteriormente se envía un byte con el valor de la longitud de datos de respuesta y otro con el código de comando de la tarea solicitada. Finalmente, una secuencia de bytes incluye la información de interés, seguida del CRC, calculado en la misma forma que durante la solicitud.

Volviendo al ejemplo de la requisición de ángulos de navegación, la respuesta de *Multiwii* al mensaje descrito previamente sería:

$$[\$M>] [6] [108] [R1 R2 P1 P2 Y1 Y2] [CRC]$$

En la expresión anterior, se han intercalado corchetes entre cada uno de los elementos de la respuesta únicamente con el fin de ser más claros en la explicación de los mismos. Evidentemente, en una situación real, dichos corchetes no se encontrarían presentes.

Los caracteres  $[\$M>]$  representan la cabecera del mensaje; el valor  $[6]$  es el número de bytes (8 bits) presentes en la cadena de datos, mientras que  $[108]$  es el código de comando para la tarea solicitada. El arreglo de seis datos  $[R1 R2 P1 P2 Y1 Y2]$  representa la información sobre el valor de los ángulos de navegación, correspondiendo dos bytes al *roll* ( $R1, R2$ ), dos al *pitch* ( $P1, P2$ ) y dos al *yaw* ( $Y1, Y2$ ).

El comando MSP\_ATTITUDE, en particular, responde con tres datos, cada uno de 16 bits, relativos a cada uno de los ángulos. Lo anterior explica por qué se requieren dos bytes para cada valor. En este caso, la información viene empaquetada de forma tal que el primer byte recibido de cada ángulo es el menos significativo. Por ende, para obtener el valor apropiado, los bits del segundo byte deben recorrerse ocho posiciones a la izquierda y después integrarse con los 8 bits del primer byte. Simbólicamente y tomando como ejemplo al ángulo *roll*, esto puede representarse como:

$$Roll = (R2 \ll 8) + R1$$

Donde el operador “ $\ll$ ” indica el corrimiento de 8 bits hacia la izquierda del byte  $R2$ , y el símbolo “+” representa la operación booleana OR. El mismo procedimiento debe efectuarse sobre los bytes correspondientes al *pitch* y al *yaw*.

Finalmente, el CRC en este caso se calcula como:

$$CRC = 6 \oplus 108 \oplus R1 \oplus R2 \oplus P1 \oplus P2 \oplus Y1 \oplus Y2$$

A continuación, se presenta una tabla en donde se resumen los comandos de MSP empleados en el presente proyecto, sus códigos, así como los datos que proporciona como respuesta. Nuevamente, se recomienda que, para una información más completa y detallada, se consulten las referencias mencionadas previamente.

Por último, es conveniente señalar que la naturaleza sistemática y metódica del MSP lo vuelve susceptible a ser programado en forma de máquina de estados, como se muestra en la *Figura A.5-1*; precisamente esto fue lo que se hizo para el presente proyecto. Véanse los *Códigos de Programación*.

Comando	Código	Datos	Tipo	Unidad
MSP_RAW_IMU	102	acc x	INT 16	Depende del sensor. Basada en la definición de 1 g
		acc y	INT 16	
		acc z	INT 16	
		vel $\phi$	INT 16	1/4.096 [°/s]
		vel $\theta$	INT 16	
		vel $\psi$	INT 16	
		$\phi$	INT 16	Depende del sensor
		$\theta$	INT 16	
$\psi$	INT 16			
MSP_ATTITUDE	108	$\phi$	INT 16	1/10 [°] Rango: [-1800,1800]
		$\theta$	INT 16	1/10 [°] Rango: [-900,900]
		$\psi$	INT 16	1 [°] Rango: [-180,180]
MSP_ALTITUDE	109	z	INT 32	1 [cm]
		vel z	INT 16	1 [cm/s]

**Notas:** acc=aceleración, vel=velocidad, g=9.81 [m/s<sup>2</sup>],  $\phi$ =roll,  $\theta$ =pitch,  $\psi$ =yaw,  
INT 16=entero de 16 bits, INT 32=entero de 32 bits

Tabla A.5-1. Comandos MSP.

