Antecedentes de geometría y TRIGONOMETRÍA

Arnulfo Andrade Delgado
Erik Castañeda de Isla Puga
Jesús E. Nolasco Martínez
Jaime Parada Ávila

Donado a la
Facultad de Ingeniería
por Oscar Guerra García
Ingeniería Petrolera
Enero del 98

EDITORIAL TRILLAS
México Argentina España
Colombia Puerto Rico Venezuela

Catalogación en la fuente

Antecedentes de geometría y trigonometría / Jesús E. Nolasco Martínez... [et al.]. -- México : Trillas : UNAM. Facultad de Ingeniería. 1990.
107 p. : 23 cm.
Incluye bibliografías e índices
ISBN 968-24-3547-1

1. Geometría. 2. Trigonometría. I. Nolasco Martínez, Jesús E. II. t.

LC- QA551'A5 D- 516.24'A744

Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya, C.P. 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial. Reg. núm. 158

Tercera edición, marzo 1990
(Primera publicada por Editorial Trillas, S. A. de C. V.)
ISBN 968-24-3547-1

Impreso en México
Printed in Mexico

PRÓLOGO

La **geometría** y la **trigonometría** son antecedentes primordiales para las carreras del área fisicomatemática en el nivel de licenciatura. Estas importantes ramas de las matemáticas son una base esencial para el estudio de otras que, como el cálculo diferencial e integral, constituyen los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo de las diversas disciplinas que se estudian en las carreras de la mencionada área.

El presente material es un compendio de los conceptos básicos de la geometría y la trigonometría, y puede utilizarse como apoyo didáctico en los cursos de matemáticas que se imparten en los niveles medio superior y superior.

El contenido está estructurado en **unidades temáticas** que a su vez se dividen en partes llamadas **módulos**. En éstos se dosifican los temas a partir de un orden lógico y didáctico, a fin de lograr una mejor comprensión de los mismos.

Por otra parte, la obra cuenta con **elementos didácticos** que constituyen una metodología de aprendizaje; tienen por objeto facilitar el estudio y permitir un mayor aprovechamiento del contenido. Por lo tanto, se recomienda al lector que, desde el inicio, comprenda su función y los utilice adecuadamente. A continuación se describen dichos elementos.

Al principio de cada unidad aparecen:

- **Objetivo general.** Es una guía para el aprendizaje del contenido; indica la conducta que debe obtenerse al finalizar el estudio de la unidad.
- **Introducción.** Muestra al lector un panorama general del contenido; destaca los temas principales y su importancia.

Los elementos didácticos de que constan los módulos son:

- **Objetivos específicos.** Se derivan del objetivo general de la unidad. Describen y delimitan la conducta específica que debe adquirirse en relación con un tema determinado; precisan las condiciones, el nivel y el criterio de ejecución aceptable como deberá manifestarse dicha conducta.

- **Cuadro sinóptico.** Presenta la síntesis del contenido en forma esquemática.
- **Ejemplos.** Elementos que explican o ilustran las características de un concepto o de un procedimiento; facilitan la comprensión y la generalización del contenido.
- **Ejercicios.** Actividades de aprendizaje, cuyo propósito es la aplicación de los elementos teóricos. Asimismo, permiten comprobar si se ha logrado la conducta indicada en los objetivos específicos.

Al final se encuentran:

- **Examen de autoevaluación.** Tiene como finalidad que el lector, por sí mismo, pueda valorar objetivamente en qué medida ha alcanzado un dominio aceptable de los conocimientos y habilidades considerados en los objetivos de aprendizaje.
- **Soluciones de los ejercicios y del examen de autoevaluación.** Permiten la verificación de las respuestas.
- **Bibliografía básica.** Proporciona las fuentes de información a las que se puede recurrir para aclarar alguna duda o bien profundizar en ciertos temas.

Por último, es de justicia agradecer a todas las personas que de alguna manera colaboraron con los autores en la elaboración de este material, muy especialmente a las licenciadas Irma Hinojosa Félix y María Cuairán Ruidíaz, quienes realizaron la estructuración didáctica.

JESÚS E. NOLASCO MARTÍNEZ
JAIME PARADA ÁVILA
ARNULFO ANDRADE DELGADO
ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA

ÍNDICE DE CONTENIDO

UNIDAD 1. GEOMETRÍA

Objetivo general

Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno:

- *Aplicará los conceptos fundamentales de ángulos, triángulos y circunferencia en la resolución de problemas geométricos.*

Introducción

En esta unidad se estudian los conceptos, teoremas y principios básicos de la geometría plana, con el objeto de que estos fundamentos se apliquen en la resolución de problemas geométricos.

MÓDULO 1. EL ÁNGULO, MEDIDAS ANGULARES Y TIPOS DE ÁNGULOS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Definirá los conceptos de ángulo, grado sexagesimal y radián.*
- *Convertirá a radianes el valor de un ángulo dado en grados sexagesimales y viceversa.*
- *Definirá cuándo dos ángulos son adyacentes, complementarios o conjugados.*

Cuadro sinóptico

Ángulo es la abertura entre dos rectas que se intersecan en un punto llamado vértice.

• *Medidas de un ángulo*	° Grados sexagesimales ° Radianes
• *Equivalencia*	° $1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi}$ grados → 1 rad = 57.2958 grados ° $1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180}$ radianes → 1 grado = 0.01745 rad
• *Tipos de ángulos*	° *Adyacentes*: Tienen el mismo vértice, un lado común y son exteriores uno del otro.

Cuadro sinóptico

Continuación

- *Tipos de ángulos*
  - *Rectos*: Aquel que mide 90° o $\frac{\pi}{2}$ rad
  - *Agudos*: Mide menos de 90°
  - *Obtusos*: Mide más de 90°
  - *Complementarios*: Cuando la suma de dos ángulos es igual a 90°
  - *Suplementarios:* Cuando la suma de dos ángulos es igual a 180°
  - *Conjugados*: Cuando la suma de dos ángulos es igual a 360°

1.1. Concepto de ángulo

Considérese que una línea recta *OA*, gira alrededor de su extremo *O* a una posición *OB*, permaneciendo en el mismo plano, como se muestra en la figura 1.1. Con este giro se dice que se genera un ángulo plano $AOB = \alpha$.

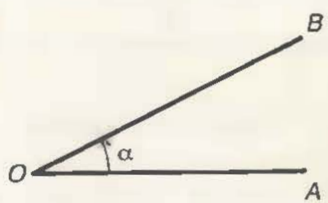


Figura 1.1

Al lado *OA*, se le llama *lado inicial* del ángulo y al lado *OB*, *lado terminal* del ángulo α.

El punto *O* se conoce como el *vértice* del ángulo α.

1.2. Medidas de ángulos

Las principales unidades para expresar la medida de un ángulo son el *grado sexagesimal* y el *radián*, que también se conoce como *unidad cíclica*.

1.2.1. El grado sexagesimal

Esta unidad, que pertenece al sistema sexagesimal, tiene como base el número 60.

La circunferencia se divide en 360 partes iguales, cada una de las cuales corresponde a un grado sexagesimal. El grado sexagesimal se subdivide a su vez en 60 minutos, y cada minuto en 60 segundos. Los grados, minutos y segundos se representan respectivamente por $a°\ b'\ c''$.

1.2.2. El radián

Definición: Un radián es el ángulo tal que, si su vértice está colocado en el centro de un círculo, interseca sobre la circunferencia un arco de longitud igual al radio del círculo.

Así, si en la figura 1.2 se toma sobre la circunferencia un arco *AB* de longitud igual al radio y se trazan las rectas *OA* y *OB*, el ángulo $AOB = \alpha$ mide un radián.

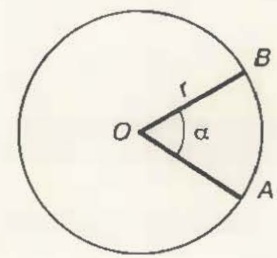


Figura 1.2

Para medir cualquier ángulo θ en radianes, se coloca su vértice en el centro de un círculo de radio *r* (*véase* la figura 1.3); si *L* es la longitud del arco intersecado en el círculo por el ángulo θ, entonces se tiene:

El valor de θ en radianes $= \dfrac{L}{r}$

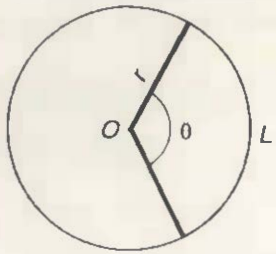


Figura 1.3

1.2.3. Conversión de medidas angulares

Cuando θ es igual a 180°, entonces el arco L, que interseca sobre un círculo de radio r, es una semicircunferencia tal que $L = \pi r$, donde π es aproximadamente igual a 3.1416. De acuerdo con lo anterior, si se aplica la ecuación para obtener la medida de un ángulo en radianes, se tiene:

$$180^\circ = \frac{L}{r}\text{ rad} = \frac{\pi r}{r}\text{ rad} = \pi \text{ rad}$$

$$180^\circ = \pi\ rad$$

Esta última igualdad se utiliza como base para convertir el valor de un ángulo de grados a radianes y viceversa. Así, de esta igualdad se obtiene:

$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ rad, donde $\dfrac{\pi}{180}$ equivale aproximadamente a 0.017453

así que: $1^\circ = 0.017453$ rad

y también 1 rad $= \dfrac{180^\circ}{\pi}$, donde $\dfrac{180^\circ}{\pi}$ equivale aproximadamente a 57.296°

así que: 1 rad = 57.296°

Ejemplo 1

Expresar cada uno de los siguientes ángulos en radianes.

a) 45°

Solución

Dado que 1° = 0.017453 rad
45° = 45 (0.017453) = 0.785 rad

Expresado en términos de π; como $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ rad

$$45^\circ = 45\,\frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{1}{4}\,\pi\text{ rad}$$

b) 385°

Solución

Se procede igual que en el ejemplo anterior:

$$385^\circ = 385\,(0.017453) = 6.719\text{ rad}$$

Expresado en términos de π:

$$385^\circ = 385\,\frac{\pi}{180}\text{ rad} = 2.1388\,\pi\text{ rad}$$

Ejemplo 2

Expresar cada uno de los siguientes ángulos en grados.

a) $\dfrac{\pi}{2}$ rad

Solución

Dado que 1 rad $= \dfrac{180^\circ}{\pi}$

$$\frac{\pi}{2}\text{ rad} = \frac{\pi}{2}\;\frac{180^\circ}{\pi} = 90^\circ$$

b) 2 rad

Solución

En forma análoga:

$$2\text{ rad} = 2\,\frac{180^\circ}{\pi} = 114.59^\circ$$

1.3. Tipos de ángulos

1.3.1. Ángulos adyacentes

Se dice que dos ángulos son *adyacentes* cuando tienen el mismo vértice, un lado común y son exteriores el uno del otro.

Por ejemplo los ángulos α y β de la figura 1.4, son adyacentes.

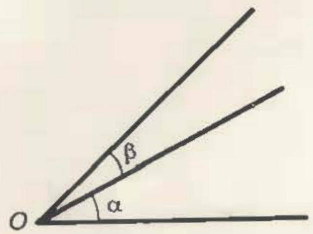


Figura 1.4

1.3.2. El ángulo recto

> *Definición*: Un ángulo *recto* es aquel que mide exactamente 90°, lo que en radianes equivale a $\pi/2$ rad. (*Véase* la figura 1.5.)

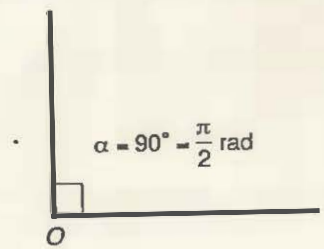


Figura 1.5

1.3.3. El ángulo agudo

> *Definición*: Un ángulo *agudo* es aquel que tiene una magnitud menor de 90° ($\pi/2$ rad). (*Véase* la figura 1.6.)

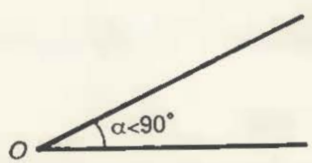


Figura 1.6

1.3.4. El ángulo obtuso

> *Definición*: Un ángulo *obtuso* es aquel que tiene una magnitud mayor de 90° ($\pi/2$ rad). (*Véase* la figura 1.7.)

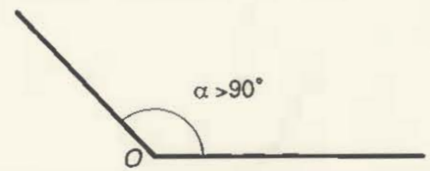


Figura 1.7

1.3.5. Ángulos complementarios

> *Definición*: Si la suma de las medidas de dos ángulos es de 90°, los ángulos se llaman *complementarios* y cada uno de ellos se llama el *complemento* del otro.

