APUNTES DE MATEMATICAS I

Facultad de
Ingeniería
U. N. A. M.

Apuntes de

MATEMATICAS I

SECCION DE MATEMATICAS
FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Pablo Espinosa de los Reyes.

APUNTES DE MATEMATICAS I

Primera edición, 1976

5678901234 LINSA-76 8123456790

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó en mayo de 1980
en Programas Educativos, S. A.,
Calzada Chabacano 65-A,
México, D. F.

Se tiraron 2 500 ejemplares

índice

Estos apuntes han sido elaborados por los profesores de la Sección de Matemáticas, y tienen por objeto ayudar a los profesores y alumnos del curso. Indudablemente, adolecen de defectos, errores y carencias; sin embargo se podrán mejorar con las observaciones que nos hagan profesores y alumnos.

Los apuntes no deben ser usados como libros de texto, ya que sólo pretenden establecer los conceptos básicos, proponiendo una notación uniforme, de modo que la utilización de aquellos sea más simple. En la bibliografía se mencionan algunos títulos, no obstante, corresponde a cada profesor determinar cuáles deberán ser empleados.

Además de estos apuntes, se publicarán una serie de ejercicios que incluyen problemas relacionados con cada uno de los temas, cuya resolución es muy conveniente para que el alumno adquiera la práctica necesaria para la aplicación de los conceptos teóricos.

El éxito que un alumno tenga en el curso depende del esfuerzo que desarrolle a lo largo de todo el semestre y no sólo del estudio intenso en los períodos próximos a los exámenes; con objeto de ayudar a los estudiantes a resolver las dudas que se presenten con respecto al curso o las deficiencias que tenga de cursos anteriores, puede acudir, además de a su profesor titular, a la asesoría respectiva de la Sección de Matemáticas en los cubículos de la Biblioteca del Edificio Anexo.

FACULTAD DE INGENIERIA
COORDINACION DE MATERIAS PROPEDEUTICAS

Sección de Matemáticas

PROGRAMA DE MATEMATICAS 1.

CAPITULO I.

FUNCIONES.

I.1. Función real de variable real. Intervalos. Dominio, Rango. Representación geométrica.

I.2. Funciones dadas en forma explícita, implícita y paramétrica. Funciones definidas en diferentes intervalos.

I.3. Operaciones con funciones.

I.4. Funciones algebraicas. Funciones constante e identidad. Enteras, racionales e irracionales. Las funciones algebraicas como raíces de ecuaciones del tipo:

$$P_0 (x) y^n + P_1 (x) y^{n-1} + \ldots + P_n (x) = 0$$

I.5. Función biunívoca. Función inversa. Gráficas.

I.6. Funciones trascendentes.

I.6.1. Funciones periódicas.

I.6.2. Funciones circulares directas y sus gráficas.

I.6.3. Funciones circulares inversas y sus gráficas.

I.6.4. Funciones exponenciales de base a y base e, sus gráficas.

I.6.5. Funciones logarítmicas de base a, de base e y base 10, sus gráficas.

I.6.6. Función potencia.

I.7. Planteamiento de funciones.

CAPITULO II.

LIMITES Y CONTINUIDAD.

II.1. Conceptos básicos: desigualdades, valor absoluto y entornos.

II.2. Definición de límite en un punto de una función real de variable real. Interpretación geométrica.

II.3. Límite de la función constante y de la función identidad.

II.4. Teoremas sobre límites.

II.5. Límites laterales.

II.6. Continuidad de una función en un punto. Discontinuidad removible. Teoremas sobre funciones continuas.

II.7. Continuidad de una función en un intervalo.

II.8. Algunos límites de aplicación en el Cálculo Diferencial e Integral.

II.9. Incrementos. Concepto de continuidad por medio de incrementos y equivalencia con la definición del inciso II.6.

CAPITULO III.

LA DERIVADA.

III.1. Derivada de una función en un punto. Notaciones. Cálculo de la derivada a partir de la definición. Derivadas laterales.

III.2. Derivabilidad y continuidad.

III.3. Derivada de la función de función. Derivada de la función inversa.

III.4. Derivadas de las funciones algebraicas.

III.5. Derivadas de las funciones trascendentes.

III.5.1. Derivadas de las funciones circulares directas e inversas.

III.5.2. Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas.

III.5.3. Derivada de la función potencia.

III.6. Derivada de la función implícita.

III.7. Derivada de la función definida en forma paramétrica.

III.8. La función derivada.

III.9. Derivadas de orden superior. (derivadas sucesivas).

CAPITULO IV.

ALGUNAS APLICACIONES DE LA DERIVADA.

IV.1. Interpretación geométrica de la derivada.

IV.2. Ecuaciones de la tangente y de la normal, longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal.

IV.3. Angulo de intersección entre dos curvas.

IV.4. Razones de variación de variables relacionadas.

CAPITULO V. VARIACION DE FUNCIONES.

V.1. Teorema de Weierstrass. Teorema de Bolzano.

V.2. Teorema de Rolle. Interpretación geométrica.

V.3 Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (o de incrementos finitos). Interpretación geométrica. Aplicaciones. Teorema del valor Medio del Cálculo Diferencial para dos funciones (Teorema de Cauchy).

V.4. Regla de L'Hôpital. Formas indeterminadas.

V.5. Funciones crecientes y decrecientes.

V.6. Máximos y mínimos.

V.7. Concavidad de una curva, puntos de inflexión.

V.8. Representación de la función original y sus derivadas.

V.9. Estudio de la variación de una función. Problemas de aplicación.

CAPITULO VI. LA DIFERENCIAL.

VI.1. Función diferenciable. Diferencial de una función real de variable real.

VI.2. Derivada como cociente de diferenciales. Permanencia de la forma de la diferencial para una función de función. Interpretación --geométrica de la diferencial.

VI.3. Relación entre la diferencial y el incremento. Aplicaciones de -la diferencial (valores aproximados y errores.)

VI.4. Diferenciales de orden superior (sucesivas). Notación de Leibniz.

VI.5. Diferencial de arco en coordenadas rectangulares.

VI.6. Curvatura y radio de curvatura.

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION PROFESIONAL
MATERIAS PROPEDEUTICAS
SECCION DE MATEMATICAS

C A P I T U L O I.

OBJETIVO GENERAL DEL CAPITULO:

Al finalizar este capítulo, el alumno podrá: definir, identificar, clasificar, efectuar operaciones y representar gráficamente funciones reales de variable real, así como formular modelos matemáticos simples.

Al finalizar este capítulo el alumno podrá:

I.1. Definir el concepto de función real de variable real tanto desde el punto de vista del enfoque tradicional como del enfoque a partir de la teoría de conjuntos.

I.2. Definir el concepto de: Intervalo, así como el de Dominio y Rango de una función.

I.3. Dada una relación, indicar si es o no función.

I.4. Enunciar los diferentes tipos de notaciones que existen para funciones.

I.5. Dada una ecuación de 1º ó 2º grado en X, Y, representarla gráficamente e indicar si se trata de una función o no.

I.6. Dada una función cuya regla de correspondencia sea una ecuación de 1º ó 2º grado, indicar su dominio y rango.

I.7. Definir las formas explícita, implícita y paramétrica de una función.

I.8. Dada una función indicar si está expresada en forma explícita, implícita o paramétrica.

I.9. Dada una función definida por varias reglas de correspondencia y un valor de su dominio, calcular el correspondiente valor de la variable dependiente.

I.10. Definir las operaciones básicas de adición, sustracción, multiplicación, división y composición de funciones, indicando sus propiedades.

I.11. Dado un par de funciones ejecutar las operaciones básicas, indicando el dominio de la función resultante.

I.12. Representar gráficamente la suma y resta de un par de funciones dadas.

I.13. Definir las funciones constante e identidad.

I.14. Enunciar las definiciones de: función entera (o polinomial), función racional e irracional y función algebraica.

I.15. Dada una función algebraica, indicar si es entera, racional o irracional.

I.16. Enunciar las definiciones: función biunívoca y función inversa.

I.17. Dada una función polinómica hasta de 2º grado, determinar analíticamente si es o no biunívoca.

I.18. Dada una función algebraica biunívoca, obtener su inversa, e indicar dominio y rango de ambas.

I.19. Representar en un mismo sistema de ejes coordenados, las gráficas de una función algebraica dada y de su inversa.

I.20. Dada una función algebraica no biunívoca, definir un intervalo de su dominio donde si lo sea.

I.21. Enunciar la definición de función trascendente.

I.22. Enunciar la definición de función periódica.

I.23. Enunciar la definición, regla de correspondencia, dominio, rango y trazar la gráfica de las funciones:

- Circulares directas.
- Circulares inversas.
- Exponenciales de base a y base e.
- Logarítmicas de base a, base e y base 10.

I.24. Enunciar la definición de la función potencia.

I.25. Dada una función real de variable real definida por una o varias reglas de correspondencia, obtener dominio, rango y gráfica.

I.26. Dada una función real de variable real definida por una o varias reglas de correspondencia, definir el o los intervalos del dominio donde sea biunívoca.

I.27. Dada una función real de variable real biunívoca definida por una o varias reglas de correspondencia, obtener su inversa y las gráficas de ambas.

I.28. A partir de datos conocidos de un problema físico o geométrico simple, formular el modelo matemático que lo represente por medio de una función real de variable real.

CAPITULO 1

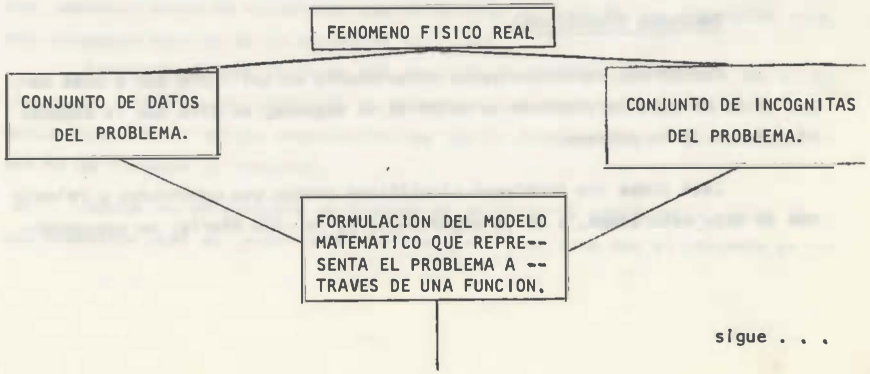
FUNCIONES.

FUNCIONES.

INTRODUCCION.

El presente capítulo se dedica al estudio del concepto de función, - que constituye una base fundamental para el Cálculo Diferencial e Integral. La importancia de este concepto radica en el hecho de que multitud de fenómenos-físicos de la vida real pueden ser representados por un modelo matemático donde figuran todas aquellas variables que intervienen en el fenómeno. Estos modelos matemáticos o fenómenos son analizados mediante diversas herramientas,- como por ejemplo las proporcionadas por el Cálculo Diferencial e Integral, -- con el fin de determinar la solución de un problema específico.

El siguiente diagrama ilustra el ordenamiento lógico de un problema-físico cualquiera desde el fenómeno mismo hasta el planteamiento de modelos - matemáticos que lo representa y el análisis y la solución del mismo:



sigue . . .

ANALISIS DEL MODELO O FUNCION A TRAVES DE HERRAMIENTAS MATEMATICAS Y DETERMINACION DEL O LOS VALORES DE LAS INCOGNITAS O VARIABLES DEL PROBLEMA.

UTILIZACION DE LAS SOLUCIONES OBTENIDAS EN EL MODELO MATEMATICO O FUNCION, EN EL PROBLEMA FISICO REAL.

En lo que sigue de este capítulo, se definirá fundamentalmente el concepto de función y se estudiarán los diferentes tipos de funciones reales de variable real como base fundamental para el Cálculo Diferencial, objetivo central de este curso.

1.1. FUNCION REAL DE VARIABLE REAL. INTERVALOS. DOMINIO. RANGO. REPRESENTACION GEOMETRICA.

El concepto de función en general, puede presentarse siguiendo dos diferentes puntos de vista. Aquí se analizará bajo las dos corrientes para tener un criterio más amplio acerca de él. Estos dos puntos de vista se identificarán en este capítulo con los siguientes nombres:

a) Concepto tradicional.

b) Enfoque moderno.

En lo que sigue, se tratarán por separado los dos enfoques y después se enfatizará la equivalencia entre ambos.

Concepto Tradicional.

Cuando dos variables estan relacionadas en tal forma que a cada valor de la primera corresponde un valor de la segunda, se dice que la segunda es función de la primera.

Casi todos los problemas científicos tratan con cantidades y relaciones de esta naturaleza, y en la experiencia de la vida diaria, se presentan constantemente situaciones en las que intervienen magnitudes que dependen de otras magnitudes. Así, la longitud que adopte un resorte dependente del peso que soporte. El volumen de una esfera es función de su diámetro. La presión de un gas contenido en un recipiente de volumen constante es función de su temperatura, etc.

Con objeto de aclarar el significado de este concepto se presenta el siguiente:

Ejemplo I.- Un punto se mueve a lo largo de un eje horizontal con una velocidad uniforme de 8 m/seg, empezando el movimiento en cero y desplazandose hacia la derecha. Determinar la distancia recorrida por el punto al cabo de un tiempo dado.

Denotando con S a la distancia, en metros, del punto al origen en cualquier instante y con t al tiempo, en segundos, transcurrido desde que el movimiento se inició, se tiene que S y t son las variables que intervienen en el problema.

Evidentemente S depende de t. Así al cabo de 5 segundos, el punto habrá recorrido 40 metros, o sea que si t = 5 seg, se tendrá s = 40 m. Cuando el tiempo transcurrido sea 25 segundos el punto se ha desplazado 200 metros, esto es, si t = 25 seg, S = 200 m.

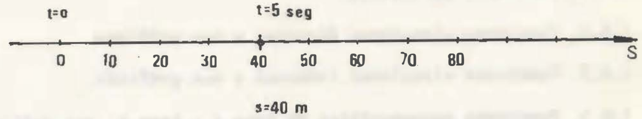


FIG. I

La tabla siguiente muestra los valores de S que corresponden a algunos valores de t.

t, seg	0	5	10	15	20	25	30
S, m	0	40	80	120	160	200	240

Desde luego, la fórmula mediante la cual se obtiene el valor de S - para cada valor de t es: $S = 8t$.

Esta fórmula describe exactamente como el valor de la variable S depende del valor de la variable t. Esta variable cuyo valor puede fijarse a voluntad, recibe el nombre de variable independiente y aquella cuyo valor - depende del que se dé a la independiente se llama variable dependiente.

Notación.- Si en una relación funcional, x es la variable independiente y "y" es la variable dependiente se acostumbra escribir $y = f(x)$ - para representar la función en cuestión y se lee "y igual a f de x".

Por supuesto, $f(x)$ aquí no es el producto de f por x, sino que - $f(x)$ indica que x es la variable independiente y f representa simbólicamente las operaciones a efectuar con cada valor de x para obtener el correspondiente valor de y.

En principio la letra f, inicial de función, se emplea en la notación indicada en forma típica, pero pueden emplearse distintas letras para - discriminar diferentes funciones de la misma variable independiente como: - $g(x)$, $P(x)$, $\phi(x)$, etc.

Durante todo el curso de un proceso un mismo símbolo de funcionalidad indicará una misma ley de dependencia entre la variable dependiente y la independiente, es decir una misma notación $y = f(x)$ indicará las mismas operaciones por ejecutar con cada valor de x que se tome para calcular el valor de y que le corresponde. Así $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, etc.

Ejemplo 2.- Sea $f(x) = x^2 - 9x + 14$

Se tendrá:

$$f(0) = 0 - 9(0) + 14 = 14$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 9(-1) + 14 = 24$$

$$f(3) = (3)^2 - 9(3) + 14 = -4$$

$$f(a) = a^2 - 9a + 14$$

$$f(b+1) = (b+1)^2 - 9(b+1) + 14 = b^2 - 7b + 6$$

Ejemplo 3.- Hacer ver que $f(a) - f(-a) = 0$

Si $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$

En efecto: $f(a) = a^4 - 3a^2 + 5$; $f(-a) = a^4 - 3a^2 + 5$

Luego: $f(a) - f(-a) = 0$

Ejemplo 4.- Dada $g(x) = a^x$, hacer ver que

$$g(z+1) - g(z) = (a-1)\,g(z)$$

Efectivamente: $g(z+1) = a^{z+1}$; $g(z) = a^z$

$$g(z+1) - g(z) = a^{z+1} - a^z = (a-1)\,a^z = (a-1)\,g(z)$$

Para que una expresión $y = f(x)$ sea función real de variable real, - es necesario que y sea real para todo valor real de x, y que a cada valor de la variable independiente x corresponda un valor de la variable dependiente y sólo uno.

Ejemplo 5.- La ecuación $y = \pm\sqrt{x}$ no representa una función ya que para cada valor positivo de x existen dos valores para y. Así si $x_1 = 1$, $y_2 = -1$; si $x_2 = 4$, $y_3 = 2$, $y_4 = -2$, etc. Sin embargo, si específicamente se establece que los valores de la variable dependiente y son positivos, si se tiene, con $y = +\sqrt{x}$ $(x > 0,\ y > 0)$ una función, o bien si se establece que los valores de y son negativos también queda dada una función con $y = -\sqrt{x}$, $(x > 0,\ y < 0)$.

Enfoque Moderno.-

Este enfoque del concepto de función está basado en la teoría de conjuntos, entonces antes de establecer una definición de función, se recordarán algunos conceptos básicos de la teoría de conjuntos.

Conjunto. Quizás la forma más sencilla de definir un conjunto sea el decir que se trata de una colección de elementos, en donde cada uno de estos elementos tenga una o varias características que lo distinga de otros elementos -- que no pertenezcan al conjunto.

Cuando en un conjunto se dispone de un criterio que permite saber de - sus elementos cual es anterior y cual posterior, se dice que el conjunto es --

ordenado.

Ejemplo 6.- Los siguientes conjuntos son ordenados.

a) el conjunto C de todos los números primos mayores que 2 y menores que 17, considerados en orden ascendente.

$$C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$$

b) El conjunto B de las vocales en el orden usual de enunciación:

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

Dos conjuntos ordenados son iguales si tienen los mismos elementos y en el mismo orden.

Relación binaria. Una relación binaria R, o simplemente una relación de un conjunto A en otro conjunto B es un conjunto de parejas ordenadas (a, b) en donde $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$ y en el que los elementos de las parejas ordenadas están ligados por las condiciones que establece la relación.

Simbólicamente una relación se puede escribir como sigue:

$$R = \{(x, y) | x \varepsilon A, \ y \varepsilon B, P x y\}$$

Lo que indica que R es el conjunto de parejas ordenadas (x, y) tales que $x \varepsilon A$, $y \varepsilon B$ y el vínculo entre los elementos de cada pareja está establecido por la proposición P x y. La proposición P x y permite establecer si una pareja ordenada cualquiera $(x, y) \varepsilon A \times B$, pertenece o no a la relación.

Ejemplo 7.- Sean los conjuntos $A = \{ x | x \varepsilon N; 1 \leq x \leq 3\}$ $B = \{ y | y \varepsilon N, 1 \leq y \leq 4 \}$ o sea que $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$

Todas las posibles parejas que se pueden formar con los elementos de los conjuntos A y B, en este orden, constituyen el producto cartesiano A x B que se lee A cruz B, y son las siguientes:

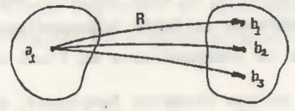
$$A \times B = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4) \}$$

La relación R de los conjuntos A y B que se obtiene por medio de la proposición P x y : y > x puede escribirse:

$$R = \{ (x, y) | x \varepsilon A, \ y \varepsilon B, y > x \} = \{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$

Pueden distinguirse tres tipos de relaciones entre dos conjuntos A y B, que son:

a) Relación multiforme. Cuando se relaciona cada elemento del conjunto A con uno o varios elementos del conjunto B. Como pretende esquematizarse en la figura 2.



A FIG 2 B

b) Relación uniforme o unívoca. Cuando uno o varios elementos de A se asocian con un solo elemento de B. Figura 3.

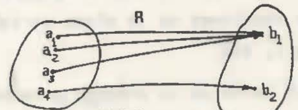


FIG 3

c) Relación biunívoca o uno a uno. Cuando a cada elemento de A se asocia un elemento de B y sólo uno y viceversa, figura 4.

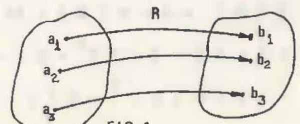


FIG.4

A las relaciones de un conjunto A a un conjunto B en las que a cada elemento de A corresponde un solo elemento de B se les da el nombre de funciones. Es decir a las relaciones uniformes o unívocas y a las relaciones biunívocas se les llama funciones.

De acuerdo a esto, la definición de función desde el punto de vista de la Teoría de Conjuntos se puede expresar de la siguiente forma:

" Una función es una regla o método que asigna a cada elemento x de un conjunto A un único elemento y de un conjunto B ".

Lo anterior significa que una función es un conjunto de parejas ordenadas de elementos tal que ningunas dos parejas distintas tienen el mismo primer elemento. Este conjunto de parejas ordenadas resulta de aplicar una ley o regla de asignacion a los elementos del primer conjunto para obtener los correspondientes elementos del otro conjunto. La figura 5 representa esquemáticamente el concepto de función.

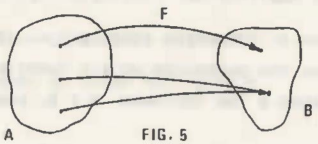


FIG. 5

Se puede observar también que una función f de un conjunto A a un conjunto B es un subconjunto del conjunto A x B.

De acuerdo a lo anterior, una función no es mas que un tipo especial de relación y por lo tanto puede emplearse la notación de relación para representar una función.

Entonces una función puede expresarse " por comprensión " así:

$$f = \{ (x, y) \mid x \in A, \; y = f(x) \}$$

O bien puede expresarse en algún caso escribiendo todas las parejas ordenadas que la forman, " por extensión "

$$f = \{ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (xn, yn) \}$$

Puede verse en la primera de las notaciones anteriores que no se ha escrito el conjunto a que pertenecen los elementos "y" sin embargo aparecen identificados mediante la ley o regla de asignacion $y = f(x)$ también llamada regla de correspondencia. Por otra parte, esta regla de correspondencia debe ser tal que no permita tener dos parejas distintas con el mismo primer elemento. Es decir si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos parejas distintas de la función f, deberá tenerse $x_1 \neq x_2$. Obsérvese, sin embargo que el segundo elemento y si puede repetirse en más de una pareja.

De lo expuesto, se ratifica que toda función es una relación pero no toda relación es función. Las relaciones multiformes no son funciones.

Habiendo presentado el concepto de función bajo los dos puntos de vista propuestos, es importante hacer hincapié que ambos enfoques son equivalentes , no se presenta diferencia alguna en la esencia del concepto de función. Se trata solamente como ya se ha dicho de diferentes puntos de vista.

Así que en el desarrollo de este curso generalmente se utilizará el enfoque tradicional aunque cuando resulte de utilidad el empleo del enfoque moderno y la notación inherente a él, se empleará éste.

Función Real de Variable Real.

Hasta ahora se ha tratado el concepto de función en forma general, o sea que no se ha hecho restricción alguna sobre la naturaleza de los elementos de las parejas ordenadas que la forman. En el presente curso, se tratará con funciones donde los elementos que intervienen pertenecen al conjunto de los numeros reales. Esto quiere decir que tanto la variable independiente como la variable dependiente serán numeros reales.

Teniendo en cuenta que se tratará con el conjunto de los números reales y con subconjuntos de él, conviene presentar algunos aspectos importantes de los sistemas númericos.

a) Números Naturales.- Son los que sirven para contar: 1, 2, 3, 4,... es decir, son los enteros positivos. El conjunto de los números naturales es cerrado respecto a la adición y respecto a la multiplicación. Esto significa-que dichas operaciones efectuadas con números naturales dan siempre como re-- sultado, números naturales.

Observese que el conjunto de los números naturales no es cerrado respecto a la sustracción, no todas las restas obtenidas entre números naturales son también números naturales.

b) Números Enteros.- El conjunto de los números enteros está formada por todos los enteros positivos, los enteros negativos y el cero ..., -3,-2, -1, 0, 1, 2, 3....

Este conjunto es cerrado respecto a las operaciones de adición, sustracción y multiplicación. Las sumas, restas y productos de números enteros son también numeros enteros, pero no todos los cocientes de números enteros son enteros, o sea que el conjunto de los números enteros no es cerrado respecto a la división.

c) Números racionales.- Son todos los números que pueden escribirse en la forma $\frac{p}{q}$ en que p y q son números enteros y $q \neq 0$. Es decir, el conjunto de los números racionales está formado por todas las fracciones cuyo numerador y denominador son números enteros y el denominador no es cero.

Los números enteros y por consiguiente los números naturales, son casos particulares de números racionales, ya que basta con dividir, cualquiera de ellos entre uno para que queden escritas en la forma $\frac{p}{q}$

El conjunto de los números racionales es cerrado respecto a la adición, sustracción, multiplicación y división.

d) Números irracionales.- Son todos aquellos números que no pueden escribirse como el cociente de los dos enteros $\frac{p}{q}$, como son: $\sqrt{2}$, π, e, etc.- que pueden ser identificados también como los decimales ilimitados no periódicos.

El conjunto de los números reales está formado por la unión del conjunto de los números racionales y el de los irracionales. El siguiente cuadro sinóptico muestra la clasificación de los números reales.

- Números reales.
  - Racionales.
    - Enteros
    - Fraccionarios.
  - Irracionales.

Intervalos. Tal y como se ha considerado el conjunto R, se trata del conjunto de los números reales no restringido. Frecuentemente es necesario considerar un subconjunto de R; es decir, se tiene que restringir este conjunto y esto se lleva a cabo mediante los intervalos. Sean dos números a y b, de tal manera que $a < b$. Se le llama intervalo al conjunto de números comprendidos entre a y b. Esto puede escribirse como:

$$a < X < b$$

En donde X es un número cualquiera menor que b pero mayor que a.

A continuación se describen los nueve tipos de intervalos que pueden presentarse, cuatro de ellos finitos y cinco infinitos.

Intervalos Finitos.- Se llama intervalo abierto determinado por los numeros reales a y b tales que $a < b$, al conjunto de todos los números reales mayores que a y menores que b. Este intervalo se denota (a, b). a y b son los extremos del intervalo.

$$(a , b) = \{x \mid x \in R, a < x < b \}$$

A veces este intervalo se escribe simplemente:

$$a < x < b$$

Obsérvese que en un intervalo abierto (a , b), los propios extremos a y b no forman parte del mismo.

Suele llamarse amplitud del intervalo (a, b) a la diferencia b - a.

Geométricamante el intervalo abierto (a , b) queda representado -- por el conjunto de todos los puntos de un eje numérico x comprendidos entre los puntos que representan a los extremos a y b, como se ve en la figura 6.

FIG. 6

El intervalo cerrado determinado por los números reales a y b donde $a < b$, es el conjunto de todos los números reales x tales que $a \leq x \leq b$ y se denota con $[a, b]$

$$[a, b] = \{x \mid x \in R, a \leq x \leq b\}$$

Evidentemente en un intervalo cerrado $[a, b]$, los extremos a y b -- forman parte del intervalo. La diferencia b - a es la amplitud del intervalo.

La representación geométrica del intervalo cerrado $[a, b]$ está constituída por el conjunto de todos los puntos de un eje númerico x comprendidos entre los puntos a y b, incluyendo estos, figura 7 .

FIG 7

Se conocen como intervalos semiabiertos a los siguientes:

Intervalo semiabierto por la izquierda:

$(a, b] = \{ x \mid x \in R, a < x \leq b \}$

Que se representa geométricamente en la figura 8 .

FIG 8

Intervalo semiabierto por la derecha:

$$[a, b) = \{ x \mid x \in R, a \leq x < b \}$$

Que geométricamente se ve en la figura 9

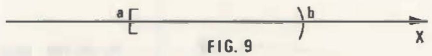


FIG. 9

Los intervalos infinitos son los siguientes, en donde $x \in R$.

$$(a, \infty) = \{ x \mid x > a \}$$
$$[a, \infty) = \{ x \mid x \geq a \}$$
$$(-\infty, a) = \{ x \mid x < a \}$$
$$(-\infty, a] = \{ x \mid x \leq a \}$$
$$(-\infty, \infty) = \{ x \mid x \in R \}$$

Las representaciones geométricas de estos intervalos se deducen fácilmente de lo anterior.

Dominio y Rango.- Se llama dominio de una función al conjunto de todos los valores que toma la variable independiente. Esto es, si

$$f = \{ (x, y) \mid x \in A;\ y = f(x) \}$$

el dominio de la función f denotada por D_f es $D_f = A$

Rango de una función es el conjunto de valores que toma la variable-dependiente. O sea que para la función $f = \{ (x, y) \mid x \in D_f, y = f(x) \}$, el rango denotado por R_f es el conjunto de valores y tales que $y = f(x)$, - $x \in D_f$. Simbólicamente:

$$R_f = \{ y \mid y = f(x), \ x \in D_f \}$$

Para ilustrar los conceptos anteriores se presentan los siguientes ejemplos:

Ejemplo 8.- Sea la función dada por $f(x) = +\sqrt{5 - x}$

El dominio de esta función es $D_f = \{ x \mid x \in R, x \leq 5 \}$ o sea, el intervalo infinito $(-\infty, 5]$

El rango es el conjunto de todos los números reales no negativos, es decir $R_f = \{ y \mid y \in R, y \geq 0 \}$ o bien $[0, +\infty)$

De este ejemplo se infiere una importante convención. Cuando una función se defina únicamente por la regla de correspondiencia, se considerara como dominio el conjunto de valores reales de la variable independiente que hacen que sea real la variable dependiente. En dicho ejemplo, como se tiene una raíz cuadrada, que será real solamente si el subradical es positivo o nulo, - el dominio se obtuvo de considerar $5 - x > 0$. Lo cual implica $x < 5$.

Ejemplo 9.- Dada la función f tal que $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, puede-observarse que la expresión $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ no esta definida para $x = 2$, por tanto no hay valor de $f(x)$ para $x = 2$, de ahí que $2 \notin D_f$. Sin embargo $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ es un número real diferente de 2. Si $a \in R$ y $a \neq 2$ hay un valor de $f(x)$ - en a que es:

$f(a) = \dfrac{a^2 - 4}{a - 2}$, luego el dominio de esta función es: $D_f = \{ x \mid x \in R, \ x \neq 2 \}$

El rango estará constituido por todos los valores de y que resultan correspondientes a los valores de x del dominio. El rango es

$$R_f = \{ y \mid y \in R, \; y \neq 4 \}$$

Representación Geométrica.-

En el estudio de los tópicos de las matemáticas es de gran ayuda poder dibujar ilustraciones que tengan alguna significación con el tópico en cuestión. Estas ilustraciones no son parte esencial de la teoría matemática, sino más bien deben considerarse como ayudas visuales. Además de un diagrama que ilustre la correspondiencia, o dependencia entre las variables que intervienen en una función, puede darse una representación geométrica de la misma. Muchas veces la ayuda que proporciona la gráfica de una función es clave para el estudio de la función y para la solución del problema en que interviene ésta.

Dado que una función real de variable real es un conjunto de parejas ordenadas de números reales (x, y), y como existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de parejas ordenadas de números reales y el conjunto de puntos de un plano cartesiano x, y, una función puede representarse por el conjunto de puntos del plano, cuyas coordenadas sean las parejas que constituyen la función. Esto es, cada pareja ordenada (x_1, y_1) de la función

$$f = \{ (x, y) \mid y = f (x), \; x \in D_f \}$$

queda representada por el punto P_1 (x_1, y_1), por lo cual, la gráfica de dicha función será el lugar geométrico de todos los puntos P (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación y = f (x). Recuérdese que el primer elemento, x de cada pareja es la abscisa del punto que la representa y que el segundo elemento y es su ordenada. Debe notarse que de acuerdo con la definición de función real de variable real, si ésta tiene una infinidad de pares de elementos (x , y), su gráfica es un lugar geométrico tal que no hay ninguna recta paralela al eje y con la que presente más de un punto de intersección.

Ejemplo 10.- Sea la función del ejemplo 8 : $f (x) = + \sqrt{5 - x}$

En seguida se muestra una tabla con algunos valores de x en el dominio de la función y sus correspondientes f (x).

x	-4	-1	0	1	2	3	4	5
y=f(x)	3	$+\sqrt{6}$	$+\sqrt{5}$	2	$+\sqrt{3}$	$+\sqrt{2}$	1	0

En la figura 10 esta representado el conjunto de parejas (x, y) de la tabla.

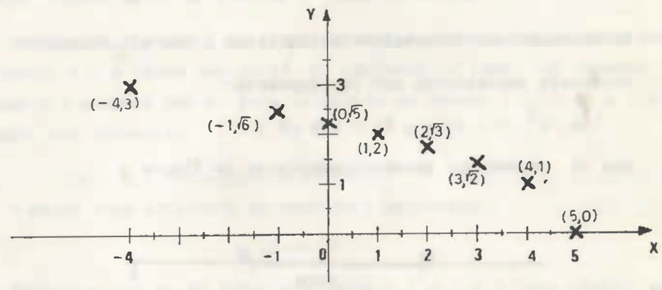


FIG. 10

Trazando una curva por todos los puntos mostrados en la figura 10, se obtendrá la representación geométrica de la función propuesta, como se ve en la figura 11.

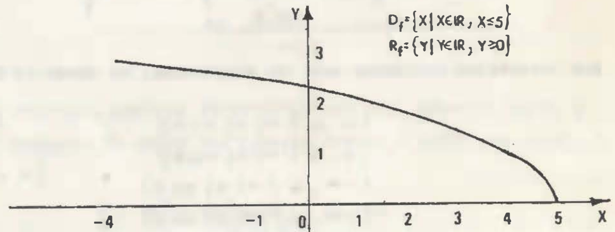


FIG. 11

Ejemplo 11.- Sea la función dada por $y = 3 - \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^2 + 9}$.

Para trazar su gráfica puede transformarse antes la ecuación dada para ver que tipo de curva representa, dado que es una ecuación de 2º grado en x, y, y determinar sus elementos característicos. Esto es:

$$y = 3 - \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^2 + 9} \Longrightarrow 3(y-3) = -2\sqrt{(x-2)^2 + 9}$$

$$\Longrightarrow 9(y-3)^2 = 4(x-2)^2 + 36$$

$$9(y-3)^2 - 4(x-2)^2 = 36 \Rightarrow \frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

Esta ecuación representa una hipérbola con eje focal paralelo al eje y, de centro C (2, 3), semieje transverso a = 2, semieje conjugado b = 3, vertices V_1 (2, 1). V_2 (2, 5)

Teniendo en cuenta la regla de correspondencia dada:

$$y = 3 - \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^2 + 9}$$

la gráfica de la función en cuestión consiste en la rama inferior de dicha hipérbola como se ve en la figura 12.

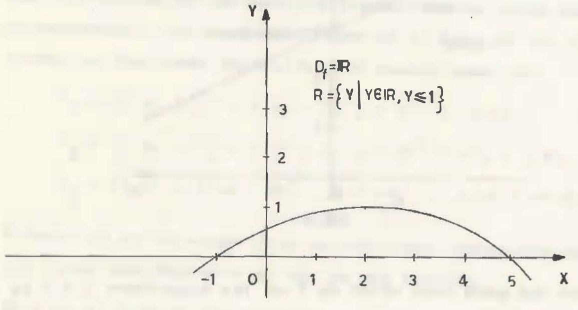


Figura 12

1.2. FUNCIONES EXPLICITAS E IMPLICITAS. DADAS EN FORMA PARAMETRICA.- FUNCIONES DEFINIDAS EN DIFERENTES INTERVALOS.

Sea la función dada por y = f (x), donde como se sabe f (x) indica como calcular el valor de la variable dependiente y directamente en términos de la variable independiente x. Toda función especificada así se llama función explícita.

En otras palabras, una función es explícita cuando en la ecuación que actúa como regla de correspondencia, se tiene despejada la variable dependiente y en términos de la variable independiente x.

Ejemplo 12.- La función $y = f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ es una función explícita, dado que la ecuación que es la regla de correspondencia, permite calcular directamente para cualquier valor x del dominio, el elemento correspondiente y del rango.

Considérese ahora que f (x, y) representa una expresión en x, y; en tal forma que f (x, y) = 0 ..... (1) es una ecuación en x, y, que no está resuelta para y, es decir que no está despejada y.

Ejemplo 13.- La ecuación: $2x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ ...... (a)
es una ecuación del tipo f (x, y) = 0 ...... (1)

donde $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 1$

En este ejemplo se puede despejar y considerando que se trata de una ecuación de segundo grado en y

$$y^2 - 2xy + (2x^2 - 1) = 0$$

De donde:

$$y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(2x^2 - 1)}}{2} = x \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 - 4x^2}$$

Las soluciones de dicha ecuación son: $y = x \pm \sqrt{1 - x^2}$

Dado que hay dos valores de y para cada valor de x en el intervalo abierto (-1, 1), la ecuación (a) especifica una relación multiforme, pero no una función.

Para que la ecuación (a) sea la regla de correspondencia de una función, basta con precisar el signo que ha de afectar a la raíz. De este modo se tendrán dos funciones:

$$f_1(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$$
$$f_2(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$$

Segun lo anterior, una ecuación $f(x, y) = 0$ puede implicar una o más relaciones funcionales. Ante esto es necesario tener cuidado, ya que hay ecuaciones del tipo (1) que no se satisfacen para ningún par de números reales x, y, por lo cual no representan ninguna función real de variable real, como es el caso del ejemplo 14.

Ejemplo 14.- Dada la ecuación $x^2 + y^2 - 9 = 0$, obsérvese que no se satisface para ningún par de números reales (x, y).

Esto se ve claramente en la expresión que resulta al despejar y, que es:

$$y = \pm\sqrt{-(x^2 + 9)}$$

Evidentemente al sustituir en esta expresión a x por cualquier número real queda la raíz cuadrada de un numero negativo que no es un número real.

Aquí se considerará que una ecuación del tipo (1) define una relación misma que si no es una función, puede definirse a partir de ella una función adaptando condiciones adecuadas como en el caso del ejemplo 13.

Una función cuya regla de correspondencia sea una ecuación del tipo (1), se llama función implícita. O sea que una función implícita se caracteriza porque en la ecuación que actúa como regla de correspondencia, la variable dependiente y no se encuentra despejada.

Ejemplo 15.- En las siguientes expresiones, y es función implícita de x.

a) $x^2 - 3y + 1 = 0$

b) $x\,y = 1, \quad x \neq 0$

c) $4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 1 = 0; \quad y > 0$

d) $y = \cos(x - y)$

e) $e^y = \operatorname{sen}(x + y)$

f) $y^3 = x - 2$

g) $y^3 = x^2$

Funciones dadas en forma paramétrica.

En el siguente ejemplo se ilustra el significado de la representación paramétrica.

Ejemplo 16.- Dadas las ecuaciones

$$X = 2t - 2 \quad ; \quad y = 4 - t \qquad (A)$$

el parámetro t puede eliminarse por igualación, habiéndolo despejado previamente:

$$t = \frac{x + 2}{2}, \quad t = 4 - y \qquad \frac{x + 2}{2} = 4 - y \qquad x + 2y - 6 = 0 \qquad (B)$$

(B) es la ecuación de la recta que se ve en la figura 13.

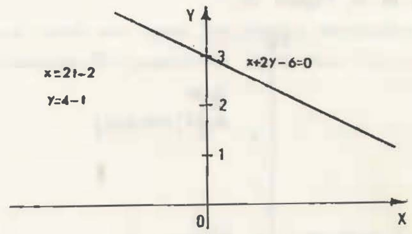


FIG.13

Obsérvese que para cada valor de t en las ecuaciones (A) se tiene un valor de x y un valor de y, que considerados como una pareja ordenada de números reales (x, y), constituyen las coordenadas de un punto P (x, y) de la recta de ecuación (B).

Ejemplo 17.- $x = 2t + 2$; $y = 2t^2 + 4t$ son las ecuaciones paramétricas de la parábola de ecuación $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$, figura 14.

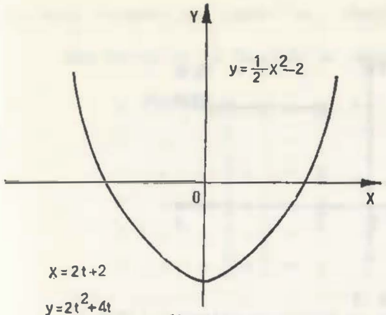


FIG. 14

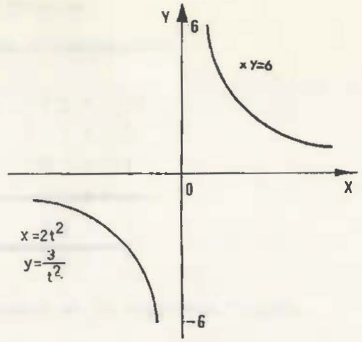


FIG. 15

Ejemplo 18.- Las ecuaciones $x = 2t^2$; $y = \frac{3}{t^2}$, con el parámetro t,- son una representación paramétrica de la hipérbola cuya ecuación cartesiana-es: $x\,y = 6$, figura 15.

Una representación paramétrica frecuentemente puede constituír la regla de correspondencia de una función como es el caso de los ejemplos anteriores, donde las funciones respectivas se pueden escribir:

$$f_1 = \{(x, y) \mid x = 2t - 2,\ y = 4 - t,\ t \in R\}$$

$$f_2 = \{(x, y) \mid x = 2t + 2,\ y = 2t^2 + 4t,\ t \in R\}$$

$$f_3 = \{(x, y) \mid x = 2t^2 ;\ y = \frac{3}{t^2},\quad t \in R\ t \neq 0\}$$

A veces un par de ecuaciones paramétricas representa una relación multiforme que puede descomponerse en más de una función.

Este es el caso de las ecuaciones del ejemplo 19.

Ejemplo 19.- Las ecuaciones $x = 3\cos\theta$; $y = 2\,\text{sen}\,\theta$, en las que θ es el parámetro, corresponden a la elipse de la ecuación cartesiana $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Desde luego estas ecuaciones definen una relación multiforme en el intervalo abierto $-3 < x < 3$, que puede descomponerse en las dos siguientes funciones:

$$f_1 = \{(x, y) \mid x = 3\cos\theta,\ y = 2\,\text{sen}\,\theta,\ -3 < x < 3,\ y > 0\}$$

$$f_2 = \{(x, y) \mid x = 3\cos\theta,\ y = 2\,\text{sen}\,\theta,\ -3 < x < 3,\ y < 0\}$$

Cuyas gráficas se ven en la figura 16.

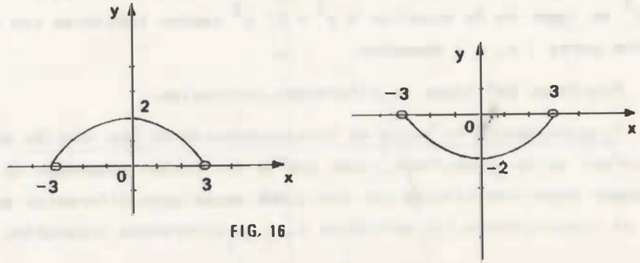


FIG. 16

Una función expresada en forma paramétrica es pues:

$$f = \{(x, y) \mid x = f(t),\ y = g(t),\ t \in D_f \cap D_g \neq \phi\}$$

Debe tenerse cuidado en identificar las ecuaciones paramétricas que-no definan una función. Esto puede suceder si $D_f \cap D_g = \phi$ como se ve en el e-jemplo 20.

Ejemplo 20.- Dadas $x = f(t) = \sqrt{4 - t}$ $y = g(t) = \sqrt{t - 6}$ donde $D_f = \{t \mid t \in R,\ t \leq 4\}$ y $D_g = \{t \mid t \in R,\ t \geq 6\}$ se ve que $D_f \cap D_g = \phi$ Lo cual hace que ningún valor de t defina un par de números reales ordenados-(x, y). Esto implica que estas ecuaciones no definen una función.

Una aplicación útil de las representaciones paramétricas se presen--ta en problemas de movimiento curvilíneo, donde comunmente se considera que --(x, y) son las coordenadas cartesianas del punto móvil y el parámetro t es-el tiempo.

A las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, suele llamarseles en ese -caso ecuaciones del movimiento y a la gráfica correspondiente, trayectoria -del movimiento.

Otro empleo interesante de las ecuaciones paramétricas se tiene para simplificar los cálculos al determinar las coordenadas de los puntos de una curva, dada su ecuación, como se ve en el siguiente

Ejemplo 21.- Para obtener puntos de la curva de ecuación $4y^3 = 27x^2$ puede hacerse $x = 2t^3$, lo cual da $y^3 = 27\ t^6$, en otra ecuación $y \varepsilon R$ y $t \varepsilon R$ -- luego puede simplificarse para tener $y = 3\ t^2$.

Es evidente que si se usan las ecuaciones paramétricas $x = 2\ t^3$; -- $y = 3\ t^2$ en lugar de la ecuación $4\ y^3 = 27\ x^2$ pueden tabularse con mas facilidad los pares (x, y) deseados.

Funciones definidas en diferentes intervalos.

Frecuentemente la regla de correspondencia de una función esta especificada por varias ecuaciones, cada una de las cuales establece la asignacion, puede estar constituida por una o más ecuaciones diferentes que establecen el vinculo entre las variables x, y, en diferentes intervalos del dominio.

A continuación se presentan algunos ejemplos para ilustrar esto:

Ejemplo 22.- Sea la función dada por:

$$y = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Puede verse que la regla de correspondencia esta formada por tres ecuaciones, las cuales establecen el vínculo entre x y y para diferentes partes del dominio, que es R. Específicamente:

$$y = -2 \quad \text{para } x \varepsilon (-\infty - 1]$$
$$y = 1 \quad \text{para } x \varepsilon (-1, 2]$$
$$y = 4 \quad \text{para } x \varepsilon (2, +\infty)$$

La gráfica de esta función se muestra en la figura 17.

