"UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO"

antecedentes de mecánica

Facultad de Ingeniería

ANTECEDENTES

DE

MECANICA

El presente material lo elaboró un grupo de profesores del Departamento de Mecánica, con el objeto de ayudar a los alumnos de primer ingreso a repasar los conceptos de Mecánica que constituyen los antecedentes indispensables para los cursos básicos que se imparten en la Facultad de Ingeniería.

El contenido temático de este fascículo forma tres unidades que, por su amplitud, se dividieron en módulos, a fin de que al dosificar los contenidos se adquiera el mayor conocimiento y comprensión de los mismos, para así lograr el cumplimiento de las metas propuestas.

Con el fin de que este fascículo se utilice adecuadamente a continuación se presentan los elementos didácticos que lo conforman.

En cada unidad se cuenta con:

a) Objetivos generales.- Indican la conducta que deben lograr los alumnos al finalizar el estudio de la unidad.

b) Introducción.- Muestra un panorama general del contenido.

Los elementos didácticos con que cuentan los módulos son:

a) Cuadro sinóptico.- Presenta la síntesis del contenido en forma esquemática.

b) Objetivos específicos.- Se desglosan de los objetivos generales de la unidad.

c) Contenido.- Es el desarrollo de los temas, incluyendo ejemplos resueltos que presentan aplicaciones concretas de los conceptos teóricos.

d) Ejercicios propuestos.- Son actividades que el alumno debe realizar para que reafirme la comprensión y la aplicación del contenido. Adicionalmente le permiten medir el grado en que logró los objetivos de aprendizaje propuestos.

Al final del fascículo se encuentran:

a) Examen de autoevaluación.- Es un instrumento que permite al alumno verificar por sí mismo, si ha alcanzado el mínimo necesario de los objetivos de aprendizaje correspondientes a las tres unidades.

b) Solución al examen de autoevaluación.- Constituye la referencia a partir de la cual el alumno puede comprobar o cotejar sus respuestas.

c) Soluciones a los ejercicios propuestos.- Es donde se agrupan las respuestas correctas a los ejercicios.

d) Bibliografía básica.- Su finalidad es la de informar al alumno en dónde puede consultar y profundizar sobre los temas que requiera.

Se recomienda al estudiante que, después de conocer los resultados del Examen de Diagnóstico sobre Antecedentes de Bachillerato que sustentó al inicio del primer semestre lectivo, se dedique con empeño al estudio de este material. Además, si desea ampliar algún concepto o bien disipar dudas específicas respecto a los antecedentes de Mecánica, es conveniente que recurra al Servicio de Asesoría que el Departamento de Mecánica tiene establecido en los cubículos de la biblioteca del edificio anexo de esta Facultad.

DIRECTOR DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
Ing. Javier Jiménez Espriú

SECRETARIO GENERAL
Ing. Roberto Ruíz Vilá

JEFE DE LA DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
Ing. Eduardo M. Solar González

JEFE DEL DEPARTAMENTO DE MECANICA
Ing. Sergio Betancourt Cuevas

ELABORACION DE CONTENIDOS

COORDINACION TECNICA
Ing. Julio R. Rodríguez Aldama

AUTORES
Ing. Sergio Betancourt Cuevas
Ing. Francisco Guerrero Lutteroth
Ing. Manuel Lara Muñoz
Ing. Pedro Reyes Ginori
Ing. Enrique Sanjurjo Borregón

ADAPTACION PEDAGOGICA
Lic. Irma Hinojosa Félix
Lic. María Cuairán Ruidíaz

CONTENIDO

UNIDAD I FUNDAMENTOS DE LA MECANICA CLASICA

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno:

Conocerá los conceptos y los principios básicos de la Mecánica Clásica.

INTRODUCCION

La Mecánica es una de las ciencias más antiguas, ya que su origen se remonta a los tiempos cuando el hombre, al observar el movimiento de los astros y su relación con los fenómenos naturales, trató de conocer la influencia de ambos en su propio destino.

La Mecánica se formaliza como ciencia cuando el sabio inglés Isaac Newton (1642-1727) fundamenta y enuncia sus famosos principios del movimiento, razón por la cual se le denomina Mecánica Newtoniana o Mecánica Clásica, cuya vigencia es aún permanente en casi todas las ramas de la Ingeniería.

Para explicar los fenómenos que se ubican en su campo de estudio, la Mecánica Clásica establece postulados o principios fundamentales, los cuales se abordarán en esta unidad.

MODULO 1 DEFINICIONES Y CONCEPTOS BASICOS DE LA MECANICA CLASICA

CUADRO SINOPTICO

MECANICA
- ESTATICA → Estudia el equilibrio de los sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo.
- CINEMATICA → Estudia la geometría del movimiento.
- DINAMICA → Estudia el movimiento de los cuerpos en relación con las fuerzas que lo producen o modifican.

CONCEPTOS BASICOS PARA SU ESTUDIO
- CUERPOS-MODELOS → Punto geométrico; Punto-masa o partícula material; Cuerpo rígido
- FUERZAS → Pueden representarse mediante segmentos rectilíneos dirigidos.
- EFECTOS → Motriz o externo; Deformante o interno

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Identificará las definiciones de:
   a) Mecánica
   b) Mecánica Clásica
2. Diferenciará los conceptos de:
   a) Cuerpo, fuerza y efecto.
   b) Movimiento, trayectoria, velocidad, posición, aceleración y desplazamiento.
3. Identificará los conceptos y los modelos usados en Mecánica:
   a) Punto geométrico
   b) Partícula material
   c) Cuerpo rígido
   d) Fuerza
4. Explicará los efectos externos que experimenta un cuerpo cuando actúa sobre él una fuerza.

1.1 GENERALIDADES

Dado que la Mecánica forma parte de la Física, conviene recordar algunas de las ramas en que esta ciencia se divide.

FISICA
- Mecánica
- Hidráulica
- Térmica
- Acústica
- Optica
- Electricidad y Magnetismo

Cada una de esas ramas enfoca fenómenos específicos, correspondiendo a la Mecánica el estudio de las condiciones del movimiento que exhiben los cuerpos cuando se encuentran bajo la acción de fuerzas.

Este campo de estudio se ramifica dando origen a diversas clases de Mecánica que se apoyan en bases diferentes. Una de ellas es la Mecánica Clásica, la cual tiene como postulados fundamentales las leyes de Newton; en tanto que las demás mecánicas, como la Cuántica y la Relativista, se fundamentan en otros principios o postulados.

Debido a que los fenómenos de movimiento pueden adoptar distintas modalidades, se acostumbra dividir a la Mecánica en la forma siguiente para simplificar su estudio.

MECANICA
- Estática
- Cinemática
- Dinámica

1.2 CONCEPTOS BASICOS DE LA MECANICA

A continuación se explican brevemente los conceptos básicos sobre los que se desarrolla la Mecánica.

1.2.1 CUERPOS

El concepto de cuerpo se refiere a toda consideración material de lo que ocupa un lugar en el espacio y que es susceptible de estar sujeta a la acción de fuerzas.

En el desarrollo de la Mecánica se hace uso de modelos de cuerpos, consistentes en idealizaciones que toman en cuenta las propiedades que de ellos se estudian.

Los principales modelos que se acostumbra utilizar son los siguientes:

MODELOS DE CUERPO
- Punto geométrico
- Punto-masa o partícula material
- Cuerpo rígido

- Punto geométrico es un lugar en el espacio al cual no se le considera dimensión ni masa alguna.

- Punto-masa o partícula material es un cuerpo sin dimensiones al que se le asocia la masa del cuerpo real.

- Cuerpo rígido es aquél que posee masa y cuyas dimensiones permanecen constantes, aun cuando se le aplique un conjunto de fuerzas.

Debe aclararse que además de los anteriores modelos de cuerpo se utiliza otro, denominado cuerpo deformable, que posee masa y cuya geometría cambia bajo la acción de las fuerzas. Este modelo se emplea en la Mecánica de Materiales.

Para una mejor comprensión de todos los modelos anteriores es conveniente recordar que masa es la propiedad cuantitativa de la inercia de un cuerpo, entendiéndose por inercia la oposición que presenta la materia a cambiar su estado de movimiento.

1.2.2 FUERZAS

> Fuerza es la acción de un cuerpo sobre otro, capaz de modificarle su movimiento o bien de deformarlo.

Para cuantificar una fuerza no basta conocer su magnitud o intensidad, sino que es necesario especificar su ubicación y también hacia dónde actúa.

Las cantidades que tienen magnitud, dirección y sentido son vectoriales.

La cantidad vectorial puede representarse gráficamente por medio de un segmento rectilíneo dirigido, en el que la magnitud se identifica con la longitud del segmento medido a escala. La dirección equivale a la orientación del mismo. El sentido se indica con una punta de flecha colocada en uno de sus extremos, como se muestra en la figura 1.

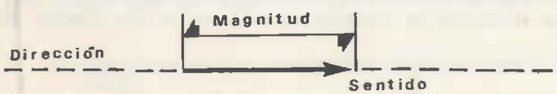


Figura 1

Con el objeto de distinguir a las cantidades vectoriales se ha convenido en testar a los símbolos que las representan ($\bar{F}$)

Lo anterior obedece a que existen otras cantidades denominadas cantidades escalares, cuyo significado queda completamente definido al conocer su magnitud.

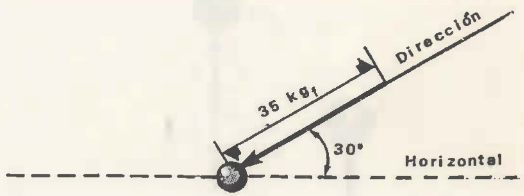
Ejemplo

En una partícula se aplica una fuerza de 35 kg_f, cuya dirección es tal que forma un ángulo de 30° con la horizontal y su sentido es hacia la izquierda. Haga la representación gráfica de esta fuerza.

Solución

Se traza una línea recta horizontal que pase por la partícula. Coincidiendo con ésta y formando un ángulo de 30° a partir de la horizontal en sentido contrario al de las manecillas del reloj, se traza otra recta sobre la que se medirá una distancia que representará a los 35 kg_f .

Lo anterior se ilustra en la siguiente figura.



1.2.3 EFECTOS

> Cuando una fuerza o un sistema de fuerzas actúa sobre un cuerpo le provoca un efecto.

Este efecto puede ser de dos tipos:

TIPOS DE EFECTO	Motriz o externo
	Deformante o interno

El efecto motriz o externo lo manifiesta el cuerpo al modificar su movimiento.

El efecto deformante o interno lo exhibe el cuerpo mediante alteraciones en su geometría.

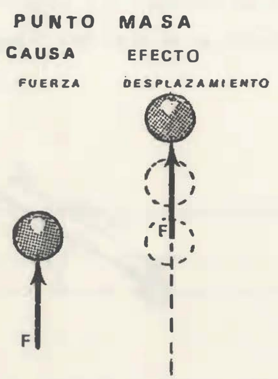


Figura 2

En la figura 2 se representa a una partícula material en la que incide una fuerza que le provoca un movimiento de traslación.

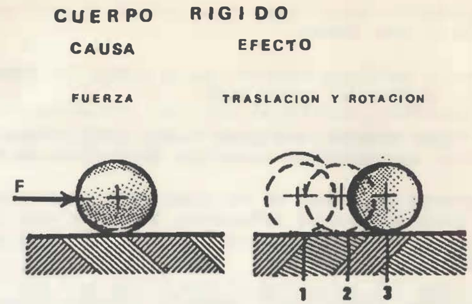


Figura 3

En la figura 3 se ilustra un cuerpo rígido al que una fuerza le provoca un cambio en su movimiento y lo desplaza de la posición 1 a la 3

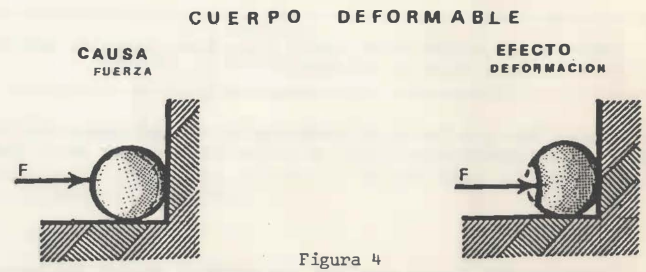


Figura 4

En la figura 4 se muestra que al actuar una fuerza sobre un cuerpo deformable, éste modifica su geometría o dimensiones.

NOTA: Es oportuno recordar que el último de los efectos ilustrados es objeto de estudio en la Mecánica de Materiales, razón por la cual este fascículo se limitará al análisis de los efectos externos.

Ahora bien, para que se comprendan e interpreten en forma adecuada los efectos externos, es importante enunciar los conceptos siguientes:

- POSICION: Es la ubicación del punto móvil respecto a un sistema de referencia. Esta ubicación se determina mediante las coordenadas correspondientes en el sistema empleado. (Véase las figuras 5 y 6).

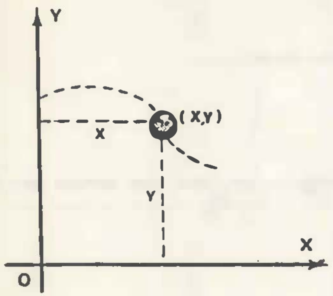


Figura 5

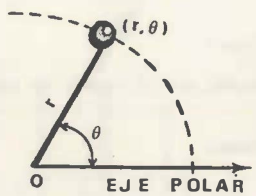


Figura 6

- TRAYECTORIA: Es el lugar geométrico de todos los puntos por donde se desplaza el móvil.

- MOVIMIENTO: Una partícula está en movimiento cuando su posición varía con respecto al tiempo.

- DESPLAZAMIENTO LINEAL: Es el vector determinado por el cambio de posición de la partícula.

- CAMINO RECORRIDO: Es la longitud medida sobre la trayectoria entre dos posiciones sucesivas de la partícula en movimiento.

- VELOCIDAD: Es la variación del desplazamiento con respecto al tiempo.

- ACELERACION: Es la variación de la velocidad con respecto al tiempo.

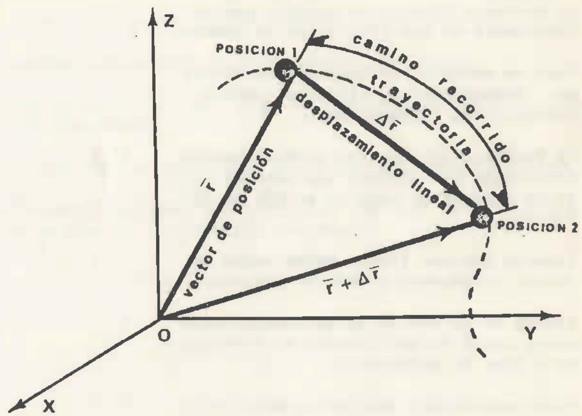


Figura 7

Reactivos

I. Indique si es falsa o verdadera la afirmación hecha en cada una de las siguientes expresiones.

	Verdadera	Falsa
1. La Mecánica Clásica es aquella que se fundamenta en los principios de Newton.	( )	( )
2. Para su estudio, la Mecánica se divide en: Termodinámica, Acústica, Optica, Electricidad y Magnetismo.	( )	( )
3. La Mecánica estudia las condiciones del movimiento que exhiben los cuerpos cuando se encuentran bajo la acción de las fuerzas.	( )	( )
4. Siempre que una fuerza actúa sobre un cuerpo le provoca a éste un efecto.	( )	( )
5. Fuerza es la acción de un cuerpo sobre otro, capaz de modificarle su movimiento o bien de deformarlo.	( )	( )
6. Para cuantificar una fuerza sólo se necesita conocer su magnitud o intensidad.	( )	( )
7. Los cuerpos pueden representarse mediante segmentos rectilíneos dirigidos.	( )	( )

II. Relacione la columna de la derecha con la columna de la izquierda, escribiendo dentro del paréntesis la letra que corresponda.

a) Es aquél que posee masa y cuya geometría cambia bajo la acción de las fuerzas.	( ) Punto geométrico
b) Es un cuerpo sin dimensiones al que se le asocia la masa del cuerpo real.	( ) Partícula material
c) Es un lugar en el espacio al cual no se le considera dimensión ni masa alguna.	( ) Cuerpo deformable

III Anote dentro del paréntesis la letra correcta de cada una de las proposiciones siguientes:

1. Es la relación del desplazamiento con respecto al tiempo ...(a)

   a) Velocidad

   b) Aceleración

   c) Desplazamiento lineal

   d) Movimiento

   e) Trayectoria

2. Es el lugar geométrico de todos los puntos por donde se desplaza el móvil ....(b)

   a) Posición

   b) Trayectoria

   c) Camino recorrido

   d) Ubicación

   e) Desplazamiento lineal

3. Es el vector determinado por el cambio de posición de la partícula ....(a)

   a) Desplazamiento lineal

   b) Movimiento

   c) Trayectoria

   d) Camino recorrido

   e) Velocidad

CUADRO SINOPTICO

- LEYES DE NEWTON
  - FUNDAMENTALES
    - PRIMERA LEY o ley de la inercia
    - SEGUNDA LEY o ley del movimiento
    - TERCERA LEY o ley de la acción y la reacción
  - DE LA GRAVITACION UNIVERSAL
    - FORMULACION
    - EXPERIMENTO DE CAVENDISH

→ Sistemas de UNIDADES
- Absolutos
- Gravitacionales

→ Relación entre los sistemas de UNIDADES

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Identificará las tres leyes de Newton y la ley de la Gravitación Universal.
2. Distinguirá las relaciones entre fuerza, masa y aceleración.
3. Resolverá problemas aplicando las fórmulas de la segunda ley de Newton y de la Gravitación Universal.

2.1 GENERALIDADES

Si bien es cierto que las aportaciones de Newton a la Mecánica son trascendentales, es relevante además, la contribución que Galileo Galilei hizo a dicha rama de la Física, ya que las dos primeras leyes de Newton se apoyan en ella.

En la actualidad, las tres leyes sobre las que se basa la Mecánica Clásica se conocen como Leyes de Newton.

2.2 LEYES DE NEWTON

La importancia de lograr la comprensión de las leyes de Newton radica en su frecuente aplicación en las carreras como las de Física, Química e Ingeniería, donde es indispensable el estudio de la Mecánica Clásica.

2.2.1 PRIMERA LEY O LEY DE LA INERCIA

El principio de la inercia de Galileo dio lugar a la primera ley del movimiento. Esta ley puede enunciarse como sigue:

> Ningún cuerpo es capaz por sí solo de modificar su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que se le aplique una fuerza que provoque el cambio.

Esta ley lleva implícito el concepto de masa como medida cuantitativa de la inercia de los cuerpos.

Para explicar esta ley considérese, por ejemplo, a un cuerpo que se encuentra en reposo sobre un piso plano horizontal; si se le aplica una fuerza dejará de estar en reposo, adquiriendo un movimiento que sería permanente de no ser por la fuerza de fricción generada por el contacto entre el piso y la superficie del cuerpo, la cual modificará a su vez el movimiento del cuerpo hasta ponerlo en reposo nuevamente. (Véase la figura 8).

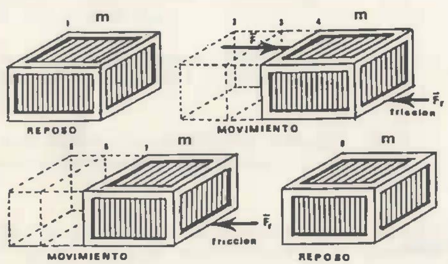


Figura 8

2.2.2 SEGUNDA LEY O LEY DEL MOVIMIENTO

En esta ley cuyo enunciado se presenta a continuación, se relacionan los conceptos básicos de toda la Mecánica Clásica: longitud, masa, fuerza y tiempo.

> Cuando a un cuerpo se le aplica una fuerza le provoca una variación en su cantidad de movimiento, la cual es proporcional a la magnitud de la fuerza y en su misma dirección.

