



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

INGENIERÍA CIVIL

FACULTAD DE INGENIERÍA

**“PRESIÓN DE PORO INDUCIDA POR EL  
OLEAJE EN PLAYAS DE GRANO GRUESO”**

**T E S I S**

Que para obtener el título de:

**Ingeniero Civil**

Presenta

**NADIA GÓMEZ GONZÁLEZ**

Director de Tesis

**DR. EDGAR GERARDO MENDOZA BALDWIN**



MÉXICO, D.F.

JULIO 2009







# ÍNDICE

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>7</b>
<b>LISTA DE TABLAS .....</b>	<b>11</b>
<b>I. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>13</b>
I.1    Importancia del Trabajo.....	14
I.2    Objetivos.....	15
I.3    Metodología.....	16
I.4    Organización de la tesis.....	16
<b>II. OLEAJE.....</b>	<b>19</b>
II.1    Introducción.....	19
II.2    Clasificación del oleaje.....	20
II.2.1    Clasificación de acuerdo con la profundidad .....	20
II.2.2    Clasificación según la fuerza generadora .....	21
II.2.3    Clasificación según el periodo.....	22
II.3    Caracterización del oleaje.....	23
II.3.1    Caracterización del oleaje desde el punto de vista físico .....	23
II.3.2    Caracterización del oleaje desde el punto de vista matemático.....	25
II.3.3    Caracterización del oleaje desde el punto de vista estadístico .....	27
II.4    Procesos de transformación .....	30
II.4.1    Refracción.....	30
II.4.2    Difracción.....	31
II.4.3    Someraamiento.....	31
II.4.4    Reflexión .....	31
II.4.5    Rotura .....	32
II.4.6    Resonancia.....	33
II.5    Número de Iribarren .....	33
II.5.1    Estado del arte .....	33
II.5.2    Relación del número de Iribarren con otros parámetros.....	34
<b>III. PLAYAS.....</b>	<b>39</b>
III.1    Introducción.....	39
III.2    Tipos de playas .....	39
III.3    Playas de grano grueso .....	40
III.3.1    Definición y origen.....	40
III.3.2    Caracterización .....	41
III.3.3    Ejemplos .....	42
III.4    Perfil de Equilibrio .....	42
<b>IV. FLUJO EN UN MEDIO POROSO.....</b>	<b>45</b>
IV.1    Generalidades del flujo tipo Darcy.....	45
IV.1.1    Velocidad de flujo .....	45
IV.1.2    Limitaciones de la Ley de Darcy.....	46
IV.1.3    Derivación de la ecuación de transporte para flujo viscoso .....	46

IV.1.4	Relación con la ley de Darcy .....	47
IV.2	Flujo de ondas en un medio poroso .....	48
IV.2.1	Antecedentes sobre la propagación de ondas en y sobre un medio poroso ..	48
IV.2.2	Ecuaciones del flujo en un medio permeable .....	49
IV.2.3	Resumen de las ecuaciones de propagación de ondas sobre un fondo poroso de profundidad variable .....	54
<b>V.</b>	<b>ETAPA DE EXPERIMENTACIÓN.....</b>	<b>63</b>
V.1	Descripción del laboratorio .....	63
V.1.1	Características del canal de oleaje .....	63
V.1.2	Generador de oleaje .....	64
V.1.3	Instrumentación .....	66
V.2	Descripción del Experimento .....	68
V.2.1	Construcción del modelo de playa.....	69
V.2.2	Instrumentación .....	70
V.2.3	Metodología de los ensayos.....	72
<b>VI.</b>	<b>ANÁLISIS DE RESULTADOS.....</b>	<b>75</b>
VI.1	Número de Iribarren y parámetros relacionados .....	75
VI.2	Resultados del programa MSP del Instituto de Ingeniería .....	83
VI.3	Distribución de la presión al interior de la playa.....	98
<b>VII.</b>	<b>CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO.....</b>	<b>115</b>
VII.1	Conclusiones.....	115
VII.2	Futuras líneas de trabajo .....	116
<b>A.</b>	<b>ANEXO A .....</b>	<b>119</b>
A.1	TEORÍA LINEAL Y PROPAGACIÓN DE ONDAS EN Y SOBRE UN MEDIO POROSO .....	119
A.1.1	Teoría lineal dentro de un medio poroso .....	119
	Solución para el potencial de filtración .....	119
A.2	TEORÍA LINEAL CON INTERACCIÓN ENTRE AGUA Y MEDIO POROSO	123
A.2.1	Condiciones de contorno .....	123
<b>B.</b>	<b>ANEXO B.....</b>	<b>131</b>
B.1	GRÁFICAS DE RESULTADOS .....	131
B.1.1	Resultados del programa MSP del Instituto de Ingeniería, UNAM.....	131
B.1.2	Distribución de la presión al interior de la playa.....	135
	<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>153</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura II.1 Oleaje tipo “sea” (izquierda) y oleaje tipo “swell” (derecha) .....	21
Figura II.2 Periodo-energía de las ondas (Kinsman 1965) .....	22
Figura II.3 Tipos de ondas .....	25
Figura II.4 Parámetros que caracterizan una onda. ....	25
Figura II.5 Tipos de rotura según Iversen , Patrik y Wiegel, y Galván .....	35
Figura IV.1 Croquis del problema de propagación en fondo variable .....	55
Figura V.1 Canal de oleaje (II-UNAM) .....	63
Figura V.2 Generador de oleaje (II-UNAM) .....	64
Figura V.3 Motor eléctrico del generador de olas, II-UNAM .....	65
Figura V.4 Sensores del sistema de absorción, II-UNAM .....	65
Figura V.5 Sensores de nivel .....	66
Figura V.6 Celdas de presión .....	67
Figura V.7 Velocímetro acústico .....	67
Figura V.8 Perfil inicial de la playa (cotas en metros) .....	69
Figura V.9 Ubicación relativa de los sensores de nivel .....	70
Figura V.11 Sensor de presión sujeto a una malla, colocado en la playa .....	70
Figura V.12 Vista en planta y perfil del arreglo de los sensores de presión .....	71
Figura VI.1 Obtención del ángulo propuesto .....	76
Figura VI.2 Coeficientes de reflexión medidos y calculados con Losada y Giménez-Curto (1981) .....	79
Figura VI.3 Coeficientes de reflexión medidos y calculados con Seelig y Ahrens (1981) ..	81
Figura VI.4 Run-up medidos y calculados .....	82
Figura VI.5 Arreglo de la playa para el programa MSP .....	83
Figura VI.6 Alturas de ola máximas instantáneas para caso .....	85
Figura VI.7 diagramas de velocidad horizontal de la corrida “A”, T=1s .....	86
Figura VI.8 diagramas de velocidad horizontal de la corrida “B”, T=2s .....	87
Figura VI.9 Diagramas de velocidad horizontal de la corrida “C”, T=3s .....	88
Figura VI.10 Diagramas de velocidad horizontal de la corrida “D”, T=4s .....	89
Figura VI.11 Diagramas de velocidad vertical de la corrida “A”, T=1s. ....	90
Figura VI.12 Diagramas de velocidad vertical de la corrida “B”, T=2s. ....	91
Figura VI.13 Diagramas de velocidad vertical de la corrida “C”, T=3s. ....	92
Figura VI.14 Diagramas de velocidad vertical de la corrida “D”, T=4s. ....	93
Figura VI.15 Mapas de presiones para las ejecuciones A, B, C y D .....	95
Figura VI.16 Mapa de velocidades para la corrida “A” .....	96
Figura VI.17 Mapa de velocidades para la corrida “B” .....	96
Figura VI.18 Mapa de velocidades para la corrida “C” .....	97
Figura VI.19 Mapa de velocidades para la corrida “D” .....	97
Figura VI.20 Diagrama posicional con respecto a X .....	99
Figura VI.21 Diagrama posicional con respecto a Z .....	99
Figura VI.22 Ejes de referencia de la playa y ubicación de los sensores .....	99

Figura VI.23 Gráficas X-P <sub>máx</sub> correspondientes a T=1s .....	100
Figura VI.24 Gráficas X-P <sub>máx</sub> correspondientes a T=2s .....	101
Figura VI.25 Gráficas X-P <sub>máx</sub> correspondientes a T=3s .....	101
Figura VI.26 Gráficas X-P <sub>máx</sub> correspondientes a T=4s .....	101
Figura VI.27 Gráficas X-P <sub>min</sub> correspondientes a T=1s .....	103
Figura VI.28 Gráficas X-P <sub>min</sub> correspondientes a T=2s .....	103
Figura VI.29 Gráficas X-P <sub>min</sub> correspondientes a T=3s .....	104
Figura VI.30 Gráficas X-P <sub>min</sub> correspondientes a T=4s .....	104
Figura VI.31 Gráficas P <sub>máx</sub> -Z correspondientes a T=1s .....	105
Figura VI.32 Gráficas P <sub>máx</sub> -Z correspondientes a T=2s .....	105
Figura VI.33 Gráficas P <sub>máx</sub> -Z correspondientes a T=3s .....	106
Figura VI.34 Gráficas P <sub>máx</sub> -Z correspondientes a T=4s .....	106
Figura VI.35 Gráficas P <sub>min</sub> -Z correspondientes a T=1s .....	108
Figura VI.36 Gráficas P <sub>min</sub> -Z correspondientes a T=2s .....	108
Figura VI.37 Gráficas P <sub>min</sub> -Z correspondientes a T=3s .....	108
Figura VI.38 Gráficas P <sub>min</sub> -Z correspondientes a T=4s .....	109
Figura VI.39 Puntos críticos .....	111
Figura VI.40 Zonas críticas .....	112
Figura A.1 Esquema y sistema de referencia para la teoría lineal en el medio poroso .....	119
Figura A.2 Esquema y sistema de referencia para la teoría lineal sobre un medio poroso .....	123
Figura B.1 Mapas de presión para la corrida "A", H=0.18m T=1s .....	131
Figura B.2 Mapas de presión para la corrida "B", H=0.18m T=2s .....	132
Figura B.3 Mapas de presión para la corrida "C", H=0.16m T=3s .....	132
Figura B.4 Mapas de presión para la corrida "D", H=0.14m T=4s .....	133
Figura B.5 Mapas de velocidad para la corrida "A", H=0.18m T=1s .....	133
Figura B.6 Mapas de velocidad para la corrida "B", H=0.18m T=2s .....	134
Figura B.7 Mapas de velocidad para la corrida "C", H=0.16m T=3s .....	134
Figura B.8 Mapas de velocidad para la corrida "D", H=0.14m T=4s .....	135
Figura B.9 Diagramas de presión para E.1, H=0.10m T=1s .....	136
Figura B.10 Diagramas de presión para E.2, H=0.12m T=1s .....	137
Figura B.11 Diagramas de presión para E.3, H=0.14m T=1s .....	138
Figura B.12 Diagramas de presión para E.4, H=0.16m T=1s .....	139
Figura B.13 Diagramas de presión para E.5, H=0.18m T=1s .....	140
Figura B.14 Diagramas de presión para E.6, H=0.10m T=2s .....	141
Figura B.15 Diagramas de presión para E.7, H=0.12m T=2s .....	142
Figura B.16 Diagramas de presión para E.8, H=0.14m T=2s .....	143
Figura B.17 Diagramas de presión para E.9, H=0.16m T=2s .....	144
Figura B.18 Diagramas de presión para E.10, H=0.18m T=2s .....	145
Figura B.19 Diagramas de presión para E.11, H=0.10m T=3s .....	146
Figura B.20 Diagramas de presión para E.12, H=0.12m T=3s .....	147
Figura B.21 Diagramas de presión para E.13, H=0.14m T=3s .....	148
Figura B.22 Diagramas de presión para E.14, H=0.16m T=s .....	149
Figura B.23 Diagramas de presión para E.15, H=0.10m T=4s .....	150
Figura B.24 Diagramas de presión para E.16, H=0.12m T=4s .....	151

Figura B.25 Diagramas de presión para E.17, H=0.14m T=4s ..... 152



## LISTA DE TABLAS

Tabla II-1 Clasificación de las ondas por su periodo (Johnson et al 1978).....	22
Tabla II-2 Características de los parámetros adimensionales para las distintas teorías de ondas.....	27
Tabla II-3 Tipos de rotura sobre taludes impermeables .....	35
Tabla II-4 Valores del número de Iribarren para los diferentes tipos de rotura según Batjes (1974) .....	36
Tabla II-5 Valores de Iribarren para los cuatro tipos de rotura, Horikawa, 1988. ....	36
Tabla II-6 Rango de valores del número de Iribarren para los distintos tipos de roturas, Silva, 1997.....	36
Tabla V-1 Propiedades físicas de la grava.....	69
Tabla V-2 Posición de los sensores de presión .....	71
Tabla V-3 Variaciones de las condiciones de oleaje .....	72
Tabla V-4 Duración de las pruebas para cada ensayo .....	73
Tabla VI-1 Ángulos hallados para cada caso .....	76
Tabla VI-2 Parámetros calculados para los perfiles inicial y estable .....	77
Tabla VI-3 Coeficientes de reflexión medidos y calculados con Losada y Giménez-Curto (1981) .....	78
Tabla VI-4 Coeficientes de Reflexión medidos y calculados con Seelig y Ahrens (1981)..	80
Tabla VI-5 Valores del Run-up medido y calculado .....	81
Tabla VI-6 Variantes para los perfiles y mapas de cada corrida.....	84
Tabla VI-7 Ensayos que se presentan en el apartado VI.3 .....	100
Tabla VI-8 Sensores que registraron las presiones críticas .....	110
Tabla VI-9 Resumen de sensores y posición.....	111
Tabla VI-10 Tabla de comparación entre los valores de presión medidos y calculados con el programa MSP del Instituto de Ingeniería.....	112



# I. INTRODUCCIÓN

Dada la ubicación y características morfológicas de nuestro país, el estudio de sus zonas costeras es un tópico de innegable importancia. El Instituto de Ingeniería de la UNAM ha tomado conciencia de ello y, para favorecer la comprensión de los fenómenos que se suceden en dichas zonas, construyó un laboratorio dedicado al estudio del comportamiento del litoral y la influencia que el oleaje ejerce sobre éste. Las instalaciones se encuentran en el Edificio 8 del mismo Instituto y se les conoce como “Laboratorio de Costas y Puertos de la UNAM”.

México se encuentra en la región de América del Norte, debido a que tres cuartas partes de su territorio se localizan por encima del Trópico de Cáncer. De acuerdo con el INEGI, la extensión territorial del país es de 1 964 375 km<sup>2</sup> de los cuales se encuentra divididos de la siguiente forma:

- Superficie Continental: 1 959 248 km<sup>2</sup>
- Superficie Insular: 5 127 km<sup>2</sup>

El centro de interés de esta tesis es la Superficie Litoral, de la cual se sabe que México cuenta con un perímetro de 14,400 km de litoral marítimo, de los cuales 10,600 km son costas que se agrupan en:

- 7,450 km en el Océano Pacífico,
- 2,810 km en el Golfo de México y el mar Caribe y
- 340 km en las costas isleñas.

Por su ubicación geográfica, México se localiza en una zona de ciclones, por lo cual es también muy importante conocer la vulnerabilidad y la interacción de las playas con climas de oleaje muy energéticos para, a su vez, poder entender mejor las posibles afectaciones causadas por dichos fenómenos y avanzar en el diseño de obras de protección, regeneración, conservación y aprovechamiento.

Existe ya un gran número de investigaciones sobre el tema, principalmente enfocadas en el diseño de obras de protección (e.g. diques) y de infraestructura portuaria en general. Inicialmente se realizaron estudios teóricos simples basados en las ondas y se aplicaron al oleaje, más tarde comenzaron a desarrollarse teorías más complejas para ayudar a determinar el comportamiento del oleaje y predecir cómo afecta al litoral.

Con respecto a las playas se han realizado estudios, la mayoría relativos a playas de arena, sin embargo, el estudio de las playas de grava comenzó a

tomar importancia debido a la posibilidad de aplicar los principios que las gobiernan para ayudar al diseño de obras de abrigo más eficientes.

Existen dos formas principales de realizar estudios sobre el comportamiento de las playas y la acción del oleaje sobre las mismas. La primera, que es la que arroja resultados reales y sin deformación, es la recolección de datos en campo, colocando estaciones de monitoreo en la playa que se desee estudiar. Esta práctica requiere mucho tiempo ya que para poder entender el comportamiento general de la playa se tiene que recolectar información durante, al menos, un año y con equipo especial; lo que hace que el costo de los estudios sea considerable. La segunda vía, es realizar estudios a pequeña escala en laboratorio, donde se puede tener mayor control de las condiciones bajo las cuales se quiere observar el comportamiento de la playa y adicionalmente con la ayuda de herramientas numéricas y de cómputo se pueden generar datos representativos de lo que ocurre en la realidad. Esto no quiere decir que únicamente se deba hacer trabajo de laboratorio, más aún, el escenario ideal es aquel en el que se han llevado a cabo ambos tipos de estudios.

Esta tesis presenta un análisis complementario a un trabajo experimental que comenzó a principios del 2007. Dichos ensayos han arrojado información valiosa en diversas áreas (e.g. reflexión del oleaje, disipación de energía, evolución del perfil vertical), de manera que este trabajo es un paso más en la búsqueda de una mejor comprensión de la dinámica que se genera en una playa de grava expuesta a distintos climas de oleaje.

### *1.1 Importancia del Trabajo*

Debido a la ubicación del país y visto que históricamente las costas mexicanas son afectadas por eventos que van desde tormentas tropicales hasta huracanes de grado 5, es necesario hacer estudios sobre cómo afectan los climas de oleaje muy energéticos a las playas y las posibilidades de mejorar las acciones estructurales disponibles para la protección de las zonas costeras.

El estudio se puede abordar desde dos grandes puntos de vista para luego hacer una comparación entre ellos. Tales puntos de vista se refieren a los llamados estados del mar, que podrían separarse en condiciones normales y condiciones de tormenta. Es importante, entonces, estudiar la condición normal del oleaje, debido a que corresponderá a la situación que se presenta la mayor parte del tiempo, luego la forma y estado de la playa serán también las que mayor parte del tiempo ocurrirán. Por su parte, el estudio de las condiciones de

tormenta, ofrece un panorama de las condiciones de la playa en los casos más desfavorables para su estabilidad.

Otra razón importante para el estudio de los litorales es que la mayoría de las regiones costeras son una de las principales fuentes turísticas del país, por lo que hay grandes concentraciones de población, infraestructura y servicios en dichos puntos; lo cual es motivo suficiente para buscar un conocimiento pleno del comportamiento de las playas y del oleaje con el fin de proteger, conservar y desarrollar las zonas costeras, de forma que se pueda tener un máximo aprovechamiento con el menor daño al ambiente y el menor riesgo para la población.

En México existen relativamente pocas playas de grava, pero es muy importante su estudio puesto que, al entender el comportamiento de éstas, se podría llegar a desarrollar una alternativa de protección muy eficiente para las zonas costeras, entendiendo los beneficios y carencias de cada tipo de playa.

## ***1.2 Objetivos***

El objetivo principal de este trabajo es analizar el comportamiento de las presiones al interior de la playa cuando se presentan diferentes condiciones de oleaje, a través del desarrollo de un programa experimental encaminado a la revisión y medición de fenómenos como la interacción entre la playa y el oleaje, para la determinación de parámetros que relacionen y expliquen los fenómenos observados.

En este sentido se han planteado objetivos particulares como son: a) obtener el número de Iribarren y relacionarlo tanto con el ascenso máximo del oleaje (Run-Up) como con el coeficiente de reflexión, a fin de comparar dichos conceptos con los valores medidos en la playa y hallar qué parte del perfil de la playa gobierna el comportamiento de dichos parámetros, b) analizar el comportamiento de las presiones que actúan al interior de la playa bajo diferentes condiciones de oleaje.

Vale la pena señalar que el objetivo macro del programa experimental diseñado en el Instituto de Ingeniería es establecer las relaciones entre el comportamiento de las playas y el material que las forma, así como su interacción con el oleaje.

### ***1.3 Metodología***

Para el desarrollo de los objetivos planteados, el objeto de estudio es una playa de grava. La playa fue sometida a diferentes condiciones de oleaje, manteniendo constante la profundidad y variando el periodo y altura de las olas. En este ensayo se utilizó oleaje de tipo regular.

El modelo se instrumentó con sensores de nivel para registrar las variaciones temporales de la superficie libre del agua y sensores de presión enterrados dentro de la playa.

Las pruebas se realizaron en el canal de oleaje del Instituto de Ingeniería de la UNAM, el cual cuenta con una pala generadora controlado desde una PC y todo el equipo de medición registra simultáneamente conectado a una segunda PC.

Adicionalmente se utilizó, como herramienta para caracterizar el fenómeno, un programa de cómputo realizado en el Instituto de Ingeniería que simula numéricamente la misma configuración modelada en el laboratorio.

### ***1.4 Organización de la tesis***

Este trabajo se divide en siete capítulos, el primero de los cuales es la presente Introducción y los que se describen a continuación.

#### **Capítulo II. Oleaje**

Se revisa el estado del arte para el oleaje, algunas formas de clasificación y de caracterización, algunos métodos de análisis y la descripción de los procesos de transformación del oleaje cuando se propaga de aguas profundas a someras.

#### **Capítulo III. Playas**

Se presentan algunas bases teóricas, así como una breve definición y descripción de las playas. Se revisan algunos tipos de playas y se profundiza en las playas conformadas por sedimentos gruesos (gravas) y su comportamiento general.

#### **Capítulo IV. Flujo en medios porosos**

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos del flujo en un medio poroso. Este capítulo está dedicado a mostrar las bases teóricas que se utilizaron para desarrollar el programa codificado en el Instituto de Ingeniería,

cuya función es propagar ondas hacia la costa y que tiene la capacidad de calcular las características de dichas ondas al interior de obstáculos porosos.

#### Capítulo V. Etapa de experimentación

Este capítulo se divide en dos partes; la primera presenta la descripción de las instalaciones en donde se llevaron a cabo los experimentos y se describen las características del canal y la instrumentación utilizada. La segunda parte muestra las condiciones del experimento, cómo fueron la geometría inicial de la playa y la disposición de los sensores a lo largo del canal y dentro de la estructura de la playa.

#### Capítulo VI. Resultados

Se presentan los principales resultados obtenidos de la experimentación; el capítulo se encuentra dividido en tres partes, cada una de las cuales atiende los resultados a los que se llegó para cada objetivo planteado, a saber, el análisis del ascenso máximo y del Run-up a la luz del número de Iribarren, la caracterización numérica del modelo ensayado y la comparación entre los valores numéricos y los registrados en el laboratorio.

#### Capítulo VII. Conclusiones y futuras líneas de trabajo

Se enlistan las conclusiones a las que se llegó luego de la observación y análisis de los resultados, además se presentan algunas líneas de investigación que ha dejado abiertas el estudio realizado.



## II. OLEAJE

### II.1 *Introducción*

El oleaje son una serie de ondulaciones formadas por el viento en la superficie de un cuerpo de agua, el cual, en el caso de esta Tesis es el mar. Las ondas individuales que componen a dicho oleaje, pueden definirse como un volumen de agua que se eleva y deprime alternadamente en la superficie del mar.

El fenómeno del oleaje está determinado por factores externos como la acción de las fuerzas de la naturaleza sobre la superficie libre del agua. Entre dichas fuerzas, las principales son la acción del viento y la gravedad terrestre, cuyos efectos, alternados pero traslapados, dan como resultado una serie de ondas de forma caótica.

Desde épocas muy antiguas, la humanidad se empezó a interesar por entender la generación y transformación del oleaje. Algunos ejemplos de ello se presentan a continuación:

- Antigua Grecia. Los griegos se interesaban por comprender la relación que hay entre el mar y la atmósfera, muestra de esto son los escritos de Aristóteles (384 - 322 a. C.) donde señala la importancia del viento en el desarrollo del oleaje, en su libro "Acerca del Cielo, Meteorológicos".
- Antigua Grecia - Etapa de Oro del Renacimiento (s. XV). No se documenta ningún progreso con respecto al estudio del oleaje.
- Siglos XVI y XIX. Se registran las principales aportaciones teóricas.
- 1802. Gersnert desarrolla la "Teoría trocoidal de las olas en aguas azules".
- 1845, Airy. "Teoría de la Pequeña Amplitud"; teoría lineal que describe adecuadamente las características del oleaje en aguas profundas y presenta una solución analítica y explícita del potencial de velocidades de onda monocromática propagándose en un fondo plano.
- 1847, Stokes. "Teoría de Ondas de Orden Superior" la cual es aplicable a aguas profundas e intermedias.
- 1872, Boussinesq. "Teoría de Ondas Largas"; teoría que presenta buenos resultados para describir las características del oleaje en aguas someras.
- 1876-1877, Rayleigh-Boussinesq. "Teoría de la Onda Solitaria" solucionada por ambos autores de manera independiente.

- 1895, Kortweg y de Vries. “Teoría de la Onda Cnoidal” desarrollada a partir de los trabajos de ambos autores.

En cuanto a los modelos de predicción, los primeros esfuerzos se desarrollaron durante la Segunda Guerra Mundial y con fines militares. Entre ellos destacan:

- 1943-1947, Svedrup y Munk. Desarrollan el primer estudio de Predicción de Oleaje, que no es publicado hasta 1947.
- 1952, Pierson. Desarrolla un modelo de Predicción de Oleaje Irregular.

## II.2 Clasificación del oleaje

De acuerdo con las primeras teorías desarrolladas y con la definición simple de oleaje que se presentó anteriormente, el movimiento oscilatorio que se presenta en el mar se puede clasificar desde tres ópticas: según la profundidad sobre la que se propaga la onda, según la fuerza que genera al oleaje y según su periodo representativo.

### II.2.1 Clasificación de acuerdo con la profundidad

Se puede separar esta clasificación en dos partes. La primera se refiere a la profundidad relativa ( $h/L$ ) en la cual se propaga el oleaje, siendo  $h$  la profundidad media del agua y  $L$  la longitud de la onda. Así existen:

- Oleaje en aguas profundas. En esta clasificación el oleaje no presenta modificaciones debidas al fondo y se cumple que:

$$h \geq L/2$$

- Oleaje en aguas poco profundas o someras. El oleaje está totalmente controlado por el fondo. En este caso se cumple la siguiente relación:

$$h \leq L/20$$

Entre estos dos extremos se encuentra el denominado oleaje en aguas intermedias. Una clasificación similar parte del punto de vista de la celeridad (relación directa entre la frecuencia y la longitud de onda).

La segunda parte de esta clasificación es muy común en la ingeniería oceanográfica y establece que la región donde se lleva a cabo la transferencia de energía del viento hacia la superficie del mar es llamada “zona de generación”. En dicha zona el fenómeno del oleaje es caótico y se presenta una propagación de ondas multidireccional, siendo la dirección del viento la dominante.

En este caso también se pueden distinguir dos casos extremos de acuerdo con su origen.

- Oleaje local o “sea”. Se caracteriza por ser desordenado, consiste en olas asimétricas que pueden llegar a presentar una altura relativamente grande para su longitud; se produce en la zona de generación en alta mar. (**Figura II.1**).
- Oleaje distante o “swell”. Cuando el oleaje tipo “sea” se propaga y abandona el área de generación, sufre una doble dispersión (angular y radial), lo que ordena la superficie del agua creando olas más ordenadas, periódicas y con una dirección de propagación bien definida. Este tipo de oleaje se puede observar en las zonas costeras, principalmente en profundidades reducidas. (**Figura II.1**).



Figura II.1 Oleaje tipo “sea” (izquierda) y oleaje tipo “swell” (derecha)

### II.2.2 Clasificación según la fuerza generadora

Esta clasificación se puede asociar con la longitud de onda característica. A continuación se presentan algunos ejemplos y la **Figura II.2** para ilustrar los tipos de onda de acuerdo a la fuerza generadora y cantidad de energía que contienen.

- Las fuerzas meteorológicas (viento, presión del aire) generan el oleaje local y distante.
- Los maremotos o terremotos generan grandes olas llamadas Tsunamis, normalmente clasificados como ondas solitarias en aguas poco profundas.
- Las fuerzas astronómicas (la marea) son consideradas ondas largas por propagarse en aguas poco profundas de acuerdo con su longitud.

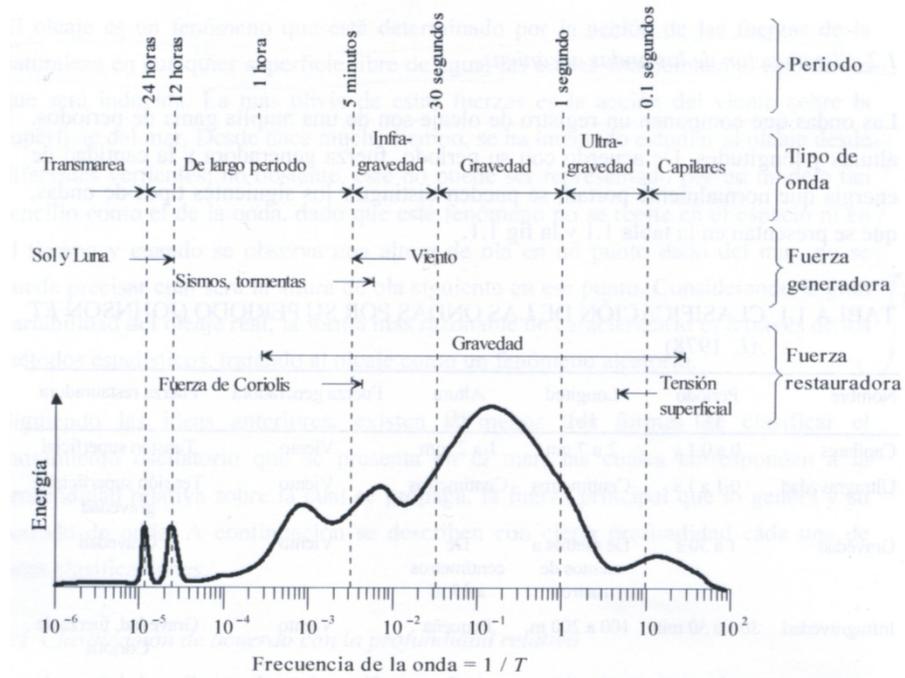


Figura II.2 Periodo-energía de las ondas (Kinsman 1965)

### II.2.3 Clasificación según el periodo

Un registro de oleaje está compuesto por una gran cantidad de ondas, lo cual arroja como resultado una gran variedad de periodos, alturas y longitudes. De acuerdo a su periodo se pueden distinguir los siguientes tipos de ondas (**Tabla II-1**).

Tabla II-1 Clasificación de las ondas por su periodo (Johnson et al 1978)

NOMBRE	PERIODO (T)	LONGITUD (L)	ALTURA (H)	FUERZA GENERADORA	FUERZA RESTAURADORA
Capilares	0 a 0.1 s	2 a 7 cm	1 a 2 mm	Viento	Tensión superficial
Ultragravedad	0.1 a 1 s	centímetros	centímetros	Viento	Tensión superficial y gravedad
Gravedad	1 a 30 s	de metros a cientos de metros	de centímetros a 15 m	Viento	Gravedad
Infragravedad	30 s a 30 min	100 a 200 m	pequeña	Viento	Gravedad, fuerza de Coriolis
Periodo largo	5 min a 24 hrs	pueden llegar a ser de escala planetaria	1 a 5 m	Sismo, derrumbes, atracción de cuerpos celestes	Gravedad, fuerza de Coriolis
Transmarea	más de 24 hrs	-	0 a 12 m	Oscilaciones climáticas	Gravedad, fuerza de Coriolis

### II.3 Caracterización del oleaje

Al arrojar una pequeña piedra u objeto en un estanque lago o cubeta con agua, se extienden una serie de círculos desde el punto de impacto, esto puede ayudar a definir desde otro punto de vista una onda. Los círculos que se generan son perturbaciones propagadas a través de un medio (en este caso el agua) y se les llama *ondas*. Observando cuidadosamente, se puede detectar que cuando las ondas se propagan superficialmente, el agua se agita en cada punto, pero el volumen no se desplaza. De ahí que una onda puede viajar grandes distancias, pero cuando la perturbación ha pasado, cada gota de agua permanece en el lugar donde se encontraba.

En lo que corresponde a este estudio, interesa saber un poco más sobre el comportamiento y las propiedades de las ondas de agua (existen también ondas de sonido, de luz, de radio y electromagnéticas). Es conveniente señalar que el concepto de oleaje solo se utiliza cuando el medio en el cual se propagan las ondas es el agua.

#### II.3.1 Caracterización del oleaje desde el punto de vista físico

Como ya se mencionó, las ondas se pueden clasificar de acuerdo al medio en el que se propagan, pero también se pueden clasificar de otras formas, esto es, con base en sus propiedades físicas. A continuación se presentan otras formas de clasificar las ondas.

- En función de la dirección de la perturbación. Se pueden considerar diferentes tipos de oleaje de acuerdo a la forma en cómo se mueven las partículas del medio en relación a la dirección de propagación del oleaje. Si las partículas del medio se mueven (o vibran) perpendicularmente a la dirección de propagación del oleaje, entonces se tienen *ondas transversales*. Sin embargo, si las partículas del medio se mueven hacia el frente y hacia atrás, es decir, vibran paralelamente a la dirección de propagación del oleaje, entonces se tienen *ondas longitudinales*.
- En función de su propagación o frente de onda. Las ondas también se pueden clasificar como de una, dos o tres dimensiones, de acuerdo al número de dimensiones en las cuales propagan energía. Una *onda unidimensional* es la que se propaga en una sola dirección del espacio, sus frentes de onda son planos y paralelos; un ejemplo son las ondas en los muelles o en las cuerdas. Las *ondas superficiales o bidimensionales* son las que se propagan en dos direcciones o en cualquiera de las direcciones de una superficie; un claro ejemplo de este tipo son las ondas producidas cuando se

deja caer un objeto en una superficie líquida en reposo. Las *ondas tridimensionales o esféricas* son las que se propagan radialmente desde el origen de la perturbación, sus frentes de onda son curvos y radiales; algunos ejemplos son las ondas sonoras, las ondas luminosas y las ondas electromagnéticas.

- En función de su periodicidad. Se pueden clasificar como periódicas o no periódicas debido al intervalo entre ondas y a las características de las mismas. Las *ondas periódicas* son aquellas originadas por una perturbación producida en ciclos repetitivos; un ejemplo son las ondas sinusoidales. Las ondas no periódicas son aquellas generadas por perturbaciones aisladas o de diferentes características.

En el caso específico de las ondas propagadas en agua, se pueden clasificar en dos categorías:

- a) Las *ondas oscilatorias*, en las cuales no hay transporte de masa. Estas a su vez pueden ser progresivas (características constantes para observador que viaja a cierta velocidad en dirección de propagación) o estacionarias (constituidas por dos ondas periódicas de iguales características que viajan en direcciones opuestas).
- b) Las *ondas traslatorias*, en las cuales se implica un transporte de masa en la dirección de propagación de la onda. En este grupo se encuentran: las ondas solitarias (presentan una sola cresta y el transporte de masa es importante), las ondas cnoidales (presentan valles muy largos en comparación a las crestas) y las mareas.

Con respecto a las mareas, este tipo de ondas traslatorias se clasifican en mareas astronómicas (diurna, semidiurna y mixta) que causan una sobre-elevación del nivel medio del mar debido a las fuerzas gravitacionales del sol y la luna y las mareas de tormenta que causan una sobre-elevación del nivel medio del mar debido a las fuerzas de la naturaleza originadas por la presencia de fuertes vientos provocados por un gradiente de presión y de temperatura en la atmósfera (huracanes, tifones, monzones y tormentas tropicales).

La **Figura II.3** esquematiza algunos de los tipos de ondas descritos en este apartado.

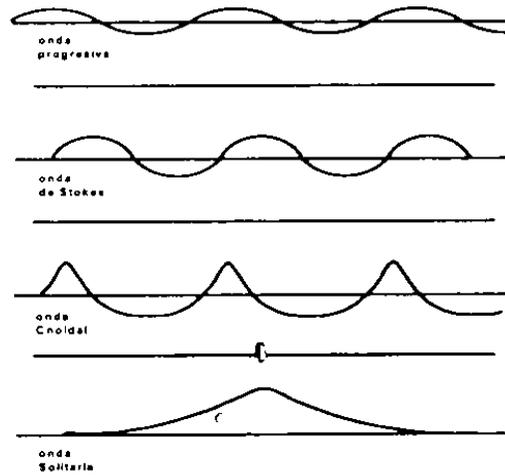


Figura II.3 Tipos de ondas

### II.3.2 Caracterización del oleaje desde el punto de vista matemático

Se han desarrollado muchas teorías para entender el comportamiento del oleaje, aunado a esto se ha intentado representar el fenómeno matemáticamente mediante la utilización de parámetros adimensionales, los cuales son función de las características de las ondas, las cuales se describen a continuación.

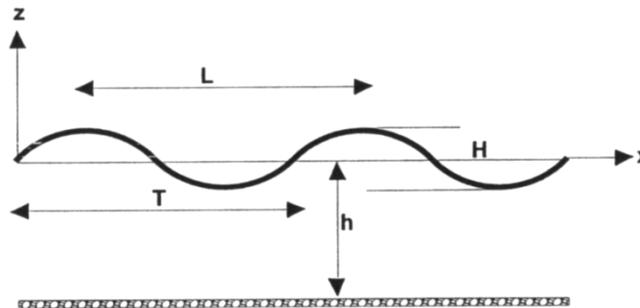


Figura II.4 Parámetros que caracterizan una onda.

En la **Figura II.4** se observan partes más altas, las cuales se conocen como *crestas*, las partes hundidas son los *valles*, los puntos en donde las partículas quedan inmóviles (donde la superficie libre no se separa del nivel medio) se conocen como *nodos* y los puntos más elevados y más hundidos (donde la superficie libre alcanza la máxima amplitud) son los *antinodos*.

El movimiento ondulatorio se define como el conjunto de movimientos vibratorios de las partículas del agua, con la característica de que cada uno se efectúa con cierto retraso respecto del anterior. Cuando una partícula ha hecho una oscilación

completa, el movimiento recorre una trayectoria, que es la onda propiamente dicha y se ha desplazado en una cierta distancia llamada longitud de onda. Con respecto a lo mostrado en la **Figura II.4** se pueden distinguir los siguientes parámetros: la distancia horizontal entre dos crestas adyacentes en la *longitud de onda* ( $L$ ), mientras que la distancia vertical entre el máximo de la cresta y el fondo del valle define la *altura de ola* ( $H$ ); en relación al tiempo transcurrido, el *periodo de la onda* ( $T$ ) se define como el tiempo necesario para que dos crestas consecutivas pasen por el mismo punto y su inverso es la *frecuencia* ( $f$ ). Otra variable necesaria para definir una onda con parámetros adimensionales es la *profundidad* ( $h$ ) que corresponde a la distancia vertical entre el fondo y la elevación media de la superficie libre del agua. Adicionalmente a estos parámetros, existen otros que pueden ayudar a definir el comportamiento de las olas, como son: la *celeridad* ( $C$ ) definida como la velocidad con la cual una cresta se mueve horizontalmente a través de la superficie del mar y se puede calcular como  $C = L/T$ , la *amplitud de la ola* ( $a$ ) que es la semi-altura de la ola y finalmente la *elevación instantánea de la superficie de agua* ( $\eta$ ) que es el desplazamiento de la superficie del agua con respecto al nivel medio del agua.

Los parámetros utilizados para clasificar matemáticamente son los siguientes:

- **Altura relativa de la onda** ( $\alpha$ ). Indica la relación que existe entre la oscilación vertical con respecto a la profundidad.

$$\alpha = \frac{H}{h} \quad (2.1)$$

- **Peralte de la onda** ( $\beta$ ). Muestra la variación vertical de la onda respecto a una longitud de onda.

$$\beta = \frac{H}{L} \quad (2.2)$$

- **Profundidad relativa** ( $\lambda$ ). Señala la penetración del movimiento de la onda con la profundidad.

$$\lambda = \frac{h}{L} \quad (2.3)$$

Una forma alternativa de expresar el parámetro  $\lambda$ , es en función del número de onda  $k$ , ecuación (2.4), el cual indica el número de longitudes de onda por ciclo de  $2\pi$ . El número de onda es función de la longitud de onda, cuyo valor se determina a partir de la ecuación de dispersión (2.5) mediante un proceso iterativo.

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (2.4)$$

$$\sigma^2 = kg \tanh kh \quad (2.5)$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \quad (2.6)$$

Donde  $\sigma$  es la frecuencia angular. Sustituyendo las ecuaciones (2.5) y (2.6) en (2.4), se obtiene una relación para determinar el valor de  $L$  ecuación (2.7) en función de  $h$ ,  $T$  y  $k$ .

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh kh \quad (2.7)$$

A partir del número de onda, el oleaje se puede clasificar como propagándose en aguas:

- Profundas  $kh > \pi$  (2.8)

- Intermedia  $\frac{\pi}{10} < kh < \pi$  (2.9)

- Someras  $kh < \frac{\pi}{10}$  (2.10)

Otra de las aplicaciones de los parámetros adimensionales es determinar el régimen de aplicación de las diferentes teorías que intentan representar matemáticamente al oleaje, como se muestra en la **Tabla II-2**.

Tabla II-2 Características de los parámetros adimensionales para las distintas teorías de ondas

TEORÍA	$\lambda = \frac{h}{L}$	$\alpha = \frac{H}{h}$	$\beta = \frac{H}{L}$
Pequeña amplitud	$\geq 1$	$\ll 1$	$\ll 1$
Ondas largas	$\ll 1$	—	—
Onda larga lineal	—	$\alpha \ll \lambda^2$	—
Boussinesq	—	$\alpha \sim \lambda^2$	—
Onda larga no lineal	—	$\alpha \gg \lambda^2$	—

### II.3.3 Caracterización del oleaje desde el punto de vista estadístico

El oleaje es un fenómeno que históricamente se ha analizado desde muy diversos puntos de vista y vía diferentes desarrollos analíticos, el resultado es un grupo de teorías que derivan en modelos desde muy simples, hasta extremadamente complejos. En todo caso, todos estos trabajos son aproximaciones alcanzadas bajo la aceptación de determinadas hipótesis. El problema principal es que el oleaje no

es un movimiento determinista, es decir, dadas las características de una ola, no es posible predecir las características de la siguiente. Una solución a este tipo de fenómenos son los métodos estadísticos que, efectivamente, consideran al oleaje como un fenómeno aleatorio. Desde este punto de vista, el oleaje se puede considerar un fenómeno con las siguientes tres características principales.

*El oleaje como proceso estocástico*

El oleaje es un proceso aleatorio, es decir, las olas son irregulares; por lo que se considera al oleaje como un conjunto de ondas que viajan en diferentes direcciones,  $\theta_i$ , con diferentes amplitudes,  $a_i$ , frecuencias,  $\sigma_i$ , y fases,  $\varepsilon_i$ , de tal forma que se puede estudiar como una superposición lineal de ondas armónicas simples y el perfil de la superficie libre,  $\eta(x,y,t)$ , está descrito por:

$$\eta(x, y, t) = \sum_i a_i \cos \left[ \frac{\sigma_i^2}{g} (x \cos \theta_i + y \sen \theta_i) - \sigma_i t + \varepsilon_i \right] \quad (2.11)$$

Donde:

- $a$         amplitud
- $\sigma$        frecuencia angular ( $2\pi/T$ )
- $T$         periodo de la onda
- $\theta$         ángulo de incidencia con respecto al eje X
- $\varepsilon$        fase
- $x, y$      posición espacial de la onda
- $t$         tiempo

En la ecuación (2.11) las amplitudes y fases se consideran aleatorias, de donde la elevación de la superficie del mar también lo es y por tanto su estudio debe realizarse mediante un análisis estadístico considerándolo como un proceso estocástico, es decir, como el resultado de un experimento y no como un número sino como una función. Además que una realización de dicho experimento corresponde a una función muestra y la función que resulte será denotada por  $\eta_k(t)$ .

Se observa que la superficie del agua  $\eta_k(t)$  es una variable aleatoria en un instante  $t_i$ . Si se considera un conjunto de  $n$  instantes, se puede decir que  $\eta(t)$  es una variable  $n$ -dimensional y de esta forma el proceso se puede considerar definido si se conoce la función de distribución, ecuación.

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[\eta(t_1) \leq x_1, \eta(t_2) \leq x_2, \dots, \eta(t_n) \leq x_n] \quad (2.12)$$

Esta distribución debe satisfacer las condiciones de simetría y de compatibilidad y se concluye que para definir un proceso  $\eta(t)$  sería necesario conocer todas las funciones de distribución, por lo que utilizando la teoría de la correlación se

pueden simplificar las cosas y considerar solamente los dos primeros momentos del proceso:

- El valor medio

$$\mu_n(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_k(t) dt \quad (2.13)$$

- La función de correlación

$$R_\eta(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta_k(t) + \eta_k(t + \tau) dt \quad (2.14)$$

La media y la función de correlación determinan el proceso  $\eta(t)$  completamente, siempre que las distribuciones de ambas variables sean normales (gaussianas).

#### *El oleaje como proceso estacionario*

Un fenómeno físico se considera estacionario cuando las características externas que influyen en él permanecen constantes durante un periodo de tiempo, es decir, las fuerzas generadoras y las fuerzas restauradoras están en equilibrio durante un tiempo determinado. Dicho lapso es conocido con el nombre de *estado de mar*.

Así, el proceso  $\eta(t)$  es estacionario si todas las funciones de distribución que definen al proceso permanecen constantes en un intervalo de tiempo  $\tau$ .

$$F_{t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_n+\tau}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.15)$$

Admitida la estacionariedad del oleaje, se deduce que:

- El valor medio es una constante

$$\mu(k) = \mu \quad (2.16)$$

- La función de la correlación depende sólo de la diferencia  $\tau = t + \tau$

$$R_\eta(k) = R_\eta \quad (2.17)$$

En algunos casos es suficiente considerar el oleaje débilmente estacionario.

#### *El oleaje como proceso ergódico*

Teorema de ergodicidad:

“Si un proceso aleatorio  $\eta(t)$  es estacionario y  $\mu_\eta(k)$  y  $R_\eta(k)$  definidos en las ecuaciones (2.16) y (2.17), no difieren cuando se calculan sobre diferentes muestras, se dice que el proceso es ergódico”. Esta hipótesis de ergodicidad permite sustituir los promedios espaciales por promedios temporales sobre una realización. La descripción de un estado de mar a partir de un único registro se basa en afirmar que se trata de un proceso ergódico y estacionario.

De acuerdo a la definición de estado de mar, se puede considerar que el oleaje está formado por dos tipos de variaciones:

- Variación de corto periodo. La variación es rápida, es muy corto el tiempo en el que se puede considerar que el proceso es estacionario (segundos).
- Variación de largo periodo. La variación es lenta, en ella evoluciona el estado de mar poco a poco, existe variación de estado (horas).

En la práctica se debe tener cuidado en la obtención de muestras estadísticas representativas, específicamente cuando se fija un periodo de medición, ya que debe ser lo suficientemente pequeño para considerar la hipótesis de estacionariedad y también debe ser lo suficientemente grande para obtener un número representativo de olas.

En la actualidad se cuenta con dos vertientes importantes para el tratamiento de una señal de oleaje, las cuales se pueden considerar complementarias.

