



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

“MODELO DE DISOLUCIÓN DE CARBONATOS EN UNA ESTIMULACIÓN
ÁCIDA”.

TESIS

QUE PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN INGENIERÍA DE
EXPLORACIÓN Y EXPLOTACIÓN DE RECURSOS NATURALES

PRESENTA:

MANUEL ANTONIO ÓLAN ZÁRATE

TUTOR:

DR. ERICK EMANUEL LUNA ROJERO

INSTITUTO MEXICANO DEL PETRÓLEO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Agosto 2016

JURADO ASIGNADO:

Presidente: (Dr. Berumen Campos Sergio)

Secretario: (M. C. Escobedo Zenil David)

Vocal: (Dr. Luna Rojero Erick Emanuel)

1^{er.} Suplente: (M. en C. Santillan Piña Noé)

2^{do.} Suplente: (M. en I. Sánchez Vela José Juventino)

Ciudad Universitaria, México D.F.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Luna Rojero Erick Emanuel

Erick E. Luna E.

Contenido

Introducción	
Capítulo I. Antecedentes	1
Capítulo II. Daño a la formación	3
2.1 Ley de Darcy y ecuación de continuidad	3
2.1.1 Ley de Darcy	3
2.1.2 Ecuación de continuidad	5
2.1.3 Ecuación de flujo en un medio poroso	6
2.2 Daño a la formación para un modelo radial	6
2.2.1 Causas de daño	7
2.2.2 Daño a la formación como un fenómeno de flujo en dos zonas de permeabilidad distinta (modelo radial)	8
2.2.3 Forma adimensional del modelo de flujo en dos zonas de permeabilidad distinta y su solución	9
2.2.4 Calculo del daño efectivo $se(r)$	11
2.2.5 Gráficos de la distribución de presiones en dos zonas de permeabilidad distinta.	11
2.2.6 Gráficos del daño efectivo.	14
2.3 Daño a la formación para un cartesiano 1D	15
Capítulo III. Interacción entre el ácido y la roca en una estimulación ácida	18
3.1 Historia de la estimulación ácida	18
3.2 Estimulación ácida y agujeros de gusano	19
3.3 Estequiometría de la reacción entre el ácido y la roca	20
3.4 Equilibrio termodinámico y velocidad de la reacción	25
3.5 Sistemas usados para la acidificación	28

3.5.1 Ácidos inorgánicos.....	29
3.5.2 Ácidos orgánicos.....	31
3.5.3 Ácidos especiales.....	33
3.6 Aditivos utilizados en los sistemas ácidos.....	34
3.6.1 Inhibidores de corrosión inorgánicos.....	35
3.6.2 Inhibidores de corrosión orgánicos.....	36
Capítulo IV. Modelo físico para la disolución de carbonatos.....	37
4.1 Modelo de disolución de carbonatos.....	37
4.2 Modelos para el cambio de la permeabilidad en términos de la porosidad.....	38
4.3 Evolución del daño en el modelo de Hawkins.....	43
4.3.1 Evaluación numérica del valor esperado de la porosidad en la zona dañada.....	46
4.4 Evolución del daño en el modelo 2D cartesiano.....	48
4.5 Modelo radial para la disolución de carbonatos (concentración y porosidad acoplada) ..	50
4.6 Modelo 2D cartesiano para la disolución de carbonatos (concentración, porosidad acoplada y flujo en el medio poroso).....	51
Capítulo V. Método numérico para la solución del modelo de disolución de carbonatos.....	55
5.1 Diferencias finitas en ecuaciones diferenciales parciales.....	55
5.1.1 Serie de Taylor (Diferencias progresivas, regresivas y centrales).....	55
5.2 Discretización de modelo radial para un proceso de disolución (concentración y porosidad acoplada).....	57
5.2.1 Solución por el método de Newton Raphson.....	60
5.2.2 Resultados de simulación de porosidad y concentración.....	63
5.3 Discretización en diferencias finitas del modelo de disolución de carbonatos en 2D (modelo acoplado de concentración, porosidad y flujo en el medio poroso.).....	70
5.3.1 Discretización de la ecuación de la presión.....	70
5.3.2 Discretización de la ecuación de concentración y porosidad.....	71

5.3.3 Método de Newton Raphson y algoritmo de solución del sistema acoplado.	71
5.3.4 Resultados de simulación.....	73
6. Conclusiones.....	77
Bibliografía.....	78

Introducción

La inyección de ácido en yacimientos carbonatados (Economides, 1989) es comúnmente utilizada en la industria del petróleo para mejorar la productividad de los pozos. Esta técnica permite remover y/o traspasar el daño a la formación mejorando la producción de aceite y gas mediante el incremento de la conductividad del yacimiento hacia el pozo. El proceso de la estimulación ácida en yacimientos carbonatados, tiene como finalidad, disolver el carbonato y crear una red de canales conductivos llamados agujeros de gusano, que permiten mejorar la comunicación del yacimiento hacia el pozo o viceversa, incrementando la producción de aceite y gas.

Por la baja permeabilidad de algunos yacimientos naturalmente fracturados en la vecindad del pozo, se requiere una mejor comprensión de la disolución de carbonatos en una estimulación ácida.

La idea principal de esta tesis es determinar mediante una simulación numérica de un modelo determinista, la distribución de porosidades en la disolución de carbonatos en una estimulación ácida, así como la remoción del daño después de esta, entre otros se realizó lo siguiente:

- ✓ Se determinó la distribución de concentración de ácido en el fenómeno de disolución de carbonatos.
- ✓ Se determinó la distribución de porosidades en un modelo radial y 2D del fenómeno de disolución de carbonatos.
- ✓ Mediante modelos de permeabilidad en función de la porosidad, se determinó la evolución en el tiempo del promedio de permeabilidad en la zona dañada como consecuencia de un proceso de disolución de carbonatos.
- ✓ Mediante modelos de permeabilidad en función de la porosidad, se determinó la remoción del daño en un modelo radial y 2D en el tiempo.

Capítulo I. Antecedentes

La utilización de ácidos para mejorar el desempeño de los pozos, eliminando el daño, fue una práctica común durante mucho tiempo; podría decirse, desde que existe la industria petrolera. En el año de 1985, Ohio Oil Company utilizó ácido clorhídrico HCl para tratar los pozos perforados en una formación de caliza. La producción de estos pozos se incrementó sustancialmente; pero, desafortunadamente, también lo hizo la corrosión de la tubería de revestimiento. Como resultado, los tratamientos de acidificación para estimular la producción desaparecieron aproximadamente durante 30 años.

La acidificación de los yacimientos de calizas resurgió en el año de 1931, con el descubrimiento de que el arsénico inhibía la acción corrosiva del HCl en los tubulares del pozo. Pero los tratamientos ácidos para las areniscas requerían un enfoque diferente. El HCl no reacciona fácilmente con los minerales que reducen la permeabilidad de la arenisca pero el ácido fluorhídrico HF sí lo hace. Los primeros intentos de utilización de HF en areniscas fallaron debido al taponamiento producido por las reacciones secundarias.

La acidificación de pozos, conocida más comúnmente como acidificación de la matriz, es uno de los dos métodos de intervención utilizados para restituir el flujo en una formación con petróleo o gas. La otra ruta, los tratamientos de fracturamiento hidráulico o ácido, crea fracturas para permitir que las acumulaciones relativamente alejadas de petróleo y gas fluyan hacia el interior del pozo. El proceso de acidificación opera sobre la formación, cerca del pozo, para remover el daño o disolverlo. La elección de un tratamiento de fracturamiento o acidificación para estimular la producción depende de múltiples factores, entre los que se encuentra la geología de la formación, la historia de producción y los objetivos de las operaciones de intervención.

Las técnicas de intervención de pozos, tales como la acidificación de la matriz, desempeñan un rol importante para los operadores que necesitan producir todo lo posible de sus campos petroleros. Una necesidad importante es la extensión de los tratamientos de acidificación a los ambientes de alta temperatura. El empleo de ácidos minerales convencionales, tales como el HCl y el HF, a temperaturas más elevadas, superiores a 93°C [200°F], conduce a velocidades de reacción que son demasiado rápidas. Estas velocidades rápidas hacen que el ácido se consuma demasiado temprano, reduciendo su efectividad, por lo que pueden causar otros problemas.

Por otro lado, conforme las regulaciones se vuelven más estrictas, existe dentro de la industria una mayor necesidad de contar con fluidos que planteen menos riesgos de seguridad y medio ambiente. Los ácidos minerales convencionales, tales como el HCl y el HF, son difíciles de manipular en forma segura, resultan corrosivos para tubos y componentes de la terminación (o aparejos) del pozo, los costos de los inhibidores suben rápidamente debido a las altas concentraciones requeridas.

Esta tesis trata sobre un modelo determinista para la disolución de carbonatos en una estimulación ácida y como esta remueve el daño a la formación en la vecindad cercana al pozo.

Capítulo II. Daño a la formación

2.1 Ley de Darcy y ecuación de continuidad

2.1.1 Ley de Darcy

En la segunda mitad del siglo XIX, un ingeniero francés, Henry Darcy, desarrolló el primer estudio sistemático del movimiento del agua a través de un medio poroso. En este estudio se analizó el movimiento de agua a través de lechos de arena usados para la filtración de agua para la bebida. Darcy encontró que la tasa o velocidad a la cual el agua fluye a través del medio poroso es directamente proporcional a la diferencia de altura entre los dos extremos del lecho filtrante, e inversamente proporcional a la longitud del lecho. La siguiente figura muestra una tubería horizontal llena con arena, en la cual se aplica agua mediante presión a través del extremo 1, la cual fluye y se descarga a través del extremo 2. La presión observada en cada extremo de la tubería (o en alguna posición intermedia) puede ser medida mediante un tubo vertical de pequeño diámetro (piezómetro). Darcy encontró experimentalmente que el gasto Q es directamente proporcional a la diferencia en la altura del agua entre los piezómetros 1 y 2 e inversamente proporcional a la longitud de la tubería L .

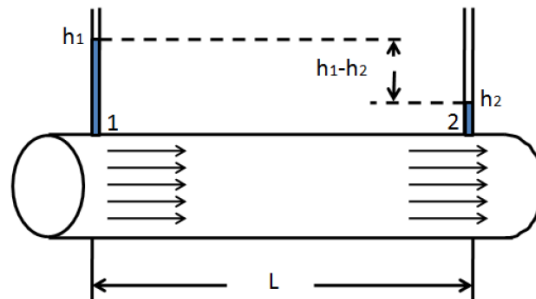


Figura 2.1. Diagrama del experimento de Henry Darcy

El gasto es también proporcional al área A , perpendicular al flujo, por lo cual al combinar todos estos elementos podemos escribir:

$$Q = KA \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (2.1)$$

Donde K es la constante de proporcionalidad y se denomina conductividad hidráulica. Esta expresión se conoce como la Ley de Darcy y puede ser escrita en términos generales como:

$$Q = -KA \frac{dh}{dl} \quad (2.2)$$

El término dh/dl es conocido como el gradiente hidráulico y representa la razón de cambio de la cota piezométrica con respecto a la longitud. El signo negativo de la ec. 2.2 indica que el flujo es en la dirección de la cota piezométrica decreciente.

Las unidades de la Ley de Darcy son

Q Gasto o caudal (L^3/T)

$\frac{dh}{dl}$ Gradiente hidráulico adimensional

K Conductividad hidráulica (L/T)

A Área de flujo (L^2)

Si utilizamos otra arena (más gruesa o más fina, o mezcla de gruesa y fina, etc.) y manipulando de nuevo con todas las variables, se vuelve a cumplir la ley anterior, pero la constante de proporcionalidad K es distinta. Darcy concluyó por lo tanto, que esa constante era propia y característica de cada arena. Actualmente la Ley de Darcy se expresa como:

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{K}(\nabla p - \rho \mathbf{g}) \quad (2.3)$$

donde

\mathbf{g} Vector aceleración de la gravedad

\mathbf{K} Tensor de permeabilidad

p es la presión del fluido

μ Viscosidad del fluido

ρ Densidad del fluido

$\mathbf{u} = \phi \mathbf{v}$ Vector velocidad de Darcy

\mathbf{v} Vector velocidad del fluido

ϕ Porosidad del medio

2.1.2 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad es importante para el área de la física ya que es una expresión matemática para la conservación de la masa en cierto volumen que se considera contiene todas las propiedades físicas de interés en el sistema a estudiar. Este principio de conservación se enuncia de la siguiente manera.

Masa que entra- Masa que sale=Masa acumulada

Vamos a considerar primeramente el teorema de transporte de Reynolds con lo cual deduciremos la ecuación de continuidad o conservación de la masa. El teorema de Reynolds relaciona la razón de cambio en el tiempo de una propiedad extensiva (son aquellas que sí dependen de la cantidad de sustancia o del tamaño de un cuerpo) con la generación y el flujo de la propiedad intensiva.

El teorema de Reynolds se expresa como

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{v}) \right] dV \quad (2.4)$$

En el caso que nos interesa la propiedad física es la masa $\alpha = \phi \rho$. De esta manera el teorema de Reynolds queda

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \phi \rho dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \rho \mathbf{v}) \right] dV \quad (2.5)$$

Al haber conservación de la masa $\int_{V(t)} \left[\frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$, por lo tanto para que esta integral sea cero, pedimos que el integrando sea cero

$$\frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.6)$$

La ecuación 2.6 se llama ecuación de continuidad y es una consecuencia de la conservación de la masa en un sistema físico.

2.1.3 Ecuación de flujo en un medio poroso

La ecuación de flujo en medio poroso se obtiene combinando una ecuación de movimiento y la ecuación de continuidad.

Sustituyendo la Ley de Darcy en la ecuación de continuidad se tiene:

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\rho \frac{1}{\mu} \mathbf{K}(\nabla p - \rho \mathbf{g}) \right) = 0 \quad (2.7)$$

Si el medio es homogéneo e isótropo el tensor de permeabilidad toma un solo valor de la permeabilidad por lo que la ec. 2.7 se convierte en:

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\rho \frac{1}{\mu} k(\nabla p - \rho \mathbf{g}) \right) = 0 \quad (2.8)$$

Despreciando los efectos de gravedad, gradientes de presión pequeños, porosidad y densidad como funciones de la presión la ecuación 2.8 finalmente queda como:

$$\nabla^2 p = \frac{\phi\mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.9)$$

Esta ecuación modela la distribución de presiones en un medio poroso y es una ecuación de tipo difusión, similar a la ecuación que modela la distribución de temperatura y la concentración de una sustancia en un medio.

2.2 Daño a la formación para un modelo radial

En las operaciones de terminación y perforación de pozos es posible que entre a la formación filtrados de lodo, mezclas de cemento o partículas de arcilla que reducen la permeabilidad alrededor del pozo. A esta reducción de la permeabilidad alrededor del pozo que reduce la producción del mismo se le denomina daño (skin) del pozo y a la región alterada de la formación se le conoce como zona de daño. Esta zona de daño puede darse desde unas pocas pulgadas hasta varios pies desde el pozo.

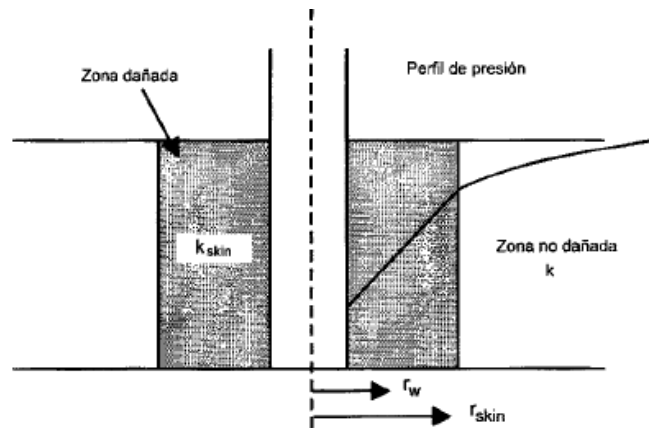


Figura 2.2. Esquema de perfil de presión en dos zonas de permeabilidad distinta (Magdalena Paris de Ferrer 2010), la primer zona tiene una permeabilidad menor que la segunda zona. Se puede notar el quiebre en la curva de la presión como consecuencia del cambio de permeabilidad.

Se denota el daño con la letra S y se considera que el pozo está dañado cuando $S > 0$ y que el pozo se encuentra estimulado cuando $S < 0$. Cuando el yacimiento tiene la misma permeabilidad, el pozo percibe un daño igual a cero y se considera que el pozo no está dañado ni estimulado.

2.2.1 Causas de daño

Perforación: Es el principal motivo de daño y tiene que ver con la infiltración del lodo de perforación en la formación. Para minimizarlo es conveniente atravesar las formaciones productoras en el menor tiempo posible, para evitar el prolongado contacto del lodo con la formación.

Cementación: El cemento no debe infiltrarse en la formación.

Pseudoskins y producción: Las condiciones dadas por el caudal y el ángulo de inclinación pueden inducir a caídas de presión adicionales o Pseudoskins. Si se pone el pozo a producir a elevado caudal, puede originarse flujo turbulento en la formación y generarse una disminución del flujo. La inevitable variación del diámetro del pozo durante la perforación, puede modificar progresivamente el flujo de laminar a turbulento y crear un pseudoskin que se suma al daño real de la formación. Si se perfora a altas velocidades de penetración puede causar que la presión en

las inmediaciones del pozo caiga por debajo del punto de burbuja de los hidrocarburos, y puede así crearse un pseudoskin positivo como consecuencia del bloqueo producido por el gas, de la misma manera, si se produce gas condensado por debajo del punto de rocío, resultan líquidos emergiendo alrededor de las inmediaciones del pozo y alterando el flujo.

Otros Pseudodaños: Colapso del tubing, colapso de perforaciones, pobre aislamiento entre zonas productoras como resultado de una pobre cementación, la invasión de petróleo en una capa de gas reduce sustancialmente la permeabilidad del gas, la mezcla de dos hidrocarburos distintos puede producir la precipitación de asfaltenos, resinas y parafinas.

2.2.2 Daño a la formación como un fenómeno de flujo en dos zonas de permeabilidad distinta (modelo radial).

El objetivo de este apartado es determinar mediante un modelo analítico una expresión para el daño producido como consecuencia del flujo de fluidos en medios con distinta permeabilidad. Se resuelve la ecuación de difusión para el caso estacionario de flujo radial para dos regiones de permeabilidad distinta, el modelo supone condiciones de frontera de gasto constante en radio del pozo (r_w) y yacimiento de extensión finita con presión y flujo continuos en la interfase que divide ambas regiones, (modelo compuesto). Se encuentra una expresión para un daño efectivo que concuerda con el daño de Hawkins para $r = r_w$.

La ecuación de difusión para flujo radial con permeabilidad dependiente del radio es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk(r) \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \phi \mu C_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.10)$$

Para el caso de un fluido incompresible se llega a la ecuación de difusión radial

$$\frac{d}{dr} \left(rk(r) \frac{dp}{dr} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Si dividimos el yacimiento en dos zonas de estudio con permeabilidades distintas y separadas por una interfase ubicada en $r = r_s$ tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para las zonas 1 y 2, figura 2.3.

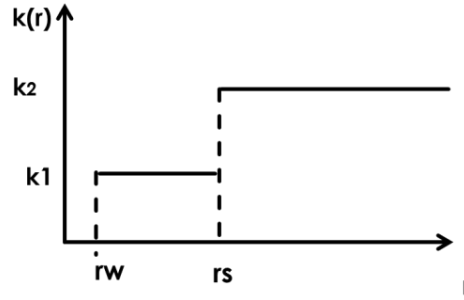


Figura 2.3. Esquema sobre un medio con dos zonas de permeabilidad distinta.

$$\frac{d}{dr} \left(r k_1 \frac{dp_1}{dr} \right) = 0, \text{ donde } r_w \leq r \leq r_s \quad (2.12)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r k_2 \frac{dp_2}{dr} \right) = 0, \text{ donde } r_s \leq r \leq r_e \quad (2.13)$$

con condiciones de frontera de gasto constante en r_w , en la región 1 y presión de yacimiento conocida en la región 2 en $r = r_e$.

$$r \frac{dp_1}{dr} \Big|_{r=r_w} = \frac{q\mu}{2\pi h k_1} \quad (2.14)$$

$$p_2(r_e) = p_i \quad (2.15)$$

también imponemos dos condiciones en la interfase que separa ambas regiones,

$$p_1(r_s) = p_2(r_s) \quad (2.16)$$

$$r k_1 \frac{dp_1}{dr} \Big|_{r=r_s} = r k_2 \frac{dp_2}{dr} \Big|_{r=r_s} \quad (2.17)$$

por lo tanto la presión y su derivada deben de ser continuas en $r = r_s$. Estas condiciones garantizan la existencia de la presión y el flujo en la discontinuidad de la permeabilidad.