La expresión matemática de esta ley puede adoptar las siguientes formas:

$$\boxed{\bar{F} = \frac{d}{dt}(m\bar{v})} \quad \ldots\ldots (1)$$

Donde:

$(m\bar{v})$ = cantidad de movimiento

Ahora bien, si m permanece constante la ecuación (1) queda como sigue:

$$\bar{F} = m\frac{d}{dt}(\bar{v})$$

pero como:

$$\frac{d}{dt}(\bar{v}) = \bar{a}$$

se tiene finalmente:

$$\boxed{\bar{F} = m\bar{a}} \quad \ldots\ldots (2)$$

De la fórmula (2) se desprenden los siguientes corolarios:

COROLARIO 1

Si a una masa m se le aplican sucesiva y separadamente dos fuerzas $\bar{F}_1$ y $\bar{F}_2$, la aceleración que le producen es directamente proporcional a la magnitud de las fuerzas.

$$\bar{F}_1 \longrightarrow (m) \longrightarrow \bar{a}_1$$

$$\bar{F}_2 \longrightarrow (m) \longrightarrow \bar{a}_2$$

De otra forma:

$$\frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_2} = \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2}$$

Véase la figura 9.

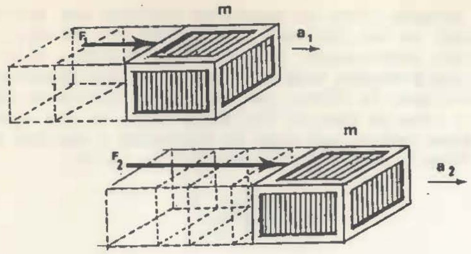


Figura 9

COROLARIO 2

Si una misma fuerza $\bar{F}$ se aplica sucesiva y separadamente a dos masas m_1 y m_2, las aceleraciones de éstas son inversamente proporcionales al tamaño de dichas masas.

$$\bar{F} \longrightarrow (m_1) \longrightarrow \bar{a}_1$$

$$\bar{F} \longrightarrow (m_2) \longrightarrow \bar{a}_2$$

De otra forma:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1}$$

En este corolario se enfatiza el papel que desempeña la masa del cuerpo oponiéndose al cambio de movimiento; en otras palabras, mientras mayor sea la masa (inercia) del cuerpc será menos fácil moverlo.

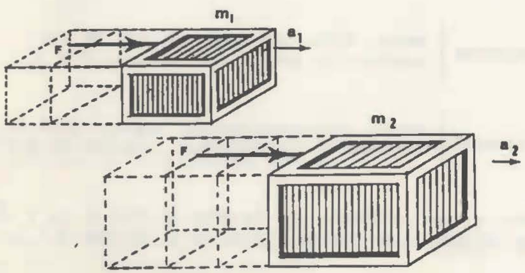


Figura 10

2.2.3 TERCERA LEY O LEY DE LA ACCION Y LA REACCION

La tercera ley de Newton, conocida con el nombre de ley de la acción y la reacción se enuncia de la siguiente manera:

A toda acción corresponde una reacción igual, colineal y de sentido contrario.

De acuerdo con lo anterior, no existe la posibilidad de que en la naturaleza se presente una acción aislada, sin que ésta provoque al instante una respuesta por parte del cuerpo sobre el que incide.

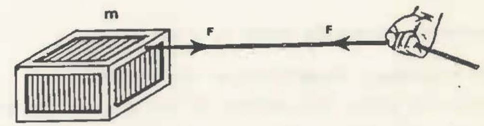


Figura 11

2.3 LEY DE LA GRAVITACION UNIVERSAL

La razón por la cual un objeto que soltamos cae, es que la tierra lo atrae hacia su centro. A este fenómeno se le denomina gravedad. Algo análogo ocurre con todos los cuerpos del universo, ya que entre ellos existen fuerzas de atracción mutua conocidas como gravitacionales (de gravedad), tal como lo expresa el siguiente enunciado:

Dos cuerpos se atraen con una fuerza F, cuya magnitud es directamente proporcional al producto de sus masas m_1 y m_2, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia D que los separa.

Este enunciado puede tomar la forma matemática:

$$\boxed{F = G\,\frac{(m_1)(m_2)}{D^2}} \quad .... \ (3)$$

Véase la figura 12.

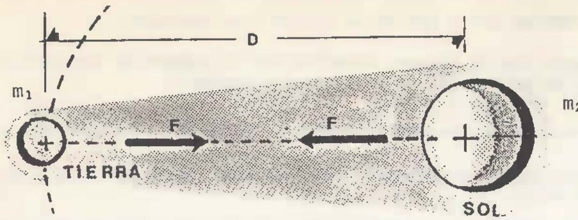


Figura 12

Al confrontar la figura 12 con la fórmula (3) se pueden identificar cada uno de los términos que intervienen en esta última.

Donde:

F es la fuerza de atracción entre m_1 y m_2.

m_1 y m_2 son las masas respectivas de los cuerpos.

D es la distancia entre los centros de los dos cuerpos en cuestión.

G es una constante, denominada constante de la gravitación universal.

2.3.1 EXPERIMENTO DE CAVENDISH

El valor de G lo obtuvo experimentalmente por vez primera Cavendish con su balanza de torsión. (El experimento se ilustra en la figura 13).

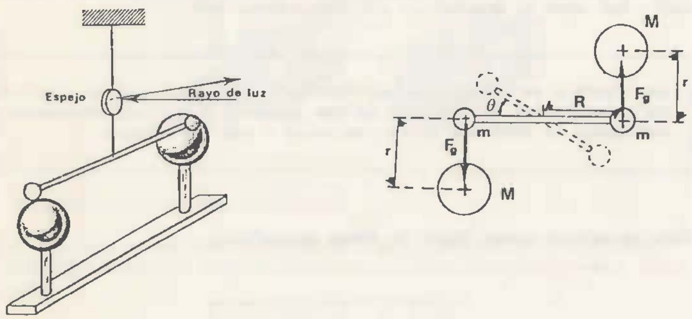


Figura 13

Mediante una delgada fibra de cuarzo se suspende una barrita, en los extremos de la cual se han colocado previamente dos pequeñas esferas de plomo. En estas condiciones, si se colocan frente a ellas sendas masas M mayores que las primeras, también de plomo, puede observarse que las menores giran torciendo la fibra. Al medirse el giro θ de la fibra puede calcularse F_g y como se conocen las masas M y m de las esferas que intervienen en el experimento, así como la distancia D que las separa, se despeja G de la fórmula (3), obteniéndose así su valor.

$$G = \frac{F_g D^2}{(m)\ (M)}$$

En términos numéricos:

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{\text{Newton} \cdot m^2}{(kg)^2}$$ En unidades del Sistema M.K.S. Absoluto

$$G = 6.67 \times 10^{-8}\ \frac{\text{dina} \cdot cm^2}{(gr)^2}$$ En unidades del Sistema C.G.S. Absoluto

NOTA: Para aclarar cualquier duda relacionada con las unidades usadas en Mecánica, así como con los sistemas a que corresponden, consúltese el módulo 3 del fascículo de Antecedentes de Física.

2.3.2 RELACION ENTRE LOS SISTEMAS DE UNIDADES FUNDAMENTALES Y LAS LEYES DE NEWTON.

Las unidades fundamentales de los sistemas Absolutos y Gravitacionales son:

ABSOLUTOS { metro, kilogramo-masa, segundo (M.K.S.)
centímetro, gramo-masa, segundo (C.G.S.)

GRAVITACIONALES { metro, kilogramo-fuerza, segundo (M.K.S.)
centímetro, gramo-fuerza, segundo (C.G.S.)

Ahora bien, si en la fórmula (2) la masa se mide en kg y la aceleración en m/s^2 se obtiene la unidad de fuerza en el Sistema M.K.S. Absoluto:

$$F = kg\ \frac{m}{s^2} = \text{Newton} = N$$

Esto quiere decir que 1 Newton es la fuerza necesaria para que una masa de 1 kg adquiera una aceleración de 1 m/s^2

Si se usa el sistema C.G.S. Absoluto se tiene:

$$F = gr \frac{cm}{s^2} = dina$$

Por otra parte, si en la fórmula (2) se considera que la aceleración es la de la gravedad $g = 9.81\ m/s^2$ se tendrá:

$$F = m_1 g \quad ....(4)$$

Donde:

m_1 es la masa del cuerpo sujeto a la atracción gravitacional de la tierra.

Al sustituir esta expresión en la fórmula (3) se obtiene:

$$m_1 g = G \frac{(m_1)(m_2)}{D^2}$$

Simplificando: $$g = G \frac{m_2}{D^2} \quad ..(5)$$

En la fórmula (5):

m_2 es la masa de la tierra

D es su radio medio

Ejemplo

Determine y cuantifique el efecto que producirá una fuerza de 200 N aplicada a un cuerpo cuya masa es de 8 kg

Solución

Al analizar los datos del problema vemos la conveniencia de aplicar la fórmula de la Segunda ley de Newton:

$$\overline{F} = m\overline{a} \quad .....(2)$$

y como en el enunciado no se especifica la dirección de la fuerza trabajaremos con cantidades escalares.

De la fórmula (2) despejamos:

$$a = \frac{F}{m}$$

Sustituimos:

$$a = \frac{200\ N}{8\ kg} = 25 \frac{N}{kg}$$

Pero:

$$N = \frac{kg \cdot m}{s^2} \quad \therefore\ a = 25 \frac{kg \cdot m}{s^2\ kg}$$

Finalmente:

$$a = 25 \frac{m}{s^2}$$

Ejemplo

Calcular la masa M_T del planeta Tierra, sabiendo que un gramo masa colocado en su superficie es atraido con una fuerza de un gramo. Se conoce además el radio medio de la Tierra, cuyo valor es de 6376.282 km

Solución

Aplicando la fórmula (4), F = mg se tiene:

$$F = 1\ gr \left(\frac{9.81 \times 100\ cm}{s^2}\right) = 981 \frac{gr \cdot cm}{s^2} = 981 dinas$$

Al sustituir este último valor en la fórmula (3) se obtiene:

$$981\ dinas = G \frac{M_T\ m}{D^2} \quad ....(a)$$

Donde:

G y M_T ya se han identificado

m es la masa de 1 gr

D es el radio medio de la Tierra

Reemplazando en la ecuación (a) los datos conocidos:

$$981\ dinas = 6.67 \times 10^{-8} \frac{dina - cm^2}{(gr)^2} \cdot \frac{1\ gr\ (M_T)}{(637628200)^2 cm^2} \quad ...(b)$$

Despejando la masa de la Tierra de la ecuación (b):

$$M_T = \frac{9.81 \times 10^2 \times (6.376)^2 \times 10^{16}}{6.67 \times 10^{-8}}\ gr$$

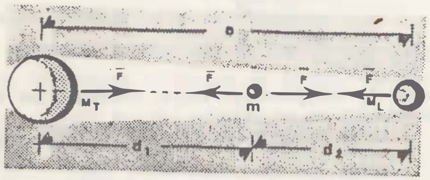
Resultado: $M_T = 5.974 \times 10^{27}$ gr

Ejemplo

Calcular la posición que debe tener entre la Tierra y la Luna un cuerpo de masa m, para que las fuerzas ejercidas sobre él por ambos cuerpos celestes se equilibren. Las masas de la Tierra y la Luna son, respectivamente, $M_T = 597.4 \times 10^{25}$ gr y $M_L = 7.38 \times 10^{25}$ gr

La distancia, centro a centro, entre la Tierra y la Luna es:

$$D = 3.84403 \times 10^{10} \text{ cm}$$



Solución

Se aplica la fórmula (3)

$$F = G\frac{M_T \cdot m}{(d_1)^2} \quad \ldots(a) \quad \text{Atracción terrestre}$$

$$F = G\frac{M_L \cdot m}{(d_2)^2} \quad \ldots(b) \quad \text{Atracción lunar}$$

Como las dos fuerzas de atracción deben ser iguales, el segundo miembro de (a) y de (b) deben serlo también:

$$G\frac{M_T \cdot m}{(d_1)^2} = G\frac{M_L \cdot m}{(d_2)^2}$$

Simplificando:

$$\frac{M_T}{(d_1)^2} = \frac{M_L}{(d_2)^2} \quad \ldots(c)$$

En la figura se observa que:

$$d_1 + d_2 = 3.84 \times 10^{10} \text{ cm}$$

Donde: $d_2 = 3.84 \times 10^{10} - d_1 \quad \ldots(d)$

Sustituyendo (d_2) en (c)

$$\frac{M_T}{(d_1)^2} = \frac{M_L}{(3.84 \times 10^{10} - d_1)^2}$$

Al reemplazar los valores de M_T y M_L y despejando d_1:

$$d_1 = \sqrt{\frac{597.4 \times 10^{25}\ (3.84 \times 10^{10} - d_1)^2}{7.38 \times 10^{25}}}$$

Desarrollando y simplificando esta última ecuación se obtienen:

$d_1 = 3.45952 \times 10^{10}$ cm $= 345{,}952$ km. – Distancia del cuerpo al centro de la Tierra.

$d_2 = 0.38451 \times 10^{10}$ cm $= 38{,}451$ km. – Distancia del cuerpo al centro de la Luna.

Reactivos

I. Relacione la columna de la derecha con la columna de la izquierda, escribiendo dentro del paréntesis la letra que corresponda.

a) Ningún cuerpo es capaz por sí solo de modificar su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que se aplique una fuerza que provoque el cambio.	( )	Primera ley o ley de la inercia
b) A toda acción corresponde una reacción igual, colineal y de sentido contrario.	( )	Segunda ley o ley del movimiento.
c) Dos cuerpos se atraen con una fuerza F cuya magnitud es directamente proporcional al producto de sus masas M y m, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia D que los separa.	( )	Tercera ley o ley de la acción y la reacción.
d) Cuando a un cuerpo se le aplica una fuerza le provoca una variación en su cantidad de movimiento, la cual es proporcional a la magnitud de la fuerza y en su misma dirección.	( )	Ley de la Gravitación Universal.
e) Es la medida cuantitativa de la inercia de los cuerpos.	( )	Fuerza
f) Se genera entre las superficies en contacto de dos cuerpos, uno que se mueve con respecto a otro, modificando su movimiento hasta ponerlo en reposo nuevamente.	( )	Aceleración
g) Es la causa que provoca una variación en la cantidad de movimiento, la cual es proporcional a ella y en su misma dirección.	( )	Masa
h) Es la variación de la velocidad con respecto al tiempo.	( )	Fuerza de fricción

II. Problemas

1. Un bloque de 1600 gr se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa. ¿Qué fuerza horizontal es necesaria para comunicarle una aceleración de 8 cm/seg^2? (Dar la fuerza en unidades absolutas MKS)

2. Dos esferas, cada una de las cuales tiene una masa de 625 kg, tienen sus centros separados por una distancia de 50 cm. Calcular la fuerza de atracción gravitatoria ejercida entre ellas.

UNIDAD II ESTATICA

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno:

Conocerá los principios básicos de la Estática y los aplicará en la solución de los problemas de equilibrio de los sistemas de fuerzas.

INTRODUCCION

En todas las especialidades de Ingeniería es indispensable adquirir el más amplio conocimiento posible de las diversas modalidades en que actúan las fuerzas. El punto de partida para lograrlo es estudiando los principios básicos de la Estática, que se exponen en esta unidad, mediante los cuales se delimitan las condiciones que deben cumplir las fuerzas para que estén en equilibrio.

Como las fuerzas siempre se encuentran aplicadas a los cuerpos, para desarrollar adecuadamente el estudio del equilibrio conviene analizar el concepto de diagrama de cuerpo libre, así como las características de los principales tipos de apoyo en el plano.

MODULO 3 PRINCIPIOS BASICOS DE LA ESTATICA Y SISTEMAS DE FUERZAS

CUADRO SINOPTICO

PRINCIPIOS
- DEL PARALELOGRAMO → TRIANGULO DE FUERZAS / → POLIGONO DE FUERZAS
- DE EQUILIBRIO
- DE LA ACCION Y LA REACCION
- DE ADICION DE SISTEMAS EQUILIBRADOS
- DE TRANSMISIBILIDAD

COMPOSICION DE FUERZAS → TRATAMIENTO ANALITICO
DESCOMPOSICION DE FUERZAS → TRATAMIENTO ANALITICO
MOMENTOS DE LAS FUERZAS → TRATAMIENTO ANALITICO
MOMENTOS DE LAS FUERZAS:
- RESPECTO A UN EJE
- RESPECTO A UN PUNTO
- MOMENTO DE UN PAR

SISTEMAS DE FUERZAS
- → EN EL ESPACIO → GENERALES / PARALELOS / CONCURRENTES
- → EN EL PLANO → GENERALES / PARALELOS / CONCURRENTES
- → EN LA RECTA → COLINEAL

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Identificará los principios básicos de la Estática.
2. Resolverá problemas de composición y descomposición de fuerzas.
3. Calculará la magnitud y el sentido del momento de una fuerza con respecto a un punto y el momento de un par de fuerzas.
4. Clasificará los sistemas de fuerzas.

3.1 PRINCIPIOS BASICOS DE LA ESTATICA

Estática es la rama de la Mecánica que estudia el equilibrio de los sistemas de fuerzas que actúan sobre los cuerpos.

El estudio de la Estática se basa en los cinco principios básicos siguientes:

3.1.1 PRINCIPIO DEL PARALELOGRAMO

Si sobre un cuerpo actúan dos fuerzas concurrentes $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$, el efecto externo que le producen es equivalente al de una sola fuerza $\overline{R}$ que coincide con la diagonal del paralelogramo cuyos lados son las fuerzas $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$. Véase la figura 14.

Figura 14

En donde:

$\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ son las fuerzas aplicadas en "A", que forman un ángulo α entre sí.

$\overline{R}$ es la resultante o diagonal del paralelogramo ilustrado, medida a la misma escala.

Debido a que la diagonal del paralelogramo divide a éste en dos triángulos iguales puede elegirse cualquiera de ellos para obtener la resultante. Esta simplificación se conoce como Triángulo de Fuerzas, según se ilustra en la figura 15.

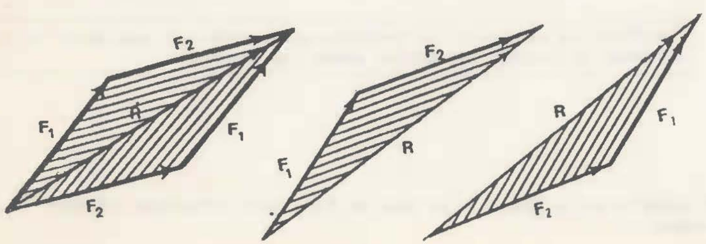


Figura 15

Del resultado anterior se deduce la siguiente regla:

> Para obtener la resultante de dos fuerzas concurrentes se traza una a continuación de la otra, conservando sus direcciones y adoptando cierta escala para sus magnitudes; al unir el punto inicial de la primera con el final de la segunda se encuentra la resultante buscada.

En la figura 15 se observa que puede elegirse cualquiera de los triángulos de fuerzas para conocer la resultante. En uno de ellos la fuerza inicial será $\overline{F}_2$ y la final $\overline{F}_1$, mientras que en el otro la fuerza inicial será $\overline{F}_1$ y la final $\overline{F}_2$; esto demuestra que la suma de las fuerzas es conmutativa.

Cuando son más de dos las fuerzas que actúan, el problema se resuelve con el Polígono de Fuerzas, aplicable para encontrar la resultante de un sistema constituido por n fuerzas concurrentes. Consiste en colocarlas una a continuación de la otra de manera que esa resultante se obtenga al unir el origen de la primera fuerza con el extremo de la última.

El resultado es independiente del orden de colocación de las fuerzas.