- ❖ *Descripción estadística temporal del estado de mar.* Considera las propiedades estadísticas (parámetros y distribuciones de  $\eta(t)$ ) directamente en una serie de tiempo.
- ❖ *Descripción estadística espectral del estado de mar.* Toma en cuenta el estudio del espectro (o espectro de energía) y sus propiedades en el dominio de la frecuencia. Relaciona la distribución de energía del oleaje con la función de frecuencia de una señal.

## II.4 Procesos de transformación

Cuando el oleaje se propaga de aguas profundas hacia aguas someras, normalmente sufre una serie de cambios. Los más obvios son el cambio de altura, la disminución de la longitud de onda y, en ocasiones, el de dirección debido a los efectos de peraltamiento, someramiento y refracción, estos efectos se describirán a continuación.

### II.4.1 Refracción

Es el proceso de transformación por el que los frentes de ola tienden a hacerse paralelos a la línea de costa por efectos de fricción de fondo diferencial.

En la práctica, la refracción es importante debido a que:

- En conjunto con el someramiento, la refracción tiene influencia en la altura y la distribución de la energía de la ola a lo largo de la costa.
- El cambio en la dirección y en las distintas partes de la onda resulta en una concentración o disipación de la energía del oleaje, lo cual da como resultado cambios en las fuerzas ejercidas por las olas sobre las fronteras sólidas (costa, playa, estructuras, etc.).
- En geomorfología litoral, explica que para un mismo tipo de ola, la energía liberada en algunos sectores es mayor que en otros.

- Influye en los cambios topográficos del fondo, por sus efectos en la erosión y depósito de sedimentos.

#### *II.4.2 Difracción*

La difracción es un fenómeno de difusión o flujo transversal de energía del oleaje; el cual se caracteriza por presentar un cambio abrupto en la altura de ola debido a la presencia de un obstáculo.

La evaluación de la difracción es importante:

- Para la planeación y diseño de estructuras,
- Para determinar el área y localización de los puntos de absorción del oleaje sobre el perímetro de los elementos de protección.
- También es importante en el caso de la propagación del oleaje a grandes distancias, a través de lo cual se pueden identificar zonas de convergencia y alta concentración de energía.

Los modelos que explican la difracción son complejos, pero por mencionar alguno, se utiliza la ecuación de la pendiente suave en su forma elíptica.

#### *II.4.3 Someramiento*

Al propagarse el oleaje hacia la costa, el perfil de la onda cambia debido a las variaciones batimétricas. Inicialmente la onda mantiene una altura constante, una simetría tanto en la parte de enfrente como de atrás, posteriormente la altura de la ola se incrementa rápidamente originándose una asimetría en el perfil de la onda y finalmente rompe. Este efecto es lo que se denomina someramiento del oleaje.

En otras palabras; cuando el cambio de profundidad modifica la celeridad de las olas provoca un aumento en las crestas y disminución en los valles, dicho de otra forma, existe una transferencia de energía cinética a potencial.

#### *II.4.4 Reflexión*

El estudio de la reflexión es tan importante como los fenómenos antes mencionados y se puede definir como la alteración de las características del oleaje al chocar con un obstáculo natural o artificial.

En el estudio de la reflexión se pueden encontrar dos extremos, el primero cuando el oleaje se propaga sobre una pendiente tendida en un medio permeable, disipa su energía gradualmente y la reflexión es despreciable; el segundo caso es cuando el oleaje encuentra una pared vertical impermeable, la reflexión es casi total, sin procesos de disipación, rotura ni transmisión y se genera una onda estacionaria.

La reflexión tiene una gran influencia en las características del oleaje incidente, el cual se ve alterado como una consecuencia de la interacción entre ondas viajando en sentidos opuestos. Dependiendo de las condiciones en que se dé la reflexión, una posible manifestación es el incremento en la altura de onda. Si esto ocurre, la zona de rompientes se ve alterada, lo que en últimas consecuencias se traduce en cambios en el patrón de las corrientes y en el transporte de sedimentos.

Para evaluar el efecto de la reflexión y determinar qué tan disipativa es una estructura se utiliza el concepto de coeficiente de reflexión:

$$Cr = \frac{Hr}{Hi} \quad (2.18)$$

El coeficiente de reflexión indica la proporción entre la altura de la ola incidente y la reflejada.

#### *II.4.5 Rotura*

La rotura es un fenómeno que se caracteriza por una alta ocurrencia de turbulencia libre y una entrada de aire asociada, produciéndose además una alta velocidad de disipación de energía.

En general, la rotura del oleaje se origina cuando disminuye la profundidad. A medida que la ola se acerca a la costa, el fondo hace que las olas se deformen aumentando su altura y disminuyendo la longitud de la onda. Esto ocurre cuando el valor de la profundidad es cercano a la mitad de la longitud de onda. Las olas muy peraltadas no pueden mantener la estructura vertical y la parte delantera de la ola cae.

La rotura es la responsable de la transformación y organización del movimiento del oleaje en la zona del litoral, lo que origina alteraciones en los perfiles de las playas y del fondo marino ya que al presentarse la rotura del oleaje, se favorece la suspensión del sedimento y consecuentemente su movimiento. Además, dicha transformación del oleaje es una de las causas de las corrientes litorales y también juega un papel importante en la evolución de la línea de costa. En el diseño de estructuras de protección costera, el tipo de rompiente que se presenta sobre el talud tiene un rol importante ya que la extracción de las piezas del manto principal y eventualmente de las capas secundarias, depende directamente de las corrientes

y energía asociadas a la rotura. Adicionalmente, la rotura puede ser un factor limitante al determinar la altura de ola de diseño de las estructuras marítimas.

La rotura del oleaje se ha clasificado en cuatro grupos: Descrestamiento (Spilling), Voluta (Plunging), Colapso (Collapsing) y Oscilación (Surfing); los cuales pueden ocurrir de acuerdo con la pendiente de la playa. De ellos, solo dos tipos (Spilling y Plunging) pueden ocurrir en aguas profundas, donde la rotura inicia cuando se supera un umbral de celeridad, lo que normalmente es inducido por el viento.

#### II.4.6 Resonancia

Este fenómeno está asociado con el periodo de oscilación natural de un puerto o bahía y se presenta cuando dicho periodo coincide con el de la ola incidente. Su manifestación es una amplificación notable de la altura de ola.

### II.5 Número de Iribarren

#### II.5.1 Estado del arte

Originalmente Iribarren y Nogales (1949), propusieron como parámetro el cociente del peralte de la onda y la pendiente de la playa, y lo llamaron “número de Iribarren”, (2.19), el cual después introdujeron como un indicador para distinguir la reflexión o rotura franca de la no rotura y propusieron que el régimen de reflexión tenía lugar cuando  $I_r > 2.3$ .

$$I_r = \frac{\tan \beta}{\sqrt{H_0/L_0}} \quad (2.19)$$

Donde

- $\alpha$  es el ángulo de inclinación del talud
- $H_0$  la altura de la ola en aguas profundas
- $L_0$  la longitud de onda en aguas profundas ( $gT^2/2\pi$ ),  $T$  el período de la onda
- $g$  aceleración debida a la gravedad

Algunos autores sustituyen la altura de ola en aguas profundas por la altura en el punto de rompiente,  $H_b$ , en cuyo caso el parámetro se denota por  $I_{r_b}$ .

Para oleaje irregular, el número de Iribarren puede referirse al periodo medio o al periodo de pico espectral, esto es,

$$Ir_{0m} = \frac{\tan \beta}{\sqrt{H_s/L_m}} \quad \text{o} \quad Ir_{0p} = \frac{\tan \beta}{\sqrt{H_s/L_p}} \quad (2.20)$$

Donde los subíndices  $m$  y  $p$  corresponden a los periodos medio y pico, respectivamente.

### II.5.2 Relación del número de Iribarren con otros parámetros

La principal concepción de rotura está íntimamente ligada a la línea de costa y a la dramática transformación de las olas desde la zona de generación hasta que alcanzan la orilla de la playa.

Existen distintas definiciones del fenómeno físico de la rotura. Según Le Méhauté (1976), la rotura ocurre cuando se presenta una de las siguientes condiciones:

- 1) La velocidad de las partículas de la cresta sobrepasa la celeridad de la onda
- 2) La presión de la superficie libre, dada por la ecuación de Bernoulli, es incompatible con la presión atmosférica
- 3) La aceleración de las partículas en la cresta tiende a separarlas de la superficie de la masa de agua
- 4) La superficie libre alcanza el peralte máximo

Iribarren y Nogales (1949) hallaron empíricamente que el parámetro adimensional  $Ir$  juega un papel importante en la rotura del oleaje.

Iversen (1952), Patrik y Wiegel (1954) y Galván (1958), propusieron cuatro tipos de rotura que se describen a continuación (**Figura II.5**):

- a. Descrestamiento (Spilling). Aparece espuma, burbujas y turbulencia en la cresta de la ola que eventualmente cubren parte del frente de la misma. La rotura del perfil comienza en la cresta, que se descresta formando un pequeño chorro en algunos casos imperceptible que resbala por el frente de la onda.
- b. Voluta (Plunging). La mayor parte del frente de la ola adquiere la posición vertical, formando una voluta, con un chorro en la parte superior que envolviendo una masa de aire se precipita contra la base de la onda originando un salpicón de agua.
- c. Colapso (Collapsing). La parte inferior del frente de la onda se peralta y voltea, comportándose como una rotura en voluta pero truncada, ya que el punto desde donde la ola se voltea o se desmorona, está adelante y por debajo de la cresta de la ola.

- d. Oscilación (Surging). El frente de lo onda y la cresta permanecen relativamente lisos y la onda se desliza por el contorno con pequeña producción de espuma, burbujas y turbulencia.

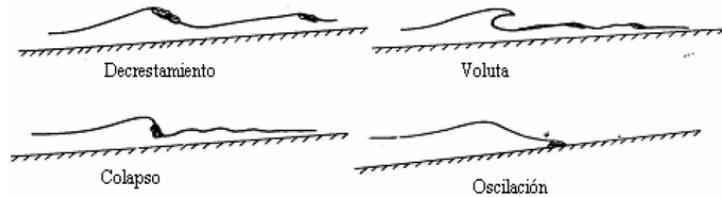


Figura II.5 Tipos de rotura según Iversen , Patrik y Wiegel, y Galván

Más adelante varios autores buscaron relacionar el número de Iribarren con el tipo de rotura, encontrando relaciones como las que se presentan a continuación:

Los tipos de rompiente y su valor asociado de número de Iribarren para un talud impermeable se presentan en la **Tabla II-3**.

Tabla II-3 Tipos de rotura sobre taludes impermeables

ESQUEMA	NOMBRE	PARÁMETRO
	Decrestamiento	$Ir < 0.5$
	Voluta	$0.5 < Ir < 3$
	Colapso	$Ir \approx 3.0 - 3.5$
	Oscilación	$Ir > 3.5$

Posteriormente Batjes (1974) propone el uso del número de Iribarren como un indicador del tipo de rotura que se presenta en un determinado talud, ver **Tabla II-4**.

Tabla II-4 Valores del número de Iribarren para los diferentes tipos de rotura según Batjes (1974)

TIPO DE ROTURA	NÚMERO DE IRIBARREN
Descrestamiento (spilling)	$Ir < 1.0$
Voluta (plunging)	$1.0 < Ir < 2.6$
Colapso (colapsing)	$12.6 < Ir < 3.1$
Oscilación (surging)	$3.1 < Ir < 4.0$
No existe rotura	$4.0 < Ir$

Horikawa (1988) presenta una tabla de rangos de valores del número de Iribarren para cada tipo de rotura. **Tabla II-5**.

Tabla II-5 Valores de Iribarren para los cuatro tipos de rotura, Horikawa, 1988.

$Ir = \frac{\tan \beta}{\sqrt{H/L_0}}$	0.1	0.4	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
Tipo de Rotura	Descrestamiento		Voluta			Colapso		Oscilación		No existe rotura		

Silva (1997), presenta otra relación entre el número de Iribarren y el tipo de rotura. **Tabla II-6**.

Tabla II-6 Rango de valores del número de Iribarren para los distintos tipos de roturas, Silva, 1997.

TIPO DE ROTURA	NÚMERO DE IRIBARREN
Descrestamiento (spilling)	$Ir < 1.0$
Voluta (plunging)	$1.0 < ir < 2.6$
Colapso (colapsing)	$2.6 < ir < 3.1$
Oscilación (surging)	$3.1 < ir$

Otros autores relacionaron el número de Iribarren con diferentes fenómenos como la reflexión y el Run up.

Morales (1970) realizó exhaustivos experimentos sobre reflexión para distintos oleajes incidentes y pendientes de la playa. A partir de estos datos, Battjes (1974) halló que el coeficiente de reflexión puede ser expresado en función de  $Ir$  únicamente. A este adimensional Battjes lo denominó parámetro de similaridad de surf,  $\xi = Ir$ , demostrando que gobierna los procesos de rotura del oleaje.

El ascenso máximo relativo,  $Ru/H$ , depende del número de Iribarren, del ángulo de incidencia del oleaje y de la pendiente geométrica (forma del perfil, rugosidad de la superficie, porosidad). Las diferencias en la forma en que ocurre el ascenso máximo hacen conveniente una distinción entre las pendientes permeables e impermeables.

Losada y Giménez-Curto (1980) propusieron un modelo experimental para oleaje regular dado por la expresión

$$\frac{Ru}{H} = A_u (1 - e^{-B_u Ir}) \quad (2.21)$$

En la que  $A_u$  y  $B_u$  son coeficientes de ajuste que dependen del tipo de piezas del manto principal y por ende de la porosidad ( $n$ ). Debido a que la tendencia que presentan los valores de los coeficientes de ajuste es aproximadamente lineal, Silva et al. (1988), determinaron las siguientes expresiones para estimarlos:

Diques homogéneos

$$A_u = -4.706n + 3.293 \quad (2.22)$$

$$B_u = -1.569n + 0.038 \quad (2.23)$$

Diques impermeables

$$A_u = -3.825n + 3.344 \quad (2.24)$$

$$B_u = -1.179n + 0.081 \quad (2.25)$$



## III. PLAYAS

### *III.1 Introducción*

La línea de costa se puede definir como el límite entre la tierra y el mar y se encuentra en constante movimiento debido a la dinámica de las olas, lo cual hace que se presenten cambios de forma y posición.

Una playa se puede definir como un accidente geográfico ocasionado por la acumulación de sedimentos debidos a la acción del oleaje del mar. El tamaño de los sedimentos puede variar desde muy finos como la arena hasta más gruesos como la grava o incluso rocas.

Las playas son zonas muy dinámicas, ya que es donde el oleaje transmite toda su energía al lecho ocasionando una rápida transformación. Este cambio se puede llevar a cabo en temporalidades que van desde unas cuantas horas hasta meses o años, dependiendo de las características del oleaje.

### *III.2 Tipos de playas*

Existir dos tipos de clasificación de las playas, uno con respecto al material predominante en ella y otro respecto a los estados morfodinámicos de la misma.

Respecto al primer tipo, la costa puede clasificarse en tres:

- Costa Rocosa. Son casi inalterables, al menos en escala temporal humana.
- Costas de Arena (material granular no cohesivo). Se deforman fácilmente con la acción del oleaje, en estas playas la posición de la línea de costa está en constante movimiento.
- Costas de material cohesivo. En éstas se encuentran involucradas interacciones eléctricas y químicas, ya sea en partículas individuales o en grupo.

El segundo grupo se puede dividir en seis estados morfodinámicos de playa, cuatro de ellos intermedios y dos estados límite (Wright y Short, 1984).

- Playa disipativa; Disipative, D (estado morfodinámico límite). Tiene una morfología prácticamente bidimensional, con un perfil muy tendido, las olas rompen en descrestamiento y en voluta. Los valores típicos del parámetro de escala de rompientes en estas playas son superiores a 20 y disipación de la energía es progresiva a lo largo del perfil.

- Playa reflejante; Reflective, R (estado morfodinámico límite). Presenta roturas en colapso o en oscilación sobre el frente de la playa, pendientes elevadas, valores del parámetro de escala de rompientes menores a 3 y en condiciones de baja energía las oscilaciones subarmónicas tienden a ser de menor amplitud que las oscilaciones incidentes. Cuando la energía aumenta, la energía subarmónica aumenta también pudiendo ser mayor que la energía del oleaje incidente. Esto provoca ascensos y descensos muy largos sobre el frente de la playa que pueden rebasar la berma e iniciar cortes en la playa.
- Los cuatro estados intermedios poseen elementos de los dos estados límite, a su vez, el parámetro de escala de rompiente varía notablemente tanto transversal como longitudinalmente. Cada uno de estos estados presenta una morfología muy compleja. En general, las playas intermedias presentan diferentes estados en función de las condiciones del oleaje y la variabilidad total de esas playas es muy elevada. Los cuatro estados intermedios son: Barra longitudinal y valle (Longshore Bar and Through, LBT), Barra y playa rítmica (Ritmic Bar and Beach, RBB), Barra transversal y corriente de retorno (Transverse Bar and Rip, TBR) y Terrazas mareales (Ridge Runnel or Low Terraze, RR o LTT).

### *III.3 Playas de grano grueso*

En algunas latitudes son muy abundantes las playas de grano grueso o las mixtas (arena y grava), a pesar de ello no se han realizado suficientes estudios sobre su comportamiento. Esto se puede deber a las dificultades relacionadas con el monitoreo ya que suelen ubicarse en zonas de oleaje muy energéticos en las zonas de someramiento y de rompiente.

El estudio de este tipo de playas es importante, además del avance en el conocimiento, debido a que la utilización de sedimentos gruesos podría llegar a sustituir a algunas acciones estructurales de protección.

#### *III.3.1 Definición y origen*

Las playas son sistemas físicos dinámicos, cuyas características dependen del oleaje, las mareas, el viento y la acción del hombre. Las playas de grano grueso, de acuerdo a Coates y Damgaard (1999), son aquellas que se componen por sedimentos que van desde los 2 a los 64 mm de diámetro, pudiendo alcanzar hasta los pequeños cantos rodados (>256 mm). La grava de las playas tiene cuarzo o

basalto. La grava de cuarzo suele ser más redonda y parecida a un disco, mientras que la de basalto es de forma elipsoidal.

Los sedimentos de las playas de grava generalmente se originan bajo acantilados de roca, que son erosionados por la acción del oleaje y del viento; y en otros casos por el transporte de sedimentos de los ríos de montaña que desembocan sobre la costa. En una playa de grava el oleaje actúa como una trituradora, haciendo que las partículas más grandes choquen y se fragmenten, dando lugar a partículas más pequeñas que son llevadas por el oleaje hacia mar adentro o hacia la tierra.

### *III.3.2 Caracterización*

Se han realizado varios estudios sobre la caracterización de playas de grano grueso. La mayoría, sin embargo, solo incluyen playas mixtas (compuestas de mezclas de grava y arena), lo cual hace complejo su estudio porque se deben considerar los efectos de la no homogeneidad en términos de tiempo y de espacio.

Para caracterizar las playas de grano grueso, se pueden considerar algunas propiedades específicas de las gravas, como son:

- a) Permeabilidad. La permeabilidad de las playas de grava es mayor que la de las de arena. La permeabilidad se puede definir como la facilidad con la que un fluido atraviesa un material sin alterar su estructura interna. La importancia de la permeabilidad de las playas de grava depende del tamaño del sedimento, los diferentes tamaños y porcentajes del sedimento, entre otros.
- b) Porosidad ( $n$ ). Se define como la capacidad que tiene un material para absorber líquidos o gases, o bien, como la proporción de vacíos del volumen total de material. Depende del tamaño del grano y del acomodo del mismo.
- c) Densidad ( $\rho$ ). Se refiere a la cantidad de masa contenida en un determinado volumen.
- d) Velocidad de caída. Cuando una partícula cae a través de un fluido se acelera hasta que alcanza su velocidad de sedimentación; la cual es la velocidad máxima que la partícula alcanza cuando la fuerza de arrastre que actúa sobre ella es igual a la fuerza ejercida por la aceleración de la gravedad. La velocidad de caída es función, entre otros factores, de la densidad, forma y tamaño de la partícula, lo mismo que de la densidad y viscosidad del fluido en el que se mueve.

### *III.3.3 Ejemplos*

Las playas de grava comúnmente se encuentran en latitudes altas, como en el noroeste de Europa, este del Norte de América y norte del Pacífico. En México existen playas de este tipo en zonas como Quintana Roo, Sonora y Baja California. Generalmente este tipo de costas son muy irregulares y se caracterizan por tener acantilados.

Existen islotes que son depósitos de sedimentos gruesos originados en la era glaciaria caracterizados por tener alturas mayores a los 10 m, vistos en planta tienen una forma ovalada y su máxima longitud ronda los 1000 m, generalmente se encuentran en conjunto como en Clew-Bay al oeste de Irlanda.

### *III.4 Perfil de Equilibrio*

El cambio en una playa se manifiesta en forma longitudinal y transversal a lo largo del tiempo. Es muy raro encontrar playas rectilíneas o con curvas continuas, generalmente contienen formas de media luna de mayor o menor dimensión, con salientes o puntas de arena o entrantes moderadamente profundas y alargadas.

El estado morfodinámico de una playa, es la descripción de la forma que el perfil de playa adquiere como consecuencia de la interacción agua-sedimento.

El oleaje causa en la playa una rápida y profunda transformación al interactuar el agua con el lecho granular. La forma en perfil de la playa es el producto de esta interacción; de tal forma que respecto de su acción sobre una playa de grava, las olas pueden clasificarse como:

- Olas destructivas. Caracterizadas por romper en voluta y tener una zona de barrido muy débil. Suelen erosionar la playa.
- Olas constructivas. Se caracterizan por proyectar corrientes de agua sobre la playa y con ello generar un aumento en el volumen de playa seca.

El predominio de las olas destructoras o constructoras es responsable del movimiento general del sedimento. Adicionalmente, se debe tener en cuenta que la presencia de estas olas depende de las estaciones del año, agentes climáticos y tipos de oleaje.

Los cambios en el perfil de playa se asocian a dos tipos de estados:

- Perfil en erosión. Se produce bajo la acción de tormentas en las que el oleaje actúa en la playa, es resultado de oleajes de gran contenido energético. Se

produce una erosión de la parte media del perfil, la orilla retrocede y el material es transportado mar adentro, depositándose en barras sumergidas; el resultado es la disminución de la pendiente y de la playa seca.

- Perfil de acumulación o reflejante. Se produce bajo la acción de las olas constructivas, es de bajo contenido energético, generalmente asociado a la acción de swell. El material de las barras se transporta hacia la costa, reconstruyendo la berma y haciendo avanzar la línea de orilla hacia el mar. El resultado es el incremento de la pendiente y de la playa seca.

Cuando no se presenta ningún cambio en la morfología de la playa en un tiempo determinado, se dice que se encuentra en equilibrio dinámico.

El perfil de equilibrio es la forma que toma una playa para un oleaje y tamaño de sedimento dado. Aunque Dean (1977) mostró que la forma del perfil depende únicamente del tamaño del grano, la altura y periodo de la ola también determinan la posición de la línea de costa.

Otros autores han definido el perfil de equilibrio, sin embargo, el más aproximado para aplicar en este estudio corresponde a Larson (1991) quien presenta la siguiente aseveración: *“Una playa con un tamaño de grano determinado, expuesta a unas condiciones constantes de oleaje, desarrollará una forma del perfil que no presentará ningún cambio neto con el tiempo”*.



## IV. FLUJO EN UN MEDIO POROSO

### IV.1 Generalidades del flujo tipo Darcy

#### IV.1.1 Velocidad de flujo

En 1856, al Ingeniero Henry Darcy le fue encargado el estudio de la red de abastecimiento de la ciudad de Dijon. Esto incluía el diseño de los filtros de arena para purificar el agua, por lo que tuvo que realizar estudios sobre los factores que intervienen en el flujo de fluidos a través de los materiales arenosos.

Darcy realizó experimentos en aparatos similares a los actuales permeámetros de carga constante. Con estos experimentos Darcy encontró que el caudal que atravesaba el permeámetro era linealmente proporcional a la sección y al gradiente hidráulico. Expresando esta relación matemáticamente se tiene:

$$q = -K \left( \frac{dh}{dl} \right) \quad (4.1)$$

Donde:

$q$  caudal que circula por  $m^2$  de sección  
 $K$  permeabilidad o conductividad eléctrica  
 $dh/dl$  gradiente hidráulico

El término “flujo viscoso”, se refiere a la porción de fluido que fluye (en un régimen laminar continuo) a causa de un gradiente de presión. La ecuación de flujo viscoso es comúnmente conocida como Ley de Darcy.

$$\bar{u} = -C \frac{\partial p^*}{\partial x} \quad (4.2)$$

Donde  $\bar{u}$  es la velocidad media en dirección  $x$ ,  $\partial p^*/\partial x$  es el cambio de presión con respecto a  $x$ , y  $C$  es una constante que depende de la temperatura, del fluido y del medio poroso. La ecuación (4.2) se deduce de la ecuación (4.1), es decir, es lo mismo expresado de diferente manera.

A la velocidad media también se le conoce como “velocidad de Darcy” o “velocidad de flujo” y se deduce físicamente de la ecuación (4.1).

$$Caudal [L^3/T] = Sección [L^2] \times Velocidad [L^2/T] \quad (4.3)$$

Partiendo de la expresión (4.3) se tiene que:

$$Velocidad = Caudal \times Sección \quad (4.4)$$

Lo que lleva a concluir que la velocidad de Darcy no es la velocidad real ya es se está considerando que el fluido circula por toda la sección del medio poroso. Por este motivo, se introduce el concepto de *velocidad lineal media* que se define como:

$$\text{Velocidad lineal media} = \text{Velocidad de Darcy} / m_e \quad (4.5)$$

Donde  $m_e$  es la porosidad eficaz. Esta velocidad refleja correctamente la velocidad real de las partículas en una sección cualquiera del medio poroso, pero no es exacta para calcular el tiempo de recorrido, debido a que no se puede conocer la magnitud real de la trayectoria que siguen las partículas dentro del medio poroso. Debido a esto, la velocidad real se puede obtener con:

$$\text{Velocidad real} = \text{velocidad lineal media} \times \text{coeficiente} \quad (4.6)$$

El coeficiente de la ecuación (4.6) depende de la tortuosidad del medio poroso (acomodo de las partículas).

#### IV.1.2 Limitaciones de la Ley de Darcy

La Ley de Darcy puede no cumplirse por las siguientes razones:

- ❖ La constante de proporcionalidad,  $K$ , no es propia y característica del medio poroso, sino que también depende del fluido. Este hecho se considera al definir la constante  $C$  de la ecuación (4.1), en la que se hace la observación que dicha constante depende de la temperatura, del fluido y de la porosidad del medio.
- ❖ En algunas circunstancias, la relación entre el caudal y el gradiente hidráulico no es lineal. Esto puede suceder cuando el valor de  $K$  es muy bajo (por ejemplo cuando se fluye a través de una formación arcillosa) o cuando las velocidades del flujo son muy altas.

#### IV.1.3 Derivación de la ecuación de transporte para flujo viscoso

La ecuación de transporte del flujo viscoso puede ser calculada aplicando la segunda ley de Newton a un fluido compresible, al igualar las fuerzas de viscosidad y las de presión. Para esto se considera un cilindro de radio  $R$  de tal forma que la ecuación de flujo viscoso es:

$$J_{visc} = \frac{n\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (4.7)$$

La compresibilidad del fluido es considerada para el cálculo de  $n$ , utilizando la ecuación de estado del Gas Ideal:  $n=p/KT$ , donde  $K$  es la constante de Boltzmann y  $T$  es la temperatura en Kelvin.

La ecuación (4.7) se aplica únicamente para una sección circular, es decir para cuando el fluido pasa por un cilindro; por lo que se debe definir una ecuación general, aplicable para cualquier sección, la cual es:

$$J_{visc} = -\frac{nB_0}{\mu} \nabla p \quad (4.8)$$

Donde  $B_0$  es llamado el parámetro de flujo viscoso (o parámetro de flujo de Knudsen). El valor apropiado de  $B_0$  debe ser seleccionado de tal forma que represente la geometría particular del problema.

Para aplicar la ecuación de flujo viscoso a un medio poroso, se tiene que reemplazar el parámetro de flujo viscoso, por otro que si considere la porosidad del medio.

$$B_{0\text{ medio poroso}} = \frac{\varepsilon}{\tau} B_{0\text{ flujo viscoso}} \quad (4.9)$$

Donde  $\varepsilon/\tau$  es el factor de porosidad-tortuosidad.

#### IV.1.4 Relación con la ley de Darcy

Reescribiendo la ecuación de la ley de Darcy, reconociendo que el término piezométrico se refiere solamente a una diferencia de datos de presión y la ecuación de flujo viscoso, usando el valor de  $B_0$  para medio poroso, se tiene que:

$$\bar{u} = -C \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.10)$$

$$J_{visc} = -\frac{nB_{0\text{ medio poroso}}}{\mu} \nabla p \quad (4.11)$$

Ahora, reconociendo que el flujo molar puede ser relacionado con la velocidad media de flujo por  $J_{visc} = n\bar{u}$  se obtiene:

$$C = \frac{B_0}{\mu} \quad (4.12)$$

Para obtener el valor de  $B_0$  el ingeniero australiano Josef Kozeny desarrolló una ecuación en 1927, misma que más tarde mejoró Philip C. Carman. El modelo usa el concepto de porosidad y tortuosidad de poro paralelo, pero también toma en cuenta la variación de la superficie porosa, la cual es:

$$B_{0\text{ medio poroso}} = \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2} \frac{1}{k(S/V_s)^2} \quad (4.13)$$

Donde  $k$  es aproximadamente 5,  $S$  es la superficie total por unidad de volumen y  $V_s$  es el volumen de sólidos del medio.

#### *IV.2 Flujo de ondas en un medio poroso*

El fondo marino es predominantemente arenoso, material cuya estructura y configuración permiten el flujo a su través; adicionalmente, su característica friccionante induce modificaciones en las ondas que se propagan sobre él. Otro problema se presenta cuando, para hacer más eficiente y económico el diseño de una obra de protección, se desea conocer la transmisión de ondas a través de un dique rompeolas ya sea emergido o sumergido. En ambos casos, el objeto de interés es tanto la descripción del flujo dentro de un medio permeable como la distorsión que induce al flujo la existencia de un medio granular en el fondo. Para los alcances de este trabajo, la representación matemática del flujo en estas condiciones estará compuesta por las ecuaciones de la teoría lineal con las modificaciones de cada caso, más la de propagación en el agua.

Siendo que los estudios realizados a este respecto son de más reciente inclusión a nivel ingenieril que los citados anteriormente, a continuación se presenta un breve resumen del estado del arte.

##### *IV.2.1 Antecedentes sobre la propagación de ondas en y sobre un medio poroso*

Un tren de ondas que se propaga sobre un medio poroso sufre procesos de reflexión, transmisión y disipación. Por otro lado, aún en el interior de la estructura no pierde su carácter oscilatorio, aunque las presiones inducidas modifican notablemente la cinemática y dinámica del flujo.

Los primeros experimentos en los que se buscó describir el flujo en un medio poroso, fueron los realizados por Darcy, mismos que se describieron en el apartado anterior. Las hipótesis de Darcy permiten promediar temporalmente los flujos (velocidad de filtración) y así desatender la visión microscópica del problema, en la que parámetros como la forma, localización, rugosidad, porosidad y orientación de cada una de las partículas individuales que conforman el medio (tortuosidad) son de gran importancia. De esta forma, el procedimiento más adoptado para resolver el problema consiste en hallar la solución de las ecuaciones de flujo dentro del medio poroso para luego hacerla compatible con la solución correspondiente a la propagación de las ondas en el agua.

Otro de los escalones medulares en la solución del problema, lo resolvieron Reid y Kajjura (1957), al mostrar que el flujo sobre un medio permeable y granular debe

satisfacer la ecuación de Laplace. Por su parte, Liu y Dalrymple (1984) realizaron un primer intento de incluir el carácter oscilatorio del flujo reemplazando la ley de Darcy por el modelo desarrollado para flujo en medios porosos de Dagan (1979).

Al demostrar que dentro del medio poroso una aproximación lineal no ofrece resultados suficientemente precisos, algunos investigadores desarrollaron modelos basados en leyes de disipación de carácter no lineal con el fin de estudiar la interacción onda-medio poroso, especialmente para diques de escollera. En este sentido Sollit y Cross (1972) presentaron un procedimiento analítico para derivar las ecuaciones de flujo oscilatorio en un medio granular. Su trabajo parte de la descomposición de las variables instantáneas del flujo para promediarlas temporal y espacialmente. Las ecuaciones resultantes tienen solución analítica si se desprecian las aceleraciones convectivas asociadas a la velocidad de filtración y se linealiza el término de fricción.

A partir de la teoría expuesta por Sollit y Cross (1972) se han desarrollado modelos y soluciones de gran importancia para la ingeniería costera, Gu y Wang (1991), por ejemplo, realizaron un trabajo teórico y experimental enfocado a comprender la propagación de ondas sobre fondos granulares. Dalrymple et al. (1991) extendieron dicha teoría al caso de un dique poroso con un tren de ondas incidiendo oblicuamente. La interacción de un dique con espaldón y oleaje incidiendo en forma oblicua fue analizado por Losada et al. (1993), haciendo especial hincapié sobre la reflexión, transmisión y distribución de presiones bajo el espaldón. Más recientemente, Yu et al. (1994), desarrollaron la solución para el estudio de oscilaciones en una dársena semicircular. En años recientes, y de especial utilidad para este trabajo, Rojanakamthorn et al. (1989), Losada et al. (1995) y Silva et al. (2002) derivaron las expresiones de un tren lineal monocromático sobre un medio poroso, las cuales se resumen a continuación.

#### *IV.2.2 Ecuaciones del flujo en un medio permeable*

La resistencia al flujo inducida por un medio poroso formado de material granular grueso depende de varios parámetros como localización, rugosidad de la superficie, porosidad y orientación de cada una de las partículas individuales. La mayor parte de estos parámetros no puede ser controlada ni siquiera en el laboratorio. Es por ello que la descripción del flujo se realiza desde el punto de vista de un medio continuo con propiedades hidráulicas distribuidas uniformemente.

A continuación se presenta el desarrollo completo de las ecuaciones que se utilizan para representar dicho flujo.

Sea el vector  $\vec{q}^*(u_i, v_i)$  la velocidad instantánea en un punto cualquiera y  $p^*$  el campo de presiones correspondiente. Las ecuaciones de movimiento (Navier - Stokes) en función de dicha velocidad y presión son

$$\frac{D\vec{q}^*}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla(p^* + \gamma z) + \nu\nabla^2\vec{q}^* \quad (4.14)$$

donde  $\gamma$  y  $\rho$  representan el peso específico y la masa del fluido respectivamente,  $\nu$  es la viscosidad cinemática y el operador  $\nabla = \vec{i}(\partial/\partial x) + \vec{j}(\partial/\partial y) + \vec{k}(\partial/\partial z)$

Por su parte, la conservación de la masa se expresa como,

$$\nabla\vec{q}^* = 0 \quad (4.15)$$

Si se conociera la forma y distribución de las partículas e intersticios del medio poroso, las ecuaciones (4.14) y (4.15) podrían ser resueltas, sin embargo, esta configuración es aleatoria tanto espacial como temporalmente. Es por ello que en lugar de utilizar la aproximación microscópica, es práctica común evaluar las propiedades físicas e hidráulicas del medio poroso como uno continuo y homogéneo. El concepto que permite la aplicación de esta hipótesis es la velocidad de filtración, misma que tiene como punto de partida el promediado de las ecuaciones en un volumen pequeño pero finito del fluido.

Para reemplazar la velocidad instantánea real,  $\vec{q}^*(u_i, v_i)$ , por la velocidad de filtración, el campo de velocidades puede separarse linealmente, como sigue

$$\vec{q}^*(u_i, v_i) = \vec{q}(u, v) + \vec{q}_s(u_s, v_s) + \vec{q}_t(u_t, v_t) \quad (4.16)$$

donde  $\vec{q}$  es la velocidad de filtración, es decir, la velocidad promedio en un número pequeño pero finito de poros distribuidos uniformemente;  $\vec{q}_s$  representa la perturbación espacial en la velocidad del flujo debida a la irregularidad de los poros o las capas límite y  $\vec{q}_t$  es la perturbación del campo de velocidades por efecto de las fluctuaciones temporales en el interior de los poros. El campo de presiones puede descomponerse en forma similar.

$$p^* = p + p_s + p_t \quad (4.17)$$

Al sustituir las expresiones (4.16) y (4.17) en la (4.14), desarrollando la derivada total y promediando en un periodo menor que el propio de la oscilación se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{q} + \vec{q}_s) + (\vec{q} + \vec{q}_s) \cdot \nabla(\vec{q} + \vec{q}_s) + \overline{\vec{q}_t \cdot \Delta \vec{q}_t} = -\frac{1}{\rho}\nabla(p + p_s + \gamma z) + \nu\nabla^2(\vec{q} + \vec{q}_s) \quad (4.18)$$

donde el sobre lineado indica promedio temporal.

Procediendo de igual manera con la ecuación de la continuidad, (4.15), se obtiene,

$$\nabla(\vec{q} + \vec{q}_s) = 0 \quad (4.19)$$

Las ecuaciones del movimiento, en un volumen pequeño pero finito del medio poroso, promediadas tanto temporal como espacialmente son

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{q} \cdot \nabla \bar{q} + \overline{\bar{q} \cdot \nabla \bar{q}_t} + \underline{\bar{q}_s \cdot \nabla \bar{q}_s} = -\frac{1}{\rho} \nabla (p + \gamma z) + v \nabla^2 \bar{q} \quad (4.20)$$

donde el subrayado indica promedio espacial.

Los términos  $\underline{\bar{q}_s \cdot \Delta \bar{q}_s}$  y  $\underline{\bar{q}_t \cdot \Delta \bar{q}_t}$  permanecen en las ecuaciones de movimiento luego de realizar los promedios temporal y espacial debido a la no linealidad inherente de los términos relativos a las aceleraciones convectivas.

Buscando simplificar el problema Sollit y Cross (1972), realizaron un análisis de escala bajo el razonamiento que, si bien,  $q$ ,  $q_s$  y  $q_t$  son del mismo orden de magnitud, los gradientes de cada uno pueden estar en escalas totalmente distintas ya que las fluctuaciones de la velocidad de filtración ocurren en distancias del orden de la longitud de onda del flujo, mientras que las perturbaciones espaciales y temporales ocurren en una escala similar al diámetro de los poros. De esta forma, si la longitud de onda es mucho mayor que el diámetro de los poros (lo cual se cumple en todos los casos de relevancia práctica) se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla \bar{q} &\ll \nabla \bar{q}_s \text{ y} \\ \nabla \bar{q} &\ll \nabla \bar{q}_t \text{ y con ello} \\ \bar{q} \cdot \nabla \bar{q} &\ll \underline{\bar{q}_s \cdot \nabla \bar{q}_s} + \underline{\bar{q}_t \cdot \nabla \bar{q}_t} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Como resultado de este razonamiento, el término que contiene el gradiente de la velocidad de filtración se puede ignorar, simplificación que además es consistente con la hipótesis que se aplica en la teoría de ondas de pequeña amplitud, en la que los productos de la velocidad por la aceleración se consideran cuadráticos y, por tanto, despreciables. Las ecuaciones de movimiento resultan, entonces

y

donde se introduce  $s$  en el término de la aceleración local, con el fin de tener en cuenta la masa añadida al imponer un obstáculo poroso al flujo. En general, cuando el flujo es exclusivamente dentro de un medio poroso, el valor de  $s$  es unitario.

La expresión (4.22) es la ecuación de movimiento para la velocidad de filtración y la presión, con un término adicional que representa el efecto de las fluctuaciones espaciales y temporales.

Dado que  $\bar{q}_s$  y  $\bar{q}_t$  no pueden ser evaluadas en forma directa, es posible relacionarlas con cantidades deterministas de forma tal que no se modifique la solución, así, se tiene la equivalencia siguiente

$$s \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla (p + \gamma z) + v \nabla^2 \bar{q} - \left( \underline{\bar{q}_t \cdot \Delta \bar{q}_t} + \underline{\bar{q}_s \cdot \nabla \bar{q}_s} \right) \quad (4.22)$$

$$\nabla \bar{q} = 0 \quad (4.23)$$

$$v\nabla^2\bar{q} - \left( \overline{\bar{q}_t \cdot \nabla \bar{q}_t} + \overline{\bar{q}_s \cdot \nabla \bar{q}_s} \right) = - \left[ \frac{v\bar{q}_d}{K_p} + \frac{C_f}{\sqrt{K_p}} \bar{q}_d |\bar{q}_d| \right] \quad (4.24)$$

donde  $K_p$  es la permeabilidad intrínseca,  $C_f$  es un coeficiente turbulento adimensional y  $\bar{q}_d$  es la velocidad de descarga, definida como la velocidad de filtración distribuida uniformemente en todo el medio incluyendo sólidos y vacíos. La velocidad de descarga se relaciona con la de filtración mediante

$$\bar{q}_d = \varepsilon \bar{q} \quad (4.25)$$

siendo  $\varepsilon$  la porosidad del medio.

La igualdad (4.24) se basa en el trabajo desarrollado por Ward (1964), quien demostró que en condiciones de flujo estacionario y no convectivo el decaimiento de la presión dentro de un medio poroso es

$$-\frac{1}{\rho} \nabla(p + \gamma z) = \frac{v\bar{q}_d}{K_p} + \frac{C_f}{\sqrt{K_p}} \bar{q}_d |\bar{q}_d| \quad (4.26)$$

Una útil consecuencia de la ecuación (4.26) es que permite la definición de un coeficiente de pérdida similar al empleado en flujos a presión.

Sustituyendo en la ecuación (4.22) las ecuaciones (4.24) y (4.25) se llega a,

$$s \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla(p + \gamma z) - \left[ \frac{v\varepsilon \bar{q}}{K_p} + \frac{C_f \varepsilon^2}{\sqrt{K_p}} \bar{q} |\bar{q}| \right] \quad (4.27)$$

y

$$\nabla \bar{q} = 0 \quad (4.28)$$

Las expresiones (4.27) y (4.28) tienen una gran ventaja respecto de las (4.22) y (4.23) puesto que las propiedades  $\varepsilon$ ,  $C_f$  y  $K_p$  pueden ser evaluadas a partir de formulaciones empíricas o ensayos de laboratorio, adicionalmente se ha reducido el número de variables de cuatro a dos, por lo que es asequible una solución única. Para hallar la solución al problema, la única hipótesis que se ha de cumplir es que la longitud de onda del flujo oscilatorio sea mayor que la amplitud de la onda y que el tamaño representativo de las partículas del medio. Adicionalmente, es necesario un proceso de linealización, para lo cual se introduce un término de fricción lineal en  $q$ , mismo que ha de disipar la misma cantidad de energía que los términos no lineales (lo que se suele llamar condición de Lorentz de trabajo equivalente), esto es,

$$\frac{v\varepsilon \bar{q}}{K_p} + \frac{C_f \varepsilon^2}{\sqrt{K_p}} \bar{q} |\bar{q}| \rightarrow f \sigma \bar{q} \quad (4.29)$$

donde se ha introducido la frecuencia angular por consistencia dimensional. Para estimar  $f$ , se parte del conocimiento que el término de disipación representa una fuerza de fricción por unidad de masa actuando en un punto del campo de velocidades. Si este término se multiplica por el flujo de masa por unidad de

volumen que viaja en dirección opuesta a la fricción, se tiene la potencia disipada por unidad de volumen. Esta potencia, al integrarse en todo el volumen del campo de velocidades,  $V$ , y en el periodo de la onda, resulta en la energía total consumida por la fricción en todo el volumen de flujo durante un periodo de onda. De acuerdo con la hipótesis de Lorentz, esta energía disipada debe ser la misma con cualquier ley de decaimiento (lineal o no) que describa el mismo proceso, por lo que toda la cadena de operaciones, aplicada a los dos términos de fricción e igualando, puede escribirse matemáticamente como sigue

$$\int_V \varepsilon dV \int_t^{t+T} \left\{ \frac{v\varepsilon\bar{q}}{K_p} + \frac{C_f \varepsilon^2}{\sqrt{K_p}} \bar{q} |\bar{q}| \right\} \rho \bar{q} dt = \int_V \varepsilon dV \int_t^{t+T} f \sigma \bar{q} \rho \bar{q} dt \quad (4.30)$$

Evidentemente existe una relación única entre las características del medio ( $\varepsilon, K_p$  y  $C_f$ ), las del flujo ( $v$  y  $\bar{q}$ ) y el coeficiente de fricción ( $f$ ), la cual, aceptando que éste es constante en todo el volumen de flujo resulta

$$f = \frac{\varepsilon^2 \int_V dV \int_t^{t+T} \left\{ \frac{v\bar{q}^2}{K_p} + \frac{\varepsilon C_f}{\sqrt{K_p}} |\bar{q}|^3 \right\} dt}{\sigma \int_V dV \int_t^{t+T} \varepsilon \bar{q}^2 dt} \quad (4.31)$$

y en términos de la velocidad de descarga

$$f = \frac{\varepsilon \int_V \int_t^{t+T} \left\{ \frac{v\bar{q}_d^2}{K_p} + \frac{C_f}{\sqrt{K_p}} |\bar{q}_d|^3 \right\} dt dV}{\sigma \int_V \int_t^{t+T} \varepsilon \bar{q}_d^2 dt dV} \quad (4.32)$$

Al sustituir el término de fricción lineal en la ecuación (4.27) se llega a las ecuaciones lineales del movimiento

$$s \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla(p + \gamma z) - f \sigma \bar{q} \quad (4.33)$$

con

$$\nabla \bar{q} = 0 \quad (4.34)$$

La ecuación (4.33) es lineal tanto en  $\bar{q}$  como en  $p$ , por lo que si el sistema es excitado son una onda armónica simple, el resultado será igualmente una armónico simple. Si se utiliza como excitación una onda monocromática en la superficie, se puede igualar la frecuencia de oscilación dentro del medio poroso a la frecuencia de dicha excitación,  $\sigma$ , así la presión y velocidad pueden expresarse como

$$\bar{q}(x, y, z, t), p(x, y, z, t) = \{ \bar{q}(x, y, z), p(x, y, z) \} e^{\pm i\sigma t} \quad (4.35)$$

de modo que

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\bar{q}, p\} = \pm i\sigma \{\bar{q}, p\} \quad (4.36)$$

En su desarrollo original, Sollit y Cross (1972) utilizaron el signo positivo de la función de dependencia temporal en la ecuación (4.35). En este trabajo se emplea el signo negativo lo cual tiene la misma validez.

Al sustituir las ecuaciones (4.35) y (4.36) en la (4.33), se obtiene

$$\sigma(-is + f)\bar{q} = -\frac{1}{\rho}\nabla(p + \gamma z) \quad (4.37)$$

La ecuación (4.37), al ser operada en producto cruz resulta

$$\sigma(-is + f)\nabla \times \bar{q} = -\frac{1}{\rho}\nabla \times \nabla(p + \gamma z) = 0 \quad (4.38)$$

Por lo tanto  $\nabla \times \bar{q} = 0$ , es decir, el campo de flujo es irrotacional y puede ser definido por un potencial de velocidades  $\Phi_p$  tal que

$$\bar{q} = \nabla\Phi_p \quad (4.39)$$

Al sustituir este potencial en la ecuación (4.34), se obtiene la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2\Phi_p = 0 \quad (4.40)$$

que constituye la ecuación de gobierno en el campo de flujo.