En la figura 1.8, los ángulos α y β son complementarios.

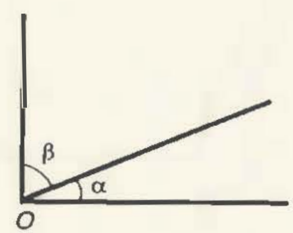


Figura 1.8

Se puede observar que si dos ángulos son complementarios, entonces ambos son agudos.

1.3.6. Ángulos suplementarios

> *Definición*: Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180°, se dice que los ángulos son *suplementarios* y cada uno de ellos se llama el *suplemento* del otro.

Los ángulos α y β de la figura 1.9, son suplementarios.

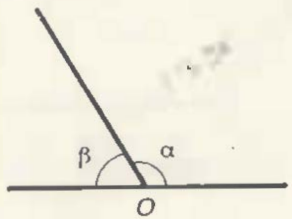


Figura 1.9

1.3.7. Ángulos conjugados

> *Definición*: Si la suma de las medidas de dos ángulos es 360°, se podrá decir que los ángulos son *conjugados*, y que cada uno es el *conjugado* del otro.

En la figura 1.10 los ángulos α y β son conjugados.

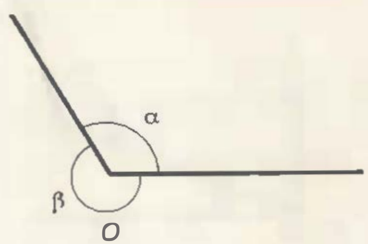


Figura 1.10

Ejemplo 3

Si la medida de un ángulo α es dos veces la medida de su complemento β, ¿cuánto miden α y β?

Solución

Del enunciado, $\alpha = 2\beta$, y como α y β son complementarios:

$$\alpha + \beta = 90° ; \quad 2\beta + \beta = 90° ; \quad 3\beta = 90°$$

de donde $\beta = \dfrac{90°}{3} = 30°$

por lo tanto:

$$\beta = 30°, \quad \alpha = 90° - 30° = 60°$$

Ejemplo 4

Determinar la medida del suplemento del ángulo α, cuya magnitud es 135°.

Solución

Se tiene: α + suplemento de $\alpha = 180°$
Suplemento de $\alpha = 180° - \alpha = 180° - 135° = 45°$

Ejemplo 5

Si la medida de un ángulo α es cinco veces la medida de su conjugado β, ¿cuánto miden α y β?

Solución

Del enunciado, $\alpha = 5\beta$, y como α y β son conjugados:

$$\alpha + \beta = 360°; \quad 5\beta + \beta = 360°$$

$$6\beta = 360°; \quad \beta = \frac{360°}{6} = 60°$$

por lo tanto:

$$\beta = 60°, \quad \alpha = 360° - 60° = 300°$$

Ejercicios

Medidas angulares

Expresar cada uno de los siguientes ángulos en radianes:

1. 800°
2. 210°
3. 150°

Expresar cada uno de los siguientes ángulos en grados:

4. $\frac{2\pi}{3}$ rad

5. 9.4 rad

6. $\frac{\pi}{6}$ rad

Tipos de ángulos

7. Determinar la medida del complemento del ángulo α, cuya magnitud es 23°.

8. Si la medida de un ángulo α es tres veces la medida de su suplementario β, ¿cuánto miden α y β ?

9. Si la medida de un ángulo α es once veces la medida de su conjugado β, ¿cuánto miden α y β?

MÓDULO 2. EL TRIÁNGULO, SUS TEOREMAS PRINCIPALES Y SEMEJANZA ENTRE TRIÁNGULOS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Enunciará los principales teoremas sobre triángulos.*
- *Aplicará la semejanza de triángulos en la resolución de problemas.*
- *Resolverá triángulos rectángulos aplicando el Teorema de Pitágoras.*

Cuadro sinóptico

Triángulo es el espacio limitado por tres rectas que se cortan.

• *Clasificación de los triángulos según sus lados*	° *Equilátero*: Cuando sus tres lados son iguales.
	° *Isósceles*: Cuando dos de sus lados son iguales.
	° *Escaleno*: Cuando sus tres lados son diferentes.

Cuadro sinóptico

Continuación

- *Teoremas*
  1. La suma de los tres ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°.
  2. En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.
  3. La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado; y la diferencia, menor.

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales o sus lados correspondientes son proporcionales.

- *Teoremas sobre triángulos semejantes*
  1. Si dos triángulos son mutuamente equiángulos, son semejantes.
  2. Si dos triángulos tienen un ángulo igual, comprendido entre lados proporcionales, los dos triángulos son semejantes.
  3. Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los de otro triángulo, ambos son semejantes.
  4. Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares, son semejantes.

Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

2.1. El triángulo

Se llama triángulo al espacio limitado por tres rectas que se cortan. Los puntos de corte se llaman *vértices*, y los segmentos comprendidos entre los vértices, *lados* del triángulo.

En la figura 2.1 se presenta un triángulo de vértices A, B y C y de lados a, b y c. Los triángulos comúnmente se designan por sus vértices.

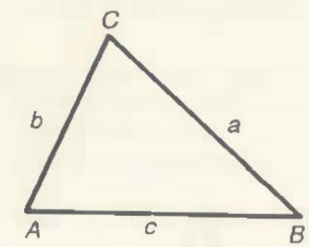


Figura 2.1

Con respecto a la magnitud de sus lados, los triángulos se clasifican en: equiláteros, isósceles y escalenos.

2.1.1. El triángulo equilátero

Definición: Un triángulo es *equilátero* si sus tres lados tienen la misma magnitud.

El triángulo ABC de la figura 2.2 es equilátero ya que $a = b = c$.

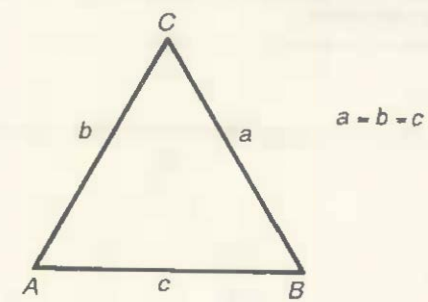


Figura 2.2

2.1.2. El triángulo isósceles

Definición: Un triángulo es *isósceles* si las magnitudes de dos de sus lados son iguales.

Los lados iguales se llaman *laterales* y el tercer lado se llama *base* del triángulo. El triángulo ABC de la figura 2.3 es isósceles, ya que sus lados a y b son iguales.

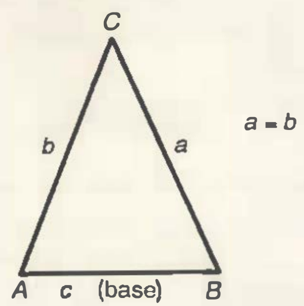


Figura 2.3

2.1.3. El triángulo escaleno

> *Definición*: Un triángulo es *escaleno* si las magnitudes de sus tres lados son diferentes.

El triángulo ABC de la figura 2.4 es escaleno, ya que $a \neq b \neq c$.

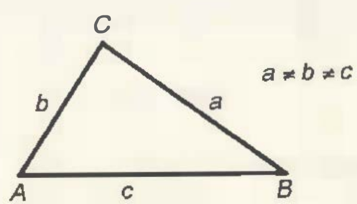


Figura 2.4

2.2. Principales teoremas sobre triángulos

A continuación se enuncian algunos teoremas importantes sobre triángulos, por ser de utilidad para el desarrollo de conceptos trigonométricos, así como para comprender algunos otros tópicos matemáticos.

Teorema 1. La suma de los tres ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°, o bien, a π rad.

En la figura 2.5, se tiene que: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

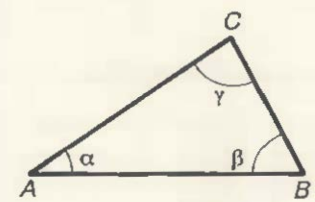


Figura 2.5

Teorema 2. En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.

En la figura 2.6, como ABC es un triángulo isósceles, $a = b$, por lo tanto $\alpha = \beta$.

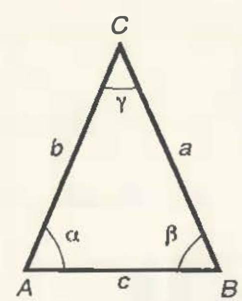


Figura 2.6

Teorema 3. La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado; y la diferencia, menor.

Del triángulo ABC de la figura 2.7, se tiene que:

$$a+b>c,\quad a+c>b,\quad b+c>a$$
$$a-b<c,\quad a-c<b,\quad b-a<c$$
$$b-c<a,\quad c-a<b,\quad c-b<a$$

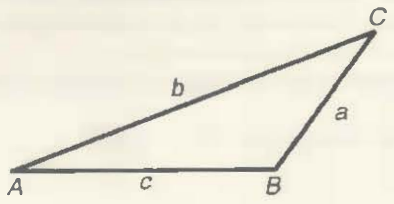


Figura 2.7

Ejemplo 1

Para el triángulo rectángulo *ABC* de la figura 2.8, si $\alpha = 40°$, determinar la magnitud de β y γ.

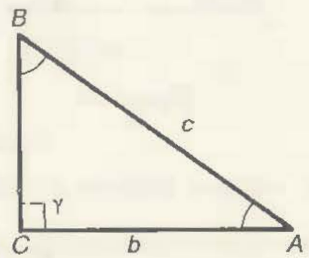


Figura 2.8

Solución

Como el triángulo es rectángulo, $\gamma = 90°$. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, entonces:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°;\quad 40° + \beta + 90° = 180°$$

De donde:

$$\beta = 180° - 90° - 40° = 50°$$

2.3. Triángulos semejantes

Definición: Dos triángulos son *semejantes* si sus ángulos correspondientes son iguales, o si sus lados correspondientes son proporcionales.

En la figura 2.9 los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son semejantes, ya que:

$$\alpha_1 = \alpha_2;\ \beta_1 = \beta_2 \quad y \quad \gamma_1 = \gamma_2,\ y \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

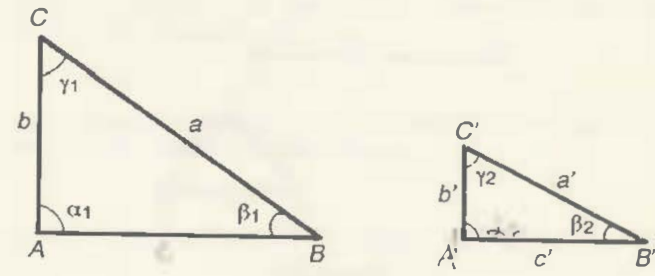


Figura 2.9

Los siguientes teoremas determinan la semejanza entre triángulos:

Teorema 1. Si dos triángulos son mutuamente equiángulos son semejantes.

De este teorema se desprenden los siguientes corolarios:

Corolario 1. Dos triángulos son semejantes si ambos tienen dos ángulos respectivamente iguales.

Corolario 2. Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual.

Teorema 2. Si dos triángulos tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, los dos triángulos son semejantes.

Con base en la figura 2.10, este teorema dice que: si $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ entonces los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son semejantes.

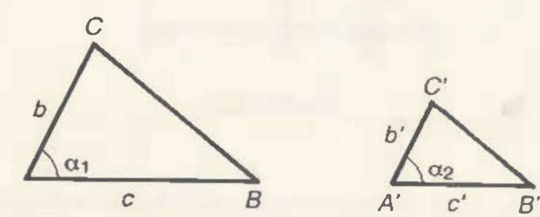


Figura 2.10

Teorema 3. Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los de otro, los dos triángulos son semejantes.

Con base en la figura 2.11, este teorema dice que:

$$\text{si}\quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

entonces los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son semejantes.

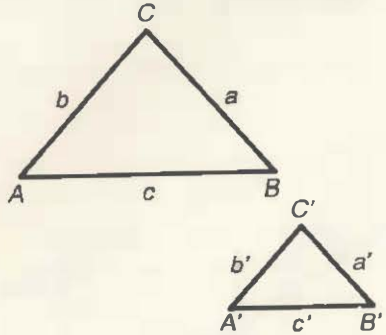


Figura 2.11

Teorema 4. Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares son semejantes.

Ejemplo 2

Si en la figura 2.12, $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{DE}$ y $\overline{BC} = 50$ m, $\overline{DE} = 25$ m y $\overline{AD} = 30$ m ¿Cuánto mide $\overline{AB}$?