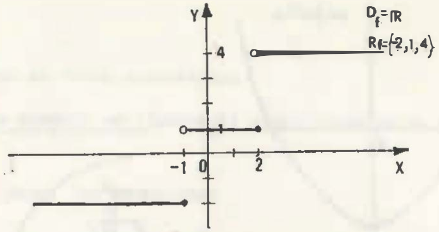


FIG 17

Ejemplo 23.- Sea la función "valor absoluto" dada por $y = | x |$.

Esta regla de correspondencia es equivalente a:

$$y = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales y el rango es el conjunto de todos los números reales no negativos. -- $D_f = R$, $R_f = \{ y \mid y \ \varepsilon\ R, y \geq 0 \}$ Su gráfica se ve en la figura 18.

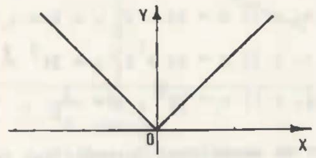


FIG. 18

Ejemplo 24.- Considérese la función definida por $F (x) = [\![x]\!]$ llamada "función mayor entero", donde $[\![x]\!]$ significa la parte entera del número real x. Es decir $f (x) = [\![x]\!] = n$ si $n \leq x < n + 1$.

El dominio de esta funcion es el conjunto de los números reales y el rango esta formado por todos los números enteros.

Una parte de la función se describe a continuación.

$$
\begin{array}{lll}
F(x) = [\![x]\!] = -2 & \text{si} & -2 \leq x < -1 \\
F(x) = [\![x]\!] = -1 & \text{si} & -1 \leq x < 0 \\
F(x) = [\![x]\!] = 0 & \text{si} & 0 \leq x < 1 \\
F(x) = [\![x]\!] = 1 & \text{si} & 1 \leq x < 2 \\
F(x) = [\![x]\!] = 2 & \text{si} & 2 \leq x < 3 \\
F(x) = [\![x]\!] = 3 & \text{si} & 3 \leq x < 4
\end{array}
$$

La gráfica correspondiente se presenta en la siguiente figura.

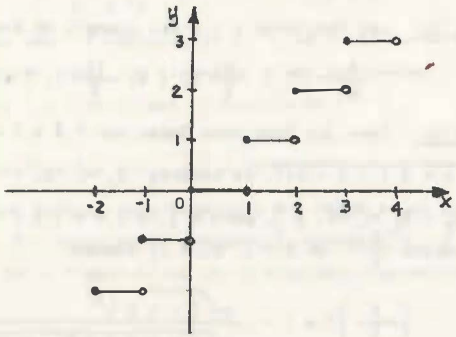


Figura 19.

Ejemplo 25.- Sea la función definida por:

$$
f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x - 4 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 5 - x^2 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \end{cases}
$$

Obsérvese que la regla de correspondencia de esta función está formada por tres ecuaciones. La primera representa una parábola cuyo eje coincide con el eje " y " y su vértice es el punto V_1 (0, -3). La segunda equivale a una recta con pendiente igual a 2 y que corta al eje " y " en el punto P (0, - 4) y la tercera representa otra parábola. También con su eje coincidiendo con el eje de las ordenadas y vertice V_2 (0, 5).

La gráfica de esta función se puede observar en la figura 20.

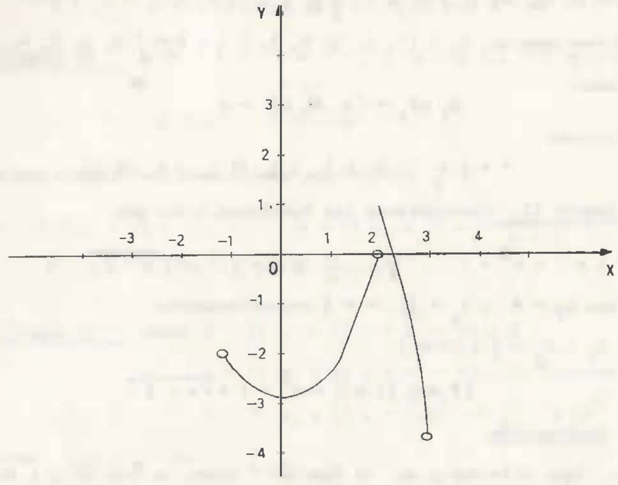


Figura 20

1.3. OPERACIONES CON FUNCIONES.

En este tema se estudian las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y composición de funciones, mismas que son indispensables para el tratamiento de los temas subsecuentes.

En lo que sigue se considerará que f y g son funciones con regla de correspondencia $y = f(x)$, $y = g(x)$ y dominio D_f y D_g, respectivamente.

Se define como suma de las funciones f y g a la función denotada con f + g con dominio $D = D_f \cap D_g$, tal que

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in D$$

Esto es, el valor de f + g en $x \in D$, es igual a la suma de los valores de f y g en $x \in D$.

Ejemplo 26.- Sean las funciones:

$f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 11), (5, 13), (6, 17)\}$

$g = \{(-2, -5), (0, 4), (2, 3), (4, 2), (6, 1)\}$

Evidentemente: $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $D_g = \{-2, 0, 2, 4, 6\}$

Luego:

$$D_f \cap D_g = \{2, 4, 6\} = D$$

Entonces:

$$f + g = \{(2, 8), (4, 13), (6, 18)\}$$

Ejemplo 27.- Considérense las funciones dadas por:

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad y \qquad g(x) = +\sqrt{x - 3}$$

para las que $D_f = R$ y $D_g = [3, +\infty)$ respectivamente.

Ahora $D = D_f \cap D_g = [3, +\infty)$

$$(f + g)(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x - 3}$$

- Sustracción.

Se llama diferencia de la función f menos la función g y se denota por $f - g$ a la función dada por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad : \quad x \in D = D_f \cap D_g$$

Donde $D = D_f \cap D_g$ es el dominio de $f - g$.

Ejemplo 28.- Dadas las funciones f y g del ejemplo 26 se tendrá que:

$$f - g = \{(2, 2), (4, 9), (6, 16)\}$$

Ejemplo 29.- Si f y g son las funciones dadas por $f(x) = 3x^2 + x$, $g(x) = x^2 + \sqrt{x^3}$, se tiene $D_f = R$, y $D_g = [0 + \infty)$. Entonces $D = D_f \cap D_g = [0 + \infty)$ y $f - g$ estará dada por $[f - g](x) = 2x^2 + x - \sqrt{x^3}$

Multiplicación.

El producto de las funciones f y g es la función con dominio $D = D_f \cap D_g$, denotada por fg y tal que si $x \in D$

$$(f g)(x) = f(x)\, g(x)$$

Ejemplo 30.- Tomando las funciones f y g del ejemplo 26 se tiene:

$$f g = \{(2, 15), (4, 22), (6, 17)\}$$

Ejemplo 31.- Si f_1 y f_2 son funciones tales que $f_1(x) = +\sqrt{x - 1}$, $f_2(x) = +\sqrt{9 - x^2}$, entonces $D_{f1} = [1, +\infty)$, y $D_{f2} = [-3, 3]$, por lo cual $D = D_{f1} \cap D_{f2} = [1, 3]$ y $[f g](x) = +\sqrt{x - 1}\sqrt{9 - x^2}$: $x \in D$

División.

Se llama cociente de la función f entre la función g a la función $\frac{f}{g}$ tal que $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ en que $x \in D = D_f \cap D_g$; $g(x) \neq 0$

Ejemplo 32.- Las funciones f y g del ejemplo 26 dan

$$\frac{f}{g} = \{(2, \tfrac{5}{3}), (4, \tfrac{11}{2}), (6, 17)\}$$

Ejemplo 33.- Sean las funciones dadas por $F(x) = +\sqrt{(x + 2)^3}$, $G(x) = +\sqrt{(x + 3)(5 - x)}$, se tendrá: $D_F = [-2, +\infty)$ y $D_G = [-3, 5]$

Luego $D_F \cap D_G = [-2, 5]$, pero $G(-3) = G(5) = 0$, entonces el dominio de la función $\frac{F}{G}$ es $D = [-2, 5)$, siendo:

$$\left[\frac{F}{G}\right](x) = \frac{+\sqrt{(x + 2)^3}}{+\sqrt{(x + 3)(5 - x)}}$$

De las definiciones de suma y producto de dos funciones se tiene que:

La suma de n funciones reales de variable real: $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n$ es una funcion real.

El producto de n funciones reales de variable real:

$$f_1\, f_2\, f_3 \ldots f_n \quad \text{es una función real..}$$

Si se suma n veces una misma funcion f, se tiene:

$$f + f + f + \ldots + f = n f; \text{ (n sumandos)}$$

Si se multiplica n veces por si misma la función f resulta:

$$f \cdot f \cdot f \cdot \ldots f = f^n, \text{ (n factores)}$$

Desde luego, si m y n son números naturales, entonces: $f^n f^m = f^{n+m}$

Definiendo $f^\circ = 1$ y $f^{-n} = \frac{1}{f^n}$ en que n es natural, para todos los números enteros y n y m se verificará:

$$f^n f^m = f^{n+m} \quad \text{sobre } D_{f^n} \cap D_{f^m}$$

Composición de Funciones o Función de función.

Dadas las funciones f y g con dominios D_f y D_g respectivamente, se define como la composición de la función f con la función g a la función denotada por $f \circ g$ tal que:

$$[f \circ g](x) = f(g(x))$$

$f \circ g$ se lee " f composición g " y se trata de la función cuyo dominio está formado por todos los elementos x que pertenecen al dominio de g, para los cuales g (x) pertenece al dominio de f.

$$D_{f \circ g} = \{ x \mid x \in D_g ,\ g(x) \in D_f \}$$

Si g tiene dominio en el conjunto A y rango en el conjunto B y f tiene dominio en B y rango en el conjunto C, entonces $f \circ g$ tiene dominio en A y rango en C. En la figura 21 se ve un diagrama esquemático de la funcion f composición g.

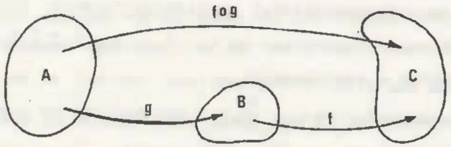


FIG 21

El concepto de composición de funciones es de gran utilidad en el tratamiento de funciones que se presentan frecuentemente, que pueden establecerse en base a otras funciones más simples como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 34.- La funcion definida por $y = +\sqrt{x^2 + 1}$ puede concebirse pensando que $y = +\sqrt{u}$ y $u = x^2 + 1$

Esto es: si $y = f(u) = +\sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$, entonces:

$$y = f(g(x)) = [f \circ g](x) = +\sqrt{x^2 + 1}$$

Ejemplo 35.- Si $y = f(u) = u^4$; $u = g(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$

$$y = (f \circ g)(x) = \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^4$$

Estas mismas funciones pueden escribirse:

$f = \{ (u, y) \mid y = u^4 \}$; $g = \{ (x, u) \mid u = \frac{x - 1}{x + 1} \}$, siendo-

$$f \circ g = \{ (x, y) \mid y = \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^4 \}$$

Ejemplo 36.- Dadas $f = \{ (x, y) \mid y = x^2 - 2x + 3 \}$

$g = \{ (x, y) \mid y = x^3 - 4 \}$, la funcion $h = f \circ g$

es: $h = \{ (x, y) \mid y = (x^3 - 4)^2 - 2(x^3 - 4) + 3 \}$

y la funcion $j = g \circ f$ es:

$$j = \{ (x, y) \mid y = (x^2 - 2x + 3)^3 - 4 \}$$

Ejemplo 37.- Si $f = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6) \}$ y

$g = \{ (0, -3), (3, 2), (4, 1) \}$ entonces:

$f \circ g = \{ (3, 4), (4, 3) \}$ y

$g \circ f = \{ (1, 2), (2, 1) \}$

Se ve con claridad que $D_{f \circ g} = \{ x \mid x \in D_g \ \forall \ g(x) \in D_f \}$

y que $D_{g \circ f} = \{ x \mid x \in D_f \ \forall \ f(x) \in D_g \}$

También es notorio en los dos últimos ejemplos, que: $f \circ g \neq g \circ f$.

Es decir que generalmente la composición de funciones no es conmutativa.

Si f y g son dos funciones reales de variable real, la gráfica de $f \circ g$ puede construirse partiendo de las gráficas de f y g como se indica a-continuación, figura 22.

Tómese un número $x \varepsilon D_g$. Trácese una recta paralela al eje de las ordenadas que pase por el punto (x, 0). Esta recta intersecta a la gráfica de g en el punto (x, g (x)). La recta paralela al eje de las abscisas que pasa por el punto (x, g (x)) intersecta a la recta y = x en el punto (g (x), g (x)). Si $x \varepsilon D_{f \circ g}$ entonces $g (x) \varepsilon D_f$ y la recta paralela al eje de las ordenadas que pasa por el punto (g (x), g (x)) intersectará a la gráfica de f en el punto (g (x) , f (g (x)). El punto

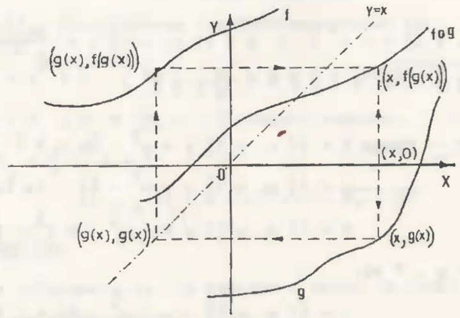


FIG. 22

(x, f (g (x))) de f ∘ g correspondiente, es la intersección de la recta paralela al eje de las abscisas que pasa por (g (x), f (g (x)) y la recta paralela al eje de las ordenadas que pasa por (x, 0).

Ejemplo 38.- Sean f y g las funciones dadas por $f (x) = x^2$, $g (x) = x + 2$. Se trata de trazar la gráfica de la función $f \circ g$.

Como $D_f = D_g = R$, se tiene $D_{f \circ g} = R$

La regla de correspondencia de $f \circ g$ es

$$\left[f \circ g \right] (x) = f (g (x)) = f (x + 2) = (x + 2)^2$$

La figura 23 muestra la gráfica correspondiente.

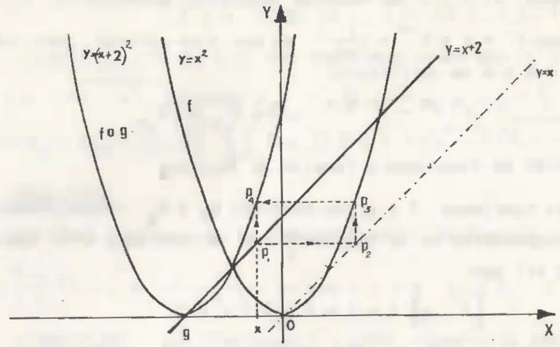


FIG 23

En esta figura: P_1 (x, g (x)), P_2 (g (x), g (x)), P_3 (g (x) f (f (g (x)) y P_4 (x, f (g (x)).

1.4.. FUNCIONES ALGEBRAICAS. FUNCION CONSTANTE E IDENTIDAD. ENTERAS, RACIONALES E IRRACIONALES. LAS FUNCIONES ALGEBRAICAS COMO RAICES DE ECUACIONES DEL TIPO: $P_o (x) y^n + P_1 (x) y^{n-1} + \ldots + P_n (x) = 0$.

Las funciones algebráicas son aquellas en las que interviene un número finito de operaciones algebráicas de las funciones constante e identidad, mismas que se presentan a continuación.

Función constante es la que tiene como dominio el conjunto de los números reales y cuyo rango es un sólo número real.

Esta función puede escribirse:

$$C = \{ (x, y) \mid x \varepsilon R, \ y = C \} = \{ (x, c) \mid x \varepsilon R \}$$

Evidentemente la definición de función constante no se contrapone al concepto de función, dado que a cada valor de la variable independiente x co rresponde un solo valor de variable dependiente y, que es el único valor c - del rango.

La gráfica de la función constante es una recta paralela al eje de- las abscisas, con ordenada c, como se ve en la figura 24.

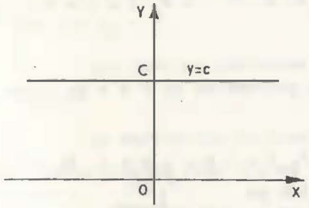


FIG 24

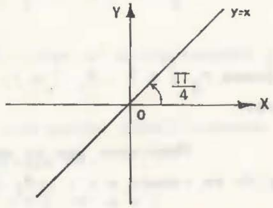


FIG 25

Función identidad es la que tiene como dominio al conjunto de los nú meros reales y en la que a cada valor de la variable independiente x le co- rresponde el mismo valor de la variable dependiente y, de modo que su rango- es también el conjunto de los numeros reales. Comúnmente la funcion identidad se representa con I. Así:

$$I = \{(x, y) \mid x \in R, \ y = x\} = \{(x, x) \mid x \in R\}$$

También puede especificarse esta función escribiendo su regla de co rrespondencia: $I(x) = x$

La gráfica de la funcion identidad es la recta que pasa por el ori-- gen y tiene un ángulo de inclinación $\alpha = \frac{\pi}{4}$, como se ve en la figura 25.

Funciones enteras o polinomiales son las que se obtienen al efectuar con las funciones constante e identidad un número finito de operaciones de a dición, sustracción y multiplicación.

Una función polinomial es pues:

$$P = a_0 + a_1 I + a_2 I^2 + \ldots + a_n I^n$$

donde a_k, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, son funciones constantes, I es la función identidad y el número natural n es el grado de la función polinomial..

Una función de este tipo puede describirse por medio de su regla de- correspondencia:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (2)$$

cuyo dominio es R, en donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales y n es - el grado si $a_n \neq 0$.

Si el grado de una función entera es 1, entonces se llama función li neal. La función lineal general está dada por:

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son constantes y $m \neq 0$

Una función entera de grado 2 se llama función cuadrática.

La función cuadrática general esta definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$

Una función entera es una función cúbica si es de grado 3.

Ejemplo 39.- Las siguientes reglas de correspondencia son de funcio- nes enteras:

a) $f_1(x) = 3x - 2$ (lineal)

b) $f_2(x) = 1/2\,x^2 - 5x + 2/3$ (cuadrática)

c) $f_3(x) = 4 - 6x + 2x^2 - x^3$ (cúbica)

d) $f_4(x) = 5x^6 - 7/4\,x^4 + x - 9$ (de sexto grado)

El cociente de dos funciones enteras es una función racional. Las fun ciones racionales son de la forma $r = \frac{P_1}{P_2}$ en que P_1 y P_2 son funciones ente ras o sea del tipo (2).

Una función racional puede escribirse:

$$r(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m} \quad \ldots (3)$$

en donde $P_2(x) \neq 0$

Ejemplo 40.- Son funciones racionales las definidas por:

a) $r_1(x) = \dfrac{4x^3 - x + 5}{x^2 + 1}$

b) $r_2(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$; $x \neq 2$

c) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 9}$; $x \neq 3$, $x \neq -3$

Nótese que una función racional se obtiene efectuando con las funciones constante e identidad un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división.

Las funciones polinomiales son casos particulares de funciones racionales. En efecto, si en una función racional de la forma (3) se tiene $m = 0$, la función se reduce a :

$$r(x) = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_0} x + \frac{a_2}{b_0} x^2 + \ldots \frac{a_n}{b_0} x^n \quad ; b_0 \neq 0$$

que es la regla de correspondencia de una función polinomial.

Son funciones irracionales aquellas en donde además de poder intervenir operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación, interviene la radicación.

Ejemplo 41.- Las siguientes reglas de correspondencia definen funciones irracionales.

a) $f_1(x) = +\sqrt{x^2 + 16}$

b) $f_2(x) = \dfrac{5x - \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{2x - 3}}$; $x \neq 2/3$; $x \geq -1$

c) $\phi(x) = 6 + \dfrac{\sqrt{2x}}{3} \quad \dfrac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{5}}$; $x \geq 0$

Una función algebráica simple es una función donde interviene un número finito de operaciones que sólo pueden ser de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

En general las funciones algebráicas pueden definirse como soluciones de ecuaciones del tipo

$$P_0(x)\, y^n + P_1(x)\, y^{n-1} + P_2(x)\, y^{n-2} + \ldots + P_n(x) = 0 \quad ..(4)$$

donde $P_0(x)$, $P_1(x)$, . . . , $P_n(x)$ son polinomios en x y n es natural.

Obsérvese que si en la ecuación (4), $P_0(x) = c$ y $n = 1$, la ecuación se reduce a $c\,y + P_1(x) = 0$, cuya solución es $y = -\dfrac{P_1(x)}{c}$ y esta es la regla de correspondencia de una función entera.

Si en (4) el grado de $P_0(x)$ es 1 o mayor que 1 y $n = 1$, la ecuacion queda $P_0(x)\, y + P_1(x) = 0$ y la solución de ésta es:

$$y = -\frac{P_1(x)}{P_0(x)}$$, que es una función racional.

Si en (4) $n > 1$, se tendrá con la solución de dicha ecuación una función irracional.

I.5. FUNCION BIUNIVOCA. FUNCION INVERSA. GRAFICAS.

Una función biunívoca es una relación biunívoca o uno a uno, misma que se definió en el tema I.1. (pag 6).

Es decir, una función $y = f(x)$ es biunívoca cuando a cada valor de la variable dependiente y le corresponde un sólo valor de la variable independiente x.

En otras palabras, si la regla de correspondencia $y = f(x)$ genera parejas ordenadas (x, y) tales que si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos parejas distintas se tiene $y_1 \neq y_2$, entonces $y = f(x)$ es la regla de correspondencia de una función biunívoca.

Ejemplo 42.- La función f tal que $f(x) = 2x - 1$ es biunívoca, ya-que a cada valor de f (x) corresponde un solo valor de x. En todas las parejas (x, y) que constituyen la función, no se repite el segundo elemento y.

Ejemplo 43.- La función g dada por $g(x) = x^2 + 3$ no es biunívoca ya que existen para ella una infinidad de parejas $(a, a^2 + 3)$ y $(-a, a^2 + 3)$; $a \varepsilon R$ donde se repite el segundo elemento. Si $x_1 = 2$, $y_1 = 7$ y $x_2 = -2$ hace que $y_2 = 7$.

Las parejas distintas (2, 7) y (-2, 7) tienen el mismo segundo elemento.

La definición de función biunívoca puede expresarse simbólicamente en forma concisa como sigue. f es una función biunívoca sí:

$$\left[(a, b) \varepsilon f \ \text{ y } \ (c, b) \varepsilon f \right] \Longrightarrow a = c$$

Esta expresión indica que a cada elemento b del rango de f esta asociado un solo elemento a del dominio de f.

La observación de la gráfica de una función permite en forma sencilla determinar si la función es biunívoca o no lo es.

Recuérdese que la gráfica de una función tiene la propiedad de que toda recta normal al eje sobre el cual se ha graficado el dominio intersectará a la gráfica cuando más en un punto. Si una función es biunívoca, su gráfica tiene también la propiedad de que toda recta perpendicular al eje sobre el cual se ha graficado el rango, intersectará a la gráfica cuando más en un punto. Esto se ilustra en las figuras 26 y 27 donde se ven las gráficas de una función biunívoca y de una función que no es biunívoca respectivamente.

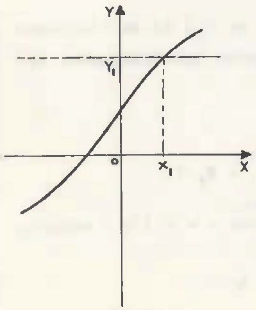


FIG 26

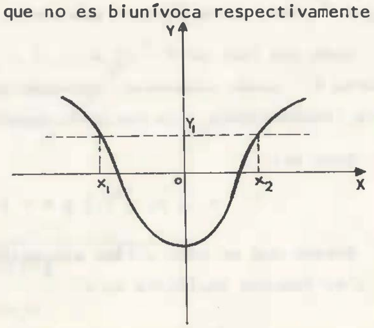


FIG 27

Una forma de identificar una función biunívoca sin basarse en su gráfica es la que se funda en las definiciones de función creciente y de función decreciente:

Sea una función $f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \varepsilon D_f\}$

Se dice que f (x) es creciente sobre un intervalo $[a, b] \subset D_f$ si $f(x_1) < f(x_2)$ cuando $x_1 \varepsilon [a, b]$, $x_2 \varepsilon [a, b]$ y $x_1 < x_2$.

Se dice que f (x) es decreciente sobre un intervalo $[a, b] \subset D_f$ si $f(x_1) > f(x_2)$ cuando $x_1 \varepsilon [a, b]$, $x_2 \varepsilon [a, b]$ y $x_1 < x_2$.

Para ilustrar estas definiciones, se ve en la figura 28 la gráfica de una función creciente y en la figura 29 la de una función decreciente en un intervalo $[a, b]$

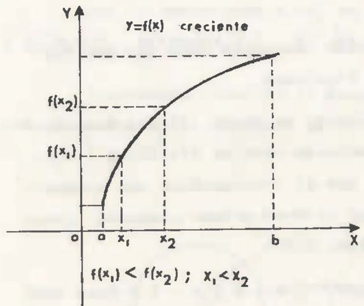


FIG 28

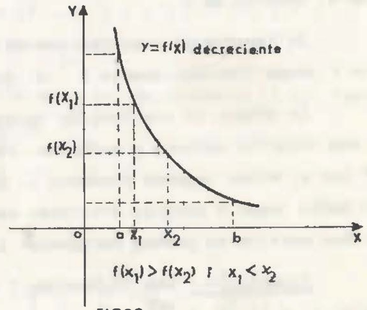


FIG29

Si $y = f(x)$ es creciente sobre el intervalo $[a, b]$, entonces es biunívoca sobre dicho intervalo, y en la misma forma, si $y = f(x)$ es decreciente sobre el intervalo $[a, b]$ también será biunívoca sobre el mismo intervalo.

Función inversa. Si f es una función biunívoca, entonces la inversa de f es la función f^{-1} definida por la siguiente condición.

$(x, y) \varepsilon f^{-1}$ si y solo si $(y, x) \varepsilon f$

Esto es, la inversa de una función biunívoca f es la función f^{-1} que se obtiene al intercambiar las componentes de cada una de las parejas ordenadas que constituyen a la función f.

Debe aclararse que en este concepto, en la notación f^{-1}, el indice -1 no tiene el significado que se le da el algebra como exponente.

<u>Ejemplo 44.-</u> Sea $f = \{(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$

Evidentemente f es una función biunívoca, dado que no se repite el segundo elemento en dos parejas distintas.

La función inversa de f es:

$$f^{-1} = \{(1, 0), (3, 1), (5, 2), (7, 3)\}$$

De la definición de función inversa se deduce con facilidad que si f^{-1} es la inversa de f, el dominio de f es el rango de f^{-1} y el rango de f es el dominio de f^{-1}.

Es importante destacar que es condición necesaria para que una función f tenga función inversa f^{-1} el que sea biunívoca.

En efecto si una función no es biunívoca, es decir, si una función F es una relación unívoca o uniforme, se presentaran parejas distintas $(x, y) \varepsilon F$ con el mismo segundo elemento "y", mismas que al intercambiar sus elementos darán lugar a parejas distintas ahora con el mismo primer elemento. Estas últimas parejas no pueden pertenecer a una función F^{-1}

<u>Ejemplo 45.-</u> Sea la función f dada por $f (x) = 3 x - 3$ y cuyo dominio es $D_f = \{2, 3, 4, 5\}$.

Se trata de obtener la función inversa de f si ésta es biunívoca, hallar dominio y rango de f^{-1} y las gráficas de ambas funciones trazadas en un mismo sistema de referencia.

Se puede ver claramente que f es biunívoca. El rango de f es

$$R_f = \{3, 6, 9, 12 \}.$$

Describiendo f por extensión, se tiene:

$$f = \{(2, 3), (3, 6), (4, 9), (5, 12)\}$$

Luego $f^{-1} = \{(3, 2), (6, 3), (9, 4), (12, 5)\}$

El dominio de f^{-1} es $D_{f^{-1}} = \{ 3, 6, 9, 12 \} = R_f$ y el rango de f^{-1} es $R_{f^{-1}} = \{ 2, 3, 4, 5 \} = D_f$

Las gráficas de f y f^{-1} se ven en la figura 30.

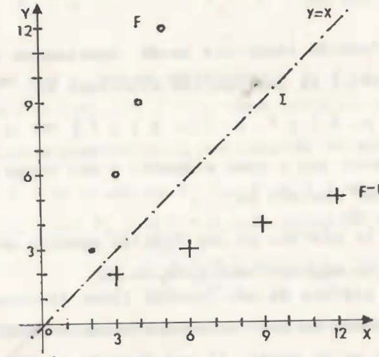


FIG.30

Puede observarse en la figura anterior que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la gráfica de la función identidad I, o sea la recta y = x. Esto se confirmará adelante.

Dada una función $f = \{(x, y) | y = f (x), x \varepsilon D_f\}$ si es biunívoca su inversa f^{-1} puede obtenerse intercambiando los papeles que desempeñan la variable independiente y la variable dependiente.

Esto es:

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid x = f (y); y \varepsilon D_f = R_{f^{-1}}\}$$

Notese que en esta última expresión, la ecuacion $x = f (y)$ establece que "y" es funcion implícita de "x".

Ejemplo 46.- Sea la función $f = \{(x, y) \mid y = 2x + 3 ;\ x \in [-2, 2]\}$

Se trata de investigar si f es biunívoca, y en caso afirmativo, hallar su función inversa, trazar las gráficas de ambas funciones y observar que estas son simétricas respecto a la recta $y = x$.

En efecto, $y = 2x + 3$ es la regla de correspondencia de una función biunívoca, ya que a cada valor de x le corresponde un solo valor de y. Esto también puede constatarse viendo que se trata de una función creciente dado que si $x_2 > x_1$ entonces $y_2 > y_1$.

Asi que f tiene función inversa que es:

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid x = 2y + 3 \ ;\ y \in [-2, 2]\}$$

Que puede escribirse:

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid y = \frac{x-3}{2},\ x \in [-1, 7]\}$$

ya que $D_f = R_{f^{-1}} = [-2, 2]$ y $R_f = D_{f^{-1}} = [-1, 7]$

Las graficas de $y = 2x + 3,\ x \in [-2, 2]$ y de $y = \frac{x-3}{2}\ ;\ x \in [-1, 7]$ se ven en la figura 31, donde es obvia la simetría de ellas respecto a la recta $y = x$.

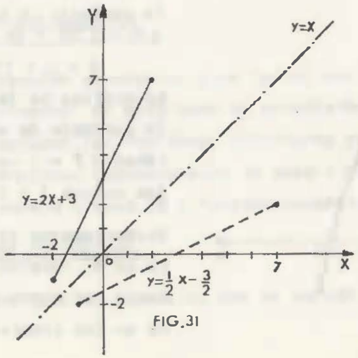


FIG.31

Una interesante propiedad de las funciones inversas se da en el siguiente

Teorema. Hipótesis: La función f es biunívoca y su función inversa es f^{-1}.

Tesis: se tendrá:

1) $f \circ f^{-1} = I$ donde el dominio de I es el rango de f, $D_I = R_f = D_{f^{-1}}$

2) $f^{-1} \circ f = I$ donde el dominio de I es el dominio de f, $D_I = D_f = R_{f^{-1}}$

Demostración.

1) Sea $a \in R_f$ luego $a \in D_{f^{-1}}$

entonces $f^{-1}(a) = b$ donde $(a, b) \in f^{-1}$

Lo que implica que $(b, a) \in f$, esto es: $f(b) = a$

Por lo tanto como $a \in R_f$ se tiene: $[f \circ f^{-1}](a) = f(b) = a$

y si $x \in R_f$, entonces: $[f \circ f^{-1}](x) = x : x \in D_{f^{-1}}$

Intentando ilustrar la demostración anterior de la parte 1) del Teorema se presenta el esquema de la figura 32.

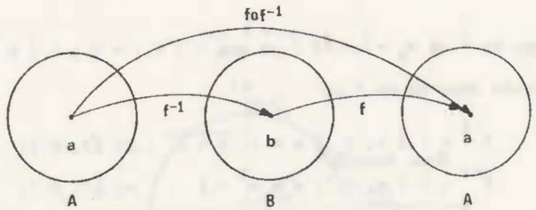


Figura 32

2) Sea $a \in D_f$, entonces $f(a) = b$ donde $(a, b) \in f$

luego $(b, a) \in f^{-1}$, o sea que $f^{-1}(b) = a$

por lo tanto si $a \in D_f$

Entonces $\left[f^{-1} \circ f\right](a) = f(b) = a$

Y si $x \in D_f$ se tendrá $\left[f^{-1} \circ f\right](x) = x$: $x \in R_{f^{-1}}$

Ejemplo 47.- Aplicar el teorema anterior a las funciones del ejemplo 46.

Las reglas de correspondencia son: $f(x) = 2x + 3$, $D_f = [-2, 2]$ $R_f = [-1, 7]$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, $D_{f^{-1}} = [-1, 7]$, $R_{f^{-1}} = [-2, 2]$

Se tiene: $\left[f \circ f^{-1}\right](x) = f(f^{-1}(x)) = 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) + 3 = x$

para $x \in [-1, 7]$ $\left[f^{-1} \circ f\right](x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2}(2x + 3) - \frac{3}{2} = x$

para $x \in [-2, 2]$

Estas conclusiones pueden verificarse gráficamente en la figura 31 - interpretando la composición de las funciones como se vió en 1.3.

Ejemplo 48.- Sea la función $f = \{(x, y) | y = +\sqrt{x - 2},\ x \in [2, 6)\}$

Hacer ver que es biunívoca, hallar su función inversa, trazar las -- gráficas de ambas funciones. Verificar que $f(f^{-1}(x)) = x$ para $x \in D_f$, - que $f^{-1}(f(x)) = x$ para $x \in D_f$ y visualizar esto en las gráficas.

A cada valor de x en el intervalo $[2, 6)$ corresponde un sólo valor - de y, así que f es una función biunívoca y por lo tanto tiene función inversa.

El rango de f es $R_f = [0, 2)$ ya que $f(2) = 0$ y $f(6) = 2$

La función inversa de f es:

$$f^{-1} = \{(x, y) | x = +\sqrt{y - 2},\ y \in [2, 6)\} \text{ o bien}$$

$$f^{-1} = \{(x, y) | y = x^2 + 2 ;\quad x \in [0, 2)\} \quad D_{f^{-1}} = [0, 2)$$

$$R_{f^{-1}} = [2, 6)$$

$$f(f^{-1}(x)) = +\sqrt{(x^2 + 2) - 2} = +\sqrt{x^2} = x \text{ para } x \in [0, 2)$$

$$f^{-1}(f(x)) = (+\sqrt{x - 2})^2 + 2 = x - 2 + 2 = x \text{ para } x \in [2, 6)$$

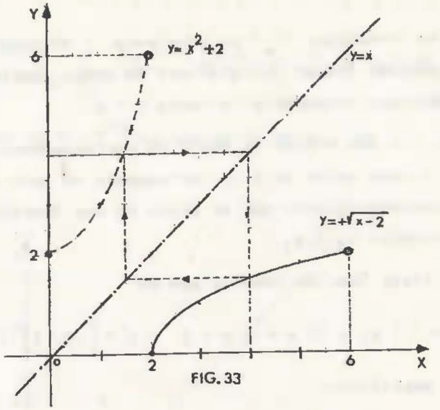


FIG. 33

Ejemplo 49.- Si f es la función dada por $f(x) = 2 + 2x - x^2$

Siendo $D_f = [-1, 3]$, trazar su gráfica y si no es biunívoca, descomponer su dominio de modo que resulte biunívoca en cada intervalo de la descomposición del dominio. Hallar la funcion inversa correspondiente a cada parte biunívoca de la función dada y trazar la gráfica de la inversa.

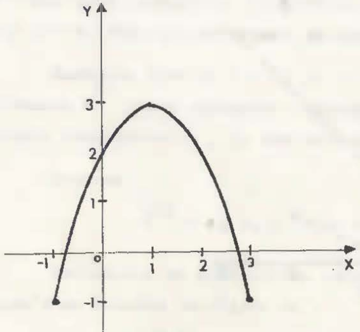


FIG. 34

Reduciendo la ecuación $y = 2 + 2x - x^2$ a la forma ordinaria de la ecuación de la parábola se tiene:

$y = -(x^2 - 2x + 1) + 2 + 1$

$(x - 1)^2 = -(y - 3)$

La gráfica de la función es el arco de la parábola de vértice $V(1, 3)$ y parámetro $P = -\frac{1}{4}$ comprendido entre - los puntos $(-1, -1)$ y $(3, -1)$

Evidentemente la función no es biunívoca en el intervalo $[-1, 3]$. Sin embargo, si dicho intervalo se descompone en los intervalos $[-1, 1]$ y $(1, 3]$

la función en estos intervalos es creciente y decreciente respectivamente- por lo cual, considerada separadamente en $[-1, 1]$ y $(1, 3]$ resulta biunívoca.

La función inversa correspondiente a f en cada intervalo donde f es- biunívoca, tiene como regla de correspondencia: $x = 2 + 2y - y^2$ de donde- despejando y :
$(y - 1)^2 = 3 - x$; $y - 1 = \sqrt{3 - x}$; $y = 1 \pm \sqrt{3 - x}$. De aquí se ve que la función inversa de f en $[-1, 1]$ es $f_1^{-1}(x) = 1 - \sqrt{3 - x}$; $x \varepsilon [-1, 3]$ y la función inversa de f en $(1, 3]$ es $f_2^{-1}(x) = 1 + \sqrt{3 - x}$;
$x \varepsilon [-1, 3]$

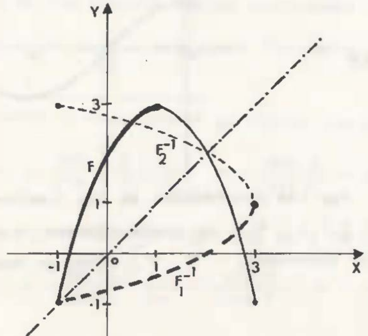


FIG. 35

I.6. FUNCIONES TRASCENDENTES.

Se definió la función algebraica y se indicó que una función que no- es algebraica es trascendente. En este tema se estudiarán algunas funciones- trascendentes. Estas incluyen las funciones circulares directas, funciones - circulares inversas, funciones exponenciales de base a y base e, funciones logarítmicas de base a, base e y base 10 y función potencia.

I.6.1. Funciones Periódicas.

Definición.- Una función f se dice que es periódica con período - - P > 0, si siempre que x esté en el dominio de f, entonces x + P también está en el dominio de f, y:

$$f(x + P) = f(x)$$

Gráficamente:

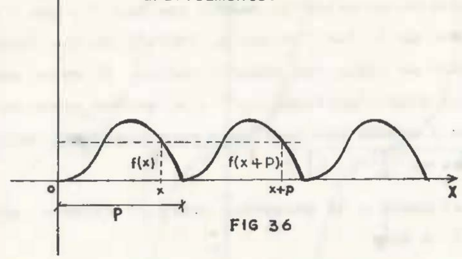


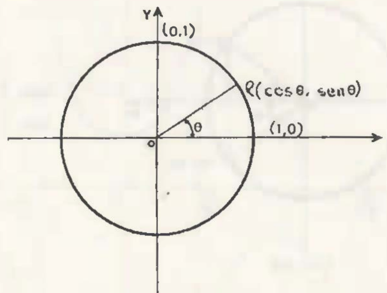
FIG 36

Las funciones periódicas tienen importantes aplicaciones en física e ingeniería en lo que se refiere a fenómenos que se repiten periódicamente,- tales como el movimiento ondulatorio, vibraciones, etc.

I.6.2. Funciones Circulares Directas y sus Gráficas.

Se definirán las funciones circulares directas a partir de un círculo unitario de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Sea θ un número real, que tiene medida- en radianes. Trácese un ángulo de θ radianes cuyo primer lado coincide con - el semieje positivo "x" y su vértice con el punto (0, 0). El segundo lado- cortará la circunferencia unitaria en el punto P. Si P es el punto de coordenadas (x, y), entonces la función coseno está definida por:

$$\cos \theta = x$$



El punto de coordenados cos θ, sen θ
FIG 37

y la función seno estará definida por:

$$\operatorname{sen}\theta = y.$$

De la definición anterior se deduce que sen θ y cos θ están definidas para cualquier valor de θ. Por lo que el dominio de las funciones seno y coseno, es el conjunto de todos los números reales. El valor máximo que puede- tomar cualquiera de estas funciones es 1 y el minimo valor es - 1. Puesto que las funciones seno y coseno son continuas para cualquier valor de θ , el rango de las funciones es $[-1, 1]$

Dado que el punto p se encuentra sobre el círculo unitario de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ o bien

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

resulta que:

$$\operatorname{sen}\theta > 0 \quad \text{para } 0 < \theta < \pi$$

La definición implica que seno y coseno son periódicas con período 2π teniéndose que:

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$
$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$$

La figura 38, muestra ángulos que tienen una medida negativa en radianes de $-\theta$ y ángulos correspondientes que tienen una medida positiva en radianes de $+\theta$

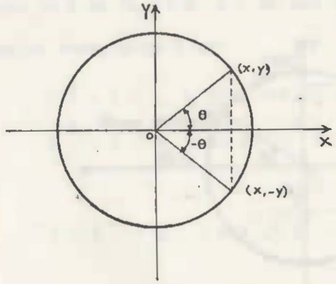


FIG 38

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad (5)$$
$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad (6)$$

Geométricamente es evidente que las funciones seno y coseno son contínuas en cualquier intervalo de θ , la función coseno es decreciente en el intervalo $[0, \pi]$. El seno es creciente en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ fig. 39.

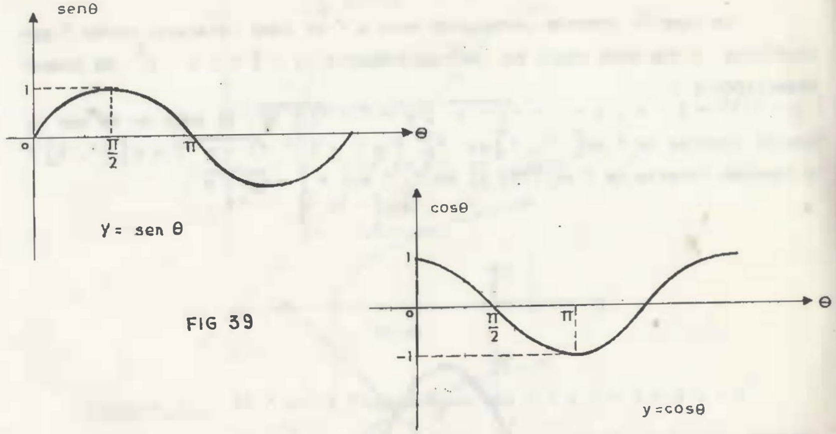


FIG 39

Por las propiedades de las funciones seno y coseno dadas por las ecuaciones (5) y (6), se puede obtener la gráfica de las curvas - seno y coseno para el intervalo $[-\pi, \pi]$. Como se muestra en la figura 40.

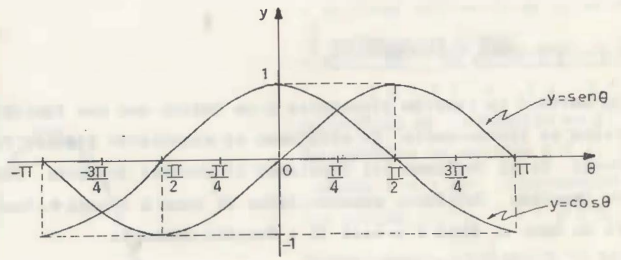


Figura 40.

FUNCION TANGENTE.

A partir de las funciones seno y coseno se define la funcion TANGENTE como:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Para todos los números reales θ en donde $\cos\theta \neq 0$.

La función tangente no esta definida cuando $\cos\theta = 0$, esto sucede cuando θ toma cualquiera de los valores $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ o en general $\frac{\pi}{2} + n\pi$ donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ etc. De esta manera el dominio de la función tangente es el conjunto de los números reales excluyendo los valores $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ etc. para los cuales la función tangente no está definida.

La función TANGENTE es una función periódica con período π dado que:

$$\tan(\theta + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(\theta + \pi)}{\cos(\theta + \pi)} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta$$

Nótese además que para valores negativos de θ se tiene:

$$\tan(-\theta) = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

La función TANGENTE es estrictamente creciente en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y en general en todos los intervalos $\left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ etc.

La función TANGENTE es positiva y creciente para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ y los valores de $\tan\theta$ son grandes cuando θ se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda-- Puesto que $\operatorname{sen}\theta = 1$ y $\cos\theta = 0$ y por lo tanto el cociente tiende a hacerse grande.

Lo mismo ocurre, cuando $\tan\theta$ toma valores grandes y negativos si θ se aproxima a $-\frac{\pi}{2}$ por la derecha.

La gráfica de la función TANGENTE se muestra en la figura 41.

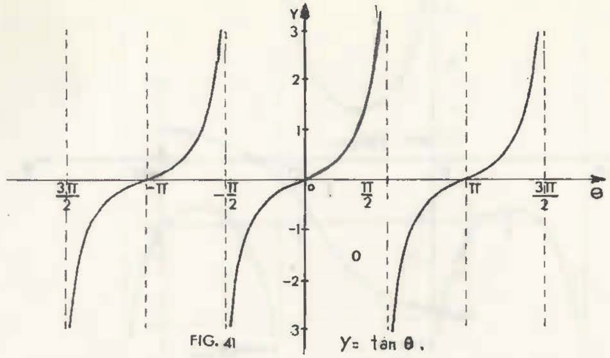


FIG. 41 $y = \tan\theta$.