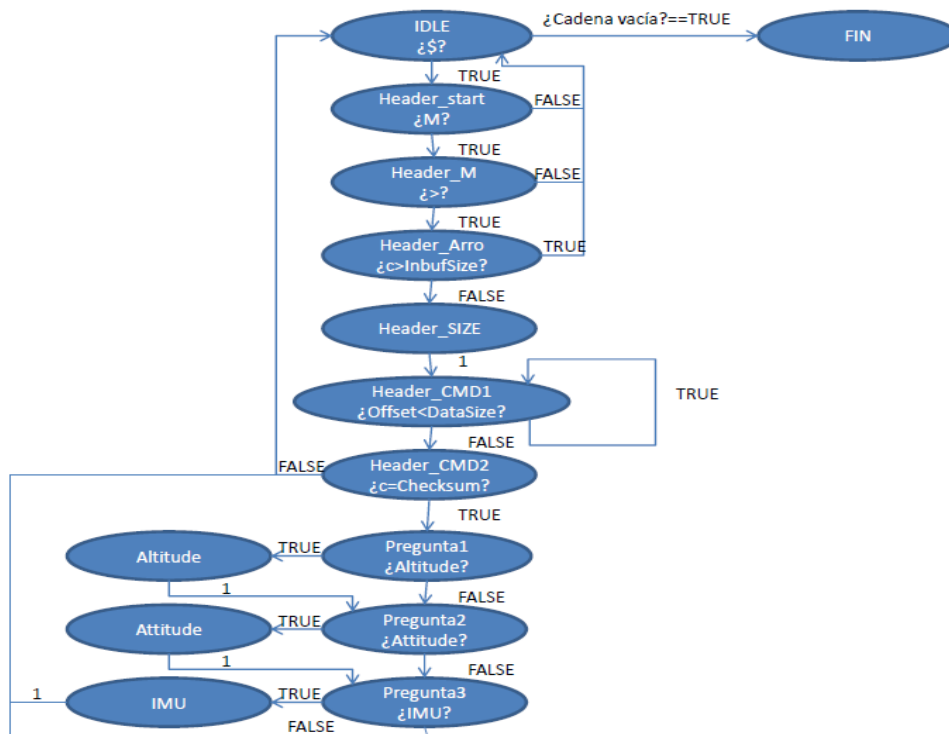


Figura A.5-1. Máquina de estados para el MSP.



# Códigos de Programación

*Primero resuelve el problema.  
Entonces, escribe el código.*

**John Johnson**  
(19XX-)

*Depurar es al menos dos veces más duro  
que escribir el código por primera vez. Por tanto,  
si tu escribes el código de la forma más inteligente posible  
no serás, por definición, lo suficientemente inteligente para depurarlo.*

**Brian Kernighan**  
(1942-)

Como se mencionó anteriormente, todos los códigos de programación desarrollados en el presente proyecto, se encuentran disponibles para su consulta en <https://github.com/uli-rcm/Dron-FIUNAM>. Es por ello que, en este apartado, únicamente se presenta el código fuente de los programas relacionados con la implementación del controlador y del observador en Teensy.

Se mencionó anteriormente que el sensor barométrico puede determinar tanto la altura  $z$  como la velocidad lineal  $\dot{z}$ , y por dicha razón se realizaron dos programas distintos, con el objetivo de comparar el desempeño de los mismos, y elegir el mejor de éstos.

El primer programa contempla el empleo de las dos lecturas proporcionadas por el sensor ( $z$  y  $\dot{z}$ ), por lo cual únicamente se programó un controlador. En cambio, el segundo programa solo emplea la lectura de  $z$ , y por ello se implementaron tanto el controlador LQR, como el observador de orden reducido.

## Controlador LQR

### Programa Principal

```
//Cabecera del controlador
#include "Controlador.h"

//Cabecera del protocolo de comunicación
#include "protocol.h"

//Definiciones de la Máquina de estados
#ifndef serialstate_h
#define serialstate_h
#include "serialstate.h"
#endif

//Variables para el tiempo de muestreo y de los datos adquiridos
#define Ts 20
#define INBUF_SIZE 64
#define BAUD 57600

//Variables para la máquina de estados
static uint8_t inBuf[INBUF_SIZE];
static uint8_t checksum;
static uint8_t commandMW;
static uint8_t offset;
static uint8_t dataSize;

static Protocol p;

int8_t c,n;

//Tiempos inicial y final
int ti=0;
int tf=0;

//Variable auxiliar y referencia de altura
int aux=0;
float zRef=0;

//Variables para los valores de los sensores
XYAngle angles;
Altitude alt;
IMUValues imu;

void setup()
{
    Serial.begin(BAUD); //Monitor Serial PC
    Serial1.begin(BAUD); //Multiwii
    Serial2.begin(BAUD); //telemetría

    //Declaración de los pines de los motores
    Mot1.attach(PINMOTOR1);
    Mot2.attach(PINMOTOR2);
    Mot3.attach(PINMOTOR3);
    Mot4.attach(PINMOTOR4);
}
```

```

//Inicialización
escCalibration();
delay(10000);
inicialization();
startMotors();
}

void loop() //Bucle principal
{
    ti=millis(); //Se verifica el tiempo inicial

    //Se revisa si llegó información por el puerto serial 2
    if(Serial2.available()>0)
    {
        aux = Serial2.read();
    }

    //Solicitud de los datos a MultiWii con el MSP
    uint8_t datad = 0;
    uint8_t *data = &datad;
    p.send_msp( MSP_ATTITUDE ,data, 0);
    readData();
    p.send_msp( MSP_ALTITUDE ,data, 0);
    readData();
    p.send_msp( MSP_RAW_IMU ,data, 0);
    readData();

    //Se verifica si llegó la señal de paro
    if(aux==255)
    {
        emergencyStop();
        inicialization();
        startMotors();
        delay(2000);
    }
    else if (aux!=254) //Si no llegó paro, ejecuta el controlador
    {
        zRef=(float)(aux/100.00); //Zref en metros
        control(zRef,angles.angleX,angles.angleY,angles.heading,alt.value,
            alt.vel,imu.gyroX,imu.gyroY,imu.gyroZ);
        tf=millis(); //Se verifica el tiempo final
        delay(Ts-(tf-ti)); //Se asegura que el periodo de muestreo sea
            constante
    }
}

void readData() {
    delayMicroseconds(3000);

    //Máquina de estados para solicitar los datos a MultiWii
    while (Serial1.available()) {
        byte c = Serial1.read();
        Serial2.write(c);
    }
}