2.2.3 Forma adimensional del modelo de flujo en dos zonas de permeabilidad distinta y su solución.

La forma adimensional de ec. 2.12 y ec. 2.13 junto con sus condiciones de frontera en los extremos y en la interfase son:

$$\frac{d}{dr_D} \left(r_D \frac{dp_{D1}}{dr_D} \right) = 0, \text{ donde } 1 \leq r_D \leq r_{Ds} \quad (2.18)$$

$$\frac{d}{dr_D} \left(r_D \frac{dp_{D2}}{dr_D} \right) = 0, \text{ donde } r_{sD} \leq r_D \leq r_{eD} \quad (2.19)$$

Condiciones en la frontera

$$r_D \frac{dp_{D1}}{dr_D} \Big|_{r_D=1} = -1 \quad (2.20)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow r_{De}} p_{D2}(r_D) = 0 \quad (2.21)$$

Condiciones en la interfase

$$p_{D1}(r_{Ds}) = p_{D2}(r_{Ds}) \quad (2.22)$$

$$\frac{dp_{D1}}{dr_D} \Big|_{r_D=r_{Ds}} = \alpha \frac{dp_{D2}}{dr_D} \Big|_{r_D=r_{Ds}} \quad (2.23)$$

donde las variables adimensionales son

$$r_D = r/r_w \quad (2.24)$$

$$r_{Ds} = r_s/r_w \quad (2.25)$$

$$r_{De} = r_e/r_w \quad (2.26)$$

$$\alpha = k_2/k_1 \quad (2.27)$$

$$p_{D1} = \frac{2\pi h k_1}{q\mu} (p_i - p_1) \quad (2.28)$$

$$p_{D2} = \frac{2\pi h k_1}{q\mu} (p_i - p_2) \quad (2.29)$$

Entonces resolviendo 2.18 y 2.19 con las condiciones de frontera y condiciones en la interfase se obtienen las siguientes soluciones.

$$p_{D1} = \log \left(\frac{r_{Ds}}{r_D} \right) + \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{r_{De}}{r_{Ds}} \right), \text{ donde } 1 \leq r_D \leq r_{Ds} \quad (2.30)$$

$$p_{D2} = \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{r_{De}}{r_D} \right), \text{ donde } 1 \leq r_D \leq r_{Ds}, \text{ donde } r_{sD} \leq r_D \leq r_{eD} \quad (2.31)$$

2.2.4 Cálculo del daño efectivo $s_e(r)$.

Expresando las soluciones 2.30 y 2.31 en variable reales se tiene

$$p_1(r) = p_i - \frac{q\mu}{2\pi hk_2} \log\left(\frac{r_e}{r_s}\right) - \frac{q\mu}{2\pi hk_1} \log\left(\frac{r_s}{r}\right), \text{ donde } r_w \leq r < r_s \quad (2.32)$$

$$p_2(r) = p_i - \frac{q\mu}{2\pi hk_2} \log\left(\frac{r_e}{r}\right), \text{ donde } r_s \leq r \leq r_e \quad (2.33)$$

Supongamos que la expresión 2.31 puede escribirse como

$$p_1(r) = p_i - \frac{q\mu}{2\pi hk_2} \left[\log\left(\frac{r_e}{r}\right) + s_e(r) \right] \quad (2.34)$$

La ecuación 2.34 tiene la forma de la solución clásica con daño s . Igualando 2.32 con 2.34 y despejando el daño efectivo encontramos que este es:

$$s_e(r) = (\alpha - 1) \log\left(\frac{r_s}{r}\right) \quad (2.35)$$

Nótese que el daño efectivo es igual al calculado por Hawkins cuando $r = r_w$

$$s = (\alpha - 1) \log\left(\frac{r_s}{r_w}\right) \quad (2.36)$$

Por otro lado el daño promedio desde el pozo hasta la zona dañada es

$$\langle s \rangle = \frac{1}{\pi h (r_s^2 - r_w^2)} \int_{r_w}^{r_s} \int_0^{2\pi} \int_0^h (\alpha - 1) \log\left(\frac{r_s}{r}\right) r dr d\theta dz \quad (2.37)$$

$$\langle s \rangle = \frac{2(\alpha - 1)}{r_s^2 - r_w^2} \left[\frac{1}{4} (r_s^2 - r_w^2) - \frac{r_w^2}{2} \log\left(\frac{r_s}{r_w}\right) \right] \quad (2.38)$$

2.2.5 Gráficos de la distribución de presiones en dos zonas de permeabilidad distinta.

En las figuras 2.4, 2.5, 2.6 se muestra el comportamiento de la presión en las zonas 1 y 2 obteniéndose los siguientes resultados.

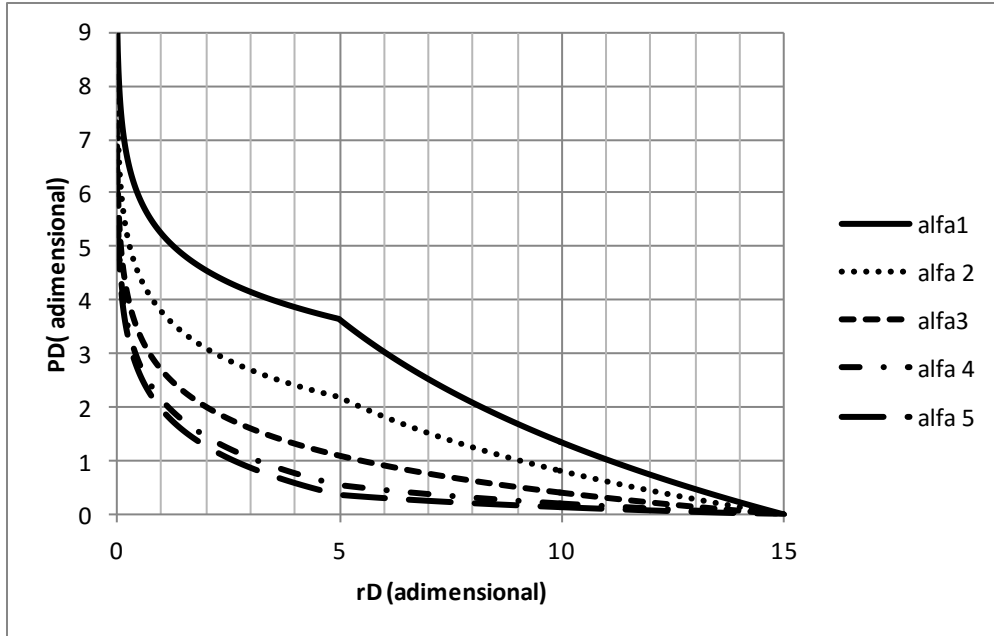


Figura 2.4. Se muestra el comportamiento de la solución de la presión adimensional en función del radio adimensional en escala real para valores de $\alpha = 0.3, 0.5, 1, 2, 3$. En este gráfico se puede notar el cambio en la presión debido al cambio en la permeabilidad de las zonas 1 y 2.

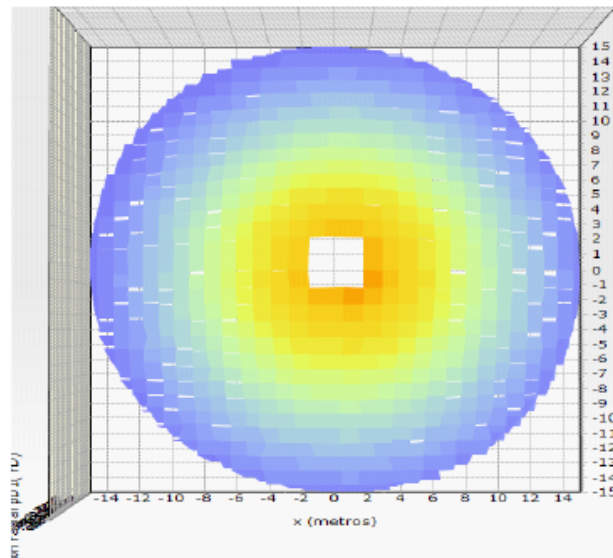


Figura 2.5 Vista de planta del modelo radial estacionario compuesto con parámetros $\alpha = 0.3$, $r_{Ds} = 5$ y $r_{De} = 15$.

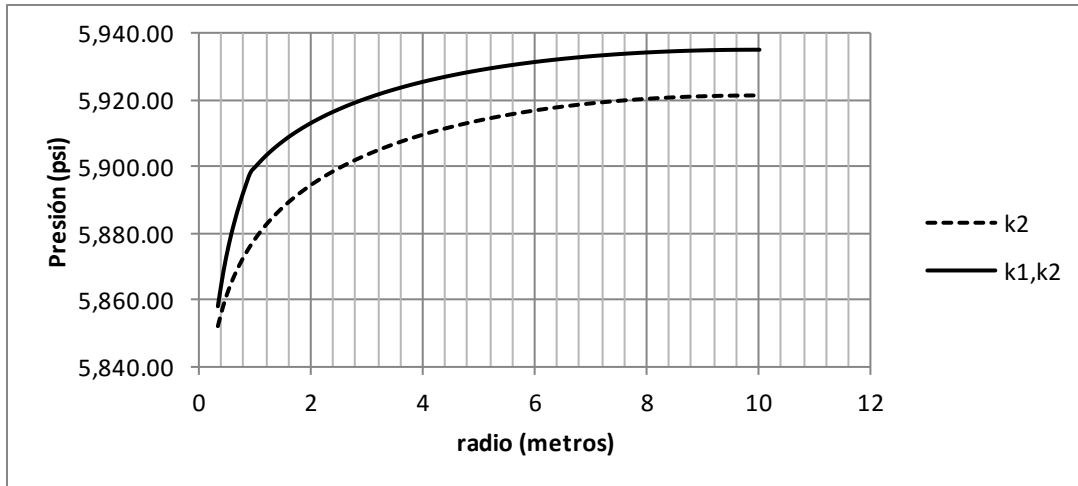


Figura 2.6. Simulación numérica del comportamiento de la presión para un yacimiento con una sola permeabilidad k_2 (línea punteada) y con dos permeabilidades k_1, k_2 (línea continua). Se puede notar el quiebre en la línea continua en la presión debido al cambio de permeabilidad.

Se muestra también el comportamiento de la presión de fondo y estática para este modelo compuesto en las figuras 2.7 y 2.8.

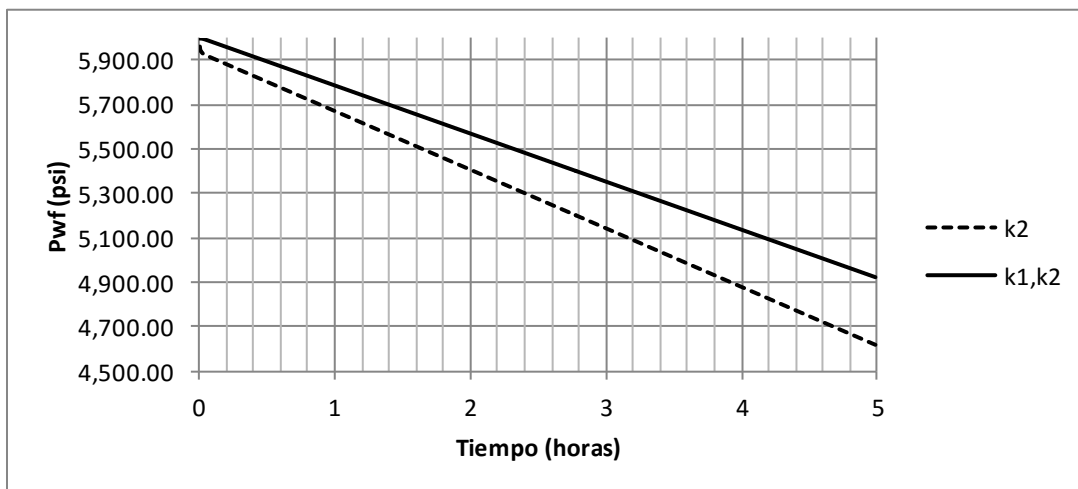


Figura 2.7. Simulación numérica del comportamiento de la presión de fondo en tiempo para un yacimiento con una sola permeabilidad k_2 (línea punteada) y con dos permeabilidades k_1, k_2 (línea continua). La presión de fondo del pozo no dañado tiene un coeficiente de difusión más grande, por lo que se comunica mejor en el medio poroso y su presión cae con mayor rapidez en comparación con un pozo dañado.

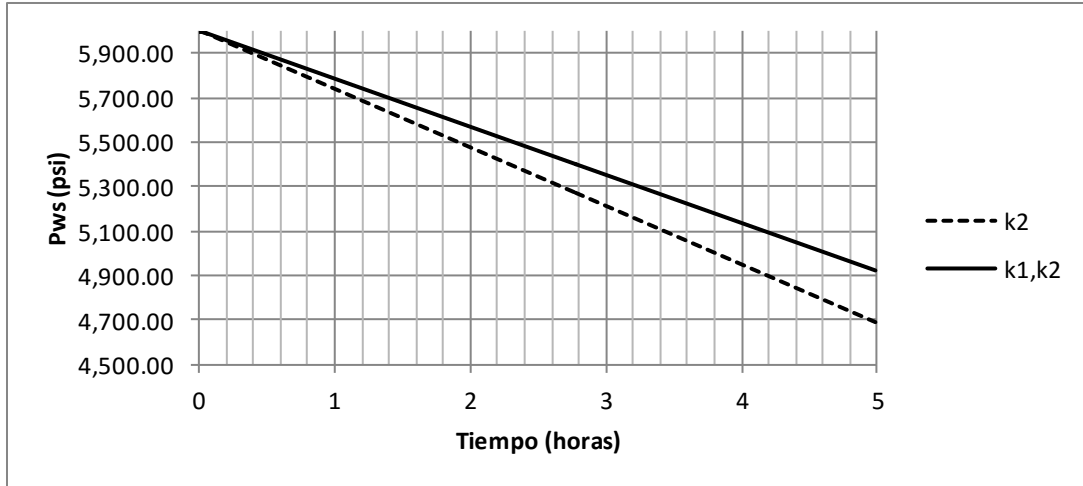


Figura 2.8. Simulación numérica del comportamiento de la presión de estática en el tiempo para un yacimiento con una sola permeabilidad k_2 (línea punteada) y con dos permeabilidades k_1, k_2 (línea continua). La presión de estática del pozo no dañado tiene un coeficiente de difusión más grande, por lo que se comunica mejor en el medio poroso y su presión estática cae con mayor rapidez en comparación con un pozo dañado.

2.2.6 Gráficos del daño efectivo.

En la figura 2.9 se muestra el comportamiento del daño efectivo en función del radio.

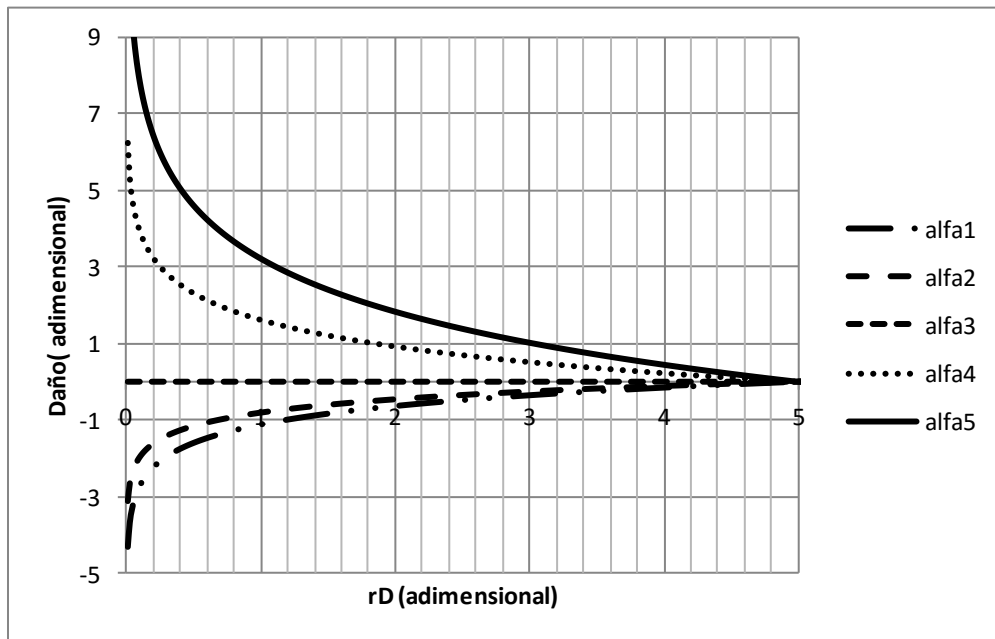


Figura 2.9. Gráfico del daño efectivo $s_e(r_D)$ para valores de $\alpha = 0.3, 0.5, 1, 2, 3$ en escala real adimensional. Este daño solo es válido para la zona 1 y se puede observar que tiende a cero en cuanto se aleja de la zona del pozo.

2.3 Daño a la formación para un cartesiano 1D

En el caso de un modelo 1D cartesiano para el daño, resolvemos la ecuación de difusión estacionaria en las zonas 1 y 2 como

$$\frac{d^2 P_1}{dx^2} = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{d^2 P_2}{dx^2} = 0 \quad (2.40)$$

Con las condiciones de frontera en los extremos y en la interfase

$$\left. \frac{dP_1}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{q\mu B_o}{Ak_1} \quad (2.41)$$

$$P_2(L_x) = P_e \quad (2.42)$$

$$P_1(x_s) = P_2(x_s) \quad (2.43)$$

$$k_1 \left. \frac{dP_1}{dx} \right|_{x=x_s} = k_2 \left. \frac{dP_2}{dx} \right|_{x=x_s} \quad (2.44)$$

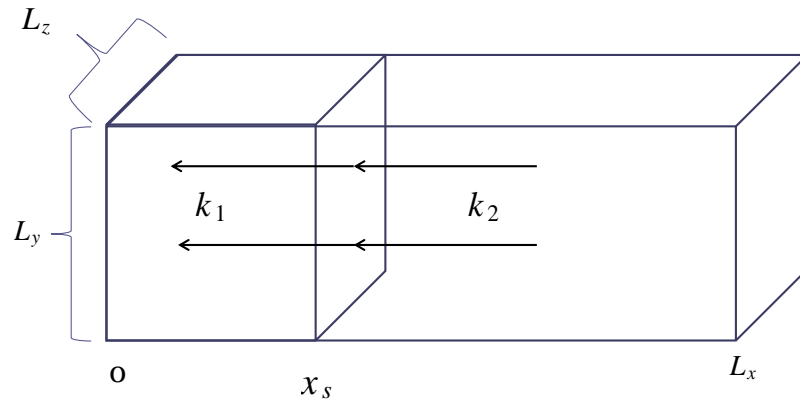


Figura 2.10. Esquema sobre el modelo cartesiano 1D para el daño. En este caso se tiene un medio poroso definido por dos medios con dos permeabilidades distintas en las que fluye hidrocarburo.

Integrado dos veces 2.39 y 2.40 y aplicando las condiciones de frontera en los extremos y en la interfase se obtiene la siguiente solución para la zona 1.

$$P_1(x) = P_e - \frac{q\mu B_o}{Ak_1} \left[\frac{k_1}{k_2} (x_s - L_x) - (x_s - x) \right] \quad (2.45)$$

En el caso de que $k_1 = k_2$ se tiene el modelo clásico de una sola permeabilidad.

$$P_1(x) = P_e - \frac{q\mu B_o}{Ak_1} (x - L_x) \quad (2.46)$$

Para poder encontrar el daño en el modelo de dos zonas con permeabilidad distinta supongamos que 2.45 se puede escribir como

$$P_1(x) = P_e - \frac{q\mu B_o}{Ak_1} (x - L_x) + f(x) \quad (2.47)$$

Esta expresión se puede ver como la presión clásica más una corrección de la presión $f(x)$ causada por el cambio de permeabilidad de k_1 a k_2 .

Igualando 2.45 con 2.47 y despejando $f(x)$ se tiene

$$f(x) = \frac{q\mu B_o}{k_2(x_s - L_x)} \frac{(x_s - L_x)^2}{A} (\alpha - 1) \quad (2.48)$$

Si definimos el daño como

$$s = \frac{(x_s - L_x)^2}{A} (\alpha - 1) \quad (2.49)$$

$$s = \frac{(x_s - L_x)^2}{A} \left(\frac{k_2}{k_1} - 1 \right) \quad (2.50)$$

Con este daño 2.47 se puede reescribir

$$P_1(x) = P_e - \frac{q\mu B_o}{Ak_1} \left[\frac{(x - L_x)}{k_1} - \frac{s}{k_2(x_s - L_x)} \right] \quad (2.51)$$

En la figura 2.11 se muestra el comportamiento del daño efectivo en función de la permeabilidad para un modelo cartesiano.

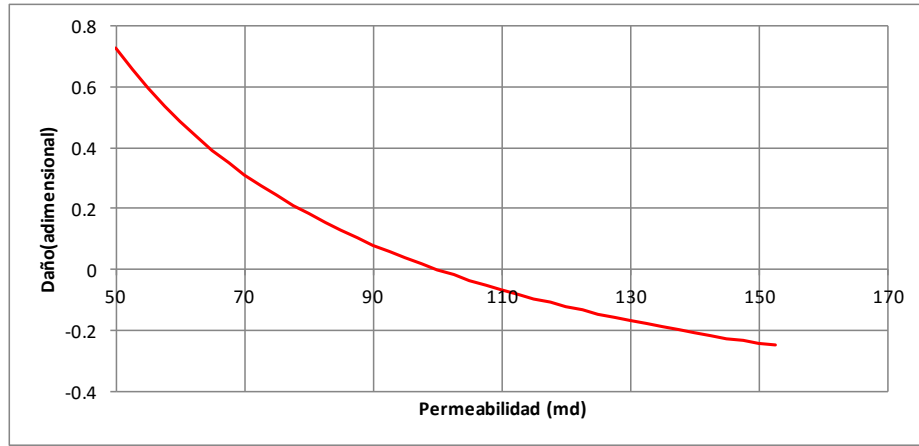


Figura 2.11. Gráfico del daño efectivo en función de la permeabilidad de la zona 1 para un modelo cartesiano.

Capítulo III. Interacción entre el ácido y la roca en una estimulación ácida.

3.1 Historia de la estimulación ácida

Una estimulación ácida consiste en inyectar una solución para disolver algunos minerales removiendo el daño a la formación incrementando la permeabilidad cerca del agujero. Los ácidos más usados en la industria petrolera son el ácido Clorhídrico HCl y el ácido Fluorhídrico HF. Minerales de silicato como las arcillas y feldspatos en los poros de las areniscas son normalmente removidos usando mezclas de HF y HCl, mientras que los minerales de carbonato son atacados con HCl. La cantidad de ácido requerido para disolver una cierta cantidad de mineral es determinada por la estequiometría (cálculo de la relaciones de los reactivos y productos en una reacción química) de la reacción química.

El primer método de estimulación de la productividad de un pozo que fue aplicado, se remonta al inicio de la explotación industrial de petróleo, aproximadamente en 1860. Este proceso fue a través del uso de nitroglicerina que se hacía explotar. El método se llamó fracturamiento con explosivos y llegó a ser popular en 1920.

En 1894 el Ácido Clorhídrico, que en este trabajo lo denotaremos con la abreviatura “HCL”, se aplicó en formaciones de caliza en Lima, Ohio, siendo patentado el proceso en marzo 17 de 1896 (U. S. No. 556669), método abandonado o poco usado por la alta corrosión ocasionada en las instalaciones superficial y subsuperficial de los pozos. Hasta 1932, con el desarrollo de los inhibidores de corrosión, la acidificación fue ampliamente aceptada y reconocida como un medio efectivo de incrementar la productividad de los pozos. En 1940 se introdujo el empleo de mezclas de ácidos HCL y Ácido Fluorhídrico que para fines prácticos en este trabajo lo denotaremos como “HF”.

