



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL**

**CONTROL SATURADO DE UN REACTOR QUÍMICO TUBULAR**  
**EXOTÉRMICO**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA CAMPO CONTROL

PRESENTA:  
HUGO ANDRÉS FRANCO DE LOS REYES

TUTOR PRINCIPAL  
DR. JESÚS ÁLVAREZ CALDERÓN

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO, 2016



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez  
Secretario: Dr. Paul Rolando Maya Ortiz  
Vocal: Dr. Jesús Álvarez Calderón  
1er. Suplente: Dr. Eduardo Castellanos Sahagún  
2o. Suplente: Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria

La tesis se realizó en el Instituto de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Jesús Álvarez Calderón

---



*A mi familia y amigos*



# Agradecimientos

---

A mi familia. A Diego, mi hermano, por que en esta vida hemos construido caminos en diferentes direcciones, que a veces se entrelazan, pero siempre con apoyo mutuo. A Lourdes, mi madre, por mostrarme que para alcanzar lo que uno quiere hay que luchar y esforzarse al máximo. A Sonia, mi hermana, por que siempre he disfrutado mucho su trabajo. A Susana, mi tía, por ayudarme a entender la importancia de ser paciente.

Al Dr. Jesús Álvarez, mi asesor, por el tiempo, esfuerzo, paciencia y guía dedicados no solo en la elaboración de este trabajo, sino en todo el proceso de aprendizaje que he tenido desde que decidí comenzar a trabajar en el tema de control de procesos. Por todas aquellas discusiones enriquecedoras que se reflejaron en mejorar la tesis. Y finalmente por ir más allá del formalismo asesor-estudiante y brindarme su amistad.

A mis sinodales. Al Dr. Jaime Moreno por sus pertinentes observaciones para mejorar la calidad de esta tesis y mantener la rigurosidad matemática requerida en este tipo de trabajos. Al Dr. Luis Álvarez Icaza por sus valiosos comentarios. Al Dr. Eduardo Castellanos, por compartirme su experiencia en la aplicación de control en problemas industriales y motivarme a seguir aprendiendo más.

A mis amigos de generación de la maestría por el tiempo compartido en las aulas, en las bibliotecas y en otros espacios en los que siempre impero la amistad y el compañerismo. A mis compañeros de cubículo también por el tiempo compartido. A mis amigos y compañeros de la BEP por su apoyo y por todas las cosas que he aprendido junto a ellos.

Al CONACyT por el apoyo económico brindado durante estos dos años.

Y finalmente, agradezco al Instituto de Ingeniería y a la UNAM por el espacio y las facilidades que me proporcionó para desarrollar esta tesis.





# Resumen

---

Se estudia el problema de control saturado por retroalimentación de salida para un reactor químico tubular exotérmico (posiblemente inestable a lazo abierto), el cual es un sistema distribuido espacialmente. Se deben estabilizar los perfiles de concentración y temperatura por medio de la manipulación de la temperatura de la camisa de enfriamiento que recubre el reactor, con base en una medición puntual de temperatura. Se proporciona una solución al problema desde un enfoque constructivo, y utilizando un modelo de dimensión finita, del cual se aprovechan propiedades de pasividad, observabilidad y bifurcación, obteniendo como resultado un controlador saturado por retroalimentación de salida tipo PI con: (i) un criterio no local para la ubicación de sensor, (ii) un criterio robusto para la elección de los límites de control, (iii) construcción y sintonización sistemática, y (iv) un criterio no local de estabilidad robusta en términos de los límites y ganancias del controlador. Se evalúa el funcionamiento del controlador para un caso de estudio representativo por medio de simulaciones numéricas



# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Presentación . . . . .	1
1.2. Estado del Arte . . . . .	2
1.3. Motivación . . . . .	4
1.4. Planteamiento del problema . . . . .	4
1.5. Contribuciones . . . . .	5
1.6. Estructura de la tesis . . . . .	5
<b>2. El Problema de Control</b>	<b>7</b>
2.1. El Reactor Tubular . . . . .	7
2.2. Problema de Control Saturado . . . . .	10
2.3. Caso de estudio . . . . .	11
2.4. Resumen . . . . .	13
<b>3. Diseño con Control Avanzado</b>	<b>17</b>
3.1. Enfoque de modelo por etapas . . . . .	17
3.2. Modelo discreto . . . . .	18
3.3. Dinámica a lazo abierto . . . . .	20
3.3.1. Multiplicidad y estabilidad de puntos de equilibrio . . . . .	21
3.3.2. Conjuntos invariantes . . . . .	24
3.3.3. Dependencia de la dinámica global de lazo abierto de la temperatura de enfriamiento . . . . .	28
3.3.4. Pasividad . . . . .	31
3.4. Control Saturado por Retroalimentación de Estado . . . . .	35
3.4.1. Diseño del controlador . . . . .	35
3.4.2. Estabilidad de lazo cerrado . . . . .	37
3.5. Aplicación para el caso de estudio y simulaciones . . . . .	40
3.5.1. Ubicación del sensor . . . . .	41
3.5.1.1. Criterio modal espectral . . . . .	41
3.5.1.2. Criterio de la concavidad . . . . .	43
3.5.1.3. Criterio de la concavidad para sistemas por etapas . . . . .	44
3.5.1.4. Criterio de la dinámica cero . . . . .	44
3.5.2. Cálculo del controlador . . . . .	46

3.5.3. Selección de la ganancia y los límites del control . . . . .	47
3.5.4. Funcionamiento del controlador . . . . .	49
3.6. Control saturado por retroalimentación de salida basado en el modelo detallado . . . . .	57
<b>4. Rediseño del controlador avanzado por retroalimentación de salida</b>	<b>59</b>
4.1. Rediseño del modelo para fines de control . . . . .	59
4.2. Construcción del controlador . . . . .	61
4.3. Estabilidad de lazo cerrado . . . . .	63
4.4. Sintonización del controlador . . . . .	70
4.5. Conexión con control convencional . . . . .	71
4.5.1. Relación con control PI . . . . .	71
4.5.2. Relación con control PI con anti encuerdamiento . . . . .	72
4.5.3. Discusión . . . . .	73
4.6. Aplicación al caso de estudio y simulaciones . . . . .	73
4.6.1. Ubicación del sensor . . . . .	74
4.6.2. Cálculo del controlador . . . . .	74
4.6.3. Selección de las ganancias y los límites del control . . . . .	74
4.6.4. Funcionamiento de lazo cerrado . . . . .	75
4.6.4.1. Funcionamiento nominal . . . . .	75
4.6.4.2. Funcionamiento robusto . . . . .	76
4.6.4.3. Comparación con esquemas convencionales . . . . .	82
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>87</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	87
5.2. Trabajo futuro . . . . .	88
<b>A. Detalles sobre el modelo y los métodos gráficos utilizados</b>	<b>91</b>
A.1. Detalles del modelo . . . . .	91
A.1.1. Obtención del modelo adimensional . . . . .	91
A.1.2. Modelo en forma compacta de condiciones de frontera en el mo- delo discreto . . . . .	93
A.2. Diagrama de Van Heerden para el modelo discreto . . . . .	94
A.3. Diagrama de bifurcación con respecto a $\bar{u}$ en lazo abierto . . . . .	94
A.4. Diagrama de bifurcación de la dinámica cero . . . . .	95
A.5. Curva de control de lazo cerrado . . . . .	96
<b>B. Dedución de las funciones <math>\tilde{f}</math> y <math>\tilde{f}_\chi</math></b>	<b>97</b>
B.1. Dedución de la función $\tilde{f}$ . . . . .	97
B.2. Dedución de la función $\tilde{f}_\chi$ . . . . .	98
<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>

# Introducción

---

## 1.1. Presentación

En la actualidad una gran cantidad de sustancias y materiales utilizados en la industria son producidos a partir de procesos químicos que se llevan a cabo en diferentes tipos de reactores, los cuales suelen presentar comportamientos altamente no lineales, algunos de los principales objetivos de operar estos sistemas son los siguientes: reducir costos de producción, aumentar la calidad de los productos y mejorar la seguridad en la operación del proceso. En el ámbito de control, los objetivos anteriores se traducen en el cumplimiento de los siguientes aspectos: (i) aumentar la rapidez de convergencia de las variables reguladas al valor prescrito, (ii) disminuir el error de regulación en estado permanente, (iii) obtener un sistema de lazo cerrado robusto ante incertidumbre paramétrica y entradas exógenas variantes en el tiempo, y (iv) obtener esquemas de control que maximicen la producción. Sin embargo, en general satisfacer todos estos objetivos es una tarea complicada ya que éstos se contraponen. Debido a lo anterior, en los últimos años en el ámbito académico se ha realizado una importante cantidad de investigación en el control de éstos sistemas, con la meta de establecer el mejor compromiso entre los diferentes objetivos.

Uno de los reactores más utilizados en la industria es el reactor tubular exotérmico, el cual consiste en un tubo cilíndrico cubierto por una camisa de enfriamiento, en el que es inyectado un reactante a cierta temperatura y concentración, éste es convertido a producto a lo largo del tubo por medio de una reacción química exotérmica, debido a esto la concentración y temperatura del reactante están distribuidos espacialmente a lo largo del eje axial dentro del reactor. Dado que la reacción química produce calor, es necesario extraer el exceso de éste, para lo cual se inyecta un refrigerante a la camisa de enfriamiento con el objetivo de regular su temperatura y por medio del intercambio de calor enfriar el sistema. De acuerdo con lo anterior, el reactor tubular exotérmico presenta fenómenos que varían tanto en el tiempo como en el espacio (longitud axial del reactor) y, por lo tanto éste se modela con ecuaciones diferenciales en derivadas

parciales.

Algunas características de este tipo de reactor es que puede operar en perfiles estacionarios de temperatura con punto caliente, por lo que es importante operar el sistema con garantías de seguridad, además de que presenta alta sensibilidad ante variación paramétrica, por lo que pequeños cambios en el valor nominal de la entrada del sistema (considerado como parámetro) producen cambios considerables en el perfil de temperatura (inestabilidad estructural [6]), lo cual puede ser un riesgo en la operación del sistema. Además, el reactor suele presentar gran variedad de comportamientos no lineales como multiplicidad de estados estacionarios, existencia de ciclos límite y fenómenos de bifurcación, esto es debido a que la reacción química es descrita con funciones no lineales que en general dependen tanto de la concentración, como de la temperatura del reactante y que producen un comportamiento no lineal muy variado.

De acuerdo con lo planteado en los párrafos anteriores, el reactor tubular exotérmico es un sistema altamente no lineal el cual debe operar de forma tal que se obtenga un compromiso aceptable entre los diferentes aspectos a considerar en el desempeño de éste, por lo tanto, el control de este sistema es un problema muy importante. Los esquemas de control que se diseñen para estabilizar el reactor deben ser robustos ante incertidumbre paramétrica y variación en las entradas exógenas y ser capaces de lidiar con restricciones físicas, como saturación en los actuadores, además de que en general se requiere que el controlador funcione con una medición de temperatura en alguna ubicación específica del reactor.

En este trabajo se pondrá especial énfasis en el diseño de un esquema de control que considere los efectos de saturación en el actuador del reactor, de forma que se eviten los efectos perjudiciales en el desempeño del sistema en lazo cerrado.

### 1.2. Estado del Arte

En general, para el estudio de sistemas de dimensión infinita, existen dos enfoques principales para el análisis y síntesis de estrategias de control y/o estimación, la primera consiste en trabajar con el modelo en ecuaciones diferenciales parciales, mientras que la segunda se basa en utilizar un modelo discretizado espacialmente (el cual es de dimensión finita), ya sea por colocación ortogonal, diferencias finitas o algún otro método.

En cuanto al enfoque en que se utilizan modelos de dimensión infinita, en la literatura existe una gran cantidad de trabajos sobre análisis, control y estimación de sistemas distribuidos no lineales, por ejemplo en [41] se presentan resultados sobre la controlabilidad y estabilización para una clase de sistemas distribuidos (hiperbólicos) tanto para el caso nominal como para el caso perturbado, por otro lado, en [31] se presenta un

análisis para ubicación de sensores y actuadores puntuales en sistemas distribuidos. En [11] se muestra el diseño de esquemas de control y estimación para la estabilización de sistemas distribuidos lineales con base en técnicas de *backstepping-forwarding*, además de la construcción de funcionales de Lyapunov para mostrar estabilidad exponencial. En cuanto a lo referente a procesos químicos distribuidos, en [14] se presenta un panorama general para el control de sistemas que modelan procesos en donde se presentan fenómenos de transporte y difusión, sin embargo las mediciones se consideran distribuidas, además de que varios de los métodos utilizados reducen el sistema en ecuaciones en derivadas parciales a ecuaciones diferenciales ordinarias.

En la teoría concerniente a ingeniería de reactores químicos, [55], [18], [7], [40], existen trabajos en los que se cuestiona el uso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para modelar reactores químicos tubulares, ya que una de las suposiciones importantes para utilizar estos modelos es que dentro del reactor la mezcla es cuasi homogénea, es decir, que las sustancias dentro del reactor se encuentran en una sola fase. Sin embargo, es usual que en aplicaciones reales el reactante sea una sustancia líquida o en fase gas y además se utilicen partículas de catalizador relativamente grandes (1 cm de diámetro), debido a esto, por lo que el medio no es cuasi homogéneo, y por tanto un modelo discreto o por etapas es suficiente. El número de nodos de discretización a utilizar se puede acotar por debajo de tal forma que se retengan los mecanismos fundamentales de dispersión, y por arriba de tal forma que se evite cálculo computacional excesivo por la suposición de que el medio es homogéneo. En concordancia con estos argumentos, han surgido trabajos en los que se diseñan modelos de baja dimensión para reactores tubulares con dinámica compleja [9], y otros en los que se diseñan esquemas de control para el modelo discretizado del reactor tubular [45].

En la literatura concerniente a diseño de esquemas de control en los que se consideran los efectos de saturación en actuadores hay una gran cantidad de trabajos, en sistemas lineales existen varios enfoques, en [61] se presenta un resumen de las técnicas más utilizadas las cuales se basan en el uso de desigualdades matriciales lineales y técnicas de optimización, mientras que para sistemas no lineales se han explorado técnicas de control acotado por linealización por retroalimentación de estado basado en observador [35], aplicaciones de control adaptable [34] y técnicas basadas en teoría de Lyapunov [23]. Sin embargo, en lo que respecta a control acotado para sistemas distribuidos, y en específico reactores tubulares existen relativamente pocos trabajos, principalmente se encuentran aplicaciones de control predictivo [21], [15], [48], además de control por precompensación [66], [43], en estos trabajos se utilizan aproximaciones de dimensión finita. Mientras que en [30] se utiliza un algoritmo de búsqueda de extremos adaptable para estabilizar un modelo distribuido de un reactor tubular que solo considera fenómenos de convección y que tiene restricciones en la entrada.

Por otro lado, en la industria los reactores tubulares exotérmicos son estabilizados por medio de controladores tipo PI, [56], [33], [57] los cuáles utilizan sólo mediciones

de temperatura en posiciones específicas del reactor. Este tipo de controladores son robustos ante incertidumbre paramétrica, y de implementación sencilla, sin embargo, el diseño y operación de los mismos depende de la acumulación de experiencia por el operador. En estos esquemas de control, para evitar los efectos de encuerdamiento (windup) por saturación del control se utilizan esquemas sencillos tipo cálculo hacia atrás (back calculation) o conmutación de la acción integral en control PID (clamping) [8]

### 1.3. Motivación

Del estado del arte presentado se puede concluir que en el área de control de procesos químicos en la industria se utilizan controladores relativamente sencillos tipo PI con esquemas de anti encuerdamiento (wind-up) para minimizar los efectos de saturación de los actuadores en el desempeño de lazo cerrado, y que este tipo de esquemas son suficientes para el correcto funcionamiento de este tipo de sistemas. Sin embargo, el desarrollo y mejora de estos esquemas debido a la experiencia acumulada en la operación de estos sistemas es lenta y no se tiene una perspectiva clara de cómo se pueden diseñar y sintonizar de forma sistemática y general los controladores utilizados. Por lo tanto resulta importante proponer soluciones al problema de control saturado de reactores químicos desde una perspectiva teórica y rigurosa utilizando las herramientas disponibles en la teoría de análisis y control de sistemas no lineales, pero con el objetivo de obtener esquemas de control sencillos, similares a los utilizados en la industria y con reglas sistemáticas de diseño y sintonización claras, además de criterios simples de otros aspectos relevantes para el correcto funcionamiento del sistema en lazo cerrado, como la ubicación de sensor y algún criterio para la elección de los límites de saturación del controlador.

### 1.4. Planteamiento del problema

El problema a resolver en la tesis consiste en diseñar un control saturado por retroalimentación de salida, que establezca robustamente (en el sentido de estabilidad práctica [58] y estructural [6]) los perfiles de temperatura y concentración del sistema en los perfiles prescritos. El controlador debe ser lo más sencillo posible en términos de no linealidad, dimensión y dependencia del modelo, además se deben establecer reglas sencillas de sintonización de las ganancias del controlador, así como un criterio para elegir los límites de saturación del control, con garantía de que el efecto de la saturación no se refleje en la aparición de puntos críticos atractores indeseados en lazo cerrado, y un criterio de ubicación de sensor.



## 1.5. Contribuciones

La principal contribución de este trabajo consiste en la presentación de un esquema de control saturado por retroalimentación de salida que establece una conexión clara entre la teoría de control avanzado y el control convencional utilizado en la industria, se mostrará una equivalencia clara entre el controlador diseñado y esquemas de control tipo PI con anti encuerdamiento basado en observador, además se dará un criterio no local para la ubicación del sensor, lo cual concuerda con estudios previos en control y observación de este tipo de sistemas pero de validez local. Otra aportación importante es la presentación de un criterio para elegir los límites de saturación de tal forma que en lazo cerrado el sistema no tenga puntos críticos atractores más allá del prescrito y se asegure estabilidad práctica robusta del estado estacionario prescrito. Finalmente, una contribución importante es la solución del problema de forma manejable utilizando la teoría disponible para análisis de sistemas no lineales de dimensión finita, con base en el uso de un modelo discreto que aproxima de forma adecuada el sistema distribuido y con la ventaja de que el diseño se puede realizar de forma sistemática. El controlador diseñado presenta las ventajas del control convencional, es decir, tiene una estructura sencilla, es de fácil implementación y no depende de los parámetros del modelo, además que el diseño es sistemático, al igual que las reglas de sintonización de las ganancias del controlador.

## 1.6. Estructura de la tesis

La tesis se encuentra estructurada de la siguiente forma: en el capítulo 2 se presenta la formulación técnica del problema de control saturado del reactor tubular, se introduce el modelo del sistema y las consideraciones que se deben establecer para el diseño del controlador. En el capítulo 3 se introduce el modelo discreto que se utilizará, se analizan las propiedades de lazo abierto del éste y se aprovechan para el diseño de un controlador saturado por retroalimentación de estado que servirá como referente teórico, y posteriormente se construye un controlador saturado por retroalimentación de salida basado en un algoritmo de estimación; además se obtendrán los criterios para ubicación de sensor y selección de límites del control, y se presentan algunos resultados de simulación. En el cuarto capítulo se rediseñará el control obtenido en el capítulo 3 con el objetivo de obtener un controlador sencillo orientado a aplicación y se realizarán algunas simulaciones para mostrar la efectividad y robustez de este controlador. En el capítulo 5 se presentan algunas consideraciones sobre la posibilidad de implementar el controlador diseñado en sistemas de dimensión infinita y las implicaciones que esto representa. Finalmente en el capítulo 6 se darán las conclusiones finales del trabajo y posibles líneas de investigación a futuro relacionadas con lo realizado en esta tesis.



# El Problema de Control

---

En este capítulo se presenta el problema de control por retroalimentación de salida del reactor continuo espacialmente distribuido del tipo exotérmico tubular con sistema de enfriamiento desde una perspectiva de control industrial, posteriormente se presenta la formulación técnica del problema, primero se introduce el modelo en derivadas parciales, y su versión adimensional, posteriormente se establece la estructura del controlador a diseñar, y finalmente se muestran algunas simulaciones de la dinámica de lazo abierto del sistema.

## 2.1. El Reactor Tubular

Consideremos el reactor tubular homogéneo con mezclado axial no adiabático, como el mostrado en la Figura 2.1, en el cual es introducido un reactante, a concentración  $C_e$ , temperatura  $T_e$  y flujo volumétrico  $q$ , y es convertido a producto por medio de una reacción química irreversible con tasa de reacción  $R(C, T)$ . Dentro del reactor, el reactante se encuentra a concentración,  $C(S, t')$  y temperatura,  $T(S, t')$ , que varían tanto en el tiempo  $t'$  como en el dominio espacial  $S$  del reactor. El modelo del reactor tubular utilizado en este trabajo se basa en las siguientes suposiciones [39]:

- La concentración  $C$  y la temperatura  $T$  de reactante, son funciones que sólo dependen de la dirección axial  $S$  y del tiempo  $t'$ .
- Existe difusión de masa y calor, los cuales se modelan con las leyes de Fick y Fourier, respectivamente, se consideran coeficientes de dispersión másico  $D_M$  y térmico  $D_H$ .
- Se extrae calor del sistema por medio de una camisa de enfriamiento que recubre el reactor, la cual se encuentra a una temperatura  $T_c$  en toda su longitud.

Bajo suposiciones estándar en ingeniería de reactores químicos, los balances dinámicos de materia y energía llevan al siguiente modelo en ecuaciones diferenciales en deri-

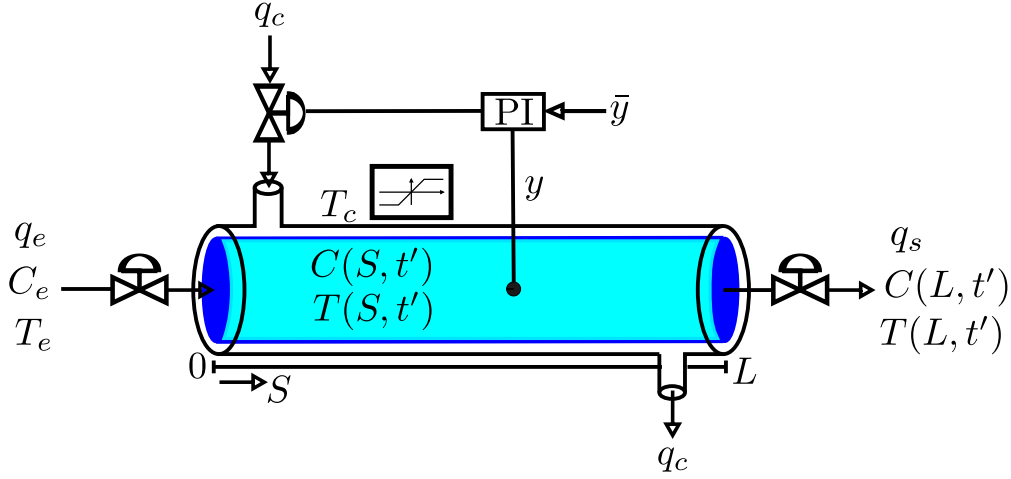


Figura 2.1: Reactor químico exotérmico tubular con control PI

vadas parciales (EDP) del tipo parabólicas

$$\partial C_{t'} = D_M \partial_S^2 C - \nu \partial_S C - R(C, T), \quad 0 < S < L, \quad t' > 0, \quad (2.1a)$$

$$\partial T_{t'} = D_H \partial_S^2 T - \nu \partial_S T + \frac{(-\Delta H)}{\rho c_p} R(C, T) - \frac{PU}{A \rho c_p} (T - T_c), \quad (2.1b)$$

$$D_M \partial_S C = \nu [C(0, t') - C_e(t')], \quad D_H \partial_S T = \nu [T(0, t') - T_e(t')], \quad S = 0, \quad (2.1c)$$

$$\partial_S C = 0, \quad \partial_S T = 0, \quad S = L, \quad (2.1d)$$

$$C(S, 0) = C_{in}(S), \quad T(S, 0) = T_{in}(S), \quad (2.1e)$$

en donde se utiliza la notación  $\partial_p(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial p}$ , (2.1c) y (2.1d) son las condiciones de frontera, y (2.1e) los perfiles inicial de concentración y temperatura, además  $t'$  es el tiempo medido en segundos,  $D_M$  y  $D_T$ , son los coeficientes de dispersión másica y térmica,  $\nu$  es la velocidad del reactante a través del reactor y se asume constante.

Definiendo las siguientes variables adimensionales

$$c = \frac{C}{C_r}, \quad c_e = \frac{C_e}{C_r}, \quad \tau = \frac{T}{T_r}, \quad \tau_e = \frac{T_e}{T_r}, \quad \tau_c = \frac{T_c}{T_r}, \quad v = \frac{\nu}{\nu_r}, \quad s = \frac{S}{L}, \quad t = \frac{\nu_r}{L} t', \quad (2.2)$$

en donde  $C_r$ ,  $T_r$  y  $\nu_r$  son valores de referencia de la concentración, temperatura y velocidad de la mezcla de reacción a través del reactor, el sistema en EDP se puede

reescribir como (detalles en el Apéndice A)

$$\partial_t c = d_m \partial_s^2 c - q \partial_s c - r(c, \tau), \quad 0 < s < 1, \quad t > 0, \quad (2.3a)$$

$$\partial_t \tau = d_h \partial_s^2 \tau - q \partial_s \tau + \beta r(c, \tau) - \delta(\tau - \tau_c), \quad (2.3b)$$

$$\partial_s c = \frac{q}{d_m} [c(s, t) - c_e(t)], \quad \partial_s \tau = \frac{q}{d_h} [\tau(s, t) - \tau_e(t)], \quad s = 0, \quad (2.3c)$$

$$\partial_s c = 0, \quad \partial_s \tau = 0, \quad s = 1, \quad (2.3d)$$

$$c(s, 0) = c_{in}(s), \quad \tau(s, 0) = \tau_{in}(s), \quad (2.3e)$$

en donde  $d_m$  y  $d_h$  son los coeficientes de dispersión másica y térmica,  $q$  es la tasa de dilución,  $\beta$  es la temperatura adiabática, y  $\delta$  el coeficiente de intercambio de calor. Además se sabe que las variables del reactor toman valores en conjuntos bien definidos,

$$\begin{aligned} c_e(t) \in \mathcal{C}_e &= [c_e^-, c_e^+], \quad \tau_e(t) \in \mathcal{T}_e = [\tau_e^-, \tau_e^+], \quad \tau_c(t) \in \mathcal{U} = [\tau_c^-, \tau_c^+], \\ q(t) \in \mathcal{Q} &= [q^-, q^+], \quad c(t, s) \in \mathcal{C} = [0, c_e^+], \quad \tau(t, s) \in \mathcal{T} = [\tau^-, \tau^+], \\ 0 \leq r(c, \tau) &\leq r^+, \quad r(0, \tau) = 0, \quad r(c, \infty) = r_\infty(c) \end{aligned}$$

Usualmente en este tipo de reactores, se desea regular la concentración  $c(s, t)$  a la salida del reactor, por medio de un controlador que modifica la temperatura de camisa  $\tau_c$  el cual es accionado por la medición de la temperatura en algún punto del reactor,  $\tau(s_m, t)$ . El controlador debe ser robusto ante cambios en la tasa de dilución  $q(t)$  y temperatura del flujo de entrada  $\tau_e(t)$ , que son medibles y la concentración del flujo de entrada  $c_e(t)$ , no medible. De acuerdo a lo mencionado anteriormente, el modelo distribuido (2.3) puede reescribirse en forma compacta de operadores como,

$$\partial_t \mathbf{X} = \mathbf{O}_x(\mathbf{X}, \mathbf{d}, w, u), \quad \mathbf{X}(s, 0) = \mathbf{X}_0(s), \quad (2.4a)$$

$$\mathcal{Y} = \tau(s_m, t), \quad (2.4b)$$

$$\mathcal{Z} = c(1, t) \quad (2.4c)$$

en donde  $\mathbf{X}(s, t) = [c(s, t), \tau(s, t)]^\top$  contiene los perfiles dinámicos de concentración y temperatura,  $u = \tau_c$  es la entrada de control,  $\mathbf{d} = [q, \tau_e]^\top$  es la entrada exógena medible,  $w = c_e$  es la entrada exógena no medible,  $\mathcal{Y}$  es la salida medible y  $\mathcal{Z}$  es la salida regulada, además  $\mathbf{O}_x$  es un operador que actúa en la distribución espacial  $\mathbf{X}$  y en las entradas  $\mathbf{d}$ ,  $w$  y  $u$ .

Cuando las entradas exógenas y el control toman su valor nominal,  $\mathbf{d} = \bar{\mathbf{d}}$ ,  $w = \bar{w}$ ,  $u = \bar{u}$ , el conjunto de perfiles de estado estacionario de concentración  $\bar{c}(s)$  y temperatura  $\bar{\tau}(s)$ , está dado por el siguiente problema de valores en la frontera,

$$0 = \mathbf{O}_x(\mathbf{X}, \mathbf{d}, w, u) \quad (2.5a)$$

$$\bar{\mathcal{Y}} = \bar{\tau}(s_m) \quad (2.5b)$$

$$\bar{\mathcal{Z}} = \bar{c}(1) \quad (2.5c)$$

el cual puede tener multiplicidad de soluciones dependiendo de los parámetros del modelo [64], por lo que se puede presentar multiplicidad de perfiles estacionarios, los cuales pueden ser estables o inestables. Además, es conocido que en este tipo de sistemas cuando se implementa un controlador saturado, y en el diseño no se considera alguna forma adecuada para lidiar con la saturación, es posible que en lazo cerrado se puedan presentar puntos de equilibrio indeseados [3]. Por lo tanto en el diseño del controlador se debe tener en cuenta la posible saturación de la señal de control.

## 2.2. Problema de Control Saturado

El problema a resolver consiste en diseñar un controlador dinámico saturado que solo requiera mediciones de la salida  $y(t) = \tau(s_m, t)$ , con  $s_m$  a ser determinado, con la siguiente estructura,

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{f}_c(c_x, y), \quad \mathbf{x}_c(0) = \mathbf{x}_{c0}, \quad u = \varpi_s(\mathbf{x}_c, y), \quad \dim(\mathbf{x}_c) = n_c, \quad (2.6)$$

en donde

$$\varpi_s(\mathbf{x}_c, y) = \text{sat}[\varpi(\mathbf{x}_c, y)] = \begin{cases} \tau^+ & \text{si } \varpi(\mathbf{x}_c, y) > \tau_c^+ \\ \varpi(\mathbf{x}_c, y) & \text{si } \tau_c^- \leq \varpi(\mathbf{x}_c, y) \leq \tau_c^+ \\ \tau^- & \text{si } \varpi(\mathbf{x}_c, y) < \tau_c^- \end{cases}, \quad (2.7)$$

$(\cdot)_s := \text{sat}(\cdot)$  denota la saturación de  $(\cdot)$ ,  $y$  es la salida de temperatura, cuya ubicación  $s_m$  será determinada posteriormente,  $\mathbf{x}_c$  es el estado del controlador,  $\mathbf{f}_c$  y  $\varpi$  son en general funciones no lineales, y  $\tau_c^-$ ,  $\tau_c^+$ , son los límites inferior y superior del controlador, los cuales serán determinados posteriormente. Accionado por la salida medida  $y$ , el controlador (2.6) debe ajustar la temperatura de camisa  $\tau_c$ , de tal forma que las trayectorias  $\mathbf{x}_a(t)$  del correspondiente sistema de lazo cerrado,

$$\partial_t \mathbf{X} = \mathbf{O}_{\mathbf{X}}[\mathbf{X}, \mathbf{d}, w, \varpi_s(\mathbf{x}_x, y)], \quad \mathbf{X}(s, 0) = \mathbf{X}_0(s), \quad (2.8a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{f}_c(c_x, y), \quad \mathbf{x}_c(0) = \mathbf{x}_{c0}, \quad (2.8b)$$

$$\mathbf{x}_a = [\mathbf{X}^\top, \mathbf{x}_c^\top]^\top, \quad (2.8c)$$

se aproxime asintóticamente a: (i) el estado estacionario aumentado prescrito  $\bar{\mathbf{x}}_a = [\bar{\mathbf{X}}(s)^\top, \mathbf{0}^\top]^\top$  como el único atractor robustamente estable, cuando las entradas exógenas medibles y no medibles operan en su valor nominal, i.e.,  $\mathbf{d} = \bar{\mathbf{d}}$ ,  $w = \bar{w}$ ; o (ii) un conjunto compacto alrededor de  $\bar{\mathbf{x}}_a$ , cuyo radio depende de los límites de los conjuntos en los que están definidas las entradas exógenas  $\mathbf{d}(t)$  y  $w(t)$  cuando son variantes en el tiempo.

De forma concisa, el problema de control saturado consiste en diseñar o elegir el conjunto  $\mathcal{S}$  el cual determina el controlador (2.6), en donde,

$$\mathcal{S} = \{f_c, \varpi_s, \tau_c^-, \tau_c^+\},$$

de tal forma que el sistema en lazo cerrado (2.8a) satisfaga la propiedad de estabilidad práctica.

El problema se abordará desde un enfoque constructivo [23], [54], el cual ha sido utilizado en la síntesis de controladores para sistemas químicos [28], y biológicos [51], [52], [50]. EL enfoque constructivo se basa en explotar las características fundamentales del sistema (existencia de conjuntos invariantes debidos a los principios de conservación y fenómenos de bifurcación), y propiedades como pasividad y observabilidad.

Algunos objetivos particulares del diseño del controlador son los siguientes:

- Identificar las condiciones de resolubilidad del problema y darles una interpretación física.
- Obtener un controlador que sea lo más sencillo posible y que dependa poco del modelo, con el objetivo de relacionar el diseño resultante utilizando teoría de control avanzado, con las técnicas utilizadas en control convencional, es decir, control tipo PI con anti encuerdamiento, en donde en específico el conjunto  $\mathcal{S}$  correspondiente es de la forma

$$\mathcal{S}_{PI} = \left\{ \frac{1}{T_i} (y - \bar{y}) - \frac{1}{k_p T_a} (u_s - u), -k_p (y - \bar{y} + x_c), u^-, u^+ \right\},$$

en donde el primer elemento correspondiente a  $f_c$  es la parte dinámica del controlador, que en este caso es la parte integral y un término de anti encuerdamiento del tipo “cálculo hacia atrás” [8], mientras que el mapa de salida  $\varpi_s$  es la suma del término proporcional y los integrales; y los límites del control son  $u^-$  y  $u^+$ .

- Establecer condiciones de estabilidad no local de lazo cerrado en términos de las ganancias del controlador y los límites de saturación ( $\tau_c^-$  y  $\tau_c^+$ ), además de reglas de sintonización sencillas.
- Identificar el compromiso entre robustez, velocidad de regulación, ganancias del controlador y esfuerzo de control.
- Realizar la verificación del funcionamiento del controlador por medio de simulación numérica del controlador diseñado con un caso de estudio representativo.

## 2.3. Caso de estudio

En esta sección se presenta el caso de estudio que se utilizará para el diseño del controlador, y en el cual se harán las simulaciones correspondientes. Considerando el

## 2. EL PROBLEMA DE CONTROL

---

modelo (2.3), con los parámetro y valores nominales de las entradas mostrados en la Tabla 2.1, tomados de [64], y considerando que dentro del reactor se produce una reacción química irreversible, se utiliza una tasa de reacción de primer orden en concentración y con función tipo Arrhenius en temperatura, dada por

$$R(C, T) = Ck_e e^{-\frac{E_a}{R_g T}},$$

en donde  $k_e$  es un factor preexponencial,  $E_a$  es la energía de activación y  $R_g$  es la constante de los gases ideales. La versión adimensional de la tasa de reacción anterior es la siguiente (ver Apéndice A),

$$r(c, \tau) = e^{\phi - \gamma/\tau}. \quad (2.9)$$

La tasa de reacción elegida, a pesar de su simplicidad produce un comportamiento dinámico global no lineal, pues en este sistema se pueden presentar fenómenos como multiplicidad de estados estacionarios, existencia de ciclos límites, alta sensibilidad paramétrica, y otro tipo de dinámicas no lineales reportadas en diversos trabajos sobre este tipo de reactores, [63], [27].

Con los parámetros mencionados y la tasa de reacción (2.9) los perfiles estacionarios del reactor están dados por el problema de valores en la frontera (2.5a), cuya solución se obtuvo de forma numérica, y que resulta en la existencia de cinco pares de perfiles estacionarios, los cuales se muestran en la Figura 2.2, los pares 1, 3 y 5 son estables, mientras que los 2 y 4 son inestables [64]. Es importante mencionar que el caso de estudio considerado en este trabajo representa un caso extremo (debido a la multiplicidad y distribución de los perfiles estacionarios) por lo que si se logra estabilizar este sistema con el controlador que se diseñará, será posible estabilizar otros sistemas similares sean estables o inestables a lazo abierto.

En aplicaciones industriales se requiere que la concentración de salida sea pequeña ya que esto implica alta conversión de reactante a producto, para lo cual es necesario que el sistema opere en perfiles de temperatura alta, sin embargo esta se debe mantener en un rango de valores seguros para evitar condiciones de riesgo, por lo tanto se elige como perfil prescrito el par de perfiles estacionarios 4 (inestable a lazo abierto), ya que presenta una alta conversión y además valores de temperatura seguros en todo el dominio espacial.