```

```
if (c_state == IDLE) {
    c_state = (c=='$') ? HEADER_START : IDLE;
}
else if (c_state == HEADER_START) {
    c_state = (c=='M') ? HEADER_M : IDLE;
}
else if (c_state == HEADER_M) {
    c_state = (c=='>') ? HEADER_ARROW : IDLE;
}
else if (c_state == HEADER_ARROW) {

    if (c > INBUF_SIZE) { // now we are expecting the payload size
        c_state = IDLE;

    }
    else {
        dataSize = c;
        offset = 0;
        checksum = 0;
        checksum ^= c;
        c_state = HEADER_SIZE;
    }
}
else if (c_state == HEADER_SIZE) {
    commandMW = c;
    checksum ^= c;
    c_state = HEADER_CMD;
}
else if (c_state == HEADER_CMD && offset < dataSize) {
    checksum ^= c;
    inBuf[offset++] = c;
}
else if (c_state == HEADER_CMD && offset >= dataSize) {

    if (checksum == c) {
        if (commandMW == MSP_ATTITUDE) {
            angles = p.evalAtt(inBuf);
        }
        if (commandMW == MSP_ALTITUDE) {
            alt = p.evalAlt(inBuf);
        }
        if (commandMW == MSP_RAW_IMU) {
            imu = p.evalIMU(inBuf);
        }
    }

    c_state = IDLE;
}
}
}

void inicialization(void)
{
    //Se espera a que se reciba un 254 para arrancar los motores
```



```

while(inicializationAux!=254)
{
  uint8_t  datad = 0;
  uint8_t  *data = & datad;
  p.send_msp( MSP_ATTITUDE  ,data, 0);
  readData();
  p.send_msp( MSP_ALTITUDE  ,data, 0);
  readData();
  p.send_msp( MSP_RAW_IMU   ,data, 0);
  readData();
  delay(Ts);

  if(Serial2.available(>0)
  {
    inicializationAux=Serial2.read();
  }
}

inicializationAux=0;
Serial2.write((byte *)"INICIO",6);
delay(1000);
}

```

### Cabecera del Controlador

```

#include <Arduino.h>

//Accionar motores
#include <Servo.h>

//Constantes para los motores
#define MAXPWM 1900
#define MINESC 1000
#define MINPWM 1350
#define PINMOTOR1 2
#define PINMOTOR2 3
#define PINMOTOR3 4
#define PINMOTOR4 5
#define pi 3.141592
#define OMEGAEQ 1211.85

//Objetos de la clase Servo para los motores
Servo Mot1;
Servo Mot2;
Servo Mot3;
Servo Mot4;

int inicializationAux=0;

//Variables para el controlador
float angx = 0;
float angy = 0;
float angz = 0;
float z = 0;
float velz = 0;