Sustituyendo también el potencial en la ecuación (4.33) y removiendo el operador gradiente, se obtiene

$$s\frac{\partial\Phi_p}{\partial t} + \frac{1}{\rho}(p + \gamma z) + f\sigma\Phi_p = 0 \quad (4.41)$$

Esta es la ecuación lineal de Bernoulli para flujo de filtración en un medio granular. Las ecuaciones (4.40) y (4.41) pueden escribirse en términos del potencial de velocidades de descarga, bajo el supuesto que el medio es homogéneo respecto de la porosidad, esto es

$$\nabla^2\Phi_d = 0 \quad (4.42)$$

y

$$s\frac{\partial\Phi_d}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\rho}(p + \gamma z) + f\sigma\Phi_d = 0 \quad (4.43)$$

#### IV.2.3 Resumen de las ecuaciones de propagación de ondas sobre un fondo poroso de profundidad variable

A diferencia de las teorías que consideran que la profundidad del lecho sobre el que se propaga una onda progresiva y el espesor de la capa de medio poroso son constantes. En esta tesis se presenta la solución conocida como ecuación de la pendiente suave, la cual fue presentada inicialmente por Berkhoff (1972) solo para inclinaciones suaves del fondo (impermeable) y modificada por Chamberlain y Porter (1995) para ser aplicada a cualquier pendiente. Por su parte, autores como

Rojanakamtorn et al (1989,1990), Losada et al (1996) y Silva (2002) han presentado soluciones a este problema considerando un obstáculo permeable en el fondo y adoptando la teoría de Sollit y Cross (1972). En este trabajo se obtendrá la solución para el problema de propagación más general, es decir, el caso con agua y una capa finita de medio poroso sobre fondo impermeable.

El desarrollo que se presenta a continuación, supone flujo incompresible, homogéneo e irrotacional en fondo impermeable con profundidad total  $h(x,y)$  sobre el cual descansa una capa de medio poroso con límite superior en la profundidad  $h_p(x,y)$ , siendo  $x$  e  $y$  las coordenadas cartesianas horizontales. La coordenada vertical,  $z$ , es positiva hacia arriba y el nivel  $z=0$  se encuentra en el nivel medio del mar (ver **Figura IV.1**).

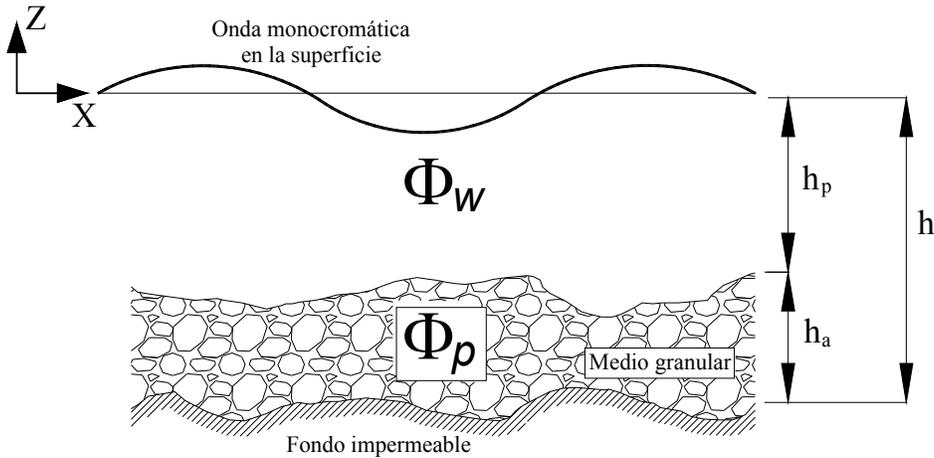


Figura IV.1 Croquis del problema de propagación en fondo variable

La ecuación de Laplace es la ley que representa el movimiento general del fluido, la cual, a la vista de las suposiciones arriba mencionadas puede escribirse como función del potencial de velocidades de la forma

$$\nabla_h^2 \Phi_w + \frac{\partial \Phi_w}{\partial z^2} = 0 \quad -h_p \leq z \leq 0 \quad (4.44)$$

para la región fuera del medio poroso y como

$$\nabla_h^2 \Phi_p + \frac{\partial^2 \Phi_p}{\partial z^2} = 0 \quad -h \leq z \leq -h_p \quad (4.45)$$

en las que  $\Phi$  es potencial de velocidades,  $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  y los subíndices  $w$  y  $p$  denotan las características fuera y dentro del medio granular, respectivamente. Es importante señalar que, en lo sucesivo, dentro del medio permeable se emplearán las definiciones correspondientes al potencial de velocidades de descarga.

Las condiciones de frontera que se necesitan para hallar la solución son: 1) la dinámica y cinemática de superficie libre en el agua, esto es,

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \quad z = 0 \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad z = 0 \quad (4.47)$$

2) la velocidad fuera del medio granular justo en la interfase entre ambos medios para espesor de la capa porosa variable, es decir,

$$w_w = \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} + \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_w \quad z = -h_p \quad (4.48)$$

3) la presión en el agua,

$$p = -\rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} + gz \right) \quad -h_p \leq z \leq 0 \quad (4.49)$$

4) la presión dentro del medio permeable,

$$p_p = -\rho \left( \frac{s}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi_p}{\partial t} + gz + \frac{f}{\varepsilon} \sigma \Phi_p \right) \quad -h \leq z \leq -h_p \quad (4.50)$$

en la que  $\varepsilon$  es la permeabilidad del medio,  $f$  el coeficiente de fricción linealizado y  $s$  la masa añadida; 5) la velocidad de descarga en el medio poroso justo en la interfase entre ambos medios

$$w_p = \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} + \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_p \quad z = -h_p \quad (4.51)$$

y 6) la condición de impermeabilidad en el fondo por debajo de la capa permeable

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} + \nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi_p = 0 \quad z = -h \quad (4.52)$$

La principal ventaja de utilizar las condiciones de contorno de la teoría lineal, es que son homogéneas y así, el problema se puede resolver por el método de separación de variables. Para lo cual, los potenciales de velocidades fuera y dentro del medio granular se pueden descomponer respectivamente, como

$$\Phi_w(x, y, z, t) = \Re \{ \varphi(x, y, t) M(z) \} \quad (4.53)$$

$$\Phi_p(x, y, z, t) = \Re \{ \varphi(x, y, t) P(z) \} \quad (4.54)$$

Las funciones de dependencia de la profundidad,  $M(z)$  y  $P(z)$  corresponden a las obtenidas bajo los supuestos de fondo y espesor de la capa porosa constantes, a saber,

$$M(z) = \frac{\cosh K(h+z) - F \sinh K(h+z)}{\cosh Kh - F \sinh Kh} \quad (4.55)$$

$$P(z) = \delta \frac{(1 - F \tanh Kh_a) \cosh K(h+z)}{\cosh Kh - F \sinh Kh} \quad (4.56)$$

donde  $F = \frac{(1-\delta) \tanh Kh_a}{1-\delta \tanh^2 Kh_a}$ ,  $\delta = \frac{\varepsilon}{s+if}$  y  $h_a = h - h_p$ . Por su parte,  $K$ , el número de onda común para ambos medios, se calcula de la expresión

$$\frac{\sigma^2}{g} = K \frac{\tanh Kh - F}{1 - F \tanh Kh} \quad (4.57)$$

De acuerdo con Smith y Sprinks (1975), Kirby (1986), Mase y Takeba (1994) y Silva et al (2002), se puede partir de aplicar la segunda identidad de Green a  $M(z)$  y  $\Phi_w$ , esto es

$$\int_{-h_p}^0 M \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial z^2} dz - \int_{-h_p}^0 \Phi_w \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} dz - \left( M \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} - \Phi_w \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{-h_p}^0 = 0 \quad (4.58)$$

sustituyendo en el primer término de la ecuación (4.58), las ecuaciones (4.44) y (4.53) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial z^2} dz &= - \int_{-h_p}^0 M \nabla_h^2 \Phi_w dz = \int_{-h_p}^0 M \nabla_h^2 (\varphi M) dz \\ &= - \int_{-h_p}^0 \varphi M \nabla_h^2 M + 2M \nabla_h \varphi \nabla_h M + M^2 \nabla_h^2 \varphi dz = \\ &= - \int_{-h_p}^0 \varphi M \nabla_h^2 M + \nabla_h M^2 \nabla_h \varphi + M^2 \nabla_h^2 \varphi dz = \\ &= - \int_{-h_p}^0 (M \varphi \nabla_h^2 M) dz - \int_{-h_p}^0 \nabla_h (M^2 \nabla_h \varphi) dz \end{aligned} \quad (4.59)$$

Por otra parte, aplicando la definición de la función de profundidad  $M$ , ec. (4.55), en el segundo término de la ecuación (4.58) queda

$$\begin{aligned} \int_{-h_p}^0 \Phi_w \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} dz &= \int_{-h_p}^0 \Phi_w \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\cosh K(h+z) - F \sinh K(h+z)}{\cosh(Kh) - F \sinh(Kh)} \right) dz = \\ &= \int_{-h_p}^0 \Phi_w K^2 M dz \end{aligned} \quad (4.60)$$

Ahora, el tercer término de la ecuación (4.58) puede descomponerse en dos partes, si  $z=0$  se tiene que

$$\begin{aligned} \left( M \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} - \Phi_w \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} &= \left( M \left( -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2} \right) - \Phi_w \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \\ &= \left( M \left( -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2} \right) - \frac{\sigma^2}{g} \Phi_w M \right) \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (4.61)$$

mientras que si  $z = -h_p$  resulta

$$\left( M \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} - \Phi_w \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h_p} = \left( Mw_w - M \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_w - M \varphi \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h_p} \quad (4.62)$$

Entonces, la ecuación (4.58) queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & - \int_{-h_p}^0 \nabla_h (M^2 \nabla_h \varphi) dz - \int_{-h_p}^0 (M \varphi \nabla_h^2 M) dz - \int_{-h_p}^0 \Phi_w K^2 M dz \\ & + \left( \frac{1}{g} M \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2} + \Phi_w M \frac{\sigma^2}{g} \right) \Big|_{z=0} + \left( Mw_w - M \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_w - M \varphi \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h_p} = 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

Si se aplica ahora la regla de Leibnitz al primer término de la ecuación (4.63) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-h_p}^0 \nabla_h (M^2 \nabla_h \varphi) dz &= \nabla_h \cdot \int_{-h_p}^0 (M^2 \nabla_h \varphi) dz - (M^2 \nabla_h \varphi) \Big|_{z=0} \cdot \nabla_h 0 \\ &+ (M^2 \nabla_h \varphi) \Big|_{z=-h_p} \cdot (\nabla_h (-h_p)) = \nabla_h \cdot \int_{-h_p}^0 (M^2 \nabla_h \varphi) dz - (M^2 \nabla_h \varphi \cdot \nabla_h h_p) \Big|_{z=-h_p} \end{aligned} \quad (4.64)$$

lo cual, sustituido en la ec. (4.63) es

$$\begin{aligned} & \nabla_h \cdot \int_{-h_p}^0 (M^2 \nabla_h \varphi) dz + \int_{-h_p}^0 (M \varphi \nabla_h^2 M) dz + \int_{-h_p}^0 K^2 M^2 \Phi_w dz - \\ & - \frac{1}{g} \left( M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \sigma^2 M^2 \varphi \right) \Big|_{z=0} - \left( Mw_w - M \varphi \nabla_h h \cdot \nabla_h M - M \varphi \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h_p} = 0 \end{aligned} \quad (4.65)$$

Para continuar con el desarrollo a partir de ésta última expresión, es necesario evaluar los gradientes de  $M(z)$ , los cuales se presentan a continuación

$$\begin{aligned} \nabla_h M &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial h_p} \frac{\partial h_p}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial h_p} \frac{\partial h_p}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h h + \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h h_p \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} \nabla_h^2 M &= \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial h_p} \frac{\partial h_p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial h_p} \frac{\partial h_p}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial h^2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial h \partial h_p} \frac{\partial h_p}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial h_p} \frac{\partial^2 h_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial h_p^2} \left( \frac{\partial h_p}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial h_p \partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h_p}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial h^2} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial h \partial h_p} \frac{\partial h_p}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial h_p} \frac{\partial^2 h_p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial h_p^2} \left( \frac{\partial h_p}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial h_p \partial h} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h_p}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h^2 h + \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p + \frac{\partial^2 M}{\partial h^2} (\nabla_h h)^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial h_p^2} (\nabla_h h_p)^2 + \left( \frac{\partial^2 M}{\partial h \partial h_p} + \frac{\partial^2 M}{\partial h_p \partial h} \right) \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned}
 M\nabla_h^2 M &= M \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h^2 h + M \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p + \frac{\partial}{\partial h} \left( M \frac{\partial M}{\partial h} \right) (\nabla_h h)^2 - \left( \frac{\partial M}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h h)^2 + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial h_p} \left( M \frac{\partial M}{\partial h_p} \right) (\nabla_h h_p)^2 - \left( \frac{\partial M}{\partial h_p} \right)^2 (\nabla_h h_p)^2 + \frac{\partial}{\partial h} \left( M \frac{\partial M}{\partial h_p} \right) \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial h_p} \left( M \frac{\partial M}{\partial h} \right) \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p - 2 \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p
 \end{aligned} \quad (4.68)$$

La aplicación de la ecuación (4.68) en el tercer término de la expresión (4.65) lleva a

$$\begin{aligned}
 \int_{-h_p}^0 \varphi M \nabla_h^2 M dz &= \varphi \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h^2 h dz + \varphi \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p dz + \\
 &+ \varphi \int_{-h_p}^0 \frac{\partial}{\partial h} \left( M \frac{\partial M}{\partial h} \right) (\nabla_h h)^2 dz + \varphi \int_{-h_p}^0 \frac{\partial}{\partial h_p} \left( M \frac{\partial M}{\partial h_p} \right) (\nabla_h h_p)^2 dz + \\
 &+ \varphi \int_{-h_p}^0 \frac{\partial}{\partial h} \left( M \frac{\partial M}{\partial h_p} \right) \nabla_h h \nabla_h h_p dz + \varphi \int_{-h_p}^0 \frac{\partial}{\partial h_p} \left( M \frac{\partial M}{\partial h} \right) \nabla_h h_p \nabla_h h dz - \\
 &- \varphi \int_{-h_p}^0 \left( \frac{\partial M}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h h)^2 dz - \varphi \int_{-h_p}^0 \left( \frac{\partial M}{\partial h_p} \right)^2 (\nabla_h h_p)^2 dz - \\
 &- 2\varphi \int_{-h_p}^0 \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h h \nabla_h h_p dz
 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Al aplicar la regla de Leibnitz al tercer, cuarto, quinto y sexto términos del lado derecho de la expresión anterior y sustituirlo en la (4.65) queda

$$\begin{aligned}
 & \nabla_h \int_{-h_p}^0 M^2 \nabla_h \varphi dz + \varphi \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h^2 h dz + \varphi \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p dz + \\
 & + \varphi \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h} (\nabla_h h)^2 dz + \varphi \frac{\partial}{\partial h_p} \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h_p} (\nabla_h h_p)^2 dz + \\
 & + \varphi \left( \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h} dz + \frac{\partial}{\partial h_p} \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h_p} dz \right) \nabla_h h_p \nabla_h h - \\
 & - \varphi \int_{-h_p}^0 \left( \frac{\partial M}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h h)^2 dz - \varphi \int_{-h_p}^0 \left( \frac{\partial M}{\partial h_p} \right)^2 (\nabla_h h_p)^2 dz - \\
 & - 2\varphi \int_{-h_p}^0 \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h h_p \nabla_h h dz - \int_{-h_p}^0 K^2 M^2 \varphi dz - \\
 & - \frac{1}{g} \left( M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M^2 \varphi \sigma^2 \right) \Big|_{z=0} - \left( w_w M - M \varphi \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h_p} = 0
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

De manera similar a lo anterior, se aplica la segunda identidad de Green a  $P(z)$  y  $\Phi_p$ , así

$$\int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial^2 \Phi_p}{\partial z^2} dz - \int_{-h}^{-h_p} \Phi_p \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} dz - \left( P \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} - \Phi_p \frac{\partial P}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h}^{z=-h_p} = 0 \tag{4.71}$$

y siguiendo el mismo procedimiento del caso anterior se llega a la expresión

$$\begin{aligned}
 & \nabla_h \int_{-h}^{-h_p} P^2 \nabla_h \varphi dz + \varphi \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h} \nabla_h^2 h dz + \varphi \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p dz + \\
 & + \varphi \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h} (\nabla_h h)^2 dz + \varphi \frac{\partial}{\partial h_p} \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h_p} (\nabla_h h_p)^2 dz + \\
 & + \varphi \left( \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h} dz + \frac{\partial}{\partial h_p} \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h_p} dz \right) \nabla_h h_p \nabla_h h - \\
 & - \varphi \int_{-h}^{-h_p} \left( \frac{\partial P}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h h)^2 dz - \varphi \int_{-h}^{-h_p} \left( \frac{\partial P}{\partial h_p} \right)^2 (\nabla_h h_p)^2 dz - \\
 & - 2\varphi \int_{-h}^{-h_p} \frac{\partial P}{\partial h} \frac{\partial P}{\partial h_p} \nabla_h h_p \nabla_h h dz - \int_{-h}^{-h_p} K^2 P^2 \varphi dz + \\
 & + \left( w_p P - P \varphi \frac{\partial P}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h_p} = 0
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Para encontrar una sola expresión que describa el flujo en  $-h \leq z \leq 0$ , se debe cumplir con la continuidad de presiones ( $p_w = p_p$ ) y de flujo de masa ( $w_w = w_p$ ) en

la interfase entre ambos flujos ( $z = -h_p$ ). Esta condición permite la combinación de las ecuaciones (4.70) y (4.72) obteniéndose así la versión extendida de la ecuación de la pendiente suave dependiente del tiempo, esto es,

$$\nabla_h (I_1 \nabla_h \phi) + K^2 \phi I_1 + \phi r(h, h_p) - \frac{1}{g} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \phi \sigma^2 \right) = 0 \quad (4.73)$$

en la que

$$\begin{aligned} r(h, h_p) = & I_{21} \nabla_h^2 h + I_{22} \nabla_h^2 h_p + (\nabla_h h)^2 \left( \frac{\partial I_{21}}{\partial h} - I_{31} \right) + (\nabla_h h_p)^2 \left( \frac{\partial I_{22}}{\partial h_p} - I_{32} \right) + \\ & + \nabla_h h_p \nabla_h h \left( \frac{\partial I_{22}}{\partial h} + \frac{\partial I_{21}}{\partial h_p} - 2I_{33} \right) \end{aligned} \quad (4.74)$$

además

$$I_1 = \int_{-h_p}^0 M^2 dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} P^2 dz \quad (4.75)$$

$$I_{21} = \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h} dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h} dz \quad (4.76)$$

$$I_{22} = \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h_p} dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h_p} dz \quad (4.77)$$

$$I_{31} = \int_{-h_p}^0 \left( \frac{\partial M}{\partial h} \right)^2 dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} \left( \frac{\partial P}{\partial h} \right)^2 dz \quad (4.78)$$

$$I_{32} = \int_{-h_p}^0 \left( \frac{\partial M}{\partial h_p} \right)^2 dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} \left( \frac{\partial P}{\partial h_p} \right)^2 dz \quad (4.79)$$

$$I_{33} = \int_{-h_p}^0 \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial M}{\partial h_p} dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} \frac{\partial P}{\partial h} \frac{\partial P}{\partial h_p} dz \quad (4.80)$$

La solución de las integrales enlistadas se pueden consultar en Mendoza (2007).

Para obtener la extensión de la ecuación de la pendiente suave independiente del tiempo o armónica, se utiliza la siguiente separación

$$\phi(x, y, t) = \phi(x, y) e^{-i\sigma t} \quad (4.81)$$

que sustituida en la expresión (4.73) resulta en la ecuación modificada de la pendiente suave (MMSE por sus siglas en inglés)

$$\nabla_h (I_1 \nabla_h \phi) + K^2 \phi I_1 + \phi r(h, h_p) = 0 \quad (4.82)$$

Las corrientes por oleaje más importantes se generan en la zona de rotura, por lo que es esencial que el modelo de oleaje tenga la capacidad de disipar la energía y representar lo mejor posible el decaimiento en la superficie libre provocados por

dicho fenómeno. Para lograrlo, se ha modificado la ecuación (4.82) añadiendo artificialmente un término disipativo similar al presentado por Dally et al (1985), así la MMSE queda

$$\nabla_h (I_1 \nabla_h \phi) + \left[ (K^2 - i\sigma f_D) I_1 + r(h, h_p) \right] \phi = 0 \quad (4.83)$$

donde

$$f_D = \frac{\Re(K) C_k}{\sigma h^*} \left[ 1 - \left( \frac{C_G h^*}{H_B} \right)^2 \right]$$

$\Re( )$  indica la parte real del argumento,  $C_k$  y  $C_G$  son coeficientes experimentales, en este trabajo, con valores de 0.15 y 0.4, respectivamente.  $h^* = h_p + \varepsilon h_a$  es la profundidad efectiva.

La ecuación hasta aquí obtenida es capaz de representar la propagación de una onda progresiva sobre fondo impermeable variable y con una capa de medio poroso de espesor finito pero variable sobre él, ec. (4.83).

## V. ETAPA DE EXPERIMENTACIÓN

### V.1 Descripción del laboratorio

La etapa experimental se desarrolló en el Instituto de Ingeniería de la UNAM, en las instalaciones del Laboratorio de Costas y Puertos.

#### V.1.1 Características del canal de oleaje

El canal del Laboratorio de Costas y Puertos del Instituto de Ingeniería de la UNAM tiene como características geométricas una longitud de 37 metros de largo por 80 centímetros de ancho y 120 centímetros de alto. De acuerdo a estas características se puede generar, como máximo, oleaje con una profundidad de entre 70 y 80 cm y olas alrededor de 40 cm de altura.

El material de construcción de uno de los costados y del fondo del canal es de acero inoxidable y el otro lado está conformado por 30 metros de vidrio y acero inoxidable en los extremos (**Figura V.1**). El canal tiene una capacidad máxima (considerando que el llenado es a una profundidad de 80 centímetros) de aproximadamente 24,000 litros de agua, pero para condiciones normales de operación requiere solo 15,000 litros. Esta cantidad de líquido es posible almacenarla en una cisterna y es recirculada y filtrada para evitar su desperdicio.

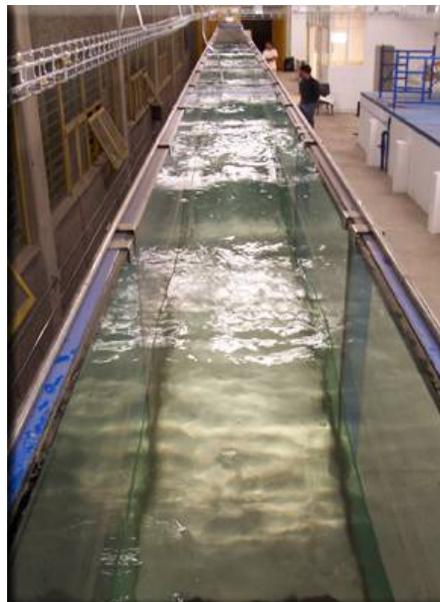


Figura V.1 Canal de oleaje (II-UNAM)

### V.1.2 Generador de oleaje

El equipo de generación fue adquirido a la empresa HR Wallingford del Reino Unido y puede generar oleaje controlado (regular), aleatorio (irregular), arbitrario y ondas solitarias. El generador es de tipo pistón y consiste en una placa de acero sostenida por un riel horizontal (**Figura V.2**), que se mueve hacia delante y hacia atrás. Dicho riel, a su vez, ésta suspendido de una estructura fija posicionada a los costados de las paredes del canal con lo que se eliminan las vibraciones transmitidas por el motor hacia la estructura del canal.



Figura V.2 Generador de oleaje (II-UNAM)

La pala puede alcanzar un desplazamiento total de 85 cm, a una velocidad máxima de 0.81 m/s y con una fuerza máxima de 3.5 kN. El riel se mueve gracias a un motor eléctrico (**Figura V.2**) que opera a través de engranes y se controla desde una computadora. El motor es de baja inercia, necesaria para que se pueda operar en frecuencias altas y los engranes están diseñados para trabajar a velocidades altas.

Una de las limitaciones de las instalaciones es que el oleaje generado no se disipa sino que se refleja en las paredes de los extremos del canal. Este problema aumenta cuando dentro del canal es colocado un modelo altamente reflejante; ya que las ondas viajan en ambos sentidos provocando un caos que no permitirá la realización de estudios confiables.

Para solucionar los problemas de las ondas reflejadas, el canal cuenta con un sistema de absorción de oleaje diseñado por HR Wallingford para minimizar el efecto de re-reflexión.

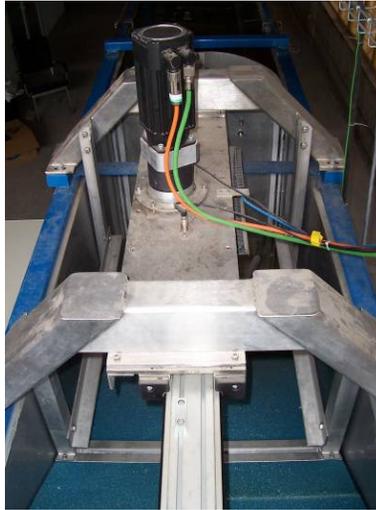


Figura V.3 Motor eléctrico del generador de olas, II-UNAM

#### *Absorción de reflexiones en la pala*

El sistema de absorción de reflexiones de la pala dispone de un par de sensores de nivel adosados a la pala (**Figura V.4**) que registran el oleaje generado a lo largo del ensayo. La medición de estos sensores se compara, en tiempo real, con la altura de ola que se debería estar generando. A partir de esta comparación el sistema calcula la variación necesaria en el desplazamiento horizontal de la pala para absorber la energía en exceso.



Figura V.4 Sensores del sistema de absorción, II-UNAM

### V.1.3 Instrumentación

#### *Medidores de oleaje*

El laboratorio cuenta con doce medidores de nivel de tipo probeta de 600 mm de largo (**Figura V.5**). Este equipo registra el nivel de la superficie del agua en un instante dado, aprovechando la capacidad conductiva del agua y la aislante del aire, es decir, entre las dos barras metálicas se hace pasar corriente y el circuito se cerrará solo en la parte sumergida. Finalmente, a partir de una relación entre el voltaje y la longitud sumergida del sensor se puede conocer la posición de la superficie del agua en cada instante y de ahí la altura y periodo de las olas. El rango de operación es su longitud misma y su precisión alcanza la décima de milímetro.



Figura V.5 Sensores de nivel

#### *Sensores de presión*

Se tienen catorce sensores de presión, cuatro de ellos con rango de 0-2 mca, cuatro con 0-5 mca y 6 con 0-1 mca. Las celdas de presión consisten en un diafragma capaz de registrar variaciones muy pequeñas en el medio que lo rodea y, al ser conectado a un circuito con corriente, las traduce a voltajes los que, a su vez, son transformados a su equivalente en metros de columna de agua (**Figura V.5**).

Este equipo a pesar de ser relativamente frágil, es muy confiable, y en virtud de su capacidad de responder a cambios muy rápidos, puede ser utilizado para la

medición de impactos sobre estructuras marítimas o portuarias causadas por el oleaje.



Figura V.6 Celdas de presión

#### *Velocímetro acústico doppler*



Figura V.7 Velocímetro acústico

Es un aparato de muy alta definición que permite conocer las tres componentes de la velocidad en un punto dado. El principio de operación parte de la emisión de una señal acústica que luego de rebotar en las partículas del agua de un volumen de control situado 5 cm por arriba de la fuente sonora, es captada por tres transductores. La velocidad del fluido se puede estimar a través de relacionar la frecuencia de la onda inicial con las frecuencias deformadas que captarán los transductores. (Figura V.7)

La frecuencia máxima de muestreo es de 0.1 a 50 Hz, sin embargo, es conveniente sincronizarlo con el resto del equipo para obtener resultados homogéneos. Este equipo tiene resolución de 0.01 cm/s y se puede programar para que su rango sea de  $\pm 3$ ,  $\pm 10$ ,  $\pm 30$ ,  $\pm 100$  y  $\pm 250$  cm/s.

#### *Velocímetro por trazado de partículas*

El PIV (Particle Image Velocimeter) o velocímetro láser, se compone de un emisor de un haz láser que ilumina las partículas en el fluido y una cámara fotográfica que registra el movimiento de éstas. El software asociado hace una malla en la imagen y estima las velocidades al centro de cada celda. La resolución de la malla puede ser del orden del píxel, sin embargo, cada experimento requiere su propio ajuste puesto que celdas muy grandes pierden información del flujo y celdas muy pequeñas incrementan demasiado el tiempo de cálculo (el cual por cierto lo realiza vía correlación adaptativa entre dos imágenes sucesivas).

La frecuencia de muestreo depende de la velocidad en cada caso, esto es, al correlacionar los datos de dos fotos, éstas deben tomarse con el tiempo de retraso adecuado, el cual suele hallarse a prueba y error.

La única desventaja de este equipo es que puede llegar a generar una cantidad inmanejable de información (4-5 Gb de imágenes por ensayo) por lo que la planeación previa es muy importante.

## **V.2 Descripción del Experimento**

La experimentación física de playas puede llevarse a cabo en dos maneras: la primera, consiste en desarrollar investigación y medición en campo; lo cual tiene la ventaja de ofrecer resultados fieles y totalmente representativos de las condiciones de los procesos y parámetros de interés. La segunda, es llevar a cabo experimentos en pequeña escala, lo que permite contar con condiciones controladas de oleaje y del tamaño y forma del material granular, así como de facilitar la instrumentación y recolección de datos. El trabajo en laboratorio lleva implícito el problema de los efectos de escala en el material que conforma la playa. Sin embargo, dado el bajo costo del trabajo, la capacidad de llevar a cabo un gran número de experimentos en un periodo relativamente corto y sobre todo la facilidad de repetir un experimento las veces que sea necesario, hacen que la modelación en laboratorio sea una herramienta invaluable en el entendimiento de los fenómenos asociados a la interacción de las playas con el oleaje.

V.2.1 Construcción del modelo de playa

Es importante señalar que el trabajo experimental y análisis de resultados objeto de esta tesis, iniciaron el año 2007 y continuarán más allá del alcance de este trabajo en el Instituto de ingeniería.

Para la construcción de la playa se utilizó grava con un tamaño de grano de media pulgada, de la que, en el mismo laboratorio, se determinaron algunas propiedades físicas. El resumen de resultados se presenta en la **Tabla V-1**.

Tabla V-1 Propiedades físicas de la grava

PROPIEDAD	VALOR	UNIDADES
Densidad	2591.6	Kg/m <sup>3</sup>
Angulo de Reposo	25	°
Porosidad	0.4028	-
Velocidad de Caída (para D <sub>50</sub> = 0.25 pulgadas)	0.34	m/s

La geometría inicial de la playa se muestra en la **Figura V.8**, inicialmente la playa tiene una altura de 57 cm, una pendiente expuesta constante de 1:5, además, al pie de la playa se construyó una cama de 1.8 m de largo y 8 cm de alto, con el fin de crear una zona de transición para que el cambio brusco de medio no tenga consecuencias significantes en el oleaje y la morfología de la playa. Adicionalmente dicho zona favorece el peraltamiento de las olas antes de llegar a la playa, lo cual ocasiona una rotura más violenta que descarga mayor energía facilitando el transporte de sedimentos, modificando el perfil de la playa.

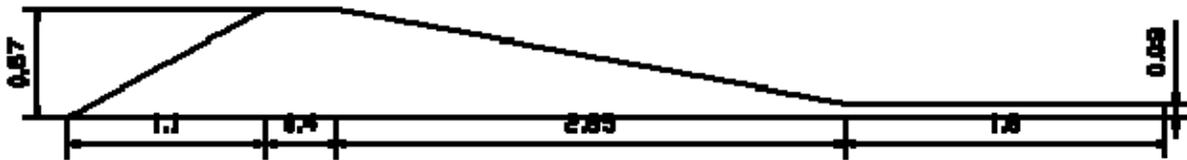


Figura V.8 Perfil inicial de la playa (cotas en metros)

### V.2.2 Instrumentación

Con el fin de recolectar datos para poder observar el comportamiento de la playa y para saber las características del oleaje, se dispusieron diferentes instrumentos como sensores de nivel, sensores de presión, velocímetros y piezómetros.

La colocación de los sensores de nivel tiene como objetivo obtener los registros temporales de la superficie libre del agua; dichos sensores se colocaron de acuerdo a las distancias recomendadas por el Método de Mansard y Funke modificado por Baquerizo (1995), que tiene en cuenta la separación de la onda incidente y reflejada. La ubicación de los sensores se muestra en la **Figura V.9**.

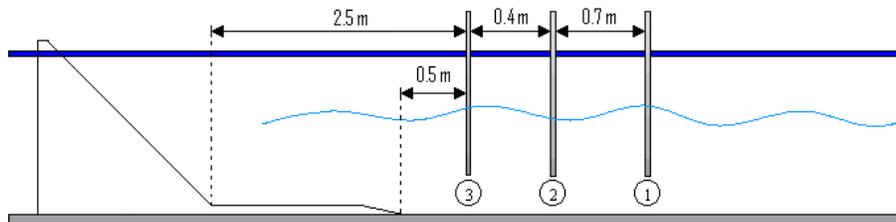


Figura V.9 Ubicación relativa de los sensores de nivel

Los sensores de presión se colocaron sobre una malla de 25x25 cm (**Figura V.10**), con el fin de que no se movieran de su posición, la cual se muestra en la **Tabla V-2** y en la **Figura V.11**. Estos sensores son los encargados de registrar los valores de la presión al interior de la playa para las distintas condiciones de oleaje.



Figura V.10 Sensor de presión sujeto a una malla, colocado en la playa

Se colocaron dos velocímetros, con el fin de contar con una medida de la velocidad del flujo del oleaje dentro del canal, ya que su medición proporciona información que puede ser asociada al transporte de sedimentos por suspensión y además ofrece información de lo que está ocurriendo en la zona de resaca. Para ello se utilizaron dos tipos de velocímetros: *Velocímetro Acústico Doppler* (ADV)

proporciona la velocidad del flujo; y *Particle Image Velocimetry* (PIV) este instrumento proporciona información sobre la velocidad y trayectoria de las partículas en dos direcciones. El análisis de estos datos está fuera de los alcances de esta tesis.

SENSOR	DISTANCIA DE LA PALA (m)
B1	26
B2	26.4
A1	28.1
A2	28.1
UoP1	27.1
UoP2	27.1
UoP3	27.1
UoP4	26.95
UoP5	27.25

Tabla V-2 Posición de los sensores de presión

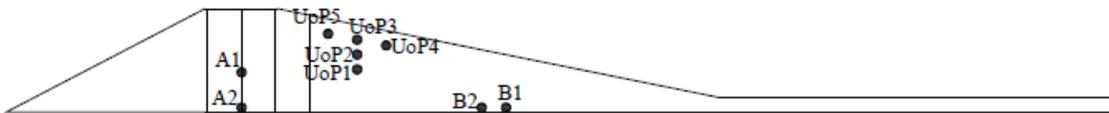
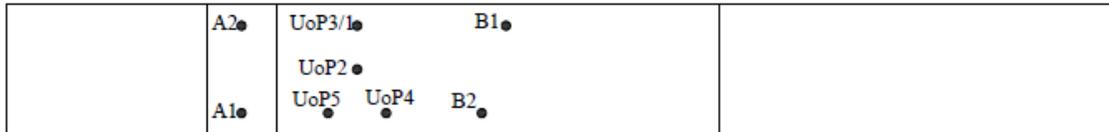


Figura V.11 Vista en planta y perfil del arreglo de los sensores de presión

Por otro lado, se instalaron tres cámaras de video fuera del canal, dos de ellas a un costado para registrar el nivel freático dentro de la playa y una tercera, colocada arriba de la instalación a fin de obtener información respecto del Run-up y el Run-down.

V.2.3 Metodología de los ensayos

El trabajo experimental se dividió en dos casos, en el primero se tiene un nivel freático constante, de igual magnitud (40 cm) tanto en la zona expuesta al oleaje, como en la zona protegida; y en el segundo caso se tiene un desnivel entre ambos niveles freáticos. Para el caso de esta tesis solo se consideran los datos del caso uno (nivel freático constante).

Se realizo un programa de ensayos, modificando las condiciones del oleaje, la **Tabla V-3** muestra los climas de oleaje para el caso 1.

Tabla V-3 Variaciones de las condiciones de oleaje

H (m)	T (s)	H ZONA PROTEGIDA (m)	H ZONA EXPUESTA(m)
0.1	1	0.4	0.4
0.12	1	0.4	0.4
0.14	1	0.4	0.4
0.16	1	0.4	0.4
0.18	1	0.4	0.4
0.1	2	0.4	0.4
0.12	2	0.4	0.4
0.14	2	0.4	0.4
0.16	2	0.4	0.4
0.18	2	0.4	0.4
0.1	3	0.4	0.4
0.12	3	0.4	0.4
0.14	3	0.4	0.4
0.16	3	0.4	0.4
0.1	4	0.4	0.4
0.12	4	0.4	0.4
0.14	4	0.4	0.4

El procedimiento para cada ensayo se enlista a continuación:

- Calibrar instrumentos de medición
- Fijar condiciones de oleaje en el programa HR Wallingford Wavemaker
- Tomar fotografía del perfil inicial y prender cámaras
- Preparar las aplicaciones de cómputo para la recolección de datos
- Iniciar la generación del tren de olas
- Detener la generación de oleaje
- Tomar foto de perfil final y detener los dispositivos de video y medición

Cada ensayo constó de varias pruebas de distinta duración (**Tabla V-4**) y al final de cada prueba se realizó el levantamiento del perfil de la playa para contar con registros de la historia de la deformación.

Por último se reconstruyó la playa para el siguiente ensayo, el criterio de reconstrucción consistió en obtener el mismo perfil después de dos trenes de olas (que la playa alcance un perfil estable).

Tabla V-4 Duración de las pruebas para cada ensayo

PRUEBA	DURACIÓN [min]
1	1
2	2
3	4
4	7
5	10



## VI. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Es importante señalar que los resultados aquí presentados se refieren únicamente a los ensayos realizados con un tamaño de grano de media pulgada y para el caso uno del grupo de ensayos presentado por Meneses (2009), esto es, con igual nivel freático en la zona expuesta y en la protegida. El alcance de esta tesis se puede dividir en tres partes: la primera consiste en buscar qué zona del perfil de la playa es la que gobierna en la magnitud de, específicamente, dos fenómenos de flujo sobre la playa: el coeficiente de reflexión y el Run-up. La segunda parte está dedicada a presentar los resultados del programa que resuelve la ecuación de la pendiente suave en un medio poroso y la tercera muestra las presiones puntuales medidas en el experimento y la comparación con las obtenidas por el programa en los mismos puntos.

El análisis de los datos obtenidos de los sensores de cada experimento, se divide, a su vez, en dos partes: el momento inicial (cuando la geometría de la playa es un talud recto) y el momento final (donde el perfil ya está deformado y alcanzó la estabilidad). El fin de dicha discriminación es comparar ambos estados y cuantificar si hay algún cambio significativo en el número de Iribarren, el tipo de rotura y la distribución de presiones en la playa.

### *VI.1 Número de Iribarren y parámetros relacionados*

Es importante señalar que este trabajo es un complemento de un extenso trabajo experimental cuyo análisis comenzó antes de esta Tesis y continuará después de ella. Por tanto, los valores experimentales del coeficiente de reflexión y del Run-up que aquí se utilizan corresponden a los medidos por Meneses (2009). En su trabajo, Meneses (2009) comparó los valores medidos en el experimento con los estimados a partir de las expresiones de Losada y Giménez-Curto (1981), en estos resultados encontró una gran diferencia presumiblemente debida al uso del número de Iribarren para un talud recto. Para demostrar lo anterior, estimó un ángulo equivalente que aproximara los valores teóricos a los obtenidos con las mediciones. Estos ángulos resultaron muy pequeños y lejanos del ángulo inicial del talud de la playa que es el valor que se utiliza para calcular el número de Iribarren.

En este sentido, uno de los objetivos de este trabajo es encontrar ángulos de magnitud parecida a los calculados por Meneses (2009) en el talud deformado de la playa. A través de una inspección visual de los perfiles de playa deformados, se encontró que dichos ángulos se presentan en la parte más baja de los mismos (ver

Figura VI.1). Los valores hallados de los ángulos para todas las condiciones de oleaje, se muestran en la tabla VI-1.

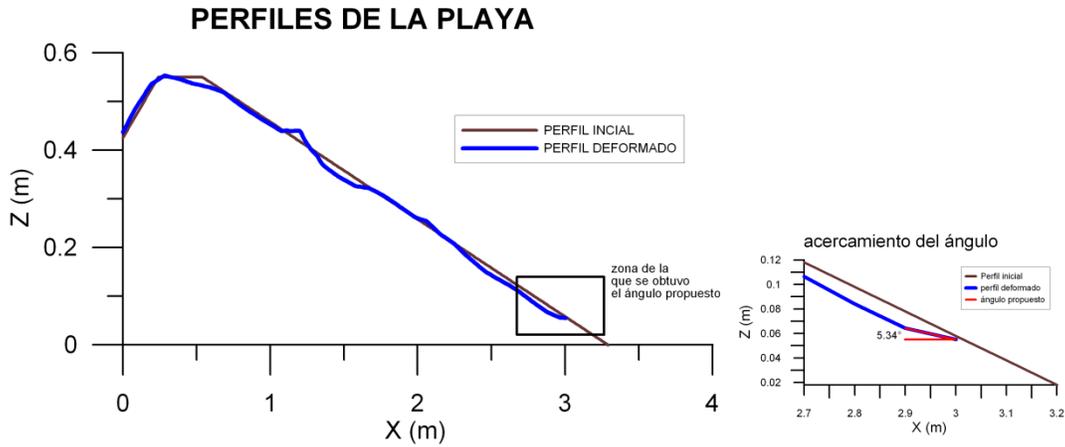


Figura VI.1 Obtención del ángulo propuesto

Tabla VI-1 Ángulos hallados para cada caso

ENSAYO	H	T	ANGULO (°)
1	0.10	1	2,5932
2	0.12	1	5,6499
3	0.14	1	8,1190
4	0.16	1	5,3376
5	0.18	1	6,2671
6	0.10	2	11,5455
7	0.12	2	7,5241
8	0.14	2	6,5398
9	0.16	2	3,4690
10	0.18	2	5,8943
11	0.10	3	5,6811
12	0.12	3	6,4318
13	0.14	3	7,4154
14	0.16	3	6,5642
15	0.10	4	8,4601
16	0.12	4	14,3066
17	0.14	4	2,1657

Los ángulos hallados corresponden al momento final de cada ensayo (perfil estable), mientras que el ángulo inicial es constante para todos los climas de oleaje,

ya que al inicio de cada uno la paya fue reconstruida. Así, el ángulo inicial es el correspondiente a la pendiente de la zona expuesta en la geometría de la playa, cuyo valor es de 11°. A partir de estos ángulos se calcularon el número de Iribarren y el tipo de rotura para cada condición de oleaje y para los perfiles inicial y estable. Los resultados se presentan en la **Tabla VI-2**.

Tabla VI-2 Parámetros calculados para los perfiles inicial y estable

ENSAYO	H	T	h	L	ÁNGULO (°)		Ir		Tipo de Rotura	
	(m)	(s)	(m)	(m)	inicial	final	inicial	final	inicial	final
1	0,1	1	0,4	1,4637	11	2,5932	0,74368	0,17327	descrestamiento	descrestamiento
2	0,12	1	0,4	1,4637	11	5,6499	0,67888	0,34552	descrestamiento	descrestamiento
3	0,14	1	0,4	1,4637	11	8,1190	0,62852	0,46129	descrestamiento	descrestamiento
4	0,16	1	0,4	1,4637	11	5,3376	0,58793	0,28259	descrestamiento	descrestamiento
5	0,18	1	0,4	1,4637	11	6,2671	0,55430	0,31317	descrestamiento	descrestamiento
6	0,1	2	0,4	3,6950	11	11,5455	1,18157	1,24174	voluta	voluta
7	0,12	2	0,4	3,6950	11	7,5241	1,07862	0,73291	voluta	descrestamiento
8	0,14	2	0,4	3,6950	11	6,5398	0,99861	0,58895	descrestamiento	descrestamiento
9	0,16	2	0,4	3,6950	11	3,4690	0,93411	0,29131	descrestamiento	descrestamiento
10	0,18	2	0,4	3,6950	11	5,8943	0,88069	0,46775	descrestamiento	descrestamiento
11	0,1	3	0,4	5,7652	11	5,6811	1,47590	0,75534	voluta	descrestamiento
12	0,12	3	0,4	5,7652	11	6,4318	1,34731	0,78137	voluta	descrestamiento
13	0,14	3	0,4	5,7652	11	7,4154	1,24737	0,83519	voluta	descrestamiento
14	0,16	3	0,4	5,7652	11	6,5642	1,16681	0,69073	voluta	descrestamiento
15	0,1	4	0,4	7,7906	11	8,4601	1,71568	1,31284	voluta	voluta
16	0,12	4	0,4	7,7906	11	14,3066	1,56620	2,05479	voluta	voluta
17	0,14	4	0,4	7,7906	11	2,1657	1,45002	0,28210	voluta	descrestamiento

El número de Iribarren sí presenta variaciones significativas en la mayoría de los casos, sin embargo, debido a los rangos de valores que se asocian a cada tipo de

rotura, en la mayoría de los casos no se ve reflejado un cambio de rotura con respecto a la fase inicial. Se observa que en los ensayos en los que sí se presenta un cambio de rotura, el valor del número de Iribarren se encuentra cerca de la frontera del rango correspondiente, por lo que una pequeña variación deriva en el cambio de tipo de rotura. En todo caso, dada la escasa variación, se puede decir que, para los valores obtenidos a partir de los ángulos presentados en la **Tabla VI-1**, el tipo de rotura no se modifica de manera importante entre el perfil inicial y el estable.

Con base en los resultados de Meneses (2009), se calcularon otros parámetros utilizando los ángulos de la **Tabla VI-1**, con el fin de observar las diferencias que se pueden presentar al comparar los resultados teóricos con los obtenidos a partir de las mediciones. El coeficiente de reflexión, se calculó utilizando dos formulaciones, la de Seelig y Ahrens (1981) y la de Losada y Giménez-Curto (1981). Al utilizar la fórmula de Losada y Giménez-Curto (1981),  $Kr = A(1 - e^{-Br})$ , se tienen que conocer los parámetros  $A$  y  $B$ , los cuales se obtuvieron de las tablas que presentan los mismos autores. Los resultados se muestran en la **Tabla VI-3**.