Para tener una idea cualitativa de la distribución de los perfiles de estado estacionario y su dinámica en el espacio de estados del reactor, en la Figura 2.3 se presentan la proyección en dos dimensiones de las trayectorias de concentración y temperatura a la salida del reactor,  $c(1, t)$  y  $\tau(1, t)$ . Se observan 5 puntos de equilibrio asociados a la concentración y temperatura a la salida de los pares de perfiles de concentración y temperatura, los puntos 1, 3 y 5 corresponden a los pares de perfiles estables, mientras que los puntos 2 y 4 a los inestables. También, en la Figura 2.4 se presenta la evolución



Símbolo	Parámetro	Valor	Definición
$\beta$	$\frac{(-\Delta H)C_r}{\rho c_p T_r}$	0.5	Incremento de temperatura adimensional
$\phi$	$\ln\left(\frac{LR(C_r, T_r)}{\nu_r C_r} e^\gamma\right)$	22.2	Número de Damköhler
$\delta$	$\frac{U(PL)}{\rho c_p (A\nu_r)}$	1	Coficiente de transferencia de calor
$d_m$	$\frac{D_M}{\nu_r L}$	0.2	Coficiente de dispersión másica
$d_h$	$\frac{D_H}{\nu_r L}$	0.2	Coficiente de dispersión térmica
$\gamma$	$\frac{E_A}{R_q T_R} = \frac{\varepsilon_A}{T_r}$	25	Energía de activación adimensional

**Tabla 2.1:** Parámetros del modelo en EDP

Entrada	Valor Nominal	Definición
$\bar{q}$	1	Tasa de dilución
$\bar{c}_e$	1	Concentración del flujo de entrada
$\bar{\tau}_e$	1	Temperatura del flujo de entrada
$\bar{\tau}_c$	1	Temperatura de la camisa de enfriamiento

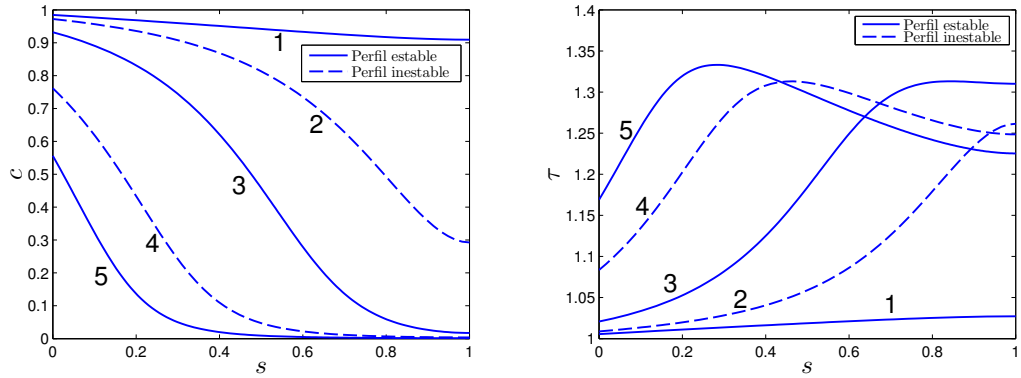
**Tabla 2.2:** Valores nominales de las entradas adimensionales del rector tubular

temporal de la concentración y temperatura a la salida del reactor,  $c(1, t)$  y  $\tau(1, t)$ , respectivamente, para diferentes perfiles iniciales, de tal forma que se tenga una idea cualitativa de la dinámica a lazo abierto del reactor tubular, se observa que para el par de perfiles 1, que corresponden a baja producción y baja temperatura el sistema se establece en no más de cinco tiempos de residencia, al igual que para el par de perfiles 3 (alta producción, alta temperatura a la salida) mientras que para el par de perfiles 5 (alta producción y perfil de temperatura con punto caliente), se requieren más de 15 tiempos de residencia para que el sistema llegue al estado estacionario.

## 2.4. Resumen

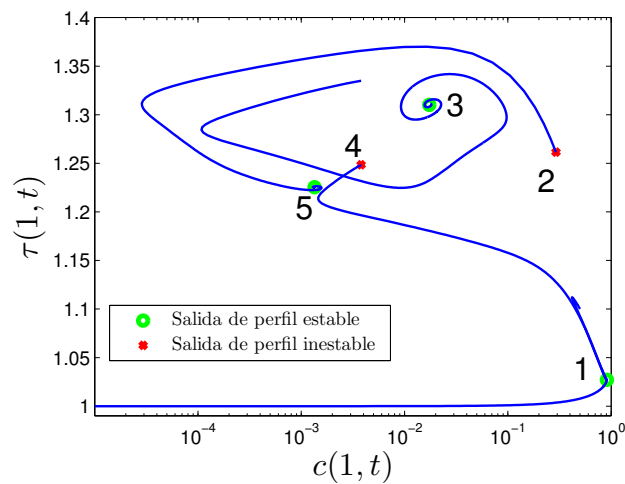
En este capítulo se realizó una descripción cualitativa del funcionamiento el reactor tubular considerado, se introdujo el modelo en derivadas parciales y su versión adimensional. Posteriormente se planteó el problema de diseño de un controlador saturado por retroalimentación de salida para estabilizar el reactor tubular en algún par de perfiles de concentración y temperatura prescritos. Finalmente se presentó el caso de estudio

## 2. EL PROBLEMA DE CONTROL



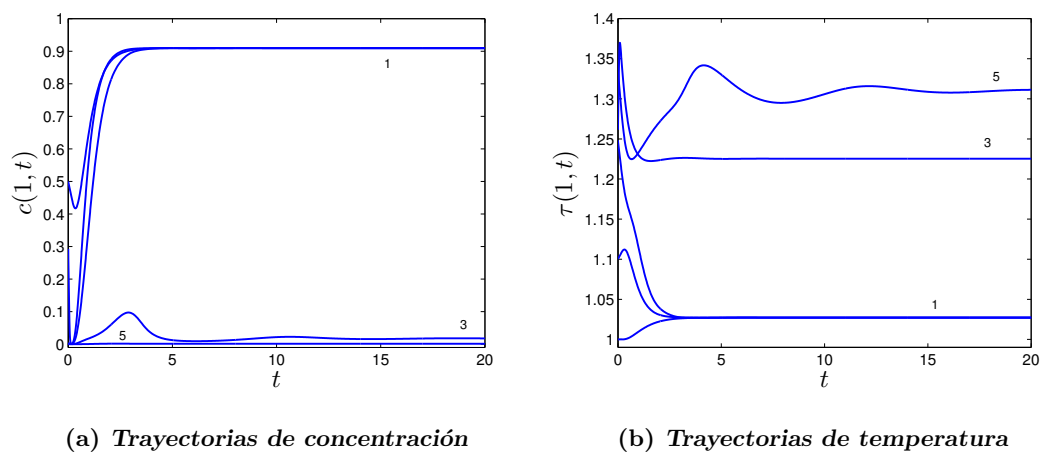
(a) Perfil estacionarios de concentración      (b) Perfil estacionarios de temperatura

**Figura 2.2:** Perfiles estacionarios de concentración y temperatura a lazo abierto



**Figura 2.3:** Plano de fase de concentración y temperatura a la salida del reactor tubular a lazo abierto

que se utilizará para el diseño del controlador y realizar simulaciones, se mostraron los perfiles de estado estacionario a lazo abierto, se determinó cual de éstos es el que se estabilizará, y se presentaron algunas simulaciones de lazo abierto.



**Figura 2.4:** Evolución temporal de concentración y temperatura a la salida del reactor tubular en lazo abierto



# Diseño con Control Avanzado

---

En este capítulo se realizará el diseño del esquema de Control Saturado por Retroalimentación de Salida con teoría de control avanzado, primero se introducirá la discretización del modelo distribuido para obtener un modelo de dimensión finita, se realizará una discusión sobre el por qué se prefiere trabajar con un modelo por etapas por encima del modelo en ecuaciones diferenciales parciales. Se realizará el análisis de las propiedades de lazo abierto del modelo discreto (estado estacionario, conjuntos invariantes y diagramas de bifurcación). Posteriormente, con miras a diseñar un control pasivo por retroalimentación de estado, se analizará bajo qué condiciones esto es posible, poniendo especial atención en los criterios de ubicación de sensor, y se procederá a diseñar el controlador y analizar los efectos de la saturación en el sistema de lazo cerrado, para establecer un criterio de selección de los límites del control y se probará la estabilidad del lazo cerrado con base en el principio de reducción de Seibert.

Una vez que se tenga diseñado el controlador pasivo, se procederá a implementar un observador que junto con el controlador pasivo conformarán un controlador saturado por retroalimentación de salida basado en observador, y se analizarán las ventajas y desventajas de este controlador en perspectiva con el tipo de controladores utilizados en la industria para resolver el problema de control saturado para reactores químicos.

## 3.1. Enfoque de modelo por etapas

El uso de modelos por etapas (también denominado de celdas o discreto) para sistemas distribuidos en el modelado de sistemas reactivos fue una alternativa sumamente utilizada cuando la capacidad de cómputo disponible era limitada y muchas veces era necesario realizar algunas suposiciones sobre los modelos para ahorrar esfuerzo computacional en la caracterización de este tipo de sistemas, [7], [18], [55]. Sin embargo este enfoque se volvió útil en el estudio de los fenómenos de dispersión en reactores tubulares [40], y en la literatura disponible los modelos distribuidos y discretizados se utilizan por igual, incluso se dice que un reactor tubular real es mejor aproximado por un modelo de

celdas con un número mínimo de celdas determinado por el coeficiente de dispersión, y un máximo dado por la relación entre el diámetro del reactor y el diámetro de partícula.

De acuerdo con este enfoque, el reactor tubular puede ser modelado por una discretización por diferencias finitas del modelo en EDP (2.3) con una malla del dominio espacial con un número interno de nodos en el siguiente intervalo,

$$Pe^T/2 \approx N^- \leq N \leq N^+ \approx L/d_p,$$

en donde  $Pe^T = \frac{1}{d_h}$  es el número de Peclet térmico,  $L$  es la longitud del reactor y  $d_p$  es el diámetro de partícula. El número mínimo de etapas  $N^-$  es necesario para asegurar que el aporte fundamental de los mecanismos de dispersión y convección térmicos son capturados [55], mientras que el número máximo de etapas  $N^+$  reduce la excesiva carga computacional por la suposición de pseudo homogeneidad del fluido de reactante, la cual es importante para que el modelo en EDP sea válido [17]. Para el caso de estudio que se abordará en este trabajo se tiene que  $N^- = 3$ , y en [46] se mostró que efectivamente con 3 nodos de discretización se retiene el comportamiento cualitativo fundamental (multiplicidad y estabilidad).

Por otro lado la teoría sobre análisis y control de sistemas no lineales en EDP [14] es limitada en comparación con la teoría existente para sistemas de dimensión finita [36], [38], [54]; es por esto que a continuación se introduce un modelo discreto del reactor tubular, sobre el cual será diseñado el esquema de control saturado.

### 3.2. Modelo discreto

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, se realizó la discretización por diferencias finitas con una malla interna de  $N$  nodos sobre el dominio espacial del modelo distribuido (2.3), para el operador  $\partial_{ss}$  se utilizaron diferencias centradas, mientras que para  $\partial_s$  se utilizaron diferencias hacia atrás y para las condición de frontera, en  $s = 0$  se utilizaron diferencias hacia adelante y en  $s = 1$  hacia atrás, con lo cual se obtuvo el siguiente modelo de dimensión finita  $n = 2N$ ,

$$\dot{c}_i = \vartheta_m \Delta^2 c_i - \theta \Delta^- c_i - r(c_i, \tau_i) := f_{c_i}(c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \tau_i, \theta, \vartheta_m), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.1a)$$

$$\dot{\tau}_i = \vartheta_h \Delta^2 \tau_i - \theta \Delta^- \tau_i - \delta(\tau_i - \tau_c) + \beta r(c_i, \tau_i) := f_{\tau_i}(c_i, \tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}, \theta, \vartheta_m), \quad (3.1b)$$

$$\Delta^+ c_i = \frac{\theta}{\vartheta_m} (c_i - c_e), \quad \Delta^+ \tau_i = \frac{\theta}{\vartheta_h} (\tau_i - \tau_e), \quad i = 0 \quad (3.1c)$$

$$\Delta^- c_i = 0, \quad \Delta^- \tau_i = 0, \quad i = N + 1 \quad (3.1d)$$

$$c_i(0) = c_{i0}, \quad \tau_i(0) = \tau_{i0}, \quad (3.1e)$$

$$z = c_N, \quad y = \tau_m, \quad 1 \leq m \leq N, \quad u = \tau_c, \quad \mathbf{d} = [\tau_e, \theta]^\top, \quad w = c_e, \quad (3.1f)$$

en donde  $\theta = Nq$ ,  $\vartheta_m = N^2 d_m$  y  $\vartheta_h = N^2 d_h$  y los operadores en diferencias se definen como,

$$\Delta^+(\cdot)_i = (\cdot)_{i+1} - (\cdot)_i, \quad \Delta^-(\cdot)_i = (\cdot)_i - (\cdot)_{i-1}, \quad \Delta^2(\cdot)_i = (\cdot)_{i+1} - 2(\cdot)_i + (\cdot)_{i-1}.$$

Incorporando las condiciones de frontera (3.1c) y (3.1d), al par de concentraciones y temperaturas para  $i = 1$  e  $i = N$ , respectivamente, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{d}, w, u), & \mathbf{x}_1(0) &= \mathbf{x}_{10} \\ \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{d}, u), & \mathbf{x}_i(0) &= \mathbf{x}_{i0}, \quad 1 < i < N \\ \dot{\mathbf{x}}_N &= \mathbf{f}_N(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_N, \mathbf{d}, u), & \mathbf{x}_N(0) &= \mathbf{x}_{N0} \\ y &= \mathbf{c}_{ym} \mathbf{x}_m, \quad 1 \leq m \leq N \\ z &= \mathbf{c}_{zN} \mathbf{x}_N \end{aligned}$$

en donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [\mathbf{x}_1^\top, \dots, \mathbf{x}_N^\top]^\top, & \mathbf{x}_i &= [c_i, \tau_i]^\top \\ \mathbf{f} &= [\mathbf{f}_1^\top, \dots, \mathbf{f}_N^\top]^\top, & \mathbf{f}_i &= [f_{ci}, f_{\tau i}] \end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, N$ , las definiciones de las funciones  $\mathbf{f}_i$  se encuentran en el Apéndice A. Finalmente en forma compacta el modelo discreto se puede reescribir como,

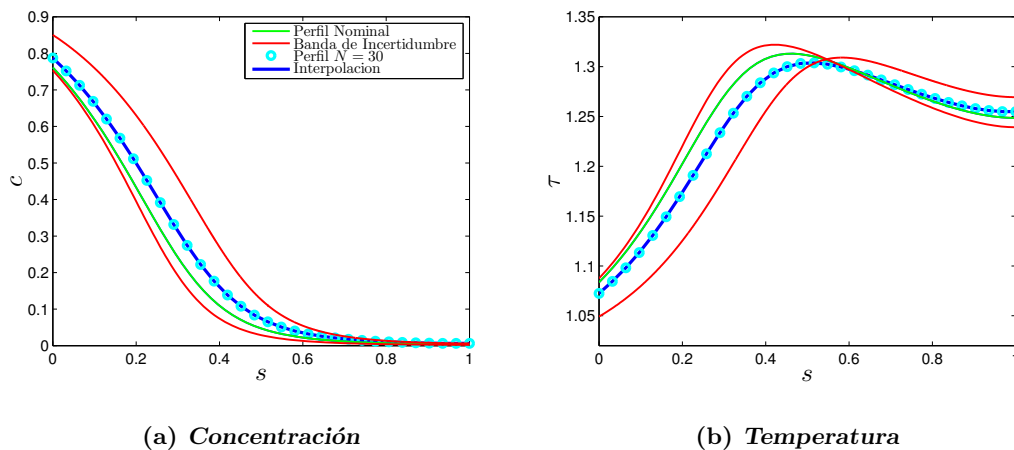
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, w, u), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.2a)$$

$$y = \mathbf{c}_y \mathbf{x} = \tau_m \quad (3.2b)$$

$$z = \mathbf{c}_z \mathbf{x} = c_N, \quad (3.2c)$$

$$u = \tau_c, \quad \mathbf{d} = [\tau_e, q]^\top, \quad w = c_e \quad (3.2d)$$

En adelante, para el análisis de la dinámica del modelo discreto (3.1) se utilizarán  $N$  nodos de discretización, por lo que la dimensión correspondiente es  $n = 2N$ . Para realizar las simulaciones y construir algunos diagramas útiles basados en el modelo discreto se usará un número finito de nodos. El criterio que se utilizará para determinar el número de nodos será el de comparar el error paramétrico del modelo (2.3) (los parámetros presentados en Tabla 2.1 son nominales), con el error que se obtiene al aproximar el sistema con aproximaciones de dimensión finita. De acuerdo con lo anterior, considerando las cotas mayor y menor de error en los parámetros a los que el modelo es más sensible, se determinaron los perfiles estacionarios de interés del sistema distribuido, con lo cual se obtiene una banda de incertidumbre, si los pares de secuencias estacionarias del modelo discreto (3.1) obtenidos con cierto número de nodos están contenidos dentro de la banda de incertidumbre, entonces el error de aproximación es comparable con el error paramétrico, y por lo tanto se tiene una aproximación suficientemente buena. Este criterio ha sido utilizado en otros trabajos en los que se busca aproximar modelos de dimensión infinita por medio de modelos en diferencias finitas en donde el



**Figura 3.1:** Banda de incertidumbre y perfil aproximado con  $N = 30$  nodos de discretización

mallado es no homogéneo, [12].

En la Figura 3.1 se muestran los perfiles estacionarios del sistema distribuido (2.3) con los valores extremos en los parámetros a los que el modelo es más sensible ( $\pm 10\%$  de los números de dispersión,  $\beta \pm 5\%$ ,  $\delta \pm 5\%$ , y  $\gamma \pm 0.01\%$ ) con los cuales se conforma la banda de incertidumbre, a su vez se presentan los perfiles de concentración y temperatura nominales, que se determinaron utilizando el Toolbox de Matlab para resolver ecuaciones diferenciales parciales, y también se muestran los perfiles interpolados obtenidos del modelo discreto (3.1) con 30 nodos de discretización, i.e.,  $N = 30$ . Se observa que la aproximación discretizada y con parámetros nominales está contenida en la banda de incertidumbre, por lo que el error de aproximación por utilizar diferencias finitas es suficientemente pequeño en comparación con el error obtenido por la incertidumbre paramétrica. Por lo tanto, en adelante para construir algunos diagramas importantes, y realizar simulaciones se utilizará el modelo discreto con 30 nodos.

### 3.3. Dinámica a lazo abierto

En esta sección presenta el análisis de las propiedades de lazo abierto del modelo (3.2), se caracteriza la multiplicidad de estados estacionarios y su estabilidad local mediante la combinación de un método de eliminación de ecuaciones algebraicas y un método gráfico conocido como diagrama de Van Heerden, además se muestra que las trayectorias del reactor están contenidas en un conjunto invariante de concentraciones y temperaturas, también se caracteriza la dependencia de la multiplicidad de estados



estacionarios con respecto al valor nominal del control y finalmente se muestran algunas propiedades útiles del modelo para el posterior diseño del controlador y la ubicación del sensor de temperatura (grado relativo y dinámica cero).

Se toma como partida el modelo (3.2) en forma explícita (ver Apéndice A),

$$\dot{c}_1 = -[\theta + \vartheta_m + \alpha(\tau_1)]c_1 + \vartheta_m c_2 + \theta c_e, \quad c_1(0) = c_{10}, \quad i = 1, \quad (3.3a)$$

$$\dot{\tau}_1 = -(\theta + \vartheta_h + \delta)\tau_1 + \beta\alpha(\tau_1)c_1 + \vartheta_h \tau_2 + \theta\tau_e + \delta\tau_c, \quad \tau_1(0) = \tau_{10}, \quad (3.3b)$$

$$\dot{c}_i = (\theta + \vartheta_m)c_{i-1} - [\theta + 2\vartheta_m + \alpha(\tau_i)]c_i + \vartheta_m c_{i+1}, \quad c_i(0) = c_{i0}, \quad 1 < i < N, \quad (3.3c)$$

$$\dot{\tau}_i = (\theta + \vartheta_h)\tau_{i-1} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta)\tau_i + \beta\alpha(\tau_i)c_i + \vartheta_h \tau_{i+1} + \delta\tau_c, \quad \tau_i(0) = \tau_{i0}, \quad (3.3d)$$

$$\dot{c}_N = (\theta + \vartheta_m)c_{N-1} - [\theta + \vartheta_m + \alpha(\tau_N)]c_N, \quad c_N(0) = c_{N0}, \quad i = N, \quad (3.3e)$$

$$\dot{\tau}_N = (\theta + \vartheta_h)\tau_{N-1} - (\theta + \vartheta_h + \delta)\tau_N + \beta\alpha(\tau_N)c_N + \delta\tau_c, \quad \tau_N(0) = \tau_{N0}, \quad (3.3f)$$

a partir del sistema de dimensión finita anterior se realizará el análisis de la dinámica de lazo abierto y se caracterizarán algunas propiedades de importancia para el diseño del esquema de control saturado.

### 3.3.1. Multiplicidad y estabilidad de puntos de equilibrio

Considerando el modelo (3.3), los estados estacionarios correspondientes son la solución del siguiente sistema de ecuaciones algebraicas no lineales,

$$0 = -[\theta + \vartheta_m + \alpha(\tau_1)]c_1 + \vartheta_m c_2 + \theta c_e, \quad i = 1,$$

$$0 = -(\theta + \vartheta_h + \delta)\tau_1 + \beta\alpha(\tau_1)c_1 + \vartheta_h \tau_2 + \theta\tau_e + \delta\tau_c,$$

$$0 = (\theta + \vartheta_m)c_{i-1} - [\theta + 2\vartheta_m + \alpha(\tau_i)]c_i + \vartheta_m c_{i+1}, \quad 1 < i < N,$$

$$0 = (\theta + \vartheta_h)\tau_{i-1} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta)\tau_i + \beta\alpha(\tau_i)c_i + \vartheta_h \tau_{i+1} + \delta\tau_c,$$

$$0 = (\theta + \vartheta_m)c_{N-1} - [\theta + \vartheta_m + \alpha(\tau_N)]c_N, \quad i = N,$$

$$0 = (\theta + \vartheta_h)\tau_{N-1} - (\theta + \vartheta_h + \delta)\tau_N + \beta\alpha(\tau_N)c_N + \delta\tau_c,$$

resolver el problema algebraico no lineal anterior requiere un esfuerzo de cómputo considerable, por lo tanto a continuación se introduce un método eficiente para convertir el problema anterior de alta dimensión a la solución de un par de ecuaciones algebraicas no lineales. El método es conocido como 'desgarre' y surgió del estudio de estado estacionario en columnas de destilación por etapas [19], [60], [49] y ha sido extendido al estudio del tipo de reactor estudiado en este trabajo (ver [46]). La idea básica consiste en aprovechar la estructura recursiva del sistema algebraico anterior: cada par de ecuaciones (concentración y temperatura de cada nodo) depende de las variables del nodo actual, del anterior y del siguiente, por lo que es posible reescribir cada incógnita en términos de las variables de sus vecinos anteriores, de tal forma que todo se puede poner en términos de la concentración y temperatura de la primera etapa, y para resolver este sistema se utilizan los balances totales de materia y energía, una vez que

### 3. DISEÑO CON CONTROL AVANZADO

---

se conocen los valores de  $\bar{c}_1$  y  $\bar{\tau}_1$  la secuencia estacionaria se puede determinar con las formulas recursivas obtenidas en el paso anterior. A continuación se presenta a detalle el método aplicado al modelo discreto.

Por la estructura del sistema de ecuaciones algebraicas, asumiendo que  $\tau_e$ ,  $c_e$ ,  $\theta$  y  $\tau_c$  están fijos en sus valores nominales, es posible reescribir las variables de cada etapa en términos de las variables siguientes y así de forma sucesiva, de tal forma que todas las incógnitas se puede expresar en términos de la concentración  $c_1$  y temperatura  $\tau_1$  de la primera etapa, de acuerdo con las siguientes expresiones.

$$c_2 = \frac{[\theta + \vartheta_m + \alpha(\tau_1)] c_1 - \theta c_e}{\vartheta_m} := \sigma_1^c(c_1, \tau_1, \theta, c_e), \quad (3.4a)$$

$$\tau_2 = \frac{(\theta + \vartheta_h + \delta) \tau_1 - \beta \alpha(\tau_1) c_1 - \theta \tau_e - \delta \tau_c}{\vartheta_h} := \sigma_1^\tau(c_1, \tau_1, \theta, \tau_e, \tau_c), \quad (3.4b)$$

$$c_{i+1} = \frac{-(\theta + \vartheta_m) c_{i-1} + [\theta + 2\vartheta_m + \alpha(\tau_i)] c_i}{\vartheta_m} := \sigma_i^c(c_1, \tau_1, \theta, c_e, \tau_e, \tau_c), \quad 2 \leq i \leq N-1, \quad (3.4c)$$

$$\tau_{i+1} = \frac{(\theta + \vartheta_h) \tau_{i-1} - (\theta + 2\vartheta_m + \delta) \tau_i - \beta \alpha(\tau_i) c_i - \delta \tau_c}{\vartheta_h} := \sigma_i^\tau(c_1, \tau_1, \theta, c_e, \tau_e, \tau_c), \quad (3.4d)$$

luego para determinar  $c_1$  y  $\tau_1$  se pueden utilizar las ecuaciones correspondientes al último nodo, sin embargo dado que a la salida del reactor la concentración es pequeña, esto puede causar problemas por mal condicionamiento, por lo que es preferible utilizar los balances totales,

$$\theta(c_e - c_N) - \sum_{i=1}^N \alpha(\tau_i) c_i := M(c_1, \tau_1, \theta, c_e, \tau_e, \tau_c), \quad (3.5a)$$

$$\theta(\tau_e - \tau_N) + \beta \sum_{i=1}^N \alpha(\tau_i) c_i - \delta \sum_{i=1}^N (\tau_i - \tau_c) := H(c_1, \tau_1, \theta, c_e, \tau_e, \tau_c), \quad (3.5b)$$

y resolver para  $\bar{c}_1$  y  $\bar{\tau}_1$ , posteriormente para determinar la secuencia estacionaria correspondiente se utilizan las fórmulas recursivas dadas por (3.4).

Con el método de desgarré es posible determinar los estados estacionarios, sin embargo dado que el problema tiene múltiples soluciones, para determinar de forma sistemática todas las éstas se utiliza una extensión del conocido diagrama de Van Heerden [62] para reactores continuos exotérmicos el cual permite conocer los estados estacionarios de este tipo de sistemas con un método gráfico, el cual se basa en la construcción de dos curvas que caracterizan el estado estacionario del sistema, la primera representa el calor generado por la reacción química que se lleva a cabo en el reactor, mientras que la segunda es el calor neto extraído del reactor por los flujos de entrada y salida y el intercambio con la camisa de enfriamiento. Ambas curvas son funciones de la temperatura,

y las intersecciones de éstas corresponden a los estados estacionarios de temperatura, el valor correspondiente de concentración puede ser determinado mediante las ecuaciones de estado estacionario. En la Figura 3.2 se muestran el diagrama de Van Heerden correspondiente para el caso de  $N = 30$ , el cual se basa en la descomposición de la ecuación del balance de energía en estado estacionario (3.5b) en dos términos: el calor extraído  $\dot{Q}_e$  y el calor generado  $\dot{Q}_g$ ,

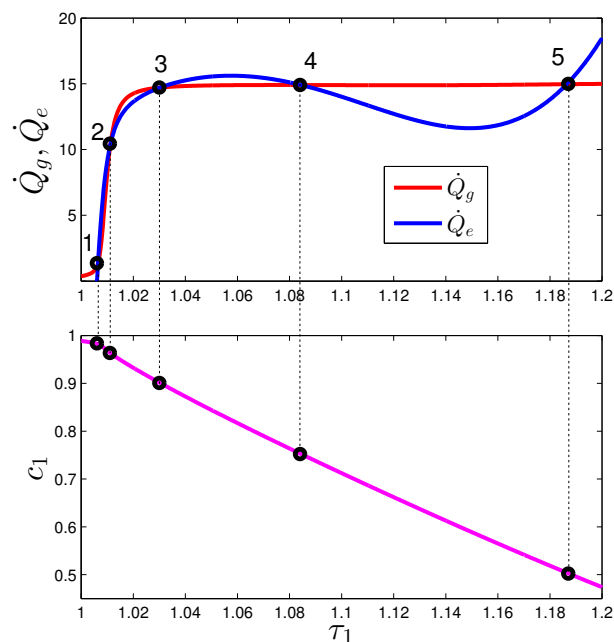
$$\dot{Q}_e = -\theta(\tau_e - \tau_N) + \delta \sum_{i=1}^N (\tau_i - \tau_c), \quad (3.6a)$$

$$\dot{Q}_g = \beta \sum_{i=1}^N \alpha(\tau_i) c_i, \quad (3.6b)$$

estas curvas se presentan como funciones de la temperatura de la primera etapa en la Figura 3.2, dado que en estado estacionario el calor generado y el extraído son idénticos, los valores de  $\tau_1$  en los que las dos curvas se cortan corresponden al valor de estado estacionario, para determinar la concentración  $c_1$  de estado estacionario se utiliza la curva de temperatura contra concentración de la primera etapa. Una vez que se conocen  $c_1$  y  $\tau_1$  se utilizan las fórmulas recursivas (3.4) para calcular el resto de las variables estacionarias.

Además, el diagrama de Van Heerden permite conocer de forma cualitativa la estabilidad local de cada punto de equilibrio, por ejemplo, en el cuarto estado estacionario (de izquierda a derecha) de la Figura 3.2 se estudia el comportamiento de la temperatura evaluando el tamaño de las curvas de calor generado y calor extraído: si estando en el estado estacionario en cuestión, la temperatura se desvía un poco hacia abajo, el calor extraído es mayor que el calor generado, i.e.,  $\dot{Q}_e > \dot{Q}_g$ , lo cual implica que en el sistema dinámico la temperatura decrecerá hasta llegar al estado estacionario anterior donde  $\dot{Q}_e = \dot{Q}_g$ , si la temperatura siguiera decreciendo, entonces  $\dot{Q}_e < \dot{Q}_g$  y la temperatura regresa al tercer estado estacionario. Por otro lado, si la temperatura se encuentra en el cuarto estado estacionario, y se produce un pequeño aumento de temperatura, entonces el valor extraído es menor que el calor generado, i.e.,  $\dot{Q}_e < \dot{Q}_g$ , lo cual se ve reflejado en que la temperatura aumenta hasta que se establece en el quinto estado estacionario, si la temperatura siguiera aumentando, entonces  $\dot{Q}_e > \dot{Q}_g$  y la temperatura regresa al quinto estado estacionario. De esta forma se concluye que el cuarto estado estacionario es inestable, como ya se sabía.

Aplicando el método al caso de estudio con  $N = 30$  se confirma la existencia de cinco estados estacionarios, de los cuales, los 1, 3 y 5 son estables, mientras que los 2 y 4 son inestables. Con los datos obtenidos para el estado estacionario 4 se construyeron los perfiles mostrados en la Figura 3.1. En el Apéndice A, se muestra detalladamente como construir el diagrama de la Figura 3.2.



**Figura 3.2:** Diagrama de Van Heerden generalizado para el modelo discreto con  $N = 30$ . Se muestran el calor generado  $\dot{Q}_g$  y el calor extraído neto  $\dot{Q}_e$ , las intersecciones entre las curvas determinan el valor de estado estacionario de  $\tau_1$  y de la segunda gráfica se obtiene el valor de estado estacionario de  $c_1$

### 3.3.2. Conjuntos invariantes

En [3] y [4], se mostró que, fundamentado en los principios de conservación de materia y energía, las trayectorias del modelo de un reactor continuo de tipo tanque agitado (que coincide con (3.1) con  $N = 1$ ) están contenidas en un conjunto compacto en el espacio concentración-temperatura. De acuerdo con lo anterior, a continuación se mostrará que para el caso de las trayectorias del modelo discreto (3.1) también se tiene esta propiedad, i.e., éstas están contenidas en un subconjunto del hiperespacio  $2N$  dimensional.

Por los principios de conservación de materia, las concentraciones de cada nodo de discretización cumplen la siguiente condición,

$$c_e(t) \geq c_1(t) \geq \dots \geq c_i(t) \geq \dots \geq c_N(t) \geq 0,$$

la restricción anterior es acorde con la naturaleza isótoma de los perfiles de concentración, y la razón física, es que mientras se lleva a cabo la reacción química a lo largo del reactor, el reactante es convertido a producto y por lo tanto su concentración disminuye conforme éste se desplaza. La restricción anterior indica que las concentraciones del

modelo discreto están contenidas en un subespacio de concentraciones cuya frontera está dada por las hipercaras siguientes,

$$c_1 = 0, \quad c_1 = c_e, \quad \dots \quad c_i = 0, \quad c_i = c_{i-1}, \quad \dots \quad c_N = 0, \quad c_N = c_{N-1}$$

ahora se evalúa el campo vectorial de la concentración de cada etapa en la frontera correspondiente,

$$\begin{aligned} c_1 = 0 &\Rightarrow \dot{c}_1 = \vartheta_m c_2 + \theta c_e > 0, & i = 1, \\ c_1 = c_e &\Rightarrow \dot{c}_1 = -\alpha(\tau_1)c_e - \vartheta_m(c_e - c_2) < 0, \\ &\vdots \\ c_i = 0 &\Rightarrow \dot{c}_i = (\theta + \vartheta_m)c_{i-1} + \vartheta_m c_{i+1} > 0, & 1 < i < N, \\ c_i = c_{i-1} &\Rightarrow \dot{c}_i = -[\vartheta_m + \alpha(\tau_i)]c_{i-1} + \vartheta_m c_{i+1} < 0, \\ &\vdots \\ c_N = 0 &\Rightarrow \dot{c}_N = (\theta + \vartheta_m)c_{N-1} > 0, & i = N, \\ c_N = c_{N-1} &\Rightarrow \dot{c}_N = -\alpha(\tau_N)c_N < 0, \end{aligned}$$

de las desigualdades anteriores, se puede concluir que en la frontera del conjunto en que están contenidas las  $N$  concentraciones el campo vectorial correspondiente apunta hacia el interior de este conjunto, lo cual indica la existencia de un invariante de concentraciones  $X_C \in \mathbb{R}^N$ .

Para mostrar la existencia de un subconjunto invariante de temperaturas se introduce la entalpía del sistema,

$$h = \beta \sum_{i=1}^N c_i + \sum_{i=1}^N \tau_i$$

cuya dinámica está dada por,

$$\begin{aligned} \dot{h} &= \beta \sum_{i=1}^N \dot{c}_i + \sum_{i=1}^N \dot{\tau}_i \\ \dot{h} &= \beta\theta(c_e - c_N) + \theta(\tau_e - \tau_N) - \delta \sum_{i=1}^N (\tau_i - \tau_c) \\ \dot{h} &= \beta\theta(c_e - c_N) + \theta(\tau_e - \tau_N) - \delta \sum_{i=1}^N \tau_i + N\delta\tau_c \\ \dot{h} &= - \left[ \delta \sum_{i=1}^{N-1} \tau_i + (\theta + \delta)\tau_N \right] + \beta\theta(c_e - c_N) + \theta\tau_e + N\delta\tau_c, \end{aligned}$$

en estado estacionario,

$$0 = - \left[ \delta \sum_{i=1}^{N-1} \tau_i + (\theta + \delta)\tau_N \right] + \beta\theta(c_e - c_N) + \theta\tau_e + N\delta\tau_c,$$

### 3. DISEÑO CON CONTROL AVANZADO

---

considerando las entradas exógenas en sus valores nominales, la ecuación anterior representa una hipersuperficie de dimensión  $N + 1$  y la cual contiene todos los estados estacionarios del modelo discreto (3.1). Esta hipersuperficie está contenida en el espacio  $T_1 \times T_i \times T_N \times C_N$ , y puede reescribir como,

$$\delta \sum_{i=1}^{N-1} \tau_i + (\theta + \delta)\tau_N = \beta\theta(c_e - c_N) + \theta\tau_e + N\delta\tau_c,$$

Considerando las siguientes definiciones,

$$T_L^- = \theta\tau_e + N\delta\tau_c, \quad s_m = \beta\theta, \quad T_L^+ = T_L^- + s_m c_e,$$

se tiene que los estados estacionarios del modelo por etapas están contenidos en la hipersuperficie

$$\delta \sum_{i=1}^{N-1} \tau_i + (\theta + \delta)\tau_N = T_L^+ - s_m c_N.$$

Con la hipersuperficie anterior se pueden generar, a partir de restricciones físicas, otras hipersuperficies que conforman la frontera del espacio en el que están contenidas las temperaturas del modelo por etapas, las cuales se muestran a continuación,

$$\begin{aligned} \delta \sum_{i=1}^{N-1} \tau_i + (\theta + \delta)\tau_N &= T_L^-, \\ \delta \sum_{i=1}^{N-1} \tau_i + (\theta + \delta)\tau_N &= T^+(c_N), \end{aligned}$$

en donde  $T^+(c_N) = T_L^+ + s_m(c_e - c_N)$  es una superficie que acota el espacio de temperaturas para valores de concentración cercanos a la unidad. Los hiperplanos anteriores son la frontera del subconjunto en el cual están contenidas las temperaturas del reactor. Ahora se evaluará la dinámica de la entalpía en estos hiperplanos para mostrar que en la frontera, el campo vectorial correspondiente apunta al interior de este subconjunto,

$$\begin{aligned} \delta \sum_{i=1}^{N-1} \tau_i + (\theta + \delta)\tau_N = T_L^- &\Rightarrow \dot{h} = \beta\theta(c_e - c_N) > 0, \\ \delta \sum_{i=1}^{N-1} \tau_i + (\theta + \delta)\tau_N = T_L^+(c_N) &\Rightarrow \dot{h} = -s_m c_e < 0, \end{aligned}$$

el resultado anterior, indica que en la frontera del subespacio de entalpía factible, el campo vectorial correspondiente apunta hacia adentro, lo cual implica que las temperaturas tienen un comportamiento topológico similar, y define un conjunto invariante

de temperatura  $X_T \in \mathbb{R}^N$ . De acuerdo con lo anterior, se define el conjunto invariante  $X = X_C \times X_T \subset \mathbb{R}^{2N}$ , de acuerdo con la siguiente expresión,

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N} \mid 0 \leq c_1 \leq c_2, \quad c_{i-1} \leq c_i \leq c_{i+1}, \quad i = 2, \dots, N; \right. \\ \left. T^- \leq \delta \sum_{i=1}^{N-1} \tau_i + (\theta + \delta)\tau_N \leq T^+(c_N) \right\} \subset \mathbb{R}^{2N},$$

el conjunto anterior es un invariante para las trayectorias del modelo discreto, lo cual implica que cualquier trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  que comienza en  $X$  se mantiene en este conjunto para todo tiempo futuro.