El estudio de problemas de acidificación, inyección de agua, pérdidas de circulación, cementaciones forzadas y la incipiente estimulación de pozos con explosivos, condujeron a considerar otro de los más importantes métodos: el fracturamiento hidráulico, patentado por R. F. Farris en noviembre 10 de 1953, e introducido por Clark. La primera operación se efectuó en 1947 en un campo de gas (Hugoton) en Kansas, en el pozo Klepper No. 1 con resultados

desalentadores. Posteriormente con el empleo de mayores volúmenes y gastos se probó con éxito y su aplicación fue ampliamente extendida a todos los países y a la mayoría de los tipos de yacimientos y a profundidades de hasta 6000 m y más. Adicionalmente y en forma simultánea se han desarrollado y probado una gran variedad de otros métodos de estimulación, aunque de menor importancia a los previamente citados.

En México la mayor parte de las estimulaciones se efectúan en rocas carbonatadas (calizas) utilizando ácido clorhídrico (HCL) a diferentes concentraciones, una menor parte de las estimulaciones se realizan en formaciones productoras de areniscas, donde se ha utilizado Ácido Fluorhídrico (HF) o más recientemente, a través de fracturamientos hidráulicos.

En nuestro país, particularmente en los yacimientos con rocas carbonatadas, la utilización del ácido clorhídrico es prácticamente el común denominador de las estimulaciones, sin embargo, la experiencia nos ha revelado que no todos los pozos con problemas de producción, requieren necesariamente del uso de ácido clorhídrico.

Muchos de nuestros pozos con problemas de producción requieren de estimulaciones No acidas (no reactivas) debido a la naturaleza del problema que genera la declinación de su producción, por lo tanto la selección de un pozo candidato a estimular y el diseño de su tratamiento requiere de un buen análisis de gabinete.

La determinación del tipo de daño, el análisis nodal y la corroboración del daño a través de pruebas de laboratorio son factores importantísimos que deben considerarse para seleccionar y diseñar el tratamiento de un pozo candidato a estimular.

3.2 Estimulación ácida y agujeros de gusano

El propósito de la acidificación de carbonatos es para remover el daño a la formación cerca del pozo por medio de la disolución de carbonatos y la formación de agujeros de gusano a través de los cuales el aceite o gas fluirán después de la estimulación. La Figura 3.1 muestra los agujeros de gusano creados por el ácido en la disolución de la caliza en un laboratorio.

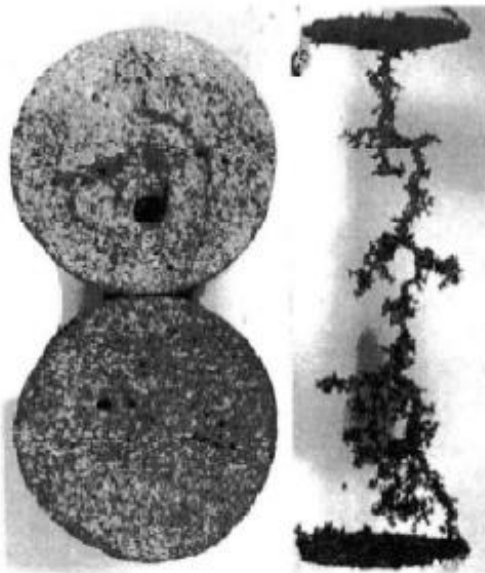


Figura 3.1. Agujero de gusano creado por el ácido en una caliza.

Estos agujeros de gusano son formados al ponerse en contacto el ácido con la formación. El ácido empieza a fluir en los poros pero a su vez va disolviendo la roca, esta disolución de la roca crea canales que modifican el flujo. De esta manera que el fenómeno de los agujeros de gusano queda representado por una ecuación de concentración del ácido, una ecuación de flujo en el medio poroso y una ecuación que describe la razón de cambio en el tiempo de la porosidad en función de la concentración. Estos tres fenómenos combinados generan patrones de disolución diversos que dependen de parámetros de la roca y fluido.

3.3 Estequiometría de la reacción entre el ácido y la roca

La estequiometría se puede definir como el cálculo de las relaciones cuantitativas entre reactivos y productos en el transcurso de una reacción química, estos cálculos se realizan para conocer con precisión la cantidad que se va a obtener de un determinado producto, conocidas las cantidades de los reactivos o, por el contrario, las cantidades de reactivo que se han de utilizar para obtener una determinada cantidad de producto. Para nuestro propósito se puede definir como el proceso que describe el número de moléculas de fluido reactivo (ácido) requeridas para disolver una cantidad de sólidos (roca).

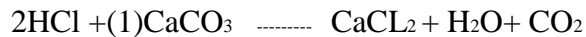
En una estimulación o un fracturamiento ácido, las principales reacciones químicas de interés se dan entre el ácido clorhídrico (HCl) con los compuestos de las formaciones carbonatadas, como: la caliza (CaCO₃) y la dolomía (CaMg(CO₃)₂), las cuales reaccionan dando como resultado: cloruro de calcio (CaCl₂), agua (H₂O) y dióxido de carbono (CO₂).

Los ácidos más comunes son el HCl y HF/HCl, mientras que los ácidos orgánicos tienen aplicación en situaciones especiales, todos los ácidos tienen la particularidad de que al reaccionar liberan iones y aniones de hidrógeno. Las reacciones más comunes entre estos ácidos y los minerales de las formaciones, se dan en la siguiente tabla.

Tabla 3.1 Reacciones primarias del ácido con minerales de la formación.

Para el HCl		
Calcita		
2HCl+CaCO ₃	----->	CaCl ₂ +H ₂ O+CO ₂
Dolomía		
4HCl+CaMg(CO ₃) ₂	----->	CaCl ₂ MgCl ₂ 2H ₂ O+2CO ₂
Siderita		
2HCl+ FeCO ₃	----->	FeCl ₂ +CO ₂ +H ₂ O

Usando como ejemplo el caso de las calizas en reacción con HCl tenemos:



Esta expresión indica que se necesitan dos moles de HCl para reaccionar con un mol de CaCO₃ y dar como resultado un mol de CaCl₂, H₂O y CO₂. Los números 2 y 1 que multiplican los HCl y CaCO₃ son conocidos como coeficientes estequiométricos

Otro ejemplo puede ser el caso de las dolomías con HCl.



Aquí se necesitan 4 moles de HCl para reaccionar con un mol de CaMg (CO₃)₂ y obtener un mol de CaCl₂ y MgCl₂, dos moles de H₂O y CO₂. En el caso de los silicatos de las arenas, cuando el ácido fluorhídrico reacciona pueden ocurrir otras reacciones secundarias, que tienen influencia

sobre la reacción total estequiométrica. Por ejemplo cuando el HF reacciona con el cuarzo (SiO_2), la primera reacción es:



Si esta segunda reacción se completa quiere en total se requerirán 6 moles de HF para reaccionar con 1 mole de cuarzo, ya que 4 son consumidos en la primera reacción y 2 más en la segunda. Finalmente la cantidad total de HF requerido dependerá de la concentración del ácido. Cabe mencionar que las reacciones entre el HF y los minerales de sílice, únicamente la primera reacción es mencionada en la tabla, las reacciones secundarias consumirán mayor cantidad de HF por mole de mineral, lo cual cambia la estequiometría.

Este tipo de cálculos estequiométricos son de gran importancia en las reacciones ácido-roca y nos permiten calcular el volumen de roca disuelta para un volumen de ácido dado. Una manera conveniente de expresar las reacciones estequiométricas es mediante el poder de disolución, que expresa la cantidad de mineral que puede ser consumido por una cantidad dada de ácido sobre una masa o volumen.

La estequiometria es determinada cuando, el tipo de roca y el ácido están bien definidos, como es el caso de las reacciones entre caliza o dolomía con el ácido clorhídrico. En el caso de minerales más complejos, como las mezclas de arcillas que forman varios productos al reaccionar con el ácido fluorhídrico, la estequiometria se basa en valores promedio. En la Tabla 3.1 se muestran las ecuaciones estequiométricas entre ácidos y minerales, implicados en una estimulación reactiva.

El poder de disolución es definido como la masa consumida de mineral por una masa de ácido dado.

$$\beta = \frac{v_{\text{mineral}} MW_{\text{mineral}}}{v_{\text{acido}} MW_{\text{acido}}} \quad (3.1)$$

donde:

$$\beta = \text{Poder de disolución}$$

$$v_{\text{mineral}} = \text{Coeficiente estequiométrico del mineral, adimensional}$$

$v_{\text{ácido}}$ = Coeficiente estequiométrico del ácido, adimensional

MW_{mineral} = Peso molecular del mineral, gr/mol

$MW_{\text{ácido}}$ = Peso molecular del ácido, gr/mol

El poder de disolución volumétrico “X”, es otra manera de definir el poder de disolución de una solución ácida sobre un mineral y está definido entre el volumen de mineral disuelto para un volumen de ácido dado y se relaciona con el poder de disolución de la siguiente manera:

$$X = \frac{\rho_a \beta C}{\rho C_a CO_3} \quad (3.2)$$

donde:

X = Poder de disolución

C = Concentración de ácido, porcentaje

ρ_a = Densidad del ácido gr/cm³

$\rho C_a CO_3$ = Densidad de la roca gr/cm³

Tabla 3.2. Poder de disolución del ácido fluorhídrico a una concentración dada.

Poder de disolución HF a una concentración (Xc)			
X	Cuarzo	X	Albíta
0.015	0.006	0.019	0.008
0.023	0.01	0.028	0.011
0.03	0.018	0.037	0.015
0.045	0.019	0.056	0.023
0.06	0.025	0.075	0.03

Para facilitar los cálculos se dan las siguientes tablas, del peso molecular de los componentes presentados en las reacciones con los ácidos.

Tabla 3.3. Peso molecular de los componentes presentados en reacción con los ácidos.

Elementos		
Elemento	Símbolo	Peso molecular (masa/mol)
Hidrógeno	H	1.0079
Carbón	C	12.0107
Oxígeno	O	15.9994
Flúor	F	18.9984
Sodio	Na	22.9897
Magnesio	Mg	24.305
Aluminio	Al	26.9815
Sílice	Si	28.0855
Cloro	Cl	35.453
Potasio	K	39.0983
Calcio	Ca	40.078
Fierro	Fe	55.845
Moléculas		
Ácido Clorhídrico	HCl	36.46
Ácido Fluorhídrico	HF	20.01
Calcita	CaCO ₃	100.1
Dolomía	CaMg(CO ₃) ₂	2184.4
Siderita	FeCO ₃	115.8
Cuarzo	SiO ₂	60.08
Albita (Feldespato de potasio)	NaAlSi ₃ O ₈	265.3
Ortoclasta (Feldespato de potasio)	KAlSi ₃ O ₈	278.4
Kaolita	Al ₄ Si ₄ O ₁₀ (OH) ₈	516.4
Bentonita o montmorilonita	Al ₄ Si ₈ O ₂₀ (OH) ₄	720.8

En general, la HCl tiene la mayor capacidad de disolución, seguido por el ácido fórmico y ácido acético. Las cifras presentadas en la Tabla 3.3, no tienen en cuenta las limitaciones que pueden presentarse por el equilibrio químico. Por lo general, en los tratamientos de campo, los ácidos orgánicos no reaccionan por completo, por lo que un determinado volumen de ácido se disuelve menos roca que se indica en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4. Comparación del poder de disolución para varios ácidos y minerales.

Poder de disolución para varios ácidos y minerales						
Formulación	Ácido	100%	5%	10%	15%	30%
Caliza CaCO ₃ con ρ _{CaCO3} =2.71gr/cc	Ácido Clorhídrico (HCl)	1.37	0.026	0.053	0.081	0.175
	Fórmico (HCHO ₂)	1.09	0.2	0.41	0.062	0.129
	Acético (HC ₂ H ₃ O ₂)	0.83	0.016	0.031	0.047	0.096
Dolomía CaMg(CO ₃) ₂ con ρ _{CaMg(CO3)2} =2.87gr/cc	Ácido Clorhídrico (HCl)	1.27	0.023	0.046	0.071	0.152
	Fórmico (HCHO ₂)	1	0.018	0.036	0.054	0.112
	Acético (HC ₂ H ₃ O ₂)	0.77	0.014	0.027	0.041	0.083

Tabla 3.5. Densidad del ácido clorhídrico a diferentes concentraciones (a 20°C)

Tabla de densidad del ácido clorhídrico a diferentes concentraciones (a 20 C)	
% HCl	Densidad gr/cm ³
1	1.0032
2	1.0082
4	1.0181
6	1.0279
8	1.0376
10	1.0474
12	1.0574
14	1.0675
16	1.0776
18	1.0878
20	1.098
22	1.1083
24	1.1187
26	1.129
28	1.1392
30	1.1493
32	1.1593
34	1.1691
36	1.1789
38	1.1885
40	1.198

3.4 Equilibrio termodinámico y velocidad de la reacción

El equilibrio termodinámico es alcanzado generalmente antes de que el ácido haya reaccionado totalmente, la reacción entre un ácido y un mineral conlleva a la formación de otros productos y esto prosigue hasta alcanzarse un equilibrio, punto en el cual la reacción cesa.

Una vez que la reacción esta en equilibrio, ésta es irreversible, es decir, los productos de reacción se combinan para formar nuevamente moléculas de reactantes.

El equilibrio depende de las condiciones termodinámicas en que se realiza la reacción y por supuesto de los reactantes implicados, especialmente en la reacción entre carbonatos y ácidos orgánicos, ya que estos pueden llegar a agotarse en un 50 % de su concentración inicial, dependiendo de las condiciones de presión y temperatura.

Dado que la cantidad de sólidos disueltos por una cierta cantidad de ácido está limitada en cada caso por las condiciones de equilibrio, el poder de disolución de los ácidos bajo condiciones de yacimiento debe modificarse apropiadamente.

El control de la velocidad de reacción del ácido en la formación es crucial para el éxito de los tratamientos de estimulación ácida en yacimientos carbonatados. El sistema ácido debe atravesar la zona dañada para comunicar al yacimiento con el pozo, pero también debe minimizar el daño producido a los tubulares y realizar una buena limpieza después de agotado el ácido.

A medida que el ácido viaja a través de la fractura va reaccionando constantemente con la roca y disminuye su concentración, cuando ésta alcanza alrededor del 10% de su concentración original, se considera que no tiene suficiente capacidad para continuar disolviendo minerales. En este caso el ácido se dice que se ha gastado y no propiciará canales conductivos adicionales.

La velocidad de reacción se define como la cantidad de moles de moléculas que reaccionan por unidad de tiempo y está gobernada por la rapidez con la que el ión hidrógeno es transportado a la superficie sólida y la rapidez que éste alcanza las moléculas del mineral.

Todas las reacciones en la estimulación de pozos entre ácidos y minerales contenidos en la formación, se dan por cambio químico y se producen a diferentes velocidades, la reacción del ácido clorhídrico en roca calcárea, está en mayor grado controlada por transferencia de masa; es decir, por la rapidez con que los iones hidronio del ácido alcanzan las paredes de la fractura. Esta rapidez a su vez es determinada por las condiciones hidrodinámicas del fenómeno.

La velocidad de reacción en superficie, una vez que el ion hidronio la alcanza, depende de la composición química del sólido y del ácido, de la concentración del mismo en la superficie y de la temperatura de la formación, siendo en general muy elevada, gastándose el ácido muy rápidamente por este efecto.

Para medir la velocidad total de reacción entre un ácido y un mineral, debe determinar:

- El cambio de la concentración del ácido con respecto al tiempo dC/dt .
- El tiempo en que el ácido cambia de una concentración inicial C_0 a una concentración final C , a este tiempo se le denomina tiempo de reacción o tiempo de gastado.

- La cantidad de roca disuelta por unidad de área expuesta y por unidad de tiempo.

Se han realizado muchos estudios experimentales con la finalidad de evaluar los diferentes parámetros que afectan o influyen en la velocidad de reacción del ácido con las rocas.

Entre los factores que se han identificado y que afectan la velocidad de reacción son:

- Relación área / volumen.
- Temperatura.
- Tipo y concentración del ácido.
- Composición de la roca.
- Viscosidad.
- Presión

Relación área / volumen. Este es el factor que más influye en la velocidad de reacción de los ácidos en la roca. La relación entre el área mojada por el ácido y el volumen de éste es directamente proporcional a la velocidad de reacción. Es decir, entre mayor sea el área de superficie de roca expuesta a el ácido, éste se gastara más rápidamente.

Temperatura. A medida que la temperatura de un ácido se incrementa, éste tiende a reaccionar más rápidamente con la roca de formación, esto debido a que a mayor temperatura los efectos de difusión son más acentuados y por lo tanto los iones hidrógeno tienen mayor movilidad y alcanzaran la superficie del solido más rápidamente, además de esto, influye el comportamiento de la viscosidad, que a mayor temperatura disminuirá facilitando el transporte de los iones hidrógeno hacia la superficie del sólido.

Tipo y concentración del ácido. A mayor concentración y cantidad de iones H⁺ de un ácido, éste será más fuerte y tendrá mayor velocidad de reacción, por ejemplo, el ácido clorhídrico tiene mayor velocidad de reacción que los ácidos orgánicos en rocas calcáreas, siendo de estos el fórmico de mayor velocidad de reacción que el acético. Así mismo, el ácido fluorhídrico es más rápido de reaccionar con las rocas calcáreas y es el único que puede reaccionar con los sílices.

Composición de la roca. La composición física y química de las rocas de la formación influyen directamente la velocidad de reacción del ácido, por ejemplo, el ácido clorhídrico reaccionara más rápidamente al contacto con calizas que con dolomías, otro ejemplo es el del ácido fluorhídrico, el cual reaccionara más rápidamente con las arcillas, mientras que con el sílice es más lento.

Viscosidad. La viscosidad, como se vio en el efecto de la temperatura, afecta en el transporte de los iones hidrógeno hacia la superficie de la roca y por lo tanto disminuye la velocidad de reacción si la viscosidad es alta. Pero con el efecto temperatura esta disminuye, lo que aumenta la velocidad de reacción.

Presión. Este factor afecta generalmente en pozos con poca presión, ya que a baja presión parte del CO_2 sale de la solución. Sin embargo a presiones superiores a 750 psi dado que el CO_2 no escapa del ácido gastado, la presión tendrá poco efecto sobre la velocidad de reacción.

Los sistemas ácidos a menudo incluyen aditivos que demoran, o retardan, la reacción del ácido clorhídrico con el $CaCO_3$, prolongando así el tiempo de reacción. También existen técnicas de retardo químico consisten normalmente en la emulsificación y formación de geles.

Dependiendo de la concentración del ácido y el entorno de bombeo, una mezcla de ácido y diesel, por ejemplo, puede resultar muy efectiva porque retarda los tiempos de reacción en un factor de 15 a 40, en comparación con los sistemas ácidos convencionales que utilizan HCl. El retardo de la reacción y la minimización de la corrosión también pueden lograrse utilizando ácidos orgánicos; sin embargo, debido a su costo y a su menor capacidad de disolución, su empleo es limitado.

3.5 Sistemas usados para la acidificación.

En la estimulación o fracturamiento de pozos se utilizan ácidos que reaccionan con los minerales que contienen las formaciones, estas reacciones son procesos de cambios químicos entre los reactantes para dar productos de reacción, el conocimiento de cómo, cuándo y dónde se llevan a cabo es esencial para la selección y diseño de los tratamientos, este conocimiento se basa en el estudio de la estequiometría, el equilibrio y la velocidad de reacción.

Los ácidos también son sustancias conocidas por su pH menor de 7. Entre más completa y rápida sea la disociación del compuesto en agua, en iones hidrógeno y su anión, mayor poder de disolución tendrá el ácido y este será un ácido fuerte. Por el contrario si se tiene una parcial y lenta ionización, el ácido será débil.

No todos los ácidos que se conocen son susceptibles de ser utilizados en la estimulación de pozos, un ácido para este caso requiere principalmente que los productos de reacción sean compuestos solubles en agua y removibles de la formación; además de ser controlables sus efectos dañinos, ser seguros de manejarse, encontrarse disponibles en grandes cantidades y tener bajo costo.

Los ácidos que se presentan en la tabla 3.6 se los más utilizados en la industria del petróleo

Tabla 3.6. Ácidos más usados en la industria petrolera.

Ácidos usados comunmente		
Inorgánicos	Orgánicos	Ácidos especiales
Ácido Clorhídrico (HCL)	Acético (CH ₃ COOH)	Ácido sulfámico
Fluorhídrico (HF)	Fórmico (HCOOH)	Ácidos retardados
---	---	Ácidos químicamente retardados
---	---	Ácidos emulsificados
---	---	Ácidos espumados

También, se emplean la mezcla de ellos y son de uso menos común otros ácidos como el sulfámico y el cloroacético, ya que se utilizan para aplicaciones específicas. Con excepción del ácido fluorhídrico, los demás ácidos se usan básicamente para estimular formaciones calcáreas. El fluorhídrico es el único que disuelve minerales silícicos.

3.5.1 Ácidos inorgánicos

Ácido Clorhídrico (HCL).

El ácido clorhídrico ha tenido bastante aplicación tanto en rocas carbonatadas como areniscas para tratamientos de estimulación. Químicamente es una solución acuosa compuesto de gas cloruro de hidrógeno disuelto en agua. El gas de cloruro de hidrógeno es fácilmente soluble en

agua. Este gas se disocia en agua rápidamente y completamente hasta un 43 % en peso a condiciones estándar; esta disociación le da la condición de ácido fuerte.

Su amplio uso es debido a esa propiedad (disociación) debido a que genera un mayor volumen de roca disuelta, dando como resultado productos de reacción solubles en agua. Su concentración se expresada como un porcentaje de peso de gas de HCL disuelto en agua, la concentración más utilizada es generalmente al 15%, para tratamientos en carbonatos, conociéndose un ácido de este tipo como ácido regular.