Tabla VI-3 Coeficientes de reflexión medidos y calculados con Losada y Giménez-Curto (1981)

ENSAYO	H	T	Ir	A	B	Kr	
	(m)	(s)				Calculado	Medido
1	0,1	1	0,17327	0,503	-0,1248	0,1076	0,181
2	0,12	1	0,34552	0,503	-0,1248	0,1769	0,154
3	0,14	1	0,46129	0,503	-0,1248	0,2010	0,174
4	0,16	1	0,28259	0,503	-0,1248	0,1089	0,201
5	0,18	1	0,31317	0,503	-0,1248	0,1071	0,38
6	0,1	2	1,24174	0,503	-0,1248	0,7221	0,257
7	0,12	2	0,73291	0,503	-0,1248	0,3664	0,31
8	0,14	2	0,58895	0,503	-0,1248	0,2546	0,313
9	0,16	2	0,29131	0,503	-0,1248	0,1122	0,293
10	0,18	2	0,46775	0,503	-0,1248	0,1585	0,319
11	0,1	3	0,75534	0,503	-0,1248	0,4525	0,411
12	0,12	3	0,78137	0,503	-0,1248	0,3895	0,319

13	0,14	3	0,83519	0,503	-0,1248	0,3556	0,32
14	0,16	3	0,69073	0,503	-0,1248	0,2596	0,315
15	0,1	4	1,31284	0,503	-0,1248	0,7602	0,517
16	0,12	4	2,05479	0,503	-0,1248	0,9481	0,523
17	0,14	4	0,28210	0,503	-0,1248	0,1243	0,522

Posteriormente se graficaron los resultados (**Figura VI.2**) y se obtuvo el error para cuantificar la dispersión de los datos y demostrar si el ángulo propuesto es el que rige el comportamiento de la playa o no.

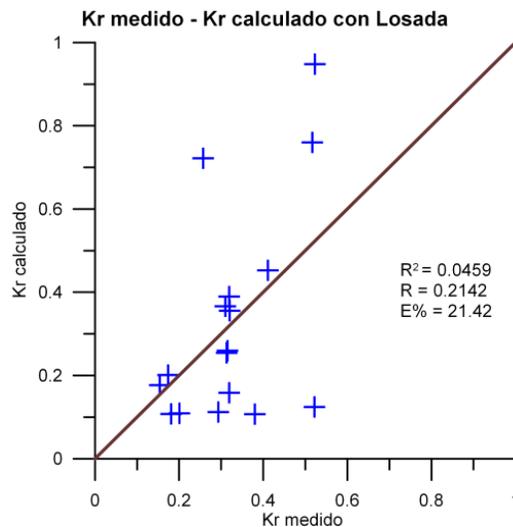


Figura VI.2 Coeficientes de reflexión medidos y calculados con Losada y Giménez-Curto (1981)

La **Figura VI.2** muestra que para algunos casos el ajuste es aceptable, sin embargo, algunos puntos reflejan una lejanía importante entre los valores estimados y los medidos. De ahí la motivación de utilizar una segunda formulación e investigar si el ajuste entre los datos experimentales y los obtenidos de forma teórica se puede mejorar.

La segunda formulación fue la de Seelig y Ahrens (1981), en cuya fórmula ( $Cr = A Ir^2 / B + Ir^2$ ) también aparecen dos parámetros  $A$  y  $B$ , cuyo valor se obtiene también de una tabla publicada por los autores. Los resultados se muestran en la **Tabla VI-4** y en la **Figura VI.3**.

Tabla VI-4 Coeficientes de Reflexión medidos y calculados con Seelig y Ahrens (1981)

ENSAYO	H	T	I <sub>r</sub>	A	B	Cr	
	(m)	(s)				Calculado	Medido
1	0,1	1	0,17327	0,75	15	0,014981957	0,181
2	0,12	1	0,34552	0,75	15	0,049349536	0,154
3	0,14	1	0,46129	0,75	15	0,074931297	0,174
4	0,16	1	0,28259	0,75	15	0,024823275	0,201
5	0,18	1	0,31317	0,75	15	0,02706574	0,38
6	0,1	2	1,24174	0,75	15	0,699099333	0,257
7	0,12	2	0,73291	0,75	15	0,216079332	0,31
8	0,14	2	0,58895	0,75	15	0,121079323	0,313
9	0,16	2	0,29131	0,75	15	0,026370829	0,293
10	0,18	2	0,46775	0,75	15	0,059902372	0,319
11	0,1	3	0,75534	0,75	15	0,274815566	0,411
12	0,12	3	0,78137	0,75	15	0,244439914	0,319
13	0,14	3	0,83519	0,75	15	0,238053126	0,32
14	0,16	3	0,69073	0,75	15	0,144499991	0,315
15	0,1	4	1,31284	0,75	15	0,772960567	0,517
16	0,12	4	2,05479	0,75	15	1,372820578	0,523
17	0,14	4	0,28210	0,75	15	0,028271672	0,522

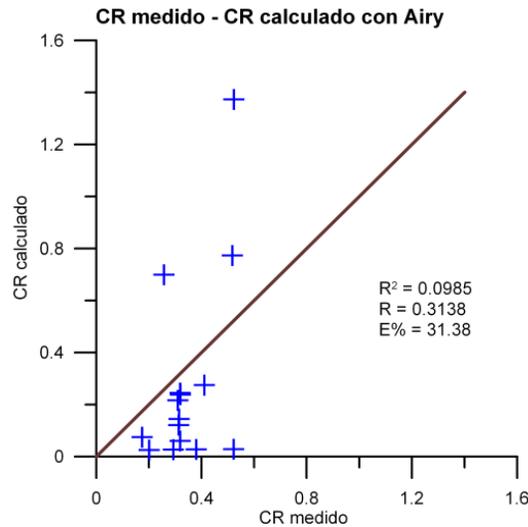


Figura VI.3 Coeficientes de reflexión medidos y calculados con Seelig y Ahrens (1981)

Con base en la **Figura VI.2** y la **Figura VI.3**, se puede decir que la expresión de Losada y Giménez-Curto (1981) es la que mejor ajusta los valores medidos. Dichos resultados ofrecen un error de aproximadamente 20%, el cual es un valor relativamente bajo.

En un procedimiento similar, se obtuvo el valor del Run-up teórico, utilizando la fórmula de Losada y Giménez-Curto (1981), ecuación (2.21) junto con las ecuaciones de Silva et al. (1988) para la determinación de los parámetros  $A_u$  y  $B_u$ , considerando un dique homogéneo, ecs. (2.22) y (2.23) y tomando el valor de la porosidad del dique  $n=0.403$ , los resultados se muestran a continuación (**Tabla VI-5**).

Tabla VI-5 Valores del Run-up medido y calculado

ENSAYO	H	T	I <sub>r</sub>	A <sub>u</sub>	B <sub>u</sub>	Ru/H	
	(m)	(s)				Calculado	Medido
1	0,1	1	0,17327	1,397	-0,594	0,13663	0,24
2	0,12	1	0,34552	1,397	-0,594	0,25921	0,2167
3	0,14	1	0,46129	1,397	-0,594	0,33482	0,2143
4	0,16	1	0,28259	1,397	-0,594	0,21587	0,2063
5	0,18	1	0,31317	1,397	-0,594	0,23713	0,2111
6	0,1	2	1,24174	1,397	-0,594	0,72887	0,55

7	0,12	2	0,73291	1,397	-0,594	0,49309	0,5167
8	0,14	2	0,58895	1,397	-0,594	0,41239	0,4286
9	0,16	2	0,29131	1,397	-0,594	0,22198	0,4813
10	0,18	2	0,46775	1,397	-0,594	0,33889	0,5167
11	0,1	3	0,75534	1,397	-0,594	0,50505	0,48
12	0,12	3	0,78137	1,397	-0,594	0,51873	0,2833
13	0,14	3	0,83519	1,397	-0,594	0,54637	0,3
14	0,16	3	0,69073	1,397	-0,594	0,47015	0,3938
15	0,1	4	1,31284	1,397	-0,594	0,75650	0,84
16	0,12	4	2,05479	1,397	-0,594	0,98479	0,8583
17	0,14	4	0,28210	1,397	-0,594	0,21553	0,7786

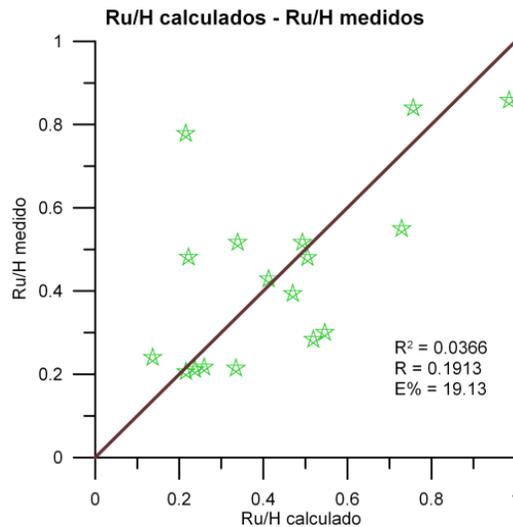


Figura VI.4 Run-up medidos y calculados

Similar al análisis del coeficiente de reflexión, se intenta determinar si el ángulo propuesto es el que gobierna el comportamiento del Run-up. Observando la tabla y las gráficas se obtienen resultados muy cercanos, esto es, con un error menor al 20%. Al igual que para el coeficiente de reflexión, algunos puntos se disparan. Se observó que los puntos más distantes pertenecen a los ensayos en los que el ángulo final es de mayor magnitud. Lo anterior se puede verificar en los resultados presentados por Meneses (2009). Además, los casos de peor ajuste corresponden con aquellos en que se presenta el mayor crecimiento de la playa, como es el caso

del ensayo 3, correspondiente a una  $H=0.14\text{m}$  y  $T=1\text{s}$ . Estos resultados conducen a que se tendría que hacer un análisis empleando el ángulo de una zona más alta del perfil y verificar si los resultados son mejores.

## VI.2 Resultados del programa MSP del Instituto de Ingeniería

En esta sección se presentan los resultados obtenidos del programa MSP desarrollado en el Instituto de Ingeniería. Este programa está basado en la teoría lineal, y sus fundamentos teóricos se presentaron en el capítulo IV de esta tesis.

La función de este programa es describir el comportamiento de la playa, tanto en aguas profundas como cerca de la costa. Este comportamiento, lo presenta en varios archivos, que proporcionan información referente a la altura de ola y superficie libre máximas instantáneas, las velocidades orbitales y las presiones en el agua. El programa tiene, además, la capacidad de resolver la propagación de las ondas al interior de un medio poroso y ofrece la misma información que en el caso del agua. Para introducir los puntos de estudio, se dividió toda la longitud de la playa en secciones horizontales de 2.5 cm y en verticales de 1 cm. Los límites del programa son, el mínimo en 0 y el máximo en 33 m; haciendo analogía con el canal de olas, el cero se encontraría en donde está la pala generadora y el cadenamiento 33 m se encuentra 3 metros más delante de donde termina la zona protegida de la playa.



Figura VI.5 Arreglo de la playa para el programa MSP.

Este programa se corrió cuatro veces, una para cada periodo, las especificaciones se presentan en la **Tabla VI-6**. Para cada ejecución se mantuvieron algunos parámetros constantes que son: fricción inicial = 3, porosidad = 0.4, masa añadida inicial = 1.5 y diámetro del material ( $D_{50}$ ) = 12.7 mm. También se consideró que se presenta rotura en todos los casos y que la fricción es variable.

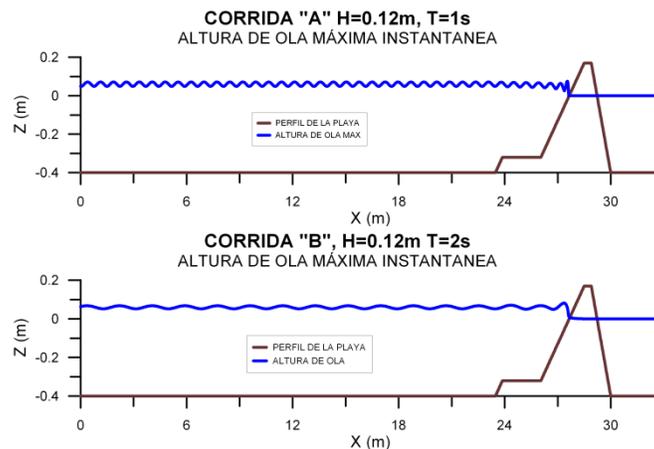
Tabla VI-6 Variantes para los perfiles y mapas de cada corrida.

CASO	H	T	X	
	(m)	(s)	MIN	MAX
A	0.12 ó 0.18	1	20	30
B	0.12 ó 0.18	2	20	30
C	0.12 ó 0.16	3	20	30
D	0.12 ó 0.14	4	20	30

A su vez, los resultados del programa se pueden dividir en cinco partes, cuatro de ellas se refieren al comportamiento de todo el canal (o playa) tanto en aguas profundas como en aguas someras y la quinta se refiere a las presiones puntuales dentro de la playa. Esta última se analizará en conjunto con las presiones medidas en el experimento, en el siguiente apartado.

A continuación se presentan las gráficas obtenidas para el análisis completo de la playa. En la primera parte se muestran los perfiles obtenidos, para que estas ejecuciones sirvieran para fines comparativos, se estableció que se mantendría constante la altura de ola en  $H=0.12$  m y se variaría únicamente el periodo; teniendo 4 casos: "A" para  $T=1$  s, "B" para  $T=2$  s, "C" para  $T=3$  s y "D" para  $T=4$  s.

El primer parámetro es la altura de ola máxima instantánea, a continuación se presentan los resultados correspondientes a cada caso (**Figura VI.6**).



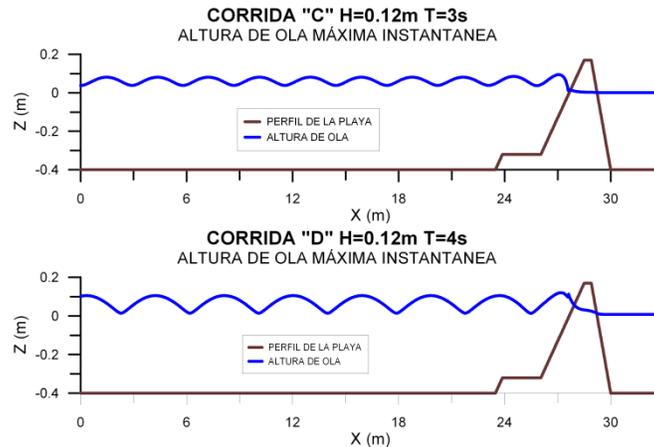


Figura VI.6 Alturas de ola máximas instantáneas para caso

En la **Figura VI.6** se observa el aumento de la longitud de onda conforme aumenta el periodo, esto era de esperarse y coincide con lo mostrado en la **Tabla VI-2**, donde se presentó el cálculo de dicha longitud de onda. Otra característica es el corrimiento del lugar en donde rompen las olas, que es más lejos de la playa a medida que aumenta el periodo. En la del periodo  $T=4$  s se observa que después de romper la ola, se presenta una pequeña onda sobre la playa, esto es debido a la magnitud de la ola y a que ondas de mayor longitud tienen mayor capacidad de viajar a través de un medio poroso. Con respecto a las magnitudes de la ola, se observa que la altura de ola máxima instantánea aumenta conforme aumenta el periodo, en otras palabras, la altura de ola máxima instantánea, principalmente por efectos de reflexión, es directamente proporcional al periodo.

En la segunda parte del análisis de los resultados del programa, se estudia el comportamiento de la velocidad, representándola en dos, la componente vertical y la componente horizontal. Se observó el comportamiento a lo largo del canal para determinar si hay variación cuando hay un cambio de fondo. Para esta parte se estudia el canal desde el cadenamamiento 10 m y hasta 30 m que es donde termina la playa, los resultados están organizados en tres graficas para cada corrida.

En la **Figura VI.7**, **Figura VI.8**, **Figura VI.9** y **Figura VI.10**, se presentan las gráficas correspondientes a la componente horizontal de la velocidad para las cuatro corridas de 1 a 4 s respectivamente.

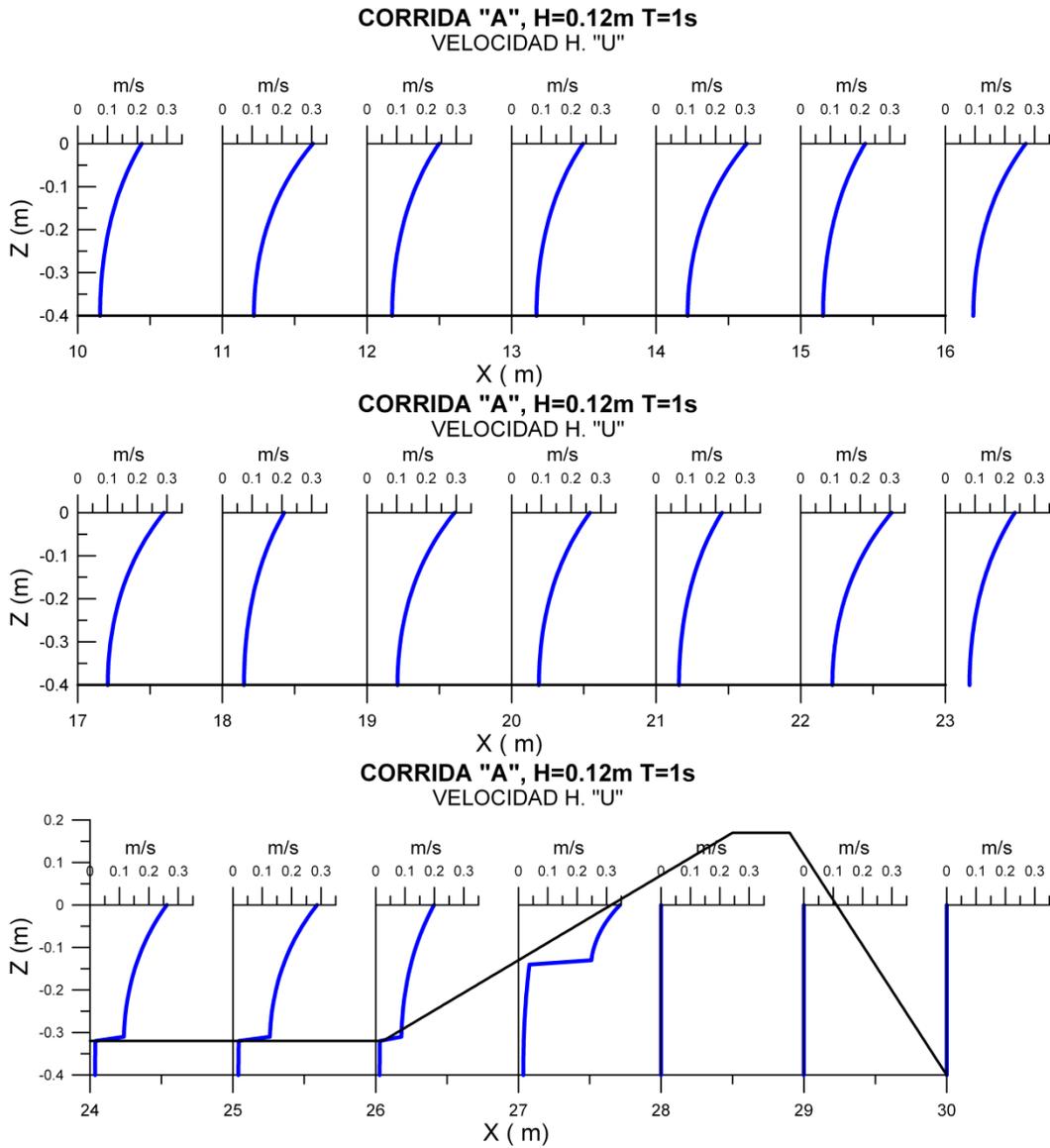
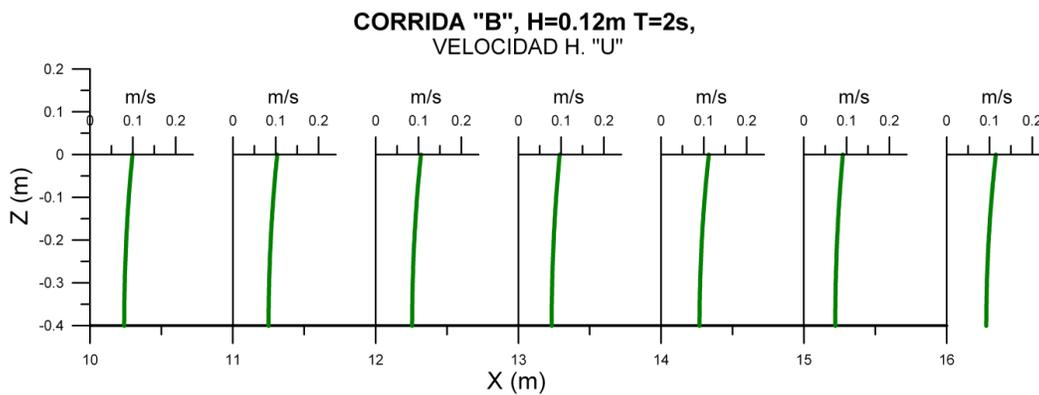


Figura VI.7 diagramas de velocidad horizontal de la corrida "A", T=1s



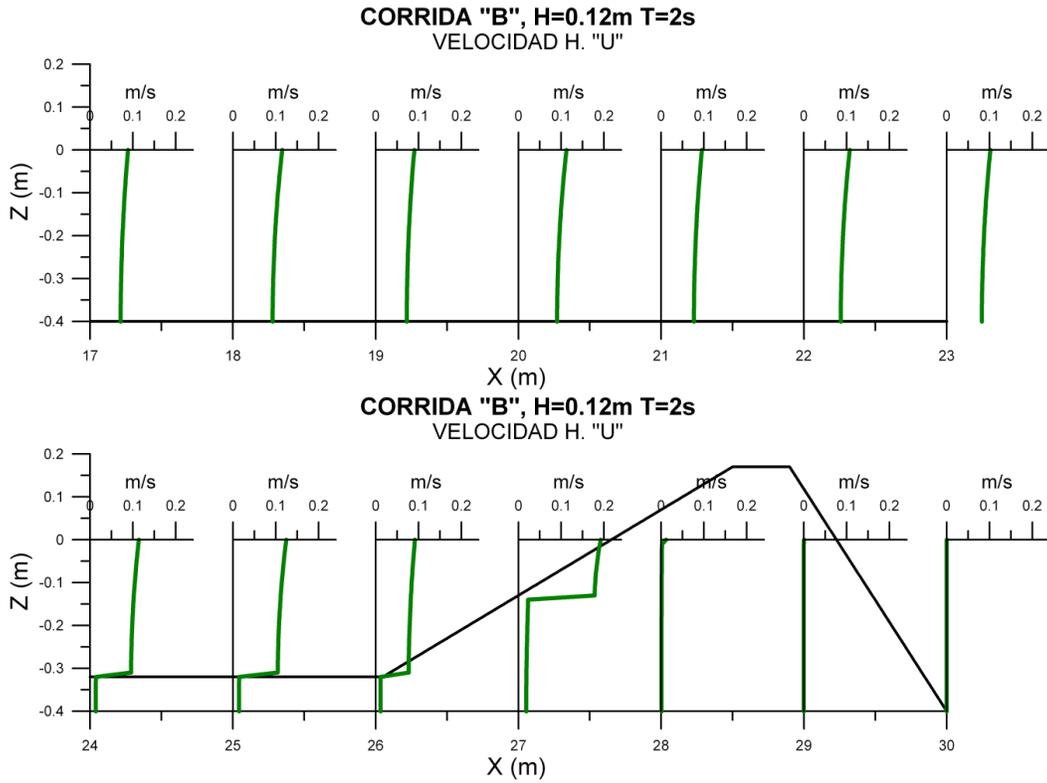
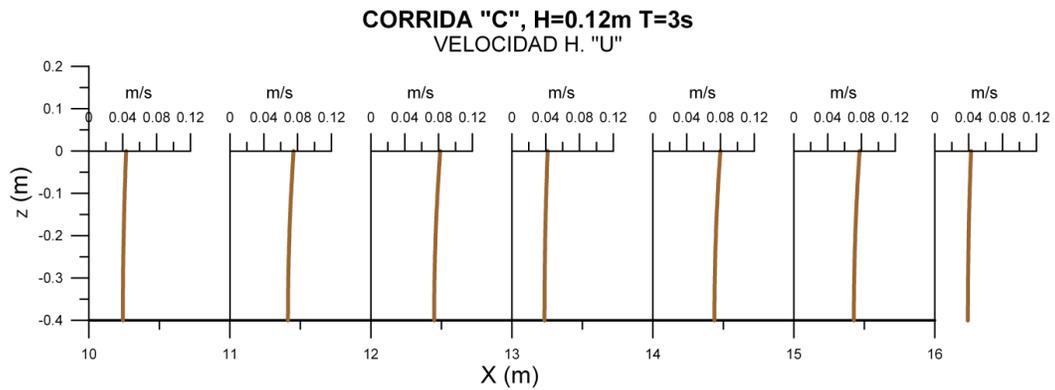


Figura VI.8 diagramas de velocidad horizontal de la corrida "B", T=2s



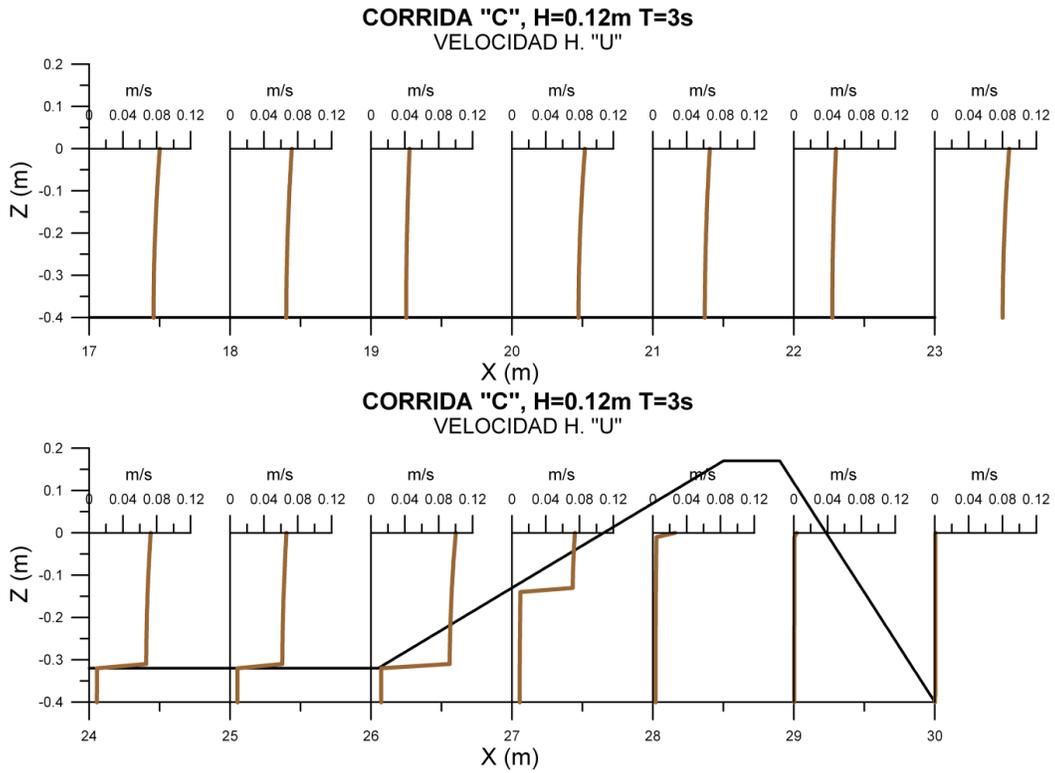
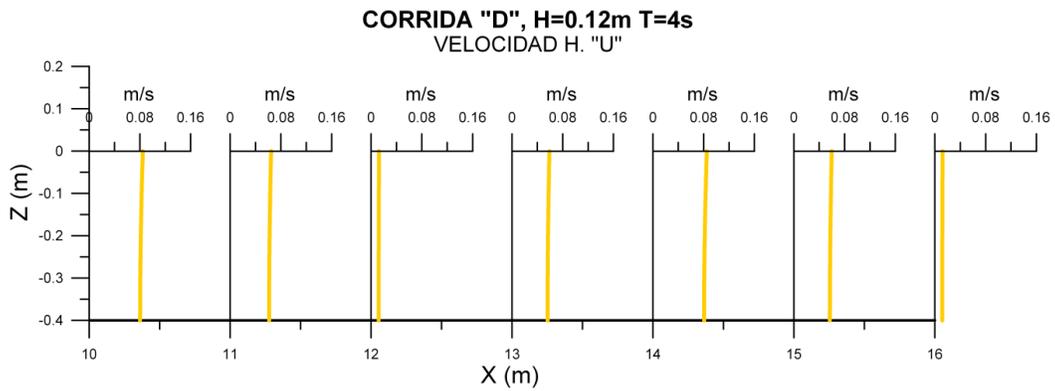


Figura VI.9 Diagramas de velocidad horizontal de la corrida "C", T=3s



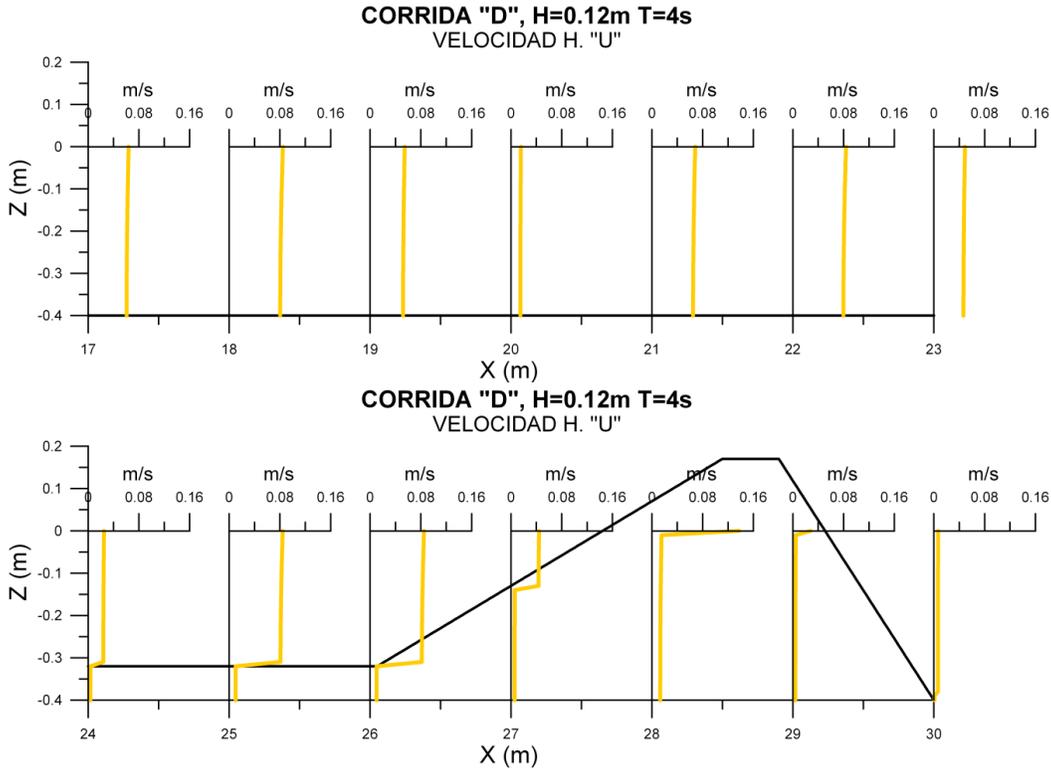


Figura VI.10 Diagramas de velocidad horizontal de la corrida "D", T=4s

En un primer análisis se observa que la velocidad va aumentando y disminuyendo, cíclicamente a lo largo del canal, en los tres primeros casos, son ciclos de 3 m y en el último es un ciclo de 4 m; primero aumenta y cuando son los 3 m o 4 m disminuye drásticamente regresando a una magnitud muy similar a la inicial y así sucesivamente hasta el final. Es de notar que estos ciclos se corresponden aproximadamente con la longitud de onda. La distribución vertical de las velocidades tiene una forma particular, la cual muestra un valor mínimo en el fondo del canal y va aumentando hasta alcanzar el máximo en la superficie libre del agua. Esta forma se conserva a lo largo del canal, mientras que no haya un cambio de fondo. En el momento en que ocurre el cambio de fondo, los diagramas sufren una alteración, mostrando que dentro del medio poroso la velocidad es muy baja y se presenta una discontinuidad en la línea de transición del fondo poroso al agua. Una vez en el agua, se tiene la misma distribución que antes. Se puede observar también que la velocidad máxima ocurre en el tramo donde ya empezó el talud de la playa, la mayoría de los casos presenta el máximo cerca de la zona de rotura, por lo que se puede suponer que las mayores velocidades se presentan justamente donde la ola rompe, y esto tiene sentido ya que se sabe que la rotura de la ola provoca una gran liberación de energía. En las graficas también se observa que después de que se alcanza el máximo de velocidad se registran velocidades

muy pequeñas o iguales a cero, por lo que se puede decir que el programa no registra valores significativos después de que la ola rompe.

Ahora se presentan la **Figura VI.11**, **Figura VI.12**, **Figura VI.13** y **Figura VI.14**, que muestran las gráficas correspondientes a la componente vertical de la velocidad para las cuatro corridas de 1 a 4 s respectivamente.

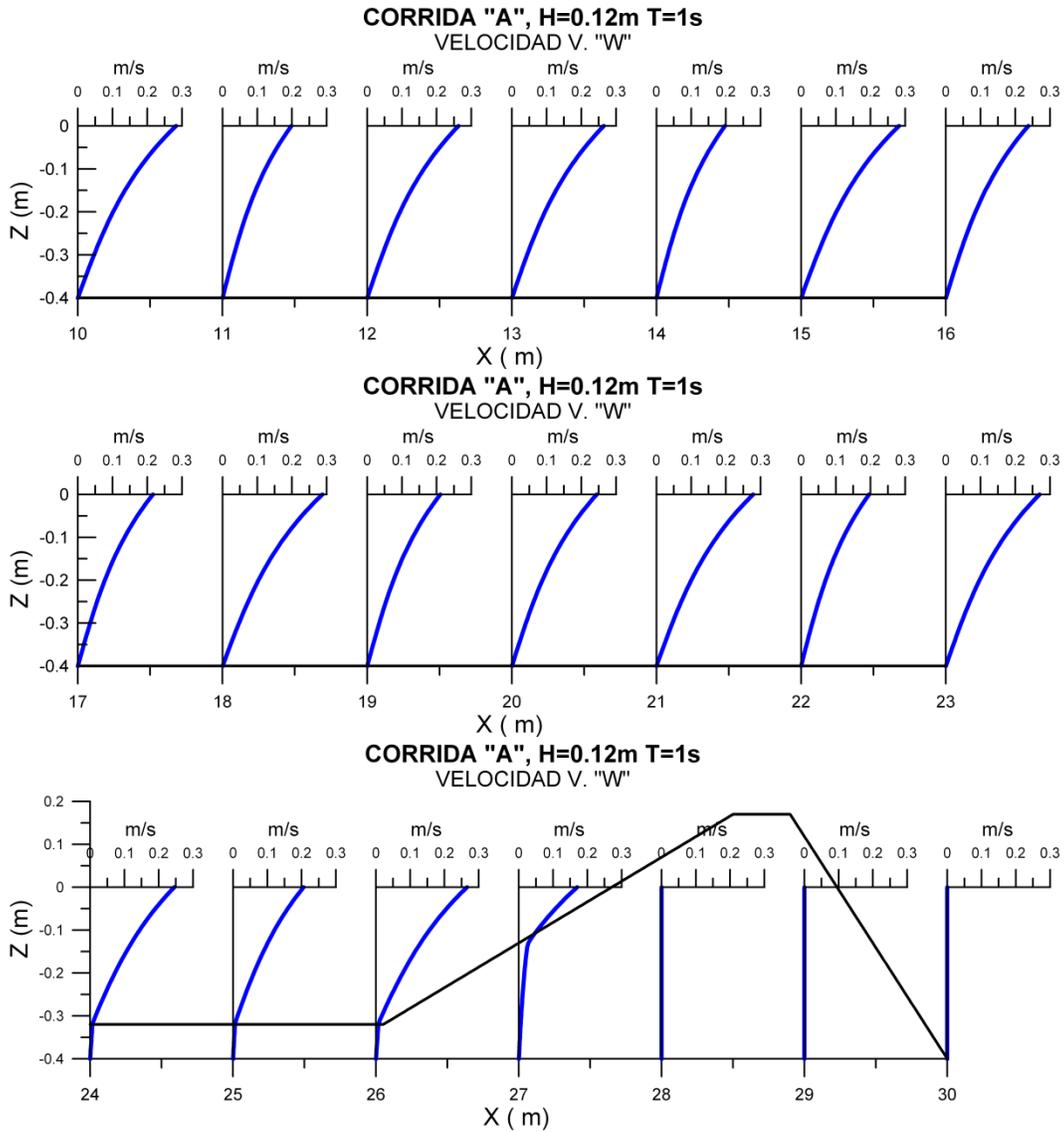


Figura VI.11 Diagramas de velocidad vertical de la corrida "A", T=1s.

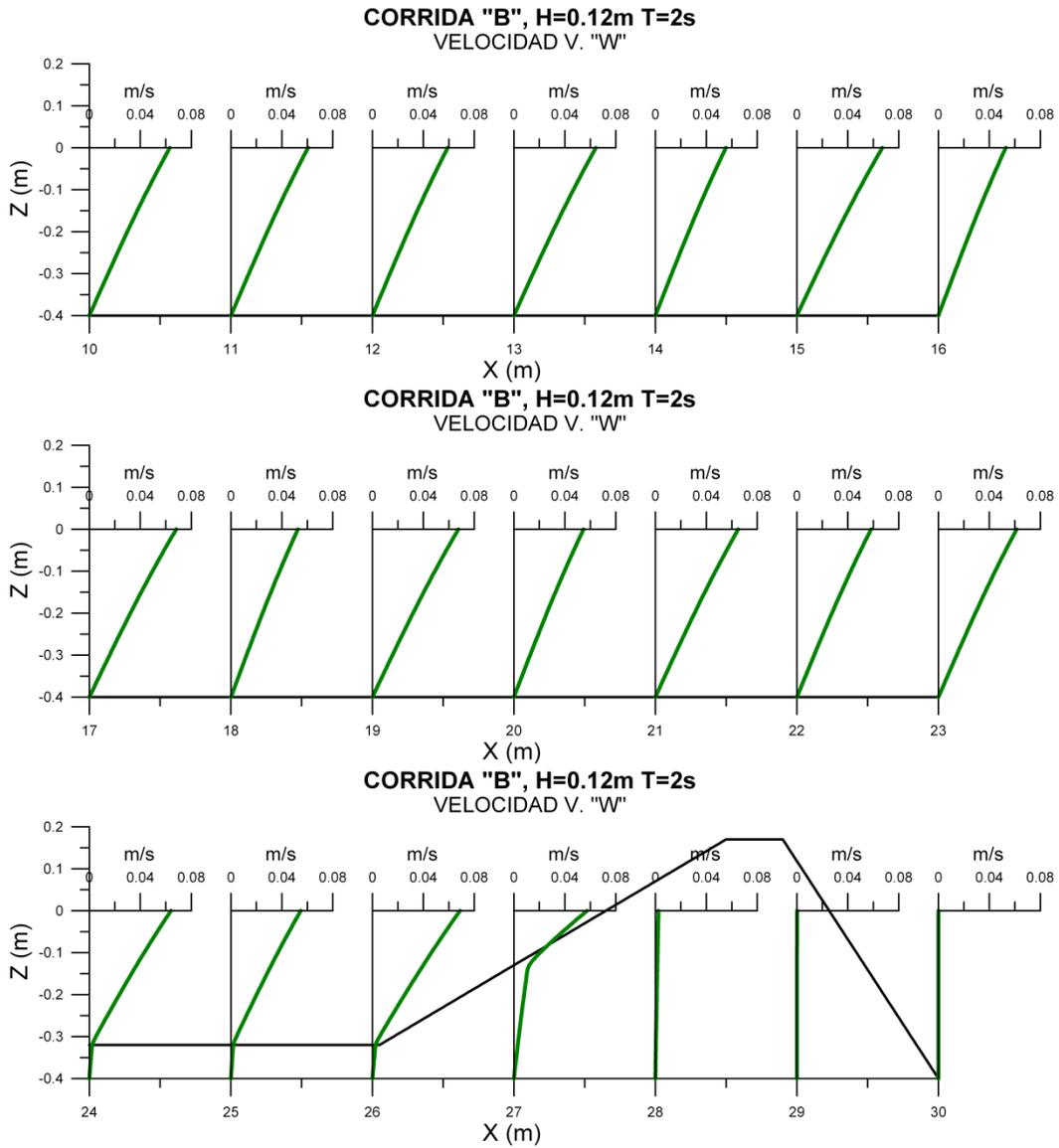


Figura VI.12 Diagramas de velocidad vertical de la corrida "B", T=2s.

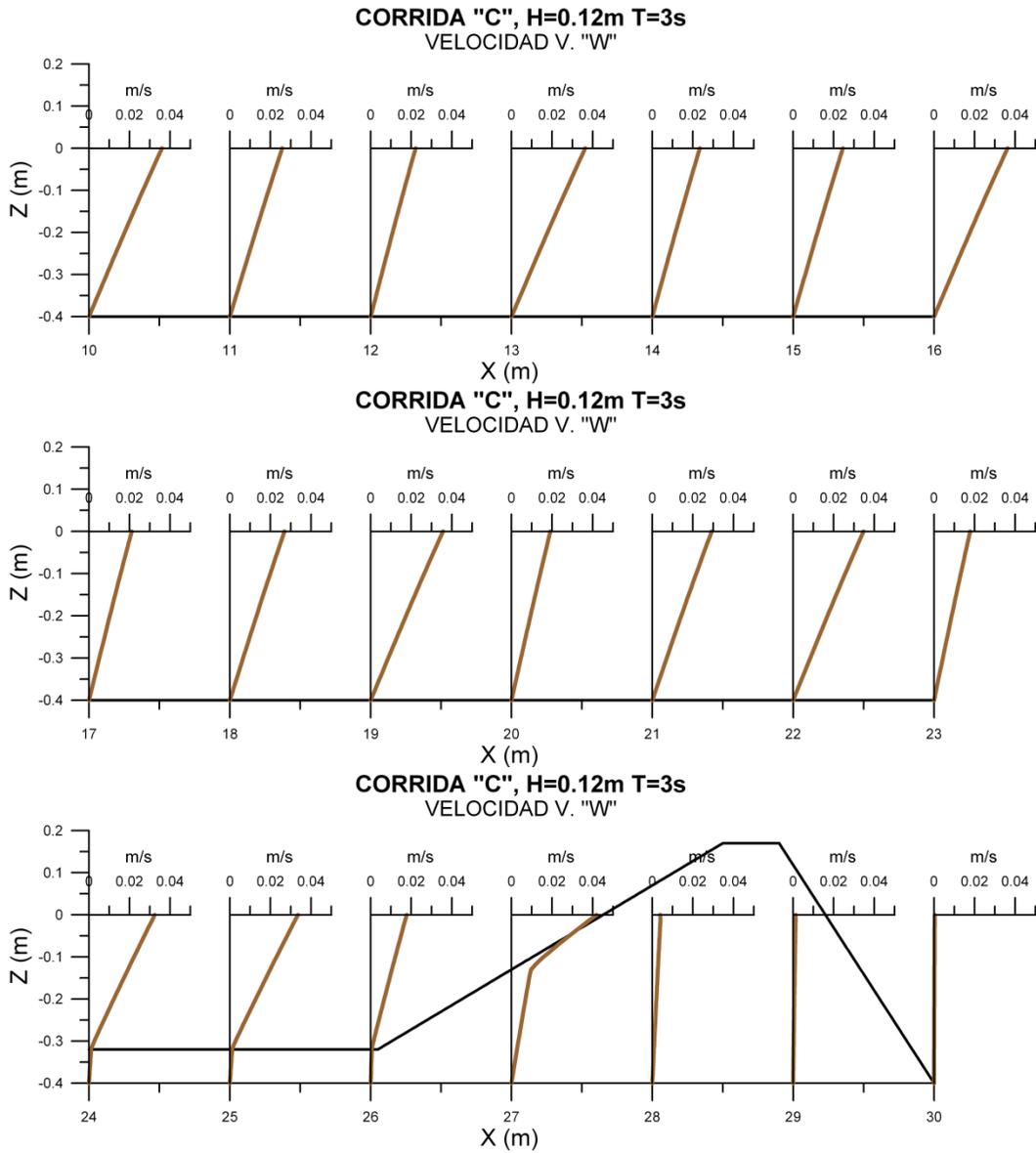


Figura VI.13 Diagramas de velocidad vertical de la corrida "C", T=3s.