En sistemas de alta dimensión, los conjuntos atractores no se restringen a puntos de equilibrio y ciclos límite como en el caso en  $\mathbb{R}^2$ , sino que puede haber atractores muy variados, como los llamados atractores extraños, curvas de alta dimensión que no son cerradas pero que se mantienen orbitando en el espacio de estados, ejemplos de éstos son los atractores de Lorenz o de Rossler, [1]. Sin embargo no existen técnicas generales para asegurar o desechar la existencia de este tipo de atractores. Además, en la literatura existente en el análisis dinámico de sistemas distribuidos utilizando discretizaciones no han sido reportados fenómenos de este tipo, en cambio, existen trabajos como [44] y las referencias mencionadas ahí, en los que tanto de forma teórica como experimental en reactores distribuidos se han encontrado comportamientos de oscilaciones sostenidas que forman ciclos límite, aunque en general estos fenómenos son raros y se deben a modificaciones en la estructura del sistema, en el caso de [44] el reactor considerado tiene un recirculamiento de temperatura mediante un intercambiador de calor, lo cual produce una realimentación positiva de temperatura.

De acuerdo con lo anterior se sabe que las trayectorias en el conjunto  $X$  convergen asintóticamente (con tiempo característico  $t_x$ ) a un estado estacionario  $\bar{\mathbf{x}}$ , o a una órbita  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  que puede ser cerrada [3], o no, i.e.,

$$\mathbf{x}_0 \in X \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in X, \quad \mathbf{x}(t) \xrightarrow{t_x} \bar{\mathbf{x}} \text{ o } \bar{\mathbf{x}}(t).$$

Algunas simulaciones para el sistema distribuido (2.3) como las mostradas en la Figura 2.3 y otras adicionales que se realizaron pero no se muestran en el documento, considerando que esto no es una demostración formal pero sí de idea del comportamiento dinámico del sistema, sugieren que el modelo distribuido no tiene ciclos límites u otro tipo de atractores más allá de los perfiles estacionarios. También se realizaron algunas simulaciones del modelo discreto (3.2) con  $N = 30$ , y no se registró ningún comportamiento de oscilaciones sostenidas.

La existencia del conjunto invariante  $X$ , es importante ya que restringe las trayectorias del reactor a un subespacio de  $\mathbb{R}^{2N}$ , en el que éstas tienen sentido físico, además de

que este conjunto será utilizado posteriormente para probar estabilidad de lazo cerrado mediante el Principio de Reducción de Seibert. Es importante mencionar que cuando la entrada de control y las variables exógenas no están en sus valores nominales, los desarrollos anteriores se mantienen topológicamente iguales, aunque los hiperplanos que acotas la entalpía crezcan o disminuyan en tamaño.

### 3.3.3. Dependencia de la dinámica global de lazo abierto de la temperatura de enfriamiento

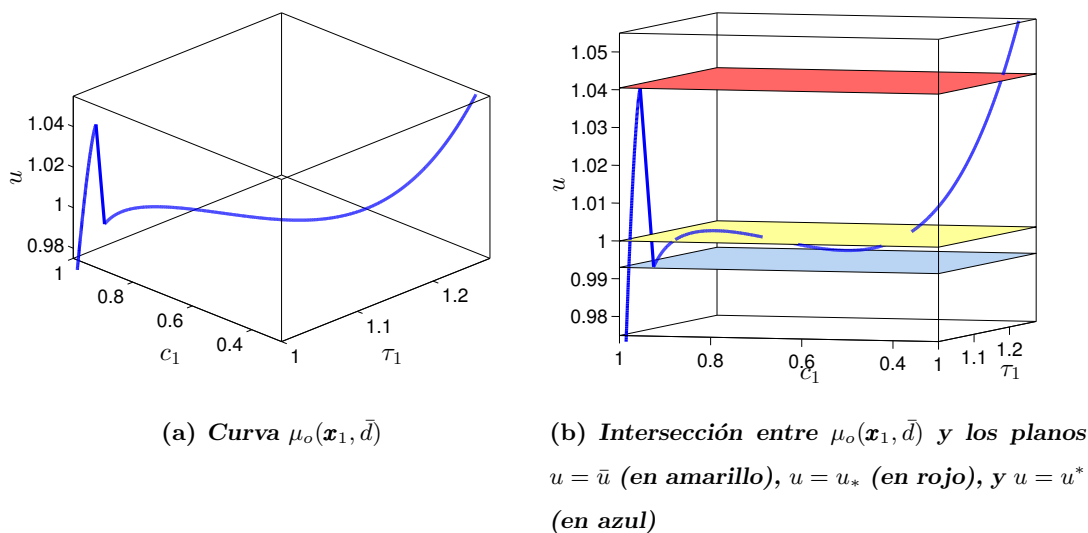
La caracterización de los estados estacionarios del modelo (3.1) depende, entre otras variables, del valor nominal de la temperatura de la camisa de enfriamiento  $\tau_c$ . Para poder identificar como se ve afectada la multiplicidad de estados estacionarios con respecto al valor nominal de la señal de control  $u$ , se utiliza una variante del método de desgarré, se utilizan los balances en estado estacionario de materia y energía parametrizados en términos de  $c_1$ ,  $\tau_1$  (3.5) pero en este caso  $u$  se maneja como una variable adicional. De esta forma se tienen dos restricciones algebraicas en un espacio de tres dimensiones, cada balance en estado estacionario representa una superficie de tres dimensiones, y la intersección de estas dos superficies que es una curva en el espacio de tres dimensiones contiene los estados estacionarios para cada valor de  $u$ , la cual se puede representar como una parametrización del control en términos de  $c_1$  y  $\tau_1$ , es decir,

$$\mu_o(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}}) = \{(\mathbf{x}_1, u) \mid M(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}}, u) = H(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}}, u) = 0\} \quad (3.7)$$

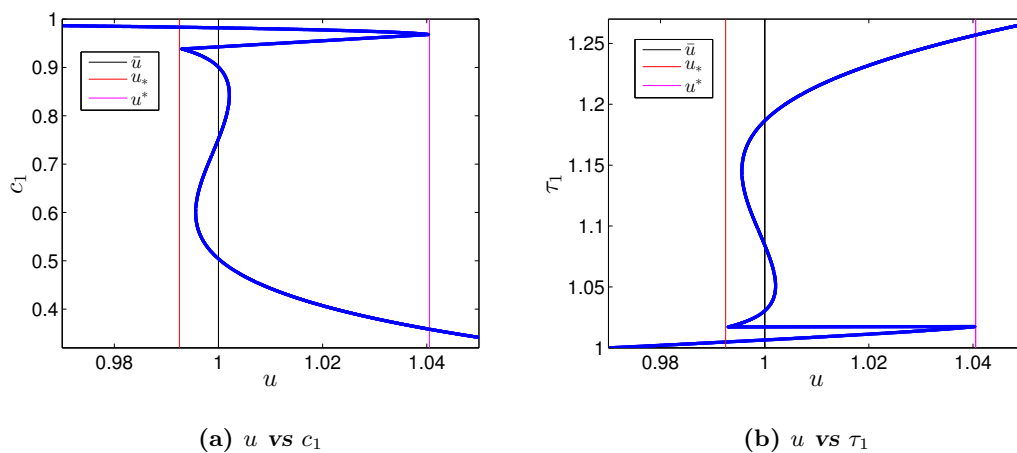
en donde  $\mathbf{x}_1 = [c_1 \ \tau_1]^\top$ , y  $M$  y  $H$  están definidos en (3.5). En la Figura 3.3a se muestra la curva (3.7) para  $N = 30$ , la cual contiene todos los estados estacionarios para cada  $u$  nominal, en la intersección de la curva  $\mu_o(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}})$  y el plano  $u = \bar{u}$  se encuentran los estados estacionarios de lazo abierto, en la Figura 3.3b, se observan cinco cortes con el plano  $u = \bar{u}$  (en amarillo), por lo que se tienen cinco estados estacionarios, lo cual coincide con los resultados previos. Para facilitar la visualización, en la Figura 3.4 se presentan las proyecciones de la curva (3.7) de lazo abierto y su intersección con el plano  $u = \bar{u}$  en los planos  $u - c_1$ ,  $u - \tau_1$ , de esta forma en los planos  $u - c_1$  y  $u - \tau_1$  los cortes entre la línea recta  $u = \bar{u}$  y las proyecciones correspondientes determinan los estados estacionarios. Con el uso de estos diagramas se tienen la ventaja de que nuevamente se reduce el problema de alta dimensión a un problema en tres dimensiones o sus proyecciones en los planos correspondientes, con los cuales se puede determinar el número de estados estacionarios para el valor nominal del control.

La curva  $\mu_o(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}})$  también puede interpretarse como un diagrama de bifurcación, en el que se caracteriza la dependencia de los estados estacionarios del sistema (3.2) con respecto al valor nominal del control. Matemáticamente, el conjunto de puntos de bifurcación con respecto al control, proyectado en las variables de concentración y





**Figura 3.3:** Determinación de estados estacionarios a partir de la curva  $\mu_o(\mathbf{x}_1, \bar{d})$



**Figura 3.4:** Diagramas de bifurcación de lazo abierto

temperatura de la primera etapa es,

$$B = \left\{ \mathbf{p} = (\mathbf{x}_1, u)^\top \in X_1 \times \mathcal{U} \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}}, u) = 0, \det \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}}, u) = 0 \right\},$$

$$B = \{\mathbf{p}_*, \mathbf{p}^*\}, \quad \mathbf{p}_* = (c_*, \tau_*, u_*), \quad \mathbf{p}^* = (c^*, \tau^*, u^*),$$

en donde  $n_s$  es el número de estados estacionarios,  $u^{--}$  (o  $u^{++}$ ) es el valor extremo mínimo (o máximo) del control,  $u_*$  (o  $u^*$ ) es el valor de bifurcación mínimo (o máximo)

### 3. DISEÑO CON CONTROL AVANZADO

---

absoluto del control, y  $u_{**}$  (o  $u^{**}$ ) es el valor de bifurcación mínimo (o máximo) relativo con respecto al control, i.e.,

$$u_* = \min_{\mathbf{x}_1 \in X_1} \mu_o(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}}), \quad u^* = \max_{\mathbf{x}_1 \in X_1} \mu_o(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}}),$$

$$u_* < \bar{u} < u^*, \quad c_* < \bar{c} < c^*, \quad \tau_* < \bar{\tau} < \tau^*,$$

y además

$$u = \mu_o(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}}), \quad u \in U_s = [u_*, u^*], \quad \mathbf{x}_1 \in X_1 = C_1 \times T_1,$$

$u_*$  (o  $u^*$ ) es el valor de bifurcación inferior (o superior) del control para el que el sistema pasa de tener un solo estado estacionario a más de uno (o viceversa). De acuerdo con lo anterior, la caracterización de los estados estacionarios utilizando los diagramas de bifurcación de la Figura 3.4 se presentan a continuación, la estabilidad de cada estado estacionario se determinó mediante el método indirecto de Lyapunov, [36] (para detalles de la construcción de los diagramas de bifurcación véase el Apéndice A),

$\bar{u} \in [u^{--}, u_*) : n_s = 1$  (Un EE GAS frío)

$\bar{u} = u_* : n_s = 2$  (NE frío y bifurcación SN)

$\bar{u} \in (u_*, u_{**}) : n_s = 3$  (3 EE, un NE frío, uno caliente y una S en medio)

$\bar{u} = u_{**} : n_s = 4$  (3 EE, un NE frío, uno caliente y S en medio, y bifurcación SN)

$\bar{u} \in (u_{**}, u^{**}) : n_s = 5$  (3 NE con dos S enmedio)

$\bar{u} = u^{**} : n_s = 4$  (3 EE, un NE frío, un caliente, una S en medio, y bifurcación SN)

$\bar{u} \in (u^{**}, u^*) : n_s = 3$  (3 EE, un nodo NE frío, uno caliente, y una S enmedio)

$\bar{u} = u^* : n_s = 2$  (NE caliente y bifurcación SN)

$\bar{u} \in (u^*, u^{++}] : n_s = 1$  (Un EE GAS caliente)

EE: estado estacionario; GAS: global y asintóticamente estable

NE: nodo estable; S: silla; SN: silla-nodo

En la Figura 3.3b se puede observar que la curva  $u = \mu_o(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}})$  solo corta en un punto a los planos en los que  $\bar{u} \in [u^{--}, u_*)$  (en azul) o  $\bar{u} \in (u^*, u^{++}]$  (en rojo). Lo cual además, indica que cuando el esfuerzo de control se satura en un valor por debajo (o por encima) de  $u_*$  (o de  $u^*$ ), sólo existe un estado estacionario de temperatura baja (o alta). De este análisis, se puede concluir que cualquier controlador saturado, diseñado con la metodología particular que sea, debe satisfacer que los límites de saturación sean mayor (o menor) que los valores de bifurcación del control  $u_*$  (o  $u^*$ ) para que el único punto crítico en lazo cerrado sea el estado estacionario prescrito  $\bar{\mathbf{x}}$ . Este resultado se presentó previamente en [3] como un teorema, para un reactor continuo de tanque agitado, que coincide como el modelo (3.1) con  $N = 1$ , la idea de la prueba, que también funciona para el caso de  $N$  etapas bajo la suposición de que los únicos atractores son puntos de equilibrio, se basa en la separación del conjunto  $X$  en tres zonas (para  $N = 1$ ,  $X = C_1 \times T_1$ ),  $X^-$ ,  $X^+$  y  $X^0$ . En la zona  $X^-$  (o  $X^+$ ) el control

se satura a su valor mínimo  $\tau_c^-$  (o máximo  $\tau_c^+$ ), mientras que en  $X^0$ , el control no se satura. Cuando las trayectorias del reactor se encuentran en la zona  $X^-$  (o  $X^+$ ) y el control se satura en  $\tau_c^-$  (o  $\tau_c^+$ ) el estado estacionario correspondiente se encuentra en la zona contraria de saturación  $X^+$  (o  $X^-$ ), por lo que las trayectorias se mueven hacia esta zona, sin embargo para poder llegar al estado estacionario correspondiente tienen que pasar por la zona  $X^0$  en donde el controlador deja de saturarse y lleva las trayectorias al estado estacionario prescrito.

### 3.3.4. Pasividad

Un sistema es pasivo por retroalimentación de estado si satisface las siguientes condiciones [36],

- El grado relativo entre la entrada  $u$  y la salida  $y$  debe ser igual a uno, denotado como,  $\text{gr}(u, y) = 1$ ,
- La dinámica cero asociada debe tener un único punto de equilibrio al menos estable,

para el modelo (3.2) la condición de grado relativo establece que la dinámica de la temperatura de medición  $\dot{\tau}_m$  depende de  $u$ , mientras que la propiedad de que la dinámica cero asociada sea estable, significa que cuando se aplica el control que regula la salida medida a su valor nominal, a la dinámica restante, considerando que  $y = \bar{y}$ , tiene un único punto de equilibrio al menos estable. Las condiciones anteriores están sumamente relacionadas con la etapa de medición que se elija.

La primera condición se satisface para cualquier salida elegida  $y = \tau_m$ , esto es debido a que la dinámica de temperatura en cualquier etapa siempre depende de la entrada de control  $u$ , i.e.,

$$\dot{\tau}_1 = -(\theta + \vartheta_h + \delta)\tau_1 + \beta\alpha(\tau_1)c_1 + \vartheta_h\tau_2 + \theta\tau_e + \delta\tau_c, \quad i = 1, \quad (3.8a)$$

$$\dot{\tau}_i = (\theta + \vartheta_h)\tau_{i-1} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta)\tau_i + \beta\alpha(\tau_i)c_i + \vartheta_h\tau_{i+1} + \delta\tau_c, \quad 1 < i < N, \quad (3.8b)$$

$$\dot{\tau}_N = (\theta + \vartheta_h)\tau_{N-1} - (\theta + \vartheta_h + \delta)\tau_N + \beta\alpha(\tau_N)c_N + \delta\tau_c, \quad i = N, \quad (3.8c)$$

de las ecuaciones anteriores se observa que todas las dinámicas de temperatura dependen linealmente del control  $\tau_c$ , cuyo coeficiente es el parámetro de transferencia de calor  $\delta$ , por lo tanto, para que el grado relativo sea uno y esté bien definido se debe cumplir que siempre haya intercambio de calor desde el interior del reactor hacia la camisa de enfriamiento, i.e.,  $\delta > 0$ , lo cual siempre se satisface puesto que el reactor está diseñado para operar con extracción de calor en todo momento.

La condición de que la dinámica cero asociada a la salida medida  $y$  y la entrada  $u$  tengo un punto de equilibrio al menos estable, depende de la salida elegida para medir,

### 3. DISEÑO CON CONTROL AVANZADO

---

y esta condición se tomará como criterio de ubicación de sensor. La dinámica cero del sistema se caracteriza de acuerdo con la siguiente expresión,

$$Z^* = \{x \in X \mid y = \bar{y}\} \subset X,$$

por lo tanto se tiene que cuando la salida toma su valor nominal  $\bar{y}$ , las trayectorias del sistema están en el conjunto  $Z^*$ , y de la dinámica de la salida en esta variedad es posible determinar la entrada requerida que se debe aplicar para que el sistema se encuentre en  $Z^*$ , i.e.,

$$y(t) \equiv \bar{y} \Rightarrow x(t) \in Z^* \Rightarrow u(t) = u^*(x) := \mu_z(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}})|_{\mathbf{x} \in Z^*},$$

por tanto, la dinámica restringida del sistema (3.1) se describe como,

$$\dot{\mathbf{x}} = \{ \mathbf{f} [\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}}, \mu_z(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}})] \}|_{\mathbf{x} \in Z^*} := \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \mathbf{d}),$$

en forma explícita, la dinámica restringida del sistema es,

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= -[\theta + \vartheta_m + \alpha(\tau_1)]c_1 + \vartheta_m c_2 + \theta c_e, & i = 1, \\ \dot{\tau}_1 &= -(\theta + \vartheta_h + \delta)\tau_1 + \beta\alpha(\tau_1)c_1 + \vartheta_h \tau_2 + \theta \tau_e + \delta u, \\ \dot{c}_i &= (\theta + \vartheta_m)c_{i-1} - [\theta + 2\vartheta_m + \alpha(\tau_i)]c_i + \vartheta_m c_{i+1}, & 1 < i < N, i \neq m, \\ \dot{\tau}_i &= (\theta + \vartheta_h)\tau_{i-1} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta)\tau_i + \beta\alpha(\tau_i)c_i + \vartheta_h \tau_{i+1} + \delta u, \\ \dot{c}_m &= (\theta + \vartheta_m)c_{m-1} - [\theta + 2\vartheta_m + \alpha(\bar{\tau}_m)]c_m + \vartheta_m c_{m+1} & i = m, \\ \dot{c}_N &= (\theta + \vartheta_m)c_{N-1} - [\theta + \vartheta_m + \alpha(\tau_N)]c_N, & i = N, \\ \dot{\tau}_N &= (\theta + \vartheta_h)\tau_{N-1} - (\theta + \vartheta_h + \delta)\tau_N + \beta\alpha(\tau_N)c_N + \delta u, \\ u &= \mu_z(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{d}}), \end{aligned}$$

y en estado estacionario se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} 0 &= -[\theta + \vartheta_m + \alpha(\tau_1)]c_1 + \vartheta_m c_2 + \theta c_e, & i = 1, \\ 0 &= -(\theta + \vartheta_h + \delta)\tau_1 + \beta\alpha(\tau_1)c_1 + \vartheta_h \tau_2 + \theta \tau_e + \delta u, \\ 0 &= (\theta + \vartheta_m)c_{i-1} - [\theta + 2\vartheta_m + \alpha(\tau_i)]c_i + \vartheta_m c_{i+1}, & 1 < i < N, i \neq m, \\ 0 &= (\theta + \vartheta_h)\tau_{i-1} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta)\tau_i + \beta\alpha(\tau_i)c_i + \vartheta_h \tau_{i+1} + \delta u, \\ 0 &= (\theta + \vartheta_m)c_{m-1} - [\theta + 2\vartheta_m + \alpha(\bar{\tau}_m)]c_m + \vartheta_m c_{m+1} & i = m, \\ 0 &= (\theta + \vartheta_m)c_{N-1} - [\theta + \vartheta_m + \alpha(\tau_N)]c_N, & i = N, \\ 0 &= (\theta + \vartheta_h)\tau_{N-1} - (\theta + \vartheta_h + \delta)\tau_N + \beta\alpha(\tau_N)c_N + \delta u, \\ u &= \mu_z(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}), \end{aligned}$$

aplicando el método de desgarre en su versión modificada para construir diagramas de bifurcación al sistema anterior (detalles en el Apéndice A) y con la restricción adicional de la dinámica cero  $y = \bar{y}$  es posible construir diagramas de bifurcación en los que los cortes con el valor nominal del control representan los estados estacionarios de la

dinámica cero, mediante los cuales se puede caracterizar la dependencia de la multiplicidad de la dinámica cero con respecto a la posición del sensor, y determinar un conjunto de salidas factibles  $Y$  de tal forma que la dinámica cero asociada tenga un solo punto de equilibrio al menos estable. En [23] se menciona que en la literatura concerniente a control de procesos químicos, sistemas como el reactor continuo de tanque agitado no presentan fenómenos de fase no mínima (dinámica cero con puntos de equilibrio inestables), y se dan algunas otras referencias donde se presentan otros sistemas en procesos químicos que no presentan fase no mínima [22], [14]. De acuerdo a los razonamientos anteriores y considerando que en [46] se mostró que el modelo (3.2) es equivalente al de una interconexión de tanques continuos de tanque agitado con retromezclado, en este trabajo se asume que cuando la dinámica cero de (3.2) tiene un solo punto de equilibrio, ésta es de fase mínima y además se asume que es entrada a estado estable, algo usual en la literatura relacionada al tema, [23].

Con lo anterior se asegura que la dinámica cero tenga un solo estado estacionario, sin embargo como ya se ha mencionado anteriormente, en sistemas de alta dimensión pueden presentarse otro tipo de atractores, como ciclos límite o curvas no cerradas que orbitan en el espacio de estados. La posibilidad de que existan atractores extraños es baja, incluso la posibilidad de que existan ciclos límite también lo es. Sin embargo, dado que hay algunos trabajos donde se ha reportado la existencia de ciclos límite en reactores distribuidos [44], a continuación se analizan algunos posibles casos que podrían darse en el caso de que existieran ciclos límite, el análisis será solo cualitativo y se parte de casos simples en el plano y luego se discute de forma breve lo que podría pasar en altas dimensiones.

En el caso del plano, puede darse el caso de que el único atractor sea un punto, el cual puede ser un nodo o un foco estable, por otro lado, en este caso estos son global y asintóticamente estable. Otra posibilidad es que se tenga un punto de equilibrio estable, ya sea un foco o un nodo rodeado por un ciclo límite semi estable, en el que las trayectorias que comienzan en la región del plano interna al ciclo límite convergen al foco o nodo, mientras que las trayectorias que comienzan en la región exterior al ciclo límite convergen hacia éste, en este caso el punto de equilibrio es local y asintóticamente estable y la cuenca de atracción es el interior del ciclo límite. En el caso de sistemas de tres dimensiones existen tres tipos de, el primero de estos es una órbita cerrada en el espacio de tres dimensiones, la cual está contenida en un plano; el segundo casi es un ciclo límite toroidal, mientras que el tercero es un ciclo límite que forma una esfera. Para el ciclo límite conformado por una órbita cerrada planar, podría darse el caso de que esta rodee un punto de equilibrio asintóticamente estable, y que el ciclo sea del tipo semi estable en este caso de nueva cuenta la estabilidad del punto de equilibrio es solo local. Si existe un ciclo límite que forma un toro, entonces el punto de equilibrio es inestable. En el último caso, en el que se presenta un ciclo límite que forma una esfera, si este es semi estable, entonces puede contener en su interior un punto de equilibrio local y asintóticamente estable [1]. Este último caso puede extenderse a altas dimensiones,

y entonces la estabilidad del punto de equilibrio de interés sería local. Sin embargo, la posibilidad de que se presenten este tipo de atractores en el caso de estudio considerado es baja, pero no se tiene una demostración formal para asegurar esto. En la literatura correspondiente no se han presentado resultados sobre esto. Además se realizaron algunas simulaciones de la dinámica cero y no se observó la existencia de oscilaciones sostenidas. De acuerdo con el análisis anterior, a pesar de que no se tiene una prueba formal para desechar otro tipo de atractores diferentes a puntos de equilibrio, se asume que éstos son los únicos atractores del caso de estudio.

Por otro lado, también es importante mencionar que en presencia de entradas variantes en el tiempo, como  $c_e(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\tau_e(t)$ , las trayectorias de la dinámica restringida en  $Z^*$  convergen asintóticamente a una bola alrededor de  $\bar{\mathbf{x}}$ , cuyo radio depende de la amplitud de las señales de entrada variantes en el tiempo. Por otro lado, cuando la señal de control aplicada al sistema es saturada, de nueva cuenta se considera que el espacio de estado se divide en tres zonas, las de saturación  $X^+$  y  $X^-$  en donde no hay retroalimentación, y la zona  $X^0$  donde si está activa la retroalimentación. El conjunto de la dinámica cero  $Z^*$  está contenido en  $X$  cuando no hay saturación, sin embargo, en las zonas de saturación, dado que se abre el lazo, la dinámica cero en estas zonas se desvanece, con o cual la dinámica cero cuando hay saturación  $Z^{*0}$  sólo existe en el conjunto  $X^0$ . Sin embargo esto no modifica la estabilidad de la dinámica cero, debido al razonamiento explicado cuando se utiliza cualquier controlador saturado y se eligen adecuadamente los límites de saturación, de tal manera que los estados estacionarios correspondientes cuando el controlador opera en saturación, estén contenidos en las zonas de saturación opuestas.

De acuerdo con los resultados anteriores, la condición de que el sistema sea pasivo por retroalimentación de estado es que la dinámica cero asociada a la etapa de medición adecuada tenga un único punto de equilibrio asintóticamente estable. Dado que los estados estacionarios correspondientes se determinan utilizando diagramas de bifurcación, la salida se debe elegir de tal forma que el estado estacionario esté lejos de zonas de bifurcación, ya que si se considera la incertidumbre paramétrica podría ser que la dinámica cero tenga multiplicidad de estados estacionarios. Entonces, la salida elegida debe tener un estado estacionario único (global) asintóticamente estable además de que también debe ser estructuralmente (en el sentido de que se encuentre alejado de zonas de bifurcación). El resultado anterior se presenta a continuación en forma de proposición.

**Proposición 1.** *El modelo (3.3) es pasivo por retroalimentación de estado si la salida medida  $y \in Y$ , donde*

$$Y = \{\tau_i \in X_T \mid \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \text{ tenga un único EE robustamente estable}\}.$$

En el enunciado de la proposición anterior, el término robustamente estable se refiere a que el estado estacionario es asintóticamente estable y además de que este

es estructuralmente estable, es decir, para pequeños cambios en los parámetros no producen cambios cualitativos en la geometría de la dinámica correspondiente, esto es, el estado estacionario se mantiene como único punto de equilibrio asintóticamente estable [6].

*Demostración.* Si la salida  $y$  pertenece al conjunto  $Y$ , entonces por construcción su dinámica cero tiene un único punto de equilibrio (global) asintóticamente estable (bajo la suposición de que los atractores considerados son puntos de equilibrio), además de que su grado relativo es uno (ver (3.8)) ya que  $\delta > 0$ , con esto se cumplen las condiciones requeridas para que el sistema sea pasivo por retroalimentación de estado.

□

La Proposición 1 se utilizará como criterio de ubicación de sensor, puesto que si la salida medida se elige de acuerdo con lo establecido en la proposición, se asegura que con el control a diseñar será posible estabilizar el sistema. Además, es importante mencionar que este criterio de ubicación de sensor es válido de forma no local, ya que al elegir la salida de forma adecuada se puede asegurar que el sistema tendrá como único estado estacionario el prescrito  $\bar{x}$ .

### 3.4. Control Saturado por Retroalimentación de Estado

En esta sección se presenta el diseño del controlador saturado robusto pasivo por retroalimentación de estado y las condiciones de resolubilidad del problema, las cuales están relacionadas con la propiedad de pasividad por retroalimentación de estados del sistema y la caracterización de la curva de control de lazo cerrado.

El objetivo de control consiste en regular la concentración de salida  $z = c_N$  al valor nominal prescrito  $\bar{z}$ , sin embargo el control se hará de forma indirecta regulando la salida  $y = \tau_m$  a su valor nominal  $\bar{y}$ , lo cual implica que la salida regulada converge asintóticamente a su valor nominal. En el capítulo anterior se eligió el estado estacionario inestable con punto caliente dado que éste tiene mayor producción a valores seguros de temperatura.

#### 3.4.1. Diseño del controlador

Dado que en la sección anterior se mostró que el sistema (3.2) es pasivo por retroalimentación de estado, a continuación se diseña la ley de control correspondiente. El

controlador debe ajustar la entrada  $u$  para estabilizar  $y$  en su valor nominal, para esto se elige la dinámica prescrita lineal y estable,

$$\dot{y} = -k(y - \bar{y}), \quad k > 0, \quad (3.9)$$

en donde  $k$  es una ganancia de diseño. La imposición de esta dinámica en el modelo discreto (3.1), seguido de resolver la restricción algebraica resultante para  $u$ , proporciona el Controlador por Retroalimentación de Estado,

$$u = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y), \quad (3.10)$$

en donde  $\mu$  es la única solución para  $u$  de la siguiente ecuación algebraica

$$f_m^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{d}, u) = -k(y - \bar{y}), \quad f_m^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{d}, u) = \dot{\tau}_m, \quad (3.11)$$

$m$  denota la etapa de medición que debe satisfacer la condición presentada en la Proposición 1.

Una vez que se ha elegido la etapa de medición,  $y = \tau_m$ , y calculado el controlador por retroalimentación de estado correspondiente (3.10), se aplica la saturación para obtener el Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado,

$$u = \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) = \begin{cases} \tau_c^+ & \text{si } \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) \geq \tau_c^+ \\ \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) & \text{si } \tau_c^- < \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) < \tau_c^+ \\ \tau_c^- & \text{si } \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) \leq \tau_c^- \end{cases}, \quad (3.12)$$

la dinámica de la salida, al aplicar el controlador (3.10) al sistema (3.1) es la siguiente

$$f_{ms}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = f_m[\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y)] = \begin{cases} f_m(\mathbf{x}, \mathbf{d}, u^+) & \text{si } \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) \geq \tau_c^+ \\ -k(y - \bar{y}) & \text{si } \tau_c^- < \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) < \tau_c^+ \\ f_m(\mathbf{x}, \mathbf{d}, u^-) & \text{si } \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) \leq \tau_c^- \end{cases},$$

y el sistema completo de lazo cerrado es,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.13)$$

en donde,

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = \mathbf{f}_s[\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y)] = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, u^+) & \text{si } x \in X^+ \\ -k(y - \bar{y}) & \text{si } x \in X^0 \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, u^-) & \text{si } x \in X^- \end{cases},$$

y,

$$\begin{aligned} X &= X^- \cup X^0 \cup X^+, \\ X^+ &= \{x \in X \mid \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) > u^+\}, \\ X^0 &= \{x \in X \mid u^- \leq \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) \leq u^+\}, \\ X^- &= \{x \in X \mid \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) < u^-\}, \end{aligned}$$

además  $Z^{*0} \subset X^0$ .



### 3.4.2. Estabilidad de lazo cerrado

La estabilidad del sistema en lazo cerrado (3.13) se mostrará utilizando el principio de reducción de Seibert [53] [24]. Se toma como base la existencia del conjunto invariante de conservación de materia y energía  $X$ . Además de que por construcción el controlador saturado (3.13) fuerza a las trayectorias del sistema (3.1) a converger a la variedad  $Z^*$ , que corresponde con el sistema de orden reducido de la dinámica cero. El principio de reducción de Seibert establece condiciones de estabilidad de conjuntos en espacios métricos. El principio particular que se usará establece que para los conjuntos  $M \subset Y \subset W$ , si las trayectorias de un sistema operan en el conjunto compacto  $W$ , además de que  $Y$  es asintóticamente estable con respecto a  $W$ , y  $M$  es estable y atractivo con respecto a  $Y$ , entonces  $M$  es asintóticamente estable en  $W$ .

El hecho de que las trayectorias estén contenidas en un conjunto compacto  $W$  implica que estas son acotadas, por otro lado el conjunto  $Y$  es invariante, por lo que cuando las trayectorias entran a  $Y$ , se quedarán en este conjunto para todo tiempo futuro y finalmente, dado que  $M$  es asintóticamente estable con respecto a  $Y$ , las trayectorias en  $Y$  convergen al conjunto  $M$ .

Al aplicar el principio de reducción de Seibert, al sistema en lazo cerrado (3.13), se elige a  $W$  como el conjunto invariante caracterizado por los principios de conservación de materia y energía  $X$ , por otro lado el conjunto atractor  $Y$  es (por construcción) el conjunto conformado por las trayectorias de (3.13) confinadas a la dinámica cero  $Z^{*0}$  del sistema, cuando el controlador tiene saturación, y finalmente, se requiere que  $M$  sea el estado estacionario prescrito de lazo cerrado  $\bar{x}$ , y que este sea único, lo cual se cumple si la etapa de medición se eligió de acuerdo con la Proposición 1 y no hay saturación. De acuerdo con lo anterior, lo que resta para concluir estabilidad asintótica no local de  $\bar{x}$  es elegir la etapa de medición adecuada y posteriormente asegurar que cuando se aplica el controlador saturado (3.12), el estado estacionario  $\bar{x}$  se mantiene como único punto atractor, es decir, se deben establecer las condiciones necesarias, en términos de la ganancia y los límites del control para que el sistema en lazo cerrado tenga un único punto de equilibrio.