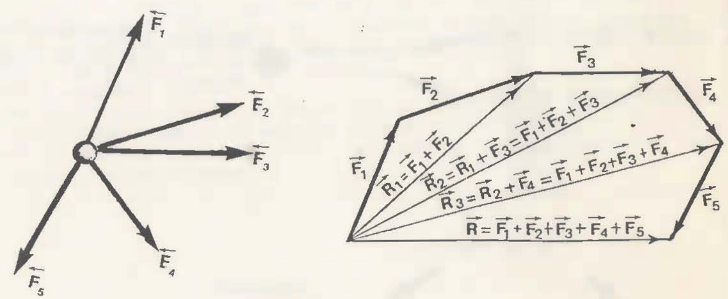


Figura 16

Como puede observarse en la figura 16, el polígono de fuerzas no es otra cosa que la generalización de la ley del triángulo.

Ejemplos

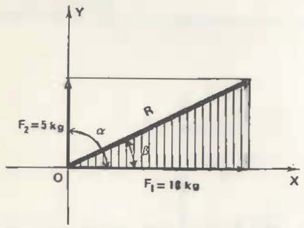
1. Obtenga la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas $\bar{F}_1$ y $\bar{F}_2$, concurrentes en el punto O, aplicando el Principio del Paralelogramo.

Datos:

$F_1 = 10$ Kg

$F_2 = 5$ Kg

$\alpha = 90°$



Solución

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 11.18 \text{ Kg}$$

$$\beta = \text{ang tan } \frac{5}{10} = 26° 56'$$

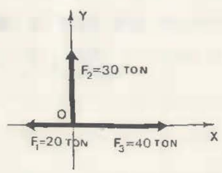
2. Obtenga la magnitud y dirección de la resultante de las tres fuerzas mostradas en la figura, utilizando el Polígono de Fuerzas.

Datos:

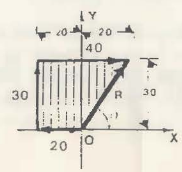
$F_1 = 20$ Ton

$F_2 = 30$ Ton

$F_3 = 40$ Ton



Solución



$$R = \sqrt{(40 - 20)^2 + 30^2} = 36.055 \text{ Ton}$$

$$\alpha = \text{ang tan } \frac{30}{20} = 56° 31'$$

3.1.2 PRINCIPIO DE EQUILIBRIO

> Para que dos fuerzas estén en equilibrio es necesario y suficiente que sean iguales, colineales y de sentidos contrarios.

Figura 17

3.1.3 PRINCIPIO DE LA ACCION Y LA REACCION

Este principio es en realidad la Tercera Ley de Newton estudiada con anterioridad, y se enuncia a continuación:

> "A toda acción corresponde una reacción igual, colineal y de sentido contrario".

3.1.4 PRINCIPIO DE ADICION DE SISTEMAS EQUILIBRADOS

> "Los efectos externos que un sistema de fuerzas produce sobre un cuerpo no cambian si se le agrega o elimina cualquier otro sistema equilibrado".

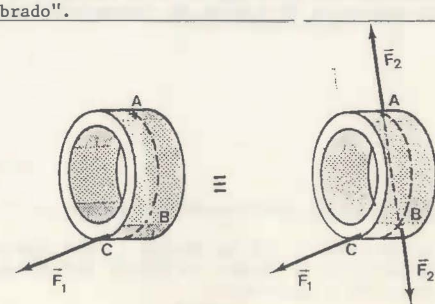


Figura 18

3.1.5 PRINCIPIO DE TRANSMISIBILIDAD

El principio de transmisibilidad establece que: "Los efectos externos producidos por una fuerza, sobre un cuerpo rígido, no cambian si ésta se aplica en cualquier punto de su línea de acción"

Este principio puede considerarse como teorema ya que se deduce de los anteriores.

Supóngase la fuerza $\bar{F}$ aplicada en el punto A del cuerpo mostrado en la figura 19, la cual produce una aceleración que no se altera al agregar en B un sistema equilibrado ($\bar{F}$ - $\bar{F}$).

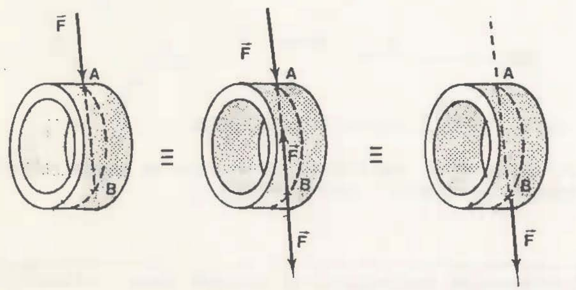


Figura 19

En esta figura se observa que la fuerza $\bar{F}$ aplicada en A y la fuerza $-\bar{F}$ aplicada en B forman otro sistema en equilibrio que puede eliminarse, quedando únicamente la fuerza $\bar{F}$ aplicada en B, la cual no cambia la aceleración ocasionada. Esto demuestra el teorema de transmisibilidad.

3.2 TRATAMIENTO ANALITICO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

Tal como se expresó en el punto 1.2.2 del Módulo 1, una fuerza se representa gráficamente por medio de un vector, es decir, por un segmento de recta con magnitud, dirección y sentido.

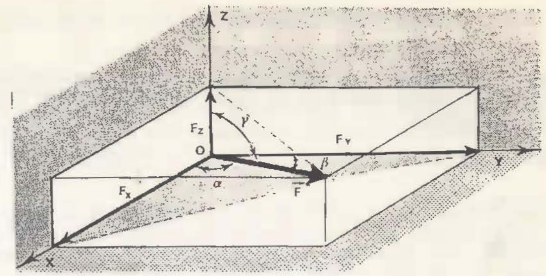


Figura 20

En la figura anterior $\bar{F}$ es una fuerza que forma con los ejes coordenados x, y, z los ángulos α, β, γ, respectivamente. Los cosenos de dichos ángulos reciben el nombre de cosenos directores porque fijan la dirección de la línea de acción de la fuerza $\bar{F}$.

Las proyecciones ortogonales de $\bar{F}$ en dichos ejes son:

$$F_x = F \cos \alpha$$

$$F_y = F \cos \beta$$

$$F_z = F \cos \gamma$$

El vector fuerza se obtiene como la suma vectorial de estas componentes.

$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y + \bar{F}_z$$

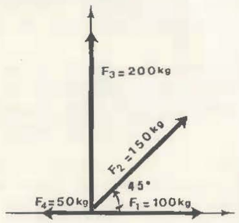
3.3 COMPOSICION DE FUERZAS

Se llama composición de fuerzas al proceso mediante el cual se obtiene la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes. Si el sistema está constituido por dos fuerzas concurrentes se aplica el principio del paralelogramo y si son más de dos se utiliza el polígono de fuerzas.

Otro de los métodos aplicables en la determinación de la resultante de un sistema de n fuerzas concurrentes es el de las proyecciones, el cual consiste en sustituir cada una de las fuerzas de dicho sistema por sus proyecciones ortogonales. Cuando un sistema de n fuerzas se encuentra contenido en un plano, se obtendrá un sistema de $2n$ fuerzas que, al sumarse algebraicamente las de cada eje, se tendrá un nuevo sistema formado por dos fuerzas (ΣF_x, ΣF_y), que son las componentes ortogonales de la resultante final.

Ejemplo

Dadas las fuerzas F_1, F_2, F_3 y F_4 que se indican en la figura, obtenga la magnitud y la dirección de su resultante.



Solución

Este problema se resuelve aplicando el método de las proyecciones, para lo cual es conveniente usar la siguiente tabulación:

FUERZA	MAGNITUD (Kg)	Cos α	F_x = F cos α (Kg)	Sen α	F_y = F sen α (Kg)
F_1	100.00	1.000	100.00	0.000	0.00
F_2	150.00	0.707	106.05	0.707	106.05
F_3	200.00	0.000	0.00	1.000	200.00
F_4	50.00	-1.000	-50.00	0.000	0.00
			ΣF_x = 156.05		ΣF_y = 306.05

$$R = \sqrt{\Sigma Fx^2 + \Sigma Fy^2}$$

$$R = \sqrt{(156.05)^2 + (306.05)^2} = 343.49 \text{ kg}$$

$$\alpha_R = \text{ang tan } \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$$

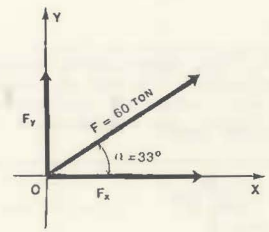
$$\alpha_R = \text{ang tan } \frac{306.05}{156.05} = \text{ang tan } 1.96 = 62.98 = 62°58'48''$$

3.4 DESCOMPOSICION DE FUERZAS

La descomposición de fuerzas consiste en determinar un sistema de dos o más fuerzas concurrentes cuyos efectos externos, sobre el cuerpo en el que actúan, sean iguales a los que ocasiona una sola fuerza de características conocidas. Este proceso es inverso al de la composición.

Ejemplo

Descomponga la fuerza indicada en la figura, en sus dos componentes ortogonales.



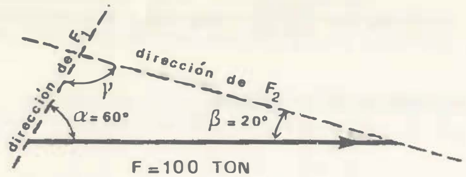
Solución

$$F_x = F \cos \alpha = 60 \ (\cos 33°) = 60 \ (0.838) = 50.32 \text{ Ton}$$

$$F_y = F \text{ sen } \alpha = 60 \ (\text{sen } 33°) = 60 \ (0.544) = 32.68 \text{ Ton}$$

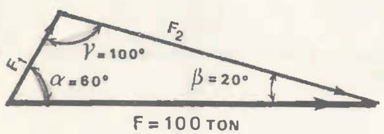
Ejemplo

Descomponga la fuerza de 100 Ton mostrada en la figura, en dos direcciones tales que formen con el eje de las abscisas los ángulos que se indican.



Solución

Para visualizar la forma en que deben estar las fuerzas se dibuja un esquema con sus vectores representativos:



Se sabe que:

$$\hat{\gamma} = 180° - 60° - 20° = 100°$$

Aplicando la ley de los senos:

$$\frac{100}{\text{sen } 100°} = \frac{F_1}{\text{sen } 20°} = \frac{F_2}{\text{sen } 60°} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

De la expresión (1) se obtienen las siguientes ecuaciones, donde ya se despejó la incógnita:

$$F_1 = 100 \frac{\text{sen } 20°}{\text{sen } 100°} = 100 \frac{0.342}{0.985} = 34.72 \text{ Ton}$$

$$F_2 = 100 \frac{\text{sen } 60°}{\text{sen } 100°} = 100 \frac{0.866}{0.985} = 87.92 \text{ Ton}$$

3.5 MOMENTO DE LAS FUERZAS

Se define como el momento de una fuerza con respecto a un eje, a la tendencia al giro que la fuerza ejerce en torno a dicho eje.

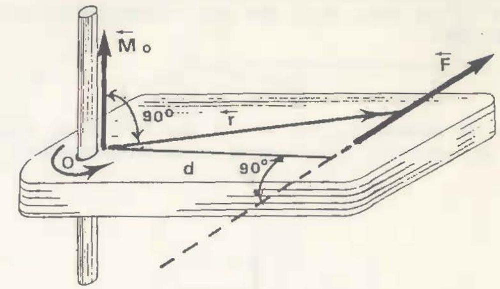


Figura 21

En la figura 21 puede observarse que la magnitud del momento depende del tamaño y de la dirección de la fuerza, así como de la distancia que hay entre su línea de acción y el eje. Obviamente, esta distancia corresponde a la perpendicular que va desde el punto "O" del eje hasta un punto de la línea de acción de la fuerza.

3.4.1 MODELO MATEMATICO DEL MOMENTO

Matemáticamente se establece el momento de una fuerza respecto a un punto "O", como el producto vectorial del vector de posición $\bar{r}$ por el vector fuerza $\bar{F}$; esto es:

$$\bar{M}o = \bar{r} \times \bar{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

El producto vectorial del segundo miembro de la ecuación (a) indica que $\bar{M}o$ es el momento de la fuerza $\bar{F}$ respecto al punto "O", y corresponde a un vector cuyas características son:

- Magnitud.......... $|\bar{M}o| = Fd$
- Dirección........ $\bar{M}o$ es perpendicular al plano definido por $\bar{F}$ y d
- Sentido.......... El vector $\bar{M}o$ entra o sale del plano definido por $\bar{F}$ y d, de acuerdo con la regla del sentido de avance del tornillo de rosca derecha, como se ilustra en la figura 22.

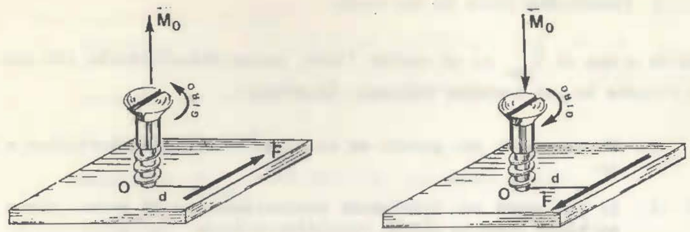


Figura 22

La ecuación (a) es aplicable tanto para el espacio tridimensional como para el plano. No obstante, en este último caso puede optarse por un tratamiento analítico del momento de una fuerza en lugar del vectorial.

En efecto, cuando se trabaja en el plano, el momento de la fuerza $\bar{F}$ con respecto a un punto "O" es el producto de la magnitud de la fuerza por su "brazo", es decir, por la distancia de "O" a la línea de acción de la fuerza, tal como se indica en la figura 23.

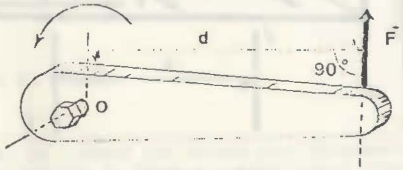
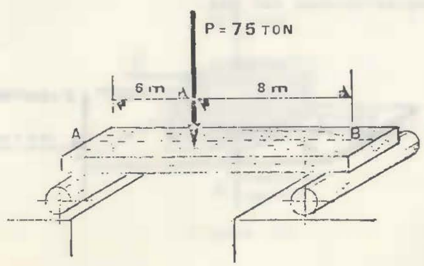


Figura 23

Ejemplo

En la viga $\overline{AB}$, de peso despreciable, se aplica la carga P de 75 Ton, como se muestra en la figura. Calcular la magnitud y el sentido de los momentos de la carga, con respecto a cada uno de los apoyos A y B de la viga.

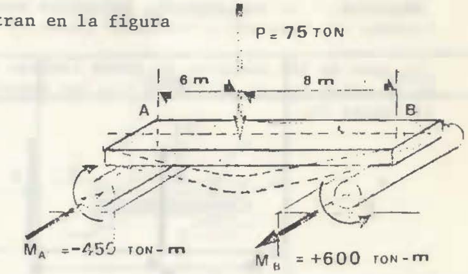


Solución

$$M_A = 75 \text{ Ton} \times 6 \text{ m} = 450.0 \text{ Ton} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 75 \text{ Ton} \times 8 \text{ m} = 600.0 \text{ Ton} \cdot \text{m}$$

Los resultados se ilustran en la figura siguiente:



Para determinar el sentido de los momentos se sigue la regla del sentido del tornillo de rosca derecha ya mencionada; pero el signo será positivo o negativo de acuerdo a los ejes coordenados utilizados.

En el plano, la convención más usual es la que establece al sentido de las manecillas del reloj como negativo y el caso contrario como positivo.

3.6 PARES DE FUERZAS

Se llama par de fuerzas, o simplemente "par", al conjunto de dos fuerzas de igual magnitud, de sentidos contrarios, de igual dirección, separadas una determinada distancia y que actúen simultáneamente sobre un cuerpo, provocándole una rotación. Véase la figura 24.

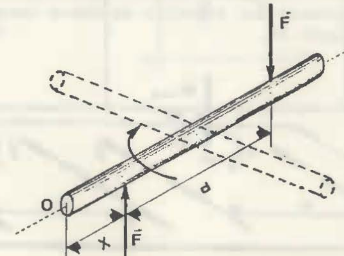


Figura 24

3.6.1 REPRESENTACION VECTORIAL

Un par se representa por medio de un vector libre cuyas características son las siguientes:

Magnitud.- La magnitud del par es la suma de los momentos de ambas fuerzas con respecto a cualquier punto de su plano.

La suma de los momentos de ambas fuerzas es igual al producto de una de ellas por la distancia que las separa, tal como se indica en la figura 25.

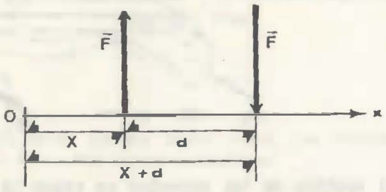


Figura 25

De la figura anterior se deduce que:

$$\Sigma Mo = + F(x) - F(x + d) = + F(x) - F(x) - Fd$$

$$\therefore \; M_{par} = - Fd$$

Donde el signo (-) indica que el giro es en el sentido de las manecillas del reloj.

Dirección.- El vector $\bar{M}_{par}$ es perpendicular al plano que contiene a las fuerzas.

Sentido.- El vector $\bar{M}_{par}$ entra o sale del plano, según la regla del sentido de avance del tornillo de rosca derecha, tal como se ilustra en la figura 26.

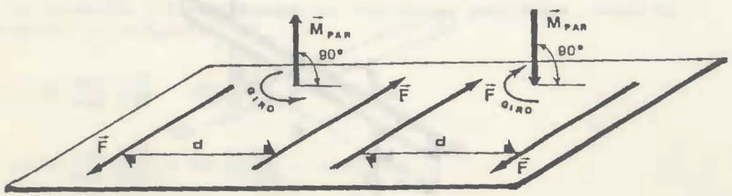


Figura 26

3.6.2 TRANSFORMACIONES DE LOS PARES

Debido a que el $\bar{M}_{par}$ es un vector libre, puede transformarse sin que cambie ninguna de sus características. En efecto:

1. El par puede ser girado en su plano o en planos paralelos a éste.
2. El par puede ser trasladado paralelamente a sí mismo, tanto en su plano como en planos paralelos a éste.
3. El par puede variar simultáneamente la magnitud de las fuerzas y la separación entre ellas, siempre y cuando el producto F • d permanezca constante y no cambie su plano ni el sentido del giro. Véase la figura 27.

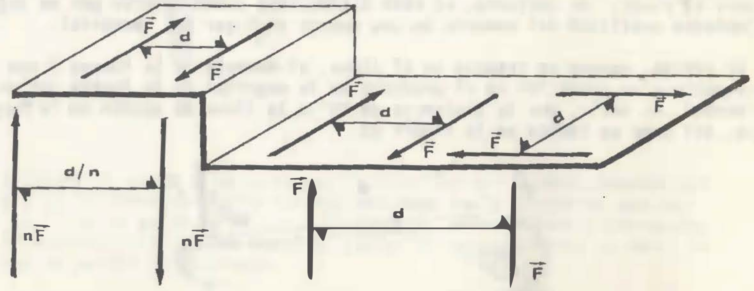


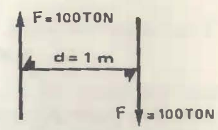
Figura 27

Ejemplo

En un plano se tiene un par cuyas fuerzas son de 100 Ton cada una y están separadas una de la otra 1 m. Calcule la magnitud y la dirección de este par. Obtenga después la magnitud de las fuerzas, de tal modo que la separación entre ellas sea de 2.5 m, sin que se modifiquen las características del par.

Solución

Sea el par inicial el siguiente:



Sus características son:

Magnitud: $M_{par} = F \cdot d = 100$ Ton (1 m) = 100 Ton · m

Sentido: El de las manecillas del reloj.