Además de las funciones trigonométricas, ; seno, coseno y tangente,- se definen las funciones: secante, cosecante y cotangente como sigue:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

Las gráficas de estas funciones se muestran en las figuras 42, 43 y- 44, respectivamente.

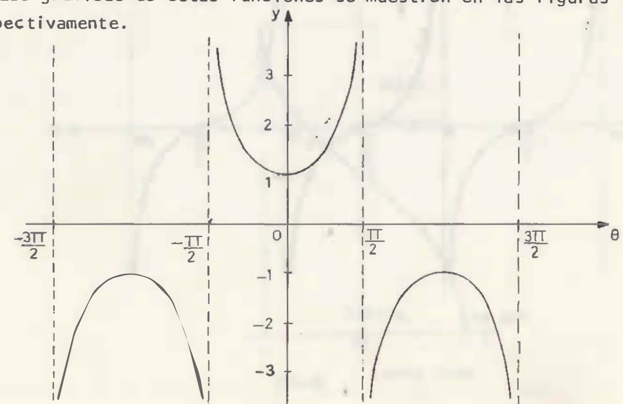


FIG. 42

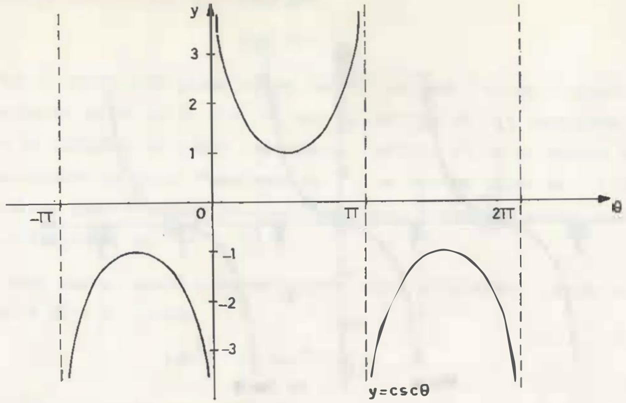


FIG. 43 y=cscθ

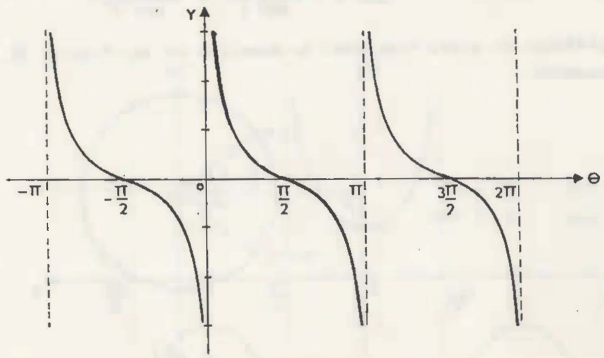


FIG 44 y=cotθ

1.6.3. Funciones Circulares Inversas y sus Gráficas.

Las seis funciones trigonométricas descritas en el inciso 1.6.2. son periódicas y por tanto no son biunívocas. Luego la inversa de una función -- trigonométrica no es función. No obstante, es posible obtener una función biunívoca de una función trigonométrica dada, restringiendo el dominio en forma apropiada y entonces la inversa de tal función será una función.

Por ejemplo:

$$y = \text{sen } x \quad , x \in R$$

no es biunívoca, pero la función

$$y = \text{sen } x \ , \ x \in \left[-\frac{\pi}{2} \ , \ \frac{\pi}{2} \right] , \ y \in [-1, 1]$$

si lo es. La gráfica de esta función se ve en la figura 45. A esta parte dela gráfica se le conoce como la " rama principal ".

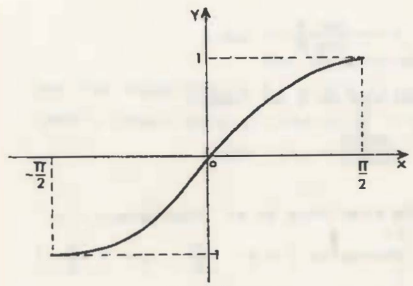


FIG 45

Gráfica de la Rama Principal.

La función y = sen x anteriormente definida es biunívoca, y por tanto tiene una inversa que es función. Esta función inversa se escribirá como - - " ang sen x ", que se lee " ángulo cuyo seno " y es la función seno inverso.

$$x = \text{sen } y \ , \ y \in \left[-\frac{\pi}{2} \ , \frac{\pi}{2} \right], \ x \in [-1, 1]$$

por lo tanto

$$y = \text{ang sen } x \ , \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2} \ , \ \frac{\pi}{2} \right]$$

La gráfica de $y = \text{ang sen } x$ se muestra en la figura 46, ang sen x representará la segunda componente de la pareja ordenada que pertenece a " ang sen " y cuya primera componente es x.

$$y = \text{ang sen } x \Leftrightarrow x = \text{sen } y \quad y \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

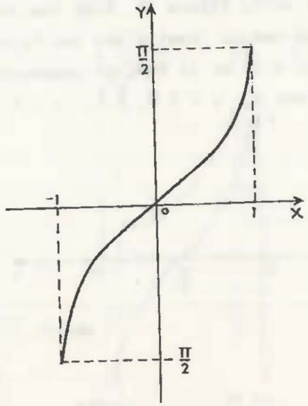


FIG 46

Considerando ahora la función

$$y = \cos x \quad , x \in [0, \pi] \quad , y \in [-1, 1]$$

cuya gráfica se muestra en la figura 47. Puesto que la función recien definida es biunívoca, su inversa es una función. Dicha función inversa se designa por " ang cos ", y es la función coseno inverso.

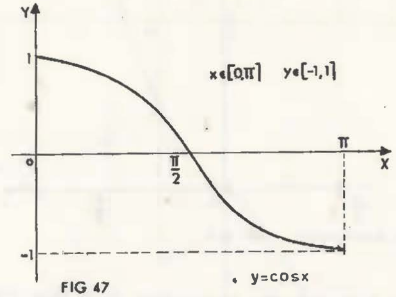


FIG 47

Gráfica de la Rama Principal de la Función Coseno.

La gráfica de " ang cos " se muestra en la figura 48, se escribirá - " ang cos x " para designar la segunda componente de la pareja ordenada que pertenece a " ang cos " y cuya primera componente es x.

$$y = \text{ang cos } x \Leftrightarrow x = \cos y \ , \quad y \in [0, \pi]$$

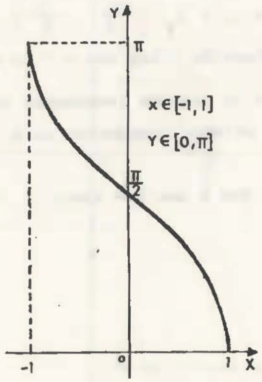
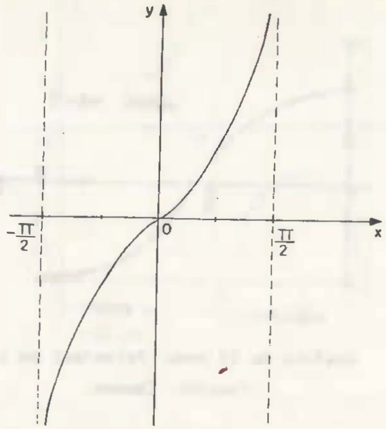


FIG.48 y=ang cosx

La función TANGENTE no es biunívoca, sin embargo, se puede expresar el dominio en condiciones tales que la función TANGENTE sea biunívoca, como:

$$y = \tan x \;,\quad x\ \varepsilon \left(-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}\right) \quad y\ \varepsilon\ R.$$ Ver. Figura 49.



Rama principal de la función Tangente.

Figura 49.

La función TANGENTE así definida es biunívoca y de ahí que su inversa sea función, donde se designa como " ang tan ", a la función tangente inversa.

$$x = \tan y,\ y\ \varepsilon \left(-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}\right)\quad x\,\varepsilon\ R$$

La gráfica de la función " ang tan x " se muestra en la figura 50.

" ang tan x " representará la segunda componente de la pareja ordenada que pertenece a " ang tan " cuya primera componente es x.

$$y = \text{ang } \tan x \iff x = \tan y \qquad y\ \varepsilon \left(-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

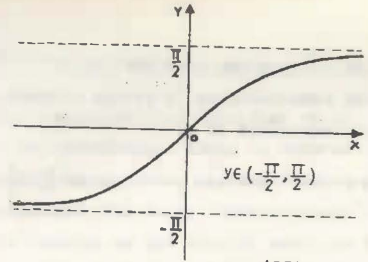


FIG 50 y=ang tanx

Considerando la función COTANGENTE definida por:

$$y = \cot x \quad,\ x\ \varepsilon\ (0,\ \pi),\quad y\,\varepsilon\,R$$

cuya gráfica se muestra en la figura 51, esta función COTANTENTE así definida es biunívoca y de ahí que su inversa sea una función. La inversa que se - designará como " ang cot x ", es la función cotangente inversa.

$$x = \cot y,\quad y\ \varepsilon\ (0,\ \pi),\quad x\ \varepsilon\ R$$

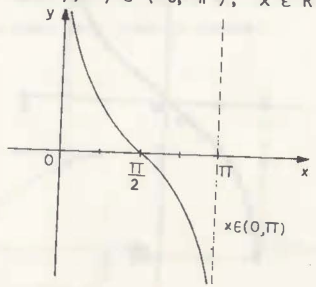


FIG 51 y=cot x

Gráfica de la Rama Principal de la función Cotangente.

La gráfica de " ang cot x " se muestra en la figura 52, " ang cot x " representará la segunda componente de la pareja ordenada que pertenece a "ang cot" y cuya primera componente es x.

$$y = \text{ang } \cot x \iff x = \cot y \quad y \quad y\ \varepsilon\ (0,\ \pi)$$

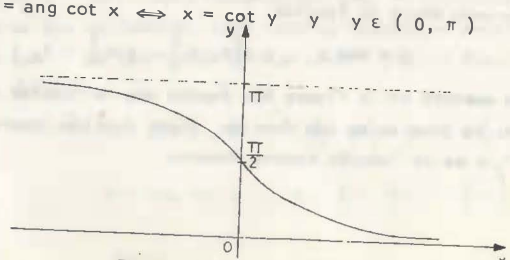


FIG. 52 y=ang cotx, y∈(0,π)

Puesto que las funciones SECANTE y COSECANTE no son biunívocas, el dominio de dichas funciones se seleccionará apropiadamente, el dominio seleccionado para tener una función biunívoca consistirá en la unión de dos intervalos. La selección se hace tomando en cuenta el resultado más sencillo para más adelante definir las derivadas de las funciones inversas.

Considerando el segmento de la función SECANTE definido por:

$y = \sec x \,, x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$; ver figura 53. La función SECANTE así definida es biunívoca y de ahí que su inversa sea una función. La inversa que se designará como " ang sec x ", es la función secante inversa.

$$x = \sec \; y \;, \quad y \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

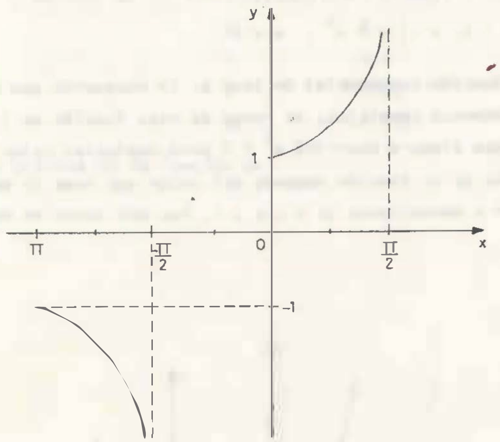


FIG 53 $y = \sec x, \; x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Gráfica de la Rama Principal de la Función Secante.

La gráfica de " ang sec x " se muestra en la figura 54.

$$y = \text{ang sec } x \iff x = \sec y \quad ; \quad y \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

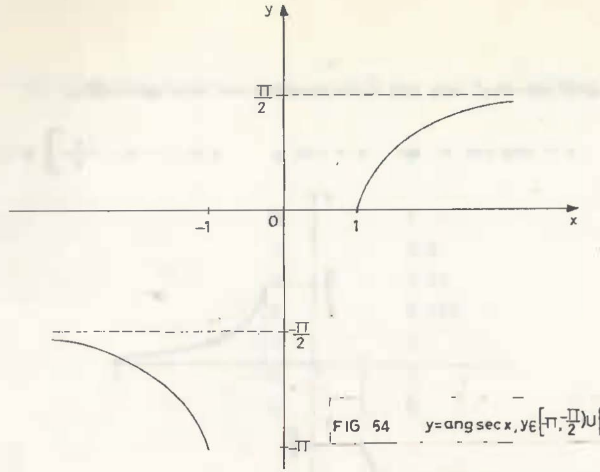


FIG 54 $y = \text{ang sec } x, \; y \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

La función COSECANTE cuyo dominio se seleccionará como:

$y = \csc x \,, \quad x \in \left(-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ se representa en la gráfica de la figura 55. La función COSECANTE así definida es biunívoca, y de ahí que su inversa es una función. La inversa se expresa como "ang-csc", es la función cosecante inversa.

$$x = \csc \; y \;, \quad y \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

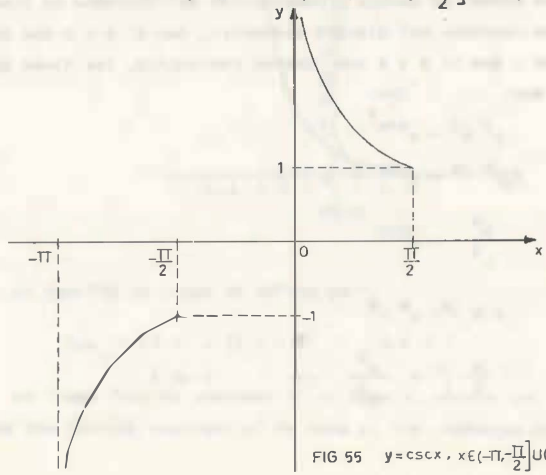


FIG 55 $y = \csc x, \; x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Gráfica de la Rama Principal de la Función Cosecante.

La gráfica de " ang csc " se muestra en la figura 56.

$$y = \text{ang csc } x \Leftrightarrow x = \csc y \qquad y \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

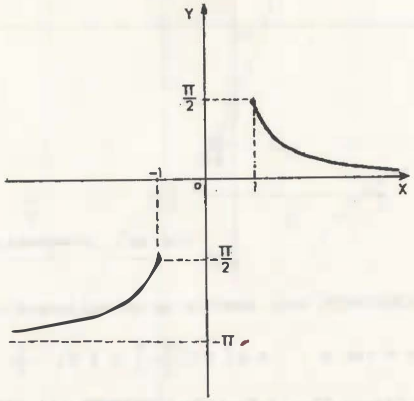


FIG 56 $y = \text{angcsc}\, x, \quad Y \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

1.6.4. Funciones Exponenciales de base a y base e, sus Gráficas.

A fín de ayudar al manejo y comprensión del concepto de función exponencial, se debe recordar del álgebra elemental, que si a y b son números reales positivos y que si p y q son números racionales, las leyes básicas de las exponentes son:

$$a^p a^q = a^{p+q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a\, b)^p = a^p b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \quad \text{con} \quad b \neq 0$$

Como complemento a este repaso se recuerdan las siguientes definiciones:

Para un exponente cero: $a^0 = 1$

Para un exponente negativo: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Para un exponente fraccionario: $(a^{1/n})^n = a$

$(a^{1/n})^m = a^{m/n}$

Estas leyes tienen significado en algebra elemental sólo cuando los exponentes son números racionales, sin embargo, se puede demostrar que las leyes anteriores son válidas para exponentes que son números reales.

Para cualquier número real positivo $a \neq 1$, la función

$$\text{Exp}_a = \{ (x, y) \mid y = a^x, \; x \in R \} \qquad (7)$$

se llama función exponencial de base a. Es necesario que $a > 0$ para evitar tratar con números complejos; el rango de esta función es $(0, +\infty)$, lo que significa que siempre ocurrirá $a^x > 0$ para cualquier valor de x. La forma de la gráfica de la función depende del valor que tome la base a; será creciente si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$, los dos casos se muestran en la figura 57.

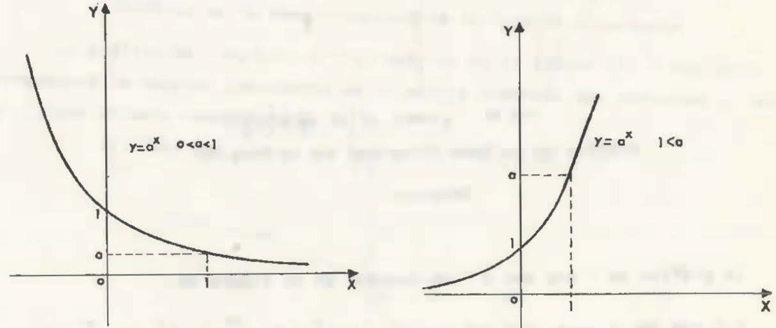


FIG 57

Ejemplo 5º.- Encontrar las gráficas de las funciones

a) $Exp_2 = \{ (x, y) \mid y = 2^x, \quad x \in R \}$

b) $Exp_{1/2} = \{ (x, y) \mid y = (\frac{1}{2})^x, \quad x \in R \}$

a) Para encontrar la grafica se le darán a x los valores que se -- muestran en la siguiente tabla, los valores correspondientes a y aparecen -- también en ella.

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
- 1	0.5
- 2	0.25
- 3	0.125

La gráfica de la función es:

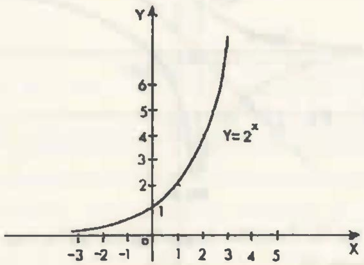


FIG 58

b) La tabla y gráfica de esta función son las siguientes:

x	y
0	1
1	0.5
2	0.25
3	0.125
- 1	2
- 2	4
- 3	8

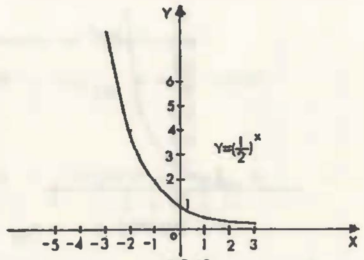


FIG 59

La función de x que se define por:

$$Exp_e = \{ (x, y) \mid y = e^x, \quad x \in R \} \qquad (8)$$

se llama función exponencial de base e, nótese que es un caso particular de una función exponencial de base a, sin embargo, por su importancia-se da como una función aparte, su gráfica está en la figura 60, algunos de los valores correspondientes de x y y están a continuación:

x	y	
0	1	
1	2.718281828	(valor del número e con nueve decimales)
2	7.3891	
3	20.0855	
- 1	0.3679	
- 2	0.1353	
- 3	0.0498	

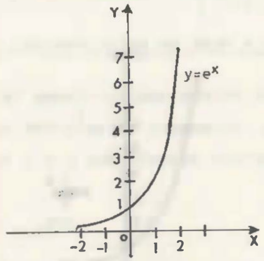


FIG 60

1.6.5. Funciones Logarítmicas de Base a, Base e y Base 10, sus Gráficas.

La función exponencial de base a definida como

$$Exp_a = \{ (x, y) \mid y = a^x , \ x \in R \}$$

es biunívoca sobre R, y por lo tanto la inversa de la función exponencial también es una función. Se expresa esta inversa mediante $\log_a$, y se le llama función logarítmica de base a, es decir que la función logarítmica de base a es la función

$$\log_a = \{ (x, y) \mid x = a^y , \quad y \in R , \ x \in (0, + \infty) \} \qquad (9)$$

Se escribirá $\log_a x$ para representar la segunda componente de la pareja ordenada que pertenece a la función logarítmica y cuya primera componente es x ($\log_a x$ se lee " logaritmo de x de base a ").De donde según la definición de $\log_a$

$$y = \log_a x \iff x = a^y \qquad (10)$$

y $\log_a c$ es el número único b tal que $a^b = c$

La gráfica del $\log_a$ se obtiene de la gráfica de su inversa "Exp_a" en la forma usual (vease la figura 61).

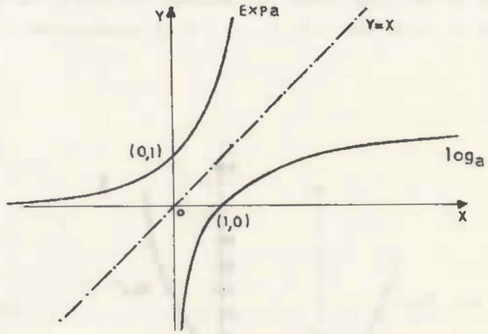


FIG 61

Las gráficas de la función logarítmica para los casos a > 1 y 0 < a < 1 se muestran en la figura 62.

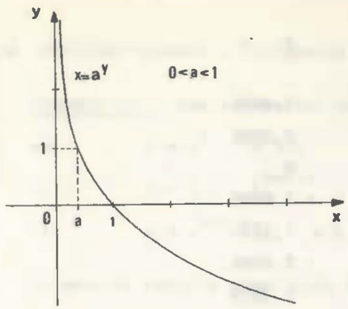


Figura 62(a)

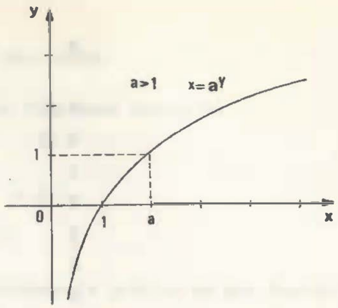


Figura 62(b)

Para el caso de la función exponencial de base e su inversa es la función logarítmica de base e, definida por:

$L = \{(x, y) \mid x = e^{y}, \; y \in R, \; x \in (0 + \infty)\}$

Y según la definición de logaritmo

$$y = L\,x \qquad x = e^{y}$$

La grafica de esta función está en la figura 63.

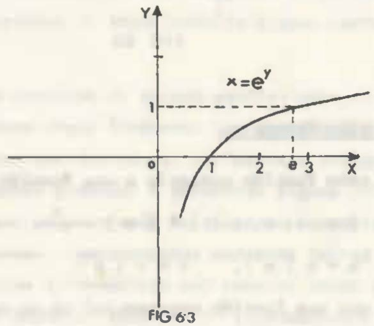


FIG 63

De (10) se sigue que si $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$, entonces

$$x = a^{\log_a x} \qquad (11)$$

Para obtener una formula que relacione logaritmos de bases diferentes, sea b un número positivo diferente de 1, tomando logaritmos de base b de los dos miembros de (11).

$$\log_b x = \log_b \left(a^{\log_a x} \right)$$

De las leyes de los logaritmos

$$\log_b x = \log_a x \, \log_b a \qquad (12)$$

Cualquier número positivo, excepto 1, se puede usar como base de un sistema de logaritmos. Hay dos sistemas de uso comúm. Para cálculos ordinarios se usan los logaritmos comunes, de la forma $\log_{10} N$, cuya base es 10.

El otro sistema de logaritmos que se usa tiene como base el número e, los logaritmos de base e se llaman logaritmos naturales y se expresan por L

De (12) y tomando en cuenta que:

$L\,10 = 2.\,30259$ y $\log_{10} e = 0.\,43429$

Se tiene

$$L\;x = (2.30259)\,\log_{10} x$$

$$\log_{10} x = (0.43429)\,L\,x$$

Ejemplo 51.- Encontrar las gráficas de las funciones

a) $\log_2 = \{(x, y) \mid y = \log_2 x, \; x \in (0 + \infty)\}$

b) $\log_{1/2} = \{(x, y) \mid y = \log_{1/2} x, \; x \in (0, + \infty)\}$

a) Para solucionar este problema se usa la ecuación (1 2), donde

$\log_2 x = \log_2 e \; L \; x$

$\log_2 x = (\; 1.4427 \;) \; L \; x$

x	y
1	0
2	1.0000
3	1.5850
4	2.0000
5	2.3219
0.5	- 1.0000
0.25	- 2.0000

Su gráfica es:

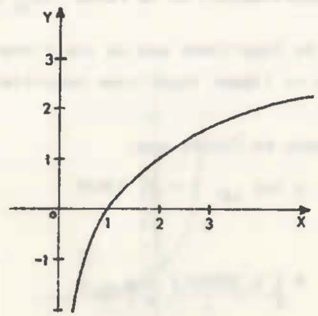


FIG 64

b) Para este caso la ecuación utilizada es:

$\log_{1/2} x = (\; - \; 1.44271 \;) \; L \; x$

x	y
0.5	1.0000
0.25	2,0000
1	0
2	- 1.0000
3	- 1.5850
4	- 2.0000
5	- 2.3219

Su gráfica queda:

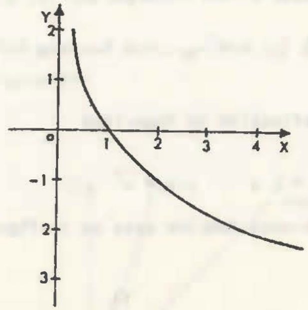


FIG 65

1.6.6. <u>Función Potencia.</u>

Se define como función potencia a una función del tipo

$$F = \{(\, x, \, y \,) \mid f\,(\, x \,) = u^v , \quad u > 0 \,\} \qquad (\; 13 \;)$$

donde: $u = u\,(\, x \,), \quad v = v\,(\, x \,)$

Obsérvese que una función exponencial es un caso particular de la -- función potencia, puesto que se tiene a una función constante elevada a otra función cualquiera. Asimismo, una función polinómica de un solo término, también es un caso particular de la función potencia, pero aquí se tiene a una-función identidad elevada a la función constante.

Ejemplo 52.- Las siguientes son funciones potencia.

a) $y = x^{x}$; $x > 0$

b) $y = (Lx)^{\operatorname{sen} x}$; $x \geq 1$

c) $y = x^{\operatorname{sen} x}$; $x > 0$

En general resulta complicado obtener la gráfica de una función potencia.

Tomando logaritmos naturales en ambos miembros de la expresión (13)

$$L\ f(x) = v\ L\ u$$
$$f(x) = e^{v\ L\ u} \qquad (14)$$

La expresión (14) es otra forma de representar la función potencia.

1.7. PLANTEAMIENTO DE FUNCIONES.

Tal y como se asentó al principio de este capítulo, las funciones no son más que modelos matemáticos que representan algún fenómeno físico de la vida real. El planteamiento del modelo matemático o la función es el primer paso en la solución de un problema y ante este tipo de situaciones se encontrará en multitud de ocasiones el estudiante de alguna carrera de Ingeniería.

No existen reglas precisas ni método general para el planteamiento de funciones que representen algún fenómeno. La recomendación en este sentido sería identificar cuales son los datos, variables e incógnitas del problema en primer lugar, y después proceder a encontrar alguna relación entre los datos e incógnitas del problema a través de símbolos matemáticos (variables dependientes e independientes, representadas mediante letras). Un agrupamiento adecuado de los datos e incógnitas así como el trazo auxiliar de una gráfica o diagrama son de especial ayuda en el planteamiento de funciones de un problema.

Ejemplo 53.- Encontrar una función que represente el producto de todos los pares de números de tal manera que la suma de un número y el triple del otro sea 60.

Solución:

Si se representa a un número con x y al otro con y, el producto se puede escribir como:

$$P = x\ y \qquad (A)$$

Pero de acuerdo a las condiciones establecidas:

$$x + 3y = 60 \qquad (B)$$

Despejando y sustituyendo en la expresión (A)

$$f(x) = \frac{x(60 - x)}{3}$$

Ejemplo 54.- Encontrar una expresión que relacione al volumen de un cilindro recto circular, inscrito en un cono recto circular con un radio de 5 m. y altura de 12 m., en función del radio del cilindro.

Solución:

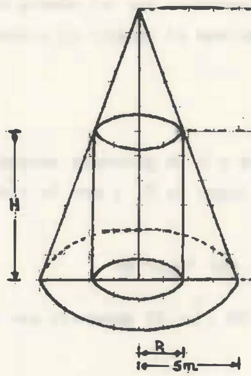


FIG 66

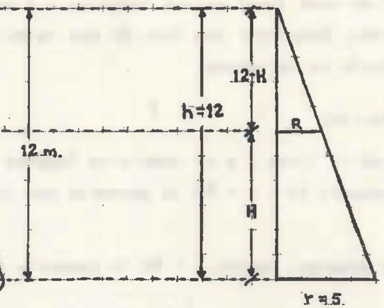


FIG 67

La siguiente fórmula expresa a V en términos de R y H.

$$V = \pi R^2 H \qquad (A)$$

Es necesario establecer una expresión independiente de (A), que relacione a R y H.

De la figura 67 y usando triángulos semejantes:

$$\frac{12 - H}{R} = \frac{12}{5}$$

Despejando H:

$$H = \frac{60 - 12R}{5} \qquad (B)$$

Sustituyendo (B) en (A) y desarrollando:

$$V(R) = \frac{12\pi}{5}(5R^2 - R^3)$$

Ejemplo 55.- En el diseño de una cafetería se estima que si existen lugares para 40 a 80 personas, la ganancia semanal será de \$ 8.00 por lugar. Sin embargo, si la capacidad de asientos sobrepasa los 80 lugares, la ganancia semanal en cada lugar estará reducida a 4 centavos por el número de lugares excedentes. Encuentre una función que relacione el número de asientos con la ganancia de la semana.

Solución:

Si se le llama a x el número de lugares y G la ganancia semanal, se tiene que, cuando $40 < x < 80$ la ganancia por lugar es 8, y por lo tanto $P = 8x$.

Sin embargo, cuando $x > 80$ la ganancia por lugar es

$[8 - 0.04(x - 80)]$ y la ganancia por todos los lugares es:

$$P = x[8 - 0.04(x - 80)]$$

Desarrollando:

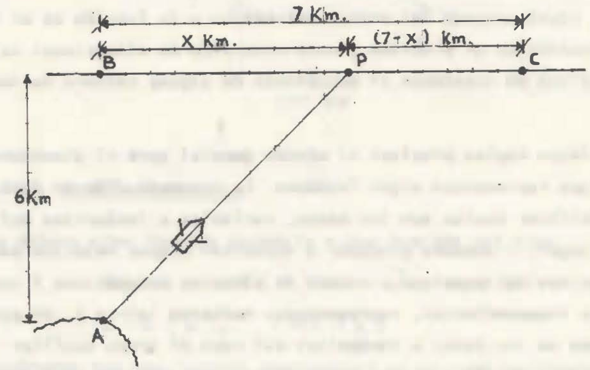
$$P = 11.20x - 0.04x^2$$

Como se puede observar, la función pedida no se puede representar con una sola regla de correspondencia para todo su dominio. La función queda:

$$P = \begin{cases} 8x & \text{si } 40 \le x \le 80 \\ 11.20x - 0.04x^2 & \text{si } x > 80 \end{cases}$$

Ejemplo 56.- En la figura 68, el punto A representa una isla que se encuentra a 6 kilometros del punto B, el cual es el punto más cercano sobre una playa recta. Un almacén está en el punto C a 7 kilometros de B, sobre la playa. Si un hombre puede remar a razón de 4 km/hr y caminar a razón de 5 km/hr, establezca una expresión que relacione a la posición del punto de desembarco con el tiempo que tarde en llegar de A a C.

Solución:



Con respecto a la figura 68, sea P el punto sobre la playa donde el hombre desembarca, el hombre rema de A a P y camina de P a C.

Sea: x la distancia en kilómetros de B a P.

T el tiempo en horas que le tome al hombre hacer el viaje de A a C.

Entonces T es el tiempo en horas para ir de A a P más el tiempo en horas para ir de P a C. Como el tiempo se obtiene al dividir la distancia entre la velocidad, se tiene:

$$T = \frac{|\overline{AP}|}{4} + \frac{|\overline{PC}|}{5} \qquad (A)$$

De la figura 68, se observa que $|\overline{AP}|$ es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo ABP. Por lo tanto:

$$|\overline{AP}| = \sqrt{x^2 + 36}$$

Por otra parte, de la misma figura:

$$|\overline{PC}| = 7 - x$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (A), se obtiene T en función de x.

$$T = \frac{\sqrt{x^2 + 36}}{4} + \frac{7 - x}{5}$$

CAPITULO 2

OBJETIVO GENERAL DEL CAPITULO:

Al finalizar este capítulo, el alumno podrá: definir el concepto de límite, aplicar teoremas y artificios matemáticos para el cálculo de los límites de funciones reales de variable real para un valor dado.

Definir el concepto de continuidad de una función y determinar los valores para los cuales una función es continua o discontinua.

Al finalizar este capítulo el alumno podrá:

II.1. Enunciar las propiedades básicas de las desigualdades.

II.2. Enunciar la definición de valor absoluto.

II.3. Enunciar las definiciones de entorno y entorno reducido, indicando los símbolos correspondientes.

II.4. Expresar la definición de límite de una función real de variable real en un punto.

II.5. Ilustrar gráficamente la definición de límite de una función real de variable real en un punto.

II.6. A partir de la definición de límite, determinar el límite de una función constante dada, para un valor de X.

II.7. A partir de la definición de límite, determinar el límite de una función identidad dada, para un valor de X.

II.8. Enunciar los teoremas sobre límites y sobre operaciones con límites.

II.9. Enunciar la definición de límites laterales de una función real de variable real en un punto.

II.10. Dada una función real de variable real definida por una o varias reglas de correspondencia, indicar si existe el límite en un punto a partir del cálculo de sus límites laterales.

II.11. Enunciar la condición para que una función real de variable real sea continua en un punto.

II.12. Dada una función discontinua en un punto, indicar porqué no se cumple la condición de continuidad.

II.13. Dada una función discontinua en un punto, indicar si se trata de una discontinuidad removible y en caso afirmativo establecer la condición que la elimine.

II.14. Enunciar los teoremas relativos a funciones continuas.

II.15. Dada una función real de variable real expresada por una o varias reglas de correspondencia, determinar los valores de la variable independiente para los cuales la función es continua y aquellos para los que es discontinua.

II.16. Indicar el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}, \quad \lim_{\alpha \to 0} \frac{\tan \alpha}{\alpha}, \quad \lim_{\alpha \to 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha}, \quad \lim_{\alpha \to 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{Pn(x)}{Qm(x)} \quad \begin{matrix} m > n \\ m = n \\ m < n \end{matrix}, \quad \lim_{\alpha \to 0} \frac{1 - e^{\alpha}}{\alpha}, \quad \lim_{\alpha \to 0} \frac{a^{\alpha} - 1}{\alpha},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{x}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}, \quad \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{L(1 + \beta)}{\beta}, \quad \lim_{m \to \infty} m\left(\sqrt[m]{a} - 1\right)$$

II.17. Dada una función real de variable real. calcular su límite en un punto.

II.18. Enunciar la definición de incremento de una variable, indicando el símbolo de éste.

II.19. Dados una función, el valor del incremento de la variable independiente y el valor final o inicial de dicha variable, calcular el correspondiente incremento de la variable dependiente.

II.20. Enunciar la definición de continuidad, por medio de incrementos.

II.21. Dada una función real de variable real, determinar por medio de incrementos, si es continua en un punto dado.

II.22. Demostrar la equivalencia de las expresiones:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$$

LIMITES Y CONTINUIDAD.

II.1. CONCEPTOS BASICOS. DESIGUALDADES. VALOR ABSOLUTO Y ENTORNOS.

DESIGUALDADES.

Propiedades fundamentales.

1) El sentido de una desigualdad no se altera, si se suma o se resta a ambos miembros la misma cantidad. Si $a > b$, entonces $a \pm c > b \pm c$

Ejemplo 1.- $10 > 8$; $10 \pm 3 > 8 \pm 3$

2) El sentido de una desigualdad no se altera, si ambos miembros se multiplican o se dividen entre la misma cantidad positiva. Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Ejemplo 2.- $12 > 6$; $12\,(2) > 6\,(2) \Longrightarrow 24 > 12$

$$\frac{12}{3} > \frac{6}{3} \Longrightarrow 4 > 2$$

3) El sentido de una desigualdad se invierte, si ambos miembros se multiplican o se dividen por la misma cantidad negativa. Si $a > b$ y $c < 0$; entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Ejemplo 3.- $8 > 2$ $\quad 8\,(-2) < 2\,(-2) \Longrightarrow -16 < -4$

$$\frac{8}{-2} < \frac{2}{-2} \Longrightarrow -4 < -1$$

4) Si se suman miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, la suma originará una desigualdad del mismo sentido. Si $a > b$ y $c > d$; entonces $a + c > b + d$

Ejemplo 4.- $14 > 6$ y $3 > 2 \Longrightarrow 14 + 3 > 6 + 2 \Longrightarrow 17 > 8$.

5) Si de tres cantidades, la primera es mayor que la segunda y la segunda mayor que la tercera, entonces la primera es mayor que la tercera. Si $a > b$ y $b > c$; entonces $a > c$.

Ejemplo 5.- $14 > 6$ y $6 > 3 \Longrightarrow 14 > 3$

6) Si dos desigualdades entre números positivos tienen el mismo sentido, se pueden multiplicar miembro a miembro y los productos darán como resul

tado una desigualdad en el mismo sentido. Si a, b, c, d, son todos positivos; y $a > b$, $c > d$, entonces $ac > bd$.

Ejemplo 6.- Si $4 > 2$ y $5 > 3 \Longrightarrow 20 > 6$

7) Si en una desigualdad se sustituyen ambos miembros, por sus recíprocos, la desigualdad cambia de sentido. Así si $a > b$ se tendrá que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Ejemplo 7.- Si $25 > 5 \longrightarrow \frac{1}{25} < \frac{1}{5}$

VALOR ABSOLUTO Y DESIGUALDADES.

Definición.

Si a es un número positivo cualquiera, su valor absoluto será "a" y si a es negativo entonces será "-a"; así simbólicamente se representa lo anterior de la manera siguiente:

$$|a| = a \quad \text{si } a > 0, \quad |-a| = -a \quad \text{si } a < 0$$

El valor absoluto de cero es cero esto es: $|0| = 0$

Ejemplo 8.- $|3| = 3$; $|7 - 5| = |2| = 2$; $|3 - 8| = |-5| = 5$

Solución de ecuaciones donde intervienen valores absolutos.

Cuando en una igualdad intervienen valores absolutos de expresiones en términos de una variable; la igualdad se cumplirá para dos valores de la variable, esto se debe al concepto de valor absoluto.

Ejemplo 9.- $|3x - 4| = |6 - 2x|$ De acuerdo a la definición existen dos posibilidades:

$$3x - 4 = 6 - 2x \quad \ldots.(A)$$
$$3x - 4 = -6 + 2x \quad \ldots.(B)$$

Así de (A): $5x = 10 \longrightarrow x = 2$

y de (B): $x = -2$

Ahora si en lugar de tener una igualdad se tiene una desigualdad, entonces al resolver la expresión para determinar los valores x que la satisfacen se haría como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.- Determine los valores de x que cumplen con:

$$|4x - 2| \leq 6 \quad \ldots.(A)$$

Se escribe (A) como $-6 \leq 4x - 2 \leq 6$; sumando 2 a cada miembro $-4 \leq 4x \leq 8$, por lo tanto los valores de x que satisfacen (A), son los que van de -1 a 2, inclusive.

ENTORNOS.

Se llama entorno o vecindad de un punto " a " en $\mathbb{R}$ al intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$ en donde δ es la semiamplitud o radio del intervalo. Ver figura 1.

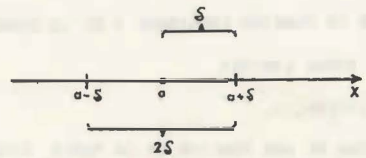


FIG 1

Tal entorno del punto a y radio δ suele también indicarse como:

$$|x - a| < \delta \text{ , o bien como } \varphi(a, \delta).$$

Se llama " entorno reducido " a aquél en el que se excluye el mismo punto " a ", esto se representa como:

$$\varphi'(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta, \; x \neq a\} \text{, es decir:}$$

$$0 < |x - a| < \delta$$

II.2. DEFINICION DE LIMITE EN UN PUNTO DE UNA FUNCION REAL DE VARIABLE REAL. INTERPRETACION GEOMETRICA.

LIMITE DE UNA VARIABLE.

Siendo ahora el objeto de estudio el concepto de límite en un punto, de una función real de variable real, es conveniente analizar previamente el concepto de límite de una variable, análisis que se realizará a continuación. Antes de dar una definición considerénse los siguientes ejemplos.

Ejemplo 11.- Sea x la variable cuyo campo de variabilidad es la sucesión.

$$2 + \frac{1}{2} \quad , \quad 2 + \frac{1}{4} , \; 2 + \frac{1}{8} \quad , \; . \; . \; . \; , \; 2 + \frac{1}{2^n} \; , \; . \; . \; .$$

Si x va tomando valores cada vez más " avanzados " es evidente que su valor se va acercando a 2; se dice entonces que x, tiende a 2, lo cual se escribe $x \to 2$, o bien que el límite de x es dos escribiéndose esto. $\lim x = 2$

Si $x \to 2$ entonces la diferencia $x - 2$ tiende a cero. Esto puede expresarse indicando que siempre se puede tener $x - 2 < \delta$, donde δ es un número positivo tan pequeño como se quiera.

Si $\delta = 0.1$ basta con tomar a:

$x = 2 + \frac{1}{2^4} = 2 + \frac{1}{16}$ con lo cual se cumple:

$x - 2 < \delta \quad , \quad 2 + \frac{1}{16} - 2 = \frac{1}{16} < 0.1$

Si se hace $\delta = 0.02 = \frac{1}{50}$, tomando $x = 2 + \frac{1}{2^6} = 2 + \frac{1}{64}$ se tiene :

$x - 2 = 2 + \frac{1}{64} - 2 = \frac{1}{64} < \frac{1}{50} = \delta$ etc.

Observese que x no llegará al valor 2, sin embargo, su valor puede estar tan cercano a 2 como se desee.

Ejemplo 12.- Sea un círculo fijo cuya área contante es "a" (figura 2) Considérese inscrito en el círculo un polígono rectangular cuyo número de lados va en aumento; obviamente el área v del polígono es variable y al cambiar de valor, ésta se acerca al número "a" sin llegar a ser v = a; es decir - $v \to a$ o bien $\lim v = a$.

Para expresar la condición en que se basa este hecho se puede escribir $v - a \to 0$ o bien $| v - a | < \delta$. Siendo δ un número positivo tan pequeño como se quiera.

Es necesario tomar el valor absoluto de la diferencia v - a cuando se compara ésta con el valor de δ porque en el presente caso se tiene siempre - que $v - a < 0$. Si no se tomara valor absoluto, no tendría ningún objeto la comparación de un número negativo v - a con cualquier número positivo δ ya - que lo que realmente interesa es la comparación entre la magnitud de estas - dos cantidades.

En general tomando $| v - a |$ en cualquier caso, si $|v - a| < \delta$ para todo $\delta > 0$ (por pequeño que éste sea), se tendrá:

$v \to a$ ó bien $\lim v = a$

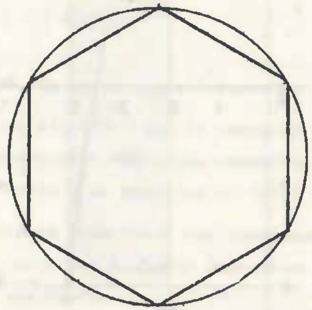


FIG 2

Definición.

" Se dice que la variable x tiende a la constante a , o bien, que el - límite de x es a , si para todo número $\delta > 0$ (por pequeño que sea éste) - siempre se verifica que $| x - a| < \delta$"

A continuación se presentará el concepto de Límite en un punto de una función real de variable real. Antes de exponer la definición formal se hará una introducción del concepto para lograr un mejor entendimiento.

NOCION DE LIMITE DE UNA FUNCION REAL DE VARIABLE REAL.

Considérese la función dada por:

$y = f (x) = - 2x^2 + 8 x - 4$, y concéntrese la atención en una vecindad del valor $x = 3$.

Es necesario considerar la función no solo cuando $x = 3$, sino también cuando x toma valores en diversos entornos del punto $x = 3$.

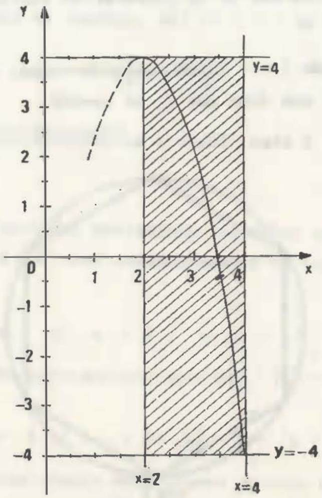


FIG. 3

Para ello supóngase que se selecciona el entorno ψ (3, 1) es decir, $2 < x < 4$. La gráfica de la función en este entorno muestra que para $x = 2$ - se tiene $f(2) = 4$ y para $x = 4$, $f(4) = -4$ (Figura 3).

En otras palabras, la gráfica de la función se encuentra en el rectángulo limitado por las rectas $x = 2$, $x = 4$, $y = 4$, $y = -4$. El próximo paso - es seleccionar un entorno de $x = 3$ con menor amplitud, por ejemplo; - - - (3, 0.5) es decir, $2.5 < x < 3.5$. Considerése la gráfica en este entorno. (Figura 4).

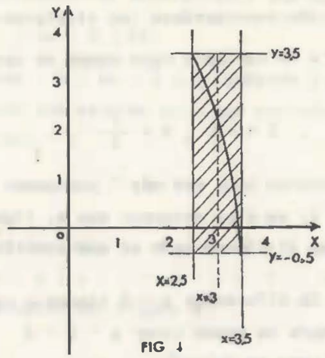


FIG 4

La gráfica se encuentra ahora en el rectángulo limitado por las rectas $x = 2.5$, $x = 3.5$, $y = -0.5$, $y = 3.5$. Continuando de esta manera, tómese un-entorno aún menor, sea este (3, 0.1) ó sea, $2.9 < x < 3.1$, la gráfica se-encuentra ahora en el rectángulo formado por las rectas $x = 2.9$, $x = 3.1$, -- $y = 2.38$, $y = 1.58$; como muestra amplificadamente la figura 5.

