DIVISION DE EDU[illegible]CION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN SISTEMAS DE CALIDAD EN INGENIERIA DE PROYECTO Y CONSTRUCCION

MODULO II - CONTROL DE CALIDAD DE MATERIALES Y OBRAS.-

METODOS ESTADISTICOS PARA EL CONTROL DE CALIDAD

Del lunes 6 al viernes 10 de octubre de 16:00 a 21:00 Hrs.
Sábado 11 de octubre de 9:00 a 14:00 Hrs. y de 16:00 a 19:00 hrs.

FECHA	TEMA	PROFESOR
Lunes 6 de octubre	INTRODUCCION • Descripción general e importancia de los métodos estadísticos en el control de calidad. Ambitos de aplicación. MUESTREO Y PROCESAMIENTO DE DATOS • Obtención de muestras representativas. Procesamiento de información. Tablas y gráficas de frecuencias. Cálculo de valores característicos de posición central y de dispersión. • Aplicaciones.	DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ
Martes 7 de octubre	PROBABILIDAD • Eventos, Cálculo de probabilidades de eventos. Probabilidad condicional. Independencia de eventos. • Variables aleatorias continuas y discretas. Modelos probabilísticos comunes: Bernoulli, hipergeométrica, binomial, Poisson, exponencial y normal. • Aplicaciones	DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ M. en I. RAFAEL BRITO R.
Miercoles 8 de octubre	ESTIMACIONES Y PRUEBAS ESTADISTICAS • Distribuciones probabilísticas de los valores característicos de las muestras. • Estimaciones de los parámetros característicos de los modelos probabilísticos, mediante valores individuales e intervalos de confianza. • Pruebas estadísticas qué involucren valores medios, variancias y proporciones. • Aplicaciones.	M. en I. RAFAEL BRITO R.

No. 2

Jueves 9 de octubre	**CARTAS DE CONTROL DE CALIDAD** • Elaboración e interpretación de cartas de control. • Desarrollo de cartas de control para promedios, rangos, desviaciones estándar y proporciones. • Aplicaciones.	M. en I. AUGUSTO VILLARREAL A.
Viernes 10 y sábado 11 de octubre	**INSPECCION Y ANALISIS DE LA CALIDAD EN MATERIAS PRIMAS Y PRODUCTOS** • Muestreo de inspección. • Herramientas estadísticas de interpretación y decisión. • Verificación de la calidad en lotes mediante planes de muestreo simples y dobles. • Aplicaciones.	M. en I. RUBEN TELLEZ SANCHEZ

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

" DIPLOMADO EN SISTEMAS DE CALIDAD EN INGENIERÍA DE PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN "

MÓDULO II

CONTROL DE CALIDAD DE MATERIALES Y OBRAS

PARTE I

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA EL CONTROL DE CALIDAD

TEMA:

INTRODUCCIÓN AL CURSO

EXPOSITOR: DR. OCTAVIO RASCÓN CHÁVEZ
1997

DIPLOMADO DE CALIDAD EN LA CONSTRUCCIÓN

MÓDULO I: MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA CONTROL DE CALIDAD

1.1 INTRODUCCIÓN AL CURSO

Prof: Dr. Octavio A. Rascón Chávez

1. *PRESENTACIÓN*

La necesaria modernización del país requiere inversiones cada vez mayores en infraestructuras, pero no pueden ir más allá de lo que las condiciones económicas puedan permitir. Ello exige **aumentar la eficacia y la eficiencia** de los recursos disponibles.

La consecución de estos requerimientos, frente a unos usuarios cada vez más exigentes, con un adecuado respeto a los medios físico y ambiental, y con una adecuada credibilidad, obliga a **mejorar las formas de control de calidad de las obras**.

La **calidad**, desde el punto de vista del ciudadano, es esencialmente **calidad de uso**. Es decir el conjunto de propiedades y características que dan a una obra la capacidad de cubrir de modo satisfactorio, tanto las necesidades implícitas como las explícitas involucradas en la utilización del bien.

Para las administraciones públicas y las empresas existe un factor crítico de la calidad en el proceso de concepción y construcción de sus obras, y es que las mismas no cumplan o no se adapten a la demanda y necesidades de los usuarios.

Toda obra es el resultado de un **proceso** de planeación, diseño, proyecto, construcción y conservación posterior, que requiere por sí mismo una **calidad global**, misma que no se puede obtener a un costo adecuado si en el proceso se trasladan responsabilidades propias de cada etapa a la siguiente, porque esto da lugar a modificaciones, actuaciones complementarias y elevación de las necesidades de conservación. Todo ello no sólo produce una mala imagen de la capacidad técnica de los diferentes agentes (Administración, Ingenierías Consultoras y Empresas), sino unos costos adicionales de la "no calidad", muchas veces difícilmente explicables e incontrolables.

En una obra la calidad requerida se establece en el marco contractual de unas **especificaciones**.

La obtención de la calidad se basa en la **convicción** de que la misma es rentable y de que no cuesta cara. La aparente carestía, apreciada por algunos, se fundamenta en no analizar adecuadamente el costo de los problemas ulteriores.

La calidad se consigue a través de una **adecuada realización del proceso** que debe estar bien planificado, programado y ejecutado, de modo que se imposibiliten los errores, en su caso se prevengan y se evite lo más posible el tener que corregirlos a partir de los resultados de los controles.

De las ideas anteriores, se derivan los dos grandes sistemas de control, complementarios y no contradictorios, los **controles de producción** y los **controles de aceptación**, necesarios los primeros para alcanzar las calidades requeridas y los segundos para evitar que se sacrifique la calidad a los costos.

La calidad es el resultado de la aplicación de un **sistema de gestión de la calidad**, que afecta a **todas las etapas del proceso** de inversión (planificación, programación, proyecto, licitación y obra), por lo que los comportamientos de todos los que intervienen en el proceso son esenciales. Algunos tanto, incluso, como los involucrados en el proceso de construcción...

La calidad se fundamenta en la competencia profesional de todos los que participan, por lo que la atención continua a lo largo del proceso es esencial.

Entre los beneficios que la calidad produce, se pueden señalar que el constructor tendrá ahorros porque:

- Si aplican sistemáticamente las medidas necesarias para obtener su calidad, ahorrará tiempo, materiales y mano de obra.

- Si da una buena calidad, se ahorra discusiones con la Administración o el cliente.

- Si consigue calidad, mejorará su capacidad para que sean aceptables sus ofertas en contratos posteriores.

La Administración tendrá ventajas porque:

- Los usuarios se sentirán más satisfechos.
- La mejora de los procesos permitirá unos precios más ajustados en posteriores ofertas.
- Una mayor fiabilidad del constructor permitirá a la Administración aligerar el contenido de los controles exteriores.

Un sistema de aseguramiento de la calidad requiere:

- Escribir lo que se va a hacer.
- Hacer lo que se ha escrito.
- Escribir lo que se ha hecho.
- Archivar lo escrito.

Exige también tener **conciencia** de que la calidad es necesaria, conciencia que se debe **poseer y transmitir**, **desde los más altos niveles** de las organizaciones implicadas a todos los participantes.

2. *FILOSOFIA*

Las dos **premisas** o **pilares** en que se fundamenta la filosofía y esencia del **Aseguramiento Total de la Calidad** son:

1) Cualquier operación o actividad de trabajo debe verse como un PROCESO.

2) La persona más importante relacionada con un proceso es el CLIENTE.

De esta forma el Aseguramiento Total de la Calidad puede definirse como:

El estilo de trabajo basado en una metodología operativa, y totalmente comprometido con el continuo mejoramiento en la calidad de los productos y servicios para <u>maximizar la satisfacción</u> de los clientes.

3. *ELEMENTOS Y CARACTERISTICAS.*

Los elementos operativos fundamentales del Aseguramiento Total de la Calidad son:

a) ENFOQUE en el continuo mejoramiento de los procesos.

- Cualquier actividad es un proceso.

- Empleo de datos y métodos científicos de análisis.

- Su meta es alcanzar la perfección.

b) REQUIERE de participación universal.

- Todas las personas pueden y deben practicarlo indepedientemente de su posición y funciones.

- Debe aplicarse en todas partes en una organización.

- Necesita, y a la vez propicia, un trabajo en equipo efectivo.

c) PRODUCE la satisfacción de los clientes.

- Excediendo sus necesidades y expectativas.

- Eliminando las preocupaciones de clientes externos e internos.

Las CARACTERISTICAS principales del Aseguramiento Total de la Calidad que complementan su definición, pueden sintetizarse de la siguiente manera:

1) Representa una alternativa para generar nuevas ideas y utilizar enfoques diferentes, que rompan con la peligrosa costumbre de hacer las cosas siempre de la misma forma.

2) Ofrece una metodología estructurada para identificar y resolver problemas en lugar de vivir "apagando fuegos".

3) Para resultar convincente y exitoso en una organización, requiere antes que nada el compromiso y evidencia de ser aprendido y utilizado **por los directivos de más alto nivel**, y continuar su expansión hacia abajo hasta llegar al último de los empleados.

4) Utiliza conceptos y técnicas de **control estadístico** como soporte a la toma de decisiones encaminada al mejoramiento de los procesos.

5) Es una solución permanente que en forma paulatina se convierte en un estilo de vida.

Los BENEFICIOS internos y externos que ofrece la aplicación del Aseguramiento Total de la Calidad en un sistema productivo, se ilustran en la siguiente figura:

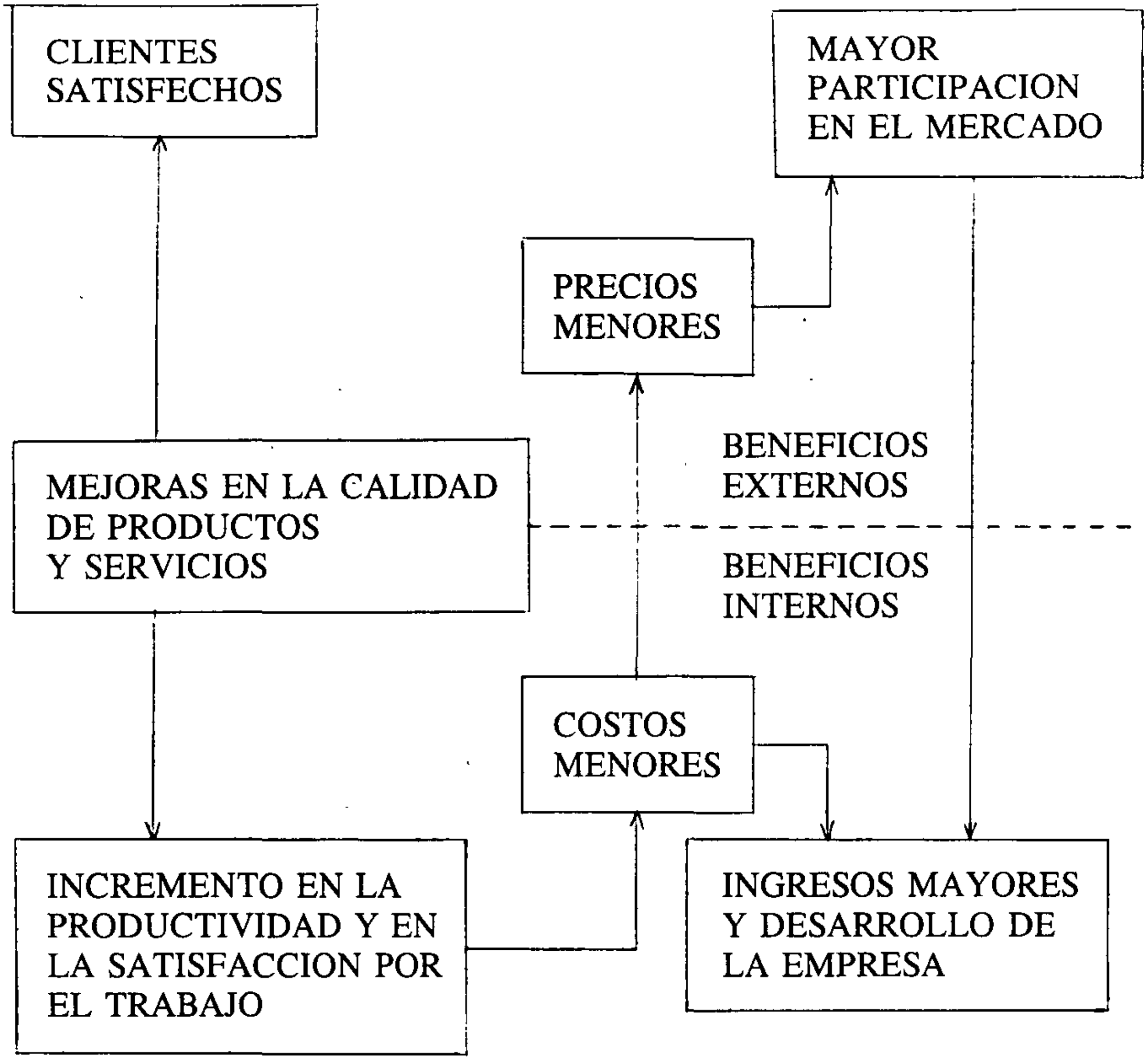


FIGURA 1. BENEFICIOS INTERNOS Y EXTERNOS DEL ASEGURAMIENTO TOTAL DE LA CALIDAD.

4. *METODOLOGIA PARA EL MEJORAMIENTO CONTINUO DE LOS PROCESOS*

El Aseguramiento Total de la Calidad asume cualquier función operativa o actividad, y es un proceso con un propósito determinado cuya **misión primordial es satisfacer los requerimientos de sus clientes**. En este contexto, el papel que juega el Aseguramiento Total de la Calidad, consiste en "asegurar" el **continuo mejoramiento** en la calidad de los procesos y sus resultados, para garantizar el cumplimiento de la misión.

El mejoramiento continuo en los procesos, solamente se puede lograr con un **mecanismo de monitoreo y retroalimentación**, también continuo y permanente.

Esquemáticamente, el sistema puede conceptualizarse de la forma que se indica en la figura 2:

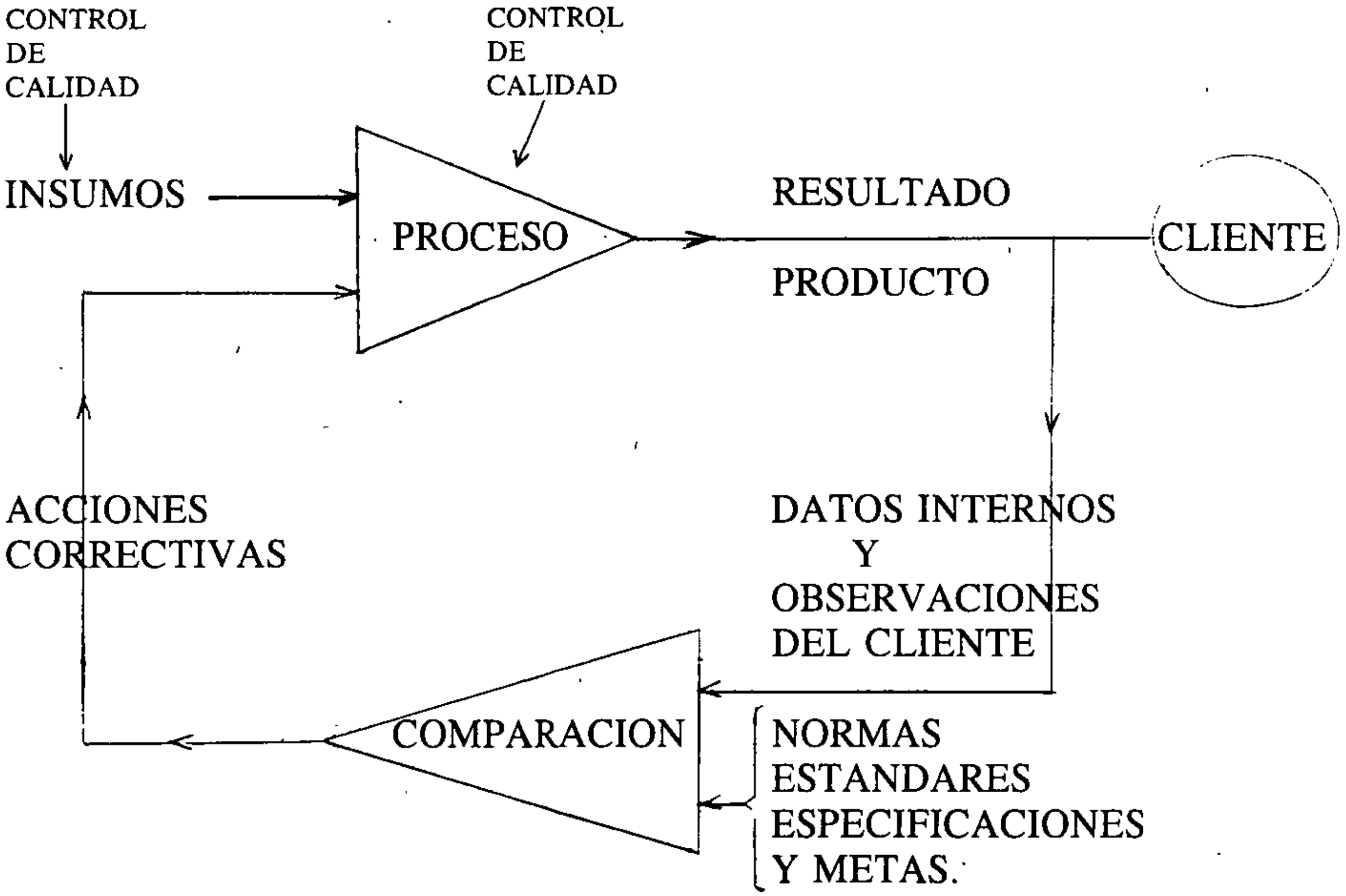


FIGURA 2. SISTEMA DE MONITOREO Y RETROALIMENTACION EN EL ASEGURAMIENTO TOTAL DE LA CALIDAD.

5. *INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS ESTADÍSTICOS*

* LA CALIDAD DE UN PRODUCTO O MATERIAL SE CARACTERIZA POR EL COMPORTAMIENTO DE UNA O MÁS CARACTERÍSTICAS (ATRIBUTOS O VARIABLES) DEL MISMO

* LOS ATRIBUTOS Y LAS VARIABLES SE REPRESENTAN MEDIANTE ALGUNA **MEDIDA**

* PARA **MEDIR** SE REQUIEREN MÉTODOS, TÉCNICAS Y APARATOS ADECUADOS, CON EL FIN DE OBTENER DATOS FIDEDIGNOS

* LAS MEDICIONES DEBEN PODER REPETIRSE PARA OBTENER EL MISMO TIPO DE INFORMACIÓN EN CADA UNIDAD DEL PRODUCTO O MATERIAL, Y OBTENER ASÍ **COLECCIONES DE DATOS O MUESTRAS**

* LOS **MÉTODOS ESTADÍSTICOS** DE CONTROL DE CALIDAD DAN LOS PROCEDIMIENTOS PARA OBTENER LAS MUESTRAS, PROCESARLAS Y PRESENTAR E INTERPRETAR LOS RESULTADOS, CON EL PROPOSITO DE LOCALIZAR LAS CAUSAS QUE PROVOCAN LA ELABORACIÓN DE PRODUCTOS DEFECTUOSOS

* EN GENERAL, HAY DOS TIPOS DE PROBLEMAS QUE SE ESTUDIAN CON LOS MÉTODOS ESTADÍSTICOS:

1.- LOS QUE SE PRESENTAN **DURANTE** LA PRODUCCIÓN.
ESTOS SE ANALIZAN MEDIANTE LAS **CARTAS DE CONTROL**.

2.- LOS CORRESPONDIENTES A MATERIAS PRIMAS Y A PRODUCTOS YA ELABORADOS.
ESTOS SE ANALIZAN MEDIANTE **INSPECCIÓN POR MUESTREO**.

* PARA ESTUDIAR AMBOS TIPOS DE PROBLEMA, SE HACEN MEDICIONES DE LA O LAS CARACTERÍSTICAS QUE SE DESEAN CONTROLAR, LAS CUALES SE REALIZAN DE ACUERDO CON UN PROGRAMA PREDEFINIDO.

* LOS **DATOS** QUE SE OBTIENEN AL REALIZAR LAS MEDICIONES, **VARÍAN** DE UNA A OTRA VERIFICACIÓN.

LAS VARIACIONES PUEDEN DEBERSE AL INSTRUMENTO DE MEDICIÓN, AL PROCEDIMIENTO DE PRUEBA, A DIFERENCIAS " RAZONABLES " EN LAS PROPIEDADES DE LAS MATERIAS PRIMAS, A DESGASTES GRADUALES DE LA MAQUINARIA, ETC.

* LOS MÉTODOS ESTADÍSTICOS CONSTITUYEN LAS "HERRAMIENTAS" PARA IDENTIFICAR OPORTUNAMENTE LAS **VARIACIONES** EN LOS DATOS, QUE REFLEJAN QUE EL PROCESO DE PRODUCCIÓN ESTÁ SALIÉNDOSE DE CONTROL, O SI LOS PRODUCTOS O MATERIALES INSPECCIONADOS CUMPLEN CON LOS REQUISITOS Y ESPECIFICACIONES ESTABLECIDAS.

* SE DICE QUE SE REALIZA UNA INSPECCIÓN POR **VARIABLES** CUANDO LAS MEDICIONES DE LAS CARACTERÍSTICAS BAJO CONTROL SE REGISTRAN EN TÉRMINOS **CUANTITATIVOS O NUMÉRICOS**.
TAL ES EL CASO DE MEDICIÓN DE RESISTENCIAS, DIMENSIONES, VOLÚMENES, DEFORMACIONES, PROPIEDADES MECÁNICAS, ETC.

* SE DICE QUE SE REALIZA UNA INSPECCIÓN POR **ATRIBUTOS** CUANDO LA INFORMACIÓN QUE SE OBTIENE O REGISTRA SE SEÑALA EN FORMA **CUALITATIVA**.
POR EJEMPLO, SI LOS DATOS SE REPORTAN COMO **BUENO O DEFECTUOSO**; O SI **PASA** O **NO PASA**, ETC.

5.1 *HERRAMIENTAS PARA EL CONTROL DE CALIDAD ESTADÍSTICO*

1. **CARTAS DE CONTROL**, PARA **CARACTERÍSTICAS DE CALIDAD MESURABLES**. SE TRABAJA CON LOS PROMEDIOS ARITMÉTICOS, LAS DESVIACIONES ESTÁNDAR Y LOS RANGOS DE LAS MUESTRAS QUE SE OBTIENEN PARA MONITOREAR LA CALIDAD DEL PROCESO. (GRÁFICA DE $\bar{X}$, R y σ).

2. **CARTAS DE CONTROL** PARA LA **FRACCIÓN O PORCENTAJE DE ELEMENTOS DEFECTUOSOS**. (GRÁFICA P).

3. **CARTAS DE CONTROL** PARA EL **NÚMERO DE DEFECTOS** POR UNIDAD. (GRÁFICAS C).

4. **MUESTREO DE ACEPTACIÓN**, PARA EVALUAR ESTADÍSTICAMENTE LA CALIDAD DE LAS MATERIAS PRIMAS Y LOS PRODUCTOS TERMINADOS O EN ALGUNA ETAPA DEL PROCESO DE PRODUCCIÓN.

5.2 *CARTAS DE CONTROL*

LA CALIDAD DE UN PRODUCTO MANUFACTURADO ESTÁ SIEMPRE SUJETA A UNA **CIERTA VARIACIÓN**, COMO RESULTADO DEL **AZAR**.

SIEMPRE EXISTE **UN PATRÓN** DE CAUSAS CASUALES ESTABLE, QUE ES INHERENTE A CUALQUIER ESQUEMA DE PRODUCCIÓN Y DE INSPECCIÓN.

LA VARIACIÓN DENTRO DE ESTE PATRÓN ESTABLE ES INEVITABLE Y MEDIBLE EN TÉRMINOS ESTADÍSTICOS. TAMBIÉN EXISTEN CAUSAS **ADICIONALES** DE VARIACIÓN **QUE SON EXTERNAS A ESTE PATRÓN**, PERO QUE PUEDEN SER DETECTADAS Y CORREGIDAS.

LAS **CARTAS DE CONTROL** SON HERRAMIENTAS ESTADÍSTICAS QUE PERMITEN DETERMINAR CUÁNDO SE PRESENTAN LAS VARIACIONES EXTERNAS. POR TANTO, HACEN POSIBLE EL **DIAGNÓSTICO** Y **CORRECCIÓN** DE MUCHOS PROBLEMAS DE PRODUCCIÓN, POR LO QUE DAN PAUTAS PARA REALIZAR ACCIONES EN EL PROCESO DE PRODUCCIÓN, QUE LLEVEN A MEJORAS CONSIDERABLES EN LA CALIDAD DEL PRODUCTO Y A LA REDUCCIÓN DE DESPERDICIOS Y REPROCESADO.

AL DETERMINAR ESTADÍSTICAMENTE CUÁLES SON LAS BANDAS DE VARIACIÓN DE LA CALIDAD, OCASIONADA POR ELEMENTOS INEVITABLES, ASOCIADAS A **CIERTAS PROBABILIDADES** DE QUE LOS RESULTADOS DE LAS MEDICIONES SE MANTENGAN DENTRO DE ELLAS, LA CARTA DE CONTROL INDICA CUÁNDO EL PROCESO ESTÁ **BAJO CONTROL** Y, DE ESTA FORMA, EVITA AJUSTES INNECESARIOS AL MISMO, O CUANDO SE HA SALIDO DE CONTROL Y ES NECESARIO TOMAR ACCIONES CORRECTIVAS.

5.3 *CARTAS DE CONTROL: BENEFICIOS*

1. **LA VIABILIDAD BÁSICA DE LA CARACTERÍSTICA DE CALIDAD**.

CUANDO SE HAN ESPECIFICADO TANTO UN **VALOR SUPERIOR** COMO UNO **INFERIOR** TOLERABLES PARA UNA CARACTERÍSTICA DE LA CALIDAD, UN PROBLEMA TÉCNICO IMPORTANTE QUE SE PRESENTA, CONSISTE EN DETERMINAR SI LA VARIABILIDAD BÁSICA (CASUAL) DEL PROCESO DE PRODUCCIÓN, ES TAN GRANDE QUE SEA MUY DIFÍCIL FABRICAR "TODO" EL PRODUCTO DENTRO DE LOS LÍMITES ESPECIFICADOS.

2. **EL NIVEL GENERAL DE LAS CARACTERÍSTICAS DE CALIDAD**.

AUN CUANDO LA VARIABILIDAD BÁSICA DE UN PROCESO, SEA TAL QUE LA GAMA NATURAL DE VARIACIÓN SEA MÁS ESTRECHA QUE LA GAMA DE TOLERANCIA ESPECIFICADA, Y QUE EL PROCESO SE ENCUENTRE BAJO CONTROL, EL PRODUCTO **PUEDE SER NO SATISFACTORIO** PARA UNA CLIENTELA EN PARTICULAR, DADO QUE EL NIVEL DE CALIDAD ESPECIFICADO ES DEMASIADO BAJO.

3. **LA CONSISTENCIA DEL RENDIMIENTO**.

LA VARIABILIDAD DE LA CARACTERÍSTICA DE CALIDAD PUEDE SEGUIR UN PATRÓN **CASUAL** O PUEDE COMPORTARSE ERRÁTICAMENTE DEBIDO A LAS **CAUSAS ASIGNABLES**. AL DETECTARSE CUÁL SITUACIÓN PREVALECE, SE DA LA PAUTA PARA DECIDIR SOBRE DEJAR AL PROCESO COMO ESTÁ O TOMAR ACCIONES PARA CORREGIR LOS MOTIVOS DE LAS DIFICULTADES.

5.4 *MUESTREO DE ACEPTACION*

LA **INSPECCIÓN DE ACEPTACIÓN** ES UNA PARTE NECESARIA DE LA MANUFACTURA, Y PUEDE SER APLICADA A LOS MATERIALES QUE SE RECIBEN, A LOS PRODUCTOS PARCIALMENTE ACABADOS EN DIFERENTES ETAPAS INTERMEDIAS DEL PROCESO DE MANUFACTURA, Y AL PRODUCTO FINAL. LA INSPECCIÓN DE ACEPTACIÓN PUEDE LLEVARSE A CABO EXTERIORMENTE POR EL COMPRADOR.

MUCHA DE ESTA INSPECCIÓN DE ACEPTACIÓN SE LLEVA A CABO MEDIANTE **MUESTREO**, YA QUE A MENUDO LA INSPECCIÓN DEL TOTAL RESULTA IMPRACTICABLE O CLARAMENTE ANTIECONÓMICA.

DEBE RECONOCERSE QUE MIENTRAS UNA PARTE DEL PRODUCTO SEA DEFECTUOSA, ES POSIBLE QUE ALGUNOS ELEMENTOS SEAN PASADOS POR ALTO, CUALQUIERA QUE SEA EL ESQUEMA DEL MUESTREO DE ACEPTACIÓN.

EL MUESTREO DE ACEPTACIÓN PERMITE VALUAR EL RIESGO ASUMIDO CON PROCEDIMIENTOS DE MUESTREO ALTERNOS, Y TOMAR UNA DECISIÓN ACERCA DEL **GRADO DE PROTECCIÓN** NECESARIO EN CUALQUIER CASO, EL CUAL SE DETERMINA MEDIANTE PROCEDIMIENTOS ESTADISTICOS.

ES POSIBLE, ENTONCES, SELECCIONAR UN MODELO DE MUESTREO DE ACEPTACIÓN, QUE PROPORCIONE UN **GRADO DESEADO DE PROTECCIÓN**, CON LA DEBIDA CONSIDERACIÓN A LOS DIFERENTES COSTOS INVOLUCRADOS.

5.5 *BENEFICIOS DEL CONTROL ESTADÍSTICO DE CALIDAD*

- AHORROS EN TIEMPO, EQUIPO, MATERIALES Y DINERO
- REDUCCIÓN EN LOS COSTOS Y TIEMPOS DE INSPECCIÓN Y PRUEBA
- MEJORÍA EN EL USO DE LOS RECURSOS
- MEJORÍA EN LA PRODUCTIVIDAD
- MEJORÍA EN LAS RELACIONES HUMANAS INTERNAS Y CON LOS PROVEEDORES Y CLIENTES
- MEJOR PRESTIGIO Y COMPETITIVIDAD

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

" DIPLOMADO EN SISTEMAS DE CALIDAD EN INGENIERÍA DE PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN "

MÓDULO II

CONTROL DE CALIDAD DE MATERIALES Y OBRAS

PARTE I

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA EL CONTROL DE CALIDAD

TEMA:

OBTENCIÓN DE MUESTRAS REPRESENTATIVAS INDICADORES ESTADISTICOS BÁSICOS

EXPOSITOR: DR. OCTAVIO RASCÓN CHÁVEZ
1997

Palacio de Mineria Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D.F APDO Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

1.2 OBTENCION DE MUESTRAS REPRESENTATIVAS

1.3 INDICADORES ESTADISTICOS BASICOS

EXPERIMENTO

PARA FINES DE ESTE CURSO, SE ENTENDERA POR EXPERIMENTO A TODO PROCESO DE OBSERVACION DE UN FENOMENO O VARIABLE DE INTERES. ASI UN EXPERIMENTO PUEDE SER PLANEADO Y REALIZADO POR EL HOMBRE, O PUEDE SER EFECTUADO POR LA NATURALEZA, EN CASO DE UN FENOMENO NATURAL. POR EJEMPLO, EL LANZAR UNA MONEDA O UN DADO Y OBSERVAR LA CARA QUE QUEDA HACIA ARRIBA ES UN EXPERIMENTO PLANEADO Y REALIZADO POR EL HOMBRE. EL OBSERVAR LA CANTIDAD DE AGUA QUE LLUEVE ANUALMENTE EN UNA CIUDAD, ES UN EXPERIMENTO ASOCIADO A UN FENOMENO NATURAL.

AL RESULTADO DE UN EXPERIMENTO SE LE DENOMINA DATO.
A UN GRUPO O COLECCION DE DATOS SE LE LLAMA MUESTRA.

PROBABILIDAD

ES UNA MEDIDA DE LA CERTIDUMBRE QUE SE LE ASOCIA A LA OCURRENCIA U OBSERVACION DE UN RESULTADO DETERMINADO, AL REALIZARSE EL EXPERIMENTO CORRESPONDIENTE.

LA TEORIA DE PROBABILIDADES ES UNA RAMA DE LAS MATEMATICAS APLICADAS QUE TRATA LO CONCERNIENTE A LA ASIGNACION Y MANEJO DE PROBABILIDADES.

2

√

ESTADISTICA: ES LA RAMA DE LAS MATEMATICAS QUE SE ENCARGA DE ENSEÑAR LAS REGLAS PARA COLECTAR, ORGANIZAR, PRESENTAR Y PROCESAR LOS DATOS OBTENIDOS AL REALIZAR VARIAS VECES EL EXPERIMENTO ASOCIADO A UN FENOMENO DE INTERES Y PARA INFERIR CONCLUSIONES ACERCA DE ESTE ULTIMO. PROPORCIONA, ADEMAS, LOS METODOS PARA EL DISEÑO DE EXPERIMENTOS Y PARA TOMAR DECISIONES CUANDO APARECEN SITUACIONES DE INCERTIDUMBRE.

ESTADISTICA

- *DESCRIPTIVA.*- TRATA LO CONCERNIENTE A LA OBTENCION, ORGANIZACION, PROCESAMIENTO Y PRESENTACION DE LOS DATOS.
- *INFERENCIAL.*- TRATA LO CONCERNIENTE A LOS METODOS PARA INFERIR CONCLUSIONES ACERCA DEL FENOMENO DEL CUAL PROVIENEN LOS DATOS

3

<u>MUESTREO</u>: ES EL PROCESO DE ADQUISICION DE UNA MUESTRA

MUESTREO {

- <u>CON REEMPLAZO</u>.- CUANDO CADA ELEMENTO OBSERVADO SE REINTEGRA AL LOTE DEL CUAL FUE EXTRAIDO, ANTES DE EXTRAER EL SIGUIENTE.
- <u>SIN REEMPLAZO</u>.- CUANDO CADA ELEMENTO OBSERVADO NO SE REINTEGRA AL LOTE.

<u>POBLACION</u>: TOTAL DE DATOS QUE SE PUEDEN OBTENER AL REALIZAR UNA SECUENCIA EXHAUSTIVA DE EXPERIMENTOS; ES EL FENOMENO EN ESTUDIO.

POBLACION {

- <u>DISCRETA</u>.- TIENE UN NUMERO FINITO O UN NUMERO INFINITO NUMERABLE DE DATOS POSIBLES
- <u>CONTINUA</u>.- TIENE UN NUMERO INFINITO NO NUMERABLE DE DATOS POSIBLES

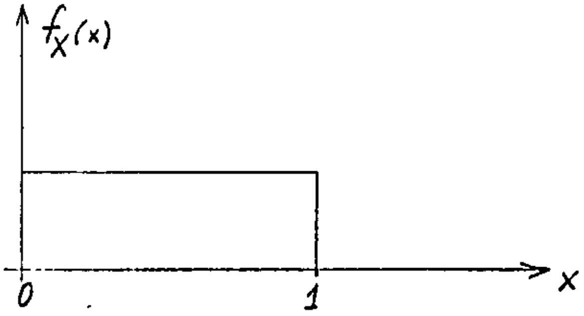
<u>EJEMPLOS</u>

1. EXPERIMENTO: LANZAMIENTO DE UNA MONEDA DIEZ VECES
   POBLACION: SUCESION INFINITA NUMERABLE DE "CARAS" Y "CRUCES" (DISCRETA)
   MUESTRA: GRUPO DE 10 OBSERVACIONES

2. EXPERIMENTO: MEDICION DE LA PRECIPITACION PLUVIAL DIARIA EN LA CIUDAD DE MEXICO DURANTE DIEZ AÑOS
   POBLACION: SUCESION INFINITA NO NUMERABLE DE VALORES (CONTINUA)
   MUESTRA: GRUPO DE 3652 OBSERVACIONES (TOMANDO DOS AÑOS BISIESTOS DE 29 DIAS EN FEBRERO)

MUESTRA ALEATORIA: ES UNA MUESTRA OBTENIDA DE TAL MANERA QUE *TODOS* LOS ELEMENTOS DE LA POBLACION TIENEN LA *MISMA* PROBABILIDAD DE SER OBSERVADOS Y, ADEMAS, LA OBSERVACION DE UN ELEMENTO *NO AFECTA* LA PROBABILIDAD DE OBSERVAR CUALQUIER OTRO, ES DECIR, SI SON INDEPENDIENTES.

TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS: ES UNA TABLA QUE CONTIENE NUMEROS QUE CONSTITUYEN UNA MUESTRA ALEATORIA OBTENIDA DE UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES UNIFORME, QUE GENERALMENTE CORRESPONDE A UNA VARIABLE ALEATORIA QUE PUEDE ASUMIR VALORES ENTRE 0 Y 1, MULTIPLICADOS POR 10^r, EN DONDE r ES EL NUMERO DE DIGITOS QUE SE DESEA TENGAN LOS NUMEROS.



LAS TABLAS QUE SE USEN PARA OBTENER UNA MUESTRA ALEATORIA DEBEN CONTENER NUMEROS CON MAYOR NUMERO DE DIGITOS QUE LOS QUE TIENE EL TOTAL DE ELEMENTOS DE LA POBLACION QUE SE VA A MUESTREAR. POR EJEMPLO, SI SE VA A OBTENER UNA MUESTRA ALEATORIA DE UN LOTE DE LENTES PARA MICROSCOPIO QUE TIENE 10,000 ELEMENTOS, LA TABLA QUE SE USE DEBERA TENER NUMEROS ALEATORIOS CON 5 O MAS DIGITOS.

METODO DE MUESTREO ALEATORIO

1. SE ENUMERAN LOS ELEMENTOS DE LA POBLACION.
2. SE FIJA EL CRITERIO DE SELECCION DE LOS NUMEROS ALEATORIOS (POR EJEMPLO, SE DEFINE QUE RENGLONES Y QUE COLUMNAS SE VAN A LEER).
3. SE INDICA QUE DIGITOS SE VAN A ELIMINAR EN CASO DE QUE LOS NUMEROS DE LA TABLA TENGAN MAS DIGITOS QUE LOS NECESARIOS
4. SE LEEN LOS NUMEROS, DE ACUERDO CON LO FIJADO EN LOS PUNTOS 2 Y 3, Y SE EXTRAEN DEL LOTE LOS ELEMENTOS QUE TIENEN LOS NUMEROS LEIDOS. ESTOS CONSTITUYEN LA MUESTRA FISICA CON LA CUAL REALIZAR LOS EXPERIMENTOS. LAS OBSERVACIONES CONSTITUIRAN LA MUESTRA ALEATORIA DESEADA.

NOTA: TODOS LOS NUMEROS QUE SE REPITAN SE CONSIDERAN SOLO UNA VEZ.
TAMBIEN SE ELIMINAN LOS NUMEROS MAYORES DEL TAMAÑO DEL LOTE.

EJEMPLO

SE TIENE UN LOTE DE 1,000 TRANSISTORES NUMERADOS DEL UNO AL MIL, CUYA CALIDAD SE VA A VERIFICAR ESTADISTICAMENTE, PARA LO CUAL SE DECIDE TOMAR UNA MUESTRA DE 40 ELEMENTOS Y MEDIR SU AMPLIFICACION, USANDO LA TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS ANEXA, CON EL CRITERIO DE TOMAR TODOS LOS RENGLONES IMPARES ELIMINANDO EL ULTIMO DIGITO. LA MUESTRA FISICA SERIAN LOS TRANSISTORES CORRESPONDIENTES A LOS NUMEROS 0415, 0006, 0394, 0998, 0530, 0394, 0160, ETC.

TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS

Columna Renglón	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	16408	81899	04153	53381	79401	21438	83035	92350	36693	31238	59649
2	18629	81953	05520	91962	04739	13092	37662	94822	94730	06496	35090
3	73115	47498	47498	87637	99016	00060	88824	71013	18735	20286	23153
4	57491	16703	23167	49323	45021	33132	12544	41035	80780	45393	44812
5	30405	03946	23792	14422	15059	45799	22716	19792	09983	74353	68668
6	16631	35006	85900	32388	52390	52390	16815	69298	38732	38480	73817
7	96773	20206	42559	78985	05300	22164	24369	54224	35083	19687	11052
8	38935	64202	14349	82674	66523	44133	00697	35552	35970	19124	63318
9	31624	76384	17403	03941	44167	64486	64758	75366	76554	01601	12614
10	78919	19474	23632	27889	47914	02584	37680	20801	72152	39339	34806

PROCEDIMIENTO PARA OBTENER MUESTRAS EN UN TRAMO CARRETERO

Para obtener muestras o realizar pruebas en un segmento carretero, se puede utilizar la Tabla I de Números aleatorios, con el fin de seleccionar los sitios donde se colectarán los datos. El procedimiento es el siguiente:

1.- Definir la longitud del o de los tramos a muestrear.

2.- Determinar el número de datos que se colectarán de cada tramo o señalar el espaciamiento "promedio" de los sitios correspondientes.

3.- De una tabla de números aleatorios común, leer números del 1 al 28, para seleccionar las subcolumnas A de la Tabla I que se emplearán para cada tramo.

4.- En cada columna seleccionada, localizar los números iguales o menores que el número de datos requeridos para cada tramo.

5.- Multiplicar la longitud de cada tramo por los valores decimales correspondientes que se ubican en la subcolumna B, y adicionar este resultado al cadenamiento del inicio del tramo para obtener el cadenamiento de la sección a muestrear.

6.- Multiplicar el ancho del tramo por los valores decimales de la subcolumna C correspondientes, para obtener la distancia medida a partir del lado izquierdo del camino, donde se ubicará el sitio de muestreo.

EJEMPLO:*

Para evaluar la calidad del pavimento, se obtendrán muestras de un camino con ancho de 6 m. y longitud de 5030 m., que va del cadenamiento 10 + 00 al 60 + 30. Un análisis visual del camino indica que este puede dividirse en los tres tramos siguientes, con diferentes condiciones de la superficie de rodamiento:

1. <u>Longitud de cada tramo</u>:

Tramo 1	10 + 00	a	28 + 90	(1890 m)
Tramo 2	28 + 90	a	42 + 62	(1372 m)
Tramo 3	42 + 62	a	60 + 30	(1768 m)

---

* Tomado de: The Asphalt Institute. "Asphalt Overlays and Pavement Rehabilitation". Manual Series No. 17 (MS-17). U.S.A., November 1977.

2. Número de datos para cada tramo.

Se desean obtener muestras de la estructura del camino a cada 500 m. a intervalos promedio de 500 m en los tramos 1 y 3, y de 300 m en el tramo 2. El número de datos de cada tramo sería:

Tramo 1 n = 1890/500 = 3.8 = 4 sitios

Tramo 2 n = 1372/300 = 4.5 = 5 sitios

Tramo 3 n = 1768/500 = 3.5 = 4 sitios

3. Determinación de columnas de Tabla I para el muestreo.

De una tabla de números aleatorios se sacan, para seleccionar las columnas A de la Tabla I, 3 números del 1 al 28, y éstos resultan ser: 23, 16 y 15.

4. Números aleatorios obtenidos.

Para el tramo 1, se usa la columna 23 y se encuentra que:

Columna A	Columna B	Columna C
4	.515	.993
3	.053	.256
2	.623	.271
1	.937	.714

Para el tramo 2, con la columna 16 se tiene:

Columna A	Columna B	Columna C
5	.147	.864
4	.516	.396
3	.548	.688
2	.739	.298
1	.331	.925

Para el tramo 3, se usa la columna 15:

Columna A	Columna B	Columna C
4	.951	.482
3	.523	.519
2	.977	.172
1	.139	.230

5. Determinación de posiciones longitudinales (cadenamientos) de los sitios de muestreo.

Con los números de la columna B de los cuadros anteriores se tienen que:

Para el tramo 1, de 1890 m:

Longitud del tramo	x	Columna B	=	Distancia	+	Cadenamiento inicial	=	Cadenamiento de muestreo
1890		0.515		973		10+00		19+73
1890		0.053		100		10+00		11+00
1890		0.623		1177		10+00		21+77
1890		0.937		1771		10+00		27+71

Para el tramo 2, de 1372 m:

Longitud del tramo	x	Columna B	=	Distancia	+	Cadenamiento inicial	=	Cadenamiento de muestreo
1372		0.147		202		28+90		30+92
1372		0.516		708		28+90		35+98
1372		0.548		752		28+90		36+42
1372		0.739		1014		28+90		39+04
1372		0.331		454		28+90		33+44

Para el tramo 3, de 1768m:

Longitud del tramo	x	Columna B	=	Distancia	+	Cadenamiento inicial	=	Cadenamiento de muestreo
1768		0.951		1681		42+62		59+43
1768		0.523		925		42+62		51+87
1768		0.977		1727		42+62		59+89
1768		0.139		246		42+62		45+08

6. Determinación de las posiciones transversales de muestreo.

Puesto que el ancho del camino es de 6m, se tiene que:

Para el tramo 1:

Ancho del camino	x	Columna C	=	Distancia del borde izquierdo, m
6		0.993		5.9
6		0.256		1.5
6		0.271		1.6
6		0.714		4.3

Para el tramo 2:

Ancho del camino	x	Columna C	=	Distancia del borde izquierdo, m
6		0.864		5.2
6		0.396		2.4
6		0.688		4.1
6		0.298		1.8
6		0.925		5.6

Para el tramo 3:

Ancho del camino	x	Columna C	=	Distancia del borde izquierdo, m
6		0.482		2.9
6		0.519		3.1
6		0.172		1.0
6		0.230		1.4

7. Puntos de muestreo.

Tramo	*Cadenamiento*	*Distancia del borde izquierdo, m*
Sección 1	11+00	1.5
	19+73	5.9
	21+77	1.6
	27+71	4.3
Sección 2	30+92	5.2
	33+44	5.6
	35+98	2.4
	36+42	4.1
	39+04	1.8
Sección 3	45+08	1.4
	51+87	3.1
	59+43	2.9
	59+89	1.0

Estos puntos de muestreo se presentan en la figura 1.

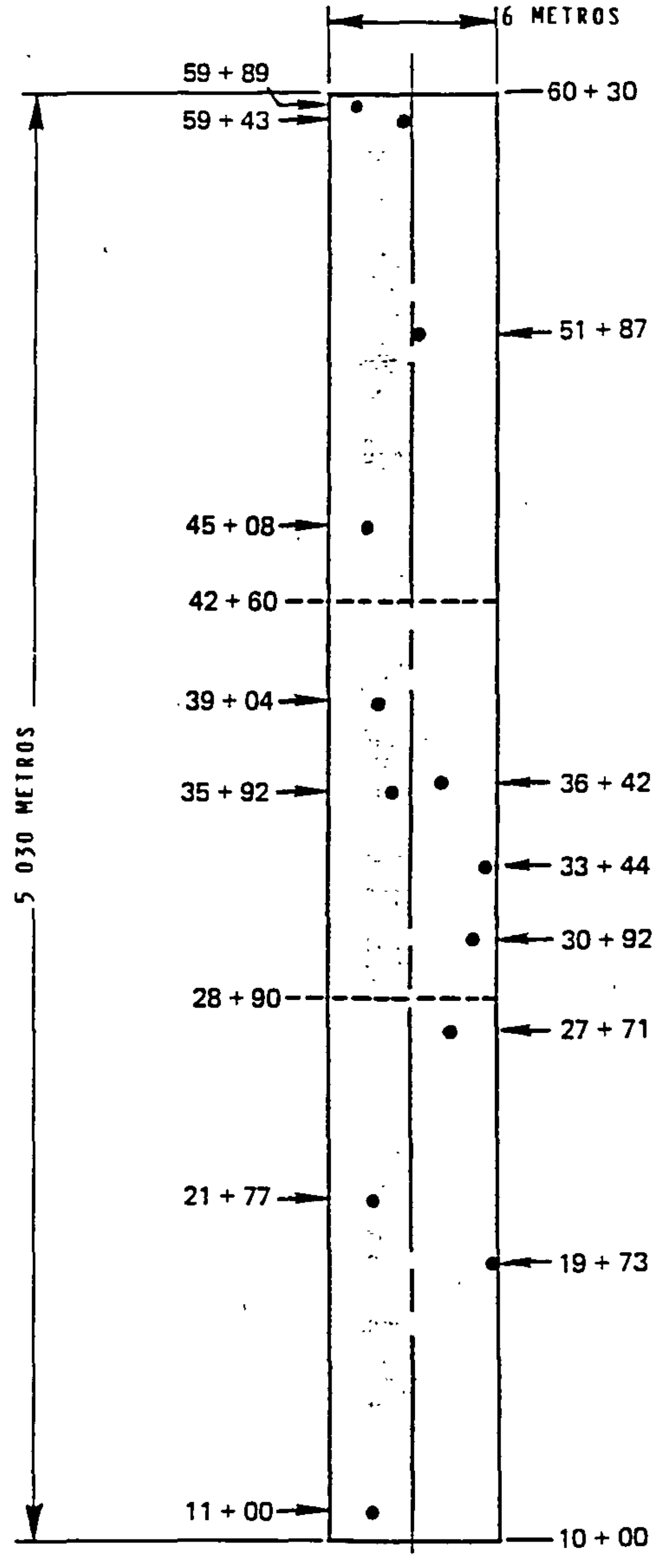


FIGURA 1 PUNTOS DE MUESTREO

TABLA I - NUMEROS ALEATORIOS PARA PROCEDIMIENTO DE MUESTREO

Col. No. 1			Col. No. 2			Col. No. 3			Col. No. 4			Col. No. 5			Col. No. 6			Col. No. 7		
A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
15	.033	.576	05	.048	.879	21	.013	.220	18	.089	.716	17	.024	.863	30	.030	.901	12	.029	.386
21	.101	.300	17	.074	.156	30	.036	.853	10	.102	.330	24	.060	.032	21	.096	.198	18	.112	.284
23	.129	.916	18	.102	.191	10	.052	.746	14	.111	.925	26	.074	.639	10	.100	.161	20	.114	.848
30	.158	.434	06	.105	.257	25	.061	.954	28	.127	.840	07	.167	.512	29	.133	.388	03	.121	.656
24	.177	.397	28	.179	.447	29	.062	.507	24	.132	.271	28	.194	.776	24	.138	.062	13	.178	.640
11	.202	.271	26	.187	.844	18	.087	.887	19	.285	.899	03	.219	.166	20	.168	.564	22	.209	.421
16	.204	.012	04	.188	.482	24	.105	.849	01	.326	.037	29	.264	.284	22	.232	.953	16	.221	.311
08	.208	.418	02	.208	.577	07	.139	.159	30	.334	.938	11	.282	.262	14	.259	.217	29	.235	.356
19	.211	.798	03	.214	.402	01	.175	.641	22	.405	.295	14	.379	.994	01	.275	.195	28	.264	.941
29	.233	.070	07	.245	.080	23	.196	.873	05	.421	.282	13	.394	.405	06	.277	.475	11	.287	.199
07	.260	.073	15	.248	.831	26	.240	.981	13	.451	.212	06	.410	.157	02	.296	.497	02	.336	.992
17	.262	.308	29	.261	.087	14	.255	.374	02	.461	.023	15	.438	.700	26	.311	.144	15	.393	.488
25	.271	.180	30	.302	.883	06	.310	.043	06	.487	.539	22	.453	.635	05	.351	.141	19	.437	.655
06	.302	.672	21	.318	.088	11	.316	.653	08	.497	.396	21	.472	.824	17	.370	.811	24	.466	.773
01	.409	.406	11	.376	.936	13	.324	.585	25	.503	.893	05	.488	.118	09	.388	.484	14	.531	.014
13	.507	.693	14	.430	.814	12	.351	.275	15	.594	.603	01	.525	.222	04	.410	.073	09	.562	.678
02	.575	.654	27	.438	.676	20	.371	.535	27	.620	.894	12	.561	.980	25	.471	.530	06	.601	.675
18	.591	.318	08	.467	.205	08	.409	.495	21	.629	.841	08	.652	.508	13	.486	.779	10	.612	.859
20	.610	.821	09	.474	.138	16	.445	.740	17	.691	.583	18	.668	.271	15	.515	.867	26	.673	.112
12	.631	.597	10	.492	.474	03	.494	.929	09	.708	.689	30	.736	.634	23	.567	.798	23	.738	.770
27	.651	.281	13	.499	.892	27	.543	.387	07	.709	.012	02	.763	.253	11	.618	.502	21	.753	.614
04	.661	.953	19	.511	.520	17	.625	.171	11	.714	.049	23	.804	.140	28	.636	.148	30	.758	.851
22	.692	.089	23	.591	.770	02	.699	.073	23	.720	.695	25	.828	.425	27	.650	.741	27	.765	.563
05	.779	.346	20	.604	.730	19	.702	.934	03	.748	.413	10	.843	.627	16	.711	.508	07	.780	.534
09	.787	.173	24	.654	.330	22	.816	.802	20	.781	.603	16	.858	.849	19	.778	.812	04	.818	.187
10	.818	.837	12	.728	.523	04	.838	.166	26	.830	.384	04	.903	.327	07	.804	.675	17	.837	.353
14	.895	.631	16	.753	.344	15	.904	.116	04	.843	.002	09	.912	.382	08	.806	.952	05	.854	.818
26	.912	.376	01	.806	.134	28	.969	.742	12	.884	.582	27	.935	.162	18	.841	.414	01	.867	.133
28	.920	.163	22	.878	.884	09	.974	.046	29	.926	.700	20	.970	.582	12	.918	.114	08	.915	.538
03	.945	.140	25	.939	.162	05	.977	.494	16	.951	.601	19	.975	.327	03	.992	.399	25	.975	.584

TABLA I - NUMEROS ALEATORIOS PARA PROCEDIMIENTO DE MUESTREO

Col. No. 8			Col. No. 9			Col. No. 10			Col. No. 11			Col. No. 12			Col. No. 13			Col. No. 14		
A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
09	.042	.071	14	.061	.935	26	.038	.023	27	.074	.779	16	.073	.987	03	.033	.091	26	.035	.175
17	.141	.411	02	.065	.097	30	.066	.371	06	.084	.396	23	.078	.056	07	.047	.391	17	.089	.363
02	.143	.221	03	.094	.228	27	.073	.876	24	.098	.524	17	.096	.076	28	.064	.113	10	.149	.681
05	.162	.899	16	.122	.945	09	.095	.568	10	.133	.919	04	.153	.163	12	.066	.360	28	.238	.075
03	.285	.016	18	.158	.430	05	.180	.741	15	.187	.079	10	.254	.834	26	.076	.552	13	.244	.767
28	.291	.034	25	.193	.469	12	.200	.851	17	.227	.767	06	.284	.628	30	.087	.101	24	.262	.366
08	.369	.557	24	.224	.572	13	.259	.327	20	.236	.571	12	.305	.616	02	.127	.187	08	.264	.651
01	.436	.386	10	.225	.223	21	.264	.681	01	.245	.988	25	.319	.901	06	.144	.068	18	.285	.311
20	.450	.289	09	.233	.838	17	.283	.645	04	.317	.291	01	.320	.212	25	.202	.674	02	.340	.131
18	.455	.789	20	.290	.120	23	.363	.063	29	.350	.911	08	.416	.372	01	.247	.025	29	.353	.478
23	.488	.715	01	.297	.242	20	.364	.366	26	.380	.104	13	.432	.556	23	.253	.323	06	.359	.270
14	.496	.276	11	.337	.760	16	.395	.363	28	.425	.864	02	.489	.827	24	.320	.651	20	.387	.248
15	.503	.342	19	.389	.064	02	.423	.540	22	.487	.526	29	.503	.787	10	.328	.365	14	.392	.694
04	.515	.693	13	.411	.474	08	.432	.736	05	.552	.511	15	.518	.717	27	.338	.412	03	.408	.077
16	.532	.112	20	.447	.893	10	.476	.468	14	.564	.357	28	.524	.998	13	.356	.991	27	.440	.280
22	.557	.357	22	.478	.321	03	.508	.774	11	.572	.306	03	.542	.352	16	.401	.792	22	.461	.830
11	.559	.620	29	.481	.993	01	.601	.417	21	.594	.197	19	.585	.462	17	.423	.117	16	.527	.003
12	.650	.216	27	.562	.403	22	.687	.917	09	.607	.524	05	.695	.111	21	.481	.838	30	.531	.486
21	.672	.320	04	.566	.179	29	.697	.862	19	.650	.572	07	.733	.838	08	.560	.401	25	.678	.360
13	.709	.273	08	.603	.758	11	.701	.605	18	.664	.101	11	.744	.948	19	.564	.190	21	.725	.014
07	.745	.687	15	.632	.927	07	.728	.498	25	.674	.428	18	.793	.748	05	.571	.054	05	.797	.595
30	.780	.285	06	.707	.107	14	.745	.679	02	.697	.674	27	.802	.967	18	.587	.584	15	.801	.927
19	.845	.097	28	.737	.161	24	.819	.444	03	.767	.928	21	.826	.487	15	.604	.145	12	.836	.294
26	.846	.366	17	.846	.130	15	.840	.823	16	.809	.529	24	.835	.832	11	.641	.298	04	.854	.982
29	.861	.307	07	.874	.491	25	.863	.568	30	.838	.294	26	.855	.142	22	.672	.156	11	.884	.928
25	.906	.874	05	.880	.828	06	.878	.215	13	.845	.470	14	.861	.462	20	.674	.887	19	.886	.832
24	.919	.809	23	.931	.659	18	.930	.601	08	.855	.524	20	.874	.625	14	.752	.881	07	.929	.932
10	.952	.555	26	.960	.365	04	.954	.827	07	.867	.718	30	.929	.056	09	.774	.560	09	.932	.206
06	.961	.504	21	.978	.194	28	.963	.004	12	.881	.722	09	.935	.582	29	.921	.752	01	.970	.692
27	.969	.811	12	.982	.183	19	.988	.020	23	.937	.872	22	.947	.797	04	.959	.099	23	.973	.082

TABLA I - NUMEROS ALEATORIOS PARA PROCEDIMIENTO DE MUESTREO

Col. No. 15			Col. No. 16			Col. No. 17			Col. No. 18			Col. No. 19			Col. No. 20			Col. No. 21		
A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
15	.023	.979	19	.062	.588	13	.045	.004	25	.027	.290	12	.052	.075	20	.030	.881	01	.010	.946
11	.118	.465	25	.080	.218	18	.086	.878	06	.057	.571	30	.075	.493	12	.034	.291	10	.014	.939
07	.134	.172	09	.131	.295	26	.126	.990	26	.059	.026	28	.120	.341	22	.043	.893	09	.032	.346
01	.139	.230	18	.136	.381	12	.128	.661	07	.105	.176	27	.145	.689	28	.143	.073	06	.093	.180
16	.145	.122	05	.147	.864	30	.146	.337	18	.107	.358	02	.209	.957	03	.150	.937	15	.151	.012
20	.165	.520	12	.158	.365	05	.169	.470	22	.128	.827	26	.272	.818	04	.154	.867	16	.185	.455
06	.185	.481	28	.214	.184	21	.244	.433	23	.156	.440	22	.299	.317	19	.158	.359	07	.227	.277
09	.211	.316	14	.215	.757	23	.270	.849	15	.171	.157	18	.306	.475	29	.304	.615	02	.304	.400
14	.248	.348	13	.224	.846	25	.274	.407	08	.220	.097	20	.311	.653	06	.369	.633	30	.316	.074
25	.249	.890	15	.227	.809	10	.290	.925	20	.252	.066	15	.348	.156	18	.390	.536	18	.328	.799
13	.252	.577	11	.280	.898	01	.323	.490	04	.268	.576	16	.381	.710	17	.403	.392	20	.352	.288
30	.273	.088	01	.331	.925	24	.352	.291	14	.275	.302	01	.411	.607	23	.404	.182	26	.371	.216
18	.277	.489	10	.399	.992	15	.361	.155	11	.297	.589	13	.417	.715	01	.415	.457	19	.448	.754
22	.372	.958	30	.417	.787	29	.374	.882	01	.358	.305	21	.472	.484	07	.437	.696	13	.487	.598
10	.461	.075	08	.439	.921	08	.432	.139	09	.412	.089	04	.478	.885	24	.446	.546	12	.546	.640
28	.519	.536	20	.472	.484	04	.467	.266	16	.429	.834	25	.479	.080	26	.485	.768	24	.550	.038
17	.520	.090	24	.498	.712	22	.508	.880	10	.491	.203	11	.566	.104	15	.511	.313	03	.604	.780
03	.523	.519	04	.516	.396	27	.632	.191	28	.542	.306	10	.576	.659	10	.517	.290	22	.621	.930
26	.573	.502	03	.548	.688	16	.661	.836	12	.563	.091	29	.665	.397	30	.556	.853	21	.629	.154
19	.634	.206	23	.597	.508	19	.675	.629	02	.593	.321	19	.739	.298	25	.561	.837	11	.634	.908
24	.635	.810	21	.681	.114	14	.680	.890	30	.692	.198	14	.749	.759	09	.574	.599	05	.696	.459
21	.679	.841	02	.739	.298	28	.714	.508	19	.705	.445	08	.756	.919	13	.613	.762	23	.710	.070
27	.712	.366	29	.792	.038	06	.719	.441	24	.709	.717	07	.798	.183	11	.698	.783	29	.726	.585
05	.780	.497	22	.829	.324	09	.735	.040	13	.820	.739	23	.834	.647	14	.715	.179	17	.749	.914
23	.861	.106	17	.834	.647	17	.741	.906	05	.848	.866	06	.837	.978	16	.770	.128	04	.802	.186
12	.865	.377	16	.909	.608	11	.747	.205	27	.867	.633	03	.849	.964	08	.815	.385	14	.835	.319
29	.882	.635	06	.914	.420	20	.850	.047	03	.883	.333	24	.851	.109	05	.872	.490	08	.870	.546
08	.902	.020	27	.958	.856	02	.859	.356	17	.900	.443	05	.859	.935	21	.885	.999	28	.871	.539
04	.951	.482	26	.981	.976	07	.870	.612	21	.914	.483	17	.863	.220	02	.958	.177	25	.971	.369
02	.977	.172	07	.983	.624	03	.916	.463	29	.950	.753	09	.863	.147	27	.961	.980	27	.984	.252

TABLA I - NUMEROS ALEATORIOS PARA PROCEDIMIENTO DE MUESTREO

Col. No. 22			Col. No. 23			Col. No. 24			Col. No. 25			Col. No. 26			Col. No. 27			Col. No. 28		
A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
12	.051	.032	26	.051	.187	08	.015	.521	02	.039	.005	16	.026	.102	21	.050	.952	29	.042	.039
11	.068	.980	03	.053	.256	16	.068	.994	16	.061	.599	01	.033	.886	17	.085	.403	07	.105	.293
17	.089	.309	29	.100	.159	11	.118	.400	26	.068	.054	04	.088	.686	10	.141	.624	25	.115	.420
01	.091	.371	13	.102	.465	21	.124	.565	11	.073	.812	22	.090	.602	05	.154	.157	09	.126	.612
10	.100	.709	24	.110	.316	18	.153	.158	07	.123	.649	13	.114	.614	06	.164	.841	10	.205	.144
30	.121	.744	18	.114	.300	17	.190	.159	05	.126	.658	20	.136	.576	07	.197	.013	03	.210	.054
02	.166	.056	11	.123	.208	26	.192	.676	14	.161	.189	05	.138	.228	16	.215	.363	23	.234	.533
23	.179	.529	09	.138	.182	01	.237	.030	18	.166	.040	10	.216	.565	08	.222	.520	13	.266	.799
21	.187	.051	06	.194	.115	12	.283	.077	28	.248	.171	02	.233	.610	13	.269	.477	20	.305	.603
22	.205	.543	22	.234	.480	03	.286	.318	06	.255	.117	07	.278	.357	02	.288	.012	05	.372	.223
28	.230	.688	20	.274	.107	10	.317	.734	15	.261	.928	30	.405	.273	25	.333	.633	26	.385	.111
19	.243	.001	21	.331	.292	05	.337	.844	10	.301	.811	06	.421	.807	28	.348	.710	30	.422	.315
27	.267	.990	08	.346	.085	25	.441	.336	24	.363	.025	12	.426	.583	20	.362	.961	17	.453	.783
15	.283	.440	27	.382	.979	27	.469	.786	22	.378	.792	08	.471	.708	14	.511	.989	02	.460	.916
16	.352	.089	07	.387	.865	24	.473	.237	27	.379	.959	18	.473	.738	26	.540	.903	27	.461	.841
03	.377	.648	28	.411	.776	20	.475	.761	19	.420	.557	19	.510	.207	27	.587	.643	14	.483	.095
06	.397	.769	16	.444	.999	06	.557	.001	21	.467	.943	03	.512	.329	12	.603	.745	12	.507	.375
09	.409	.428	04	.515	.993	07	.610	.238	17	.494	.225	15	.640	.329	29	.619	.895	28	.509	.748
14	.465	.406	17	.518	.827	09	.617	.041	09	.620	.081	09	.665	.354	23	.623	.333	21	.583	.804
13	.499	.651	05	.539	.620	13	.641	.648	30	.623	.106	14	.680	.884	22	.624	.076	22	.587	.993
04	.539	.972	02	.623	.271	22	.664	.291	03	.625	.777	26	.703	.622	18	.670	.904	16	.689	.339
18	.560	.747	30	.637	.374	04	.668	.856	08	.651	.790	29	.739	.394	11	.711	.253	06	.727	.298
26	.575	.892	14	.714	.364	19	.717	.232	12	.715	.599	25	.759	.386	01	.790	.392	04	.731	.814
29	.756	.712	15	.730	.107	02	.776	.504	23	.782	.093	24	.803	.602	04	.813	.611	08	.807	.983
20	.760	.920	19	.771	.552	29	.777	.548	20	.810	.371	27	.842	.491	19	.843	.732	15	.833	.757
05	.847	.925	23	.780	.662	14	.823	.223	01	.841	.726	21	.870	.435	03	.844	.511	19	.896	.464
25	.872	.891	10	.924	.888	23	.848	.264	29	.862	.009	28	.906	.367	30	.858	.299	18	.916	.384
24	.874	.135	12	.929	.204	30	.892	.817	25	.891	.873	23	.948	.367	09	.929	.199	01	.948	.610
08	.911	.215	01	.937	.714	28	.943	.190	04	.917	.264	11	.956	.142	24	.931	.263	11	.976	.799
07	.946	.065	25	.974	.398	15	.975	.962	13	.958	.990	17	.993	.989	15	.939	.947	24	.978	.633

AGRUPAMIENTO DE DATOS

FRECUENCIA DE UN EVENTO.- ES EL NUMERO DE VECES QUE OCURRE EL EVENTO AL OBTENER UNA MUESTRA DE LA POBLACION CORRESPONDIENTE.

FRECUENCIA RELATIVA DE UN EVENTO.- ES EL COCIENTE DE SU FRECUENCIA ENTRE EL TOTAL DE ELEMENTOS (TAMAÑO) DE LA MUESTRA.

FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA.- ES LA ACUMULACION (SUMA) DE LAS FRECUENCIAS RELATIVAS HASTA UN VALOR DADO, PARTIENDO DEL VALOR (O DEL INTERVALO) MAS PEQUEÑO. EN OTRAS PALABRAS, ES LA FRECUENCIA DE VALORES MENORES O IGUALES QUE UN VALOR DADO.

FRECUENCIA COMPLEMENTARIA.- ES LA FRECUENCIA DE VALORES MAYORES QUE UN VALOR DADO = NUMERO DE DATOS - FRECUENCIA ACUMULADA.

DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS

CON OBJETO DE FACILITAR LA INTERPRETACION DE LOS DATOS QUE SE TIENEN EN UNA MUESTRA, ES CONVENIENTE AGRUPARLOS POR VALORES O POR INTERVALOS DE VALORES, FORMANDO ASI UNA TABLA DE DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS.

PARA FACILITAR EL CALCULO DE LAS FRECUENCIAS, ES UTIL ORDENAR LOS DATOS EN FORMA CRECIENTE O DECRECIENTE DE VALORES, FORMANDO ASI UNA *TABLA DE DATOS ORDENADOS*.

EJEMPLO.

EN UNA ESCUELA SECUNDARIA SE LES APLICO A 30 PROFESORES UN EXAMEN SOBRE PEDAGOGIA. LAS CALIFICACIONES (DATOS) QUE SE OBTUVIERON FUERON (YA ESTAN ORDENADOS EN FORMA CRECIENTE)

$$\underbrace{57,\ 59,}_{A}\ \underbrace{65,\ 67,\ 67,\ 67,\ 69,}_{B}\ \underbrace{72,\ 73,\ 73,\ 77,\ 78,\ 78,}_{C}$$

$$\underbrace{81,\ 81,\ 83,\ 83,\ 83,\ 84,\ 84,\ 87,\ 88,\ 89,\ 89,}_{D}\ \underbrace{91,\ 91,\ 93,}_{E}$$

$$\underbrace{95,\ 97,\ 99}_{E}$$

AGRUPAMIENTO DE VALORES

CALIFICACION	FRECUENCIA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA
57	1	1/30	1/30
59	1	1/30	2/30
65	1	1/30	3/30
67	3	3/30	6/30
69	1	1/30	7/30
72	1	1/30	8/30
73	2	2/30	10/30
77	1	1/30	11/30
78	2	2/30	13/30
81	2	2/30	15/30
83	3	3/30	18/30
84	2	2/30	20/30
87	1	1/30	21/30
88	1	1/30	22/30
89	2	2/30	24/30
91	2	2/30	26/30
93	1	1/30	27/30
95	1	1/30	28/30
97	1	1/30	29/30
99	1	1/30	30/30=1
	Σ=30	Σ=30/30=1	

¿CUAL ES LA FRECUENCIA RELATIVA DE VALORES MENORES O IGUALES QUE 93?: 27/30

AGRUPAMIENTO POR INTERVALOS

LIMITES DE CLASES: SON LOS VALORES MINIMO Y MAXIMO DE CADA INTERVALO

MARCAS DE CLASE: SON LOS VALORES MEDIOS DE CADA INTERVALO DE CLASE

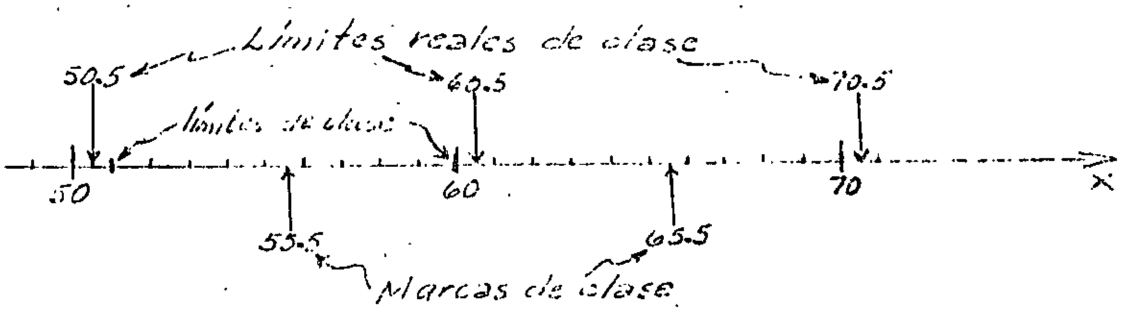
LIMITES REALES DE CLASE: SON LOS VALORES MINIMO Y MAXIMO QUE SON FRONTERA ENTRE LOS INTERVALOS. ESTOS DEBEN TENER UNA CIFRA DECIMAL MAS QUE LOS DATOS.

EVENTO (INTERVALO DE CALIFICACIONES)	ELEMENTOS OBSERVADOS	FRE-CUENCIA	FRECUENCIA RELATIVA
A = {51-60}	57,59	2	2/30
B = {61-70}	65,67,67,67,69	5	5/30
C = {71-80}	72,73,73,77,78,78	6	6/30
D = {81-90}	81,81,83,83,83,84, 84,87,88,89,89	11	11/30
E = {91-100}	91,91,93,95,97,99	6	6/30
		Σ=30	30/30=1

LIMITES INFERIORES DE CLASE | LIMITES SUPERIORES DE CLASE

EVENTO	LIMITES DE CLASE		LIMITES REALES DE CLASE		MARCAS DE CLASE
	INFERIOR	SUPERIOR	INFERIOR	SUPERIOR	
A	51	60	50.5	60.5	55.5
B	61	70	60.5	70.5	65.5
C	71	80	70.5	80.5	75.5
D	81	90	80.5	90.5	85.5
E	91	100	90.5	100.5	95.5

Evento	Elementos corresp. a los intervalos	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa acumulada
A: 51-60	59,57	2	2/30=0.067(6.7%)	2	0.067
B: 61-70	67,65,69,67,67	5	5/30=0.166(16.6%)	2+5=7	0.067+0.166=0.233
C: 71-80	72,73,73,77,78,78	6	6/30=0.200(20%)	7+6=13	0.233+0.200=0.433
D: 81-90	83,88,84,89,83,84, 89,87,81,83,81	11	11/30=0.367(36.7%)	13+11=24	0.433+0.367=0.800
E: 91-100	99,91,97,95,91,93	6	6/30=0.200(20%)	24+6=30	0.800+0.200=1.000
		30	1.000		



$A = \{X: 50.5 < X \leq 60.5\}$

$B = \{X: 60.5 < X \leq 70.5\}$

$C = \{X: 70.5 < X \leq 80.5\}$

$D = \{X: 80.5 < X \leq 90.5\}$

$E = \{X: 90.5 < X \leq 100.5\}$

LIMITES REALES INFERIORES DE CLASE

LIMITES REALES SUPERIORES DE CLASE

PROCEDIMIENTO DE AGRUPAMIENTO

A MAYOR NUMERO DE DATOS SE REQUIERE MAYOR NUMERO DE INTERVALOS. PERO SE RECOMIENDA QUE ESTE NUMERO ESTE ENTRE 5 Y 20, SUPONIENDO QUE EN PROMEDIO CAIGAN 5 O MAS ELEMENTOS EN CADA INTERVALO. ASI, SI SE TIENEN 30 DATOS, SE RECOMIENDA USAR 30/5=6 INTERVALOS.

EL PROCESO DE AGRUPAMIENTO SE INDICARA AL MISMO TIEMPO QUE SE REALIZA EL SIGUIENTE EJEMPLO.

EJEMPLO

EN UN ESTUDIO ANTROPOLOGICO SE OBTUVO UNA MUESTRA DE [illegible] ESTATURAS

24.

DE LOS VARONES ADULTOS RESIDENTES EN UNA REGION. LOS DATOS, ORDENADOS EN FORMA CRECIENTE DE VALORES, FUERON LOS SIGUIENTES: 159, 161,163,163,163,167,167,167,167,168,168,168,169,169,170, 171,172,173,174,175,175,175,178,179,181,181,183,184,187,191 CM. OBTENER LA TABLA DE DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS.

SOLUCION:

1. DETERMINACION DEL RANGO DE LA MUESTRA

RANGO = VALOR MAXIMO - VALOR MINIMO = 191-159=32 CM

2. DETERMINACION DEL NUMERO DE INTERVALOS

NUMERO DE INTERVALOS = $\frac{30}{5} = 6$

3. DETERMINACION DE LOS LIMITES DE CLASE

ANCHO DE LOS INTERVALOS = $\frac{\text{RANGO}}{\text{NUMERO}} = \frac{32}{6} = 5.3$

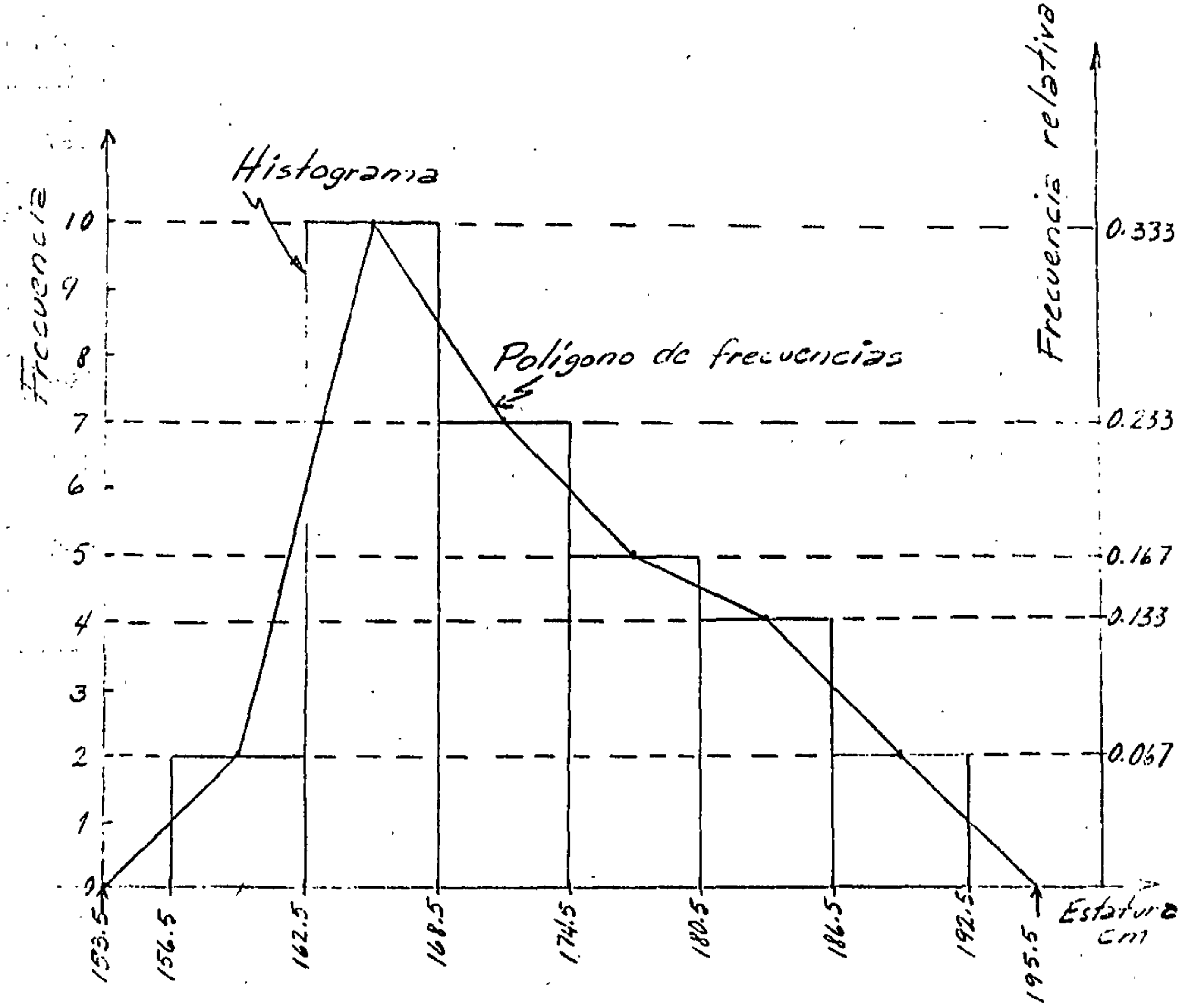
TOMAREMOS UN ANCHO DE 6 CM, CON LO CUAL EL RANGO DEL AGRUPAMIENTO ES 6 x 6 = 36 CM. LA DIFERENCIA DE RANGOS ES 36-32=4, QUE SE REPARTE EN LOS DOS INTERVALOS EXTREMOS EQUITATIVAMENTE. POR LO TANTO, LOS INTERVALOS RESULTAN SER:

157-162, 163-168, 169-174, 175-180, 181-186, 187-192

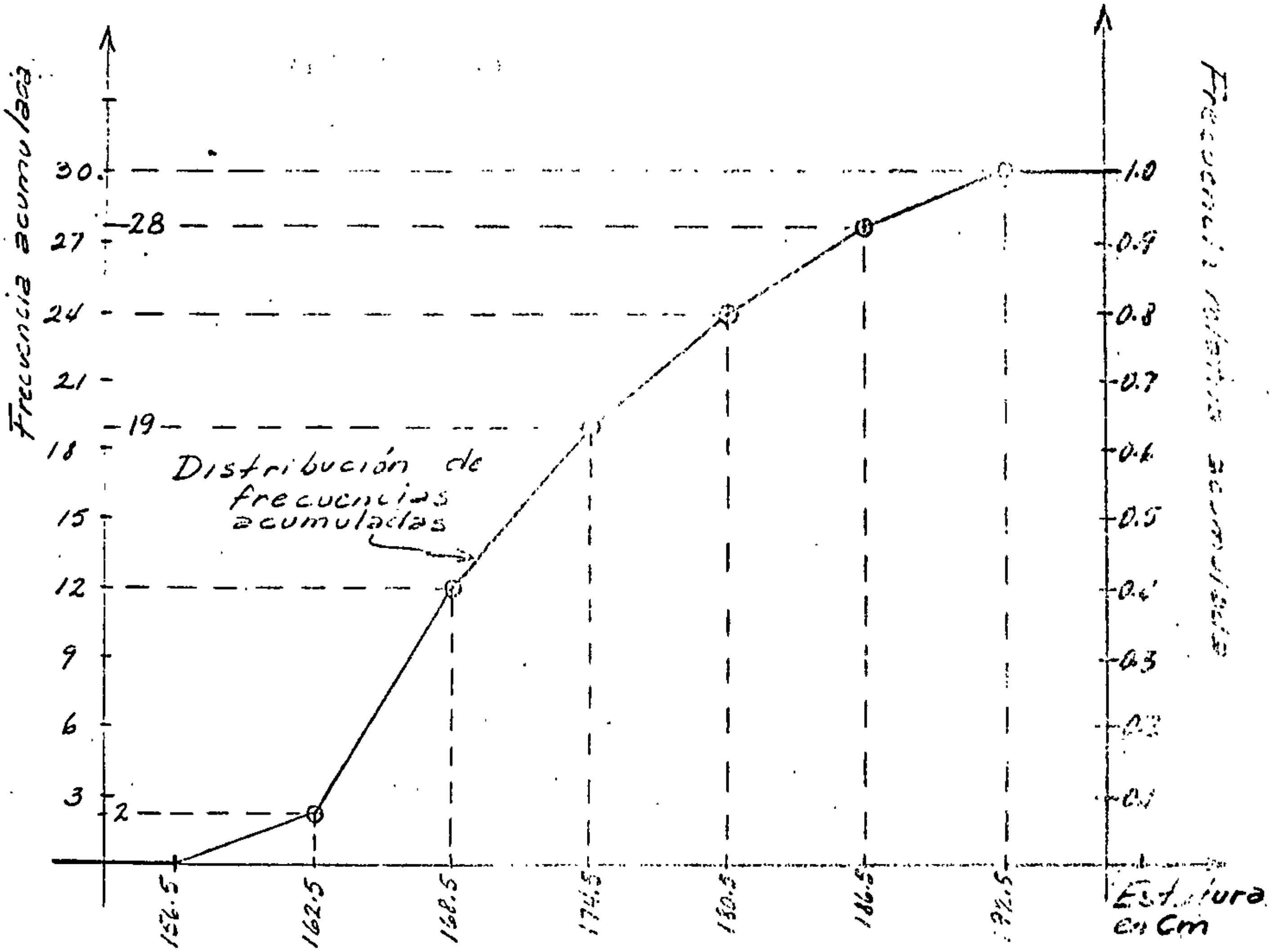
4. INTEGRACION DE LA TABLA:

INTERVALO	LIMITES REALES		FREC.	FREC. REL.	FREC. ACUM.	FREC.REL. ACUM.
	INF.	SUP.				
157-162	156.5	162.5	2	$\frac{2}{30}$ =0.067	2	0.067
163-168	162.5	168.5	10	$\frac{10}{30}$ =0.333	12	0.400
169-174	168.5	174.5	7	$\frac{7}{30}$ =0.233	19	0.633
175-180	174.5	180.5	5	$\frac{5}{30}$ =0.167	24	0.800
181-186	180.5	186.5	4	$\frac{4}{30}$ =0.133	28	0.933
187-192	186.5	192.5	2	$\frac{2}{30}$ =0.067	30	1.000
			Σ=30	Σ=1.000		

PRESENTACION GRAFICA DE LAS DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS



DISTRIBUCION DE FRECUENÇIAS DE LOS DATOS DE LAS ESTATURAS DE LOS VARONES RESIDENTES EN UNA REGION

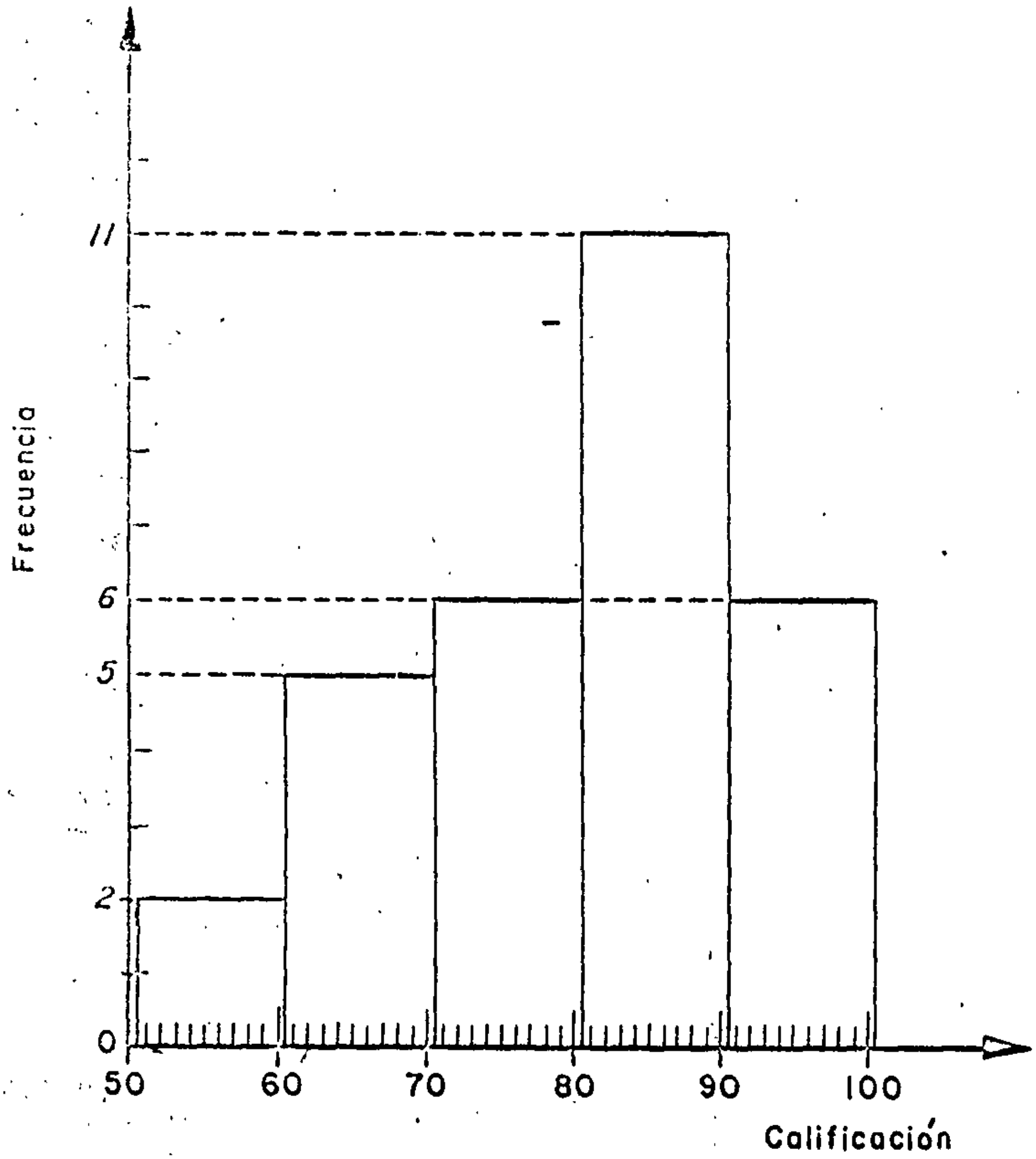


DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS ACUMULADAS

¿CUAL ES LA FRECUENCIA DE VALORES MAYORES QUE 180.5?: 30-24=6

LA FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA COMPLEMENTARIA ES: 1-0.800=0.200 (20%)

HISTOGRAMA DEL PROBLEMA DE LAS CALIFICACIONES EN PEDAGOGIA

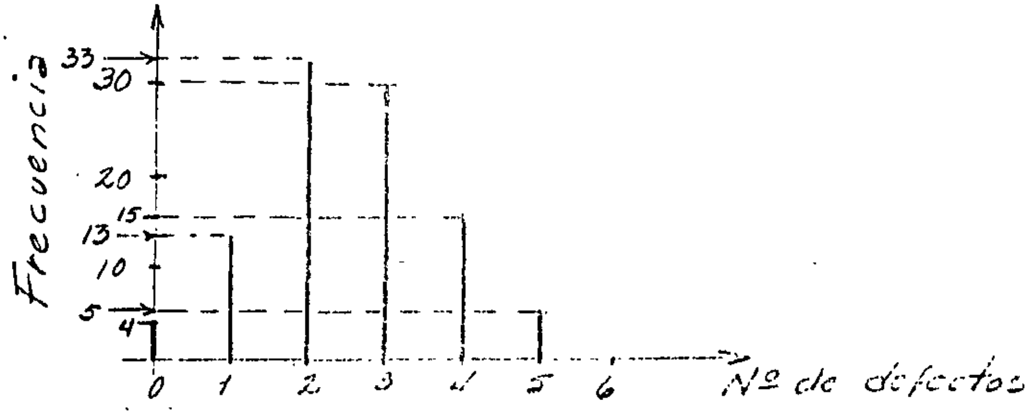


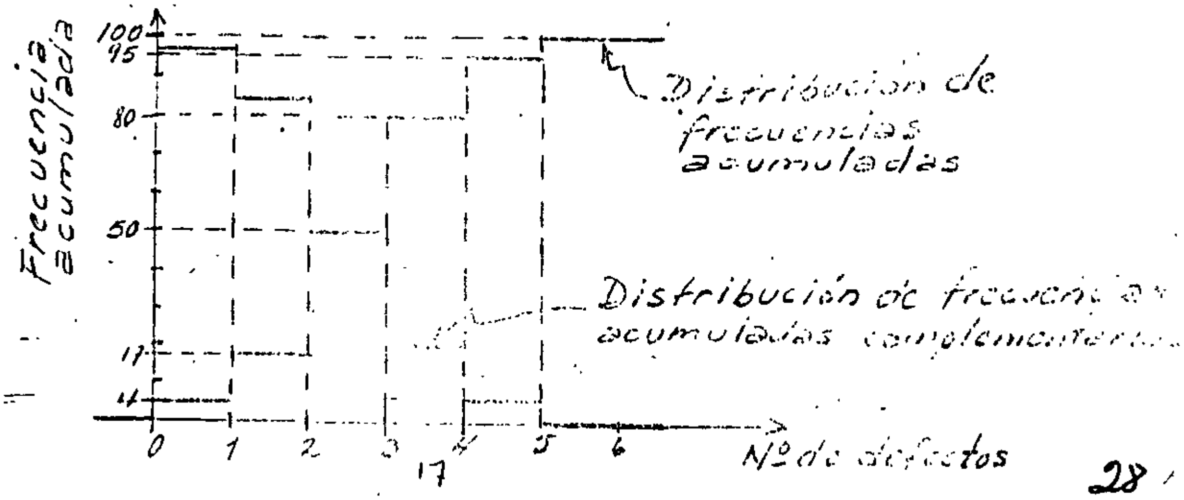
TAREA: DIBUJAR EL POLIGONO DE FRECUENCIAS Y LAS CURVAS DE FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS Y COMPLEMENTARIAS.

EJEMPLO

EN UN ESTUDIO SOBRE LA CALIDAD DE LOS MONOBLOCKS PRODUCIDOS POR UNA FABRICA, SE OBTUVO UNA MUESTRA ALEATORIA DE 100 ELEMENTOS, A LOS CUALES SE LES CONTO EL NUMERO DE DEFECTOS DE FABRICACION. LA DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS QUE SE OBTUVO ES LA SIGUIENTE:

NUMERO DE DEFECTOS	FRECUENCIA	FRECUENCIA ACUMULADA	FRECUENCIA ACUMULADA COMPLEMENTARIA
0	4	4	96 (100-4)
1	13	17	83 (100-17)
2	33	50	50 (100-50)
3	30	80	20 (100-80)
4	15	95	5 (100-95)
5	5	100	0 (100-100)
	100		



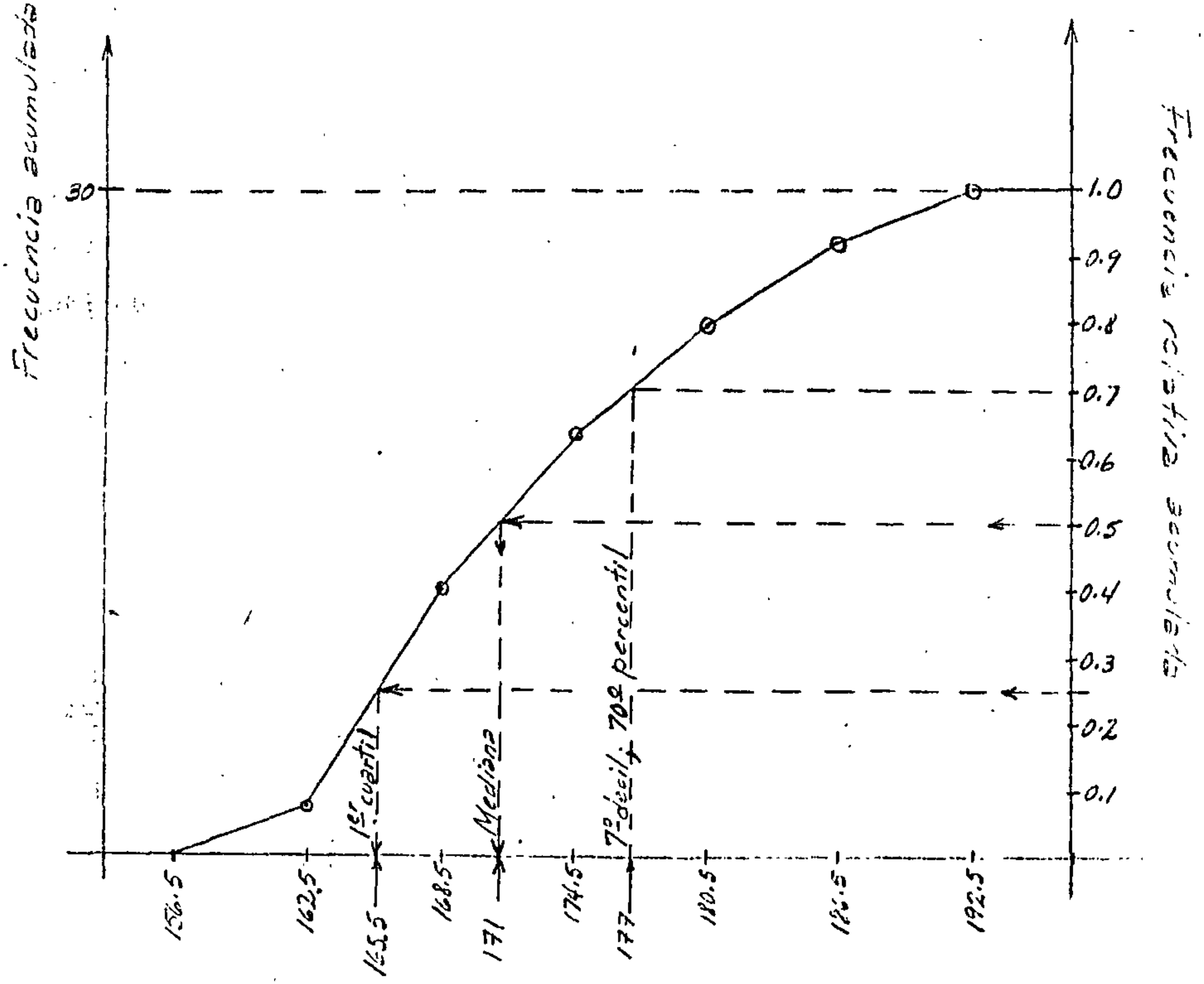


PERCENTILES.- SON LOS VALORES DE LA VARIABLE CORRESPONDIENTES A FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS QUE SON MULTIPLOS DE 1 POR CIENTO.

DECILES.- SON LOS VALORES DE LA VARIABLE CORRESPONDIENTES A FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS QUE SON MULTIPLOS DE 10 POR CIENTO.

CUARTILES.- SON LOS VALORES DE LA VARIABLE CORRESPONDIENTES A FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS QUE SON MULTIPLOS DE 25 POR CIENTO.

MEDIANA.- VALOR DE LA VARIABLE CORRESPONDIENTE A LA FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA DE 50%.



MEDIDAS REPRESENTATIVAS DE LOS DATOS

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

VALOR MEDIO O PROMEDIO ARITMETICO

PARA DATOS NO AGRUPADOS

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

DONDE x_i SON LOS VALORES DE LOS DATOS Y n ES EL TAMAÑO DE LA MUESTRA.

SI LOS DATOS ESTAN AGRUPADOS Y f_j ES LA FRECUENCIA DEL j-ESIMO INTERVALO Y x_j ES LA MARCA DE CLASE CORRESPONDIENTE, ENTONCES

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K} f_j x_j \quad ; \; K = \text{NUMERO DE INTERVALOS}$$

EJEMPLO

SEA EL EJEMPLO ENUNCIADO ANTERIORMENTE DE LOS DEFECTOS EN MONOBLOCKS.

SE TENIA:

j	No. DE DEFECTOS x	FRECUENCIA f	fx
1	0	4	4 x 0 = 0
2	1	13	13 x 1 = 13
3	2	33	33 x 2 = 66
4	3	30	30 x 3 = 90
5	4	15	15 x 4 = 60
K=6	5	5	5 x 5 = 25
		Σ=100	$\sum_{j=1}^{6}$ 254

$$\bar{x} = \frac{254}{100}$$

$\bar{x}$ = 2.54 DEFECTOS POR MONOBLOCK

MODO.- ES EL VALOR DE LA VARIABLE QUE APARECE CON MAYOR FRECUENCIA EN UNA MUESTRA. SI LOS DATOS ESTAN AGRUPADOS, EL MODO ES LA MARCA DE CLASE DEL INTERVALO QUE TIENE LA MAYOR FRECUENCIA.

EJEMPLO

EN EL PROBLEMA DE LOS MONOBLOCKS EL MODO ES 2. EN EL PROBLEMA DE LAS ESTATURAS DE LOS VARONES ADULTOS DE UNA CIUDAD EL MODO ES 165.5 CM.

MEDIANA: ES EL VALOR DE LA VARIABLE QUE CORRESPONDE AL 50% DE LA FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA.

SI LOS DATOS ESTAN AGRUPADOS POR INTERVALOS, LA MEDIANA SE PUEDE CALCULAR CON LA FORMULA (ADEMAS DE GRAFICAMENTE, COMO YA SE VIO).

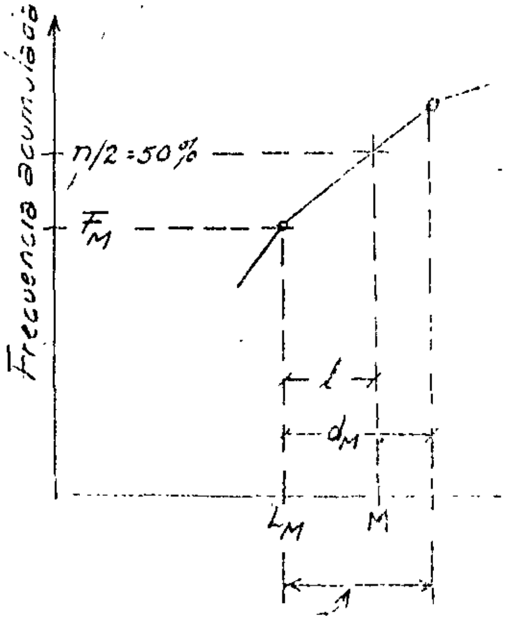
$$\text{MEDIANA} = M = L_M + \frac{\frac{n}{2} - F_M}{f_M} d_M$$

DONDE L_M = LIMITE INFERIOR REAL DEL INTERVALO QUE CONTIENE A LA MEDIANA

f_M Y d_M = RESPECTIVAMENTE, A LA FRECUENCIA Y ANCHO DEL INTERVALO QUE CONTIENE A LA MEDIANA

F_M = FRECUENCIA ACUMULADA HASTA EL INTERVALO QUE CONTIENE A LA MEDIANA EXCLUSIVE

n = TAMAÑO DE LA MUESTRA



Intervalo que contiene a la mediana

$$\frac{f_M}{d_M} = \frac{\frac{n}{2} - F_M}{l}$$

$$\therefore \quad l = d_M \frac{\frac{n}{2} - F_M}{f_M}$$

Mediana = M = $L_M + l$

EJEMPLO

EN UN ESTUDIO PARA DETERMINAR LOS TIEMPOS EN QUE UNA MUESTRA ALEATORIA DE INDIVIDUOS REACCIONABA A CIERTOS ESTIMULOS PSICOLOGICOS SE OBTUVO LO SIGUIENTE:

j	MARCA DE CLASE x, EN SEG	LIMITES REALES	FRECUENCIA f	FRECUENCIA ACUMULADA, F	fx, SEG
1	0.10	0.075-0.125	2	2	0.20
2	0.15	0.125-0.175	7	9	1.05
3	0.20	0.175-0.225	14	23	2.80
4	0.25	0.225-0.275	4	27	1.00
K=5	0.30	0.275-0.325	3	30	0.90
			Σ=30		$\sum_{j=1}^{5} f_j x_j = 5.95$

PROMEDIO ARITMETICO

$$\bar{x} = \frac{5.95}{30} = 0.198 \text{ SEG}$$

MODO = 0.20 SEG

MEDIANA

$$d_M = 0.05, \quad L_M = 0.20 - \frac{0.05}{2} = 0.175, \quad F_M = 9$$

$$n/2 = 30/2 = 15, \quad f_M = 14$$

$$\text{MEDIANA} = M = 0.175 + \frac{15 - 9}{14} 0.05$$

$$M = 0.175 + \frac{0.30}{14} = 0.175 + 0.021 = 0.196 \text{ SEG}$$

MEDIDAS DE DISPERSION

RANGO = MAXIMO VALOR OBSERVADO − MINIMO VALOR OBSERVADO

VARIANCIA : SI LOS DATOS NO ESTAN AGRUPADOS:

$$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

SI LOS DATOS ESTAN AGRUPADOS:

$$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} f_j(x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} f_j x_j^2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

DONDE LAS x_j SON LOS VALORES DE LAS MARCAS DE CLASE DE LOS INTERVALOS O LOS VALORES DE AGRUPAMIENTO.

DESVIACION ESTANDAR

$$S_X = \sqrt{S_X^2}$$

COEFICIENTE DE VARIACION

$$V_X = S_X/\bar{x}$$

20

EJEMPLO

EN UN ESTUDIO SOBRE LA TEMPERATURA MAXIMA DIARIA EN UNA CIUDAD SE OBTUVO LO SIGUIENTE DURANTE UNA PRIMAVERA:

i	INTERVALOS DE TEMPERATURA, °F	MARCA DE CLASE, °F	FRECUENCIA f	xf	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2 f$
1	55 - 63	59	2	118	-21.3	453.7	907.4
2	64 - 72	68	6	408	-12.3	151.3	907.8
3	73 - 81	77	7	539	- 3.3	10.9	76.3
4	82 - 90	86	9	774	5.7	32.5	292.5
5	91 - 99	95	6	570	14.7	216.1	1296.6
			30	2409			3480.6

$$\bar{x} = \frac{2409}{30} = 80.3 \text{ °F}$$

$$S_X^2 = \frac{3480.6}{30} = 116 \text{ °F}^2$$

$$S_X = \sqrt{116} = 10.8 \text{ °F}$$

$$v_X = \frac{10.8}{80.3} = 0.134$$

(13.4%)

MODO = 86

d_M=9, L_M=72.5, f_M=7, F_M=8, $\frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$

$$\text{MEDIANA} = M = 72.5 + \frac{15 - 8}{7} 9 = 72.5 + 9 = 81.5 \text{ °F}$$

EJEMPLO

MEDIDA DE DISPERSION (DATOS AGRUPADOS EN VALORES)

Rango = 1.48 - 0.18 = 1.30

Datos x	Frecuencia	xf	x^2	x^2f
0.18	4	0.72	0.032	0.128
0.28	1	0.28	0.078	0.078
0.36	2	0.72	0.130	0.260
0.38	1	0.38	0.144	0.144
0.48	7	3.36	0.230	1.610
0.49	1	0.49	0.240	0.240
0.51	1	0.51	0.260	0.260
0.55	1	0.55	0.302	0.302
0.57	3	1.71	0.325	0.975
0.65	12	7.80	0.422	5.064
0.72	9	6.48	0.518	4.662
0.78	14	10.92	0.608	8.512
0.83	7	5.81	0.689	4.823
0.88	2	1.76	0.774	1.548
0.92	5	4.60	0.846	4.230
0.96	8	7.68	0.922	7.376
1.00	1	1.00	1.000	1.000
1.03	4	4.12	1.061	4.244
1.06	2	2.12	1.124	2.248
1.09	3	3.27	1.189	3.567
1.12	2	2.24	1.254	2.508
1.18	1	1.18	1.392	1.392
1.21	2	2.42	1.464	2.928
1.23	1	1.23	1.513	1.513
1.26	1	1.26	1.588	1.588
1.34	1	1.34	1.795	1.795
1.36	1	1.36	1.850	1.850
1.40	1	1.40	1.960	1.960
1.43	1	1.43	2.045	2.045
1.48	1	1.48	2.190	2.190
		Σ=79.62		71.045

$$\bar{X} = \frac{79.62}{100} = 0.796$$

$$\bar{x}^2 = 0.634$$

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{0.076} = 0.276$$

$$S_X^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2 = 0.710-0.634$$
$$= 0.076$$

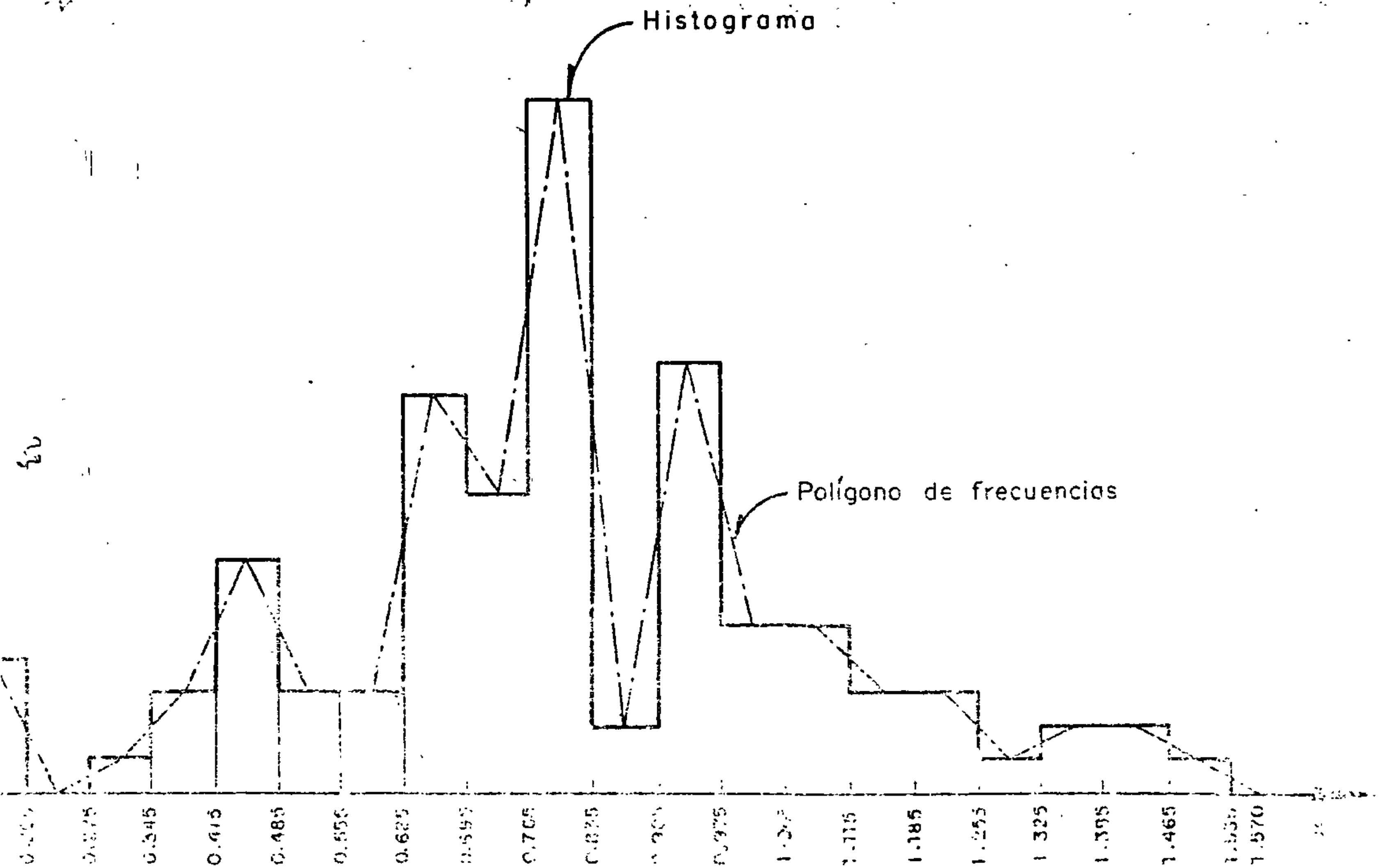
$$S_x^2 = 0.076$$

Coeficiente de variación = $V_x = \frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{0.276}{0.796} = 0.347 = 34.7\%$

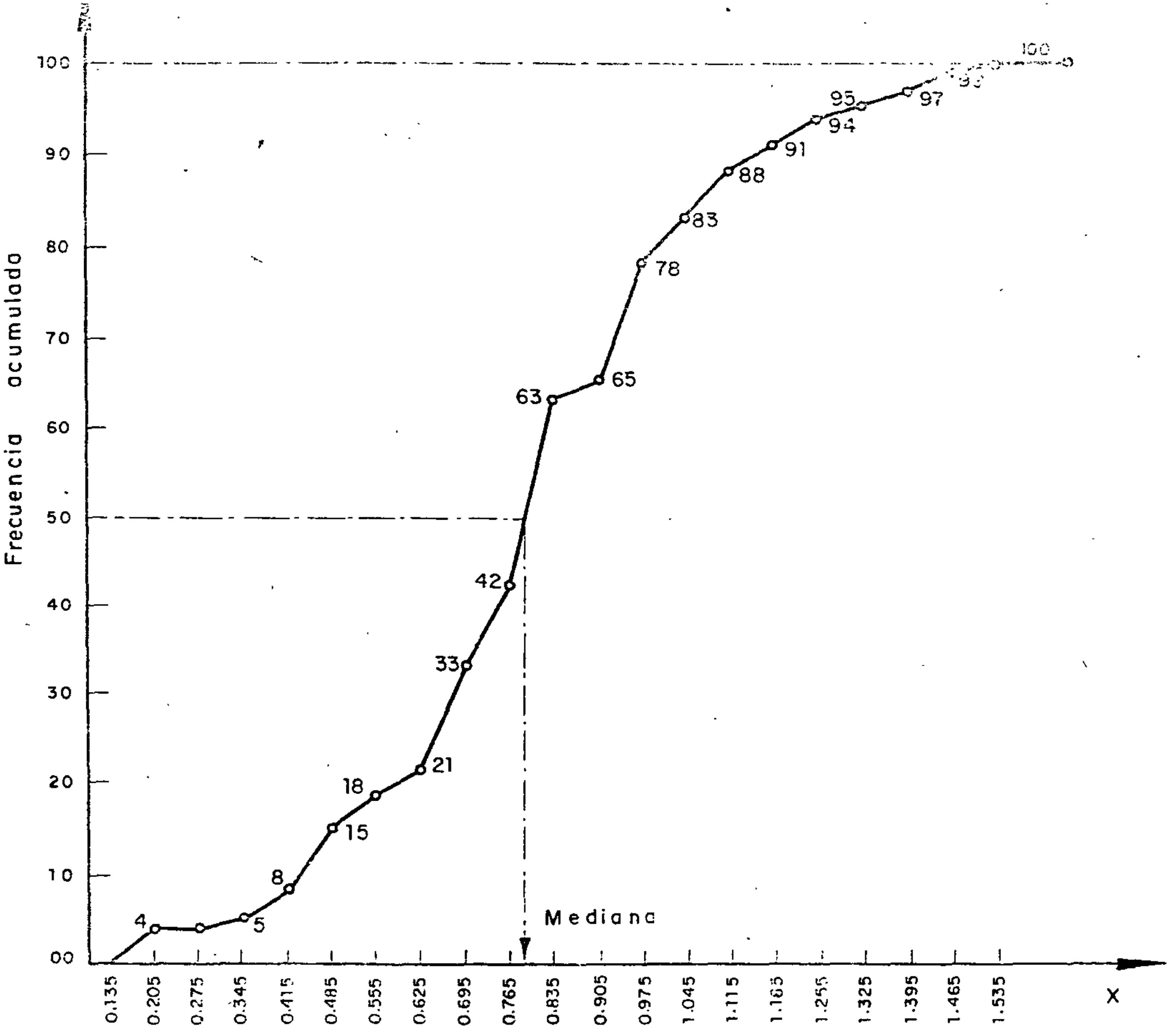
	Intervalo	Límites reales		FREC.	FRECUENCIA RELATIVA	FREC. ACUM.	FREC. REL. ACUMULADA
		INF.	SUP.				
1	0.14-0.20	0.135	0.205	4	4/100=0.04	4	0.04
2	0.21-0.27	0.205	0.275	0	0/100=0.00	4	0.04
3	0.28-0.34	0.275	0.345	1	1/100=0.01	5	0.05
4	0.35-0.41	0.345	0.415	3	3/100=0.03	8	0.08
5	0.42-0.48	0.415	0.485	7	7/100=0.07	15	0.15
6	0.49-0.55	0.485	0.555	3	3/100=0.03	18	0.18
7	0.56-0.62	0.555	0.625	3	3/100=0.03	21	0.21
8	0.63-0.69	0.625	0.695	12	12/100=0.12	33	0.33
9	0.70-0.76	0.695	0.765	9	9/100=0.09	42	0.42
10	0.77-0.83	0.765	0.835	21	21/100=0.21	63	0.63
11	0.84-0.90	0.835	0.905	2	2/100=0.02	65	0.65
12	0.91-0.97	0.905	0.975	13	13/100=0.13	78	0.78
13	0.98-1.04	0.975	1.045	5	5/100=0.05	83	0.83
14	1.05-1.11	1.045	1.115	5	5/100=0.05	88	0.88
15	1.12-1.18	1.115	1.185	3	3/100=0.03	91	0.91
16	1.19-1.25	1.185	1.255	3	3/100=0.03	94	0.94
17	1.26-1.32	1.255	1.325	1	1/100=0.01	95	0.95
18	1.33-1.39	1.325	1.395	2	2/100=0.02	97	0.97
19	1.40-1.46	1.395	1.465	2	2/100=0.02	99	0.99
20	1.47-1.53	1.465	1.535	1	1/100=0.01	100	1.00
				$\Sigma = 100$	$\Sigma = 1.00$		

						0.78							
						0.78							
						0.78							
						0.78							
						0.78							
						0.78							
						0.78							
						0.78							
						0.78							
						0.78							
						0.78		0.96					
					0.65	0.78		0.96					
					0.65	0.78		0.96					
					0.65	0.78		0.96	1.09				
					0.65	0.72	0.88	0.96	1.09				
			0.49		0.65	0.72	0.88	0.96	1.09				
			0.48		0.65	0.72	0.83	0.96	1.06				
			0.48		0.65	0.72	0.83	0.96	1.06				
			0.48	0.57	0.65	0.72	0.83	0.92	1.03				
0.18			0.48	0.57	0.65	0.72	0.83	0.92	1.03		1.26		
0.18		0.38	0.48	0.57	0.65	0.72	0.83	0.92	1.03	1.18	1.23		1.48
0.18		0.36	0.48	0.55	0.65	0.72	0.83	0.92	1.03	1.12	1.21	1.36	1.43
0.18	0.28	0.36	0.48	0.51	0.65	0.72	0.83	0.92	1.00	1.12	1.21	1.34	1.40

HISTOGRAMA



Histograma y polígono de frecuencias



Curva de frecuencias acumuladas

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

J	Marca de clase x	Límites reales	Frecuencia f	Frecuencia Acumulada, F	fx
1	0.17	0.135-0.205	4	4	0.68
2	0.24	0.205-0.275	0	4	0.00
3	0.31	0.275-0.345	1	5	0.31
4	0.38	0.345-0.415	3	8	1.14
5	0.45	0.415-0.485	7	15	3.15
6	0.52	0.485-0.555	3	18	1.56
7	0.59	0.555-0.625	3	21	1.77
8	0.66	0.625-0.695	12	33	7.92
9	0.73	0.695-0.765	9	42	6.57
10	0.80	0.765-0.835	21	63	16.80
11	0.87	0.835-0.905	2	65	1.74
12	0.94	0.905-0.975	13	78	12.22
13	1.01	0.975-1.045	5	83	5.05
14	1.08	0.045-1.115	5	88	5.40
15	1.15	1.115-1.185	3	91	3.45
16	1.22	1.185-1.255	3	94	3.66
17	1.29	1.255-1.325	1	95	1.29
18	1.36	1.325-1.395	2	97	2.72
19	1.43	1.395-1.465	2	99	2.86
20	1.50	1.465-1.535	1	100	1.50
					$\sum_{j=1}^{20} f_j x_j =$

$= 79.79$

Promedio aritmético $\bar{X} = \frac{79.79}{100} = 0.7979$

MODO = 0.80

Mediana = $M = L_M + \frac{\frac{n}{2} - F_M}{f_M} d_M$

$d_M = 0.07$

$L_M = 0.765$

$F_M = 42$

$f_M = 21$

$n = 100$

Mediana $= 0.765 + \frac{50-42}{21} 0.07$

$= 0.765 + 0.026 = 0.791$

MEDIDAS DE DISPERSION (DATOS AGRUPADOS)

Rango = máximo valor observado - mínimo valor observado
= 1.48 - 0.18 = 1.30

	Intervalo	Marca de clase x	Frecuencia f	xf	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2 f$
[illegible]	0.14-0.20	0.17	4	0.68	-0.628	0.394	1.576
[illegible]	0.21-0.27	0.24	0	0.00	-0.558	0.311	0.00
[illegible]	0.28-0.34	0.31	1	0.31	-0.488	0.238	0.238
[illegible]	0.35-0.41	0.38	3	1.14	-0.418	0.175	0.525
[illegible]	0.42-0.48	0.45	7	3.15	-0.348	0.121	0.487
[illegible]	0.49-0.55	0.52	3	1.56	-0.278	0.077	0.231
7	0.56-0.62	0.59	3	1.77	-0.208	0.043	0.129
8	0.63-0:69	0.66	12	7.92	-0.138	0.019	0.228
9	0.70-0.76	0.73	9	6.57	-0.068	0.004	0.036
10	0.77-0.83	0.80	21	16.80	0.002	0.00	0.000
11	0.84-0.90	0.87	2	1.74	0.072	0.005	0.010
12	0.91-0.97	0.94	13	12.22	0.142	0.020	0.260
13	0.98-1.04	1.01	5	5.05	0.212	0.045	0.225
14	1.05-1.11	1.08	5	5.40	0.282	0.079	0.395
15	1.12-1.18	1.15	3	3.45	0.352I	0.123	0.369
16	1.19-1.25	1.22	3	3.66	0.422	0.178	0.534
17	1.26-1.32	1.29	1	1.29	0.492	0.242	0.242
18	1.33-1.39	1.36	2	2.72	0.562	0.316	0.632
19	1.40-1.46	1.43	2	2.86	0.632	0.399	0.798
[illegible]	1.47-1.53	1.50	1	1.50	0.702	0.493	0.493
			100	79.79			7.768

Mediana = $\bar{X} = \dfrac{79.79}{100} = 0.7979$

S_x^2 = Variancia = $\dfrac{7.768}{100} = 0.077$

Desviac. estándar = $S_x = 0.277$ $\quad (S_x = \sqrt{S_x^2})$

Coeficiente de variación = $V_x = \dfrac{S_x}{\bar{x}} = \dfrac{0.277}{0.7979} = 0.347$

SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES
DIRECCION GENERAL DE SERVICIOS TECNICOS
DIRECCION DE APOYO TECNICO
SUBDIRECCION DE CONTROL DE CALIDAD

VALORES ESTADISTICOS DE LA CALIDAD DEL CEMENTO ASFALTICO AC-20

REFINERIA: HECTOR R. LARA S. DE PEMEX, EN CADEREYTA, NUEVO LEON
PERIODO:ENERO/JUNIO 1997

PERIODO	NUM. DE DATOS N	VALOR PROM. $\bar{X}$	DESV. ESTANDAR S	VALORES	
				MIN.	MAX.
Penetración en grados a 25°C, 100 g, 5 seg					**Norma ASTM: 60 mín.**
Enero/Junio	6	61.8	2.56	60	66
Punto de Reblandecimiento, en °C					
Enero/Junio	6	49.5	2.74	48.0	55.0
érdida por Calentamiento, en %					**Norma ASTM: 0.5 % máx.**
Enero/Junio	6	0.72	0.22	0.40	1.00
Penetración Retenida, en %					**Norma ASTM: 54 mín.**
Enero/Junio	6	63.2	5.74	54	70

SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES
DIRECCION GENERAL DE SERVICIOS TECNICOS
DIRECCION DE APOYO TECNICO
SUBDIRECCION DE CONTROL DE CALIDAD

VALORES ESTADISTICOS DE LA CALIDAD DEL CEMENTO ASFALTICO AC-20

REFINERIA: ANTONIO M. AMOR DE PEMEX, EN SALAMANCA, GTO.
PERIODO: FEBRERO/JUNIO 1997

	NUM. DE DATOS	VALOR PROM.	DESV. ESTANDAR	VALORES	
MES	N	$\bar{x}$	S	MIN.	MAX.
Penetración en grados a 25°C, 100 g, 5 seg				**Norma ASTM: 60 mín.**	
Febrero	10	62.8	2.78	60	68
Marzo	10	59.9	5.17	53	68
Abril	14	62.7	2.89	58	68
Junio	7	74.1	4.38	68	80
RESUMEN	**41**	**64.9**	**3.81**	**53**	**80**
Punto de Reblandecimiento, en °C					
Febrero	10	48.7	0.63	48.0	50.0
Marzo	10	49.6	0.69	48.5	51.0
Abril	14	50.0	1.09	48.0	52.0
Junio	7	48.8	0.76	48.0	50.0
RESUMEN	**41**	**49.2**	**0.79**	**48.0**	**52.0**
Pérdida por Calentamiento, en %				**Norma ASTM: 0.5 % máx.**	
Febrero	10	0.17	0.18	0.00	0.40
Marzo	10	0.31	0.19	0.00	0.50
Abril	14	0.23	0.14	0.00	0.50
Junio	7	0.14	0.10	0.00	0.30
RESUMEN	**41**	**0.21**	**0.15**	**0.00**	**0.50**
Penetración Retenida, en %				**Norma ASTM: 54 mín.**	
Febrero	10	66.5	6.24	58	79
Marzo	10	62.0	6.41	51	74
Abril	14	62.8	6.36	51	72
Junio	7	62.0	5.97	55	70
RESUMEN	**41**	**63.3**	**6.25**	**51**	**79**

SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES
DIRECCION GENERAL DE SERVICIOS TECNICOS
DIRECCION DE APOYO TECNICO
SUBDIRECCION DE CONTROL DE CALIDAD

VALORES ESTADISTICOS DE LA CALIDAD DEL CEMENTO ASFALTICO AC-20

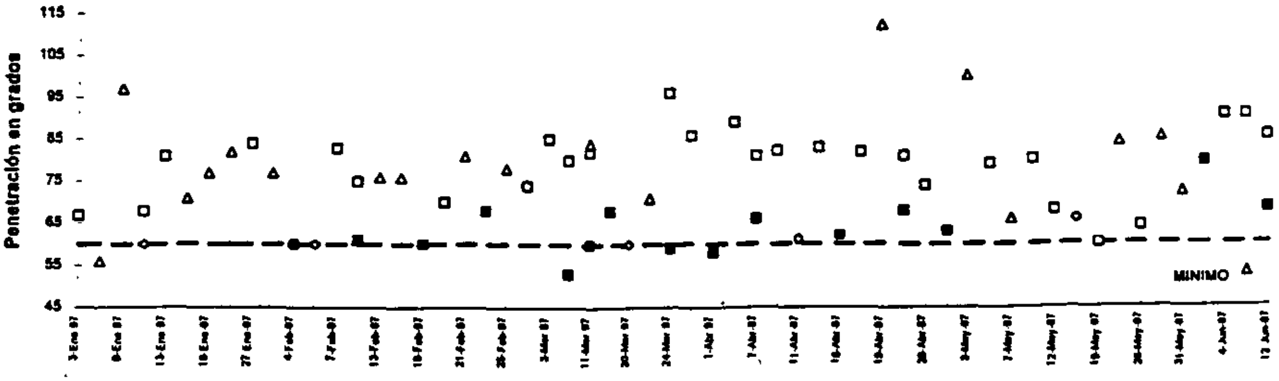
REFINERIA: ANTONIO DOVALI JAIME DE PEMEX, EN SALINA CRUZ, OAX.
PERIODO: ENERO/JUNIO 1997

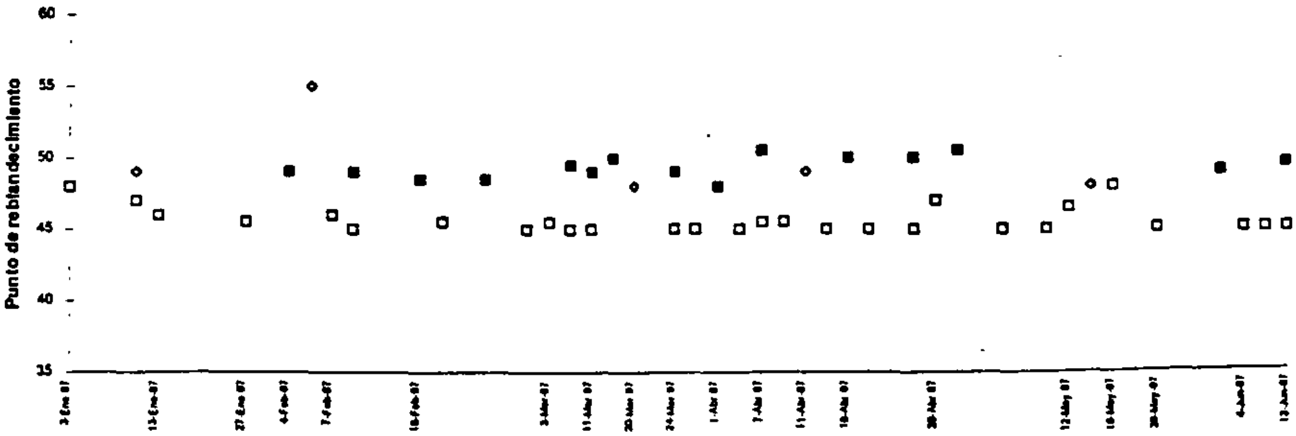
MES	NUM. DE DATOS N	VALOR PROM. $\bar{X}$	DESV. ESTANDAR S	VALORES MIN.	VALORES MAX.
Penetración en grados a 25°C, 100 g, 5 seg				**Norma ASTM: 60 min.**	
Enero	6	76.7	13.43	56	97
Febrero	4	77.8	2.36	76	81
Marzo	2	77.5	9.19	71	84
Abril	1	112.0	-	112	112
Mayo	6	80.0	12.25	66	100
Junio	1	53.0	-	53	53
RESUMEN	**20**	**79.5**	**9.31**	**53**	**112**
Viscosidad Saybolt-Furol a 135 °C					
Enero	6	452.8	36.51	397	492
Febrero	4	443.8	33.53	397	470
Marzo	2	440.0	66.47	393	487
Abril	1	398.0	-	398	398
Mayo	6	374.7	27.51	325	400
Junio	1	390.0	-	390	390
RESUMEN	**20**	**416.5**	**41.00**	**325**	**492.0**
Ductilidad a 25 °C				**Norma ASTM: 50 min.**	
Enero	6	76.2	11.18	64	96
Febrero	4	73.8	4.79	68	79
Marzo	2	69.5	0.71	69	70
Abril	1	84.0	-	84	84
Mayo	6	76.0	3.35	70	80
Junio	1	70.0	-	70	70
RESUMEN	**20**	**74.90**	**5.00**	**64**	**96**

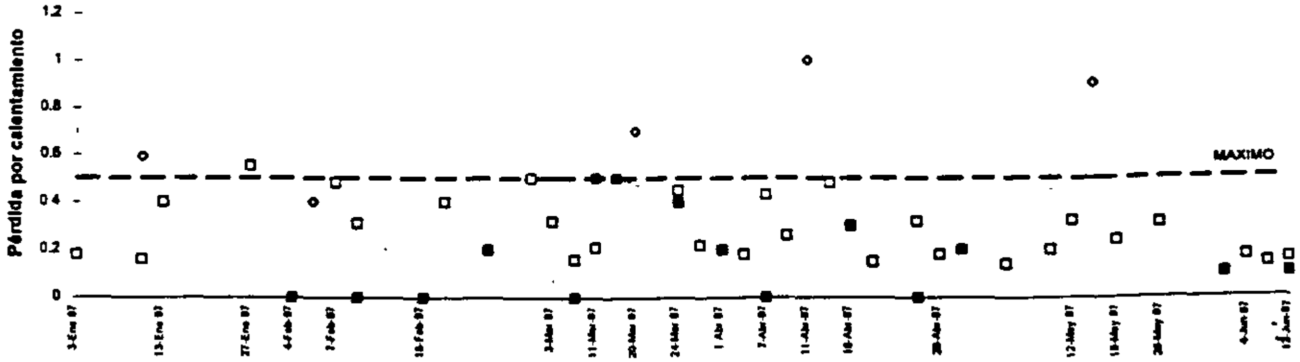
SECRETARIA DE
COMUNICACIONES
Y TRANSPORTES

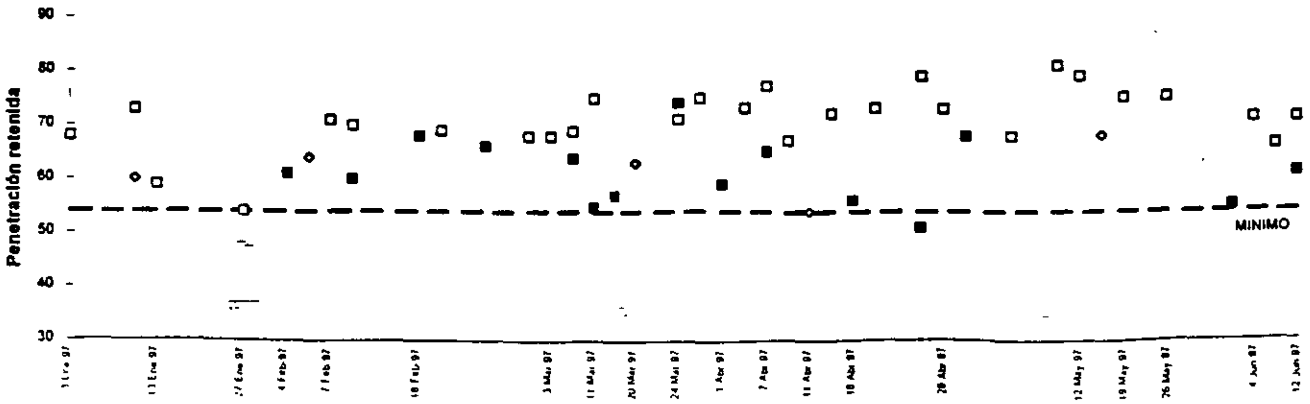
SUBSECRETARIA DE INFRAESTRUCTURA
DIRECCION GENERAL DE SERVICIOS TECNICOS

CALIDAD DEL CEMENTO ASFALTICO AC-20, PRODUCIDO POR LAS REFINERIAS DE PEMEX









47

CALIDAD DEL CEMENTO ASFALTICO AC-20, PRODUCIDO POR LAS REFINERIAS DE PEMEX

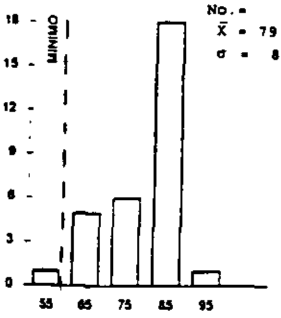
Refinería de Pemex en:

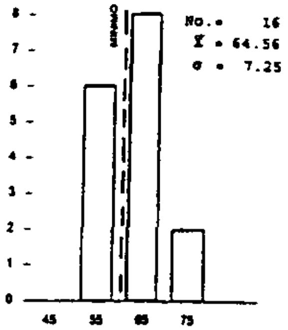
C 'ERO, TAMPS. □

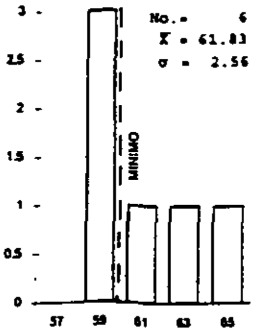
SALAMANCA, GTO. ■

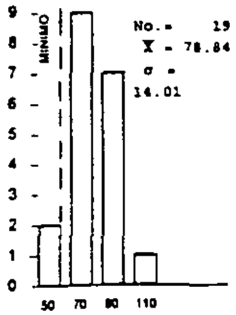
CADEREYTA, N.L. ◆

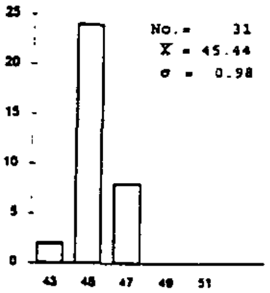
SALINA CRUZ, OAX. ▲

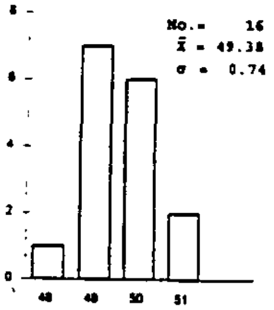


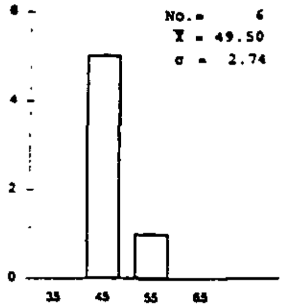


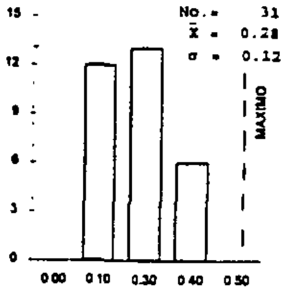


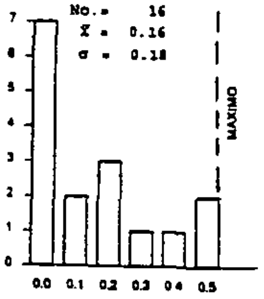


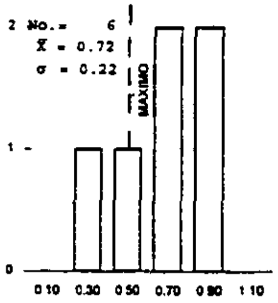


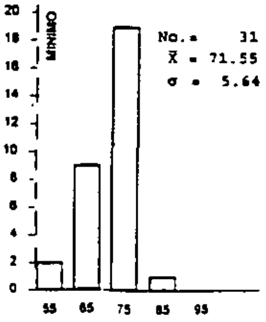


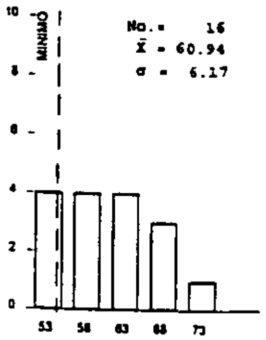


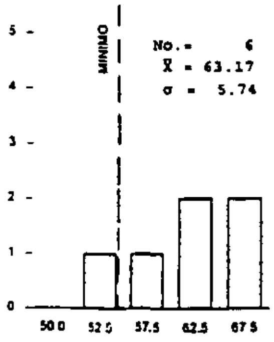












INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS DE LAS PRUEBAS

Para interpretar los resultados de las pruebas de resistencia a la compresión del concreto, se requiere conocer las normas al respecto.