El nuevo par será:

Magnitud: M_{par} = 100 Ton · m, con igual sentido

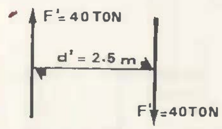
Entonces: $M_{par} = F'd'$ ....(b)

Pero: $d' = 2.50$ m

Despejando F' de la ecuación (b):

$$F' = \frac{M_{par}}{d'} = \frac{100 \text{ Ton} \cdot \text{m}}{2.50 \text{ m}} = 40.0 \text{ Ton}$$

El resultado es:



3.7 SISTEMAS DE FUERZAS

> Al conjunto de fuerzas que actúen simultáneamente sobre un cuerpo se le denomina Sistema de Fuerzas o simplemente "Sistema".

Como ejemplo puede mencionarse el caso de un cuerpo cuyo peso es W, colocado sobre una superficie rugosa, el cual es empujado con una fuerza. Instantáneamente se genera la fuerza de fricción Fr que se opone al empuje y, por su parte, el peso W provoca la fuerza de reacción N denominada normal. Obsérvese la figura 28.

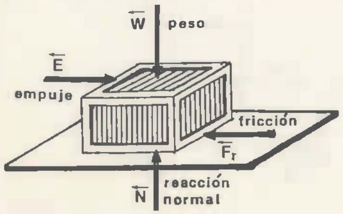
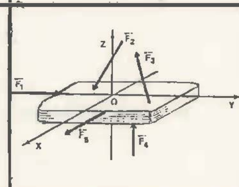
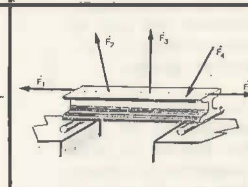
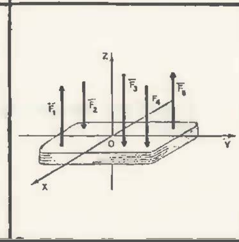
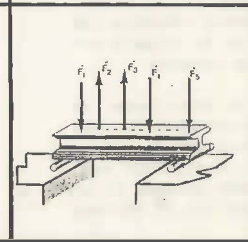
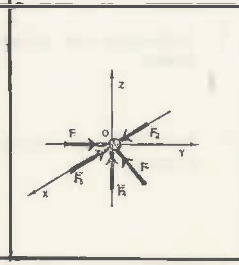
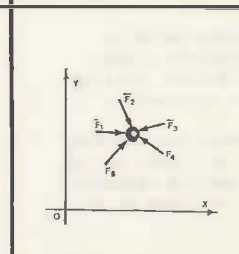
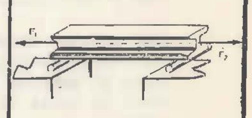


Figura 28

Tomando en cuenta la ubicación de las fuerzas y la configuración del conjunto, los sistemas pueden clasificarse según se expone en el siguiente cuadro:

SISTEMA DE FUERZAS

	ESPACIO	PLANO	RECTA
GENERAL			
PARALELO			
CONCURRENTE			 COLINEAL

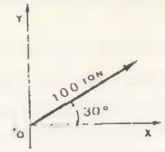
Reactivos

I. Relacione la columna de la izquierda con la de la derecha.

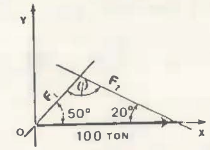
a) Es la rama de la Mecánica que estudia el equilibrio de los sistemas de fuerzas que actúan sobre los cuerpos.	( ) Polígono de fuerzas
b) Si sobre un cuerpo actúan dos fuerzas concurrentes, el efecto externo que le producen es equivalente al ocasionado por una sola fuerza correspondiente a la diagonal del paralelogramo.	( ) Estática
c) Para encontrar la resultante de dos fuerzas concurrentes se coloca una a continuación de la otra, conservando su magnitud y dirección, de tal forma que la resultante sea la fuerza obtenida al unir el origen de la primera con el extremo de la segunda.	( ) Ley del triángulo
d) Para encontrar la resultante de "n" fuerzas concurrentes se colocan una a continuación de otra, de manera que la resultante sea la fuerza obtenida al unir el origen de la primera con el extremo de la última.	( ) Principio de equilibrio
e) Para que dos fuerzas estén en equilibrio es necesario y suficiente que sean iguales, colineales y de sentidos contrarios.	( ) Principio del paralelogramo
f) Los efectos externos que una fuerza produce sobre un cuerpo no cambian si ésta se desliza aplicándose a lo largo de su línea de acción.	( ) Principio de transmisibilidad
g) A toda acción corresponde una reacción igual, colineal y de sentido contrario.	( ) Principio de adición de sistemas equilibrados
h) Los efectos externos que un sistema de fuerzas produce sobre un cuerpo no cambian si se le agrega o se le resta cualquier otro sistema equilibrado.	( ) Principio de la acción y la reacción

II Resuelva los siguientes problemas.

1. Descomponer la fuerza indicada en las direcciones ortogonales propuestas.



2. Descomponer la fuerza mostrada en la figura según las direcciones propuestas, tomando en cuenta los ángulos indicados.

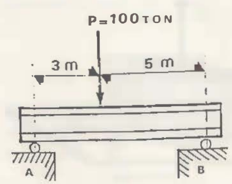


3. Determinar la resultante del siguiente sistema de fuerzas concurrentes.

$26\ kg_f\ 10^\circ$, $39\ kg_f\ 114^\circ$; $63\ kg_f\ 183^\circ$; $57\ kg_f\ 261^\circ$

4. Un hombre que pesa 80 kg_f está en pie sobre una tabla que forma un ángulo de 20° con la horizontal. ¿Cuál es la componente del peso del hombre a) normal (perpendicular) a la tabla y b) paralela a la misma?

5. Calcule la magnitud y el sentido de los momentos de la carga P de 100 Ton de magnitud con respecto a los apoyos A y B de la viga indicada.



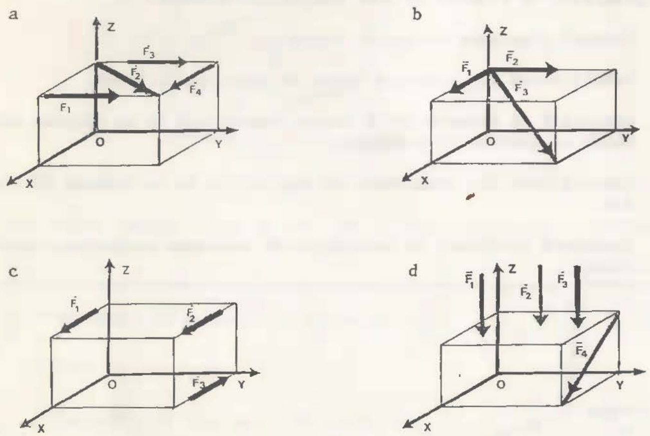
III. Identifique los sistemas de fuerzas presentados en las figuras con los enunciados que correspondan.

1. Sistema de fuerzas concurrentes en el espacio..............( )

2. Sistema de fuerzas paralelas en el espacio.................( )

3. Sistema de fuerzas general en el plano.....................( )

4. Sistema de fuerzas general en el espacio...................( )



MODULO 4 EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

CUADRO SINOPTICO

DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE	Acciones Reacciones
DIVERSOS TIPOS DE APOYO	Apoyo libre Articulación plana Empotramiento plano
SUMAS DE MOMENTOS DE LAS FUERZAS DE UN SISTEMA	Teorema de Varignon Teorema de momentos
EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS	Ecuaciones vectoriales generales de equilibrio Ecuaciones escalares generales de equilibrio Ecuaciones escalares de equilibrio en el plano Solución de problemas de equilibrio

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

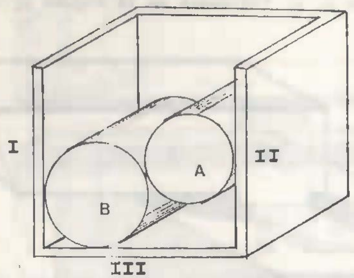
1. Trazará diagramas de cuerpo libre.
2. Identificará los diversos tipos de apoyo en el plano.
3. Calculará el momento de la fuerza resultante de un sistema, aplicando el teorema de momentos.
4. Identificará las ecuaciones de equilibrio de un sistema de fuerzas.
5. Resolverá problemas de equilibrio de sistemas de fuerzas en el plano.

4.1 DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

El diagrama de cuerpo libre es la representación esquemática del cuerpo en estudio o de una parte de él, así como de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento considerado.

Ejemplo

El depósito indicado en la figura, contiene los dos cilindros A y B. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los cilindros, así como el del conjunto A y B. Despréciense las fuerzas de fricción entre los elementos y entre éstos y las paredes del depósito.

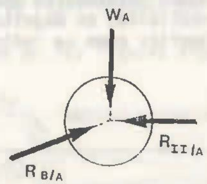


En el diagrama de cuerpo libre de "A", de la figura mostrada a continuación, intervienen las siguientes fuerzas:

$R_{II/A}$ = Reacción de la pared II sobre "A"

W_A = Peso del cilindro "A"

$R_{B/A}$ = Reacción del cilindro "B" sobre "A"



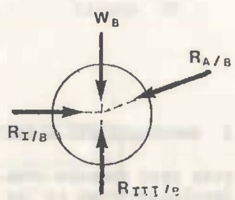
En el diagrama de cuerpo libre del cilindro "B", de la figura siguiente las fuerzas que intervienen son:

$R_{A/B}$ = Reacción de "A" sobre "B"

W_B = Peso del cilindro "B"

$R_{I/B}$ = Reacción de la pared I

$R_{III/B}$ = Reacción del piso sobre el cilindro B.



En la siguiente figura, las fuerzas representadas en el diagrama de cuerpo libre del conjunto son:

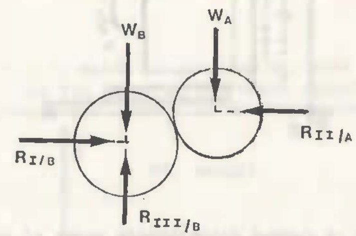
$R_{II/A}$ = Reacción de la pared II sobre "A"

$R_{III/B}$ = Reacción del piso sobre "B"

W_A = Peso del cilindro "A"

W_B = Peso del cilindro "B"

$R_{I/B}$ = Reacción de la pared I sobre "B"



4.2 TIPOS DE APOYO

> Un apoyo es un dispositivo mediante el cual se transmiten las fuerzas que actúan sobre un cuerpo a otro que le sirve de soporte.

En el plano los tres tipos de apoyo más comunes son:

Apoyo libre

Articulación plana

Empotramiento plano

Para distinguir los diferentes tipos de apoyo es conveniente saber lo que se entiende por grados de libertad y de restricción del apoyo.

Se llama grado de libertad de un apoyo al número de posibilidades de movimiento que dicho apoyo permite a la pieza sustentada y el grado de restricción es el número de posibilidades de movimiento que le son impedidos.

En el plano, los movimientos que puede tener un cuerpo son los que se indican en la figura 29.

Figura 29

4.2.1 APOYO LIBRE

Se logra al soportar un cuerpo directamente sobre el apoyo, impidiéndole el movimiento en la dirección perpendicular al plano del apoyo, permitiéndole el desplazamiento en la otra dirección ortogonal, así como la rotación en torno del apoyo.

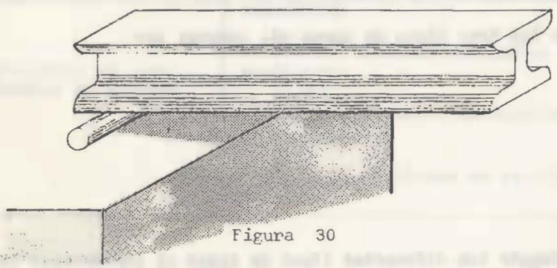


Figura 30

En este tipo de apoyo hay un grado de restricción, por lo tanto se genera una sola fuerza que es la que impide el movimiento vertical hacia abajo.

4.2.2 ARTICULACION PLANA

Este tipo de apoyo tiene dos grados de restricción, por lo tanto se generan dos fuerzas que impiden los desplazamientos en las direcciones de los ejes coordenados x, y, indicados en la figura 31.

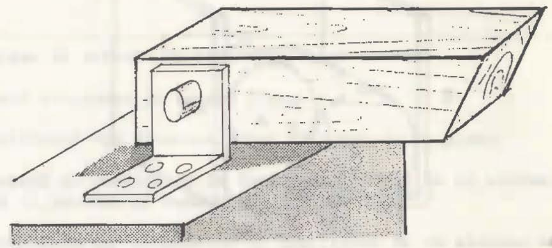


Figura 31

Debe aclararse que en un problema donde intervenga un apoyo articulado pueden presentarse como incógnitas las dos componentes Rx, Ry o bien su resultante, en magnitud y dirección; es decir, siempre aparecerán dos incógnitas como se indica en la figura 32.

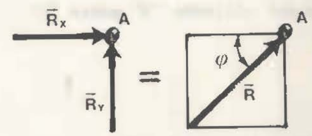


Figura 32

4.2.3 EMPOTRAMIENTO PLANO

En este caso existen tres grados de restricción, es decir, se impiden los desplazamientos en las direcciones vertical y horizontal, así como la rotación dentro del apoyo.

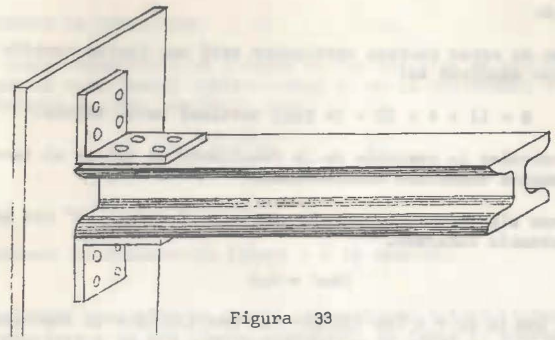
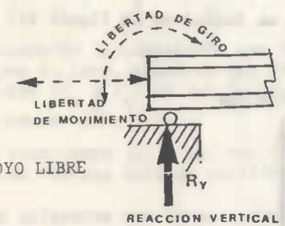


Figura 33

De lo expuesto en los tres casos anteriores se observa que, en el plano, por cada restricción existe un elemento mecánico (fuerza o momento) que provoca esa restricción.

En los problemas de equilibrio esos elementos mecánicos son en general las incógnitas, por lo que se puede decir que el número de incógnitas, en un problema de equilibrio, es igual al número de restricciones en los apoyos del cuerpo considerado.

A continuación se simbolizan los distintos apoyos en las figuras siguientes:



APOYO LIBRE

Figura 34

ARTICULACION PLANA

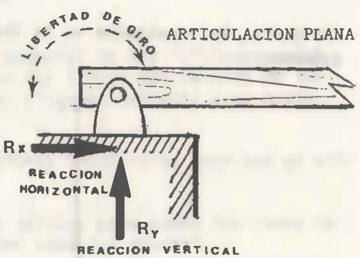
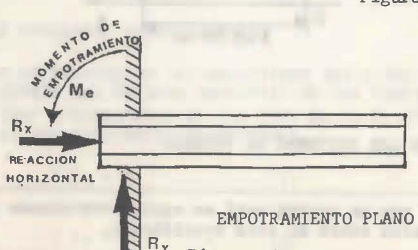


Figura 35



EMPOTRAMIENTO PLANO

Figura 36

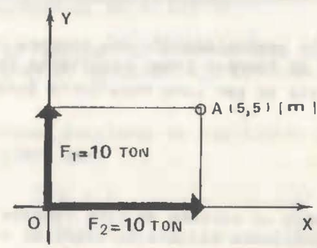
4.3 TEOREMA DE VARIGNON

El teorema de Varignon, demostrado inicialmente por el célebre matemático francés del mismo nombre, es de gran importancia en el estudio de la Estática y se enuncia de la siguiente forma:

> "La suma algebraica de los momentos de dos fuerzas concurrentes, con respecto a cualquier punto de su plano, es igual al momento de la resultante de ellas con respecto al mismo punto".

Ejemplo

Las fuerzas F_1 y F_2 están alojadas en los ejes coordenados x, y, respectivamente. Con los datos de la figura calcule el momento de la resultante R respecto al punto "A" de coordenadas (5, 5) m.



Solución

Considerando como negativo el sentido del giro de las manecillas del reloj, al aplicar el teorema de Varignon se tiene:

$$\Sigma M_A F = M_A R$$

O sea:

$$-10 \text{ Ton } (5m) + 10 \text{ Ton } (5\ m) = R(d)$$

Donde:

d = Brazo de la resultante o distancia del punto "A" a la línea de acción de R.

R = Magnitud de la resultante.

Efectuando las operaciones se tiene:

$$-50 \text{ Ton} \cdot m + 50 \text{ Ton} \cdot m = R(d) \quad \therefore\ 0 = Rd;\ d = \frac{0}{R} = 0$$

Lo que significa que la resultante pasa por "A" y, por lo tanto, su momento es nulo.

4.4 TEOREMA DE MOMENTOS

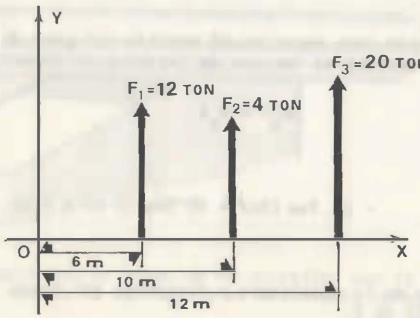
Este teorema establece que:

> el momento de la fuerza resultante de un sistema, respecto a un punto cualquiera, es igual a la suma de los momentos de las fuerzas del sistema respecto a ese punto.

El teorema anterior es la generalización del teorema de Varignon y será válido cuando el sistema de fuerzas tenga resultante única o esté en equilibrio, o sea que no exista un par como resultante única de dicho sistema.

Ejemplo

En la figura se muestra un sistema de tres fuerzas paralelas al eje YY". Con los datos indicados calcule la magnitud y la posición de la resultante del sistema.



Solución

La suma de estas fuerzas verticales será una fuerza también vertical, cuya magnitud es:

R = 12 + 4 + 20 = 36 Ton, vertical hacia arriba.

Para calcular la posición de la resultante se aplica el teorema de los momentos enunciado anteriormente.

Conviene elegir como centro de momentos al origen "O" del sistema de referencia indicado.

$$\Sigma MoF = MoR$$

$$12 \text{ Ton } (6 \text{ m}) + 4 \text{ Ton } (10 \text{ m}) + 20 \text{ Ton } (12 \text{ m}) = 36 \text{ Ton } (\bar{x} \text{ m})$$

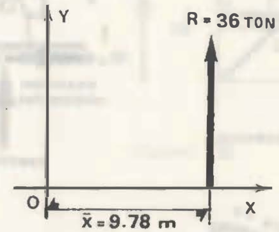
Donde:

$\bar{x}$ = Expresa la posición de la resultante respecto al origen.

Efectuando operaciones:

$$\bar{x} = \frac{72 + 40 + 240}{36} = \frac{352}{36} = 9.78 \text{ m}$$

Es decir, la resultante es la fuerza que se indica en la figura siguiente.



4.5 EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

> Se considera que un cuerpo está en equilibrio cuando el sistema de fuerzas que actúa sobre él está equilibrado.

4.5.1 CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Para que un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas esté en equilibrio se requiere que no experimente aceleraciones ni en su movimiento lineal ni en su movimiento angular, es decir que:

$$\bar{a} = \bar{\alpha} = 0$$

Donde:

$\bar{a}$ Representa la aceleración lineal y $\bar{\alpha}$ la angular.

Para que esta doble condición se cumpla es necesario que el sistema de fuerzas, al reducirse a su más simple expresión, no tenga ni fuerza resultante ni momento resultante.

Estas condiciones se expresan matemáticamente de la forma siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = 0 \qquad \ldots(a)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i = 0 \quad \ldots(b)$$

La ecuación (a) establece que la suma vectorial de las "i" fuerzas del sistema es cero, mientras que la ecuación (b) indica que la suma de los momentos $(\bar{r}_i \times \bar{F}_i)$ de las "i" fuerzas del sistema, respecto a un punto, es también nula.