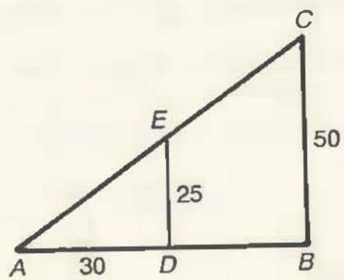


Figura 2.12

Solución

Como los lados de los triángulos *ABC* y *ADE* son paralelos, entonces son semejantes, por lo tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \; ; \; \frac{\overline{AB}}{30} = \frac{50}{25}$$

De donde:

$$\overline{AB} = \frac{50 \times 30}{25} = 60 \text{ m}$$

2.4. El teorema de Pitágoras. Aplicaciones

El teorema de Pitágoras, que relaciona los catetos y la hipotenusa de todo triángulo rectángulo, se enuncia como sigue:

> En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

De acuerdo con el teorema, para el triángulo rectángulo de la figura 2.13, se tiene que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

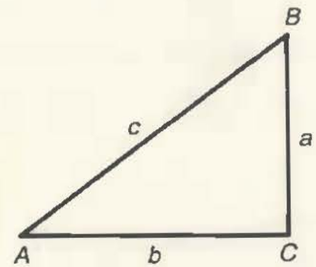


Figura 2.13

Ejemplo 3

En un triángulo rectángulo *ABC*, *c* es la longitud de la hipotenusa y *a* y *b* son las longitudes de los catetos.

a) Si $a = 12$ y $b = 16$, ¿ cuánto mide c ?

Solución

Del teorema de Pitágoras:

$c^2 = a^2 + b^2 = (12)^2 + (16)^2 = 400$

por lo tanto:

$c^2 = \sqrt{400} = 20$

b) Si $a = 24$ y $c = 25$, ¿cuánto mide b ?

Solución

Del teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2; \qquad b^2 = c^2 - a^2 = (25)^2 - (24)^2 = 49$$

por lo tanto:

$$b = \sqrt{49} = 7$$

Ejemplo 4

Una persona camina 7 kilómetros hacia el norte, 3 kilómetros hacia el este y 3 kilómetros hacia el sur. ¿A qué distancia está del punto de partida?

Solución

Se traza una figura que representa las longitudes recorridas.

$$\overline{AB} = 7, \overline{BC} = 3 \text{ y } \overline{CD} = 3$$

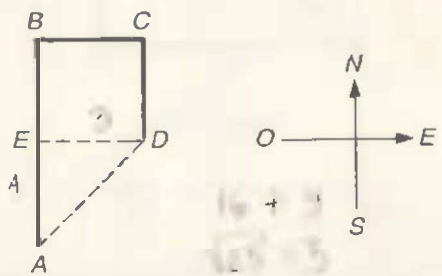


Figura 2.14

De la figura 2.14 se observa que AED es un triángulo rectángulo y que:

$$\overline{ED} = \overline{BC} = 3, \overline{EB} = \overline{CD} = 3,$$

$$\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 7 - 3 = 4$$

Como la longitud buscada es AD, se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo AED:

$$(\overline{AD})^2 = (\overline{AE})^2 + (\overline{ED})^2 = (4)^2 + (3)^2 = 25$$

por lo tanto:

$$\overline{AD} = \sqrt{25} = 5$$

Ejercicios

Teoremas sobre triángulos

1. Si un ángulo interior de un triángulo rectángulo mide 65°, determinar la magnitud de sus otros ángulos interiores.

Triángulos semejantes

2. Si en la figura 2.15, $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{DE}$ y $\overline{AB} = 10$ m, $\overline{AD} = 3$ m y $\overline{AC} = 20$ m. ¿Cuánto mide $\overline{AE}$?

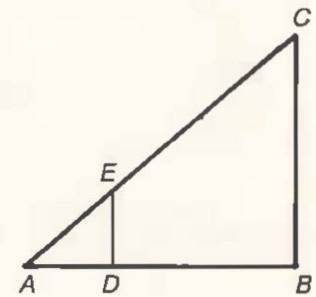


Figura 2.15

El teorema de Pitágoras. Aplicaciones

3. En un triángulo ABC, c es la longitud de la hipotenusa y a y b son las longitudes de los catetos.

   a) Si $a = 1$ y $b = 2$, ¿cuánto mide c?

   b) Si $b = 18$ y $c = 20$, ¿cuánto mide a?

4. Una persona camina 1 milla hacia el norte, 2 millas hacia el este, 3 millas hacia el norte y 4 millas hacia el este. ¿A qué distancia está del punto de partida?

MÓDULO 3. LA CIRCUNFERENCIA

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Enunciará la definición de circunferencia.*
- *Explicará los conceptos de cuerda, diámetro, secante y tangente de una circunferencia.*

Cuadro sinóptico

Sea P *un punto de un plano y sea* r *un número positivo. La circunferencia con centro* P, *y radio* r *es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia* r *del punto* P.

- *Elementos de la circunferencia*
  - *Cuerda*: Es todo segmento rectilíneo que une dos puntos de la circunferencia.
  - *Diámetro*: Es toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
  - *Secante*: Es toda recta que corta a la circunferencia en dos puntos cualesquiera.
  - *Tangente*: Es toda recta, en el mismo plano, que toca a la circunferencia en un solo punto, llamado punto de tangencia.

3.1. La circunferencia

Sea P un punto de un plano dado y sea r un número positivo.

> *Definición*: La *circunferencia* con centro P y radio r es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia r del punto P.

La figura 3.1 muestra una circunferencia.

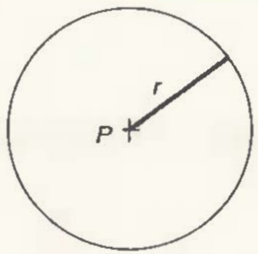


Figura 3.1

3.2. Conceptos de: cuerda, diámetro, secante y tangente de la circunferencia

3.2.1. Cuerda

> *Definición*: Se llama *cuerda* a todo segmento rectilíneo que une dos puntos de una circunferencia y cuya magnitud es igual a la mínima distancia entre dichos puntos.

En la figura 3.2 el segmento $\overline{AA'}$ es una cuerda.

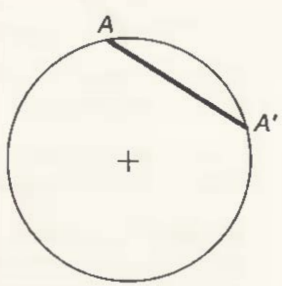


Figura 3.2

3.2.2. Diámetro

> *Definición*: Se llama *diámetro* a toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

3.2.3. Secante

> *Definición*: Una *secante* a una circunferencia es una recta que la corta en dos puntos cualesquiera.

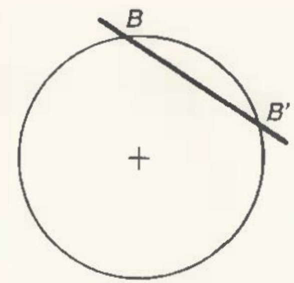


Figura 3.3

3.2.4. Tangente

> *Definición*: Una *tangente* a una circunferencia es una recta, en el mismo plano, que toca a la circunferencia en un solo punto.

El punto anterior se llama *punto de tangencia* o *punto de contacto*, y se dice que la recta y la circunferencia son tangentes en el punto de contacto.

En la figura 3.4, el punto A es el punto de tangencia.

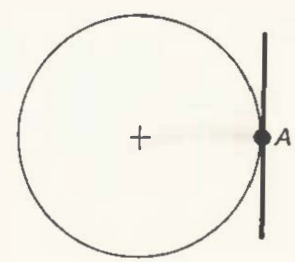


Figura 3.4

3.3. Teorema para trazar la tangente a una circunferencia

Un teorema importante porque se utiliza para trazar la tangente a una circunferencia es:

> Toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto.

UNIDAD 2. TRIGONOMETRÍA

Objetivo general

Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno:

- *Aplicará los conceptos fundamentales de la trigonometría plana en la resolución de problemas.*

Introducción

El propósito fundamental de esta unidad, es el estudio de las funciones trigonométricas y sus propiedades, así como su aplicación en la resolución de problemas trigonométricos.

MÓDULO 4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Definirá las razones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de un ángulo agudo.*
- *Calculará, sin el uso de tablas, el valor de todas las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°.*

Cuadro sinóptico

Razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°

		Ángulo		
		30°	**45°**	**60°**
Razón	sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
	tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
	cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
	sec	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
	csc	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

4.1. Definición de las razones trigonométricas de un ángulo agudo

Considérese un triángulo rectángulo con un ángulo $\gamma = 90°$, como se muestra en la figura 4.1.

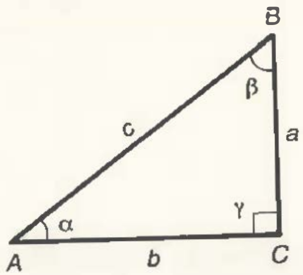


Figura 4.1

Se pueden establecer 6 razones diferentes de un lado del triángulo a otro. Estas razones que se conocen como razones trigonométricas, son aplicables a cualquiera de los ángulos agudos α o β.

Razones trigonométricas del ángulo α. Con relación a la figura 4.1:

c es la hipotenusa del triángulo
a es el cateto opuesto al ángulo α
b es el cateto adyacente al ángulo α

Las 6 razones trigonométricas para el ángulo α son:

$$\text{seno } \alpha \; ; \; \text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{coseno } \alpha \; ; \; \cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tangente } \alpha \; ; \; \tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cotangente } \alpha \; ; \; \cot \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{secante } \alpha \; ; \; \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{cosecante } \alpha \; ; \; \csc \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

Es conveniente observar que la cosecante, la secante y la cotangente son respectivamente recíprocas del seno, coseno y tangente. Con esta observación se pueden memorizar fácilmente las 6 razones trigonométricas.

Ejemplo 1

Encontrar los valores de las razones trigonométricas para el ángulo agudo α, del triángulo ABC que se muestra en la figura 4.2.

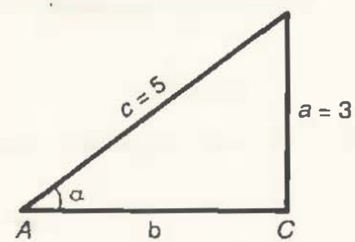


Figura 4.2

Solución

Datos: $a = 3 \quad c = 5$

Por medio del teorema de Pitágoras se encuentra el valor del cateto adyacente b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Entonces:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5} \qquad \csc \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{5}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} \qquad \sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{5}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3}{4} \qquad \cot \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 2

Encontrar los valores de las razones trigonométricas de un ángulo agudo α, cuyo seno es igual a 1/2.

Solución

Como se sabe: $\text{sen } \alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{1}{2}$

Se puede representar un triángulo rectángulo con un ángulo agudo α, cuyo cateto opuesto sea igual a 1 y con una hipotenusa igual a 2 (*véase* la figura 4.3). El valor del cateto adyacente b se encuentra aplicando el teorema de Pitágoras.

$$b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

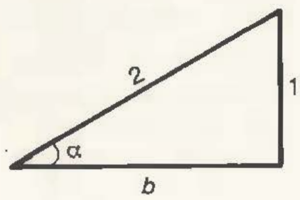


Figura 4.3

Al aplicar las fórmulas de las razones trigonométricas se tiene:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2} \qquad \csc \alpha = 2$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot \alpha = \sqrt{3}$$

4.2. Razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°

4.2.1. Razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°

Para determinar las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°, se traza un triángulo equilátero ABD de 2 unidades por lado, con una unidad de longitud adecuada; por ejemplo, centímetros (*veáse* la figura 4.4). Enseguida se traza una perpendicular a la base $\overline{AD}$ del triángulo desde el vértice B.

Como se muestra en la figura 4.4, ABC es un triángulo con:

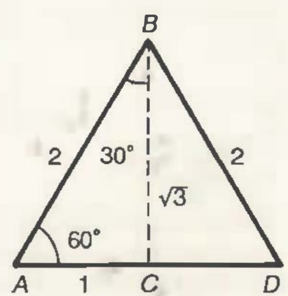


Figura 4.4

$$B\hat{A}C = 60°, A\hat{B}C = 30°, A\hat{C}B = 90°$$

$$\overline{AB} = 2, \overline{AC} = 1,$$

y por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

De la definición de las razones trigonométricas para un ángulo agudo, se tiene:

$$\text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = \text{sen}\ 30°$$

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \cot 30°$$

$$\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$$

$$\sec 60° = \frac{2}{1} = 2 = \csc 30°$$

$$\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec 30°$$

4.2.2. Razones trigonométricas del ángulo de 45°

Para determinar las razones trigonométricas de un ángulo de 45° se construye un triángulo rectángulo con ambos catetos iguales a la unidad (*véase* la figura 4.5), y el ángulo en C igual a 90°. Por lo tanto, los ángulos α y β son iguales a 45°.