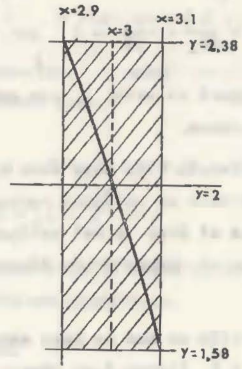


FIG. 5

El punto principal a recalcar es la altura de estos rectángulos. A medida que el ancho de los rectángulos disminuye, la altura también se reduce.

Si se continúa tomando ahora el entorno ψ (3, 0.01) ó sea $2.99 < x < 3.01$, el rectángulo correspondiente que contiene a la gráfica de la función estaría limitado por las rectas $x = 2.99$, $x = 3.01$, $y = 1.9598$, $y = 2.0398$. De lo anterior se deduce que a medida que las rectas x = cte. se acercan al valor -- $x = 3$, las rectas y = cte. se acercan al valor $y = 2$. Es posible que pueda-preguntarse cual es el objeto de toda esta complicación en circunstancias - que, por sustitución directa en la ecuación se obtiene que $y = 2$, cuando -- $x = 3$. Obsérvese sin embargo, que en toda la discusión no se ha utilizado - este hecho, más aún, se ha evitado toda consideración de lo que sucede cuando $x = 3$.

Así, interesa solamente el comportamiento de " y " cuando x está en algún intervalo alrededor del valor 3.

En casi todas las funciones estudiadas hasta ahora, se distingue entre el comportamiento de la función en un punto, por ejemplo en $x = a$, y su comportamiento en una sucesión de entornos, cada vez más pequeños, de ese punto. Sin embargo, ocurre un cambio sorprendente cuando se estudian funciones cuyo comportamiento no puede determinarse por sustitución directa. Por ejemplo la función:

$$y = f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Está definida para todo valor de x excepto $x = 0$, la sustitución directa en $x = 0$ daría:

$$y = f(0) = \frac{0}{0}$$

lo cual carece totalmente de sentido. No obstante, se verá más adelante, que estudiando una sucesión de intervalos en torno a $x = 0$, que se hagan más y - más pequeños, se observa que la altura de los rectángulos que contienen la - función se hace también más y más pequeña y se acumula en torno a un valor - particular de y. En ningún momento se dice algo acerca de y cuando x es cero, sólo se estudia el valor de y cuando x se hace más y más cercano a cero.

Volviendo al ejemplo de la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$ se ve que -- cuando x se aproxima al valor 3, f (x) se aproxima o tiende al valor 2. - Se dice entonces que por lo tanto " f (x) tiende a 2 cuando x tiende a 3 " y se abrevia esta proposición así:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$$

Si una función está definida para valores de x en torno a un número fijo " a " y si al tender x a " a ", los valores de f (x) se hacen más y más cercanos a un número específico L, se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \ldots\ldots(1)$$

lo cual se lee " el límite de f (x) cuando x tiende a " a " es L".

Geométricamente esto significa que la sucesión de rectángulos que rodea a " a " y que tienen anchuras más y más pequeñas, tienen también alturas que se hacen cada vez menores y se acumulan en torno al punto (a, L)

Todas las proposiciones anteriores que contienen expresiones como "más cercano", "más pequeño", etc. son bastante imprecisas y solo pretenden dar una idea intuitiva de lo que ocurre.

Considérese ahora la siguente función:

$$y = f(x) = \frac{x - 2}{2\,|x - 2|}$$

que está bien determinada para todo valor de x , excepto $x = 2$, puesto que- para $x = 2$ la sustitución directa da; $y = \frac{0}{0}$

La gráfica de la función, (figura 6), es muy simple:

Si $x > 2$, entonces $|x - 2| = x - 2$ y la función toma el valor + 0.5; y si $x < 2$, entonces $|x - 2| = -(x - 2)$, y la función vale - 0.5. Se quiere ahora estudiar el comportamiento de la función cuando x tiende a 2. Seleccionando un entorno para x=2, por ejemplo: ψ (2, 0.6) o sea: $1.4 < x < 2.6$, se- ve que la función está contenida en el rectángulo limitado por las rectas -- $x = 1.4$, $x = 2.6$, $y = 0.5$, $y = -0.5$, (Figura 7.).

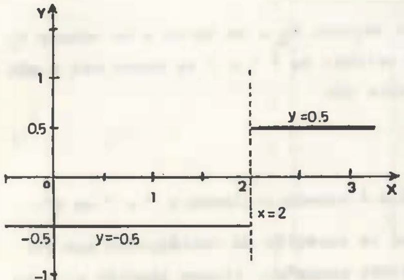


FIG 6

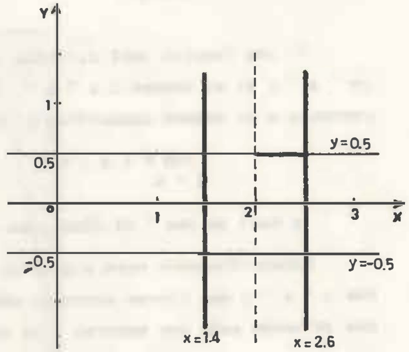


FIG 7

En realidad independientemente de cuán angosto se haga el entorno de $x = 2$, la altura del rectángulo será siempre uno; esto es, no hay límite cuando x tiende a 2 y se dice:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{2\,|x - 2|} \text{ no existe.}$$

Se estudiaran a continuación diversos ejemplos de funciones, con el objeto de determinar lo que sucede en la vecindad de un valor particular de x, cuando la función no queda definida mediante la sustitución directa de ese valor.

<u>Ejemplo 13.-</u> La función $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$

está definida para todo valor de x, excepto $x = -1$, puesto que en $x = -1$, tanto el numerador como el denominador se anulan ¿Existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$?

Para tener una idea de lo que sucede, se elabora una tabla de valores, y trazando enseguida la gráfica se obtiene una línea recta con un " agujero " en el punto (- 1, - 5), (figura 8).

x	f (x)
- 2	- 7
- 1	0/0
0	- 3
1	- 1
2	1

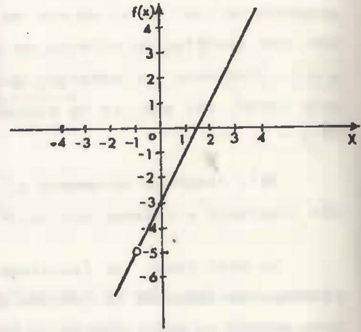


FIG 8

Con una discusión geométrica sobre los rectángulos como la hecha con la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$, se concluye para este caso que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -5$$

Sin embargo, es necesario disponer de un método más sistemático, sin necesidad de recurrir a representaciones gráficas y consideraciones intuitivas.

Por ejemplo se puede factorizar el numerador y la función se escribe como:

$$f(x) = \frac{(2x - 3)(x + 1)}{x + 1}$$

Ahora, si $x \neq -1$, se puede simplificar y entonces:

$$f(x) = 2x - 3, \quad \text{si } x \neq -1$$

Esta función tiende a -5 cuando x tiende a -1 porque ahora se puede hacer la sustitución directa. Por tanto se concluye que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -5$$

Obsérvese que en ningún momento se substituye el valor $x = -1$ en la expresión original.

<u>Ejemplo 14.-</u> Encontrar el límite de la función:

$$f(x) = \frac{x-4}{3(\sqrt{x}-2)}, \quad x \neq 4,\ x > 0$$

cuando x tiende a 4.

Obsérvese que no se puede aplicar la sustitución directa, puesto que $f(4) = \frac{0}{0}$, lo cual carece de sentido. Pudiera procederse en forma gráfica al igual que en el ejemplo 13; sin embargo, es posible hacer una transformación algebráica. En efecto, si racionalizamos el denominador, multiplicando la fracción por $\sqrt{x}+2$, para $x \neq 4$ se tiene

$$\frac{x-4}{3(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{3(x-4)}$$

y simplificando, se tiene:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{3} \quad \text{si } x \neq 4,\ x \geq 0$$

El límite de esta expresión puede encontrarse por sustitución directa de $x = 4$.

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}+2}{3} = \frac{\sqrt{4}+2}{3} = \frac{4}{3}$$

<u>Ejemplo 15.-</u> Encontrar el límite de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}, \quad x \neq -1,\ x > -2$$

cuando x tiende a -1.

Como la sustitución directa da una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, se efectúa una racionalización del numerador.

Así, multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{2+x}+1$, resulta:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2+x}-1)(\sqrt{2+x}+1)}{(x+1)(\sqrt{2+x}+1)} = \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{2+x}+1)}$$

$$x \neq -1$$

Simplificando queda:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}+1}, \quad \text{para } x \neq -1,\ x \geq -2.$$

Por lo tanto $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{2+x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

<u>Ejemplo 16.-</u> Encontrar:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h}, \quad h \neq 0, \text{ donde } f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

La sustitución directa de $h = 0$, da $\frac{f(4)-f(4)}{0} = \frac{0}{0}$

Sin embargo, $f(4) = \frac{1}{25}$

$$f(4+h) = \frac{1}{(4+h+1)^2} = \frac{1}{(5+h)^2}$$

Por tanto:

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{\frac{1}{(5+h)^2} - \frac{1}{25}}{h} = \frac{25-(5+h)^2}{25h(5+h)^2}$$

$$= \frac{-(10h+h^2)}{25h(5+h)^2} = \frac{-h(10+h)}{25h(5+h)^2} = -\frac{(10+h)}{25(5+h)^2}$$

Así,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(10+h)}{25(5+h)^2} = \frac{-10}{25^2} = \frac{-2}{125}$$

<u>Ejemplo 17.-</u> Encontrar el $\lim_{x \to 3} f(x)$, donde $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, $x \neq 3$.

Dibujando la gráfica de esta función en un entorno a $x = 3$, se ve que crece sin límite cuando x tiende a 3, (Figura 9). De acuerdo con la noción de límite antes dada, tómese un intervalo de valores de x en torno a 3 y véase en que rectángulo están contenidos los valores de la función de la figura; se ve claramente que no existen tales rectángulos cualquiera que sea la pequeñez del intervalo escogido alrededor de $x = 3$. En tal caso, se dice que:

$$\lim_{x \to 3} f(x) \quad \text{no existe.}$$

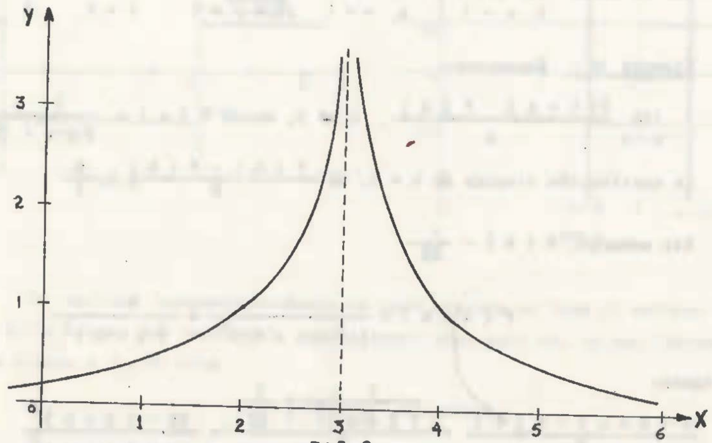


FIG 9

DEFINICION DE LIMITE DE UNA FUNCION.

Anteriormente se presentó la noción de límite de una manera informal, se habló de entornos " pequeños ", de números " cercanos " a otros, de cantidades " acercándose " a cero, etc. Sin embargo estas palabras no matemáticas tienen diferentes significados para cada persona y no pueden ser la base de una estructura matemática, por lo tanto, a continuación se establece la definición formal.-

Definición.- Dados una función f y los números a y L, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a " a " es L, si para todo número positivo ε existe un número positivo δ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

La proposición $\lim_{x \to a} f(x) = L$

es una notación abreviada para la definición anterior.

En otras palabras la anterior definición establece que los valores de la función $f(x)$ se aproximan a un límite L a medida que x se aproxima a un número a, si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L, se puede hacer tan pequeña como se quiera, tomando x suficientemente cercana a " a " pero no igual a " a "

Es importante darse cuenta que en esta definición nada se menciona acerca del valor de la función cuando $x = a$. Esto es, no es necesario que la función esté definida para $x = a$ para que el $\lim_{x \to a} f(x)$ exista.

Ahora se entrará en detalles acerca de ésta definición y paralelamente se ilustrará la representación geométrica del concepto.

INTERPRETACION GEOMETRICA.

- Recuérdese que $|x - a| < \delta$, es equivalente a la doble desigualdad:

$$a - \delta < x < a + \delta$$

- Esta doble desigualdad expresa que x debe estar contenida en un entorno $\psi'(a, \delta)$.

- La parte de la desigualdad que expresa $0 < |x - a|$ significa simplemente que x no puede tomar el valor " a " es decir, se trata de un entorno reducido del punto " a " ya que se excluye el valor " a " mismo.

- La desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ que es equivalente a $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$, expresa que la función f está por encima de la recta $y = L - \varepsilon$

y por debajo de la recta $y = L + \varepsilon$ (figura 10).

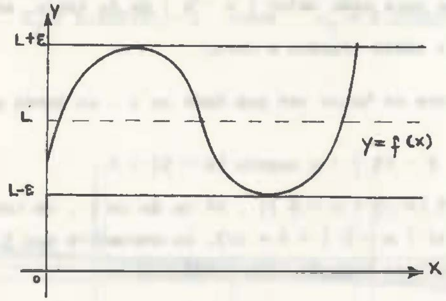


FIG 10

- La definición misma puede ser interpretada como un criterio, dado un número positivo arbitrario, llámesele ε , el criterio consiste en encontrar un número δ tal que $f(x)$ se encuentre entre $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$, siempre que x esté en el entorno reducido de a, $a - \delta < x < a + \delta$; $x \neq a$. Si se puede encontrar tal δ para todo número positivo ε , entonces se dice que $f(x)$ tiene el límite L cuando x tiende a " a ".

Obsérvese que el valor de δ puede ser diferente para diferentes valores de épsilon; además, el criterio debe ser aplicable a todo $\varepsilon > 0$.

La interpretación geométrica expresa, que dado ε , debe ser posible encontrar un δ tal que la función f se encuentre en el rectángulo limitado por las rectas $x = a - \delta$, $x = a + \delta$, $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$; (Figura 11). Nada se dice acerca del valor de f cuando x es a.

Es conveniente adquirir cierta práctica para encontrar el δ que corresponde a un ε dado, esto puede empezarse efectivamente partiendo de algunos casos muy simples. Considérese un caso sencillo: sea $f(x) = 3x - 2$ y tómese a $a = 5$.

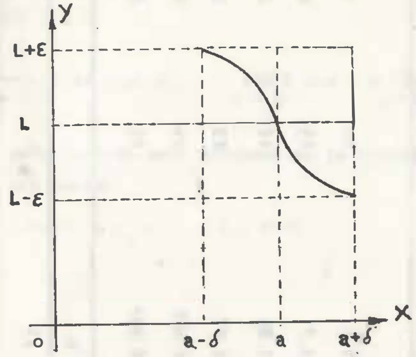


FIG 11

Obténgase el límite de la función en $a = 5$; para ella utilícese un entorno del punto a, sea este $\wp(5, 1)$, o sea, $4 < x < 6$.

Ahora se formará una tabla con las siguientes columnas:

1.- Valor de x en estudio. . . (a)
2.- Valor contenido en el entorno reducido de "a". . . (x)
3.- Valor absoluto de la diferencia $x - a$
4.- Valor de la función en x. . . $f(x)$

Al observar las cuatro primeras columnas de la tabla, se ve que a medida que el intervalo $|x - a|$ tiende a cero, la función tiende al valor 13, por esto se dice que:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 13$$

Aumentándole ahora a la tabla las columnas 5 y 6, o sea:

1	2	3	4	5	6
a	x	$\mid x - a \mid$	f (x)	L	$\mid f (x) - L \mid$
5	4.5	0.5	11.5	13	1.5
5	4.9	0.1	12.7	13	0.3
5	4.95	0.05	12.85	13	0.15
5	4.99	0.01	12.97	13	0.03
5	4.995	0.005	12.985	13	0.01
5	4.999	0.001	12.997	13	0.003
	→	→	→		→
	5	0	13		0

TABLA No. 1.

5.- El valor del límite de la función. . . (L)

6.- El valor absoluto de la diferencia f (x) - L.

Se observa que para cada valor $| x - a |$ de la tabla, existe un valor de $| f (x) - L |$ y ambos tienden a cero.

Lo que se quiere es hacer ver que dado un ε , se puede encontrar un δ tal que:

$$| 3x - 2 - 13 | < \varepsilon \text{ cuando } |x - 5| < \delta$$

Como $| 3x - 15 | = |3 (x - 5)|$, si se da un ε , se toma simplemente $\delta = \varepsilon/3$; entonces, si $| x - 5 | < \delta = \varepsilon/3$, se encuentra que $3 | x - 5 | < \varepsilon$, que equivale al resultado buscado, $|3x - 15| < \varepsilon$

Ejemplo 18.- Trazar una gráfica de $f (x) = \dfrac{3}{x + 2}$ donde $x \neq - 2$, y encontrar un δ tal que $| f (x) - 1/3| < 0.01$ si $|x - 7| < \delta$

SOLUCION:

La gráfica está ilustrada en la figura 12. En la definición se tendrá $L = \frac{1}{3}$ y $a = 7$, se debe encontrar un intervalo de x en torno de $a = 7$, tal que la gráfica se encuentre en el rectángulo adecuado. La función decrece monótonamente a medida que se avanza hacia la derecha, y por tanto, al levantar rectas verticales en los puntos en que las rectas $y = 0.34$, $y = 0.32$, cortan a la curva, se obtiene el mayor intervalo posible en el eje x. La intersección de dichas rectas con la curva representativa de la función, se encuentra resolviendo:

$$\frac{3}{x_1 + 2} = L + \varepsilon = 0.343333 \quad . . . . (A)$$

$$\frac{3}{x_2 + 2} = L - \varepsilon = 0.323333 \quad . . . . (B)$$

y despejando x.

De (A): $3 = 0.343333 (x_1 + 2)$

$x_1 = 8.737864 - 2 \longrightarrow x_1 = 6.737864$

De (B): $3 = 0.323333\,(x_2 + 2)$

$x_2 = 9.278351 - 2 \longrightarrow x_2 = 7.278351$

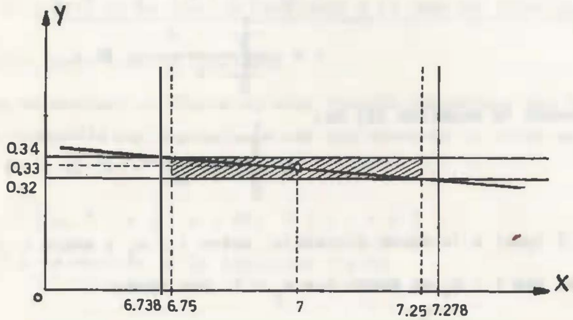


FIG 12

En la figura 12, se muestran estos valores a una escala muy amplificada, puesto que la función decrece monótonamente hacia la derecha, un valor adecuado para δ es 0.25, ya que si la función se encuentra en un rectángulo evidentemente también se encuentra en un rectángulo similar de la misma altura, pero más angosta. En otras palabras, se cumple:

$$|f(x) - 1/3| < 0.01 \text{ cuando } 0 < |x - 7| < 0.25$$

Ejemplo 19.- Si $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$, $a = 2$ y $\varepsilon = 0.01$; $x \neq 2$.-

Determine un número $\delta > 0$, tal que se cumpla la definición de límite.- Dibuje una gráfica aproximada.

SOLUCION:

La función no está definida para $x = 2$, pero para $x \neq 2$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2x} - 2)(\sqrt{2x} + 2)}{(x - 2)(\sqrt{2x} + 2)} = \frac{2x - 4}{(x - 2)(\sqrt{2x} + 2)}$$

$$= \frac{2(x - 2)}{(x - 2)(\sqrt{2x} + 2)}$$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x} + 2} \;;\; \text{si } x \neq 2; \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2}{\sqrt{2x} + 2} = \frac{1}{2} = L$$

La gráfica de esta función está dibujada en la figura 13 en donde también se representan las rectas

$$y_1 = L + \varepsilon = 0.51 \text{ y } y_2 = L - \varepsilon = 0.49$$

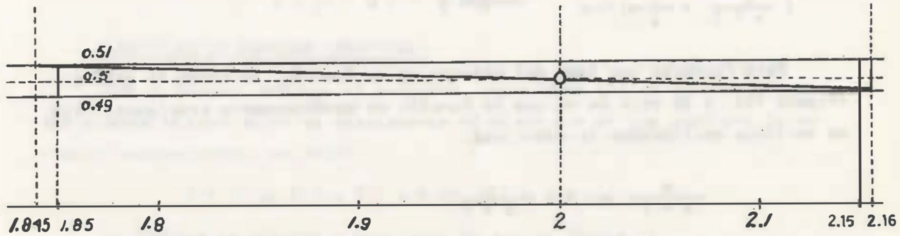


FIG 13

$$\frac{2}{\sqrt{2x_1} + 2} = L + \varepsilon = 0.51 \qquad \ldots\ldots \text{(A)}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x_2} + 2} = L - \varepsilon = 0.49 \qquad \ldots\ldots \text{(B)}$$

Despejando x de las ecuaciones (A) y (B):

De (A) $\sqrt{2x_1} + 2 = \dfrac{2}{0.51}$; $\sqrt{2x_1} = 1.92157$ por lo tantc $2x_1 = 3.69243$

$x_1 = 1.84621$

De (B) $\sqrt{2x_2} + 2 = \frac{2}{0.49}$; $\sqrt{2x_2} = 2.08163$ por lo tanto $2x_2 = 4.33319$

$x_2 = 2.16660$

Puesto que la función decrece monótonamente hacia la derecha, un valor adecuado para δ es $\delta = 0.15$, ya que $1.846 < 1.85$ y $2.166 > 2.15$

Ejemplo 20.- Demostrar por medio de la definición que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

SOLUCION:

Se tiene que $L = \frac{1}{2}$ y $a = 1$. Debe demostrarse que para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un $\delta > 0$, tal que:

$$\left| \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \qquad \text{cuando } 0 < |x - 1| < \delta$$

Para formarse una idea del aspecto de la función, se traza la gráfica- (figura 14), y de esta se ve que la función es monótonamente creciente. Esto se verifica escribiendo la identidad.

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Y observando que al crecer x, $1/(x + 1)$ decrece, por tanto,

$$1 - \left[1/(x+1) \right] \text{crece.}$$

Supóngase en primer lugar que $\varepsilon < 1/2$, entonces, $L + \varepsilon < 1$ y $L - \varepsilon > 0$ puesto que $L = \frac{1}{2}$. En seguida se determinan los puntos en que las rectas- $y = \frac{1}{2} - \varepsilon$ y $y = \frac{1}{2} + \varepsilon$, cortan a la curva, resolviendo las ecuaciones -- (A) y (B).

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} - \varepsilon \qquad \ldots \ldots (A)$$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} + \varepsilon \qquad \ldots \ldots (B)$$

La ecuación (A) da: $x = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right)(x + 1)$, o sea:

$$\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) x = \frac{1}{2} - \varepsilon \text{ y}$$

$$x = \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon} \equiv x_1$$

Similarmente la ecuación (B) da: $x = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon}{\frac{1}{2} - \varepsilon} \equiv x_2$

Tomando δ igual a la menor distancia entre 1 y x_1 y entre 1 y x_2. Se- puede verificar que $1 - x_1$ es menor que $x_2 - 1$, por tanto:

$$\delta = 1 - x_1 = 1 - \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon} = \frac{4\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}$$

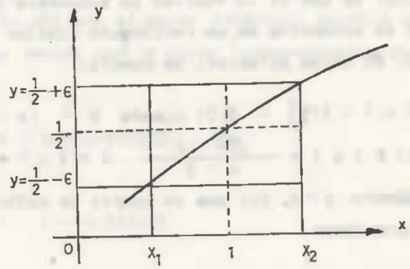


FIG 14

Observación. Si bien la definición básica expresa que debe encontrarse un δ para todo ε, en realidad se observa que una vez encontrado un δ para un determinado ε, se puede emplear el mismo δ para todos los ε mayores. Geométricamente esto significa que una vez que se sabe que la función se encuentra en un rectángulo, evidentemente está contenida en todo rectángulo del mismo ancho pero de mayor altura.

II.3. LIMITE DE LA FUNCION CONSTANTE Y LA FUNCION IDENTIDAD.

LIMITE DE LA FUNCION CONSTANTE.

Para determinar el límite de esta función recuérdese que la función constante es aquella que no varía, o sea que conserva su mismo valor para todo valor de la variable independiente, es decir:

$$f = \{ (x, f(x)) \mid x \in Df; \; f(x) = K \} \qquad \ldots . (A)$$

cuya gráfica se muestra en la siguiente figura.

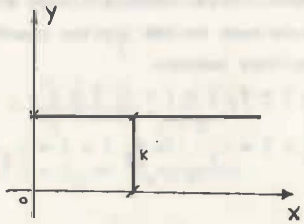


FIG 15

De esta misma gráfica resulta obvio establecer la siguiente proposición:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} K = K \qquad \ldots . (B)$$

Para demostrar la proposición (B) se tomará como base a la definición de límite, establecida en el tema anterior II.2.; esto es:

Basta que $\exists$ un $\delta > 0$, tal que para un $\varepsilon > 0$ dado, se cumpla:

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon \quad \text{siempre que;} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

como es fácil ver, sea cual fuere el número $\delta > 0$ que se escoja, siempre sucederá que $|f(x) - k|$ es menor que cualquier $\varepsilon > 0$ dado, por pequeño que éste sea.

Teorema II. 1.- "Límite de la Función Constante".

Hipótesis: $f(x)$ es una función constante.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende a un número a cualquiera, es igual a la constante.

Esto es: Si $f(x) = k$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k$

LIMITE DE LA FUNCION IDENTIDAD.

Con un proceso análogo al anterior, recuérdese que la función identidad es aquella cuyo valor es exactamente el mismo que el que adquiere la variable independiente, es decir:

$$f = \{ (x, f(x)) \mid x \in Df, \; f(x) = x \}$$

La gráfica se muestra a continuación, en la figura 16.

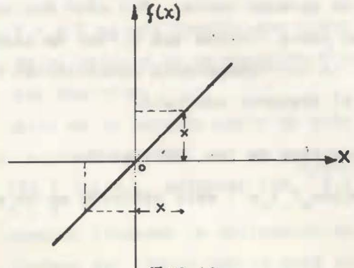


FIG 16

de la gráfica se puede observar que se cumple la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a \qquad \ldots (A)$$

Se comprobará la veracidad de la igualdad (A) recurriendo a la definición de límite; así debemos encontrar un número $\delta > 0$ para cada $\varepsilon > 0$ tal que:

$|f(x) - a| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

dado que $f(x) = x$ se tiene $|x - a| < \varepsilon = \delta$

Por lo que para cualquier $\varepsilon > 0$ dado siempre $\exists$ un $\delta = \varepsilon > 0$ que cumpla las condiciones establecidas de tal manera que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$

Teorema II.2. " Límite de la función identidad "

Hipótesis: $f(x)$ es la función identidad.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende a cualquier número a es igual al número a.

Esto es: Si $f(x) = x$; entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$

II.4. TEOREMAS SOBRE LIMITES.

En el inciso II.2. del presente capítulo se estableció el concepto de límite de una función y se calcularon numéricamente algunos ejemplos de límites utilizando diversos artificios y manipulaciones algebráicas. El estudiante escéptico se dará cuenta de que cada una de ellas necesita justificarse aún cuando muchas de ellas parecen obvias. Por este motivo, se expondrán a continuación los teoremas sobre límites que sirven de base para el cálculo de límites de funciones. La correspondiente demostración de estos teoremas se presenta en un anexo al presente capítulo.

Teorema II.3.- " Unicidad de los límites. "

Hipótesis: Una función $f(x)$ está definida en un entorno del punto $x = a$.

Tesis: Esta función no puede tener dos límites distintos, cuando x tiende al valor a.

Teorema II.4.-

Hipótesis: Una función $f(x)$ es positiva o nula en un entorno del punto $x = a$.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a, no puede ser negativo.

Teorema II.5.-

Hipótesis: Una función $f(x)$ es negativa o nula en un entorno del punto $x = a$.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a, no puede ser positivo.

Teorema II.6.- " Límite de una suma ".

Hipótesis: $f(x)$ es la suma de un número finito de funciones de x que tienen límite cuando x tiende al número a.

Tesis: $f(x)$ tiene límite cuando x tiende al valor a y dicho límite es igual a la suma de los límites cuando x tiende al número a, de las funciones sumadas.

Esto es: Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$. y si

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1, \ \lim_{x \to a} f_2(x) = L_2 \ \ldots, \text{ y } \lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$$

Entonces: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \right] =$

$= L_1 + L_2 + \ldots + L_n$

Teorema II.7.- "Límite de un producto."

Hipótesis: Una función $f(x)$ es el producto de un número finito de funciones de x que tienen límite cuando x tiende al valor a.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende al número a existe y es igual al producto de los límites en este punto de las funciones-que se multiplican.

Esto es: si $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$

Y si $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2, \ldots \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$

entonces: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \left[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)\right] =$

$$= L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot \ldots \cdot L_n$$

Corolario.- El límite en un punto del producto de una constante por una función es igual a la constante multiplicada por el límite de la función en ese punto.

Esto es: $\lim\limits_{x \to a} \left[k\, f(x)\right] = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$

<u>Teorema II.8.-</u> "Límite de un cociente"

Hipótesis: $f(x)$ es el cociente de dos funciones de x que tienen límite cuando x tiende al número a y el límite del denominador no es cero.

Tesis: El límite de $f(x)$ cuando x tiende al número a, existe, y es igual al cociente de los límites de dichas funciones en el punto indicado.

Esto es: si $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$; $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$ y

$\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2 \neq 0$ entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad ; L_2 \neq 0$$

<u>Teorema II.9.-</u>

Hipótesis: Dos funciones de x, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tienen los mismos valores para valores iguales de x en un entorno del punto $x = a$ y $f_2(x)$ tiene límite cuando x tiende al número a.

Tesis: La función $f_1(x)$ tiene límite cuando x tiende al número a y este límite es igual al límite de la función $f_2(x)$ en dicho punto.

Esto es: Si $f(x) = f_2(x)\ \forall x \in a - \delta < x < a + \delta$ y si

$\lim f_2(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L$

<u>Teorema II.10.-</u>

Hipótesis: Para un entorno del punto a se tiene que $f_1(x) < f(x) < f_2(x)$, además, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tienen límite cuando x tiende al valor a y sus límites son iguales.

Tesis: El límite cuando x tiende al número a de la función $f(x)$, existe y es igual al límite de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en el punto considerado.

Esto es: Si $f_1(x) < f(x) < f_2(x)\ \ \forall x \in 0 < |x - a| < \delta$

Y si $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

<u>Teorema II.11.-</u>

(1) Hipótesis.- $f(x)$ es una función que tiene límite L cuando x tiende al valor a. L es positivo y n es cualquier entero positivo.

Tesis.- El límite de la raíz enésima de $f(x)$ cuando x tiende al valor a, es igual a la raíz enésima del límite de $f(x)$ en ese punto.

O sea: Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces: $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

(2) Hipótesis.- $f(x)$ es una función que tiene límite L cuando x tiende al valor a. L es negativo o cero y n es un entero impar positivo.

Tesis.- La tesis de la segunda parte de este teorema es la misma que la primera.

O sea: Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de los teoremas anteriores. Para indicar el teorema del límite que se está usando, se hará anotando la abreviatura " T ", seguida por el número del teorema.

Ejemplo 21.- Encontrar el valor de: $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)$

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1) = \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 2x - \lim_{x \to 2} 1 \qquad .\ .\ .\ . \ (T.\ II.\ 6)$$

$$= 4 + (2)(2) - 1 \qquad .\ .\ .\ . \ (T.\ II.\ 1) \quad .\ .\ .\ . \ (T.\ II.\ 7)$$

$$= 7 \qquad .\ .\ .\ . \ (T.\ II.\ 2)$$

Ejemplo 22.- Encontrar el $\lim_{x \to -3} \sqrt{\dfrac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}}$

$$\lim_{x \to -3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}} = \sqrt{\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}} \qquad .\ .\ .\ . \ (T.\ II.\ 11)$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \to -3} (x^2 - 9)}{\lim_{x \to -3} (2x^2 + 7x + 3)}} \qquad .\ .\ .\ . \ (T.\ II.\ 8)$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \to -3} x^2 - \lim_{x \to -3} 9}{\lim_{x \to -3} 2x^2 + \lim_{x \to -3} 7x + \lim_{x \to -3} 3}} \qquad .\ .\ .\ . \ (T.\ II.\ 6)$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \to -3} x \cdot \lim_{x \to -3} x - \lim_{x \to -3} 9}{2 \lim_{x \to -3} x \cdot \lim_{x \to -3} x + 7 \lim_{x \to -3} 2 + \lim_{x \to -3} 3}} \qquad .\ .\ .\ . \ (T.\ II.\ 7)$$

$$= \sqrt{\frac{(- 3) (- 3) - 9}{2 (- 3)(- 3) + 7 (- 3) + 3}} \qquad .\ .\ .\ . \ (T.\ II.\ 2) \quad .\ .\ .\ . \ (T.\ II.\ 1)$$

$$= \sqrt{\frac{9 - 9}{18 - 21 + 3}}$$

$$= \sqrt{\frac{0}{0}} = \frac{0}{0}$$

Lo obtenido representa una indeterminación, lo cual carece de sentido; sin embargo, esto no significa que el límite buscado no exista. La función - para la cual se trata de encontrar su límite cuando $x \to - 3$, simplemente no está definida para ese valor de x, por lo tanto para $x \neq - 3$ se puede utili zar la siguiente trasformación algebraica, apoyándose en el teorema II.9.

$$\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{(2x + 1)(x + 3)} = \frac{x - 3}{2x + 1}$$

entonces:

$$\lim_{x \to -3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}} = \lim_{x \to -3} \sqrt{\frac{x - 3}{2x + 1}} = \sqrt{\frac{-3 - 3}{-6 + 1}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

Ejemplo 23.- Encontrar el valor de $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

En este problema, al igual que en el ejemplo anterior no es posible a- plicar el teorema II.8 al cociente ya que el límite del denominador se anula cuando $x \to -2$. Sin embargo, factorizando el numerador se tiene:

$$\frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} \text{ , así:} \qquad (T.\ II.\ 9)$$

Este cociente es $(x^2 - 2x + 4)$ si $x \neq - 2$ (ya que si $x \neq - 2$ se - puede dividir numerador y denominador entre $(x + 2)$. Entonces la solución- a este problema se toma la siguiente forma:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (x^2 - 2x + 4) \text{ , siendo } x \neq - 2$$

$$= \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 2x + \lim_{x \to -2} 4 \qquad (T.\ II.\ 6)$$

$$= \lim_{x \to -2} x \cdot \lim_{x \to -2} x - 2 \lim_{x \to -2} x + 4 \qquad (T.\ II.\ 7) \quad (T.\ II.\ 1)$$

$$= (- 2) (- 2) - 2 (- 2) + 4 \qquad (T.\ II.\ 2)$$

$$= 12$$

II.5 LIMITES LATERALES.

Al estudiarse el concepto de límite de una función, $\lim_{x \to a} f(x)$, se hizo especial mención de que interesa analizar los valores que pueda tomar la variable independiente x en un entorno al punto "a" pero no en "a" misma, esto es, en valores de x próximos a "a" que sean mayores que "a" o menores que "a" (es decir en un entorno reducido de "a"). Sin embargo, supóngase -- por ejemplo, que se tiene la función:

$$f(x) = +\sqrt{x-3}$$

Ya que f (x) no está definida para $x < 3$, la función no se define en cualquier entorno que contenga a 3. De aquí, se puede considerar:

$$\lim_{x \to 3} +\sqrt{x-3} \quad \text{no existe .}$$

Sin embargo, si x está restringida a valores mayores que 3, el valor de $\sqrt{x-3}$ se puede hacer tan cercano a cero como se quiera tomando x suficientemente cercano a 3, pero mayor que 3.

En un caso como este se hace que x se aproxime a 3 por la derecha, y entonces se considera El Límite Lateral por la Derecha, el cual se define -- formalmente a continuación.

LIMITE LATERAL POR LA DERECHA.

Considérense una cierta función y = f (x) donde x está definida en el intervalo abierto (a, a + h), donde $h \in \mathbb{R}$ y $h > 0$, según se observa en la Figura 17.

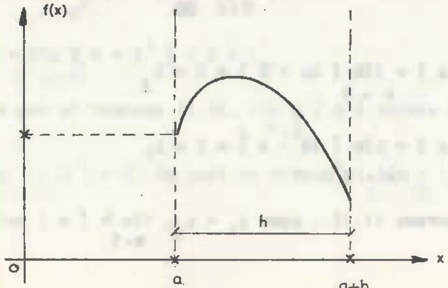


FIG 17

Se dice que el límite de f (x) cuando x se aproxima a " a " por la derecha es L_1, y se denota:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1 \qquad \text{. . . .(A)}$$

Si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\left| f(x) - L \right| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < x - a < \delta \qquad \text{. . . .(B)}$$

Nótese que en (B) no hay barras de valor absoluto para x - a, ya que si $x > a$, $x - a > 0$

Se sigue de la expresión (A) para el ejemplo analizado, que

$$\lim_{x \to 3^+} +\sqrt{x-3} = 0$$

Si al considerar el límite de la función, la variable independiente x está restringida a valores menores que un número " a ", decimos que x se aproxima a " a " por la izquierda, entonces el límite se llama límite lateral por la izquierda.

LIMITE LATERAL POR LA IZQUIERDA.

Considérense ahora la misma función y = f (x), pero " x " definida en el intervalo (a - h, a), donde $h \in \mathbb{R}$ y $h > 0$, según se muestra en la Figura 18.

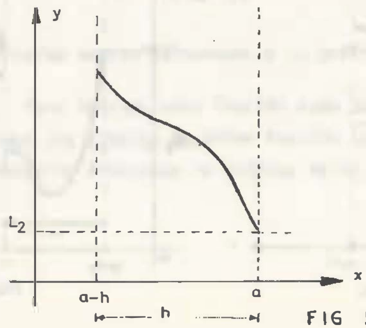


FIG 18

Se dice que el límite de f (x) cuando x se aproxima a " a " por la izquiera es L_2, y se denota:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2 \qquad (C)$$

Si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\left| f(x) - L \right| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < a - x < \delta \qquad (D)$$

Se puede ahora llamar al $\lim_{x \to a} f(x)$, Límite Bilateral o no dirigido, para distinguirlo de los límites laterales.

Teorema II.12.-

Hipótesis: f (x) tiene límite cuando x tiende al valor a y este límite es el número L.

Tesis: Los límites cuando x tiende al número a por la izquierda y por la derecha, existen y ambos son iguales al número L.

La interpretación geométrica de lo anterior se muestra a continuación donde puede observarse que x puede tender al número "a" bien sea por la derecha o bien por la izquierda de " a ", teniéndose para ambos casos la posibilidad de que los límites sean diferentes ($L_1 \neq L_2$). Ver figura 19.

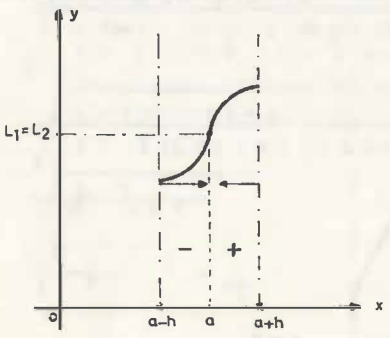


FIG 19(a)

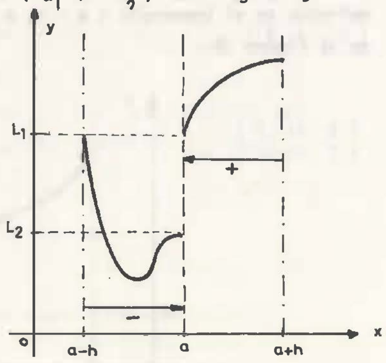


FIG 19(b)

En la figura 19(a), $L_1 = L_2$: $\lim_{x \to a} f(x) = L_1 = L_2$.

En cambio en la figura 19(b), $L_1 \neq L_2$, por lo tanto:

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ no existe.}$$

Ejemplo 24.- Sea h una función definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 3 \\ 10 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a) Trazar la gráfica de h.

b) Encontrar el $\lim_{x \to 3} h(x)$, si existe.

SOLUCION:

a) Un dibujo de la gráfica se muestra a continuación en la figura 20.

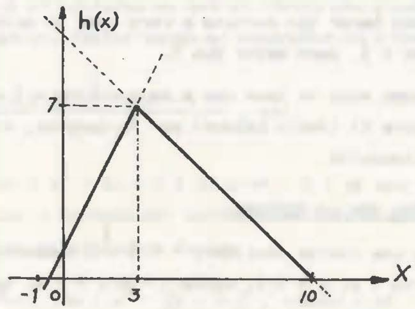


FIG 20

b) $\lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3} (2x + 1) = 7 = L_2$

$\lim_{x \to 3^+} h(x) = \lim_{x \to 3^+} (10 - x) = 7 = L_1$

Según el Teorema II.12., como $L_1 = L_2$, $\lim_{x \to 3} h(x)$ existe y es igual a 7.

Ejemplo 25.- Sea g una función definida por:

$$g(t) = \begin{cases} 4 + t^2 & \text{si } t < -2 \\ 5 & \text{si } t = -2 \\ 12 - t^2 & \text{si } t > -2 \end{cases}$$

Trazar la gráfica de g, y encontrar $\lim\limits_{t \to -2} g(t)$

SOLUCION:

La gráfica de la función g es la que se muestra abajo en la figura 21.

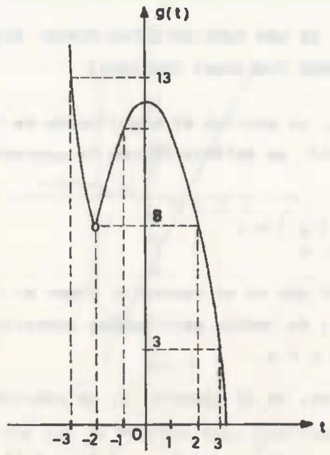


FIG. 21

$$\lim_{t \to -2^+} g_+(t) = \lim_{t \to -2^+} (12 - t^2) = 8 = L_1$$

$$\lim_{t \to -2} g_-(t) = \lim_{t \to -2} (4 + t^2) = 8 = L_2$$

Por lo tanto por el teorema II.12, $\lim\limits_{x \to -2} g(t)$ existe y es igual a 8.

Nótese que $g(-2) = 5$, lo cual no afecta al $\lim\limits_{t \to -2} g(t)$

Ejemplo 26.- Considérese la siguiente función f, definida por:

$$f(r) = \begin{cases} r + 2 \quad , & -3 < r \le 1 \\ \frac{1}{2} r^2 - 3 & 1 < r \le 4 \end{cases}$$

Investigar si existe $\lim\limits_{r \to 1} f(r)$ y trazar la gráfica de $f(r)$

SOLUCION:

$$\lim_{r \to 1^+} f(r) = \lim_{r \to 1^+} \left(\frac{1}{2} r^2 - 3\right) = \frac{-5}{2} = L_1$$

$$\lim_{r \to 1^-} f(r) = \lim_{r \to 1^-} (r + 2) = 3 = L_2$$

Por lo tanto, como $L_1 \neq L_2$, $\lim\limits_{r \to 1} f(r)$ no existe. Ver figura 22.

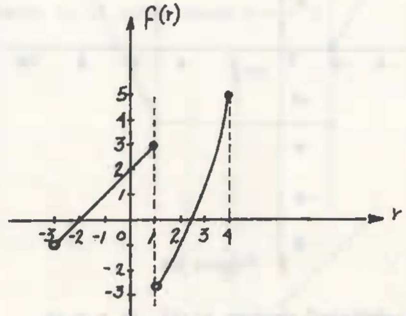


FIG 22

NOTA: Los círculos negros pertenecen a la gráfica, no así los blancos.

Ejemplo 27.- Para la siguiente función dada por tres reglas de correspondencia, determinar los límites de dicha función para los puntos en que - $x = -2$ y $x = 5$. Hacer un dibujo de la gráfica de la función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{para } -4 \leq x \leq -2 \\ -3 & \text{para } -2 < x \leq 5 \\ 2x - 13 & \text{para } 5 < x < 10 \end{cases}$$

SOLUCION:

Se puede iniciar con el trazo de la gráfica de $f(x)$ para una mejor visualización del problema, tal y como se ilustra en la figura 23.

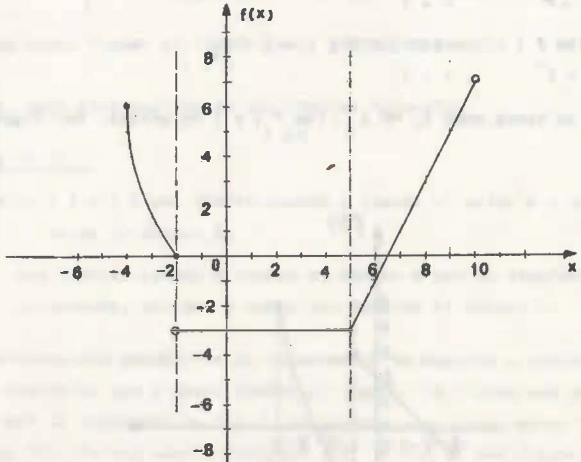


Figura 23

a) Viendo si se cumple el teorema II.12. si $a = -2$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (-3) = -3 = L_1$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x^2 + 3x + 2) = 4 - 6 + 2 = 0 = L_2$$

Por lo tanto como $L_1 \neq L_2$, $\lim_{x \to -2} f(x)$ no existe.

b) Para $a = 5$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (2x - 13) = -3 = L_1$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (-3) = -3 = L_2$$

por lo tanto como $L_1 = L_2 = -3$, el límite existe y vale:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = -3$$

II.6. CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN PUNTO. DISCONTINUIDAD REMOVIBLE. TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS.