Las ecuaciones (a) y (b) son las condiciones vectoriales para que un sistema de fuerzas esté en equilibrio.

Debe aclararse que estas ecuaciones son válidas para todos los casos de sistemas de fuerzas, hasta para un sistema espacial general.

4.5.2 CONDICIONES ESCALARES DE EQUILIBRIO

Estas condiciones se deducen de las ecuaciones (a) y (b).
La ecuación (a) expresa que la suma vectorial de las fuerzas es nula, por lo que no existen proyecciones en los ejes X, Y, Z, lo cual se expresa escalarmente con las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma\, Fx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\Sigma\, Fy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\Sigma\, Fz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Asimismo, la ecuación (b) indica que no hay momentos respecto a los ejes coordenados cartesianos, o sea:

$$\Sigma\, Mx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\Sigma\, My = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\Sigma\, Mz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Las seis ecuaciones analíticas escritas anteriormente son las condiciones escalares de equilibrio de un sistema general tridimensional.

4.5.3 CONDICIONES ESCALARES DE EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS PLANOS

En este caso las ecuaciones 1 a 6 se reducen en número debido a que todas las fuerzas del sistema están alojadas en un solo plano, que puede ser el X, Y.

Para esta posibilidad, de las ecuaciones de proyecciones sólo quedan dos ($\Sigma Fx = 0 = \Sigma Fy$), ya que la ecuación $\Sigma Fz = 0$ se elimina por no existir fuerzas que se proyecten en el eje ZZ'

De las ecuaciones de momentos se eliminan dos, ($\Sigma Mx = 0 = \Sigma My$), ya que sólo existen rotaciones en torno del eje ZZ' o de cualquier otro eje paralelo a él.

Así, las tres ecuaciones escalares de equilibrio que se consideran para un sistema general plano son:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, Fx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \Sigma\, Fy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ \Sigma\, Mz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{array}\right| \; (A)$$

En forma análoga se establecen las ecuaciones de equilibrio de los sistemas paralelos y concurrentes en el plano, así como de los colineales, según los grupos de ecuaciones B, C y D que se indican a continuación:

$\Sigma Fx = 0$; $\Sigma Mz = 0$	(B)	Ecuaciones escalares de equilibrio de un sistema plano paralelo al eje XX'
$\Sigma Fx = 0$; $\Sigma Fy = 0$	(C)	Ecuaciones escalares de equilibrio de un sistema plano concurrente en "O"
$\Sigma Fx = 0$	(D)	Ecuación escalar de equilibrio de un sistema de fuerzas colineales, alojadas en el eje XX'

Ahora bien, cualesquiera que sean las condiciones de equilibrio que se presenten en un problema, para resolverlo conviene adoptar un procedimiento mediante el cual se eviten en lo posible los errores. A continuación se propone un procedimiento para resolver los problemas de equilibrio.

a) Determinación de los datos y de las incógnitas del problema.

b) Trazo del diagrama de cuerpo libre, en el cual deben dibujarse todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo considerado, tanto las que se conocen como las desconocidas.

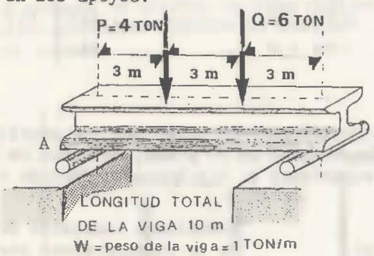
c) Clasificación del sistema de fuerzas y presentación de las ecuaciones de equilibrio correspondientes.

d) Observación entre el número de ecuaciones y el de incógnitas, el primero de los cuales debe ser mayor o igual que el segundo para que el problema tenga solución estática. En caso contrario el problema sólo podrá resolverse aplicando ecuaciones adicionales que serán obtenidas de otras ciencias como la Resistencia de Materiales, la Elasticidad, etc.

e) Resolución del sistema de ecuaciones.

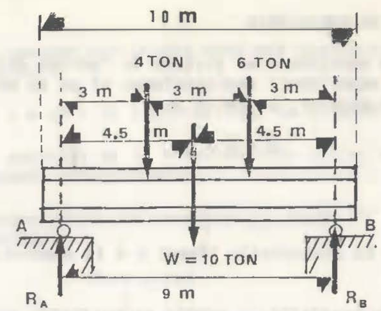
Ejemplos

1. La viga AB mostrada en la figura está libremente apoyada en sus extremos; con los datos que ahí se indican calcúlense las reacciones en los apoyos.



Solución

Diagrama de cuerpo libre, incluyendo las reacciones:



W = peso total de la viga = $1.0 \frac{Ton}{m} \times 10$ m = 10 Ton (localizado a la mitad de la viga)

En un sistema de fuerzas paralelas son dos las ecuaciones escalares de equilibrio ($\Sigma Fy = 0$, $\Sigma M_A = 0$) y dos las incógnitas: R_A y R_B

$$\Sigma M_A = 0: R_A (0) - 4(3) - 10(4.5) - 6(6) + R_B(9) = 0$$

Despejando:

$$R_B = \frac{12 + 45 + 36}{9} = \frac{93}{9} = 10.33 \text{ Ton}$$

$$\Sigma Fy = 0: R_A - 4 - 10 - 6 + R_B = 0$$

Despejando:

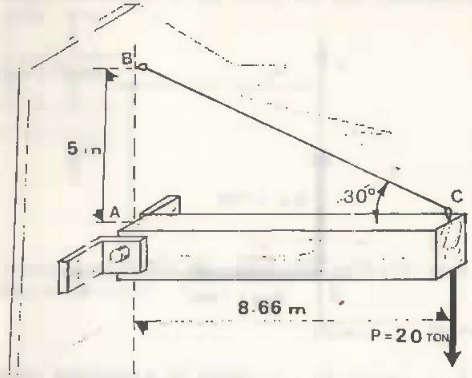
$$R_A = 4 + 10 + 6 - 10.33 = 20 - 10.33 = 9.67 \text{ Ton}$$

Solución

$$R_B = 10.33 \text{ Ton}$$

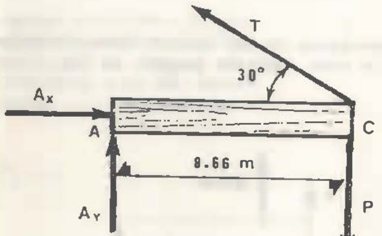
$$R_A = 9.67 \text{ Ton}$$

2. La ménsula de la figura siguiente está soportada por un cable y obra sobre ella la carga P de 20 Ton. Calcular la tensión del cable y las componentes ortogonales de la reacción en el apoyo A. Despréciese el peso propio de AC y el del cable.



Solución

Diagrama de cuerpo libre de la viga $\overline{AC}$



Como es un sistema general en el plano se pueden plantear las tres ecuaciones siguientes:

$\Sigma M_B = 0$: $Ay(0) + T(0) + Ax(5) - 20(8.66) = 0$

$\therefore \quad Ax = \dfrac{20(8.66)}{5} = 34.64$ Ton

$\Sigma F_x = 0$: $Ax - T \cos 30° = 0$, $T = \dfrac{34.68}{0.866} = 40.00$ Ton

$\Sigma F_y = 0$: $Ay - 20 + T \text{ sen } 30° = 0$, $Ay = 20 - 40.00(0.5) = 0$

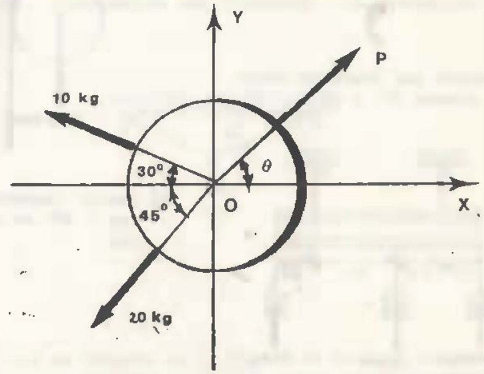
Resultados:

$Ax = 34.64$ Ton

$Ay = 0.00$ Ton

$T = 40.00$ Ton

3. Un cuerpo se mantiene en equilibrio por la acción de tres fuerzas concurrentes, tal como se indica en la figura. Calcular los valores de la fuerza P y del ángulo θ



Solución

Como el sistema de fuerzas es concurrente se dispone de dos ecuaciones de equilibrio:

$F_x = 0 = P \cos\theta - 10 \cos 30° - 20 \cos 45°$; $P \cos\theta = 8.66 + 14.14 = 22.8$ kg ..(1)

$\Sigma F_y = 0 = P \text{ sen } \theta + 10 \text{ sen } 30° - 20 \text{ sen } 45°$; $P \text{ sen } \theta = 14.14 - 5.00 = 9.14$ kg .(2).

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2)

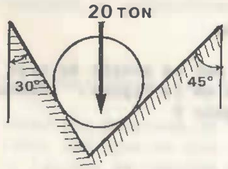
$\text{Tan } \theta = 0.401 \qquad \theta = 21°50'$

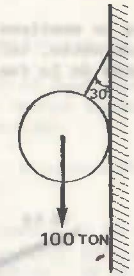
Sustituyendo este valor en (1)

$P = 24.5$ Kg

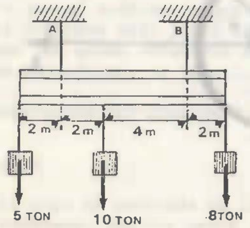
Reactivos

I. Trace el diagrama de cuerpo libre de cada una de las figuras siguientes:





a) Cilindro que descansa sobre los planos 30° y 45°



b) Cuerpo suspendido de una barra a 30° de la pared vertical.

c) Viga suspendida de los apoyos A y B y cargada con los 3 cuerpos de 5 ton, 10 ton y 8 ton. (peso de la viga 100 kg/m)

II. Relacione la columna de la derecha con la columna de la izquierda, escribiendo dentro del paréntesis la letra que corresponda.

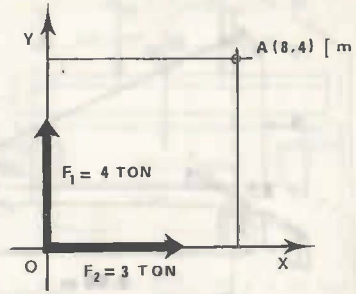
a) Tipo de apoyo que tiene dos grados de restricción y uno de libertad. ( ) Apoyo libre

b) Tipo de apoyo que tiene un grado de restricción y dos de libertad. ( ) Articulación plana

c) Tipo de apoyo que tiene tres grados de restricción. ( ) Empotramiento plano

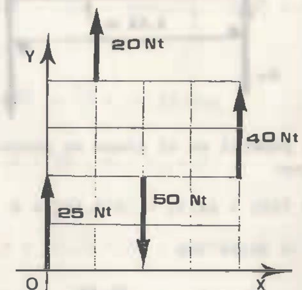
III Problemas

1) Calcule el momento de la resultante R, con respecto al punto A, de las fuerzas F_1 y F_2 alojadas en los ejes coordenados X, Y, respectivamente, con los datos de la siguiente figura.

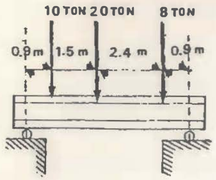


2) Calcule la distancia o brazo de la resultante del problema anterior, con respecto al punto A.

3) Determine la resultante de las cuatro fuerzas indicadas en la figura. El lado de cada cuadrado pequeño es 1 m.



4) Calcule la resultante de las 3 cargas que están actuando sobre la viga.

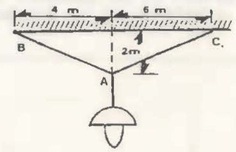


IV Indique si es falsa o verdadera la afirmación hecha en cada uno de los enunciados siguientes:

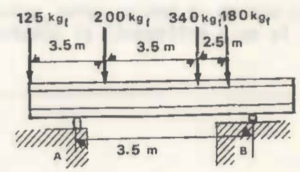
	Falsa	Verdadera
1) Para que un cuerpo sometido a un sistema dado de fuerzas esté en equilibrio se requiere que sus aceleraciones lineal y angular sean nulas.	( )	( )
2) Para que un cuerpo sometido a un sistema dado de fuerzas esté en equilibrio es necesario que el sistema de fuerzas, al reducirse a su más simple expresión, cumpla con las ecuaciones siguientes: $\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = 0$; $\sum_{i=1}^{n} \bar{M}_i = 0$	( )	( )
3) Las condiciones escalares de equilibrio de un sistema general plano únicamente son: $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma M_z F = 0$	( )	( )
4) Para que un sistema de fuerzas paralelas contenidas en un plano esté en equilibrio se deberá cumplir únicamente con: $\Sigma F_y = 0$	( )	( )

V. Resolver los problemas siguientes.

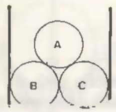
1) Calcular la tensión en cada cable, provocada por el peso de una lámpara de 10 kg_f que se encuentra suspendida como se muestra en la figura. (Los cables son flexibles e inextensibles).



2) La viga que se muestra en la figura es de peso despreciable. Determínense las reacciones en los apoyos A y B, considerando que las cargas están dadas en kg_f y las distancias en metros.



3) Tres cilindros que pesan cada uno 20.5 kgf y tienen 28 cm de diá metro se encuentran en el interior de una caja de 60 cm de ancho. Calcular: a) la reacción de B sobre A, b) la reacción de la pa red sobre C y c) la reacción del piso sobre B.



UNIDAD III CINEMATICA Y DINAMICA

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno:

Aplicará el método más adecuado en la resolución de problemas de Cinemática del punto y de Dinámica de la partícula.

INTRODUCCION

A diferencia de la Estática, estudiada en la unidad anterior, en el movimiento de los cuerpos interviene el tiempo como un concepto muy importante; es decir, la Estática estudia exclusivamente las fuerzas, la Cinemática estudia el movimiento y la Dinámica relaciona ambos aspectos.

De acuerdo a lo expuesto, esta unidad se divide en dos módulos, en el primero de ellos se estudia la Cinemática y en el segundo la Dinámica.

MODULO 5 CINEMATICA

CUADRO SINOPTICO

- CINEMATICA
  - CONCEPTOS LINEALES
    - Movimiento de un punto
      - Trayectoria curvilínea → Caso general
      - Trayectoria rectilínea
        - Uniforme
        - Uniformemente acelerado
        - Acelerado no uniformemente
  - CONCEPTOS ANGULARES
    - Movimiento de un segmento de recta
      - Cualquier trayectoria → Caso general
      - Trayectoria circular
        - Uniforme
        - Uniformemente acelerado
        - Acelerado no uniformemente
  - RELACION ENTRE LAS RAPIDECES LINEAL Y ANGULAR

Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Explicará qué es la Cinemática.
2. Identificará los conceptos básicos de la Cinemática.
3. Resolverá problemas de movimiento rectilíneo.
4. Resolverá problemas de movimiento curvilíneo.
5. Identificará la relación existente entre las rapideces lineal y angular.

5.1 GENERALIDADES

La Cinemática es la rama de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar las causas que lo provocan o modifican, en otras palabras, estudia la geometría del movimiento.

En el estudio de la Cinemática se deben distinguir dos diferentes tipos de conceptos, los lineales y los angulares. Los angulares sólo poseen significado cuando se refieren al movimiento de los cuerpos o de los segmentos de recta, mientras que los lineales sí tienen significado para el movimiento de un punto.

5.2 MOVIMIENTO DE UN PUNTO

Aunque los conceptos lineales sobre los que se basa el movimiento del punto ya fueron mencionados en la primera unidad, es necesario indicar cómo pueden relacionarse entre sí.

Como la velocidad lineal es la variación del desplazamiento con respecto al tiempo, la expresión matemática que los relaciona es:

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta r}{\Delta t}} \quad \ldots(1)$$

en cuyo caso, por tratarse de incrementos finitos de la posición $\bar{r}$ y del tiempo t, la velocidad obtenida recibe el nombre de velocidad lineal media y su módulo:

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t}} \quad \ldots(2)$$

se denomina rapidez lineal media.

Si se consideran incrementos diferenciales cuando el tiempo tiende a cero, la velocidad es instantánea y la expresión anterior queda:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dr}{dt}} \quad \ldots(3)$$

siendo su módulo la rapidez lineal instantánea:

$$\boxed{v = \frac{dr}{dt}} \quad \ldots(4)$$

la cual puede calcularse también en función de la trayectoria:

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}} \quad \ldots(5)$$

La aceleración lineal puede tratarse matemáticamente en forma análoga a la velocidad, ya que por ser la variación de la velocidad con respecto al tiempo, la expresión matemática que la relaciona con la velocidad y el tiempo es:

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \quad \ldots(6)$$

para el caso de la aceleración lineal media, y:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}} \quad \ldots(7)$$

cuando se trata de la aceleración lineal instantánea.

5.3 MOVIMIENTO RECTILINEO

Uno de los tipos de movimiento lineal, de aplicación más sencilla y al mismo tiempo más frecuente, es el movimiento rectilíneo. En este caso la trayectoria es una recta, por lo cual no es necesario utilizar los conceptos vectoriales de posición, velocidad y aceleración, quedando totalmente definidas las variables si se emplean en forma escalar, es decir, considerando solamente la trayectoria, el camino recorrido, la rapidez y el módulo de aceleración.

Antes de generalizar el estudio del movimiento rectilíneo, es conveniente considerar casos particulares:

5.3.1 MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME.

En este tipo de movimiento la aceleración es nula, por consiguiente, la rapidez es constante.

$$a = o \qquad\qquad v = cte$$

Como la rapidez es constante, sus valores medio e instantáneo son iguales:

$$\boxed{v_m = v}$$

Por otra parte, en todo movimiento rectilíneo el módulo del vector desplazamiento y el camino recorrido también tienen el mismo valor:

$$\boxed{|\Delta\vec{r}| = \Delta s}$$

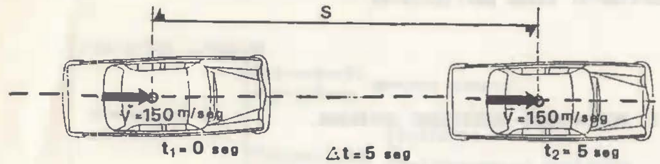
En esta forma, la rapidez puede ser calculada considerando la relación del camino o longitud recorrida con respecto al tiempo:

$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}} \quad \ldots(8)$$

que es la ecuación característica de este movimiento.

Ejemplo

Determinar la longitud recorrida por un punto que se mueve con trayectoria rectilínea, manteniendo una rapidez constante de 150 m/seg, durante 5 segundos.



Solución

De la fórmula:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

se despeja la longitud recorrida

$$\Delta s = v\Delta t$$

y, sustituyendo datos:

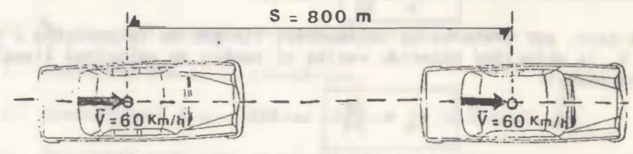
$$\Delta s = (150)(5)$$

se tiene la característica pedida:

$$\Delta s = 750 \text{ m}$$

Ejemplo

Determinar el tiempo que requiere un punto, que se mueve con una rapidez constante de 60 km/h , para desplazarse 800 m sobre una trayectoria rectilínea.



