



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**CARACTERIZACIÓN DE YACIMIENTOS  
NATURALMENTE FRACTURADOS PARA UNA  
DISTRIBUCIÓN NORMAL CON TAMAÑO MULTIPLE  
DE BLOQUES**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**INGENIERA PETROLERA**

**P R E S E N T A**

Miriam Arango Díaz

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Fernando Samaniego Verduzco



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2016**

# AGRADECIMIENTOS

A mis padres, con la mayor gratitud por los esfuerzos realizados para que yo lograra terminar la licenciatura. A mi madre, la persona más comprensiva y maravillosa a mis ojos, gracias por el apoyo moral, cariño y amor incondicional que desde pequeña me ha brindado. A mi padre, por guiar mi camino y enseñarme la importancia de la responsabilidad.

Al Dr. Fernando Samaniego Verduzco, por su paciencia, tiempo, conocimiento y apoyo en la realización de esta tesis.

Al Dr. Edgar Rangel Germán (Q.E.P.D) por sugerir este tema de tesis. A las personas que me apoyaron en la realización resolviendo conflictos y dudas: Dr. Nelson Barros Galvis, Ing. Ricardo Pacheco y Joshua.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, en especial a la Facultad de Ingeniería. Es un gran orgullo y un gran honor pertenecer a la máxima casa de estudios.

# Contenido

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO 2: ANTECEDENTES DE LA CARACTERIZACIÓN DINÁMICA DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS .....	3
2.1 Yacimientos Naturalmente Fracturados.....	3
2.1.1 Características de los sistemas de fracturas.....	9
2.1.2 Propiedades petrofísicas en sistemas fracturados .....	12
2.1.3 Doble Porosidad – Doble Permeabilidad.....	16
2.2 Caracterización Dinámica de Yacimientos Naturalmente Fracturados.....	16
CAPÍTULO 3: DESARROLLO Y SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO .....	19
3.1 Función normal o de Gauss .....	22
3.1.1 Solución para flujo pseudoestacionario (PSS).....	23
3.1.2 Solución para flujo transitorio (USS) .....	25
CAPÍTULO 4: VALIDACIÓN .....	27
4.1 Modelo de Warren y Root (1963).....	27
4.1.1 Formulación del modelo .....	27
4.1.2 Desarrollo de la validación para régimen pseudoestacionario.....	31
4.1.3 Resultado de la validación para régimen pseudoestacionario .....	34
4.2 Modelo de Jalali y Ershaghi (1987).....	41
4.2.1 Formulación del modelo .....	41
4.2.2 Desarrollo de la validación para régimen transitorio.....	44
4.2.3 Resultado de la validación para régimen transitorio .....	44
CAPÍTULO 5: DISCUSIÓN DE RESULTADOS .....	51
CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	53
NOMENCLATURA.....	54
BIBLIOGRAFÍA.....	57
APÉNDICE A: DESARROLLO DE LA ECUACION DE DIFUSION PARA TRANSFERENCIA MATRIZ-FRACTURA PSEUDOESTACIONARIA Y TRANSITORIA..	59
APÉNDICE B: ALGORITMO DE STEHFEST .....	64
APÉNDICE C: DESARROLLO DE $g(s)$ PARA UNA DISTRIBUCIÓN UNIFORME.....	66

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA	Página
1.1 Modelo representativo ideal e idealizado de discontinuidades que dominan el flujo de fluidos en YNF.	5
1.2 Clasificación de Nelson para YNF.	6
1.3 Diagrama representativo del tamaño y continuidad de las fracturas en los YNF.	10
3.1 Función de densidad de probabilidad de Gauss.	26
4.1 Gráfica $p_{wd}, t_D d(p_{wd})/dt_D$ vs $t_D$ , $N=12$ . Transferencia matriz-fractura transitoria.	35
4.2 Gráfica de la presión adimensional $p_{wD}(t_D)$ y de la función derivada de la presión $t_D dp_{wD}(t_D)/t_D$ vs $t_D$ , $N = 12$ . $\lambda$ variable, para una distribución normal y transferencia matriz-fractura pseudoestacionaria.	37
4.3 Gráfica de la presión adimensional $p_{wD}(t_D)$ y de la función derivada de la presión $t_D dp_{wD}(t_D)/t_D$ vs $t_D$ , $N = 12$ . $\omega$ variable, para una distribución normal y transferencia matriz-fractura pseudoestacionaria.	39
4.4 Gráfica $p_{wD}, t_D d(p_{wD})/dt_D$ vs $t_D$ , $N = 12$ . Transferencia matriz-fractura transitoria.	45
4.5 Gráfica de la presión adimensional $p_{Dw}(t_D)$ y de la función derivada de la presión $t_D dp_{Dw}(t_D)/t_D$ vs $t_D$ , $N = 12$ . $\lambda$ variable, para una distribución normal y transferencia matriz-fractura transitoria.	47
4.6 Gráfica de la presión adimensional $p_{wD}(t_D)$ y de la función derivada de la presión $t_D dp_{wD}(t_D)/t_D$ vs $t_D$ , $N = 12$ . $\omega$ variable, para una distribución normal y transferencia matriz-fractura transitoria.	49

# CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

Numerosos yacimientos en distintas formaciones productoras de petróleo son yacimientos naturalmente fracturados, conocidos también como yacimientos de doble porosidad. Se definen como aquellos yacimientos de hidrocarburos cuya producción está afectada por fracturas. En México, más del 80% de la producción de hidrocarburos proviene de los yacimientos naturalmente fracturados.

En general, los yacimientos naturalmente fracturados están compuestos por bloques y fracturas, de modo que la alta conductividad de estos sistemas se debe a la presencia de fracturas y vórgulos, las cuales tienen una capacidad de almacenamiento menor que el sistema matriz, pero mayor permeabilidad.

Las fracturas actúan como conducto de fluidos hacia los pozos, mientras los bloques de matriz actúan como fuentes que suministran fluidos a las fracturas.

La interacción entre la matriz y las fracturas se ve afectada fuertemente por la distribución geométrica de las fracturas. Los parámetros usados para caracterizar esta interacción son:  $\omega$ , coeficiente de almacenamiento y se define como la razón de almacenamiento de fluidos que tiene lugar en la fractura y la capacidad de almacenamiento total del sistema y  $\lambda$ , conocido como el coeficiente de flujo interporoso que relaciona la permeabilidad de la matriz con la fractura. El flujo de la matriz puede modelarse en flujo pseudoestacionario (PSS) o transitorio (USS). Las pruebas de presión pueden ser utilizadas como una herramienta para el diagnóstico de yacimientos naturalmente fracturados.

La mayoría de los modelos conceptuales que se han desarrollado para caracterizar estos yacimientos asumen un fracturamiento uniforme y, por lo tanto, un tamaño de bloque de matriz constante. Sin embargo, estudios geológicos han mostrado que comúnmente se presenta un tamaño múltiple de bloques, debido a las variaciones en la litología y a los esfuerzos a la que se somete la formación. Con el fin de realizar una mejor caracterización de los yacimientos de doble porosidad, se han desarrollado modelos que incorporan la variación del tamaño de los bloques.

Esta tesis tiene como objetivo general el desarrollo y la solución de las ecuaciones que describen el flujo de fluidos en los yacimientos naturalmente fracturados, considerando una función de distribución normal o Gaussiana de tamaño múltiple de bloques, para regímenes de flujo pseudoestacionario y transitorio.

La importancia de la distribución normal radica en que permite modelar numerosos fenómenos naturales. Su uso puede justificarse asumiendo que cada observación se obtiene como la suma de unas ciertas causas independientes. La solución se obtiene con el algoritmo de Stehfest, utilizado ampliamente en la industria petrolera.

Como validación al modelo se obtienen soluciones para los casos donde se tiene un yacimiento con un solo tamaño de bloques, es decir, un caso particular del modelo.

# **CAPÍTULO 2: ANTECEDENTES DE LA CARACTERIZACIÓN DINÁMICA DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS**

## **2.1 Yacimientos Naturalmente Fracturados**

Una gran parte del volumen de hidrocarburos a nivel mundial, pero principalmente en México, se encuentra en yacimientos naturalmente fracturados (YNF). Su característica principal es que están formados por dos sistemas compuestos de material poroso con redes de fractura de alta permeabilidad. Este tipo de yacimientos presentan condiciones especiales que son realmente un reto ya que no solamente se tiene que describir el sistema compuesto por la roca matriz y el sistema de fracturas sino también se requiere describir la forma en como estos dos sistemas interactúan entre si y como esta interacción gobierna los mecanismos de producción de los yacimientos de este tipo.

La determinación de la localización del sistema de fracturas y sus características y la relación global en el yacimiento puede ser una tarea difícil de realizar pero cuyo objetivo es obtener el máximo beneficio de los yacimientos naturalmente fracturados. Una vez que se puede modelar el sistema matriz-fractura, se pueden definir esquemas para determinar el comportamiento de la producción y optimizar su recuperación final. Por lo tanto, es muy importante entender su desarrollo y su explotación.

Para evaluar los yacimientos naturalmente fracturados es necesario conocer y entender la terminología que permite describirlos, por ejemplo, una fractura se puede definir como una discontinuidad en una superficie plana en donde se ha tenido una pérdida de cohesión, es decir, es una ruptura que ha sufrido la roca matriz.

El concepto de fracturamiento significa, de manera simplificada, que ha ocurrido la formación de una porosidad secundaria, es decir, que al volumen poroso original se le ha añadido un volumen poroso que no existía con al tiempo de la depositación. El movimiento del agua a través de las fracturas y subsecuentemente la disolución de la roca matriz, da como resultado también la formación de una porosidad secundaria y representa una forma adicional de almacenamiento en la nueva formación de espacio poroso y formación de canales de muy alta permeabilidad.

Las fracturas generalmente ocurren en rocas sedimentarias tales como calizas, dolomías, arcillas, así como también rocas ígneas metamórficas en formaciones arenosas muy compactas (tight sands).

El origen primario de las fracturas es la aplicación de esfuerzos a través del doblamiento o “folding”, o a través de fallas lo cual ocasiona el doblamiento o el rompimiento de la roca. También puede ocurrir debido a la reducción de esfuerzos debido a la erosión lo que causa que las rocas en las cuales descansa la roca almacenadora se expanda, ocasionando la generación de nuevas fracturas o el alargamiento de las ya existentes.

Un mecanismo de fracturamiento secundario ocurre cuando existe un encogimiento en las arcillas lo que genera procesos diagenéticos de minerales y pérdida de agua dando como resultado un compactamiento de la capa arcillosa, afectando capas que no se han encogido y, en consecuencia, dicha pérdida de volumen origina la formación de fracturas. Otra forma de que ocurra la formación de fracturas es la sobrecarga hacia la formación productora. En formaciones de muy baja permeabilidad, la única forma de almacenar hidrocarburos es en las fracturas.

El fracturamiento origina un sistema de roca matriz fractura de doble porosidad, doble permeabilidad, donde los hidrocarburos llegan a los pozos productores por conducto de los bloques de fractura debido a su gran permeabilidad. La densidad de fracturamiento, que es otra forma de definir una red de fracturas, se refiere al número de fracturas, se refiere al número de fracturas por unidad de longitud del núcleo. La orientación de las fracturas también forma parte de la definición de un yacimiento naturalmente fracturado y depende de la orientación del régimen de esfuerzos en la roca y está en función de la presión de sobrecarga o presión geostática, de la presión de confinamiento y de la presión de poro.

Campos prolíferos a nivel mundial en Irán, Irak, Canadá, etc. cuentan con pozos de muy alta productividad en donde su roca matriz tiene una permeabilidad menor a 0.5 [mD]. En México, la roca matriz tiene una permeabilidad de 0.01 y 10 [mD], por lo tanto, la producción proviene del sistema de fracturas más que de la matriz. México cuenta con yacimientos naturalmente fracturados que son de gran interés por ser altamente productores de aceite ya que aportan cerca del 90% de producción de país.

Un yacimiento carbonatado naturalmente fracturado es un volumen de roca compuesto por un sistema multiporoso que contiene microfracturas, fracturas, macrovúgulos, vúgulos, matriz y múltiples tipos de redes de fracturas. (**Fig. 1.1**).



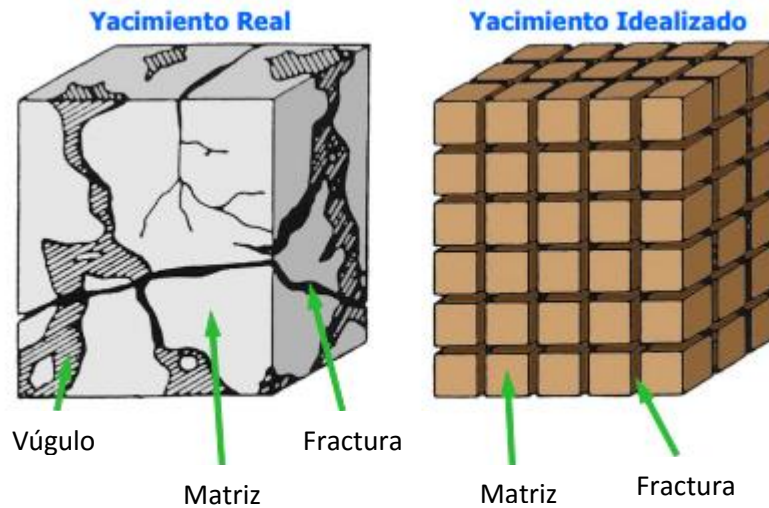


Fig 1.1 Modelo representativo real e idealizado de discontinuidades que dominan el flujo de fluidos en YNF.

La amplitud de las fracturas varían de 10 a 200 micrones y la mayoría se encuentra en un rango de 10 a 40 micrones. Las consideradas macrofracturas tienen una amplitud mayor a 100 micrones y son relativamente extendidas. Las microfracturas tienen una amplitud menor a los 100 micrones y son llamados fisuras, con una extensión más limitada.

Para los yacimientos naturalmente fracturados existen diversas clasificaciones relacionadas a su sistema matriz-fractura. En la Fig. 1.2, se muestra como Nelson (1999) clasifica este tipo de yacimientos de la siguiente manera:

- Tipo I. Las fracturas proveen esencialmente la permeabilidad y la capacidad de almacenamiento en el yacimiento. La matriz tiene muy pequeña (o casi nada) porosidad y permeabilidad.
- Tipo II. La roca matriz provee esencialmente la capacidad de almacenamiento, y las fracturas proveen la permeabilidad en el yacimiento, la roca matriz tiene muy baja permeabilidad, pero puede tener baja, moderada o incluso alta porosidad.
- Tipo III. Las fracturas proveen asistencia en un yacimiento económicamente recuperable que tiene muy buena porosidad y permeabilidad en su matriz.
- Tipo IV. Las fracturas no proveen de manera significativa capacidad de almacenamiento adicional o permeabilidad en un yacimiento que se está produciendo, sin embargo crean anisotropía (barreras de flujo).

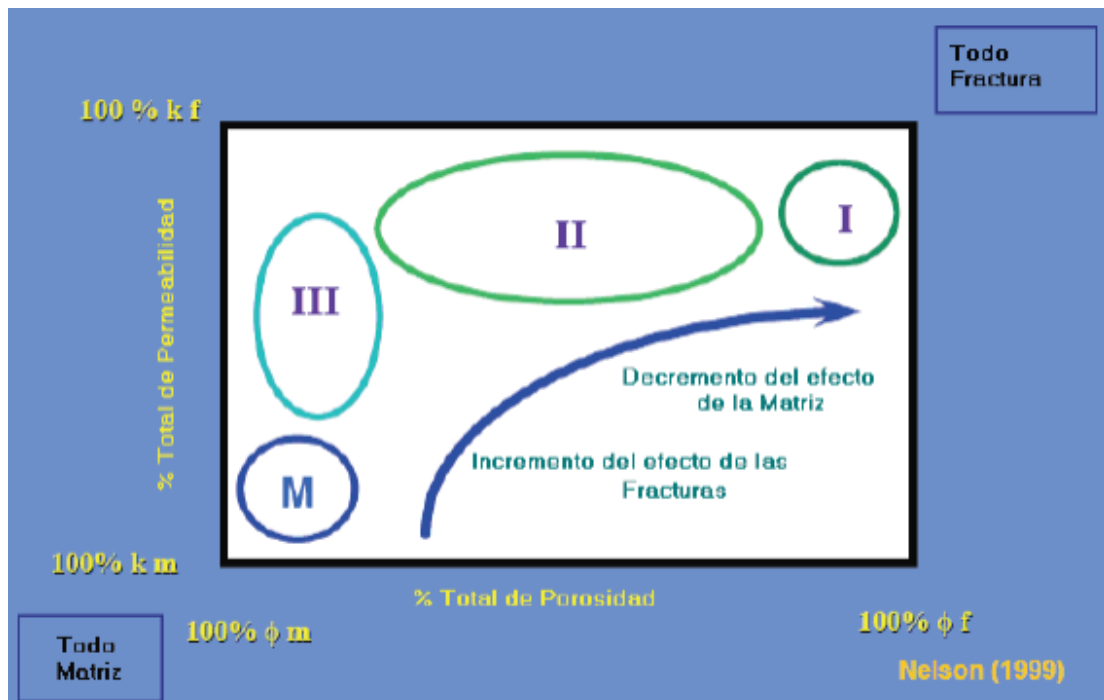


Fig. 1.2 Clasificación de Nelson para YNF. R.A. Nelson. *Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoirs*.