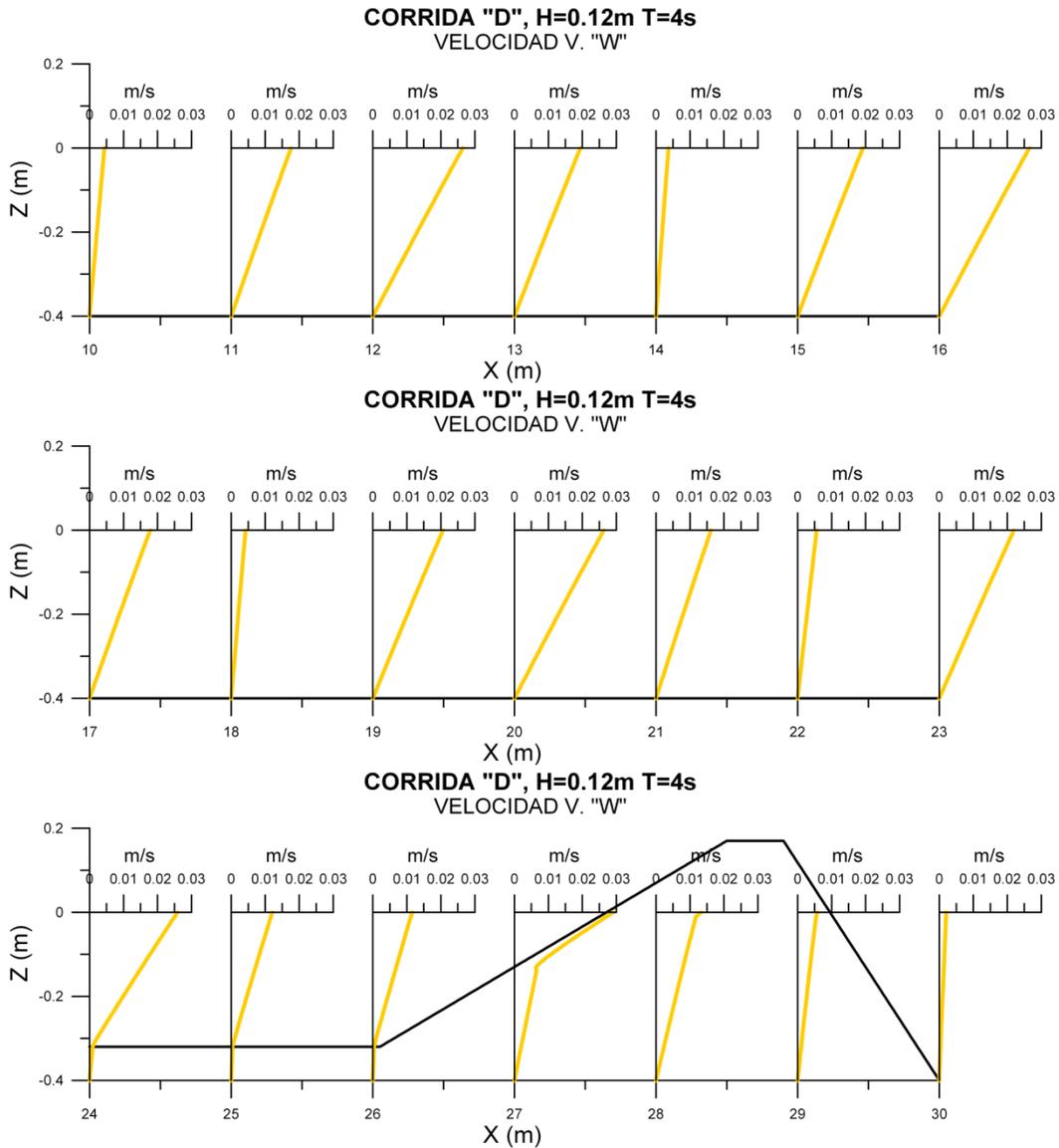


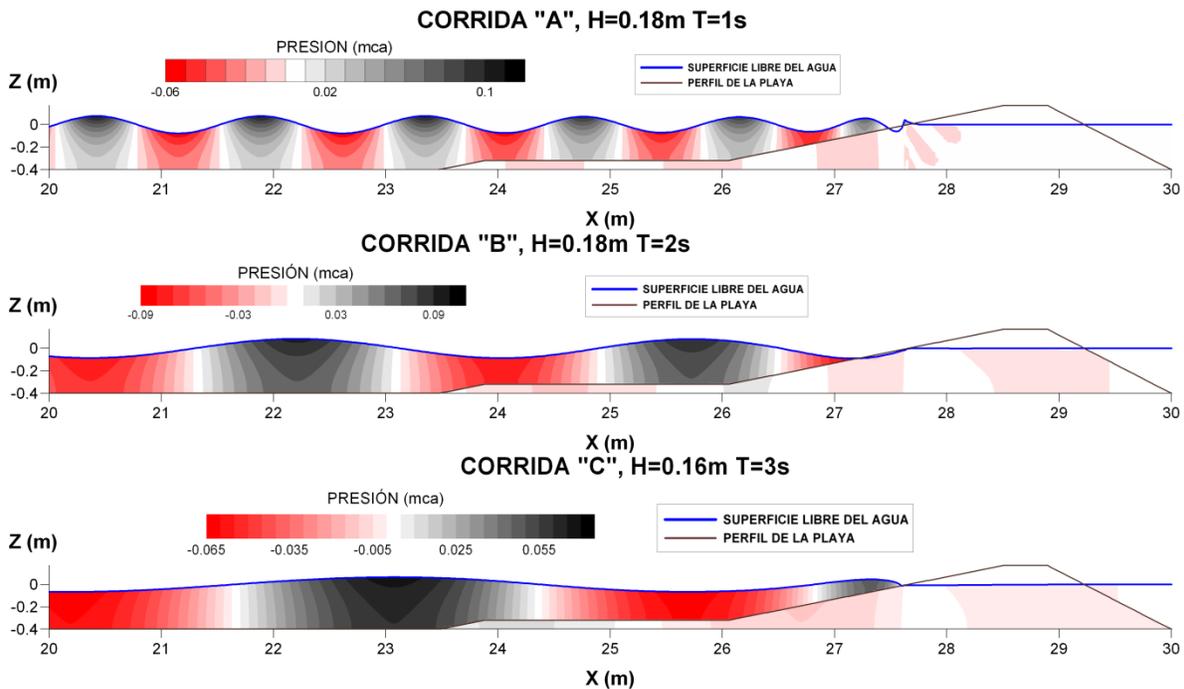
Figura VI.14 Diagramas de velocidad vertical de la corrida "D", T=4s.

Se observa, en general, un comportamiento muy parecido al de las velocidades horizontales, incluso en la **Figura VI.14** es más notoria la presencia de ciclos. La forma de la distribución vertical es similar a la de la velocidad horizontal y se presentan los mismos cambios cuando se entra al medio poroso. En la corrida "D" se observan valores después de la rotura, lo cual indica que entre mayor sea el periodo, se presenta una mayor tendencia a la regeneración de la onda después de la rotura.

La tercer y cuarta parte de este análisis numérico corresponde a una serie de mapas, en los cuales se observa la distribución de las presiones y las velocidades entre las posiciones 20 y 30 m. Para estos mapas, la información se obtiene de archivos creados por el programa MSP. Los principales son dos archivos (mapas), uno que contiene los datos de la magnitud de las presiones y el otro la magnitud de las velocidades, los otros dos archivos son de datos, uno contiene el perfil de la superficie libre del agua y el otro descompone la velocidad en componentes e incluye el ángulo del vector. En total son cuatro archivos, que solamente corresponden a un instante, y para poder hacer un estudio más extenso de cómo varían las condiciones con el paso del tiempo, el programa crea 30 instantes, cada uno de los cuales tiene sus cuatro archivos relacionados. En esta tesis se presentan 3 instantes, el inicial, uno medio y el final. Los demás puntos pueden ser fácilmente inferidos y el comportamiento no varía significativamente ya que el programa está basado en teoría lineal y por tanto los resultados son de tipo sinusoidal.

A continuación se presentan solo los resultados obtenidos para el momento inicial (**Figura VI.15**) y en el Anexo B se encuentran los resultados del momento medio y final.

Los primeros que se analizan son los mapas de presiones, mostrados a continuación; los cuales se graficaron junto con la superficie libre del agua.



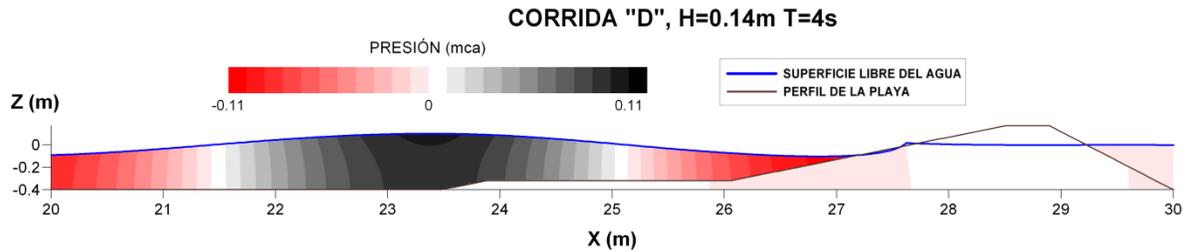


Figura VI.15 Mapas de presiones para las ejecuciones A, B, C y D

De los mapas de presiones, se puede notar que las presiones máximas se presentan en las crestas de la superficie libre, mientras que las mínimas se presentan en los valles. Esto lleva a que los puntos de inflexión son los puntos en los que el valor de la presión es cero. Debido a que en los mapas aparece la superficie libre, es más fácil observar la longitud de onda que se presenta en cada caso y cómo varía con respecto al periodo.

Como se hizo un análisis temporal graficando mapas de tres puntos de cada corrida, se puede apreciar la evolución de la playa, en el sentido de que el punto de rotura va variando un poco con respecto al punto anterior, tal y como pasa en la realidad, es decir, no todas las olas rompen en un mismo punto.

Comparando los distintos casos, la magnitud de la presión no sufre un cambio significativo cuando cambia el periodo, por lo que se puede inferir una débil correlación. Otra característica que es importante señalar, es que en los mapas se puede observar que el programa registra datos de presión dentro de la playa, los cuales son de pequeñas magnitudes, sin embargo, esto se relaciona con el estudio de análisis puntual que se realizará dentro de la playa en el siguiente apartado.

A continuación (**Figura VI.16**, **Figura VI.17**, **Figura VI.18** y **Figura VI.19**) se presentan los mapas de velocidad, estos mapas están compuestos por la magnitud en una escala de colores y sobre ésta se dibujaron los vectores de la velocidad, los cuales están representados por flechas, de magnitud proporcional a la magnitud de la velocidad y además están orientadas en la dirección del vector velocidad. Adicionalmente se dibujó la superficie libre del agua. También se presentan los resultados del momento inicial en dos graficas, una de todo el dominio de cálculo y un acercamiento a la zona de playa.

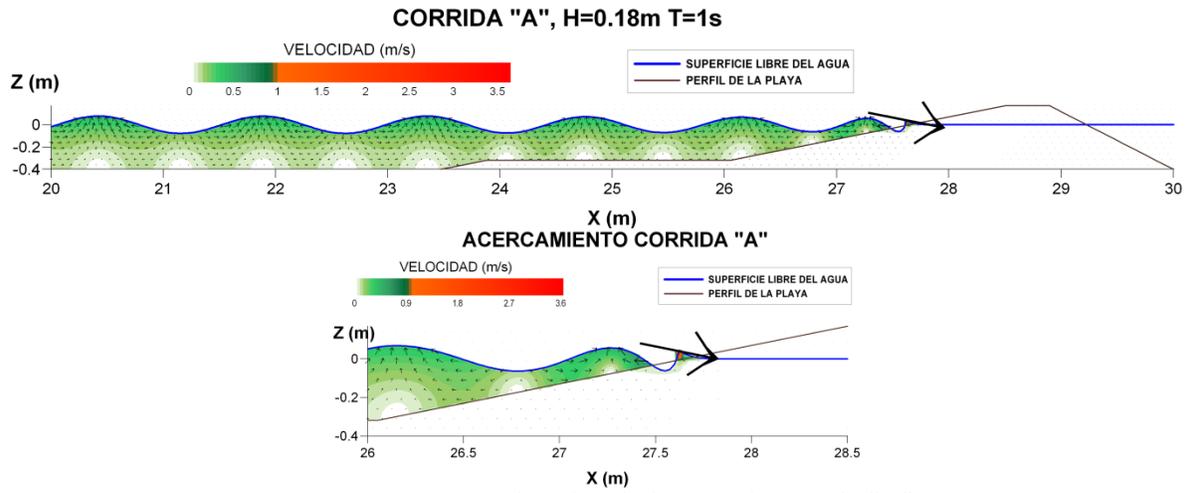


Figura VI.16 Mapa de velocidades para la corrida "A"

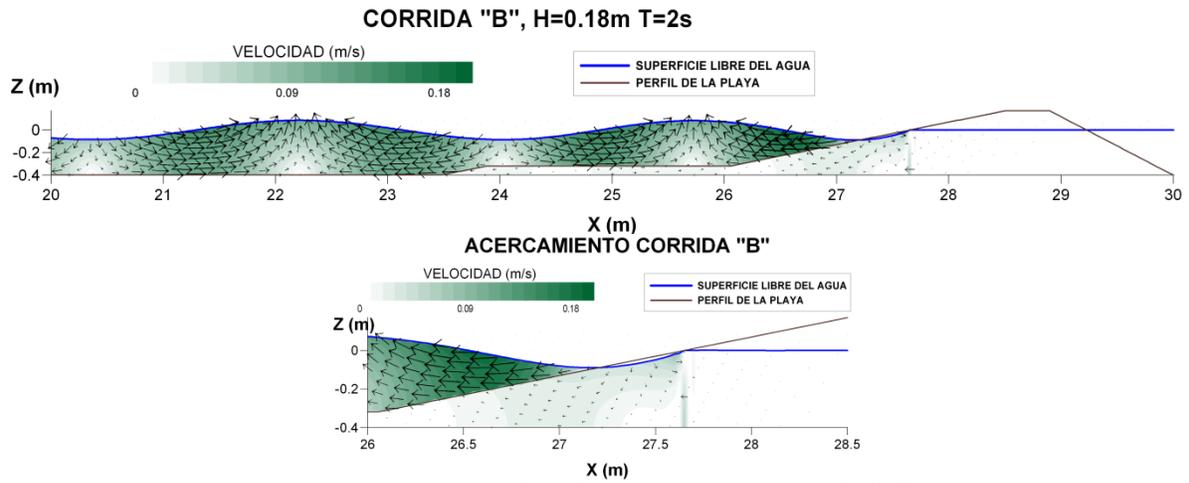
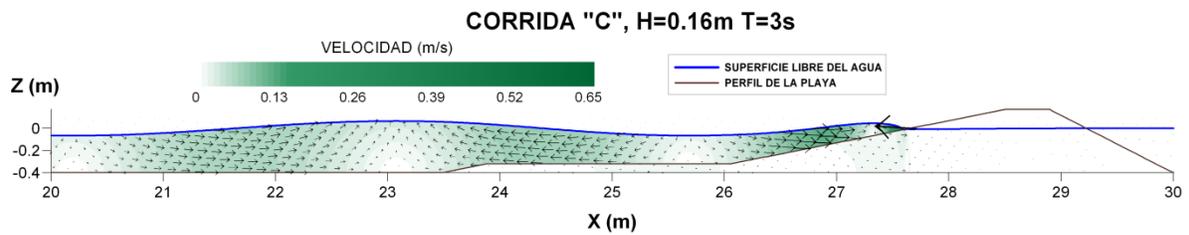


Figura VI.17 Mapa de velocidades para la corrida "B"



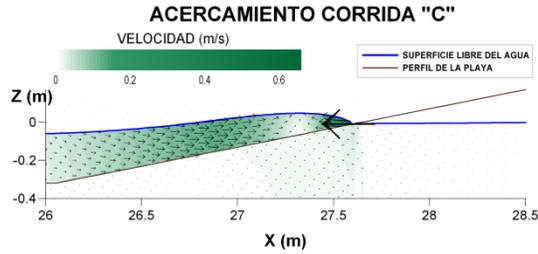


Figura VI.18 Mapa de velocidades para la corrida "C"

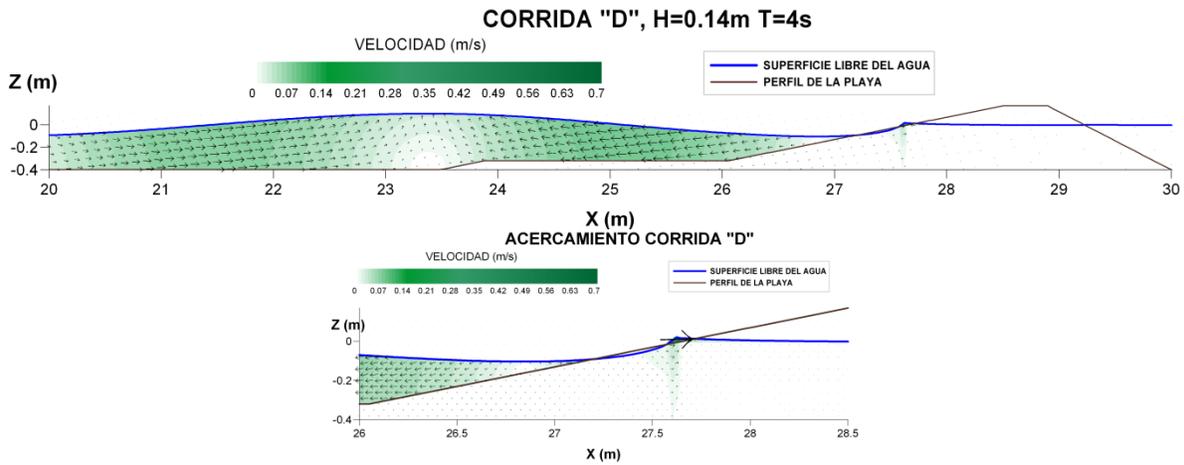


Figura VI.19 Mapa de velocidades para la corrida "D"

De la observación de los mapas, se puede establecer que las velocidades mínimas se encuentran al fondo del canal (playa) y se ubican en los puntos por debajo de las crestas y los valles.

Para la corrida "A", las velocidades máximas se registran en la superficie libre del agua, en las crestas; mientras que en los otros casos las velocidades de mayor magnitud se ubican en la zona intermedia, en la zona entre los valles y las crestas. La dirección del vector velocidad sigue una trayectoria circular que parte de los valles y se dirige a las crestas (velocidad orbital). Esto se puede explicar mediante la definición física de velocidad (distancia sobre tiempo). De esta observación se tiene que cuando la partícula se desplaza hacia arriba en un instante, la velocidad del agua está dirigida también hacia arriba, dando como resultado la creación de una cresta y cuando va hacia abajo genera un valle.

Los momentos que genera el programa se interpretan como instantes, por lo que se pueden relacionar con los fenómenos que ocurren en la playa. Se sabe que una ola se aproxima a la costa y cuando llega a un punto donde la ola es más grande que 0.7-0.8 veces la profundidad media de agua, dicha ola rompe, ocasionando un

ascenso de la lámina de agua que llega hasta cierto punto de la playa, y después se produce el descenso, el cual choca con la siguiente ola incidente y empieza el ciclo de nuevo. A los momentos generados por el programa se les puede relacionar con este proceso cíclico, por lo que se tienen imágenes de cuando la ola se dirige a la playa, de cuando rompe, de cuando va en descenso el agua y así sucesivamente. Estos fenómenos se presentan en los mapas, el programa arroja gráficas que representan el momento justo antes de que la ola rompa, el momento justo después de que la ola rompe y por supuesto se llega a tener justo en momento en que la ola rompe. Este fenómeno se puede identificar en el mapa gracias a la dirección de la velocidad en la zona de rotura, se encontraron mapas en los cuales existen velocidades de gran magnitud en ambas direcciones (hacia la playa y hacia aguas adentro), en estos casos se observa que la magnitud de la velocidad dirigida hacia el mar es más pequeña que la magnitud de la velocidad dirigida hacia la playa. Esto tiene relación con la energía que se libera en la rotura, es decir, si la velocidad incidente fuera de igual magnitud que la reflejada, se estaría reflejando toda la energía, pero se observa una disminución de velocidad, en otras palabras, la rotura de la ola libera energía que se puede verificar como una disminución en la velocidad del agua.

Comparando los mapas de las diferentes corridas, se puede observar que en el caso "A", donde  $H=0.18\text{m}$  y  $T=1\text{s}$ , es en el que se presentan las máximas velocidades. Se considera que una de las causas de este fenómeno es que la longitud de onda es la más pequeña del experimento y por lo tanto es más fácil que la onda incidente entre en fase con la reflejada, creando una sobre-elevación que puede causar un aumento en la velocidad y posteriormente una rotura más abrupta, liberando una mayor cantidad de energía. Con esta analogía se puede decir que la velocidad depende de la longitud de onda, que a su vez depende del periodo, en otras palabras, la velocidad de las partículas es función del periodo.

### *VI.3 Distribución de la presión al interior de la playa*

Al interior de la playa se colocaron nueve sensores de presión, de los cuales se obtuvieron los valores máximos y mínimos promedios de la presión debida a la acción del oleaje. Una vez calculados dichos valores, se eligieron sensores representativos para evaluar la distribución de la presión en el eje horizontal (X) y en el eje vertical (Z). La **Figura VI.20** y la **Figura VI.21** presentan esquemas en los que se indican los sensores con los que se intenta describir la distribución de las presiones.

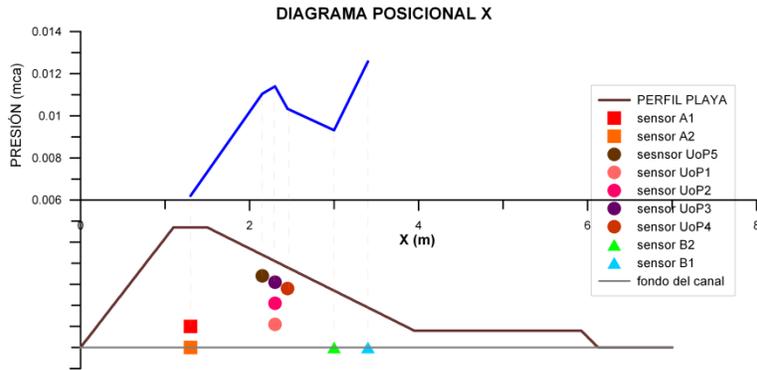


Figura VI.20 Diagrama posicional con respecto a X

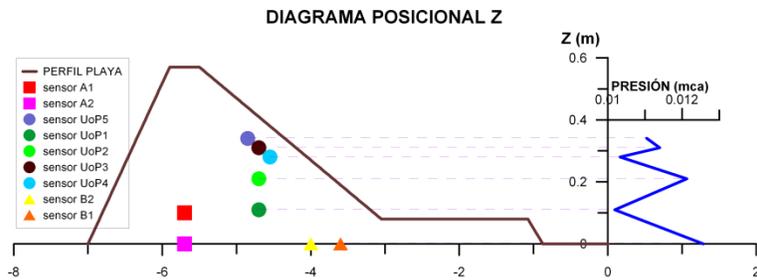


Figura VI.21 Diagrama posicional con respecto a Z

Se dibujaron cuatro gráficas del análisis de presiones para cada ensayo, las cuales ilustran la presión máxima con respecto a X y con respecto a Z y las presiones mínimas con respecto a X y a Z. Al contar con un total de 17 ensayos, se tienen 68 gráficas para el perfil inicial y 68 para el perfil estable. El gran total es de 136 graficas, por ello, en esta sección se presenta solo un ensayo por cada periodo y el resto de las gráficas se encuentra en el Anexo B.

Para realizar estos diagramas se colocó el origen de los ejes de referencia en el punto donde inicia la zona protegida de la playa; como se muestra en la **Figura VI.22**. En dicha figura también se muestra la colocación de los sensores dentro de los ejes de referencia.

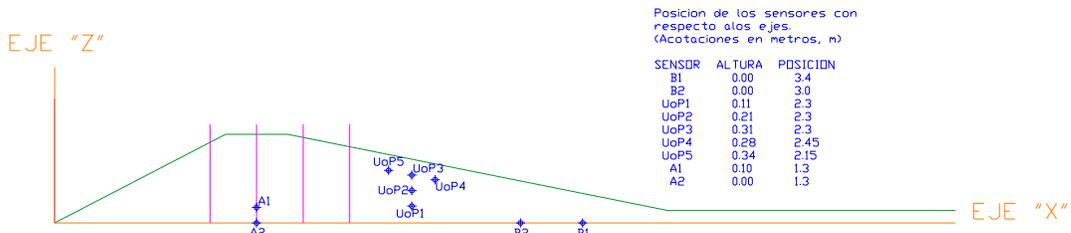


Figura VI.22 Ejes de referencia de la playa y ubicación de los sensores

Los ensayos elegidos para mostrar en este apartado son los que se indican en la **Tabla VI-7**

Tabla VI-7 Ensayos que se presentan en el apartado VI.3

ENSAYO	H (m)	T (s)
2	0.12	1
7	0.12	2
12	0.12	3
16	0.12	4

Primero se presentan las gráficas correspondientes a la presión máxima relacionada con la posición X (**Figura VI.23** ,**Figura VI.24**, **Figura VI.25** y **Figura VI.26**).

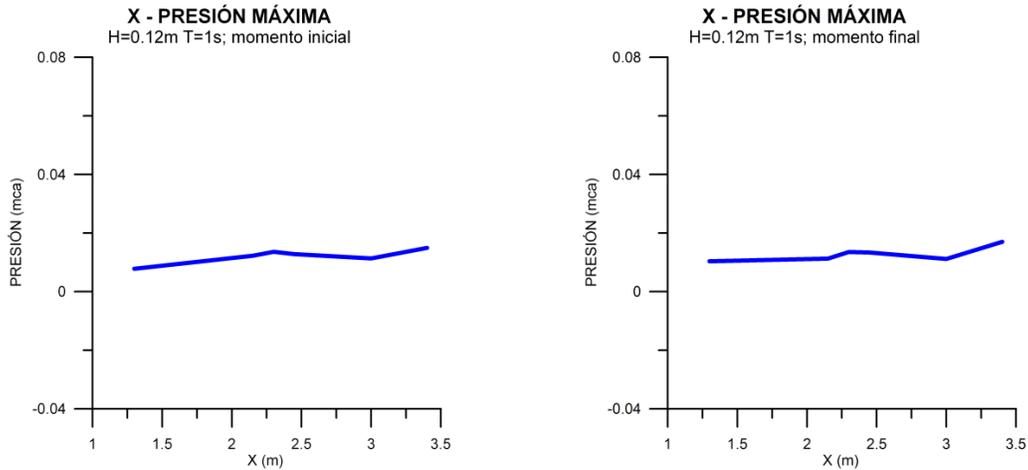


Figura VI.23 Graficas X-Pmáx correspondientes a T=1s

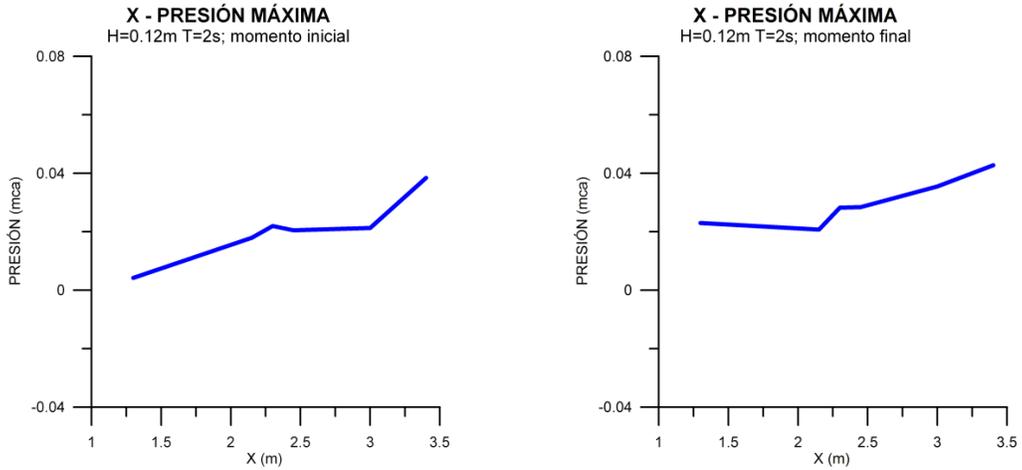


Figura VI.24 Gráficas X-Pmáx correspondientes a T=2s

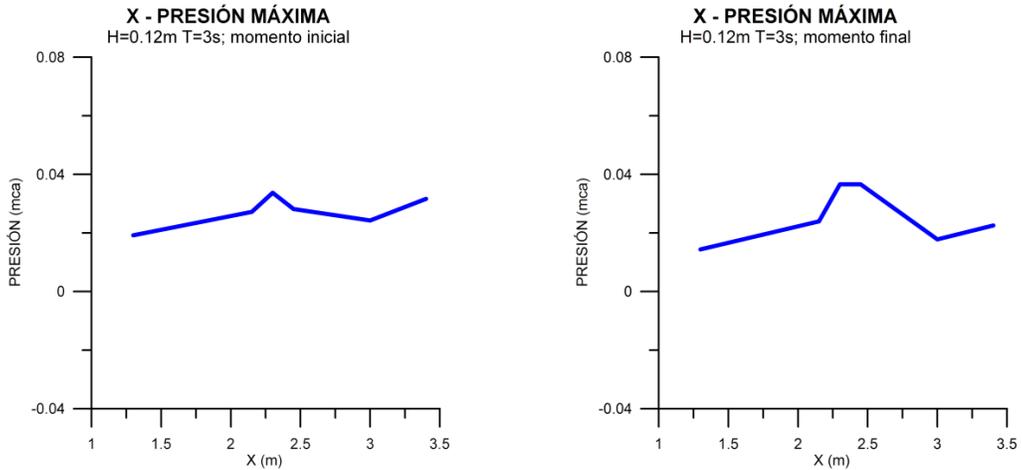


Figura VI.25 Gráficas X-Pmáx correspondientes a T=3s

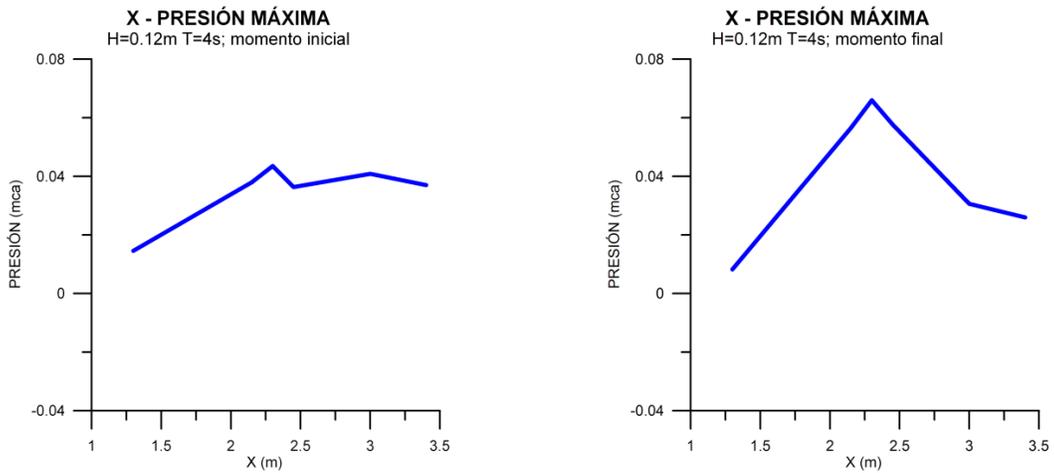


Figura VI.26 Gráficas X-Pmáx correspondientes a T=4s

El análisis completo de las graficas correspondientes a la presión máxima con respecto a  $X$ , se puede dividir por periodos y después se hacer una comparación entre periodos.

En la gráfica correspondiente al periodo de 1 s, **Figura VI.23**, se puede observar que la distribución de las presiones no cambia significativamente para las distintas alturas de ola. La presión máxima se ubica generalmente en la zona más cercana al mar, es decir, en la zona donde inicia la zona expuesta de la playa, donde se ubica el sensor B1.

Para el periodo de 2 s, **Figura VI.24**, se observa un aumento en la presión máxima conforme se incrementa la altura de ola, lo cual hace que la forma de la distribución varíe con respecto a los ensayos de  $T=1$  s. Es importante señalar que los valores de presión cercanos la zona seca de la playa son del orden de los valores de los ensayos para con periodo de 1 s, es decir, solamente tiene un aumento significativo en el valor máximo.

Para el periodo  $T=3$  s, **Figura VI.25**, la forma de la distribución cambia respecto a los periodos anteriores, en estos ensayos se registran variaciones en la forma de la distribución para cada altura de ola. En algunos casos las presiones máximas se registran en dos puntos, en los más cercanos a la zona protegida y en los más cercanos a la zona expuesta, es decir, en los extremos de la playa y en otros casos las presiones máximas se registran en la zona central.

Para los ensayos con  $T=4$ s, **Figura VI.26**, las distribuciones son parecidas y solamente se registra un aumento de magnitud a medida que aumenta la altura de ola.

Comparando las presiones para los perfiles inicial y estable, para los periodos más pequeños (1 y 2 s), la forma de la distribución de presiones no cambia significativamente y en algunos casos se registra un aumento en la magnitud de las presiones, pero relativamente pequeña.

Cuando el periodo es de 3 s, se observa que en los casos donde la altura de ola es pequeña (0.10 y 0.12 m) la distribución de presiones en el perfil estable es muy similar a la del perfil inicial, con lo que se puede decir que la deformación de la playa no afecta la forma de la distribución de las presiones cuando la altura de ola tiene valores pequeños. En cuanto a los otros dos ensayos cuya altura de ola es mayor (0.14 y 0.16 m) se observa que la distribución de presiones cambia drásticamente entre los perfiles inicial y final, al igual que las magnitudes. Es decir, en el caso de  $T=3$  s, cuando se tienen grandes valores de altura de ola, se observa

que la deformación de la playa provoca un gran cambio en la distribución de presiones, tanto en forma como en magnitudes, esto da como resultado un cambio en la ubicación de las zonas críticas de la playa.

En el caso del periodo de 4 s, se observa que la deformación del perfil de la playa no afecta la forma de la distribución de las presiones, pero sí ocasiona un aumento en las magnitudes de las presiones.

A continuación (**Figura VI.27**, **Figura VI.28**, **Figura VI.29** y **Figura VI.30**) se presentan las gráficas correspondientes a las presiones mínimas con respecto a X.

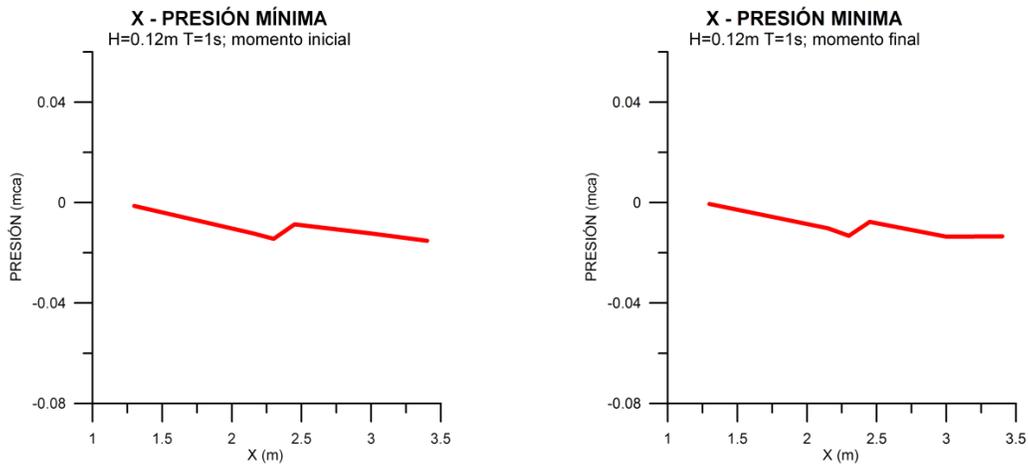


Figura VI.27 Gráficas X-Pmin correspondientes a T=1s

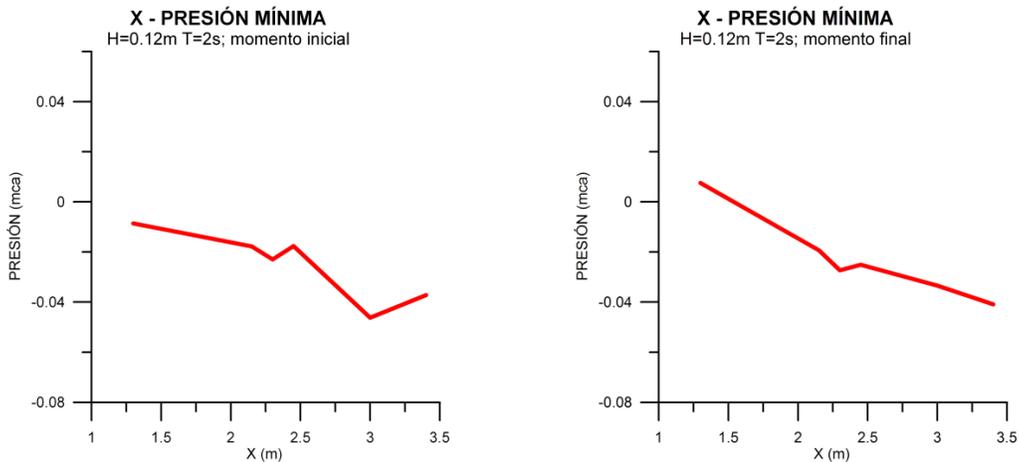


Figura VI.28 Gráficas X-Pmin correspondientes a T=2s

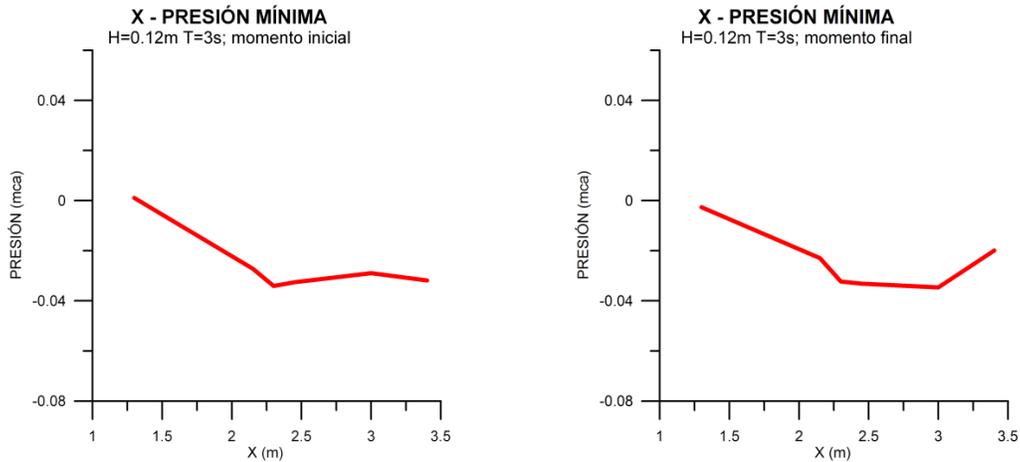


Figura VI.29 Gráficas X-Pmin correspondientes a T=3s

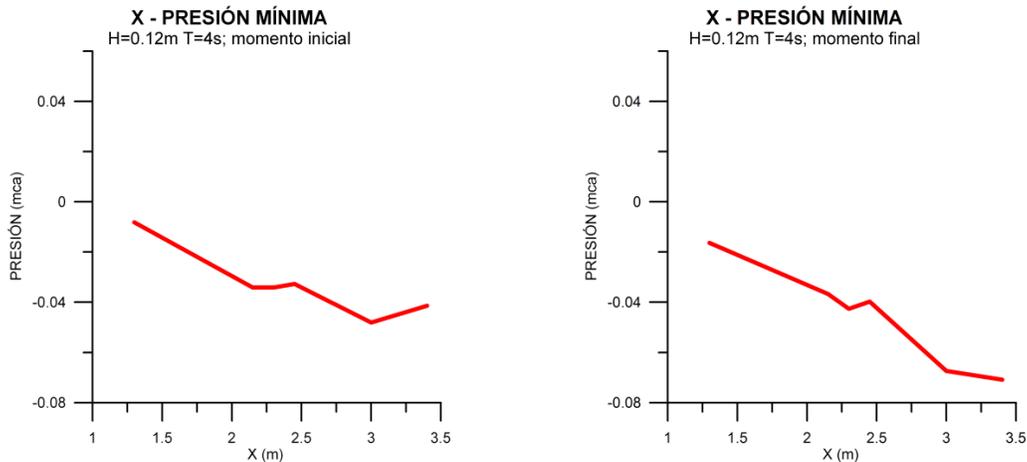


Figura VI.30 Gráficas X-Pmin correspondientes a T=4s

De las gráficas de presiones mínimas, se concluye que el comportamiento es muy similar al de las presiones máximas, en los ensayos con periodos de 1 y 2 s, los cambios solo son en magnitud, disminuyendo los mínimos. Mientras que en los ensayos con periodo de 3 s se observa que la deformación de la playa genera grandes cambios cuando la altura de ola es grande. En los de periodo de 4 s, la deformación de la playa hace que las presiones mínimas disminuyan más, pero conservando la misma forma de distribución.

Es importante señalar que, en general, el punto que presenta los mínimos extremos, es el mismo punto que presenta los máximos extremos, es decir, en la mayoría de los casos el punto de mayor presión también es el punto que registra la menor presión, dicho punto es el correspondiente al sensor B1.

Una vez realizado el análisis con respecto a  $X$ , se procede a hacerlo con respecto a  $Z$ , por lo que en la **Figura VI.31**, **Figura VI.32**, **Figura VI.33** y **Figura VI.34** se muestran los diagramas para las presiones máximas y mínimas con respecto a  $Z$ .

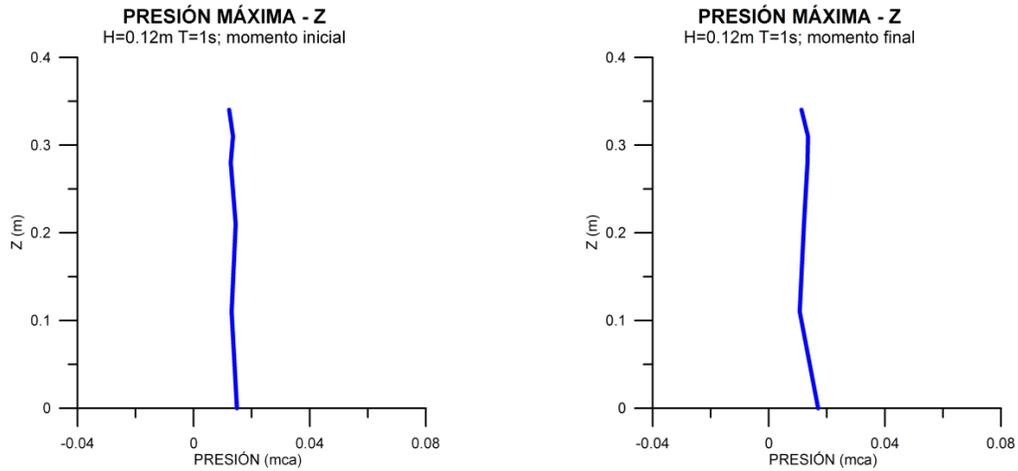


Figura VI.31 Gráficas  $P_{máx}$ - $Z$  correspondientes a  $T=1s$

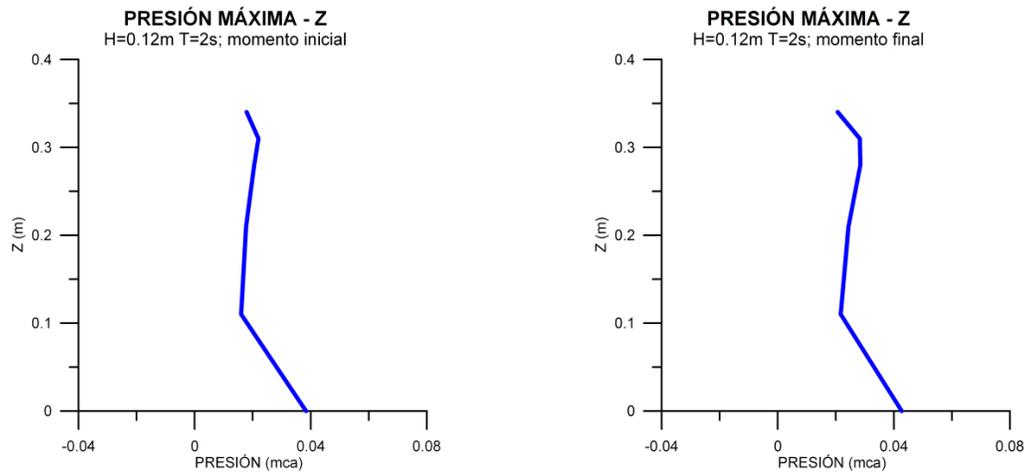


Figura VI.32 Gráficas  $P_{máx}$ - $Z$  correspondientes a  $T=2s$

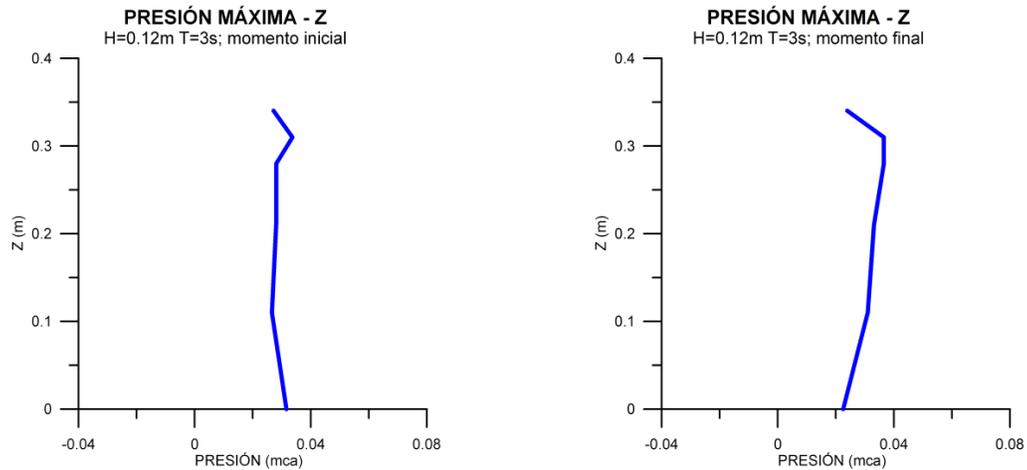


Figura VI.33 Gráficas Pmáx-Z correspondientes a T=3s

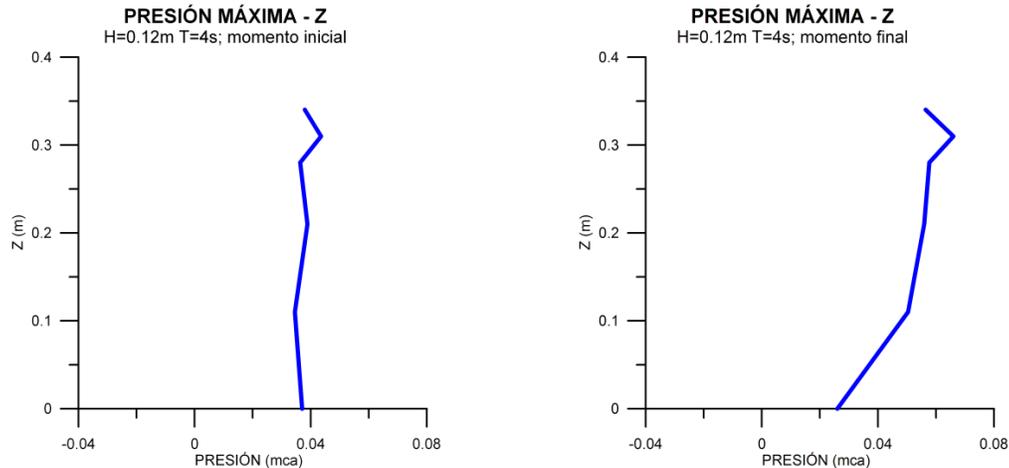


Figura VI.34 Gráficas Pmáx-Z correspondientes a T=4s

En el caso de las presiones máximas con respecto a Z; en los ensayos con periodo  $T=1$  s, se observa que tanto en el perfil inicial como en el estable, la distribución de la presión no varía considerablemente en forma, mientras que la magnitud se va incrementado ligeramente conforme aumenta la altura de ola. Dicho incremento se presenta en la parte más baja, que corresponde al sensor B1 ubicado en el fondo del canal. Haciendo comparaciones entre la condición para ambos perfiles, no se distinguen diferencias significativas en la forma de la distribución, pero sí se registran cambios de magnitud, esto indica que la presión aumenta un poco debido al cambio de batimetría.

Para los ensayos con periodo de 2 s, se presenta, tanto en el perfil inicial como en el estable, un incremento de magnitud en el punto de mayor presión, conforme va aumentando la altura de ola. Comparando ambos perfiles, se observa que la

deformación de la playa produce un pequeño incremento en la magnitud de las presiones. Con esto se puede decir que en los ensayos de  $T=2$  s, es muy evidente que la presión cambia en función de la altura de ola y del perfil de la playa.

Para los ensayos con  $T=3$  s, se observan cambios en la distribución de presiones, tanto en la forma como en la magnitud. Estos cambios son muy evidentes, debido a que el sensor B1, que es el que registra las mayores presiones en los ensayos con periodo de 1 y 2 s, no es el que presenta la máxima presión, al contrario, en algunos casos es el de menor presión con respecto a los otros sensores. Estos resultados son parecidos a los obtenidos en el análisis con respecto a X, donde es evidente que cuando el periodo es de 3 s, la distribución de presiones varía mucho en función de la forma del perfil de playa y de la altura de ola.

