



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Modelos de fracturas discretas para
la simulación de flujo monofásico
en medios porosos fracturados**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Petrolero

P R E S E N T A

Carlos Alberto Romano Pérez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Martín Alberto Díaz Viera



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2016

Dedicatoria

A mi Madre, por el apoyo incondicional que siempre me ha brindado

A mis Abuelos, por sus enseñanzas y cuidados

A mi Hermano, por su ejemplo, experiencia y conocimientos transmitidos

A mis Familiares, porque de todos he aprendido

A Janai, por brindarme su comprensión y cariño

A mis compañeros y amigos, por su amistad

Agradecimientos

Al Dr. Martín Alberto Díaz Viera, por el apoyo académico y su disposición para dirigir el presente trabajo.

Al Instituto Mexicano del Petróleo, por brindarme una beca y un espacio en sus instalaciones para realizar mi tesis de licenciatura.

A los sinodales que con mucha amabilidad revisaron el presente trabajo:

Ing. Manuel Juan Villamar Viguera

Dr. Erick Emanuel Luna Rojero

Ing. Héctor Erick Gallardo Ferrera

Ing. José de Jesús Vargas Hernández

A la Facultad de Ingeniería y a la Universidad Nacional Autónoma de México.

Abstract

The fundamental motivation of this work was the construction of discrete fracture deterministic models by means of the application of a systematic methodology of modeling.

In order to build these models, the use of elements of the domain decomposition method, as well as the theory of mechanics of continuous media is fundamental. With this aim in mind, a revision is made of the relevant theory for the formulation of mathematic models of continuous systems from an axiomatic approach, as well as the necessary finite element method to introduce the models in the numeric platform COMSOL Multiphysics.

In particular, fracture models are built with a discrete approach and the behavior of the flow of the fluids is studied in terms of pressure and velocity.

Numerical experiments resulted in a consistent behavior with the mathematic approach of the models. From the point of view of the flow, models behavior was analyzed using these results and were compared considering the multiple orientations of the fracture. Qualitative consistency was observed among the obtained results of the build models. Finally, conclusions were obtained about flow behavior for each of the models, as well as its dependency on preferential flow path.

Obtained results set a methodological precedent for the modeling of fractured porous media and the flow through them, discretizing complex geometries with an explicit and precise representation of the fractures in a practical way.

This work lays the foundations for the extension of the developed models to a higher number of dimensions, as well as for its application to fracture networks that emerge in the context of naturally fractured reservoirs.

Resumen

La motivación fundamental de este trabajo fue la construcción de modelos determinísticos de fractura discreta a través de la aplicación de una metodología sistemática de la modelación.

Para la construcción de estos modelos resulta fundamental el uso de elementos del método de descomposición de dominio, así como de la teoría de la mecánica de los medios continuos. Con este fin se hace una revisión de la teoría pertinente para la formulación de los modelos matemáticos de los sistemas continuos desde un enfoque axiomático, así como del método de elemento finito necesario para implementar los modelos en la plataforma numérica COMSOL Multiphysics [®].

En particular, se construyen modelos de fractura con enfoque discreto y se estudia el comportamiento del flujo de fluidos en términos de presión y velocidad.

Los experimentos numéricos arrojaron un comportamiento consistente con el planteamiento matemático de los modelos. El comportamiento de los modelos, desde el punto de vista del flujo, se analizó empleando estos resultados y se compararon considerando varias orientaciones de la fractura. Se observó consistencia cualitativa entre los resultados obtenidos con los modelos construidos. Finalmente, se obtuvieron conclusiones sobre el comportamiento del flujo para cada uno de los modelos, así como su dependencia a la dirección preferencial del flujo.

Los resultados obtenidos sientan precedente metodológico para modelar medios porosos fracturados y el flujo a través de ellos, discretizando geometrías complejas con una representación explícita y precisa de las fracturas de manera práctica.

Este trabajo sienta las bases para la extensión de los modelos desarrollados a un mayor número de dimensiones, así como para su aplicación a redes de fracturas que surgen en el contexto de yacimientos naturalmente fracturados.

Índice general

Abstract	I
Resumen	III
Índice general	VII
Lista de figuras	XIII
Lista de Tablas	XV
Introducción	XVII
1. Revisión de la Literatura	1
1.1. Modelos de medios porosos fracturados	2
1.1.1. Modelos continuos	3
1.1.2. Modelos discretos	9
2. Metodología Sistemática de la Modelación	15
3. Modelo Matemático General de Flujo Monofásico	21
3.1. Ecuaciones de flujo monofásico	22
3.2. Modelo Conceptual	22
3.3. Modelo Matemático	22
4. Modelo Numérico	25
5. Modelo de Flujo Monofásico Ligeramente Compresible	27
5.1. Modelo Conceptual	28
5.2. Modelo Matemático	28
5.3. Modelo Computacional	33
5.4. Validación del Modelo	35
5.4.1. Descripción del problema	35
5.4.2. Datos del problema	35
5.4.3. Geometría	36
5.4.4. Resultados	38

6. Modelo de Fractura explícita	41
6.1. Modelo Conceptual	42
6.2. Modelo Matemático	42
6.3. Modelo Computacional	45
6.4. Casos de Estudio	46
6.4.1. Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$	48
6.4.2. Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$	52
6.4.3. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$	56
6.4.4. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$	60
7. Descomposición de Dominio	65
7.1. Modelo Conceptual	66
7.2. Modelo Matemático	66
7.3. Modelo Computacional	74
7.4. Casos de Estudio	78
7.4.1. Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$	79
7.4.2. Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$	83
7.4.3. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$	87
7.4.4. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$	91
8. Fractura Discreta Desconectada	95
8.1. Modelo Conceptual	96
8.2. Modelo Matemático	96
8.3. Modelo Computacional	103
8.4. Casos de Estudio	106
8.4.1. Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$	107
8.4.2. Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$	111
8.4.3. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$	115
8.4.4. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$	119
9. Análisis y Discusión de Resultados	123
9.1. Presión - Fractura abierta al flujo $\theta = 0^\circ$	124
9.2. Velocidad - Fractura abierta al flujo $\theta = 0^\circ$	125
9.3. Presión - Barrera al flujo $\theta = 0^\circ$	126
9.4. Velocidad - Barrera al flujo $\theta = 0^\circ$	127
9.5. Presión - Fractura abierta al flujo $\theta = 45^\circ$	128
9.6. Velocidad - Fractura abierta al flujo $\theta = 45^\circ$	129
9.7. Presión - Barrera al flujo $\theta = 45^\circ$	130
9.8. Velocidad - Barrera al flujo $\theta = 45^\circ$	131
9.9. Presión - Fractura abierta al flujo $\theta = -45^\circ$	132
9.10. Velocidad - Fractura abierta al flujo $\theta = -45^\circ$	133
9.11. Presión - Barrera al flujo $\theta = -45^\circ$	134
9.12. Velocidad - Barrera al flujo $\theta = -45^\circ$	135

9.13. Presión - Fractura abierta al flujo $\theta = 90^\circ$	136
9.14. Velocidad - Fractura abierta al flujo $\theta = 90^\circ$	137
9.15. Presión - Barrera al flujo $\theta = 90^\circ$	138
9.16. Velocidad - Barrera al flujo $\theta = 90^\circ$	139
9.17. Elementos de la malla	140
9.18. Discusión general de los resultados obtenidos	140
Conclusiones	143
Apéndices	145
A. Modelación Matemática de Sistemas Continuos	147
A.1. Cinemática de los Sistemas Continuos	148
A.2. Propiedades intensivas	152
A.2.1. Representación Lagrangiana	152
A.2.2. Representación Euleriana	152
A.2.3. La derivada material	153
A.3. Propiedades extensivas	153
A.4. Ecuación de balance global	154
A.5. Ecuaciones de balance local	155
A.5.1. Ecuación diferencial de balance local	155
A.5.2. Ecuación de salto de balance local	155
A.6. Teoremas	156
A.6.1. Teorema de Gauss extendido	156
A.6.2. Teorema de transporte de Reynolds extendido	156
A.6.3. Lema de Dubois-Reymond extendido	156
A.7. Ecuaciones de balance global y local	157
A.8. Modelos multifásicos	158
A.9. Modelos completos	158
A.9.1. Condiciones iniciales	158
A.9.2. Condiciones de frontera	159
A.10. Ecuaciones de balance de masa	160
B. Método de Elemento Finito	161
B.1. Derivación del Método de Elementos Finitos	162
B.2. Formulación débil	169
B.3. Funciones de prueba	169
B.4. La sintaxis de COMSOL Multiphysics®	170
C. Solución Semi-analítica para Flujo Radial	171
Bibliografía	181
Nomenclatura	183

Lista de figuras

1.1.	Principales enfoques para modelar medios porosos fracturados	2
1.2.	Modelo de cubos de azúcar de Warren y Root	4
1.3.	Modelo de subdominio de Gilman y Kazemi	7
1.4.	Modelo de interacción de múltiples continuos de Pruess y Narasimhan	7
1.5.	Transferencia de flujo en un modelo de doble porosidad - doble permeabilidad	8
1.6.	Conectividad conceptual para un modelo clásico de doble continuo, de subdominio o interacción de múltiples continuos y de doble porosidad - doble permeabilidad	9
1.7.	Modelos discretos: simple continuo explícito y fractura discreta	10
5.1.	Validación del modelo de flujo monofásico: Dominio del modelo computacional	36
5.2.	Validación del modelo de flujo monofásico: Mallado del dominio computacional	36
5.3.	Validación del modelo de flujo monofásico: Fronteras del dominio computacional	37
5.4.	Validación del modelo de flujo monofásico: Puntos del dominio computacional	37
5.5.	Comparación de los resultados analíticos y numéricos	39
6.1.	Representación esquemática del modelo de fractura explícita en 2D	43
6.2.	Representación esquemática del caso de estudio	47
6.3.	Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$: Dominio del modelo computacional	48
6.4.	Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$: Mallado del dominio computacional	48
6.5.	Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$: Fronteras del dominio computacional	49
6.6.	Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$: Puntos del dominio computacional	49
6.7.	Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 0^\circ$: Perfil de presión y velocidad	50
6.8.	Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 0^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	50
6.9.	Barrera al flujo con orientación $\theta = 0^\circ$: Perfil de presión y velocidad	51
6.10.	Barrera al flujo con orientación $\theta = 0^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	51
6.11.	Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$: Dominio del modelo computacional	52
6.12.	Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$: Mallado del dominio computacional	52
6.13.	Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$: Fronteras del dominio computacional	53
6.14.	Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$: Puntos del dominio computacional	53
6.15.	Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 45^\circ$: Perfil de presión y velocidad	54
6.16.	Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 45^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	54

6.17. Barrera al flujo con orientación $\theta = 45^\circ$: Perfil de presión y velocidad	55
6.18. Barrera al flujo con orientación $\theta = 45^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	55
6.19. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$: Dominio del modelo computacional	56
6.20. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$: Mallado del dominio computacional	56
6.21. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$: Fronteras del dominio computacional	57
6.22. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$: Puntos del dominio computacional	57
6.23. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = -45^\circ$: Perfil de presión y velocidad . .	58
6.24. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = -45^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	58
6.25. Barrera al flujo con orientación $\theta = -45^\circ$: Perfil de presión y velocidad	59
6.26. Barrera al flujo con orientación $\theta = -45^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	59
6.27. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$: Dominio del modelo computacional	60
6.28. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$: Mallado del dominio computacional	60
6.29. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$: Fronteras del dominio computacional	61
6.30. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$: Puntos del dominio computacional	61
6.31. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 90^\circ$: Perfil de presión y velocidad . . .	62
6.32. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 90^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	62
6.33. Barrera al flujo con orientación $\theta = 90^\circ$: Perfil de presión y velocidad	63
6.34. Barrera al flujo con orientación $\theta = 90^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	63
7.1. Representación esquemática del modelo de fractura discreta mediante descomposición de dominio en 2D	67
7.2. Representación esquemática del caso de estudio	78
7.3. Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$: Dominio del modelo computacional	79
7.4. Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$: Mallado del dominio computacional	79
7.5. Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$: Fronteras del dominio computacional	80
7.6. Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$: Puntos del dominio computacional	80
7.7. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 0^\circ$: Perfil de presión y velocidad . . .	81
7.8. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 0^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	81
7.9. Barrera al flujo con orientación $\theta = 0^\circ$: Perfil de presión y velocidad	82
7.10. Barrera al flujo con orientación $\theta = 0^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	82
7.11. Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$: Dominio del modelo computacional	83
7.12. Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$: Mallado del dominio computacional	83
7.13. Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$: Fronteras del dominio computacional	84
7.14. Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$: Puntos del dominio computacional	84
7.15. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 45^\circ$: Perfil de presión y velocidad . . .	85
7.16. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 45^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	85

7.17. Barrera al flujo con orientación $\theta = 45^\circ$: Perfil de presión y velocidad	86
7.18. Barrera al flujo con orientación $\theta = 45^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	86
7.19. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$: Dominio del modelo computacional	87
7.20. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$: Mallado del dominio computacional	87
7.21. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$: Fronteras del dominio computacional	88
7.22. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$: Puntos del dominio computacional	88
7.23. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = -45^\circ$: Perfil de presión y velocidad	89
7.24. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = -45^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	89
7.25. Barrera al flujo con orientación $\theta = -45^\circ$: Perfil de presión y velocidad	90
7.26. Barrera al flujo con orientación $\theta = -45^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	90
7.27. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$: Dominio del modelo computacional	91
7.28. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$: Mallado del dominio computacional	91
7.29. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$: Fronteras del dominio computacional	92
7.30. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$: Puntos del dominio computacional	92
7.31. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 90^\circ$: Perfil de presión y velocidad	93
7.32. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 90^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	93
7.33. Barrera al flujo con orientación $\theta = 90^\circ$: Perfil de presión y velocidad	94
7.34. Barrera al flujo con orientación $\theta = 90^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	94
8.1. Representación esquemática del modelo de fractura discreta desconectada en 2D	97
8.2. Representación esquemática del caso de estudio	106
8.3. Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$: Dominio del modelo computacional	107
8.4. Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$: Mallado del dominio computacional	107
8.5. Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$: Fronteras del dominio computacional	108
8.6. Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$: Puntos del dominio computacional	108
8.7. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 0^\circ$: Perfil de presión y velocidad	109
8.8. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 0^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	109
8.9. Barrera al flujo con orientación $\theta = 0^\circ$: Perfil de presión y velocidad	110
8.10. Barrera al flujo con orientación $\theta = 0^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	110
8.11. Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$: Dominio del modelo computacional	111
8.12. Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$: Mallado del dominio computacional	111
8.13. Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$: Fronteras del dominio computacional	112
8.14. Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$: Puntos del dominio computacional	112
8.15. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 45^\circ$: Perfil de presión y velocidad	113
8.16. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 45^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	113
8.17. Barrera al flujo con orientación $\theta = 45^\circ$: Perfil de presión y velocidad	114

8.18. Barrera al flujo con orientación $\theta = 45^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	114
8.19. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$: Dominio del modelo computacional	115
8.20. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$: Mallado del dominio computacional	115
8.21. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$: Fronteras del dominio computacional	116
8.22. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$: Puntos del dominio computacional	116
8.23. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = -45^\circ$: Perfil de presión y velocidad . .	117
8.24. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = -45^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	117
8.25. Barrera al flujo con orientación $\theta = -45^\circ$: Perfil de presión y velocidad	118
8.26. Barrera al flujo con orientación $\theta = -45^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	118
8.27. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$: Dominio del modelo computacional	119
8.28. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$: Mallado del dominio computacional	119
8.29. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$: Fronteras del dominio computacional	120
8.30. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$: Puntos del dominio computacional	120
8.31. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 90^\circ$: Perfil de presión y velocidad . . .	121
8.32. Fractura abierta al flujo con orientación $\theta = 90^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	121
8.33. Barrera al flujo con orientación $\theta = 90^\circ$: Perfil de presión y velocidad	122
8.34. Barrera al flujo con orientación $\theta = 90^\circ$: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente	122
9.1. Perfiles de presión para una fractura abierta al flujo con una orientación $\theta = 0^\circ$. .	124
9.2. Perfiles de velocidad para una fractura abierta al flujo con una orientación $\theta = 0^\circ$. .	125
9.3. Perfiles de presión para una barrera al flujo con una orientación $\theta = 0^\circ$	126
9.4. Perfiles de velocidad para una barrera al flujo con una orientación $\theta = 0^\circ$	127
9.5. Perfiles de presión para una fractura abierta al flujo con una orientación $\theta = 45^\circ$. .	128
9.6. Perfiles de velocidad para una fractura abierta al flujo con una orientación $\theta = 45^\circ$. .	129
9.7. Perfiles de presión para una barrera al flujo con una orientación $\theta = 45^\circ$	130
9.8. Perfiles de velocidad para una barrera al flujo con una orientación $\theta = 45^\circ$	131
9.9. Perfiles de presión para una fractura abierta al flujo con una orientación $\theta = -45^\circ$. .	132
9.10. Perfiles de velocidad para una fractura abierta al flujo con una orientación $\theta = -45^\circ$. .	133
9.11. Perfiles de presión para una barrera al flujo con una orientación $\theta = -45^\circ$	134
9.12. Perfiles de velocidad para una barrera al flujo con una orientación $\theta = -45^\circ$	135
9.13. Perfiles de presión para una fractura abierta al flujo con una orientación $\theta = 90^\circ$. .	136
9.14. Perfiles de velocidad para una fractura abierta al flujo con una orientación $\theta = 90^\circ$. .	137
9.15. Perfiles de presión para una barrera al flujo con una orientación $\theta = 90^\circ$	138
9.16. Perfiles de velocidad para una barrera al flujo con una orientación $\theta = 90^\circ$	139
A.1. Representación esquemática de un cuerpo conformado por un conjunto infinito de partículas y el dominio que ocupa en un instante dado	149

A.2. Representación esquemática de la relación entre la configuración de referencia de un cuerpo y las coordenadas materiales y espaciales	150
A.3. Representación esquemática de la trayectoria de una partícula (o punto material)	151
A.4. Representación esquemática de la transformación del dominio ocupado por un cuerpo	151
A.5. Representación esquemática de un cuerpo material con una superficie de discontinuidad	154
C.1. Representación esquemática de flujo radial	172
C.2. Gráfica de $-Ei(-y)$	175

Lista de Tablas

5.1.	Datos utilizados en la validación del modelo de flujo monofásico	35
5.2.	Factores de conversión de unidades	35
5.3.	Valores de presión obtenidos mediante la solución analítica y numérica para $r = r_w$	38
5.4.	Valores de presión obtenidos mediante la solución analítica y numérica para $r = r_e$	39
6.1.	Datos del caso de estudio	47
9.1.	Número de elementos de malla	140

Introducción

El estudio de los medios porosos fracturados ha permanecido vigente debido a la importancia práctica de comprender los procesos de flujo en estos sistemas. Se han empleado varios enfoques para conceptualizar y formular modelos matemáticos capaces de describir el flujo a través de un medio poroso fracturado, así como simular los fenómenos de transporte que ocurren dentro del medio (ver, por ejemplo, la revisión realizada por Sahimi, 2011). Estos enfoques se pueden clasificar a grandes rasgos en dos clases: continuos, en los cuales se representa al medio poroso fracturado como un medio continuo equivalente; y discretos, en los que se representa explícitamente la distribución de la red de fracturas, considerando a cada fractura como una estructura explícita.

Dentro del contexto de los modelos discretos, es posible identificar dos técnicas principales para modelar medios porosos fracturados. Una de ellas consiste en modelar a las fracturas como elementos equidimensionales al dominio, lo que implica altas demandas en la generación de la malla y las herramientas numéricas para resolver el sistema de ecuaciones resultante. La otra utiliza elementos de dimensiones menores a las del dominio para representar a las fracturas, también conocidos en la literatura como elementos de dimensiones mixtas.

La modelación de medios porosos fracturados es particularmente importante para la industria petrolera debido a que los yacimientos naturalmente fracturados almacenan un porcentaje significativo de las reservas de hidrocarburos a nivel mundial. Sin embargo, estos yacimientos presentan un alto grado de heterogeneidad y complejidad geométrica creada por las fracturas. Además, el flujo en este tipo de yacimientos comprende dos medios con propiedades drásticamente diferentes, la matriz y las fracturas. Usualmente la matriz provee el almacenamiento principal de los hidrocarburos mientras que las fracturas actúan como vías altamente conductivas preferenciales al flujo. A pesar de que la permeabilidad de las fracturas puede ser muy alta, su espesor es muy pequeño en comparación con las dimensiones de la matriz, razón por la cual almacenan muy poco fluido.

Debido a su complejidad, el modelado de este tipo de yacimientos y del flujo de fluidos a través de ellos no está resuelto de manera satisfactoria. Por esta razón es relevante plantear y estudiar modelos que consideren explícitamente el efecto de cada fractura sobre el flujo, para mejorar nuestra comprensión del flujo de fluidos en yacimientos naturalmente fracturados.

Dentro de dicho contexto, el primer objetivo de este trabajo fue llevar a cabo una revisión de los elementos necesarios para la construcción de modelos de fractura discreta, así como de los principales modelos previamente desarrollados. El siguiente objetivo fue mostrar la aplicación una

metodología para construir sistemáticamente tres modelos bidimensionales de fractura discreta, y estudiar su comportamiento, desde el punto de vista del flujo, al implementarlos computacionalmente en la plataforma numérica COMSOL Multiphysics®. El objetivo principal es obtener un modelo práctico de fractura discreta que represente adecuadamente el efecto de las fracturas sobre el flujo.

De este modo, el Capítulo 1 consta de una introducción a los principales enfoques para modelar medios porosos fracturados, planteando los conceptos necesarios para el análisis de nuestros modelos. Se describen las propiedades y consideraciones básicas de los principales enfoques para modelar medios porosos fracturados, así como sus limitaciones y las condiciones requeridas para su aplicación. Se estudian primero los modelos con enfoque continuo, pues son la base para construir modelos discretos. Se discuten los modelos con enfoque discreto y algunos aspectos de las mallas requeridas por estos. Asimismo, se discuten brevemente los modelos híbridos.

A continuación, en el Capítulo 2, se presenta una metodología sistemática de la modelación. Se realiza una descripción de las etapas formales de la metodología, así como de las etapas implícitas en el proceso, necesarias para la construcción de los modelos. Se discuten brevemente los enfoques y herramientas empleadas en cada una de las etapas para este trabajo. Asimismo, se presenta la herramienta fundamental para la construcción de nuestros modelos: la Formulación Axiomática de los Modelos Matemáticos de los Sistemas Continuos. En el Apéndice A se discute con mayor formalidad este enfoque axiomático de la mecánica de los medios continuos.

En el Capítulo 3 se presenta el Modelo Matemático General de Flujo Monofásico. Se realiza la derivación de las ecuaciones generales de flujo monofásico en medios porosos con discontinuidades mediante la Formulación Axiomática de los Modelos Matemáticos de los Sistemas Continuos. Se establece el modelo conceptual y se deriva el modelo matemático. Por último, se discuten brevemente las ventajas de utilizar la Formulación Axiomática de los Modelos Matemáticos de los Sistemas Continuos.

Posteriormente, en el Capítulo 4, se presenta el modelo numérico empleado en todos los modelos presentados en este trabajo. Se realiza una breve descripción de los métodos numéricos utilizados. En el Apéndice B se presenta la derivación y los conceptos fundamentales del método de elemento finito, herramienta fundamental para la discretización espacial de los modelos de fractura discreta construidos.

En el Capítulo 5 se presenta el Modelo de Flujo Monofásico Ligeramente Compresible. Se realiza la descripción del modelo conceptual. A continuación se deriva el modelo matemático. Este modelo se obtiene al completar el Modelo Matemático General de Flujo Monofásico, especificando una ecuación de estado para un fluido ligeramente compresible. En la etapa de modelación computacional se realiza la implementación del modelo en la plataforma numérica COMSOL Multiphysics®. Por último, se realiza la validación del modelo, utilizando una solución semi analítica, la cual es derivada en el Apéndice C.

En el Capítulo 6 se construye el Modelo de Fractura Explícita siguiendo la Metodología Sistemática de la Modelación. Este modelo considera el enfoque de fractura discreta donde las fracturas son representadas con elementos equidimensionales al dominio, es decir, las fracturas son representadas por subdominios donde las propiedades varían drásticamente con respecto a las de la matriz. En la etapa de modelación computacional se realiza la implementación del modelo en la plataforma numérica COMSOL Multiphysics ®. Por último, se establece un caso de estudio para analizar el comportamiento del modelo. Este modelo es considerado como Modelo Base para los siguientes modelos de fractura discreta.

En el Capítulo 7 se presenta el Modelo de Fractura Discreta mediante Descomposición de Dominio. En este modelo las fracturas son representadas con elementos de dimensiones menores a las del dominio. Estos elementos requieren particionar al dominio para poder establecer una discontinuidad. La construcción de este modelo se realiza siguiendo la Metodología Sistemática de la Modelación. El modelo matemático es derivado a partir del Modelo de Fractura Explícita. Este modelo es implementado en la plataforma numérica COMSOL Multiphysics ®, considerando el mismo caso de estudio que fue establecido en el Modelo Base.

En el Capítulo 8 se construye el Modelo de Fractura Discreta Desconectada siguiendo la Metodología Sistemática de la Modelación. Este modelo corresponde a una simplificación del Modelo de Fractura Discreta mediante Descomposición de Dominio, donde no se requiere particionar al dominio para establecer una discontinuidad. Su implementación se realiza en la plataforma numérica COMSOL Multiphysics ®, considerando el caso de estudio del Modelo Base.

En el Capítulo 9 se muestran y discuten los resultados obtenidos de los experimentos numéricos realizados. Los resultados se presentan y comparan gráficamente. En particular, se realiza una comparación del comportamiento de los modelos desarrollados para los casos en que las discontinuidades representan una fractura abierta al flujo y una barrera, considerando diferentes orientaciones de la fractura.

Finalmente, en el capítulo 10, se presentan las conclusiones del trabajo tanto respecto al comportamiento de los modelos en términos del flujo como a los obstáculos enfrentados, y se plantean líneas de trabajo futuro.

Capítulo 1

Revisión de la Literatura de los Modelos de Medios Porosos Fracturados

1.1. Modelos de medios porosos fracturados

Modelar y simular numéricamente flujo de fluidos a través un medio poroso fracturado es complicado debido a la heterogeneidad y anisotropía creada por la compleja distribución de las fracturas, las cuales se presentan a diferentes escalas y cuyo espesor es demasiado pequeño en comparación con las dimensiones de la matriz. Además, el flujo de fluidos comprende dos medios, la matriz y las fracturas, con propiedades drásticamente diferentes. Para representar medios porosos fracturados han sido propuestos varios modelos conceptuales, los cuales pueden ser clasificados dentro de tres enfoques principales:

1. Enfoque continuo
2. Enfoque discreto
3. Enfoque híbrido

Estos enfoques están basados en consideraciones totalmente diferentes, por lo que cada uno de ellos tiene distintas limitaciones y se aplican bajo ciertas condiciones.

La figura 1.1 presenta cortes de un medio poroso con fracturas a diferentes escalas, que pueden ser representados por modelos con diferentes enfoques. Un medio poroso escasamente fracturado puede ser representado mediante un modelo con enfoque continuo; un medio poroso con alta densidad de fracturas puede ser representado mediante un modelo con enfoque continuo o multicontinuo; las fracturas dominantes pueden ser modeladas con un enfoque discreto; para representar tanto a la matriz como a las fracturas a diferentes escalas se puede aplicar un modelo con enfoque híbrido o multicontinuo.

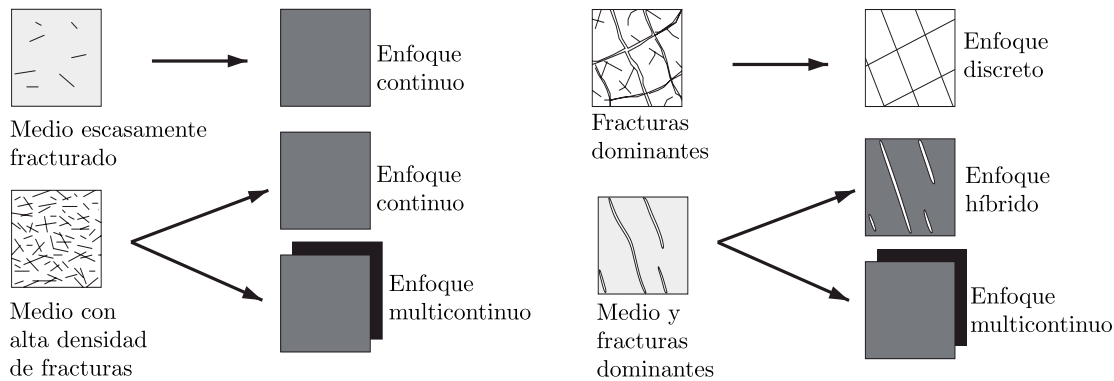


Figura 1.1: Enfoques para modelar medios porosos fracturados (modificada de Dietrich *et al.* 2005).

En las secciones siguientes se describen las propiedades y consideraciones básicas de los tres enfoques principales para modelar medios porosos fracturados.

1.1.1. Modelos continuos

Usualmente se usan dos tipos de modelos continuos: modelo de simple continuo y modelo de doble continuo.

Modelo de simple continuo (equivalente)

Los modelos de simple continuo representan al medio poroso fracturado como un medio poroso equivalente, mediante un medio continuo con propiedades efectivas que varían rápida y discontinuamente a lo largo del dominio, dependiendo si la región del medio continuo representa una zona con o sin fracturas.

Las zonas sin fracturas son modeladas como un medio poroso homogéneo, mientras que en las zonas con fracturas se calcula un tensor de permeabilidad efectiva incluyendo la influencia de las fracturas sobre el flujo. Estos modelos también son llamados modelos de permeabilidad efectiva y para su implementación se requieren simuladores que puedan realizar el calculo del flujo en múltiples puntos, si los términos fuera de la diagonal en el tensor de permeabilidad contienen un elemento distinto a cero (Lee *et al.*, 1998). La permeabilidad efectiva puede ser obtenida utilizando métodos de escalamiento basados en celdas, tales como el método de Oda (1985) o el método de formulación integral de frontera (Lough *et al.*, 1998).

Royer *et al.* (2002) obtuvieron modelos macroscópicos de simple continuo que describen flujo y transporte a través de medios porosos fracturados, utilizando un método de homogeneización para realizar expansiones de escala, es decir, los modelos macroscópicos se deducen a partir de la descripción física de un volumen elemental representativo (REV), que consiste en un bloque de matriz con una fractura abierta. La condición principal para realizar la homogeneización es tener una gran densidad de heterogeneidades.

Los modelos de simple continuo solo son validos para modelar fracturas cuya longitud característica sea más pequeña que la longitud característica de una celda de la malla, siempre y cuando la red de fracturas sea muy densa e interconectada, o si la interacción entre las fracturas y la matriz permite establecer equilibrio local (Sahimi, 2011).

Modelo de doble continuo

En los modelos de doble continuo, el medio poroso fracturado es representado como dos medios continuos distintos interactuando, uno correspondiente a los bloques de matriz y el otro a la red de fracturas. Esto puede ser expresado matemáticamente como:

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_{fr} \quad (1.1)$$

donde Ω es el dominio entero que representa al medio poroso fracturado, mientras que Ω_m y Ω_{fr} indican la porción del dominio correspondiente a la matriz y a las fracturas, respectivamente.

Este enfoque fue propuesto originalmente por Barenblatt *et al.* (1960). La interacción entre ambos continuos es formulada mediante una función de transferencia (Barenblatt y Zheltov, 1960).

Posteriormente, Warren y Root (1963) introdujeron el modelo de doble continuo para modelar yacimientos naturalmente fracturados. Ellos consideraron que el sistema fracturado puede ser idealizado como un conjunto de fracturas altamente interconectadas, el cual es suministrado de fluidos por numerosos bloques de matriz.

Warren y Root (1963) utilizaron una representación idealizada del yacimiento fracturado, paralelepípedos idénticos como bloques de matriz, considerados isótropos y homogéneos, separados por fracturas ortogonales, también conocido como modelo de cubos de azúcar (ver Figura 1.2).

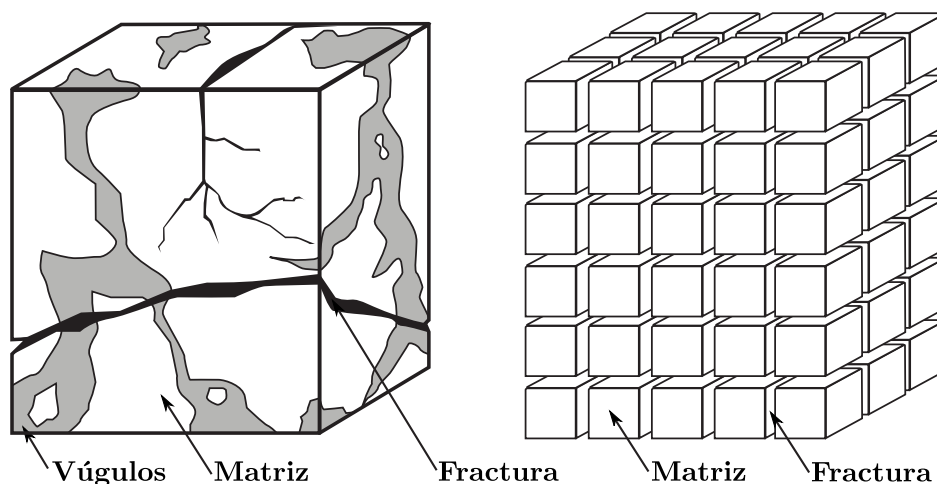


Figura 1.2: Representación idealizada de un medio poroso fracturado con el modelo de cubos de azúcar de Warren y Root, donde los bloques representan a la matriz y la separación entre estos a las fracturas (modificada de Warren y Root 1963).

La simulación de un modelo de doble continuo involucra la discretización del medio poroso fracturado en dos dominios, matriz y fractura. Por lo tanto, en cada punto del dominio se tendrán presiones y saturaciones tanto de la matriz como de la fractura. Los dominios matriz y fractura están conectados entre sí a través de un término de transferencia que conecta cada celda de fractura con su correspondiente celda de matriz en un bloque de malla. Sobre una discretización del dominio, las conexiones de celdas de malla representan las conexiones de fracturas donde una porosidad es asignada a cada celda de malla como porosidad de la fractura. Una celda de la malla puede contener uno o más bloques de matriz. En el modelo clásico de doble porosidad, los bloques de matriz dentro de una celda de la malla tienen propiedades idénticas (presión, saturación y porosidad). Ya que la misma celda de la malla tiene que representar a la fractura y a la matriz al mismo tiempo.

En el modelo de Warren y Root (1963), la función de transferencia de fluido matriz-fractura es proporcional a un factor de forma, el cual está definido como un parámetro que depende de la geometría de los bloques de matriz. Determinar el factor de forma no es sencillo, debido a las complejas interacciones posibles entre la fractura y la matriz para distintas geometrías de los bloques. Kazemi *et al.* (1976) presentaron una expresión para el factor de forma utilizando una formulación de diferencias finitas, este factor de forma ha sido empleado en varios simuladores. Simulaciones para investigar la exactitud de varios factores de forma mostraron que la simulación de doble continuo empleando el factor de forma de Warren y Root (1963) sobrestima la recuperación, mientras que la simulación usando el factor de forma de Kazemi *et al.* (1976) subestima la recuperación. Aunque han sido propuestas varias expresiones para determinarlo, el factor de forma ha permanecido en controversia por mucho tiempo debido a la falta de una base teórica sólida y a que se encontraron fuertes indicios de dependencia al mecanismo de flujo y que para diferentes sistemas de fracturas se tiene unicidad en la solución.

Kazemi *et al.* (1976) y Rossen (1977) desarrollaron simuladores de doble continuo para modelar flujo multifásico en medios porosos fracturados, extendiendo el modelo de Warren y Root (1963). Desde entonces, el enfoque de doble continuo ha sido extensamente implementado para simular medios porosos fracturados a escala de campo.

Mejoras al modelo de doble continuo

El modelo clásico de doble continuo de Warren y Root (1963) no considera varios mecanismos que pudieran presentarse durante la transferencia de flujo entre la matriz y las fracturas, fenómenos significativos a la escala de un bloque de matriz, tales como drene gravitacional, continuidad capilar y desplazamiento viscoso, por lo que se han propuesto varias mejoras para hacerlo más realista, incluyendo el modelo de segregación gravitacional (Reiss *et al.*, 1973; Sonier y Eymard, 1987; Litvak *et al.*, 1988; Gilman y Kazemi, 1988), el método de subdominio (Gilman y Kazemi, 1983; Saidi, 1983; Chen *et al.*, 1987), el método de interacción de múltiples continuos (Pruess y Narasimhan, 1985; Gilman y Kazemi, 1988; Wu y Pruess, 1988), las técnicas de pseudo presión capilar y permeabilidad relativa (Thomas *et al.*, 1983; Dean y Lo, 1988; Rossen y Shen, 1989), así como el efecto de desplazamiento viscoso (Gilman y Kazemi, 1988).

El modelo clásico de doble continuo desprecia los efectos gravitacionales en la transferencia matriz-fractura al considerar que los bloques de matriz y su fractura circundante se encuentran a la misma profundidad. Reiss *et al.* (1973) fueron unos de los primeros autores en discutir el efecto de la gravedad sobre la transferencia de flujo entre matriz y fractura. Gilman y Kazemi (1983) incorporaron un término gravitacional a la función de transferencia del modelo de doble continuo. El término gravitacional está en función de la alturas del contacto de las fases en el bloque de matriz y en su fractura circundante. La fuerza de empuje del drene gravitacional es calculada al restar la altura entre las interfaces de las fases en la matriz y en la fractura obtenidas de simples balances de masa. Litvak (1985), Sonier y Eymard (1987) usaron enfoques similares, pero mejoraron el cálculo de las alturas del contacto de las fases al incluir saturaciones irreductibles. En los modelos de segregación gravitacional se considera una segregación total de las fases.

Existen dos métodos principales para obtener pseudo funciones, método de pseudo funciones estáticas y método de pseudo funciones dinámicas. El método de pseudo funciones estáticas calcula curvas de pseudo presión capilar, las cuales combinan las fuerzas capilares y gravitacionales al considerar equilibrio vertical. Thomas *et al.* (1983) desarrollaron un modelo de doble continuo trifásico en tres dimensiones de diferencias finitas para simular medios porosos fracturados. Para tomar en cuenta los efectos gravitacionales, introdujeron pseudo funciones de presión capilar para la matriz.

El método de pseudo funciones dinámicas obtiene las curvas de pseudo funciones a partir de simulaciones con malla fina o datos históricos. Dean y Lo (1988) mostraron que el efecto de la segregación gravitacional podía ser incluido en términos de pseudo presión capilar para la matriz y la fractura. Rossen y Shen (1989) propusieron un modelo para calcular el término de intercambio matriz-fractura usando curvas de pseudo presión capilar para la matriz y la fractura. En ambos casos las curvas de pseudo presión capilar fueron obtenidas de simulaciones de malla fina de un bloque de matriz rodeado de fracturas. Gilman y Kazemi (1988) argumentaron que la naturaleza de la dependencia del tiempo de la segregación gravitacional debía ser incluida en las simulaciones de medios porosos fracturados. Sin embargo, una desventaja de las técnicas de pseudo presión capilar es el tiempo y esfuerzo requerido para ajustar los resultados de simulaciones de malla fina con las curvas generadas de pseudo presión. Rossen y Shen (1989) describieron un procedimiento para generar las pseudo curvas a partir de una simulación de malla fina sin tener que realizar un ajuste.

En el modelo de doble continuo de Warren y Root (1963), todos los bloques de matriz, considerados dentro de un bloque de malla computacional, son agrupados en un término fuente o sumidero conectado a la fractura. La presión y la saturación promedio son usadas para el bloque entero de matriz. Estas dos consideraciones proporcionan un inexacto gradiente de presión entre la fractura y la matriz. El modelo de subdominio fue presentado por Saidi (1983) en un simulador trifásico con enfoque de doble continuo, donde discretizó los bloques de matriz en las direcciones vertical y radial. El propuso dividir a los bloques de matriz en subdominios, para poder representar las variaciones de presión y saturación con mayor exactitud. Esto mejoró significativamente el modelado de flujo transitorio en los bloques de matriz. Chen *et al.* (1987); Gilman y Kazemi (1983) usaron enfoques similares para mejorar la representación de la matriz en la simulación de modelos de doble continuo (ver Figura 1.3). La subdivisión proporciona una mejor resolución de los gradientes de presión y saturación, pero incrementa el costo computacional.

Pruess y Narasimhan (1985) presentaron el modelo de interacción de múltiples continuos (MINC por sus siglas en inglés). Ellos consideraron que las superficies con distancias iguales con respecto a la fractura tienen el mismo potencial de flujo. Por lo tanto, discretizaron los bloques de matriz en una secuencia de elementos de volumen anidados tales que todas las interfaces entre los elementos de volumen son paralelas a la fractura más cercana, como se muestra en la Figura 1.4.

Gilman y Kazemi (1988) desarrollaron un simulador basado en el método de interacción de múltiples continuos. Ellos dividieron cada bloque de matriz en anillos rectangulares y subdominios verticales. Por lo tanto, su modelo también puede modelar segregación gravitacional. Wu y Pruess (1988) compararon el modelo de interacción de múltiples continuos con simulaciones de malla fina para modelar imbibición capilar agua-aceite en medios porosos fracturados. Ellos mostraron que el modelo de interacción de múltiples continuos predice la imbibición de agua de una fractura a un bloque de matriz con mayor exactitud que el modelo clásico de doble continuo.

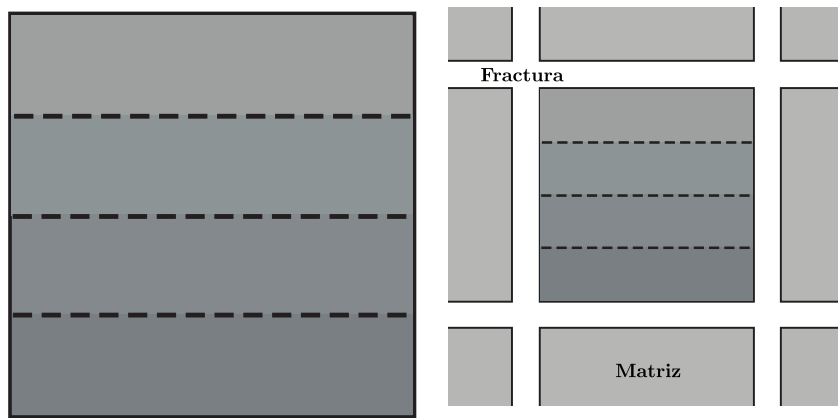


Figura 1.3: Sistema de doble continuo con descomposición de los bloques de matriz en subdominios (modificada de Gilman y Kazemi 1983).

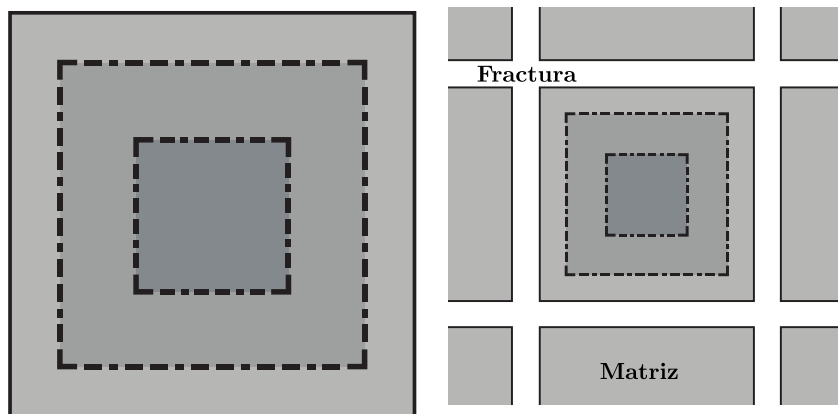


Figura 1.4: Discretización de un bloque de matriz en una secuencia de elementos de volumen anidados (modificada de Pruess y Narasimhan 1985).

En el enfoque clásico de doble continuo, la transferencia de fluido entre los bloques de matriz se considera despreciable. Sin embargo, esta consideración no es apropiada cuando los bloques de matriz son más grandes que los bloques de la malla. Blaskovich *et al.* (1983); Hill y Thomas (1985); Dean y Lo (1988); Gilman y Kazemi (1988); Dean y Lo (1988); Fung y Collins (1991) extendieron la consideración del modelo de doble continuo al considerar transferencia de flujo matriz-matriz y fractura-fractura entre los bloques de la malla. Este modelo es llamado modelo de doble porosidad - doble permeabilidad y requiere mayores esfuerzos computacionales que el modelo de doble continuo. La Figura 1.5 muestra la transferencia fractura-fractura y matriz-matriz, despreciada en los modelos de doble continuo.

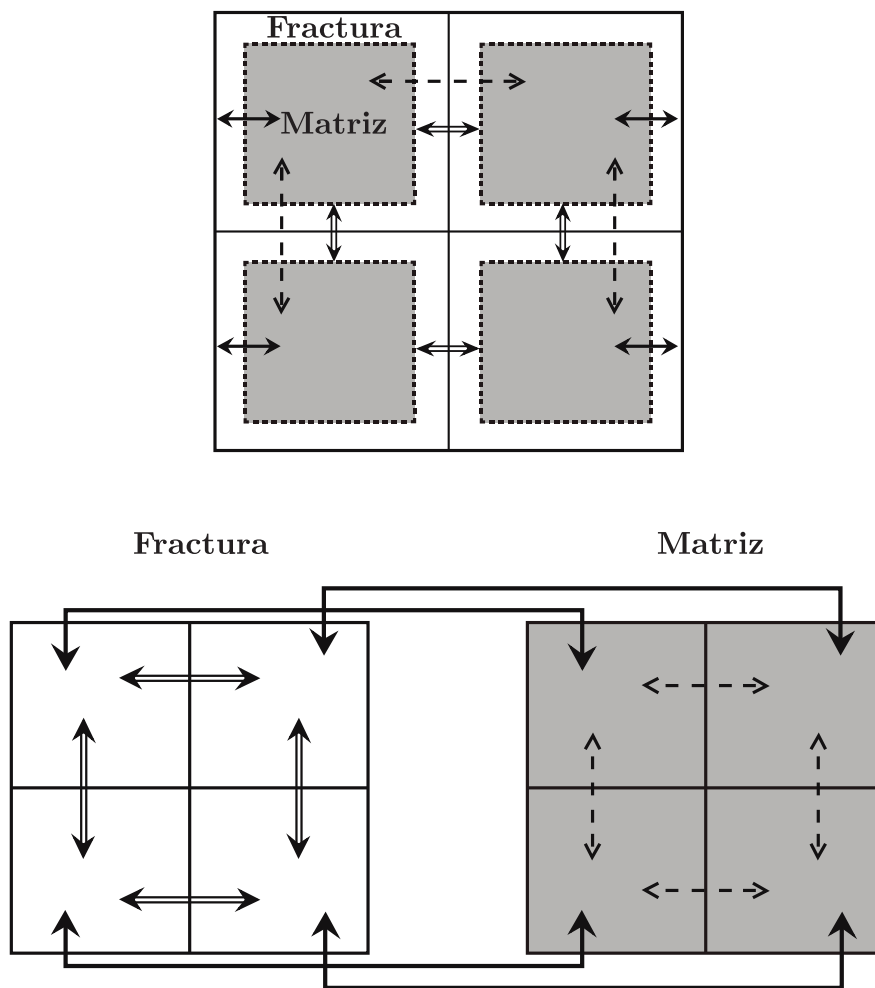


Figura 1.5: Representación esquemática de las conexiones en un modelo de doble permeabilidad. La transferencia de flujo matriz-matriz está representada por las flechas de línea discontinua, la transferencia matriz-fractura por flechas de línea continua y las flechas de doble línea representan la transferencia fractura-fractura (modificada de Moinfar 2013).

La Figura 1.6 muestra la diferencia conceptual de conectividad entre los modelos de doble continuo, de subdominio o interacción de múltiples continuos y de doble porosidad-doble permeabilidad.

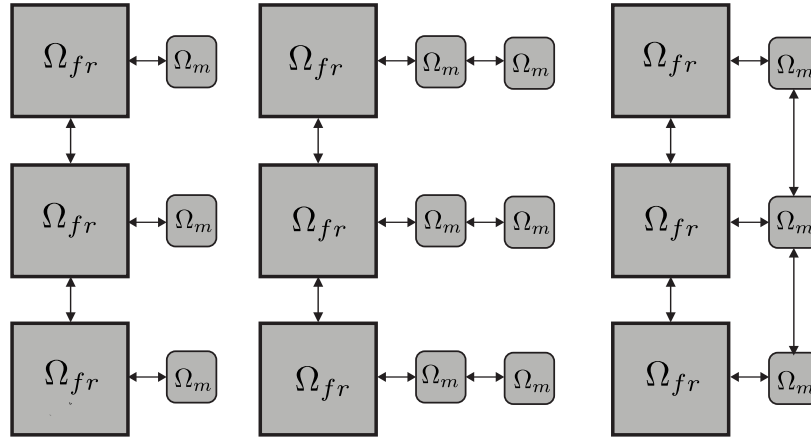


Figura 1.6: Conectividad conceptual para un modelo clásico de doble continuo (izquierda), de subdominio o interacción de múltiples continuos (centro) y de doble porosidad - doble permeabilidad (derecha) (modificada de Huang 2009).

Aunque el enfoque de los modelos de doble continuo es muy eficiente, tiene algunas limitaciones. Al utilizar una representación idealizada del medio poroso fracturado, sobrerregularizando la geometría de la red de fracturas, este modelo no puede ser aplicado a medios porosos fracturados desconectados, ya que no representa la heterogeneidad de estos sistemas. Esto dificulta la obtención de buenas estimaciones de parámetros. Además, la evaluación de las funciones de transferencia entre la matriz y las fracturas es complicada (Karimi-Fard y Firoozabadi, 2003).

Las consideraciones realizadas en los modelos de doble continuo representan un alto grado de incertidumbre, por lo que se requieren técnicas de calibración para poder utilizar correctamente estos modelos.

Los modelos de doble continuo son usados para representar medios porosos fracturados a una escala aumentada, siempre que se cumplen las condiciones necesarias para adoptar estos enfoques. Cuando se desean modelar a escala local se utilizan modelos discretos, ya que el enfoque continuo no es aplicable para la representación del problema, debido a que se requieren descripciones más precisas acerca de la distribución de la red de fracturas y la transferencia de masa entre matriz y fractura.

1.1.2. Modelos discretos

El objetivo de los modelos discretos es representar explícitamente la distribución de la red de fracturas, considerando a cada fractura como una estructura explícita. Con este enfoque se tiene

la posibilidad de modelar procesos de flujo y transporte de una manera muy cercana a como se presentan en la naturaleza (Reichenberger *et al.*, 2004).

En el enfoque discreto las fracturas pueden ser modeladas de dos formas: como elementos equidimensionales al dominio (lo que implica altas demandas en la generación de la malla y las herramientas numéricas para resolver el sistema de ecuaciones resultante); o elementos de dimensiones menores (también conocidos en la literatura como elementos de dimensiones mixtas), ver Figura 1.7.

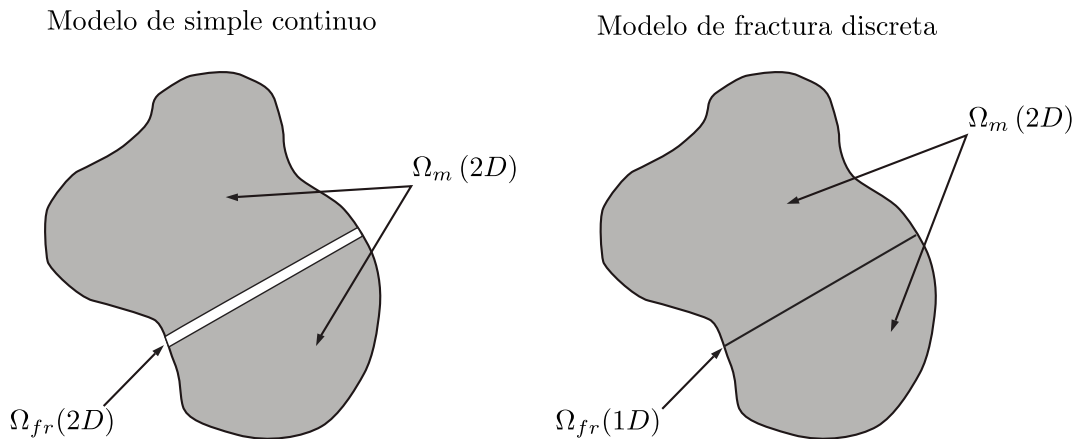


Figura 1.7: Representación esquemática de los enfoques discretos en un dominio de dos dimensiones, donde Ω_m y Ω_{fr} representan a los subdominios correspondientes a la matriz y a la fractura, respectivamente. Izquierda: la fractura es modelada como un elemento equidimensional al dominio. Derecha: la fractura es modelada como un elemento de dimensiones menores. (modificada de Karimi-Fard y Firoozabadi 2003).

Modelo de simple continuo (explícito)

El modelo de simple continuo puede ser considerado dentro del enfoque discreto cuando las fracturas son representadas explícitamente como elementos equidimensionales al dominio, es decir, en un dominio de n -dimensiones, cada una de las fracturas es representada por un subdominio en n -dimensiones, como se muestra en la Figura 1.7.

El modelo de simple continuo explícito proporciona buena exactitud pero no es práctico debido al gran número de elementos de malla que se requieren por la alta relación de aspecto entre el tamaño de la matriz y el espesor de las fracturas. Cuando en un sistema fracturado la relación de aspecto, así como la relación de permeabilidad de la matriz y la fractura, es muy alta, el modelo de simple continuo explícito se vuelve numéricamente ineficiente.

Modelo de fractura discreta

El modelo de fractura discreta es una simplificación geométrica del modelo de simple continuo explícito, basado en el concepto de equilibrio de flujo cruzado entre las caras de las paredes de la fractura y la matriz, que permite representar a las fracturas como elementos de $n - 1$ dimensiones en un dominio de n dimensiones. Representando a las fracturas como líneas en un dominio de dos dimensiones, o superficies en un dominio de tres dimensiones.

El enfoque de fractura discreta es numéricamente superior al enfoque de simple continuo explícito y supera las limitaciones de los modelos de enfoque continuo (Hoteit y Firoozabadi, 2005) principalmente la falta de un término de intercambio entre las fracturas y la matriz, que puede ser considerado como una ventaja conceptual importante (Reichenberger *et al.*, 2006). Sin embargo, la aplicabilidad de los modelos discretos para problemas a escala de campo permanece muy limitada, ya que requieren la determinación detallada de características precisas de la red de fracturas. Una solución a este problema es usar datos generados geoestadísticamente junto con los datos determinísticos para realizar el modelo.

Wilson y Witherspoon (1974) publicaron uno de los primeros artículos en utilizar modelos discretos para estudiar flujo de fluido en medios porosos fracturados. Ellos estudiaron la infiltración en estado estacionario en un sistema fracturado debajo de una represa usando dos modelos de elemento finito. El primer modelo puede ser categorizado como un modelo de simple continuo explícito desestructurado donde las fracturas son representadas mediante elementos finitos triangulares. El segundo es un modelo de fractura discreta donde se utilizan elementos finitos de una dimensión para representar a las fracturas en un medio impermeable distinto.

Gureghian (1975) presentó un modelo de elemento finito para flujo de fluido tridimensional en un medio poroso fracturado. En su trabajo representó a las fracturas mediante elementos triangulares que corresponden a las caras de tetraedros que representan los bloques de matriz.

Noorishad y Mehran (1982) presentó un modelo de elemento finito para estudiar flujo transitorio con transporte de soluto por dispersión y convección en un medio poroso fracturado en dos dimensiones. Baca *et al.* (1984) propuso un modelo de elemento finito en dos dimensiones para flujo monofásico con transporte de soluto y calor, utilizando un enfoque similar. Más tarde, Juanes *et al.* (2002) presentó un modelo general de elemento finito para flujo monofásico en medios porosos fracturados en tres dimensiones.