Grado de uniformidad de la fabricación del concreto.

La siguiente tabla, tomada del ACI-214-77, sirve como guía para evaluar el **grado de control en la uniformidad** de la fabricación del concreto, en función de la desviación estándar.

TABLA No. 1

EVALUACION PARA EL GRADO DE CONTROL DE LA UNIFORMIDAD DE LA FABRICACION DEL CONCRETO, EN TERMINOS DE LA DESVIACION ESTANDAR (kg/cm^2)

EXCELENTE	**MUY BUENO**	**BUENO**	**ACEPTABLE**	**POBRE**
Por debajo	de	de	de	Sobre
de				
25	25 a 35	35 a 40	40 a 50	50

NOTA: Esta evaluación representa el promedio de resultados de especímenes ensayados a la edad especificada.

Grado de control del laboratorio

Para evaluar la calidad del trabajo del laboratorio de prueba, se puede emplear el procedimiento que se describe a continuación.

Si $\overline{R}$ es el promedio de los **rangos** de las pruebas en los especímenes de cada muestra, la desviación estándar, S_1, y el **coeficiente de variación**, V_1, de los ensayes se calculan con las fórmulas

$$S_1 = \frac{1}{d}\overline{R}$$

$$V_1 = \frac{S_1}{\overline{X}}$$

donde $\overline{X}$ es el promedio de **todas** las muestras, y d se obtiene de la siguiente tabla:

TABLA No. 2[*]

FACTORES PARA CALCULAR LA DESVIACION ESTANDAR DE LOS ENSAYES

Número de Especímenes	**d**	**1/d**
2	1.128	0.8865
3	1.693	0.5907
4	2.059	0.4857
5	2.326	0.4299

La siguiente tabla, tomada del AC1 214-77, califica el grado de **control del laboratorio** en función de los valores del coeficiente de variación de los ensayes:

TABLA No. 3

EVALUACION DEL GRADO DE CONTROL DEL LABORATORIO EN FUNCION DEL COEFICIENTE DE VARIACION

EXCELENTE	**MUY BUENO**	**BUENO**	**ACEPTABLE**	**POBRE**
Por debajo	de	de	de	Arriba
de 3	3 a 4	4 a 5	5 a 6	de 6

GRADOS DE CALIDAD DEL CONCRETO, SEGÚN LA NORMA N.O.M. -C- 155 - 1984.

Grados de calidad A (sólo para resistencia a compresión)

El concreto debe cumplir con lo siguiente:

a) Se acepta que no más del 20% del número de pruebas de resistencia tengan valor inferior a la resistencia especificada f'c; se requiere un mínimo de 30 pruebas.

b) No más del 1% de los promedios de 7 pruebas de resistencia consecutiva será inferior a la resistencia especificada.

c) No más del 1% de las pruebas de resistencia puede ser menor que la resistencia especificada menos 50 kg/cm^2.

Grado de calidad B (resistencia a compresión y resistencia a flexión)

El concreto debe cumplir con lo siguiente:

a) Se acepta que no más del 10% del número de pruebas de resistencia tengan valores inferiores a la resistencia especificada. Se requiere un mínimo de 30 pruebas.

b) No más del 1% de los promedios de 3 pruebas de resistencia consecutiva puede ser igual o menor que la resistencia especificada.

c) No más del 1% de las pruebas de resistencia puede ser menor que la resistencia especificada a compresión menos 35 kg/cm^2, o resistencia especificada a la flexión "MR" menos 4 kg/cm^2.

Interpretación de los Resultados

Promedio aritmético = $\overline{X}$ = 253.4 kg/cm^2

Desviación estándar = S = 32.1 kg/cm^2

$$\text{Coeficiente de variación} = \frac{32.1}{253.4} = 0.1266$$

Promedio de los rangos de los ensayes = $\overline{R}$ = 3.03

$$\text{Desviación estándar de los ensayes} = \frac{1}{1.128} \times 3.03 = 2.7 \text{ kg/cm}^2$$

52

$$\text{Coeficiente de variación de los ensayes} = V_1 = \frac{2.7}{253.4} \times 100 = 1.1\%$$

Conclusiones

a) Como S = 32.1, de acuerdo con la tabla 1, el **control de la uniformidad** de la fabricación es "muy bueno".

b) Como V_1 = 1.1%, de acuerdo con la tabla 3, el **control del laboratorio** se califica como "excelente".

c) El número de muestras con promedio de resistencias inferior a f'c = 250 kg/cm^2 es de 52, o sea, 49.5%. Como este valor es mayor que el tolerable, de 10%, se concluye que el concreto **no cumple** la norma N.O.M. -C- 155 - 1984, grado de calidad B.

d) El número de promedios de 3 muestras consecutivas inferiores a f'c = 250 kg/cm^2, es de 50, o sea 47.6%.

Como este valor es superior al 1% de la norma, se concluye que dicha norma **no se cumple**.

e) El número de promedios de muestras con deficiencia de más de 35 kg/cm^2 es de 13, o sea 12.4%. Como este valor es superior al 1% señalado como límite en la norma, se concluye que dicha norma **no se cumple**.

EJEMPLO

METODOS ESTADISTICOS PARA LA INTERPRETACION DE RESULTADOS DE RESISTENCIA A COMPRESION DEL CONCRETO

FUENTE: CONTROL DE CALIDAD DEL CONCRETO, POR ING. ALVARO ORTIZ FERNANDEZ. FUNDEC, A.C.

PROPIETARIO : ALVARO ORTIZ VIZAIRO

OBRA : GRANJA "EL CARACOL" AMECAMECA EDO. DE MEXICO

CONSTRUCTORA : SERVICIOS DE INGENIERIA S. A. DE C.V.

PREMEZCLADOR : CONCRETOS MARSA S.A. DE C.V.

FECHA DE EVALUACION : 15 DE SEPTIEMBRE DE 1985

PERIODO DE MUESTREO : DEL 20 DE MAYO AL 15 DE AGOSTO DE 1985

EDAD DE ENSAYE : 28 DIAS.

F'C DE PROYECTO : 250 KG/CM2

NUMERO DE MUESTRAS EN ESTUDIO : 105

NUMERO DE CILINDROS POR MUESTRA : 2

METODO DE DISENO ESTRUCTURAL : DISENO PLASTICO

MUESTRA NO.	LOCALIZACION	RESISTENCIA (KG/CM2) CIL. 1	CIL. 2	PROMEDIO (KG/CM2)	(RANGO) INTERVALO (KG/CM2)	PROMEDIO DE 3 MUESTRAS CONSECUTIVAS
PM-1	ZAPATAS DE CIMENTACION	253	253	253.0	0	287.3
PM-2	BASE DE DADOS CIMENTACION	318	315	316.5	3	296.3
PM-3	BASE DE DADOS CIMENTACION	291	294	292.5	3	261.5
PM-4	BASE DE DADOS CIMENTACION	280	280	280.0	0	264.3
PM-5	ZAPATAS Y BASE DE DADOS CIMENTACION	211	213	212.0	2	251.0
PM-6	ZAPATAS Y BASE DE DADOS CIMENTACION	301	301	301.0	0	280.7
PM-7	ZAPATAS Y BASE DE DADOS CIMENTACION	240	240	240.0	0	268.3
PM-8	ZAPATAS Y BASE DE DADOS CIMENTACION	302	300	301.0	2	275.5

LABORATORIO DE CONTROL, S.A.
(GRUPO SACMAG)

PM-9	BASE DE COLUMNAS CIMENTACION	264	264	264.0	0	266.5
PM-10	BASE DE COLUMNAS CIMENTACION	259	264	261.5	5	260.2
PM-11	ZAPATAS DE CIMENTACION	274	274	274.0	0	283,0
PM-12	ZAPATAS DE CIMENTACION	270	268	269.0	2	292.2
PM-13	ZAPATAS Y DADOS CIMENTACION	311	306	308.5	5	302.0
PM-14	ZAPATAS Y DADOS CIMENTACION	300	298	299.0	2	302.0
PM-15	ZAPATAS Y DADOS CIMENTACION	301	301	301.0	0	299.3
PM-16	ZAPATAS Y DADOS CIMENTACION	304	311	307.5	7	298.0
PM-17	ZAPATAS Y DADOS CIMENTACION	290	289	289.5	1	284.0
PM-18	ZAPATAS Y DADOS CIMENTACION	301	298	299.5	3	282.5
PM-19	ZAPATAS Y DADOS CIMENTACION	265	266	265.5	1	266.7
PM-20	ZAPATAS CIMENTACION	284	281	282.5	3	261.7
PM-21	ZAPATAS CIMENTACION	249	255	252.0	6	246.0 **
PM-22	ZAPATAS CIMENTACION	249	252	250.5	3	233.3 **
PM-23	ZAPATAS CIMENTACION	230	230	230.0	0	231.7 **
PM-24	DADO CIMENTACION	207	216	211.5 *	9	230.0 **
PM-25	DADO CIMENTACION	244	247	245.5	3	245.0 **
PM-26	DADO CIMENTACION	234	232	233.0	2	242.7 **
PM 27	DADO CIMENTACION	260	258	259.0	2	261.0
PM-28	COLUMNA	234	238	236.0	4	256.0
PM 29	COLUMNA	207	209	208.0	2	246.3 **
PM-30	COLUMNA	244	244	244.0	0	233.3 **
PM-31	COLUMNA	204	210	207.0 *	6	244.0 **
PM-32	COLUMNAS	248	250	249.0	2	261.7
PM-33	COLUMNAS	276	276	276.0	0	250.0
PM-34	COLUMNAS	260	260	260.0	0	217.5 **
PM-35	COLUMNAS	214	214	214.0 *	0	224.7 **
PM-36	COLUMNAS	236	241	238.5	5	211.7 **
PM-37	DADOS Y COLUMNAS	217	226	221.5	9	244.2 **
PM-38	COLUMNAS	240	242	241.0	2	251.1

LABORATORIO DE CONTROL, S.A.
(GRUPO SACMAG)

56

PM-39	COLUMNAS	271	269	270.0	2	259.3
PM-40	DADO Y COLUMNA	239	247	243.0	8	260.5
PM-41	DADO Y COLUMNA	265	265	265.0	0	261.5
PM-42	DADO Y COLUMNA	274	273	273.5	1	264.5
PM-43	DADO Y COLUMNA	246	246	246.0	0	256.0
PM-44	COLUMNA	275	273	274.0	2	252.7
PM-45	COLUMNA	250	251	250.5	1	259.0
PM-46	COLUMNA	232	235	233.5	3	271.0
PM-47	COLUMNAS	294	297	295.5	3	295.3
PM-48	COLUMNAS	294	291	292.5	3	309.0
PM-49	COLUMNA	297	299	298.0	2	315.7
PM-50	COLUMNA	337	341	339.0	4	301.2
PM-51	COLUMNA	309	311	310.0	2	270.0
PM-52	TRABE PORTANTE	260	261	260.5	1	250.0
PM-53	TRABE PORTANTE	240	244	242.0	4	240.0 **
PM-54	TRABE PORTANTE	250	250	250.0	0	241.7 **
PM-55	TRABE PORTANTE	227	229	228.0	2	230.5 **
PM-56	TRABES DE CIMENTACION	252	254	253.0	2	247.0 **
PM-57	TRABE	232	237	234.5	5	254.7
PM-58	TRABE	256	251	253.5	5	230.0
PM-59	TRABES DE LIGA	276	276	276.0	0	261.0
PM-60	TRABES DE LIGA	249	245	247.0	4	264.7
PM-61	TRABE DE LIGA	260	260	260.0	0	300.2
PM-62	TRABE DE LIGA Y COLUMNA	287	287	287.0	0	301.0
PM-63	TRABE DE LIGA Y COLUMNA	356	351	353.5	5	292.0
PM-64	MENSULA	260	270	265.0	10	250.0
PM-65	COLUMNA	260	255	257.5	5	259.2
PM-66	TRABE	255	248	251.5	7	281.5
PM-67	TRABE	270	267	268.5	3	279.0
PM-68	MENSULA	326	323	324.5	3	277.2
PM-69	COLUMNA Y TRABE	245	248	246.5	3	247.2 **

LABORATORIO DE CONTROL, S.A.
(GRUPO SACMAG)

PM-70	TRABE	261	261	261.0	0	241.3 **
PM-71	TRABE	236	233	234.5	3	220.2 **
PM-72	TRABE	226	231	228.5	5	223.3 **
PM-73	TRABE	224	219	221.5	5	217.0 **
PM-74	TRABE	219	221	220.0	2	213.0 **
PM-75	TRABE	211	213	212.0 *	2	226.3 **
PM-76	TRABE	205	209	207.0 *	4	239.0 **
PM-77	TRABE	260	260	260.0	0	251.0
PM-78	TRABE	250	250	250.0	0	240.7 **
PM-79	FIRME	241	245	243.0	4	227.7 **
PM-80	FIRME	226	232	229.0	6	220.0 **
PM-81	FIRME	211	211	211.0 *	0	232.0 **
PM-82	FIRME	249	244	246.5	5	240.5 **
PM-83	FIRME	236	241	238.5	5	241.0 **
PM-84	FIRME	238	235	236.5	3	245.7 **
PM-85	FIRME	252	249	250.5	3	249.5 **
PM-86	FIRME	248	252	250.0	4	245.7 **
PM-87	FIRME	252	244	248.0	8	248.5 **
PM-88	FIRME	237	241	239.0	4	246.3 **
PM-89	FIRME	261	256	258.5	5	250.3
PM-90	LOSA DE PISO	245	238	241.5	7	246.0 **
PM-91	LOSA DE PISO	273	277	275.0	4	237.3 **
PM-92	LOSA DE PISO	227	221	224.0	6	219.0 **
PM-93	LOSA DE PISO	211	215	213.0 *	4	214.3 **
PM-94	LOSA DE PISO	219	221	220.0	2	215.3 **
PM-95	LOSA DE PISO	210	210	210.0 *	0	205.5 **
PM-96	LOSA DE PISO OFICINA	215	217	216.0	2	204.0 **
PM-97	LOSA DE PISO FLAMABLES	189	192	190.5 *	3	197.0 **
PM-98	LOSA DE PISO	204	207	205.5 *	3	202.2 **
PM-99	LOSA DE PISO ANDEN	208	199	203.5 *	9	209.5 **

LABORATORIO DE CONTROL, S.A.
(GRUPO SACMAG)

PM-100	LOSA DE PISO ANDEN	196	199	197.5 *	1	218.8 **
PM-101	LOSA DE PISO	225	230	227.5	5	228.5 **
PM-102	LOSA DE PISO	233	230	231.5	1	233.2 **
PM-103	LOSA DE PISO	226	227	226.5	1	224.8 **
PM-104	LOSA DE PISO	238	245	241.5	7	
PM-105	LOSA DE PISO	203	210	206.5 *	7	

* INDICA AQUELLOS PROMEDIOS DE LOS CILINDROS DE LAS MUESTRAS CUYA RESISTENCIA ES DE MAS DE 35 KG/CM2 POR DEBAJO DE LA F'C DE PROYECTO (N O M - C - 155 - 1984 . 5 . 1 . 1 . 2).

** INDICA AQUELLOS PROMEDIOS DE 3 MUESTRAS CONSECUTIVAS CUYA RESISTENCIA ES MENOR QUE LA F'C DE PROYECTO (N O M C - 155 - - - 1984 . 5 . 1 . 1 . 2).

LABORATORIO DE CONTROL, S.A.
(GRUPO SACMAG)

1.4 EL PAPEL DE LOS CONCEPTOS Y LEYES DE PROBABILIDADES, Y SU RELACION CON LOS INDICADORES ESTADISTICOS

AL LANZAR UNA MONEDA NO PODEMOS PREDECIR CON CERTEZA CUAL CARA QUEDARA HACIA ARRIBA. LO UNICO QUE SE PUEDE ASEGURAR, SI LA MONEDA NO ESTA CARGADA, ES QUE AMBAS CARAS TIENEN LA MISMA OPORTUNIDAD DE SALIR, ES DECIR, QUE LOS EVENTOS SIMPLES (CARA) Y (CRUZ) TIENEN LA MISMA PROBABILIDAD DE OCURRIR.

COMO YA SE DIJO, LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRA UN EVENTO ES UNA MEDIDA DEL GRADO DE CONFIANZA QUE SE TIENE DE QUE ESTE OCURRA AL REALIZAR EL EXPERIMIENTO CORRESPONDIENTE.

AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES

LAS PROBABILIDADES QUE SE ASIGNAN A LOS DIFERENTES EVENTOS RELACIONADOS CON UN FENOMENO ALEATORIO DEBEN CUMPLIR CON LOS SIGUIENTES TRES AXIOMAS:

AXIOMA 1: LA PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE UN EVENTO A ES UN NUMEMERO, P(A), QUE SE LE ASIGNA A DICHO EVENTO, CUYO VALOR QUEDA EN EL INTERVALO

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

AXIOMA 2: SI S ES UN ESPACIO DE EVENTOS, ENTONCES

$$P(S) = 1$$

AXIOMA 3: LA PROBABILIDAD, P(C), DE LA UNION, C, DE DOS EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, A Y B, ES IGUAL A LA SUMA DE LAS PROBABILIDADES DE ESTOS, ES DECIR,

$$P(A \cup B) = P(C) = P(A) + P(B)$$

EXISTEN POR LO MENOS CUATRO MANERAS DE ASIGNARLE UNA PROBABILIDAD A UN EVENTO:

1. EN TERMINOS DE LOS RESULTADOS DE REPETIR VARIAS VECES UN EXPERIMENTO (METODO FRECUENCIAL).
2. APLICANDO LA DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDADES.
3. CON BASE EN UN MODELO MATEMATICO (PROBABILISTICO) DEL FENOMENO DE QUE SE TRATE.
4. MEDIANTE UN ANALISIS SUBJETIVO DEL PROBLEMA

METODO FRECUENCIAL

12

SI N(A) ES EL NUMERO DE VECES QUE SE OBSERVA EL EVENTO A AL REALIZAR N VECES UN EXPERIMENTO, LA FRECUENCIA RELATIVA DE A, DEFINIDA COMO N(A)/N, SE CONSIDERA COMO ESTIMACION DE LA PROBABILIDAD DE A,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

YA QUE, EN EL LIMITE, $P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(A)}{N}$

EJEMPLO

DE UNA URNA QUE CONTIENE BOLAS ROJAS, BLANCAS Y AZULES, SE SACO UNA BOLA, SE ANOTO SU COLOR Y SE REGRESO A LA URNA. SI ESTE EXPERIMENTO SE REPITE 20 VECES Y LOS RESULTADOS SON

b,b,a,r,r,r,a,b,r,a,b,b,a,r,b,r,r,a,r,a, DONDE

r = ROJA, b = BLANCA, a = AZUL

¿QUE PROBABILIDADES LE ASIGNARIA A LOS EVENTOS B={b}, A={a}, y R={r}, DE ACUERDO CON EL METODO FRECUENCIAL?

EN ESTA MUESTRA SE TIENE QUE N(B)=6, N(A)=6, N(R)=8, N=20

POR LO QUE $P(B)=\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$; $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$; $P(R) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10}$

NOTESE QUE LOS EVENTOS B, A Y R SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, YA QUE SON EVENTOS SIMPLES, Y QUE

$$P(B) + P(A) + P(R) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = 1 = P(S)$$

EN DONDE $S = \{r,b,a\}$

60

INTRODUCCION A LA TEORIA DE PROBABILIDADES

POR: DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

SIMBOLOS DE DESIGUALDADES:

$<$	menor que
$\leq$	menor o igual que
$>$	mayor que
$\geq$	mayor o igual que
$\neq$	diferente de

TEORIA DE CONJUNTOS

UN *CONJUNTO* ES UNA COLECCION BIEN DEFINIDA DE OBJETOS.

NOTACION: LOS CONJUNTOS SE DENOTAN USUALMENTE CON LETRAS MAYUSCULAS, Y SUS ELEMENTOS SE ANOTAN DENTRO DE UN PAR DE LLAVES.

EJEMPLOS

A) EL CONJUNTO DE NUMEROS ANOTADOS EN UN DADO ES

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

B) EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS MENORES QUE 5 ES

$S = \{-\infty, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

o $S = \{x: x \text{ ES ENTERO Y } x \leq 4\}$

C) EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS POSITIVOS MENORES QUE 5 ES

$E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$E = \{x: \text{ES ENTERO Y } 0 \leq x \leq 4\}$

D) EL CONJUNTO DE LOS CONTINENTES ES

$C = \{\text{ASIA, EUROPA, AMERICA, AFRICA, OCEANIA}\}$

E) EL CONJUNTO DE MARCAS QUE TIENE UNA MONEDA ES

$M = \{\text{CARA, CRUZ}\}$

F) EL CONJUNTO DE NUMEROS MAYORES DE 5 PERO MENORES O IGUALES QUE 10

$S_1 = \{x: 5 < x \leq 10\}$

CONJUNTOS

- *FINITOS.-* CUANDO TIENEN UN NUMERO FINITO DE ELEMENTOS
- *INFINITOS.-* CUANDO TIENEN UN NUMERO INFINITO DE ELEMENTOS

SUBCONJUNTOS

PARA EXPRESAR QUE UN ELEMENTO *PERTENECE* A UN CONJUNTO SE USA EL SIMBOLO $\in$. PARA EXPRESAR QUE *NO PERTENECE* SE USA EL SIMBOLO $\notin$.

EJEMPLO

SI $S_1 = \{X: 5 < X \leq 10\}$, ENTONCES.

$3 \notin S_1$; $5 \notin S_1$; $8 \in S_1$; $10 \in S_1$

PARA EXPRESAR QUE UN CONJUNTO *ESTA CONTENIDO* EN OTRO SE USA EL SIMBOLO $\subset$; SI *NO ESTA CONTENIDO* SE USA EL SIMBOLO $\not\subset$.

PARA QUE UN CONJUNTO ESTE CONTENIDO EN OTRO SE REQUIERE QUE *TODOS* SUS ELEMENTOS LO ESTEN, ES DECIR, QUE TODOS SUS ELEMENTOS PERTENEZCAN A AMBOS CONJUNTOS.

EJEMPLO

SEAN $E=\{3,5\}$; $F=\{3,8\}$; $G=\{7,9\}$. $E \not\subset S_1$; $F \not\subset S_1$; $G \subset S_1$

SI UN CONJUNTO, B, ESTA CONTENIDO EN OTRO, S, SE DICE QUE B ES *SUBCONJUNTO* DE S.

EJEMPLO

$B = \{X: 3 \leq X \leq 8\}$ Y $S_1 = \{X: 5 < X \leq 10\}$

EN ESTE CASO:

$G \subset S_1 \Rightarrow G$ ES SUBCONJUNTO DE S_1

$B \not\subset S_1 \Rightarrow B$ NO ES SUBCONJUNTO DE S_1

SE DICE QUE DOS CONJUNTOS SON IGUALES CUANDO CONTIENEN LOS MISMOS ELEMENTOS (NO IMPORTA EL ORDEN EN QUE ESTOS SE ESCRIBAN)

EJEMPLO

SEAN $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{7,5,1,3\}$ Y $C=\{7,5,1\}$

EN TAL CASO, $A = B \neq C$

CONJUNTO VACIO

DE LA MISMA MANERA QUE EXISTE EL CERO EN LOS NUMEROS, EN LA TEORIA DE CONJUNTOS EXISTE EL *CONJUNTO VACIO*, EL CUAL *NO* TIENE ELEMENTOS. USUALMENTE SE DENOTA $\emptyset$.

EJEMPLO

¿CUAL ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS, X, TALES QUE $2X=7$ Y X ES ENTERO?

SOLUCION - ES EL CONJUNTO VACIO, $\emptyset$.

A $\emptyset$ SE LE CONSIDERA COMO SUBCONJUNTO DE CUALQUIER CONJUNTO. ASI, POR EJEM, TODOS LOS SUBCONJUNTOS DEL CONJUNTO

$S =\{2,5,10\}$ SON: $\{2\}$; $\{5\}$; $\{10\}$; $\{2,5\}$; $\{2,10\}$; $\{5,10\}$; $\{2,5,10\}$ Y $\emptyset$.

ESPACIO DE EVENTOS

ASOCIADO A UN EXPERIMENTO SIEMPRE HAY UN CONJUNTO DE RESULTADOS POSIBLES; A DICHO CONJUNTO SE LE LLAMA *ESPACIO DE EVENTOS*.

EJEMPLOS

EL ESPACIO DE EVENTOS ASOCIADO AL EXPERIMENTO DE LANZAR UN DADO Y ANOTAR LA CARA QUE QUEDA HACIA ARRIBA ES

$S =\{1,2,3,4,5,6\}$

EL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE AL EXPERIMENTO DE LANZAR DOS DADOS Y ANOTAR LOS NUMEROS QUE QUEDAN HACIA ARRIBA ES

$$S=\left\{\begin{array}{l}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{array}\right\}$$

SI EN ESTE EXPERIMENTO LA OBSERVACION DE INTERES FUESE LA SUMA DE LOS DOS NUMEROS OBSERVADOS, ENTONCES EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO SERIA

$$S=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

A TODO SUBCONJUNTO DE UN ESPACIO DE EVENTOS SE LE LLAMA *EVENTO*. A LOS EVENTOS QUE TIENEN UN SOLO ELEMENTO DEL ESPACIO SE LES LLAMA *EVENTOS SIMPLES*.

SI AL REALIZAR UN EXPERIMENTO SE OBSERVA UN ELEMENTO DEL EVENTO A, ENTONCES SE DICE QUE *OCURRIO* O *SE VERIFICO* EL EVENTO A. POR EJEMPLO, SI A={2,4} Y AL LANZAR UN DADO SE OBSERVA EL 2 O 4, SE DICE QUE OCURRIO EL EVENTO A; SI SE OBSERVA CUALQUIER OTRO NUMERO, ENTONCES SE DICE QUE *NO* OCURRIO A.

ESPACIOS DE EVENTOS

- *DISCRETOS*.- SI SUS ELEMENTOS PUEDEN NUMERARSE O CONTARSE. TIENEN UN NUMERO FINITO O INFINITO NUMERABLE DE ELEMENTOS.
- *CONTINUOS*.- SI SUS ELEMENTOS *NO* PUEDEN ENUMERARSE. TIENEN UN NUMERO INFINITO NO NUMERABLE DE ELEMENTOS

EJEMPLO

LOS ESPACIOS DE EVENTOS S_1={CARA, CRUZ}; S_2={1,2,3,4,5,6,}; S_3={VERDE, ROJO} SON DISCRETOS. LOS ESPACIOS DE EVENTOS $S_4=\{X: -\infty<X\leq 0\}$; $S_5\{Z: Z\geq 3\}$; $S_6=\{Y: 3\leq Y\leq 80\}$ SON CONTINUOS.

EJEMPLO

¿QUE TIPOS DE ESPACIOS DE EVENTOS CORRESPONDEN A LOS SIGUIENTES EXPERIMENTOS?

A) CONTEO DEL NUMERO DE GRANOS DE UNA MAZORCA DE MAIZ

$S=\{0,1,2,3,\ldots,\infty\}$, ES DISCRETO E INFINITO

B) MEDICION DE LA LONGITUD DE UNA ESPIGA DE TRIGO

$S=\{X: 0<X<\infty\}$, X EN CM, ES CONTINUO E INFINITO

C) MEDICION DEL EFECTO DE UNA VACUNA, EN TERMINOS DE "EXITO" O "FRACASO"

S={EXITO, FRACASO} ES DISCRETO Y FINITO.

D) MEDICION DEL CONTENIDO DE UN ANTIBIOTICO EN UNA CAPSULA

$S=\{Y: 0\leq Y<\infty\}$ Y en mg, ES CONTINUO E INFINITO.

COMPLEMENTO DE UN EVENTO

EL *COMPLEMENTO* DE UN EVENTO A ES OTRO EVENTO QUE CONTIENE TODOS LOS ELEMENTOS DEL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE QUE NO ESTAN EN A. USUALMENTE SE DENOTA CON UNA TILDE SOBRE EL SIMBOLO QUE CORRESPONDE AL EVENTO QUE COMPLEMENTA. $\tilde{A}$.

EJEMPLOS

SI $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ Y $A=\{1,3,5\}$ ENTONCES $\tilde{A}=\{2,4,6\}$.

SI $S=\{X: 0\leq X\leq 58\}$ Y $A=\{X: 3<X\leq 17\}$, ENTONCES $\tilde{A}=\{X: 0\leq X\leq 3.\ 17<X\leq 58\}$

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

CUANDO DOS O MAS EVENTOS NO PUEDEN OCURRIR SIMULTANEAMENTE AL REALIZAR UNA SOLA VEZ UN EXPERIMENTO, SE DICE QUE ESTOS SON *MUTUAMENTE EXCLUSIVOS*; ES DECIR, DOS EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS CUANDO NO TIENEN NI UN SOLO ELEMENTO EN COMUN.

EJEMPLO

A) CUALQUIER EVENTO Y SU COMPLEMENTO SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS.

B) ¿SON $E=\{Y: 0\leq Y\leq 25\}$ Y $A=\{2,50,100\}$ MUTUAMENTE EXCLUSIVOS?

NO, PORQUE TIENEN EL ELEMENTO 2 EN COMUN.

OPERACIONES CON EVENTOS

UNION

LA *UNION* DE DOS EVENTOS ES OTRO EVENTO CUYOS ELEMENTOS SON TODOS LOS DE AMBOS. LA OPERACION DE UNION SE DENOTA CON EL SIMBOLO U.

EJEMPLOS

A) SI $A=\{2,4,6\}$ Y $B=\{1,6,12\}$, ENTONCES

G=AUB $=\{1,4,6,12,2\}$

B) ¿SON A Y B MUTUAMENTE EXCLUSIVOS? NO PORQUE TIENEN EL 6 EN COMUN.

C) SI $D=\{Y: 0\leq Y\leq 13\}$ Y $E=\{Y: 20\leq Y\leq 50\}$,

ENTONCES

DUE=$\{Y: 0\leq Y\leq 13,\ 20\leq Y\leq 50\}$

D) SI $F=\{Y: 8\leq Y\leq 20\}$, ENTONCES

DUF=$\{Y;\ 0\leq Y\leq 20\}$.

E) SI $G=\{Y: 3\leq Y\leq 10\}$, ENTONCES

DUG=$\{Y: 0\leq Y\leq 13\}$= D; OBSERVESE QUE EN ESTE CASO GCD. EN GENERAL, SI ACB, ENTONCES AUB=B.

EN GENERAL, LA UNION DE VARIOS EVENTOS ES OTRO EVENTO CUYOS ELEMENTOS SON TODOS LOS DE LOS EVENTOS QUE SE UNEN.

EJEMPLO

$A \cup B \cup F = K = \{1,2,4,6,\ y:\ 8 \leq y \leq 20\}$

INTERSECCION

LA *INTERSECCION* DE DOS EVENTOS ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS QUE PERTENECEN SIMULTANEAMENTE A AMBOS. PARA DENOTAR LA OPERACION DE INTERSECCION SE USA EL SIMBOLO $\cap$.

EJEMPLOS

A) $A = \{2,3,6\}$ Y $B = \{2,6,10\}$ ENTONCES $A \cap B = C = \{2,6\}$

B) $D = \{Y:\ 4 \leq Y \leq 5\}$, ENTONCES $A \cap D = \emptyset$.

OBSERVESE QUE EN ESTE EJEMPLO A Y D SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, YA QUE *NO* TIENEN NINGUN ELEMENTO EN COMUN. SIEMPRE QUE DOS EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, SU INTERSECCION ES EL CONJUNTO VACIO.

EN GENERAL, LA *INTERSECCION* DE VARIOS EVENTOS ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS QUE TODOS ELLOS TIENEN EN COMUN.

EJEMPLO

SI $A = \{2,3,6,8\}$; $B=\{2,3,10,100\}$; $C=\{Y:\ 0 \leq Y \leq 5\}$ Y $D=\{Y:\ 2 \leq Y \leq 4\}$, ENTONCES

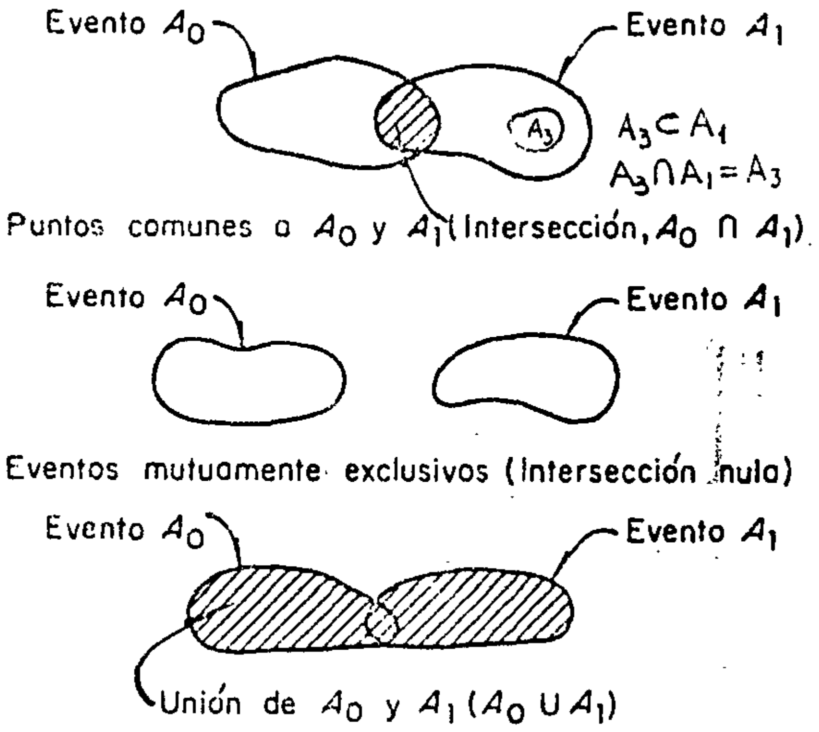
$A \cap B \cap C \cap D = E = \{2,3\}$

$A \cup B \cup C \cup D = F = \{Y:\ 0 \leq Y \leq 5,\ 6,8,10,100\}$

LA OCURRENCIA DE UN EVENTO "Y" OTRO IMPLICA LA OCURRENCIA DE AMBOS A LA VEZ, ES DECIR, QUE SE VERIFIQUE LA *INTERSECCION*. LA OCURRENCIA DE UN EVENTO "O" ALGUN OTRO, IMPLICA LA OCURRENCIA DE CUALQUIERA DE ELLOS, ES DECIR DE LA *UNION*.

DIAGRAMAS DE VENN

UNA MANERA DE ILUSTRAR GRAFICAMENTE LAS OPERACIONES CON CONJUNTOS ES MEDIANTE LOS *DIAGRAMAS DE VENN*. EN ESTOS, CADA CONJUNTO SE REPRESENTA POR UNA CURVA CERRADA QUE ENCIERRA LOS ELEMENTOS QUE LE CORRESPONDEN.



Diagramas de Venn (unión e intersección de eventos)

EVENTOS COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS

SE DICE QUE LOS EVENTOS B_1, B_2, ..., B_n SON COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVOS CUANDO LA UNION DE TODOS ELLOS ES IGUAL AL ESPACIO DE EVENTOS, ES DECIR, SI

$$B_1 U B_2 U \ldots U B_N = S$$

DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDADES

SI M(A) ES EL NUMERO DE MANERAS *IGUALMENTE PROBABLES* EN QUE PUEDE OCURRIR EL EVENTO A Y M ES EL NUMERO TOTAL DE ELEMENTOS DEL ESPACIO DE EVENTOS CORRESPONDIENTE, ENTONCES LA PROBABILIDAD DE A ES

$$P(A) = \frac{M(A)}{M}$$

EJEMPLOS

A) SI EN UNA URNA SE TIENEN 5 BOLAS BLANCAS Y 15 NEGRAS, Y SE VA A SELECCIONAR UNA AL AZAR, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SEA BLANCA(A={BLANCA})?:

$M= 5+15=20;\ M(A)=5 \Rightarrow P(A)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

B) SI SE LANZAN DOS DADOS, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE

1. SALGA UN 2 Y UN 5 (EVENTO B)?
2. LA SUMA SEA 7 (EVENTO A)

PARA EL INCISO 1 EL ESPACIO DE EVENTOS ES:

$$S = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2.1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3.5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right]$$

SI EL DADO NO ESTA CARGADO, CADA PAREJA DE NUMEROS ES IGUALMENTE PROBABLE. EN TAL CASO, M=36 Y M(B)=2 (APARECE (2,5) O (5,2))

$\Rightarrow P(B)=2/36=1/18.$

PARA EL INCISO 2 EL ESPACIO DE EVENTOS ES

$S_1=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

PERO NO TODOS LOS ELEMENTOS (EVENTOS SIMPLES) SON IGUALMENTE PROBA-

BLES, YA QUE, POR EJEMPLO, EL 2 SOLO APARECERA SI SE OBSERVA LA PAREJA (1,1), EN CAMBIO EL 3 APARECERA SI OCURREN LAS PAREJAS (1,2) O (2.1), ES DECIR, EL 3 TIENE EL DOBLE DE PROBABILIDAD QUE EL 2. POR ESTO, PARA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE LA SUMA SEA 7 ES NECESARIO TRABAJAR CON EL ESPACIO S Y CONTAR LAS MANERAS POSIBLES DE QUE LA SUMA SEA 7, LO CUAL OCURRE SI SE OBSERVA CUALQUIERA DE LAS PAREJAS (6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5) O (1,6), ES DECIR, HAY 6 MANERAS IGUALMENTE PROBABLES DE QUE OCURRA EL EVENTO A. POR LO TANTO

$$P(A) = \frac{M(A)}{M} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

PROCEDIENDO DE ESTA MANERA SE PUEDEN CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE LA SUMA SEA 2,3,4,ETC. LOS RESULTADOS SON:

$$\left.\begin{array}{l} P(\{2\}) = \frac{1}{36};\ P(\{3\}) = \frac{2}{36};\ P(\{4\}) = \frac{3}{36};\ P(\{5\}) = \frac{4}{36}; \\ P(\{6\}) = \frac{5}{36};\ P(\{7\}) = \frac{6}{36};\ P(\{8\}) = \frac{5}{36};\ P(\{9\}) = \frac{4}{36}; \\ P(\{10\}) = \frac{3}{36};\ P(\{11\}) = \frac{2}{36}\ \text{Y}\ P(\{12\}) = \frac{1}{36} \end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{DISTRIBUCION}\\ \text{DE}\\ \text{PROBABILIDADES}\end{array}$$

(OBSERVESE QUE $\sum_{i=2}^{12} P(\{i\})=1$

ASIGNACION DE PROBABILIDADES MEDIANTE UN MODELO MATEMATICO

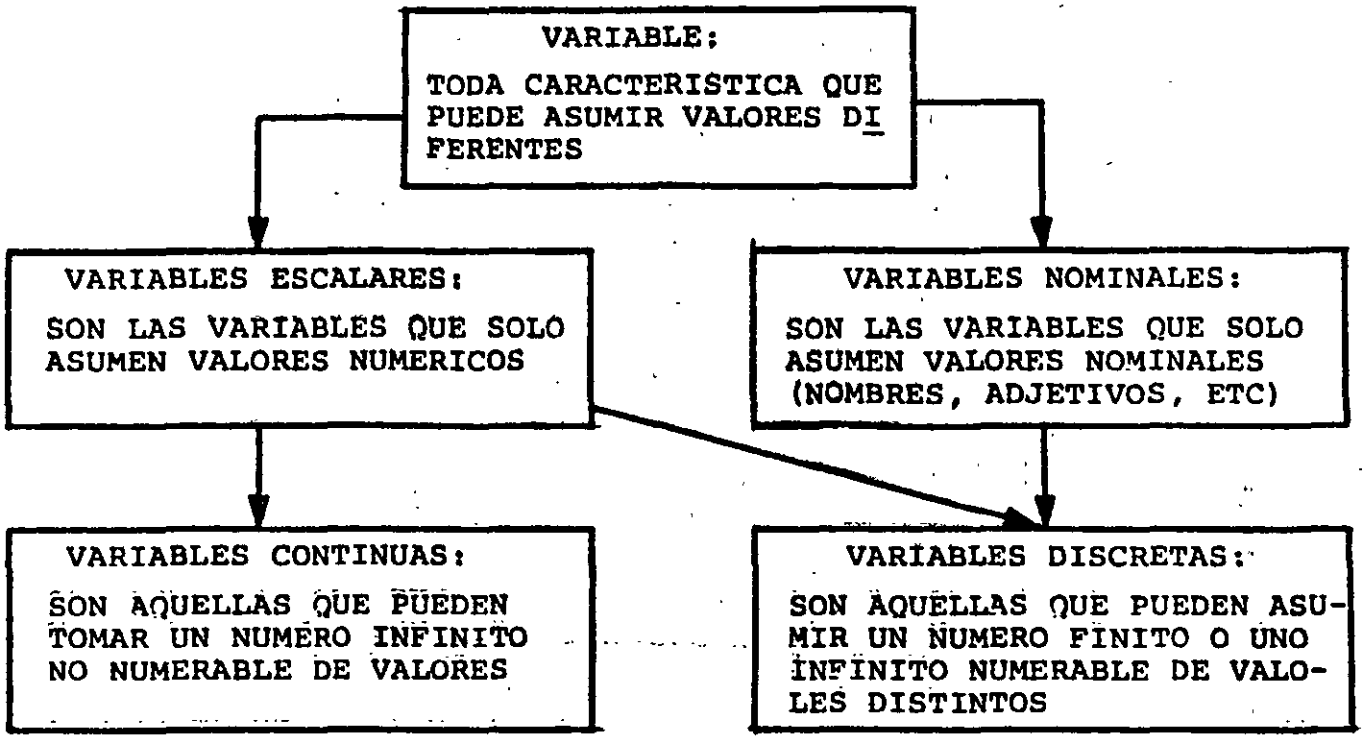
MEDIANTE ESTE METODO LAS PROBABILIDADES SE ASIGNAN A PARTIR DE UN MODELO MATEMATICO QUE INVOLUCRE TODOS LOS FACTORES POSIBLES QUE INTERVIENEN EN LA ALEATORIEDAD DEL FENOMENO.

ASIGNACION DE PROBABILIDADES MEDIANTE UN ANALISIS SUBJETIVO DEL PROBLEMA.

EN ESTE CASO LAS PROBABILIDADES SE ASIGNAN DE MANERA SUBJETIVA, CON BASE EN LA EXPERIENCIA QUE SE TENGA SOBRE UN PROBLEMA SEMEJANTE, - PROPIA O AJENA, DE CARACTER TEORICO O EXPERIMENTAL.

VARIABLES ALEATORIAS

CLASIFICACION DE VARIABLES



VARIABLE:
TODA CARACTERISTICA QUE PUEDE ASUMIR VALORES DIFERENTES

VARIABLES ESCALARES:
SON LAS VARIABLES QUE SOLO ASUMEN VALORES NUMERICOS

VARIABLES NOMINALES:
SON LAS VARIABLES QUE SOLO ASUMEN VALORES NOMINALES (NOMBRES, ADJETIVOS, ETC)

VARIABLES CONTINUAS:
SON AQUELLAS QUE PUEDEN TOMAR UN NUMERO INFINITO NO NUMERABLE DE VALORES

VARIABLES DISCRETAS:
SON AQUELLAS QUE PUEDEN ASUMIR UN NUMERO FINITO O UNO INFINITO NUMERABLE DE VALOLES DISTINTOS

UNA *VARIABLE ALEATORIA* ES UNA VARIABLE TAL QUE NO PUEDE PREDECIRSE CON CERTEZA EL VALOR QUE ASUMIRA AL REALIZAR UN EXPERIMENTO. POR EJEMPLO, LA RESISTENCIA O CARGA DE FALLA DE UNAS VIGAS ES UNA VARIABLE ALEATORIA, YA QUE ANTES DE ROMPER UNA VIGA TOMADA AL AZAR NO SE PUEDE PRECISAR CUAL SERA SU RESISTENCIA. EN LA SIGUIENTE TABLA SE PRESENTAN LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES CON 15 VIGAS DE CONCRETO REFORZADO, OBSERVANDOSE QUE ESTOS VARIAN DE UNAS A OTRAS DE MANERA ALEATORIA.

PRUEBAS DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

Número de la viga	Carga de agrietamiento, en kg , X	Carga de falla, en kg , Y
1	4 700	4 700
2	3 840	4 220
3	3 270	4 360
4	2 310	4 680
5	2 950	4 270
6	4 810	4 810
7	2 720	4 590
8	2 720	4 490
9	4 310	4 310
10	2 950	4 630
11	4 220	4 220
12	2 720	4 340
13	2 720	4 340
14	2 630	4 770
15	2 950	4 630

A TODO EXPERIMENTO SE LE PUEDE ASOCIAR AL MENOS UNA VARIABLE ALEATORIA, DEPENDIENDO ESTA DEL PROBLEMA QUE SE TENGA PLANTEADO. POR EJEMPLO, EN EL CASO DE LA RESISTENCIA DE LAS VIGAS DE VARIABLE ALEATORIA PUEDE SER DIRECTAMENTE DICHA RESISTENCIA, EN CUYO CASO SU ESPACIO DE EVENTOS SERIA

$$S_1 = \{X: 0<X<\infty\}$$

LA VARIABLE TAMBIEN PUDO HABER SIDO UNA CUYO ESPACIO DE EVENTOS FUERA

$$S_2 = \{EXITO, FRACASO\}$$

EN DONDE EL EXITO OCURRIRIA SI LA VIGA RESISTIERA MAS DE CIERTA CANTIDAD, POR EJEMPLO 4600 KG, Y EL FRACASO OCURRIRIA SI RESISTIERA MENOS, ES DECIR:

72

EXITO: SI $X \geq 4600$ KG

FRACASO: SI $X < 4600$ KG

LEYES DE PROBABILIDADES

EL COMPORTAMIENTO DE UNA VARIABLE ALEATORIA SE DESCRIBE MEDIANTE SU *LEY DE PROBABILIDADES*, LA CUAL PUEDE ESPECIFICARSE DE DIFERENTES FORMAS. LA MANERA MAS COMUN DE HACERLO ES MEDIANTE SU *DISTRIBUCION O DENSIDAD DE PROBABILIDADES.*

A FIN DE EVITAR CONFUSION, SE EMPLEARA UNA LETRA MAYUSCULA PARA DENOTAR UNA VARIABLE ALEATORIA, Y LA MINUSCULA CORRESPONDIENTE PARA LOS VALORES QUE PUEDE ASUMIR. SI LA VARIABLE ALEATORIA X ES DISCRETA Y PUEDE ASUMIR LOS VALORES x_i, SU DENSIDAD DE PROBABILIDADES, $f_X(x)$ SERA EL CONJUNTO DE LAS PROBABILIDADES

$$P_X(x_i) = P(X = x_i) \qquad i = 1,2,...,n$$

LA CUAL SE LEE "PROBABILIDAD DE QUE $X = x_i$". ESTO ES

$$f_X(x) = \{P_X(x_i)\} \qquad i = 1,2,...n$$

PARA QUE UNA DENSIDAD DE PROBABILIDADES SATISFAGA LOS TRES AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES, SE DEBEN CUMPLIR LOS SIGUIENTES REQUISITOS

A) $0 \leq P_X(x_i) \leq 1$ PARA TODA x_i

B) $\sum_{i=1}^{n} P_X(x_i) = 1$, DONDE n ES EL NUMERO TOTAL DE VALORES QUE PUEDE ASUMIR X

C) $P(x_m \leq X \leq x_r) = \sum_{i=m}^{i=r} P_X(x_i)$; $m \leq r$, DONDE LAS x_i ESTAN ORDENADAS EN FORMA CRECIENTE, ES DECIR,

$$x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$$

73

DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS O FUNCION DE DISTRIBUCION

OTRA FORMA DE ESPECIFICAR LA LEY DE PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ALEATORIA ES MEDIANTE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS, $F_X(x)$, QUE SE DEFINE COMO EL CONJUNTO DE LAS SUMAS PARCIALES DE LAS PROBABILIDADES, $P_X(x_i)$, CORRESPONDIENTES A TODOS LOS VALORES DE X MENORES O IGUALES QUE x_i. POR LO TANTO, ESTA FUNCION DA LAS PROBABILIDADES DE QUE LA VARIABLE ALEATORIA TOME VALORES MENORES O IGUALES QUE x_m PARA CUALQUIER m, ES DECIR

$$F_X(x) = \{F_X(x_m)\} \; ; \quad m = 1,2,\ldots,n$$

EN DONDE

$$F_X(x_m) = \sum_{i=1}^{i=m} P_X(x_i) = P(X \le x_m) \; ; \quad m=1,2,\ldots,n$$

EJEMPLO

SEA X LA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA "NUMERO TOTAL DE CARROS QUE SE DETIENEN EN UNA ESQUINA DEBIDO A LA LUZ ROJA DE UN SEMAFORO". SI LAS PROBABILIDADES ASOCIADAS A CADA VALOR, DETERMINADAS POR EL METODO FRECUENCIAL, SON

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{SI} \quad x = 0 \\ 0.2 & \text{SI} \quad x = 1 \\ 0.3 & \text{SI} \quad x = 2 \\ 0.2 & \text{SI} \quad x = 3 \\ 0.1 & \text{SI} \quad x = 4 \\ 0.1 & \text{SI} \quad x = 5 \\ 0 & \text{SI} \quad x \geq 6 \end{cases}$$

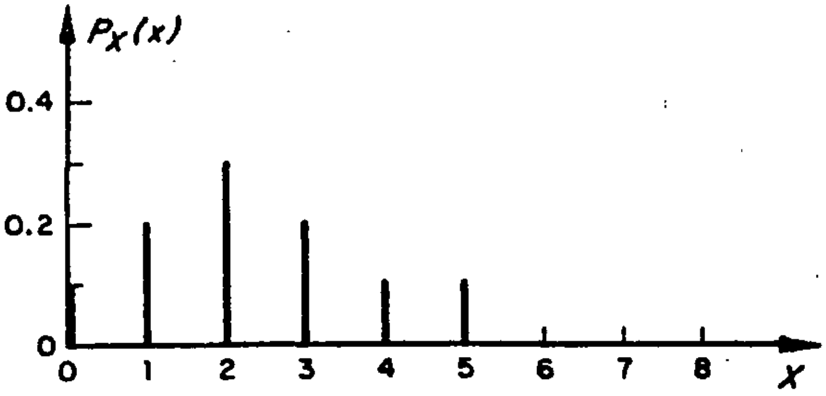
LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES Y LA DE PROBABILIDADES ACUMULADAS CORRESPONDIENTES SERAN

x	$f_X(x)$	$F_X(x)$
<0	0	0
0	0.1	0.1
1	0.2	0.3
2	0.3	0.6
3	0.2	0.8
4	0.1	0.9
5	0.1	1.0
≥6	0	1.0

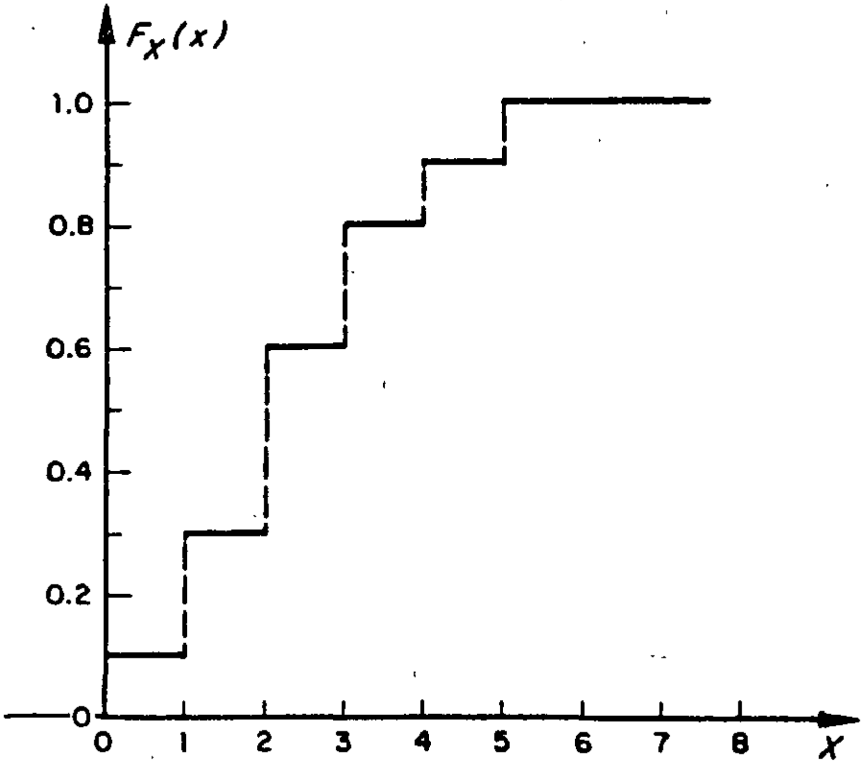
O SEA

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{SI} \quad x < 0 \\ 0.1, & \text{SI} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.3, & \text{SI} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.6, & \text{SI} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0.8, & \text{SI} \quad 3 \leq x < 4 \\ 0.9, & \text{SI} \quad 4 \leq x < 5 \\ 1.0, & \text{SI} \quad 5 \leq x \end{cases}$$

LAS GRAFICAS DE ESTAS DISTRIBUCIONES SE PRESENTAN EN LA FIGURA DE LA SIGUIENTE HOJA.



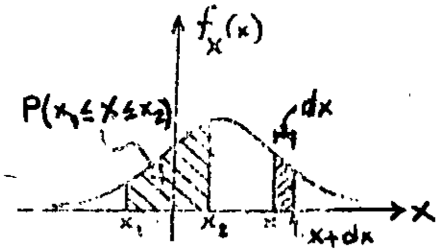
a) Distribución de probabilidades



b) Función de distribución

Ley de probabilidades del ejemplo del tráfico

EN EL CASO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, X, LA PROBABILIDAD DE QUE ESTA TOME UN VALOR COMPRENDIDO ENTRE x Y x + dx ESTA DADA POR $f_X(x)dx$, DONDE $f_X(x)$ ES LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE X. POR LO TANTO, LA PROBABILIDAD DE QUE X ASUMA VALORES COMPRENDIDOS EN EL INTERVALO $x_1 \le X \le x_2$ ES



$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\ dx$$

LA INTERPRETACION GRAFICA DE ESTA PROBABILIDAD ES QUE CORRESPONDE AL AREA BAJO LA CURVA DE $f_X(x)$ COMPRENDIDA ENTRE x_1 Y x_2.

PUESTO QUE $F_X(x) = P(X \le x) = P(-\infty \le X \le x)$, Y EN VIRTUD DE LA ECUACION ANTERIOR SE TIENE QUE LA FUNCION DE DISTRIBUCION ES:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(U)dU$$

DONDE U ES SOLO UNA VARIABLE MUDA DE INTEGRACION. EL VALOR DE ESTA INTEGRAL ES IGUAL AL AREA BAJO LA CURVA DE $F_X(x)$ A LA IZQUIERDA DE x. DE ESTA ECUACION SE CONCLUYE QUE

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f_X(U)dU\right) = f_X(x)$$

ALGUNAS PROPIEDADES DE $F_X(x)$ SON:

$0 \le F_X(x) \le 1$

$F_X(-\infty) = 0$

$F_X(\infty) = 1$

$F_X(x + \varepsilon) \ge F_X(x)$, SI $\varepsilon \ge 0$

$$F_X(x_2) - F_X(x_1) = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

PARA SATISFACER LOS AXIOMAS DE LA TEORIA DE PROBABILIDADES SE NECESITA QUE

$$f_X(x) \geq 0 \text{ PARA TODA } x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ dx = 1$$

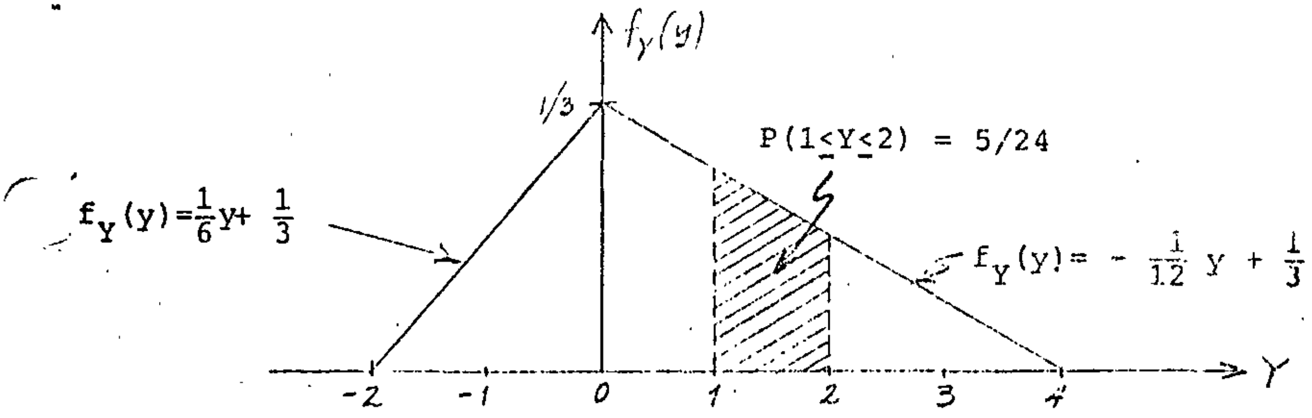
EJEMPLO

SEA UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA CUYA DENSIDAD DE PROBABILIDADES ES DE FORMA TRIANGULAR DADA POR LAS SIGUIENTES ECUACIONES:

$$f_Y(y) = \frac{1}{6}\, y + \frac{1}{3}\,, \text{ SI } -2 \leq Y \leq 0$$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{12}\, y + \frac{1}{3}\,, \text{ SI } 0 \leq Y \leq 4$$

$$f_Y(y) = 0 \qquad \text{SI } Y \leq 2 \text{ O } Y \geq 4$$



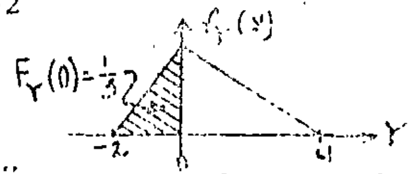
LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS ES, ENTONCES:

SI $-2 \leq Y \leq 0$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{Y} f_Y(U)\,dU = \int_{-2}^{Y} \left(\frac{1}{6}\, U + \frac{1}{3}\right) dU$$

$$= \left[\frac{U^2}{12} + \frac{U}{3}\right]_{-2}^{Y} = \frac{Y^2}{12} + \frac{Y}{3} + \frac{1}{3}$$

SI $0 \leq Y \leq 4$

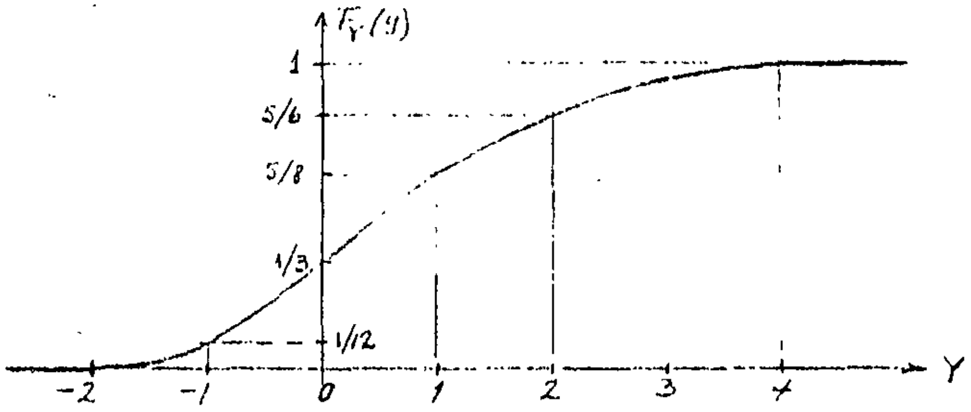


$$F_Y(y) = F_Y(0) + \int_0^{Y} \left(-\frac{1}{12}\, U + \frac{1}{3}\right) dU = \frac{1}{3} + \left[-\frac{U^2}{24} + \frac{U}{3}\right]_0^{Y}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{Y^2}{24} + \frac{Y}{3} \qquad \text{SI } 0 \leq Y \leq 4$$

$F_Y(y) = 0$ SI $y \leq -2$

$F_Y(y) = 1$ SI $y \geq 4$



SI SE DESEA CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE AL REALIZAR UNA VEZ EL EXPERIMENTO QUE INVOLUCRA A DICHA VARIABLE, EL VALOR QUE SE OBSERVE CAIGA EN EL INTERVALO $1 \leq Y \leq 2$, ENTONCES

$$P[1 \leq Y \leq 2] = \int_1^2 \left(-\frac{1}{12}\, y + \frac{1}{3}\right) dy = \left[-\frac{y^2}{24} + \frac{y}{3}\right]_1^2 = \frac{5}{24}$$

O

$$P[1 \leq Y \leq 2] = F_Y(2) - F_Y(1) = \frac{5}{6} - \frac{5}{8} = \frac{5}{24}$$

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

LA *MEDIA O ESPERANZA*, E[X], DE UNA VARIABLE ALEATORIA, X, SE CALCULA CON LAS ECUACIONES ANTERIORES PARA EL CASO EN QUE $g(X)=X$. DE ESTA MANERA, SI LA VARIABLE ES DISCRETA, SU ESPERANZA QUEDA DADA POR

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \, P_X \, (x_i)$$

DONDE n ES EL TOTAL DE VALORES QUE X PUEDE ASUMIR.

PARA EL CASO DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, LA MEDIA ES

$$m_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, dx$$

OTRAS MEDIDAS USUALES DE TENDENCIA CENTRAL DE UNA VARIABLE ALEATORIA SON LA *MEDIANA* Y EL *MODO*. LA PRIMERA SE DEFINE COMO EL VALOR DE LA VARIABLE AL CUAL CORRESPONDE UNA PROBABILIDAD ACUMULADA DE 50%, Y LA SEGUNDA, COMO EL VALOR DE LA VARIABLE AL CUAL CORRESPONDE LA MAYOR PROBABILIDAD.

EJEMPLO

SI LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE LA VARIABLE ALEATORIA X CORRESPONDE A LOS ERRORES EN UNA NIVELACIÓN, ES LA DE LA SEGUNDA COLUMNA DE LA SIGUIENTE TABLA, LA MEDIA DE DICHA VARIABLE RESULTA SER 4 167 LA MEDIANA 4000 Y EL MODO 4000 MICRAS. LOS CALCULOS CORRESPONDIENTES SE LOCALIZAN EN LA TERCERA COLUMNA.

x_i, EN MICRAS	$P_X(x_i)$	$x_i P_X(x_i)$, EN MICRAS	$F_X(x_i)$
0	6/60	0	6/60
1 000	2/60	2 000/60	8/60
2 000	4/60	8 000/60	12/60
3 000	8/60	24 000/60	20/60
4 000	13/60	52 000/60	33/60≃0.5
5 000	12/60	60 000/60	45/60
6 000	7/60	42 000/60	52/60
7 000	4/60	28 000/60	56/60
8 000	2/60	16 000/60	58/60
9 000	2/60	18 000/60	60/60
TOTAL: $E[X] = 250\ 000/60 = 4\ 167$ MICRAS			

EJEMPLO

CALCULAR LA ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CUYA DENSIDAD DE PROBABILIDADES ES TRIANGULAR DADA POR

$$f_Y(Y) = \frac{1}{6}\,y + \frac{1}{3} \qquad \text{SI } -2 \leq y \leq 0$$

$$f_Y(y) = \frac{-1}{12}\,y + \frac{1}{3} \qquad \text{SI } 0 \leq y \leq 4$$

$$f_Y(y) = 0 \qquad \text{SI } y \leq -2 \text{ O } y \geq 4$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = \int_{-2}^{0} y\left(\frac{y}{6} + \frac{1}{3}\right)dy + \int_{0}^{4} y\left(\frac{-y}{12} + \frac{1}{3}\right)dy$$

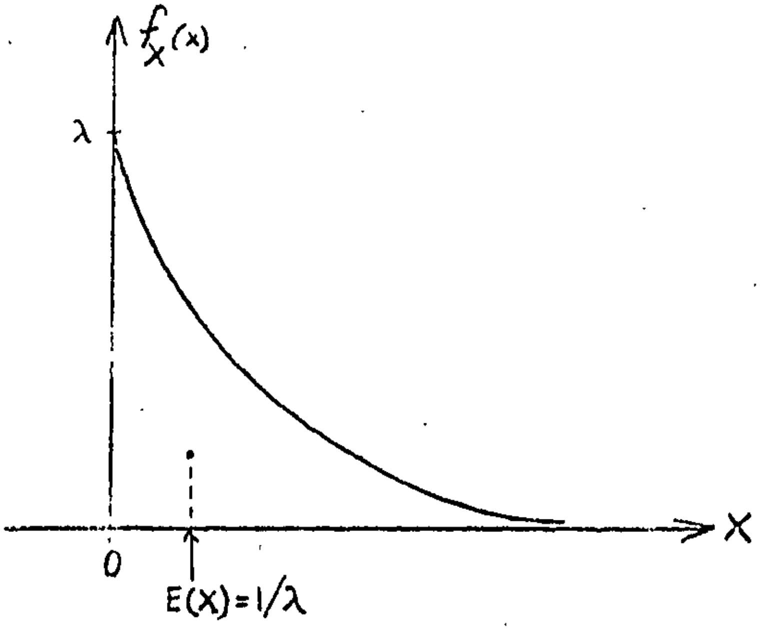
$$= \left[\frac{y^3}{18} + \frac{y^2}{6}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-y^3}{36} + \frac{y^2}{6}\right]_{0}^{4} = \frac{2}{3}$$

EJEMPLO

CALCULAR LA ESPERANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CON DENSIDAD DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \lambda \int_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda^2} (1+\lambda x) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$



MEDIDAS DE DISPERSION

UNA MEDIDA MUY COMUN DE LA DISPERSION O VARIABILIDAD DE LOS VALORES QUE PUEDE ASUMIR UNA VARIABLE ALEATORIA ES LA *VARIANCIA*, LA CUAL SE DENOTA COMO $\sigma^2(X)$ O VAR (X), LA CUAL SE DEFINE COMO LA ESPERANZA DE LA FUNCION $g(X) = [X-E(X)]^2$. ASI, PARA UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

$$\sigma^2(X) = VAR(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 P_X(x_i)$$

Y PARA UNA CONTINUA

$$\sigma^2(X) = VAR(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)\,dx$$

DESARROLLANDO EL INTEGRANDO DE ESTA ULTIMA ECUACION:

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2-2xE(X) + E^2(X)) f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx - 2E(X)\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx + E^2(X)\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = E[X^2]-E^2[X]$$

ES DECIR, LA VARIANCIA SE PUEDE CALCULAR COMO LA DIFERENCIA DEL VALOR MEDIO CUADRATICO Y EL CUADRADO DE LA MEDIA DE X.

OTRAS MEDIDAS DE DISPERSION DE LA VARIABLE ALEATORIA X SON LA *DESVIACION ESTANDAR*, $\sigma(X)$, LA CUAL ES IGUAL A LA RAIZ CUADRADA DE LA VARIANCIA, Y EL *COEFICIENTE DE VARIACION* QUE SE DEFINE COMO

$$\nu(X)=\sigma(X)/E(X) \quad , \text{ SI } E(X)\neq 0$$

EJEMPLO

EN LA SIGUIENTE TABLA SE CALCULA LA VARIANCIA DE LA VARIABLE ALEATORIA CUYA DENSIDAD DE PROBABILIDADES SE PRESENTO EN EL EJEMPLO ANTERIOR (E(x) = 4167 MICRAS)

x_i -E(X) EN MICRAS	$(x_i -E(x))^2$ MICRAS^2	$P_X(x_i)$	$(x_i -E(X))^2 P_X(x_i)$, EN MICRAS
-4 167	17 363 889	6/60	1 736 388
-3 167	10 029 889	2/60	334 329
-2 167	4 695 889	4/60	313 059
-1 167	1 361 889	8/60	181 585
- 167	27 889	13/60	6 042
833	693 889	12/60	138 777
1 833	3 359 889	7/60	391 987
2 833	8 025 889	4/60	535 059
3 833	14 691 889	2/60	489 729
4 833	23 357 889	2/60	778 596

TOTAL: 4 405 551 MICRAS^2= σ^2(X

LA DESVIACION ESTANDAR Y EL COEFICIENTE DE VARIACION DE ESTA VARIABLE ALEATORIA SON, RESPECTIVAMENTE,

$$\sigma(X) = \sqrt{4\ 405\ 551} = 2\ 215 \text{ MICRAS, Y } \nu(X) = \sigma(X)/E(X) = \frac{2\ 215}{4\ 167} = 0.531$$

EJEMPLO

SI X ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES EXPONENCIAL, CALCULAR SU VARIANCIA, DESVIACION ESTANDAR Y COEFICIENTE DE VARIACION:

$$\sigma^2(X) = E(X-E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^{\infty}(x^2-2xE[X]+E^2[X])e^{-\lambda x}dx$$

$$= \lambda \int_0^{\infty}x^2e^{-\lambda x}dx - 2E[X]\lambda\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx + E^2[X] \int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - 2\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

YA QUE $E(X) = 1/\lambda$ Y $E[X^2] = 2/\lambda^2$.

USANDO LA FORMULA $\sigma^2(X) = E[X^2] - E^2[X]$, Y TOMANDO EN CUENTA QUE $E[X^2] = 2/\lambda^2$ SE OBTIENE:

$$\sigma^2(X) = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2$$

EN CONSECUENCIA, LA DESVIACION ESTANDAR ES

$$\sigma(X) = \sqrt{1/\lambda^2} = 1/\lambda$$

Y EL COEFICIENTE DE VARIACION

$$\nu(X) = \sigma(X)/E(X) = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = 1$$

EJEMPLO

SEA Y UNA VARIABLE ALEATORIA CON DENSIDAD DE PROBABILIDADES TRIANGULAR DADA POR

$$f_Y(y) = \frac{1}{6}\,y + \frac{1}{3} \qquad \text{SI} \quad -2 \leq y \leq 0$$

$$f_Y(y) = \frac{-1}{12}\,y + \frac{1}{3} \qquad \text{SI} \quad 0 \leq y \leq 4$$

$$f_Y(y) = 0 \qquad \text{SI} \quad y \leq -2 \text{ O } y \geq 4$$

CALCULAR LA VARIANCIA, LA DESVIACION ESTANDAR Y EL COEFICIENTE DE VARIACION.

CALCULAREMOS PRIMERO EL VALOR MEDIO CUADRATICO PARA LUEGO APLICAR LA ECUACION $\sigma^2(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$

$$E[Y^2] = \int_{-2}^{0} y^2 \left(\frac{1}{6}\;y + \frac{1}{3}\right)dy + \int_{0}^{4} y^2 \left(-\frac{y}{12} + \frac{1}{3}\right)dy = \left[\frac{y^4}{24} + \frac{y^3}{9}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-y^4}{48} + \frac{y^3}{9}\right]_{0}^{4} = 2$$

$$\sigma^2(Y) = 2-(2/3)^2=14/9$$

$$\sigma(Y) = 1.25 \quad (\sqrt{14/9}\,)$$

$$\nu(Y) = 1.25/(2/3) = 1.88$$

EJEMPLO

SI SE HACE LA TRANSFORMACION Y= ax, ¿CUANTO VALE LA VARIANCIA DE Y EN TERMINOS DE LA DE X?

DE LO VISTO ANTERIORMENTE, $E(Y) = aE(x)$ Y $E(Y^2) = a^2E(X^2)$

$$\sigma^2(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = a^2\,E(x^2) - a^2E^2(x) = a^2\left[E(x^2) - E^2(x)\right] = a^2\sigma^2(x)$$

DISTRIBUCIONES PARTICULARES

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

DISTRIBUCION BINOMIAL O DE BERNOULLI

LA DISTRIBUCION BINOMIAL O DE BERNOULLI SE EMPLEA COMO DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS ASOCIADOS A EXPERIMENTOS EN LOS QUE SOLO HAY (O SOLO IMPORTAN) DOS RESULTADOS POSIBLES, UNO DE LOS CUALES USUALMENTE SE DENOMINA "EXITO" Y, EL OTRO, "FRACASO". ($S = \{EXITO, FRACASO\}$).

SEAN $p=$ PROBABILIDAD DE OBSERVAR "EXITO" AL REALIZAR UNA VEZ EL EXPERIMENTO

$q=$ PROBABILIDAD DE "FRACASO" $= 1-p$

$X=$ VARIABLE ALEATORIA "NUMERO DE EXITOS OBSERVADOS AL REPETIR n VECES EL EXPERIMENTO "CON REEMPLAZO"

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES BINOMIAL ES

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \;:\quad x = 0, 1, \ldots, n$$

SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LOS PARAMETROS DE ESTA DISTRIBUCION SON

$$E(X) = np \;, \quad \sigma^2(X) = npq$$

REFERENCIA: W. BEYER, "HANDBOOK OF TABLES FOR PROBABILITY AND STATISTICS", THE CHEMICAL RUBBER, CO. (1966).

DEMOSTRACION

SI n=2, ENTONCES X PUEDE ASUMIR LOS VALORES 0, 1 y 2, ES DECIR S={0,1,2}. EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO ES

$$S_1 = \{\underbrace{(\text{FRACASO, FRACASO})}_{X\,=\,0}, \underbrace{(\text{EXITO, FRACASO})}_{X\,=\,1}, \underbrace{(\text{FRACASO,EXITO})}_{X\,=\,1},$$

$$\underbrace{(\text{EXITO, EXITO})}_{X\,=\,2}\}$$

$$f_X(x) = \{f_X(o), f_X(1), f_X(2)\}$$

OBSERVESE QUE x=0 OCURRE DE UNA MANERA, x=1, DE DOS, Y x=2, DE UNA. ESTOS RESULTADOS SE PUEDEN OBTENER PERMUTANDO DOS GRUPOS, UNO CON x Y EL OTRO CON n-x ELEMENTOS:

x=0: $${}_2P_{0,2} = \frac{2!}{0!x2!} = 1 \;;\; P(\{0\}) = q \times q = q^2 = p^0q^2$$

x=1: $${}_2P_{1,1} = \frac{2!}{1!x1!} = 2 \;;\; P(\{1\}) = 2pq$$

x=2: $${}_2P_{2,0} = \frac{2!}{2!x0!} = 1 \;;\; P(\{2\}) = pxp = p^2 = p^2q^0$$

$$\sum_{i=0}^{2} P(\{i\}) = q^2+2pq+p^2 = (p+q)^2 = 1$$

(OBSERVESE QUE LOS ELEMENTOS DE S_1 NO SON IGUALMENTE PROBABLES, A MENOS QUE p = q = 1/2.)

SI <u>n = 3</u>, $S = \{0,1,2,3\}$, e = EXITO Y f = FRACASO, ENTONCES

$S_1 = \{(f,f,f), (e,f,f), (f,e,f), (f,f,e), (e,e,f), (e,f,e), (f,e,e), (e,e,e)\}$

$x = 0$: ${}_3P_{0,3}=\frac{3!}{0!x3!} = 1$; $P(\{0\}) = 1\ p^0q^3 = q^3$

$x = 1$: ${}_3P_{1,2}=\frac{3!}{1!x2!} = 3$; $P(\{1\}) = 3\ pq^2$

$x = 2$: ${}_3P_{2,1}=\frac{3!}{2!x1!} = 3$; $P(\{2\}) = 3p^2q$

$x = 3$: ${}_3P_{3,0}=\frac{3!}{3!x0!} = 1$; $\underline{P(\{3\})=1p^3q^0=p^3}$

$$\sum_{i=0}^{3} P(\{i\})=(p+q)^3=1$$

PASANDO AL <u>CASO GENERAL</u> DE CUALQUIER VALOR DE n, LA PROBABILIDAD DE QUE OCURRAN x EXITOS Y n-x FRACASOS *EN UN ORDEN DETERMINADO* ES

$$P(X=x) = p^xq^{n-x}$$

EN VIRTUD DE LA LEY GENERAL DE MULTIPLICACION.

UN ORDEN POSIBLE SERIA, POR EJEMPLO,

$$\underbrace{\text{EXITO, EXITO,...., EXITO,}}_{x}\ \underbrace{\text{FRACASO,..., FRACASO}}_{n-x}$$

AHORA BIEN, LOS x EXITOS PUEDEN OCURRIR EN ${}_nP_{x,n-x}$ ORDENES DISTINTOS, CADA UNO CON PROBABILIDAD p^xq^{n-x}. POR LO TANTO, EN VIRTUD DE LA LEY GENERAL DE ADICION, LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DE X RESULTA SER

$$f_X(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\ p^xq^{n-x}\ ;\ x = 0,1,...,n$$

LA CUAL SE CONOCE CON EL NOMBRE DE <u>*BINOMIAL O DE BERNOULLI.*</u>

LA ESPERANZA DE LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI ES

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= np \underbrace{\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}}_{(p+q)^{n-1}} = np(p+q)^{n-1} = np$$

LA VARIANCIA DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL ES

$$\sigma^2(X) = E[(X-E(X))^2] = E[(X-np)^2]$$

PERO $E[(X-np)^2] = E(X^2-2npX + n^2p^2) = E[X + X(X-1) - 2npX + n^2p^2]$

$$= E[(1-2np)X] + E[X(X-1)] + E(n^2p^2)$$

$$= (1-2np)np + n^2p^2 + \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} x(x-1)$$

$$= np - n^2p^2 + \sum_{x=2}^{n} n(n-1) \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^2 p^{x-2} q^{n-x}$$

$$= np - n^2p^2 + n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x}}_{(p+q)^{n-2}}$$

$$= np - n^2p^2 + n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = np - np^2 = np(1-p) = npq$$

EN RESUMEN, PARA LA DISTRIBUCION BINOMIAL,

$$E(X) = np \quad ; \quad \sigma^2(X) = npq \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

TABLA 1

FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

				p		
n	x	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
2	0	.8100	.6400	.4900	.3600	.2500
	1	.9900	.9600	.9100	.8400	.7500
3	0	.7290	.5120	.3430	2160	.1250
	1	.9720	.8960	.7840	.6480	.5000
	2	.9990	.9920	.9730	.9360	.8750
4	0	.6561	.4096	.2401	.1296	.0625
	1	.9477	.8192	.6517	.4752	.3125
	2	.9963	.9728	9163	.8208	.6875
	3	.9999	.9984	.9919	.9744	.9375
5	0	.5905	.3277	.1681	.0778	.0312
	1	.9185	.7373	.5282	.3370	.1875
	2	.9914	.9421	.8369	.6826	.5000
	3	.9995	.9933	.9692	.9130	.8125
	4	1.0000	.9997	.9976	.9898	.9688
6	0	.5314	.2621	.1176	.0467	.0156
	1	.8857	.6554	.4202	.2333	.1094

TABLA 1 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

				p		
n	x	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
6	2	.9842	.9011	.7443	.5443	.3438
	3	.9987	.9830	.9295	.8208	.6562
	4	.9999	.9984	.9891	.9590	.8906
	5	1.0000	.9999	.9993	.9959	.9844
7	0	.4783	.2097	.0824	.0280	.0078
	1	.8503	.5767	.3294	.1586	.0625
	2	.9743	.8520	.6471	.4199	.2266
	3	.9973	.9667	.8740	.7102	.5000
	4	.9998	.9953	.9712	.9037	.7734
	5	1.0000	.9996	.9962	.9812	.9375
	6	1.0000	1.0000	.9998	.9984	.9922
8	0	.4305	.1678	.0576	.0168	.0039
	1	.8131	.5033	.2553	.1064	.0352
	2	.9619	.7969	.5518	.3154	.1445
	3	.9950	.9437	.8059	.5941	.3633
	4	.9996	.9896	.9420	.8263	.6367
	5	1.0000	.9988	.9887	.9502	.8555
	6	1.0000	.9999	.9987	.9915	.9648
	7	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9961
9	0	.3874	.1342	.0404	.0101	.0020
	1	.7748	.4362	.1960	.0705	.0195
	2	.9470	.7382	.4628	.2318	.0898
	3	.9917	.9144	.7297	.4826	.2539
	4	.9991	.9804	.9012	.7334	.5000
	5	.9999	.9969	.9747	.9006	.7461
	6	1.0000	.9997	.9957	.9750	.9102
	7	1.0000	1.0000	.9996	.9962	.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9980
10	0	.3487	.1074	.0282	.0060	.0010
	1	.7361	.3758	.1493	.0464	.0107
	2	.9298	.6778	.3828	.1673	.0547
	3	.9872	.8791	.6496	.3823	.1719
	4	.9984	.9672	.8497	.6331	.3770

TABLA 1 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	*p* 0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
10	5	.9999	.9936	.9527	.8338	.6230
	6	1.0000	.9991	.9894	.9452	.8281
	7	1.0000	.9999	.9984	.9877	.9453
	8	1.0000	1.0000	.9999	.9983	.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9990
11	0	.3138	.0859	.0198	.0036	.0005
	1	.6974	.3221	.1130	.0302	.0059
	2	.9104	.6174	.3127	.1189	.0327
	3	.9815	.8389	.5696	.2963	.1133
	4	.9972	.9496	.7897	.5328	.2744
	5	.9997	.9883	.9218	.7535	.5000
	6	1.0000	.9980	.9784	.9006	.7256
	7	1.0000	.9998	.9957	.9707	.8867
	8	1.0000	1.0000	.9994	.9941	.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9993	.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995
12	0	.2824	.0687	.0138	.0022	.0002
	1	.6590	.2749	.0850	.0196	.0032
	2	.8891	.5583	.2528	.0834	.0193
	3	.9744	.7946	.4925	.2253	.0730
	4	.9957	.9274	.7237	.4382	.1938
	5	.9995	.9806	.8822	.6652	.3872
	6	.9999	.9961	.9614	.8418	.6128
	7	1.0000	.9994	.9905	.9427	.8062
	8	1.0000	.9999	.9983	.9847	.9270
	9	1.0000	1.0000	.9998	.9972	.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998
13	0	.2542	.0550	.0097	.0013	.0001
	1	.6213	.2336	.0637	.0126	.0017
	2	.8661	.5017	.2025	.0579	.0112
	3	.9658	.7473	.4206	.1686	.0461
	4	.9935	.9009	.6543	.3530	.1334
	5	.9991	.9700	.8346	.5744	.2905
	6	.9999	.9930	.9376	.7712	.5000
	7	1.0000	.9988	.9818	.9023	.7095

TABLA 1 (continuación)
FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

				p		
n	x	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
13	8	1.0000	.9998	.9960	.9679	.8666
	9	1.0000	1.0000	.9993	.9922	.9539
	10	1.0000	1.0000	.9999	.9987	.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
14	0	.2288	.0440	.0068	.0008	.0001
	1	.5846	.1979	.0475	.0081	.0009
	2	.8416	.4481	.1608	.0398	.0065
	3	.9559	.6982	.3552	.1243	.0287
	4	.9908	.8702	.5842	.2793	.0898
	5	.9985	.9561	.7805	.4859	.2120
	6	.9998	.9884	.9067	.6925	.3953
	7	1.0000	.9976	.9685	.8499	.6047
	8	1.0000	.9996	.9917	.9417	.7880
	9	1.0000	1.0000	.9983	.9825	.9102
	10	1.0000	1.0000	.9998	.9961	.9713
	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9935
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9991
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
15	0	.2059	.0352	.0047	.0005	.0000
	1	.5490	.1671	.0353	.0052	.0005
	2	.8159	.3980	.1268	.0271	.0037
	3	.9444	.6482	.2969	.0905	.0176
	4	.9873	.8358	.5155	.2173	.0592
	5	.9978	.9389	.7216	.4032	.1509
	6	.9997	.9819	.8689	.6098	.3036
	7	1.0000	.9958	.9500	.7869	.5000
	8	1.0000	.9992	.9848	.9050	.6964
	9	1.0000	.9999	.9963	.9662	.8491
	10	1.0000	1.0000	.9993	.9907	.9408
	11	1.0000	1.0000	.9999	.9981	.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA 1 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

				p		
n	x	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
18	**0**	.1501	.0180	.0016	.0001	.0000
	1	.4503	.0991	.0142	.0013	.0001
	2	.7338	.2713	.0600	.0082	.0007
	3	.9018	.5010	.1646	.0328	.0038
	4	.9718	.7164	.3327	.0942	.0154
	5	.9936	.8671	.5344	.2088	.0481
	6	.9988	.9487	.7217	.3743	.1189
	7	.9998	.9837	.8593	.5634	.2403
	8	1.0000	.9957	.9404	.7368	.4073
	9	1.0000	.9991	.9790	.8653	.5927
	10	1.0000	.9998	.9939	.9424	.7597
	11	1.0000	1.0000	.9986	.9797	.8811
	12	1.0000	1.0000	.9997	.9942	.9519
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9987	.9846
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9962
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9993
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	**0**	.1351	.0144	.0011	.0001	.0000
	1	.4203	.0829	.0104	.0008	.0000
	2	.7054	.2369	.0462	.0055	.0004
	3	.8850	.4551	.1332	.0230	.0022
	4	.9648	.6733	.2822	.0696	.0096
	5	.9914	.8369	.4739	.1629	.0318
	6	.9983	.9324	.6655	.3081	.0835
	7	.9997	.9767	.8180	.4878	.1796
	8	1.0000	.9933	.9161	.6675	.3238
	9	1.0000	.9984	.9674	.8139	.5000
	10	1.0000	.9997	.9895	.9115	.6762
	11	1.0000	1.0000	.9972	.9648	.8204
	12	1.0000	1.0000	.9994	.9884	.9165
	13	1.0000	1.0000	.9999	.9969	.9682
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9904
	15	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9978
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9996
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA 1 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

				p		
n	X	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
16	0	.1353	.0281	.0033	.0003	.0000
	1	.5147	.1407	.0261	.0033	.0003
	2	.7892	.3518	.0994	.0183	.0021
	3	.9316	.5981	.2459	.0651	.0106
	4	.9830	.7982	.4499	.1666	.0384
	5	.9967	.9183	.6598	.3288	.1051
	6	.9995	.9733	.8247	.5272	.2272
	7	.9999	.9930	.9256	.7161	.4018
	8	1.0000	.9985	.9743	.8577	.5982
	9	1.0000	.9998	.9929	.9417	.7728
	10	1.0000	1.0000	.9984	.9809	.8949
	11	1.0000	1.0000	.9997	.9951	.9616
	12	1.0000	1.0000	1.0000	.9991	.9894
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9979
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	0	.1668	.0225	.0023	.0002	.0000
	1	.4818	.1182	.0193	.0021	.0001
	2	.7618	.3096	.0774	.0123	.0012
	3	.9174	.5489	.2019	.0464	.0064
	4	.9779	.7582	.3887	.1260	.0245
	5	.9953	.8943	.5968	.2639	.0717
	6	.9992	.9623	.7752	.4478	.1662
	7	.9999	.9891	.8954	.6405	.3145
	8	1.0000	.9974	.9597	.8011	.5000
	9	1.0000	.9995	.9873	.9081	.6855
	10	1.0000	.9999	.9968	.9652	.8338
	11	1.0000	1.0000	.9993	.9894	.9283
	12	1.0000	1.0000	.9999	.9975	.9755
	13	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9936
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9988
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA 1 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCION BINOMIAL

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

n	x	*p*				
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
20	0	.1216	.0115	.0008	.0000	.0000
	1	.3917	.0692	.0076	.0005	.0000
	2	.6769	.2061	.0355	.0036	.0002
	3	.8670	.4114	.1071	.0160	.0013
	4	.9568	.6296	.2375	.0510	.0059
	5	.9887	.8042	.4164	.1256	.0207
	6	.9976	.9133	.6080	.2500	.0577
	7	.9996	.9679	.7723	.4159	.1316
	8	.9999	.9900	.8867	.5956	.2517
	9	1.0000	.9974	.9520	.7553	.4119
	10	1.0000	.9994	.9829	.8725	.5881
	11	1.0000	.9999	.9949	.9435	.7483
	12	1.0000	1.0000	.9987	.9790	.8684
	13	1.0000	1.0000	.9997	.9935	.9423
	14	1.0000	1.0000	1.0000	.9984	.9793
	15	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9941
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9987
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

EJEMPLO

SI SE LANZA AL AIRE SEIS VECES UNA MONEDA HOMOGENEA,

A) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER DOS "CARAS"?

B) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER POR LO MENOS CUATRO "CARAS" $(X \geq 4)$?

C) ¿CUANTO VALEN LA ESPERANZA Y LA DESVIACION ESTANDAR?

SOLUCION

A) PUESTO QUE LA MONEDA ES HOMOGENEA SE TIENE $p=1/2$ Y $q=1-1/2=1/2$, DONDE p ES LA PROBABILIDAD DE OBSERVAR "CARA" (CARA = EXITO) EN UN LANZAMIENTO. POR TANTO

$$P[X = 2] = f_x(2) = \frac{6!}{2!(6-2)!}(\tfrac{1}{2})^2(1/2)^{6-2} = \frac{6!}{2!\ 4!}(1/2)^6 = \frac{15}{64}$$

(DE LA TABLA: $P(x=2)=P(x\leq 3)<P(x\leq 2)= 0.3438-0.1094 = 0.2344$)

B) PARA QUE SE CUMPLA $X\geq 4$ EN SEIS LANZAMIENTOS, SE NECESITA QUE SE OBSERVEN 4,5 o 6 CARAS. PUESTO QUE ESTOS TRES EVENTOS SON MUTUAMENTE EXCLUSIVOS, SE TIENE

$$P[X\geq 4] = f_x(4) + f_x(5) + f_x(6)$$

CALCULANDO LOS TRES SUMANDOS COMO EN LA PREGUNTA ANTERIOR, RESULTA

$$P[X\geq 4] = \frac{6!}{4!\ 2!}(1/2)^4(1/2)^{6-4}+\frac{6!}{5!\ 1!}(1/2)^5(1/2)^{6-5}+\frac{6!}{6!\ 0!}(1/2)^6(1/2)^{6-6}$$

$$= \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32} = 0.3438$$

(DE LA TABLA: $P(x\geq 4) = 1-P(x\leq 3)=1-0.6562 = 0.3438$)

C) $E[X] = np = 6(1/2) = 3$

$$\sigma^2[X]= npq = 6(1/2)(1/2) = 3/2\ ,\quad \sigma(X) = \sqrt{3/2} = 1.22$$

EJEMPLO

SI CON BASE EN LA EXPERIENCIA DE MUCHO TIEMPO SE SABE QUE UNA MAQUINA IMPRIME COLORES DEFECTUOSOS EN UN 5 POR CIENTO DE LAS VECES, CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE DE 10 IMPRESIONES SE OBTENGA:

a. NINGUNA DEFECTUOSA
b. UNA DEFECTUOSA
c. MAS DE UNA DEFECTUOSA

ASIMISMO, CALCULAR LA MEDIA Y LA DESVIACION ESTANDAR DEL NUMERO DE DEFECTUOSAS.

Solución

SEA EXITO = IMPRESION DEFETUOSA
EN TAL CASO $p = 0.05$ Y $q = 1-0.05 = 0.95$

a. NINGUNA DEFECTUOSA ES LO MISMO QUE $X = 0$; ENTONCES $n-x = 10-0=10$ Y:

$$P(x=0) = f_x(0) = \frac{n!}{x!\ (n-x)!} = \frac{10!}{0!\ (10-0)!} (0.05)^0 (0.95)^{10}$$

$$= \frac{10!}{10!} (0.95)^{10} = 0.599 = 59.9\%$$

b. UNA DEFECTUOSA ES LO MISMO QUE $X = 1$; ENTONCES $n-x = 10-1 = 9$ Y:

$$P(x = 1) = f_x(1) = \frac{10!}{1!\ 9!} (0.05)^1 (0.95)^9$$

$$= \frac{10 \times 9!}{9!} (0.05)(0.6302) = 0.315$$

c. MAS DE UNA DEFECTUOSA ES LO MISMO QUE $x > 1$

$$P(X > 1) = 1-P(X \leq 1) = 1-[P(x = 0)+P(x = 1)]$$

$$= 1-(0.599+0.315) = 0.086$$

101

$$E(x) = np = 10x0.05 = 0.5$$

$$\sigma^2(x) = npq = 10 \times 0.05 \times 0.95 = 0.0475$$

$$\sigma(x) = \sqrt{0.0475} = 0.2179$$

EJEMPLO

RESOLVER AHORA EL INCISO b. DEL EJEMPLO ANTERIOR, PARA EL CASO EN QUE $p = 0.1$

$$P(x = 1) = \frac{10!}{1!\ 9!} (0.10)^1 (0.90)^9 = 0.3874 = 38.74\%$$

USANDO LAS TABLAS DE LA DISTRIBUCION BINOMINAL:

$$\{X = x\} \cup \{X \leq x-1\} = \{X \leq x\}$$

POR LO TANTO $P\{X = x\} + P\{X \leq x-1\} = P\{X \leq x\}$

Y $P\{X = x\} = P\{X \leq x\} - P\{X \leq x-1\}$

EN ESTE EJEMPLO $x = 1$ y $x-1=0$, POR LO QUE

$$P(X=1) = P(X\leq 1) - P(X \leq 0)$$

$$= 0.7361 - 0.3487 = 0.3874$$

DISTRIBUCION GEOMETRICA

SEA p LA PROBABILIDAD DE EXITO EN UN EXPERIMENTO. SI EL EXPERIMENTO ES CON REEMPLAZO Y SE REPITE SUCESIVAMENTE HASTA QUE SE OBSERVA UN EXITO, SE TENDRA LA VARIABLE ALEATORIA X=NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMIENTO HASTA QUE SE OBSERVA EL PRIMER EXITO. OBTENGAMOS LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE X ($S = \{1,2,3\ldots, \infty\}$).

EL PRIMER EXITO OCURRIRA EN EL EXPERIMENTO NUMERO x SI, Y SOLO SI, EN LOS x-1 ANTERIORES HUBO PUROS FRACASOS. LA PROBABILIDAD DE ESTE EVENTO, DADO QUE LOS EXPERIMIENTOS SON INDEPENDIENTES, ES

$$f_X(x) = (1-p)^{x-1}p$$

ESTA FUNCION SE DENOMINA DISTRIBUCION GEOMETRICA. SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS ES

$$F_X(x) = \sum_{x=1}^{n} p(1-p)^{x-1} = 1 - (1-p)^n$$

Y QUE

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p=1/p$$

$$\sigma^2(X) = \sum_{x=1}^{\infty} (x-\frac{1}{p})^2(1-p)^{x-1}p = (1-p)/p^2$$

EJEMPLO

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE OBTENER UN TORNILLO DEFECTUOSO POR PRIMERA VEZ EN LA SEXTA EXTRACCION, SI EL PORCENTAJE DE DEFECTUOSOS DEL LOTE DEL CUAL SE MUESTREA ES DE 5 POR CIENTO?

$$P(X=6) = f_X(6) = (1-0.05)^5 \text{ x } 0.05 = 0.95^5 \text{x } 0.05 = 0.03869$$

DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA

CUANDO SE TIENE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA CUYO ESPACIO DE EVENTOS TIENE SOLO DOS ELEMENTOS, DIGAMOS S={EXITO, FRACASO}, Y SE REALIZA UN MUESTREO *SIN REEMPLAZO*, ENTONCES LOS RESULTADOS DE CADA EXPERIMENTO *NO SON INDEPENDIENTES NI LA PROBABILIDAD DE EXITO PERMANECE CONSTANTE*, COMO EN LA DISTRIBUCION BINOMIAL, POR LO QUE ESTA ULTIMA NO ES APLICABLE.

SEA X LA VARIABLE ALEATORIA NUMERO DE EXITOS OBSERVADOS AL REPETIR n VECES EL EXPERIMENTO CONSISTENTE EN EXTRAER, SIN REEMPLAZO, ELEMENTOS DE UN LOTE QUE TIENE N OBJETOS DE LOS CUALES M SON "EXITOS". EL NUMERO DE ELEMENTOS QUE TIENE EL ESPACIO DE EVENTOS DEL EXPERIMENTO ES

$$N(S) = {}_{N}C_{n}$$

EL NUMERO, N({X=x}), DE MANERAS POSIBLES E IGUALMENTE PROBABLES DE OBTENER x EXITOS ES

EN EL LOTE

$$\overbrace{\underbrace{\odot\odot\odot\cdots\odot\odot}_{M\ \text{EXITOS}}\Big|\underbrace{\odot\odot\odot\cdots\odot\odot}_{(N-M)\text{FRACASOS}}}^{N\ \text{ELEMENTOS}}$$

EN LA MUESTRA

$$\overbrace{\underbrace{\odot\odot\odot\cdot\cdot\odot\odot}\Big|\underbrace{\odot\odot\cdot\cdot\odot}}^{n\ \text{ELEMENTOS}}$$

x EXITOS QUE SE PUEDEN ELEGIR DE $_{M}C_{x}$ MANERAS	(n-x)FRACASOS QU SE PUEDEN ELEGIR DE $_{N-M}C_{n-x}$ MANERA

CADA ELECCION POSIBLE DE x EXITOS SE COMBINA CON CADA ELECCION POSIBLE DE (n-x) FRACASOS; POR LO TANTO, EL NUMERO TOTAL DE MANERAS DE OBTENER x EXITOS EN n EXTRACCIONES SIN REEMPLAZO ES

$$N(\{X=x\}) = ({}_{M}C_{x})({}_{N-M}C_{n-x})$$

POR LO TANTO

$$P(\{X=x\}) = f_X(x) = \frac{({}_M C_x)({}_{N-M}C_{n-x})}{{}_N C_n} = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} , \quad x=0,1,\ldots,n$$

EN DONDE $\binom{M}{x} = \frac{M!}{x!(M-x)!}$, $\binom{N-M}{n-x} = \frac{(N-M)!}{(n-x)!(N-M-n+x)!}$

Y $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

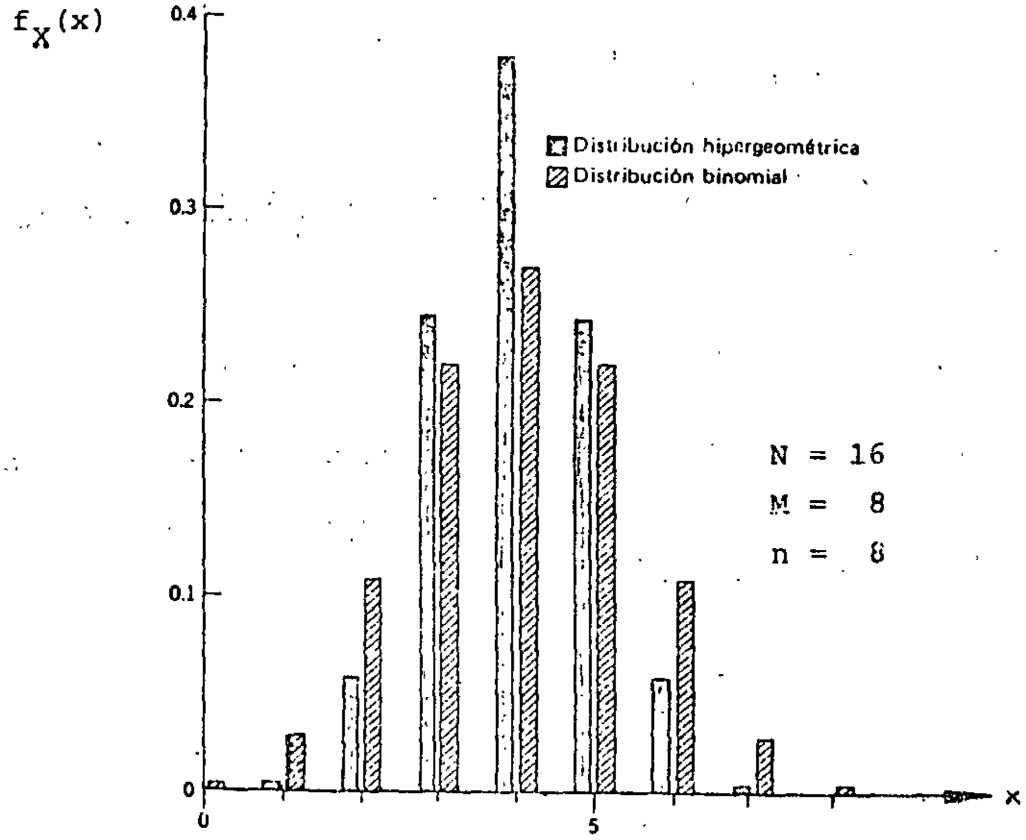
QUE SE CONOCE COMO *DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA*, LA MEDIA Y LA VARIANCIA DE ESTA DISTRIBUCION SON

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = nM/N = np \text{ , si } p = M/N$$

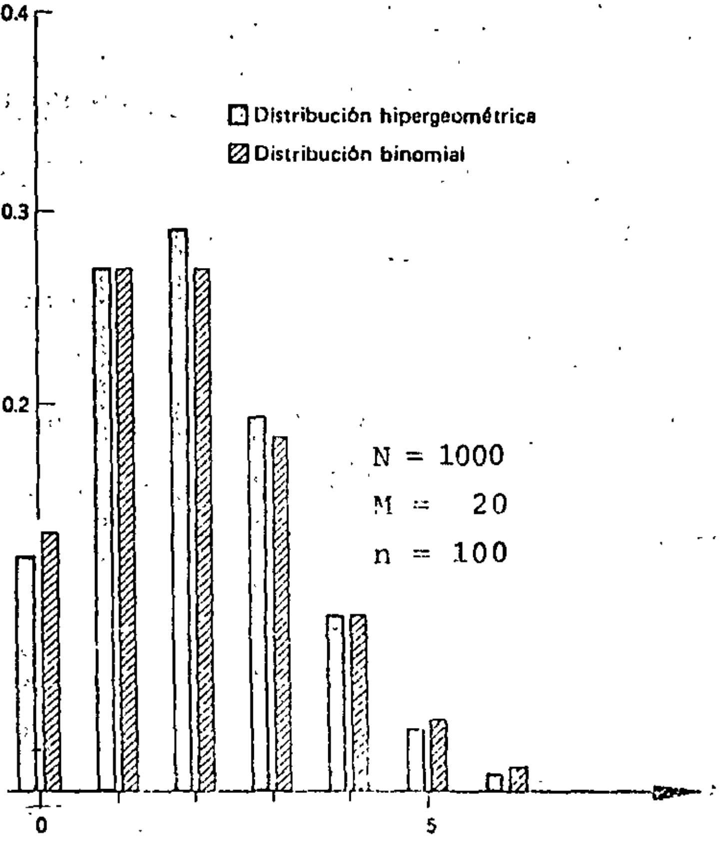
Y

$$\sigma^2(X) = \sum_{x=0}^{n} (x-\frac{nM}{N})^2 \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{Mn(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)} = p(1-p) \frac{n(N-n)}{N-1}$$

RESPECTIVAMENTE.



COMPARACION DE LAS DISTRIBUCIONES HIPERGEOMETRICA Y BINOMIAL



DISTRIBUCION DE POISSON

UNA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES PARA UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA, X, DE LA FORMA

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} ; x = 0, 1, 2, ...$$

SE LLAMA DISTRIBUCION DE POISSON; EN ESTA ECUACION λ ES UNA CONSTANTE. SE PUEDE DEMOSTRAR QUE LA MEDIA Y LA VARIANCIA PARA ESTA DISTRIBUCION QUEDAN DADAS POR

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$$

$$\sigma^2_{(x)} = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\lambda)^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$$

UNA VEZ CONOCIDA λ, CON ESTA DISTRIBUCION SE PUEDEN CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE QUE UN EVENTO OCURRA x VECES.

ES POSIBLE DEMOSTRAR QUE LA DISTRIBUCION DE POISSON PUEDE EMPLEARSE COMO UNA PROXIMACION DE LA DE BERNOULLI, TOMANDO $\lambda = np$, CUANDO n ES GRANDE Y p PEQUEÑA, PERO DE TAL MANERA QUE $npq > 1$. AL RESPECTO, SI $n=20$ y $p=0.05$, ENTONCES EL ERROR QUE SE TIENE AL USAR DICHA APROXIMACION ES MENOR DE 3 POR CIENTO PARA VALORES DE X MENORES DE 3; PARA X=4 y X=5 LOS ERRORES RESPECTIVOS SON 15 Y 41 POR CIENTO, DEBIDO A QUE NO SE CUMPLE CON LA CONDICION DE QUE npq SEA MAYOR DE UNO, YA QUE $npq = 20x0.05x0.95 = 0.95$

107

TABLA 2

FUNCION DE DISTRIBUCION DE POISSON

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

x	λ .50	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	.607	.368	.135	.050	.018	.007	.002	.001	.000	.000
1	.910	.736	.406	.199	.092	.040	.017	.007	.003	.001
2	.986	.920	.677	.423	.238	.125	.062	.030	.014	.006
3	.998	.981	.857	.647	.433	.265	.151	.082	.042	.021
4	1.000	.996	.947	.815	.629	.440	.285	.173	.100	.055
5	1.000	.999	.983	.961	.785	.616	.446	.301	.191	.116
6	1.000	1.000	.995	.966	.889	.762	.605	.450	.313	.207
7	1.000	1.000	.999	.988	.949	.867	.744	.599	.453	.324
8	1.000	1.000	1.000	.996	.979	.932	.847	.729	.593	.456
9	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.968	.916	.830	.717	.587
10	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.986	.957	.901	.816	.706
11	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.995	.980	.947	.888	.803
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.991	.973	.936	.876
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.987	.966	.926
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.983	.959
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.992	.978
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.989
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.995
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

TABLA 2 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCION DE POISSON

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

x	λ 10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0
2	.003	.001	.001	.000	.000	.000
3	.010	.005	.002	.001	.000	.000
4	.029	.015	.008	.004	.002	.001
5	.067	.038	.020	.011	.006	.003
6	.130	.079	.046	.026	.014	.008
7	.220	.143	.090	.054	.032	.018
8	.333	.232	.155	.100	.062	.037
9	.458	.341	.242	.166	.109	.070
10	.583	.460	.347	.252	.176	.118
11	.697	.579	.462	.353	.260	.185
12	.792	.689	.576	.463	.358	.268
13	.864	.781	.682	.573	.464	.363
14	.917	.854	.772	.675	.570	.466
15	.951	.907	.844	.764	.669	.568
16	.973	.944	.899	.835	.756	.664
17	.986	.968	.937	.890	.827	.749
18	.993	.982	.963	.930	.883	.819
19	.997	.991	.979	.957	.923	.875
20	.998	.995	.988	.975	.952	.917
21	.999	.998	.994	.986	.971	.947
22	1.000	.999	.997	.992	.983	.967
23	1.000	1.000	.999	.996	.991	.981
24	1.000	1.000	.999	.998	.995	.989
25	1.000	1.000	1.000	.999	.997	.994
26	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.997
27	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998
28	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999
29	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

EJEMPLO

SI LA PROBABILIDAD DE QUE FALLE UNA VARILLA DE ACERO AL APLICARLE UNA DETERMINADA FUERZA DE TENSION ES DE 0.001, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE DE 2000 VARILLAS PROBADAS FALLEN A) TRES, B) MAS DE DOS?

CON $\lambda = 2000 \times 0.001 = 2$ Y CONSIDERANDO QUE $npq = 1.9 > 1$, SE PUEDE USAR LA DISTRIBUCION DE POISSON COMO APROXIMACION DE LA BINOMIAL:

$$\text{a)} \qquad P[X = 3] = \frac{\lambda^3 \; e^{-\lambda}}{3!}$$

$$P[X = 3] = \frac{2^3 \; e^{-2}}{3!} = 0.18$$

EN ESTE CASO LA DISTRIBUCION BINOMIAL DA COMO RESULTADO

$$P[X=3] = \frac{2000!}{3! \times 1997!} (0.001)^3 (0.999)^{1997} = 0.184$$

$$\text{b)} \qquad P[X > 2] = 1 - P[X \leqslant 2] = 1 - F_X(2) = 1 - \Big\{P[X = 0] +$$

$$+ P[X = 1] + P[X = 2]\Big\} = 1 - \frac{2^0 \; e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 \; e^{-2}}{1!} - \frac{2^2 \; e^{-2}}{2!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e^2} - \frac{2}{e^2} = 1 - \frac{5}{e^2} = 0.323$$

110

EJEMPLO

UNA COMPAÑIA ASEGURADORA DESPUES DE MUCHOS AÑOS DE EXPERIENCIA HA HA ESTIMADO QUE EL 0.004% DE LA POBLACION FALLECE ANULAMENTE POR ACCIDENTE AUTOMOVILISTICO. SI ESTA COMPAÑIA TIENE 40,000 ASEGURADOS, ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE 2 DE ELLOS MUERAN EN UN AÑO POR ESTE TIPO DE ACCIDENTE?

SEA X EL NUMERO DE PERSONAS QUE MUEREN ANUALMENTE DE ENTRE LOS ASEGURADOS, POR ACCIDENTE, LA MEDIA DE X ES

$$E[X] = 0.00004 \times 40,000 = 1.6 = \lambda$$

ADEMAS, TOMANDO EN CUENTA QUE npq>1, SE PUEDE USAR SIN GRAN ERROR LA DISTRIBUCION DE POISSON:

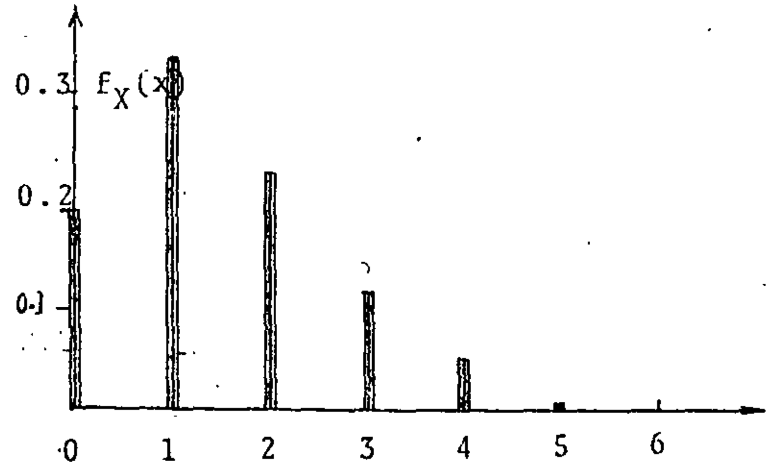
$$P[X=x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(1.6)^x e^{-1.6}}{x!} \; ; \; x=0,\ 1,\ 2, \ldots$$

POR LO QUE

$$P\ [X=2] = \frac{(1.6)^2 e^{-1.6}}{2!} = \frac{0.2019 \times 2.56}{2} = 0.26$$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES PARA ESTA VARIABLE ALEATORIA ES:

x	0	1	2	3	4	5	6	
$f_X(x)$	0.202	0.323	0.258	0.138	0.055	0.018	0.005	...



EJEMPLO

EN LA AMPLIACION DEL CARRIL PARA DAR VUELTA A LA IZQUIERDA EN UNA AVENIDA, SOLO HAY CAPACIDAD PARA 3 AUTOS COMO MAXIMO ESPERANDO LA FLECHA LUMINOSA DEL SEMAFORO. EN UN ESTUDIO ESTADISTICO DEL TRANSITO EN ESE LUGAR SE ENCONTRO QUE EN CADA CICLO DE LUCES DEL SEMAFORO HAY EN PROMEDIO 6 AUTOS QUE VAN A DAR VUELTA. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EN UN CICLO DEL SEMAFORO, TOMADO AL AZAR, SE CONGESTIONE EL TRANSITO POR EXCEDERSE LA CAPACIDAD DEL CARRIL?

$$P[X>3] = ?$$

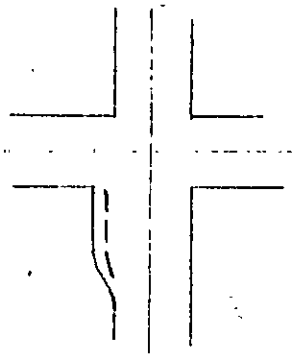
SI $A=\{X>3\}$, $\bar{A} = \{X\leq 3\}$

$P(\bar{A}) = 1-P(A)$ O $P(A)= 1-P(\bar{A})$, CON $\lambda=6$,

$$P(\bar{A}) = P[X\leq 3] = \sum_{x=0}^{x=3} f_X(x) = \sum_{x=0}^{x=3} \frac{e^{-6}6^x}{x!}$$

$$P(\bar{A}) = e^{-6}(1 + 6 + \frac{6^2}{2} + \frac{6^3}{6}) = 61e^{-6} = 0.151$$

$$P[A] = P[X>3] = 1-0.151 = 0.849$$



PROCESO ESTOCASTICO DE POISSON

CON BASE EN LA DISTRIBUCION DE POISSON SE PUEDE DEDUCIR QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES DEL NUMERO DE OCURRENCIAS DE UN EVENTO DURANTE UN PERIODO t QUEDA DADA POR

$$f_X(x) = P[X = x \text{ EN UN LAPSO } t]$$

$$f_X(x) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \; ; \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

DONDE

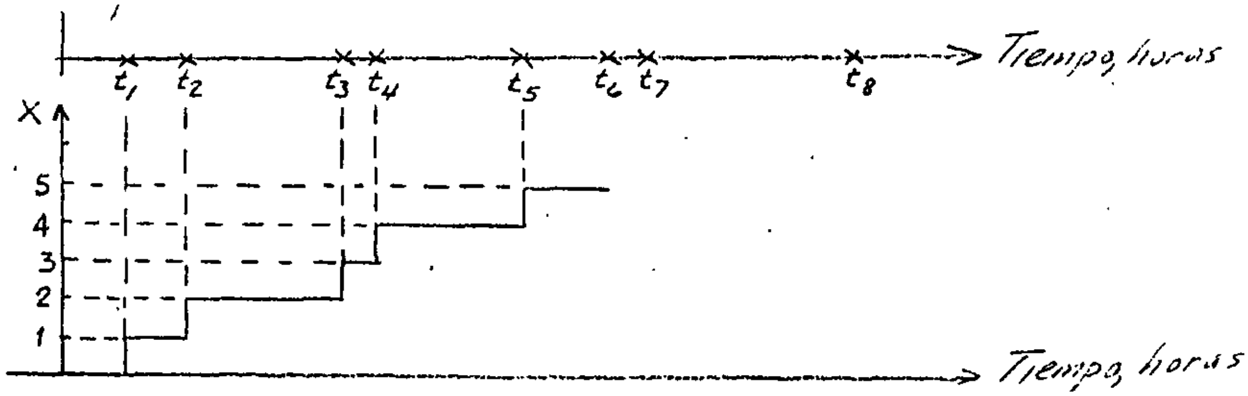
λ = NUMERO MEDIO DE OCURRENCIAS POR UNIDAD DE TIEMPO.

LA ESPERANZA Y LA VARIANCIA DE ESTE PROCESO, PARA UN LAPSO t, SON

$$E(X) = \lambda t$$

$$\sigma^2(X) = \lambda t$$

PARA QUE ESTA DISTRIBUCION SE APLIQUE SE REQUIERE QUE EL EVENTO OCURRA CADA VEZ DE MANERA INDEPENDIENTE DE LAS OCURRENCIAS PREVIAS, Y QUE λ SEA CONSTANTE. A λ SE LE CONOCE COMO INTENSIDAD DEL PROCESO; A SU RECIPROCO, $1/\lambda$ SE LE DENOMINA PERIODO DE RECURRENCIA.



EJEMPLO

SE SABE QUE UNA MAQUINA QUE PRODUCE PAPEL PARA DIBUJO, LO HACE CON UN DEFECTO POR CADA 100 M FABRICADOS

a. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER CERO DEFECTOS EN UN PLIEGO DE 20 M?

$\lambda = 1/100 = 0.01$ DEFECTOS /METRO

$$P(X = 0) = \frac{\lambda t \ e^{-\lambda t}}{x!} = \frac{0.01x20 \ e^{-0.01x20}}{0!} =$$

$$\frac{0.2 \ e^{-0.2}}{0!} = 0.164$$

(EN ESTE CASO t = LONGITUD)

b. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER UN DEFECTO EN 20m)

$$P(X = 1) = \frac{0.2 \ e^{-0.2}}{1!} = 0.164$$

c. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER UNO O CERO DEFECTOS?

$P(0 \leq x \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}164 + 0{,}164 = 0.328$

d. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE TENER MAS DE UN DEFECTO?

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.328 = 0.672$

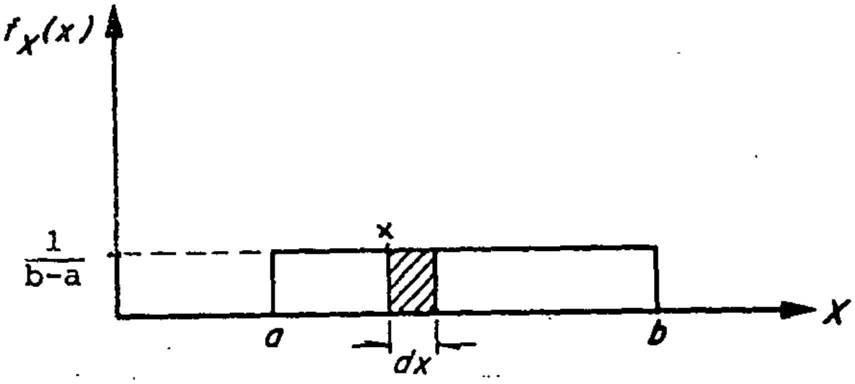
VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

DISTRIBUCION UNIFORME

SE DICE QUE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, X, TIENE *DISTRIBUCION UNIFORME* ENTRE X = a Y X = b(b>a) SI

$$f_X(x) = \text{CONSTANTE} = \frac{1}{b-a} \quad ; \quad a \le X \le b$$

LO QUE SIGNIFICA QUE LA PROBABILIDAD DE OBTENER UN VALOR ENTRE x Y x + dx ES LA MISMA PARA CUALQUIER x COMPRENDIDA ENTRE a Y b. LA GRAFICA DE DICHA DISTRIBUCION ES



Distribución uniforme de una variable aleatoria continua

LA ESPERANZA Y LA VARIANCIA DE LA DISTRIBUCION UNIFORME SE CALCULAN DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$E[X] = \int_a^b x\,\frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = (b+a)/2$$

$$\sigma^2(X) = \int_a^b (x-E[X])^2\,\frac{1}{b-a}\,dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx + \int_a^b \frac{(E[X])^2}{b-a}\,dx -$$

$$-\int_a^b \frac{2xE[X]}{a-b}\,dx$$

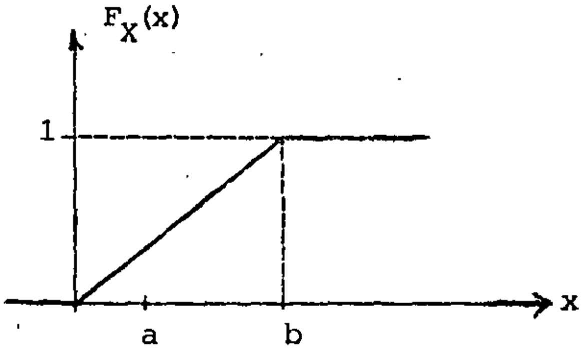
$$= \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b + \left[\frac{(E[X])^2}{b-a}\,x\right]_a^b - \left[\frac{2\,E[X]}{b-a}\,\frac{x^2}{2}\right]_a^b =$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} + (E[X])^2 - E[X]\,(b+a) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADAS ES

$$F_X(x) = \int_a^x f_x(u)\,du = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,du = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

LA GRAFICA DE ESTA FUNCION ES UNA LINEA RECTA DE a A b:



EJEMPLO

¿CUANTO VALE LA PROBABILIDAD DE QUE X SEA MENOR QUE 1/3, SI ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCION UNIFORME EN EL INTERVALO 0-1?

$$F_X(\tfrac{1}{3}) = \frac{x - a}{b - a} = \frac{\frac{1}{3} - a}{b - a}$$

PARA a = 0 Y b = 1 NOS QUEDA

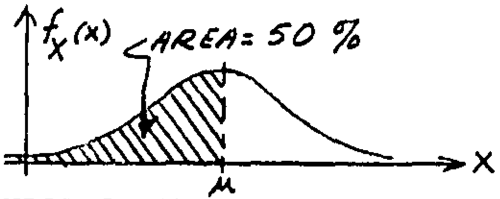
$$F_X(\tfrac{1}{3}) = \frac{\frac{1}{3} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{3}$$

116

DISTRIBUCION NORMAL

UNA DE LAS DISTRIBUCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS MAS UTIL ES LA *DISTRIBUCION NORMAL* O DE *GAUSS*, DEFINIDA POR LA ECUACION

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$



DONDE μ ES LA MEDIA Y σ LA DESVIACION ESTANDAR DE X.

SI SE HACE LA TRANSFORMACION

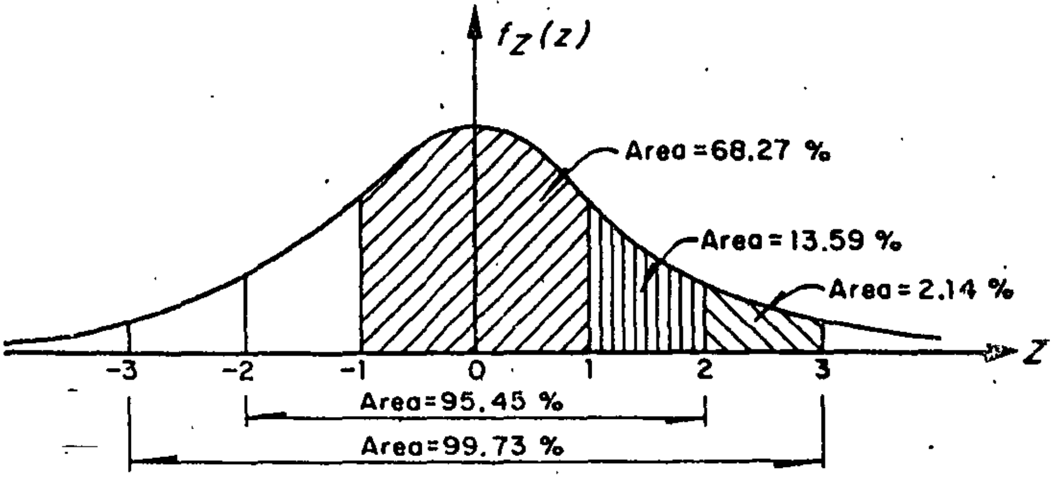
$$Z = (X-\mu)/\sigma \quad (E(Z) = E \quad \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \frac{E(x)-\mu}{\sigma} = 0; \quad \sigma^2(Z) \quad \frac{\sigma^2(x)}{\sigma^2} = 1)$$

ENTONCES LA ECUACION ANTERIOR SE REDUCE A LA LLAMADA *FORMA ESTANDAR*, CUYA ECUACION ES

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad ; \quad F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$

EN ESTE CASO LA VARIABLE ALEATORIA Z TIENE DISTRIBUCION NORMAL CON *MEDIA IGUAL A CERO Y VARIANCIA IGUAL A UNO.*

EXISTEN TABLAS PARA CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE UNA VARIABLE ASOCIADA A UNA DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR. EN LA SIGUIENTE FIGURA SE MUESTRA LA FORMA DE CAMPANA DE ESTA DISTRIBUCION, OBSERVANDOSE LA SIMETRIA RESPECTO A Z=E(Z)=0 Y QUE ES ASINTOTICA AL EJE Z.



Distribución normal de una variable aleatoria continua

LA UTILIDAD DE LA DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR RADICA EN QUE

$$P[x_1 \leq X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx = P[z_1 \leq Z \leq z_2] = \int_{z_1}^{z_2} f_Z(z)\,dz$$

DONDE

$$z_1 = \frac{z_1 - \mu}{\sigma} \quad Y \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

EJEMPLO

COMO RESULTADO DE UNA LARGA SERIE DE EXPERIMENTOS PROBANDO A COMPRESION SIMPLE CILINDROS DE CONCRETO, SE HA ESTIMADO QUE LA ESPERANZA DE LA RESISTENCIA ES DE 240 KG/CM^2 Y LA DESVIACION ESTANDAR DE 30 KG/CM^2.

A) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE OTRO CILINDRO TOMADO AL AZAR RESISTA MENOS DE 240 KG/CM^2?

B. ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE RESISTA MAS DE 330 KG/CM^2?

C) ¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SU RESISTENCIA ESTE EN EL INTERVALO DE 210 A 240 KG/CM^2?

SUPONGASE QUE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ES NORMAL.

SOLUCION

A) PARA EMPLEAR LAS TABLAS DE DISTRIBUCION NORMAL ES NECESARIO ESTANDARIZAR LA VARIABLE X, EMPLEANDO $\mu=240$ Y $\sigma=30$, CON $x_1=240$:

$$z_1 = \frac{240 - 240}{30} = 0$$

RECURRIENDO A LA TABLA DE LA DISTRIBUCION NORMAL SE OBTIENE

$$P[X \leq 240] = P[Z \leq 0] = 0.5$$

O SEA, LA PROBABILIDAD QUE CORRESPONDE AL AREA SOMBREADA DE LA SIGUIENTE FIGURA:

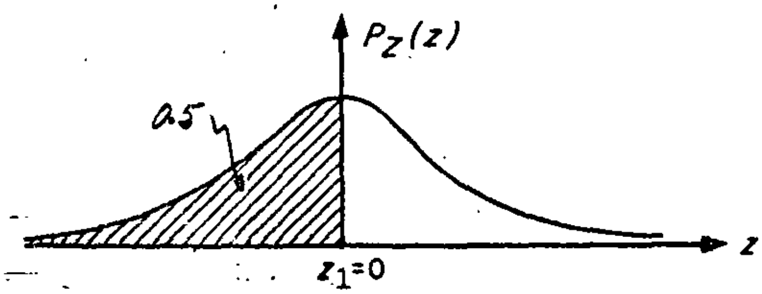


Fig 16. Distribución normal correspondiente al inciso c del ejemplo

119

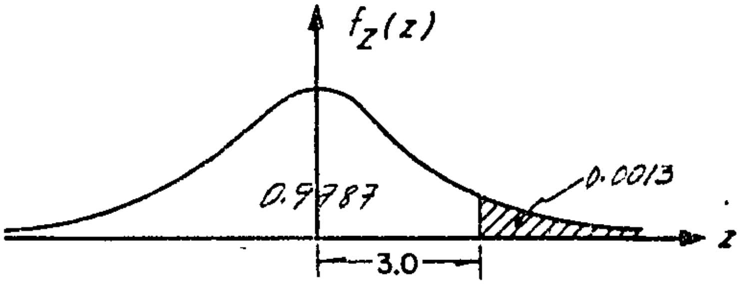
B) EL VALOR ESTANDARIZADO DE LA VARIABLE, PARA x_1=330 KG/CM^2, ES

$$z_1 = \frac{330 - 240}{30} = 3$$

POR LO QUE

$$P[X \geq 330] = P[Z \geq 3] = 1-0.9987 = 0.0013$$

QUE ES EL AREA SOMBREADA DE LA SIGUIENTE FIGURA:



Distribución normal correspondiente al inciso b del ejemplo

C) LOS VALORES ESTANDARIZADOS DE LA VARIABLE, PARA x_1=210 Y x_2=240 SON:

$$z_1 = \frac{210 - 240}{30} = -1$$

$$z_2 = \frac{240 - 240}{30} = 0$$

POR LO QUE

$$P[210 \leq X \leq 240] = P[-1 \leq Z \leq 0] = 0.3413$$

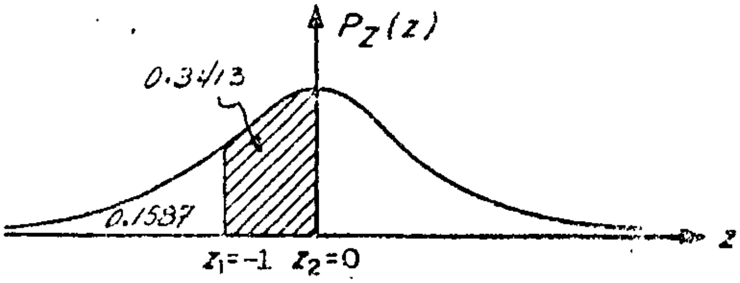


Fig 16. Distribución normal correspondiente al inciso c del ejemplo

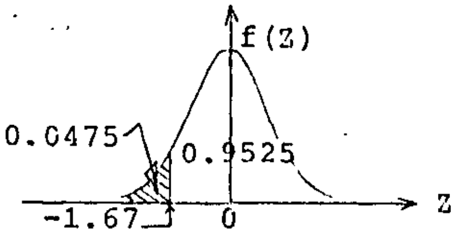
EJEMPLO

SE HA ENCONTRADO QUE LA VARIABLE ALEATORIA "ERROR EN LA MEDICION DE LAS DISTANCIAS ENTRE DOS PUNTOS" TIENE DISTRIBUCION NORMAL CON MEDIA CERO. SI SE SABE QUE EL TAMAÑO VERDADERO DE UNA LINEA ES DE 2 M Y QUE LA VARIANCIA DE SUMEDICION ES $9CM^2$, CALCULAR LA PROBABILIDAD DE QUE EN UNA MEDICION LA LONGITUD QUE SE REGISTRE SEA

a. MENOR DE 195 CM
b. MAYOR DE 203 CM
c. COMPRENDIDO ENTRE 198 Y 202 CM.

a. $P(X < 195) = ?$ CON $\mu = 200$ CM Y $\sigma = \sqrt{9} = 3$ CM

$$Z = \frac{195-200}{3} = \frac{-5}{3} = -1.67$$



$P(X < 195) = P(Z < -1.67) = 0.0475 = 4.75\%$

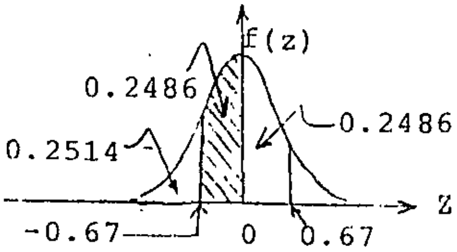
b. $$Z = \frac{203 - 200}{3} = 1$$

$P(X > 203) = 1 - P(X \leq 203) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 = 15.87\%$

c. $P(198 < X < 202) = ?$

$$Z_1 = \frac{198 - 200}{3} = -0.67, \quad Z_2 = \frac{202 - 200}{3} = 0.67$$

$P(198 < X < 202) = P(-0.67 < Z < 0.67) = 2x0.2486 = 0.4972 = 49.72\ \%$



121

TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE

SEAN LAS VARIABLES ALEATORIAS $X_1, X_2, \ldots, X_k$, CON IDENTICAS DENSIDADES DE PROBABILIDADES (ARBITRARIAS) CUYA SUMA SE DENOTARA COMO W, ES DECIR

$$W = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$$

ES POSIBLE DEMOSTRAR EL TEOREMA DENOMINADO TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE, CUYO ENUNCIADO INDICA QUE CONFORME AUMENTA EL NUMERO DE VARIABLES INVOLUCRADAS EN LA SUMA ANTERIOR (AL AUMENTAR k), LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE W TIENDE A SER LA DISTRIBUCION NORMAL. ADEMAS SE PUEDE DEMOSTRAR QUE SI TODAS LAS VARIABLES $X_1, X_2, \ldots, X_k$ TIENEN DISTRIBUCION NORMAL, ENTONCES, RIGUROSAMENTE, W TAMBIEN LA TIENE, INDEPENDIENTEMENTE DEL NUMERO DE VARIABLES QUE APAREZCAN EN LA SUMA.

A PARTIR DEL TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL SE DEMUESTRA QUE LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI SE PUEDE APROXIMAR MEDIANTE LA NORMAL CUANDO EL NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMENTO ES GRANDE (30 O MAS), CON LO CUAL SE LOGRA UN AHORRO CONSIDERABLE DE LABOR NUMERICA EN LA SOLUCION DE ALGUNOS PROBLEMAS. PARA MEJORAR ESTA APROXIMACION, CONVIENE EFECTUAR UNA CORRECCION POR CONTINUIDAD, LA CUAL SE JUSTIFICA POR USAR UNA DISTRIBUCION CONTINUA EN VEZ DE UNA DISCRETA, SUMANDO O RESTANDO, SEGUN SEA EL CASO, 0.5 AL VALOR DE X QUE SE USE. POR EJEMPLO, SI SE DESEA CUANTIFICAR LA PROBABILIDAD DE QUE DE 2000 ENSAYES SE LOGREN DE 3 A 6 EXITOS, LOS LIMITES REALES QUE SE DEBEN USAR AL APLICAR LA DISTRIBUCION CONTINUA SON $x_1=2.5$ Y $x_2=6.5$.

EJEMPLO

SI LA PROBABILIDAD DE QUE FALLE UNA VARILLA DE ACERO AL APLICARLE CIERTA CARGA ES DE 0.001, DETERMINAR LA PROBABILIDAD DE QUE EN 2000 VARILLAS PROBADAS FALLEN MAS DE DOS.

USANDO LA DISTRIBUCION DE BERNOULLI SE OBTIENE

$$P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]) =$$

$$= 1 - \left(\frac{2\ 000!}{2\ 000!\ 0!}(0.001)^{0}(0.999)^{2\ 000} + \frac{2\ 000!}{1\ 999!\ 1!}(0.001)^{1}(0.999)^{1\ 999} +\right.$$

$$\left. + \frac{2\ 000!}{1\ 998!\ 2!}(0.001)^{2}(0.999)^{1\ 998}\right) = 0.3233$$

LOS CALCULOS NECESARIOS PARA OBTENER LA SOLUCION SON BASTANTE MAS TEDIOSOS QUE LOS QUE DEBEN EFECTUARSE APROVECHANDO QUE EL NUMERO DE REPETICIONES DEL EXPERIMENTO ES GRANDE, A FIN DE UTILIZAR LA DISTRIBUCION NORMAL. EN ESTAS CIRCUNSTANCIAS LA PROBABILIDAD DE QUE $X \leq 2$ EN EL CASO DISCRETO, EQUIVALE A LA DE QUE $X \leq 2.5$ EN EL CONTINUO; ASI

$$\mu = np = 2\ 000 \times 0.001 = 2 \text{ (SE USA LA MISMA MEDIA)}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2\ 000 \times 0.001 \times 0.999} = 1.41$$

$$P[X \leq 2.5] = P\left[Z \leq \frac{2.5 - 2}{1.41}\right] = P[Z \leq 0.35] = 0.6387$$

DE DONDE

$$P[X > 2.5] = 1 - P[X \leq 2.5] = 1 - 0.6387 = 0.361$$

EJEMPLO

EN UNA SERIE DE 462 EXPERIMENTOS CON FINES ANTROPOLOGICOS, CONSISTENTES EN MEDIR EL TAMAÑO DE LA CABEZA DE LOS INDIGENAS RESIDENTES EN UNA ZONA TROPICAL, SE OBTUVIERON LOS RESULTADOS ANOTADOS EN LAS DOS PRIMERAS COLUMNAS DE LA SIGUIENTE TABLA. SI LA VARIABLE ALEATORIA "TAMAÑO DE LA CABEZA" SE CONSIDERA QUE TIENE DISTRIBUCION NORMAL, ¿QUE CANTIDAD DE RESULTADOS SE ESPERARIA OBTENER ANTES DE HACER LAS MEDICIONES, SI SE CONSIDERA QUE $\mu = \bar{x} = 191.8$MM y $\sigma = s = 6.48$MM, DONDE $\bar{x}$=PROMEDIO ARITMETICO Y s=DESVIACION ESTANDAR DE LOS DATOS?

$$z_1 = \frac{171.5 - 191.8}{6.48} = -3.13; \quad z_2 = \frac{175.5 - 191.8}{6.48} = -2.51; \quad z_3 = \frac{179.5 - 191.8}{6.48} =$$

$$= -1.90, \text{ ETC.}$$

$P(-3.13 \leq Z \leq -2.51) = 0.0051$; $P(-2.51 \leq Z \leq -1.90) = 0.0227$;

$P(-1.90 \leq Z \leq -1.28) = 0.0716$, ETC.