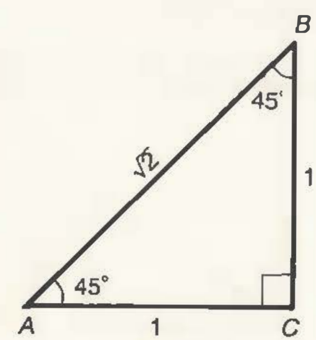


Figura 4.5

Del teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa del triángulo es:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

De la definición de las razones trigonométricas para un ángulo agudo, se tiene:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Ejemplo 3

Encontrar el valor de las siguientes expresiones:

a) $$\frac{(\sec 30^\circ)(\operatorname{sen} 60^\circ) + \tan 45^\circ}{\csc 30^\circ} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

b) $$\frac{(\cot 30^\circ)^2 + \tan 45^\circ}{2 \cos 60^\circ} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 1}{2(1/2)} = \frac{3+1}{1} = 4$$

Ejercicios

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

1. Encontrar los valores de las razones trigonométricas para el ángulo agudo β del triángulo *ABC* que se muestra en la figura 4.6, si $a = 2$ y $b = 3$.

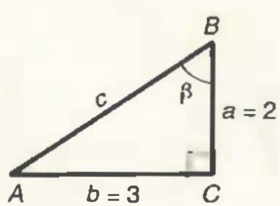


Figura 4.6

2. Encontrar el valor de las razones trigonométricas de un ángulo agudo α, cuya cotangente es igual a 1/3.

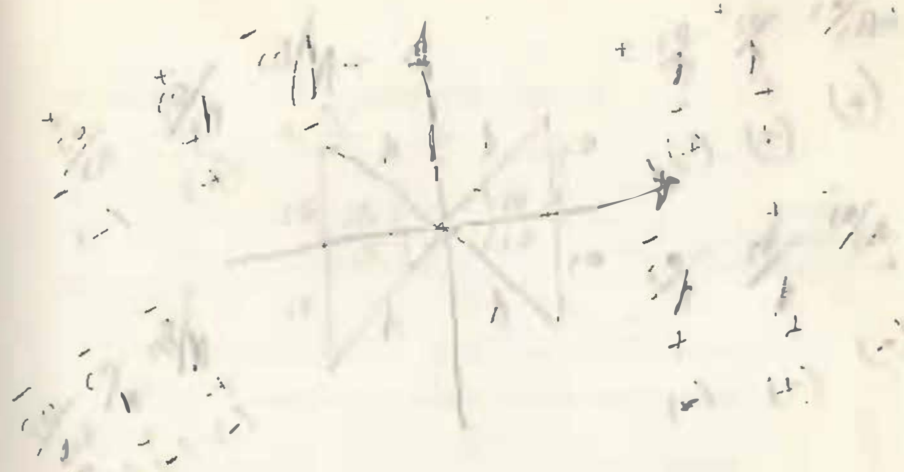
Razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°

Encontrar el valor de las siguientes expresiones:

3. $\dfrac{2 \tan 45^\circ - 4 \cos 60^\circ}{\csc 60^\circ \tan 60^\circ}$

4. $\dfrac{(\sec 45^\circ \csc 45^\circ)^2}{\tan 45^\circ + \sec 60^\circ}$

5. $\dfrac{(\cot 30^\circ \tan 60^\circ + \tan 45^\circ)^2}{\csc 30^\circ}$



MÓDULO 5. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN GENERAL

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Calculará el valor de todas las razones trigonométricas, sin el uso de tablas, de los ángulos de 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 300°, 315° y 330°.*
- *Determinará, con el uso de tablas, el valor de una razón trigonométrica de un ángulo cualquiera dado y viceversa.*

Cuadro sinóptico

Signos de las razones trigonométricas

		Cuadrantes			
		Primer cuadrante	Segundo cuadrante	Tercer cuadrante	Cuarto cuadrante
Razones	seno y cosecante	+	+	−	−
	coseno y secante	+	−	−	+
	tangente y cotangente	+	−	+	−

Cuadro sinóptico

Continuación

Razones trigonométricas de los ángulos de:	150°, 210°, 330°	Son iguales en valor absoluto a las del ángulo de:	30°
	120°, 240°, 300°		60°
	135°, 225°, 315°		45°

Razones trigonométricas de un ángulo en general

$\text{seno} = \dfrac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \dfrac{y}{d}$	$\text{coseno} = \dfrac{\text{abscisa}}{\text{distancia}} = \dfrac{x}{d}$
$\text{tangente} = \dfrac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \dfrac{y}{x}$	$\text{cotangente} = \dfrac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \dfrac{x}{y}$
$\text{secante} = \dfrac{\text{distancia}}{\text{abscisa}} = \dfrac{d}{x}$	$\text{cosecante} = \dfrac{\text{distancia}}{\text{ordenada}} = \dfrac{d}{y}$

5.1. Definición de las razones trigonométricas de un ángulo en general

Sea θ un ángulo en posición común (*véanse* las figuras 5.1 a 5.4), y sea P un punto de coordenadas rectangulares (x, y) perteneciente al lado terminal del ángulo θ.

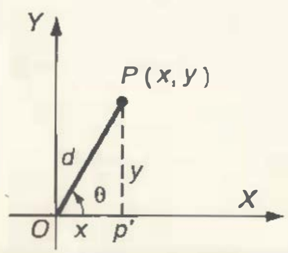


Figura 5.1

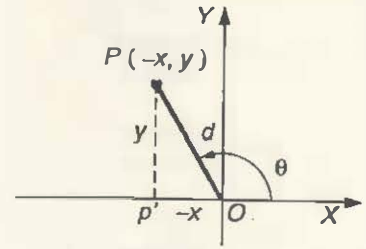


Figura 5.2

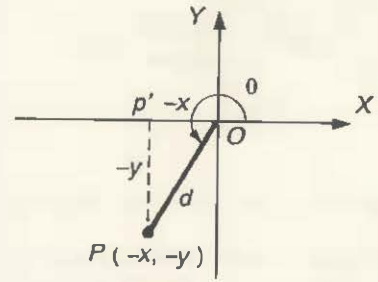


Figura 5.3

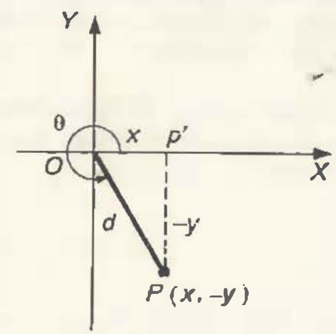


Figura 5.4

Si en cada una de las cuatro figuras se traza una perpendicular desde el punto P al eje X, se tendrá un triángulo rectángulo OPP', de lados x, y, y d como se muestra en las figuras. Si se considera que d, distancia de P al origen, es positiva y que los valores de x y y dependen de la posición de P, las razones trigonométricas para cualquiera de los ángulos θ se definen como sigue:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \frac{y}{d}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{distancia}} = \frac{x}{d}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{abscisa}} = \frac{d}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{ordenada}} = \frac{d}{y}$$

Estas definiciones también son aplicables para los ángulos negativos o mayores de 360°.

Se entiende como ángulos *coterminales* aquellos cuya diferencia es igual a 360°. Así por ejemplo, el ángulo de 390° es coterminal del ángulo de 30° y viceversa.

De las definiciones se puede concluir que, para dos ángulos que son coterminales, sus respectivas razones trigonométricas son idénticas. Entonces, para encontrar las relaciones trigonométricas de ángulos negativos o mayores de 360°, se determina su respectivo coterminal entre 0° y 360° y enseguida se aplican las definiciones.

Lo anterior también se puede expresar de la siguiente forma: Los valores de las razones trigonométricas de un ángulo θ son los mismos que para cualquiera de los ángulos $\theta \pm n\ 360°$; donde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Ejemplo 1

Si el punto P (-6, 8) está sobre el lado terminal del ángulo θ, encontrar las 6 razones trigonométricas de θ.

Solución

Se ubica el punto P de coordenadas (-6, 8) en un sistema coordenado rectangular: $x = -6$, $y = 8$ (*véase* la figura 5.5).

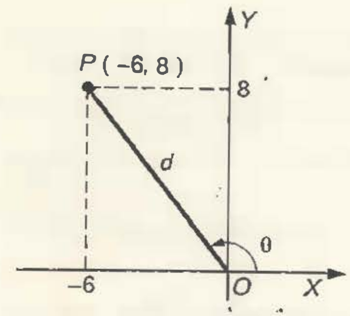


Figura 5.5

Por el teorema de Pitágoras se tiene:

$$d = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$d = 10$$

Por aplicación de las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{d} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{d} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5} \qquad \sec \theta = \frac{d}{x} = \frac{10}{-6} = -\frac{5}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3} \qquad \csc \theta = \frac{d}{y} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Ejemplo 2

Encontrar el valor de sen 405°

Solución

Se determina el coterminal de 405° entre 0° y 360°

$$405° - 360° = 45°$$

de donde:

$$\operatorname{sen} 405° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 3

Encontrar el valor de tan (−300°).

Solución

Se encuentra el coterminal de $-300°$ entre $0°$ y $360°$

$$-300° + 360° = 60°$$

de donde:

$$\tan(-300°) = \tan 60° = \sqrt{3}$$

5.2. Signos de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes

Puesto que d siempre es positiva y sen θ es igual a y/d, entonces sen θ tiene el mismo signo que y. Así, sen θ es positivo cuando θ termina en el primer o segundo cuadrantes (y es positiva) y negativo cuando termina en el tercer o cuarto cuadrantes (y es negativa). Haciendo consideraciones similares para las otras 5 razones, se obtienen los resultados que se muestran en la figura 5.6.

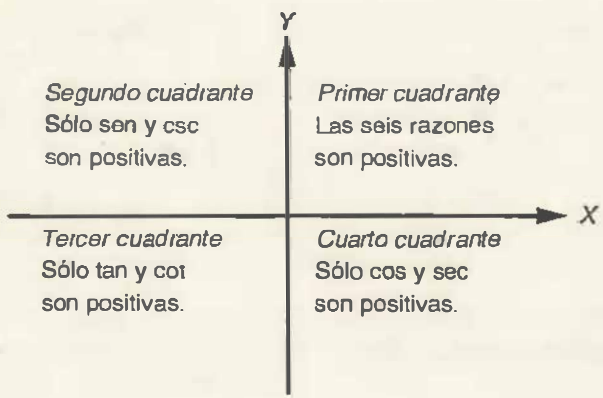


Figura 5.6

Ejemplo 4

Decir en qué cuadrante termina cada ángulo y establecer el signo del seno, coseno y tangente.

a) 320°

Solución

Como $270° < 320° < 360°$, 320° termina en el cuarto cuadrante.

$\operatorname{sen} 320° = \frac{y}{d}$; y es negativa, entonces sen 320° es negativo.

$\cos 320° = \frac{x}{d}$; como x es positiva, entonces cos 320° es positivo.

$\tan 320° = \frac{y}{x}$; y es negativa y x positiva, entonces tan 320° es negativa.

b) 480°

Solución

Se encuentra su coterminal entre 0° y 360°
$480° - 360° = 120°$; 480° y 120° son coterminales.
Como $90° < 120° < 180°$, 120° termina en el segundo cuadrante.

$\operatorname{sen} 120° = \frac{y}{d}$; como y es positiva, entonces sen 120° es positivo.

$\cos 120° = \frac{x}{d}$; como x es negativa, entonces cos 120° es negativo.

$\tan 120° = \frac{y}{x}$, y positiva y x negativa, entonces tan 120° es negativa.

5.3. Razones trigonométricas de los ángulos de 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 300°, 315° y 330°

5.3.1. Razones trigonométricas de los ángulos de 150°, 210° y 330°

Las razones trigonométricas de los ángulos de 150°, 210° y 330° son iguales en valor absoluto a las razones trigonométricas del ángulo de 30°; o sea que, cuando más, difieren en el signo, dependiendo de la razón y del cuadrante donde esté el lado terminal de dichos ángulos.

En la figura 5.7, se muestra el ángulo de 150° en posición normal. A partir de esta figura se pueden calcular las razones trigonométricas de 150° trazando el triángulo rectángulo OPP'.

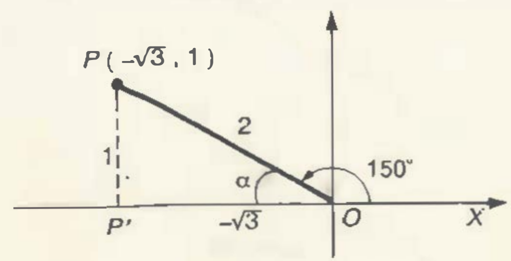


Figura 5.7

En la figura anterior puede verse que:

- $\alpha = 180° - 150° = 30°$
- el triángulo rectángulo OPP' es semejante al triángulo ABC de la figura 4.4 del apartado 4.2.