Esta concentración se ha elegido debido a lo difícil de inhibir la acción corrosiva que el ácido causa sobre los elementos tubulares en el pozo, además de ser menos costoso que otros ácidos más fuertes, presentar menor riesgo de manejo y retiene mayor cantidad de sales disueltas en solución una vez que el ácido se gasta. Aunque mayores concentraciones al 15% pueden utilizarse en formaciones carbonatadas.

En areniscas las más comunes se encuentran entre el 5 y 7.5% y forman parte del precolchón, la función en este caso en prevenir la precipitación de los productos de reacción que pudieran taponar los poros de la formación. La principal desventaja de este ácido es su alta corrosividad, lo que limita su uso a temperaturas altas (alrededor de 300 °F). Se encuentra comercialmente disponible hasta una concentración máxima de 31.45%.

La reacción química del ácido acético y la caliza esta dado por la siguiente ecuación.



(ácido clorhídrico) + (calcita) -----(cloruro de calcio) + (agua) + (dióxido de carbono)

Ácido Fluorhídrico (HF).

Este ácido es el único que permite la disolución de mineral silicio como las arcillas, feldespatos y cuarzo, a causa de la mayor área superficial de contacto de las arcillas; además, reacciona con los minerales calcáreos y al hacerlo se producen precipitados insolubles de fluoruro de calcio (CaF₂), motivo por el cual no se utiliza en los tratamientos ácidos en carbonatos. Por lo que, se limita su utilización a la remoción de daños causados por arcillas en formaciones arenosas. Se utiliza mezclado con el ácido clorhídrico a una concentración no mayor al 3 %.

En formaciones de alta temperatura se utiliza con ácidos orgánicos. Comercialmente se encuentra disponible en soluciones acuosas del 40 al 70 % de concentración en peso estas concentraciones no son muy utilizadas debido los problemas que representa su manejo (bajo punto de ebullición 66.9° F, el cual es fácilmente superado por la temperatura ambiente).

Mezclas de ácido clorhídrico y fluorhídrico (HCL/HF).

El sistema de HF y HCL reacciona con los carbonatos y silicatos de la formación en areniscas que contienen carbonatos o calcita como material cementante. El volumen de precolchón de HCL remueve todo el material carbonatado. Sin embargo el HCL no trabaja igual de eficiente en formaciones que contienen un alto contenido de caliza o dolomía, ya que los carbonatos reducen la eficiencia del tratamiento por los productos de reacción secundarios.

Este sistema es diseñado especialmente para formaciones con un alto contenido de carbonatos. Las pruebas de laboratorio con este sistema han mostrado que su ritmo de reacción es más lento que una mezcla de 12% de HCL y 3% de HF en calizas y cercanamente igual de rápido en silicatos.

Debido a que este sistema es ligeramente más lento en su ritmo de reacción que el HF solo, por lo que es posible obtener mayores penetraciones en la formación en la remoción del daño, este ácido es más costoso que un ácido de HF convencional pero su ritmo de reacción con los carbonatos permite mejorar la remoción del daño en formaciones de areniscas con alto contenido de calcita. Sin embargo, se debe tener precaución en su utilización debido a los problemas de precipitados que genera.

3.5.2 Ácidos orgánicos

Los ácidos orgánicos han encontrado sus principales aplicaciones en pozos con alta temperatura. Estos ácidos se presentan en forma neutra, es decir de una fuente viva. El ácido Acético (CH_3COOH) y el Fórmico (HCOOH) son los dos principales ácidos utilizados en tratamientos de acidificación, estos ácidos son más débiles que los ácidos inorgánicos, reaccionan más lentamente por lo que son menos dañinos.

El ácido acético por ejemplo, es el único ácido disponible que no dañara las superficies de una placa de cromo o aluminio. En ambos casos los ácidos orgánicos son mezclados con el HCL o HF para proporcionar mayor penetración al ácido dentro de la formación.

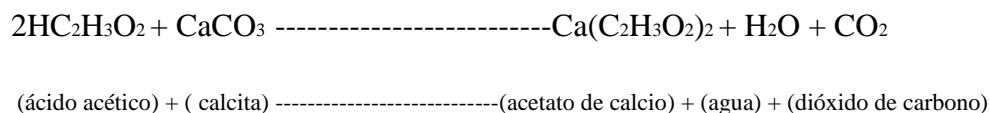
Los ácidos orgánicos tienen menor poder de disolución que el HCl y deben utilizarse en mayores volúmenes para obtener los mismos resultados, lo que resulta en un tratamiento más costoso. El costo del ácido acético por unidad basado en el poder de disolución es más costoso que el HCl o el ácido fórmico. En el caso de tratamientos de fracturamiento ácido, el poder de disolución no es la principal consideración que se toma en cuenta para la selección del ácido.

Acético (CH₃COOH).

Este ácido fue el primero de su tipo en emplearse en los tratamientos de acidificación, su característica principal es que es un ácido débil debido a que su ionización en agua es parcial y ocurre de manera lenta, esto hace que reaccione lentamente con los carbonatos, por lo que es utilizado como ácido retardado y en condiciones de alta temperatura. Por su característica de baja reacción y solubilidad con rocas carbonatadas se utiliza como agente secuestrante de fierro y controlador de arcillas.

Además, se emplea en combinación con el ácido clorhídrico o fluorhídrico a una concentración no mayor a 10 % en peso, a esta concentración los productos de reacción son solubles en el ácido gastado.

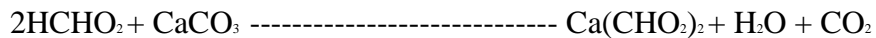
La disponibilidad comercial del ácido acético puro, es hasta del 99% aproximadamente, este ácido es conocido como ácido glaciar debido a los cristales en forma de hielo que se forma a temperaturas cercanas a los 60° F y se solidifica a 48° F. Cuando el ácido glaciar es mezclado con agua, el volumen que se genera es mayor que el requerido. Una solución al 10% disolverá tanta caliza como una solución al 6% de HCl, la reacción química del ácido acético y la caliza esta dado por la siguiente ecuación.



Ácido Fórmico (HCOOH).

Es el más simple de los ácidos orgánicos, es más fuerte que el ácido acético y más débil que el clorhídrico, frecuentemente es utilizado en combinación con el HCL como un sistema de ácido retardado para pozos con alta temperatura. Este ácido es menos fácil de inhibir que el acético y bien inhibido puede utilizarse hasta temperaturas de 350 °F. Su utilización puede ser solo o en combinación con el ácido clorhídrico o fluorhídrico a una concentración no mayor del 10 % en peso y se utiliza como ácido retardado.

Las aplicaciones principales del ácido fórmico se han encontrado en yacimientos con alta temperatura o en pozos que presentan bajos ritmos de admisión. A temperaturas altas los inhibidores orgánicos trabajan más eficientemente en el ácido fórmico que en el HCL solo, esta propiedad minimiza el peligro de ataque del hidrógeno al acero en tratamientos con HCl para formaciones con alta temperatura. La reacción química entre el ácido fórmico y la caliza es:



(ácido fórmico + (calcita) ----- (formeato de calcio) + (agua) + (dióxido de carbono)

Mezcla de ácido orgánico y fluorhídrico.

Los sistemas ácidos de HF y acético o fórmico son empleados para disminuir la reacción del ácido sobre la arena o la arcilla, además de su corrosividad. Estos sistemas de ácidos pueden inhibirse eficientemente por más de 16 horas a 400° F.

Los sistemas de HF con ácidos orgánicos pueden proporcionar bastante penetración y por consiguiente una remoción efectiva del daño en la formación. Las mezclas de ácido orgánico con HF son recomendadas para temperaturas arriba de los 200° F, ya que abajo de esta temperatura se pueden formar precipitados indeseables de los productos de reacción.

3.5.3 Ácidos especiales.

Los ácidos especiales son diseñados para cubrir una necesidad específica para la formación, tales como daño severo por arcillas, bloqueo de parafinas en el yacimiento y situaciones que requieren de ácidos retardados.

3.6 Aditivos utilizados en los sistemas ácidos.

Todos los ácidos utilizados en la estimulación de pozos requieren de un acondicionamiento para ser empleados con seguridad y evitar reacciones indeseables o daños por incompatibilidad con la formación y/o sus fluidos.

Los aditivos deben seleccionarse para las condiciones de cada pozo por cuanto al tipo y concentración de los mismos.

Esta selección en lo general, se lleva a cabo en el laboratorio debiendo ser cuidadosa, ya que los aditivos representan el mayor costo de la estimulación y por otra parte la ausencia de ellos puede propiciar inseguridad en el manejo de los ácidos, destrucción del equipo del pozo y daños severos a la formación.

Algunos de los procedimientos de laboratorio para la selección del tipo y concentración de aditivos necesarios en un sistema ácido, para las condiciones específicas de cada pozo, son similares a aquellos recomendados por el American Petroleum Institute en su API-RP-42.

Los problemas más importantes que el ácido puede propiciar son:

- Corrosión del acero del equipo de bombeo y del equipo subsuperficial y superficial del pozo.
- Daño de la formación por emulsiones, lodos asfálticos, liberación y dispersión de finos, alteración de la mojabilidad de la formación, precipitaciones secundarias, etcétera.

Los ácidos y sus aditivos en general son sustancias peligrosas de manejarse, por lo que es conveniente tener siempre a mano instructivos sobre su toxicidad y las instrucciones y recomendaciones sobre las precauciones en su manejo.

Existe una gran cantidad de aditivos utilizados en los tratamientos ácidos, que facilitan el uso de los sistemas permitiendo una mayor efectividad, básicamente estos pueden agruparse en la siguiente tabla.

Tabla 3.7. Aditivos.

Aditivos
Inhibidores de corrosión
Surfactantes
Solventes mutuos
Aditivos de control de fierro
Agentes suspensores
Agentes anti lodos asfálticos (Anti sludging)
Agentes Antiemulsificantes
Agentes divergentes
Reductores de fricción
Gas

3.6.1 Inhibidores de corrosión inorgánicos.

Son materiales fuertemente catiónicos, con una fuerte afinidad con la superficie metálica, los cuales forman una película delgada en el interior de la tubería y la protegen a medida que el ácido es bombeado. Los inhibidores de corrosión no suspenden la corrosión pero la disminuyen considerablemente.

Las tuberías del pozo generalmente están constituidas de aleaciones, conteniendo fierro y carbono como compuestos principales de la aleación. El ataque del ácido sobre el metal se manifiesta en la forma siguiente: dada la tendencia característica del fierro metálico a donar electrones de su estructura para convertirse en fierro iónico, y a la correspondiente al ión H^+ del ácido a captar electrones, se establece que en determinados sitios microscópicos de la superficie metálica (sitios anódicos), el fierro libera electrones dentro de la estructura cristalina del metal, desplazando otros electrones y estableciéndose un flujo de corriente hacia otro sitio microscópico del metal llamado cátodo.

Simultáneamente en los sitios catódicos los hidrógenos iónicos capturan electrones para convertirse en hidrógenos monoatómicos. Estos a su vez se combinan para formar hidrógeno molecular gaseoso. En esta forma se produce fierro iónico que entra en solución e hidrógeno molecular.

3.6.2 Inhibidores de corrosión orgánicos.

Estos inhibidores están compuestos por una parte polar capaz de adsorberse en la superficie del metal, por lo que establece una película protectora que actúa como barrera entre el metal y el ácido en solución. Ellos generalmente funcionan como un polarizador catódico al limitar la movilidad de los iones de hidrógeno.

Los inhibidores orgánicos están compuestos de unidades de hidrocarburo complejas con uno o más grupos polares, a partir del sulfuro, oxígeno ó nitrógeno.

Capítulo IV. Modelo físico para la disolución de carbonatos

4.1 Modelo de disolución de carbonatos.

Para modelar el proceso de disolución de carbonatos y la formación de agujeros de gusano deben de considerarse las siguientes ecuaciones.

$$\frac{\partial(\phi_l C_{Al})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}_l C_{Al} - \phi_l \mathbf{D} \nabla C_{Al}) + \alpha C_{Al} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial(\phi_l \rho_l)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_l \mathbf{V}_l) = 0 \quad (4.2)$$

$$\mathbf{V}_l = -\frac{k(\phi_l)}{\mu_l} \nabla p_l \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial t} = \frac{\beta \alpha}{\rho_\sigma} C_{Al} \quad (4.4)$$

La primera ecuación se refiere a la concentración de ácido en la fase líquida. Su primer término se debe a la acumulación de masa, el segundo término es de convección y difusión y el tercer término nos dice que la manera en que se pierde ácido es proporcional a $\frac{\beta \alpha}{\rho_\sigma}$ por la concentración.

La ecuación (4.2) es la ecuación de continuidad de la fase líquida.

La ecuación (4.3) es la ecuación de transporte para la fase líquida en un medio o poroso o ley de Darcy.

La ecuación (4.4) es un balance de masa de la parte sólida, y nos dice que la evolución en el tiempo de la porosidad, es proporcional a la evolución de concentración por medio de una constante $\frac{\beta \alpha}{\rho_\sigma}$.

donde:

C_{Al} = Concentración del ácido en la fase líquida, (kg/m^3).

ϕ_l = Porosidad de la formación adimensional (fracción).

\mathbf{V}_l = Vector velocidad de Darcy (m/s).

D = Tensor de dispersión (m^2/s).

α = Coeficiente de transferencia de masa ($1/s$).

ρ_l = Densidad del líquido (kg/m^3).

$k(\phi_l)$ = Permeabilidad de la formación (m^2).

μ_l = Viscosidad del fluido ($kg/(m \cdot s)$).

λ = Constante de proporcionalidad ($L^3/masa$).

t = Tiempo en segundos.

p_l = Presión de la fase líquida (kg/cm^2)

β =Poder de disolución (adim)

ρ_σ = Densidad de la roca (kg/m^3)

4.2 Modelos para el cambio de la permeabilidad en términos de la porosidad.

Se ha desarrollado una creciente actividad de investigación con el objetivo de predecir la permeabilidad de medios porosos a partir de propiedades estadísticas de la geometría y topología del espacio poroso. Sin embargo, a pesar del esfuerzo teórico invertido y de muchos avances significativos, todavía es común encontrar errores de orden de magnitud o mayor en las estimaciones de permeabilidad.

Uno de los avances más notables del último tiempo es la relación tipo ley de potencia entre la permeabilidad y el inverso del factor de formación, razón a través de una longitud característica del medio poroso. Esto es,

$$k \propto \frac{l_c^2}{F} \quad (4.5)$$

Donde l_c^2 es la longitud característica y F el factor de formación del medio (Katz y Thomson, 1986).

Diversos autores han propuesto definiciones para esta longitud característica, pero a la fecha no está clara la más apropiada. Considerando que a su vez F se relaciona con ϕ mediante

una ley de potencia, ley de Archie (Dullien, 1992), es razonable esperar también una ley de potencia que relacione k con ϕ . Una duda importante que prevalece tiene que ver con la universalidad del carácter de estas leyes de potencia que se han teorizado para la permeabilidad.

En la figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 se muestran los datos de permeabilidad-porosidad de una gran variedad de materiales porosos de origen natural los cuales revelan efectivamente un comportamiento de ley de potencia, de exponente que varía de un material a otro.

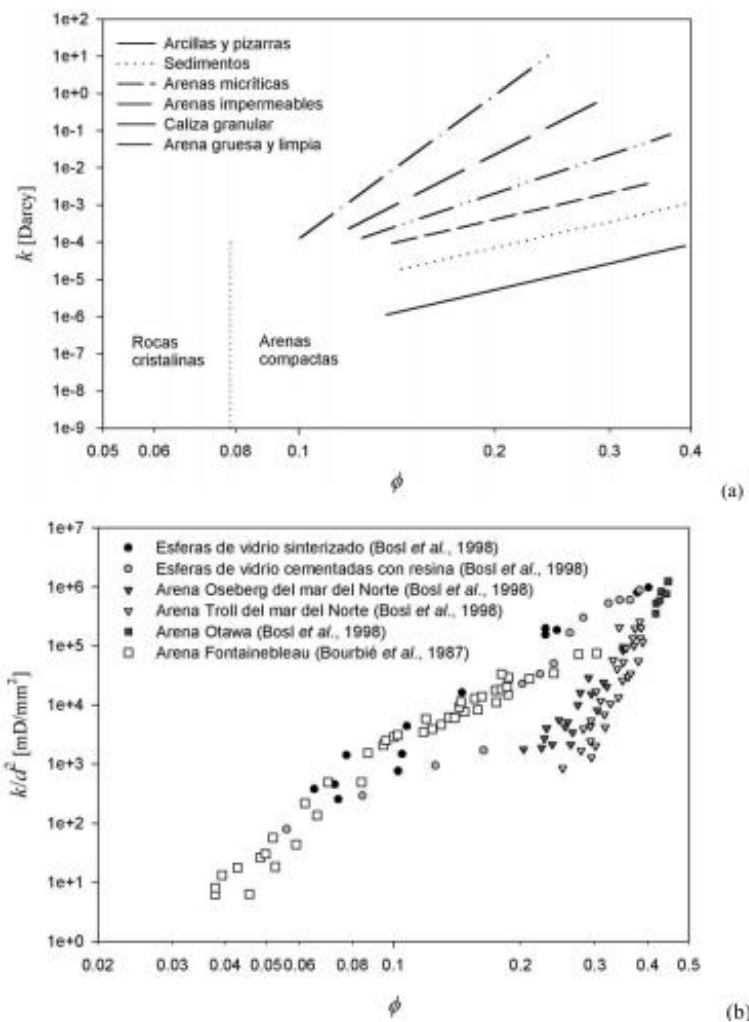


Figura 4.1. Relación entre la porosidad y la permeabilidad para diferentes medios porosos naturales y sintéticos. (a) Bourbié *et al.* (1987) (b) Bosl *et al.* (1998).

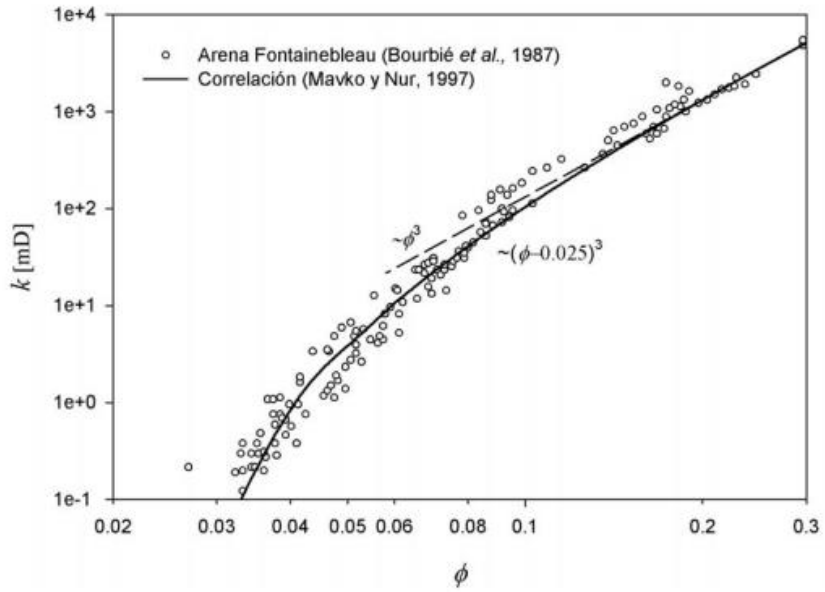


Figura 4.2. Relación permeabilidad-porosidad para Arena Fontainebleau. Los datos obedecen al comportamiento Kozeny-Carman a alta porosidad. El ajuste de Mavko y Nur es bueno en todo el rango de porosidad.

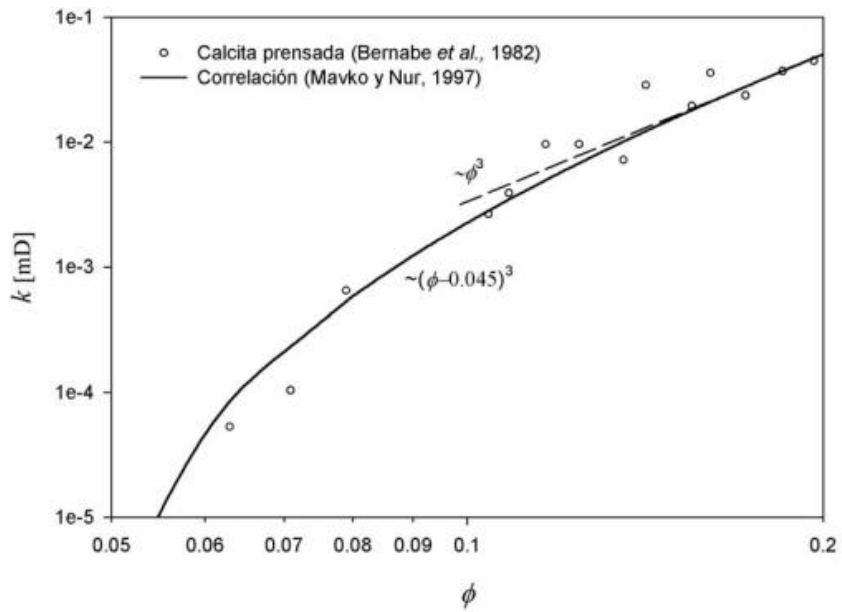


Figura 4.3. Relación permeabilidad-porosidad para calcita prensada. Los datos obedecen al comportamiento Kozeny-Carman a alta porosidad. El ajuste de Mavko y Nur es bueno en todo el rango de porosidad.