El estado estacionario del sistema en lazo cerrado (3.13) está determinado por el

siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas,

$$0 = -[\theta + \vartheta_m + \alpha(\tau_1)]c_1 + \vartheta_m c_2 + \theta c_e, \quad i = 1, \quad (3.14a)$$

$$0 = -(\theta + \vartheta_h + \delta)\tau_1 + \beta\alpha(\tau_1)c_1 + \vartheta_h \tau_2 + \theta\tau_e + \delta\tau_c, \quad (3.14b)$$

$$0 = (\theta + \vartheta_m)c_{i-1} - [\theta + 2\vartheta_m + \alpha(\tau_i)]c_i + \vartheta_m c_{i+1}, \quad 1 < i < N, i \neq m, \quad (3.14c)$$

$$0 = (\theta + \vartheta_h)\tau_{i-1} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta)\tau_i + \beta\alpha(\tau_i)c_i + \vartheta_h \tau_{i+1} + \delta\tau_c, \quad (3.14d)$$

$$0 = (\theta + \vartheta_m)c_{N-1} - [\theta + \vartheta_m + \alpha(\tau_N)]c_N, \quad i = N, \quad (3.14e)$$

$$0 = (\theta + \vartheta_h)\tau_{N-1} - (\theta + \vartheta_h + \delta)\tau_N + \beta\alpha(\tau_N)c_N + \delta\tau_c, \quad (3.14f)$$

$$0 = (\theta + \vartheta_m)c_{m-1} - [\theta + 2\vartheta_m + \alpha(\tau_m)]c_m + \vartheta_m c_{m+1}, \quad i = m, \quad (3.14g)$$

$$0 = -k(y - \bar{y}), \quad (3.14h)$$

$$\tau_c = \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y), \quad (3.14i)$$

de forma similar a como se construyó el diagrama de bifurcación de lazo abierto, utilizando el método de desgarrar es posible reescribir todas las variables en términos de la concentración y temperatura de la primera etapa y luego utilizando los balances globales de materia y energía, parametrizar la entrada de control  $u$  de lazo cerrado en función de  $c_1$  y  $\tau_1$ , para esto es necesario sustituir la ley de control de forma implícita en la etapa de medición, y con esto los balances totales de materia y energía se modifican (detalles en el Apéndice A), de esta forma el procedimiento para construir la curva de lazo cerrado es idéntico al de lazo abierto. De acuerdo con lo anterior, se definen las curvas de control parametrizadas con respecto a  $c_1$  y  $\tau_1$  de lazo abierto  $\mathcal{O}$  y de lazo cerrado  $\mathcal{C}$ ,

$$\mathcal{O} = \{(\mathbf{x}_1, u) \mid u = \mu_o(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}})\}, \quad \mathcal{C}(k, u^-, u^+) = \{(\mathbf{x}_1, u) \mid u = \mu_s(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}})\},$$

en donde,

$$\mu_s(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}}) = \{(\mathbf{x}_1, u) \mid \mathcal{M}(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}}, u) = \mathcal{H}(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}}, u) = 0\} \quad (3.15)$$

en este caso  $\mathcal{M}(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}})$  y  $\mathcal{H}(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{d}})$  son los balances globales de materia y energía del sistema en lazo cerrado. En el espacio  $\tau_1 - c_1 - u$ ,  $\mathcal{O}$  es la curva de bifurcación de lazo abierto, y  $\mathcal{C}(k, u^-, u^+)$  es la curva de control saturado, la cual se puede interpretar como una parametrización del control de lazo cerrado  $u$ , en términos de  $c_1$  y  $\tau_1$ . Bajo la suposición de que los únicos atractores posibles son puntos de equilibrio, entonces el estado estacionario  $\bar{\mathbf{x}}$  es el único punto atractor del sistema en lazo cerrado (3.13) con el controlador saturado (3.12) si y sólo si las curvas  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{C}(k, u^-, u^+)$  se cortan solo en  $(\bar{c}_1, \bar{\tau}_1)$  (valores de concentración y temperatura estacionarios de la primera etapa correspondientes a  $\bar{\mathbf{x}}$ ). La única diferencia entre las dos curvas es la dinámica prescrita lineal de lazo cerrado  $-k(y - \bar{y})$  inyectada en la etapa de medición por lo que en el espacio correspondientes  $\tau_m - c_m - u$  estas curvas sólo se cortan en  $\bar{c}_m, \bar{u}$ , y  $\tau_m, \bar{u}$ , y debido a la estructura recursiva del sistema esto automáticamente determina el resto de los valores de estado estacionario de concentraciones y temperaturas, lo cual asegura que las curvas de lazo abierto y de lazo cerrado en el espacio  $\tau_1 - c_1 - u$ ,  $\mathcal{O}$  solo se cortan una vez. Con el razonamiento anterior y el principio de reducción de Seibert es

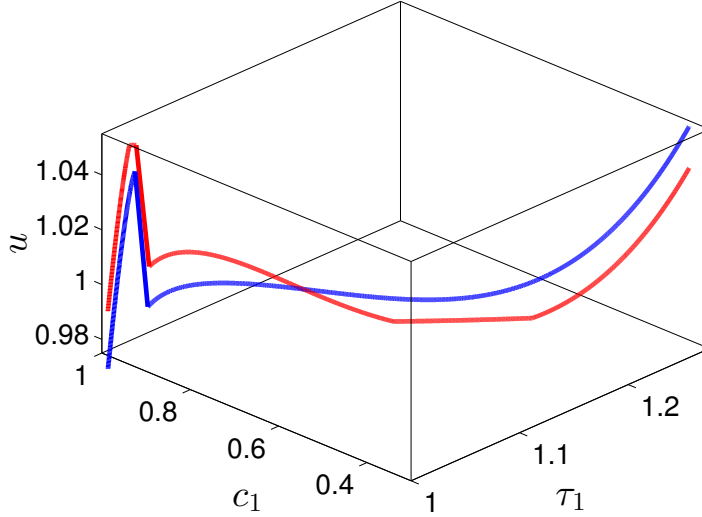
posible concluir estabilidad asintótica no local del estado estacionario prescrito  $\bar{\mathbf{x}}$  para el sistema en lazo cerrado. Esta condición de estabilidad siempre puede ser satisfecha si se eligen adecuadamente la ganancia del controlador  $k > 0$  y los límites de saturación  $\tau_c^-$  y  $\tau_c^+$ , de tal forma que  $u^- > u^*$ , y  $u^+ > u^*$ , es decir, el límite de saturación inferior (o superior) debe ser menor (o mayor) que el mínimo (o máximo) absoluto de las curvas de control de lazo cerrado  $\mathcal{C}(k, u^-)$ .

Sin embargo, dado que las curvas de control de lazo cerrado y lazo abierto se construyen utilizando los valores nominales de los parámetros del modelo, y además se realizan con  $N = 30$  nodos, para evitar que los límites de saturación no se elijan adecuadamente por ignorar los errores paramétricos y de aproximación, el criterio de elección de la ganancia y los límites de saturación se deben elegir de forma conservadora suficientemente alejados de los valores de bifurcación. Este resultado se presenta a continuación como una proposición.

**Proposición 2.** Sean  $u_*$  y  $u^*$  los valores de bifurcación de la entrada de control  $u$  (temperatura de camisa) y  $\varepsilon_k, \varepsilon_*, \varepsilon^* > 0$  números positivos. El sistema en lazo cerrado (3.1) con el Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado (3.12) tiene al estado estacionario prescrito  $\bar{\mathbf{x}}$  como único punto atractor robusto de lazo cerrado en  $X$  si y sólo si la ganancia de control  $k$  y los límites del control  $\tau_c^-$  y  $\tau_c^+$  se eligen de tal forma que satisfagan las siguientes condiciones,

$$(i) \ k > \varepsilon_k, \quad (ii) \ \tau_c^- < \tau_{c*} - \varepsilon_*, \quad (iii) \ \tau_c^+ > \tau_c^* + \varepsilon^*. \quad (3.16)$$

*Demostración.* **Suficiencia.** Esto se cumple directamente, puesto que si se eligen las ganancias como se establece en la condición entonces se asegura que las curvas  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{C}(k, u^-, u^+)$  se cortan solo en el estado estacionario  $\bar{\mathbf{x}}$ . **Necesidad.** Se asume que las curvas  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{C}(k, u^-, u^+)$  se cortan en el estado estacionario prescrito  $\bar{\mathbf{x}}$ . Cuando  $k = 0$  las curvas tienen un número infinito de intersecciones, lo cual contradice la suposición. Esto prueba la necesidad de la condición (3.16i). Asumiendo que la condición (3.16ii) [o (3.16ii)] es violada con  $u = \tau_{c*}$  (o  $u = \tau_c^*$ ), del diagrama de bifurcación a lazo abierto (Figura 3.4), se sabe que cuando  $u = \tau_c^-$  (o  $u = \tau_c^+$ ) las curvas  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{C}(k, u^-, u^+)$  se cortan más de una vez, lo cual contradice la suposición, por lo que la condición (3.16ii) [o (3.16iii)] es necesaria.  $\square$



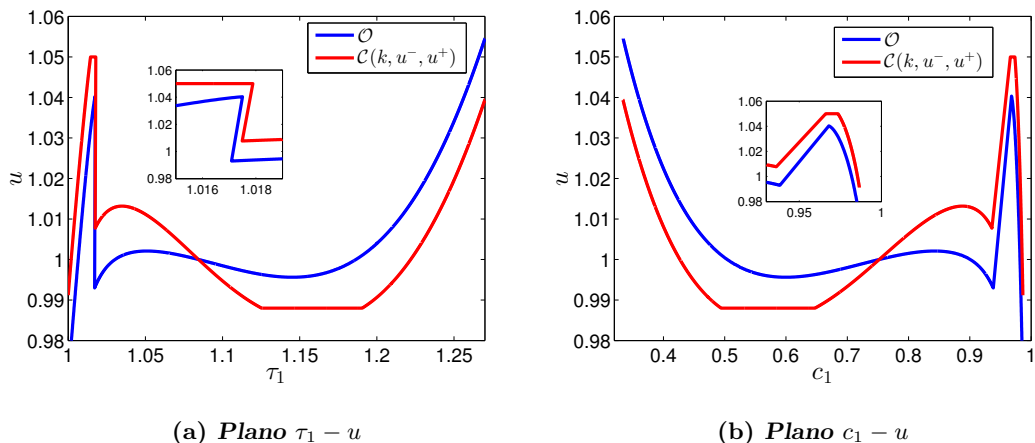
**Figura 3.5:** Intersección de las curvas de control de lazo abierto y lazo cerrado, cuando se satisfacen las condiciones de la Proposición 2 con para  $k = 2$ ,  $\tau_c^- = 0.988$  y  $\tau_c^+ = 1.05$

En la Figura 3.5, y en se puede observar el caso en que se satisfacen las condiciones del Lema 2 y dado que la tripleta  $(k, \tau_c^-, \tau_c^+)$  se elige adecuadamente, las curvas  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{C}$  tienen una sola intersección en  $(\bar{\tau}_1, \bar{u})$ , lo cual se confirma mediante las proyecciones en los planos correspondientes, mostradas en la Figura 3.6. Por otro lado, en la Figura 3.7 las curvas  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{C}$  tienen tres intersecciones debido a que  $\tau_{c^*} > u^+$  viola la condición (3.16iii), lo cual se confirma mediante las proyecciones correspondientes mostradas en la Figura 3.8.

### 3.5. Aplicación para el caso de estudio y simulaciones

En esta sección se aplica el Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado al sistema (3.2) con  $N = 30$  nodos y los parámetros y valores nominales mostrados en las Tablas 2.1 y 2.2. Se ejemplificará cómo utilizar el criterio de selección de sensor propuesto, así como el de la elección de la ganancia y los límites del control. Se utiliza el modelo discreto debido a que como ya se mostró anteriormente los perfiles estacionarios obtenidos con una cantidad suficiente de nodos están dentro de las bandas de incertidumbre posibles y por lo tanto en las simulaciones se obtendrán resultados suficientemente buenos.

El primer paso para implementar el Controlador Saturado por Retroalimentación



**Figura 3.6:** Curvas  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}(k, u^-, u^+)$ , para  $k = 2$ ,  $\tau_c^- = 0.988$  y  $\tau_c^+ = 1.05$ , se satisfacen la condición de la Proposición 2

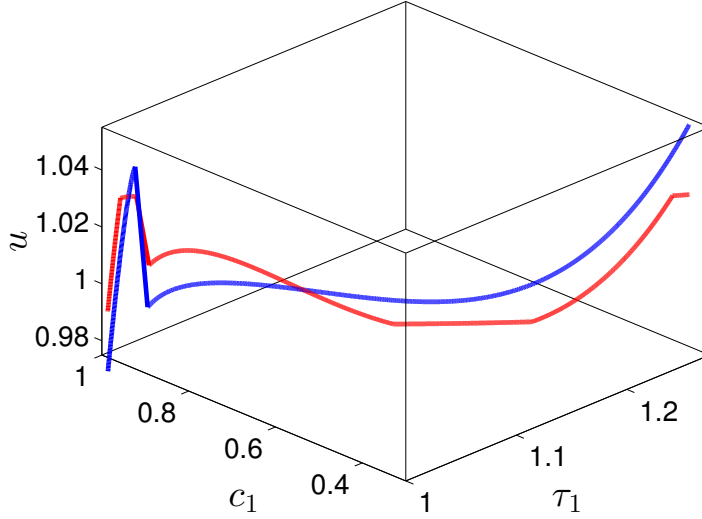
de Estado (3.12) es la elección de la etapa de medición, la cual se debe elegir de tal forma se satisfaga la Proposición 1, es decir, que la dinámica cero asociada tenga un punto de equilibrio estable, y esto se verifica por medio de diagramas de bifurcación de la dinámica cero con respecto al control nominal. Sin embargo, con fines de comparar el criterio que se formuló en este trabajo, también se utilizarán otros dos criterios de ubicación de sensor, el primero se basa en la distribución espacial de los eigenvectores de temperatura asociados a la linealización, mientras que el segundo método está relacionado con la concavidad del perfil de temperatura, y se utilizará su versión para perfiles continuos y discretos.

### 3.5.1. Ubicación del sensor

En la literatura concerniente a aplicaciones de control de reactores tubulares exotérmicos existen criterios para ubicación de sensores con objetivos de control, en general estos métodos coinciden en que para perfiles con punto caliente el sensor debe ser ubicado antes de éste. A continuación se describen tres criterios y su aplicación al caso de estudio, para comparar con el criterio no local que se estableció en este trabajo.

#### 3.5.1.1. Criterio modal espectral

Este criterio es local y se encuentra reportado en [31]. Considerando los eigenvalores  $\lambda_i$  y los eigenvectores  $\mathbf{v}_i$  de la linealización del modelo discreto (3.1) alrededor del estado



**Figura 3.7:** Intersección de las curvas de control de lazo abierto y lazo cerrado cuando se violan las condiciones de la Proposición 2 con para  $k = 2$ ,  $\tau_c^- = 0.997$  y  $\tau_c^+ = 1.03$

estacionario prescrito  $\mathbf{x}$ ,

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad |\lambda_i| < |\lambda_{i+1}|, \quad \mathbf{A} = \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}, \bar{\mathbf{u}}),$$

y denotando a  $\lambda_s = \lambda_1$  (o  $\lambda_u > 0$ ) como el eigenvalor más pequeño (o inestable) de  $\mathbf{A}$ , y a  $\mathbf{v}_s$  (o  $\mathbf{v}_u$ ) los correspondientes eigenvectores. Entonces el sensor debe ser colocado de acuerdo con las siguientes reglas:

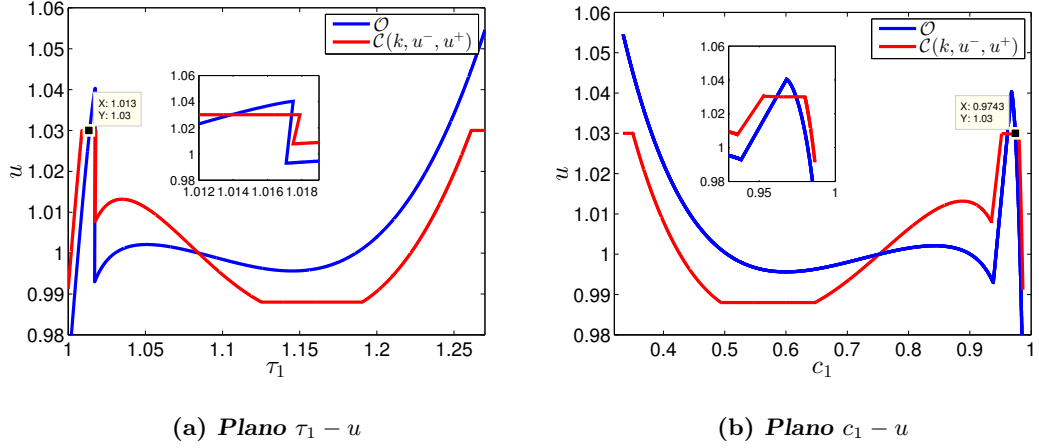
- Si hay un eigenvalor inestable  $\lambda_i > 0$ , para asegurar estabilidad la etapa de medición  $m$  debe ser elegida como el nodo  $m^-$ , en donde la entrada  $N + m$  de  $\mathbf{v}_u$  alcanza su máximo valor absoluto.
- Si no existe eigenvalor negativo, para alcanzar la respuesta máxima de lazo cerrado, la medición debe ser ubicada en la etapa  $m^+$ , en donde la entrada  $N + m$  de  $\mathbf{v}_1$  alcanza su valor máximo.

de acuerdo con lo anterior,

$$m^- = \max_{1 \leq j \leq N} |v_j^{u\tau}|, \quad m^+ = \max_{1 \leq j \leq N} |v_j^{s\tau}|$$

en donde,

$$(v_1^{\sigma c}, \dots, c_N^{\sigma c}) = \mathbf{v}_\sigma^c, \quad (v_1^{\sigma\tau}, \dots, c_N^{\sigma\tau}) = \mathbf{v}_\sigma^\tau, \quad (\mathbf{v}_\sigma^{c\top} \mathbf{v}_\sigma^{\tau\top}) = \mathbf{v}_\sigma$$



**Figura 3.8:** Curvas  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}(k, u^-, u^+)$ , cuando se violan las condiciones de la Proposición 2 con  $k = 2$ ,  $\tau_c^- = 0.988$  y  $\tau_c^+ = 1.03$

con  $\sigma = s, u$ . De acuerdo con lo anterior la etapa de medición debe ser elegida en  $m \in [m^-, m^+] = M$ .

Al aplicar este método al caso de estudio resulta que la linealización tiene un eigenvalor inestable, que coincide con el eigenvalor más lento, i.e.,  $\lambda_s = \lambda_u = \lambda_m$ , lo cual implica que  $m = m^- = m^+$ , de acuerdo con el criterio, el sensor debe ser colocado en la etapa que coincide con el número  $N + m$  que indica la entrada máxima en valor absoluto del eigenvector de temperatura asociado al eigenvalor  $\lambda_m$ . En la Figura 3.9 se presenta el perfil discreto con  $N = 30$  etapas (en barras azules) y el eigenvector de temperatura distribuido (en rojo), se observa que en la entrada máxima de éste coincide con la etapa 8, por lo que de acuerdo a este criterio, para poder estabilizar el sistema el sensor debe ubicarse en la octava etapa. Esto equivale especialmente a que la posición del sensor sea  $s_m \approx 0.25$ .

### 3.5.1.2. Criterio de la concavidad

Este segundo criterio se encuentra reportado en [10] y también es de validez local. El criterio consiste en colocar el sensor en la zona de donde el gradiente  $\partial_s \tau$  del perfil de temperatura  $\tau(s)$  es máximo, lo cual se puede saber con la condición de la concavidad, i.e.,  $\partial^2 \tau = 0$ . En la Figura 3.10a se presenta el perfil distribuido (en rojo) y por etapas (barras azules) de temperatura y su gradiente, se observa que el máximo de éste está en una posición entre la etapa 7 y 8; en la Figura 3.10b se presenta también el perfil distribuido, el discreto y la curva de concavidad, se observa el punto donde ésta se hace cero, lo cual confirma la posición del máximo del gradiente de temperatura entre las etapas 7 y 8. Por estar en una posición más cercana a la etapa 8, se elige esta como la

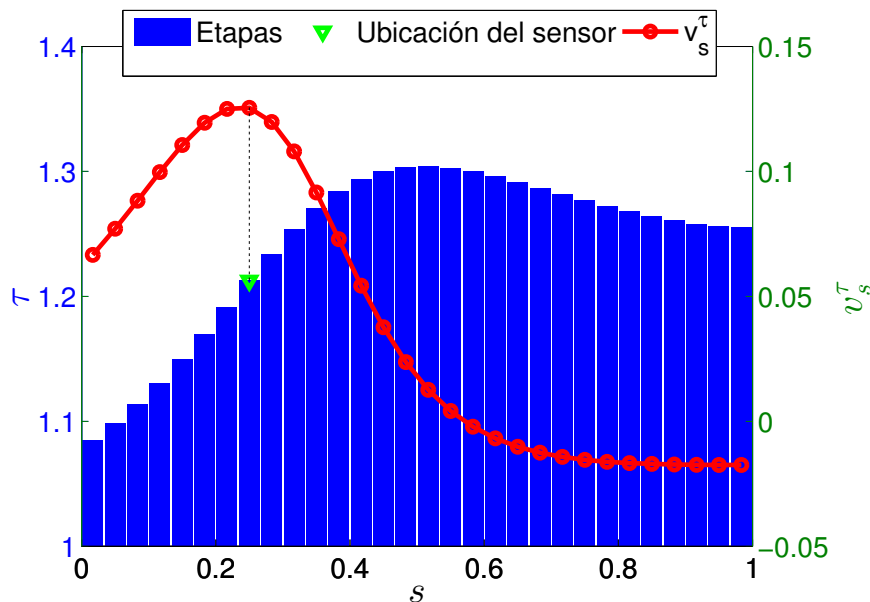


Figura 3.9: Criterio de ubicación de sensor por eigenvector

etapa de medición, lo cual coincide con el criterio anterior.

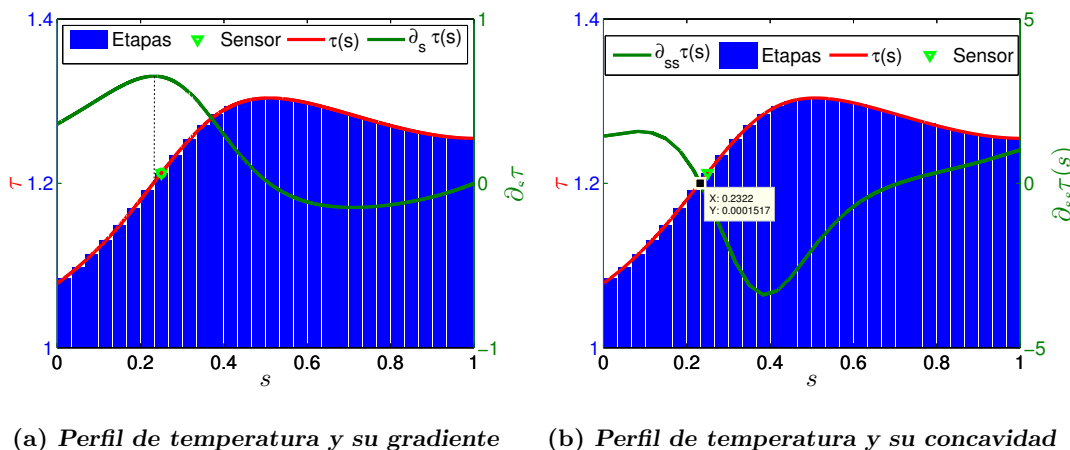
### 3.5.1.3. Criterio de la concavidad para sistemas por etapas

Este criterio es la versión discreta del anterior y ha sido utilizado para elegir la etapa de ubicación de sensor para la estimación de composiciones en columnas de destilación [47], que naturalmente es un sistema por etapas. El criterio establece que el sensor debe ser ubicado en el máximo del gradiente de temperatura discreto  $\Delta\tau_i$ , lo cual se puede confirmar con la condición de concavidad  $\Delta^2\tau_i \approx 0$ . En la Figura 3.11a se observa el perfil discreto de temperatura  $\tau_i$  (en barras azules), y su respectivo gradiente (en verde), mientras que en Figura 3.11b se observa el perfil de temperatura y la segunda derivada; de acuerdo con el criterio se confirma que la etapa de medición debe ser colocada en la etapa número 8.

### 3.5.1.4. Criterio de la dinámica cero

El criterio propuesto en este trabajo establece que la etapa de medición debe ser elegida en donde la dinámica cero asociada tenga un sólo punto de equilibrio estructuralmente estable, i.e., lejos de zonas de posible bifurcación, es decir, que  $y \in Y$ , en





**Figura 3.10:** Perfil continuo de temperatura, gradiente y concavidad

donde,

$$Y = \{\tau_i \in X_T \mid \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \text{ tenga un \u00fanico EE estructuralmente estable}\}.$$

En la Figura 3.12 se presenta la dependencia de la multiplicidad de estados estacionarios de la din\u00e1mica cero con respecto a la posici\u00f3n en que se mide. Para las primeras 11 etapas, el diagrama de bifurcaci\u00f3n correspondiente proyectado en las variables de la primera etapa (en verde, arriba concentraci\u00f3n, abajo temperatura), se observa que en este caso solo existe un corte de la curva de bifurcaci\u00f3n con respecto al valor nominal del control, lo cual indica que s\u00f3lo hay un estado estacionario, el cual es asint\u00f3ticamente estable [15]. Por otro lado, para las etapas 12, 13 y 14, el diagrama de bifurcaci\u00f3n correspondiente (en amarillo, concentraci\u00f3n arriba, temperatura abajo) solo corta una vez la recta del valor nominal del control, sin embargo el corte se encuentra cerca de zonas de bifurcaci\u00f3n, por lo que los estados estacionarios correspondientes no son estructuralmente estables, es decir, peque\u00f1os cambios en los par\u00e1metros y otros errores de aproximaci\u00f3n, podr\u00edan hacer que aparezcan estados estacionarios adicionales. Finalmente, para las etapas restantes, desde la 15 hasta la 30, el diagrama de bifurcaci\u00f3n (en rojo, concentraci\u00f3n arriba, temperatura abajo) corta m\u00e1s de una vez la recta del valor nominal del control por lo que en esta zona la din\u00e1mica cero tiene m\u00e1s de un estado estacionario.

De acuerdo con la descripci\u00f3n anterior, la zona en que la din\u00e1mica cero tiene un solo punto de equilibrio estructuralmente estable es desde la etapa 1 hasta la 11, por lo que el sensor puede ser colocado en cualquier etapa dentro de esta zona, es decir,

$$Y = \{\tau_m \in X_T \mid m \in [1, 11]\}$$

el resultado obtenido con el criterio de la din\u00e1mica cero es acorde con los resultados previos, y la noci\u00f3n de que cuando se tratan perfiles de temperatura con punto caliente

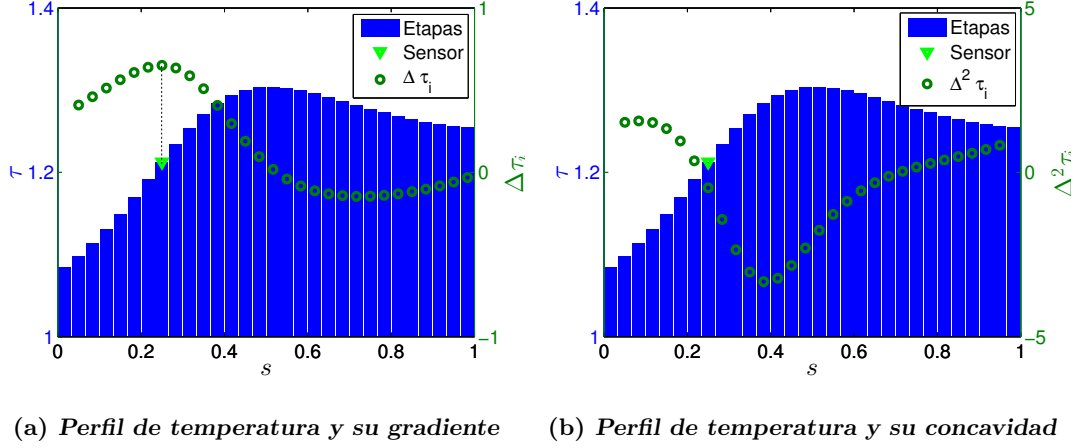


Figura 3.11: Perfil discreto de temperatura, gradiente y concavidad discretos

la medición se debe hacer antes de éste. Por lo tanto la etapa de medición elegida será  $y = \tau_8$ , en lo que coinciden todos los criterios utilizados.

### 3.5.2. Cálculo del controlador

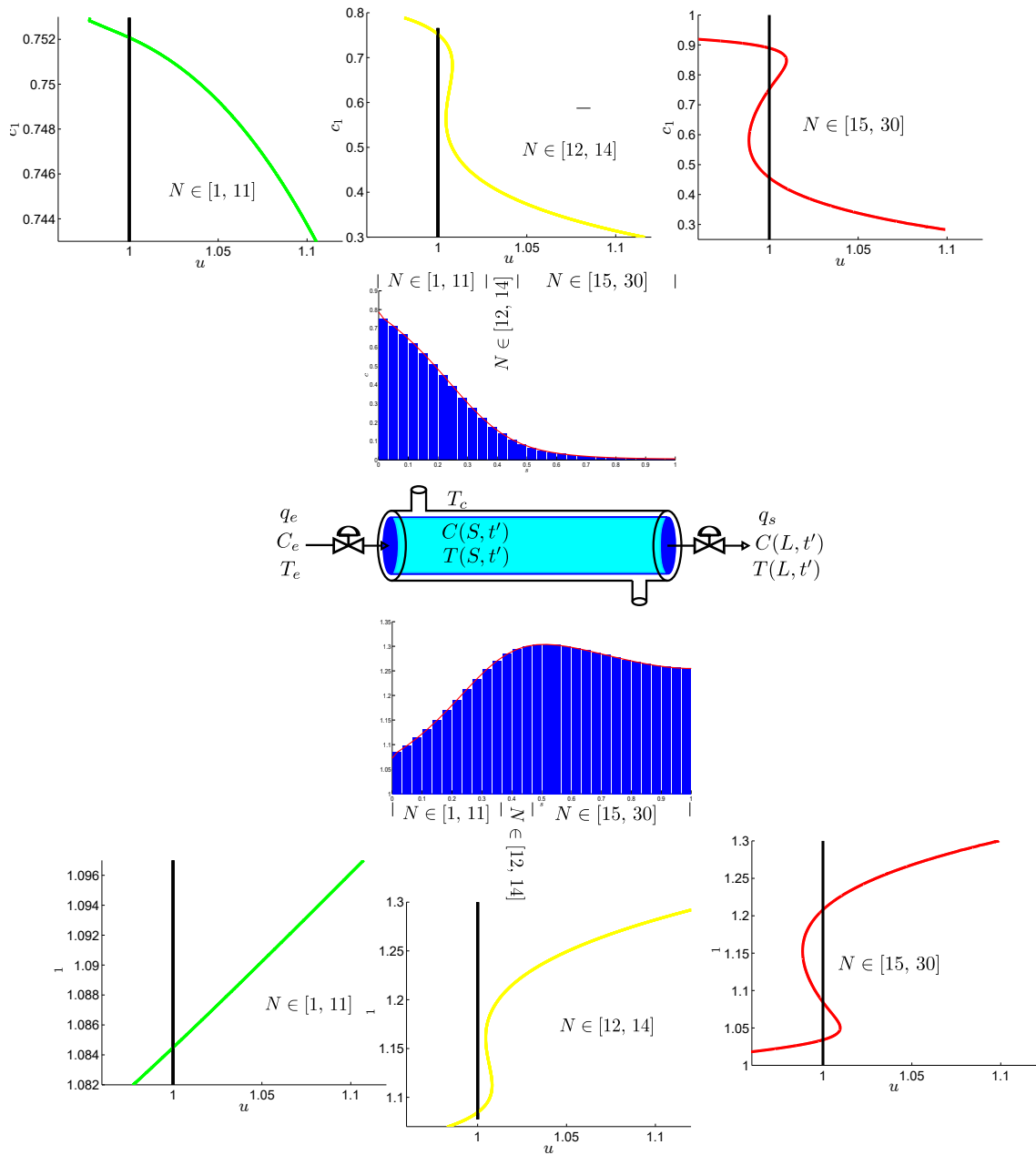
Una vez determinada la etapa de medición, el controlador puede ser calculado de acuerdo con la expresión (3.11), forzando la dinámica lineal de la salida en la dinámica de la temperatura de la octava etapa, con lo cual se obtiene el siguiente controlador,

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) := \frac{-k(y - \bar{y}) - (\theta + \vartheta) \tau_7 + (\theta + 2\vartheta + \delta) y - \beta\alpha(y)c_8 - \vartheta\tau_9}{\delta}, \quad (3.17)$$

aplicando la saturación a la ley de control anterior, se obtiene el Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado,

$$u = \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) = \begin{cases} \tau_c^+ & \text{si } \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) > \tau_c^+ \\ \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) & \text{si } \tau_c^- \leq \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) \leq \tau_c^+ \\ \tau_c^- & \text{si } \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y) < \tau_c^- \end{cases}, \quad (3.18)$$

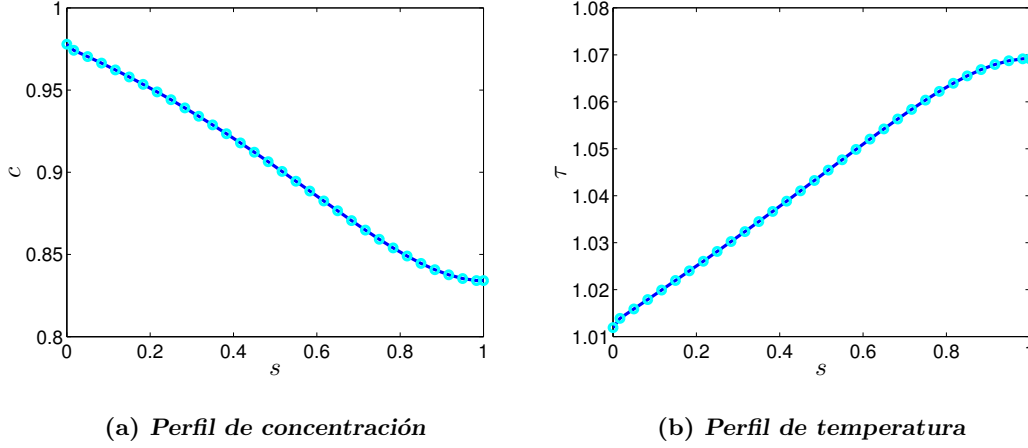
esta ley de control requiere información de la salida medida  $y$ , de la tasa de dilución  $\theta$ , de los parámetros  $\vartheta_m$ ,  $\vartheta_h$  y  $\delta$ , así como de la tasa de reacción  $\beta\alpha(y)c_8$ , lo cual involucra la información la concentración de la octava etapa, además de las temperaturas de las etapas anterior y siguiente.



**Figura 3.12:** Dependencia de la multiplicidad de la dinámica cero con respecto a la ubicación del sensor

### 3.5.3. Selección de la ganancia y los límites del control

La ganancia  $k$  del Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado (3.12) debe elegirse mayor que cero, pero mientras mayor sea ésta, la salida  $y$  converge más



**Figura 3.13:** Perfil estacionarios cuando se viola la Proposición 2 con  $\tau_c^- = 0.988 < \tau_{c*}, \tau_c^+ = 1.03 < \tau_c^*$

rápido a su valor nominal, sin embargo es suficiente elegir la ganancia dos veces mayor que el tiempo de residencia del reactante dentro del reactor, por lo tanto se elige  $k = 2$ .

De la Figura 3.4 se obtienen los valores de bifurcación inferiores y superiores siguientes,

$$\tau_{c*} = 0.993, \quad \tau_{c**} = 0.9956, \quad \tau_c^* = 1.042, \quad \tau_c^{**} = 1.051$$

Ahora se procede a aplicar el criterio propuesto en este trabajo para la elección adecuada de los límites del controlador saturado (3.12) para que en lazo cerrado  $\bar{\mathbf{x}}$  sea el único punto atractor a pesar de la saturación. De acuerdo con la Proposición 2, el límite inferior (o superior) del control  $u^-$  (o  $u^+$ ) debe ser elegido menor (o mayor) que el mínimo (o máximo) absoluto de la curva  $\mathcal{O}$  de tal forma que esta curva corte a  $\mathcal{C}(k, u^-, u^+)$  sólo en  $\bar{\mathbf{x}}$ , por lo tanto se eligen los límites de saturación como,

$$\tau_c^- = 0.988 < \tau_{c*}, \quad \tau_c^+ = 1.05 > \tau_c^*,$$

en las Figuras 3.5 y 3.6 se presentan las curvas correspondientes y se confirma que solo se cortan en  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Para ejemplificar lo que sucede cuando los límites de saturación no se elijen adecuadamente, se escogen dos pares de valores del tal forma que no se satisface la Proposición 2, el primer par es

$$\tau_c^- = 0.988 < \tau_{c*}, \quad \tau_c^+ = 1.03 < \tau_c^*, \quad (3.19)$$

en las Figuras 3.5 y 3.6 se observan las curvas correspondientes y se puede apreciar que éstas se cortan tres veces, en donde el estado prescrito  $\bar{\mathbf{x}}$  sigue siendo estable, además

de que el punto de temperatura menor y concentración más alta también es estable y entre estos dos aparece un estado estacionario inestable. Con los valores del punto atractor estable no deseado para la concentración y temperatura de la primera etapa y utilizando las fórmulas recursivas (3.4) se pueden predecir los perfiles estacionarios de concentración y temperatura en los que se estabilizará el sistema cuando no se eligen bien los límites de saturación, éstos se muestran en la Figura 3.13, se observa estos corresponden a baja producción (alta concentración de reactante y baja temperatura), lo que implica que a la salida la concentración de reactante es alta y por lo tanto no se cumple el objetivo de tener alta producción.