462 x 0.0051 = 2.4; 462 x 0.0227 = 10.5; 462 x 0.0716 = 33.1, ETC.

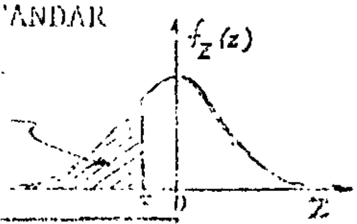
INTERVALO DE VALORES DE X, EN MM	NUMERO DE OBSERVACIONES (frecuencia, f)	INTERVALO DE $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$	PROBABILIDAD $P(z_1 \leq z \leq z_2) = P$	FRECUENCIA ESPERADA = 462 P
171.5-175.5	3	(-3.13)-(-2.51)	0.0051	2.4
175.5-179.5	9	(-2.51)-(-1.90)	0.0227	10.5
179.5-183.5	29	(-1.90)-(-1.28)	0.0716	33.1
183.5-187.5	76	(-1.28) (-0.66)	0.1543	71.3
187.5-191.5	104	(-0.66)-(-0.05)	0.2255	104.2
191.5-195.5	110	(-0.05)- 0.57	0.2356	108.8
195.5-199.5	88	0.57 - 1.19	0.1677	77.5
199.5-203.5	30	1.19 - 1.80	0.0811	37.5
203.5-207.5	6	1.80 - 2.42	0.0281	13.0
207.5-211.5	4	2.42 - 3.04	0.0066	3.0
211.5-215.5	2	3.04 - 3.66	0.0011	0.5
215.5-219.5	1	3.66 - 4.27	0.0001	0.0

TOTAL: 462 TOTAL: 461.6

TABLA 3

FUNCION DE DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$$

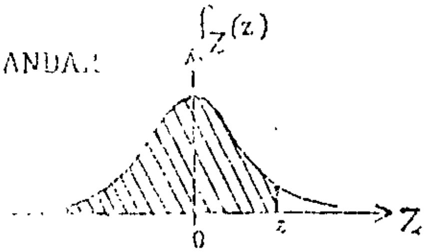


Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−3.	.0013									
−2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0227	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0300	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−.8	.2119	.2090	.2061	.2035	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−.7	.2420	.2389	.2358	.2326	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

TABLA 3 (continuación)

FUNCION DE DISTRIBUCION NORMAL ESTANDAR

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-u^2/2}\, du$$



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	8531	.8554	8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	8830
1.2	8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9700	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	9875	.9878	[illegible]	.9884	.9887	9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	[illegible]	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.	9987									

127

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

" DIPLOMADO EN SISTEMAS DE CALIDAD EN INGENIERÍA DE PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN "

MÓDULO II

CONTROL DE CALIDAD DE MATERIALES Y OBRAS

PARTE I

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA EL CONTROL DE CALIDAD

TEMA:

INFERENCIA ESTADÍSTICA

EXPOSITOR: M. en I. AUGUSTO VILLAREAL A.
1997

Palacio de Mineria Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

INFERENCIA ESTADISTICA

Por: M en I Augusto Villarreal Aranda*

1. Introducción

La parte de la estadística que proporciona las reglas para inferir ciertas características de una población a partir de muestras extraídas de ella, junto con indicaciones probabilísticas de la veracidad de tales inferencias, se llama *inferencia estadística*.

En la inferencia estadística se estudian las relaciones existentes entre una población, las muestras obtenidas de ella, y las técnicas para estimar parámetros, tales como la media y la variancia, o bien para determinar si las diferencias entre dos muestras son debidas al azar, etc.

2. Distribuciones muestrales

Si se consideran todas las muestras posibles de tamaño

---

* *Secretario Académico*, División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, UNAM y *Profesor investigador*, Instituto de Ingeniería, UNAM

n que pueden extraerse de una población, y para cada una se calcula el valor del promedio aritmético, este seguramente variará de una muestra a otra, ya que depende de los valores de los datos que se hayan obtenido en cada muestra. Por lo tanto, el promedio aritmético es en sí una variable aleatoria, como también lo son, por la misma razón, el rango y la variancia de la muestra.

A todo elemento que es función de los valores de los datos que se tienen en una muestra se le denomina *estadística;* toda estadística es, entonces, una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades se conoce como *distribución muestral.* Si, por ejemplo, la estadística considerada es la variancia de la muestra, su densidad de probabilidades se llama *distribución muestral de la variancia.*

En forma similar se pueden obtener las distribuciones muestrales de la desviación estándar, del rango, etc., cada una de las cuales tendrá sus propios parámetros, lo que permite hablar de la media y la desviación estándar de la variancia, etc.

3. Muestreo con y sin remplazo

Cuando se efectúa un muestreo en una población de tal manera que cada elemento de la misma se pueda escoger más de una vez, se dice que el muestreo es *con remplazo;* en caso contrario, el muestreo es *sin remplazo.* Si de una urna se quiere extraer una muestra de bolas de colores, se puede proceder de dos maneras: se saca al azar una bola, se anota su color y se regresa a la urna antes de obtener otra, y así sucesivamente; en este caso el muestreo es *con remplazo.* La segunda forma consiste en extraer al azar todas las bolas que constituyen la muestra sin regresarlas a la urna, siendo entonces un muestreo *sin remplazo.*

4. Distribucion muestral del promedio aritmético

Supóngase que se extraen sin remplazo todas las muestras posibles de tamaño n de una población finita de tamaño $N_p > n$. Si la media y la desviación estándar de la distribución muestral del promedio aritmético se denotan con $\mu_{\bar{X}}$ y $\sigma_{\bar{X}}$, y la media y la desviación estándar de la población con μ y σ, respectivamente, entonces es posible demostrar que se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\mu_{\bar{X}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

Además, si la población es infinita (o el muestreo es con remplazo), los resultados anteriores se reducen a

$$\mu_{\bar{X}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

puesto que

$$\lim_{N_p \to \infty} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

3

Para valores grandes de $n (n \geqslant 30)$ se demuestra, empleando el teorema del límite central, que la distribución muestral del promedio aritmético es aproximadamente una distribución normal con media $\mu_{\bar{X}}$ y desviación estándar $\sigma_{\bar{X}}$, independientemente de cuál sea la densidad de probabilidades de X, la variable aleatoria asociada a la población. Si esta variable tiene distribución normal, la distribución muestral del promedio aritmético también es normal; aun para valores pequeños de n $(n < 30)$.

Ejemplo 4.1

Supóngase que se tiene una población finita formada por los datos 1,2,3,4,5. Se desea conocer la media y la desviación estándar de la distribución muestral del promedio aritmético, considerando las muestras de tamaño 3 obtenidas sin remplazo.

Primer procedimiento.

Siendo la población finita y el muestreo sin remplazo, es posible obtener la distribución muestral correspondiente para calcular después sus parámetros, considerando que el número total de muestras distintas de tamaño 3 que pueden obtenerse a partir de una población de 5 elementos es

$$\frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

Dichas muestras son las siguientes, junto con sus promedios aritméticos correspondientes:

4

	$\bar{X}_i$		$\bar{X}_i$
1, 2, 3	6/3	3, 4, 5	12/3
1, 2, 4	7/3	3, 4, 1	8/3
1, 2, 5	8/3	4, 5, 1	10/3
2, 3, 4	9/3	4, 5, 2	11/3
2, 3, 5	10/3	5, 1, 3	9/3

Para calcular la media y la desviación estándar, se emplea la siguiente tabla

$\bar{X}_i$	6/3	7/3	8/3	8/3	9/3	9/3	10/3	10/3	11/3	12/3
$\bar{X}_i^2$	36/9	49/9	64/9	64/9	81/9	81/9	100/9	100/9	121/9	144/9

$$\sum_{i=1}^{10} \bar{X}_i = 90/3 \qquad \sum_{i=1}^{10} \bar{X}_i^2 = 840/9$$

$$\mu_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \bar{X}_i = \frac{1}{10} \quad \frac{90}{3} = 3$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \bar{X}_i^2 - \bar{\bar{X}}^2 = \frac{1}{10} \quad \frac{840}{9} - (3)^2 =$$

$$= 9.333 - 9.000 = 0.333 \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{0.333} = 0.577$$

Es decir, $\mu_{\bar{X}} = 3$ y $\sigma_{\bar{X}} = 0.577$

Segundo procedimiento.

Por tratarse de una población finita, se verifica que

5

$$\mu_{\bar{X}} = \mu \qquad \text{y} \qquad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

en donde $N_p = 5$, $n = 3$ y $\mu = 3$.

El valor de σ^2 de la población es

$$\sigma^2 = \frac{1+4+9+16+25}{5} - (3)^2 = \frac{55}{5} - 9 = 11-9 = 2$$

Por lo tanto, $\sigma = \sqrt{2} = 1.4145$ y

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{1.4145}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5 - 3}{5 - 1}} = (0.8164)(0.7071) \doteq 0.577$$

Es decir, $\mu_{\bar{X}} = 3$ y $\sigma_{\bar{X}} = 0.577$

Comparando los resultados, se puede observar que ambos procedimientos conducen a la obtención de los mismos valores de $\mu_{\bar{X}}$ y $\sigma_{\bar{X}}$ para la distribución muestral del promedio aritmético.

Ejemplo 4.2

En una bodega se tienen cinco mil varillas de acero; el valor medio del peso, X, de cada varilla es de 5.02 kg, y la desviación estándar 0.3 kg. Hallar la probabilidad de que una muestra de cien varillas, escogida al azar, tenga un peso total

a. entre 496 y 500 kg

b. de más de 510 kg.

Para la distribución muestral del promedio, se tiene que $\mu_{\bar{X}} = \mu = 5.02$ kg y, por tratarse de una población finita,

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}} = \frac{0.30}{\sqrt{100}} \sqrt{\frac{5000 - 100}{5000 - 1}} = 0.027$$

a. El peso total de la muestra estará entre 496 y 500 kg si el peso promedio de las cien varillas se encuentra entre 4.96 y 5.00 kg. Puesto que la muestra es mayor de 30 elementos se puede considerar como aproximadamente normal a la distribución muestral, y los valores estándar correspondientes a $\bar{X} = 4.96$ y a $\bar{X} = 5.00$ se obtienen mediante la transformación

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

es decir,

$$Z_1 = \frac{4.96 - 5.02}{0.027} = -2.22$$

$$Z_2 = \frac{5.00 - 5.02}{0.027} = -0.74$$

En la fig 4.1 se puede apreciar que

$$P[496 \leqslant X \leqslant 500] = P[-2.22 \leqslant Z \leqslant -0.74] =$$

$$= P[-2.22 \leqslant Z \leqslant 0] - P[-0.74 \leqslant Z \leqslant 0]$$

=

=

7

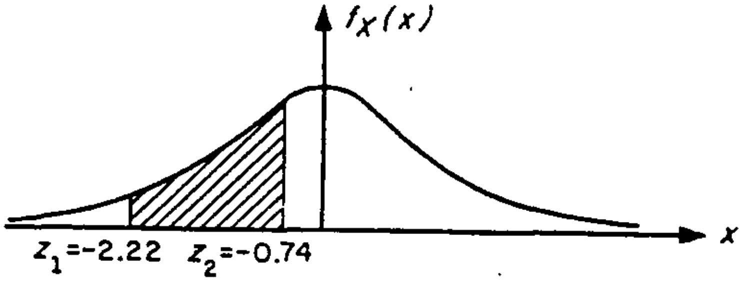


Fig 4.1 Distribución normal correspondiente al ejemplo

Recurriendo a la tabla de áreas bajo la curva normal estándar entre 0 y Z queda finalmente

$$P[496 \leqslant X \leqslant 500] = 0.4868 - 0.2704 = 0.2164$$

b. El peso total de la muestra excederá de 510 kg si el peso promedio de las cien varillas pasa de 5.10 kg.

Estandarizando dicho valor, queda

$$Z_3 = \frac{5.10 - 5.02}{0.027} = 2.96$$

Calculando el área bajo la curva normal a la derecha de este valor (fig 4.2), se tiene que

$$P[X \geqslant 510] = P[Z \geqslant 2.96] = P[Z > 0] - P[0 \leqslant Z \leqslant 2.96] =$$

$$= 0.5 - 0.4985 = 0.0015$$

8

6. Teoría estadística de la estimación

En la práctica profesional a menudo resulta necesario inferir información acerca de una población mediante el uso de muestras extraídas de ella; una parte básica de dicha inferencia consiste en *estimar* los valores de los parámetros de la población (media, variancia, etc.) a partir de las estadísticas correspondientes de la muestra, como se explica a continuación.

7. Estimadores puntuales. Clasificación

Si un estimador de un parámetro de la población consiste en un solo valor de una estadística, se le conoce como *estimador puntual* del parámetro.

Cuando la media de la distribución muestral de una estadística es igual al parámetro que se está estimando de la población, entonces la estadística se conoce como *estimador insesgado* del parámetro; si no sucede así, entonces se denomina *estimador sesgado*. Ambos estimadores son puntuales, y sus valores correspondientes se llaman estimaciones insesgadas o sesgadas, respectivamente. Dicho de otra manera, si S es una estadística cuya distribución muestral tiene media μ_S, y el parámetro correspondiente de la población es θ, se dice que S es un estimador insesgado de θ si

$$\mu_S = \theta$$

Por otra parte, si la estadística S_n de la muestra tiende a ser igual al parámetro θ de la población a medida que se

hace más grande el tamaño de la muestra, entonces la estadística recibe el nombre de *estimador consistente* del parámetro.

Empleando símbolos, si

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \theta$$

resulta que la estadística S_n es un estimador consistente. Por ejemplo, el promedio aritmético es un estimador insesgado y consistente de la média, y la variancia de la muestra es un estimador sesgado,y consistente de la variancia de la población.

Si las distribuciones muestrales de varias estadísticas tienen el mismo valor de la media, se dice que la estadística que cuenta con la menor variancia es un *estimador eficiente* de dicha media, en tanto que las estadísticas restantes se conocen como *estimadores ineficientes* del parámetro.

Por ejemplo, las distribuciones muestrales del promedio aritmético y de la mediana cuentan con medias que son, en ambos casos, iguales a la media de la población. Sin embargo, la variancia de la distribución muestral del promedio aritmético es menor que la de la distribución de la mediana, por lo que el promedio aritmético obtenido de una muestra aleatoria proporciona un estimador eficiente de la media de la población, en tanto que la mediana obtenida de la muestra proporciona un estimador ineficiente de dicho parámetro.

3. Estimación de intervalos de confianza para los parámetros de una población

La estimación de un parámetro de una población mediante un par de números entre los cuales se encuentra, con cierta probabilidad, el valor de dicho parámetro, se llama estimación del intervalo del mismo.

Sea S una estadística obtenida de una muestra de tamaño n para estimar el valor del parámetro θ, y sea σ_S la desviación estándar (conocida o estimada) de su distribución muestral. La probabilidad, $1 - \alpha$, de que el valor de θ se localice en el intervalo de $S - z_c \sigma_S$ a $S + z_c \sigma_S$, donde z_c es una constante, se escribe en la forma

$$P[S - z_c \sigma_S \leqslant \theta \leqslant S + z_c \sigma_S] = 1 - \alpha$$

Si se fija el valor de $1 - \alpha$, se puede obtener el valor de z_c necesario para que se satisfaga la ecuación anterior, con lo cual queda definido el *intervalo de confianza* del parámetro θ, $(S - z_c \sigma_S, S + z_c \sigma_S)$, correspondiente al nivel de *confianza* $1 - \alpha$.

La constante z_c que fija el intervalo de confianza se conoce como *valor crítico*. Si la distribución de S es normal, el valor de z_c correspondiente a uno de α se obtiene de la tabla de áreas bajo la curva normal o de la tabla 8.1 siguiente.

//

TABLA 8.1 VALORES DE z_c PARA DISTINTOS NIVELES DE CONFIANZA

Nivel de confianza, en porcentaje	z_c
99.73	3.00
99.00	2.58
98.00	2.33
96.00	2.05
95.45	2.00
95.00	1.96
90.00	1.64
80.00	1.28
68.27	1.00
50.00	0.674

Ejemplo 8.1

Sea el promedio aritmético $\bar{X}$ una estadística con distribución normal. Las probabilidades o niveles de confianza de que $\mu_{\bar{X}}$ (o μ de la población) se encuentre localizada entre los límites $\bar{X} \pm \sigma_{\bar{X}}$, $\bar{X} \pm 2\ \sigma_{\bar{X}}$ y $\bar{X} \pm 3\ \sigma_{\bar{X}}$ son 68.26, 95.44 y 99.73%, respectivamente, obteniéndose dichos valores de la tabla de áreas bajo la curva normal. Lo anterior significa que el intervalo $\bar{X} \pm 3\ \sigma_{\bar{X}}$ contendrá a $\mu_{\bar{X}}$ en el 99.73 por ciento de las muestras de tamaño *n*, por lo que los intervalos de confianza de 68.26, 95.44 y 99.73 por ciento para estimar a μ son $(\bar{X} - \sigma_{\bar{X}}, \bar{X} + \sigma_{\bar{X}})$ $(\bar{X} - 2\ \sigma_{\bar{X}}, \bar{X} + 2\ \sigma_{\bar{X}})$ y $(\bar{X} - 3\ \sigma_{\bar{X}}, \bar{X} + 3\ \sigma_{\bar{X}})$, lo cual se aprecia en la *fig* 8.1 siguiente.

12

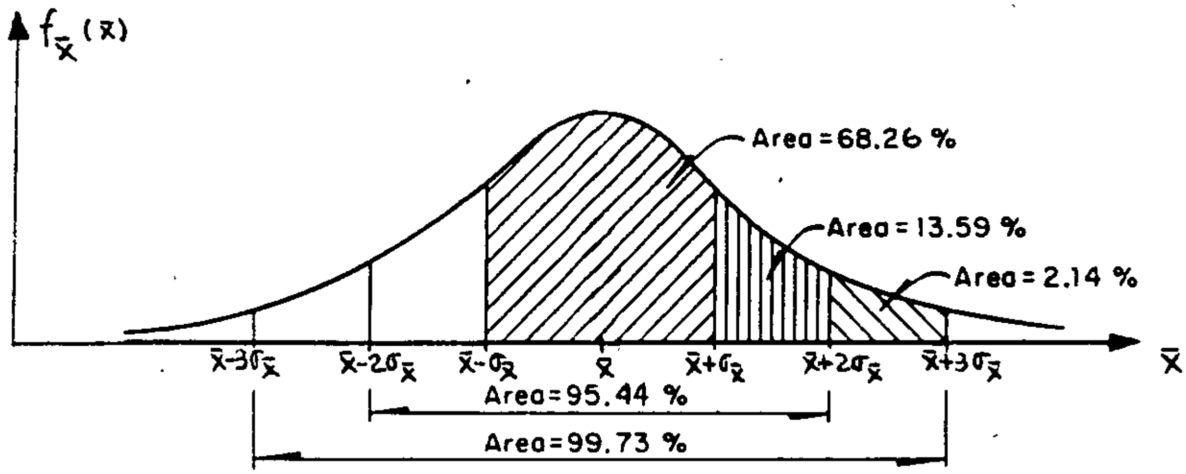


Fig 8.1

9. Estimación de intervalos de confianza para la media

Los límites de confianza para la media de una población con variable aleatoria X asociada están dados por

$$\bar{X} \pm z_c\ \sigma_{\bar{X}}$$

en donde z_c depende del nivel de confianza deseado. Si $\bar{X}$ tiene distribución normal, z_c puede obtenerse en forma directa de la tabla 8.1. Por ejemplo, los límites de confianza de 95 y 99 por ciento para estimar la media, μ, de la población son $\bar{X} \pm 1.96\sigma_{\bar{X}}$ y $\bar{X} \pm 2.58\ \sigma_{\bar{X}}$, respectivamente. Al obtener estos límites hay que usar el valor calculado de $\bar{X}$ para la muestra correspondiente.

Entonces, los límites de confianza para la media de la población quedan dados por

$$\bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

en caso de que el muestreo se haga a partir de una población infinita o de que se efectúe con remplazo a partir de una población finita, o por

$$\bar{X} = z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

sí el muestreo es sin remplazo a partir de una población finita de tamaño N_p.

Ejemplo 9.1

Las mediciones de los diámetros de una muestra aleatoria de 100 tubos de albañal mostraron una media de 32 cm y una desviación estándar de 2 cm. Obténganse los límites de confianza de

a. 95 por ciento
b. 97 por ciento

para el diámetro medio de todos los tubos.

a. De la tabla 8.1, los límites de confianza del 95 por ciento son

$$\bar{X} \pm 1.96\sigma/\sqrt{n} = 32 \pm 1.96(2/\sqrt{100}) = 32 \pm 0.392 \text{ cm}$$

o sea 31.608 y 32.392, en donde se ha empleado el valor de S_X para estimar el de σ de la población, puesto que la muestra es suficientemente grande (mayor de 30 elementos). Esto significa que con una probabilidad de 95 por ciento, el valor de μ_X se encuentra entre 31.608 y 32.392 cm.

b. Si $Z = z_c$ es tal que el área bajo la curva normal a la derecha de z_c es el 1.5 por ciento del área total, entonces el área entre 0 y z_c es 0.5 - 0.015 = 0.485, por lo que de la tabla de áreas bajo la curva normal se obtiene $z_c = 2.17$. Por lo tanto, los límites de confianza del 97 por ciento son:

$$\bar{X} \pm 2.17\sigma/\sqrt{n} = 32 \pm 2.17(2/\sqrt{100}) = 32 \pm 0.434 \text{ cm}$$

y el intervalo de confianza respectivo es (31.566 cm, 32.434 cm).

Ejemplo 9.2

Una muestra aleatoria de 50 calificaciones de cierto examen de admisión tiene un promedio aritmético de 72 puntos, con desviación estándar igual a 10. Si el examen se aplicó a 1018 personas, obtener

a. El intervalo de confianza del 95% para la media del total de calificaciones.

b. El tamaño de muestra necesario para que el error en la estimación de la media no exceda de 2 puntos, considerando el mismo nivel de confianza.

c. El nivel de confianza para el cual la media de la población sea 72 ± 1 puntos.

a. Si se estima a σ de la población con S_X de la muestra y se considera que la población es finita, los límites de confianza son, puesto que $\bar{X} = 72$, $Z_c = 1.96$, $S_X = 10$, $N_p = 1018$ y $n = 50$,

$$72 \pm 1.96 \frac{10}{\sqrt{50}} \sqrt{\frac{1018 - 50}{1018 - 1}}$$

$$72 \pm 1.96 \ (1.4142) \ (0.9755)$$

$$72 \pm 2.704$$

y el intervalo de confianza respectivo es

$$(69.296, \quad 74.704)$$

b. Puesto que el error en la estimación de la media es, para población finita,

$$\text{Error en la estimación} = Z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

en este caso se tendría

$$Z_c \ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}} < 2$$

o sea, para un nivel de confianza de 95%,

$$1.96 \ \frac{10}{\sqrt{n}} \ \sqrt{\frac{1018 - n}{1018 - 1}} < 2$$

$$\frac{19.6}{\sqrt{n}} \ \sqrt{\frac{1018 - n}{1018 - 1}} < 2$$

16

Elevando al cuadrado la desigualdad, queda

$$\frac{384.16}{n} \quad \frac{1018 - n}{1017} < 4$$

o sea

$$87.85 < n$$

Por lo cual, se requieren al menos 88 elementos en la muestra para que el error en la estimación no exceda de 2 puntos, para $1 - \alpha = 0.95$.

c. Los límites de confianza son, en este caso

$$72 \pm Z_c \frac{10}{\sqrt{50}} \sqrt{\frac{1018 - 50}{1018 - 1}}$$

$$72 \pm Z_c \ (1.4142)(0.9755)$$

o sea

$$72 \pm 1.3795 \ Z_c$$

Puesto que se desea que el valor de la media sea 72 ± 1 puntos, se verifica que

$$1 = 1.3795 \ Z_c$$

Es decir

$$Z_c = \frac{1}{1.3795} = 0.725$$

El área bajo la curva normal estándar entre 0 y $Z_c = 0.725$ es, por interpolación lineal, igual a 0.2657. Por lo tanto, el nivel de confianza es igual al doble del área anterior, es decir, 2(0.2657) = 0.5314 (o 53.14%), tal como se muestra en la fig 9.1

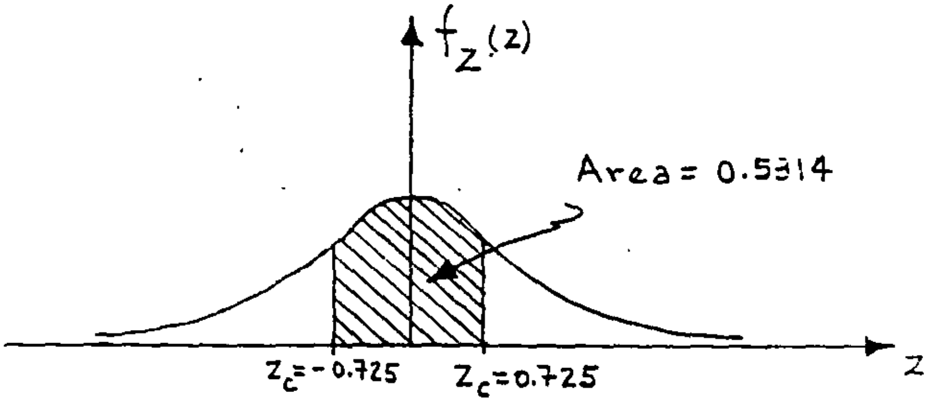


Fig 9.1

18

12. Errores de los tipos I y II. Nivel de significancia

En muchas ocasiones se presenta el caso de que se rechaza una hipótesis nula cuando en realidad debería ser aceptada; cuando esto sucede se dice que se ha cometido un *error de tipo I*. En otras ocasiones se acepta una hipótesis nula siendo en realidad falsa; en este caso se dice que se ha cometido un *error de tipo II*.

Al probar una hipótesis nula, a la máxima probabilidad con la que se está dispuesto a cometer un error del tipo I se le llama *nivel de significancia*, α, de la prueba, el cual dentro de la práctica se acostumbra establecer de 5 por ciento (0.05) o 10 por ciento (0.1). El complemento del nivel de significancia, $1 - \alpha$, se conoce como *nivel de confianza*.

Si, por ejemplo, al realizar una prueba de hipótesis se escoge un nivel de significancia de 10 por ciento, significa que existen 10 posibilidades en 100 de que se rechace ésta cuando debería ser aceptada; es decir, que se rechaza a un nivel de significancia del 10 por ciento, y que la probabilidad de que la decisión haya sido errónea es de 0.1.

13. Comportamiento de los errores tipos I y II

Supóngase que se trata de probar la hipótesis nula de que la media, μ_S, de la distribución muestral de la estadística S es μ_1, en contra de la hipótesis alternativa que establece que $\mu_S = \mu_2$, donde $\mu_2 > \mu_1$, es decir

$$H_0 : \mu_S = \mu_1$$

$$H_1 : \mu_S = \mu_2$$

En la fig 13.1 se muestra en forma gráfica la relación entre los errores tipos I y II en el caso en el que la regla de decisión para aceptar o rechazar H_0 es la siguiente:

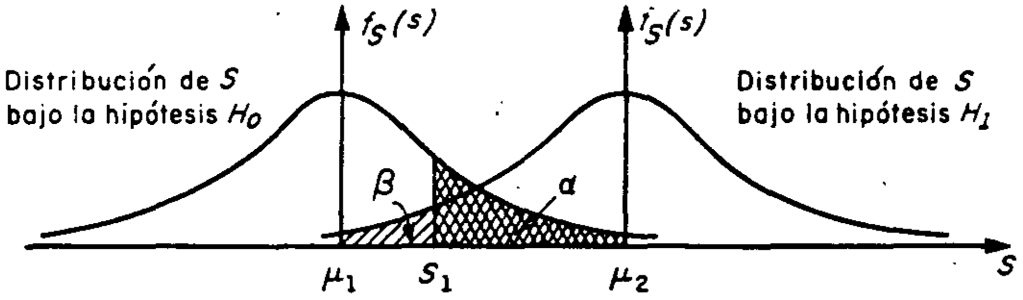
> *Si el valor de la estadística S obtenido de una muestra excede de cierto valor crítico S_1, rechácese H_0; en caso contrario, acéptese.*

Es evidente que si H_0 es verdadera, entonces α (área con rayado doble) es la probabilidad de que $S > S_1$, o sea la de rechazar a H_0 siendo verdadera (error tipo I). Por otro lado, si H_1 es verdadera, entonces β (área con rayado sencillo) es la probabilidad

20

de que $S < S_1$, o sea la de aceptar H_0 siendo falsa (error tipo II).

Obsérvese que si se aumenta el valor de S_1 se reduce la probabilidad α, pero se incrementa la β; lo contrario sucede si se disminuye el valor de S_1.



$P[S>S_1] = \alpha$ (error tipo I)

$P[S<S_1] = \beta$ (error tipo II)

Fig. 13.1 Probabilidades de los errores tipos I y II en pruebas de hipótesis.

En realidad, la única forma posible en la cual se pueden minimizar simultáneamente los errores de tipos I y II es aumentando el tamaño de la muestra, para hacer más "picudas" las distribuciones muestrales de la estadística bajo las hipótesis H_0 y H_1.

Al observar la fig 13.2 siguiente, es posible concluir

21

que el tamaño de los errores I y II es menor para un tamaño de muestra igual a 100 que para un tamaño igual a 50, considerando la misma regla de decisión anterior.

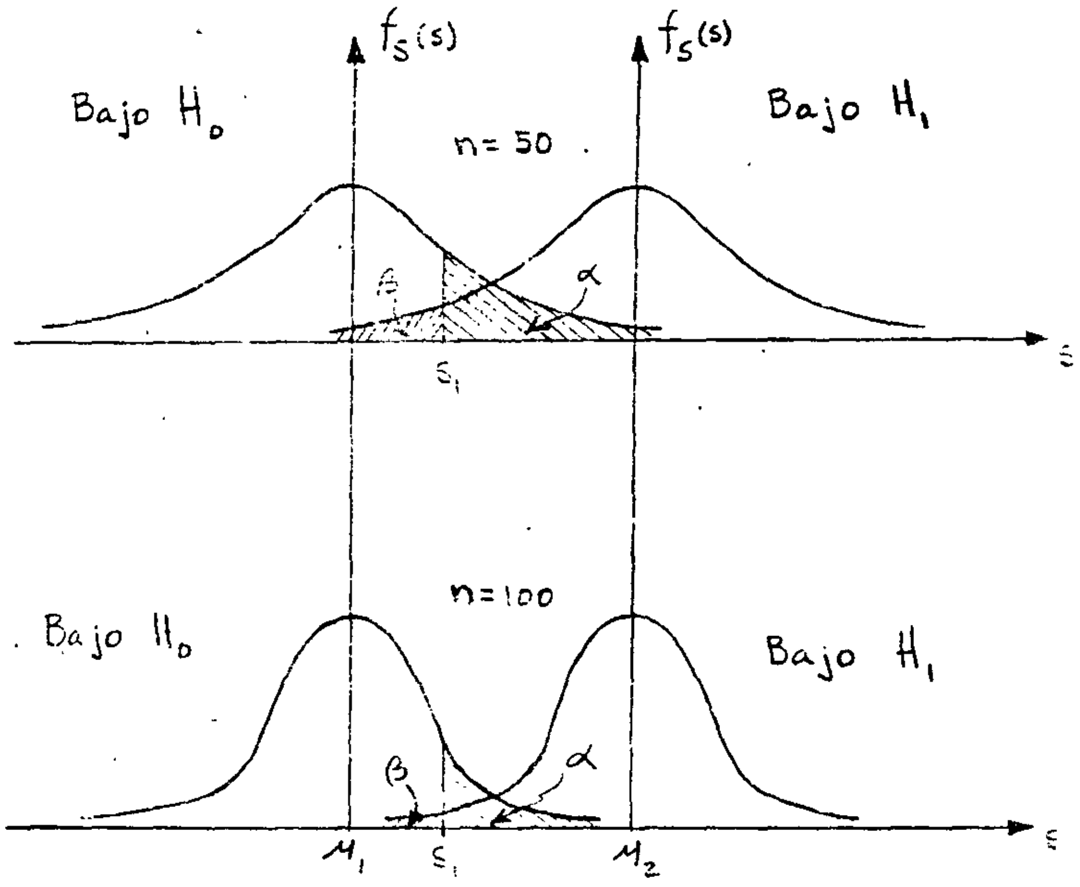


Fig 13.2

Sin embargo, esta técnica de reducción simultánea de ámbos tipos de errores no siempre puede ponerse en práctica, debido a razones de costo, tiempo, etc.

22

14. Regiones críticas, de rechazo o de significancia. Regiones de aceptación.

Cuando una hipótesis nula no se acepta se dice que se *rechaza a un nivel de significancia del* α *por ciento*, o que el valor estandarizado de la estadística involucrada es *significativo a un nivel de significancia* α.

Al conjunto de los valores de la estadística en el que se rechaza la hipótesis nula se le denomina *región crítica, de rechazo, o de significancia.* Por el contrario, al conjunto de los valores de la estadística en que se acepta la hipótesis, se le llama *región de aceptación.*

Considérese que la distribución muestral de la estadística S es normal con desviación estándar σ_S, que la variable Z resulta de estandarizar a S, que la hipótesis nula, H_0, es que la media de S vale μ_S, y que la hipótesis alternativa H_1 es que dicha media es diferente de μ_S, es decir, que

$$Z = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S}$$

H_0: media de la distribución muestral de $S = \mu_S$

H_1: media de la distribución muestral de $S \neq \mu_S$

Si se adopta la regla de decisión de aceptar la hipótesis H_0, si el valor de Z cae dentro del intervalo central que encierra al 99 por ciento del área de la distribución de probabilidades, entonces H_0 se aceptará en el caso en que

23

$$-2.58 \leqslant Z \leqslant 2.58$$

empleando la tabla de áreas bajo la curva normal estándar. Pero si el valor estandarizado de la estadística se encuentra fuera de dicho intervalo, se concluye que el evento puede ocurrir con probabilidad de 0.01 si la hipótesis H_0 es verdadera (área rayada total de la fig 14.1). En tal caso, el valor Z de la variable estándar difiere *significativamente* del que se podría esperar de acuerdo con la hipótesis nula, lo cual inclina a rechazarla a un nivel de confianza del 99 por ciento.

De lo anterior de deduce que el área total rayada de la fig 14.1 es el nivel de significancia α de la prueba, y representa la probabilidad de cometer un error del tipo I. Por ello, la región de aceptación de H_0 es $-2.58 \leqslant Z \leqslant 2.58$, y la de rechazo es $Z > 2.58$ y $Z < -2.58$.

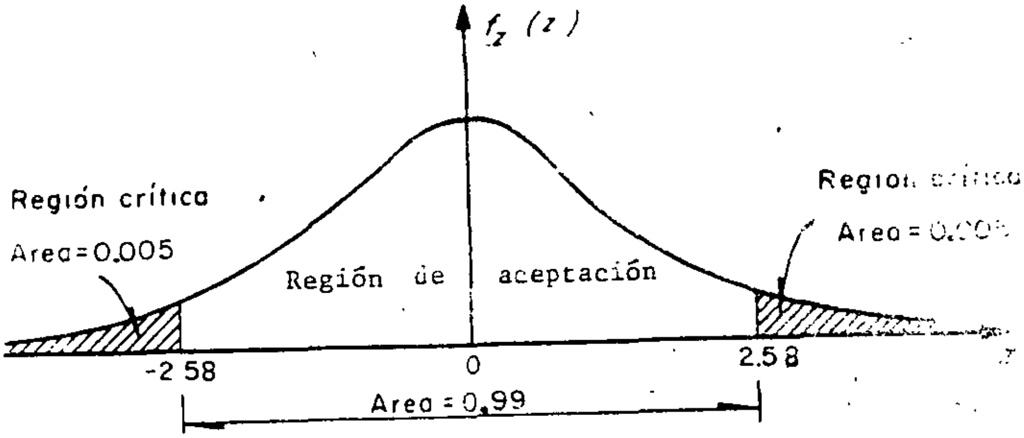


Fig 14.1 Región de significancia

En la tabla 14.1 se presentan los valores de la variable estandarizada, Z, que limitan las regiones de aceptación y de rechazo para el caso en el que la estadística involucrada en la prueba tenga distribución muestral normal. Cuando en alguna prueba de hipótesis se consideren niveles de significancia diferentes a los que aparecen en la tabla mencionada, resulta necesario emplear la de áreas bajo la curva normal estándar.

TABLA 14.1 VALORES CRITICOS DE z

Nivel de significancia, a	Valores de z para pruebas de una cola	Valores de z para pruebas de dos colas
0.1	−1.281 o 1.281	−1.645 y 1.645
0.05	−1.645 o 1.645	−1.960 y 1.960
0.01	−2.326 o 2.326	−2.575 y 2.575
0.005	−2.575 o 2.575	−2.810 y 2.810

15. Pruebas de una y de dos colas

En la prueba de hipótesis del ejemplo anterior, la región de rechazo de la hipótesis nula quedó en ambos extremos (colas) de la distribución muestral de la estadística involucrada en la prueba; a las pruebas de este tipo se les denomina *pruebas de dos colas*. Cuando la región de rechazo se encuentra solamente en un extremo de la distribución muestral en cuestión, se les llama *pruebas de una cola*.

Las pruebas de dos colas se presentan cuando en la hipótesis alternativa aparece el signo ≠ (diferente de), como en el siguiente caso

$$H_0 : \mu_S = \mu_1$$

$$H_1 : \mu_S \neq \mu_1$$

en donde μ_S es la media de la estadística S, y μ_1 es un valor fijo.

En los casos

$$H_0 : \mu_S = \mu_1$$

$$H_1 : \mu_S < \mu_1$$

$$H_0 : \mu_S = \mu_1$$

$$H_1 : \mu_S > \mu_1$$

las pruebas resultan de una cola.

16. Pruebas de hipótesis para la media

Para el caso de una población infinita (o finita en que se muestree con remplazo), cuya desviación estándar σ se conoce o se puede estimar adecuadamente, si se tiene que la estadística S obtenida de la muestra es el promedio aritmético, entonces la media de su distribución muestral es $\mu_S = \mu_{\bar{X}} = \mu$, y su desviación estándar es $\sigma_S = \sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$, en donde μ y σ son, respectivamente, la media y la desviación estándar de la variable aleatoria X asociada a la población, y n es el tamaño de la muestra. En tal caso, si $\bar{X}$ tiene distribución normal, la variable estandarizada correspondiente será

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Para el caso de muestreo sin remplazo de población finita, se tiene que $\sigma_S = \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$, en donde N_p es el tamaño de la población, por lo que la variable estandarizada será

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}}$$

En los dos casos anteriores, el valor de Z correspondiente al de $\bar{X}$ de la muestra es el que se debe comparar con el valor crítico correspondiente al nivel de significancia fijado, para así aceptar o no la hipótesis nula (prueba de una cola). Si se trata de una prueba de dos colas, el valor de Z se debe comparar con los dos valores críticos que corresponden al valor de α seleccionado. En cualquiera de los casos anteriores, el valor o valores críticos se pueden obtener de la tabla 14.1, para valores comunes de α.

Ejemplo 16.1

Se sabe que el promedio de calificaciones de una muestra aleatoria de tamaño 100 de los estudiantes de tercer año de ingeniería civil es de 7.6, con una desviación estándar de 0.2. Si μ denota la media de la población de esas calificaciones, X, y si se supone que $\bar{X}$ tiene distribución normal, probar la hipótesis

27

$\mu = 7.65$ en contra de la hipótesis alternativa $\mu \neq 7.65$, usando un nivel de significancia de

a. 0.05

b. 0.01

Para la solución se deben considerar las hipótesis .

$$H_0 : \mu = 7.65$$

$$H_1 : \mu \neq 7.65$$

Puesto que $\mu \neq 7.65$ incluye valores menores y mayores de 7.65 se trata de una prueba de dos colas.

La estadística bajo consideración es el promedio aritmético, $\overline{X}$, de la muestra, que se supone extraída de una población infinita. La distribución muestral de $\overline{X}$ tiene media $\mu_{\overline{X}} = \mu$ y desviación estándar $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$, en donde μ y σ denotan, respectivamente, la media y la desviación estándar de la población de calificaciones.

Bajo la hipótesis H_0 (considerándola verdadera), se tiene que

$$\mu_{\overline{X}} = 7.65 = \mu$$

y utilizando la desviación estándar de la muestra como una estimación de σ, lo cual se supone razonable por tratarse de una muestra grande,

$$\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 0.2/\sqrt{100} = 0.2/10 = 0.02$$

a. Para la prueba de dos colas a un nivel de significancia de 0.05 se establece la siguiente regla de decisión

Aceptar H_0 *si el valor* Z *correspondiente al valor del promedio de la muestra se encuentra dentro del intervalo de* -1.96 *a* 1.96 *(tabla 14.1).*
En caso contrario, rechazar H_0.

Puesto que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{7.6 - 7.65}{0.02} = -2.5$$

se encuentra fuera del rango de -1.96 a 1.96, se rechaza la hipótesis H_0 a un nivel de significancia de 0.05.

b. Si el nivel de significancia es 0.01, el intervalo de -1.96 a 1.96 de la regla de decisión del inciso α se remplaza por el de -2.58 a 2.58 tabla (14.1). Entonces, puesto que el valor muestral $Z = -2.5$ se encuentra dentro de este intervalo, se acepta la hipótesis H_0 a un nivel de significancia de 0.01.

Ejemplo 16.2

La resistencia media a la ruptura de cables de acero fabricados por la empresa X es de 905 kg. Una empresa consultora sugiere a X que cambie su proceso de manufactura, con lo cual incrementará la resistencia de sus cables. Se prueba el nuevo proceso, y se extrae una muestra aleatoria de 50 cables, obteniéndose para ellos una resistencia promedio de 926 kg, con des-

29

viación estándar igual a 42 kg. ¿Se puede considerar que el nuevo proceso realmente incrementa la resistencia, con un nivel de confianza de 99%?

En este caso, se debe plantear una prueba de hipótesis de una cola, para la cual

$$H_0 : \mu = 905 \text{ kg}$$

$$H_1 : \mu > 905 \text{ kg}$$

Puesto que el tamaño de la muestra es suficientemente grande, se puede aproximar la distribución muestral de la resistencia promedio mediante una normal, y estimar el valor de σ de la población mediante S_X de la muestra.

Considerando a la población infinita, y suponiendo como verdadera a H_0, se tiene que

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 905 \text{ kg}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{42}{\sqrt{50}} = 5.94$$

Para la prueba de una cola a un nivel de significancia $\alpha = 1 - (1 - \alpha) = 1 - 0.99 = 0.01$, la regla de decisión es

Aceptar H_0 si el valor estandarizado de $\bar{X}$ de la muestra es menor o igual a $Z_c = 2.326$ (tabla 14.1); en caso contrario, rechazar H_0.

En virtud de que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{926 - 905}{5.94} = 3.535$$

es mayor de 2.326, se rechaza H_0 a un nivel de significancia de 1%, concluyéndose que en realidad el nuevo proceso sí incrementa la resistencia de los cables.

3.4 Muestras pequeñas

Como ya se indicó, para muestras grandes ($n \geqslant 30$) las distribuciones muestrales de muchas estadísticas son aproximadamente normales, siendo tanto mejor la aproximación cuanto mayor es el tamaño de n. Sin embargo, cuando se trata de muestras en las que $n < 30$, llamadas *muestras pequeñas*, la aproximación no es suficientemente buena, por lo que resulta necesario introducir una teoría apropiada para su estudio.

Al estudio de las distribuciones muestrales de las estadísticas para muestras pequeñas se le llama *teoría estadística de las muestras pequeñas.* Existen al respecto tres distribuciones importantes: *Ji cuadrada, F* y *t de Student.*

3.4.1 Distribución *Ji* cuadrada (χ^2)

Hasta ahora solo se ha tratado la distribución muestral de la media. En esta sección se verá lo concerniente a la distribución muestral de la variancia, S_X^2, para muestras aleatorias extraídas de poblaciones normales. Puesto que S_X no puede ser negativa, es de esperarse que su distribución muestral no sea una curva normal, ya que esta tiene ordenadas mayores de cero en el lado de las abscisas negativas. De hecho, la estadística S_X^2 se puede estudiar si se consideran muestras aleatorias de tamaño n extraídas de una población normal con desviación estándar σ_X y si para cada muestra se calcula el valor de la estadística.

$$\chi^2 = \frac{n\, S_X^2}{\sigma^2} \qquad (3.14)$$

donde S_X^2 es la variancia de la muestra.

El número de grados de libertad, ν, de una estadística se define como

$$\nu = n - k$$

siendo n el tamaño de la muestra y k el número de parámetros de la población que deben estimarse a partir de ella.

La distribución muestral de la estadística χ^2 está dada por la ecuación

$$f\,(\chi^2) = U\,\chi^{\nu-2}\,e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

en la que U es una constante que hace que el área total bajo la curva resulte igual a uno, y $\nu = n - 1$ es el número de grados de libertad. Esta distribución se llama *Ji cuadrada*, misma que se presenta en la fig 21 para distintos valores de ν.

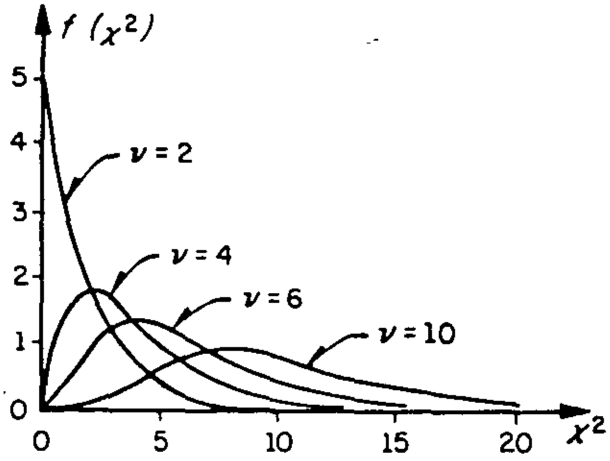


Fig 21. Distribución Ji cuadrada para distintos valores de ν

33

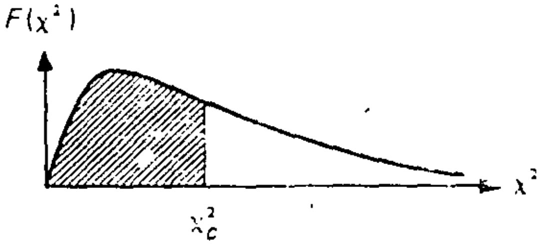


TABLA 8. VALORES CRITICOS χ_c^2

ν	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.75}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.25}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.005}$
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	.455	.102	.016	.0039	.0010	.0002	.0000
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	.575	.211	.103	.0506	.0201	.0100
3	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	.584	.352	.216	.115	.072
4	14.9	13.3	11.1	9.49	7.76	5.39	3.36	1.92	1.06	.711	.483	.297	.207
5	16.7	15.2	12.8	11.15	9.2	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	.831	.554	.412
6	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	.872	.676
7	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35	4.25	2.83	2.18	1.69	1.24	.989
8	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34
9	23.6	21.7	19.0	16.9	14.7	11.4	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73
10	25.2	23.2	20.5	18.3	16.0	12.5	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16
11	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.35	7.57	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60
12	28.3	26.2	23.2	21.0	18.5	14.8	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07
13	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57
14	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.2	13.3	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07
15	32.7	30.6	27.5	25.1	22.3	18.2	14.3	11.0	8.55	7.26	6.25	5.22	4.60
16	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3	11.9	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14
17	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70
18	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26
19	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3	14.6	11.73	10.1	8.91	7.63	6.84
20	40.0	37.6	34.2	31.4	28.45	23.8	19.3	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43
21	41.4	38.8	35.6	32.7	29.6	24.9	20.3	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.02
22	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64
23	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26
24	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89
25	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3	19.9	16.5	14.5	13.15	11.5	10.5
26	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2
27	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.3	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8
28	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5
29	52.3	49.6	45.7	42.5	39.1	33.7	28.3	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1
30	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.7	39.3	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7
50	79.5	76.2	71.4	67.5	63.2	56.3	49.3	43.0	37.7	34.8	32.4	29.7	28.0
60	92.0	88.4	83.3	79.1	74.4	67.0	59.3	52.3	46.5	43.2	40.5	37.5	35.5
70	104.2	100.4	95.0	90.5	85.5	77.6	69.3	61.7	55.3	51.7	48.8	45.4	43.3
80	116.3	112.3	106.6	101.9	96.6	88.1	79.3	71.1	64.3	60.4	57.2	53.5	51.2
90	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.6	89.3	80.6	73.3	69.1	65.6	61.8	59.2
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.3	90.12	82.4	77.9	74.2	70.1	67.3

No obstante que la distribución *Ji* cuadrada solo se ha presentado en el estudio de las muestras pequeñas, cabe aclarar que es válida para aquellas mayores de 30 si la variable aleatoria involucrada tiene distribución normal.

3.4.1.1 Intervalo de confianza para la variancia

Tal como se hizo para la distribución normal, se pueden establecer intervalos de confianza para la variancia de la población en términos de la variancia de una muestra extraída de ella, a un nivel de confianza dado $1 - \alpha$, si se hace uso de los valores críticos χ_c^2 de la tabla 8. Por lo tanto, un intervalo de confianza para la estadística χ^2, estaría dado por

$$\chi_{c'}^2 < \frac{n\, S_X^2}{\sigma^2} < \chi_c^2$$

donde $\chi_{c'}^2$ y χ_c^2 son los valores críticos para los cuales el $(1 - \alpha)/2$ por ciento del área se encuentra en los extremos izquierdo y derecho de la distribución, respectivamente.

Con base en lo anterior, se concluye que

$$\frac{n\, S_X^2}{\chi_c^2} < \sigma^2 < \frac{n\, S_X^2}{\chi_{c'}^2}$$

es un intervalo de confianza para estimar a σ^2 a un nivel de confianza $1 - \alpha$.

3.4.1.2 Prueba de hipótesis para la variancia

La prueba de hipótesis para la variancia de una población normal se efectúa calculando el valor de la estadística χ^2 y estableciendo las hipótesis H_0 y H_1 apropiadas, es decir, se adoptan reglas de decisión similares a las usadas para la estadística Z.

Ejemplo

- La variancia del tiempo de elaboración de cierto producto es igual a 40 min; sin embargo, su proceso de manufactura se modifica y se toma una muestra de

35

veinte tiempos, para la cual la variancia resulta ser igual a 62 min. ¿Es significativo el aumento del tiempo de elaboración a un nivel de significancia de

a) 0.05

b) 0.01?

Se debe decidir de entre las hipótesis

$$H_0 : \sigma^2 = 40 \text{ min}$$

$$H_1 : \sigma^2 > 40 \text{ min}$$

Suponiendo que la hipótesis nula es correcta, el valor de la estadística χ^2 para la muestra considerada es

$$\chi^2 = \frac{n S_X^2}{\sigma^2} = \frac{(20)\,(62)}{40} = 31$$

a) Como se trata de una prueba de una cola, la hipótesis H_0 se rechazaría si el valor de la estadística χ^2 fuera mayor que el de χ^2 para un nivel de significancia igual a 0.05, el cual, para $\nu = 20 - 1 = 19$ grados de libertad resulta ser 30.1 (tabla 8). Como $31 > 30.1$, H_0 se rechaza a un nivel de significancia de 0.05.

b) En este caso, el valor de χ^2 para un nivel de significancia de 0.01 y 19 grados de libertad es igual a 36.2. Puesto que $31 < 36.2$, se acepta H_0 a un nivel de significancia de 0.01.

3.4.3 Distribución t de Student

Si se consideran muestras de tamaño n extraídas de una población normal con media μ y variancia desconocida, para cada muestra se puede calcular la estadística T definida mediante la fórmula

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_X} \sqrt{n - 1} \qquad (3.16)$$

donde X es el promedio y S_X la desviación estándar de la muestra.

La distribución muestral de T (fig 23) está dada por la ecuación

$$f(t) = \frac{U}{\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)\underbrace{(\nu + 1)/2}} \longleftarrow \text{Ojo: va de exponente}$$

en la que U es una constante que hace que el área bajo la curva sea igual a uno, y $\nu = n - 1$ es el número de grados de libertad.

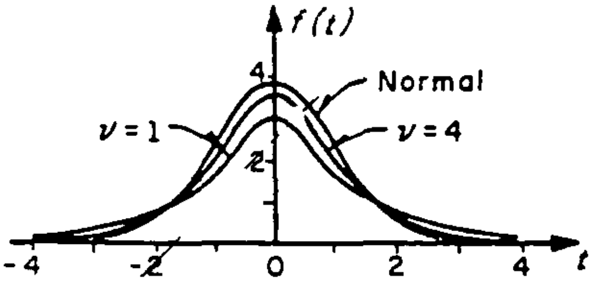


Fig 23. Distribución t de Student para distintos valores de ν

En la fig 23 se aprecia que conforme ν (o n, el tamaño de la muestra) aumenta, la distribución de $f(t)$ se aproxima a la distribución normal.

3.4.3.1 Límites e intervalos de confianza

De manera similar a como se hizo con la distribución normal, es posible estimar los límites de confianza de la media, μ, de una población mediante los *valores críticos*, t_c, de la distribución t, que dependen del tamaño de la muestra y del nivel de confianza deseado, encontrándose dichos valores en la tabla 10.

Así pues,

$$- t_c < \frac{\bar{X} - \mu}{S_X} \sqrt{n - 1} < t_c$$

representa un intervalo de confianza para t, a partir del cual se puede estimar que μ se encuentra dentro del intervalo

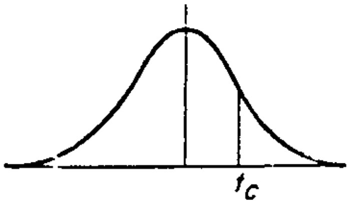
$$\bar{X} - t_c \frac{\sigma_X}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} + t_c \frac{\sigma_X}{\sqrt{n-1}}$$

En términos generales, los límites de confianza para la media de la población se representan como

$$\bar{X} \pm t_c \frac{\sigma_X}{\sqrt{n-1}}$$

38

TABLA 10. VALORES t_c PARA LA DISTRIBUCION t DE STUDENT



ν	$t_{.995}$	$t_{.99}$	$t_{.975}$	$t_{.95}$	$t_{.90}$	$t_{.80}$	$t_{.75}$	$t_{.70}$	$t_{.60}$	$t_{.55}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.07	1.376	1.000	.727	.325	.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	.816	.617	.289	.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	.978	.765	.584	.275	.138
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	.941	.741	.569	.271	.134
5	4.04	3.36	2.58	2.02	1.48	.920	.727	.560	.267	.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	.906	.718	.553	.265	.131
7	3.50	3.00	2.36	1.91	1.43	.896	.711	.549	.263	.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	.889	.706	.546	.262	.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	.883	.703	.543	.261	.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	.879	.700	.542	.260	.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	.876	.697	.540	.260	.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	.873	.695	.539	.259	.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.36	.871	.694	.538	.259	.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	.868	.693	.537	.258	.128
15	2.95	2.61	2.13	1.75	1.34	.866	.691	.536	.258	.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	.865	.690	.535	.258	.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	.863	.689	.534	.257	.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	.862	.688	.534	.257	.128
19	2.87	2.54	2.09	1.73	1.33	.861	.688	.533	.257	.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	.860	.687	.533	.257	.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	.859	.686	.532	.256	.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	.858	.686	.532	.256	.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	.858	.685	.532	.256	.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	.857	.685	.531	.256	.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
26	2.78	2.48	2.05	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
27	2.77	2.47	2.05	1.71	1.31	.855	.683	.531	.256	.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.683	.530	.256	.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.30	.853	.683	.530	.256	.127
40	2.70	2.43	2.02	1.68	1.30	.851	.681	.529	.255	.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	.848	.679	.528	[illegible]	.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	.845	.677	.526	.254	.126
∞	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	.842	.674	.524	.253	.126

3.4.3.2 Pruebas de hipótesis

La prueba de hipótesis para la media de una población se puede efectuar con muestras pequeñas en forma análoga a la de muestras de tamaño mayor de 30 si en lugar de utilizar a la estadística Z se emplea la T. Entonces, si se consideran dos muestras aleatorias cuyos tamaños, desviaciones estándar y promedios son n_X, S_X, $\bar{X}$ y n_Y, S_Y, $\bar{Y}$, respectivamente, extraídas de poblaciones normales de igual variancia ($\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$), se puede probar la hipótesis, H_0, de que las muestras provienen de una misma población, es decir, de que también sus medias son iguales, utilizando la estadística T definida por

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\epsilon \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \qquad (3.17)$$

donde

$$\epsilon = \sqrt{\frac{n_X S_X^2 + n_Y S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}} \qquad (3.18)$$

cuya distribución es la t de Student, con $\nu = n_X + n_Y - 2$ grados de libertad.

Ejemplo

Conforme al plan de desarrollo agrícola de una región, se probó un nuevo fertilizante para maíz. Para ello se escogieron 24 ha de terreno, aplicándose dicho producto a la mitad de ellas. El promedio de producción de maíz en la zona que se usó fertilizante fue de 5.3 ton, con una desviación estándar de 0.40 ton, en tanto que en la otra zona el promedio fue de 5.0 ton, con desviación estándar de 0.36 ton.

De acuerdo con los resultados, ¿se puede concluir que existe un aumento significativo en la producción de maíz al usar fertilizante, si se utiliza un nivel de significancia de

a) 0.01

b) 0.05?

Solución

Para probar la hipótesis de igualdad de medias es indispensable saber primero si las muestras provienen de dos poblaciones normales de igual variancia. En ese caso, si σ_X^2 y σ_Y^2 denotan a las variancias de la producción de maíz en la zona tratada y en la no tratada, respectivamente, se debe probar la hipótesis nula H_0: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ en contra de la hipótesis alternativa H_1: $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ a los dos niveles de significancia establecidos.

El valor de la estadística F es, de la ec 3.15,

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{(0.40)^2}{(0.36)^2} = 1.27$$

y el valor crítico de F (11, 11), obtenido de la tabla 9 mediante interpolación lineal, resulta 4.47. Por lo tanto, como $1.27 < 4.47$, se acepta la hipótesis nula a un nivel de significancia de 0.01.

El valor crítico de F (11, 11) a un nivel de significancia de 0.05 (ref 9) es 2.82, de ahí que como $1.27 < 2.82$, también se acepta la hipótesis H_0.

Con base en lo anterior, se debe decidir entre las hipótesis

H_0: $\mu_X = \mu_Y$ (la diferencia en los promedios se debe al azar)

H_1: $\mu_X > \mu_Y$ (el fertilizante mejora la producción)

Bajo la hipótesis H_0, se tiene que

$$\epsilon = \sqrt{\frac{n_X S_X^2 + n_Y S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}} = \sqrt{\frac{12(0.40)^2 + 12(0.36)^2}{12 + 12 - 2}} = 0.397$$

por lo cual

$$t = \frac{5.3 - 5.0}{0.397 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12}}} = 1.85$$

a) Puesto que se trata de una prueba de una cola a un nivel de significancia de 0.01, se rechaza la hipótesis H_0 si t es mayor que el valor crítico, t_c, correspondiente a dicho nivel, el cual para $\nu = n_X + n_Y - 2 = 12 + 12 - 2 = 22$ grados de libertad, se obtiene de la tabla 8 como $t_c = 2.51$. Como $t < t_c$, la hipótesis H_0 no se puede rechazar a un nivel de significancia de 0.01.

b) Si el nivel de significancia de la prueba es de 0.05, se rechaza H_0 si t es mayor que el valor t_c respectivo que para 22 grados de libertad es $t_c = 1.72$, por lo que de acuerdo con lo anterior, H_0 se rechaza a un nivel de significancia de 0.05.

4. TAMAÑO DE LA MUESTRA

Por: M en I Augusto Villarreal Aranda

INTRODUCCION

Dentro de un plan de muestreo, cuando ya se ha establecido la característica (o características) a estimar, así como el nivel de confianza y el grado de precisión requeridos, se debe decidir cuál debe ser el tamaño de la muestra o número de elementos a seleccionar por el procedimiento de muestreo que vaya a emplearse, en forma tal que los resultados que se obtengan no sean en exceso costosos o imprecisos.

Una vez que se ha fijado el error máximo admisible, que representa la precisión mínima que se exige tengan los resultados, así como el nivel de confianza $P_K = 1 - \alpha$, se requiere conocer además, en la forma más precisa posible, la variabilidad de la población, ya que cuanto más dispersos estén los valores de la variable asociada a ella más arriesgado será el utilizar una muestra de tamaño pequeño.

A continuación se expondrá el procedimiento para seleccionar el tamaño de muestra más adecuado en el caso del muestreo aleatorio simple o irrestrictamente aleatorio (sin remplazo). Más adelante se estudiarán los métodos para calcular el tamaño de la muestra para otros procedimientos de muestreo.

4.1 Tamaño de una muestra aleatoria simple (Medias)

En este caso se trata de estimar la media μ de una población con variable aleatoria asociada X mediante el empleo del promedio aritmético $\overline{X}$, obtenido de una muestra aleatoria de tamaño n con un error máximo admisible absoluto e y un nivel de confianza P_K. Es natural que a la probabilidad P_K le corresponderá un cierto valor de desviación K, obtenido a partir de la desigualdad de Chebyshev, o bien considerando a K como el número de desviaciones estándar para una distribución normal o para una t de Student.

El procedimiento para obtener el tamaño de la muestra se fundamenta en el hecho de que

$$P (\overline{X} - K\sigma_{\overline{X}} \leq \mu \leq \overline{X} + K\sigma_{\overline{X}}) = P_K = 1 - \alpha$$

o sea que con probabilidad o nivel de confianza P_K se puede asegurar que el valor de μ de una población se encuentra dentro del

(1-α) % de los intervalos formados a partir de muestras de tamaño n, de la forma siguiente

$$(\bar{X} - K\sigma_{\bar{X}} , \bar{X} + K\sigma_{\bar{X}})$$

Lo anterior implica que los límites de confianza del P_K % para estimar a μ son

$$\bar{X} \pm K\sigma_{\bar{X}}$$

es decir, que el error en la estimación del valor de μ es, en valor absoluto,

$$|\text{error en la estimación de } \mu| = K\sigma_{\bar{X}} \qquad (4.1)$$

Por lo tanto, es posible escribir

$$|\text{error máximo admisible}| = |\text{error en la estimación de } \mu| = e$$

4.1.1 Muestreo de una población finita

De la inferencia estadística, el valor de $\sigma_{\bar{X}}$, <u>la desviación estándar de la distribución muestral de $\bar{X}$ (o error estándar de $\bar{X}$)</u> cuando la población es finita es

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1} \; \frac{\sigma_X^2}{n}}$$

pudiéndose escribir entonces

$$e = K\sigma_{\bar{X}} = K\sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1} \; \frac{\sigma_X^2}{n}}$$

siendo K la desviación correspondiente al nivel de confianza P_k, N_p el tamaño de la población, σ_x^2 la variancia de esta última y n el tamaño de la muestra.

Puesto que se desea conocer el tamaño de la muestra, éste se puede obtener despejando de la ecuación anterior el valor de n. Para ello, se requiere elevar al cuadrado ambos miembros, es decir

$$e^2 = K^2 \frac{N_p - n}{N_p - 1} \frac{\sigma_x^2}{n}$$

$$e^2 = \frac{K^2 \sigma_x^2 N_p - K^2 \sigma_x^2 n}{(N_p - 1) n}$$

despejando a n:

$$ne^2 (N_p - 1) = K^2\sigma_x^2N_p - K^2\sigma_x^2n$$

$$ne^2N_p - ne^2 = K^2\sigma_x^2N_p - K^2\sigma_x^2n$$

$$ne^2N_p - ne^2 + K^2\sigma_x^2n = k^2\sigma_x^2N_p$$

$$n(e^2N_p - e^2 + K^2\sigma_x^2) = k^2\sigma_x^2N_p$$

$$\therefore n = \frac{K^2\sigma_x^2N_p}{e^2N_p - e^2 + K^2\sigma_x^2} \qquad (4.2)$$

La fórmula anterior permite obtener el tamaño de la muestra considerando conocidos K, e, N_p y σ_X^2 . Puesto que el valor de σ_X^2 de la población usualmente se desconoce, se debe estimar previamente en forma adecuada considerando la información disponible de poblaciones semejantes a la que deberá muestrearse, o tomando una muestra preliminar suficientemente grande de dicha población.

Puesto que el tamaño de la muestra debe corresponder a un número entero positivo, se deberá asignar a n el valor entero más próximo por exceso al obtenido mediante la fórmula 4.2.

4.1.2 Muestreo de una población infinita

Cuando el muestreo se realiza a partir de una población infinita, el valor de $\sigma_{\bar{X}}$, la desviación estándar de la distribución muestral de $\bar{X}$, es

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

en donde σ_X es la desviación estándar de la población y n el tamaño de la muestra.

considerando la ecuación 4.1, se puede escribir en este caso

$$|\text{error en la estimación de } \mu| = e = K\sigma_{\bar{X}} = K\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

Para obtener el valor de n, se elevan al cuadrado ambos miembros de la expresión anterior, es decir,

$$e^2 = \frac{K^2\ \sigma_X^2}{n}$$

46

Por lo cual

$$n = \frac{K^2 \ \sigma_X^2}{e^2}$$

Para resaltar el hecho de que en este caso el tamaño de la muestra se obtiene a partir de una población infinita, en lugar de emplear n se puede emplear n_∞ , es decir

$$n_\infty = \frac{K^2 \ \sigma_X^2}{e^2} \qquad (4.3)$$

Al igual que en el caso de una población finita, el tamaño de la muestra dado por la ec 4.3 debe corresponder a un número natural, por lo cual se debe aproximar por exceso al valor entero más cercano.

4.1.3 Comparación entre n y n_∞

Si se divide entre $N_p e^2$ el numerador y el denominador del miembro izquierdo de la ecuación 4.2, se obtiene

$$n = \frac{\dfrac{K^2\sigma_X^2 N_p}{N_p e^2}}{\dfrac{e^2 N_p - e^2 + K^2\sigma_X^2}{N_p e^2}} = \frac{\dfrac{K^2\sigma_X^2}{e^2}}{1 - \dfrac{1}{N_p} + \dfrac{K^2\sigma_X^2}{N_p e^2}}$$

$$n = \frac{\dfrac{K^2\sigma_X^2}{e^2}}{1 + \dfrac{1}{N_p}\left(\dfrac{K^2\sigma_X^2}{e^2} - 1\right)}$$

y, considerando el valor de n_∞ dado por la ec 4.3, se obtiene finalmente

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p} (n_\infty - 1)} \qquad (4.4)$$

Como se puede apreciar de la ec 4.4, el valor de n es menor que el de n_∞ , a menos que $N_p = \infty$.

4.1.4 Empleo adecuado de n y n_∞

Para una población finita, se definirá la <u>fracción de muestreo</u> como

$$\text{fracción de muestreo} = \text{fm} = \frac{n_\infty}{N_p}$$

siendo n_∞ el tamaño de la muestra calculada con la ec 4.3, y N_p el tamaño de la población.

Al obtener el tamaño de la muestra cuando se trata de una población finita, usualmente se acostumbra emplear la fórmula 4.3, que proporciona dicho tamaño para población infinita, y considerar como bueno dicho valor siempre que se cumpla la condición

$$\text{fm} \leqslant 0.05$$

Lo anterior quiere decir que en la práctica se calcula el valor de n_∞ , y si n_∞ / N_p cumple con la condición mencionada, entonces se considera que n_∞ es una aproximación satisfactoria de n. Si la condición no se cumple, entonces se emplea la ec 4.4 para obtener el valor de n.

Es claro que tomando como tamaño de la muestra a n_∞ siempre se estará del lado más prudente, en el sentido de que se toma una muestra igual o mayor que la necesaria. Sin embargo, la eficiencia del diseño exige que el gasto y el tiempo de muestreo no sean superiores a los que haya que efectuar.

Ejemplo 4.1

Sea una población normal finita con variancia aproximadamente igual a 500. Se desea obtener una muestra aleatoria para estimar mediante $\bar{X}$ a la media poblacional μ_X, con error en la estimación no mayor de 10 y nivel de confianza igual a 90%. Obténgase el valor de n considerando que el tamaño de la población es igual a

a. 1000

b. 100

Solución

a. Puesto que $\sigma_X^2 = 500$, $e = 10$ y $1 - \alpha = 0.90$, tratándose de una población normal se tiene que

$$K = z_{0.45} = 1.645$$

por lo cual

$$n_\infty = \frac{K^2\sigma_X^2}{e^2} = \frac{(1.645)^2 \ (500)}{10^2}$$

$$= (2.706)\ (5) = 13.53$$

$$\therefore n_\infty = 14$$

En virtud de que en este caso

$$fm = \frac{n_\infty}{N_p} = \frac{14}{1000} = 0.014 < 0.05$$

se considera que n = 14.

b. En este caso

$$fm = \frac{14}{100} = 0.14 > 0.05$$

por lo cual se emplea la ec 4.4 para obtener el valor de n, es decir,

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}\ (n_\infty - 1)} = \frac{14}{1 + \frac{1}{100}\ (14 - 1)}$$

$$= \frac{14}{1 + \frac{13}{100}} = \frac{14}{1.13} = 12.389$$

$$\therefore n = 13$$

Ejemplo 4.2

Cierta universidad cuenta con 4726 estudiantes, y se desea conocer el rendimiento académico medio de todos ellos, en términos de una escala de calificación que va de cero a cien puntos. En estudios semejantes en otras universidades, se obtuvo que la desviación estándar de las calificaciones es aproximadamente igual a 7 puntos. Si el error en la estimación de la media de calificaciones no debe ser mayor de un punto en valor absoluto, y el nivel de confianza es igual a 99%, ¿cuál debe ser el tamaño de la muestra para realiaar la estimación?

Solución

En este caso, aproximando la distribución muestral de $\bar{X}$ mediante la distribución normal, se debe considerar que

$$P_K = 1 - \alpha = 0.99 \quad \therefore \quad K = Z_{0.495} = 2.58$$

$$\sigma_X^2 = (7)^2 = 49 \quad ; \quad e = 1 \text{ punto}$$

Por lo tanto,

$$n_\infty = \frac{Z_C^2 \; \sigma_X^2}{e^2} = \frac{(2.58)^2 \;\; (49)}{(1)^2}$$

$$= \frac{(6.656) \;\; (49)}{1} = 326.144$$

O sea $n_\infty = 327$

Puesto que

$$fm = \frac{n_\infty}{N_p} = \frac{327}{4726} = 0.0692 > 0.05$$

se procede a calcular n, es decir,

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}(n_\infty - 1)} = \frac{327}{1 + \frac{1}{4726}(327 - 1)}$$

$$= \frac{327}{1 + \frac{326}{4726}} = \frac{327}{1.069} = 305.89$$

$$\therefore n = 306$$

Ejemplo 4.3

Una muestra aleatoria de 14 observaciones de la altura alcanzada por cierto tipo de planta arrojó los siguientes datos:

Nº de elemento	Altura, X, en pulgadas
1	52.3
2	48.1
3	55.7
4	56.8
5	50.1
6	49.2
7	47.7
8	50.8
9	57.9
10	52.5
11	54.7
12	49.6
13	53.9
14	56.0

Obténgase el tamaño de muestra necesario para asegurar, con una probabilidad igual a 0.95, que el error en la estimación de la media de alturas de esta variedad de planta no sea mayor del 2.86%.

Solución

Se deben obtener primero los valores de $\bar{X}$ y S_X^2 de la muestra, con los cuales se estimarán los de μ_X y σ_X^2 de la población. Para ello, se dispone la información en la forma siguiente :

	X_i	X_i^2
	52.3	2735.3
	48.1	2313.6
	55.7	3102.5
	56.8	3226.2
	50.1	2510.0
	49.2	2420.6
	47.7	2275.3
	50.8	2580.6
	57.9	3352.4
	52.5	2756.2
	54.7	2992.1
	49.6	2460.2
	53.9	2905.2
	56.0	3136.0
Σ	735.3	38766.2

Por lo tanto,

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{14} (735.3) = 52.52 \text{ pulgadas}$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{14} (38766.2) - (52.52)^2$$

$$= 2769.01 - 2758.35 = 10{,}66 \text{ pulgadas}$$

Puesto que el error en la estimación de la media no debe ser mayor del 2.86%, y el estimador de μ_X es $\bar{X} = 52.52$, se tiene que

$$e = 52.52\ (0.0286) = 1.5 \text{ pulgadas}$$

Por otra parte, se desconoce el valor real de σ_X^2 de la población, además de que S_X^2, su estimador, se ha obtenido de una muestra menor de 30 elementos. Por lo tanto, la distribución teórica a la cual se debe aproximar la muestral debe ser la t de Student, siendo en este caso $K = t_c$. Sin embargo, puesto que en este caso se estima σ_X^2 mediante S_X^2 de la muestra, se debe tener presente que el error en la estimación de μ_X es

$$e = K\ \sigma_{\bar{X}} = t_c\ \sigma_{\bar{X}} = t_c\ \frac{S_X}{\sqrt{n-1}}$$

O sea, elevando al cuadrado

$$e^2 = t_c^2\ \frac{S_X^2}{n-1}$$

y, despejando a n,

$$n - 1 = \frac{t_c^2\ S_X^2}{e^2}$$

$$n = \frac{t_c^2\ S_X^2}{e^2} + 1$$

Por ser muestreo de población infinita, se puede escribir finalmente

$$n_\infty = \frac{t_c^2 \; S_x^2}{e^2} + 1 \qquad (4.5)$$

Ya que el valor de t_c depende del número de grados de libertad de la muestra υ, y este último depende del tamaño de la muestra (ya que $\upsilon = n - 1$), la fórmula anterior para obtener el valor de n_∞ contiene dos incógnitas. Por ello, se sigue el siguiente proceso iterativo para obtener el valor de n_∞ :

1. Se hace $t_{0.025} = Z_{0.475}$, es decir

$$t_{0.025} = 1.96$$

Con dicho valor de t_c se obtiene

$$n_\infty = \frac{(1.96)^2 \; (10.66)}{(1.5)^2} + 1 = 18.2 + 1 = 19.3 \Rightarrow 20$$

De la tabla de la distribución t, se obtiene $t_{0.025} = 2.09$, para $\upsilon = 20-1 = 19$ grados de libertad.

2. Se toma ahora $t_{0.025} = 2.09$, y se obtiene

$$n_\infty = \frac{(2.09)^2 \; (10.66)}{(1.5)^2} + 1 = 20.7 + 1 = 21.7 \Rightarrow 22$$

De la tabla de la distribución t, se obtiene $t_{0.025} = 2.08$, para $\upsilon = 22-1 = 21$ grados de libertad.

3. Se toma ahora $t_{0.025} = 2.08$, y se obtiene

$$n_\infty = \frac{(2.08)^2 \ (10.66)}{(1.5)^2} + 1 = 20.5 + 1 = 21.5 \Rightarrow 22$$

En este paso se obtiene un valor de n_∞ igual al del paso anterior, por lo que se puede considerar que el tamaño de muestra adecuado es igual a 22 plantas.

En este caso la población es infinita, por lo cual no se requiere hacer la corrección para población finita con la ec 4.4. Sin embargo, debe aclararse que es posible emplear la ec 4.5 para obtener n_∞ primero y, si la población de la que se muestrea es finita, usar después la ec 4.4 para obtener el valor de n corregido.

4.2 Tamaño de una muestra aleatoria simple (Totales)

Una característica o parámetro poblacional de gran interés es el total, que corresponde a la suma de todos los valores y_i que constituyen la población, es decir,

$$Y = \sum_{i=1}^{N_p} y_i$$

en donde Y denota al total, y N_p es el número de elementos de la misma.

Si se multiplica y divide por N_p el 2° miembro de la ecuación ante rior, se obtiene

$$Y = \frac{N_p}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} y_i = N_p \mu_Y$$

Es decir, el total de una población es igual al tamaño de la misma multiplicado por la media correspondiente.

Cono estimador puntual del total de la población se puede tomar el de la estadística.

$$\hat{Y} = N_p \bar{Y}$$

en donde $\bar{Y}$ es el promedio aritmético de la muestra, y $\hat{Y}$ un estimador insesgado en virtud de que

$$E \{\hat{Y}\} = E \{N_p \bar{Y}\} = N_p E \{\bar{Y}\} = N_p \mu_Y = Y$$

Por otra parte, la variancia de la distribución muestral de $\hat{Y}$ es

$$\sigma^2_{\hat{Y}} = \sigma^2_{N_p \bar{Y}} = \text{Var} \{N_p \bar{Y}\} = N_p^2 \text{ Var } \{\bar{Y}\} = N_p^2 \sigma^2_{\bar{Y}}$$

y la desviación estándar es

$$\sigma_{\hat{Y}} = \sigma_{N_p \bar{Y}} = N_p \sigma_{\bar{Y}} = N_p \frac{\sigma_{Y.}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

De igual manera a como se hizo para las medias, el valor del tamaño de muestra para estimar el total con un nivel de confianza y un error absoluto dados, se obtiene en la forma siguiente

$$e = K \sigma_{\hat{Y}} = K N_p \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

Elevando al cuadrado y realizando operaciones algebraicas,

$$e^2 = K^2 N_p^2 \frac{\sigma_Y^2}{n} \frac{N_p - n}{N_p - 1}$$

$$e^2 = \frac{K^2 N_p^3 \sigma_Y^2 - K^2 N_p^2 \sigma_Y^2 n}{n(N_p - 1)}$$

$$n \left(1 + \frac{K^2 N_p^2 \sigma_Y^2}{e^2 (N_p - 1)}\right) = \frac{K^2 N_p^3 \sigma_Y^2}{e^2 (N_p - 1)}$$

O sea

$$n = \frac{K^2 N_p^3 \sigma_Y^2}{e^2 (N_p - 1) + K^2 N_p^2 \sigma_Y^2}$$

Dividiendo el numerador y denominador de la expresión anterior entre $N_p e^2$, se obtiene

$$n = \frac{\dfrac{K^2 N_p^3 \sigma_Y^2}{N_p e^2}}{\dfrac{e^2 N_p - e^2 + K^2 N_p{}^2 \sigma_Y^2}{N_p e^2}}$$

$$= \frac{N_p^2 \dfrac{K^2 \sigma_Y^2}{e^2}}{1 - \dfrac{1}{N_p} + \dfrac{N_p^2}{N_p} \dfrac{K^2 \sigma_Y^2}{e^2}}$$

Considerando la ec 4.3, queda finalmente

$$n = \frac{N_p^2 n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p} (N_p^2 n_\infty - 1)} \qquad (4.6)$$

59

Ejemplo 4.4

Con el fin de hacer una solicitud al Gobierno, se recogieron firmas de habitantes de una ciudad en 676 hojas. Cada hoja tenía espacio suficiente para 42 firmas, pero en varias hojas se recolectó un número menor de ellas. Para obtener una estimación del total de firmas, se contó el número de firmas por hoja en una muestra aleatoria de 50 hojas, obteniéndose los datos que aparecen en la tabla siguiente:

Número de firmas, y_i	Número de hojas, f_i
42	23
41	4
36	1
32	1
29	1
27	2
23	1
19	1
16	2
15	2
14	1
11	1
10	1
9	1
7	1
6	3
5	2
4	1
3	1

Obtener el tamaño de muestra necesario para estimar el valor del total de firmas con un error absoluto igual al 5%, considerando un nivel de confianza igual a 95%.

Solución : Por conveniencia para realizar los cálculos, se dispone la información en la forma siguiente:

y_i	f_i	y_i^2	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
42	23	1764	966	40572
41	4	1681	164	6724
36	1	1296	36	1296
32	1	1024	32	1024
29	1	841	29	841
27	2	729	54	1458
23	1	529	23	529
19	1	361	19	361
16	2	256	32	512
15	2	225	30	450
14	1	196	14	196
11	1	121	11	121
10	1	100	10	100
9	1	81	9	81
7	1	49	7	49
6	3	36	18	108
5	2	25	10	50
4	1	16	4	16
3	1	9	3	9
Σ	50		1471	54497

$$\bar{Y} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{19} f_i\, y_i = \frac{1471}{50} = 29.42$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{19} f_i\, y_i^2 - (\bar{Y})^2 = \frac{54497}{50} - (29.42)^2 =$$

$$= 1089.94 - 865.44 = 224.5$$

Entonces

$$\hat{Y} = N_p\, \bar{Y} = 676 \times 29.42 = 19888 \text{ firmas}$$

y, puesto que el error absoluto debe ser igual al 5%, se tendría

$$e = (0.05)\ (19888) = 995$$

Por otra parte, el tamaño inicial de muestra igual a 50 permite suponer que la estimación de σ_Y^2 de la población es suficientemente buena con S_Y^2 , y que la distribución muestral de totales puede aproximarse mediante la normal. Por lo tanto,

$$K = Z_{0.475} = 1.96$$

$$N_p = 676$$

$$\sigma_Y^2 \doteq S_Y^2 = 224.5$$

$$N_p^2 n_\infty = N_p^2 \frac{K^2 \sigma_Y^2}{e^2} = \frac{(676)^2\ (1.96)^2\ (224.5)}{(995)^2} = 397.9$$

$$n = \frac{N_p^2 n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}(N_p^2 n_\infty - 1)} = \frac{397.9}{1 + \frac{1}{676}(397.9 - 1)}$$

$$= \frac{397.9}{1 + 0.58} = \frac{397.9}{1.58} = 251.83$$

$$\therefore \quad n = 252 \text{ hojas}$$

62

4.3 Tamaño de una muestra aleatoria simple (Proporciones)

4.3.1 Antecedentes

Supóngase una población binomial de tamaño N_p tal que cada uno de sus elementos únicamente puede estar en una de dos clases: A o B (buenos o malos, negros o blancos, grandes o chicos, etc). La proporción de elementos de la población que están en la clase A es

$$P = \frac{A}{N_p}$$

y la proporción de elemtos que están en B es

$$Q = \frac{B}{N_p}$$

por lo cual

$$P + Q = \frac{A}{N_p} + \frac{B}{N_p} = 1 \quad ; \quad (A + B = N_p)$$

Si a todos los elementos X_i de la población que están en A se les asigna el valor 1 y a los de B el 0, se obtiene

$$P = \frac{A}{N_p} = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} X_i}{N_p} = \mu_X$$

Es decir, la proporción puede considerarse un caso particular de la media cuando los elementos de la población son unos y ceros.

La variancia es

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (X_i - P)^2$$

o sea

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} X_i^2 - P^2$$

Sin embargo, como X_i sólo puede ser igual a uno o cero, se tiene que $X_i = X_i^2$, por lo cual

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} X_i - P^2 = P - P^2 = P(1 - P) = PQ$$

En virtud de lo anterior, si se muestrea sin remplazo y con tamaño n de una población binomial finita, para estimar la proporción de elementos con cierta característica, se obtienen, considerando que la proporción se puede calcular como una media, los siguientes parámetros de la distribución muestral de proporciones

$$\mu_p = P$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}} = \sqrt{\frac{PQ}{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

Si la población es infinita, se obtiene

$$\mu_p = P$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$$

estimándose P en ambos casos con el valor de p de la muestra, si se desconoce P de la población.

En la práctica se considera que la distribución muestral de proporciones es aproximadamente igual a la normal para tamaños de muestra mayores o iguales a 30 elementos.

4.3.2 Obtención del tamaño de la muestra

Aprovechando el hecho de que la proporción se puede calcular como una media simple, las ecs 4.3 y 4.4 se pueden emplear en este caso para obtener el tamaño de la muestra haciendo $\sigma_X^2 = PQ$. Entonces,

$$n_\infty = \frac{K^2 \; PQ}{e^2} \qquad (4.7)$$

para muestreo de población infinita, y

$$n = \frac{n_\infty}{1 + \frac{1}{N_p}(n_\infty - 1)}$$

para muestreo de población finita con tamaño N_p.

Usualmente se calcula primero el valor de n_∞, y si la fracción de muestreo es mayor de 0.05, se calcula a continuación el valor de n.

Ejemplo 4.5

En una colonia con 4000 casas se desea estimar el porcentaje de inquilinos que son a la vez propietarios de su casa, con un <u>error estándar</u> en la estimación no mayor del 1%. Se supone, de estudios semejantes, que el porcentaje real de inquilinos-propietarios se acerca al 10%. ¿Cuántas casas se deben muestrear para que se satisfaga la condición establecida?

Solución

El error estándar en la estimación de P de la población es

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{PQ}{n}} \sqrt{\frac{N_p - n}{N_p - 1}}$$

y no debe ser mayor en este caso del 1%. Por lo tanto, siendo $N_p = 4000$, $P = 0.1$ y $Q = 1 - P = 0.9$, se obtiene

$$0.01 = \sqrt{\frac{(0.1)\ (0.9)}{n}} \sqrt{\frac{4000 - n}{4000 - 1}}$$

Elevando al cuadrado y realizando operaciones algebraicas

$$0.0001 = \frac{0.09}{n} \frac{4000 - n}{3999}$$

$$0.0001 = \frac{360 - 0.09 n}{3999 n}$$

$$0.3999 n = 360 - 0.09 n$$

$$n(0.3999 + 0.09) = 360$$

$$n = \frac{360}{0.4899} = 734.84$$

$$\therefore \quad n = 735 \text{ casas}$$

Ejemplo 4.6

En un estudio antropológico para estimar el porcentaje de habitantes de una isla con sangre del grupo O, se obtuvo una muestra aleatoria de 50 isleños, en la cual 22 de ellos pertenecen al grupo sanguíneo mencionado. Si en la isla habitan 3208 gentes, ¿cuál debe ser el tamaño de muestra mínimo para estimar con un error absoluto del 5% el valor real de P, suponiendo que el nivel de confianza es del 95%?

Solución

En este caso la proporción de la muestra es

$$p = \frac{22}{50} = 0.44$$

o sea

$$q = 1 - p = 1 - 0.44 = 0.56$$

Considerando que la muestra inicial es suficientemente grande, se aproxima mediante la distribución normal, obteniéndose

$$K = Z_{0.475} = 1.96$$

por lo cual

$$n_{\infty} = \frac{K^2\ PQ}{e^2} = \frac{K^2\ pq}{e^2} = \frac{(1.96)^2\ (0.44)\ (0.50)}{(0.05\ )^2}$$

$$= \frac{0.84515}{0.0025} = 338.06$$

$$\therefore\ n_{\infty} = 339$$

Como

$$fm = \frac{n_{\infty}}{N_p} = \frac{339}{3208} = 0.106 > 0.05$$

se corrige el valor anterior, obteniéndose finalmente

$$n = \frac{n_{\infty}}{1 + \frac{1}{N_p}\ (n_{\infty} - 1)} = \frac{339}{1 + \frac{1}{3208}\ (339-1)}$$

$$= \frac{339}{1.105} = 306.787$$

$\therefore$ n = 307 habitantes

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

" DIPLOMADO EN SISTEMAS DE CALIDAD EN INGENIERÍA DE PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN "

MÓDULO II

CONTROL DE CALIDAD DE MATERIALES Y OBRAS

PARTE I

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA EL CONTROL DE CALIDAD

TEMA:

CARTAS DE CONTROL

EXPOSITOR: M. en I. AUGUSTO VILLAREAL A.
1997

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

CARTAS DE CONTROL

Por: M en I Augusto Villarreal A.

INTRODUCCION

Aunque existe la tendencia generalizada a pensar que el Control de Calidad es de desarrollo reciente, realmente no existe nada nuevo en la idea básica de elaborar un producto caracterizado por un alto grado de uniformidad.

Durante siglos, hábiles artesanos han procurado elaborar productos que se distingan por su superior calidad, y una vez que han logrado obtener un cierto estándar de calidad óptimo, eliminar dentro de lo posible la variación entre productos que nominalmente deben resultar iguales.

La idea de que la Estadística puede resultar un instrumento muy útil para asegurar un estándar adecuado de calidad para los productos manufacturados, se remonta no más allá del advenimiento de la producción masiva, y el uso extendido de los métodos estadísticos para resolver problemas de control de calidad es aún más reciente.

Muchos problemas que aparecen durante la elaboración de un producto son susceptibles de ser resueltos empleando tratamientos estadísticos, por lo que al hablar de control estadístico de calidad, nos estaremos refiriendo esencialmente a las dos técnicas especiales que se discutirán en esta parte del curso: uso de las Cartas de Control y muestreo de aceptación.

Conviene mencionar que la palabra calidad, al ser empleada de aquí en adelante, se referirá a alguna propiedad medible o contable de algún producto, tal como el diámetro de un balín de acero, la resistencia de una viga de concreto, el número de defectos en una pieza de tela, la eficacia de cierta droga, etc.

IDEAS SOBRE CARTAS DE CONTROL

A muchos individuos les puede sorprender el hecho de que dos artículos aparentemente idénticos, elaborados bajo condiciones cuidadosamente controladas, de las mismas materias primas, y por una misma máquina con diferencia de pocos segundos, puedan, sin embargo, diferir en muchos aspectos.

En efecto, cualquier proceso de manufactura, aun siendo muy bueno, se encuentra caracterizado por una cierta cantidad de variación que es de naturaleza aleatoria, y que no puede ser eliminada en forma completa.

Cuando la variabilidad presente en un proceso de producción se limita a variación aleatoria se dice que el proceso se encuentra en un estado de control estadístico.

Tal estado se puede alcanzar cuando se eliminan aquellos problemas causados por otro tipo de variación, llamada variación sistemática, que es de naturaleza más bien determinística, y que se puede achacar, por ejemplo, a operadores mal entrenados, materia prima de baja calidad, máquinas en mal estado, etc.

Ya que los procesos de manufactura se encuentran rara vez libres de estos problemas, conviene contar con algún método sistemático para detectar desviaciones serias de un estado de control estadístico cuando ocurren, o inclusive antes de que ocurran, tales desviaciones.

Ese método sistemático de detección se puede tener mediante el empleo de las llamadas Cartas de Control.

TIPOS DE CARTAS DE CONTROL

En lo que sigue distinguiremos entre las *cartas de control para mediciones* o variables ($\bar{X}$, R, σ) y las cartas de control para atributos (p, c), dependiendo de que las observaciones que estemos analizando sean *mediciones o datos contados o calculados*, respectivamente.

Un ejemplo del primer caso sería la longitud de las varillas de acero de una muestra. Como ejemplo del segundo caso tendríamos el número de focos defectuosos en una muestra de tamaño dado.

CONFIGURACION DE LAS CARTAS DE CONTROL

En cualquiera de los casos mencionados, una carta de control consiste de una Línea Central, correspondiente a la *calidad promedio* a la que el proceso debe funcionar, y dos líneas que corresponden al *Límite Superior de Control* (LSC) y al *Límite Inferior de Control* (LIC), respectivamente, tal como se muestra en la Fig 1.

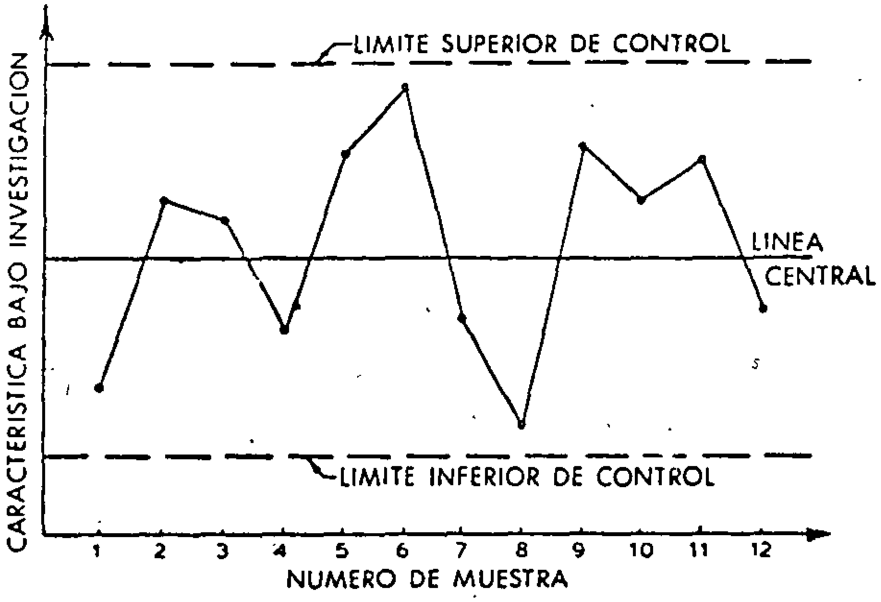


Fig 1. Aspecto general de una carta de control

Estos límites se escogen en forma tal que los valores que se encuentren dentro de ellos se puedan atribuir al azar, en tanto que los valores que caigan fuera de ellos se puedan considerar como - indicaciones de falta de control.

No obstante la idea anterior, conviene mencionar que en la Fig 2 que se presenta a continuación se pueden considerar otras posibles situaciones de "falta de control" que ameritan investigarse:

1. Cuando dos de tres puntos sucesivos caen en la zona A.
2. Cuando cuatro de cinco puntos sucesivos caen en la zona B o más allá.
3. Cuando ocho puntos sucesivos caen en la zona C o más allá.

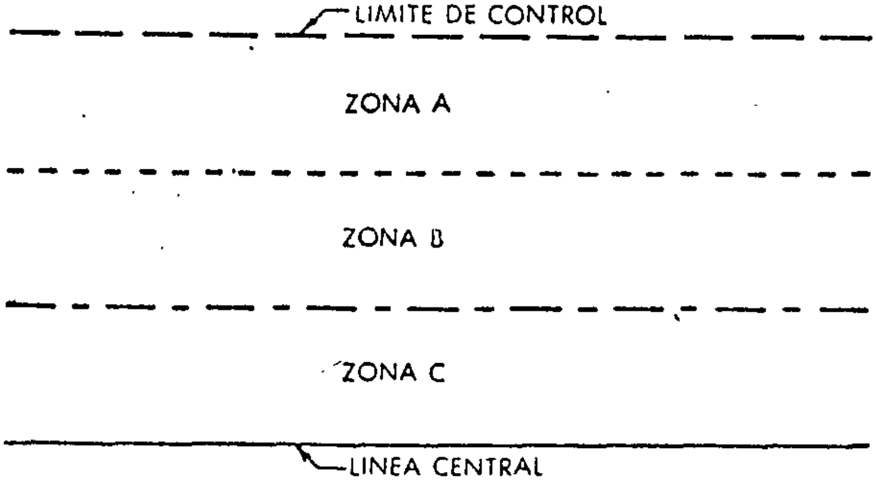


Fig 2 Diagrama que define las zonas A, B y C usadas en el análisis de Cartas de Control.

Debe hacerse notar que cada una de las zonas A, B y C constituye la tercera parte del área entre la línea central y un límite de control, y que las pruebas mencionadas se aplican a ambas mitades de la carta de control, pero se aplican separadamente para cada mitad, y nunca a las dos mitades en combinación.

EXPLICACION DEL EMPLEO DE LAS CARTAS DE CONTROL

Si se grafican en una carta los resultados obtenidos a partir de muestras tomadas periódicamente a intervalos frecuentes, es posible verificar por medio de ella si el proceso se encuentra bajo control, o si se encuentra presente en el proceso la variación sistemática del tipo descrito anteriormente.

Cuando un punto graficado cae fuera de los límites de control, es necesario encontrar el problema que causó tal evento dentro del proceso. Pero aun si los puntos caen dentro de los límites mencionados, alguna tendencia, o cierto patrón de los mismos, puede indicar que se debe llevar a cabo alguna acción para prevenir y así evitar algún problema serio.

La habilidad para "leer" las cartas de control y para determinar a partir de ellas cuál acción correctiva debe llevarse a cabo, - se obtiene a partir de la experiencia y del juicio altamente desarrollado. Un practicante del control estadístico de la calidad debe no sólo comprender los fundamentos estadísticos de la - materia, sino también encontrarse identificado plenamente con los procesos que desea controlar.

CARTAS DE CONTROL PARA MEDICIONES (VARIABLES)

Cuando se requiere establecer control estadístico de la calidad de algún producto en términos de mediciones o variables, es costumbre ejercer tal control sobre la calidad media del proceso, - al igual que sobre su variabilidad.

La primera meta se logra al graficar los promedios de muestras - extraídas periódicamente en la llamada carta de control para los promedios, o simplemente carta $\bar{X}$. La variabilidad se puede controlar de igual forma si se grafican los rangos o las desviaciones estándar de las muestras en las llamadas cartas R o cartas σ, respectivamente, dependiendo de cuál estadística se emplee para estimar la desviación estándar de la población.

Si se conocen la media μ y la desviación estándar σ de la población (proceso) y es razonable suponer las mediciones obtenidas como muestras extraídas de una población normal, se puede asegurar que con probabilidad 1 - α el promedio aritmético de una muestra aleatoria de tamaño n se encontrará entre

$$\mu - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad \mu + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ó

$$\mu - z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}} \quad \text{y} \quad \mu + z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}}$$

puesto que $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ para el caso de la distribución muestral del promedio aritmético, cuando se muestrea de una población infinita. La suposición de que la extracción de muestras aleatorias se hace de una población infinita es válida en el caso presente, puesto que, por ejemplo, la producción de cierto producto en una fábrica tiende a infinito conforme pasa el tiempo.

Los dos límites anteriores ($\mu \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$) proporcionan entonces límites inferiores y superiores de control y, bajo las suposiciones anteriores, permiten al practicante del control de calidad determinar si se debe o no llevar a cabo algún ajuste en el proceso, al graficar los promedios aritméticos obtenidos de muestras de tamaño n en una carta como la que se muestra en la Fig 1.

Conviene establecer en este momento que al emplear una carta de control para los promedios, lo que se hace realmente es probar hipótesis nulas de que a un cierto nivel de confianza 1-α el valor de la media de la distribución muestral de los promedios sea igual al valor de la calidad nominal del proceso, o al de la calidad media calculada para el mismo, μ_o. Para estas pruebas secuenciales de hipótesis, se emplean como estadísticas de prueba los valores de los promedios aritméticos obtenidos de muestras aleatorias extraídas de la población (o proceso). Es decir, se realizan pruebas de hipótesis para las cuales

$$H_0 \quad : \quad \mu = \mu_o$$

(Prueba de dos colas; cada prueba se realiza con el valor $\bar{X}_i$ de la muestra $\underline{i}$)

$$H_1 \quad : \quad \mu \neq \mu_o$$

en donde μ es la media de la distribución muestral del promedio aritmético, μ_o la calidad nominal o calidad media calculada del proceso, y $\bar{X}_i$ (i=1,2,3,...) el valor del promedio aritmético obtenido de la iésima muestra aleatoria. La forma secuencial de estas pruebas de hipótesis se muestra en la Fig 3 que se presenta a continuación.

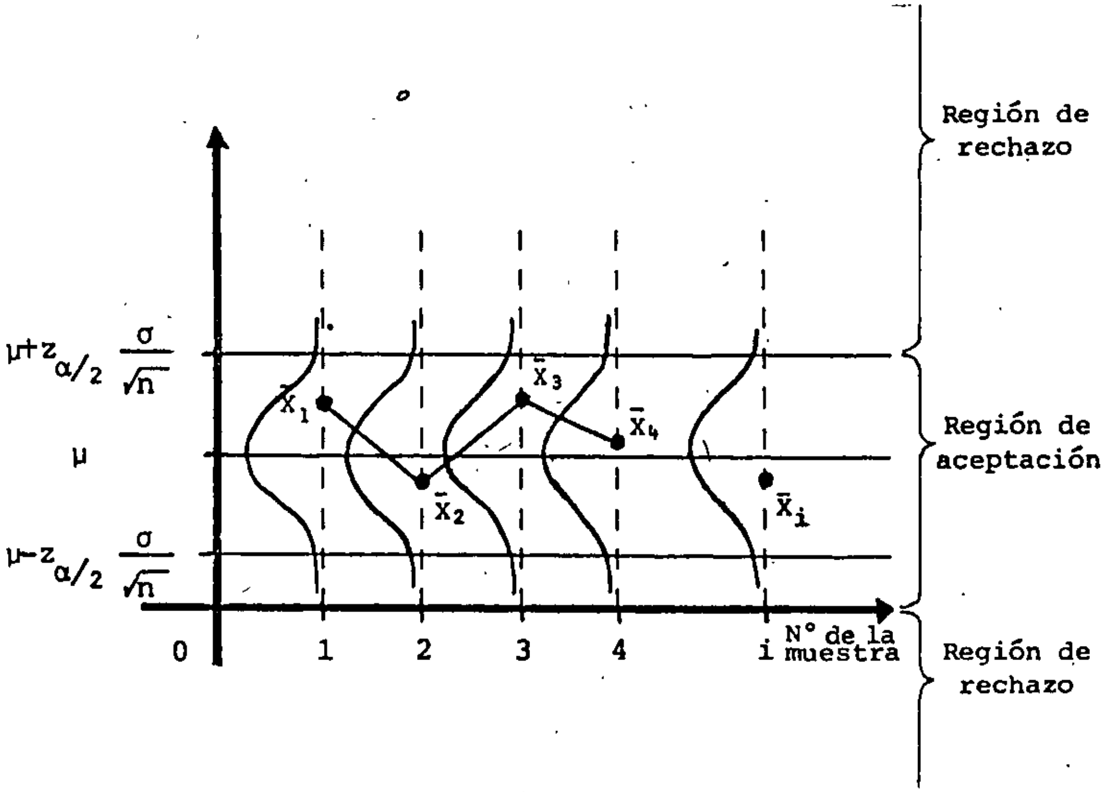


Fig 3 Pruebas de hipótesis que se realizan al emplear una carta de control para los promedios

Si se consideran problemas prácticos, los valores de μ y σ del proceso se desconocen, y es entonces conveniente estimar sus valores a partir de muestras tomadas mientras el proceso se encuentre "bajo control", tal como se explica más adelante. En la práctica es entonces difícil llegar a establecer límites de control del tipo $\mu \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ al desconocerse μ y σ, independientemente de que en muchos casos es demasiado arriesgado considerar a las mediciones como muestras aleatorias extraídas de una población normal.

En lugar de lo anterior, en el control de calidad industrial se emplean comúnmente los límites de control de "tres desviaciones estándar" o de "tres sigmas", que se obtienen al sustituir a $z_{\alpha/2}$ por un 3 al calcular los límites de control.

Conforme a lo anterior, con los límites de control

$$\mu \pm 3\sigma_{\bar{X}} \qquad \text{ó} \qquad \mu \pm 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

se puede confiar en que en el 99.73% de los casos el proceso no será declarado "fuera de control", cuando de hecho se encuentra "bajo control".

En otras palabras, estos límites de control permiten considerar que la probabilidad máxima de rechazar la hipótesis

$$H_0 \ : \ \Theta = \theta_o$$

cuando debería de ser aceptada (probabilidad de cometer un error de tipo I) es de 0.27%, siendo θ_o un valor de calidad fijo del proceso, y θ el del parámetro correspondiente de la distribución muestral de la estadística bajo consideración.

10

ELABORACION DE LA CARTA DE CONTROL PARA LOS PROMEDIOS ($\bar{X}$)

a. Caso en que se conocen la media μ y la desviación estándar σ de la población.

Línea central ———————— μ

Límites de control ———————— $\mu \pm 3\sigma_{\bar{X}}$ ó $\mu \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ó $\mu \pm A\sigma$, siendo $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$

en donde los valores de A se obtienen de la tabla I, en función de n, el tamaño de la muestra.

Ejemplo: Sea el proceso de elaboración de varillas de acero para las cuales se sabe que el diámetro medio es - de 2.5 cm, con una desviación estándar de 0.01 cm. Se desea efectuar control del diámetro de las mismas, para lo cual se extraen periódicamente muestras de cinco varillas. Se pide establecer la línea central y los límites de control para una carta $\bar{X}$.

Solución. Siendo $\mu = 2.5$ cm, $\sigma = 0.01$ y $n = 5$, se tiene - que:

Línea central = $\mu=2.5$

Límites de control:

$$2.5 \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.5 \pm \frac{3(0.01)}{\sqrt{5}} = 2.5 \pm 0.0134 \Longrightarrow 2.5134, \quad 2.4866$$

o, de la tabla I

$$2.5 \pm A\sigma = 2.5 \pm 1.342(0.01) = 2.5 \pm 0.01342 \Longrightarrow 2.51342, \quad 2.48658$$

//

b. Caso en que se desconocen μ y σ.

Para este caso, que es el más común, es necesario estimar, como se dijo anteriormente, tales parámetros con base en muestras preliminares. Para el caso, normalmente se acostumbra emplear un mínimo de 20 a 25 muestras de 4 ó 5 elementos, obtenidas consecutivamente cuando el proceso está "bajo control".

Sin embargo, como veremos más adelante, se pueden emplear procedimientos estadísticos más formales para determinar el número de muestras (y de elementos en las mismas) más adecuado para las cartas $\bar{X}$.

Entonces, si se utilizan κ muestras preliminares, cada una de tamaño n, se puede estimar con adecuada precisión el valor de μ mediante

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{\kappa}\sum_{i=1}^{\kappa} \bar{X}_i$$

siendo $\bar{\bar{X}}$ un estimador insesgado y consistente de μ, donde $\bar{X}_i$ denota al promedio aritmético de la iésima muestra, y $\bar{\bar{X}}$ es el promedio de los promedios de las muestras.

El valor de σ de la población puede ser estimado a partir de las desviaciones estándar o de los rangos de las muestras. Si el tamaño de las mismas es pequeño, usualmente el rango proporciona un estimador eficiente de σ, además de que el proceso de cálculo del mismo es bastante más simple que el de la desviación estándar para las muestras.

Sin embargo, es conveniente, cuando se requiere bastante precisión en el cálculo de los límites de control, estimar a σ mediante las desviaciones estándar de las muestras. Tal es el caso, por ejemplo, de muestras de productos que son caros, y que deben destruirse al momento de tomar las mediciones.

b.1 Estimando a σ mediante los rangos de las muestras

Hay que obtener primero el valor $\bar{R}$, que es el rango promedio de los rangos de las κ muestras, es decir,

$$\bar{R} = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{k} R_i$$

Puesto que la estadística $\bar{R}$ siempre estima por encima de su valor real a la desviación estándar de la población, se obtiene un estimador sesgado. Debido a ello, es indispensable afectar el valor de $\bar{R}$ en forma tal de obtener un estimador - insesgado de σ, para lo cual se hace

$$\text{Estimador insesgado de } \sigma = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

El factor d_2 en la expresión anterior se obtiene experimentalmente al identificar el valor de la media en las distribuciones muestrales del cociente R/σ para distintos valores de n, considerando una población en la cual el valor de σ es conocido. Por ejemplo, para muestras de tamaño cinco (n=5), se ha obtenido experimentalmente el valor d_2=2.326, tal como se muestra en la Fig 4.

13

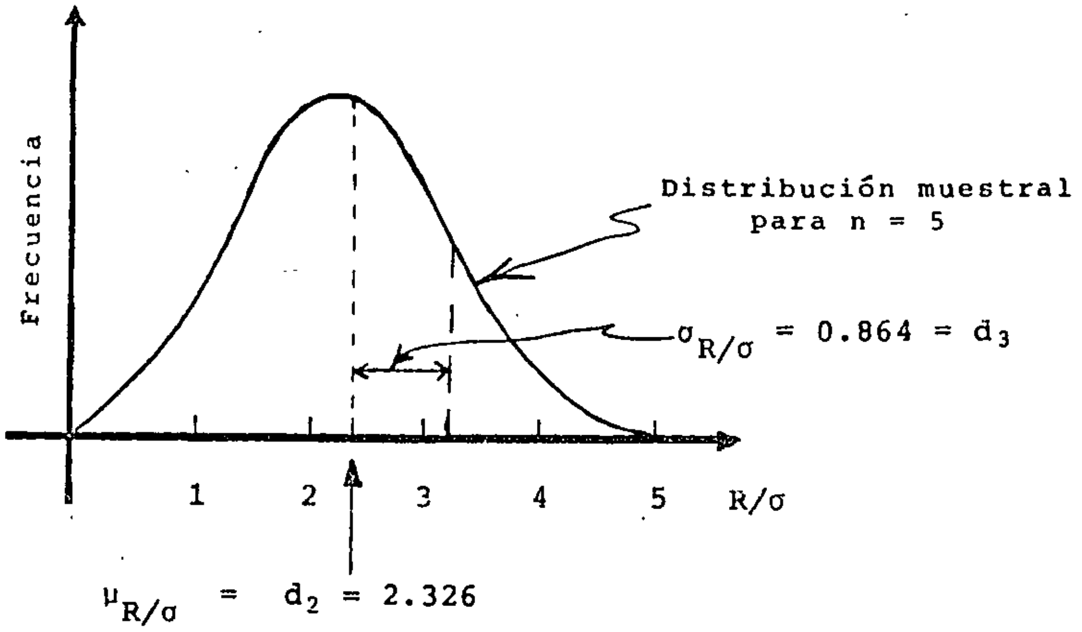


Fig 4. Distribución muestral de R/σ para n=5, suponiendo σ conocida.

En la tabla I se presentan los valores del factor d_2 para distintos tamaños de muestra, observándose que conforme se incrementa el valor de n aumenta el de ese factor, lo cual permite concluir que el rango estima mejor a la desviación estándar - cuando las muestras son pequeñas.

De acuerdo con lo anterior, se pueden emplear las siguientes expresiones en la elaboración de la carta de control para los promedios:

Línea Central —— $\bar{\bar{X}}$

Límites de Control —— $\bar{\bar{X}} \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ó $\bar{\bar{X}} \pm \frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}$

Para abreviar el cálculo de los límites de control a partir de los rangos de las muestras, se ofrece en la tabla I el factor

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$$

cuyo empleo permite establecer los límites de control como

$$\bar{\bar{X}} \pm A_2 \bar{R}$$

b.2 Estimando a σ mediante las desviaciones estándar de las muestras

Se debe obtener primero el valor de $\bar{\sigma}$, que es el promedio de las desviaciones estándar de las muestras, es decir

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{k} S_i$$

En donde S_i denota la desviación estándar de la iésima muestra. No siendo tampoco $\bar{\sigma}$ un estimador insesgado de la desviación estándar de la población, ya que siempre la estima por abajo de su valor real, hay que afectar dicho valor por un cierto factor para hacerlo insesgado, es decir

$$\text{Estimador insesgado de } \sigma = \frac{\bar{\sigma}}{c_2}$$

Los valores de c_2 se reportan en la tabla I en función del tamaño de la muestra, y se obtienen mediante un procedimiento similar al explicado para el factor d_2.

Con base en lo anterior, los parámetros de la carta de control para los promedios son los siguientes:

Línea Central —— $\bar{\bar{X}}$

Límites de Control —— $\bar{\bar{X}} \pm 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ó $\bar{\bar{X}} \pm \frac{3\bar{\sigma}}{c_2\sqrt{n}}$

De nuevo, para abreviar el cálculo de los límites de control para la carta $\bar{X}$, obtenidos ahora a partir de las desviaciones estándar de las muestras, se puede emplear el factor dado en la tabla I.

$$A_1 = \frac{3}{c_2\sqrt{n}}$$

con el cual los límites de control quedan como

$$\bar{\bar{X}} \pm A_1 \bar{\sigma}$$

NUMERO MINIMO DE MUESTRAS REQUERIDO PARA LA ELABORACION DE CARTAS $\bar{X}$

En este momento conviene establecer el número mínimo de muestras preliminares, m, así como el tamaño de las mismas, n, que es necesario considerar para estimar adecuadamente los parámetros de una carta de control para los promedios.

El asegurar que un mínimo de 20 0 25 muestras con 4 o 5 elementos cada una son necesarias para obtener los valores de $\bar{\bar{X}}$, $\bar{R}$ o $\bar{\sigma}$, frecuentemente choca con el argumento de que por razones de costo, tiempo, etc., se debe emplear un número menor de ellas. Por ello, se han preparado tablas como las II y IIIque se presentan al final, que permiten obtener una solución cuantitativa para este problema.

Cuando se emplea el rango $\bar{R}$ como estimador de σ para la elaboración de una carta $\bar{X}$, y como se verá más adelante, para una carta R, la tabla II permite determinar el número mínimo, m, de muestras de tamaño n que se deben emplear para tener poco más de un 98% de nivel de confianza de que los promedios aritméticos obtenidos de las muestras se encuentren dentro de los límites de control que se calculen para la carta $\bar{X}$, suponiendo únicamente la presencia de variación aleatoria.

De la misma manera, se establecen en la tabla III los valores óptimos de m y n, cuando se emplean las desviaciones estándar de las muestras para obtener el estimador $\bar{\sigma}$ de la desviación estándar de la población.

Ejemplo: Sea una fábrica que produce varillas de acero, en la cual se desea ejercer control sobre el peso de las mismas. Para ello, se seleccionan veinte muestras aleatorias de cinco varillas cada una, obteniéndose los valores que se reportan en la tabla siguiente:

Número de la muestra	Valores individuales del peso, Kg					Promedio Aritmético $\bar{X}$	Rango R	Desviación estándar S_x
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5			
1	11.1	9.4	11.2	10.4	10.1	10.44	1.8	0.6651
2	9.6	10.8	10.1	10.8	11.0	10.46	1.4	0.5276
3	9.7	10.0	10.0	9.8	10.4	9.98	0.7	0.2400
4	10.1	8.4	10.2	9.4	11.0	9.82	2.6	0.8727
5	12.4	10.0	10.7	10.1	11.3	10.90	2.4	0.8832
6	10.1	10.2	10.2	11.2	10.1	10.36	1.1	0.4224
7	11.0	11.5	11.8	11.0	11.3	11.32	0.8	0.3059
8	11.2	10.0	10.9	11.2	11.0	10.86	1.2	0.4454
9	10.6	10.4	10.5	10.5	10.9	10.58	0.5	0.1720
10	8.3	10.2	9.8	9.5	9.8	9.52	1.9	0.6493
11	10.6	9.9	10.7	10.2	11.4	10.56	1.5	0.5083
12	10.8	10.2	10.5	8.4	9.9	9.96	2.4	0.8357
13	10.7	10.7	10.8	8.6	11.4	10.44	2.8	0.9562
14	11.3	11.4	10.4	10.6	11.1	10.96	1.0	0.3929
15	11.4	11.2	11.4	10.1	11.6	11.14	1.5	0.5352
16	10.1	10.1	9.7	9.8	10.5	10.04	0.8	0.2800
17	10.7	12.8	11.2	11.2	11.3	11.44	2.1	0.7116
18	11.9	11.9	11.6	12.4	11.4	11.84	1.0	0.3382
19	10.8	12.1	11.8	9.4	11.6	11.14	2.7	0.9708
20	12.4	11.1	10.8	11.0	11.9	11.44	1.6	0.6086
SUMA						213.20	31.80	11.3211

Solución: Puesto que se desconoce la media del proceso, esta se puede estimar en forma insesgada mediante

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} \bar{X}_i$$

Los valores de los promedios aritméticos $\bar{X}_i$ (i=1,2,...20) de las muestras se reportan en la tabla anterior, por lo cual la línea central es

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{20} (213.20) = 10.66$$

Se obtendrán ahora los límites inferior y superior de control estimando primero a σ mediante los rangos de las muestras, y después mediante las desviaciones estándar correspondientes.

a. Estimando a σ mediante los rangos de las muestras

El valor de $\bar{R}$ es

$$\bar{R} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} R_i$$

Los valores R_i para i=1,2,...,20 se encuentran en la tabla inicial, por lo que

$$\bar{R} = \frac{1}{20} (31.80) = 1.59$$

Los límites de control para la carta de los promedios son

$$\bar{\bar{X}} \pm A_2 \bar{R}$$

Y, de la tabla I, para n=5, se obtiene $A_2 = 0.577$, quedando

$$10.66 \pm \underbrace{0.577\ (1.59)}_{0.92}$$

O sea

Línea Central —— 10.66

Límites de Control —— $10.66 \pm 0.92 \Rightarrow 11.58,\ 9.74$

b. Estimando a σ mediante las desviaciones estándar de las muestras

El valor de $\bar{\sigma}$ es

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{20}\ (11.3211) = 0.57$$

Los límites de control son ahora

$$\bar{\bar{X}} \pm A_1\ \bar{\sigma}$$

De la tabla I, para n=5, se obtiene

$A_1 = 1.596$, quedando

$$10.66 \pm \underbrace{1.596\,(0.57)}_{0.91}$$

O sea

Línea Central —— 10.66

Límites de Control —— $10.66 \pm 0.91 \Rightarrow 11.57,\ 9.75$

En la Fig 5 que se presenta a continuación se muestra la carta de control obtenida empleando ambos procedimientos.

cionadas permite ejercer control estadístico sobre la variabilidad de un proceso, usualmente se prefiere la carta para los rangos, R, ya que su elaboración es más sencilla que la de σ, que corresponde a las desviaciones estándar. Por otra parte, la carta R conduce a resultados altamente confiables, a la vez que muestra con claridad ciertas tendencias de los valores de las muestras que deben investigarse.

IMPORTANCIA DEL CONTROL DE LA VARIABILIDAD DE UN PROCESO

La importancia del control sobre la variabilidad de un proceso mediante el empleo de las cartas para los rangos o las desviaciones estándar, se hace evidente al considerar que un cambio brusco en aquella característica es de consecuencias más serias que un cambio similar en la "calidad media". Si el proceso experimenta un cambio en ésta última, normalmente se puede regresar al punto de partida efectuando ajustes simples en los dispositivos de producción (por ejemplo, recalibración de herramientas de corte, dosificadoras, etc).

Sin embargo, si el proceso sufre un cambio brusco en su variabilidad, para regresar al punto de partida son necesarios ajustes más costosos y tardados, tales como reparaciones mayores en los dispositivos de producción, o inclusive la compra de un nuevo dispositivo de procesamiento.

Los cambios efectivos en la variabilidad de un proceso afectan necesariamente el desempeño de una carta $\bar{X}$, ya que, como se recordará, los límites de control para la carta de los promedios se establecen

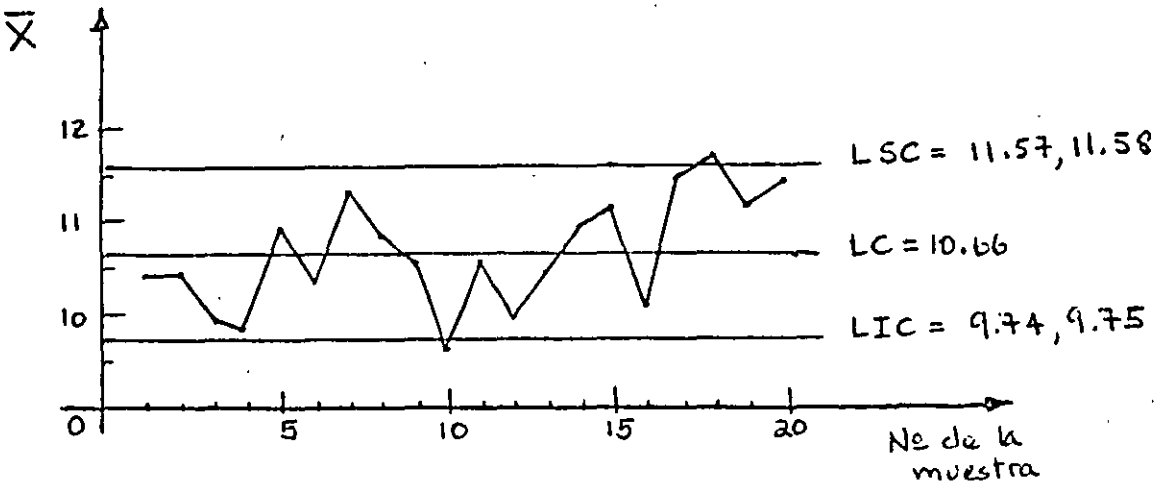


Fig 5 Carta de control $\bar{X}$ obtenida para el ejemplo de las varillas de acero

CARTAS PARA CONTROLAR LA VARIABLILIDAD DE UN PROCESO

Al controlar estadísticamente un proceso puede no ser suficiente fijar la atención en su "calidad media", sino también en la variabilidad del mismo. Aun cuando es razonable suponer que un incremento en las fluctuaciones de los valores de los promedios aritméticos graficados en una carta $\bar{X}$ se relaciona con un incremento en la variabilidad del proceso, es posible determinar con mayor objetividad y precisión los cambios que experimenta ésta mediante el empleo de las llamadas cartas R y σ, que se elaboran a partir de los rangos y las desviaciones estándar de las muestras, respectivamente.

Conviene mencionar que aun cuando cualquiera de las dos cartas mena partir de los valores $\bar{\bar{R}}$ o $\bar{\sigma}$ que se suponen, después de ser afectados por los factores de corrección correspondientes, como buenos estimadores de la desviación estándar del proceso. Si los valores del rango y la desviación estándar de las muestras aumentan, se hace evidente que la carta $\bar{X}$ no operará correctamente.

En contraste con lo anterior, los cambios significativos que se verifican en la carta $\bar{X}$ no necesariamente provocan efectos similares en las cartas R y σ, ya que en la elaboración de ellas no intervienen los promedios aritméticos de las muestras, tal como se verá a continuación.

Por lo anteriormente expuesto, es conveniente ejercer, cuando así sea posible, control simultáneo sobre la "calidad media" y la variabilidad de un proceso.

ELABORACION DE LAS CARTA DE CONTROL PARA LOS RANGOS (CARTA R)

Al igual que para la carta $\bar{X}$, se pueden considerar dos casos distintos en la elaboración de la carta para los rangos: cuando se conoce la desviación estándar σ del proceso y cuando ésto no sucede. En cualquiera de los casos anteriores, se debe observar siempre que el procedimiento de obtención de la línea central y de los límites de control para la carta R, se basa en la distribución muestral de los rangos de muestras aleatorias de tamaño n, extraídas de una población normal.

a. Caso en el que se conoce la desviación estándar σ de la - - Población

De acuerdo con lo anterior, es fácil comprender que los parámetros de la carta de control para los rangos son

Línea Central—— μ_R

Límites de Control —— $\mu_R \pm 3\sigma_R$

Sin embargo, normalmente no conocen los valores de la media y la desviación estándar de la distribución muestral de los rangos. En esta situación, la lógica indica que para estimar el valor de μ_R se debe emplear el de $\bar{R}$, el promedio de los rangos de muestras preliminares. Sin embargo, si se recuerda que

$$\sigma = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

entonces

$$\bar{R} = d_2\ \sigma$$

Y, puesto que se conoce el valor de σ, se puede escribir

Línea Central —— $\bar{R}$ o $d_2\sigma$

quedando finalmente

Línea Central —— $d_2\sigma$

en donde los valores de d_2 se presentan en la tabla I.

Por lo que respecta a σ_R , si se observa nuevamente la Fig 4 se puede ver que la desviación estándar de la distribución muesral de la estadística R/σ, para el caso de muestras de tamaño 5 es, en forma experimental

$$\sigma_{R/\sigma} = d_3 = 0.864$$

Lo anterior permite considerar que si σ es conocida (y por tanto constante) es válido escribir

$$\sigma_{R/\sigma} = \frac{\sigma_R}{\sigma} \simeq d_3$$

o sea

$$\sigma_R = \sigma_{R/\sigma}\ \sigma = d_3\sigma = 0.864\ \sigma$$

En el caso en que n sea diferente de cinco, los valores del factor d_3 se pueden obtener de la tabla I.

Empleando el valor de σ_R así obtenido, los límites de control son, en general, los siguientes

$$d_2\sigma \pm 3d_3\sigma\ .$$

o sea

$$d_2\sigma - 3d_3\sigma \Rrightarrow (d_2 - 3d_3)\sigma \Rrightarrow D_1\ \sigma$$

$$d_2\sigma \quad 3d_3\sigma \Rrightarrow (d_2 + 3d_3)\sigma \Rrightarrow D_2\ \sigma$$

en donde

$$D_1 = d_2 - 3d_3 \quad y \quad D_2 = d_2 + 3d_3$$

Los valores de D_1 y D_2 se reportan también en la tabla I en función de n, el tamaño de la muestra.

Conforme a lo anterior, los parámetros de la carta de control para los rangos, cuando σ es conocida, son

Línea Central —— $d_2\ \sigma$

Límite Inferior de Control —— $D_1\ \sigma$

Límite Superior de Control —— $D_2\ \sigma$

b. Caso en el que se desconoce la desviación estándar σ de la población

En este caso en necesario estimar a μ_R de la distribución muestral de los rangos mediante $\bar{R}$, empleando un número adecuado de muestras preliminares, normalmente el mismo que se emplea para la elaboración de una carta $\bar{X}$. Al respecto, conviene recordar que la carta R (o la σ) generalmente se construye <u>después</u> de la carta $\bar{X}$, y que, por lo tanto, se emplean para su elaboración - las mismas muestras aleatorias. De acuerdo con ésto, la línea central resulta ser

$$\text{Línea Central} \text{ —— } \bar{R}$$

En este caso se requieren límites de control del tipo

$$\bar{R} \pm 3\sigma_R$$

Puesto que ahora se desconocen σ_R y σ, se pueden hacer, para el límite inferior de control

$$\bar{R} - 3\sigma_R = \bar{R} - \frac{3\ \bar{R}\ \sigma_R}{\bar{R}} = (1 - 3\frac{\sigma_R}{\bar{R}})\ \bar{R}$$

$$= (\ 1 - 3\ \frac{\frac{\sigma_R}{\sigma}}{\frac{\bar{R}}{\sigma}})\ \bar{R} = (1 - 3\ \frac{d_3}{d_2})\ \bar{R}$$

$$= (\ \frac{d_2 - 3d_3}{d_2}\ )\ \bar{R} = (\ \frac{D_1}{d_2}\ )\ \bar{R}$$

Para el límite superior de control se obtiene

$$\bar{R} + 3\sigma_R = \bar{R}\ (\ \frac{D_2}{d_2}\ )$$

25

En la tabla I se presentan los valores de

$$D_3 = \frac{D_1}{d_2} \qquad y \qquad D_4 = \frac{D_2}{d_2}$$

en función de n .

Finalmente, los parámetros de la carta R cuando se desconoce el valor de σ de la población son los siguientes:

Línea Central —— $\bar{R}$

Límite Inferior de Control —— $D_3\bar{R}$

Límite Superior de Control —— $D_4\bar{R}$

ELABORACION DE LA CARTA DE CONTROL PARA LAS DESVIACIONES ESTANDAR (CARTA σ)

En la elaboración de la carta para las desviaciones estándar también se deben considerar los dos casos posibles: cuando se conoce la desviación estándar de la población y cuando ésto no es así. De igual manera, el procedimiento para obtener los parámetros de la carta se fundamenta en la distribución muestral de las desviaciones estándar de muestras aleatrias de tamaño n, extraídas de una población normal.

a. Caso en el que se conoce la desviación estándar σ de la población

Con base en la distribución muestral de las desviaciones estándar de las muestras, se pueden establecer los parámetros de la carta σ, a saber

Línea Central —— μ_{s_x}

Límites de Control —— $\mu_{s_x} \pm 3\sigma_{s_x}$

Al desconocerse, como ocurre normalmente, los valores de μ_{s_x} y σ_{s_x} de la distribución muestral, se debe estimar primero μ_{s_x} a partir de $\bar{\sigma}$, el promedio de las desviaciones estándar de las muestras preliminares. Sin embargo, no es necesario realizar en este caso ese cálculo si se recuerda que

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{c_2}$$

o sea

$$\bar{\sigma} = c_2 \ \sigma$$

Y, en virtud de que el valor de σ es conocido, se llega a

Línea Central —— $\bar{\sigma}$ o $c_2\sigma$

quedando finalmente

Línea Central —— $c_2\sigma$

en donde los valores de c_2 se pueden obtener de la tabla I.

Bajo la suposición de que la población de la cual se extraen las muestras aleatorias se encuentra distribuida en forma normal (o aproximadamente normal), se puede demostrar que la desviación estándar de la distribución muestral de las desviaciones estándar es

$$\sigma_{s_x} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

en donde n denota al tamaño de las muestras. Empleando el va lor de σ_{S_X} anterior, los límites de control se pueden establecer como

$$\mu_{S_X} \pm 3\sigma_{S_X} = c_2\sigma \pm 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

o sea

$$c_2\sigma - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \left(c_2 - \frac{3}{\sqrt{2n}} \right) \sigma = B_1\sigma$$

$$c_2\sigma + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \left(c_2 + \frac{3}{\sqrt{2n}} \right) \sigma = B_2\sigma$$

en donde

$$B_1 = c_2 - \frac{3}{\sqrt{2n}}$$

$$B_2 = c_2 + \frac{3}{\sqrt{2n}}$$

Los valores de B_1 y B_2 se proporcionan en la tabla I, en función del valor de n. Entonces, los parámetros de la carta σ son, finalmente

Línea Central —— $c_2\sigma$
Límite Inferior de Control —— $B_1\sigma$
Límite Superior de Control —— $B_2\sigma$

b. Caso en el que se desconoce la desviación estándar σ de la población

En este caso es necesario estimar a μ_{S_X} mediante $\bar{\sigma}$, empleando un número suficiente de muestras aleatorias preliminares.

De acuerdo con lo anterior, la línea central de la carta σ es

Línea Central —— $\bar{\sigma}$

28

Los límites de control serán entonces del tipo

$$\bar{\sigma} \pm 3\sigma_{s_X}$$

Puesto que ahora se desconoce el valor de σ, pero se sabe que

$$\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{c_2}$$

el límite inferior de control resulta ser

$$\bar{\sigma} - 3\sigma_{s_X} = \bar{\sigma} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \bar{\sigma} - 3\frac{\bar{\sigma}}{c_2\sqrt{2n}}$$

$$= (1- \frac{3}{c_2\sqrt{2n}})\,\bar{\sigma}$$

Para el límite superior de control se obtiene

$$\bar{\sigma} + 3\sigma_{s_X} = (\ 1 + \frac{3}{c_2\sqrt{2n}}\ )\ \bar{\sigma}$$

En la tabla I se presentan los valores de

$$B_3 = 1- \frac{3}{c_2\sqrt{2n}} \quad y \quad B_4 = 1+ \frac{3}{c_2\sqrt{2n}}$$

en función del valor de n.

Finalmente, los parámetros de la carta σ, cuando no se conoce la desviación estándar de la población, quedan como

Línea Central —— $\bar{\sigma}$
Límite Inferior de Control —— $B_3\bar{\sigma}$
Límite Superior de Control —— $B_4\bar{\sigma}$

Ejemplo: Sea el proceso de elaboración de varillas de acero mencionado en la página 10 de estos apuntes. En él se informa que el diámetro medio de las varillas es igual a 2.5 cm , con desviación estándar de 0.01 cm. En este caso se pide establecer los parámetros de las cartas de control R y σ, considerando que se extraen periódicamente muestras de cinco varillas.

Solución:

a. Carta R

Puesto que se conoce el valor de la desviación estándar de la población, y en virtud de que n=5, se obtiene, empleando la tabla I

LC —— $d_2\sigma = 2.326(0.01) = 0.02326$

LIC—— $D_1\sigma = 0(0.01) = 0.0000$

LSC—— $D_2\sigma = 4.918(0.01) = 0.04918$

b. Carta σ

En este caso, puesto que σ=0.01 y n=5, se obtiene, con el uso de la tabla I

LC —— $c_2\sigma = 0.8407(0.01) = 0.008407$

LIC—— $B_1\sigma = 0(0.01) = 0.00000$

LSC—— $B_2\sigma = 1.756(0.01) = 0.01756$

30

Ejemplo: Con el fin de investigar la variabilidad en el proceso de producción de varillas de acero mencionado en la página 16, se desea elaborar las cartas de control R y σ correspondientes, considerando la información contenida en la tabla de la misma página.

Solución:

En este caso se desconoce la desviación estándar de la población, por lo cual es indispensable emplear los valores de $\bar{R}$ y $\bar{\sigma}$, considerando que el tamaño de la muestra es 5.

a. Carta R

El valor de $\bar{R}$, obtenido durante el proceso de elaboración de la carta $\bar{X}$ correspondiente, es $\bar{R} = 1.59$. Considerando este valor, y empleando la tabla I, los parámetros de la carta de control R resultan

$$LC \text{———} \bar{R} = 1.590$$

$$LIC \text{———} D_3\bar{R} = 0(1.59) = 0.000$$

$$LSC \text{———} D_4\bar{R} = 2.115(1.59) = 3.363$$

En la Fig 6 se presenta la carta R para este problema.

b. Carta σ

Considerando que al calcular para este problema los parámetros de la carta $\bar{X}$ se obtuvo $\bar{\sigma} = 0.57$, la carta σ queda definida con

$$LC \text{———} \bar{\sigma} = 0.57$$

$$LIC \text{———} B_3\bar{\sigma} = 0(0.57) = 0.00$$

$$LSC \text{———} B_4\bar{\sigma} = 2.089(0.57) = 1.19$$

En la Fig 7 se muestra la carta de control σ correspondiente.

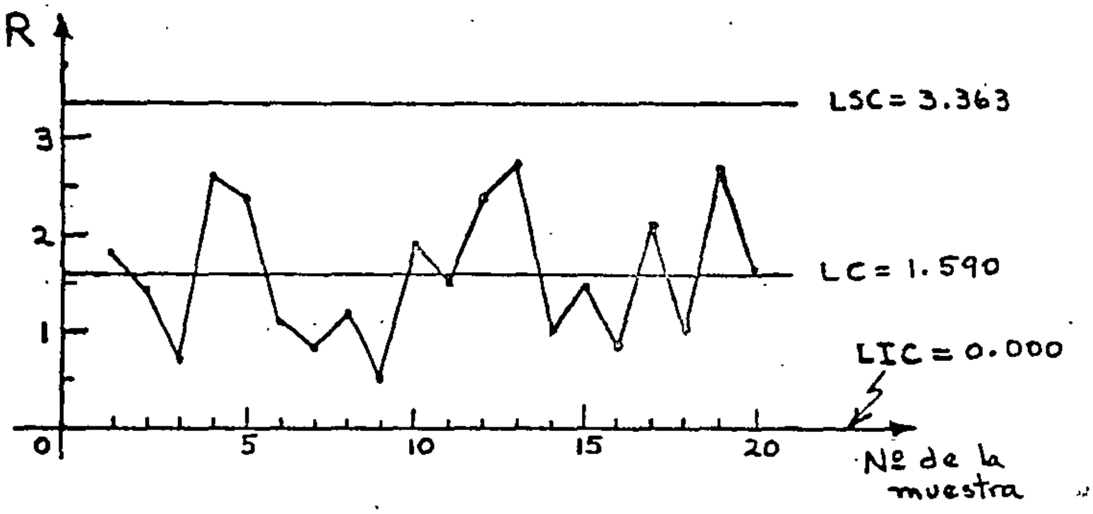


Fig 6 Carta de control R obtenida para el ejemplo de las varillas de acero

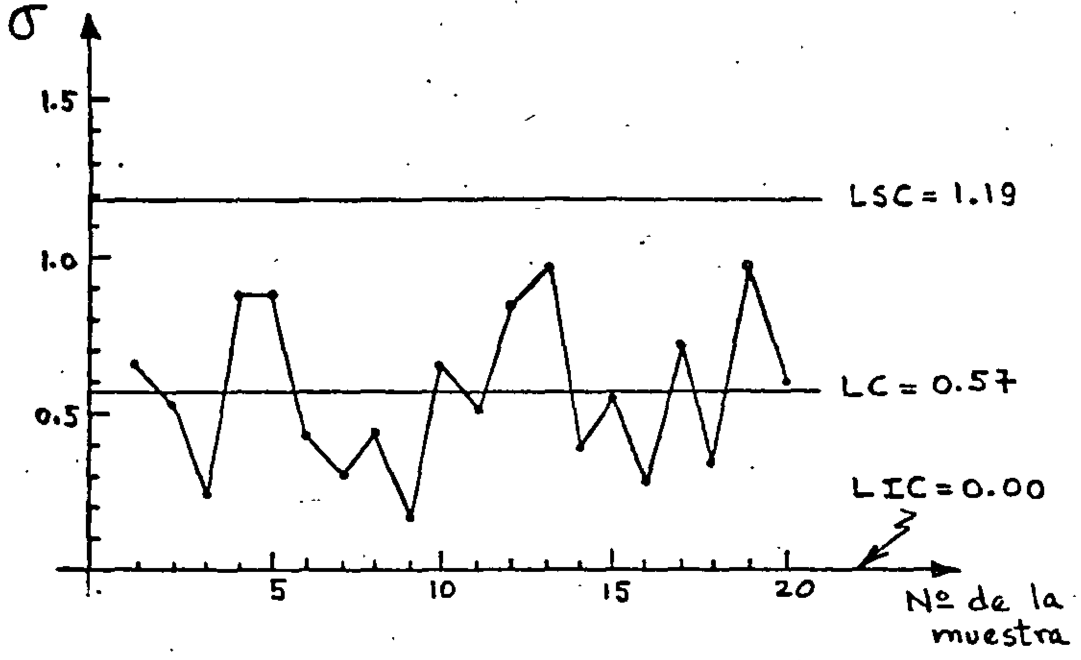


Fig 7 Carta de control σ obtenida para el ejemplo de las varillas de acero

32

CARTAS DE CONTROL PARA MEDICIONES (ELEMENTOS INDIVIDUALES)

Se han establecido las cartas $\bar{X}$, R y σ considerando que existe la posibilidad de conocer la media μ y/o la desviación estándar σ de la población (proceso), o bien, cuando estos parámetros se desconocen, que es posible obtener un número adecuado de muestras aleatorias de ella, cuyos tamaños sean cuando menos igual a dos, con el fin de estimar con buena precisión los valores de dichos parámetros.