```

```
float gyrox = 0;
float gyroy = 0;
float gyroz = 0;
float omega1 = 0;
float omega2 = 0;
float omega3 = 0;
float omega4 = 0;
int pwmM1=0;
int pwmM2=0;
int pwmM3=0;
int pwmM4=0;

//Variables para generar gráficas
float ANGULOX=0;
float ANGULOY=0;
float ANGULOZ=0;

void escCalibration(void)
{
  Mot1.writeMicroseconds (MAXPWM);
  Mot2.writeMicroseconds (MAXPWM);
  Mot3.writeMicroseconds (MAXPWM);
  Mot4.writeMicroseconds (MAXPWM);
  delay (3000);
  Mot1.writeMicroseconds (MINESC);
  Mot2.writeMicroseconds (MINESC);
  Mot3.writeMicroseconds (MINESC);
  Mot4.writeMicroseconds (MINESC);
  delay (2000);
}

void startMotors(void)
{
  //Se arrancan paulatinamente los motores
  for(int i=MINESC;i<=MINPWM;i=i+10)
  {
    Mot1.writeMicroseconds (i);
    Mot2.writeMicroseconds (i);
    Mot3.writeMicroseconds (i);
    Mot4.writeMicroseconds (i);
    delay (30);
  }

  Serial2.write ((byte *) "Arranqué", 8);
}

void emergencyStop(void)
{
  Mot1.writeMicroseconds (MINESC);
  Mot2.writeMicroseconds (MINESC);
  Mot3.writeMicroseconds (MINESC);
  Mot4.writeMicroseconds (MINESC);
  delay (1000);
}
```

```

void control(float zr, int16_t ax, int16_t ay, int16_t az, int16_t al,
int16_t vz, int16_t gx, int16_t gy, int16_t gz)
{
    //Ángulos para el controlador en radianes
    angx = ax/10.0*pi/180;
    angy = -ay/10.0*pi/180;
    angz = -az*pi/180;

    //Ángulos para generar gráficas en grados
    /*
    ANGULOX=ax/10.0;
    ANGULOY=-ay/10.0;
    ANGULOZ=-az;
    */

    z = al/100.0; //Altura en m
    velz = vz/100.0; //Velocidad en m/s

    //Velocidades angulares en rad/s
    gyrox = gx/4.096*pi/180;
    gyroy = -gy/4.096*pi/180;
    gyroz = -gz/4.096*pi/180;

    //ECUACIONES DEL CONTROLADOR (Cálculo de las omegas del sistema
    trasladado al punto de equilibrio)
    omega1 = 91.14*angx - 91.27*angy + 14.3*angz + 46.14*gyrox -
        46.25*gyroy + 46.78*gyroz - 66.22*velz - 15.64*z + 15.64*zr;
    omega2 = 15.64*zr - 91.27*angy - 14.3*angz - 46.14*gyrox - 46.25*gyroy
        - 46.78*gyroz - 66.22*velz - 15.64*z - 91.14*angx;
    omega3 = 91.27*angy - 91.14*angx + 14.3*angz - 46.14*gyrox +
        46.25*gyroy + 46.78*gyroz - 66.22*velz - 15.64*z + 15.64*zr;
    omega4 = 91.14*angx + 91.27*angy - 14.3*angz + 46.14*gyrox +
        46.25*gyroy - 46.78*gyroz - 66.22*velz - 15.64*z + 15.64*zr;

    //Cálculo de las omegas del sistema
    omega1 += OMEGAEQ;
    omega2 += OMEGAEQ;
    omega3 += OMEGAEQ;
    omega4 += OMEGAEQ;

    //Cálculo de los tiempos en alto para cada motor
    pwmM1 = constrain((int)((0.0002730)*omega1*omega1 + 1004), MINPWM,
        MAXPWM);
    pwmM2 = constrain((int)((0.0002730)*omega2*omega2 + 1004), MINPWM,
        MAXPWM);
    pwmM3 = constrain((int)((0.0002730)*omega3*omega3 + 1004), MINPWM,
        MAXPWM);
    pwmM4 = constrain((int)((0.0002730)*omega4*omega4 + 1004), MINPWM,
        MAXPWM);

    //Impresiones en pantalla para generar las gráficas
    //Serial.println("Motor1: " + (String)pwmM1 + "\tMotor2: " +
        (String)pwmM2 + "\tMotor3: " + (String)pwmM3 + "\tMotor4: " +
        (String)pwmM4 + "\tzref: " + (String)zr + "\tz: " + (String)z);
    //Serial.println("Motor1:*"+(String)pwmM1+"*Motor2:*"+(String)pwmM2+"*M
    o

```

```
tor3:""+(String)pwmM3+"*Motor4:""+(String)pwmM4+"*X*"+(String)ANGU
LOX+"*Y*"+(String)ANGULOY+"*Z*"+(String)ANGULOZ);

//Se envían las señales a cada ESC, y consecuentemente a cada motor
Mot1.writeMicroseconds (pwmM1);
Mot2.writeMicroseconds (pwmM2);
Mot3.writeMicroseconds (pwmM3);
Mot4.writeMicroseconds (pwmM4);
}
```

## Controlador LQR con Observador de Orden Reducido

### Programa Principal

```
//Cabeceras del controlador y del observador
#include "Controlador.h"
#include "Observador.h"

//Cabecera del protocolo de comunicación
#include "protocol.h"

//Definiciones de la Máquina de estados
#ifndef serialstate_h
#define serialstate_h
#include "serialstate.h"
#endif

//Variables para el tiempo de muestreo y de los datos adquiridos
#define Ts 20
#define INBUF_SIZE 64
#define BAUD 57600

//Variables para la máquina de estados
static uint8_t inBuf[INBUF_SIZE];
static uint8_t checksum;
static uint8_t commandMW;
static uint8_t offset;
static uint8_t dataSize;

static Protocol p;

int8_t c,n;

//Tiempos inicial y final
int ti=0;
int tf=0;

//Variable auxiliar y referencia de altura
int aux=0;
float zRef=0;

//Variables para los valores de los sensores
XYAngle angles;
Altitude alt;
```

```

IMUValues imu;

//Variables para el observador
float zauxBefore = 0;
float velzObs = 0;
float omegaeq = 0; //ub=u-U
float omega2eq = 0;
float omega3eq = 0;
float omega4eq = 0;

void setup()
{
  Serial2.begin(BAUD); //telemetría
  Serial1.begin(BAUD); //Multiwii

  //Declaración de los pines de los motores
  Mot1.attach(PINMOTOR1);
  Mot2.attach(PINMOTOR2);
  Mot3.attach(PINMOTOR3);
  Mot4.attach(PINMOTOR4);

  //Inicialización
  escCalibration();
  delay(1000);
  initialization();
  startMotors();
}

void loop() //Bucle principal
{
  ti=millis(); //Se verifica el tiempo inicial

  //Se revisa si llegó información por el puerto serial 2
  if(Serial2.available()>0)
  {
    aux = Serial2.read();
  }

  //Solicitud de los datos a MultiWii con el MSP
  uint8_t datad = 0;
  uint8_t *data = & datad;
  p.send_msp( MSP_ATTITUDE ,data, 0);
  readData();
  p.send_msp( MSP_ALTITUDE ,data, 0);
  readData();
  p.send_msp( MSP_RAW_IMU ,data, 0);
  readData();

  //Se verifica si llegó la señal de paro
  if(aux==255)
  {
    emergencyStop();
    initialization();
    startMotors();
    delay(2000);
  }
}