En virtud de lo anterior, los valores de los lados del triángulo OPP' se pueden hacer iguales respectivamente a los valores de los lados del triángulo ABC de la figura 4.4; es decir:

$$OP' = BC = \sqrt{3}\ ,\ PP' = AC = 1 \ \text{ y } OP = AB = 2\ .$$

Entonces, como el punto P se encuentra en el segundo cuadrante, tendrá por coordenadas $P\,(-\sqrt{3},\ 1)$ y la distancia de este punto al origen será: $d = 2$.

Al aplicar la definición de las razones trigonométricas para un ángulo en general se tiene:

$$\operatorname{sen} 150° = \frac{y}{d} = \frac{1}{2} \qquad \cot 150° = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\cos 150° = \frac{x}{d} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 150° = \frac{d}{x} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 150° = \frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \csc 150° = \frac{d}{y} = \frac{2}{1} = 2$$

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 210° se procede de igual forma que para el caso de 150°, sólo que ahora las coordenadas del punto P son $(-\sqrt{3},\ -1)$ (*véase* la figura 5.8).

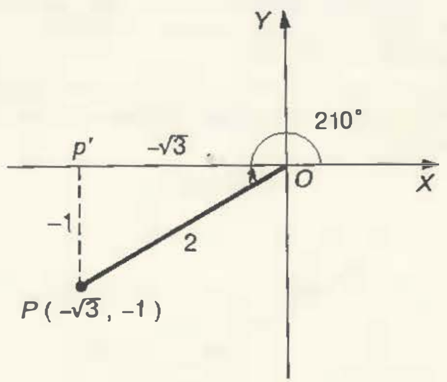


Figura 5.8

Entonces, se tiene:

$$\operatorname{sen} 210° = \frac{y}{d} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210° = \frac{x}{d} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 210° = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 210° = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

$$\sec 210° = \frac{d}{x} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc 210° = \frac{d}{y} = \frac{2}{-1} = -2$$

Para el caso de las razones trigonométricas del ángulo de 330° también se procede de la misma manera, sólo que en este caso las coordenadas del punto P son $(\sqrt{3}\ ,-1)$, (*véase* la figura 5.9).

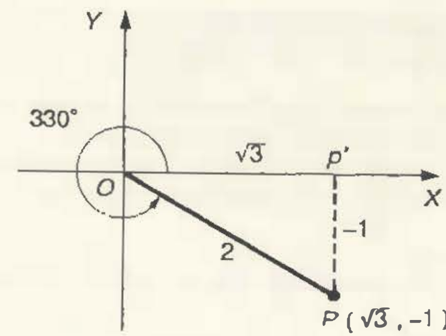


Figura 5.9

Entonces se tiene:

$$\operatorname{sen} 330° = \frac{y}{d} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330° = \frac{x}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 330° = \frac{y}{x} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 330° = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

$$\sec 330° = \frac{d}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc 330° = \frac{d}{y} = \frac{2}{-1} = -2$$

Ejemplo 5

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $3 \csc 150° + \text{sen } 210° - \cot 330° =$

$$3(2) - \frac{1}{2} + \sqrt{3} = 6 - \frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{11}{2} + \sqrt{3}$$

b) $$\frac{(\tan 330°)(\cot 210°) + 1}{\csc 150°} = \frac{(-1/\sqrt{3})(\sqrt{3}) + 1}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

5.3.2. Razones trigonométricas de los ángulos de 120°, 240° y 300°

Los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 120°, 240° y 300° son iguales en valor absoluto a los del ángulo de 60°.

En la figura 5.10, se muestra el ángulo de 120° en posición normal. Al trazar el triángulo rectángulo *OPP'* en la figura, se puede ver que:

- $\alpha = 180° - 120° = 60°$
- el triángulo *OPP'* es semejante al triángulo *ABC* de la figura 4.4 del apartado 4.2.

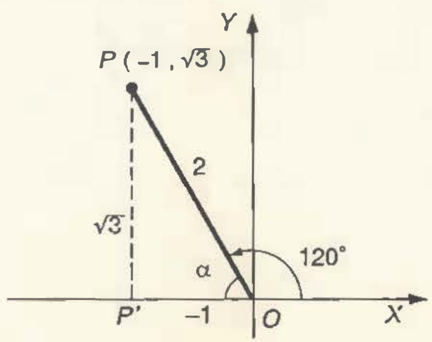


Figura 5.10

Entonces $OP' = 1$, $PP' = \sqrt{3}$ y $OP = 2$. En este caso el punto *P* tendrá por coordenadas a $(-1, \sqrt{3})$ y la distancia de este punto al origen será: $d = 2$.

Al aplicar las razones trigonométricas de un ángulo en general se tiene:

$$\text{sen } 120° = \frac{y}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \frac{x}{d} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120° = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120° = \frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120° = \frac{d}{x} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\csc 120° = \frac{d}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Para calcular la razones trigonométricas del ángulo de 240° se procede en igual forma que para el caso de 120°, sólo que ahora las coordenadas del punto *P* son $(-1, -\sqrt{3})$ (*véase* la figura 5.11).

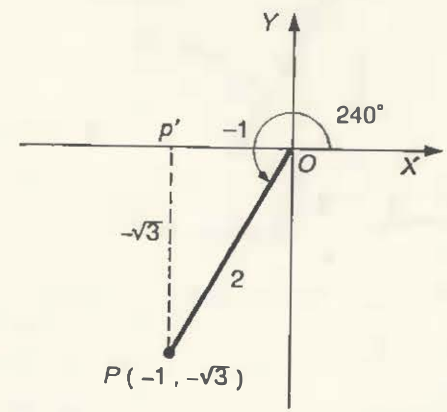


Figura 5.11

Entonces se tiene:

$$\text{sen } 240° = \frac{y}{d} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240° = \frac{x}{d} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240° = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

$$\cot 240° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 240° = \frac{d}{x} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\csc 240° = \frac{d}{y} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Para el caso de las razones trigonométricas del ángulo de 300° también se procede de la misma manera, sólo que en este caso las coordenadas del punto P son $(1, -\sqrt{3})$ (*véase* la figura 5.12).

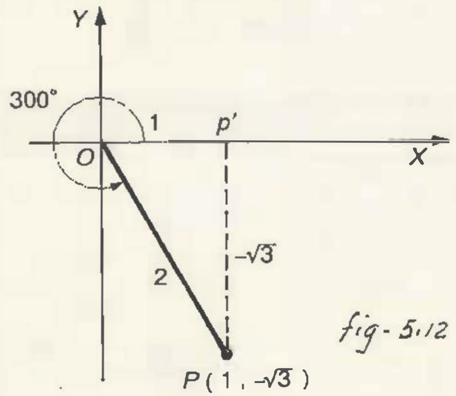


fig- 5.12

Figura 5.12

Por lo tanto, se tiene:

$$\text{sen } 300° = \frac{y}{d} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cot 300° = \frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 300° = \frac{x}{d} = \frac{1}{2} \qquad \sec 300° = \frac{d}{x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\tan 300° = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \qquad \csc 300° = \frac{d}{y} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ejemplo 6

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $-4\cos 240° + \sec 300° - \sec 120° =$

$$-4\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 - (-2) = 2 + 2 + 2 = 6$$

b) $\dfrac{(\tan 300°)(\csc 240°) + 1}{\sec 120°} =$

$$\frac{-\sqrt{3}(-2/\sqrt{3}) + 1}{-2} = \frac{2+1}{-2} = -\frac{3}{2}$$

5.3.3. Razones trigonométricas de los ángulos de 135°, 225° y 315°

Los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 135°, 225° y 315°, son iguales en valor absoluto a las razones trigonométricas del ángulo de 45°.

En la figura 5.13 se muestra el ángulo de 135° en posición normal. A partir de esta figura se pueden calcular las razones trigonométricas de 135°, trazando el triángulo rectángulo OPP'.

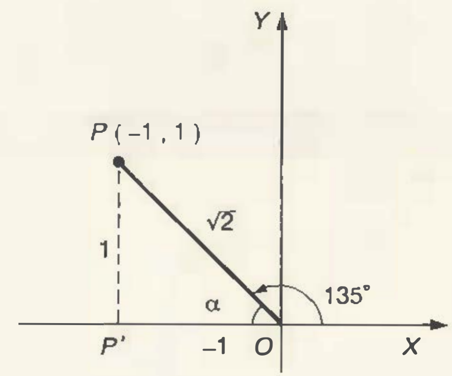


Figura 5.13

En la figura puede verse que:

- $\alpha = 180° - 135° = 45°$
- el triángulo rectángulo OPP', es semejante al triángulo ABC de la figura 4.5, del apartado 4.2.

En virtud de lo anterior, los valores de los lados del triángulo OPP' se pueden hacer iguales respectivamente a los valores de los lados del triángulo ABC de la figura 4.5 del apartado 4.2; es decir:

$OP' = AC = 1, \quad PP' = BC = 1, \quad OP = AB = \sqrt{2}$

Entonces, como el punto P se encuentra en el segundo cuadrante, tendrá por coordenadas (-1, 1) y la distancia de este punto al origen será: $d = \sqrt{2}$.

Al aplicar la definición de las razones trigonométricas para un ángulo en general se tiene:

$$\operatorname{sen} 135^\circ = \frac{y}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 135^\circ = \frac{x}{d} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 135^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cot 135^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\sec 135^\circ = \frac{d}{x} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\csc 135^\circ = \frac{d}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 225° se procede de igual forma que para el caso de 135°, sólo que ahora las coordenadas del punto P son (–1, –1), figura 5.14.

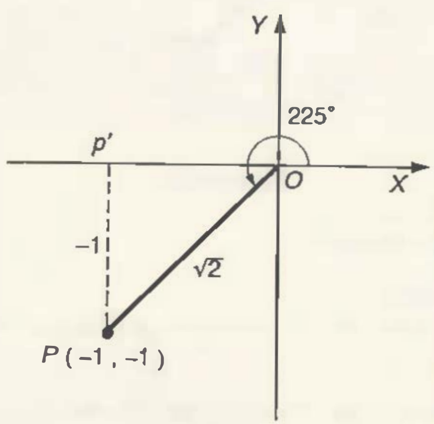


Figura 5.14

Entonces se tiene:

$$\operatorname{sen} 225^\circ = \frac{y}{d} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cot 225^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\cos 225^\circ = \frac{x}{d} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 225^\circ = \frac{d}{x} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\tan 225^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad \csc 225^\circ = \frac{d}{y} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

Para el caso de las razones trigonométricas del ángulo de 315° también se procede de la misma manera, sólo que en este caso las coordenadas del punto P son (1, –1), (*véase* figura 5.15).

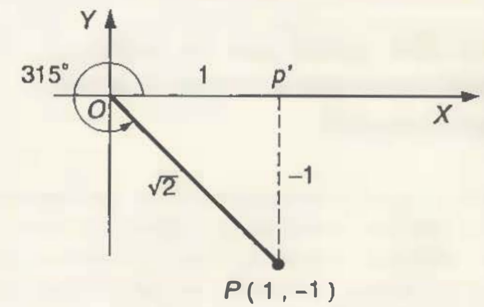


Figura 5.15

Entonces se tiene:

$$\operatorname{sen} 315^\circ = \frac{y}{d} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 315^\circ = \frac{x}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 315^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\cot 315^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\sec 315^\circ = \frac{d}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 315^\circ = \frac{d}{y} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

Ejemplo 7

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) $4 \tan 135° + 2 \sec 315° + 2 \csc 225° =$

$$4(-1) + 2(\sqrt{2}) + 2(-\sqrt{2}) = -4$$

b) $\dfrac{(\csc 135°)^2 - \cot 315°}{\tan 225°} =$

$$= \frac{(\sqrt{2})^2 - (-1)}{1} = \frac{2+1}{1} = 3$$

5.4. Determinación con el uso de tablas del valor de una razón trigonométrica de un ángulo agudo

Los valores de las razones trigonométricas de los ángulos se pueden encontrar, en forma aproximada, mediante el empleo de tablas trigonométricas. Éstas se presentan en diferentes textos con 3, 4 o 5 cifras decimales.

En algunas de estas tablas, los valores de las razones trigonométricas se presentan en intervalos de 10', y en caso de que el ángulo cuya razón trigonométrica se desea encontrar tenga un número de minutos que no sea múltiplo de 10, se utilizan las partes proporcionales. Es recomendable, para los ejemplos que a continuación se presentan, que se disponga de un ejemplar de estas tablas.