Solución

De la misma expresión utilizada en el ejemplo anterior:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

se despeja el tiempo

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} \quad \ldots (A)$$

Para sustituir valores es necesario convertir a m/seg los km/h proporcionados como datos, así:

$$60 \text{ km/h} = 60 \ \frac{1000}{3600} \ \text{m/seg} = 16.66 \text{ m/seg}$$

Sustituyendo este valor y el correspondiente a la longitud recorrida en la fórmula (A) se tiene:

$$\Delta t = \frac{800}{16.66} = 48 \text{ seg}$$

5.3.2 MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

En este tipo de movimiento la aceleración es constante.

$$a = cte$$

Ahora bien, por tratarse de un movimiento rectilíneo, la rapidez es igual al módulo de la velocidad, por tanto, la aceleración es:

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = cte} \quad ...(9)$$

Despejando el incremento de rapidez se tiene:

$$\Delta v = a(\Delta t)$$

y como:

$$\Delta v = v_f - v_i$$

se tendrá:

$$\boxed{v_f = v_i + a(\Delta t)} \quad ...(10)$$

Al variar uniformemente la rapidez, sus valores medio y promedio para un intervalo coinciden:

$$v_m = v \text{ promedio} = \frac{v_f + v_i}{2}$$

Por otra parte, como:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

al igualar estas dos expresiones, se tiene:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_f + v_i}{2}$$

Despejando Δs y sustituyendo el valor de la rapidez final obtenido anteriormente:

$$\Delta s = \frac{v_f + v_i}{2} \Delta t = \left[\frac{(v_i + a\Delta t) + v_i}{2}\right] \Delta t$$

Simplificando y ordenando términos se obtiene la expresión:

$$\boxed{\Delta s = v_i(\Delta t) + \frac{a(\Delta t)^2}{2}} \quad ....(11)$$

que proporciona la longitud recorrida por el móvil en un intervalo de tiempo.

Por último, debido a que:

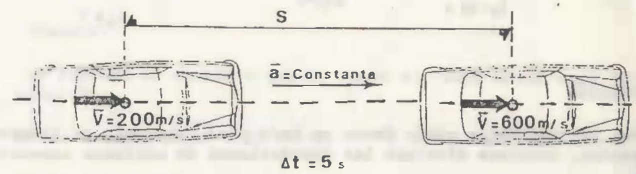
$$\Delta s = s_f - s_i$$

y como las características cinemáticas pueden ser positivas o negativas, de acuerdo al eje de referencia considerado, se tiene:

$$\boxed{s_f = \pm s_i \pm v_i (\Delta t) \pm \frac{a(\Delta t)^2}{2}} \quad ...(12)$$

Ejemplo

Un punto que se mueve en línea recta cambia su rapidez de 200 a 600 m/seg en un tiempo de 5 seg. Determinar la aceleración constante necesaria para efectuar ese cambio de rapidez.



Solución

Como la aceleración es constante se puede calcular considerando la fórmula 9:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

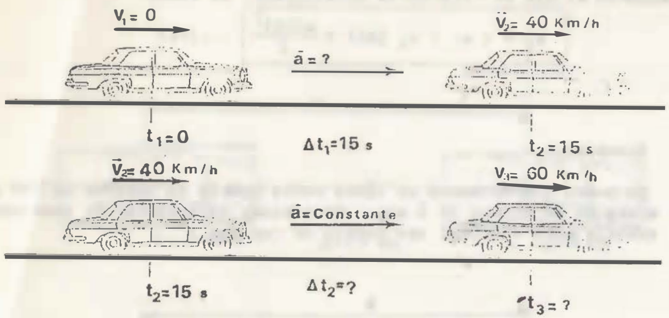
Sustituyendo datos:

$$a = \frac{600 - 200}{5} = 80 \text{ m/seg}^2$$

Ejemplo

Si un automóvil parte del reposo acelerándose continuamente hasta alcanzar una rapidez de 40 km/h, en 15 seg, determinar la aceleración experimentada. Si después el vehículo continúa aumentando su rapidez en la misma proporción. ¿Cuánto tiempo adicional es necesario pa-

ra que adquiera una rapidez de 60 km/h y qué longitudes habrá recorrido en los dos intervalos indicados?



Solución

Como las rapideces están dadas en km/h y el intervalo de tiempo en segundos, conviene efectuar las conversiones de unidades necesarias; así:

$$v_1 = 40 \frac{km}{h} = (40)\ \frac{1000}{3600} = 11.11\ m/s$$

y

$$v_2 = 60 \frac{km}{h} = (60)\ \frac{1000}{3600} = 16.66\ m/s$$

De la fórmula 9 la aceleración es:

$$a = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t_1} = \frac{11.11 - 0}{15} = 0.74\ m/s^2$$

Utilizando la ecuación 10:

$$v_f = v_i + a\ (\Delta t)$$

se puede despejar el incremento de tiempo, obteniendo así el tiempo adicional pedido:

$$\Delta t_2 = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{16.66 - 11.11}{0.74} = 7.5\ s$$

Por último, las longitudes recorridas se calculan empleando la fórmula 11:

$$\Delta s = v_i\ \Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}$$

En esta forma, para el primer intervalo:

$$\Delta s_1 = 0 + \frac{0.74\ (15)^2}{2} = 83.25\ m$$

y para el segundo intervalo:

$$\Delta s_2 = 11.11\ (7.5) + \frac{0.74\ (7.5)^2}{2} = 104.14\ m$$

5.3.3 MOVIMIENTO RECTILINEO ACELERADO NO UNIFORMEMENTE

En este tipo de movimiento se utilizan las ecuaciones escalares generales 2 y 5 para el cálculo de las relaciones existentes entre rapidez, longitud recorrida y tiempo. Por otra parte, en cuanto a las relaciones de aceleración, rapidez y tiempo se emplean las ecuaciones 6 y 7 modificadas en forma escalar, como a continuación se indica:

La expresión 6 queda:

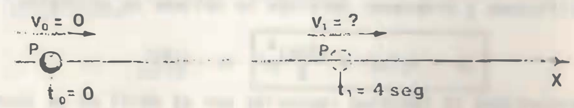
$$\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \qquad ...(13)$$

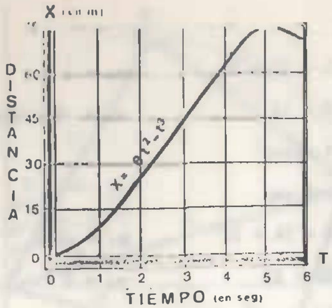
y la 7 adopta la forma:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}} \qquad ...(14)$$

Ejemplo

Determinar la rapidez de un punto que se mueve en línea recta, 4 segundos después de iniciado el movimiento, sabiendo que su posición está dada por la ecuación $x = 8t^2 - t^3$, donde t se expresa en segundos y x en metros.





Solución

De la fórmula 5:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Al sustituir datos:

$$v = \frac{d}{dt}(8t^2 - t^3) = 16t - 3t^2$$

que valuada para t = 4 seg, queda:

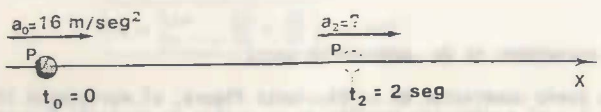
$$v_4 = 16(4) - 3(4)^2$$

obteniéndose así la rapidez:

$$v_4 = 16 \text{ m/seg}$$

Ejemplo

Para el móvil del ejemplo anterior determine la aceleración cuando t = 2s.



Solución

De la fórmula 14:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Al sustituir la ecuación de la rapidez obtenida en el ejemplo anterior:

$$a = \frac{d}{dt}(16t - 3t^2) = 16 - 6t$$

y considerando el instante en que t = 2 seg se tiene:

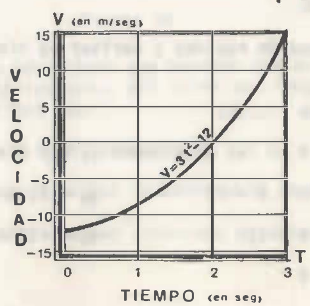
$$a_2 = 16 - 6(2) = 4 \text{ m/seg}^2$$

Ejemplo

La rapidez de un punto que se mueve en línea recta está dada por la ecuación:

$$v = 3t^2 - 12$$

en la que v está en m/seg y t en seg. Sabiendo que para t = 1 segundo, el punto se encuentra a 1 metro del punto fijo 0 de su propia trayectoria. Determinar la posición, la rapidez y la aceleración cuando el tiempo sea igual a 0, 1 y 2 seg.



Solución

Se sabe que al despejar dx de la expresión:

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12 \;\ldots (A)$$

da la posición en función del tiempo:

$$dx = v\,dt$$

Sustituyendo la función rapidez e integrando se tiene:

$$\int dx = \int (3t^2 - 12)\,dt$$

entonces:

$$x = \frac{3t^3}{3} - 12t + c$$

En donde c es una constante de integración que debe ser calculada a partir de las condiciones iniciales del problema, o sea cuando $x = 1$ m y $t = 1$ seg; así:

$$1 = (1)^3 - 12\,(1) + c$$

de donde $c = 12$; valor que sustituido da la función:

$$x = t^3 - 12t + 12 \;\ldots (B)$$

Por otra parte, como:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

al sustituir la función rapidez y derivar se tiene la aceleración en cualquier instante:

$$a = 6t \;\ldots (C)$$

Sustituyendo $t = 0$ en las ecuaciones A, B y C se tiene, respectivamente:

$x_0 = 0 - 0 + 12$ $\qquad$ $x_0 = 12$ m

$v_0 = 0 - 12$ $\qquad$ $v_0 = -12$ m/seg

$a_0 = 0$

Cuando $t = 1$ seg:

$x_1 = 1 - 12 + 12$ $\qquad$ $x_1 = 1$ m

$v_1 = 3 - 12$ $\qquad$ $v_1 = -9$ m/seg

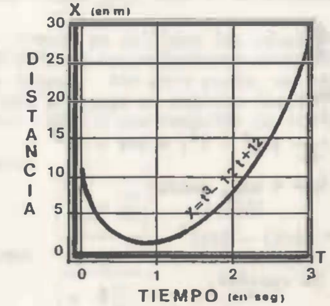
$a_1 = 6$ m/seg^2

Finalmente, si $t = 2$ seg

$x_2 = 8 - 24 + 12$ $\qquad$ $x_2 = -4$ m

$v_2 = 12 - 12$ $\qquad$ $v_2 = 0$

$a_2 = 12$ m/seg^2



5.4 MOVIMIENTO DE UN SEGMENTO DE RECTA

Como puede observarse en la siguiente figura, el movimiento lineal del punto P y el movimiento angular de su vector de posición $\bar{r}$ suceden simultáneamente.

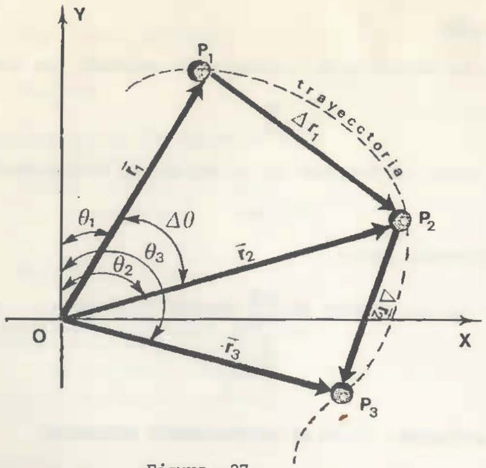


Figura 37

La posición angular del segmento $\overline{OP}$ es el ángulo θ medido desde una recta fija al sistema de referencia hasta el propio segmento $\overline{OP}$ considerado; así, de acuerdo a la figura, el ángulo θ_1 es la posición angular, respecto al eje Y, del vector de posición r_1 ; θ_2 es la posición angular de r_2, etc.

El desplazamiento angular $\Delta\theta$ es el incremento de posición angular experimentado, durante un intervalo, por el vector de posición del punto móvil; por tanto:

$$\boxed{\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1} \quad \ldots (15)$$

La rapidez angular media ω_m es la variación del desplazamiento angular respecto al tiempo:

$$\boxed{\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}} \quad \ldots (16)$$

Llevando al límite la relación anterior, cuando el incremento de tiempo tiende a cero, se obtiene la rapidez angular instantánea ω

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}} \quad \ldots (17)$$

La aceleración angular media α_m es la variación de la rapidez angular respecto al tiempo:

$$\boxed{\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}} \quad \ldots (18)$$

Análogamente al concepto de rapidez instantánea, la aceleración angular instantánea α se obtiene tomando límites en la expresión (19):

$$\boxed{\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}} \quad \ldots (19)$$

5.5 MOVIMIENTO CIRCULAR

Cuando la trayectoria descrita por el punto móvil es una circunferencia, el vector de posición correspondiente es de magnitud constante y se mueve angularmente sobre un círculo, razón por la cual el movimiento es conocido como circular.

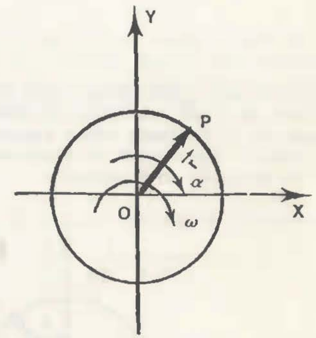


Figura 38

Existen tres tipos de movimiento que merecen tratarse en forma individual y que dependen, básicamente, del valor que tenga la aceleración angular α. Estos tres tipos son:

Movimiento circular uniforme

Movimiento circular uniformemente acelerado

Movimiento circular acelerado no uniformemente

5.5.1 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

La característica esencial de este movimiento consiste en que la aceleración angular es nula, por tanto, la rapidez angular resulta constante:

Si:

$$\alpha = 0$$

se tiene que:

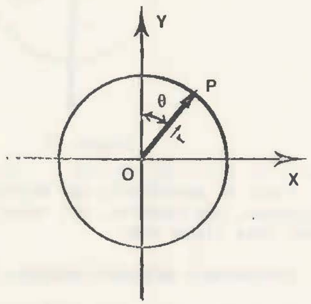
$$\omega = \omega_m = \text{constante}$$

Bajo estas condiciones, la ecuación que define a este movimiento es la (16), en donde se omite el subíndice m debido a la igualdad existente entre las rapideces instantánea y media:

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}} \quad \ldots (20)$$

Ejemplo

Un punto describe una trayectoria plana de tal modo que su vector de posición, además de tener una magnitud constante, se mueve con una rapidez constante de 20 radianes sobre segundo, en el sentido de las manecillas del reloj. Determinar el desplazamiento angular que describe el vector de posición en 6 segundos.



Solución

Como la rapidez ω es constante, la ecuación que debe emplearse es;

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Por tanto, al despejar Δθ se obtiene el desplazamiento:

$$\Delta\theta = \omega\Delta t$$

sustituyendo datos:

$$\Delta\theta = 20\ \frac{\text{rad}}{\text{seg}}\ (6\ \text{seg}) = 120\ \text{rad}$$

5.5.2 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO

Como su nombre la indica, este movimiento está caracterizado por poseer una aceleración angular constante, o sea:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \text{cte}$$

En forma análoga al caso de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado se tiene que:

$$\Delta\omega = \alpha(\Delta t)$$

y como:

$$\Delta\omega = \omega_f - \omega_i$$

se tendrá:

$$\boxed{\omega_f = \omega_i + \alpha(\Delta t)} \quad \ldots (21)$$

Por otra parte:

$$\omega_m = \omega_{promedio} = \frac{\omega_f + \omega_i}{2}$$

y como:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

al igualar estas dos expresiones se tiene:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\omega_f + \omega_i}{2}$$

Despejando ω_f y sustituyendo en la expresión (21):

$$\boxed{\Delta\theta = \omega_i(\Delta t) + \frac{\alpha(\Delta t)^2}{2}} \quad \ldots (22)$$

Por último, como:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

al sustituir en (22), considerando que los signos de cada uno de los conceptos pueden ser positivos o negativos, se tiene:

$$\boxed{\theta_f = \pm\,\theta_i \pm \omega_i(\Delta t) \pm \frac{\alpha(\Delta t)^2}{2}} \quad \ldots (23)$$

Ejemplo

Un punto se mueve sobre una circunferencia de tal modo que su vector de posición, respecto al centro de esa circunferencia, cambia su rapidez angular de 4 rad/seg a 12 rad/seg en un tiempo de 3 seg. Determinar la aceleración angular constante necesaria para efectuar ese cambio de rapidez del vector de posición.

Solución.

Como:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \text{cte}$$

se tiene:

$$\alpha = \frac{12 - 4}{3} = \frac{8}{3}$$

o sea:

$$\alpha = 2.66\ \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$$

Ejemplo

Para el ejemplo anterior calcular el desplazamiento angular que tiene el vector de posición para el mismo intervalo considerado.

Solución

Sustituyendo los datos y la aceleración obtenida en el ejemplo anterior en la expresión (22) se tiene:

$$\Delta\theta = 4\ (3) + \frac{8}{3}\ \frac{(3)^2}{2} = 12 + 12$$

o sea:

$$\Delta\theta = 24\ \text{rad.}$$

5.5.3 MOVIMIENTO CIRCULAR ACELERADO NO UNIFORMEMENTE.

Este movimiento se caracteriza por tener una aceleración variable, por lo tanto, las expresiones que se utilizan son las generales indicadas con los números 15, 16, 17, 18 y 19.

Ejemplo

La ley de variación $\theta = 8t^3 + 24t$, donde t está en segundos y θ en radianes, proporciona la posición angular del vector de posición de un punto que se mueve sobre una circunferencia. Determinar la rapidez y aceleración angulares cuando t sea igual a 2 segundos.

Solución

Para calcular la rapidez angular se emplea la expresión 17:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\ (8t^3 + 24t)$$

derivando:

$$\omega = 24t^2 + 24$$

sustituyendo t = 2 seg:

$$\omega_2 = 120\ \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

De la expresión 19 se obtiene la aceleración:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\ (24t^2 + 24)$$

derivando:

$$\alpha = 48t$$

y sustituyendo $t = 2$ seg:

$$\alpha_2 = 96 \text{ rad/seg}^2$$

5.6 RELACION ENTRE LAS RAPIDECES LINEAL Y ANGULAR

Considerando la figura siguiente, donde el punto P se mueve de la posición uno a la dos en un intervalo de tiempo (dt), la longitud recorrida por el punto es (ds).

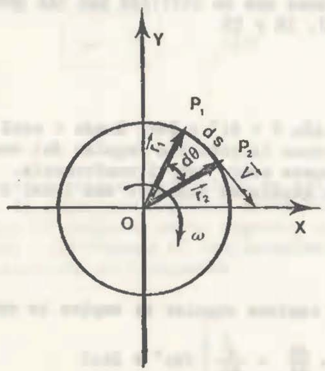


Figura 39

Se sabe que el arco de una circunferencia es igual al radio por el ángulo, por lo tanto en este caso el arco es ds, el radio es el módulo del vector de posición y el ángulo es dθ; entonces:

$$\boxed{ds = r\,(d\theta)} \quad \ldots(24)$$

Por otra parte, como:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

al sustituir la expresión 24 se tiene:

$$v = \frac{r(d\theta)}{dt} = r\,\frac{d\theta}{dt}$$

y como:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

se obtiene la igualdad:

$$\boxed{v = r\omega} \quad \ldots(25)$$

que relaciona la rapidez lineal con la angular.

Ejemplo

Si el radio del círculo del ejemplo anterior es igual a 50 cm, determinar la rapidez del punto móvil en m/seg, cuando el tiempo sea igual a 2 seg.

Solución

Del ejemplo anterior se obtuvo que la rapidez angular, cuando $t = 2$ seg, es de 120 rad/seg; por lo tanto, al aplicar la igualdad 25 se tiene:

$$v = r\omega = 0.50(120)$$

o sea:

$$v = 60 \text{ m/seg}$$

Reactivos

I. Indique con una X, si la afirmación es falsa o verdadera.

		Falsa	Verdadera
1.	La Cinemática es la rama de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos considerando las causas que lo provocan.	( )	( )
2.	La velocidad lineal es la variación del desplazamiento con respecto al tiempo.	( )	( )
3.	Se llama velocidad instantánea a la integral del vector desplazamiento con respecto al tiempo.	( )	( )
4.	Se llama aceleración lineal a la variación de la velocidad con respecto al tiempo.	( )	( )

II Relacione los conceptos indicados en la columna A, con su correspondiente expresión matemática de la columna B.