```

```

}
else if(aux!=254) //Si no llegó paro, ejecutan el controlador y el
    observador
{
    zRef=(float) (aux/100.00); //Zref en metros
    velzObs=observador(zRef, angles.angleX, angles.angleY, angles.heading,
        alt.value, imu.gyroX, imu.gyroY, imu.gyroZ, &omegaleq, &omega2eq,
        &omega3eq, &omega4eq, &zauxBefore); //Se emplea un observador para
        estimar velocidad en z de equilibrio actual
    control(zRef, angles.angleX, angles.angleY, angles.heading, alt.value, vel
z
        Obs, imu.gyroX, imu.gyroY, imu.gyroZ, &omegaleq, &omega2eq, &omega3eq,
        &omega4eq);
    tf=millis(); //Se verifica el tiempo final
    delay(Ts-(tf-ti)); //Se asegura que el periodo de muestreo sea
        constante
}
}

void readData() {

    delayMicroseconds(3000);

    //Máquina de estados para solicitar los datos a MultiWii
    while (Serial1.available()) {

        byte c = Serial1.read();
        Serial2.write(c);

        if (c_state == IDLE) {
            c_state = (c=='$') ? HEADER_START : IDLE;
        }
        else if (c_state == HEADER_START) {
            c_state = (c=='M') ? HEADER_M : IDLE;
        }
        else if (c_state == HEADER_M) {
            c_state = (c=='>') ? HEADER_ARROW : IDLE;
        }
        else if (c_state == HEADER_ARROW) {

            if (c > INBUF_SIZE) { // now we are expecting the payload size
                c_state = IDLE;
            }
            else {
                dataSize = c;
                offset = 0;
                checksum = 0;
                checksum ^= c;
                c_state = HEADER_SIZE;
            }
        }
        else if (c_state == HEADER_SIZE) {
            commandMW = c;
            checksum ^= c;
            c_state = HEADER_CMD;
        }
    }
}

```

```

else if (c_state == HEADER_CMD && offset < dataSize) {
    checksum ^= c;
    inBuf[offset++] = c;
}
else if (c_state == HEADER_CMD && offset >= dataSize) {

    if (checksum == c) {
        if (commandMW == MSP_ATTITUDE) {
            angles = p.evalAtt(inBuf);
        }
        if (commandMW == MSP_ALTITUDE) {
            alt = p.evalAlt(inBuf);
        }
        if (commandMW == MSP_RAW_IMU) {
            imu = p.evalIMU(inBuf);
        }

    }

    c_state = IDLE;
}
}
}

void inicialization(void)
{
    //Se espera a que se reciba un 254 para arrancar los motores
    while(inicializationAux!=254)
    {

        uint8_t datad = 0;
        uint8_t *data = & datad;
        p.send_msp( MSP_ATTITUDE ,data, 0);
        readData();
        p.send_msp( MSP_ALTITUDE ,data, 0);
        readData();
        p.send_msp( MSP_RAW_IMU ,data, 0);
        readData();

        if(Serial2.available()>0)
        {
            inicializationAux=Serial2.read();
            Serial2.write(inicializationAux);
        }

    }

    inicializationAux=0;
    Serial2.write((byte *)"INICIO",2);
    delay(1000);
}