El segundo par de valores de los límites del control que no satisfacen las condiciones de la Proposición 2 son

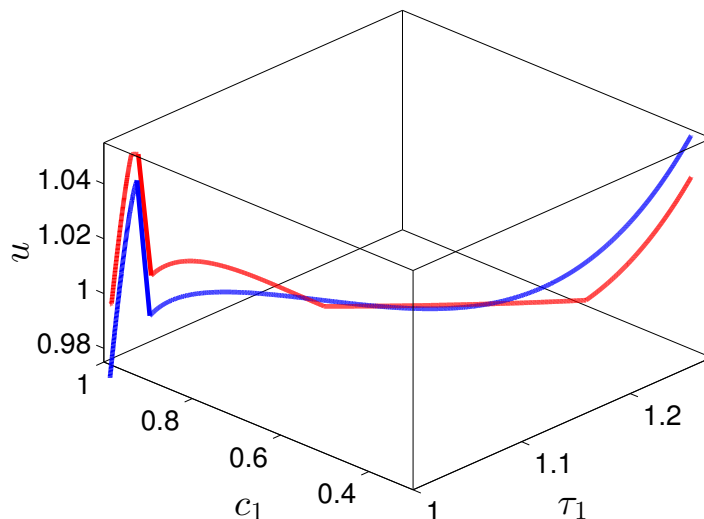
$$\tau_c^- = 0.997 < \tau_{c*}, \quad \tau_c^+ = 1.05 < \tau_c^*, \quad (3.20)$$

en este caso se eligió erróneamente la condición del valor mínimo de control, por lo que las curvas de control de lazo abierto  $\mathcal{O}$  y de lazo cerrado  $\mathcal{C}(k, u^-, u^+)$  en este caso se cortan tres veces, como se muestra en las Figuras 3.14 y 3.15, por lo que se presentan tres estados estacionarios,  $\bar{\mathbf{x}}$  se mantiene como estado estacionario estable, mientras que hay otro estable de baja concentración y alta temperatura y otro inestable entre estos dos. De las intersecciones entre las curvas se pueden obtener los valores estacionarios para  $c_1$  y  $\tau_1$  y utilizando las fórmulas recursivas (3.4) se puede predecir el perfil estacionario no deseado, el cual se muestra en la Figura 3.16.

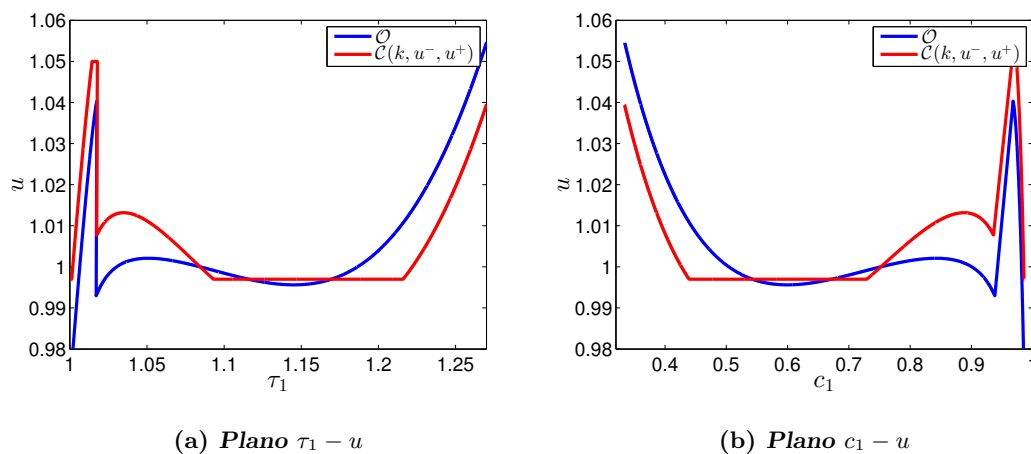
#### 3.5.4. Funcionamiento del controlador

A continuación se presentan algunas simulaciones con el propósito de mostrar la efectividad del controlador saturado por retroalimentación de estado cuando éste es implementado en condiciones ideales, es decir, se asume que se conocen los parámetros y que las entradas exógenas están fijas en sus valores nominales. Mediante las simulaciones se verifica cómo al saturar bien el controlador se logra estabilizar el sistema en el par de perfiles estacionarios prescritos, y cómo sucede lo contrario cuando no se satura adecuadamente. Estas simulaciones además, establecen el desempeño alcanzable con cualquier controlador por retroalimentación de salida.

Se realizaron cuatro simulaciones, la primera tiene como condición inicial un par de perfiles de temperatura y concentración cercanos a los del estado estacionario prescrito, el objetivo de esta primera simulación es mostrar el funcionamiento del controlador localmente cuando se eligen adecuadamente los límites del control. En la Figura 3.17 se presentan los perfiles iniciales de la simulación (en negro), también se presentan (en azul claro) los perfiles continuos de referencia (con  $N = 30$ ), y finalmente, los perfiles en los que el Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado estabiliza el reactor (en azul). Por otro lado, en la Figura 3.18 se muestra el comportamiento de lazo cerrado de las concentraciones y temperaturas de la etapa inicial, de la etapa de medición y

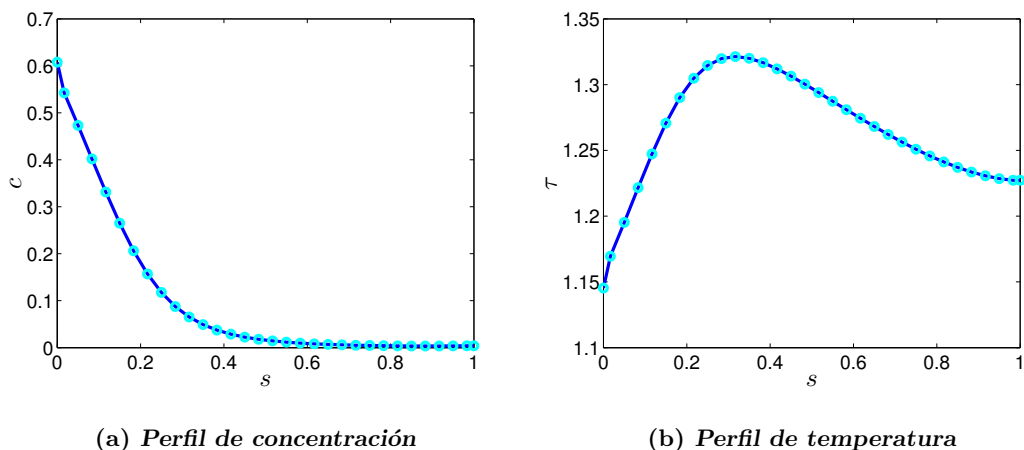


**Figura 3.14:** Intersección de las curvas de control de lazo abierto y lazo cerrado, cuando se violan las condiciones de la Proposición 2 con para  $k = 2$ ,  $\tau_c^- = 0.997$  y  $\tau_c^+ = 1.05$



**Figura 3.15:** Curvas  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{O}(k, u^-, u^+)$ , cuando se violan las condiciones de la Proposición 2 con para  $k = 2$ ,  $\tau_c^- = 0.997$  y  $\tau_c^+ = 1.05$

de la etapa de salida, además del esfuerzo de control. Se observa que las variables se estabilizan en el valor prescrito en no más de dos tiempos de residencia, con transitorios razonables. El controlador primero satura en su valor máximo, para establecerse en el valor nominal de forma suave.



**Figura 3.16:** Perfil estacionarios cuando se viola la Proposición 2 con  $\tau_c^- = 0.997 < \tau_{c^*}$ ,  $\tau_c^+ = 1.05 < \tau_c^*$

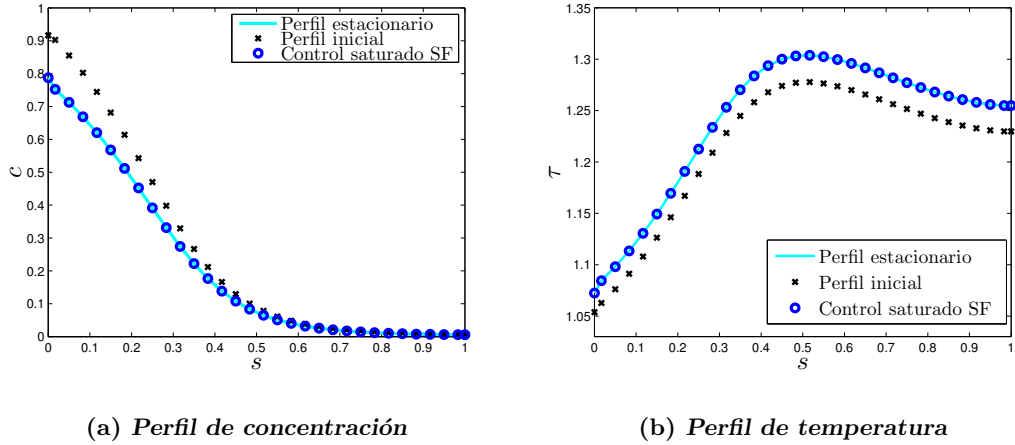
La segunda simulación también es funcionamiento local, pero en este caso no se cumplieron las condiciones de la Proposición 2, y los valores de los límites del control se eligieron como se muestra en (3.20), en la Figura 3.19 se observan los perfiles iniciales (en negro), los perfiles prescritos (en azul claro) y los perfiles en los que se estabiliza el sistema (en azul). Por otro lado, en la Figura 3.20 se presenta la evolución temporal de las concentraciones y temperaturas de las etapas primera, de medición y final. En esta simulación, dado que se violaron las condiciones de la Proposición 2, el sistema se estabiliza en un estado estacionario no deseado a pesar de que los perfiles iniciales están cercanos a los prescritos. Con los resultados de esta simulación se nota que es importante satisfacer las condiciones de los límites del control.

En la tercera simulación los perfiles iniciales corresponden a una condición de baja producción (alta concentración de reactante y baja temperatura) éstos se eligen así con el objetivo de mostrar el comportamiento del sistema de lazo cerrado cuando el controlador requiere mayor esfuerzo para llevar los perfiles a los prescritos. En la Figura 3.22 se presentan los perfiles iniciales de la simulación (en negro), también se presentan (en azul claro) los perfiles continuos de referencia (con  $N = 30$ ), y finalmente, los perfiles en los que el Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado estabiliza el reactor (en azul), se observa que el controlador es capaz de estabilizar el reactor en los perfiles prescritos. En la Figura 3.22 se muestra el comportamiento de lazo cerrado de las concentraciones y temperaturas de la etapa inicial, de la etapa de medición y de la etapa de salida, además del esfuerzo de control. Se observa que las variables se estabilizan en 5 tiempos de residencia, en este caso los transitorios son más abruptos debido a la saturación del controlador, el cual primero satura en su valor máximo, luego satura en su valor mínimo para finalmente establecerse en el valor nominal, claramente los

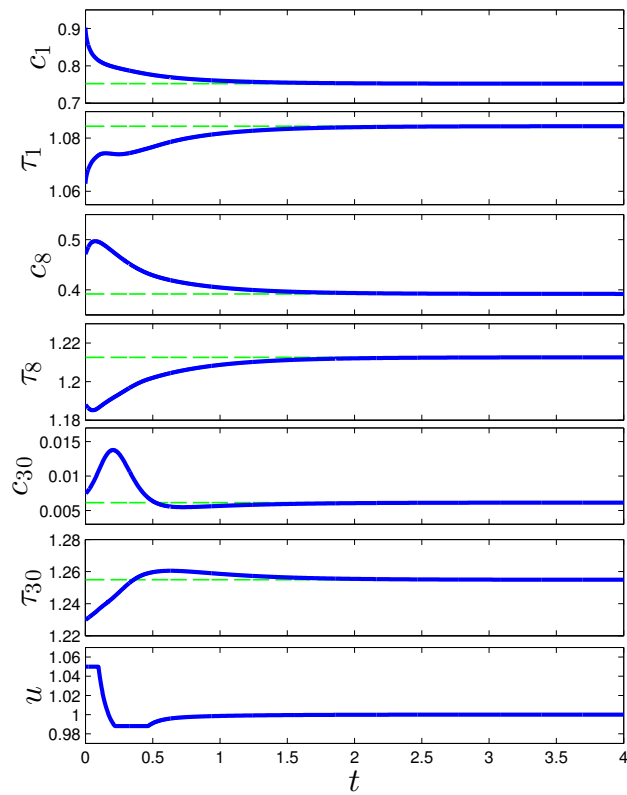
tiempos de saturación son mayores en comparación con la simulación anterior puesto que los perfiles estacionarios están más alejados de los prescritos. Con las simulaciones anteriores se ejemplifica que tanto para el funcionamiento local, como no local es importante satisfacer las condiciones de la Proposición 2, para evitar que aparezcan puntos de equilibrio indeseados en lazo cerrado.

Finalmente, se realizó una cuarta simulación con el mismo perfil inicial que la anterior, pero eligiendo los límites de saturación erróneamente, de acuerdo con (3.19). En la Figura 3.23 se muestran los perfiles iniciales (en negro), prescritos continuos (en azul claro) y en los que el controlador estabiliza el reactor (azul). En la Figura 3.24 se presentan las concentraciones y temperaturas de la etapa inicial, de medición y de salida. Los resultados de esta simulación muestran cómo el controlador se satura en su valor máximo y, dado que éste no se eligió adecuadamente, surge un punto estado estacionario adicional e indeseado de lazo cerrado, el cual se había predicho (ver Figura 3.13) de acuerdo con el corte entre las curvas  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{C}(k, u^-, u^+)$ . De esta forma se verifica la validez del criterio de elección de los límites de saturación y la ganancia del controlador.



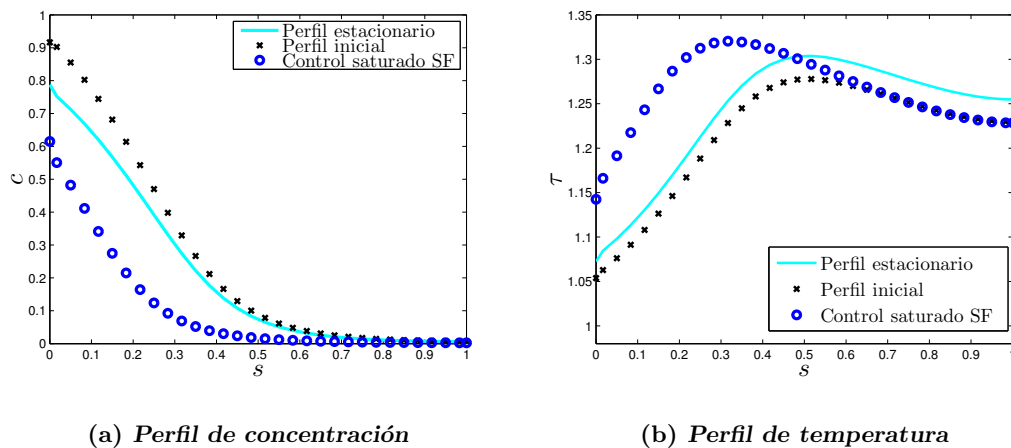


**Figura 3.17:** Perfiles de concentración y temperatura iniciales y de estado estacionario del reactor en lazo cerrado con el controlador saturado por retroalimentación de estado, funcionamiento local

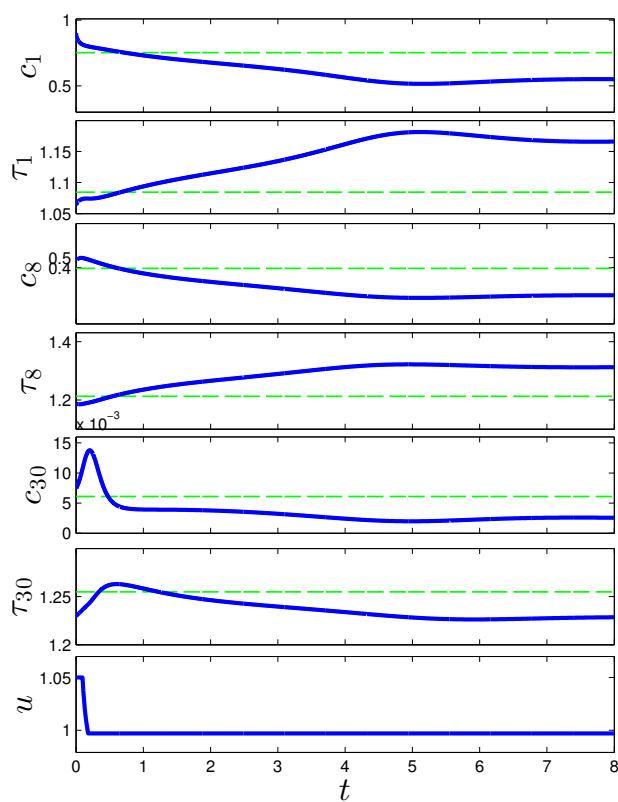


**Figura 3.18:** Concentraciones y temperaturas en las etapas inicial, de medición y de salida; y esfuerzo de control del reactor en lazo cerrado con el control por saturado por retroalimentación de estado, funcionamiento local

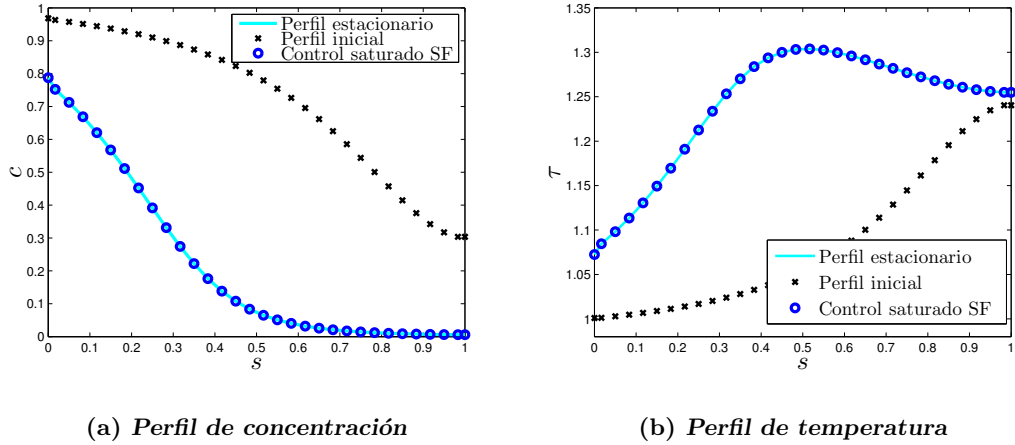
### 3. DISEÑO CON CONTROL AVANZADO



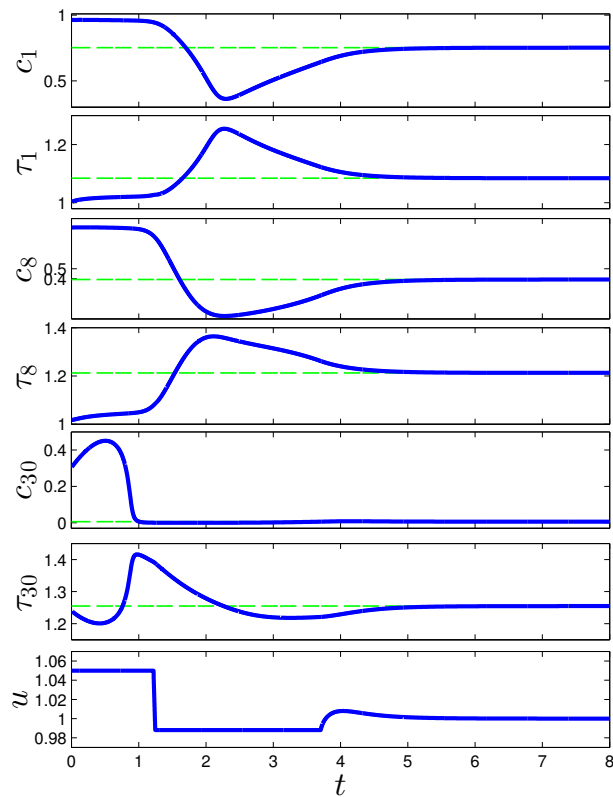
**Figura 3.19:** Perfiles de concentración y temperatura iniciales y de estado estacionario del reactor en lazo cerrado con el controlador saturado por retroalimentación de estado violando las condiciones de la Proposición 2, funcionamiento local



**Figura 3.20:** Concentraciones y temperaturas en las etapas inicial, de medición y de salida; y esfuerzo de control del reactor en lazo cerrado con el control por saturado por retroalimentación de estado violando las condiciones de la Proposición 2, funcionamiento local

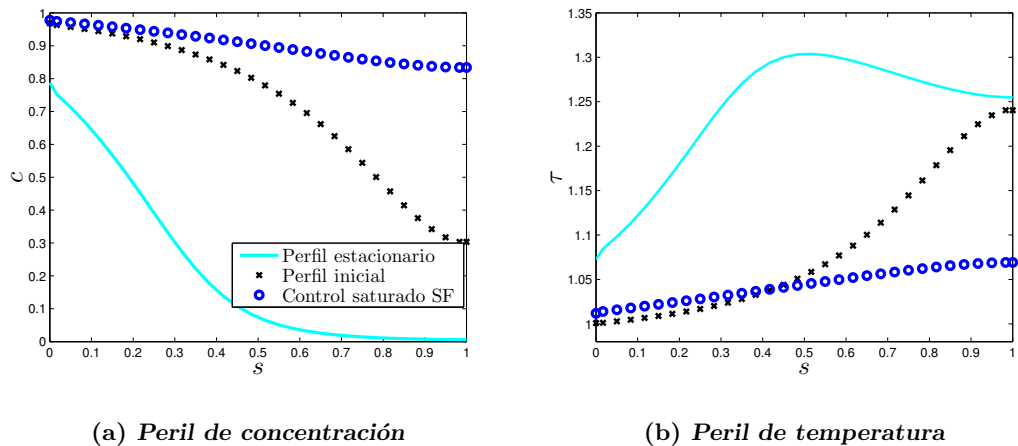


**Figura 3.21:** Perfiles de concentración y temperatura iniciales y de estado estacionario del reactor en lazo cerrado con el controlador saturado por retroalimentación de estado, funcionamiento no local

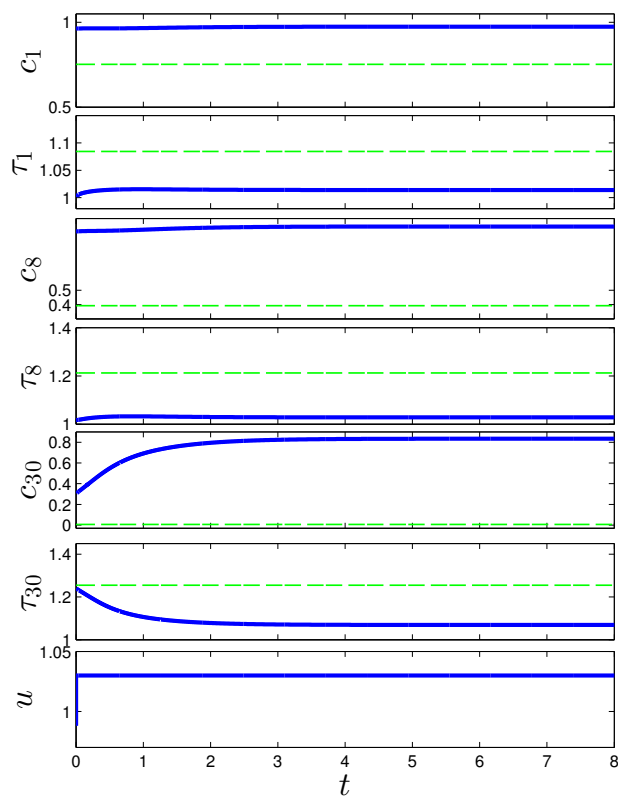


**Figura 3.22:** Concentraciones y temperaturas en las etapas inicial, de medición y de salida; y esfuerzo de control del reactor en lazo cerrado con el controlador saturado por retroalimentación de estado, funcionamiento no local

### 3. DISEÑO CON CONTROL AVANZADO



**Figura 3.23:** Perfiles de concentración y temperatura iniciales y de estado estacionario del reactor en lazo cerrado con el controlador saturado por retroalimentación de estado y violando las condiciones de la Proposición 2



**Figura 3.24:** Concentraciones y temperaturas en las etapas inicial, de medición y de salida; y esfuerzo de control del reactor en lazo cerrado con el controlador saturado por retroalimentación de estado y violando las condiciones de la Proposición 2

### 3.6. Control saturado por retroalimentación de salida basado en el modelo detallado

El Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado (3.12) para ser implementado requiere mediciones de la salida medida  $y = \tau_m$ , donde el subíndice  $m$  indica la etapa de medición, además de la concentración  $c_m$  y las temperaturas de las etapas anterior  $\tau_{m-1}$  y posterior  $\tau_{m+1}$ , lo cual representa un problema, dado que en las especificaciones de diseño se requiere que sólo se mida la temperatura  $y$ , debido a lo anterior es necesario implementar algún algoritmo de estimación para reconstruir los estados que requiere el controlador. Para esto se elige utilizar un observador geométrico con una estructura específica para estimación en procesos por etapas, el cual es propuesto en [26] en donde se muestra su funcionamiento en el problema de estimación de estado en columnas de destilación.

En [45] se presentan las condiciones de solubilidad para que este observador pueda ser implementado en reactores tubulares con tasa de reacción tipo Arrhenius, que coincide con el caso de estudio que se utiliza en este trabajo: la condición de detectabilidad necesaria es que la función de Arrhenius multiplicada por el parámetro de temperatura adiabática nunca se anule, i.e.,  $\beta\alpha(\tau) \neq 0$ , lo cual siempre es satisfecho debido a que  $\alpha(\tau)$  es isótoma con respecto a  $\tau$ , y acotada por debajo por un número positivo. La combinación del Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado con el observador geométrico producen el Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida basado en el Observador Geométrico,

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d}, u) + \mathbf{g}_y(\hat{\mathbf{x}}, u)(y - \mathbf{c}_y \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{g}_\iota(\hat{\mathbf{x}}, u)\hat{\iota}, \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (3.21a)$$

$$\dot{\hat{\iota}} = \omega_y^3(y - \mathbf{c}_y \hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\iota}(0) = \hat{\iota}_0 \quad (3.21b)$$

$$u = \mu_s(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{d}, y) \quad (3.21c)$$

en donde,

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}, \mathbf{d}, u) = \left[ \mathbf{0}^\top, [\mathbf{O}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, u)]^{-1} \mathbf{k}_i, \mathbf{0}^\top \right]^\top, \quad i = y, \iota$$

$$\mathbf{O}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, u) = \partial_x \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, u), \quad \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, u) = [\tau_m, f_m^\tau(\mathbf{x}, \mathbf{d}, u)]^\top$$

$$\mathbf{k}_y = (2\zeta_y + 1) [\omega_y \omega_y^2]^\top, \quad \mathbf{k}_\iota = [0 \ 1]^\top, \quad \zeta_y \in [1, 3], \quad \omega_y \in [5, 10] \lambda_y$$

$\mathbf{g}$  (o  $\mathbf{g}_\iota$ ) es una ganancia proporcional (o integral) no lineal,  $\zeta_y$  (u  $\omega_y$ ) es el factor de amortiguamiento (o frecuencia característica) de la dinámica prescrita de la salida, y  $\lambda_y$  es el tiempo de residencia de la etapa de medición.

El observador geométrico (3.21a),(3.21b) tiene la propiedad de que el error de estimación converge robustamente a cero de forma asintótica [26], sin embargo el controlador anterior tiene las siguientes desventajas:

- El observador está construido con una copia del modelo discreto (3.1), por lo que cuenta con mucho acoplamiento dinámico,
- Tiene alta dimensionalidad, i.e.,  $\dim(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\ell}) = n + 2$ , con  $n = 2N = 60$ , por lo que este controlador tiene dimensión 62.
- Debido a la estructura del observador, el controlador es no lineal

y de acuerdo con los requerimientos de diseño establecidos en el planteamiento del problema (simplicidad, baja dimensión, linealidad) el controlador (3.21) no es adecuado para una aplicación en algún reactor real, puesto que en estos casos se busca que los controladores sean sencillos. En el siguiente capítulo se construirá un controlador saturado por retroalimentación de salida con base en las propiedades bajo las cuales el problema de control saturado se resolvió: pasividad y detectabilidad; y la construcción de diagramas de las curvas de control de lazo abierto y lazo cerrado.

## Resumen

En este Capítulo se presentó la solución del problema de control saturado con teoría de control avanzada, el diseño del controlador se basa en las propiedades de pasividad del modelo discreto. Se establecieron las condiciones de resolubilidad del problema en términos de la dependencia de la estabilidad de la dinámica cero con respecto a la posición en que se toma la medición de temperatura. Además se estableció un criterio para elegir los límites del control. Como resultado se obtuvo el Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado, se estableció la prueba de estabilidad correspondiente y posteriormente se aplicó la metodología al caso de estudio y se presentaron resultados de simulación del reactor en lazo cerrado con este controlador. Posteriormente con base en un observador geométrico se obtuvo el Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida basado en el Observador Geométrico, sin embargo dada su complejidad se desechó la posibilidad de implementar este controlador.

# Rediseño del controlador avanzado por retroalimentación de salida

---

En esta sección se realizará el diseño de un controlador saturado por retroalimentación de salida que reconstruya las propiedades del Control Saturado por Retroalimentación de Estado (3.12). Se parte del problema de control saturado resuelto en el capítulo anterior con teoría de control avanzado, el cual se solucionó con base en las propiedades de pasividad y observabilidad del modelo (3.1). La metodología a seguir consiste en utilizar un modelo simplificado de la etapa de medición que herede las propiedades de pasividad y observabilidad del modelo completo, para el cual se diseñará un controlador saturado por retroalimentación de salida basado en un observador de orden reducido, el controlador obtenido logra reconstruir las propiedades del Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado diseñado anteriormente siempre que el error de estimación converja a cero. Se mostrará que este controlador sin saturación, puede implementarse como un controlador tipo PI de temperatura. Finalmente se presentan algunas simulaciones numéricas para mostrar la efectividad del controlador propuesto.

## 4.1. Rediseño del modelo para fines de control

De acuerdo con el enfoque constructivo [54] aplicado en estudios recientes a reactores químicos de polimerización [28], exotérmicos de flujo continuo [20], tubulares exotérmicos [45], y biorreactores [51], [52], [50], en esta sección se confecciona un modelo simplificado para control por retroalimentación de salida, este modelo conserva las propiedades de pasividad y observabilidad requeridas para resolver el problema de control saturado.

#### 4. REDISEÑO DEL CONTROLADOR AVANZADO POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA

---

Considerando la dinámica de la etapa de medición  $y$ ,

$$\dot{c}_m = (\theta + \vartheta_m) c_{m-1} - [\theta + 2\vartheta_m + \alpha(\tau_m)] c_m + \vartheta_m c_{m+1} \quad (4.1a)$$

$$\dot{\tau}_m = (\theta + \vartheta_h) \tau_{m-1} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta) \tau_m + \beta\alpha(\tau_m) c_m + \vartheta \tau_{m+1} + \delta u \quad (4.1b)$$

$$y = \tau_m \quad (4.1c)$$

el modelo anterior puede ser reescrito de la siguiente forma,

$$\dot{c}_m = (\theta + \vartheta_m) c_{m-1} - [\theta + 2\vartheta_m + \alpha(\tau_m)] c_m + \vartheta_m c_{m+1}$$

$$\dot{\tau}_m = b_m + a u$$

$$y = \tau_m$$

en donde  $a \approx \bar{\delta}$  es una aproximación del parámetro del coeficiente de intercambio de calor que se conoce *a priori*, y  $b_m$  es una entrada de la dinámica lineal de la temperatura de medición, que es generada por el mapa no lineal  $b_m = \varsigma(\mathbf{x}, \theta)$ , con

$$\varsigma(\mathbf{x}, \theta) = (\theta + \vartheta_h) \tau_{m-1} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta) \tau_m + \beta\alpha(\tau_m) c_m + \vartheta \tau_{m+1} + (\delta - a) u \quad (4.2)$$

eliminando la dinámica de concentración  $c_m$ , así como la componente estática  $\varsigma(\mathbf{x}, \theta)$  del modelo (4.1), y asumiendo que la entrada  $b_m$  varía lentamente con respecto a la tasa de convergencia  $\omega$  de un observador lineal (a ser diseñado), de acuerdo con la siguiente expresión,

$$\frac{|\dot{b}_m|}{|b_m|} \ll \omega$$

se obtiene el siguiente modelo lineal para el diseño del controlador por retroalimentación de salida,

$$\dot{\tau}_m = a u + b_m, \quad \dot{b}_m \approx 0, \quad y = \tau_m \quad (4.3)$$

este modelo simplificado tiene las siguientes propiedades,

- (i) grado relativo un con respecto a los pares entrada-salida  $(u, y)$  y  $(b_m, y)$ , i.e.,  $\text{gr}(u, y) = \text{gr}(b_m, y) = 1$ ,
- (ii) es pasivo con respecto a los pares  $(u, y)$  y  $(b_m, y)$ ,
- (iii) satisface la condición de acoplamiento entre la entrada no medida  $b_m$  y la entrada de control  $u$ .

Derivando la salida  $y$  del modelo simplificado (4.1), y sustituyendo la dinámica de la temperatura de medición, se puede expresar la entrada no medible  $b_m$  de la siguiente forma,

$$b_m = \dot{y} - a u \quad (4.4)$$

por lo tanto  $b_m$  está unívocamente determinada por el par de variables conocidas  $(u, y)$ , y esto implica que es  $b_m$  es observable [29] y es posible reconstruirla robustamente a



partir del modelo (4.3) y las señales  $(u, y)$ . Para esto es posible construir un observador lineal robusto [59]. Las propiedades de pasividad, observabilidad, y el acoplamiento entre la entrada desconocida  $b_m$  y la entrada de control  $u$  aseguran la posibilidad de reconstruir el comportamiento del Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado (3.12) por medio de un controlador lineal por retroalimentación de salida.

## 4.2. Construcción del controlador

Para diseñar el controlador, por el momento se asume que se conoce la entrada desconocida  $b_m$ , forzando la dinámica lineal (3.9) en el modelo simplificado (4.3), se obtiene la siguiente ley de control por retroalimentación de salida,

$$u = \frac{-k(y - \bar{y}) - b_m}{a}, \quad k > 0 \quad (4.5)$$

en donde  $\bar{y}$  es el valor de estado estacionario prescrito de la temperatura de la etapa de medición. Si en este controlador se sustituye  $b_m$  por el mapa  $\zeta(\mathbf{x}, \theta)$  definido en (4.2), se obtiene la ley de control por retroalimentación de estado (3.10). Para estimar la entrada desconocida  $b_m$  se utiliza un observador de orden reducido, para lo cual se propone la siguiente dinámica de estimación

$$\dot{\hat{b}}_m = \omega \left[ \dot{y} - (au + \hat{b}_m) \right], \quad \omega > 0,$$

la ecuación anterior se puede reescribir como,

$$\dot{\hat{b}}_m - \omega \dot{y} = -\omega \hat{b}_m - \omega au,$$

sumando y restando el término  $\omega^2 y$  en el lado izquierdo de la ecuación anterior y agrupando términos se obtiene,

$$\dot{\hat{b}}_m - \omega \dot{y} = -\omega \left( \hat{b}_m - \omega y \right) - \omega (au + \omega y),$$

y considerando el siguiente cambio de coordenadas,

$$\hat{\chi} = \hat{b}_m - \omega y,$$

se obtiene el observador de orden reducido,

$$\dot{\hat{\chi}} = -\omega \hat{\chi} - \omega (au + \omega y), \quad \hat{\chi}(0) = \hat{\chi}_0, \quad (4.6a)$$

$$\hat{b}_m = \hat{\chi} + \omega y, \quad (4.6b)$$

#### 4. REDISEÑO DEL CONTROLADOR AVANZADO POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA

---

reemplazando el estimado de  $b_m$  en la ley de control (4.5) y aplicando la función de saturación se obtiene el Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida,

$$\dot{\hat{\chi}} = -\omega\hat{\chi} - \omega(au + \omega y), \quad \hat{\chi}(0) = \hat{\chi}_0, \quad (4.7a)$$

$$u = \varpi_s(y, \hat{\chi}) = \begin{cases} \tau_c^+ & \text{si } \varpi(y, \hat{\chi}) > \tau_c^+ \\ \varpi(y, \hat{\chi}) & \text{si } \tau_c^- \leq \varpi(y, \hat{\chi}) \leq \tau_c^+ \\ \tau_c^- & \text{si } \varpi(y, \hat{\chi}) < \tau_c^- \end{cases}, \quad (4.7b)$$

en donde,

$$\varpi(y, \hat{\chi}) = \frac{-k(y - \bar{y}) - \hat{\chi} - \omega y}{a}.$$

La ley de control anterior sin saturación es lineal y tiene una componente que se encarga de compensar los efectos de los errores de modelado y los términos no lineales de la dinámica de salida, además de un término lineal estabilizante. Sin embargo debido a la saturación este controlador es no lineal. El controlador anterior se puede interpretar como un controlador con un mecanismo de anti encuerdamiento basado en observador, esto es debido a que dado que éste contiene un término de la entrada real que se aplica al reactor, y por lo tanto el observador puede estimar la entrada exógena  $b_m$  que afecta la dinámica de medición considerando los efectos de la saturación en el controlador, lo cual permite que cuando el sistema comienza a operar sin saturación después de que el controlador haya estado saturado durante cierto tiempo, el observador estima el estado real en el que se encontraba el sistema, es decir, el observador sigue funcionando a pesar de que cuando el controlador se satura se rompe el lazo de retroalimentación.