Los primeros tres tipos describen los atributos positivos del sistema de fracturas, el cuarto, que de alguna manera no es paralelo a los anteriores, describe aquellos yacimientos en los cuales las fracturas no solo son importantes para la calidad del yacimiento, sino también por su anisotropía de flujo inherente y la partición que las fracturas crean.

Las ventajas de esta clasificación son que delimitan los parámetros del sistema de fracturas, que son los más importantes para cuantificar un yacimiento en particular, y permite la predicción de los tipos de problemas de producción que se presentan comúnmente.

En el primer tipo de yacimiento (Tipo I), donde el sistema de fracturas provee la permeabilidad y porosidad, un cálculo temprano de la porosidad de la fractura o el volumen de fractura posible por pozo es de mucha importancia. La precisión y exactitud de este volumen se deben de obtener lo más pronto posible para evaluar las reservas que se tienen por pozo y para predecir si altos gastos se pueden mantener o caer rápidamente a través del tiempo. En estas estimaciones, los valores de espesor y anchura de las fracturas son críticos. Ahora los cálculos para los tipos de yacimientos II y III son menos importantes ya que el sistema de

fracturas solo provee permeabilidad; la matriz por su parte proporciona un poco de porosidad o almacenamiento de volumen. En estos tipos de yacimiento (II y III) el volumen de poro de la matriz (generalmente mayor que el volumen de fractura) cubre tanto a la fractura que para realizar el cálculo de manera temprana es poco importante. En estos tipos de yacimiento, el conocer de manera anticipada la interacción matriz-fractura es de suma importancia para determinar si la porosidad de la matriz puede ser drenada por el sistema de fracturas.

De la misma manera, Nelson (2002) hace otra clasificación referido hacia el sistema poroso, pero que se basa en la primera clasificación mencionada de acuerdo al sistema matriz-fractura. Esta clasificación se tiene de la siguiente manera:

- Simple Porosidad.
  - Un solo medio de flujo de fluidos.
  - Puede ser, solo matriz, solo fracturas o matriz con fracturas juntas como un solo medio con propiedades de mezcla del fluido.
- Doble Porosidad.
  - Dos medios de flujo de fluidos (propiedades de matriz fractura).
  - Las fracturas fluyen hacia otras fracturas.
  - Los bloques de la matriz pueden fluir únicamente por las fracturas (los bloques de la matriz no pueden fluir hacia otros bloques de matriz directamente).
- Doble porosidad – Doble permeabilidad.
  - Dos medios de flujo (propiedades de matriz y fractura).
  - Fracturas fluyen hacia otras fracturas.
  - Bloques de matriz fluyen hacia las fracturas.
  - Bloques de matriz fluyen directamente hacia otros bloques de matriz.

Aguilera también hace una clasificación de yacimientos naturalmente fracturados similar a Nelson. La recomendación de Aguilera es iniciar una clasificación del yacimiento de acuerdo a:

- Geología: desde un punto de vista geológico las fracturas se pueden clasificar por ser tectónicas (plegamiento y/o falla), regionales, de contracción (diagenéticas) y superficiales. Históricamente la mayoría de la producción de hidrocarburos ha ido obtenida de fracturas de tipo tectónico, seguida de las fracturas regionales y después por fracturas por contracción.
- Sistema Poroso: para esta clasificación se pueden tener las clases de porosidad definidas primero por la geometría de los poros y después por su tamaño. En la geometría se encuentran incluidas la categoría de

poro; intergranular, intercrystalina, vugular y fractura. La combinación entre fractura entre cualquiera de estas categorías puede originar un comportamiento de doble o inclusive de múltiple porosidad. En el tamaño de poro está incluido la megaporosidad, macroporosidad, mesoporosidad y microporosidad.

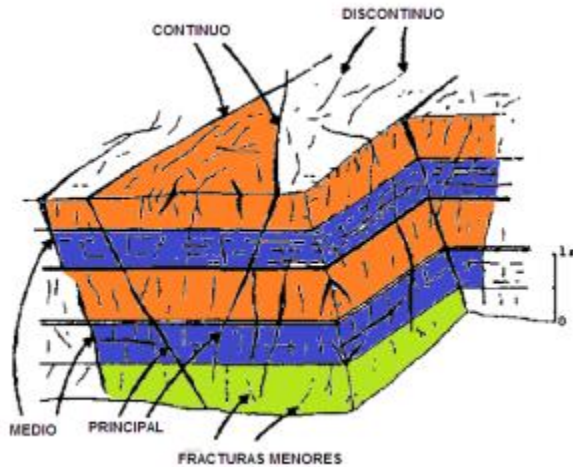
- Almacenamiento de hidrocarburo: desde el punto de vista de almacenamiento las fracturas se pueden clasificar del tipo A, B o C. Muchos yacimientos que de otra manera podrían ser considerados como no productivos, se hacen rentables gracias a la presencia de fracturas. En los yacimientos de Tipo A, el almacenamiento de hidrocarburos en su mayoría (o totalidad) se encuentra en la matriz, y una pequeña cantidad de almacenamiento en la fractura, la matriz por lo general tiene muy baja permeabilidad mientras que las fracturas tienden a ser de mayor permeabilidad. Existen muchos yacimientos con fracturas de tipo tectónicas donde su porosidad primaria (matriz) tiende a ser extremadamente baja y por consecuencia no contribuye al almacenamiento de hidrocarburos. En este caso, un número grande de microfracturas debe estar presente para tomar el papel de matriz, esto se debe al origen de fracturas de tipo tectónico que se dan desde macro escala hasta escala de grano. En los yacimientos de Tipo B aproximadamente la mitad del almacenamiento de hidrocarburos está en la matriz y la otra mitad en la fractura. La matriz se encuentra muy compacta y las fracturas son mucho más permeables que la matriz. Y, en yacimientos Tipo C, todo el almacenamiento se da en las fracturas sin aporte de la matriz, esto hace que para este tipo las fracturas proporcionen tanto almacenamiento como permeabilidad necesaria para lograr una producción que sea rentable.
- Interacción Matriz – Fractura: \*Sin mineralización Secundaria: cuando las fracturas naturales están abiertas y tiene muy pequeña cantidad de mineralización secundaria, los hidrocarburos se mueven de la matriz hacia las fracturas en un modo sin restricciones. La rapidez con la que se mueven los fluidos de la matriz hacia las fracturas es controlado ya sea por la caída de presión en las fracturas, propiedades de la matriz como la permeabilidad, porosidad y compresibilidad, viscosidad del fluido en movimiento, y el espaciado de las fracturas o el tamaño de bloque de la matriz. Estas fracturas pueden proveer altos gastos iniciales. El mayor problema con este tipo de fracturas es que tienden a cerrarse con el abatimiento del yacimiento dependiendo de: el esfuerzo de tensión in situ, la presión inicial del yacimiento y la reducción de presión dentro de las fracturas. En otras palabras, las fracturas son mucho más compresibles que la roca matriz. Si el yacimiento es

inicialmente sobre-presionado, el cierre de la fractura es muy sensible y esto provoca una recuperación muy pequeña y pérdidas económicas. Si el yacimiento es abatido de manera regular, el cierre de la fractura no será tan sensible ya que la mayoría de los cierres a profundidades del yacimiento ya han ocurrido. \*Con Algo de Mineralización Secundaria: Cuando las fracturas naturales tienen certeza de la cantidad de mineralización secundaria, el flujo de fluido de la matriz hacia las fracturas es restringido. Desde el punto de vista del comportamiento de presión durante una prueba de pozo esto puede ser visualizado como un daño natural dentro del yacimiento. En este caso, los minerales secundarios actuarán como agentes de propagación naturales, y el cierre de la fractura será sensiblemente reducido incluso en yacimientos sobre-presionados, lo cual nos lleva a obtener altas recuperaciones. El cierre de las fracturas será pequeño en yacimientos saturados e incluso más pequeño en yacimientos bajosaturados.\*Mineralización Secundaria Completa: A pesar de que exista mucha cantidad de hidrocarburos dentro del yacimiento, la recuperación final será muy baja. Las fracturas mineralizadas segmentan el yacimiento dirigiéndose hacia una muy baja recuperación final.

### **2.1.1 Características de los sistemas de fracturas.**

Las fracturas en un yacimiento de roca generalmente deben su origen a un proceso de sedimentación independiente y son ocasionadas por fallas frágiles que corresponden a diversos factores como:

- a) plegamiento
- b) fallas
- c) presión del fluido
- d) liberación de la presión de sobrecarga
- e) presión de la solución
- f) deshidratación
- g) climatización
- h) enfriamiento
- i) impacto de cráteres.



**Fig 1.3** Diagrama representativo del tamaño y continuidad de las fracturas en los YNF.

Las fracturas (naturales) pueden existir en todo tipo de roca y son consideradas en tres diferentes tipos:

1. Shear (Esquila): caracterizado por desplazamientos paralelos hacia el plano de fractura.
2. De extensión: sentido de desplazamiento perpendicular al plano de fractura. Las fracturas de tipo "shear" y de extensión generalmente se forman juntas.
3. Tensión: También tienen un desplazamiento vertical hacia el plano de fractura pero ocurren cuando el esfuerzo en una de sus direcciones es negativo.

-Génesis de Fractura.

Una clasificación razonable de la génesis de las fracturas de acuerdo al sistema de fracturas:

- a) Tectónica: son relacionados a los esfuerzos de tensión del campo y en la mayoría de las veces: 1) relacionado con fallas, 2) relacionado con pliegues u 3) otros.
- b) Regional: cubren grandes áreas con un pequeño cambio en la orientación. En general tienen espaciamientos relativamente largos, en zonas ortogonales.

- c) Contracción: son el resultado de la reducción en el volumen de roca en una roca sedimentaria, incluyendo: 1) disecación (secamiento), 2) sinéresis, 3) gradientes termales y, d) cambios de la fase mineral (dolomitización).
- d) Fracturas relacionadas a la superficie: son debidas a la descarga y al clima cuando los sedimentos son expuestos hacia la superficie. Este tipo de génesis no es muy importante para la ingeniería de yacimientos.

#### -Morfología de Fractura.

Las propiedades petrofísicas del sistema de fracturas están relacionadas con la morfología de las fracturas individuales, existen cuatro tipos:

- a) Fracturas abiertas: no hay material diagenético que llene las fracturas. La permeabilidad está relacionada a la apertura, el espaciamiento y a la dureza de las paredes de la formación.
- b) Fracturas deformadas: inicialmente abiertas pero más tarde deformadas por esfuerzos de tensión. El material fino en las fracturas puede causar un incremento de la saturación de agua irreducible y así disminuir la permeabilidad efectiva del aceite
- c) Fracturas llenas de mineral: están saturadas por la diagénesis debido al cuarzo o a los carbonatos, a veces ambas. Estas fracturas generalmente son barreras de permeabilidad pero pueden estar abiertas parcialmente y permanecer como buenos conductos del flujo de fluidos.
- d) Fracturas vugulares: debido a alteraciones de la roca matriz que rodea a las fracturas que son causadas por el flujo de fluidos a través de las mismas fracturas.

#### -Caracterización e Identificación de las Fracturas.

En las fracturas, lo de mayor interés es la orientación, el espaciamiento y la apertura. En muchos yacimientos de petrolero; las fracturas son, en su mayoría, aproximadamente verticales, pero esto no quiere decir que sea una verdad universal. La orientación de las fracturas está relacionada con el estado de tensión de la formación al tiempo geológico cuando las fracturas son originadas.

Las aperturas de las fracturas varían desde  $10^{-3}[cm]$  ( $10 [\mu m]$ ) hasta  $5 * 10^{-2}[cm]$  ( $500 [\mu m]$ ), pero son altamente variables particularmente en vugulos que han sido originados a través de la disolución.

El espaciamiento de las fracturas se refiere a la distancia entre fracturas individuales. Una alternativa para medir el espaciamiento es la densidad de la fractura, que es simplemente el recíproco del espaciamiento. El espaciamiento

tiene unidades de longitud, por lo tanto la densidad de fractura tiene unidades de longitud inversas.

El espaciamiento puede llegar a ser muy difícil de calcular per en algunas ocasiones puede ser inferido desde la identificación de registros de fractura en pozos y/o medidas de permeabilidad a escala de campo.

Existe un gran número de métodos para identificar y caracterizar las fracturas:

- Estudios visuales de afloramientos.
- Análisis de núcleos de formación.
- Imágenes de la formación en las paredes del pozo.
- Métodos de registros de pozos en agujero abierto.
- Respuesta del flujo de fluido y de presión de pozos.

### 2.1.2 Propiedades petrofísicas en sistemas fracturados

-Porosidad.

Parámetro que se utiliza para caracterizar la capacidad de almacenamiento definido por:

$$\phi = \frac{V_p}{V_r}, \dots\dots\dots (2.1)$$

donde  $V_r$  se refiere al volumen de roca y  $V_p$  al volumen poroso. La porosidad referida a la roca matriz se le conoce como porosidad de la matriz (o porosidad primaria), y la porosidad debido a las fracturas se le llama porosidad de la fractura (o porosidad secundaria).

-Porosidad de la fractura ( $\phi_f$ ).

Para la porosidad de la fractura se de tener cuidado ya que las fracturas pueden estar distribuidas de manera irregular. En caso de que se tenga un volumen suficientemente largo representativo, la porosidad de la fractura se determina simplemente como la división entre el espacio vacío de la fractura entre el volumen de roca que contiene la fractura.

Considerando un yacimiento que contiene fracturas verticales orientadas en una sola dirección con una apertura uniforme  $w$  y un espaciamiento uniforme  $s_u$ . Un



volumen suficientemente largo de control puede dar como resultado una porosidad de fractura como:

$$\phi_f = \frac{w}{s_u} \dots\dots\dots (2.2)$$

La porosidad de fractura es demasiado irregular por lo que se deben tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- La porosidad de fractura no es medida tan fácilmente. Los valores reportados en la literatura suelen ser basados en desarrollos de yacimientos que infieren la porosidad de fractura basada en puntos como la declinación de la presión y/o comportamiento de doble porosidad.
- Debe incluir una pequeña cantidad de espacio de poros en la proximidad de las fracturas actuales. Este espacio puede ser debido a varias causas como el microfracturamiento de la matriz o simplemente volumen de fracturas cercanas de la matriz que rápidamente substituye fluidos hacia el sistema de fracturas.

-Porosidad de la matriz ( $\phi_m$ ).

Como la roca del yacimiento incluye tanto volumen de la matriz como volumen de la fractura, la porosidad de la matriz está relacionada con la porosidad total de la roca con la siguiente ecuación:

$$\phi_m = \phi_c(1 - \phi_f) \dots\dots\dots (2.3)$$

Como la porosidad de fractura es generalmente menor a 1% para propósitos prácticos, la porosidad de la matriz en algunas es la porosidad del núcleo.

De las definiciones de porosidad de fractura y de matriz, la porosidad total del yacimiento es la suma de ambas porosidades.

$$\phi_T = \phi_m + \phi_f \dots\dots\dots (2.4)$$

-Compresibilidad ( $c$ ).

La roca a condiciones de yacimiento está sujeta a esfuerzos de sobrecarga. El esfuerzo efectivo en un yacimiento es aproximadamente dado por la diferencia entre la presión generada por el peso de sobrecarga de las formaciones menos la presión interna.

Cuando la presión del yacimiento declina debido a la producción hay un incremento en la presión del poro y también en la presión de sobrecarga (esfuerzo de tensión). Este incremento del esfuerzo actúa para comprimir la roca y reducir el

espacio poroso y así la porosidad. También hay un incremento potencial en el volumen del grano con la declinación en la presión del poro, los cambios en el volumen del grano son insignificantes cuando se compara con los cambios en el volumen de la roca debido a los cambios de esfuerzos efectivos.

En yacimientos naturalmente fracturados, incrementar los esfuerzos efectivos tiende a cerrar las aberturas y así reducir la porosidad de fractura. La compresibilidad de la formación,  $c_f$ , es definida de manera similar a la de un fluido:

$$c_f = \frac{1}{\phi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \dots \dots \dots (2.5)$$

-Permeabilidad ( $k$ ).

Es una propiedad del medio poroso que mide la capacidad y habilidad de formación para permitir el flujo de fluidos a través de esta. La permeabilidad de la roca es una propiedad de gran importancia debido a que controla la dirección del movimiento y la capacidad de flujo de los fluidos del yacimiento en la formación.

Esta propiedad de la roca fue definida por el matemático Henry Darcy (1856), la ecuación que define la permeabilidad en términos medibles es conocida como Ley de Darcy. Esta dice que si un flujo lineal horizontal de un fluido incompresible atraviesa un medio de longitud  $L$  en una sección transversal de área  $A$ , entonces la ecuación que gobierna la velocidad del fluido es definida por:

$$v = - \frac{k \partial p}{\mu \partial L}, \dots \dots \dots (2.6)$$

donde  $v$  es la velocidad del fluido,  $k$  es la permeabilidad,  $\mu$  es la viscosidad del fluido y  $\frac{\partial p}{\partial L}$  es la caída de presión por unidad de longitud.

La permeabilidad absoluta es una propiedad intrínseca de la roca y no depende de la naturaleza del fluido que la sature; siempre y cuando la sature completamente; se define a través de la Ley de Darcy. Puede medirse en el laboratorio, inyectando un fluido de propiedades físicas conocidas a través de un núcleo 100% saturado, midiendo tanto el  $\Delta p$  a través del mismo así como las variaciones de saturación. En el campo de manera indirecta mediante pruebas de presión o bien estimarse mediante registros geofísicos.