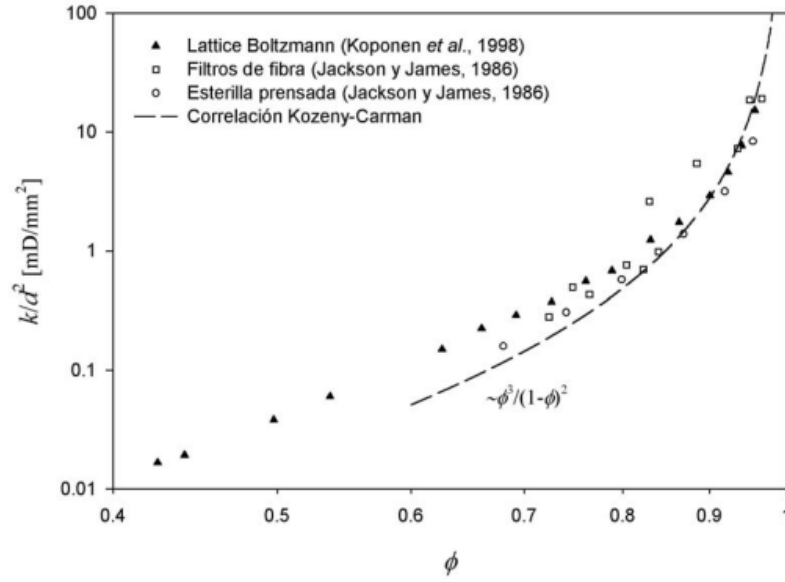


Figura 4.4. Relación permeabilidad-porosidad para material fibroso. Los datos obedecen al comportamiento de Kozeny- Carman a alta porosidad, en un rango muy estrecho de porosidad.

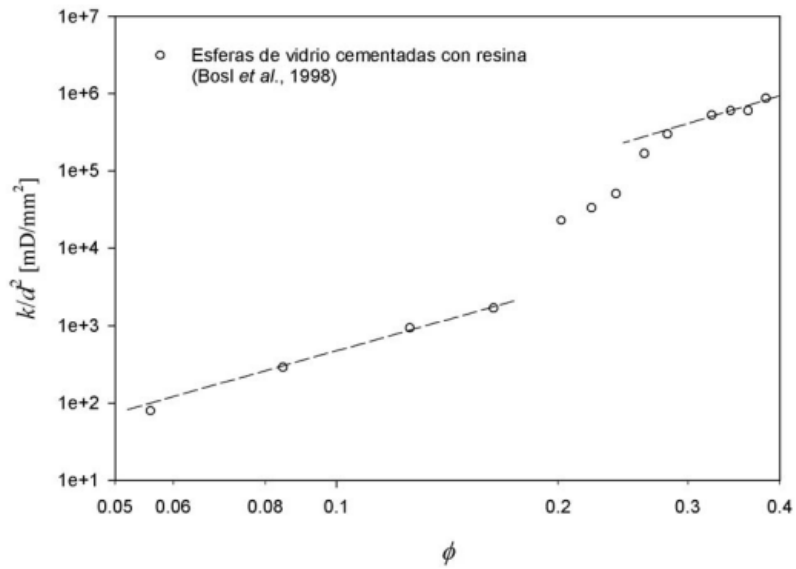


Figura 4.5. Relación permeabilidad-porosidad para esferas de vidrio cementadas con resina. Los datos muestran un comportamiento no lineal con presencia de inflexiones.

Expresiones semianalíticas propuestas en la literatura intentan relacionar la permeabilidad con las propiedades geométricas y topológicas de los materiales porosos. En la formulación de relaciones de aplicación práctica se han elegido como variables independientes aquellas que pueden ser determinadas experimentalmente con una certidumbre razonable.

Hasta ahora, en literatura, las relaciones de permeabilidad involucran variables como la porosidad, la tortuosidad, la forma y tamaño de las partículas (en el caso de sistemas de partículas), el tamaño y forma de los intersticios y, en enfoques más modernos, longitudes características del espacio poroso.

La ley de Kozeny, una de las ecuaciones de permeabilidad más simples y conocidas, fue deducida a partir de la solución analítica de las ecuaciones de Navier-Stokes en una representación simplificada del espacio poroso, un arreglo de conductos cilíndricos paralelos de sección aleatoria, pero constante.

La ley de Kozeny relaciona la permeabilidad k con las propiedades geométricas del medio poroso, como la porosidad, \emptyset la superficie específica de poros S y un parámetro empírico c , que en la mayoría de los casos es cercano a 0.2 (Kozeny, 1927; Carman, 1938). La ley que también se conoce como ley de Kozeny-Carman es.

$$k = c \frac{\emptyset^3}{S^2} \quad (4.6)$$

El parámetro c contiene implícitamente la dependencia de la permeabilidad con respecto a las desviaciones de la solución del modelo ideal respecto del medio real, por lo que es función de variables como la tortuosidad, la forma y conectividad de los pasajes de flujo.

En medios porosos compuestos por partículas de forma regular y dispuestas en un arreglo uniforme, la superficie específica S se encuentra relacionada directamente con la porosidad \emptyset y el diámetro promedio de las partículas $\langle d \rangle$.

$$S = \frac{z(1-\emptyset)}{\langle d \rangle} \quad (4.7)$$

En este trabajo usaremos la relación entre la permeabilidad y la porosidad usada por Kozeny y Bourbié para modelar el proceso de disolución de carbonatos, figura 4.4. La expresión es

$$k(\phi) = \alpha \langle d \rangle^2 \phi^m \quad (4.8)$$

donde:

$k(\phi)$ Permeabilidad (md)

α Constante que depende de las características del medio (adimensional)

ϕ Porosidad (fracción)

m exponente del modelo

Para hacer que esta correlación comience con valores de porosidad inicial ϕ_0 a una permeabilidad k_0 , debemos encontrar el valor de α tal que $k_0 = \alpha \langle d \rangle^2 \phi_0^m$ por lo tanto $\alpha = \frac{k_0}{\langle d \rangle^2 \phi_0^m}$ y la expresión de la porosidad queda finalmente.

$$k = k_0 \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^m \quad (4.9)$$

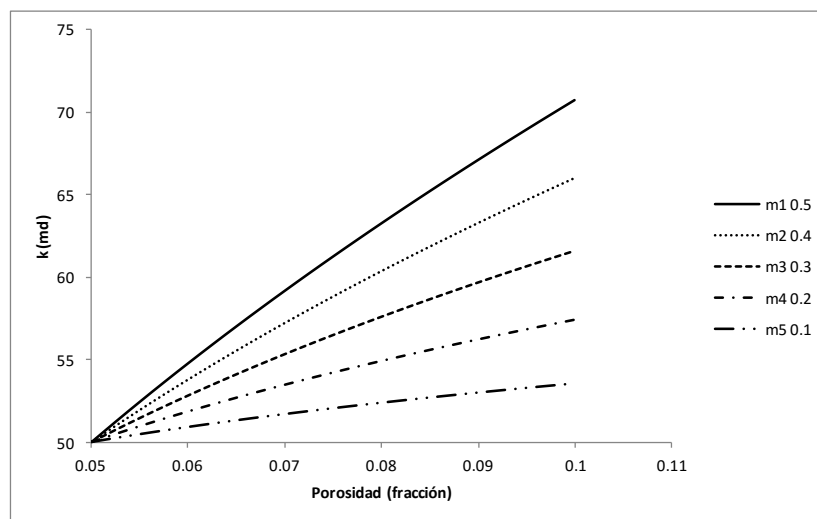


Figura 4.6. Comportamiento de la permeabilidad en función de la porosidad en el modelo de Kozeny - Bourbié para exponentes de $m=0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1$, valores de porosidad inicial del 5% y permeabilidad inicial de 50md.

4.3 Evolución del daño en el modelo de Hawkins

En el modelo de Hawkins el daño causado por un cambio de permeabilidad en una zona cercana al pozo queda expresado por

$$s = \left(\frac{k_2}{k_1} - 1 \right) \log \left(\frac{r_s}{r_w} \right) \quad (4.10)$$

donde:

s Daño a la formación, $s \in \mathbf{R}$ (adimensional).

k_2 Permeabilidad en la zona no dañada (md).

k_1 Permeabilidad en la zona dañada (md).

r_w Radio del pozo (m).

r_s Radio de la zona dañada (m)

En la figura 4.7 se muestra un esquema de la geometría radial para el estudio del daño.

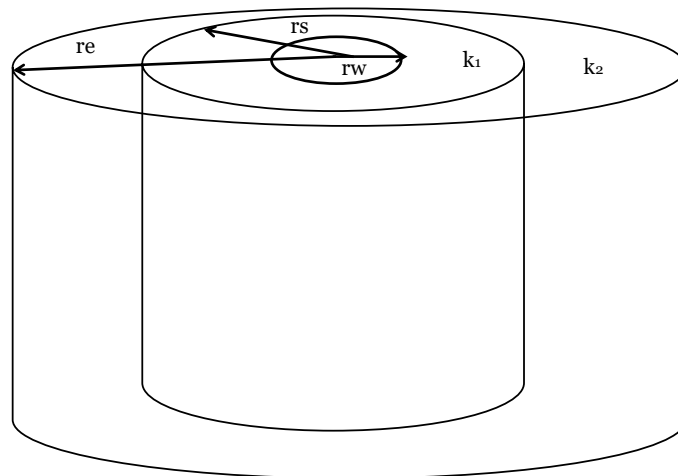


Figura 4.7. Esquema de la zona dañada en un yacimiento con geometría de flujo radial. Al realizar una estimulación ácida se pretende cambiar el valor de la permeabilidad en la zona cercana al pozo con la finalidad de reducir el daño.

Para poder calcular el cambio del daño en el tiempo como consecuencia del cambio en la permeabilidad en la zona dañada se propone el algoritmo siguiente.

- 1) Hallar de las ecuaciones 4.1- 4.4 una solución numérica de la porosidad en coordenadas radiales $\phi = \phi(r, t)$ para condiciones iniciales y de frontera adecuada.
- 2) Evaluar el valor esperado de la porosidad $\langle \phi(r, t) \rangle$ en la zona dañada en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) .

$$\langle \phi(r, t) \rangle = \frac{1}{\pi h (r_s^2 - r_w^2)} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_{r_w}^{r_s} \phi(r, t) r dr d\theta dz$$

- 3) Evaluar la permeabilidad con algún modelo que relacione la permeabilidad con la porosidad. Para este cálculo se usará el modelo de Kozeny-Bourbée.

$$k = k_0 \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^m$$

- 4) Estimar el valor promedio de la permeabilidad en geometría radial del pozo en la zona dañada. Los datos usados en la estimación son los valores de permeabilidad calculados con el modelo de Kozeny- Bourbée.

$$\langle k \rangle = \frac{\ln(r_s/r_w)}{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\ln(r_i/r_{i-1})}{k_i} \right]}$$

- 5) Estimar el daño con la ecuación de Hawkins usando el valor promedio de la permeabilidad en la zona dañada, todo esto para cada valor o paso del tiempo de la solución de la porosidad. Donde se $k_1 = \langle k \rangle$.

$$s = \left(\frac{k_2}{\langle k \rangle} - 1 \right) \log \left(\frac{r_s}{r_w} \right)$$

De la teoría del cálculo sabemos que para estimar el valor esperado de una función escalar $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ se realiza la siguiente integral

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} f dV \quad (4.11)$$

donde V^* es el volumen de integración de interés.

Usando la expresión anterior, el valor esperado de la porosidad en la zona dañada se puede escribir como:

$$\langle \phi(r, t) \rangle = \frac{1}{\pi h (r_s^2 - r_w^2)} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_{r_w}^{r_s} \phi(r, t) r dr d\theta dz \quad (4.12)$$

Al ser la porosidad solo función del radio se puede simplificar como

$$\langle \phi(r, t) \rangle = \frac{2}{(r_s^2 - r_w^2)} \int_{r_w}^{r_s} \phi(r, t) r dr \quad (4.13)$$

La siguiente figura muestra un esquema sobre el cálculo de la porosidad promedio en la zona de daño.

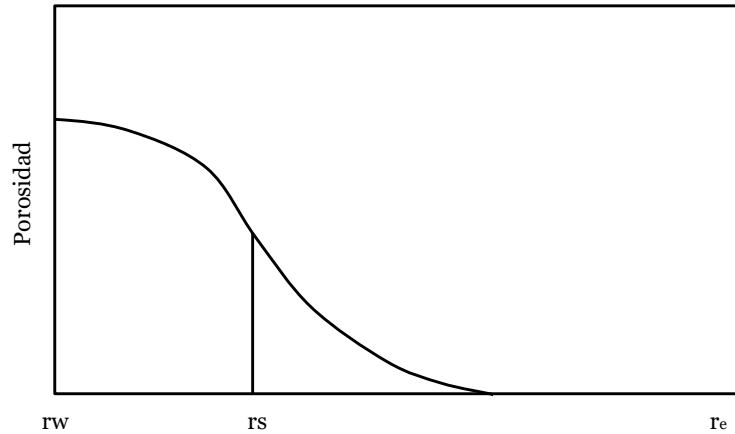


Figura 4.8. Esquema para calcular el valor esperado de la porosidad en la zona dañada.

4.3.1 Evaluación numérica del valor esperado de la porosidad en la zona dañada.

Para poder calcular el valor esperado de la porosidad consideraremos dos métodos:

1). Método de Montecarlo: Este método consiste en ver una integral como el valor esperado de una función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ y usando la Ley de los grandes números aproximar esta integral como una suma. En este método debemos realizar un cambio de variable para convertir la integral original en una integral sobre el dominio $[0,1]$ y generar un conjunto de números aleatorios con distribución uniforme donde se evaluara una suma de la función a integrar. Para esto primero debemos generar un polinomio que interpole numéricamente los datos de porosidad, para luego usar el método de Montecarlo. Para este método requerimos tener una representación explícita de la función a integrar.

2). Método de integración por polinomios: Este método consiste en generar una aproximación por polinomios de $\phi(r, t)$ para cada paso del tiempo e integrar de manera directa el polinomio para estimar el valor esperado de la porosidad.

Evaluación por el método de Montecarlo.

Se desea estimar la integral de una función continua $G(x)$ en el intervalo $[0,1]$.

$$I = \int_0^1 G(x)dx \quad (4.14)$$

esta integral se puede ver como el valor esperado de $G(x)$.

$$\int_0^1 G(x)dx = E(G(x)) \quad (4.15)$$

Sea x_1, x_2, \dots, x_M un conjunto de variables aleatorias independientes y con distribución uniforme $X \sim U(0,1)$. Con base en la Ley de los grandes números $\int_0^1 G(x)dx = E(G(x))$ se puede aproximar como:

$$\int_0^1 G(x)dx \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M G(x_i) \quad (4.16)$$

Para el caso general de evaluar integrales de la forma $I = \int_a^b G(x)dx$ se puede realizar el cambio de variable $x = a + (b - a)u$, y convertirla en $\int_a^b G(x)dx = \int_0^1 G(a + (b - a)u)(b - a)du$. Usando el método de Montecarlo se tiene:

$$\int_a^b G(x)dx \approx \frac{b-a}{M} \sum_{i=1}^M G(a + (b - a)u) \quad (4.17)$$

Aplicando el resultado anterior y suponiendo que se cuenta con una representación funcional de $\emptyset(r, t)$ (aproximación por polinomios), podemos estimar el valor esperado de la porosidad como:

$$\langle \emptyset(r, t) \rangle \approx \frac{2}{(r_s^2 - r_w^2)} \sum_{i=1}^M \emptyset(r_w + (r_s - r_w)u_i, t)(r_w + (r_s - r_w)u_i) \quad (4.18)$$

donde $u_i \sim U(0,1)$.

Evaluación por integración directa.

Sea $P(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + \dots + a_Nr^N$ un polinomio que ajusta $\emptyset(r, t)$ para cada paso del tiempo. Este polinomio puede determinarse por el método de mínimos cuadrados para cada paso de tiempo de interés.

La expresión para este polinomio es:

$$P(r) = \sum_{k=1}^N a_k r^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.19)$$

Sustituyendo este polinomio en lugar de la porosidad en $\langle \phi(r, t) \rangle = \frac{2}{(r_s^2 - r_w^2)} \int_{r_w}^{r_s} \phi(r, t) r dr$ se tiene la siguiente integral $\langle \phi(r, t) \rangle = \frac{2}{(r_s^2 - r_w^2)} \int_{r_w}^{r_s} \sum_{k=1}^N a_k r^{k-1} r dr$.

Evaluando finalmente el valor esperado de la porosidad toma la forma:

$$\langle \phi(r, t) \rangle \approx \frac{2}{(r_s^2 - r_w^2)} \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{k+1} (r_s^{k+1} - r_w^{k+1}) \quad (4.20)$$

4.4 Evolución del daño en el modelo 2D cartesiano

Sabemos que el daño para el caso cartesiano se puede expresar como

$$s = \frac{(x_s - L_x)^2}{A} \left(\frac{k_2}{k_1} - 1 \right) \quad (4.21)$$

Por lo tanto en un proceso de disolución de carbonatos debemos poder evaluar el cambio de la permeabilidad en la zona 1 y de esta manera observar el cambio del daño en el tiempo. Proponemos el siguiente procedimiento para la evaluación del daño en el tiempo para un modelo de disolución de carbonatos en 2D.

- 1) Hallar de las ecuaciones 4.1- 4.4 una solución numérica 2D cartesiana de la porosidad $\phi = \phi(x, y, t)$ para condiciones iniciales y de frontera adecuada.
- 2) Evaluar el valor esperado de la porosidad $\langle \phi(x, y, t) \rangle$ en la zona dañada en coordenadas cartesianas (x, y, z) .

$$\langle \phi(x, y, t) \rangle = \frac{1}{x_s L_y L_z} \int_0^{x_s} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \phi(x, y, t) dz dy dx$$

- 3) Evaluar el cambio de permeabilidad con algún modelo que relacione la permeabilidad con la porosidad. Para este cálculo se usará el modelo de Kozeny-Bourbié.

$$k = k_0 \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^m$$

- 4) Estimar el valor promedio de la permeabilidad para la zona dañada. Se calcula primero la permeabilidad para capas horizontales

$$K_j = \frac{L_x}{\Delta x \sum_{i=1}^{N_x} \frac{1}{k_{ij}}}$$

y luego la permeabilidad para capas verticales

$$\langle k \rangle = \frac{\sum_{j=1}^{N_y} K_j \Delta y}{L_y}$$

- 5) Estimar el valor del daño usando como permeabilidad $k_1 = \langle k \rangle$, en la zona dañada.

$$s = \frac{(x_s - L_x)^2}{L_y L_z} \left(\frac{k_2}{\langle k \rangle} - 1 \right)$$

El valor esperado de la porosidad se puede calcular como:

$$\langle \phi(x, y, t) \rangle = \frac{1}{x_s L_y L_z} \int_0^{x_s} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \phi(x, y, t) dz dy dx \quad (4.22)$$

Integrando esta expresión con respecto de z se tiene

$$\langle \phi(x, y, t) \rangle = \frac{1}{x_s L_y} \int_0^{x_s} \int_0^{L_y} \phi(x, y, t) dy dx \quad (4.23)$$

Para evaluar este integral de manera numérica usaremos la regla del trapecio dos veces. La regla del trapecio nos dice que si tenemos una función continua $f(x)$ en $[a, b]$, el área bajo la curva de esta función se puede evaluar como:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{\Delta x}{2} [f(a) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(a + j\Delta x) + f(b)] \quad (4.24)$$

Para aplicar la regla del trapecio a nuestra estimación del valor esperado de la porosidad definamos la función

$$G(x, t) = \frac{1}{x_s L_y} \int_0^{L_y} \phi(x, y, t) dy \quad (4.25)$$

Entonces el valor esperado de la porosidad se puede escribir como

$$\langle \phi(x, y, t) \rangle = \int_0^{x_s} G(x, t) dx \quad (4.26)$$

Esta idea consiste en separar las dos integrales para poder aplicar dos veces el método del trapecio, primero en eje y y luego en el eje x . Definamos los intervalos de los trapecios

$$\Delta y = \frac{L_y}{l_{max}} \quad (4.27)$$

$$\Delta x = \frac{x_s}{N} \quad (4.28)$$

Por lo tanto el valor esperado se puede calcular como:

$$\begin{aligned} \langle \phi(x, y, t) \rangle &= \frac{\Delta x}{2} (G(0, t) + G(x_s, t)) + \frac{\Delta x \Delta y}{2x_s L_y} \sum_{i=1}^{N-1} (\phi(i\Delta x, 0, t) + \phi(i\Delta x, L_y, t)) + \\ &\frac{\Delta x \Delta y}{x_s L_y} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{l_{max}-1} \phi(i\Delta x, j\Delta y, t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Donde

$$G(0, t) = \frac{\Delta y}{2x_s L_y} (\phi(0, 0, t) + \phi(0, L_y, t)) + \frac{\Delta y}{x_s L_y} \sum_{j=1}^{l_{max}-1} \phi(0, j\Delta y, t) \quad (4.30)$$

$$G(x_s, t) = \frac{\Delta y}{2x_s L_y} (\phi(x_s, 0, t) + \phi(x_s, L_y, t)) + \frac{\Delta y}{x_s L_y} \sum_{j=1}^{l_{max}-1} \phi(x_s, j\Delta y, t) \quad (4.31)$$

4.5 Modelo radial para la disolución de carbonatos (concentración y porosidad acoplada).

Escribiendo las ecuaciones (4.1, 4.2, 4.3 y 4.4) en la dirección r y considerando el coeficiente de difusión constante, el sistema de EDP solo queda acoplado en parámetros de concentración y porosidad como

$$\frac{\partial(\phi C)}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) C + u_r \frac{\partial C}{\partial r} - D_r \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{\phi D_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \alpha C = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\beta \alpha}{\rho_\sigma} C \quad (4.33)$$

Para este caso la velocidad radial es

$$u_r = \frac{q}{2\pi h r} \quad (4.34)$$

donde q es el gasto de inyección.

Con las condiciones iniciales siguientes.

$$C(r, 0) = 0 \quad (4.35)$$

$$\phi(r, 0) = \phi_0(r) \quad (4.36)$$

Donde definimos la distribución de porosidad inicial en dos zonas de porosidad distinta como

$$\phi_0(r) = \begin{cases} \phi_1, r_w \leq r < r_s \\ \phi_2, r_s \leq r \leq r_e \end{cases} \quad (4.37)$$

Las condiciones en la frontera son

$$C(r = r_w, t) = C_0, t > 0 \quad (4.38)$$

$$C(r = r_e, t) = 0, t > 0 \quad (4.39)$$

Las ecuaciones 4.32, 4.33 son un sistema de EDP acopladas, que modelan la concentración de ácido en el medio poroso. La ecuación de concentración al estar acoplada con la ecuación de porosidad se vuelve no lineal, por lo que se resolverá numéricamente por el método de Newton Raphson.