Ejemplo 8

Hallar el valor de cos 44° 52'.

En la tabla del coseno natural se localiza, en la columna cuyo encabezado es N, el número 44 y se sigue por ese mismo renglón hasta la columna cuyo encabezado es 50', encontrándose el valor de 0.7092. Se sigue por el mismo renglón hasta la columna de partes proporcionales de encabezado 2' donde se encuentra el número 4, que equivale a 0.0004. Como se especifica en las columnas de partes proporcionales que éstas se restan, se tendrá:

$$0.7092 - 0.0004 = 0.7088$$

de donde:

$$\cos 44° 52' = 0.7088$$

5.4.1. Determinación del ángulo agudo, dada una de sus razones trigonométricas

Considérese el mismo tipo de tablas del apartado 5.4. La determinación del ángulo, dada una de sus razones, se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9

Dado sen $\alpha = 0.5040$, encontrar el ángulo α.

En la tabla del seno natural, se busca en las columnas el valor de 0.5040. Se encuentra que el valor inferior más cercano al dado es 0.5025, y corresponde a: 30° 10'.

Se calcula la diferencia entre el valor dado, 0.5040, y el hallado en las tablas, 0.5025. La diferencia 0.0015, que equivale a 15 partes proporcionales, se busca en el mismo renglón en las columnas de partes proporcionales, y se localiza en la columna cuyo encabezado es 6'.

Como el seno de un ángulo agudo es mayor conforme aumenta el ángulo, entonces se suma 6' a 30° 10' y se tiene:

$$30° 10' + 6' = 30° 16'$$

de donde:

$$\alpha = 30° 16'$$

Ejercicios

Razones trigonométricas de un ángulo en general

1. Si el punto $P(-3, -4)$ está sobre el lado terminal del ángulo 0, encontrar el valor de las 6 razones trigonométricas de 0.

Encontrar el valor de las siguientes expresiones:

2. csc 750° =

3. sen (−315°) =

4. tan 420° =

Signos de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes

Decir en qué cuadrante termina cada ángulo y establecer el signo del seno, coseno y tangente.

5. 125°

6. 750°

7. $-120°$

Razones trigonométricas de los ángulos de 150°, 210° y 330°

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

8. $3 \cot 150° + 4 \operatorname{sen} 210° - 2 \csc 330° =$

9. $2 \operatorname{sen} 150° - \frac{1}{2} \csc 150° - 2 \operatorname{sen} 330° =$

10. $\frac{(\csc 210°)(\csc 150°) + 8}{\csc 330°} =$

11. $\frac{(\sec 150°)(\cot 210°) + \csc 330°}{2} =$

Razones trigonométricas de los ángulos de 120°, 240° y 300°

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

12. $\operatorname{sen} 120° - \cos 300° - \cos 240° =$

13. $3 \tan 240° + 2 \sec 120° - \sec 300° =$

14. $\frac{(\csc 120°)(\tan 300°) + 1}{\sec 240°} =$

15. $\frac{-6 \cos 120° + (\tan 240°)^2}{\sec 300°} =$

Razones trigonométricas de los ángulos de 135°, 225° y 315°

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

16. $\cot 315° + 10 \tan 225° - \operatorname{sen} 135° =$

17. $-4 \tan 135° + \cot 225° + \tan 315° =$

18. $\frac{(\sec 315°)^2 - \tan 225°}{\csc 315°} =$

19. $\frac{(\tan 315°)(\tan 135°) - (\cos 225°)(\csc 315°)}{\operatorname{sen} 135°} =$

Determinación con el uso de tablas del valor de una razón trigonométrica de un ángulo agudo

Hallar el valor de:

20. $\operatorname{sen} 29° 20' =$

21. $\cos 60° 34' =$

22. $\tan 42° 09' =$

Determinación del ángulo agudo dada una de sus razones trigonométricas

Dado el valor de una razón trigonométrica, encontrar el ángulo:

23. $\operatorname{sen} \alpha = 0.9407$

24. $\cos \beta = 0.7671$

25. $\tan \gamma = 1.198$

MÓDULO 6. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Enunciará las identidades trigonométricas fundamentales.*
- *Reducirá expresiones trigonométricas utilizando las identidades trigonométricas.*

Cuadro sinóptico

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

- *Pitagóricas*
  - $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
  - $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
  - $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
- *Inversas*
  - $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\csc\theta}$ o $\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$
  - $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ o $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$
  - $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ o $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

Cuadro sinóptico Continuación

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

- *Por cociente*
  - $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$
  - $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

6.1. Identidades trigonométricas fundamentales

Las identidades trigonométricas fundamentales se clasifican en tres grupos que son:

Identidades pitagóricas:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad (1)$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad (2)$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \qquad (3)$$

Identidades inversas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \text{ o } \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad (4)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \text{ o } \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad (5)$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \text{ o } \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad (6)$$

Identidades por cociente:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \text{ o } \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \qquad (7)$$

6.2. Aplicaciones

En la ingeniería, frecuentemente es necesario simplificar expresiones que contienen razones trigonométricas, o bien, transformarlas en una forma particular. Las identidades trigonométricas fundamentales son útiles en tales situaciones, como se verá en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Simplificar cada una de las siguientes expresiones:

a) $\sec\theta - \sec\theta\operatorname{sen}^2\theta = \sec\theta\,(1 - \operatorname{sen}^2\theta)$

Solución

De la identidad (1):

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad 1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$$

entonces:

$$\sec\theta - \sec\theta\operatorname{sen}^2\theta = \sec\theta\cos^2\theta$$

De la identidad (5):

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

entonces:

$$\sec\theta - \sec\theta\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{\cos\theta}\cos^2\theta = \cos\theta$$

b) $\tan^2\theta\cos^2\theta + \cot^2\theta\operatorname{sen}^2\theta$

Solución

De la identidad (7):

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

entonces:

$$\tan^2\theta = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}, \cot^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

por lo tanto:

$$\tan^2\theta\cos^2\theta+\cot^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta=\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^2\theta+$$

$$+\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^2\theta}\mathrm{sen}^2\theta=\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta$$

De la identidad (1):

$$\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$$

entonces:

$$\tan^2\theta\cos^2\theta+\cot^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta=1$$

Ejercicios

Identidades trigonométricas fundamentales

Simplificar cada una de las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{\tan\theta}{\sec^2\theta-1}=$
2. $\mathrm{sen}^2\theta\,(1+\cot^2\theta)=$
3. $\mathrm{sen}\,\theta\sec\theta\cot\theta=$
4. $\mathrm{sen}^2\theta\sec^2\theta-\sec^2\theta=$

MÓDULO 7. FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Aplicará las fórmulas para reducir razones trigonométricas de ángulos entre 90° y 360°, a razones de ángulos agudos.*

Cuadro sinóptico

Fórmulas para reducir razones trigonométricas de ángulos entre 90° y 360°

$\mathrm{sen}(90°+\theta)=\cos\theta$	$\csc(90°+\theta)=\sec\theta$
$\cos(90°+\theta)=-\mathrm{sen}\,\theta$	$\sec(90°+\theta)=-\csc\theta$
$\tan(90°+\theta)=-\cot\theta$	$\cot(90°+\theta)=-\tan\theta$

7.1. Método de reducción a ángulos agudos

Cualquier razón trigonométrica de un ángulo entre 90° y 360° se puede reducir a una razón trigonométrica de un ángulo agudo, aplicando una o varias de las siguientes fórmulas:

$$\mathrm{sen}\,(90°+\theta)=\cos\theta \qquad \cos\,(90°+\theta)=-\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\sec\,(90°+\theta)=-\csc\theta \qquad \csc\,(90°+\theta)=\sec\theta$$

$$\tan\,(90°+\theta)=-\cot\theta \qquad \cot\,(90°+\theta)=-\tan\theta$$

Cuando θ resulta ser 0°, 90°, 180° o 270°, dos de las fórmulas anteriores no se aplican, ya que dos de las razones trigonométricas para cada uno de estos ángulos no están definidas.

Cuando se van a reducir razones trigonométricas de ángulos mayores de 360° o negativos, primero se encuentra su respectivo coterminal entre 0° y 360° y luego se aplican las fórmulas de reducción:

Ejemplo 1

Reducir cada una de las siguientes expresiones a una razón trigonométrica de un ángulo agudo positivo.

a) sen 200°

Solución

sen 200° = sen (90° + 110°) = cos 110° = cos (90° + 20°) = –sen 20°

b) cot 930°

Solución

Se calcula su coterminal entre 0° y 360°:

930° – 360° = 570° ; 570° – 360° = 210°

Entonces:

cot 930° = cot 210° = cot (90° + 120°) = –tan 120° =

= – tan (90° + 30°) = cot 30°

c) sen (–100°)

Solución

Se calcula su coterminal entre 0° y 360°:

–100° + 360° = 260°

Entonces:

sen (–100°) = sen 260° = sen (90° + 170°) =

= cos 170° = cos (90° + 80°) = –sen 80°

Ejercicios

Método de reducción a ángulos agudos

Reducir cada una de las siguientes expresiones a una razón trigonométrica de un ángulo agudo positivo.

1. cos 160° =
2. tan 220° =
3. sec 2910° =
4. sen (–30°) =
5. tan (–500°) =

MÓDULO 8. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS, DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL ÁNGULO MITAD

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Aplicará las fórmulas para calcular el seno, coseno y tangente de la suma y diferencia de dos ángulos.*
- *Aplicará las fórmulas para calcular el seno, coseno y tangente del ángulo doble y del ángulo mitad.*

Cuadro sinóptico

FÓRMULAS PARA LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS, DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL ÁNGULO MITAD

- *Suma de dos ángulos*
  - $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
  - $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
  - $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
- *Diferencia de dos ángulos*
  - $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
  - $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
  - $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Cuadro sinóptico

Continuación

FÓRMULAS PARA LAS RAZONES TRIGONOMÈTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS, DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL ÁNGULO MITAD

- *Ángulo doble*
  - $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$
  - $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$
  - $\tan 2\alpha = \dfrac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
- *Ángulo mitad*
  - $\operatorname{sen} \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos \alpha}{2}}$
  - $\cos \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 + \cos \alpha}{2}}$
  - $\tan \dfrac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

8.1. Razones trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos

8.1.1. Fórmulas para la suma

Sin entrar en la demostración, se presentan a continuación las fórmulas para calcular $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ y $\tan(\alpha + \beta)$:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Para las fórmulas $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$, α y β pueden tener cualquier valor; mientras que para la fórmula $\tan(\alpha + \beta)$, α o β no deben ser múltiplos impares de 90°, ya que en tal situación $\tan \alpha$ o $\tan \beta$ no están definidas.

8.1.2. Fórmulas para la diferencia

A partir de las fórmulas para la suma se deducen fácilmente las fórmulas para la diferencia:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

También en este caso, para $\tan(\alpha - \beta)$, α o β no deben ser múltiplos impares de 90°.

Ejemplo 1

Por medio de las fórmulas de suma o diferencia de dos ángulos, calcular el valor de las siguientes expresiones:

a) sen 105°

Solución

Sea $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$

$$\operatorname{sen} 105° = \operatorname{sen}(45° + 60°) = \operatorname{sen} 45° \cos 60° + \cos 45° \operatorname{sen} 60° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

b) tan 15°

Solución

Sea $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$

$$\tan 15° = \tan(60° - 45°) = \frac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \tan 45°} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + (\sqrt{3})(1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$$

8.2. Razones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad

8.2.1. Fórmulas para calcular el seno, el coseno y la tangente del ángulo doble

Por medio de las fórmulas para la suma de dos ángulos y haciendo $\beta = \alpha$, se puede demostrar que:

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

8.2.2. Fórmulas para calcular el seno, el coseno y la tangente del ángulo mitad

A partir de la fórmula para $\cos 2\alpha$, se pueden establecer las siguientes expresiones para el ángulo mitad:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Para la tangente del ángulo mitad se tienen las siguientes expresiones:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \text{o} \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Ejemplo 2

Calcular el valor de $\cos 60°$ mediante $\cos 30°$ y $\operatorname{sen} 30°$ utilizando la fórmula para el coseno del ángulo doble.

Solución

$$\cos 60° = \cos^2 30° - \operatorname{sen}^2 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 3

Calcular el valor de $\operatorname{sen} 22.5°$ mediante $\cos 45°$.