La habilidad que tiene el medio poroso de conducir a un fluido específico en presencia de otros fluidos es llamada permeabilidad efectiva. Este tipo de permeabilidad tiene una estrecha relación con la saturación de fluidos, por lo que si la propiedad de uno de los fluidos cambia, la de los otros cambiará

proporcionalmente. Sin embargo, esta relación difiere para los distintos tipos de roca, por lo que debe de ser determinada experimentalmente.

La relación entre permeabilidad efectiva de un fluido y la permeabilidad absoluta, se denomina permeabilidad relativa al fluido e indica la cantidad del fluido que fluiría de acuerdo a la saturación del mismo. La permeabilidad relativa a un fluido depende de: la geometría del sistema, mojabilidad de la roca, distribución de los fluidos, historia de los cambios de saturación, etc.

-Permeabilidad de la fractura ( $k_f$ ).

Ocurre como resultado del flujo a través de los conductos abiertos. Una aproximación simple de las propiedades de la fractura puede ser construida considerando fracturas lineales paralelas.

El flujo laminar en una fractura está basado en la ecuación de flujo para plano de corte paralelos, como se muestra en la figura a continuación:

Se tiene entonces la siguiente ecuación:

$$q = \frac{w^3 h \Delta p}{12 \mu L} \dots\dots\dots (2.7)$$

Esta ecuación es llamada la ecuación “cubica” para el flujo de fluido de fracturas, desde que el gasto es proporcional a la apertura de la fractura al cubo. Nótese la similitud con la Ley de Darcy. Miller (2006) propone una ecuación de la permeabilidad de la fractura de la siguiente manera:

$$q_f = \frac{k_f A}{\mu L} (p_{in} - p_{out}), \dots\dots\dots (2.8)$$

ó

$$k_f = \frac{q_f \mu L}{A(p_{in} - p_{out})} \dots\dots\dots (2.9)$$

Donde  $A$  es el área total de la sección donde se da el flujo,  $L$  es la longitud total de todo el sistema,  $P_{in}$  es la presión dentro de la sección y  $P_{out}$  es la presión fuera de la sección.

-Permeabilidad de la matriz ( $k_m$ ).

La permeabilidad tomada de núcleos puede ser generalmente usada como la permeabilidad de la matriz.

Las medidas de permeabilidad a escala del yacimiento, como aquellas que se toman de las pruebas de variación de presión, son mediciones comunes de la permeabilidad de la fractura. Existen variaciones de presión disponibles que se aproximan y pueden teóricamente distinguir entre permeabilidad de matriz y de fractura.

### 2.1.3 Doble Porosidad – Doble Permeabilidad

Una dificultad significativa en el modelado del flujo de fluidos en un yacimiento naturalmente fracturado se debe al contraste que existe entre la porosidad y la permeabilidad de la matriz y la fractura.

El concepto de doble permeabilidad (Barrenblatt, 1960) asume la existencia de dos medios con distinta porosidad y permeabilidad, para flujo de una sola fase dentro de la formación; de esta manera representa el flujo en un medio fracturado a través de dos medios; un sistema fracturado continuo y un sistema matriz discontinuo. El sistema matriz se caracteriza por tener una permeabilidad muy baja pero almacena la mayor cantidad de fluido del yacimiento; por el contrario, el sistema fracturado tiene una porosidad muy baja y una permeabilidad extremadamente alta. Este contraste provoca que el flujo ocurra dentro de ambos medios en diferentes tiempos significativos.

## 2.2 Caracterización Dinámica de Yacimientos Naturalmente Fracturados

Warren y Root (1963) complementaron el modelo de Barrenblatt (1960), representando la geometría del yacimiento como un sistema de fracturas ortogonales, continuas y uniformes. Los bloques representan a su vez la matriz de la roca del yacimiento. El modelo de Warren y Root (1963) considera que el flujo de la matriz a las fracturas ocurre bajo régimen pseudoestacionario (PSS) y un tamaño de bloque constante. También los autores definieron dos parámetros para describir los resultados de pruebas de decremento e incremento de presión:

- Coeficiente de flujo interporoso ( $\lambda$ ), es una relación de la capacidad de flujo entre la matriz y la fractura; se define como:

$$\lambda = \frac{\sigma k_m r_w^2}{k_f}, \dots\dots\dots (2.1)$$

donde  $\sigma$  es el factor de forma,  $k_m$  es la permeabilidad absoluta de la matriz,  $k_f$  es la permeabilidad absoluta de la fractura, y  $r_w$  es el radio del pozo.

- Relación de almacenamiento ( $\omega_f$ ), es la razón de almacenamiento de fluidos que tiene lugar en la fractura y la capacidad de almacenamiento total del sistema; se define como:

$$\omega_f = \frac{\phi_f c_f}{\phi_f c_f + \phi_m c_m}, \dots\dots\dots(2.1)$$

donde  $\phi_f$  es la porosidad de la fractura,  $\phi_m$  es la porosidad de la matriz,  $c_f$  es la compresibilidad de la fractura, y  $c_m$  es la compresibilidad de la matriz.

Kazemi (1969) obtuvo una solución numérica para el flujo radial hacia un pozo que produce en un yacimiento naturalmente fracturado asumiendo régimen transitorio entre la matriz y las fracturas. Sin embargo, su solución fue similar a la de Warren y Root, exceptuando el periodo de transición entre la matriz y la fractura.

En el modelo de De Swaan (1979), se resuelve numéricamente el problema del flujo matriz-fractura en estado transitorio, utilizando los parámetros  $\omega_f$ ,  $\eta_{maD}$  (difusividad hidráulica de la matriz) y  $A_{fb}$  (área de las fracturas por volumen total de roca).

Bourdet y Gringarten (1980) introdujeron las curvas tipo en yacimientos con doble porosidad para analizar pozos con factor de almacenamiento y daño. Bourdet (1983), complementó su contribución al introducir la gráfica de la derivada de la presión como una herramienta para analizar los datos de prueba de presión.

En los modelos anteriores se asumía el sistema ortogonal de fracturas continuas y uniformes propuesto por Warren y Root; no se establece la variación del tamaño de bloque por lo que se consideran constantes. Es evidente que los bloques de la matriz en las formaciones no son del mismo tamaño ni forma, por lo que se desarrollaron modelos más realistas que tomaron en cuenta la variación del tamaño de bloque.

Braester (1984) discutió la influencia del tamaño de los bloques en la curva de transición para una prueba de decremento de presión; sin embargo, el modelo que utilizó fue para bloques de tamaño constante.

Cinco-Ley., Samaniego y Kuchuk (1985) presentaron un modelo analítico que tuvo como objetivo el estudio del comportamiento de la presión; en un yacimiento naturalmente fracturado, con diferentes tamaño de bloques de matriz, utilizando

para esto una función de distribución que representa la fracción de volumen poroso contenido en determinado tamaño de bloques de matriz.

Jalali-Yazdi y Ershaghi (1987) desarrollaron un modelo para estudiar las características de la zona de transición observada en graficas semi-log de los datos de presión en función del tiempo, con el objetivo de proporcionar las bases teóricas del análisis del comportamiento de esta zona. Las soluciones del problema se obtuvieron en el espacio de Laplace, aplicando el algoritmo de Stehfest para transformarlas al espacio real. Los trabajos de Jalali y Ershaghi se realizaron para el caso de dos tamaños de bloques de yacimientos naturalmente fracturados.

Otros autores han realizado estudios de campo de la distribución de la fractura y su espaciamento. El consenso es que el espaciamento sigue una distribución exponencial (Kulatilake, 1993). Spivey y Lee (2000) examinaron las consecuencias de una distribución exponencial en el espaciamento de fracturas y el coeficiente de flujo interporoso.

Belani (1988) investigó la distribución uniforme en el tamaño de bloques de la matriz. Su modelo analiza la curva de la derivada de la presión con el propósito de estimar los parámetros del yacimiento. La solución de la distribución uniforme puede extenderse a otras funciones de densidad de probabilidad (PDFs) generales.

Johns y Jalali (1991) explican que las PDFs geológicamente más realistas del tamaño de bloque son: la distribución normal, bimodal, lineal y exponencial.

# CAPÍTULO 3: DESARROLLO Y SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

Basado en el trabajo de Warren y Root (1963), el desarrollo clásico de la ecuación de difusión para el balance de materia en el sistema fracturado es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) = \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{\mu}{k_f} Q_m, \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

donde  $p_f$  es la presión en la fractura y  $Q_m$  es una función del flujo interporoso. La ecuación anterior asume:

- Flujo radial y cilíndrico ocurre en la fractura,
- El fluido en el yacimiento es ligeramente compresible y tiene propiedades constantes,
- Se desprecian los efectos inerciales y gravitacionales y la ley de Darcy es aplicable y,
- Las propiedades de la roca son constantes.

Para la formulación del término  $Q_m$  se requiere un modelo del yacimiento, ya que la distribución geométrica de las fracturas gobierna el flujo interporoso. En un yacimiento uniformemente fracturado donde el tamaño de bloque es constante, el flujo ocurre del bloque a la fractura adyacente dependiendo del almacenamiento, permeabilidad y el tamaño del bloque. En un yacimiento fracturado de manera no uniforme con una distribución de tamaño de bloques de matriz aleatorio, la contribución de la matriz es:

$$Q_m = \int_{h_{min}}^{h_{max}} Q(h) f(h) dh, \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

donde  $Q(h)$  es la contribución de flujo de un tamaño de bloque  $h$ ,  $f(h)$  es la probabilidad de ocurrencia de un bloque de tamaño  $h$ ,  $h_{max}$  es el tamaño de bloque máximo y  $h_{min}$  es el tamaño de bloque mínimo.

Substituyendo la Ec. 3.2 en la Ec. 3.1 se tiene:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) = \frac{\phi_f c_f \mu}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{\mu}{k_f} \int_{h_{min}}^{h_{max}} Q(h) f(h) dh. \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

Las ecuaciones 3.1 y 3.2 se resuelven matemáticamente en el apéndice A. La presión de fondo del pozo en el espacio de Laplace es la siguiente:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{K_o(x) + S_D x K_1(x)}{s [C_D s (K_o(x) + S_D x K_1(x)) + x K_1(x)]}, \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

donde  $s$  es la variable de Laplace relacionada con el tiempo adimensional:

$$t_D = \frac{k_f t}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \mu r^2}, \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

y el argumento:

$$x = \sqrt{s g(s)}$$

Las ecuaciones obtenidas anteriormente no pueden invertirse directamente, por esta razón deben utilizarse métodos numéricos como el algoritmo de Stehfest (Apéndice B).

Para flujo matriz-fractura bajo condiciones de flujo pseudoestacionario (“Pseudo steady-state”, PSS):

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \left( \frac{3\lambda}{\omega_m s + 3\lambda} \right) f(h_D) dh_D. \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

Para flujo matriz-fractura transitorio (“Unsteady-state, USS):



$$g(s) = \omega_f + \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \sqrt{\frac{\omega_m \lambda}{s}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s}{\lambda}}\right) f(h_D) dh_D. \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

donde  $g(s)$  es una función que depende del tipo de transferencia matriz-fractura y  $f(h_D)$  como ya se estableció, es la función de probabilidad de la variable aleatoria  $h_D$ , la cual describe la distribución del tamaño de bloques.

Los límites de las integrales (3.5) y (3.6) se refieren a  $h_{min}$  y  $h_{max}$  de manera adimensional. Al tratarse de una función rectangular donde los tamaños del bloque tienden al máximo,  $h_{min}$  y  $h_{max}$  se dividen sobre  $h_{max}$  con el fin de adimensionalizar los límites. Para el límite superior,  $h_{max}/h_{max} = 1$ , significa que el máximo y el mínimo tamaño de bloques son iguales,  $h_{min}=h_{max}$ . Si el límite inferior  $h_{min}/h_{max}$  llegase a ser cero, quiere decir que existe un bloque muy grande y uno muy pequeño, donde la mayoría de los bloques son pequeños.

Los parámetros adimensionales se definen a continuación:

- Presión en las fracturas:

$$p_{Df} = \frac{2\pi k_f h_f}{q\mu B} (p_i - p_f), \quad \dots\dots\dots (3.a)$$

- Presión en la matriz:

$$p_{Dm} = \frac{2\pi k_f h_f}{q\mu B} (p_i - p_m), \quad \dots\dots\dots (3.b)$$

- Coeficiente de almacenamiento en la matriz:

$$\omega_m = \frac{\phi_m c_m}{\phi_m c_m + \phi_f c_f}, \quad \dots\dots\dots (3.c)$$

- Coeficiente de almacenamiento en la fractura:

$$\omega_f = \frac{\phi_f c_f}{\phi_f c_f + \phi_m c_m}, \quad \dots\dots\dots (3.d)$$

- Coeficiente de flujo interporoso:

$$\lambda = \frac{\sigma k_m r_w^2}{k_f}, \dots\dots\dots (3. e)$$

- Distancia radial:

$$r_D = \frac{r}{r_w}, \dots\dots\dots (3. f)$$

- Coordenadas normales a la interfase matriz-fractura:

$$\xi = \sqrt{\frac{x^2}{K r_w^2} + \frac{K y^2}{r_w^2}},$$

$$\xi_D = \frac{\xi}{h}, \dots\dots\dots (3. g)$$

- Tamaño de bloque de matriz:

$$h_D = \frac{h}{h_{max}}. \dots\dots\dots (3. h)$$

El coeficiente de flujo interporoso  $\lambda$  depende de  $h$  y, por lo tanto, se incluye en las ecuaciones 3.5 y 3.6. Es difícil escoger una distribución de tamaño de bloques en particular, ya que estudios geológicos no expresan el arreglo de fracturas observadas en término del tamaño de bloque. Esta tesis estudia el caso de la distribución normal.

### 3.1 Función normal o de Gauss

Su forma está expresada por la Ec. 3.8:

$$f(h_D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(h_D-\mu)^2}, \dots\dots\dots (3.8)$$

donde  $h_D$  es la variable aleatoria y  $\sigma$  es la desviación estándar, que significa la dispersión promedio de los valores posibles de la variable aleatoria con respecto a su media  $\mu$ .

En la **Fig. 3.1** se muestra la gráfica de esta función, cuya curva tiene la forma típica de campana y donde el rango de variación es de  $h_D$  es de 0 a 1.

En seguida se realizará una serie de despejes y arreglos, con la finalidad de obtener las funciones  $g(s)$  para flujo pseudoestacionario (Ec. 3.6) y transitorio (Ec. 3.7) utilizando la distribución normal para el tamaño de bloque.

### 3.1.1 Solución para flujo pseudoestacionario (PSS)

Se parte de la  $g(s)$  descrita por Belani (1988) para flujo pseudoestacionario, dada por la Ec. 3.6.

La ecuación 3.e incluye dos coeficientes de flujo interporoso,  $\lambda_{max}$  y  $\lambda_{min}$ :

Coefficiente de flujo interporoso mínimo:

$$\lambda_{min} = \frac{k_m r_w^2}{k_f h_{max}^2} \dots\dots\dots (3.9)$$

Coefficiente de flujo interporoso máximo:

$$\lambda_{max} = \frac{k_m r_w^2}{k_f h_{min}^2} \dots\dots\dots (3.10)$$

Se observa en las Ecs. 3.9 y 3.10 que los tamaños de bloque  $h_{min}$  y  $h_{max}$  corresponden a los coeficientes de flujo interporoso  $\lambda_{max}$  y  $\lambda_{min}$ , respectivamente.

Dividiendo la Ec. 3.9 por la Ec. 3.10, se obtiene:

$$\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} = \left( \frac{h_{min}}{h_{max}} \right)^2 \dots\dots\dots (3.11)$$

Se define  $h_D$  a partir de las ecuaciones 3.h y 3.9:

$$h_D = \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda}}$$

Se despeja  $\lambda$  de la ecuación anterior para  $h_D$ :

$$\lambda = \frac{\lambda_{min}}{h_D^2}. \dots\dots\dots (3.12)$$

Se obtiene  $d\lambda/dh_D$  para después expresar  $dh_D$  en términos de  $d\lambda$ :

$$\frac{d\lambda}{dh_D} = -\frac{2\lambda_{min}}{h_D^3},$$

$$dh_D = -\frac{h_D^3}{2\lambda_{min}} d\lambda. \dots\dots\dots (3.13)$$

Substituyendo las Ecs. 3.12 y 3.13 en la Ec. 3.6.

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \left( \frac{1}{1 + \frac{\omega_m S}{3\lambda}} \right) \left( \frac{\sqrt{3\lambda_{min}}}{2\sqrt{\lambda^3}} \right) f(h_D) d\lambda,$$

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{3\lambda_{min}}{\omega_m S}}}{2} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \left( \frac{\sqrt{\frac{\omega_m S}{\lambda^3}}}{1 + \frac{\omega_m S}{3\lambda}} \right) f(h_D) d\lambda. \dots\dots\dots (3.14)$$

Incluyendo las Ecs. 3.8 para  $f(h_D)$  y 3.12 para  $\lambda$ , en la Ec. 3.14.

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{3\lambda_{min}}{\omega_m S}}}{2} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \left( \frac{\sqrt{\frac{\omega_m S}{\lambda^3}}}{1 + \frac{\omega_m S}{3\lambda}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(h_D - \mu)^2} d\lambda,$$

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{3\lambda_{min}}{\omega_m S}}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \left( \frac{\sqrt{\frac{\omega_m S}{\lambda^3}}}{1 + \frac{\omega_m S}{3\lambda}} \right) e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(h_D - \mu)^2} d\lambda,$$

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{3\lambda_{min}}{\omega_m s}}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \left( \frac{\sqrt{\frac{\omega_m s}{\lambda^3}}}{1 + \frac{\omega_m s}{3\lambda}} \right) e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\left(\sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda}} - \mu\right)^2} d\lambda. \quad \dots\dots\dots(3.15)$$

La Ec. 3.15 es la función  $g(s)$  para transferencia de flujo matriz-fractura pseudoestacionaria y distribución normal de tamaño de bloques, expresada en variables adimensionales y en el dominio de Laplace.