En el inciso II.2. se analizó el significado de límite de una función en un punto y se escribió su definición con la expresión (1) que se repite a continuación:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \ldots .(A)$$

Recordando también que no es necesario tomar en cuenta el valor de la función f, cuando $x = a$; de hecho, para muchas expresiones la función no está siquiera definida en $x = a$.

En ese mismo inciso, en el ejemplo 13, se consideró la función f definida por la ecuación:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = \frac{(2x - 3)(x + 1)}{x + 1}$$

Ahí mismo se observó que tal función está definida para todos los valores de x, excepto $x = -1$, para el cual tanto el numerador como el denominador de la función se anulan. Un dibujo de la gráfica de todos los puntos de la recta $y = 2x - 3$, excepto el $(-1, -5)$ se muestra en la figura 8.

En ella, precisamente, hay una notable " interrupción " en el punto $(-1, -5)$ y se dirá entonces que la función <u>f es discontinua</u> para cuando-

$x = -1$.

En cambio si se define $f(-1) = 5$, la función queda ahora definida para todos los valores de x, pero aún hay un " salto " en la gráfica, y la función sigue siendo discontinua en ese mismo valor, según se muestra en la figura 24.

Si embargo, si se define que $f(-1) = -5$, entonces se dice que la función f es continua para todos los valores de x.

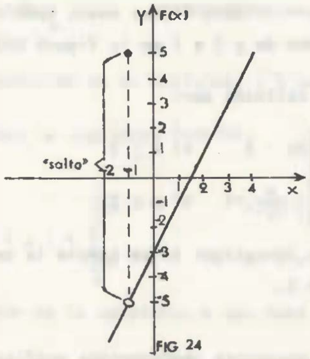


FIG 24

Definición: Se dice que la función f es continua en el valor $a \in Df$, siempre y cuando se cumpla lo siguiente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \ldots\ldots (B)$$

El que se cumpla la definición anterior implica que se cumplan las siguientes condiciones:

1) Que $f(a)$ esté definida.
2) Que exista $\lim_{x \to a} f(x)$
3) Que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Basta con que una de las tres expresiones anteriores no se cumpla para que la condición (B) no se cumpla, por lo tanto, la función f no sea continua en el valor a. La condición (B) es necesaria y suficiente para que la función $y = f(x)$ sea continua en a.

Ejemplo 28.- Sea f definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Trazar su gráfica e investigar si es continua en el punto donde $x = -2$

SOLUCION:

En la figura 25, se muestra un dibujo de la gráfica de la función, en la cual hay un salto en el punto donde $x = -2$

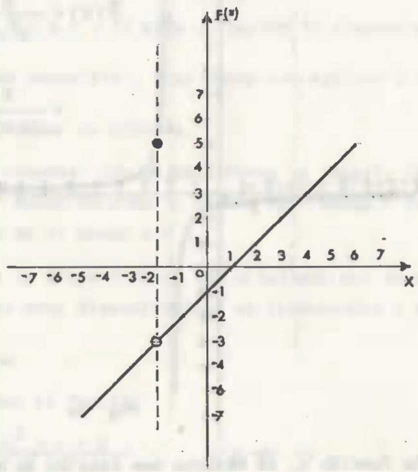


Fig 25

Investigando paso a paso la condición de continuidad para $x = -2$

$f(-2) = 5$ $\therefore$ por lo tanto se satisface la primera condición.

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -3$ $\therefore$ por lo tanto se satisface la segunda condición.

Pero, como $f(-2) \neq \lim\limits_{x \to -2} f(x)$, la tercera condición no se satisface.

Así, se concluye que f es discontinua cuando $x = -2$

Ejemplo 29.- Considérese la siguente función:

$$g(x) = \frac{x+3}{x^2 + x - 6}$$

Investíguese si existe algún punto de discontinuidad en dicha función.

SOLUCION:

En la figura 26 se muestra un dibujo de la gráfica de la función g.

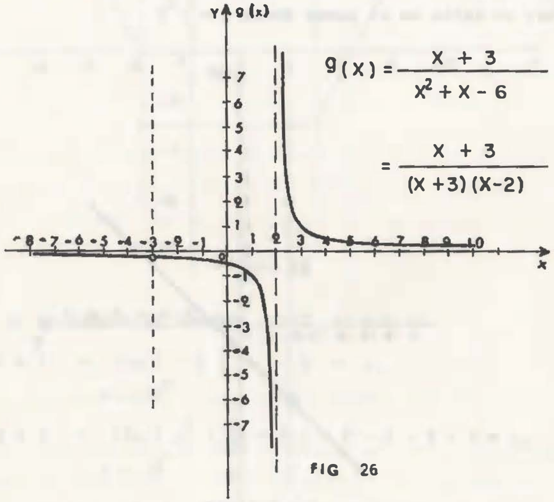


FIG 26

Analizando la función g, se observa que ésta no se encuentra definida para $x = -3$, por tanto.

$$g(x) = \frac{1}{x-2}, \text{ para } x \neq -3$$

Esto se ve claramente como una interrupción en la gráfica de g, cuando $x = -3$, y así, al no cumplirse la condición (2), se concluye que tal función es discontinua para cuando $x = -3$.

Sin embargo, existe otro punto de discontinuidad, ya que cuando $x = 2$, el denominador de la función g, se anula no quedando definida para ese valor. Nuevamente se concluye que dicha función no es continua al no cumplirse la condición (1) ahora para $x = 2$. Este último caso, también se puede verificar observando el comportamiento de $g(x)$ en la figura 26.

Ejemplo 30.- Sea h definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{x}{2} - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Trazar su gráfica, e investigar si se cumple la condición de continuidad, en el punto donde $x = 2$.

SOLUCION:

En la figura 27, se encuentra representada gráficamente la función h, se observa que para $x = 2$, hay una interrupción en dicha gráfica.

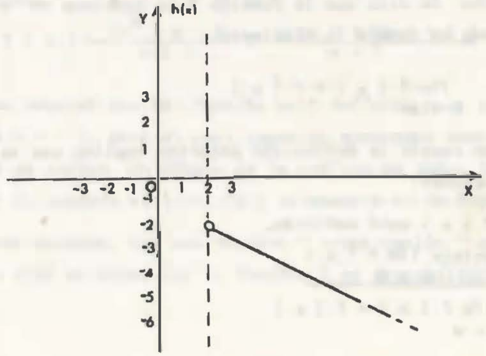


FIG 27

Ahora investigando paso a paso la condición de continuidad para $x = 2$, se tiene:

$f(2) = 2(2) - 3 = 1$, por lo tanto satisface la primera condición.

$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x - 3) = 4 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(-\frac{x}{2} - 1\right) = -1 - 1 = -2$$

ya que $\lim_{x \to 2^-} h(x) \neq \lim_{h \to 2^+} h(x)$, se concluye que $\lim_{x \to 2} h(x)$ no existe; entonces la segunda condición no se satisface y h es discontinua para $x = 2$.

Ejemplo 31.- Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & \text{si } x \leq 4 \\ kx - 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Encontrar el valor de la constante k que hace que la función sea continua para $x = 4$.

SOLUCION:

Para que $f(x)$ sea continua para $x = 4$, debe cumplirse la condición de continuidad.

$f(4) = 3(4) + 7 = 19$ por lo tanto se cumple la primera condición.

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (3x + 7) = 12 + 7 = 19$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (kx - 1) = 4k - 1$$

Para que se cumpla la segunda condición, debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x), \text{ o sea}$$

$4k - 1 = 19$ por lo tanto $k = 5$, así $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$ y $f(x)$ es continua en $x = 4$.

DISCONTINUIDAD REMOVIBLE:

En los ejemplos anteriores, se han analizado funciones que presentan discontinuidad para algún punto.

Si se analiza detenidamente para cada caso la causa que origina dicha discontinuidad, se podrá observar que cuando la discontinuiad se origina porque $f(a) \nexists$, siendo "a" el punto de discontinuidad, existiendo $\lim_{x \to a} f(x)$; o bien existiendo $f(a)$ y existiendo $\lim_{x \to a} f(x)$ estos no son iguales; o sea: $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. En esta situación la discontinuiad se menciona como "Discontinuidad Removible", pues basta con definir $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ para que la discontinuidad se elimine.

Pero se ha de recalcar que en esta forma se estaría definiendo, de manera absoluta; una " nueva función "; siendo la " nueva " función idéntica a la anterior, excepto en el punto $x = a$.

En el caso que la discontinuiad sea originada por la no existencia del $\lim_{x \to a} f(x)$; entonces esta discontinuidad es irremovible y no se podrá eliminar de ninguna manera.

Ejemplo 32.- Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

estudiado en el ejemplo 28. Indicar si la discontinuidad del punto en que $x = -2$ es removible y en caso afirmativo removerla.

SOLUCION:

En el ejemplo 28, se puede observar (figura 25) que la función f (x) presenta " un salto " para $x = -2$. Así mismo se puede ver que la función cumple para $x = -2$, las dos primeras partes de la condición de continuidad, es decir:

1.- $f(x)$ está definida para $x = -2$ y vale $f(-2) = 5$

2.- $\lim_{x \to 2}$ existe y vale: $L = -3$

Pero la tercera parte, no se cumple, puesto que:

3.- $\lim_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$

$-3 \neq 5$

La discontinuidad si es removible, puesto que basta con definir $f(-2) = -3$, y también se cumplirá la tercera parte, quedando la función continua para $x = -2$ si:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ -3 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Ejemplo 33.- Sea la función:

$$g(x) = \frac{x + 3}{x^2 + x - 6}$$

estudiada en el ejemplo 29. Indicar si la discontinuidad del punto en que $x = 2$ es removible y en caso de serlo, removerla.

SOLUCION:

La función $g(x)$ no cumple con la primera parte, tal como se vió en el ejemplo 29.

Analizando la función para la segunda parte:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x + 3}{x^2 + x - 6} \quad \text{no existe.}$$

Obviamente, la función tiene una discontinuidad irremovible, puesto que no es posible definir la función en $x = 2$ y que sea igual al valor del límite, puesto que el límite no existe.

TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS.

Las funciones continuas tienen un buen número de propiedades importantes, algunas de las cuales son consecuencia de las propiedades de los límites. Aplicando la definición de continuidad y los teoremas de límites antes vistos, se tienen los siguientes teoremas sobre funciones continuas en un punto.

Teorema II.13.-

Hipótesis: f y g son dos funciones continuas en $x = a$.

Tesis: (1) $f + g$ es continua en $x = a$

(2) $f - g$ es continua en $x = a$

(3) $f \cdot g$ es continua en $x = a$

(4) $f \div g$ es continua en $x = a$, siempre que $g(a) \neq 0$.

Se demostrará la parte (1) de este teorema, para ilustrar el tipo de demostración requerida para cada parte, ya que f y g son continuas en a, de la definición de continuidad, se tiene:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{A}$$

y

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \tag{B}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (A) y (B), y del teorema II.6 se tiene:

$$\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = f(a) + g(a) \tag{c}$$

La ecuación (C) es la condición para que f + g sea continua en x = a, la cual proporciona la demostración del teorema II.13.1.

Teorema II.14.

Hipótesis.- f (x) es una función polinómica.
Tesis.- f (x) es una función continua para todos los valores de su dominio.

$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n,\ b_0 \neq 0$$

donde n es un entero no negativo y $b_0, b_1 \ldots, b_n$, son números reales. Con aplicaciones sucesivas de los teoremas de límites, se puede demostrar que si a es cualquier número, entonces:

$\lim_{x \to a} f(x) = b_0 a^n + b_1 a^{n-1} + b_2 a^{n-2} + \ldots + b_{n-1} a + b_n$, de donde se sigue que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Teorema II.15.

Hipótesis: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ es una función racional.

Tesis: f (x) es continua para todo su dominio siempre que $h(x) \neq 0$

Este teorema se demostrará en base a que f es una función racional, la cual puede ser expresada como el cociente de dos funciones polinomiales. Así, f puede estar definida por:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Donde g y h son dos funciones polinomiales y el dominio de f consiste de todos los números $\mathbb{R}$ excepto aquellos para los cuales h (x) = 0.

Si a es cualquier número en el dominio de f , entonces $h(a) \neq 0$; así por el teorema II.8.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} \qquad (D)$$

Ya que g y h son funciones polinomiales, por el teorema II.14., son continuas en a, y así $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ y $\lim_{x \to a} h(x) = h(a)$. Consecuentemente, de la ecuación (D) :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{g(a)}{h(a)}$$

II.7. CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN INTERVALO.

Con los conceptos enunciados en el inciso anterior, es posible analizar la continuidad de cualquier función real de variable real en el punto en que se desee. Sin embargo, para muchos problemas será interesante investigar los intervalos en los cuales una función sea continua. El concepto de continuidad de una función en un intervalo puede expresarse mediante las siguientes definiciones.

Definición.- La función f es continua en el intervalo abierto (a, b) si y solo sí es continua para todo valor de x que esté dentro del intervalo (a, b).

Definición.- La funcion f es continua en el intervalo cerrado [a, b] si y sólo sí es continua para todo valor de x que este dentro del intervalo abierto (a, b); así como continua por la derecha en a* y continua por la izquierda en b**.

* La función f es continua por la derecha en a, si y sólo sí:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

** La función f es continua por la izquierda en b, si y sólo sí:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

De acuerdo con las definiciones anteriores, para investigar la continuidad de una función en un intervalo, es necesario el análisis en todos los puntos de ese intervalo. Este trabajo será, lógicamente, engorroso, impráctico y, dada su magnitud imposible. Sin embargo, apoyándose en los teoremas sobre continuidad, estudiados en el inciso anterior, el problema se reduce a analizar solamente los valores en los cuales no se cumplan las hipótesis de los teoremas, o bien aquellas en las que haya duda, por ejemplo en donde haya cambio de regla de correspondencia.

Ejemplo 34.- Sea $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ determinar los intervalos para los cuales la función g es continua.

SOLUCION:

La función en estudio es una función racional y de acuerdo al Teorema II.15., será continua para todo valor de x, excepto aquellos que anulen al denominador. De manera que igualando a cero el denominador:

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x = \pm 2$$

Para $x = -2$ ó $x = 2$, la función g no es continua. Entonces, los intervalos en los que sí es continua son:

$$(-\infty, -2), \ (-2, 2) \text{ y } (2, +\infty)$$

Ejemplo 35.- Para que valores de x, la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & -1 < x < 1 \\ 2x - 4, & 1 \leq x < 2 \\ 5 - x^2, & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

es continua ? Dibujar su gráfica.

SOLUCION:

Apoyándose en los teoremas sobre funciones continuas puede fácilmente deducirse que $f(x)$ es continua en los intervalos $(-1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 3)$. Sin embargo, los únicos valores dudosos están en $x = 1$ y $x = 2$.

Analizando los puntos dudosos:

a) en $x = 1$

$$f(1) = 2(1) - 4 = -2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 3) = 1 - 3 = -2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x - 4) = 2 - 4 = -2$$

por lo tanto como $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$, entonces $\lim f(x)$ existe.

Finalmente, $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

por lo tanto se cumple la condición de continuidad, y así se concluye que la función f es continua en $x = 1$.

b) En $x = 2$

$$f(2) = 5 - (2)^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x - 4) = 4 - 4 = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (5 - x^2) = 5 - 4 = 1$$

por lo tanto como $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe.

Por esto último, se concluye que f no es continua cuando $x = 2$. En la figura 28, aparece la gráfica de dicha función.

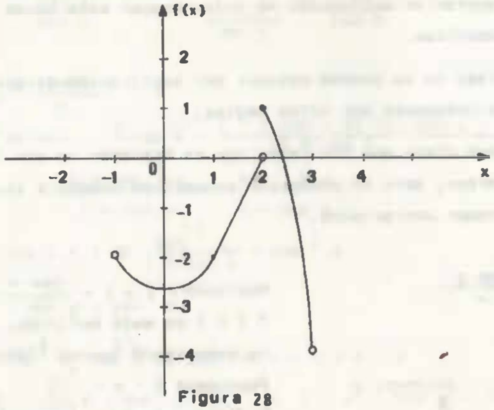


Figura 28

Ejemplo 36 - Analizar la continuidad de la función h (t) indicando los valores para los cuales sea discontínua y los intervalos donde sea contínua. Dibuje la gráfica.

$$h(t) = \begin{cases} \cot t & \text{si } -\pi < t \le -\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} t + 1 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ e^t & \text{si } 0 < t < +\infty \end{cases}$$

SOLUCION:

Las expresiones que forman la regla de correspondencia, representan algunas de las funciones trascendentes estudiadas en el capítulo I. De acuerdo a lo estudiado, se puede afirmar:

a) La función cotangente es continua, excepto en los puntos en que -- $t = \pm n\pi$, en donde n es un número entero positivo. Para este problema, la primera expresión no presenta ningún punto de discontinuidad porque su intervalo de definición no incluye a los valores señalados.

b) La función seno siempre es continua.

c) La suma de la función seno más la función constante t = 1, también es continua, de acuerdo con el teorema II.13.

d) La función exponencial $h(t) = e^t$ es continua siempre.

e) Los únicos valores dudosos son cuando $t = -\frac{\pi}{2}$ y cuando $t = 0$

Análisis de los puntos dudosos:

a) cuando $t = -\frac{\pi}{2}$

h (t) está definida por medio de la primera expresión y vale:

$$h\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \cot\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$$

entonces se cumple la primera parte de la definición:

$$\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}^-} h(t) = \lim_{t \to -\frac{\pi}{2}^-} \cot t = 0$$

$$\lim_{t \to \frac{-\pi}{2}^+} h(t) = \lim_{t \to \frac{-\pi}{2}^+} \operatorname{sen} t + 1 = 0$$

Por lo tanto el límite existe y vale $\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}} h(t) = 0$

y la segunda parte se cumple.

La tercera parte se cumple, puesto que:

$$\lim_{t \to \frac{-\pi}{2}} h(t) = h\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0$$

Entonces la función h (t) es continua para $t = \frac{-\pi}{2}$

b) Cuando t = 0.

h (t) no está definida puesto que ningun intervalo de definición de las tres expresiones incluye el valor t = 0. Al no cumplirse la primera parte, la función h (t) no es continua para t = 0.

Es de hacerse notar que el límite en ese punto si existe, como lo puede comprobar el alumno, es decir los límites laterales son iguales.

$$\lim_{t \to 0^-} h(t) = \lim_{t \to 0^+} h(t) = 1$$

Sin embargo, al no poder igualar el valor del límite, que si existe, con el valor de la función en ese punto, por no estar definida, la condición de continuidad no se cumple y la función h (t) es discontinua en ese punto.

Resumiendo:

h (t) es continua para los siguientes intervalos:

$$(-\pi, 0) \text{ y } (0, +\infty)$$

o bien:

h (t) es discontinua para $t = 0$.

La gráfica de la función puede observarse en la figura 29.

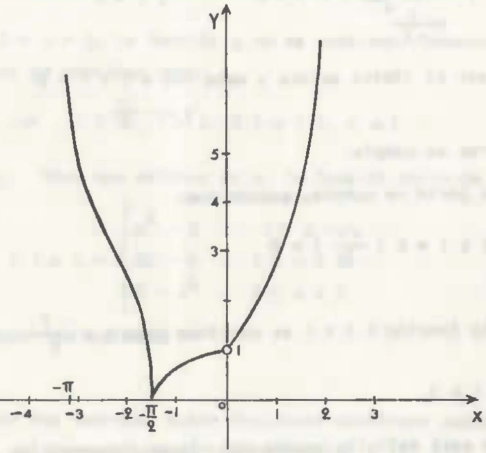


FIG 29

II.8. LIMITES CON APLICACION EN EL CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

Se tratará en este tema la obtención de los límites de ciertas funciones que tienen posterior aplicación no solamente en este curso, sino en otras materias de matemáticas.

Estos límites no se pueden obtener por sustitución directa, y así su valor tendrá que obtenerse por otros medios.

Ha de quedar claro que los casos que se tratarán no son los únicos de este tipo de límites, pero su obtención se analiza debido a la aplicación que tendrán en temas posteriores.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$

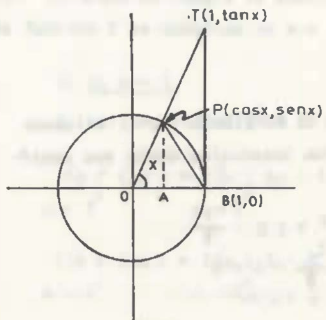


FIG 30

Haciendo $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$, se ve que $f(0)$ no está definida, sin embargo se demostrará que su límite existe.

Supongase $0 < x < \pi/2$

Refiriendose a la figura 30, la cual muestra un círculo de radio unitario cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$ y en el cual se puede distinguir el sector circular BOP cuyo ángulo central, medido en radianes es x, y cuya área está determinada por $\frac{1}{2} r^2 x$; Así si s unidades cuadradas es el área del sector BOP, entonces $S = \frac{1}{2} x$.

También se observan la cuerda BP y la tangente BT en el punto B.

Llámese k_1 al área del triángulo OBP, donde $k_1 = \frac{1}{2}$ sen x, y k_2 al área del triángulo OBT, donde $k_2 = \frac{1}{2}$ tan x.

Por geometría elemental se tiene:

$$k_1 < S < k_2; \text{ esto es: } \frac{1}{2} \text{ sen } x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x. \qquad \text{(A)}$$

o sea: $\operatorname{sen} x < x < \tan x$ (B)

y dividiendo (B) entre sen x, queda:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

de donde: $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ (C)

Por otra parte: $1 - \cos x = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x}$

o sea: $1 - \cos x = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x}$

Como $0 < \cos x < 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x} < \operatorname{sen}^2 x$

por lo tanto $1 - \cos x < \operatorname{sen}^2 x$

De (B) : $\operatorname{sen}^2 x < x^2$; ya que $\operatorname{sen} x > 0$ y $x > 0$

por lo tanto: $1 - \cos x < \operatorname{sen}^2 x < x^2 \Rightarrow 1 - x^2 < \cos x$: llevado a (C)

$$1 - x^2 < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \qquad \text{(D)}$$

Tomando límite cuando $x \to 0$, se tiene:

$$\lim_{x \to 0} (1 - x^2) < \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \lim_{x \to 0} 1$$

$$1 < \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{(E)}$$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$; recordando que $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ se tiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right] =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \quad \text{por lo tanto } \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} k x}{x} = \lim_{x \to 0} k \frac{\operatorname{sen} k x}{kx} = k \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} k x}{kx} =$$

$$= k \cdot 1 = k \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{x} = k$$

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x} =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

5) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$$

por lo tanto $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

6) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = 0.1 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} = 0$$

7) $$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

Para este límite se presentan los siguientes 3 casos:

a) $n = m$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + bn} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n}{x^n}}{\dfrac{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}{x^n}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \ldots + \dfrac{a_n}{x^n}}{b_0 + \dfrac{b_1}{x} + \ldots + \dfrac{b_n}{x^n}} = \frac{a_0}{b_0}$$

por lo tanto: $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m} = \frac{a_0}{b_0}$, si $n = m$

b) $n < m$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{a_0}{x^{m-n}} + \dfrac{a_1}{x^{m-n+1}} + \ldots + \dfrac{a_n}{x^m}}{\dfrac{b_0}{1} + \dfrac{b_1}{x} + \ldots + \dfrac{b_m}{x^m}}$$

$$= \frac{0}{b} = 0$$

por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m} = 0, \text{si } n < m.$$

c) $n > m$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \ldots \dfrac{a_n}{x^n}}{\dfrac{b_0}{x^{n-m}} + \dfrac{b_1}{x^{n-m+1}} + \ldots \dfrac{b_m}{x^n}}$$

$$= \frac{a_0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 n^{m-1} + \ldots + b_m} \to \infty, \text{ si } n > m$$

. es decir, el límite no existe si $n > m$.

8) $\displaystyle \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m$

Desarrollando el binomio.

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1^m + \frac{m\, 1^{m-1}}{1!} \left(\frac{1}{m}\right) + \frac{m(m-1)}{2!} 1^{m-2} \left(\frac{1}{m}\right)^2 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} 1^{m-3} \left(\frac{1}{m}\right)^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \frac{m-1}{m} + \frac{1}{3!} \left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right) + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) + \ldots$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e$$

por lo tanto $\displaystyle \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$

9) $\displaystyle \lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$, tomando $x = \dfrac{1}{m}$; $x \to 0 \Rightarrow m \to \infty$

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

10) $\displaystyle \lim_{\beta\to 0} \frac{L(1+\beta)}{\beta}$; como $\dfrac{L(1+\beta)}{\beta} = L(1+\beta)^{1/\beta}$

$$\Longrightarrow \lim_{\beta\to 0} \frac{L(1+\beta)}{\beta} = \lim_{\beta\to 0} L(1+\beta)^{1/\beta} = L \lim_{\beta\to 0} (1+\beta)^{1/\beta}$$

Del límite 8) se tiene $\displaystyle \lim_{\beta\to 0} (1+\beta)^{1/\beta} = e$

por lo tanto: $\displaystyle \lim_{\beta\to 0} \frac{L(1+\beta)}{\beta} = L\, e = 1$

11) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{1-e^{\alpha}}{\alpha}$. Sea $1 - e^{\alpha} = -\beta \Rightarrow 1+\beta = e^{\alpha}$

por lo tanto: $\alpha = L(1+\beta)$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-e^{\alpha}}{\alpha} = \lim_{\beta\to 0}\frac{-\beta}{L(1+\beta)}$$

$$= \lim_{\beta\to 0} - \frac{1}{L(1+\beta)^{1/\beta}} = -\frac{1}{1}$$

por lo tanto: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1-e^{\alpha}}{\alpha} = -1$

---

12) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{a^{\alpha}-1}{\alpha}$. Sea $a^{\alpha} - 1 = \beta \Rightarrow a^{\alpha} = 1+\beta$

Tomando logaritmos naturales:

$$\alpha\, L\, a = L(1+\beta)$$

$$\alpha = \frac{L(1+\beta)}{L\, a}$$

Si $\alpha \to 0 \Rightarrow \beta \to 0$

Sustituyendo:

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\frac{L(1+\beta)}{L\,a}} = \lim_{\beta\to 0}\frac{L\,a}{\frac{L(1+\beta)}{\beta}} = L\,a$$

$$\therefore \lim_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha} = L\,a$$

---

13) $\lim\limits_{m\to\infty} m\left(\sqrt[m]{a} - 1\right)$. Sea $m = \dfrac{1}{\alpha}$. Si $m\to\infty$, $\alpha\to 0$

Sustituyendo:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left(a^{\alpha}-1\right) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}$$

Del límite 12)

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha} = L\,a$$

por lo tanto: $\lim\limits_{m\to\infty} m\left(\sqrt[m]{a}-1\right) = L\,a.$

II.9. INCREMENTOS. CONCEPTO DE CONTINUIDAD POR MEDIO DE INCREMENTOS Y EQUIVALENCIA CON LA DEFINICION DEL INCISO II.6.

- INCREMENTOS.

Sea $f = \{(x, y) \,/\, y = f(x)\,;\, x \in D_f\}$ y x_1, x_2, dos elementos del dominio de la función. Llámese a x_1 " valor inicial de x " y a x_2 " valor final de x ". Si la variable independiente x pasa de un valor inicial x_1 a un valor final x_2, tal que se tenga $x_2 = x_1 + \Delta x$, a la diferencia:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \text{(A)}$$

se le llama " incremento de x " y debe leerse " delta equis " . Este incremento indica el cambio en el valor de x y puede ser un número cualquiera con la condición de que $x_1 + \Delta x$ este en el dominio de la función.

Dicho incremento puede tener varios valores que son:

$$\Delta x > 0 \quad\Rightarrow\quad x_1 < x_2 \qquad \text{(B)}$$

$$\Delta x < 0 \quad\Rightarrow\quad x_1 > x_2 \qquad \text{(C)}$$

$$\Delta x = 0 \quad\Rightarrow\quad x_1 = x_2 \qquad \text{(D)}$$

Ejemplo 37.- Si a partir de la pareja ordenada (3, 7) la variable - independiente (x) adquiere los valores 4.1, 2 y 3, calcular los incrementos correspondientes Δx.

SOLUCION:

Sea $x_1 = 3$.

Si $x_2 = 4.1$; $\Delta x = x_2 - x_1 = 4.1 - 3 = 1.1 > 0$; ya que $x_1 < x_2$

Si $x_2 = 2$; $\Delta x = x_2 - x_1 = 2 - 3 = -1 < 0$; ya que $x_1 > x_2$

Si $x_2 = 3$; $\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - 3 = 0 = 0$; ya que $x_1 = x_2$

De manera similar si la función $y = f(x)$ pasa de un valor inicial y_1 a un valor final y_2, la diferencia:

$$\Delta y = y_2 - y_1 \qquad \text{(E)}$$

se domina " incremento de la variable dependiente ". El valor inicial de la-variable dependiente (y_1) es aquel valor que adquiere la función $y = f(x)$ cuando la variable independiente (x) toma un valor inicial x_1.

El valor final de la variable dependiente (y_2) es aquel valor que adquiere la función $y = f(x)$ cuando a la variable independiente (x) se le asigna un valor final x_2 .

Por lo tanto: $y_1 = f(x_1)$ (F)

Si el valor de x cambia de x_1 a $x_2 = x_1 + \Delta x$, entonces se tendrá un correspondiente incremento en la variable dependiente o sea:

$$y_1 + \Delta y = f(x_1 + \Delta x) \qquad \text{(G)}$$

de donde:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) = f(x_2) - f(x_1) \qquad \text{(H)}$$

Es decir el incremento de " y " es igual a su valor final menos su valor inicial.

Al igual que en el caso anterior, dicho incremento puede tomar alguno de los siguientes valores:

$$\Delta y > 0; \quad \text{si } f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{(I)}$$

$$\Delta y < 0; \quad \text{si } f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{(J)}$$

$$\Delta y = 0; \quad \text{si } f(x_1) = f(x_2) \qquad \text{(K)}$$

Ejemplo 38.- Sea la función $f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4x + 12\}$, si x cambia de $x_1 = -2$ a $x_2 = 3$; calcular los incrementos de las dos variables. Para " x " (según (A)).

SOLUCION:

$\Delta x = x_2 - x_1$

$\Delta x = 3 - (-2) = 3 + 2$

$\Delta x = 5$

Para " y " (según (H))

$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

$\Delta y = f(3) - f(-2)$

$\Delta y = \left[3^2 - 4(3) + 12\right] - \left[(-2)^2 - 4(-2) + 12\right]$

$\Delta y = 9 - 24$

$\Delta y = -15$

La representación geométrica de estos resultados se muestra en la figura 31, en donde puede observarse que:

$\Delta x > 0$; ya que $x_2 > x_1$ (de acuerdo con (B))

$\Delta y < 0$; ya que $f(x_2) < f(x_1)$ (de acuerdo con (J))

Ejemplo 39.- Supóngase una esfera metálica de radio r = 25 cm. Si por efectos de variación de temperatura se observa que su diámetro ha aumentado 0.002 cm. ¿ Cuál será la variación de su volúmen y de su superficie ?

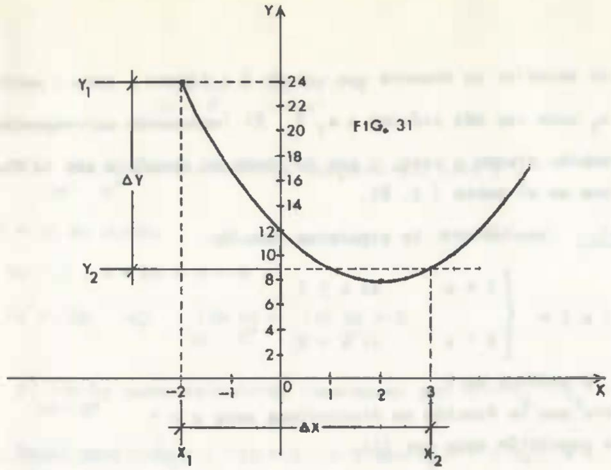


FIG. 31

SOLUCION:

El volúmen de la esfera está dado por:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Delta V = V(r_1 + \Delta r) - V(r_1)$$

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r_1 + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^3$$

Donde $r_1 = 25$ y $\Delta r = 0.\,001 = \frac{\Delta d}{2}$ (El semincremento del diámetro).

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(25.001)^3 - \frac{4}{3}\pi(25)^3$$

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(15,\,626.87507 - 15625) = \frac{4}{3}\pi(1.87508)$$

$$\Delta V = 7.85430\ cm^3$$

El área de la esfera está dada por:

$$S(r) = 4\pi r^2$$

$$\Delta S = S(r_1 + \Delta r) - S(r_1)$$

$$\Delta S = 4\pi(r_1 + \Delta r)^2 - 4\pi r_1^2$$

Donde $r_1 = 25$ cm y $\Delta r = 0.001$ cm.

$$\Delta s = 4\pi(25.001)^2 - 4\pi(25)^2$$

$$\Delta s = 4\pi(625.05 - 625) = 4\pi(0.05)$$

$$\Delta s = 0.62833$$

- CONCEPTO DE CONTINUIDAD POR MEDIO DE INCREMENTOS Y EQUIVALENCIA CON- LA DEFINICION DEL INCISO II.6.

Definición: " Se dice que una función es continua en un valor de la variable independiente cuando el incremento de la variable dependiente tiende a cero, al tender a cero el incremento de la variable independiente "

Esto es, en notación de incrementos, el hecho de que la función - - -- $y = f(x)$ sea continua en un cierto valor de " x ". Se expresa de la si-- guiente manera:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad \text{(L)}$$

Ejemplo 40.- Averiguar si la función $f(x) = 3x^2 - 2x$ es continua -- en el punto (2,8). Utilizar para ello el concepto de continuidad por medio de incrementos.

SOLUCION:

El problema consiste en darle a " x " incrementos " Δx " cada vez más- pequeños a partir del valor dado de " x " en el punto de estudio y observar- si el correspondiente incremento de la función también tiende a cero.

Para ello construyase una tabla con las siguientes columnas.

x_1 = valor inicial de x, $f(x_1)$ = valor inicial de f (x)

Δx = incremento de x, $\Delta f(x)$ = incremento de f (x)

x_2 = valor final de x, $f(x_2)$ = valor final de f (x)

x_1	Δx	$x_2 = x_1 + \Delta x$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$
2	1.0	3.0	8	21.00	13.00
2	0.8	2.8	8	17.92	9.92
2	0.6	2.6	8	15.08	7.08
2	0.4	2.4	8	12.48	4.48
2	0.2	2.2	8	10.12	2.12
2	0.1	2.1	8	9.03	1.03
2	0.01	2.01	8	8.1003	0.1003
	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$
	0	2		8	0

TABLA No. 2.

De la tabla anterior se observa que cuando Δx tiende a cero (esto se logra haciendo x_2 cada vez más próximo a x_1) . El incremento correspondiente de f (x) también tiende a cero, y por lo tanto se concluye que la función f es continua en el punto (2, 8).

Ejemplo 41.- Considérese la siguiente función:

$$y = f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) Trazar la gráfica de f.

2) Demuestre que la función es discontinua para x = 1 Aplicando la condición dada por (L).

SOLUCION:

1) A continuación, en la figura 32, se muestra la gráfica de f.

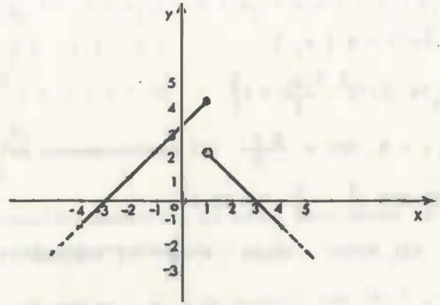


FIG 32

2) Se demostrará ahora que f es discontinua en x = 1.

Para que $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y$ exista y sea igual a cero, es necesario que

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0^+} \Delta y = 0$$

El $\lim_{\Delta x \to 0^-} \Delta y$ puede obtenerse sabiendo que para $x \leq 1$

$y = 3 + x$; de donde:

$$\Delta y = 3 + x + \Delta x - 3 - x$$

$$\Delta y = \Delta x \implies \lim_{\Delta x \to 0^-} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0^-} \Delta x = 0$$

El $\lim_{\Delta x \to 0^+} \Delta y$ puede calcularse recordando que $\Delta y = y_2 - y_1$

Donde para toda $x > 1$; $y = 3 - x$ y que $y_1 = f(x_1) = 4$

entonces:

$$\Delta y = 3 - x - 4 = -x - 1$$

Por otro lado la condición $\Delta x \to 0^+$ implica que $x \to 1^+$

así:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \Delta y = \lim_{x \to 1^+} (-x - 1) = -1 - 1 = -2$$

Finalmente como $\lim_{\Delta x \to 0^-} \Delta y \neq \lim_{\Delta x \to 0^+} \Delta y$, $\lim \Delta y$ no existe.

y se concluye que la función no es continua para $x = 1$.

Se verá ahora que la definición de continuidad dada este inciso, es completamente equivalente a la explicada en el inciso II.6.

A través de la expresión (L) que se repite a continuación, se establece que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad \text{(L)}$$

debe cumplirse para que exista continuidad en una función.

El incremento de la función también se puede expresar como la diferencia entre el valor final de la función y su valor inicial, es decir:

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) \qquad \text{(M)}$$

donde a es el valor inicial de la variable independiente x.

Así sustituyendo (M) en (L):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(a + \Delta x) - f(a) \right] = 0 \qquad \text{....(N)}$$

Según las propiedades de los límites, o sea aplicando el teorema II.6.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[f(a + \Delta x) - f(a) \right] = \lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(a) = 0 \qquad \text{....(O)}$$

Es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(a + x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(a) \qquad \text{....(P)}$$

Además $\Delta x = x - a$, entonces el hecho de que $\Delta x \to 0$, implica que $x \to a$, por lo tanto:

$$\lim_{x \to a} f(a + x - a) = f(a) \qquad \text{....(Q)}$$

ya que $f(a)$ es independiente de Δx.

Entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{....(R)}$$

que es precisamente la condición de continuidad de una funcion en un punto, anteriormente estudiada.

Tal vez el concepto de " continuidad por medio de incrementos " permita tener una idea más clara acerca de la continuidad de una función.

Resulta claro que una función contínua no puede adquirir dos valores enteros sucesivos por medio de " saltos bruscos ", ya que pueden dársele incrementos a la variable independiente en cantidades tan pequeñas como se desee, con lo cual la función variará en valores tan pequeños como se quiera, tendiendo ambos a cero de acuerdo a la condición de continuidad últimamente analizada.

Las figuras 33 y 34 expresan gráficamente la idea mencionada.

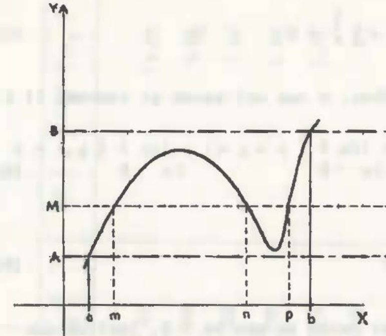


FIG. 33

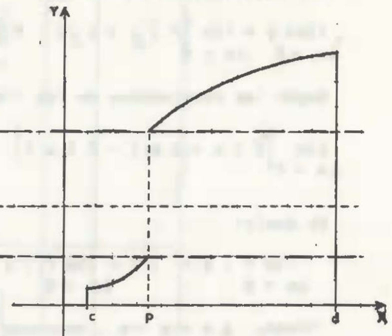


FIG. 34

Nótese como en la figura 33, la función f toma el valor de B a partir del de A, después de adquirir todos los valores comprendidos entre A y B; es decir, si la función f tiene un valor A cuando x = a y un valor B cuando x = b, la función tomará un valor cualquiera M comprendido entre A y B para por lo menos un valor de x comprendido entre a y b.

Por el contrario en la figura 34, se observa como la función y " salta " bruscamente desde A hacia B, cuando x = P.

APENDICE AL CAPITULO II.

A continuación se exponen las demostraciones de algunos teoremas vistos a lo largo del presente capítulo.

Teorema II.3.

Demostración:

Supongase que la función f (x) tiene dos límites diferentes cuando x se aproxima al número a, es decir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \;;\; \lim_{x \to a} f(x) = L_2 \text{ y } L_1 \neq L_2$$

Se demostrará que esta suposición lleva a una contradicción:

Sea $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$ por lo que $\varepsilon > 0$

Por definición deberá existir un δ tal que:

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

$$|f(x) - L_2| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

Entonces se tiene que $\delta_1 \leq \delta_2$ ó $\delta_2 < \delta_1$. Supóngase por conveniencia que $\delta_1 \leq \delta_2$, entonces como:

$$L_1 - L_2 = L_1 - f(x) + f(x) - L_2$$

por lo tanto: $|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)|$

y por un teorema de valores absolutos:

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|$$

Dividiendo entre 2 a la expresión anterior:

$$\frac{|L_1 - L_2|}{2} \leqslant \frac{|L_1 - f(x)|}{2} + \frac{|f(x) - L_2|}{2}$$

Pero: $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ y $|f(x) - L_2| < \varepsilon$, de modo que:

$$\frac{|L_1 - L_2|}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Sin embargo se había definido $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$ y se obtiene $\varepsilon < \varepsilon$, lo cual resulta absurdo, y de esta manera la suposición $L_1 \neq L_2$ no puede sostenerse.

Q.D.

Teorema II.4.

Demostración:

Sea $f(x)$ tal que $f(x) \geqslant 0$, si $|x - a| < \delta$ y sea N un número negativo tal que $|N| = |P|$ donde P es un número positivo, por lo tanto $N = -P$ ó bien $-N = P$.

Así $f(x) - N \geqslant P$ . . . .(A)

ya que $f(x) \geqslant 0$ y $-N > 0$, entonces:

$f(x) - N > 0$ por lo cual $f(x) - N = |f(x) - N|$ . . . .(B)

Si se supone que N es límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a, teniendo en cuenta las expresiones (A) y (B), y haciendo $\varepsilon = P > 0$, se tiene que:

$$|f(x) - N| \geqslant P = \varepsilon \quad \text{cuando } 0 < |x - a| < \delta$$

lo cual contradice la definición de límite, por lo que un número negativo como $N < 0$ no puede ser el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ si $f(x) \geqslant 0$ para $|x - a| < \delta$

Q.D.

Teorema II.5.

Demostración:

La demostración de este teorema es semejante a la anterior y se deja al alumno como ejercicio.

Teorema II.6.

Demostración:

Considérense solamente dos funciones: sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$, tales que: $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$

se demostrará que $\lim_{x \to a} \left[f_1(x) + f_2(x) \right] = L_1 + L_2$

Usando la definición de límite, debemos demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f_1(x) + f_2(x) - L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta$$

Según la definición de límite para $f_1(x)$, tomando $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ en lugar de $\varepsilon > 0$, tenemos:

$$|f_1(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_1$$

y para: $f_2(x)$

$$|f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_2$$

Si se considera un δ menor de δ_1 y δ_2, queda:

$$\left| \left[f_1(x) + f_2(x) \right] - \left[L_1 + L_2 \right] \right| =$$

$$= \left| \left[f_1(x) - L_1 \right] + \left[f_2(x) - L_2 \right] \right| \leqslant |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2|$$

y $|f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta$

lo cual implica que $\lim_{x \to a} \left[f_1(x) + f_2(x) \right] = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x)$

GENERALIZACION DEL TEOREMA II.6. POR INDUCCION MATEMATICA.

Se demostrará que si el Teorema II.6. es verdadero para k funciones, también lo es para k + 1 funciones.

Tomando como hipótesis :

$$\lim_{x \to a}\left[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)\right] = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) + \ldots + \lim_{x \to a} f_k(x)$$

Tomando una función mas se tiene por la Ley Asociativa de la Adición:

$$\left[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)\right] = \left[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)\right] + f_{k+1}(x)$$

Aplicando el teorema demostrado para dos funciones:

$$\lim_{x \to a}\left[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x) + f_{k+1}(x)\right] = \lim_{x \to a}\left[f_1(x) + f_2(x) + \ldots f_k(x)\right] + \lim_{x \to a} f_{k+1}(x)$$

y teniendo en cuenta la hipótesis hecha:

$$\lim_{x \to a}\left[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x) + f_{k+1}(x)\right] = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) + \ldots \lim_{x \to a} f_k(x) + \lim_{x \to a} f_{k+1}(x) \qquad \text{Q.D.}$$

Teorema II.7.