La dinámica del error de observación  $\tilde{\chi} = \hat{\chi} - \chi$ , está dada por la siguiente ecuación (detalles en Apéndice B),

$$\dot{\tilde{\chi}} = -\omega\tilde{\chi} + \tilde{f}_\chi(\mathbf{x}, \tilde{\chi}, \mathbf{d}), \quad \tilde{\chi}(0) = \tilde{\chi}_0, \quad \tilde{\chi} \in \Xi, \quad (4.8)$$

en donde la función  $\tilde{f}_\chi(\mathbf{x}, \tilde{\chi}, \mathbf{d})$  contiene términos en desviación de la dinámica no lineal de la etapa de medición. Si la ganancia  $\omega$  es elegida adecuadamente, el error de estimación converge de forma exponencial a cero, lo cual implica que en lazo cerrado, el estimado  $\hat{\chi}$  converge exponencialmente al valor real  $\chi = b_m - \omega y$ , y la tasa de decrecimiento del error de estimación está dada por  $\omega_{cl} \approx \omega$ . De forma similar, el comportamiento del control dinámico basado en observador (4.7) converge al comportamiento de su versión no lineal por retroalimentación de estado (3.12) basado en el modelo detallado, es decir,

$$\hat{\chi} \longrightarrow \chi \Rightarrow u = \varpi_s(y, \hat{\chi}) \longrightarrow \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, y),$$

este hecho juega un papel fundamental en la prueba de estabilidad de lazo cerrado con el Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida diseñado.

### 4.3. Estabilidad de lazo cerrado

A continuación se presenta la prueba de estabilidad del sistema (3.1) con el Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida (4.7), se darán condiciones para estabilidad práctica robusta en términos de las ganancias del controlador. El desarrollo presentado a continuación se ha realizado en reactores químicos de polimerización [28] y en reactores biológicos [51], [52], [50].

La definición de estabilidad práctica y algunos teoremas importantes se presentan en seguida, éstos serán de utilidad en la prueba de estabilidad.

Sea el sistema en variables de desviación siguiente,

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{d}} + \bar{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{p}}) := \tilde{\mathbf{f}}[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}}(t)], \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0, \quad \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (4.9)$$

en donde,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{v}(t) = \left[ \mathbf{d}^\top, \mathbf{u}^\top(t), \mathbf{p}^\top \right]^\top, \\ \|\tilde{\mathbf{x}}_0\| &\leq \delta_0, \quad \|\tilde{\mathbf{v}}\| = \sup_t |\tilde{\mathbf{v}}(t)| \leq \delta, \quad \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

$\mathbf{x}$  es el vector de estado,  $\mathbf{d}$  es un vector de perturbaciones,  $\mathbf{u}$  es el vector de entradas de control,  $\mathbf{p}$  es un vector de parámetros, además  $\mathbf{v}(t)$  es el vector aumentado de entradas,  $\delta_0$  o  $\delta$  es el radio de la bola de estados iniciales perturbados (o de entrada perturbada), y  $\varepsilon$  es el radio de la bola que contiene las trayectorias perturbadas.

**Definición 1.** *El estado estacionario  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  es entrada-estado exponencialmente estable si existen constantes positivas  $a$ ,  $\lambda$  y  $\gamma_{\mathbf{v}}^{\mathbf{x}}$ , de tal forma que las trayectorias están acotadas de la siguiente forma, [32],[58]*

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| < ae^{-\lambda t} \|\tilde{\mathbf{x}}_0\| + \gamma_{\mathbf{v}}^{\mathbf{x}} \|\tilde{\mathbf{v}}\|. \quad (4.10)$$

En un contexto local la noción de estabilidad entrada estado es válida para pequeñas desviaciones en la condición inicial (de tamaño  $\delta_0$ ), mientras que en el contexto de estabilidad práctica no local la propiedad de estabilidad entrada-estado es válida para desviaciones en el estado inicial, en los parámetros, en las entradas y en el estado, con desviaciones especificadas o a determinar ( $\delta_0$ ,  $\delta$  y  $\varepsilon$ ).

**Definición 2.** *Si la desigualdad (4.10) se mantiene para desviaciones del estado inicial ( $\|\tilde{\mathbf{x}}_0\| < \delta_0$ ), de la entrada ( $\|\tilde{\mathbf{v}}\| < \delta$ ), y del estado ( $\|\tilde{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ ), i.e.,*

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_0\| < \delta_0, \quad \|\tilde{\mathbf{v}}\| < \delta \Rightarrow \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| < ae^{-\lambda t} \|\tilde{\mathbf{x}}_0\| + \gamma_{\mathbf{v}}^{\mathbf{x}} \|\tilde{\mathbf{v}}\| < \varepsilon = a\delta_0 + \gamma_{\mathbf{v}}^{\mathbf{x}} \delta, \quad a, \lambda, \gamma_{\mathbf{v}}^{\mathbf{x}} > 0$$

#### 4. REDISEÑO DEL CONTROLADOR AVANZADO POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA

---

entonces el sistema es prácticamente estable de forma no local.

Ahora se presentan algunos teoremas y lemas de utilidad para la prueba de estabilidad.

**Lema 1** ([2]). Sea el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  exponencialmente estable, i.e.,  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq a_x e^{-\lambda_x t} \|\mathbf{x}_0\|$ .

El sistema perturbado,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad \|\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{v})\| < L_{\mathbf{x}}^{\mathbf{v}}(\varepsilon, \delta) \|\mathbf{x}\| + L_{\mathbf{v}}^{\mathbf{p}}(\varepsilon, \delta) \|\mathbf{v}\|, \quad \|\mathbf{x}\| < \varepsilon, \quad \|\mathbf{v}\| \leq \delta$$

es entrada a estado estable si  $\frac{a_x}{\lambda_x} L_{\mathbf{x}}^{\mathbf{p}}(\varepsilon, \delta) < 1$ . La tasa de convergencia está dada por  $\lambda_x - a_x L_{\mathbf{x}}^{\mathbf{p}}(\varepsilon, \delta)$ , y  $L_{\mathbf{x}}^{\mathbf{p}}(\varepsilon, \delta)$  es la constante de Lipschitz (no local) de  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  con respecto a  $\mathbf{x}$ , i.e.,  $L_{\mathbf{x}}^{\mathbf{p}}(\varepsilon, \delta) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{v}} \frac{\|\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v})\|}{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}$ .

**Teorema 1** (Pequeñas ganancias [32]). Sea el sistema (4.11a) (o (4.11b)) entrada a estado estable con ganancia  $\gamma_{\mathbf{y}}^{\mathbf{x}}$  (o  $\gamma_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}}$ ) con respecto a  $\mathbf{y}$  (o  $\mathbf{x}$ ),

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (4.11a)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{g}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (4.11b)$$

la interconexión de los dos sistemas (4.11) es entrada a estado estable si  $\gamma_{\mathbf{y}}^{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} < 1$ .

**Corolario 1.** La interconexión en cascada [ (4.11a) con  $\gamma_{\mathbf{y}}^{\mathbf{x}} = 0$  ] de dos sistemas entrada a estado estables, también es entrada a estado estable.

La combinación del Lema 2 con el con el Teorema 2 producen el siguiente lema.

**Lema 2** ([2], [5]). *La siguiente interconexión de dos sistemas,*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}), & \|\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v})\| &\leq L_{\mathbf{x}}^{\mathbf{p}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta)\|\mathbf{x}\| + L_{\mathbf{y}}^{\mathbf{p}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta)\|\mathbf{y}\| + L_{\mathbf{v}}^{\mathbf{p}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta)\|\mathbf{v}\|, \\ & & \|\mathbf{x}\| &\leq \varepsilon_{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}), & \|\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v})\| &\leq L_{\mathbf{x}}^{\mathbf{q}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta)\|\mathbf{x}\| + L_{\mathbf{y}}^{\mathbf{q}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta)\|\mathbf{y}\| + L_{\mathbf{v}}^{\mathbf{q}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta)\|\mathbf{v}\|, \\ & & \|\mathbf{y}\| &\leq \varepsilon_{\mathbf{y}}, \quad \|\mathbf{v}\| \leq \delta \end{aligned}$$

es entrada a estado estable si,

- $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  es entrada-estado exponencialmente estable con parámetros  $a_{\mathbf{x}}, \lambda_{\mathbf{x}}$ ,
- $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$  es exponencialmente estable con parámetros  $a_{\mathbf{y}}, \lambda_{\mathbf{y}}$ ,
- $\gamma_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}}(\lambda_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta) < 1$ ,
- $\gamma_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}}(\lambda_{\mathbf{y}}, \varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta) < 1$ ,
- $\frac{\gamma_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}}(\lambda_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta)}{1 - \gamma_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}}(\lambda_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta)} \frac{\gamma_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}}(\lambda_{\mathbf{y}}, \varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta)}{1 - \gamma_{\mathbf{y}}^{\mathbf{y}}(\lambda_{\mathbf{y}}, \varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta)} < 1$ ,

en donde,

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha}^{\mathbf{x}}(\lambda_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta) &= \frac{a_{\mathbf{x}}}{\lambda_{\mathbf{x}}} L_{\alpha}^{\mathbf{p}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta) \\ \gamma_{\alpha}^{\mathbf{y}}(\lambda_{\mathbf{y}}, \varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta) &= \frac{a_{\mathbf{y}}}{\lambda_{\mathbf{y}}} L_{\alpha}^{\mathbf{q}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}, \varepsilon_{\mathbf{y}}, \delta) \end{aligned}$$

con  $\alpha = \mathbf{x}, \mathbf{y}$ .

Ahora se procede a realizar la prueba de estabilidad práctica no local del sistema (3.2) en lazo cerrado con el controlador (4.7), el cual se puede escribir como,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}[\mathbf{x}, \mathbf{d}, \varpi_s(y, \hat{\chi})], & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \dot{\hat{\chi}} &= -\omega \hat{\chi} - \omega (au + \omega y), & \hat{\chi}(0) &= \hat{\chi}_0, \end{aligned}$$

cambiando la segunda ecuación por la dinámica del error de estimación  $\tilde{\chi}$ , se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}) + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \tilde{\chi}, \mathbf{d}, \tilde{\mathbf{d}}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in X, \quad (4.13a)$$

$$\dot{\tilde{\chi}} = -\omega \tilde{\chi} - \tilde{f}_{\chi}(\mathbf{x}, \tilde{\chi}, \mathbf{d}), \quad \tilde{\chi}(0) = \tilde{\chi}_0, \quad \tilde{\chi} \in \Xi, \quad (4.13b)$$

#### 4. REDISEÑO DEL CONTROLADOR AVANZADO POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA

---

con estado aumentado,

$$\mathbf{x}_a = \left( \mathbf{x}^\top, \tilde{\chi} \right)^\top \in X_a = X \times \Xi, \quad \Xi = [-\delta_\chi, \delta_\chi], \quad \bar{\mathbf{x}}_a = \left( \bar{\mathbf{x}}^\top, 0 \right)^\top, \quad (4.14)$$

$$x_{a0} \in X_{a0} \times \Xi_0, \quad \Xi_0 = [-\delta_0, \delta_0] \subseteq \Xi, \quad \delta_\chi \geq \delta_0,$$

y los campos vectoriales satisfacen las siguientes expresiones,

$$\mathbf{f}_s(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{d}}) = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, 0, \bar{\mathbf{d}}, 0) = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{f}}_\chi(\bar{\mathbf{x}}, 0, \bar{\mathbf{d}}) = 0$$

la deducción de  $\tilde{\mathbf{f}}$  y  $\tilde{\mathbf{f}}_\chi$  se presenta en el Apéndice B, y  $\delta_0$  (o  $\delta_\chi$ ) es el tamaño del espacio de estado  $\Xi_0$  (o  $\Xi$ ). El sistema (4.13) se puede interpretar como la interconexión de dos sistemas no lineales. Cuando el error de estimación es cero,  $\tilde{\chi} = 0$ , la dinámica del sistema en lazo cerrado coincide con el sistema (3.1) en lazo con el controlador saturado por retroalimentación de estado (3.12), que ya se demostró previamente que es asintóticamente estable.

Para mostrar estabilidad práctica no local del origen de (4.13) se utilizan conceptos de perturbaciones singulares y estabilidad entrada-estado, [16]. Por lo tanto primero se obtendrán condiciones para estabilidad práctica del sistema de orden reducido (4.13) con  $\tilde{\chi} = 0$ , y posteriormente se añadirán condiciones para considerar los efectos de la interconexión con la dinámica del error de estimación.

Considerando que en (4.11)  $\tilde{\chi} = 0$ , se obtiene el siguiente sistema de orden reducido,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

el cual coincide con (3.13), y de acuerdo con la Proposición 2, existen una constante positiva  $\lambda_{\mathbf{x}}$ , tal que la dinámica de orden reducido satisface la siguiente desigualdad de forma local,

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq a_x e^{-\lambda_{\mathbf{x}} t} \|\mathbf{x}_0\|. \quad (4.15)$$

Por otro lado, para la dinámica del error de estimación sin el término de perturbación es un sistema lineal, dado por la siguiente expresión,

$$\dot{\tilde{\chi}} = -\omega \tilde{\chi}, \quad \tilde{\chi}(0) = \tilde{\chi}_0$$

dado que  $\omega > 0$ , la estabilidad de este sistema es exponencial, y por lo tanto,

$$|\tilde{\chi}_0| \Rightarrow |\tilde{\chi}(t)| \leq e^{-\omega t} |\tilde{\chi}_0| \quad (4.16)$$

de acuerdo con el Lemma 2, las condiciones necesarias para probar estabilidad entrada a estado, o estabilidad práctica de la interconexión 4.13, se requiere que el origen de los dos sistemas sin los términos de perturbación sean exponencialmente estables, lo cual se satisface de acuerdo con las expresiones (4.15) y (4.16). Las condiciones restantes

del Lemma 2, se pueden reescribir, en términos de las constantes de Lipschitz de las funciones  $\tilde{\mathbf{f}}$  y  $\tilde{f}_\chi$  y la ganancia del observador de orden reducido como,

$$\lambda_x > a_x L_{\tilde{\mathbf{f}}}, \quad (4.17a)$$

$$\omega > L_{\tilde{f}_\chi}^{\tilde{\chi}}, \quad (4.17b)$$

$$\omega > \left( \frac{a_x L_{\tilde{\mathbf{f}}}}{\lambda_x - a_x L_{\tilde{\mathbf{f}}}} \right) L_{\tilde{f}_\chi}^{\tilde{\chi}} + L_{\tilde{f}_\chi}^{\tilde{\chi}} \quad (4.17c)$$

la condición (4.17a) se satisface si se elige  $k > 0$  suficientemente grande. Por otro lado, si la condición (4.17c) es satisfecha, (4.17b) también se satisface, por lo que la ganancia del observador se debe elegir de tal forma que satisfaga (4.17c), de la cual, tomando el caso límite de la igualdad, se puede obtener una restricción para  $\omega$ ,

$$\omega = \omega_d^s + \omega_s^I := \omega_d(k, \omega, u^-, u^+, X_a), \quad (4.18)$$

en donde,

$$\omega_d^s = L_{\tilde{f}_\chi}^{\tilde{\chi}}, \quad \omega_s^I = \left( \frac{a_x L_{\tilde{\mathbf{f}}}}{\lambda_x - a_x L_{\tilde{\mathbf{f}}}} \right) L_{\tilde{f}_\chi}^{\tilde{\chi}},$$

$\omega_d$  permite medir los efectos de los términos desestabilizantes debidos a la propia dinámica del error de estimación (4.13a), y los efectos de la interconexión entre la dinámica del estado  $\mathbf{x}$  y la del error de estimación  $\tilde{\chi}$ . La restricción (4.18) depende de la ganancia  $k$  de forma lineal, mientras que la dependencia en  $\omega$  es cuadrática, por lo que las dos soluciones para  $\omega$  están dadas por,

$$\omega_L = \omega^-(k, u^-, u^+, X_a), \quad \omega_H = \omega^+(k, u^-, u^+, X_a), \quad 0 < \omega_L < \omega_H. \quad (4.19)$$

De acuerdo con lo anterior cuando el término potencialmente desestabilizante  $\omega_d$  es dominado por la ganancia del observador, es decir,  $\omega > \omega_d$ , las trayectorias que comienzan en  $X_{a0}$  evolucionan en  $X_a$  y se establecen de forma asintótica en  $\bar{\mathbf{x}}_a$ , es decir,

$$\mathbf{x}_{a0} \in X_{a0} \Rightarrow \mathbf{x}_a(t) \in X_a, \quad \mathbf{x}_a(t) \rightarrow \bar{\mathbf{x}}_a,$$

en donde los conjuntos  $\Xi_0$  y  $\Xi$  se definen en términos de los siguientes valores,

$$\delta_\chi = \delta_0 + \frac{L_{\tilde{f}_\chi}^{\tilde{\chi}}}{\omega - L_{\tilde{f}_\chi}^{\tilde{\chi}}} m_{\mathbf{x}}, \quad m_{\mathbf{x}} = \sup_{\mathbf{x} \in X} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|, \quad (4.20)$$

lo anterior se presenta a continuación en forma de proposición.

**Proposición 3.** Sean  $\tau_{c^*}$  y  $\tau_c^*$  el mínimo y máximo de bifurcación de la entrada de control  $\tau_c$ ,  $\omega^-$  y  $\omega^+$  el par de soluciones (4.19) de la ecuación que delimita el valor de la

#### 4. REDISEÑO DEL CONTROLADOR AVANZADO POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA

---

ganancia  $\omega$  (4.18),  $y \varepsilon_k, \varepsilon_*, \varepsilon^* > 0$  constantes. Entonces el estado estacionario prescrito  $\bar{\mathbf{x}}_a$  del sistema en lazo cerrado (4.13) con el Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida (4.7) tiene como dominio de atracción  $X_{a0}$ , si las ganancias del controlador  $k$  y  $\omega$  y los límites  $u^-$  y  $u^+$  satisfacen las siguientes condiciones:

$$(i) \quad k > \varepsilon_k, \quad u^- < \tau_{c*} - \varepsilon_*, \quad u^+ > \tau_c^* + \varepsilon^*,$$

$$(ii) \quad \omega^-(k, u^-, u^+, X_a) < \omega < \omega^+(k, u^-, u^+, X_a).$$

*Demostración.* Suponiendo que las condiciones de la Proposición 3 se satisfacen, consideremos la dinámica del error de estimación,

$$\dot{\tilde{\chi}} = -\omega \tilde{\chi} - \tilde{f}_\chi(\mathbf{x}, \tilde{\chi}, \mathbf{d}), \quad \tilde{\chi}(0) = \tilde{\chi}_0,$$

cuya solución está dada por,

$$\tilde{\chi}(t) = \tilde{\chi}_0 - \omega \int_0^t \tilde{\chi}(s) ds - \int_0^t \tilde{f}_\chi(\mathbf{x}, s, \mathbf{d}) ds$$

tomando normas de ambos lados de la ecuación anterior se obtiene

$$\|\tilde{\chi}(t)\| \leq \|\tilde{\chi}_0\| - \omega \int_0^t \|\tilde{\chi}(s)\| ds - \int_0^t \|\tilde{f}_\chi(\mathbf{x}, s, \mathbf{d})\| ds,$$

considerando que es posible la función  $\tilde{f}_\chi(\mathbf{x}, \tilde{\chi}, \mathbf{d})$  está acotada de la siguiente forma,

$$\|\tilde{f}_\chi(\mathbf{x}, \tilde{\chi}, \mathbf{d})\| \leq L_{\tilde{\chi}}^{\tilde{f}_\chi} \|\tilde{\chi}(t)\| + L_x^{\tilde{f}_\chi} \|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}\|,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\tilde{\chi}(t)\| &\leq \|\tilde{\chi}_0\| - \omega \int_0^t \|\tilde{\chi}(s)\| ds - \int_0^t \left[ L_{\tilde{\chi}}^{\tilde{f}_\chi} \|\tilde{\chi}(s)\| + L_x^{\tilde{f}_\chi} \|\mathbf{x}(s) - \bar{\mathbf{x}}\| \right] ds, \\ &\leq \|\tilde{\chi}_0\| - \left( \omega + L_x^{\tilde{f}_\chi} \right) \int_0^t \|\tilde{\chi}(s)\| ds - L_x^{\tilde{f}_\chi} \int_0^t \|\mathbf{x}(s) - \bar{\mathbf{x}}\| ds, \end{aligned}$$

y aplicando el Lema Generalizado de Gronwall [65], se obtiene lo siguiente

$$\|\tilde{\chi}_0\| \leq \delta_0 \Rightarrow \|\tilde{\chi}(t)\| \leq e^{-\lambda_\omega t} \|\tilde{\chi}_0\| + \frac{L_x^{\tilde{f}_\chi}}{\lambda_\omega} \delta_x, \quad \lambda_\omega = \omega - \omega_d^s, \quad \delta_\chi(X) = \sup_{x \in X} \|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}\|,$$



por lo tanto eligiendo los tamaños del dominio de atracción para  $\delta_0$  y  $\delta_\chi$  como (4.20) implica lo siguiente

$$\|\tilde{\chi}\| \leq \delta_0 \Rightarrow \|\tilde{\chi}(t)\| \leq \delta_\chi,$$

esto implica que las trayectorias  $\mathbf{x}(t)$  que comienzan en  $X_{a0}$  evolucionan en el conjunto compacto  $X_a$ , i.e.,

$$X_{a0} = \{\mathbf{x}_a \in X_a \mid \|\chi\| \leq \delta_0\}, \quad X_a = \{\mathbf{x} \in X_a \mid \|\chi\| \leq \delta_\chi > \delta_0\},$$

finalmente, debido a que las condiciones de la Proposición 3 se satisfacen, y por la propiedad de invariancia de  $X$ , entonces las trayectorias  $\mathbf{x}_a(t)$  que comienzan en  $X_{a0}$  evolucionan dentro de  $X_a$  y convergen de forma asintótica a  $\bar{\mathbf{x}}_a$ .  $\square$

El resultado anterior asegura estabilidad práctica no local con respecto a los conjuntos acotados  $X_{a0}$  de condiciones iniciales y  $X_a$  en el que evolucionan las trayectorias del sistema en lazo cerrado, y estabilidad estructural con respecto a desviaciones en las entradas exógenas y en términos de las ganancias del controlador y los límites de saturación.

La condición (i) de la Proposición 3 evita que en lazo cerrado se tengan puntos de equilibrio indeseados, es decir,  $\bar{\mathbf{x}}$  es el único estado estacionario de lazo cerrado, mientras que la condición (ii) asegura que la ganancia del observador  $\omega$  domina el término desestabilizante  $\omega_d$ . De acuerdo con estas condiciones se observa que existe una relación entre las ganancias  $k$  y  $\omega$  del controlador (4.7) y los límites del control  $u^-$  y  $u^+$  en términos de los valores de bifurcación  $\tau_{c^*}$  y  $\tau_c^*$  de lazo abierto, y el dominio de atracción  $X_{a0}$  del estado aumentado  $\bar{\mathbf{x}}_a$ . Por lo tanto, para un conjunto dado de desviación  $X_a$  y los límites del control  $u^-$  y  $u^+$  que satisfacen la condición (i) de la Proposición 3, es posible ajustar el dominio de atracción  $X_{a0}$  eligiendo la ganancia  $k$  suficientemente pequeña y la ganancia del observador  $\omega > k$  dentro de los límites  $\omega^-$  y  $\omega^+$ .

Es importante mencionar que los efectos de saturación de la señal de control benefician el funcionamiento de lazo cerrado del Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida debido a que el término desestabilizante de la interconexión (4.13) se anula pues  $\tilde{\chi} = 0$ . Esta propiedad se ha mostrado en varios trabajos relacionados al diseño de control por retroalimentación de salida basado en observadores, por ejemplo [23] y los trabajos sobre observadores de alta ganancia, en [37] se presenta una explicación detallada.

El Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida diseñado (4.7) en este capítulo en comparación con el controlador saturado por retroalimentación de salida

basado en observador (3.1a) es mucho más sencillo en términos de no linealidad y dependencia del modelo, mientras que el controlador (3.1a) es de dimensión 63 y se basa en una copia del modelo (3.2), el cual depende de los parámetros del sistema y tiene términos no lineales, por otro lado, el controlador (4.7) es de dimensión uno y tiene una estructura (sin saturación) lineal, y sólo requiere una aproximación del parámetro de intercambio de calor, por lo que es más robusto a incertidumbre paramétrica. En este controlador, los errores de modelado y aproximación solo se verán reflejados en el cálculo del valor de la señal de referencia  $\bar{y}$ , y de los límites del control  $u^-$  y  $u^+$ , lo cual se vera reflejado en elegir márgenes más conservadores de los límites de saturación,  $\varepsilon_*$ ,  $\varepsilon^*$ . Estos efectos, existentes en cualquier diseño del controlador, pueden ser compensados con base en mediciones ocasionales de concentración para evaluación de calidad y del funcionamiento del proceso.

### 4.4. Sintonización del controlador

Debido a la dinámica lineal asignada al sistema de lazo cerrado, y de acuerdo con la prueba de estabilidad de la sección anterior dada por la Proposición 3, se pueden aplicar las siguientes reglas de sintonización para las ganancias del controlador de acuerdo con [28],

- (1) Añadir a la variable medida error tipo de medición, ya sea con una señal de ruido aleatorio o sinusoidal.
- (2) Fijar los límites del control de acuerdo con el criterio (3.16).
- (3) Fijar las ganancias  $k$  del controlador y  $\omega$  del observador de forma conservadora en los siguientes valores

$$k \approx 1 \text{ a } 2 \quad \text{y} \quad \omega \approx 3 \text{ a } 5.$$

- (4) Incrementar el valor de  $\omega$  hasta que la respuesta de vuelva oscilatoria en el valor  $\omega^0$ , y entonces fijar  $\omega$  en,

$$\omega = (1/3 \text{ a } 1/2) \omega^0.$$

- (5) Incrementar el valor de  $k$  hasta que la respuesta se vuelva oscilatorio en el valor  $k^0$ , y entonces fijar  $k$  en,

$$k = (1/3 \text{ a } 1/2) k^0.$$

- (6) De ser necesario ajustar los valores de  $\tau_c^-$ ,  $\tau_c^+$ , y  $k$  y  $\omega$  repitiendo los pasos 3 y 4 para mejorar el desempeño del sistema.

## 4.5. Conexión con control convencional

### 4.5.1. Relación con control PI

En trabajos anteriores se ha reportado que el tipo de controlador diseñado se puede reescribir con la estructura clásica de un control PI de temperatura, en [28] y [20] se muestra esto para el control de reactores continuos de tanque agitado, en [45] para un reactor tubular, y en [51], [52], [50] para biorreactores. Considerando el controlador saturado por retroalimentación de salida (4.7) sin saturación,

$$u = \frac{-k(y - \bar{y}) - \hat{\chi} - \omega y}{a}, \quad \dot{\hat{\chi}} = -\omega \hat{\chi} - \omega(au + \omega y), \quad \hat{\chi}(0) = \hat{\chi}_0, \quad (4.21)$$

y sustituyendo la parte estática en la dinámica del controlador se tiene que,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\chi}} &= -\omega \hat{\chi} - \omega [-k(y - \bar{y}) - \hat{\chi} - \omega y + \omega y] \\ &= -\omega \hat{\chi} + \omega k(y - \bar{y}) + \omega \hat{\chi} \\ &= \omega k(y - \bar{y}), \end{aligned}$$

dado que la condición inicial correspondiente se asume nula, entonces la variable estimada  $\hat{\chi}$  se puede reescribir en forma integral como,

$$\hat{\chi} = \omega k \int_0^t (y - \bar{y}) ds,$$

sustituyendo la ecuación anterior en la componente estática del controlador (4.21) y considerando las siguientes variables en desviación,

$$\tilde{u} = u - \bar{u}, \quad \psi = y - \bar{y},$$

se tiene que,

$$\tilde{u} + \bar{u} = -\frac{k}{a}\psi - \frac{k\omega}{a} \int_0^t \psi(s) ds + \frac{\omega}{a}y,$$

en estado estacionario,  $\psi = \int_0^t \psi(s) ds = 0$ , y  $\tilde{u} = 0$ , por lo tanto,

$$\bar{u} = \frac{\omega}{a}\bar{y}$$

sustituyendo en la ecuación del control en desviación y agrupando términos se obtiene,

$$\tilde{u} = -\frac{k + \omega}{a}\psi - \frac{k\omega}{a} \int_0^t \psi(s) ds,$$

#### 4. REDISEÑO DEL CONTROLADOR AVANZADO POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA

---

realizando las siguientes manipulaciones algebraicas,

$$\tilde{u} = -\frac{k + \omega}{a} \left[ \psi + \frac{k\omega}{k + \omega} \int_0^t \psi(s) ds \right]$$

y definiendo los siguientes parámetros del controlador,

$$k_p = \frac{k + \omega}{a}, \quad T_i = \frac{k + \omega}{k\omega} = \frac{k}{k\omega} + \frac{\omega}{k\omega} = k^{-1} + \omega^{-1}, \quad (4.22)$$

el controlador se puede reescribir como,

$$\tilde{u} = -k_p \left[ \psi + \frac{1}{T_i} \int_0^t \psi(s) ds \right], \quad (4.23)$$

en donde  $k_p$  es la ganancia proporcional y  $T_i$  el tiempo integral. Por lo tanto se puede concluir que el controlador diseñado resulta en un control tipo PI, como los utilizados en la industria, con garantía de estabilidad robusta práctica y criterio de ubicación de sensor, además de diseño y sintonización sistemáticos.

##### 4.5.2. Relación con control PI con anti encuerdamiento

Los esquemas usuales en control lineal tipo PI, para evitar los efectos de anti encuerdamiento debidos a la acumulación excesiva en la acción integral del controlador, utilizan esquemas sencillos en los que se añade un término integral adicional que integra la diferencia entre la señal de control saturada y antes de la saturación con el objetivo de reiniciar el valor acumulado en el término integral [8], esta técnica es conocida como cálculo hacia atrás (back calculation en inglés). El controlador correspondiente tiene la siguiente estructura,

$$u = \text{sat} \left\{ -k_p \left[ \psi + \frac{1}{T_i} \int_0^t \psi(s) ds \right] + \frac{1}{T_a} \int_0^t e_s(s) ds \right\}, \quad (4.24)$$

en donde  $\psi = y - \bar{y}$ ,  $e_s = \text{sat}(u) - u$ , y  $k_p$  es la ganancia proporcional,  $T_i$  el tiempo integral y  $T_a$  el tiempo de anti encuerdamiento. Al comparar la ley de control (4.24) con (4.7), se observa que mientras que el controlador propuesto solo tiene dos ganancias, i.e.,  $k$  y  $\omega$ , el controlador PI con anti encuerdamiento tiene tres ganancias,  $k_p$ ,  $T_i$  y  $T_a$ , por lo que en principio resultará más fácil sintonizar el controlador (4.7) ya que tiene menos ganancias, además de que en este trabajo se presentaron las reglas de sintonización adecuadas. Mientras que para la ley (4.24) existen algunas recomendaciones de cómo sintonizar este controlador poniendo especial énfasis en la ganancia  $T_a$ .

### 4.5.3. Discusión

Desde el punto de vista de teoría de control avanzado el controlador saturado por retroalimentación de salida (4.7) tiene las siguientes características (i) es construido con base en propiedades de observabilidad y pasividad, (ii) recupera el comportamiento (sujeto a la convergencia del algoritmo de estimación) de su versión por retroalimentación de estado (3.12) basada en el modelo detallado, (iii) cuenta con criterios para ubicación de sensor y elección de límites del control, (iv) también cuenta con un criterio de estabilidad práctica robusta, y (v) en su versión sin saturación puede ser implementado como un controlador PI.

La condiciones de solubilidad del problema se basaron, en primer lugar, en la propiedad de pasividad por retroalimentación de estado, la cual está sumamente relacionada con la selección adecuada de la etapa de medición de tal forma que se asegure que la dinámica cero tengo un solo punto de equilibrio al menos estable, en segundo término la utilización de las curvas parametrizadas de control a lazo abierto y lazo cerrado, mediante las cuales se presentó el criterio para elegir los límites del control, y finalmente en la propiedad de observabilidad del modelo simplificado.

Por otro lado, desde la perspectiva de control convencional, el controlador saturado por retroalimentación de salida (4.7) sin la función de saturación, es un controlador PI pero con mejoras importantes, las cuales consisten en: (i) una construcción y sintonización sistemática, (ii) garantía de estabilidad robusta de lazo cerrado, (iii) un criterio de ubicación de sensor, (iv) un criterio para selección de los límites del control, y (v) un esquema de anti encuerdamiento (antiwind-up) basado en el observador de orden reducido.

De acuerdo con los razonamientos anteriores el controlador propuesto en este trabajo establece una conexión formal entre la teoría de control no lineal (basado en pasividad, propiedades de observabilidad, diagramas de bifurcación) y esquemas de control convencional (PI, y esquemas anti wind-up), además de que se formalizó un criterio de ubicación de sensor con validez no local, también basado en teoría de control no lineal, en contra parte con los criterios previos basados en linealizaciones de modelos de dimensión finita, con validez local. Finalmente, es importante mencionar que el diseño del controlador (4.7) desde el enfoque de control convencional no parece una tarea sencilla.

## 4.6. Aplicación al caso de estudio y simulaciones

Ahora se procederá a aplicar el controlador saturado por retroalimentación de salida (4.7) al caso de estudio, el reactor 3.1 con los parámetros y valores nominales de las Tablas 2.1 y 2.2 y con  $N = 30$ , y se realizará una comparación entre el desempeño del

## 4. REDISEÑO DEL CONTROLADOR AVANZADO POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA

---

Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado (3.12). Las simulaciones tienen por objetivo ilustrar las ventajas del controlador diseñado en este Capítulo en cuando a dependencia del modelo y robustez.

### 4.6.1. Ubicación del sensor

Para ubicar la etapa de medición el criterio en este caso es el mismo, la salida elegida debe ser tal que la dinámica cero asociada tenga un punto de equilibrio al menos estable, por lo tanto el resultado obtenido para el Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado se mantiene intacto en este caso, por lo tanto se tiene que  $m = 8$ , es decir se medirá la temperatura de la octava etapa,

$$y = \tau_8.$$

### 4.6.2. Cálculo del controlador

En este caso independientemente de la etapa de medición, el Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida mantiene la misma estructura,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\chi}} &= -\omega \hat{\chi} - \omega (au + \omega y), \quad \hat{\chi}(0) = \hat{\chi}_0, \\ u = \varpi_s(y, \hat{\chi}) &= \begin{cases} \tau_c^+ & \text{si } \varpi(y, \hat{\chi}) > \tau_c^+ \\ \varpi(y, \hat{\chi}) & \text{si } \tau_c^- \leq \varpi(y, \hat{\chi}) \leq \tau_c^+ \\ \tau_c^- & \text{si } \varpi(y, \hat{\chi}) < \tau_c^- \end{cases}, \end{aligned}$$

en donde,

$$\varpi_s(y, \hat{\chi}) = \frac{-k(y - \bar{y}) - \hat{\chi} - \omega y}{a}.$$

lo único particular dependiendo de la etapa de medición es el valor nominal de la salida, en este caso se tiene que,

$$\bar{y} = \bar{\tau}_8.$$

### 4.6.3. Selección de las ganancias y los límites del control

Para seleccionar los límites del control se utiliza el criterio de la Proposición 3, los valores  $\tau_c^-$  y  $\tau_c^+$  deben ser tales que las curvas  $\mathcal{O}$  y  $\mathcal{C}(k, u^-, u^+)$  se corten solo en  $\mathbf{x}$ , por lo tanto se pueden utilizar los mismos valores elegidos en el caso del control por retroalimentación de estado,

$$\tau_c^- = 0.988 < \tau_{c*}, \quad \tau_c^+ = 1.05 > \tau_{c*}^*.$$

Para elegir la ganancia del controlador se utilizaron las reglas de sintonización propuestas, y obtuvieron los siguientes valores,

$$k = 2, \quad \omega = 25.$$

#### 4.6.4. Funcionamiento de lazo cerrado

A continuación se evaluará y comparará el desempeño nominal y robusto del controlador diseñado. Desempeño nominal se refiere al funcionamiento del sistema en lazo cerrado cuando se cuenta con el conocimiento exacto de los parámetros del modelo de la planta para el Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado, valor exacto de la referencia  $\bar{y}$  y los límites del control, mediciones sin ruido y las entradas exógenas fijas en sus valores nominales, además de que se conoce el estado. El objetivo de esta simulación es el de mostrar el desempeño que se puede alcanzar bajo condiciones ideales con el control por retroalimentación de estado, e ilustrar la capacidad del Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida basado en el modelo simplificado de recuperar el desempeño de su contraparte basada en el modelo detallado y con mediciones del estado. Por otro lado, funcionamiento robusto se refiere al desempeño de lazo cerrado cuando el controlador por retroalimentación de salida es implementado con parámetros aproximados, mediciones con ruido y entradas exógenas variantes en el tiempo.

##### 4.6.4.1. Funcionamiento nominal

En la Figura 4.1 se presentan los perfiles iniciales de la simulación (en negro), los perfiles de referencia (línea continua en azul claro) y los perfiles estacionarios con el controlador saturado por retroalimentación de estado (azul) y por retroalimentación de salida (en rojo). Por otro lado, en la Figura 4.2 se observan la evolución temporal de las concentraciones y temperaturas de la primera etapa, la etapa de medición y la etapa de salida, así como el esfuerzo de control. Se muestra la respuesta con el controlador por retroalimentación de estado (en azul) y la contraparte de retroalimentación de salida (en rojo). En esta simulación se aprecia que el Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida logra reconstruir el funcionamiento del Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado basado en el modelo detallado, una vez que el error de estimación converge a cero. La señal de control primero se satura en su valor máximo, para reducir la extracción de calor y que por tanto la temperatura incrementa, posteriormente, en el caso de retroalimentación de estado (línea azul) la señal se establece de forma suave en su valor nominal estabilizando los estados del sistema, mientras que en el caso de retroalimentación de salida la señal de control se satura en su valor mínimo para extraer el exceso de calor debido al sobrepaso y finalmente se establece en su valor nominal, a la vez que los estados se establecen en los valores prescritos. Para los perfiles iniciales que se eligieron, los estados del sistema se estabilizan en dos tiempos de residencia. La salida medida  $y$  y sobre la cual actúa el controlador se estabiliza con un sobrepaso pequeño, y al forzar esta temperatura a su valor prescrito las demás variables de estado tienden de forma asintótica a los valores prescritos. La salida regulada  $z$  presenta una respuesta rápida (también de dos tiempos de residencia) pero con un sobrepaso grande, para reducir esto se pueden ajustar las ganancias del controlador con base en mediciones ocasionales de la concentración.