### 3.1.2 Solución para flujo transitorio (USS)

Se parte de la función  $g(s)$  descrita por Belani (1988) para flujo transitorio, la Ec. 3.7.

Usando el cambio de variable descrito para el caso previo expresado por la correspondiente a transferencia matriz-fractura en la Ec. 3.13, la Ec. 3.7 se reescribe como:

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{3\lambda_{min}}{\omega_m s}}}{2} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s}{\lambda}}\right) f(h_D) d\lambda. \quad \dots\dots\dots(3.16)$$

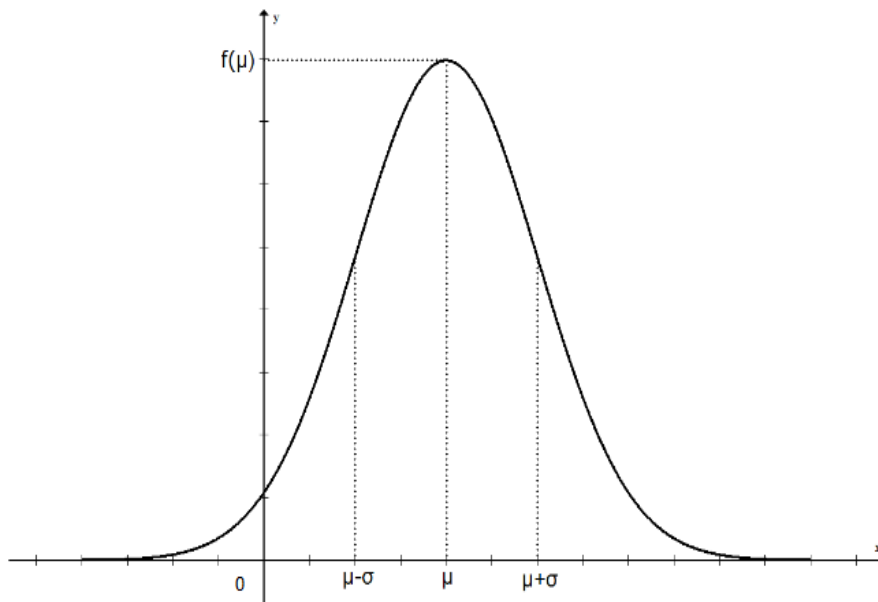
Sustituyendo la expresión para  $f(h_D)$  dada por la Ec. 3.8 y  $h_D$  de la Ec. 3.12 en la Ec. 3.16.

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{3\lambda_{min}}{\omega_m s}}}{2} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s}{\lambda}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(h_D - \mu)^2} d\lambda,$$

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{\frac{3\lambda_{min}}{\omega_m s}}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s}{\lambda}}\right) e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(h_D - \mu)^2} d\lambda,$$

$$g(s) = \omega_f + \frac{\omega_m \sqrt{3\lambda_{min}}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s}{\lambda}}\right) e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\left(\sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda}} - \mu\right)^2} d\lambda. \quad \dots\dots\dots (3.17)$$

La ecuación 3.17 es la función  $g(s)$  para régimen de flujo transitorio y distribución normal de tamaño de bloques, expresada en variables adimensionales y en el dominio de Laplace.



**Figura 3.1** Función de densidad de probabilidad de Gauss.

# CAPÍTULO 4: VALIDACIÓN

## 4.1 Modelo de Warren y Root (1963)

Uno de los modelos matemáticos clásicos utilizados para describir el comportamiento de un yacimiento naturalmente fracturado (YNF), es el propuesto por Warren y Root (1963).

Warren y Root (1963) basaron su análisis idealizando un yacimiento fracturado como un cubo. Asumieron un régimen de transferencia pseudoestacionario entre los sistemas de fracturas y matriz. En su modelo, se resolvieron simultáneamente dos veces la ecuación de difusión (una para la matriz y otra para la fractura). En la **Fig. 4.1** se compara la idealización del modelo del yacimiento con el yacimiento verdadero.

Como resultado de este estudio, puede concluirse que para el modelo de estos autores, se requieren dos parámetros para caracterizar la desviación del comportamiento de un medio con doble porosidad con respecto a uno de un medio poroso homogéneo. Los parámetros son  $\omega$ , que es la relación de almacenamiento y  $\lambda$ , el coeficiente de flujo interporoso, definidos por medio de las Ecs. 3.c, 3.d y 3.e.

El modelo de Warren y Root emplea tamaño y forma constante de los bloques de la matriz. Para el flujo pseudoestacionario (PSS) entre la matriz y la fractura, la solución y su derivada presentan el mismo comportamiento que distintos PDF's que utilizan distinto tamaño de bloque, tomando en cuenta que el modelo de Warren y Root es una clase particular del modelo propuesto.

### 4.1.1 Formulación del modelo

Asumiendo que el yacimiento puede tratarse como si estuviera compuesto por dos medios porosos homogéneos, matriz y fractura, se definen dos presiones en cada punto  $(x, y, z, t)$  de la manera siguiente:

$$p_m(x, y, z, t) = \frac{\int_V p(x, y, z, t) g_m(V) dV}{\int_V g_1(V) dV}, \dots\dots\dots (4.1)$$

$$p_f(x, y, z, t) = \frac{\int_V p(x, y, z, t) g_f(V) dV}{\int_V g_f(V) dV}, \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

donde  $g_m$  y  $g_f$  son funciones para los sistemas matriz y fractura, respectivamente y donde  $g_m(V) = 1$  en la porosidad primaria (matriz) ,  $g_m(V) = 0$  fuera de la porosidad primaria ,  $g_f(V) = 1$  en la porosidad secundaria (fracturas) y  $g_f(V) = 0$  fuera de la porosidad secundaria.

El volumen considerado debe ser pequeño en comparación con el volumen del yacimiento y grande en comparación con el tamaño de los elementos del sistema matriz, para cumplir lo anterior, deben satisfacerse las condiciones siguientes:

$$\int_V g_m(V) dV = \phi_m, \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

$$\int_V g_f(V) dV = \phi_f. \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

Si la saturación de agua congénita en el sistema fracturas es despreciable, la porosidad intergranular medida,  $\bar{\phi}_m$ , puede relacionarse con  $\phi_m$  y  $\phi_f$ :

$$\phi_m = (1 - \phi_f) \bar{\phi}_m (1 - S_{wc})_m, \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

donde  $\bar{\phi}_m$  es la porosidad intergranular medida en función del espacio vacío entre granos, es decir, de los espacios intersticiales en todo tipo de roca.

Tal como se muestra en el trabajo de Warren y Root, para un yacimiento de espesor uniforme que es horizontal, homogéneo y anisótropo, el flujo monofásico de un líquido ligeramente compresible se describe al aplicar el Teorema de Green al volumen  $V$ ; de esta manera, se obtiene la forma aplicable por medio de la ecuación de difusión expresada por la Ec. 4.6:

$$\frac{k_{fx}}{\mu} \frac{\partial^2 p_f}{\partial x^2} + \frac{k_{fy}}{\mu} \frac{\partial^2 p_f}{\partial y^2} - \phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = \phi_f c_f \frac{\partial p_f}{\partial t}, \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

donde los ejes  $x$  y  $y$  coinciden con los ejes principales de la permeabilidad. En esta expresión,  $c_m$  y  $c_f$  son compresibilidades totales; sin embargo, si se asume que las fuerzas externas son constantes, que no hay interacción entre el sistema matriz y el sistema fractura ( $\phi_m$  es independiente de  $p_f$  y  $\phi_f$  es independiente de



$p_m$ ) y que la variación de  $\phi_f$  con respecto a  $p_f$  es despreciable, es posible obtener las aproximaciones siguientes:

$$c_m \cong c_o + \frac{c_p + S_{wc}c_w}{1 - S_{wc}} \dots\dots\dots (4.7)$$

$$c_f \cong c_o \dots\dots\dots (4.8)$$

donde la compresibilidad de los poros de la roca ( $c_p$ ) aparece como un elemento que puede ser importante frente a la compresibilidad de los fluidos ( $c_w$  es la compresibilidad del agua,  $c_o$  la compresibilidad del aceite y  $S_{wc}$  la saturación del agua).

En algunos casos de aceites pesados y extrapesados, al tenerse valores reducidos para  $c_o$ , el segundo término de la Ec. 4.7 será por lo menos tan grande como la compresibilidad del fluido (aceite,  $c_o$ ).

Además en la Ec. 4.6 es necesario definir una continuidad local. Si se considera que existe transferencia pseudoestacionaria de los elementos de la matriz hacia las fracturas, la ecuación siguiente puede cumplirse para el volumen  $V$ :

$$\phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{\sigma_f k_m}{\mu} (p_f - p_m), \dots\dots\dots (4.9)$$

donde el parámetro  $\sigma_f$  tiene dimensiones recíprocas al área; es el factor de forma, el cual refleja la geometría de los elementos de la matriz y controla el flujo entre las dos regiones porosas.

Las Ecs. 4.6 a 4.9 pueden expresarse en variables adimensionales empleando los grupos apropiados:

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{Ky}{x} \right) \dots\dots\dots (4. a)$$

- Tiempo:

$$t_D = \frac{k_f t}{(\phi_f C_f + \phi_m C_m) \mu r_w^2}, \dots\dots\dots (4. b)$$

- Grado de anisotropía:

$$\bar{k}_f = \sqrt{k_{fx} k_{fy}},$$

$$K = \sqrt{\frac{k_{fx}}{k_{fy}}}, \dots\dots\dots(4. c)$$

- Radio de la frontera externa:

$$r_{eD} = \frac{r_e}{r_w}. \dots\dots\dots(4. e)$$

Para un yacimiento infinito con una presión inicial uniforme, que produce a gasto constante, substituyendo los parámetros adimensionales expresados por las Ecs. 3.a, 3.b, 3.c, 3.d, 3.e, 3.f, 3.g, 3.h, 4.a,4.b, 4.c y 4.e, condición inicial y las condiciones de frontera quedan de la manera siguientes:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial p_{Df}}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial \theta^2} - (1 - \omega) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \omega \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D}, \dots\dots\dots(4.10)$$

$$(1 - \omega) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = \lambda(p_{Df} - p_{Dm}). \dots\dots\dots(4.11)$$

- Condiciones de frontera:

Externa:

$$p_{Dm} = p_{Df} = 0; \text{ para } t_D = 0, \text{ todo } \xi \text{ y } \theta$$

$$p_{Df} = 0; \text{ para } t_D > 0, \xi \rightarrow \infty, \text{ todo } \theta.$$

Interna ( $r = r_w$ ):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial p_{Df}}{\partial \xi_r} d\theta = -1; t_D > 0, R = \frac{1}{\sqrt{K \cos^2 \theta + \frac{1}{K} \sin^2 \theta}}, \dots\dots\dots(4.12)$$

El pozo, que se representa por medio de una elipse después de emplear la transformación dada por la variable  $\xi$ , causa una distribución de presión carente de simetría. Para evitar la necesidad de incluir a  $K$ , grado de anisotropía, como un parámetro en la solución, se asume que la presión del pozo que se obtiene resolviendo las Ecs. 4.10 a 4.12, difiere por una cantidad constante de la presión del pozo obtenida al resolver el problema simétrico ( $K = 1$ ). Después de un tiempo muy corto, la diferencia entre estas presiones por la distorsión de la distribución de

la presión en la región cercana al pozo será constante; por lo tanto, debido a que los errores se restringen a tiempos pequeños son reducidos.

La expresión siguiente complementa la descripción del problema:

$$p_{Dw}(t_D) = p_{Df}^*(1, t_D) - S^*, \quad \dots\dots\dots(4.13)$$

donde  $S^* = \ln\left(\frac{K+1}{2\sqrt{K}}\right)$ , es el daño de la formación debido a la anisotropía de la formación (adimensional);  $p_{Df}^*(1, t_D)$  es la solución para el problema simétrico, descrito por las Ecs. 4.10 a 4.13, con  $K = 1$ , evaluada a  $\xi = 1$ .

Usando la transformada de Laplace y resolviendo la ecuación resultante, sujeta a las condiciones de frontera que se plantearon anteriormente, la solución deseada puede expresarse como:

$$p_{Df}^*(1, t_D) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K_0(\sqrt{sf(s)})}{s\sqrt{sf(s)}K_1(\sqrt{sf(s)})} \right], \quad \dots\dots\dots(4.14)$$

donde  $f(s) = \frac{\omega_f(1-\omega_f)s+\lambda}{(1-\omega_f)s+\lambda}$ .

#### 4.1.2 Desarrollo de la validación para régimen pseudoestacionario

Para validar el modelo propuesto en esta tesis con respecto al modelo de Warren y Root, es necesario realizar ciertas consideraciones, debido a que considera tamaño de bloques múltiples, mientras que el de Warren y Root emplea un tamaño constante de bloques.

Por cuestiones de validación, se considerará  $\partial p_m / \partial t$  como la propuesta por Warren y Root en la Ec. 4.9, en lugar de:

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{3k_m}{\phi_m c_m \mu h^2} (p_f - p_m),$$

descrita en el apéndice A.

Lo que implica que  $\sigma_f = 3/h^2$ .

Es necesario considerar que  $\lambda_{max}$  y  $\lambda_{min}$  son iguales para que el tamaño de bloques sea constante. No se considera daño en la formación ni factor de almacenamiento.

Tomando en cuenta las consideraciones de las ecuaciones A.9 a la A.11 del Apéndice A, se tiene:

$$\frac{\partial p_{Dm}}{\partial t} = \frac{\lambda}{\omega_m} (p_{Df} - p_{Dm}).$$

Debido a que Warren y Root definen el coeficiente de flujo interporoso como:

$$\lambda = \frac{\sigma k_m r_w^2}{k_f},$$

después de aplicar la transformada de Laplace y realizar las simplificaciones correspondientes, se obtiene la función  $g(s)$  expresada por la Ec. 3.7 Belani (1988) utiliza esta última ecuación para las distribuciones uniforme y exponencial, para transferencia matriz-fractura a condiciones de flujo pseudoestacionario. Para la distribución uniforme, la función  $g(s)$  queda como sigue:

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \left( \frac{\sqrt{\frac{3\lambda_{min}}{\omega_m s}}}{1 - \frac{h_{min}}{h_{max}}} \right) \left( \tan^{-1} \sqrt{\frac{3\lambda_{max}}{\omega_m s}} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{3\lambda_{min}}{\omega_m s}} \right). \dots\dots\dots (4.15)$$

El desarrollo de la ecuación 4.15 se encuentra en el Apéndice C.

La Ec. 3.15 es la función  $g(s)$  para régimen de flujo pseudoestacionario y distribución normal de tamaño de bloques, expresada en variables adimensionales y en el dominio de Laplace.

Para la solución numérica de la Ec. 3.15 se utilizó la regla de Simpson 1/3 de integración. Al tener como incógnitas los parámetros  $\mu^*$  y  $\sigma$ , media y desviación estándar, respectivamente, se resuelve un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Para obtener dichos parámetros, se empieza por integrar la fórmula de la distribución normal (Ec.3.8). La Ec. 4.16 muestra la solución de la integral al aplicar la transformada Z:

$$\int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(h_D - \mu^*)^2} dh_D = \frac{1}{2} \left[ 1 - erf\left(\frac{h_D - \mu^*}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]_{\frac{h_{min}}{h_{max}} = \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}}}^1 \dots\dots\dots (4.16)$$

La solución de la Ec. 4.16 para  $h_D = 1$  se iguala a 0 (corresponde a  $\lambda_{min}$ ) y la solución para  $h_D = \frac{h_{min}}{h_{max}} = \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}}$  se iguala a 1 (corresponde a  $\lambda_{max}$ ). Tomando las consideraciones anteriores se tiene el sistema siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ 1 - erf\left(\frac{1 - \mu^*}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] = 0 \\ \left[ 1 - erf\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} - \mu^*}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] = 1 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema anterior y empleando las condiciones para que se cumpla la función error, la media y la desviación estándar se definen para este modelo de la manera siguiente:

$$1 - erf\left(\frac{1 - \mu^*}{\sigma\sqrt{2}}\right) = 0,$$

$$erf\left(\frac{1 - \mu^*}{\sigma\sqrt{2}}\right) = 1,$$

$$\frac{1 - \mu^*}{\sigma\sqrt{2}} \geq 5, \dots\dots\dots (4.17)$$

y,

$$1 - erf\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} - \mu^*}{\sigma\sqrt{2}}\right) = 1,$$

$$erf\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} - \mu^*}{\sigma\sqrt{2}}\right) = 0,$$

$$\frac{\sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} - \mu^*}{\sigma\sqrt{2}} = 0,$$

$$\mu^* = \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}}, \dots\dots\dots(4.18)$$

substituyendo la Ec. 4.18 en la Ec. 4.17 y despejando  $\sigma$  se obtiene la Ec. 4.19:

$$\sigma \leq \frac{1 - \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}}}{5\sqrt{2}}. \dots\dots\dots(4.19)$$

#### 4.1.3 Resultado de la validación para régimen pseudoestacionario

Para validar el modelo que se utiliza en esta tesis con el modelo de Warren y Root, tomando en cuenta las condiciones que se presentaron anteriormente, se utiliza la expresión resultante que se obtiene al sustituir la  $g(s)$  de la Ec. 3.15 en la solución para la ecuación de difusión, Ec. 3.4, para flujo pseudoestacionario y transitorio (Ec. 3.4), expresada en variables adimensionales en el espacio de Laplace, considerando daño a la formación y factor de almacenamiento.