Demostración:

Considerense dos funciones primeramente:

Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tales que $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$

Se demostrará que $\lim_{x \to a}\left[(f_1(x))(f_2(x))\right] = (L_1)(L_2)$

Considerando la identidad:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) - L_1L_2 = f_1(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot L_2 + f_1(x) \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2 =$$
$$= f_1(x)\left[f_2(x) - L_2\right] + L_2\left[f_1(x) - L_1\right]$$

y por la teoría de valores absolutos:

$$|f_1(x) \cdot f_2(x) - L_1 \cdot L_2| \leq |f_1(x)|\,|f_2(x) - L_2| + |L_2|\,|f_1(x) - L_1|$$

por otra parte: $f_1(x) = f_1(x) - L_1 + L_1$, por lo cual:

$$f_1(x) \leq |f_1(x) - L_1| + |L_1|$$

Considerando el límite de $f_1(x)$ y tomando $\varepsilon = 1$, se tiene por lo anterior que:

$$|f_1(x) - L_1| < 1 \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

luego: $|f_1(x)| < 1 + |L_1|$ y haciendo $1 + |L_1| = k$, queda:

$$|f_1(x)| < k \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_1$$

Tomando en cuenta esta última expresión:

$$|f_1(x) \cdot f_2(x) - L_1 - L_2| < k\,|f_2(x) - L_2| + |L_2|\,|f_1(x) - L_1|$$

si $0 < |x - a| < \delta_1$

Tomando $\dfrac{\varepsilon}{2|L_2|}$ en lugar de ε, se tiene que:

$$|f_1(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2|L_2|} \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_2$$

Ahora considerando el límite de f_2 y tomando $\dfrac{\varepsilon}{2k}$ en lugar de ε :

$$|f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2k} \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_3$$

Si se considera un $\delta < \delta_1$, $\delta < \delta_2$, $\delta < \delta_3$, se puede sustituir $|f_2(x) - L_2|$ por $\dfrac{\varepsilon}{2k}$ que es mayor, y a $|f_1(x) - L_2|$ por $\dfrac{\varepsilon}{2|L_2|}$ que es mayor, así:

$$|f_1(x) - f_2(x) - L_1 \cdot L_2| < k\,\frac{\varepsilon}{2k} + |L_2|\,\frac{\varepsilon}{2|L_2|} = \varepsilon \text{ , esto}$$

es:

$$|f_1(x) \cdot f_2(x) - L_1 \cdot L_2| < \varepsilon \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta$$

lo cual indica que $\lim\limits_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = L_1 \cdot L_2$ ó sea:

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x)$$

Al igual que el teorema II.6., éste se puede generalizar aplicando la demostración hasta aquí obtenida y haciendo uso de la Inducción Matemática.

Q.D.

Teorema II.8.

Demostración:

Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ dos funciones tales que:

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1 \text{ y } \lim_{x \to a} f_2(x) = L_2 \neq 0$$

se demostrará que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$

Primero ha de verse que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f_2(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)} = \dfrac{1}{L_2}$

Según la definición de Límite, para la función $f_2(x)$, tomando $\dfrac{|L_2|}{2}$ por ε, se tiene:

$$|f_2(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{2} \quad \text{cuando } 0 < |x - a| < \delta$$

por otra parte: $|L_2| = |f_2(x) - [f_2(x) - L_2]|$; teniendo en cuenta un teorema de valores absolutos:

$$|L_2| \leqslant |f_2(x)| + |f_2(x) - L_2| \text{ y así:}$$

$$L_2 < |f_2(x)| + \frac{|L_2|}{2} \text{ , luego:}$$

$$\frac{|L_2|}{2} < |f_2(x)| \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta$$

Ahora:

$$\left|\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{L_2}\right| = \left|\frac{L_2 - f_2(x)}{L_2 f_2(x)}\right| = \frac{|L_2 - f_2(x)|}{|L_2 f_2(x)|}$$

pero:

$$|L_2 - f_2(x)| = |f_2(x) - L_2| \text{ y } |L_2 f_2(x)| = |L_2|\,|f_2(x)|$$

entonces:

$$\left|\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{L_2}\right| = \frac{|f_2(x) - L_2|}{|L_2|\,|f_2(x)|}$$

y ahora sustituyendo: $|f_2(x)|$ por $\dfrac{|L_2|}{2}$

se tiene: $\left|\dfrac{1}{f_2(x)} - \dfrac{1}{L_2}\right| < \dfrac{|f_2(x) - L_2|}{|L_2|\frac{|L_2|}{2}} = \dfrac{2\,|f_2(x) - L_2|}{|L_2|^2}$

y según la definición de límite, para $f_2(x)$ se puede hacer:

$$|f_2(x) - L_2| < \frac{|L_2|^2}{2} = \varepsilon \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_2$$

Q.D.

Teorema II.9.

Demostración:

Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ dos funciones tales que $f_1(x) = f_2(x)$ para todo valor de x en el entorno de $|x - a| < \delta_1$ además sea $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$

Por la definición de límite, debe tenerse que:

$$|f_1(x) - L_1| < \varepsilon \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_1$$

Tomando un δ menor que δ_1, se puede sustituir $f_1(x)$ por $f_2(x)$ en la última expresión, para así obtener:

$$|f_2(x) - L_1| < \varepsilon \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta$$

lo cual significa que $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_1 = \lim\limits_{x \to a} f_1(x)$

Q.D.

Teorema II.10.

Demostración:

Por la definición de límite para $f_1(x)$, para un $\varepsilon > 0$, se debe tener:

$$|f_1(x) - L| < \varepsilon \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_1$$

lo cual es equivalente a : $-\varepsilon < \left[f_1(x) - L\right] < \varepsilon$

o bien:

$$L - \varepsilon < f_1(x) < L + \varepsilon \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_1$$

Por la definición de límite de $f_2(x)$ se tiene:

$$|f_2(x) - L| < \varepsilon \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_2$$

o bien: $\quad -\varepsilon < (f_2(x) - L) < \varepsilon,$

ó $\quad L - \varepsilon < f_2(x) < L + \varepsilon \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_2$

Tomando un δ tal que $\delta < \delta_1$, $\delta < \delta_2$, se puede escribir:

$$L - \varepsilon < f_1(x) < f(x) < f_2(x) < L + \varepsilon \text{ cuando } 0 < |x - a|$$

por lo cual: $\quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad$, que se puede transformar en:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta$$

y esto significa que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Q.D.

CAPITULO 3

OBJETIVO GENERAL DEL CAPITULO:

Al finalizar el capítulo, el alumno podrá:

Enunciar la definición de Derivada, investigar la derivabilidad de cualquier función real de variable real, así como calcular sus derivadas primera y de orden superior y valuarlas en un punto.

III.1. Escribir la definición de derivada de una función en un punto.

III.2. Identificar las notaciones de Cauchy, Leibniz, Lagrange y Newton para la derivada.

III.3. Dada una función algebraica simple[1], calcular su derivada a partir de la definición (método de los 4 pasos).

III.4. Escribir las definiciones de derivadas laterales.

III.5. A partir de la definición, calcular en un punto las derivadas laterales de funciones algebraicas simples[1] con una o más reglas de correspondencia.

III.6. Enunciar la condición que debe cumplir una función para que sea derivable en un punto.

III.7. Determinar si una función algebraica simple[1] dada por tres reglas de correspondencia, es derivable.

III.8. Demostrar que para que una función sea derivable en un punto, debe ser continua en él.

III.9. Ejemplificar analítica y gráficamente el caso de una función que en un punto sea continua y no derivable.

---

1) Se entiende aquí como función algebraica simple a un polinomio hasta de 3er. grado, o una función racional con numerador de 1º ó 2º grado, o una irracional como la raíz cuadrada de un polinomio de 1º ó 2º grado.

III.10. Demostrar la regla de la cadena para dos funciones.

III.11. Escribir la regla de la cadena para derivar una función compuesta de 3 ó 4 funciones.

III.12. Demostrar la fórmula que relaciona las derivadas de dos funciones inversas entre sí.

III.13. Escribir la fórmula que relaciona las derivadas de dos funciones inversas entre sí.

III.14. Aplicando el método de los 4 pasos, obtener las fórmulas para derivar las funciones:
- Constante, identidad; la suma, el producto y cociente de dos funciones; y una función elevada a un exponente entero y positivo.

III.15. Escribir las fórmulas para derivar las funciones:
- Constante, identidad; la suma el producto y cociente de dos funciones; y una función elevada a un exponente entero y positivo.

III.16. Derivar cualquier función algebraica y valuarla para un elemento dado de su dominio.

III.17. Aplicando el método de los 4 pasos, obtener la fórmula para calcular la derivada de la función seno.

III.18. Partiendo de la derivada de la función seno, obtener las fórmulas para derivar las funciones: coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

III.19. Escribir las fórmulas para derivar las funciones: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

III.20. Derivar cualquier función compuesta donde intervengan una o más funciones circulares directas y valuarla para un elemento dado de su dominio.

III.21. Obtener las fórmulas para derivar las funciones circulares inversas.

III.22. Escribir las fórmulas para derivar las funciones circulares in-- versas.

III.23. Derivar cualquier función compuesta donde intervengan una o más- funciones circulares inversas y valuarla para un elemento dado - de su dominio.

III.24. Aplicando el método de los 4 pasos, obtener la fórmula para deri_ var una función logarítmica de base a.

III.25. Escribir la fórmula para derivar una función logarítmica de base a.

III.26. A partir de la fórmula para derivar una función logarítmica de - base a, obtener la fórmula para derivar una función logarítmica- de base e (función logaritmo natural).

III.27. Escribir la fórmula para derivar una función logaritmo de base e (función logaritmo natural).

III.28. Calcular la derivada de cualquier función logarítmica y valuarla para un elemento dado de su dominio.

III.29. Obtener las fórmulas para derivar funciones exponenciales de ba- se a y de base e.

III.30. Escribir las fórmulas para derivar funciones exponenciales de ba_ se a y de base e.

III.31. Calcular la derivada de cualquier función exponencial de base a- ó de base e y valuarla para un elemento dado de su dominio.

III.32. Calcular la derivada de cualquier función compuesta donde inter- vengan funciones logarítmicas y/o exponenciales.

III.33. Escribir la fórmula para derivar una función cuya base y exponen_ te sean funciones. (función potencia).

III.34. Calcular la derivada de cualquier función potencia.

III.35. Calcular la derivada de una función implícita cualquiera y valuar_ la para un elemento dado de su dominio.

III.36. Obtener la fórmula para derivar una función dada en forma paramé_ trica.

III.37. Escribir la fórmula para derivar una función dada en forma para- métrica.

III.38. Calcular la derivada de cualquier función expresada en forma pa- ramétrica y obtener su valor numérico para un valor dado del pa- rámetro.

III.39. Expresar el concepto de función derivada.

III.40. Dada una función cualquiera, calcular su función derivada y de-- terminar el dominio y rango de ésta.

III.41. Escribir las notaciones para derivadas de orden superior.

III.42. Obtener la fórmula para calcular la segunda derivada de una fun- ción dada en forma paramétrica.

III.43. Dada una función cualquiera (explícita, implícita, paramétrica, . . .) calcular su segunda y tercera derivada y valuarla en un- punto dado.

III.44. Derivar una función aplicando la regla de la cadena.

III.45. Calcular la derivada de una función en términos de la derivada-- de su función inversa.

III.46. Dada una función con dos o tres reglas de correspondencia, estu- diar su continuidad y derivabilidad en todo su dominio, determi- nando en qué punto no es derivable.

L A D E R I V A D A .

Introducción:

El presente capítulo se dedica al estudio del concepto de " Derivada de una función ". Este concepto unido al de función y límite constituyen la parte medular del Cálculo Diferencial.

La derivada es en esencia un límite muy especial y de múltiples aplicaciones en el campo de la Ingeniería. La invención de esta valiosa herramienta matemática se debió a los trabajos de dos notables matemáticos: Leibniz y Newton en los siglos XVII y XVIII.

III.1 DERIVADA DE UNA FUNCION EN UN PUNTO. NOTACIONES.

CALCULO DE LA DERIVADA A PARTIR DE LA DEFINICION.

DERIVADAS LATERALES.

Sea una función $y = f(x)$. Como se sabe, al darle a x un incremento Δx en un punto x_o, le corresponderá a y un incremento

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$$

Al cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ suele llamársele cociente incremental o cociente de los incrementos.

Se define como la derivada de la función $y = f(x)$ con respecto a x en un punto x_o al límite, si existe, del cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a cero.

Es decir, dicha derivada es el límite del cociente del incremento de la variable dependiente entre, el incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero y se puede denotar por $f'(x_o)$

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

Ejemplo 1.-

Dada la función $f(x) = x^2$, su derivada en el punto $x_o = 3$ es:

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(Xo + \Delta x) - f(Xo)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3 + \Delta x)^2 - (3)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 9}{\Delta x} \Longrightarrow f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6 \quad ; \quad f'(3) = 6$$

Con esto se observa que el valor de la derivada de una función, depende del punto en donde se calcule, así, para el ejemplo anterior, si se calcula la derivada para cualquier valor de x se tiene:

Ejemplo 2.

Para $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + (\Delta x)^2) = 2x \; ;$$

$$f'(x) = 2x$$

A continuación se dará un ejemplo en el cual, a partir de un problema físico, se inducirá el concepto de la derivada de una función.

Ejemplo 3.

Supóngase que se deja caer un cuerpo desde una altura de 25 metros, y que se desea conocer la velocidad del móvil cuando ha transcurrido un segundo.

La altura del cuerpo ($y = f(t)$) será según las ecuaciones de caída libre:

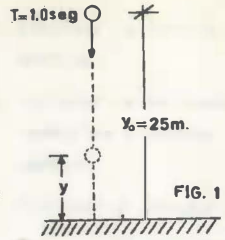


FIG. 1

$$f(t) = yo - \frac{1}{2} gt^2$$

considerando:

$$g = 9.81 \frac{m}{seg^2} \; ; \; yo = 25 \text{ m}$$

queda:

$$f(t) = 25 - 4.905\, t^2$$

El problema consiste en encontrar la velocidad en un instante determinado. Para esto hay que entender primeramente lo que es velocidad media durante un intervalo de tiempo, o sea, desde el instante t hasta $t + \Delta t$, definiéndola como el cociente:

$$Vm = \frac{\text{diferencia de distancias en el tiempo transcurrido}}{\text{tiempo transcurrido.}} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Considerando el instante t = 1.0 seg; la distancia recorrida después de 0.5 seg. es:

$$f(1.5) - f(1) = [25 - 4.905(1.5)^2] - [25 - 4.905(1)^2] = -6.13$$

(el signo menos del resultado significa que el cuerpo está bajando).

Así la velocidad media en el intervalo $[1, 1.5]$ será:

$$Vm = \frac{-6.13}{0.5} = -12.26 \frac{m}{seg}$$

Ahora, considerando el instante t = 1 y después de haber transcurrido Δt segundos, la distancia será:

$$Vm = \frac{-9.81\Delta t - 4.905(\Delta t)^2}{\Delta t} = -9.81 - 4.905\Delta t$$

Tomando valores de Δt cada vez menores, la velocidad media se acerca cada vez más a $-9.81 \frac{m}{seg}$. Por ejemplo si $\Delta t = 0.1$, la velocidad es $-10.30 \frac{m}{seg}$. Sí $\Delta t = 0.01$ será $-9.86 \frac{m}{seg}$.

Lo importante es que se puede obtener la velocidad media tan cerca de

-9.81 como se desee, sin más que tomar a Δt lo suficientemente pequeño. O sea que:

$$\lim_{\Delta t \to 0} Vm = \lim_{\Delta t \to 0} (- 9.81 - 4.905 \Delta t) = -9.81 \frac{m}{seg}$$

y es lógico llamar a este límite, velocidad instantánea en $t = 1.0$ seg.

Con esto se puede concluir que para obtener una velocidad instantánea en cualquier instante t, bastará obtener el límite de la velocidad media cuando $\Delta t \to 0$.

$$v (t) = \lim_{\Delta t \to 0} Vm = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f (t + \Delta t) - f (t)}{\Delta t}$$

La expresión anterior es claramente la definición de derivada aplicada a la función $f (t)$: $f' (t) = v (t)$

Se escogió un problema de velocidad por la familiaridad que el alumno tiene con este tipo de fenómenos, pero existen infinidad de problemas físicos y geométricos en donde el concepto de derivada surge en el solo análisis del problema.

- Notaciones:

Hasta este momento se ha utilizado una notación para la derivada de una función $f (x)$, que es $f' (x)$. Pero existen otras notaciones que indican lo mismo. Así la derivada de la función $y = f (x)$, se puede escribir :

y' ó bien $f' (x)$ que es la notación de Lagrange

$D_x\, y$ ó $D_x f (x)$ que es la notación de Cauchy

$\frac{dy}{dx}$ ó $\frac{d}{dx} f (x)$ que es la notación de Leibniz

$\dot{y}$ ó $\dot{f} (x)$ que es la notación de Newton.

La notación de Lagrange sugiere que al derivar una función $y = f (x)$, en todos los puntos de su dominio, se obtiene otra función $y' = f' (x)$ cuyo dominio está constituído por todos los puntos del dominio de la función $y = f (x)$ para los cuales existe la derivada.

Esta notación es útil también para representar el valor de la derivada $f' (x)$ para un valor de x determinado $x = Xo$, escribiendo $f' (Xo)$, como es el caso del ejemplo (1) donde $f' (3) = 6$ es el valor de la derivada de $f (x) = x^2$ para $Xo = 3$.

La notación de Cauchy permite representar el proceso de obtención de la derivada de una función como un operador (D_x) que aplicado a la función $y = f (x)$ la transforma en la función $y' = f' (x)$:

$$D_x f (x) = f' (x)$$

Respecto a la notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$, aunque tiene la forma de un cociente, por ahora se considerará que dicho cociente representa un solo ente. En el capítulo VI se verá que la derivada en sí es un cociente y se aplicará este hecho a fines específicos.

Esta notación también permite representar el proceso de derivación con el operador $\frac{d}{dx}$, que aplicado a una función, la transforma en su derivada.

$$\frac{d}{dx} f (x) = f' (x)$$

Newton utilizó su notación primordialmente en problemas físicos, donde la variable independiente es el tiempo, por lo que por costumbre, esta notación se usa frecuentemente en mecánica y en general en problemas donde el tiempo es la variable independiente.

En el desarrollo de estos apuntes se emplearán indistintamente las notaciones anteriores según la conveniencia que presenta cada una.

- Cálculo de la Derivada a partir de la Definición.

Como se ha visto, la derivada de una función $y = f(x)$, es:

$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, por lo que para obtener la derivada de una función, es necesario calcular el límite anterior. Una forma de hacerlo es sustituir los elementos necesarios dentro de la expresión de la definición, hacer las simplificaciones adecuadas y calcular el límite, (como en el ejemplo 2).

Otra forma es aplicar el método de los cuatro pasos, que es solamente un procedimiento ordenado y posiblemente más cómodo para obtener la derivada de una función por medio de la definición.

Método de los Cuatro Pasos:

Partiendo de la regla de correspondencia:

$$y = f(x) \tag{1}$$

1er paso: Se incrementa en Δx el valor de la varible independiente, resultando incrementada la variable dependiente y, en Δy.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \tag{2}$$

2do. Paso: Se calcula el incremento de la variable dependiente, restando ordenadamente la expresión (1) de la (2).

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{3}$$

3er Paso: Se calcula el cociente de los incrementos, dividiendo la expresión (3) entre Δx.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

4o. Paso: Se calcula el límite del cociente de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, cuando el incremento Δx tiende a cero.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{5}$$

Si este límite existe entonces dicho límite es la derivada deseada:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = D_x y$$

y se dice que la función $y = f(x)$ es derivable;

Es conveniente observar que los 3 primeros pasos son puramente mecánicos y que se hacen en forma rutinaria. El 4o paso es el que requiere un poco más de ingenio y manipulación algebráica para calcular el límite.

Puesto que $y = f(x)$ es una función continua, se tiene que $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (ver II.9 "Continuidad por incrementos ") con lo que en (5) se tendrá el límite de un cociente donde numerador y denominador tienden a cero, y sin embargo puede existir el límite.

Ejemplo 4.

Calcular la derivada de $f(x) = 3x^2 + 1$

1º $f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 + 1 = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 1$

2º $f(x + \Delta x) - f(x) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 1 - (3x^2 + 1)$

$= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2$

3º $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$

4º $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x) = 6x$

Esto es: $f'(x) = 6x$

Ejemplo.5

Obtener $D_x\left(\frac{1}{x}\right)$

Tómese $f(x) = \frac{1}{x}$

1º $f(x + \Delta x) = \dfrac{1}{x + \Delta x}$

2º $f(x+\Delta x) - f(x) = \dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-(x+\Delta x)}{x^2 + x\Delta x} = \dfrac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x}$

3º $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{-\Delta x}{x^2+x\Delta x}}{\Delta x} = \dfrac{-1}{x^2+x\Delta x}$

4º $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-1}{x^2 + x\Delta x} = \dfrac{-1}{x^2}$

o sea:

$$D_x\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Es conveniente, observar que este procedimiento para el cálculo de la derivada es la reafirmación del concepto de derivada, y no es un método práctico, para derivar. Más adelante se encontrarán fórmulas de derivación generalizadas para cualquier tipo de función, mismas que se deducen a partir de la definición.

Ejemplo 6.-

Calcular $\dfrac{d}{dx}(+\sqrt{x-2})$

sea $y = +\sqrt{x-2}$

1º $y + \Delta y = +\sqrt{x+\Delta x - 2}$

2º $\Delta y = +\sqrt{x+\Delta x-2} - \sqrt{x-2}$

3º $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\dfrac{\sqrt{x+\Delta x-2} - \sqrt{x-2}}{\Delta x}$

4º $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+\Delta x-2} - \sqrt{x-2}}{\Delta x}$

Para calcular este límite conviene racionalizar el numerador del cociente incremental. Esto se logra multiplicando y dividiendo por el conjugado -- de dicho numerador.

$$\frac{\sqrt{x+\Delta x-2} - \sqrt{x-2}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x+\Delta x-2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+\Delta x-2} + \sqrt{x-2})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-2} + \sqrt{x-2})}$$

$$= \frac{x+\Delta x-2-(x-2)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-2} + \sqrt{x-2})} =$$

$$= \frac{\cancel{\Delta x}}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-2} + \sqrt{x-2})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x-2} + \sqrt{x-2}}$$

Entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x-2} + \sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

Esto es:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x-2} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

Ejemplo.7

Aplicando la definición de derivada (método de los cuatro pasos) hallar la derivada de la función $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$

1º $y + \Delta y = \dfrac{2(x+\Delta x)+3}{x+\Delta x - 1}$

2º $\Delta y = \dfrac{2x+2\Delta x+3}{x+\Delta x-1} - \dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{(2x+2\Delta x+3)(x-1) - (2x+3)(x+\Delta x-1)}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$

$= \dfrac{2x^2 - 2x + 2x\Delta x - 2\Delta x + 3x - 3 - 2x^2 - 2x\Delta x + 2x - 3x - 3\Delta x + 3}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$

$= \dfrac{-5\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$

3º $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-5\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x-1)(x-1)} = \dfrac{-5}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$

4º $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-5}{(x+\Delta x-1)(x-1)} = \dfrac{-5}{(x-1)(x-1)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-5}{(x-1)^2}$$

- Derivadas laterales.

De la definición de derivada y por los conceptos de límites laterales estudiados en el inciso II.5, se infiere que la existencia de la derivada, siendo ésta un límite, está relacionada con la existencia de los límites laterales y con la igualdad entre ellos.

$$\text{Si } D_x f(Xo) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(Xo + \Delta x) - f(Xo)}{\Delta x}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(Xo + \Delta x) - f(Xo)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(Xo + \Delta x) - f(Xo)}{\Delta x}$$

Por su estructura, es lógico llamar a estos límites laterales: derivada lateral por la izquierda y derivada lateral por la derecha, respectivamente. Se denotan en la forma siguiente:

Derivada lateral por la izquierda:

$$f'_-(Xo) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(Xo + \Delta x) - f(Xo)}{\Delta x}$$

Derivada lateral por la derecha:

$$f'_+(Xo) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(Xo + \Delta x) - f(Xo)}{\Delta x}$$

Con lo anterior si $f'(Xo) \exists \Longrightarrow f'_-(Xo) = f'_+(Xo) = f'(Xo)$

<u>Ejemplo. 8</u>

Calcular las derivadas laterales de la función $f(x) = 2x + 1$; para $Xo = 3$.

Para calcular la derivada por la izquierda $f'_-(3)$ se requiere que $\Delta x \to 0^-$, lo que implica que $\Delta x < 0$, entonces:

$$f'_-(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f'_-(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{2(3 + \Delta x) + 1 - 2(3) - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{6 + 2\Delta x + 1 - 6 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

$f'_-(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} 2 = 2$, por lo tanto, $f'_-(3) = 2$

Para calcular la derivada por la derecha $f'_+(3)$ se requiere que $\Delta x \to 0^+$ o sea que $\Delta x > 0$.

$$f'_+(3) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f'_+(3) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{6 + 2\Delta x + 1 - 6 - 1}{\Delta x} =$$

$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} 2 = 2$, por lo tanto, $f'_+(3) = 2$

Evidentemente: $f'_-(3) = f'_+(3) \Rightarrow f'(3) = 2$

<u>Ejemplo 9.-</u>

Calcular las derivadas laterales de la función $f(x) = x^{2/3}$, para $x_0 = 0$.

Haciendo $x = x_0 + \Delta x$, si $\Delta x \to 0$, entonces $x \to x_0$

Una expresión equivalente a $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

es $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; la cual se puede aplicar en este caso, así:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} ; \quad f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} ;$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Por lo tanto, $f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^{2/3} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \to -\infty$

y $f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{2/3} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \longrightarrow +\infty$

Evidentemente en este caso no existe $f'(x_0)$ para $x_0 = 0$.

La función $f(x) = x^{2/3}$ no es derivable para $x_o = 0$

Ejemplo.10

Calcular los valores de las derivadas laterales de $f(x)$, para $x_o = 0$

Haciéndolo para A = 1, A = 0:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ Ax & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Para calcular la derivada por la izquierda en $x_o = 0$, $\Delta x \to 0^-$ por tanto $\Delta x < 0$, así que $x < x_o = 0$; y la regla de correspondencia que define a la función es $f(x) = x^2$; por lo que:

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(0 + \Delta x)^2 - (0)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} (0 + \Delta x) = 0 \implies f'_-(Xo) = f'_-(0) = 0$$

Siguiendo un razonamiento similar tendremos que, la regla de correspondencia a derivar para obtener $f'_+(0)$, es $f(x) = Ax$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{A(0 + \Delta x) - A(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{A\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} A = A$$

$$\text{Para } A = 1 \left\{ \begin{array}{l} f'_-(0) = 0 \\ f'_+(0) = 1 \end{array} \right. \implies f'_-(0) \neq f'_+(0) \text{ por lo tanto } f'(0) \nexists$$

$$\text{Para } A = 0 \left\{ \begin{array}{l} f'_-(0) = 0 \\ f'_+(0) = 0 \end{array} \right\} \implies f'_-(0) = f'_+(0) \text{ por lo tanto } f'(0) = 0$$

En este ejemplo la función no es derivable para $x = 0$ si $A = 1$, y sí lo es cuando $A = 0$.

- Derivabilidad de una función en un intervalo

Se sabe que una función $y = f(x)$ es derivable para un valor x_o de la variable independiente, si existe la derivada:

$$f'(Xo) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(Xo + \Delta x) - f(Xo)}{\Delta x}$$

y que la existencia de ésta implica que $f'_-(Xo) = f'_+(Xo)$.

Obsérvese que para que la función sea derivable en Xo debe estar definida en un entorno de Xo. Si no estuviera definida por ejemplo a la izquierda de Xo, no existiría $f'_-(Xo)$.

Si la derivada $f'(x)$ existe en todos los puntos de un intervalo abierto (a, b) se dice que la función $y = f(x)$ es derivable en el intervalo (a, b).

Cuando la derivada $f'(x)$ no existe en uno o más puntos del intervalo (a, b), la función $y = f(x)$ no es derivable en uno o más puntos de dicho intervalo.

Si el dominio de una función continua $y = f(x)$ es el intervalo cerrado $[a, b]$ no puede hablarse de la derivabilidad de la función en el intervalo $[a, b]$ dado que: $f'_-(a) \nexists \implies f'(a) \nexists$ y que $f'_+(b) \nexists \implies f'(b) \nexists$

Ejemplo 11.

Dada la función $f(x) = 3x^2 + 1$ investigar si es derivable en el intervalo $(-2, 5)$.

Según el ejemplo 4, la derivada de esta función es $f'(x) = 6x$, y esta derivada sí existe para todo valor de x, luego la función $f(x) = 3x^2 + 1$ sí es derivable en el intervalo $(-2, 5)$.

Ejemplo.12

Investigar si la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es derivable en el intervalo $(-1; 3)$.

Tomando en cuenta que la derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ es $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, según se vió en el ejemplo 5, puede observarse que $f'(Xo)$ no existe para $Xo = 0$ y como $Xo = 0$ pertenece al intervalo $(-1, 3)$ se concluye que la función dada no es derivable en todo el intervalo $(-1, 3)$.

Ejemplo. 13

Dada la función $f(x) = +\sqrt{x - 2}$, decir si es derivable en el intervalo $(1, 4)$

La derivada de esta función se obtuvo en el ejemplo 6 y es $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$. Esta derivada no existe si $x \leq 2$, luego la función $f(x) = +\sqrt{x-2}$ no es derivable en todo el intervalo (1, 4).

III.2 DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD.

El hecho de que una función es continua en un punto implica que la función cumple con ciertas condiciones, ese punto y la afirmación de que dicha función es derivable en el mismo punto, significa que la función tiene ciertas propiedades en el punto, por lo tanto, es lógico cuestionar si hay alguna conexión entre el concepto de continuidad y el de derivabilidad de una función en un punto.

Una respuesta a esta cuestión está incluida en el siguiente:

Teorema. III. 1

Hipótesis : La función $y = f(x)$ es derivable en el punto $x = x_1$.

Tésis: La función $y = f(x)$ es continua en $x = x_1$.

Demostración:

Como la función es derivable en el punto $x = x_1$, existe

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Ahora bien, el incremento de la variable dependiente Δy que corresponde a Δx en ese punto es:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro de esta igualdad por Δx queda:

$$\Delta y = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \Delta x.$$

Tomando límites cuando Δx tiende a cero queda:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_1)(0) = 0$$

Esto es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Lo cual significa según lo tratado en II.9 que la función $y = f(x)$ es continua en el punto $x = x_1$, quedando así demostrado el teorema.

Con este teorema se ve que toda función derivable en un punto, es continua en él, pero la afirmación inversa no es verdadera, no toda función continua en un punto es derivable en el mismo.

Esto se evidencia en los dos siguientes ejemplos.

Ejemplo. 14

Hacer ver que la función $y = |x - 2|$ es contínua para $x_1 = 2$ pero no es derivable en este punto.

En efecto, para hacer ver que la función $y = |x - 2|$ es contínua para $x_1 = 2$ basta demostrar que en ese punto se cumple:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Se tiene para cualquier valor de x que:

$$\Delta y = |x + \Delta x - 2| - |x - 2|$$

y para $x_1 = 2$: $\Delta y = |2 + \Delta x - 2| - |2 - 2| = |\Delta x|$

Luego: $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0$ Q.D.

Para demostrar que la función $y = |x - 2|$ no es derivable para $x_1 = 2$ considérese el hecho de que dicha función puede escribirse:

$$y = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x \le 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y calcúlense las derivadas laterales de la función en el punto dado.

La condición $\Delta x \to 0^-$ implica $\Delta x < 0$ y $|\Delta x| = -\Delta x$

por lo cual :

$$f'_-(2) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} (-1) = -1;\quad f'_-(2) = -1$$

Ahora $\Delta x \to 0^+$ implica $\Delta x > 0$ y $|\Delta x| = \Delta x$

Luego: $f'_+(2) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} (1) = 1 \qquad f'_+(2) = 1$$

Como las derivadas laterales son distintas: $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, la función $y = |x-2|$ no es derivable para $x_1 = 2$.

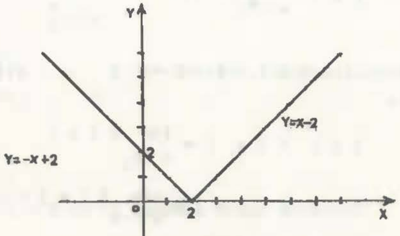


FIG 2

Se confirma con el ejemplo anterior que no toda función continua en un punto es derivable en el mismo, y se insiste un poco en ésto con el siguiente:

Ejemplo. 15

Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = x^{2/3}$ en el punto $x_1 = 0$.

La continuidad en $x_1 = 0$ puede estudiarse investigando si se cumple la condición de continuidad:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

para lo cual se procede siguiendo los pasos:

1º $f(0) = 0^{2/3} = 0 \therefore \exists$

2º $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^{2/3} = \lim_{x \to 0} (\sqrt[3]{x})^2 = \left(\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x}\right)^2 = 0$

3º $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

Luego la función es continua para $x_1 = 0$.

La derivabilidad de la función se estudia ahora calculando primeramente la derivada para cualquier valor de x aplicando la definición.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{2/3} - x^{2/3}}{\Delta x} \qquad \text{(A)}$$

Racionalizando el numerador para poder calcular el límite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(x+\Delta x)^{2/3} - x^{2/3}\right]\left[(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}\right]}{\Delta x \left[(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}\right]}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x \left[(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}\right]} \qquad \text{(B)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x \left[(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}\right]}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x \left[(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}\right]}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{(x+\Delta x)^{4/3} + (x+\Delta x)^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}}$$

Obteniendo el límite anterior

$$f'(x) = \frac{2x}{x^{4/3} + x^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}}; \longrightarrow f'(x) = \frac{2x}{3x^{4/3}}$$

por lo tanto:

$$f'(x) = \frac{2}{3\,x^{1/3}} \qquad (c)$$

Como se puede apreciar en el resultado anterior, $f'(x)$ no existe para $x_1 = 0$, por lo que $f(x) = x^{2/3}$ no es derivable para dicho valor, no obstante que si es continua.

La condición de continuidad es una condición necesaria para la existencia de la derivada, pero no es condición suficiente.

Concluyendo, toda función derivable es continua. Pero, el hecho de que una función sea continua es solo una condición necesaria, pero no suficiente para que sea derivable. La otra condición necesaria para poder asegurar que la derivada existe es que las derivadas laterales existan y sean iguales entre sí. (Ver derivadas Laterales).

Así una función $y = f(x)$, es derivable en x_1, sí y sólo sí las dos condiciones siguientes se cumplen:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \ y = f(x) \text{ es continua en } x_1 \\ \\ 2)\ \ f'_-(x_1) = f'_+(x_1) \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_1)\ \exists$$

y con cualquiera de ellas que no se verifique entonces $f'(x_1)\ \nexists$

Ejemplo. 16

Trazar la gráfica de la función dada, determinar si es continua en $x_1 = 4$, encontrar $f'_-(x_1)$ y $f'_+(x_1)$, si existen, y determinar si la función es derivable en $x_1 = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \leq -4 \\ -x - 6 & \text{si} \quad x > -4 \end{cases}$$

La gráfica se ve en la figura 3

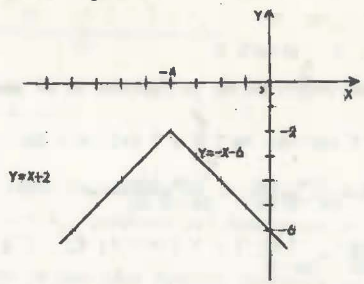


FIG 3

Primeramente se estudiará la continuidad de la función para $x_1 = -4$, para lo cual habrá que probar el cumplimiento de:

(a) Existencia de $f(x_1)$:

$$f(-4) = -4 + 2 = -2$$

(b) $\lim\limits_{x \to x_1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_1^+} f(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_1} f(x)\ \exists$

$$\lim_{x \to -4^-} (x + 2) = -4 + 2 = -2 \qquad ; \lim_{x \to -4^+} (-x - 6) = -(-4) - 6 = -2$$

(c) $f(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} f(x)$

$$f(-4) = \lim_{x \to -4} f(x) = -2$$

De lo anterior se concluye que las 3 condiciones de continuidad se cumplen para $x_1 = -4$, y $y = f(x)$ es continua en dicho valor de x.

Se calculan ahora las derivadas $f'_-(x_1)$ y $f'_+(x_1)$, si existen:

$$f'_-(-4) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(-4 + \Delta x) - f(-4)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(-4 + \Delta x + 2) - (-4 + 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-2 + \Delta x + 4 - 2}{\Delta x}$$

$$f'_-\ (-4) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x}{\Delta x} \quad ; \text{ para } \Delta x \neq 0, \text{ se tiene } \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$f'_-\ (-4) = \lim_{\Delta x \to 0^-} 1 = 1$$

Ahora:

$$f'_+\ (-4) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-4 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'_+\ (-4) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-(-4 + \Delta x) - 6 - [-(-4) - 6]}{\Delta x}$$

$$f'_+\ (-4) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{4 - \Delta x - 6 - 4 + 6}{\Delta x}$$

$$f'_+\ (-4) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \left(-\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0^+} (-1)$$

$$f'_+\ (-4) = -1$$

Conclusión: Puesto que $f'_-\ (-4) \neq f'_+\ (-4)$, la función dada no es derivable para $x_1 = -4$

Ejemplo. 17

Investigar la derivabilidad en $x_1 = 0$ de la función valor absoluto $f(x) = |x|$

Esta función puede escribirse:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En los intervalos $(-\infty, 0)$, y $(0, +\infty)$ la función es derivable por ser polinómica.

Para investigar la derivabilidad para $x_1 = 0$, primero se confirma que la función es continua para $x = 0$.

$f(0) = 0.$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \implies$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

Por lo cual se concluye que la función sí es contínua para $x_1 = 0$.

Ahora para investigar la derivabilidad en $x_1 = 0$ hay que proceder empleando derivadas laterales.

Se deja que el alumno calcule aplicando la definición de derivada:

$D_x(x) = 1$ y $D_x(-x) = -1$

si $x < 0, f'(x) = D_x(-x) = -1 \implies f'_-\ (0) = -1$

si $x > 0, f'(x) = D_x(x) = 1 \implies f'_+\ (0) = 1$

Como:

$f'_-\ (0) \neq f'_+\ (0) \implies f'(0)$

La función $f(x) = |x|$ no es derivable para $x = 0$

El cálculo de la derivada de una función para cualquier valor de su dominio, por el método de los cuatro pasos no es práctico, así que después de haber obtenido las fórmulas para derivar diversas funciones (III.4, III.5) se presentan ejemplos del estudio de la derivabilidad de una función aplicando dichas fórmulas.

III.3 DERIVADA DE LA FUNCION DE FUNCION. DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA.

Si se tienen las funciones $y = f(u)$ y $u = g(x)$, se sabe que $y = f(g(x))$ es una función de función, o bien la composición de las funciones dadas, que está definida para todo valor de x del dominio D_g de $u = g(x)$ que hace que u pertenezca al dominio de D_f de $y = f(u)$

Es necesario saber calcular la derivada de y con respecto a x sin sustituir a u por $g(x)$ en $y = f(u)$, para lo cual se presenta el siguiente:

Teorema III.2

Derivada de una función de función.

Hipótesis : Sean las funciones $y = f(u)$, $u = g(x)$ derivables tales que $y = f(g(x))$ $\forall x \in D_g$ que hace que $g(x) \in D_f$.

Tésis : La derivada de y con respecto a x está dada por:
$D_x y = D_u y \, D_x u$

Demostración: A cada incremento Δx de la variable independiente x corresponde un incremento Δu de la variable intermedia u y un Δy de la variable dependiente y.

Multiplicando y dividiendo por Δu al cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ queda la identidad:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} \; ; \; \Delta u \neq 0 \qquad \text{(A)}$$

Como $u = g(x)$ es derivable, será también continua por lo cual si $\Delta x \to 0$, $\Delta u \to 0$ también.

Entonces tomando límites cuando $\Delta x \to 0$ en la expresión (A) queda:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \text{(B)}$$

y teniendo en cuenta la definición de derivada, la ecuación (B) equivale a:

$$D_x y = D_u y \, D_x u$$

Que usando la notación de Leibniz puede escribirse:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \qquad \text{Q.D.}$$

La tésis de este teorema se conoce también como regla de la cadena:

Ejemplo 18.

Hallar $D_x y$ para $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

Aquí se puede hacer:

$y = \frac{1}{u}$; $u = \sqrt{x-2}$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los ejemplos 5 y 6 se pueden escribir las derivadas de estas funciones así :

$$D_u y = -\frac{1}{u^2} \; ; \qquad D_x u = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

y aplicando la regla de la cadena: $D_x y = D_u y \, D_x u$ resulta:

$$D_x y = -\frac{1}{u^2} \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = -\frac{1}{2u^2\sqrt{x-2}}$$

sustituyendo $u = \sqrt{x-2}$:

$$D_x y = -\frac{1}{2(x-2)\sqrt{x-2}} = -\frac{1}{2(x-2)^{3/2}}$$

El proceso de composición de funciones puede repetirse cualquier número de veces, obteniéndose siempre nuevas funciones, por ejemplo, si se tiene:

$f(x) = x^3 + 7$, $g(x) = \text{sen } x$, $h(x) = x^5$, $x \in \mathbb{R}$

La función compuesta $\phi(x) = h\left[(g(f(x))\right]$ será:

$$\phi(x) = h\ g\left[(f(x))\right] = \operatorname{sen}^5(x^3+7),$$

Aplicando 2 veces la regla de la cadena, se obtiene la regla de la cadena para las funciones compuestas de tres funciones, a saber:

Generalización de la regla de la cadena

Sea $\theta(x) = h\left[g\ (f(x))\right]$. Si se cumple que:

a). f es derivable en x

b). g es derivable en f (x)

c). h es derivable en g (f (x))

Entonces la función $\phi(x)$ es derivable en x y la derivada es:

$\phi'(x) = h'\left[g\ (f(x))\right]\ g'\ (f(x))\ f'(x)$; o con la notación de Leibniz, si $y = h(u)$; $u = g(v)$, $v = f(x)$ quedará

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\ \frac{du}{dv}\ \frac{dv}{dx}$$

o bien con la notación de Cauchy.

$$D_x y = D_u y\ D_v u \,.\, D_x v$$

Ejemplo 19

Hallar $\frac{dy}{dx}$ siendo $y = +\sqrt{(3x^2+1)^2 - 2}$

En este caso se puede considerar que:

$$y = \sqrt{u-2}\ ;\quad u = v^2\ ;\quad v = 3x^2+1$$

Las derivadas de estas funciones se calculan en los ejemplos 6, 2 y 4 respectivamente; pudiendo escribirse entonces:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u-2}}\ ;\quad \frac{du}{dv} = 2v\ ;\quad \frac{dv}{dx} = 6x$$

y como $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\ \frac{du}{dv}\ \frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u-2}}\ (2v)\ 6x = \frac{6x\ v}{\sqrt{u-2}}$$

Sustituyendo a u y v en términos de x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x\,(3x^2+1)}{\sqrt{(3x^2+1)^2 - 2}}$$

Que es la derivada pedida.

A continuación se trata la derivada de la función inversa.

Si se trata de calcular la derivada de la función inversa de una función dada, es posible obtenerla a partir de la derivada de la función dada, sin tener que determinar a la inversa.

Esto es; si $y = f(x)$ es una función biunívoca derivable, la derivada de su inversa puede calcularse en términos de la derivada $D_x y = f'(x)$, sin tener que despejar x de la función dada para tener primeramente la inversa $x = f^{-1}(y)$

Para esto se tiene el siguiente teorema.

Teorema III.3

Hipótesis: $y = f(x)$ es una función biunívoca, derivable y $f'(x) \neq 0$, siendo su función inversa $x = f^{-1}(y)$.

Tésis: La derivada de la inversa es:

$$D_y x = \frac{1}{D_x y}$$

Demostración: Efectivamente, para todo $\Delta x \neq 0$ y $\Delta y \neq 0$.

Se tiene que:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Como $y = f(x)$ es derivable, $\Delta x \to 0 \Longleftrightarrow \Delta y \to 0$

Tomando límites cuando $\Delta y \to 0$:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

De aquí, por la definición de derivada se tiene:

$$D_y x = \frac{1}{D_x y} \quad \text{o bien} \quad D_y f^{-1}(y) = \frac{1}{D_x f(x)}$$

Ejemplo.20

Dada la funcion $y = f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ (A)

Investigar si cumple con la hipótesis del teorema anterior y en caso afirmativo, hallar la derivada de su función inversa aplicando dicho teorema.

Verificar el resultado obteniendo la función inversa primeramente.

Al calcular la derivada de $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

en el ejemplo 7 se obtuvo:

$$f'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2} = D_x y \qquad (B)$$

Se ve que $f'(x)$ existe para todo $x \neq 1$, por lo que la función $y = f(x)$ es derivable para toda $x \neq 1$.

Además $f'(x) < 0$ si $x \neq 1$ luego $y = f(x)$ es biunívoca si $x \neq 1$

Se cumplen las condiciones de la hipótesis del teorema III.3 por lo que la derivada de la inversa según (B).

$$D_y x = \frac{1}{D_x y} = \frac{1}{\frac{-5}{(x-1)^2}} = \frac{(x-1)^2}{-5} \qquad (C)$$

Ahora bien si se despeja x de (A)

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y-2}$$

Calculando la derivada de esta función por el método de los cuatro pasos se obtiene:

$$D_y x = \frac{-5}{(y-2)^2} \qquad (D)$$

Si en (C) se sustituye x en términos de y queda:

$$D_y x = \frac{\left(\frac{y+3}{y-2} - 1\right)^2}{-5} = \frac{\frac{(y+3-y+2)^2}{(y-2)^2}}{-5} = \frac{5^2}{-5(y-2)^2} =$$

$$D_x y = \frac{-5}{(y-2)^2} \qquad (E)$$

Comparando (D) con (E) se verifica el resultado.

III.4 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ALGEBRAICAS.

Dado que el proceso de derivación por el método de los cuatro pasos puede resultar muy laborioso si no se trata de funciones tan sencillas como las que se han derivado hasta ahora, se establecerán algunos teoremas sobre derivación de funciones típicas que generan fórmulas cuya aplicación permite el cálculo de derivadas, con relativa facilidad.

A continuación cuando se aplica el método de los cuatro pasos se indica cada uno de estos con número romano a la izquierda.

Teorema III.4

Derivada de la función constante.