4.6 Modelo 2D cartesiano para la disolución de carbonatos (concentración, porosidad acoplada y flujo en el medio poroso).

En este modelo se consideran las siguientes ecuaciones: Ecuación de concentración del ácido, ecuación de continuidad, Ley de Darcy, ecuación de balance de masa para la parte del sólido y una expresión que relaciona la porosidad con la permeabilidad.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} C + \phi \frac{\partial C}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) C + u_x \frac{\partial C}{\partial x} + u_y \frac{\partial C}{\partial y} - D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} - D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} - D_x \phi \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D_y \phi \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \alpha C = 0 \quad (4.40)$$

$$u_x = - \frac{K_x(\phi)}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.41)$$

$$u_y = - \frac{K_y(\phi)}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\beta \alpha}{\rho \sigma} C \quad (4.44)$$

Las permeabilidades usando la ecuación de Kozeny se escriben como:

$$K_x(\phi) = K_{0x}(x, y) \left(\frac{\phi(x, y, t)}{\phi_0(x, y)} \right)^{m_1} \quad (4.45)$$

$$K_y(\phi) = K_{0y}(x, y) \left(\frac{\phi(x, y, t)}{\phi_0(x, y)} \right)^{m_2} \quad (4.46)$$

En este modelo la densidad del fluido es constante por lo que los efectos de la compresibilidad del ácido no se consideran.

Las condiciones iniciales y de frontera para este modelo son:

Condiciones iniciales

$$C(x, y, 0) = 0 \quad (4.47)$$

$$\phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y) \quad (4.48)$$

Las condiciones de frontera en x para la concentración son:

$$C(0, y, t) = C_0, \quad t > 0 \quad (4.49)$$

$$C(L_x, y, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.50)$$

Las condiciones de frontera en y para la concentración son:

$$\frac{\partial C(x, 0, t)}{\partial y} = 0, \quad t > 0 \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial C(x, L_y, t)}{\partial y} = 0, \quad t > 0 \quad (4.52)$$

Las condiciones de frontera en x para la presión son:

$$P(0, y, t) = P_{wf}, \quad t > 0 \quad (4.53)$$

$$P(L_x, y, t) = P_{ws}, t > 0 \quad (4.54)$$

Las condiciones de frontera en y para la presión son:

$$\frac{\partial P(x, 0, t)}{\partial y} = 0, t > 0 \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial P(x, L_y, t)}{\partial y} = 0, t > 0 \quad (4.56)$$

Usando la ecuación de continuidad, la ecuación de concentración puede escribirse como:

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} + u_x \frac{\partial C}{\partial x} + u_y \frac{\partial C}{\partial y} - D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} - D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} - D_x \phi \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D_y \phi \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \alpha C = 0 \quad (4.57)$$

definimos ahora las expresiones siguientes

$$g_x(x, y, t) = u_x - D_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.58)$$

$$g_y(x, y, t) = u_y - D_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4.59)$$

Por lo tanto 4.57 se transforma en

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} + g_x \frac{\partial C}{\partial x} + g_y \frac{\partial C}{\partial y} - D_x \phi \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D_y \phi \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \alpha C = 0 \quad (4.60)$$

Calculemos ahora las derivadas con respecto a x e y de las velocidades de Darcy .

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial K_x}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{K_x}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{K_y}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \quad (4.62)$$

donde:

$$\frac{\partial K_x}{\partial x} = \frac{\partial K_{0x}}{\partial x} \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{m_1} + K_{0x} m_1 \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{m_1-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial K_y}{\partial y} = \frac{\partial K_{0y}}{\partial y} \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{m_2} + K_{0y} m_2 \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{m_2-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) \quad (4.64)$$

Usando la ecuación de porosidad, la ecuación de continuidad se puede escribir:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial K_x}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{K_x}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{K_y}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \lambda C \quad (4.65)$$

Esta es la ecuación de la presión acoplada con la ecuación de concentración de ácido.

donde $\lambda = \frac{\beta\alpha}{\rho\sigma}$.

Capítulo V. Método numérico para la solución del modelo de disolución de carbonatos.

5.1 Diferencias finitas en ecuaciones diferenciales parciales

La idea de resolver numéricamente una EDP o EDO consiste sustituir las derivadas continuas de la ecuación diferencial por aproximaciones discretas de la misma. De esta manera un problema de ecuaciones diferenciales se convierte en un problema de sistema de ecuaciones lineales o no lineales de manera simultánea, donde la solución de ese sistema de ecuaciones nos da el valor de la variable incógnita para puntos discretos del dominio de solución y para varios tiempos de interés.

5.1.1 Serie de Taylor (Diferencias progresivas, regresivas y centrales)

Sea $f(x)$ una función definida en (a, b) que tiene hasta la k –ésima derivada, entonces la expansión de $f(x)$ usando series de Taylor alrededor del punto x_i contenido en el intervalo (a, b) será.

$$f(x) = f(x_i) + \frac{(x-x_i)}{1!} \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_i} + \frac{(x-x_i)^2}{2!} \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x_i} + \dots + \frac{(x-x_i)^k}{k!} \left(\frac{d^k f}{dx^k}\right)_{\epsilon} \quad (5.1)$$

donde $\epsilon = x_i + \theta(x - x_i)$ y $0 < \theta < 1$.

Esta expresión es una aproximación mediante polinomios de la función $f(x)$ alrededor de x_i .

Si consideramos $k = 2$ y $x = x_i + \Delta x$ tenemos que (5.1) adquiere la forma

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \frac{(\Delta x)}{1!} \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_i} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{\epsilon_p} \quad (5.2)$$

de esta ecuación obtenemos la primer aproximación de la derivada

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{\epsilon_p}$$

Si despreciamos el término de la segunda derivada tenemos la aproximación de la primera derivada mediante diferencias progresivas.

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_i} = \frac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i)}{\Delta x} \quad (5.3)$$

o en notación de índices como

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x}, \text{ diferencias progresivas} \quad (5.4)$$

Considerando $k = 2$ y $x = x_i - \Delta x$ tenemos que (5.1) adquiere la forma

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \frac{(\Delta x)}{1!} \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_i} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{\epsilon_p}$$

despejando la primera derivada se tiene

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_i} = \frac{f(x_i)-f(x_i-\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2!} \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{\epsilon_p}$$

por lo tanto despreciando el término de segundo orden en la derivada se tiene la aproximación de la primera derivada en diferencias regresivas

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_i} = \frac{f(x_i)-f(x_i-\Delta x)}{\Delta x} \quad (5.5)$$

$$f'(x_i) = \frac{f_i-f_{i-1}}{\Delta x}, \text{ diferencias regresivas} \quad (5.6)$$

Si consideramos $k = 3$, y sumamos los desarrollos de $f(x_i - \Delta x)$ y $f(x_i + \Delta x)$ tenemos que la primera derivada se puede aproximar como

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_i} = \frac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i-\Delta x)}{2\Delta x} \quad (5.7)$$

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta x}, \text{ diferencias centrales} \quad (5.8)$$

De forma análoga es posible construir diferencias finitas para derivadas de ordenes mayores a 1. Por ejemplo para el caso de la aproximación en diferencias finitas centrales para la segunda derivada es

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i-\Delta x)-2f(x_i)+f(x_i+\Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (5.9)$$

Todo este proceso puede extenderse de manera muy simple a expresiones en diferencias finitas de derivadas parciales usadas para simulaciones 2D y 3D.

5.2 Discretización de modelo radial para un proceso de disolución (concentración y porosidad acoplada).

Para este modelo presentamos una solución numérica de la ecuación de difusión acoplada con la ecuación de porosidad en la coordenada radial.

El modelo es

$$\lambda C^2 + \phi \frac{\partial C}{\partial t} + f_r(r) \frac{\partial C}{\partial r} - \phi D_r \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \alpha C = 0 \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \lambda C \quad (5.11)$$

Donde:

$$\lambda = \frac{\beta \alpha}{\rho \sigma} \quad (5.12)$$

$$f_r(r) = u_r - D_r \frac{\partial \phi}{\partial r} - \phi \frac{D_r}{r} \quad (5.13)$$

Proponemos la siguiente distribución escalón para modelar el perfil de porosidad inicial.

$$\phi_0(r) = \begin{cases} \phi_1, & r \in [r_w, r_s) \\ \phi_2, & r \in [r_s, r_e] \end{cases} \quad (5.14)$$

Las porosidades en la zona 1 y 2 pueden ser de forma aleatoria. Las condiciones iniciales del modelo son

$$C(r, 0) = 0 \quad (5.15)$$

$$\phi(r, 0) = \phi_0(r) \quad (5.16)$$

Las condiciones de frontera:

$$1. \quad C(r = r_w, t) = C_{oi}, \quad t > 0 \quad (5.17)$$

$$2. \quad C(r = r_e, t) = 0, \quad t > 0 \quad (5.18)$$

Definamos los siguientes parámetros de discretización

Δt Intervalos de tiempos de la simulación.

l_{max} número de nodos de la malla en x o en r .

$\Delta r = \frac{r_e - r_w}{l_{max}}$ Intervalos de r en la simulación

La manera de discretizar en esta tesis es la siguiente; las derivadas en el tiempo se discretizan como derivadas hacia adelante, las derivadas primeras y segundas en el espacio se discretizan con derivadas centrales. Para discretizar 5.10 se usan las siguientes aproximaciones.

$$\frac{\partial C}{\partial t} \approx \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{C_{i+1}^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r} + \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta r} \right) \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{(\Delta r)^2} \right) \quad (5.21)$$

$$f_r(r) = u_r - D_r \frac{\partial \phi}{\partial r} - \phi \frac{D_r}{r} \approx u_{ri} - D_r \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta r} - \phi_i^n \frac{D_r}{r_i} \quad (5.22)$$

$$\alpha C \approx \alpha C_i^{n+1} \quad (5.23)$$

La ecuación de concentración queda como

$$\lambda C_i^{2(n+1)} + \phi_i^{n+1} \left(\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} \right) + \frac{f_{ri}}{2} \left(\frac{C_{i+1}^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{2\Delta r} + \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta r} \right) - D_r \phi_i^n \frac{1}{2} \left(\frac{C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{(\Delta r)^2} \right) + \alpha C_i^{n+1} = 0 \quad (5.24)$$

Agrupando términos se tiene

$$a_i C_{i-1}^{n+1} + b_i (C_i^{n+1}) C_i^{n+1} + c_i C_{i+1}^{n+1} + d_i = 0 \quad (5.25)$$

Donde:

$$d_i = -\frac{\phi_i^n C_i^n}{\Delta t} + \frac{f_{ri}}{4\Delta r} (C_{i+1}^n - C_{i-1}^n) - \frac{\phi_i^n D_r}{2\Delta r^2} (C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) \quad (5.26)$$

$$a_i = -\frac{f_{ri}}{4\Delta r} - \frac{\phi_i^n D_r}{2\Delta r^2} \quad (5.27)$$

$$b_i = 2\lambda C_i^{n+1} - \lambda C_i^n + \frac{\phi_i^n}{\Delta t} + \frac{\phi_i^n D_r}{\Delta r^2} + \alpha \quad (5.28)$$

$$c_i = \frac{f_{ri}}{4\Delta r} - \frac{\phi_i^n D_r}{2\Delta r^2} \quad (5.29)$$

Entonces la discretización de la ecuación de concentración queda como un sistema de ecuaciones que tiene como incógnitas, los valores de las concentraciones en cada punto de la malla.

Al sistema de ecuaciones 5.25 deben acoplarse las condiciones de frontera 5.17-5.18

$$C_0^{n+1} = C_{oi}, \text{ para } n > 0 \quad (5.30)$$

$$C_{Imax}^{n+1} = 0, \text{ para } n > 0 \quad (5.31)$$

Sea $m = Imax - 1$, si $i = 1$ la primer ecuación de nuestro sistema se transforma en

$$a_1 C_0^{n+1} + b_1 (C_1^{n+1}) C_1^{n+1} + c_1 C_2^{n+1} + d_1 = 0 \quad (5.32)$$

Si definimos $d'_1 = d_1 + a_1 C_0^{n+1}$, 5.25 se convierte en

$$b_1 (C_1^{n+1}) C_1^{n+1} + c_1 C_2^{n+1} + d'_1 = 0 \quad (5.33)$$

si $i = m$ nuestro sistema se transforma en

$$a_m C_{m-1}^{n+1} + b_m (C_m^{n+1}) C_m^{n+1} + c_m C_{m+1}^{n+1} + d_m = 0 \quad (5.34)$$

Si definimos $d'_m = d_m + c_m C_{m+1}^{n+1}$, 5.25 se convierte en

$$a_m C_{m-1}^{n+1} + b_m (C_m^{n+1}) C_m^{n+1} + d'_m = 0 \quad (5.35)$$

Por lo tanto los coeficientes modificados quedan como

$$a'_1 = 0, \quad a'_i = a_i \text{ para } i = 2, 3, \dots, m \quad (5.36)$$

$$d'_1 = d_1 + a_1 C_0^{n+1}, \quad d'_i = d_i \text{ para } i = 2, 3, \dots, m-1, \quad d'_m = d_m + c_m C_{m+1}^{n+1} \quad (5.37)$$

$$c'_i = c_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, m-1, \quad c'_m = 0 \quad (5.38)$$

Entonces el sistema no lineal se transforma

$$a'_i C_{i-1}^{n+1} + b_i (C_i^{n+1}) C_i^{n+1} + c'_i C_{i+1}^{n+1} + d'_i = 0 \quad (5.39)$$

Este sistema representa un sistema de ecuaciones no lineales que debe resolverse de manera simultánea para las concentraciones en los puntos de la malla. En esta tesis usaremos el método de Newton Raphson para resolver este sistema. La ecuación 5.39 tiene ahora toda la información de las condiciones iniciales y de frontera del modelo.

5.2.1 Solución por el método de Newton Raphson.

El método de Newton o también conocido como el método de Newton-Raphson fue escrito por Isaac Newton y publicado por primera vez en 1685 en *A Treatise of Algebra both Historical and Practical*.

En 1690, Joseph Raphson publicó una descripción simplificada del método de Newton en *Analysis a equationum universalis*, que al igual que Newton, Raphson describe el método restringido al uso de polinomios pero incluye una secuencia sucesiva de aproximaciones de x_n en vez de una complicada secuencia de polinomios planteados por Newton. Posteriormente en 1740, Thomas Simpson plantea el método de Newton como un método iterativo para resolver ecuaciones no lineales usando cálculo de fluxiones, en la misma publicación Simpson da una generalización de la solución a sistemas de dos ecuaciones donde se da cuenta que el método de Newton puede ser usado para resolver problemas de optimización haciendo el gradiente cero.

Sea $\mathbf{F}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, aproximemos esta función a primer orden en serie de Taylor como $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. En esta aproximación busquemos un $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ talque $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx 0$, por lo tanto se debe cumplir:

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \quad (5.40)$$

Donde

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad (5.41)$$

Es la matriz Jacobiana evaluada en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Haciendo $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ en términos generales el método iterativo de Newton Raphson consiste en:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}^k, k = 0 \text{ primera estimación} \quad (5.42)$$

k – ésima iteración

$$\frac{\partial F_i(\mathbf{v}^k)}{\partial x_j} (\delta v_j)^{k+1} = -F_i(\mathbf{v}^k), \text{ para } j = 1, 2, \dots, n, \text{ y } i = 1, 2, \dots, n \quad (5.43)$$

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k + (\delta v_j)^{k+1}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n \quad (5.44)$$

Este algoritmo se realiza para $k = 0, 1, 2, 3 \dots l$, hasta que la solución converge en norma euclidiana $\|\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k\| < \epsilon$, para un ϵ dado.

Para aplicar este método en nuestro sistema de ecuaciones definamos una función residuos como

$$F_i(C_{i-1}^{n+1}, C_i^{n+1}, C_{i+1}^{n+1}) = a'_i C_{i-1}^{n+1} + b_i (C_i^{n+1}) C_i^{n+1} + c'_i C_{i+1}^{n+1} + d'_i = 0 \quad (5.45)$$

Expandiendo 5.45 en serie de Taylor a primer orden tenemos

$$F_i \approx F_i^0 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial C_{i-1}^{n+1}} \right)^0 \delta C_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial C_i^{n+1}} \right)^0 \delta C_i^{n+1} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial C_{i+1}^{n+1}} \right)^0 \delta C_{i+1}^{n+1} \quad (5.46)$$

Realizando una analogía con 5.42 y 5.43 el método de Newton para nuestro modelo será.

Se inicia con la primera estimación

$$\mathbf{C} = \mathbf{v}^k, k = 0 \text{ primera estimación} \quad (5.47)$$

Luego se procede a realizar

k – ésima iteración

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial C_{i-1}^{n+1}} \right)^k \delta v_{i-1}^{n+1, k+1} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial C_i^{n+1}} \right)^k \delta v_i^{n+1, k+1} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial C_{i+1}^{n+1}} \right)^k \delta v_{i+1}^{n+1, k+1} = -F_i^k, \text{ para } k = 0, 1, 2.. \quad (5.48)$$

Este sistema matricial tridiagonal debe resolverse para cada $k = 0, 1, 2..$ hasta alcanzar que se cumpla $\|\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k\| < \epsilon$, donde la estimación se va actualizando como:

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k + \delta \mathbf{v}^{k+1} \quad (5.49)$$

En esta expresión las derivadas de 5.48 y la función de residuos F_i^k van evaluadas en el vector \mathbf{v}^k .

Las derivadas del sistema 5.48 quedan como:

$$\frac{\partial F_i}{\partial c_{i-1}^{n+1}} = a'_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial c_i^{n+1}} = b'_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \quad (5.51)$$

Donde

$$b'_i = \frac{4\Delta t \beta \alpha}{\rho_\sigma} C_i^{n+1} + \phi_i^n - \frac{\Delta t \beta \alpha}{\rho_\sigma} C_i^n + 2l_2 + l_3 \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial c_{i+1}^{n+1}} = c'_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \quad (5.53)$$

Entonces el sistema a resolver de nuevo es un sistema tridiagonal de la forma

$$a_i'^k \delta v_{i-1}^{n+1, k+1} + b_i'^k \delta v_i^{n+1, k+1} + c_i'^k \delta v_{i+1}^{n+1, k+1} = -F_i^k, \text{ para } k = 1, 2, \dots \quad (5.54)$$

Haciendo $m = I_{max} - 1$ este sistema se puede reescribir como

$$\begin{pmatrix} b'_1 & c'_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 & 0 & \dots & \\ 0 & a'_3 & b'_3 & c'_3 & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a'_{m-1} & b'_{m-1} & c'_{m-1} \\ & & & a'_m & b'_m & \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \delta C_1^{n+1} \\ \delta C_2^{n+1} \\ \delta C_3^{n+1} \\ \vdots \\ \delta C_{m-1}^{n+1} \\ \delta C_m^{n+1} \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ \vdots \\ -F_{m-1} \\ -F_m \end{pmatrix}^k \quad (5.55)$$

El sistema (5.55) es un sistema tridiagonal y puede resolverse por el algoritmo de Thomas de la manera siguiente.

Renombramos el sistema de la siguiente manera

$$d_1^* = -F_1$$

$$d_2^* = -F_2$$

⋮

$$d_{m-1}^* = -F_{m-1}$$

$$d_m^* = -F_m$$

Entonces el método de Thomas consiste en

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i}, \text{ si } i = 1 \quad (5.56)$$

$$c'_i = \frac{c_i}{b_i - c'_{i-1}a_i}, \text{ si } i = 2, 3, \dots, m - 1 \quad (5.57)$$

$$d'_i = \frac{d_i^*}{b_i}, \text{ si } i = 1 \quad (5.58)$$

$$d'_i = \frac{d_i^* - d'_{i-1}a_i}{b_i - c'_{i-1}a_i}, \text{ si } i = 2, 3, \dots, m \quad (5.59)$$

A continuación se tiene la solución por sustitución hacia atrás como:

$$C_m = d'_m \quad (5.60)$$

$$C_i = d'_i - c'_i C_{i+1}, \text{ con } i = m - 1, m - 2, \dots, 1 \quad (5.61)$$

5.2.2 Resultados de simulación de porosidad y concentración

En esta sección se presentan los resultados de las simulaciones realizadas para el modelo radial de la disolución de carbonatos (tabla 5.1 y figuras 5.1 a 5.10).

Se realizó un programa en Visual Basic de Visual Studio.Net, con la finalidad de simular numéricamente los casos radial y cartesiano 2D del fenómeno de disolución de carbonatos.

Los parámetros involucrados en estos cálculos son los mostrados en la siguiente tabla 5.1.

Tabla 5.1. Nomenclatura de los parámetros usados en la simulación.

Parámetros del modelo	
C	Concentración del ácido
Porosidad 1	Porosidad en la zona de daño
Porosidad 2	Porosidad en la zona no dañada
rs	Radio de la zona de daño
q	Gasto de inyección
alfa	Coefficiente de transferencia de masa
Dr	Coefficiente de difusión radial
rw	Radio del pozo
h	Espesor de la formación
re	Radio del yacimiento
K1	Permeabilidad en la zona dañada
K2	Permeabilidad en la zona no dañada
m_Kozeny	Coefficiente de Kozeny
Beta	Poder de disolución
D.Roca	Densidad de la roca

Tabla 5.2. En esta tabla se presentan los datos usados en la simulación para un modelo de disolución de carbonatos en flujo radial. El tiempo de simulación es de 5 minutos.