Sin embargo, en muchas ocasiones no se conocen los parámetros del proceso, y únicamente es posible contar con muestras de tamaño uno, es decir, muestras con un solo elemento. Cuando ésto sucede, la técnica para calcular los límites de control en las cartas para mediciones se fundamenta en el empleo de los llamados rangos móviles, que se explican a continuación.

Si, por ejemplo, se cuenta con el conjunto de datos X_i $(i=1,2,\ldots,n)$ registrados en orden, se definen los rangos móviles de orden dos como

$$\left|X_i - X_{i+1}\right| \qquad ; \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

es decir

$$\left|X_1 - X_2\right| , \left|X_2 - X_3\right| , \ldots , \left|X_{n-1} - X_n\right|$$

Si se trata de rangos móviles de orden tres, éstos se definen como

$$\left|X_i - X_{i+2}\right| \qquad ; \qquad 1 \leq i \leq n-2$$

es decir

$$\left|X_1 - X_3\right| , \left|X_2 - X_4\right| , \ldots , \left|X_{n-2} - X_n\right|$$

La obtención de los rangos móviles de orden superior al tres se hace siguiendo las ideas anteriores.

En forma numérica, si se tienen los datos registrados en orden 4, 6, 4, 3 y 7, los rangos móviles de orden dos son

$$|4-6| = 2\ ,\quad |6-4| = 2\ ,\quad |4-3| = 1\ ,\quad |3-7| = 4$$

y los de orden tres son

$$|4-4| = 0\ ,\quad |6-3| = 3\ ,\quad |4-7| = 3$$

El empleo de los rangos móviles para la obtención de los límites de control es importante en este caso, debido a que, si se trata de rangos móviles de orden dos, se puede considerar que el valor de cualquiera de ellos debe obtenerse a partir de los valores de dos elementos individuales registrados en orden. Dicho de otra manera, un rango móvil de orden dos debe provenir de una muestra "ficticia" de tamaño dos. En la misma forma, un rango móvil de orden tres tiene que obtenerse a partir de tres elementos individuales, lo cual permite "crear" muestras de tamaño tres.

De acuerdo con lo anterior, es factible establecer los límites de control para las cartas de control, en el caso de elementos individuales, empleando los factores de la tabla I, que se encuentran tabulados a partir de muestras de tamaño dos.

a. Elaboración de la carta X (elementos individuales)

En este caso, la línea central está dada por

$$\bar{X} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} X_i$$

en donde X_i (i=1,2,...,K) denota a los valores de los datos individuales.

Los límites de control requeridos son

$$\bar{X} \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Puesto que el tamaño real de la muestra es uno, la expresión anterior se puede escribir

$$\bar{X} \pm 3\frac{\sigma}{\sqrt{1}} = \bar{X} \pm 3\sigma$$

Debido a que el valor de σ se desconoce, pero es posible obtener el de $\bar{R}$ (promedio de los rangos móviles), la última expresión puede transformarse algebraicamente de la siguiente manera:

$$\bar{X} \pm 3\sigma = \bar{X} \pm \frac{3\sigma\ \bar{R}}{\bar{R}} = \bar{X} \pm \frac{3\bar{R}}{\frac{\bar{R}}{\sigma}}$$

$$\bar{X} \pm \frac{3\ \bar{R}}{d_2} = \bar{X} \pm E_2\bar{R}$$

en donde

$$E_2 = \frac{3}{d_2}$$

Los valores de E_2 se pueden obtener de la tabla I en función de n, que representa ahora el tamaño "ficticio" de la muestra, o el orden de los rangos móviles.

De acuerdo con lo anterior, los parámetros de la carta de control X para elementos individuales son

Línea Central —— $\bar{X}$

Límite Inferior de Control —— $\bar{X} - E_2\bar{R}$

Límite Superior de Control —— $\bar{X} + E_2\bar{R}$

b. Elaboración de la carta R* (rangos móviles)

En este caso, la línea central está dada por el valor del promedio de los rangos móviles, es decir

$$\bar{R} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} R_1$$

En donde R_i (i=1,2,...,K) denota a los valores de los rangos móviles, obtenidos a partir de los datos individuales registrados en orden.

Los límites de control se obtienen considerando que se desconoce el valor de la desviación estándar de la población, en la forma ya explicada para la carta R.

De acuerdo con lo anterior, los parámetros de la carta de control R* para los rangos móviles son

Línea Central —— $\bar{R}$

Límite Inferior de Control —— $D_3\bar{R}$

Límite Superior de Control —— $D_4\bar{R}$

en donde los valores de D_3 y D_4 se obtienen de la tabla I en función de n, el tamaño "ficticio" de la muestra, u orden de los rangos móviles.

<u>Ejemplo</u>: Considérese un proceso de destilación y mezclado de alcohol, para el cual se desea ejercer control sobre el porcentaje de metanol existente. Se extraen 26 lotes sucesivos de alcohol, y se obtiene el porcentaje de metanol correspondiente para cada uno de ellos. Los valores

se presentan en la tabla siguiente, y se pide construir cartas X y R* considerando rangos móviles de orden dos.

Lote	Porcentaje de metanol, X	Rango móvil,R	Lote	Porcentaje de metanol, X	Rango móvil, R
1	4.6	---	14	5.5	0.1
2	4.7	0.1	15	5.2	0.3
3	4.3	0.4	16	4.6	0.6
4	4.7	0.4	17	5.5	0.9
5	4.7	0	18	5.6	0.1
6	4.6	0.1	19	5.2	0.4
7	4.8	0.2	20	4.9	0.3
8	4.8	0	21	4.9	0
9	5.2	0.4	22	5.3	0.4
10	5.0	0.2	23	5.0	0.3
11	5.2	0.2	24	4.3	0.7
12	5.0	0.2	25	4.5	0.2
13	5.6	0.6	26	4.4	0.1
			SUMA	128.1	7.2

Solución: El valor del promedio de los rangos móviles de orden dos es

$$\bar{R} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} R_i = \frac{1}{25} \quad (7.2) = 0.288$$

a. Carta X

La línea central de esta carta es $\bar{X}$, cuyo valor es

$$\bar{X} = \frac{1}{26} \sum_{i=1}^{26} X_i = \frac{1}{26} \quad (128.1) = 4.927$$

De la tabla I se obtiene $E_2 = 2.66$ para n=2, - siendo los límites de control

$$\bar{X} \pm E_2\bar{R} = 4.927 \pm 2.66(0.288)$$

$$= 4.927 \pm 0.7661$$

Finalmente, los parámetros de la carta X quedan como

LC —— 4.927
LIC—— 4.927 - 0.7661 = 4.161
LSC—— 4.927 + 0.7661 = 5.693

En la Fig 8 se presenta la gráfica correspondiente.

b. Carta R*

La línea central para esta carta es $\bar{R} = 0.288$, y los límites de control se obtienen empleando la tabla I considerando que n=2. De ahi que

LC —— 0.288
LIC—— $D_3\bar{R} = 0(0.288) = 0.000$
LSC—— $D_4\bar{R} = 3.267(0.288) = 0.941$

La Fig 9 muestra la carta R* para este problema.

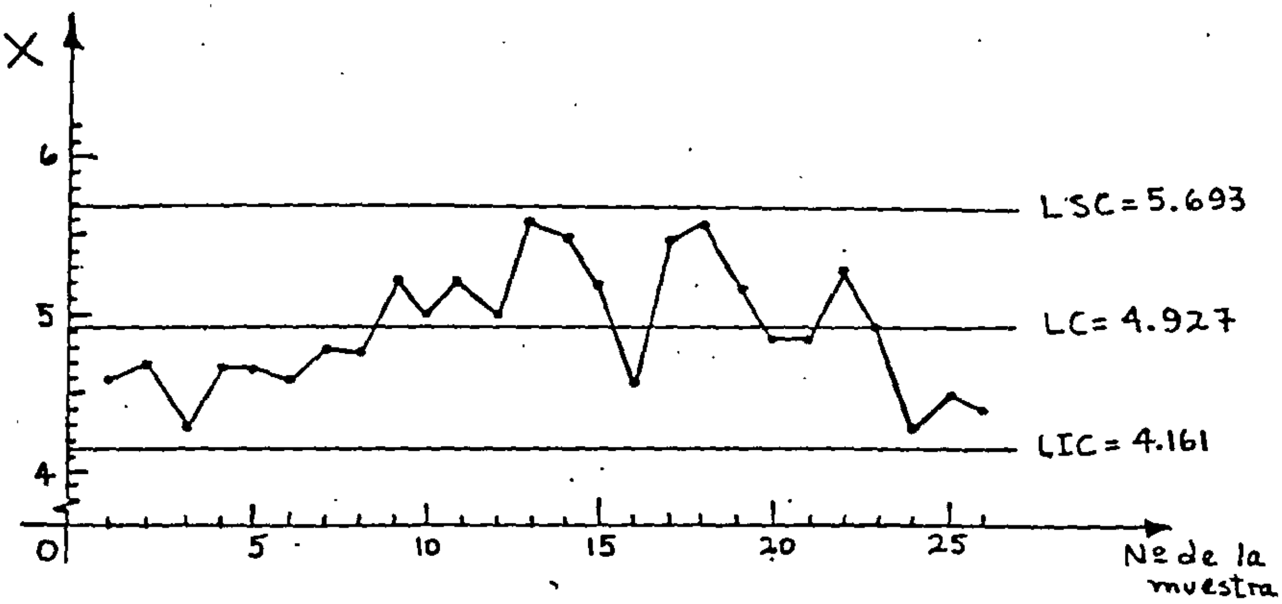


Fig 8 Carta de control X obtenida para el ejemplo de los lotes de alcohol

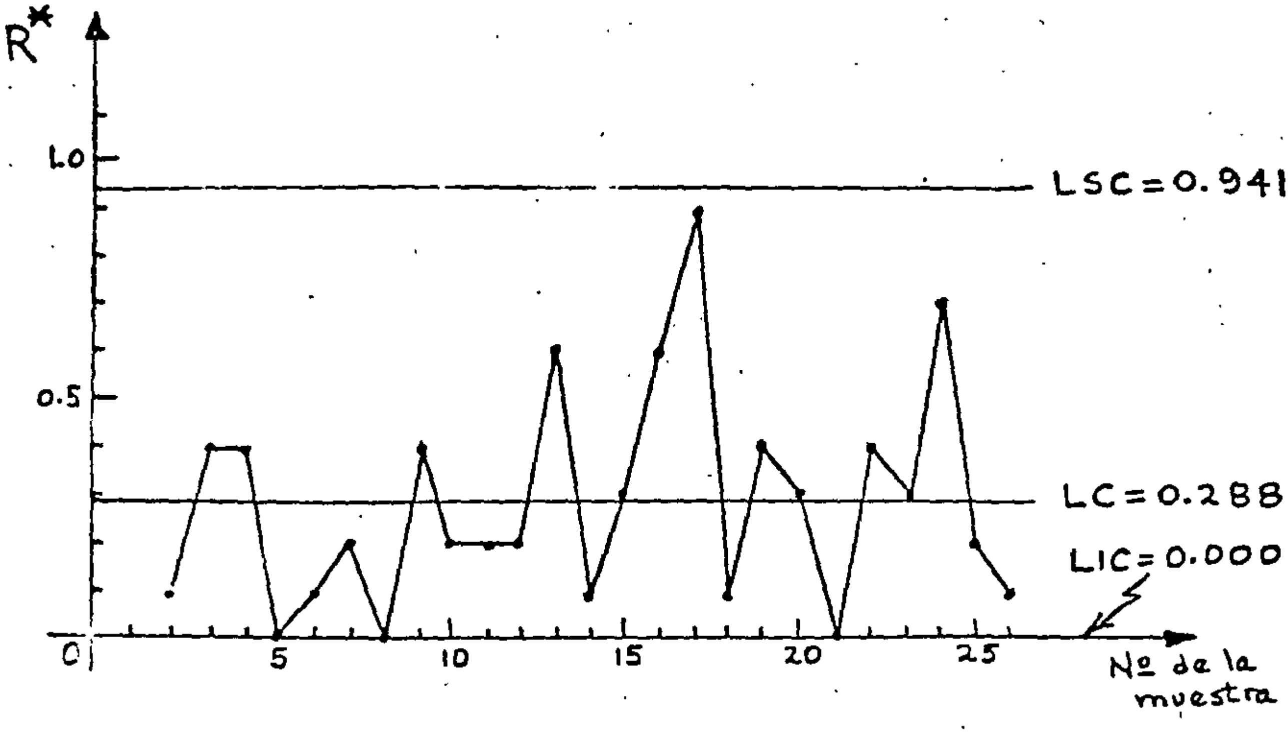


Fig 9 Carta de control R* obtenida para el ejemplo de los lotes de alcohol

CARTAS DE CONTROL PARA ATRIBUTOS

El término atributo, tal como se emplea en el control de calidad, indica la propiedad que tiene un producto de ser bueno o malo, es decir, permite reconocer si la característica de calidad del mismo se encuentra dentro de ciertos requerimientos específicos o no.

Aunque generalmente se puede obtener información más completa de las mediciones hechas a productos terminados, a menudo consume menos tiempo y dinero el comparar la calidad de un producto en contra de ciertas especificaciones mínimas, sobre la base, por ejemplo, de considerar que sirve o no, o que es bueno o malo.

Por ejemplo, al ejercer control sobre el diámetro de un balín de acero, es más simple y rápido el determinar si éste pasa por un agujero hecho en una placa de acero templado con el diámetro adecuado, que realizar la medición del diámetro con un micrómetro.

Se establecerán ahora los dos tipos fundamentales de cartas de control que se utilizan en conexión con el muestreo por atributos: la carta para la proporción de elementos defectuosos, o carta p, y la carta para el número de defectos, o carta c.

Considérese por ejemplo una muestra de 50 fusibles en la cual se encontró, después de probar todos ellos, que contiene dos elementos defectuosos. En este caso, la proporción de fusibles defectuosos en la muestra es de 2/50 = 0.04.

Por otra parte, debe observarse que si se prueba una sola unidad producida, esta puede tener varios defectos pero, sin embargo, puede o no ser una unidad defectuosa. Tal es el caso, por ejemplo, de rollos (unidades) de tela de determinada longitud, que pueden tener cierto número de imperfecciones pero no necesariamente ser considerados como defectuosos. No obtante, en muchas aplicaciones prácticas una unidad producida se considera defectuosa si tiene - cuando menos un defecto.

La distribución de la proporción y del número de elementos defectuosos en un proceso es obviamente binomial,en tanto que la del número de defectos es de Poisson. Sin embargo, para la elaboración de la carta p se aprovecha la propiedad que tiene la distribución muestral de las proporciones de ser aproximada mediante una distribución normal cuando el tamaño de la muestra es grande, y la proporción de elementos defectuosos no se acerca a cero o a uno.

ELABORACION DE LAS CARTAS DE CONTROL p Y np PARA LA PROPORCION DE - DEFECTUOSOS Y EL NUMERO DE DEFECTUOSOS

Los límites de control que se requieren en este caso son

$$\mu_p \pm 3\sigma_p$$

en donde μ_p es la media de la distribución muestral de las proporciones, y σ_p la desviación estándar correspondiente. Como μ_p de - esta distribución es igual al parámetro P de la población, la estadística p de la muestra estima en forma insesgada a este último.

Si no se conoce el valor de P de la población, lo cual en la práctica es frecuente, se debe disponer de K muestras de tamaño n constante para obtener el valor del estimador insesgado

$$\bar{p} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} p_i$$

en donde p_i $(i=1,2,\ldots,K)$ denota el valor de la proporción en la muestra i. Empleando el valor así obtenido, la línea central es

$$\text{Línea Central} \text{ —— } \bar{p}$$

En textos de estadística se demuestra que la desviación estándar de la distribución muestral de las proporciones es

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{P\ (1-P)}{n}}$$

por lo cual los límites de control son

$$\bar{p} \pm 3\sigma_p = \bar{p} \pm 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

Finalmente, los parámetros de la carta de control p quedan como

$$\text{Línea Central} \text{ —— } \bar{p}$$

$$\text{Límite Inferior de Control} \text{ —— } \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$\text{Límite Superior de Control} \text{ —— } \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

A partir de los parámetros anteriores se pueden derivar los de la llamada carta np, o sea, para el número de defectuosos. Para ello, es necesario multiplicar dichos parámetros por n para así obtener, en el caso de los límites de control

$$n\left(\bar{p} \pm 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right) = n\bar{p} \pm 3n\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$= n\bar{p} \pm 3\sqrt{\frac{n^2\bar{p}\ (1-\bar{p})}{n}}$$

$$= n\bar{p} \pm \sqrt{3\ n\ \bar{p}\ (1-\bar{p})}$$

y los parámetros resultan ahora

Línea Central —— $n\bar{p}$

Límite Inferior de Control —— $n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$

Límite Superior de Control —— $n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$

Ejemplo: Para un proceso de elaboración de fusibles se desea ejercer control sobre la proporción de elementos defectuosos, así como sobre el número de ellos. Para ello, se seleccionan 40 muestras aleatorias de 50 fusibles cada una, y se obtienen los valores reportados en la tabla siguiente.

Se desea construir las cartas p y np correspondientes.

Número de la muestra	Número de fusibles defectuosos	Proporción de defectuosos, p	Número de la muestra	Número de fusibles defectuosos	Proporción de defectuosos, p
1	2	0.04	21	1	0.02
2	1	0.02	22	1	0.02
3	2	0.04	23	4	0.08
4	0	0.00	24	2	0.04
5	2	0.04	25	2	0.04
6	3	0.06	26	4	0.08
7	4	0.08	27	1	0.02
8	2	0.04	28	3	0.06
9	0	0.00	29	3	0.06
10	3	0.06	30	2	0.04
11	0	0.00	31	3	0.06
12	1	0.02	32	6	0.12
13	2	0.04	33	2	0.04
14	2	0.04	34	3	0.06
15	3	0.06	35	2	0.04
16	5	0.10	36	3	0.06
17	1	0.02	37	1	0.02
18	2	0.04	38	0	0.00
19	3	0.06	30	2	0.04
20	1	0.02	40	0	0.00
			SUMA		1.68

Solución: El valor de $\overline{p}$ es

$$\overline{p} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} p_i = \frac{1}{40} (1.68) = 0.042$$

a. Carta p

Los límites de control son, para n=50

$$0.042 \pm 3\sqrt{\frac{(0.042)\ (1-0.042)}{50}} = 0.042 \pm 0.0851$$

por lo cual

LC ——— 0.0420

LIC ——— $0.042 - 0.0851 = -0.0431 \Rightarrow 0.0000$

LSC ——— $0.042 + 0.0851 = 0.1271$

En este caso, y como se verá a continuación para la carta np, la expresión para el cálculo del límite inferior de control conduce a un valor negativo del mismo. Puesto que no tiene sentido físico hablar de una proporción menor de cero o de un número de defectuosos negativo, en forma arbitraria se asigna a ese límite el valor cero.

En la Fig 10 se presenta la carta de control p correspondiente.

b. Carta np

Puesto que $n\overline{p} = 50(0.042) = 2.1$, los límites de control son ahora

$$2.1 \pm 3\sqrt{50(0.042)\ (1-0.042)} = 2.1 \pm 4.255$$

o sea

LC —— 2.1

LIC —— $2.1-4.255 = -2.155 \Rightarrow 0.000$

LSC —— $2.1+4.255 = 6.355$

En la Fig 10 se presenta la carta np para este problema.

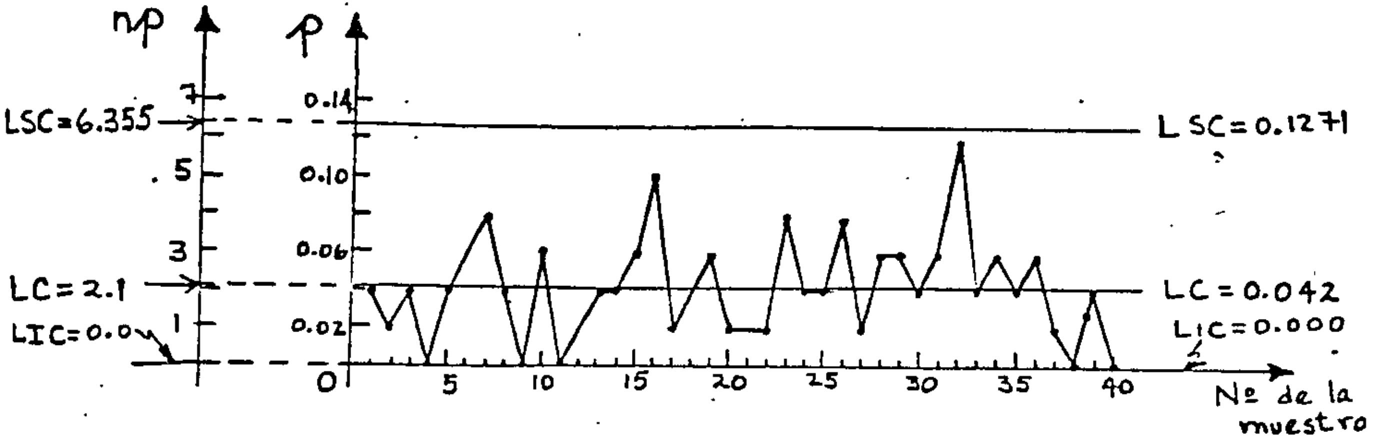


Fig 10 Cartas de control p y np obtenidas para el ejemplo de los fusibles.

ELABORACION DE LA CARTA DE CONTROL c PARA EL NUMERO DE DEFECTOS

Existen ocasiones en las que es necesario controlar el número de defectos por unidad en un proceso. Por ejemplo, en la producción de alfombras es importante controlar el número de defectos por metro cuadrado; en la elaboración de papel se requiere controlar el número de defectos por rollo, etc. En estos casos, la variable aleatoria c asociada al número de defectos por unidad tiene una distribución de Poisson.

De lo anterior se desprende que la línea central de la carta de con trol para el número de defectos es el parámetro λ de la distribución de Poisson correspondiente, cuyo valor usualmente se desconoce. En tal situación, se acostumbra estimar en forma insesgada el valor de λ a partir de un mínimo de 20 valores de c, observados previamente en igual número de unidades producidas. De acuerdo con ésto, el valor de

$$\bar{c} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} c_i$$

en donde c_i (i=1,2,...,K) representa el número de defectos observados en la unidad i, se puede amplear como estimador de λ.

Los límites de control requeridos ahora son del tipo

$$\bar{c} \pm 3\sigma_c$$

Puesto que en este caso se observa el número de defectos por unidad, se puede suponer que el tamaño de la muestra es unitario. Por tal motivo, se puede considerar que la desviación estándar de la distribución muestral del número de defectos c es igual a la desviación estándar de la distribución de Poisson y, puesto que $\bar{c}$ estima el valor de λ

$$\sigma_c = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\bar{c}}$$

De acuerdo con lo anterior, los parámetros de la carta de control c son

Línea Central —— $\bar{c}$
Límite Inferior de Control —— $\bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}$
Límite Superior de Control —— $\bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$

Ejemplo: Considérese el proceso de soldadura de dos placas de acero en una fábrica. Diariamente se alcanzan a soldar 8 juntas, y en cada una de ellas se observa el número de defectos existente. Con la información correspondiente a tres días de labor que se presenta en la tabla siguiente, se desea elaborar una carta de control para el número de defectos por junta soldada

Número de la junta soldada	Fecha	Número de defectos
1	Julio 18	2
2		4
3		7
4		3
5		1
6		4
7		8
8		9
9	Julio 19	5
10		3
11		7
12		11
13		6
14		4
15		9
16		9
17	Julio 20	6
18		4
19		3
20		9
21		7
22		4
23		7
24		12
SUMA.................		144

47

Solución: Empleando los valores reportados en la tabla anterior, el valor de $\bar{c}$ resulta

$$\bar{c} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{24} c_i = \frac{1}{24} (144) = 6$$

Siendo $\bar{c} = 6$, los límites de control quedan como

$$6 \pm 3\sqrt{6} = 6 \pm 7.35$$

Finalmente, los parámetros de la carta c son

LC —— 6
LIC —— $6 - 7.35 = -1.35 \Rightarrow 0.00$
LSC —— $6 + 7.35 = 13.35$

Puesto que el número de defectos no puede ser negativo, se fija el valor del límite inferior de control igual a cero.

En la Fig 11 se presenta la carta de control c que corresponde al ejemplo.

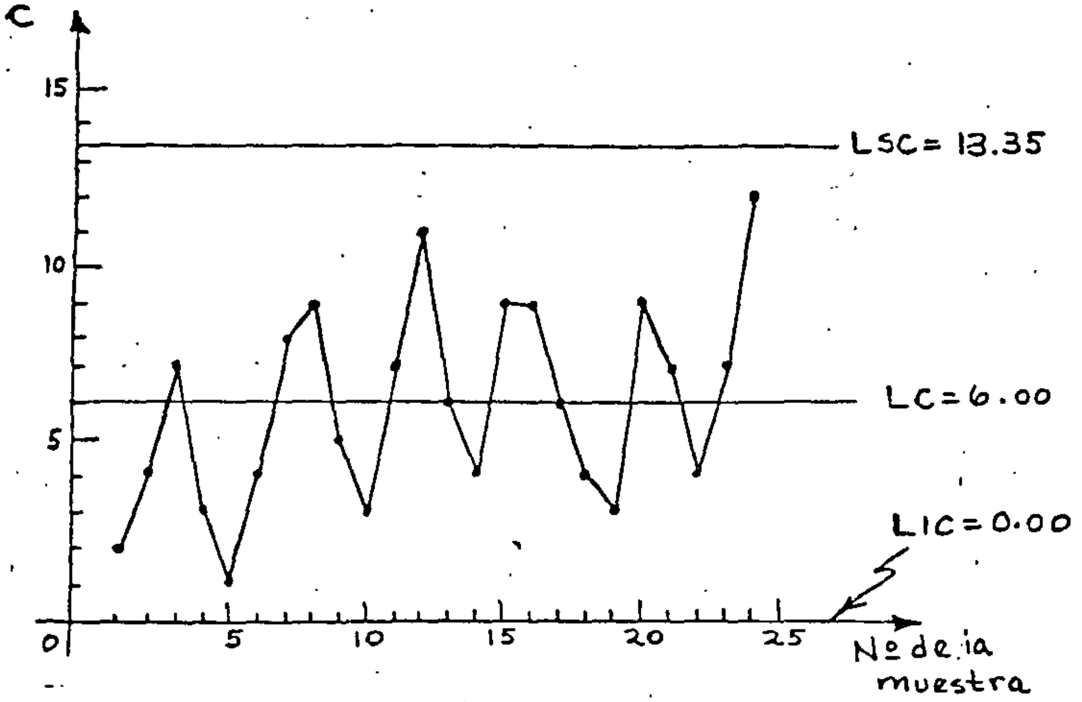


Fig 11 Carta de control c obtenida para el ejemplo de las juntas soldadas

BIBLIOGRAFIA

1. Hansen, B., "Quality Control: Theory and Applications", Prentice Hall, Inc. (1964)

2. G_rant, E.L., "Statistical Quality Control", Mc Graw-Hill Book Co. (1971)

3. Ostle, B. "Estadística aplicada", Limusa-Wiley (1973)

4. Miller, I. y Freund, J., "Probability and Statistics - for Engineers", Prentice Hall, Inc. (1965)

Tabla [illegible]1. Factores para calcular líneas de gráficas de control*

Número de observaciones en muestra, n	Gráfica para promedios			Gráfica para desviaciones estándares						Gráficas para rangos						
	Factores para límites de control			Factores para línea central		Factores para límites de control				Factores para línea central		Factores para límites de control				
	A	A_1	A_2	c_2	$1/c_2$	B_1	B_2	B_3	B_4	d_2	$1/d_2$	d_3	D_1	D_2	D_3	D_4
2	2,121	3,760	1,880	0,5642	1,7725	0,000	1,843	0,000	3,267	1,128	0,8865	0,853	0,000	3,686	0,000	3,276
3	1,732	2,394	1,023	0,7236	1,3820	0,000	1,858	0,000	2,568	1,693	0,5907	0,888	0,000	4,358	0,000	2,575
4	1,501	1,880	0,729	0,7979	1,2533	0,000	1,808	0,000	2,266	2,059	0,4857	0,880	0,000	4,698	0,000	2,282
5	1,342	1,596	0,577	0,8407	1,1894	0,000	1,756	0,000	2,089	2,326	0,4299	0,864	0,000	4,918	0,000	2,115
6	1,225	1,410	0,483	0,8686	1,1512	0,026	1,711	0,030	1,970	2,534	0,3946	0,848	0,000	5,078	0,000	2,004
7	1,134	1,277	0,419	0,8882	1,1259	0,105	1,672	0,118	1,882	2,704	0,3698	0,833	0,205	5,203	0,076	1,924
8	1,061	1,175	0,373	0,9027	1,1078	0,167	1,638	0,185	1,815	2,847	0,3512	0,820	0,387	5,307	0,136	1,864
9	1,000	1,094	0,337	0,9139	1,0942	0,219	1,609	0,239	1,761	2,970	0,3367	0,808	0,546	5,394	0,184	1,816
10	0,949	1,028	0,308	0,9227	1,0837	0,262	1,584	0,284	1,716	3,078	0,3249	0,797	0,687	5,469	0,223	1,777
11	0,905	0,973	0,285	0,9300	1,0753	0,299	1,561	0,321	1,679	3,173	0,3152	0,787	0,812	5,534	0,256	1,744
12	0,866	0,925	0,266	0,9359	1,0684	0,331	1,541	0,354	1,646	3,258	0,3069	0,778	0,924	5,592	0,284	1,719
13	0,832	0,884	0,249	0,9410	1,0627	0,359	1,523	0,382	1,618	3,336	0,2998	0,770	1,026	5,646	0,308	1,692
14	0,802	0,848	0,235	0,9453	1,0579	0,384	1,507	0,406	1,594	3,407	0,2935	0,762	1,121	5,693	0,329	1,671
15	0,775	0,816	0,223	0,9490	1,0537	0,406	1,492	0,428	1,572	3,472	0,2880	0,755	1,207	5,737	0,348	1,652
16	0,750	0,788	0,212	0,9523	1,0501	0,427	1,478	0,448	1,552	3,532	0,2831	0,749	1,285	5,779	0,364	1,636
17	0,728	0,762	0,203	0,9551	1,0470	0,445	1,465	0,466	1,534	3,588	0,2787	0,743	1,359	5,817	0,379	1,621
18	0,707	0,738	0,194	0,9576	1,0442	0,461	1,454	0,482	1,518	3,640	0,2747	0,738	1,426	5,854	0,392	1,608
19	0,688	0,717	0,187	0,9599	1,0418	0,477	1,443	0,497	1,503	3,689	0,2711	0,733	1,490	5,888	0,404	1,596
20	0,671	0,697	0,180	0,9619	1,0396	0,491	1,433	0,510	1,490	3,735	0,2677	0,729	1,548	5,922	0,414	1,586
21	0,655	0,679	0,173	0,9638	1,0376	0,504	1,424	0,523	1,477	3,778	0,2647	0,724	1,606	5,950	0,425	1,575
22	0,640	0,662	0,167	0,9655	1,0358	0,516	1,415	0,534	1,466	3,819	0,2618	0,720	1,659	5,979	0,434	1,566
23	0,626	0,647	0,162	0,9670	1,0342	0,527	1,407	0,545	1,455	3,858	0,2592	0,716	1,710	6,006	0,443	1,557
24	0,612	0,632	0,157	0,9684	1,0327	0,538	1,399	0,555	1,445	3,895	0,2567	0,712	1,759	6,031	0,452	1,548
25	0,600	0,619	0,153	0,9696	1,0313	0,548	1,392	0,565	1,435	3,931	0,2544	0,709	1,804	6,058	0,459	1,541
Mayor que 25	$\frac{3}{\sqrt{n}}$	$\frac{3}{\sqrt{n}}$	—	—	—	‡	§	‡	§	—	—	—	—	—	—	—

*Reproducido con permiso de *ASTM Manual or Quality Control of Materials*, American Society for Testing Materials, Philadelphia, Pa., 1951.

‡ $1 - \frac{3}{\sqrt{2n}}$ § $1 + \frac{3}{\sqrt{2n}}$

TABLA II

Número mínimo m de muestras de tamaño n requerido para elaborar una carta $\bar{X}$ con una confianza de 98%, cuando se emplean los rangos.

n	m
2	15
3	9
4	7
5	6
6	5
7	5
8	4
9	4
10	4
12	4
14	4
16	3
18	3
20	3

TABLA III

Número mínimo m de muestras de tamaño n requerido para elaborar una carta $\bar{X}$ con una confianza de 98%, cuando se emplean las desviaciones estándar.

n	m
2	16
3	9
4	7
5	6
6	5
7	5
8	4
9	4
10	4
12	4
14	3
16	3
18	3
20	3

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

" DIPLOMADO EN SISTEMAS DE CALIDAD EN INGENIERÍA DE PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN "

MÓDULO II

CONTROL DE CALIDAD DE MATERIALES Y OBRAS

PARTE I

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA EL CONTROL DE CALIDAD

TEMA:

MUESTREO DE INSPECCIÓN

EXPOSITOR: M. en I. AUGUSTO VILLAREAL A.
1997

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

MUESTREO DE INSPECCION

Por: M en I Augusto Villarreal Aranda*

1. Introducción

El muestreo de inspección (o de aceptación) se define como el conjunto de todas las acciones que realiza el receptor de producto "terminado" para asegurar la calidad de éste, después de recibirlo del productor.

Este tipo de muestreo puede ser aplicado por un consumidor a los productos que recibe de un vendedor, por un departamento de inspección de producto terminado a los productos recibidos de los departamentos de producción, etc, es decir, se aplica en aquellas ocasiones en que un número grande de unidades producidas se presenta para inspección en forma de lotes, y en donde la forma

---

* *Secretario Académico*, División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, UNAM y *Profesor investigador*, Instituto de Ingeniería, UNAM

lógica de realizar esa tarea es mediante el empleo de la técnica que usa atributos (sirve, no sirve, o pasa, no pasa), con el fin de evitar la tan costosa y tardada inspección al 100%.

Generalmente, con la inspección de lote por lote del producto terminado, existe el acuerdo entre productor y receptor en que

a. los lotes aceptados por el plan de muestreo que se emplee serán aceptados por el receptor como buenos a excepción de aquellas unidades detectadas como defectuosas en todos los lotes durante el proceso de muestreo, las cuales serán reemplazadas por unidades buenas por el productor.

b. los lotes rechazados por el plan de muestreo le serán devueltos al productor para su rectificación.

Sin embargo, existen algunas variantes sobre el acuerdo mencionado. Por ejemplo, algunos receptores de producto terminado emplean la opción de inspeccionar al 100% los lotes rechazados para eliminar los elementos defectuosos, y trasladar el costo de esa operación al productor. Lo anterior se realiza con frecuencia cuando el receptor tiene urgencia de emplear las unidades que recibe del productor. En última instancia el objetivo que se persigue es responsabilizar al productor por la deficiente calidad de un producto terminado.

Para determinar la calidad de un lote, es factible seleccionar una, dos o múltiples muestras aleatorias del mismo, lo cual conduce a considerar planes de muestreo simples, dobles, o múltiples para aceptarlo o rechazarlo. La explicación de cómo y cuándo se emplean estos tipos de muestreo se discutirá en esta parte del curso.

2. Plan de muestreo simple

Cómo se dijo anteriormente, el muestreo de aceptación se aplica a las producciones en masa cuando un *productor* abastece de lotes de artículos a un *receptor*. En situaciones como ésta, se debe decidir individualmente sobre la aceptación o rechazo de cada lote.

En este caso particular, la decisión que se toma se basa en el resultado que se obtiene al inspeccionar una muestra de tamaño "n" que se toma de un lote de "N" artículos, de la cual se determina el número de defectuosos, "X", esto es, de artículos que no cumplen las especificaciones nominales (tamaño, color, resistencia, etc.)

Si el número "X" de artículos defectuosos en la muestra es menor o igual que un número especificado "c" *menor* que "n", se acepta el lote; si el número de defectuosos es mayor que "c", se rechaza. A "c" se le llama el número tolerable de artículos defectuosos o *número de aceptación*. Por lo tanto, las alternativas son

$X \leq c$ se acepta el lote

$X > c$ se rechaza el lote

Resulta evidente que el productor y el receptor deben quedar de acuerdo en cierto *plan de muestreo*, es decir, en cierto tamaño n de muestra y cierto número de aceptación c. Puesto que en este caso el acuerdo se basa en la extracción de una muestra aleatoria única del lote de N artículos, el plan de muestreo a emplearse se denomina *plan de muestreo simple*.

2.1 Probabilidad de aceptación de un lote

Supóngase que si $X \leq c$ se acepta un lote, es decir, ocurre el evento A = {el número de artículos defectuosos en la muestra extraída del lote es menor o igual que el número de aceptación}. En este caso, la probabilidad de dicho evento no depende únicamente del tamaño n de la muestra y del número de aceptación c, sino también del número total de artículos defectuosos que se encuentran en el lote,"M". Si se supone además que el muestreo se realiza sin remplazo, la probabilidad de dicho evento es hipergeométrica, es decir

$$P\ (A) = P\ \{X \leq c\} = \sum_{X=0}^{c} \frac{C_X^M \quad C_{n-X}^{N-M}}{C_n^N} \qquad (2.1)$$

Si no hay artículos defectuosos en el lote, entonces $M = 0$, y el único valor posible que puede asumir X es también 0, por lo cual

$$P\ (A) = P\ \{X \leq c\} = \frac{C_o^o \quad C_n^N}{C_n^N} = 1$$

Es decir, la probabilidad de aceptar un lote en el cual no hay elementos defectuosos es igual a la unidad.

Si todos los artículos en un lote son defectuosos, entonces M = N, y el valor de X debe ser igual a n, por lo que

$$P\ (A) = P\ \{X \leq c\} = P\ (\emptyset) = 0$$

en virtud de que la condición inicial es que c < n. Lo anterior indica que la probabilidad de aceptar un lote en el cual todos los artículos son defectuosos es nula.

Conviene hacer notar también que si se mantienen fijos el tamaño de la muestra y el número de aceptación al incrementarse el valor de M, el número de artículos defectuosos en un lote, decrece la probabilidad P (A) de aceptación de este último.

Ejemplo 2.1

Considérese un plan de muestreo simple para el cual N = 10, c = 0 y n = 5. Obténganse los valores de P (A) cuando

a. M = 1

b. M = 3

Solución

a. En este caso, la probabilidad de aceptación es

$$P.\ (A) = P\ \{X = 0\} = \frac{C_0^1\ \ C_{5-0}^{10-1}}{C_5^{10}} =$$

$$= \frac{\frac{1!}{0!(1-0)!}\ \ \frac{9!}{5!(9-5)}}{\frac{10!}{5!(10-5)!}} = \frac{\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}} = 0.5$$

b. Para este caso, se obtiene

$$P\ (A) = P\ \{X \leq 0\} = P\ \{X = 0\} = \frac{C_0^3\ \ C_{5-0}^{10-3}}{C_5^{10}} =$$

$$= \frac{\frac{3!}{0!(3-0)!}\ \ \frac{7!}{5!(7-5)!}}{\frac{10!}{5!(10-5)!}} = \frac{\frac{7 \times 6}{2 \times 1}}{\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}} = 0.0833$$

Lo anterior indica que un plan de muestreo simple para el cual se mantenga fijo el tamaño de la muestra, aun cuando se incremente el número de elementos defectuosos en los lotes, o el número total de elementos en estos últimos, proporciona buena protección en contra de la aceptación errónea de lotes malos.

2.2 Curva característica de operación

Dentro de un plan de muestreo simple, al considerar un número fijo de aceptación, c, y cuando se obtiene una muestra aleatoria de n artículos de un lote para saber si éste se acepta o no, es evidente que se desconoce el número total de artículos defectuosos, M, dentro del mismo. Para que este número se pudiera conocer en forma precisa, se requeriría haber realizado una inspección al 100% en el lote, pero entonces no tendría caso el considerar un plan de muestreo simple.

Por lo anterior, para realizar el cálculo de la probabilidad de aceptación de un lote determinado cuando se desconoce el valor de M, se debe introducir una modificación dentro de la fórmula 2.1. Para ello, considérese que si se divide el número de elementos defectuosos entre el total de elementos para un lote determinado, se obtiene la *fracción de defectuosos*

$$p = \frac{M}{N} \qquad (2.2)$$

en el lote. Si p se multiplica por 100, se obtiene el *porcentaje de elementos defectuosos* en dicho lote.

Puesto que M puede tomar dentro de un lote de tamaño N cualquiera de los N + 1 valores 0,1,2,3,...,N-1,N, p puede asumir entonces los N + 1 valores, 1/N, 2/N, 3/N,..., $^{N-1}/N$, 1. Por lo tanto, la probabilidad de aceptación P (A) únicamente se puede definir para los valores mencionados de p.

Si en la ec 2.2 se despeja el valor de M, se obtiene

$$M + Np$$

en forma tal que la ec 2.1 se puede escribir como

$$P\ (A;\ p) = P\ \{X \leq c\} = \sum_{X=0}^{c} \frac{C_X^{Np}\ \ C_{n-X}^{N-Np}}{C_n^N} \qquad (2.3)$$

siendo las probabilidades así obtenidas hipergeométricas.

Si se mantienen fijos los valores de n y c, se pueden graficar las probabilidades de aceptación de un lote en función de los valores de la fracción de elementos defectuosos en el mismo, es decir, de los valores de p. Dicha gráfica contendrá N + 1 puntos, a través de los cuales se puede dibujar la llamada *curva característica de operación* (o curva CO) de un plan de muestreo simple.

Ejemplo 2.2

La fábrica Z elabora cartuchos de dinamita, y los empaca en cajas de 20 unidades. El comprador W acepta cada caja únicamente si al extraer una muestra de dos cartuchos encuentra que ambos son buenos. Elaborar la curva característica de operación correspondiente.

Solución

En este caso, se tiene que N = 20, n = 2 y c = 0. Por lo tanto, las probabilidades de aceptación son, empleando la ec 2.3

$$P\ (A;p) = P\ \{X \leq 0\} = \frac{C_0^{20p}\ \ C_{2-0}^{20-20p}}{C_2^{20}}$$

$$= \frac{\frac{20p!}{0!(20p-0)!} \quad \frac{(20-20p)!}{2!(20-20p-2)!}}{\frac{20!}{2!(20-2)!}} =$$

$$= \frac{\frac{20p!}{0!20p!} \quad \frac{(20-20p)!}{2\times1\times(18-20p)!}}{\frac{20!}{2\times1\times18!}} = \frac{18!(20-20p)!}{20!(18-20p)!} =$$

$$= \frac{(20 - 20p)\ (19 - 20p)}{380}$$

Si se le asignan a p los 21 valores 0, 1/20, 2/20, 3/20, ...,19/20,1, se obtienen los correspondientes de P (A; p). Por ejemplo, para p = 10/20 = 0.5, la probabilidad de aceptación es

$$P\ (A;\ 0.5) = \frac{[20\ -\ 20(10/20)]\ [19\ -\ 20\ (10/20)]}{380}$$

$$= \frac{(20\ -\ 10)\ (19\ -\ 10)}{380} = \frac{(10)\,(9)}{380} = \frac{90}{380} = 0.237$$

Siguiendo el procedimiento anterior, se obtienen los puntos siguientes:

p	P (A; p)
0/20 = 0.00	1.000
1/20 = 0.05	0.900
2/20 = 0.10	0.805
3/20 = 0.15	0.716
4/20 = 0.20	0.632
5/20 = 0.25	0.553
6/20 = 0.30	0.479
7/20 = 0.35	0.411
8/20 = 0.40	0.347
9/20 = 0.45	0.289
10/20 = 0.50	0.237
11/20 = 0.55	0.189
12/20 = 0.60	0.147
13/20 = 0.65	0.111
14/20 = 0.70	0.079
15/20 = 0.75	0.053
16/20 = 0.80	0.032
17/20 = 0.85	0.016
18/20 = 0.90	0.005
19/20 = 0.95	0.000
20/20 = 1.00	0.000

La curva característica de operación correspondientes es la que se hace pasar por los puntos anteriores, y se presenta en la Fig 2.1.

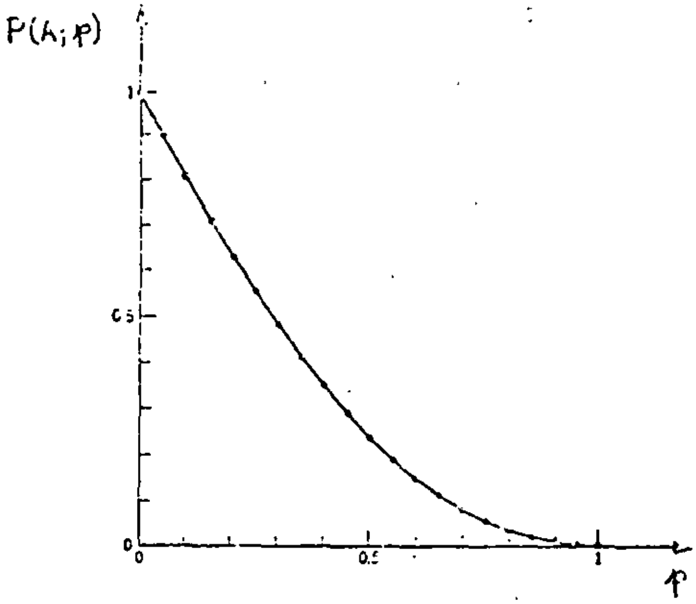


Fig 2.1 Curva CO para un plan de muestreo simple, con N = 20, n = 2 y c = 0.

En la Fig 2.1 se puede observar que a medida que se hace más grande la fracción de defectuosos en el lote (o el número de artículos defectuosos), la probabilidad de aceptación del mismo se va haciendo cada vez menor. Los casos extremos se dan en p = 0, en que la aceptación del lote es un evento seguro, y en p = 1, cuando es imposible aceptarlo.

2.3 Empleo de la aproximación binomial para construir la curva CO

En la mayor parte de los casos prácticos, el porcentaje de artículos defectuosos en un lote será pequeño (menor del 10%), en tanto que el tamaño del mismo será muy grande (1000 elementos, 10000 elementos, etc), y el de la muestra usualmente será varias veces menor, de tal manera que es posible aproximar las probabilidades dadas por la distribución hipergeométrica (ecs 2.1 y 2.3) empleando la distribución binomial. En particular, la aproximación es buena cuando N $\leq$ 10 n. En estos casos, se puede escribir

$$P\ (A;\ p) = P\ \{X \leq c\} \doteq \sum_{X=0}^{c} C_X^n\ p^X\ (1-p)^{n-X} \qquad (2.4)$$

Se debe observar que siempre se define a p como en la ec 2.2, y que serán mejor aproximadas por la ecuación anterior aquellas probabilidades de aceptación para las cuales el valor de p sea pequeño.

Ejemplo 2.3

En el caso del ejemplo 2.2 anterior, aproxímense las probabilidades de aceptación hipergeométricas para los distintos valores de p mediante la distribución binomial.

Solución

En este caso sí es posible realizar la aproximación pedida, ya que se verifica la condición N $\geq$ 10n, porque siendo N = 20 y n = 2, se tiene que 20 $\geq$ 10(2). Por ejemplo, para p = 0.2, la aproximación binomial dada por la ec 2.4 conduce al valor

$$P\ (A\ ;\ 0.2) = P\ \{X \leq 0\} = C_0^2\ \ (0.2)^0\ (1-0.2)^{2-0}$$

$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!}\ \ (0.8)^2 = 0.640$$

en contra del valor exacto 0.632 obtenido mediante la ec 2.3.

Procediendo en forma similar se calculan los restantes valores de P (A; p), los cuales se presentan de 0.1 en 0.1 en la tabla siguiente, junto con los anteriormente obtenidos en el ejemplo 2.2 para fines de comparación.

p	Hipergeométrica P (A; p)	Binomial P (A; p)
0.00	1.000	1.000
0.10	0.805	0.810
0.20	0.632	0.640
0.30	0.479	0.490
0.40	0.347	0.360
0.50	0.237	0.250
0.60	0.147	0.160
0.70	0.079	0.090
0.80	0.032	0.040
0.90	0.005	0.010
1.00	0.000	0.000

En la tabla se puede observar que las probabilidades de aceptación se aproximan bastante más a las exactas cuando el valor de p se encuentra en la vecindad de p = 0.10.

2.4 Empleo de la aproximación de Poisson para construir la curva CO

Como ya se vio, la distribución hipergeométrica se puede aproximar adecuadamente mediante la binomial cuando $N \geq 10$ y $p \leq 0.1$. A su vez, la distribución binomial puede aproximarse suficientemente bien mediante la de Poisson cuando se cumple lo anterior y np es menor de 15, lo cual evita en ocasiones la gran cantidad de labor numérica que se requiere para calcular las probabilidades de aceptación mediante las distribuciones hipergeométrica y binomial.

Entonces, si se hace $\lambda = np$ para la distribución de Poisson, se puede escribir

$$P\ (A;\ p) = P\ \{X \leq c\} \doteq e^{-np} \sum_{X=0}^{c} \frac{(np)^X}{X!}$$

La aproximación anterior es muy útil cuando los lotes son grandes, ya que como se puede apreciar, la ec 2.4 no requiere del manejo de dicho dato para el cálculo de las probabilidades de aceptación que se emplean para construir la curva CO.

Ejemplo 2.4

Obténganse los valores de P (A; p) para p = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5 y 1.0 en el caso del plan de muestreo simple del ejemplo 2.2, aproximando mediante la distribución de Poisson.

Solución

Se sabe que n = 2 y c = 0, por lo que

$$np = 2(0) = 0\ ; \qquad P\ (A;\ 0) = \frac{e^{-0}\ \ 0^0}{0!} = 1$$

$$np = 2(0.1) = 0.2; \quad P\ (A;\ 0.1) = \frac{e^{-0.2}\ \ 0.2^0}{0!} = 0.818$$

$$np = 2(0.2) = 0.4; \quad P\ (A;\ 0.2) = \frac{e^{-0.4}\ \ 0.4^0}{0!} = 0.670$$

$$np = 2(0.3) = 0.6; \quad P\ (A;\ 0.3) = \frac{e^{-0.6}\ \ 0.6^0}{0!} = 0.549$$

$$np = 2(0.5) = 1.0; \quad P\ (A;\ 0.5) = \frac{e^{-1.0}\ \ 1.0^0}{0!} = 0.367$$

$$np = 2(1.0) = 2.0; \quad P\ (A;\ 1.0) = \frac{e^{-2.0}\ \ 2.0^0}{0!} = 0.135$$

En la siguiente tabla se comparan los valores hipergeométricos exactos con los obtenidos mediante las aproximaciones binomial y de Poisson.

p	P (A;p) Hipergeométrica	P (A; p) Binomial	P (A;p) Poisson
0	1.000	1.000	1.000
0.1	0.805	0.810	0.818
0.2	0.632	0.640	0.670
0.3	0.479	0.490	0.549
0.5	0.237	0.250	0.367
1.0	0.000	0.000	0.135

Como se puede observar en la tabla anterior, las probabilidades de aceptación calculadas con la fórmula de Poisson difieren bastante de las exactas y de las binomiales cuando p no se encuentra cercano al valor 0.1. Sin embargo, hay que considerar que en el problema anterior los tamaños del lote y la muestra son bastante pequeños, por lo que la aproximación de Poisson no puede ser muy buena.

De hecho, la forma práctica para construir las curvas CO se fundamenta en el método aproximado de Poisson, considerando que los lotes que entrega el productor son muy grandes, y haciendo uso de la tabla 2.1 que se presenta adelante, en la cual se proporcionan, en función del número de aceptación c y del valor λ = np, las probabilidades de aceptación

$$P\ (A;\ p) = P\ \{X \le c\} = e^{-np} \sum_{X=0}^{c} \frac{(np)^{X}}{X!}$$

multiplicadas por mil.

TABLA 2.1

TERMINOS ACUMULATIVOS DE LA APROXIMACION DE POISSON A BINOMIAL

c np	0	1	2	3	4	5	6	7	8	c np
0.02	980	1000	....	....	....	....	....	....	....	0.02
0.04	961	999	1000	....	....	....	....	....	....	0.04
0.06	942	998	1000	....	....	....	....	....	....	0.06
0.08	923	997	1000	....	....	....	....	....	....	0.08
0.10	905	995	1000	....	....	....	....	....	....	0.10
0.15	861	990	999	1000	....	....	....	....	....	0.15
0.20	819	982	999	1000	....	....	....	....	....	0.20
0.25	779	974	998	1000	....	....	....	....	....	0.25
0.30	741	963	996	1000	....	....	....	....	....	0.30
0.35	705	951	994	1000	....	....	....	....	....	0.35
0.40	670	938	992	999	1000	....	....	....	....	0.40
0.45	638	925	989	999	1000	....	....	....	....	0.45
0.50	607	910	986	998	1000	....	....	....	....	0.50
0.55	577	894	982	998	1000	....	....	....	....	0.55
0.60	549	878	977	997	1000	....	....	....	....	0.60
0.65	522	861	972	996	999	1000	....	....	....	0.65
0.70	497	844	966	994	999	1000	....	....	....	0.70
0.75	472	827	959	993	999	1000	....	....	....	0.75
0.80	449	809	953	991	999	1000	....	....	....	0.80
0.90	407	772	937	987	998	1000	....	....	....	0.90
1.00	368	736	920	981	996	999	1000	....	....	1.00
1.10	333	699	900	974	995	999	1000	....	....	1.10
1.20	301	663	879	966	992	998	1000	....	....	1.20
1.30	273	627	857	957	989	998	1000	....	....	1.30
1.40	247	592	833	946	986	997	999	1000	....	1.40
1.50	223	558	809	934	981	996	999	1000	....	1.50
1.60	202	525	783	921	976	994	999	1000	....	1.60
1.70	183	493	757	907	970	992	998	1000	....	1.70
1.80	165	463	731	891	964	990	997	999	1000	1.80
1.90	150	434	704	875	956	987	997	999	1000	1.90
2.00	135	406	677	857	947	983	995	999	1000	2.00
2.10	122	380	650	839	938	980	994	999	1000	2.10
2.20	110	354	622	819	927	974	993	998	1000	2.20
2.30	100	331	596	799	916	970	991	997	999	2.30
2.40	091	308	570	779	904	964	988	997	999	2.40
2.50	082	287	544	758	891	958	986	996	999	2.50
2.60	074	267	518	736	877	951	983	995	999	2.60
2.70	067	249	494	714	862	943	979	993	998	2.70
2.80	061	231	469	692	848	935	976	992	998	2.80
2.90	055	215	446	670	832	926	971	990	997	2.90
3.00	050	199	423	647	815	916	966	988	996	3.00
3.10	045	185	401	625	798	906	961	986	995	3.10
3.20	041	171	380	603	781	895	955	983	994	3.20
3.30	037	159	359	580	763	883	949	980	993	3.30
3.40	033	147	340	558	744	871	942	977	992	3.40
3.50	030	136	321	537	725	858	935	973	991	3.50
3.60	027	126	303	515	706	844	927	969	988	3.60
3.70	025	116	285	494	687	830	918	965	986	3.70
3.80	022	107	269	473	668	816	909	960	984	3.80
3.90	020	099	253	453	648	801	899	955	981	3.90
4.00	018	092	238	433	629	785	889	949	979	4.00
4.10	017	085	224	414	609	769	879	943	976	4.10
4.20	015	078	210	395	590	753	867	936	972	4.20
4.30	014	072	197	377	570	737	856	929	968	4.30
4.40	012	066	185	359	551	720	844	921	964	4.40
4.50	011	061	174	342	532	703	831	913	960	4.50
4.60	010	056	163	326	513	686	818	905	955	4.60
4.70	009	052	152	310	495	668	805	896	950	4.70
4.80	008	048	143	294	476	651	791	887	944	4.80
4.90	007	044	133	279	458	634	777	877	938	4.90

c np	0	1	2	3	4	5	6	7	8	c np
5.00	007	040	125	265	440	616	762	867	932	5.00
5.10	006	037	116	251	423	598	747	856	925	5.10
5.20	006	034	109	238	406	581	732	845	918	5.20
5.30	005	031	102	225	390	563	717	833	911	5.30
5.40	004	029	095	213	373	546	702	822	903	5.40
5.50	004	027	088	202	358	529	686	809	894	5.50
5.60	004	024	082	191	342	512	670	797	886	5.60
5.70	003	022	077	180	327	495	654	784	877	5.70
5.80	003	021	072	170	313	478	638	771	867	5.80
5.90	003	019	067	160	299	462	622	758	857	5.90
6.00	002	017	062	151	285	446	606	744	847	6.00
6.10	002	016	058	143	272	430	590	730	837	6.10
6.20	002	015	054	134	259	414	574	716	826	6.20
6.30	002	013	050	126	247	399	558	702	815	6.30
6.40	002	012	046	119	235	384	542	687	803	6.40
6.50	002	011	043	112	224	369	527	673	792	6.50
6.60	001	010	040	105	213	355	511	658	780	6.60
6.70	001	009	037	099	202	341	495	643	767	6.70
6.80	001	009	034	093	192	327	480	628	755	6.80
6.90	001	008	032	087	182	314	465	614	742	6.90
7.00	001	007	030	082	173	301	450	599	729	7.00
7.20	001	006	025	072	156	276	420	569	703	7.20
7.40	001	005	022	063	140	253	392	539	676	7.40
7.60	000	004	019	055	125	231	365	510	648	7.60
7.80	...	004	016	048	112	210	338	481	620	7.80
8.00	...	003	014	042	100	191	313	453	593	8.00
8.20	...	003	012	037	089	174	290	425	565	8.20
8.40	...	002	010	032	078	157	267	399	537	8.40
8.60	...	002	009	028	070	142	246	373	509	8.60
8.80	...	001	007	024	062	123	226	348	482	8.80
9.00	...	001	006	021	055	116	207	324	456	9.00
9.20	...	001	005	018	049	104	189	301	430	9.20
9.40	...	001	005	016	043	093	173	279	404	9.40
9.60	...	001	004	014	038	084	157	258	380	9.60
9.80	...	001	003	012	033	075	143	239	356	9.80
10.00	...	001	003	010	029	067	130	220	333	10.00
10.20	...	000	002	009	026	060	118	203	311	10.20
10.40	...	...	002	008	023	053	107	186	290	10.40
10.60	...	...	002	007	020	045	097	171	269	10.60
10.80	...	...	001	006	017	042	087	157	250	10.80
11.00	...	...	001	005	015	037	079	143	232	11.00
11.20	...	...	001	004	013	033	071	131	215	11.20
11.40	...	...	001	004	012	029	064	119	198	11.40
11.60	...	...	001	003	010	026	057	108	183	11.60
11.80	...	...	001	003	009	023	051	095	169	11.80
12.00	...	...	001	002	008	020	046	089	155	12.00
12.20	...	...	000	002	007	018	041	081	143	12.20
12.40	...	...	...	002	006	016	037	073	131	12.40
12.60	...	...	...	001	005	014	033	066	120	12.60
12.80	...	...	...	001	004	012	029	060	109	12.80
13.00	...	...	...	001	004	011	026	054	100	13.00
13.20	...	...	...	001	003	009	023	049	091	13.20
13.40	...	...	...	001	003	008	020	044	083	13.40
13.60	...	...	...	001	002	007	017	039	075	13.60
13.80	...	...	...	001	002	006	016	035	068	13.80
14.00	...	...	...	000	002	006	014	032	062	14.00
14.20	...	...	...	...	002	005	013	028	056	14.20
14.40	...	...	...	...	001	004	011	025	051	14.40
14.60	...	...	...	...	001	004	010	023	046	14.60
14.80	...	...	...	...	001	003	009	020	042	14.80
15.00	...	...	...	...	001	003	008	018	037	15.00

A continuación se presenta un ejemplo práctico de construcción de una curva CO mediante el método descrito, haciendo uso de la tabla 2.1.

Ejemplo 2.5

Supóngase que un receptor de producto terminado adopta el plan de muestreo simple siguiente:

a. Recibe lotes de ciertos artículos con 1000 unidades c/u.

b. Extrae de cada lote una muestra aleatoria de 20 artículos.

c. Si la muestra extraída contiene dos o más artículos defectuosos, rechaza el lote. De no ser así, lo acepta.

Constrúyase la curva CO correspondiente.

Solución

Puesto que el tamaño de los lotes es grande, se pueden aproximar adecuadamente las probabilidades de aceptación mediante la distribución de Poisson. Para ello, se considera en la práctica que con los valores

$$P\ (A;\ p) = 0.98,\ 0.95,\ 0.70,\ 0.50,\ 0.20,\ 0.10,\ 0.05,\ 0.02$$

se puede definir suficientemente bien la curva CO.

Para construir la curva del plan de muestreó simple indicado, considérese que c = 1 y n = 20. En la columna para la cual c = 1 en la tabla 2.1, se puede ver que el valor más cercano a 980 (0.98 de probabilidad) es 982. Para dicho valor, el correspondiente de np es 0.2, siendo por lo tanto $p = \frac{np}{n} = \frac{0.2}{20} = 0.01$.

El valor más cercano a 950 (0.95 de probabilidad) es en la tabla el 951. Para este valor, np = 0.35 y $p = \frac{0.35}{20} = 0.0175$.

Siguiendo el procedimiento anterior, se llega a

P (A;p)	np	p
1.000	0.00	0.000
0.982	0.20	0.010
0.951	0.35	0.0175
0.699	1.10	0.055
0.493	1.70	0.085
0.199	3.00	0.150
0.099	3.90	0.195
0.052	4.70	0.235
0.021	5.80	0.290
0.000	20.00	1.000

En la Fig 2.2 siguiente se presenta la curva característica de operación correspondiente al problema.

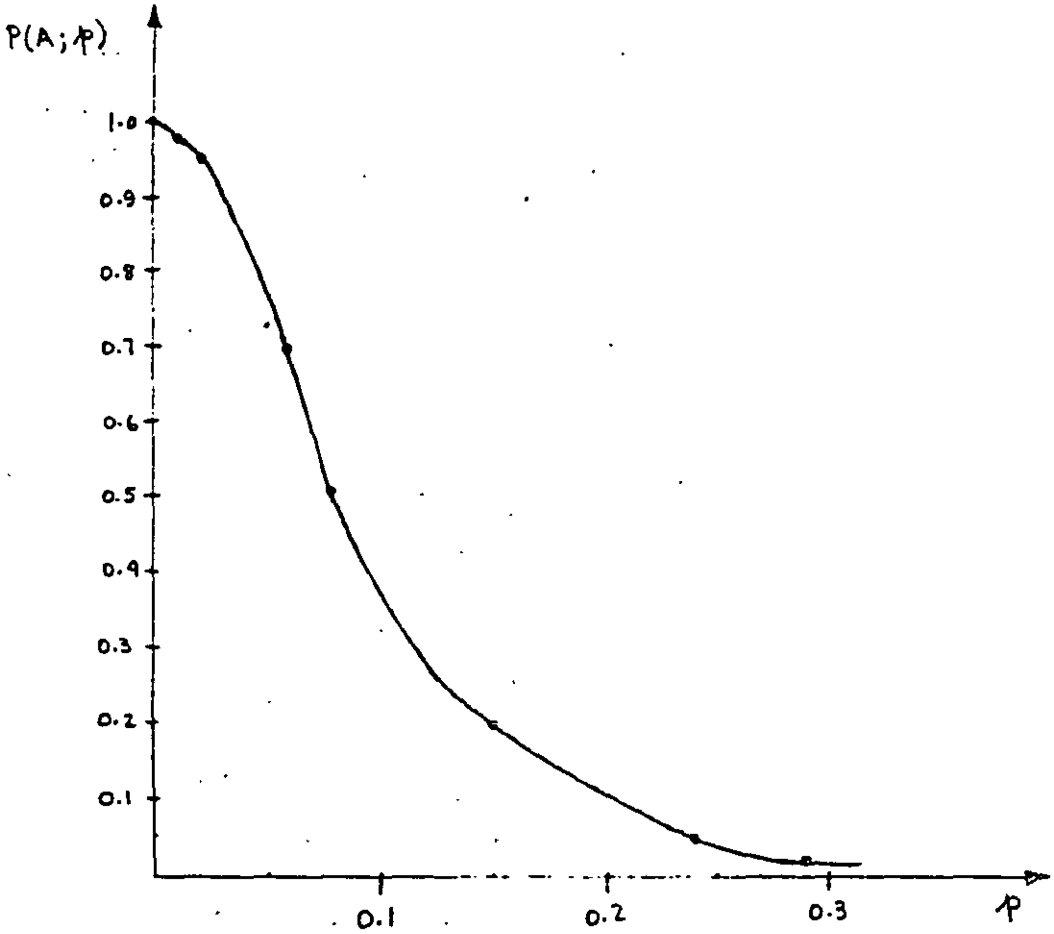


Fig 2.2 Curva característica de operación para plan de muestreo simple con lote grande, c = 1 y n = 20.

2.5 Riesgos en el muestreo de aceptación

Al realizarse los muestreos de aceptación, el productor y el receptor de lotes de artículos tienen intereses distintos al definir un plan de muestreo. El productor puede pedir que la probabilidad, α, de rechazar un lote "bueno" o "aceptable" sea pequeña. Por su parte, el receptor puede exigir que la probabilidad de aceptar un lote "malo" o "no aceptable" sea una cantidad pequeña β.

Para cumplir con ambos compromisos, supóngase que productor y receptor deciden que un lote para el cual p es menor o igual que ciero número p_o es un *lote aceptable*, en tanto que un lote para el que p es mayor o igual que cierto número p_1 $(p_1 > p_o)$ es un lote *no aceptable*, es decir

Si $p \leq p_o$ lote aceptable

Si $p \geq p_1$ lote no aceptable

De acuerdo con lo anterior, α es la probabilidad de rechazar un lote con $p \leq p_o$ y se llama *riesgo del productor*, correspondiendo al error de tipo I que se comete al probar una hipótesis estadística. Por otra parte, β es la probabilidad de aceptar un lote con $p \geq p_1$, se llama *riesgo del receptor*, y corresponde al error de tipo II que se comete al realizar una prueba de hipótesis.

A p_o se le acostumbra llamar *nivel de calidad aceptable* (NCA), y a p_1 *nivel de calidad rechazable* (NCR), o *porcentaje de defectuosos tolerable en un lote* (PDTL). A un lote con $p_o < p < p_1$ se le llama *lote indiferente.*

En la práctica es usual que el acuerdo entre productor y receptor establezca lo siguiente

α = Riesgo del productor $\approx$ $1 - P(A;\ p)_{0.95} = 0.05$

β = Riesgo del receptor $\approx$ $P\ (A;\ p)_{0.10} = 0.10$

Ejemplo 2.6

Para un plan de muestreo simple en el que $n = 300$ y $c = 5$, obténganse los valores de p_o y p_1.

Solución

Empleando la tabla 2.__ y considerando los valores P (A; p) que definen adecuadamente a la curva CO, se obtiene:

P (A;p)	np	p
1.000	0.00	0.0000
0.980	2.10	0.0070
0.951	2.60	0.0087
0.703	4.50	0.0150
0.495	5.70	0.0190
0.210	7.80	0.0260
0.104	9.20	0.0307
0.048	10.60	0.0353
0.020	12.00	0.0400
0.000	300.00	1.0000

De acuerdo con la tabla, se tiene que

$$\alpha = 1 - P(A;\ p)_{0.951} = 0.0499\ ;\ p_o = 0.0087$$

$$\beta = P(A;\ p)_{0.104} = 0.104\ ;\ p_1 = 0.0307$$

En la Fig 2.3 que se presenta a continuación, se muestra la curva CO del plan simple en cuestión, así como los valores del NCA y del NCR.

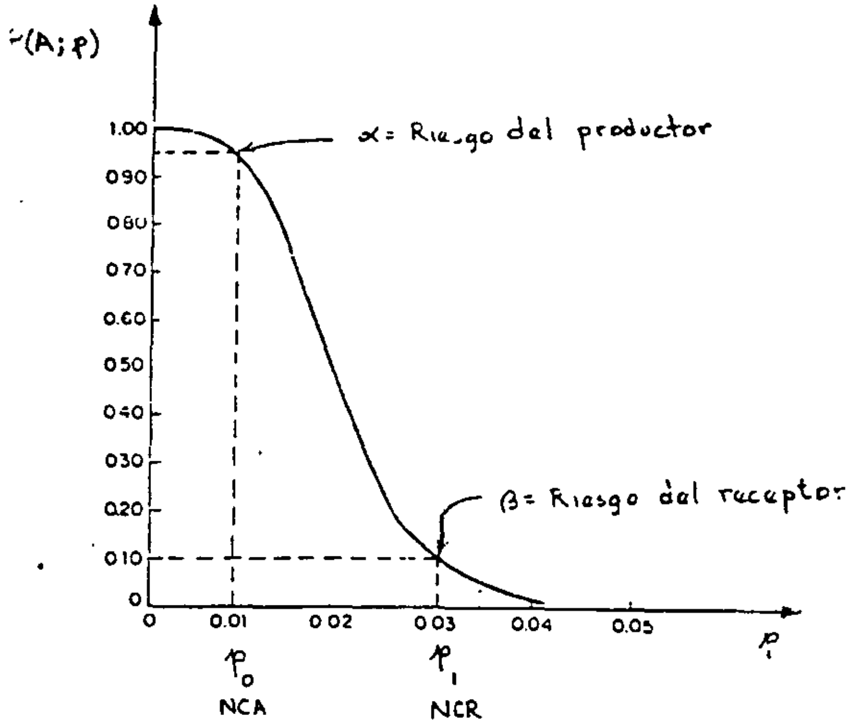


Fig 2.3 Curva CO para plan de muestreo simple con n = 300 y c = 5.

2.6 Cálculo de n y c a partir de p_o, p_1, α y β.

Al observar la Fig 2.3 se puede concluir que los puntos (p_o, 1 -α) y (p_1, β) se localizan en la curva CO. Tomando ello en cuenta, existe un método iterativo aproximado para determinar los valores de n y c, considerando conocidos los de p_o, p_1, α y β, de manera que la curva CO pase muy cerca de los puntos mencionados. Dicho procedimiento se expondrá en el ejemplo que sigue, haciendo uso de la tabla 2.1.

Ejemplo 2.7

Para cierto plan de muestreo simple, se fijan los riesgos siguientes:

a. Productor: Aquellos lotes que contengan un 1% de artículos defectuosos se rechazarán en el 5% de los casos.

b. Receptor: Los lotes que contengan un 6% de artículos defectuosos se aceptarán en el 10% del total de casos.

¿Cuáles son los valores del tamaño de la muestra y del número de aceptación que se deben emplear para dicho plan?

Solución

De acuerdo con los datos del problema, se desprende que

$$\alpha = 0.05 \quad ; \quad p_o = 0.01$$

$$\beta = 0.10 \quad ; \quad p_1 = 0.06$$

a. Se considera c = 0, con lo cual, de la tabla 2.1,

np_o (para $\alpha = 0.05$ o $P(A;\ 0.01) = 0.95$) $\doteq 0.05$

np_1 (para $\beta = 0.10$) $= 2.30$

Entonces

$$n_\alpha = \frac{np_o}{p_o} = \frac{0.05}{0.01} = 5$$

$$n_\beta = \frac{np_1}{p_1} = \frac{2.30}{0.06} = 38$$

Obviamente, se debe verificar que $n_\alpha = n_\beta$; no siendo este el caso, se hace ahora c = 1.

b. Se considera c = 1, obteniéndose ahora de la tabla 2.1 lo siguiente

$$np_o \text{ (para } \alpha = 0.05) \doteq 0.35$$

$$np_1 \text{ (para } \beta = 0.10) \doteq 3.90$$

Por lo tanto

$$n_\alpha = \frac{0.35}{0.01} = 35$$

$$n_\beta = \frac{3.90}{0.06} = 65$$

Tampoco se verifica q[illegible] n_β ; por lo tanto, se hace c = 2.

c. Se considera c = 2, y

$$np_o \text{ (para } \alpha = 0.05) \doteq 0.82$$

$$np_1 \text{ (para } \beta = 0.10) \doteq 5.32$$

Ahora, se tiene que

$$n_\alpha = \frac{0.82}{0.01} = 82$$

$$n_\beta = \frac{5.30}{0.06} = 88$$

Ahora n_α y n_β se parecen bastante, pero aún no son iguales. Por lo tanto, se hace c = 3 para saber si la diferencia se hace más pequeña.

d. Se considera c = 3, y se obtiene

$$np_o \text{ (para } \alpha = 0.05) \doteq 1.37$$

$$np_1 \text{ (para } \beta = 0.10) \doteq 6.68$$

Luego

$$n_\alpha = \frac{1.37}{0.01} = 137$$

$$n_\beta = \frac{6.68}{0.06} = 112$$

Se observa que ahora la diferencia se hace más grande, por lo que el valor real de n se debe encontrar entre 82 y 88 elementos para c = 2. Con el fin de ajustar adecuadamente el valor de n, se puede hacer

$$n = \frac{n_\alpha + n_\beta}{2} = \frac{82 + 88}{2} = 85$$

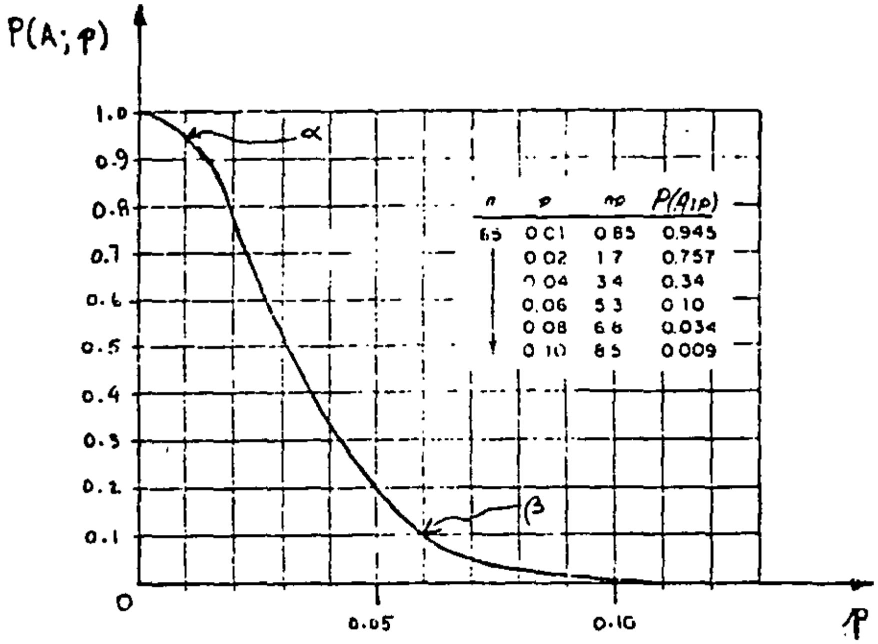
Por lo tanto, el plan de muestreo simple es el siguiente

$\alpha = 0.05$; $\beta = 0.10$

$p_o = 0.01$; $p_1 = 0.06$

$n = 85$; $c = 2$

cuya curva CO se muestra en la Fig 2.4.



n	p	np	P(A;p)
65	0 01	0 85	0.945
↓	0 02	1 7	0.757
	0 04	3 4	0.34
	0.06	5 3	0 10
	0 08	6 6	0.034
	0 10	8 5	0 009

Fig 2.4 Curva CO ajustada para α, β, p_o y p_1 conocidos.

2.7 Comentarios sobre la curva CO

Al comparar las curvas CO de las Figs 2.3 y 2.4, se puede observar que, no obstante el número más grande de artículos defectuosos que permite en la muestra el plan de muestreo asociado, a la curva CO de la Fig 2.3, se trata de un mejor plan de aceptación de lotes, en el sentido de que proporciona riesgos más favorables al receptor.

En efecto, ambos planes consideran $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.10$ y $p_o \approx 0.01$, pero el plan de la Fig 2.4 aceptará lotes con 6% de defectuosos ($p_1 \approx 0.06$) en el 10% del total de casos, en tanto que el de la Fig 2.3 aceptará lotes con 3% de defectuosos ($p_1 \approx 0.03$)

en el mismo número de casos.

En muchas ocasiones no se comprende con claridad el porqué de un número de aceptación mayor de cero en los planes de muestreo. Si se observa la Fig 2.5, se puede apreciar que las curvas CO (a), (b) y (c) corresponden a planes de muestreo que evitan los artículos defectuosos en la muestra (c = 0), pero que tienen riesgos de productor y receptor distintos. Los planes de las curvas CO (d) y (e) consideran 4 y 7 defectuosos en la muestra, respectivamente.

Se observa que las curvas CO con c = 0 se caracterizan por patrones cóncavos, en tanto que aquellas con c $\neq$ 0 semejan curvas S invertidas.

Los planes de muestreo con c = 0 usualmente penalizan más al productor. Asimismo, aquellos planes en que c es mayor de cero proporcionan riesgos más favorables al productor o al receptor, y en muchos casos a ambos.

Se puede afirmar que el riesgo para el receptor se hace más pequeño conforme se incrementa el tamaño de la muestra, en tanto que el riesgo para el productor decrece conforme se permiten uno o más artículos defectuosos en la misma. Esto se puede aclarar si se observan los riesgos en las curvas (c) y (d) de la Fig 2.5.

Las curvas (d) y (e) consideran esencialmente el mismo riesgo para el productor (NCA $\approx$ 0.01 en α = 0.05), pero la (e) considera un tamaño de muestra mayor, por lo que el receptor corre un riesgo menor. La curva (f) corresponde a la curva ideal CO, ya que ese plan de muestreo acepta todos los lotes con uno por ciento o menos de artículos defectuosos, y rechaza todos los lotes que contengan más del 1% de defectuosos. Dicha curva obviamente no se puede obtener con las técnicas usuales de muestreo de aceptación.

Lo anterior indica que un plan de muestreo simple será más efectivo en tanto su curva CO correspondiente se asemeje más a la curva ideal de operación.

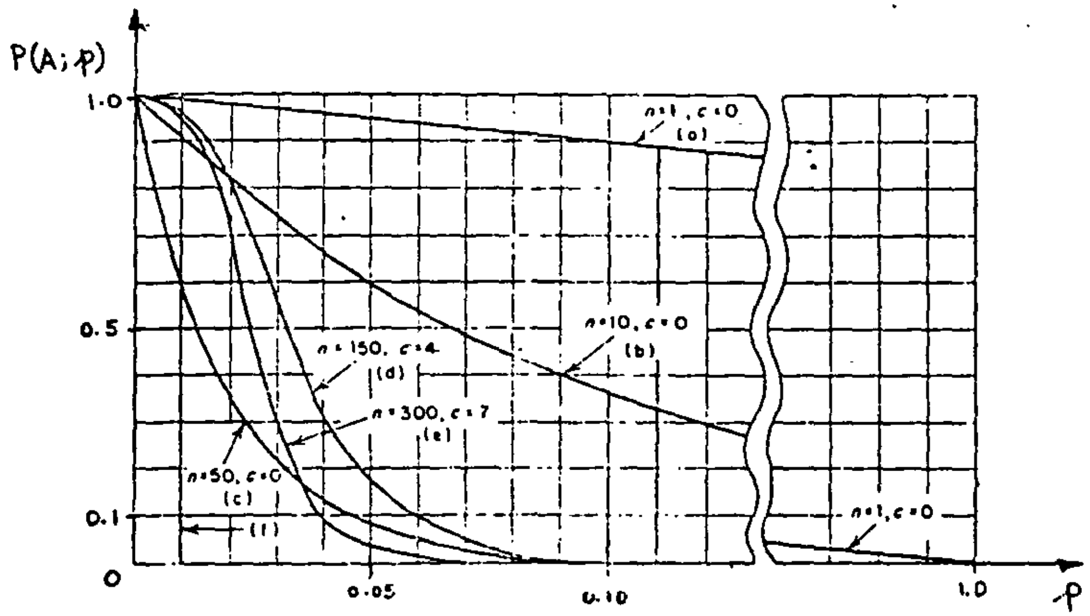


Fig 2.5 Distintos planes de muestreo con c = 0 y c ≠ 0.

3. Plan de muestreo doble

Un plan de muestreo simple requiere que se tome una decisión sobre la aceptación o rechazo de un lote tomando como base la evidencia de una muestra extraída del mismo.

Sin embargo, un *plan de muestreo doble* implica la posibilidad de posponer la decisión sobre la aceptación o rechazo de un lote hasta que *una segunda* muestra haya sido extraída. Dicho lote podrá ser aceptado inmediatamente si la primera muestra es muy buena, o rechazado enseguida si la primera muestra es bastante mala. Si la primera muestra no es ni muy buena ni muy mala, la decisión se basa en la evidencia de la primera y segunda muestras combinadas.

En general, los planes de muestreo doble conducen a menos inspección total que los planes sencillos, y también proporcionan la ventaja sicológica que conlleva la idea de dar una segunda oportunidad a los lotes dudosos.

3.1 Símbolos en el muestreo doble

Los siguientes son los símbolos empleados en conexión con el muestreo doble:

N = tamaño del lote
n_1 = tamaño de la primera muestra
c_1 = número de aceptación para la primera muestra
n_2 = tamaño de la segunda muestra
$n_1 + n_2$ = tamaño de la muestra combinada
c_2 = número de aceptación para la muestra combinada

3.2 Interpretación del plan de muestreo doble

Considérese un plan de muestreo doble para el cual se fijan los valores de N, n_1, c_1, n_2 y c_2 ($c_2 > c_1$). La interpretación del proceso que se realiza con dicho plan es la siguiente:

a. Se inspecciona una primera muestra de tamaño n_1 extraída del lote de tamaño N.

b. Se acepta el lote si la muestra anterior contiene c_1 o menos artículos defectuosos.

c. Se rechaza el lote si el número de defectuosos en la muestra excede el valor c_2

d. Si la primera muestra contiene $c_1 + 1$, $c_1 + 2$, ... o c_2 artículos defectuosos, se extrae e inspecciona una segunda con n_2 elementos.

e. Se acepta el lote sobre la base de la muestra combinada con $n_1 + n_2$ elementos si dicha muestra contiene c_2 artículos defectuosos o menos.

f. Se rechaza el lote si la muestra combinada contiene más de c_2 defectuosos.

3.2 Curva CO de un plan de muestreo doble

De acuerdo con lo que se ha explicado, existen cuatro posibilidades de que se acepte o se rechace un lote sometido para muestreo doble. Dichas posibilidades son

a. Aceptación después de la primera muestra.

b. Rechazo después de la primera muestra.

c. Aceptación después de la segunda muestra.

d. Rechazo después de la segunda muestra

Tomando como base lo anterior, se explicará a través del ejemplo siguiente la forma como se construye la curva CO para el plan de muestreo doble.

Ejemplo 3.1

Considérese el plan de muestreo doble para el cual el tamaño del lote es muy grande, $n_1 = 50$, $c_1 = 1$, $n_2 = 100$ y c_2 = [illegible].

Constrúyase la curva CO correspondiente.

Solución

Para determinar los puntos de la curva CO, es necesario calcular las probabilidades de que si se toma una segunda muestra el lote sea aceptado, para distintos valores de p. Para ilustrar lo anterior considérese inicialmente el valor p = 0.02.

Entonces, un lote puede ser aceptado según el plan anterior en cualquiera de las formas siguientes:

a. un defectuoso o menos en la primera muestra

b. dos defectuosos en la primera muestra, seguido de cero o un defectuoso en la segunda muestra

c. tres defectuosos en la primera muestra, seguidos de cero defectuosos en la segunda muestra.

La probabilidad de aceptar un lote es entonces igual a la suma de las probabilidades de estos diferentes modos por los cuales puede ser aceptado.

Inicialmente, se deben calcular las probabilidades de tener uno o menos, dos o menos y tres o menos defectuosos en la primera muestra. Lo anterior equivale a considerar un plan de muestreo simple para el cual $n_1 = 50$ y $c = 1, 2, 3$. A continua-

[illegible] se deben calcular las probabilidades de tener exactamente dos y tres defectuosos en la primera muestra.

Entonces, con $n_1 p = 50(0.02) = 1.00$, se obtiene, empleando la tabla 2.1 y siendo X el número de elementos defectuosos

$$P\{X \leq 1\}_1 = 0.736 \qquad c = 1 \quad , \quad n_1 p = 1.00$$

$$P\{X \leq 2\}_1 = 0.920 \qquad c = 2 \quad , \quad n_1 p = 1.00$$

$$P\{X \leq 3\}_1 = 0.981 \qquad c = 3 \quad , \quad n_1 p = 1.00$$

$$P\{X = 2\}_1 = P\{X \leq 2\}_1 - P\{X \leq 1\}_1 = 0.920-0.736 = 0.184$$

$$P\{X = 3\}_1 = P\{X \leq 3\}_1 - P\{X \leq 2\}_1 = 0.981-0.920 = 0.061$$

El subíndice fuera de la llave indica que la probabilidad del evento se calcula con base en la primera muestra.

Ahora bien, si en la primera muestra hay dos defectuosos, los cálculos relacionados con la segunda muestra deberán basarse en $n_2 p = 100(0.02) = 2$. El tomar la segunda muestra e inspeccionarla equivale, para efectos de los cálculos, a considerar un nuevo plan de muestreo simple para el resto del lote con número de aceptación igual a 1, ya que este elemento, sumado a los dos defectuosos considerados, permite la aceptación del lote.

Por lo tanto,

$$P\ \{X \leq 1\}_2 = 0.406 \qquad c = 1, \quad n_2p = 2$$

Si en la primera muestra hay tres defectuosos, los cálculos para la segunda muestra se deben basar en $n_2p = 100(0.02)$ y un número de aceptación igual a cero, es decir

$$P\ \{X \leq 0\}_2 = 0.135 \qquad c = 0\ , \ n_2p = 2$$

La probabilidad de aceptación es, empleando el concepto de independencia de eventos, la suma de las probabilidades siguientes:

P {un defectuoso o menos en la primera muestra} $= P\ \{X \leq 1\}_1 = 0.736$

+ P {dos defectuosos en la primera muestra, seguidos de cero o un defectuoso en la segunda} $= P\ \{X = 2\}_1\ P\{X \leq 1\}_2 = (0.184)(0.406) =$

$= 0.075$

+ P {tres defectuosos en la primera muestra, seguidos de cero defectuosos en la segunda} $= P\ \{X = 3\}_1\ P\{X \leq 0\}_2 = (0.061)(0.135) =$

$= 0.008$

Entonces,

$$P\ \{A;\ 0.02\} = 0.736 + 0.075 + 0.008 = 0.819$$

es decir, el punto (0.02, 0.819) se encuentra sobre la curva CO del plan de muestreo doble.

En la forma descrita anteriormente, se pueden calcular también los puntos restantes para definir la curva CO, quedando finalmente

P (A; p)	p
0.98	0.012
0.95	0.015
0.82	0.020
0.70	0.027
0.50	0.037
0.20	0.065
0.10	0.080
0.05	0.100
0.02	0.136

La gráfica de la curva CO correspondiente al plan de muestreo doble propuesto se presenta en la Fig 3.1

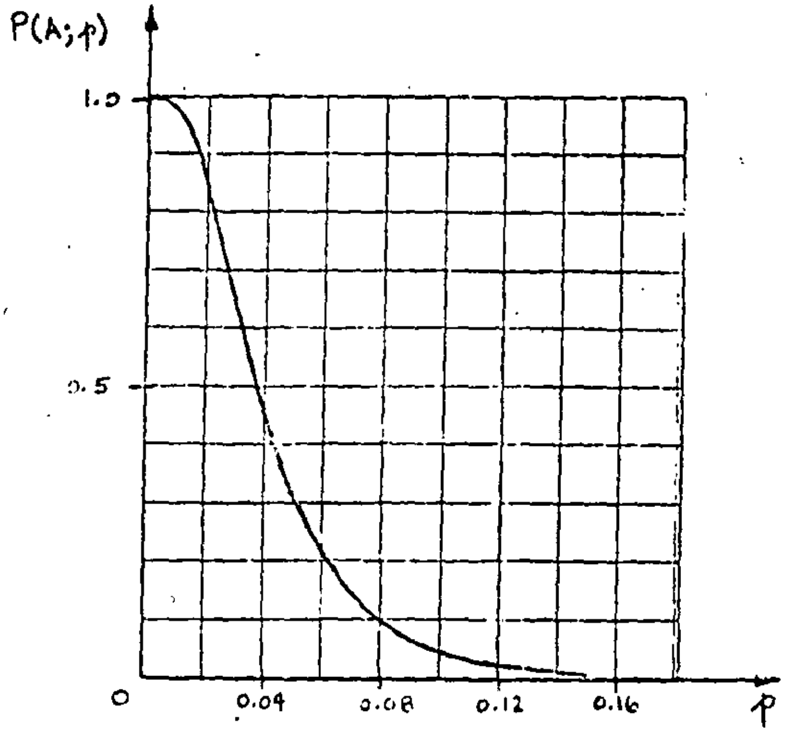


Fig 3.1 Curva CO para plan de muestreo doble con $n_1 = 50$, $c_1 = 1$, $n_2 = 100$, $c_2 = 3$.

4. Plan de muestreo múltiple

De la misma manera que los planes de muestreo doble pueden diferir la decisión sobre la aceptación o rechazo de un lote hasta que haya sido tomada una segunda muestra, otros planes pueden permitir la extracción de cierto número de muestras antes de que una decisión sea tomada.

Los planes de *muestreo múltiple* son usados cuando se permite la extracción de tres o más muestras de un tamaño prestablecido, y cuando la decisión sobre la aceptación o rechazo de un lote se debe tomar después de la séptima muestra extraída, considerando que no es permitida la aceptación de ese lote con la evidencia obtenida de la primera muestra.

4.1 Interpretación de un plan de muestreo múltiple

Considérese el siguiente plan de muestreo múltiple

Número de la muestra	Tamaño de la muestra individual	Tamaño de la muestra combinada	Número de aceptación, c	Número de rechazo, r
1	20	20	-	2
2	20	40	0	3
3	20	60	1	3
4	20	80	2	4
5	20	100	2	4
6	20	120	2	4
7	20	140	[illegible]	[illegible]

La forma de interpretar el plan anterior es la siguiente:

a. Se extrae e inspecciona una muestra de 20 elementos. Si dos o más son defectuosos, se rechaza el lote; si hay uno o cero defectuosos, se extrae e inspecciona una segunda muestra de 20 elementos. (La aceptación del lote no se permite con la primera muestra.)

b. Si en la muestra combinada (20 + 20 = 40), no hay ningún defectuoso, se acepta el lote; si 3 o más artículos son defectuosos se rechaza. De encontrarse uno o dos defectuosos, se toma una tercera muestra de 20 elementos

c. Si en la muestra combinada (40 + 20 = 60) hay un defectuoso, se acepta el lote; si 3 o más artículos son defectuosos, se rechaza. De encontrarse dos defectuosos, se toma una cuarta muestra de 20 elementos.

d. Si en la muestra combinada (60 + 20 = 80) hay dos defectuosos, se acepta el lote; si 4 o más son defectuosos, se rechaza. De encontrarse tres defectuosos, se toma una quinta muestra de 20 elementos.

•

•

•

g. Si en la muestra combinada (120 + 20 = 140) hay tres defectuosos, se acepta el lote. Si hay cuatro defectuosos o más, se rechaza.

4.2 Curva CO de un plan de muestreo múltiple

La curva característica de operación de un plan de muestreo múltiple se puede obtener siguiendo un procedimiento semejante al empleado en el caso del muestreo doble, haciendo uso de probabilidades condicionales y suponiendo la descomposición del plan múltiple en varios planes sencillos. Desde luego, el cálculo de las probabilidades de aceptación es bastante más complejo, pero el razonamiento es básicamente el mismo.

A continuación, se describirá mediante un ejemplo el procedimiento para la construcción de la curva Co.

Ejemplo 4.1

Considérese el plan de muestreo múltiple descrito anteriormente, y constrúyase la curva CO correspondiente, suponiendo un lote de tamaño grande.

Solución

Los siguientes cálculos corresponden a un solo punto de la curva, para el cual p = 0.02. Cada una de las muestras contiene 20 artículos, por lo que para cada una de llas se tendrá $np = 20(0.02) = 0.4$. Entrando con este valor a la tabla 3.1, y considerando que X denota el número de artículos defectuosos, se obtienen, también para cada muestra, las probabilidades incondicionales siguientes:

$$P_o = P\{X = 0\} = P\{X \leq 0\} = 0.670$$

$$P_1 = P\{X = 1\} = P\{X \leq 1\} - P\{X \leq 0\} = 0.938 - 0.670 = 0.268$$

$$P_2 = P\{X = 2\} = P\{X \leq 2\} - P\{X \leq 1\} = 0.992 - 0.938 = 0.054$$

Tomando en cuenta que A = aceptación, R = rechazo y CM = continúa muestreo, se hace enseguida el análisis muestra por muestra para obtener la probabilidad P (A; 0.02).

a. Muestra 1 (M1)

número de aceptación = c = no hay
número de rechazo = r = 2

0 def M1 ⇒ $P_0 = 0.670$ ⇒ CM (0 def)

1 def M1 ⇒ $P_1 = 0.268$ ⇒ CM (1 def)

2 def M1 ⇒ ⇒ R (2 def)

Probabilidad de aceptación = 0.000

b. Muestra 2 (M2)

c = 0
r = 3

0 def M1, 0 def M2 ⇒ $P_{00} = (0.670)(0.670) = 0.449$ ⇒ A (0 def)

0 def M1, 1 def M2 ⇒ $P_{01} = (0.670)(0.268) = 0.1795$ ⇒ CM (1 def)

0 def M1, 2 def M2 ⇒ $P_{02} = (0.670)(0.054) = 0.0362$ ⇒ CM (2 def)

0 def M1, 3 def M2 ⇒ ⇒ R (3 def)

1 def M1, 0 def M2 ⇒ $P_{10} = (0.268)(0.670) = 0.1795$ ⇒ CM (1 def)

1 def M1, 1 def M2 ⇒ $P_{11} = (0.268)(0.268) = 0.0718$ ⇒ CM (2 def)

1 def M1, 2 def M2 ⇒ ⇒ R (3 def)

Probabilidad de aceptación = 0.449

Nuevos valores:

P_1 = P {un defectuoso en M2} = 0.1795 + 0.1795 = 0.359

P_2 = P {dos defectuosos en M2} = 0.0362 + 0.0718 = 0.108

c. Muestra 3 (M3)

c = 1

r = 3

1 def M2, 0 def M3 ⇒ P_{10} = (0.359)(0.670) = 0.2405 ⇒ A (1 def)

1 def M2, 1 def M3 ⇒ P_{11} = (0.359)(0.268) = 0.0962 ⇒ CM (2 def)

1 def M2, 2 def M3 ⇒ ⇒ R (3 def)

2 def M2, 0 def M3 ⇒ P_{20} = (0.108)(0.670) = 0.0723 ⇒ CM (2 def)

2 def M2, 1 def M3 ⇒ ⇒ P (3 def)

Probabilidad de aceptación = 0.2405

Nuevo valor:

P_2 = P {dos defectuosos en M3} = 0.0962 + 0.0723 = 0.1685

d. Muestra 4 (M4)

c = 2

r = 4

2 def M3, 0 def M4 ⇒ P_{20} = (0.1685)(0.670) = 0.1129 ⇒ A (2 def)

2 def M3, 1 def M4 ⇒ P_{21} = (0.1685)(0.268) = 0.0452 ⇒ CM (3 def)

2 def M3, 2 def M4 ⇒ ⇒ R (4 def)

Probabilidad de aceptación = 0.1129

Nuevo Valor:

P_3 = P {3 defectuosos en M4} = 0.0451

e. Muestra 5 (M5)

c = 2

r = 4

3 def M4, 0 def M5 ⇒ P_{30} = (0.0451)(0.670) = 0.0302 ⇒ CM (3 def)

3 def M4, 1 def M5 ⇒ ⇒ R (4 def)

Probabilidad de aceptación = 0.000

Nuevo valor:

P_3 = P {3 defectuosos en M5} = 0.0302

f. Muestra 6 (M6)

c = 2

r = 4

3 def M5, 0 def M6 ⇒ P_{30} = (0.0302)(0.670) = 0.0202 ⇒ CM (3 def)

3 def M5, 1 def M6 ⇒ ⇒ R (4 def)

Probabilidad de aceptación = 0.000

Nuevo valor

P_3 = P (tres defectuosos en M6) = 0.0202

g. Muestra 7 (M7)

c =

r = 4

3 def M6, 0 def M7 → P_{30} = (0.0202)(0.670) = 0.0135 ⇒ A (3 def)

3 def M6, 1 def M7 → ⇒ R (4 def)

Probabilidad de aceptación = 0.0135

De acuerdo con lo anterior, la probabilidad de aceptación de un lote, sujeto al plan de muestreo múltiple propuesto con p = 0.02, es

$$P\ (A;\ 0.02) = 0.449 + 0.2405 + 0.1129 + 0.0135 = 0.8159$$

Siguiendo el método descrito, se pueden calcular los valores de las probabilidades de aceptación para distintos valores de p, con los cuales se definen los puntos necesarios para construir la curva característica de operación correspondiente, que se presenta en la Fig 4.1.

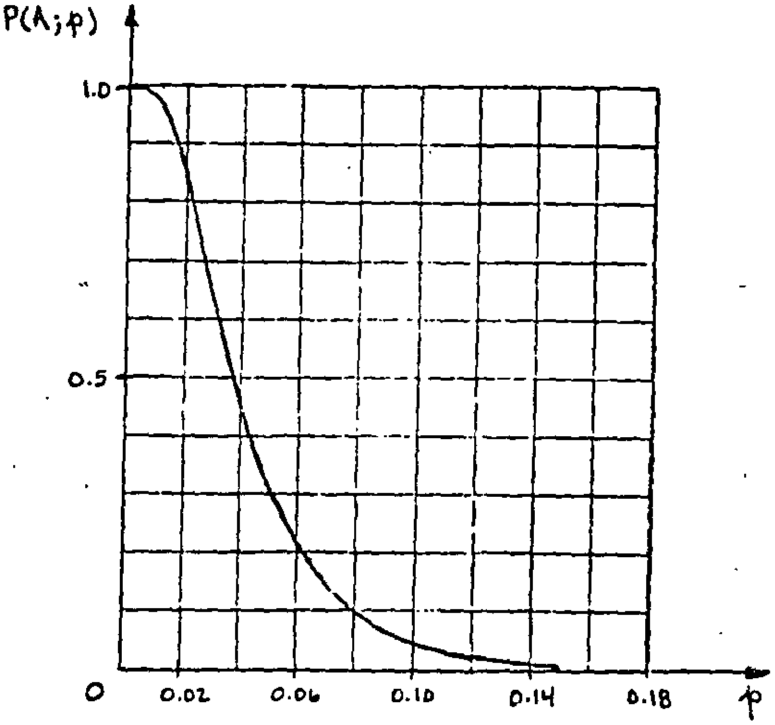


Fig 4.1 Curva CO para un plan de muestreo múltiple

5. Ventajas y desventajas de los planes de muestreo simples, dobles y múltiples

En general, los tres esquemas de muestreo de aceptación que se han presentado se pueden ajustar para proporcionar a lotes con valores de p determinados prácticamente la misma probabilidad de ser aceptados; es decir, si se desea, se puede lograr que las curvas características de operación para los planes simples, dobles y múltiples sean muy parecidas.

No obstante lo anterior, puede suceder que un plan de muestreo de aceptación que ha dado buen resultado para un productor o producto, resulte no tan efectivo para otros. La efectividad de los distintos planes de muestreo expuestos se puede juzgar si se analizan las ventajas y desventajas de cada uno de ellos, en términos de cuatro factores importantes: El número medio de artículos inspeccionados, el costo de administración del plan, la aceptación por parte del producto, y la información sobre calidad de los lotes obtenida a largo plazo. En la tabla 5.1 se compara la efectividad de los tres planes estudiados.

Los factores mencionados en la tabla 5.1 deben ser considerados al seleccionar un plan de muestreo. Por ejemplo, en aquellos casos en que el costo de inspección de cada artículo es elevado, la reducción en el número de artículos inspeccionados puede justificar el empleo del muestreo múltiple no obstante su gran complejidad y elevado costo de administración.

Por otro lado, el muestreo simple puede ser el adecuado si el costo de entrenamiento de personal es muy apreciable. Finalmente, si el problema es de acuerdo entre receptor y productor del plan a emplear, posiblemente la solución sea el muestreo doble, ya que es sicológicamente bien aceptado por ambas partes.

TABLA 5.1

COMPARACION ENTRE LOS PLANES DE MUESTREO SIMPLE, DOBLE Y MULTIPLE

Factor	Plan simple (PS)	Plan doble (PD)	Plan múltiple (PM)
Número medio de artículos inspeccionados	El más grande de todos	De 5 a 40% menos que en PS	Aproximadamente 25% menos que en PD
Costos de administración (entrenamiento, registros, personal, etc.)	El más bajo de todos	Mayor que el de PS	El más alto de todos
Aceptación por parte del productor	Regular	Adecuada	Poca
Información a largo plazo sobre calidad de los lotes	La mayor	Menos que en PS	La menor

Ejemplo 3.1 (con $p = 0.02$)

a. Muestra 1 (M1)

$c_1 = 1$
$r = 4$

$np = 50(0.02) = 1.0$; $P_0 = 0.368$; $P_1 - 0.368$; $P_2 = 0\ 184$; $P_3 = 0.061$

0 def M1 ⇒ $P_0 = 0.368$ ⇒ A (0 def)
1 def M1 ⇒ $P_1 = 0.368$ ⇒ A (1 def)
2 def M1 ⇒ $P_2 = 0.184$ ⇒ CM (2 def)
3 def M1 ⇒ $P_3 = 0.061$ ⇒ CM (3 def)
4 def M1 ⇒ ⇒ R (4 def)

Probabilidad de aceptación = 0.736

b. Muestra 2 (M2)

$c = 3$
$r = 4$

$np = 100(0.02) = 2$; $P_0 = 0.135$; $P_1 = 0.271$; $P_2 = 0.271$; $P_3 =$ [illegible]

2 def M1, 0 def M2 ⇒ $P_{20} = (0.184)(0.135) = 0.0248$ ⇒ A (2 def)
2 def M1, 1 def M2 ⇒ $P_{21} = (0.184)(0.271) = 0.0498$ ⇒ A (3 def)
2 def M1, 2 def M2 ⇒ ⇒ R (4 def)

3 def M1, 0 def M2 ⇒ $P_{30} = (0.061)(0.135) = 0.0082$ ⇒ A (3 def)
3 def M1, 1 def M2 ⇒ ⇒ R (4 def)

Probabilidad de aceptación = 0.0828

$\therefore$ $\bar{P}(A; 0.02) = 0.736 + 0.0828 = 0.8188 \cong 0.819$

TABLA K. LETRAS CLAVE PARA EL TAMAÑO DE MUESTRAS —MIL-STD-105 (ESTÁNDAR ABC)

Tamaño del lote o partida	Niveles de inspección generales		
	I	II	III
2-8	A	A	B
9-15	A	B	C
16-25	B	C	D
26-50	C	D	E
51-90	C	E	F
91-150	D	F	G
151-280	E	G	H
281-500	F	H	J
501-1 200	G	J	K
1 201-3 200	H	K	L
3 201-10 000	J	L	M
10 001-35 000	K	M	N
35 001-150 000	L	N	P
150 001-500 000	M	P	Q
500 001 y más	N	Q	R

TABLA L. TABLA MAESTRA PARA INSPECCION NORMAL (MULSTREO SENCILLO)—MIL-STD-105D (Estándar ABC)

Letra clave para el tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)																									
		0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A	2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31
B	3	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45
C	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	↑
D	8	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	↑	↑
E	13	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	↑	↑	↑
F	20	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑
G	32	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
H	50	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
J	80	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
K	125	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
L	200	↓	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
M	315	↓	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
N	500	↓	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
P	800	↓	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Q	1 250	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
R	2 000	↑	↑	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑

↓ = Usese el primer plan de murstreo abajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra es igual o mayor al tamaño del lote o corrida hágase la inspección del 100%.

↑ = Usese el primer plan de muestreo arriba de la flecha.

Ac = Número de aceptación.

Re = Número de rechazo.

TABLA M. TABLA MAESTRA PARA INSPECCION CERRADA (MUESTREO SENCILLO)—MIL-STD-105D (Estándar ABC)

Letra clave para el tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable (inspección cerrada)																									
		0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A	2	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28
B	3	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28	41 42
C	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28	41 42	↑
D	8	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28	41 42	↑	↑
E	13	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	27 28	41 42	↑	↑	↑
F	20	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑
G	32	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
H	50	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
J	80	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
K	125	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
L	200	↓	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
M	315	↓	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
N	500	↓	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
P	800	↓	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Q	1 250	↓	0 1	↓	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
R	2 000	0 1	↑	↓	1 2	2 3	3 4	5 6	8 9	12 13	18 19	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
S	3 150			1 2																							

↓ = Usese el primer plan de muestreo abajo de la flecha Si el tamaño de la muestra es igual o mayor al tamaño del lote o corrida, ha la inspección del 100%.

↑ = Usese el primer plan de muestreo arriba de la flecha

Ac = Número de aceptación.

Re = Número de rechazo.

Paquetes estadísticos para la familia IBM PC y compatibles

Paquetes estadísticos para la familia IBM PC y compatibles

PATRICIA B. SEYBOLD
LINDA O'KEEFFE
JAY KLAGGE

Traducción

LUIS HERNANDEZ YAÑEZ
Departamento de Informatica y Automatica
Facultad de Ciencias Fisicas
Universidad Complutense

Revisión técnica

ANTONIO VAQUERO SANCHEZ
Catedratico de Informatica
Facultad de Ciencias Fisicas
Universidad Complutense

Byte Books/McGraw-Hill
MADRID • BOGOTA • BUENOS AIRES • GUATEMALA • LISBOA • MEXICO
NUEVA YORK • PANAMA • SAN JUAN • SANTIAGO • SAO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARIS
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

PAQUETES ESTADISTICOS PARA LA FAMILIA IBM PC Y COMPATIBLES

McGRAW HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S A
Manuel Ferrero, 13 28036 Madrid ESPAÑA

Traducido de la primera edicion en ingles de
STATISTICAL PACKAGES FOR THE IBM PC FAMILY

ISBN: 0-07-056320-9

ISBN 84-7615-190-X
Depósito legal. M 39 475/1987

Compuesto en Fernández Ciudad, S L
Impreso en LAVEL, Industria grafica

De esta edicion se han impreso 3 500 ejemplares en diciembre de 1987

PRINTED IN SPAIN - IMPRESO EN ESPAÑA

Contenido

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

" DIPLOMADO EN SISTEMAS DE CALIDAD EN INGENIERÍA DE PROYECTO Y CONSTRUCCIÓN "

MÓDULO II

CONTROL DE CALIDAD DE MATERIALES Y OBRAS

PARTE I

MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA EL CONTROL DE CALIDAD

TEMA:

MUESTREO PARA LA INSPECCIÓN POR ATRIBUTOS

1997

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

SECRETARIA DE PATRIMONIO
Y
FOMENTO INDUSTRIAL

NORMA OFICIAL MEXICANA
DGN-R-16/4-19977

MUESTREO PARA LA INSPECCION POR ATRIBUTOS
(SAMPLING PROCEDURES AND TABLES FOR INSPECTION BY ATTRIBUTES)

PARTE 4

APLICACION DE LOS METODOS DE MUESTREO PARA LA INSPECCIÓN POR ATRIBUTOS
(APPLICATION OF SAMPLING PROCEDURES AND TABLES FOR INSPECTION BY ATTRIBUTES)

DIRECCIÓN GENERAL DE NORMAS

CONTENIDO

0 INTRODUCCION

Esta cuarta parte correspondiente a la Norma DGN-R-18-1975 "Muestreo para la Inspección por Atributos", se debe utilizar en conjunto con las otras partes que forman el total de esta norma y cuyos títulos son:

Parte 1 Información General sobre la Inspección por Muestreo
Parte 2 Metodos de Muestreo para la Inspección por Atributos.
Parte 3 Tablas y Gráficas para la Inspección por Atributos.
Parte 4 Aplicación de los Métodos de Muestreo para la inspección por atributos.
Parte 5 Regla de Cálculo para los Planes de Muestreo por Atributos.

1 OBJETIVO

Esta parte tiene como finalidad el proporcionar una guía y los pasos necesarios para establecer planes de muestreo adecuados a condiciones específicas proporcionando ejemplos explicativos como una ayuda al personal de los departamentos de control de calidad, diseño o ingeniería, personal que elabore normas y establece especificaciones y en general; a todas aquellas personas relacionadas con los problemas de inspección, con el fin de permitir el mutuo entendimiento entre proveedores y consumidores.

2 CAMPO DE APLICACION

Su aplicación principal es para la inspección por atributos de lotes, entre otros de:

a) materias primas;

b) materiales en proceso;

c) artículos y componentes;

d) productos terminados, etc.

Sin embargo, se comprende que no es posible dar ejemplos de todos y cada uno de los campos de aplicación, pero esperamos que la mayoría de las dudas que se presenten en la aplicación de esta norma queden disipadas con los ejemplos que aquí se exponen. Cabe hacer notar una vez más que la esencia misma de esta norma se encuentra en la Parte 2, que las tablas que deben utilizarse se encuentran en la Parte 3 y que las demás partes, incluyendo esta misma son tan solo una ayuda adicional, por lo que no se deben interpretar los ejemplos de tal manera que resulten contradictorios a las partes antes mencionadas.

3 SELECCION DE UN PLAN DE MUESTREO

Antes de seleccionar un plan de muestreo, es necesario conocer cinco aspectos, los que a continuación se expresan.

1 Nivel de calidad aceptable (NCA).

2 Nivel de inspección

En general, estos dos aspectos se acuerdan entre proveedor y consumidor para cada producto en particular al iniciarse un contrato y permanecen constantes durante la vigencia del mismo.

3 Si va a utilizarse la inspección normal, rigurosa o reducida. Esto se decide estudiando los resultados de

4 Si va a utilizarse el muestreo sencillo, doble o múltiple. Por el momento suponemos que va a utilizarse el muestreo sencillo

5 El tamaño del lote o partida

Ejemplo 1: Supongamos que el NCA es de 1.0, el nivel de inspección es II y el tamaño del lote es de 2500. Lo primero que se necesita es la letra clave correspondiente al tamaño de la muestra (usualmente llamada simplemente letra clave, para abreviar). Para un tamaño del lote de 2500 y un nivel de inspección II, la Tabla 1 nos proporciona la letra clave K

En la tabla correspondiente (Tabla II-A) encontramos que el tamaño de la muestra para muestreo sencillo es de 125. Los NCA para una inspección normal aparecen a lo largo de la parte superior de la tabla y bajo el valor 1.0 encontramos los números 3 y 4 que aparecen bajo el encabezado Ac Re. El plan de muestreo correspondiente es:

Tamaño de la muestra	125
Número de aceptación	3
Número de rechazo	4

También se puede utilizar la Tabla X-K-2, en la cual encontramos los mismos resultados

Tamaño de la muestra 125; así como los números de aceptación y rechazo que son 3 y 4 respectivamente

Ejemplo 2: Supongamos que el NCA es de 0.40, que el nivel de inspección es de I y que el tamaño del lote es de 230. La Tabla I nos proporciona E como letra clave. Al utilizar la Tabla II-A encontramos que no hay números de aceptación y rechazo correspondientes a la letra clave E y un NCA de 0.40 pero encontramos una flecha hacia abajo la cual nos dirige hacia los números de aceptación y rechazo 0 y 1 que pertenecen a la letra clave G; el plan de muestreo correspondiente es:

Tamaño de la muestra	32
Número de aceptación	0
Número de rechazo	1

También se puede utilizar la Tabla X-E-2 pero esta página no cuenta con una columna para un NCA de 0.40. En su lugar aparece el símbolo de un triángulo invertido que corresponde a NCA menores de 1.0

Este triángulo nos conduce a la nota situada en la parte inferior, la cual dice: "Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo"

Si se considera al triángulo como si fuera una cabeza de flecha, está apuntada hacia el borde de la página que debe voltearse. Esto nos conduce a la Tabla X-F para la cual una vez más no se proporciona un NCA de 0.40 esta tabla a su vez nos conduce a la Tabla X-G para encontrar el mismo plan de muestreo ya encontrado en la Tabla II-A

Es muy importante recordar que si el triángulo o una serie de triángulos nos conducen de una página a otra de las tablas o, si una flecha nos conduce de un renglón a otro, el tamaño de muestra que debe utilizarse es el que aparece en la nueva página o en el nuevo renglón

Cuando se encuentran flechas o triángulos que apuntan hacia arriba, el significado es similar. Los triángulos apuntan, una vez más, hacia el borde de la página que debe voltearse

Ejemplo 3: Supongamos que el NCA es de 0.015, que el nivel de inspección es III y que el tamaño de lote es de 120. La Tabla I nos proporciona G como la letra clave, pero al referirnos a las tablas, una flecha (o una serie de triángulos) nos conducen hasta la letra P antes de que encontremos un plan. El plan encontrado tiene un tamaño de muestra de 800, el cual excede el tamaño del lote

En este caso debe tomarse el lote entero (120) como muestra. Los números de aceptación y rechazo correspondientes son 0 y 1.

Se establece en la parte 2 de esta norma que los valores de NCA correspondientes a 10 o inferiores a éste, pueden expresarse en porcentaje de defectuosas o en defectos por cien unidades; en tanto que los valores superiores a 10 pueden únicamente expresarse en defectos por cien unidades. Debe decidirse en primer término si es adecuado expresar la inconformidad en porcentaje de defectuosas o en defectos por cien unidades para cada caso en particular; a continuación debe definirse el NCA en términos de esa decisión. Por esta razón los ejemplos 2, 3 y 4 están incompletos; ya que los valores de NCA se toman como números puros y, en consecuencia, los números de aceptación y de rechazo se toman también como números puros. Los ejemplos sirven para demostrar cómo obtener un plan de muestreo de las tablas, pero en la práctica carecen de sentido por ser incompletas.

Ejemplo 4: En el ejemplo 1, con un NCA de 1.0, el plan de muestreo fué:

Tamaño de la muestra	125
Número de aceptación	3
Número de rechazo	4

Debe, sin embargo, definirse el NCA en términos de porcentaje de defectuosas o de defectos por cien unidades.

Si el NCA fuera de 1.0 % de defectuosas, el plan de muestreo sería:

Tamaño de la muestra	125
Número de aceptación	3 defectuosas
Número de rechazo	4 defectuosas

Si el NCA fuera de 1.0 defectos por cien unidades, el plan de muestreo sería.

Tamaño de la muestra	125
Número de aceptación	3 defectos
Número de rechazo	4 defectos

Las tablas, como se verá posteriormente, se utilizan exactamente en la misma forma en cualquiera de los dos casos.

4 NCA PREFERENTES

Las tablas proporcionan 26 valores de NCA comprendidos entre 0.010 (v. gr. una defectuosa por 10,000 unidades de producto) y 1000 (v. gr. 1000 defectos por 100 unidades del producto o un promedio de 10 defectos por unidad). Se seleccionaron estos 26 valores de forma tal, que cada uno de ellos es aproximadamente una y media veces mayor que el anterior (la relación es de hecho la raíz quinta de 10 ó sea 1.585).

Cuando el NCA que se ha especificado para llevar a cabo la inspección de cualquier producto dado es uno de los NCA preferentes, pueden utilizarse las tablas. Sin embargo, si el NCA especificado no es un NCA preferente, las tablas de la Parte 3 no son aplicables.

Bajo estas circunstancias, es necesario dirigirse a quien haya especificado el NCA y solicitarle que lo examine, para ver si cabe la posibilidad de que un NCA preferente fuera satisfactorio. Si no fuera así, debe diseñarse especialmente un plan de muestreo para el NCA que se requiere (véase el Capítulo 21).

No es probable que se utilicen con frecuencia los valores muy altos de NCA (100 y superiores) puesto que implican que puede considerarse satisfactorio un producto del cual cada unidad contiene defectos. Claramente esto sería posible únicamente en el caso de que los defectos que se buscan fueran de naturaleza poco importante y de que la unidad de producto fuera bastante compleja, como por ejemplo un vehículo completo.

Ejemplo 5: Para la inspección de tela la cual va a utilizarse posteriormente para confeccionar ropa, la unidad del producto puede ser una superficie determinada de la misma. Para la inspección de fallas de poca importancia en el tejido, pudiera ser aceptable un promedio de 4 fallas por metro cuadrado, en cuyo caso podría especificarse un NCA de 400 defectos por cada cien metros cuadrados.

5. ESPECIFICACION DE UN NCA

Al especificarse un NCA, debe recordarse que éste constituye una indicación de la calidad que requiere el consumidor y con ello se le pide al fabricante que produzca lotes con un promedio de calidad superior al NCA. Por una parte debe lograrse esta calidad en forma razonable en la fabricación por otra parte debe ser una calidad razonable desde el punto de vista del consumidor. Casi invariablemente ésto significa un compromiso entre la calidad que quisiera el consumidor y la calidad que está dispuesto a pagar, puesto que entre más riguroso sea este requisito la producción será más costosa con el objeto de ajustarse a él y la inspección será también más costosa, con el objeto de asegurarse que se está cumpliendo con ese requisito.

La principal consideración deben ser los requisitos que establezca el consumidor, pero es necesario asegurarse que éste está comportándose en forma realista y de que no exige algo más riguroso de lo que en realidad requiere. Debe tomarse en cuenta cómo van a utilizarse los artículos en cuestión y cuales serían las consecuencias de una falla. Si pueden conseguirse los artículos en grandes cantidades y la falla consiste simplemente en una falla para el ensamble, de tal manera que el artículo defectuoso puede descartarse pudiendo utilizarse otro en su lugar, puede ser tolerable un NCA relativamente poco riguroso. Si, por el contrario, el defecto va a ocasionar una falla en el funcionamiento de una pieza importante y costosa de un equipo en un momento y lugar en que no es posible reemplazar el artículo defectuoso, se requerirá un NCA más riguroso.

Es también necesario considerar el número de componentes que contendrá el equipo. Si, por ejemplo, se decide que un equipo que consta de tres componentes igualmente importantes tenga un porcentaje de defectuosas de 10, entonces cada uno de los componentes podrá contener un máximo de 3.3% de defectuosas con lo que se ajustaría al requisito, en tanto que si el equipo consta de diez componentes, éstos no podrían contener más de 1% de defectuosas. En este caso se usaría la fórmula siguiente:

$$\frac{X}{100} = 1 - \left(\frac{100 - x}{100}\right)^n$$

En donde:

n = Número de componentes en el conjunto de ensamble

X = NCA del conjunto de ensamble.

x = NCA de los componentes.

En el valor de X no se han tomado en cuenta los defectos que puedan surgir durante un proceso de ensamble defectuoso. Bajo estas circunstancias es probable que el fabricante de los componentes desee seleccionar lo que considere un NCA adecuado para cada componente y luego calcular qué calidad puede esperar del conjunto, en tanto que el consumidor desearía especificar un NCA para todo el equipo en conjunto para luego calcular cuál debería ser la calidad de los componentes. En general, el segundo de estos enfoques es probablemente el más razonable en el sentido de que es el desempeño que tenga el equipo en conjunto lo que realmente importa, pero es también el enfoque más caro porque casi siempre conduce a NCA más rigurosos. Sin embargo debe aceptarse que la buena calidad de un artículo complejo es inevitablemente más costosa que una calidad igualmente buena en el caso de artículos sencillos.

La pregunta: ¿qué nivel de calidad puede razonablemente esperarse, a un precio que el consumidor esté dispuesto a pagar, con los métodos de producción disponibles?, puede contestarse a menudo examinando el nivel de calidad que se ha producido y aceptado en el pasado. Cuando se trata de un nuevo artículo y no ha habido producción anterior, existen a menudo otros artículos similares de los cuales puede obtenerse información relacionada con el caso. Los cálculos de la calidad promedio de un proceso pueden ser particularmente útiles. Esta idea de ver la calidad que se ha logrado en el pasado no debe tomarse como si los niveles de calidad que se han alcanzado en el pasado fueran inmutables y resultaran siempre lo suficientemente buenos. Es simplemente uno de los factores que deben considerarse al determinar cuál es el NCA que debe especificarse en forma razonable

Debe recordarse que la mera especificación de un NCA no proporciona al consumidor una garantía de que no se aceptarán los lotes con una calidad inferior. En primer lugar el NCA se refiere al promedio. Algunos lotes pueden ser más malos que el NCA, en tanto que el promedio es mejor que el NCA. En segundo lugar si el promedio de calidad que se ofrece es ligeramente inferior al NCA, es probable que se acepte cierta cantidad de lotes antes de que se requiera el cambio a una inspección más rigurosa y aún después del cambio es probable que se acepten algunos lotes con calidad inferior a la especificada. Sin embargo, en general, puede esperarse que el consumidor obtenga un producto con una calidad promedio superior al NCA ya que los planes de muestreo poseen un incentivo económico que forma parte de su propia estructura en el sentido de que un fabricante no puede permitirse tener más que un pequeño porcentaje de lotes rechazados, debiendo tomar las medidas pertinentes para mejorar la producción, si se excede este porcentaje.

Podría pensarse que ésto no es muy satisfactorio desde el punto de vista del consumidor, al depender en la forma que lo hace de lo que es probable que suceda en lugar de lo que es seguro que pase. Pero en la práctica, la mayor parte de los fabricantes toman medidas para hacer que su calidad promedio de proceso no exceda el NCA, aunque sea únicamente en razón de los lotes que se le rechazan, ya que ésto le causa problemas y le aumenta fuertemente los costos. De cualquier manera la protección para el consumidor depende del límite inferior de las curvas de operación características (COC), así como del límite superior con el cual está relacionado el NCA, y este límite inferior puede ajustarse al considerar los valores de calidad límite de cualquier plan que se requiera. Si en el caso de cualquier producto en particular se decidiera que este enfoque no es adecuado y que es necesaria una protección más efectiva del consumidor, es siempre posible lograrla al especificar un NCA más riguroso, pero debe recordarse que es probable que esto conduzca a un aumento en el costo del producto. Sin embargo no se niega que este costo adicional pueda estar justificado en algunos casos.

No es necesario que el NCA constituya siempre la primera elección de la cual se derive todo lo demás. Cuando las circunstancias así lo requieran, es siempre posible utilizar las tablas de muestreo en otro orden y seleccionar un plan siguiendo algún otro criterio y luego encontrar el NCA para lograr el resultado deseado. En este caso, el NCA constituye un índice conveniente que permite utilizar las tablas y es también valioso como una respuesta a la pregunta que interesa principalmente a un fabricante ¿con que calidad debo fabricar para que se acepten la mayor parte de mis lotes?

Si se utiliza este método, la primera elección puede ser el análisis del límite inferior de la curva, donde se piensa que ésto es particularmente importante para el consumidor o bien algún criterio económico. Probablemente el criterio económico más sencillo que puede sugerirse, es determinar la calidad del lote en el punto de equilibrio para el cual si se aceptara éste, el costo de los daños ocasionados por las defectuosas sería exactamente igual al costo de rechazo del lote en caso de que éste se rechazara.

Si puede calcularse este punto de equilibrio, es conveniente seleccionar un plan para el cual en esta calidad proporcione 50% de lotes que se espera que sean aceptados, no en razón de que se desee particularmente un 50% de aceptaciones con esta calidad (por definición si se ofrece esta calidad en particular) sino porque así se asegura una oportunidad mayor de 50% de aceptaciones para una calidad mejor que el punto de equilibrio y una probabilidad de rechazo mayor de 50% para una calidad inferior a la calidad correspondiente al punto de equilibrio.

Finalmente, una vez que se han considerado todos estos factores se debe escoger uno de los valores de NCA que aparecen en las tablas, si esto es posible, ya que si se escoje otro valor, las tablas no son aplicables y sería necesario diseñar un plan especial. Los NCA que aparecen en las tablas de la Parte 3 de esta norma, siguen oximadamente una progresión geométrica con una razón común de aproximadamente 1.5, así que sera muy raro que ninguno de ellos sea adecuado o utilizable.

6 SIGNIFICADO DEL NIVEL DE INSPECCION

El nivel de inspección define la relación entre el tamaño del lote y el tamaño de la muestra. Las tablas están calculadas en forma tal, que cuando el tamaño del lote es grande, el tamaño de la muestra es generalmente mayor que cuando el tamaño del lote es pequeño. Sin embargo no aumenta, en proporción directa, ya que para un lote grande la muestra es proporcionalmente más pequeña que para un lote de menor tamaño.

La Tabla I proporciona tres niveles generales de inspección: I, II y III; y cuatro niveles especiales de inspección S-1, S-2, S-3 y S-4.

En general, se utilizan con mayor frecuencia los niveles generales y se debe utilizar el nivel II a menos que se especifique claramente alguno de los otros niveles.

Ejemplo 6: Los niveles de inspección para un tamaño del lote de 600 son:

Nivel de inspección	Letra clave	Tamaño de la muestra (muestreo sencillo)
I	G	32
II	J	80
III	K	125

Debe recordarse sin embargo, que para ciertos NCA las flechas de la tabla conducen a tamaños de muestras diferentes a éstos. Una tabla completa en la que se considere el tamaño de la muestra como una proporción del tamaño del lote necesitaría considerar también el NCA en razón de las flechas. Aún en el caso de un valor dado, la relación no es uniforme ya que únicamente hay disponibles algunos valores del tamaño de la muestra, en tanto que se tienen que tomar en cuenta todos los posibles tamaños de lotes. Como resultado, una tabla de esta clase daría lugar a más confusiones en vez de ser una ayuda.

En la Tabla 1 sin embargo, puede encontrarse un resumen útil de esta situación.

TABLA 1 Relación entre el tamaño de la muestra y el tamaño del lote para los tres niveles de inspección generales

Tamaño de la muestra como porcentaje del tamaño del lote (plan de muestreo sencillo para inspección normal	Nivel I Tamaño del lote (por lo menos)	Nivel II Tamaño del lote (por lo menos)	Nivel III Tamaño del lote (por lo menos)
No mayor de 50	4	4	10
No mayor de 30	7	27	167
No mayor de 20	10	160	625
No mayor de 10	50	1250	2000
No mayor de 5	640	4000	6300
No mayor de 1	12500	50000	80000

NOTAS: 1) Esta tabla debe considerarse sólo como indicativa. Los tamaños de los lotes que se muestran son tales que los tamaños más grandes se ajustan a la condición requerida. Sin embargo, en todos los casos un tamaño de lote menor en una unidad a los valores que ahí se muestran, ya no se ajustan a ella

2) Las cifras mostradas suponen que el NCA no es tal que necesite un tamaño de muestra que no se ajuste a las condiciones establecidas.

Los niveles de inspección especiales están calculados para aquellas situaciones en las cuales el tamaño de la muestra debe mantenerse pequeño. Estos no deben de especificarse sin examinar cuidadosamente sus implicaciones en términos de los riesgos tanto para el fabricante como para el consumidor, mediante un estudio de la COC.

En la Parte 2 de esta norma se expresa: "En la especificación de los niveles de inspección del S-1 al S-4 se debe tener cuidado en no especificar NCA incompatibles con dichos niveles de inspección, (capítulo 9.2).

El objetivo principal de los niveles de inspección especiales es que el tamaño de la muestra sea pequeño cuando ésto sea realmente necesario. Por ejemplo las letras clave que se encuentran bajo S-1 no van más allá de D, que equivale a un tamaño de muestra de 8, pero no tiene caso especificar S-1 con la esperanza de conservar el tamaño de la muestra reducido a 8 o a menos de 8, cuando se tiene un NCA de 0.10 para el cual el tamaño mínimo de muestra es de 125 en inspección normal. La cantidad de información sobre la calidad del proceso que puede obtenerse del examen de las muestras depende más del tamaño absoluto de la muestra que del porcentaje del lote que se está examinando. Por lo tanto a veces surge la pregunta: ¿Por qué se hace depender el tamaño de la muestra del tamaño del lote? hay tres razones:

a) Es más difícil de lograr la toma de muestras al azar, cuando el tamaño de la muestra es más pequeña en proporcion al tamaño del lote

b) Cuanto mayor es el riesgo, mayor la importancia de tomar una decisión correcta. El uso correcto de las tablas dá como resultado que los lotes que provienen de un proceso de buena calidad tienen más probabilidades de ser aceptados, cuanto mayor sea el tamaño del lote mientras que los lotes que provienen de un proceso de mala calidad, por el contrario tienen menos probabilidades de ser aceptados.

c) En el caso de un lote de tamaño grande, puede permitirse que haya un tamaño de muestra que no sería económico en el caso de un lote de tamaño reducido; por ejemplo un tamaño de muestra de 80 para un lote de 1000 puede fácilmente justificarse desde el punto de vista económico, en tanto que un tamaño de muestra de 80 para un lote de 100 resultaría en una inspección relativamente costosa.

7 TAMAÑO DE MUESTRA

Los tamaños de las muestras que aparecen en la Parte 3 de esta norma, para muestreo sencillo, forman una serie (como la serie de los valores de NCA), en la cual cada número es aproximadamente 1.585 veces el número anterior. Esto significa que el producto del NCA por el tamaño de la muestra es aproximadamente constante en diagonales de la Tabla II-A; lo que dá lugar a una tabla consistente en sí misma, si es que se toman también los números de aceptación como constantes en diagonales.

Esta característica fué útil para el cálculo de las tablas mismas y no necesariamente representa una ventaja en su utilización. Sin embargo, el patrón resultante significa que las tablas se prestan a la construcción de resúmenes convenientes y de nomogramas especiales o reglas de cálculo que pueden ser útiles en algunas ocasiones (véase el capítulo 23).

Los tamaños de muestras en el caso del muestreo doble y del muestreo múltiple siguen el mismo patrón, pero para una letra clave dada, el tamaño de la muestra doble retrocede un espacio en la serie, en comparación con el muestreo sencillo, en tanto que el tamaño de la muestra múltiple retrocede dos espacios más, en comparacion al muestreo doble. Los tamaños de las muestras para la inspección reducida, retroceden siempre dos espacios en comparación con la inspección normal correspondiente.

Como resultado, para cualquier letra clave dada, corresponden diferentes valores de tamaños de muestras según se utilice el muestreo sencillo, doble o múltiple y si está en vigor o no la inspección reducida. Es por ésto que se requieren las letras clave como índices de las tablas en vez de que se utilicen los tamaños de muestras.

8 CURVAS DE OPERACION CARACTERISTICAS

Las tablas de la Parte 3 de esta norma proporcionan tanto las gráficas de las COC como los valores tabulados en base a los cuales se elaboraron dichas gráficas. Fueron calculadas para el muestreo sencillo, sin embargo coinciden tan de cerca con aquellas de los muestreos doble y múltiple, que se pueden usar sin errores de consideración.

El estudio de las COC que aparecen en la parte 3 de esta norma muestran que cuando el número de aceptación es cero, el extremo superior de la curva es difícil de interpretar en forma precisa. Hay, sin embargo, una fórmula aproximada y sencilla para este extremo superior (cuando el número de aceptación es cero), la cual es suficientemente precisa para fines prácticos cualquiera que sea el tamaño de la muestra

La fórmula es:

Porcentaje de lotes que se espera sean aceptados = 100 - (tamaño de la muestra) x (porcentaje de defectuosas en los lotes presentados).