Hipótesis: sea la función constante $f(x) = C$

Tésis: la derivada de la función constante vale cero.

$D_x C = 0$ (1)

Demostración: Derivando dicha función por el método de los 4 pasos.

I). $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C$

II). $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$

III). $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$

IV). $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (0) = 0$

Esto es:

$D_x C = 0$ QD.

Teorema III.5

Derivada de la función identidad.

Hipótesis: $f(x)$ es la función identidad $y = x$.

Tésis: La derivada de la función identidad es igual a la unidad:

$D_x X = 1$ (2)

Demostración: Aplicando el método de los cuatro pasos.

I). $y + \Delta y = x + \Delta x$

II). $\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x$

III). $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

IV). $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (1) = 1$, luego

$D_x X = 1$ o bien $\dfrac{dx}{dx} = 1$ QD.

En lo que sigue, $u = f(x)$, $v = g(x)$ y $w = h(x)$ son funciones derivables y sus derivadas son:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = f'(x) = D_x u$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = g'(x) = D_x v$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta x} = h'(x) = D_x w$

Además la intersección de sus dominios $D_{f'}$, $D_{g'}$, $D_{h'}$, no es el conjunto vacío.

Teorema III.6

Derivada de una suma de funciones.

Hipótesis: Si $y = u + v - w$

Tésis : $D_x(u + v - w) = D_x u + D_x v - D_x w$ (3)

Demostración . Cuando a la variable independiente x se le da un incremento Δx a las funciones u, v y w les corresponden los incrementos Δu, Δv y Δw, respectivamente, así que al aplicar el método de los cuatro pasos a la función dada se tiene:

I). $y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (w + \Delta w)$

II). $\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w - u - v + w$

$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$

III). $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x} - \dfrac{\Delta w}{\Delta x}$

IV). $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta x}$

Esto es:

$D_x(u + v - w) = D_x u + D_x v - D_x w$ o bien

$$D_x\left[f(x)+g(x)-h(x)\right]=D_x f(x)+D_x g(x)-D_x h(x)$$
Q.D.

Esta fórmula se generaliza siguiendo el mismo criterio para un número fijo cualquiera de funciones derivables, luego se puede concluir que: la derivada de la suma algebraica de un número fijo de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.

Teorema III.7

Derivada del producto de dos funciones.

Hipótesis: Si $y = uv$

Tésis: $D_x(uv) = u D_x v + v D_x u$ (4)

Demostración : Se hace aplicando el método de los cuatro pasos.

I). $y+\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$

II). $\Delta y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v - uv$

$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$

III). $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

IV). $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} u \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} v \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Pero: $\lim_{\Delta x\to 0} u = u$, $\lim_{\Delta x\to 0} v = v$ y $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0$, dado que $u = f(x)$ es derivable y por lo tanto contínua, entonces:

$D_x y = u D_x v + v D_x u + (0) D_x v \implies$

$D_x(uv) = u D_x v + v D_x u$ o bien

$$D_x\left[f(x)\,g(x)\right] = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$
Q.D.

La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada del segundo más el producto de la segunda por la derivada de la primera.

Esta fórmula puede aplicarse más de una vez si se trata del producto de n funciones derivables, haciendo uso de la ley asociativa de la multiplicación.

Corolario. La derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

En efecto, al aplicar (4) y (1) a la función $y = C\,v$ queda:

$D_x(Cv) = C D_x v + v D_x C = C D_x v + v(0)$

$D_x(Cv) = C D_x v$ (4a)

Teorema III.8

Derivada del cociente de dos funciones:

Hipótesis: Se tiene $y = \frac{u}{v}$, $v \neq 0$

Tésis: $$D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v D_x u - u D_x v}{v^2}$$ (5)

Demostración: Se deriva la función $y = \frac{u}{v}$ aplicando la definición de derivada:

I).- $$y + \Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$$

II). $$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u+\Delta u) - u(v+\Delta v)}{(v+\Delta v)v}$$

$$= \frac{vu + v\Delta u - uv - u\Delta v}{(v+\Delta v)v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v+\Delta v)v}$$

III). $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x\,(v+\Delta v)v} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}$$

IV). $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v) \lim\limits_{\Delta x \to 0} v}$$

Sabiendo que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v = v$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u = u$ y que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$

porque v es derivable y continua, resulta que:

$$D_x y = \frac{v D_x u - u D_x v}{v \cdot v} \Longrightarrow$$

$$D_x \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v D_x u - u D_x v}{v^2}, \text{ o lo que es lo mismo:}$$

$$D_x \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad \text{QD.}$$

La derivada del cociente de dos funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador y todo dividido entre el cuadrado del denominador.

Corolario. La derivada del cociente de una constante entre una función es igual al producto del simétrico de la constante por la derivada de la función dividida entre el cuadrado de la función.

Efectivamente aplicando (5) y (1) a la función $y = \frac{C}{v}$ resulta:

$$D_x \left(\frac{C}{v}\right) = \frac{v D_x C - C D_x v}{C\ D\ v^2} = \frac{v(0) - C D_x v}{v^2} \Longrightarrow$$

$$D_x \left(\frac{C}{v}\right) = - \frac{x^{v}}{v^2} \qquad (5a)$$

Obsérvese que la derivada del cociente de una función u entre una constante $C \neq 0$ puede calcularse aplicando (4):

$$D_x \left(\frac{u}{C}\right) = D_x \left(\frac{1}{C} u\right) = \frac{D_x u}{C}$$

Teorema III.9

Derivada de la potencia de exponente natural de una función.

Hipótesis: Sea $y = u^n$

Tésis: $D_x u^n = n u^{n-1} D_x u$ (6)

Demostración: Considerando primero la función $z = x^n$ y derivandola por el método de los cuatro pasos:

I). $z + \Delta z = (x + \Delta x)^n$

II). $\Delta z = (x + \Delta x)^n - x^n$

Aplicando el binomio de Newton y simplificando.

$$\Delta z = x^n + nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta z = n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + n x (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n$$

III). $$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta x \left[n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x + \ldots + n x (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} \right]}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x + \ldots + n x (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}$$

IV). $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x + \ldots n x (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} \right]$$

$$= nx^{n-1} + 0 + \ldots + 0 + 0$$

Esto es:

$$D_x x^n = n x^{n-1} \qquad (6a)$$

De aquí que $D_u u^n = n u^{n-1}$

Ahora si $y = u^n$, como $u = u(x)$; $D_x y = D_u y\ D_x u$

$$D_x u^n = n u^{n-1} D_x u \qquad \text{QD.}$$

La derivada de la potencia de una función elevada a un exponente natural, es igual al producto del exponente por la función elevada al exponente - disminuido en la unidad y por la derivada de la función.

Como se demostrará en el tema III.5.3, la fórmula (6) es verdadera para todo valor real de n, razón por la cual desde ahora se aplicará para cualquier valor real de n.

Corolario. La derivada de la raíz cuadrada de una función es igual al cociente de la derivada del subradical entre el doble de la misma raíz.

Esto se verifica fácilmente al aplicar (6) a la función $y = \sqrt{u} = u^{1/2}$

$$D_x u^{1/2} = \frac{1}{2} u^{1/2 - 1} \quad D_x u = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \quad D_x u = \frac{D_x u}{2 u^{1/2}}$$

Esto es:

$$D_x \sqrt{u} = \frac{D_x u}{2 \sqrt{u}} \qquad (6b)$$

Resumiendo las fórmulas obtenidas:

$$D_x C = 0 \qquad (1)$$

$$D_x X = 1 \qquad (2)$$

$$D_x (u + v - w) = D_x u + D_x v - D_x w \qquad (3)$$

$$D_x (u v) = u D_x v + v D_x u \qquad (4)$$

$$D_x (Cv) = C D_x v \qquad (4a)$$

$$D_x \frac{u}{v} = \frac{v D_x u - u D_x v}{v^2} \qquad (5)$$

$$D_x \frac{C}{v} = - \frac{C D_x v}{v^2} \qquad (5a)$$

$$D_x u^n = n u^{n-1} D_x u \qquad (6)$$

$$D_x X^n = n x^{n-1} \qquad (6a)$$

$$D_x \sqrt{u} = \frac{D_x u}{2 \sqrt{u}} \qquad (6b)$$

Ejemplo 21.

Calcular las derivadas de las siguientes funciones.

a). $y = 2 + x^3 - 5X^4$

Aplicando (3), (1), (6), (4a), y (2)

$$D_x y = D_x (2) + D_x X^3 - D_x (5 x^4) = 0 + 3X^2 - 5 (4 X^3) = 3X^2 - 20 X^3$$

b). $f (x) = (x^2 + 1)^{3/2}$

Empleando (6), (3), (1) y (2):

$$f' (x) = \frac{3}{2} (x^2 + 1)^{1/2} D_x (x^2 + 1) = \frac{3}{2} (x^2 + 1)^{1/2} (2 x + 0) =$$
$$= 3x (x^2 + 1)^{1/2}$$

c). $g (x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$

Usando (5), (3), (6), (1) y (2):

$$D_x g (x) = \frac{(x^2 + 3) D_x (x^2 - 3) - (x^2 - 3) D_x (x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^2} =$$
$$= \frac{(x^2 + 3) 2x - (x^2 - 3) 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2x^3 + 6x - 2x^3 + 6x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{12x}{(x^2 + 3}$$

d). $r = \dfrac{\sqrt{a^2 + \theta^2}}{\theta}$; a es constante.

Se aplican (5), (6b), (3), (6), (1) y (2):

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\theta\, D_\theta \sqrt{a^2+\theta^2} - \sqrt{a^2+\theta^2}\; D_\theta\, \theta}{\theta^2} = \frac{\theta\, \dfrac{D_\theta\,(a^2+\theta^2)}{2\sqrt{a^2+\theta^2}} - \sqrt{a^2+\theta^2}\,(1)}{\theta^2}$$

$$= \frac{\theta\, \dfrac{2\,\theta}{2\sqrt{a^2+\theta^2}} - \sqrt{a^2+\theta^2}}{\theta^2} = \frac{\dfrac{\theta^2 - a^2 - \theta^2}{\sqrt{a^2+\theta^2}}}{\theta^2} = \frac{-\,a^2}{\theta^2\sqrt{a^2+\theta^2}}$$

Ejemplo. 22

Obtener el valor de la derivada para el valor indicado de la variable independiente.

a). $y = \sqrt{\dfrac{5-2x}{5+2x}}$ para $x_1 = 1$

Se tiene :

$$y = \frac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{5+2x}}\text{ , luego}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{5+2x}\,\dfrac{-2}{2\sqrt{5-2x}} - \sqrt{5-2x}\,\dfrac{2}{2\sqrt{5+2x}}}{(\sqrt{5+2x})^2}$$

$$= \frac{-\dfrac{\sqrt{5+2x}}{\sqrt{5-2x}} - \dfrac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{5+2x}}}{5+2x} = \frac{\dfrac{-\,5-2x - 5+2x}{\sqrt{5-2x}\;\sqrt{5+2x}}}{5+2x} = \frac{-\,10}{(5+2x)\sqrt{5-2x}\,\sqrt{5+2x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\,10}{(5+2x)\sqrt{25-4x^2}}$$

Para $x_1 = 1$: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right]_{x_1=1} = \dfrac{-\,10}{(5+2)\sqrt{25-4}} = \dfrac{-10}{7\sqrt{21}} = \dfrac{-\,10}{7\sqrt{21}} =$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x_1=1} = -\frac{10}{7\sqrt{21}}$$

b). $f(x) = \left(\dfrac{2x+1}{x+5}\right)(3x-1)$ para $x = -3$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x+5}\,(3) + (3x-1)\,\frac{(x+5)(2) - (2x+1)(1)}{(x+5)^2} =$$

$$= \frac{6x+3}{x+5} + \frac{(3x-1)(2x+10-2x-1)}{(x+5)^2} = \frac{6x+3}{x+5} + \frac{(3x-1)(9)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{6x+3}{x+5} + \frac{27x-9}{(x+5)^2} = \frac{(6x+3)(x+5) + 27x - 9}{(x+5)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 + 30x + 3x + 15 + 27x - 9}{(x+5)^2} = \frac{6x^2 + 60x + 6}{(x+5)^2} = \frac{6(x^2 + 10x + 1)}{(x+5)^2}$$

$$f'(-3) = \frac{6(9 - 30 + 1)}{(-3+5)^2} = \frac{6(-20)}{(-2)^2} = -30 \;; \qquad f'(-3) = -30$$

Ejemplo.23

Dada la función $y = f(x)$, trazar su gráfica, determinar en que valores de x es continua y en que otros es discontinua, así como su derivabilidad, argumentando todas las respuestas.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 6x & \text{para } -5 \leq x < -3 \\ 3\left(\dfrac{-x+2}{x+3}\right) & \text{para } -3 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{4x^3}{3} - \dfrac{123x}{5} + \dfrac{518}{15} & \text{para } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Continuidad en el intervalo $[-5, -3)$.

En virtud de que la función es polinominal, en este intervalo la función es continua.

Continuidad en el intervalo $(-3, 2)$

Por inspección de la regla $y = 3\left(\dfrac{-x+2}{x+3}\right)$ se observa que será discontinua para el valor $x_1 = -3$ solamente.

Continuidad en el intervalo $(2, 3]$

Puesto que la función en este intervalo es polinominal, la función es continua.

Continuidad en $x_1 = -3$

Para verificar la continuidad en $x_1 = 3$, deberán probarse las tres -- condiciones para la existencia de continuidad en un punto.

$f(-3) = 3\left[\dfrac{-(-3)+2}{-3+3}\right] = \dfrac{15}{0}$; $f(-3) \nexists$, luego la función es discontinua para $x_1 = -3$

Continuidad para $x_2 = 2$

$$f(2) = 3\left(\frac{-2+2}{2+3}\right) = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left[3\left(\frac{-x+2}{x+3}\right)\right] = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{123x}{5} + \frac{518}{15}\right]$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{2^4}{4} + \frac{4(8)}{3} - \frac{123(2)}{5} + \frac{518}{15} = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0 \qquad \text{(c)}$$

Por (b) y (c), $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$, luego

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0 \qquad \text{(d)}$$

Comparando (a) con (d), se tiene que:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

de lo cual se concluye que la función es continua para $x_2 = 2$

Como en $x_1 = -3$ no hay continuidad, la función no es derivable en este punto.

En $x_2 = 2$ si hay continuidad, por lo cual la función puede ser derivable en dicho punto.

Para investigar esto, se procede a comparar las derivadas laterales de la función en el punto.

Se deja al estudiante el cálculo detallado de las derivadas de $f(x)$ - a partir de las reglas de correspondencia adecuadas

Se dan a continuación dichas derivadas ya obtenidas:

$f'_-(x) = x^3 + 4x^2 - \dfrac{123}{5}$, luego:

$$f'_-(2) = 2^3 + 4(4) - \frac{123}{5} = -\frac{3}{5} \qquad \text{(e)}$$

$f'_+(x) = \dfrac{-15}{(x+3)^2}$, por lo cual: $f'_+(2) = \dfrac{-15}{(2+3)^2} = -\dfrac{3}{5}$ (f)

Teniendo en cuenta (e) y (f) se ve que:

$$f'_-(2) = f'_+(2) = f'(2) = -\frac{3}{5}$$

La función si es derivable para $x_2 = 2$

Concluyendo, la función es continua en el intervalo $[-5, 3]$, $x \neq -3$ y es derivable en el intervalo $(-5, 3)$, $x \neq -3$.

Para el trazo de la gráfica, que se ve en la figura 4 se presenta una tabla de valores x y f(x).

Tabulación

X	f (x)
3	16.98
2.5	3.63
2	0.0
1.5	0.33
1.0	0.75
0.5	1.29
0	2.0
- 0.5	3.0
- 1	4.5
- 1.5	7
- 2.0	12
- 2.5	27
- 3	no definida
- 3.5	3.5
- 4	8
- 4.5	13.5
- 5	20

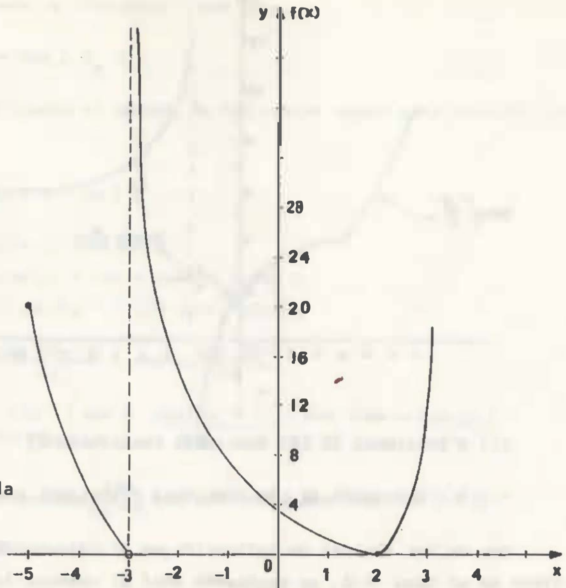


FIG. 4

Ejemplo. 24

Dada la función y = f (x) definida por las siguientes reglas de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} +\sqrt{\dfrac{-x^3}{4}} & \text{para } -\infty < x < -4 \\ 5 + \dfrac{6}{x-2} & \text{para } -4 \leq x \leq 8 \\ 6 & \text{para } 8 < x < \infty \end{cases}$$

Determinar los intervalos de continuidad de la función, así como los puntos de discontinuidad y establecer si la función es derivable en los puntos $x_1 = 4$ y $x_2 = 8$. Fundamentar las respuestas y dibujar la gráfica correspondiente.

Continuidad en el intervalo ($-\infty, -4$)

Por inspección de la ecuación $f(x) = +\sqrt{\dfrac{-x^3}{4}}$ se aprecia que la función existirá para los valores de x correspondientes a su intervalo de definición, y serán iguales a los valores de los límites respectivos, por lo que la función será continua en ($-\infty$, 4)

Continuidad en el invervalo (- 4, 8)

También por inspección de $f(x) = 5 + \dfrac{6}{x-2}$, se observa que, el único valor que la indetermina es x = 2; por tanto la función será continua en el intervalo (- 4, 8) donde $x \neq 2$.

Continuidad en el intervalo ($8, +\infty$)

En virtud de que f (x) = 6, la función es continua en su intervalo de definición.

Para investigar la continuidad en x = - 4, se probará la condición que determina la continuidad en un punto.

$$f(-4) = 5 + \frac{6}{-4-2} = 4 \qquad \text{(A)}$$

$$\lim_{x \to -4^-} f(x) = \lim_{x \to -4^-} + \sqrt{\frac{-x^3}{4}} = +\sqrt{\frac{64}{4}} = 4 \qquad \text{(B)}$$

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = 5 + \frac{6}{-4-2} = 4 \qquad \text{(C)}$$

por lo tanto :

$$\lim_{x \to -4} f(x) = 4 \qquad (D)$$

Según (A) y (B) la función es continua en $x = -4$.

Para investigar la continuidad en $x = 8$:

$$f(8) = 5 + \frac{6}{8-2} = 6 \qquad (E)$$

$$\lim_{x \to 8^-} f(x) = \lim_{x \to 8^-}\left(5 + \frac{6}{x-2}\right) = 5 + \frac{6}{8-2} = 6 \qquad (F)$$

$$\lim_{x \to 8^+} f(x) = 6 \qquad (G)$$

de (F) y (G): $\lim_{x \to 8} f(x) = f(8) = 6$ (H)

Según (E) y (H), la función es continua en $x = 8$.

Por lo tanto la función será continua en $-\infty < x < \infty$, $x \neq 2$; o bien es continua en $-\infty < x < 2$ y $2 < x < \infty$, y es discontinua en $x = 2$.

Existe continuidad en $x = -4$ y $x = 8$, por lo que pudiera existir derivabilidad en tales puntos.

$$\text{Si } x < -4 : f'(x) = \frac{-3x^2}{4\sqrt{-x^3}} = -\frac{3x}{4\sqrt{-x}} \Rightarrow f'_-(-4) = -\frac{3}{2} \qquad (I)$$

$$\text{Si } -4 < x < 8 : f'(x) = -\frac{6}{(x-2)^2} \Rightarrow f'_+(-4) = -\frac{6}{(-6)^2} = -\frac{1}{6} \qquad (J)$$

Por (I) y (J) la función no es derivable en $x = -4$

Ahora:

$$\text{Para } -4 < x < 8 : f'(x) = \frac{-6}{(x-2)^2};\ f'_-(8) = \frac{-6}{6^2} = -\frac{1}{6} \qquad (K)$$

$$\text{Si } x > 8 : f'(x) = 0 \Rightarrow f'_+(8) = 0 \qquad (I)$$

Por (k) y (I) la función no es derivable en $x = 8$.

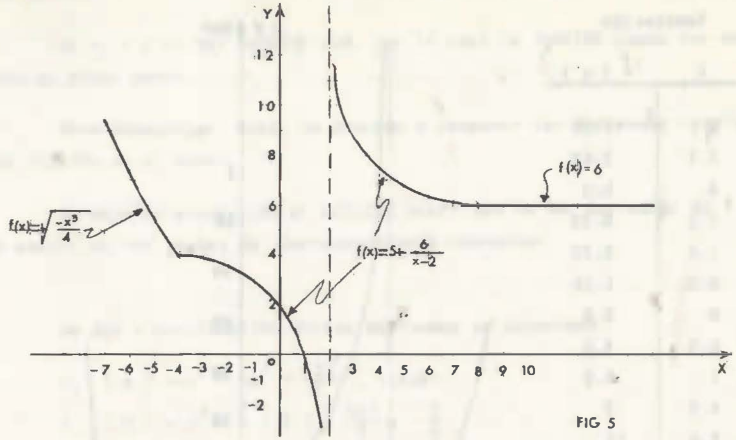


FIG 5

III.5 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRASCENDENTES

III.5.1 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES CIRCULARES DIRECTAS E INVERSAS.

Dos de los límites de aplicación en el Cálculo Diferencial e Integral, vistos en el Tema II.8, se emplearán aquí al obtener la fórmula para derivar la función seno, misma que sirve de base en la determinación de las derivadas de las cinco funciones circulares restantes.

Dichos límites son:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta u}{\Delta u} = 1 \qquad (A)$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\cos \Delta u - 1}{\Delta u} = 0 \qquad (B)$$

En lo que sigue, $u = f(x)$ es una función derivable.

Teorema III.10

Derivada de la función seno.

Hipótesis: Se tiene la función $y = \text{sen } u$

Tésis: $D_x \text{ sen } u = \cos u \, D_x u$ (7)

Demostración: Aplicando el método de los cuatro pasos para calcular primero D_u sen u.

I). $y + \Delta y = \text{sen } (u + \Delta u)$

II). $\Delta y = \text{sen } (u + \Delta u) - \text{sen } u$

$= \text{sen } u \cos \Delta u + \cos u \text{ sen } \Delta u - \text{sen } u$

$= \text{sen } u (\cos \Delta u - 1) + \cos u \text{ sen } \Delta u$

III). $$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \text{sen } u \frac{\cos \Delta u - 1}{\Delta u} + \cos u \frac{\text{sen } \Delta u}{\Delta u}$$

IV). $$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \left(\text{sen } u \frac{\cos \Delta u - 1}{\Delta u} \right) + \lim_{\Delta u \to 0} \left(\cos u \frac{\text{sen } \Delta u}{\Delta u} \right)$$

Pero $\lim_{\Delta u \to 0} \text{sen } u = \text{sen } u$, $\lim_{\Delta u \to 0} \cos u = \cos u$; por (A) y (B)

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \text{sen } u (0) + \cos u (1)$$

Esto es: $D_u Y = D_u \text{ sen } u = \cos u$

Finalmente, sabiendo que $D_x Y = D_u Y \, D_x u$ se tiene:

$D_x \text{ sen } u = \cos u \, D_x u$ Q.D.

Teorema III.11

Derivada de la función coseno.

Hipótesis: Sea la función $y = \cos u$

Tésis: $D_x \cos u = - \text{sen } u \, D_x u$ (8)

Demostración: Se sabe que el coseno de un ángulo es igual al seno de su complemento, entonces:

$$\cos u = \text{sen } \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \Rightarrow y = \text{sen } \left(\frac{\pi}{2} - u \right)$$

Aplicando a esta función la fórmula (7)

$$D_x Y = \cos \left(\frac{\pi}{2} - u \right) D_x \left(\frac{\pi}{2} - u \right) =$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \left(D_x \frac{\pi}{2} - D_x u \right) =$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{2} - u \right) (0 - D_x u) = - \cos \left(\frac{\pi}{2} - u \right) D_x u$$

Teniendo en cuenta que $y = \cos u$ y que también $\cos \left(\frac{\pi}{2} - u \right) = \text{sen } u$, resulta:

$D_x \cos u = - \text{sen } u \, D_x u$ Q.D.

Teorema III.12

Derivada de la función tangente.

Hipótesis: Dada $y = \tan u$

Tésis: $D_x \tan u = \sec^2 u \, D_x u$ (9)

Demostración: Considerando que $\tan u = \frac{\text{sen } u}{\cos u}$ y aplicando la fórmula (5).

$$D_x \tan u = D_x \frac{\text{sen } u}{\cos u} = \frac{\cos u \, D_x \text{ sen } u - \text{sen } u \, D_x \cos u}{\cos^2 u} =$$

$$= \frac{\cos u \cos u \, D_x u - \text{sen } u (- \text{sen } u) D_x u}{\cos^2 u} =$$

$$= \frac{\cos^2 u + \text{sen}^2 u}{\cos^2 u} D_x u = \frac{1}{\cos^2 u} D_x u$$

$D_x \tan u = \sec^2 u \, D_x u$ Q.D.

Teorema III.13

Derivada de la función cotangente.

Hipótesis: Se tiene $y = \cot u$

Tésis: $D_x \cot u = - \csc^2 u \, D_x u$ (10)

Demostración: Como $\cot u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$, al aplicar la fórmula (5) queda:

$$D_x \cot u = D_x \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u \, D_x \cos u - \cos u \, D_x \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen}^2 u}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} u (- \operatorname{sen} u) D_x u - \cos u \cos u \, D_x u}{\operatorname{sen}^2 u} =$$

$$= \frac{- \operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u} D_x u = - \frac{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u} D_x u$$

$$= - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} D_x u$$

$$D_x \cot u = - \csc^2 D_x u \qquad \text{Q.D.}$$

Teorema III.14

Derivada de la función secante.

Hipótesis: Sí $y = \sec u$

Tésis: $D_x \sec u = \sec u \tan u \, D_x u$ (11)

Demostración: Ya que $\sec u = \frac{1}{\cos u}$, aplicando (5a)

$$D_x \sec u = D_x \frac{1}{\cos u} = \frac{-1}{\cos^2 u} D_x \cos u$$

$$= \frac{-1}{\cos^2 u} (- \operatorname{sen} u) D_x u = \frac{1}{\cos u} \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} D_x u$$

$$D_x \sec u = \sec u \tan u \, D_x u$$

Teorema III.15

Derivada de la función cosecante.

Hipótesis : Sí $y = \csc u$

Tesis: $D_x \csc u = - \csc u \cot u \, D_x u$ (12)

Demostración: Recordando que $\csc u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$ al aplicar (5a) -- queda:

$$D_x \csc u = D_x \frac{1}{\operatorname{sen} u} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 u} D_x \operatorname{sen} u$$

$$= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 u} \cos u \, D_x u = - \frac{1}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} D_x u$$

$$D_x \csc u = - \csc u \cot u \, D_x u.$$

A continuación se agrupan las fórmulas para derivar funciones circulares directas:

$D_x \operatorname{sen} u = \cos u \, D_x u$ (7)

$D_x \cos u = - \operatorname{sen} u \, D_x u$ (8)

$D_x \tan u = \sec^2 u \, D_x u$ (9)

$D_x \cot u = - \csc^2 u \, D_x u$ (10)

$D_x \sec u = \sec u \tan u \, D_x u$ (11)

$D_x \csc u = - \csc u \cot u \, D_x u$ (12)

Ejemplo.25

Obtener la derivada de cada función

a). $y = \operatorname{sen} 2 x^2$

aplicando (7) $D_x \operatorname{sen} 2 x^2 = \cos 2 x^2 \, D_x 2 x^2 =$

$= \cos 2 x^2 (4 x) = 4 X \cos 2 x^2$

b). $f (x) = \tan x^2$

Al aplicar (9) queda: $f' (x) = \sec^2 x^2 \, D_x (x^2)$

$$f'(x) = 2x\sec^2 x^2$$

c). $g(x) = \sec\sqrt{x}$

Aplicando (11): $\frac{d}{dx}\sec\sqrt{x} = \sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\frac{d}{dx}\sec\sqrt{x} = \frac{\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

d). $r = \cos\frac{\theta^2}{2}$

Empleando (8): $\frac{dr}{d\theta} = -\operatorname{sen}\frac{\theta^2}{2}\ \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\theta^2}{2}\right) =$

$$\frac{dr}{d\theta} = -\operatorname{sen}\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{2\theta}{2}\right) = -\theta\operatorname{sen}\frac{\theta^2}{2}$$

e). $u = \cot\frac{1}{v}$

usando (10) : $\frac{du}{dv} = -\csc^2\frac{1}{v}\ \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{v}\right) =$

$$\frac{du}{dv} = -\csc^2\frac{1}{v}\left(-\frac{1}{v^2}\right) = \frac{1}{v^2}\csc^2\frac{1}{v}$$

f). $y = x^2\sec x^2$

Se aplican (4) y (11)

$$D_x y = x^2 D_x \sec x^2 + \sec x^2 D_x x^2 =$$

$$= x^2\sec x^2\tan x^2 D_x x^2 + \sec x^2 (2x) =$$

$$= x^2\sec x^2\tan x^2 (2x) + 2x\sec x^2 =$$

$$= 2x\sec x^2 (x^2\tan x^2 + 1)$$

Ejemplo. 26

Hallar la derivada de la función dada y valuarla para el valor indicado de la variable independiente.

a). $y = x\cos x$; para $x_1 = 0$

Se aplican (4) y (8): $\frac{dy}{dx} = x(-\operatorname{sen} x) + \cos x (1)$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - x\operatorname{sen} x; \text{ y para } x_1 = 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_1 = 0} = \cos 0 - (0)\operatorname{sen} 0 = 1 - 0 = 1$$

b). $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, para $x = \frac{\pi}{2}$

Empleando: (5) y (7) : $f'(x) = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x (1)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} \quad \text{y} \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}(0) - 1}{\frac{\pi^2}{4}} = -\frac{4}{\pi^2}$$

c). $F(\theta) = \frac{1}{3}\tan^3\theta - \tan\theta + \theta$, para $\theta = \frac{\pi}{6}$

Aplicando (3), (6), (9) y sabiendo que $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$:

$$F'(\theta) = \frac{1}{3}\,3\tan^2\theta\sec^2\theta - \sec^2\theta + 1 = \tan^2\theta\sec^2\theta - (\sec^2\theta - 1)$$

$$= \tan^2\theta\sec^2\theta - \tan^2\theta = \tan^2\theta(\sec^2\theta - 1) = \tan^2\theta\tan^2\theta$$

$$F'(\theta) = \tan^4\theta \text{ y } F'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan^4\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{1}{9}$$

d). $\psi = \sec\alpha\tan\alpha$ para $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Se aplican (4), (9) y (11)

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \sec\alpha\sec^2\alpha + \tan\alpha\ \sec\alpha\ \tan\alpha =$$

$$= \sec^3\alpha + \sec\alpha\tan^2\alpha = \sec^3\alpha + \sec\alpha(\sec^2\alpha - 1) =$$

$$= \sec^3\alpha + \sec^3\alpha - \sec\alpha =$$

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = 2\sec^3\alpha - \sec\alpha$$

y para $\alpha = \frac{\pi}{3}$: $\left.\frac{d\psi}{d\alpha}\right]_{\alpha = \frac{\pi}{3}} = 2\sec^3\frac{\pi}{3} - \sec\frac{\pi}{3} = 2(2)^3 - 2 =$

$= 16 - 2 = 14$

Para las derivadas de las funciones circulares inversas se presentan los siguientes teoremas.

Teorema III.16

Derivada de la función inversa del seno.

Hipótesis: Si $y = \text{angsen } u$

Tesis: $$D_x \text{ angsen } u = \frac{D_x u}{\sqrt{1 - u^2}} \qquad (13)$$

Demostración: $y = \text{angsen } u$ es equivalente a: $u = \text{sen } y$, donde $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, y la derivada de ésta con respecto a y es: $D_y u = \cos y > 0$

Ahora bien teniendo en cuenta la derivada de una función inversa:

$D_u y = \frac{1}{D_y u}$ resulta:

$D_u y = D_u \text{ angsen } u = \frac{1}{\cos y}$; $\cos y > 0$ ya que $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Pero $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$ y como $\text{sen } y = u$

$\cos y = \sqrt{1 - u^2}$ por lo cual:

$$D_u \text{ angsen } u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Tomando en cuenta la derivada de una función de función:

$D_x y = D_u y \, D_x u$, resulta:

$$D_x \text{ angsen } u = \frac{D_x u}{\sqrt{1 - u^2}} \qquad \text{Q.D.}$$

Teorema III.17

Derivada de la función inversa del coseno.

Hipótesis: Si $y = \text{ang cos } u$

Tésis: $$D_x \text{ ang cos } u = -\frac{D_x u}{\sqrt{1 - u^2}} \qquad (14)$$

Demostración: La expresión $y = \text{ang cos } u$ es equivalente a $u = \cos y$ para $0 \leq y \leq \pi$. La derivada de ésta con respecto a y es: $D_y u = -\text{sen } y$.

Como $D_u y = \frac{1}{D_y u} \Rightarrow D_u y = D_u \text{ ang sen } u = \frac{1}{-\text{sen } y}$

Donde: $-\text{sen } y < 0$ porque $0 < y < \pi$

Pero: $-\text{sen } y = -\sqrt{1 - \cos^2 y}$ y como $\cos y = u$

$-\text{sen } y = -\sqrt{1 - u^2}$, luego:

$$D_u \text{ ang cos } u = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

De donde se obtiene:

$$D_x \text{ ang cos } u = -\frac{D_x u}{\sqrt{1 - u^2}} \qquad \text{Q.D.}$$

Teorema III.18

Derivada de la función inversa de la tangente.

Hipótesis: Si $y = \text{ang tan } u$

Tesis: $$D_x \text{ ang tan } u = \frac{D_x u}{1 + u^2} \qquad (15)$$

Demostración: $y = \text{ang tan } u$ es equivalente a : la función $u = \tan y$; $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ y la derivada de esta respecto a y es:

$D_y u = \sec^2 y$, se tiene:

$$D_u y = \frac{1}{D_y u} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

Empleando la identidad trigonométrica $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$, teniendo en cuenta que $\tan y = u$: $\sec^2 y = 1 + u^2$ por lo cual:

$D_u y = D_u \text{ ang tan } u = \frac{1}{1 + u^2}$, luego:

$$D_x \text{ ang tan } u = \frac{D_x u}{1+u^2}$$

Q.D.

Teorema III.19

Derivada de la función inversa de la cotangente.

Hipótesis: Si $y = \text{ang cot } u$

Tésis: $D_x \text{ ang cot } u = -\dfrac{D_x u}{1+u^2}$ (16)

Demostración: $y = \text{ang cot } u$ es equivalente a $u = \cot y$; $0 < y < \pi$

para la cual: $D_y u = -\csc^2 y$

Ya que $D_u y = \dfrac{1}{D_y u}$:

$$D_u \text{ ang cot } u = -\frac{1}{\csc^2 y}$$

Pero: $\csc^2 y = 1 + \cot^2 y = 1 + u^2$ porque $\cot y = u$

Entonces:

$D_u \text{ ang cot } u = -\dfrac{1}{1+u^2}$ de lo cual se sigue que:

$$D_x \text{ ang cot } u = -\frac{D_x u}{1+u^2}$$

Teorema III.20

Derivada de la función inversa de la secante.

Hipótesis: Si $y = \text{ang sec } u$

Tésis: $D_x \text{ ang sec } u = \dfrac{D_x u}{u\sqrt{u^2-1}}$ (17)

Demostración: La expresión $y = \text{ang sec } u$ es equivalente a: $u = \sec y$, $y \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ y que la derivada de esta con - respecto a y es: $D_y u = \sec y \tan y$.

Entonces:

$$D_u y = \frac{1}{D_y u} \Rightarrow D_u \text{ ang sec } u = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

Ahora, $\tan^2 y = \sec^2 y - 1 \Rightarrow \tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1}$

y como $\sec y = u$, se tendrá:

$$D_u \text{ ang sec } u = \frac{1}{u\left(\pm\sqrt{u^2-1}\right)}$$

Además, si $u > 1 \Rightarrow \sec y > 0$, $\tan y > 0$, $\Longrightarrow$ $\sec y \tan y > 0$

Si $u < 1 \Rightarrow \sec y < 0$, $\tan y < 0 \Rightarrow \sec y \tan y > 0$

Entonces,

$$D_u \text{ ang sec } u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$$

Por lo cual: $D_x \text{ ang sec } u = \dfrac{D_x u}{u\sqrt{u^2-1}}$

Q.D.

Teorema III, 21

Derivada de la función inversa de la cosecante.

Hipótesis: Si $y = \text{ang csc } u$

Tésis: $D_x \text{ ang csc } u = -\dfrac{D_x u}{u\sqrt{u^2-1}}$ (18)

Demostración: La expresión $y = \text{ang csc } u$ es equivalente a $u = \csc y$, - $y \in \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ y la derivada de $u = \csc y$ con respecto a y es $D_y u = -\csc y \cot y$, se tiene que $D_u y = \dfrac{1}{D_y u} \Rightarrow D_u \text{ ang csc } u = \dfrac{1}{\csc y \cot y}$

Pero $\cot^2 y = \csc^2 y - 1 \Rightarrow \cot y = \pm\sqrt{\csc^2 y - 1}$

Y como $\csc y = u$ resulta que $\csc y \cot y = u\left(\pm\sqrt{u^2-1}\right)$

Así que $D_u \text{ ang csc } u = -\dfrac{1}{u\left(\pm\sqrt{u^2-1}\right)}$

Además, si $u > 1 \Rightarrow \csc y > 0,\ \cot y > 0 \Rightarrow \csc y \cot y > 0$

Si $u < 1 \Rightarrow \csc y < 0,\ \cot y < 0 \Rightarrow \csc y \cot y > 0$

Entonces: $D_u \text{ ang csc } u = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}$

y la derivada con respecto a x es:

$$D_x \text{ ang csc } u = -\frac{D_x u}{u\sqrt{u^2 - 1}}$$

Las fórmulas para derivar funciones circulares inversas se resumen a continuación.

$$D_x \text{ ang sen } u = \frac{D_x u}{\sqrt{1 - u^2}} \qquad (13)$$

$$D_x \text{ ang cos } u = -\frac{D_x u}{\sqrt{1 - u^2}} \qquad (14)$$

$$D_x \text{ ang tan } u = \frac{D_x u}{1 + u^2} \qquad (15)$$

$$D_x \text{ ang cot } u = -\frac{D_x u}{1 + u^2} \qquad (16)$$

$$D_x \text{ ang sec } u = \frac{D_x u}{u\sqrt{u^2 - 1}} \qquad (17)$$

$$D_x \text{ ang csc } u = -\frac{D_x u}{u\sqrt{u^2 - 1}} \qquad (18)$$

Ejemplo. 27

Derivar cada una de las siguientes funciones.

a). $y = \text{ang sen } x^2$

Aplicando (13) :

$$D_x \text{ ang sen } x^2 = \frac{D_x x^2}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

b). $y = \text{ang tan } \sqrt{x}$

Aplicando (15) :

$$D_x \text{ ang tan } \sqrt{x} = \frac{D_x \sqrt{x}}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + x} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1 + x)}$$

c). $y = \text{ang cot } x^3$

Aplicando (16):

$$D_x \text{ ang cot } x^3 = -\frac{D_x x^3}{1 + (x^3)^2} = -\frac{3x^2}{1 + x^6}$$

d) $y = \text{ang cos } \dfrac{x}{a}$

Aplicando (14)

$$D_x \text{ ang cos } \frac{x}{a} = -\frac{D_x \frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} =$$

$$= -\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{-\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}} = \frac{-\frac{1}{a}}{\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}}$$

$$D_x \text{ ang cos } \frac{x}{a} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

e). $y = \frac{1}{2} \text{ang sec } 2x$

Aplicando (4a) y (17) :

$$D_x \frac{1}{2} \text{ ang sec } 2x = \frac{1}{2} \frac{D_x (2x)}{2x\sqrt{(2x)^2 - 1}} =$$

$$= \frac{2}{4x\sqrt{4x^2-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{4x^2-1}}$$

f). $y = x \text{ ang csc } x$

Aplicando (4) y (18) :

$$D_x\,(x \text{ ang csc } x) = x\left(-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right) + \text{ang csc } x$$

$$D_x\,(x \text{ ang csc } x) = \text{ang csc } x - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Ejemplo 28.-

Hallar cada una de las derivadas indicadas y valuarla para el valor señalado de la variable independiente.

a). si $f(x) = \text{ang sen } \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, hallar $f'(a)$

Se emplearán (3), (13), (5), (6a) y (2).

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} + \frac{x\,\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{a^2-x^2}\,(1)}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}} + \frac{\frac{-x^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{-a^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{x^2-a^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-(a^2-x^2)}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$$

Y el valor de $f'(x)$ para $x = a$ es:

$$f'(a) = -\frac{\sqrt{a^2-a^2}}{a^2} = 0$$

b). Hallar $g'(0)$, si $g(r) = \text{ang tan } \frac{a+r}{1-ar}$

Aplicando (15) y (5).

$$g'(r) = \frac{\frac{d}{dr}\left[\frac{a+r}{1-ar}\right]}{1+\left[\frac{a+r}{1-ar}\right]^2} = \frac{\frac{(1-ar)(1)-(a+r)(-a)}{(1-ar)^2}}{1+\frac{(a+r)^2}{(1-ar)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{1-ar+a^2+ar}{(1-ar)^2}}{\frac{(1-ar)^2+(a+r)^2}{(1-ar)^2}} =$$

$$= \frac{1+a^2}{1-2ar+a^2r^2+a^2+2ar+r^2} = \frac{1+a^2}{a^2r^2+r^2+a^2+1} =$$

$$= \frac{1+a^2}{(a^2+1)(r^2+1)} = \frac{1}{r^2+1}$$

$$g'(r) = \frac{1}{r^2+1} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

III.5.2 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES LOGARITMICAS Y EXPONENCIALES.

En este tema se obtendrán las fórmulas para derivar las funciones logarítmicas y exponenciales cuyo empleo no se limita a la derivación de dichas funciones, sino que, en algunos casos especiales facilita la derivación de otras funciones, como es el caso de la función potencia que se ve en el teorema III.5.3.

Teorema III.22

Derivada de la función logarítmica de base $a > 0$.

Hipótesis: Sea $y = \log_a x$; $a > 0$

Tésis: $D_x \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$

Demostración: Al derivar la función dada, por medio de la definición de derivada se obtiene:

I). $y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$

II). $\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x$

Por las propiedades de los logaritmos queda:

$$\Delta y = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

III). $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$

Multiplicando y diviviendo por x y aplicando nuevamente las propiedades de los logaritmos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

IV). $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{x} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$

$$= \frac{1}{x} \log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

ya que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$

y según se vió en II.8 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = e$, luego

$$D_x \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e \qquad \text{Q.D.}$$

Ahora, si se tiene $y = \log_a u$, aplicando la regla de la cadena resulta:

$$D_x \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e \, D_x u \tag{19}$$

Para determinar la derivada de la función logaritmo natural (o base e):

$$y = Lu = \log_e u$$

se aplica (19) y se tiene en cuenta que $\log_e e = 1$:

$$D_x L u = D_x \log_e u = \frac{1}{u} \log_e e \, D_x u$$

$$D_x L u = \frac{1}{u} D_x u \tag{20}$$

<u>Teorema III.23</u>

Derivada de la función exponencial de base $a > 0$.

Hipótesis: Sea $y = a^x : a > 0$

$$\text{Tesis: } D_x a^x = a^x L a \tag{21a}$$

Demostración: La expresión $y = a^x$ es equivalente a $x = \log_a y$.