## 4. REDISEÑO DEL CONTROLADOR AVANZADO POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA

---

Se realizó una segunda simulación en donde el par de perfiles iniciales exigen que el controlador realice un esfuerzo mayor para estabilizar el sistema en los perfiles prescritos, esta simulación tiene el propósito de verificar que el Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida reconstruye adecuadamente el comportamiento de su versión por retroalimentación de estado, y mostrar los efectos de la saturación cuando el reactor opera lejos de los perfiles prescritos. En la Figura 4.3 se muestran los perfiles iniciales (en negro), los perfiles prescritos (azul claro) y los perfiles de estado estacionario con el Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado (en azul) y de Salida (en rojo), y en la Figura 4.4 se muestra la evolución temporal de las temperaturas y concentraciones de la primera etapa, la etapa de medición y la etapa de salida, además del esfuerzo de control. En este caso el controlador estabilizó el sistema en aproximadamente 5 tiempos de residencia, la acción de control primero satura a su valor máximo, de tal forma que la extracción de calor sea mínima y por lo tanto la temperatura del sistema crece, posteriormente el control se satura en su valor mínimo, con esto la extracción es máxima y se extrae el calor excesivo debido al sobrepaso, finalmente el controlador se encarga de estabilizar la temperatura de medición en el valor nominal y con esto los perfiles completos se estabilizan en los prescritos, la salida regulada  $z$  tiene un sobrepaso importante pero posteriormente se estabiliza en el valor prescrito rápidamente. Se observa que el Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida reconstruye adecuadamente el comportamiento de la versión por retroalimentación de estado, y que el desempeño del estimador mejora debido a los efectos de la saturación del control, [23].

### 4.6.4.2. Funcionamiento robusto

Se realizaron dos simulaciones del funcionamiento robusto del reactor con el Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida (4.7), en ambas simulaciones se añadió ruido blanco con desviación estándar de 5% a la salida medida  $y$ , además de que también se añadió una señal sinusoidal de perturbación con amplitud de 1% con periodo la décima parte del tiempo de residencia en la la temperatura de entrada  $\tau_e$ , mientras que a la concentración de entrada  $c_e$  también se le añadió una señal senoidal de perturbación a la misma frecuencia y de 2% de amplitud, además de un cambio escalón de 5% de amplitud en  $t=5$ , también en el flujo de entrada  $q$  presenta un cambio escalón de 5% de amplitud en  $t=7$ . Además el controlador (4.7) se implementó con un valor aproximado del parámetro de intercambio de calor  $\hat{\delta} = 1.1$  (error de 10%).

La primera simulación tiene como propósito evaluar el funcionamiento robusto en la localidad del valor estacionario  $\bar{x}$ . En la Figura 4.5, se muestran los perfiles iniciales (en negro) lo cuales son cercanos a los perfiles prescritos (en azul claro) y los perfiles estacionarios correspondientes (en rojo), se observa que en este caso los perfiles estacionarios con el controlador por retroalimentación de salida (4.7) estabilizan los perfiles con una desviación aceptable con respecto a los prescritos. En la Figura 4.6 se presenta



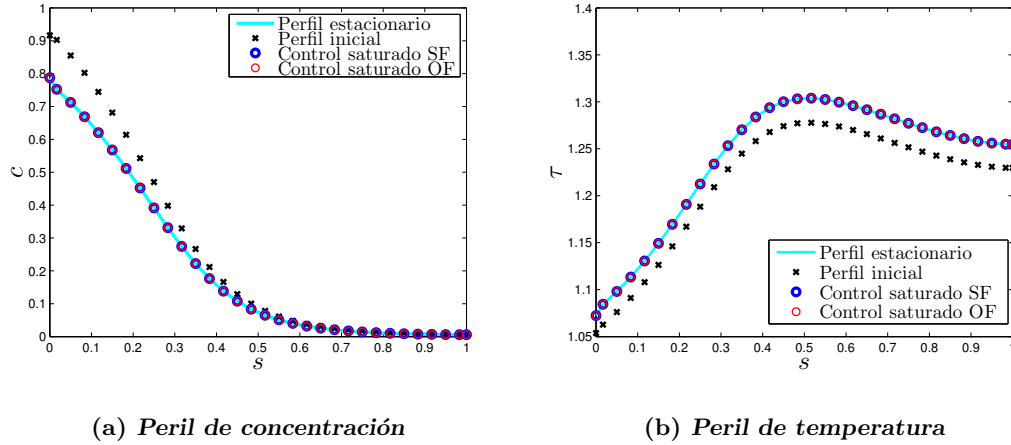
la evolución temporal de las concentraciones y temperaturas de las etapas primera, de medición y de salida, además del esfuerzo de control. En esta simulación se observa que la salida medida  $y$  es regulada a su valor nominal, a pesar de los efectos de las perturbaciones y el ruido de medición.

La salida medida  $y$  y la regulada  $z$  se estabilizan alrededor de los valores nominales en aproximadamente dos tiempos de residencia, cuando se presentan las perturbaciones escalón en  $t = 5$  para la concentración de entrada y  $t = 7$  en el flujo, el controlador compensa sus efectos en la salida medida  $y$ , y esto se traduce en desviaciones del valor prescrito en la variable regulada  $z$ , sin embargo está dentro de una región suficientemente cercana al valor prescrito, además de que esto es una limitante de cualquier controlador por retroalimentación de salida.

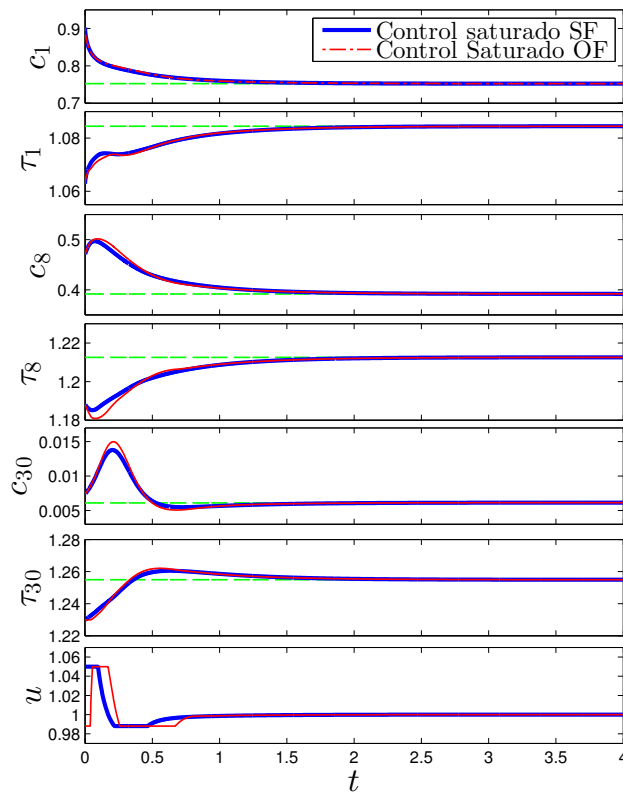
Se realizó una segunda simulación del funcionamiento robusto del reactor con las mismas condiciones de ruido y perturbaciones de la simulación anterior, con la diferencia de que los perfiles iniciales de concentración y temperatura están más alejados de los prescritos, corresponden a una condición de baja temperatura y alta concentración de reactante. En la Figura 4.7 se muestran estos perfiles, iniciales (en negro), prescritos (en azul claro) y de estado estacionario con el controlador saturado por retroalimentación de salida (en rojo), se observa que en este caso también el controlador estabiliza los perfiles de concentración y temperatura en regiones alrededor de los nominales. Además en la Figura 4.8 se presenta la evolución temporal de las concentraciones y temperaturas de las etapas inicial, de medición y de salida, además del esfuerzo de control. En este caso nuevamente se observa que la salida  $y$  es regulada a su valor prescrito a pesar de las perturbaciones, mientras que la salida regulada  $z$  se mantiene en una región acotada alrededor de  $\bar{z}$ , lo cual va de acuerdo con la prueba de estabilidad correspondiente. Dado que por los perfiles iniciales se requiere un esfuerzo de control mayor, en comparación con la simulación anterior, para llevar los estados a los valores prescritos, por lo tanto el esfuerzo de control se satura en sus valores máximo y mínimo por tiempos largos.

De acuerdo con aplicaciones en control de procesos químicos en la industria [42], el rechazo a perturbaciones por largos periodos de tiempo es el objetivo primordial en el diseño de esquemas de control para este tipo de sistemas. Por tanto el comportamiento de lazo cerrado con el controlador (4.7) debe ser juzgado en mayor medida por su desempeño en estado estacionario en presencia de perturbaciones típicas en las entradas exógenas y errores de medición. Desde esta perspectiva el controlador por retroalimentación presenta un desempeño aceptable ya que la desviación con respecto a los valores prescritos de la salida regulada  $z$  se mantiene en una región cercana a pesar de las perturbaciones escalón en la concentración y flujo de entrada, y sinusoidales en concentración y temperatura de entrada, además de que el controlador es considerablemente más sencillo que la versión por retroalimentación de estado y la versión por retroalimentación de salida basada en el modelo detallado.

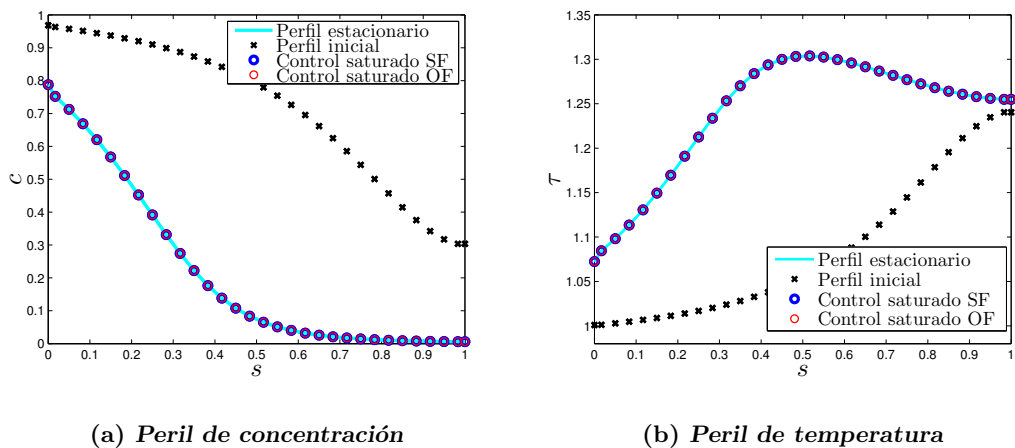
#### 4. REDISEÑO DEL CONTROLADOR AVANZADO POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA



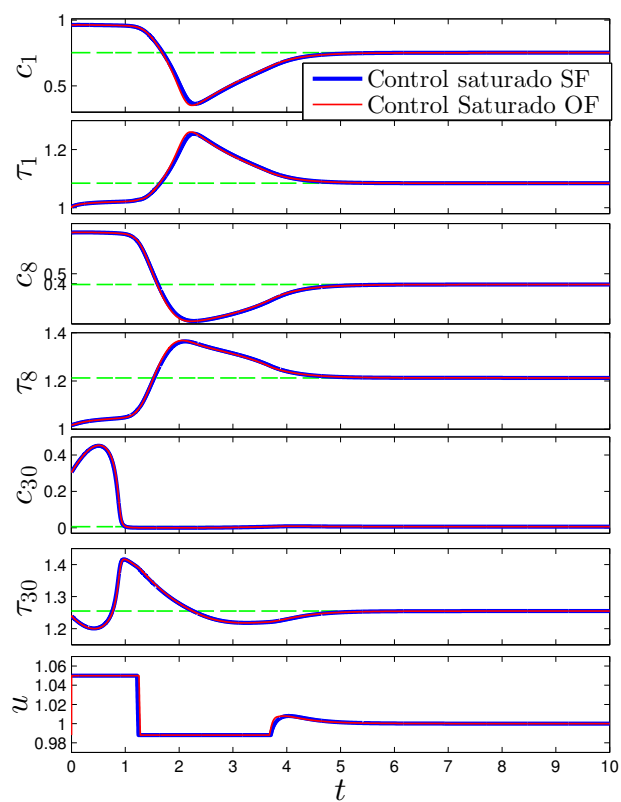
**Figura 4.1:** Perfiles de concentración y temperatura iniciales y de estado estacionario comparación de los controladores saturado por retroalimentación de estado y de salida, funcionamiento nominal y local



**Figura 4.2:** Concentraciones y temperaturas en las etapas inicial, de medición y de salida; y esfuerzo de control, comparación de los controladores saturado por retroalimentación de estado y de salida, funcionamiento nominal y local

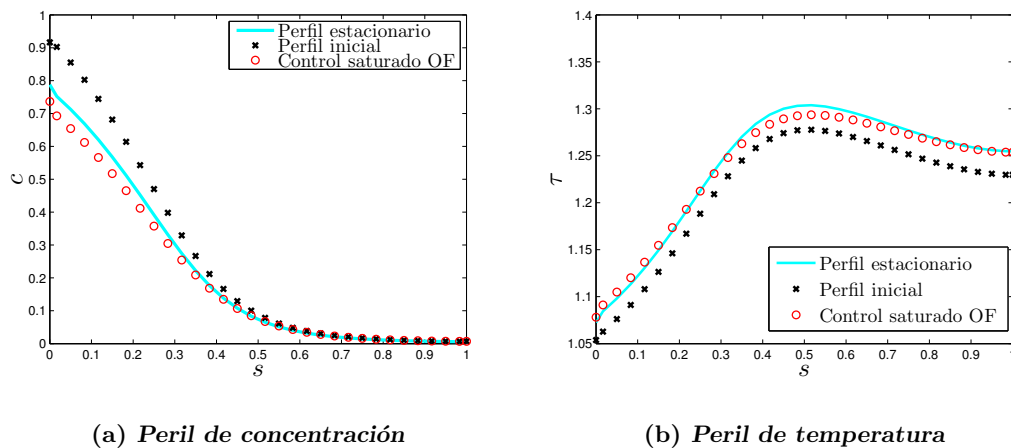


**Figura 4.3:** Perfiles de concentración y temperatura iniciales y de estado estacionario, comparación de los controladores saturado por retroalimentación de estado y de salida, funcionamiento nominal y no local

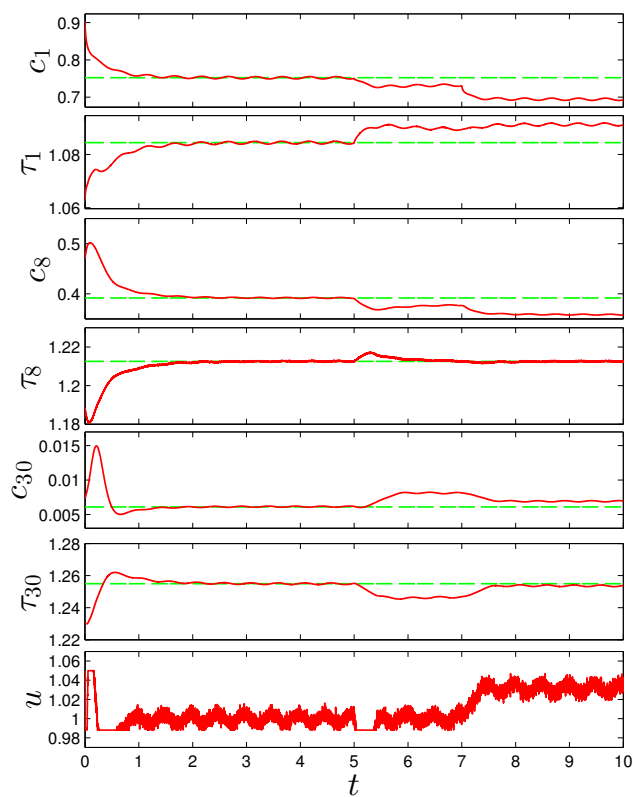


**Figura 4.4:** Concentraciones y temperaturas en las etapas inicial, de medición y de salida; y esfuerzo de control, comparación de los controladores saturado por retroalimentación de estado y de salida, funcionamiento nominal y no local

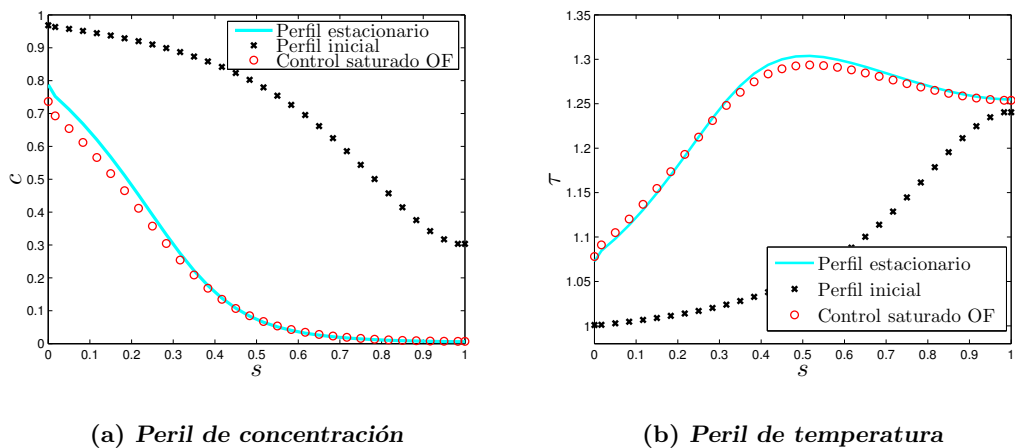
#### 4. REDISEÑO DEL CONTROLADOR AVANZADO POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA



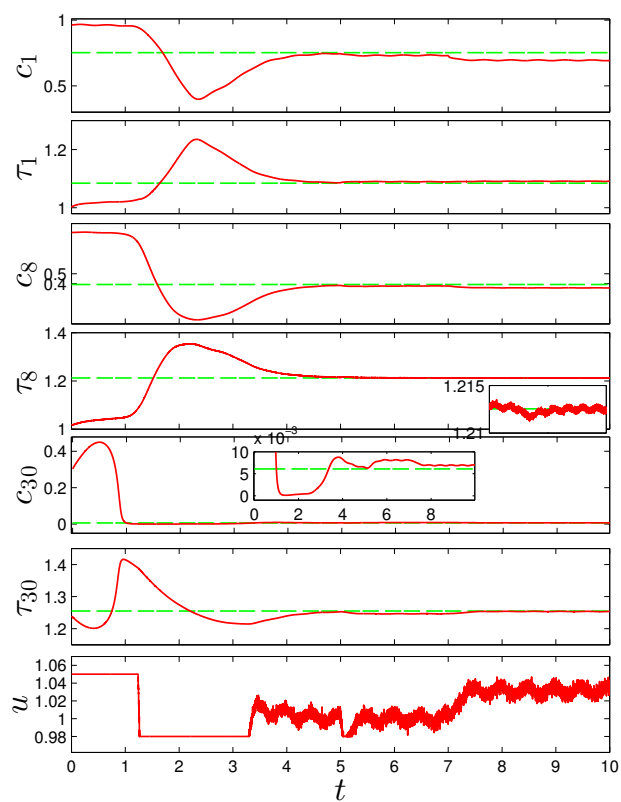
**Figura 4.5:** Perfiles de concentración y temperatura iniciales y de estado estacionario del reactor en lazo cerrado con el controlador saturado por retroalimentación de salida, funcionamiento robusto y local



**Figura 4.6:** Concentraciones y temperaturas en las etapas inicial, de medición y de salida; y esfuerzo de control del reactor en lazo cerrado con el controlador saturado por retroalimentación de salida, funcionamiento robusto y local



**Figura 4.7:** Perfiles de concentración y temperatura iniciales y de estado estacionario del reactor en lazo cerrado con el controlador saturado por retroalimentación de salida, funcionamiento robusto y no local



**Figura 4.8:** Concentraciones y temperaturas en las etapas inicial, de medición y de salida; y esfuerzo de control del reactor en lazo cerrado con el controlador saturado por retroalimentación de salida, funcionamiento robusto y no local

#### 4.6.4.3. Comparación con esquemas convencionales

En esta sección se presenta una comparación por medio de simulaciones del funcionamiento del reactor (3.2) con el controlador propuesto (4.7) y un controlador PI con anti encuerdamiento (4.24). La comparación tiene por objetivo mostrar las ventajas del controlador (4.7) con respecto a los esquemas usuales utilizados en la industria para control saturado. Además de que los criterios para ubicación de sensor y selección de los límites de saturación son útiles en otros esquemas de control. La simulación se realizó en condiciones nominales, es decir, las entradas exógenas están en sus valores nominales y se considera que no hay ruido en las mediciones. El controlador propuesto se implementa con las siguientes ganancias obtenidas al aplicar las reglas de sintonización presentadas en este capítulo, y el criterio de selección de los límites del control propuesto en este trabajo, además al aplicar el criterio para selección de la etapa de medición se considera que se mide en la etapa 8,

$$y = \tau_8, \quad k = 2, \quad \omega = 25, \quad u^- = 0.988, \quad u^+ = 1.05,$$

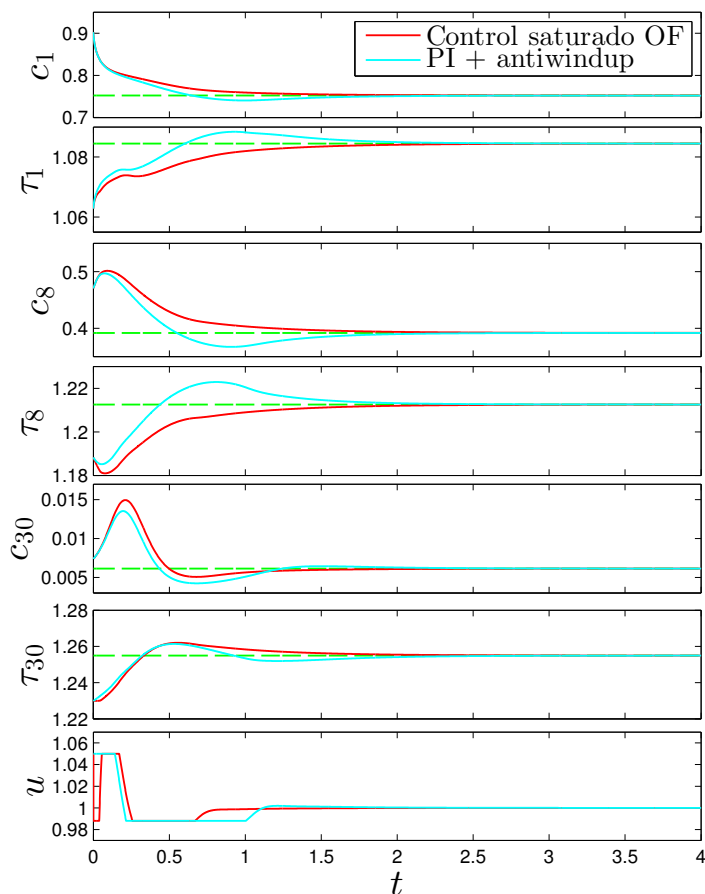
por otro lado, el controlador (4.24) se implementó utilizando los criterios propuestos para la selección de los límites del control y la etapa de medición, por otro lado, las ganancias se eligieron de acuerdo a las reglas presentadas en [8], con lo cual se obtienen los siguientes parámetros,

$$y = \tau_8, \quad k_p = 20, \quad T_i = 0.4, T_a = 0.03, \quad u^- = 0.988, \quad u^+ = 1.05,$$

en la Figura 4.9 se muestran los resultados de simulación, se observa que el controlador propuesto estabiliza la temperatura de salida  $y = \tau_8$  con un sobrepaso menor en comparación con el controlador (4.24), ya que la acción de control satura durante menos tiempo, en cuanto a la salida regulada  $z = c_30$ , las respuestas son similares con ambos controladores, ya que ambas respuestas son oscilatorias y se establecen casi al mismo tiempo. Las respuestas obtenidas con cada controlador son bastante similares, sin embargo en cuanto el esfuerzo de control, se puede decir que el controlador (4.7) produce un esfuerzo de control que requiere gastar menos ya que la acción de control correspondiente se satura durante menos tiempo. Estos resultados se obtuvieron considerando las reglas de sintonización propuestas en [8] que están diseñadas para ajustar las tres ganancias del controlador, y es posible con otra sintonización se puedan mejorar los resultados obtenidos. Para verificar esto, se considera la relación que existe entre el controlador (4.7) sin saturación, con controladores tipo PI, y se reajustan las ganancias del controlador (4.24) considerando (4.22), de esta forma ya están fijas las ganancias de la acción proporcional y la derivativa, y solo se requiere ajustar la ganancia del anti encuerdamiento, la cual se puede ajustar haciéndola más pequeña, con lo cual se obtienen las siguientes ganancias,

$$y = \tau_8, \quad k_p = 25, \quad T_i = 0.54, T_a = 0.01, \quad u^- = 0.988, \quad u^+ = 1.05,$$

en la Figura 4.10 se presenta otra simulación comparando las respuestas del sistema con los controladores (4.7) y (4.24), este último con las ganancias reajustadas. En esta

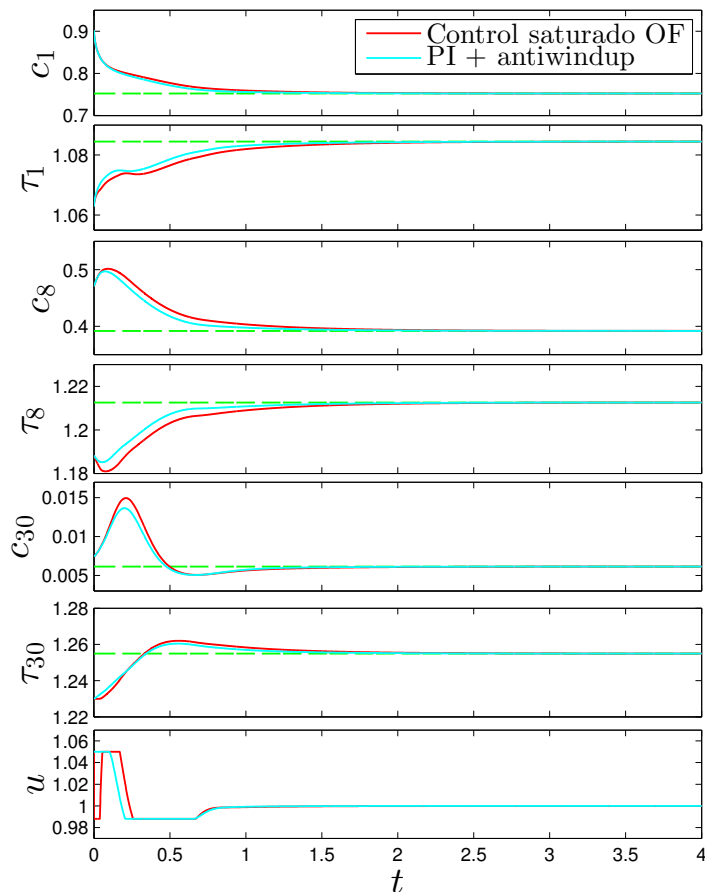


**Figura 4.9:** Comparación entre el controlador propuesto, y un controlador PI con anti encuerdamiento

simulación se observa que las respuestas obtenidas con ambos controladores son muy similares, además de que en este caso los esfuerzos de control también son muy similares. Por lo tanto se puede concluir que el controlador propuesto es un esquema para lidiar con los efectos negativos de la saturación en actuadores muy similar a los esquemas utilizados en la industria para evitar fenómenos de encuerdamiento, pero tiene la ventaja de que tiene una ganancia menos y con reglas de sintonización sencillas y claras, las cuales pueden ser utilizadas incluso para lograr mejores sintonizaciones en los esquemas usuales en la industria tipo PI con anti encuerdamiento. Por otro lado, los criterios para la ubicación de sensor y elección de los límites del control también sirven para implementar otros controladores.

#### 4. REDISEÑO DEL CONTROLADOR AVANZADO POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA

---



**Figura 4.10:** Comparación entre el controlador propuesto, y un controlador PI con anti encuerdamiento con ganancias ajustadas

## Resumen

En este capítulo se presentó el rediseño del controlador saturado por retroalimentación de salida basado en el observador geométrico diseñado en el capítulo anterior. El controlador rediseñado se basa en la simplificación del modelo de la etapa de medición y la estimación de los términos no lineales y los errores paramétricos y de modelado por medio de un observador lineal de orden reducido. El controlador conserva los criterios de ubicación de sensor y selección de los límites del control de su versión basada en el modelo detallado, además de que reconstruye el comportamiento de éste. Se presentó la prueba de estabilidad correspondiente y se dieron condiciones en términos de las ganancias del controlador y los límites de saturación para asegurar estabilidad práctica no local robusta. Finalmente se presentaron algunas simulaciones para mostrar el funcionamiento del controlador, su capacidad de reconstruir el desempeño del control por



retroalimentación de estado y su funcionamiento robusto ante ruido en la medición y perturbaciones en las entradas exógenas. El controlador mostró un desempeño bastante bueno con la ventaja de poder ser implementado mediante una realización simple, tener una estructura sencilla en cuanto a no linealidad, dimensión y dependencia del modelo.



## Conclusiones y trabajo futuro

---

### 5.1. Conclusiones

En este trabajo se estudió el problema de estabilización por retroalimentación de salida de un reactor químico exotérmico tubular considerando los efectos de saturación en actuadores para el diseño del controlador. El enfoque utilizado se basó en el uso de un modelo discreto del reactor con base en el cual se diseñó un Controlador Saturado por Retroalimentación de Salida, junto con un criterio de ubicación de sensor (relacionado con la dinámica cero correspondiente), y un criterio para elegir los límites del control con garantía de que el estado estacionario prescrito es el único punto de equilibrio de lazo cerrado. El controlador garantiza de estabilidad robusta en el sentido de estabilidad práctica, y estabilidad robusta estructural en el sentido de que pequeños cambios en los parámetros del sistema y desviaciones en las entradas exógenas no modifican la geometría de la dinámica en lazo cerrado.

Como parte del desarrollo metodológico del trabajo, se introdujo un modelo discreto que aproxima, mediante la elección de un número suficiente de nodos de discretización, adecuadamente el comportamiento del sistema distribuido, con base en este modelo se diseñó un controlador saturado por retroalimentación de estado con base en la propiedad de pasividad por retroalimentación de estado, de donde surge el criterio de ubicación de sensor presentado en este trabajo. Además, de que utilizando un método de eliminación de ecuaciones se utilizaron diagramas de bifurcación en el plano para determinar los límites del control con garantía de estabilidad estructural. Posteriormente con base en las propiedades de observabilidad del modelo estudiada en la literatura se añadió un estimador geométrico al diseño para obtener un controlador saturado por retroalimentación de salida basado en observador. El controlador diseñado hasta este punto sirvió como referente teórico para establecer una solución para el problema de control saturado por retroalimentación de salida, sin embargo dada la complejidad del controlador en términos de no linealidad, dimensión ( $n_c = 63$ ) y dependencia del modelo y los requerimientos de obtener una solución sencilla, se procedió a rediseñar el

controlador. Esto se realizó con base en la confección de un modelo simplificado para la dinámica de la etapa de medición, el cual hereda las propiedades de pasividad y observabilidad del modelo detallado, para este sistema se diseñó un controlador por retroalimentación de salida, basado en un observador lineal de orden reducido, el cual reconstruye el comportamiento de su versión por retroalimentación de estado basado en el modelo detallado y es más simple que la versión por retroalimentación de salida basada en el estimador geométrico, puesto que el controlador rediseñado es casi lineal (quitando la saturación), está conformado por una sola ecuación diferencial y sólo requiere la aproximación de un parámetro del modelo, y además los criterios de ubicación de sensor y selección de los límites de saturación siguen siendo válidos. Por otro lado, se mostró que el controlador diseñado sin saturación se puede realizar en forma de un controlador PI clásico. Mediante simulaciones realistas se mostró el funcionamiento adecuado del controlador saturado por retroalimentación de salida bajo condiciones extremas en cuanto a ruido de medición, perturbaciones en las entradas exógenas y error paramétrico.

El controlador diseñado además establece una conexión formal entre las técnicas de control avanzado y esquemas de control convencional, que resultan en el controlador saturado por retroalimentación de salida y los criterios de ubicación de sensor y selección de límites del control, con las herramientas utilizadas en control convencional como control PI, criterios de ubicación de sensor con base en experiencia en la operación del sistema en cuestión y criterios basados en teoría espectral y esquemas de anti encuerdamiento (windup, en inglés). Por otro lado, se mostró por medio de simulación que el controlador propuesto puede funcionar mejor que los esquemas usuales de control PI con anti encuerdamiento, con una estructura sencilla y un parámetro menos de diseño, además de que los criterios de ubicación de sensor, selección de los límites del control y reglas de sintonización son útiles no solo para el controlador propuesto sino también para los esquemas de control utilizados en la industria facilitando su diseño y sintonización.

### 5.2. Trabajo futuro

El sistema considerado en este trabajo es un modelo representativo, que a pesar de ser sencillo contiene los elementos de complejidad suficientes (fenómenos de dispersión, convección y reacción) para que con base en la metodología desarrollada para éste se pueda explorar la posibilidad de extender los resultados a otros tipos de reactores distribuidos, por ejemplo a sistemas con tasas de reacción  $R(C, T)$  diferentes, reacciones reversibles, reacciones con inhibición o tipo Langmuir-Hinshelwood. Por ejemplo, en este último caso, la tasa de reacción (adimensional) está dada por [13], [25],

$$r(c, \tau) = \frac{c}{(1 + \sigma c)^2} e^{-\frac{E_a}{RT}},$$

en donde  $\sigma$  es el factor de inhibición,  $E_a$  es la energía de activación y  $R$  la constante general de los gases.

Por otro lado se pueden considerar reactores en fase gas, en los cuales los efectos de dispersión en la concentración son despreciables, y la dinámica de concentración está en estado cuasi estacionario, el modelo correspondiente (en variables adimensionales) es el siguiente,

$$\begin{aligned} 0 &= -q\partial_s c - r(c, \tau), & 0 < s < 1, \quad t > 0, \\ \partial_t \tau &= d_h \partial_s^2 \tau - q\partial_s \tau + \beta r(c, \tau) - \delta(\tau - \tau_c), \\ c &= c_e(t), & \partial_s \tau &= \frac{q}{d_h} [\tau(s, t) - \tau_e(t)], \quad s = 0, \\ \partial_s c &= 0, & \partial_s \tau &= 0, \quad s = 1, \\ \tau(s, 0) &= \tau_{in}(s), \end{aligned}$$

matemáticamente este modelo tiene la ventaja de que aplicar el enfoque presentado en este trabajo es más sencillo debido a que la dinámica de concentración es estacionario con respecto al tiempo, y por tanto la discretización por diferencias finitas correspondiente tiene dimensión  $N$ , por otro lado, este tipo de reactores son los más utilizados en la industria.

Otro posible línea en la que se puede trabajar el problema de control saturado es el de añadir esquemas de precompensación para las entradas exógenas como la concentración y temperatura de entrada, en la industria normalmente los efectos de las perturbaciones se atenúan modificando la señal de referencia de temperatura y luego el control PI se encarga de seguir esta referencia actuando por medio de la camisa de enfriamiento, sin embargo el ajuste de la señal de referencia lo realiza un operador que ha ganado experiencia en el funcionamiento del sistema, por lo que el diseño de un esquema automático de ajuste de la señal de referencia sería una mejora importante. En el caso de la temperatura de entrada en [45] se diseñó un esquema de este tipo, pero no se consideraron los efectos de saturación en el actuador, mientras que en cuanto a la concentración primero se requiere el diseño de un algoritmo de estimación para luego implementar el esquema de precompensación.