Solución

Como 22.5° termina en el primer cuadrante, sólo se toma la raíz positiva de la fórmula para sen $\alpha/2$.

$$\operatorname{sen} 22.5° = \operatorname{sen} \frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Ejercicios

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de dos ángulos

Calcular el valor de las siguientes expresiones:

1. sen 75°, haciendo $\alpha = 45°$ y $\beta = 30°$
2. tan 105°, haciendo $\alpha = 45°$ y $\beta = 60°$
3. cos 15°, haciendo $\alpha = 60°$ y $\beta = 45°$
4. sen 15°, haciendo $\alpha = 60°$ y $\beta = 45°$

Razones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad

5. Calcular el valor de sen 60° mediante sen 30° y cos 30°
6. Calcular el valor de tan 240° mediante tan 120°
7. Calcular el valor de sen 105°, si $\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. Calcular el valor de tan 22.5° mediante sen 45° y cos 45°

MÓDULO 9. LEY DE LOS SENOS Y LEY DE LOS COSENOS

Objetivos específicos

Al terminar el estudio de este módulo, el alumno:

- *Aplicará la ley de los senos en la resolución de un triángulo.*
- *Aplicará la ley de los cosenos en la resolución de un triángulo.*

Cuadro sinóptico

Ley de los senos. En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

La ley de los senos se puede expresar como:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

En donde:

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}, \frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}, \frac{c}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Cuadro sinóptico

Continuación

Ley de los cosenos. En todo triángulo, el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

La ley de los cosenos se puede expresar como:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

9.1. Ley de los senos. Aplicaciones

La ley de los senos, que se aplica en la solución de algunos triángulos oblicuángulos, se enuncia de la siguiente manera:

Ley de los senos. En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

Con referencia a la figura 9.1, la ley de los senos se puede expresar como:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$

de donde son inmediatas las siguientes razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$$

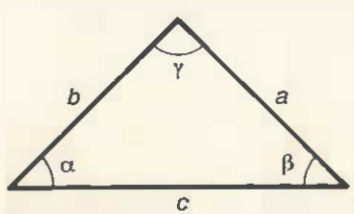


Figura 9.1

Ejemplo 1

Resolver el triángulo ABC, dados:
$a = 62.5$, $\alpha = 112° 20'$ y $\gamma = 42° 10'$ (*véase* la figura 9.2).

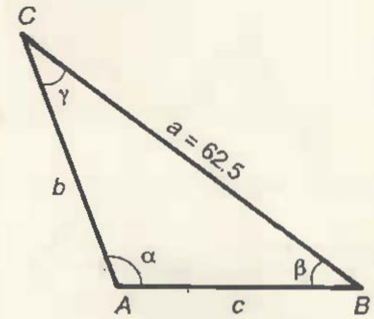


Figura 9.2

Solución

Este problema se puede resolver por medio de la ley de los senos.
Incógnitas: β, b, c.
Como la suma de los 3 ángulos interiores de un triángulo es 180°, se tiene:

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (112° 20' + 42° 10') = 25° 30'$$

Se aplica la ley de los senos para b:

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}; \quad b = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$b = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{62.5 \operatorname{sen} 25° 30'}{\operatorname{sen} 112° 20'} = \frac{62.5\,(0.4305)}{0.9250} = 29.1$$

Se aplica la ley de los senos para c:

$$\frac{c}{a} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}; \quad c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{62.5 \operatorname{sen} 42° 10'}{\operatorname{sen} 112° 20'} = \frac{62.5\,(0.6713)}{0.9250} = 45.4$$

Por lo tanto:

$$\beta = 25° 30', \quad b = 29.1, \quad c = 45.4$$

Ejemplo 2

Resolver el triángulo *ABC* dados $b = 480$, $c = 628$ y $\gamma = 55° \; 10'$ (*Véase* la figura 9.3).

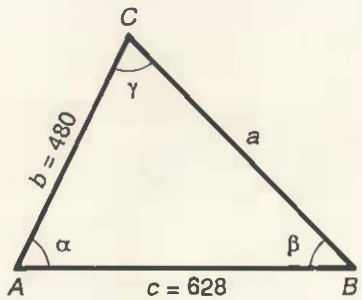


Figura 9.3

Solución

Como γ es agudo y $c > b$, el problema tiene solución única. Se aplica la ley de los senos.

Incógnitas: β, α y a.

Se aplica la ley de los senos para β:

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma}; \quad \text{sen } \beta = \frac{b \text{ sen } \gamma}{c}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{b \text{ sen } \gamma}{c} = \frac{480 \text{ sen } 55° \; 10'}{628} = \frac{480\,(0.8208)}{628} = 0.6271$$

$\text{sen } \beta = 0.6271$

Por lo tanto:

$\beta = 38° \; 50'$

Para α :

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (38° \; 50' + 55° \; 10') = 86°$

Ahora se aplica la ley de los senos para a:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}; \quad a = \frac{b \text{ sen } \alpha}{\text{sen } \beta}$$

$$a = \frac{480 \text{ (sen } 86°)}{\text{sen } 38° \; 50'} = \frac{480\,(0.9976)}{0.6271} = 764$$

Por lo tanto:

$\alpha = 86°, \quad \beta = 38° \; 50', \quad a = 764$

9.2. Ley de los cosenos. Aplicaciones

Para la solución de problemas de triángulos, también se utiliza la ley de los cosenos que dice:

> *Ley de los cosenos.* En todo triángulo, el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Con referencia a la figura 9.4, la ley de los cosenos se puede expresar como:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos \gamma$

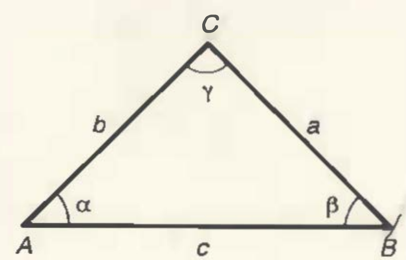


Figura 9.4

Ejemplo 3

Resolver el triángulo *ABC*, dados $a = 132$, $b = 224$ y $\gamma = 28° \; 40'$. (*Véase* la figura 9.5.)

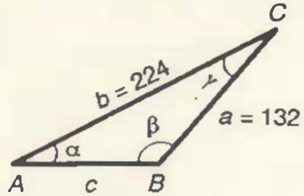


Figura 9.5

Solución

Incógnitas: c, α, β.
Se aplica la ley de los cosenos para c:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (132)^2 + (224)^2 -$$

$$- 2(132)(224)\cos 28^\circ\, 40'$$

$c^2 = 15714$; $c = 125.36$

Se aplica la ley de los senos para α :

$$\frac{a}{c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma}\,; \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{a\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{132\operatorname{sen}28^\circ\,40'}{125.36} = \frac{132\,(0.4797)}{125.36} = 0.5051$$

$\operatorname{sen}\alpha = 0.5051$

Por lo tanto:

$\alpha = 30^\circ\, 20'\, 17''$

Para β :

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - (30^\circ\, 20'\, 17'' + 28^\circ\, 40') = 120^\circ\, 59'\, 43''$$

Por lo tanto:

$c = 125.36$, $\alpha = 30^\circ\, 20'\, 17''$, $\beta = 120^\circ\, 59'\, 43''$

Ejemplo 4

Resolver el triángulo ABC dados $a = 25.2$, $b = 37.8$ y $c = 43.4$.
(*Véase* figura 9.6)

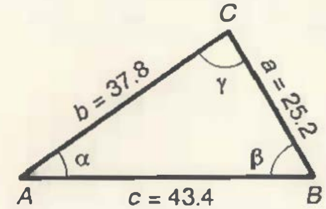


Figura 9.6

Solución

Incógnitas: α, β, γ.
Se aplica la ley de los cosenos para α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,; \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(37.8)^2 + (43.4)^2 - (25.2)^2}{2\,(37.8)\,(43.4)} = 0.816$$

$\cos\alpha = 0.816$

Por lo tanto:

$\alpha = 35^\circ\, 18'\, 49''$

Se aplica la ley de los cosenos para β :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta\,; \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(25.2)^2 + (43.4)^2 - (37.8)^2}{2\,(25.2)\,(43.4)} = 0.4982$$

$\cos\beta = 0.4982$

Por lo tanto:

$\beta = 60^\circ\, 07'\, 08''$

Para γ :

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (35^\circ\, 18'\, 49'' + 60^\circ\, 07'\, 08'') = 84^\circ\, 34'\, 03''$$

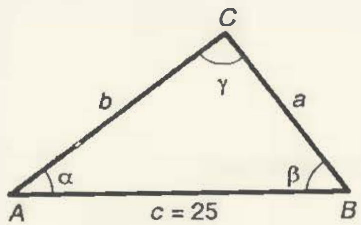
Por lo tanto:

$\alpha = 35° \, 18' \, 49''$, $\beta = 60° \, 07' \, 08''$, $\gamma = 84° \, 34' \, 03''$

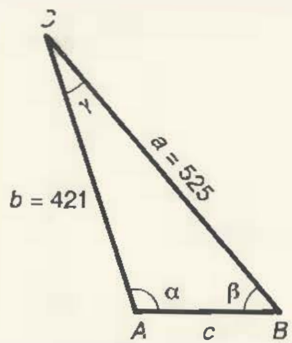
Ejercicios

Ley de los senos

1. Resolver el triángulo ABC dados $c = 25$, $\alpha = 35°$ y $\beta = 68°$

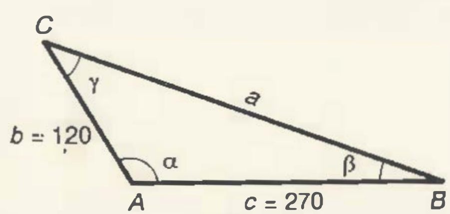


2. Resolver el triángulo ABC dados $a = 525$, $b = 421$ y $\alpha = 130° \, 50'$.

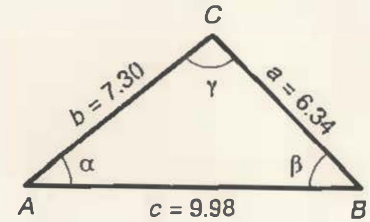


Ley de los cosenos

3. Resolver el triángulo ABC dados $b = 120$, $c = 270$ y α 118° 40'.



4. Resolver el triángulo ABC dados $a = 6.34$, $b = 7.30$ y $c = 9.98$.



EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

1. *Seleccione en cada uno de los casos la opción correcta.*

a) $45° =$ ( )

A. π rad B. 2π rad C. $\frac{\pi}{4}$ rad D. $\frac{\pi}{6}$ rad

b) $55° 48' 7'' =$ ( )

A. 0.9739 rad B. π rad C. $\frac{\pi}{5}$ rad D. $\frac{\pi}{6}$ rad

2. *Relacione la columna de la izquierda con la respuesta correcta de la columna de la derecha.*

A. Dos ángulos son adyacentes cuando:	( ) su suma es igual a 90°
B. Dos ángulos son complementarios si:	( ) su suma es igual a 180°
C. Dos ángulos son suplementarios si:	( ) su suma es igual a 270°
D. Dos ángulos son conjugados si:	( ) tienen un mismo vértice, un lado común y son exteriores el uno del otro.
	( ) su suma es igual a 360°; o sea, cuando su suma es igual a un perígono.

3. *Para cada una de las siguientes aseveraciones, indique si son falsas o verdaderas.*

a) La suma de los 3 ángulos interiores de todo triángulo es igual a π radianes.

( ) verdadero ( ) falso

b) Todo triángulo equilátero es equiángulo.

( ) verdadero ( ) falso

c) La suma de los ángulos interiores de un triángulo acutángulo no es igual a 180°

( ) verdadero ( ) falso

d) Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los del otro, los dos triángulos son semejantes.

( ) verdadero ( ) falso

e) Dos triángulos son semejantes si la suma de sus ángulos es igual a 180°

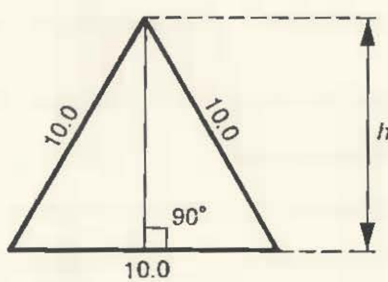
( ) verdadero ( ) falso

f) Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares son semejantes.

( ) verdadero ( ) falso

4. *Seleccione en cada uno de los siguientes casos la opción correcta.*

a) Considérese la figura:



El valor de h es: ( )

A. 10.00 B. 14.1421 C. 7.5548 D. 8.6603

b) Un hombre se encuentra parado a una cierta distancia de un farol. Si la sombra que proyecta el hombre sobre el suelo mide 2.40 m y la distancia lineal entre su cabeza y el extremo de su sombra es de 3.00 m, ¿cuánto mide el hombre? ( )

A. 1.60 m B. 1.80 m C. 1.50 m D. 2.00 m

5. *Seleccione la opción correcta.*

Una circunferencia es: ( )

A. Una curva totalmente cerrada.

B. Un conjunto de puntos del plano.

C. Un conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

D. Un conjunto de puntos del plano cuya distancia a un punto fijo llamado centro es menor o igual a una longitud llamada radio.