Kim (1999); Kim y Deo (1999, 2000); Karimi-Fard y Firoozabadi (2003) adoptaron el método de elemento finito para desarrollar modelos de flujo bifásico en medios porosos fracturados incluyendo efectos gravitacionales y capilares, usando un enfoque similar al utilizado por Baca *et al.* (1984); Noorishad y Mehran (1982). Karimi-Fard y Firoozabadi (2003) utilizaron el método IMPES para la solución de las ecuaciones, mientras que Kim (1999); Kim y Deo (1999, 2000) usaron el método totalmente implícito.

Sin embargo, los modelos de fracturas discretas basados en procedimientos de elemento finito no son adecuados para flujo multifásico en medios porosos altamente heterogéneos, ya que no aseguran conservación local de la masa.

Hoteit y Firoozabadi (2005); Fu *et al.* (2005); Fu (2007); Yang (2003); Monteagudo y Firoozabadi (2004); Reichenberger *et al.* (2006); Geiger *et al.* (2009) desarrollaron simuladores numéricos para flujo multifásico en medios porosos fracturados con el enfoque de fracturas discretas en dos y tres dimensiones usando una formulación de volúmenes de control basados en elementos finitos para asegurar la conservación local de la masa.

El método de volúmenes de control basados en elementos finitos usa el mismo tipo de funciones de interpolación para variables dependientes que las usadas en el método de elementos finitos. Sin embargo, en el método de elementos finitos los potenciales de flujo son aproximados sin el conocimiento del flujo entre los nodos, mientras que en el método de volúmenes de control basado en elementos finitos el flujo de fluidos entre nodos es calculado explícitamente para asegurar la conservación local de la masa.

También han sido propuestos modelos de fractura discreta basados en diferencias finitas. Karimi-Fard *et al.* (2004) desarrollaron modelos de fracturas discretas usando una formulación de volúmenes de control basados en diferencias finitas. El modelo emplea el enfoque discreto con elementos de dimensiones menores, donde la matriz es modelada por celdas poliédricas tridimensionales y las fracturas son representadas por superficies. Además, introdujeron un transformación de conectividad llamada "star-delta" para eliminar el volumen de control en las intersecciones de fracturas, el cual provoca inestabilidad numérica y pequeños pasos de tiempo.

Para representar con exactitud la heterogeneidad de un medio poroso fracturado, usualmente es necesario utilizar un esquema de discretización desestructurado. La mayoría de los modelos de fracturas discretas requieren una malla desestructurada que se ajuste a la compleja geometría y localización de las fracturas. Las mallas desestructuradas suelen usar elementos finitos triangulares en un dominio de dos dimensiones y elementos tetraédricos en dominios de tres dimensiones para realizar la discretización del espacio. La generación de tal malla para una red de fracturas arbitraria puede ser un reto considerable.

Se han publicado trabajos sobre tratamientos para reducir el tiempo de computo y el uso de memoria, tales como la aplicación de mallas híbridas (Geiger *et al.*, 2007). Éstas emplean una combinación de distintos tipos de elementos para la discretización del espacio: elementos tetraédricos, hexaédricos, piramidales y prismáticos en dominios de tres dimensiones y elementos triangulares y cuadrilaterales en dominios de dos dimensiones. Esto reduce el número de nodos (es decir, de incógnitas) y por lo tanto el costo computacional.

Modelos híbridos

Los modelos híbridos son una combinación de los enfoques discreto y continuo. Donde, para una escala dada, las fracturas que pueden ser modeladas explícitamente son consideradas con el enfoque discreto, mientras que las fracturas a menores escalas son consideradas mediante el enfoque continuo. Desafortunadamente, al combinar estos dos enfoques también se combinan sus respectivas incertidumbres. Además de las dificultades para representar las discontinuidades a una escala dada, se tienen las incertidumbres del enfoque continuo.

Capítulo 2

Metodología Sistemática de la Modelación

El método general que se utiliza para realizar la predicción científica del comportamiento de los sistemas de interés en ciencia e ingeniería es la *modelación*, ya que permite construir modelos para sistemas y fenómenos diversos, gracias a la gran generalidad de sus bases y de las metodologías utilizadas.

La modelación consiste en utilizar modelos de los sistemas de interés. Entendiendo por *modelo* un sustituto del sistema real, de cuyo comportamiento es posible derivar el del sistema de interés. La transformación de un sistema real a un modelo, inevitablemente conduce a simplificaciones del sistema real. Por lo tanto, se debe tener presente que un modelo solamente es una aproximación de la realidad.

La formulación de los modelos de sistemas reales complejos es una contribución fundamental del avance de la ciencia y el desarrollo la computación electrónica. Debido a que se requiere la integración de conocimientos científicos y tecnológicos para generar modelos matemáticos, los cuales se transforman en modelos numéricos simplificados para ser implementados en programas de cómputo.

La metodología del proceso de modelación matemática, numérica y computacional está conformada por cuatro etapas (Herrera y Díaz-Viera, 2003):

- Modelación Conceptual
- Modelación Matemática
- Modelación Numérica
- Modelación Computacional

Sin embargo, incluye implícitamente una etapa previa, la descripción del problema a resolver. Esta etapa consiste en definir, describir y delimitar el problema a resolver. En este trabajo, esta etapa se realiza en la revisión de la literatura de los modelos de medios porosos fracturados, Capítulo 1.

En la etapa de Modelación Conceptual se establecen todas las hipótesis, supuestos, condiciones, alcances y limitaciones que debe satisfacer el modelo a una escala dada. Por lo tanto, se definen cuales son las fases, componentes y propiedades sujetas a balance, así como las posibles relaciones de dependencia entre éstas.

La Modelación Matemática consiste en obtener una descripción matemática del modelo conceptual que represente el comportamiento del sistema o fenómeno a estudiar. Para la generación de modelos matemáticos existen principalmente dos enfoques: el determinístico y el estocástico.

El enfoque determinístico consiste en establecer una ecuación o conjunto de ecuaciones cuya solución única describe de manera unívoca el comportamiento del fenómeno a modelar. Mientras que el enfoque estocástico persigue reproducir el comportamiento del fenómeno en el sentido estadístico, es decir, se obtienen múltiples soluciones estadísticamente equivalentes.

Dependiendo de la escala de la modelación, se adopta el enfoque de la física microscópica, cuando se desea estudiar un sistema o fenómeno a la escala de las partículas que forman una molécula o un átomo, o de la física macroscópica, a una escala tal que el sistema está formado por una inmensa cantidad de moléculas y se considera como un continuo de materia. Los fundamentos de la física macroscópica los proporciona la Mecánica de los Medios Continuos, mientras que la Mecánica Cuántica proporciona una metodología apropiada para el estudio de la física microscópica. Sin embargo, la mayoría de los sistemas de interés en ciencia e ingeniería pertenecen a la física macroscópica.

En el presente trabajo se adoptó el enfoque macroscópico determinístico basado en la Formulación Axiomática de los Modelos Matemáticos de los Sistemas Continuos, los cuales, independientemente de su naturaleza y propiedades intrínsecas, pueden formularse por medio de balances. Los modelos básicos de sistemas tan complicados como los yacimientos petroleros, se pueden derivar por medio de la aplicación repetida de la ecuación diferencial de balance.

A partir del Modelo Conceptual se establece el Modelo Matemático mediante la aplicación de esta formulación axiomática, lo cual consiste en escribir las ecuaciones de balance local, diferenciales parciales y de salto, para las propiedades intensivas en correspondencia con las propiedades extensivas de las ecuaciones de balance global. El procedimiento anterior se realiza para cada componente en cada fase, resultando tantas ecuaciones como componentes se tengan por fases. Posteriormente, se especifican las leyes constitutivas que estén ligadas con la naturaleza del problema. Estas relaciones permiten ligar a las propiedades intensivas de interés entre sí y definir sus términos fuente y de flujo, además se añaden tantas relaciones como sean necesarias para que el sistema de ecuaciones esté determinado. Finalmente, el modelo se completa al especificar suficientes condiciones iniciales y de frontera de manera que el problema resultante sea bien planteado, es decir, que posee solución única.

La Formulación Axiomática de los Modelos Matemáticos de los Sistemas Continuos se encuentra desarrollada en el Apéndice A.

Los modelos matemáticos de los sistemas continuos son ecuaciones diferenciales, las cuales son parciales para la mayoría de los sistemas de interés en ciencia e ingeniería, o sistemas de tales ecuaciones, que son las que permiten predecir el comportamiento de los sistemas. Debido al grado de complejidad de este tipo de problemas, no es posible obtener mediante métodos analíticos las soluciones de tales ecuaciones, por lo que deben ser tratados con métodos numéricos.

La etapa de la Modelación Numérica consiste en obtener una versión discreta del Modelo Matemático que pueda ser implementada en un programa de cómputo. Los modelos numéricos son versiones discretas de los modelos matemáticos, cuya solución involucra el uso de algoritmos numéricos eficientes y estables. Las soluciones son aproximadas hasta cierto nivel de error pero a su vez deben ser consistentes con la solución del modelo matemático.

Los métodos numéricos más usados para la discretización en espacio y tiempo de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales son de tres tipos:

- El método de diferencias finitas (FDM)
- El método de elementos finitos (FEM)
- El método de volumen finito (FVM)

Además de la discretización del sistema de EDP se requiere en mayor o menor medida la aplicación de toda una serie de métodos numéricos, como son:

- Métodos de linealización
- Métodos, directos e iterativos, para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas lineales resultantes.
- Métodos Óptimos de Construcción de Mallas
- Métodos de Descomposición de Dominio.

En este trabajo se utiliza el método de elementos finitos para la discretización espacial, así como otros métodos numéricos los cuales serán detallados en el Capítulo 4.

Sin embargo, la cantidad de cálculos aritméticos que requiere la aplicación de esta clase de métodos, está muy por encima de la capacidad humana para realizarlos y es necesario que sean ejecutados por computadoras electrónicas.

En la etapa de Modelación Computacional se realiza la traducción del Modelo Numérico a uno computacional, el cual debe estar implementado en una plataforma o equipo de cómputo específico y codificado en cierto lenguaje de programación.

En este trabajo se realizó la implementación computacional mediante el uso del programa COMSOL Multiphysics [®], que es una plataforma numérica general basada en el método de elementos finitos para la solución de problemas de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones iniciales y de frontera.

Aunque formalmente la metodología de modelación matemática, numérica y computacional está conformada por cuatro etapas, incluye implícitamente dos etapas más. La validación del modelo obtenido y su aplicación.

La validación consiste en validar el modelo numérico mediante soluciones analíticas o semi analíticas. Este paso puede tener cierto grado de generalidad debido a que solo hay soluciones analíticas o semi analíticas para un pequeño número de problemas específicos. Sin embargo, la validación mediante soluciones analíticas o semi analíticas solo demuestra que el modelo numérico conduce a una solución correcta de las relaciones matemáticas originales. Para verificar que el modelo numérico representa los procesos correctamente para un problema dado, es necesaria una validación experimental. A través de una validación con datos experimentales se puede verificar el grado al cual el modelo es correcto y determinar parámetros y procesos decisivos. En general, una validación experimental es muy difícil debido a que la evaluación del modelo e identificación de procesos significativos mediante experimentos es casi imposible, ya que los datos necesarios no pueden medirse con suficiente exactitud (Helmig, 1997).

Hasta que nosotros no hayamos examinado el modelo mediante las validaciones antes mencionadas, es decir, mientras no hayamos demostrado que pueden ser realmente la base para realizar una predicción, no podremos pasar a la etapa de aplicación, es decir, a modelar un sistema natural, ya que solo un modelo que está suficientemente calibrado puede ser utilizado como una herramienta predictiva.

Capítulo 3

Modelo Matemático General de Flujo Monofásico en Medios Porosos con Discontinuidades

3.1. Ecuaciones generales de flujo monofásico en medios porosos con discontinuidades

La derivación de las ecuaciones generales de flujo monofásico en medios porosos con discontinuidades se realiza mediante la Formulación Axiomática de los Modelos Matemáticos de los Sistemas Continuos, la cual se encuentra desarrollada en el apéndice A, desarrollando las condiciones de balance local de cada una de las propiedades intensivas asociadas a la colección de propiedades extensivas del sistema continuo.

3.2. Modelo Conceptual

1. Se considera un sistema cerrado bajo condiciones isotérmicas.
2. Existe una fase fluida y una inmóvil .
3. La fase fluida es un fluido que consta de un solo componente.
4. La fase inmóvil es una matriz porosa.
5. El medio poroso se encuentra totalmente saturado por la fase fluida.
6. La fase fluida presenta flujo darciano a través del medio poroso.
7. Existe una o varias discontinuidades en el medio poroso.

3.3. Modelo Matemático

El modelo de flujo de fluidos está basado en el balance de una sola propiedad extensiva, la masa del fluido, M_f . Considerando la definición de propiedad intensiva como la propiedad por unidad de volumen, la propiedad intensiva asociada a la masa del fluido es la densidad, ρ .

Sin embargo, el movimiento del cuerpo fluido ocurre en un medio poroso conformado por una fracción de volumen de roca y otra fracción de volumen ocupada por los poros, la cual se define como porosidad, ϕ . Por lo tanto, al considerar que el medio poroso se encuentra totalmente saturado por la fase fluida, el volumen de fluido $V_f(t)$ contenido en el cuerpo que ocupa el dominio $B(t)$ del espacio físico, es igual a la fracción de volumen del sistema ocupado por los poros, es decir:

$$V_f(t) = \int_{B(t)} \phi(\underline{x}, t) \, d\underline{x} \quad (3.1)$$

En términos de la masa del fluido, M_f , se tiene:

$$M_f(t) = \int_{B(t)} \rho(\underline{x}, t) \phi(\underline{x}, t) \, d\underline{x} \quad (3.2)$$

Propiedad extensiva: masa

$$E(t) \equiv M_f(t) \quad (3.3)$$

Propiedad intensiva: densidad-porosidad

$$\psi(\underline{x}, t) \equiv \rho(\underline{x}, t) \phi(\underline{x}, t) \quad (3.4)$$

Ecuación de balance global

$$\frac{d}{dt} M_f(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_\Sigma(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (3.5)$$

donde

- $g(\underline{x}, t)$ es la masa de fluido que se genera o se destruye en el interior del cuerpo $B(t)$.
- $\underline{\tau}(\underline{x}, t)$ es la masa de fluido que entra o sale a través de la frontera del cuerpo $\partial B(t)$
- $g_\Sigma(\underline{x}, t)$ es la masa de fluido que se genera o se destruyen en el interior del cuerpo $\Sigma(t)$

Ecuación diferencial de balance local

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi\underline{v}) = g + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad ; \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t). \quad (3.6)$$

Ecuación de salto de balance local

$$\llbracket \rho\phi (\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) - \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma = g_\Sigma \quad ; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t). \quad (3.7)$$

Si consideramos que la velocidad de darcy \underline{u} está definida como:

$$\underline{u} = \underline{v}\phi \quad (3.8)$$

donde \underline{v} es la velocidad real del fluido y ϕ la porosidad, las ecuaciones de balance local las podemos reescribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\underline{u}) = g + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad ; \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t). \quad (3.9)$$

$$\llbracket \rho (\underline{u} - \underline{u}_\Sigma) - \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma = g_\Sigma \quad ; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t). \quad (3.10)$$

introduciendo la ley de Darcy en su forma vectorial

$$\underline{u} = -\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho \gamma \nabla z) \quad (3.11)$$

donde μ es la viscosidad del fluido, \underline{k} el tensor de permeabilidad absoluta, p la presión, ρ la densidad del fluido, γ la magnitud de la aceleración gravitacional y z la profundidad, la cual es un vector función de (x_1, x_2, x_3) apuntando en la dirección de la gravedad.

La ecuación diferencial de balance local estaría definida por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) - \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho \gamma \nabla z) \right) = g + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad ; \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t). \quad (3.12)$$

Esta es la forma más general de la ecuación de flujo monofásico en medios porosos. En esta ecuación aún no se hacen consideraciones acerca del tipo de fluido o de la dependencia de las propiedades de la roca y el fluido con respecto a la presión.

Por lo tanto, para poder completar el modelo y resolver el problema de flujo, además de establecer condiciones iniciales y de frontera, es necesario especificar una ecuación de estado para el tipo fluido correspondiente.

El método sistemático para la formulación de los modelos de sistemas continuos, ver Apéndice A, representa una alternativa más directa para derivar las ecuaciones generales de flujo en medios porosos. Ya que al utilizar resultados bien conocidos del cálculo, no requiere la invención de un volumen de control dependiente del sistema de coordenadas utilizado para describir el problema de flujo. Por lo tanto, la derivación de las ecuaciones se puede realizar para un fluido, número de fases y dominio arbitrario, independiente del sistema de coordenadas.

Capítulo 4

Modelo Numérico

El modelo matemático resultante para todos los modelos presentados en este trabajo es una ecuación diferencial parcial lineal con condiciones iniciales y de frontera, por lo cual, para todo los casos se aplican para su solución numérica los siguientes métodos:

- Para la discretización temporal se utilizó una discretización de diferencias finitas regresivas.
- Para la discretización espacial se aplicó una discretización estándar tipo Galerkin de elemento finito, utilizando polinomios cuadráticos de Lagrange como funciones de base y peso.
- Se utilizó una malla desestructurada de elementos triangulares en 2D.
- Se utilizó una variante del método directo LU para resolver el sistema lineal de ecuaciones algebraicas.

Capítulo 5

Modelo de Flujo Monofásico Ligeramente Compresible

5.1. Modelo Conceptual

1. Se considera un sistema cerrado bajo condiciones isotérmicas.
2. Existe una fase fluida y una inmóvil .
3. La fase fluida es un fluido newtoniano ligeramente compresible que consta de un solo componente.
4. La fase inmóvil es una matriz porosa homogénea ligeramente compresible.
5. La viscosidad de la fase fluida es constante.
6. El medio poroso se encuentra totalmente saturado por la fase fluida.
7. La permeabilidad del medio es constante.
8. La fase fluida presenta flujo darciano a través del medio poroso.
9. Se considera que no existe flujo difusivo (difusión) en las fronteras del sistema, es decir, $\underline{\tau} = 0$.

5.2. Modelo Matemático

El modelo matemático de flujo monofásico ligeramente compresible se obtiene a partir de las ecuaciones generales para flujo monofásico en medios porosos con discontinuidades.

Ecuación de balance global

$$\frac{d}{dt}M_f(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (5.1)$$

Ecuación diferencial de balance local

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot \left(-\frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho\gamma \nabla z)\right) = g + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad ; \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t). \quad (5.2)$$

Ecuación de salto de balance local

$$\llbracket \rho(\underline{u} - \underline{u}_{\Sigma}) - \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} = g_{\Sigma} \quad ; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t). \quad (5.3)$$

De acuerdo al Modelo Conceptual, se considera que en el sistema no existe flujo difusivo en las fronteras, $\underline{\tau} = 0$, y tampoco discontinuidades, $g_{\Sigma} = 0$. Por lo tanto, la ecuación de balance global se expresa cómo:

$$\frac{d}{dt}M_f(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (5.4)$$

y la ecuación diferencial de balance local

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot \left(-\frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho\gamma\nabla z)\right) = g \quad ; \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t). \quad (5.5)$$

Debido a que se considera que no existen discontinuidades en el sistema, no es necesario establecer una ecuación de salto.

Para obtener la ecuación 5.5 en términos de la presión para fluidos ligeramente compresibles, se debe establecer una relación entre la presión y la densidad mediante una ecuación de estado. Como ecuación de estado usualmente se introduce al coeficiente de compresibilidad isotérmico

$$c_f = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_t \quad (5.6)$$

a partir de el se puede obtener una ecuación que relacione la densidad del fluido con su compresibilidad, mediante la definición de densidad

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (5.7)$$

despejando el volumen de la ecuación anterior:

$$V = \frac{M}{\rho} \quad (5.8)$$

derivando con respecto a la presión se tiene:

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\rho \frac{\partial M}{\partial p} - M \frac{\partial \rho}{\partial p}}{\rho^2} \quad (5.9)$$

considerando que no existe variación de la masa con respecto de la presión

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{-M}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (5.10)$$

Sustituyendo las expresiones 5.8 y 5.10 en la ecuación 5.6, se puede definir la compresibilidad de cualquier fluido

$$c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (5.11)$$

considerando que

$$c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \approx \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \quad (5.12)$$

reordenando la ecuación e integrando en un rango de presión

$$\int_{p_0}^p c_f dp = \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho} d\rho \quad (5.13)$$

donde p_0 es la presión inicial o de referencia y p es la presión a cierto tiempo.

Considerando que la compresibilidad del fluido c_f es constante

$$\int_{p_0}^p c_f dp = c_f \int_{p_0}^p dp = c_f (p) \Big|_{p_0}^p = c_f (p - p_0) \quad (5.14)$$

$$\int_{p_0}^p \frac{1}{\rho} d\rho = \ln(\rho) \Big|_{p_0}^p = \ln(\rho) - \ln(\rho_0) = \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (5.15)$$

donde ρ_0 es el valor de la densidad a la presión inicial o de referencia p_0 y ρ el valor de la densidad a la presión a cierto tiempo p .

Por lo tanto, la ecuación 5.13 se puede reescribir como

$$c_f (p - p_0) = \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (5.16)$$

despejando ρ

$$\rho = \rho_0 e^{c_f(p-p_0)} \quad (5.17)$$

Considerando la formula de expansión de una función $f(x)$ en las cercanías del valor conocido de la función por medio de la serie de Taylor, siendo a el punto conocido, donde

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} \quad (5.18)$$

además, se puede expandir la función $f(x)$ alrededor del punto $x = 0$

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad (5.19)$$

expandiendo el factor $e^{c_f(p-p_0)}$ de la ecuación 5.17 mediante la serie de Taylor, se tiene

$$e^{c_f(p-p_0)} = 1 + \frac{c_f(p-p_0)}{1!} + \frac{c_f^2(p-p_0)^2}{2!} + \dots + \frac{c_f^n(p-p_0)^n}{n!} \quad (5.20)$$

entonces, una aproximación para la ecuación 5.17 sería

$$\rho \approx \rho_0 (1 + c_f (p - p_0)) \quad (5.21)$$

La compresibilidad de la roca está definida por:

$$c_R = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad (5.22)$$

considerando que

$$c_R = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \approx \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dp} \quad (5.23)$$

reordenando la ecuación e integrando en un rango de presión

$$\int_{p_0}^p c_R dp = \int_{p_0}^p \frac{1}{\phi} d\phi \quad (5.24)$$

donde p_0 es la presión inicial o de referencia y p es la presión a cierto tiempo.

Considerando que la compresibilidad de la roca c_R es constante

$$\int_{p_0}^p c_R dp = c_R \int_{p_0}^p dp = c_R (p) \Big|_{p_0}^p = c_R (p - p_0) \quad (5.25)$$

$$\int_{p_0}^p \frac{1}{\phi} d\phi = \ln(\phi) \Big|_{p_0}^p = \ln(\phi) - \ln(\phi_0) = \ln \frac{\phi}{\phi_0} \quad (5.26)$$

donde ϕ_0 es el valor de la porosidad a la presión inicial o de referencia p_0 y ϕ el valor de la porosidad a la presión a cierto tiempo p .

Por lo tanto, la ecuación 5.24 se puede reescribir como

$$c_R (p - p_0) = \ln \frac{\phi}{\phi_0} \quad (5.27)$$

despejando ϕ

$$\phi = \phi_0 e^{c_R(p-p_0)} \quad (5.28)$$

Análogamente, una aproximación para esta ecuación sería

$$\phi \approx \phi_0 (1 + c_R (p - p_0)) \quad (5.29)$$

Desarrollando el primer primer término del lado izquierdo de la ecuación 5.5 y factorizando el término $\rho\phi$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) = \rho\phi\left(\frac{1}{\phi}\frac{d\phi}{dp} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.30)$$

Derivando la ecuación 5.29 con respecto de la presión, se obtiene

$$\frac{d\phi}{dp} = \phi_0 c_R \quad (5.31)$$

sustituyendo las ecuaciones 5.11 y 5.31 en la ecuación 5.30

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) = \rho\phi\left(\frac{\phi_0}{\phi}c_R + c_f\right)\frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.32)$$

Considerando la compresibilidad total del sistema como:

$$c_t = \frac{\phi_0}{\phi}c_R + c_f \quad (5.33)$$

Se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) = \rho\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.34)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación 5.5 se obtiene la ecuación que gobierna en flujo

$$\rho\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho\gamma \nabla z)\right) = g; \quad \forall \underline{x} \in B(t) \quad (5.35)$$

Condición inicial

Se establece una condición inicial tipo Dirichlet, el valor de la presión al tiempo inicial.

$$p(t_0) = p_0 \quad (5.36)$$

Condiciones de frontera

Se considera que no existe flujo en las fronteras externas del sistema, por lo que se establecen condiciones de frontera tipo Neumann.

$$\underline{n} \cdot \underline{u} = 0; \quad \forall \underline{x} \in \partial B(t) \quad (5.37)$$

5.3. Modelo Computacional

La ecuación 5.35 considera un espacio en tres dimensiones, para poder utilizar la misma ecuación diferencial para flujo en una o dos dimensiones es necesario definir una función del factor geométrico, $\bar{\alpha}$, como se muestra a continuación (Peaceman, 1977):

una dimensión $\bar{\alpha}(x, y, z) = A(x)$

dos dimensiones $\bar{\alpha}(x, y, z) = H(x, y)$

tres dimensiones $\bar{\alpha}(x, y, z) = 1$

Donde A es el área del yacimiento y H su espesor.

Por lo tanto, la ecuación diferencial de balance local para un espacio en dos dimensiones es

$$H\rho\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{H\rho}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho\gamma\nabla z) \right) + Hg; \quad \forall \underline{x} \in \Omega(t) \quad (5.38)$$

Considerando flujo horizontal, la ecuación (5.38) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$H\rho\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{H\rho}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right) + Hg; \quad \forall \underline{x} \in \Omega(t) \quad (5.39)$$

dividiendo la expresión anterior por la densidad se tiene

$$H\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{H}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right) + H\bar{q}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega(t) \quad (5.40)$$

donde $\bar{q} = g/\rho$

Para la implementación del modelo en COMSOL Multiphysics en el modo EDP con formulación de coeficientes para análisis dependiente del tiempo, éste se ingresa mediante la sustitución de los coeficientes de la siguiente manera:

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u + \alpha u - \gamma) + \beta \cdot \nabla u + a u = f \quad (5.41)$$

$$u \equiv p, \quad d_a \equiv H * \phi * c_t, \quad c \equiv H * k / \mu, \quad y \quad \alpha = \gamma = \beta = a = e_a = f \equiv 0.$$

El coeficiente f se iguala a cero debido a que los términos fuente o sumidero se implementan en un punto mediante una formulación débil.

El pozo se implementa en un punto como un sumidero (ver Figura 5.4). Para establecer una fuente o sumidero en un punto, se dibuja un punto en el lugar apropiado y se especifica la descarga. Se deberá establecer la descarga como un gasto volumétrico, con signo negativo para denotar un sumidero y positivo para denotar una fuente (Kitanidis, 2008).

Condición inicial

Se establece una condición inicial tipo Dirichlet, el valor de la presión al tiempo inicial.

$$\mathbf{u}(t_0) = p_0 \quad (5.42)$$

Condiciones de frontera

En las cuatro fronteras se considera que no existe flujo, por lo que se establecen condiciones de frontera de tipo Neumann. La ecuación general para condiciones de frontera de tipo Neumann en COMSOL está definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{c} \nabla \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} - \gamma) + \mathbf{q} \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (5.43)$$

por lo que establecemos: $\mathbf{u} \equiv p$, $\mathbf{c} \equiv H * k / \mu$, y $\alpha = \gamma = \mathbf{q} = \mathbf{g} \equiv 0$.

$$\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{u}} = 0; \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega(t) \quad (5.44)$$

5.4. Validación del Modelo

5.4.1. Descripción del problema

El caso de estudio ha sido tomado de Chen *et al.* (2006), el cual plantea un problema de flujo radial monofásico en un medio poroso isótropo en una dimensión. Se considera un yacimiento con una extensión infinita en la dirección horizontal, en el cual existe un pozo en producción, todas sus propiedades son simétricas con respecto al eje del pozo y el yacimiento es homogéneo en la dirección vertical. Los efectos debidos a la gravedad son ignorados. Para dicho yacimiento se pretende estimar la caída de presión durante un periodo de cuatro días.

5.4.2. Datos del problema

símbolo	Descripción	Valor	Unidad
p_o	Presión inicial	3600	<i>psi</i>
r_w	Radio del pozo	0.1875	<i>ft</i>
r_e	Radio de exploración	28.0176	<i>ft</i>
μ	Viscosidad del aceite	1.06	<i>cp</i>
\underline{k}	Permeabilidad absoluta	0.3	<i>d</i>
c_f	Compresibilidad del aceite	0.00001	1/ <i>psi</i>
c_R	Compresibilidad de la roca	0.000004	1/ <i>psi</i>
ϕ	Porosidad	0.2	fracción
q_o	Gasto de aceite	313.7976	<i>RB/D</i>
L	Longitud del yacimiento por lado	8,100	<i>ft</i>

Tabla 5.1: Datos utilizados en la validación del modelo de flujo monofásico.

Se proporcionan los factores utilizados para la conversión de unidades de campo (híbridas) a unidades absolutas (SI).

Unidad	Conversión
<i>psi</i>	1 <i>psi</i> = 6894.757 (<i>Pa</i>)
<i>cp</i>	1 <i>cp</i> = 0.001 $\left(\frac{kg}{m \cdot s}\right)$
<i>d</i>	1 <i>d</i> = $9.86923 \times 10^{-13} m^2$
<i>ft</i>	1 <i>ft</i> = 0.3048 <i>m</i>
<i>RB/D</i>	1 <i>RB/D</i> = $1.84 \times 10^{-6} \left(\frac{m^3}{s}\right)$

Tabla 5.2: Factores de conversión de unidades

5.4.3. Geometría

Dominio

El dominio del modelo computacional es un cuadrado de lado L (ver Figura 5.1).

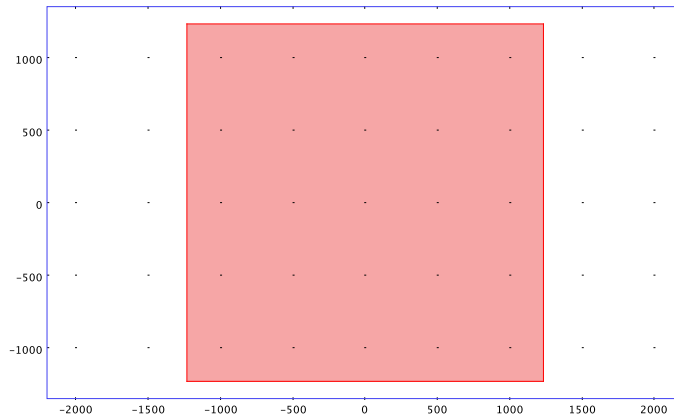


Figura 5.1: Dominio del modelo computacional donde $L = 2468.88[m]$

Mallado

Malla del dominio computacional (ver Figura 5.2).

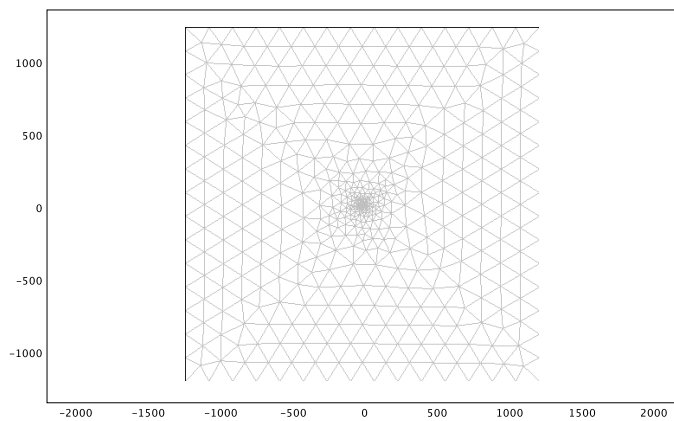


Figura 5.2: Mallado del dominio computacional con 2789 grados de libertad y 1364 elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos.

Fronteras

Fronteras del dominio computacional (ver Figura 5.3).

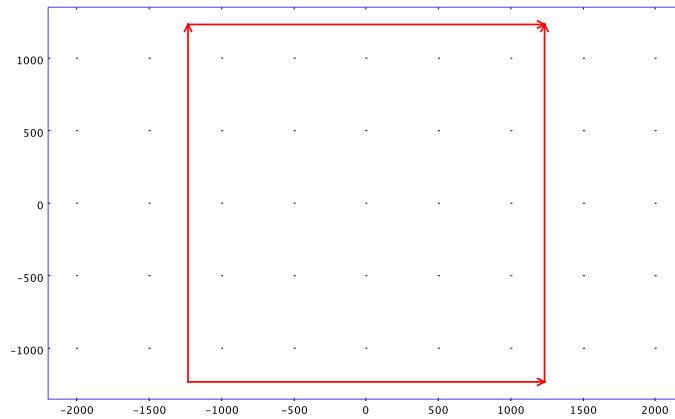


Figura 5.3: Fronteras impermeables del dominio computacional.

Puntos

Puntos del dominio computacional (ver Figura 5.4).

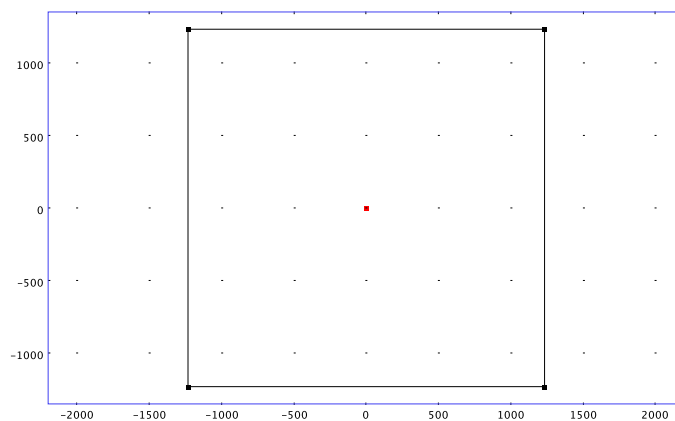


Figura 5.4: En el punto central, mediante una formulación débil, se impone la condición de descarga para representar el pozo que se encuentra extrayendo.

5.4.4. Resultados

La solución semi-analítica para flujo radial, desarrollada en el apéndice C, se utiliza para verificar la exactitud de aproximación de la solución numérica. La comparación entre la presión numérica y la presión analítica para $r = r_w$ y $r = r_e$ se muestra en las tablas 5.3 y 5.4, respectivamente.

Para $r = r_e$, el error absoluto máximo entre la solución numérica y la solución semi-analítica es igual a 0.17, mientras que para el caso de $r = r_w$ el error absoluto máximo es igual a 0.15. Además, en la Figura 5.5 se puede apreciar que el comportamiento de la solución numérica se ajusta a la solución semi-analítica. Por lo tanto, podemos concluir que el modelo es validado, puesto que se pueden obtener ajustes bastante aproximados a los resultados obtenidos mediante la solución semi-analítica.

tiempo [días]	p_a [psi]	p_n [psi]	$ p_a - p_n $
0.1	3588.08	3588.23	0.15
0.2	3587.54	3587.69	0.15
0.3	3587.22	3587.33	0.11
0.4	3587.00	3587.14	0.15
0.5	3586.82	3586.95	0.13
0.6	3586.68	3586.79	0.11
0.7	3586.56	3586.68	0.12
0.8	3586.45	3586.57	0.12
0.9	3586.36	3586.46	0.10
1.0	3586.28	3586.37	0.09
1.5	3585.96	3586.02	0.06
2.0	3585.74	3585.78	0.04
2.5	3585.56	3585.59	0.02
3.0	3585.42	3585.43	0.01
4.0	3585.19	3585.19	0.00

Tabla 5.3: Valores de presión obtenidos para $r = r_w$, donde p_a es la presión obtenida analíticamente y p_n la presión obtenida numéricamente.

tiempo [días]	p_a [psi]	p_n [psi]	$ p_a - p_n $
0.1	3595.92	3596.09	0.17
0.2	3595.38	3595.55	0.17
0.3	3595.06	3595.20	0.13
0.4	3594.84	3595.01	0.17
0.5	3594.66	3594.82	0.16
0.6	3594.52	3594.65	0.13
0.7	3594.40	3594.54	0.15
0.8	3594.29	3594.43	0.14
0.9	3594.20	3594.33	0.13
1.0	3594.12	3594.23	0.11
1.5	3593.80	3593.89	0.09
2.0	3593.58	3593.64	0.06
2.5	3593.40	3593.45	0.05
3.0	3593.26	3593.30	0.04
4.0	3593.03	3593.05	0.02

Tabla 5.4: Valores de presión obtenidos para $r = r_e$, donde p_a es la presión obtenida analíticamente y p_n la presión obtenida numéricamente.

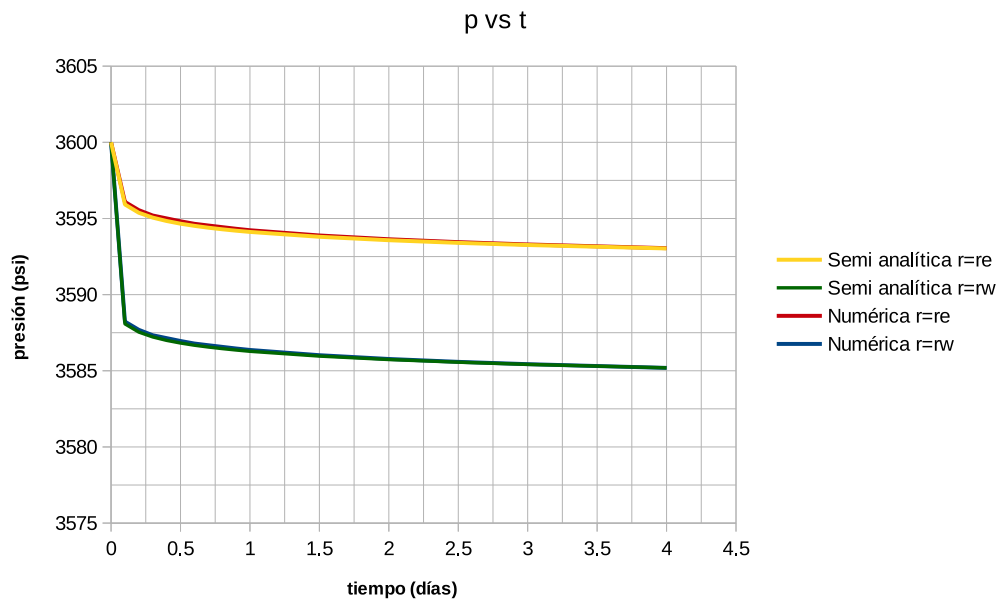


Figura 5.5: Gráfico de presión contra tiempo para valores de presión obtenidos en el radio de pozo y de exploración mediante la solución analítica y numérica. Se observa que la solución numérica se ajusta al comportamiento de la solución analítica.

Capítulo 6

Modelo de Fractura Explícita

6.1. Modelo Conceptual

1. Se considera un sistema cerrado bajo condiciones isotérmicas.
2. Existe una fase fluida y una inmóvil .
3. La fase fluida es un fluido newtoniano ligeramente compresible que consta de un solo componente.
4. La fase inmóvil es una matriz porosa homogénea ligeramente compresible.
5. La viscosidad de la fase móvil es constante.
6. Existe una fractura contenida en el medio poroso.
7. La fractura es considerada como otro medio poroso homogéneo con propiedades petrofísicas diferentes.
8. Tanto el medio poroso como la fractura se encuentran totalmente saturados por la fase fluida.
9. Las permeabilidades del medio poroso y de la fractura son constantes.
10. La fase fluida presenta flujo darciano a través del medio poroso y de la fractura.
11. Se considera que no existe flujo difusivo en las fronteras del sistema, es decir, $\underline{\tau} = 0$.

6.2. Modelo Matemático

El modelo matemático de fractura explícita para flujo monofásico ligeramente compresible se obtiene a partir de las ecuaciones generales para flujo monofásico en medios porosos con discontinuidades.

Ecuación de balance global

$$\frac{d}{dt}M_f(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t)d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t)d\underline{x} \quad (6.1)$$

Ecuación diferencial de balance local

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot \left(-\frac{\rho}{\mu}\underline{k} \cdot (\nabla p - \rho\gamma\nabla z)\right) = g + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad ; \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t). \quad (6.2)$$

Ecuación de salto de balance local

$$\llbracket \rho(\underline{u} - \underline{u}_{\Sigma}) - \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} = g_{\Sigma} \quad ; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t). \quad (6.3)$$

De acuerdo con el Modelo Conceptual, el dominio Ω está conformado por dos subdominios, uno correspondiente a la matriz (m) y otro a la fractura (fr), los cuales designaremos como Ω_m y Ω_{fr} , en base al esquema de fractura explícita en 2D, ver Figura 6.1.

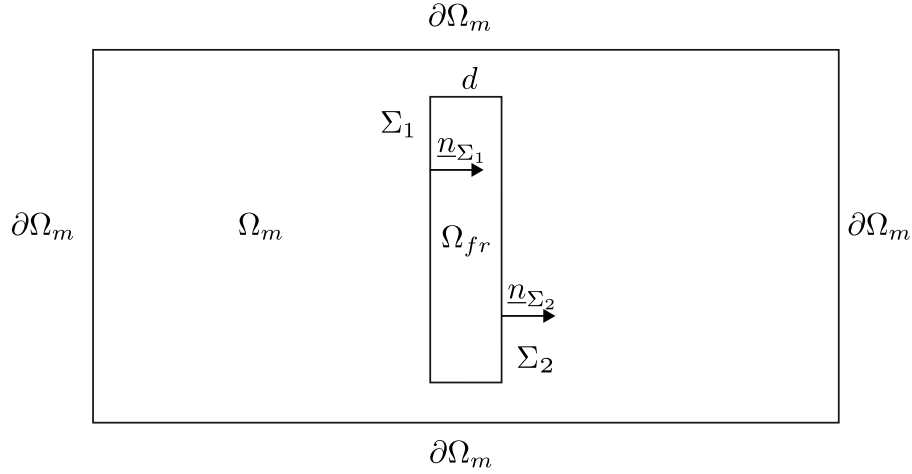


Figura 6.1: Representación esquemática del modelo de fractura explícita en 2D. Donde Ω_m es el subdominio correspondiente a la matriz, Σ_1 y Σ_2 son las interfaces dentro del dominio, \underline{n}_{Σ_1} y \underline{n}_{Σ_2} son la normal correspondiente a dichas interfaces, Ω_{fr} es el subdominio correspondiente a la fractura, considerada como otro medio poroso con propiedades petrofísicas diferentes y d el espesor de la fractura.

Debido a que existen interfaces en el interior del dominio, entre los subdominios, y no existe flujo difusivo en las fronteras del sistema, $\underline{\tau} = 0$, la ecuación de balance global se expresa cómo

$$\frac{d}{dt}M_f(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) \, d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t) \, d\underline{x} \quad (6.4)$$

la ecuación diferencial de balance local cómo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot \left(-\frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho\gamma\nabla z) \right) = g \quad ; \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t). \quad (6.5)$$

Y la ecuación de balance local de salto será:

$$[[\rho(\underline{u} - \underline{u}_{\Sigma})]] \cdot \underline{n}_{\Sigma} = g_{\Sigma}; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \quad (6.6)$$

La ecuación que describe el flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso se derivó en el capítulo 5, ecuación 5.35

$$\rho\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho\gamma\nabla z) \right) = g; \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t). \quad (6.7)$$

Si consideramos que la interfaz está inmóvil ($\underline{u}_\Sigma \equiv 0$), la ecuación de salto 6.6 puede reescribirse de la siguiente manera:

$$[[\rho \underline{u}]] \cdot \underline{n}_\Sigma = g_\Sigma \quad (6.8)$$

desarrollando el salto en la función u

$$\rho (\underline{u}^+ - \underline{u}^-) \cdot \underline{n}_\Sigma = g_\Sigma \quad (6.9)$$

introduciendo la Ley de Darcy en su forma vectorial, ecuación 3.11, en la expresión anterior

$$\rho \left\{ \left[-\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho \gamma \nabla z) \right]^+ - \left[-\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho \gamma \nabla z) \right]^- \right\} \cdot \underline{n}_\Sigma = g_\Sigma \quad (6.10)$$

Condición inicial

Se establece como condición inicial el valor de la presión al tiempo inicial.

$$p(t_0) = p_0 \quad (6.11)$$

Condición de frontera externa

Se considera condición de no flujo en las fronteras externas, por lo que se establecen condiciones de frontera tipo Neumann.

$$\underline{n} \cdot \underline{u} = 0; \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega(t) \quad (6.12)$$

Condición de frontera interna

La ecuación 6.10 se establece como una condición de frontera interna.

$$\rho \left\{ \left[-\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho \gamma \nabla z) \right]^+ - \left[-\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho \gamma \nabla z) \right]^- \right\} \cdot \underline{n}_\Sigma = g_\Sigma; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \quad (6.13)$$

6.3. Modelo Computacional

Si el dominio del sistema se encuentra en un espacio de dos dimensiones, la ecuación que describe el flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso, considerando flujo horizontal y dividiendo por la densidad, es la ecuación (5.40)

$$H\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{H}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right) = H\bar{q}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega(t) \setminus \Sigma(t) \quad (6.14)$$

donde $\bar{q} = g/\rho$

Para cada subdominio:

$$H\phi_m c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{H}{\mu} \underline{k}_m \cdot \nabla p \right) = H\bar{q}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_m(t) \setminus \Sigma(t) \quad (6.15)$$

$$H\phi_{fr} c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{H}{\mu} \underline{k}_{fr} \cdot \nabla p \right) = H\bar{q}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{fr}(t) \setminus \Sigma(t) \quad (6.16)$$

Debido a que se considera la continuidad del flujo en las interfaces internas, la ecuación de salto se reescribe como:

$$\rho \left[\left(-\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right)^+ - \left(-\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right)^- \right] \cdot \underline{n}_\Sigma = 0; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \quad (6.17)$$

Para la implementación del modelo en COMSOL Multiphysics en el modo EDP con formulación de coeficientes para análisis dependiente del tiempo, éste se ingresa mediante la sustitución de los coeficientes de la siguiente manera:

$$e_a \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} - \gamma) + \beta \cdot \nabla \mathbf{u} + a \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (6.18)$$

$$\mathbf{u} \equiv p, \quad d_a \equiv H * \phi * ct, \quad c \equiv H * k / \mu, \quad y \quad \alpha = \gamma = \beta = a = e_a = \mathbf{f} \equiv 0.$$

donde $\sigma = m, fr$ según el subdominio del que se trate.

El coeficiente \mathbf{f} se iguala a cero debido a que los términos fuente o sumidero se implementan en un punto mediante una formulación débil.

Para establecer una fuente o sumidero en un punto, se dibuja un punto en el lugar apropiado y se especifica la descarga. Se deberá establecer la descarga como un gasto volumétrico, con signo negativo para denotar un sumidero y positivo para denotar una fuente Kitanidis (2008).

Condición inicial

Se establece como condición inicial el valor de la presión al tiempo inicial.

$$\mathbf{u}(t_0) = p_0 \quad (6.19)$$

Condición de frontera externa

En las cuatro fronteras externas se considera condición de no-flujo, por lo que se establecen condiciones de frontera de tipo Neumann. La ecuación general para condiciones de frontera de tipo Neumann en COMSOL está definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{c}\nabla\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} - \gamma) + \mathbf{q}\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (6.20)$$

por lo que establecemos: $\mathbf{u} \equiv p$, $\mathbf{c} \equiv H * k/\mu$, y $\alpha = \gamma = \mathbf{q} = \mathbf{g} \equiv 0$.

$$\underline{n} \cdot \underline{u} = 0; \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega(t) \quad (6.21)$$

Condición de frontera interna

Al considerar a la fractura como un subdominio interno, sus fronteras son fronteras internas del dominio, en las cuales se establece continuidad del flujo de masa. La ecuación general para condición de frontera interna de tipo Neumann en COMSOL está definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{n} \cdot ((\mathbf{c}\nabla\mathbf{p} + \alpha\mathbf{p} - \gamma)_1 - (\mathbf{c}\nabla\mathbf{p} + \alpha\mathbf{p} - \gamma)_2) + \mathbf{q}\mathbf{p} = \mathbf{g} \quad (6.22)$$

por lo que establecemos: $\mathbf{u} \equiv p$, $\mathbf{c} \equiv H * k/\mu$, y $\alpha = \gamma = \mathbf{q} = \mathbf{g} \equiv 0$.

$$\underline{n} \cdot (\underline{u}^+ - \underline{u}^-) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \quad (6.23)$$

6.4. Casos de Estudio

Los casos de estudio han sido propuestos considerando valores de referencia de Chen *et al.* (2006) y de Hoteit y Firoozabadi (2005).

Se establece un sector de yacimiento de superficie rectangular con 20 [ft] de longitud en la dirección x_1 y 10 [ft] de longitud en la dirección x_2 , una presión inicial de 300 [psi], porosidad del veinte por ciento, permeabilidad absoluta de 10 [md] y compresibilidad de la roca de 0.000004 [1/psi]. El aceite producido tiene una viscosidad de 1.06 [cp] y una compresibilidad de 0.00001 [1/psi].

Además, se considera un proceso de inyección-producción entre dos pozos, un pozo inyectando a un gasto de 2.687976 [STB/D] y otro produciendo a una presión constante de 300 [psi]. Inmersa en el medio poroso se encuentra una fractura de 0.01 [ft] de espesor, con porosidad del veinte por ciento, permeabilidad absoluta de 10,000 [md] y compresibilidad de 0.000004 [1/psi].

símbolo	Descripción	Valor	Unidad
p_0	Presión inicial	300	psi
μ	Viscosidad del aceite	1.06	cp
\underline{k}	Permeabilidad absoluta	10	md
\underline{k}_{fr}	Permeabilidad absoluta de la fractura	10,000	md
c_o	Compresibilidad del aceite (c_f)	0.00001	$1/psi$
c_R	Compresibilidad de la roca	0.000004	$1/psi$
c_{fr}	Compresibilidad de la fractura	0.000004	$1/psi$
ϕ	Porosidad	0.2	fracción
ϕ_{fr}	Porosidad de la fractura	0.2	fracción
q_i	Gasto de inyección	2.687976	STB/D
p_p	Presión de producción	300	psi
H	Espesor	3.28084	ft
x_1	Longitud del yacimiento en x_1	20	ft
x_2	Longitud del yacimiento en x_2	10	ft
d	espesor de la fractura	0.01	ft
l	longitud de la fractura	3.3	ft

Tabla 6.1: Datos del caso de estudio

Se presentan cuatro casos de estudio correspondientes a cuatro orientaciones diferentes de la fractura, $\theta = 0^\circ$, $\theta = 45^\circ$, $\theta = -45^\circ$ y $\theta = 90^\circ$, ver Figura 6.2. Para cada orientación se consideran dos casos, cuando la fractura actúa como un canal preferencial al flujo y cuando actúa como una barrera.

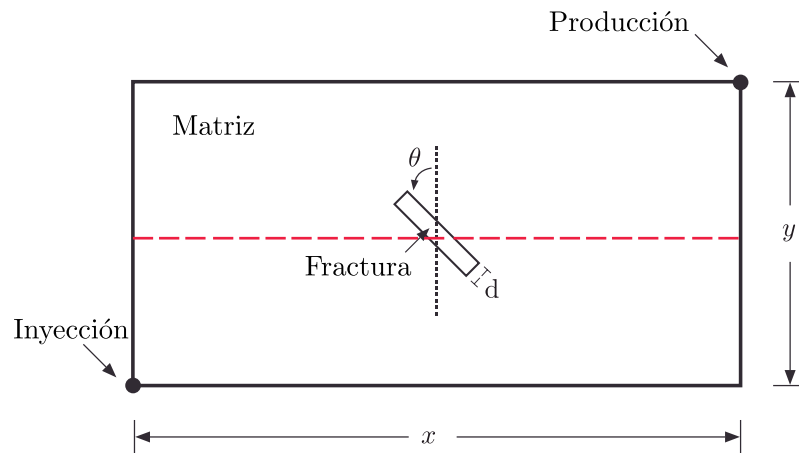


Figura 6.2: Representación esquemática del problema. Donde θ representa los grados con respecto a la línea vertical discontinua, correspondiente a la orientación de la fractura. La línea horizontal discontinua representa un corte longitudinal para el cual se obtiene el perfil de presión y velocidad.

6.4.1. Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$

Dominio

El dominio del modelo computacional es un rectángulo de base x_1 y altura x_2 . El subdominio correspondiente a la fractura es un rectángulo de base d y altura l (ver Figura 6.3).

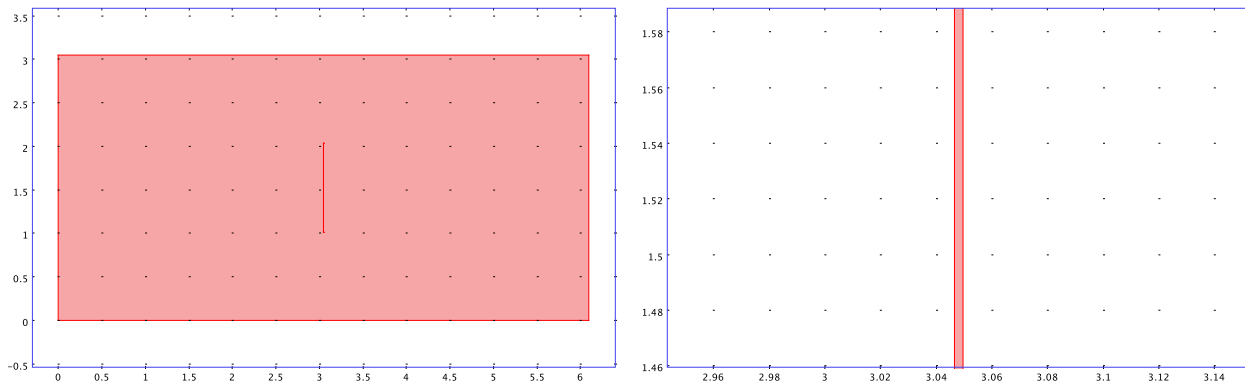


Figura 6.3: Dominio del modelo computacional donde $x_1 = 6.096 [m]$, $x_2 = 3.048 [m]$, $d = 3.048 [mm]$ y $l = 1.00584 [m]$

Mallado

Malla del dominio computacional (ver Figura 6.4).

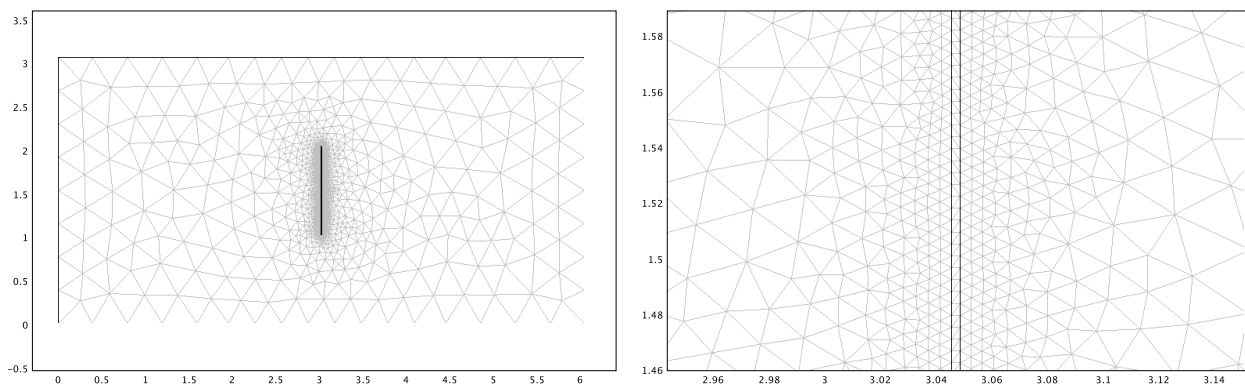


Figura 6.4: Izquierda: Mallado del dominio computacional con 16,651 grados de libertad y 8,300 elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos. Derecha: Acercamiento al espesor de la fractura.