Finalmente, en este trabajo se presenta una solución para el problema de control saturado de un sistema distribuido, pero se considera que una aproximación de dimensión finita, con un número de nodos de discretización adecuado, es suficiente para el diseño presentado y el problema planteado se considera resuelto para una aplicación real. Sin embargo, con fines teóricos, se puede estudiar qué sucede cuando en el sistema en lazo cerrado (3.13) con el Controlador Saturado por Retroalimentación de Estado (3.12) se considera que el número de nodos de discretización tiende a infinito, en este caso, el modelo en dimensión infinita se recupera, y por tanto la restricción dinámica

## 5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

---

en la salida medida  $y(t, s_m)$  está dada por,

$$\partial_t \tau = d_h \partial_s^2 \tau - q \partial \tau + \beta r(c, \tau) - \delta(\tau - \tau_c) = -k(y - \bar{y})|_{s=s_m},$$

de la ecuación anterior se puede determinar la ley de control correspondiente, la cual requiere información de la primera y segunda derivadas parciales de concentración con respecto a la posición evaluadas en  $s = s_m$ . El sistema en lazo cerrado con esta ley de control se puede interpretar como el modelo distribuido (2.3) con una condición de frontera dinámica en  $s_m$  de la siguiente forma,

$$\partial_t \tau = -k(y - \bar{y})$$

y por lo tanto se puede considerar que el sistema distribuido es seccionado en dos partes en su dominio espacial, la primera en donde  $s \in [0, s_m]$ , mientras que la segunda parte es la correspondiente a  $s \in [s_m, 1]$ , ambos con la condición de frontera anterior. Estudiar las propiedades de este sistema y las condiciones para asegurar estabilidad mediante el uso de teoría de ecuaciones diferenciales parciales representa una posible línea de investigación a futuro.

# Detalles sobre el modelo y los métodos gráficos utilizados

---

## A.1. Detalles del modelo

### A.1.1. Obtención del modelo adimensional

Considerando el modelo en EDP (2.1a), e introduciendo las variables adimensionales (2.2), se tiene, para  $0 < S < L$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\nu_r C_r}{L} \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{D_M C_r}{L^2} \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} - \frac{\nu C_r}{L} \frac{\partial c}{\partial s} - R(C_r c, T_r \tau) \\ \frac{\nu_r T_r}{L} \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \frac{D_H T_r}{L^2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} - \frac{\nu T_r}{L} \frac{\partial \tau}{\partial s} + \frac{(-\Delta H)}{\rho c_p} R(C_r c, T_r \tau) - \frac{P U T_r}{A \rho c_p} (\tau - \tau_c)\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{D_M}{\nu_r L} \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} - \frac{\nu}{\nu_r} \frac{\partial c}{\partial s} - \frac{L}{\nu_r C_r} R(C_r c, T_r \tau) \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \frac{D_H}{\nu_r L} \frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} - \frac{\nu}{\nu_r} \frac{\partial \tau}{\partial s} + \frac{(-\Delta H) C_r}{\rho c_p T_r} \frac{L}{\nu_r C_r} R(C_r c, T_r \tau) - \frac{P U L}{A \nu_r \rho c_p} (\tau - \tau_c)\end{aligned}$$

considerando que la velocidad del reactante dentro del reactor está dada por,  $\nu = \frac{q_e}{L}$ , entonces se tiene que,

$$\frac{\nu}{\nu_r} = \frac{q_e/L}{q_r/L} = \frac{q_e}{q_r} := q$$

## A. DETALLES SOBRE EL MODELO Y LOS MÉTODOS GRÁFICOS UTILIZADOS

---

en donde  $q_e$  es el flujo de reactante, y  $q_r$  es un valor de referencia, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{D_M}{\nu_r L} \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} - q \frac{\partial c}{\partial s} - \frac{L}{\nu_r C_r} R(C_r c, T_r \tau) \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \frac{D_H}{\nu_r L} \frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} - q \frac{\partial \tau}{\partial s} + \frac{(-\Delta H) C_r}{\rho c_p T_r} \frac{L}{\nu_r C_r} R(C_r c, T_r \tau) - \frac{PUL}{A \nu_r \rho c_p} (\tau - \tau_c)\end{aligned}$$

y definiendo los siguientes parámetros y tasa de reacción

$$\begin{aligned}d_m &= \frac{D_m}{\nu_r L}, \quad d_h = \frac{D_h}{\nu_r L}, \quad \beta = \frac{(-\Delta H) C_r}{\rho c_p T_r}, \quad \delta = \frac{PUL}{A \nu_r \rho c_p} \\ r(c, \tau) &= \frac{L}{\nu_r C_r} R(C_r c, T_r \tau).\end{aligned}$$

Para el caso específico de la tasa de reacción (2.3),

$$R(C, T) = C k_e e^{-\frac{E_a}{R_g T}},$$

la versión adimensional toma la siguiente forma,

$$\begin{aligned}r(c, \tau) &= \frac{L}{\nu_r C_r} k_e C_r c e^{-\frac{E_a}{R_g T_r \tau}} \\ &= \frac{L}{\nu_r C_r} k_e C_r c e^{-\frac{E_a}{R_g T_r} + \frac{E_a}{R_g T_r} - \frac{E_a}{R_g T_r}} \\ &= \frac{L}{\nu_r C_r} k_e C_r e^{-\frac{E_a}{R_g T_r}} c e^{\frac{E_a}{R_g T_r} - \frac{E_a}{R_g T_r} \frac{1}{\tau}} \\ &= \frac{L}{\nu_r C_r} k_e R(C_r, T_r) c e^{\frac{E_a}{R_g T_r}} e^{-\frac{E_a}{R_g T_r} \frac{1}{\tau}}\end{aligned}$$

definiendo  $a = \frac{L}{\nu_r C_r} k_e R(C_r, T_r)$  y  $\gamma = \frac{E_a}{R_g T_r}$ ,

$$r(c, \tau) = a e^\gamma e^{-\frac{\gamma}{\tau}}$$

y finalmente, considerando  $\phi = \ln(ae^\gamma)$ , la expresión adimensional para la tasa de reacción es,

$$r(c, \tau) = e^{\phi - \frac{\gamma}{\tau}}$$

y se obtiene el modelo distribuido adimensional,

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= d_m \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} - q \frac{\partial c}{\partial s} - r(c, \tau) \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &= d_h \frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} - q \frac{\partial \tau}{\partial s} + \beta r(c, \tau) - \delta (\tau - \tau_c)\end{aligned}$$



Para las condiciones de frontera mediante un procedimiento similar y considerando que  $q = \nu/\nu_r$ , se obtiene,

$$\begin{aligned} C_r \frac{D_M}{L} \frac{\partial c}{\partial s} &= q\nu_r [C_r c(s, t) - C_r c_e(t)] \\ \frac{\partial c}{\partial s} &= q \frac{\nu_r L}{D_m} [c(0, t) - c(t)] \end{aligned}$$

finalmente, considerando  $d_m = \frac{\nu_r L}{D_m}$ , se obtiene la condición de frontera adimensional para  $s = 0$ ,

$$\frac{\partial c}{\partial s} = \frac{q}{d_m} [c(0, t) - c_e(t)].$$

Para la condición de frontera de temperatura en  $s = 0$ , mediante un procedimiento similar se obtiene (2.1c). Mientras que las condiciones de frontera en  $s = 1$  son triviales de obtener al igual que los perfiles iniciales, con lo cual se obtiene el modelo adimensional (2.3).

### A.1.2. Modelo en forma compacta de condiciones de frontera en el modelo discreto

De forma explícita, el modelo (3.1) es

$$\begin{aligned} \dot{c}_i &= \vartheta_m (c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}) - \theta (c_i - c_{i-1}) - r(c_i, \tau_i), & 1 \leq i \leq N, \\ \dot{\tau}_i &= \vartheta_m (\tau_{i+1} - 2\tau_i + \tau_{i-1}) - \theta (\tau_i - \tau_{i-1}) + \beta r(c_i, \tau_i) - \delta(\tau_i - \tau_c), \\ c_0 &= \frac{\vartheta_m}{\theta + \vartheta_m} c_1 + \frac{\theta}{\theta + \vartheta_m} c_e, & \tau_0 &= \frac{\vartheta_h}{\theta + \vartheta_h} \tau_1 + \frac{\theta}{\theta + \vartheta_h} \tau_e, & i = 0, \\ c_{N+1} &= c_N, & \tau_{N+1} &= \tau_N, & i = N + 1 \\ c_i(0) &= c_{i0}, & \tau_i(0) &= \tau_{i0} \end{aligned}$$

incorporando las condiciones de frontera en  $i = 0$  e  $i = N + 1$  en los nodos  $i = 1$  e  $i = N$ , respectivamente, y agrupando términos se obtiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= -[\theta + \vartheta_m + \alpha(\tau_1)] c_1 + \vartheta_m c_2 + \theta c_e := f_{c1}(c_1, c_2, \theta, c_e), & i = 1 \\ \dot{\tau}_1 &= -(\theta + \vartheta_h + \delta)\tau_1 + \beta\alpha(\tau_1)c_1 + \vartheta_h \tau_2 + \theta \tau_e + \delta\tau_c := f_{\tau1}(\tau_1, \tau_2, \theta, \tau_e, u), \\ \dot{c}_i &= (\theta + \vartheta_m)c_{i-1} - [\theta + 2\vartheta_m + \alpha(\tau_i)] c_i + \vartheta_m c_{i+1} := f_{ci}(c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \theta), & 1 < i < N \\ \dot{\tau}_i &= (\theta + \vartheta_h)\tau_{i-1} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta)\tau_i + \beta\alpha(\tau_i)c_i + \vartheta_h \tau_{i+1} + \delta\tau_c := f_{\tau i}(\tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}, \theta, u) \\ \dot{c}_N &= (\theta + \vartheta_m)c_{N-1} - [\theta + \vartheta_m + \alpha(\tau_N)] c_N := f_{cN}(c_{N-1}, c_N, \theta), & i = N \\ \dot{\tau}_N &= (\theta + \vartheta_h)\tau_{N-1} - (\theta + \vartheta_h + \delta)\tau_N + \beta\alpha(\tau_N)c_N + \delta\tau_c := f_{\tau N}(\tau_{N-1}, \tau_N, \theta, u) \end{aligned}$$

con condiciones iniciales  $c_i(0) = c_{i0}$  y  $\tau_i(0) = \tau_{i0}$ , para  $1 \leq i \leq N$ .

## A.2. Diagrama de Van Heerden para el modelo discreto

Para construir el diagrama de Van Heerden mostrado en la Figura 3.2, se utilizan las fórmulas recursivas (3.4), de tal forma que todas las incógnitas quedan en términos de  $c_1$  y  $\tau_1$ , posteriormente sustituyendo éstas en los balances totales (3.5), se tienen dos ecuaciones para dos incógnitas, y se puede resolver para  $c_1$  y  $\tau_1$ , (con algún método numérico) y determinar el resto de las variables con las formulas recursivas (3.4). Sin embargo de esta forma, dado que al método numérico utilizado se le tiene dar un par de valores iniciales cercanos a alguna solución, y dado que el problema tiene multiplicidad de soluciones, esto se puede volver engorroso. Para encontrar todas las soluciones de forma sistemática, se utiliza el diagrama de Van Heerden, a continuación se presentan los pasos para su construcción y determinación de los perfiles estacionarios.

1. Fijar un valor de  $\bar{\tau}_1$ .
2. Mediante un método numérico resolver el balance de materia (3.5a), para obtener  $c_1$  (se necesita un estimado inicial de  $c_1$ ).
3. Variar  $\tau_1$  en un intervalo razonable (valores factibles para  $\tau_1$  por la física del problema) y repetir el paso 2, de esta forma se obtendrá un conjunto de soluciones.
4. A partir del conjunto de soluciones, construir las curvas de calor generado  $\dot{Q}_e$  y calor extraído  $\dot{Q}_g$ , dadas por (3.6a) y (3.6b), respectivamente.
5. En un mismo marco de referencia graficar las curvas  $\tau_1$  vs  $\dot{Q}_e$  y  $\tau_1$  vs  $\dot{Q}_g$ , los puntos donde se corten ambas curvas corresponden a los estados estacionario del reactor y se puede obtener  $\bar{\tau}_1$ .
6. Para obtener los valores correspondientes de  $\bar{c}_1$ , construir la curva  $\tau_1$  vs  $c_1$  con los datos obtenidos en el paso 3, y determinar el valor correspondiente de  $\bar{c}_1$  con el valor de concentración que le corresponde a  $\bar{\tau}_1$  en la curva construida.
7. Finalmente con los valores obtenidos de  $\bar{c}_1$  y  $\bar{\tau}_1$  y las fórmulas recursivas (3.4) se pueden calcular el valor estacionario del resto de las variables y reconstruir los perfiles estacionarios interpolando los datos.

Aplicando los pasos anteriores al caso de estudio utilizado en este trabajo se obtuvo la Figura 3.2 y los perfiles interpolados mostrados en la Figura 3.1.

## A.3. Diagrama de bifurcación con respecto a $\bar{u}$ en lazo abierto

Para a construcción de este diagrama también se utiliza el método de desgarre, por lo tanto el problema de determinar cómo varían los estados estacionarios con respecto a un

parámetro, en este caso el valor nominal del control, se disminuye desde dimensión  $2N + 1$  a dimensión 3, ya que los gráficos construidos relacionan las variables de la primera etapa o nodo de discretización,  $c_1$  y  $\tau_1$  con  $\bar{u}$ . En este caso, en las fórmulas recursivas (3.4), el control se considera como una incógnita adicional, por lo tanto, al generar los balances de materia y energía (3.5), se tienen dos ecuaciones con tres incógnitas,  $c_1$ ,  $\tau_1$  y  $u$ , sin embargo haciendo un barrido similar en  $\tau_1$  y mediante un método numérico resolviendo los balances de materia y energía, se obtiene un conjunto de soluciones para cada  $\tau_1$ . A continuación se describen los pasos para generar el diagrama.

1. Generar las fórmulas recursivas (3.4) solo con valores nominales de  $c_e$ ,  $\tau_e$  y  $\theta$ , en este caso  $u = \tau_c$  se deja como incógnita.
2. Fijar un valor de  $\bar{\tau}_1$ .
3. Mediante un método numérico resolver los balances de materia (3.5), para obtener  $c_1$  y  $u$  (se necesita un estimado inicial de  $c_1$  y  $u$ ).
4. Variar  $\tau_1$  en un intervalo razonable (valores factibles para  $\tau_1$  por la física del problema) y repetir el paso 2, de esta forma se obtendrá un conjunto de soluciones.
5. A partir del conjunto de soluciones, presentar en gráficos separados las curvas  $u$  vs  $c_1$  y  $u$  vs  $\tau_1$  y en ambos trazar una recta en el valor nominal del control.
6. Los valores de estado estacionario de  $\bar{c}_1$  y  $\bar{\tau}_1$  están determinados por los cortes con la recta  $u = \bar{u}$
7. Finalmente con los valores obtenidos de  $\bar{c}_1$  y  $\bar{\tau}_1$  y las fórmulas recursivas (3.4) se pueden calcular el valor estacionario del resto de las variables y reconstruir los perfiles estacionarios interpolando los datos.

## A.4. Diagrama de bifurcación de la dinámica cero

En este caso el diagrama de bifurcación de la dinámica cero se realiza utilizando el método de desgarre considerando como incógnitas las variables de la primera etapa  $c_1$  y  $\tau_1$ , además del control  $u$ , pero se añade una restricción adicional: la temperatura en la etapa de medición está fija en su valor nominal, i.e.,

$$\tau_m - \bar{\tau}_m = 0 \tag{A.1}$$

por lo tanto, para generar los diagramas correspondientes se intercambia uno de los balances por la ecuación (A.1). A continuación se presentan los pasos para construir el diagrama correspondiente.

1. Generar las fórmulas recursivas (3.4) solo con valores nominales de  $c_e$ ,  $\tau_e$  y  $\theta$ , en este caso  $u = \tau_c$  se deja como incógnita.

2. Fijar un valor de  $\bar{\tau}_1$ .
3. Mediante un método numérico resolver el balance de materia (3.5b) y la ecuación (A.1), para obtener  $c_1$  y  $u$  (se necesita un estimado inicial de  $c_1$  y  $u$ ).
4. Variar  $\tau_1$  en un intervalo razonable (valores factibles para  $\tau_1$  por la física del problema) y repetir el paso 2, de esta forma se obtendrá un conjunto de soluciones.
5. A partir del conjunto de soluciones, presentar en gráficos separados las curvas  $u$  vs  $c_1$  y  $u$  vs  $\tau_1$  y en ambos trazar una recta en el valor nominal del control.
6. Los valores de estado estacionario de  $\bar{c}_1$  y  $\bar{\tau}_1$  están determinados por los cortes con la recta  $u = \bar{u}$

## A.5. Curva de control de lazo cerrado

La curva de control de lazo cerrado  $\mathcal{O}(k, u^-, u^+)$  también se construye casi de forma idéntica a la curva de lazo abierto  $\mathcal{O}$ , la cual es la curva de bifurcación de lazo abierto rotada. La curva de lazo cerrado se realiza incorporando la ley de control (3.10) en las ecuaciones recursivas (3.4) y en los balances (3.5) de forma implícita, posteriormente se siguen los pasos mencionados en la sección de este apéndice donde se indica cómo construir la curva de bifurcación de lazo abierto. La dinámica de temperatura en la etapa de medición en lazo cerrado expresada en forma implícita es

$$\dot{\tau}_m = (\theta + \vartheta_h)\tau_{m-1} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta)\tau_m + \beta\alpha(\tau_m)c_m + \vartheta_h\tau_{m+1} + \delta\tau_c = -k(y - \bar{y})$$

por lo que en estado estacionario,

$$0 = (\theta + \vartheta_h)\tau_{m-1} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta)\tau_m + \beta\alpha(\tau_m)c_m + \vartheta_h\tau_{m+1} + \delta\tau_c + k(y - \bar{y})$$

cambiando esta ecuación en (3.14) por las últimas dos ecuaciones y luego realizando los balances totales de materia y energía se obtienen los balances de lazo cerrado  $\mathcal{M}(\mathbf{x}_1, \mathbf{d})$  y  $\mathcal{M}(\mathbf{x}_1, \mathbf{h})$ , resolviendo estos balances para valores dados de la temperatura  $\tau_1$  en un intervalo adecuado (ver los pasos de la sección anterior) se obtiene la curva de control de lazo cerrado  $\mathcal{O}(k, u^+, u^-)$ .

## Deducción de las funciones $\tilde{\mathbf{f}}$ y $\tilde{\mathbf{f}}_\chi$

---

### B.1. Deducción de la función $\tilde{\mathbf{f}}$

Recordando la ley de control (4.5),

$$\varpi(y, \hat{\chi}) = \frac{-k(y - \bar{y}) - \hat{\chi} - \omega y}{a}$$

del error de observación se puede escribir el estado estimado como  $\hat{\chi} = \chi + \tilde{\chi}$ , sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene,

$$\varpi(y, \hat{\chi}) = \frac{-k(y - \bar{y}) - \chi - \tilde{\chi} - \omega y}{a}$$

del cambio de coordenadas  $\chi = b_m - \omega y$ , se tiene que  $b_m = \chi + \omega y$ , y sustituyendo,

$$\varpi_c(y, \hat{\chi}) = \frac{-k(y - \bar{y}) - b_m - \tilde{\chi}}{a} = \frac{-k(y - \bar{y}) - b_m}{a} - \frac{\tilde{\chi}}{a} := \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi}).$$

De acuerdo con lo anterior, la ley de control (3.10) se puede escribir en términos de desviación en la variable de estimación  $\tilde{\chi}$  de la siguiente forma,

$$\tilde{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi}) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi}) - \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d})$$

y la versión saturada es la siguiente,

$$\tilde{\mu}_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi}) = \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi}) - \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d})$$

en donde,

$$\mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi}) = \text{sat} \left[ \frac{-k(y - \bar{y}) - b_m}{a} - \frac{\tilde{\chi}}{a} \right] \quad (\text{B.1})$$

$$\mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = \text{sat} \left[ \frac{-k(y - \bar{y}) - b_m}{a} \right] \quad (\text{B.2})$$

en la segunda ecuación  $\mu_s$  coincide con (3.12) cuando  $b_m = \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ . Considerando lo anterior, el sistema (3.1) en lazo cerrado con el controlador (4.7) es el siguiente,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mu_s(\mathbf{x}, \tilde{\chi})]$$

escribiendo el campo vectorial en sus argumentos,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d})] + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \tilde{\chi}, \mathbf{d}, \tilde{\mathbf{d}})$$

el primer término del lado derecho de la ecuación anterior coincide con el sistema en lazo cerrado con el controlador (3.12), es decir,

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d})] = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}, \mathbf{d})$$

el cual ya se demostró que es asintóticamente estable. Por otro lado, el campo vectorial en desviación es,

$$\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\chi}, \mathbf{d}, \tilde{\mathbf{d}}) = \mathbf{f}[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\chi}, \mu_s(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\chi})] - \mathbf{f}[\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{d}}, \mu_s(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{d}})]$$

considerando la ecuación (B.1), y sustituyendo en la anterior se tiene,

$$\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\chi}, \mathbf{d}, \tilde{\mathbf{d}}) = \mathbf{f}[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\chi}, \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}) + \tilde{\mu}_s(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{d}, \tilde{\chi}), \tilde{\chi}] - \mathbf{f}[\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{d}}, \mu_s(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{d}})]$$

esta última expresión es la que se quería llegar.

## B.2. Deducción de la función $\tilde{\mathbf{f}}_\chi$

Del diseño del observador lineal de orden reducido (4.6a), se tiene que,

$$\hat{\chi} = \hat{b}_m - \omega y$$

y el error de observación se define como,  $\tilde{\chi} = \hat{\chi} - \chi$ , por lo tanto,

$$\tilde{\chi} = \hat{\chi} - (b_m - \omega y)$$

recordando que  $b_m$  está definida por el mapa estático (4.2), el error de estimación se puede escribir de la siguiente forma,

$$\tilde{\chi} = \hat{\chi} - [\zeta(\mathbf{x}, \theta) - \omega y]$$

y considerando que  $\chi = b_m + \omega y$ , la dinámica del error de estimación está dada por,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\chi}} &= \dot{\hat{\chi}} - \dot{\chi} \\ &= -\omega \hat{\chi} - \omega(au + \omega y) - (\dot{b}_m - \omega \dot{y}) \end{aligned}$$

ahora, tomando en cuenta que  $\dot{b}_m = \zeta(\mathbf{x}, \theta)$ , y del modelo simplificado (4.3) se tiene que  $\dot{y} = b_m + au$ , sustituyendo en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\chi}} &= -\omega\hat{\chi} - \omega(au + \omega y) - \zeta(\mathbf{x}, \theta) + \omega(b_m + au) \\ &= -\omega\hat{\chi} - \omega au - \omega^2 y - \zeta(\mathbf{x}, \theta) + \omega b_m + \omega au \\ &= -\omega\hat{\chi} - \omega(b_m - \omega y) - \zeta(\mathbf{x}, \theta) \\ &= -\omega\hat{\chi} - \omega\chi - \zeta(\mathbf{x}, \theta) \\ &= -\omega\tilde{\chi} - \zeta(\mathbf{x}, \theta)\end{aligned}$$

el mapa  $\zeta(\mathbf{x}, \theta)$  depende de la etapa de medición, y la expresión general de lazo cerrado para éste es la siguiente,

$$\zeta(\mathbf{x}, \theta) = (\theta + \vartheta_h) \tau_{m-1} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta) \tau_m + \beta\alpha(\tau_m) c_m + \vartheta \tau_{m+1} + (\delta - a) \varpi_s(y, \tilde{\chi}).$$

A continuación se define la siguiente variable en donde se considera que  $\varpi_s(y, \hat{c}hi) = \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi})$ ,

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{d}, u, \dot{u}) := \zeta(\mathbf{x}, \theta)$$

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{d}, u, \dot{u}) &= (\theta + \vartheta_h) \dot{\tau}_{m-1} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta) \dot{\tau}_m + \beta\alpha'(\tau_m) \dot{\tau}_m c_m + \beta\alpha(\tau_m) \dot{c}_m + \vartheta_h \dot{\tau}_{m+1} \\ &\quad - (\delta - a) \dot{\mu}_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi}) \\ &= (\theta + \vartheta_h) \dot{\tau}_{m-1} - [\theta + 2\vartheta_h + \delta - \beta\alpha'(\tau_m) c_m] \dot{\tau}_m + \beta\alpha(\tau_m) \dot{c}_m + \vartheta_h \dot{\tau}_{m+1} \\ &\quad - (\delta - a) \dot{\mu}_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi}) \\ &= (\theta + \vartheta_h) [(\theta + \vartheta_h) \tau_{m-2} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta) \tau_{m-1} + \beta\alpha(\tau_{m-1}) c_{m-1} + \vartheta_h \tau_m \\ &\quad + \delta\mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi})] - [\theta + 2\vartheta_h + \delta - \beta\alpha'(\tau_m) c_m] [(\theta + \vartheta_h) \tau_{m-1} - (\theta + 2\vartheta_h + \delta) \tau_m \\ &\quad + \beta\alpha(\tau_m) c_m + \vartheta_h \tau_{m+1} + \delta\mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi})] + \beta\alpha(\tau_m) [(\theta + \vartheta_m) c_{m-1} \\ &\quad - [\theta + 2\vartheta_m + \alpha(\tau_m)] c_m + \vartheta_m c_{m+1}] + \vartheta_h [(\theta + \vartheta_h) \tau_m - (\theta + 2\vartheta_h + \delta) \tau_{m+1} \\ &\quad + \beta\alpha(\tau_{m+1}) c_{m+1} + \vartheta_h \tau_{m+1} + \delta\mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi})]\end{aligned}$$

finalmente, la función  $\tilde{f}_\chi$  se define como,

$$\tilde{f}_\chi(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi}) = \gamma[\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi}), \dot{\mu}_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi})] = \gamma[\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}) + \tilde{\mu}_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi}), \nu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi})]$$

en donde,

$$\nu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}) + \frac{\tilde{\chi}}{a} > u^+ \mu(\mathbf{x}, \mathbf{d}) + \frac{\tilde{\chi}}{a} < u^- \\ \nu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi}) & \text{si } u^- \leq \mu_s(\mathbf{x}, \mathbf{d}) + \frac{\tilde{\chi}}{a} \leq u^+ \end{cases}$$

con  $\nu(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \tilde{\chi})$  una función acotada en sus argumentos.





# Bibliografía

---

- [1] Abraham, R. and Shaw, C. (1992). Dynamics: the geometry of behavior. *Studies*. 27, 33
- [2] Alvarez, J. (2000). Nonlinear state estimation with robust convergence. *Journal of Process Control*, 10(1):59–71. 64, 65
- [3] Alvarez, J., Alvarez, J., and Suárez, R. (1991). Nonlinear bounded control for a class of continuous agitated tank reactors. *Chemical engineering science*, 46(12):3235–3249. 10, 24, 27, 30
- [4] Alvarez, J. and Franco, H. (Aceptado). Geometric-dissipative control of exothermic reactors. In *11th IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems, including Biosystems (Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway, 2016)*. 24
- [5] Alvarez, J., López, T., and Hernández, E. (2000). Robust estimation of free-radical homopolymer reactors. *Journal of Process Control*, 10(5):389–398. 65
- [6] Andronov, A. and Pontryagin, L. (1937). Structurally stable systems. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 14, pages 247–250. 2, 4, 35
- [7] Aris, R. (1961). *The optimal design of chemical reactors: a study in dynamic programming*, volume 3. Academic Press. 3, 17
- [8] Åström, K. J. and Hägglund, T. (2006). *Advanced PID control*. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society; Research Triangle Park, NC 27709. 4, 11, 72, 82
- [9] Badillo-Hernandez, U., Alvarez-Icaza, L., and Alvarez, J. (2013). Model design of a class of moving-bed tubular gasification reactors. *Chemical Engineering Science*, 101:674–685. 3
- [10] Bashir, S., Chovan, T., Masri, B. J., Mukherjee, A., Pant, A., Sen, S., Vijayaraghavan, P., and Berty, J. M. (1992). Thermal runaway limit of tubular reactors, defined at the inflection point of the temperature profile. *Industrial & engineering chemistry research*, 31(9):2164–2171. 43

- [11] Bošković, D. M., Balogh, A., and Krstić, M. (2003). Backstepping in infinite dimension for a class of parabolic distributed parameter systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 16(1):44–75. [3](#)
- [12] Canales Meza, L. A. (2013). Reducción de orden en modelos para reactores de gasificación. Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México. [20](#)
- [13] Carberry, J. J. (2001). *Chemical and catalytic reaction engineering*. Courier Corporation. [88](#)
- [14] Christofides, P. D. (2001). Control of nonlinear distributed process systems: Recent developments and challenges. *AIChE Journal*, 47(3):514–518. [3](#), [18](#), [33](#)
- [15] Christofides, P. D. (2012). *Nonlinear and robust control of PDE systems: Methods and applications to transport-reaction processes*. Springer Science & Business Media. [3](#), [45](#)
- [16] Christofides, P. D. and Tee, A. R. (1996). Singular perturbations and input-to-state stability. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 41(11):1645–1650. [66](#)
- [17] Deans, H. and Lapidus, L. (1960). A computational model for predicting and correlating the behavior of fixed-bed reactors: I. derivation of model for nonreactive systems. *AIChE Journal*, 6(4):656–663. [18](#)
- [18] Deckwer, W.-D. (1974). The backflow cell model—applied to non-isothermal reactors. *The Chemical Engineering Journal*, 8(2):135–144. [3](#), [17](#)
- [19] Diakoptics, K. G. (1963). The piecewise solution of large scale systems. *McDonald, London*. [21](#)
- [20] Diaz-Salgado, J., Alvarez, J., Schaum, A., and Moreno, J. A. (2012). Feedforward output-feedback control for continuous exothermic reactors with isotonic kinetics. *Journal of Process Control*, 22(1):303–320. [59](#), [71](#)
- [21] Dubljevic, S., Mhaskar, P., El-Farra, N. H., and Christofides, P. D. (2005). Predictive control of transport-reaction processes. *Computers & chemical engineering*, 29(11):2335–2345. [3](#)
- [22] El-Farra, N. H. and Christofides, P. D. (2001). Integrating robustness, optimality and constraints in control of nonlinear processes. *Chemical Engineering Science*, 56(5):1841–1868. [33](#)
- [23] El-Farra, N. H. and Christofides, P. D. (2003). Bounded robust control of constrained multivariable nonlinear processes. *Chemical Engineering Science*, 58(13):3025–3047. [3](#), [11](#), [33](#), [69](#), [76](#)
- [24] El-Hawwary, M. I. and Maggiore, M. (2009). Reduction principles and the stabilization of closed sets for passive systems. *arXiv preprint arXiv:0907.0686*. [37](#)

- 
- [25] Elnashaie, S. S. and Abashar, M. E. (1990). The implication of non-monotonic kinetics on the design of catalytic reactors. *Chemical Engineering Science*, 45(9):2964–2967. [88](#)
- [26] Fernandez, C., Alvarez, J., Baratti, R., and Frau, A. (2012). Estimation structure design for staged systems. *Journal of process control*, 22(10):2038–2056. [57](#)
- [27] Georgakis, C., Aris, R., and Amundson, N. R. (1977). Studies in the control of tubular reactors-i general considerations. *Chemical Engineering Science*, 32(11):1359–1369. [12](#)
- [28] González, P. and Alvarez, J. (2005). Combined proportional/integral-inventory control of solution homopolymerization reactors. *Industrial & engineering chemistry research*, 44(18):7147–7163. [11](#), [59](#), [63](#), [70](#), [71](#)
- [29] Hermann, R. and Krener, A. J. (1977). Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on automatic control*, 22(5):728–740. [60](#)
- [30] Hudon, N., Guay, M., Perrier, M., and Dochain, D. (2005). Adaptive extremum seeking control of a tubular reactor with limited actuation. In *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005*, pages 4563–4568. IEEE. [3](#)
- [31] Ichikawa, A. and Ryan, E. (1979). Sensor and controller location problems for distributed parameter systems. *Automatica*, 15(3):347–352. [2](#), [41](#)
- [32] Isidori, A. (2013). *Nonlinear control systems*. Springer Science & Business Media. [63](#), [64](#)
- [33] Jaisathaporn, P. and Luyben, W. L. (2004). Dynamic comparison of alternative tubular reactor systems. *Industrial & engineering chemistry research*, 43(4):1003–1029. [3](#)
- [34] Johnson, E. N. and Calise, A. J. (2003). Limited authority adaptive flight control for reusable launch vehicles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26(6):906–913. [3](#)
- [35] Kapoor, N. and Daoutidis, P. (1999). An observer-based anti-windup scheme for non-linear systems with input constraints. *International Journal of Control*, 72(1):18–29. [3](#)
- [36] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall. [18](#), [30](#), [31](#)
- [37] Khalil, H. K. (2008). High-gain observers in nonlinear feedback control. In *Control, Automation and Systems, 2008. ICCAS 2008. International Conference on*, pages xlvii–lvii. IEEE. [69](#)
- [38] Krstic, M., Kokotovic, P. V., and Kanellakopoulos, I. (1995). *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons, Inc. [18](#)

- [39] Lapidus, L. (1977). *Chemical Reactor Theory: A Review: Dedicated to the Memory of Richard H. Wilhelm...* Prentice-Hall. 7
- [40] Levenspiel, O. and Barreiro, G. T. (2002). *Ingeniería de las reacciones químicas*. Reverté. 3, 17
- [41] Lions, J.-L. (1988). Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM review*, 30(1):1–68. 2
- [42] Luyben, W. L. (1989). *Process modeling, simulation and control for chemical engineers*. McGraw-Hill Higher Education. 77
- [43] Meurer, T., Graichen, K., and Zeitz, M. (2005). Motion planning and feedforward control for distributed parameter systems under input constraints. In *World Congress*, volume 16, pages 555–555. 3
- [44] Morud, J. C. and Skogestad, S. (1998). Analysis of instability in an industrial ammonia reactor. *AIChE Journal*, 44(4):888–895. 27, 33
- [45] Najera, I., Alvarez, J., and Baratti, R. (2015). Feedforward output-feedback control for a class of exothermic tubular reactors. *IFAC-PapersOnLine*, 48(8):1075–1080. 3, 57, 59, 71, 89
- [46] Nájera Martínez, I. (2012). Modelado y control de una clase de reactores tubulares exotérmicos. Master’s thesis, Universidad Autónoma Metropolitana. 18, 21, 33
- [47] Porru, M., Alvarez, J., and Baratti, R. (2013). Composition estimator design for industrial multicomponent distillation column. *Chemical Engineering Transaction*, 32:1–6. 44
- [48] Qin, S. J. and Badgwell, T. A. (2003). A survey of industrial model predictive control technology. *Control engineering practice*, 11(7):733–764. 3
- [49] Ramirez, W. F. (1997). *Computational methods for process simulation*. Butterworth-Heinemann. 21
- [50] Schaum, A., Alvarez, J., Garcia-Sandoval, J. P., and Gonzalez-Alvarez, V. M. (2015). On the dynamics and control of a class of continuous digesters. *Journal of Process Control*, 34:82–96. 11, 59, 63, 71
- [51] Schaum, A., Alvarez, J., and Lopez-Arenas, T. (2012). Saturated pi control of continuous bioreactors with haldane kinetics. *Chemical engineering science*, 68(1):520–529. 11, 59, 63, 71
- [52] Schaum, A., Alvarez, J., and Lopez-Arenas, T. (2013). Saturated linear dynamic output-feedback control for a class of three-state continuous bioreactors with inhibited kinetics. *Journal of Process Control*, 23(3):332–350. 11, 59, 63, 71

- 
- [53] Seibert, P. (1969). On stability relative to a set and to the whole space. In *5th int. conf. on nonlinear oscillations (Izdat. Inst. Mat. Akad. Nauk. USSR, 1970)*, volume 2, pages 448–457. [37](#)
- [54] Sepulchre, R., Jankovic, M., and Kokotovic, P. V. (2012). *Constructive nonlinear control*. Springer Science & Business Media. [11](#), [18](#), [59](#)
- [55] Shinnar, R. (1987). Use of residence-and contact-time distributions in reactor design. In *Chemical reaction and reactor engineering*, pages 63–150. Marcel Dekker New York. [3](#), [17](#), [18](#)
- [56] Shinskey, F. G. (1990). *Process control systems: application, design and tuning*. McGraw-Hill, Inc. [3](#)
- [57] Singh, S., Lal, S., and Kaistha, N. (2008). Case study on tubular reactor hot-spot temperature control for throughput maximization. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 47(19):7257–7263. [3](#)
- [58] Sontag, E. D. (2001). The iss philosophy as a unifying framework for stability-like behavior. In *Nonlinear control in the year 2000 volume 2*, pages 443–467. Springer. [4](#), [63](#)
- [59] Stefani, R., Savant Jr, C., Shahian, B., and Hostetter, G. (1994). Feedback control systems. *Saunders College Publishing, Florida*. [61](#)
- [60] Steward, D. V. (1965). Partitioning and tearing systems of equations. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series B: Numerical Analysis*, 2(2):345–365. [21](#)
- [61] Tarbouriech, S. and Turner, M. (2009). Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems. *Control Theory & Applications, IET*, 3(1):1–19. [3](#)
- [62] van Heerden, C. (1958). The character of the stationary state of exothermic processes. *Chemical Engineering Science*, 8(1):133–145. [22](#)
- [63] Varma, A. and Amundson, N. R. (1973a). The non-adiabatic tubular reactor: Stability considerations. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 51(4):459–467. [12](#)
- [64] Varma, A. and Amundson, N. R. (1973b). Some observations on uniqueness and multiplicity of steady states in non-adiabatic chemically reacting systems. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 51(2):206–226. [10](#), [12](#)
- [65] Vidyasagar, M. (2002). *Nonlinear systems analysis*, volume 42. Siam. [68](#)
- [66] Wieland, P., Meurer, T., Graichen, K., and Zeitz, M. (2006). Feedforward control design under input constraints for a tubular reactor model. In *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, pages 3968–3973. IEEE. [3](#)
-