Una vez resueltos y aplicando la transformada inversa de Laplace por medio del algoritmo de Stehfest, se generan las gráficas que se presentan a continuación.

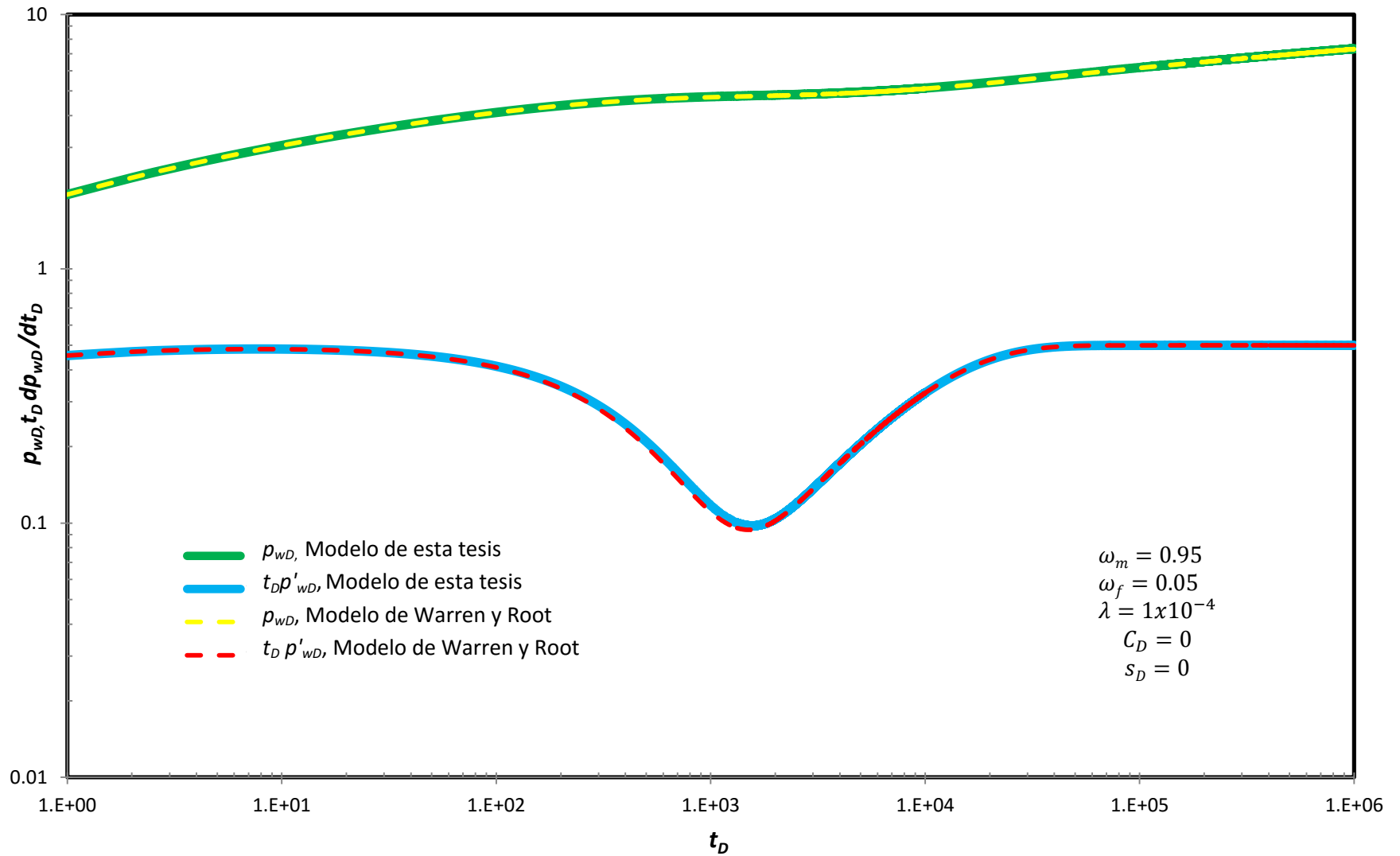
Para obtener la **Figura 4.1** se emplearon los datos siguientes:

- $\omega_m = 0.95$
- $\omega_f = 0.05$
- $\lambda = 1 \times 10^{-4}$
- $t_{Dinicial} = 1$
- $t_{Dfinal} = 1 \times 10^6$
- $\Delta t_D = 10$

En la Figura 4.1 se muestra la variación  $p_{wD}$  vs  $t_D$  y  $t_D p'_{wD}$  ( $p'_{wD} = dp_{wD}/dt_D$ ) vs  $t_D$ , tanto para el modelo de Warren y Root como para el modelo de la distribución normal, para  $N = 12$  ( $N$  es una variable que funciona como contador en el algoritmo de Stehfest). En esta gráfica, como en las siguientes, se toma que  $\lambda = \lambda_{max}$  y  $\lambda_{min}$  son prácticamente iguales a  $\lambda$ , ya que se busca un tamaño de bloques constante.

Al comparar los resultados de ambos modelos, el modelo desarrollado en esta tesis, que incluye la distribución normal para el tamaño de bloque, obtiene un comportamiento semejante al modelo de un solo tamaño de bloque (cuando  $\lambda_{min}$  se aproxima a  $\lambda_{max}$ , o viceversa)

Se observa un valle o “mínimo” en aproximadamente  $t_D = 1400$ . Éste es el tiempo de transición, en el que la presión de ambos sistemas alcanza un equilibrio.



**Figura 4.1** Gráfica  $p_{wD}, t_D d(p_{wD})/dt_D$  vs  $t_D$ ,  $N = 12$  . Transferencia matriz-fractura pseudoestacionaria.



Una vez que se obtienen  $p_{wD}(t_D)$  y  $t_D d[p_D(t_D)]/dt_D$  por medio del algoritmo de Stehfest, se elaboran dos tipos de gráficas diferentes para el tipo de flujo pseudoestacionario, en las cuales en una de ellas la variable es  $\lambda$ , y en la otra  $\omega_m$ .

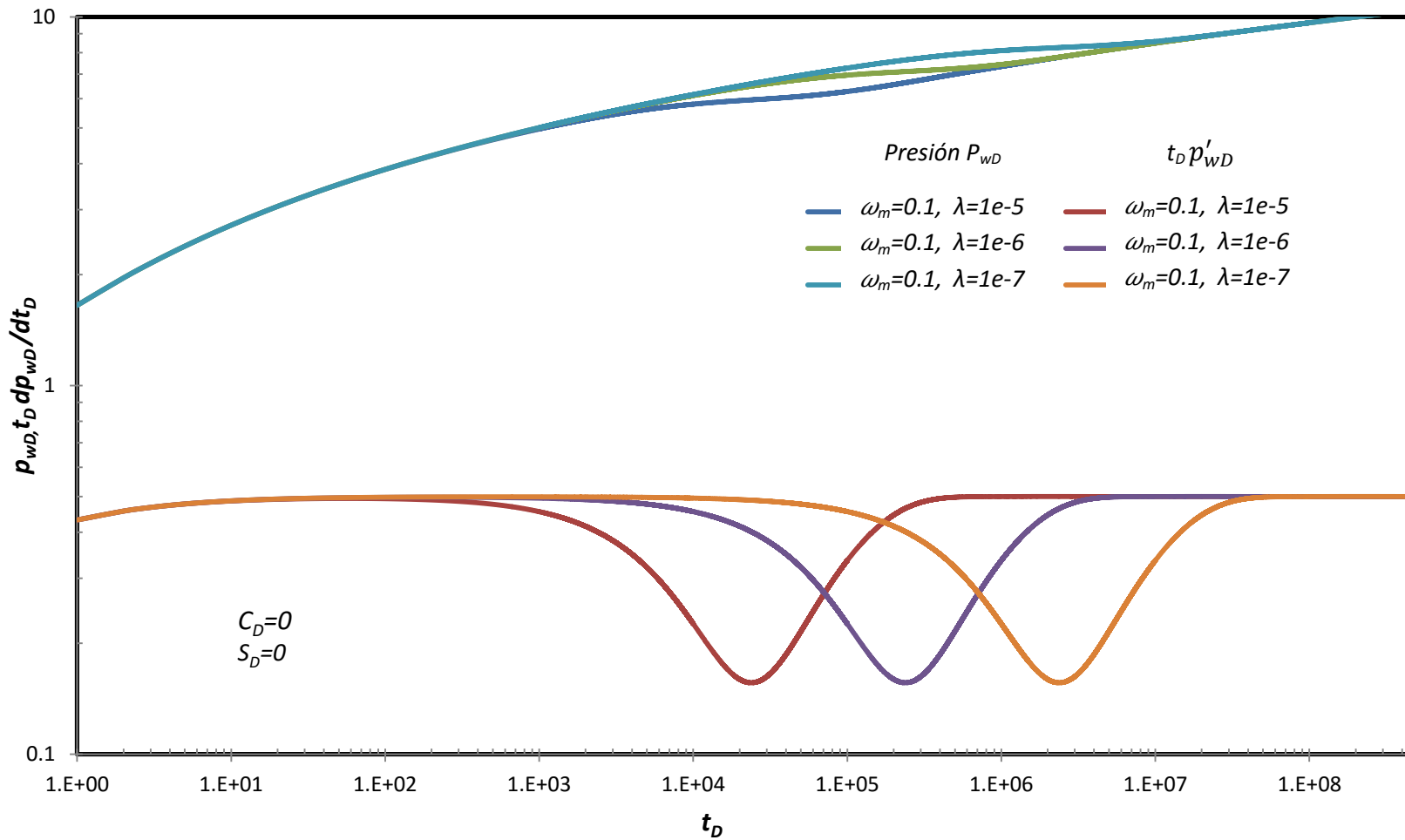
En la **Figura 4.2**, la variable es  $\lambda$ , la cual toma valores de  $\lambda = 1 \times 10^{-5}$ ,  $\lambda = 1 \times 10^{-6}$  y  $\lambda = 1 \times 10^{-7}$ , las demás propiedades permaneces equivalentes.

Los datos son los siguientes:  $\omega_m = 0.1$ ,  $\omega_f = 0.9$ ,  $s_D = 0$  y  $C_D = 0$ . Se observa que, en los 3 casos de  $\lambda$ , la gráfica correspondiente a la derivada comienza en aproximadamente  $p'_{wD} = 0.5$  y, aunque los valles difieran de posición uno del otro, los 3 ejemplos regresan a estabilizarse al valor de  $p'_{wD} = 0.5$ .

Mientras la profundidad del valle permanece constante (siendo el  $p'_{wD}$  mínimo el mismo para los tres valores de  $\lambda$ ), se desplaza a tiempos más largos cuando  $\lambda$  decrece y, por lo tanto, se estabiliza a tiempos más grandes.

El tiempo es más sensible a la variación de  $\lambda_{min}$  ó  $\lambda_{max}$ ; es el parámetro que determina la duración del periodo de transición.

Los valores de  $p_{wD}$  iniciales en los tres casos son idénticos hasta  $t_D = 3000$  donde empiezan a variar y, vuelven a converger a un tiempo adimensional de  $8.5 \times 10^6$ .



**Figura 4.2** Gráfica de la presión adimensional  $p_{wD}(t_D)$  y de la función derivada de la presión  $t_D dp_{wD}(t_D)/t_D$  vs  $t_D$ ,  $N = 12$ .  $\lambda$  variable, para una distribución normal y transferencia matriz-fractura pseudoestacionaria.

En la **Figura 4.3**, la variable es  $\omega_m$  y, ya que  $\omega_f = 1 - \omega_m$ ,  $\omega_f$  cambia su valor de acuerdo a  $\omega_m$ . Los valores de los tres casos son los siguientes:

$$\omega_m = 0.05 \text{ y } \omega_f = 0.95,$$

$$\omega_m = 0.1 \text{ y } \omega_f = 0.9,$$

$$\omega_m = 0.15 \text{ y } \omega_f = 0.85.$$

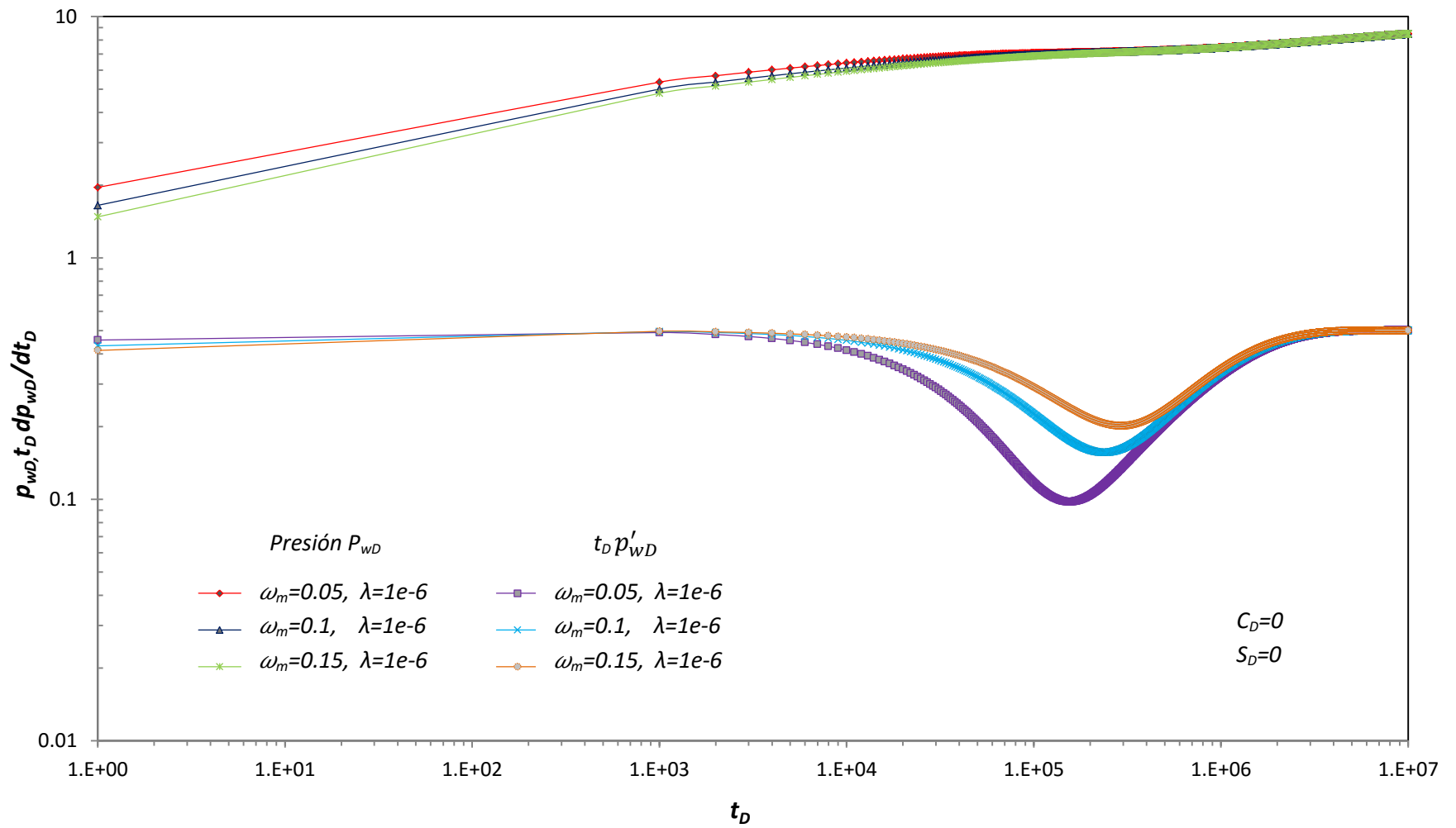
Las demás propiedades permanecen constantes para los tres casos de  $\omega_m$ ;

$$\lambda = 1 \times 10^{-6}, s_D = 0 \text{ y } C_D = 0.$$

Se observa en la figura que, la profundidad del valle depende del valor de  $\omega_m$ . mientras decrece el valor de  $\omega_m$ , aumenta la profundidad del valle.

Los 3 casos tienen un valor inicial de  $p'_{wD} = 0.5$ . en  $t_D = 1$ . Se separan en aproximadamente  $t_D = 2000$ , donde empiezan a formarse los valles. Vuelven a coincidir en  $p'_{wD} = 0.5$  en  $t_D = 3 \times 10^6$ .

En  $t_D = 1$ , el valor de  $p_{wD}$  fue menor para  $\omega_m = 0.15$ , siendo el mayor para  $\omega_m = 0.05$ . Eso nos dice que mientras más pequeño el valor de  $\omega_m$ , mayor será su  $p_{wD}$  inicial. Comienzan a coincidir los tres casos para  $t_D = 95000$  y  $p_{wD} = 6.83$ .



**Figura 4.3** Gráfica de la presión adimensional  $p_{wD}(t_D)$  y de la función derivada de la presión  $t_D dp_{wD}(t_D)/t_D$  vs  $t_D$ ,  $N = 12$ .  $\omega$  variable, para una distribución normal y transferencia matriz-fractura pseudoestacionaria.