```

### Cabecera del Controlador

```
#include <Arduino.h>

//Accionar motores
#include <Servo.h>

//Constantes para los motores
#define MAXPWM 1900
#define MINESC 1000
#define MINPWM 1350
#define PINMOTOR1 2
#define PINMOTOR2 3
#define PINMOTOR3 4
#define PINMOTOR4 5
#define pi 3.141592
#define OMEGAEQ 1211.85

//Objetos de la clase Servo para los motores
Servo Mot1;
Servo Mot2;
Servo Mot3;
Servo Mot4;

int initializationAux=0;

//Variables para el controlador
float angx = 0;
float angy = 0;
float angz = 0;
float z = 0;
float velz = 0;
float gyrox = 0;
float gyroy = 0;
float gyroz = 0;
float omega1 = 0;
float omega2 = 0;
float omega3 = 0;
float omega4 = 0;
int pwmM1=0;
int pwmM2=0;
int pwmM3=0;
int pwmM4=0;

void escCalibration(void)
{
  Mot1.writeMicroseconds (MAXPWM);
  Mot2.writeMicroseconds (MAXPWM);
  Mot3.writeMicroseconds (MAXPWM);
  Mot4.writeMicroseconds (MAXPWM);
  delay (3000);
  Mot1.writeMicroseconds (MINESC);
  Mot2.writeMicroseconds (MINESC);
  Mot3.writeMicroseconds (MINESC);
  Mot4.writeMicroseconds (MINESC);
}
```



```

    delay(2000);
}

void startMotors(void)
{
    for(int i=MINESC;i<=MINPWM;i=i+10)
    {
        Mot1.writeMicroseconds(i);
        Mot2.writeMicroseconds(i);
        Mot3.writeMicroseconds(i);
        Mot4.writeMicroseconds(i);
        delay(30);
    }

    Serial2.write((byte *)"Arranqué",8);
}

void emergencyStop(void)
{
    Mot1.writeMicroseconds(MINESC);
    Mot2.writeMicroseconds(MINESC);
    Mot3.writeMicroseconds(MINESC);
    Mot4.writeMicroseconds(MINESC);
    delay(50);
}

void control(float zr, int16_t ax, int16_t ay, int16_t az, int16_t al,
float vz, int16_t gx, int16_t gy, int16_t gz, float *o1P, float *o2P,
float *o3P, float *o4P)
{
    //Ángulos para el controlador en radianes
    angx = ax/10.0*pi/180;
    angy = -ay/10.0*pi/180;
    angz = -az*pi/180;

    z = al/100.0; //Altura en m
    //velz = vz/100.0; //Velocidad en z medida (vz está en cm/s)

    //Velocidad angular en rad/s
    gyrox = gx/4.096*pi/180;
    gyroy = -gy/4.096*pi/180;
    gyroz = -gz/4.096*pi/180;
    velz = vz; //Velocidad en z observada (vz está en m/s)

    //ECUACIONES DEL CONTROLADOR (Cálculo de las omegas del sistema
    trasladado al punto de equilibrio)
    omega1 = 91.14*angx - 91.27*angy + 14.3*angz + 46.14*gyrox -
        46.25*gyroy + 46.78*gyroz - 66.22*velz - 15.64*z + 15.64*zr;
    omega2 = 15.64*zr - 91.27*angy - 14.3*angz - 46.14*gyrox - 46.25*gyroy
        - 46.78*gyroz - 66.22*velz - 15.64*z - 91.14*angx;
    omega3 = 91.27*angy - 91.14*angx + 14.3*angz - 46.14*gyrox +
        46.25*gyroy + 46.78*gyroz - 66.22*velz - 15.64*z + 15.64*zr;
    omega4 = 91.14*angx + 91.27*angy - 14.3*angz + 46.14*gyrox +
        46.25*gyroy - 46.78*gyroz - 66.22*velz - 15.64*z + 15.64*zr;

    //Se actualizan el dato almacenado en las direcciones de memoria o,
    mejor dicho, se asignan las omegas de equilibrio (omegaleq,

```

```
        omega2eq, omega3eq y omega4eq)
*o1P = omega1;
*o2P = omega2;
*o1P = omega3;
*o2P = omega4;

//Cálculo de las omegas del sistema
omega1 += OMEGAEQ;
omega2 += OMEGAEQ;
omega3 += OMEGAEQ;
omega4 += OMEGAEQ;

//Cálculo de los tiempos en alto para cada motor
pwmM1 = constrain((int)((0.0002730)*omega1*omega1 + 1004), MINPWM,
    MAXPWM);
pwmM2 = constrain((int)((0.0002730)*omega2*omega2 + 1004), MINPWM,
    MAXPWM);
pwmM3 = constrain((int)((0.0002730)*omega3*omega3 + 1004), MINPWM,
    MAXPWM);
pwmM4 = constrain((int)((0.0002730)*omega4*omega4 + 1004), MINPWM,
    MAXPWM);

//Serial.println("Motor1: " + (String)pwmM1 + "\tMotor2: " +
    (String)pwmM2 + "\tMotor3: " + (String)pwmM3 + "\tMotor4: " +
    (String)pwmM4 + "\tzref: " + (String)zr + "\tz: " + (String)z +
    "\tz: " + (String)velz);

//Se envían las señales a cada ESC, y consecuentemente a cada motor
Mot1.writeMicroseconds(pwmM1);
Mot2.writeMicroseconds(pwmM2);
Mot3.writeMicroseconds(pwmM3);
Mot4.writeMicroseconds(pwmM4);

}
```