Para los ensayos con periodo de 4 s la distribución de presiones presenta menos variaciones comparada con la de los ensayos para  $T=3$  s. Se observa que al inicio la presión está distribuida casi uniformemente en todos los sensores, pero al aumentar la altura de ola, se presentan incrementos en los extremos de la distribución, es decir, en los sensores ubicados en los puntos más altos y en el fondo del canal. Lo anterior se observa en el perfil inicial; mientras que en el perfil estable el incremento se ve reflejado únicamente en los puntos más altos. Esto indica que al modificarse el perfil de la playa, los puntos críticos se mueven hacia arriba.

Comparando los ensayos de diferente periodo, se observa que conforme aumenta el periodo se registran incrementos en la magnitud de las presiones y también se presentan cambios en la forma de la distribución.

A continuación se presentan las gráficas de presión mínima respecto a Z (**Figura VI.35, Figura VI.36, Figura VI.37 y Figura VI.38**).

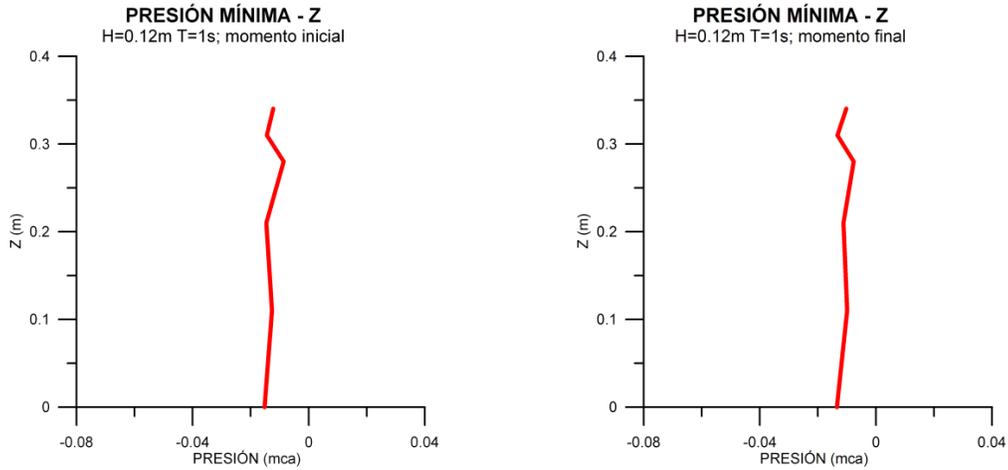


Figura VI.35 Gráficas Pmin-Z correspondientes a T=1s

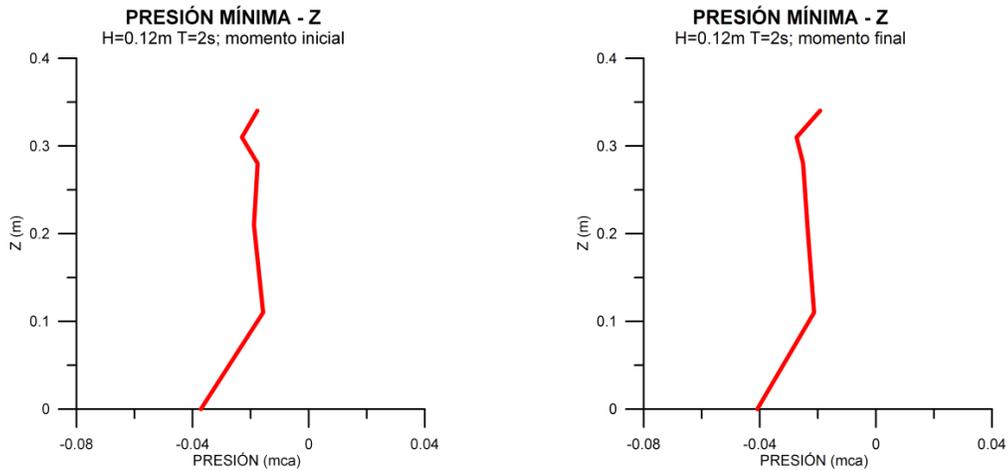


Figura VI.36 Gráficas Pmin-Z correspondientes a T=2s

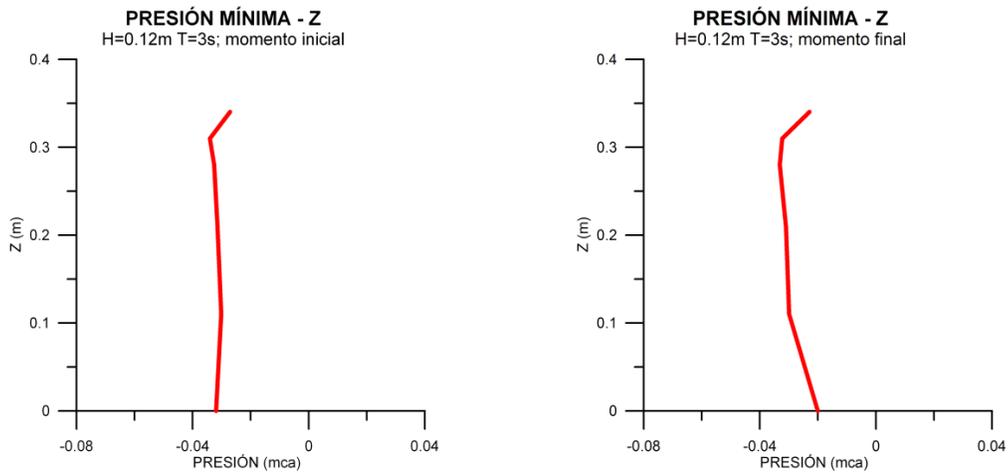


Figura VI.37 Gráficas Pmin-Z correspondientes a T=3s

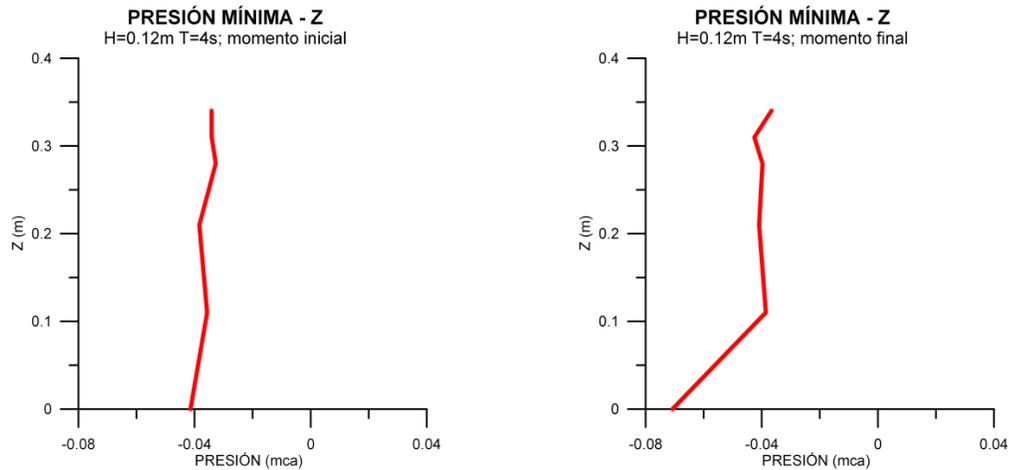


Figura VI.38 Gráficas Pmin-Z correspondientes a  $T=4s$

El comportamiento general de las presiones mínimas con respecto a  $Z$  es el mismo que el de las presiones máximas, sin embargo, se presentan algunos cambios importantes.

En los ensayos con periodo de 1 y 2 s, se observa una disminución de los valores, es decir, los ensayos con  $T=2$  s, se registran presiones menores que en los ensayos con  $T=1$  s. En ambos casos la presión mínima se registra en el fondo del canal, en el sensor B1.

Por lo que toca a los ensayos con  $T=3$  s, se presenta el mismo comportamiento variable que en las presiones máximas. Las distribuciones cambian tanto en magnitud como en forma en cada prueba. Es importante señalar que en las presiones mínimas con respecto a  $Z$ , los puntos que registran la menor presión no se ubican al fondo del canal, ni tampoco son los más elevados. En este caso las presiones mínimas se registran en la zona central o zona de altura media, lo cual desplaza la zona crítica de presiones al centro, con respecto a la altura  $Z$ .

En los ensayos con  $T=4$  s, la distribución es similar a la de los ensayos con periodo de 1 y 2 s, se presenta una disminución notable cuando se tiene el perfil estable respecto de la magnitud con el perfil inicial. Es decir, la deformación de la playa ocasiona una disminución en la magnitud de las presiones y en este caso la mínima presión la registra el sensor B1 ubicado al fondo del canal.

En todos los casos, se observó que los ensayos con periodo de 3 s son los que arrojan resultados que más varían notablemente entre si. Este fenómeno

posiblemente es causado porque este periodo corresponde a una condición de transición entre un oleaje de tipo lineal y uno de tipo cnoidal.

También es importante mencionar que en el ensayo 14,  $H=0.16$  m y  $T=3$  s, es donde se registran las presiones más extremas de todo el experimento, tanto para el perfil inicial como para el estable, lo cual responde a que es este el caso de oleaje más energético.

A continuación se presenta una tabla resumen (**Tabla VI-8**) de los sensores que registraron los máximos y mínimos valores promedio de presión en cada una de las condiciones de oleaje.

Tabla VI-8 Sensores que registraron las presiones críticas

ENSAYO	SENSOR CRÍTICO PERFIL INICIAL				SENSOR CRÍTICO PERFIL ESTABLE			
	MÁXIMAS		MÍNIMAS		MÁXIMAS		MÍNIMAS	
	X	Z	X	Z	X	Z	X	Z
1	B1	UoP2	UoP3	UoP2	B1	B1	UoP3	UoP3
2	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B2	B1
3	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1
4	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1
5	B1	B1	B1	B1	A1	B1	B1	B1
6	B2	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1
7	B1	B1	B2	B1	B1	B1	B1	B1
8	B2	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1
9	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1
10	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1	B1
11	B1	B1	UoP3	UoP3	B1	B1	UoP3	UoP3
12	UoP3	UoP3	UoP3	UoP3	UoP4	UoP4	B2	UoP4
13	UoP3	UoP3	B2	B1	B1	B1	UoP4	UoP4
14	A1	B1	UoP3	UoP3	UoP3	UoP3	B2	B1

15	UoP3	UoP3	UoP3	UoP2	UoP3	UoP3	B1	B1
16	UoP3	UoP3	B2	B1	UoP3	UoP3	B1	B1
17	B2	B1	UoP3	UoP3	UoP3	UoP3	UoP3	UoP3

En la **Tabla VI-8** se comprueba que en la mayoría de los casos las presiones críticas las registra el sensor B1. Con el fin de identificar las zonas críticas dentro de la playa, se procede a graficar los puntos críticos, en este caso a ubicar los sensores relacionados dentro de la playa.

En la **Tabla VI-9** se presenta un resumen de los sensores y se muestra su posición con respecto a sistema de referencia mostrado en la **Figura VI.22**.

Tabla VI-9 Resumen de sensores y posición

SENSOR	X	Y
B1	3,4	0
B2	3	0
A1	1,3	0,1
UoP2	2,3	0,21
UoP3	2,3	0,31
UoP4	2,45	0,28

En la **Figura VI.39** se representan los puntos críticos y en la **Figura VI.40** se presentan las zonas críticas de máximas o mínimas presiones al interior de la playa.

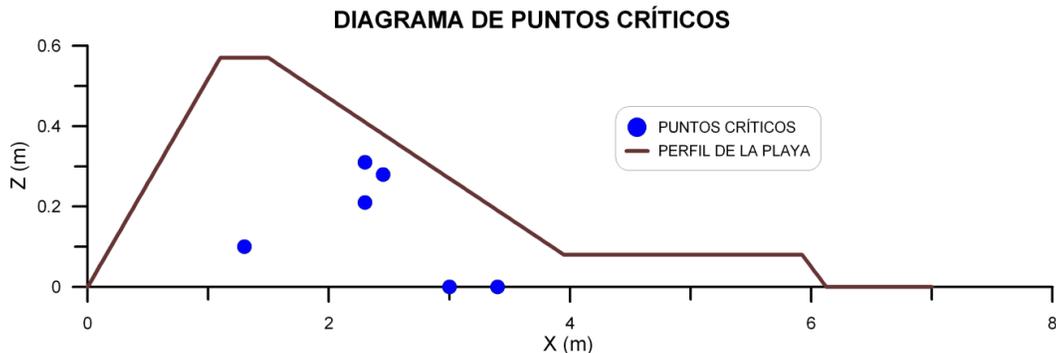


Figura VI.39 Puntos críticos

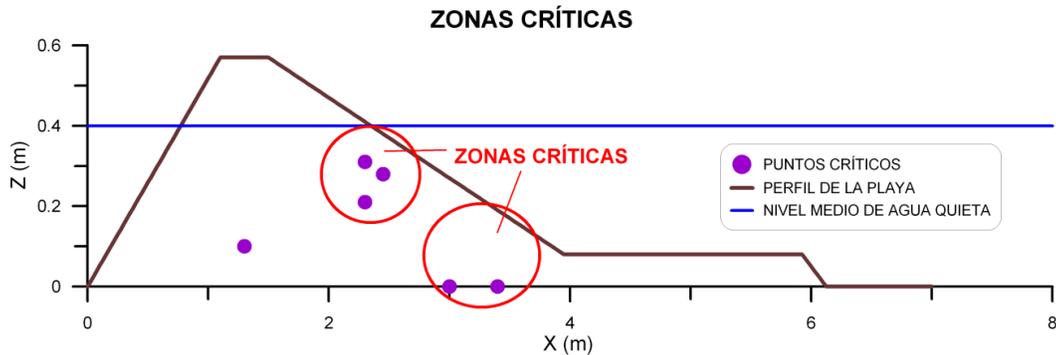


Figura VI.40 Zonas críticas

Con base en la ubicación de los puntos críticos, se han definido dos zonas, que se muestran en la **Figura VI.40**. Dichas zonas se ubican por debajo del nivel medio de agua en reposo. Haciendo una analogía con los perfiles de playa deformados, se observa que las zonas críticas coinciden con las concavidades del perfil deformado. Es decir, el transporte de sedimentos está fuertemente asociado a la ocurrencia de los mayores valores y gradientes de presión al interior de la playa. De ahí que justo estas zonas sean las más vulnerables y por tanto las que deben ser protegidas con mayor cuidado.

Para complementar el análisis puntual de las presiones, se presenta la **Tabla VI-10** en la que **Tabla VI-10 Tabla de comparación entre los valores de presión medidos y calculados con el programa MSP del Instituto de Ingeniería** comparan los valores medidos y los calculados por el programa de pendiente suave (MSP).

Tabla VI-10 Tabla de comparación entre los valores de presión medidos y calculados con el programa MSP del Instituto de Ingeniería

H (m)	T (s)	P <sub>max</sub> SENSOR B1		P <sub>max</sub> SENSOR B2	
		MEDIDA (mca)	CALCULADA (mca)	MEDIDA (mca)	CALCULADA (mca)
0.10	1.0	0.0143	0.0125	0.0068	0.0093
0.12	1.0	0.0147	0.0170	0.0083	0.0111
0.14	1.0	0.0195	0.0178	0.0100	0.0137
0.16	1.0	0.0217	0.0190	0.0111	0.0153
0.18	1.0	0.0234	0.0171	0.0116	0.0140

En la tabla solamente se presentan valores para los sensores B1 y B2, y para los ensayos correspondientes al periodo  $T=1s$ . Se observa que los valores obtenidos con el programa son de magnitud cercana a los medidos experimentalmente, por lo que se puede decir que el programa proporciona una aproximación aceptable a los resultados experimentales.

Es importante notar que con el programa únicamente se hicieron cálculos para dos sensores, B1 y B2, y para un periodo de 1 s. Esto se debe a que el programa está basado en teoría lineal, por lo tanto, el programa solo puede ofrecer resultados confiables antes de que la ola rompa y para condiciones de oleaje de tipo lineal. La **Tabla VI-10** muestra que dentro de sus límites de aplicación, el modelo numérico ofrece una buena aproximación de los valores medidos.



## VII. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

### *VII.1 Conclusiones*

En la primer parte de los resultados se comprueba que la zona propuesta sí es la que gobierna el comportamiento de algunos parámetros dependientes del número de Iribarren, tales como el coeficiente de reflexión y el ascenso máximo. Es decir, después de que el oleaje actúa sobre el perfil de la playa, deformándolo, el ángulo inicial correspondiente al talud original del perfil ya no es el que rige la reflexión y el ascenso máximo. El ángulo responsable del comportamiento es el ubicado un poco más arriba y corresponde al ángulo formado por la concavidad creada al transportarse el sedimento hacia la berma. Es interesante señalar que la zona de presiones crítica inferior corresponde con la ubicación de dicho ángulo.

La teoría aceptada en esta tesis para la obtención del coeficiente de reflexión es la de Losada, debido a que es la que aproxima más los valores calculados con los medidos. Aún así, algunos datos se dispersan mucho, esto es ocasionado por la zona de la cual se tomó el ángulo, se observó que los datos más dispersos corresponden a los ensayos en los que la zona de reducción de la playa se ubica más arriba.

Los programas de cómputo son herramientas que ayudan a entender el comportamiento de las cosas, en este caso, el comportamiento de la playa bajo ciertas condiciones de oleaje. El programa MSP proporciona información muy útil con respecto a lo que sucede en aguas profundas, información que, dicho sea de paso, es la que se utiliza para el diseño de obras marítimas. Con ayuda del programa se logró entender el comportamiento dentro del canal de oleaje y cómo va transformándose hasta que llega a la playa. En resumen, el programa MSP proporciona información sobre lo que pasa a medida que una onda viaja de aguas profundas a someras y hasta antes de la rotura.

La limitante de este programa es importante en el contexto de esta tesis, debido a que uno de los objetivos de este trabajo, es el de analizar el comportamiento de la playa tanto antes como después de que rompe la ola. El programa no es aplicable más que para antes de la rotura y para después de ella se deben emplear herramientas numéricas de orden superior (p.e. ecuaciones de tipo Boussinesq o RANS).

Para periodos pequeños, la presión no depende del cambio en la altura de ola, esto se comprobó con los ensayos cuyo periodo es de  $T=1s$ . En otras palabras la presión no varía significativamente cuando se presentan cambios en la altura de ola, esto pasa únicamente con periodos pequeños. Conforme aumenta el periodo, la presión se hace dependiente de la altura de ola.

La combinación del perfil de playa inicial (pendiente de talud expuesto al oleaje de 1:5) con los ensayos con periodo  $T=3 s$ , genera grandes cambios en la distribución de presiones en la playa. Bajo estas condiciones la presión se vuelve muy sensible al cambio de altura de ola y de batimetría del fondo. En este trabajo solamente se muestra tal fenómeno, pero sería materia de estudio el realizar pruebas para determinar cuáles son los factores que intervienen en el fenómeno de alta dependencia de la presión hacia los cambios de altura de ola y de fondo. Es muy importante señalar que en ensayo 14 ( $H=0.16 m$  y  $T=3 s$ ) sufre grandes modificaciones y es en el que se presentan las presiones máximas, por lo que se concluye que este es un ensayo crítico dado que es el de mayor contenido energético.

En resumen se tiene que la distribución de presión en la playa es función principalmente de tres factores: el periodo ( $T$ ), la altura de ola ( $H$ ) y la forma del perfil de la playa.

El análisis de las zonas críticas indica que es en ellas donde la playa sufre más daño, al perder sedimentos. La correcta identificación de dichas zonas es vital para la protección de la playa y para el entendimiento de la deformación de los taludes expuestos a la acción del oleaje. Es de notar que, a la luz de lo hallado en esa tesis, las zonas más vulnerables son las que, una vez deformado el perfil, gobiernan la magnitud de fenómenos como el ascenso máximo y la reflexión.

### *VII.2 Futuras líneas de trabajo*

Es necesario continuar con el análisis de los datos recolectados durante el trabajo experimental, con el fin de contar con la información completa y así comprender los fenómenos aquí detectados como parte de un todo.

Se debe trabajar en mejorar las formulaciones que permiten calcular el ascenso máximo y la reflexión a fin de contar con herramientas más precisas que permitan, incluso, predecir el comportamiento de diferentes configuraciones experimentales.

Adicionalmente, se puede completar la información realizando más experimentos, en los cuales se puede ir variando la geometría de la playa, el nivel freático, el tamaño de grano y las condiciones de oleaje para ampliar el abanico de resultados.

El uso de herramientas numéricas de mayor orden que la teoría lineal, es muy recomendable a fin de poder hacer corridas de todos los casos, lo que favorecerá el entendimiento del fenómeno en su conjunto.

Por otro lado se puede realizar un estudio para conocer los factores que determinan el comportamiento de las presiones con el talud 1:5 de la playa y para periodo de 3 s, con el fin de conocer las causas detonantes de las variaciones, además de someter la playa a otras condiciones de oleaje y ver si en algún caso pasa lo mismo o si se presentan cambios de otro tipo.

Con el fin de aplicar este estudio a la práctica, se puede diseñar una estructura en la que las piezas de mayor tamaño o las que estén fabricadas para resistir mayores solicitaciones se ubiquen en las zonas críticas y revisar la eficiencia de este nuevo diseño.



## A. ANEXO A

### A.1 TEORIA LINEAL Y PROPAGACIÓN DE ONDAS EN Y SOBRE UN MEDIO POROSO

#### A.1.1 Teoría lineal dentro de un medio poroso

##### Solución para el potencial de filtración

De acuerdo con las hipótesis consideradas para desarrollar las ecuaciones de gobierno (4.40) y (4.41), el flujo en estudio consiste en un tren de ondas monocromático viajando en un medio poroso sobre un fondo horizontal impermeable con profundidad  $h$  (Figura A.1).

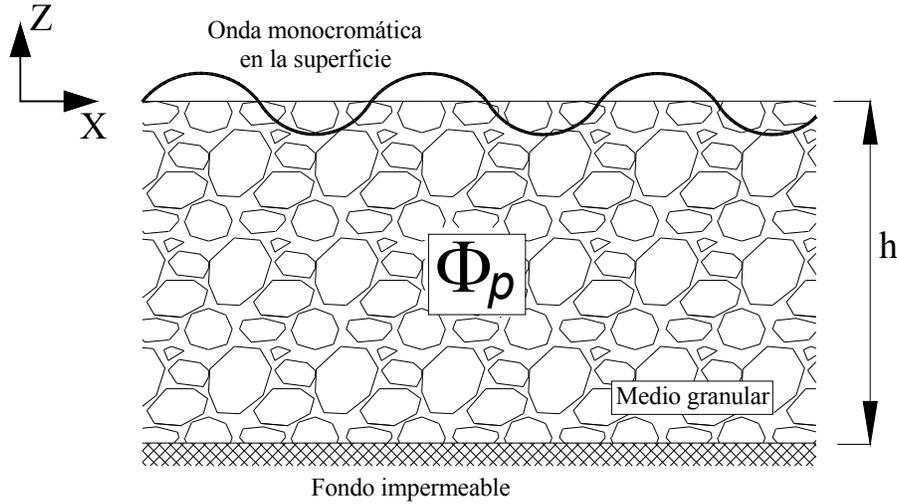


Figura A.1 Esquema y sistema de referencia para la teoría lineal en el medio poroso

Para encontrar la solución, se aplicarán las condiciones de frontera propias de la teoría lineal (ondas de pequeña amplitud) con las modificaciones correspondientes debidas al medio granular, mismas que se presentan a continuación

##### Condición de contorno cinemática

La condición de impermeabilidad en el fondo está dada por

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (\text{A.1})$$

La condición cinemática de superficie libre es la siguiente relación

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{A.2})$$

**Condición de contorno dinámica**

La presión del fluido en la superficie libre es la presión atmosférica, por tanto, en la superficie libre se cumple que  $p = 0$  y  $z = \eta$ , lo que sustituido en la ecuación que describe el perfil de la superficie libre resulta

$$\eta = -\frac{1}{g} \left( s \frac{\partial \Phi_p}{\partial t} + f \sigma \Phi_p \right) \quad \text{con } p = 0 \text{ y en } z = \eta \quad (\text{A.3})$$

**Condición de contorno mixta de superficie libre**

Al sustituir la ecuación (A.3) en la (A.2) y aplicando la dependencia de un armónico simple al potencial de velocidades, la condición homogénea o mixta de superficie libre queda expresada como

$$\sigma^2 (s + if) \Phi_p + g \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{A.4})$$

Es conveniente recordar que en este trabajo se toma el signo negativo de la función de dependencia temporal, lo cual facilita el desarrollo analítico.

Al igual que en la teoría lineal en agua, es posible aplicar el método de separación de variables por lo que el procedimiento de solución es similar al que se detalla en el Anexo B. En principio, la función del potencial de descarga puede descomponerse en una parte con dependencia espacial y otra con dependencia temporal de la siguiente forma

$$\Phi_p(\mathbf{x}, z, t) = \Re[\phi^*(\mathbf{x}, z) e^{-i\sigma t}] \quad (\text{A.5})$$

con lo que la ecuación de Laplace es ahora

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Las variables en el plano y en la vertical también pueden separarse, quedando

$$\phi^*(\mathbf{x}, z) = \phi(\mathbf{x}) \cdot f(z) \quad (\text{A.7})$$

A partir de esta separación se obtiene:

$$\frac{1}{\phi(\mathbf{x})} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} \right] = -\frac{1}{f(z)} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = -k^2 \quad (\text{A.8})$$

donde  $k$  debe ser una constante. La expresión (A.8) puede descomponerse en dos ecuaciones

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - k^2 f(z) = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} \right] + k^2 \phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{A.10})$$

La separación de variables mostrada y la elección del signo negativo en la dependencia temporal dan lugar a cambios en las expresiones de las condiciones de frontera, así, la condición de impermeabilidad en el fondo es ahora

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = e^{-i\sigma t} \frac{\partial \phi^*}{\partial z} = \phi e^{-i\sigma t} \frac{df(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (\text{A.11})$$

y por lo tanto

$$\frac{df(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (\text{A.12})$$

Por su parte, la condición mixta de contorno en la superficie libre queda

$$(s + if) \frac{\sigma^2}{g} f(z) + \frac{df(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{A.13})$$

La solución de la ecuación diferencial ordinaria (A.9) se puede escribir:

$$f(z) = A \cos(\mu z) + B \sen(\mu z) = A \cos(ikz) + B \sen(ikz) = Ce^{kz} + De^{-kz} \quad (\text{A.14})$$

en la que

$$k^2 = -\mu^2 \quad \text{con } -\mu^2 > 0 \quad (\text{A.15})$$

Aceptando esta solución, la condición cinemática de fondo resulta

$$k [Ce^{-kh} - De^{kh}] = 0 \quad \text{por tanto } C = De^{2kh} \quad (\text{A.16})$$

lo cual, sustituido en (A.14) y arreglando los términos convenientemente es

$$f(z) = 2De^{kh} \left[ \frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{2} \right] = B' \cosh k(h+z) \quad (\text{A.17})$$

Insertando la forma de la función de profundidad dada por (A.17) en la condición mixta de superficie libre, ec. (A.13), se llega a

$$(s + if) \frac{\sigma^2}{g} B' \cosh kh + B' k \sinh kh = 0 \quad (\text{A.18})$$

Agrupando convenientemente y realizando un cambio de signo ya que, de acuerdo con Sollit y Cross (1972), esta expresión es par para  $k$ , se tiene

$$\frac{\sigma^2}{g} (s + if) = k \tanh(kh) \quad (\text{A.19})$$

La ecuación (A.19) es la relación de dispersión para flujo en un medio poroso y la constante de integración,  $k$ , se denominará número de onda.

Por otro lado, la solución de la ecuación (A.10), tiene la forma

$$\phi = Ae^{-ikx} + Be^{ikx} \quad (\text{A.20})$$

de donde el potencial de velocidades es

$$\Phi_p(x, z, t) = A \cosh(k(h+z)) e^{i(kx - \sigma t)} \quad (\text{A.21})$$

La condición dinámica de superficie libre es una relación entre el potencial de velocidades y la elevación de la superficie libre, de modo que al sustituir la expresión (A.21) en la (A.3) se tiene

$$\eta = \Re \left[ -\frac{\sigma}{g} (-is + f) A \cosh(kh) e^{i(kx - \sigma t)} \right] \quad (\text{A.22})$$

La elevación de la superficie libre debe coincidir con una onda progresiva, misma que puede ser representada por una expresión del tipo

$$\eta = \Re \left[ a e^{i(kx - \sigma t)} \right] \quad (\text{A.23})$$

donde  $a = H/2$  es la amplitud del movimiento y  $H$  la altura de ola.

Por simple deducción, a partir de las ecuaciones (A.22) y (A.23), se sabe que

$$A = \frac{g}{\sigma(is - f)} \frac{a}{\cosh(kh)} \quad (\text{A.24})$$

Sustituyendo este valor en el potencial, finalmente se obtiene

$$\Phi_p(\mathbf{x}, z, t) = \Re \left[ -\frac{ig}{\sigma(s + if)} a \frac{\cosh k(h + z)}{\cosh kh} e^{i(kx - \sigma t)} \right] \quad (\text{A.25})$$

*Solución para el potencial de descarga*

La deducción del potencial de descarga se realiza en forma idéntica a lo desarrollado para el potencial de filtración, por lo tanto, a continuación solo se enlistan las expresiones resultantes.

La relación de dispersión es

$$\frac{\sigma^2 (s + if)}{g \varepsilon} = k_d \tanh k_d h \quad (\text{A.26})$$

Por su parte, la elevación de la superficie libre

$$\eta_d = \Re \left[ -\frac{\sigma (-is + f)}{g \varepsilon} A \cosh(k_d h) e^{i(k_d x - \sigma t)} \right] \quad (\text{A.27})$$

en la que

$$A = \frac{g}{\sigma(is - f)} \frac{\varepsilon}{\cosh(k_d h)} \frac{a}{\cosh(k_d h)} \quad (\text{A.28})$$

y el potencial de velocidades de descarga queda expresado como

$$\Phi_d(\mathbf{x}, z, t) = \Re \left[ -\frac{ig}{\sigma(s + if)} \frac{\varepsilon}{\cosh k_d h} a \frac{\cosh k_d (h + z)}{\cosh k_d h} e^{i(k_d x - \sigma t)} \right] \quad (\text{A.29})$$

## A.2 TEORÍA LINEAL CON INTERACCIÓN ENTRE AGUA Y MEDIO POROSO

Hasta ahora se han presentado las soluciones para describir el flujo oscilatorio en agua y dentro de un medio poroso. En esta sección se tratará el caso en el que el medio granular ocupa solo parte del volumen, es decir, constituye una capa finita con fondo impermeable en su parte inferior y tiene interacción con el agua en su parte superior. Se denotará  $h_p$  a la profundidad de agua y  $h_a$  al grosor de la capa de medio poroso, de esta forma el calado total  $h$  será

$$h = h_p + h_a \quad (\text{A.30})$$

En la **Figura A.2** se muestra un esquema del problema planteado, cuya solución se hallará aceptando las hipótesis de la teoría de ondas de pequeña amplitud.

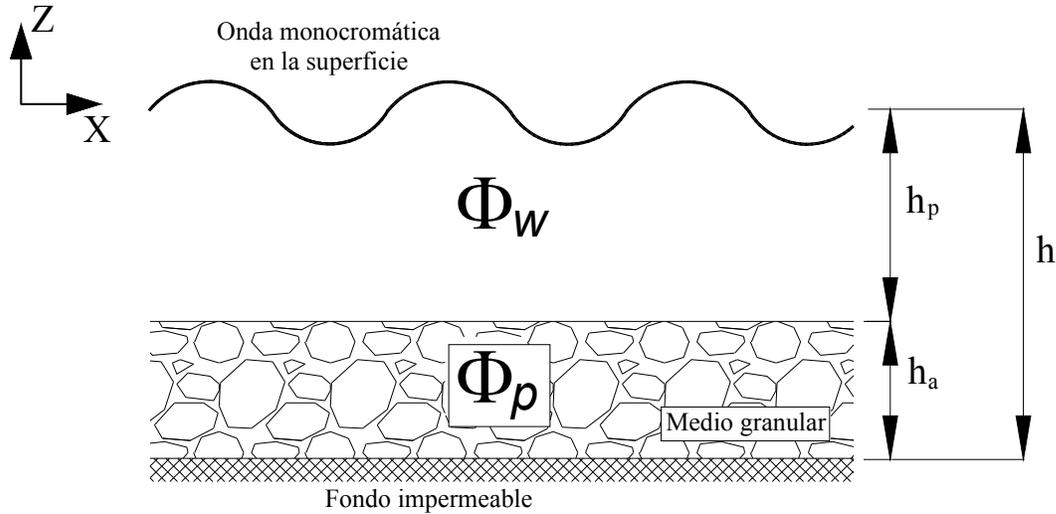


Figura A.2 Esquema y sistema de referencia para la teoría lineal sobre un medio poroso

Las ecuaciones de gobierno (Laplace) para el flujo en el agua y dentro del medio poroso son

$$\nabla^2 \Phi_w = 0 \quad \text{para } -h_p < z < 0 \quad (\text{A.31})$$

$$\nabla^2 \Phi_p = 0 \quad \text{para } -h < z < -h_p \quad (\text{A.32})$$

en la que los subíndices  $w$  y  $p$  denotan las características en el agua fuera y dentro de la capa finita de medio poroso, respectivamente.

### A.2.1 Condiciones de contorno

Bajo la suposición de pequeña amplitud, las condiciones contorno cinemática y dinámica de superficie libre pueden ser expresadas como

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{A.33})$$

y

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{A.34})$$

respectivamente.

Aceptando que el fondo impermeable es plano se cumple que  $\nabla_h h = 0$  y si el flujo de masa vertical evaluado en  $z = -h$  es igual a cero, esto es,

$$\rho w_p = \rho \varepsilon \left( \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} + \nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi_p \right) = \rho \varepsilon \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (\text{A.35})$$

al operar se obtiene

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (\text{A.36})$$

Ahora, dicho flujo de masa vertical debe cumplir la continuidad en la interfase de medios, lo que se representa como

$$\rho w_w = \rho w_p \quad \text{en } z = -h_p \quad (\text{A.37})$$

de donde, bajo el supuesto que el espesor del medio poroso también es constante ( $\nabla_h h_p = 0$ ), se tiene

$$w_w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{A.38})$$

$$w_p = \varepsilon \left( \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} + \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_p \right) = \varepsilon \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} \quad (\text{A.39})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A.38) y (A.39) en la (A.37) y operando, se obtiene la siguiente condición de contorno

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} \quad \text{en } z = -h_p \quad (\text{A.40})$$

Para resolver el problema hace falta una condición de contorno más, la cual se obtendrá a partir de la continuidad de presiones en la interfase agua - medio poroso, para ello se emplean las ecuaciones de Bernoulli en ambos medios, a saber,

$$p_w = -\rho \left( \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} + gz \right) \quad \text{en } -h_p < z < 0 \quad (\text{A.41})$$

$$p_p = -\rho \left( s \frac{\partial \Phi_p}{\partial t} + gz + f \sigma \Phi_p \right) \quad \text{en } -h < z < -h_p \quad (\text{A.42})$$

que por continuidad se igualan en  $z = -h_p$ , de donde

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial t} = s \frac{\partial \Phi_p}{\partial t} + f \sigma \Phi_p \quad \text{en } z = -h_p \quad (\text{A.43})$$

El tipo flujo para el que interesa resolver las ecuaciones y condiciones de contorno planteadas corresponde al caso de una onda progresiva, de modo que al contar con homogeneidad en las condiciones de contorno, es posible aplicar la técnica de separación de variables, para lo cual los potenciales se descomponen como sigue

$$\Phi_w(x, z, t) = \phi(x)M(z)\Gamma(t) \quad (\text{A.44})$$

$$\Phi_p(x, z, t) = \phi_s(x)P(z)\Gamma(t) \quad (\text{A.45})$$

Al sustituir estos potenciales en las ecuaciones de gobierno se obtiene

$$\frac{1}{\phi_w} \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} + \frac{1}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.46})$$

y

$$\frac{1}{\phi_p} \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} + \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.47})$$

De manera muy similar a los casos de flujo en un solo medio, se pueden establecer las igualdades

$$\frac{1}{\phi_w} \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} = -\frac{1}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = -K^2 \quad (\text{A.48})$$

y

$$\frac{1}{\phi_p} \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} = -\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -K^2 \quad (\text{A.49})$$

Intencionalmente se ha empleado la misma constante en ambas ecuaciones ya que de este modo, dicha constante resultará equivalente al número de onda local dentro y fuera del poroso. El problema se traduce ahora a la solución de cuatro ecuaciones diferenciales, a saber,

$$\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} + K^2 \phi_w = 0 \quad \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} - K^2 M = 0 \quad (\text{A.50})$$

$$\frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} + K^2 \phi_p = 0 \quad \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - K^2 P = 0 \quad (\text{A.51})$$

La solución de las ecuaciones (A.50) y (A.51) tienen la forma

$$\phi_w = A_1 e^{-iKx} + A_2 e^{+iKx} \quad M = A_3 e^{Kz} + A_4 e^{-Kz} \quad (\text{A.52})$$

$$\phi_p = A_5 e^{-iKx} + A_6 e^{+iKx} \quad P = A_7 e^{Kz} + A_8 e^{-Kz} \quad (\text{A.53})$$

donde los coeficientes  $A_i$  dependen de las condiciones de contorno.

Considerando que las ondas viajan en el sentido positivo del eje  $x$  y adoptando la parte negativa de la función de dependencia temporal, los potenciales de velocidades en (A.44) y (A.45) son ahora

$$\Phi_w = A_1 (A_3 e^{Kz} + A_4 e^{-Kz}) e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (\text{A.54})$$

$$\Phi_p = A_5 (A_7 e^{Kz} + A_8 e^{-Kz}) e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (\text{A.55})$$

Sustituyendo la ecuación (A.55) en la condición de contorno de fondo impermeable, ecuación (A.36), se obtiene

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = A_5 (KA_7 e^{Kz} - KA_8 e^{-Kz}) e^{i(-\sigma t + Kx)} = 0 \quad (\text{A.56})$$

operando y evaluando en  $z = -h$  se llega a

$$A_7 = A_8 e^{2Kh} \quad (\text{A.57})$$

así, la ecuación (A.55) se convierte en

$$\Phi_p = A_5 A_8 e^{Kh} (e^{K(z+h)} + e^{-K(z+h)}) e^{i(-\sigma t - Kx)} = A_9 \cosh K(h+z) e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (\text{A.58})$$

donde se ha definido el factor

$$A_9 = 2A_5 A_8 e^{Kh} \quad (\text{A.59})$$

Haciendo uso de este último potencial en la condición de continuidad de presión, ec. (A.43), se obtiene

$$\Phi_w = (s + if) \Phi_p \quad z = -h_p \quad (\text{A.60})$$

Sustituyendo los potenciales definidos por las ecuaciones (A.54) y (A.58) en (A.60) y en la condición de contorno (A.40), se tiene

$$A_1 (A_3 e^{-Kh_p} + A_4 e^{Kh_p}) e^{i(-\sigma t - Kx)} = (s + if) A_9 \cosh(Kh_a) e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (\text{A.61})$$

$$A_1 (A_3 e^{-Kh_p} - A_4 e^{Kh_p}) = \varepsilon A_9 \sinh(Kh_a) \quad (\text{A.62})$$

Al despejar  $A_3$  de (A.61), resulta

$$A_3 = \left( (s + if) \frac{A_9}{A_1} \cosh(Kh_a) - A_4 e^{Kh_p} \right) e^{Kh_p} \quad (\text{A.63})$$

y sustituyéndolo en (A.62)

$$(s + if) \frac{A_9}{A_1} \cosh(Kh_a) - 2A_4 e^{Kh_p} = \varepsilon \frac{A_9}{A_1} \sinh(Kh_a) \quad (\text{A.64})$$

$A_4$ , entonces, queda definido por

$$A_4 = \frac{A_9}{A_1} \left( (s + if) \cosh(Kh_a) - \varepsilon \sinh(Kh_a) \right) \frac{e^{-Kh_p}}{2} \quad (\text{A.65})$$

Si se agrupan términos de forma que  $\gamma = (s + if) \cosh(Kh_a) - \varepsilon \sinh(Kh_a)$ , las ecuaciones (A.65) y (A.63) quedan, respectivamente,

$$A_4 = \frac{1}{2} \frac{A_9}{A_1} \gamma e^{-Kh_p} \quad (\text{A.66})$$

y

$$A_3 = \frac{1}{2} \frac{A_9}{A_1} (2(s + if) \cosh(Kh_a) - \gamma) e^{Kh_p} \quad (A.67)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{A_9}{A_1} ((s + if) \cosh(Kh_a) + \varepsilon \sinh(Kh_a)) e^{Kh_p}$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (A.65) y (A.67) en la ecuación (A.54), resulta

$$\Phi_w = \frac{1}{2} A_9 \left\{ ((s + if) \cosh(Kh_a) + \varepsilon \sinh(Kh_a)) e^{K(z+h_p)} \right. \quad (A.68)$$

$$\left. + ((s + if) \cosh(Kh_a) - \varepsilon \sinh(Kh_a)) e^{-K(z+h_p)} \right\} e^{i(-\sigma t + Kx)}$$

La aplicación de las relaciones trigonométricas  $e^{K(z+h_p)} = \sinh K(h_p + z) + \cosh K(h_p + z)$  y  $e^{-K(z+h_p)} = -\sinh K(h_p + z) + \cosh K(h_p + z)$  en la ecuación (A.68), la convierten en

$$\Phi_w = A_9 \left\{ (s + if) \cosh(Kh_a) \cosh K(h_p + z) + \right. \quad (A.69)$$

$$\left. + \varepsilon \sinh(Kh_a) \sinh K(h_p + z) \right\} e^{i(-\sigma t + Kx)}$$

Utilizando ahora  $\cosh K(h + z - h_a) = \cosh K(h + z) \cosh Kh_a - \sinh K(h + z) \sinh Kh_a$  y  $\sinh K(h + z - h_a) = \sinh K(h + z) \cosh Kh_a - \cosh K(h + z) \sinh Kh_a$  y recordando que  $h_p = h - h_a$  la ecuación (A.69) se puede escribir

$$\Phi_w = A_9 (s + if) \cosh K(h + z) \left\{ \left[ \cosh^2(Kh_a) - \frac{\varepsilon}{s + if} \sinh^2(Kh_a) \right] - \right. \quad (A.70)$$

$$\left. - \sinh K(h + z) \left[ \cosh(Kh_a) \sinh(Kh_a) - \frac{\varepsilon}{s + if} \cosh(Kh_a) \sinh(Kh_a) \right] \right\} e^{i(-\sigma t + Kx)}$$

reagrupando convenientemente se tiene

$$\Phi_w = A_9 (s + if) \cosh^2(Kh_a) \left\{ \cosh K(h + z) \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{s + if} \tanh^2(Kh_a) \right] - \right. \quad (A.71)$$

$$\left. - \sinh K(h + z) \left[ \tanh(Kh_a) - \frac{\varepsilon}{s + if} \tanh(Kh_a) \right] \right\} e^{i(-\sigma t + Kx)}$$

lo que permite definir una nueva constante

$$A_{10} = A_9 (s + if) \cosh^2(Kh_a) \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{s + if} \tanh^2(Kh_a) \right\} \quad (A.72)$$

y así, la ecuación (A.71) se simplifica de la siguiente forma

$$\Phi_w = A_{10} \left\{ \cosh k(h + z) - F \sinh K(h + z) \right\} e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (A.73)$$

donde

$$F = \frac{\tanh(Kh_a) - \frac{\varepsilon}{s+if} \tanh(Kh_a)}{1 - \frac{\varepsilon}{s+if} \tanh^2(Kh_a)} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{s+if}\right) \frac{\tanh(Kh_a)}{1 - \frac{\varepsilon}{s+if} \tanh^2(Kh_a)} \quad (\text{A.74})$$

Aplicando la definición del potencial en (A.73) a la condición dinámica de superficie libre, ec. (A.33), el desplazamiento de la superficie libre es

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} = \frac{i\sigma}{g} A_{10} \left\{ \cosh(Kh) - F \sinh(Kh) \right\} e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (\text{A.75})$$

Como se ha considerado una onda progresiva de amplitud  $H/2$ , de la forma

$$\eta = \frac{H}{2} e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (\text{A.76})$$

se pueden comparar las ecuaciones (A.75) y (A.76) para deducir la constante  $A_{10}$ , que resulta

$$A_{10} = -\frac{ig}{\sigma} \frac{H}{2} \left( \frac{1}{\cosh(Kh) - F \sinh(Kh)} \right) \quad (\text{A.77})$$

de tal suerte que al sustituir la ecuación (A.77) en la ecuación (A.73), se obtiene el potencial de velocidades en el agua

$$\Phi_w = -\frac{igH}{2\sigma} \left( \frac{\cosh K(h+z) - F \sinh K(h+z)}{\cosh(Kh) - F \sinh(Kh)} \right) e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (\text{A.78})$$

Para encontrar la función que determina el potencial de velocidades en el medio poroso es necesario determinar el valor del resto de las constantes.  $A_9$  se encuentra al sustituir y operar la ecuación (A.77) en la ecuación (A.72), esto es,

$$A_9 = -\frac{ig}{\sigma} \frac{H}{2} \left( \frac{1}{\cosh(Kh) - F \sinh(Kh)} \right) \frac{1}{\left( \cosh^2(Kh_a) - \frac{\varepsilon}{s+if} \sinh^2(Kh_a) \right)} \quad (\text{A.79})$$

Si se considera la siguiente relación

$$1 - F \tanh(Kh_a) = \frac{1 - \tanh^2(Kh_a)}{1 - \frac{\varepsilon}{s+if} \tanh^2(Kh_a)} = \frac{1}{\cosh^2(Kh_a) - \frac{\varepsilon}{s+if} \sinh^2(Kh_a)} \quad (\text{A.80})$$

la ecuación (A.79) se puede simplificar a

$$A_9 = -\frac{ig}{\sigma} \frac{H}{2} \left( \frac{1 - F \tanh(Kh_a)}{\cosh(Kh) - F \sinh(Kh)} \right) \left( \frac{1}{s+if} \right) \quad (\text{A.81})$$

y con ello, el potencial dentro de la capa porosa, ec. (A.58), es

$$\Phi_p = -\frac{igH}{2\sigma} \left( \frac{1-F \tanh(Kh_a)}{\cosh(Kh) - F \sinh(Kh)} \right) \left( \frac{\cosh K(h+z)}{s+if} \right) e^{i(-\sigma t+Kx)} \quad (\text{A.82})$$

Para establecer la expresión que relaciona la frecuencia angular y el numero de onda, las ecuaciones (A.76) y (A.78) se sustituyen en la ecuación (A.34), de donde

$$K \left( \frac{igH}{2\sigma} \left[ \frac{\sinh(Kh) - F \cosh(Kh)}{\cosh(Kh) - F \sinh(Kh)} \right] \right) e^{i(-\sigma t-Kx)} + \frac{iH\sigma}{2} e^{i(-\sigma t+Kx)} = 0 \quad (\text{A.83})$$

al simplificar la ecuación (A.83), dividir por  $\cosh(Kh)$  se obtiene una relación de dispersión que es válida para toda la columna ( $0 \leq z \leq -h_p$ )

$$\frac{\sigma^2}{g} = K \frac{\tanh Kh - F}{1 - F \tanh Kh} \quad (\text{A.84})$$

Es importante resaltar que de acuerdo con Sollit y Cross (1972) la relación de dispersión es para  $K$ .