## 4.2 Modelo de Jalali y Ershaghi (1987)

Jalali y Ershaghi (1987) presentaron un modelo para yacimientos naturalmente fracturados para transferencia transitoria. La estimación de los parámetros se basa en reconocimiento de patrones, curvas tipo y correlaciones auxiliares.

Se desarrolla una curva tipo que incorpora el flujo interporoso, cuyo rango varía de régimen transitorio a pseudoestacionario. De este modo, el análisis de la curva tipo determina el modo gobernante de flujo interporoso y por lo tanto la estimación de los parámetros del yacimiento es apropiada.

En yacimientos naturalmente fracturados, la zona de transición que se observa en las gráficas semi logarítmicas al estar evaluando el comportamiento de la presión contra el tiempo, en algunos casos se ignoran.

El modelo tiene las características siguientes. Además de la capa de fractura delgada, se asumen dos capas de matriz, cada una con sus respectivas porosidad, permeabilidad, compresibilidad total, espesor y régimen de flujo. El espesor en la matriz es flexible en cualquiera de sus capas, ambas pueden llegar a ocupar el mismo espacio. Esto se maneja con un coeficiente geométrico,  $n$ . El comportamiento de combinaciones de estratos de matriz pequeños y grandes, en distintas proporciones, puede analizarse. Estos casos ocurren en yacimientos donde la distribución de fracturas no es uniforme.

Se consideran tres variaciones de este modelo de los anteriores:

1. Ambas capas de la matriz obedecen un régimen de transferencia de fluidos pseudoestacionario. Por lo tanto, el modelo puede interpretarse por bloques pequeños y/o dañados.
2. Ambos estratos de matriz obedecen un régimen transitorio, representando bloques grandes y/o sin daño.
3. La capa 1 fluye bajo un régimen pseudoestacionario y la capa 2 fluye bajo un régimen transitorio. En este sub modelo,  $n$  se evaluó 0 y 2, los cuales corresponden a un comportamiento pseudoestacionario y transitorio respectivamente.

### 4.2.1 Formulación del modelo

Las condiciones de frontera iniciales se incluyen en el Apéndice A. Las soluciones se derivan en el espacio de Laplace y se invierten numéricamente con el algoritmo de Stehfest.

Las soluciones dependen de cinco parámetros:  $\omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2$  y  $n$ , las cuales se definen a continuación:

$$\omega_1 = \frac{\frac{n}{2} \phi_{m1} c_{m1}}{\frac{n}{2} \phi_{m1} c_{m1} + \frac{(2-n)}{2} \phi_{m2} c_{m2} + \phi_f c_f}, \quad \dots\dots\dots(4.20)$$

$$\omega_2 = \frac{\frac{(2-n)}{2} \phi_{m2} c_{m2}}{\frac{n}{2} \phi_{m1} c_{m1} + \frac{(2-n)}{2} \phi_{m2} c_{m2} + \phi_f c_f}, \quad \dots\dots\dots(4.21)$$

$$\lambda_1 = \frac{k_{m1} r_w^2}{k_f \left(\frac{nH}{2}\right)^2}, \quad \dots\dots\dots(4.22)$$

$$\lambda_2 = \frac{k_{m2} r_w^2}{k_f \left(\frac{(2-n)H}{2}\right)^2}. \quad \dots\dots\dots(4.23)$$

Los subíndices 1 y 2 se refieren a las propiedades de la capa 1 y la capa 2, respectivamente.  $\omega_1$  (y  $\omega_2$ ) se definen como el coeficiente de la capa 1 (y capa 2) de almacenamiento total del sistema. Por conveniencia, el coeficiente de almacenamiento de la fractura,  $\omega_f$ , se define:

$$\omega_f = 1 - (\omega_1 + \omega_2). \quad \dots\dots\dots(4.24)$$

Por ejemplo,  $\omega_1 = \omega_2 = 0.48$  indica que cada capa tiene un 48% del espacio total poroso y  $\omega_f = 4\%$ .

El coeficiente geométrico,  $n$ , está presente en los  $\omega$ 's y en los coeficientes de flujo interporoso,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

El flujo en la fractura se describe por:

$$\frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} + V_{m1} + V_{m2}, \quad \dots\dots\dots(4.25)$$

donde  $V_m$  es la contribución matriz a fractura.  $V_{m1}$  y  $V_{m2}$  se definen, para régimen transitorio, de la manera siguiente:

$$V_{m1} = -\left(\frac{n}{2}\right)^2 \lambda_1 \frac{\partial \Delta p_{Dm1}}{\partial z_D} \Big|_{z_D=0}, \dots\dots\dots (4.26)$$

$$V_{m2} = -\left(\frac{2-n}{2}\right)^2 \lambda_2 \frac{\partial \Delta p_{Dm2}}{\partial z_D} \Big|_{z_D=0}, \dots\dots\dots (4.27)$$

donde  $z_D$  es la coordenada vertical (adimensional). Las variables adimensionales se definen de la manera siguiente:

$$z_D = \frac{z}{H},$$

$$C_D = \frac{C}{2\pi h r_w^2 (\phi_f c_f + \phi_m c_m)}.$$

La presión del yacimiento en el espacio de la Laplace,  $p_{Dw}$ , está dada en la Ec.

3.4. En esta ecuación, se emplea la transformación  $x = \sqrt{sf(s)}$ ; donde  $f(s)$  depende del régimen de flujo. Para transferencia transitoria matriz-fractura:

$$f(s) = 1 - \omega_m + \frac{\sqrt{n\omega_1\lambda_1}}{\sqrt{2s}} \tanh\left(\frac{\sqrt{2\omega_1s}}{\sqrt{n\lambda_1}}\right) + \frac{\sqrt{(2-n)\omega_2\lambda_2}}{\sqrt{2s}} \tanh\left(\frac{\sqrt{2\omega_2s}}{\sqrt{(2-n)\lambda_2}}\right). \dots\dots\dots (4.28)$$

Para normalizar la permeabilidad y porosidad de las dos capas en una sola:

$$\phi_{m1}c_{m1} = \phi_{m2}c_{m2} = \phi_m c_m,$$

$$\frac{k_{m1}}{n^2} = \frac{k_{m1}}{(1-n)^2} = k_m.$$

$$f(s) = 1 - \omega_m + \frac{\frac{n\lambda}{s}}{(\lambda/\omega_m s) + 1} + (1-n)\omega_m \sqrt{\frac{\lambda}{\omega_m s}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s}{\lambda}}\right), \dots\dots\dots (4.29)$$

El parámetro  $n$  se refiere a un coeficiente geométrico adimensional, el cual representa una fracción del espesor en la formación total. Para el régimen pseudoestacionario  $n = 1$  y para régimen transitorio,  $n = 0$ , por lo tanto, para el régimen transitorio:

$$f(s) = 1 - \omega_m + \omega_m \sqrt{\frac{\lambda}{\omega_m s}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s}{\lambda}}\right). \dots\dots\dots (4.30)$$

#### 4.2.2 Desarrollo de la validación para régimen transitorio

Para validar el modelo que se propone en esta tesis con el modelo de Jalali y Ershaghi, es necesario realizar ciertas consideraciones, debido a que el modelo considera tamaño de bloques múltiples, mientras que el de Jalali y Ershaghi considera dos tamaños de bloques.

Por cuestiones de validación, se toman las mismas consideraciones que en la validación para el régimen pseudoestacionario.

Tal como se describió en el Capítulo 3; la Ec. 3.17 describe una función  $g(s)$  para una distribución normal, considerando un tamaño de bloque múltiple, para flujo transitorio.

Para la solución numérica de la Ec. 3.17 se utilizó la regla de Simpson 1/3 de integración. Los parámetros  $\mu^*$  y  $\sigma$ , media y desviación estándar, respectivamente, se definen de igual modo que en el régimen pseudoestacionario (Ecs. 4.18 y 4.19).

Esta última solución se compara gráficamente con el modelo de Jalali y Ershaghi, la cual utiliza la función  $f(s)$  de la Ec. 4.30.

#### 4.2.3 Resultado de la validación para régimen transitorio

Para validar el modelo que se utiliza en esta tesis con el modelo de Jalali y Ershaghi, tomando en cuenta las condiciones que se presentaron anteriormente, se emplea la expresión resultante de sustituir la Ec. 3.16 en la solución para la ecuación de difusión para flujos pseudoestacionario y transitorio expresada en variables adimensionales y en el espacio de Laplace, considerando daño a la formación y factor de almacenamiento (Ec. 3.4)

Una vez que se resuelve el modelo anterior en el plano de Laplace, se aplica la transformada inversa de Laplace por medio del algoritmo de Stehfest para generar las gráficas que se presentan a continuación.

Para obtener la **Figura 4.4** se emplean los datos siguientes:



$$\omega_m = 0.95$$

$$\omega_f = 0.05$$

$$\lambda = 1 \times 10^{-6}$$

$$t_{Dinicial} = 1$$

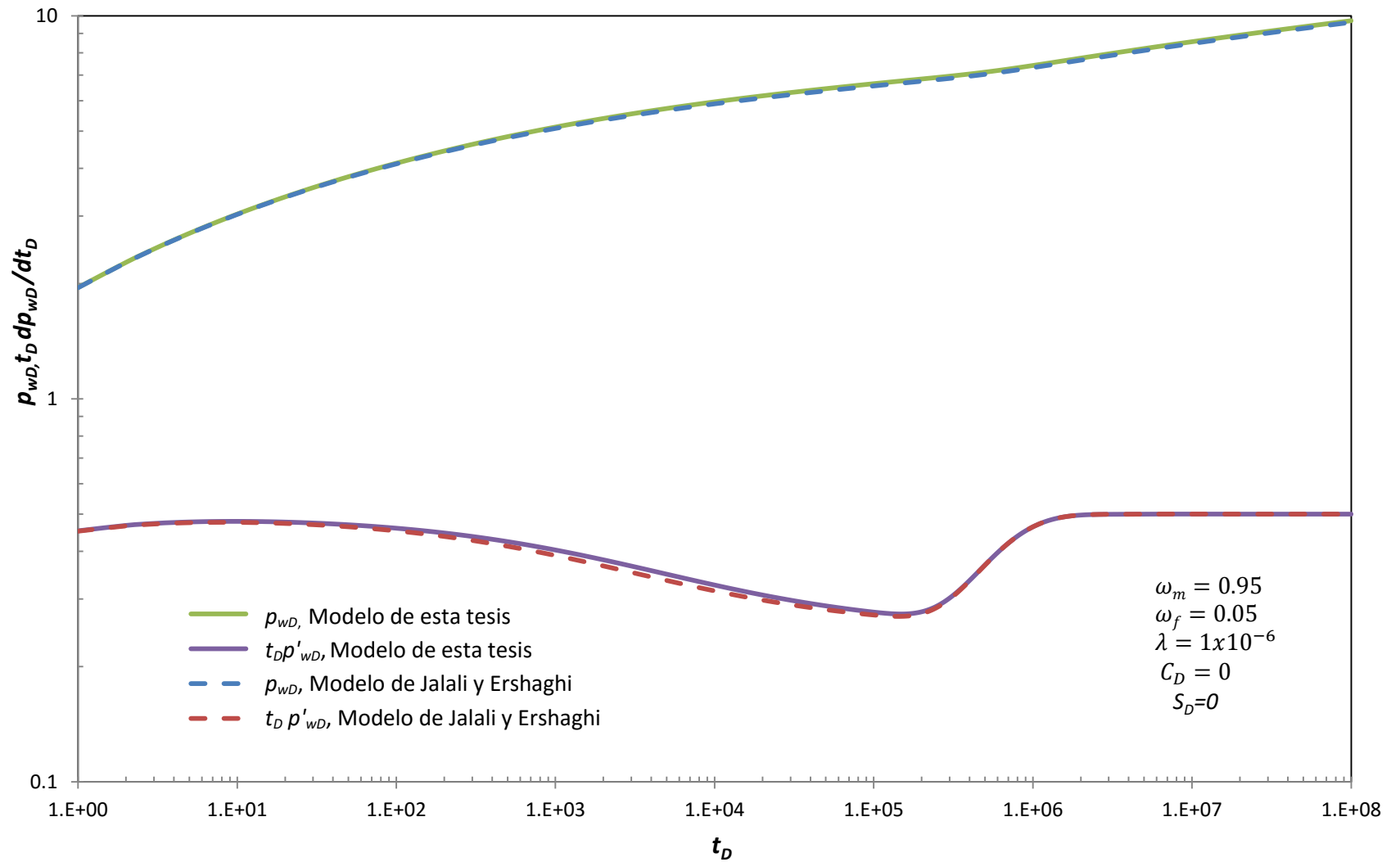
$$t_{Dfinal} = 1 \times 10^8$$

$$\Delta t_D = 10$$

En la Figura 4.4 se muestra la variación  $p_{wD}$  vs  $t_D$  y  $t_D p'_{wD}$  ( $p'_{wD} = dp_{wD}/dt_D$ ) vs  $t_D$ , tanto para el modelo de Jalali y Ershaghi como para el modelo de la distribución normal,  $N = 12$  ( $N$  es una variable que funciona como contador en el algoritmo de Stehfest). En esta gráfica, como en las siguientes se considera que  $\lambda_{max}$  y  $\lambda_{min}$  son prácticamente igual a  $\lambda$ , ya que se requiere para esta validación un tamaño de bloques constante.

Al comparar los resultados de ambos modelos, el modelo desarrollado en esta tesis, que incluye la distribución normal para el tamaño de bloque, obtiene un comportamiento semejante al modelo de un solo tamaño de bloque (cuando  $\lambda_{min}$  se aproxima a  $\lambda_{max}$ , o viceversa)

Se observa que el valle aparece en aproximadamente  $t_D = 1 \times 10^5$  y alcanza un valor mínimo de  $p'_{wD} = 0.27$ . La gráfica vuelve a estabilizarse en  $p'_{wD} = 0.5$  en  $t_D = 1.5 \times 10^5$ .



**Figura 4.4** Gráfica  $p_{wD}, t_D d(p_{wD})/dt_D$  vs  $t_D$  ,  $N = 12$  . Transferencia matriz-fractura transitoria.

Una vez obtenidas  $p_{wD}(t_D)$  y  $t_D d[p_D(t_D)]/dt_D$  por medio del algoritmo de Stehfest, se elaboran dos tipos de gráficas diferentes para el tipo de flujo transitorio, de los cuales en una de ellas la variable es  $\lambda$ , y en la otra  $\omega_m$ .

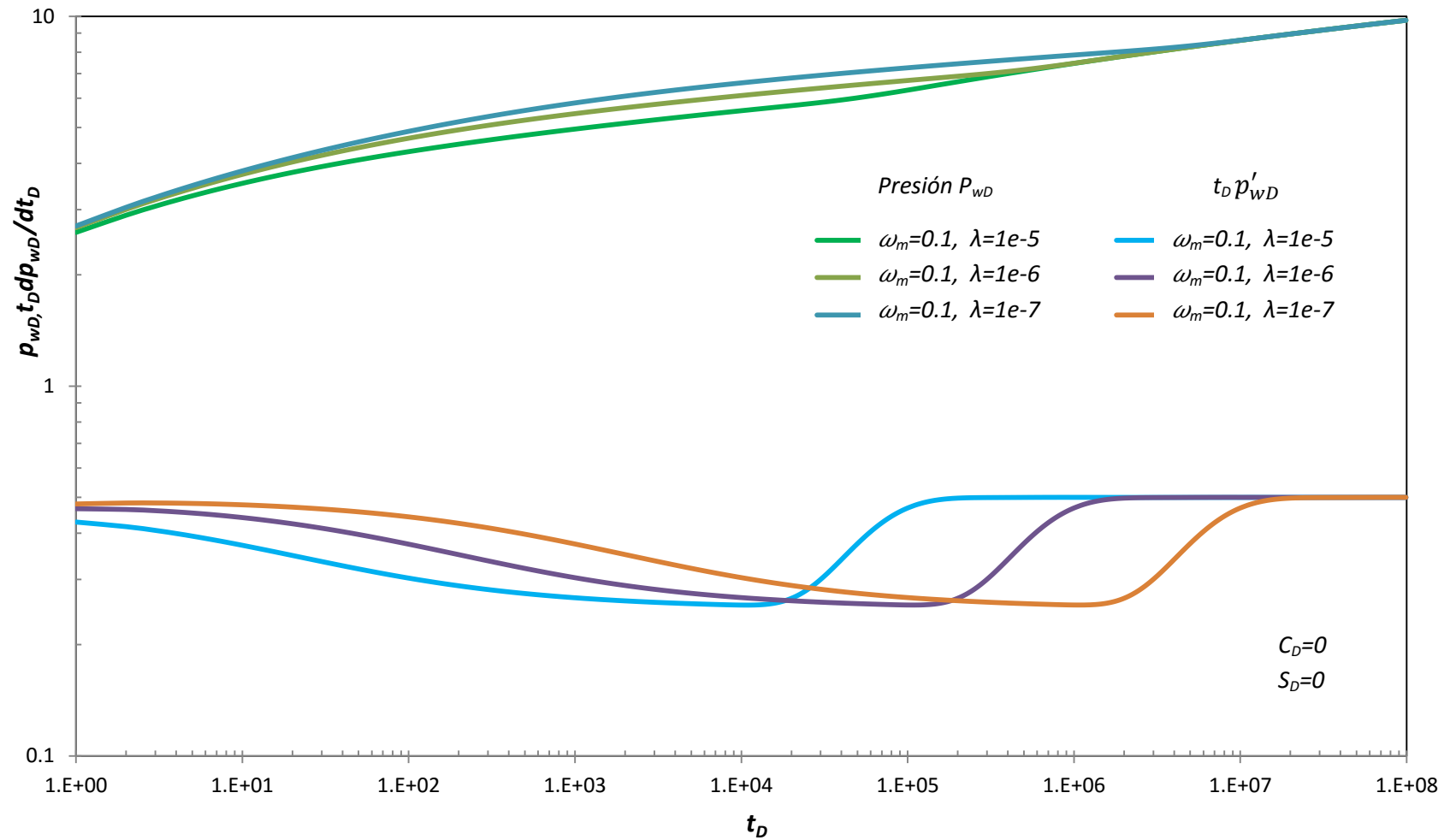
En la **Figura 4.5**, la variable es  $\lambda$ , la cual toma valores de  $\lambda = 1 \times 10^{-5}$ ,  $\lambda = 1 \times 10^{-6}$  y  $\lambda = 1 \times 10^{-7}$ ; las demás propiedades permanecen constantes mientras  $\lambda$  cambia de valor.