6. *Anote en cada paréntesis la letra que corresponda a la descripción correcta de cada elemento.*

A. Recta que corta a la circunferencia en dos puntos.	Radio	( )
B. Distancia entre dos puntos de la circunferencia.	Diámetro	( )
C. Recta que toca a la circunferencia en un solo punto.	Cuerda	( )
D. Segmento rectilíneo determinado por dos puntos de la circunferencia.	Secante	( )
E. Distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia.	Tangente	( )
F. Segmento determinado por dos puntos de la circunferencia, que pasa por el centro.		

7. *Anote la opción correcta en cada caso.*

En un triángulo rectángulo se definen las razones trigonométricas para un ángulo agudo α como sigue:

A. $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$ sen α = ( )

B. $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$ cos α = ( )

C. $\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ tan α = ( )

D. $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$ cot α = ( )

E. $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ sec α = ( )

F. $\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$ csc α = ( )

8. *Sin recurrir al uso de tablas trigonométricas, relacione correctamente la columna de la izquierda con la columna de la derecha.*

A. ... 0	sen 0° = ( )
B. ... 1	tan 45° = ( )
C. ... $\frac{2}{\sqrt{3}}$	sec 30° = ( )
D. ... $\frac{-1}{\sqrt{3}}$	cos 90° = ( )
E. ... $\sqrt{2}$	cot 120° = ( )
F. ... $\sqrt{3}$	csc 135° = ( )

9. *Determine en cada caso la opción correcta.*

1. Si sen 30° $= \frac{1}{2}$ sen 35° = ( )

   A. 0.32

   B. 0.57

   C. 0.82

2. Si tan 45° = 1 tan 39° = ( )

   A. 0.81

   B. 1.22

   C. 0.3

3. Si sen $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \alpha = 60°$, sen $\alpha = 0.9 \rightarrow \alpha =$ ( )

   A. 54°

   B. 118°

   C. 64°

10. *Indique si es falsa* (F) *o verdadera* (V) *cada una de las siguientes expresiones.*

a) $\sqrt{\text{sen}^2 A + \cos^2 A} = \text{sen } A + \cos A$ ( )

b) $\tan^2 A - \sec^2 A = -1$ ( )

c) $1 - \cos^2 A = \text{sen}^2 A$ ( )

d) $\frac{1}{\cot^2 A} + \frac{1}{\cos^2 A} = 1$ ( )

e) $1 + \cot^2 A = \csc^2 A$ ( )

f) $\sqrt{\csc^2 A - \cot^2 A} = 1$ ( )

g) $\text{sen } A = \sqrt{1 + \cos A}$ ( )

h) sen A csc A = 1 ( )

i) $\tan A = \frac{1}{\csc A}$ ( )

j) cos A = sen A cot A ( )

k) $\tan^2 A + \sec^2 A = 1$ ( )

11. *Seleccione la opción correcta en cada caso.*

A. $(1 + \tan \alpha)^2$	1) $\frac{1 + \tan^2 A}{\text{sen } A} =$ ( )
B. 0	2) $\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} =$ ( )
C. 1 − 2 sen A	3) $\frac{1 - \text{sen } A}{\cos A} - \frac{\cos A}{1 + \text{sen } A} =$ ( )
D. $\sec^2 A \csc A$	4) $1 + \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\tan \alpha}{\cot \alpha} + \frac{\sec \alpha}{\csc \alpha} =$ ( )
E. $\cot^2 A + \csc^2 A + 2 \cot A \csc A$	
F. $(\csc A - \cot A)^2$	
G. $2 (1 + \tan \alpha)$	

12. *Indique si son falsas o verdaderas las siguientes expresiones.*

a) sen (−A) = − sen A ( )

b) cos (−A) = − cos A ( )

c) sec (−A) = sec A ( )

d) sen (90° + A) = cos A ( )

e) $\cos(90° + A) = \text{sen } A$ ( )

f) $\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ( )

g) $\text{sen } 315° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ ( )

h) $\tan 330° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ( )

i) $\text{sen } 120° = -\frac{1}{2}$ ( )

13. *Relacione correctamente la columna de la izquierda con la columna de la derecha.*

A. $\text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta$ — 1) $\text{sen}(\alpha + \beta) =$ ( )

B. $\cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$ — 2) $\tan(45° + 60°) =$ ( )

C. $-2 - \sqrt{3}$ — 3) $\text{sen}(75°) =$ ( )

D. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ — 4) $\cos(\alpha + \beta) =$ ( )

E. $\frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

F. $\frac{2\sqrt{2}}{4}$

14. *Seleccione la opción correcta:*

a) La fórmula para calcular sen 2 α es:

( ) $\frac{1}{2} \text{sen } \alpha \cos \alpha$ ( ) $2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha$ ( ) $2 \text{ sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha$

b) La fórmula para calcular cos 2A es:

( ) $\cos^2 A - \text{sen}^2 A$ ( ) $\cos^2 A + \text{sen}^2 A$ ( ) $\text{sen}^2 A - \cos^2 A$

c) La fórmula para calcular tan 2α es:

( ) $\frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha}$ ( ) $\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ ( ) $\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

d) El valor de sen 60° es:

( ) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ( ) $\sqrt{3}$ ( ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) El valor de cos 120° es:

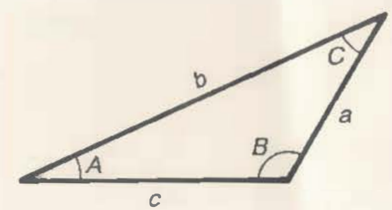
( ) $-\frac{1}{2}$ ( ) 2 ( ) $\frac{1}{2}$

f) El valor de tan 30° es:

( ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ( ) 3 ( ) $\sqrt{3}$

15. *En lo que sigue, seleccione la opción correcta.*

Considérese la figura:



a) Si: $A = 33°$ $B = 72° 30'$ y $a = 10$

entonces $b =$ ( )

A. 71.511

B. 17.511

C. 51.171

b) Si: $A = 104° 30.3'$ $B = 25°$ y $b = 347.85$

entonces $C =$ ( )

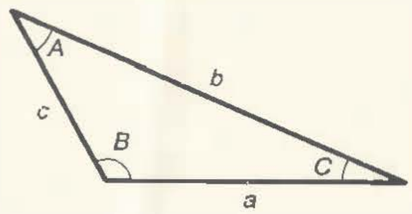
A. 50° 29.7'

B. 29° 50.7'

C. 79° 25.7'

16. *En lo que sigue, seleccione la opción correcta.*

Considérese la figura:



a) Si: $a = 2500$ $b = 3500$ y $c = 4500$

entonces $B =$ ( )

A. 46° 80'

B. 50° 42'

C. 86° 40'

b) Si: $a = 0.0035$ $b = 0.0029$ y $c = 0.0038$

entonces $A =$ ( )

A. 61° 15'

B. 59° 35'

C. 1° 45'

SOLUCIONES

MÓDULO 1 (págs. 13 - 22)

1. 13.96 rad = 4.44 π rad
2. 3.665 = $\frac{7}{6}\pi$ rad
3. 2.617 rad = $\frac{5}{6}\pi$ rad
4. 120°
5. 538.582°
6. 30°
7. Complemento de $\alpha = 67°$
8. $\alpha = 135°$, $\beta = 45°$
9. $\alpha = 330°$, $\beta = 30°$

MÓDULO 2 (págs. 23 - 33)

1. 90°, 25°
2. $\overline{AE} = 6\text{m}$
3. *a*) 2.236

   b) 8.71
4. 7.21 millas

MÓDULO 4 (págs. 41 - 47)

1. $\text{sen}\,\beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\tan\beta = \frac{3}{2}$, $\cot\beta = \frac{2}{3}$,

$\sec\beta = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $\csc\beta = \frac{\sqrt{13}}{3}$

2. $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\tan\alpha = \frac{3}{1} = 3$, $\cot\alpha = \frac{1}{3}$,

$\sec\alpha = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$, $\csc\alpha = \frac{\sqrt{10}}{3}$

3. 0

4. $\frac{4}{3}$

5. 8

MÓDULO 5 (págs. 49 - 67)

1. $\text{sen}\,\theta = \frac{-4}{5}$, $\cos\theta = -\frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{4}$,

$\sec\theta = -\frac{5}{3}$, $\csc\theta = \frac{-5}{4}$

2. 2

3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $\sqrt{3}$

5. Segundo cuadrante; sen (+), cos (-), tan (-)

6. Primer cuadrante; sen (+), cos (+), tan (+)

7. Tercer cuadrante; sen (-), cos (-), tan (+)

8. $2 - 3\sqrt{3}$

9. 1

10. –2

11. –2

12. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13. $3\sqrt{3} - 6 = -0.8038$

14. $\frac{1}{2}$

15. 3

16. $9 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

17. 4

18. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

19. 0

20. 0.4899

21. 0.4914

22. 0.9052

23. 70°10'8"

24. 39°54'21"

25. 50°8'51"

MÓDULO 6 (págs. 69 - 72)

1. cot 0

2. 1

3. 1

4. –1

MÓDULO 7 (págs. 73 - 75)

1. – sen 70°

2. tan 40°

3. sec 30°

4. – sen 30°

5. tan 40°

MÓDULO 8 (págs. 77 - 81)

1. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

2. $\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

3. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

4. $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$

5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\sqrt{3}$

7. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

8. $\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

MÓDULO 9 (págs. 83 - 91)

1. $a = 15$, $b = 24$, $\gamma = 77°$
2. $c = 142$, $\beta = 37°21''$, $\gamma = 11°49'$
3. $a = 344$, $\beta = 17°50'$, $\gamma = 43°30'$
4. $\alpha = 39°20'14''$, $\beta = 46°52'30''$, $\gamma = 93°47'16''$

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN (págs. 93 - 100)

1. *a*) 45° = (C)
   b) 55°48'7" = (A)
2. (B) su suma es igual a 90°
   (C) su suma es igual a 180°
   (   ) su suma es igual a 270°
   (A) tienen el mismo vértice, un lado común y son externos el uno del otro.
   (D) su suma es igual a 360°, o sea, cuando su suma es igual a un perígono.
3. *a*) verdadero
   b) verdadero
   c) falso
   d) verdadero
   e) falso
   f) verdadero
4. *a*) (D)
   b) (B)
5. (C)
6. Radio (E)
   Diámetro (F)
   Cuerda (D)
   Secante (A)
   Tangente (C)
7. sen α = (E)
   cos α = (C)
   tan α = (A)
   cot α = (F)
   sec α = (D)
   csc α = (B)
8. sen 0° = (A)
   tan 45° = (B)
   sec 30° = (C)
   cos 90° = (A)
   cot 120° = (D)
   csc 135° = (E)
9. *a*) sen 35° = (B)
   b) tan 39° = (A)
   c) α = (C)
10. *a*) (F)
    b) (V)
    c) (V)
    d) (F)
    e) (V)
    f) (V)
    g) (F)
    h) (V)
    i) (F)
    j) (V)
    k) (F)
11. 1) (D)
    2) (E)
    3) (B)
    4) (A)
12. *a*) (V)
    b) (F)

c) (V)

d) (V)

e) (F)

f) (V)

g) (V)

h) (F)

i) (F)

13. 1) (A)

2) (C)

3) (D)

4) (B)

14. a) $2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

b) $\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$

c) $\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $-\frac{1}{2}$

f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

15. a) $b =$ (B)

b) $C =$ (A)

16. a) $B =$ (B)

b) $A =$ (A)

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Ayres, Frank Jr., *Trigonometría plana y esférica*, Colección Schaum, Mc Graw-Hill.

Baldor, J.A., *Geometría y trigonometría*, Cultura Mexicana, S.A., México.

Bernett, Rich, *Teoría y problemas de geometría plana*, Colección Schaum, Mc Graw-Hill.

Hemmerling, *Geometría elemental*, LIMUSA, México.

Hooper, *Trigonometría*, Publicaciones Cultural, México.

Nichols, Palmer, Schacht, *Geometría moderna*, CECSA, México.

Esta obra se terminó de imprimir y encuadernar
el día 27 de marzo de 1990,
en los talleres de Polymaster de México, S. A.,
Congreso núm. 252, Col. Federal,
C. P. 15700, México, D. F.,
se tiraron
2 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

GAR CRU ET KC 100