Fronteras

Fronteras del dominio computacional (ver Figura 6.5).

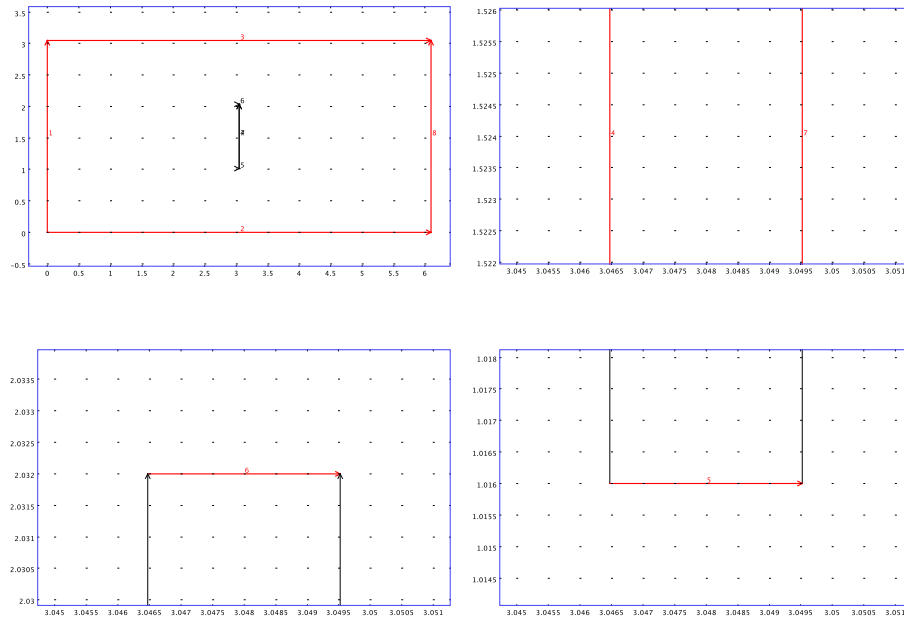


Figura 6.5: Fronteras del dominio computacional, con su indexación correspondiente. Las fronteras externas 1, 2, 3 y 8 son impermeables. Las fronteras internas 4, 5, 6 y 7 son permeables.

Puntos

Puntos del dominio computacional (ver Figura 6.6).

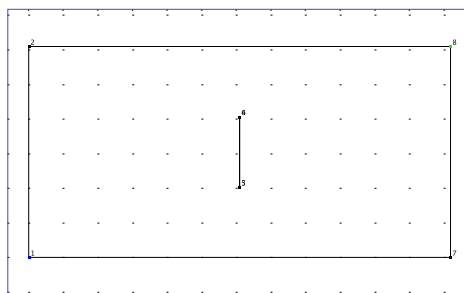


Figura 6.6: En el punto inferior izquierdo se impone una condición tipo Neumann para establecer inyección (fuente). En el punto superior derecho se impone una condición tipo Dirichlet para establecer producción a presión constante (sumidero).

Fractura abierta al flujo ($k_{fr} \gg k_m$)

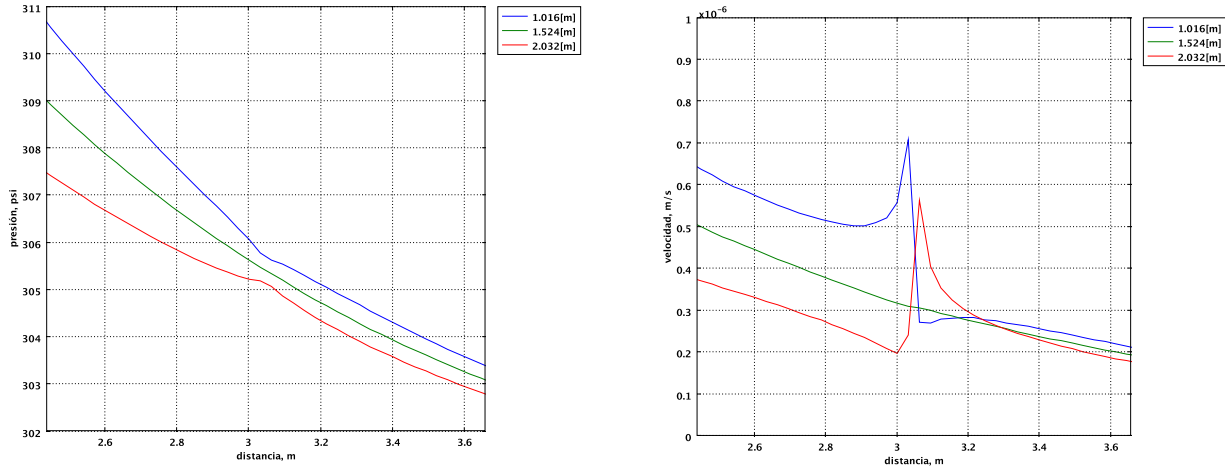


Figura 6.7: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

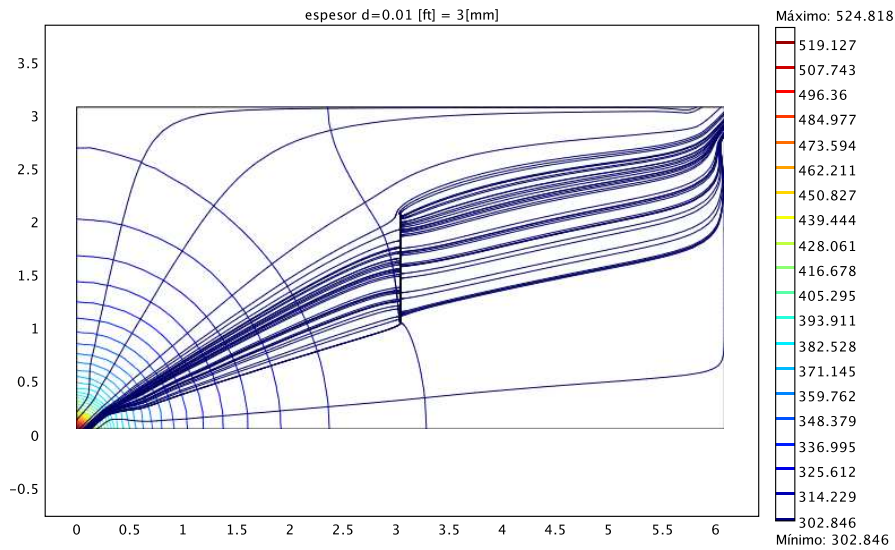


Figura 6.8: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento preferencial hacia el interior de la fractura y a lo largo de ésta.

Barrera al flujo ($\underline{k}_{fr} \lll \underline{k}_m$)

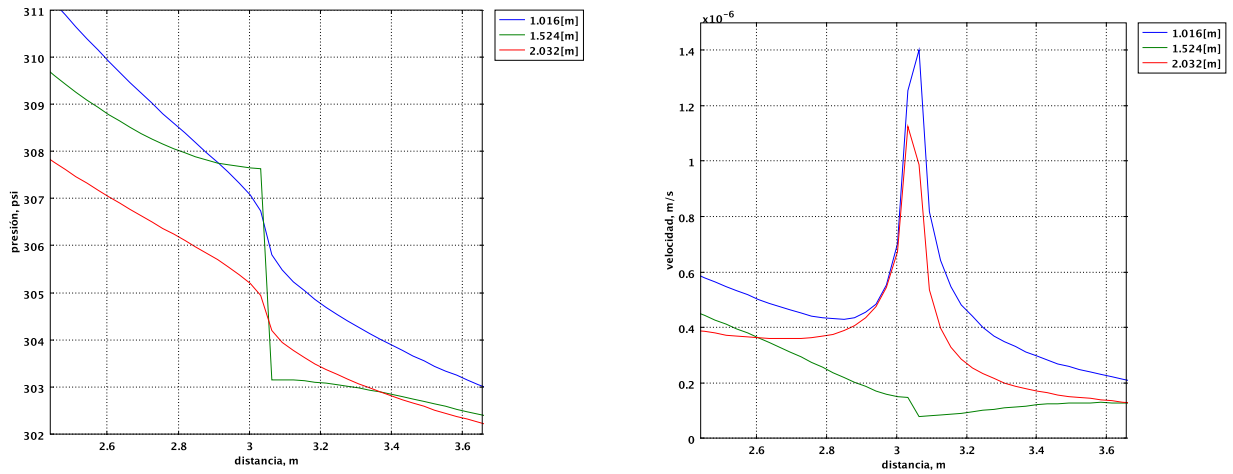


Figura 6.9: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

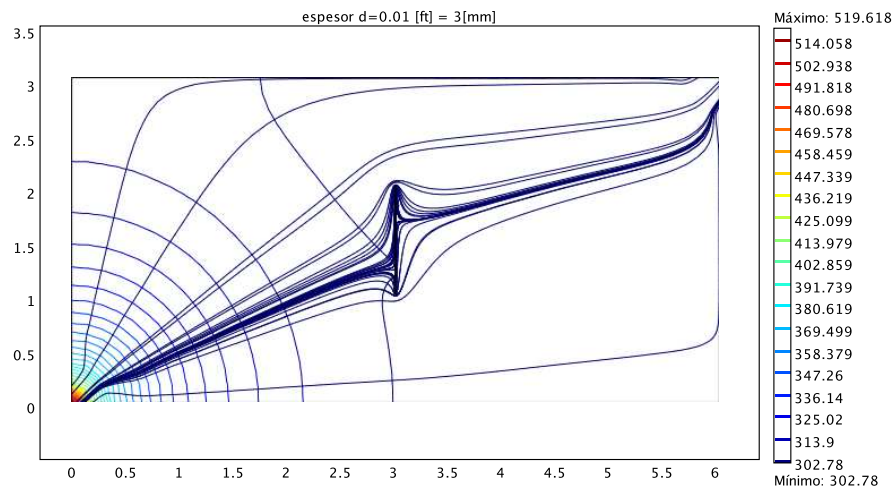


Figura 6.10: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento que tiende a evadir la fractura.

6.4.2. Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$

Dominio

El dominio del modelo computacional es un rectángulo de base x_1 y altura x_2 . El subdominio correspondiente a la fractura es un rectángulo de base d y altura l (ver Figura 6.11).

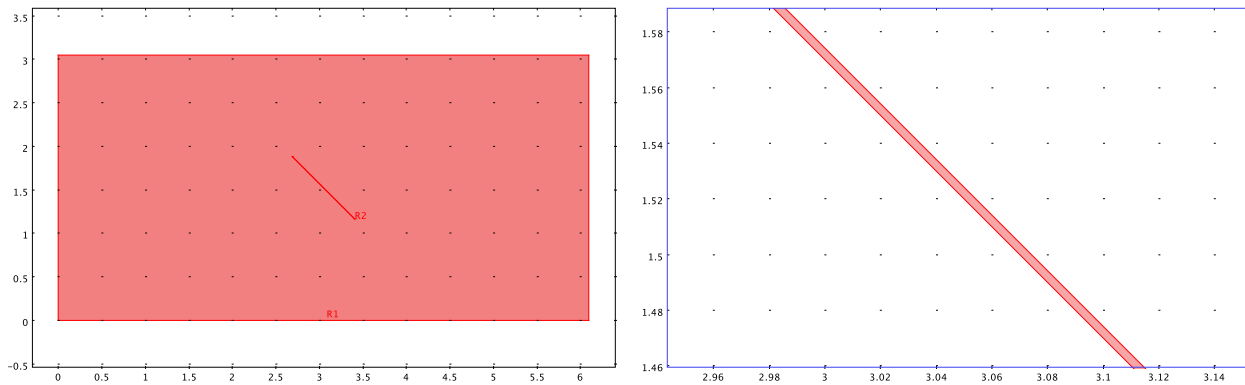


Figura 6.11: Dominio del modelo computacional donde $x_1 = 6.096 [m]$, $x_2 = 3.048 [m]$, $d = 3.048 [mm]$ y $l = 1.00584 [m]$

Mallado

Malla del dominio computacional (ver Figura 6.12).

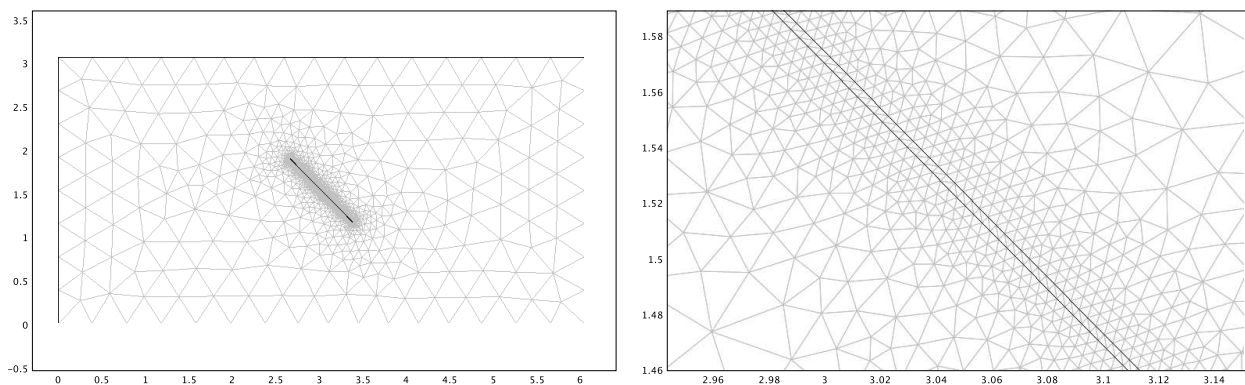


Figura 6.12: Izquierda: Mallado del dominio computacional con 16,145 grados de libertad y 8,048 elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos. Derecha: Acercamiento al espesor de la fractura.

Fronteras

Fronteras del dominio computacional (ver Figura 6.13).

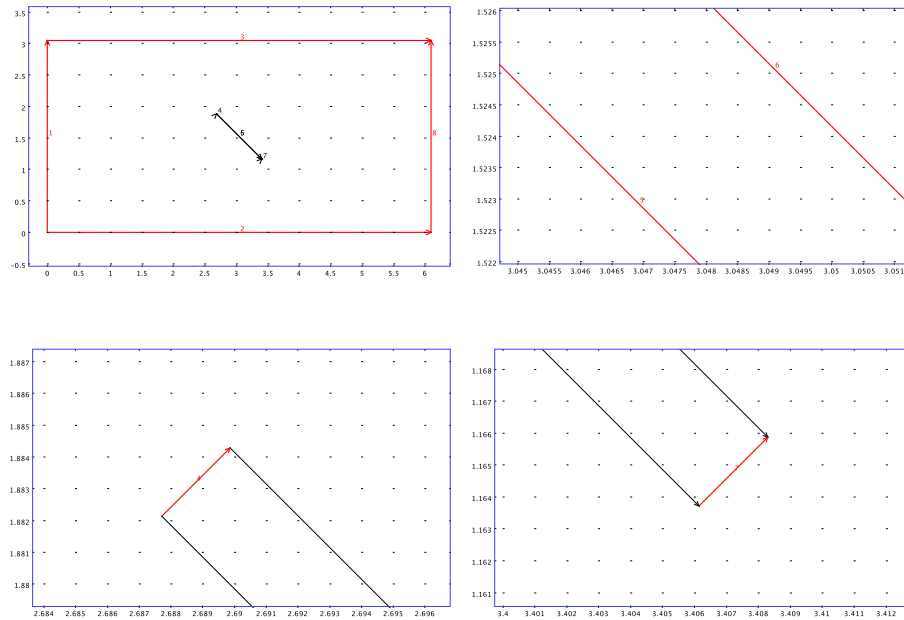


Figura 6.13: Fronteras del dominio computacional, con su indexación correspondiente. Las fronteras externas 1, 2, 3 y 8 son impermeables. Las fronteras internas 4, 5, 6 y 7 son permeables.

Puntos

Puntos del dominio computacional (ver Figura 6.14).

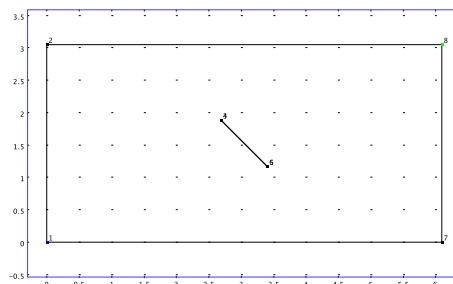


Figura 6.14: En el punto inferior izquierdo se impone una condición tipo Neumann para establecer inyección (fuente). En el punto superior derecho se impone una condición tipo Dirichlet para establecer producción a presión constante (sumidero).

Fractura abierta al flujo ($k_{fr} \gg k_m$)

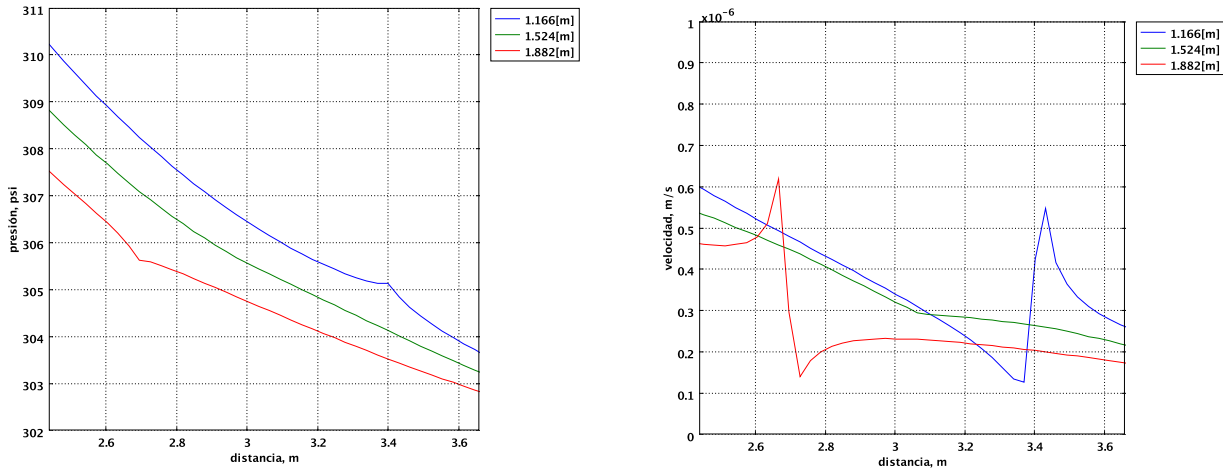


Figura 6.15: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

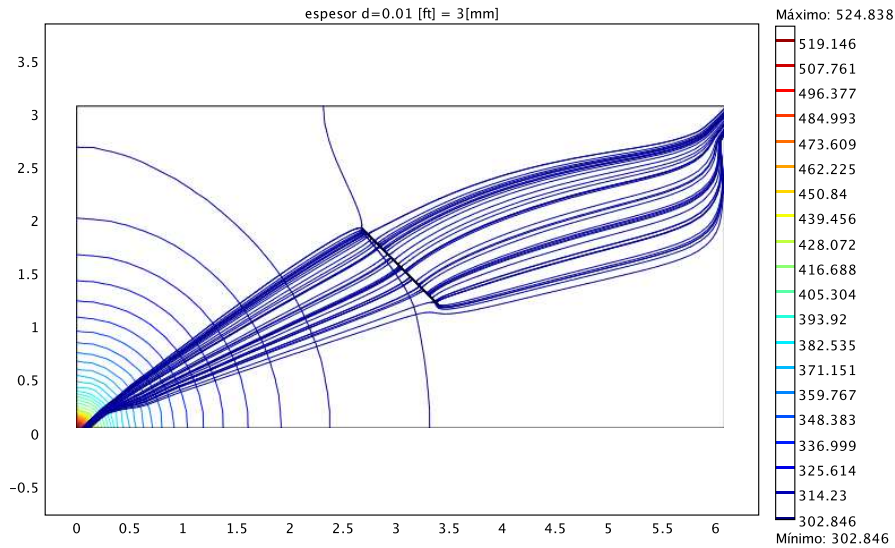


Figura 6.16: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente.

Barrera al flujo ($\underline{k}_{fr} \lll \underline{k}_m$)

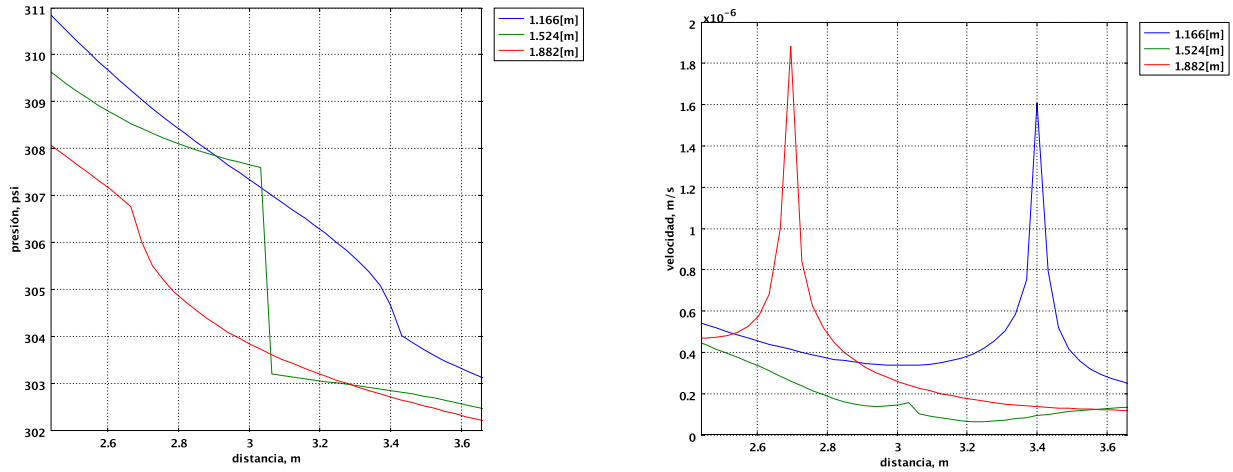


Figura 6.17: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

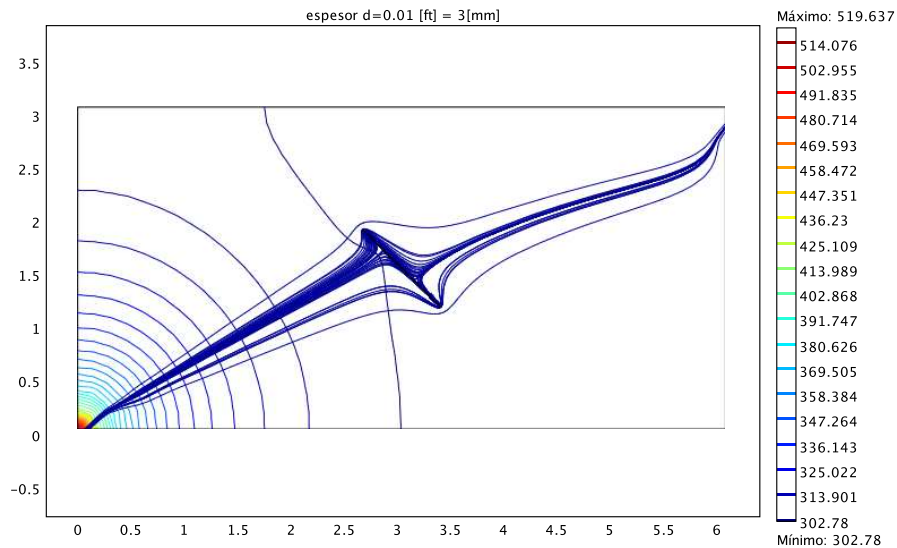


Figura 6.18: Gráfico de curvas de nivel y líneas de flujo. Se observa un comportamiento que tiende a evadir la fractura.

6.4.3. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$

Dominio

El dominio del modelo computacional es un rectángulo de base x_1 y altura x_2 . El subdominio correspondiente a la fractura es un rectángulo de base d y altura l (ver Figura 6.19).

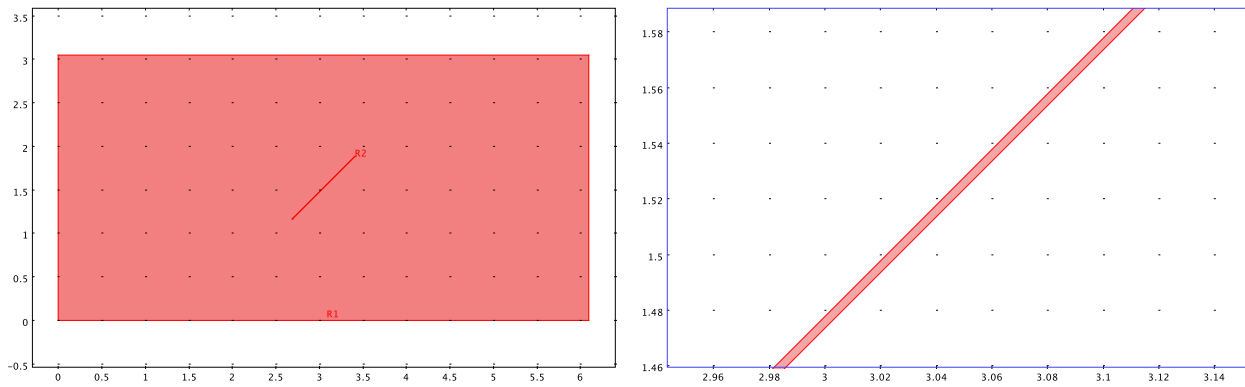


Figura 6.19: Dominio del modelo computacional donde $x_1 = 6.096 [m]$, $x_2 = 3.048 [m]$, $d = 3.048 [mm]$ y $l = 1.00584 [m]$

Mallado

Malla del dominio computacional (ver Figura 6.20).

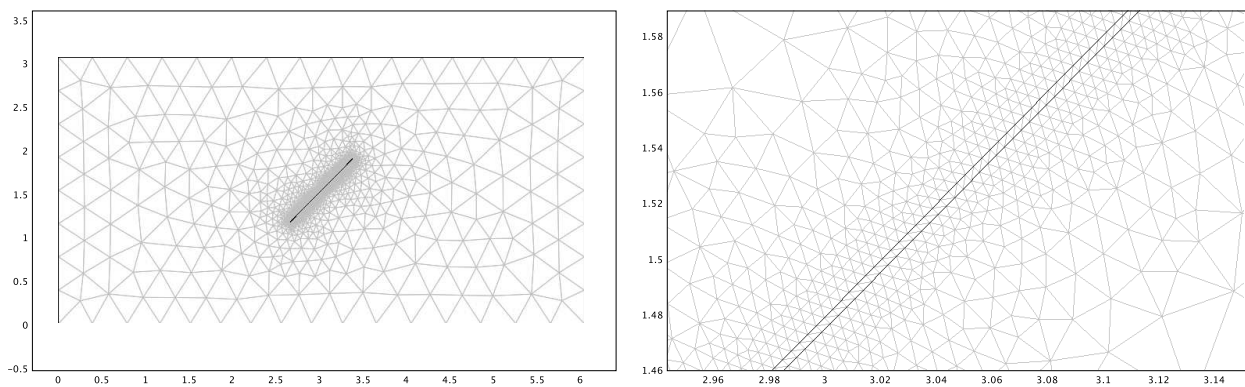


Figura 6.20: Izquierda: Mallado del dominio computacional con 16,369 grados de libertad y 8,160 elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos. Derecha: Acercamiento al espesor de la fractura.

Fronteras

Fronteras del dominio computacional (ver Figura 6.21).

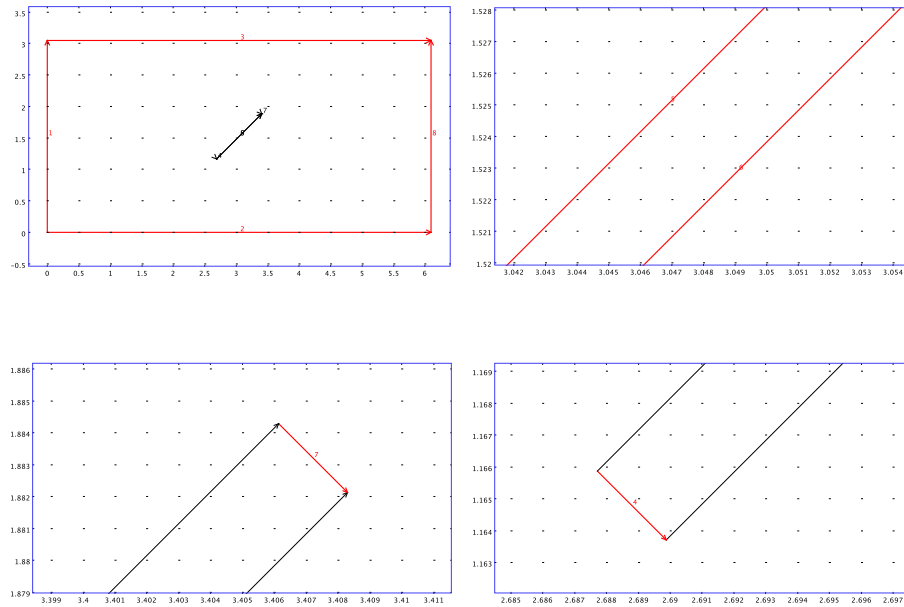


Figura 6.21: Fronteras del dominio computacional, con su indexación correspondiente. Las fronteras externas 1, 2, 3 y 8 son impermeables. Las fronteras internas 4, 5, 6 y 7 son permeables.

Puntos

Puntos del dominio computacional (ver Figura 6.22).

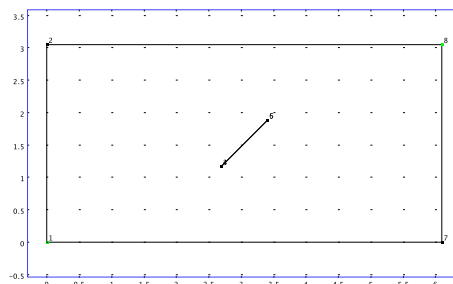


Figura 6.22: En el punto inferior izquierdo se impone una condición tipo Neumann para establecer inyección (fuente). En el punto superior derecho se impone una condición tipo Dirichlet para establecer producción a presión constante (sumidero).

Fractura abierta al flujo ($k_{fr} \gg k_m$)

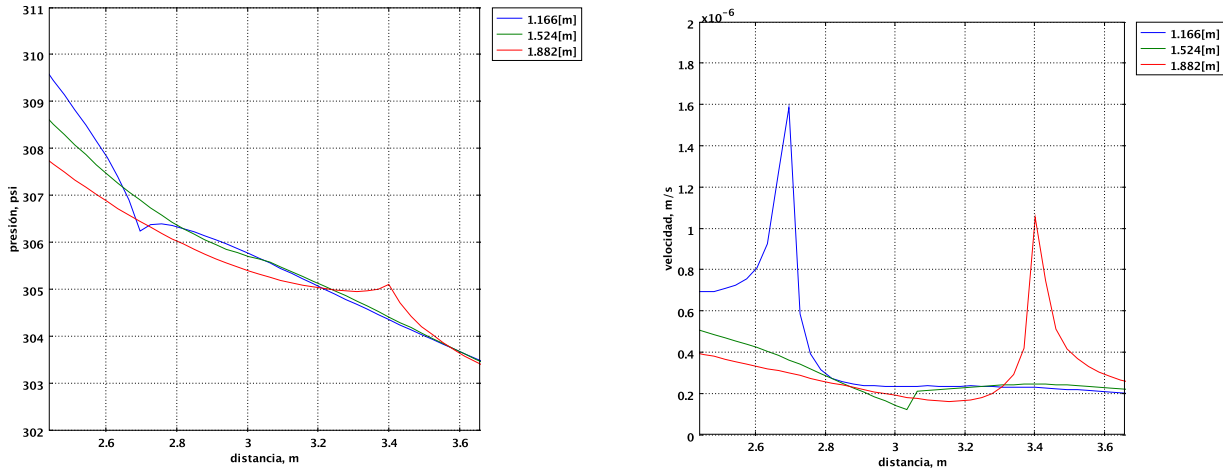


Figura 6.23: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

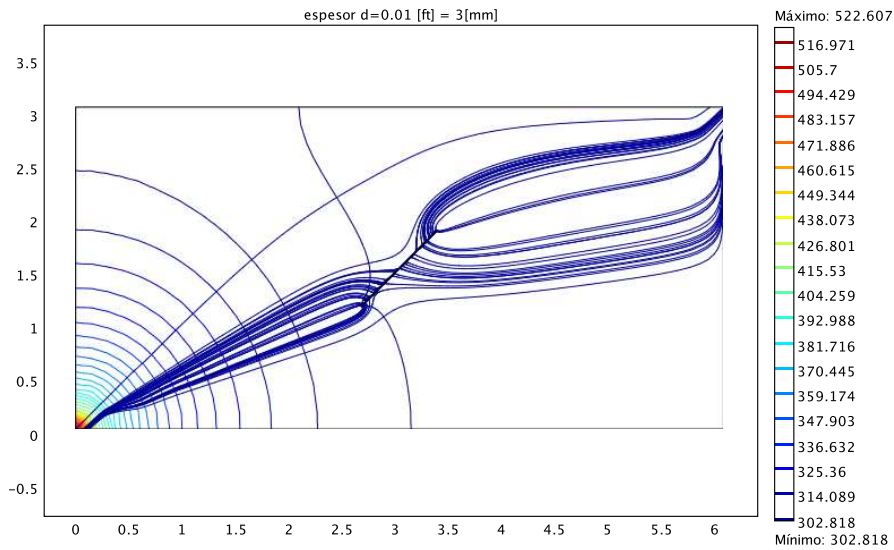


Figura 6.24: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento preferencial hacia el interior de la fractura y a lo largo de ésta.

Barrera al flujo ($k_{fr} \lll k_m$)

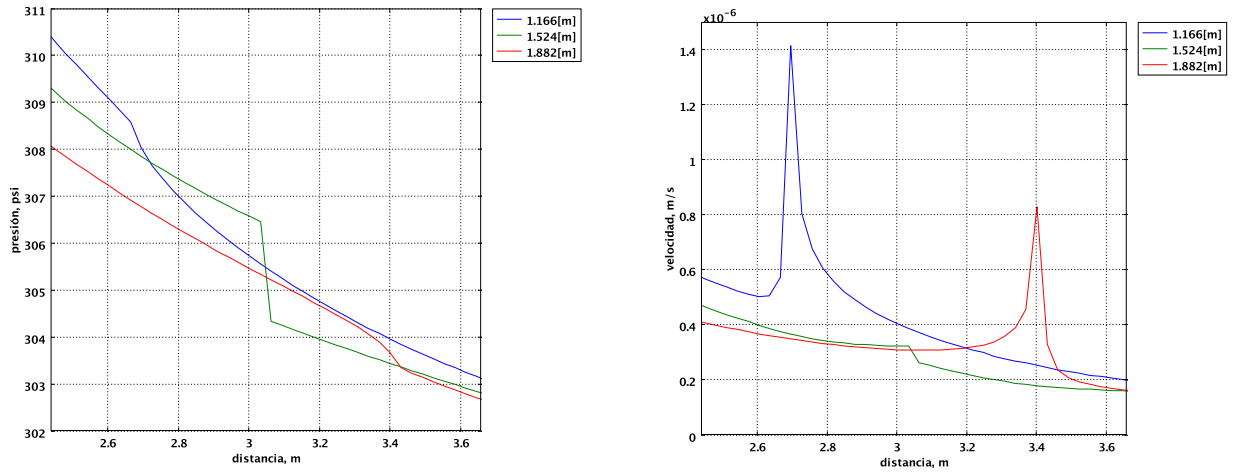


Figura 6.25: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

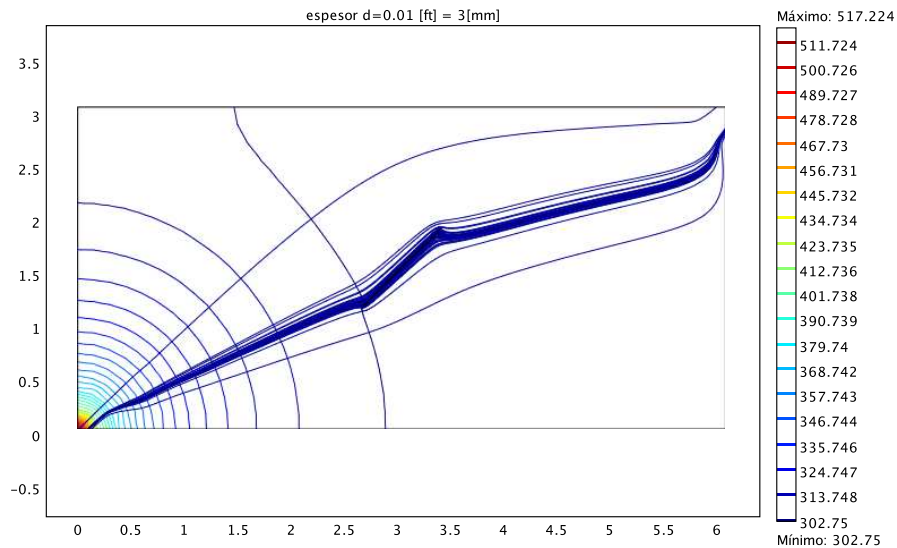


Figura 6.26: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento que tiende a evadir la fractura.

6.4.4. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$

Dominio

El dominio del modelo computacional es un rectángulo de base x_1 y altura x_2 . El subdominio correspondiente a la fractura es un rectángulo de base d y altura l (ver Figura 6.27).

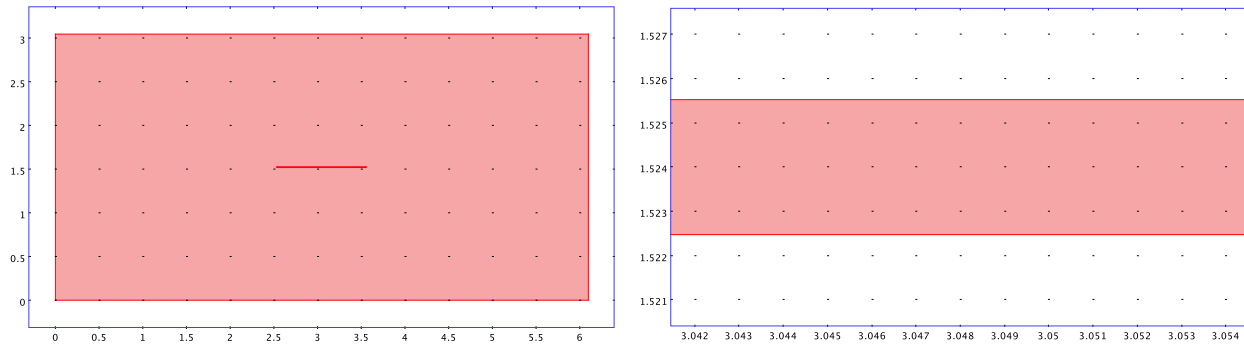


Figura 6.27: Dominio del modelo computacional donde $x_1 = 6.096 [m]$, $x_2 = 3.048 [m]$, $d = 3.048 [mm]$ y $l = 1.00584 [m]$

Mallado

Malla del dominio computacional (ver Figura 6.28).

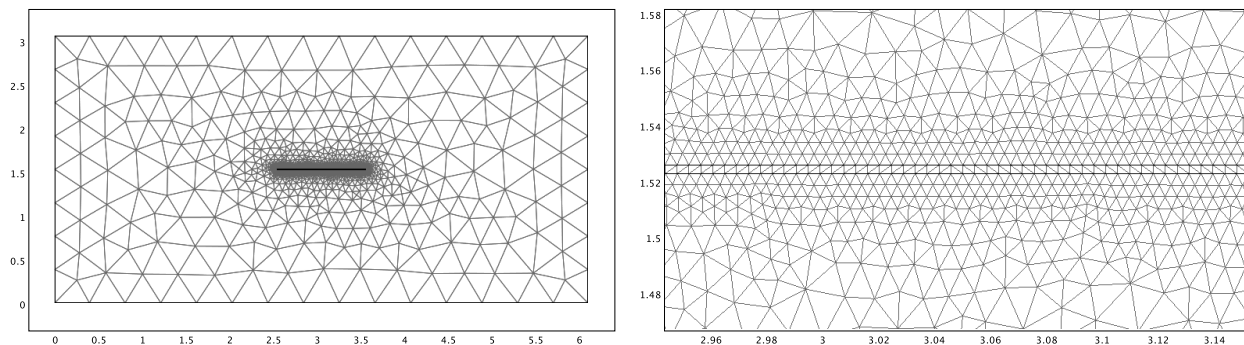


Figura 6.28: Izquierda: Mallado del dominio computacional con 16,143 grados de libertad y 8,048 elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos. Derecha: Acercamiento al espesor de la fractura.

Fronteras

Fronteras del dominio computacional (ver Figura 6.29).

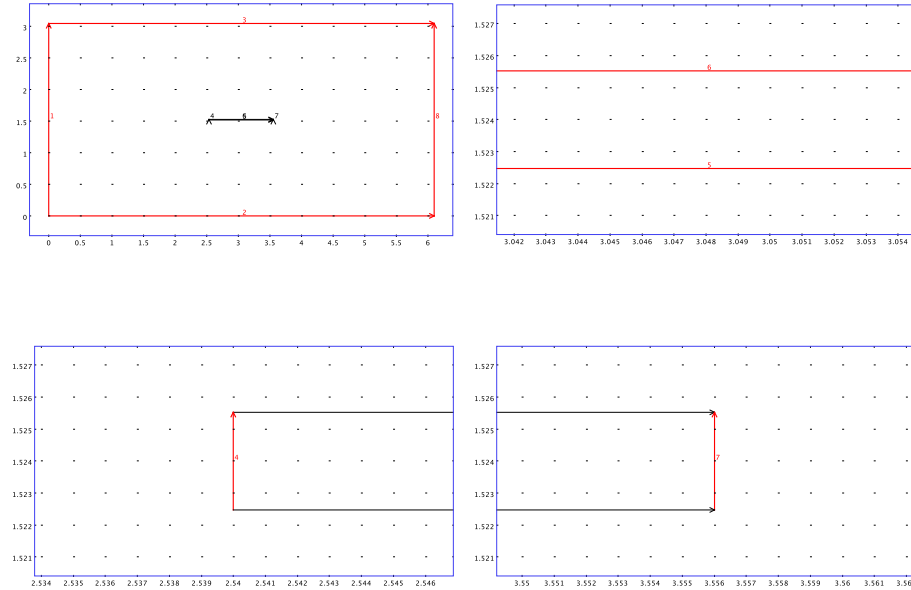


Figura 6.29: Fronteras del dominio computacional, con su indexación correspondiente. Las fronteras externas 1, 2, 3 y 8 son impermeables. Las fronteras internas 4, 5, 6 y 7 son permeables.

Puntos

Puntos del dominio computacional (ver Figura 6.30).

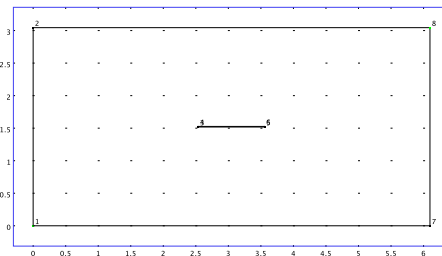


Figura 6.30: En el punto inferior izquierdo se impone una condición tipo Neumann para establecer inyección (fuente). En el punto superior derecho se impone una condición tipo Dirichlet para establecer producción a presión constante (sumidero).

Fractura abierta al flujo ($k_{fr} \gg k_m$)

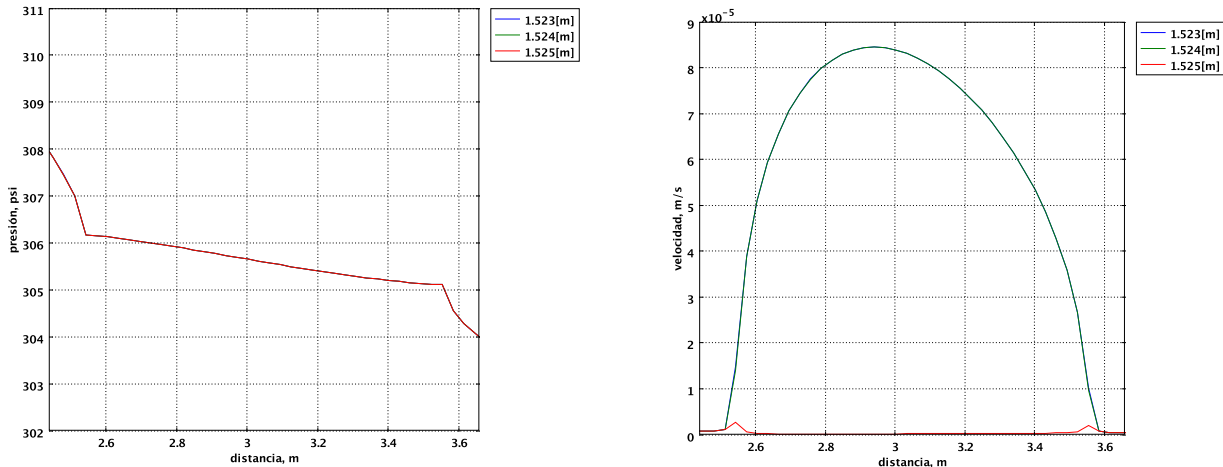


Figura 6.31: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

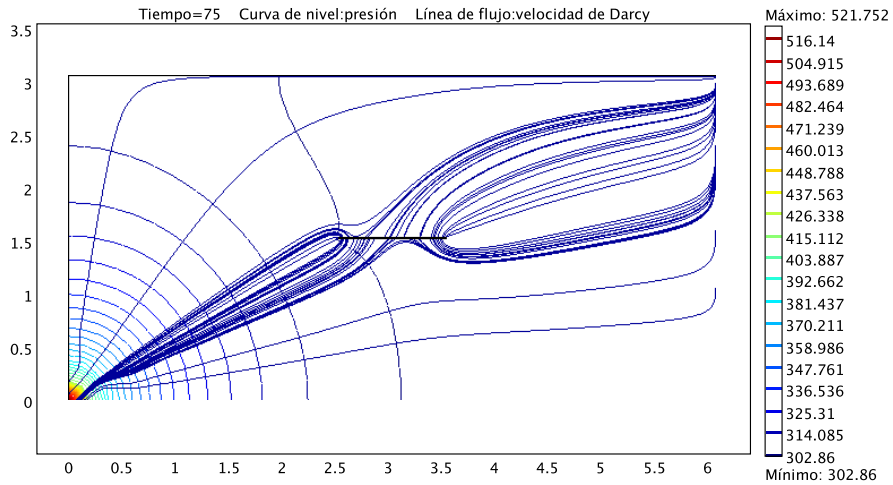


Figura 6.32: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento preferencial hacia el interior de la fractura y a lo largo de ésta.

Barrera al flujo ($k_{fr} \lll k_m$)

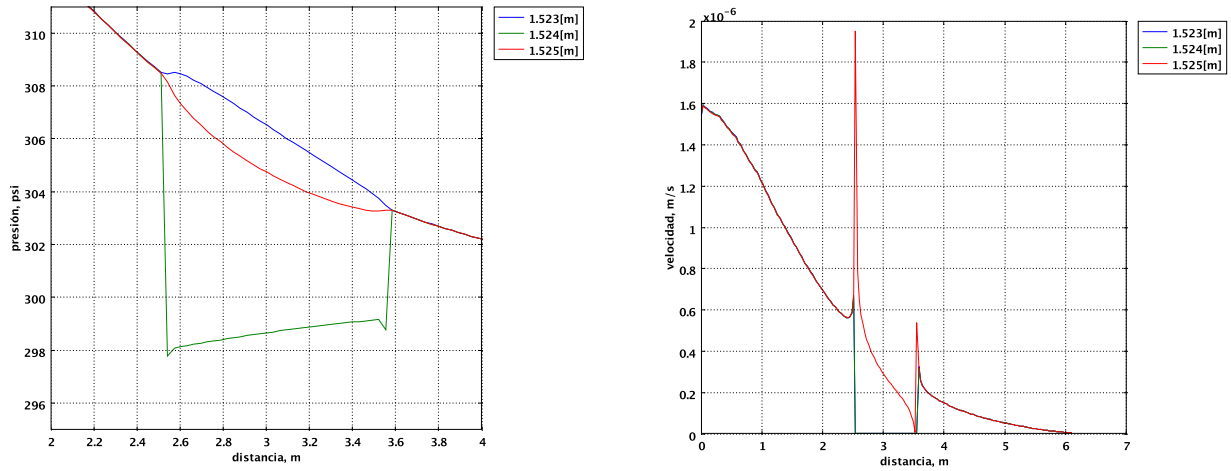


Figura 6.33: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

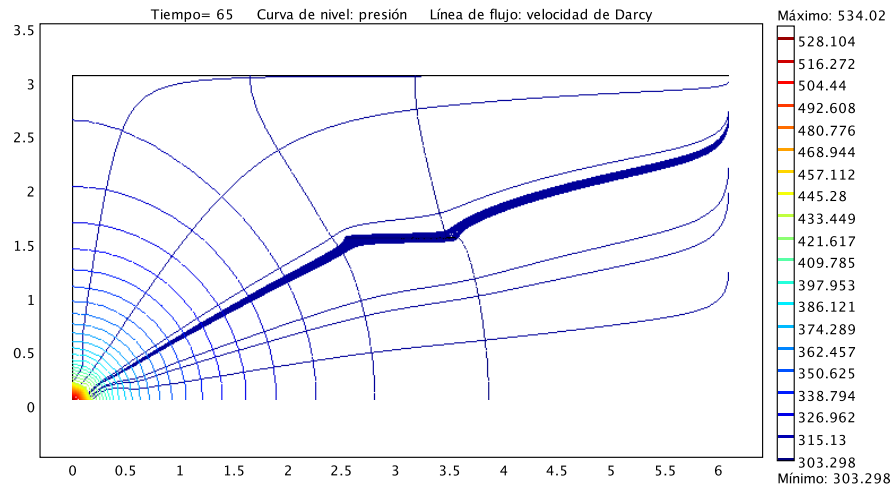


Figura 6.34: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento que tiende a evadir la fractura.

Capítulo 7

Modelo de Fractura Discreta mediante Descomposición de Dominio

7.1. Modelo Conceptual

1. Se considera un sistema cerrado bajo condiciones isotérmicas.
2. Existe una fase fluida y una inmóvil .
3. La fase fluida es un fluido newtoniano ligeramente compresible que consta de un solo componente.
4. La fase inmóvil es una matriz porosa homogénea ligeramente compresible.
5. La viscosidad de la fase fluida es constante.
6. Existe una fractura contenida en el medio poroso.
7. La fractura es considerada como una interfaz (discontinuidad), la cual representa a otro medio poroso homogéneo con propiedades petrofísicas diferentes.
8. Tanto el medio poroso como la fractura se encuentran totalmente saturados por la fase fluida.
9. Las permeabilidades del medio poroso y de la fractura son constantes.
10. La fase fluida presenta flujo darciano a través del medio poroso y de la fractura.
11. Se considera que no existe flujo difusivo en las fronteras del sistema, es decir, $\underline{\tau} = 0$.

7.2. Modelo Matemático

El modelo matemático de fractura discreta mediante descomposición de dominio se deriva a partir del modelo de fractura explícita, como ha sido presentado por Martin *et al.* (2005), ver Figura 7.1.

Ecuación de balance global

$$\frac{d}{dt}M_f(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) \, d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t) \, d\underline{x} \quad (7.1)$$

Se considera que existen interfaces en el interior del dominio, y no existe flujo difusivo en las fronteras del sistema, $\underline{\tau} = 0$.

Ecuación diferencial de balance local

$$\rho\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho\gamma \nabla z) \right) = g; \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t). \quad (7.2)$$

Ecuación que describe el flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso, derivada en el capítulo 5, ecuación 5.35.

Ecuación de salto de balance local

$$\rho \left\{ \left[-\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho \gamma \nabla z) \right]^+ - \left[-\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho \gamma \nabla z) \right]^- \right\} \cdot \underline{n}_\Sigma = g_\Sigma \quad (7.3)$$

Ecuación de salto para el flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso con discontinuidades derivada en el capítulo 6, ecuación 6.10.

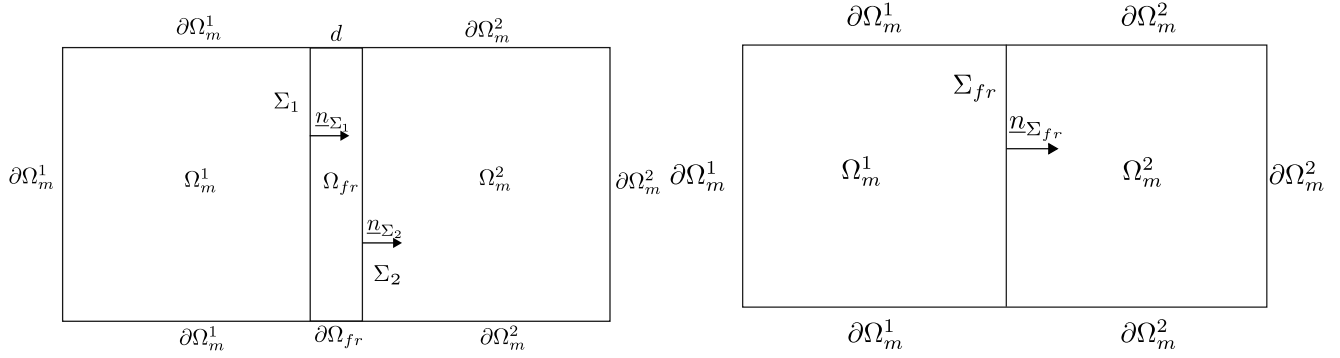


Figura 7.1: Izquierda: Representación esquemática del modelo de fractura explícita, presentado en el capítulo 6. Derecha: Representación esquemática del modelo de fractura discreta mediante descomposición de dominio.

Ecuaciones de balance local para los subdominios correspondientes a un medio poroso

Si se considera flujo horizontal y se divide por la densidad, las ecuaciones de balance local 7.2 y 7.3 se pueden reescribir como

$$\phi^i c_t^i \frac{\partial p^i}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{u}^i = g^i / \rho \equiv \bar{q}^i; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_m^i \setminus \Sigma_i(t) \quad i = 1, 2 \quad (7.4)$$

$$(\underline{u}^1 - \underline{u}^2) \cdot \underline{n}_{\Sigma_i} = g_{\Sigma_i} / \rho \equiv \bar{q}_{\Sigma_i}; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_i(t) \quad i = 1, 2 \quad (7.5)$$

donde

$$\underline{u}^i = -\frac{1}{\mu} \underline{k}_m^i \cdot \nabla p^i; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_m^i \quad i = 1, 2 \quad (7.6)$$

$$c_t^i = c_f + c_R^i \quad (7.7)$$

Ecuaciones de balance local para el subdominio correspondiente a la fractura

De manera análoga, la ecuación diferencial de balance local para la fractura es

$$\phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial p_{fr}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{u}_{fr} = g_{fr}/\rho \equiv \bar{q}_{fr}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{fr} \quad (7.8)$$

donde

$$\underline{u}_{fr} = -\frac{1}{\mu_{fr}} \underline{k}_{fr} \cdot \nabla p_{fr}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{fr} \quad (7.9)$$

$$c_{tfr} = c_f + c_{fr} \quad (7.10)$$

La ecuación 7.8 puede reescribirse como

$$\phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial p_{fr}}{\partial t} + \nabla_n \cdot \underline{u}_{fr} + \nabla_\tau \cdot \underline{u}_{fr} = q_{fr}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{fr} \quad (7.11)$$

donde ∇_n y ∇_τ son los operadores de la divergencia normal y tangencial.