Nótese que esta fórmula es válida únicamente para un número de aceptación igual a cero, únicamente para el extremo superior de la curva y cuando el porcentaje de lotes que se espera que sean aceptados no es inferior a 80

Tamaño de la muestra	32
Número de aceptación	0 defectuosas
Número de rechazo	1 defectuosa

¿Cuál es el porcentaje de lotes que se espera que se acepten para el NCA especificado? La respuesta es:

$$100 - (32 \times 0.40) = 87\% \text{ de los lotes}$$

Ejemplo 8: En las mismas circunstancias, ¿ cuántas tendrían que ser las defectuosas en los lotes que se presenten para que se aceptara un 95%de los lotes? Invirtiendo la fórmula tenemos:

$$\text{Porcentaje de defectuosas en los lotes presentados} = \frac{\text{100 - Porcentaje de lotes que se espera que sean aceptados}}{\text{Tamaño de la muestra}}$$

$$\text{Porcentaje de defectuosas en los lotes presentados} = \frac{100 - 95}{32}$$

$$\text{Porcentaje de defectuosas en los lotes presentados} = 0.156\% \text{ de defectuosas}$$

LOTES

De mutuo acuerdo entre fabricante y consumidor, se debe especificar el tamaño del lote considerando los intereses de ambos. No es necesario que se elija una cifra invariable. Algunas veces puede permitirse una variación, aunque en este caso es deseable que se especifiquen los límites inferior y superior del tamaño del lote

Los tamaños de lotes grandes presentan una ventaja desde el punto de vista de la inspección por muestreo, ya que es posible tomar un tamaño de muestra grande de un lote grande, logrando mediante esto una mejor discriminación entre los lotes buenos y los malos, lo cual no es posible en lotes pequeños, para el mismo NCA; sin embargo, no debe llevarse este concepto de "lotes grandes" a su extremo, si la integración de un lote grande requiere que se reuna una serie de lotes pequeños que podían haber quedado separados, el lote grande tiene ventajas únicamente si los lotes pequeños poseen una calidad similar. Si existe la probabilidad de que haya alguna diferencia esencial entre la calidad de los lotes pequeños entonces es mucho mejor mantenerlos separados

Por esta razón los lotes deben estar constituídos por unidades de producto que se produzcan esencialmente bajo las mismas condiciones

Ejemplo 9: Un fabricante está produciendo artículos que se van a inspeccionar bajo las siguientes condiciones:

NCA 2.5% defectuosas

Nivel de inspección II

Inspección normal

Muestreo sencillo

El fabricante tiene dos máquinas, digamos la A y la B. Cada máquina produce 900 artículos por hora se decide que la producción que una de las maquinas elabora durante una hora sea el tamaño del lote. Del uso de las tablas y de acuerdo con las condiciones antes mencionadas, se obtiene el siguiente plan de muestreo, bajo la letra clave J:

Número de rechazo 6 defectuosas

Se puede encontrar la COC correspondiente en la Tabla X-J en la curva correspondiente al NCA de 2.5

Pudiera tener ventajas el cambiar la base de la determinación del tamaño del lote a la producción de las dos máquinas juntas durante una hora, aumentando con ésto el tamaño del lote de 900 a 1800. Si se hiciera ésto, las tablas indican que el plan de muestreo, bajo la letra clave K, se transforma en:

Tamaño de la muestra 125

Número de aceptación 7 defectuosas

Número de rechazo 8 defectuosas

Puede encontrarse la nueva COC en la Tabla X-K en la curva correspondiente al NCA de 2.5

Que lo anterior realmente represente ventajas o no, depende de que las máquinas A y B produzcan con la misma calidad. Como demostración, a continuación consideramos tres casos posibles:

Caso 1:

Tanto la máquina A como la B están produciendo con la misma calidad de 2.3 % de defectuosas. Esta calidad es mejor que el NCA, así que es deseable que el plan de muestreo acepte tantos lotes como sea posible de los que se presenten. Si el tamaño del lote es de 900 y el tamaño de la muestra es de 80, la COC muestra que se aceptaría 99 % de los lotes y que se rechazaría 1%. Los artículos deberían inspeccionarse a una velocidad de 160 por hora

Si el tamaño del lote es 1800 y el tamaño de la muestra 125, la COC muestra que se aceptaría un poco más de un 99% y que se rechazarían un poco menos de 1%. Los artículos deberían inspeccionarse a una velocidad de 125 por hora

En este caso el lote mayor es claramente mejor

Caso 2:

Tanto la máquina A como la B están produciendo con la misma calidad de 10 % de defectuosas. Esta calidad es más mala que el NCA, así que es deseable que el plan de muestreo rechace tantos lotes como sea posible, de los que se presenten a inspección

Si el tamaño del lote es de 900 y el tamaño de la muestra es de 80, la COC muestra que se aceptarían 20% de los lotes y que se rechazarían 80%. Los artículos deberían inspeccionarse a una velocidad de 160 por hora

Si el tamaño del lote es de 1800 y el tamaño de la muestra es de 125, la COC muestra que se aceptaría el 13% de los lotes y se rechazarían el 87%. Los artículos deberían inspeccionarse a una velocidad de 125 por hora

En este caso, una vez más el lote mayor es claramente mejor

Caso 3:

La máquina A produce con una calidad de 2.3% de defectuosas y la máquina B con una calidad de 10% de defectuosas

Si el tamaño del lote es de 900 y el tamaño de la muestra es de 80, la COC muestra que se aceptaría 99 % y que se rechazaría un 1% de los lotes provenientes de la máquina A, en tanto que se aceptaría 20% y se rechazaría 80% de los lotes provenientes de la máquina B

Por lo tanto, en total se aceptaría $\frac{99\% + 20\%}{2}$ de los lotes

O sea, alrededor del 60 de los lotes y se rechazarían $\frac{1\% + 80\%}{2}$ de los lotes

$$\frac{99}{99 + 20} \times 0.023 + \frac{20}{99 + 20} \times 0.10 = 3.6$$

O sea 3.6 % de defectuosas

Sería necesario inspeccionar 160 artículos por hora

Si el tamaño del lote es de 1800 y el tamaño de la muestra es de 125, la calidad de los lotes sería de 0.5 (2.3 % de defectuosas+10% de defectuosas) o sea 6.15% de defectuosas. La COC muestra que se aceptaría el 50% de los lotes y que se rechazaría el 50%. Sería necesario inspeccionar 125 artículos por hora

Un tamaño mayor de lote significa menos inspección, como en los casos (1) y (2), pero hay que pagar un precio. En vez de que se acepten 60% de lotes con una calidad promedio de 3.6% de defectuosas, se aceptarían 50% de los lotes y éstos tienen 6.15% de defectuosas

En cualquiera de los casos, por supuesto, un porcentaje tan bajo de aceptación pone prontamente sobre aviso tanto al fabricante como al consumidor en lo que respecta al hecho de que la producción no tiene la calidad requerida y de que es necesario tomar medidas para mejorarla. Si se ha dictaminado sobre la producción de las dos máquinas por separado, sería fácil localizar el problema, pero si se ha mezclado el producto pudiera no ser tan evidente si pueden atribuirse los problemas a únicamente una de las dos máquinas

Este ejemplo es por supuesto exagerado en el sentido de que las calidades que proporcionan las dos máquinas (2.3% de defectuosas y 10% de defectuosas) son muy diferentes. Si proporcionan una calidad más similar, los resultados de la combinación de los lotes no serían tan graves, pero el principio sigue siendo el mismo

En la práctica, los lotes están formados con mucha frecuencia de artículos que se originan de fuentes diversas. Las fuentes pueden producir con diferentes niveles de calidad y es posible que cada fuente contribuya en proporción igual al número total de artículos que integran el lote. Ejemplos típicos de ésto los constituyen las partes de un molde de cavidades múltiples, de un taladro automático con múltiples vástagos o de varias líneas de producción similares. La producción puede estar organizada en forma tal que no sea fácil identificar las diferentes fuentes que la integran por separado, sin tener que llevar a cabo arreglos especiales que podrían ser inconvenientes y costosos; además puede ser necesario, incluir la producción proveniente de todas las mencionadas fuentes a fin de integrar un lote del tamaño requerido

Puede entonces surgir la pregunta, si continúa siendo aplicable la COC o un plan de muestreo para lotes como éstos, que incluyen artículos provenientes de un número de fuentes diversas, las cuales pueden estar produciendo con diferentes niveles de calidad, por lo que no son estrictamente homogéneas

La respuesta es que lo anterior no afecta en lo más mínimo la validez de la COC, pero que puede dar lugar al rechazo de producto bueno (ya que se ha mezclado con producto malo) en tanto que se hubieran aceptado los buenos y rechazados los malos si se hubieran mantenido por separado

Sin embargo, si una o más fuentes tienen un nivel de calidad que es considerablemente inferior al de las otras, entonces el efecto aparece rápidamente en el porcentaje de aceptación del total y debe llevarse a cabo una investigación. Esta debe indicar cuál es la fuente de error y si no se puede corregir de inmediato debe aislarse y sus lotes deben considerarse por separado

10 INSPECCION NORMAL

El NCA como se sabe ya, constituye la línea divisoria entre lo aceptable y lo no aceptable en la escala de calidad. Una vez que se ha especificado el NCA para cualquier producto en particular, lo ideal se contar con un plan de muestreo con el que se pudieran aceptar siempre los lotes cuya calidad fuera mejor a la del NCA y rechazar siempre aquellos cuya calidad fuera inferior, o sea una COC que descendiera verticalmente sobre el NCA tal como se muestra en la figura 1. Esta situación ideal sin embargo, constituye algo que ningún plan de muestreo puede lograr; así que es necesario aceptar una COC que descienda a un angulo inferior a la vertical ble hacer que los valores del NCA por el tamaño de la muestra sean exactamente constantes en diagonales de la Tabla II-A. Como resultado, las cifras que aparecen en la tercera columna son inevitablemente aproximadas también, pero se encontrará que las cifras reales están siempre muy cerca de las que se muestrean aquí.

En general, se observa que un plan de muestreo riguroso tiene el mismo tamaño de muestra que el plan de muestreo normal correspondiente pero tiene un número de aceptación menor. Sin embargo, si el número de aceptación de la inspección normal es 1, su cambio a 0 daría lugar a un grado irrazonable de rigurosidad y si el número de aceptación de la inspección normal es 0, no hay un número más pequeño. En ambos casos se obtiene la rigurosidad manteniendo el número de aceptación igual al de la inspección normal en tanto que se aumenta el tamaño de la muestra

No se muestran gráficamente las COC para la inspección rigurosa a fin de evitar la confusión en las gráficas al tratar de poner demasiadas curvas en ellas. Sin embargo, se muestran valores tabulados y cuando hay un plan de muestreo que constituye un plan de muestreo normal para un NCA y un plan de muestreo riguroso para un NCA diferente, lo cual sucede a menudo, se aplica la misma COC al plan en sus dos modalidades. Debe recordarse que las cifras que se utilizaron para trazar las curvas se refieren a valores del NCA para una inspección normal

Ejemplo 10: Supongamos que el NCA es de 1.0, que el nivel de inspección es II y que el tamaño del lote es de 2500. De la Tabla I obtenemos la letra clave K. Al utilizar la Tabla X-K-II tenemos que el plan de muestreo para inspección rigurosa es:

Tamaño de la muestra	125
Número de aceptación	2
Número de rechazo	3

Este plan es igual al plan de muestreo normal para la letra clave K y un NCA de 0.65. Su COC es por lo tanto la curva marcada 0.65 en la Tabla X-K

12 PROCEDIMIENTO DE CAMBIO

En los dos últimos capítulos se ha hablado sobre la inspección normal y la inspección rigurosa, lo que cada una de ellas tiene por objeto y cómo utilizar las tablas para encontrar los planes de muestreo adecuados. En este capítulo se habla del procedimiento de cambio por medio del cual se decide el cambio de la inspección normal a la rigurosa o de regresar de ésta a la primera. Si se conociera el valor exacto de la calidad que ofrece el fabricante, sería deseable aplicar la inspección normal siempre que la calidad fuera mejor que el NCA y la inspección rigurosa siempre que fuera más mala, pero en la realidad nunca se sabe cuál es la calidad exacta. Si se supiera, se utilizaría este conocimiento para dictaminr sobre los lotes en vez de presentarlos a una inspección por muestreo. En su lugar, lo mejor que puede hacerse es utilizar los conocimientos que se tienen a la mano, esto es, los resultados mismos del muestreo

Puesto que la inspección normal se ha calculado en forma tal que se acepten casi todos los lotes que se presentan, siempre y cuando la calidad sea igual por lo menos al NCA, de ésto se concluye que si se rechaza un gran porcentaje de lotes, la calidad no puede ser tan buena como el NCA. La pregunta que aquí cabe hacer es: ¿qué tan grande debe ser el porcentaje de rechazos en los lotes para que éste resulte convincente? Es necesario un procedimiento que permita tener una reacción razonablemente rápida si la calidad se hace más mala que el NCA, en tanto que se tenga una baja probabilidad de que por error se requiera implantar la inspección rigurosa cuando la calidad sea realmente mejor que el NCA

El procedimiento es: Debe aplicarse la inspección rigurosa para los lotes subsiguientes tan pronto como dos de cinco lotes sucesivos hayan sido rechazados en la inspección original. Inspección original significa la primera inspección de un lote. Si un lote es rechazado pero se vuelve a presentar a inspección después de una selección o reparación, este lote que se presenta nuevamente no debe considerarse para los fines de procedimiento de cambio. quizás podría haberse expresado mejor el procedimiento diciendo "dos de cada cinco o menos", a fin de prever aquella situación en la que se rechazan dos lotes casi al principio de la inspección antes de que se presenten cinco. Evidentemente bajo estas circunstancias se implantaría la inspección rigurosa inmediatamente sin esperar a que se presenten los cinco lotes

Una vez que se ha implantado la inspección rigurosa permanece en vigor para todos los lotes hasta que se acepten cinco lotes sucesivos con esta inspección rigurosa, entonces se vuelve a implantar la inspección normal. Este es un requisito bastante severo ya que la aceptación bajo una inspección rigurosa es más difícil que bajo la inspección normal, pero una vez que [illegible] de que se han presentado lotes con

¿En qué punto debe cruzarla?

Una solución posible es dejar que la curva cruce a la línea vertical en la proximidad de la parte inferior de la línea, como se muestra en la figura 2. La selección de un plan que se ajusta a lo anterior tiene la ventaja de que se proporciona un alto grado de protección al consumidor, ya que existe una alta probabilidad de que se rechace cualquier lote que se presente con una calidad inferior al NCA. Dicha solución, sin embargo, es insatisfactoria desde el punto de vista del fabricante; este no tendrá motivo de queja si se le rechaza casi todo su producto si su calidad es inferior al NCA, pero si tendrá motivo para quejarse si su calidad es superior al NCA y se le rechaza una gran cantidad de lotes

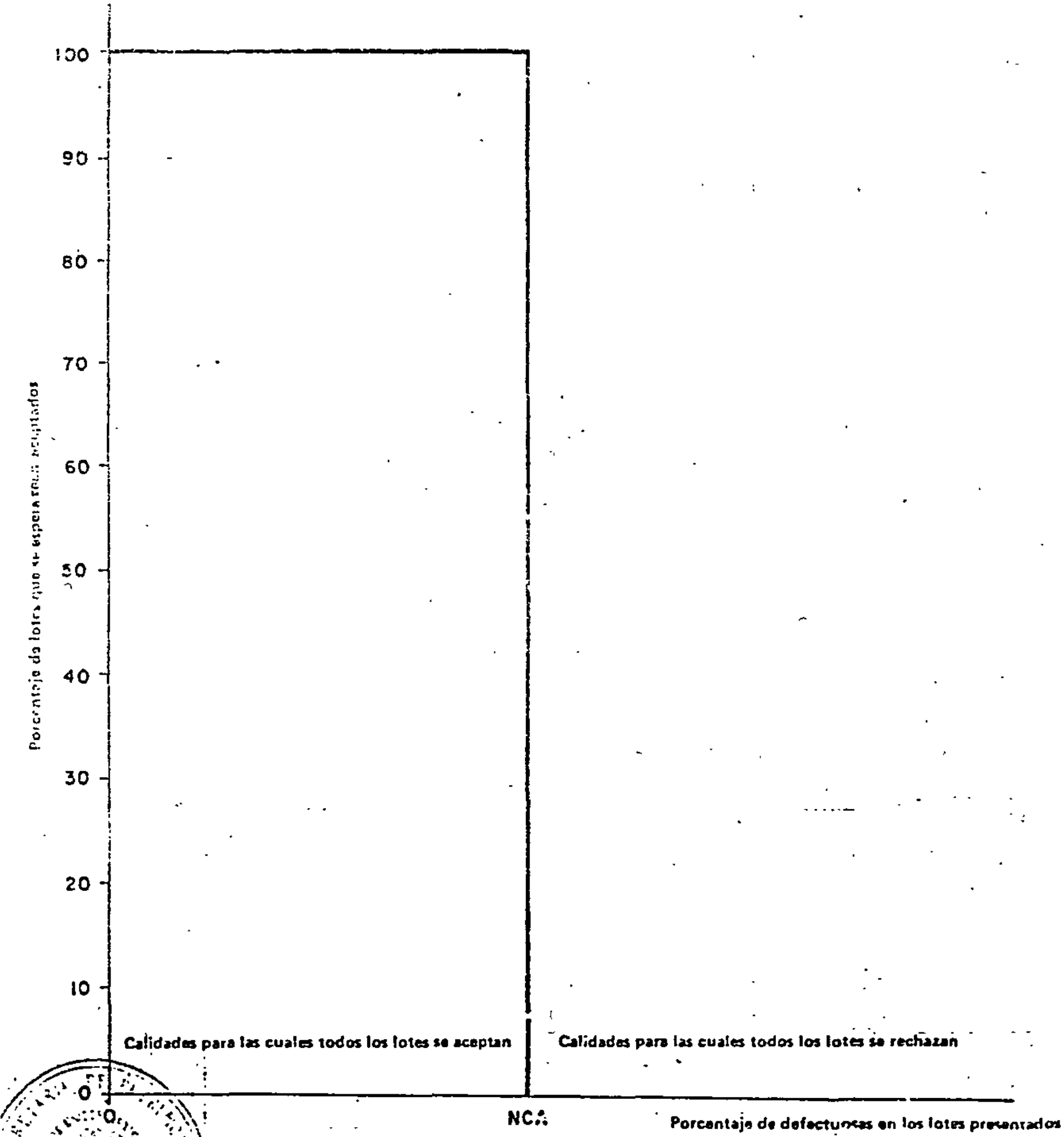


FIGURA 1 Curva de operación característica ideal (desde luego no posible).

En el caso que se ilustra en la figura 2, se aceptaría únicamente un poco más de un lote de cada cinco si el porcentaje de defectuosas fuera la mitad del NCA y se aceptaría menos de la mitad de los lotes aunque el porcentaje de defectuosas fuera tan reducido como para constituir una cuarta parte del NCA. Esto es claramente insatisfactorio puesto que el fabricante bajo estas circunstancias, se ve obligado a producir con una calidad considerablemente mejor de la que realmente se necesita, si es que quiere evitar rechazos de lotes constantemente. Es probable que ésto dé lugar a dificultades en la producción, aumentará en gran proporción el precio del producto y es probable también que dé lugar a una mala relación entre fabricante y consumidor

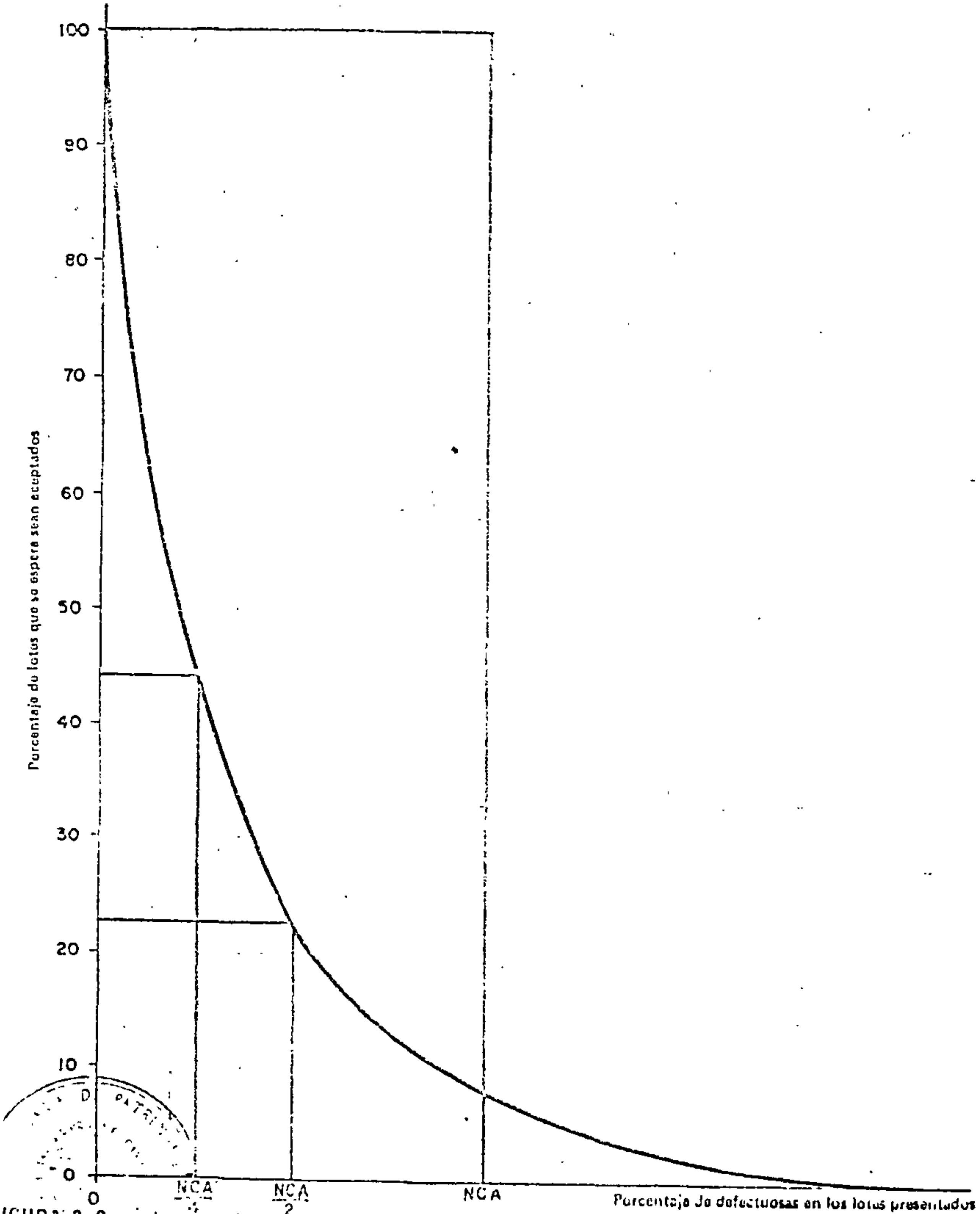


FIGURA 2 Curva de operación característica de un plan de muestreo calculado para proporcionar una alta probabilidad de rechazo de lotes presentados a inspección con una calidad menor al NCA especificado

el fabricante ya que si produce lotes con una calidad igual o mejor al NCA éstos tendrían una aceptación casi segura. Sin embargo, en este caso el consumidor tendría razones para quejarse ya que si el fabricante presentara lotes con una calidad inferior al NCA podría haber una alta probabilidad de que tuviera que aceptarlos. En el caso que se ilustra como ejemplo en la figura 3, si se presentaran los lotes con un porcentaje de defectuosas del doble del NCA, se aceptarían casi un 60% de dichos lotes

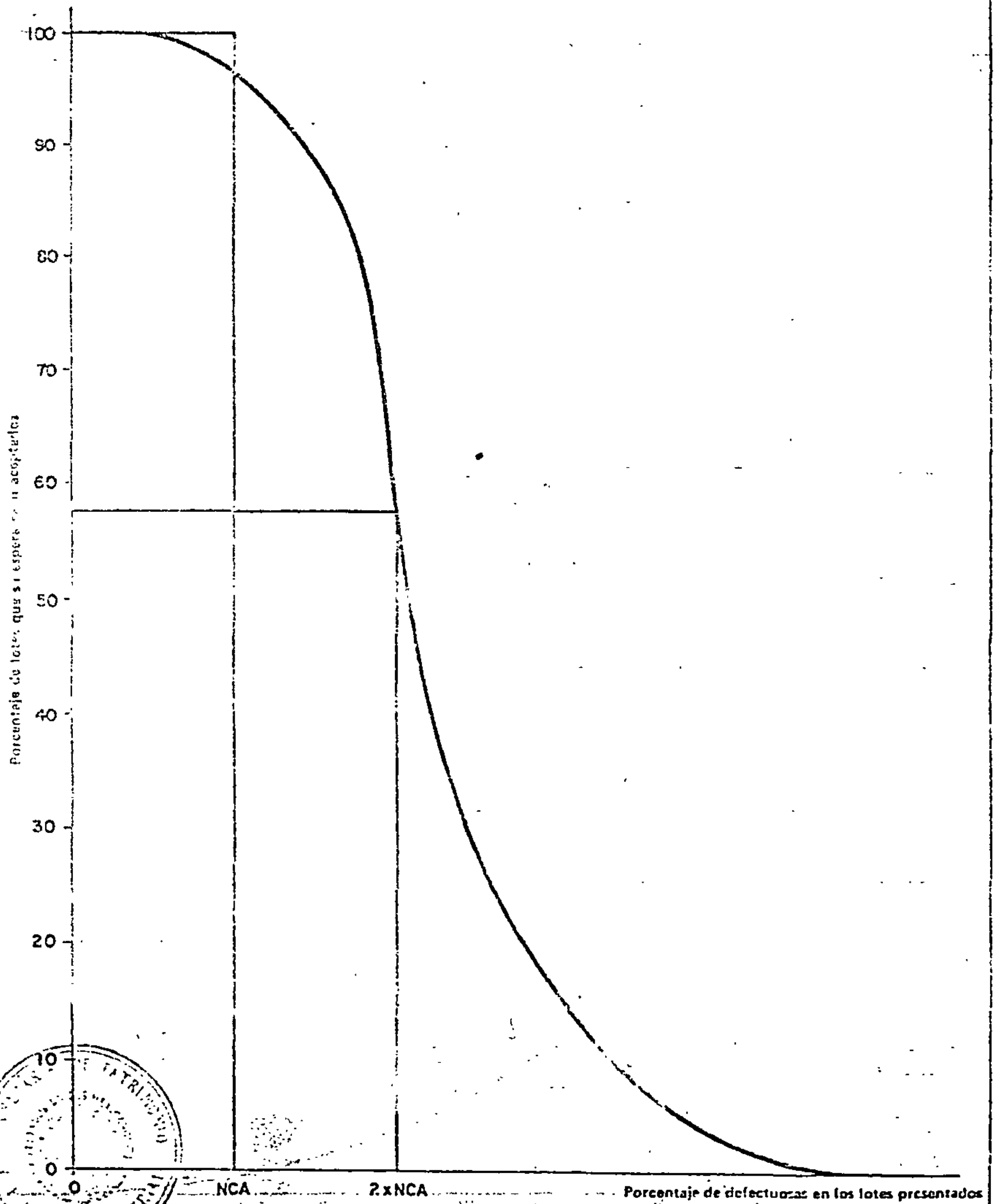


FIGURA 3 Curva de operación característica de un plan de muestreo calculada para proporcionar una alta probabilidad de aceptación de lotes presentados a inspección con una calidad mayor al NCA especificado

consumidor, la solución que se establece en esta norma consiste en otorgar el beneficio de la duda al fabricante (una curva similar a la de la figura 3) y para protección del consumidor, se recurre al sistema inspección normal-inspección rigurosa, en la cual se especifican dos planes de muestreo para cualquier situación dada, junto con las reglas para determinar cuando se debe cambiar de una inspección a otra y cuándo regresar a la primera

La inspección normal está destinada como se muestra en el ejemplo de la figura 3, para proteger al fabricante contra el riesgo de que se le rechace un gran porcentaje de lotes aunque su calidad sea mejor al NCA. En efecto, se concede al fabricante el beneficio de la duda que puede surgir debido a los riesgos inherentes al muestreo

Pero en vista de que el consumidor necesita también protección y que esto se logra estableciendo que no se conceda al fabricante el beneficio de la duda en forma ciega e invariable, sino únicamente cuando el fabricante demuestre que la merece. Si los resultados del muestreo informan en cualquier momento que la calidad promedio de su proceso es más mala que el NCA, el fabricante pierde el derecho a que se le conceda el beneficio de la duda (esto es, su derecho a una inspección normal) y a partir de ese momento se aplicará la inspección rigurosa para proteger al consumidor

Por lo tanto, la inspección normal tiene COC que cruzan la línea vertical en un punto del NCA cercano a la parte superior, pero el nivel exacto en el que la cruza varía de plan a plan de acuerdo con "el valor de NCA por el tamaño de la muestra" o lo que viene a ser lo mismo de acuerdo con el valor del número de aceptación

En la Tabla 2 se muestran las cifras en donde se ve que si el tamaño de la muestra es bastante grande para el NCA dado, lo que dá lugar a un valor de "NCA por el tamaño de la muestra igual por lo menos a 200" entonces el fabricante tiene siempre por lo menos 98% de probabilidad de que se acepten sus lotes si la calidad es igual al NCA y esta probabilidad es aún mayor para una calidad mejor que el NCA. Sin embargo, cuando el tamaño de la muestra es relativamente pequeño para el NCA requerido, el permitir al fabricante una probabilidad tan elevada significaría un riesgo demasiado grande para el consumidor

TABLA 2 Porcentaje de lotes que se espera sean aceptados si la calidad es igual al NCA, plan de muestreo sencillo nivel de inspección normal

NCA X tamaño de muestra (Aproximadamente)	Número de aceptación	Porcentaje de lotes que se espera sean aceptados (Aproximadamente)
12.5	0	88.1
50	1	90.9
80	2	95.3
125	3	96.1
200	5	98.3
315	7	98.4
500	10	98.5
800	14	98.3
1250	21	99.0
2000	30	98.7
3150	44	98.5

Por lo tanto, debe aceptarse una menor probabilidad de aceptación en el NCA para los números de aceptación pequeños. La Figura 4 muestra la razón de ésto. Aquí aparecen graficadas las COC, para un NCA de 1% defectuosas con el tamaño más pequeño y más grande de muestra disponibles para este NCA El fabricante tiene una mayor protección con los tamaños grandes de muestras que con los pequeños, si la calidad es buena, pero la curva desciende en forma mucho más pronunciada lo que permite que se de también una mejor protección al consumidor

11 INSPECCION RIGUROSA

Cuando se requiera utilizar la inspección rigurosa, se obtiene el plan requerido de las tablas en la misma forma, con excepción de que se utiliza la Tabla [illegible] en lugar de la Tabla II-A en tanto que si se utilizan las Tablas X se encuentra la columna [illegible] NCA a partir de la parte inferior en vez

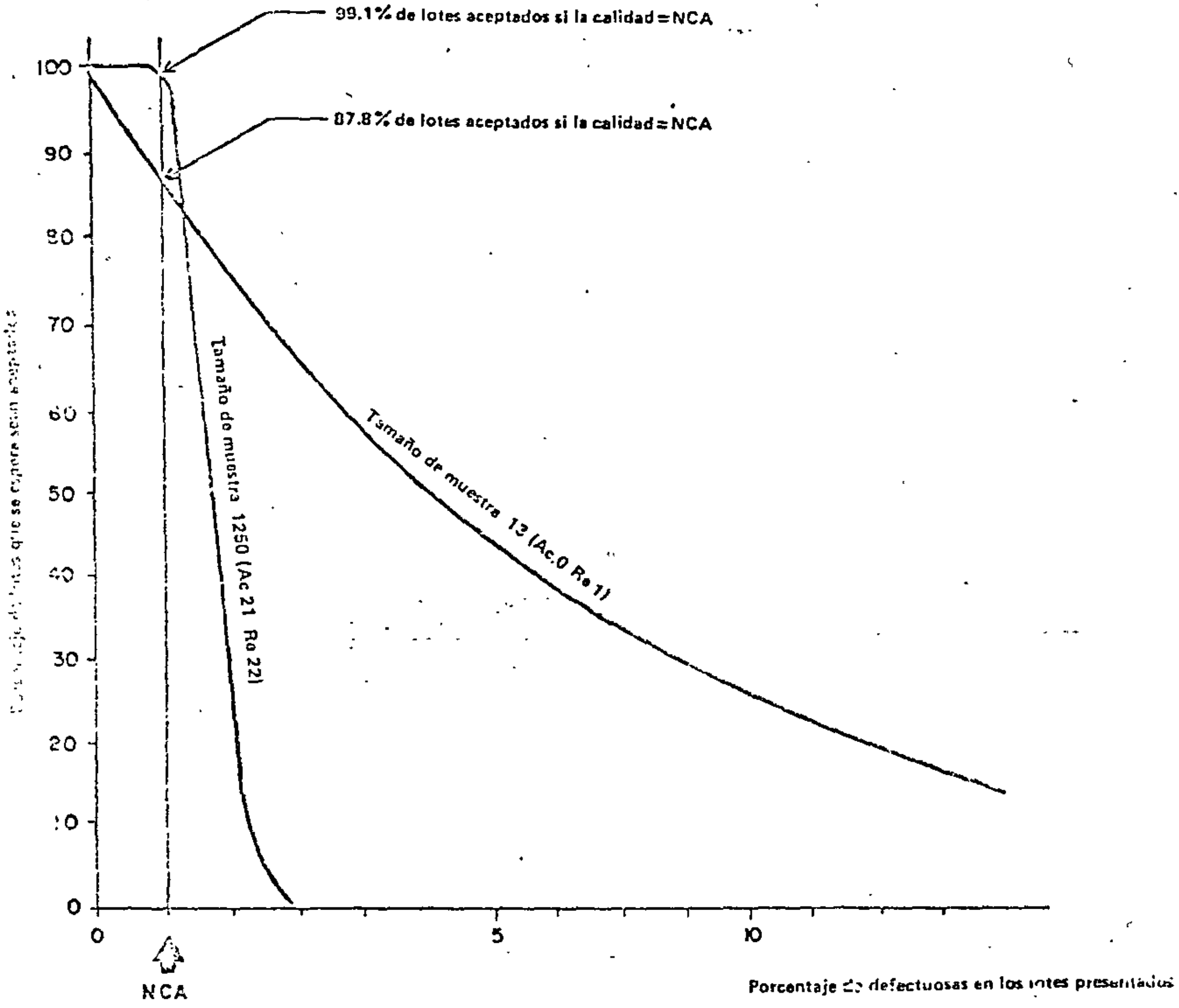


FIGURA 4 COC para dos planes de muestreo con inspección normal para un NCA de 1% de defectuosas

hay una protección [illegible] para el consumidor. Es el procedimiento que establece que se suspenderá la inspección de aceptación en espera de una acción que mejore la calidad si diez (u otro número que se acuerde) lotes consecutivos permanecen en inspección rigurosa.

Este es ún principio de suma importancia; si la calidad es mala, es necesario tomar algunas medidas y el inspector debe tener derecho a rehusar a inspeccionar cualquier otro lote adicional hasta que tenga pruebas de que se han tomado las medidas adecuadas que conduzcan a una calidad aceptable

Debe interpretarse la regla con suficiente criterio, si se rechazara el sexto lote bajo una inspección rigurosa y luego se aceptaran el séptimo, el octavo, el noveno y el décimo, no sería razonable suspender la inspección en ese momento. La mejor interpretación sería aparentemente que se suspendiera la inspección si se rechaza el décimo lote pero si se aceptara el décimo lote, podrá proseguirse con la inspección rigurosa hasta que se rechace un lote o que se vuelva a implantar la inspección normal

Ejemplo 11: Se suministra un producto en lotes de 4000 unidades de producto. El NCA es de 1.5% de defectuosas. El nivel de inspección es III. Va a emplearse el muestreo sencillo. La Tabla I nos proporciona M como letra clave y se encuentra que los planes de muestreo requeridos son:

	INSPECCION NORMAL	INSPECCION RIGUROSA
Tamaño de la muestra	315	315
Número de aceptación	10	8
Número de rechazo	11	9

TABLA 3 Veinticinco lotes de un procedimiento de inspección (Véase ejemplo 11)

Número de lote	Tamaño del lote	Tamaño de la muestra	Ac	Re	Unidades de producto defectuosas	Dictamen	Acción a tomarse
1	4000	315	10	11	7	Ac	Inspección Normal
2	4000	315	10	11	2	Ac	Continúese Insp Normal
3	4000	315	10	11	4	Ac	Continúese Insp Normal
4	4000	315	10	11	11	Re	Continúese Insp Normal
5	4000	315	10	11	9	Ac	Continúese Insp Normal
6	4000	315	10	11	4	Ac	Continúese Insp Normal
7	4000	315	10	11	7	Ac	Continúese Insp Normal
8	4000	315	10	11	3	Ac	Continúese Insp Normal
9	4000	315	10	11	2	Ac	Continúese Insp Normal
10	4000	315	10	11	12	Re	Continúese Insp Normal
11	4000	315	10	11	8	Ac	Continúese Insp Normal
12	4000	315	10	11	11	Re	Cámbiese Insp Rigurosa
13	4000	315	8	9	7	Ac	Continúese Insp Rigurosa
14	4000	315	8	9	8	Ac	Continúese Insp Rigurosa
15	4000	315	8	9	4	Ac	Continúese Insp Rigurosa
16	4000	315	8	9	9	Re	Continúese Insp Rigurosa
17	4000	315	8	9	3	Ac	Continúese Insp Rigurosa
18	4000	315	8	9	5	Ac	Continúese Insp Rigurosa
19	4000	315	8	9	2	Ac	Continúese Insp Rigurosa
20	4000	315	8	9	7	Ac	Continúese Inspe Rigurosa
21	4000	315	8	9	6	Ac	Regrésese a Insp Normal
22	4000	315	10	11	7	Ac	Continúese Insp Normal
23	4000	315	10	11	2	Ac	Continúese Insp Normal
24	4000	315	10	11	5	Ac	Continúese Insp Normal
25	4000	315	10	11	3	Ac	Continúese Insp Normal

La Tabla 3 muestra los resultados de la inspección de los primeros 25 lotes. Es usual utilizar la inspección normal al principio de un ciclo de inspección y es lo que aquí se hace. Los rechazos en los lotes 4 y 10, no ocasionan un cambio a la inspección rigurosa ya que en ninguno de los casos se dá lugar a la aplicación de la regla de 2 de cada 5, pero el rechazo en el lote 12 que sigue al que hubo en el lote 10 dá lugar a un cambio desde el lote 13 en adelante

En el lote 21, se han aceptado cinco lotes sucesivos bajo inspección rigurosa y vuelve a implantarse la inspección normal a partir del lote 22

13 METODOS PARA REDUCIR LOS RIESGOS

Siempre habrán riesgos en la inspección por muestreo, tanto en lo que se refiere a la aceptación de lotes malos como al rechazo de lotes buenos, pero estos riesgos deberán ser tan pequeños que sean tolerables y esto se logra seleccionando en forma adecuada el NCA y el nivel de inspección

Si el fabricante o el consumidor consideran en un momento dado que el riesgo que están tomando es muy grande, sería bueno comprobar si se han seleccionado en forma adecuada el NCA y el nivel de inspección, pero en la parte restante de este Capítulo, se supondrá que se han seleccionado en forma adecuada y que no hay necesidad de modificarlos

El fabricante tendrá interés en reducir los riesgos cuando la calidad sea mejor que el NCA pero no tiene derecho a ninguna reducción del riesgo en otra forma. El consumidor tendrá un especial interés en los riesgos cuando la calidad sea más mala que el NCA ya que si la calidad es mejor que el NCA, está obteniendo la calidad requerida

Hay cuatro métodos que pueden utilizarse para reducir los riesgos para ambas partes:

El primer método consiste en mejorar la calidad de la produccion. Esto parece ser demasiado obvio como para que valga la pena decirlo, pero es sorprendentemente fácil que durante las discusiones sobre planes de muestreo, COC, procedimiento de cambio, etc., se olvide la sencilla regla de que un porcentaje bajo de defectuosas en la producción proporciona al consumidor lo que éste busca y le asegura al fabricante un alto porcentaje de aceptación

El segundo método es aplicable únicamente en un caso en particular, pero constituye un caso que es muy probable que ocasione ansiedad, a saber: cuando el número de aceptación es 0. Los planes con un número de aceptación de cero poseen COC con una pendiente tan reducida que los grandes riesgos son inevitables

Por esta razón en esta norma se permite una alternativa cuando las tablas conducen a un número de aceptación cero (siempre y cuando sea de común acuerdo entre fabricante y consumidor.) Esta alternativa consiste en utilizar un plan de muestreo con el mismo NCA pero con un número de aceptación de 1, en vez de 0. En este caso hay un precio a pagar, ya que se requiere un tamaño de muestra aproximadamente cuatro veces más grande, pero los riesgos para ambas partes son mucho más reducidas, tanto que a menudo resulta conveniente. Puede reducirse algo este precio mediante la adopción del muestreo doble o múltiple, cuando el número de aceptación para muestreo sencillo es 1, pero no cuando el número de aceptación es 0

El tercer método consiste en considerar la posibilidad de aumentar el tamaño del lote. Si puede aumentarse lo suficiente el tamaño del lote como para dar lugar a un cambio de la letra clave y con ello a un aumento en el tamaño de la muestra, se reducirán los riesgos para ambas partes, puesto que un tamaño mayor de muestra da lugar a una COC con pendiente más pronunciada y las tablas están dispuestas de tal forma que esta curva es más alta que la anterior en la mayor parte de los puntos en donde la calidad es superior al NCA y más baja en la mayor parte de los puntos en donde la calidad es inferior al NCA

Desgraciadamente no es posible adaptar las tablas en forma de que estos elementos sean siempre como se desean sin que se pierdan al mismo tiempo otros elementos deseables. La figura 5 por ejemplo, muestra cuatro planes de muestreo normales relacionados con un NCA de 1.5% de defectuosas; para una calidad mejor que el NCA se ve que entre más grande es el tamaño de la muestra, más alto es el porcentaje de lotes que se aceptan, en tanto que para una calidad inferior (cuando el porcentaje de defectuosas es 2 veces o más que el NCA), la muestra más grande es la que rechaza más y la muestra más pequeña es la que rechaza menos (siendo deseable que el plan de muestreo rechace tan frecuentemente como sea posible, cuando la calidad es inferior al NCA). El punto de cruce de las curvas para tamaños de muestra de 32 y

Puede objetarse la necesidad del aumento del tamaño de los lotes para lograr una mejor protección en el muestreo, ya que no siempre es fácil o razonable el cambiar el tamaño de los lotes, ya que deben fijarse los tamaños de los lotes de acuerdo con ciertos aspectos como son la continuidad y cantidad de la producción, que puede manejarse en un momento dado, problemas de transporte, problemas de control de inventario y así sucesivamente. Todo esto es cierto, sin embargo, vale la pena recordar que, a igualdad de los demás aspectos, puede ser provechoso aumentar el tamaño del lote desde el punto de vista de la inspección por muestreo

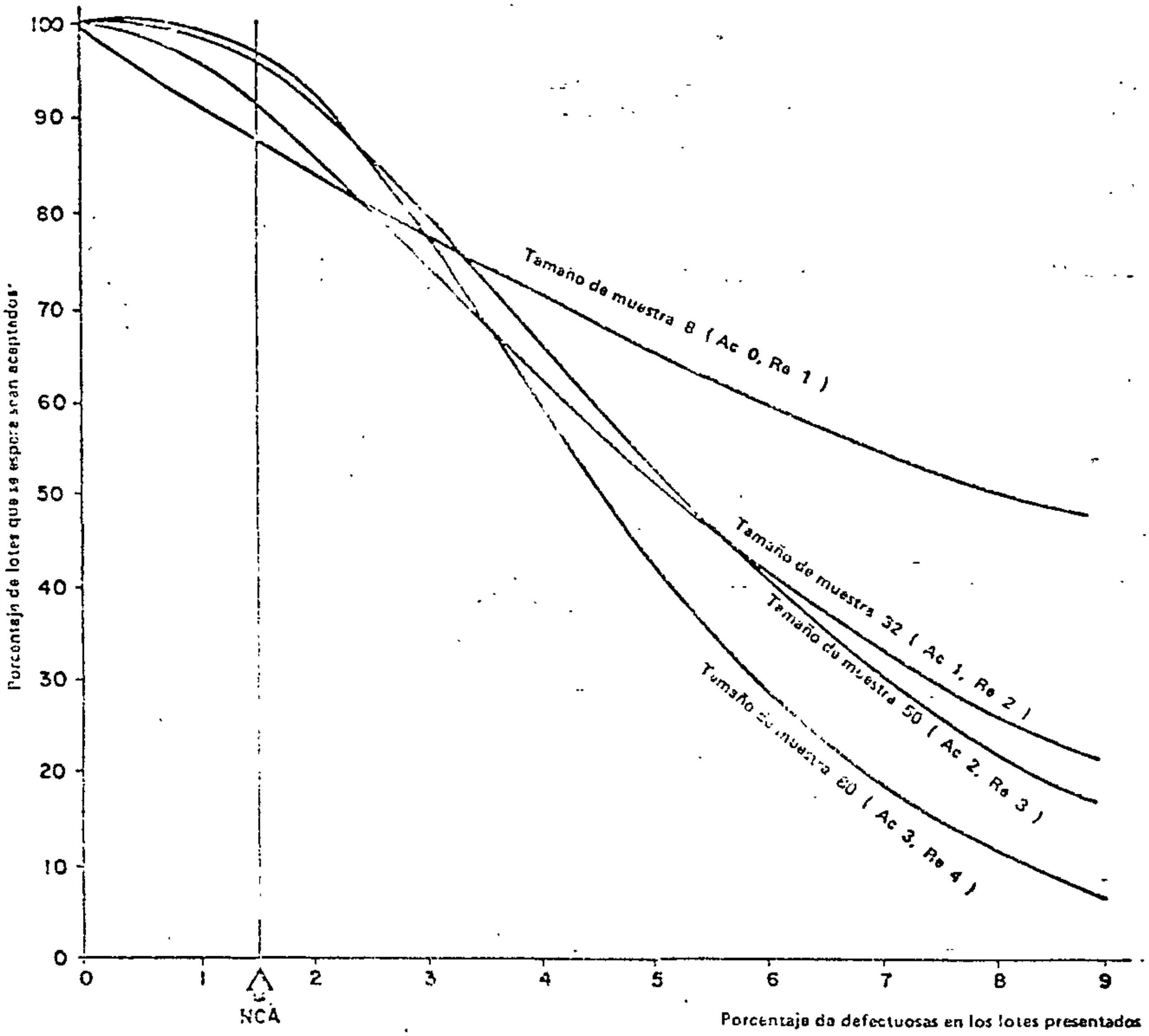


FIGURA 5 Cuatro planes de muestreo para un NCA de 1.5% de defectuosas, inspección normal y muestreo sencillo

Al examinar las alturas de las curvas en la figura 5, a dos, tres y cuatro veces el NCA debe recordarse que las curvas muestran únicamente parte del panorama o sea la parte correspondiente a la inspección normal El porcentaje de lotes que se acepta, si la calidad es dos veces el NCA, es inferior a 80% para todos los planes de inspección normal de la DGN-R-18/2 Dicho porcentaje de aceptación dará por resultado la implantación de la inspección rigurosa antes de que pasen muchos lotes

Bajo algunas circunstancias puede concluirse que no vale la pena el término medio de la inspección por muestreo que involucra necesariamente la utilización de un programa completo de muestreo. Las partes que intervienen pueden entonces negociar a fin de seleccionar un plan directamente de las COC, pero cuando se adopta un enfoque de esta clase es necesario que las partes tengan conocimientos al respecto si es que ha de obtenerse una selección satisfactoria

Cuando existe evidencia de que la calidad de la producción es mejor que el NCA en forma consistente, hay razones para suponer que la producción continuará siendo buena, ya no hay necesidad de contar con un plan de muestreo que separe los lotes buenos de los malos, en virtud de que todos los lotes son buenos Sin embargo no debe prescindirse totalmente de la inspección, ya que se necesita contar con una señal de aviso para el caso de que la calidad de la producción empeore en un momento dado

Bajo estas circunstancias, puede obtenerse un ahorro considerable si así se desea, mediante el uso de planes de muestreo con inspección reducida cuyos tamaños de muestras son únicamente de dos quintas partes del tamaño de la muestra que corresponde a los planes con inspección normal (excepto cuando el plan de inspección normal tiene un tamaño de muestra inferior a 5, en cuyo caso el porcentaje es de más de dos quintas partes, ya que se toma una muestra de por lo menos 2 para la inspección reducida)

A primera vista pudiera suponerse que la forma de reducir el tamaño de la muestra sería utilizar una letra clave anterior en el orden alfabético. Esto reduciría de hecho el tamaño de la muestra, sin embargo, tendría también el efecto indeseable de reducir el porcentaje de lotes que se espera sean aceptados con el NCA dado, ésto, de hecho resultaría en un castigo al fabricante por hacer un buen trabajo. Puesto que un resultado así sería claramente insatisfactorio; es necesario tener una tabla para la inspección reducida Esta tabla es la Tabla II-C de las tablas de la parte 3 de esta norma

Debe notarse que no existe una obligación de implantar la inspección reducida. El uso de la inspección vigorosa cuando así lo requiera el procedimiento de cambio, es esencial en lo que se refiere al programa y por lo tanto, es obligatoria; sin embargo la inspección reducida es totalmente opcional aunque se cumplan las condiciones necesarias que establece el procedimiento de cambio, pudiéndose implantar cuande el consumidor así lo desea o lo juzgue conveniente

El procedimiento de cambio esta calculado para asegurar que no se implante la inspección reducida, a menos que la calidad que se observa sea verdaderamente buena y de que sea probable que continúe en esta misma forma A fin de averiguar si es permisible implantar la inspección reducida, debe compararse la historia reciente de la producción con los números límite que se encuentran en la Tabla VIII

Ejemplo 12: Se está fabricando un producto el cual va a inspeccionarse bajo las condiciones siguientes: NCA 10% de defectuosas, tamaño de lote 4000, nivel de inspección I y muestreo sencillo. Bajo la letra clave J se encuentran el tamaño de la muestra que es de 80, el número de aceptación 14 y el número de rechazo 15

TABLA 4 Quince lotes de un proceso de inspección, NCA=10% de defectuosas
Nivel de inspección I (Véase ejemplo 12)

Número de lote	Tamaño del lote	Tamaño de la muestra	Ac	Re	Cantidad de defectuosas	Dictamen	Acción futura
61	4000	80	14	15	7	Ac	Continúese Normal
62	4000	80	14	15	5	Ac	Continúese Normal
63	4000	80	14	15	7	Ac	Continúese Normal
64	4000	80	14	15	6	Ac	Continúese Normal
65	4000	80	14	15	9	Ac	Continúese Normal
66	4000	80	14	15	7	Ac	Continúese Normal
67	4000	80	14	15	9	Ac	Continúese Normal
68	4000	80	14	15	8	Ac	Continúese Normal
69	4000	80	14	15	6	Ac	Continúese Normal
70	4000	80	14	15	5	Ac	Continúese Normal
71	4000	80	14	15	8	Ac	Continúese Normal
72	4000	80	14	15	4	Ac	Continúese Normal
73	4000	80	14	15	3	Ac	Continúese Normal
74	4000	80	14	15	1	Ac	Continúese Normal
75	4000	80	14	15	3	Ac	Cámbiese a Reducida

la tabla (esta tabla se tomó como un extracto de una secuencia más larga por lo que la numeración de los lotes no comienza con 1). Los resultados son buenos, se aceptan todos los lotes, quedando el número de defectuosas bastante por debajo del número de aceptación

Después de efectuar la inspección de la muestra correspondiente al lote 71, el inspector decide indagar si es posible utilizar la inspección reducida. Cuenta el número total de defectuosas que contienen las muestras de los últimos 10 lotes y encuentra que son 70. La cantidad de muestras de los últimos 10 lotes es de 800 y al entrar en la Tabla VIII con este número de 800 y con un NCA de 10, encuentra que el número límite es 68; en este caso, siendo 70 mayor que 68 no se permite la inspección reducida

Después de observar muy buenos resultados con los cuatro lotes siguientes, decide investigar nuevamente La cantidad de defectuosas que se observan en los últimos 10 lotes, es ahora únicamente de 54, lo que está dentro del número límite. Bajo estas circunstancias sí se permite la inspección reducida ya que además se han aceptado los 10 últimos lotes bajo inspección normal , siempre y cuando la producción se lleve a cabo a ritmo constante. Lo que significa ritmo constante requiere interpretación y es posible que ésta varié de una industria a otra. Básicamente el requisito es que no haya una interrupción en la producción suficiente como para afectar la calidad de la producción actual que es buena, como lo demuestran los registros correspondientes a los últimos lotes. El significado exacto, en cualquier caso en particular, depende del juicio técnico basado en la consideracion de todos los factores cuya variación pueda afectar a la calidad del producto

Puesto que la inspección reducida es opcional, se permite reimplantar la inspección normal si es que así lo desea o lo juzga conveniente el consumidor y debe hacerse en el caso de que la producción se haga irregular, de que haya demoras en élla o si otras condiciones la hacen parecer necesaria. Sin embargo, se debe regresar a la inspección normal en el caso de que no se acepte un solo lote bajo inspección reducida.

Los planes de muestreo reducido presentan una característica particular, que es una brecha entre el número de aceptación y el de rechazo (La diferencia entre los números de aceptación y rechazo no es 1 como en el caso de inspecciones normal y rigurosa). El procedimiento de cambio indica que si el número de defectuosas que se observan es igual al número de aceptación o menor, se debe aceptar el lote y se continúa con la inspección reducida (siempre y cuando las otras condiciones no requieran que se implante la inspección normal.) Si se alcanza o excede el número de rechazo, se debe rechazar el lote y se vuelve a implantar la inspección normal a partir del siguiente lote. Sin embargo, si el resultado se encuentra dentro de la brecha entre el número de aceptación y el de rechazo, se acepta este lote pero debe volverse a implantar la inspección normal

Ejemplo 13: En la Tabla 5 continúa el ejemplo de la Tabla 4. En la Tabla II-C se encuentra que el plan de muestreo reducido es:

Tamaño de la muestra	32
Número de aceptación	7
Número de rechazo	10

TABLA 5 Diez lotes de un proceso de inspección, NCA=10% de defectuosas, Nivel de inspección I (Véase el ejemplo 13)

Número del lote	Tamaño del lote	Tamaño de la muestra	Ac	Re	Defectuosas	Dictamen	Acción futura
76	4000	32	7	10	5	Ac	Continúese reducida
77	4000	32	7	10	2	Ac	Continúese reducida
78	4000	32	7	10	7	Ac	Continúese reducida
79	4000	32	7	10	3	Ac	Continúese reducida
80	4000	32	7	10	1	Ac	Continúese reducida
81	4000	32	7	10	4	Ac	Continúese reducida
82	4000	32	7	10	9	Ac	Reimplántese normal
83	4000	80	14	15	17	Re	Continúese normal
84	4000	80	14	15	12	Ac	Continúese normal
85	4000	80	14	15	15	Re	Cámbiese a rigurosa

Se ve que los tamaños de las muestras para la inspección reducida siguen la misma serie de números que para la inspección normal, pero que retroceden dos espacios. Esto proporciona una vez más consistencia en las diagonales; sin embargo, no se proporciona COC para la inspección reducida. Esto se hace deliberadamente en virtud de las dos razones siguientes: La primera es que tienden a conducir a conclusiones erróneas en el sentido de que se interpreta la curva completa en forma visual, en tanto que el extremo derecho de la curva es inaplicable ya que se permite la inspección reducida únicamente cuando se tiene la certeza que el porcentaje de defectuosas es menor que el NCA con base en la evidencia obtenida en el pasado y que haya una buena razón para esperar que la buena calidad continúe

La segunda razón es que si la escala vertical de las curvas representa "el porcentaje de lotes que se espera que sean aceptados", ésto más bien carece de sentido para la inspección reducida ya que tan pronto como se rechaza cualquier lote se vuelve a implantar la inspección normal. Algunas veces al hacer referencia a la Tabla VIII se encuentra un asterisco en vez de un número. Esto significa que el número de unidades en las muestras de los últimos 10 lotes no es suficiente para juzgar si es permisible la inspección reducida, en cuyo caso puede considerarse un número superior a 10 lotes hasta que se encuentre un número en la tabla Se ve que el primer número que se encuentra bajo estas circunstancias es siempre 0, así que vale la pena adoptar esta técnica únicamente si no se han observado defectuosas en las muestras provenientes de más de 10 lotes sucesivos

CONCESIONES

Las concesiones forman en general parte de la práctica de inspección, pero estas no deben llevarse a extremos, es claramente legítimo que un consumidor decida que aún cuando sabe que algún lote no es de calidad aceptable, no pueda darse el lujo de esperar y en esta forma accede a aceptarlo sobre una base de concesión, posiblemente a un precio menor. No existe ningún aspecto en el sistema de inspección por muestreo que evite que un consumidor haga lo anterior si es que así lo desea o lo juzga conveniente. Si se hace una concesión de esta clase y se acepta un lote "rechazado" por alguna razón en especial, debe, sin embargo, registrarse el lote como rechazado para fines del procedimiento de cambio y la historia verdadera de la calidad. Hay, sin embargo, otro tipo de concesión que hay tentación de usar cuando se utiliza la inspección por muestreo. Esta consiste en aceptar, aunque el plan de muestreo diga que hay que "rechazar", no porque el consumidor decida que prefiere tomar defectuosas en lugar de esperar, sino porque el plan de muestreo dice "apenas rechácese"

Esta tentación puede ser particularmente fuerte si el rechazo significa no únicamente rechazar un lote, sino también un cambio a inspección rigurosa. Debe evitarse en lo posible caer en esta tentación, si el plan de muestreo dice "acéptese para 3, rechácese para 4", no quiere decir "acéptese para 4, rechácese para 5".

Ejemplo 14: Se está llevando a cabo la inspección bajo las condiciones de un NCA de 10.0 %de defectuo- letra clave E, inspección normal y muestreo sencillo. El plan de muestreo es:

Tamaño de la muestra	13
Número de aceptación	3 defectuosas
Número de rechazo	4 defectuosas

En la inspección de un lote en particular, se encuentran 4 defectuosas en la muestra de 13. El inspector tiene la intención de rechazar el lote, pero el fabricante dice que se encontraron únicamente 4 defectuosas. Este número se encuentra exactamente en la línea divisoria, constituye únicamente una cuestión de probabilidad. Podría fácilmente haber sido de otra forma, ya que los demás artículos buenos del lote que no han sido inspeccionados, podrían haber entrado en la muestra en lugar de una de las cuatro defectuosas y entonces el lote se habría aceptado por lo que se debería aceptar el lote

Lo cierto es que la probabilidad juega un papel importante en los resultados que proporciona el muestreo, pero esta probabilidad no está sujeta al azar. Ha sido calculada en forma precisa cuando se elaboraron las tablas de muestreo. Al acordar utilizar un plan en particular, queda decidido qué riesgos podemos permitirnos

Aceptar cuando debemos rechazar significaría tomar más riesgos de los que hemos acordado y no es más razonable aceptar porque el programa apenas rechaza que rechazar por que apenas acepta. ¿qué se diría si se rechazara aunque únicamente se hubieran encontrado tres defectuosas en la muestra?

Además existe una cierta concesión ya incluida en las tablas, por ejemplo si en el caso antes mencionado (Ejemplo 14) el NCA es 10% y el 10% de 13 es 1.3 "Acéptese con 1, rechácese con 2", constituiría por lo tanto la regla rígida. Al decir "acéptese con 3, rechácese con 4"; las tablas permiten una considerable concesión y no es posible proporcionar adicionalmente nada

16 CLASIFICACION DE DEFECTOS

En la parte 2 de esta norma, se establece una clasificación de defectos:

Defecto crítico, mayor y menor, pero también se permiten otras clases o subclases dentro de éstas

Hay varias formas de especificar los NCA a cada clase. Posiblemente la más sencilla consiste en agrupar todos los defectos en dos categorías: mayores y menores y especificar un solo NCA a cada clase, por ejemplo:

Clase	NCA
Mayor	0.40% de defectuosas
Menor	1.5 % de defectuosas

En este caso hay dos planes de muestreo que corresponden a estos NCA y si un lote cumple en cada uno de los dos planes de aceptación es aceptado y si falla en alguno de éllos o en ambos se rechaza

Las distintas alternativas son:

1) Establecer más de dos clases, por ejemplo:

Clase	NCA
Mayor	0.65 % de defectuosas
Menor A	1.5% de defectuosas
Menor B	4.0 % de defectuosas

en este caso dictaminamos cada clase por separado

2) Establecer un NCA por separado a cada característica, con la posible inclusión de un NCA adicional para todas las características tomadas en conjunto, o para todas las características de cada clase. Este método puede ser valioso cuando el artículo es complejo y tiene muchas características independientes a inspeccionar

3) Establecer una sola clase mayor y además agrupar todos los defectos a fin de considerar los mayores y menores en forma conjunta. Podrían fijarse los NCA, por ejemplo:

Clase	NCA
Mayor	1.0 % de defectuosas
Mayor+Menor	4.0 % de defectuosas

A continuación se considera en detalle únicamente la primera alternativa. En tanto que las otras alternativas tienen indudablemente su lugar en circunstancias adecuadas; sin embargo, debe entenderse que el trabajo con un plan complicado puede ser demasiado para el personal de inspección. Y en la mayoría de los casos se prefiere la sencillez

Ejemplo 15: Un producto tiene cinco dimensiones (A, B, C, D y E) que es necesario comprobar en cada unidad que se inspeccione. Al considerar los efectos de las defectuosas de cada tipo, se decide que las dimensiones A y B deben clasificarse como mayores, en tanto que C, D y E son menores [illegible] como se indica a continuación.

Clase	NCA
Mayor	0.65 % de defectuosas
Menor	2.5 % de defectuosas

Supongamos que el nivel de inspección es III para ambas clases y que se van a utilizar muestreo sencillo e inspección normal, con tamaño de lote de 900. La letra clave es K. Los planes de muestreo son los siguientes:

Clase	Tamaño de la muestra	Núm de aceptación	Núm de rechazo
Mayor	125	2 defectuosas	3 defectuosas
Menor	125	7 defectuosas	8 defectuosas

este esquema, que comprende un mismo tamaño de muestra para cada clase pero distintos número de aceptación, es típico y hace que la administración del plan de muestreo sea más sencilla, ya que puede utilizarse la misma muestra física para ambas clases (siempre y cuando la inspección no implique la destrucción de la muestra). Una muestra de 125 proveniente de un lote en particular podría proporcionar los siguientes resultados:

Una unidad de producto defectuosa en lo que respecta a la dimensión A

Una unidad de producto defectuosa en lo que respecta a las dimensiones B y D

Dos unidades de producto defectuosas en lo que respecta a la dimensión C

Tres unidades de producto defectuosas en lo que respecta a las dimensiones C y D

O sea que en total tenemos:

Dos defectuosas mayores y cinco defectuosas menores. Por lo tanto se acepta el lote

Ejemplo 16: Va a inspeccionarse un producto bajo las siguientes condiciones: tamaño del lote 500, nivel de inspección II, inspección normal y muestreo sencillo. Los NCA son:

Clase	NCA
Mayor	0.065 % de defectuosas
Menor	0.25 % de defectuosas

encontrándose que los planes de muestreo son:

Clase	Tamaño de la muestra	Núm. de aceptación	Núm. de rechazo
Mayor	200	0 defectuosas	1 defectuosa
Menor	50	0 defectuosas	1 defectuosa

Bajo estas circunstancias debe examinarse una muestra de 50 para todos los tipos de defectos y luego una muestra adicional de 150 para los defectos mayores únicamente.

Alternativamente, puesto que de cualquier forma se necesita una muestra de 200, el inspector puede decidir que sería conveniente inspeccionar este último tamaño de muestra para ambas clases. Podrá hacerlo siempre y cuando exista acuerdo entre fabricante y consumidor. Al utilizar la letra clave L, el plan para los defectos menores queda en la siguiente forma:

Tamaño de la muestra	200
Número de aceptación	1
Número de rechazo	2

Cuando se clasifican los defectos con distintos NCA para las diferentes clases o grupos de clases, entonces el cambio entre la inspección normal y la rigurosa se efectúa en forma independiente para cada clase o grupo de clases, para las cuales se haya especificado un NCA, de acuerdo con los lotes aceptados o rechazados para esa clase o grupo en particular

Ejemplo 17: Las condiciones son: tamaño del lote 275 nivel de inspección III y muestreo sencillo. El NCA para defectos mayores, 1.5 % de defectuosas. El NCA para defectos menores, 4.0% de defectuosas.

En la tabla 6 se presentan los resultados y la forma en que se lleva a cabo el cambio. Tantos cambios en una cantidad de lotes tan reducida es útil para fines de ejemplo, pero poco probable en la práctica

TABLA 6 Veinte lotes de un proceso de inspección. Nivel de inspección III
(Véase el ejemplo 17)

Núm del lote	Tamaño del lote	Tamaño de la muestra	Mayores (NCA=1.5% defectuosas)					Menores (NCA=4.0% defectuosas)					Dictamen global
			Ac	Re	Defectuosas	Dictámen	Acción futura	Ac	Re	Defectuosas	Dictamen	Acción futura	
36	275	50	2	3	2	Ac	Continúese normal	5	6	3	Ac	Continúese normal	Ac
37	275	50	2	3	1	Ac	Continúese normal	5	6	4	Ac	Continúese normal	Ac
38	275	50	2	3	3	Re	Continúese normal	5	6	3	Ac	Continúese normal	Re
39	275	50	2	3	2	Ac	Continuese normal	5	6	3	Ac	Continúese normal	Ac
40	275	50	2	3	4	Re	Cámbiese a rigurosa	5	6	5	Ac	Continúese normal	Re
41	275	50	1	2	2	Re	Continúese rigurosa	5	6	4	Ac	Continúese normal	Re
42	275	50	1	2	3	Re	Continúese rigurosa	5	6	8	Re	Continúese normal	Re
43	275	50	1	2	1	Ac	Continúese rigurosa	5	6	6	Re	Cámbiese a rigurosa	Re
44	275	50	1	2	1	Ac	Continúese rigurosa	3	4	5	Re	Continúese rigurosa	Re
45	275	50	1	2	0	Ac	Continuése rigurosa	3	4	3	Ac	Continúese rigurosa	Ac
46	275	50	1	7	0	Ac	Continúese rigurosa	3	4	5	Re	Continúese rigurosa	Re
47	275	50	1	2	1	Ac	Restablezcase normal	3	4	2	Ac	Continúese rigurosa	Ac
48	275	50	2	3	1	Ac	Continúese normal	3	4	2	Ac	Continúese rigurosa	Ac
49	275	50		3	1	Ac	Continúese normal	3	4	1	Ac	Continúese rigurosa	Ac
50	275	50	2	3	0	Ac	Continúese normal	3	4	0	Ac	Continúese rigurosa	Ac
51	275	50	2	3	1	Ac	Continúese normal	3	4	2	Ac	Restablezcase normal	Ac
52	275	50	2	3	1	Ac	Continúese normal	5	6	2	Ac	Continúese normal	Ac
53	275	50	2	3	0	Ac	Continúese normal	5	6	1	Ac	Continúese normal	Ac
54	275	50	2	3	2	Ac	Continúese normal	5	6	4	Ac	Continúese normal	Ac
55	275	50	2	3	2	Ac	Continúese normal	5	6	3	Ac	Continúese normal	Ac

17 MUESTREOS DOBLE Y MULTIPLE

Los principios de selección de planes dobles o múltiples de las tablas son similares a aquellos que se aplican para el muestreo sencillo, pero se utilizan las Tablas III o IV, en lugar de la Tabla II muestra ya que las tablas también proporcionan los tamaños de muestras acumulados. Sin embargo, todos los planes poseen la característica de que todas las muestras sucesivas son iguales en tamaño a la primera muestra y es fácil de recordar esta regla.

Cuando el plan de muestreo sencillo apropiado tiene un número de aceptación de cero o un tamaño de muestra de 2, no existe un plan doble o múltiple. La alternativa es, o bien utilizar el muestreo sencillo o los planes doble o múltiple, para el siguiente tamaño más grande de muestra que haya disponible para el NCA especificado.

Ejemplo 18: Si el NCA es de 0.40 y la letra clave G, la Tabla III-A tiene un asterisco que nos conduce a una nota situada en la parte inferior, pudiéndose utilizar la Tabla II-A en cuyo caso el plan de muestreo es:

Tamaño de la muestra	32
Número de aceptación	0
Número de rechazo	1

o podemos proseguir hacia abajo con la columna 0.40 de la Tabla III-A hasta que encontremos el plan doble; éste se encuentra bajo la letra clave K y es:

	Primera	Segunda	Combinada
Tamaño de la muestra	80	80	160
Número de aceptación	0		1
Número de rechazo	2		2

Se encuentran las mismas alternativas si se utilizan las Tablas X.

Para el muestreo doble o múltiple, si el resultado cae en la brecha entre los números de aceptación y rechazo para alguna muestra, ésto significa que debe tomarse la muestra siguiente, tanto para una inspección normal como rigurosa. Sin embargo, para el muestreo doble o múltiple con inspección reducida existe también una brecha entre los números finales de aceptación y de rechazo, un resultado dentro de esta brecha significa que debe aceptarse el lote pero debe reimplantarse la inspección normal, como en el caso del muestreo sencillo reducido.

La Tabla IX proporciona "curvas promedio del tamaño de las muestras para muestreo doble y múltiple", las cuales pueden utilizarse para decidir si el ahorro en la inspección que se va a obtener con base en la utilización del muestreo doble o múltiple en lugar del muestreo sencillo, es suficiente como para que valga la pena a pesar del mayor trabajo administrativo.

Las curvas fueron elaboradas en base a la aceptación por muestreo sencillo y necesariamente son aproximadas hasta cierto grado, ya que no pueden aplicarse en forma exacta para todos los diferentes planes de muestreo dados. Sin embargo, son aplicables en forma suficientemente aproximada para la finalidad que tienen.

La escala horizontal de cada curva está expresada en unidades de "n veces el porcentaje de defectuosas", en donde n es el tamaño de la muestra correspondiente al plan de muestreo sencillo. Para cada caso en particular, puede dividirse esta escala entre n para obtener una escala del procentaje de defectuosas

La escala vertical está expresada también en términos del valor de n. La línea en la parte superior de cada gráfica representa, por lo tanto, al tamaño de muestra sencillo y con ello permite juzgar la eficacia de los planes doble y múltiple en relación con esta línea superior.

Nótese que al manejar la inspección por muestreo debe esperarse que la inspección normal, con una calidad de los lotes presentados mejor que el NCA, esté en vigor la mayor parte del tiempo. En este caso las partes más importantes de estas curvas son las secciones a la izquierda de las flechas sobre la línea base Aquellas gráficas que no poseen flechas se refieren a números de aceptación que se utilizan únicamente en inspección rigurosa.

parte de las veces, menos eficiente que el plan doble. Fué imposible evitar esta lamentable característica sin perder otras valiosas características de las tablas. Bajo estas circunstancias se preferirá el muestreo doble a menos que haya alguna buena razón, distinta al tamaño promedio de la muestra, para que sea deseable utilizar el múltiple

En la Tabla IX se supone que no se ha suspendido la inspección en el momento de llegar a una decisión en el caso de planes de muestreo dobles o múltiples, sino que se han inspeccionado todas las muestras.

Ejemplo 19: Se está utilizando un plan de muestreo sencillo con la letra clave K y un NCA de 2.5% de defectuosas, a saber:

Tamaño de la muestra	125
Número de aceptación	7
Número de rechazo	8

Se está considerando un posible cambio a muestreo doble o múltiple

La gráfica apropiada de la Tabla IX es aquella marcada c=7 que es el número de aceptación. Si así se desea, puede dividirse la escala inferior entre 125 que es el tamaño de la muestra y multiplicarse por 100 para obtener una escala de porcentaje de defectuosas. Las cifras 3,6,9 y 12 se transforman entonces en 2.4, 4.8, 7.2 y 9.6% de defectuosas Usualmente, sin embargo, no es necesario hacer ésto para encontrar lo que se desea saber

Simplemente, si así se desea, puede leerse la escala vertical como 0.25, 0.5 y 0.75 de 125

Al observar las curvas encontramos:

a) que el plan doble tiene siempre un promedio menor de tamaño de muestra que el sencillo y que el plan múltiple tiene siempre un promedio menor que el doble

b) que si la calidad es perfecta, el tamaño de la muestra doble es de alrededor de dos tercios del tamaño del sencillo y el del múltiple es alrededor de una cuarta parte del tamaño del sencillo

c) que con una calidad igual que el NCA, se han elevado estas fracciones a alrededor de 7 décimas y 6 décimas respectivamente

d) que el máximo valor del promedio del tamaño de la muestra del plan doble es un poco más de nueve décimas que del sencillo y el máximo valor del tamaño de la muestra promedio del plan múltiple es un poco más de ocho décimas que del sencillo

18 CALIDAD LIMITE Y EL LOTE AISLADO

Sabemos que al presentar una serie de lotes a inspección usando los planes de muestreo de esta norma, el extremo superior de la COC es el más importante, en el sentido de que la calidad de la producción debe encontrarse en general en esta región de la curva si es que se espera evitar los rechazos frecuentes de lotes, la inspección rigurosa y eventualmente la suspensión de la inspección en espera de que se mejore la calidad

Pero el extremo inferior de la curva tiene también una importancia considerable, como indicación de la probabilidad de rechazo de un único lote malo, en caso de que un lote así se presentara en el flujo de lotes buenos. Sin embargo, el extremo inferior de la curva tiene importancia preponderante cuando el producto se presenta en un único lote aislado o una serie muy corta de lotes. En este caso el consumidor no puede depender de la inspección rigurosa para obtener una protección adicional, ya que no hay posibilidad para la aplicación del procedimiento de cambio

Es para estos casos que se han calculado las Tablas VI-A, VI-B, VII-A y VII-B. Las Tablas VI-A y VII-A se refieren al porcentaje de defectuosas y las Tablas VI-B y VII-B a defectos por cien unidades. En este caso ha sido necesario separarlas ya que proporcionan respuestas algo diferentes en el extremo inferior de la curva que es el que nos interesa. Los valores tabulados son calidad límite (CL) 10 y 5 porciento defectuosas y calidad límite (CL) 10 y 5 defectos por cien unidades

Se pueden tomar también los valores para las Tablas CL de las COC tabuladas de las Tablas X, pero es conveniente el reunirlas como se ha hecho en esta norma

Las tablas se refieren al muestreo sencillo, pero los valores son aplicables también en forma aproximada a los planes doble, múltiple y secuencial equivalente.

Ejemplo 20: Va a inspeccionarse un lote aislado. Se requiere una buena probabilidad de aceptación si la calidad del lote es tan buena como 1.0% de defectuosas, pero debe haber únicamente un 10% de probabilidad de aceptación si su calidad es tan mala como 4.0% de defectuosas. De acuerdo con estas condiciones, se requiere el tamaño de muestra más pequeño que aparezca en las tablas.

En la Tabla VI-A entramos en la columna NCA de 1.0%, buscamos desde arriba hacia abajo hasta que encontramos una cifra igual o menor a 4.0. Siendo la letra clave M la primera que satisface las condiciones con un valor CL de 3.7% de defectuosas y en la Tabla X-M-2 encontramos el plan requerido para el NCA de 1.0 y su COC correspondiente.

Tamaño de la muestra	315
Número de aceptación	7
Número de rechazo	8

Es bueno reiterar en este momento cuál es el significado de la COC. El valor CL de 3.7% de defectuosas significa que si el lote contiene 3.7% de defectuosas, habrá un 10% de probabilidad de que se le acepte. No significa que hay un 10% de probabilidad de que el lote sea defectuoso en un 3.7%. Se nota que los valores CL son siempre mayores que el NCA y en algunos casos considerablemente más grandes, pero se acercan al NCA cuando aumenta el tamaño de la muestra. Cuando se trata de un lote aislado, en contraste con una serie contínua de lotes, deben considerarse los valores CL únicamente como aproximados en caso de que el tamaño de la muestra sea superior a una quinta parte del tamaño del lote. Bajo estas circunstancias, el valor real es más bien inferior al valor tabulado.

18 LAS TABLAS LPCS

Las Tablas V-A y V-B proporcionan los factores para el límite del promedio de la calidad de salida (LPCS) para los planes de muestreo sencillo normal y sencillo riguroso. También se aplican en forma suficientemente aproximada a los planes doble y múltiple equivalentes. Una nota situada en la parte inferior dice que deba multiplicarse el valor del contenido de la tabla por:

$$1 - \frac{\text{tamaño de la muestra}}{\text{tamaño del lote}}$$

Si la muestra es únicamente un porcentaje pequeño del lote, este cálculo representa una ligera diferencia y pueden utilizarse los valores del contenido de la tabla en la forma en que se muestran, pero si la muestra es un porcentaje grande del lote, no debe olvidarse esta multiplicación.

El estudio de la Tabla V-B muestra que con la excepción de la primera diagonal o sea la de la parte superior izquierda (en donde el número de aceptación es 0), el LPCS para la inspección rigurosa se aproxima siempre al NCA. Si se desea tener esta relación entre el NCA y el LPCS para la inspección rigurosa, debe entonces hacerse uso de la opción de utilizar los planes con un número de aceptación de 1 en lugar de aquellos que tienen un número de aceptación de 0.

Ejemplo 21. Se encuentra que la letra clave es H para un tamaño de lote de 400, un NCA de 4.0% de defectuosas y un nivel de inspección II . En la Tabla V-A se encuentra que el LPCS para inspección normal es:

$$6.3 \left(1 - \frac{50}{400}\right) = 5.5\ \%\ \text{de defectuosas}$$

Al utilizar la parte 3 de esta norma, en las circunstancias para las cuales fué calculada, (una serie larga de lotes), es necesario establecer los valores del NCA y del nivel de inspección antes de que se puedan usar las tablas. De hecho, en general, es necesario establecer estos valores antes de que pueda iniciarse la producción misma.

Una vez que se haya fijado el NCA como la calidad requerida para la calidad promedio del proceso, debe establecerse el nivel de inspección, considerando cuál es la calidad que debe tener una alta probabilidad de rechazo si se presentara en forma de un lote aislado con ese nivel de calidad. Puede buscarse entonces un nivel de inspección que proporcione la COC, requerida para este fin, cuando el tamaño del lote quede dentro de los límites que usualmente se esperan.

Ejemplo 22: Se ha seleccionado un NCA de 1.5% de defectuosas y se desea tener menos de un 80% de probabilidades de rechazo para un lote de 6% de defectuosas si dicho lote se presentara mientras se está aplicando la inspección normal. Al ver las COC en las Tablas X, se encuentra que las letras clave de la A a la J no se ajustan a los requisitos. La letra clave K casi se ajusta en forma precisa a los requisitos, de hecho la probabilidad de rechazo de 6% de defectuosas es ligeramente inferior al 80%, pero tiene la suficiente aproximación para fines prácticos. Las letras clave de L a P exceden los requisitos.

Supongamos que el tamaño de muestra que normalmente se espera es de 1000. Puede entonces especificarse el nivel de inspección III, ya que éste proporciona la letra clave K para un tamaño de muestra de 1000. Si en una etapa posterior se aumenta el tamaño del lote, el nivel de inspección especificado pudiera requerir que se utilizaran letras posteriores a K en el orden alfabético. Esto es satisfactorio ya que significa que se está utilizando en forma adecuada el aumento en el tamaño del lote para reducir los riesgos de aceptación de lotes malos o de rechazo de lotes buenos. Desde este punto de vista, no hay necesidad de establecer un límite superior al tamaño del lote (aunque habrá seguramente necesidad de este límite por otras razones). Se requiere sin embargo un límite inferior a fin de asegurar que no se utilicen las letras clave anteriores a K en el orden alfabético. Para el nivel de inspección III, el límite inferior del tamaño del lote no debe ser inferior a 501 para asegurar el uso de la letra clave K.

Ejemplo 23: Se ha seleccionado un NCA de 0.40% de defectuosas. Para lotes de 10,000, se requiere tener una probabilidad de por lo menos un 95% de rechazo en caso de que se presentara un lote con 1% de defectuosas, cuando se está usando la inspección normal.

Al ver las COC para el NCA de 0.40, se encuentra que aún la letra R no se ajusta a los requisitos. Debemos entonces preguntarnos si estos requisitos son realmente necesarios. Si se decide que si lo son entonces el único camino es hacer el NCA más riguroso. Una vez que se hace más riguroso a 0.25% de defectuosas, se ve que la letra R se ajusta a los requisitos.

Sin embargo, ninguno de los niveles de inspección de la Tabla I proporcionan la letra clave R para un lote de 10,000. Es necesario especificar la letra clave como tal, en lugar de especificar un nivel de inspección.

Debe hacerse notar que los niveles de inspección que se proporcionan no son los únicos niveles de inspección posibles y algunas veces puede ser necesario especificar un nivel "especial" de inspección para una ocasión en particular. Un ejemplo para dicho nivel "especial" lo constituye una letra clave constante para cualquiera que fuera el tamaño del lote, si se requiere siempre una curva de forma determinada como en el ejemplo 23.

Ejemplo 24: Una organización externa de inspección está actualmente inspeccionando la producción de dos fabricantes A y B. Se propone aplicar la inspección por muestreo utilizando un NCA de 1% de defectuosas en lugar de la inspección de 100%.

El fabricante A produce lotes de aproximadamente 4000 artículos con una calidad promedio de proceso de 0.8% de defectuosas. Ocasionalmente, sin embargo, se encuentran lotes que alcanzan hasta un 4% de defectuosas.

Para ayudar a la selección del nivel de inspección, se estudian las COC para los niveles generales de inspección I, II y III (figura 6). Se decide que se requiere una mayor seguridad de la que se proporciona con el nivel II (200 Ac 5,Re6) como protección contra la aceptación de lotes que contengan 4% de defectuosas. De acuerdo con esto, se selecciona el nivel III y se utiliza el plan (375 Ac 7 Re 8).

El cambio que se logra en la probabilidad de aceptación a una calidad de entrada de 4% de defectuosas es de 19% cuando se utiliza el nivel II, a 7% con el nivel III.

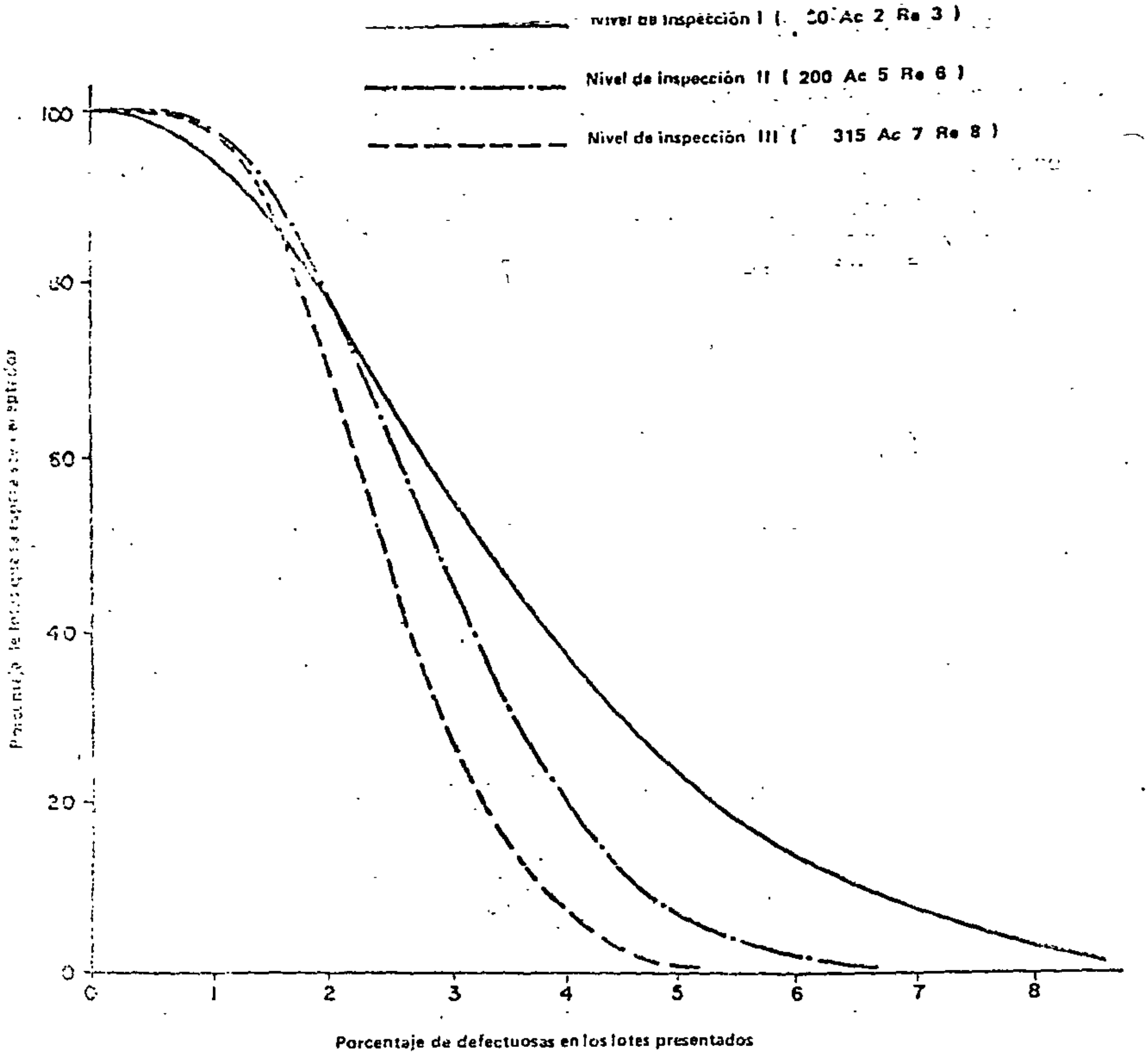


FIGURA 6 Comparación de las COC para determinar el nivel de inspección NCA 1% de defectuosas, inspección normal

El fabricante B produce lotes de un tamaño similar (aproximadamente 3500 artículos) pero tiene una historia de calidad más alta. La calidad promedio de su proceso varía entre 0.4% y 1.7% de defectuosas

Con base en la figura 6 se ve que hay evidentemente muy poca diferencia en las COC para los niveles I, II y III para calidades de entrada de hasta 1.8% de defectuosas. Se especifica por lo tanto el nivel I con el consiguiente ahorro en el número de muestras a inspeccionar. Sería ventajoso si pudieran concertarse arreglos para pagar una cantidad adicional al fabricante por los ahorros que hubiera en los costos de inspección

Al comenzar la producción, o cuando no haya registros de la producción pasada disponibles, pudiera ser deseable el utilizar inspección 100% durante algún tiempo a fin de establecer la capacidad de cada fabricante para obtener la calidad promedio de su producción. Si se va a utilizar un procedimiento de muestreo pudiera ser aconsejable seleccionar el nivel de inspección más alto que sea factible o que sea económico, para el ciclo inicial de producción, cambiándose luego a un nivel de inspección más bajo si la historia de la calidad promedio del proceso indica que es aceptable el riesgo para el consumidor a este nuevo nivel. Debe hacerse notar que la elección de un nivel de inspección más bajo aumenta el riesgo para el consumidor a una calidad límite dada en un grado mayor de lo que afecta a la probabilidad de aceptación cuando la calidad del producto presentado es igual al NCA o mejor.

subcontratista. o un fabricante e inspectores gubernamentales aplican las tablas al mismo producto. Ambas deben utilizar el mismo NCA y deben aplicarlo a las mismas características, pero el inspector del contratista puede pedir que el inspector del subcontratista utilice un nivel de inspección más alto que el que él utiliza. Existen otros procedimientos de muestreo para este tipo de situaciones pero quedan fuera del ámbito de esta norma.

También es posible que tenga que utilizarse un nivel de inspección bajo, bien por razones económicas o porque las pruebas incluyen la destrucción de la muestra. El inspector debe entonces inspeccionar todas las muestras (evitando la interrupción de la inspección por haber llegado a una decisión) y calcular periódicamente la calidad promedio del proceso. Si se elabora una gráfica de control con los valores de la calidad promedio del proceso, se ve claramente si se está cumpliendo con los requisitos de calidad y en qué forma. Aunque para entonces ya no es posible hacer nada con respecto a la producción pasada, habrá información disponible que permitirá que se tomen medidas para hacer mejoras en el futuro.

Una de las objeciones que se ponen al uso de un nivel de inspección bajo es que la calidad límite a,digamos 10 % de riesgo para el consumidor, es alta en comparación con el NCA. Sin embargo, si se examina la historia de la calidad de una serie contínua de lotes, puede encontrarse que la muestra acumulada es equivalente a la que se toma para un plan con un nivel de inspección más alto y posiblemente para una letra clave posterior en el orden alfabético,para los cuales el riesgo para el consumidor la calidad límite dada, es mucho más aceptable. Si se comparan entonces los resultados acumulados con este nuevo plan, podrán analizarse las decisiones que se han tomado con respecto a la aceptación-rechazo

21 NCA NO PREFERENTES

Para facilidad de la administración de los planes de muestreo, es aconsejable utilizar valores preferentes de NCA tanto cuanto sea posible. Sin embargo, el patrón que se sigue en la parte 3 de esta norma hace que sea fácil el cálculo de planes de muestreo (que son consecuentes con el programa de la parte 3 de esta norma) para otros valores del NCA.

Ejemplo 25: Se ha especificado un NCA de 2 % de defectuosas y se requiere determinar un plan de muestreo usando la letra clave J. Utilizando la Tabla II-A tomamos el plan de muestreo para un NCA de 4 % de defectuosas y el tamaño de la muestra lo dividimos entre 2.

	Plan de muestreo para un NCA de 4 %	Plan de muestreo para un NCA de 2 %
Tamaño de la muestra	80	40
Número de aceptación	7	7
Número de rechazo	8	8

De la misma manera procedemos para planes de muestreo doble o múltiple, así como para inspección rigurosa o reducida

Usando el mismo ejemplo anterior vemos que el plan de muestreo sencillo para inspección reducida es:

	Plan de muestreo para un NCA de 4 %	Plan de muestreo para un NCA de 2 %
Tamaño de muestra	32	16
Número de aceptación	3	3
Número de rechazo	6	6

Para el mismo ejemplo anterior vemos el plan de muestreo doble para inspección normal

	Plan de muestreo para un NCA de 4 %		Plan de muestreo para un NCA de 2 %	
Número de muestra	1a muestra	2a muestra	1a muestra	2a muestra
Tamaño de la muestra	50	50	25	25

Si se quiere sujetar un producto al método descrito en esta norma de inspección por muestreo sin que haya ningún problema, debe establecerse la especificación particular del producto. Los requisitos para elaborar dicha especificación, pueden resumirse como sigue:

1) Deben expresarse en forma de atributos cada uno de los requisitos de inspección y/o de prueba que se relacionan con el producto, si existen variables hay que decidir si se usa esta norma (convirtiendo las variables en atributos) o la correspondiente a muestreo para la inspección por variables

2) Para cada uno de dichos requisitos se debe indicar en forma categórica los factores que a continuación se enumeran:

a) definición de la unidad de producto

b) definición de la forma de expresión de la inconformidad o sea
- porciento de defectos o
- defectos por cien unidades

c) clasificación de defectos cuando esto sea aplicable

d) si se va a considerar cada defecto por separado para el NCA o si (y cómo) se deben agrupar los defectos

e) NCA requerido para cada defecto o grupo de defectos

f) nivel de inspección requerido para cada defecto o grupo de defectos

g) si se va a aplicar inicialmente la inspección normal o la inspección rigurosa

h) cualquier limitación que exista sobre el tamaño del lote

i) bajo qué circunstancias debe suspenderse la inspección (y, por lo tanto la aceptación)

Además, si se desea, puede especificarse el tipo de plan de muestreo (sencillo, doble, etc) pero ésto no es indispensable. Si va a llevarse a cabo la producción en lotes aislados pudiera ser preferible entonces el especificar el valor de la calidad límite en lugar del valor del nivel de calidad aceptable

23 NOMOGRAMAS

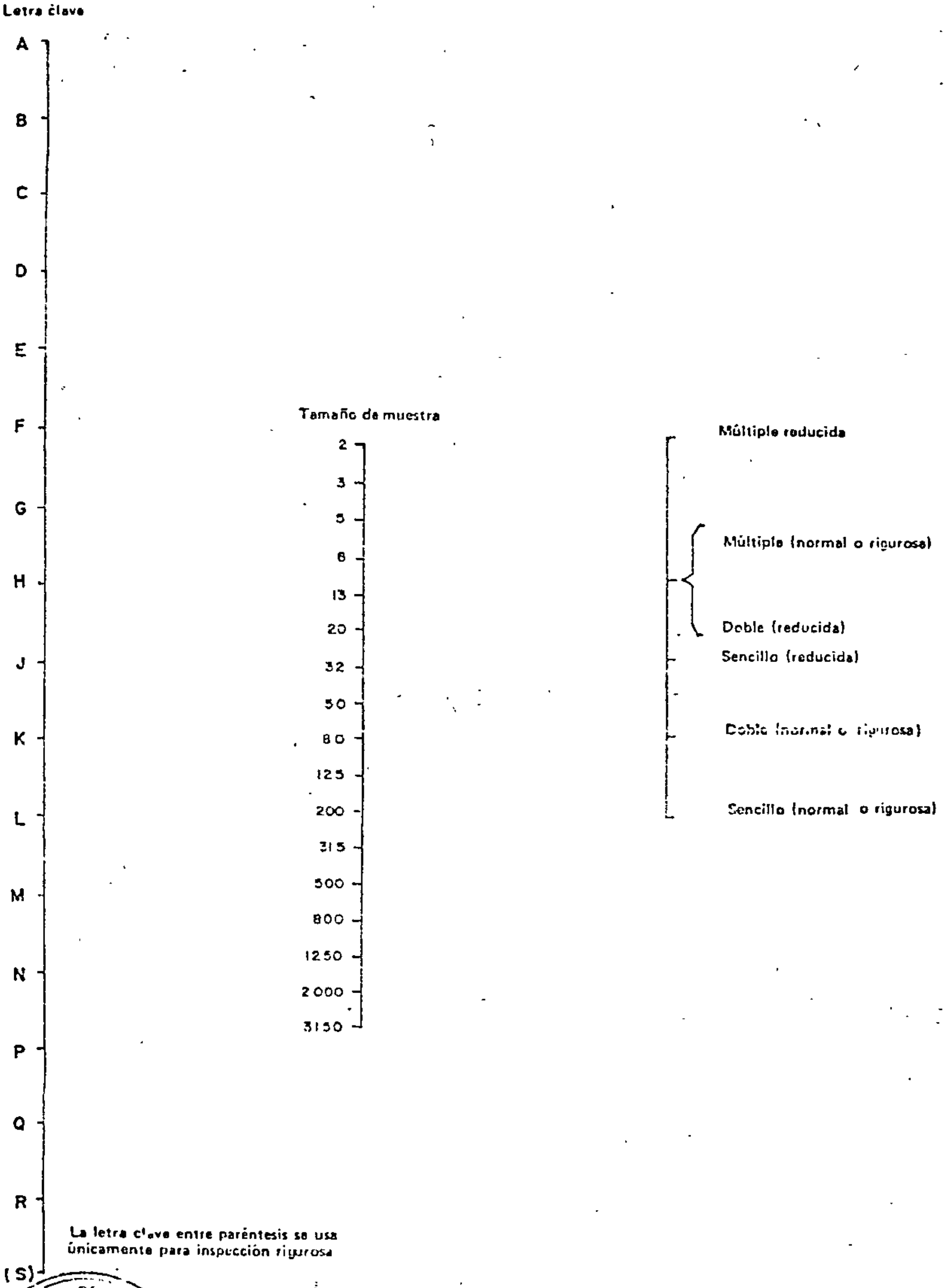
Al calcular las tablas de la parte 3 de esta norma, se utilizaron algunas relaciones matemáticas que permiten que se expresen algunos de los elementos de las tablas en forma simplificada como se muestra en las figuras 7 y 8

Estos diagramas no sustituyen a las tablas, pero pueden ser interesantes en el sentido de que muestran las relaciones entre las diferentes cifras y algunas veces pueden ser útiles al proporcionar en forma más condensada alguna información de la que comprenden las tablas

Para utilizar la figura 7 supongamos que deseamos saber qué tamaño de muestra corresponde a la letra clave H, en caso de que se utilice un muestreo sencillo y una inspección normal. Una línea recta a traves de la figura, que vaya desde el punto marcado H sobre la escala del lado izquierdo, hasta el punto marcado Sencillo (Normal o Rigurosa) sobre la escala del lado derecho, cruza a la escala central en un punto marcado con el número 50, que constituye por lo tanto el tamaño requerido de la muestra

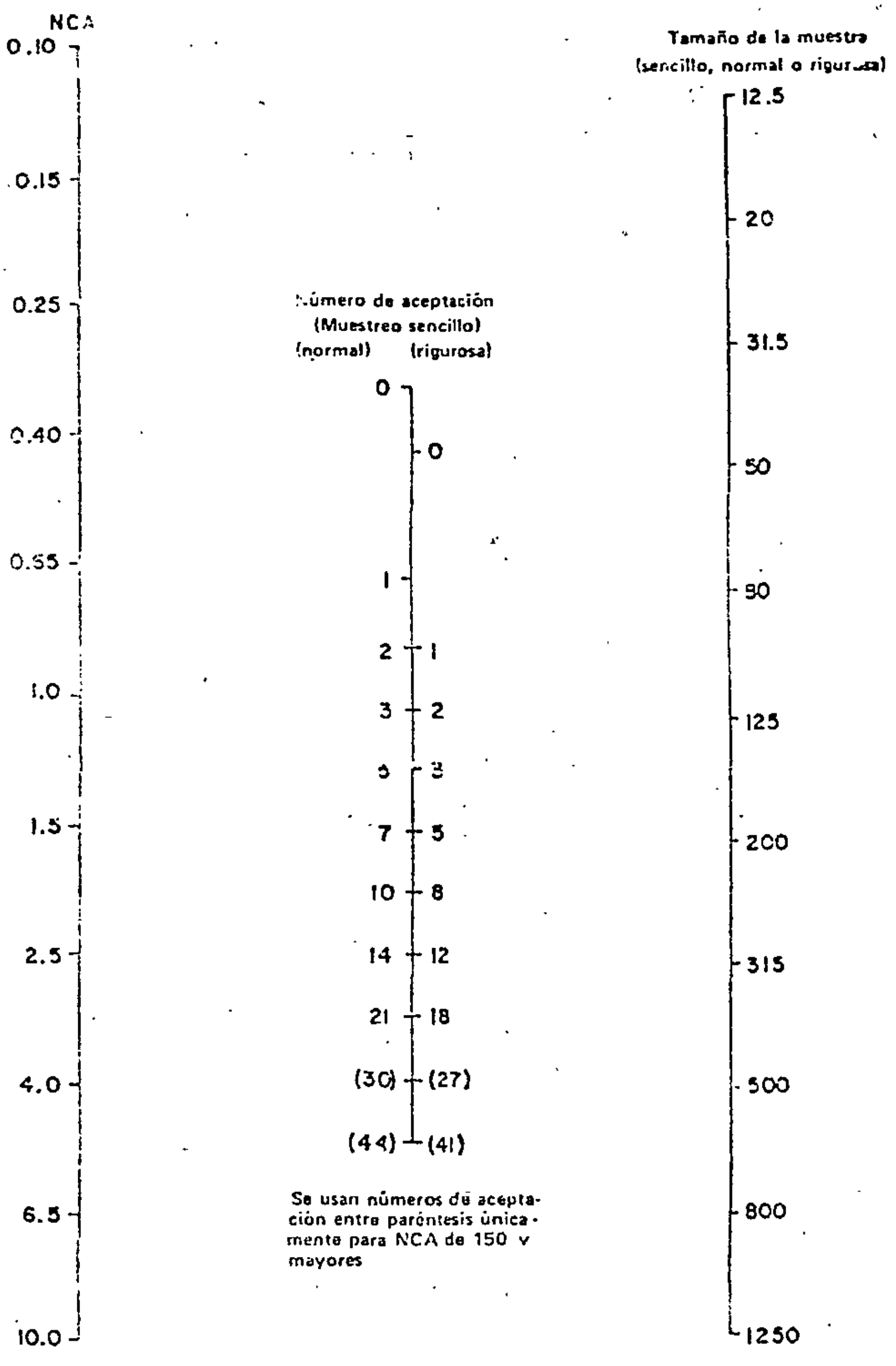
NOTA: En lugar de dibujar realmente líneas en la figura, es mejor utilizar una regla o un pedazo largo de hilo y conservar la página limpia para uso futuro

En la figura 8, en forma similar, si deseamos saber el número de aceptación que corresponde a un tamaño de muestra de 50 y para un NCA de 2.5, una línea recta cortará a la escala central en el punto marcado con el número 3 para inspección normal, o con el número 2 para inspección rigurosa



La letra clave entre paréntesis se usa únicamente para inspección rigurosa

FIGURA 7 Nomograma para el tipo de muestreo, letra clave y tamaño de la muestra



Se usan números de aceptación entre paréntesis únicamente para NCA de 150 y mayores

Se puede multiplicar el NCA por 10 si el tamaño de la muestra se divide entre 10 y viceversa

En forma similar para cualquier potencia de 10

El tamaño de la muestra se debe redondear al número entero más cercano

FIGURA 8 Nomograma para NCA, tamaño de muestra y número de aceptación

Guide for the use of ISO 2859 1974 "Sampling procedures and tables for Inspection by [illegible]

-MIL-HDBK 53 1964 "Guide for Sampling Inspection"

-ISO 2859 1974 "Sampling procedures and Tables for Inspection by attributes"

-IEC Publication 410-1973 "Sampling plans and procedures for Inspection by attributes"

-MIL-STD-105 D-1963 "Sampling proceoures and tables for Inspection by attributes"

25 CONCORDANCIA CON NORMAS INTERNACIONALES

Esta norma se encuentra totalmente en concordancia con las normas mencionadas en la Bibliografía

México, D.F., a 5 JUN. 1977

EL C. DIRECTOR GENERAL DE NORMAS

DR. ROMAN SERRA CASTAÑOS

MVC/RVCP/ead.

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

SECRETARIA DE INDUSTRIA Y COMERCIO

NORMA OFICIAL MEXICANA

DGN - R - 18 - 1975

MUESTREO PARA LA INSPECCION POR ATRIBUTOS

(SAMPLING PROCEDURES AND TABLES FOR INSPECTION BY ATTRIBUTES)

PARTE 3

TABLAS Y GRAFICAS PARA LA INSPECCION POR ATRIBUTOS

(TABLES AND GRAPHS FOR INSPECTION BY ATTRIBUTES)

9 OCT. 1975
A SU EXPEDIENTE

DIRECCION GENERAL DE NORMAS

0 INTRODUCCION

Esta tercera parte de la DGN-R-18-1975, contiene las tablas y gráficas para la aplicación de los planes de muestreo por atributos.

La DGN-R-18-1975 se compone de las siguientes partes:

DGN-R-18/1-1975	Información general sobre la inspección por muestreo. Parte 1
DGN-R-18/2-1975	Métodos de muestreo para la inspección por atributos. Parte 2
DGN-R-18/3-1975	Tablas y gráficas para la inspección por atributos. Parte 3
DGN-R-18/4-1975	Aplicación de los métodos de muestreo para la inspección por atributos. Parte 4
DGN-R-18/5-1975	Regla de cálculo para los planes de muestreo por atributos. Parte 5

1 OBJETIVO

Esta parte de la DGN-R-18-1975 tiene la finalidad de proporcionar en forma de tablas y gráficas la información estadística necesaria para llevar a cabo la inspección por atributos de acuerdo con los conceptos enunciados en la parte 2, sin tener que calcular caso por caso los diferentes valores de:

a) Tamaño de muestra en función del lote;

b) Números de aceptación y de rechazo;

c) Riesgos para el fabricante y el consumidor.

2 CAMPO DE APLICACION

Estas tablas y gráficas se aplican para la inspección por atributos de lotes entre otros de:

a) Materias primas;

b) Materiales en proceso;

c) Artículos y componentes;

d) Productos terminados, etc.

TABLA I Letras clave correspondientes al tamaño de la muestra

(véase 9.2 y 9.3 de DGN-R-18/2-1973)

Tamaño del lote o partida			Niveles de inspección especiales				Niveles de inspección generales		
			S-1	S-2	S-3	S-4	I	II	III
2	a	8	A	A	A	A	A	A	B
9	a	15	A	A	A	A	A	B	C
16	a	25	A	A	B	B	B	C	D
26	a	50	A	B	B	C	C	D	E
51	a	90	B	B	C	C	C	E	F
91	a	150	B	B	C	D	D	F	G
151	a	280	B	C	D	E	E	G	H
281	a	500	B	C	D	E	F	H	J
501	a	1200	C	C	E	F	G	J	K
1201	a	3200	C	D	E	G	H	K	L
3201	a	10000	C	D	F	G	J	L	M
10001	a	35000	C	D	F	H	K	M	N
35001	a	150000	D	E	G	J	L	N	P
150001	a	500000	D	E	G	J	M	P	Q
500001	y	más	D	E	H	K	N	Q	R

LETRAS CLAVE

TABLA II - A Planes de muestreo sencillo para inspección normal

(véase 9.4 y 9.5 de DGN-R-18/2-1975)

Letra clave del tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable																									
		0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A	2	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇩	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31
B	3	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45
C	5	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	⇧
D	8	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	⇧	⇧
E	13	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31	44 45	⇧	⇧	⇧
F	20	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
G	32	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
H	50	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
J	80	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
K	125	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
L	200	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
M	315	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
N	500	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
P	800	⇩	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
Q	1250	0 1	⇧	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
R	2000	⇧	⇧	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧

⇩ = Utilícese el primer plan de muestreo debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra es igual, o mayor, al del lote efectúese inspección 100 %

⇧ = Utilícese el primer plan de muestreo arriba de la flecha.

Ac = Número de aceptación

Re = Número de rechazo

NORMAL SENCILLO

TABLA II - B Planes de muestreo sencillo para inspección rigurosa

(véase 9.4 y 9.5)

Letra clave del tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable																																																			
		0.010		0.015		0.025		0.040		0.065		0.10		0.15		0.25		0.40		0.65		1.0		1.5		2.5		4.0		6.5		10		15		25		40		65		100		150		250		400		650		1000	
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
A	2	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	27	28
B	3	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	27	28	41	42
C	5	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	27	28	41	42	⇧	
D	8	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	27	28	41	42	⇧		⇧	
E	13	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	27	28	41	42	⇧		⇧		⇧	
F	20	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
G	32	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
H	50	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
J	80	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
K	125	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
L	200	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
M	315	⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
N	500	⇩		⇩		⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
P	800	⇩		⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
Q	1250	⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
R	2000	0	1	⇧		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
S	3150					1	2																																																

⇩ = Utilícese el primer plan de muestreo debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra es igual, o mayor, al del lote, efectúese inspección 100 %.
⇧ = Utilícese el primer plan de muestreo arriba de la flecha
Ac = Número de aceptación
Re Número de rechazo

RIGUROSA SENCILLO

TABLA II - C Planes de muestreo sencillo para inspección reducida

(véase 9.4 y 9.5 de DGN-R-18/2-1979)

Letra clave del tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable †																																																	
		0.010		0.015		0.025		0.040		0.065		0.10		0.15		0.25		0.40		0.65		1.0		1.5		2.5		4.0		6.5		10		15		25		40		65		100		150		250		400		650		1000	
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
A	2	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	10	11	14	15	21	22	30	31
B	2	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇧		⇩		0	2	1	3	2	4	3	5	5	6	7	8	10	11	14	15	21	22	30	31
C	2	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇧		⇩		0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	8	7	10	10	13	14	17	21	24	⇧	
D	3	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇧		⇩		0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	8	7	10	10	13	14	17	21	24	⇧		⇧	
E	5	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇧		⇩		0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	8	7	10	10	13	14	17	21	24	⇧		⇧		⇧	
F	8	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇧		⇩		0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	8	7	10	10	13	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
G	13	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇧		⇩		0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	8	7	10	10	13	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
H	20	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇧		⇩		0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	8	7	10	10	13	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
J	32	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇧		⇩		0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	8	7	10	10	13	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
K	50	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇧		⇩		0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	8	7	10	10	13	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
L	80	⇩		⇩		⇩		⇩		0	1	⇧		⇩		0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	8	7	10	10	13	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
M	125	⇩		⇩		⇩		0	1	⇧		⇩		0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	8	7	10	10	13	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
N	200	⇩		⇩		0	1	⇧		⇩		0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	8	7	10	10	13	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
P	315	⇩		0	1	⇧		⇩		0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	8	7	10	10	13	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
Q	500	0	1	⇧		⇩		0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	8	7	10	10	13	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	
R	800	⇧		⇧		0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	8	7	10	10	13	⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧		⇧	

⇩ = Utilícese el primer plan de muestreo debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra es igual, o mayor al del lote, efectúese inspección 100 %

⇧ = Utilícese el primer plan de muestreo arriba de la flecha.

Ac = Número de aceptación

Re = Número de rechazo

† = Si se excede el número de aceptación, pero no se alcanza el de rechazo, se acepta el lote y se cambia a inspección normal a partir del lote siguiente. (véase 10.1.4)

REDUCIDA SENCILLO

TABLA II - B Planes de muestreo sencillo para inspección rigurosa

(véase 9.4 y 9.5)

Letra clave del tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable																																																	
		0.010		0.015		0.025		0.040		0.065		0.10		0.15		0.25		0.40		0.65		1.0		1.5		2.5		4.0		6.5		10		15		25		40		65		100		150		250		400		650		1000	
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
A	2	⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	27	28
B	3																													0	1					1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	27	28	41	42
C	5																											0	1	⇩				1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	27	28	41	42	⇧	
D	8																									0	1	⇩				1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	27	28	41	42	⇧			
E	13																							0	1	⇩				1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	27	28	41	42	⇧					
F	20																					0	1	⇩				1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧		⇧		⇧							
G	32																			0	1	⇩				1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧													
H	50																	0	1	⇩				1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧															
J	80															0	1	⇩				1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧																	
K	125													0	1	⇩				1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧																			
L	200											0	1	⇩				1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧																					
M	315									0	1	⇩				1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧																							
N	500							0	1	⇩				1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧																									
P	800					0	1	⇩				1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧																											
Q	1250			0	1	⇩				1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧																													
R	2000	0	1	⇧				1	2	2	3	3	4	5	6	8	9	12	13	18	19	⇧																															
S	3150					1	2																																														

⇩ = Utilícese el primer plan de muestreo debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra es igual, o mayor, al del lote, efectúese inspección 100 %.
⇧ = Utilícese el primer plan de muestreo arriba de la flecha
Ac = Número de aceptación
Re = Número de rechazo

TABLA II - C Planes de muestreo sencillo para inspección reducida

(véase 9.4 y 9.5 de DGN-R-18/2-1975)

Letra clave del tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable †																									
		0.010	0.015	0.025	0.040	0,065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A	2	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇩	⇩	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31
B	2	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	0 2	1 3	2 4	3 5	5 6	7 8	10 11	14 15	21 22	30 31
C	2	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	14 17	21 24	⇧
D	3	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	14 17	21 24	⇧	⇧
E	5	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	14 17	21 24	⇧	⇧	⇧
F	8	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
G	13	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
H	20	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
J	32	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
K	50	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
L	80	⇩	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
M	125	⇩	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
N	200	⇩	⇩	0 1	⇧	⇩	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
P	315	⇩	0 1	⇧	⇩	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
Q	500	0 1	⇧	⇩	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
R	800	⇧	⇧	0 2	1 3	1 4	2 5	3 6	5 8	7 10	10 13	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧

⇩ = Utilícese el primer plan de muestreo debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra es igual, o mayor al del lote, efectúese inspección 100 %

⇧ = Utilícese el primer plan de muestreo arriba de la flecha.

Ac = Número de aceptación

Re = Número de rechazo

† = Si se excede el número de aceptación, pero no se alcanza el de rechazo, se acepta el lote y se cambia a inspección normal a partir del lote siguiente. (véase 10.1.4)

REDUCIDA SENCILLO

TABLA III - A Planes de muestreo doble para inspección normal

(véase 9.4 y 9.5 de DGN-R-18/2-197

Letra clave del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable																									
				0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	100
				Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac
A				⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	•	⇩	⇩	•	•	•	•	•	•	•	•	•
B	Primera Segunda	2 2	2 4														•	⇧		0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	17 22 37 31	25 3 56 5
C	Primera Segunda	3 3	3 6													•	⇧	⇩	0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	17 22 37 38	25 31 56 57	⇧
D	Primera Segunda	5 5	5 10												•	⇧	⇩	0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	17 22 37 38	25 31 56 57	⇧	
E	Primera Segunda	8 8	8 16											•	⇧	⇩	0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	17 22 37 38	25 31 56 57	⇧		
F	Primera Segunda	13 13	13 26										•	⇧	⇩	0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	⇧	⇧	⇧			
G	Primera Segunda	20 20	20 40									•	⇧	⇩	0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	⇧						
H	Primera Segunda	32 32	32 64								•	⇧	⇩	0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	⇧							
J	Primera Segunda	50 50	50 100							•	⇧	⇩	0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	⇧								
K	Primera Segunda	80 80	80 160						•	⇧	⇩	0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	⇧									
L	Primera Segunda	125 125	125 250					•	⇧	⇩	0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	⇧										
M	Primera Segunda	200 200	200 400				•	⇧	⇩	0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	⇧											
N	Primera Segunda	315 315	315 630			•	⇧	⇩	0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	⇧												
P	Primera Segunda	500 500	500 1000		•	⇧	⇩	0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	⇧													
Q	Primera Segunda	800 800	800 1600	•	⇧	⇩	0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	⇧														
R	Primera Segunda	1250 1250	1250 2500	⇧		0 2 1 2	0 3 3 4	1 4 4 5	2 5 6 7	3 7 8 9	5 9 12 13	7 11 18 19	11 16 26 27	⇧															

⇩ = Utilícese el primer plan de muestreo debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra es igual, o mayor, al del lote, efectúese inspección 100 %

⇧ = Utilícese el primer plan de muestreo arriba de la flecha.

Ac = Número de Aceptación.

Re = Número de Rechazo.

• = Utilícese el plan de muestreo sencillo correspondiente o el plan de muestreo doble inmediato inferior disponible.

TABLA III - B Planes de muestreo doble para inspección rigurosa

(Véase 9.4 y 9.5 de DGN-R-18/2-1975)

Letra clave del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable																									
				0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
				Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A				⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	⇩	•	•	•	•	•	•	•	•
B	Primera	2	2															•			0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	15 20	23 29
	Segunda	2	4																		1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	34 35	52 53
C	Primera	3	3														•	⇩		0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	15 20	23 29	⇧
	Segunda	3	6																	1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	34 35	52 53	
D	Primera	5	5													•	⇩		0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	15 20	23 29	⇧	
	Segunda	5	10																1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	34 35	52 53		
E	Primera	8	8												•	⇩		0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	15 20	23 29	⇧		
	Segunda	8	16															1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24	34 35	52 53			
F	Primera	13	13											•	⇩		0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	⇧	⇧	⇧			
	Segunda	13	26														1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24						
G	Primera	20	20										•	⇩		0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	⇧						
	Segunda	20	40													1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24							
H	Primera	32	32									•	⇩		0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	⇧							
	Segunda	32	64												1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24								
J	Primera	50	50								•	⇩		0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	⇧								
	Segunda	50	100											1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24									
K	Primera	80	80							•	⇩		0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	⇧									
	Segunda	80	160										1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24										
L	Primera	125	125						•	⇩		0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	⇧										
	Segunda	125	250									1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24											
M	Primera	200	200					•	⇩		0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	⇧											
	Segunda	200	400								1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24												
N	Primera	315	315				•	⇩		0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	⇧												
	Segunda	315	630							1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24													
P	Primera	500	500			•	⇩		0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	⇧													
	Segunda	500	1000						1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24														
Q	Primera	800	800		•	⇩		0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	⇧														
	Segunda	800	1600					1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24															
R	Primera	1250	1250	•	⇧		0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	6 10	9 14	⇧															
	Segunda	1250	2500				1 2	3 4	4 5	6 7	11 12	15 16	23 24																
S	Primera	2000	2000			0 2																							
	Segunda	2000	4000			1 2																							

⇩ = Utilícese el primer plan de muestreo debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra es igual, o mayor al del lote, efectúese inspección 100 %

⇧ = Utilícese el primer plan de muestreo arriba de la flecha

Ac = Número de aceptación

Re = Número de rechazo

• = Utilícese el plan de muestreo sencillo correspondiente o el plan de muestreo doble inmediato inferior disponible

RIGUROSA DOBLE

TABLA III - C Planes de muestreo doble para inspección reducida

(véase 9.4 y 9.5 de DGN-R-18/2-1975)

Letra clave del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable †																									
				0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
				Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re
A				↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↓	↓	•	•	•	•	•	•	•	•	•
B				↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
C				↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	↑
D	Primera Segunda	2 2	2 4	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2 0 2	0 3 0 4	0 4 1 5	0 4 3 6	1 5 4 7	2 7 6 9	3 8 8 12	5 10 12 16	7 12 18 22	11 17 26 30	↑	↑
E	Primera Segunda	3 3	3 6	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2 0 2	0 3 0 4	0 4 1 5	0 4 3 6	1 5 4 7	2 7 6 9	3 8 8 12	5 10 12 16	7 12 18 22	11 17 26 30	↑	↑	↑
F	Primera Segunda	5 5	5 10	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2 0 2	0 3 0 4	0 4 1 5	0 4 3 6	1 5 4 7	2 7 6 9	3 8 8 12	5 10 12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑
G	Primera Segunda	8 8	8 16	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2 0 2	0 3 0 4	0 4 1 5	0 4 3 6	1 5 4 7	2 7 6 9	3 8 8 12	5 10 12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
H	Primera Segunda	13 13	13 26	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2 0 2	0 3 0 4	0 4 1 5	0 4 3 6	1 5 4 7	2 7 6 9	3 8 8 12	5 10 12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
J	Primera Segunda	20 20	20 40	↓	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2 0 2	0 3 0 4	0 4 1 5	0 4 3 6	1 5 4 7	2 7 6 9	3 8 8 12	5 10 12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
K	Primera Segunda	32 64	32 32	↓	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2 0 2	0 3 0 4	0 4 1 5	0 4 3 6	1 5 4 7	2 7 6 9	3 8 8 12	5 10 12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
L	Primera Segunda	50 50	50 100	↓	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2 0 2	0 3 0 4	0 4 1 5	0 4 3 6	1 5 4 7	2 7 6 9	3 8 8 12	5 10 12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
M	Primera Segunda	80 80	80 160	↓	↓	↓	•	↑	↓	0 2 0 2	0 3 0 4	0 4 1 5	0 4 3 6	1 5 4 7	2 7 6 9	3 8 8 12	5 10 12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
N	Primera Segunda	125 125	125 250	↓	↓	•	↑	↓	0 2 0 2	0 3 0 4	0 4 1 5	0 4 3 6	1 5 4 7	2 7 6 9	3 8 8 12	5 10 12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
P	Primera Segunda	200 200	200 400	↓	•	↑	↓	0 2 0 2	0 3 0 4	0 4 1 5	0 4 3 6	1 5 4 7	2 7 6 9	3 8 8 12	5 10 12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Q	Primera Segunda	315 315	315 630	•	↑	↓	0 2 0 2	0 3 0 4	0 4 1 5	0 4 3 6	1 5 4 7	2 7 6 9	3 8 8 12	5 10 12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
R	Primera Segunda	500 500	500 1000	↑	↑	0 2 0 2	0 3 0 4	0 4 1 5	0 4 3 6	1 5 4 7	2 7 6 9	3 8 8 12	5 10 12 16	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑

⇩ = Utilícese el primer plan de muestreo debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra es igual, o mayor, al del lote, efectúese inspección 100 %

⇧ = Utilícese el primer plan de muestreo arriba de la flecha

Ac = Número de aceptación

Re = Número de rechazo

• = Utilícese el plan de muestreo sencillo correspondiente o el plan de muestreo doble inmediato inferior disponible

† = Si se excede el número de aceptación, después de la segunda muestra, pero no se alcanza el de rechazo, se acepta el lote y se cambia a inspección normal a partir del lote siguiente (véase 10.1.4).

TABLA IV - A Planes de muestreo múltiple para inspección normal

(Véase 9.4 y 9.5 de DGN-R-18/2-1975)

Letra clave del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable																																																			
				0.010		0.015		0.025		0.040		0.065		0.10		0.15		0.25		0.40		0.65		1.0		1.5		2.5		4.0		6.5		10		15		25		40		65		100		150		250		400		650		1000	
				Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
A				⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		⇩		•		⇩		⇩		•		•		•		•		•		•		•		•		•	
B																														•		⇧				++		++		++		++		++		++		++		++		++		++	
C																												•		⇧		⇩		++		++		++		++		++		++		++		++		++		++		⇧	
D	Primera	2	2																							•		⇧		⇩		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	5	1	7	2	9	4	12	6	16	⇧			
	Segunda	2	4																													#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	3	8	4	10	7	14	11	19	17	27				
	Tercera	2	6																													0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	6	10	8	13	13	19	19	27	29	39				
	Cuarta	2	8																													0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	8	13	12	17	19	25	27	34	40	49				
	Quinta	2	10																													1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	11	15	17	20	25	29	36	40	53	58				
	Sexta	2	12																													1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	14	17	21	23	31	33	45	47	65	68				
	Séptima	2	14																													2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	18	19	25	26	37	38	53	54	77	78				
E	Primera	3	3																					•		⇧		⇩		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	5	1	7	2	9	4	12	6	16	⇧					
	Segunda	3	6																											#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	3	8	4	10	7	14	11	19	17	27						
	Tercera	3	9																											0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	6	10	8	13	13	19	19	27	29	39						
	Cuarta	3	12																											0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	8	13	12	17	19	25	27	34	40	49						
	Quinta	3	15																											1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	11	15	17	20	25	29	36	40	53	58						
	Sexta	3	18																											1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	14	17	21	23	31	33	45	47	65	68						
	Séptima	3	21																											2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	18	19	25	26	37	38	53	54	77	78						
F	Primera	5	5																			•		⇧		⇩		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	5	1	7	2	9	⇧		⇧		⇧							
	Segunda	5	10																									#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	3	8	4	10	7	14												
	Tercera	5	15																									0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	6	10	8	13	13	19												
	Cuarta	5	20																									0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	8	13	12	17	19	25												
	Quinta	5	25																									1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	11	15	17	20	25	29												
	Sexta	5	30																									1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	14	17	21	23	31	33												
	Séptima	5	35																									2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	18	19	25	26	37	38												
G	Primera	8	8																	•		⇧		⇩		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	5	1	7	2	9	⇧													
	Segunda	8	16																							#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	3	8	4	10	7	14														
	Tercera	8	24																							0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	6	10	8	13	13	19														
	Cuarta	8	32																							0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	8	13	12	17	19	25														
	Quinta	8	40																							1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	11	15	17	20	25	29														
	Sexta	8	48																							1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	14	17	21	23	31	33														
	Séptima	8	56																							2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	18	19	25	26	37	38														
H	Primera	13	13															•		⇧		⇩		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	5	1	7	2	9	⇧															
	Segunda	13	26																					#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	3	8	4	10	7	14																
	Tercera	13	39																					0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	6	10	8	13	13	19																
	Cuarta	13	52																					0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	8	13	12	17	19	25																
	Quinta	13	65																					1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	11	15	17	20	25	29																
	Sexta	13	78																					1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	14	17	21	23	31	33																
	Séptima	13	91																					2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	18	19	25	26	37	38																
J	Primera	20	20													•		⇧		⇩		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	5	1	7	2	9	⇧																	
	Segunda	20	40																			#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	3	8	4	10	7	14																		
	Tercera	20	60																			0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	6	10	8	13	13	19																		
	Cuarta	20	80																			0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	8	13	12	17	19	25																		
	Quinta	20	100																			1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	11	15	17	20	25	29																		
	Sexta	20	120																			1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	14	17	21	23	31	33																		
	Séptima	20	140																			2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	18	19	25	26	37	38																		

⇩ = Utilícese el primer plan de muestreo debajo de la flecha (si es necesario, consúltese la continuación de la tabla en la página siguiente). Si el tamaño de la muestra es igual, o mayor al del lote, efectúese inspección 100%.
⇧ = Utilícese el primer plan de muestreo arriba de la flecha.
Ac = Número de aceptación.
Re = Número de rechazo.
• = Utilícese el plan de muestreo sencillo correspondiente o el plan de muestreo múltiple inmediato inferior disponible.
++ = Utilícese el plan de muestreo doble correspondiente o el plan de muestreo múltiple inmediato inferior disponible.
# = No se permite la aceptación en este tamaño de muestra.

NORMAL MULTIPLE

TABLA IV-A Planes de muestreo múltiple para inspección normal (Continuación) (véase 9.4 y 9.5 de DGN-R-18/2-19 [illegible])

Letra clave del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable																																																			
				0.010		0.015		0.025		0.040		0.065		0.10		0.15		0.25		0.40		0.65		1.0		1.5		2.5		4.0		6.5		10		15		25		40		65		100		150		250		400		650		1000	
				Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
K	Primera	32	32	↓		↓		↓		↓		↓		*		↑		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	5	1	7	2	9	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	32	64																	#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	3	8	4	10	7	14																				
	Tercera	32	96																	0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	6	10	8	13	13	19																				
	Cuarta	32	128																	0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	8	13	12	17	19	25																				
	Quinta	32	160																	1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	11	15	17	20	25	29																				
	Sexta	32	192																	1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	14	17	21	23	31	33																				
	Séptima	32	224																	2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	18	19	25	26	37	38																				
L	Primera	50	50	↓		↓		↓		↓		*		↑		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	5	1	7	2	9	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	50	100															#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	3	8	4	10	7	14																						
	Tercera	50	150															0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	6	10	8	13	13	19																						
	Cuarta	50	200															0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	8	13	12	17	19	25																						
	Quinta	50	250															1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	11	15	17	20	25	29																						
	Sexta	50	300															1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	14	17	21	23	31	33																						
	Séptima	50	350															2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	18	19	25	26	37	38																						
M	Primera	80	80	↓		↓		↓		*		↑		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	5	1	7	2	9	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	80	160													#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	3	8	4	10	7	14																								
	Tercera	80	240													0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	6	10	8	13	13	19																								
	Cuarta	80	320													0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	8	13	12	17	19	25																								
	Quinta	80	400													1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	11	15	17	20	25	29																								
	Sexta	80	480													1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	14	17	21	23	31	33																								
	Séptima	80	560													2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	18	19	25	26	37	38																								
N	Primera	125	125	↓		↓		*		↑		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	5	1	7	2	9	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	125	250											#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	3	8	4	10	7	14																										
	Tercera	125	375											0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	6	10	8	13	13	19																										
	Cuarta	125	500											0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	8	13	12	17	19	25																										
	Quinta	125	625											1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	11	15	17	20	25	29																										
	Sexta	125	750											1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	14	17	21	23	31	33																										
	Séptima	125	875											2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	18	19	25	26	37	38																										
P	Primera	200	200	↓		*		↑		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	5	1	7	2	9	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	200	400									#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	3	8	4	10	7	14																												
	Tercera	200	600									0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	6	10	8	13	13	19																												
	Cuarta	200	800									0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	8	13	12	17	19	25																												
	Quinta	200	1000									1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	11	15	17	20	25	29																												
	Sexta	200	1200									1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	14	17	21	23	31	33																												
	Séptima	200	1400									2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	18	19	25	26	37	38																												
Q	Primera	315	315	*		↑		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	5	1	7	2	9	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	315	630							#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	3	8	4	10	7	14																														
	Tercera	315	945							0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	6	10	8	13	13	19																														
	Cuarta	315	1260							0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	8	13	12	17	19	25																														
	Quinta	315	1575							1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	11	15	17	20	25	29																														
	Sexta	315	1890							1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	14	17	21	23	31	33																														
	Séptima	315	2205							2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	18	19	25	26	37	38																														
R	Primera	500	500	↑		↑		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	5	1	7	2	9	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	500	1000					#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	3	8	4	10	7	14																																
	Tercera	500	1500					0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	6	10	8	13	13	19																																
	Cuarta	500	2000					0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	8	13	12	17	19	25																																
	Quinta	500	2500					1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	11	15	17	20	25	29																																
	Sexta	500	3000					1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	14	17	21	23	31	33																																
	Séptima	500	3500					2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	18	19	25	26	37	38																																

↓ = Utilícese el primer plan de muestreo debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra es igual, o mayor, al del lote, efectúese inspección 100 %.
↑ = Utilícese el primer plan de muestreo arriba de la flecha (si es necesario, consúltese la página anterior).
Ac = Número de aceptación.
Re = Número de rechazo.
* = Utilícese el plan de muestreo sencillo correspondiente o el plan de muestreo múltiple inmediato inferior disponible.
# = No se permite la aceptación en este tamaño de muestra.

TABLA IV - B Planes de muestreo múltiple para inspección rigurosa

(Véase 3.4 y 9.5 de DGN R-18/2-1975)

Letra clave del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable																																																			
				0.010		0.015		0.025		0.040		0.065		0.10		0.15		0.25		0.40		0.65		1.0		1.5		2.5		4.0		6.5		10		15		25		40		65		100		150		250		400		650		1000	
				Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
A B C				↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓ *		↓ * ↓		↓		↓ ++		↓ ++ ++		* ++ ++		* ++ ++		* ++ ++		* ++ ++		* ++ ++		* ++ ++		* ++ ++		* ++ ↑	
D	Primera	2	2	↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		*		↓		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	6	1	8	3	10	6	15	↑		↑	
	Segunda	2	4																															#	2	0	3	0	3	1	5	2	7	3	9	6	12	10	17	16	25				
	Tercera	2	6																															0	2	0	3	1	4	2	6	4	9	7	12	11	17	17	24	26	36				
	Cuarta	2	8																															0	3	1	4	2	5	3	7	6	11	10	15	16	22	24	31	37	46				
	Quinta	2	10																															1	3	2	4	3	6	5	8	9	12	14	17	22	25	32	37	49	55				
	Sexta	2	12																															1	3	3	5	4	6	7	9	12	14	18	20	27	29	40	43	61	64				
	Séptima	2	14																															2	3	4	5	6	7	9	10	14	15	21	22	32	33	48	49	72	73				
E	Primera	3	3	↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		*		↓		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	6	1	8	3	10	6	15	↑		↑		↑	
	Segunda	3	6																													#	2	0	3	0	3	1	5	2	7	3	9	6	12	10	17	16	25						
	Tercera	3	9																													0	2	0	3	1	4	2	6	4	9	7	12	11	17	17	24	26	36						
	Cuarta	3	12																													0	3	1	4	2	5	3	7	6	11	10	15	16	22	24	31	37	46						
	Quinta	3	15																													1	3	2	4	3	6	5	8	9	12	14	17	22	25	32	37	49	55						
	Sexta	3	18																													1	3	3	5	4	6	7	9	12	14	18	20	27	29	40	43	61	64						
	Séptima	3	21																													2	3	4	5	6	7	9	10	14	15	21	22	32	33	48	49	72	73						
F	Primera	5	5	↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		*		↓		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	6	1	8	↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	5	10																											#	2	0	3	0	3	1	5	2	7	3	9	6	12												
	Tercera	5	15																											0	2	0	3	1	4	2	6	4	9	7	12	11	17												
	Cuarta	5	20																											0	3	1	4	2	5	3	7	6	11	10	15	16	22												
	Quinta	5	25																											1	3	2	4	3	6	5	8	9	12	14	17	22	25												
	Sexta	5	30																											1	3	3	5	4	6	7	9	12	14	18	20	27	29												
	Séptima	5	35																											2	3	4	5	6	7	9	10	14	15	21	22	32	33												
G	Primera	8	8	↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		*		↓		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	6	1	8	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	8	16																									#	2	0	3	0	3	1	5	2	7	3	9	6	12														
	Tercera	8	24																									0	2	0	3	1	4	2	6	4	9	7	12	11	17														
	Cuarta	8	32																									0	3	1	4	2	5	3	7	6	11	10	15	16	22														
	Quinta	8	40																									1	3	2	4	3	6	5	8	9	12	14	17	22	25														
	Sexta	8	48																									1	3	3	5	4	6	7	9	12	14	18	20	27	29														
	Séptima	8	56																									2	3	4	5	6	7	9	10	14	15	21	22	32	33														
H	Primera	13	13	↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		*		↓		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	6	1	8	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	13	26																							#	2	0	3	0	3	1	5	2	7	3	9	6	12																
	Tercera	13	39																							0	2	0	3	1	4	2	6	4	9	7	12	11	17																
	Cuarta	13	52																							0	3	1	4	2	5	3	7	6	11	10	15	16	22																
	Quinta	13	65																							1	3	2	4	3	6	5	8	9	12	14	17	22	25																
	Sexta	13	78																							1	3	3	5	4	6	7	9	12	14	18	20	27	29																
	Séptima	13	91																							2	3	4	5	6	7	9	10	14	15	21	22	32	33																
J	Primera	20	20	↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		*		↓		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	6	1	8	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	20	40																					#	2	0	3	0	3	1	5	2	7	3	9	6	12																		
	Tercera	20	60																					0	2	0	3	1	4	2	6	4	9	7	12	11	17																		
	Cuarta	20	80																					0	3	1	4	2	5	3	7	6	11	10	15	16	22																		
	Quinta	20	100																					1	3	2	4	3	6	5	8	9	12	14	17	22	25																		
	Sexta	20	120																					1	3	3	5	4	6	7	9	12	14	18	20	27	29																		
	Séptima	20	140																					2	3	4	5	6	7	9	10	14	15	21	22	32	33																		

↓ = Utilícese el primer plan de muestreo debajo de la flecha (si es necesario, consúltese la continuación de la tabla en la página siguiente). Si el tamaño de la muestra es igual, o mayor al del lote, efectúese inspección 100 %.
↑ = Utilícese el primer plan de muestreo arriba de la flecha.
Ac = Número de aceptación.
Re = Número de rechazo.
* = Utilícese el plan de muestreo sencillo correspondiente o el plan de muestreo múltiple inmediato inferior disponible.
++ = Utilícese el plan de muestreo doble correspondiente o el plan de muestreo múltiple inmediato inferior disponible.
# = No se permite la aceptación en este tamaño de muestra.

TABLA IV - B Planes de muestreo múltiple para inspección rigurosa (Continuación) (Véase 9.4 y 9.5 de DGN-R-18/2-1975)

Letra clave del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable																			
				0.010		0.015		0.025		0.040		0.065		0.10		0.15		0.25		0.40		0.65	
				Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
K	Primera	32	32	↓		↓		↓		↓		↓		↓		*		↓		↓		#	2
	Segunda	32	64																			#	2
	Tercera	32	96																			0	2
	Cuarta	32	128																			0	3
	Quinta	32	160																			1	3
	Sexta	32	192																			1	3
	Séptima	32	224																			2	3
L	Primera	50	50	↓		↓		↓		↓		↓		*		↓		↓		#	2	#	2
	Segunda	50	100																	#	2	0	3
	Tercera	50	150																	0	2	0	3
	Cuarta	50	200																	0	3	1	4
	Quinta	50	250																	1	3	2	4
	Sexta	50	300																	1	3	3	5
	Séptima	50	350																	2	3	4	5
M	Primera	80	80	↓		↓		↓		↓		*		↓		↓		#	2	#	2	#	3
	Segunda	80	160															#	2	0	3	0	3
	Tercera	80	240															0	2	0	3	1	4
	Cuarta	80	320															0	3	1	4	2	5
	Quinta	80	400															1	3	2	4	3	6
	Sexta	80	480															1	3	3	5	4	6
	Séptima	80	560															2	3	4	5	6	7
N	Primera	125	125	↓		↓		↓		*		↓		↓		#	2	#	2	#	3	#	4
	Segunda	125	250													#	2	0	3	0	3	1	5
	Tercera	125	375													0	2	0	3	1	4	2	6
	Cuarta	125	500													0	3	1	4	2	5	3	7
	Quinta	125	625													1	3	2	4	3	6	5	8
	Sexta	125	750													1	3	3	5	4	6	7	9
	Séptima	125	875													2	3	4	5	6	7	9	10
P	Primera	200	200	↓		↓		*		↓		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4
	Segunda	200	400											#	2	0	3	0	3	1	5	2	7
	Tercera	200	600											0	2	0	3	1	4	2	6	4	9
	Cuarta	200	800											0	3	1	4	2	5	3	7	6	11
	Quinta	200	1000											1	3	2	4	3	6	5	8	9	12
	Sexta	200	1200											1	3	3	5	4	6	7	9	12	14
	Séptima	200	1400											2	3	4	5	6	7	9	10	14	15
Q	Primera	315	315	↓		*		↓		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	6
	Segunda	315	630									#	2	0	3	0	3	1	5	2	7	3	9
	Tercera	315	945									0	2	0	3	1	4	2	6	4	9	7	12
	Cuarta	315	1260									0	3	1	4	2	5	3	7	6	11	10	15
	Quinta	315	1575									1	3	2	4	3	6	5	8	9	12	14	17
	Sexta	315	1890									1	3	3	5	4	6	7	9	12	14	18	20
	Séptima	315	2205									2	3	4	5	6	7	9	10	14	15	21	22
R	Primera	500	500	*		↑		↓		#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	6	1	8
	Segunda	500	1000							#	2	0	3	0	3	1	5	2	7	3	9	6	12
	Tercera	500	1500							0	2	0	3	1	4	2	6	4	9	7	12	11	17
	Cuarta	500	2000							0	3	1	4	2	5	3	7	6	11	10	15	16	22
	Quinta	500	2500							1	3	2	4	3	6	5	8	9	12	14	17	22	25
	Sexta	500	3000							1	3	3	5	4	6	7	9	12	14	18	20	27	29
	Séptima	500	3500							2	3	4	5	6	7	9	10	14	15	21	22	32	33
S	Primera	800	800					#	2														
	Segunda	800	1600					#	2														
	Tercera	800	2400					0	2														
	Cuarta	800	3200					0	3														
	Quinta	800	4000					1	3														
	Sexta	800	4800					1	3														
	Séptima	800	5600					2	3														

Letra clave del tamaño de la muestra	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable																															
				1.0		1.5		2.5		4.0		6.5		10		15		25		40		65		100		150		250		400		650		1000	
				Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
K	Primera	32	32	#	2	#	3	#	4	0	4	0	6	1	8	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	32	64	0	3	0	3	1	5	2	7	3	9	6	12																				
	Tercera	32	96	0	3	1	4	2	6	4	9	7	12	11	17																				
	Cuarta	32	128	1	4	2	5	3	7	6	11	10	15	16	22																				
	Quinta	32	160	2	4	3	6	5	8	9	12	14	17	22	25																				
	Sexta	32	192	3	5	4	6	7	9	12	14	18	20	27	29																				
	Séptima	32	224	4	5	6	7	9	10	14	15	21	22	32	33																				
L	Primera	50	50	#	3	#	4	0	4	0	6	1	8	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	50	100	0	3	1	5	2	7	3	9	6	12																						
	Tercera	50	150	1	4	2	6	4	9	7	12	11	17																						
	Cuarta	50	200	2	5	3	7	6	11	10	15	16	22																						
	Quinta	50	250	3	6	5	8	9	12	14	17	22	25																						
	Sexta	50	300	4	6	7	9	12	14	18	20	27	29																						
	Séptima	50	350	6	7	9	10	14	15	21	22	32	33																						
M	Primera	80	80	#	4	0	4	0	6	1	8	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	80	160	1	5	2	7	3	9	6	12																								
	Tercera	80	240	2	6	4	9	7	12	11	17																								
	Cuarta	80	320	3	7	6	11	10	15	16	22																								
	Quinta	80	400	5	8	9	12	14	17	22	25																								
	Sexta	80	480	7	9	12	14	18	20	27	29																								
	Séptima	80	560	9	10	14	15	21	22	32	33																								
N	Primera	125	125	0	4	0	6	1	8	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	125	250	2	7	3	9	6	12																										
	Tercera	125	375	4	9	7	12	11	17																										
	Cuarta	125	500	6	11	10	15	16	22																										
	Quinta	125	625	9	12	14	17	22	25																										
	Sexta	125	750	12	14	18	20	27	29																										
	Séptima	125	875	14	15	21	22	32	33																										
P	Primera	200	200	0	6	1	8	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	200	400	3	9	6	12																												
	Tercera	200	600	7	12	11	17																												
	Cuarta	200	800	10	15	16	22																												
	Quinta	200	1000	14	17	22	25																												
	Sexta	200	1200	18	20	27	29																												
	Séptima	200	1400	21	22	32	33																												
Q	Primera	315	315	1	8	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	315	630	6	12																														
	Tercera	315	945	11	17																														
	Cuarta	315	1260	16	22																														
	Quinta	315	1575	22	25																														
	Sexta	315	1890	27	29																														
	Séptima	315	2205	32	33																														
R	Primera	500	500	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	500	1000																																
	Tercera	500	1500																																
	Cuarta	500	2000																																
	Quinta	500	2500																																
	Sexta	500	3000																																
	Séptima	500	3500																																
S	Primera	800	800																																
	Segunda	800	1600																																
	Tercera	800	2400																																
	Cuarta	800	3200																																
	Quinta	800	4000																																
	Sexta	800	4800																																
	Séptima	800	5600																																

↓ = Utilícese el primer plan de muestreo debajo de la flecha. Si el tamaño de la muestra es igual, o mayor, al del lote, efectúese inspección 100 %.
↑ = Utilícese el primer plan de muestreo arriba de la flecha (si es necesario, consúltese la página anterior).
Ac = Número de aceptación.
Re = Número de rechazo.
* = Utilícese el plan de muestreo sencillo correspondiente o el plan de muestreo múltiple inmediato inferior disponible.
# = No se permite la aceptación en este tamaño de muestra.