Los datos son los siguientes:  $\omega_m = 0.1$ ,  $\omega_f = 0.9$ ,  $s_D = 0$  y  $C_D = 0$ . Se observa que, mientras  $\lambda$  disminuye, el valor inicial de  $p'_{wD}$  es mayor y se aproxima mejor a  $p'_{wD} = 0.5$ . Los 3 casos vuelven a converger y estabilizarse en  $t_D = 1.5 \times 10^7$ .

El valle logra una mayor extensión en  $\lambda = 1 \times 10^{-7}$ , valor empleado en la última de las tres gráficas en estabilizarse en  $p'_{wD} = 0.5$ . Esto indica que mientras más pequeño sea el valor de  $\lambda$ , más largo será el periodo de transición. El punto mínimo para los tres casos, es el mismo:  $p'_{wD} = 0.25$ , obtenido para el caso de flujo transitorio, con tamaño constante de los bloques.

El tiempo es más sensible a la variación de  $\lambda_{min}$  ó  $\lambda_{max}$ , el cual es el parámetro que determina la duración del periodo de transición.

Los valores de  $p_{wD}$  iniciales en los tres casos comienzan convergiendo en  $t_D = 1$ ; sin embargo, se separan y vuelven a coincidir en  $t_D = 1.9 \times 10^6$  y  $p_{wD} = 8.17$ .



**Figura 4.5** Gráfica de la presión adimensional  $p_{Dw}(t_D)$  y de la función derivada de la presión  $t_D dp_{Dw}(t_D)/t_D$  vs  $t_D$ ,  $N = 12$ .  $\lambda$  variable, para una distribución normal y transferencia matriz-fractura transitoria

En la **Figura 4.6**, la variable es  $\omega_m$  y, debido a que  $\omega_f = 1 - \omega_m$ ,  $\omega_f$  cambia su valor de acuerdo a  $\omega_m$ . Los valores de los parámetros empleados en los tres casos son los siguientes:

$$\omega_m = 0.05 \text{ y } \omega_f = 0.95,$$

$$\omega_m = 0.1 \text{ y } \omega_f = 0.9,$$

$$\omega_m = 0.15 \text{ y } \omega_f = 0.85.$$

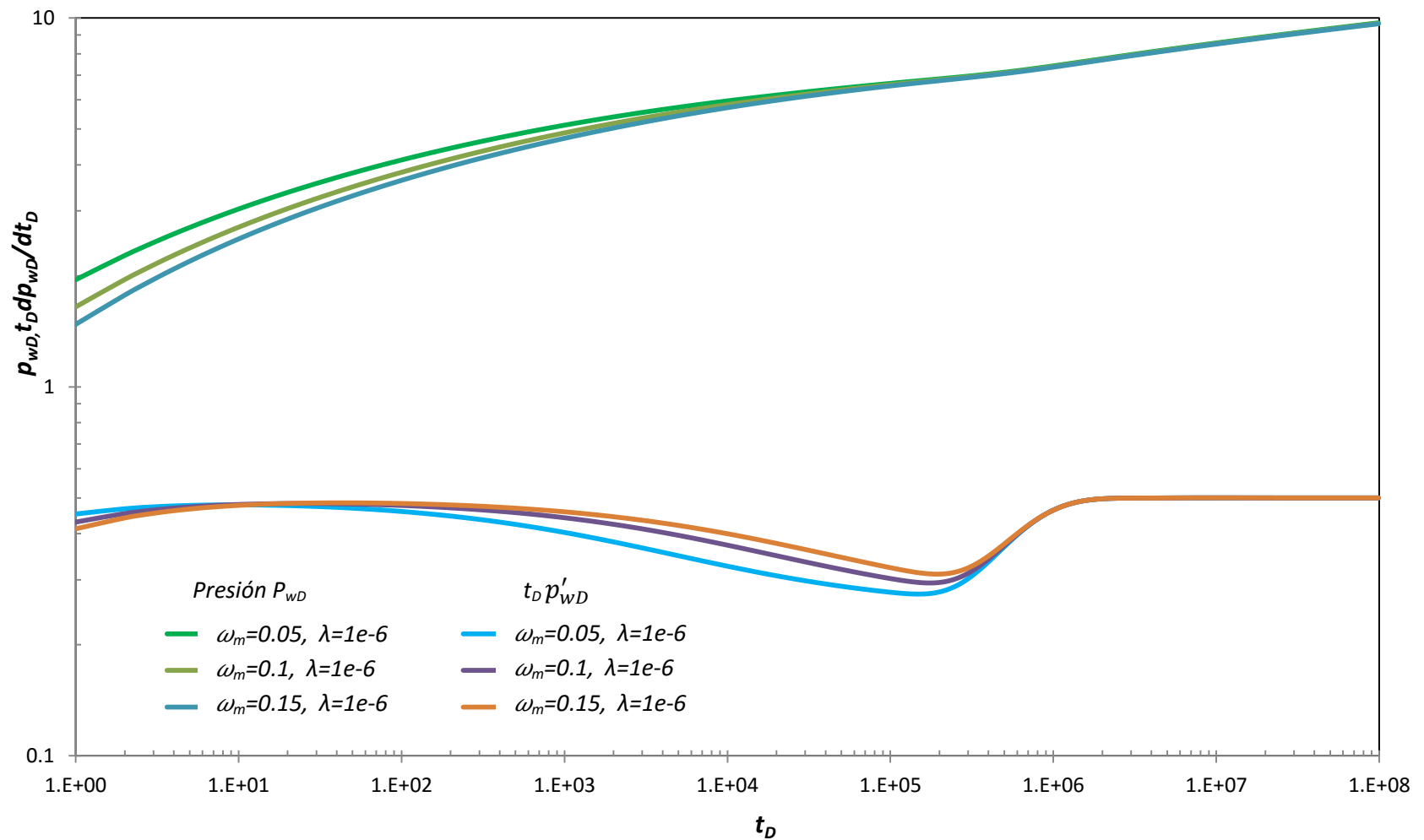
Las demás propiedades permanecen constantes para los 3 casos de  $\omega_m$ :

$$\lambda = 1 \times 10^{-6}, s_D = 0 \text{ y } C_D = 0.$$

Se observa en la figura que, la profundidad del valle depende del valor de  $\omega_m$ ; mientras decrece el valor de  $\omega_m$ , aumenta la profundidad del valle.

En  $t_D = 1$ , la gráfica correspondiente a  $\omega_m = 0.05$ , tiene un valor  $p'_{wD}$  mayor a los demás valores de  $\omega_m$ , siendo el menor el correspondiente a  $\omega_m = 0.15$ . Esto implica que cuanto más pequeño el valor de  $\omega_m$ , mayor será su  $p'_{wD}$  inicial. Las 3 gráficas vuelven a coincidir en  $t_D = 1.6 \times 10^6$  y  $p'_{wD} = 0.5$ .

De manera análoga, mientras más pequeño sea  $\omega_m$ , mayor será su  $p_{wD}$  inicial. Las tres gráficas vuelven a coincidir en aproximadamente  $t_D = 12 \times 10^4$  y  $p_{wD} = 6.6$ .



**Figura 4.6** Gráfica de la presión adimensional  $p_{wD}(t_D)$  y de la función derivada de la presión  $t_D dp_{wD}(t_D)/t_D$  vs  $t_D$ ,  $N = 12$ .  $\omega$  variable, para una distribución normal y transferencia matriz-fractura transitoria.

## CAPÍTULO 5: DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El modelo que se presenta en esta tesis se comparó con el modelo de Warren y Root, para flujo pseudoestacionario, y con el modelo de Jalali y Ershaghi para flujo transitorio. Las soluciones y sus derivadas respectivas presentan el mismo comportamiento, tomando en cuenta que el modelo de Warren y Root y el modelo de Jalali Ershaghi son casos particulares del modelo propuesto.

Se generaron curvas tipo basadas en la distribución normal. Las curvas tipo sirven para estimar la intensidad del fracturamiento, así como su uniformidad.

El grado de intensidad del fracturamiento determina la posición temporal de la presión, mientras que su uniformidad afecta el comportamiento de la presión. Para flujo transitorio, yacimientos con fracturamiento uniforme se presenta una asimetría en la forma de la derivada; mientras que para yacimientos fracturados no uniformes, la derivada muestra una forma simétrica.

La curva de la función derivada de la presión muestra distintas formas debido al efecto de la variación del tamaño de bloque en el flujo interporoso; lo anterior implica que la contribución de cada tamaño de bloque afecta la variación de la presión con respecto al tiempo, dependiente del coeficiente de flujo interporoso  $\lambda$ , el cual causa el cambio en la forma de la curva.

En esta curva, tanto para el régimen de flujo transitorio como pseudoestacionario, se observa un valle que representa el tiempo de transición en el que la presión en ambos sistemas alcanza un equilibrio.

La profundidad del valle en la derivada disminuye conforme la relación de almacenamiento,  $\omega$ , se incrementa (Fig. 4.3).

Para ambos tipos de flujo, el comienzo del efecto de doble porosidad, el valle se presenta antes al incrementarse los valores del coeficiente de flujo interporoso,  $\lambda$  (Figs. 4.2 y 4.5)

En otras palabras, el parámetro que determina la profundidad del valle es  $\omega_m$ ; mientras que el tiempo es más sensible a la variación de  $\lambda_{min}$  ó  $\lambda_{max}$ , parámetro que determina la duración del periodo de transición

En el caso del régimen de flujo transitorio, no hay una diferencia medible entre las distribuciones con pendientes positivas y negativas.

Se encontró que dentro de algunos rangos de variabilidad en el tamaño de bloque, la forma de la curva de la derivada de la presión en otros PDF's es prácticamente idéntica. En cuanto al régimen transitorio, a grandes valores de  $s_D$ , el comportamiento de la presión en un yacimiento fracturado es similar a aquel en un régimen pseudoestacionario.

El parámetro  $h_{min}/h_{max}$  cuantifica el grado de uniformidad en las fracturas. Un fracturamiento uniforme se indica cuando  $h_{min}/h_{max}$  se acerca a 1, mientras que un  $h_D$  con valor cercano a 0 indica un fracturamiento no uniforme.



## CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A partir de los resultados de esta tesis se pueden establecer las conclusiones siguientes:

- El modelo que se propone, haciendo las consideraciones necesarias para representar el comportamiento de un yacimiento con tamaño de bloque constante, se valida adecuadamente con el modelo de Warren y Root en flujo pseudoestacionario y con el modelo de Jalali y Ershaghi para flujo transitorio.
- Se obtiene una respuesta similar a aquella para el modelo de bloque de un solo tamaño cuando  $\lambda_{min}$  se aproxima a  $\lambda_{max}$ , o viceversa.
- Para resolver la ecuación de difusión, se obtiene una buena aproximación de la transformada inversa de Laplace por medio del algoritmo de Stehfest.
- Se estiman los parámetros de las funciones de densidad de probabilidad que definen la variabilidad y su rango del tamaño de bloques, estos parámetros son el valor medio y la desviación estándar de funciones normales o de Gauss.
- Las curvas de  $t_D p'_{wD}$ , presentan los fondos de los valles en el periodo de transición a tiempos mayores, esto corresponde a que predominan los bloques grandes.
- Con cualquier tipo de distribución, los valores de  $t_D p'_{wD}$  tienden a 0.5 a medida que se alcanza el periodo de flujo tipo pseudoestacionario matriz-fracturas en un yacimiento infinito.

Las recomendaciones para investigación futura son:

- Obtener información complementaria del procedimiento para estimar la distribución y sus parámetros del tamaño múltiple de bloques de matriz con el fin de hacer una aplicación en un caso de campo.
- Desarrollar curvas tipo utilizando la función derivada u otras funciones de presión, para determinar el tipo de distribución del tamaño de bloques.

## NOMENCLATURA

$B$	= factor de volumen del aceite
$c$	= compresibilidad, [psi <sup>-1</sup> ]
$c_f$	= compresibilidad total de la fractura, [psi <sup>-1</sup> ]
$c_m$	= compresibilidad total de la matriz, [psi <sup>-1</sup> ]
$c_o$	= compresibilidad del líquido, [psi <sup>-1</sup> ]
$c_p$	= compresibilidad de la formación, [psi <sup>-1</sup> ]
$c_w$	= compresibilidad de agua connata, [psi <sup>-1</sup> ]
$C_D$	= factor de almacenamiento, adimensional
$f(h)$	= función de distribución del tamaño de bloque
$f(h_D)$	= función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria $h_D$ , adimensional
$g(s)$	= parámetro en el argumento de la función de Bessel. Ecs. 3.6 y 3.7.
$h$	= tamaño variable de bloque de matriz, [pies]
$h_D$	= tamaño de bloque de matriz, adimensional
$h_f$	= ancho de la fractura, [pies]
$h_{min}$	= espesor mínimo de los bloques, [pies]
$h_{max}$	= espesor máximo de los bloques, [pies]
$k_f$	= permeabilidad de la fractura, [md]
$k_m$	= permeabilidad de la matriz, [md]
$K$	= grado de anisotropía, adimensional
$K_0(x)$	= función de Bessel modificada, segundo tipo, cero orden
$K_1(x)$	= función de Bessel modificada, segundo tipo, primer orden
$N$	= número de términos de la expresión de Stehfest.

- $p_{Df}$  = presión de la fractura, adimensional. Ec. 3.a
- $p_{Dm}$  = presión de la matriz, adimensional. Ec. 3.b
- $p_i$  = presión inicial del yacimiento, [psi]
- $p_{wD}$  = presión en el pozo, adimensional. Ec. 3.4
- $\bar{p}_{wD}$  = transformada de Laplace de  $p_{wD}$
- $PSS$  = estado pseudoestacionario (pseudo-steady state)
- $q$  = gasto, [BCE/D]
- $Q(h)$  = contribución de flujo de un bloque de matriz de tamaño  $h$ , [horas<sup>-1</sup>]
- $Q_m$  = contribución de flujo de la matriz acumulativa, [horas<sup>-1</sup>]
- $r$  = coordenada radial, [pies]
- $r_D$  = coordenada radial, adimensional
- $r_w$  = radio del pozo, [pies]
- $R$  = radio de frontera, adimensional
- $s$  = parámetro de Laplace, adimensional
- $s_D$  = factor de daño, adimensional
- $s_{wc}$  = saturación de agua connata, adimensional
- $t$  = tiempo, [horas]
- $t_D$  = tiempo, [adimensional]
- $USS$  = estado transitorio (unsteady state)
- $V_i$  = función del algoritmo de Stehfest
- $x$  = argumento en la función de Bessel
- $x^*$  = variable aleatoria
- $\eta_{maD}$  = difusividad hidráulica de la matriz, adimensional
- $\lambda$  = coeficiente de flujo interporoso, adimensional
- $\lambda_{max}$  = coeficiente de flujo interporoso máximo, adimensional

$\lambda_{max}$	= coeficiente de flujo interporoso mínimo, adimensional
$\sigma$	= desviación estándar
$\sigma_f$	= factor de forma , [pies <sup>-1</sup> ]
$\mu$	= viscosidad del fluido, [cp]
$\mu^*$	= valor medio
$\xi$	= coordenadas normales a la interfase matriz-fractura, [pies]
$\xi_D$	= coordenadas normales a la interfase matriz-fractura, adimensionales
$\phi_f$	= porosidad de la fractura, adimensional
$\phi_m$	= porosidad de la matriz, adimensional
$\omega_f$	= coeficiente de almacenamiento de la fractura, adimensional
$\omega_m$	= coeficiente de almacenamiento de la matriz, adimensional

## BIBLIOGRAFÍA

1. Aguilera, R. 1980. *Naturally Fractured Reservoirs*. Tulsa: The Petroleum Publishing Company.
2. Belani, A.K. 1988. *Estimation of Matrix Block Size Distribution in Naturally Fractured Reservoirs*. Tesis de maestría, U. de Stanford, Stanford, California.
3. Belani, A.K., y Jalali, Y. 1988. Estimation of Matrix Block Size Distribution in Naturally Fractured Reservoirs. Artículo SPE 18171 presentado en la SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, TX, 2-5 Octubre. <http://dx.doi.org/10.2118/18171-MS>.
4. Bourdet, D. y Gringarten, A. 1980. Determination of Fissured Volume and Block Size in Naturally Fractured Reservoirs by Type – Curve Analysis. Artículo SPE 9293 presentado en la SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, 21-24 Septiembre. <http://dx.doi.org/10.2118/9293-MS>.
5. Braester, C. 1984. Influence of Block Size on the Transito Curve for a Drawdown Test in a Naturally Fractures Reservoir. *SPE J.* **24** (5): 498-504. SPE-10543-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/10543-PA>.
6. Cinco-Ley, H., Samaniego-V., F., y Kuchuk, F. 1985. The Pressure Transient Behavior for Naturally Fractured Reservoirs With Multiple Block Size. Artículo de SPE 14168 presentado en la Annual Technical Conference and Exhibition, Las Vegas, Nevada, 22-26 Septiembre. <http://dx.doi.org/11026-PA>.
7. de Swaan-O., A. 1976. Analytic Solutions for Determining Naturally Fractured Reservoir Properties by Well Testing. *SPE J.* **16** (3):117-122. SPE-5346-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/5346-PA>.
8. Jalali, Y., y Ershaghi, I. 1987. Pressure Transient Analysis of Heterogeneous Naturally Fractured Reservoirs. Artículo SPE 16341 presentado en el SPE California Regional Meeting, Ventura, California, 8-10 Abril. <http://dx.doi.org/10.2118/16341-MS>.
9. Jalali, Y., y Ershaghi, I. 1987. A Unified Type Curve Approach for Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs. Artículo SPE 16778

presentado en la Annual Technical Conference and Exhibition of the Society Petroleum Engineers, Dallas, TX, 27-30 Septiembre. <http://dx.doi.org/10.2118/16778-MS>.