Integrando la ecuación 7.11 en la dirección normal a la fractura, obtenemos

$$\int_{-d/2}^{d/2} \phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial p_{fr}}{\partial t} d\underline{n} + \int_{-d/2}^{d/2} \nabla_n \cdot \underline{u}_{fr} \cdot \underline{n} d\underline{n} + \int_{-d/2}^{d/2} \nabla_\tau \cdot \underline{u}_{fr} d\underline{n} = \int_{-d/2}^{d/2} q_{fr} d\underline{n} \quad (7.12)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial p_{fr}}{\partial t} d\underline{n} = \phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d/2}^{d/2} p_{fr} d\underline{n} = d \phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial P_{fr}}{\partial t} \quad (7.13)$$

donde $P_{fr} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} p_{fr} d\underline{n}$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \nabla_n \cdot \underline{u}_{fr} \cdot \underline{n} d\underline{n} = \underline{u}_{fr} \cdot \underline{n} \Big|_{-d/2}^{d/2} = \underline{u}_{fr} \cdot \underline{n} \Big|_{d/2} - \underline{u}_{fr} \cdot \underline{n} \Big|_{-d/2} = \underline{u}_{fr} \cdot \underline{n} \Big|_{\Sigma_2} - \underline{u}_{fr} \cdot \underline{n} \Big|_{\Sigma_1} \quad (7.14)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \nabla_{\tau} \cdot \underline{u}_{fr} d\underline{n} = \nabla_{\tau} \cdot \int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{fr} d\underline{n} = \nabla_{\tau} \cdot \underline{U}_{fr} \quad (7.15)$$

donde $\underline{U}_{fr} = \int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{fr\tau} d\underline{n}$

Considerando que

$$Q_{fr} = \int_{-d/2}^{d/2} q_{fr} d\underline{n} \quad (7.16)$$

Entonces podemos reescribir la ecuación 7.12 como

$$d\phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial P_{fr}}{\partial t} + (\underline{u}_{fr} \cdot \underline{n})|_{\Sigma_2} - (\underline{u}_{fr} \cdot \underline{n})|_{\Sigma_1} + \nabla_{\tau} \cdot \underline{U}_{fr} = Q_{fr}; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_{fr} \quad (7.17)$$

Al considerar la continuidad del flujo a través de las interfaces Σ_1 y Σ_2 podemos reescribir la ecuación 7.17 como

$$d\phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial P_{fr}}{\partial t} + (\underline{u}^2 \cdot \underline{n}) - (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}) + \nabla_{\tau} \cdot \underline{U}_{fr} = Q_{fr}; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_{fr} \quad (7.18)$$

donde $(\underline{u}^2 \cdot \underline{n}) - (\underline{u}^1 \cdot \underline{n})$ es el termino que representa el flujo de los subdominios hacia el interior de la fractura.

Reorganizando la ecuación 7.18

$$d\phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial P_{fr}}{\partial t} + \nabla_{\tau} \cdot \underline{U}_{fr} = Q_{fr} + (\underline{u}^1 - \underline{u}^2) \cdot \underline{n}; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_{fr} \quad (7.19)$$

Sin embargo, podemos descomponer la velocidad en la fractura \underline{u}_{fr} en términos de sus componentes normal y tangencial

$$\underline{u}_{fr} = \underline{u}_{frn} + \underline{u}_{fr\tau} \quad (7.20)$$

donde

$$\underline{u}_{frn} = -\frac{1}{\mu_{\underline{\underline{=}}frn}} \underline{k}_{\underline{\underline{=}}frn} \cdot \nabla_n p_{fr} \quad (7.21)$$

$$\underline{u}_{fr\tau} = -\frac{1}{\mu_{\underline{\underline{=}}fr\tau}} \underline{k}_{\underline{\underline{=}}fr\tau} \cdot \nabla_\tau p_{fr} \quad (7.22)$$

Al integrar la velocidad tangencial 7.22 en la dirección normal a la fractura, obtenemos

$$\int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{fr\tau} d\underline{n} = \int_{-d/2}^{d/2} -\frac{1}{\mu_{\underline{\underline{=}}fr\tau}} \underline{k}_{\underline{\underline{=}}fr\tau} \cdot \nabla_\tau p_{fr} d\underline{n} \quad (7.23)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} -\frac{1}{\mu_{\underline{\underline{=}}fr\tau}} \underline{k}_{\underline{\underline{=}}fr\tau} \cdot \nabla_\tau p_{fr} d\underline{n} = -\frac{1}{\mu_{\underline{\underline{=}}fr\tau}} \underline{k}_{\underline{\underline{=}}fr\tau} \cdot \nabla_\tau \int_{-d/2}^{d/2} p_{fr} d\underline{n} = -\frac{d}{\mu_{\underline{\underline{=}}fr\tau}} \underline{k}_{\underline{\underline{=}}fr\tau} \cdot \nabla_\tau P_{fr} \quad (7.24)$$

donde $P_{fr} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} p_{fr} d\underline{n}$

Por lo tanto

$$\int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{fr\tau} d\underline{n} = -\frac{d}{\mu_{\underline{\underline{=}}fr\tau}} \underline{k}_{\underline{\underline{=}}fr\tau} \cdot \nabla_\tau P_{fr} \quad (7.25)$$

$$\underline{U}_{fr} = -\frac{d}{\mu_{\underline{\underline{=}}fr\tau}} \underline{k}_{\underline{\underline{=}}fr\tau} \cdot \nabla_\tau P_{fr}; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_{fr} \quad (7.26)$$

Esto es la ley de Darcy en la fractura.

Sustituyendo \underline{U}_{fr} en la ecuación 7.19

$$d\phi_{fr} c_{frt} \frac{\partial P_{fr}}{\partial t} - \nabla_\tau \cdot \left(\frac{d}{\mu_{\underline{\underline{=}}fr\tau}} \underline{k}_{\underline{\underline{=}}fr\tau} \cdot \nabla_\tau P_{fr} \right) = Q_{fr} + (\underline{u}^1 - \underline{u}^2) \cdot \underline{n}; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_{fr} \quad (7.27)$$

La ecuación 7.21 debe ser utilizada para dar condiciones de frontera a lo largo de Σ_{fr} para los sistemas en Ω_m^1 y Ω_m^2 , los cuales toman en cuenta una diferencia de presión de un lado de la fractura al otro.

Integrando la velocidad normal 7.21 en la dirección normal a la fractura, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{frn} \cdot \underline{n} d\underline{n} &= \int_{-d/2}^{d/2} -\frac{1}{\mu_{frn}} \underline{k}_{frn} \cdot \nabla_n p_{fr} \cdot \underline{n} d\underline{n} = -\frac{1}{\mu_{frn}} \int_{-d/2}^{d/2} \nabla_n p_{fr} \cdot \underline{n} d\underline{n} \\
 &= -\frac{1}{\mu_{frn}} (p_{fr}) \Big|_{-d/2}^{d/2} = -\frac{1}{\mu_{frn}} (p_{fr}|_{d/2} - p_{fr}|_{-d/2}) \\
 &= -\frac{1}{\mu_{frn}} (p_{fr}|_{\Sigma_2} - p_{fr}|_{\Sigma_1})
 \end{aligned} \tag{7.28}$$

Por lo tanto

$$\int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{frn} \cdot \underline{n} d\underline{n} = -\frac{1}{\mu_{frn}} (p_{fr}|_{\Sigma_2} - p_{fr}|_{\Sigma_1}) \tag{7.29}$$

La integral $\int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{frn} \cdot \underline{n} d\underline{n}$ puede ser aproximada mediante la regla del trapecoide.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} (b-a) [f(a) + f(b)] \tag{7.30}$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{frn} \cdot \underline{n} d\underline{n} \approx \frac{1}{2} (d) [(\underline{u}_{fr} \cdot \underline{n})|_{\Sigma_2} + (\underline{u}_{fr} \cdot \underline{n})|_{\Sigma_1}] \tag{7.31}$$

Considerando continuidad del flujo a través de las interfaces Σ_1 y Σ_2

$$\frac{d}{2} [(\underline{u}_{fr} \cdot \underline{n})|_{\Sigma_2} + (\underline{u}_{fr} \cdot \underline{n})|_{\Sigma_1}] = \frac{d}{2} [(\underline{u}^2 \cdot \underline{n})|_{\Sigma_2} + (\underline{u}^1 \cdot \underline{n})|_{\Sigma_1}] \tag{7.32}$$

y continuidad de la presión a través de las interfaces Σ_1 y Σ_2

$$-\frac{1}{\mu} \frac{k_{frn}}{d} (p_{fr}|_{\Sigma_2} - p_{fr}|_{\Sigma_1}) = -\frac{1}{\mu} \frac{k_{frn}}{d} (p^2|_{\Sigma_2} - p^1|_{\Sigma_1}) \quad (7.33)$$

se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{d}{2} [(\underline{u}^2 \cdot \underline{n})|_{\Sigma_2} + (\underline{u}^1 \cdot \underline{n})|_{\Sigma_1}] = -\frac{1}{\mu} \frac{k_{frn}}{d} (p^2|_{\Sigma_2} - p^1|_{\Sigma_1}) \quad (7.34)$$

Reorganizando la ecuación 7.34

$$[(\underline{u}^2 \cdot \underline{n})|_{\Sigma_2} + (\underline{u}^1 \cdot \underline{n})|_{\Sigma_1}] = -\frac{2}{\mu d} \frac{k_{frn}}{d} (p^2|_{\Sigma_2} - p^1|_{\Sigma_1}) \quad (7.35)$$

Recordando que $\underline{n} = \underline{n}_{\Sigma_1} = -\underline{n}_{\Sigma_2}$

$$[(\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1} - (\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2}] = -\frac{2}{\mu d} \frac{k_{frn}}{d} (p^2|_{\Sigma_2} - p^1|_{\Sigma_1}) \quad (7.36)$$

$$[(\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1} - (\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2}] = -\alpha_{fr} (p^2|_{\Sigma_2} - p^1|_{\Sigma_1}) \quad (7.37)$$

donde $\alpha_{fr} = \frac{2k_{frn}}{\mu d}$

Reorganizando la ecuación 7.36

$$(p^2|_{\Sigma_2} - p^1|_{\Sigma_1}) = \frac{1}{\alpha_{fr}} [(\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2} - (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1}]; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_{fr} \quad (7.38)$$

Derivación de las condiciones de frontera en las interfaces

Para obtener condiciones de frontera en Σ_{fr} para los problemas en Ω_m^2 y Ω_m^1 se requiere una ecuación adicional. Como la ecuación 7.38 expresa la diferencia entre las presiones a través de Σ_{fr} , una elección natural es obtener una ecuación que exprese la suma de presiones en Σ_{fr} .

Si suponemos que la presión promedio a través de la fractura P_{fr} es también el promedio de las presiones en las interfaces Σ_1 y Σ_2 , podemos establecer que

$$p^2|_{\Sigma_2} + p^1|_{\Sigma_1} = 2P_{fr} \quad (7.39)$$

Por lo tanto, sumando y sustrayendo las ecuaciones 7.39 y 7.38 podemos calcular $p^2|_{\Sigma_2}$ y $p^1|_{\Sigma_1}$.

Sumando

$$2p^2|_{\Sigma_2} = 2P_{fr} + \frac{1}{\alpha_{fr}} [(\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2} - (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1}] \quad (7.40)$$

$$2p^2|_{\Sigma_2} - 2P_{fr} = \frac{1}{\alpha_{fr}} [(\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2} - (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1}] \quad (7.41)$$

$$\alpha_{fr}p^2|_{\Sigma_2} - \alpha_{fr}P_{fr} = \frac{1}{2} (\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2} - \frac{1}{2} (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1} \quad (7.42)$$

$$-\frac{1}{2} (\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2} + \alpha_{fr}p^2|_{\Sigma_2} = -\frac{1}{2} (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1} + \alpha_{fr}P_{fr} \quad (7.43)$$

Sustrayendo

$$2p^1|_{\Sigma_1} = 2P_{fr} - \frac{1}{\alpha_{fr}} [(\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2} - (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1}] \quad (7.44)$$

$$2p^1|_{\Sigma_1} - 2P_{fr} = -\frac{1}{\alpha_{fr}} [(\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2} - (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1}] \quad (7.45)$$

$$\alpha_{fr}P_{fr} - \alpha_{fr}p^1|_{\Sigma_1} = \frac{1}{2} (\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2} - \frac{1}{2} (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1} \quad (7.46)$$

$$-\frac{1}{2} (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1} + \alpha_{fr}p^1|_{\Sigma_1} = -\frac{1}{2} (\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2} + \alpha_{fr}P_{fr} \quad (7.47)$$

Condición inicial

$$p(t_0) = p_0 \quad (7.48)$$

Condición de frontera externa

En las cuatro fronteras externas se considera que no existe flujo, por lo que se establecen condiciones de frontera tipo Neumann.

$$\underline{n} \cdot \underline{u} = 0; \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega(t) \quad (7.49)$$

Condiciones de frontera interna

En la frontera interna que corresponde a la discontinuidad, se establecen condiciones tipo Robin, una por cada lado de la frontera.

$$-\frac{1}{2} (\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2} + \alpha_{fr} p^2|_{\Sigma_2} = -\frac{1}{2} (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1} + \alpha_{fr} P_{fr} \quad (7.50)$$

$$-\frac{1}{2} (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1} + \alpha_{fr} p^1|_{\Sigma_1} = -\frac{1}{2} (\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2} + \alpha_{fr} P_{fr} \quad (7.51)$$

7.3. Modelo Computacional

Si el dominio del sistema se encuentra en un espacio de dos dimensiones, la ecuación que describe el flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso, considerando flujo horizontal y dividiendo por la densidad, es la ecuación (5.40)

$$H\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{H}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right) = H\bar{q}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega(t) \setminus \Sigma(t) \quad (7.52)$$

donde $\bar{q} = g/\rho$

Para cada subdominio:

$$H\phi^i c_t^i \frac{\partial p^i}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{H}{\mu} \underline{k}_m^i \cdot \nabla p^i \right) = Hq^i; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_m^i \setminus \Sigma_i(t) \quad i = 1, 2 \quad (7.53)$$

Para la implementación de las ecuaciones de balance local que gobiernan el flujo en los subdominios correspondientes a medios porosos, se utiliza el modo EDP con formulación de coeficientes para análisis dependiente del tiempo de COMSOL Multiphysics. La ecuación general de formulación de coeficientes está definida de la siguiente manera

$$e_a \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} + \gamma) + \beta \cdot \nabla \mathbf{u} + a \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (7.54)$$

por lo tanto, para el subdominio 1 establecemos

$$\mathbf{u} \equiv p1, \quad d_a \equiv H * \text{phi1} * ct1, \quad c \equiv H * k1/\mu, \quad \text{y} \quad \alpha = \gamma = \beta = a = e_a = \mathbf{f} \equiv 0.$$

donde $ct1 = cf + cR1$

$$H\phi^1 c_t^1 \frac{\partial p^1}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\frac{H}{\mu} \underline{k}_m^1 \cdot \nabla p^1 \right) = 0; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_m^1 \quad (7.55)$$

y para el subdominio 2, establecemos

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{p}2, \quad \mathbf{d}_a \equiv H * \text{phi}2 * \text{ct}2, \quad \mathbf{c} \equiv H * k2 / \mu, \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{a} = \mathbf{e}_a = \mathbf{f} \equiv 0.$$

donde $\text{ct}2 = \text{cf} + \text{cR}2$

$$H\phi^2 c_t^2 \frac{\partial p^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\frac{H}{\mu} \underline{k}_m^2 \cdot \nabla p^2 \right) = 0; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_m^2 \quad (7.56)$$

El coeficiente f se iguala a 0 en ambos subdominios debido a que los términos fuente o sumidero se implementan en un punto mediante una formulación débil.

Para establecer una fuente o sumidero en un punto, se dibuja un punto en el lugar apropiado y se especifica la descarga. Se deberá establecer la descarga como un gasto volumétrico, con signo negativo para denotar un sumidero y positivo para denotar una fuente Kitanidis (2008).

La ecuación de balance local correspondiente a la fractura necesita ser definida en un modo de formulación débil, en una dimensión menor a las ecuaciones de los subdominios y ser acoplada a ellas a través de una condición de frontera.

Si consideramos que no existe ningún término fuente Q_{fr} , la ecuación 7.27 puede escribirse como

$$d\phi_{fr} c_{frt} \frac{\partial P_{fr}}{\partial t} + (\underline{u}^2 - \underline{u}^1) \cdot \underline{n} - \nabla_\tau \cdot \left(\frac{d}{\mu} \underline{k}_{fr\tau} \cdot \nabla_\tau P_{fr} \right) = 0; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{fr} \quad (7.57)$$

Esta ecuación en el modo de aplicación de formulación débil de contorno de COMSOL Multiphysics, está expresada por

Término débil

$$\mathbf{weak} = \mathbf{wfr}$$

definido como

$$\mathbf{wfr} = (-(\text{phifr} * \text{ctfr} * d * \text{Pft}) + (\mathbf{u}1 + \mathbf{u}2)) * \text{test}(\text{Pf}) + ((\text{kfr} / \mu) * d * (-\text{test}(\text{PfTx}) * \text{PfTx} - \text{test}(\text{PfTy}) * \text{PfTy}))$$

donde Pf es la variable dependiente, $\text{test}()$ son las funciones de peso, Tx y Ty son las derivadas tangenciales con respecto a x y y , respectivamente, y t indica la derivada con respecto al tiempo, de acuerdo a la sintaxis de COMSOL Multiphysics.

$$\mathbf{u}1 = \mathbf{u}u_x + \mathbf{u}u_y \quad \text{y} \quad \mathbf{u}2 = \mathbf{d}u_x + \mathbf{d}u_y$$

$$\mathbf{u}u_x = ((-k / \mu) * \text{p}1x) * \text{unx} \quad , \quad \mathbf{u}u_y = ((-k / \mu) * \text{p}1y) * \text{uny} \quad , \quad \mathbf{d}u_x = ((-k / \mu) * \text{p}2x) * \text{dnx} \quad \text{y} \\ \mathbf{d}u_y = ((-k / \mu) * \text{p}2y) * \text{dny}$$

donde $p1x$ y $p2x$ son las derivadas de $p1$ y $p2$ con respecto a x , de acuerdo a la sintaxis de COMSOL Multiphysics.

Condición inicial

$$\mathbf{u}(t_0) = p_0 \quad (7.58)$$

Condición de frontera externa

En las fronteras externas se considera que no existe flujo, por lo que se establecen condiciones de frontera de tipo Neumann. La ecuación general para condición de frontera de tipo Neumann en COMSOL está definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{c}\nabla\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} - \gamma) + \mathbf{q}\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad (7.59)$$

por lo que, para las fronteras del subdominio 1 establecemos:

$$\mathbf{u} \equiv p_1, \quad \mathbf{c} \equiv H * k_1 / \mu, \quad \text{y} \quad \alpha = \gamma = \mathbf{q} = \mathbf{g} \equiv 0.$$

de manera análoga, para las fronteras del subdominio 2:

$$\mathbf{u} \equiv p_2, \quad \mathbf{c} \equiv H * k_2 / \mu, \quad \text{y} \quad \alpha = \gamma = \mathbf{q} = \mathbf{g} \equiv 0.$$

$$\underline{n} \cdot \underline{u} = 0; \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_m^i \quad i = 1, 2 \quad (7.60)$$

Condición de frontera interna

La ecuación de balance local correspondiente a la fractura en una dimensión menor es acoplada a las ecuaciones de los subdominios a través de dos condiciones de frontera, una por cada lado de la fractura. Para establecer las condiciones de frontera sobre la frontera interna que representa a la fractura, se utiliza la ecuación general para condición de frontera de tipo Neumann, en COMSOL está definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{c}\nabla\mathbf{p} + \alpha\mathbf{p} - \gamma) + \mathbf{q}\mathbf{p} = \mathbf{g} \quad (7.61)$$

por lo tanto en el subdominio 1 establecemos

$$\mathbf{q} = -2 * \alpha_f \quad \text{y} \quad \mathbf{g} = (u_2 \cdot \mathbf{n}_x) + (-2 * \alpha_f * P_f)$$

considerando que $\mathbf{n}_x = 1$ en el subdominio 1, donde \mathbf{n}_x es la componente \mathbf{x} del vector unitario normal \mathbf{n} , es decir, $\mathbf{n} = (1, 0)$

y en el subdominio 2 establecemos

$$\mathbf{q} = 2 * \alpha_f \quad \text{y} \quad \mathbf{g} = (-u1_{nx}) + (2 * \alpha_f * Pf)$$

considerando que $\mathbf{n}_x = -1$ en el subdominio 2, donde \mathbf{n}_x es la componente \mathbf{x} del vector unitario normal \mathbf{n} , es decir, $\mathbf{n} = (-1, 0)$

donde

$$\alpha_f = (2 * kfr) / (\mu * d) \quad , \quad u1_{nx} = (-k/\mu) * p1x \quad \text{y} \quad u2_{nx} = (-k/\mu) * p2x$$

donde $p1x$ y $p2x$ son las derivadas de $p1$ y $p2$ con respecto a x , de acuerdo a la sintaxis de COMSOL Multiphysics.

$$-\frac{1}{2} (\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2}) |_{\Sigma_2} + \alpha_{fr} p^2 |_{\Sigma_2} = -\frac{1}{2} (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1}) |_{\Sigma_1} + \alpha_{fr} P_{fr}; \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_2 \quad (7.62)$$

$$-\frac{1}{2} (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1}) |_{\Sigma_1} + \alpha_{fr} p^1 |_{\Sigma_1} = -\frac{1}{2} (\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2}) |_{\Sigma_2} + \alpha_{fr} P_{fr}; \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_1 \quad (7.63)$$

Para establecer las condiciones de continuidad sobre las fronteras internas que no representan a la fractura, se utiliza la ecuación general para condición de frontera de tipo Neumann, una por cada lado de la fractura, definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{c}\nabla\mathbf{p} + \alpha\mathbf{p} - \gamma) + \mathbf{q}\mathbf{p} = \mathbf{g} \quad (7.64)$$

por lo que en el subdominio 1 establecemos

$$\mathbf{q} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{g} = -u2_{nx}$$

considerando que $\mathbf{n}_x = 1$ en el subdominio 1, donde \mathbf{n}_x es la componente \mathbf{x} del vector unitario normal \mathbf{n} , es decir, $\mathbf{n} = (1, 0)$

y en el subdominio 2 establecemos

$$\mathbf{q} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{g} = u1_{nx}$$

considerando que $\mathbf{n}_x = -1$ en el subdominio 2, donde \mathbf{n}_x es la componente \mathbf{x} del vector unitario normal \mathbf{n} , es decir, $\mathbf{n} = (-1, 0)$

donde

$$u1_{nx} = (-k/\mu) * p1x \quad y \quad u2_{nx} = (-k/\mu) * p2x$$

$p1x$ y $p2x$ son las derivadas de $p1$ y $p2$ con respecto a x , de acuerdo a la sintaxis de COMSOL Multiphysics.

$$\underline{n} \cdot \underline{u}^1 = \underline{n} \cdot \underline{u}^2; \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega^i \quad (7.65)$$

7.4. Casos de Estudio

En el modelo de fractura discreta mediante descomposición de dominio para flujo monofásico ligeramente compresible se consideran los mismos casos de estudio que han sido propuestos en el capítulo 6 para el modelo de fractura explícita.

Se presentan cuatro casos de estudio correspondientes a cuatro orientaciones diferentes de la fractura, $\theta = 0^\circ$, $\theta = 45^\circ$, $\theta = -45^\circ$ y $\theta = 90^\circ$, ver Figura 7.2. Para cada orientación se consideran dos casos, cuando la fractura actúa como un canal preferencial al flujo y cuando actúa como una barrera.

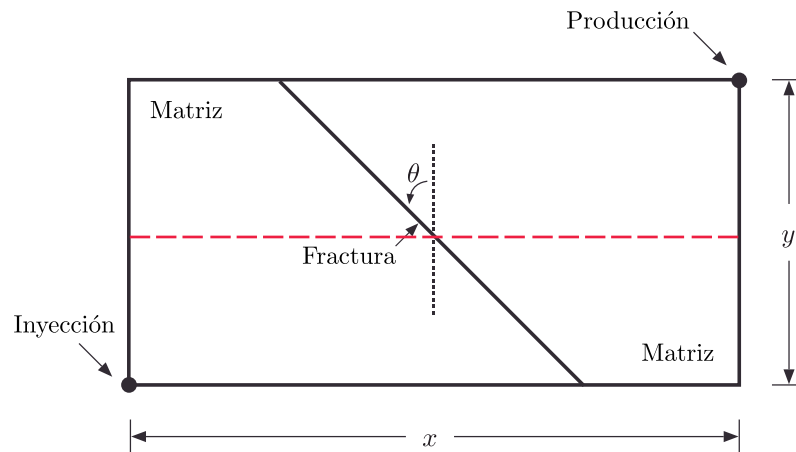


Figura 7.2: Representación esquemática del caso de estudio. Donde θ representa los grados con respecto a la línea vertical discontinua, correspondiente a la orientación de la fractura. La línea horizontal discontinua representa un corte longitudinal para el cual se obtiene el perfil de presión y velocidad.

7.4.1. Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$

Dominio

El dominio del modelo computacional es un rectángulo de base x_1 y altura x_2 . El subdominio correspondiente a la fractura es una línea de longitud l (ver Figura 7.3).

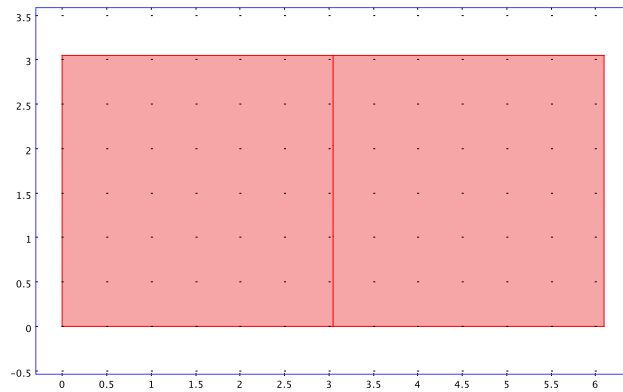


Figura 7.3: Dominio del modelo computacional donde $x_1 = 6.096 [m]$, $x_2 = 3.048 [m]$ y $l = 1.00584 [m]$

Mallado

Malla del dominio computacional (ver Figura 7.4).

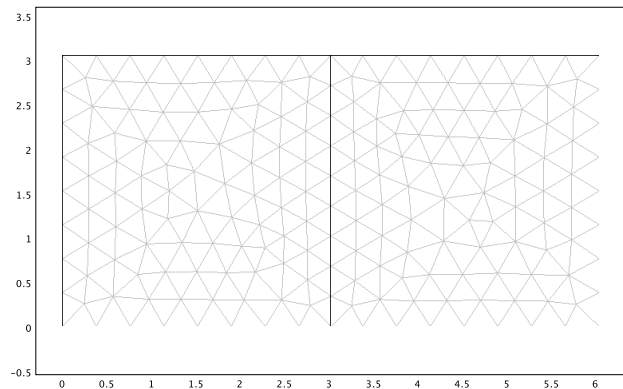


Figura 7.4: Mallado del dominio computacional con 767 grados de libertad y 346 elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos.

Fronteras

Fronteras del dominio computacional (ver Figura 7.5).

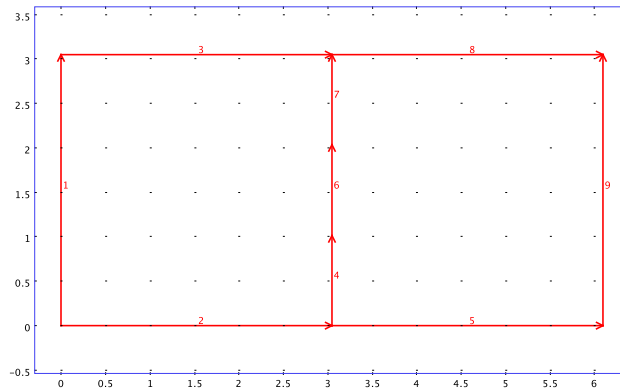


Figura 7.5: Fronteras del dominio computacional, con su indexación correspondiente. Las fronteras externas 1, 2, 3, 5 y 8 son impermeables. Las fronteras internas 4, 6 y 7 son permeables.

Puntos

Puntos del dominio computacional (ver Figura 7.6).

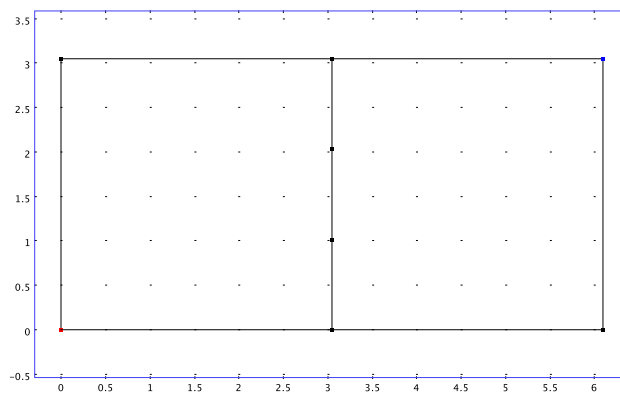


Figura 7.6: En el punto inferior izquierdo se impone una condición tipo Neumann para establecer inyección (fuente). En el punto superior derecho se impone una condición tipo Dirichlet para establecer producción a presión constante (sumidero).

Fractura abierta al flujo ($k_{fr} \gg k_m$)

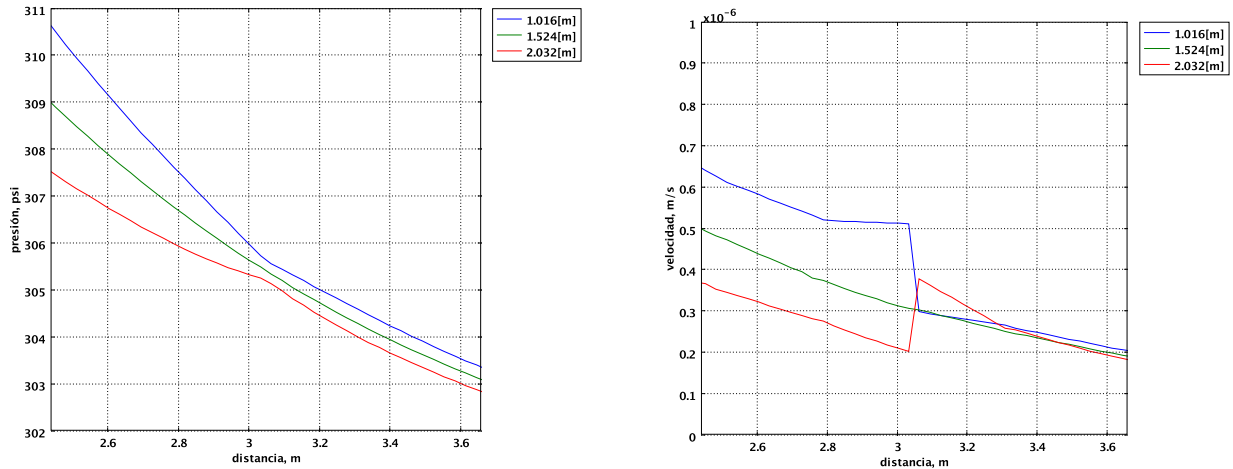


Figura 7.7: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

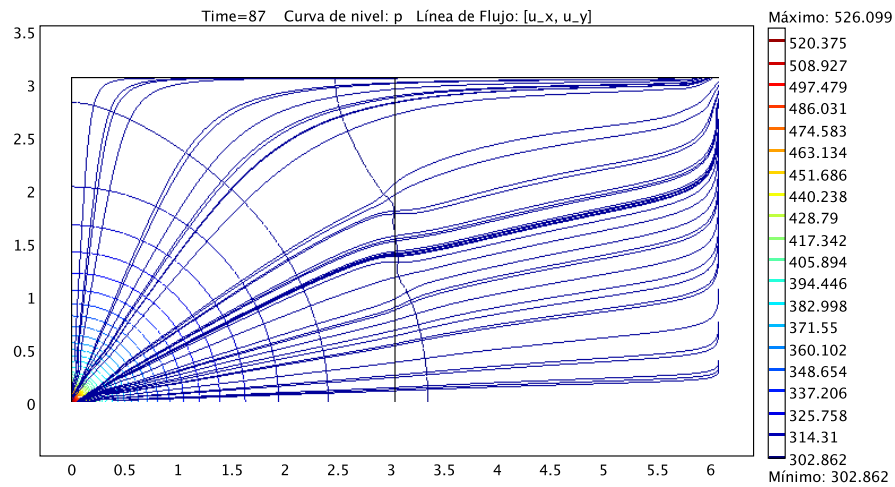


Figura 7.8: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento preferencial hacia el interior de la fractura y a lo largo de ésta.

Barrera al flujo ($k_{fr} \lll k_m$)

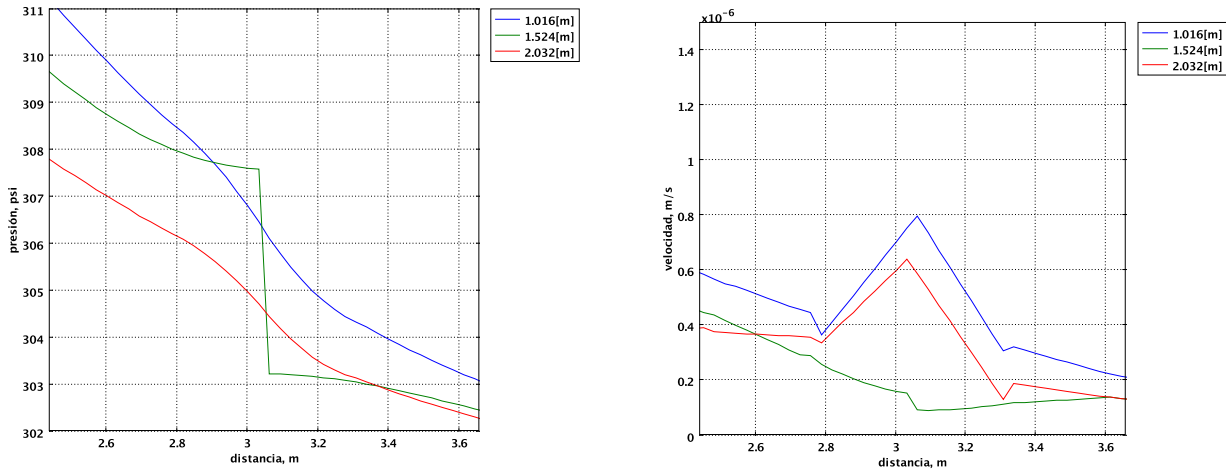


Figura 7.9: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

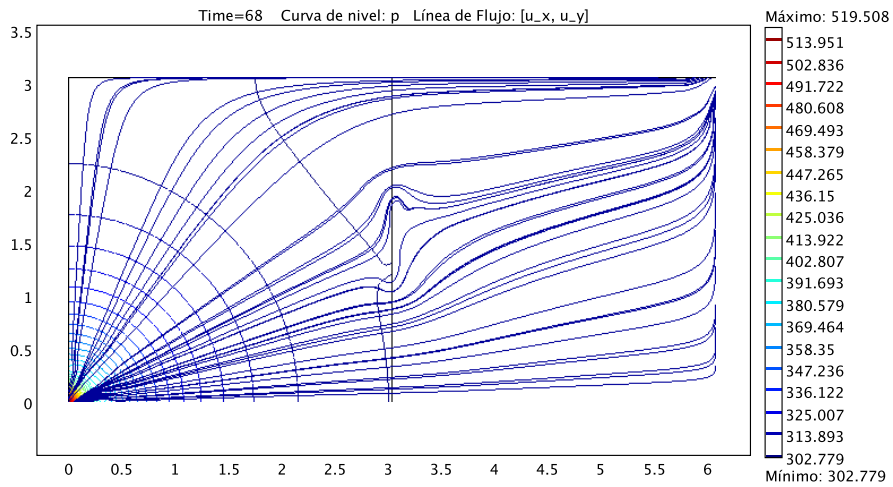


Figura 7.10: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento que tiende a evadir la fractura.

7.4.2. Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$

Dominio

El dominio del modelo computacional es un rectángulo de base x_1 y altura x_2 . El subdominio correspondiente a la fractura es una línea de longitud l (ver Figura 7.11).

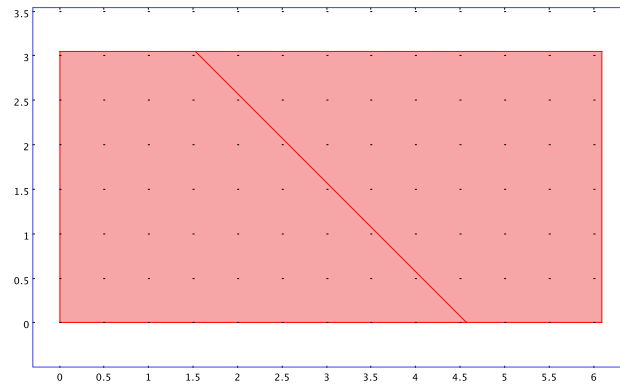


Figura 7.11: Dominio del modelo computacional donde $x_1 = 6.096 [m]$, $x_2 = 3.048 [m]$ y $l = 1.00584 [m]$

Mallado

Malla del dominio computacional (ver Figura 7.12).

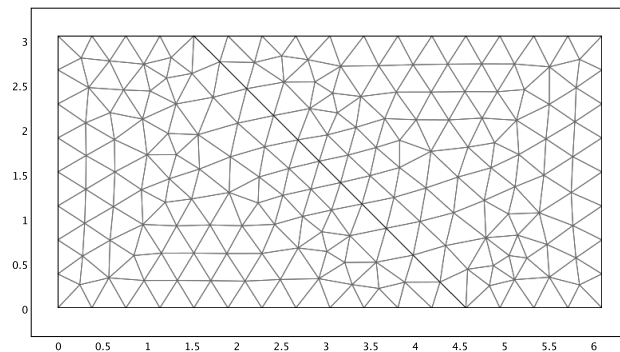


Figura 7.12: Mallado del dominio computacional con 779 grados de libertad y 342 elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos.

Fronteras

Fronteras del dominio computacional (ver Figura 7.13).

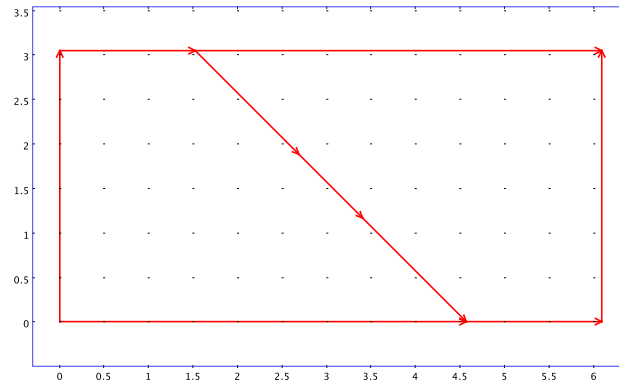


Figura 7.13: Fronteras del dominio computacional. Las fronteras externas son impermeables. Las fronteras internas son permeables.

Puntos

Puntos del dominio computacional (ver Figura 7.14).

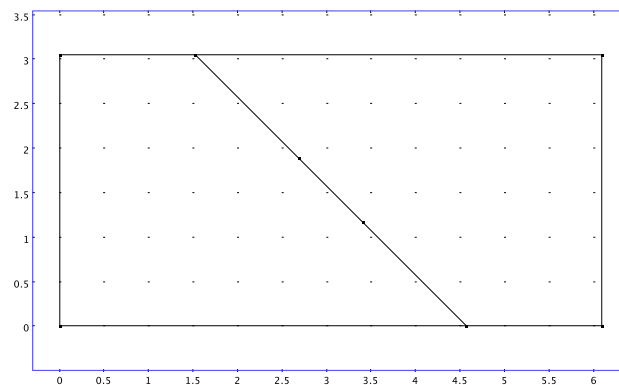


Figura 7.14: En el punto inferior izquierdo se impone una condición tipo Neumann para establecer inyección (fuente). En el punto superior derecho se impone una condición tipo Dirichlet para establecer producción a presión constante (sumidero).

Fractura abierta al flujo ($k_{fr} \gg k_m$)

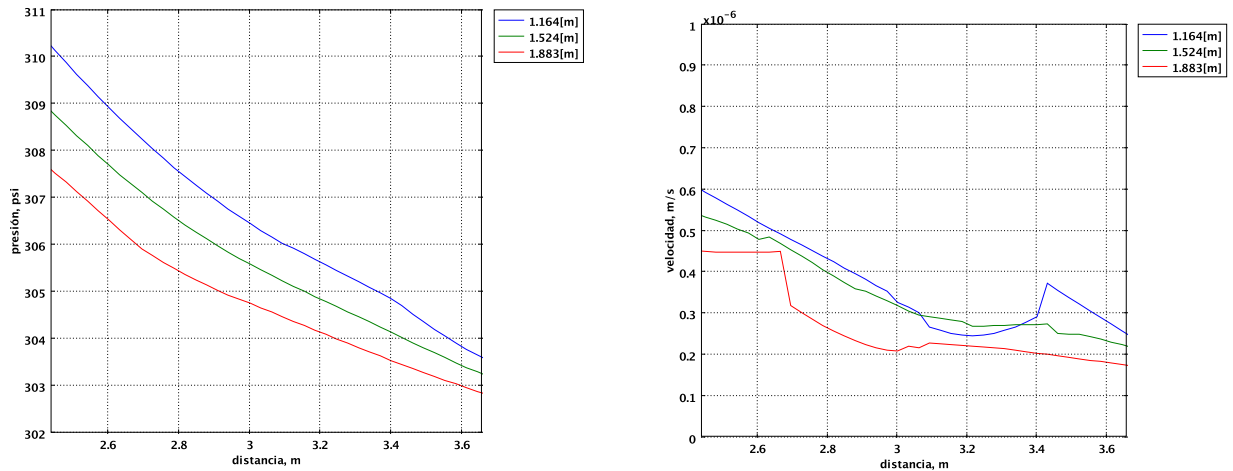


Figura 7.15: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

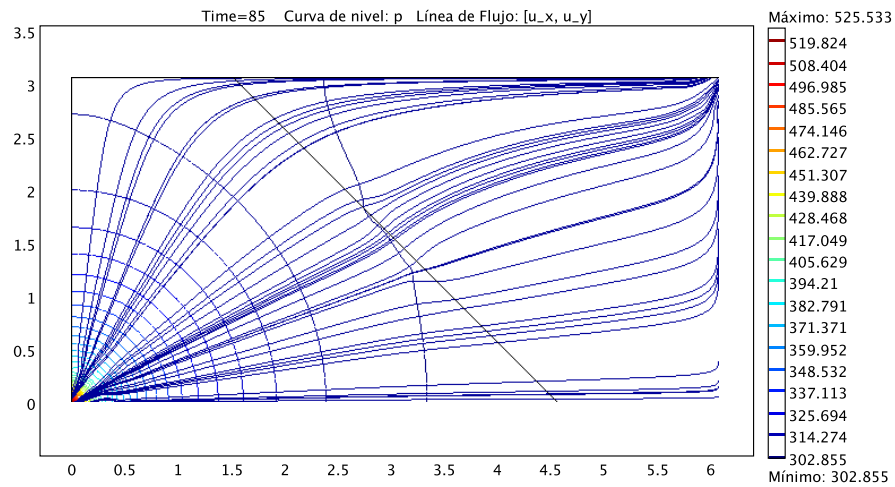


Figura 7.16: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento preferencial hacia el interior de la fractura y a lo largo de ésta.

Barrera al flujo ($k_{fr} \lll k_m$)

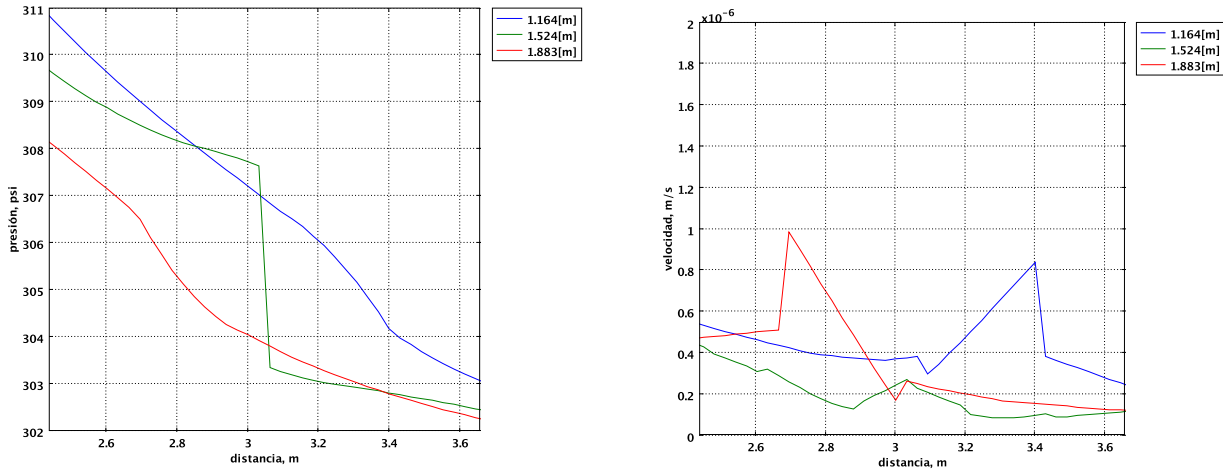


Figura 7.17: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

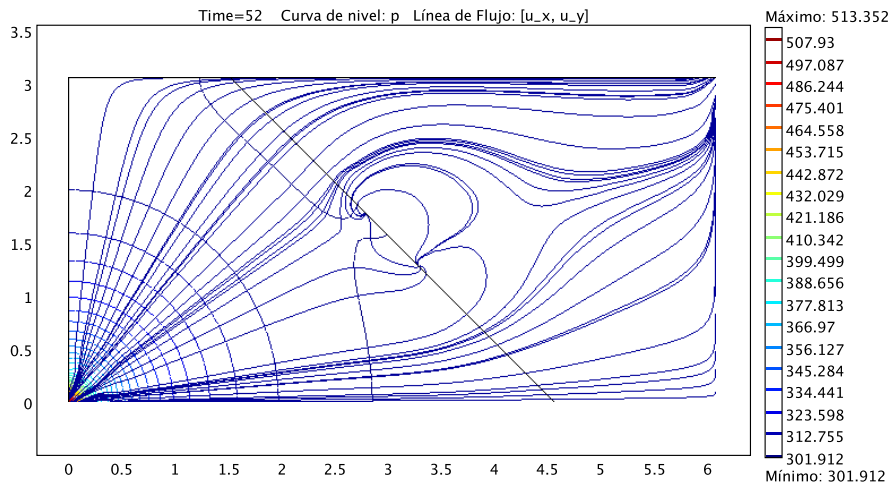


Figura 7.18: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento que tiende a evadir la fractura.

7.4.3. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$

Dominio

El dominio del modelo computacional es un rectángulo de base x_1 y altura x_2 . El subdominio correspondiente a la fractura es una línea de longitud l (ver Figura 7.19).

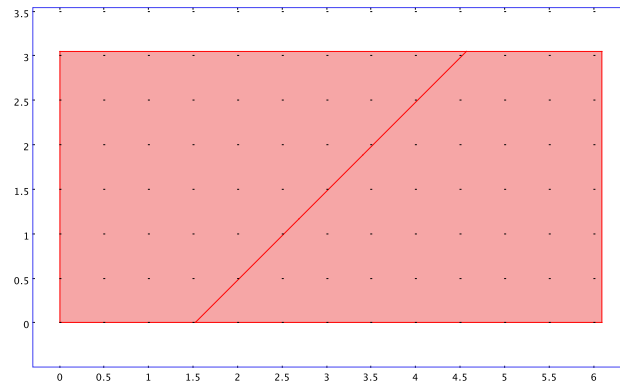


Figura 7.19: Dominio del modelo computacional donde $x_1 = 6.096 [m]$, $x_2 = 3.048 [m]$ y $l = 1.00584 [m]$

Mallado

Malla del dominio computacional (ver Figura 7.20).

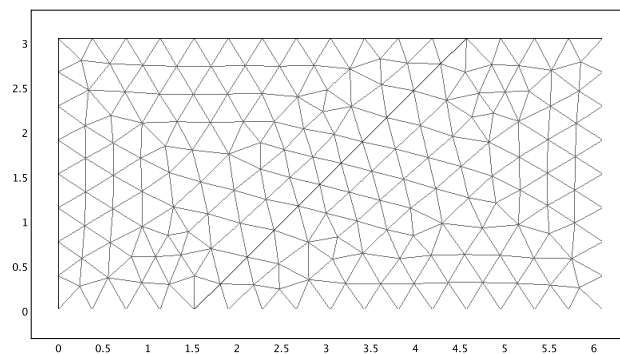


Figura 7.20: Mallado del dominio computacional con 771 grados de libertad y 338 elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos.

Fronteras

Fronteras del dominio computacional (ver Figura 7.21).

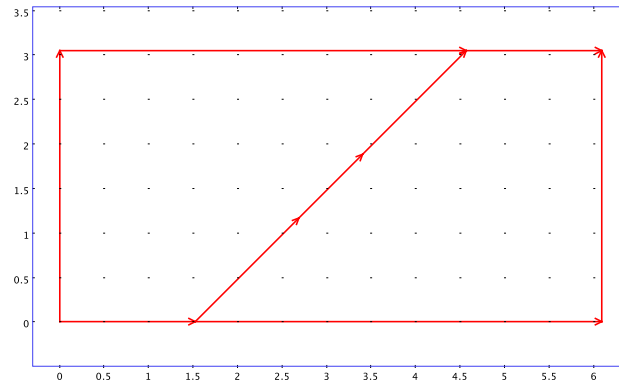


Figura 7.21: Fronteras del dominio computacional. Las fronteras externas son impermeables. Las fronteras internas son permeables.

Puntos

Puntos del dominio computacional (ver Figura 7.22).

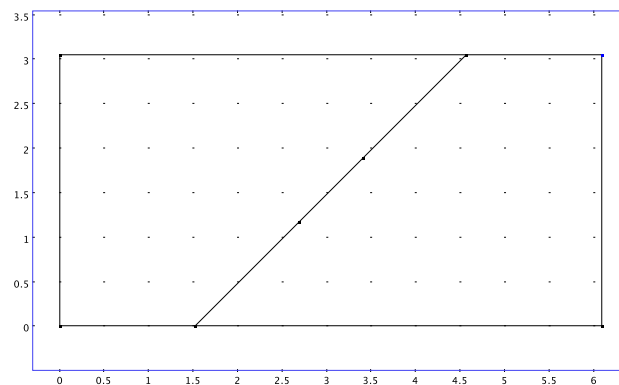


Figura 7.22: En el punto inferior izquierdo se impone una condición tipo Neumann para establecer inyección (fuente). En el punto superior derecho se impone una condición tipo Dirichlet para establecer producción a presión constante (sumidero).

Fractura abierta al flujo ($k_{fr} \gg k_m$)

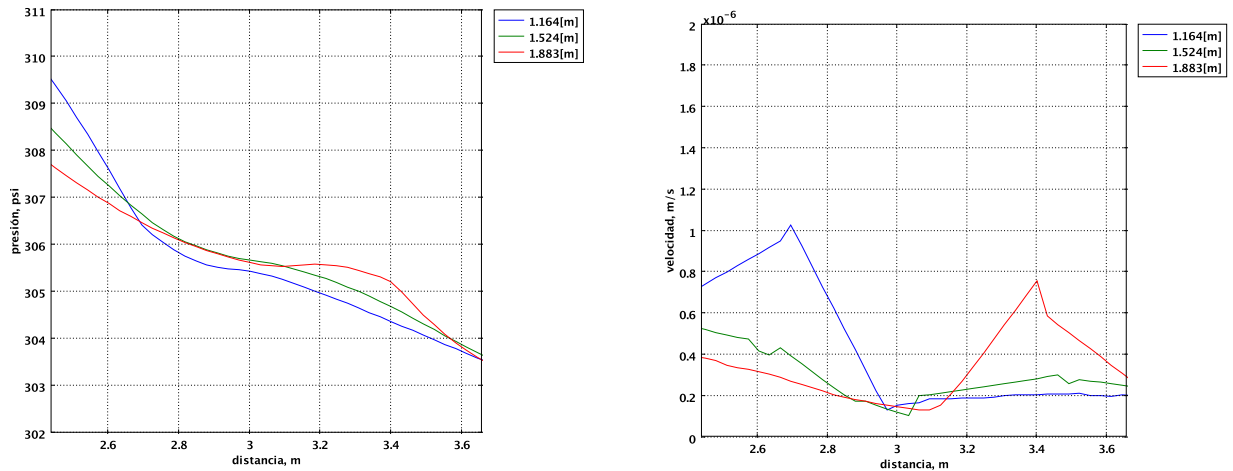


Figura 7.23: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

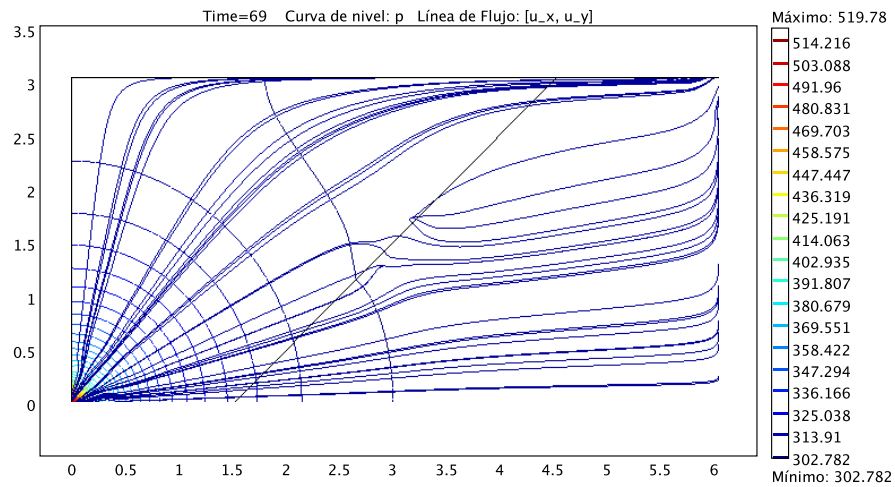


Figura 7.24: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento preferencial hacia el interior de la fractura y a lo largo de ésta.