## B. ANEXO B

### B.1 GRÁFICAS DE RESULTADOS

A continuación se presentan las gráficas de todos los ensayos. Se dividen en dos partes, tal como se colocaron en el Capítulo VI. Análisis de resultados.

#### B.1.1 Resultados del programa MSP del Instituto de Ingeniería, UNAM

El programa arroja datos para 30 instantes diferentes, se analizaron tres puntos para cada corrida, el punto inicial (Pto. 1), el central (Pto. 15) y el final (Pto. 30); a continuación se presentan las gráficas resultantes para cada punto de cada corrida.

Se estudiaron mapas de presiones y de velocidades, presentándose primero del de presiones.

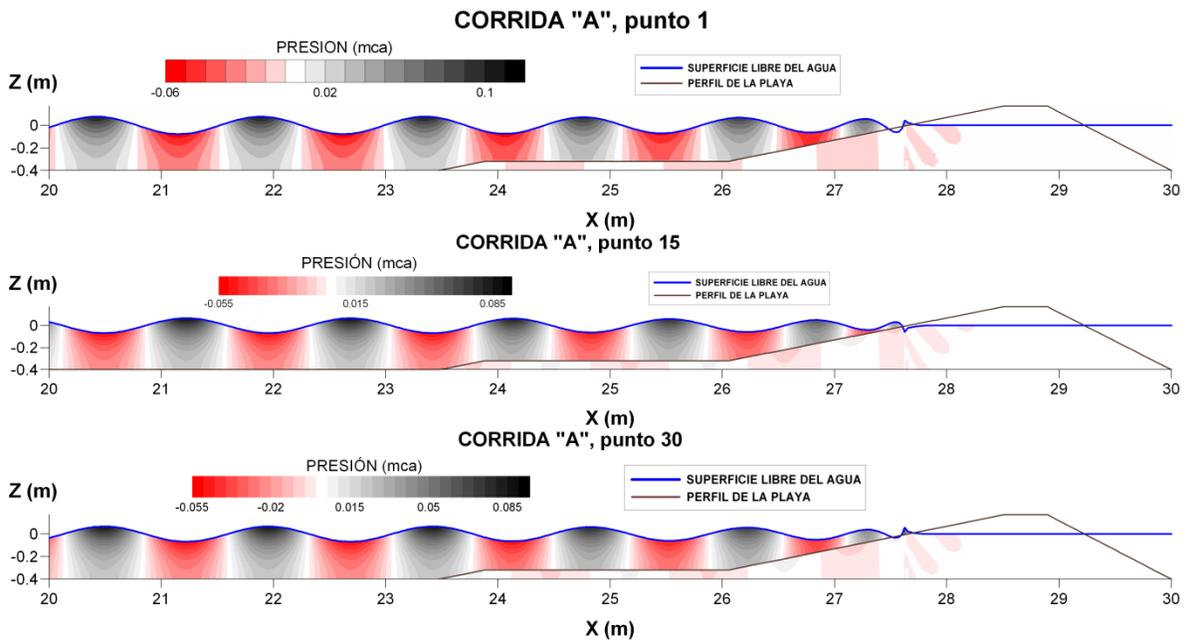


Figura B.1 Mapas de presión para la corrida "A",  $H=0.18\text{m}$   $T=1\text{s}$

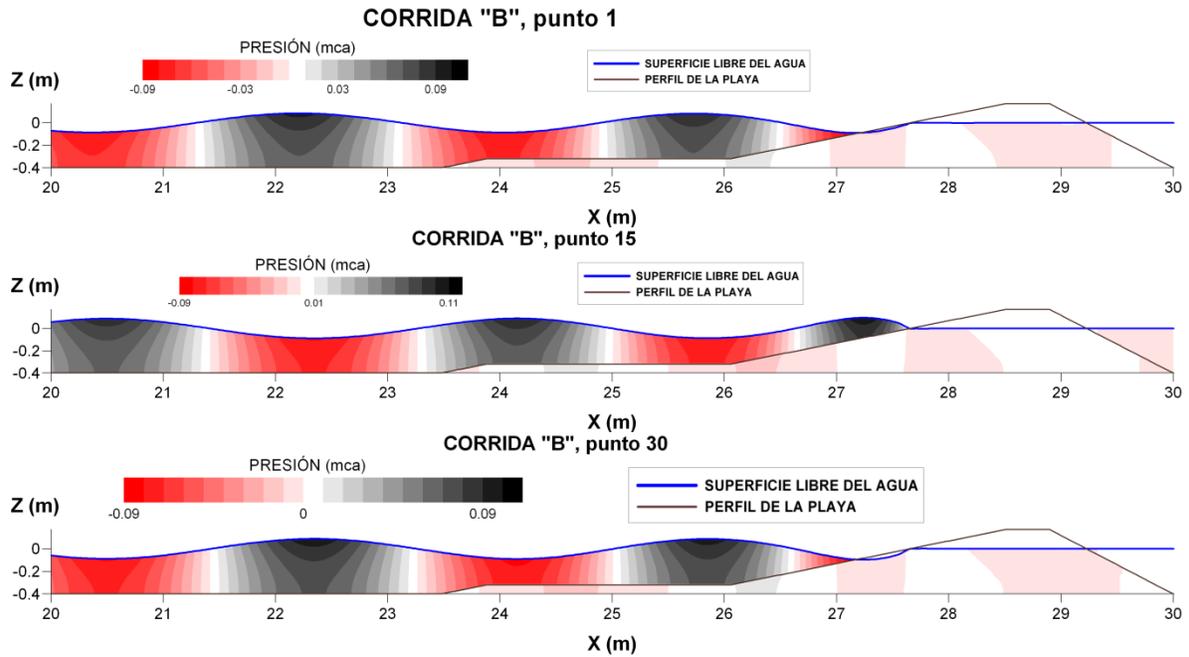


Figura B.2 Mapas de presión para la corrida "B",  $H=0.18\text{m}$   $T=2\text{s}$

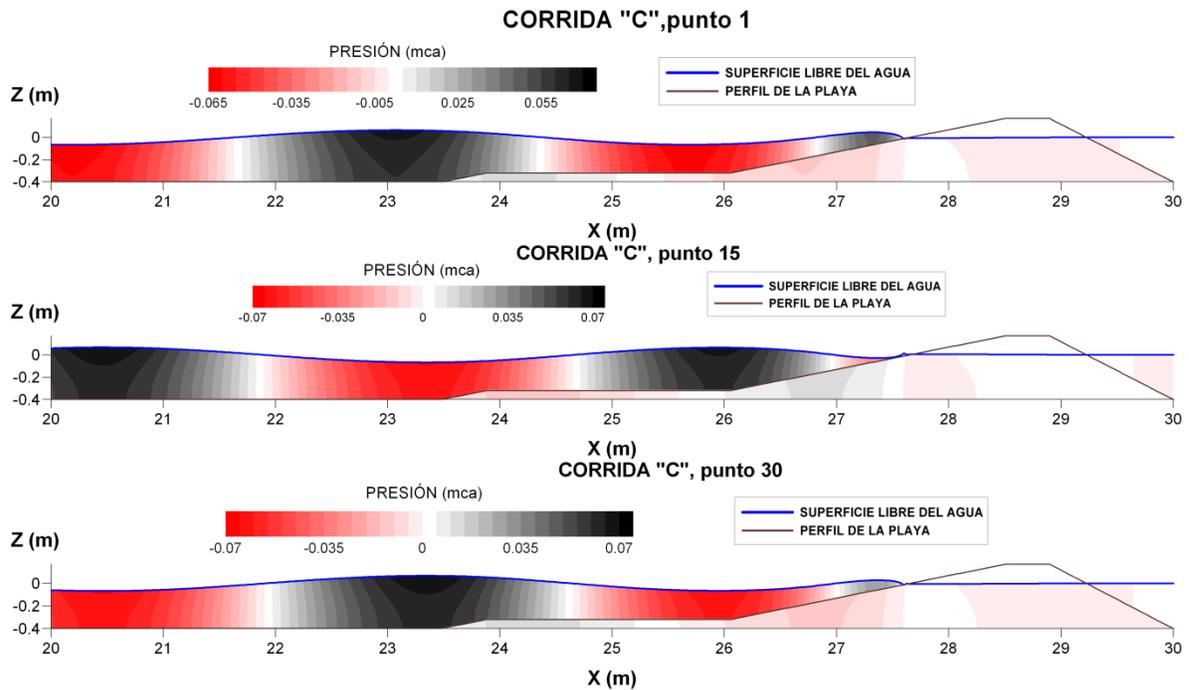


Figura B.3 Mapas de presión para la corrida "C",  $H=0.16\text{m}$   $T=3\text{s}$

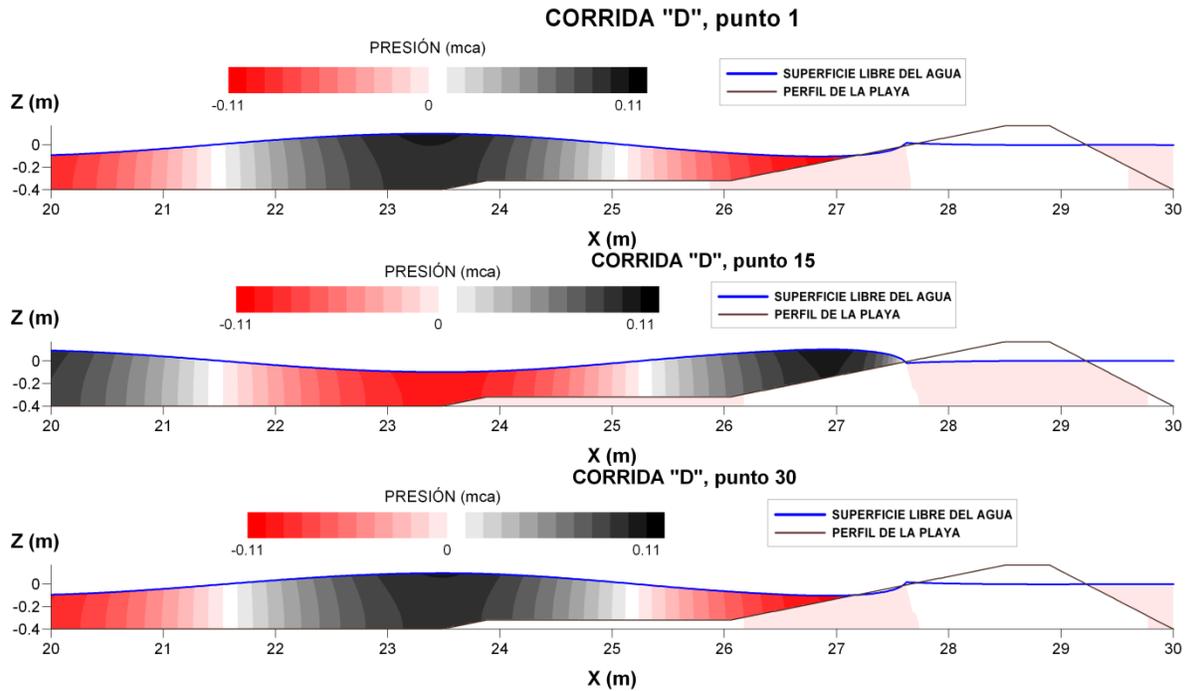


Figura B.4 Mapas de presión para la corrida "D", H=0.14m T=4s

A continuación se presentan los mapas de velocidades también organizados por corrida.

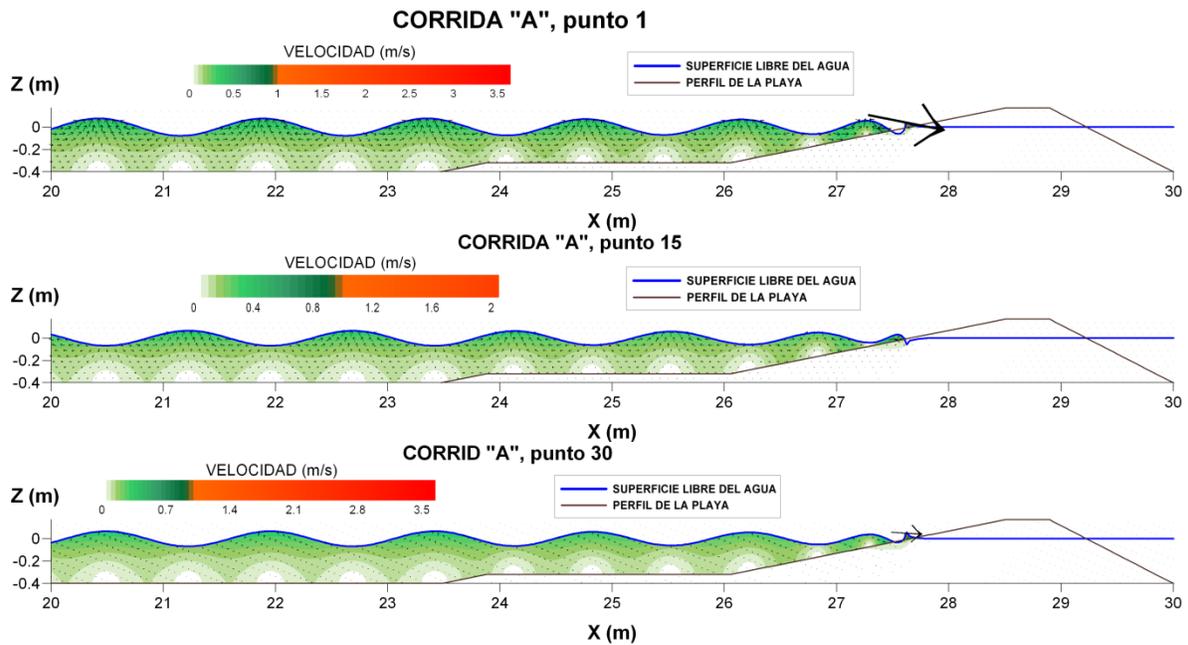


Figura B.5 Mapas de velocidad para la corrida "A", H=0.18m T=1s

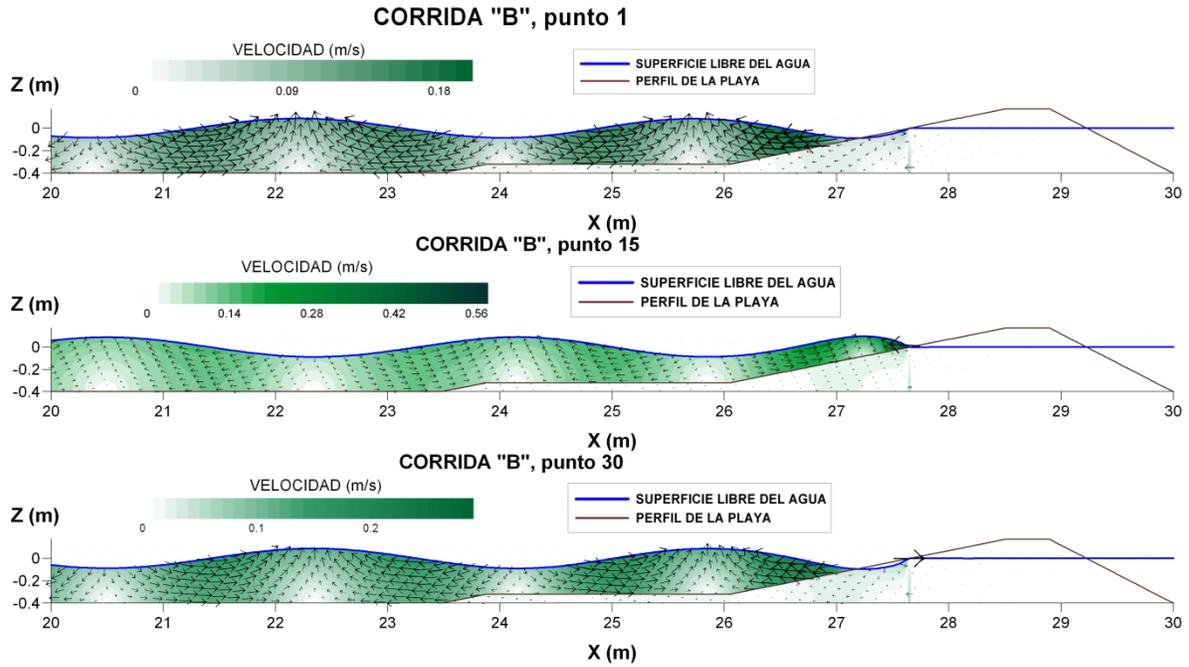


Figura B.6 Mapas de velocidad para la corrida "B",  $H=0.18\text{m}$   $T=2\text{s}$

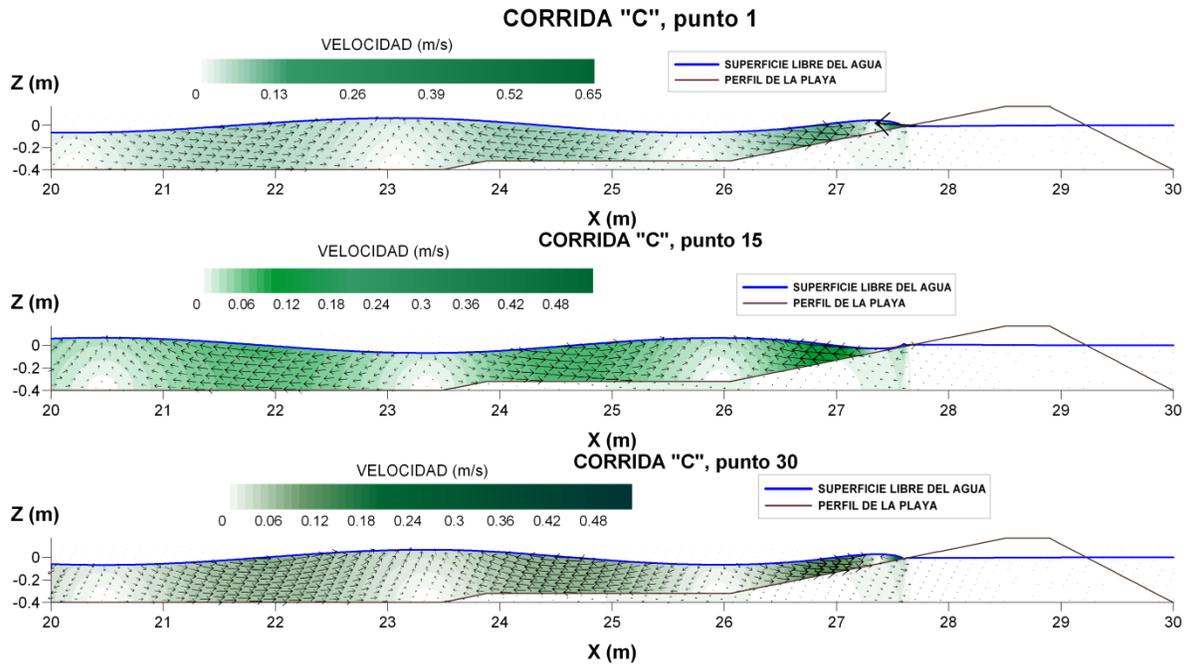


Figura B.7 Mapas de velocidad para la corrida "C",  $H=0.16\text{m}$   $T=3\text{s}$

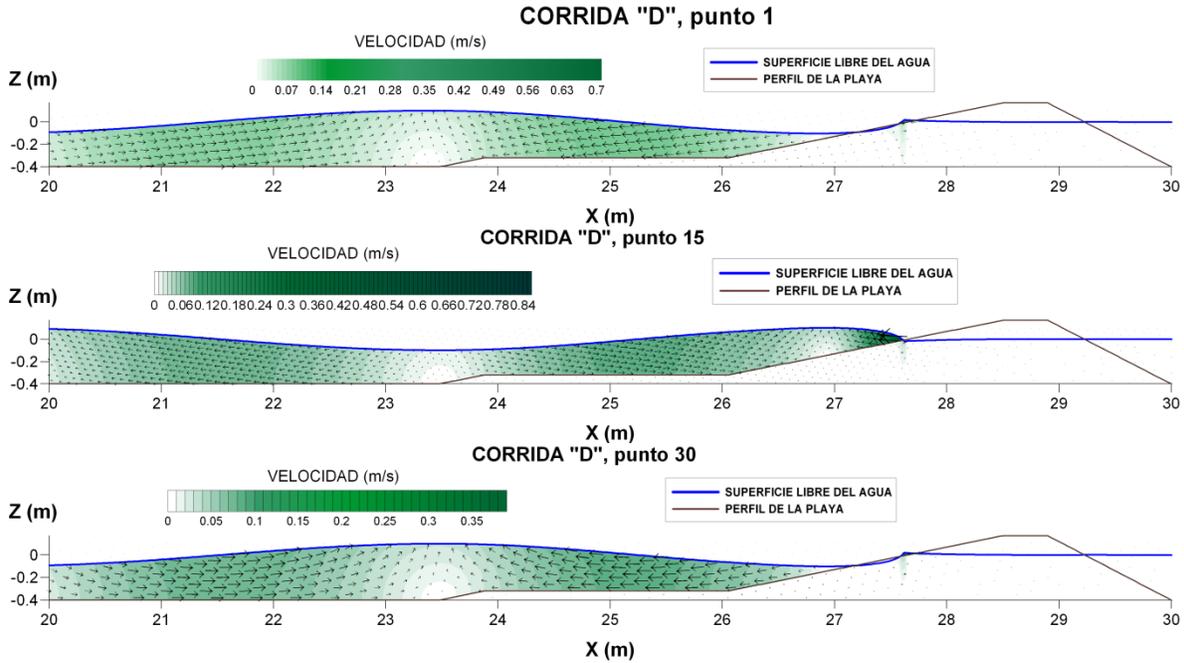
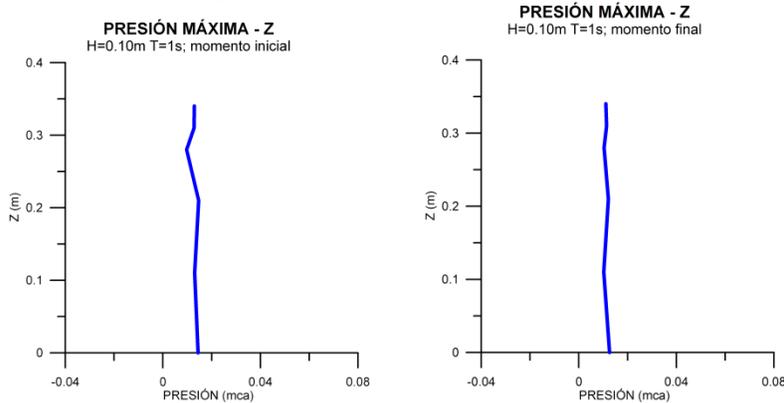


Figura B.8 Mapas de velocidad para la corrida "D",  $H=0.14m$   $T=4s$

Con estas ilustraciones se completa la información presentada para los resultados obtenidos al modelar las condiciones de la playa con el programa MSP del Instituto de Ingeniería de la UNAM.

### B.1.2 Distribución de la presión al interior de la playa

Para las presiones medidas con los sensores colocados en la playa, se obtuvieron 4 gráficas para cada caso, en el capítulo de resultados únicamente se presentaron resultados para cuatro ensayos. A continuación se presentan las ilustraciones correspondientes al resto de los ensayos; estas se organizarán por ensayo, presentando juntas las correspondientes al momento inicial y final.