Datos del modelo Radial					
C(kg/m ³)	Porosidad 1	Porosidad 2	rs(m)	q(bpm)	alfa (1/s)
150	0.05	0.1	0.5	10.0	3.00E-03
Dr	rw(m)	h(m)	re(m)	K1(md)	k2(md)
2.00E-09	0.1	10	5	50	100
m_Kozeny	Beta	D. Roca(kg/m ³)			
0.2	0.5	2160			

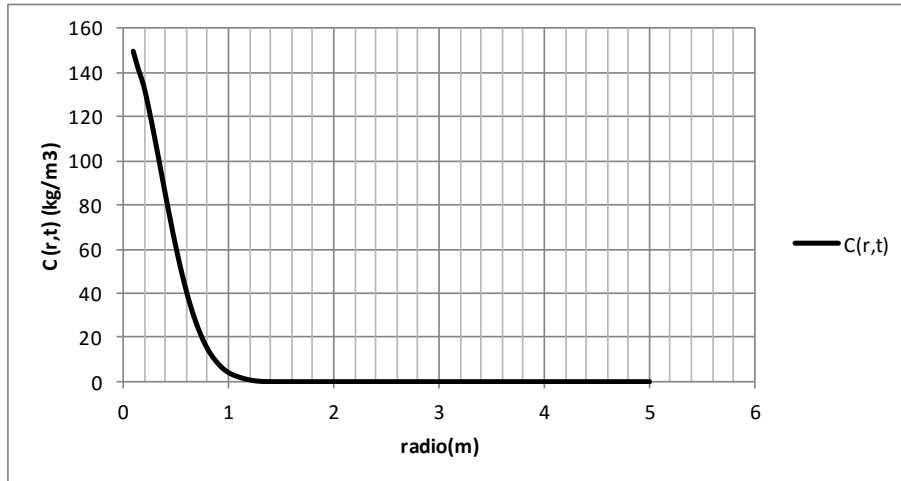


Figura 5.1. En esta gráfica se muestra el comportamiento de la concentración en función del radio. Se puede observar que la concentración tiene un avance máximo del orden de 100cm para luego caer a un valor de cero.

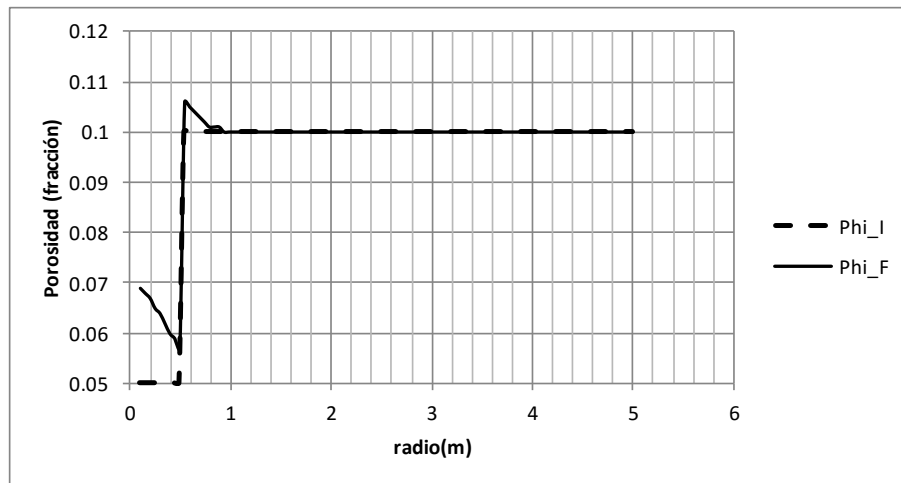


Figura 5.2. En esta figura se muestra el comportamiento de la porosidad en función del radio (línea negra continua), comportamiento de la porosidad inicial (línea negra punteada). En la zona dañada se realiza un ajuste de mínimos cuadrados del perfil de porosidad para la estimación del valor promedio de la porosidad en el tiempo.

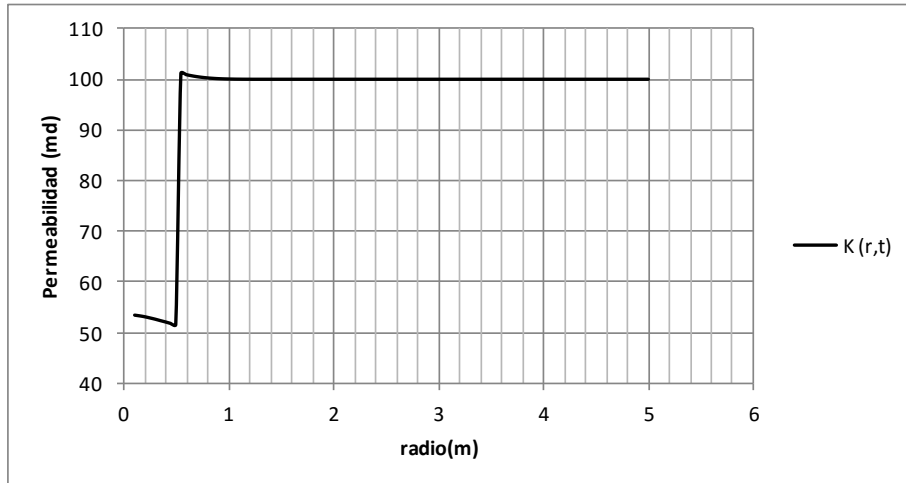


Figura 5.3. En esta gráfica se muestra el valor de la permeabilidad estimado con el modelo de Kozeny y se nota un incremento de 50md a 54md en la zona dañada.

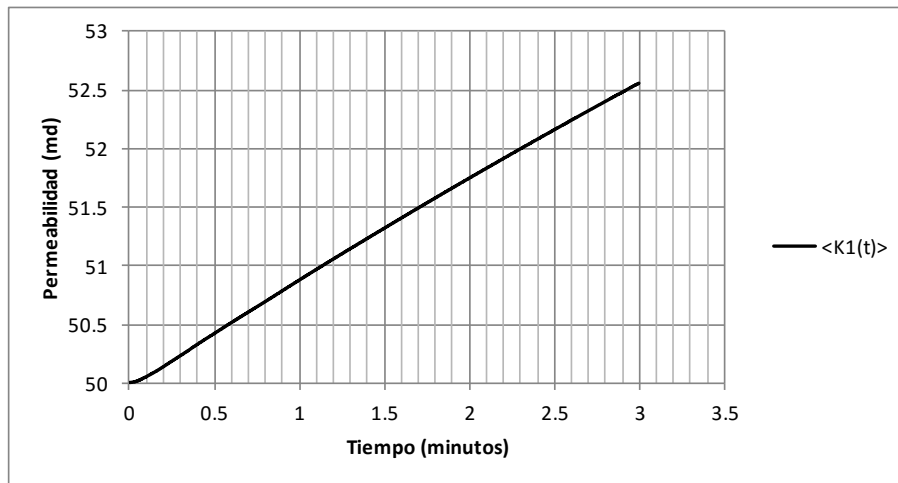


Figura 5.4. En esta figura se muestra el comportamiento de la permeabilidad promedio con el modelo de Kozeny, evaluada en la zona de daño. El valor máximo alcanzado por la permeabilidad en 3 minutos fue de 52.5 md.

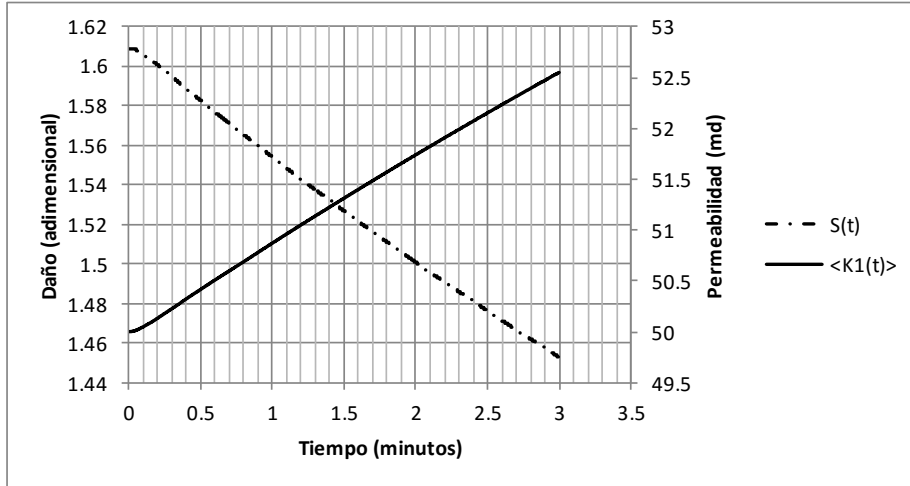


Figura 5.5. En esta figura se muestra el comportamiento del daño en función del tiempo (línea punteada), la línea continua se refiere a la permeabilidad en función del tiempo. Se puede observar que el daño cae en 3 minutos de 1.6 a valores del orden de 1.47.

A continuación se muestra las simulaciones para un tiempo de simulación de 20 minutos.

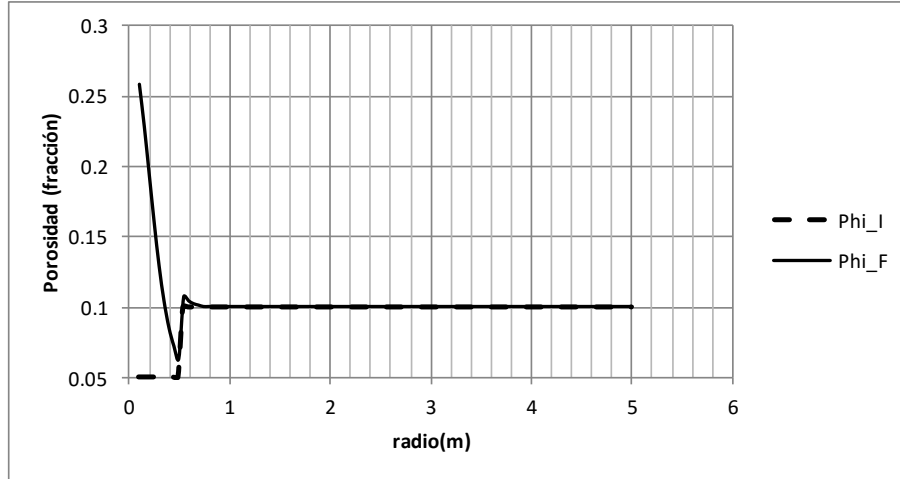


Figura 5.6. En esta figura se muestra el comportamiento de la porosidad en función del radio (línea continua), comportamiento de la porosidad inicial (línea punteada). Se puede observar que la porosidad en la zona de daño ha cambiado de 5% a 26%.

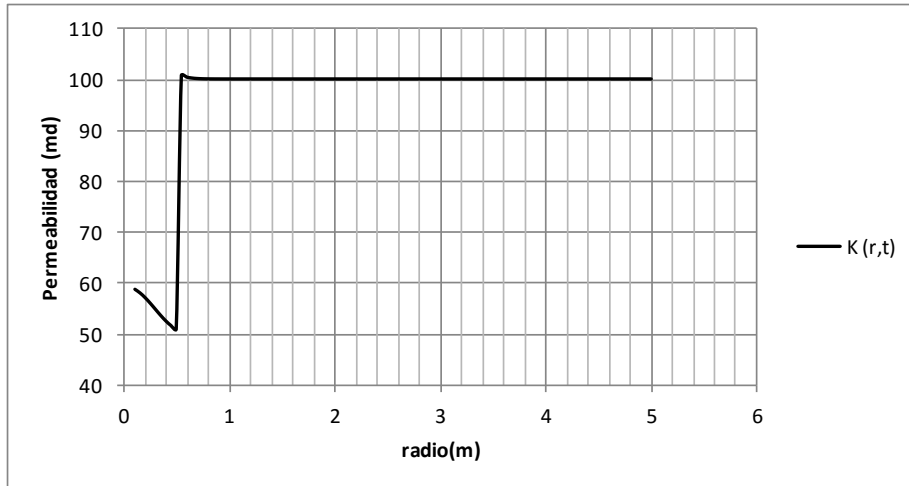


Figura 5.7. En esta gráfica se muestra el cambio de permeabilidad en el modelo de Kozeny. Se puede apreciar que la permeabilidad cambio de 50md a 58md en la zona de daño.

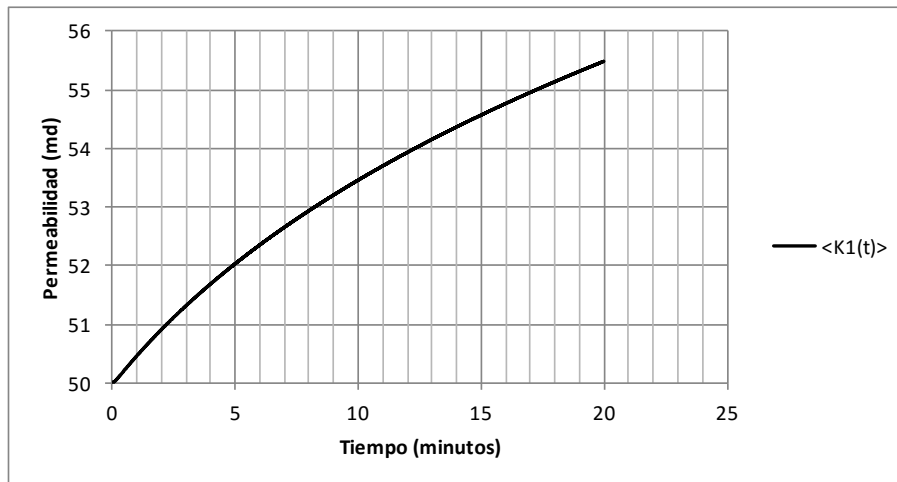


Figura 5.8. En esta figura se muestra el comportamiento de la permeabilidad promedio con el modelo de Kozeny. El valor máximo la permeabilidad en 20 minutos fue de 55.5md.

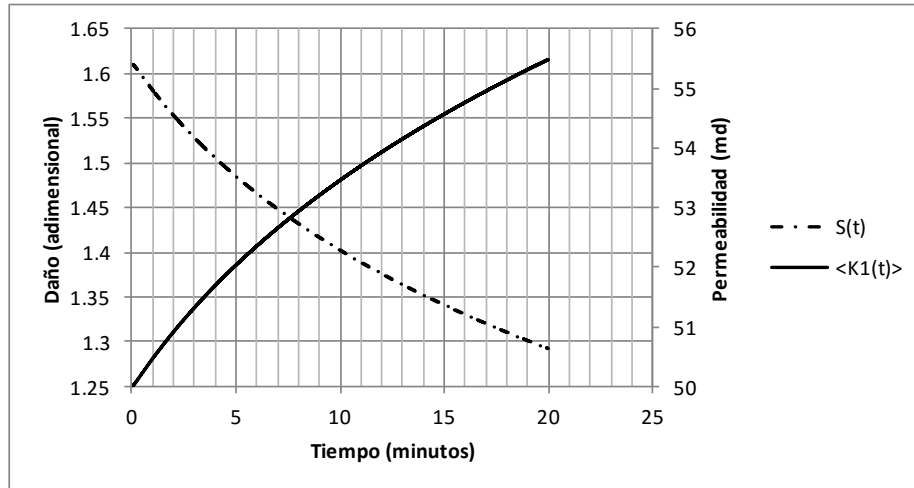


Figura 5.9. En esta figura se muestra el comportamiento del daño en función del tiempo (línea punteada), la línea continua se refiere a la permeabilidad en la zona de daño en función del tiempo. Se puede observar que el daño cae en 20 minutos de 1.6 a valores del orden de 1.3.

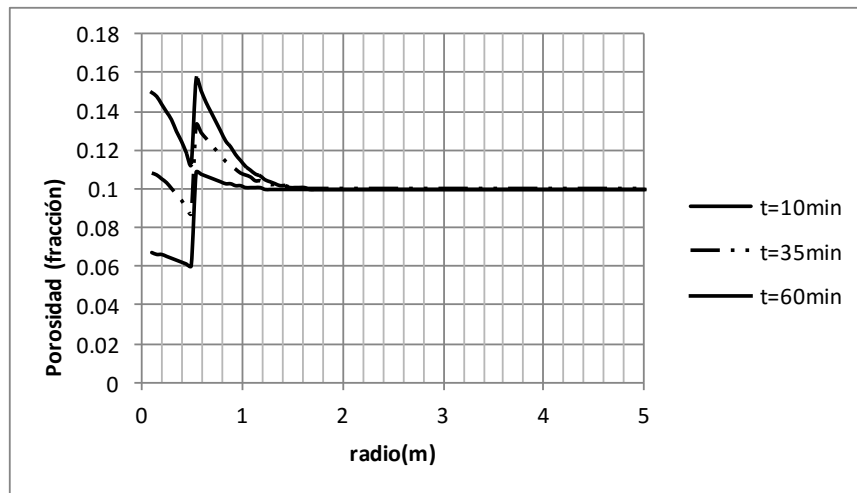


Figura 5.10. En esta figura se muestra el comportamiento de la porosidad en función radio para tiempos de simulación de 10min, 35min y 60min. El coeficiente de transferencia para esta simulación es de $8 \times 10^{-4} \left(\frac{1}{s}\right)$.

5.3 Discretización en diferencias finitas del modelo de disolución de carbonatos en 2D (modelo acoplado de concentración, porosidad y flujo en el medio poroso.)

5.3.1 Discretización de la ecuación de la presión.

Discretizando la ecuación de presión 4.65 al tiempo n se tiene:

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial K_x}{\partial x} \right)_{i,j} \frac{(P_{i+1,j} - P_{i-1,j})}{2\Delta x} + \frac{K_{xi,j}}{\mu} \frac{(P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j})}{\Delta x^2} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial K_y}{\partial y} \right)_{i,j} \frac{(P_{i,j+1} - P_{i,j-1})}{2\Delta y} + \frac{K_{yi,j}}{\mu} \frac{(P_{i,j+1} - 2P_{i,j} + P_{i,j-1})}{\Delta y^2} = \lambda C_{i,j}^n \quad (5.62)$$

Agrupando términos esta ecuación se puede reescribir como:

$$a_{pi,j} P_{i,j-1} + b_{pi,j} P_{i-1,j} + c_{pi,j} P_{i,j} + d_{pi,j} P_{i+1,j} + e_{pi,j} P_{i,j+1} + q_{pi,j} = 0 \quad (5.63)$$

donde:

$$\left(\frac{\partial K_x}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{(K_{0xi+1,j} - K_{0xi-1,j})}{2\Delta x} \left(\frac{\phi_{i,j}^n}{\phi_{0i,j}} \right)^{m_1} + K_{0xi,j} m_1 \left(\frac{\phi_{i,j}^n}{\phi_{0i,j}} \right)^{m_1-1} \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{\phi_{i+1,j}^n}{\phi_{0i+1,j}} - \frac{\phi_{i-1,j}^n}{\phi_{0i-1,j}} \right) \quad (5.64)$$

$$\left(\frac{\partial K_y}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{(K_{0yi,j+1} - K_{0yi,j-1})}{2\Delta y} \left(\frac{\phi_{i,j}^n}{\phi_{0i,j}} \right)^{m_2} + K_{0yi,j} m_2 \left(\frac{\phi_{i,j}^n}{\phi_{0i,j}} \right)^{m_2-1} \frac{1}{2\Delta y} \left(\frac{\phi_{i,j+1}^n}{\phi_{0i,j+1}} - \frac{\phi_{i,j-1}^n}{\phi_{0i,j-1}} \right) \quad (5.65)$$

$$a_{pi,j} = -\frac{1}{2\mu\Delta y} \left(\frac{\partial K_y}{\partial y} \right)_{i,j} + \frac{K_{yi,j}}{\mu\Delta y^2} \quad (5.66)$$

$$b_{pi,j} = -\frac{1}{2\mu\Delta x} \left(\frac{\partial K_x}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{K_{xi,j}}{\mu\Delta x^2} \quad (5.67)$$

$$c_{pi,j} = -\frac{2K_{xi,j}}{\Delta x^2 \mu} - \frac{2K_{yi,j}}{\Delta y^2 \mu} \quad (5.68)$$

$$d_{pi,j} = \frac{1}{2\mu\Delta x} \left(\frac{\partial K_x}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{K_{xi,j}}{\mu\Delta x^2} \quad (5.69)$$

$$e_{pi,j} = \frac{1}{2\mu\Delta y} \left(\frac{\partial K_y}{\partial y} \right)_{i,j} + \frac{K_{yi,j}}{\mu\Delta y^2} \quad (5.70)$$

$$q_{pi,j} = -\lambda C_{i,j}^n \quad (5.71)$$

5.3.2 Discretización de la ecuación de concentración y porosidad.

La ecuación de porosidad se discretiza como:

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n + \Delta t \lambda C_{i,j}^{n+1} \quad (5.72)$$

Al discretizar la ecuación de la concentración adquiere la forma:

$$\begin{aligned} & \phi_{i,j}^{n+1} \frac{(C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n)}{\Delta t} + u_{xi,j} \frac{1}{2} \left(\frac{C_{i+1,j}^{n+1} - C_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + u_{yi,j} \frac{1}{2} \left(\frac{C_{i,j+1}^{n+1} - C_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} + \frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) - \\ & \frac{D_x}{2} \left(\frac{C_{i+1,j}^{n+1} - 2C_{i,j}^{n+1} + C_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right) - \frac{D_y}{2} \left(\frac{C_{i,j+1}^{n+1} - 2C_{i,j}^{n+1} + C_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + \frac{C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) + \alpha C_{i,j}^{n+1} = \\ & 0 \end{aligned} \quad (5.73)$$

Usando 5.72 y agrupando términos la ecuación de concentración queda finalmente

$$a_{ci,j} C_{i,j-1} + b_{ci,j} C_{i-1,j} + c_{ci,j} C_{i,j} + d_{ci,j} C_{i+1,j} + e_{ci,j} C_{i,j+1} + q_{ci,j} = 0 \quad (5.74)$$

donde los coeficientes de esta expresión son:

$$a_{ci,j} = -\frac{u_{yi,j}}{4\Delta y} - \frac{D_y}{2\Delta y^2} \quad (5.75)$$

$$b_{ci,j} = -\frac{u_{xi,j}}{4\Delta x} - \frac{D_x}{2\Delta x^2} \quad (5.76)$$

$$c_{ci,j} = \frac{\phi_{i,j}^n}{\Delta t} + \lambda C_{i,j}^{n+1} - \lambda C_{i,j}^n + \alpha + \frac{D_x}{\Delta x^2} + \frac{D_y}{\Delta y^2} \quad (5.77)$$

$$d_{ci,j} = \frac{u_{xi,j}}{4\Delta x} - \frac{D_x}{2\Delta x^2} \quad (5.78)$$

$$e_{ci,j} = \frac{u_{yi,j}}{4\Delta y} - \frac{D_y}{2\Delta y^2} \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned} q_{ci,j} = & -\frac{\phi_{i,j}^n}{\Delta t} C_{i,j}^n + \frac{u_{xi,j}}{4\Delta x} (C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n) + \frac{u_{yi,j}}{4\Delta y} (C_{i,j+1}^{n+1} - C_{i,j-1}^{n+1}) - \frac{D_x}{2\Delta x^2} (C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + \\ & C_{i-1,j}^n) - \frac{D_y}{2\Delta y^2} (C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n) \end{aligned}$$

5.3.3 Método de Newton Raphson y algoritmo de solución del sistema acoplado.

Al ser la ecuación de concentración no lineal, ésta resulta al ser discretizada, un sistema ecuaciones no lineales, resolveremos este sistema por el método de Newton Raphson.