Barrera al flujo ($k_{fr} \lll k_m$)

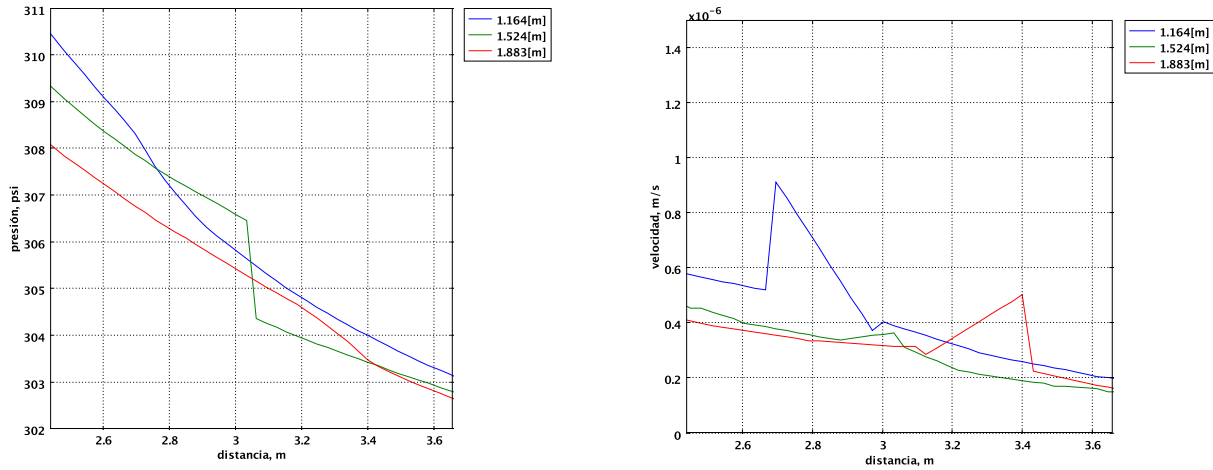


Figura 7.25: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

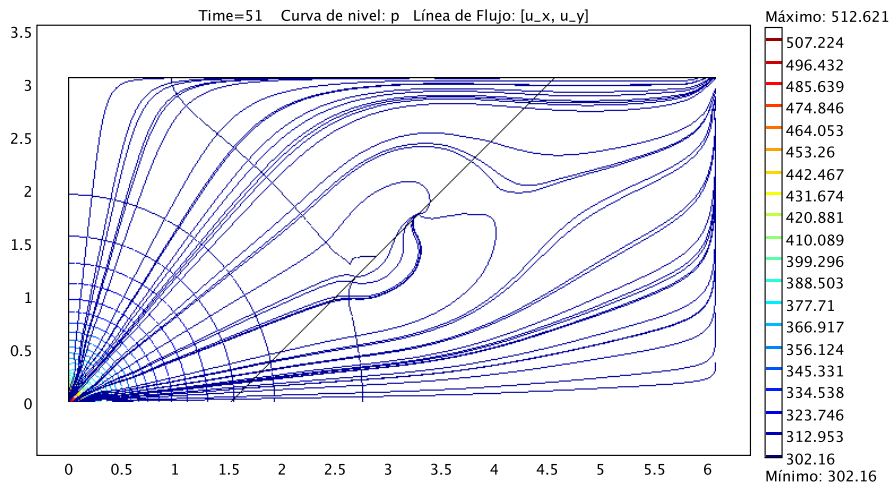


Figura 7.26: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento que tiende a evadir la fractura.

7.4.4. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$

Dominio

El dominio del modelo computacional es un rectángulo de base x_1 y altura x_2 . El subdominio correspondiente a la fractura es una línea de longitud l (ver Figura 7.27).

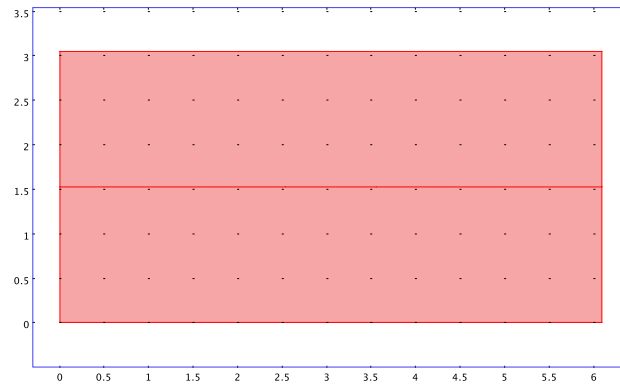


Figura 7.27: Dominio del modelo computacional donde $x_1 = 6.096 [m]$, $x_2 = 3.048 [m]$ y $l = 1.00584 [m]$

Mallado

Malla del dominio computacional (ver Figura 7.28).

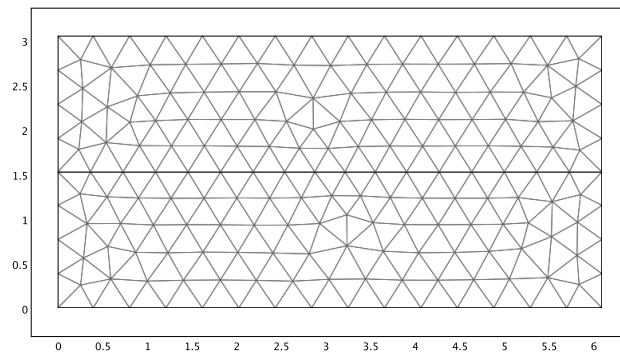


Figura 7.28: Mallado del dominio computacional con 781 grados de libertad y 332 elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos.

Fronteras

Fronteras del dominio computacional (ver Figura 7.29).

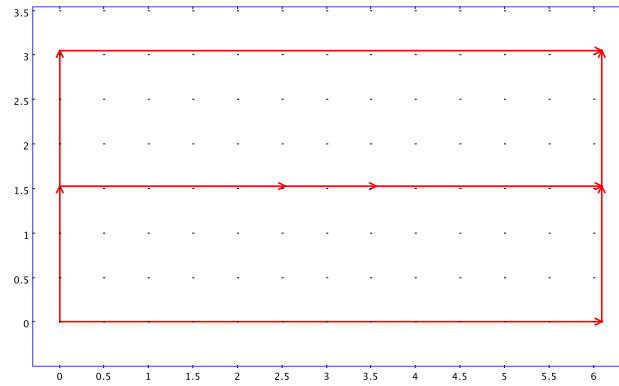


Figura 7.29: Fronteras del dominio computacional. Las fronteras externas son impermeables. Las fronteras internas son permeables.

Puntos

Puntos del dominio computacional (ver Figura 7.30).

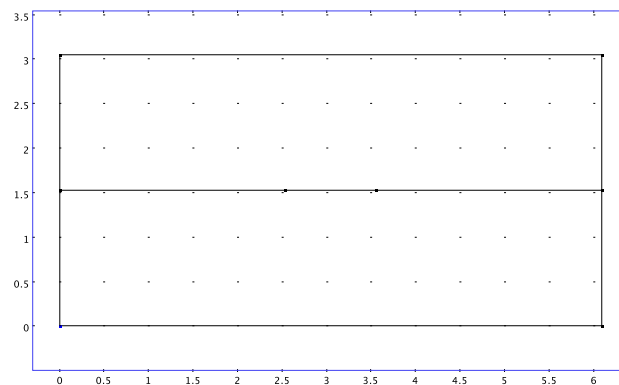


Figura 7.30: En el punto inferior izquierdo se impone una condición tipo Neumann para establecer inyección (fuente). En el punto superior derecho se impone una condición tipo Dirichlet para establecer producción a presión constante (sumidero).

Fractura abierta al flujo ($k_{fr} \gg k_m$)

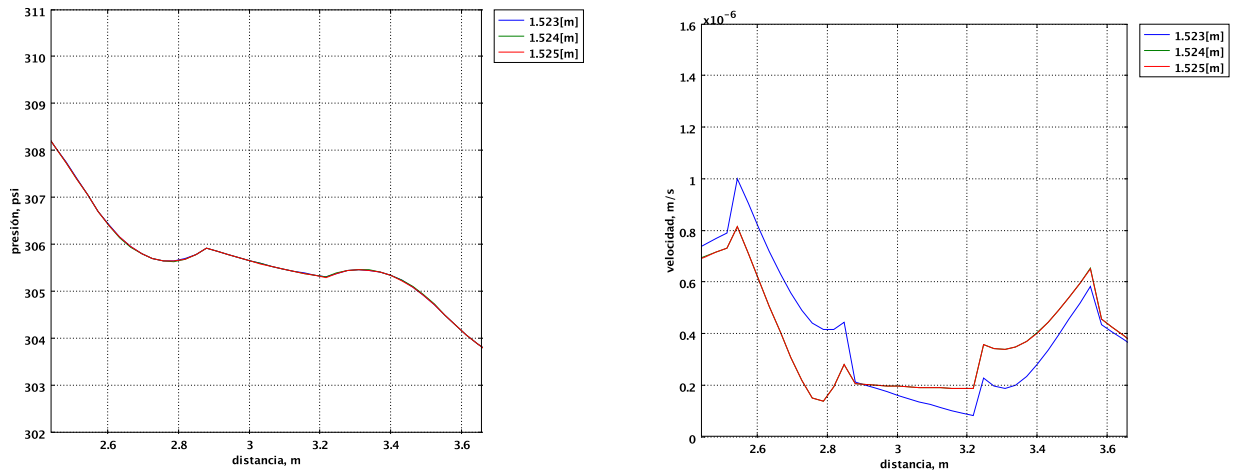


Figura 7.31: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

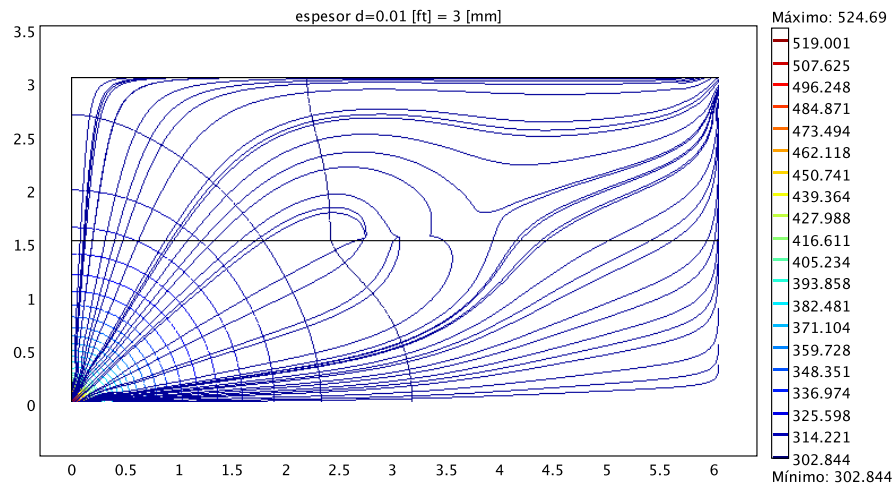


Figura 7.32: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento preferencial hacia el interior de la fractura y a lo largo de ésta.

Barrera al flujo ($k_{fr} \lll k_m$)

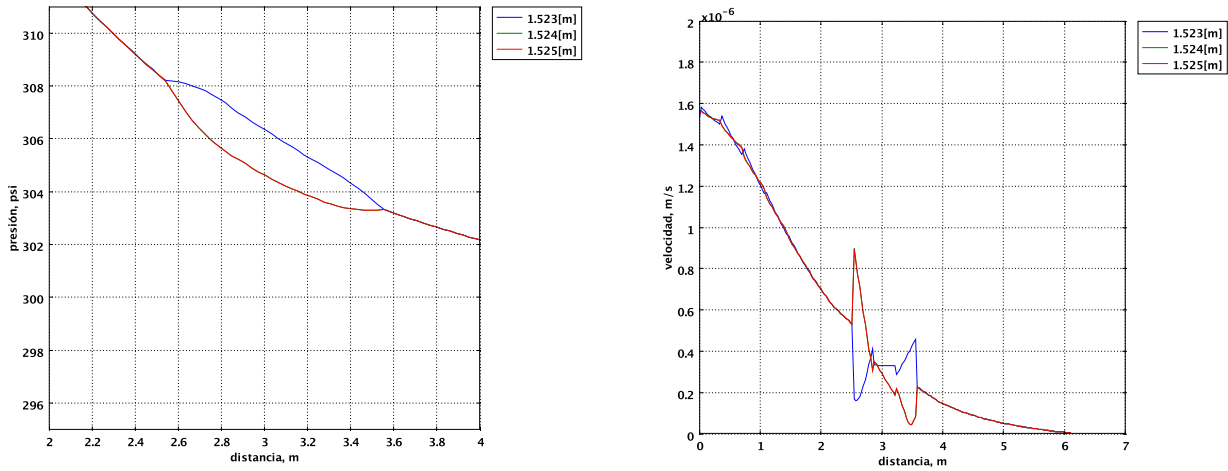


Figura 7.33: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

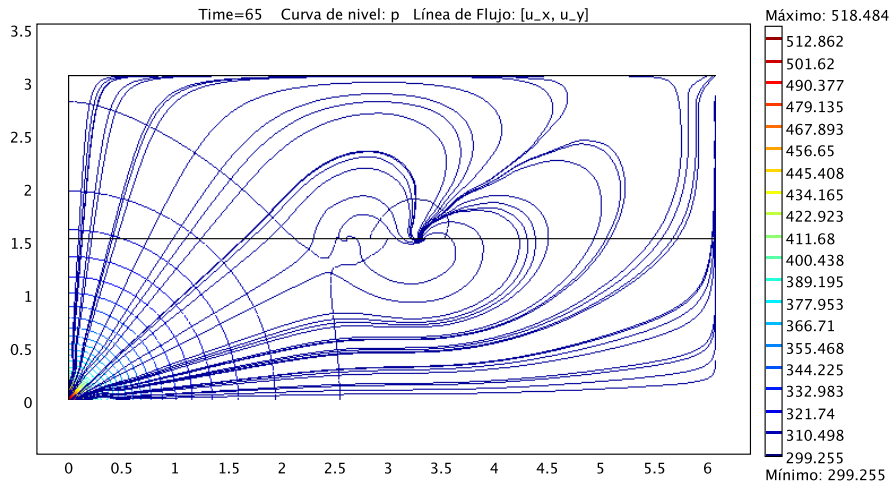


Figura 7.34: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento que tiende a evadir la fractura.

Capítulo 8

Modelo de Fractura Discreta Desconectada

8.1. Modelo Conceptual

1. Se considera un sistema cerrado bajo condiciones isotérmicas.
2. Existe una fase fluida y una inmóvil .
3. La fase fluida es un fluido newtoniano ligeramente compresible que consta de un solo componente.
4. La fase inmóvil es una matriz porosa homogénea ligeramente compresible.
5. La viscosidad de la fase fluida es constante.
6. Existe una fractura contenida en el medio poroso.
7. La fractura es considerada como una interfaz (discontinuidad), la cual representa a otro medio poroso homogéneo con propiedades petrofísicas diferentes.
8. Tanto el medio poroso como la fractura se encuentran totalmente saturados por la fase fluida.
9. Las permeabilidades del medio poroso y de la fractura son constantes.
10. La fase fluida presenta flujo darciano a través del medio poroso y de la fractura.
11. Se considera que no existe flujo difusivo en las fronteras del sistema, es decir, $\underline{\tau} = 0$.

8.2. Modelo Matemático

El modelo matemático de fractura discreta desconectada es una modificación al modelo de fractura discreta mediante descomposición de dominio presentado por Martin *et al.* (2005), ver Figura 8.1.

Ecuación de balance global

$$\frac{d}{dt}M_f(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) \, d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t) \, d\underline{x} \quad (8.1)$$

Se considera que existen interfaces en el interior del dominio, y no existe flujo difusivo en las fronteras del sistema, $\underline{\tau} = 0$.

Ecuación diferencial de balance local

$$\rho\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho\gamma \nabla z) \right) = g; \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t). \quad (8.2)$$

Ecuación que describe el flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso, derivada en el capítulo 5, ecuación 5.35.

Ecuación de salto de balance local

$$\rho \left\{ \left[-\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho \gamma \nabla z) \right]^+ - \left[-\frac{1}{\mu} \underline{k} \cdot (\nabla p - \rho \gamma \nabla z) \right]^- \right\} \cdot \underline{n}_\Sigma = g_\Sigma \quad (8.3)$$

Ecuación de salto para el flujo de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso con discontinuidades derivada en el capítulo 6, ecuación 6.10.

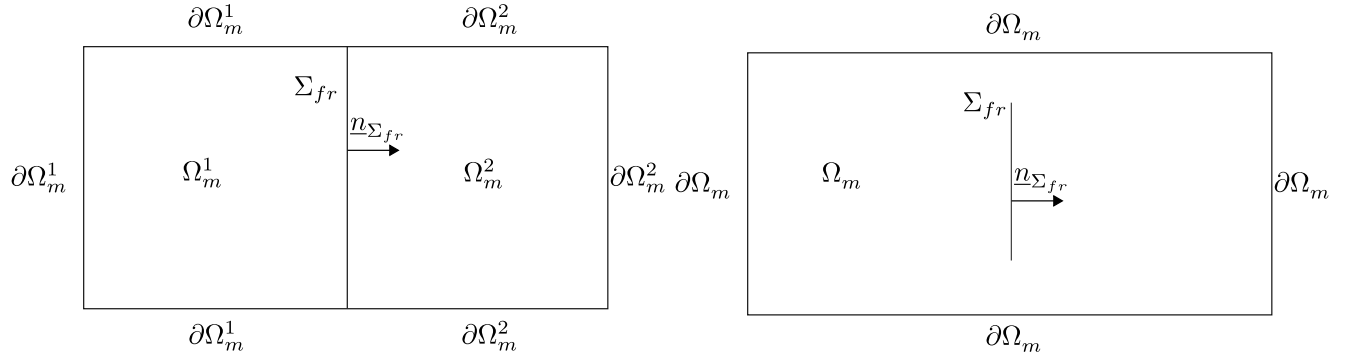


Figura 8.1: Izquierda: Representación esquemática del modelo de fractura discreta mediante descomposición de dominio, presentado en el capítulo 7. Derecha: Representación esquemática del modelo de fractura discreta desconectada.

Ecuaciones de balance local para los subdominios correspondientes a un medio poroso

Si se considera flujo horizontal y se divide por la densidad, las ecuaciones de balance local 8.2 y 8.3 se pueden reescribir como

$$\phi^i c_t^i \frac{\partial p^i}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{u}^i = g^i / \rho \equiv q^i; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_m^i \setminus \Sigma_{fr}(t) \quad i = 1, 2 \quad (8.4)$$

$$(\underline{u}^1 - \underline{u}^2) \cdot \underline{n}_{\Sigma_{fr}} = g_{\Sigma_{fr}} / \rho \equiv q_{\Sigma_{fr}}; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_{fr}(t) \quad (8.5)$$

donde

$$\underline{u}^i = -\frac{1}{\mu} \underline{k}_m^i \cdot \nabla p^i; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_m^i \quad i = 1, 2 \quad (8.6)$$

$$c_t^i = c_f + c_R^i \quad (8.7)$$

Ecuaciones de balance local para el subdominio correspondiente a la fractura

De manera análoga, la ecuación diferencial de balance local para la fractura es

$$\phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial p_{fr}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{u}_{fr} = g_{fr}/\rho \equiv q_{fr}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{fr} \quad (8.8)$$

donde

$$\underline{u}_{fr} = -\frac{1}{\mu_{fr}} \underline{k}_{fr} \cdot \nabla p_{fr}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{fr} \quad (8.9)$$

$$c_{tfr} = c_f + c_{fr} \quad (8.10)$$

La ecuación 8.8 puede reescribirse como

$$\phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial p_{fr}}{\partial t} + \nabla_n \cdot \underline{u}_{fr} + \nabla_\tau \cdot \underline{u}_{fr} = q_{fr}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{fr} \quad (8.11)$$

donde ∇_n y ∇_τ son los operadores de la divergencia normal y tangencial.

Integrando la ecuación 8.11 en la dirección normal a la fractura, obtenemos

$$\int_{-d/2}^{d/2} \phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial p_{fr}}{\partial t} d\underline{n} + \int_{-d/2}^{d/2} \nabla_n \cdot \underline{u}_{fr} \cdot \underline{n} d\underline{n} + \int_{-d/2}^{d/2} \nabla_\tau \cdot \underline{u}_{fr} d\underline{n} = \int_{-d/2}^{d/2} q_{fr} d\underline{n} \quad (8.12)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial p_{fr}}{\partial t} d\underline{n} = \phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-d/2}^{d/2} p_{fr} d\underline{n} = d \phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial P_{fr}}{\partial t} \quad (8.13)$$

donde $P_{fr} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} p_{fr} d\underline{n}$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \nabla_n \cdot \underline{u}_{fr} \cdot \underline{n} d\underline{n} = \underline{u}_{fr} \cdot \underline{n} \Big|_{-d/2}^{d/2} = \underline{u}_{fr} \cdot \underline{n} \Big|_{d/2} - \underline{u}_{fr} \cdot \underline{n} \Big|_{-d/2} = \underline{u}_{fr} \cdot \underline{n} \Big|_{\Sigma_2} - \underline{u}_{fr} \cdot \underline{n} \Big|_{\Sigma_1} \quad (8.14)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \nabla_{\tau} \cdot \underline{u}_{fr} d\underline{n} = \nabla_{\tau} \cdot \int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{fr} d\underline{n} = \nabla_{\tau} \cdot \underline{U}_{fr} \quad (8.15)$$

donde $\underline{U}_{fr} = \int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{fr} d\underline{n}$

Considerando que

$$Q_{fr} = \int_{-d/2}^{d/2} q_{fr} d\underline{n} \quad (8.16)$$

Entonces podemos reescribir la ecuación 8.12 como

$$d\phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial P_{fr}}{\partial t} + (\underline{u}_{fr} \cdot \underline{n})|_{\Sigma_2} - (\underline{u}_{fr} \cdot \underline{n})|_{\Sigma_1} + \nabla_{\tau} \cdot \underline{U}_{fr} = Q_{fr}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{fr} \quad (8.17)$$

Al considerar la continuidad del flujo a través de las interfaces Σ_1 y Σ_2 podemos reescribir la ecuación 8.17 como

$$d\phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial P_{fr}}{\partial t} + (\underline{u}^2 \cdot \underline{n}) - (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}) + \nabla_{\tau} \cdot \underline{U}_{fr} = Q_{fr}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{fr} \quad (8.18)$$

donde $(\underline{u}^2 \cdot \underline{n}) - (\underline{u}^1 \cdot \underline{n})$ es el termino que representa el flujo de los subdominios hacia el interior de la fractura.

Reorganizando la ecuación 8.18

$$d\phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial P_{fr}}{\partial t} + \nabla_{\tau} \cdot \underline{U}_{fr} = Q_{fr} + (\underline{u}^1 - \underline{u}^2) \cdot \underline{n}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{fr} \quad (8.19)$$

Sin embargo, podemos descomponer la velocidad en la fractura \underline{u}_{fr} en términos de sus componentes normal y tangencial

$$\underline{u}_{fr} = \underline{u}_{fr_n} + \underline{u}_{fr_{\tau}} \quad (8.20)$$

donde

$$\underline{u}_{fr_n} = -\frac{1}{\mu_{\underline{fr}_n}} \underline{k}_{\underline{fr}_n} \cdot \nabla_n p_{fr} \quad (8.21)$$

$$\underline{u}_{fr_\tau} = -\frac{1}{\mu_{\underline{fr}_\tau}} \underline{k}_{\underline{fr}_\tau} \cdot \nabla_\tau p_{fr} \quad (8.22)$$

Al integrar la velocidad tangencial 8.22 en la dirección normal a la fractura, obtenemos

$$\int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{fr_\tau} d\underline{n} = \int_{-d/2}^{d/2} -\frac{1}{\mu_{\underline{fr}_\tau}} \underline{k}_{\underline{fr}_\tau} \cdot \nabla_\tau p_{fr} d\underline{n} \quad (8.23)$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} -\frac{1}{\mu_{\underline{fr}_\tau}} \underline{k}_{\underline{fr}_\tau} \cdot \nabla_\tau p_{fr} d\underline{n} = -\frac{1}{\mu_{\underline{fr}_\tau}} \underline{k}_{\underline{fr}_\tau} \cdot \nabla_\tau \int_{-d/2}^{d/2} p_{fr} d\underline{n} = -\frac{d}{\mu_{\underline{fr}_\tau}} \underline{k}_{\underline{fr}_\tau} \cdot \nabla_\tau P_{fr} \quad (8.24)$$

donde $P_{fr} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} p_{fr} d\underline{n}$

Por lo tanto

$$\int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{fr_\tau} d\underline{n} = -\frac{d}{\mu_{\underline{fr}_\tau}} \underline{k}_{\underline{fr}_\tau} \cdot \nabla_\tau P_{fr} \quad (8.25)$$

$$\underline{U}_{fr} = -\frac{d}{\mu_{\underline{fr}_\tau}} \underline{k}_{\underline{fr}_\tau} \cdot \nabla_\tau P_{fr}; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_{fr} \quad (8.26)$$

Esto es la ley de Darcy en la fractura.

Sustituyendo \underline{U}_{fr} en la ecuación 8.19

$$d\phi_{fr} c_{frt} \frac{\partial P_{fr}}{\partial t} - \nabla_\tau \cdot \left(\frac{d}{\mu_{\underline{fr}_\tau}} \underline{k}_{\underline{fr}_\tau} \cdot \nabla_\tau P_{fr} \right) = Q_{fr} + (\underline{u}^1 - \underline{u}^2) \cdot \underline{n}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{fr} \quad (8.27)$$

La ecuación 8.21 debe ser utilizada para dar condiciones de frontera a lo largo de Σ_{fr} para los sistemas en Ω_m^1 y Ω_m^2 , los cuales toman en cuenta una diferencia de presión de un lado de la fractura al otro.

Integrando la velocidad normal 8.21 en la dirección normal a la fractura, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{frn} \cdot \underline{n} d\underline{n} &= \int_{-d/2}^{d/2} -\frac{1}{\mu_{frn}} \underline{k}_{frn} \cdot \nabla_n p_{fr} \cdot \underline{n} d\underline{n} = -\frac{1}{\mu_{frn}} \int_{-d/2}^{d/2} \nabla_n p_{fr} \cdot \underline{n} d\underline{n} \\
 &= -\frac{1}{\mu_{frn}} (p_{fr}) \Big|_{-d/2}^{d/2} = -\frac{1}{\mu_{frn}} (p_{fr}|_{d/2} - p_{fr}|_{-d/2}) \\
 &= -\frac{1}{\mu_{frn}} (p_{fr}|_{\Sigma_2} - p_{fr}|_{\Sigma_1})
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

Por lo tanto

$$\int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{frn} \cdot \underline{n} d\underline{n} = -\frac{1}{\mu_{frn}} (p_{fr}|_{\Sigma_2} - p_{fr}|_{\Sigma_1}) \tag{8.29}$$

La integral $\int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{frn} \cdot \underline{n} d\underline{n}$ puede ser aproximada mediante la regla del trapecoide.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} (b-a) [f(a) + f(b)] \tag{8.30}$$

$$\int_{-d/2}^{d/2} \underline{u}_{frn} \cdot \underline{n} d\underline{n} \approx \frac{1}{2} (d) [(\underline{u}_{fr} \cdot \underline{n})|_{\Sigma_2} + (\underline{u}_{fr} \cdot \underline{n})|_{\Sigma_1}] \tag{8.31}$$

Considerando continuidad del flujo a través de las interfaces Σ_1 y Σ_2

$$\frac{d}{2} [(\underline{u}_{fr} \cdot \underline{n})|_{\Sigma_2} + (\underline{u}_{fr} \cdot \underline{n})|_{\Sigma_1}] = \frac{d}{2} [(\underline{u}^2 \cdot \underline{n})|_{\Sigma_2} + (\underline{u}^1 \cdot \underline{n})|_{\Sigma_1}] \tag{8.32}$$

y continuidad de la presión a través de las interfaces Σ_1 y Σ_2

$$-\frac{1}{\mu} \underline{k}_{frn} (p_{fr}|_{\Sigma_2} - p_{fr}|_{\Sigma_1}) = -\frac{1}{\mu} \underline{k}_{frn} (p^2|_{\Sigma_2} - p^1|_{\Sigma_1}) \quad (8.33)$$

se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{d}{2} [(\underline{u}^2 \cdot \underline{n})|_{\Sigma_2} + (\underline{u}^1 \cdot \underline{n})|_{\Sigma_1}] = -\frac{1}{\mu} \underline{k}_{frn} (p^2|_{\Sigma_2} - p^1|_{\Sigma_1}) \quad (8.34)$$

Reorganizando la ecuación 8.34

$$[(\underline{u}^2 \cdot \underline{n})|_{\Sigma_2} + (\underline{u}^1 \cdot \underline{n})|_{\Sigma_1}] = -\frac{2}{\mu d} \underline{k}_{frn} (p^2|_{\Sigma_2} - p^1|_{\Sigma_1}) \quad (8.35)$$

Recordando que $\underline{n} = \underline{n}_{\Sigma_1} = -\underline{n}_{\Sigma_2}$

$$[(\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1} - (\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2}] = -\frac{2}{\mu d} \underline{k}_{frn} (p^2|_{\Sigma_2} - p^1|_{\Sigma_1}) \quad (8.36)$$

$$[(\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1} - (\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2}] = -\alpha_{fr} (p^2|_{\Sigma_2} - p^1|_{\Sigma_1}) \quad (8.37)$$

donde $\alpha_{fr} = \frac{2\underline{k}_{frn}}{\mu d}$

Reorganizando la ecuación 8.36

$$(p^2|_{\Sigma_2} - p^1|_{\Sigma_1}) = \frac{1}{\alpha_{fr}} [(\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2} - (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1}]; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_{fr} \quad (8.38)$$

Derivación de las condiciones de frontera en las interfaces

Para obtener condiciones de frontera en Σ_{fr} para el problema en Ω_m se requiere una ecuación adicional. Como la ecuación 8.38 expresa la diferencia entre las presiones a través de Σ_{fr} , una elección natural es obtener una ecuación que exprese la suma de presiones en Σ_{fr} .

Si suponemos que la presión promedio a través de la fractura P_{fr} es también el promedio de las presiones en las caras de la interfaz Σ_{fr} , podemos establecer que

$$p^2|_{\Sigma_2} + p^1|_{\Sigma_1} = 2P_{fr} \quad (8.39)$$

Condición inicial

$$p(t_0) = p_0 \quad (8.40)$$

Condición de frontera externa

En las cuatro fronteras externas se considera que no existe flujo, por lo que se establecen condiciones de frontera tipo Neumann.

$$\underline{n} \cdot \underline{u} = 0; \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega(t) \quad (8.41)$$

Condiciones de frontera interna

En la frontera interna que corresponde a la discontinuidad, se establecen condiciones tipo Neumann y Dirichlet.

$$(p^2|_{\Sigma_2} - p^1|_{\Sigma_1}) = \frac{1}{\alpha_{fr}} [(\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2} - (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1}]; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma_{fr} \quad (8.42)$$

$$p^2|_{\Sigma_2} + p^1|_{\Sigma_1} = 2P_{fr} \quad (8.43)$$

8.3. Modelo Computacional

Considerando flujo horizontal, la ecuación (5.35) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\bar{\alpha}\rho\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\bar{\alpha}\rho}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right) + \bar{\alpha}g; \quad \forall \underline{x} \in \Omega(t) \quad (8.44)$$

dividiendo la expresión anterior por la densidad se tiene

$$\bar{\alpha}\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\bar{\alpha}}{\mu} \underline{k} \cdot \nabla p \right) + \bar{\alpha}q; \quad \forall \underline{x} \in \Omega(t) \quad (8.45)$$

donde $q = g/\rho$ y $\bar{\alpha} = H$

Para la implementación de la ecuación de balance local que gobierna el flujo en el subdominio correspondiente al medio poroso, se utiliza el modo EDP con formulación de coeficientes para análisis dependiente del tiempo de COMSOL Multiphysics. La ecuación general de formulación de coeficientes está definida de la siguiente manera

$$e_a \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} + \gamma) + \beta \cdot \nabla \mathbf{u} + a \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (8.46)$$

por lo tanto, establecemos

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{p}, \quad \mathbf{d}_a \equiv \mathbf{H} * \text{phi} * \text{ct}, \quad \mathbf{c} \equiv \mathbf{H} * \mathbf{k} / \mu, \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{a} = \mathbf{e}_a = \mathbf{f} \equiv \mathbf{0}.$$

donde $\text{ct} = \text{cf} + \text{cR}$

$$H\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\frac{H}{\mu} \mathbf{k} \cdot \nabla p \right) = 0; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_m \quad (8.47)$$

Los términos fuente o sumidero se implementan en un punto. Para establecer una fuente o sumidero en un punto, se dibuja un punto en el lugar apropiado y se especifica la descarga. Se deberá establecer la descarga como un gasto volumétrico, con signo negativo para denotar un sumidero y positivo para denotar una fuente Kitanidis (2008).

La ecuación de balance local correspondiente a la fractura necesita ser definida en un modo de formulación débil, en una dimensión menor a las ecuaciones del subdominio y ser acoplada a ellas a través de condiciones de frontera.

Si consideramos que no existe ningún término fuente Q_{fr} , la ecuación 8.27 puede escribirse como

$$d\phi_{fr} c_{tfr} \frac{\partial P_{fr}}{\partial t} + (\underline{u}^2 - \underline{u}^1) \cdot \underline{n} - \nabla_\tau \cdot \left(\frac{d}{\mu} \mathbf{k}_{fr\tau} \cdot \nabla_\tau P_{fr} \right) = 0; \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{fr} \quad (8.48)$$

Esta ecuación en el modo de aplicación de formulación débil de contorno de COMSOL Multiphysics, está expresada por

Término débil

$$\mathbf{weak} = \mathbf{wfr}$$

definido como

$$\mathbf{wfr} = (-(\text{phifr} * \text{ctfr} * \mathbf{d} * \text{Pft}) + (\mathbf{u1} + \mathbf{u2})) * \text{test}(\text{Pf}) + ((\mathbf{kfr} / \mu) * \mathbf{d} * (-\text{test}(\text{PfTx}) * \text{PfTx} - \text{test}(\text{PfTy}) * \text{PfTy}))$$

donde Pf es la variable dependiente, test() son las funciones de peso, Tx y Ty son las derivadas tangenciales con respecto a x y y, respectivamente, y t indica la derivada con respecto al tiempo, de acuerdo a la sintaxis de COMSOL Multiphysics.

$$\mathbf{u1} = \mathbf{uu}_x + \mathbf{uu}_y \quad \text{y} \quad \mathbf{u2} = \mathbf{du}_x + \mathbf{du}_y$$

$$\mathbf{uu}_x = (-\mathbf{k} / \mu) * \mathbf{upx}, \quad \mathbf{uu}_y = (-\mathbf{k} / \mu) * \mathbf{upy}, \quad \mathbf{du}_x = (-\mathbf{k} / \mu) * \mathbf{dpx} \quad \text{y} \quad \mathbf{du}_y = (-\mathbf{k} / \mu) * \mathbf{dpy}$$

donde upx y upy son las derivadas de p sobre la cara superior de una frontera con respecto a x y y, respectivamente. dpx y dpy son las derivadas de p sobre la cara inferior de una frontera con respecto a x y y, respectivamente, de acuerdo a la sintaxis de COMSOL Multiphysics.

Condición inicial

$$\mathbf{u}(t_0) = p_0 \quad (8.49)$$

Condición de frontera externa

En las cuatro fronteras se considera que no existe flujo, por lo que se establecen condiciones de frontera de tipo Neumann. La ecuación general para condición de frontera de tipo Neumann en COMSOL está definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{n} \cdot (c \nabla p + \alpha p - \gamma) + qp = g \quad (8.50)$$

por lo que establecemos: $\mathbf{q} = \mathbf{g} \equiv 0$

$$\underline{n} \cdot \underline{u} = 0; \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_m \quad (8.51)$$

Condición de frontera interna

La ecuación de balance local correspondiente a la fractura en una dimensión menor es acoplada a las ecuaciones de los subdominios a través de dos condiciones de frontera, una por cada lado de la fractura. Para establecer las condiciones de frontera sobre la frontera interna que representa a la fractura, se utiliza la ecuación general para condición de frontera de tipo Neumann, en COMSOL está definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{n} \cdot (c \nabla p + \alpha p - \gamma) + qp = g \quad (8.52)$$

por lo tanto establecemos

$$\mathbf{q} = 0 \quad , \quad \mathbf{g} = (-2 * \alpha_{fr}) * (\text{down}(p) - \text{up}(p)), \quad \mathbf{h} = Pf/p$$

y $\mathbf{r} = (\text{down}(p) + \text{up}(p))/2$

considerando que $\mathbf{n}_x = -1$, donde \mathbf{n}_x es la componente x del vector unitario normal \mathbf{n} , es decir, $\mathbf{n} = (-1, 0)$

donde

$$\alpha_{fr} = (2 * k_{fr}) / (\mu * d)$$

$$(p^2|_{\Sigma_2} - p^1|_{\Sigma_1}) = \frac{1}{\alpha_{fr}} [(\underline{u}^2 \cdot \underline{n}_{\Sigma_2})|_{\Sigma_2} - (\underline{u}^1 \cdot \underline{n}_{\Sigma_1})|_{\Sigma_1}] \quad (8.53)$$

$$p^2|_{\Sigma_2} + p^1|_{\Sigma_1} = 2P^{fr} \quad (8.54)$$

8.4. Casos de Estudio

En el modelo de fractura discreta mediante descomposición de dominio para flujo monofásico ligeramente compresible se consideran los mismos casos de estudio que han sido propuestos en el capítulo 6 para el modelo de fractura explícita.

Se presentan los modelos computacionales correspondientes a cuatro orientaciones diferentes de la fractura, $\theta = 0^\circ$, $\theta = 45^\circ$, $\theta = -45^\circ$ y $\theta = 90^\circ$, ver Figura 8.2. Para cada orientación se consideran dos casos, cuando la fractura actúa como un canal preferencial al flujo y cuando actúa como una barrera.

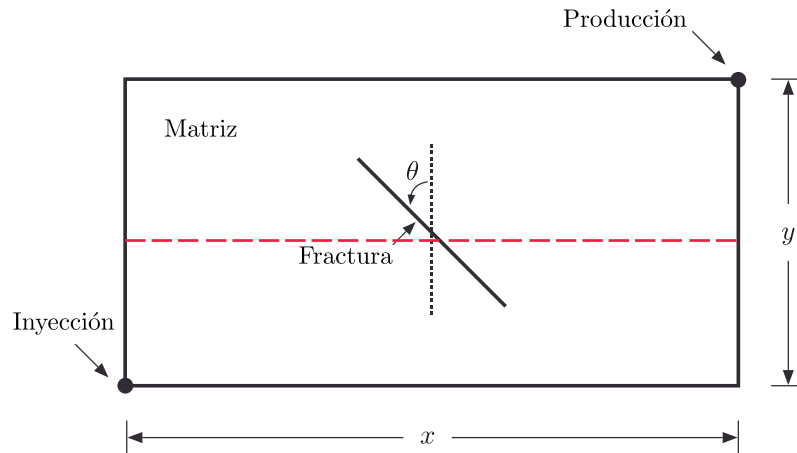


Figura 8.2: Representación esquemática del caso de estudio. Donde θ representa los grados con respecto a la línea vertical discontinua, correspondiente a la orientación de la fractura.

8.4.1. Fractura con orientación $\theta = 0^\circ$

Dominio

El dominio del modelo computacional es un rectángulo de base x_1 y altura x_2 . El subdominio correspondiente a la fractura es una línea de longitud l (ver Figura 8.3).

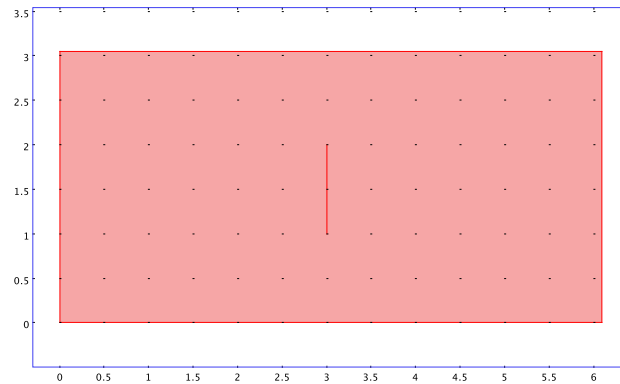


Figura 8.3: Dominio del modelo computacional donde $x_1 = 6.096 [m]$, $x_2 = 3.048 [m]$ y $l = 1.00584 [m]$

Mallado

Malla del dominio computacional (ver Figura 8.4).

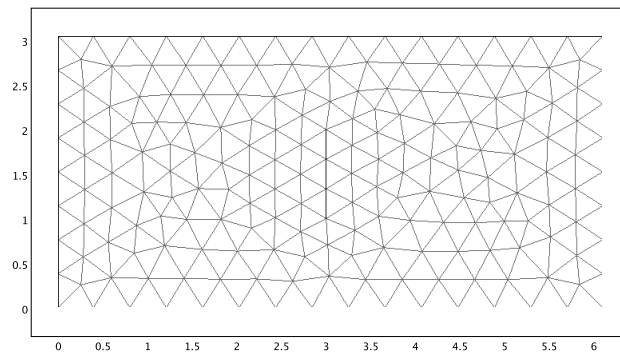


Figura 8.4: Mallado del dominio computacional con 726 grados de libertad y 336 elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos.

Fronteras

Fronteras del dominio computacional (ver Figura 8.5).

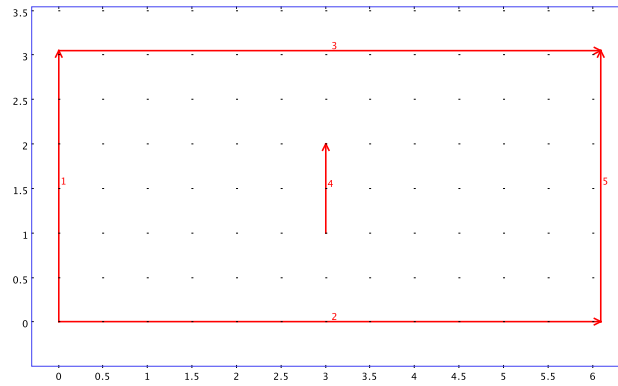


Figura 8.5: Fronteras del dominio computacional, con su indexación correspondiente. Las fronteras externas 1, 2, 3 y 5 son impermeables. La frontera interna 4 es permeable.

Puntos

Puntos del dominio computacional (ver Figura 8.6).

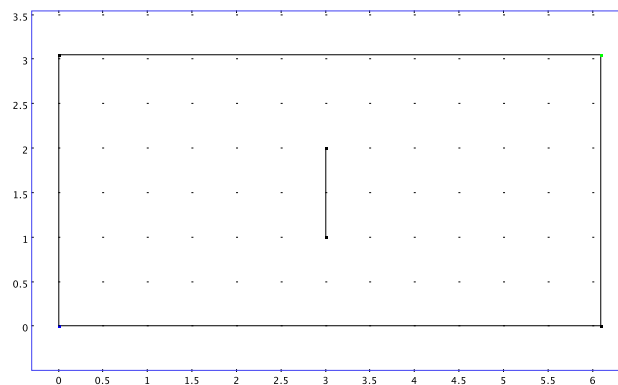


Figura 8.6: En el punto inferior izquierdo se impone una condición tipo Neumann para establecer inyección (fuente). En el punto superior derecho se impone una condición tipo Dirichlet para establecer producción a presión constante (sumidero).

Fractura abierta al flujo ($k_{fr} \gg k_{mp}$)

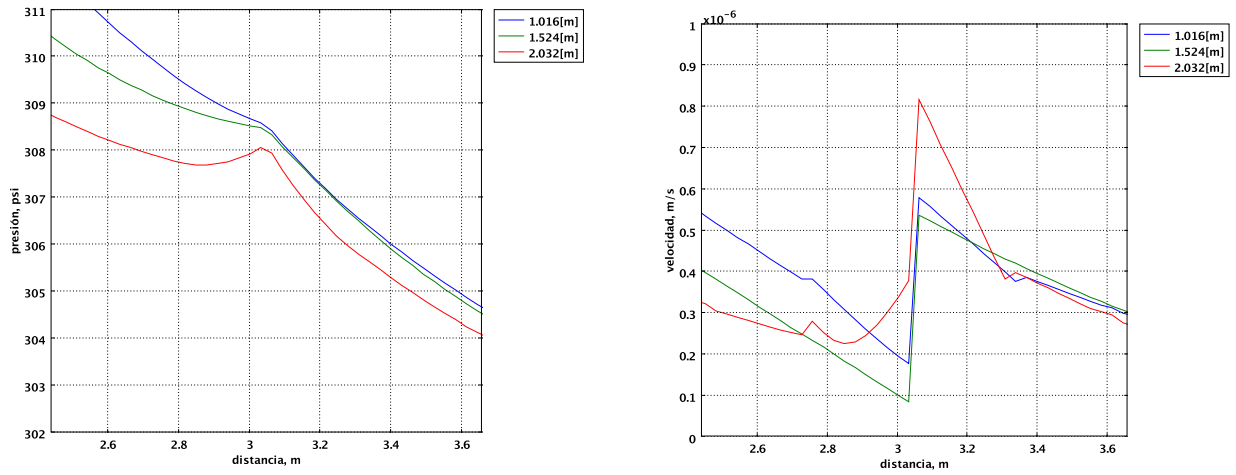


Figura 8.7: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

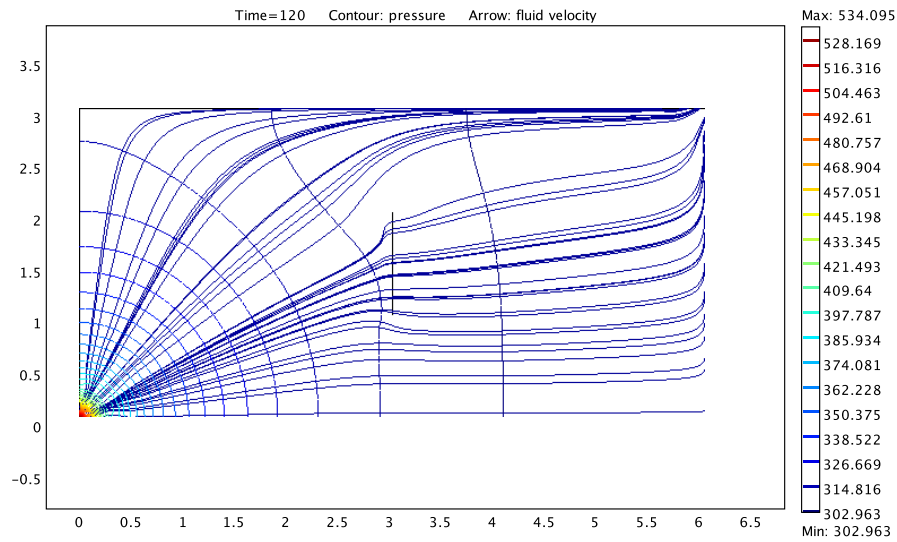


Figura 8.8: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento preferencial hacia el interior de la fractura y a lo largo de ésta.

Barrera al flujo ($k_{fr} \lll k_{mp}$)

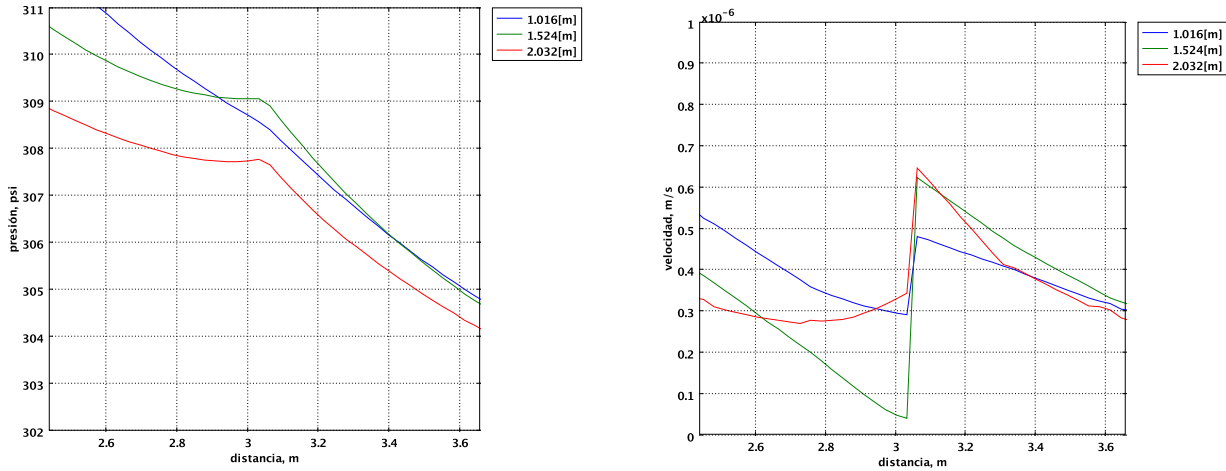


Figura 8.9: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

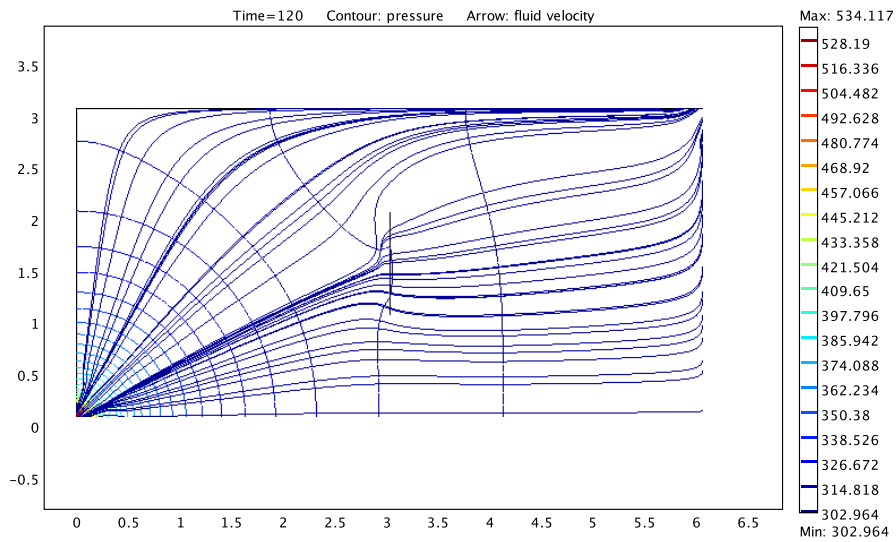


Figura 8.10: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento que tiende a evadir la fractura.

8.4.2. Fractura con orientación $\theta = 45^\circ$

Dominio

El dominio del modelo computacional es un rectángulo de base x_1 y altura x_2 . El subdominio correspondiente a la fractura es una línea de longitud l (ver Figura 8.11).

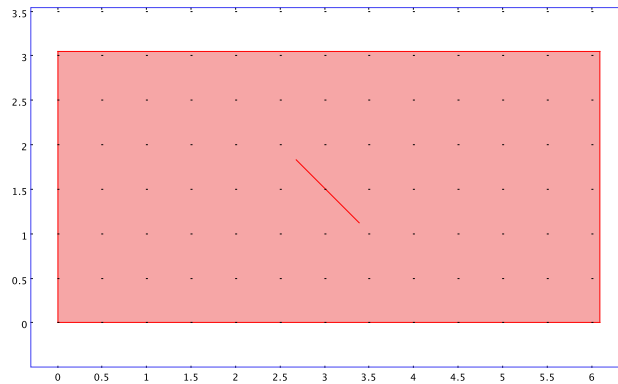


Figura 8.11: Dominio del modelo computacional donde $x_1 = 6.096 [m]$, $x_2 = 3.048 [m]$ y $l = 1.00584 [m]$

Mallado

Malla del dominio computacional (ver Figura 8.12).

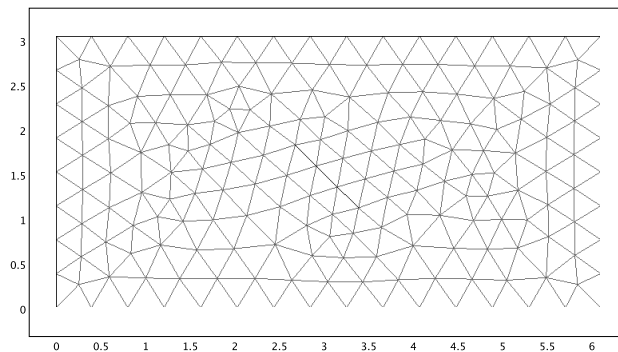


Figura 8.12: Mallado del dominio computacional con 730 grados de libertad y 338 elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos.

Fronteras

Fronteras del dominio computacional (ver Figura 8.13).

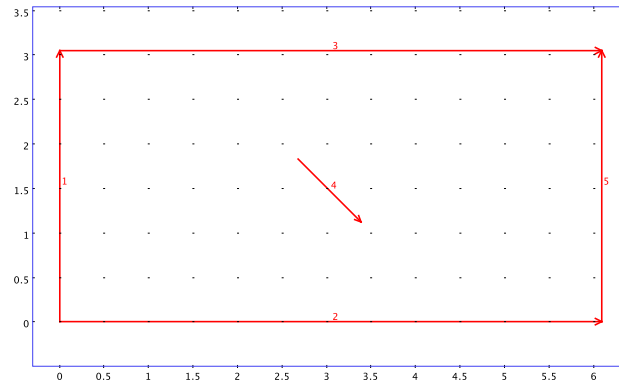


Figura 8.13: Fronteras del dominio computacional, con su indexación correspondiente. Las fronteras externas 1, 2, 3 y 5 son impermeables. La frontera interna 4 es permeable.

Puntos

Puntos del dominio computacional (ver Figura 8.14).

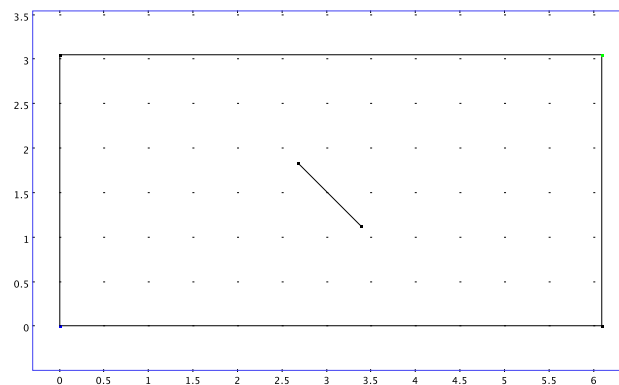


Figura 8.14: En el punto inferior izquierdo se impone una condición tipo Neumann para establecer inyección (fuente). En el punto superior derecho se impone una condición tipo Dirichlet para establecer producción a presión constante (sumidero).

Fractura abierta al flujo ($k_{fr} \gg k_{mp}$)

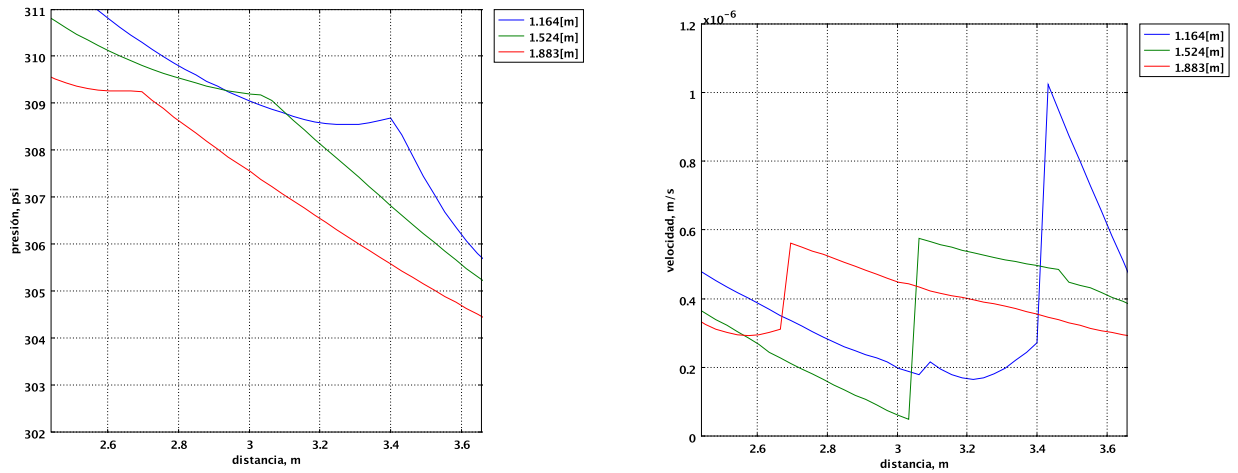


Figura 8.15: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

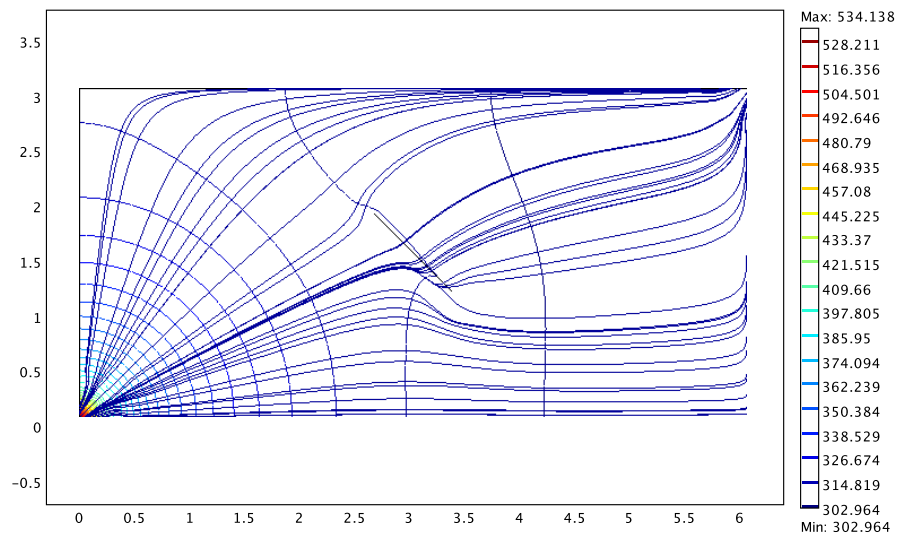


Figura 8.16: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento preferencial hacia el interior de la fractura y a lo largo de ésta.