10. Johns, R.T., y Jalali, Y. 1991. Comparison of Pressure-Transient Response in Intensely and Sparsely Fractured Reservoirs. *SPE J.* **6** (4): 513-518. SPE-18800-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/18800-PA>.
11. Kazemi, H. 1969. Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoir with Uniform Fracture Distribution. *SPE J.* **9** (4): 451-462. SPE-2156-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/2156-PA>.
12. Miller, M. A. 2006. *Naturally Fractured Reservoir Engineering*. Lucid Reservoir Technologies.
13. Montazer, G.H., Tahami, S.A., Moradi, B., y Safari, E. 2011. Effects of Different Block Size Distributions in Pressure Transient Response of Naturally Fractured Reservoirs. *Brazilian Journal of Petroleum and Gas* **5** (3): 139-147. ISSN 1982-0593. <http://dx.doi.org/10.5419/bjpg2011-0014>.
14. Morales-German, G., Rangel-German, E., Samaniego-Verduzco, F. y Cinco-Ley, H. 2010. Unsteady and Pseudo-steady State Characterization of Matrix and Fracture Systems for Multiple Size Blocks with the Use of Empirical Correlations. Artículo de SPE 139204 presentado en la SPE Latin American & Caribbean Petroleum Engineering Conference, Lima, Perú, 1-3 Diciembre. <http://dx.doi.org/10.2118/139204-MS>.
15. Nelson, R.A. 2001. *Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoirs*. Gulf Professional Publishing.
16. Rodríguez, N.R. 2000. *Caracterización de Yacimientos de Doble Porosidad con Tamaño Múltiple de Bloques de Matriz*. Tesis doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México.
17. Stehfest, H. 1970. Algorithm 368: Numerical Inversion of Laplace Transform. *Communications of the ACM* **13** (1): 47-49. <http://dx.doi.org/10.1145/361953.361969>.
18. Warren, J.E., y Root, P.J. 1963. Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. *SPE J.* **3** (3): 245-55. SPE-426-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/426-PA>.

# APÉNDICE A: DESARROLLO DE LA ECUACION DE DIFUSION PARA TRANSFERENCIA MATRIZ-FRACTURA PSEUDOESTACIONARIA Y TRANSITORIA

## Transferencia Matriz-Fractura Pseudoestacionaria

Considerando la dirección de flujo normal a la interfase matriz-fractura, la ecuación de difusión se expresa como sigue:

$$\partial^2 p_m = \frac{\phi_m c_m \mu}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t}. \quad \dots\dots\dots (A.1)$$

Para régimen de flujo pseudoestacionario, el gradiente de presión es una constante en el espacio; por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2} = \frac{\phi_m c_m \mu}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t} = C(t), \quad \dots\dots\dots (A.2)$$

donde  $\xi$  representa la coordenada normal a la interfase matriz-fractura. Integrando dos veces con respecto de  $\xi$ ,

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} = C(t)\xi + A, \quad \dots\dots\dots (A.3)$$

y,

$$p_m = C(t) \frac{\xi^2}{2} + A\xi + B, \quad \dots\dots\dots (A.4)$$

donde A y B son constantes de integración. Aplicando las condiciones de frontera en  $\xi$ ,

$$p_{Dm} = p_{Df} \text{ para } \xi_D = 0,$$

$$\frac{\partial p_{Dm}}{\partial \xi_D} = 0 \text{ para } \xi_D = 1.$$

Sustituyendo la primera condición de frontera en la ecuación A.4, se tiene:

$$p_m = C(t) \frac{(0)^2}{2} + A(0) + B,$$

$$p_f = B. \quad \dots\dots\dots (A. 5)$$

Sustituyendo la segunda condición de frontera en la ecuación A.3:

$$0 = C(t)h + A,$$

$$A = -hC(t). \quad \dots\dots\dots (A. 6)$$

De la ley de Darcy en la interfase matriz-fractura:

$$Q(h) = -\frac{k_m}{\mu h} \frac{\partial p_m}{\partial \xi} \Big|_{interfase}, \quad \dots\dots\dots (A. 7)$$

Combinando las Ecs. A.3 y A.6:

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} = C(t)\xi - hC(t) = C(t)(\xi - h), \quad \dots\dots\dots (A. 8)$$

En la interfase matriz-fractura  $\xi = 0$ ; entoces:

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} \Big|_{interfase} = -hC(t). \quad \dots\dots\dots (A. 9)$$

que, de acuerdo a la Ec. A.2 puede expresarse como:

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} \Big|_{interfase} = -\frac{\phi_m c_m \mu}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t}. \quad \dots\dots\dots (A. 10)$$

Sustituyendo la Ec. A.10 en la Ec. A.7

$$Q(h) = -\frac{k_m}{\mu h} \left( -\frac{\phi_m c_m \mu}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t} \right),$$

$$Q(h) = \phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t}. \quad \dots\dots\dots (A. 11)$$

Promediando la expresión para  $p_m$ , definido en la ecuación A.4, de 0 a  $h$ :

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{3k_m}{\phi_m c_m \mu h^2} (p_f - p_m). \quad \dots\dots\dots (A. 12)$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales que definieron anteriormente (Ec. 3.a a 3.e), la ecuación para flujo pseudoestacionario es:

$$\frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} + \omega_m \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} f(h) dh, \quad \dots\dots\dots (A. 13)$$



y en la matriz,

$$\frac{\partial p_{D_m}}{\partial t_D} = \frac{3\lambda}{\omega_m} (p_{D_f} - p_{D_m}). \quad \dots\dots\dots (A.14)$$

Para resolver las ecuaciones obtenidas en A.13 y A.14, se especifican las condiciones iniciales y de frontera:

$$p_{D_f} = p_{D_m} = 0, t_D = 0.$$

Condiciones de frontera en la dirección radial:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{D_f} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial p_{D_f}}{\partial r_D} \right|_{r_D=1} = 1,$$

Considerando el efecto de almacenamiento definidos en el pozo,  $C_D$ , y en el daño de la formación,  $S_D$ .

$$C_D \frac{\partial p_{D_m}}{\partial t_D} - \left( \frac{\partial p_{D_f}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1,$$

$$P_{D_w} = \left[ p_{D_f} - S_D \left( \frac{\partial p_{D_f}}{\partial r_D} \right) \right]_{r_D=1},$$

donde  $S_D = 1.151 \left[ \frac{p_i - p_{1hr}}{m} - \log \left( \frac{k_f}{(\phi_m C_m + \phi_f C_f) \mu r_w^2} \right) + 3.23 \right]$ .

Transformando estas ecuaciones al espacio de Laplace,

$$r_D^2 \frac{\partial^2 \bar{p}_{D_f}}{\partial r_D^2} + r_D \frac{\partial \bar{p}_{D_f}}{\partial r_D} - r_D^2 s g(s) \bar{p}_{D_f} = 0, \quad \dots\dots\dots (A.15)$$

donde,

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \left( \frac{3\lambda}{\omega_m s + 3\lambda} \right) f(h_D) dh_D, \quad \dots\dots\dots (A.16)$$

La solución de esta ecuación, expresada en variables adimensionales y en el espacio de Laplace, considerando daño de la formación y factor de almacenamiento, está dada por la ecuación A.17:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{K_0(x) + S_D x K_1(x)}{s[C_D s[K_0(x) + S_D x K_1(x)] + x K_1(x)]} \dots\dots\dots (A.17)$$

En un caso particular, si no se considera el almacenamiento en el pozo ni el daño a la formación ( $S_D = 0$  y  $C_D = 0$ ), la ecuación quedaría como sigue:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{K_0(x)}{s x K_1(x)} \dots\dots\dots (A.18)$$

Transferencia transitoria

Puede seguirse un procedimiento similar al que se realizó para el régimen de flujo pseudoestacionario, usando la ecuación de flujo para la matriz, Ec. A.7. y la ecuación de balance de materia:

$$\frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi^2} = \frac{\phi_m C_m \mu}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t} \dots\dots\dots (A.19)$$

Las condiciones iniciales y de frontera son exactamente las mismas que para el caso pseudoestacionario. Sustituyendo los parámetros adimensionales y transformando al dominio de Laplace,

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{p}_{Df}}{\partial r_D} = \omega_f s \bar{p}_{Df} - \int_{h_{min}}^1 \lambda \frac{\partial \bar{p}_{Dm}}{\partial \xi_D} \Big|_{\xi_D=0} f(h_D) dh_D, \dots\dots\dots (A.20)$$

y,

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_{Dm}}{\partial \xi_D^2} = \frac{\omega_m s}{\lambda} \bar{p}_{Dm} \dots\dots\dots (A.21)$$

Resolviendo la ecuación A.21 utilizando las condiciones de frontera para  $\xi_D$  y sustituyendo en la ecuación A.20, se obtiene una expresión similar a la del caso anterior para transferencia matriz-fractura pseudoestacionaria.

$$r_D^2 \frac{\partial^2 \bar{p}_{Df}}{\partial r_D^2} + r_D \frac{\partial \bar{p}_{Df}}{\partial r_D} - r_D^2 s g(s) \bar{p}_{Df} = 0, \dots\dots\dots (A.22)$$

donde,

$$g(s) = \omega_f + \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \sqrt{\frac{\omega_m \lambda}{s}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega_m s}{\lambda}}\right) f(h_D) dh_D. \dots\dots\dots (A.23)$$

La solución es la misma que la que se tiene en la ecuación A.17 pero con la función  $g(s)$ , dada por la función A.23.

## APÉNDICE B: ALGORITMO DE STEHFEST

El algoritmo de Stehfest (1970) proporciona una aproximación de la transformada inversa de Laplace para una transformada dada; en otras palabras, dada la transformada de Laplace  $\overline{P_{D_w}}(s)$ , este algoritmo proporciona un valor aproximado  $P_{D_w}(a)$  de la inversa  $P_{D_w}(t_D)$  para un tiempo  $t_D$  determinado.

La evaluación se realiza de la manera siguiente:

$$P_{D_w}(a) = \frac{\ln 2}{t_D} \sum_{i=1}^N V_i p\left(\frac{\ln 2}{t_D} i\right), \quad \dots\dots\dots (C.1)$$

donde:

$\frac{\ln 2}{t_D} i$  en  $p\left(\frac{\ln 2}{t_D} i\right)$  hará las veces de  $s$ , el parámetro de la transformada de Laplace,  $N$  es un parámetro de convergencia del algoritmo, que como puede observarse es el límite superior de la suma y su valor debe corresponder a un número par que dependerá de la precisión que se utilice en el cálculo numérico;

$V_i$  se define de la manera siguiente:

$$V_i = (-1)^{N/2+1} \sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\min(i, N/2)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{(N/2 - k)! k! (k - 1)! (i - k)! (2k - i)!}, \quad \dots\dots\dots (C.2)$$

donde:

$\min(i, N/2)$  es el límite superior de la suma, e implica que para cada caso debe seleccionarse el número menor entre  $i$  y  $N/2$ ;  $k$  representa el límite inferior de la suma y es determinado usando enteros aritméticos.

Para utilizar el algoritmo de Stehfest es necesario seleccionar una  $N$ . Como las  $V_i$  dependen solamente de  $N$ , necesitan calcularse solo una vez para cada valor de  $N$  que se escogió. En principio, entre más grande sea el valor de  $N$ , más exacta será la solución numérica invertida. Sin embargo, en la práctica,  $N$  se limita por errores de truncamiento. Una característica de las  $V_i$  es que sus valores absolutos tienden a aumentar conforme a  $N$  incrementa. Es recomendable probar varios valores de  $N$  para revisar si se obtiene el mismo resultado; en estos casos es necesaria gran precisión aritmética.

De acuerdo con lo que se describió anteriormente, con el fin de encontrar la mejor aproximación se calcularon los valores de  $V_i$  para  $N = 8$ ,  $N = 10$  y  $N = 12$ ; estos valores se presentan a continuación:

$V_i$	$N = 8$	$N = 10$	$N = 12$
$V_1$	-0.33333333	0.08333333	-0.01666667
$V_2$	48.33333333	-32.08333333	16.01666667
$V_3$	-906	1279	-1247
$V_4$	5464.66667	-15623.6667	27554.3333
$V_5$	-14376.6667	84244.1667	-263280.833
$V_6$	18730	-236957.5	1324138.7
$V_7$	-11946.6667	375911.667	-3891705.53
$V_8$	2986.66667	-340071.667	7053286.33
$V_9$		164062.5	-8005336.5
$V_{10}$		-32812.5	5552830.5
$V_{11}$			-2155507.2
$V_{12}$			359251.2

## APÉNDICE C: DESARROLLO DE $g(s)$ PARA UNA DISTRIBUCIÓN UNIFORME

Después de aplicar la transformada de Laplace y realizar las simplificaciones correspondientes se obtiene la función  $g(s)$ , tal como se desarrolló en la Ec. A.13:

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \left( \frac{3\lambda}{\omega_m s + 3\lambda} \right) f(h_D) dh_D. \dots\dots\dots (B.1)$$

La Ec. B.1 la describió Belani (1988) para flujo pseudoestacionario. Para resolver este problema, se sustituye la función  $h_D$  correspondiente a la distribución uniforme.

$$h_D = \frac{1}{1 - \frac{h_{min}}{h_{max}}},$$

obteniéndose

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \left( \frac{3\lambda}{\omega_m s + 3\lambda} \right) \left( \frac{1}{1 - \frac{h_{min}}{h_{max}}} \right) dh_D. \dots\dots\dots (B.2)$$

Acomodando términos y sustituyendo  $\lambda = \lambda_{min}/h_D^2$ :

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \left( \frac{1}{1 - \frac{h_{min}}{h_{max}}} \right) \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \left( \frac{3\lambda}{\omega_m s + 3\lambda} \right) dh_D,$$

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \left( \frac{1}{1 - \frac{h_{min}}{h_{max}}} \right) \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \left( \frac{3 \left( \frac{\lambda_{min}}{h_D^2} \right)}{\omega_m s + 3 \left( \frac{\lambda_{min}}{h_D^2} \right)} \right) dh_D,$$

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \left( \frac{1}{1 - \frac{h_{min}}{h_{max}}} \right) \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \left( \frac{\frac{3\lambda_{min}}{h_D^2}}{\omega_m s h_D^2 + 3\lambda_{min}} \right) dh_D,$$

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \left( \frac{1}{1 - \frac{h_{min}}{h_{max}}} \right) \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \left( \frac{3\lambda_{min}}{\omega_m s h_D^2 + 3\lambda_{min}} \right) dh_D,$$

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \left( \frac{1}{1 - \frac{h_{min}}{h_{max}}} \right) \int_{\frac{h_{min}}{h_{max}}}^1 \left( \frac{1}{\frac{\omega_m s h_D^2}{3\lambda_{min}} + 1} \right) dh_D.$$

La integral en la expresión anterior para  $g(s)$  tiene la forma:  $\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x$ ,

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \left( \frac{1}{1 - \frac{h_{min}}{h_{max}}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_m s}{3\lambda_{min}}}} \right) \tan^{-1} \sqrt{\frac{\omega_m s}{3\lambda_{min}}} \Bigg|_{\frac{h_{min}}{h_{max}} = \sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}}}^1,$$

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \left( \frac{\sqrt{\frac{3\lambda_{min}}{\omega_m s}}}{1 - \frac{h_{min}}{h_{max}}} \right) \left( \tan^{-1} \sqrt{\frac{\omega_m s}{3\lambda_{min}}} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{\omega_m s}{3\lambda_{max}}} \right).$$

Es necesario invertir las fracciones, con la finalidad de invertir los ejes de la función identidad y distribución y sí evitar una indeterminación. Por identidades trigonométricas, la expresión anterior es equivalente a:

$$g(s) = \omega_f + \omega_m \left( \frac{\sqrt{\frac{3\lambda_{min}}{\omega_m s}}}{1 - \frac{h_{min}}{h_{max}}} \right) \left( \tan^{-1} \sqrt{\frac{3\lambda_{max}}{\omega_m s}} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{3\lambda_{min}}{\omega_m s}} \right). \dots\dots\dots (B.3)$$

La cual es la  $g(s)$  que incluye Belani en su trabajo, correspondiente a una distribución uniforme y régimen pseudoestacionario.