	A		B
1.	Velocidad lineal	( )	$v_m = \left\|\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right\|$
2.	Rapidez lineal media	( )	$\vec{am} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$
3.	Velocidad instantánea	( )	$v = \lim\limits_{\Delta t \to o} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
4.	Aceleración angular media	( )	$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$
5.	Rapidez lineal instantánea	( )	$v = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|$
6.	Aceleración angular instantánea	( )	$\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to o} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$
7.	Aceleración lineal	( )	$\alpha = \lim\limits_{\Delta t \to o} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$
8.	Aceleración lineal instantánea	( )	$\omega_m = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$
9.	Rapidez angular media	( )	$\alpha_m = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$

III Resolver los siguientes problemas

1. Un automóvil recorre un camino de 320 km de longitud en un periodo de 7 horas. Determinar la rapidez media del vehículo en km/h y en m/seg.

2. Determinar el tiempo que requiere un punto, que se mueve con una rapidez constante de 30 m/seg, para desplazarse 30 km sobre una trayectoria rectilínea.

3. Un punto P se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo con la ecuación $X = 4t^3 + 2t + 5$, en donde X está en metros y t en segundos. Determinar:

   a) El desplazamiento, la rapidez y la aceleración cuando t = 3 seg.

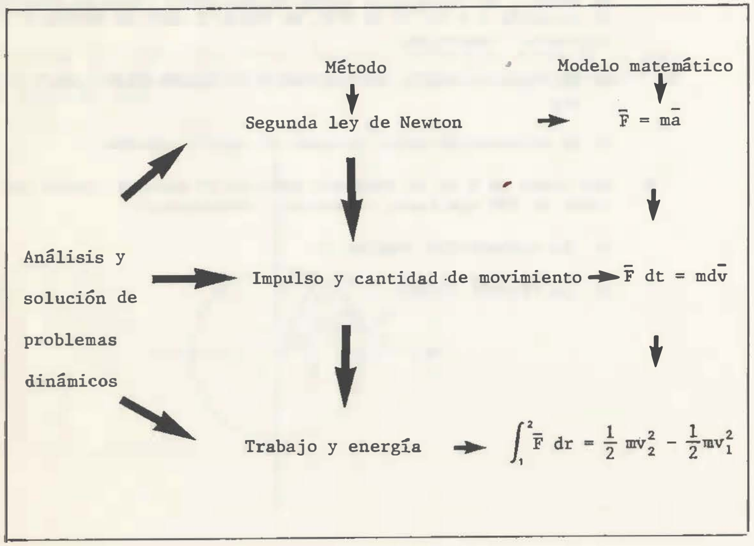
   b) La aceleración media durante el cuarto segundo.

4. Una rueda de 8 cm de diámetro pasa en 10 minutos, desde una rapidez de 800 rpm hasta el reposo. Determinar:

   a) Su aceleración angular

   b) La rapidez lineal

CUADRO SINOPTICO



Objetivos específicos

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Explicará qué es la Dinámica.
2. Identificará los conceptos fundamentales que se utilizan en Dinámica.
3. Resolverá problemas de Dinámica aplicando la segunda ley de Newton.
4. Resolverá problemas aplicando el método del impulso y de la cantidad de movimiento.
5. Resolverá problemas aplicando el método del trabajo y de la energía.

6.1 DEFINICION DE DINAMICA-SEGUNDA LEY DE NEWTON

En el campo de la Mecánica Clásica el estudio de la Dinámica se realiza, esencialmente, utilizando la segunda ley de Newton. Esta ley relaciona a la masa (que por ser una medida de la inercia es una característica inseparable de los cuerpos) con las fuerzas aplicadas y la variación del movimiento. Es decir, con la dinámica se cuantifica la aceleración de un cuerpo, como un efecto dependiente de las causas que producen o modifican el movimiento.

Aunque cabe la posibilidad de expresar matemáticamente a la segunda ley de Newton en varias formas, la que se emplea con mayor frecuencia es:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Bajo esta forma la segunda ley de Newton se enuncia como sigue:

la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza resultante aplicada e inversamente proporcional a la masa.

Indudablemente, la aceleración debe ser de igual dirección y sentido que la fuerza resultante aplicada en el cuerpo, por este motivo la ley se expresa como una igualdad de índole vectorial.

En forma gráfica la relación existente entre causas y efectos, enunciada mediante la segunda ley de Newton, puede ilustrarse como se muestra en la figura 40.

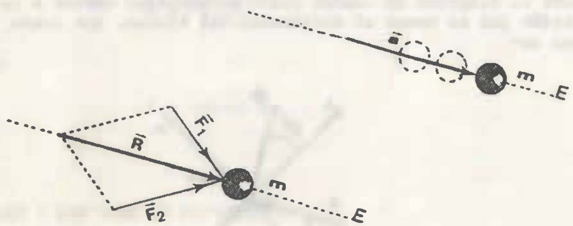


Figura 40

Causas:

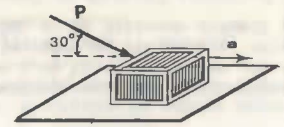
Resultante del sistema de fuerzas aplicadas.

Efectos:

Aceleración ocasionada.

Ejemplo

Un bloque de 200 kg de peso descansa sobre un plano horizontal liso. Determinar la magnitud de la fuerza P necesaria para ocasionarle una aceleración de 2 m/seg^2, hacia la derecha, considerando que la aceleración gravitatoria es de 9.81 m/seg^2.



Solución

Se sabe que el peso es una fuerza, por tanto, al aplicar la segunda ley de Newton, en el caso en que dicho peso se encuentre relacionado con la aceleración gravitatoria dada, se tiene:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{\omega} = m\vec{g}$$

Despejando la masa y sustituyendo datos:

$$m = \frac{\omega}{g} = \frac{200 \text{ kg}_f}{9.81 \text{ m/seg}^2}$$

Aplicando nuevamente la segunda ley de Newton para el bloque del problema, pero ahora considerando la fuerza P y la aceleración dada, se obtiene:

$$\vec{P} = \frac{200}{9.81}\vec{a}$$

Por otra parte, como la aceleración es horizontal, solamente afectará al movimiento la componente de la fuerza que tenga la misma línea de acción que la aceleración, así:

$$Px = \frac{200}{9.81} a ,$$

desapareciendo entonces la consideración vectorial.

Sustituyendo datos:

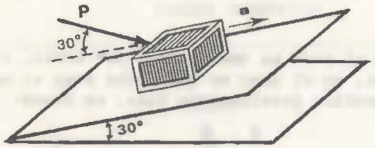
$$P\cos 30° = \frac{200 \text{ kg}_f}{9.81 \text{ m/seg}^2} \quad 2\left(\frac{\text{m}}{\text{seg}^2}\right)$$

por tanto:

$$P = \frac{200 \times 2}{9.81 \times 0.866} \text{ kg}_f = 47.08 \text{ kg}_f$$

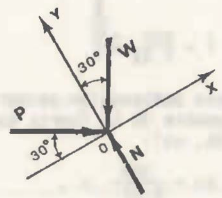
Ejemplo

Si al bloque del ejemplo anterior se le empuja sobre una superficie plana inclinada lisa, determinar la magnitud de la fuerza P necesaria para proporcionar una aceleración de 2 m/seg^2, hacia arriba del plano, considerando la misma aceleración gravitatoria utilizada en ese ejemplo.



Solución

En este caso conviene utilizar un sistema de referencia tal que uno de sus ejes coincida con la trayectoria del bloque, por tanto, se puede elegir el eje X en la dirección definida por el plano de movimiento. En esta forma se tiene el siguiente diagrama de cuerpo libre:



Sobre el eje X se tendrá entonces que:

$$F_x = ma_x$$

Donde: $F_x = P\cos 30° - W \text{ sen } 30°$

Por tanto:

$$P\cos 30° - W\text{sen } 30° = \frac{W}{g}\, a_x$$

Sustituyendo datos:

$$P\cos 30° - 200 \text{ sen} 30° = \frac{200}{9.81} \quad (2)$$

Despejando la incógnita:

$$P = \frac{100 + 40.77}{0.866} = 162.55 \text{ kg}_f$$

entonces la fuerza pedida es:

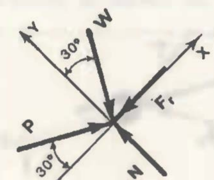
$$P = 162.55 \text{ kg}_f$$

Ejemplo

Si en el ejemplo anterior las superficies en contacto son rugosas, presentando un coeficiente de fricción de 0.25, determinar la fuerza P para las mismas condiciones de aceleración mencionadas.

Solución

Ahora el diagrama de cuerpo libre se modifica debido a la fuerza de fricción que se opone al movimiento del bloque, por tanto, dicho diagrama es:



Para la fricción en seco, la fuerza F_r que se genera es igual al producto del coeficiente de fricción μ por la magnitud de la reacción normal N:

$$F_r = \mu N$$

Para valuar la reacción normal es necesario considerar las componentes de las fuerzas en el eje Y, por lo tanto, deberá cumplirse que:

$$\Sigma F_y = 0$$

ya que no existe movimiento en la dirección Y considerada. Al sustituir las componentes, se tiene:

$$N - P\text{sen } 30° - W\cos 30° = 0$$

Al despejar N y sustituir datos:

$$N = 0.5(P) - 0.866(200) \ldots (1)$$

En el eje X se tiene: $\Sigma Fx = ma_x$

$$P\cos 30° - W \text{ sen } 30° - \mu N = \frac{W}{g} a_x \ldots (2)$$

Sustituyendo 1 en 2:

$$P\cos 30° - W\text{sen } 30° - \mu \left[0.5 (P) - 0.866 (200)\right] = \frac{W}{g} a_x$$

Utilizando los datos en esta última expresión, se obtiene:

$$0.866 P - 100 - 0.125 P - 43.30 = 40.77$$

Despejando P:

$$P = \frac{184.07}{0.741}$$

Por último:

$$P = 248.40 \text{ kg}_f$$

6.2 IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

El impulso es la integral del producto de la fuerza aplicada por el tiempo considerado.

La cantidad de movimiento es el producto de la masa de un cuerpo por su velocidad.

Los modelos matemáticos de estos dos conceptos son expresiones que se establecen fácilmente a partir de la segunda ley de Newton, como se indica a continuación.

Si en la segunda ley de Newton se sustituye la aceleración por la derivada de la velocidad respecto al tiempo, se tiene:

$$\boxed{\bar{F} = m \frac{d\bar{v}}{dt}} \ldots (1)$$

Ahora, multiplicando ambos miembros de la expresión (1) por la diferencial del tiempo e integrando, la ecuación adopta la forma:

$$\boxed{\int \bar{F}dt = \int m d\bar{v}} \ldots (2)$$

Al tomar límites en la primera integral de la expresión (2), para dos instantes del movimiento, se obtiene el modelo matemático representativo del impulso, es decir:

$$\boxed{\text{impulso} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt} \ldots (3)$$

Si se efectúa la integral indicada de la expresión (3), conocida la fuerza que interviene en el proceso, se tiene una forma alternativa de la expresión matemática del impulso, así:

$$\boxed{\text{impulso} = \vec{F} t_2 - \vec{F} t_1} \ldots (4)$$

o también:

$$\boxed{\text{impulso} = \vec{F} \Delta t} \ldots (5)$$

Ahora bien, al considerar el segundo miembro de la ecuación (2), se tiene el modelo matemático correspondiente a la variación de la cantidad de movimiento:

$$\boxed{\text{Variación de cantidad de movimiento} = \int_{v_1}^{v_2} m\, d\bar{v}} \ldots (6)$$

Y, análogamente al caso del impulso, se tienen las formas alternativas:

$$\boxed{\text{Variación de cantidad de movimiento} = m \bar{v}_2 - m \bar{v}_1} \ldots (7)$$

$$\boxed{\text{Variación de cantidad de movimiento} = m\Delta\bar{v}} \ldots (8)$$

Obviamente, si la trayectoria descrita por el móvil es rectilínea, cualquiera de las expresiones matemáticas indicadas puede utilizarse en forma escalar.

Ejemplo

Si una pelota de golf que pesa 25 gr_f se lanza con una rapidez de 60 m/seg, por efecto de un golpe, determinar el impulso ocasionado por dicho golpe.

Solución

Como no se cuenta con los datos correspondientes a la fuerza aplicada ni al tiempo que dura el golpe, se recurrirá a la determinación de la cantidad de movimiento para valuar el impulso.

La rapidez que tiene la pelota al terminar el golpe es de $v_2 = 60$ m/seg y la inicial es v_1 = cero, por tanto, se tiene:

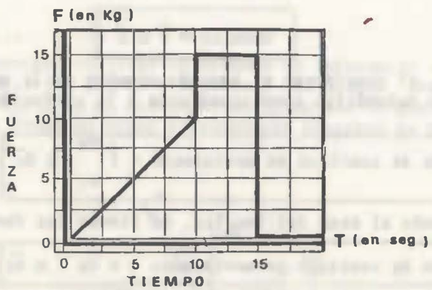
$$mv_2 - mv_1 = mv_2 = \frac{0.025}{9.81}\,(60) = 0.153\ [kg_f\ seg]$$

En esta forma el impulso es:

$$\text{impulso} = 0.153\,[kg_f\ seg]$$

Ejemplo

Sobre una partícula, inicialmente en reposo, actúa una fuerza cuya variación con el tiempo se muestra en la figura. Si la masa de la partícula es de una unidad técnica de masa y se mueve con una trayectoria rectilínea de igual dirección que la fuerza, determinar la rapidez de la partícula 15 segundos después de iniciado el movimiento.



Solución

Como el impulso puede calcularse por medio de la expresión:

$$\text{impulso} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F}\,dt$$

y se sabe que uno de los significados de la integral es el área bajo una curva, es posible calcular el impulso hallando el área bajo la curva indicada en la figura. Así:

$$\text{impulso} = \text{área bajo la curva} = \left[\frac{1}{2}\,(10)(10)\right] + \left[(5)(15)\right] = 125$$

Igualando el impulso con la variación de la cantidad de movimiento se tiene:

$$125 = mv_f - mv_i = (1)(v_f) - (1)(0)$$

Por lo tanto, al despejar la rapidez final se resuelve el problema.

$$v_f = 125\ \text{m/seg}$$

6.3 TRABAJO Y ENERGIA MECANICA

Trabajo es la capacidad que tiene una fuerza para mover o deformar a un cuerpo, en forma tal que su punto de aplicación se desplace.

Energía mecánica es la capacidad que posee un cuerpo para realizar un trabajo; en otras palabras, los cuerpos presentan diversas formas de almacenar energía que puede convertirse en trabajo.

Existen varias formas en que los cuerpos pueden almacenar esa energía; dentro de la Mecánica, esas formas se originan principalmente por el movimiento, la posición o la deformación de los cuerpos. La correspondiente al movimiento se denomina Energía Cinética, y la debida a la posición o a la deformación recibe el nombre de Energía Potencial.

Análogamente al caso del impulso y de la cantidad de movimiento, los modelos matemáticos representativos del trabajo y la energía se deducen fácilmente partiendo de la Segunda Ley de Newton. Si esta ley se multiplica en ambos miembros, y en forma escalar, por la diferencial de la posición $d\overline{r}$ del punto de aplicación de la fuerza se tiene:

$$\boxed{\overline{F}\cdot d\overline{r} = m\,\frac{d\overline{v}}{dt}\cdot d\overline{r}} \quad \ldots(9)$$

que también puede expresarse:

$$\boxed{\overline{F}\cdot d\overline{r} = m\,\frac{d\overline{r}}{dt}\cdot d\overline{v}} \quad \ldots(10)$$

y como $\frac{d\overline{r}}{dt}$ es igual a la velocidad, se tiene:

$$\boxed{\overline{F}\cdot d\overline{r} = m\overline{v}\cdot d\overline{v}} \quad \ldots(11)$$

Al integrar la ecuación (11) se obtiene, para el primer miembro, el modelo matemático del trabajo realizado por la fuerza $\overline{F}$ y, para el segundo, el correspondiente a la variación de la energía cinética.

En esta forma, el trabajo puede calcularse mediante la expresión:

$$\boxed{\zeta = \text{trabajo} = \int \overline{F}\cdot d\overline{r}} \quad \ldots(12)$$

Al llevar la expresión (12) a los límites de integración que correspondan a cada problema podrá expresarse:

$$\zeta = \overline{F} \cdot \Delta\overline{r} \qquad \text{o bien} \qquad \zeta = F(\Delta s)$$

cuando la fuerza y la trayectoria sean coincidentes.

Por otra parte, la variación o incremento de energía cinética se valúa de acuerdo a la expresión:

$$\boxed{\Delta E_c = \text{incremento de energía cinética} = \int m\overline{v} \cdot d\overline{v}} \quad \ldots(13)$$

En este caso, si la masa es constante, llevada a los límites de integración correspondientes a cada problema, se tiene, al integrar la expresión (13):

$$\boxed{\Delta E_c = \frac{1}{2}\, mv_2^2 - \frac{1}{2}\, mv_1^2} \quad \ldots(14)$$

en donde $\frac{1}{2}\, mv_2^2$ es la energía cinética al finalizar el intervalo considerado y $\frac{1}{2}\, mv_1^2$ es la correspondiente al inicio. Por tanto:

$$\boxed{\Delta E_c = E_{c\ \text{final}} - E_{c\ \text{inicial}}} \quad \ldots(15)$$

Con objeto de obtener el modelo matemático correspondiente a la energía potencial considérese una partícula de masa m, situada en un plano horizontal h_o. Para mover esa partícula a otro plano h, también horizontal y situado por encima del anterior, es necesario efectuar un trabajo contra su peso; en estas condiciones, la expresión correspondiente al trabajo toma la forma:

$$\boxed{\zeta = mg\,(h - h_o) = mg\,(\Delta h)} \quad \ldots(16)$$

o también:

$$\boxed{\zeta = mgh - mgh_o} \quad \ldots(17)$$

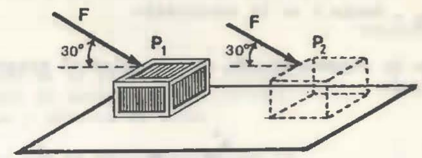
Donde (mgh) y (mgh_o) son las energías potenciales inicial y final, respectivamente; o sea:

$$\zeta = E_p\ \text{final} - E_p\ \text{inicial}$$

Ejemplo

Una fuerza de 6 kg_f de magnitud, que forma un ángulo de 30° con la horizontal, actúa sobre un cuerpo desplazándolo 24 m sobre un plano

liso, como se indica. Determinar el trabajo efectuado por la fuerza.



Solución

Como la fuerza capaz de desplazar su punto de aplicación, y por tanto de producir trabajo, es la componente horizontal de F se tendrá:

$$\zeta = F\cos 30°\ (\Delta s)$$

Sustituyendo datos:

$$\zeta = 6\cos 30°\ (24)$$

Por tanto:

$\zeta = 124.70\,[kg_f \cdot m]$ es el trabajo pedido.

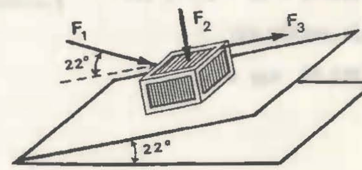
Ejemplo

Un bloque de 10 kg_f de peso asciende sobre un plano inclinado liso debido a la acción de un sistema de fuerzas, como se indica en la figura. Si el bloque se desplaza 6 m sobre el plano que lo sustenta, determinar el trabajo realizado por el sistema.