Barrera al flujo ($k_{fr} \lll k_{mp}$)

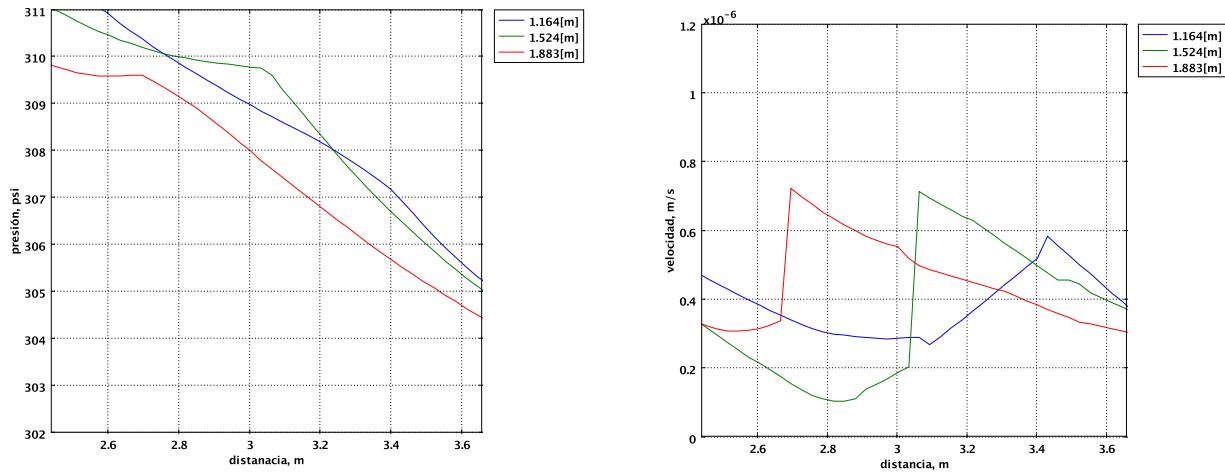


Figura 8.17: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

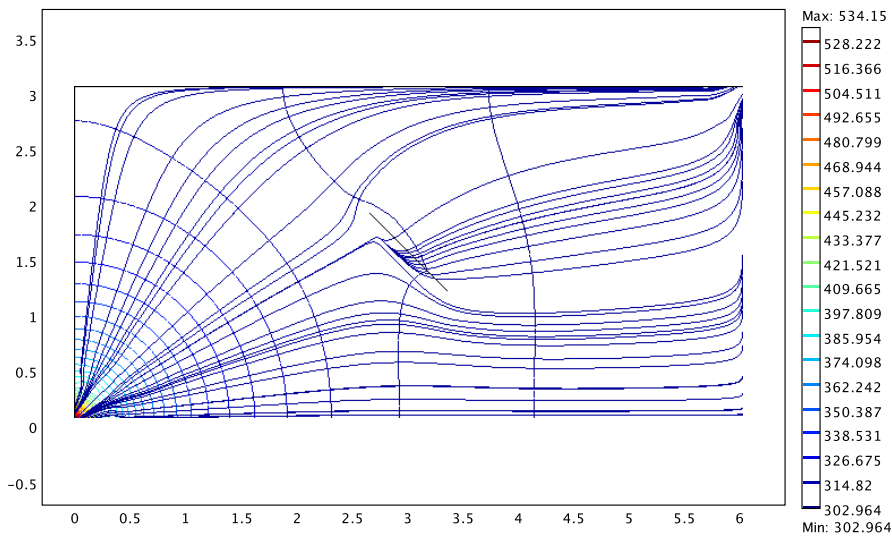


Figura 8.18: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento que tiende a evadir la fractura.

8.4.3. Fractura con orientación $\theta = -45^\circ$

Dominio

El dominio del modelo computacional es un rectángulo de base x_1 y altura x_2 . El subdominio correspondiente a la fractura es una línea de longitud l (ver Figura 8.19).

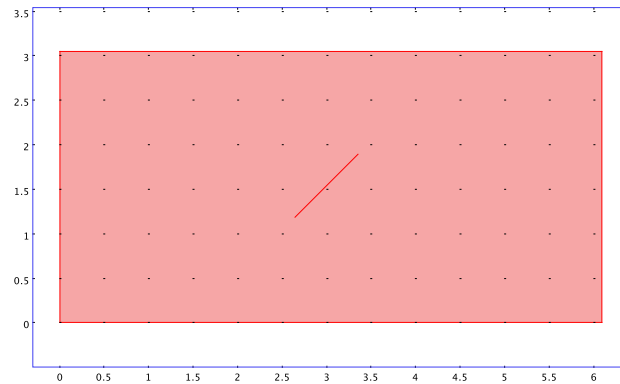


Figura 8.19: Dominio del modelo computacional donde $x_1 = 6.096 [m]$, $x_2 = 3.048 [m]$ y $l = 1.00584 [m]$

Mallado

Malla del dominio computacional (ver Figura 8.20).

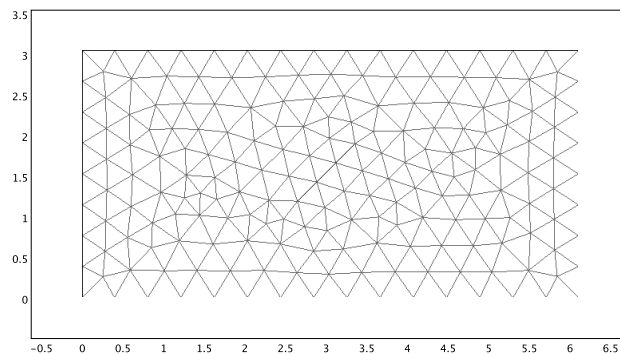


Figura 8.20: Mallado del dominio computacional con 730 grados de libertad y 338 elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos.

Fronteras

Fronteras del dominio computacional (ver Figura 8.21).

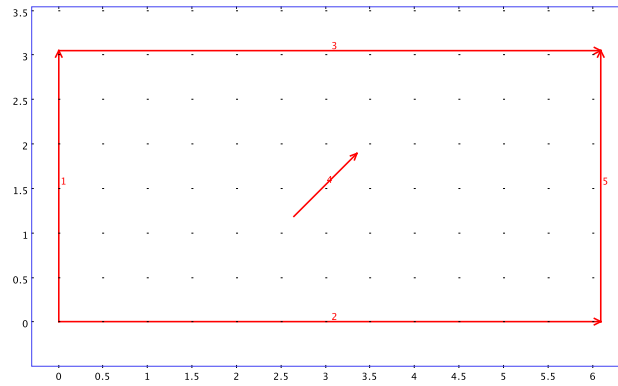


Figura 8.21: Fronteras del dominio computacional, con su indexación correspondiente. Las fronteras externas 1, 2, 3 y 5 son impermeables. La frontera interna 4 es permeable.

Puntos

Puntos del dominio computacional (ver Figura 8.22).

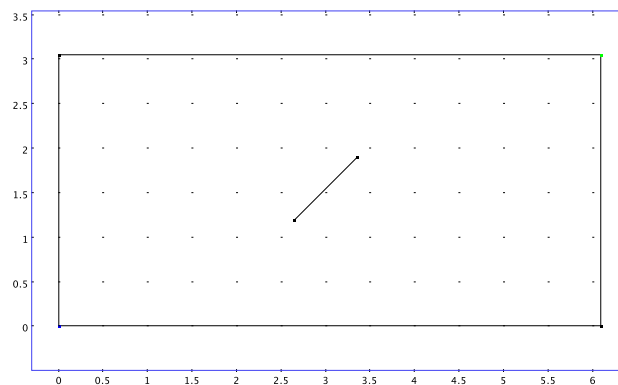


Figura 8.22: En el punto inferior izquierdo se impone una condición tipo Neumann para establecer inyección (fuente). En el punto superior derecho se impone una condición tipo Dirichlet para establecer producción a presión constante (sumidero).

Fractura abierta al flujo ($k_{fr} \gg k_{mp}$)

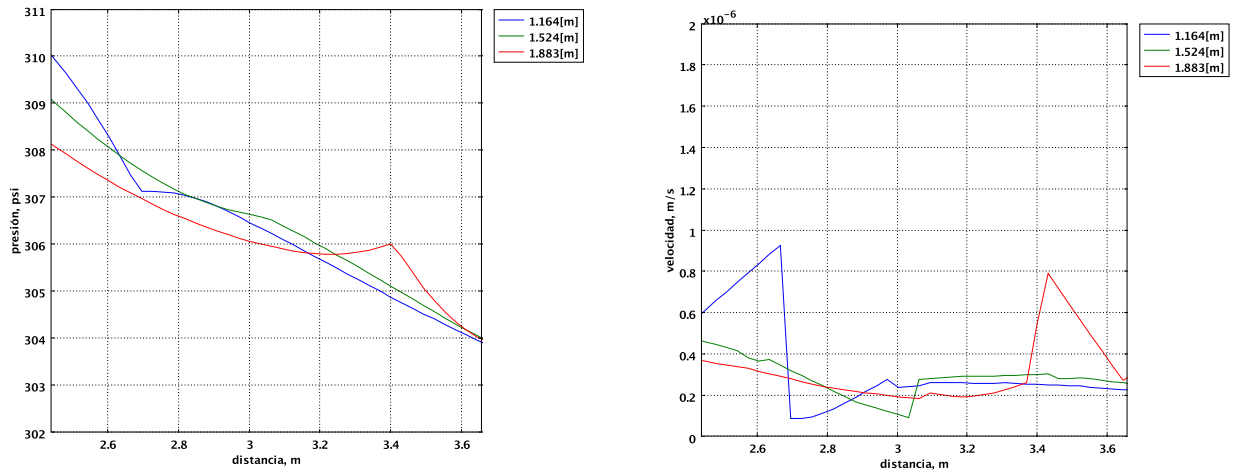


Figura 8.23: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

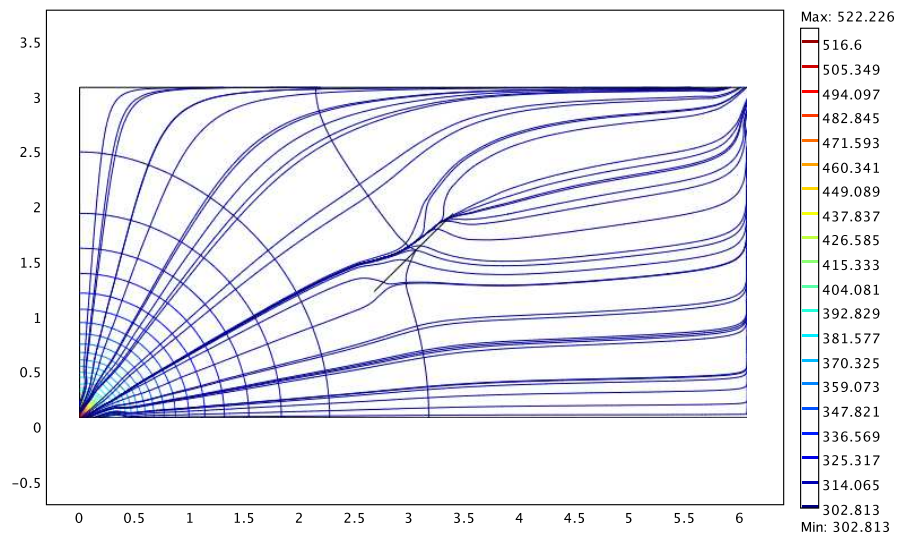


Figura 8.24: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento preferencial hacia el interior de la fractura y a lo largo de ésta.

Barrera al flujo ($k_{fr} \lll k_{mp}$)

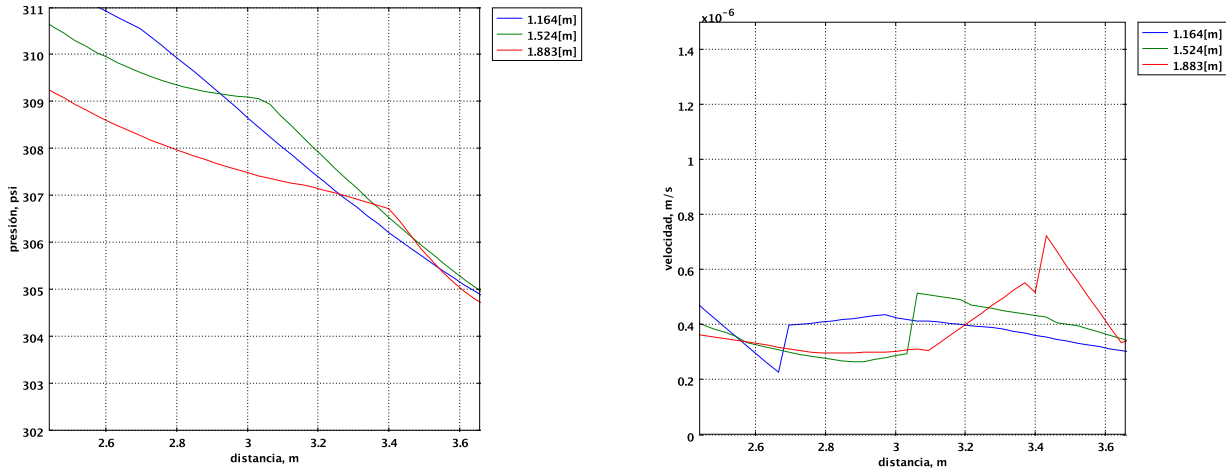


Figura 8.25: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

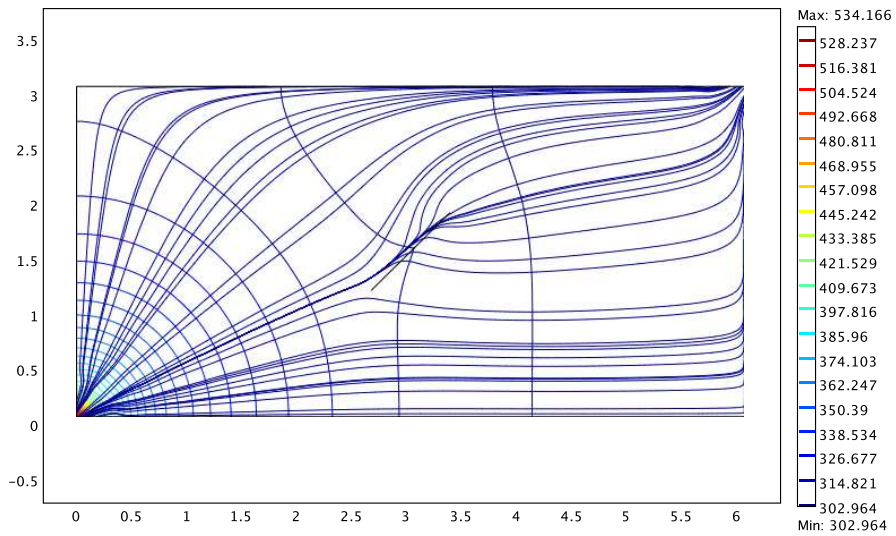


Figura 8.26: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento que tiende a evadir la fractura.

8.4.4. Fractura con orientación $\theta = 90^\circ$

Dominio

El dominio del modelo computacional es un rectángulo de base x_1 y altura x_2 . El subdominio correspondiente a la fractura es una línea de longitud l (ver Figura 8.27).

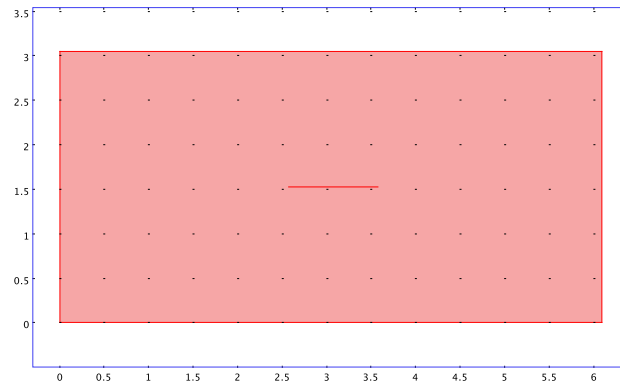


Figura 8.27: Dominio del modelo computacional donde $x_1 = 6.096 [m]$, $x_2 = 3.048 [m]$ y $l = 1.00584 [m]$

Mallado

Malla del dominio computacional (ver Figura 8.28).

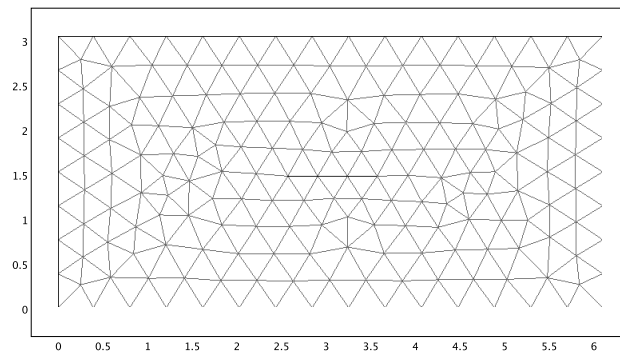


Figura 8.28: Mallado del dominio computacional con 718 grados de libertad y 332 elementos triangulares del tipo Lagrange cuadráticos.

Fronteras

Fronteras del dominio computacional (ver Figura 8.29).

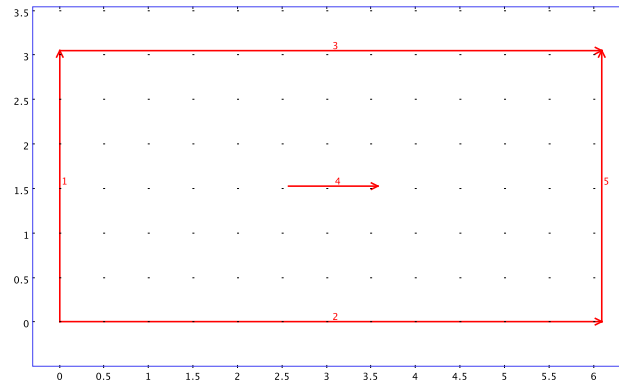


Figura 8.29: Fronteras del dominio computacional, con su indexación correspondiente. Las fronteras externas 1, 2, 3 y 5 son impermeables. La frontera interna 4 es permeable.

Puntos

Puntos del dominio computacional (ver Figura 8.30).

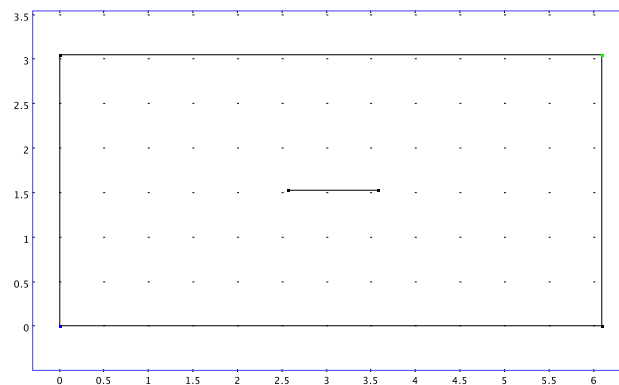


Figura 8.30: En el punto inferior izquierdo se impone una condición tipo Neumann para establecer inyección (fuente). En el punto superior derecho se impone una condición tipo Dirichlet para establecer producción a presión constante (sumidero).

Fractura abierta al flujo ($k_{fr} \gg k_{mp}$)

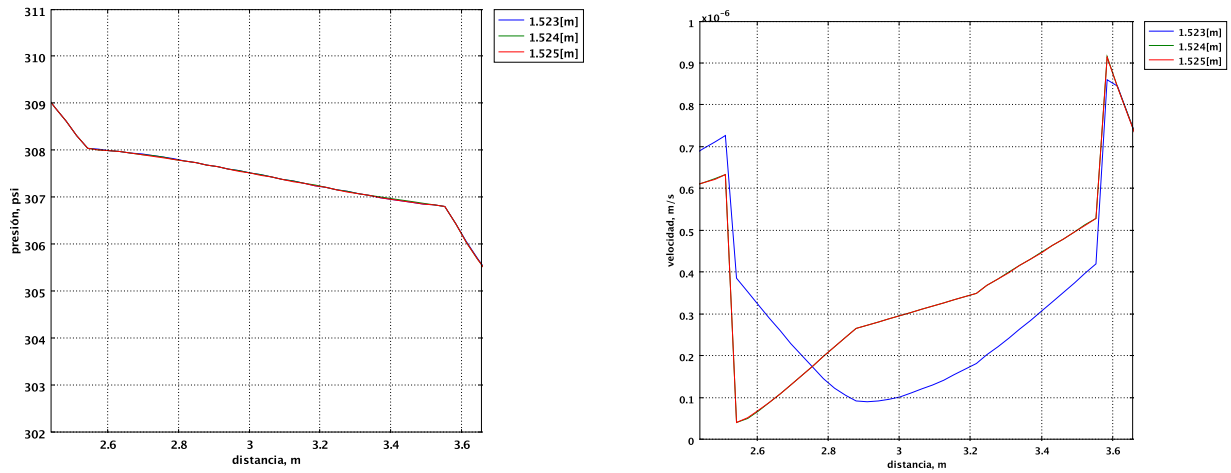


Figura 8.31: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

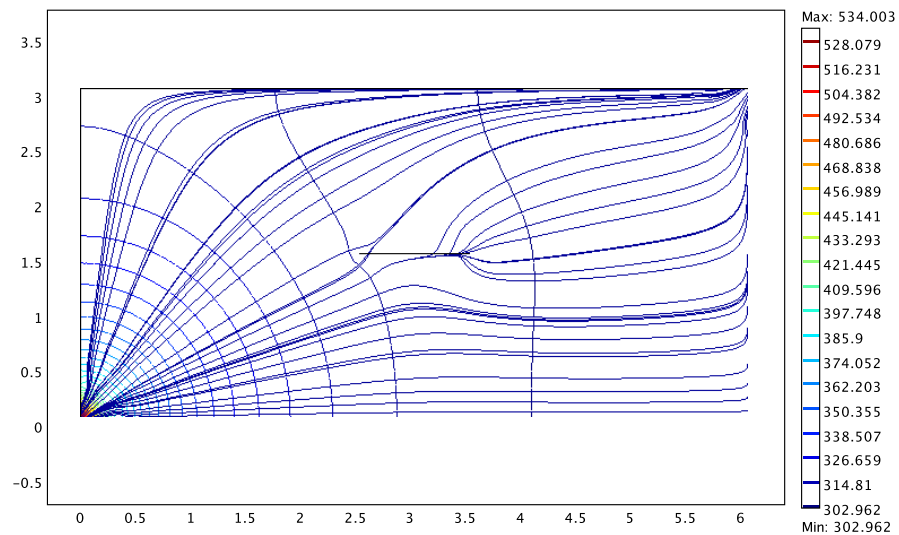


Figura 8.32: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento preferencial hacia el interior de la fractura y a lo largo de ésta.

Barrera al flujo ($k_{fr} \lll k_{mp}$)

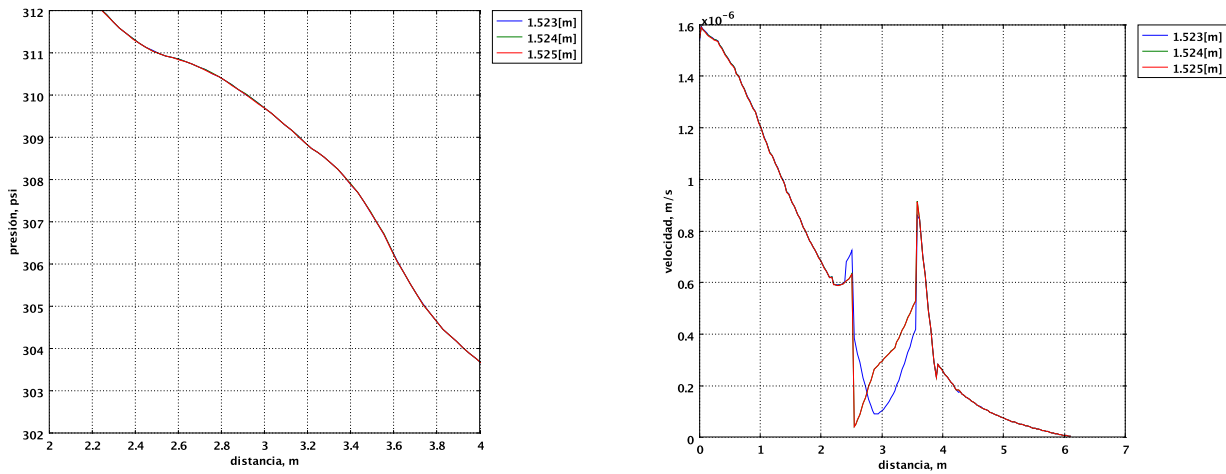


Figura 8.33: Perfiles de presión (Izquierda) y velocidad (Derecha) para tres cortes longitudinales correspondientes a los extremos y centro de la fractura, a un tiempo de 120 [s].

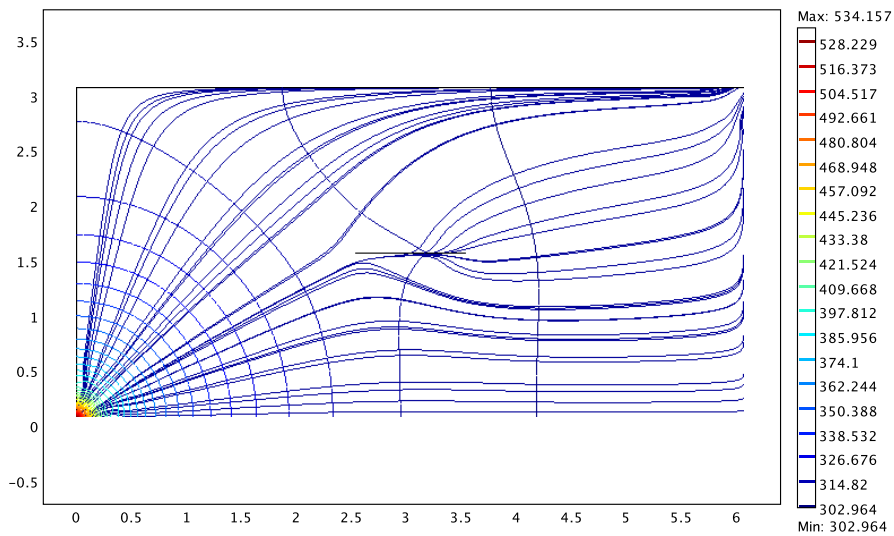


Figura 8.34: Gráfico de curvas de nivel y líneas de corriente. Se observa un comportamiento que tiende a evadir la fractura.

Capítulo 9

Análisis y Discusión de Resultados

9.1. Presión - Fractura abierta al flujo $\theta = 0^\circ$

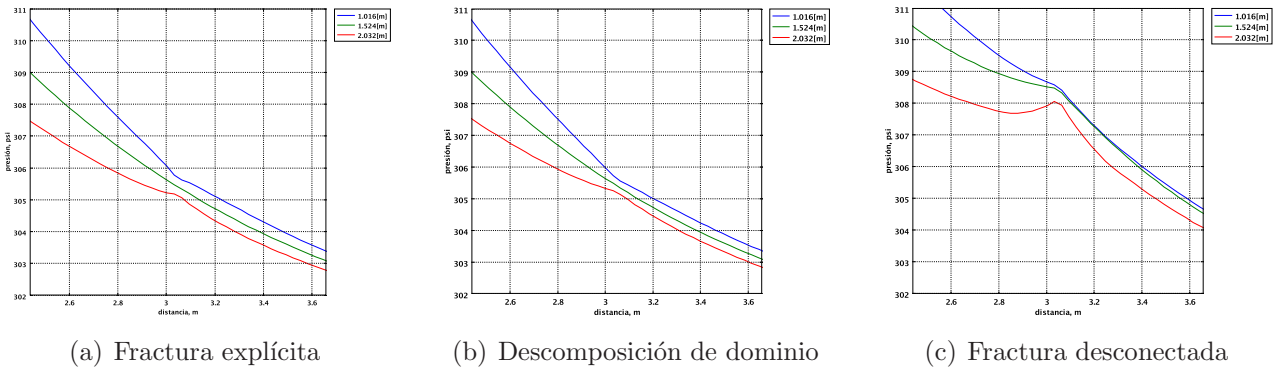


Figura 9.1: Perfiles de presión obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la fractura en el centro (●), en el extremo superior (●) y en extremo inferior (●), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una fractura abierta al flujo, $k_{fr} \gg k_m$, con una orientación $\theta = 0^\circ$ con respecto de la vertical, y ubicada a 3.048 [m] de distancia.

En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.1, se observa que cuando la onda de variación de presión alcanza el extremo inferior de la discontinuidad (●), se presenta una ligera caída de presión. Esto se debe a que actúa como un sumidero, ya que la discontinuidad representa un canal preferencial al flujo. En el centro de la discontinuidad (●), no se observa ninguna perturbación en la presión, sin embargo, se puede observar que la presión es menor con respecto a la presión en el extremo inferior de la discontinuidad (●), esto es congruente con el proceso de inyección-producción debido a que el punto de inyección se encuentra más cercano al extremo inferior de la discontinuidad (●). Además, es condición necesaria para que el flujo viaje a lo largo de la fractura. En el extremo superior de la discontinuidad (●), se observa un ligero incremento en la presión debido a que este actúa como una fuente. Sin embargo, la presión es menor que en el centro (●) y el extremo inferior (●) de la discontinuidad. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.1, representa plenamente el comportamiento de los tres perfiles de presión del modelo de fractura explícita. Sin embargo, la diferencia de presión entre los tres perfiles es menor después de la distancia a la que se encuentra la discontinuidad. El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.1, presenta un comportamiento similar a los otros dos modelos, sin embargo, la variación de la presión a la distancia en que se ubica la discontinuidad es más pronunciada. Además, el comportamiento de las tres curvas únicamente obedece al perfil de presión que corta a la discontinuidad en el extremo superior (●) del modelo de fractura explícita. En los tres modelos la presión es continua a través de la fractura y el gradiente de presión es congruente con el proceso inyección-producción permitiendo el flujo a lo largo de la fractura. Es importante notar que la dirección del flujo es oblicua al plano de fractura.

9.2. Velocidad - Fractura abierta al flujo $\theta = 0^\circ$

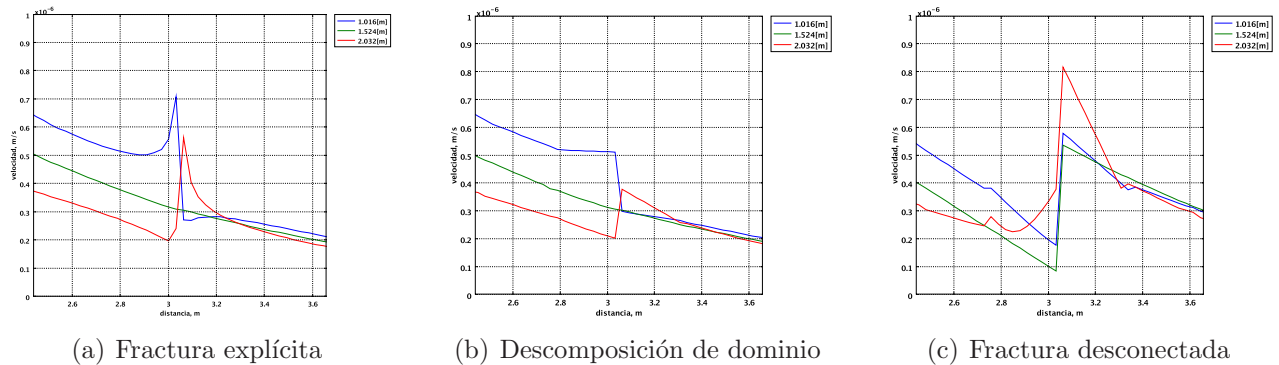


Figura 9.2: Perfiles de velocidad obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (\bullet), en el extremo superior (\bullet) y en extremo inferior (\bullet), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una fractura abierta al flujo, $k_{fr} \gg k_m$, con una orientación $\theta = 0^\circ$ con respecto de la vertical, y ubicada a 3.048 [m] de distancia.

En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.2, se observa que en el extremo inferior de la discontinuidad (\bullet), se presenta un aumento abrupto en la velocidad. Esto se debe a que actúa como un sumidero, ya que la discontinuidad representa un canal preferencial al flujo. En el centro de la discontinuidad (\bullet), no se observa ninguna perturbación en la velocidad, es decir, la velocidad es continua a través de la discontinuidad. En el extremo superior de la discontinuidad (\bullet), se observa un incremento abrupto en la velocidad debido a que este actúa como una fuente. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.2, presenta un comportamiento similar en los tres perfiles de velocidad con respecto al modelo de fractura explícita. Sin embargo, el incremento de la velocidad en los extremos de la discontinuidad es gradual. El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.2, también presenta un incremento de la velocidad en los extremos de la discontinuidad, sin embargo, el incremento es más pronunciado. Además, el comportamiento de las tres curvas únicamente obedece al perfil de velocidad que corta a la discontinuidad en el extremo superior (\bullet) del modelo de fractura explícita. En los tres modelos se observa un incremento en la velocidad en los extremos de la discontinuidad. Es importante notar que la dirección del flujo es oblicua al plano de fractura.

9.3. Presión - Barrera al flujo $\theta = 0^\circ$

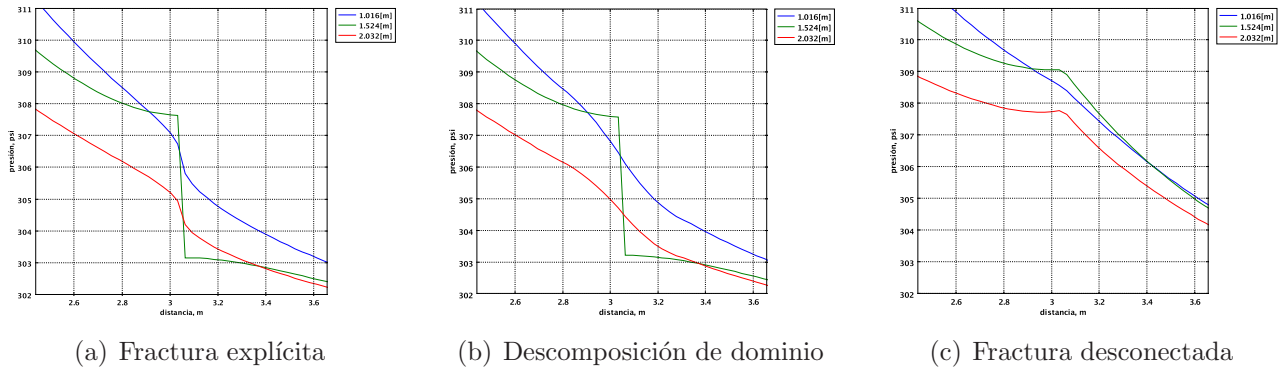


Figura 9.3: Perfiles de presión obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (●), en el extremo superior (●) y en extremo inferior (●), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una barrera al flujo, $k_{fr} \lll k_m$, con una orientación $\theta = 0^\circ$ con respecto de la vertical, y ubicada a 3.048 [m] de distancia.

En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.3, se observa que cuando la onda de variación de presión alcanza el extremo inferior de la discontinuidad (●), se presenta una caída de presión. Esto se debe a que la discontinuidad actúa como un obstáculo, ya que representa un barrera al flujo. En el centro de la discontinuidad (●) se observa primero un incremento en la presión debido a que la barrera representa un obstáculo y en este punto es más difícil evadirla. Después se presenta un salto en la presión, esto puede explicarse por que existe poca comunicación a través de la barrera. Por lo tanto, la caída de presión es abrupta. En el extremo superior de la discontinuidad (●) se tiene el mismo comportamiento que en el extremo inferior (●), pero para valores menores de presión, debido a que el extremo superior de la discontinuidad (●) está más cercano al punto de producción y más lejano al punto de inyección. Además, se puede observar que la caída de presión en los extremos no es tan abrupta debido a que el efecto de la barrera es menor en dichos puntos, ya que puede ser fácilmente evitada por el flujo. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.3, representa el comportamiento de los tres perfiles de presión del modelo de fractura explícita. Sin embargo, el efecto de la barrera sobre el flujo en los extremos de la discontinuidad es menor, por lo que la caída de presión es gradual en esos puntos. El perfil de presión que corta a la discontinuidad por el centro (●) también presenta un salto en la presión. El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.3, presenta un comportamiento similar a los otros dos modelos únicamente para la primera cara de la discontinuidad que alcanza la onda de variación de presión, es decir, no representa el salto en la presión adecuadamente, por lo que su comportamiento a partir de que la onda de variación de presión ha alcanzando la segunda cara de la discontinuidad difiere de los perfiles de presión obtenidos con los modelos de fractura explícita y descomposición de dominio. Es importante notar que la dirección del flujo es oblicua al plano de fractura.

9.4. Velocidad - Barrera al flujo $\theta = 0^\circ$

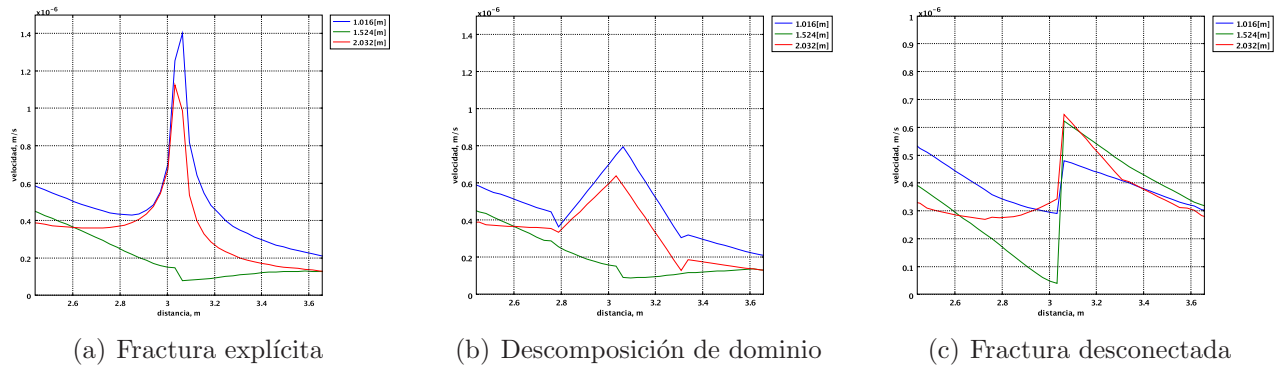


Figura 9.4: Perfiles de velocidad obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (●), en el extremo superior (●) y en extremo inferior (●), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una barrera al flujo, $k_{fr} \lll k_m$, con una orientación $\theta = 0^\circ$ con respecto de la vertical, y ubicada a 3.048 [m] de distancia.

En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.4, se observa que en el extremo inferior de la discontinuidad (●), se presenta un incremento en la velocidad. Esto se debe a que la discontinuidad actúa como un obstáculo y el flujo tiende a evadirla por los extremos. En el centro de la discontinuidad (●) se observa un salto en la velocidad, esto puede explicarse por que existe poca comunicación a través de la barrera. En el extremo superior de la discontinuidad (●) se tiene el mismo comportamiento que en el extremo inferior (●). El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.4, presenta un comportamiento similar en los tres perfiles de velocidad con respecto al modelo de fractura explícita. Sin embargo, el incremento de la velocidad en los extremos de la discontinuidad es menor y es gradual. El perfil de velocidad que corta a la discontinuidad por el centro (●) también presenta un salto en la velocidad. El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.4, también presenta un incremento de la velocidad en los extremos de la discontinuidad, sin embargo, el incremento es abrupto en la ubicación de la discontinuidad. Además, este comportamiento también se presenta en el perfil que corta por el centro a la discontinuidad (●). Es importante notar que la dirección del flujo es oblicua al plano de fractura.

9.5. Presión - Fractura abierta al flujo $\theta = 45^\circ$

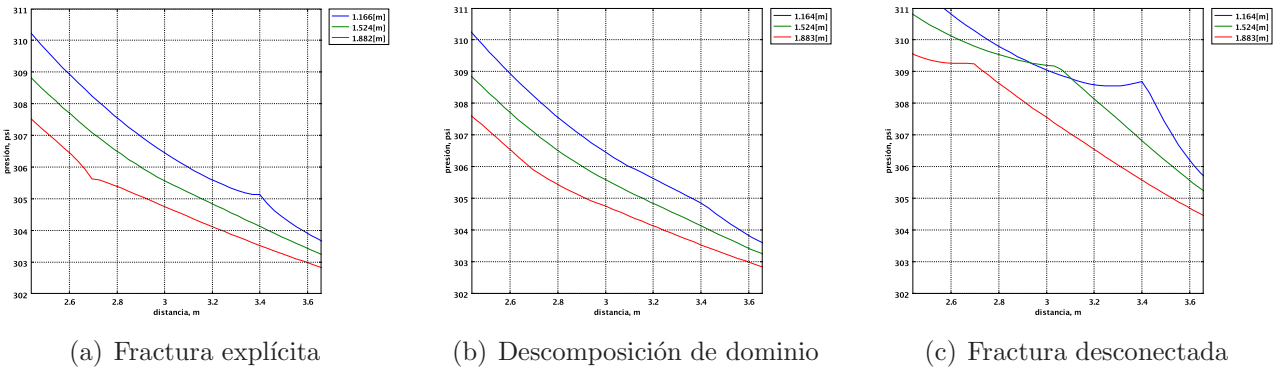


Figura 9.5: Perfiles de presión obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (\bullet), en el extremo superior (\bullet) y en extremo inferior (\bullet), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una fractura abierta al flujo, $k_{fr} \gg k_m$, con una orientación $\theta = 45^\circ$ con respecto de la vertical, cuyo centro se ubicada a 3.048 [m] de distancia.

En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.5, se observa que cuando la onda de variación de presión alcanza el extremo superior de la discontinuidad (\bullet), se presenta una ligera caída de presión. Esto se debe a que actúa como un sumidero, ya que la discontinuidad representa un canal preferencial al flujo. En el centro de la discontinuidad (\bullet), no se observa ninguna perturbación en la presión, sin embargo, se puede observar que la presión es menor con respecto a la presión en el extremo superior de la discontinuidad (\bullet), esto es congruente con el proceso de inyección-producción debido a que el punto de inyección se encuentra más cercano al extremo superior de la discontinuidad (\bullet). Además, es condición necesaria para que el flujo viaje a lo largo de la fractura. En el extremo inferior de la discontinuidad (\bullet), se observa un ligero incremento en la presión debido a que este actúa como una fuente. En este punto la presión es menor que en el centro (\bullet) y el extremo superior (\bullet) de la discontinuidad. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.5, representa plenamente el comportamiento de los tres perfiles de presión del modelo de fractura explícita. Sin embargo, la caída de presión en el extremo superior de la discontinuidad (\bullet) es menor, al igual que el incremento de presión en el extremo inferior (\bullet). El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.5, presenta un comportamiento similar a los otros dos modelos, sin embargo, la variación de la presión a la distancia en que se ubica la discontinuidad es más pronunciada. Además, el comportamiento de las tres curvas únicamente obedece al perfil de presión que corta a la discontinuidad en el extremo inferior (\bullet) del modelo de fractura explícita. En los tres modelos la presión es continua a través de la fractura y el gradiente de presión es congruente con el proceso inyección-producción permitiendo el flujo a lo largo de la fractura. Es importante notar que la dirección del flujo es normal al plano de fractura.

9.6. Velocidad - Fractura abierta al flujo $\theta = 45^\circ$

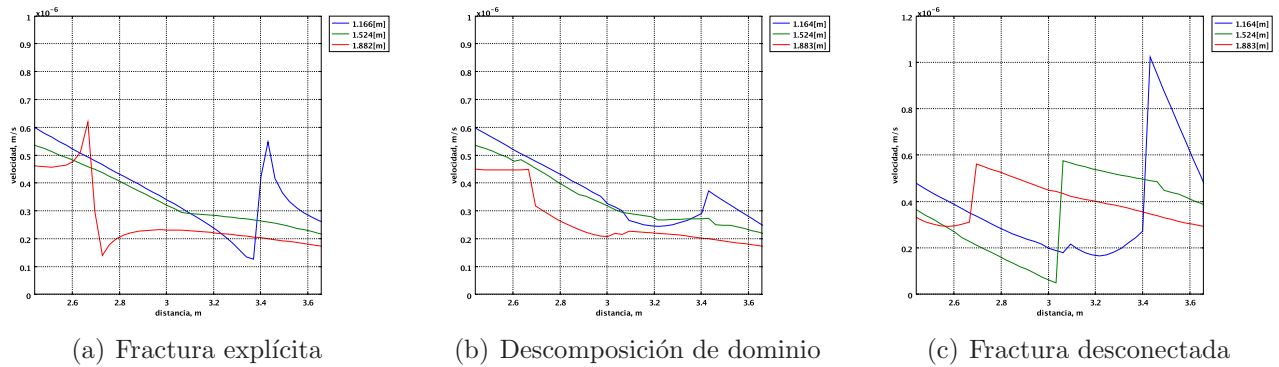


Figura 9.6: Perfiles de velocidad obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (\bullet), en el extremo superior (\bullet) y en extremo inferior (\bullet), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una fractura abierta al flujo, $k_{fr} \gg k_m$, con una orientación $\theta = 45^\circ$ con respecto de la vertical, cuyo centro se ubicada a 3.048 [m] de distancia.

En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.6, se observa que en el extremo superior de la discontinuidad (\bullet), se presenta un aumento en la velocidad y después una caída abrupta. Esto se debe a que actúa como un sumidero, ya que la discontinuidad representa un canal preferencial al flujo. En el perfil que corta por el centro a la discontinuidad (\bullet), se observa un incremento gradual en la velocidad a partir de la distancia en que se encuentra la discontinuidad. En el extremo inferior de la discontinuidad (\bullet), se observa un incremento abrupto en la velocidad debido a que este actúa como una fuente. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.6, presenta un comportamiento similar en los tres perfiles de velocidad con respecto al modelo de fractura explícita. Sin embargo, el incremento de la velocidad en los extremos de la discontinuidad es menor y es gradual. El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.6, también presenta un incremento de la velocidad en los extremos de la discontinuidad, sin embargo, el incremento es más pronunciado. Además, el perfil de velocidad que corta a la discontinuidad por el centro (\bullet) también presenta un incremento abrupto en la velocidad. En los tres modelos se observa un incremento en la velocidad en los extremos de la discontinuidad. Es importante notar que la dirección del flujo es oblicua al plano de fractura.

9.7. Presión - Barrera al flujo $\theta = 45^\circ$

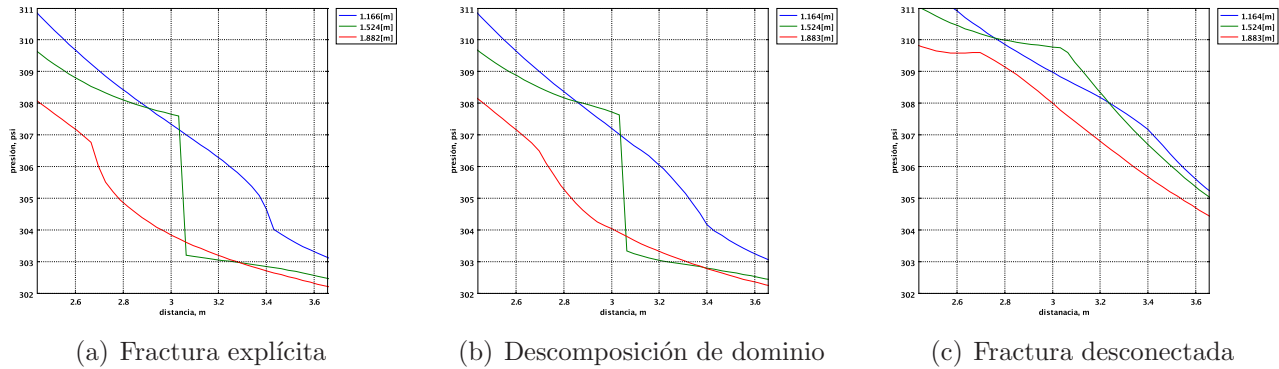


Figura 9.7: Perfiles de presión obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (\bullet), en el extremo superior (\bullet) y en extremo inferior (\bullet), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una barrera al flujo, $k_{fr} \lll k_m$, con una orientación $\theta = 45^\circ$ con respecto de la vertical, cuyo centro se ubicada a 3.048 [m] de distancia.

En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.7, se observa que cuando la onda de variación de presión alcanza el extremo superior de la discontinuidad (\bullet), se presenta una caída de presión. Esto se debe a que la discontinuidad actúa como un obstáculo, ya que representa un barrera al flujo. En el centro de la discontinuidad (\bullet) se observa un salto en la presión, esto puede explicarse por que existe poca comunicación a través de la barrera. Por lo tanto, la caída de presión es más abrupta. En el extremo inferior de la discontinuidad (\bullet) se tiene un comportamiento similar que en el extremo superior (\bullet), pero a una distancia mayor, debido a que el extremo superior de la discontinuidad (\bullet) está más cercano al punto de inyección y más lejano al punto de producción. Además, se puede observar que la caída de presión en los extremos no es tan abrupta debido a que el efecto de la barrera es menor en dichos puntos, ya que puede ser fácilmente evitada por el flujo. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.7, representa el comportamiento de los tres perfiles de presión del modelo de fractura explícita. Sin embargo, el efecto de la barrera sobre el flujo en los extremos de la discontinuidad es menor, por lo que la caída de presión es gradual en esos puntos. El perfil de presión que corta a la discontinuidad por el centro (\bullet) también presenta un salto en la presión. El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.7, presenta un comportamiento similar a los otros dos modelos únicamente para la primera cara de la discontinuidad que alcanza la onda de variación de presión, es decir, no representa el salto en la presión adecuadamente, por lo que su comportamiento a partir de que la onda de variación de presión ha alcanzando la segunda cara de la discontinuidad difiere de los perfiles de presión obtenidos con los modelos de fractura explícita y descomposición de dominio. Es importante notar que la dirección del flujo es normal al plano de fractura.

9.8. Velocidad - Barrera al flujo $\theta = 45^\circ$

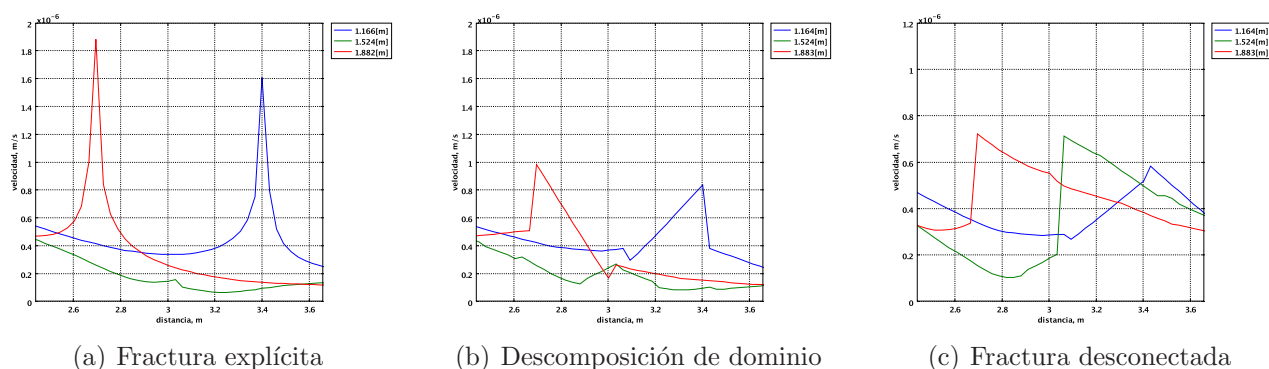


Figura 9.8: Perfiles de velocidad obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (\bullet), en el extremo superior (\bullet) y en extremo inferior (\bullet), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una barrera al flujo, $k_{fr} \lll k_m$, con una orientación $\theta = 45^\circ$ con respecto de la vertical, cuyo centro se ubicada a 3.048 [m] de distancia.

En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.8, se observa que en el extremo superior de la discontinuidad (\bullet), se presenta un incremento en la velocidad. Esto se debe a que la discontinuidad actúa como un obstáculo y el flujo tiende a evadirla por los extremos. En el centro de la discontinuidad (\bullet) se observa un salto en la velocidad, esto puede explicarse por que existe poca comunicación a través de la barrera. En el extremo inferior de la discontinuidad (\bullet) se tiene el mismo comportamiento que en el extremo superior (\bullet), pero a una mayor distancia, debido a que el extremo superior de la discontinuidad (\bullet) está más cercano al punto de inyección y más lejano al punto de producción. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.8, presenta un comportamiento similar en los tres perfiles de velocidad con respecto al modelo de fractura explícita. Sin embargo, el incremento de la velocidad en los extremos de la discontinuidad es menor y es gradual. El perfil de velocidad que corta a la discontinuidad por el centro (\bullet) también presenta un incremento en la velocidad. El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.8, también presenta un incremento de la velocidad en los extremos de la discontinuidad, sin embargo, el incremento es abrupto en la ubicación de la discontinuidad. Además, este comportamiento también se presenta en el perfil que corta por el centro a la discontinuidad (\bullet). Es importante notar que la dirección del flujo es normal al plano de fractura.

9.9. Presión - Fractura abierta al flujo $\theta = -45^\circ$

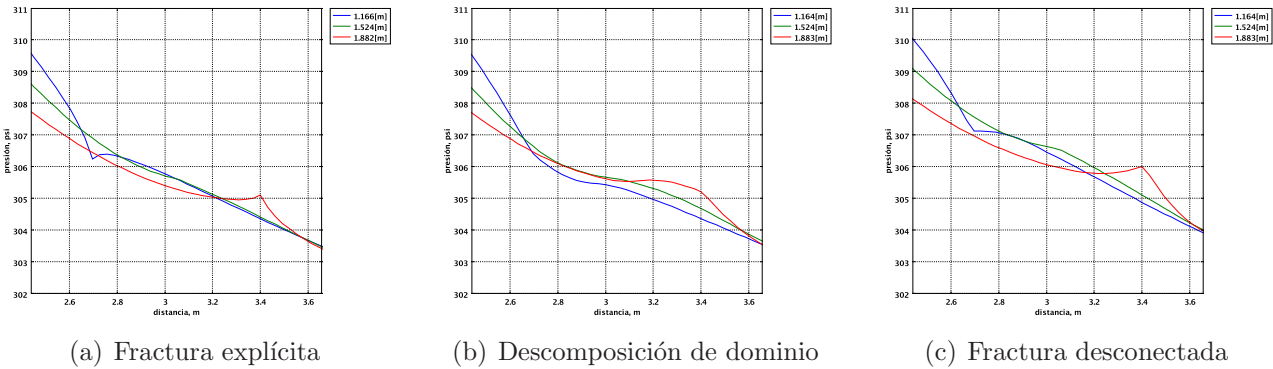


Figura 9.9: Perfiles de presión obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (\bullet), en el extremo superior (\bullet) y en extremo inferior (\bullet), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una fractura abierta al flujo, $k_{fr} \gg k_m$, con una orientación $\theta = -45^\circ$ con respecto de la vertical, cuyo centro se ubicada a 3.048 [m] de distancia.