TABLA IV - C Planes de muestreo múltiple para inspección reducida (Continuación)

(véase 9.4 y 9.5 de DGN R-18/?-)

Letra clave (del tamaño de la muestra)	Muestra	Tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable †																																																	
				0.010		0.015		0.025		0.040		0.065		0.10		0.15		0.25		0.40		0.65		1.0		1.5		2.5		4.0		6.5		10		15		25		40		65		100		150		250		400		650	
				Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
L	Primera	20	20	↓		↓		↓		↓		•		↑		↓		#	2	#	2	#	3	#	3	#	4	#	4	0	5	0	6	↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑		↑	
	Segunda	20	40															#	2	#	3	#	3	0	4	0	5	1	6	1	7	3	9																				
	Tercera	20	60															0	2	0	3	0	4	0	5	1	6	2	8	3	9	6	12																				
	Cuarta	20	80															0	3	0	4	0	5	1	6	2	7	3	10	5	12	8	15																				
	Quinta	20	100															0	3	0	4	1	6	2	7	3	8	5	11	7	13	11	17																				
	Sexta	20	120															0	3	1	5	1	6	3	7	4	9	7	12	10	15	14	20																				
	Séptima	20	140															1	3	1	5	2	7	4	8	6	10	9	14	13	17	18	22																				
M	Primera	32	32							•		↑		↓		#	2	#	2	#	3	#	3	#	4	#	4	0	5	0	6	↑																					
	Segunda	32	64													#	2	#	3	#	3	0	4	0	5	1	6	1	7	3	9																						
	Tercera	32	96													0	2	0	3	0	4	0	5	1	6	2	8	3	9	6	12																						
	Cuarta	32	128													0	3	0	4	0	5	1	6	2	7	3	10	5	12	8	15																						
	Quinta	32	160													0	3	0	4	1	6	2	7	3	8	5	11	7	13	11	17																						
	Sexta	32	192													0	3	1	5	1	6	3	7	4	9	7	12	10	15	14	20																						
	Séptima	32	224													1	3	1	5	2	7	4	8	6	10	9	14	13	17	18	22																						
N	Primera	50	50					•		↑		↓		#	2	#	2	#	3	#	3	#	4	#	4	0	5	0	6	↑																							
	Segunda	50	100											#	2	#	3	#	3	0	4	0	5	1	6	1	7	3	9																								
	Tercera	50	150											0	2	0	3	0	4	0	5	1	6	2	8	3	9	6	12																								
	Cuarta	50	200											0	3	0	4	0	5	1	6	2	7	3	10	5	12	8	15																								
	Quinta	50	250											0	3	0	4	1	6	2	7	3	8	5	11	7	13	11	17																								
	Sexta	50	300											0	3	1	5	1	6	3	7	4	9	7	12	10	15	14	20																								
	Séptima	50	350											1	3	1	5	2	7	4	8	6	10	9	14	13	17	18	22																								
P	Primera	80	80			•		↑		↓		#	2	#	2	#	3	#	3	#	4	#	4	0	5	0	6	↑																									
	Segunda	80	160									#	2	#	3	#	3	0	4	0	5	1	6	1	7	3	9																										
	Tercera	80	240									0	2	0	3	0	4	0	5	1	6	2	8	3	9	6	12																										
	Cuarta	80	320									0	3	0	4	0	5	1	6	2	7	3	10	5	12	8	15																										
	Quinta	80	400									0	3	0	4	1	6	2	7	3	8	5	11	7	13	11	17																										
	Sexta	80	480									0	3	1	5	1	6	3	7	4	9	7	12	10	15	14	20																										
	Séptima	80	560									1	3	1	5	2	7	4	8	6	10	9	14	13	17	18	22																										
Q	Primera	125	125	•		↑		↓		#	2	#	2	#	3	#	3	#	4	#	4	0	5	0	6	↑																											
	Segunda	125	250							#	2	#	3	#	3	0	4	0	5	1	6	1	7	3	9																												
	Tercera	125	375							0	2	0	3	0	4	0	5	1	6	2	8	3	9	6	12																												
	Cuarta	125	500							0	3	0	4	0	5	1	6	2	7	3	10	5	12	8	15																												
	Quinta	125	625							0	3	0	4	1	6	2	7	3	8	5	11	7	13	11	17																												
	Sexta	125	750							0	3	1	5	1	6	3	7	4	9	7	12	10	15	14	20																												
	Séptima	125	875							1	3	1	5	2	7	4	8	6	10	9	14	13	17	18	22																												
R	Primera	200	200	↑				#	2	#	2	#	3	#	3	#	4	#	4	0	5	0	6	↑																													
	Segunda	200	400					#	2	#	3	#	3	0	4	0	5	1	6	1	7	3	9																														
	Tercera	200	600					0	2	0	3	0	4	0	5	1	6	2	8	3	9	6	12																														
	Cuarta	200	800					0	3	0	4	0	5	1	6	2	7	3	10	5	12	8	15																														
	Quinta	200	1000					0	3	0	4	1	6	2	7	3	8	5	11	7	13	11	17																														
	Sexta	200	1200					0	3	1	5	1	6	3	7	4	9	7	12	10	15	14	20																														
	Séptima	200	1400					1	3	1	5	2	7	4	8	6	10	9	14	13	17	18	22																														

↓ = Utilícese el primer plan de muestreo debajo de la flecha. Sí el tamaño de la muestra es igual, o mayor, al del lote, efectúese inspección 100 %.

↑ = Utilícese el primer plan de muestreo arriba de la flecha (si es necesario, consúltese la página anterior).

Ac = Número de aceptación.

Re = Número de rechazo.

= No se permite la aceptación en este tamaño de muestra.

† = Si se excede el número de aceptación, después de la última muestra, pero no se alcanza el de rechazo, se acepta el lote, y se cambia a inspección normal a partir del lote siguiente (véase 10.1.4

TABLA V-A Factores para el límite del Promedio de la Calidad de Salida para Inspección Normal
(Muestreo Sencillo)

(véase 11.4 de DGN-R-18/2-1975)

Letra clave	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable																									
		0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
A	2															18			42	69	97	160	220	330	470	730	1100
B	3														12			28	46	65	110	150	220	310	490	720	1100
C	5													7.4			17	27	39	63	90	130	190	290	430	660	
D	8												4.6			11	17	24	40	56	82	120	160	270	410		
E	13											2.8			6.5	11	15	24	34	50	72	110	170	250			
F	20										1.8			4.2	6.9	9.7	16	22	33	47	73						
G	32									1.2			2.6	4.3	6.1	9.9	14	21	29	46							
H	50								0.74			1.7	2.7	3.9	6.3	9.0	13	19	29								
J	80							0.46			1.1	1.7	2.4	4.0	5.6	9.2	12	18									
K	125						0.29			0.67	1.1	1.6	2.5	3.6	5.2	7.5	12										
L	200					0.18			0.42	0.69	0.97	1.6	2.2	3.3	4.7	7.3											
M	315				0.12			0.27	0.44	0.62	1.00	1.4	2.1	3.0	4.7												
N	500			0.074			0.17	0.27	0.39	0.63	0.90	1.3	1.9	2.9													
P	800		0.046			0.11	0.17	0.24	0.40	0.56	0.82	1.2	1.8														
Q	1250	0.029			0.067	0.11	0.16	0.25	0.36	0.52	0.75	1.2															
R	2000			0.042	0.069	0.097	0.16	0.22	0.33	0.47	0.73																

Nota: Para obtener el LPCS exacto, los valores arriba indicados deben multiplicarse por $\left(1 - \frac{\text{Tamaño de la muestra}}{\text{Tamaño del lote o partida}}\right)$ (véase 11.4)

TABLA V-B Factores para el Límite del Promedio de la Calidad de Salida para Inspección Rigurosa (Muestreo Sencillo)

(véase 11.4 de DGN-R-18/2-1975)

Letra clave	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable																									
		0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
A	2																			42	69	97	160	260	400	620	970
B	3															12			28	46	65	110	170	270	410	650	1100
C	5														7.4			17	27	39	63	100	160	250	390	610	
D	8													4.6			11	17	24	40	64	99	160	240	300		
E	13												2.8			6.5	11	15	24	40	61	95	150	240			
F	20											1.8			4.2	6.9	9.7	16	26	40	62						
G	32										1.2			2.6	4.3	6.1	9.9	16	25	39							
H	50									0.74			1.7	2.7	3.9	6.3	10	16	25								
J	80								0.46			1.1	1.7	2.4	4.0	6.4	9.9	16									
K	125							0.29			0.67	1.1	1.6	2.5	4.1	6.4	9.9										
L	200						0.18			0.42	0.69	0.97	1.6	2.6	4.0	6.2											
M	315					0.12			0.27	0.44	0.62	1.0	1.6	2.5	3.9												
N	500				0.074			0.17	0.27	0.39	0.63	1.0	1.6	2.5													
P	800			0.046			0.11	0.17	0.24	0.40	0.64	0.99	1.6														
Q	1250		0.029			0.067	0.11	0.15	0.25	0.41	0.64	0.99															
R	2000	0.018			0.042	0.069	0.097	0.16	0.26	0.40	0.62																
S	3150			0.027																							

Nota: Para obtener el LPCS exacto, los valores arriba indicados deben multiplicarse por $\left(1 - \frac{\text{Tamaño de la muestra}}{\text{Tamaño del lote o partida}}\right)$ (véase 11.4)

TABLA VI - A Calidad Límite (en porcentaje de defectuosas) para la cual Pa = 10 %
(Para Inspección Normal, Muestreo Sencillo)

(véase 11.6 de DGN-R-18/2-1975)

Letra clave	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable															
		0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10
A	2															68	
B	3														54		
C	5													37			58
D	8												25			41	54
E	13											16			27	36	44
F	20										11			18	25	30	42
G	32									6.9			12	16	20	27	31
H	50								4.5			7.6	10	13	18	22	29
J	80							2.8			4.8	6.5	8.2	11	14	19	24
K	125						1.8			3.1	4.3	5.4	7.4	9.4	12	16	23
L	200					1.2			2.0	2.7	3.3	4.6	5.9	7.7	10	14	
M	315				0.73			1.2	1.7	2.1	2.9	3.7	4.9	6.4	9.0		
N	500			0.46			0.78	1.1	1.3	1.9	2.4	3.1	4.0	5.6			
P	800		0.29			0.49	0.67	0.84	1.2	1.5	1.9	2.5	3.5				
Q	1250	0.18			0.31	0.43	0.53	0.74	0.94	1.2	1.6	2.3					
R	2000			0.20	0.27	0.33	0.46	0.59	0.77	1.0	1.4						

10.0 %
CL (DEFECTUOSAS)

TABLA VI - B Calidad Límite (en defectos por cien unidades) para la cual Pa = 10%
(Para Inspección Normal, Muestreo Sencillo)

(Véase 11.C de DGN-R-18/2-1975)

Letra clave	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable																									
		0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
A	2															120			200	270	330	460	590	770	1000	1400	1900
B	3														77			130	180	220	310	390	510	670	940	1300	1800
C	5													46			78	110	130	190	240	310	400	560	770	1100	
D	8												29			49	67	84	120	150	190	250	350	480	670		
E	13											18			30	41	51	71	91	120	160	220	290	410			
F	20										12			20	27	33	46	59	77	100	140						
G	32									7.2			12	17	21	29	37	48	63	88							
H	50								4.6			7.8	11	13	19	24	31	40	56								
J	80							2.9			4.9	6.7	8.4	12	15	19	25	35									
K	125						1.8			3.1	4.3	5.4	7.4	9.4	12	16	23										
L	200					1.2			2.0	2.7	3.3	4.6	5.9	7.7	10	14											
M	315				0.73			1.2	1.7	2.1	2.9	3.7	4.9	6.4	9.0												
N	500			0.46			0.78	1.1	1.3	1.9	2.4	3.1	4.0	5.6													
P	800		0.29			0.49	0.67	0.84	1.2	1.5	1.9	2.5	3.5														
Q	1250	0.18			0.31	0.43	0.53	0.74	0.94	1.2	1.6	2.3															
R	2000			0.20	0.27	0.33	0.46	0.59	0.77	1.0	1.4																

10%
CL (DEFECTOS)

TABLA VII-A Calidad Límite (en porcentaje de defectuosas) para la cual Pa = 5 %
(Para Inspección Normal, Muestreo Sencillo)

(véase 11.6 de DGN-R-18/2-1975)

Letra clave	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable															
		0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10
A	2															78	
B	3														63		
C	5													45			66
D	8												31			47	60
E	13											21			32	41	50
F	20										14			22	28	34	46
G	32									8.9			14	18	23	30	37
H	50								5.8			9.1	12	15	20	25	32
J	80							3.7			5.8	7.7	9.4	13	16	20	26
K	125						2.4			3.8	5.0	6.2	8.4	11	14	18	24
L	200					1.5			2.4	3.2	3.9	5.3	6.6	8.5	11	15	
M	315				0.95			1.5	2.0	2.5	3.3	4.2	5.4	7.0	9.6		
N	500			0.60			0.95	1.3	1.6	2.1	2.6	3.4	4.4	6.1			
P	800		0.38			0.59	0.79	0.97	1.3	1.6	2.1	2.7	3.8				
Q	1250	0.24			0.38	0.50	0.62	0.84	1.1	1.4	1.8	2.4					
R	2000			0.24	0.32	0.39	0.53	0.66	0.85	1.1	1.5						

5% CL (DEFECTUOSAS)

TABLA VII - B Calidad Límite (en defectos por cien unidades) para la cual Pa = 5 %
(para Inspección Normal, Muestreo Sencillo)

([illegible] 11.6 de DGN-R-18/2-1975)

Letra clave	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable																									
		0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
A	2															150			240	320	390	530	660	850	1100	1500	2000
B	3														100			160	210	260	350	440	570	730	1000	1400	1900
C	5													60			95	130	160	210	260	340	440	610	810	1100	
D	8												38			59	79	97	130	160	210	270	380	510	710		
E	13											23			37	40	60	81	100	130	170	230	310	440			
F	20										15			24	32	39	53	66	85	110	150						
G	32									9.4			15	20	24	33	41	53	68	95							
H	50								6.0			9.5	13	16	21	26	34	44	61								
J	80							3.8			5.9	7.9	9.7	13	16	21	27	38									
K	125						2.4			3.8	5.0	6.2	8.4	11	14	18	24										
L	200					1.5			2.4	3.2	3.9	5.3	6.6	8.5	11	15											
M	315				0.95			1.5	2.0	2.5	3.3	4.2	5.4	7.0	9.6												
N	500			0.60			0.95	1.3	1.6	2.1	2.6	3.4	4.4	6.1													
P	800		0.38			0.59	0.79	0.97	1.3	1.6	2.1	2.7	3.8														
Q	1250	0.24			0.38	0.50	0.62	0.84	1.1	1.4	1.8	2.4															
R	2000			0.24	0.32	0.39	0.53	0.66	0.85	1.1	1.5																

TABLA X-J-2 Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave J

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)																																		Tamaño de la muestra acumulado
		Menor de 0.15		0.15		0.25		✕		0.40		0.65		1.0		1.5		2.5		4.0		✕		6.5		✕		10		✕		15		Mayor de 15		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	80	▽		0	1	Usese Letra H		Usese Letra L		Usese Letra K		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	△		80
Doble	50	▽		•								0	2	0	3	1	4	2	5	3	7	3	7	5	9	6	10	7	11	9	14	11	16	△		50
	100											1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	11	12	12	13	15	16	18	19	23	24	26	27			100
Múltiple	20	▽		•								#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	4	0	5	0	6	1	7	1	8	2	9	△		20
	40											#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	2	7	3	8	3	9	4	10	6	12	7	14			40
	60											0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	4	9	6	10	7	12	8	13	11	17	13	19			60
	80											0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	6	11	8	13	10	15	12	17	16	22	19	25			80
	100											1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	9	12	11	15	14	17	17	20	22	25	25	29			100
	120											1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	12	14	14	17	18	20	21	23	27	29	31	33			120
	140											2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	14	15	18	19	21	22	25	26	32	33	37	38			140
		Menor de 0.25		0.25		✕		0.40		0.65		1.0		1.5		2.5		4.0		✕		6.5		✕		10		✕		15		✕		Mayor de 15		
		Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)																																		

△ = Utilícese el procedente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo

▽ = Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo

Ac = Número de aceptación

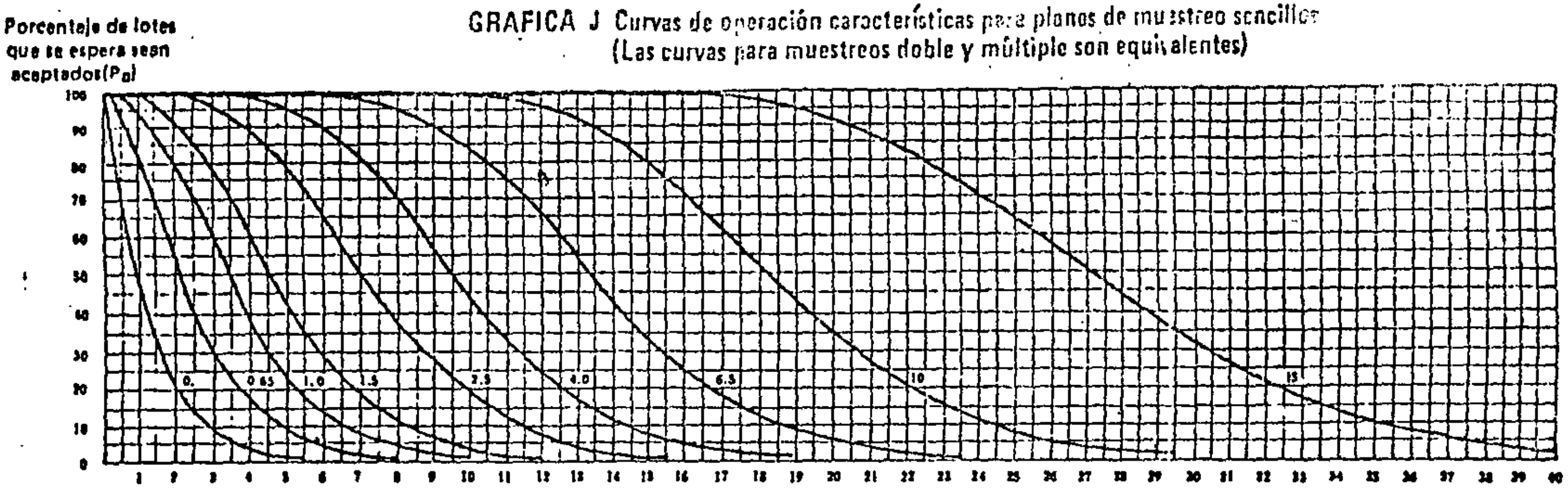
Re = Número de rechazo

• = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente, o bien utilícese la letra M.

\# = No se permite la aceptación para ese tamaño de muestra.

TABLA X-J Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave J

GRAFICA J Curvas de operación características para planos de muestreo sencillos
(Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



CALIDAD DE LOS LOTES (p en porcentaje de defectuosas para NCA ≤ 10; y en defectos por cien unidades para NCA > 10)
Nota: Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal.

TABLA X-J-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

Pa	Niveles de calidad aceptable (Inspección normal)																					
	0.15	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	✕	6.5	✕	10	0.15	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	✕	6.5	✕	10	✕	15
	p (en porcentaje de defectuosas)										p (en defectos por cien unidades)											
99.0	0.013	0.188	0.550	1.05	2.30	3.72	4.50	6.13	7.88	9.75	0.013	0.186	0.545	1.03	2.23	3.63	4.38	5.96	7.62	9.35	12.9	15.7
95.0	0.064	0.444	1.03	1.73	3.32	5.06	5.98	7.91	9.89	11.9	0.064	0 444	1.02	1.71	3.27	4.98	5.87	7.71	9.61	11.6	15.6	18.6
90.0	0.132	0.666	1.38	2.20	3.98	5.71	6.91	8.95	11.0	13.2	0.131	0.665	1.38	2.18	3.94	5.82	6.79	8.78	10.8	12.9	17.1	20.3
75.0	0.359	1.202	2.16	3.18	5.30	7.50	8.62	10.9	13.2	15.5	0.360	1.20	2.16	3.17	5.27	7.45	8.55	10.8	13.0	15.3	19.9	23.4
50 0	0.863	2.09	3.33	4.57	7.06	9.55	10.8	13.3	15.8	18.3	0.866	2.10	3.34	4.59	7.09	9.59	10.8	13.3	15.8	18.3	23.3	27.1
25.0	1.72	3.33	4.84	6.31	9.14	11.9	13.3	16.0	18.6	21.3	1.73	3.37	4.90	6.39	9.28	12.1	13.5	16.3	19.0	21.8	27.2	31.2
10.0	2.84	4.78	6.52	8.16	11.3	14.2	15.7	18.6	21.4	24.2	2.88	4.86	6 65	8.35	11.6	11.7	16.2	19.3	22.2	25.2	30.9	35.2
5.0	3.68	5.80	7.66	9.39	12.7	15.0	17.3	20.3	23.2	26.0	3.75	5.93	7.87	9.69	13.1	15.4	18.0	21.2	24.3	27.4	33.4	37.8
1.0	5.59	8.00	10.1	12.0	15.6	18.9	20.5	23.6	26.5	29.5	5.76	8.30	10.5	12.6	16.4	20.0	21.8	25.2	28.5	31.8	38.7	42.9
	0.25	1.0	1.5	2.5	4.0	✕	6.5	✕	10	✕	0.25	1.0	1.5	2.5	4.0	✕	6.5	✕	10	✕	15	✕
	Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)																					

Nota: Se ha usado la distribución binominal para los cálculos de porcentaje de defectuosas y la distribución de Poisson para los cálculos de defectos por cien unidades.

69

TABLA X-H-2 Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave H

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (Inspección normal)																																		Tamaño de la muestra acumulado
		Menor de 0.25		0.25		0.40		X		0.65		1.0		1.5		2.5		4.0		6.5		X		10		X		15		X		25		Mayor de 25		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	50	▽		0	1	Úsese Letra G		Úsese Letra K		Úsese Letra J		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	△		50
Doble	32	▽		•								0	2	0	3	1	4	2	5	3	7	3	7	5	9	6	10	7	11	9	14	11	16	△		32
	64											1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	11	12	12	13	15	16	18	19	23	24	26	27			64
Múltiple	13	▽		•								#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	4	0	5	0	6	1	7	1	8	2	9	△		13
	26											#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	2	7	3	8	3	9	4	10	6	12	7	14			26
	39											0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	4	9	6	10	7	12	8	13	11	17	13	19			39
	52											0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	6	11	8	13	10	15	12	17	16	22	19	25			52
	65											1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	9	12	11	15	14	17	17	20	22	25	25	29			65
	78											1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	12	14	14	17	18	20	21	23	27	29	31	33			78
	91											2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	14	15	18	19	21	22	25	26	32	33	37	38			91
		Menor de 0.40		0.40		X		0.65		1.0		1.5		2.5		4.0		6.5		X		10		X		15		X		25		X		Mayor de 25		
		Niveles de calidad aceptable (Inspección rigurosa)																																		

△ = Utilícese el precedente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo

▽ = Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo

Ac = Número de aceptación

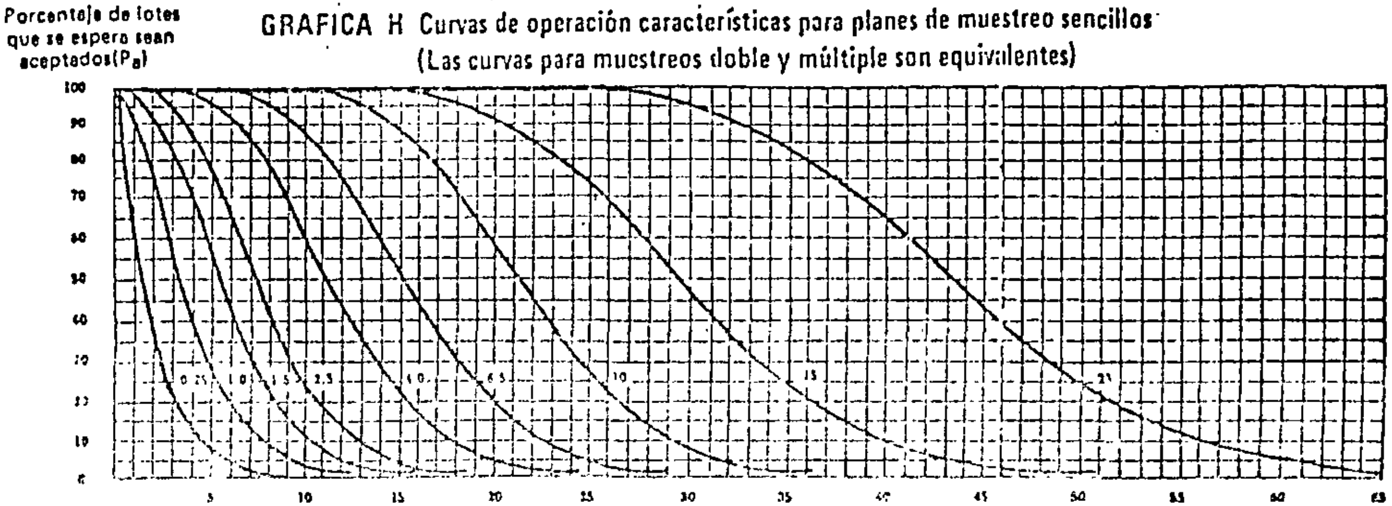
Re = Número de rechazo

• = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente, o bien utilícese la letra L.

= No se permite la aceptación para este tamaño de muestra.

TABLA X-H Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave H

GRAFICA H Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos
(Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



CALIDAD DE LOS LOTES (p, en porcentaje de defectuosas para NCA ≤10; y en defectos por cien unidades para NCA > 10)

Nota: Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal

TABLA X-H-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

P_a	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)																			
	0.25	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	╳	10	0.25	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	╳	10	╳	15	╳	[illegible]
	p (en porcentaje de defectuosas)								p (en defectos por cien unidades)											
99.0	0.020	0.206	0.666	1.69	3.66	6.06	7.42	11.1	0.020	0.298	0.872	1.65	3.57	5.01	7.01	9.54	12.2	15.0	20.7	25.1
95.0	0.103	0.712	1.66	2.77	5.34	8.20	9.74	12.9	0.103	0.710	1.64	2.73	5.23	7.96	9.39	12.3	15.4	18.5	24.9	29.8
90.0	0.210	1.07	2.23	3.54	6.42	9.53	11.2	14.5	0.210	1.06	2.20	3.49	6.30	9.31	10.9	14.0	17.3	20.6	27.3	32.5
75.0	0.574	1.92	3.46	5.09	8.51	12.0	[illegible]	17.5	0.576	1.92	3.45	5.07	8.44	11.9	13.7	17.2	20.8	24.5	31.8	37.4
50.0	1.38	3.33	5.31	7.30	11.3	15.2	17.2	21.2	1.39	3.36	5.35	7.34	11.3	15.3	17.3	21.6	25.3	29.3	37.3	43.3
25.0	2.74	5.30	7.70	10.0	14.5	18.8	21.0	25.2	2.77	5.39	7.84	10.2	14.8	19.4	21.6	26.0	30.4	34.8	43.5	49.9
10.0	4.50	7.56	10.3	12.9	17.6	22.4	24.7	29.1	4.61	7.78	10.6	13.4	18.6	23.5	26.0	30.8	35.6	40.3	49.5	56.1
5.0	5.82	9.13	12.1	14.8	19.9	24.7	27.0	31.6	5.99	9.49	12.6	15.5	21.0	26.3	28.9	33.9	38.9	43.6	53.4	60.5
1.0	8.80	12.5	15.9	18.8	24.3	29.2	31.7	36.3	9.21	13.3	16.6	20.1	26.2	32.0	34.8	40.3	45.6	50.9	61.1	68.[illegible]
	0.40	1.5	2.5	4.0	6.5	╳	10	╳	0.40	1.5	2.5	4.0	6.5	╳	10	╳	15	╳	25	╳
	Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)																			

Nota: En el cálculo del porcentaje de defectuosas se ha empleado la distribución binominal; en el número de defectos por cien unidades la de Poisson

TABLA X-G-2 Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave G

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulada	Niveles de calidad aceptable (Inspección normal)																																		Tamaño de la muestra acumulado
		Menor de 0.40		0.40		0.65		✕		1.0		1.5		2.5		4.0		6.5		10		✕		15		✕		25		✕		40		Mayor de 40		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	32	▽		0	1	Úsese Letra F		Úsese Letra J		Úsese Letra H		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	△		32
Doble	20	▽		•								0	2	0	3	1	4	2	5	3	7	3	7	5	9		10	7	11	9	14	11	16	△		20
	40											1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	11	12	12	13	15	16	18	19	23	24	25	27			40
Múltiple	8	▽		•								#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	4	0	5	0	6	1	7	1	8	2	9	△		8
	16											#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	2	7	3	8	3	9	4	10	6	12	7	14			16
	24											0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	4	9	6	10	7	12	8	13	11	17	13	19			24
	32											0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	6	11	8	13	10	15	12	17	16	22	19	25			32
	40											1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	9	12	11	15	14	17	17	20	22	25	25	29			40
	48											1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	12	14	14	17	18	20	21	23	27	29	31	33			48
	56											2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	14	15	18	19	21	22	25	26	32	33	37	38			56
		Menor de 0.65		0.65		✕		1.0		1.5		2.5		4.0		6.5		10		✕		15		✕		25		✕		40		✕		Mayor de 40		
		Niveles de calidad aceptable (Inspección rigurosa)																																		

△ = Utilícese el precedente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual están disponibles números de aceptación y rechazo

▽ = Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual están disponibles números de aceptación y rechazo

Ac = Número de aceptación

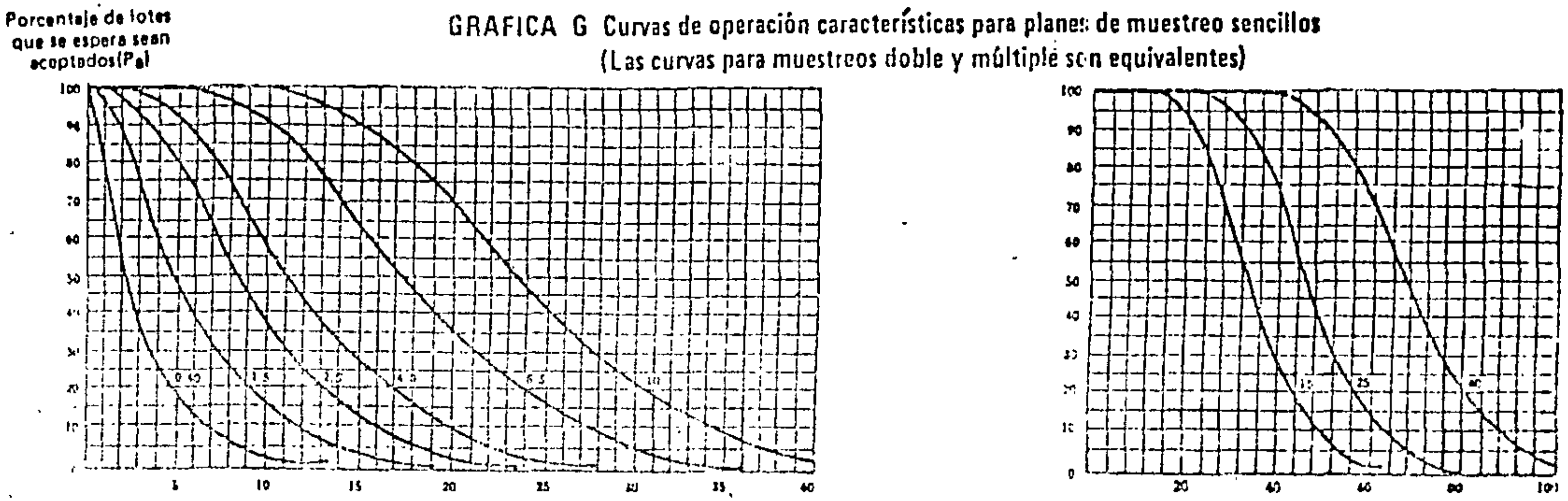
Re = Número de rechazo

• = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente, o bien utilícese la letra K

= No se permite la aceptación para ese tamaño de muestra

TABLA X-G Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave G

GRAFICA G Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos
(Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



CALIDAD DE LOS LOTES (p en porcentaje de defectuosas para NCA ≤ 10; y en defectos por cien unidades para NCA > 10)

Nota: Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal.

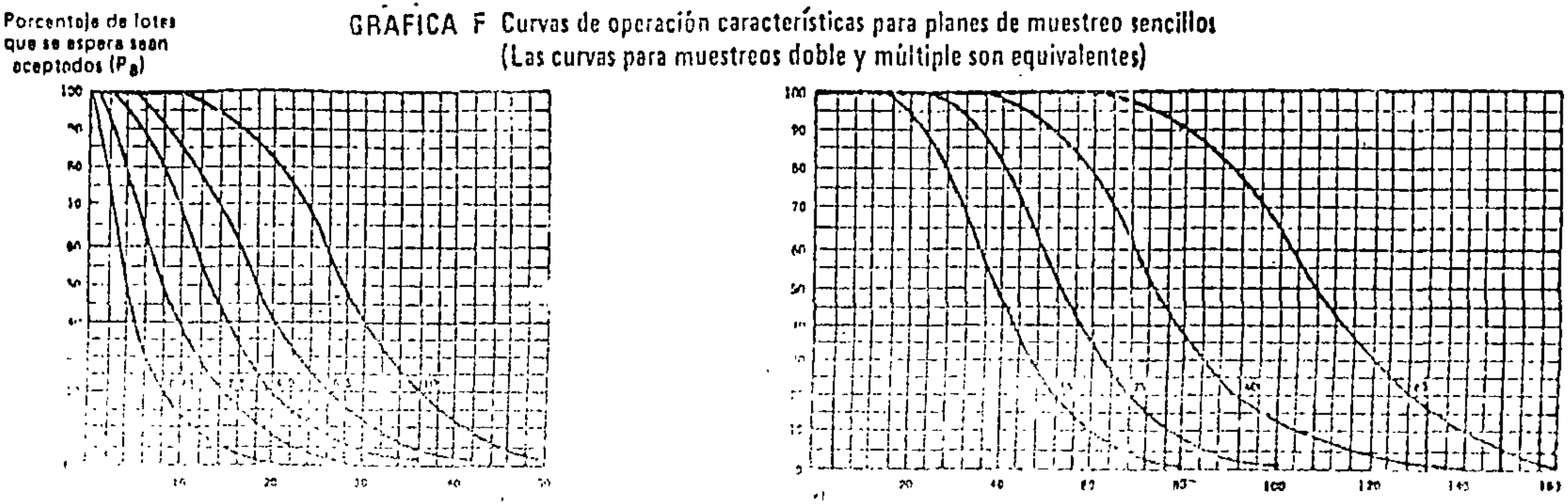
TABLA X-G-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

P_a	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)																	
	0.40	1.5	2.5	4.0	6.5	10	0.40	1.5	2.5	4.0	6.5	10	✕	15	✕	25	✕	40
	p (en porcentaje de defectuosas)						p (en defectos por cien unidades)											
99.0	0.032	0.475	1.38	2.63	5.94	9.75	0.032	0.466	1.36	2.57	5.57	9.08	11.0	14.9	19.1	23.4	32.3	39.3
95.0	0.161	1.13	2.59	4.39	8.50	13.1	0.160	1.10	2.55	4.26	8.16	12.4	14.7	19.3	24.0	28.9	38.9	46.5
90.0	0.329	1.67	3.50	5.56	10.2	15.1	0.328	1.66	3.44	5.45	9.85	14.6	17.0	21.9	27.0	32.2	42.7	50.8
75.0	0.895	3.01	5.42	7.98	13,4	19.0	0.900	3.00	5.39	7.92	13.2	18.6	21.4	26.9	32.6	38.2	49.7	58.4
50.0	2.14	5.19	8.27	11.4	17.5	23.7	2.16	5.24	8.35	11.5	17.7	24.0	27.1	33.3	39.6	45.8	58.3	67.7
25.0	4.23	8.19	11.9	15.4	22.3	29.0	4.33	8.41	12.3	16.0	23.2	30.3	33.0	40.7	47.6	54.4	67.9	78.0
10.0	6.94	11.6	15.8	19.7	27.1	34.1	7.19	12.2	16.6	20.9	29.0	36.8	40.6	48.1	55.6	62.9	77.4	88.1
5.0	8.94	14.0	18.4	22.5	30.1	37.2	9.36	14.8	19.7	24.2	32.9	41.1	45.1	53.0	60.8	68.4	83.4	94.5
1.0	13.5	19.0	23.7	28.0	35.9	43.3	14.4	20.7	26.3	31.4	41.0	50.0	54.4	63.0	71.3	79.5	95.6	107
	0.65	2.5	4.0	6.5	10	✕	0.65	2.5	4.0	6.5	10	✕	15	✕	25	✕	40	✕
	Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)																	

Nota: En el cálculo del porcentaje de defectuosas se ha empleado la distribución binominal; en el número de defectos por cien unidades la de Poisson.

TABLA X-F Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave F

GRAFICA F Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos (Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



CALIDAD DE LOS LOTES (p en porcentaje de defectuosas para NCA ≤ 10; y en defectos por cien unidades para NCA > 10)
Nota: Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal

TABLA X-F-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

P_a	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)																
	0.65	2.5	4.0	6.5	10	0.65	2.5	4.0	6.5	10	15	╳	25	╳	40	╳	65
	p (en porcentaje de defectuosas)					p (en defectos por cien unidades)											
99.0	0.050	0.75	2.25	4.31	9.75	0.051	0.75	2.18	4.12	8.92	14.5	17.5	23.9	30.5	37.4	51.7	62.9
95.0	0.256	1.80	4.22	7.13	14.0	0.257	1.78	4.09	6.83	13.1	19.9	21.5	30.8	38.5	46.2	62.2	74.5
90.0	0.525	2.69	5.64	9.03	16.6	0.527	2.66	5.51	8.73	15.8	23.3	27.2	35.1	43.2	51.5	68.4	81.2
75.0	1.43	4.81	8.70	12.8	21.6	1.44	4.81	8.68	12.7	21.1	29.8	34.2	43.1	52.1	61.2	79.5	93.4
50.0	3.41	8.25	13.1	18.1	27.9	3.47	8.39	13.4	18.4	28.4	38.3	41.3	53.3	63.3	73.3	93.3	108
25.0	6.70	12.9	18.7	24.2	34.8	6.93	13.5	19.6	25.5	37.1	48.4	51.0	65.1	76.1	87.0	109	125
10.0	10.9	18.1	24.5	30.4	41.5	11.5	19.5	26.6	33.4	46.4	58.9	63.0	77.0	88.9	101	124	141
5.0	13.9	21.6	28.3	34.4	45.6	15.0	23.7	31.5	38.8	52.6	65.7	71.2	84.8	97.2	109	133	151
1.0	20.6	28.9	35.6	42.0	53.4	23.0	33.2	42.0	50.2	65.5	80.0	87.0	101	114	127	153	172
	1.0	4.0	6.5	10	╳	1.0	4.0	6.5	10	15	╳	25	╳	40	╳	65	╳
	Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)																

Nota: En el cálculo del porcentaje de defectuosas se ha empleado la distribución binomial; en el número de defectos por cien unidades la de Poisson

TABLA X-F-2 Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave F

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (Inspección normal)																																		Tamaño de la muestra acumulado
		Menor de 0.65		0.65		1.0		✕		1.5		2.5		4.0		6.5		10		15		✕		25		✕		40		✕		65		Mayor de 65		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	20	▽		0	1	Usese Letra E		Usese Letra H		Usese Letra G		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	△		20
Doble	13	▽		*								0	2	0	3	1	4	2	5	3	7	3	7	5	9	6	10	7	11	9	14	11	16	△		13
	26											1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	11	12	12	13	15	16	18	19	23	24	26	27			26
Múltiple	5	▽		*								#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	4	0	5	0	6	1	7	1	8	2	9	△		5
	10											#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	2	7	3	8	3	9	4	10	6	12	7	14			10
	15											0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	4	9	6	10	7	12	8	13	11	17	13	19			15
	20											0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	6	11	8	13	10	15	12	17	16	22	19	25			20
	25											1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	9	12	11	15	14	17	17	20	22	25	25	29			25
	30											1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	12	14	14	17	18	20	21	23	27	29	31	33			30
	35											2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	14	15	18	19	21	22	25	26	32	33	37	38			35
		Menor de 1.0		1.0		✕		1.5		2.5		4.0		6.5		10		15		✕		25		✕		40		✕		65		✕		Mayor de 65		
		Niveles de calidad aceptable (Inspección rigurosa)																																		

△ = Utilícese el precedente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo.

▽ = Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo.

Ac = Número de aceptación

Re = Número de rechazo

* = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente o bien utilícese la letra J

\# = No se permite la aceptación para ese tamaño de muestra

TABLA X-E-2 Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave E

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)																																										Tamaño de la muestra acumulado
		Menor de 1.0		1.0		1.5		✕		2.5		4.0		6.5		10		15		25		✕		40		✕		65		✕		100		✕		150		✕		250		Mayor de 250		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	13	▽		0	1	Usese Letra D		Usese Letra G		Usese Letra F		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	27	28	30	31	41	42	44	45	△		13
Doble	8	▽		•								0	2	0	3	1	4	2	5	3	7	3	7	5	9	6	10	7	11	9	14	11	16	15	20	17	22	23	29	25	31	△		8
	16											1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	11	12	12	13	15	16	18	19	23	24	26	27	34	35	37	38	52	53	56	57			16
Múltiple	3	▽		•								#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	4	0	5	0	6	1	7	1	8	2	9	3	10	4	12	6	15	6	16	△		3
	6											#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	2	7	3	8	3	9	4	10	6	12	7	14	10	17	11	19	16	25	17	27			6
	9											0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	4	9	6	10	7	12	8	13	11	17	13	19	17	24	19	27	26	36	29	39			9
	12											0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	6	11	8	13	10	15	12	17	16	22	19	25	24	31	27	34	37	46	40	49			12
	15											1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	9	12	11	15	14	17	17	20	22	25	25	29	32	37	36	40	49	55	53	58			15
	18											1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	12	14	14	17	18	20	21	23	27	29	31	33	40	43	45	47	61	64	65	68			18
	21											2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	14	15	18	19	21	22	25	26	32	33	37	38	48	[illegible]	53	54	72	73	77	78			21
		Menor de 1.5		1.5		✕		2.5		4.0		6.5		10		15		25		✕		40		✕		65		✕		100		✕		150		✕		250		✕		Mayor de 250		
		Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)																																										

△ = Utilícese el precedente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo

▽ = Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo

Ac = Número de aceptación

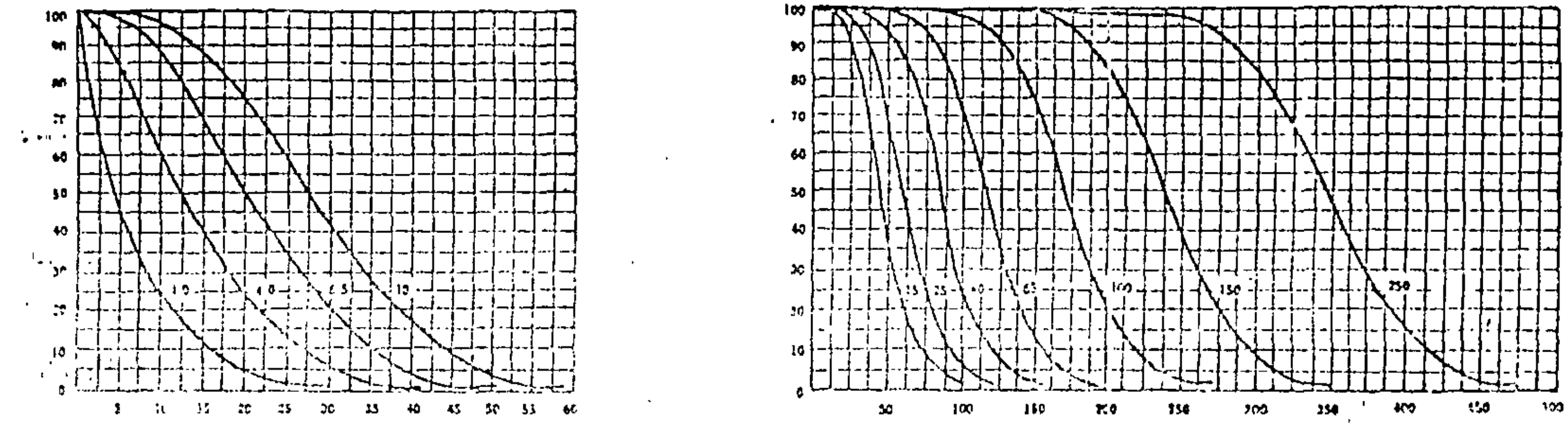
Re = Número de rechazo

• = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente, o bien utilícese la letra H.

= No se permite la aceptación para ese tamaño de muestra.

TABLA X-E Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave E

GRAFICA E Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos (Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



CALIDAD DE LOS LOTES (p en porcentaje de defectuosas para NCA ≤ 10; y en defectos por cien unidades para NCA > 10)

Nota: Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal.

TABLA X E-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

P_a	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)																			
	1.0	4.0	6.5	10	1.0		6.5	10	15	25	X	40	X	65	X	100	X	150	X	250
	p (en porcentaje de defectuosas)				p (en defectos por cien unidades)															
99.0	0.077	1.19	3.63	7.00	0.078	1.15	3.35	6.33	13.7	22.4	27.0	36.7	46.9	57.5	79.6	96.7	132	150	219	238
95.0	0.394	2.81	6.63	11.3	0.395	2.73	6.29	10.5	20.1	30.6	36.1	47.5	59.2	71.1	95.7	115	153	173	246	266
90.0	0.807	4.16	8.80	14.2	0.808	4.09	8.46	13.4	24.2	35.8	41.8	54.0	66.5	79.2	105	125	165	185	261	282
75.0	2.19	7.41	13.4	19.9	2.22	7.39	13.3	19.5	32.5	45.8	52.6	66.3	80.2	94.1	122	144	187	208	288	310
50.0	5.19	12.6	20.0	27.5	5.33	12.9	20.6	28.2	43.6	59.0	66.7	82.1	97.5	113	144	168	213	236	321	344
25.0	10.1	19.4	28.0	36.2	10.7	20.7	30.2	39.3	57.1	74.5	83.1	100	117	134	167	192	241	266	355	379
10.0	16.2	26.8	36.0	44.4	17.7	29.9	40.9	51.4	71.3	90.5	100	119	137	155	190	217	269	295	388	414
5.0	20.6	31.6	41.0	49.5	23.0	36.5	48.4	59.6	80.9	101	111	130	150	168	205	233	286	313	409	435
1.0	29.8	41.5	50.6	58.7	35.4	51.1	64.7	77.3	101	123	134	155	176	196	235	264	321	349	450	477
	1.5	6.5	10	X	1.5	6.5	10	15	25	X	40	X	65	X	100	X	150	X	250	X
	Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)																			

Nota: En el cálculo del porcentaje de defectuosas se ha empleado la distribución binominal; en el número de defectos por cien unidades la de Poisson.

TABLA X-D-2 Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave D

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (Inspección normal)																					Tamaño de la muestra acumulado
		Menor de 1.5	1.5	2.5	X	4.0	6.5	10	15	25	40	X	65	X	100	X	150	X	250	X	400	Mayor de 400	
		Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	Ac Re	
Sencillo	8	▽	0 1	Usese Letra C	Usese Letra F	Usese Letra E	1 2	2 3	3 4	5 6	7 8	8 9	10 11	12 13	14 15	18 19	21 22	27 28	30 31	41 42	44 45	△	8
Doble	5	▽	•				0 2	0 3	1 4	2 5	3 7	3 7	5 9	6 10	7 11	9 14	11 16	15 20	17 22	23 29	25 31	△	5
	10						1 2	3 4	4 5	6 7	8 9	11 12	12 13	15 16	18 19	23 24	26 27	34 35	37 38	52 53	56 57		10
Múltiple	2	▽	•				# 2	# 2	# 3	# 4	0 4	0 4	0 5	0 6	1 7	1 8	2 9	3 10	4 12	6 15	6 16	△	2
	4						# 2	0 3	0 3	1 5	1 6	2 7	3 8	3 9	4 10	6 12	7 14	10 17	11 19	16 25	17 27		4
	6						0 2	0 3	1 4	2 6	3 8	4 9	6 10	7 12	8 13	11 17	13 19	17 24	19 27	26 36	29 39		6
	8						0 3	1 4	2 5	3 7	5 10	6 11	8 13	10 15	12 17	16 22	19 25	24 31	27 34	37 46	40 49		8
	10						1 3	2 4	3 6	5 8	7 11	9 12	11 15	14 17	17 20	22 25	25 29	32 37	36 40	49 55	53 58		10
	12						1 3	3 5	4 6	7 9	10 12	12 14	14 17	18 20	21 23	27 29	31 33	40 43	45 47	61 64	65 68		12
	14						2 3	4 5	6 7	9 10	13 14	14 15	18 19	21 22	25 26	32 33	37 38	48 49	53 54	72 73	77 78		14
		Menor de 2.5	2.5	X	4.0	6.5	10	15	25	40	X	65	X	100	X	150	X	250	X	400	X	Mayor de 400	
		Niveles de calidad aceptable (Inspección rigurosa)																					

△ = Utilícese el precedente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual están disponibles números de aceptación y rechazo

▽ = Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual están disponibles números de aceptación y rechazo

Ac = Número de aceptación

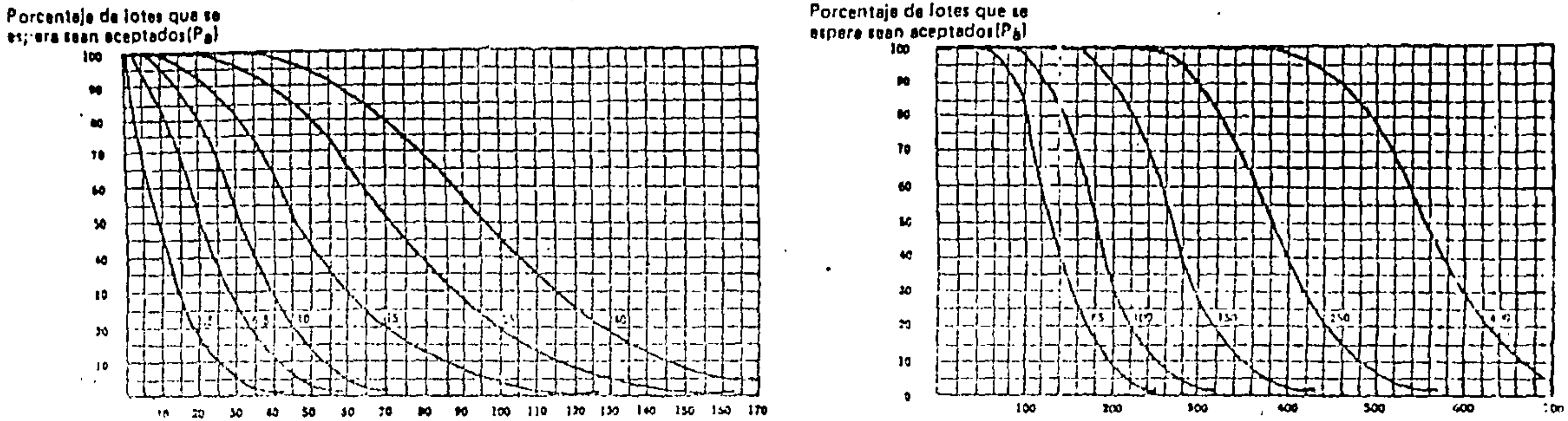
Re = Número de rechazo

• = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente, o bien utilícese la letra G.

\# = No se permite la aceptación para ese tamaño de muestra

TABLA X-D Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave D

GRAFICA D Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos (Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



CALIDAD DE LOS LOTES (p en porcentaje de defectuosas para NCA ≤ 10; y en defectos por cien unidades para NCA > 10)
Nota: Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal

TABLA X-D-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

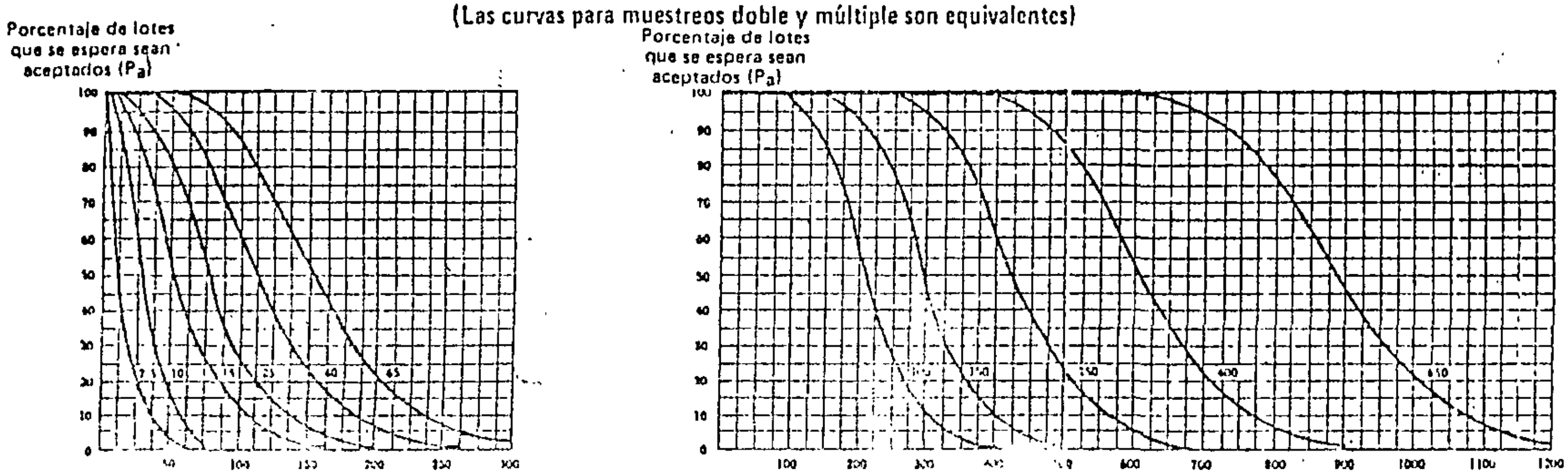
P_a	Niveles de calidad aceptable (Inspección normal)																		
	1.5	6.5	10	1.5	6.5	10	15	25	40	✕	65	✕	100	✕	150	✕	250	✕	400
	p (en porcentaje de defectuosas)			p (en defectos por cien unidades)															
99.0	0.13	2.00	6.00	0.13	1.65	5.45	10.3	22.3	36.3	43.8	59.6	76.2	91.5	129	157	215	244	355	396
95.0	0.64	2.64	11.1	0.64	4.44	10.2	17.1	32.7	49.8	58.7	77.1	96.1	115	156	186	249	281	399	432
90.0	1.31	6.88	14.7	1.31	6.65	13.8	21.8	39.4	58.2	67.9	87.8	108	127	171	203	268	301	424	458
75.0	3.53	12.1	22.1	3.60	12.0	21.6	31.7	52.7	74.5	85.5	108	130	153	199	234	303	339	468	504
50.0	8.30	20.1	32.1	8.66	21.0	33.4	45.9	70.9	95.9	108	133	158	183	233	271	346	383	521	558
25.0	15.9	30.3	43.3	17.3	33.7	49.0	63.9	92.8	121	135	163	190	219	272	312	392	432	577	617
10.0	25.0	40.6	53.9	28.8	48.6	66.5	83.5	116	147	162	193	222	252	309	352	437	478	631	672
5.0	31.2	47.1	59.9	37.5	59.3	78.7	96.9	131	164	180	212	243	274	334	378	465	509	665	707
1.0	43.8	58.8	70.7	57.6	83.0	105	126	164	200	218	252	285	313	382	429	522	568	732	776
	2.5	10	✕	2.5	10	15	25	40	✕	65	✕	100	✕	150	✕	250	✕	400	✕
	Niveles de calidad aceptable (Inspección rigurosa)																		

Nota: Se ha usado la distribución binominal para los cálculos de porcentaje de defectuosas y la distribución de Poisson para los cálculos de defectos por cien unidades

TABLA X-C Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave C

GRAFICA C Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

(Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



CALIDAD DE LOS LOTES (p en porcentaje de defectuosas para NCA ≤ 10; y en defectos por cien unidades para NCA > 10)

Notas Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal

TABLA X-C-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

Pa	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)																	
	2.5	10	2.5	10	15	25	40	65	✕	100	✕	150	✕	250	✕	400	✕	650
	p (en porcentaje de defectuosas)		p (en defectos por cien unidades)															
99.0	0.20	3.28	0.20	2.89	8.72	16.5	35.7	58.1	70.1	95.4	122	150	207	251	344	391	568	618
95.0	1.02	7.63	1.03	7.10	16 4	27.3	52 3	79.6	93.9	123	154	185	249	298	398	449	639	691
90 0	2.09	11 2	2.10	10.6	22 0	34.9	63.0	93.1	109	140	173	206	273	325	429	482	679	733
75 0	5.59	19.4	5.76	19.2	34.5	50.7	84.4	119	137	172	208	245	318	374	485	542	749	806
50.0	12.9	31.4	13.9	33.6	53.5	73.4	113	153	173	213	253	293	373	433	553	613	833	893
25.0	24.2	45.4	27.7	53.9	78 4	102	118	194	216	260	304	348	435	499	627	691	923	987
10.0	36.9	58.4	46.1	77.8	106	134	186	235	260	308	356	403	495	564	699	766	1010	1076
5 0	45.1	65.8	59.9	94.9	126	155	210	263	289	339	389	438	534	605	745	814	1064	1131
1.0	60.2	77.8	92.1	133	168	201	262	320	348	403	456	509	612	687	835	908	1171	1241
	4.0	✕	4.0	15	25	40	65	✕	100	✕	150	✕	250	✕	400	✕	650	✕
	Niveles de calidad aceptable (Inspección rigurosa)																	

Nota: En el cálculo del porcentaje de defectuosas se ha empleado la distribución binominal; en el número de defectos por cien unidades la de Poisson.

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (Inspección normal)																																										Tamaño de la muestra acumulado
		Menor de 2.5		2.5		4.0		✕		6.5		10		15		25		40		65		✕		100		✕		150		✕		250		✕		400		✕		650		1000		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	5	∇		0	1	Usese Letra B		Usese Letra E		Usese Letra D		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	27	28	30	31	41	42	44	45	Usese Letra B		5
Doble	3	∇		•								0	2	0	3	1	4	2	5	3	7	3	7	5	9	6	10	7	11	9	14	11	16	15	20	17	22	23	29	25	31			3
	6											1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	11	12	12	13	15	16	18	19	23	24	26	27	34	35	37	38	52	53	56	57			6
Múltiple		∇		•								++		++		++		++		++		++		++		++		++		++		++		++		++		++		++				
		Menor de 4.0		4.0		✕		6.5		10		15		25		40		65		✕		100		✕		150		✕		250		✕		400		✕		650		✕		1000		
		Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)																																										

∇ = Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo

Ac = Número de aceptación

Re = Número de rechazo

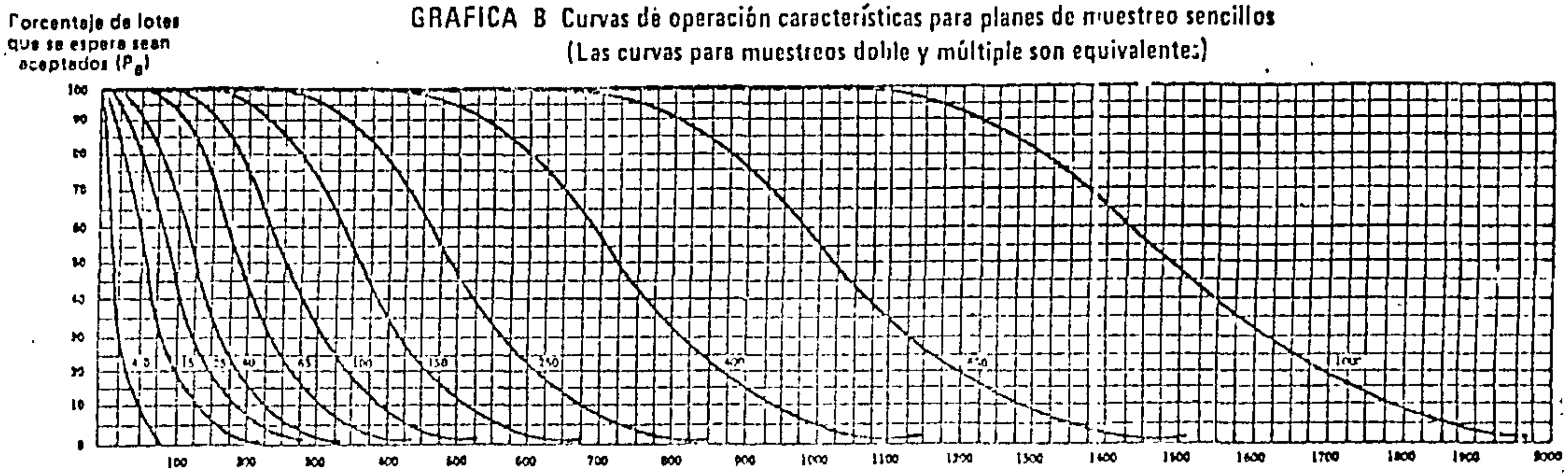
• = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente, o bien utilícese la letra F.

++ = Utilícese el plan de muestreo doble precedente, o bien utilícese la letra D.

TABLA X-B Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave B

GRAFICA B Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

(Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



CALIDAD DE LOS LOTES (p en porcentaje de defectuosas para NCA ≤ 10, y en defectos por cien unidades para NCA > 10)

Nota: Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal.

TABLA X-B-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

P_a	Niveles de calidad aceptable (Inspección normal)																
	4.0	4.0	15	25	40	65	100	✕	150	✕	250	✕	400	✕	650	✕	1000
	p (en porcentaje de defectuosas)	p (en defectos por cien unidades)															
99.0	0.33	0.34	4.97	14.5	27.4	59.5	96.9	117	159	203	249	345	419	573	651	947	1029
95.0	1.70	1.71	11.8	27.3	45.5	87.1	133	157	206	256	308	415	496	663	748	1065	1152
90.0	3.45	3.50	17.7	36.7	58.2	105	155	181	224	288	343	456	541	716	804	1131	1222
75.0	9.14	9.60	32.0	57.6	84.5	141	199	228	287	347	408	530	623	609	903	1249	1344
50.0	20.6	23.1	55.9	89.1	122	189	256	289	356	422	489	622	722	922	1022	1389	1485
25.0	37.0	46.2	89.8	131	170	247	323	360	434	507	580	724	832	1046	1152	1539	1644
10.0	53.6	76.8	130	177	223	309	392	433	514	593	671	825	939	1165	1277	1683	1793
5.0	63.2	99.9	158	210	258	350	438	481	565	648	730	890	1008	1241	1356	1773	1886
1.0	78.4	154	221	280	335	437	533	580	672	761	848	1019	1145	1392	1513	1951	2069
	6.5	6.5	25	40	65	100	✕	150	✕	250	✕	400	✕	650	✕	1000	✕
	Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)																

Nota: En el cálculo del porcentaje de defectuosas se ha empleado la distribución binominal; en el número de defectos por cien unidades la de Poisson.

TABLA X-B-2 Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave E

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)																			
		menor de 4.0		4.0		6.5		╳		10		15		25		40		65		100	
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
Sencillo	3	▽		0	1	Usese Letra A		Usese Letra D		Usese Letra C		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8
Doble	2	▽		*								0	2	0	3	1	4	2	5	3	7
	4											1	2	3	4	4	5	6	7	8	9
Múltiple		▽										++		++		++		++		++	
		Menor de 6.5		6.5		╳		10		15		25		40		65		100		╳	
		Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)																			

Tipo de plan de muestreo	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)																				Tamaño de la muestra acumulado
	╳		150		╳		250		╳		400		╳		650		╳		1000		
	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	27	28	30	31	41	42	44	45	3
Doble	3	7	5	9	6	10	7	11	9	14	11	16	15	20	17	22	23	29	25	31	2
	11	12	12	13	15	16	18	19	23	24	26	27	34	35	37	38	52	53	56	57	4
Múltiple	++		++		++		++		++		++		++		++		++		++		
	150		╳		250		╳		400		╳		650		╳		1000		╳		
	Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)																				

▽ = Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo

Ac = Número de aceptación

Re = Número de rechazo

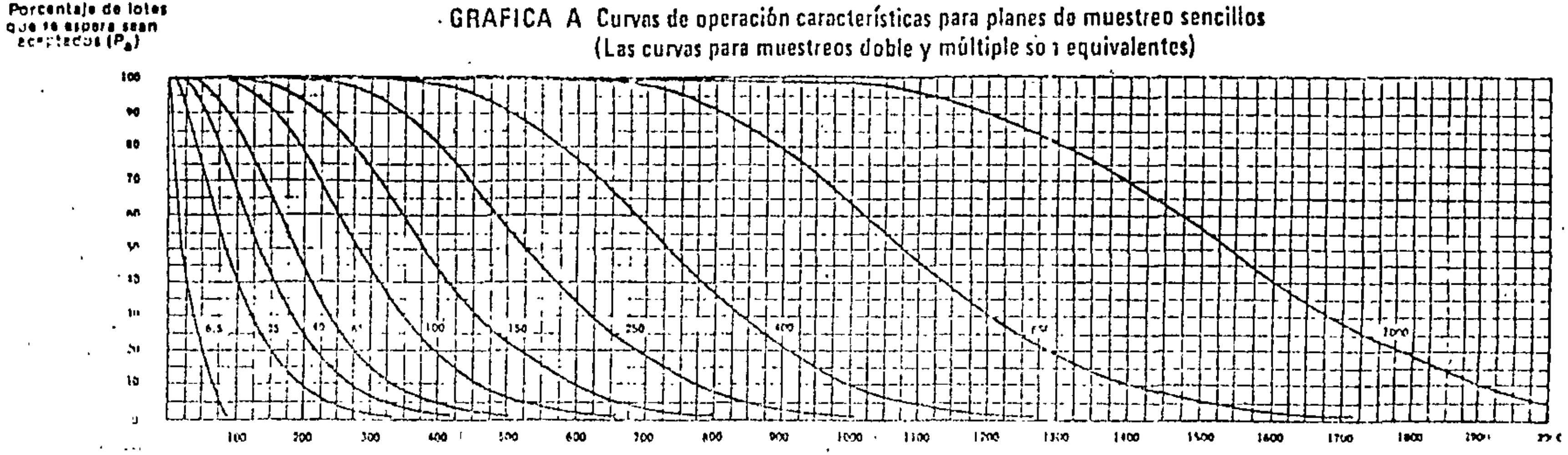
* = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente, o bien utilícese la letra E.

++ = Utilícese el plan de muestreo doble precedente, o bien utilícese la letra D.

TABLA X-A Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave A

GRAFICA A Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

(Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



CALIDAD DE LOS LOTES (p, en porcentaje de defectuosas para NCA ≤ 10; y en defectos por cien unidades para NCA > 10)

Nota: Los valores sobre las curvas corresponde a los NCA para inspección normal.

TABLA X-A-I Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)														
Pa	6.5	6.5	25	40	65	100	150	✕	230	✕	400	✕	650	✕	1000
	p (en porcentaje de defectuosas)	p (en defectos por cien unidades)													
99.0	0.501	0.51	7.45	21.8	41.2	89.2	145	175	239	305	374	517	629	859	977
95.0	2.53	2.56	17.8	40.9	69.3	131	199	235	308	385	462	622	745	995	1122
90.0	5.13	5.25	26.6	55.1	87.3	158	233	272	351	432	515	684	812	1073	1206
75.0	13.4	14.4	48.1	86.8	127	211	298	342	431	521	612	795	934	1314	1354
50.0	29.3	34.7	83.9	134	184	284	383	433	533	633	733	933	1083	1383	1533
25.0	50.0	69.3	135	196	256	371	484	540	651	761	870	1037	1248	1558	1728
10.0	68.4	115	195	266	334	464	589	650	770	889	1006	1238	1409	1748	1916
5.0	77.6	150	237	315	388	526	657	722	848	972	1094	1334	1512	1862	2035
1.0	90.0	230	332	420	502	655	800	870	1007	1141	1272	1529	1718	2088	2270
	✕	✕	40	65	100	150	✕	250	✕	400	✕	650	✕	1000	✕
	Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)														

Nota: En el cálculo del porcentaje de defectuosas se ha empleado la distribución binominal; en el número de defectos por cien unidades la de Poisson

Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave A

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (Inspección normal)																																				Tamaño de la muestra acumulado
		Menor de 6.5		6.5		✕		10		15		25		40		65		100		150		✕		250		✕		400		✕		650		✕		1000		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	2	▽		0	1	Usese Letra D		Usese Letra C		Usese Letra B		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	[illegible]	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	27	28	30	31	[illegible]
Doble		▽		•								(*)		(*)		(*)		(*)		(*)		[illegible]		(*)		(*)		(*)		(*)		(*)		(*)		(*)		
Múltiple		▽		•								•		•		•		•		•		•		•		•		•		•		•		•		•		
		Menor de 10		✕		10		15		25		40		65		100		150		✕		250		✕		400		✕		650		✕		1000		✕		
		Niveles de calidad aceptable (Inspección rigurosa)																																				

▽ = Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo.

Ac = Número de aceptación.

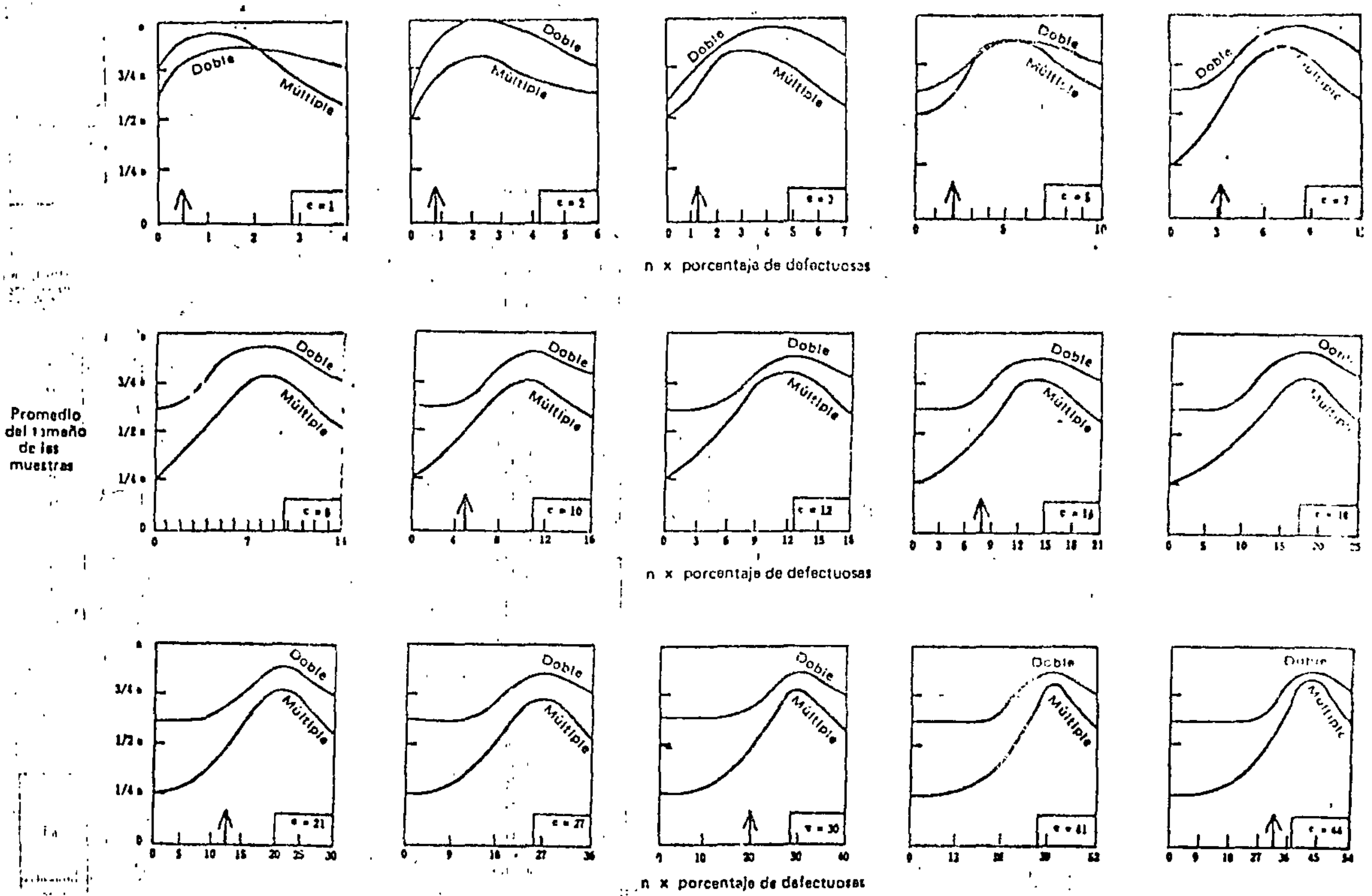
Re = Número de rechazo.

• = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente, o bien utilícese la letra D.

(*) = Utilícese el plan de muestreo sencillo, o bien utilícese la letra B.

TABLA. IX Curvas promedio del tamaño de las muestras para muestreos doble y múltiple
(inspección normal y rigurosa)

(véase 11.5 de DGN-R-18/2-1979)



n = Tamaño de muestra correspondiente al muestreo sencillo.
c = Número de aceptación para muestreo sencillo.
↑ = NCA para inspección normal.

TABLA VIII - Números Límites para Inspección Reducida

(véase 8.3.3 de DGN-R-18/2-1975)

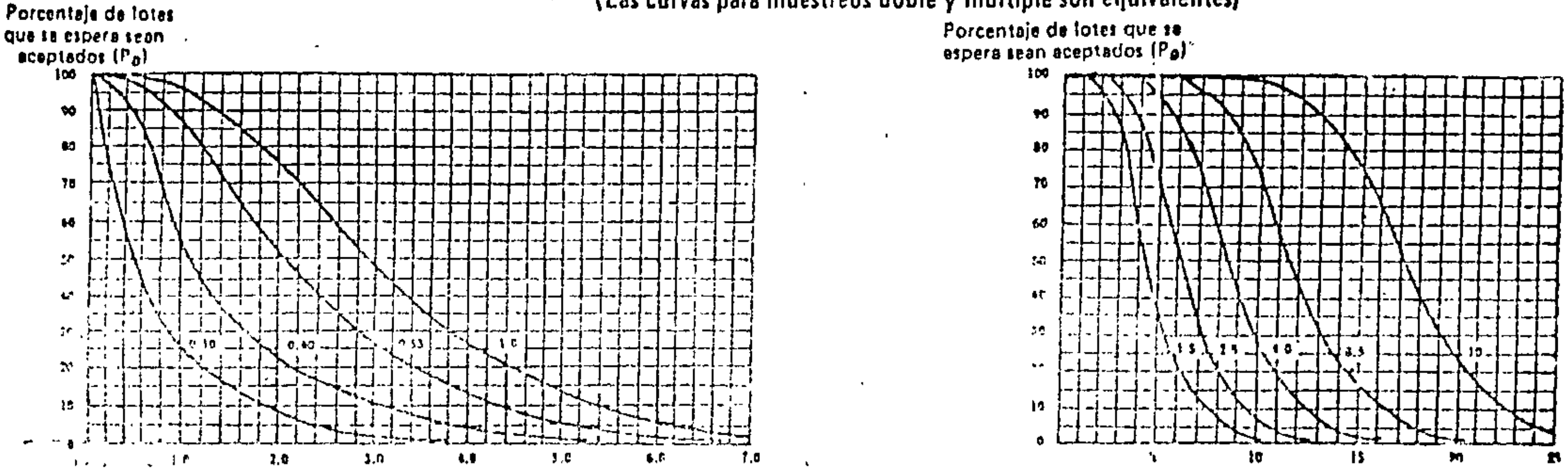
Número de muestras en los 10 últimos lotes	Niveles de calidad aceptable																									
	0.010	0.015	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400	650	1000
20 - 29	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	0	2	4	8	14	22	40	68	115	181
30 - 49	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	0	1	3	7	13	22	36	63	105	178	27.
50 - 79	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	0	2	3	7	14	25	40	63	110	181	301	
80 - 129	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	0	2	4	7	14	24	42	68	105	181	297		
130 - 199	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	0	2	4	7	13	25	42	72	115	177	301	490		
200 - 319	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	0	2	4	8	14	22	40	68	115	181	277	471			
320 - 499	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	0	1	4	8	14	24	39	68	113	189						
500 - 799	•	•	•	•	•	•	•	•	0	0	2	3	7	14	25	40	63	110	181							
800 - 1249	•	•	•	•	•	•	•	0	0	2	4	7	14	24	42	68	105	181								
1250 - 1999	•	•	•	•	•	•	0	0	2	4	7	13	24	40	69	110	169									
2000 - 3149	•	•	•	•	•	0	0	2	4	8	14	22	40	68	115	181										
3150 - 4999	•	•	•	•	0	0	1	4	8	14	24	38	67	111	186											
5000 - 7999	•	•	•	0	0	2	3	7	14	25	40	63	110	181												
8000 - 12499	•	•	0	0	2	4	7	14	24	42	68	105	181													
12500 - 19999	•	0	0	2	4	7	13	24	40	69	110	169														
20000 - 31499	0	0	2	4	8	14	22	40	68	115	181															
31500 - 49999	0	1	4	8	14	24	38	67	111	186																
50000 & Over	2	3	7	14	25	40	63	110	181	301																

*Significa que el número de muestras correspondientes a los últimos 10 lotes o partidas no es suficiente para utilizar la inspección reducida para esta NCA. En este caso se pueden usar más de 10 lotes o partidas para efectuar el cálculo, siempre y cuando los lotes o partidas considerados sean los más recientes y que todos ellos hayan estado sometidos a inspección normal y que además ninguno haya sido rechazado en la inspección original.

TABLA X-K Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave K

GRAFICA K Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

(Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



CALIDAD DE LOS LOTES (p en porcentaje de defectuosas para NCA ≷ 10; y en defectos por cien unidades para NCA > 10)

Nota: Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal

TABLA X-K-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

P.	Niveles de calidad aceptable (Inspección normal)											
	0.10	0.40	0.65		1.5	2.5	✕	4.0	✕	6.5	✕	10
	p (en porcentaje de defectuosas o en defectos por cien unidades)											
99.0	0 0081	0.119	0 349	0.658	1.43	2.33	2.81	3.52	4.88	5.98	8.28	10.1
95.0	0 0410	0.284	0 654	1.09	2 09	3.19	3.76	4.94	6.15	7.40	9.95	11.9
90.0	0.0840	0.426	0 882	1.40	2.52	3.73	4.35	5.62	6.92	8.24	10.9	13,0
75.0	0.230	0.769	1.382	2.03	3.38	4.77	5.47	6.90	8.34	9.79	12.7	14.9
50.0	0.554	1.34	2.14	2.94	4.54	6.14	6.94	8.53	10.1	11.7	14.9	17.3
25.0	1.11	2.15	3.14	4.09	5.94	7.75	8.64	10.4	12.2	13.9	17.4	20.0
10 0	1.84	3.11	4.26	5.35	7.42	9.42	10.4	12.3	14.2	16.1	19.8	22.5
5.0	2.40	3.80	5.04	6.20	8.41	10.5	11 5	13.6	15.6	17.5	21.4	24.2
1.0	3.68	5.31	6.73	8.04	10.5	12.8	18.3	16.1	18.3	20.4	24.5	27.5
	0.15	0.65	1.0	1.5	2.5	✕	4 0	✕	6.5	✕	10	✕
	Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)											

Nota: Todos los valores arriba mencionados están calculados en base a la distribución de Poisson como aproximación a la binominal.

TABLA X-K-2 Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave K

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)																																		Tamaño de la muestra acumulado
		Menor de 0.10		0.10		0.15		✕		0.25		0.40		0.65		1.0		1.5		2.5		✕		4.0		✕		6.5		✕		10		Mayor de 10		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	125	▽		0	1	Usese Letra J		Usese Letra M		Usese Letra L		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	△		125
Doble	80	▽		•								0	2	0	3	1	4	2	5	3	7	3	7	5	9	6	10	7	11	9	14	11	16	△		80
	160											1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	11	12	12	13	15	16	18	19	23	24	26	27			160
Múltiple	32	▽		•								*	2	*	2	*	3	*	4	0	4	0	4	0	5	0	6	1	7	1	8	2	9	△		32
	64											*	2	0	3	0	3	1	5	1	6	2	7	3	8	3	9	4	10	6	12	7	14			64
	96											0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	4	9	6	10	7	12	8	13	11	17	13	19			96
	128											0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	6	11	8	13	10	15	12	17	16	22	19	25			128
	160											1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	9	12	11	15	14	17	17	20	22	25	25	29			160
	192											1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	12	14	14	17	18	20	21	23	27	29	31	33			192
	224											2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	14	15	16	19	21	22	25	26	32	33	37	38			224
		Menor de 0.15		0.15		✕		0.25		0.40		0.65		1.0		1.5		2.5		✕		4.0		✕		6.5		✕		10		✕		Mayor de 10		
		Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)																																		

△ = Utilícese el precedente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo

▽ = Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo

Ac = Número de aceptación

Re = Número de rechazo

• = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente, o bien, utilícese la letra [illegible]

* = [illegible] ite la aceptación para [illegible]

TABLA X-L-2 Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave L

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)																																		Tamaño de la muestra acumulado
		Menor de 0.065		0.065		0.10		✕		0.15		0.25		0.40		0.65		1.0		1.5		✕		2.5		✕		4.0		✕		6.5		Mayor de 6.5		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	200	▽		0	1	Úsese Letra K		Úsese Letra N		Úsese Letra M		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	△		200
Doble	125	▽		•								0	2	0	3	1	4	2	5	3	7	5	7	5	9	6	10	7	11	9	14	11	16	△		125
	250											1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	11	12	12	13	15	16	18	19	23	24	26	27			250
Múltiple	50	▽		•								#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	4	0	5	0	6	1	7	1	8	2	9	△		50
	100											#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	2	7	3	8	3	9	4	10	6	12	7	14			100
	150											0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	4	9	6	10	7	12	8	13	11	17	13	19			150
	200											0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	6	11	8	13	10	15	12	17	16	22	19	25			200
	250											1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	9	12	11	15	14	17	17	20	22	25	25	29			250
	300											1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	12	14	14	17	18	20	21	23	27	29	31	33			300
	350											2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	14	15	18	19	21	22	25	26	32	33	37	38			350
		Menor de 0.10		0.10		✕		0.15		0.25		0.40		0.65		1.0		1.5		✕		2.5		✕		4.0		✕		6.5		✕		Mayor de 6.5		
		Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)																																		

△ = Utilícese el precedente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo.

▽ = Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo.

Ac = Número de aceptación.

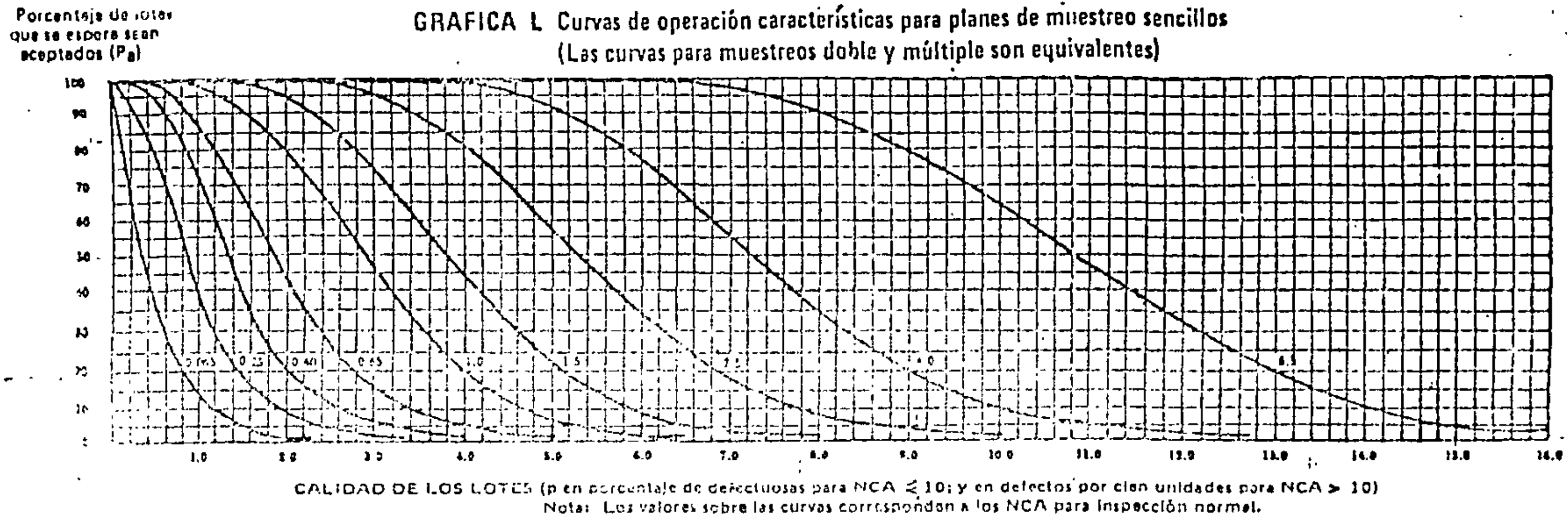
Re = Número de rechazo.

• = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente, o bien utilícese la letra P.

= No se permite la aceptación para ese tamaño de muestra.

TABLA X-L Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave L

GRAFICA L Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos
(Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



Nota: Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal.

TABLA X-L-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

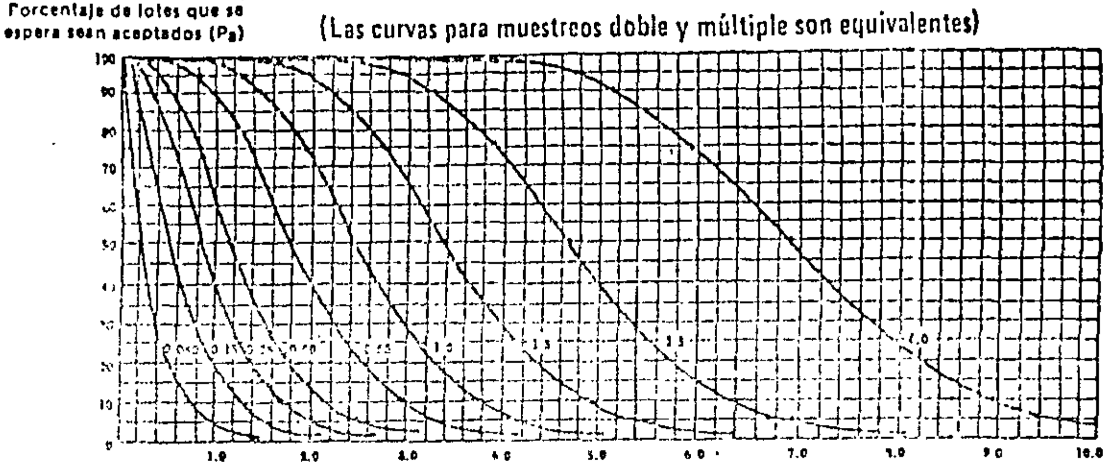
	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)											
Pa	0.065	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	✕	2.5	✕	4.0	✕	6.5
	p(en porcentaje de defectuosas o en defectos por cien unidades)											
99.0	0.0051	0.075	0.218	0.412	0.893	1.45	1.75	2.39	3.05	3.74	5.17	6.29
95.0	0.0256	0.178	0.409	0.683	1.31	1.99	2.35	3.09	3.85	4.62	6.22	7.45
90.0	0.0525	0.266	0.551	0.873	1.58	2.33	2.72	3.51	4.32	5.15	6.84	8.12
75.0	0.144	0.481	0.864	1.27	2.11	2.98	3.42	4.31	5.21	6.12	7.95	9.34
50.0	0.347	0.839	1.34	1.84	2.84	3.04	4.33	5.33	6.33	7.33	9.33	10.8
25.0	0.693	1.35	1.96	2.56	3.71	4.84	5.40	6.51	7.61	8.70	10.9	12.5
10.0	1.15	1.95	2.66	3.34	4.64	5.89	6.50	7.70	8.89	10.1	12.4	14.1
5.0	1.50	2.37	3.15	3.88	5.26	6.57	7.22	8.48	9.72	10.9	13.3	15.1
1.0	2.30	3.32	4.20	5.02	6.55	8.00	8.70	10.1	11.4	12.7	15.3	17.2
	0.10	0.40	0.65	1.0	1.5	✕	2.5	✕	4.0	✕	6.5	✕
	Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)											

Nota: Todos los valores arriba mencionados están calculados en base a la distribucion de Poisson como aproximación a la binominal.

TABLA X-M Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave M

GRAFICA M Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

(Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



CALIDAD DE LOS LOTES (p en porcentaje de defectuosas para NCA ≤ 10; y en defectos por cien unidades para NCA > 10)

Nota: Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal

TABLA X-M-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

Pa	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)											
	0.040	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	✕	1.5	✕	2.5	✕	4.0
	p (en porcentaje de defectuosas o en defectos por cien unidades)											
99.0	0.0032	0.047	0.138	0.261	0.566	0.922	1.11	1.51	1.94	2.38	3.28	3.99
95.0	0.0163	0.112	0.259	0.433	0.829	1.26	1.49	1.96	2.44	2.94	3.95	4.73
90.0	0.0333	0.168	0.349	0.533	1.00	1.48	1.72	2.23	2.75	3.27	4.34	5.16
75.0	0.0914	0.305	0.580	0.804	1.34	1.89	2.17	2.74	3.31	3.89	5.05	5.93
50.0	0.220	0.532	0.848	1.17	1.80	2.43	2.75	3.39	4.02	4.66	5.93	6.88
25.0	0.440	0.854	1.24	1.62	2.35	3.07	3.43	4.13	4.83	5.52	6.90	7.92
10.0	0.731	1.23	1.69	2.12	2.94	3.74	4.13	4.89	5.65	6.39	7.86	8.95
5.0	0.951	1.51	2.00	2.46	3.34	4.17	4.58	5.38	6.17	6.95	8.47	9.60
1.0	1.46	2.11	2.67	3.19	4.16	5.08	5.53	6.40	7.25	8.08	9.71	10.9
[illegible]	0.065	0.25	0.40	0.65	1.0	✕	1.5	✕	2.5	✕	4.0	✕
	Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)											

Nota: Todos los valores arriba mencionados están calculados en base a la distribución de Poisson como aproximación a la binominal.

TABLA X-15-2 Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave M

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)																																		Tamaño de la muestra acumulado
		Menor de 0.040		0.040		0.065		╳		0.10		0.15		0.25		0.40		0.65		1.0		╳		1.5		╳		2.5		╳		4.0		Mayor de 4.0		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	315	▽		0	1	Usese Letra L		Usese Letra P		Usese Letra N		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	△		315
Doble	200	▽		•								0	2	0	3	1	4	2	5	3	7	3	7	5	9	6	10	7	11	9	14	11	16	△		200
	400											1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	11	12	12	13	15	16	18	19	23	24	26	27			400
Múltiple	80	▽		•								#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	4	0	5	0	6	1	7	1	8	2	9	△		80
	160											#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	2	7	3	8	3	9	4	10	6	12	7	14			160
	240											0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	4	9	6	10	7	12	8	13	11	17	13	19			240
	320											0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	6	11	8	13	10	15	12	17	16	22	19	25			320
	400											1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	9	12	11	15	14	17	17	20	22	25	25	29			400
	480											1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	12	14	14	17	18	20	21	23	27	29	31	33			480
	560											2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	14	15	18	19	21	22	25	26	32	33	37	38			560
		Menor de 0.065		0.065		╳		0.10		0.15		0.25		0.40		0.65		1.0		╳		1.5		╳		2.5		╳		4.0		╳		Mayor de 4.0		
		Niveles de calidad aceptable (Inspección rigurosa)																																		

△ = Utilícese el precedente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual están disponibles números de aceptación y rechazo.

▽ = Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual están disponibles números de aceptación y rechazo.

Ac = Número de aceptación.

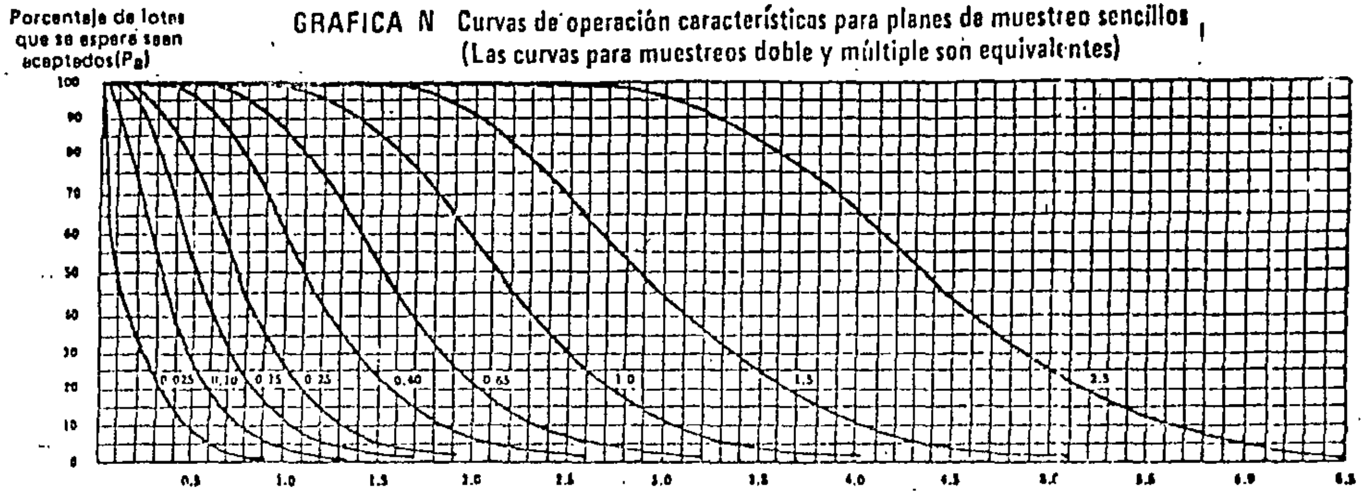
Re = Número de rechazo.

• = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente, o bien utilícese la letra Q.

= No se permite la aceptación para ese tamaño de muestra.

TABLA X-N Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave N

GRAFICA N Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos
(Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



CALIDAD DE LOS LOTES (p en porcentaje de defectuosas para NCA ≤ 10; y en defectos por cien unidades para NCA > 10)

Nota: Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal

TABLA X-N-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

Pa	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)											
	0.025	0.10	0 15	0 25	0.40	0.65	╳	1.0	╳	1.5	╳	2.5
	p (en porcentaje de defectuosas o en defectos por cien unidades)											
99.0	0.0020	0.030	0.087	0.165	0.357	0.501	0.701	0.954	1.22	1.50	2.07	2.51
95.0	0.0103	0.071	0.164	0.273	0.523	0.796	0.939	1.23	1.54	1.85	2.49	2.98
90.0	0.0210	0.106	0.220	0.349	0.630	0.931	1.09	1.40	1.73	2.06	2.73	3 25
75.0	0.0576	0.192	0 345	0.507	0.844	1.19	1.37	1.72	2.08	2.45	3.18	3.74
50.0	0.139	0.336	0.535	0.734	1.13	1.53	1.73	2.13	2.53	2.93	3.73	4.33
25.0	0.277	0.539	0 784	1.02	1.48	1.94	2.16	2.60	3.04	3.48	4.35	4.99
10.0	0.461	0.778	1.06	1.34	1.86	2.35	2.60	3.08	3.56	4.03	4.95	5.64
5.0	0.599	0.949	1.26	1.55	2.10	2.63	2.89	3.39	3.89	4.38	5.34	6.05
1.0	0.921	1.328	1.68	2.01	2.62	3.20	3.48	4.03	4.56	5.09	6.12	6.87
	0.040	0.15	0.25	0.40	0.65	╳	1.0	╳	1.5	╳	2.5	╳
	Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)											

Nota: Todos los valores arriba mencionados están calculados en base a la distribución de Poisson como aproximación a la binominal.

TABLA X-N-2 Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave N

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (Inspección normal)																																		Tamaño de la muestra acumulado
		Menor de 0.025		0.025		0.040		✕		0.065		0.10		0.15		0.25		0.40		0.65		✕		1.0		✕		1.5		✕		2.5		Mayor de 2.5		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	500	▽		0	1	Usese Letra M		Usese Letra Q		Usese Letra P		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	△		500
Doble	315	▽		•								0	2	0	3	1	4	2	5	3	7	3	7	5	9	6	10	7	11	9	14	11	16	△		315
	630											1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	11	12	12	13	15	16	18	19	23	24	26	27			630
Múltiple	125	▽		•								#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	4	0	5	0	6	1	7	1	8	2	9	△		125
	250											#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	2	7	3	8	3	9	4	10	6	12	7	14			250
	375											0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	4	9	6	10	7	12	8	13	11	17	13	19			375
	500											0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	6	11	8	13	10	15	12	17	16	22	19	25			500
	625											1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	9	12	11	15	14	17	17	20	22	25	25	29			625
	750											1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	12	14	14	17	18	20	21	23	27	29	31	33			750
	875											2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	14	15	18	19	21	22	25	26	32	33	37	38			875
		Menor de 0.040		0.040		✕		0.065		0.10		0.15		0.25		0.40		0.65		✕		1.0		✕		1.5		✕		2.5		✕		Mayor de 2.5		
		Niveles de calidad aceptable (Inspección rigurosa)																																		

△ = Utilícese el precedente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo.

▽ = Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo.

Ac = Número de aceptación.

Re = Número de rechazo.

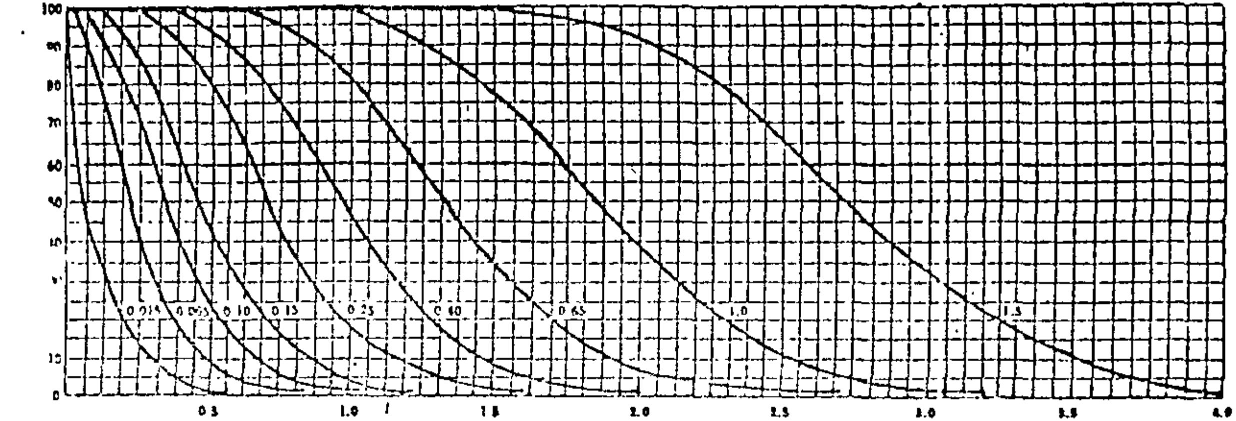
• = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente, o bien utilícese la letra R.

= No se permite la aceptación para ese tamaño de muestra.

TABLA X-P Tamaño de la muestra correspóndiente a la letra clave P

GRAFICA P Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

(Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



CALIDAD DE LOS LOTES: (p en porcentaje de defectuosas para NCA ≤ 10; y en defectos por cien unidades para NCA > 10)
Nota: Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal

TABLA X-P-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

P_a	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)										
	0.015	0.065	0.10	0.15	0.25	0.40	✕	0.65	✕	1.0	✕	1.5
	p (en porcentaje de defectuosas o en defectos por cien unidades)											
99.0	0.0013	0.0186	0.055	0.103	0.223	0.363	0.438	0.596	0.762	0.935	1.29	1.57
95.0	0.0064	0.0444	0.102	0.171	0.327	0.498	0.587	0.771	0.961	1.16	1.56	1.86
90.0	0.0131	0.0665	0.138	0.218	0.394	0.502	0.679	0.878	1.08	1.29	1.71	2.03
75.0	0.0360	0.120	0.216	0.317	0.527	0.745	0.855	1.08	1.30	1.53	1.99	2.34
50.0	0.0866	0.210	0.334	0.459	0.709	0.959	1.08	1.33	1.58	1.83	2.33	2.71
25.0	0.173	0.337	0.490	0.639	0.928	1.21	1.35	1.63	1.90	2.18	2.72	3.12
10.0	0.288	0.486	0.665	0.835	1.16	1.47	1.62	1.93	2.22	2.52	3.09	3.52
5.0	0.375	0.593	0.787	0.969	1.31	1.64	1.80	2.12	2.43	2.74	3.34	3.73
1.0	0.576	0.830	1.05	1.26	1.64	2.00	2.18	2.52	2.85	3.18	3.82	4.29
	0.025	0.10	0.15	0.25	0.40	✕	0.65	✕	1.0	✕	1.5	✕
	Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)											

Nota: Todos los valores arriba mencionados están calculados en base a la distribución de Poisson como aproximación a la binominal

TABLA X-P-2 Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave P

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)																																		Tamaño de la muestra acumulado
		0.010		0.015		0.025		✕		0.040		0.065		0.10		0.15		0.25		0.40		✕		0.65		✕		1.0		✕		1.5		Mayor de 1.5		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	800	▽		0	1	Usese Letra N		Usese Letra R		Usese Letra Q		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	△		800
Doble	500	▽		•								0	2	0	3	1	4	2	5	3	7	3	7	5	9	6	10	7	11	9	14	11	16	△		500
	1000											1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	11	12	12	13	15	16	18	19	23	24	26	27			1000
Múltiple	200	▽		•								#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	4	0	5	0	6	1	7	1	8	2	9	△		200
	400											#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	2	7	3	8	3	9	4	10	6	12	7	14			400
	600											0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	4	9	6	10	7	12	8	13	11	17	13	19			600
	800											0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	6	11	8	13	10	15	12	17	16	22	19	25			800
	1000											1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	9	12	11	15	14	17	17	20	22	25	25	29			1000
	1200											1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	12	14	14	17	18	20	21	23	27	29	31	33			1200
	1400											2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	14	15	18	19	21	22	25	26	32	33	37	38			1400
		Menor de 0.025		0.025		✕		0.040		0.065		0.10		0.15		0.25		0.40		✕		0.65		✕		1.0		✕		1.5		✕		Mayor de 1.5		
		Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)																																		

△ = Utilícese el precedente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo.

▽ = Utilícese el siguiente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo.

Ac = Número de aceptación.

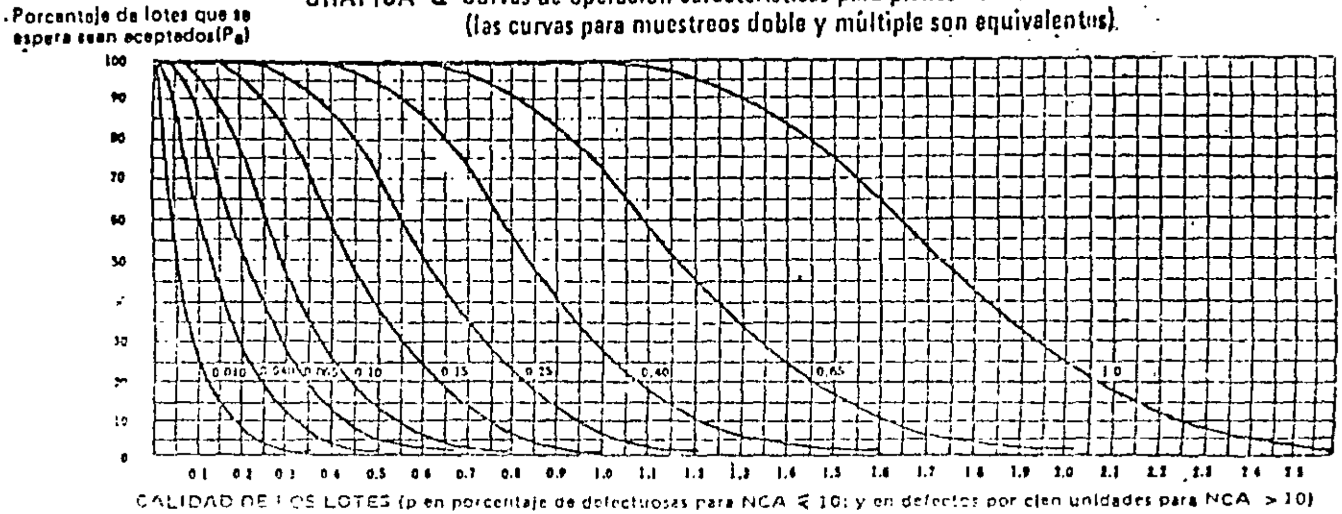
Re = Número de rechazo.

• = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente.

\# = No se permite la aceptación para ese tamaño de muestra.

TABLA X-Q Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave Q

GRAFICA Q Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos (las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes).



Nota: Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal.

TABLA X-Q-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos

P_a	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)											
	0.010	0.040	0.065	0.10	0.15	0.25	✕	0.40	✕	0.65	✕	1.0
	p (en porcentaje de defectuosas o en defectos por cien unidades)											
99.0	0.00081	0.0119	0.0349	0.0656	0.143	0.232	0.281	0.382	0.488	0.598	0.828	1.01
95.0	0.00410	0.0284	0.0654	0.109	0.209	0.318	0.376	0.494	0.615	0.740	0.995	1.19
90.0	0.00840	0.0426	0.0882	0.140	0.252	0.372	0.435	0.562	0.692	0.824	1.09	1.30
75.0	0.0230	0.0769	0.138	0.203	0.338	0.476	0.547	0.690	0.834	0.979	1.27	1.49
50.0	0.0554	0.134	0.214	0.294	0.454	0.614	0.694	0.853	1.01	1.17	1.49	1.73
25.0	0.111	0.215	0.314	0.409	0.594	0.775	0.864	1.04	1.22	1.39	1.74	2.00
10.0	0.184	0.310	0.426	0.534	0.742	0.942	1.04	1.23	1.42	1.61	1.98	2.25
5.0	0.240	0.380	0.504	0.620	0.841	1.05	1.15	1.36	1.55	1.75	2.14	2.42
1.0	0.368	0.531	0.672	0.804	1.05	1.28	1.83	1.61	1.83	2.04	2.45	2.75
	0.015	0.065	0.10	0.15	0.25	✕	0.40	✕	0.65	✕	1.0	✕
	Niveles de calidad aceptable (Inspección rigurosa)											

Nota: Todos los valores arriba mencionados estám calculados en base a la distribución de Poisson como aproximación a la binominal.

TABLA X-Q-2 Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave Q

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (Inspección normal)																																		Tamaño de la muestra acumulado
		✕		0.010		0.015		✕		0.025		0.040		0.065		0.10		0.15		0.25		✕		0.40		✕		0.65		✕		1.0		Mayor de 1.0		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	1250	Usese Letra R		0	1	Usese Letra P		Usese Letra S		Usese Letra R		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	△		1250
Doble	800			*								0	2	0	3	1	4	2	5	3	7	3	7	5	9	6	10	7	11	9	14	11	16	△		800
	1600											1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	11	12	12	13	15	16	18	19	23	24	26	27			1600
Múltiple	315			*								#	2	#	2	#	3	#	4	0	4	0	4	0	5	0	6	1	7	1	8	2	9	△		315
	630											#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	2	7	3	8	3	9	4	10	6	12	7	14			630
	945											0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	4	9	6	10	7	12	8	13	11	17	13	19			945
	1260											0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	6	11	8	13	10	15	12	17	15	22	19	25			1260
	1575											1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	9	12	11	15	14	17	17	20	22	25	25	29			1575
	1890											1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	12	14	14	17	18	20	21	23	27	29	31	33			1890
	2205											2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	14	15	18	19	21	22	25	26	32	33	37	38			2205
		0.010		0.015		✕		0.025		0.040		0.065		0.10		0.15		0.25		✕		0.40		✕		0.65		✕		1.0		✕		Mayor de 1.0		
		Niveles de calidad aceptable (Inspección rigurosa)																																		

△ = Utilícese el precedente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo.

Ac = Número de aceptación.

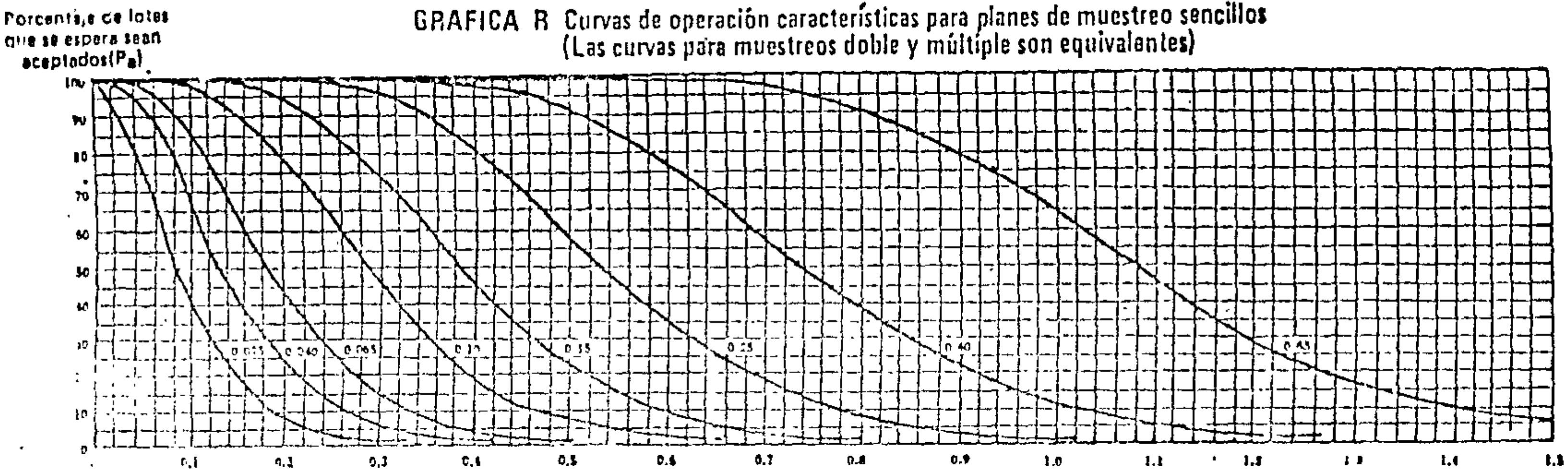
Re = Número de rechazo.

* = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente.

\# = No se permite la aceptación para ese tamaño de muestra.

TABLA X-R Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave R

GRAFICA R Curvas de operación características para planes de muestreo sencillos
(Las curvas para muestreos doble y múltiple son equivalentes)



CALIDAD DE LOS LOTES (p en porcentaje de defectuosas para NCA ≤ 10; y en defectos por cien unidades para NCA > 10)

Nota: Los valores sobre las curvas corresponden a los NCA para inspección normal.

TABLA X-R-1 Valores tabulados para las curvas de operación características para planes de muestreo sencillos.

P_a	Niveles de calidad aceptable (inspección normal)										
	0.025	0.040	0.065	0.10	0.15	✕	0.25	✕	0.40	✕	0.65
	p (en porcentaje de defectuosas o en defectos por cien unidades)										
99.0	0.0074	0.0218	0.0412	0.0892	0.145	0.175	0.239	0.305	0.374	0.517	0.629
95.0	0.0178	0.0409	0.0683	0.131	0.199	0.235	0.309	0.365	0.462	0.622	0.745
90.0	0.0266	0.0651	0.0873	0.158	0.233	0.272	0.351	0.432	0.515	0.684	0.812
75.0	0.0481	0.0868	0.127	0.211	0.298	0.342	0.431	0.521	0.612	0.795	0.934
50.0	0.0839	0.134	0.184	0.284	0.384	0.433	0.533	0.623	0.733	0.933	1.08
25.0	0.135	0.196	0.256	0.371	0.484	0.540	0.651	0.761	0.870	1.09	1.25
10.0	0.195	0.266	0.334	0.464	0.589	0.650	0.770	0.869	1.01	1.24	1.41
5.0	0.237	0.315	0.388	0.526	0.657	0.722	0.848	0.972	1.09	1.33	1.51
1.0	0.332	0.420	0.502	0.655	0.800	0.870	1.02	1.14	1.27	1.53	1.72
	0.040	0.065	0.10	0.15	✕	0.25	✕	0.40	✕	0.65	✕
	Niveles de calidad aceptable (inspección rigurosa)										

Nota: Todos los valores arriba mencionados están calculados en base a la distribución de Poisson como aproximación a la binominal.

TABLA X-R-2 Planes de muestreo para el tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave R

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Niveles de calidad aceptable (Inspección normal)																																Tamaño de la muestra acumulado
		╳		0.010		0.015		╳		0.025		0.040		0.065		0.10		0.15		╳		0.25		╳		0.40		╳		0.65		Mayor de 0.65		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	
Sencillo	2000	0	1	Usese Letra Q		Usese Letra P		Usese Letra S		1	2	2	3	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	18	19	21	22	△		2000
Doble	1250	•								0	2	0	3	1	4	2	5	3	7	3	7	5	9	6	10	7	11	9	14	11	16	△		1250
	2500									1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	11	12	12	13	15	16	18	19	23	24	26	27			2500
Múltiple	500									#	2	#	2	#	3	#	4	#	4	0	4	0	5	0	6	1	7	1	8	2	9	△		500
	1000									#	2	0	3	0	3	1	5	1	6	2	7	3	8	3	9	4	10	6	12	7	14			1000
	1500									0	2	0	3	1	4	2	6	3	8	4	9	6	10	7	12	8	13	11	17	13	19			1500
	2000	•								0	3	1	4	2	5	3	7	5	10	6	11	8	13	10	15	12	17	16	22	19	25			2000
	2500									1	3	2	4	3	6	5	8	7	11	9	12	11	15	14	17	17	20	22	25	25	29			2500
	3000									1	3	3	5	4	6	7	9	10	12	12	14	14	17	18	20	21	23	27	29	31	33			3000
	3500									2	3	4	5	6	7	9	10	13	14	14	15	18	19	21	22	25	26	32	33	37	38			3500
		0.010		0.015		╳		0.025		0.040		0.065		0.10		0.15		╳		0.25		╳		0.40		╳		0.65		╳		Mayor de 0.65		
		Niveles de calidad aceptable (Inspección rigurosa)																																

△ = Utilícese el precedente tamaño de muestra correspondiente a otra letra clave para la cual estén disponibles números de aceptación y rechazo.

Ac = Número de aceptación.

Re = Número de rechazo.

• = Utilícese el plan de muestreo sencillo precedente.

= No se permite la aceptación para este tamaño de muestra.

TABLA X-S Tamaño de la muestra correspondiente a la letra clave S

Tipo de plan de muestreo	Tamaño de la muestra acumulado	Nivel de calidad aceptable (inspección normal)	
		X	
		Ac	Re
Sencillo	3150	1	2
Doble	2000	0	2
	4000	1	2
Múltiple	800	#	2
	1600	#	2
	2400	0	2
	3200	0	3
	4000	1	3
	4800	1	3
	5600	2	3
		0.025	
		Nivel de calidad aceptable (inspección rigurosa)	

Ac = Número de aceptación

Re = Número de rechazo

= No se permite la aceptación para este tamaño de muestra

S

México, D.F., a 19 SET. 1975

EL C. DIRECTOR GENERAL DE NORMAS

ING. CESAR LARRAÑAGA ELIZONDO.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

"DIPLOMADO EN SISTEMAS DE CALIDAD EN INGENIERÌA DE PROYECTO Y CONSTRUCCIÒN "

MODULO II

CONTROL DE CALIDAD DE MATERIALES Y OBRAS

PARTE 1

METODOS ESTADISTICOS PARA EL CONTROL DE CALIDAD

TEMA

ESTIMACIONES Y DECISIONES

EXPOSITOR : M en I RAFAEL BRITO RAMIREZ

6

ESTIMACIONES Y DECISIONES

6.1 INTRODUCCION

En la introducción del capítulo anterior se estableció que en el presente se estudiaría la quinta etapa de la investigación estadística mencionada en el capítulo 4. Esta quinta etapa, llamada *inferencia estadística*, toma como base las relaciones que existen entre una población y sus muestras, conocidas del tema de Muestreo, para inferir acerca de la población.

La inferencia estadística pretende resolver dos problemas fundamentales: la *estimación* de parámetros poblacionales a partir de los estadísticos muestrales conocidos, y la *decisión estadística* acerca de hipótesis establecidas sobre una población, también con base en el conocimiento de sus muestras.

Dentro del primer problema mencionado está la estimación de la media de una población y de su desviación estándar. Enmarcados en el segundo problema están las *pruebas de significación y de hipótesis*, que permiten verificar la veracidad de alguna hipótesis establecida acerca de una población, determinando si los valores muestrales observados difieren significativamente de los esperados por la hipótesis, o si las diferencias observadas son debidas sólo al azar. También se enclavan en los problemas generales de decisión, la investigación estadística de cuál de dos procesos productivos es mejor

6.2 ESTIMADORES

Un *estimador* es un valor aproximado de un parámetro poblacional, determinado de los estadísticos muestrales obtenidos de la población.

Los estimadores pueden ser *puntuales* o por *intervalos de confianza*. Si la estimación de un parámetro se hace a través de *un número* simple, generalmente el estadístico correspondiente, se tendrá un estimador puntual. Por el contrario, si la estimación del parámetro se hace por medio de *dos números* entre los que se considere está ese parámetro, se tendrá una estimación por intervalo de confianza. En este caso, y asociado al intervalo de confianza que contiene al parámetro, se tiene la probabilidad de ocurrencia asociada a este evento.

A continuación se establecerán algunos tipos de estimadores puntuales. En la sección 6.3 se tratarán los intervalos de confianza.

6.2.1 *Estimador insesgado*.

Se dice que un estadístico es un estimador *insesgado*, si la media de la distribución muestral del estadístico es igual al parámetro por estimar. Así, el estadístico $\hat{\theta} = \hat{\theta}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, que depende de los valores observados de una muestra aleatoria de tamaño n de la población de valores de la variable aleatoria x, es un estimador insesgado del parámetro θ asociado a la población, si

$$\boxed{E(\hat{\theta}) = \theta} \qquad (6.1)$$

Si la expresión anterior no es cierta, se dice que el estimador $\hat{\theta}$ es *sesgado* y se llama *sesgo* a la diferencia

$$\boxed{sesgo = \theta - E(\hat{\theta})}$$

Ejemplo 6.1 Demostrar que la media de una muestra de una población es un estimador insesgado de la media poblacional.

En efecto, en la sección 5.2 se demostró que la media de la distribución de medias, o sea la esperanza matemática de $\bar{x}$, es igual a la media de la población μ_x. Este resultado se tiene en la expresión (5.18). De acuerdo a éste se puede escribir que

$$\boxed{E(\bar{x}) = \mu_x} \qquad (6.2)$$

de donde se concluye que la media de la muestra es un estimador insesgado de la media de la población.

Ejemplo 6.2 Demostrar que la variancia de la muestra es un estimador sesgado de la variancia de la población.

Para hacer la demostración se calculará la esperanza matemática de la variancia muestral S_x^2. De la definición de variancia de la muestra se obtiene

$$nS_x^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i-\mu_x) - (\bar{x}-\mu_x) \right]^2$$

$$nS_x^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\mu_x)^2-2(x_i-\mu_x)(\bar{x}-\mu_x)+(\bar{x}-\mu_x)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2-2(\bar{x}-\mu_x)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)+n(\bar{x}-\mu_x)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2-2(\bar{x}-\mu_x)(n\bar{x}-n\mu_x)+n(\bar{x}-\mu_x)^2$$

Por lo tanto

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2-n(\bar{x}-\mu_x)^2\right] \tag{6.3}$$

Y su esperanza matemática es

$$E(S_x^2) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2\right)-E((\bar{x}-\mu_x)^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E((x_i-\mu_x)^2) - E((\bar{x}-\mu_x)^2)$$

Como se supone que el muestreo es aleatorio, las características de la población y de la distribución de muestras son las mismas, luego

$$E((x_i-\mu_x)^2) = E((x-\mu_x)^2) = \sigma_x^2$$

Además, como la media de la distribución de medias es igual a la media de la población

$$E((\bar{x}-\mu_x)^2) = E((\bar{x}-\mu_{\bar{x}})^2) = \sigma_{\bar{x}}^2$$

Por lo tanto

$$E(S_x^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_x^2 - \sigma_{\bar{x}}^2$$

$$E(S_x^2) = \sigma_x^2 - \sigma_{\bar{x}}^2$$

pero por (5.19) $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x/\sqrt{n}$ si el muestreo es con reemplazo o la población es infinita. Luego entonces se obtiene:

$$E(S_x^2) = \sigma_x^2 - \sigma_x^2/n$$

$$E(S_x^2) = \frac{n-1}{n}\sigma_x^2 \tag{6.4}$$

De esta expresión se obtiene que la variancia de la muestra es un estimador sesgado de la variancia de la población, - Sin embargo, también se observa que el estimador tiende a - ser insesgado a medida que crece el tamaño de la muestra.

Ejemplo 6.3 Si se define la variancia de la muestra como -

$$\hat{S}_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \tag{6.5}$$

demostrar que se tiene un estimador insesgado de la variancia de la población.

En efecto, la esperanza matemática de $\hat{S}_x^2$ es

$$E(\hat{S}_x^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)$$

$$= \frac{n}{n-1}E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)$$

$$= \frac{n}{n-1}E(S_x^2)$$

Sustituyendo la esperanza matemática del segundo miembro - por su valor dado en (6.4), se obtiene

$$E(\hat{S}_x^2) = \frac{n}{n-1}\;\frac{n-1}{n}\;\sigma_x^2$$

$$\therefore\; E(\hat{S}_x^2) = \sigma_x^2 \tag{6.6}$$

con lo que queda demostrado. Este resultado confirma lo indicado en el inciso 4.5.6 del capítulo de Distribuciones Empíricas, que algunos autores prefieren considerar como denominador de (4.14) n-1 en lugar de n, por obtenerse así un estimador insesgado.

6.2.2 *Estimador eficiente.* Si las distribuciones muestrales de dos estimadores tienen la misma media, es decir, los dos estimadores son insesgados, se preferirá al que tenga menor variancia, y se dirá que éste es *eficiente*. De todos los estimadores posibles de un parámetro que tengan la misma media, se dice que es el *más eficiente* el que tiene la menor variancia.

La media y la mediana de la muestra son estimadores de la media de la población, y puede demostrarse que la variancia de la media de la muestra es menor que la variancia de la mediana de la misma. Por lo tanto, puede decirse que la media de la muestra es un estimador eficiente de la media de la población. Además, puede demostrarse que la media de la muestra es el estimador insesgado más eficiente de la media de la población.

6.2.3 *Estimador de máxima verosimilitud.* Sea x una variable aleatoria con función densidad de probabilidad $f(x;\theta)$, en donde θ es un parámetro asociado a la distribución de probabilidad de x. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son valores observados de x en una muestra aleatoria de tamaño n, se llama *función de verosimilitud* de x a

$$V(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n;\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\ldots f(x_n;\theta) \quad (6.7)$$

El estadístico $\hat{\theta}$ es un estimador de máxima verosimilitud del parámetro θ, si $\hat{\theta}$ maximiza la función de verosimilitud (6.7). Los estimadores de máxima verosimilitud son importantes ya que comúnmente conducen a estimadores eficientes. Además, puede demostrarse que, bajo ciertas condiciones, si $\hat{\theta}$ es de máxima verosimilitud la variable aleatoria

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{a/\sqrt{n}} \quad (6.8)$$

en donde a depende de $f(x;\theta)$, tiende asintóticamente a la distribución normal estándar.

Ejemplo 6.4 Se dice que la variable aleatoria continua x tiene *distribución exponencial*, si su función densidad es

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}\ ,\ x \geq 0 \quad (6.9)$$

en donde θ es un parámetro asociado a la distribución. La variable aleatoria x puede representar, por ejemplo, el tiempo que transcurre entre las llegadas de dos usuarios sucesivos a una estación de servicio. Determinar un estimador de máxima verosimilitud del parámetro θ.

La función de verosimilitud de la variable aleatoria con distribución exponencial es:

$$\begin{aligned} V(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta) &= (\theta e^{-\theta x_1})(\theta e^{-\theta x_2})\ldots(\theta e^{-\theta x_n}) \\ &= \theta^n\ e^{-\theta(x_1+x_2+\ldots+x_n)} \\ &= \theta^n\ e^{-\theta n\bar{x}} \end{aligned}$$

Para determinar el valor de θ que haga que esta función adquiera su valor máximo, se igualará con cero su primera derivada con respecto a θ. Se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= n\ \theta^{n-1}\ e^{-\theta n\bar{x}} + \theta^n\ e^{-\theta n\bar{x}}\ (-n\bar{x}) \\ &= n\ \theta^{n-1}\ e^{-\theta n\bar{x}}\ (1-\theta\bar{x}) = 0 \\ &\therefore\ \theta = \frac{1}{\bar{x}} \end{aligned}$$

por lo tanto, el estimador de máxima verosimilitud del parámetro θ de la distribución exponencial es el recíproco de la media de la muestra.

6.3 INTERVALOS DE CONFIANZA

Sea ℓ un estadístico muestral cualquiera. Si la distribución del estadístico es normal, o aproximadamente normal, de media μ_ℓ y desviación estándar σ_ℓ, se tendrá, de acuerdo al ejemplo 3.12, que

$$P(\mu_\ell - \sigma_\ell \le \ell \le \mu_\ell + \sigma_\ell) = 0.6826 \qquad (6.10)$$

$$P(\mu_\ell - 2\sigma_\ell \le \ell \le \mu_\ell + 2\sigma_\ell) = 0.9544 \qquad (6.11)$$

$$P(\mu_\ell - 3\sigma_\ell \le \ell \le \mu_\ell + 3\sigma_\ell) = 0.9972 \qquad (6.12)$$

La expresión (6.10) significa que en el 68.26% de las veces el valor del estadístico ℓ estará contenido en el intervalo

$$\mu_\ell - \sigma_\ell \le \ell \le \mu_\ell + \sigma_\ell$$

Despejando a μ_ℓ de este intervalo se obtiene

$$\ell - \sigma_\ell \le \mu_\ell \le \ell + \sigma_\ell \qquad (6.13)$$

que es equivalente al intervalo anterior, por lo que puede decirse que en el 68.26% de los casos la media de la distribución del estadístico ℓ está contenida en el intervalo (6.13). A este intervalo se le llama el *intervalo de confianza* de la media de la distribución muestral del estadístico ℓ *al 68.26% de nivel de confianza*. Los extremos del intervalo son los *límites de confianza* de la estimación de μ_ℓ. El intervalo de confianza (6.13) significa que se tiene una confianza del 68.26% de que la media μ_ℓ está comprendida dentro de los límites de confianza del propio intervalo. También puede interpretarse el intervalo de confianza asegurando que la media μ_ℓ *siempre* estará dentro de los límites de confianza del intervalo, aceptando que en el "siempre" se estará errando en el (100-68.26)% = 31.74% de las veces.

En forma semejante a lo hecho con (6.10) se puede hacer con (6.11) y (6.12) para obtener los siguientes intervalos de confianza al 95.44% y 99.72% de niveles de confianza, respectivamente:

$$\ell - 2\sigma_\ell \le \mu_\ell \le \ell + 2\sigma_\ell \qquad (6.14)$$

$$\ell - 3\sigma_\ell \le \mu_\ell \le \ell + 3\sigma_\ell \qquad (6.15)$$

Procediendo en forma similar, puede encontrarse que $\ell \pm 1.96\ \sigma_\ell$ y $\ell \pm 2.58\ \sigma_\ell$ son los límites de confianza al 95% y 99% de niveles de confianza de la media μ_ℓ de la distribución muestral del estadístico ℓ. En general, el intervalo de confianza de μ_ℓ a cualquier nivel de confianza es

$$\ell - z_c\ \sigma_\ell \le \mu_\ell \le \ell + z_c\ \sigma_\ell \qquad (6.16)$$

en donde z_c depende del nivel de confianza considerado. A z_c se le llama el *coeficiente de confianza o valor crítico*. En la tabla 6.1 aparecen los valores críticos z_c correspondientes a diferentes niveles de confianza. Estos fueron obtenidos directamente de la tabla A.3 del Apéndice del capítulo de Distribuciones teóricas de una variable.

(dos colas) Nivel de confianza (%)	(dos colas) Valor crítico (%)	una cola z_c %
99.72	3.00	2.77
99	2.58	2.33
95.44	2.00	1.6?
95	1.96	[illegible]
90	1.645	1.28
80	1.28	0.54
68.26	1.00	0.475

2.57
0
1.65

Tabla 6.1 Valores críticos para diferentes niveles de confianza

Por medio de los intervalos de confianza establecidos se obtienen estimaciones de μ_x que son preferibles a las puntuales, ya que en los intervalos se indica la precisión de la estimación.

6.4 INTERVALOS DE CONFIANZA DE LA MEDIA DE LA POBLACION

Si el estadístico z que se mencionó en la sección anterior representara la media muestral $\bar{x}$, puede aceptarse que tiene distribución normal, o aproximadamente normal, siempre que la población tenga también distribución normal o el tamaño n de las muestras sea grande, respectivamente. En cualesquiera de estos casos, y de acuerdo con (6.16), se tendrá que el intervalo de confianza de la media de la distribución de medias de las muestras es

$$\bar{x} - z_c\, \sigma_{\bar{x}} \leq \mu_{\bar{x}} \leq \bar{x} + z_c\, \sigma_{\bar{x}} \tag{6.17}$$

Pero se sabe que $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ y $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x/\sqrt{n}$ si el muestreo es con reemplazo o la población es infinita. Luego se obtiene

$$\bar{x} - z_c \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + z_c \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \tag{6.18}$$

que es el intervalo de confianza de la media de la población para el caso en que esta población es normal o el tamaño de las muestras es grande, y el muestreo es con reemplazo o la población es infinita. Si la población es normal o el tamaño de las muestras es grande, y el muestreo se realiza sin reemplazo de una población finita de tamaño N, el intervalo de confianza para la media de la población es

$$\bar{x} - z_c \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + z_c \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \tag{6.19}$$

En cualesquiera de los casos tratados, si no se conoce la desviación estándar σ_x de la población, que es lo natural, es posible sustituirla por sus estimadores S_x o $\hat{S}_x$, siempre que n sea grande.

Si el tamaño de la muestra n no es grande, la aproximación que se obtiene al sustituir σ_x por alguno de sus estimadores es pobre y no debe hacerse. En este caso, y siempre que la población sea normal, puede obtenerse otra expresión para la estimación de la media de la población por medio de la distribución t de Student. En efecto, en la sección 3.7 se estableció que si las variables u y v^2 son independientes con distribución normal la primera y con distribución χ^2 con ν grados de libertad la segunda, entonces

$$t = \frac{u}{v/\sqrt{\nu}} \tag{6.20}$$

tiene distribución t de Student con ν grados de libertad. Así, si la variable aleatoria x es normal, se tiene que $\bar{x}$ también es normal de media $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ y desviación estándar $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x/\sqrt{n}$ (como siempre, sólo si el muestreo es con reemplazo o la población infinita). Estandarizando $\bar{x}$ se obtiene la variable aleatoria u normal estándar:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x/\sqrt{n}} \tag{6.21}$$

Por otra parte, para la variancia de la muestra se tiene de (6.3) que

$$nS_x^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2 - n(\bar{x} - \mu_x)^2$$

Dividiendo ambos miembros entre la variancia de la población normal σ_x^2, y teniendo en cuenta que $\mu_x = \mu_{\bar{x}}$, se obtiene

$$\frac{nS_x^2}{\sigma_x^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - \left(\frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_x/\sqrt{n}}\right)^2$$

En el segundo miembro de esta expresión se tiene la suma de los cuadrados de n menos una variables aleatorias con distribucion normal estándar. En la subsección 3.6.1 se estableció que la suma de los cuadrados de ν variables aleatorias independientes con distribución normal estándar tiene distribución X^2 con ν grados de libertad, por lo que, puede afirmarse, la variable aleatoria

$$v^2 = \frac{nS_x^2}{\sigma_x^2} \qquad (6.22)$$

tiene distribución X^2 con $n-1$ grados de libertad.

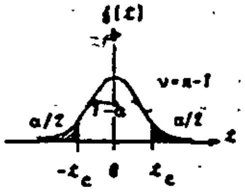
Sustituyendo (6.21) y (6.22) en (6.20), se obtiene

$$t = \frac{\dfrac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x / \sqrt{n}}}{\dfrac{\sqrt{n}\, S_x}{\sigma_x} \Big/ \sqrt{n-1}}$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{S_x / \sqrt{n-1}} \qquad (6.23)$$

que es un estadístico con distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad. Al saberlo, puede afirmarse que sus valores, a cierto nivel de confianza, estarán incluidos dentro de los límites de confianza $\pm t_c$, en donde éstos dependen precisamente del nivel de confianza y de los grados de libertad establecidos, como se muestra a continuación:

$$-t_c \leq \frac{\bar{x} - \mu_x}{S_x / \sqrt{n-1}} \leq t_c$$



Despejando de esta expresión a la media de la población, se obtiene finalmente la estimación de la media cuando la población es normal, el muestreo es con reemplazo o la población es infinita, y el tamaño de la muestra es cualquiera (grande o pequeño).

$$\bar{x} - t_c \frac{S_x}{\sqrt{n-1}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + t_c \frac{S_x}{\sqrt{n-1}} \qquad (6.24)$$

En la tabla 6.2 se presenta un resumen de los intervalos de confianza de la media de la población para los diferentes casos tratados. La expresión que aparece en el último renglón de la tabla no se dedujo, pero el lector debe estar preparado para obtenerla sin mayor problema.