### Cabecera del Observador

```
//Variables de las velocidades angulares
float om1=0;
float om2=0;
float om3=0;
float om4=0;

//Variables para los valores del estado auxiliar anterior y actual
float zauxB=0;
float zauxN=0;
float vzNow=0; //Velocidad actual

float observador(float zr, int16_t ax, int16_t ay, int16_t az, int16_t
    al, int16_t gx, int16_t gy, int16_t gz, float *o1, float *o2,
    float *o3, float *o4, float *zauxBeforeP)
{
    //Estados de equilibrio (x-X)

    //Ángulos para el observador en radianes
```

```
angx = ax/10.0*pi/180;
angy = -ay/10.0*pi/180;
angz = -az*pi/180;

z = al/100.0-zr;

//Velocidades angulares en rad/s
gyrox = gx/4.096*pi/180;
gyroy = -gy/4.096*pi/180;
gyroz = -gz/4.096*pi/180;

//Omegas en el punto de equilibrio
om1=*o1;
om2=*o2;
om3=*o3;
om4=*o4;
zauxB=*zauxBeforeP; //Variable z auxiliar anterior
zauxN = 0.00007314*om1 + 0.00007314*om2 + 0.00007314*om3 +
        0.00007314*om4 - 1.813*z + 0.8187*zauxB; //Se calcula zauxN con el
        espacio de estados Azd*z+Bzd*[y;u]
vzNow =10*z + zauxB; ///Se calcula la velocidad en z de equilibrio
        observada con el espacio de estados Czd*z+Dzd*[y;u]

//Actualización de la variable zauxBefore
*zauxBeforeP = zauxN;

return vzNow;
}
```



# Referencias

---

- [1] Alderete, T. S. *Simulator Aero Model Implementation*. NASA Ames Research Center, Moffett Field, California, 2011.
- [2] Altax. *Building a quadcopter*. Revisado en:  
<http://altax.net/blog/building-a-quadcopter/>
- [3] Anrango C. Willan R., et al. *Análisis de UAVs; Sistemas de Control, Diseño, Materiales, Sistemas de Propulsión, Distribución de Cargas, Beneficio de Implementación y Uso en Agricultura*. Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Mecánica, Quito, 2015.
- [4] Apuntes de aeromodelismo. *La unidad C en las baterías*. Revisado en:  
[http://aeromodelismo.epiel.com/c\\_baterias.html](http://aeromodelismo.epiel.com/c_baterias.html)
- [5] Arduino. *Ardupilot Mega 2.5*. Revisado en:  
<http://arduino.cl/ardupilot-mega-2-5/>
- [6] ArduPilot Development Site. *History of Ardupilot*. Revisado en:  
<http://dev.ardupilot.com/wiki/history-of-ardupilot/>
- [7] Astruv, Igor, et al. *Desired Trajectory Generation of a Quadrotor Helicopter Using Hybrid Control for Enhanced Situational Awareness*. International Conference on Information and Automation, Proceedings of the 2010 IEEE, China, 2010.
- [8] Barquín Murguía, Alberto Isaac. *Implementación de un controlador externo en un cuadricóptero comercial*. Dirigida por Edmundo Gabriel Rocha Cózatl. Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, México, 2014.
- [9] Beer, Ferdinand, et al. *Mecánica Vectorial para Ingenieros*. 9a ed. México: McGraw-Hill, 2010.
- [10] Beer, Ferdinand y Johnston, Russel. *Mecánica de materiales*. 5a ed. México: McGraw-Hill, 2010.
- [11] Brandt, John B. y Selig, Michael S. *Propeller Performance Data at Low Reynolds Numbers*. 49<sup>th</sup> Aerospace Science Meeting, University of Illinois, USA, 2011.
- [12] Bucio Gallardo, Eduardo Miguel. *Modelado matemático y control inteligente de un cuadricóptero (Mathematical modelling and control of a quadcopter)*. Dirigida por Ricardo Zavala Yoé. Instituto Tesis de Maestría. Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. México, 2015.

## R2 Referencias

---

- [13] Biblioteca Digital Mundial. *Telegrama de Orville Wright a su padre*. Revisado en:  
<http://www.wdl.org/es/item/11372/>
- [14] Castañeda Cedeño, Serafín. *Diseño Mecatrónico*. Presentación electrónica.
- [15] Castillo, Pedro. *Control autónomo de los vehículos aéreos no tripulados, Estado del arte y perspectivas de futuro*. Presentación electrónica.
- [16] Cengel, Yunus A. y Boles, Michael A. *Termodinámica*. México: Mc Graw-Hill, 2007.
- [17] Dirección General de Aeronáutica Civil. *Circular Obligatoria que Establece los Requerimientos para Operar un Sistema de Aeronave Pilotada a Distancia (RPAS)*. CO AV.23/10 R2, 8 de abril de 2015. Revisado en:  
[http://www.sct.gob.mx/fileadmin/DireccionesGrales/DGAC/00%20Aeronautica/CO\\_AV\\_23\\_10\\_R2.pdf](http://www.sct.gob.mx/fileadmin/DireccionesGrales/DGAC/00%20Aeronautica/CO_AV_23_10_R2.pdf)
- [18] eCalc. *Xcoptercalc*. Revisado en:  
<http://www.ecalc.ch/>
- [19] Erle Robotics. *LiPo Batteries*. Revisado en:  
<http://erlerobotics.gitbooks.io/erle-robotics-erle-copter/content/es/safety/lipo.html>
- [20] García Estévez, Pilar. *Mecánica y Ondas*. Universidad de Salamanca, España. Revisado en:  
<http://fnl.usal.es/pilar/MyO/myo1t.pdf>
- [21] Génesis 11:1-9. Biblia.
- [22] González Olvera, Marcos A. *Modelado de sistemas mecánicos mediante ecuaciones de Euler-Lagrange*. Presentación electrónica.
- [23] Hendricks, Elbert, et al. *Linear Systems Control*. Springer, 2008.
- [24] Ingeniería MCI. *¿Qué es XBee?* Revisado en:  
<http://xbee.cl/que-es-xbee/>
- [25] Instituto Federal de Telecomunicaciones. *Bandas de frecuencias del espectro radioeléctrico de uso libre*. Revisado en:  
<http://portalanterior.ift.org.mx/iftweb/industria-2/unidad-de-prospectiva-y-regulacion/bandas-de-frecuencias-del-espectro-radioelectrico-de-uso-libre/>
- [26] Juárez García de León, Luis Antonio. *Construcción y Control de Estabilidad de un Cuadricóptero*. Dirigida por Serafín Castañeda Cedeño. Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, México, 2012.
- [27] Luukkonen, T. *Modelling and control of quadcopter*. Espoo, Finlandia, 2011.