En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.9, se observa que cuando la onda de variación de presión alcanza el extremo inferior de la discontinuidad (\bullet), se presenta una ligera caída de presión. Esto se debe a que actúa como un sumidero, ya que la discontinuidad representa un canal preferencial al flujo. En el centro de la discontinuidad (\bullet), se observa un ligero incremento en la presión, sin embargo, se puede observar que la presión es menor con respecto a la presión en el extremo inferior de la discontinuidad (\bullet), esto es congruente con el proceso de inyección-producción debido a que el punto de inyección se encuentra más cercano al extremo inferior de la discontinuidad (\bullet). Además, es condición necesaria para que el flujo viaje a lo largo de la fractura. En el extremo superior de la discontinuidad (\bullet), se observa un ligero incremento en la presión debido a que este actúa como una fuente. Sin embargo, la presión es menor que en el centro (\bullet) y el extremo inferior (\bullet) de la discontinuidad. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.9, presenta un comportamiento similar en los tres perfiles de presión con respecto al modelo de fractura explícita. Sin embargo, las variaciones de presión en los extremos de la discontinuidad son graduales y más prolongados. El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.9, representa plenamente el comportamiento de los tres perfiles de presión del modelo de fractura explícita. En los tres modelos la presión es continua a través de la fractura y el gradiente de presión es congruente con el proceso inyección-producción permitiendo el flujo a lo largo de la fractura. Es importante notar que la dirección del flujo es tangencial al plano de fractura.

9.10. Velocidad - Fractura abierta al flujo $\theta = -45^\circ$

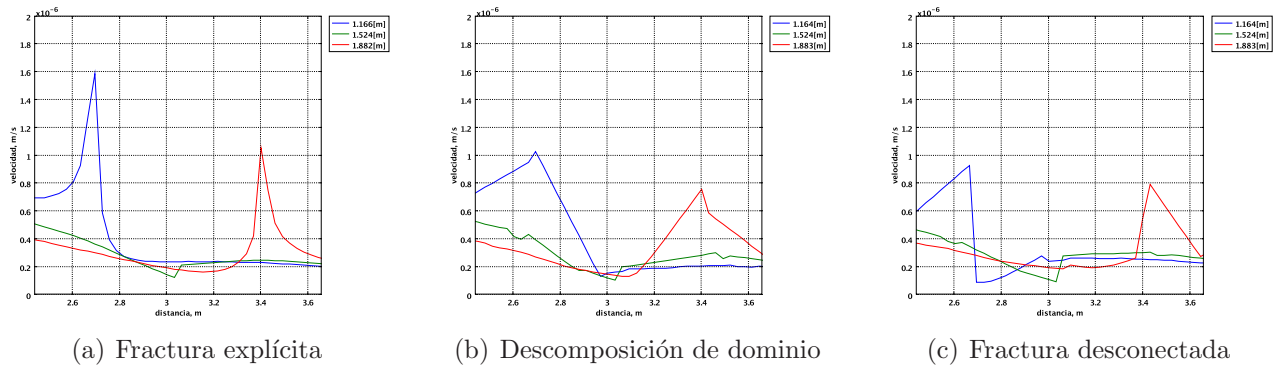


Figura 9.10: Perfiles de velocidad obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (\bullet), en el extremo superior (\bullet) y en extremo inferior (\bullet), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una fractura abierta al flujo, $k_{fr} \gg k_m$, con una orientación $\theta = -45^\circ$ con respecto de la vertical, cuyo centro se ubica a 3.048 [m] de distancia.

En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.10, se observa que en el extremo inferior de la discontinuidad (\bullet), se presenta un aumento abrupto en la velocidad. Esto se debe a que actúa como un sumidero, ya que la discontinuidad representa un canal preferencial al flujo. En el centro de la discontinuidad (\bullet), se observa un incremento en la velocidad. En el extremo superior de la discontinuidad (\bullet), se observa un incremento abrupto en la velocidad debido a que este actúa como una fuente. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.10, presenta un comportamiento similar en los tres perfiles de velocidad con respecto al modelo de fractura explícita. Sin embargo, el incremento de la velocidad en los extremos de la discontinuidad es menor y es gradual. En el perfil que corta por el centro a la discontinuidad (\bullet), también se observa un incremento en la velocidad. El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.10, también presenta un incremento de la velocidad en los extremos de la discontinuidad, sin embargo, el incremento es más pronunciado con respecto al modelo de descomposición de dominio. Además, se observa un incremento en la velocidad en el perfil que corta por el centro a la discontinuidad (\bullet). En los tres modelos se observa un incremento en la velocidad, tanto en los extremos como en el centro de la discontinuidad. Es importante notar que la dirección del flujo es tangencial al plano de fractura.

9.11. Presión - Barrera al flujo $\theta = -45^\circ$

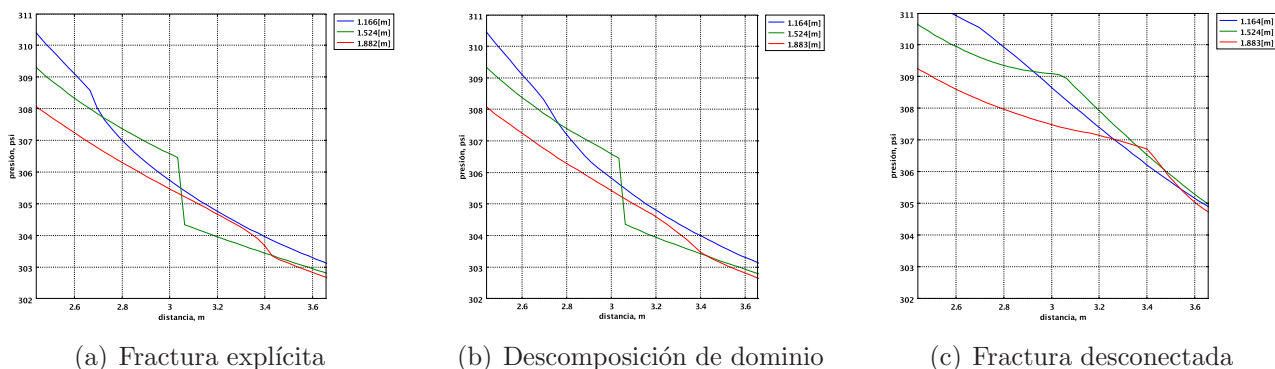


Figura 9.11: Perfiles de presión obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (\bullet), en el extremo superior (\bullet) y en extremo inferior (\bullet), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una barrera al flujo, $k_{fr} \lll k_m$, con una orientación $\theta = -45^\circ$ con respecto de la vertical, cuyo centro se ubicada a 3.048 [m] de distancia.

En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.11, se observa que cuando la onda de variación de presión alcanza el extremo inferior de la discontinuidad (\bullet), se presenta una caída de presión. Esto se debe a que la discontinuidad actúa como un obstáculo, ya que representa un barrera al flujo. En el centro de la discontinuidad (\bullet) se observa un salto en la presión, esto puede explicarse por que existe poca comunicación a través de la barrera. Por lo tanto, la caída de presión es abrupta. En el extremo superior de la discontinuidad (\bullet), se tiene el mismo comportamiento que en el extremo inferior (\bullet), pero para valores menores de presión, debido a que el extremo superior de la discontinuidad (\bullet) está más cercano al punto de producción y más lejano al punto de inyección. Además, se puede observar que la caída de presión en los extremos no es tan abrupta debido a que el efecto de la barrera es menor en dichos puntos, ya que puede ser fácilmente evitada por el flujo. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.11, representa el comportamiento de los tres perfiles de presión del modelo de fractura explícita. Sin embargo, el efecto de la barrera sobre el flujo en los extremos de la discontinuidad es menor, por lo que la caída de presión es gradual en esos puntos. El perfil de presión que corta a la discontinuidad por el centro (\bullet) también presenta un salto en la presión. El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.11, presenta un comportamiento similar a los otros dos modelos únicamente para la primera cara de la discontinuidad que alcanza la onda de variación de presión, es decir, no representa el salto en la presión adecuadamente, por lo que su comportamiento a partir de que la onda de variación de presión ha alcanzando la segunda cara de la discontinuidad difiere de los perfiles de presión obtenidos con los modelos de fractura explícita y descomposición de dominio. Es importante notar que la dirección del flujo es tangencial al plano de fractura.

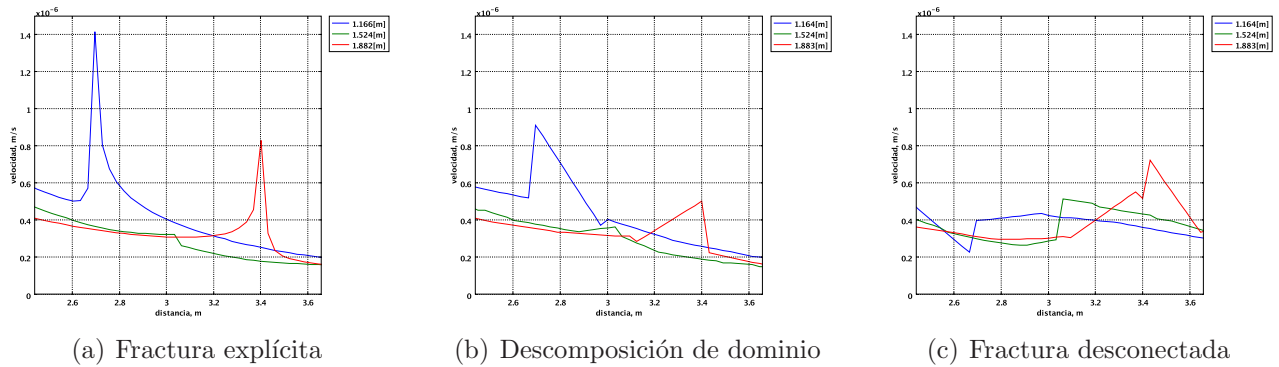
9.12. Velocidad - Barrera al flujo $\theta = -45^\circ$ 

Figura 9.12: Perfiles de velocidad obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (\bullet), en el extremo superior (\bullet) y en extremo inferior (\bullet), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una barrera al flujo, $k_{fr} \lll k_m$, con una orientación $\theta = -45^\circ$ con respecto de la vertical, cuyo centro se ubicada a 3.048 [m] de distancia.

En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.12, se observa que en el extremo inferior de la discontinuidad (\bullet), se presenta un incremento en la velocidad. Esto se debe a que la discontinuidad actúa como un obstáculo y el flujo tiende a evadirla por los extremos. En el centro de la discontinuidad (\bullet) se observa un salto en la velocidad, esto puede explicarse por que existe poca comunicación a través de la barrera. En el extremo superior de la discontinuidad (\bullet) se tiene el mismo comportamiento que en el extremo inferior (\bullet), pero para valores menores de velocidad, debido a que el extremo superior de la discontinuidad (\bullet) está más cercano al punto de producción y más lejano al punto de inyección. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.12, presenta un comportamiento similar en los tres perfiles de velocidad con respecto al modelo de fractura explícita. Sin embargo, el incremento de la velocidad en los extremos de la discontinuidad es menor y es gradual. El perfil que corta a la discontinuidad por el centro (\bullet) también presenta un salto en la velocidad. El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.12, también presenta un incremento de la velocidad pero únicamente en el extremo superior (\bullet) de la discontinuidad. Este comportamiento también se presenta en el perfil que corta por el centro a la discontinuidad (\bullet). Es importante notar que la dirección del flujo es tangencial al plano de fractura.

9.13. Presión - Fractura abierta al flujo $\theta = 90^\circ$

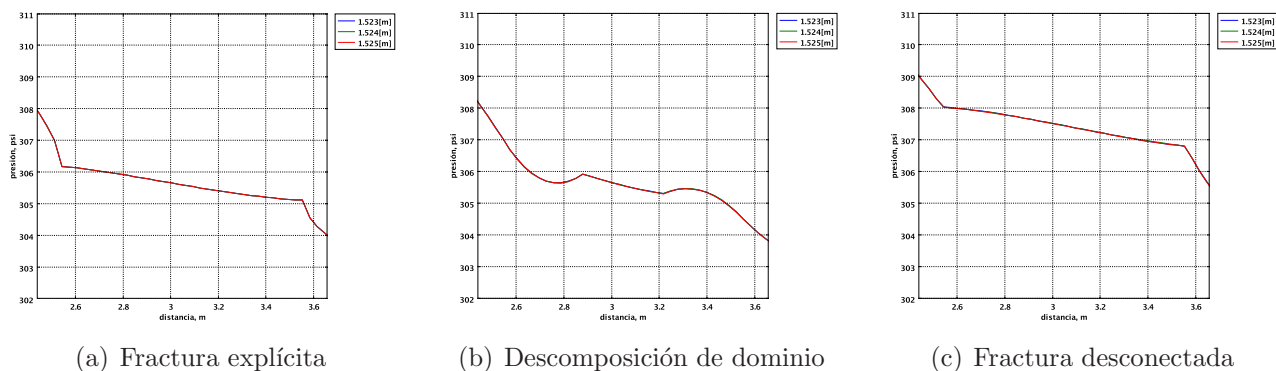


Figura 9.13: Perfiles de presión obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (●), en el extremo superior (●) y en extremo inferior (●), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una fractura abierta al flujo, $k_{fr} \gg k_m$, con una orientación $\theta = 90^\circ$ con respecto de la vertical, cuyo centro se ubicada a 3.048 [m] de distancia.

En este caso se considera que la discontinuidad es totalmente horizontal, por lo tanto, un solo perfil longitudinal corta a la discontinuidad por el extremo lateral izquierdo, derecho y por el centro. Los tres cortes longitudinales corresponden a los extremos y al centro del espesor de la fractura. En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.13, se observa que cuando la onda de variación de presión alcanza el extremo lateral izquierdo de la discontinuidad, la pendiente del perfil de presión disminuye, es decir, la caída de presión es menos abrupta. Esto se debe a que la discontinuidad representa un canal preferencial al flujo. Por lo tanto, la onda de variación de presión, generada por el proceso de inyección, avanza más rápido a lo largo de la discontinuidad. Resultando en una caída de presión menos pronunciada en la discontinuidad. Por supuesto, el perfil de presión a lo largo de la discontinuidad también se ve afectado por la onda de variación de presión generada por el proceso de producción. Se puede observar que la presión en el extremo lateral derecho de la discontinuidad es menor con respecto a la presión en el extremo lateral izquierdo, esto es congruente con el proceso de inyección-producción debido a que el punto de inyección se encuentra más cercano al extremo lateral izquierdo, mientras que el punto de producción está más cercano al extremo lateral derecho. Además, es condición necesaria para que el flujo viaje a lo largo de la fractura. En el extremo lateral derecho de la discontinuidad, se observa una caída abrupta en la presión, debido a que el flujo ya no viaja a través de la fractura, sino a través de la matriz, la cual es menos permeable. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.13, representa el comportamiento de los tres perfiles de presión del modelo de fractura explícita. Sin embargo, las perturbaciones generadas por los extremos laterales de la discontinuidad son más pronunciadas. El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.13, representa plenamente el comportamiento de los perfiles de presión obtenidos con el modelo de fractura explícita. En los tres modelos la presión es continua a lo largo de la fractura. Es importante notar que la dirección del flujo es oblicua al plano de fractura.

9.14. Velocidad - Fractura abierta al flujo $\theta = 90^\circ$

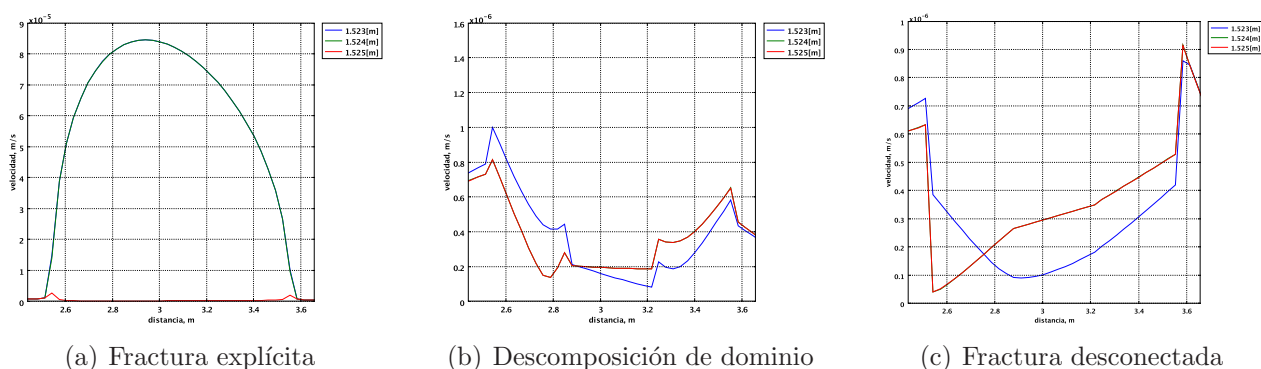


Figura 9.14: Perfiles de velocidad obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (\bullet), en el extremo superior (\bullet) y en extremo inferior (\bullet), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una fractura abierta al flujo, $k_{fr} \gg k_m$, con una orientación $\theta = 90^\circ$ con respecto de la vertical, cuyo centro se ubica a 3.048 [m] de distancia.

En este caso se considera que la discontinuidad es totalmente horizontal, por lo tanto, un solo perfil longitudinal corta a la discontinuidad por el extremo lateral izquierdo, derecho y por el centro. Los tres cortes longitudinales corresponden a los extremos y al centro del espesor de la fractura. En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.13, se observa que en el extremo lateral izquierdo de la discontinuidad, se presenta un aumento abrupto en la velocidad para los tres perfiles de persión. Esto se debe a que actúa como un sumidero, ya que la discontinuidad representa un canal preferencial al flujo. Tanto en el perfil que corta a la fractura por el centro de su espesor (\bullet), como en el perfil que corta a la fractura por el extremo inferior de su espesor (\bullet) se puede observar que la velocidad continúa aumentando hasta alcanzar el valor máximo de la velocidad en el centro de la discontinuidad, a partir de este punto la velocidad comienza a decrecer hasta llegar al extremo lateral derecho de la discontinuidad. En el extremo lateral derecho de la discontinuidad, también se observa un incremento abrupto en la velocidad debido a que este actúa como una fuente. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.13, presenta un comportamiento similar en los perfiles de velocidad que corresponden al extremo superior (\bullet) e inferior (\bullet) del espesor de la discontinuidad con respecto al perfil de velocidad que corta a la discontinuidad por el extremo superior (\bullet) del modelo de fractura explícita. Sin embargo, el incremento de la velocidad en el perfil que corta al espesor de la discontinuidad por la mitad (\bullet) no presenta el incremento de velocidad a lo largo de la discontinuidad. El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.2, también presenta un incremento de la velocidad en los extremos laterales de la discontinuidad, sin embargo, el incremento es menor con respecto a los resultados obtenidos por los otros dos modelos. En los tres modelos se observa un incremento en la velocidad en los extremos de la discontinuidad. Es importante notar que la dirección del flujo es oblicua al plano de fractura.

9.15. Presión - Barrera al flujo $\theta = 90^\circ$

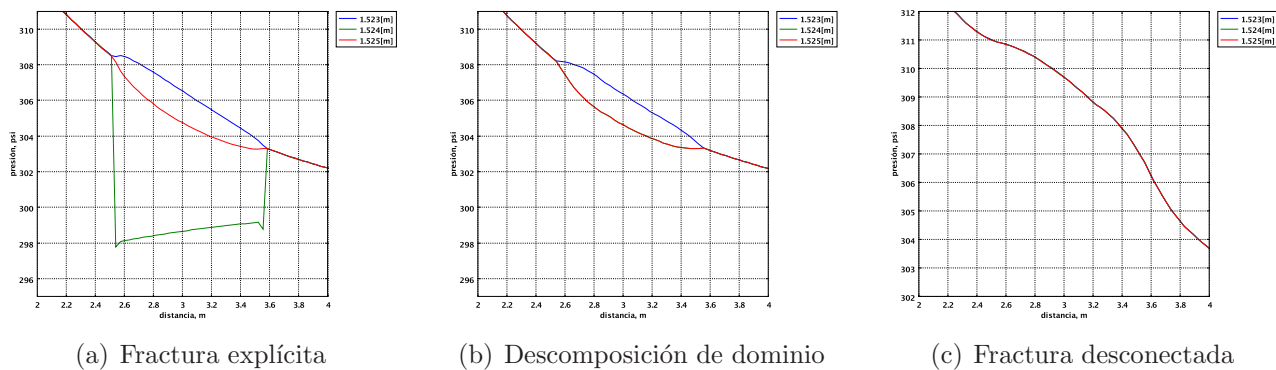


Figura 9.15: Perfiles de presión obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (\bullet), en el extremo superior (\bullet) y en extremo inferior (\bullet), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una barrera al flujo, $k_{fr} \lll k_m$, con una orientación $\theta = 90^\circ$ con respecto de la vertical, y cuyo centro se ubica a 3.048 [m] de distancia.

En este caso se considera que la discontinuidad es totalmente horizontal, por lo tanto, un solo perfil longitudinal corta a la discontinuidad por el extremo lateral izquierdo, derecho y por el centro. Los tres cortes longitudinales corresponden a los extremos y al centro del espesor de la fractura. En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.15, se puede observar que cuando la onda de variación de presión alcanza el extremo lateral izquierdo de la discontinuidad los perfiles de presión que cortan el espesor de la discontinuidad en su extremo superior (\bullet) e inferior (\bullet) se separan, es decir, representan una discontinuidad en la presión debido a que los dos extremos de las discontinuidad no están comunicados, pues la discontinuidad representa una barrera al flujo. Sin embargo, en el perfil de presión que corta por la mitad al espesor de la discontinuidad, se observa una caída abrupta en la presión. Una vez que la onda de variación de presión alcanza el extremo lateral derecho de la discontinuidad, los tres perfiles de presión se juntan, representando el mismo comportamiento. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.15, presenta un comportamiento similar en los perfiles de presión que corresponden al extremo superior (\bullet) e inferior (\bullet) del espesor de la discontinuidad con respecto al modelo de fractura explícita, representando la discontinuidad de la presión. Sin embargo, en el perfil que corta al espesor de la discontinuidad por la mitad (\bullet) no se presenta la caída abrupta de presión. Su comportamiento es el mismo que el perfil que corresponde en al extremo superior del espesor de la discontinuidad (\bullet). En el modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.15, se observa que únicamente se puede representar el comportamiento correspondiente a una sola cara de la discontinuidad, es decir, no se puede representar la discontinuidad en la presión. Es importante notar que la dirección del flujo es oblicua al plano de fractura.

9.16. Velocidad - Barrera al flujo $\theta = 90^\circ$

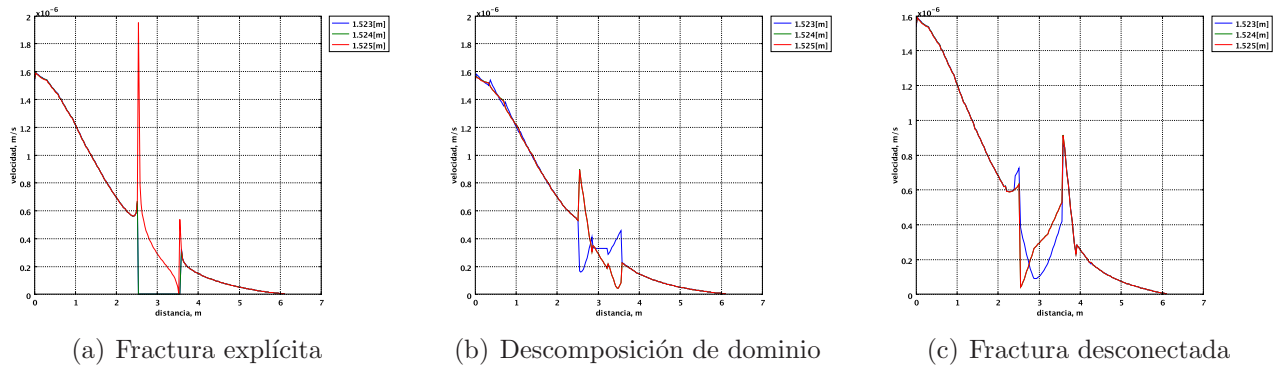


Figura 9.16: Perfiles de velocidad obtenidos mediante los modelos de Fractura explícita, Descomposición de dominio y Fractura desconectada para tres cortes longitudinales que cortan a la discontinuidad en el centro (\bullet), en el extremo superior (\bullet) y en extremo inferior (\bullet), a un tiempo de 120 [s]. En este caso se considera una barrera al flujo, $k_{fr} \lll k_m$, con una orientación $\theta = 90^\circ$ con respecto de la vertical, y cuyo centro se ubica a 3.048 [m] de distancia.

En este caso se considera que la discontinuidad es totalmente horizontal, por lo tanto, un solo perfil longitudinal corta a la discontinuidad por el extremo lateral izquierdo, derecho y por el centro. Los tres cortes longitudinales corresponden a los extremos y al centro del espesor de la discontinuidad. En el modelo de fractura explícita, ver gráfico (a) de la Figura 9.16, se observa que, tanto en el perfil que corta por el extremo inferior del espesor de la discontinuidad (\bullet), como en el perfil que corta por el centro del espesor de la discontinuidad (\bullet), se presenta una caída abrupta en la velocidad. Esto se debe a que la discontinuidad actúa como un obstáculo, por lo tanto, no hay velocidad a lo largo de la discontinuidad. En el perfil que corta por el extremo superior del espesor de la discontinuidad (\bullet) se observa que en los extremos laterales de la discontinuidad se presenta un incremento súbito en la velocidad. Esto se debe a que la discontinuidad actúa como un obstáculo y el flujo tiende a evadirla por los extremos. El modelo de descomposición de dominio, ver gráfico (b) de la Figura 9.16, presenta un comportamiento similar en los tres perfiles de velocidad con respecto al modelo de fractura explícita. Sin embargo, el incremento de la velocidad en el extremo lateral izquierdo de la discontinuidad únicamente es representado por el perfil de velocidad que corta por el extremo superior del espesor de la discontinuidad (\bullet), mientras que el incremento de la velocidad en el extremo lateral derecho únicamente es representado por el perfil de velocidad que corta por el extremo inferior del espesor de la discontinuidad (\bullet). El perfil de presión que corta a la discontinuidad por el centro de su espesor (\bullet) presenta el mismo comportamiento que el perfil de velocidad para el extremo superior del espesor de la discontinuidad (\bullet). El modelo de fractura desconectada, ver gráfico (c) de la Figura 9.16, también presenta un incremento de la velocidad en los extremos de la discontinuidad, sin embargo, el incremento en el extremo lateral derecho de la discontinuidad es más pronunciado. Es importante notar que la dirección del flujo es oblicua al plano de fractura.

9.17. Elementos de la malla

Orientación	Número de elementos de la malla		
	Fractura explícita	Descomposición de dominio	Fractura desconectada
0°	8,300	346	336
45°	8,048	342	338
-45°	8,160	338	338
90°	8,048	332	332

Tabla 9.1: Número de elementos de la malla utilizados por los modelos de fractura explícita, descomposición de dominio y fractura desconectada, considerando cuatro orientaciones.

En los datos registrados en la Tabla 9.1 se puede observar que el modelo de fractura explícita requiere un número importante de elementos para poder realizar el mallado del dominio considerando una fractura. Esto se debe a la alta relación de aspecto entre el espesor de la discontinuidad y las dimensiones del dominio. El modelo de descomposición de dominio reduce considerablemente el número de elementos empleados. Esto es posible gracias a que el espesor de la discontinuidad no es considerado explícitamente en el modelo computacional, está considerado implícitamente en el modelo matemático del modelo, eliminando el problema de la alta relación de aspecto. El modelo de fractura desconectada es capaz de reducir aún más el número de elementos empleados en la malla, ya que no necesita partir al dominio para representar una discontinuidad.

9.18. Discusión general de los resultados obtenidos

A partir del análisis de los perfiles de presión y velocidad se puede determinar que el modelo de fractura explícita es capaz de representar los casos en que la discontinuidad se comporta como una fractura abierta al flujo o una barrera, para las cuatro orientaciones de la discontinuidad. Sin embargo, utilizar este modelo no es práctico debido a la alta relación de aspecto entre el espesor de la discontinuidad y las dimensiones del dominio, lo que genera un elevado número de elementos de la malla, y por lo tanto, incógnitas a resolver. Este modelo es considerado como modelo base para comparar los resultados obtenidos con los modelos de descomposición de dominio y fractura desconectada.

El modelo de descomposición de dominio reduce el número de elementos utilizados en la malla, eliminando el problema de relación de aspecto. Este modelo es capaz de representar a la discontinuidad como una fractura abierta al flujo o una barrera. Los perfiles de presión y velocidad muestran que los resultados obtenidos con este modelo mejoran cuando la dirección del flujo es preferentemente normal al plano de fractura. Sin embargo, este modelo requiere realizar una partición del dominio cada vez que se establece una discontinuidad en el dominio, razón por la cual tampoco se considera práctico.

El modelo de fractura desconectada elimina el problema de relación de aspecto, reduciendo el número de elementos empleados en la malla. Sin embargo, únicamente es capaz de representar el caso en que la discontinuidad representa una fractura abierta al flujo. Los perfiles de presión y velocidad muestran que los resultados obtenidos con este modelo mejoran cuando la dirección del flujo es preferentemente tangencial al plano de fractura. Este modelo no requiere realizar una partición del dominio para establecer una discontinuidad. Por lo tanto, se considera que es el modelo más práctico.

Aun cuando el modelo de fractura desconectada no puede representar el caso en que la discontinuidad se comporta como una barrera al flujo, este modelo podría representar una alternativa viable para modelar flujo a través de un medio poroso fracturado. Ya que el caso más significativo, es cuando la discontinuidad se comporta como una fractura abierta al flujo.

Es importante señalar que el modelo matemático del modelo de fractura desconectada es adecuado para representar los casos en que la discontinuidad se comporta como una fractura abierta al flujo o una barrera. Sin embargo, el método estándar de elemento finito no es capaz de considerar adecuadamente las discontinuidades, razón por la cual no se obtienen buenos resultados para el caso en que la discontinuidad representa una barrera al flujo al utilizar este modelo.

Conclusiones

Se aplicó una metodología sistemática de la modelación para la construcción de tres modelos de fractura discreta. Para dicha construcción se utilizó un enfoque axiomático de la mecánica de los medios continuos, así como nociones del método de descomposición de dominio.

Construcciones similares se presentaron en la revisión de modelos de medios porosos fracturados en sus dos enfoques principales: modelos discretos y modelos continuos. Dentro del contexto de la metodología, se eligió el enfoque discreto para la construcción de los modelos, obteniendo resultados interesantes en términos del modelado de flujo en medios porosos fracturados.

En la literatura usualmente se establece que una ventaja conceptual importante de los modelos discretos, sobre los modelos continuos, para modelar medios porosos fracturados es la directa derivación y sencilla evaluación del término de transferencia entre la matriz y las fracturas. Sin embargo, esto solo se confirmó para el modelo de fractura explícita, donde los elementos que representan a las fracturas son equidimensionales al dominio. Para el modelo de fractura discreta mediante descomposición de dominio, así como para el modelo de fractura discreta desconectada, donde las fracturas son representadas por elementos de dimensiones menores a las del dominio, el término de transferencia no surge directamente, pero es derivado como una condición de frontera natural. La evaluación del término de transferencia en ambos modelos representó el principal reto.

Se realizaron simulaciones para diferentes orientaciones de la fractura con el objetivo de verificar la robustez y precisión de los tres modelos de fractura discreta. En los resultados de las simulaciones se encontró consistencia entre los modelos de fractura desconectada, fractura discreta mediante descomposición de dominio y fractura explícita. Este último es considerado como modelo base. Se determinó que la dirección preferencial del flujo es un factor importante para la precisión de los modelos. El modelo de fractura explícita es capaz de representar los casos en que la discontinuidad se comporta como una fractura abierta al flujo o una barrera, sin embargo, la alta relación de aspecto entre el espesor de la discontinuidad y las dimensiones del dominio lo vuelven numéricamente ineficiente. El modelo de fractura discreta mediante descomposición de dominio también es capaz de representar a la discontinuidad como una fractura abierta al flujo o una barrera, y elimina el problema de la alta relación de aspecto al considerar implícitamente el espesor de la discontinuidad en el modelo matemático, pero su aplicación no es práctica debido a que requiere realizar una partición del dominio por cada discontinuidad. La precisión del modelo mejora cuando la dirección del flujo es preferentemente normal al plano de fractura.

El modelo de fractura discreta desconectada, además de eliminar la alta relación de aspecto no requiere particionar el dominio, sin embargo, únicamente puede representar el caso en que la discontinuidad se comporta como una fractura abierta al flujo. La precisión del modelo mejora cuando la dirección del flujo es preferentemente tangencial al plano de fractura. Se considera que este modelo representa una alternativa práctica para modelar flujo en medios porosos fracturados con un uso óptimo de los elementos de la malla.

La combinación del método de elementos finitos y el enfoque de fracturas discretas generan una herramienta poderosa para el estudio de flujo en medios porosos fracturados, permitiendo discretizar geometrías complejas con una representación explícita y precisa de las fracturas.

Una generalización que se puede implementar de manera inmediata sería considerar el modelo de fractura discreta desconectada para representar una red de fracturas discretas cuando la longitud y el espesor es variable. El modelo de fractura discreta desconecta se puede extender a flujo multifásico utilizando el enfoque axiomático de la modelación de sistemas continuos multifásicos. Para la extensión de estos modelos a tres dimensiones se pueden utilizar superficies o polígonos en el espacio para representar las fracturas, en lugar de segmentos. Debido a que las limitaciones del modelo de fractura discreta desconectada para representar una barrera se deben a la formulación estándar del método de elemento finito, la cual no es capaz de representar adecuadamente las discontinuidades, el modelo se puede extender utilizando otras formulaciones que mejoren dicha representación.

El modelo de fractura discreta desconectada se puede utilizar sobre distribuciones de fracturas discretas generadas geoestadísticamente, permitiendo así representar mejor la heterogeneidad presente en los medios porosos fracturados. Debido a la generalidad de sus bases, este modelo puede ser acoplado con otros modelos, como por ejemplo, un modelo de transporte. También puede ser utilizado para realizar estudios de percolación.

Apéndices

Apéndice A

Modelación Matemática de Sistemas Continuos

A continuación se presenta una síntesis del enfoque axiomático de la mecánica de los medios continuos desarrollada a detalle por Allen *et al.* (1988); Herrera y Díaz-Viera (2003); Herrera y Pinder (2012). Este enfoque permite incorporar en un modelo sencillo sistemas que se presentan en diferentes ramas de la ciencia e ingeniería.

A.1. Cinemática de los Sistemas Continuos

La Mecánica de los Medios Continuos proporciona las bases teóricas para el estudio macroscópico de la materia y su movimiento. A dicha escala los sistemas de interés están formados por una cantidad infinita de partículas y se pueden considerar como un continuo de materia.

La modelación de un sistema como un continuo supone que el sistema llena por completo el espacio que ocupa, es decir, cada punto del sistema está lleno de materia, remplazando la estructura real de la materia por un medio continuo hipotético. Aunque se sabe que la materia es discreta a nivel microscópico, las distancias interatómicas son mucho menores que las escalas de longitud normalmente involucradas en la mayoría de los problemas de ciencia e ingeniería, para los cuales estos modelos son considerados de alta precisión.

En los modelos de sistemas continuos las propiedades físicas de la materia están representadas matemáticamente como tensores, los cuales tienen la propiedad necesaria de ser independientes del sistema de referencia. A su vez, los procesos físicos son representados mediante la evolución espacial y temporal de estos tensores.

Las leyes fundamentales, como la conservación de la masa, la conservación del momento y la conservación de la energía, se pueden aplicar a los modelos de sistemas continuos, para derivar ecuaciones diferenciales que describan el comportamiento del sistema. Mientras que la información específica del sistema, se añade a través de relaciones constitutivas.

En los sistemas continuos se trabaja con los promedios de sus propiedades físicas y existe un elemento de volumen llamado representativo, para el cual se calculan y son válidos los promedios de dichas propiedades. Este elemento de volumen infinitesimal es llamado *partícula*, donde el concepto de *partícula* no hace referencia a las partículas consideradas en la Teoría Molecular, sino a un *punto material*.

Un *punto espacial* es un punto fijo en el espacio y un *punto material* es un punto que puede ocupar distintos puntos espaciales en su movimiento a lo largo del tiempo.

Los sistemas continuos están constituidos por *cuerpos*. Un cuerpo es un conjunto infinito de partículas que en cualquier instante dado ocupa un dominio, en el sentido matemático, del espacio físico tridimensional (ver Figura A.1).

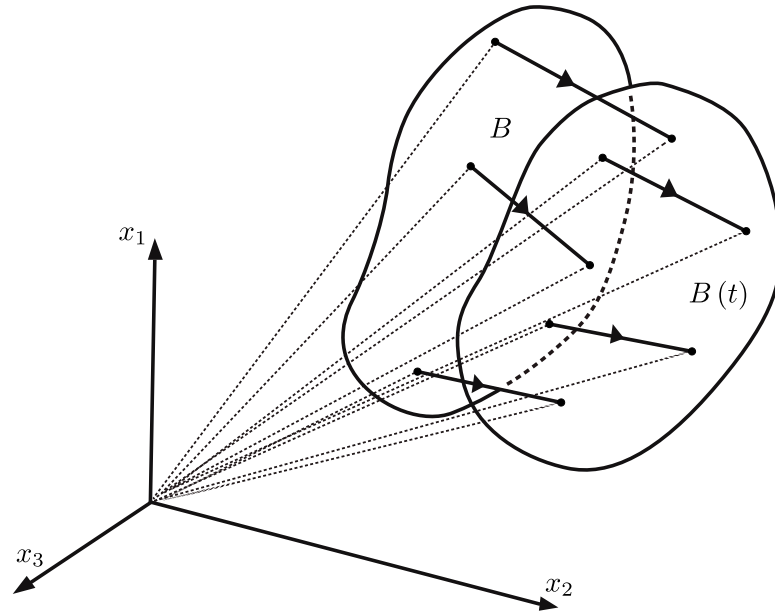


Figura A.1: Representación esquemática de un cuerpo B conformado por un conjunto infinito de partículas que al instante t ocupan el dominio $B(t)$ (modificada de Bobok 1992).

Sea $B(t)$ el dominio ocupado por el cuerpo B en el instante t . Todo subdominio $\tilde{B} \subset B$, constituye a su vez otro cuerpo; en tal caso, se dice que $\tilde{B} \subset B$ es un subcuerpo de B . En cualquier instante de tiempo $t \in (-\infty, \infty)$, y en cada punto $\underline{x} \in B(t)$ de la región ocupada por el cuerpo hay una, y solamente una partícula del cuerpo B (ver Figura A.1).

Sea \underline{X} la posición que ocupa una partícula en el instante de tiempo $t = t_0$, donde t_0 denota al tiempo inicial, cualquiera que este sea, y \underline{x} la posición que ocupa dicha partícula en cualquier instante de tiempo posterior al tiempo inicial, $t > t_0$. El vector de la posición que ocupa, en el espacio físico, una partícula en cualquier instante de tiempo t es función del vector de la posición inicial \underline{X} y del tiempo t , $\underline{p}(\underline{X}, t)$.

El vector de la posición que ocupa una partícula en el tiempo inicial, $t = t_0$, es

$$\underline{p}(\underline{X}, 0) \equiv \underline{X} \quad (\text{A.1})$$

A las coordenadas del vector $\underline{X} \equiv (X_1, X_2, X_3)$, se les llama coordenadas materiales o lagrangianas de la partícula. Las coordenadas materiales o lagrangianas de una partícula son las coordenadas del punto del espacio físico que ocupaba la partícula en el tiempo inicial, $t = 0$.

Sea B el dominio ocupado por un cuerpo en el tiempo inicial, $t = t_0$, $\underline{X} \in B$ si y solamente si la partícula \underline{X} es una partícula del cuerpo B .

El dominio $B(t)$ ocupado por el cuerpo \mathbf{B} para cualquier instante t está formalmente definido por

$$B(t) \equiv \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \underline{X} \in \mathbf{B} \text{ y } \underline{x} = \underline{p}(\underline{X}, t) \}.$$

Las coordenadas del vector de posición $\underline{p}(\underline{X}, t) = (p_1, p_2, p_3) = \underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ que ocupa el punto material \underline{X} del cuerpo \mathbf{B} en el instante t en la configuración espacial son llamadas coordenadas espaciales o eulerianas.

La hipótesis básica de los modelos continuos establece que para cualquier instante t en cada punto del dominio $B(t)$ hay una y solamente una partícula del cuerpo \mathbf{B} . Por lo tanto, $\underline{p}(\underline{X}, t)$ es una función biunívoca, y podemos definir su inversa como $\underline{p}^{-1}(\underline{x}, t) \equiv \underline{X}$, como se muestra en la Figura A.2.

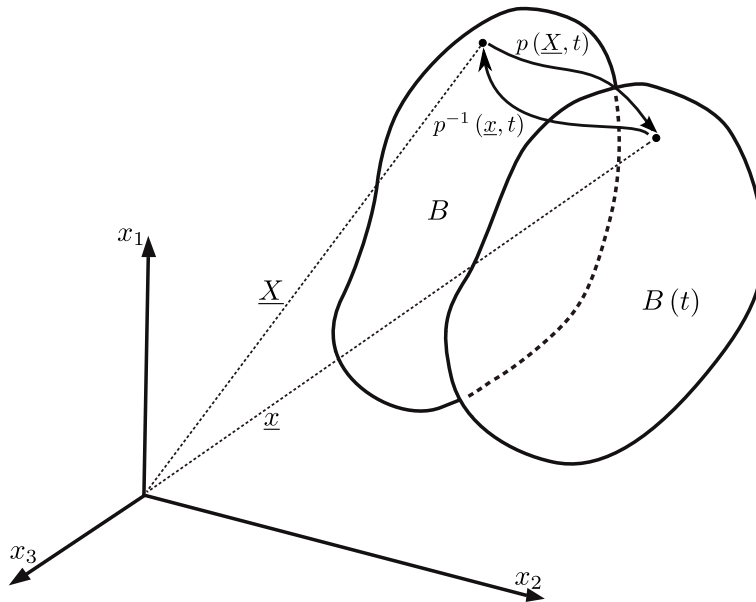


Figura A.2: Representación esquemática de la relación entre la configuración de referencia del cuerpo \mathbf{B} , las coordenadas materiales \underline{X} y las coordenadas espaciales \underline{x} de un punto material $\underline{X} \in \mathbf{B}$ (modificada de Allen *et al.* 1988).

Cada partícula, o punto material, es identificada mediante su posición en el tiempo inicial, $\underline{p}(\underline{X}, 0)$. Por lo tanto, para determinar la trayectoria de una partícula solo se requiere fijar el vector de posición \underline{X} , que define a dicha partícula, y variar el tiempo t en la función de posición $\underline{p}(\underline{X}, t)$, tal como se muestra en la Figura A.3. Si fijamos el tiempo t mientras se varía el vector de posición \underline{X} , entonces se determina la posición de la región que ocupa el cuerpo \mathbf{B} en el tiempo t , es decir, $B(t) = \underline{p}(\mathbf{B}, t)$, ver Figura A.4.

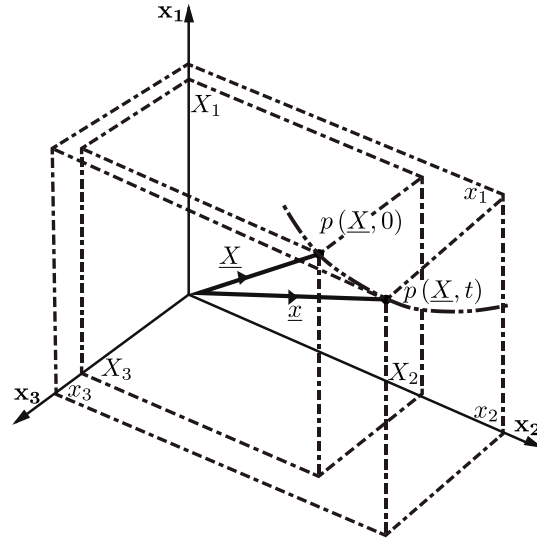


Figura A.3: Dada una partícula $p(\underline{X}, 0)$ identificada por su vector de posición $\underline{X}(X_1, X_2, X_3)$ en el tiempo inicial, $t = 0$, puede determinarse su trayectoria al mantener fijo el vector de posición \underline{X} y variar el tiempo t , obteniendo las posiciones $p(\underline{X}, t)$ para distintos instantes cuyo vector de posición correspondientes es $\underline{x}(x_1, x_2, x_3,)$ (modificada de Bobok 1992).

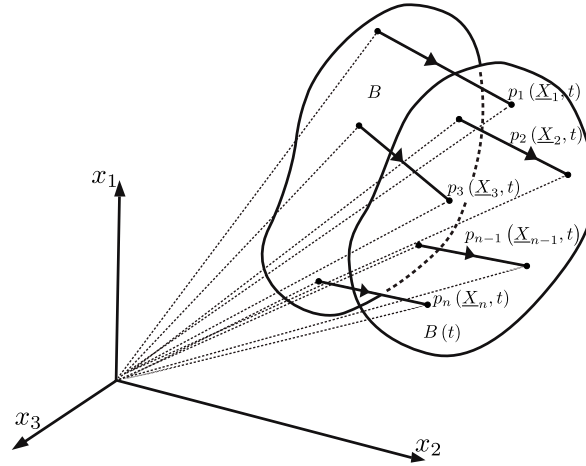


Figura A.4: Dada una partícula $p(\underline{X}, 0)$, que pertenece al cuerpo \mathbf{B} , identificada por su vector de posición $\underline{X}(X_1, X_2, X_3)$ en el tiempo inicial, $t = 0$. Si se fija el tiempo t mientras se varía el vector de posición \underline{X} , se determina la transformación del dominio inicial ocupado por el cuerpo \mathbf{B} en su posición ocupada en el tiempo t , es decir, $B(t)$, ya que se determina la posición de cada una de las partículas que pertenecen al cuerpo \mathbf{B} (modificada de Bobok 1992).

El primer método permite obtener la trayectoria de cualquier partícula y determinar su velocidad. La velocidad como función de las coordenadas materiales se puede expresar como la derivada de la función de posición con respecto al tiempo cuando el punto material se mantiene fijo

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{p}(\underline{X}, t)$$

A.2. Propiedades intensivas

En un sistema continuo, las propiedades intensivas son funciones definidas para cada instante de tiempo en cada una de las partículas, o puntos materiales, que conforman al sistema, es decir, funciones definidas en cada posición \underline{x} de cualquier partícula \underline{X} para cada instante t , por lo tanto, son funciones puntuales. Estas pueden ser funciones escalares o vectoriales. El uso que haremos del concepto de propiedad intensiva considera tanto a propiedades específicas como a propiedades intensivas reales, debido a que ambas son funciones puntuales. Sin embargo, existe una diferencia esencial entre las propiedades específicas y las propiedades intensivas reales. Al integrar una propiedad específica sobre una región se obtiene una propiedad extensiva, para una propiedad intensiva real la integración sobre una región no tiene significado físico.

En la mecánica de los medios continuos existen dos formas de representar a las propiedades intensivas. La representación material, o Lagrangiana, y la representación espacial, o Euclidiana.

A.2.1. Representación Lagrangiana

Consideremos una propiedad intensiva escalar, tal que en el instante t toma en el punto material \underline{X} el valor

$$\phi(\underline{X}, t)$$

definiendo una función $\phi : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{R}^1$ para cada instante de tiempo t . Esta representación de la propiedad intensiva está en función de variables materiales, motivo por el cual recibe el nombre de representación material o Lagrangiana.

A.2.2. Representación Euleriana

Consideremos la misma propiedad intensiva escalar, tal que en el instante t toma en el punto espacial \underline{x} ocupado por la partícula \underline{X} el valor

$$\psi(\underline{x}, t)$$

definiendo una función $\psi : B(t) \rightarrow \mathbb{R}^1$ para cada instante de tiempo t . Esta representación de la propiedad intensiva está en función de variables espaciales, motivo por el cual recibe el nombre de representación espacial o Euleriana.

Toda propiedad que sea función de las variables espaciales (\underline{x}, t) también es una función de las variables materiales (\underline{X}, t) , y viceversa. Debido a que ambas representaciones satisfacen las siguientes identidades

$$\phi(\underline{X}, t) \equiv \psi(\underline{p}(\underline{X}, t), t) \tag{A.2}$$

$$\psi(\underline{x}, t) \equiv \phi(\underline{p}^{-1}(\underline{x}, t), t) \tag{A.3}$$

A.2.3. La derivada material

La derivada con respecto al tiempo de una propiedad expresada en términos de variables materiales es llamada derivada material. Por lo tanto, para obtener la derivada material de una propiedad intensiva, se utiliza su representación material o Lagrangiana, $\phi(\underline{X}, t)$, es decir

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\underline{X}, t)$$

Si se derivan con respecto al tiempo ambos lados de la ecuación A.2, utilizando la regla de derivación de una función compuesta se obtiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(p(\underline{X}, t), t) + \frac{\partial}{\partial t}p(\underline{X}, t) \cdot \nabla \psi(p(\underline{X}, t), t)$$

sustituyendo la posición de la partícula \underline{X} por \underline{x} , la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \nabla \psi(\underline{x}, t)$$

la cual es la representación Euleriana de la derivada material. Para dicha representación se establece un operador denotado por D/Dt y definido como

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \quad (\text{A.4})$$

A.3. Propiedades extensivas

Las propiedades extensivas son funciones definidas para cada instante de tiempo en cada uno de los cuerpos que conforman al sistema, es decir, funciones definidas en cada cuerpo B para cada instante t denotadas por $E(B, t)$, por lo tanto, son funciones de conjunto que pueden expresarse como una integral sobre la región $B(t)$

$$E(t) = \int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (\text{A.5})$$

donde $\psi(\underline{x}, t)$ es la representación euleriana de la propiedad intensiva asociada a la propiedad extensiva.

Esta ecuación establece una correspondencia biunívoca entre propiedades extensivas e intensivas, dado que la integral de la representación Euleriana de cualquier propiedad intensiva, correspondiente a una propiedad específica, sobre el dominio ocupado por cualquier cuerpo define una propiedad extensiva.

Al definir a la propiedad intensiva como la propiedad por unidad de volumen, la correspondencia entre propiedades extensivas e intensivas es más directa: dada una propiedad extensiva, la propiedad intensiva asociada es la función que aparece como integrando, cuando aquélla se expresa como una integral de volumen.

A.4. Ecuación de balance global

El estado de un sistema material puede ser determinado a través de las propiedades extensivas involucradas y las interacciones del sistema con sus fronteras. Por lo tanto, los modelos matemáticos de los sistemas continuos están constituidos por balances de propiedades extensivas, en cada uno de los cuerpos que conforman al sistema.

La hipótesis básica desde el punto de vista físico para la formulación de las ecuaciones de balance de las propiedades extensivas en la teoría de sistemas continuos se puede enunciar de la siguiente manera: *cualquier variación de la propiedad extensiva proviene de lo que se genera o se destruye dentro del cuerpo o de lo que entra o sale a través de su frontera*, esto se puede expresar matemáticamente como

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (\text{A.6})$$

donde

- $g(\underline{x}, t)$ es el lo que se genera o se destruye en el interior del cuerpo $B(t)$,
- $\underline{\tau}(\underline{x}, t)$ es lo que entra o sale a través de la frontera del cuerpo $\partial B(t)$ y
- $g_{\Sigma}(\underline{x}, t)$ es lo que se genera o se destruye en el interior del cuerpo $\Sigma(t)$ (ver figura A.5).

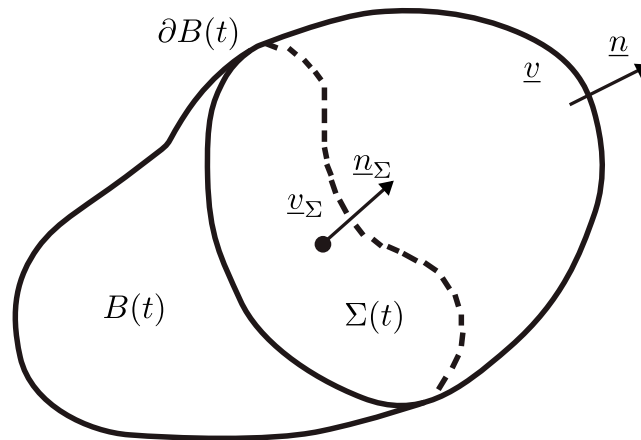


Figura A.5: Representación esquemática de un cuerpo material $B(t)$ moviéndose a una velocidad \underline{v} con frontera $\partial B(t)$, donde \underline{n} es el vector unitario normal apuntando hacia afuera. La superficie de discontinuidad $\Sigma(t)$ tiene vector normal \underline{n}_{Σ} y se mueve con velocidad \underline{v}_{Σ} .

A.5. Ecuaciones de balance local

Las ecuaciones de balance correspondientes a una colección de propiedades extensivas constituyen a los modelos de los sistemas continuos, de esta manera, a cada sistema continuo le corresponde una familia de propiedades extensivas, tal que, el modelo matemático del sistema está constituido por las condiciones de balance de cada una de las propiedades extensivas de dicha familia. Sin embargo, las propiedades extensivas mismas no se utilizan directamente en la formulación del modelo, en su lugar se usan las propiedades intensivas asociadas a cada una de ellas. Esto es posible porque las *ecuaciones de balance global* son equivalentes a las llamadas *condiciones de balance local*, las cuales se expresan en términos de las propiedades intensivas correspondientes. Las condiciones de balance local son de dos clases: las ecuaciones diferenciales de balance local y las condiciones de salto.

A.5.1. Ecuación diferencial de balance local

Son ecuaciones diferenciales parciales que se deben satisfacer en cada punto del espacio ocupado por el sistema continuo, y son de la forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) = g + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (\text{A.7})$$

desarrollando la divergencia en el lado izquierdo

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \underline{v} = g + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (\text{A.8})$$

por definición de derivada material de ψ , obtenemos

$$\frac{D\psi}{Dt} + \psi \nabla \cdot \underline{v} = g + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (\text{A.9})$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial de balance local puede expresarse en términos de la derivada material, que usaremos para expresar la ecuación diferencial de balance local de las ecuaciones básicas de la mecánica de medios continuos.

A.5.2. Ecuación de salto de balance local

Las condiciones de salto son ecuaciones algebraicas que las discontinuidades deben satisfacer donde ocurren, es decir, en cada punto de la superficie de discontinuidad $\Sigma(t)$. Las propiedades intensivas pueden tener discontinuidades de salto exclusivamente a través de la superficie $\Sigma(t)$, donde los límites por ambos lados de $\Sigma(t)$ existen, pero son diferentes.

$$[[\psi(\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) - \underline{\tau}]] \cdot \underline{n}_\Sigma = g_\Sigma \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t). \quad (\text{A.10})$$

donde $[[f]] = \lim_{\underline{x} \rightarrow \Sigma^+} f(\underline{x}) - \lim_{\underline{x} \rightarrow \Sigma^-} f(\underline{x})$ es el salto de la función f .