Límites de confianza para la media de la población μ_x	Distribución de la población	Tamaño de la población	Tipo de muestreo	Tamaño de la muestra
$\bar{x} \pm z_c \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$	Normal	Infinito	Cualquiera	Cualquiera
	Normal	Finito	Con reemplazo	Cualquiera
$\bar{x} \pm z_c \frac{S_x}{\sqrt{n}}$	Cualquiera	Infinito	Cualquiera	Grande
	Cualquiera	Finito	Con reemplazo	Grande
$\bar{x} \pm z_c \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$	Normal	Finito	Sin reemplazo	Cualquiera
	Cualquiera	Finito	Sin reemplazo	Grande
$\bar{x} \pm z_c \frac{S_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$	Cualquiera	Finito	Sin reemplazo	Grande
$\bar{x} \pm t_c \frac{S_x}{\sqrt{n-1}}$; $\nu = n-1$	Normal	Infinito	Cualquiera	Cualquiera
$\bar{x} \pm t_c \frac{S_x}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ $\nu = n-1$	Normal	Finito	Sin reemplazo	Cualquiera

Tabla 6.2 Intervalos de confianza de la media de la población

p' muestra pequeña OK

A

Ejemplo 6.5 Con el fin de determinar la resistencia a la tensión de las varillas producidas por una laminadora, se probaron 40 de diferentes calibres. La resistencia media de la muestra resultó ser de 4320 kg/cm² y tuvo una desviación estándar de 215 kg/cm². Determinar intervalos de confianza de la resistencia media del universo de varillas al 95 y 99% de niveles de confianza.

Los datos obtenidos de la muestra son:

$$\bar{x} = 4320 \text{ kg/cm}^2, \quad S_x = 245 \text{ kg/cm}^2 \text{ y } \quad n = 40$$

Debido a que la muestra es grande y la población puede considerarse de tamaño infinito, los límites de los intervalos de confianza son

$$\bar{x} \pm z_c \frac{S_x}{\sqrt{n}} = 4320 \pm z_c \frac{215}{\sqrt{40}}$$

en donde los valores críticos valen 1.96 y 2.58 para los niveles de confianza del 95 y 99%, respectivamente. Sustituyendo éstos, se obtienen los siguientes intervalos de confianza para la media de la población de resistencias:

$$4253 \leq \mu_x \leq 4387 \quad , \quad 95\%$$

$$4232 \leq \mu_x \leq 4408 \quad , \quad 99\%$$ ← probabilidad de fallar en 1% de los casos.

Estos resultados indican que en el 95% de los casos la resistencia media de las varillas está entre 4253 y 4387 kg/cm²; y que sólo se tiene una probabilidad de fallar del 1% si se estima que la resistencia de las varillas está entre 4232 y 4408 kg/cm².

Obsérvese que se obtiene un intervalo más amplio al aumentar el nivel de confianza. Esto es congruente con la idea general que se tiene de que si se requiere mayor precisión en el acierto de un parámetro, éste debe estimarse en un intervalo más amplio, hasta llegar al caso límite de tener un estimador 100% cierto, que es el que se dice que la resistencia media de todas las varillas está entre menos infinito y más infinito, con 0% de probabilidad de fallar en el pronóstico.

Ejemplo 6.6 Con relación al ejemplo anterior, ¿de qué tamaño debe ser la muestra de varillas probadas, de manera que se tenga una confianza del 95% de que el error en la estimación de la resistencia media sea menor de 50 kg/cm²?

Los límites de confianza de la media de la población de resistencias al 95%, suponiendo que la muestra es grande, son:

$$\bar{x} \pm z_c \frac{S_x}{\sqrt{n}} = 4320 \pm 1.96 \quad \frac{215}{\sqrt{n}}$$

$$= 4320 \pm \frac{421.4}{\sqrt{n}}$$

El error en la estimación de la media es $421.4/\sqrt{n}$, el que se desea sea menor de 50 kg/cm². Entonces

$$\frac{421.4}{\sqrt{n}} < 50$$

$z_c \frac{S_x}{\sqrt{n}}$

$$\therefore n > 71.03$$

por lo que el tamaño de la muestra de varillas probadas debe ser mayor de 71 para tener una confianza del 95% de que el error en la estimación sea menor a 50 kg/cm².

Ejemplo 6.7 Con un calibrador se toman medidas de diez diámetros de un balín de un balero que soporta la flecha de una máquina. Los valores observados son 2.54, 2.49, 2.53, 2.50, 2.45, 2.57, 2.47, 2.46, 2.48 y 2.62 centímetros. Estimar el valor del diámetro de la esfera.

La media y la desviación estandar de la muestra de tamaño 10 de [illegible] de diámetros de la esfera son:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\ (2.54 + 2.49 + \ldots + 2.62)$$

$$= 2.511\ \text{cm}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{10}\left[(2.54-2.511)^2+(2.49-2.511)^2+\ldots+(2.62-2.511)^2\right]}$$

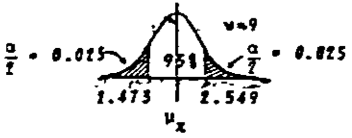
$$= 0.051\ \text{cm}$$

Para estimar la media de la población de diámetros de la esfera con un intervalo de confianza, y ya que la muestra es pequeña, se va a suponer que la distribución de la población es normal. Entonces, el intervalo de confianza de la estimación tiene por límites a

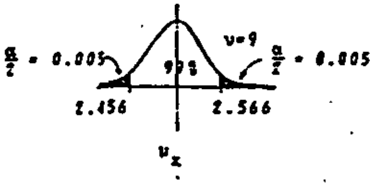
$$\bar{x} \pm t_c \frac{S_x}{\sqrt{n-1}} = 2.511 \pm t_c \frac{0.051}{\sqrt{10-1}}$$

en donde el estadístico t_c tiene distribución t de Student con $\nu=10-1=9$ grados de libertad. El valor crítico del estadístico se obtiene de la tabla A.5 para $\nu=9$ y el valor de p correspondiente al nivel de confianza que se requiera. En general, niveles del 95 y 99% son los adecuados para hacer estas estimaciones. Para el 95% de nivel de confianza $p=0.975$ y $t_c=2.26$; para el 99% de nivel de confianza $p=0.995$ y $t_c=3.25$. Para estos valores críticos se obtienen los intervalos de confianza:

$$2.473 \le \mu_x \le 2.549$$



$$2.456 \le \mu_x \le 2.565$$



Ejemplo 6.8 A 15 alumnos seleccionados al azar de un grupo de 60 se le hace un examen de Matemáticas. La calificación media de la muestra fué de 7.5 y su desviación estándar de 2.4 puntos. Aceptando que la distribución de las calificaciones del grupo es normal, calcular:

a) Los límites de confianza de la media de las calificaciones del grupo.

b) ¿Con qué grado de confianza puede afirmarse que la calificación media del grupo es mayor de 6 puntos?

Los datos que se desprenden del enunciado del problema son:

$$n=15,\quad N=60,\quad \bar{x}=7.5\quad y\quad S_x=2.4$$

Como el tamaño de la muestra es pequeña y la población es normal, los límites de confianza deben determinarse a través de la distribución t. Como además el tamaño de la población es comparable al de la muestra, y ésta es sin reemplazo, debe usarse (6.24) con el factor de corrección para la desviación estándar, o sea, la última expresión de la tabla 6.2. De acuerdo a esa expresión se tiene:

$$\text{a)}\quad \bar{x} \pm t_c \frac{S_x}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 7.5 \pm t_c \frac{2.4}{\sqrt{15-1}} \sqrt{\frac{60-15}{60-1}}$$

$$= 7.5 \pm 0.56\, t_c$$

Con $\nu=n-1=15-1=14$ grados de libertad, los valores críticos de t al 95 y 99% de niveles de confianza son 2.14 y 2.98, respectivamente. Para estos valores críticos se obtienen los intervalos de confianza:

$$6.30 \le \mu_x \le 8.70 \quad al \quad 95\%$$

$$5.83 \le \mu_x \le 9.20 \quad al \quad 99\%$$

b) Para poder afirmar que la calificación media del grupo es mayor de 6 puntos, se debe tener que el límite inferior del intervalo de confianza valga precisamente 6 puntos. De esta manera se obtiene

$$7.5 - 0.55\, z_c = 6$$

$$\therefore z_c = 2.679$$

De la tabla A.5 se observa que, para 14 grados de libertad, existen las siguientes relaciones entre z_c y p:

2.679 →

z_c	p
2.62	0.990
2.98	0.995

Interpolando linealmente en esta tabla para $z_c = 2.679$, se obtiene que $p = 0.9908$, de donde se deduce que la afirmación mencionada puede hacerse con un nivel de confianza igual a 99.08% (¿Es congruente este resultado con los del inciso anterior?). no por que trata de un problema

Ejemplo 8.9 *Resolver el ejemplo 4.5 del final del capítulo 4.*

a) Para determinar la carga móvil de diseño se podrían determinar estimadores del peso medio de todos los vehículos que cruzarán el puente con base a la muestra que se tiene. De la tabla de frecuencias del ejercicio 4.5 se deduce que los datos de la muestra son:

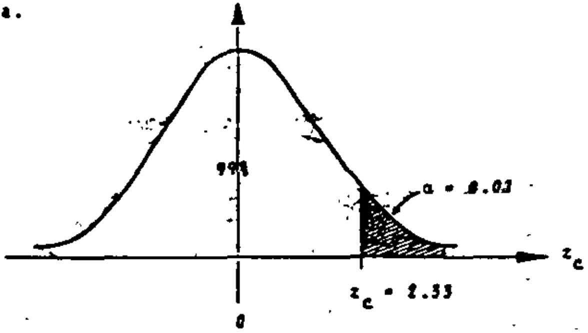
$n=74$, $\bar{x}=12.36$ *toneladas*, $S_x=6.07$ *toneladas*

Como la muestra es grande, los límites de confianza de la media de la población de pesos de los vehículos son:

$$\bar{x} \pm z_c \frac{S_x}{\sqrt{n}} = 12.36 \pm z_c \frac{6.07}{\sqrt{74}}$$

$$= 12.36 \pm z_c (0.71)$$

Para asegurar que el puente sirva a la gran mayoría de los vehículos de la población, se determinará un intervalo de confianza a un nivel de confianza alto, como puede ser el 99%. Ahora bien, de este intervalo sólo interesa su límite superior, ya que los vehículos de menor peso no definirán la carga móvil de diseño del puente. Luego entonces, el intervalo se dejará indefinido en su extremo inferior, y la probabilidad de estar fuera del intervalo no se repartirá en dos *colas*, sino en una sóla situada al lado derecho como se muestra en la figura.



De acuerdo a ésto, el valor crítico valdrá $z_c = 2.33$ y la carga móvil de diseño será

$$12.36 + 2.33\,(0.71) = 14 \text{ toneladas}$$

b) Al diseñar el puente con la carga móvil de 14 toneladas se tiene la certeza de que el 99% de los vehículos que transiten por él pesan cuando más 14 toneladas. Los que pesen más de eso, deberán desviarse a cruzar el arroyo por el vado, el que debería conservarse.

6-5 INTERVALOS DE CONFIANZA DE PROPORCIONES

Sea x el número de éxitos al realizar n veces un experimento de Bernoulli con probabilidad p de éxito y q de fracaso. Si n es grande, se sabe que x es aproximadamente normal de media $\mu = np$ y desviación estándar $\sigma_x = \sqrt{npq}$, por lo que a un cierto nivel de confianza, los valores de x deben estar en el intervalo de confianza

$$np - z_c\sqrt{npq} \le x \le np + z_c\sqrt{npq}$$

Si sólo interesa tener estimadores de la proporción de éxitos que se presentan al realizar n veces el experimento de Bernoulli considerado, se dividirán por n los miembros de la expresión anterior

$$p - z_c\sqrt{\frac{pq}{n}} \le \frac{x}{n} \le p + z_c\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

en donde x/n es la proporción de éxitos en la muestra. Para obtener el intervalo de confianza de p, la proporción de éxitos en la población, se restará p de los miembros de la expresión anterior

$$-z_c\sqrt{\frac{pq}{n}} \le \frac{x}{n} - p \le z_c\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

la cual es equivalente, de acuerdo a un teorema sobre valores absolutos, a

$$\left|\frac{x}{n} - p\right| \le z_c\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado, teniendo en cuenta que q=1-p, se obtiene

$$n\left[\left(\frac{x}{n}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{n}\right)p + p^2\right] \le z_c^2\, p(1-p)$$

Agrupando las potencias iguales de p

$$(n+z_c^2)\,p^2 - \left[2n\left(\frac{x}{n}\right) + z_c^2\right]p + n\left(\frac{x}{n}\right)^2 \le 0$$

Las raíces de la ecuación que se obtiene al considerar sólo el signo de igual, son:

$$p = \frac{\dfrac{x}{n} + \dfrac{z_c^2}{2n} \pm z_c\sqrt{\left(\dfrac{z_c}{2n}\right)^2 + \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{n}\right)\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)}}{1 + \dfrac{z_c^2}{n}} \qquad (6.25)$$

Esta expresión define los límites de confianza del intervalo de la proporción p de éxitos que hay en la población cuando el tamaño de la muestra n es grande. Si n es suficientemente grande, de manera de despreciar los términos $z_c^2/2n$, $z_c/2n$ y z_c^2/n, se obtienen los límites de confianza

$$p = \frac{x}{n} \pm z_c\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)} \qquad (6.26)$$

que conducen al intervalo de confianza

$$\frac{x}{n} - z_c\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)} \le p \le \frac{x}{n} + z_c\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)} \qquad (6.27)$$

Ejemplo 6.10 Cien cilindros de control del concreto usado en una presa muestran que el 83% de ellos cumplen con la especificación de revenimiento establecida. Determinar la proporción de todos los cilindros que cumplirán la especificación.

Los datos que se obtienen de la muestra son:

$$n=100, \quad \frac{x}{n} = 0.83 \quad y \quad 1-\frac{x}{n} = 1-0.83=0.17$$

Sustituyendo estos valores en (6.27), con los valores críticos al 96 y 99%, se obtienen los siguientes intervalos de confianza para la proporción de todos los cilindros que cumplen la especificación de revenimiento:

Al 95%, $$\frac{x}{n} \pm z_c\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)} = 0.83 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.83 \times 0.17}{100}}$$

$$= 0.83 \pm 0.074$$

$$\therefore \quad 0.756 \leq p \leq 0.904$$

Al 99%, $$\frac{x}{n} \pm z_c\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)} = 0.83 \pm 2.58\sqrt{\frac{0.83 \times 0.17}{100}}$$

$$= 0.83 \pm 0.097$$

$$\therefore \quad 0.733 \leq p \leq 0.927$$

Ejemplo 6.11 Con relación al ejemplo anterior, si además se especifica que el 80% de todo el concreto debe cumplir con el revenimiento señalado, ¿de qué tamaño debe ser el tamaño de la muestra de cilindros, de manera de satisfacer el requisito?

Aceptando que para la nueva muestra de tamaño desconocido la proporción de cilindros que cumplen la especificación sigue siendo el 83%, se tendrá que el nuevo requisito establecido se cumplirá si el límite inferior del intervalo de confianza de la proporción de la población que cumple con el revenimiento es mayor del 80%. Entonces

$$\frac{x}{n} - z_c\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)} = 0.83-1.95\sqrt{\frac{0.83 \times 0.17}{n}} > 0.80$$

Despejando n se obtiene que

$$n > 596$$

por lo que se tendrá una confianza del 95% de que se cumpla el requisito adicional si al probar por lo menos 597 cilindros, el 83% de ellos satisfacen la especificación de revenimiento. Con un nivel de confianza del 99%, el tamaño de la muestra debe ser mayor de 1043 cilindros.

$0.83 - 2.58\sqrt{\frac{0.83\times0.17}{n}} > 0.8 \longrightarrow n > 11$[illegible]

6.6 INTERVALOS DE CONFIANZA DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE LAS MEDIAS

Supóngase que las variables aleatorias $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$, las medias de muestras aleatorias de tamaño n_1 y n_2 de dos poblaciones, son independientes con distribuciones normales, o aproximadamente normales, de medias

$$\mu_{\bar{x}_1} = \mu_1 \quad y \quad \mu_{\bar{x}_2} = \mu_2$$

y desviaciones estándar

$$\sigma_{\bar{x}_1} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} \quad y \quad \sigma_{\bar{x}_2} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}$$

respectivamente. Entonces, las variables $\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2$ también serán normales de medias

$$\mu_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2} = \mu_1 \pm \mu_2$$

y desviación estándar

$$\sigma_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

De acuerdo a este conocimiento, y teniendo en cuenta (6.16), puede establecerse que los límites de confianza de la suma y diferencia de las medias de las dos poblaciones consideradas son:

$$\mu_1 \pm \mu_2 = (\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2) \pm z_c \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad (6.28)$$

en donde se pueden sustituir σ_1 y σ_2 por sus estimadores puntuales en el caso de que los tamaños de las muestras sean grandes.- Se obtiene

$$\mu_1 \pm \mu_2 = (\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2) \pm z_c \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \qquad (6.29)$$

Si n_1 y n_2 no son grandes, no es posible hacer la sustitución indicada. En este caso, y siempre que las poblaciones sean normales, se tiene que

$$u = \frac{(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2) - (\mu_1 \pm \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad (6.30)$$

tiene distribución normal estándar. Además, de acuerdo con (6.22),

$$v^2 = \frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} \qquad (6.31)$$

tiene distribución χ^2 con n_1+n_2-2 grados de libertad. Sustituyendo (6.30) y (6.31) en (6.20), se obtiene que

$$t = \frac{u}{v / \sqrt{n_1+n_2-2}}$$

$$\frac{\dfrac{(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2) - (\mu_1 \pm \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}}{\dfrac{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2}}}{\sqrt{n_1+n_2-2}}}$$

tiene distribución t de Student con n_1+n_2-2 grados de libertad.- A fin de poder eliminar las desviaciones estándar σ_1 y σ_2 desconocidas de las poblaciones, se va a *suponer* que $\sigma_1=\sigma_2$. Bajo esta hipótesis se obtiene de la expresión anterior que

$$t = \frac{\dfrac{(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2) - (\mu_1 \pm \mu_2)}{\sigma_1 \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}}}{\dfrac{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}}{\sigma_1 \sqrt{n_1+n_2-2}}}$$

$$\therefore t = \frac{(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2) - (\mu_1 \pm \mu_2)}{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \qquad (6.32)$$

último renglón tabla 6.7

de donde se pueden obtener intervalos de confianza para la suma y diferencia de las medias de las poblaciones. Obsérvese que para poder aplicar (6.32), debe *probarse* previamente que estadísticamente las desviaciones estándar de las poblaciones son iguales, además, claro está, de verificar o suponer con razón que las poblaciones son normales. El procedimiento para probar estadísticamente que $\sigma_1 = \sigma_2$ se establecerá en la sección 6.12.

Ejemplo 6.12 En un experimento industrial un trabajo fué realizado por 30 obreros siguiendo el método I y por 40 usando el procedimiento II. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 6.3, en donde el primer renglón contiene el número de minutos en que realizaron el trabajo los obreros, y los otros dos el número de empleados que terminaron el trabajo en los tiempos indicados siguiendo los métodos I y II, respectivamente. Calcular el tiempo que puede ahorrarse al realizar el trabajo con el procedimiento I con un nivel de confianza del 95%.

TIEMPO	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Método I	1	3	5	4	7	5	3	1	1	0	0
Método II	0	1	2	6	8	9	6	1	5	1	2

Tabla 6.3 Tablas de frecuencias de los tiempos usados para realizar un trabajo siguiendo dos métodos diferentes

Representando con x_1 y x_2 a los tiempos que requieren los obreros para realizar el trabajo siguiendo los procedimientos I y II, respectivamente, de las tablas de frecuencias 6.3 se obtienen los siguientes datos de las muestras de valores de x_1 y x_2:

$n_1 = 30$ $\qquad n_2 = 40$

$\bar{x}_1 = 53.7$ $\qquad \bar{x}_2 = 55.175$

$S_1^2 = 3.543$ $\qquad S_2^2 = 4.294$

Siendo las muestras grandes, se puede usar (6.29) para obtener los límites de confianza de la diferencia de medias de las dos poblaciones. Estos se determinan al 95% de nivel de confianza:

$$\mu_2 - \mu_1 = (\bar{x}_2-\bar{x}_1) \pm z_c \sqrt{\frac{S_2^2}{n_1} + \frac{S_1^2}{n_2}}$$

$$= (55.175-53.7) \pm 1.96 \sqrt{\frac{4.294}{40} + \frac{3.543}{30}}$$

$$= 1.475 \pm 0.931 \rightarrow 0.544 < \mu_2-\mu_1 < 2.406$$

Por lo tanto, se puede asegurar con un nivel de confianza del 95%, que por lo menos se pueden ahorrar 0.544 minutos los obreros al seguir el procedimiento de trabajo I.

Ejemplo 6.13 Resolver el ejemplo anterior suponiendo que los valores de los estadísticos muestrales corresponden a muestras de tamaños $n_1=3$ y $n_2=4$, respectivamente a las dos poblaciones.

Para resolver este problema debe probarse previamente que las desviaciones estándar de las dos poblaciones son iguales. Aceptando que lo sean, de (6.32) se obtiene:

$$t = \frac{(\bar{x}_2-\bar{x}_1) - (\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{n_2 S_2^2 + n_1 S_1^2}} \sqrt{\frac{n_2 n_1 (n_2+n_1-2)}{n_2+n_1}}$$

$$= \frac{(55.175-53.7) - (\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{4(4.294) + 3(3.543)}} \sqrt{\frac{(4)(3)(4+3-2)}{4+3}}$$

$$= \frac{1.475 - (\mu_2-\mu_1)}{1.801}$$

Como el estadístico t tiene distribución t de Student con $\nu = n_2+n_1-2 = 4+3-2 = 5$ grados de libertad, en el 95% de los casos debe estar comprendido entre los valores críticos $t_c = \pm 2.57$.

Por lo tanto

$$-2.57 \le \frac{1.475-(\mu_1-\mu_2)}{2.507} \le 2.57$$

y despejando la diferencia de medias de las poblacionales se obtiene

$$-5.153 \le \mu_1-\mu_2 \le 8.103 \quad \text{al} \quad 95\%$$

De este intervalo se puede afirmar que, al 95% de nivel de confianza, debe esperar un ahorro de cuando más 6.103 minutos al usar el método de trabajo I, y cuando menos -3.153 minutos. Como el intervalo contiene a cero, pueden no existir diferencias significativas al usar los dos métodos de trabajo.

Ejemplo 6.14 Con el fin de determinar la altura de la corona de una pequeña presa de riego, se toman lecturas de los gastos que fluyen por los dos arroyos que alimentan a la presa. Las lecturas se levantan en los 30 días del mes de mayor precipitación pluvial de la cuenca. En la tabla 6.4 se presentan los datos observados en m³/seg. ¿Qué cantidad de agua cabe esperar llegue a la presa en la época de lluvias?

DIA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gasto del arroyo 1	2.02	1.48	1.90	1.60	1.06	2.28	1.30	1.18	1.42	2.82
Gasto del arroyo 2	3.00	3.60	4.56	4.92	2.84	3.36	4.60	4.68	2.16	5.60

Tabla 6.4 Gastos de dos arroyos durante 30 días de la época de lluvias (continúa)

DIA	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Gasto del arroyo 1	2.00	1.14	1.54	2.70	2.08	2.30	1.16	1.78	2.24	2.06
Gasto del arroyo 2	3.68	5.32	4.08	5.00	3.24	5.80	4.04	4.28	5.08	3.16

DIA	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Gasto del arroyo 1	2.48	1.46	2.20	1.04	2.58	1.06	2.28	2.12	2.82	1.34
Gasto del arroyo 2	5.80	5.16	2.40	3.44	5.88	2.36	5.40	3.92	5.16	4.48

Tabla 6.4 Gastos de dos arroyos durante 30 días de la época de lluvias (concluye)

Representando con x_1 y x_2 a los escurrimientos por los arroyos 1 y 2, respectivamente, se obtiene de la tabla 6.4 que:

$n_1 = 30 \qquad n_2 = 30$

$\Sigma x_1 = 55.44 \qquad \Sigma x_2 = 129.00$

$\Sigma x_1^2 = 111.5912 \qquad \Sigma x_2^2 = 589.6496$

de donde se calculan los siguientes valores de los estadísticos muestrales:

$$\bar{x}_1 = \frac{55.44}{30} = 1.848 \qquad \bar{x}_2 = \frac{129.00}{30} = 4.300$$

$$S_1^2 = \frac{111.5912}{30} - \left(\frac{55.44}{30}\right)^2 \qquad S_2^2 = \frac{589.6496}{30} - \left(\frac{129.00}{30}\right)^2$$

$$S_1^2 = \frac{\Sigma x_1^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x_1}{n}\right)^2$$

$S_1^2 = 0.305$ $S_2^2 = 1.165$

Sustituyendo los datos de las muestras en (6.29), con el valor crítico z_c al 95% de nivel de confianza, se obtienen los límites de confianza de la suma de medias poblacionales de los escurrimientos de los dos arroyos;

$$\mu_1 + \mu_2 = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \pm z_c \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$= (1.848 + 4.300) \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.305}{50} + \frac{1.165}{30}}$$

$$= 6.148 \pm 0.434$$

Por lo que, puede afirmarse con 95% de nivel de confianza, a la presa llegarán en la época de lluvias de 5.714 a 6.582 m³/seg de agua por día.

6.7 INTERVALOS DE CONFIANZA DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE PROPORCIONES

Sean x_1 y x_2 variables aleatorias independientes, ambas con distribución binomial de parámetros n_1, p_1 y n_2, p_2, respectivamente. Si los números de ensayos sucesivos e independientes de Bernoulli, n_1 y n_2, son grandes, entonces

$$z_1 = \frac{x_1 - n_1 p_1}{\sqrt{n_1 p_1 (1 - p_1)}} \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{x_2 - n_2 p_2}{\sqrt{n_2 p_2 (1 - p_2)}}$$

serán variables aleatorias independientes con distribución aproximadamente normal estándar. Además, si las mismas n_1 y n_2 son suficientemente grandes, de acuerdo a (6.26) se tendrán los límites de confianza de p_1 y p_2:

$$p_1 = \frac{x_1}{n_1} \pm z_c \sqrt{\frac{1}{n_1}\left(\frac{x_1}{n_1}\right)\left(1 - \frac{x_1}{n_1}\right)}$$

$$p_2 = \frac{x_2}{n_2} \pm z_c \sqrt{\frac{1}{n_2}\left(\frac{x_2}{n_1}\right)\left(1 - \frac{x_2}{n_2}\right)} \tag{6.33}$$

en donde x_1/n_1 y x_2/n_2 son las proporciones de éxito al realizar n_1 veces el primero y n_2 veces el segundo de los experimentos de Bernoulli considerados, respectivamente. De las expresiones (6.33) puede afirmarse que el parámetro p_1 tiene distribución normal de media x_1/n_1 y desviación estándar $\sqrt{\frac{1}{n_1}\left(\frac{x_1}{n_1}\right)\left(1 - \frac{x_1}{n_1}\right)}$, y que p_2 tiene también distribución normal de media x_2/n_2 y desviación estándar $\sqrt{\frac{1}{n_2}\left(\frac{x_2}{n_2}\right)\left(1 - \frac{x_2}{n_2}\right)}$. Esto es debido a que en los límites de confianza definidos en (6.33) aparece el valor crítico z_c con distribución normal estándar.

De lo anterior se deduce que la variable $p_1 \pm p_2$ está normalmente distribuida con media $\frac{x_1}{n_1} \pm \frac{x_2}{n_2}$ y desviación estándar = $\sqrt{\frac{1}{n_1}\left(\frac{x_1}{n_1}\right)\left(1 - \frac{x_1}{n_1}\right) + \frac{1}{n_2}\left(\frac{x_2}{n_2}\right)\left(1 - \frac{x_2}{n_2}\right)}$, por lo que los límites de confianza de la suma y diferencia de las proporciones de éxitos en dos experimentos de Bernoulli serán:

$$p_1 \pm p_2 = \left(\frac{x_1}{n_1} \pm \frac{x_2}{n_2}\right) \pm z_c \sqrt{\frac{1}{n_1}\left(\frac{x_1}{n_1}\right)\left(1 - \frac{x_1}{n_1}\right) + \frac{1}{n_2}\left(\frac{x_2}{n_2}\right)\left(1 - \frac{x_2}{n_2}\right)} \tag{6.34}$$

falta
[illegible]

Ejemplo 6.15 Muestras de tamaño 400 de los remaches producidos por dos máquinas de una planta mostraron que en la primera se tuvieron 8 defectuosos y de la segunda 12. Calcular los límites de confianza de la proporción de remaches defectuosos producidos en la planta.

Los datos de las muestras de remaches son:

$$n_1 = 400 \qquad n_2 = 400$$

$$\frac{x_1}{n_1} = \frac{8}{400} = 0.02 \qquad \frac{x_2}{n_2} = \frac{12}{400} = 0.03$$

$$q_1 - \frac{x_1}{n_1} = 0.98 \qquad q_2 - \frac{x_2}{n_2} = 0.97$$

La suma de las proporciones de remaches defectuosos tiene por límites de confianza a:

$$p_1+p_2 = \left(\frac{x_1}{n_1}+\frac{x_2}{n_2}\right) \pm z_c\sqrt{\frac{1}{n_1}\left(\frac{x_1}{n_1}\right)\left(1-\frac{x_1}{n_1}\right)+\frac{1}{n_2}\left(\frac{x_2}{n_2}\right)\left(1-\frac{x_2}{n_2}\right)}$$

$$= (0.02+0.03) \pm z_c\sqrt{\frac{(0.02)(0.98)}{400}+\frac{(0.03)(0.97)}{400}}$$

$$= 0.05 \pm z_c(0.011)$$

de donde se obtienen los intervalos de confianza:

$$0.028 \le p_1+p_2 \le 0.072 \quad \text{al } 95\%$$

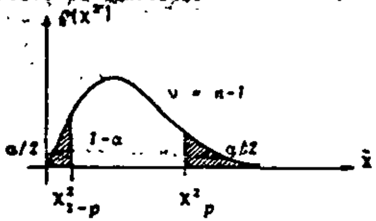
$$0.022 \le p_1+p_2 \le 0.078 \quad \text{al } 99\%$$

6.8 INTERVALO DE CONFIANZA DE LA DESVIACION ESTANDAR

Sea x una variable aleatoria normalmente distribuida con desviación estándar desconocida σ_x. De una muestra aleatoria de tamaño n se obtiene la desviación estándar muestral S_x, a partir de la cual se trata de estimar σ_x.

Bajo las condiciones anteriores se obtuvo en (6.22) que $v^2 = nS_x^2/\sigma_x^2$ tiene distribución χ^2 con $n-1$ grados de libertad. Al saberlo, se puede decir que los valores de v^2, a un cierto nivel de confianza, están en el intervalo de confianza

$$\chi^2_{1-p} \le \frac{nS_x^2}{\sigma_x^2} \le \chi^2_p$$



Despejando σ_x se obtiene el intervalo de confianza de la desviación estándar de una población con distribución normal

$$\frac{\sqrt{n}\,S_x}{\sqrt{\chi^2_p}} < \sigma_x < \frac{\sqrt{n}\,S_x}{\sqrt{\chi^2_{1-p}}} \qquad (6.35)$$

Los valores críticos de χ^2 se obtienen de la tabla A.4 del Apéndice del capítulo 0. Se recuerda que si n es grande, el estadístico

$$z = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2v-1}$$

tiende a la distribución normal estándar, con el que se puede obtener los valores críticos de χ^2. Así, si χ^2_p y z_p son los p-ésimos percentiles de las distribuciones χ^2 y normal estándar, respectivamente, se obtiene

$$\chi^2_p = \frac{1}{2}\left(z_p + \sqrt{2v-1}\right)^2 \qquad (6.36)$$

Ejemplo 6.16 Con relación al ejemplo 6.7, estimar el valor de la desviación estándar del diámetro del balín de rodamiento.

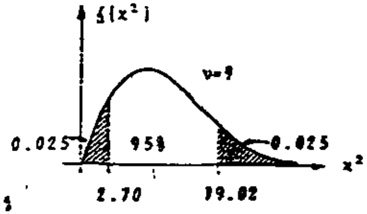
En el ejemplo 6.7 se tienen los datos de una muestra de diámetros, cuyos parámetros son:

$$n = 10 \qquad S_x = 0.051 \text{ cm}$$

Para determinar el intervalo de confianza de σ_x usando (6.35), deben obtenerse los valores críticos del estadístico X^2 con $\nu = n-1 = 10-1 = 9$ grados de libertad al 95% de nivel de confianza, por ejemplo. Estos se obtienen de la tabla A.4 para $p=0.975$ y $p=0.025$. Sustituyendo en (6.35) se obtiene el intervalo

$$\frac{\sqrt{10}\ \ 0.051}{\sqrt{19.02}} \leq \sigma_x \leq \frac{\sqrt{10}\ \ 0.051}{\sqrt{2.70}}$$

$$0.037 \leq \sigma_x \leq 0.098 \quad al \quad 95\%$$



Ejemplo 6.17 La desviación estándar de la potencia de 200 motores diesel es de 25 caballos de fuerza. Encontrar el intervalo de confianza al 95% de la desviación estándar de todos los motores fabricados en la planta.

El problema es idéntico al anterior. La única diferencia está en el número grande de grados de libertad que ahora se tienen. Estos no están incluidos en la tabla A.4, por lo que se usará (6.36) para estimar el valor del estadístico X^2. Para un nivel de confianza del 95%, se tiene que $z_c = \pm 1.96$, por lo que

$$X^2_{.975} = \frac{1}{2}\ (1.96 + \sqrt{2(200-1)-1})^2 = 239.474$$ 241.295

$$X^2_{0.025} = \frac{1}{2}\ (-1.96 + \sqrt{2(200-1)-1})^2 = 161.368$$ 161.9

Sustituyendo estos valores, el de n y el de S_x en (6.35), se obtiene

$$\frac{\sqrt{200}\ \ 25}{\sqrt{239.474}} \leq \sigma_x \leq \frac{\sqrt{200}\ \ 25}{\sqrt{161.368}}$$

$$22.5 \leq \sigma_x \leq 27.8 \quad al \quad 95\%$$

6.9 DECISIONES ESTADISTICAS

Como se indicó en la introducción de este capítulo, además del estudio de las estimaciones puntuales y por intervalos de confianza se van a analizar los problemas sobre pruebas y decisiones estadísticas. Se iniciará el estudio con las definiciones siguientes:

6.9.1 *Decisión estadística*. Una *decisión estadística* es cualquier decisión que se toma acerca de una población, en base a la información que se tenga de sus muestras. Por ejemplo, en base a muestras se puede decidir si un aditivo afecta la resistencia del cemento, cuándo un proceso productivo es mejor que otro, cuándo una moneda está cargada, etc.

6.9.2 *Hipótesis estadística*. Una *hipótesis estadística* es cualquier suposición que se haga acerca de una población, con el fin de probar si es o no cierta. En general, son proposiciones que se hacen acerca de la distribución de probabilidad de la población.

En relación a los ejemplos de decisiones estadísticas dados en el subinciso anterior, se pueden tener las hipótesis estadísticas siguientes: que la resistencia del cemento no se altera al agregarle el aditivo, que los dos procesos productivos producen los mismos resultados, que la moneda es homogénea, etc.

En las pruebas de hipótesis que se definen en el subinciso que sigue se distinguen dos tipos de hipótesis: la *hipótesis nula o probada*, y la *hipótesis alterna*. La hipótesis nula, que se identifica con H_0, es cualquier hipótesis estadística que se establece en principio con el único propósito de rechazarla. Por el contrario, la hipótesis alterna, identificada con H_1, es cualquier suposición que difiera de la nula.

Como se indicó en los ejemplos anteriores, si se trata de investigar si un aditivo mejora la resistencia del cemento, se establece como hipótesis nula que la resistencia media del cemento con el aditivo es igual a la resistencia media del cemento sin aditivo; si se trata de decidir estadísticamente si un proceso productivo es mejor que otro, cabe establecer como hipótesis nula la suposición de que no existen diferencias significativas entre los procedimientos (ésto es, que cualquier diferencia observada se debe sólo a fluctuaciones en el muestreo de la misma población que ocurren al azar); y para probar si una moneda está cargada, se puede admitir como hipótesis nula que la moneda es homogénea, o sea, que la probabilidad de tener una de sus dos posibles resultados es un medio, es decir, $H_0 : p=0.5$. Una hipótesis alterna del último ejemplo puede ser cualquiera de las siguientes: $p<0.5$, $p\neq0.5$, $p=0.65$, etc., las que indican que la moneda no es homogénea.

6.9.3 *Prueba de hipótesis*. La *prueba de hipótesis* es el procedimiento mediante el cual se decide aceptar o rechazar una hipótesis estadística, o para determinar cuándo las muestras observadas difieren significativamente de los resultados esperados. Las pruebas de hipótesis también se llaman *pruebas de significancia* y *reglas de decisión*.

Por ejemplo, si para probar que una moneda es homogénea se tira ésta 100 veces y resultan 80 "águilas", el investigador se inclinará a rechazar la hipótesis, o al menos no aceptarla en base a la evidencia obtenida, aunque concibe que puede cometer un error en su decisión. Si de acuerdo al procedimiento que se establezca para probar la hipótesis, el investigador tiene razón para rechazar la hipótesis con un cierto nivel de confianza, se dirá que los datos observados (80 águilas) y esperados (50 águilas) difieren *significativamente*.

6.9.4 *Errores en las decisiones estadísticas*. Se dice que se comete un *error del tipo I* en una decisión estadística, cuando *se rechaza* una hipótesis estadística que debería *aceptarse*. Por el contrario, se tendrá un *error del tipo II* en una decisión estadística, cuando *se acepte* una hipótesis estadística que debería *rechazarse*. En ambos casos una mala decisión se habrá tomado.

Dependiendo del tipo de problema de que se trate, un error puede ser más importante que otro, aunque, en general, interesará tomar decisiones estadísticas con los menores errores posibles. Tratándose de obras de ingeniería, en términos muy generales puede decirse que son más serios los errores del tipo II, por conducir a obras poco resistentes o seguras; los errores del tipo I inducen a tener obras de mayor costo.

Con el fin de tener buenas pruebas de hipótesis, debe procurarse que los dos tipos de errores tengan el menor valor posible. Esto, desafortunadamente, no es posible para una muestra de tamaño dado, ya que los intentos que se hagan tendientes a minimizar un tipo de error van acompañados de incrementos en la ocurrencia del otro. La única manera que existe de reducir los dos tipos de errores consiste en incrementar el tamaño de la muestra, lo cual, en algunos casos, no es posible.

6.9.5 *Nivel de significación*. Se llama *nivel de significación* de una prueba de hipótesis, al valor máximo de la probabilidad que el investigador acepta tener del error tipo I. Representando con α al nivel de significación, se tendrá por definición que

$$\boxed{\alpha = \text{máx } P(\text{error tipo I})} \qquad (6.37)$$

El nivel de significación de una prueba debe fijarse antes de obtener cualquier muestra, de manera que los resultados obtenidos no influyan en el criterio del investigador. En la práctica es común usar niveles de significación del 1 y del 5%. Si se diseña una prueba de hipótesis con 5% de nivel de significación, se tendrán en promedio 5 de 100 oportunidades de rechazar la hipótesis cuando debería aceptarse, y consecuentemente, una probabilidad del 0.95 de tomar una buena decisión.

6.10 PRUEBAS DE HIPOTESIS

Supóngase que se tiene una población para la cual se establece alguna hipótesis estadística que se desea probar. Supóngase además que si la hipótesis establecida es verdadera, se tiene un estadístico e asociado a las muestras con distribución de probabilidad conocida. En base a este conocimiento se puede afirmar, por ejemplo, que en el 95% de los casos los valores del estadístico estarán comprendidos entre los valores críticos e_1 y e_2 que se muestran en la figura 6.1. Estos valores se obtienen de la tabla de la distribución de probabilidad del estadístico, en forma semejante a como se obtuvieron los valores críticos z_c de la distribución normal que aparecen en la tabla 6.1.

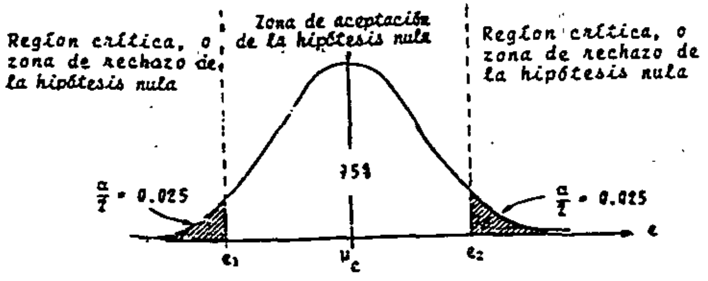


Figura 6.1 Zonas de aceptación y rechazo de hipótesis estadísticas.

Por otra parte, si se extrae de la población una muestra aleatoria y se determina el valor particular del estadístico e, el que cae fuera del intervalo que va de e_1 a e_2, cabe decir que tal evento ocurrirá con una probabilidad del 5% si la hipótesis nula establecida es cierta. Esta probabilidad corresponde a las áreas sombreadas de la figura 6.1, las llamadas *regiones críticas* o *zonas de rechazo de la hipótesis nula*. En el caso apuntado de que el valor de e correspondiente a la muestra observada caiga en las regiones críticas de la figura 6.1, se dice que tal valor difiere *significativamente* del esperado bajo la hipótesis aceptada como cierta, por lo que el investigador deberá inclinarse a rechazar la hipótesis nula, aunque, como ya se ha dicho, cabe tener un error en esta decisión de rechazar. En el caso de encontrar diferencias significativas entre los valores observado y esperado de e debidas *sólo* al azar, y se rechace la hipótesis que es verdadera, se habrá cometido un error del tipo I. La probabilidad de que ésto acontezca puede llegar a ser, en el caso particular estudiado, del 5%, y representa el nivel de significación α de la prueba (área sombreada de la figura 6.1).

Por el contrario, si el valor de e correspondiente a la muestra observada cae dentro de la zona de aceptación de la figura 6.1, el investigador se inclinará a aceptar la hipótesis nula, aunque aquí también cabe cometer un error en la decisión, que será del tipo II.

De acuerdo a lo anterior se puede establecer la siguiente *regla de decisión* para decidir si se rechaza o acepta la hipótesis nula considerada:

1. Rechazar la hipótesis nula con un nivel de significación del 5%, si el valor de e obtenido de una muestra aleatoria cae fuera del intervalo que va de e_1 a e_2.

2. Aceptar la hipótesis en caso contrario.

En todo lo antes dicho se ha usado un nivel de significación del 5% que corresponde con los valores críticos supuestos de z. Desde luego que las pruebas de hipótesis pueden realizarse a cualquier otro nivel de significación. Para estos otros niveles, y bajo el supuesto de que el estadístico z tenga distribución normal, pueden usarse los valores críticos establecidos en la tabla 6.1, ya que los niveles de confianza y de significación son complementarios, es decir, suman 100%. Si la distribución del estadístico z es otra, sus valores críticos se obtienen de la tabla correspondiente del Apéndice del capítulo 3.

En la práctica, los niveles de significación más usuales son el 1% y el 5%, y se acostumbra hacer cada prueba de hipótesis a los dos niveles. Como se verá en los ejemplos que se resolverán a continuación, al hacer las pruebas a los dos niveles puede suceder que la hipótesis que se prueba se acepte a los dos niveles, que se rechace a los dos niveles, o que se acepte en uno y rechace en el otro. Si se rechaza la hipótesis a los dos niveles, y para hacerlo basta con rechazarla al 1% de nivel de significación por tener valores críticos más lejanos de cero que los del 5%, se acostumbra decir que los resultados son *altamente significativos* y rechazar la hipótesis que se prueba en definitiva. Si se rechaza la hipótesis al 5% y se acepta al 1%, se acostumbra decir que los resultados son *probablemente significativos*; en este caso no se acostumbra tomar ninguna decisión con la muestra que se tiene, y sí ahondar la investigación para tener una decisión definitiva. Por último, si la hipótesis nula sólo se rechaza a niveles de significación mayores del 5%, es decir, se acepta al 5% y por ende también al 1% de niveles de significación, se acostumbra decir que los resultados *no son significativos* y aceptar la hipótesis en definitiva.

Ejemplo 6.18 Para probar si una moneda es homogénea se diseña la regla de decisión siguiente:

1. Aceptar la hipótesis de que la moneda es homogénea si al tirar ésta 100 veces el número de águilas cae entre 40 y 60 inclusive.
2. Rechazar la hipótesis en caso contrario.

Calcular la probabilidad de rechazar la hipótesis cuando es cierta.

Representando con p a la probabilidad de que resulte águila al tirar una vez la moneda, la regla de decisión establecida permite decidir entre las dos hipótesis:

$H_0 : p=0.5$ (la moneda es homogénea)
$H_1 : p\neq 0.5$ (la moneda no es homogénea)

De acuerdo a la regla de decisión establecida, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta es igual a la de obtener menos de 40 ó más de 60 águilas al tirar la moneda 100 veces bajo el supuesto de que $p=0.5$. Esta probabilidad solicitada es la del error tipo I de la prueba, o sea, su nivel de significación. Luego:

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{error tipo I}) \\ &= 1-P(40 \leq x \leq 60)\end{aligned}$$

en donde x es un estadístico que representa el número de éxitos (águilas) al realizar 100 veces el experimento de Bernoulli (tiro de la moneda). Como tanto np y nq son mayores de 5, se usará la distribución normal como aproximación a la binomial en el cálculo de la última probabilidad. La media y la desviación estándar de x son:

$$\mu = np = 100(0.5) = 50$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100(0.5)(0.5)} = 5$$

Estandarizando el estadístico x:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-50}{5}$$

Si $x=40$ (o 39.5 en una escala continua), $z = \dfrac{39.5-50}{5} = -2.1$

Si $x=60$ (o 60.5 en una escala continua), $z = \dfrac{60.5-50}{5} = 2.1$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - P(-2.1 \leq z \leq 2.1) \\ &= 1 - 2P(0 \leq z \leq 2.1) \\ &= 1 - 2(0.9821-0.5) \\ &= 0.0358 \end{aligned}$$

El nivel de significación de la regla de decisión es del 3.58%.- En la figura 6.2 se muestra, gráficamente, la regla de decisión para decidir si una moneda es o no homogénea al 3.58% de nivel - de significación en base a una muestra aleatoria de tamaño 100,- es decir, en base a 100 tiros al azar de la moneda.

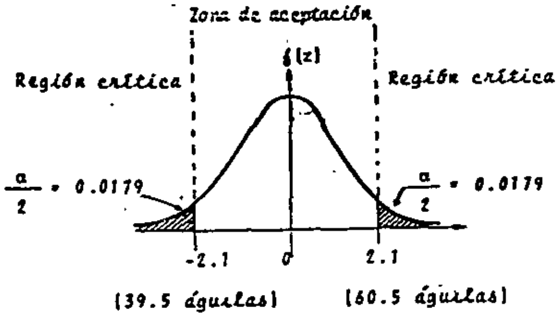


Figura 6.2 Regla de decisión para decidir si una moneda es homogénea.

Ejemplo 6.19 Diseñar una regla de decisión, con un nivel de significación del 5%, para decidir si una moneda es - homogénea en base a una muestra de 50 tiros de la moneda.

En forma semejante al ejemplo anterior, en éste se trata de establecer una regla de decisión para optar por una de las hipótesis:

$H_0 : p=0.5$ (la moneda es homogénea)
$H_1 : p\neq 0.5$ (la moneda no es homogénea)

Como aquí también np y nq son mayores de 5, admitiendo que $p=0.5$, cabe usar la distribución normal como medio aproximado para resolver el ejemplo. Los valores críticos de la distribución normal para una prueba de hipótesis al 5% de nivel de significación son $z = \pm 1.96$. Los números de éxitos o de águilas correspondientes a estos valores críticos se obtienen de la fórmula para estandarizar una variable

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

en donde la media y la desviación estándar de x se determinan - aceptando que es cierta la hipótesis nula. Se obtiene:

$$\mu = np = 50(0.5) = 25$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50(0.5)(0.5)} = 3.536$$

Por lo tanto, los valores críticos de la prueba, expresados como número de éxitos, serán:

$$\begin{aligned} x &= \mu + \sigma z \\ &= 25 + 3.536\, z \end{aligned}$$

Si $z=-1.96$, $x=25 + 3.536\ (-1.96) = 18.07$
Si $z=1.96$, $x=25 + 3.536\ (1.96) = 31.93$

De donde se obtiene la regla de decisión siguiente:

1. Aceptar la hipótesis que la moneda es homogénea, con un nivel de significación del 5%, si al tirarla 50 veces se obtienen de 18.07 a 31.93 águilas, o sea, de 19 a 31 inclusive.
2. Rechazarla en caso contrario.

La regla de decisión anterior quedó establecida en términos del nivel de significación propuesto, o sea, del valor máximo aceptado del error tipo I. Si se deseara una regla de decisión tal que impidiera la ocurrencia de un error del tipo II, o sea eliminar la posibilidad de aceptar una hipótesis falsa, deberá simplemente cambiarse la palabra "aceptar" de la regla de decisión anterior por "no rechazar". En esta forma quedaría la regla como:

1. No rechazar la hipótesis que la moneda es homogénea, con un nivel de significación del 5%, si al tirarla 50 veces se obtienen de 19 a 31 águilas inclusive.
2. Rechazarla en caso contrario.

Lo anterior conduciría a no aceptar en ningún caso la hipótesis probada, lo cual, en muchos casos prácticos, carece de utilidad. En estos casos cabe determinar la probabilidad del error tipo II bajo diferentes hipótesis, como se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.20 Con relación al ejemplo anterior, calcular las probabilidades de aceptar la hipótesis de que la moneda es homogénea cuando en realidad la probabilidad de que caiga águila es:

a) $p = 0.6,\ 0.7,\ 0.8$ y 0.9

b) Representar los resultados del inciso anterior gráficamente

c) Interpretar los resultados del ejemplo

a) En el ejemplo anterior se determinó que la hipótesis de que la moneda es homogénea debía aceptarse siempre que se obtuvieran de 19 a 31 águilas, inclusive, al tirar 50 veces la moneda. La probabilidad de rechazar esta hipótesis, cuando debería aceptarse, es la probabilidad máxima del error tipo I y se fijó en 5%. Esta probabilidad está representada por el área total sombreada bajo la curva normal de la izquierda de la figura 6.3.

Ahora bien, si en realidad la probabilidad de obtener una águila es $p=0.6$, se tendrá que el número de águilas obtenidas

al tirar 50 veces la moneda tiene distribución normal (np y nq son mayores de 5) de media y desviación estándar dadas por: $\mu=np=50(0.6)=30$ y $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{50(0.6)(0.4)}=3.464$.

Esta distribución está representada por la curva normal de la derecha de la figura 6.3. De esta figura se ve que la probabilidad de aceptar la hipótesis de que la moneda es homogénea, cuando en realidad debería rechazarse porque $p=0.6$, está representada por el área rayada, y es la probabilidad del error tipo II bajo el supuesto de que $p=0.6$. Representando con β esta probabilidad, se tendrá:

$$\beta = P(\text{error tipo II cuando } p=0.6)$$

$$= P[18.07 \le x \le 31.93 \text{ para } p=0.6]$$

$$= P\left(\frac{18.07-30}{3.464} \le z \le \frac{31.93-30}{3.464}\right)$$

$$= P[-3.444 \le z \le 0.557]$$

$$= 0.7110$$

En forma semejante se obtienen los valores de β para los otros valores supuestos de p. Se obtiene:

para $p=0.7$, $\beta=P\left(\frac{18.07-50(0.7)}{\sqrt{50(0.7)(0.3)}} \le z \le \frac{31.93-50(0.7)}{\sqrt{50(0.7)(0.3)}}\right)= 0.1718$

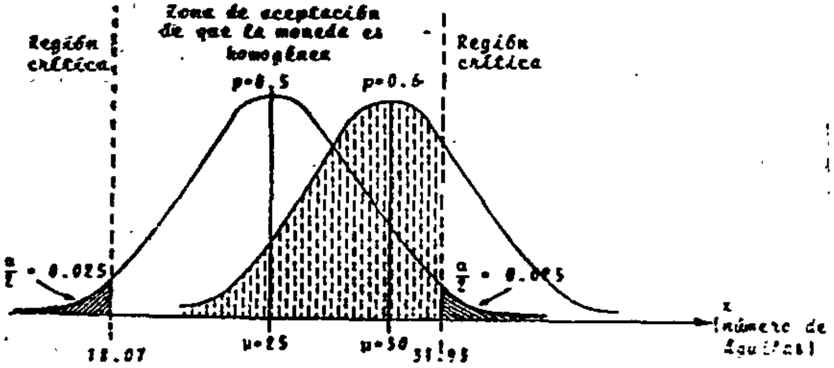
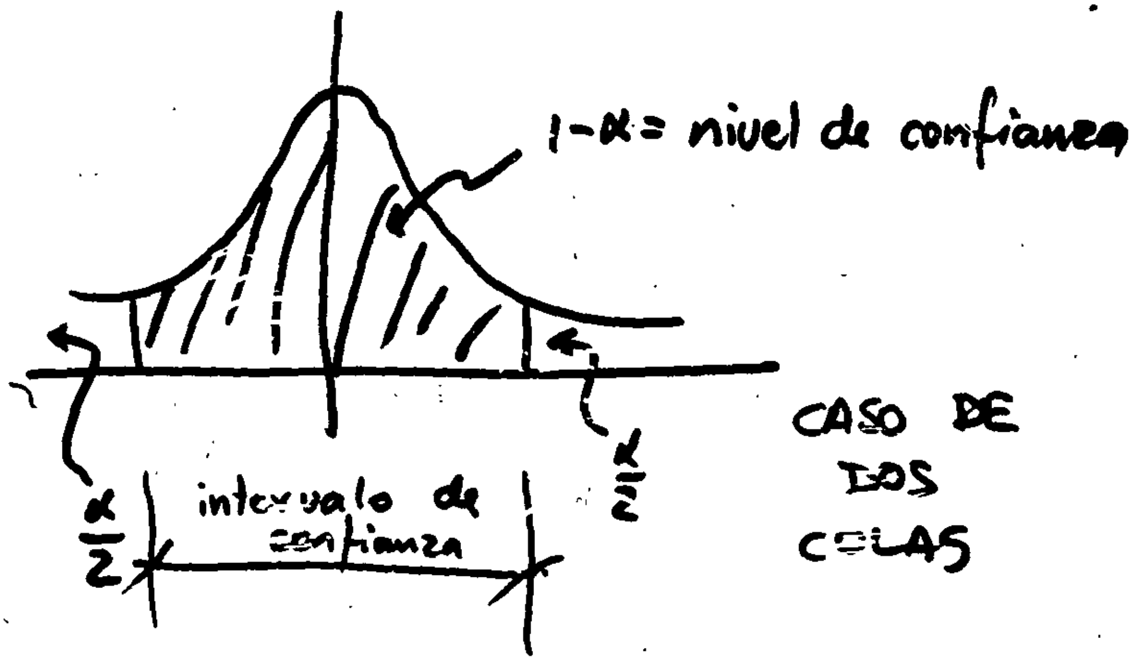
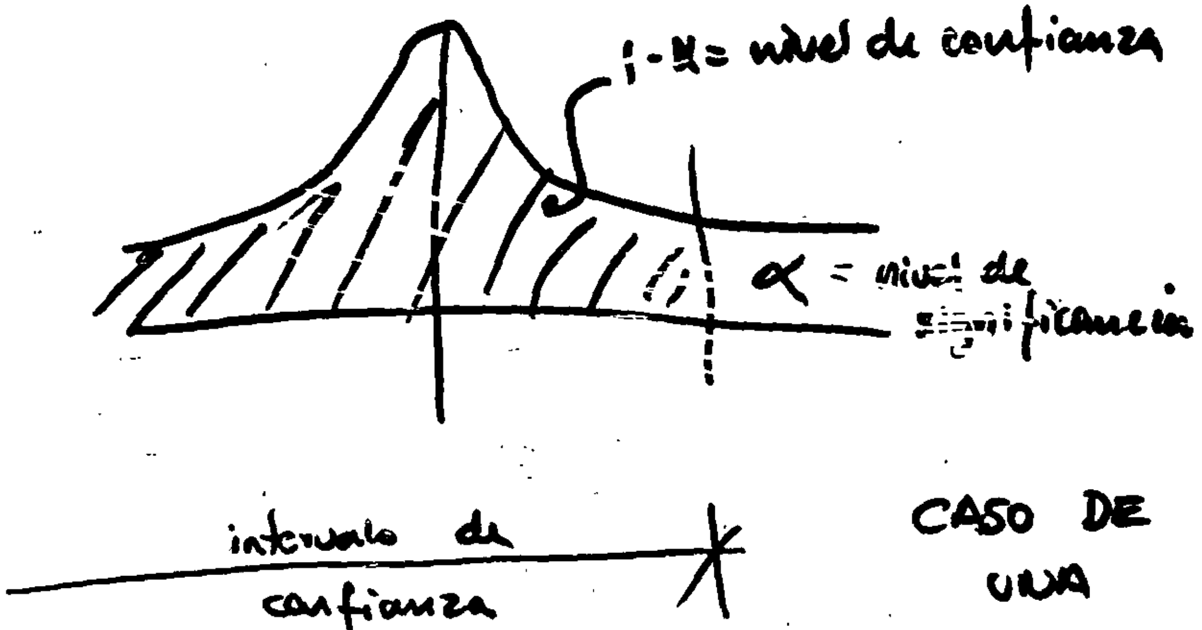


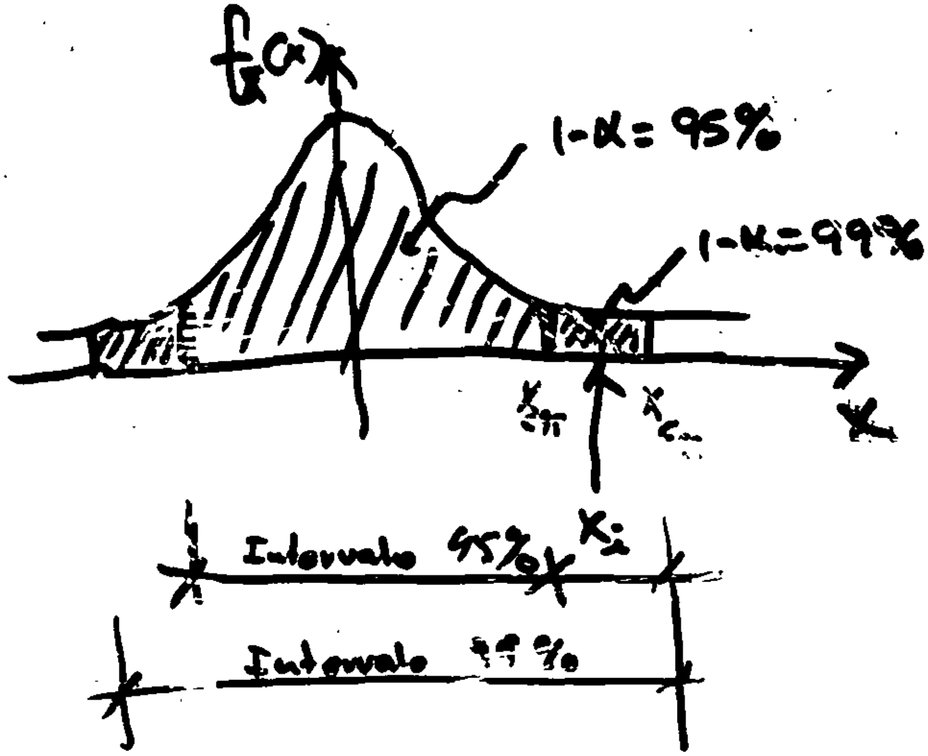
Figura 6.3 Calculo del error tipo II en el ejemplo 6.20



CASO DE DOS COLAS



CASO DE UNA COLA


$f(x)$
$1-\alpha = 95\%$
$1-\alpha = 99\%$
x_{c95}
x_{c}
x
x_i
Intervalo 95%
Intervalo 99%

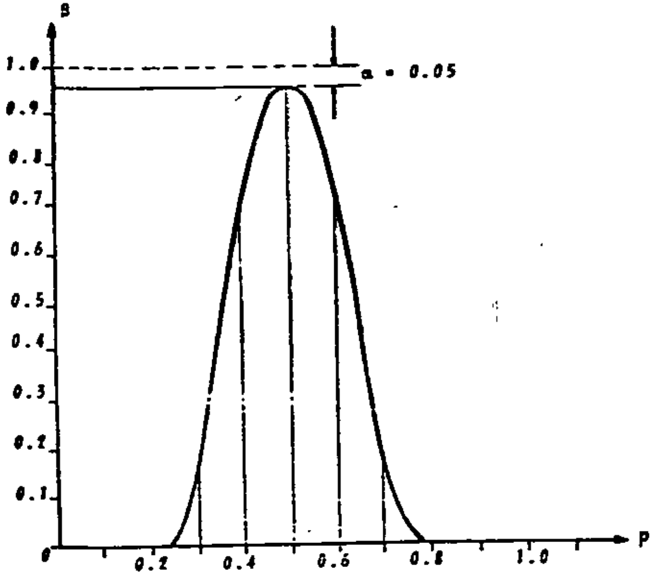
para $p=0.8$, $\beta=P\left(\frac{18.07-50(0.8)}{\sqrt{50(0.8)(0.2)}} \leq z \leq \frac{31.93-50(0.8)}{\sqrt{50(0.8)(0.2)}}\right) = 0.0022$

para $p=0.9$, $\beta=P\left(\frac{18.07-50(0.9)}{\sqrt{50(0.9)(0.1)}} \leq z \leq \frac{31.93-50(0.9)}{\sqrt{50(0.9)(0.1)}}\right) = 0.0000$

Debido a la simetría de la curva normal, los valores de β para $p=0.4$, 0.3, 0.2 y 0.1 son, respectivamente, iguales a los correspondientes a $p=0.6$, 0.7, 0.8 y 0.9. El total de valores calculados de β, correspondientes a los diferentes valores de p, se resumen en la tabla 6.5; el que corresponde a $p=0.5$ es directamente el complemento del nivel de significación establecido en la prueba, $\alpha=0.05$.

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
β	0.0000	0.0022	0.1718	0.7110	0.9500	0.7110	0.1718	0.0022	0.0000

Tabla 6.5 Probabilidades del error tipo II, para diferentes valores de p, del ejemplo 6.19



ura 6.4 *Curva característica de operación de la regla de decisión del ejemplo 6.19*

b) En la figura 6.4 se presentan graficados los puntos de la tabla 6.5. La curva resultante recibe el nombre de *curva característica de operación* de la regla de decisión.

c) La curva característica de operación de la regla de decisión proporciona la probabilidad de aceptar la hipótesis de que $p=0.5$ (de que la moneda es homogénea), cuando en realidad p tiene otro valor, o sea, cuando debería rechazarse. En esta curva el valor de β para $p=0.5$ se interpreta como la probabilidad de que $p=0.5$ cuando ciertamente $p=0.5$, o sea, la probabilidad de aceptar la hipótesis cuando es cierta; esta probabilidad es el complemento del nivel de significación α que se muestra en la misma figura 6.4.

Una curva característica de operación indica el poder que tiene la regla de decisión para rechazar hipótesis que son falsas. Mientras más estrecha sea la curva, mayor será el poder de la regla en ese sentido. En particular, la regla de decisión estudiada no es muy buena para rechazar hipótesis falsas, ya que de la figura 6.4 se ve que, por ejemplo, la probabilidad de aceptar la hipótesis de que la moneda es homogénea, cuando en realidad $p=0.65$ (tal vez notoriamente cargada), es del orden del 43%. Lo anterior puede expresarse también diciendo que la probabilidad de rechazar la hipótesis falsa es del orden del 57% (el complemento de 43%). El poder de ésta y cualquier otra regla de decisión para rechazar hipótesis falsas puede incrementarse aumentando el tamaño de la muestra. Esto se le pide verificar al lector en el ejercicio 6.14 de final de capítulo.

6.11 PRUEBAS DE HIPOTESIS DE UNA Y DOS COLAS

En los ejemplos anteriores se ha probado la hipótesis nula

$H_0 : p=0.5$

contra la hipótesis alterna

$H_1 : p \neq 0.5$

La hipótesis nula puede rechazarse, y en consecuencia aceptarse la alterna, porque p sea significativamente menor de 0.5 o mayor de 0.5. Esto condujo a tener dos zonas de rechazo o regiones críticas a ambos lados de la media de la variable que se consideraba (el número de águilas), y tener que dividir en dos el nivel de significación. A este tipo de problemas de decisión, en los que hay dos zonas de rechazo, se les conoce con el nombre de pruebas de hipótesis de *dos colas*.

También es común que se tengan problemas en donde sólo se considere una sola región crítica, y así rechazar la hipótesis nula que se establezca únicamente porque los valores de la variable que se observa sean significativamente mayores que los esperados, o sólo porque son menores. A este tipo de problemas se les reconoce con el nombre de pruebas de hipótesis de *una cola*; en ellos caben los problemas en los que se trata de decidir si un proceso es mejor que otro, lo cual es diferente a decidir si los procesos son diferentes.

En la tabla 6.6 se presentan los valores críticos del estadístico z con distribución normal estándar para pruebas de hipótesis de una y dos colas a varios niveles de significación. Valores críticos a otros niveles de significación pueden obtenerse de la tabla A.3 del Apéndice del capítulo 3; valores críticos de estadísticos con otras distribuciones de probabilidad se obtienen de las tablas de percentiles que aparecen en el mismo Apéndice.

Nivel de significación α	0.10	0.05	0.01
Valores críticos de z para pruebas de dos colas	-1.645 y +1.645	-1.96 y +1.96	-2.58 y +2.58
Valores críticos de z para pruebas de una cola	-1.28 o +1.28	-1.645 o +1.645	-2.33 o +2.33

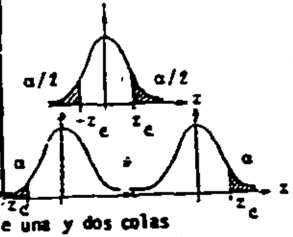


Tabla 6.6 Valores críticos en pruebas de hipótesis de una y dos colas

6.12 DECISIONES ESTADISTICAS PARTICULARES

Habiendo desarrollado el procedimiento general para probar decisiones estadísticas, se establecerán a continuación los estadísticos, y sus distribuciones de probabilidad, adecuados para realizar pruebas de hipótesis sobre los parámetros poblacionales. Excepto en un caso, el establecimiento está integramente basado en los casos estudiados en los intervalos de confianza.

Para probar estadísticamente la media μ_x de una población de valores de la variable aleatoria x, como puede ser

$$H_0 : \mu_x = a \tag{6.38}$$

en base a los valores conocidos de la media $\bar{x}$ y la desviación estándar S_x de una muestra aleatoria de tamaño n de la población, se pueden distinguir dos casos: el que el tamaño n de la muestra sea grande $(n > 30)$ y el que sea pequeña $(n < 30)$. El primer caso asegura que la distribución de medias de la muestra sea normal, y que la desviación estándar muestral sea un buen estimador de la desviación estándar de la población. El segundo, para poderlo resolver, requiere que la población sea normal, o aproximadamente normal.

En el primer caso, y de acuerdo a la teoría del muestreo, se sabe que la variable

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x / \sqrt{n}}$$

es aproximadamente normal estándar. Si se admite como verdadera la hipótesis (6.38), entonces

$$z = \frac{\bar{x} - a}{\sigma_x / \sqrt{n}} \tag{6.39}$$

también se aproxima a la distribución normal estándar. En base a este conocimiento se puede afirmar, con cierto grado de confianza, que los valores de z varían entre los valores críticos dados en la tabla 6.6, con lo que se puede establecer la regla de decisión del problema.

Si n es suficientemente grande, en (6.39) se puede sustituir la desviación estándar de la población por la de la muestra. Obsérvese que al establecer esa expresión se supuso implícitamente que la población es infinita o el muestreo se realiza con reemplazo.

Para el segundo caso, cuando n no es grande, no se puede admitir que $\bar{x}$ sea normal (sólo que también la población lo sea) ni sustituir σ_x por su estimador S_x en (6.39). En este caso, y aceptando que la población es normal, o aproximadamente normal, se tiene de (6.23) que la variable

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{S_x/\sqrt{n-1}} = \frac{\bar{x} - a}{S_x/\sqrt{n-1}} \qquad (6.40)$$

tiene distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad. Al saberlo, se puede establecer la regla de decisión del problema considerando los valores críticos de la distribución t de Student. Estos se obtienen de la tabla A.5 del Apéndice del capítulo 3.

Los dos casos analizados se presentan resumidos en los dos primeros renglones de la tabla 6.7. Los otros renglones, excepto el último, se obtienen en forma semejante a los estudiados, tomando en cuenta siempre los resultados contenidos en el capítulo 4 y en la primera parte de éste. Además, en este resumen sólo se consignan los casos en que la población es infinita o el muestreo es con reemplazo.

En el último renglón de la tabla 6.7 se presenta el estadístico que debe usarse para probar la homogeneidad de variancias de dos poblaciones independientes, lo cual debe verificarse antes de determinar el intervalo de confianza de la suma y diferen

Parámetro (s) que se prueba (n)	Hipótesis nula H_0	Distribución de la (s) población (es)	Tamaño de la(s) muestra(s)	Estadístico	Distribución del estadístico
Media	$\mu_x = a$	Cualquiera	Grande	$z = \frac{\bar{x} - \mu_x}{S_x/\sqrt{n}}$	Normal estándar
		Aproximadamente normal	Cualquiera	$t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{S_x/\sqrt{n-1}}$	t de Student con $n-1$ grados de libertad
Igualdad de medias	$\mu_1 = \mu_2$	Cualquiera	Grande	$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	Normal estándar
		Aproximadamente normal	Cualquiera	$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$ (se supone que $\sigma_1 = \sigma_2$)	t de Student con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad
Proporción de éxitos	$p = a$	Binomial	Grande	$z = \frac{\frac{x}{n} - p}{\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)}}$	Normal estándar

Tabla 6.7 Estadísticos para hacer pruebas de hipótesis (contin[illegible]

Parámetro(s) que se prueba(n)	Hipótesis nula H_0	Distribución de la(s) población(es)	Tamaño de la(s) muestra(s)	Estadístico	Distribución del estadístico
Igualdad de proporciones	$p_1 = p_2$	Binomial	Grande	$z = \frac{\left(\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}\right) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1}\left(\frac{X_1}{n_1}\right)\left(1 - \frac{X_1}{n_1}\right) + \frac{1}{n_2}\left(\frac{X_2}{n_2}\right)\left(1 - \frac{X_2}{n_2}\right)}}$	Normal estándar
Variancia	$\sigma_X^2 = a$	Aproximadamente normal	Cualquiera	$X^2 = \frac{n \cdot S_X^2}{\sigma_X^2}$	X^2 con $n-1$ grados de libertad
			Grande	$X^2 = \frac{n \cdot S_X^2}{\sigma_X^2}$ en donde los valores críticos de X^2 se determinan con $X^2 = \frac{1}{2}(z + \sqrt{2n-3})^2$ y z es ——→	Normal estándar
Igualdad de variancias	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	Aproximadamente normal	Cualquiera	$F = \frac{n_1(n_2-1)}{n_2(n_1-1)} \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ $\div$ $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ OE	F de Fisher con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad

Tabla 6.7 Estadísticos para hacer pruebas de hipótesis (concluye)

cia de las medias de dos poblaciones (expresión 6.32), o antes de probar si existen diferencias significativas entre las medias de dos poblaciones (cuarto renglón de la tabla 6.7), en base a muestras pequeñas en ambos casos. En la sección 6.4 se obtuvo que si una población es normal, o aproximadamente normal, de desviación estándar σ_x, la variable v^2 definida en (6.22) tiene distribución X^2 de $n-1$ grados de libertad. De esta manera, si se tienen dos poblaciones normales e independientes de desviaciones estándar σ_1 y σ_2, respectivamente, de donde se obtengan muestras de tamaño n_1 y n_2, y desviaciones estándar S_1 y S_2, también respectivamente, entonces las variables

$$v_1^2 = \frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} \tag{6.41}$$

y

$$v_2^2 = \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2} \tag{6.42}$$

tendrán distribuciones X^2 con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad respectivamente a cada población.

Por otra parte, en el capítulo 3 se estableció que si las variables aleatorias v_1^2 y v_2^2 eran independientes con distribuciones X^2 con ν_1 y ν_2 grados de libertad, respectivamente, entonces la variable

$$F = \frac{v_1^2/\nu_1}{v_2^2/\nu_2} \tag{6.43}$$

tiene distribución F de Fisher con ν_1 y ν_2 grados de libertad. Sustituyendo en (6.43) las variables v_1^2 y v_2^2 definidas en (6.41) y (6.42), que tienen $\nu_1 = n_1-1$ y $\nu_2 = n_2-1$ grados de libertad, respectivamente, se obtiene que

$$F = \frac{\frac{n_1}{n_1-1}\;\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{n_2}{n_2-1}\;\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$$

$$F = \frac{n_1(n_2-1)}{n_2(n_1-1)}\;\frac{S_1^2}{S_2^2}\;\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \qquad (6.44)$$

tiene distribución F de Fisher con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad. Admitiendo la hipótesis de que

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

se obtiene el estadístico

$$F = \frac{n_1(n_2-1)}{n_2(n_1-1)}\;\frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad (6.45)$$

cuyos valores deben estar contenidos dentro de ciertos valores críticos definidos por la propia distribución F con n_1-1 y n_2-1 grados de libertad. Esto permite establacer la regla de decisión para probar la hipótesis de homogeneidad de variancias de dos poblaciones. El resultado (6.44) es el que se presenta en el último renglón de la mencionada tabla 6.7.

Ejemplo 6.21 Una empresa produce cables con resistencia media a la ruptura de 200 kg y desviación estándar de 20 kg. Se piensa que con un nuevo proceso productivo la resistencia media a la ruptura se puede incrementar.

a) Diseñar una regla de decisión para aceptar el nuevo proceso productivo con un nivel de significación del 1% al probar 50 cables.

b) Bajo la regla de decisión adoptada en el inciso anterior, calcular la probabilidad de rechazar el nuevo proceso cuando en realidad está produciendo cables con resistencia media a la ruptura de 210 kg.

c) Dibujar la curva característica de operación de la regla de decisión.

a) Si μ_x es la resistencia media a la ruptura de los cables producidos con el proceso actual, se trata de decidir entre las hipótesis:

H_0 : $\mu_x = 200$ kg (el proceso nuevo es igual al actual)

H_1 : $\mu_x > 200$ kg (el proceso nuevo es mejor que el actual)

Como el tamaño de la muestra es grande, el estadístico que se usará para diseñar la regla de decisión es

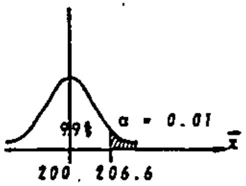
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x / \sqrt{n}}$$

en donde el valor crítico de z al 1% de nivel de significación en una prueba de hipótesis de una cola vale 2.33. Despejando $\bar{x}$ de la expresión anterior, y sustituyendo en la resultante los datos del problema y el de la hipótesis nula, se obtiene:

$$\bar{x} = \mu_x + z\,\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$= 200 + 2.33\;\frac{20}{\sqrt{50}}$$

$$= 206.6 \text{ kg}$$



Obsérvese que se tiene un problema de decisión de una cola debido a que la hipótesis nula establece que se rechace H_0 siempre que el valor de la media sea *mayor* (no diferente) de 200 kg. Ahora, si $z > 2.33$ (rechazo de H_0) $\bar{x} > 206.6$ y la regla de decisión queda como:

1. Aceptar el nuevo proceso productivo si la resistencia media de 50 cables escogidos al azar es mayor de 206.6 kg
2. Rechazarlo en caso contrario

b) Se consideran ahora las hipótesis:

$$H_0 : \mu_x = 200 \text{ kg}$$

$$H_1 : \mu_x = 210 \text{ kg}$$

en donde las distribuciones de las resistencias medias a la ruptura están representadas por las curvas normales de la figura 6.5. De ésta se ve que la probabilidad de rechazar el nuevo proceso productivo, cuando en realidad produce cables con resistencia media de 210 kg , está dada por el área rayada bajo la curva normal de la derecha. Luego, aceptando la hipótesis de que $\mu_x = 210$ y que la desviación estándar conserva su valor, se tiene:

$$\begin{aligned} \beta &= P(\bar{x} < 206.7) \\ &= P\left(z < \frac{206.7-210}{20/\sqrt{50}}\right) \\ &= P(z < -1.17) \\ &= 0.1210 \end{aligned}$$

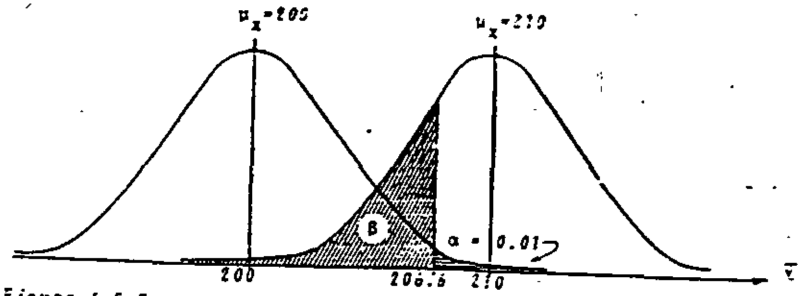


Figura 6.5 Error tipo II de la regla de decisión del ejemplo 6.21

c) Procediendo en forma idéntica al inciso anterior, aceptando que es cierto que $\mu_x = 202.5$, 205.0, 207.5, 212.5, 215.0 y otros, además de que $\sigma_x = 20$ siempre, se obtiene la tabla 6.8. Los valores de ésta están graficados en la figura 6.6.

μ_x	202.5	205.0	207.5	210.0	212.5	215.0
β	0.9306	0.7258	0.3897	0.1210	0.0202	0.0017

R. Brito R.

Tabla 6.8 Errores tipo II de la regla de decisión del ejemplo 6.21

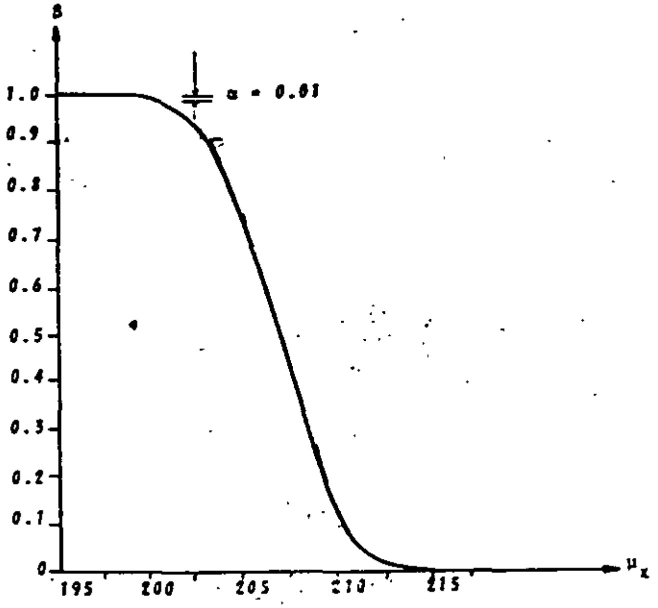


Figura 6.6 Curva característica de operación de la regla de decisión del ejemplo 6.21

Ejemplo 6.22 Con respecto al ejemplo anterior, calcular el tamaño de la muestra de manera que la probabilidad de rechazar la hipótesis $\mu_x=200$ kg, cuando debería aceptarse, sea cuando más 0.05; y la probabilidad de aceptar que $\mu_x=200$ kg, cuando la media se incrementó a 205 kg sea cuando más 0.02.

El enunciado del ejemplo establece limitaciones a la regla de decisión que se formule de manera que los errores tipos I y II tengan probabilidades de 0.05 y 0.02, respectivamente. Así, la regla de decisión hablará de una muestra de tamaño n y de los límites

$$\alpha = P(\text{error tipo I}) \leq 0.05$$

$$\beta = P(\text{error tipo II}) \leq 0.02$$

en donde el error del tipo II se refiere al caso de que $\mu_x=205$ kg. Esta situación se ilustra gráficamente en la figura 6.7

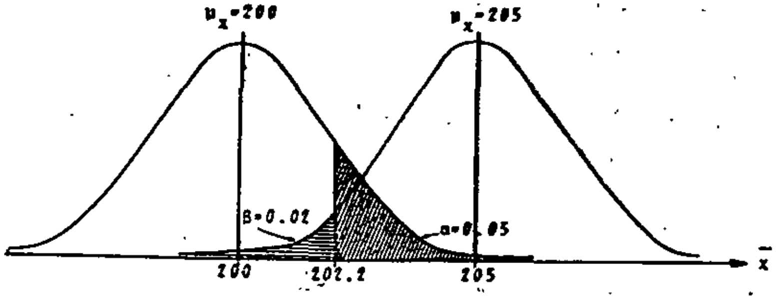


Figura 6.7 Errores tipo I y tipo II de la regla de decisión del ejemplo 6.22

Para que se cumpla que $\alpha=0.05$, bajo la hipótesis de que $\mu_x=200$, se debe tener

$$\alpha = P\left(\frac{\bar{x} - 200}{20/\sqrt{n}} \geq z_c\right) \leq 0.05$$

en donde el valor crítico de z_c al 5% de nivel de significación

es 1.645. Luego

$$\frac{\bar{x} - 200}{20/\sqrt{n}} \geq 1.645$$

La restricción de que $\beta=0.02$, cuando $\mu_x=205$ y se conserva σ_x en 20, se cumple si

$$\beta = P\left(\frac{\bar{x} - 205}{20/\sqrt{n}} \leq z_c\right) \leq 0.02$$

en donde z_c vale -2.055 al 2% de nivel de significación. Obsérvese que el valor crítico del estadístico es negativo porque la cola de rechazo está a la izquierda; el valor 2.055 se obtiene de la tabla de la distribución normal. De la última expresión se obtiene

$$\frac{\bar{x} - 205}{20/\sqrt{n}} \leq -2.055$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas, se llega a que

$$\bar{x} = 202.2 \quad \text{y} \quad n = 219.0$$

Por lo que el tamaño de la muestra debe ser de 219 cables y la regla de decisión dirá:

1. Aceptar el nuevo proceso productivo si la resistencia media de 219 cables escogidos al azar es mayor a 202.2 kg
2. Rechazarlo en caso contrario

De acuerdo a esta regla de decisión, si se seleccionan esos 219 cables al azar producidos con la técnica nueva, se prueban, y su media $\bar{x}$ resulta ser por ejemplo de:

1) 208 kg, se aceptará el nuevo proceso como mejor. En este caso se rechaza $\mu_x=200$, aunque cabe tener un error má

ximo del 5% en rechazar algo que es cierto.

2) 195 kg , se rechaza el nuevo proceso productivo. Aquí se estará aceptando que $\mu_x = 200$, aunque cabe tener un error máximo del 2% de aceptar algo que es falso.

Ejemplo 6.23 Un fabricante de balines de rodamiento asegura que sus balines tienen un diámetro medio de 1.905 cm de diámetro. Un ensamblador usa estos balines para producir baleros y, para aceptar un pedido, mide el diámetro de 10 balines del lote recibido. Si la media de la muestra de los 10 diámetros es de 1.931 cm y su desviación estándar es 0.023 cm , ¿deberá aceptar el ensamblador el lote?

En este ejemplo se trata de decidir entre las hipótesis

$H_0 : \mu_x = 1.905$ cm (aceptar el lote)

$H_1 : \mu_x \neq 1.905$ cm (rechazar el lote)

en donde x es una variable aleatoria que representa el diámetro de los balines recibidos. Para probar la hipótesis nula, y dado que la muestra es pequeña, se usará el estadístico

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{S_x / \sqrt{n-1}}$$

para lo cual se aceptará que la distribución de los diámetros de los balines es aproximadamente normal. En esta expresión $\mu_x = 1.905$ por hipótesis, $\bar{x} = 1.931$ y $S_x = 0.023$ de acuerdo a los datos del problema, y t tiene distribución t de Student con $n-1=9$ grados de libertad. Luego

$$t = \frac{1.931 - 1.905}{0.023/\sqrt{10-1}} = 3.39$$

Los valores críticos de t en problemas de decisión de dos colas, por prever la hipótesis alterna el rechazo de la nula porque la media de la población es menor o mayor que 1.905, con 9 grados de libertad y a niveles de significación del 5 y 1% son, respectivamente, ± 2.26 y ± 3.25. Como se observa en la figura 6.8, el valor observado de t cae en las regiones de rechazo de la hipótesis probada. Por lo tanto, la media de la población de diámetros es significativamente diferente de 1.905 m. y deberá rechazarse el lote de balines

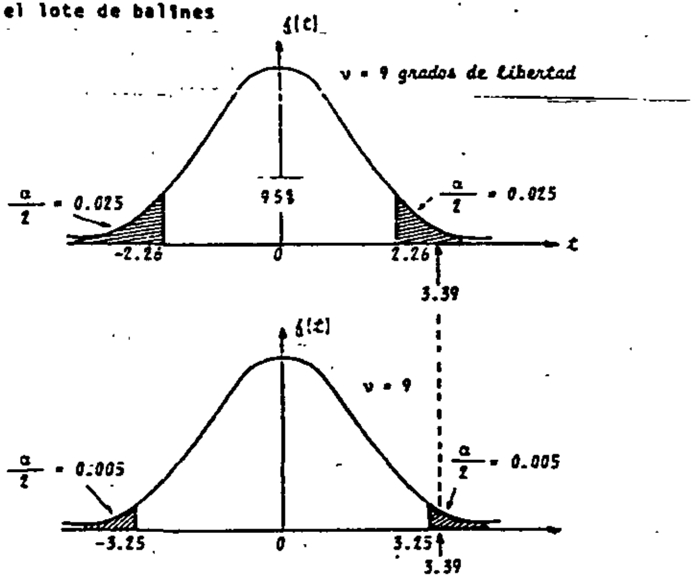


Figura 6.8 Prueba de hipótesis del ejemplo 6.23.

Ejemplo 6.24 En relación al ejemplo anterior, establecer un procedimiento para controlar la aceptación de los lotes de balines.

Del ejemplo anterior se tiene que los valores críticos de

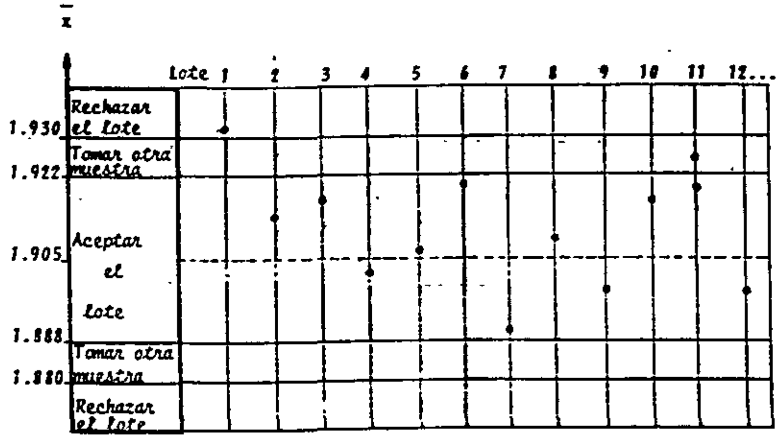
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_x}{S_x/\sqrt{n-1}} = \frac{\bar{x} - 1.905}{0.023/\sqrt{10-1}}$$

son ± 2.26 y ± 3.25, al 5 y 1% de niveles de significación. Des pejando $\bar{x}$ de la expresión anterior, se obtienen sus valores críticos a los niveles de significación considerados. Estos son 1.888 y 1.922 al 5%, y 1.880 y 1.930 al 1%.

De acuerdo a estos valores, el procedimiento de aceptación de lotes de balines diría:

1. De cada lote de balines recibidos, calcular la media $\bar{x}$ de los diámetros de 10 balines seleccionados al azar.
2. Si $\bar{x}$ está entre los valores 1.888 y 1.922, aceptar el lote.
3. Si $\bar{x}$ está fuera del intervalo que va de 1.880 a 1.930, rechazar el lote.
4. Si $\bar{x}$ está contenido en los intervalos (1.880, 1.888) o (1.922, 1.930), repetir el proceso con otros balines.

El procedimiento anterior se ilustra gráficamente en la figura 6.9. El registro de las medias de las muestras de los lotes se representan por medio de puntos en la gráfica, la cual recibe el nombre de *carta de control de calidad*, Dependiendo que el punto trazado caiga en las zonas de aceptación, rechazo o duda, se actuará en consecuencia.



Fi 5.9 *Carta de control de calidad.*

Ejemplo 6.25 Para ir de México a Cuernavaca se tienen dos carreteras, la autopista y la federal. En el primer renglón de la tabla de frecuencias 6.9 se tienen los tiempos en minutos empleados por diferentes tipos de automóviles; en los otros dos renglones aparecen los números de automóviles que emplearon los tiempos de traslado indicados siguiendo una u otra carretera. Probar si existe algún ahorro de tiempo al usar la autopista. En caso afirmativo, ¿cuánto tiempo cabe esperar tener de ahorro?

Tiempo de viaje	40	45	50	55	60	65	70	75	
Autopista	1	5	10	12	9	5	3	0	n_1
Federal	0	0	3	9	16	8	5	4	n_2

Tabla 6.9 Tabla de frecuencias del tiempo empleado entre México y Cuernavaca

Si x_1 y x_2 son variables aleatorias que representan los tiempos que usan los automóviles para recorrer la autopista y la carretera federal, respectivamente, entonces, en la primera parte del ejemplo se trata de decidir entre las hipótesis:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ (no existen diferencias entre los tiempos de recorrido)

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$ (es más rápido el recorrido por la autopista)

Para probar la hipótesis H_0 se considerará la distribución de la diferencia de medias de las muestras, la que es normal por ser grandes las muestras. Los valores de los estadísticos de las muestras se obtienen de la tabla 6.9 y son:

$n_1 = 45$ $n_2 = 45$

$\bar{x}_1 = 55.56$ $\bar{x}_2 = 61.67$

$S_1^2 = 52.47$ $S_2^2 = 44.44$

Sustituyendo estos valores, y la hipótesis H_0, en el estadístico mencionado en el tercer renglón de la tabla 6.7, se obtiene:

$$z = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2) - (u_1-u_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$= \frac{(55.56-61.67) - 0}{\sqrt{\frac{52.47}{45} + \frac{44.44}{45}}}$$

$$= -4.16$$

Los valores críticos del estadístico z, en problemas de decisión de una cola, con niveles de significación del 5 y 1%, son -1.645 y -2.33, respectivamente. Comparando el valor observado del estadístico z con los críticos, se concluye que debe rechazarse la hipótesis nula, como se observa en la figura 6.10.

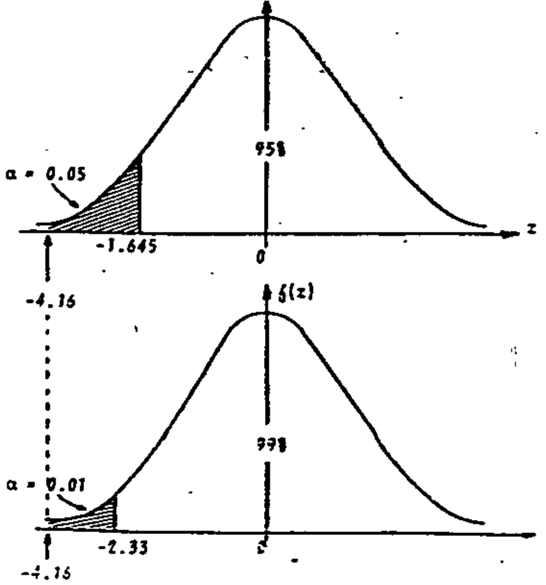


Figura 6.10 Prueba de hipótesis del ejemplo 6.25

Habiendo aceptado que se ahorra tiempo al usar la autopista, ahora se determinará el intervalo de confianza de u_2-u_1 para obtener el ahorro en tiempo esperado al usar esta carretera. Usando (6.29) con z_c para el 95% de nivel de confianza, se obtiene:

$$u_2-u_1=(\bar{x}_2-\bar{x}_1) \pm z_c \sqrt{\frac{S_2^2}{n_2} + \frac{S_1^2}{n_1}}$$

$$=(61.67-55.56)\pm 1.96 \sqrt{\frac{44.44}{45} + \frac{52.47}{45}}$$

$$=6.11\pm 2.88$$

Luego

$$\underline{3.23 \leq u_2-u_1 \leq 3.99 \quad al\ 95\%}$$

Esto significa que, en el 95% de los casos, al usar la autopista se ahorrará por lo menos 3.23 minutos.

Ejemplo 6.26 En la tabla 6.10 se tiene el rendimiento en km/litro de cuatro automóviles que usan gasolina normal y gasolina activada con un aditivo. ¿Puede decirse que el aditivo mejora el rendimiento del automóvil?

Gasolina normal	12	10	11	11
Gasolina activada	13	12	13	14

Tabla 6.10 Rendimiento de cuatro automóviles que usan gasolina normal y activada

Sean x_1 y x_2 variables aleatorias que representan el rendimiento de un automóvil que usa gasolina normal y gasolina activada, respectivamente. Se trata de decidir entre las hipótesis

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

En base a las muestras de los estadísticos, se obtiene:

$$n_1 = 4$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{4}(12+10+11+11) = 11$$

$$S_1^2 = \frac{1}{4}\left[(12-11)^2+(10-11)^2+(11-11)^2+(11-11)^2\right] = 0.5$$

$$n_2 = 4$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{4}(13+12+13+14) = 13$$

$$S_2^2 = \frac{1}{4}\left[(13-13)^2+(12-13)^2+(13-13)^2+(14-13)^2\right] = 0.5$$

Como las muestras son pequeñas, debe usarse el estadístico t establecido en el cuarto renglón de la tabla 6.7 para hacer la prueba estadística. Pero la deducción de este estadístico supone la igualdad de las desviaciones estándar de las dos poblaciones, por lo que deberá resolverse previamente el problema de decisión dado por:

$H_0' : \sigma_1 = \sigma_2$

$H_1' : \sigma_1 \neq \sigma_2$

6 45

Aceptando la hipótesis nula H_0', se tiene de (6.44) que

$$F = \frac{n_1(n_2-1)}{n_2(n_1-1)} \; \frac{S_1^2}{S_2^2} \; \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

$$= \frac{4(4-1)}{4(4-1)} \; \frac{0.5}{0.5} = 1$$

Este estadístico tiene distribución F de Fisher con $\nu_1 = n_1 - 1 = 3$ y $\nu_2 = n_2 - 1 = 3$ grados de libertad. En la figura 6.11 se presentan los valores críticos del estadístico F al 5% comparado con el observado. De la comparación se concluye que debe aceptarse la hipótesis de que las desviaciones estándar de las poblaciones son iguales. Obsérvese que no se hace la prueba al 1% de nivel de significación ya que, al aceptar la hipótesis que se prueba al 5%, automáticamente queda aceptada al 1%.

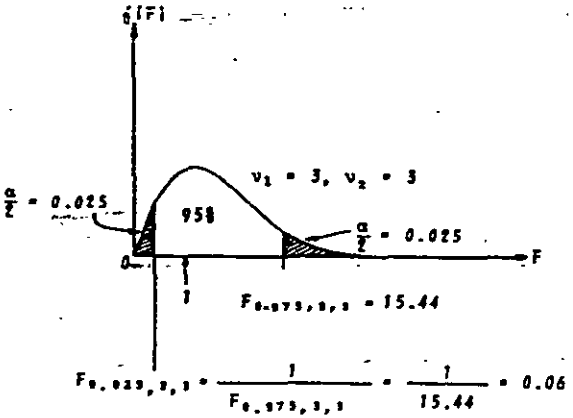


Figura 6.11 Prueba de la hipótesis de igualdad de desviaciones estándar

Habiendo probado la homogeneidad de variancias, o igualdad de desviaciones estándar, se volverá al problema de decisión original. Aceptando que $\mu_1 = \mu_2$ se tiene del cuarto estadístico de la tabla 6.7:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{n_1 S_1^2 - n_2 S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

$$= \frac{(11-13) - 0}{\sqrt{4(0.5) + 4(0.5)}} \sqrt{\frac{4(4)(4+4-2)}{4+4}}$$

$$= -3.46$$

Este valor se compara con el crítico de la distribución t con $v=n_1+n_2-2=6$ grados de libertad. En la figura 6.12 se muestran los valores críticos al 5 y 1% de niveles de significación. De la misma figura se desprende que hay que rechazar la hipótesis nula y aceptar que el aditivo mejora el rendimiento de los automóviles

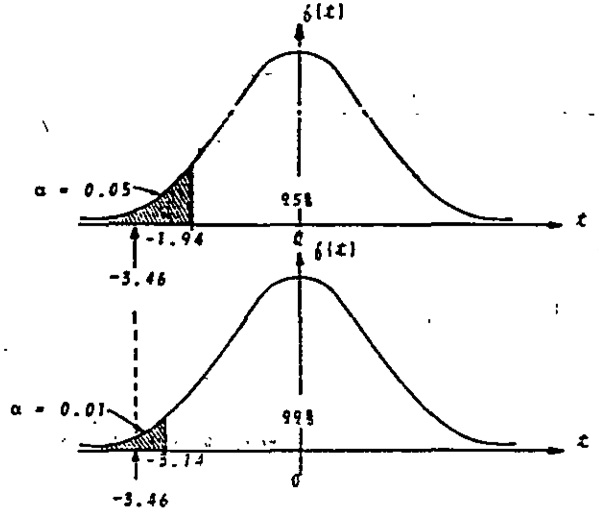


Figura 3.12 Prueba de hipótesis del ejemplo 6.26.

(Ejemplo 6.27 En una fábrica se tienen dos máquinas iguales para producir remaches, los que pueden salir o no defectuosos. A fin de determinar si las proporciones de remaches defectuosos que se obtienen de las dos máquinas son iguales, se obtienen muestras aleatorias de tamaño 100 de las producciones de remaches en un día. Si se obtienen 18 remaches defectuosos de la primera máquina y 8 de la segunda, investigar si existe evidencia de un funcionamiento diferente de las máquinas.

Sean p_1 y p_2 las proporciones de remaches defectuosos producidos por las máquinas. Se trata de decidir entre las hipótesis

$H_0 : p_1=p_2$ (las máquinas funcionan igual)

$H_1 : p_1 \neq p_2$ (las máquinas funcionan diferente)

De las muestras extraídas de las dos poblaciones se tienen los datos:

$n_1 = 100$

$\frac{x_1}{n_1} = \frac{18}{100} = 0.18$ (proporción de éxitos en la muestra de la primera máquina, es decir, de remaches defectuosos)

$n_2 = 100$

$\frac{x_2}{n_2} = \frac{8}{100} = 0.08$

En base a estos valores, y como las muestras son grandes, se tiene del sexto estadístico de la tabla 6.7 que:

$$z = \frac{\left(\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}\right) - (p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1}\left(\frac{x_1}{n_1}\right)\left(1-\frac{x_1}{n_1}\right) + \frac{1}{n_2}\left(\frac{x_2}{n_2}\right)\left(1-\frac{x_2}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{(0.18-0.08) - 0}{\sqrt{\frac{1}{100}\ (0.18)(1-0.18)+\frac{1}{100}\ (0.08)(1-0.08)}}$$

$$= 2.13$$

Comparando este valor del estadístico con los críticos al 5 y 1% de niveles de confianza, que son ± 1.96 y ± 2.58 respectivamente, se obtiene que probablemente sí existan diferencias significativas en el funcionamiento de las máquinas. Otras muestras pueden permitir llegar a tomar una decisión definitiva.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

DIPLOMADO EN SISTEMAS DE CALIDAD EN INGENIERIA DE PROYECTO Y CONSTRUCCION

MODULO II

CONTROL DE CALIDAD DE MATERIALES Y OBRAS

PARTE 1

METODOS ESTADISTICOS PARA EL CONTROL DE CALIDAD

TEMA:

INFERENCIA ESTADISTICA

EXPOSITOR: M. EN I. RAFAEL BRITO RAMIREZ
PALACIO DE MINERÍA
1997

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Teléfonos: 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

4.6 ETAPAS DE LA INVESTIGACION ESTADISTICA.

No obstante que los problemas a los que puede aplicarse la estadística son de muy variados tipos, existen patrones comunes de análisis para resolverlos. Estos patrones se llaman las *etapas de la investigación estadística*, y se mencionaron en la introduccion de este capítulo. A continuación se describen brevemente dichas etapas:

1a. Formulación del problema. La primera etapa en el análisis de un problema es la formulación precisa de éste. Es necesario establecer detalladamente las cuestiones que se tratan de resolver del problema planteado; hacer explícitas todas las restricciones de espacio, tiempo y recursos que afecten al problema en estudio; tener en cuenta los factores que originan y las causas que alteran al comportamiento del problema.

2a. Diseño del experimento. Teniendo clara la conceptualización del problema que se trata de resolver, y antes de proceder a recolectar datos sobre los agentes que afectan al problema, debe diseñarse dicha recolección a fin de obtener un máximo de información empleando el mínimo de recursos. Por lo tanto, debe determinarse el tamaño adecuado de la muestra y la forma de levantar los datos de ésta, entre otras cosas.

3a. Experimentación. Esta etapa, que corresponde a una actividad de campo, consiste en la recolección física de los datos de la muestra diseñada. El procedimiento de recolección debe guiarse por reglas estrictas impuestas a los encargados de levantar los datos, a fin de eliminar en lo posible alguna aportación subjetiva al valor de los datos encuestados o medidos. En el capítulo 5 de muestreo se harán comentarios adicionales a la etapa de experimentación.

4a. Tabulación y descripción de resultados. En esta etapa los datos experimentales recolectados se manipulan de manera de obtener concentraciones de los mismos que aportan mayor información sobre el problema que cada uno de los datos individuales vistos por separado; se ilustran los mismos datos con representaciones gráficas; y se obtienen medidas que establezcan su comportamiento global. El procedimiento para llevar a cabo las actividades de esta etapa, es el que se ha discutido en las secciones anteriores de este capítulo.

5a. Inferencia estadística y formulación de la respuesta del problema planteado. En la última etapa de la investigación estadística se aplican métodos estadísticos a fin de obtener conclusiones de la población con base al conocimiento de una muestra; a estos métodos se les conoce como *inferencia estadística*; algunos de ellos son los que se estudian en el capítulo 6. A través de la inferencia estadística se obtiene la respuesta del problema planteado.

4.7 PROBABILIDAD ESTADISTICA

En la tabla 4.6 se muestran las frecuencias relativas del número acumulado de alumnos que no han acreditado la asignatura de Probabilidad y Estadística en los últimos diez semestres escolares de una escuela de Ingeniería. En la figura 4.9 se muestran representados estos valores.

La experiencia mostrada en la figura 4.9 muestra que la frecuencia relativa del evento "no ha acreditado la asignatura" tiene cierta regularidad, es decir, la frecuencia tiende a ser constante.

5

[illegible]

5.1 INTRODUCCION

En el capítulo anterior se establecieron las definiciones de población y muestra. Se estudió el procedimiento para analizar los datos de una muestra, obtener su distribución empírica y sus parámetros descriptivos. En este capítulo se establecerán los procedimientos para obtener muestras que sean representativas de la población; además, se estudiarán las relaciones que existen entre la población y las muestras obtenidas de esa población. La -

teoría del muestreo estudia precisamente esas relaciones, las cuales constituyen la base de la quinta etapa de la investigación estadística mencionada en el capítulo anterior, o sea, la inferencia estadística que se estudiará en el capítulo siguiente. En éste se verá que es común tener que *estimar* algunas cantidades desconocidas asociadas a una población, tales como la media de la población, su variancia, su desviación estándar, etc., por medio del conocimiento de las cantidades correspondientes de la muestra, o sea la media de la muestra, su variancia, su desviación estándar, etc. En estos problemas de estimación se llama, y aquí también se hará, *parámetros poblacionales*, o simplemente *parámetros*, a las cantidades desconocidas asociadas a la población; se llamarán *estadísticos muestrales*, o simplemente *estadísticos*, a las cantidades correspondientes obtenidas de una muestra de la población.

La teoría de muestreo también es la base para determinar cuándo los datos observados de una muestra de una población difieren significativamente de los valores esperados de la misma población; cuándo las diferencias observadas entre dos muestras son debidas sólo al azar o cuándo esas diferencias son realmente significativas. Tales cuestiones permiten resolver, por ejemplo, problemas en los que se trate de probar un aditivo para mejorar las características del concreto, o para *decidir* cuándo un proceso productivo es mejor que otro. Estos problemas caen dentro de las llamadas *pruebas de significación y de hipótesis* que se estudian en la *teoría de las decisiones* que también se verán en el próximo capítulo.

En resumen, la *inferencia estadística* que se estudiará en el capítulo 6, entendida como la estimación de parámetros poblacionales, o decisiones estadísticas sobre los parámetros, a partir del conocimiento de estadísticos muestrales obtenidos de la población, tiene su base en la teoría del muestreo que aquí se estudia. Se iniciará su estudio estableciendo algunas definiciones.

5.1.1 *Muestreo*. Muestreo es el acto de muestrear, o sea, de obtener muestras de una población. Una muestra debe ser *representativa* de la población de donde se obtiene para que sea útil al inferir estadísticamente sobre la propia población.

En la materia llamada *diseño de experimentos* se estudian los métodos de muestreo y problemas relativos a la forma, tamaño, condiciones, etc., en que debe llevarse al cabo el muestreo representativo. Aquí sólo cabe insistir en la representatividad de la muestra, con lo que se trata de decir que en la muestra deben estar representadas todas las clases diferentes de elementos que contenga la población, y en proporciones semejantes. Por ejemplo, si de la población de estaturas de los estudiantes de una escuela de ingeniería se trata de obtener una muestra que sea representativa de la población entera, en la muestra deberán aparecer estaturas de estudiantes del primero, segundo, tercero, etc. semestres de estudio, de hombres y mujeres, de blancos y negros, etc.; si en la escuela hay más hombres que mujeres, en la muestra también deberán haber más estaturas de hombres que de mujeres.

5.1.2 [redacted] Con el fin de precisar cuándo se tiene una muestra representativa de una población, se establecerá el concepto de *muestreo aleatorio*. Brevemente, el muestreo aleatorio es un procedimiento mediante el cual se obtienen muestras representativas, en el sentido de que cada miembro de la población tiene la misma oportunidad de ser elegido para formar parte de la muestra que cualquier otro.

Con mayor rigor matemático, la definición de muestreo aleatorio considera una variable aleatoria x, asociada a una población. Se supone que la variable aleatoria [redacted] tiene distribución de probabilidad dada por la función densidad [redacted] para el caso continuo, de media [redacted] y desviación estándar [redacted]. Si se obtienen *todas* las posibles muestras de tamaño n de la población de valores de x, se obtendrá el siguiente conjunto de eneadas de valores observados de x

$$\begin{array}{l} x_1' \;,\; x_2' \;,\; x_3' \;,\; \ldots ,\; x_n' \\ x_1'' \;,\; x_2'' \;,\; x_3'' \;,\; \ldots ,\; x_n'' \\ x_1''' \;,\; x_2''' \;,\; x_3''' \;,\; \ldots ,\; x_n''' \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{array} \qquad (5.1)$$

TABLA A.7

TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS

57424	14296	76306	07342	20141	69018	23497	85160	98845	82606
22802	43361	04559	39866	31780	27199	16070	31845	80658	75331
46521	50251	01046	37724	93845	55399	56734	89452	77207	04871
30743	02551	51740	83904	63761	81184	62782	29111	07618	73967
07889	39120	53937	85329	53879	83517	56044	60809	58875	91400
60926	43505	93873	35690	75304	50611	60518	17288	84520	95324
16596	54182	67155	95320	09576	42826	15847	84002	83338	99643
05539	96704	43625	40872	81373	86044	58619	48691	12585	89229
29765	11702	61272	35319	17100	14711	68164	86518	35957	53096
91208	17967	04488	98124	00493	22434	87757	12162	97588	59230
52947	05523	54645	39554	26277	75257	60426	50891	52186	20948
04752	70945	18917	37790	55159	53797	16248	87499	13823	72436
26105	74086	97732	82494	98462	92952	08900	98495	86390	58157
87340	53660	19624	84057	49137	20377	59620	29511	30738	48495
52933	41762	31878	95166	84049	15533	15988	72077	86012	51943
63005	54978	53588	47939	41193	97986	22143	88388	42428	38116
06863	05549	29722	55533	32268	18940	84963	73212	70442	63799
36418	97861	89208	10351	76672	16814	93595	87929	10114	50593
60730	24952	20424	57402	77339	39520	02435	74058	68832	36315
59621	30216	22595	97443	86540	00903	37523	85755	71123	86567

TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS

Números (dígitos) están distribuidos aleatoriamente con Distribución (probabilidad) uniforme.

Este conjunto de todas las muestras de tamaño n de la población recibe el nombre de *espacio de muestras* o *espacio muestral.* El conjunto de valores observados x_1', x_1'', x_1''',..., obtenidos como el primer elemento de las muestras del espacio muestral, pueden considerarse como valores observados de una variable aleatoria x_1 con distribución de probabilidad dada por la función densidad $f_1(x_1)$. Los segundos elementos del espacio de muestras, x_2', x_2'', x_2''',..., también pueden suponerse ser valores observados de una variable aleatoria x_2 con función densidad $f_2(x_2)$, y así en seguida para los demás elementos del espacio muestral. De esta manera se habrán considerado las variables aleatorias $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ con distribuciones de probabilidad dadas por las funciones densidad que a continuación se muestran

$$\begin{array}{llll} x_1, & x_2, & x_3, & \ldots, x_n \\ f_1(x_1), & f_2(x_2), & f_3(x_3), & \ldots, f_n(x_n) \end{array} \qquad (5.2)$$

Ahora bien, para que el muestreo sea aleatorio deben cumplirse dos condiciones:

(a) Que las pruebas sucesivas para obtener una muestra sean independientes una de las otras, y

(b) Que la distribución de probabilidad de la variable aleatoria x permanezca la misma de prueba a prueba.

La primera condición significa que las variables aleatorias $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sean independientes, y la segunda que las mismas variables aleatorias posean la distribución de probabilidad original, o sea

$$f_1(x_1) = f_2(x_2) = f_3(x_3) = \ldots = f_n(x_n) = f(x) \qquad (5.3)$$

Lo anterior puede expresarse matemáticamente diciendo que el muestreo aleatorio es un método de muestreo para el cual

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_1)\, f(x_2)\, f(x_3) \ldots f(x_n) \qquad (5.4)$$

en donde $f(x)$ es la función densidad de la variable aleatoria asociada a la población que se está muestreando y $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son variables aleatorias correspondientes a las n pruebas de la muestra.

5.1.2 [redacted] Existen diferentes maneras de obtener muestras aleatorias. Tal vez la más sencilla consiste en numerar todos los elementos de la población, asignar estos mismos números a pequeños pedazos de papel, colocarlos en una urna y extraer de ella tantos números como elementos se deseen aparezcan en la muestra. En la muestra quedan los elementos de la población que coincidan con los números extraídos de la urna. Debe tenerse cuidado de revolver los pedazos de papel en la urna antes de hacer cada extracción.

El método anterior puede reemplazarse por el uso de una tabla de *números aleatorios* construída para tales propósitos. Una tabla de números aleatorios es en realidad una muestra aleatoria de la población formada por los dígitos 0,1,2,3,4, 5,6,7,8 y 9. Teniendo esta tabla, el proceso de extraer números de la urna se sustituye por el hecho de consultar la tabla, tomando cada vez tantos dígitos de ella como convenga por el número de elementos que exista en la población de que se trate; es decir, que si se trata de obtener una muestra aleatoria de tamaño 500, por ejemplo, en la tabla deberán leerse sucesivamente números de tres cifras, despreciando aquéllos que sean mayores de 500.

Al consultar una tabla de números aleatorios, como la que aparece en el Apéndice de este capítulo, debe tenerse especial cuidado en leerla en un [redacted] ya sea por renglones o por columnas, a partir de cualquier lugar que se prefiera. Si una tabla de este tipo se lee pasando de un número a otro al azar, puede eliminarse la aleatoriedad que está contenida en ella y es la base de su utilidad.

La construcción de una tabla de números aleatorios va más allá del alcance de esta obra. Sólo cabe indicar que existen procedimientos matemáticos y físicos (fundamentalmente electrónicos) para obtenerlas. La tabla de números aleatorios del Apéndice se formó usando un procedimiento matemático por medio de una computadora.

5.1.4 Muestreo con y sin reemplazo. Dependiendo de la forma en que se realice el muestreo, éste puede ser con *reemplazo* o *sin reemplazo*. Se tiene un muestreo con reemplazo si se obtiene un elemento de la población, se observa la característica que se trata de estudiar, se apunta ésta como un elemento de la muestra, y el elemento observado se *devuelve* a la población antes de sacar el siguiente elemento para la muestra. En este caso de muestreo con reemplazo es factible escoger cada miembro de la población más de una vez.

Por el contrario, si una vez que un elemento de la población se elige para entrar en la muestra, se deja permanentemente fuera de la población, no será posible escoger cada miembro de la población más de una vez, y se tendrá un muestreo sin reemplazo.

En muchos problemas de ingeniería de prueba de materiales los muestreos que se realizan son sin reemplazo, debido a que las pruebas a que se sujeta el material para conocer sus características son destructivas. Fácilmente puede verse que si, por ejemplo, se trata de obtener una muestra de tamaño 30 de la resistencia a la ruptura de los cables producidos por una empresa, es necesario destruir físicamente un cable para conocer su resistencia, haciendo imposible el que se pueda reintegrar a la población de donde proviene.

Se sabe que las poblaciones pueden ser finitas o infinitas. Si de una población finita se obtienen muestras con reemplazo, puede considerarse teóricamente que la población es infinita, ya que cualquier número de muestras pueden obtenerse de la población sin agotarla. Además, para casi cualquier propósito práctico, el muestreo de poblaciones finitas de tamaño muy grande puede considerarse como muestreo de poblaciones infinitas.

Finalmente cabe aclarar que de acuerdo al concepto de muestreo aleatorio, el muestreo sin reemplazo de poblaciones [redacted] no conduce a muestras aleatorias, debido a que al dejar permanentemente fuera el elemento ya extraído, influye en la probabilidad de extracción del siguiente; o sea, que las pruebas sucesivas para obtener una muestra no son independientes. Esto no ocurre si la población es infinita.

Resumiendo lo anterior puede decirse que, para obtener muestras aleatorias, el muestreo debe ser de cualquier tipo en poblaciones infinitas y sólo con reemplazo en poblaciones finitas (salvo el caso ya apuntado de poder considerar a la población infinita por ser de tamaño muy grande).

5.1.5 Muestreo de variables y de atributos. Los *muestreos de variables y de atributos* tienen que ver con las características que se tratan de observar de un universo de elementos. Si lo que interesa observar son características *cuantitativas*, se habla de un muestreo de variables, y si las características que se tratan de observar son de índole *cualitativa*, se tiene un muestreo de atributos. Es decir, si de un universo se observan algunas características mesurables de algunos de sus miembros, se tendrán muestreos de variables para ese universo. Así se pueden tener muestreos de variables correspondientes a la resistencia a la tensión de los cables producidos por una empresa, la duración de los focos producidos por otra, el número de usuarios que solicitan pasaje en una ruta aérea, el número de vehículos que pasan en una hora por una estación de aforo de una autopista, etc. Por el contrario, si las características que se observan no son mesurables, como puede ser la rugosidad de un material, el color de la tez de los estudiantes universitarios, etc., se tendrán muestreos de atributos.

Es natural pensar que para obtener resultados equivalentes en los dos tipos de muestreos, se necesita que el muestreo de atributos sea de mayor calidad y tamaño.

En lo que sigue sólo se tratará del muestreo de variables, por ser el más cercano a la gran mayoría de los problemas de la ingeniería.

5.1.6 **Distribuciones de probabilidad multivariadas**. A la función de varias variables independientes del primer miembro de (5.4) se le llama una *función densidad de probabilidad multivariada*. Significa, en cierta forma, la probabilidad de que ocurran simultáneamente los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Obsérvense el paralelismo de (5.4) con la expresión (2.16) que se estableció para el cálculo de probabilidades de eventos independientes.

Para las funciones de densidad de probabilidad multivariadas se pueden establecer los mismos conceptos considerados en las funciones de densidad simples. En particular, la esperanza matemática de una función $h(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ de las variables aleatorias $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ con función densidad de probabilidad multivariada $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ es

$$E(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, x_2, \ldots, x_n) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \quad (5.5)$$

En el caso de que las variables aleatorias $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sean independientes, la esperanza matemática del producto de funciones independientes $h_1(x_1), h_2(x_2), \ldots, h_n(x_n)$ será, de acuerdo con (5.4) y (5.5):

$$E(h_1 h_2 \ldots h_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x_1)\, h_2(x_2) \ldots h_n(x_n) f(x_1) f(x_2) \ldots$$

$$\ldots f(x_n) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x_1) f(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_2(x_2) f(x_2)\, dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x_n) f(x_n) dx_n$$

Luego

$$\boxed{E(h_1\, h_2 \ldots h_n) = E(h_1)\, E(h_2)\, \ldots\, E(h_n)} \quad (5.6)$$

Como se hizo en el capítulo 2, también puede demostrarse que en las funciones de densidad multivariadas la esperanza matemática cumple con las propiedades establecidas en 2.13.1.

5.1.7 **[illegible] momentos.** Sea x una variable aleatoria cualquiera. Se llama *función generatriz* de la variable aleatoria x, a la esperanza matemática de la función $e^{\theta x}$, en donde θ es un parámetro que puede tomar cualquier valor. Representando a la función generatriz de momentos de x con $M_x(\theta)$, se tiene

$$\boxed{M_x(\theta) = E(e^{\theta x})} \quad (5.7)$$

Recordando que la función exponencial puede desarrollarse en serie de potencias como

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \quad (5.8)$$

se obtiene de (5.7) que la función generatriz de momentos toma la forma

$$M_x(\theta) = E(1 + \theta x + \frac{(\theta x)^2}{2!} + \frac{(\theta x)^3}{3!} + \ldots)$$

$$= E(1) + \theta E(x) + \frac{\theta^2}{2!} E(x^2) + \frac{\theta^3}{3!} E(x^3) + \ldots$$

$$\therefore M_x(\theta) = 1 + \theta \mu_1' + \frac{\theta^2}{2!} \mu_2' + \frac{\theta^3}{3!} \mu_3' + \ldots \quad (5.9)$$

en donde $\mu_1', \mu_2', \mu_3', \ldots$, son los momentos con respecto al origen de la variable aleatoria x de órdenes crecientes.

De (5.9) se deduce la propiedad fundamental de la función generatriz de momentos. En efecto, derivando sucesivamente (5.9) con respecto al parámetro θ se obtiene

$$\frac{d}{d\theta} M_x(\theta) = \mu_1' + \theta\, \mu_2' + \frac{\theta^2}{2!} \mu_3' + \ldots$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} M_x(\theta) = \mu_2' + \theta \mu_3' + \ldots$$

$$\frac{d^3}{d\theta^3} M_x(\theta) = \mu_3' + \ldots$$

....

....

Valuando estos derivados para $\theta = 0$ se obtiene, para el caso de la k-ésima derivada,

$$\text{I} \quad \boxed{\left. \frac{d^k}{d\theta^k} \; M_x(\theta) \right|_{\theta=0} = \mu'_k} \qquad (5.10)$$

o sea que el k-ésimo momento con respecto al origen de una variable aleatoria es igual a la k-ésima derivada de su función generatriz de momentos cuando su parámetro θ vale cero.

Otras propiedades de la función generatriz de momentos son:

$$\text{II} \quad \boxed{M_{c\,x}(\theta) = M_x(\theta c)} \qquad (5.11)$$

$$\text{III} \quad \boxed{M_{c+x}(\theta) = e^{\theta c} M_x(\theta)} \qquad (5.12)$$

en donde c es una constante. Las deducciones de estas dos propiedades son inmediatas de obtener de la definición de función generatriz de momentos (5.7)

Ejemplo 5.1 Calcular la media y variancia de la distribución binomial a partir de su función generatriz de momentos

La función de probabilidad de la distribución binomial es

$$P(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \; p^x q^{n-x}$$

por lo que su función generatriz de momentos será

$$M_x(\theta) = E(e^{\theta x}) = \sum_{x=0}^{n} e^{\theta x} P(x)$$

?

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{\theta x} \; \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \; p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \; (p\,e^{\theta})^x q^{n-x}$$

$$\therefore \quad M_x(\theta) = (p\,e^{\theta} + q)^n \qquad (5.13)$$

Las dos primeras derivadas de la función generatriz de momentos son:

$$\frac{dM}{d\theta} = n\,(p\,e^{\theta} + q)^{n-1}\, pe^{\theta}$$

$$\frac{d^2M}{d\theta^2} = n\,(n-1)\,(p\,e^{\theta} + q)^{n-2}\, p^2\, e^{2\theta} + n\,(pe^{\theta}+q)^{n-1}\, p\, e^{\theta}$$

de donde se obtienen, haciendo $\theta = 0$ y de acuerdo con (5.10), el primero y segundo momentos con respecto al origen de la variable aleatoria x con distribución binomial.

$$\mu'_1 = n\,(p+q)^{n-1}\, p$$

$$= np$$

$$\mu'_2 = n\,(n-1)\,(p+q)^{n-2}\, p^2 + n\,(p+q)^{n-1}\, p$$

$$= n\,(n-1)\, p^2 + np$$

$$= np\,(np-p+1)$$

A partir de estas expresiones y usando (2.33) y (2.44) se obtiene la media y la variancia de la distribución binomial:

$$\boxed{\mu_x = \mu'_1 = np}$$

$$\boxed{\sigma_x^2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2}$$

$$= np\,(np-p+1) - (np)^2$$

$$= np\,(np-p+1-np)$$

$$= np\,(-p+1)$$

$$= npq$$

Aplicaciones muy importantes se obtienen de la función generatriz de momentos a través de los siguientes teoremas:

[redacted] *Una distribución de probabilidad se determina en forma única cuando se conoce su función genera--*

triz de momentos,

[redacted] *Si una variable aleatoria asociada a las muestras depende del tamaño n de las mismas muestras, y tiene una función generatriz de momentos que se aproxima a la función generatriz de momentos de otra variable aleatoria, entonces la función de distribución de la primera debe aproximarse a la función de distribución de la segunda cuando $n \to \infty$*

La demostración de estos teoremas va más allá del alcance de esta obra. Por medio de ellos se puede demostrar la aproximación de la distribución normal a la binomial vista en el capítulo 3 y establecer las llamadas distribuciones estadísticas χ^2, t y F

Ejemplo 5.2 Demostrar que la distribución binomial tiende a la normal cuando el número de pruebas sucesivas e independientes de Bernoulli tiende a infinito.

En efecto, sea x una variable aleatoria con distribución binomial. Estandarizándola se tiene

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$$

Teniendo en cuenta las propiedades (5.11) y (5.12), y la función generatriz de momentos de x dada en (5.13), se obtiene que la función generatriz de momentos de z es:

$$\begin{aligned} M_z(\theta) &= M_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(\theta) \\ &= M_{x-\mu}\left(\frac{\theta}{\sigma}\right) \\ &= e^{-\mu\frac{\theta}{\sigma}} M_x\left(\frac{\theta}{\sigma}\right) \\ &= e^{-\mu\frac{\theta}{\sigma}} \left(p\, e^{\frac{\theta}{\sigma}} + q\right)^n \end{aligned}$$

Tomando logaritmos naturales a ambos miembros

$$L_n M_z(\theta) = -\frac{\mu\theta}{\sigma} + n\, L_n\left(p\, e^{\frac{\theta}{\sigma}} + q\right)$$

Desarrollando la exponencial en serie de potencias de θ/σ

$$L_n M_z(\theta) = -\frac{\mu\theta}{\sigma} + n\, L_n \left\{ p\left[1 + \left(\frac{\theta}{\sigma}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^3 + \ldots\right] + q \right\}$$

Como $p+q=1$ se tiene

$$L_n M_z(\theta) = -\frac{\mu\theta}{\sigma} + n\, L_n \left\{ 1 + p\left[\left(\frac{\theta}{\sigma}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^3 + \ldots\right] \right\}$$

Si se escoge un valor de n suficientemente grande, entonces $\sigma = \sqrt{npq}$ puede ser tan grande que para cualquier valor fijo de θ la suma encerrada en el paréntesis rectangular de la expresión anterior resulte ser menor que uno en valor absoluto. Representando con z el producto de p por esta suma, se tiene que para n suficientemente grande $|z| < 1$ y el logaritmo natural de $1+z$ se podrá expander en serie de potencias usando la expresión conocida

$$L_n(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots \quad , |z| < 1 \qquad (5.14)$$

Aplicando esta ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} L_n M_z(\theta) = -\frac{\mu\theta}{\sigma} + n \Big\{ p &\left[\left(\frac{\theta}{\sigma}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^3 + \ldots\right] - \\ &- \frac{p^2}{2}\left[\left(\frac{\theta}{\sigma}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^3 + \ldots\right]^2 + \\ &+ \frac{p^3}{3}\left[\left(\frac{\theta}{\sigma}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\theta}{\sigma}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{\sigma}\right)^3 + \ldots\right]^3 + \ldots \Big\} \end{aligned}$$

Agrupando los términos con las mismas potencias de θ

$$L_n M_z(\theta) = \left(-\frac{\mu}{\sigma} + \frac{np}{\sigma}\right)\theta + \left(\frac{np}{2!\sigma^2} - \frac{n\,p^2}{2\sigma^2}\right)\theta^2 + \left(\frac{np}{3!\sigma^3} - \frac{n\,p^2}{2!\sigma^3} + \frac{np^3}{3\sigma^3}\right)\theta^3 + \ldots$$

Como $\mu = np$ y $\sigma^2 = npq$, se tiene

$$L_n M_z(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 + \text{términos en } \theta^k, \quad k = 3,4,5,\ldots$$

Los términos en θ^k contienen como factor a

$$\frac{n}{\sigma^k} = \frac{n}{(npq)^{k/2}} = \frac{1}{n^{\frac{k}{2}-1}\,(pq)^{\frac{k}{2}}}$$

en donde $\frac{k}{2} - 1 > 0$ si $k > 3$. En consecuencia, si $n \to \infty$,
→ los términos en θ^k con $k = 3,4,5,\ldots$ tien$\underset{\hat{d}}{e}$s a cero, obteniéndose

$$\lim_{n\to\infty} L_n M_z(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$$

lo cual implica que

$$\lim_{n\to\infty} M_z(\theta) = e^{\frac{\theta^2}{2}} \qquad (5.15)$$

en donde $z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$ y x tiene distribución binomial

Por otra parte, si x es una variable aleatoria con distribución normal de media μ_x y desviación estándar σ_x, la función generatriz de momentos de la variable normal estándar

$$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

es

$$\begin{aligned} M_z(\theta) &= E(e^{\theta z}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta z} f(z)\, dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta z - \frac{z^2}{2}}\, dz \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \theta z - \frac{z^2}{2} &= -\frac{1}{2}(z^2 - 2\theta z) \\ &= -\frac{1}{2}(z^2 - 2\theta z + \theta^2) + \frac{1}{2}\theta^2 \\ &= -\frac{1}{2}(z-\theta)^2 + \frac{1}{2}\theta^2 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} M_z(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-\theta)^2 + \frac{1}{2}\theta^2}\, dz \\ &= \frac{e^{\frac{\theta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-\theta)^2}\, dz \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $t = z - \theta$, se obtiene

$$M_z(\theta) = \frac{e^{\frac{\theta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

en donde la integral vale $\sqrt{2\pi}$ de acuerdo con (3.26).

Por lo tanto

$$M_z(\theta) = e^{\frac{\theta^2}{2}} \qquad (5.16)$$

en donde z es normal estándar

Comparando (5.15) y (5.16), y de acuerdo a los dos teoremas antes establecidos, se concluye que la variable aleatoria $(x-np)/\sqrt{npq}$, en donde x tiene distribución binomial, tiende a la distribución normal estándar a medida que aumenta el número de pruebas de Bernoulli.

5.2 [redacted]

Considérese el espacio de muestras de tamaño n que se tiene en (5.1). Las muestras pueden ser con reemplazo o sin reemplazo y deben corresponder a un muestreo aleatorio como se definió en 5.1.2. Para cada una de las muestras del espacio, calcúlense un estadístico muestral, como puede ser la media de la muestra, su desviación estándar, etc. Se obtendrá un conjunto de valores observados para ese estadístico, el cual tendrá su propia distribución de probabilidad. A ésta se le llama la *distribución muestral del estadístico* o también la *distribución del estadístico de las muestras.*

En (5.17) aparece el espacio de muestras que se consideró en (5.1), y las medias y desviaciones estándar asociadas a cada muestra. Los conjuntos de medias y desviaciones estándar son, respectivamente, el *espacio de medias de las muestras* y el *espacio de desviaciones estándar de las muestras*

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1', x_2', x_3', \ldots, x_n' \\ x_1'', x_2'', x_3'', \ldots, x_n'' \\ x_1''', x_2''', x_3''', \ldots, x_n''' \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \boxed{\begin{array}{l|l} \bar{x}' & s' \\ \bar{x}'' & s'' \\ \bar{x}''' & s''' \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array}} \tag{5.17}$$

Se calculará a continuación la media $\mu_{\bar{x}}$ y la desviación estándar $\sigma_{\bar{x}}$ de la distribución de medias de las muestras. Teniendo en (5.17) el espacio de medias de las muestras $\{\bar{x}', \bar{x}'', \bar{x}''', \ldots\}$ se tendrá, para el caso de la media

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{x}} &= E\{\bar{x}\} \\ &= E\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\} \\ &= \frac{1}{n} E\{\sum_{i=1}^{n} x_i\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E\{x_i\} \end{aligned}$$

Pero

$$E\{x_i\} = E\{x\} = \mu_x$$

porque las características de la población y de las muestras deben ser las mismas por haber supuesto que el muestreo es aleatorio. Entonces

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{x}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_x \\ &= \frac{1}{n} n \mu_x \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mu_{\bar{x}} = \mu_x} \tag{5.18}$$

Esta expresión establece que *la media de la distribución de medias es igual a la media de la población*. Para la desviación estándar se tiene

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = E\{(\bar{x} - \mu_{\bar{x}})^2\}$$

Desarrollando $\bar{x}$ y sustituyendo (5.18):

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}}^2 &= E\{\left[\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n) - \mu_x\right]^2\} \\ &= E\{\frac{1}{n^2}\left[x_1+x_2+\ldots+x_n - n\mu_x\right]^2\} \\ &= \frac{1}{n^2} E\{\left[(x_1-\mu_x)+(x_2-\mu_x)+\ldots+(x_n-\mu_x)\right]^2\} \\ &= \frac{1}{n^2} E\{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i-\mu_x)(x_j-\mu_x)\} \end{aligned}$$

Como la esperanza matemática de una suma es igual a la suma de las esperanzas, se obtiene

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E\{(x_i-\mu_x)(x_j-\mu_x)\}$$

Recordando que las variables x_i y x_j son independientes cuando $i \neq j$ por tratarse de un muestreo aleatorio, se obtendrá, de acuerdo con (5.6), que para el caso de que $i \neq j$

$$E\{(x_i-\mu_x)(x_j-\mu_x)\} = E\{x_i-\mu_x\}E\{x_j-\mu_x\}$$

y como las características de la población y las muestras son las mismas $E\{(x_i-\mu_x)(x_j-\mu_x)\} = E\{x_i-\mu_{x_i}\}E\{x_j-\mu_{x_j}\}$ en donde se sabe que $E\{x_i-\mu_{x_i}\} = 0$. Luego

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E\{(x_i-\mu_{x_i})^2\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{x_i}$$

Insistiendo en el hecho de que las características de la población y de las muestras son iguales, se tiene que $\sigma^2_{x_i} = \sigma^2_x$, por lo que se obtiene finalmente que

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2_x$$

$$= \frac{1}{n^2}\, n\, \sigma^2_x$$

$$= \frac{1}{n}\, \sigma^2_x$$

y la relación entre las desviaciones estándar de la población y la de la distribución de medias de las muestras es

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \qquad (5.19)$$

Las relaciones (5.18) y (5.19) obtenidas entre los parámetros de la población y la distribución de medias *son independientes* de las distribuciones de probabilidad propias de la población y de las medias. En las secciones siguientes se establecerán las relaciones que existen no sólo entre los parámetros de las distribuciones, sino entre las funciones densidad de probabilidad de ellas.

En el caso de que la población de valores de la variable aleatoria x sea finita de tamaño N, y el muestreo sea sin reemplazo, la expresión (5.19) sufre un cambio que considera este tamaño de la población. Se obtiene

muestreo no aleatorio

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \qquad (5.20)$$

Para el caso de las medias, la relación (5.18) no se modifica por el hecho de ser finita la población y el muestreo ser sin reemplazo. ¿Por qué si el muestreo no es aleatorio? ¿$\sqrt{x_i} = \sqrt{x}$?

Ejemplo 5.3 Una población está formada por los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 (el número que queda en la cara de arriba al tirar al azar un dado)

a) Forme el espacio de muestras con reemplazo de tamaño dos → con repeticiones

b) Forme el espacio de medias de las muestras

c) Calcule la media y la desviación estándar de la distribución de medias

d) Compare la media y la desviación estándar de la distribución de medias con los parámetros correspondientes de la población

a) El espacio de muestras con reemplazo de tamaño dos está formado por todas las posibles parejas ordenadas que se pueden extraer de la población de dígitos 1,2,3,4,5 y 6, existiendo la posibilidad de repetir un dígito. El espacio resulta entonces ser:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

b) El espacio de medias de las muestras está formado por la media de cada pareja de números del espacio de muestras an terior. Se obtiene

1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0

c) La media y la desviación estándar de la población de 36 medias del espacio anterior son:

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{1}{36}(1.0+1.5+2.0+2.5+ \ldots + 6.0) = \frac{126}{36} = 3.5$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{36}\Big[(1.0-3.5)^2 + (1.5-3.5)^2 + (2.0-3.5)^2 + (2.5-3.5)^2 +$$

$$+ \ldots + (6.0-3.5)^2\Big]$$

$$= \frac{52.5}{36} = 1.458$$

$$\therefore \sigma_{\bar{x}} = 1.208$$

d) La media y desviación estándar de la población son:

$$\mu_x = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$\sigma^2_x = \frac{1}{6}\Big[(1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + (3-3.5)^2 + (4-3.5)^2 + (5-3.5)^2 + (6-3.5)^2\Big]$$

$$= \frac{17.5}{6} = 2.917$$

$$\therefore \sigma_x = 1.708$$

Comparando las medias y las desviaciones estándar calculadas en el inciso anterior y en éste se ve que

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad \therefore n = \text{Tamaño de la muestra}$$

$$1.208 = \frac{1.708}{\quad}$$

o sea que se comprueban las expresiones (5.18) y (5.19)

Ejemplo 5.4 Resolver el ejemplo anterior considerando que el muestreo es sin reemplazo

a) Ahora el espacio de muestras estará formado por las parejas situadas arriba de la diagonal principal del espacio muestral del ejemplo anterior

(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
		(3,4)	(3,5)	(3,6)
			(4,5)	(4,6)
				(5,6)

Pudieron considerarse también las parejas colocadas abajo de la diagonal principal, pero solo se estarían duplicando todas y cada una de las medias que a continuación se calculan

b) El espacio de medias de las muestras anteriores es:

1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
	2.5	3.0	3.5	4.0
		3.5	4.0	4.5
			4.5	5.0
				5.5

c) La media y la desviación estándar del espacio de medias de las muestras anteriores son:

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{1}{15}(1.5 + 2.0 + 2.5 + 3.0 + \ldots + 5.5) = \frac{52.5}{15} = 3.5$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{15}\Big[(1.5-3.5)^2 + (2.0-3.5)^2 + (2.5-3.5)^2 + (3.0-3.5)^2 +$$

$$+ \ldots + (5.5-3.5)^2\Big]$$

$$= \frac{17.5}{15} = 1.167$$

$$\therefore \sigma_{\bar{x}} = 1.080$$

d) Del ejemplo anterior se tiene que $\mu_x = 3.5$ y $\sigma_x = 1.708$. Comparando estos valores con los de $\mu_{\bar{x}}$ y $\sigma_{\bar{x}}$, respectivamente, se ve que se cumplen las expresiones (5.18) y (5.20)

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{6-2}{6-1}} \qquad 1.[illegible] = \frac{1.2080}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{6-2}{6-1}}$$

Ejemplo 5.5 En un grupo de Probabilidad y Estadística de 50 alumnos se desean seleccionar al azar a 5 de ellos. Mostrar la forma de hacer la selección de manera de hacer verdaderamente una selección al azar.