Definimos la siguiente función de residuos como:

$$F_{ci,j} = a_{ci,j}C_{i,j-1} + b_{ci,j}C_{i-1,j} + c_{ci,j}C_{i,j} + d_{ci,j}C_{i+1,j} + e_{ci,j}C_{i,j+1} + q_{ci,j} \quad (5.80)$$

El método de Newton para este sistema es entonces:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial F_{cij}}{\partial C_{i,j-1}^{n+1}} \right)^k \delta v_{i,j-1}^{n+1,k+1} + \left(\frac{\partial F_{cij}}{\partial C_{i-1,j}^{n+1}} \right)^k \delta v_{i-1,j}^{n+1,k+1} + \left(\frac{\partial F_{cij}}{\partial C_{i,j}^{n+1}} \right)^k \delta v_{ij}^{n+1,k+1} + \left(\frac{\partial F_{cij}}{\partial C_{i+1,j}^{n+1}} \right)^k \delta v_{i+1,j}^{n+1,k+1} + \\ & \left(\frac{\partial F_{cij}}{\partial C_{ij+1}^{n+1}} \right)^k \delta v_{ij+1}^{n+1,k+1} = -F_{cij}^k, \text{ para } k = 0,1,2.. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Este sistema debe resolverse para cada $k = 0,1,2..$ hasta alcanzar que se cumpla $\|\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k\| < \epsilon$, donde la estimación se va actualizando como

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k + \delta \mathbf{v}^{k+1} \quad (5.82)$$

En esta expresión las derivadas de 5.81 y la función de residuos F_{cij}^k van evaluadas en el vector \mathbf{v}^k .

Las derivadas del sistema 5.81 quedan como:

$$\frac{\partial F_{cij}}{\partial C_{i,j-1}^{n+1}} = a_{cij} \quad (5.83)$$

$$\frac{\partial F_{cij}}{\partial C_{i-1,j}^{n+1}} = b_{cij} \quad (5.84)$$

$$\frac{\partial F_{cij}}{\partial C_{ij}^{n+1}} = c_{1cij} \quad (5.85)$$

donde

$$c_{1cij} = \lambda C_{i,j}^{n+1} + c_{cij} \quad (5.86)$$

$$\frac{\partial F_{cij}}{\partial C_{i+1,j}^{n+1}} = d_{cij} \quad (5.87)$$

$$\frac{\partial F_{cij}}{\partial C_{ij+1}^{n+1}} = e_{cij} \quad (5.88)$$

El sistema 5.81 queda finalmente

$$a_{cij}^k \delta v_{i,j-1}^{n+1,k+1} + b_{cij}^k \delta v_{i-1,j}^{n+1,k+1} + c_{1cij}^k \delta v_{ij}^{n+1,k+1} + d_{cij}^k \delta v_{i+1,j}^{n+1,k+1} + e_{cij}^k \delta v_{ij+1}^{n+1,k+1} = -F_{cij}^k,$$

para $k = 0,1,2..$ (5.89)

Por lo tanto el sistema 5.89 junto con el sistema 5.63, deben resolverse de manera acoplada para todos los puntos de la malla y las condiciones de frontera e iniciales dadas.

5.3.4 Resultados de simulación.

Para esta simulación se consideró un medio isotrópico por lo que las permeabilidad en las direcciones x e y son iguales y el coeficiente de Kozeny toma un solo valor. Los datos usados en esta simulación son:

Tabla 5.3. En esta tabla se muestran los valores usados en la simulación del proceso de disolución de carbonatos en un modelo 2D

Datos del modelo cartesiano 2D					
C(kg/m3)	Porosidad 1	Porosidad 2	xs(m)	Lx(m)	Ly(m)
150	0.05	0.1	0.2	1.5	1
Lz(m)	Piny(psi)	Pws(psi)	Dx(m2/s)	Dy(m2/s)	K1(md)
10	6500	6400	1.00E-05	5.00E-06	40
K2(md)	m_Kozeny	Beta	D. Roca(kg/m3)	Celdas de Malla	Alfa (1/s)
50	0.25	4	2160	19321	2.50E-04

Se presentan en las figuras 5.11 a 5.15 los resultados obtenidos de la simulación numérica

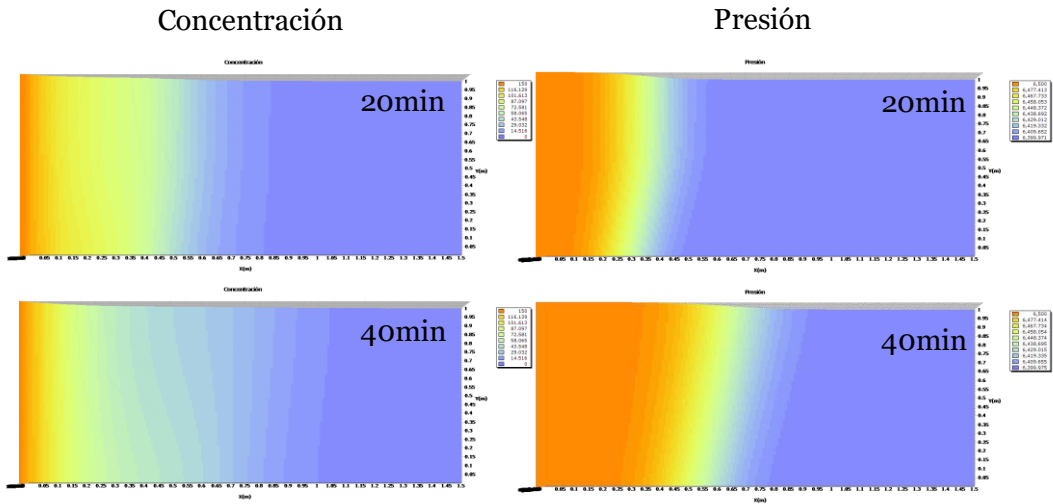


Figura 5.11. Perfil de concentración y presión para tiempos de simulación de $t=20$ y 40 minutos.

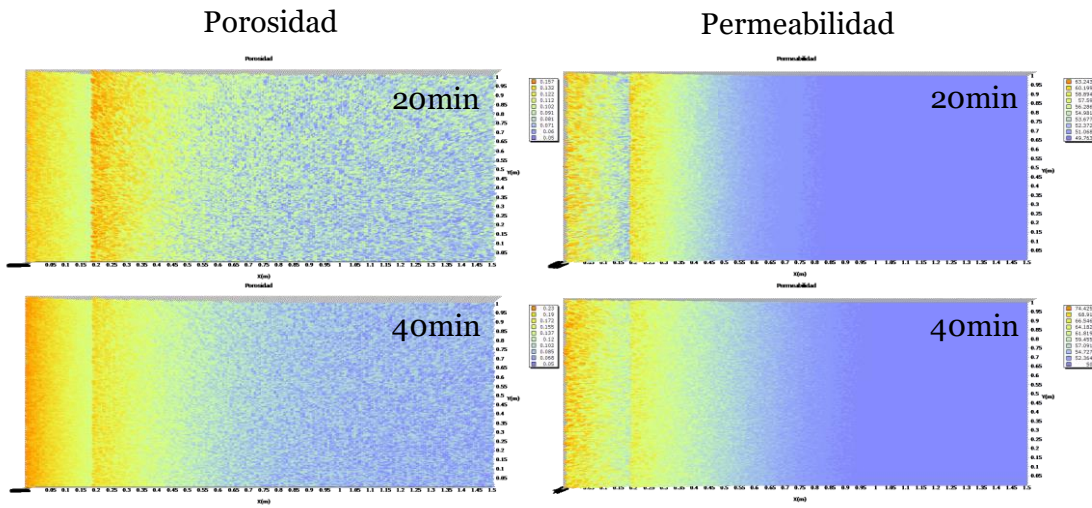


Figura 5.12. Perfil de porosidad y permeabilidad para tiempos de simulación de $t=20$ y 40 minutos. Se puede observar el aumento de la porosidad y permeabilidad como consecuencia de la disolución del carbonato.

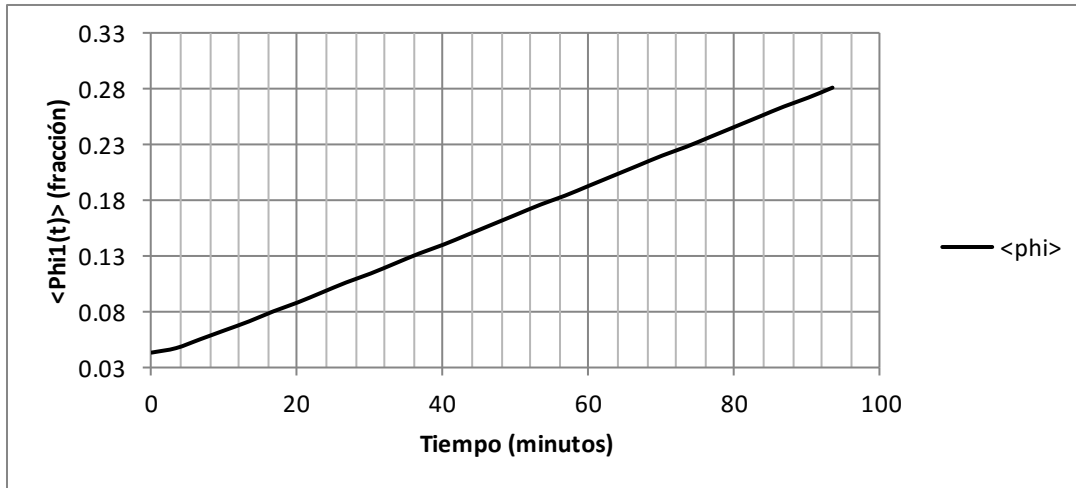


Figura 5.13. Porosidad promedio en el tiempo. Se puede notar que la porosidad pasó de un 4% a 28% en un tiempo de 90 min.

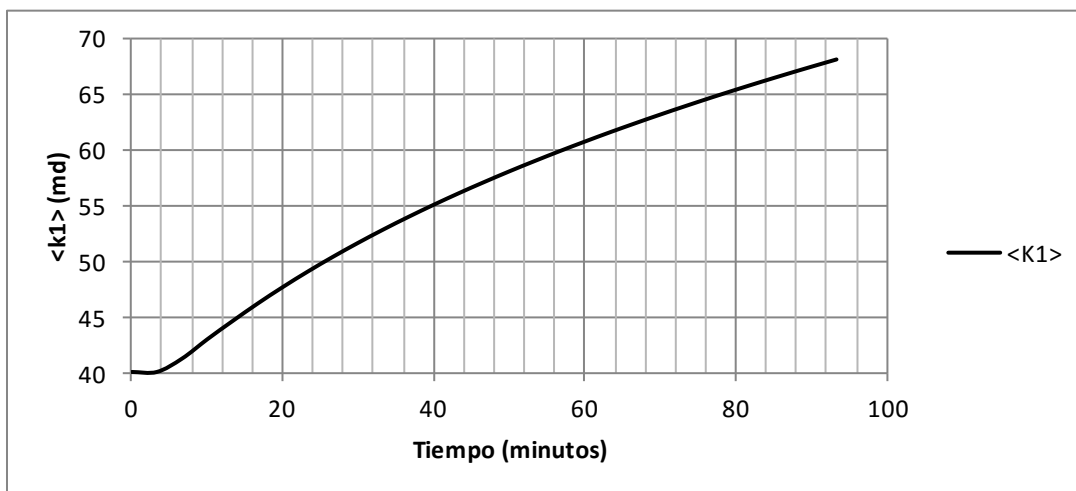


Figura 5.14. Permeabilidad promedio en el tiempo. Se puede notar que la permeabilidad pasó de 40md a 69.25md en un tiempo de 90min.

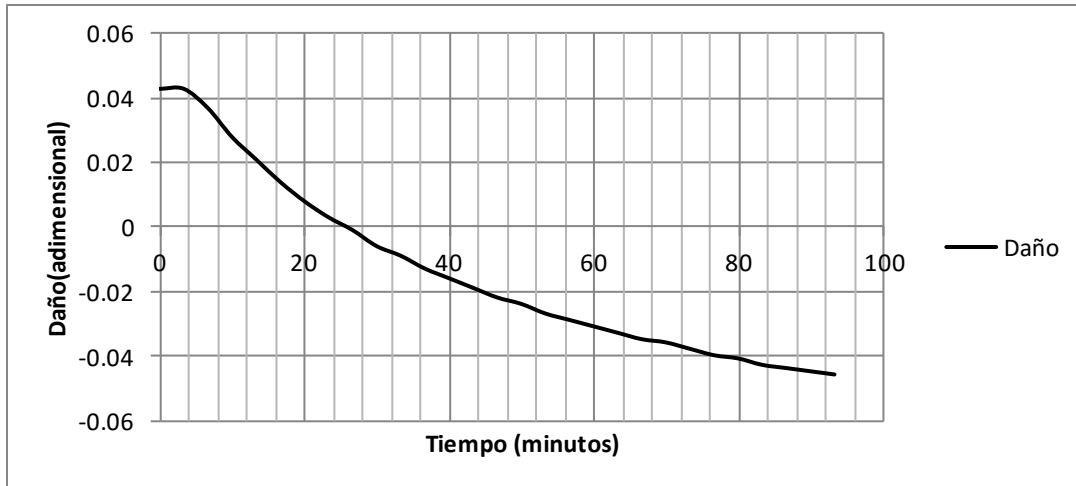


Figura 5.15. Evolución del daño en el tiempo. El daño se reduce de 0.043 a -0.046 en un tiempo de simulación de 90min.

Las simulaciones muestran que el aumento de la porosidad es sensible al coeficiente de transferencia de masa y poder de disolución. Los aumentos de permeabilidad están asociados principalmente con el coeficiente de Kozeny.

La longitud de la zona dañada también juega un papel importante ya que si ésta longitud es pequeña, el daño se remueve más rápidamente.

Otros resultados mostraron que, un aumento en la concentración en una de las paredes del dominio de simulación, tiene como consecuencia un aumento en la porosidad y permeabilidad del medio poroso.

6. Conclusiones.

Las conclusiones del modelo de disolución de carbonatos para una estimulación ácida fueron las siguientes.

1. Se determinó numéricamente, el perfil de concentración y porosidad, en función del tiempo y espacio en geometría radial y cartesiana del fenómeno de disolución de carbonatos en una estimulación ácida.
2. Se calculó la permeabilidad con el modelo de Kozeny para geometría radial y cartesiana.
3. Con los valores de permeabilidad obtenidos del modelo de Kozeny, se calculó el valor del daño en el tiempo, para geometría radial y cartesiana.

Las simulaciones muestran que la porosidad es sensible al coeficiente de transferencia de masa y poder de disolución, esto se debe a que ambos parámetros están relacionados con lo rápido con que se gasta el ácido en la disolución del carbonato.

El coeficiente de Kozeny genera cambios grandes en el aumento de la permeabilidad y en la disminución del daño, por lo que debe ser un factor importante a considerar en estos cálculos.

Quedan aun cálculos por hacer en esta área de investigación como son los siguientes.

1. Calcular mediante modelo numérico de flujo radial en dos zonas de permeabilidad distinta y una prueba de presión, el valor del radio de la zona dañada y la permeabilidad en la zona dañada.
2. Estimar mediante algún modelo analítico o numérico, la mejora en el gasto de producción debido a la disolución de carbonatos.
3. Calcular el índice de productividad como consecuencia de la disolución de carbonatos.
4. Tomar en cuenta la compresibilidad del ácido en el modelo.

Bibliografía

1. Ahmadi, A., Quintard, M., and Whitaker, S. (1998). "Transport in Chemically and Mechanically Heterogeneous Porous Media V: Two-Equation Model for Solute Transport with Adsorption", *Advances in WaterResources*, 22, (1), 59- 86.
2. Anderson, T.B. and Jackson, R., (1967). "A fluid mechanical description of fluid izedbeds", *Ind. Engng. Chem. Fund.*, (6), 527-538.
3. Barenblatt, G.I., Zheltov, I.P., and Kochina, I.N., (1960). "Basic Concepts in theTheory of HomogeneousLiquids in FissuredRocks", *J. AppliedMath. Mech.(U. S. S. R.)*.
3. Buisje, M.A. and Glasbergen, G. (2005) "A SemiempiricalModel to CalculateWormholeGrowth in Carbonate Acidizing", papier SPE 96892 présenté au SPE AnnualTechnicalConference and Exhibition, Dallas, Oct. 9-12.
4. Cherblanc, F., Ahmadi, A., and Quintard, M., (2003). "Two-medium description of dispersion in heterogeneousporous media: Calculation of macroscopicproperties.", *WaterResources Res.*, 39, (6), 1154.
5. Daccord, G., (1987). "Chemical Dissolution of a Porous Media by a Reactive I", *Physical Review Letters*, 58, 479-482.
6. Daccord, G., Lenormand, R., and Lietard, O., (1993a). "ChemicalDissolution of a Porous Medium by a Reactive Fluid - II. Convection VS Reaction, BehaviourDiagram", *Chem. Eng. Sci.*, 48, (1), 179-186.
7. Daccord, G., Lietard, O., and Lenormand, R., (1993b). "ChemicalDissolution of a Porous Medium by a Reactive Fluid I. Modelforthewormholingphenomenon", *Chem. Eng. Sci.*, 48, (1), 169-178.
8. Daccord, G., Touboul, E., and Lenormand, R., (1989). "Carbonate Acidizing: Toward a QuantitativeModel of theWormholingPhenomenon", *SPE ProductionEngineering*, (SPE 16887), 63-68. -235.
9. Duchemin, L., Bazin, B., and Lenormand, R., (2002). "Modèle 1D d'acidification des roches carbonatées," IFP 56779
10. Fredd, C.N. and Fogler, H.S., (1999). "OptimumConditionsforWormholeFormation in Carbonate Porous Media: Influence of Transport and Reaction", *SPEJournal*, (SPE 50337).
11. Fredd, C.N. and Fogler, H.S., (1998a). "AlternativeStimulationFluids and TheirImpacton Carbonate Acidizing", *SPE Journal*, (SPE 31074).

12. Fredd, C.N., Tja, R., and Fogler, H.S. 1997. "The Existence of an Optimum Damköhler Number for Matrix Stimulation of Carbonate Formations", papier SPE 38167 présenté au SPE European Formation Damage.
13. Fredd, N. and Fogler, H.S., (1998b). "Influence of Transport and reaction on Wormhole formation in Porous Media", *AICHE*, 44, (9), 1933-1949.
14. Frick, T.P., Kürmayr, M., and Economides, M.J., (1994b). "Modeling of Fractal Patterns in Matrix Acidizing and Their Impact on Well Performance", *SPE Production & Facilities*, (SPE 23789), 61-68.
15. Gerke, H.H. and van Genuchten, M.T., (1996). "Macroscopic representation of structural geometry for simulating water and solute movement in dual-porosity media", *Advances in Water Resources*, 19, (6), 343-357.
16. Gerke, H.H. and van Genuchten, M.T., (1993b). "A Dual-Porosity Model for Simulating the Preferential Movement of Water and Solutes in Structured Porous Media", *Water Resources Res.*, 29, (2), 305-319.
17. Golfier, F., Zarcone, C., Bazin, B., Lenormand, R., Lasseux, D., and Quintard, M., (2002b). "On the ability of a Darcy-scale model to capture wormhole formation during the dissolution of a porous media", *Journal of Fluid Mechanics*, 547, 213-254.
18. Gong, M. and El-Rabaa, A.M. 1999. "Quantitative Model of Wormholing Process in Carbonate Acidizing", papier SPE 52165 présenté au Continent Operations Symposium, Oklahoma City, Mar. 28-31.
19. Hoefner, M.L. and Fogler, H.S., (1988). "Pore Evolution and Channel Formation During Flow and Reaction in Porous Media", *AICHE*, 34, (1), 45-54.
20. Huang, T., Hill, A.D., and Schechter, R.S. 1997. "Reaction Rate and Fluid Loss : The Keys to Wormhole Initiation and Propagation in Carbonate Acidizing", papier SPE 37312 présenté au SPE International Symposium on Oilfield Chemistry, Houston, Feb. 18-21.
21. Huang, T., Zhu, D., and Hill, A.D. 1999. "Prediction of Wormhole Population Density in Carbonate Matrix Acidizing", papier SPE 54723 présenté au European Formation Damage Conference, The Hague.
22. Hung, K.M. and Hill, A.D. 1987 "A Mechanistic Model of Wormhole Growth in Carbonate Matrix Acidizing and Fracturing", papier SPE 16886 présenté 62nd Annual Technical Conference and Exhibition.
23. Landau, L. and Lifchitz, E., (1989). "Mécanique des fluides", MIR, Moscou.

24. Panga, M., Ziauddin, M., and Balakotaiah, V., (2005). "Two-Scale Continuum Model for Simulation of Wormholes in Carbonate Acidization", *AICHE*, 51, (12).

25. Panga, M., Ziauddin, M., Gandikota, R., and Balakotaiah, V. "A New Model for Predicting Wormhole Structure and Formation in Acid Stimulation of Carbonates", papier SPE 86517 présenté au 2004 SPE International Symposium and Exhibition on Formation Damage, Lafayette, Feb. 18-20.

26. Pichler, T., Frick, T.P., and Economides, M.J. 1992. "Stochastic Modeling of Wormhole Growth in Carbonate Acidizing", papier SPE 25004 présenté au European Petroleum Conference, Cannes, Nov. 16-18.