$F_1 = 35\ kg_f$

$F_2 = 12\ kg_f$

$F_3 = 20\ kg_f$



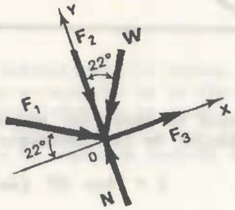
Solución

Este problema puede resolverse de dos formas; una consiste en sumar los trabajos realizados por cada una de las fuerzas que intervienen y, la segunda, determinando el trabajo realizado por la resultante - del sistema, es decir:

1. $\zeta = \zeta_{F_1} + \zeta_{F_2} + \zeta_{F_3} + \zeta_W + \zeta_n$, donde W es el peso del cuerpo y N es la reacción del plano.

2. $\zeta = \zeta_R$, donde R es la resultante.

Si se elige la segunda opción se recurrirá al diagrama de cuerpo libre siguiente:



Sobre el eje Y el sistema está equilibrado, por tanto, sólo la componente de la resultante que se encuentra en el eje X, que es la dirección del movimiento, produce trabajo; en esta forma el problema se resuelve utilizando esa componente.

$$R_x = F_1 \cos 22° + F_3 - W \text{sen } 22°$$

El trabajo se calcula entonces como:

$$\zeta = R_x\ (\Delta s)$$

Al sustituir datos, se tiene:

$$\zeta = (32.45 + 20 - 3.75)\ (6)$$

entonces, el trabajo pedido es:

$$\zeta = 292.20 \ \text{kg}_f \text{ m}$$

Ejemplo

Determinar la energía cinética que posee un cuerpo que pesa 10 kg_f y que se mueve con una rapidez de 3 m/seg.

Solución

Como $Ec = \frac{1}{2} mv^2$

se tendrá que:

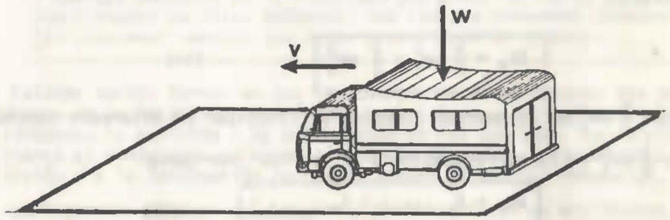
$$Ec = \frac{1}{2}\ \frac{10}{9.81}\ (3)^2$$

por tanto:

$$Ec = 4.59\ [kg_f \text{ m}]$$

Ejemplo

Determinar el incremento de energía cinética que adquiere un camión de 2 toneladas de peso para que, partiendo del reposo, alcance una rapidez de 100 km/h sobre una superficie horizontal.



Solución

Como el incremento de energía cinética está dado por la expresión:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$$

se tiene, al sustituir datos:

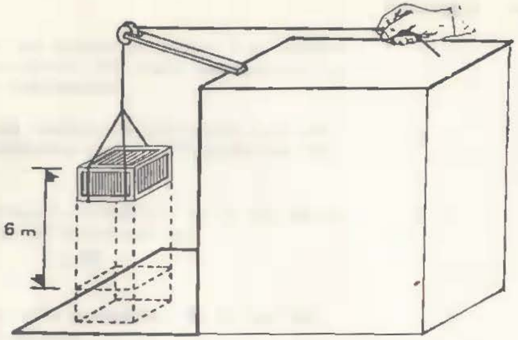
$$\Delta Ec = \frac{1}{2}\ \frac{2000}{9.81} \left(\frac{100\ 000}{3\ 600}\right)^2 - 0$$

Así, el incremento de energía cinética es:

$$\Delta E_c = 78\ 654.71\ [kg_f \text{ m}]$$

Ejemplo

Un cuerpo cuyo peso es de 8 kg_f se eleva 6 m sobre su posición inicial. Determine el incremento de energía potencial que adquiere para esta posición.



Solución

Como el incremento de energía potencial es:

$$\Delta E_p = mgh - mgh_o$$

se tendrá, al considerar una energía potencial inicial nula y sustituir datos:

$$\Delta E_p = mgh = Wh = (8)(6) = 48 \; [kg_f \; m]$$

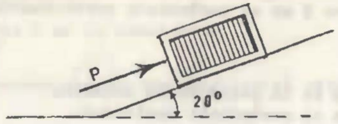
Reactivos

I. Indique si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas, marcando una X en el paréntesis correspondiente.

	Verdadero	Falso
a) La Dinámica es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento analizando las causas y efectos de éste.	( )	( )
b) La segunda ley de Newton relaciona la causa y efecto del movimiento, independientemente de la masa.	( )	( )
c) La aceleración de un cuerpo se considera como un efecto inverso a la fuerza que lo causa.	( )	( )
d) Trabajo es la capacidad que tiene una fuerza para mover o deformar a un cuerpo, en forma tal que su punto de aplicación no se desplace.	( )	( )
e) A la capacidad que posee un cuerpo para realizar un trabajo se le llama energía mecánica.	( )	( )
f) Existen varias formas en que los cuerpoa pueden almacenar energía, dentro de la Mecánica; una de esas, originada por el movimiento se le denomina Energía Potencial.	( )	( )
g) El trabajo y la energía son expresiones equivalentes.	( )	( )

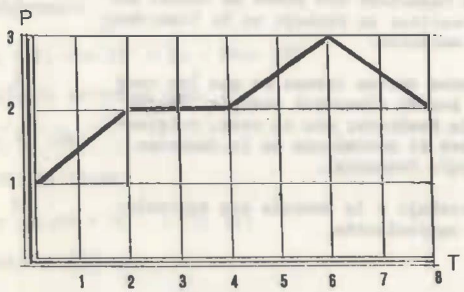
II Problemas

1. Determine el valor de la magnitud de la fuerza P necesaria para proporcionar a un bloque de peso 1000 kg_f, mostrado en la figura, una aceleración de 1 m/seg^2. El coeficiente de rozamiento es $\mu = 0.25$ y $g = 9.81 \; m/seg^2$.

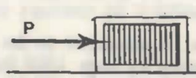


2. Obtenga la magnitud de la fuerza de fricción en el caso del problema anterior, si P = 50 kg_f y la magnitud de la aceleración es de 2 m/seg^2.

3. Una fuerza horizontal P varía de acuerdo con la gráfica representada en la figura y actúa sobre un bloque de 10 kg_f. El bloque se mueve partiendo del reposo sobre una superficie lisa horizontal. ¿Cuál será su posición y velocidad al cabo de 8 s?



4. Una caja que pesa 100 kg_f es arrastrada 6 m sobre un suelo horizontal, a velocidad constante, mediante una fuerza también constante. El coeficiente de rozamiento entre la caja y el suelo es μ = 0.3. ¿Cuál es el trabajo realizado?



5. El martillo de un martinete pesa 1 tonelada y cae desde una altura de 3 m sobre un pilote al cual introduce 8 cm. Calcular la fuerza ejercida sobre el pilote, suponiendo que es constante, a partir de consideraciones energéticas. (g = 9.81 m/seg^2).

EXAMEN DE AUTOEVALUACION

I. De los siguientes enunciados especifique, marcando una X dentro del paréntesis, si son verdaderos o falsos.

	Verdadero	Falso
a) Cuando una fuerza se aplica a un cuerpo puede causarle dos tipos de efectos: motriz o deformante.	( )	( )
b) Se llama Mecánica Relativista a la que se fundamenta en los Principios de Newton.	( )	( )
c) La expresión matemática de la ley de la Gravitación Universal es: $F = \frac{Mm}{r} G$	( )	( )
d) La expresión matemática de la ley del Movimiento es: $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$	( )	( )
e) El valor de la constante de la Gravitación Universal en el sistema absoluto M.K.S. es: $G = 6.67 \times 10^{-8}$	( )	( )
f) A la velocidad se le define como el cociente del vector desplazamiento entre el tiempo.	( )	( )
g) El método del polígono de fuerzas es una generalización de la ley del triángulo.	( )	( )
h) La suma de fuerzas sólo se puede realizar si se consideran como vectores.	( )	( )
i) El efecto externo que una fuerza produce sobre un cuerpo cambia si ésta se desliza a lo largo de su línea de acción.	( )	( )
j) La descomposición de una fuerza en dos direcciones ortogonales se realiza analíticamente con las expresiones matemáticas siguientes: $\lvert F_x \rvert = F \tan \theta$, $\lvert F_y \rvert = F \cot \theta$	( )	( )
k) En un plano inclinado, un cuerpo tiende a deslizarse hacia abajo debido a la fuerza de fricción.	( )	( )
l) El momento de una fuerza con respecto a un punto es el producto siguiente: $\vec{M} = \vec{F} \cdot \vec{r}$	( )	( )
m) Se llama grado de libertad al número de posibilidades de movimiento que el apoyo permite a la pieza apoyada.	( )	( )
n) El tipo de apoyo denominado articulación plana tiene un grado de restricción y dos de libertad.	( )	( )
o) La suma algebraica de los momentos de dos fuerzas concurrentes con respecto a cualquier punto de su plano es igual al momento de la resultante de ellas, con respecto al mismo punto.	( )	( )
p) Las ecuaciones que son condiciones vectoriales para que un sistema de fuerzas esté en equilibrio son: $\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i = 0$	( )	( )

II En el paréntesis de la derecha, escriba la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. La expresión matemática de la velocidad instantánea es: ... ( )

a) $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

b) $v = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$

c) $v = \left| \frac{\Delta r}{\Delta t} \right|$

2. La expresión matemática de la aceleración angular media es: ( )

a) $\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta \vec{w}}{\Delta t} = \frac{d\,\vec{w}}{d\,t}$

b) $\alpha = \frac{\Delta w}{\Delta t}$

c) $\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{d\,t}$

3. En el movimiento rectilíneo uniforme se tiene: ....( )

a) $a \neq 0 \quad v = cte$

b) $a = 0 \quad v = cte$

c) $a = 0 \quad v \neq cte$

4. La relación entre la rapidez lineal y la angular es: ....( )

a) $v = rw$

b) $r = vw$

c) $w = vr$

5. La expresión matemática de la segunda ley de Newton es: ....( )

a) $\vec{F} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$

b) $\vec{F} = m\vec{a}$

c) $\vec{a} = \frac{m}{\vec{F}}$

6. El modelo matemático representativo del impulso es: ....( )

a) $\int_{v_1}^{v_2} m\, d\bar{v}$

b) $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

c) $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt$

7. La expresión matemática de donde parte la deducción de la ecuación del trabajo y la energía es: ....( )

a) $\vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{v} \cdot d\vec{v}$

b) $\vec{F} \cdot d\vec{t} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v}$

c) $\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}$

8. La expresión matemática de la energía potencial es: ....( )

a) $E_p = mg\,(h - ho)$

b) $E_p = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$

c) $\zeta = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

III Resolver los siguientes problemas.

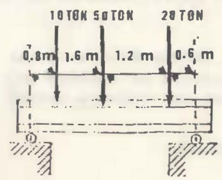
1. Un cuerpo cuya masa es de 15 kg_m descansa sobre una superficie horizontal lisa y se hace actuar sobre él una fuerza horizontal de 30 Newton. ¿Qué aceleración le produce?

2. ¿Qué fuerza de atracción ejercerá la masa de la Tierra $M = 5.98 \times 10^{27}$ gr, sobre la masa de un gramo situada en la superficie de la Tierra, considerando el radio medio de la Tierra igual 6380 km?. Dar la fuerza en dinas.

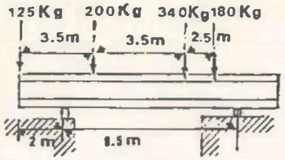
3. Tres fuerzas coplanares de 80 N cada una tiran de un anillo pequeño (diámetro despreciable). Suponiendo que sus líneas de acción forman ángulos estre sí de 120°, determinar su resultante.

4. Dos fuerzas de 200 kg_f y 300 kg_f, en un plano horizontal, tiran de un poste vertical. Si el ángulo entre ellos es 85° ¿cuál es su resultante? ¿Qué ángulo forma con la fuerza de 200 kg?

5. Sobre una viga actúan tres fuerzas, dos de las cuales se ven en la figura junto con la resultante de las tres. ¿Cuál es la tercera fuerza?.



6. Una viga considerada sin peso está cargada con las fuerzas que se indican en la figura. Determinar las reacciones en A y B.



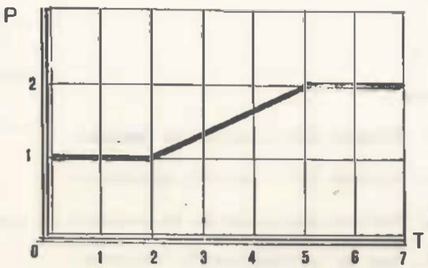
7. Un globo se está elevando con una velocidad de 1 m/seg cuando se arroja un saco de lastre. Si su altura en el instante en que se suelta el saco es 84 m ¿cuánto tiempo tardará este lastre en llegar al suelo?. Considerar $g = 9.81$ m/seg^2.

8. Un automóvil frena, a partir de una rapidez de 60 km/hora, a razón de 1.5 m por segundo cada segundo. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar al reposo y qué longitud habrá recorrido en este intervalo?.

9. Calcular la rapidez angular, en radianes por segundo, del cigüeñal de un automóvil cuyo motor gira a 3600 rpm. Si el volante del motor tiene 45 cm de diámetro, calcular la velocidad tangencial de un punto del borde.

10. Un cuerpo se lanza hacia arriba por un plano inclinado 25° respecto a la horizontal con una velocidad inicial de 12 m/seg. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0.25, determinar la longitud recorrida sobre el plano y el tiempo empleado en subir hasta el punto más elevado.

11. Una fuerza horizontal P que varía de acuerdo con la ley de variación que se muestra en la gráfica actúa sobre un bloque de 10 kg_f. El bloque se mueve partiendo del reposo sobre una superficie lisa horizontal. ¿Cuál será su posición y velocidad al cabo de 8 seg?.



. Un pozo cilíndrico tiene 1.5 m de diámetro y 10 m de profundidad. Si hay 2 m de agua en el fondo del pozo. Calcular el trabajo realizado bombeando toda el agua hasta la superficie.

I

a) Verdadero	g) Verdadero	m) Verdadero
b) Falso	h) Verdadero	n) Falso
c) Falso	i) Falso	o) Verdadero
d) Verdadero	j) Falso	p) Verdadero
e) Falso	k) Falso	
f) Verdadero	l) Falso	

II

1. (a)	5. (b)
2. (b)	6. (c)
3. (b)	7. (c)
4. (a)	8. (a)

III

1. $2\ m/seg^2$
2. 980 dinas
3. $R = 0$
4. $375\ kg_f,\ \theta = 53°$
5. 20 Ton, x = 2 m del apoyo izquierdo
6. $R_A = 480\ kg_f,\ R_B = 365\ kg_f$
7. $t = 4.2$ seg
8. $t = 11.1$ seg, $S = 93.2$ m
9. $376.8\ \frac{rad}{seg}$, 5.89 m/seg
10. $S = 11.3$ m, $t = 1.89$ seg
11. $v = 10.3$ m/seg, $S = 40.7$ m
12. $\zeta = 35400\ kg_f\ m$

UNIDAD I

MODULO 1

Reactivos I

1. Verdadero
2. Falso
3. Verdadero
4. Verdadero
5. Verdadero
6. Falso
7. Falso

Reactivos II

a) (c) Punto geométrico

b) (b) Partícula material

c) (a) Cuerpo deformable

Reactivos III

1. (a)
2. (b)
3. (a)

MODULO 2

Reactivos I

a) (a) Primera ley o ley de la inercia

b) (d) Segunda ley o ley del movimiento

c) (b) Tercera ley o ley de la acción y la reacción

d) (c) Ley de la Gravitación Universal

e) (g) Fuerza

f) (h) Aceleración

g) (e) Masa

h) (f) Fuerza de fricción

Problemas II

1. 0.128 Newton

2. 10.4 dinas

UNIDAD II

MODULO 3

Reactivos I

a) (d) Polígono de fuerzas

b) (a) Estática

c) (c) Ley del triángulo

d) (e) Principio de equilibrio

e) (b) Principio del paralelogramo

f) (f) Principio de transmisibilidad

g) (h) Principio de adición de sistemas equilibrados

h) (g) Principio de la acción y la reacción

Problemas II

1. $F_x = 86.6$ Ton
   $F_y = 50$ Ton

2. $F_1 = 36.39$ Ton
   $F_2 = 81.52$ Ton

3. $R = 65\ kg_f$
   $\theta_x = 197°$

4. Componente normal = 75 kg_f
   Componente paralela = 27.5 kg_f

5. M_A = -300 Ton - m (sentido positivo)
   M_B = 500 Ton - m

Reactivos III

1. (b)

2. (c)

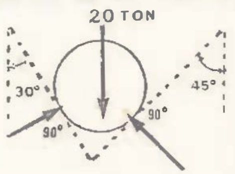
3. (a)

4. (d)

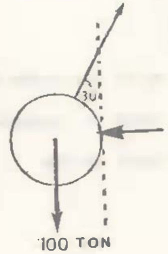
MODULO 4

Reactivos I

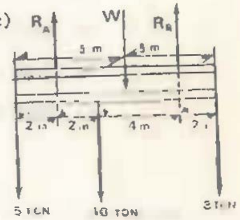
a)



b)



c)



Reactivos II

a) (b) Apoyo libre

b) (a) Articulación plana

c) (c) Empotramiento plano

Problemas III

1. M_A = -20 Ton - m

2. d = 4 unidades

3. R = 35 N
   x = 2.29 m

4. $R = 38$ Ton (hacia abajo)
   $d = 2.51$ m (del apoyo izquierdo)

Reactivos IV

1. Verdadero
2. Verdadero
3. Falso
4. Falso

Problemas V

1. $T_{AB} = 13.4\ kg_f$
   $T_{AC} = 12.7\ kg_f$
2. $R_B = 365\ kg_f$
   $R_A = 480\ kg_f$
3. a) $12.5\ kg_f$ en la dirección de la línea que une los centros
   b) 7.14 kg hacia la izquierda
   c) 30.8 kg hacia arriba

UNIDAD III

MODULO 5

Reactivos I

1. Falso
2. Falso
3. Falso
4. Verdadero

Reactivos II

1. (2)
2. (7)
3. (3)
4. (1)
5. (5)
6. (8)
7. (6)
8. (9)
9. (4)

Problemas III

1. $v = 45.7$ km/h
   $v = 12.77$ m/s
2. $t = 1000$ s
3. a) $x = 119$ m
   $v = 110$ m/s

   b) $a = 72\ m/s^2$
   $a_m = 84\ m/s^2$
4. $\alpha = 0.139\ rad/s^2$
   $v = 3.34$ m/s

MODULO 6

Reactivos I

a) Falso
b) Falso
c) Falso
d) Falso

e) Verdadero

f) Falso

g) Verdadero

Problemas II

1. 678.8 kgf

2. 495.9 kgf

3. $v = 10.3$ m/s; $S = 40.7$ m

4. $\zeta = 180$ kgf - m

5. $F = 37{,}500$ kgf

B I B L I O G R A F I A

TITULO: FISICA GENERAL
AUTOR: Sears y Zemansky
EDITORIAL: Aguilar

TITULO: FISICA GENERAL
AUTOR: H. A. Perkins
EDITORIAL: UTEHA

TITULO: MECANICA PARA INGENIEROS. Tomos I y II
AUTOR: T. C. Huang
EDITORIAL: Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A.

TITULO: MECANICA TECNICA
AUTOR: W. G. Mc Lean
EDITORIAL: Mc Graw-Hill Latinoamericana, S. A.

TITULO: INGENIERIA MECANICA
AUTOR: Irving H. Shames
EDITORIAL: Prentice/Hall International

TITULO: MECANICA I
AUTOR: Facultad de Ingeniería. U.N.A.M.. Segunda Edición
EDITORIAL: IMPOS Editores, S. A.