- 
- [28] Macés Hernández José Alfredo. *Sistema de control difuso para un cuadricóptero bajo un ambiente de red*. Dirigida por Héctor Benítez Pérez. Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, México, 2015.
- [29] Mantz, Ricardo Julián. *Observadores de estados*. Universidad Nacional de la Plata, Facultad de Ingeniería, Cátedra de Control Moderno, 2003.
- [30] Mott, Robert L. *Resistencia de Materiales*. 5a ed. México: Pearson, 2009.
- [31] Moyano Díaz, Sergio. *Diseño y Construcción de un Quadcopter, Memoria*.
- [32] MultiWii Official Site. *MultiWii*. Revisado en: <http://www.multiwii.com/>
- [33] Norton, Robert L. *Diseño de Maquinaria: Síntesis y análisis de máquinas y mecanismos*. 4a ed. México: McGraw-Hill, 2009.
- [34] Ogata, Katsuhiko. *Dinámica de Sistemas*. México: Prentice-Hall, 1987.
- [35] Olimex. *XBee, Guía de usuario*. Revisado en: [http://www.olimex.cl/pdf/Wireless/ZigBee/XBee-Guia\\_Usuario.pdf](http://www.olimex.cl/pdf/Wireless/ZigBee/XBee-Guia_Usuario.pdf)
- [36] Ovidio. *Las Metamorfosis*.
- [37] Ortiz Padilla, Verónica Gabriela y Pulla Arévalo, Pablo Ramiro. *Diseño y Construcción de un Cuadricóptero a Control Remoto*. Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.
- [38] Pérez Amador, Víctor. *Generadores, motores y transformadores eléctricos*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, México, 2012.
- [39] Pérez Pedraza, Adriana y Ruíz de los Santos, Miguel Alejandro. *Monitoreo y Control en Tiempo Real de un Vehículo Aéreo no Tripulado*. Dirigida por Bernardino Benito Salmerón Quiroz. Tesis de Licenciatura. ESIME Unidad Azcapotzalco, México, 2010.
- [40] R/C Airplane World. *Understanding RC propeller size*. Revisado en: <http://www.rc-airplane-world.com/propeller-size.html>
- [41] Rodríguez Ramírez, Francisco. *Apuntes de Sistemas Dinámicos*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, México, 1986
- [42] Salih, Atheer L., et al. *Flight PID controller design for a UAV quadrotor*. Scientific Research and Essays Vol. 5, 2010.
- [43] Sarche Carrión, Felipe E. y Vásconez Fuertes, Kennedy J. *Diseño y construcción de un prototipo de tricóptero controlado de forma remota mediante radiofrecuencia*. Dirigida por Andrés Rosales Acosta. Tesis de licenciatura. Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Quito, 2012.

## R4 Referencias

---

- [44] Siemens. *CAD / Diseño Asistido por Computadora*. Revisado en:  
[http://www.plm.automation.siemens.com/es\\_mx/plm/cad.shtml](http://www.plm.automation.siemens.com/es_mx/plm/cad.shtml).
- [45] Tayebi, A. y McGilvray, S. *Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot*. 43<sup>rd</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Atlantic, Paradise Island, Bahamas, 2004.
- [46] Thornton, Stephen T. y Marion, Jerry B. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5a ed. USA: Thomson, 2004.
- [47] Turbo Hobby Blog. *Baterías de LIPO, características y consejos*. Revisado en:  
<http://blogturbohobby.blogspot.mx/2013/05/bateriaslipo.html>
- [48] Ulrich, Karl T. *Diseño y desarrollo de productos*. 5a ed. México: McGraw- Hill, 2013.
- [49] White, Frank M. *Fluid Mechanics*. 4a ed. USA: McGraw-Hill, 1998.
- [50] Wikipedia. Revisado en:  
<https://es.wikipedia.org/>
- [51] Xabier Legasa, Martín-Gil. *Cuadróptero Arduino por control remoto Android*. Dirigida por Pere Marés Marti. Trabajo final de carrera. Universidad Politécnica de Catalunya, Facultad de Informática de Barcelona, Barcelona: 2012.