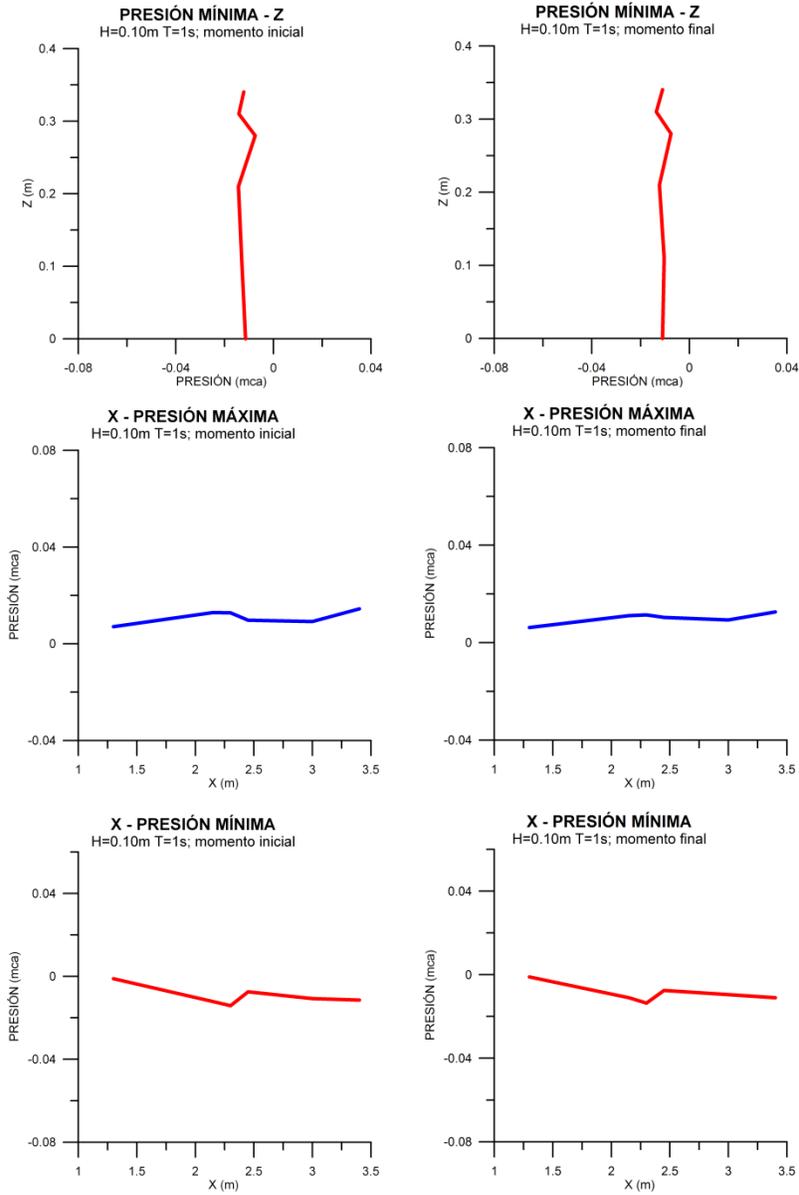


Figura B.9 Diagramas de presión para E.1, H=0.10m T=1s

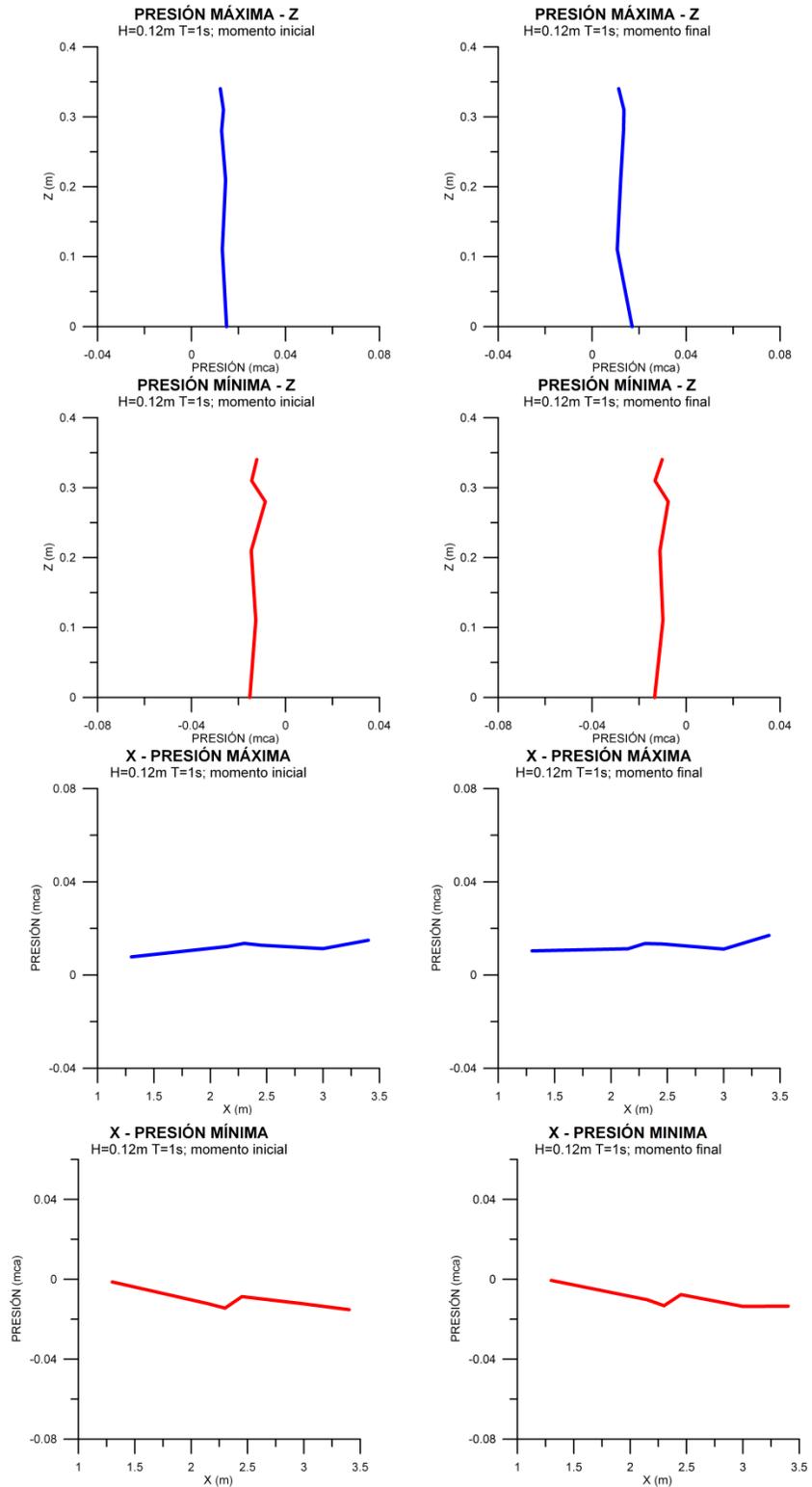


Figura B.10 Diagramas de presión para E.2,  $H=0.12\text{m}$   $T=1\text{s}$

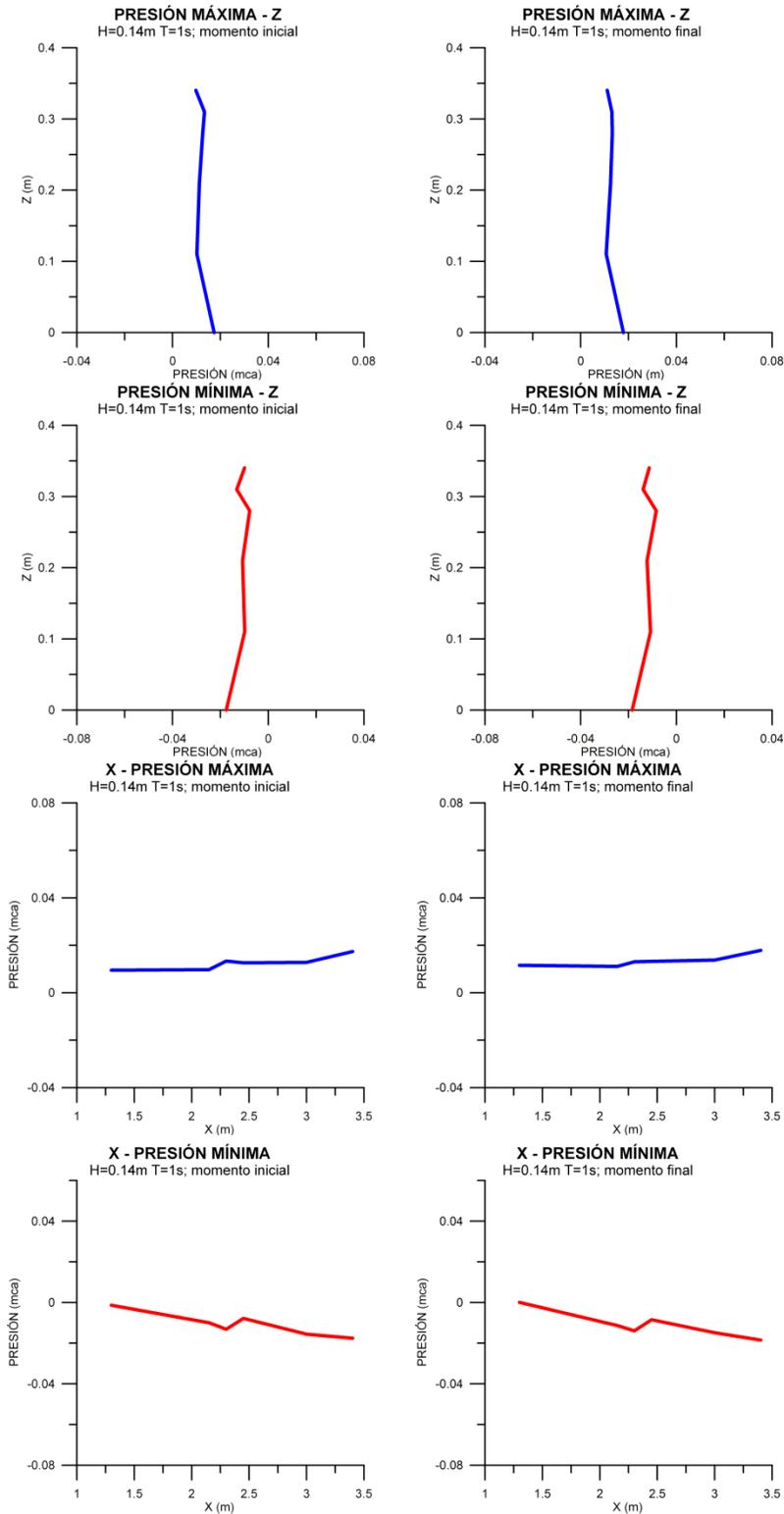


Figura B.11 Diagramas de presión para E.3, H=0.14m T=1s

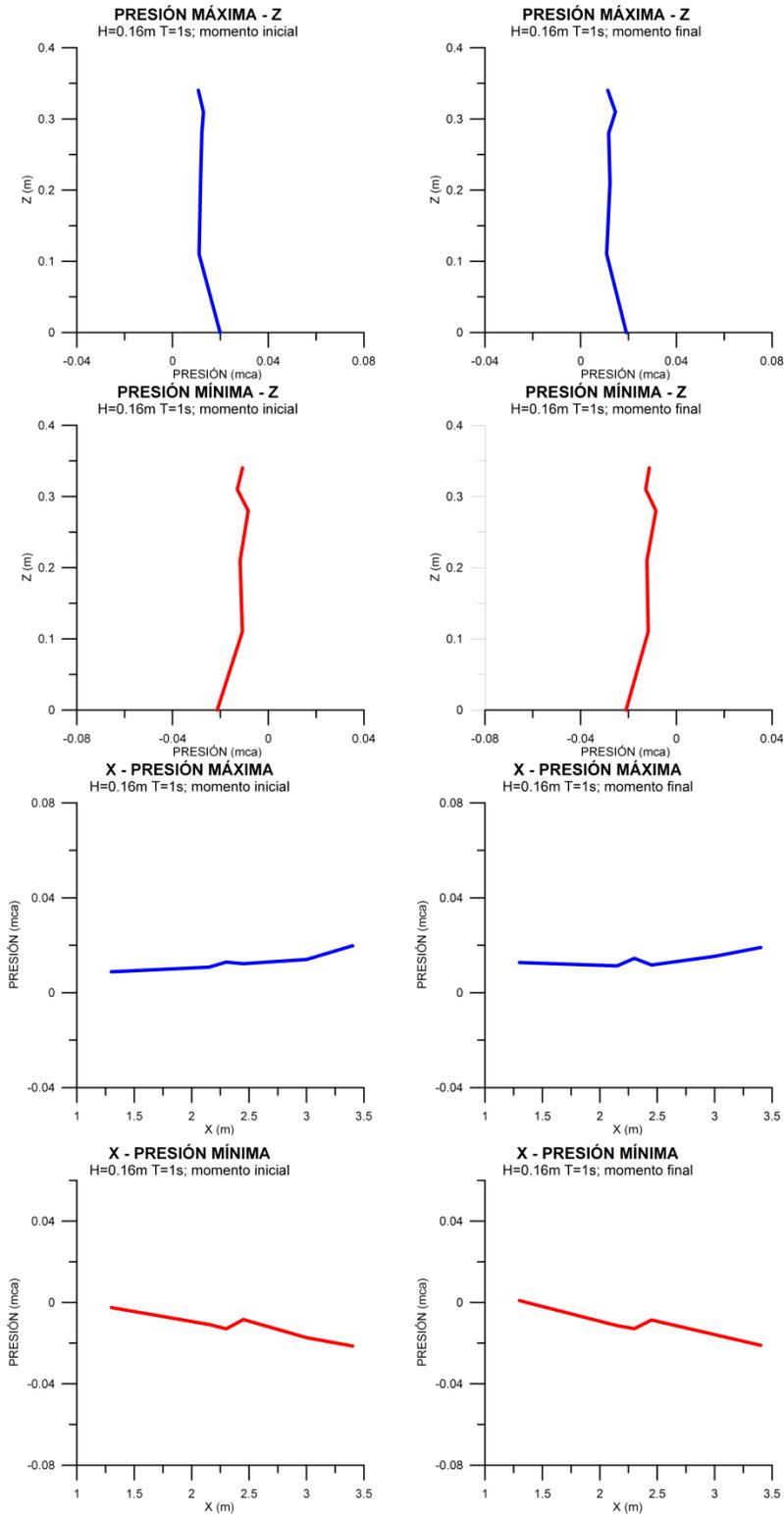


Figura B.12 Diagramas de presión para E.4,  $H=0.16\text{m}$   $T=1\text{s}$

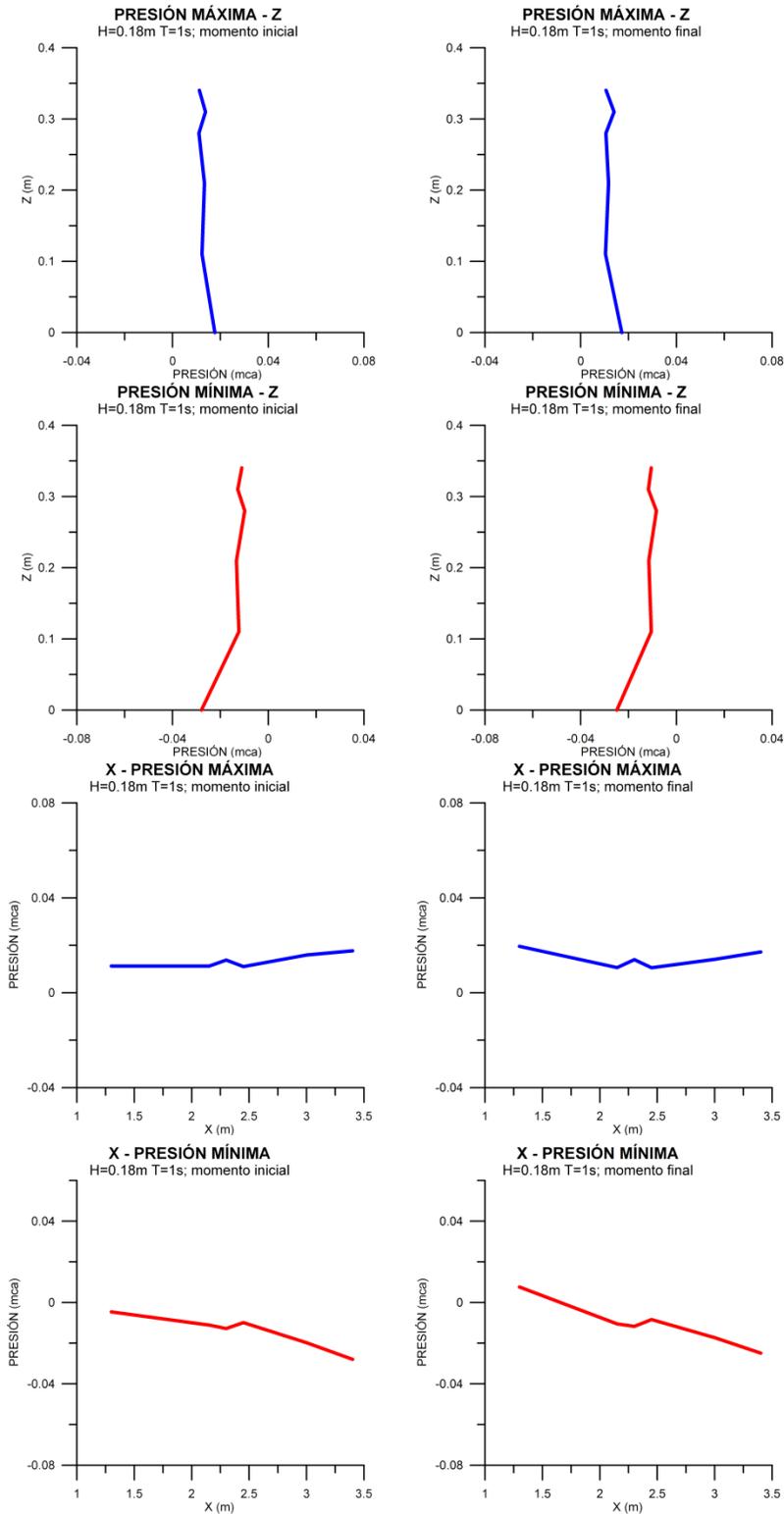


Figura B.13 Diagramas de presión para E.5,  $H=0.18\text{m}$   $T=1\text{s}$

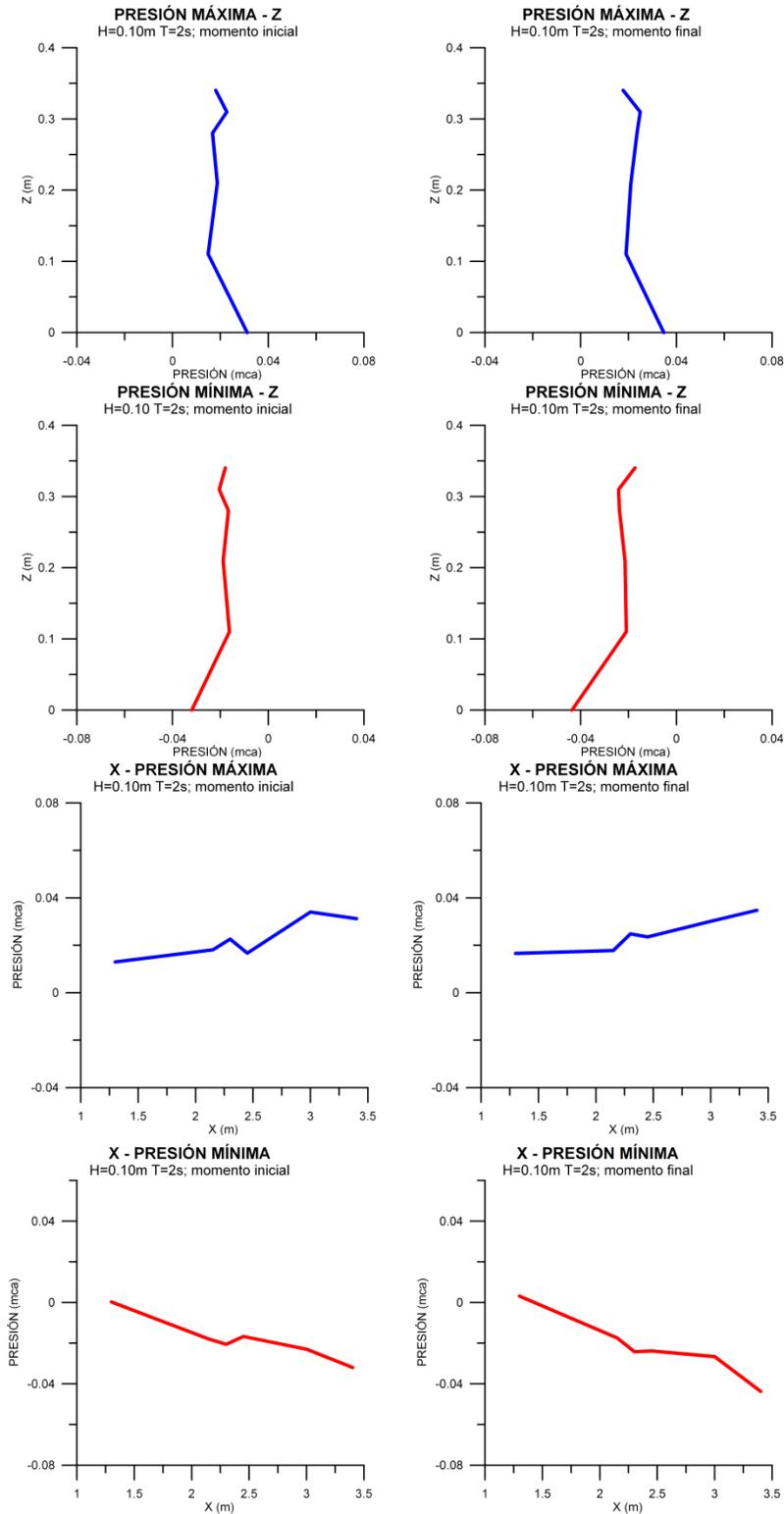


Figura B.14 Diagramas de presión para E.6, H=0.10m T=2s

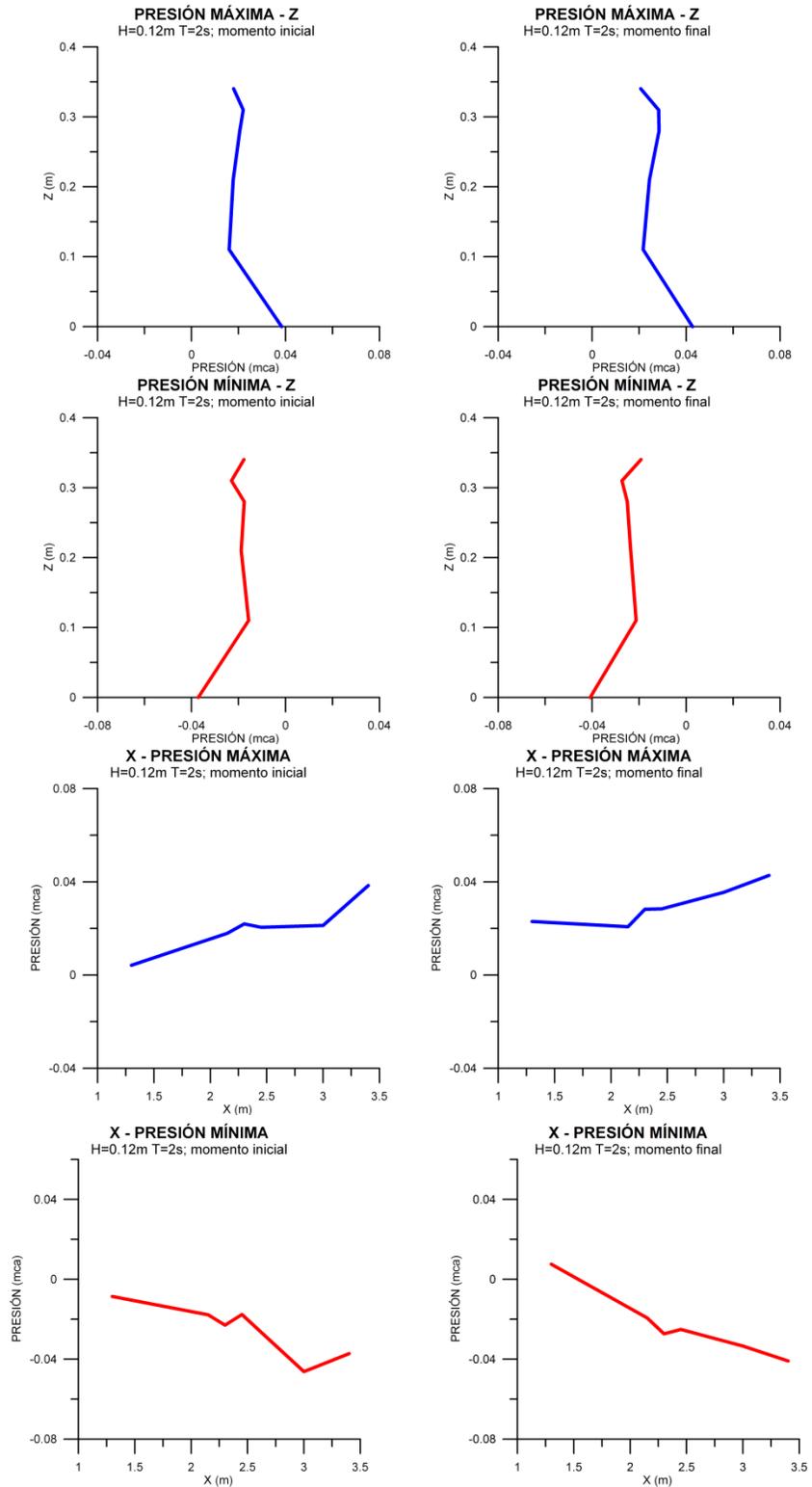


Figura B.15 Diagramas de presión para E.7, H=0.12m T=2s

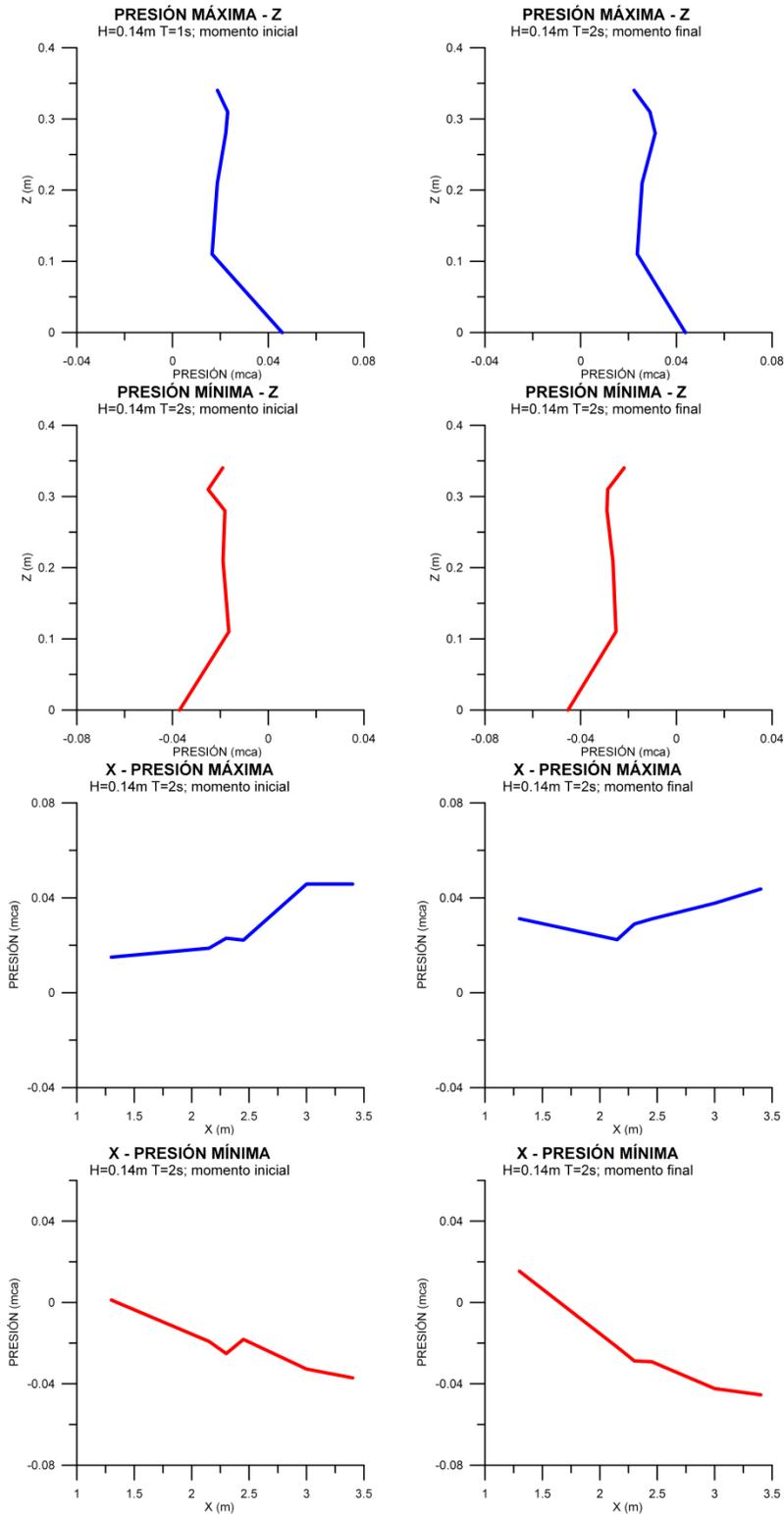


Figura B.16 Diagramas de presión para E.8, H=0.14m T=2s

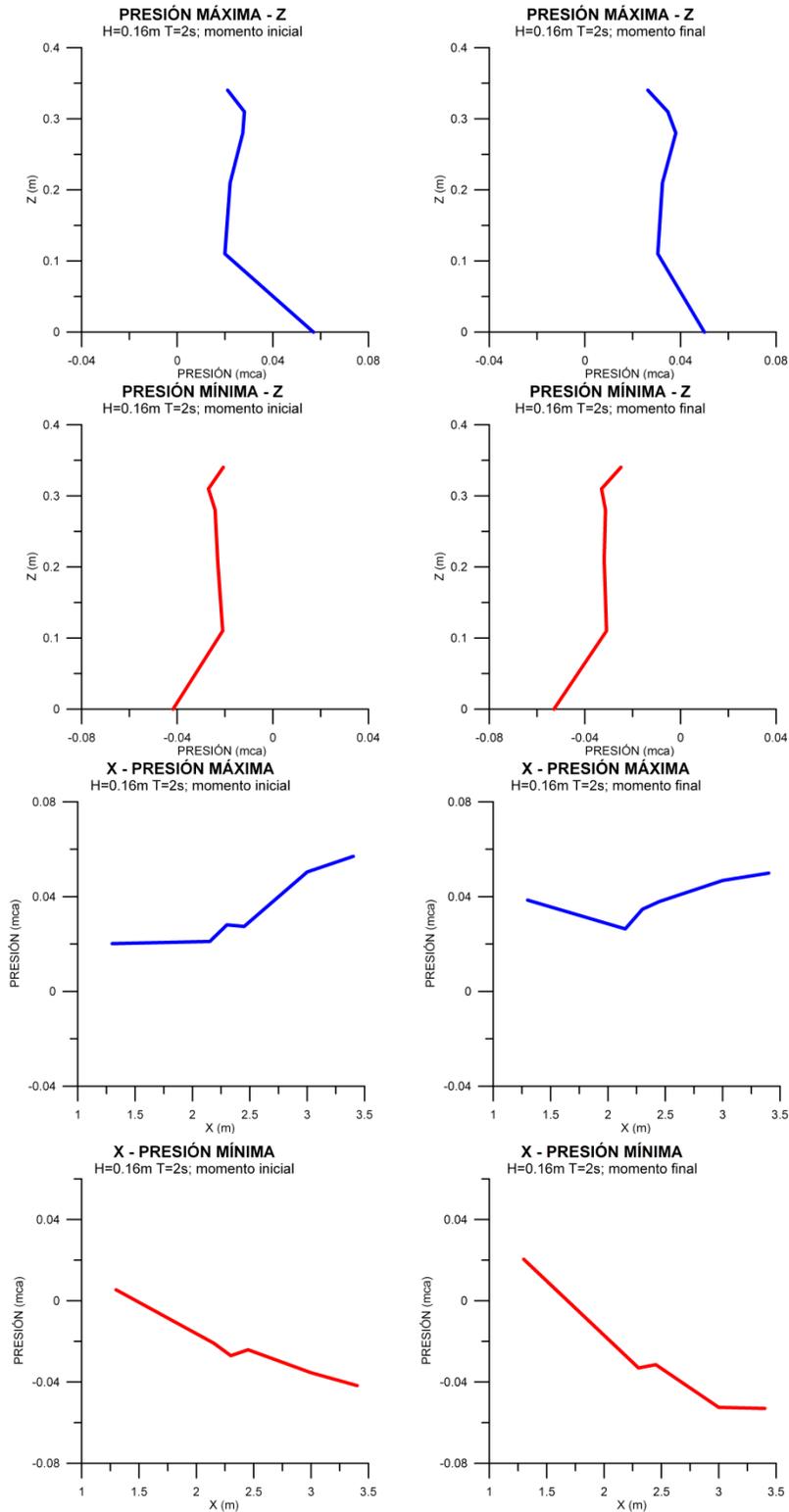


Figura B.17 Diagramas de presión para E.9,  $H=0.16\text{m}$   $T=2\text{s}$

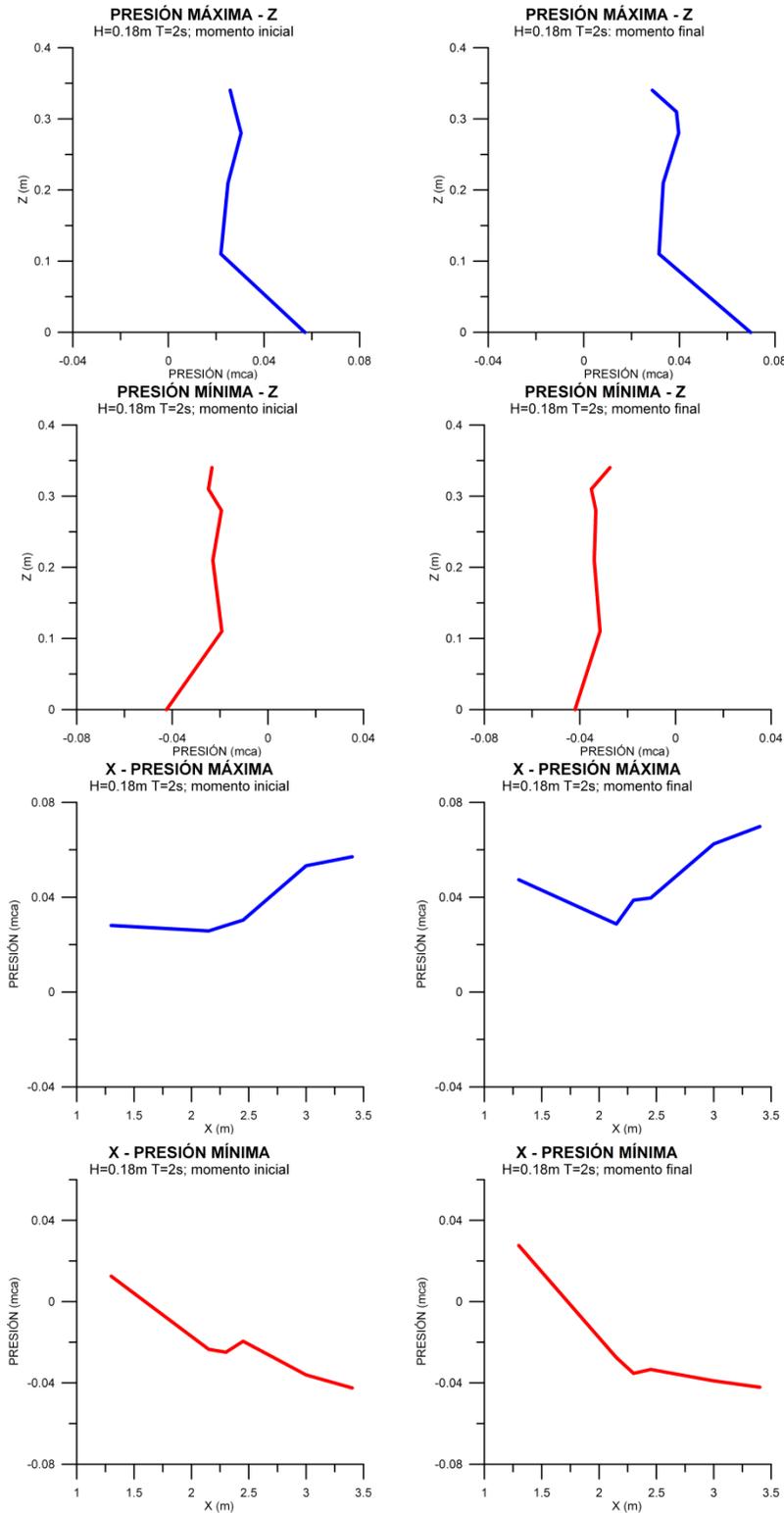


Figura B.18 Diagramas de presión para E.10,  $H=0.18\text{m}$   $T=2\text{s}$

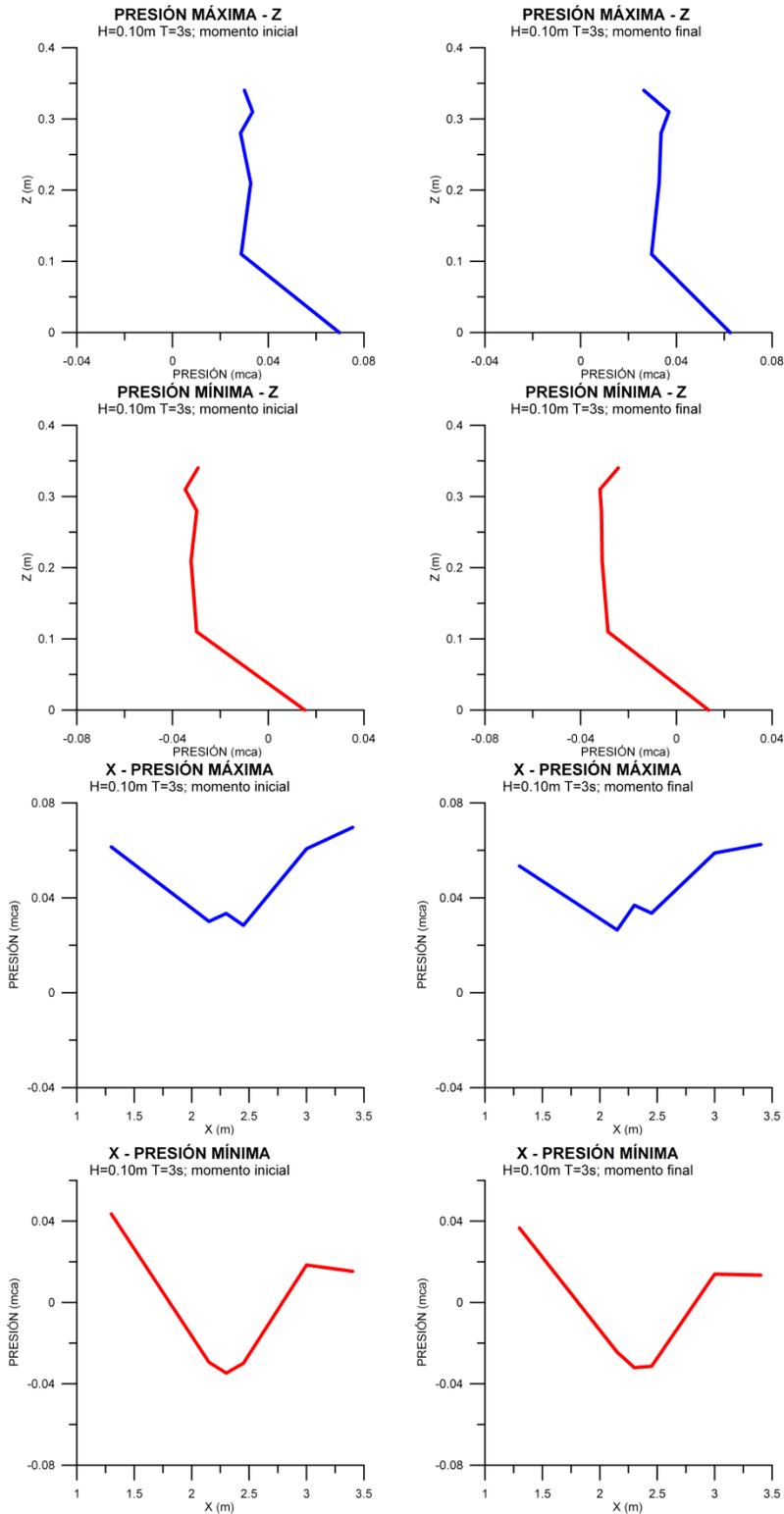


Figura B.19 Diagramas de presión para E.11,  $H=0.10\text{m}$   $T=3\text{s}$

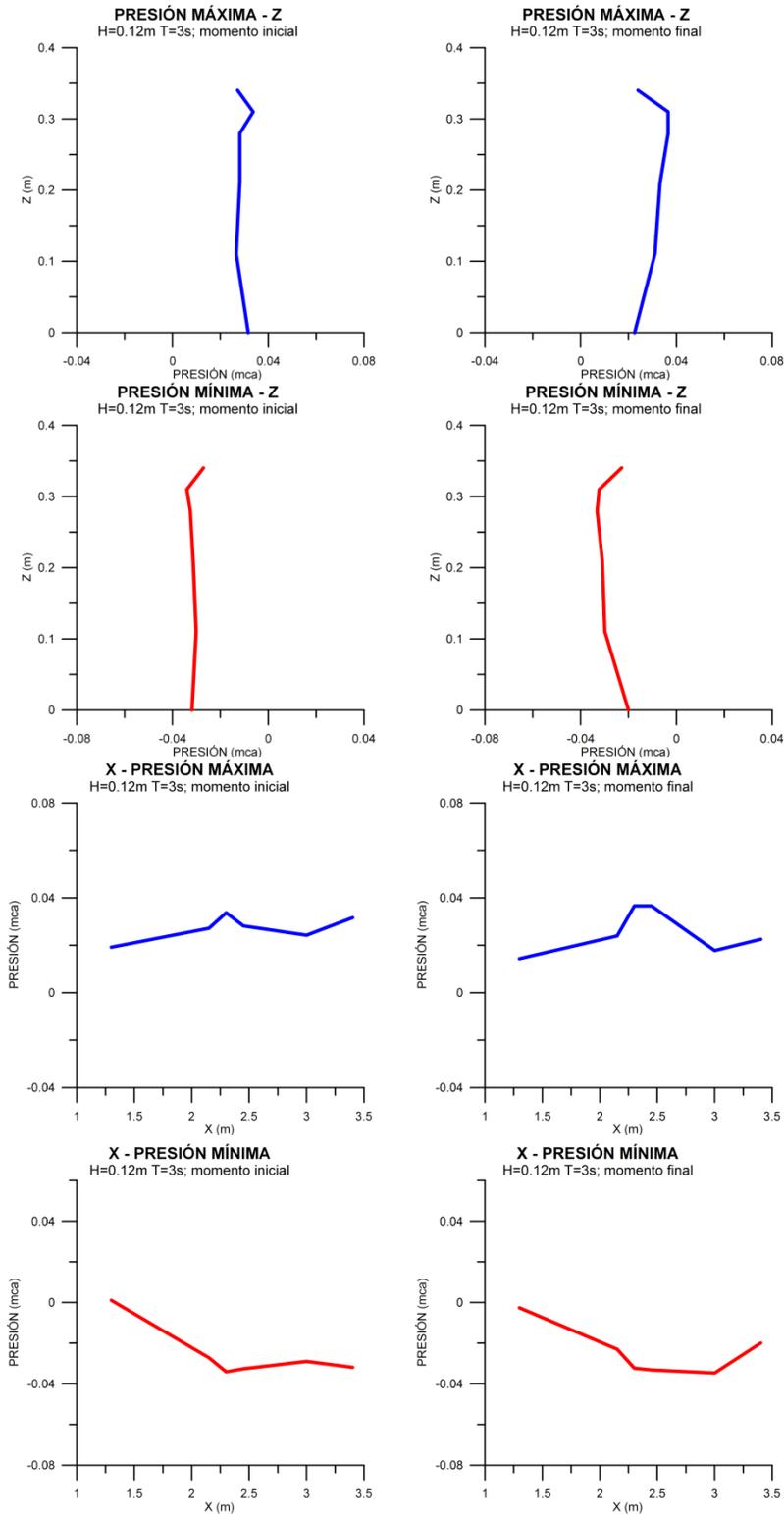


Figura B.20 Diagramas de presión para E.12, H=0.12m T=3s

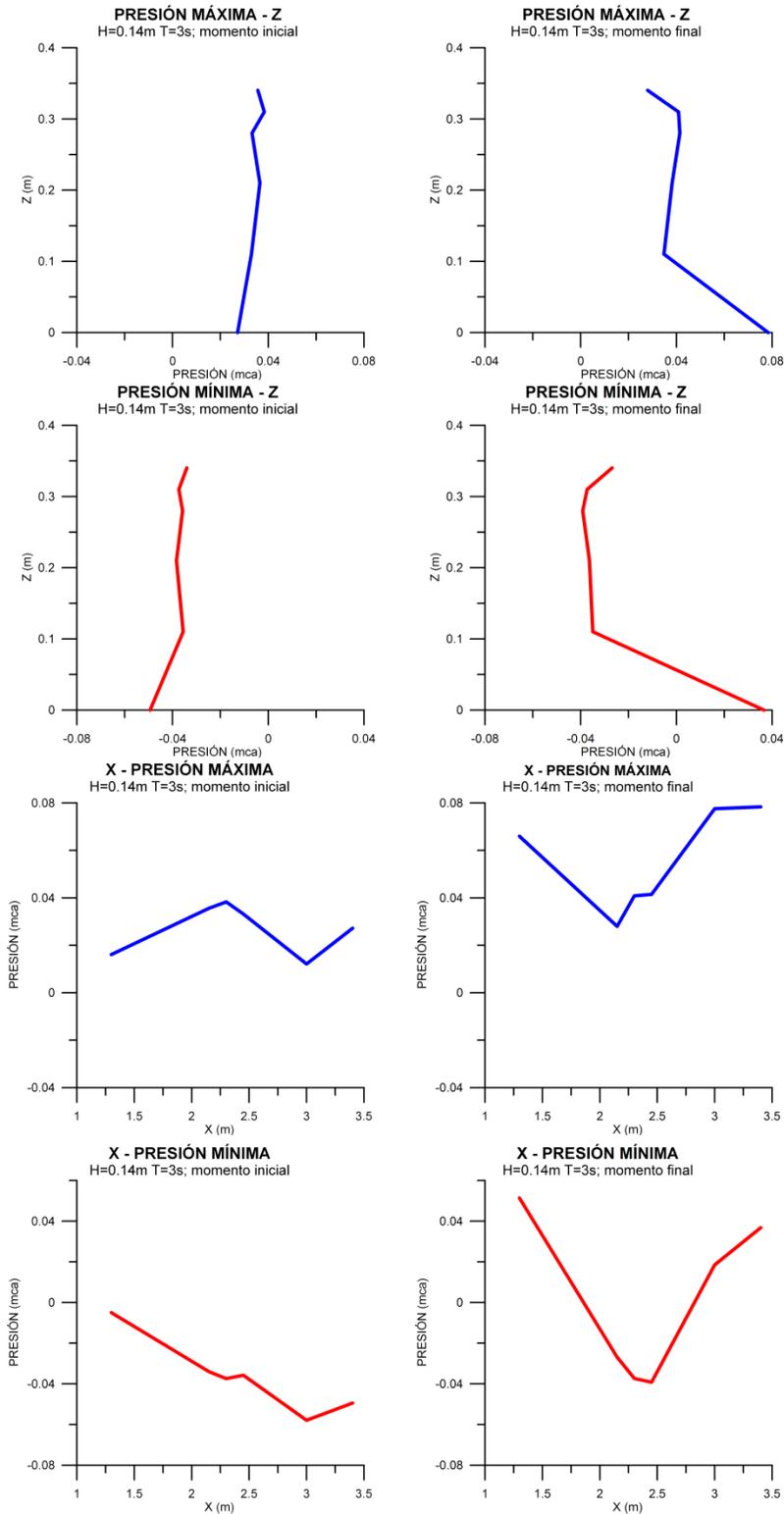


Figura B.21 Diagramas de presión para E.13,  $H=0.14\text{m}$   $T=3\text{s}$

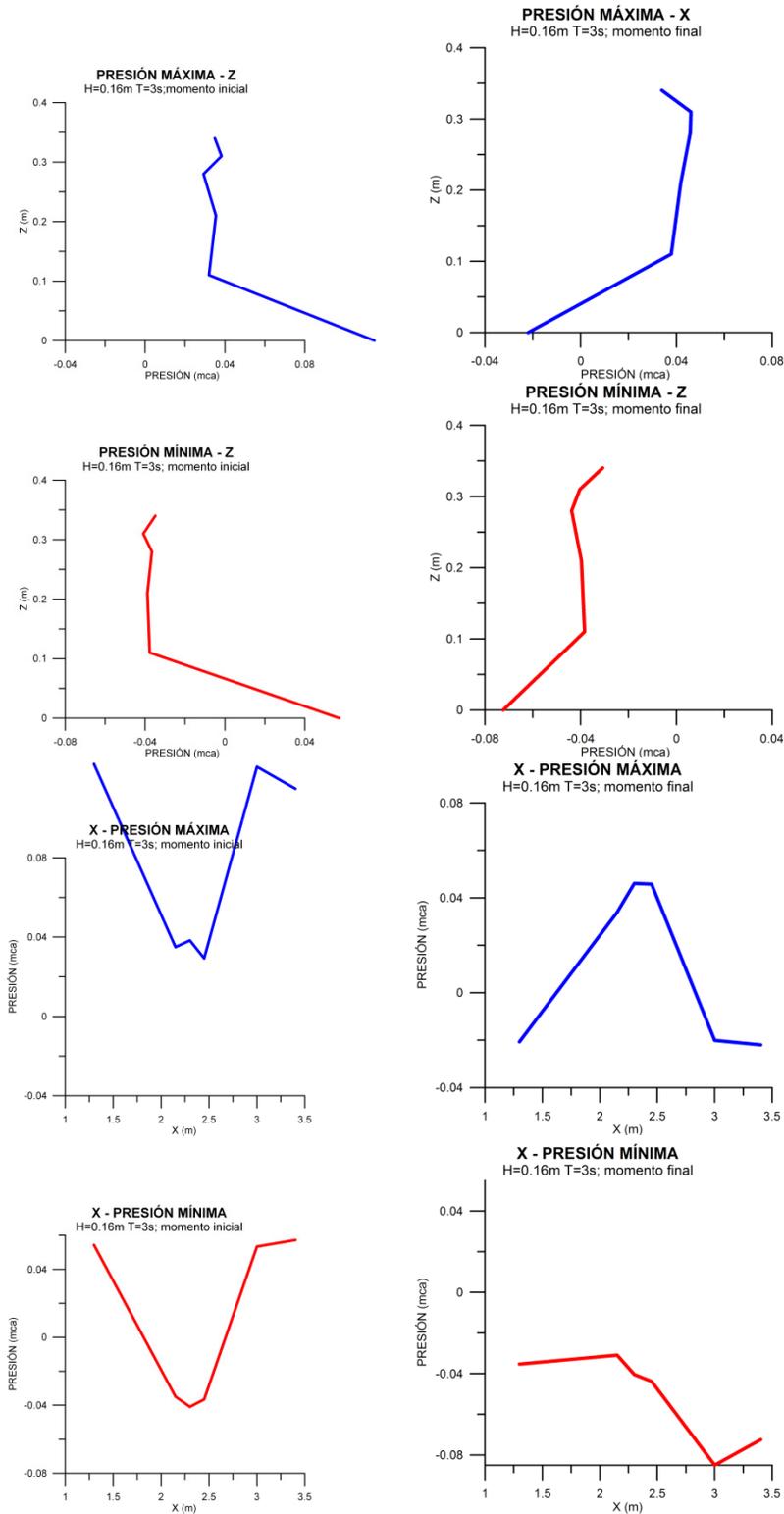


Figura B.22 Diagramas de presión para E.14, H=0.16m T=s

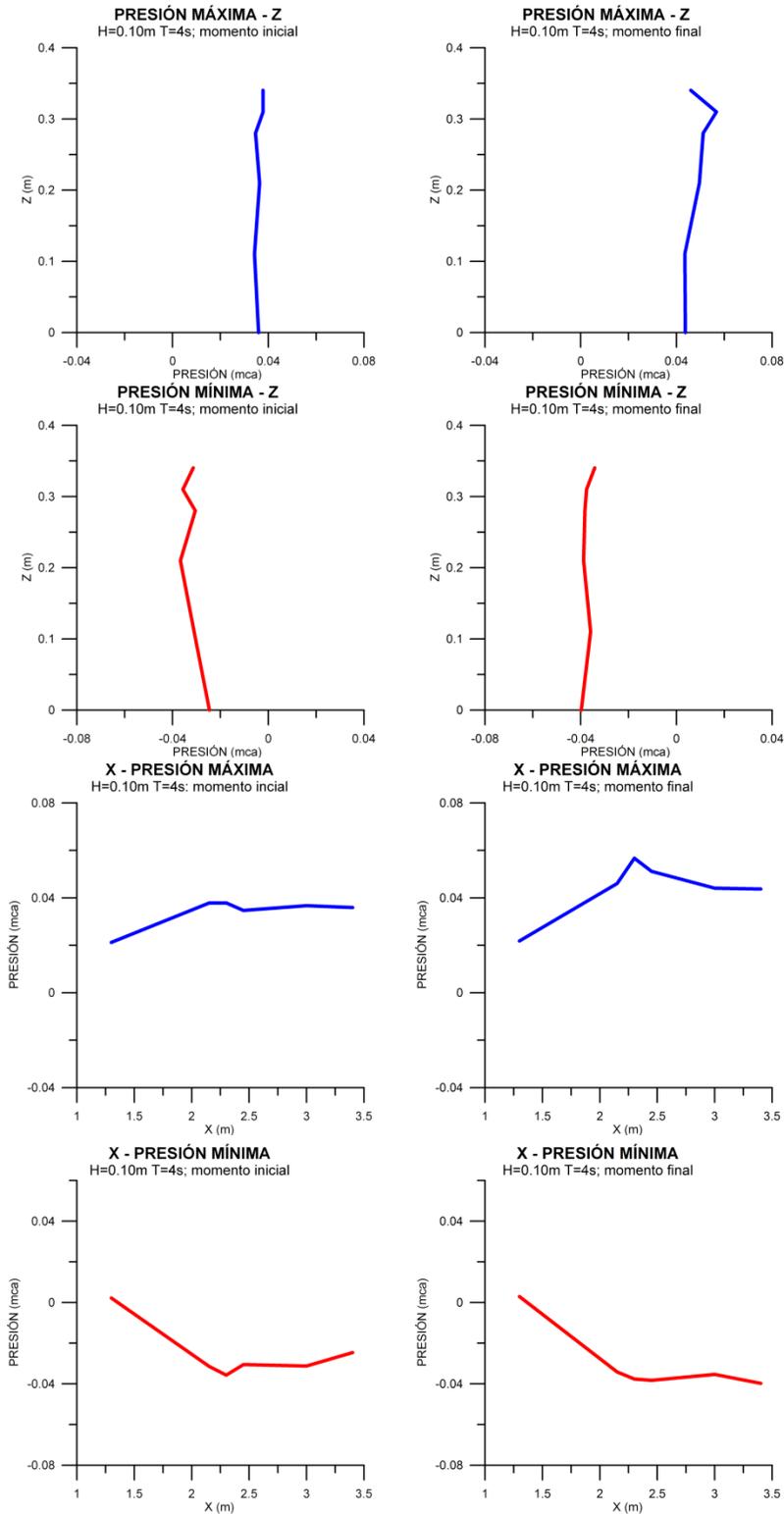


Figura B.23 Diagramas de presión para E.15,  $H=0.10\text{m}$   $T=4\text{s}$

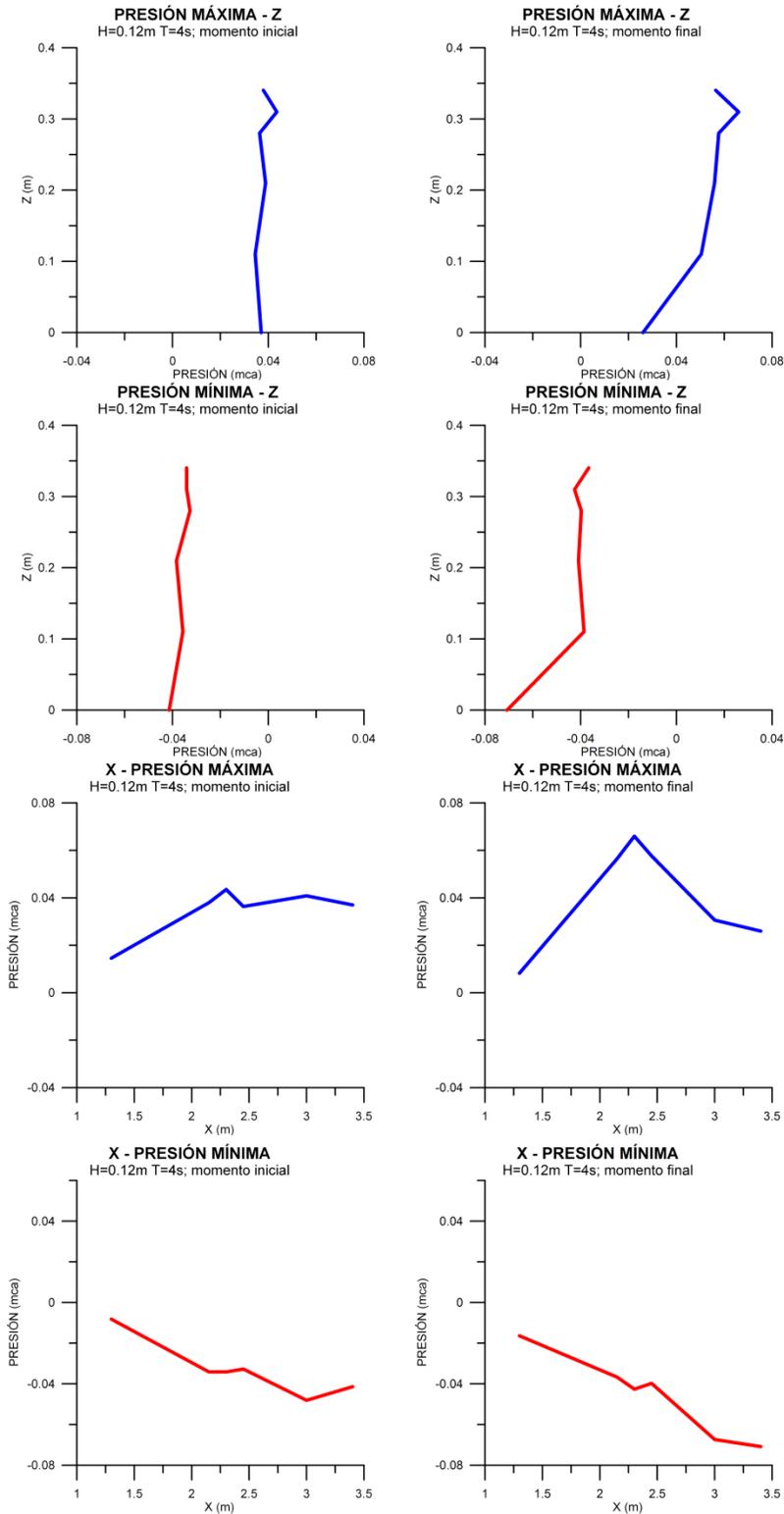


Figura B.24 Diagramas de presión para E.16,  $H=0.12\text{m}$   $T=4\text{s}$

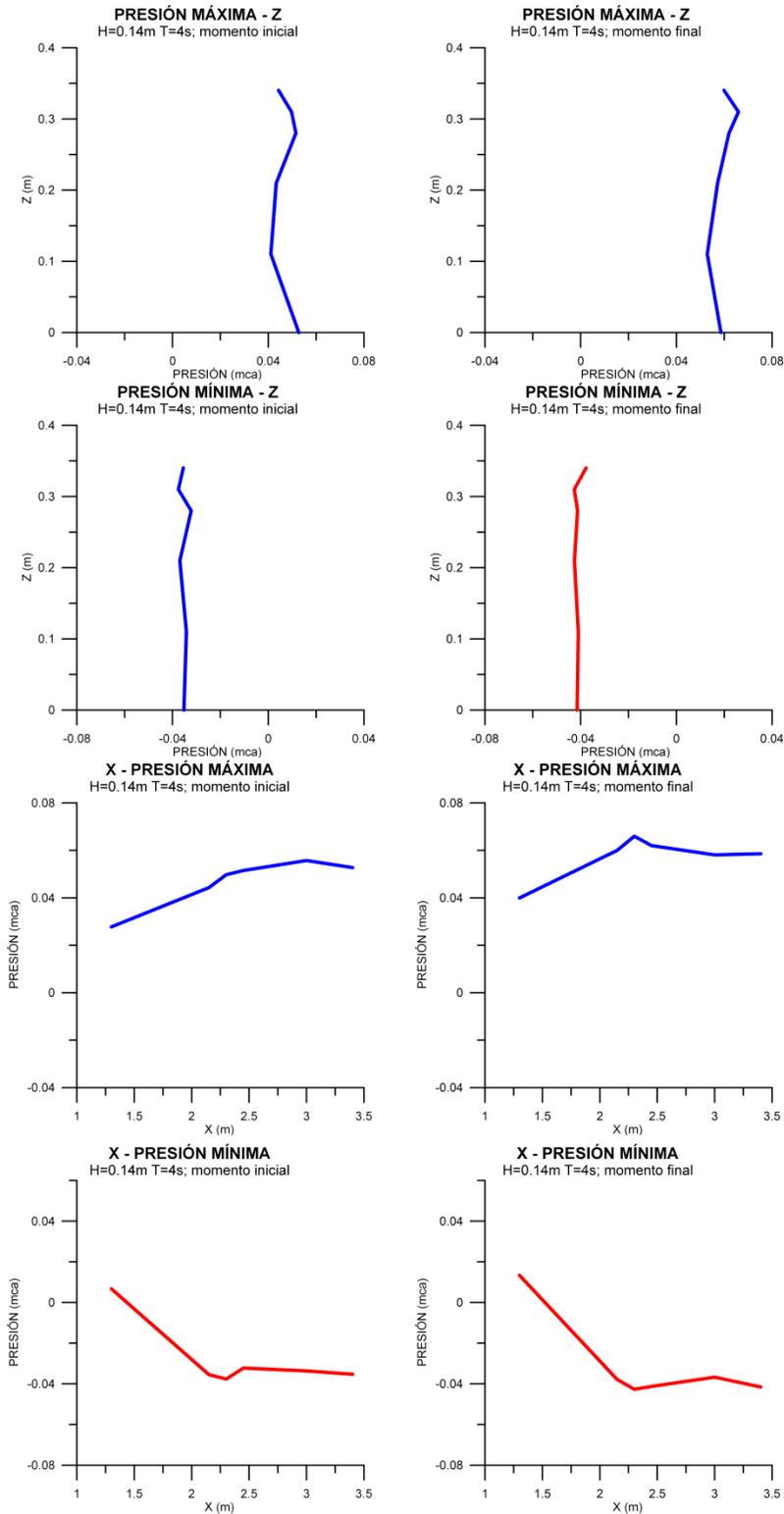


Figura B.25 Diagramas de presión para E.17, H=0.14m T=4s

## REFERENCIAS

- ✓ Baquerizo A, Asunción (1995). Reflexión del oleaje en playas. Métodos de evaluación y predicción, Tesis doctoral. Santander, Universidad de Cantabria, España.
- ✓ Battjes, J. A. (1974b). Surf similarity. ASCE (Ed.) Proc. 14 International Conference on Coastal Engineering, Copenague. pp. 466-480
- ✓ Berkhoff, J. (1972). Computation of combined refraction-diffracton. Proc. 13th.
- ✓ Chamberlain, P. and Porter, D. (1995). The modified mild-slope equation. Journal Fluid Mechanics Vol. 29: pp. 393-407.
- ✓ Coates TT and Daamgard JS, (1999). Towards improved management of mixed grain beaches. Proceedings of HYDRALAB workshop in Hannover. ISBN 3-00-004942-8, pp.69-73
- ✓ Dalrymple, R.A., Losada, M.A., Martin, P.A. (1991). Reflection and transmission from porous structures under oblique wave attack. J. Fluid Mechanics, Vol. 224: pp. 625-644.
- ✓ Dagan, G. (1979) Models of groundwater flow in statistically homogeneous porous formations. Water Resour. Res. Vol. 15: pp. 47-63.
- ✓ Darcy, H. (1856). Dètermination des lois d'écoulement de l'eau à travers le sable. p. 590-594. In Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon. Victor Dalmont, Paris.
- ✓ Dean, R. G. (~1977). Equilibrium beach profiles: U.S. Atlantic and Gulfcoasts. Ocean Eng. Rep. No. 12, Dept. of Civil Eng., Univ. of Delaware, Newark, Delaware
- ✓ Delgadillo Calzadilla, Miguel Ángel (2008). Sobre la evolución temporal de perfiles de playa granulares, Tesis de Licenciatura, UNAM, México.
- ✓ Horikawa (1988). Nearshore Dynamics and Coastal Processes, University of Tokyo Press, Tokyo.
- ✓ Iribarren, R. R. y Nogales, C. 1949. Protection des ports. Proc. XVII International Navigation Congress, Lisboa
- ✓ Iversen, 1952 H.W. (1952). Laboratory study of breakers, Gravity Waves, Circular No. 521, National Bureau of Standards, Washington, DC.
- ✓ Johnson, R., Mansard, E. & Ploeg, J. (1978). Effects of wave grouping on breakwater stability. in Int. Conference on Coastal Enginiering. Hamburg: ASCE
- ✓ Kinsman, B., 1965. Wind Waves. New Jersey: Printice-Hall, Englewood Cliffs

- ✓ Korteweg, D. J.; de Vries, G. (1895). On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves, *Philosophical Magazine* 39: 422-443
- ✓ Kozeny, J. (~1927). Ueber kapillare Leitung des Wassers im Boden. *Wien, Akad. Wiss.*, 136~2a, 271.
- ✓ Larson, M. (1991). Equilibrium profile of a beach with varying grain size, *Proceedings of Coastal Sediments, American Society of Civil Engineers (ASCE)* 27 (1991), pp. 905-919. View Record in Scopus | Cited By in Scopus (18)
- ✓ Le Mehaute, B. (1976). An introduction to hydrodynamics and water waves. Ed. Springer. Nueva York, EUA.
- ✓ Liu, P.L.-F. and R.A. Dalrymple (1984). The Damping of Gravity Water Waves Due to Percolation. *Coastal Engineering*, Vol. 8: pp. 33-49.
- ✓ Losada, I.J., Dalrymple, R.A. y Losada, M.A., (1993). Water Waves on Crown Breakwaters. *J. Waterways, Ports, Coastal, Oc. Engrg. Div., ASCE*. Vol. 119(4): pp. 367-380.
- ✓ Losada y Gimenez-Curto (1981). Flow characteristics on rough, permeable slopes under wave action. *Coastal Engineering*, vol 4, pp. 187-206.
- ✓ Losada I., Silva, R. Y Losada, M. (1996) Interaction of non-breaking directional random seas with submerged breakwaters. *Coastal Engineering*. Vol. 28: pp. 229-248.
- ✓ Mendoza Baldwin, Edgar G. (2006). Modelo unificado de propagación de oleaje e hidrodinámica no lineal, Tesis Doctoral, UNAM, México.
- ✓ Meneses Fernández, Ana Laura (2009). Efectos del nivel freático en playas, Tesis de Maestría, UNAM, México.
- ✓ Patrick and Wiegel, (1954). Amphibian tractors in the surf', *Conf: Ships and Waves* 1, 397.
- ✓ Pierson, W.J. & Marks, W. (1952). The power spectrum analysis of ocean wave records. *Trans. Amer. Geophys. Union*. 33: p. 834-44
- ✓ Quiñones Huerta, José Luis (2006). Estabilidad de diques en talud, Tesis de Maestría, UNAM, México.
- ✓ Reid, R.O. y Kajiura, K. (1957). On the Damping of Surface Gravity Waves in a Bounded Liquid. *Trans. Am. Geophys. Union*. Vol. 38
- ✓ Rojanakamthorn, S., Isobe, M. and Watanabe, A. (1989). A mathematical model of wave transformation over submerged breakwaters. *Coastal Engineering*. Vol. 32: pp. 209-234.
- ✓ Rojanakamthorn, S., Isobe, M. and Watanabe, A. (1990). Modelling of wave transformation on submerged breakwaters. *Proceedings 22nd ICCE, ASCE.*, New York, USA.

- ✓ Seelig, W y Ahrens, J. (1981). Estimation of wave reflection and energy dissipation coefficients for beaches, revetments and breakwaters. CERC Technical paper No. 81-1. USACE, Massachusetts, EUA.
- ✓ Serrano Navarro, Héctor Alexander (2008). Diseño geométrico de un dispositivo para el aprovechamiento del oleaje en zonas costeras, Tesis de Licenciatura, UNAM, México.
- ✓ Silva Casarín, Rodolfo (2005). Análisis y descripción estadística del oleaje, Serie de docencia, Instituto de Ingeniería de la UNAM, México.
- ✓ Silva, R., P. Salles, et al. (2002). Linear waves propagating over a rapidly varying finite porous bed. Coastal Engineering Vol. 44: pp. 239-260.
- ✓ Sollitt, C. and Cross, R. (1972). Wave transmission through permeable breakwaters. Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering, ASCE., Vancouver, Canada.
- ✓ Sverdrup, H.U. & Munk, W.H., (1947). Wind, sea and swell: theory of relation for forecasting. U.S. Navy Hydrographic Office Publication. Report. Number44
- ✓ Ward, J. (1964). Turbulent flow in porous media. Journal of Hydraulics Division, ASCE. Vol. 90: pp. 1-12.
- ✓ Wright, L.D., and Short, A. D. (1984). Morphodynamic variability of surf zones and beaches: A Synthesis: Marine Geology, v. 56, p. 93-118.

Algunas páginas de internet consultadas.

- ✓ <http://www.fuelcellknowledge.org/>
- ✓ [http://www.icm.csic.es/geo/gma/tema3/3\\_3.html](http://www.icm.csic.es/geo/gma/tema3/3_3.html)
- ✓ [http://sunsite.unam.mx/geografia\\_mexico.html](http://sunsite.unam.mx/geografia_mexico.html)
- ✓ <http://mapserver.inegi.org.mx/geografia/espanol/datosgeogra/extterri/frontera.cfm?s=geo&c=920>