Las ecuaciones diferenciales de balance local son de uso mucho más amplio que las condiciones de salto, pues estas últimas únicamente se aplican en problemas de carácter especial donde las propiedades intensivas son discontinuas, mientras que las primeras en todo punto del espacio ocupado por el sistema continuo.

A.6. Teoremas

En esta sección, enunciaremos los teoremas que se utilizarán en la derivación de las condiciones de balance local, a partir de la ecuación de balance global.

A.6.1. Teorema de Gauss extendido

Sea $B(t)$ una región conexa con frontera $\partial B(t)$ donde \underline{n} es un vector normal unitario y $\underline{\tau}(\underline{x}, t)$ una función vectorial continuamente diferenciable en $B(t)$ excepto en $\Sigma(t)$ con vector normal unitario \underline{n}_Σ , entonces

$$\int_{\partial B(t)} \underline{\tau} \cdot \underline{n} d\underline{x} = \int_{B(t)} \nabla \cdot \underline{\tau} d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} \llbracket \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma d\underline{x} \quad (\text{A.11})$$

A.6.2. Teorema de transporte de Reynolds extendido

Sea $B(t)$ una región conexa (el dominio de un cuerpo) con velocidad \underline{v} y $\Sigma(t)$ una superficie que interseca a $B(t)$, con vector normal unitario \underline{n}_Σ y velocidad \underline{v}_Σ . Si $\psi(\underline{x}, t)$ es una función de valores reales definida en $B(t)$ continuamente diferenciable excepto en la superficie $\Sigma(t)$, entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) d\underline{x} = \int_{B(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) \right) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} \llbracket \psi(\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) \rrbracket \cdot \underline{n}_\Sigma d\underline{x} \quad (\text{A.12})$$

A.6.3. Lema de Dubois-Reymond extendido

Sea $f(\underline{x})$ continua excepto en $\Sigma(t)$ y $g(\underline{x})$ continua en $\Sigma(t)$. Si

$$\int_{B(t)} f(\underline{x}) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g(\underline{x}) d\underline{x} = 0 \quad (\text{A.13})$$

entonces $f(\underline{x}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad y \quad g(\underline{x}) = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t).$

A.7. De la ecuación de balance global a las ecuaciones de balance local

Afirmamos que en un sistema continuo, la *ecuación de balance global*, se satisface para todo cuerpo del sistema continuo, si y solamente si, se cumplen las *condiciones de balance local*. En efecto, sustituyendo en la ecuación de balance global (A.6) la definición de propiedad extensiva (A.5)

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi \, d\underline{x} = \int_{B(t)} g \, d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau} \cdot \underline{n} \, d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma} \, d\underline{x} \quad (\text{A.14})$$

aplicando al segundo sumando (A.11) el teorema de Gauss extendido

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi \, d\underline{x} &= \int_{B(t)} g \, d\underline{x} + \int_{B(t)} \nabla \cdot \underline{\tau} \, d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} \llbracket \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} \, d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma} \, d\underline{x} \\ &= \int_{B(t)} (g + \nabla \cdot \underline{\tau}) \, d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} (\llbracket \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} + g_{\Sigma}) \, d\underline{x} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

aplicando en la izquierda (A.12) el teorema de transporte de Reynolds extendido

$$\begin{aligned} &\int_{B(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) \right) \, d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} \llbracket \psi(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma}) \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} \, d\underline{x} \\ &= \int_{B(t)} (g(\underline{x}, t) + \nabla \cdot \underline{\tau}) \, d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} (\llbracket \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} + g_{\Sigma}(\underline{x}, t)) \, d\underline{x} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

agrupando términos del lado izquierdo de la igualdad

$$\begin{aligned} &\int_{B(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) - (g(\underline{x}, t) + \nabla \cdot \underline{\tau}) \right) \, d\underline{x} \\ &+ \int_{\Sigma(t)} (\llbracket \psi(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma}) - \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} - g_{\Sigma}(\underline{x}, t)) \, d\underline{x} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

aplicando (A.13) el lema de Dubois-Reymond extendido, obtenemos la ecuación de balance local y la condición de salto de balance local respectivamente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) = g(\underline{x}, t) + \nabla \cdot \underline{\tau}, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (\text{A.18})$$

$$\llbracket \psi(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma}) - \underline{\tau} \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} = g_{\Sigma}(\underline{x}, t), \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \quad (\text{A.19})$$

A.8. Modelos multifásicos

La metodología para modelar sistemas continuos multifásicos se aplica de la misma manera que para sistemas continuos de una sola fase. Se identifica a un conjunto finito, o familia, de propiedades extensivas. A cada una de las propiedades extensivas de esa familia se les impone la condición de satisfacer la ecuación de balance global en cada cuerpo del sistema continuo, lo cual es equivalente a la ecuación diferencial de balance local y a la condición de salto.

Las fases contienen varios componentes superpuestos que se mueven a la misma velocidad. Si consideramos un sistema con N fases donde cada fase tiene M_α componentes y a cada componente le corresponde una propiedad intensiva ψ_γ^α asociada a la propiedad extensiva E_γ^α , donde α denota el número de la fase ($\alpha = 1, \dots, N$) y γ denota el número de la componente dentro de dicha fase ($\gamma = 1, \dots, M_\alpha$), entonces las ecuaciones de balance global, al igual que las ecuaciones de balance local, se plantean por componentes. La *propiedad intensiva* asociada a la propiedad extensiva E_γ^α es $\psi_\gamma^\alpha(\underline{x}, t)$:

$$E_\gamma^\alpha(t) = \int_{B(t)} \psi_\gamma^\alpha(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (\text{A.20})$$

Ecuaciones de balance global

$$\frac{d}{dt} E_\gamma^\alpha(t) = \int_{B(t)} g_\gamma^\alpha(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}_\gamma^\alpha(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma\gamma}^\alpha(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (\text{A.21})$$

Ecuaciones diferenciales de balance local

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_\gamma^\alpha + \nabla \cdot (\psi_\gamma^\alpha \underline{v}^\alpha) = g_\gamma^\alpha + \nabla \cdot \underline{\tau}_\gamma^\alpha, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t) \quad (\text{A.22})$$

Condiciones de salto de balance local

$$[[\psi_\gamma^\alpha(\underline{v}^\alpha - \underline{v}_\Sigma^\alpha) - \underline{\tau}_\gamma^\alpha]] \cdot \underline{n}_\Sigma = g_{\Sigma\gamma}^\alpha, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t) \quad (\text{A.23})$$

A.9. Modelos completos

En general las ecuaciones diferenciales tienen muchas soluciones, por lo que es necesario complementarlas con condiciones iniciales y de frontera. El modelo de un sistema continuo es completo si define un problema bien planteado. Un problema de valores iniciales y de frontera es bien planteado si se cumple que existe una única solución y ésta depende de las condiciones iniciales y de frontera de manera continua.

A.9.1. Condiciones iniciales

Cuando en la ecuación diferencial interviene el tiempo, se incluyen condiciones iniciales que expresan el valor de la función al tiempo inicial $t = 0$.

$$c(\underline{x}, 0) = c_0(\underline{x}) \quad (\text{A.24})$$

A.9.2. Condiciones de frontera

Se imponen en la frontera exterior del dominio

(a) Dirichlet

Especifica los valores que toma la función $c(\underline{x}, t)$ en la frontera $\partial B(t)$

$$c(\underline{x}, t) = f(\underline{x}) \quad (\text{A.25})$$

(b) Neuman

Se prescribe la derivada normal en la frontera, por lo tanto aquí se conoce el valor de la derivada de la función $c(\underline{x}, t)$ con respecto a la normal \underline{n} a lo largo de la frontera $\partial B(t)$

$$\nabla c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = g(\underline{x}) \quad (\text{A.26})$$

(c) Robin

Esta condición es una combinación lineal de las dos anteriores.

$$a(\underline{x})c(\underline{x}, t) + b(\underline{x})\nabla c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = \gamma(\underline{x}, t) \quad (\text{A.27})$$

$\gamma(\underline{x}, t)$ es la función prescrita en la frontera exterior.

Para obtener *modelos completos*, además de las condiciones de balance local, ecuación diferencial de balance local y condición de salto de balance local, es necesario evaluar la *generación interna*, determinada por $g(\underline{x}, t)$ y $g_{\Sigma}(\underline{x}, t)$, y el campo de flujo $\underline{\tau}(\underline{x}, t)$, en términos de las funciones conocidas de las propiedades intensivas asociadas. A través de estas ecuaciones constitutivas, se integra el conocimiento científico y tecnológico en los modelos matemáticos, todo depende de la clase de los procesos involucrados. En conclusión, los modelos de los sistemas continuos están constituidos por:

- Una colección de propiedades intensivas y extensivas.
- Un conjunto de condiciones de balance local correspondientes a cada propiedad intensiva, en cada una de las cuales, la velocidad de los puntos materiales es la de la fase correspondiente.
- Condiciones iniciales y de frontera que deben satisfacer las propiedades intensivas.
- Suficientes relaciones que ligan a las propiedades intensivas entre sí y que definen a g , $\underline{\tau}$ y \underline{v} en términos de éstas, conocidas como leyes constitutivas.

A.10. Ecuaciones de balance de masa

$$M(t) = \int_{B(t)} \rho(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (\text{A.28})$$

Propiedad extensiva: masa

$$E(t) \equiv M(t) \quad (\text{A.29})$$

Propiedad intensiva: densidad

$$\psi(\underline{x}, t) \equiv \rho(\underline{x}, t) \quad (\text{A.30})$$

Ecuación de balance global

$$\frac{d}{dt} M(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (\text{A.31})$$

Ecuación diferencial de balance local

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = g + \nabla \cdot \tau, \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t). \quad (\text{A.32})$$

Ecuación de salto de balance local

$$\llbracket \rho(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma}) - \tau \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} = g_{\Sigma}, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t). \quad (\text{A.33})$$

donde

- $g(\underline{x}, t)$ es la masa que se genera o se destruye en el interior del cuerpo $B(t)$.
- $\underline{\tau}(\underline{x}, t)$ es la masa que entra o sale a través de la frontera del cuerpo $\partial B(t)$
- $g_{\Sigma}(\underline{x}, t)$ es la masa que se genera o se destruyen en el interior del cuerpo $\Sigma(t)$

Ecuaciones de conservación de masa

Como un caso particular, se pueden obtener las ecuaciones que describen el principio de conservación de la masa. Si $g(\underline{x}, t) = g_{\Sigma}(\underline{x}, t) = \underline{\tau}(\underline{x}, t) \equiv 0$

Ecuación de balance global

$$\frac{d}{dt} M(t) = 0 \quad (\text{A.34})$$

Ecuación diferencial de balance local

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad ; \quad \forall \underline{x} \in B(t) \setminus \Sigma(t). \quad (\text{A.35})$$

también conocida como *ecuación de continuidad*.

Ecuación de salto de balance local

$$\llbracket \rho(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma}) \rrbracket \cdot \underline{n}_{\Sigma} = 0 \quad ; \quad \forall \underline{x} \in \Sigma(t). \quad (\text{A.36})$$

Apéndice B

Método de Elemento Finito

B.1. Derivación del Método de Elementos Finitos

El método de elementos finitos se puede formular a partir del Método de Residuos Pesados (Allen *et al.*, 1988). Comenzaremos con el problema de ecuaciones diferenciales parciales con valores en la frontera y delinearemos el procedimiento típico para derivar su contra parte débil.

Dada la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}_{\underline{x}}u = f_{\Omega}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (\text{B.1})$$

donde:

$$\mathcal{L}_{\underline{x}}u \equiv -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu \quad (\text{B.2})$$

es el operador elíptico general de segundo orden y \underline{a} , \underline{b} y c son una matriz, un vector y un escalar de coeficientes respectivamente, que en general son funciones definidas en $\Omega \in \mathbb{R}^d$, ($d = 1, 2, 3$), con condiciones de frontera tipo Neumann y Dirichlet. El problema estaría dado por

$$-\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu = f_{\Omega}; \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (\text{B.3})$$

$$u = u_{\partial_D}; \quad \forall \underline{x} \in \partial_D \Omega \quad (\text{B.4})$$

$$(\underline{a} \cdot \nabla u - \underline{b}u) \cdot \underline{n} = u_{\partial_N}; \quad \forall \underline{x} \in \partial_N \Omega \quad (\text{B.5})$$

Si se define

$$\mathcal{R}(\underline{x}, u) \equiv \mathcal{L}u(\underline{x}) - f_{\Omega}(\underline{x}); \quad \forall \underline{x} \in \Omega(t) \quad (\text{B.6})$$

donde $\mathcal{R}(\underline{x}, u)$ es el residuo (error).

Si $u(\underline{x})$ es la solución exacta, entonces $\mathcal{R}(\underline{x}, u) \equiv 0$, pero para cualquier otra $u(\underline{x})$, por ejemplo, una solución aproximada $\tilde{u}(\underline{x})$ del problema, $\mathcal{R}(\underline{x}, \tilde{u})$ no será cero en cada punto $\underline{x} \in \Omega$.

Sin embargo, el método de residuos pesados tiene como objetivo elegir a la $\tilde{u}(\underline{x})$ que haga mínimo el residuo (error) en algún sentido. Si se realiza el primer paso para derivar la forma débil del problema original, es decir, la transformación de la ecuación diferencial parcial a una ecuación integral, resulta que:

$$\int_{\Omega} v \mathcal{R}(\underline{x}, \tilde{u}) \, d\underline{x} = \int_{\Omega} v (\mathcal{L}\tilde{u} - f_{\Omega}) \, d\underline{x} = 0 \quad (\text{B.7})$$

Se puede observar que la solución aproximada \tilde{u} es óptima, es decir $\mathcal{R}(\underline{x}, \tilde{u}) \approx 0$, en el sentido del promedio ponderado, donde v es una función de peso que se utiliza para promediar la ecuación.

Derivación de la formulación débil

El primer paso para derivar la forma débil consiste en multiplicar la ecuación original B.3 por una función de peso v arbitraria (o familia de funciones) e integrar sobre el dominio Ω

$$\int_{\Omega} v \{ -\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) + \nabla \cdot (\underline{b}u) + cu \} \, d\underline{x} = \int_{\Omega} v f_{\Omega} \, d\underline{x} \quad (\text{B.8})$$

donde v es una función continua, al menos a tramos, bastará que $v \in C^0(\Omega)$. Una función u pertenece a $C^k(\Omega)$ si todas sus derivadas hasta de orden k son continuas.

La transformación de la ecuación diferencial parcial en esta ecuación integral es seguida de un segundo paso: Aplicar el teorema de Gauss de la divergencia -el cual se deriva de la primera formula de Green - sobre los integrandos con derivadas de segundo orden.

como

$$\nabla \cdot \{ v [(\underline{a} \cdot \nabla u) - (\underline{b}u)] \} = \nabla v \cdot [(\underline{a} \cdot \nabla u) - (\underline{b}u)] + v \{ \nabla \cdot [(\underline{a} \cdot \nabla u) - (\underline{b}u)] \} \quad (\text{B.9})$$

$$\nabla \cdot (v\underline{a} \cdot \nabla u - v\underline{b}u) = \nabla v \cdot \underline{a} \cdot \nabla u - \nabla v \cdot \underline{b}u + v [\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) - \nabla \cdot (\underline{b}u)] \quad (\text{B.10})$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (v\underline{a} \cdot \nabla u - v\underline{b}u) \, d\underline{x} &= \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \underline{a} \cdot \nabla u - \nabla v \cdot \underline{b}u) \, d\underline{x} \\ &+ \int_{\Omega} v [\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) - \nabla \cdot (\underline{b}u)] \, d\underline{x} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Reordenando la ecuación anterior

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} v [\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) - \nabla \cdot (\underline{b}u)] \, d\underline{x} &= \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \underline{a} \cdot \nabla u - \nabla v \cdot \underline{b}u) \, d\underline{x} \\ &- \int_{\Omega} \nabla \cdot (v\underline{a} \cdot \nabla u - v\underline{b}u) \, d\underline{x} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Aplicando el teorema de Gauss de la divergencia al segundo término del lado derecho de la ecuación anterior

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (v \underline{a} \cdot \nabla u - v \underline{b}u) \, d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} (v \underline{a} \cdot \nabla u - v \underline{b}u) \cdot \underline{n} \, d\underline{x} \quad (\text{B.13})$$

Sustituyendo la igualdad B.13 en la ecuación B.12

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} v [\nabla \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u) - \nabla \cdot (\underline{b}u)] \, d\underline{x} &= \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \underline{a} \cdot \nabla u - \nabla v \cdot \underline{b}u) \, d\underline{x} \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} (v \underline{a} \cdot \nabla u - v \underline{b}u) \cdot \underline{n} \, d\underline{x} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Por lo tanto, la ecuación B.8 puede reescribirse como

$$\int_{\Omega} \{ \nabla v \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u - \underline{b}u) + cuv \} \, d\underline{x} - \int_{\partial\Omega} (v \underline{a} \cdot \nabla u - v \underline{b}u) \cdot \underline{n} \, d\underline{x} = \int_{\Omega} v f_{\Omega} \, d\underline{x} \quad (\text{B.15})$$

donde $\partial\Omega$ es la frontera del dominio Ω y \underline{n} el vector unitario normal hacia afuera del dominio. La integral sobre la frontera es responsable de la interacción con los alrededores de Ω . Las condiciones de frontera describen esta interacción y vuelven único el problema.

La integral sobre la frontera $\partial\Omega$ se puede descomponer como la suma de las integrales sobre las dos subfronteras $\partial_D\Omega$ y $\partial_N\Omega$. Donde $\partial_D\Omega$ representa a la parte de la frontera $\partial\Omega$ con condiciones tipo Dirichlet y $\partial_N\Omega$ la parte con condiciones tipo Neumann.

$$\int_{\partial\Omega} v (\underline{a} \cdot \nabla u - \underline{b}u) \cdot \underline{n} \, d\underline{x} = \int_{\partial_D\Omega} v (\underline{a} \cdot \nabla u - \underline{b}u) \cdot \underline{n} \, d\underline{x} + \int_{\partial_N\Omega} v (\underline{a} \cdot \nabla u - \underline{b}u) \cdot \underline{n} \, d\underline{x} \quad (\text{B.16})$$

Entonces podemos reescribir la ecuación B.15 como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ \nabla v \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u - \underline{b}u) + cuv \} \, d\underline{x} &- \int_{\partial_D\Omega} v (\underline{a} \cdot \nabla u - \underline{b}u) \cdot \underline{n} \, d\underline{x} \\ &- \int_{\partial_N\Omega} v (\underline{a} \cdot \nabla u - \underline{b}u) \cdot \underline{n} \, d\underline{x} = \int_{\Omega} v f_{\Omega} \, d\underline{x} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Sin embargo, se requiere que la función de prueba se desvanezca en la parte de la frontera donde se ha establecido la condición tipo Dirichlet. Las funciones de prueba son análogas a una

primera variación en u ($v \sim \delta u$) y por lo tanto si u es especificada en un punto su variación en ese punto debe ser cero, lo cual implica que $v = 0$ sobre $\partial_D \Omega$. Por lo tanto, la ecuación B.15 puede reescribirse como

$$\int_{\Omega} \{ \nabla v \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u - \underline{b}u) + cuv \} \, d\underline{x} - \int_{\partial_N \Omega} v (\underline{a} \cdot \nabla u - \underline{b}u) \cdot \underline{n} \, d\underline{x} = \int_{\Omega} v f_{\Omega} \, d\underline{x} \quad (\text{B.18})$$

Sin embargo, sabemos que $(\underline{a} \cdot \nabla u - \underline{b}u) \cdot \underline{n} = u_{\partial_N}$ sobre $\partial_N \Omega$. Sustituyendo esta igualdad en la ecuación anterior y reordenando los términos se tiene

$$\int_{\Omega} \{ \nabla v \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u - \underline{b}u) + cuv \} \, d\underline{x} = \int_{\Omega} v f_{\Omega} \, d\underline{x} + \int_{\partial_N \Omega} v u_{\partial_N} \, d\underline{x} \quad (\text{B.19})$$

La expresión del lado izquierdo es lineal en u y v . Esto es una forma bilineal de las variables u y v , mientras que la expresión del lado derecho es lineal en v .

En la ecuación B.19 aun no se ha impuesto la condición de frontera tipo Dirichlet, $u = u_{\partial_D}$ sobre $\partial_D \Omega$.

Sin especificar los espacios donde se encuentran u y v , la formulación débil puede ser descrita como sigue:

Encontrar u tal que $u = u_{\partial_D}$ sobre $\partial_D \Omega$

$$\int_{\Omega} \{ \nabla v \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u - \underline{b}u) + cuv \} \, d\underline{x} = \int_{\Omega} v f_{\Omega} \, d\underline{x} + \int_{\partial_N \Omega} v u_{\partial_N} \, d\underline{x} \quad (\text{B.20})$$

para toda v tal que $v = 0$ sobre $\partial_D \Omega$.

Las condiciones de frontera aparecen en lugares muy diferentes de esta formulación. La condición de frontera tipo Dirichlet es impuesta aparte de la formulación e involucra la imposición homogénea de la función de prueba v . Ésta es llamada una condición de frontera esencial. La condición tipo Neumann aparece dentro de la formulación. Ésta es llamada condición de frontera natural.

Que una condición de frontera sea esencial o natural no está inherentemente relacionado con el tipo de condición de frontera, sino con el rol de la condición de frontera en la formulación. Por lo tanto una condición de frontera esencial se refiere a una condición que ha sido impuesta, mientras que una condición de frontera natural es aquella que aparece dentro de la formulación.

Si definimos los espacios donde se encuentran u y v , como V y \hat{V} , respectivamente. La ecuación B.20 está supuesta para admitir todas las u y v que pertenecen a algún espacio de funciones V y \hat{V} .

La declaración apropiada del problema en su forma débil, es la siguiente: encontrar $u \in V$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ \nabla v \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u - \underline{b}u) + cuv \} \, d\underline{x} &= \int_{\partial\Omega} (v\underline{a} \cdot \nabla u - v\underline{b}u) \cdot \underline{n} \, d\underline{x} \\ &= \int_{\Omega} v f_{\Omega} \, d\underline{x}; \quad \forall v \in \hat{V} \end{aligned} \tag{B.21}$$

donde los espacios de prueba y ensayo (\hat{V} y V) están definidos como:

$$V = \{ u \in H^1(\Omega) : u = u_{\partial D} \text{ sobre } \partial\Omega \} \tag{B.22}$$

$$\hat{V} = \{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \} \tag{B.23}$$

Donde $H^k(\Omega)$ es el espacio de Sobolev, que contiene funciones $u(\underline{x})$ tales que $u(\underline{x})^2$ y $|\nabla u(\underline{x})|^2$ tienen integrales finitas sobre Ω hasta orden k , es decir

$$\int_{\Omega} |u(\underline{x})|^2 d\underline{x} < \infty \tag{B.24}$$

Esto es un poco menos restrictivo que $C^0(\Omega)$.

Se debe observar que en la formulación débil B.21 solo aparecen términos con primeras derivadas en u y v , por lo tanto, bastará que estas integrales estén bien definidas para poder calcular la forma débil.

Al reducir el orden de las derivadas, tanto en u como en v , se pueden elegir funciones u y v que son continuas pero no continuamente diferenciables, es decir, u y v no necesitan pertenecer a $C^1(\Omega)$. Esto proporciona mayor libertad para seleccionar las aproximaciones de prueba y ensayo, debido a que hay muchas más funciones que pertenecen a $C^0(\Omega)$ que a $C^1(\Omega)$.

Para que la solución a la ecuación en su formulación fuerte B.3 tenga sentido, $u \in C^2(\Omega)$, es decir, u debe ser continuamente diferenciable hasta segundo orden.

La solución de la ecuación diferencial parcial original debe hallarse en un espacio de funciones donde las derivadas también son continuas, pero el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ acepta funciones con derivadas discontinuas. Este requisito más débil en la continuidad de u en la declaración débil, causada por la integración por partes, tiene grandes repercusiones prácticas cuando se construyen elementos finitos.

Para resolver la ecuación numéricamente se necesita transformar el problema débil continuo en un problema débil discreto. Esto se hace al introducir espacios finitos de prueba y ensayo, a menudo denotados por $V_h \subset V$ y $\hat{V}_h \subset \hat{V}$ entonces se debe encontrar una $u_h \in V_h \subset V$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ \nabla v_h \cdot (\underline{a} \cdot \nabla u_h - \underline{b} u_h) + c u_h v_h \} \, d\underline{x} &= \int_{\partial\Omega} (v_h \underline{a} \cdot \nabla u_h - v_h \underline{b} u_h) \cdot \underline{n} \, d\underline{x} \\ &= \int_{\Omega} v_h f_{\Omega} \, d\underline{x}; \quad \forall v_h \in \hat{V}_h \subset \hat{V} \end{aligned} \tag{B.25}$$

La elección de V_h y \hat{V}_h depende directamente del tipo de elemento finito que se aplique al problema.

Por ejemplo, seleccionando los bien conocidos elementos triangulares lineales con tres nodos, implica que V_h y \hat{V}_h son los espacios de todas las funciones lineales a tramos sobre una malla de triángulos, donde las funciones V_h son igual a u_{∂} y aquellas en \hat{V}_h son cero sobre la frontera.

Aproximación de elemento finito

Las funciones de base que son independientes pueden ser usadas para aproximar una función en un espacio dimensional finito. En el método de elemento finito, el dominio es particionado en m elementos que no se traslapan, tal que $\Omega = \bigcup_{e=1}^m \Omega_e$. Cada vértice de un elemento es un nodo, y la coordenada x_j del nodo j es llamada coordenada nodal. Por lo tanto, si el dominio está representado por n nodos, podemos aproximar $u(x)$ mediante u_h , donde h es una medida del espaciamiento nodal, con

$$u_h(x) = \tilde{u} + u_0 \tag{B.26}$$

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) u_j \tag{B.27}$$

donde $\phi_j(x)$ son las funciones de base, u_j son los valores nodales y u_0 es una función que satisface las condiciones de frontera. Las funciones de base para cada nodo son diferente de cero solo sobre ciertos los elementos a los que están fijos. Esto provee localidad, lo que lleva a una matriz dispersa. Por ello, para cualquier punto x , como máximo dos funciones de base contribuyen en la sumatoria dada en la ecuación B.26. Esto conduce a la formulación estándar de elemento finito de desarrollar funciones de base que están restringidas a los elementos, conocidas como funciones de forma.

Usando la aproximación de elemento finito en la formulación débil discreta expresada en la ecuación B.25 nos limitamos a las funciones que son de la forma expresada en la ecuación B.26. Sustituyendo la igualdad B.25 en la ecuación B.26

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n u_j \int_{\Omega} \{ \nabla v_h \cdot (\underline{a} \cdot \nabla \phi_j - \underline{b} \phi_j) + c \phi_j v_h \} \, d\underline{x} &= \int_{\partial\Omega} (v_h \underline{a} \cdot \nabla u_0 - v_h \underline{b} u_0) \cdot \underline{n} \, d\underline{x} \\ &= \int_{\Omega} v_h f_{\Omega} \, d\underline{x}; \quad \forall v_h \in \hat{V}_h \subset \hat{V} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

ahora que se tienen n incógnitas, se necesitan n ecuaciones independientes para obtener una única solución para las u_j . Una selección obvia es establecer $v_h = \phi_i$, la formulación débil discreta sería

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n u_j \int_{\Omega} \{ \nabla \phi_i \cdot (\underline{a} \cdot \nabla \phi_j - \underline{b} \phi_j) + c \phi_j \phi_i \} \, d\underline{x} &= \int_{\partial\Omega} (\phi_i \underline{a} \cdot \nabla u_0 - \phi_i \underline{b} u_0) \cdot \underline{n} \, d\underline{x} \\ &= \int_{\Omega} \phi_i f_{\Omega} \, d\underline{x}; \quad i = 1 \dots n \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Esto genera un sistema de ecuaciones lineales:

$$Kd = f$$

donde

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_{\Omega} \{ \nabla \phi_i \cdot (\underline{a} \cdot \nabla \phi_j - \underline{b} \phi_j) + c \phi_j \phi_i \} \, d\underline{x} \\ f_i &= \int_{\Omega} \phi_i f_{\Omega} \, d\underline{x} + \int_{\partial\Omega} (\phi_i \underline{a} \cdot \nabla u_0 - \phi_i \underline{b} u_0) \cdot \underline{n} \, d\underline{x} \\ d &= \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera esenciales son impuestas modificando K y f .

B.2. Formulación débil

Resolver problemas de ecuaciones diferenciales parciales es más sencillo si el problema es expresado en su forma débil. Los problemas de ecuaciones diferenciales parciales tienen restricciones muy fuertes, ya que demandan que las funciones involucradas sean lo suficientemente suaves. En cambio, la formulación débil requiere menor suavidad en las funciones que ésta admite, ya que es más débil en sus restricciones. Sin embargo, cualquier problema en su forma débil con valores en las fronteras corresponde a un problema de ecuaciones diferenciales parciales con valores en las fronteras y viceversa.

El procedimiento para convertir un problema de ecuaciones diferenciales parciales en su forma débil consiste en multiplicar la ecuación diferencial parcial por una función v , integrar la ecuación resultante sobre el dominio, y desarrollar la integración por partes de los términos con derivadas de segundo orden. La función desconocida a ser aproximada u es llamada función a prueba (*trial function*) mientras que la función v que multiplica a la ecuación diferencial es llamada función de prueba (*test function*). Ésta prueba la ecuación que satisface u . En lugar de obtener una solución que satisface a la ecuación en cada punto del dominio Ω , se obtiene una solución aproximada que satisface una versión promedio de la ecuación original. Por lo tanto, v tiene el papel de una función de peso, es decir, una función que se utiliza para promediar la ecuación en el sentido del promedio ponderado. Sin embargo, se deben especificar adecuados espacios de funciones para las funciones de prueba v y a prueba u .

Además, si se utilizan elementos finitos para la discretización del espacio, la formulación débil facilita el tratamiento de los problemas mediante métodos numéricos de ecuaciones diferenciales parciales.

B.3. Funciones de prueba

Una función, u , es llamada solución débil de la ecuación diferencial parcial si resuelve la ecuación débil para varias funciones de prueba, v , diferentes. Es decir, no solo se considera una función de prueba, si no que v representa a una clase entera de funciones de prueba donde cada una corresponde a una ecuación. Por supuesto, no se puede considerar todas las posibles funciones de prueba, esto resultaría en una cantidad infinita de ecuaciones. Se requiere un número finito de funciones de prueba elegidas acertadamente. Aquí es donde los elementos finitos entran en juego.

Antes de realizar el estudio del comportamiento de un sistema, se requiere realizar la discretización espacial de su dominio, es decir, el dominio computacional necesita ser mallado. Al mallar se divide la geometría en un conjunto de pequeños elementos. Las funciones prueba pueden entonces ser definidas utilizando polinomios sobre cada elemento tal que sean diferentes de cero solo en un pequeño grupo de elementos adyacentes e igual a cero fuera del grupo. El tipo más común de polinomios, contruidos de esta manera, son conocidos como polinomios de Lagrange.

Dado que las funciones de prueba asociadas con diferentes elementos de malla son independientes, la malla efectivamente decide el número de funciones de prueba, así como su resolución espacial. Entonces, la solución resultante del cálculo es en realidad una superposición de todas las funciones de prueba involucradas. Aunque la solución real podría ser una función compleja, ésta puede ser aproximada como una combinación de funciones simples.

Entre más fina sea la malla, más funciones de forma están involucradas y la solución será mejor. Si continuamos refinando la malla hasta que la solución no cambie, se tendrá un estudio de convergencia de malla exitosamente realizado y es probable que la solución sea una buena aproximación de la solución de la ecuación diferencial parcial original.

B.4. La sintaxis de COMSOL Multiphysics®

Para expresar la forma débil en la sintaxis de COMSOL Multiphysics®, el software provee el operador `test`, el cual es utilizado para expresar las funciones de prueba, v . El operador `test` opera sobre la variable dependiente, u , y sus derivadas (COMSOL, 2008), esto es:

$$v \equiv \text{test}(u)$$

En COMSOL Multiphysics® la sintaxis para la primera derivada parcial es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv ux$$

Así mismo, las derivadas parciales de la función de prueba están expresadas como:

$$\frac{\partial v}{\partial x} \equiv \text{test}(ux)$$

La razón para asociar las funciones de prueba con la solución de esta manera es que si la solución es representada utilizando una base polinomial sobre la malla, como se describió anteriormente, utilizando la misma base para las funciones de prueba se garantiza que el sistema discreto contenga el mismo número de incógnitas y ecuaciones.

La forma débil en COMSOL Multiphysics® considera la siguiente igualdad

$$0 = \text{weak}$$

donde `weak` es el término donde debe ingresarse la formulación débil de acuerdo con la notación de COMSOL Multiphysics®. Por lo tanto, no es necesario incluir el signo igual dentro de la formulación, debido a que la forma débil de ecuaciones diferenciales parciales está igualada a cero. Es importante remarcar que esta traducción es normalmente realizada de forma automática, ya que COMSOL Multiphysics® necesita la forma débil para proceder con el cálculo. Sin embargo, también es posible introducir una forma débil como usuario.

Entender la forma débil nos permitirá escribir nuestras propias ecuaciones cuando no esté disponible una interfaz integrada para la física particular involucrada en nuestro modelo.

Apéndice C

Solución Semi-analítica para Flujo Radial

Se obtiene una solución semi-analítica para la ecuación (5.35) con el objetivo de verificar la exactitud de la solución numérica.

El medio poroso es isotrópico, por lo tanto $\underline{K} = k\underline{I}$, donde \underline{I} es el tensor identidad.

En coordenadas cilíndricas (r, θ, x_3) la ecuación (5.35) tiene la forma:

$$\phi \rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r \rho k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \rho \gamma \frac{\partial z}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\rho k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} - \rho \gamma \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\rho k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_3} - \rho \gamma \frac{\partial z}{\partial x_3} \right) \right]$$

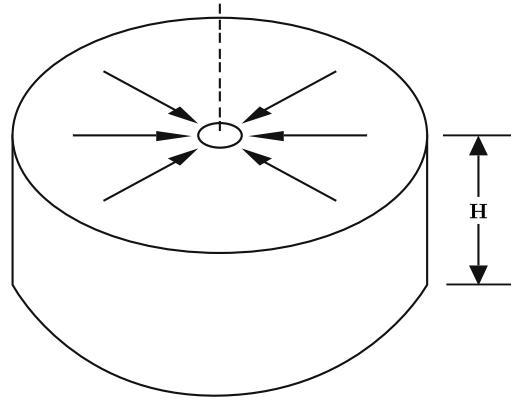


Figura C.1: Representación esquemática de flujo radial

Si definimos

$$\chi = \frac{k}{\phi \mu c_t} \quad (\text{C.1})$$

entonces la ecuación (C.1) se reduce a

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{C.2})$$

Por lo tanto, la presión p es únicamente una función de r y t . Es decir, el flujo es unidimensional en la dirección radial. Se procede a encontrar una solución analítica a la ecuación unidimensional (C.2).

Condición inicial:

$$p(r, 0) = p_o \quad \text{con } r \in [0, \infty) \quad \text{y } p_o = \text{cte.} \quad (\text{C.3})$$

Condiciones de frontera:

$$p(r, t) = p_o \quad \text{con } r \rightarrow \infty \quad \text{y } t \geq 0 \quad (\text{C.4})$$

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q \mu}{2 \pi k H} \quad \text{con } r \rightarrow 0 \quad \text{y } t > 0 \quad (\text{C.5})$$

donde

r = radio del pozo

Q = gasto fijo de producción del pozo

μ = viscosidad del fluido

k = permeabilidad del medio poroso

H = espesor

Para resolver la ecuación C.2 se introduce el cambio de variable de Boltzmann

$$y = \frac{r^2}{4t\chi} \quad \text{con } t > 0 \quad (\text{C.6})$$

entonces se puede ver que:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dy} \frac{r}{2t\chi} \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{d^2 p}{dy^2} \left(\frac{r}{2t\chi} \right)^2 + \frac{dp}{dy} \frac{1}{2t\chi} \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{dp}{dy} \frac{r^2}{4t^2\chi} \quad (\text{C.9})$$

Sustituyendo (C.7), (C.8) y (C.9) en (C.2)

$$y \frac{d^2 p}{dy^2} + (1 + y) \frac{dp}{dy} = 0 \quad (\text{C.10})$$

Para resolver esta ecuación se utiliza el método de separación de variables

$$w(y) = \frac{dp}{dy} \quad (\text{C.11})$$

sustituyendo en (C.10) se tiene:

$$\frac{dw(y)}{dy} = -\frac{(y+1)w(y)}{y} \quad (\text{C.12})$$

reescribiendo

$$\frac{1}{w(y)} \frac{dw(y)}{dy} = -\frac{y+1}{y} \quad (\text{C.13})$$

integrando ambos lados

$$\int \frac{w'(y)}{w(y)} dy = -\int \frac{y+1}{y} dy \quad (\text{C.14})$$

Resolviendo el lado izquierdo de la ecuación (C.14)

$$\text{Sea } u = w(y) \implies du = w'(y) dy$$

sustituyendo

$$\int \frac{w'(y)}{w} dy = \int \frac{1}{u} du = \log(u) + C = \log(w(y)) + C \quad (\text{C.15})$$

Resolviendo el lado derecho de la ecuación (C.14)

$$\text{Sea} \quad s = y + 1 \quad \implies \quad ds = dy$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} \int \frac{y+1}{y} dy &= \int \frac{y+1}{(y+1)-1} = \int \frac{s}{s-1} ds = \int \left(\frac{1}{s-1} + 1 \right) ds \\ &= \int \left(\frac{1}{s-1} \right) ds + \int ds = \log(s-1) + s + c_1 \\ &= \log((y+1)-1) + (y+1) + c_1 = \log(y) + y - c \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Sustituyendo (C.15) y (C.16) en (C.14)

$$\log(w(y)) = -y - \log(y) + c \quad (\text{C.17})$$

Despejando $w(y)$ obtenemos:

$$w(y) = \frac{c}{y} e^{-y} \quad \text{con } c = \text{cte.} \quad (\text{C.18})$$

Aplicando la condición de frontera C.5 a la ecuación C.18:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{Q\mu}{4\pi kH} \frac{e^{-y}}{y} \quad (\text{C.19})$$

Notemos que

$$\text{Si } y = \infty \quad y \quad t = 0 \quad \implies \quad p = p_o \quad (\text{C.20})$$

$$\text{Si } y = \frac{r^2}{4t\chi} \quad y \quad t > 0 \quad \implies \quad p = p(r, t) \quad (\text{C.21})$$

La Integración de la ecuación (C.19) de $t = 0$ a cualquier t implica:

$$p(r, t) = p_o - \frac{Q\mu}{4\pi kH} \int_{\frac{r^2}{4t\chi}}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \quad (\text{C.22})$$

donde

$$\int_{\frac{r^2}{4t\chi}}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \quad (\text{C.23})$$

Es la función exponencial y usualmente se escribe como:

$$\int_{\frac{r^2}{4t\chi}}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy = -E_i \left(-\frac{r^2}{4t\chi} \right) = E_i(-y) \quad (\text{C.24})$$

Por consiguiente, se deduce de (C.22) que la presión para cualquier r es:

$$p(r, t) = p_o + \frac{Q\mu}{4\pi kH} E_i \left(-\frac{r^2}{4t\chi} \right) \quad \text{con } t > 0 \quad (\text{C.25})$$

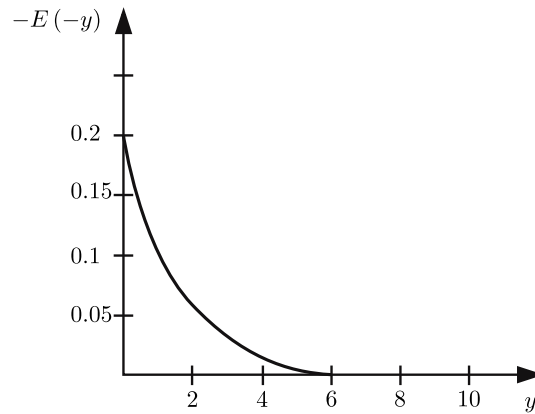


Figura C.2: Gráfica de $-E_i(-y)$

La gráfica de $-E_i(-y)$ en términos de y (Figura C.2), demuestra que conforme y aumenta (r incrementa o t disminuye), $-E_i(-y)$ disminuye, por lo que $p(r, t)$ incrementa y $p_o - p$ disminuye. Esto quiere decir, que en el punto más alejado al pozo, se tendrá el mayor valor de presión y la menor caída de presión.

La función integral exponencial $E_i(-y)$, puede ser expandida en la serie

$$E_i \left(-\frac{r^2}{4t\chi} \right) = -\ln \left(-\frac{4t\chi}{r^2} \right) + 0.5772 - \frac{r^2}{4t\chi} + \frac{1}{4} \left(-\frac{r^2}{4t\chi} \right)^2 - \dots \quad \text{con } t > 0 \quad (\text{C.26})$$

cuando $\frac{r^2}{4t\chi} < 0.01$, esta función puede ser aproximada mediante

$$E_i \left(-\frac{r^2}{4t\chi} \right) \approx -\ln \left(\frac{4t\chi}{r^2} \right) + 0.5772 = -\ln \left(\frac{2.25t\chi}{r^2} \right) \quad (\text{C.27})$$

obteniendo un error de aproximación menor a 0.25 por ciento. La solución analítica simplificada de la ecuación C.25 es:

$$p(r, t) \approx p_o - \frac{Q\mu}{4\pi kH} \ln \left(\frac{2.25t\chi}{r^2} \right) \quad (\text{C.28})$$

Bibliografía

- Allen, M. B., Herrera, I., y Pinder, G. F. (1988). *Numerical Modeling in Science and Engineering*. John Wiley & Sons.
- Baca, R., Arnett, R., y Langford, D. (1984). Modeling fluid flow in fractured porous rock masses by finite element techniques. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 4:337–348.
- Barenblatt, G. E., Zheltov, I. P., y Kochina, I. (1960). Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks. *PPM: Soviet Applied Mathematics and Mechanics*, 24(5):852–864.
- Barenblatt, G. I. y Zheltov, I. (1960). On fundamental equations of flow of homogeneous liquids in naturally fractured rocks. *Dokl. Akad. Nauk. USSR*, 132(3):545–548.
- Blaskovich, F. T., Cain, G. M., Sonier, F., Waldren, D., y Webb, S. (1983). A multicomponent isothermal system for efficient reservoir simulation. *Middle East Oil Technical Conference*.
- Bobok, E. (1992). *Fluid Mechanics for Petroleum Engineers*, volumen 32 de *Developments in Petroleum Science*. Elsevier.
- Chen, W. H., Wasserman, M. L., y Fitzmorris, R. E. (1987). A thermal simulator for naturally fractured reservoirs. *9th SPE Reservoir Simulation Symposium*.
- Chen, Z., Huan, G., y Ma, Y. (2006). *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. Computational Science and Engineering. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- COMSOL (2008). *COMSOL Multiphysics User's Guide Version 3.5a*. COMSOL AB.
- Dean, R. H. y Lo, L. L. (1988). Simulations of naturally fractured reservoirs. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 3(2):638–648.
- Dietrich, P., Helmig, R., Sauter, M., Hötzl, H., Köngeter, J., y Teutsch, G., editores (2005). *Flow and Transport in Fractured Porous Media*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edicin.
- Fu, Y. (2007). *Three-dimensional, three-phase discrete-fracture reservoir simulation using control volume finite element (CVFE) formulation*. Tesis doctoral, University of Utah.

- Fu, Y., Yang, Y. K., y Deo, M. D. (2005). Three-dimensional, three-phase discrete-fracture reservoir simulator based on control volume finite element (cvfe) formulation. *Artículo presentado en SPE Reservoir Simulation Symposium, The Woodlands, Texas.*
- Fung, L. S. K. y Collins, D. A. (1991). An evaluation of the improved dual porosity model for the simulation of gravity effects in naturally fractured reservoirs. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 30(3):61–68.
- Geiger, S., Huangfu, Q., Matthi, F. R. S., Coumou, D., Belayneh, M., Fricke, C., y Schmid, K. (2009). Massively parallel sector scale discrete fracture and matrix simulations. *SPE Reservoir Simulation Symposium.*
- Geiger, S., Matthai, S., y Niessner, J. (2007). Black-oil simulations for three-component - three-phase flow in fractured porous media. *Artículo presentado en EUROPEC/EAGE Conference and Exhibition, London, U.K., Junio.*
- Gilman, J. y Kazemi, H. (1983). Improvements in simulation of naturally fractured reservoirs. *SPE Journal*, 23(4):695–707.
- Gilman, J. y Kazemi, H. (1988). Improved calculations for viscous and gravity displacement in matrix blocks in dual-porosity simulators. *J. Petrol. Technol.*, 40(1):60–70.
- Gureghian, A. B. (1975). A study by the finite-element method of the influence of fractures in confined aquifers. *SPE Journal*, 15(2):181–191.
- Helmig, R. (1997). *Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface: A Contribution to the Modeling of Hydrosystems.* Springer-Verlag.
- Herrera, I. y Díaz-Viera, M. A. (2003). *Modelación Matemática de Sistemas Terrestres.* Instituto de Geofísica, UNAM.
- Herrera, I. y Pinder, G. F. (2012). *Mathematical Modeling in Science and Engineering: an Axiomatic Approach.* John Wiley & Sons, Inc.
- Hill, A. C. y Thomas, G. W. (1985). A new approach for simulating complex fractured reservoirs. *Middle East Oil Technical Conference and Exhibition.*
- Hoteit, H. y Firoozabadi, A. (2005). Multicomponent fluid flow by discontinuous galerkin and mixed methods in unfractured and fractured media. *Water Resources Research*, 41(11):1–15.
- Huang, C.-K. (2009). *Development of a General Thermal Oil Reservoir Simulator under a Modularized Framework.* Tesis doctoral, The University of Utah.
- Juanes, R., Samper, J., y Molinero, J. (2002). A general and efficient formulation of fractures and boundary conditions in the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54:1751–1774.

- Karimi-Fard, M., Durlofsky, L., y Aziz, K. (2004). An efficient discrete fracture model application for general purpose reservoir simulators. *SPE Journal*, p. 227.
- Karimi-Fard, M. y Firoozabadi, A. (2003). Numerical simulation of water injection in 2d fractured media using discrete-fracture model. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 4:117126.
- Kazemi, H., Merrill, L. S., Porterfield, K. L., y Zeman, P. R. (1976). Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs. *SPE Journal*, 16(6):317–326.
- Kim, J. y Deo, M. (1999). Comparison of the performance of a discrete fracture multiphase model with those using conventional methods. *SPE Reservoir Simulation Symposium*.
- Kim, J. G. (1999). *Advanced techniques for oil reservoir simulation: Discrete fracture model and parallel implementation*. Tesis doctoral, University of Utah, Salt Lake City, Utah.
- Kim, J. G. y Deo, M. D. (2000). Finite element discrete-fracture model for multiphase flow in porous media. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, 46(6):1120–1130.
- Kitanidis, P. K. (2008). Depth-averaged modeling of groundwater flow and transport. *COMSOL Conference*.
- Lee, S. H., Durlofsky, L. J., Lough, M. F., y Chen, W. H. (1998). Finite difference simulation of geologically complex reservoirs with tensor permeabilities. *SPE Reservoir Evaluation and Engineering*, 1(6):567–574.
- Litvak, B. (1985). *Simulation and Characterization of Naturally Fractured Reservoirs*. Academic Press.
- Litvak, B. L., Satter, A., y Etebar, S. (1988). An analysis of naturally fractured reservoir performance using a novel fractured reservoir simulator. *Artículo presentado en International Meeting on Petroleum Engineering, Tianjin, China, November 1988*.
- Lough, M. F., Lee, S. H., y Kamath, J. (1998). An efficient boundary integral formulation for flow through fractured porous media. *Journal of Computational Physics*, 143(2):462–483.
- Martin, V., Jaffré, J., y Roberts, J. E. (2005). Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(5):1667–1691.
- Moinfar, A. (2013). *Development of an Efficient Embedded Discrete Fracture Model for 3D Compositional Reservoir Simulation in Fractured Reservoirs*. Tesis doctoral, The University of Texas at Austin.
- Monteagudo, J. y Firoozabadi, A. (2004). Control-volume method for numerical simulation of two-phase immiscible flow in 2d and 3d discrete-fracture media. *Water Resources Research*, 40.
- Noorishad, J. y Mehran, M. (1982). An upstream finite element method for solution of transient transport equation in fractured porous media. *Water Resources Research*, 18(3):588–596.

- Oda, M. (1985). Permeability tensor for discontinuous rock masses. *Geotechnique*, 35(4):483–495.
- Peaceman, D. W. (1977). *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, volumen 6 de *Developments in petroleum science*. Elsevier Scientific Publishing Company.
- Pruess, K. y Narasimhan, T. N. (1985). A practical method for modeling fluid and heat flow in fractured porous media. *SPE Journal*, 25(1):15–26.
- Reichenberger, V., Jakobs, H., Bastian, P., y Helmig, R. (2006). A mixed-dimensional finite volume method for two-phase flow in fractured porous media. *Advances in Water Resources*, 29:1020–1036.
- Reichenberger, V., Jakobs, H., Bastian, P., Helming, R., y Niessner, J. (2004). Complex gas-water processes in discrete fracture-matrix systems: Up-scaling, mass-conservative discretization and efficient multilevel solution. *Institut fr Wasserbau, Universitt Stuttgart*.
- Reiss, L. H., Codreanu, D. B., y du Prey, E. J. L. (1973). Flow in fissured reservoirs. *Second Annual European Meeting of AIME*.
- Rossen, R. H. (1977). Simulation of naturally fractured reservoirs with semi implicit source terms. *SPE Journal*, 17(3):201–210.
- Rossen, R. H. y Shen, E. I. C. (1989). Simulation of gas/oil drainage and water/oil imbibition in naturally fractured reservoirs. *SPE Reservoir Engineering Journal*, 4(4):4464–470.
- Royer, P., Auriault, J.-L., Lewandowska, J., y Serres, C. (2002). *Continuum Modeling of Contaminant Transport in Fractured Porous Media*. Kluwer Academic Publishers.
- Sahimi, M. (2011). *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock: From Classical Methods to Modern Approaches*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co., second edicin.
- Saidi, A. M. (1983). Simulation of naturally fractured reservoirs. *SPE Reservoir Simulation Symposium*.
- Sonier, F. y Eymard, R. (1987). A new simulator for naturally fractured reservoirs. *Artículo presentado en SPE Symposium on Reservoir Simulation, San Antonio, Texas. Febrero*.
- Thomas, L. K., Dixon, T. N., y Pierson, R. G. (1983). Fractured reservoir simulation. *SPE Journal*, 23(1):42–54.
- Warren, J. E. y Root, P. (1963). The behavior of naturally fractured reservoirs. *SPE Journal*, 3(3):245–255.
- Wilson, C. R. y Witherspoon, P. A. (1974). Steady state flow in rigid networks of fractures. *Water Resources Research*, 10(2):328–335.
- Wu, Y. S. y Pruess, K. (1988). A multiple-porosity method for simulation of naturally fractured petroleum reservoirs. *SPE Reservoir Engineering*, 3:327–336.

Yang, Y. K. (2003). *Finite-element, multiphase flow simulation*. Tesis doctoral, University of Utah, Salt Lake City, Utah.

Nomenclatura

Subíndices

0	Valor inicial o de referencia
e	Exploración
f	Fluido
fr	Fractura
m	Matriz
o	Aceite
R	Roca
t	Total
w	Pozo

Símbolos Griegos

α_{fr}	Description
$\bar{\alpha}$	Factor geométrico
α	Coefficiente de convección del flujo conservativo en COMSOL Multiphysics
β	Coefficiente de convección en COMSOL Multiphysics
γ	Término fuente del flujo conservativo en COMSOL Multiphysics
γ	Magnitud de la aceleración gravitacional
μ	Viscosidad aparente
∇	Operador nabra
∇_{τ}	Operador nabra tangencial

∇_n	Operador nabla normal
Ω	Dominio
∂B	Frontera del cuerpo
$\partial\Omega$	Frontera del dominio
ϕ	Porosidad efectiva
ψ	Propiedad intensiva
ρ	Densidad por unidad de volumen
Σ	Discontinuidad
θ	Orientación de la fractura
τ	Campo de flujo
Ω_{fr}	Dominio correspondiente a la fractura
Ω_m	Dominio correspondiente a la matriz
ϕ_0	Porosidad efectiva inicial o de referencia
ϕ_{fr}	Porosidad de la fractura
ρ_0	Densidad inicial o de referencia
Σ_{fr}	Discontinuidad correspondiente a una fractura

Superíndices

+	Sentido del vector normal
−	Sentido contrario al vector normal

Símbolos Romanos

\bar{q}	Description
\bar{q}_{fr}	Description
\mathbf{a}	Coefficiente de absorción en COMSOL Multiphysics
\mathbf{c}	Coefficiente de difusión en COMSOL Multiphysics
\mathbf{d}_a	Coefficiente de amortiguamiento/masa en COMSOL Multiphysics
\mathbf{e}_a	Coefficiente de masa en COMSOL Multiphysics

f	Término fuente en COMSOL Multiphysics
g	Término fuente en la frontera en COMSOL Multiphysics
h	Coefficiente en COMSOL Multiphysics
n	Vector unitario normal en COMSOL Multiphysics
n_x	Componente x del vector unitario normal en COMSOL Multiphysics
q	Coefficiente de absorción en la frontera en COMSOL Multiphysics
r	Término en COMSOL Multiphysics
t_0	Tiempo inicial en COMSOL Multiphysics
u	Variable dependiente en COMSOL Multiphysics
\underline{I}	Tensor identidad
\underline{k}	Tensor de permeabilidad absoluta
\underline{k}_{fr}	Tensor de permeabilidad absoluta de la fractura
\underline{k}_{fr}	Tensor de permeabilidad absoluta en la fractura
n	Vector unitario normal
n_Σ	Vector unitario normal a la discontinuidad
\underline{u}	Velocidad de Darcy
\underline{u}^+	Velocidad de Darcy en el sentido del vector normal
\underline{u}^-	Velocidad de Darcy en sentido contrario al vector normal
\underline{u}_Σ	Velocidad de la discontinuidad
\underline{U}_{fr}	Description
\underline{u}_{fr}	Velocidad de Darcy en la fractura
\underline{v}	Velocidad real
\underline{x}	Coordenadas espaciales o Eulerianas
A	Área
B	Dominio ocupado por un cuerpo
d	Espesor de la fractura

E	Propiedad extensiva
e	Número de Euler o constante de Napier
g	Generación interna
g_{fr}	Generación interna en la fractura
H	Espesor
L	Longitud
l	Longitud de la fractura
M	Masa
M_f	Masa de fluido
p	Presión
r	Radio
t	tiempo
V	Volumen
z	Profundidad
$\underline{u}_{fr\tau}$	Componente tangencial de la Velocidad de Darcy en la fractura
\underline{u}_{frn}	Componente normal de la velocidad de Darcy en la fractura
c_{fr}	Compresibilidad de la fractura
c_f	Compresibilidad del fluido
c_o	Compresibilidad del aceite
c_R	Compresibilidad de la roca
c_t	Compresibilidad total
g_Σ	Generación interna en la discontinuidad
p_0	Presión inicial o de referencia
p_a	Presión obtenida analíticamente
P_{fr}	Presión promedio en la fractura
p_{fr}	Presión en la fractura

p_n	Presión obtenida numéricamente
p_p	Presión de producción
Q_{fr}	Description
q_i	Gasto de inyección
q_o	Gasto de aceite
r_e	Radio de exploración
r_w	Radio de pozo
t_0	Tiempo inicial o de referencia
V_f	Volumen de fluido
x_1	Longitud en la dirección x_1
x_2	Longitud en la dirección x_2
c_{tfr}	Compresibilidad total en la fractura