Como se indicó en el texto, la forma de obtener una muestra aleatoria en donde no intervenga la subjetividad del que la levanta, en este caso el profesor o los propios alumnos, es por medio de una tabla de números aleatorios.

En efecto, numerando a los alumnos del grupo del 01 al 50, se seleccionarán para que entren a la muestra aquellos que correspondan a los números aleatorios obtenidos de la tabla. Para esto se consulta la tabla de números aleatorios del Apéndice siguiendo algún sentido prefijado, como puede ser leyendo los números renglón por renglón a partir del primero. Se leen números con dos cifras para obtenerlos en el rango deseado de 01 a 50; los que se obtengan mayores de 50 se desprecian.

Efectuando lo antes descrito se obtiene que los alumnos seleccionados deben ser los què tienen los números [illegible], 14, [illegible], [illegible], 20, [illegible], 23, [illegible], [illegible], [illegible], 22 y 43.

Ejemplo 5.6 En el ejercicio 4.5 al final del capítulo anterior se tiene una tabla de frecuencias de los pesos de los vehículos que cruzan un vado. *Simular* un muestreo aleatorio para obtener una muestra de tamaño 20 de los pesos de los vehículos que pasan por el vado.

En la tabla 5.1 se reproduce la tabla de frecuencias completa del ejercicio 4.5, adicionada de las frecuencias acumuladas y de una sexta columna que a continuación se explica

Peso del Vehículo (toneladas)	*Marca de Clase*	*Frecuencia*	*Frecuencia acumulada*	*Frecuencia relativa acumulada*	*Número muestral*
1 - 5	2.5	10	10	0.135	01 - 10
5 - 10	7.5	15	25	0.338	11 - 25
10 - 15	12.5	28	53	0.716	26 - 53
15 - 20	17.5	12	65	0.878	54 - 65
20 - 25	22.5	7	72	0.973	66 - 72
25 - 30	27.5	2	74	1.000	73 - 74

Tabla 5.1 Tabla de frecuencias de los pesos de los vehículos que cruzan un vado

Con el fin de hacer la *simulación*, se supondrá que todos los vehículos que cruzan el vado tienen un número asignado que va del 01 al 74, ya que precisamente son 74 los vehículos registrados en la tabla de frecuencias 5.1. Además, y siendo consistente con las frecuencias mostradas en esa tabla, se supondrá que los vehículos numerados del 01 al 10 tienen un peso de 1 a 5 toneladas, los que tienen números del 11 al 25 pesaran de 5 a 10 toneladas, y así en seguida. Esta es la información que contiene la sexta columna de la tabla 5.1. Ahora, para llevar a cabo la simulación, se consultará la tabla de números aleatorios del Apéndice, leyéndola, por ejemplo, por columnas. Tomando los dos primeros dígitos de la primera columna de la tabla de números aleatorios, para obtener números del orden de los números muestrales de la tabla 5.1, y despreciando los números 00 y 75 a 99 que puedan presentarse, se obtiene la sucesión 57, 22, 46, 30, 07, 60, 16, 05, 29, ~~94~~, 52, 04, 26, ~~84~~, 52, 63, 06, 36, 60, 59, 14 y 43 (los dos últimos se obtuvieron de la segunda columna). El peso de los vehículos en la muestra simulada se obtienen viendo en la tabla 5.1 a que peso corresponde (marca de clase) el número muestral que se tiene en la secuencia anterior. Se obtianen los pesos 17.5, 7.5, 12.5, 12.5, 2.5, 17.5, 7.5, 2.5, 12.5, 12.5, 2.5, 12.5, 12.5, 17.5, 2.5, 12.5, 17.5, 17.5, 7.5, 12.5.

Otra forma tal vez mejor de hacer lo anterior consiste en dibujar el polígono de frecuencias relativas acumuladas (figura 5.1) y considerar a los números aleatorios de la tabla del Apéndice como decimales en el rango de 0 a 1 (simplemente anteponiendo a la derecha de cada columna el punto decimal). Se toma como ordenada cada uno de los números aleatorios, se traza una horizontal por esta ordenada hasta cruzar el polígono de frecuencias relativas acumuladas y se proyecta este punto al eje de las abscisas. Este será el peso del vehículo que entre en la muestra aleatoria simulada.

El procedimiento anterior cae dentro de lo que se llaman *Métodos de Montecarlo* y produce pesos de vehículos con la distribución de probabilidad (o empírica) que ellos tienen. Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 5.2

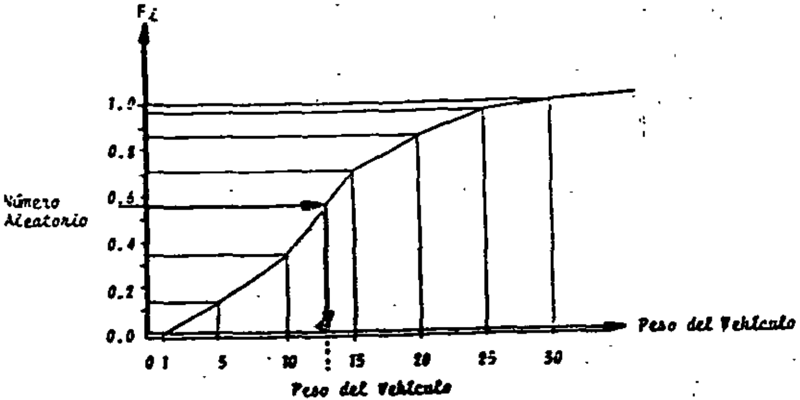


Figura 5.1 Polígono de frecuencias relativas acumuladas de los pesos de los vehículos que cruzan un vado

Número del Vehículo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Número Aleatorio	0.57	0.25	0.46	0.30	0.07	0.60	0.16	0.05	[illegible]	0.91	0.52	0.04	0.76	0.87	0.52	0.63	0.06	0.36	0.60	0.59
Peso del Vehículo	13.1	7.1	11.6	9.1	5.1	13.5	5.6	2.5	8.8	21.7	[illegible]	2.5	8.1	19.7	12.4	15.9	2.8	10.3	15.5	13.3

Tabla 5.2 Muestra simulada de los pesos de los vehículos que cruzan un vado (*Métodos de Montecarlo*)

5.3 DISTRIBUCION DE LAS MEDIAS DE LAS MUESTRAS

Se trata de determinar en esta sección cuál es la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\bar{x}$, asociada a las medias de las muestras aleatorias de tamaño n obtenidas de una población de valores de x.

Se iniciará el estudio determinando la función generatriz de momentos de la suma de las variables aleatorias independientes $x_1, x_2, \ldots x_n$ correspondientes a los diferentes elementos de una muestra aleatoria de tamaño n. Se tiene por definición de función generatriz de momentos que

$$M_{x_1+x_2+\ldots+x_n}(\theta) = E\{e^{\theta(x_1+x_2+\ldots+x_n)}\}$$

$$= E\{e^{\theta x_1} e^{\theta x_2} \ldots e^{\theta x_n}\}$$

Como las variables son independientes, se puede escribir, de acuerdo con (5.6), que

$$M_{x_1+x_2+\ldots+x_n}(\theta) = E\{e^{\theta x_1}\} E\{e^{\theta x_2}\} \ldots E\{e^{\theta x_n}\}$$

$$= M_{x_1}(\theta)\ M_{x_2}(\theta) \ldots M_{x_n}(\theta)$$

y como se sabe que en el muestreo aleatorio las características de la población y de las muestras son las mismas, $\boxed{M_{x_i}(\theta) = M_x(\theta)}$ luego

$$M_{x_1+x_2+\dots+x_n}(\theta) = \underbrace{M_x(\theta)\ M_x(\theta)\dots M_x(\theta)}_{n\ \textit{factores}}$$

$$= M_x^n(\theta)$$

En base a este resultado, y a la propiedad (5.11), se obtiene que la función generatriz de momentos de la media $\bar{x}$ de la muestra es

$$M_{\bar{x}}(\theta) = M_{\frac{1}{n}[x_1+x_2+\dots+x_n]}(\theta)$$

$$= M_{x_1+x_2+\dots+x_n}\left(\frac{\theta}{n}\right)$$

$$\therefore \boxed{M_{\bar{x}}(\theta) = M_x^n\left(\frac{\theta}{n}\right)} \qquad (5.21)$$

expresión que relaciona las funciones generatrices de momentos de las distribuciones de la media y de la población.

5.3.1 ***Población normal.*** Si la variable aleatoria x tiene distribución normal de media μ_x y desviación estándar σ_x, se sabe de (5.16) que la función generatriz de momentos de su variable estandarizada $z = (x-\mu_x)/\sigma_x$ es

$$\boxed{M_z(\theta) = M_{\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}}(\theta) = e^{\frac{\theta^2}{2}}}$$

de la func. gen. de mom.

por lo que, aplicando las propiedades (5.11) y (5.12), se obtiene

$$M_{x-\mu_x}(\theta) = e^{\frac{1}{2}(\theta\sigma_x)^2}$$

$$\boxed{M_x(\theta) = e^{\theta\mu_x + \frac{1}{2}\theta^2\sigma_x^2}} \qquad (5.22)$$

Esta es la función generatriz de momentos de la variable aleatoria x normal de media μ_x y desviación estándar σ_x. Sustituyendo (5.22) en (5.21)

$$M_{\bar{x}}(\theta) = \left[e^{\left(\frac{\theta}{n}\right)\mu_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{n}\right)^2\sigma_x^2}\right]^n$$

$$\therefore \boxed{M_{\bar{x}}(\theta) = e^{\theta\mu_x + \frac{1}{2}\theta^2\frac{\sigma_x^2}{n}}} \qquad (5.23)$$

que es la función generatriz de momentos de $\bar{x}$ cuando x es normal. Comparando las funciones generatrices de momentos de las variables x y $\bar{x}$ que se tienen en (5.22) y (5.23), se puede aceptar como cierto el siguiente teorema:

Teorema. *Si la variable aleatoria x asociada a una población tiene distribución normal de media μ_x y desviación estándar σ_x, entonces la variable aleatoria $\bar{x}$ asociada a la distribución de medias de las muestras también es normal de media $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ y desviación estándar $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{n}$.*

Obsérvese que el teorema es consistente con las relaciones que se conocían entre los parámetros de la población y de la distribución de medias de las muestras. Con respecto al teorema, cabe indicar que cuando la población es finita y el muestreo se realiza sin reemplazo, hay que incluir en la determinación de $\sigma_{\bar{x}}$ el valor del tamaño de la población, es decir, usar (5.20) en la definición de la desviación estándar de la distribución de medias de la muestra.

5.3.2 ***Población con cualquier distribución.*** Supóngase ahora que la variable aleatoria x, asociada a la población, tiene cualquier distribución de probabilidad de media μ_x y desviación estándar σ_x. Sea $\bar{z}$ la variable aleatoria estandarizada correspondiente a la distribución de medias de las muestras, o sea

$$\boxed{\bar{z} = \frac{\bar{x}-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu_x}{\sigma_x/\sqrt{n}}} \qquad (5.24)$$

La función generatriz de momentos de z es:

$$\boxed{M_z(\theta)} = M_{\frac{\bar{x}-\mu_x}{\sigma_x/\sqrt{n}}}(\theta)$$

$$= M_{\bar{x}-\mu_x}\left(\frac{\theta}{\sigma_x/\sqrt{n}}\right)$$

$$= e^{-\frac{\theta\mu_x}{\sigma_x/\sqrt{n}}}\, M_{\bar{x}}\left(\frac{\theta}{\sigma_x/\sqrt{n}}\right)$$

Pero por (5.21)

$$\downarrow$$

$$M_{\bar{x}}(\theta) = M_x^n\left(\frac{\theta}{n}\right)$$

luego

$$M_z(\theta) = e^{-\frac{\theta\sqrt{n}\,\mu_x}{\sigma_x}}\, M_x^n\left(\frac{\theta}{n\,\sigma_x/\sqrt{n}}\right)$$

$$= e^{-\frac{\theta\sqrt{n}\,\mu_x}{\sigma_x}}\, M_x^n\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}\,\sigma_x}\right)$$

Tomando logaritmos naturales a ambos miembros

$$L_n M_z(\theta) = -\frac{\theta\sqrt{n}\,\mu_x}{\sigma_x} + n\, L_n M_x\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}\,\sigma_x}\right)$$

pero por (5.9)

$$\downarrow$$

$$M_x(\theta) = 1+\theta\mu_1' + \frac{\theta^2}{2!}\mu_2' + \frac{\theta^3}{3!}\mu_3' + \dots$$

R. Brito

luego

$$L_n M_z(\theta) = -\frac{\theta\sqrt{n}\,\mu_x}{\sigma_x} + n\, L_n \underbrace{\left[1 + \frac{\theta}{\sqrt{n}\,\sigma_x}\mu_1' + \frac{1}{2!}\frac{\theta^2}{n\,\sigma_x^2}\mu_2' + \frac{1}{3!}\frac{\theta^3}{n^{3/2}\sigma_x^3}\mu_3' + \dots\right]}_{}$$

Si n es suficientemente grande, el contenido del paréntesis rectangular puede considerarse que es la suma de uno más algo que es menor que la unidad, por lo que se puede desarrollar usando (5.14). Se obtiene

$$L_n(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \dots ;\ |z|<1$$

$$L_n M_z(\theta) = -\frac{\theta\sqrt{n}\,\mu_x}{\sigma_x} + n\left[\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}\,\sigma_x}\mu_1' + \frac{1}{2!}\frac{\theta^2}{n\,\sigma_x^2}\mu_2' + \frac{1}{3!}\frac{\theta^3}{n^{3/2}\sigma_x^3}\mu_3' \dots\right) - \right.$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}\,\sigma_x}\mu_1' + \frac{1}{2!}\frac{\theta^2}{n\,\sigma_x^2}\mu_2' + \frac{1}{3!}\frac{\theta^3}{n^{3/2}\sigma_x^3}\mu_3' + \dots\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}\,\sigma_x}\mu_1' + \frac{1}{2!}\frac{\theta^2}{n\,\sigma_x^2}\mu_2' + \frac{1}{3!}\frac{\theta^3}{n^{3/2}\sigma_x^3}\mu_3' + \dots\right)^3 -$$

$$\left. - \dots\right]$$

Agrupando los términos con las mismas potencias de θ

$$L_n M_z(\theta) = \left[-\frac{\sqrt{n}\,\mu_x}{\sigma_x} + \frac{\sqrt{n}\,\mu_1'}{\sigma_x}\right]\theta + \left[\frac{\mu_2'}{2\,\sigma_x^2} - \frac{(\mu_1')^2}{2\,\sigma_x^2}\right]\theta^2 +$$

$$+ \left[\frac{\mu_3'}{6n^{1/2}\sigma_x^3} - \frac{\mu_1'\,\mu_2'}{2n^{1/2}\sigma_x^3} + \frac{(\mu_1')^3}{3n^{1/2}\sigma_x^3}\right]\theta^3 + \dots$$

Como $\mu_x = \mu_1'$ y $\sigma_x^2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$, se tendrá

$$L_n M_z(\theta) = \frac{\theta^2}{2} + \text{ términos en } \theta^k,\ k > 3$$

Los términos en θ^k, con $k > 3$, contienen potencias crecientes de n en el denominador. Por lo tanto, esos términos tienden a cero cuando $n \to \infty$. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} L_n M_z(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$$

lo cual implica que

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} M_z(\theta) = e^{\frac{\theta^2}{2}}} \qquad M_z(\theta) = e^{\frac{\theta^2}{2}} \tag{5.25}$$

Comparando (5.25) con (5.16), se ve que la función generatriz de momentos de la variable aleatoria estándar z, definida en (5.24), tiende a la función generatriz de momentos de la distribución normal estándar a medida que el tamaño de la muestra n aumenta.

El resultado anterior se puede expresar como:

Teorema. *Si x es una variable aleatoria con cualquier distribución de probabilidad de media μ_x y desviación estándar σ_x, para la cual existe su función generatriz de momentos, entonces la variable aleatoria $\bar{x}$ tiende asintóticamente a la distribución normal de media μ_x y desviación estándar $\sigma_x/\sqrt{n}$*

El teorema anterior recibe el nombre de *Teorema del límite central*. En el radica la importancia de la distribución normal, ya que basta con que el tamaño de las muestras sea suficientemente *grande* para poder asegurar la buena aproximación de la distribución de medias de la muestra a la distribución normal, independientemente de la propia distribución que tenga la población de donde se extraigan las muestras. En las aplicaciones comúnmente se toma el valor 30 como el límite inferior para considerar que una muestra es grande, y así garantizar la utilidad de la distribución normal en la resolución de problemas sobre las medias de las muestras.

Con los dos subincisos anteriores queda resuelto el problema de la distribución de probabilidad de las medias de las muestras, cuando éstas provienen de una población con distribución normal, y cuando provienen de una población con cualquier distribución de probabilidad y el tamaño de las muestras es grande. En ambos casos se recurre a la distribución normal como la distribución de las medias o como aproximación a la misma distribución, respectivamente. En esta obra no se analiza el caso de muestreos pequeños de poblaciones con distribución diferente de la normal.

Ejemplo 5.7 La vida útil de los focos fabricados por una empresa tiene distribución normal de media 200 horas y desviación estándar 25 horas. Calcular la probabilidad de que la duración media de 25 focos escogidos al azar sea superior a 208 horas.

De acuerdo al enunciado del problema, la población de las duraciones de los focos de la empresa tiene distribución normal de parámetros

$$\mu_x = 200 \text{ horas} \qquad y \qquad \sigma_x = 25 \text{ horas}$$

y puede considerarse que es de tamaño infinito. Entonces, la distribución de las medias de las muestras también tendrá distribución normal de parámetros:

$$n = 25 \text{ focos}$$

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x = 200 \text{ horas}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{25}} = 5 \text{ horas}$$

Estandarizando la variable aleatoria $\bar{x}$, se tiene

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - 200}{5}$$

Si $\bar{x} = 208$, $z = \dfrac{208 - 200}{5} = 1.6$

Por lo tanto, la probabilidad de que la media de los 25 focos de la muestra tenga un valor mayor a 208 horas valdrá:

$$\begin{aligned} P\{\bar{x} > 208\} &= P\{z > 1.6\} \\ &= 1 - P\{z \leq 1.6\} \\ &= 1 - 0.9452 \\ &= 0.0548 \end{aligned}$$

Sólo el 5.48% de los focos de la muestra tendrán una vida superior a las 208 horas; un solo foco.

Ejemplo 5.8 Los pesos de 600 ejes producidos en un torno tienen distribución normal de media 53 kg y desviación estándar de 2.5 kg. Estos se empacan en cajas de 10, las que soportan hasta 540 kg de peso. Si se envían 35 de estas cajas, calcular cuántas cajas cabe esperar se rompan por exceso de peso.

La población de pesos de los ejes tiene distribución normal de acuerdo al enunciado explícito del problema. Sus parámetros son:

$$N = 600\ , \quad \mu_x = 53 \text{ kg} \quad , \quad \sigma_x = 2.5 \text{ kg}$$

Como la población es normal, la distribución de medias de las muestras también es normal, y sus parámetros valen:

$$n = 10$$

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x = 53 \text{ kg}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{2.5}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{600 - 10}{600 - 1}} = 0.785 \text{ kg}$$

Una caja de ejes se romperá por exceso de peso, si el peso conjunto de los 10 ejes es mayor de 540 kg; y el peso conjunto de los 10 ejes es mayor de 540 kg si el peso medio de los 10 ejes es superior a 540/10 = 54 kg. Entonces, se trata de calcular cuántas de las 35 muestras tienen media mayor de 54 kg, lo que se hará por medio del calculo de la probabilidad $P\{\bar{x} > 54\}$, en donde $\bar{x}$ tiene distribución normal de media 53 y desviación estándar 0.785. Estandarizando $\bar{x}$, se tiene

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - 53}{0.785}$$

Si $\bar{x} = 54$, $z = \dfrac{54 - 53}{0.785} = 1.274$

$$\text{Por lo tanto,}\quad \begin{aligned} P\{\bar{x} > 54\} &= P\{z > 1.274\} \\ &= 1 - P\{z \leq 1.274\} \\ &= 1 - 0.8987 \\ &= 0.1013 \end{aligned}$$

El 10.13% de las 35 cajas se romperán, o sea, de 3 a 4 cajas.

Ejemplo 5.9 Los tabiques comprimidos que se usan en una construcción tienen un peso medio de 5.50 kg y una desviación estándar de 0.85 kg. Estos se elevan en lotes al lugar en donde se emplean por medio de un pequeño malacate cuyo límite de seguridad es de 200 kg. Calcular el tamaño máximo de los lotes de manera de que la probabilidad de exceder el límite de seguridad del malacate sea menor de 5%.

Como en el ejemplo anterior, se vuelve a tener una población de pesos de parámetros

$$\mu_x = 5.50 \text{ kg} \quad \text{y} \quad \sigma_x = 0.85 \text{ kg}$$

con distribución de probabilidad desconocida. La simple comparación entre el peso de un tabique y el límite de seguridad del malacate, hace que los lotes de tabiques que se cargan den muestras de tamaño grande. Esto permite asegurar que la distribución de medias de las muestras de pesos de los tabiques es aproximadamente normal de parámetros

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x = 5.50 \text{ kg}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{0.85}{\sqrt{n}}$$

en donde sólo se sabe que n es grande (mayor de 30).

El peso de la muestra de n tabiques exceda el límite de seguridad del malacate de 200 kg, si la media de la muestra es superior a 200/n. La probabilidad de que esto ocurra será menor del 5% si se cumple que

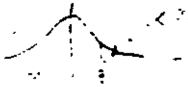
$$P\left(\bar{x} > \frac{200}{n}\right) < 0.05$$

Estandarizando $\bar{x}$ resulta

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - 5.50}{0.85/\sqrt{n}}$$

Si $\bar{x} = \frac{200}{n}$, $z = \frac{200/n - 5.50}{0.85/\sqrt{n}}$

$$= \frac{200 - 5.50\,n}{0.85\,\sqrt{n}}$$



Entonces la probabilidad anterior queda como

$$P\left(z > \frac{200 - 5.50n}{0.85\,\sqrt{n}}\right) < 0.05$$

o lo que es lo mismo

$$P\left(z \leq \frac{200 - 5.50n}{0.85\,\sqrt{n}}\right) \geq 0.95$$

De la tabla A.3 del Apéndice del capítulo 3 se obtiene que esta probabilidad es efectivamente mayor de 0.95 si el valor crítico de z es mayor o igual a 1.645. Luego se obtiene

$$\frac{200 - 5.50n}{0.85\,\sqrt{n}} \geq 1.645$$

$$200 - 5.50n \geq 1.398\,\sqrt{n}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado

$$40000 - 2200\,n + 30.25\,n^2 \geq 1.955\,n$$

$$30.25\,n^2 - 2201.955\,n + 40000 \geq 0$$

Resolviendo la ecuación se obtienen las raíces 34.86 y 37.93. La primera de las raíces corresponde al valor crítico +1.545 de z y la segunda al valor crítico -1.645 incluido al elevar al cuadrado la ecuación. Además, los valores menores a la primera raíz producen valores mayores de cero en el polinomio de la última ecuación, por lo que las raíces de la desigualdad serán

$$n \leq 34.86$$

Como estas raíces representan el tamaño de la muestra, y se desea que esta sea lo más grande posible, se concluye que los lotes de tamaño máximo deben ser de 34 tabiques para asegurar que la probabilidad de exceder el límite de seguridad del malacate sea menor del 5%

5.4 DISTRIBUCIONES DE LAS SUMAS Y DIFERENCIAS DE LAS MEDIAS DE LAS MUESTRAS

Sean x_1 y x_2 dos variables aleatorias asociadas a dos poblaciones independientes. Las medias y desviaciones estándar de las poblaciones son μ_1, σ_1 y μ_2, σ_2, respectivamente. Supóngase que se obtienen de las poblaciones muestras aleatorias de tamaño n_1 y n_2, respectivamente, y de estas muestras se determinan sus medias $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$, también respectivamente. Se tratan de obtener los parámetros media y desviación estándar de las distribuciones de las sumas y de las diferencias de las medias de las dos muestras.

En efecto, para la media de la variable aleatoria $\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2$ se tiene:

$$\mu_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2} = E\{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2\}$$

$$= E\{\bar{x}_1\} \pm E\{\bar{x}_2\}$$

$$\therefore \mu_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} \pm \mu_{\bar{x}_2} \qquad (5.26)$$

Teniendo en cuenta (5.18) se obtiene que la media de las distribuciones de las sumas y de las diferencias de las medias de las muestras son, respectivamente, la suma y la diferencia de las medias de las poblaciones de donde se obtuvieron las muestras:

$$\boxed{\mu_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2} = \mu_1 \pm \mu_2 \quad \mu_{x_1} \pm \mu_{x_2}} \qquad (5.27)$$

Para la variancia se tiene:

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2} = E\{(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2 - \mu_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2})^2\}$$

por (5.26)

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2} = E\{\left[(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2) - (\mu_{\bar{x}_1} \pm \mu_{\bar{x}_2})\right]^2\}$$

$$= E\{\left[(\bar{x}_1 - \mu_{\bar{x}_1}) \pm (\bar{x}_2 - \mu_{\bar{x}_2})\right]^2\}$$

$$= E\{(\bar{x}_1 - \mu_{\bar{x}_1})^2 + (\bar{x}_2 - \mu_{\bar{x}_2})^2 \pm 2(\bar{x}_1 - \mu_{\bar{x}_1})(\bar{x}_2 - \mu_{\bar{x}_2})\}$$

$$= E\{(\bar{x}_1 - \mu_{\bar{x}_1})^2\} + E\{(\bar{x}_2 - \mu_{\bar{x}_2})^2\} \pm 2E\{(\bar{x}_1 - \mu_{\bar{x}_1})(\bar{x}_2 - \mu_{\bar{x}_2})\}$$

$$= \sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2} \pm 2E\{(\bar{x}_1 - \mu_{\bar{x}_1})(\bar{x}_2 - \mu_{\bar{x}_2})\}$$

Como las variables aleatorias $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son independientes, se tiene por (5.6) que

$$E\{(\bar{x}_1 - \mu_{\bar{x}_1})(\bar{x}_2 - \mu_{\bar{x}_2})\} = E\{\bar{x}_1 - \mu_{\bar{x}_1}\} E\{\bar{x}_2 - \mu_{\bar{x}_2}\} = 0$$

Por lo tanto

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2} = \sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}$$

y teniendo en cuenta (5.19) se llega finalmente a

$$\boxed{\sigma^2_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

por lo que las desviaciones estándar de las distribuciones de las sumas y las diferencias de las medias de las muestras son

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad (5.28)$$

Cuando las poblaciones son finitas y los muestreos se realizan sin reemplazo, en la expresión anterior hay que incluir factores de corrección semejantes a los que se tienen en (5.20)

Para establecer la distribución de probabilidad de las variables aleatorias $\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2$, se consideran los mismos casos vistos en la distribución de medias de las muestras, o sea, poblaciones normales y muestras grandes. Si las poblaciones de valores de x_1 y x_2 son normales, la función generatriz de momentos de $\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2$ resulta ser:

$$M_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2}(\theta) = E\{e^{\theta(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)}\}$$

$$= E\{e^{\theta \bar{x}_1} \cdot e^{\pm \theta \bar{x}_2}\}$$

Como las variables aleatorias $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ son independientes, de (5.6) se obtiene que:

$$M_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2}(\theta) = E\{e^{\theta \bar{x}_1}\} E\{e^{\pm \theta \bar{x}_2}\}$$

$$= M_{\bar{x}_1}(\theta)\, M_{\bar{x}_2}(\pm\theta)$$

Teniendo en cuenta (5.23) fgm de $\bar{x}$

$$M_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2}(\theta) = e^{\theta\mu_1 + \frac{1}{2}\theta^2\frac{\sigma_1^2}{n_1}}\, e^{\pm\theta\mu_2 + \frac{1}{2}\theta^2\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$= e^{\theta(\mu_1 \pm \mu_2) + \frac{1}{2}\theta^2\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}$$

de donde se obtiene, volviendo a considerar (5.23), que las variables aleatorias $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ tienen distribuciones normales de medias $\mu_1 \pm \mu_2$ y desviación estándar $\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$ siempre que las poblaciones sean normales.

Siguiendo un procedimiento del todo semejante al recorrido para establecer la tendencia de la distribución de $\bar{x}$ cuando x tiene cualquier distribución de probabilidad y las muestras aleatorias son grandes, se obtiene que aquí también $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ tiende asintóticamente a la distribución normal cuando los tamaños n_1 y n_2 de las muestras son grandes.

Ejemplo 5.10 Dos poblaciones están formadas por los dígitos 1,3 y 5, y por 2 y 4, respectivamente.

a) Construya los espacios de muestras con reemplazo de tamaño 2 de las dos poblaciones

b) Construya los espacios de medias de las muestras de las dos poblaciones

c) Construya los espacios de sumas y diferencias de las medias de las muestras de las dos poblaciones

d) Calcule las medias y desviaciones estándar de las distribuciones de las sumas y diferencias de las medias de las muestras de las dos poblaciones

a) Formando todas las ordenanciones con repetición de los dígitos 1,3 y 5 de orden dos, se obtiene el espacio de muestras con reemplazo de tamaño dos de la primera población:

(1,1)	(1,3)	(1,5)
(3,1)	(3,3)	(3,5)
(5,1)	(5,3)	(5,5)

En igual forma, para la segunda población se obtiene:

(2,2)	(2,4)
(4,2)	(4,4)

b) las medias respectivas de cada muestra de los espacios muestrales anteriores son:

1	2	3
2	3	4
3	4	5

y

2	3
3	4

c) El espacio de sumas de las medias de las muestras de las dos poblaciones se obtiene sumando a cada media del primer espacio de medias, cada uno de los elementos del segundo espacio de medias de las muestras:

1+2	1+3	2+2	2+3	3+2	3+3
1+3	1+4	2+3	2+4	3+3	3+4
2+2	2+3	3+2	3+3	4+2	4+3
2+3	2+4	3+3	3+4	4+3	4+4
3+2	3+3	4+2	4+3	5+2	5+3
3+3	3+4	4+3	4+4	5+3	5+4

=

3	4	4	5	5	6
4	5	5	6	6	7
4	5	5	6	6	7
5	6	6	7	7	8
5	6	6	7	7	8
6	7	7	8	8	9

Para las diferencias de medias de las muestras resulta el espacio:

-1	-2	0	-1	1	0
-2	-3	-1	-2	0	-1
0	-1	1	0	2	1
-1	-2	0	-1	1	0
1	0	2	1	3	2
0	-1	1	0	2	1

d) Representando con x_1 y x_2 a las variables aleatorias asociadas a las dos poblaciones consideradas, y con $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ a las medias de sus muestras respectivas, se obtiene, de los espacios muestrales del inciso anterior, que las distribuciones de probabilidad de las variables $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ y $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ son:

$\bar{x}_1 + \bar{x}_2$	3	4	5	6	7	8	9
$P(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$	1/36	4/36	8/36	10/36	8/36	4/36	1/36

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$	1/36	4/36	8/36	10/36	8/36	4/36	1/36

Sus parámetros valen:

$$\mu_{\bar{x}_1 + \bar{x}_2} = 3\left(\frac{1}{36}\right) + 4\left(\frac{4}{36}\right) + 5\left(\frac{8}{36}\right) + 6\left(\frac{10}{36}\right) + 7\left(\frac{8}{36}\right) + 8\left(\frac{4}{36}\right) + 9\left(\frac{1}{36}\right)$$

$$= 6$$

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 + \bar{x}_2} = (3-6)^2\frac{1}{36} + (4-6)^2\frac{4}{36} + (5-6)^2\frac{8}{36} + (6-6)^2\frac{10}{36} +$$

$$+(7-6)^2\frac{8}{36} + (8-6)^2\frac{4}{36} + (9-6)^2\frac{1}{36}$$

$$= 1.833$$

$$\sigma_{\bar{x}_1 + \bar{x}_2} = \sqrt{1.833}$$

$$= 1.354$$

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = -3\left(\frac{1}{36}\right) - 2\left(\frac{4}{36}\right) - 1\left(\frac{8}{36}\right) + 0\left(\frac{10}{36}\right) + 1\left(\frac{8}{36}\right) + 2\left(\frac{4}{36}\right) + 3\left(\frac{1}{36}\right)$$

$$= 0$$

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = (-3-0)^2\frac{1}{36} + (-2-0)^2\frac{4}{36} + (-1-0)^2\frac{8}{36} + (0-0)^2\frac{10}{36} +$$

$$+(1-0)^2\frac{8}{36} + (2-0)^2\frac{4}{36} + (3-0)^2\frac{1}{36}$$

$$= 1.833$$

$$\sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{1.833}$$

$$= 1.354$$

Observese que las poblaciones tienen por parámetros a:

$$\mu_{x_1} = \frac{1+3+5}{3} = 3 \qquad \mu_{x_2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{\frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3}} \qquad \sigma_{x_2} = \sqrt{\frac{(2-3)^2 + (4-3)^2}{2}}$$

$$= 1.633 \checkmark \qquad = 1$$

de donde se ve que se verifican las expresiones

$$\mu_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2} = \mu_1 \pm \mu_2 \quad = 3 + 3 = 6$$

$$\sigma_{\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad = \sqrt{\frac{1.633^2}{2} + \frac{1^2}{2}} = 1.354$$

Ejemplo 5.11 Se tiene un barcaza para cruzar vehículos un río. En la proa de la barcaza se embarcan

20 automóviles y en la popa otros 20. Los pesos de la población de automóviles tienen distribución normal de media 1.5 toneladas y desviación estándar 0.3 toneladas. Si la diferencia en cargas en las dos partes de la barcaza es mayor de 5 toneladas, motivará una inclinación de la barcaza que pone en peligro su estabilidad. Calcular la probabilidad que ocurra ésto.

$|20\bar{x} - 20\bar{x}_2| > 5$

Sean x_1 y x_2 las variables aleatorias asociadas a los pesos de los automóviles en la proa y en la popa de la barcaza, respectivamente. Estas variables tienen distribuciones normales de parámetros:

$$\mu_{x_1} = 1.5 \text{ toneladas} \qquad \mu_{x_2} = 1.5 \text{ toneladas}$$

$$\sigma_{x_1} = 0.3 \text{ toneladas} \qquad \sigma_{x_2} = 0.3 \text{ toneladas}$$

En la proa se tiene una muestra de tamaño $n_1 = 20$ de valores x_1 y en la popa otra muestra de tamaño $n_2 = 20$ de valores de x_2. Las diferencias de las medias de las muestras de las dos poblaciones tienen distribución de probabilidad normal por ser normales las poblaciones. Los parámetros de la distribución de diferencias de las medias son:

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_{x_1} - \mu_{x_2}$$

$$= 1.5 - 1.5$$

$$= 0 \text{ toneladas}$$

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{x_1}}{n_1} + \frac{\sigma^2_{x_2}}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.3^2}{20} + \frac{0.3^2}{20}}$$

$$= 0.095 \text{ toneladas}$$

Para que se ponga en peligro la estabilidad de la barcaza se requiere que la diferencia en valor absoluto de los pesos cargados en la proa y en la popa sea mayor de 5 toneladas. Esto ocurre si $|20\ \bar{x}_1 - 20\ \bar{x}_2| > 5$, o lo que es lo mismo, $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > 5/20$. Para calcular la probabilidad de que esto ocurra, se debe estandarizar la variable aleatoria $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$. Se obtiene:

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

$$= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 0}{0.095}$$

Si $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 5/20$, $z = \dfrac{5/20 - 0}{0.095}$

$$= 2.635$$

Entonces

$$P\,[|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > 5/20] = P\,(|z| > 2.635)$$

$$= P\,(z < -2.635) + P(z > 2.635)$$

$$= 2P\,(z > 2.635)$$

$$= 2\left[1 - P(z \leq 2.635)\right]$$

$$= 0.0085$$

Ejemplo 5.12 En el equipo de atletismo de una universidad se tienen cuatro corredores de 100 metros. Los tiempos en que cada uno de ellos recorre los 100 metros tienen distribuciones normales de media 11.00, 10.95, 11.05 y 10.63 segundos y desviación estándar 0.03, 0.04, 0.04 y 0.02 segundos, respectivamente. Si los cuatro corredores participan en una carrera de relevos de 4X100, calcular la probabilidad de que rompan la marca de los 43.5 segundos.

Si se asocia a los tiempos de recorrido de los corredores las variables aleatorias x_1, x_2, x_3 y x_4, sus parámetros descriptivos son:

$$\mu_{x_1} = 11.00 \qquad \sigma_{x_1} = 0.03$$

$$\mu_{x_2} = 10.95 \qquad \sigma_{x_2} = 0.04$$

$$\mu_{x_3} = 11.05 \qquad \sigma_{x_3} = 0.04$$

$$\mu_{x_4} = 10.63 \qquad \sigma_{x_4} = 0.02$$

Como la probabilidad pedida es en una sola carrera, se tendrán muestras de tamaño uno para cada variable aleatoria, y se tratará de calcular el valor de $P(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 < 43.5)$, en donde $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$ es una variable con distribución normal (por serlo las poblaciones) de media y desviación estándar dadas por

$$\mu_{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4} = \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \mu_{x_3} + \mu_{x_4}$$

$$= 11.00 + 10.95 + 11.05 + 10.63$$

$$= 43.63 \text{ segundos}$$

$$\sigma_{x_1+x_2+x_3+x_4} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{x_1}}{n_1} + \frac{\sigma^2_{x_2}}{n_2} + \frac{\sigma^2_{x_3}}{n_3} + \frac{\sigma^2_{x_4}}{n_4}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.03^2}{1} + \frac{0.04^2}{1} + \frac{0.04^2}{1} + \frac{0.02^2}{1}}$$

$$= 0.067$$

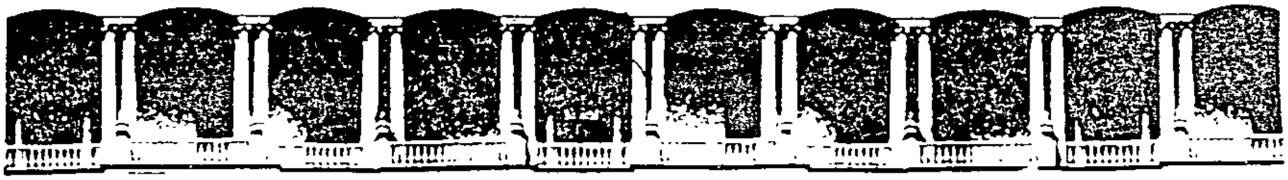
Entonces

$$P(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 < 43.5) = P\left(z < \frac{43.5 - 43.63}{0.067}\right)$$

$$= P(z < -1.938)$$

$$= 1 - P(z < 1.938)$$

$$= 0.0263$$



FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS ABIERTOS

"DIPLOMADO EN SISTEMAS DE CALIDAD EN INGENIERÌA DE PROYECTO Y CONSTRUCCIÒN"

MODULO I
CONTROL DE CALIDAD DE MATERIALES Y OBRAS

PARTE I

MÈTODOS ESTADÌSTICOS PARA EL CONTROL DE CALIDAD

TEMA

HERRAMIENTAS ESTADÌSTICAS

EXPOSITOR : M. en I. Roberto Oriol López

Palacio de Mineria Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtemoc 06000 México, D F APDO Postal M-2285
Telefonos 512-8955 512-5121 521-7335 521-1987 Fax 510-0573 521-4020 AL 26

Análisis de Pareto

Revisión General

- Proposito
  - Separar lo poco vital de lo mucho trvial
  - Se dice que el 80 % de los defectos vienen del 20 % de las causas
  - Auxilia a dirigir el trabajo donde se pueda hacer la mayor mejora

Revisión General

- Uso:
  - Se utiliza una grafica de barras para proporcionar una ilustracion facil de leer de los datos
  - Los datos se ordenan de manera descendiente del de mayor ocurrencia al de menor ocurrencia
  - Las categorias de mayor ocurrencia pueden no ser las de mayor importancia cuando se considera el costo.

Terminos Clave

- Eje X = linea horizontal en la grafica de barras
- Eje Y = linea vertical en la grafica de barras

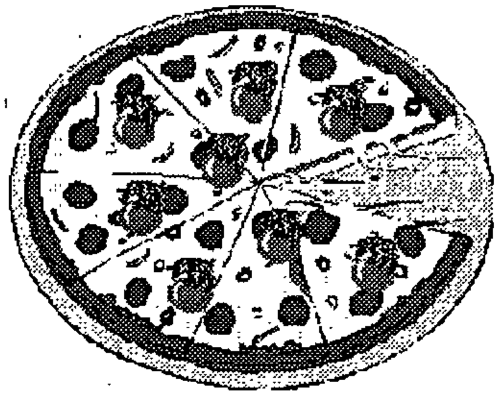
Historia

- El análisis de Pareto se basa en el principio que establece que la mayoria de los efectos son resultados de pocas causas.
- Vilfredo Pareto, economista italiano del siglo 18.
- La mayor parte de la riqueza se concentraba en un pequeño grupo de personas

Historia

- Encontro un radio de 80:20
- Esta idea se extrapolo a los pocos vitales y muchos triviales por uno de los fundadores de la mejora de la calidad, Joseph Juran
- En la actualidad esta idea se conoce como la regla 80:20 o principio de Pareto

Ejemplo (La Pizzeria Norma)



- Decidir sobre que tema se dea conocer mas
  - Norma Prziosi fundo la Pizzeria Norma hace 3 años. Ella ha disfrutado un éxito moderado, pero cree que el llevar a cabo una investigacion con sus clientes en referencia a la calidad de sus pizzas le podria proporcionar la suficiente información para mejorar las ventas

Ejemplo

- Escojanse las categorias que seran monitoreadas y comparadas
- Una de las preguntas en la investigacion requeria del consumidor la mencion de su mayor descontento acerac de las pizzas o del servicio. Las quejas recibidas fueron:

Ejemplo

- Mucha salsa
- Poco queso
- Lo dorado demasiado duro
- Servicio tardado
- Mala mezcla de los ingredientes adicionales

Ejemplo

- Escojase una unidad de medida significativa como la frecuencia
  - Norma siente que la frecuencia de cada respuesta puede ser importante.

Ejemplo

- Elijase un tiempo de periodo de estudio que sea lo suficientemente largo para representar la situación.
  - Norma quiere los resultados en una forma periodica, de tal manera que ella coloco los formatos en su restaurante y planea coleccionarlos a lo largo de un periodo de dos semanas. Ella ofrecio cupones de 20% de descuento para los participantes.

Ejemplo

- Agrupense los datos en cada categoria y comparese la frecuencia relativa de cada categoria.
  - Norma calculo el numero de quejas. Sus resultados fueron:

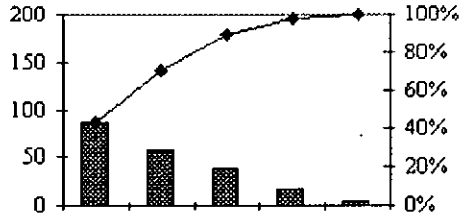
Demasiada salsa	16
Poco queso	38
Lo dorado demasiado duro	87
Servicio tardado	5
Mala mezcla	56

Ejemplo

- Listense las categorias en el eje X en orden descendiente
  - Norma coloco las categorias en orden descendiente según su frecuencia y las coloco en el eje X de una grafica de barras
- Listense las frecuencias en el eje Y.
  - Norma listo las frecuencias en el eje Y, Se aseguro que la escala pudiera incluir el numero maximo de quejas

Ejemplo

- Grafiquense las frecuencia de cada categoria



Muestreo de Inspección

- Es una técnica estadística de calidad usada para decidir entre aceptar o rechazar el envío de un insumo o de un producto determinado

Muestreo por Inspección

- Considerar:
  - Cantidad de productos defectuosos.
  - Fracción defectuosa aceptable.
- Para determinar:
  - Cantidad de muestras a extraer
  - Nivel de aceptación o rechazo
- Para llevar a cabo el muestreo por inspección.

Plan de Muestreo

- Un plan de muestreo de inspección especifica el numero de unidades a muestrear y el numero de unidades de la muestra que deben cumplir con las especificaciones para que el envío sea aceptado.

Problemas de la Inspección Total

- Resulta casi imposible
- Disminución de atención a factores críticos
- Cantidad limitada de inspectores
- Lo importante es determinar cuantas características se inspeccionaran y que método de inspección habrá de adoptarse

Situaciones en que es necesaria el Muestreo por Inspección

- Pruebas Destructivas
  - Cuando es imposible efectuar la inspección sin destruir química o físicamente el producto.
- Inspección de productos de gran longitud
  - una bobina de alambre de cobre, una película fotográfica, un rollo de papel, un carrete de hilo, etc...., son difíciles de desenrollar para su inspección.

Situaciones en que es necesaria el Muestreo por Inspección

- Inspección de grandes cantidades
    - Las tuercas, los tornillos, los balones, etc...., que se fabrican en grandes cantidades y a alta velocidad.

También se utiliza en las siguientes condiciones

- Cuando se desean bajar los costos de inspección
- Cuando se desea incentivar al fabricante y/o al comprador
- Cuando hay muchos rubros o áreas a inspeccionar

Calidad del Lote

- Si el tamaño del lote es de 1000 (N=1000)
- Fracción defectuosa del 5 por ciento (p=5%)
- Si inspeccionamos 10 muestras de n=10
- ¿Qué pasara?

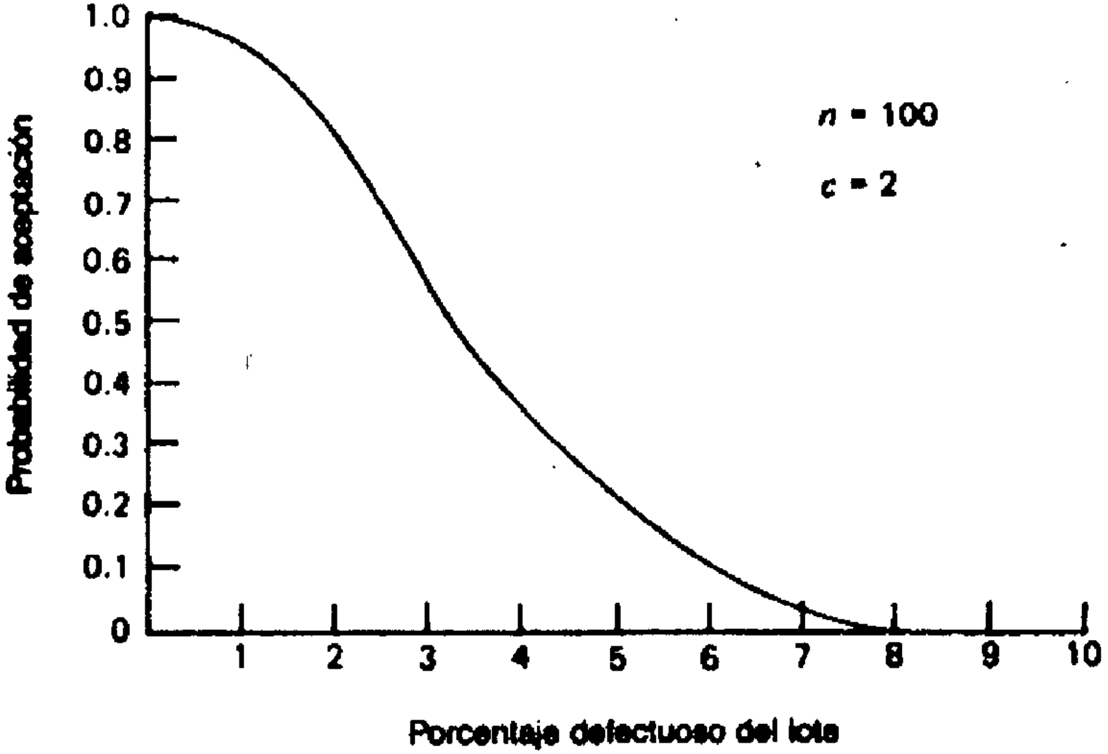
Curvas OC (de características de funcionamiento) y muestreo de aceptación

- Si, n=100, c=2 y N=1000
- ¿Probabilidad de aceptación?
- Mediante la distribución de Poisson
- Se aceptara el lote si : # de defectuosos≤2

Probabilidad de Aceptación

- porcentaje de veces sin productos defectuosos entre las muestras + porcentaje de veces con un producto defectuoso entre las muestras + porcentaje de veces con dos productos defectuosos entre las muestras

Curva OC


1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
Probabilidad de aceptación
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Porcentaje defectuoso del lote
n = 100
c = 2

Simbología

- p_o : límite superior para la fracción defectuosa aceptable de un lote.
- p_1 : límite inferior para la fracción defectuosa rechazable de un lote
- α : riesgo del productor (porcentaje según el cual se rechazaria un lote con fracción defectuosa po)
- β : riesgo del consumidor (porcentaje según el cual se aceptaría un lote con fraccion defectuosa p1)

P_o

- Fracción defectuosa de un lote producido con el equipo, los trabajadores, los materiales y los métodos actuales, cuya aceptación el productor requiere de los consumidores y que éstos, por su parte, consideran razonable.

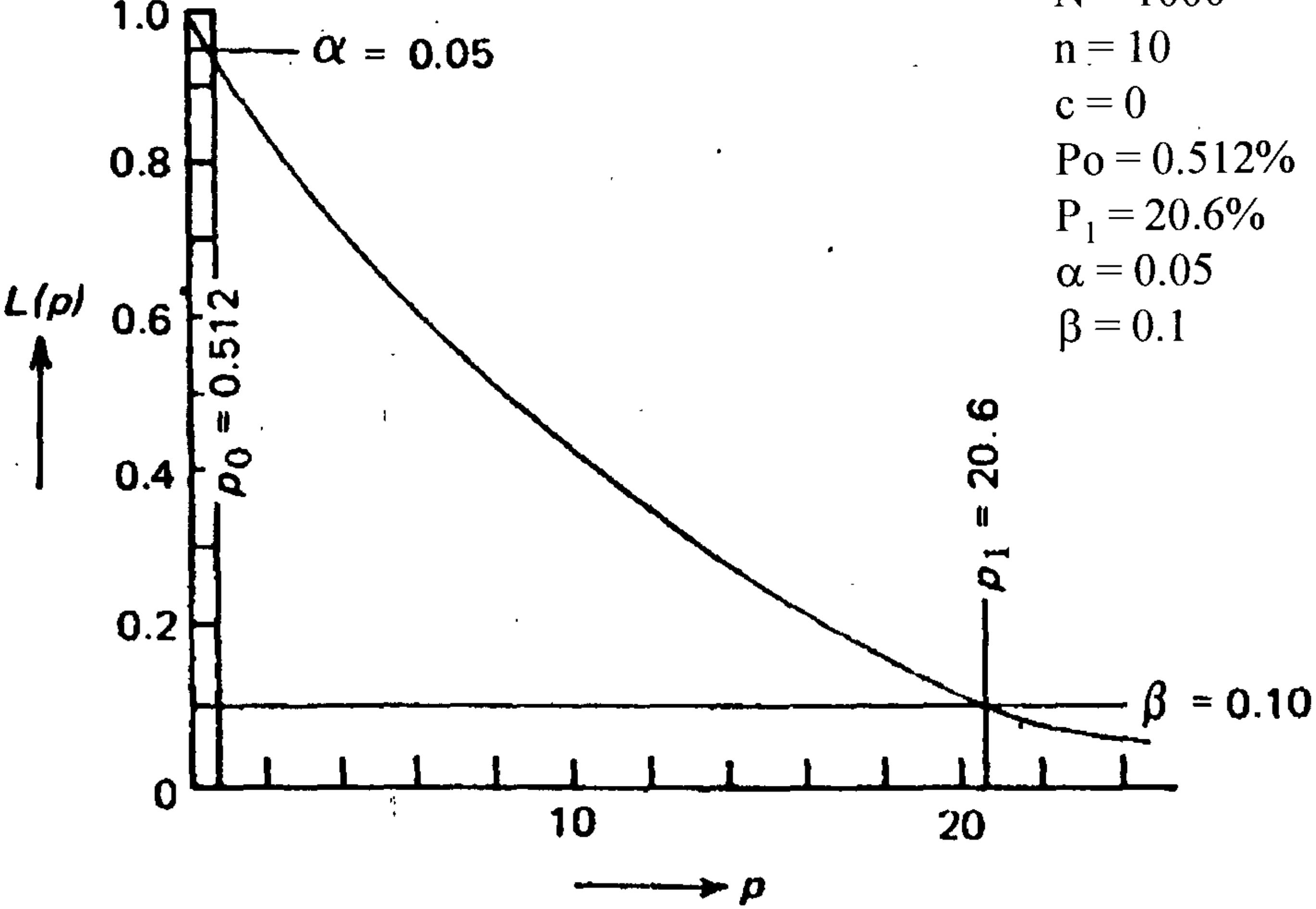
P_1

- Fracción defectuosa de un lote que los consumidores desearían rechazar por mala calidad y que el productor no desearía distribuir.

α y β

- Sin embargo, a veces se rechazan lotes aceptables o se aceptan lotes imperfectos.
- Rechazar lotes aceptables, riesgo del productor (α)
- Aceptar lotes imperfectos, riesgo del consumidor (β)
- En general: α =0.05 y β = 0.1

Curva OC



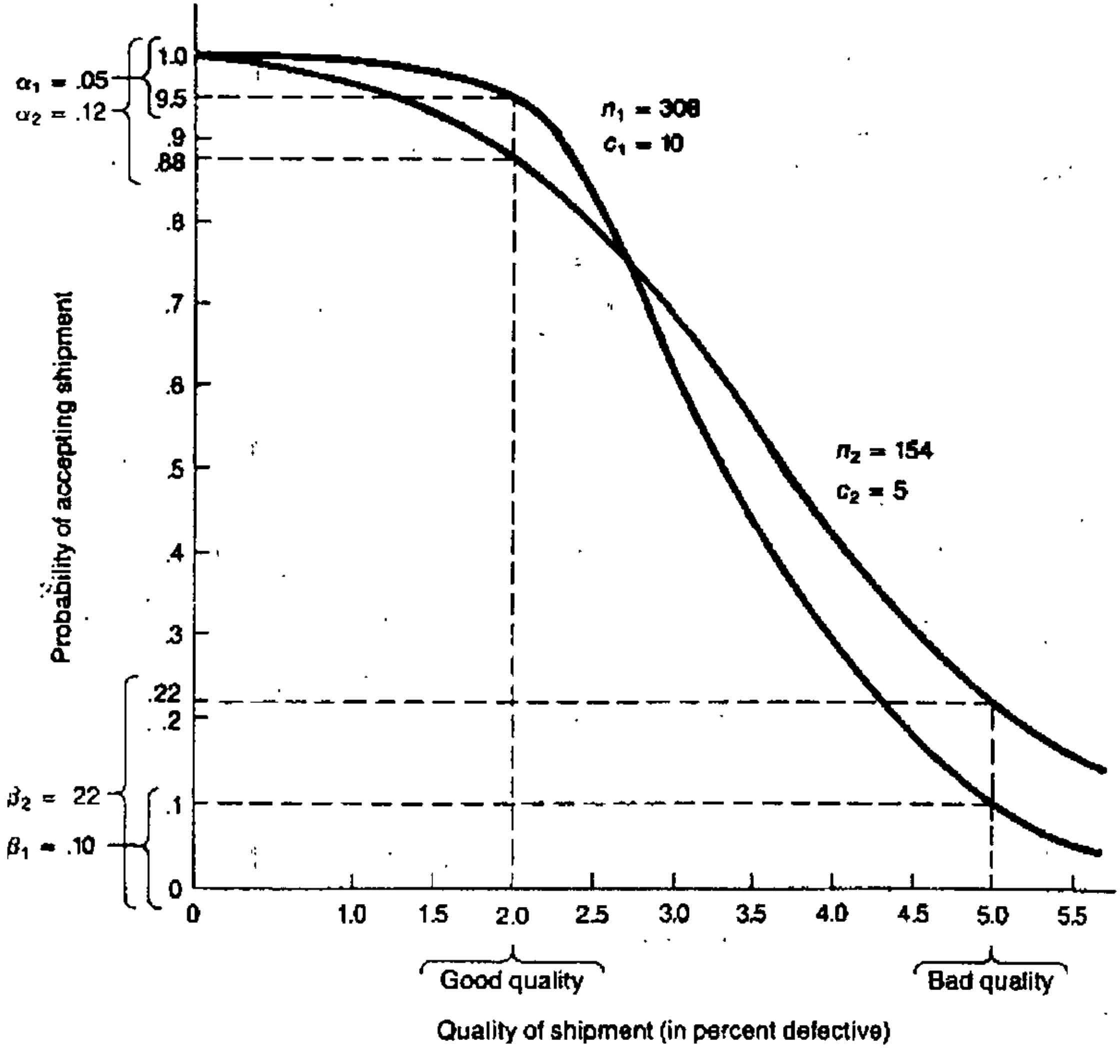
N = 1000
n = 10
c = 0
Po = 0.512%
P_1 = 20.6%
α = 0.05
β = 0.1

Tabla de inspección por muestreo simple por atributos ($\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.1$)

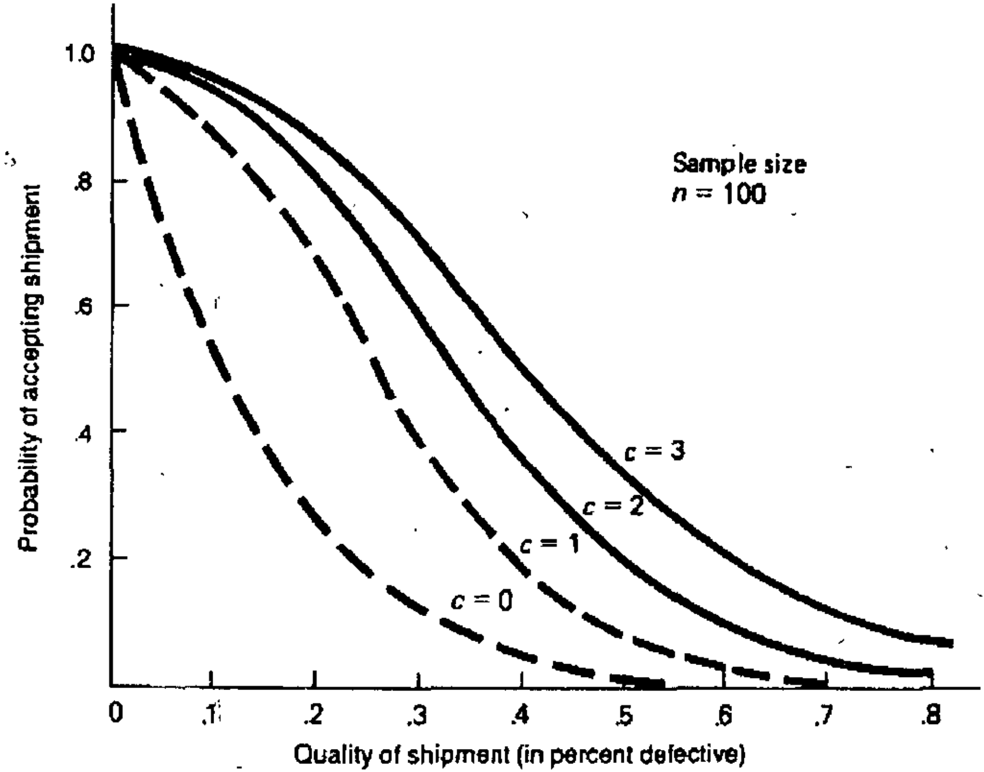
Ejemplo

- En la fabricación de tabiques, supongamos que deseamos aceptar lotes cuya fracción defectuosa es po= 2% con base en la inspección de las medidas del tabique. Queremos rechazar los que presenten p1=12% ¿Cómo determinar la cantidad de muestras a extraer (n) y la cantidad admisible de productos defectuosos (c)?

Efectos Generales de c y n



Efectos Generales de c y n

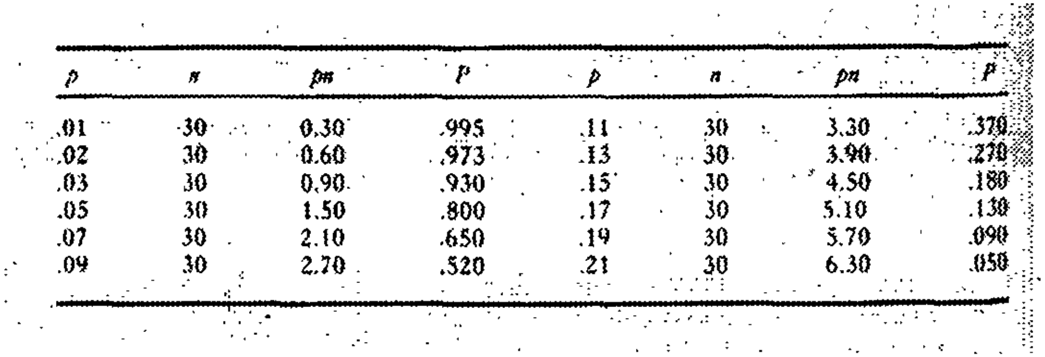


Construcción de Curvas OC

- Se asume una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población de Poisson que tiene un porcentaje promedio p de unidades defectuosas.

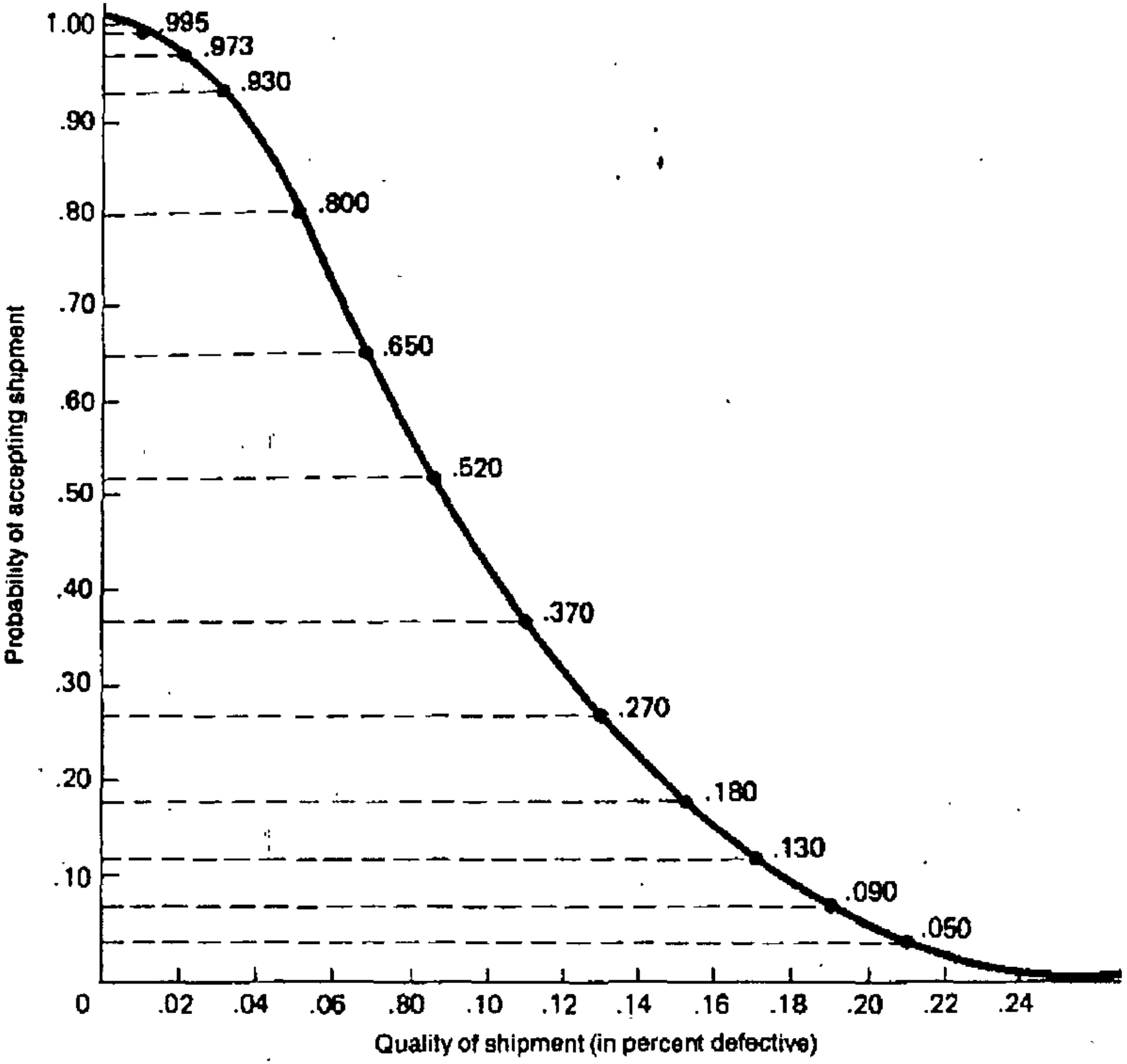
Ejemplo

- Deseamos construir la curva OC para un muestreo simple que tiene un numero de aceptación c = 2 y una muestra de n = 30



p	n	pn	P	p	n	pn	P
.01	30	0.30	.995	.11	30	3.30	.370
.02	30	0.60	.973	.13	30	3.90	.270
.03	30	0.90	.930	.15	30	4.50	.180
.05	30	1.50	.800	.17	30	5.10	.130
.07	30	2.10	.650	.19	30	5.70	.090
.09	30	2.70	.520	.21	30	6.30	.050

Curva OC



Probability of accepting shipment
1.00
.90
.80
.70
.60
.50
.40
.30
.20
.10
0
.995
.973
.930
.800
.650
.520
.370
.270
.180
.130
.090
.050
.02
.04
.06
.80
.10
.12
.14
.16
.18
.20
.22
.24
Quality of shipment (in percent defective)

Curvas de Distribución de Probabilidad de Poisson

Aspectos a Considerar

- Dado p_o y p_1, determinamos n y c sin considerar el tamaño del lote, entonces debemos considerar:
  - Si el proceso esta bajo control, lotes grandes
  - Si el proceso no esta bajo control, lotes pequeños
  - Si no existe información empiezese con lotes pequeños y muevase hacia lotes mas grandes a medida que se adquiera mas información

Factores a considerar para determinar p_o y p_1

- Se fijan mediante un acuerdo entre productores y consumidores
- Se debe considerar la perdida generada
- Si $p_o = p_1$ se debe realizar inspección total
- Se recomienda $p_1/p_0 = 4 \sim 10$

Aspectos Problemáticos

- El resultado del muestreo se aplica a la totalidad del lote
- El muestreo debe realizarse al azar
- Nunca se debe re-examinar un lote
- La composición del lote es crucial
- Mantenga juntos lotes que correspondan a los mismos materiales, maquinas, áreas, fechas de fabricación

¿Qué hacer con los productos defectuosos?

- Devolver todos los productos defectuosos al proveedor o fabricante
- Pida indemnización al proveedor o fabricante
- Destruya los productos defectuosos y consignelos como perdida para su empresa

Muestreo de Inspección

- Garantiza económicamente la calidad de un producto
- Es mas económico que una inspección al 100%
- Se puede garantizar la calidad del producto aun en el caso de pruebas destructivas
- Se requieren pocos inspectores

Muestreo de Inspección

- La mano de obra que se necesitaría para efectuar una inspección al 100% puede emplearse para mejorar la calidad y reducir la cantidad de productos defectuosos.
- Se disminuye la cantidad de productos defectuosos resultantes de la inspección
- Debido al tamaño reducido de la muestra, se puede realizar una inspección atenta y minuciosa

Muestreo de Inspección

- Los inspectores adquieren mayor esmero y responsabilidad
- Como se rechazan los lotes que contienen productos imperfectos, el aspecto producción es objeto de mayor cuidado
- Muchos de los rubros de inspección importantes pueden ser inspeccionados minuciosamente

Muestreo de Inspección

- Se reducen las posibilidades de cometer omisiones en las inspecciones
- Pocos inspectores pueden examinar muchos lotes

Diagramas de Dispersión

Visión General

- Se utilizan para estudiar la posible relación entre dos variuables
- No prueban que una varuiable cause a otra
- Indican la existencia de una relación
- Tambíen indican la fuerza de esa relación

Composición

- Un eje horizontal conteniendo las mediciones de una variable
- Un eje vertical representando las mediciones de otra variable

Proposito

- El proposito de un diagrama de dispersión es mostrar que le pasa a una variable cuando otra es cambiada
- Se usa para probar la teoría de que dos variables estan relacionadas
- El tipo de relacion se indica por la pendiente del diagrama.

Palabras Clave

- Variable
  - Una caracteristica de calidad que puede ser medida y expresada como un numero en alguna escala continua de medida
- Relación
  - Las relaciones entre variables existen cuando una variable depende de otra y cambiando el valor de una variable afectara a la otra

Palabras Clave

- Hoja de Datos
  - Contiene las medidas que fueron recopiladas para graficar el diagrama
- Correlación
  - Un metodo de analisis usado para decidir si existe o no, una relacion estadistica significativa entre dos variables

Palabras Clave

- Regresión
  - Un metodo de análisis usado para identificar la naturaleza exacta de la relacion entre dos variables

Historia

- Diagramas Causa y Efecto
  - Descripción de la relación entre dos variables
- Histograma
  - visualizar la estructura de los datos
- Se necesitaba un medio para observar los tipos de relaciones entre las variables

Historia

- Teoría de la regresión lineal
  - Sir Francis Galton (1822 - 1911)
- Se pueden dar conclusiones intuitivas y cualitativas
- Correlación
  - Decidir si existe una relación significativa
- Análisis de Regresión
  - Identificar la naturaleza exacta de la relación

Historia

- “The Guide to Quality Control and The Statistical Quality Control Handbook”
  - – Kaoru Ishikawa
    - Creia que no existe punto final para la mejora de la calidad
    - En 1985 sugirio 7 herramientas para la colección y analis de datos, entre las que se encuentra el diagrama de dispersión

Construccion de un Diagrama de Dispersión

- Coleccionese y construyase una hoja de datos de 50 a 100 pares de datos que se sospecha que tienen alguna relación. Construyase de la siguiente manera:

Construcción

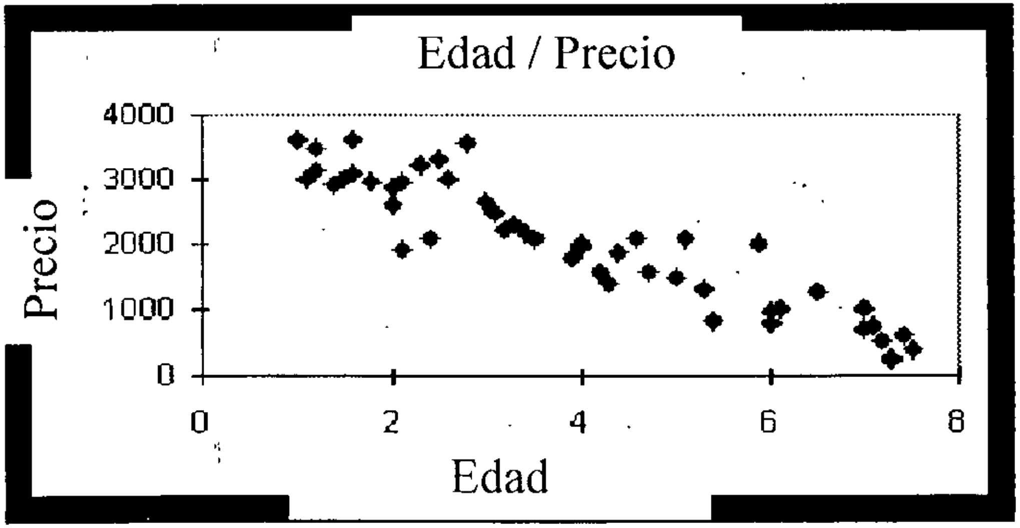
Carro	Edad (en años)	Precio (En dolares)
1	2	4000
2	4	2500
3	1	5000
4	5	1250
:	:	:
:	:	:
.	:	:
100	7	1000

Construcción

- Dibujense los ejes del diagrama. La primera variable (la variable independiente) es usualmente localizada en el eje horizontal y sus valores se deben incrementar hacia la derecha. El eje vertical contiene a la segunda variable (la variable dependiente) y sus valores se incrementan hacia arriba

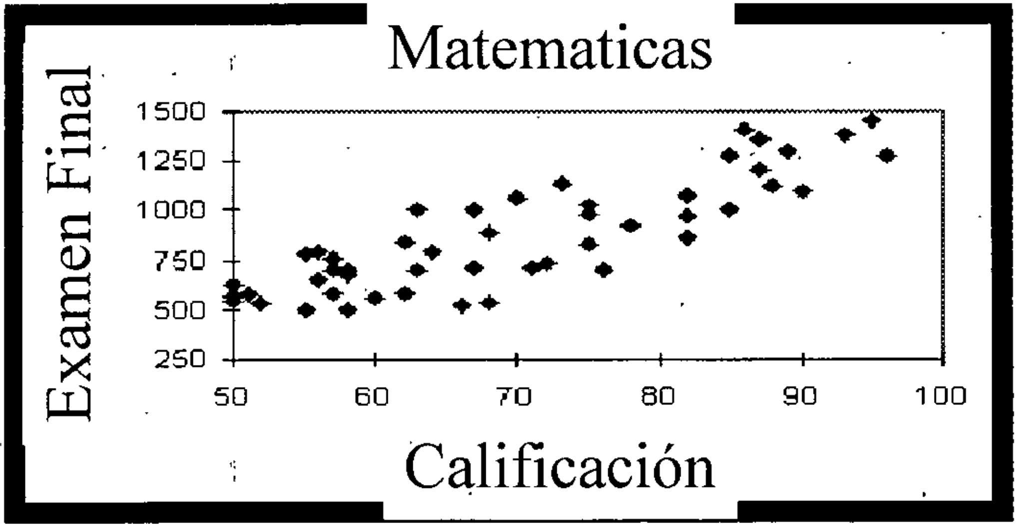
Construcción

- Grafiquense los datos. El diagrama resultante sera:



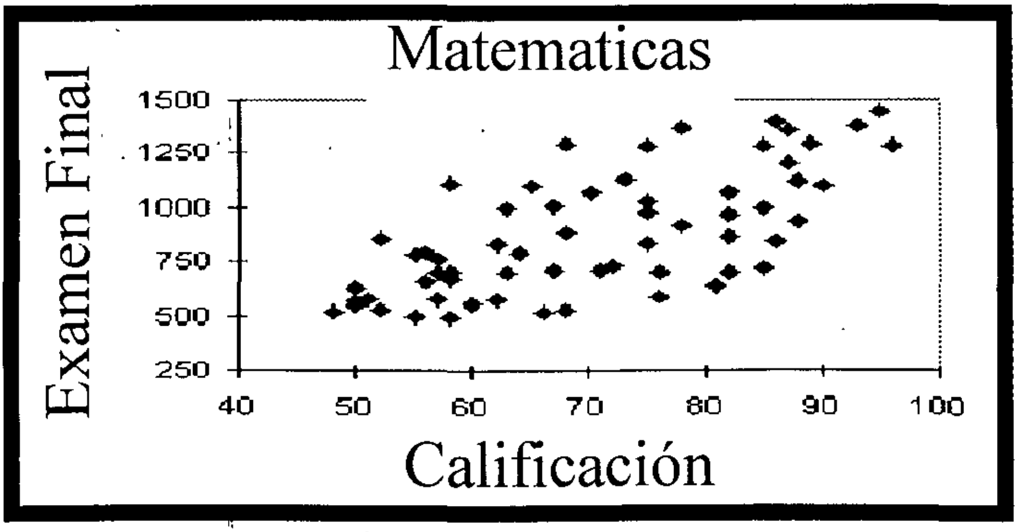
Tipos mas Comunes

- Correlacion Positiva



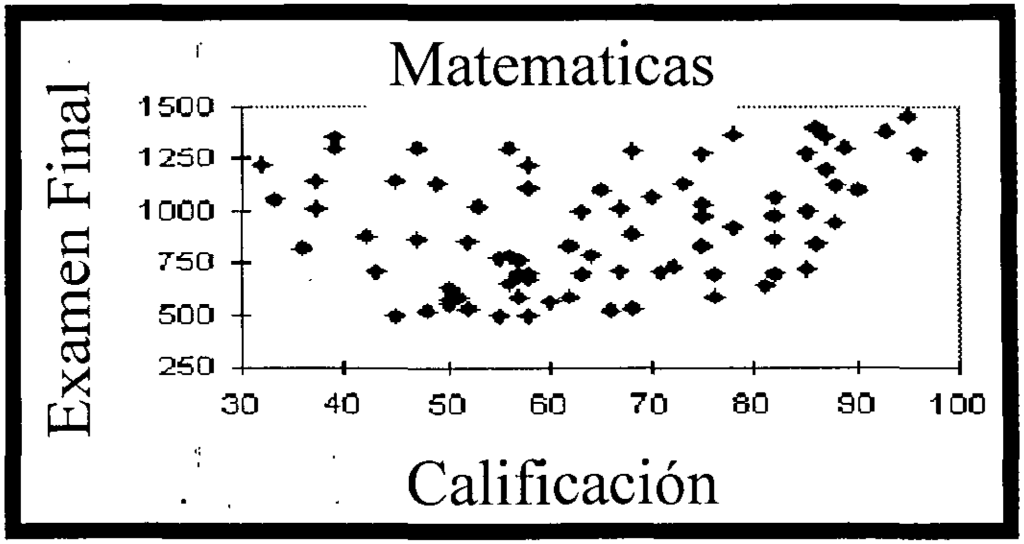
Tipos mas Comunes

- Correlación Positiva Posible



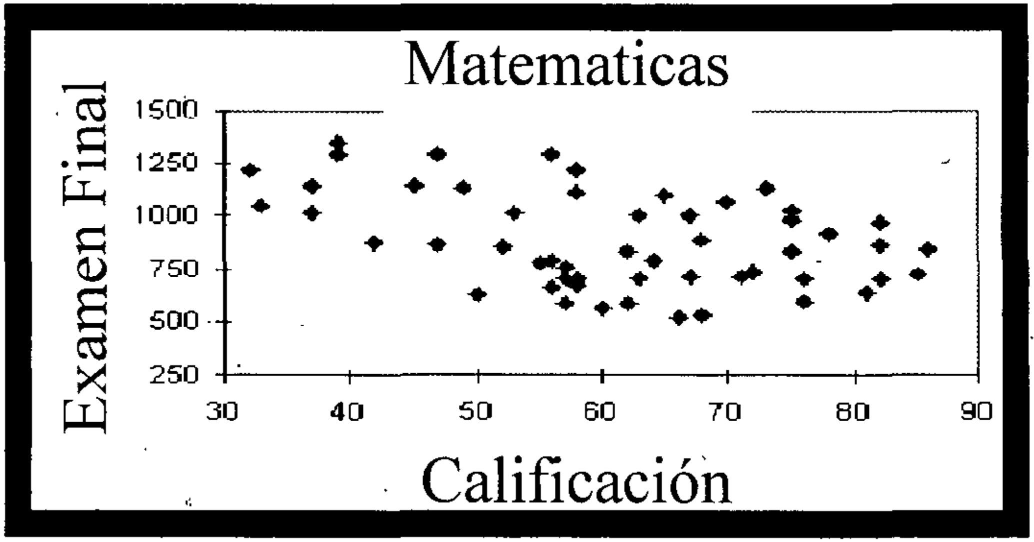
Tipos mas Comunes

- Sin correlación



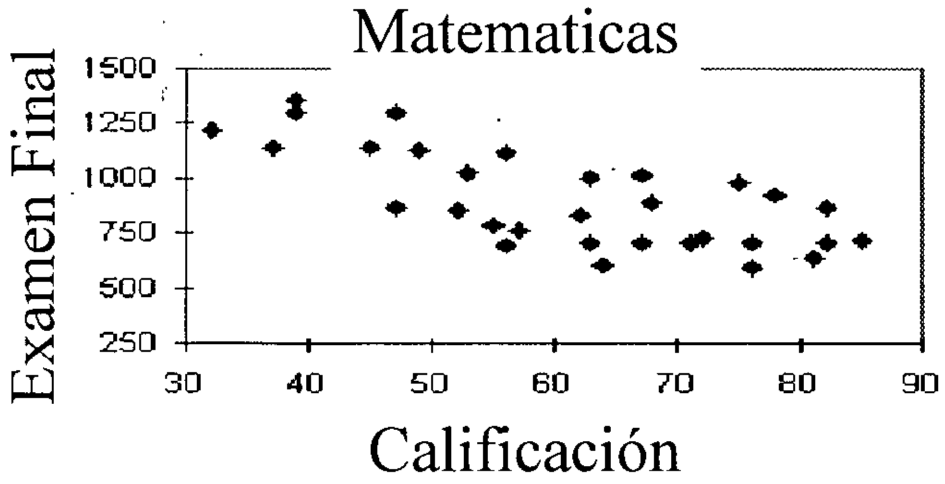
Tipos mas Comunes

- Correlación Negativa Posible



Tipos mas Comunes

- Correlación Negativa



Ejemplo

- Situación:
  - El nuevo comisionado de la liga local quiere construir un diagrama de dispersión para averiguar si existe una relación entre el peso de los jugadores y su estatura ¿Cómo debe hacer el diagrama?

Diagramas de Dispersión

Visión General

- Se utilizan para estudiar la posible relación entre dos variuables
- No prueban que una varuiable cause a otra
- Indican la existencia de una relación
- Tambíen indican la fuerza de esa relación

Composición

- Un eje horizontal conteniendo las mediciones de una variable
- Un eje vertical representando las mediciones de otra variable

Proposito

- El proposito de un diagrama de dispersión es mostrar que le pasa a una variable cuando otra es cambiada
- Se usa para probar la teoría de que dos variables estan relacionadas
- El tipo de relacion se indica por la pendiente del diagrama.

Palabras Clave

- Variable
  - Una caracteristica de calidad que puede ser medida y expresada como un numero en alguna escala continua de medida
- Relación
  - Las relaciones entre variables existen cuando una variable depende de otra y cambiando el valor de una variable afectara a la otra

Palabras Clave

- Hoja de Datos
  - Contiene las medidas que fueron recopiladas para graficar el diagrama
- Correlación
  - Un metodo de analisis usado para decidir si existe o no, una relacion estadistica significativa entre dos variables

Palabras Clave

- Regresión
  - Un metodo de análisis usado para identificar la naturaleza exacta de la relacion entre dos variables

Historia

- Diagramas Causa y Efecto
  - Descripción de la relación entre dos variables
- Histograma
  - visualizar la estructura de los datos
- Se necesitaba un medio para observar los tipos de relaciones entre las variables

Historia

- Teoría de la regresión lineal
  - Sir Francis Galton (1822 - 1911)
- Se pueden dar conclusiones intuitivas y cualitativas
- Correlación
  - Decidir si existe una relación significativa
- Análisis de Regresión
  - Identificar la naturaleza exacta de la relación

Historia

- “The Guide to Quality Control and The Statistical Quality Control Handbook”
  - Kaoru Ishikawa
    - Creia que no existe punto final para la mejora de la calidad
    - En 1985 sugirio 7 herramientas para la colección y analis de datos, entre las que se encuentra el diagrama de dispersión

Construccion de un Diagrama de Dispersión

- Coleccionese y construyase una hoja de datos de 50 a 100 pares de datos que se sospecha que tienen alguna relación. Construyase de la siguiente manera:

Construcción

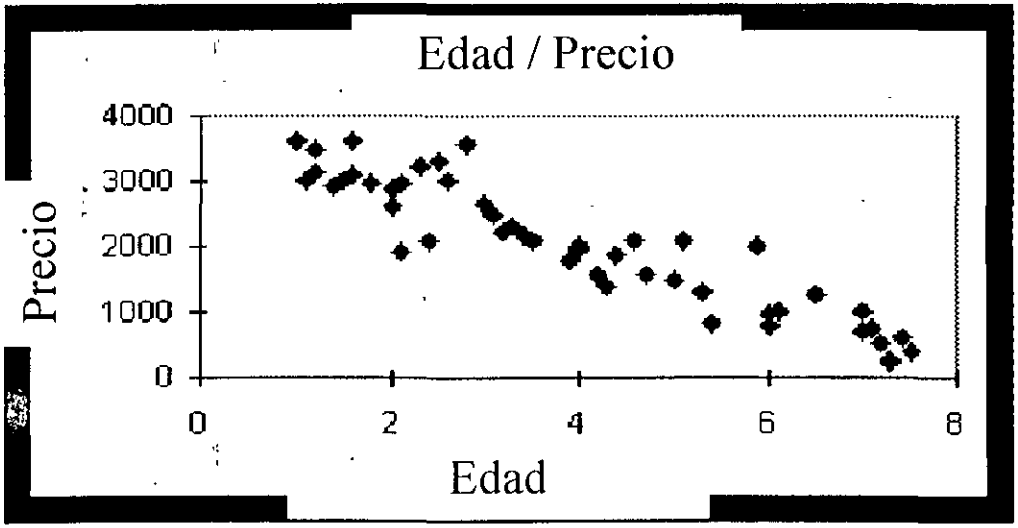
Carro	Edad (en años)	Precio (En dolares)
1	2	4000
2	4	2500
3	1	5000
4	5	1250
.	:	:
.	:	:
.	:	:
100	7	1000

Construcción

- Dibujense los ejes del diagrama. La primera variable (la variable independiente) es usualmente localizada en el eje horizontal y sus valores se deben incrementar hacia la derecha. El eje vertical contiene a la segunda variable (la variable dependiente) y sus valores se incrementan hacia arriba

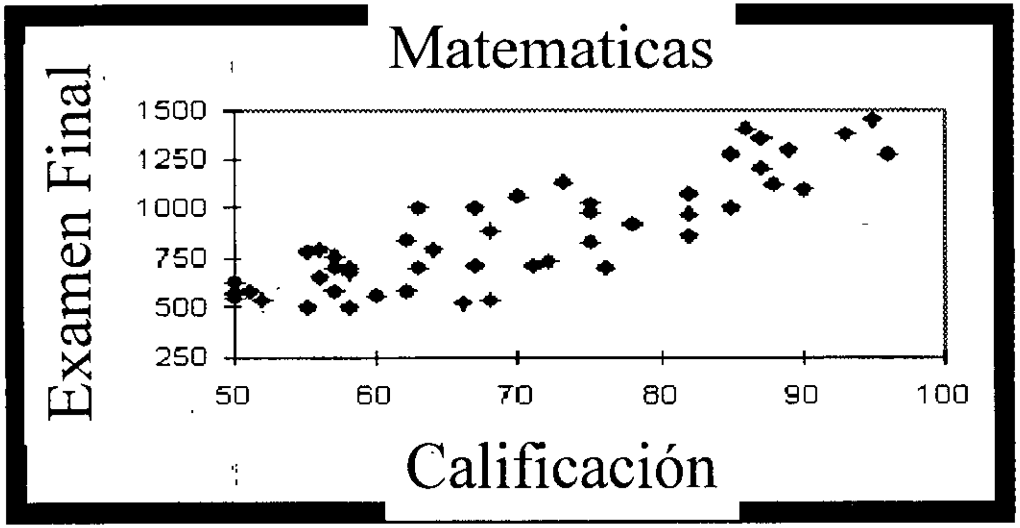
Construcción

- Grafiquense los datos. El diagrama resultante sera:



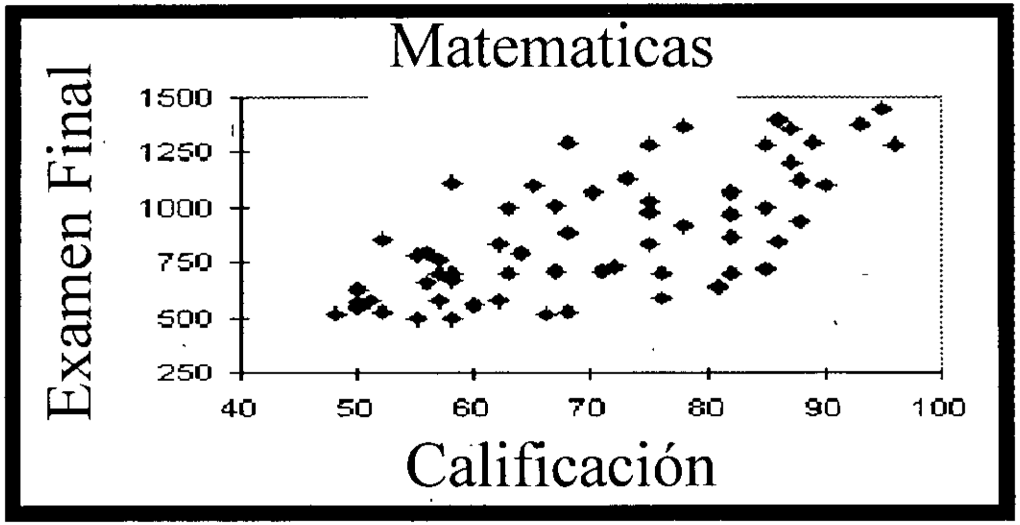
Tipos mas Comunes

- Correlacion Positiva



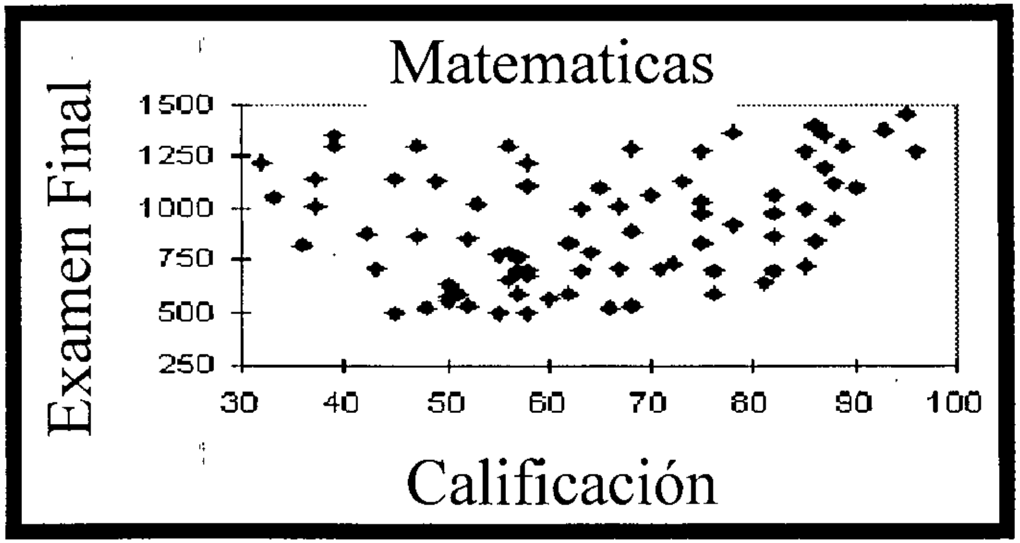
Tipos mas Comunes

- Correlación Positiva Posible



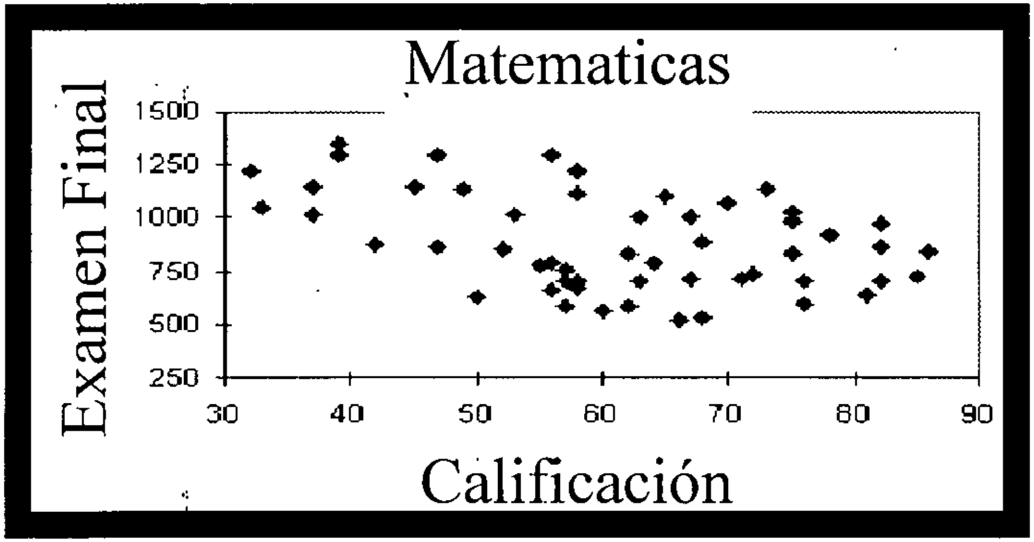
Tipos mas Comunes

- Sin correlación



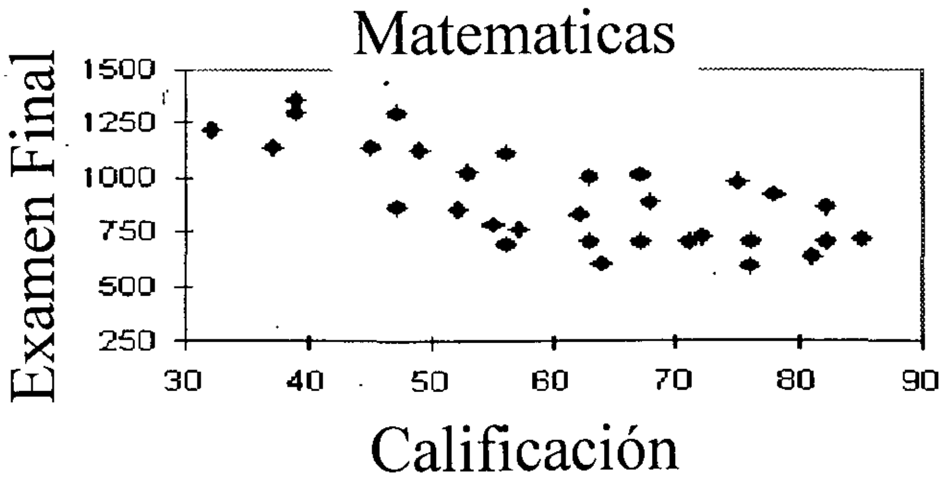
Tipos mas Comunes

- Correlación Negativa Posible



Tipos mas Comunes

- Correlación Negativa



Ejemplo

- Situación:
  - El nuevo comisionado de la liga local quiere construir un diagrama de dispersión para averiguar si existe una relación entre el peso de los jugadores y su estatura ¿Cómo debe hacer el diagrama?

Diagramas Causa y Efecto

Proposito y Uso

- Proporcionar una descripción ilustrativa de una lista en la cual se organizan las posibles causas de los problemas o factores necesarios para asegurar el éxito de algun esfuerzo
- Es una herramienta efectiva que permite a la gente ver facilmente la relacion entre factores al estudiar procesos situaciones y planes

Historia

- Se le conoce como diagrama de Ishikawa (en honor a su creador, Kaorou Ishikawa de Japon) o diagrama de pescado (debido a su forma)
- Se creo con la finalidad de que todas las posibles causas de un resultado pudieran listarse permitiendo ver graficamente al usuario estas causas

Historia

- El diagrama fue adoptado por el Dr. W. Ewdards Deming como herramienta de la mejora de la calidad
- Es una de las primeras herramientas utilizadas para el mejoramiento de la calidad

¿ Como se construyen ?

- Mediante tecnicas de tormenta de ideas

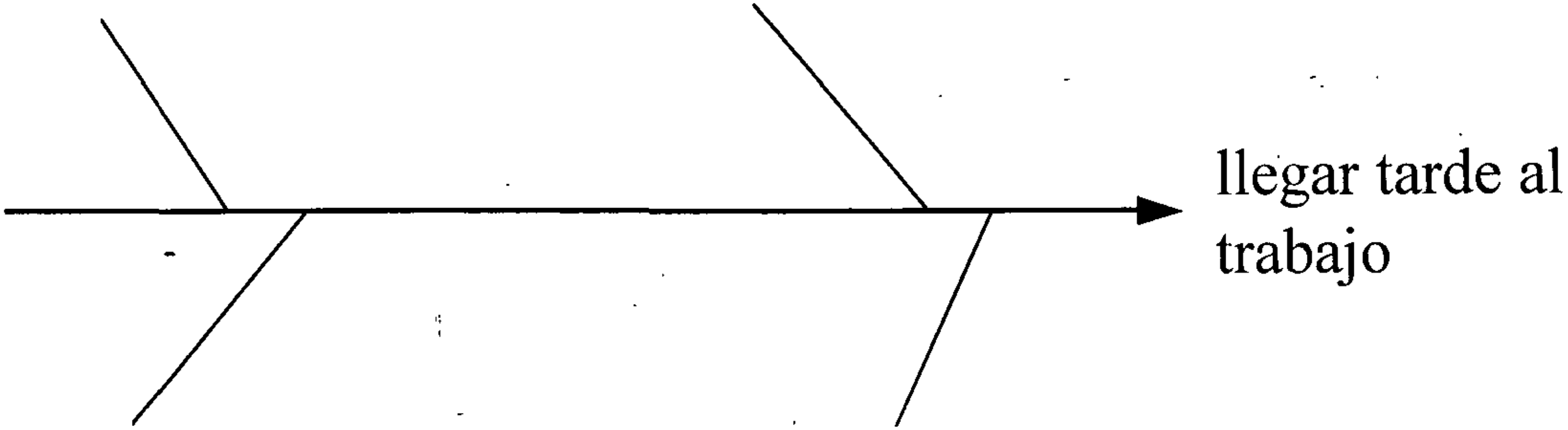
Ejemplo (llegar tarde al trabajo)

- Dibujese una flecha grande y horizontal a lo largo de una hoja apuntando al efecto (en este caso, llegar tarde al trabajo)

llegar tarde al trabajo

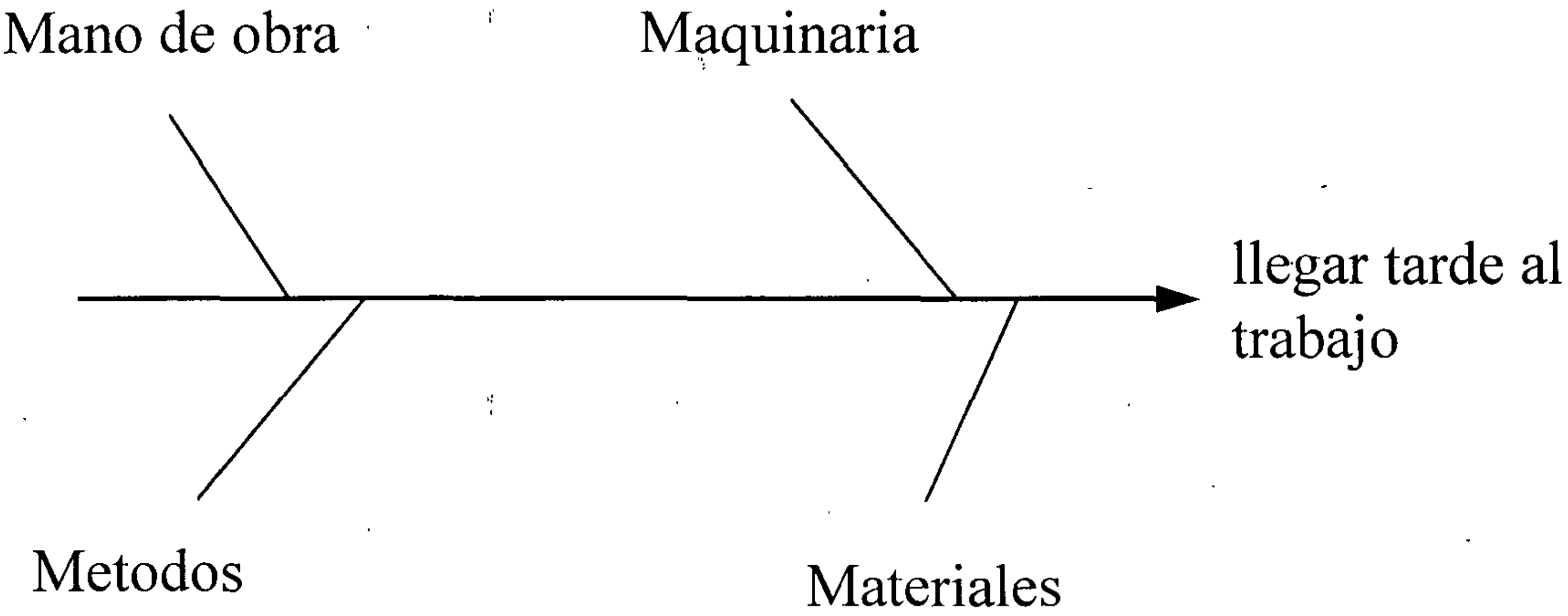
Ejemplo

- Dibujense cuatro o mas ramas a partir de la flecha grande a fin de representar las principales categorias de causas potenciales
  - Categoria tipicas son mano de obra, maquinaria, metodos y materiales



Ejemplo

- Causas terciarias se pueden listar sobre las ramas de las categorias



Mano de obra

Maquinaria

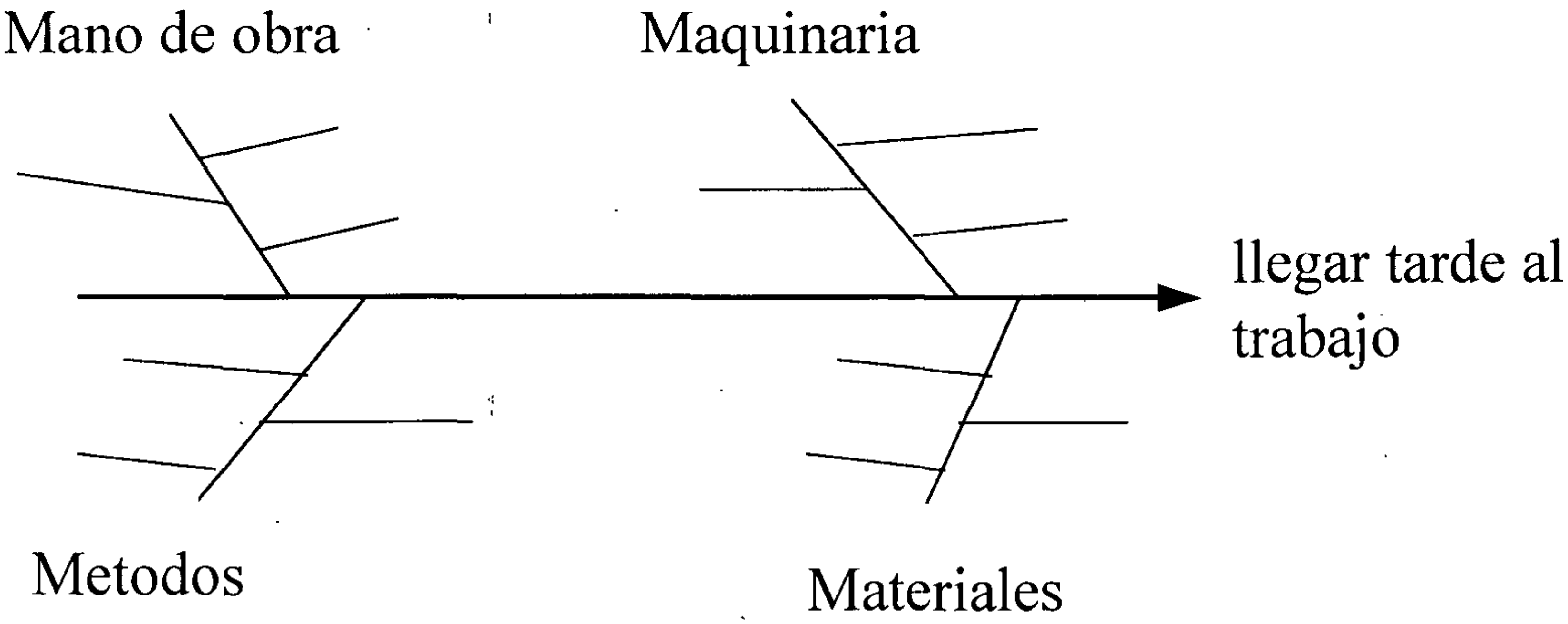
llegar tarde al trabajo

Metodos

Materiales

Ejemplo

- Causas Adicionales se pueden desprender de las causas terciarias



Mano de obra

Maquinaria

llegar tarde al trabajo

Metodos

Materiales

Diagramas de Dispersión

Visión General

- Se utilizan para estudiar la posible relación entre dos variuables
- No prueban que una varuiable cause a otra
- Indican la existencia de una relación
- Tambíen indican la fuerza de esa relación

Composición

- Un eje horizontal conteniendo las mediciones de una variable
- Un eje vertical representando las mediciones de otra variable

Proposito

- El proposito de un diagrama de dispersión es mostrar que le pasa a una variable cuando otra es cambiada
- Se usa para probar la teoría de que dos variables estan relacionadas
- El tipo de relacion se indica por la pendiente del diagrama.

Palabras Clave

- Variable
  - Una caracteristica de calidad que puede ser medida y expresada como un numero en alguna escala continua de medida
- Relación
  - Las relaciones entre variables existen cuando una variable depende de otra y cambiando el valor de una variable afectara a la otra

Palabras Clave

- Hoja de Datos
  - Contiene las medidas que fueron recopiladas para graficar el diagrama
- Correlación
  - Un metodo de analisis usado para decidir si existe o no, una relacion estadistica significativa entre dos variables

Palabras Clave

- Regresión
  - Un metodo de análisis usado para identificar la naturaleza exacta de la relacion entre dos variables

Historia

- Diagramas Causa y Efecto
  - Descripción de la relación entre dos variables
- Histograma
  - visualizar la estructura de los datos
- Se necesitaba un medio para observar los tipos de relaciones entre las variables

Historia

- Teoría de la regresión lineal
  - Sir Francis Galton (1822 - 1911)
- Se pueden dar conclusiones intuitivas y cualitativas
- Correlación
  - Decidir si existe una relación significativa
- Análisis de Regresión
  - Identificar la naturaleza exacta de la relación

Historia

- “The Guide to Quality Control and The Statistical Quality Control Handbook”
  - – Kaoru Ishikawa
    - Creia que no existe punto final para la mejora de la calidad
    - En 1985 sugirio 7 herramientas para la colección y analis de datos, entre las que se encuentra el diagrama de dispersión

Construccion de un Diagrama de Dispersión

- Coleccionese y construyase una hoja de datos de 50 a 100 pares de datos que se sospecha que tienen alguna relación. Construyase de la siguiente manera:

Construcción

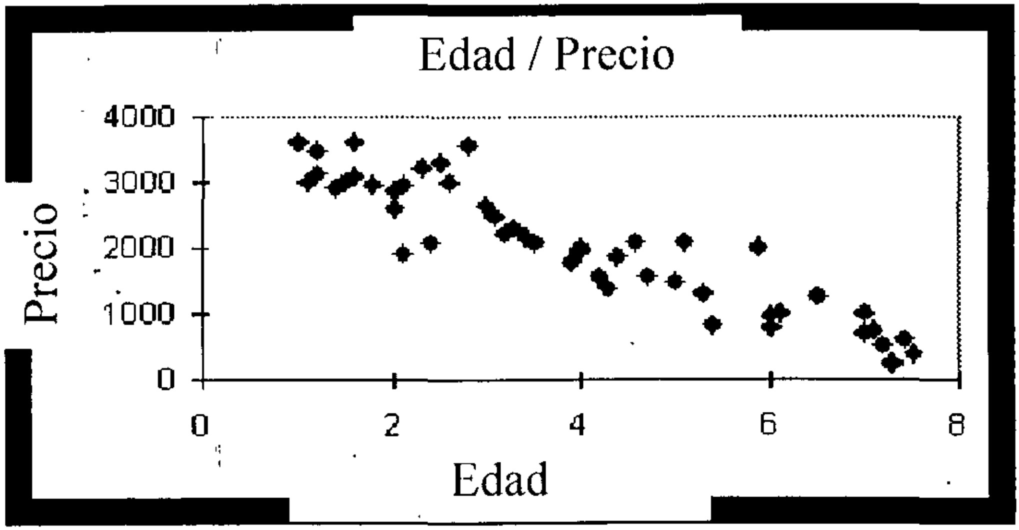
Carro	Edad (en años)	Precio (En dolares)
1	2	4000
2	4	2500
3	1	5000
4	5	1250
:	:	:
:	:	:
.	:	:
100	7	1000

Construcción

- Dibujense los ejes del diagrama. La primera variable (la variable independiente) es usualmente localizada en el eje horizontal y sus valores se deben incrementar hacia la derecha. El eje vertical contiene a la segunda variable (la variable dependiente) y sus valores se incrementan hacia arriba

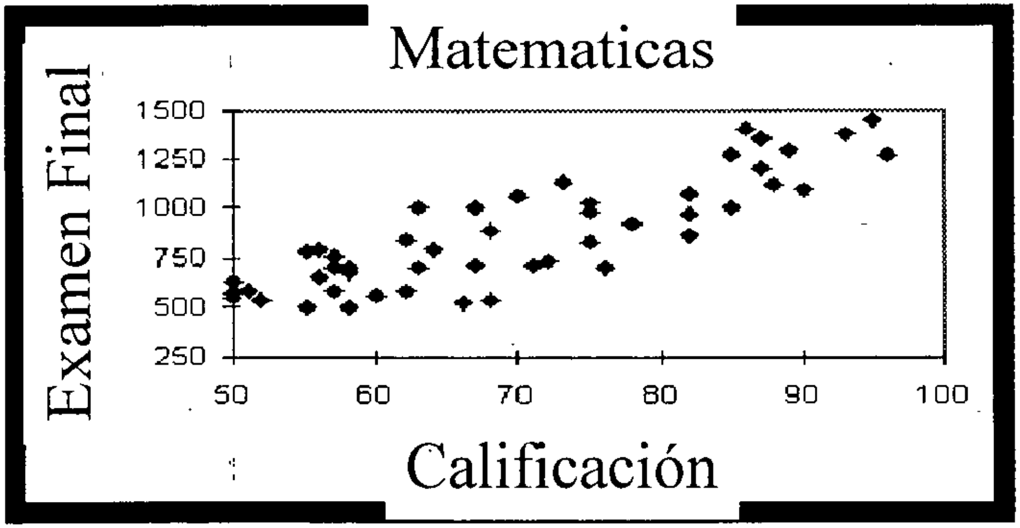
Construcción

- Grafiquense los datos. El diagrama resultante sera:



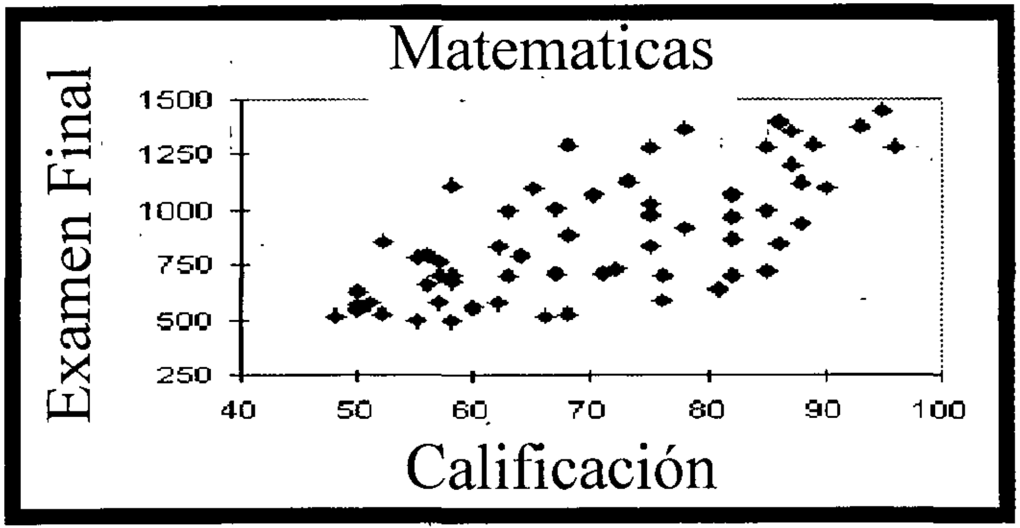
Tipos mas Comunes

- Correlacion Positiva



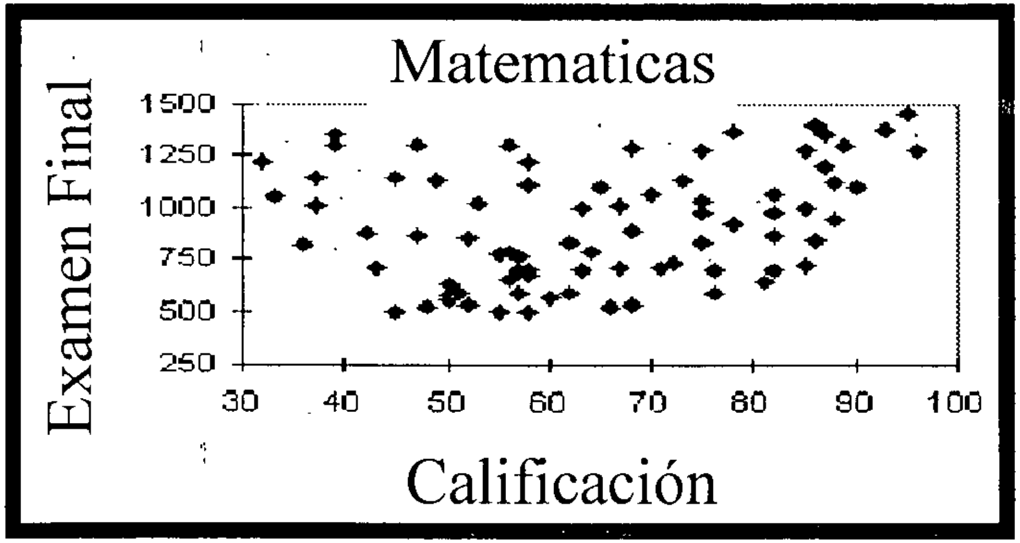
Tipos mas Comunes

- Correlación Positiva Posible



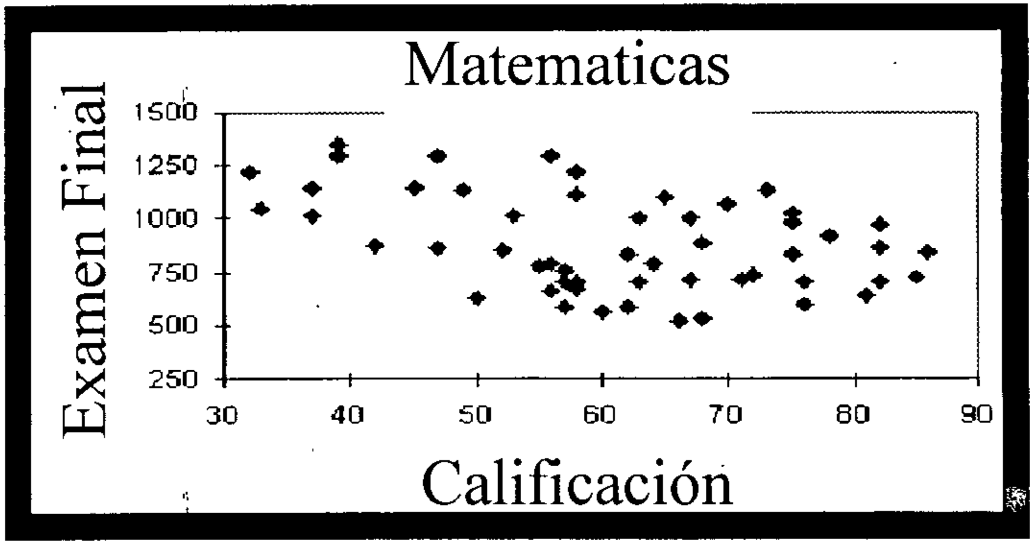
Tipos mas Comunes

- Sin correlación



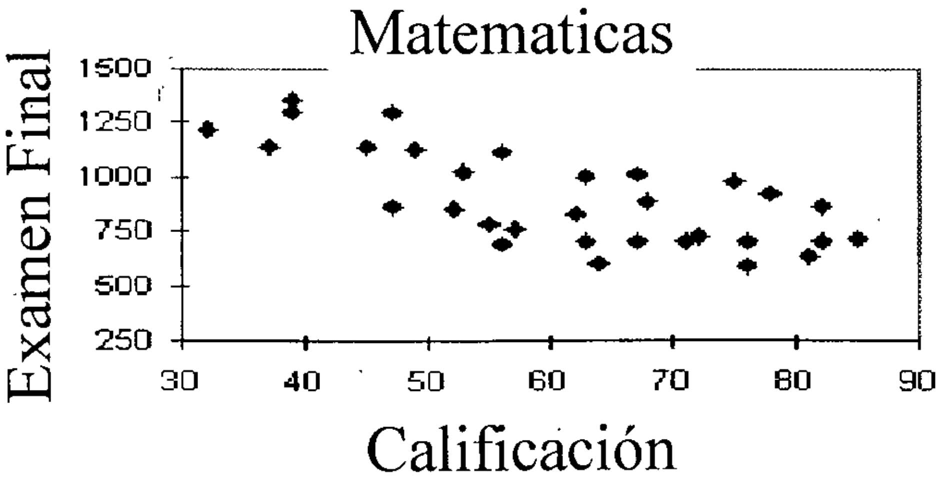
Tipos mas Comunes

- Correlación Negativa Posible



Tipos mas Comunes

- Correlación Negativa



Ejemplo

- Situación:
  - El nuevo comisionado de la liga local quiere construir un diagrama de dispersión para averiguar si existe una relación entre el peso de los jugadores y su estatura ¿Cómo debe hacer el diagrama?

Histogramas

Revisión General

- Se utilizan para revisar los parámetros especificos de un proceso a fin de determinar donde ocurren las mayores cantidades de variación en el proceso
- Se utilizan para determinar si las especificaciones del proceso estan excedidas

Revisión general

- No prueba si el proceso se encuentra en un estado de control.
- Aunque si han servido para solucionar muchos problemas de control de calidad.

Palabras Clave

- Histograma
  - Una grafica de barras verticales de la distribucion de frecuencia de los datos
- Metodologia Q.C.
  - Una herramienta estadistica usada en el analisis y determinación de soluciones posibles para los problemas de control de calidad en la industria
- Distribucion de Frecuencia
  - Una variacion en una muestra numérica de datos

Historia

- Se da como resultado de la necesidad de evaluar datos que ocurren con cierta frecuencia
- Muestra la informacion según localizacion, dispersion y forma

Construcción

- Determinese el rango de los datos restando la medida observada mas pequeña de la mayor y designese como R
  - Ejemplo:
    - Medida mayor = 1.1185 pulgadas
    - Medida menor = 1.1030 pulgadas
    - R = 1.1185 - 1.1030 = 0.0155 pulgadas

Construcción

- Establezcase la unidad de medida (UM) a usarse.
    - Esto normalmente se fija por el instrumento de medición.
  - Ejemplo: UM = 0.0001 pulgada
- Determinese el numero de clases y el ancho de clase.
    - El numero de clases (k), no debe ser menor que 6 y mayor a 15 por propositos practicos. Se puede iterar para encontrar la mejor distribución para el análisis
  - Ejemplo: k = 8

Construcción

- Determinese el ancho de clase (H) dividiendo el rango R por el numero elegido de clases
  - Ejemplo: R/k = .0155/8 = 0.0019375 pulgadas
    - El ancho de clase seleccionado debe ser un numero impar multiplo de la unidad de medida MU
  - MU = 0.0001 pulgadas
  - Ancho de clase = .0019 o 0.0021

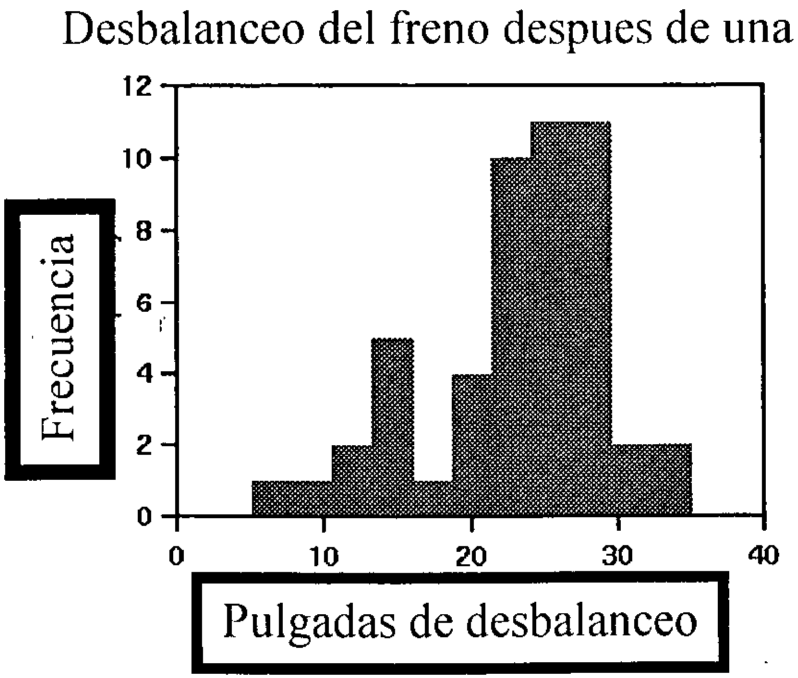
Construcción

- Establezcanse los puntos medios de clase y limites de clase.
    - El primer punto medio de clase debe localizarse cerca de la medida mayor observada.
    - Siempre haganse los anchos de clase iguales en tamaño y expresense los limites de clase en terminos de la mitad de la unidad de exactitud de medida. Esto evita el graficar una medida observada en un limite de clase
  - Ejemplo:
    - Primer punto medio de clase = 1.1185 pulgadas y el ancho de clase es 0.0019. Por lo tanto, los limtes serian 1.1185 ± 0.019 / 2

Construcción

- Determinense los ejes de la grafica.
  - La escala de la frecuencia en el eje vertical debe exceder de manera ligera la clase con la frecuencia mas larga y la medida de la escala de medida en el eje horizontal debe estar a intervalos regulares los cuales son independientes del ancho de clase.
- Dibujese la grafica.
  - Marquense las clases y dibujense los rectangulos con alturas correspondientes a la medida de la frecuencia para cada clase.

¡Ahora se tiene un histograma!



Interpretación

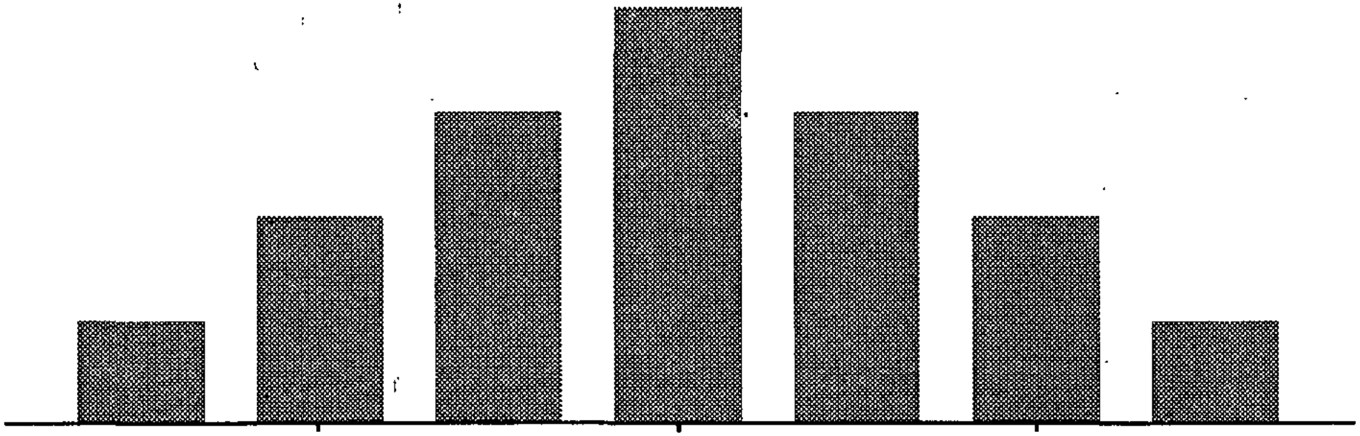
- Un histograma se puede interpretar mediante las siguientes preguntas:
  - ¿ El proceso se esta llevando a cabo dentro de las especificaciones limites?
  - ¿ El proceso parece exhibir amplias variaciones?
  - Si es necesario hacer algo sobre el proceso, ¿ qué acción es la apropiada?

Respuestas

- Las respuestas a la anteriores preguntas se dan analizando 3 caracteristivcas de los histogramas.
  - ¿ Qué tan bien esta centrado el histograma ?
    - Objetivo del proceso (la media o algun valor nominal)
  - ¿ Qué tan ancho es el histograma ?
    - observar el ancho define la variabilidad del proceso
  - ¿ Cuál es la forma del histograma ?
    - Se debe esperar una curva normal o acampanada

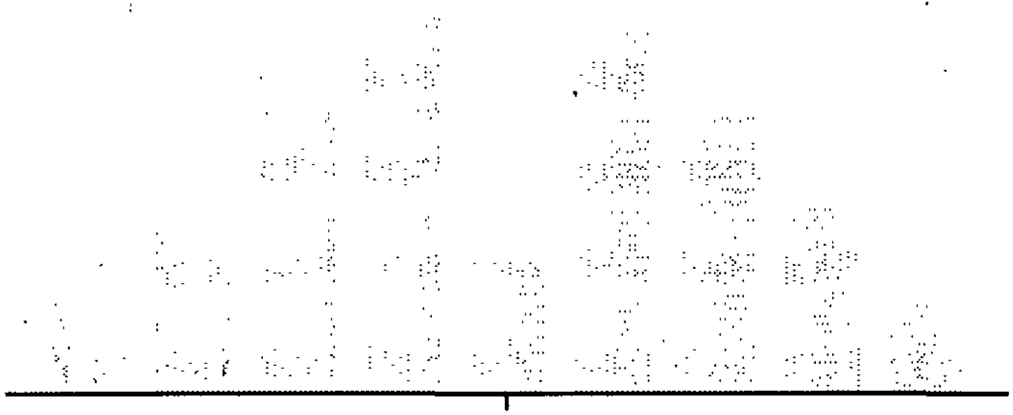
Ejemplos de distribuciones tipicas

Normal



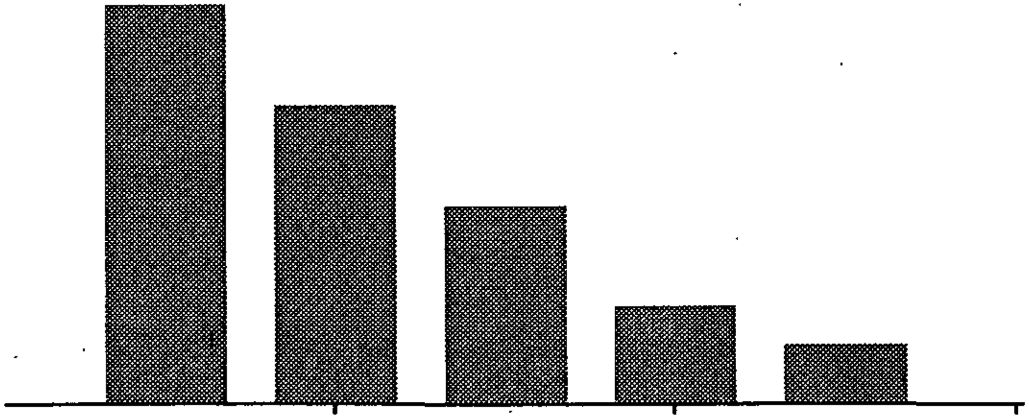
- Una curva normal muestra:
  - la medida mas frecuente aparece al centro de la distribución
  - Medidas menos frecuentes aparecen gradualmente a ambos lados de la distribución
- Indica que el proceso esta corriendo normalmente (solo causas comunes estan presentes)

Bi - modal



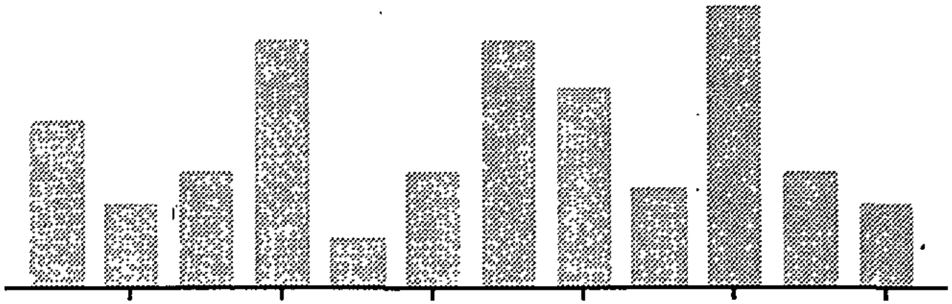
- La distribucion aparenta tener dos picos
- Puede indicar que datos de mas de un proceso se estan mezclando
  - Los materiales pueden ser de mas de dos vendedores
  - Las muestras pueden venir de dos maquinas

Escalera



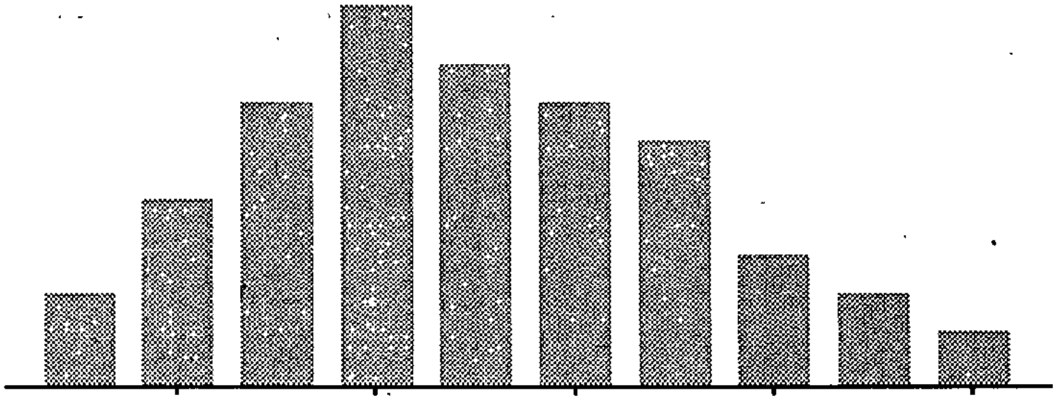
- Parece terminar abruptamanete en un extremo
- Indica posible arreglo o inspección de partes no deseadas

Diente de sierra



- Usualmente indica un problema en la medición
  - Lecturas de los medidores inapropiadas
  - El medidor no es lo suficientemente sensible para hacer las medidas

Sesgada



- Parece una curva no pareja
- Los valores parecen agruparse hacia un lado

Otras consideraciones

- Numero de muestras
  - Para que el histograma sea representativo del comportamiento verdadero del proceso, como regla general, al menos 50 muestras deben ser tomadas
- Limitaciones de la tecnica
  - Falta de informacion acerca del estado de control del proceso

Otras consideraciones

  - No captura el orden en el tiempo
- Facil de utilizar

Aspectos importantes

- Usar intervalos de longitud igual
- Mostrar el eje vertical empezando con cero
- No se rompa ningun eje
- Conservese una escala uniforme en ambos ejes
- Centrense las barras del histograma en el punto medio del intervalo

Tabla de inspección por muestreo simple por atributos (α = 0.05 y β = 0.1

La letra fina → n, letra negrila → c

p_1 (%) p_0 (%)	0.71-0.90	0.91-1.12	1.13-1.40	1.41-1.80	1.81-2.24	2.25-2.80	2.81-3.55	3.56-4.50	4.51-5.60	5.61-7.10	7.11-9.00	9.01-11.2	11.3-14.0	14.1-18.0	18.1-22.4	22.5-28.0	28.1-35.5	p_1 (%) p_0 (%)
0.090-0.112	•	400 **1**	↓	←	↓	→	60 **0**	50 **0**	←	↓	↓	←	↓	↓	↓	↓	↓	0.090-0.112
0.113-0.140	•	↓	300 **1**	↓	←	↓	→	↓	40 **0**	←	↓	↓	←	↓	↓	↓	↓	0.113-0.140
0.141-0.180	•	500 **2**	↓	250 **1**	↓	←	↓	→	↑	30 **0**	←	↓	↓	←	↓	↓	↓	0.141-0.180
0.181-0.224	•	•	400 **2**	↓	200 **1**	↓	←	↓	→	↑	25 **0**	←	↓	↓	←	↓	↓	0.181-0.224
0.225-0.280	•	•	500 **3**	300 **2**	↓	150 **1**	↓	←	↓	→	↑	20 **0**	←	↓	↓	←	↓	0.225-0.280
0.281-0.355	•	•	•	400 **3**	250 **2**	↓	120 **1**	↓	←	↓	→	↑	15 **0**	←	↓	↓	←	0.281-0.355
0.356-0.450	•	•	•	500 **4**	300 **3**	200 **2**	↓	100 **1**	↓	←	↓	→	↑	15 **0**	←	↓	↓	0.356-0.450
0.451-0.560	•	•	•	•	400 **4**	250 **3**	150 **2**	↓	80 **1**	↓	←	↓	→	↑	10 **0**	←	↓	0.451-0.560
0.561-0.710	•	•	•	•	500 **6**	300 **4**	200 **3**	120 **2**	↓	60 **1**	↓	←	↓	→	↑	7 **0**	←	0.561-0.710
0.711-0.900	•	•	•	•	•	400 **6**	250 **4**	150 **3**	100 **2**	↓	50 **1**	↓	←	↓	→	↑	5 **0**	0.711-0.900
0.901-1.12		•	•	•	•	•	300 **6**	200 **4**	120 **3**	80 **2**	↓	40 **1**	↓	←	↓	↑	↑	0.901-1.12
1.13-1.40			•	•	•	•	500 **10**	250 **6**	150 **4**	100 **3**	60 **2**	↓	30 **1**	↓	←	↓	↑	1.13-1.40
1.41-1.80				•	•	•	•	400 **10**	200 **6**	120 **4**	80 **3**	50 **2**	↓	25 **1**	↓	←	↓	1.41-1.80
1.81-2.24					•	•	•	•	300 **10**	150 **6**	100 **4**	60 **3**	40 **2**	↓	20 **1**	↓	←	1.81-2.24
2.25-2.80						•	•	•	•	250 **10**	120 **6**	70 **4**	50 **3**	30 **2**	↓	15 **1**	↓	2.25-2.80
2.81-3.55							•	•	•	•	200 **10**	100 **6**	60 **4**	40 **3**	25 **2**	↓	10 **1**	2.81-3.55
3.56-4.50								•	•	•	•	150 **10**	80 **6**	50 **4**	30 **3**	20 **2**	↓	3.56-4.50
4.51-5.60									•	•	•	•	120 **10**	60 **6**	40 **4**	25 **3**	15 **2**	4.51-5.60
5.61-7.10										•	•	•	•	100 **10**	50 **6**	30 **4**	20 **3**	5.61-7.10
7.11-9.00											•	•	•	•	70 **10**	40 **6**	25 **4**	7.11-9.00
9.01-11.2												•	•	•	•	60 **10**	30 **6**	9.01-11.2
p_0 (%) p_1 (%)	0.71-0.90	0.91-1.12	1.13-1.40	1.41-1.80	1.81-2.24	2.25-2.80	2.81-3.55	3.56-4.50	4.51-5.60	5.61-7.10	7.11-9.00	9.01-11.2	11.3-14.0	14.1-18.0	18.1-22.4	22.6-28.0	28.1-35.5	p_0 (%) p_1 (%)

Use la primera columna de n, c en la dirección de la flecha. No hay métodos de muestreo para las columnas en blanco.

Curvas de Distribución de Probabilidad de Poisson