Sabiendo que la derivada de la función inversa es $D_x y = \dfrac{1}{D_y x}$ y aplicando (19) a la función $x = \log_a y$ que da: $D_y x = \dfrac{1}{y} \log_a e \, D_y y = \dfrac{1}{y} \log_a e$ resulta que:

$$D_x y = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = y \frac{1}{\log_a e} = a^x \frac{1}{\log_a e}$$

pero se sabe que $\dfrac{1}{\log_a e} = La$, luego:

$$D_x a^x = a^x La \qquad \text{Q.D.}$$

Para derivar la función exponencial $y = a^u : a > 0$ se aplica (21a) y la regla de la cadena:

$$D_x y = D_u a^u D_x u = a^u La \, D_x u$$

$$D_x a^u = a^u La \, D_x u \tag{21}$$

Si se trata de obtener la derivada de la función exponencial de base e: $y = e^u$, al aplicar (21) y tener en cuenta que $Le = 1$, resulta:

$$D_x e^u = e^u D_x u \tag{21b}$$

y por supuesto $D_x e^x = e^x$ (21c)

Resúmen de fórmulas para derivar funciones logarítmicas y exponenciales

$D_x \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$ (19a)

$D_x \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e \, D_x u$ (19)

$D_x Lu = \frac{D_x u}{u}$ (20)

$D_x a^x = a^x La$ (21a)

$D_x a^u = a^u La \, D_x u$ (21)

$D_x e^u = e^u D_x u$ (21b)

$D_x e^x = e^x$ (21c)

Ejemplo.29

Derivar las siguientes funciones.

a). $y = \log_a (4x - 3)$

Aplicando (19) : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x - 3} \log_a e \, (4) = \frac{4 \log_a e}{4x - 3}$

b). $y = L(ax + b)$

Al aplicar (20) : $D_x y = \frac{1}{ax + b} D_x (ax + b) = \frac{a}{ax + b}$

c). $f(x) = L \frac{x^2}{x^2 + 1}$

Se emplea (20) : $f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2}{x^2 + 1}} D_x \frac{x^2}{x^2 + 1}$

$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} \frac{(x^2 + 1) 2x - x^2 (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{x^2 (x^2 + 1)} = \frac{2x}{x^2 (x^2 + 1)}$

$f'(x) = \frac{2}{x(x^2 + 1)}$

d). $H(x) = L^3 (4x) = [L(4x)]^3$

se aplican (6) y (20) : $\frac{d}{dx} H(x) = 3 [L(4x)]^2 D_x L(4x) =$

$\frac{d}{dx} H(x) = 3 [L(4x)]^2 \frac{1}{4x} (4) = \frac{3}{x} L^2 (4x)$

e). $y = (10)^{nx}$

Ahora, se aplica (21): $D_x y = (10)^{nx} L(10) D_x (nx)$

$D_x y = (10)^{nx} L(10)(n) = n L(10)(10)^{nx} = (10)^{nx} L(10)^n$

f). $g(z) = b^{2z}$

Al aplicar (21) queda: $g'(z) = b^{2z} Lb (2) = 2 Lb (b^{2z})$

$g'(z) = Lb^2 (b^{2z})$

ya que por las propiedades de los logaritmos $2 Lb = Lb^2$

g). $y = \frac{1}{3} (e^{3x} - e^{-3x}) + 3 (e^x - e^{-x})$

Aplicando (4a), (3) y (21b):

$D_x Y = \frac{1}{3} (3e^{3x} + 3e^{-3x}) + 3(e^x + e^{-x}) = e^{3x} + e^{-3x} + 3e^x + 3e^{-x}$

Factorizando: $D_x y = (e^x + e^{-x})^3$

Ejemplo 30.

Calcular el valor indicado de la derivada de la función dada.

a). $f(x) = \log \frac{2}{x}$, para $x = 2$

$f'(x) = \frac{1}{\frac{2}{x}} \log e \left(-\frac{2}{x^2} \right) = -\frac{1}{x} \log e$

$f'(2) = -\frac{1}{2} \log e = \log e^{-\frac{1}{2}} = \log \frac{1}{\sqrt{e}}$

b). $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ para $x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x + 1)\, D_x(e^x - 1) - (e^x - 1)\, D_x(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} =$$

$$= \frac{(e^x + 1)\, e^x - (e^x - 1)\, e^x}{(e^x + 1)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2\,e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Para $x = 0$: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=0} = \dfrac{2\,e^0}{(e^0 + 1)^2} = \dfrac{2}{2^2} = \dfrac{1}{2}$

III. 5.3 DERIVADA DE LA FUNCION POTENCIA.

Teorema III.24

Derivada de $y = u^v$

Hipótesis: Sea la función $y = u^v$; $u = f(x) > 0$, $v = g(x)$

Tesis: $D_x u^v = v\, u^{v-1} D_x u + u^v\, Lu\, D_x v$ (22)

Demostración: Tomando logaritmos naturales en ambos miembros de $y = u^v$:

$Ly = L\,u^v \Rightarrow Ly = v\, Lu$

Esto implica, por la definición de logaritmo que:

$y = e^{v\, Lu}$

Derivando esta función con respecto a x mediante (21b)

$D_x y = e^{vLu}\, D_x(v\, Lu) \Longrightarrow$

$D_x y = e^{vLu}\left(v \dfrac{1}{u} D_x u + Lu\, D_x v\right)$

Como $y = u^v = e^{vLu}$

$D_x y = u^v\left(\dfrac{v}{u} D_x u + Lu\, D_x v\right) \Longrightarrow$

$D_x u^v = v\, u^{v-1} D_x u + u^v\, Lu\, D_x v$

Esta fórmula puede escribirse con facilidad si se tienen en cuenta las fórmulas (6) y (21), considerando por un momento como si alternativamente fueran constantes v y u.

Ejemplo.31

Obtener la derivada de cada una de las siguientes expresiones:

a). $y = x^{e^x}$

Sean $u = x$, $v = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x\, x^{e^x - 1} \frac{d}{dx}(x) + x^{e^x}\, Lx\, \frac{d}{dx}\, e^x$$

$$= e^x\, x^{e^x - 1} + x^{e^x}\, L\,x\, e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x\, x^{e^x}\left(\frac{1}{x} + L\,x\right)$$

b). $y = x^{\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\; x^{\sqrt{x}-1} \frac{d}{dx}(x) + x^{\sqrt{x}}\; Lx\, \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\; x^{\sqrt{x}-1} + x^{\sqrt{x}}\; L\,x\; \frac{1}{2\sqrt{x}} = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{L\,x}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{Lx}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\; \frac{2 + Lx}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\sqrt{x}}\,(2 + Lx)}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo. 32

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{si } x \in \left(-\frac{3}{2}\pi, 0\right) \\ x - 1 & \text{si } x \in [0, 1) \\ Lx & \text{si } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

a). Analizar la continuidad en su dominio

b). Analizar la derivabilidad en su dominio

c). Trazar su gráfica.

a). El dominio es: $D_f = \{ x \mid x \in R,\ x > -\frac{3}{2}\pi \} = \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$

La función es continua en los intervalos $\left(-\frac{3}{2}\pi ; 0\right)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$ porque en cada uno de ellos la regla de correspondencia es una función continua. Queda por investigar la continuidad para $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$.

Continuidad para $x_1 = 0$: se aplica la condición: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, empleando límites laterales para investigar si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$

$f(0) = 0 - 1 = -1$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-\cos x) = -1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x - 1) = -1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -1$

Luego se cumple: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = -1$ por lo cual la función si es continua para $x_1 = 0$.

Continuidad para $x_2 = 1$: se procede en la misma forma.

$f(1) = L(1) = 0$; $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x - 1) = 1 - 1 = 0$;
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} Lx = L1 = 0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 0$, entonces:

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

y la función es continua para $x_2 = 1$.

Conclusión : La función es continua en todo su dominio.

b). $y = \cos x$ es derivable en $\left(-\frac{3}{2}\pi, 0\right)$, $y = x - 1$ es derivable en $(0, 1)$ y $y = Lx$ es derivable en $(1, +\infty)$, así que hay que estudiar la derivabilidad para $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ donde la función puede ser derivable ya que es continua.

Se emplean derivadas laterales para esto.

Para $x_1 = 0$:

si $x < 0$, $f'(x) = D_x(-\cos x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'_-(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$

si $0 < x < 1$; $f'(x) = D_x(x - 1) = 1 \Rightarrow f'_+(0) = 1$

Se ve que $f'_-(0) \neq f'_+(0) \Longrightarrow f'(0) \nexists$ por lo que la función no es derivable para $x_1 = 0$.

Ahora para $x_2 = 0$:

Como $f'(x) = 1$, si $0 < x < 1 \Rightarrow f'_-(1) = 1$

si $x > 1$ $f'(x) = D_x L_x = \frac{1}{x} \Rightarrow f'_+(1) = \frac{1}{1} = 1$

Se tiene: $f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow f'(1) = 1$, así que la función si es derivable para $x_2 = 1$

Conclusión: La función es derivable en $\left(-\frac{3}{2}\pi, +\infty\right)$ excepto para $x_1 = 0$

c) La gráfica se ve en la figura 6.

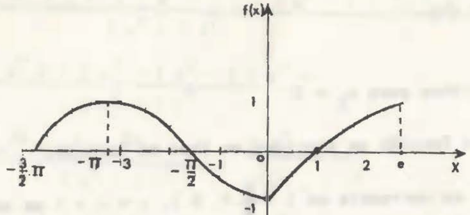


FIG 6

<u>Ejemplo. 33</u>

Para la siguient función:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } -4 \leq x < -1 \\ \text{ang sen } x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2^x & \text{si } 1 \leq x < 2.5 \end{cases}$$

a). Trazar su gráfica

b). Analizar su continuidad

c). Analizar su derivabilidad.

<u>Solución:</u>

a). La gráfica se ve en la figura 7.

b). Continuidad.

La función constante $y = -\frac{\pi}{2}$ es continua en $-4, 1)$. $y = \text{ang sen } x$ es continua en $(-1, 1)$ $y = 2^x$ es continua en $(1, 2.5)$. Se debe investigar la continuidad para $x_1 = -1$: y $x_2 = 1$.

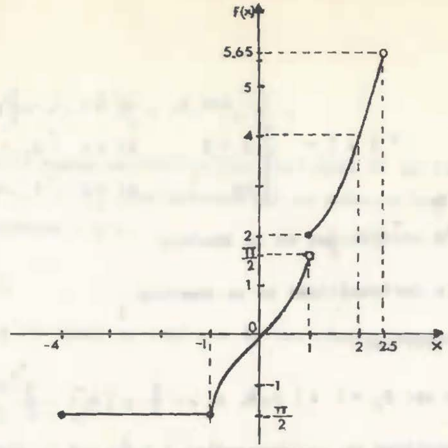


Figura 7

Para $x_1 = -1$: $f(-1) = \text{ang sen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \text{ang sen } x = \text{ang sen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

y la función es continua para $x_1 = -1$.

Para $x_2 = 1$: $f(1) = 2^1 = 2$.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \text{ang sen } x = \text{ang sen } 1 = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2^x = 2^1 = 2$.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) \nexists$ por lo cual la función es discontinua para $x_2 = 1$.

Conclusión : La función es continua en el intervalo $-4, 2.5)$ excep to para $x_2 = 1$; o sea es continua para $[-4; 1) \cup (1. 2.5)$.

c). Derivabilidad.

La función es derivable en los intervalos $(-4; -1)$, $(-1; 1)$ y $(-1; 2.5)$ se debe investigar la derivabilidad para $x_1 = -1$ solamente ya que para $x_2 = 1$ no es derivable por no ser continua.

$$Si; -4 < x < -1; f'(x) = D_x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow f'_-(-1) = 0$$

$$Si; -1 < x < 1; f'(x) = D_x \text{ ang sen } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'_+(-1) \nexists$$

Luego hay discontinuidad para $x_2 = -1$.

Conclusión: La función es derivable en $(-4, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2.5)$ o sea no es derivable para $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$

En el teorema III.9 se demuestra la fórmula $D_x u^n = nu^{n-1} D_x u$ (6) para todo n entero y positivo, ahora aplicando la fórmula (22) se demostrará que (6) es verdadera para cualquier valor real de n.

En efecto sea $y = u^n$ en que $u = f(x)$ es derivable y tiene como exponente a la función constante $v = c$ en que $C \in R$.

Por (22) : $D_x u^n = nu^{n-1} D_x u + u^n \text{ Ln } D_x n$.

Pero según (1) $D_x n = 0$, luego queda:

$D_x u^n = nu^{n-1} D_x u \quad \forall n \in R.$ Q.D.

III.6 DERIVADA DE LA FUNCION IMPLICITA.

Recordando que en una función presentada en forma implícita la variable dependiente no está despejada, como en la ecuación:

$$2x^5 - x = 3y^3 + 2y + 8 \qquad (A)$$

y considerando que esta ecuación define a y como una o mas funciones derivables de x, se puede hallar la derivada de y con respecto a x por el proceso llamado " derivación implícita ", el cual se presenta a continuación.

El primer miembro de la ecuación (A) es una función de x; sea:

$$F(x) = 2x^5 - x \qquad (B)$$

El segundo miembro de (A) es una función de Y, sea:

$$G(y) = 3y^3 + 2y + 8 \qquad (C)$$

donde y es función de x, es decir:

$$y = f(x) \qquad (D)$$

por lo que la ecuación (A) se puede escribir como:

$$F(x) = G(y) \text{ o bien } F(x) = G(f(x)) \qquad (E)$$

Entonces se tiene que:

$$D_x F(x) = D_x G(y)$$

$$D_x\left[2x^5 - x\right] = D_x\left[3y^3 + 2y + 8\right] \qquad (F)$$

La derivada de F(x) se puede obtener fácilmente:

$$D_x F(x) = D_x (2x^5 - x) = 10x^4 - 1 \qquad (G)$$

La derivada de G (y) se debe obtener usando la regla de la cadena, ya que $G(y) = 3y^3 + 2y + 8$, y se pretende derivar con respecto a x:

$$D_x G(y) = D_x (3y^3 + 2y + 8) = 9y^2 D_x Y + 2 D_x Y \qquad (H)$$

sustituyendo los valores de (G) y (H) en (F) se tiene que:

$$10x^4 - 1 = 9y^2 D_x y + 2 D_x Y = D_x Y (9y^2 + 2)$$

Despejando $D_x Y$ se obtiene:

$$D_x y = \frac{10x^4 - 1}{9y^2 + 2}$$

La ecuación (A) es un caso especial donde todos los términos en x están separados de los términos en y, sin embargo la idea de la derivación implícita es general y lo importante es derivar cada uno de los términos de la ecuación tomando en cuenta que Y no es la variable independiente y de ahí la necesidad de usar la regla de la cadena.

Ejemplo. 34

Usando la derivación implícita hallar $D_x y$ de:

$$2x^4y^2 - xy^3 + 8y = 4\sqrt{y} \qquad (a)$$

Suponiendo que existen una o más funciones derivables tales que si $y = f(x)$ la ecuación (a) se verifica, al derivar ambos miembros con respecto a x se tiene:

$$D_x(2x^4y^2 - xy^3 + 8y) = D_x(4\sqrt{y})$$

$$D_x(2x^4y^2) - D_x(xy^3) + D_x(8y) = D_x(4\sqrt{y}) \qquad (b)$$

Calculando por separado cada una de las derivadas:

$$D_x(2x^4y^2) = 2x^4 D_x y^2 + y^2 D_x 2x^4 =$$
$$= 2x^4\,2y\,D_x y + y^2\,8x^3 =$$
$$= 4x^4 y\,D_x y + 8x^3y^2$$

$$D_x(xy^3) = x D_x y^3 + y^3 D_x x = 3xy^2 D_x y + y^3$$

$$D_x 8y = 8 D_x y$$

$$D_x(4\sqrt{y}) = \frac{4}{2\sqrt{y}} D_x y = \frac{2}{\sqrt{y}} D_x y$$

sustituyendo estos resultados en (b):

$$4x^4 y D_x y + 8x^3y^2 - 3xy^2 D_x y - y^3 + 8 D_x y = \frac{2}{\sqrt{y}} D_x y \qquad (c)$$

Despejando $D_x y$ de la ecuación (c)

$$D_x y\left(4x^4y - 3xy^2 + 8 - \frac{2}{\sqrt{y}}\right) = y^3 - 8x^3y^2$$

$$D_x y = \frac{y^3 - 8x^3y^2}{4x^4y - 3xy^2 + 8 - \frac{2}{\sqrt{y}}}$$

$$D_x y = \frac{y^3\sqrt{y} - 8x^3y^2\sqrt{y}}{4x^4y\sqrt{y} - 3xy^2\sqrt{y} + 8\sqrt{y} - 2}$$

En conveniente notar que aún cuando de la ecuación que define una función implícita no sea posible despejar la variable dependiente y, su derivada $D_x y$ siempre se puede despejar después de derivar, pues queda de primer grado Además, en general, el resultado contiene tanto a x como a y.

Ejemplo. 35.

Encontrar $D_x y$ de la ecuación

$$\operatorname{sen}(xy) = x^2 + y$$

$$D_x(\operatorname{sen}(xy)) = D_x(x^2) + D_x(y)$$

$$(\cos(xy))\,D_x(xy) = 2x + D_x y$$

$$[\cos(xy)]\,(y + x D_x y) = 2x + D_x y$$

$$D_x y\,(x\cos(xy) - 1) = 2x - y\cos(xy)$$

$$D_x y = \frac{2x - y\cos(xy)}{x\cos(xy) - 1}$$

Ejemplo. 36

Encontrar $D_x y = y'$ de la ecuación $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1$, y calcular su valor en el punto $P(2, -1)$.

$$3x^2 - (3y^2 + 6xyy') + 3y^2y' = 0$$

$$y'(3y^2 - 6xy) = 3y^2 - 3x^2$$

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{y^2 - 2xy}$$

$$y'\Big]_P = \frac{(-1)^2 - 2^2}{(-1)^2 - 2(2)(-1)} = \frac{1-4}{1+4} = -\frac{3}{5}$$

III. 7 DERIVADA DE LA FUNCION DEFINIDA EN FORMA PARAMETRICA.

Se ha visto la derivación de funciones explícitas y de funciones dadas -

en forma implícita. Como se vió en el Capítulo I, existe otra forma de presentar una función $y = F(x)$, que es la forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = f(t) & (A) \\ y = g(t) & (B) \end{cases}$$

En esta parte se trata de calcular la derivada de y con respecto a x: $D_x y$, de una función dada en forma paramétrica, para lo cual se seguirá el siguiente razonamiento:

De la regla de la cadena:

$$D_x y = D_t y \, D_x t \qquad (C)$$

en donde $D_x t$ se puede calcular despejando " t " de la ecuación (A), lo cual no siempre es fácil y a veces es imposible. Otra forma de calcular $D_x t$ es usando la derivada de la función inversa, o sea:

$$D_x t = \frac{1}{D_t x}$$

con lo que la ecuación (C) se puede escribir:

$$D_x y = D_t y \cdot \frac{1}{D_t x} \Rightarrow$$

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \qquad (23)$$

La fórmula (23) permite calcular la derivada de una función paramétrica, sin tener que llegar a la ecuación cartesiana de la función.

Ejemplo. 37.

Encontrar $D_x y$ de la siguiente función.

a). Usando la fórmula (23), y b) eliminando el parámetro t y derivando el resultado.

$$\begin{cases} x = 2t^2 - t & (A) \\ y = +\sqrt{t} - 1 & (B) \end{cases}$$

a). $D_x y = \dfrac{D_t(+\sqrt{t} - 1)}{D_t(2t^2 - t)} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{4t - 1} = \dfrac{1}{8t\sqrt{t} - 2\sqrt{t}}$

$$D_x y = \frac{1}{8t\sqrt{t} - 2\sqrt{t}} \qquad (C)$$

b). De (B) : $t = (y + 1)^2$ (D)

sustituyendo en (A) :

$$x = 2\left[(y+1)^2\right]^2 - (y+1)^2 \Rightarrow x = 2(y+1)^4 - (y+1)^2 \qquad (E)$$

De la ecuación (E) se puede obtener $D_x y$ derivando implícitamente:

$$D_x x = D_x\left[2(y+1)^4 - (y+1)^2\right]$$

$$1 = 8(y+1)^3 D_x y - 2(y+1) D_x y$$

$$D_x y = \frac{1}{8(y+1)^3 - 2(y+1)} \qquad (F)$$

Los resultados (C) y (F) son equivalentes.

En efecto, sustituyendo (D) en (C):

$$D_x y = \frac{1}{8(y+1)^2\sqrt{(y+1)^2} - 2\sqrt{(y+1)^2}} = \frac{1}{8(y+1)^3 - 2(y+1)}$$

que comprueba el resultado obtenido

Ejemplo. 38.

Encontrar $D_x y$ de las siguientes ecuaciones paramétricas; valuarla para $t = 1$

$$\begin{cases} x = \text{ang tan } 2t^2 \\ y = L\, t^3 \end{cases}$$

$$D_x y = \frac{Dt\, L\, t^3}{Dt \text{ ang tan } 2t^2} = \frac{\frac{3t^2}{t^3}}{\frac{4t}{1+4t^4}} = \frac{3t^2(1+4t^4)}{4t^4}$$

$$D_x y = \frac{3(1+4t^4)}{4t^2}\ ; \quad D_x y \Big]_{t=1} = \frac{3(1+4)}{4(1)} = \frac{15}{4}$$

Ejemplo. 39.

De las ecuaciones paramétricas de la cicloide:

$$x = 2(\phi - \text{sen } \phi)$$

$$y = 2(1 - \cos \phi)$$

Calcular la derivada $D_x\, y$ y valuarla para $\phi = \frac{\pi}{4}$

$$D_x y = \frac{D_\phi 2(1 - \cos \phi)}{D\phi 2(\phi - \text{sen } \phi)} = \frac{2(\text{sen } \phi)}{2(1 - \cos \phi)} = \frac{\text{sen } \phi}{1 - \cos \phi}$$

$$D_x y = \frac{\text{sen } \phi}{1 - \cos \phi}$$

$$D_x y \Big]_{\phi = \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\ ; \quad D_x y \Big]_{\phi = \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

III.8 LA FUNCION DERIVADA.

En los temas anteriores se han tratado las derivadas de funciones algebraicas y trascendentes, como por ejemplo:

$$D_x \text{ sen } x^2 = 2x \cos x^2 \quad \text{ó} \quad D_x x^3 = 3x^2,$$

en este tema se debe puntualizar que la derivada de cualquier función es otra función. Así la derivada de la función $f(x) = x^3$ es la función $f'(x) = 3x^2$

Al derivar una función $f(x)$, se obtiene otra función $f'(x)$ llamada " función derivada " que tiene como regla de correspondencia al límite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siendo su dominio el conjunto de valores x del dominio de $y = f(x)$ en donde el límite anterior existe, o sea, donde la función $y = f(x)$ es derivable.

Entonces de la función:

$$f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in D_f\}$$

la función derivada será:

$$f' = \left\{ (x, y) \mid y = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},\ x \in D_f \right\}$$

$$D_{f'} \subseteq D_f$$

El proceso de derivación se puede entender ahora como un operador "D" que transforma una función en su derivada.

$$y = f(x) \qquad D_x \qquad y' = f'(x) = D_x f(x)$$

La notación de Cauchy para la derivada es apropiada cuando a la derivación se le trata expresamente como el operador que realiza la transformación.

Ejemplo. 40

Obtener la función derivada y su dominio de:

$$y = f(x) = \frac{1}{2} x^2;\ x \in (-3, 2)$$

graficar $y = f(x)$ y $y' = f'(x)$

Solución:

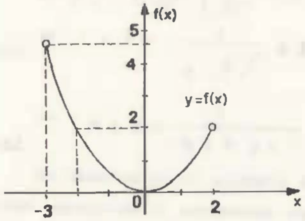
si $y = \frac{1}{2} x^2$

$$y' = D_x \frac{1}{2} x^2 = x \Rightarrow f'(x) = x$$

el dominio de $y' = f'(x)$ está determinado por todos los valores de x donde $y = f(x)$ es derivable y por ser ésta un polinomio, es derivable en todo su dominio, siendo el dominio de $y' = f'(x)$ el mismo que el de $y = f(x)$

$$D_f = D_{f'} = \{x \mid x \in (-3, 2)\}$$

Las gráficas de $y = f(x)$ y $y' = f'(x)$ se ven en la figura 8.



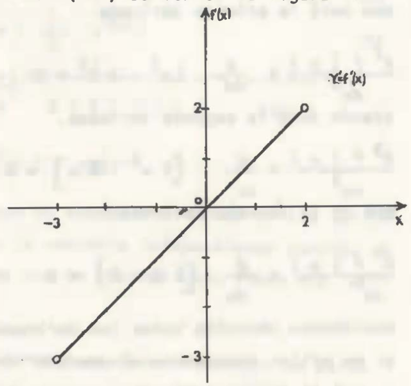


figura 8

Ejemplo. 41

Obtener la función derivada de:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ e^x & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

y trazar las gráficas de ambas funciones.

Solución:

Derivando directamente cada una de las reglas de correspondencia.

$$f'(x) = \begin{cases} D_x\, 1 = 0 & \text{si } x < 0 \\ D_x\, e^x = e^x & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$$

para $x = 0$ y $x = 2$ la función derivada no existe puesto que en estos puntos la función $y = f(x)$ no es derivable, como se hace ver a continuación

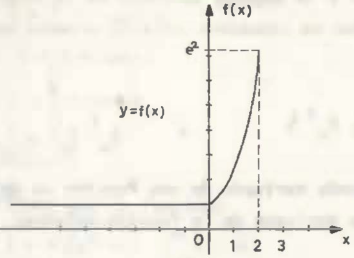
para $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = D_x\, 1 = 0\ ;\ f'(0) = 0 \\ f'_+(x) = D_x\, e^x;\ f'_+(0) = 1 \end{array}\right\} \quad f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

Para $x = 2$

$f'_+(2) \nexists$

Las gráficas de $y = f(x)$ y $y' = f'(x)$ se ven en la figura 9.



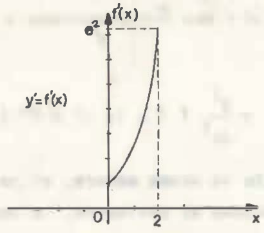


Figura 9.

Ejemplo. 42

Obtener la función derivada de la función. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Solución:

Se tiene $f'(x) = D_x\, x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\, x^{2/3}} = \frac{1}{3\, \sqrt[3]{x^2}}$

La función derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{3\, \sqrt[3]{x^2}}$$

Obsérvese que el dominio de $y = f(x)$ es el conjunto de los números reales, sin embargo para $x = 0$, $y' = f'(x)$ no existe.

$$D_{f'} = \{x \mid x \in R,\ x \neq 0\}$$

III.9 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

Quedó establecido en el tema III.1 el concepto de derivada de una función $y = f(x)$ mediante la expresión:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si esta nueva función $y' = f'(x)$ es derivable, entonces al derivarla se obtiene otra función de x que puede representarse con $f''(x)$ y que se llama segunda derivada de la función $y = f(x)$.

Esto es:

$$f''(x) = D_x f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

Las notaciones que representan a la segunda derivada de la función $y = f(x)$ y que son consecuencia de las ya conocidas para la primera derivada son:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \text{ o } \frac{d^2}{dx^2} f(x); \; y'' \text{ ó } f''(x), \; D_x^2 y \quad \text{ó} \quad D_x^2 f(x), \; \ddot{y}$$

De la misma manera, si la segunda derivada de una función es derivable se obtiene al derivarla, la tercera derivada de la función original, que se representa con:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3}{dx^3} f(x), \; y''' = f'''(x); \; D_x^3 y = D_x^3 f(x); \; \dddot{y}$$

Al seguir derivando sucesivamente una función $y = f(x)$, la enésima derivada, donde $n \in N$, $n > 1$, es la primera derivada de la $(n-1)$ derivada de $y = f(x)$. Es decir, si todas las derivadas sucesivas hasta la de orden $n-1$ son derivables, la enésima derivada de $y = f(x)$ (o de orden n) se obtiene aplicando al operador derivada a la función obtenida al calcular la derivada de orden $n-1$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d}{dx}\left[f^{(n-1)}(x)\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

Obviamente las notaciones que se emplean para la derivada de orden n de la función $y = f(x)$ son.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} f(x); \; y^{(n)} = f^{(n)}(x), \; D_x^n y = f^n(x).$$

En la notación de Lagrange por comodidad se emplea un número romano cuando el orden es mayor que 3 y la notación de Newton no se emplea para derivadas sucesivas después de la tercera.

Ejemplo. 43

Calcular todas las derivadas de orden superior de la función:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + 4\,\frac{x^3}{3} + 5x - 1 \qquad \text{(a)}$$

Solución:

Se procede a obtener las derivadas sucesivas:

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^4}{4} + 4\,\frac{x^3}{3} + 5x - 1\right] = x^3 - 4x^2 + 5 \qquad \text{(b)}$$

que será la primera derivada.

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 4x^2 + 5\right) = 3x^2 - 8x \qquad \text{(c)}$$

siendo ésta la segunda derivada.

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[3x^2 - 8x\right] = 6x - 8 \qquad \text{(d)}$$

que es la tercera derivada.

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left[6x - 8\right] = 6 \qquad \text{(e)}$$

habiéndose obtenido todas las derivadas sucesivas diferentes de cero, pues si se aplica nuevamente el operador derivada, a la función $f^4(x)$ se obtendrá la quinta derivada:

$$\frac{d^5 f(x)}{dx^5} = \frac{d}{dx}(6) = 0 \qquad \text{(f)}$$

Se observa que todas las derivadas sucesivas de orden superior al 4° serán iguales a cero. Por tanto se puede inferir que cuando se tiene una función polinómica, la derivada sucesiva distinta de cero de mayor orden que se puede obtener es de orden igual al grado del polinomio.

Así, en el ejemplo 43 se tiene un polinomio de cuarto grado, por lo que solo hasta la cuarta derivada, las derivadas sucesivas serán diferentes de cero.

Ejemplo. 44

Dada la función $f(x) = x^{1/3}$ obtener el valor de la segunda derivada $f''(x)$ para $x = 8$.

Solución:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] = \frac{1}{3}\, x^{-2/3} \qquad (a)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\, f'(x)\right] = -\frac{2}{9}\, x^{-5/3} \qquad (b)$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2}{9(8)(4)} = -\frac{1}{144}$$

$$f''(8) = -\frac{2}{9(8)(4)} \qquad f''(8) = -\frac{1}{144}$$

Se observa en el ejemplo anterior que al aumentar el orden de las derivadas sucesivas el exponente negativo de la variable independiente también aumenta en valor absoluto, lo cual hace ver que la función dada tiene una infinidad de derivadas sucesivas.

Se dice que una función $f(x)$ es infinitamente derivable en un punto si existen todas las derivadas de orden superior para dicho punto x, es decir, si $f^{(n)}(x)$ existe para $n = 1, 2, 3 \ldots$

Una función $f(x)$ será infinitamente derivable en un intervalo I, si es infinitamente derivable en cada punto de dicho intervalo.

La función del ejemplo 44 es infinitamente derivable para toda $x \neq 0$.

La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es también infinitamente derivable (ejemplo 45) como lo son todas las funciones trascendentes.

Ejemplo. 45

Hallar las derivadas sucesivas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Solución:

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x$

$f^{V}(x) = \cos x$

Ejemplo. 46

Verificar que la función:

$$y = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^n \quad n \in N$$

satisface la ecuación: $(x^2+1)\, y'' + x\, y - n^2 y = 0$

Solución:

Si: $y = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^n$

$$y' = n\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$y' = n\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{n-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$y' = \frac{n\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{n}}{\sqrt{x^2+1}}\ ; \quad y' = \frac{ny}{\sqrt{x^2+1}} \qquad (A)$$

Calculando ahora la segunda derivada:

$$y'' = (y')' = \frac{\sqrt{x^2+1}\; n\, y' - n\, y\, \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \qquad (B)$$

Sustituyendo (A) en (B):

$$y'' = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right) n \dfrac{ny}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{nyx}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$y'' = \frac{n^2 y - \dfrac{nxy}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\dfrac{n^2 y\sqrt{x^2+1} - nxy}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$y'' = \frac{n\,y\,(\,n\,\sqrt{x^2+1} - x\,)}{(\,x^2+1\,)^{3/2}} \qquad (C)$$

Sustituyendo (A) y (C) en la ecuación dada:

$$\frac{(\,x^2+1\,)\,n\,y\,(\,n\sqrt{x^2+1} - x)}{(\,x^2+1)^{3/2}} + \frac{n\,x\,y}{\sqrt{x^2+1}} - n^2 y = 0$$

$$\frac{n^2 y \sqrt{x^2+1} - n\,x\,y}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{n\,x\,y}{\sqrt{x^2+1}} - n^2 y = 0$$

$$n^2 y \sqrt{x^2+1} - n\,x\,y + n\,x\,y - n^2 y \sqrt{x^2+1} = 0$$

$$0 = 0$$

y la función sí satisface la ecuación dada.

- Derivadas de orden superior de funciones implícitas.

En el tema III.6 se presentó el procedimiento para obtener la primera derivada de una función implícita.

Una vez obtenida la primera derivada en términos tanto de la variable independiente como de la dependiente, la segunda derivada se encuentra derivando ambos miembros de la ecuación obtenida tomando en cuenta que en el segundo miembro, puede aparecer la variable dependiente teniéndose que aplicar en estos casos la regla de la cadena.

Ejemplo. 47

Encontrar la segunda derivada y'' de:

$$xy - y^2 + 2 = 0$$

Solución:

Derivando implícitamente para encontrar y':

$$xy' + y - 2\,y\,y' = 0 \qquad (A)$$

Despejando y' ;

$$y' = \frac{-y}{x - 2\,y} \qquad (B)$$

Derivando en la ecuación (B) para obtener y'':

$$y'' = \frac{(\,x - 2\,y\,)\,(\,-y'\,) - (\,-y\,)\,(\,1 - 2\,y'\,)}{(\,x - 2\,y\,)^2}$$

$$y'' = \frac{2\,y\,y' - x\,y' + y - 2\,y\,y'}{(\,x - 2\,y\,)^2}\ ; = \frac{y - x\,y'}{(\,x - 2\,y\,)^2} \qquad (C)$$

Con la ecuación (C) se tiene la segunda derivada y se puede observar que ésta queda en términos de x, y, y y'; Será conveniente tener a y'' como función de x y de y únicamente para lo cual bastará sustituir (B) en (C).

$$y'' = \frac{y - x\left(\frac{-y}{x - 2\,y}\right)}{(\,x - 2y\,)^2}$$

$$y'' = \frac{y + \frac{xy}{x - 2\,y}}{(\,x - 2\,y\,)^2}\ ; \qquad y'' = \frac{\frac{(\,x - 2\,y\,)y + xy}{x - 2\,y}}{(\,x - 2\,y\,)^2}$$

$$y'' = \frac{2\,x\,y - 2\,y^2}{(\,x - 2\,y\,)^3} \qquad (D)$$

Es posible encontrar la segunda derivada sin necesidad de tener una ecuación explícita para la primera derivada. Para esto solo es necesario tener una ecuación que contenga la primera derivada y derivarla implícitamente.

Ejemplo. 48

Del ejemplo 47 obtener y'' a partir de la ecuación $x\,y' + y - 2\,y\,y' = 0$ (A)

Derivando implícitamente:

$$(x D_x y' + y' D_x x) + D_x y - 2 D_x (y y') = 0$$

$$xy'' + y' + y' - 2 (y y'' + y' y') = 0 \qquad (E)$$

Despejando y'':

$$y'' (x - 2 y) = 2 (y')^2 - 2y' \Longrightarrow$$

$$y'' = \frac{2 (y')^2 - 2 y'}{x - 2 y} \qquad (F)$$

En esta expresión y'' se encuentra también en términos de x, y, y y''.

Sustituyendo (B) en (F).

$$y'' = \frac{2 \left(\frac{- y}{x - 2 y} \right)^2 - 2 \left(\frac{- y}{x - 2 y} \right)}{x - 2 y}$$

$$y'' = \frac{\frac{2 y^2}{(x - 2 y)^2} + \frac{2 y (x - 2 y)}{(x - 2 y)^2}}{x - 2 y} = \frac{2 y^2 + 2 x y - 4 y^2}{(x - 2 y)^3}$$

$$y'' = \frac{2 x y - 2 y^2}{(x - 2 y)^3} \qquad (G)$$

Las ecuaciones (G) y (D) son equivalentes, obviamente.

El procedimiento para obtener la derivada enésima de una función implícita, es derivar implícitamente a la ecuación que contenga a la derivada de orden (n - 1) ya sea que esté despejada o no.

Ejemplo. 49

Del ejemplo 48 obtener la tercera derivada: y'''.

Solución:

Partiendo de la ecuación (E) :

$$xy'' + 2 y' - 2 y y'' - 2 (y')^2 = 0 \qquad (E)$$

Derivando implícitamente:

$$x y''' + y'' + 2 y'' - 2 y y''' - 2 y' y'' - 4 y' y'' = 0$$

$$x y''' + 3 y'' - 2 y y''' - 6 y' y'' = 0$$

Despejando y''':

$$y''' (x - 2 y) = 6 y' y'' - 3 y' \Rightarrow y''' = \frac{6 y' y'' - 3 y''}{x - 2y}$$

Sustituyendo las expresiones de y' y y'' obtenidas antes:

$$y''' = \frac{6 \left(\frac{- y}{x - 2 y} \right) \left[\frac{2 x y - 2 y^2}{(x - 2 y)^3} \right] - 3 \left[\frac{2 x y - 2 y^2}{(x - 2 y)^3} \right]}{x - 2 y}$$

$$= \frac{\frac{- 6 y (2 x y - 2 y^2)}{(x - 2 y)^4} - \frac{6 x y - 6 y^2}{(x - 2 y)^3}}{x - 2 y} =$$

$$= \frac{\frac{- 6 y (2 x y - 2 y^2) - (x - 2 y) (6 x y - 6 y^2)}{(x - 2 y)^4}}{x - 2 y}$$

$$= \frac{- 12 x y^2 + 12 y^3 - 6 x^2 y + 12 x y^2 + 6 x y^2 - 12 y^3}{(x - 2 y)^5}$$

$$= \frac{- 6 x^2 y + 6 x y^2}{(x - 2 y)^5} \Longrightarrow y''' = \frac{6 x y^2 - 6 x^2 y}{(x - 2 y)^5}$$

Ejemplo. 50

Calcular y' y y'' para la función $e^x + x = 2 e^y + y$

Solución:

Se obtiene y':

$$e^x + 1 = 2\,e^y\,(y') + y'$$

$$e^x + 1 = y'\,(2\,e^y + 1)$$

por lo tanto: $$y' = \frac{e^x + 1}{2\,e^y + 1}$$

Obteniendo y'':

$$e^x = 2\,e^y\,y'' + 2\,e^y\,y'\,y' + y''$$

luego: $$y'' = \frac{e^x - 2\,e^y\,(y')^2}{2\,e^y + 1}$$

$$y'' = \frac{e^x - 2\,e^y \left(\dfrac{e^x + 1}{2\,e^y + 1}\right)^2}{(2\,e^y + 1)} = \frac{e^x\,(2\,e^y + 1)^2 - 2\,e^y\,(e^x + 1)^2}{(2\,e^y + 1)^3}$$

$$= \frac{e^x\,(4\,e^{2y} + 4\,e^y + 1) - 2\,e^y\,(e^{2x} + 2\,e^x + 1)}{(2\,e^y + 1)^3} =$$

$$= \frac{4\,e^{2y+x} + 4\,e^{x+y} + e^x - 2\,e^{2x+y} - 4\,e^{x+y} - 2\,e^y}{(2\,e^y - 1)^3}$$

$$= \frac{4\,e^{2y+x} \quad e^x - 2\,e^{2x+y} - 2\,e^y}{(2\,e^y + 1)^3}$$

-Derivadas de orden superior de funciones definidas paramétricamente.

En el tema III.7 se estudió la derivación de funciones dadas paramétricamente, y se demostró que:

$$D_x\,y = \frac{D_t\,y}{D_t\,x} \qquad (23)$$

El objetivo de este tema es encontrar una forma para obtener las derivaciones de orden superior de una función definida paramétricamente.

Se sabe que:

$$D_x^2\,y = D_x\,(D_x\,Y) \qquad (A)$$

Cuando se utiliza la expresión (23) la derivada $D_x\,Y$ es en general función de t y no de x, entonces existe la necesidad de aplicar la regla de la cadena para aplicar (A).

$$D_x^2\,Y = D_t\,(D_x\,Y)\quad D_x\,t$$

Pero: $$D_x\,t = \frac{1}{D_t\,x}$$

Entonces:

$$D_x^2\,Y = \frac{D_t\,(D_x\,Y)}{D_t\,x} \qquad (B)$$

La ecuación (B) permite calcular la derivada segunda de una función paramétrica, para lo cual es necesario conocer la primera derivada $D_x\,Y$ como -- función de t.

Siguiendo un procedimiento análogo para determinar la enésima derivada:

Por definición de enésima derivada: $D_x^n\,y = D_x\,(D_x^{n-1}\,y)$
Aplicando la regla de la cadena:

$$D_x^n\,Y = D_t\,(D_x^{n-1}\,Y)\quad D_x\,t$$

$$D_x^n\,Y = \frac{D_t\,(D_x^{n-1}\,Y)}{D_t\,x} \qquad (24)$$

o bien: $$\frac{d^n\,Y}{dx^n} = \frac{\dfrac{d}{d\,t}\,\dfrac{d^{n-1}\,Y}{d\,x^{n-1}}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

Es claro que para obtener la enésima derivada es necesario conocer todas las derivadas anteriores.

Ejemplo. 51

Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2\,y}{d\,x^2}$ para la función definida por:

$$x = \frac{3\,t + t^3}{54} \quad ; \quad y = \frac{t^3 - 9\,t}{9}$$

Solución:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1+t^2}{18} \; ; \; \frac{dy}{dt} = \frac{t^2-3}{3} \quad , \text{ luego:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{t^2-3}{3}}{\frac{1+t^2}{18}} = \frac{6\,(t^2-3)}{1+t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6t^2-18}{t^2+1} \qquad \text{(a)}$$

Calculando: $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{(6t^2-18)}{t^2+1}\right]}{\frac{t^2+1}{18}}$$

$$= \frac{\frac{(t^2+1)(12t)-(6t^2-18)(2t)}{(t^2+1)^2}}{\frac{t^2+1}{18}} =$$

$$= \frac{18\,(12t^3+12t-12t^3+36t)}{(t^2+1)^3}$$

$$= \frac{18\,(48t)}{(t^2+1)^3} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{864\,t}{(t^2+1)^3}$$

Ejemplo. 52

Calcular $D_x^3\, y$ de la función dada por:

$x = \text{sen } t, \qquad y = \cos^2 t$

Solución: como $D_t\, x = \cos t, \qquad D_t\, y = -2\cos t \text{ sen } t$

$$D_x\, Y = \frac{-2\cos t \text{ sen } t}{\cos t} = -2 \text{ sen } t.$$

$$D_x^2\, y = \frac{-2\cos t}{\cos t} = -2$$

$$D_x^3\, Y = 0$$

Ejemplo. 53

Calcular $D_x^3\, Y$ y valuarla para $t = 1$, si la función se da con:

$x = \text{ang tan } t^2$

$y = t^2 + 2$

$$D_x\, Y = \frac{D_t\, Y}{D_t\, x} = \frac{2t}{\frac{2t}{1+t^4}} = 1 + t^4$$

$$D_x^2\, Y = \frac{D_t\,(D_x\, Y)}{D_t\, x} = \frac{4t^3}{\frac{2t}{1+t^4}} = 2t^2\,(1+t^4) = 2t^2 + 2t^6$$

$$D_x^3\, Y = \frac{D_t\,(D_x^2\, y)}{D_t\, x} = \frac{4t+12t^5}{\frac{2t}{1+t^4}} = (2+6t^4)(1+t^4)$$

$$D_x^3\, Y = 6t^8 + 8t^4 + 2$$

$$D_x^3\, Y\Big|_{t=1} = 6 + 8 + 2 = 16$$

[illegible]

CAPITULO 4

OBJETIVO GENERAL DEL CAPITULO:

Al finalizar el estudio de este capítulo el alumno podrá interpretar geométricamente el concepto de la derivada y aplicar éste en la solución de problemas.

Al finalizar este capítulo, el alumno podrá:

IV.1. Representar gráficamente, en forma secuencial, cada uno de los pasos de la derivación a partir de la definición.

IV.2. Enunciar el significado geométrico de la derivada de una función en un punto.

IV.3. Dada la gráfica de una función indicar el signo de la derivada para un punto cualquiera de ella.

IV.4. Dada la ecuación de una curva y un punto de ella, determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en el punto dado.

IV.5. Determinar el o los puntos de una curva donde la recta tangente o la recta normal a dicha curva tenga una pendiente dada.

IV.6. Dada la ecuación de una curva y un punto de ella, determinar las longitudes de los segmentos tangente, normal, subtangente y subnormal.

IV.7. Dadas las ecuaciones de dos curvas que se cortan, determinar el valor del ángulo que forman en cada punto de intersección.

IV.8. Dada una función real de variable real, encontrar la razón de cambio de una de las variables conocida la razón de cambio de la otra variable.

IV.9. A partir de datos conocidos de un problema físico o geométrico simple, un valor para una de las variables relacionadas y la razón de cambio de ésta, calcular la correspondiente razón de cambio para la segunda variable relacionada.

ALGUNAS APLICACIONES DE LA DERIVADA

INTRODUCCION:

El presente capítulo tiene por objeto presentar algunas de las más importantes aplicaciones del concepto de derivada. Es pertinente aclarar que no existe practicamente rama de la ingeniería en donde no se encuentren una gran variedad de usos y aplicaciones de este concepto. Por este motivo sería sumamente difícil abarcar en este curso, el estudio de todas estas aplicaciones que involucraría necesariamente el conocimiento de una gran diversidad de disciplinas (mecánica, electricidad y magnetismo, resistencia de materiales, circuitos eléctricos, mecánica de fluídos, etc.). A lo largo de la carrera, el alumno irá conociendo y aplicando en diferentes campos de la ingeniería, el concepto de derivada a un gran número de problemas.

IV.1 INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA.

- Tangente a una curva.

El trazo de la recta tangente a una curva en un punto dado de ella es una herramienta importante en la resolucion de muchos problemas geométricos y matemáticos en general.

Antes de la invención del Cálculo Diferencial, el problema de trazo de la recta tangente pudo ser resuelto sólo para algunos casos especiales. Por ejemplo, la recta tangente a una circunferencia en un punto de ella pudo llegar a trazarse sabiendo que ésta era perpendicular al radio correspondiente en dicho punto. Sin embargo para otro tipo de curvas la solución al problema no había sido satisfactoria.

Fue hasta la aparición del matemático francés Pierre Fermat cuando se concibió la recta tangente a una curva, como la posición límite de la recta secante a dicha curva cuando los dos puntos de intersección de la secante con la curva se aproximan uno al otro.

La idea que tenía Fermat acerca de lo que debía entenderse por " posición límite de la secante " era vaga e imprecisa y no llegó a establecerse un método generalizado que pudiera ser aplicable a cualquier caso.

No fue sino hasta la publicación de los trabajos de los matemáticos Isaac Newton y Gottfried W. Leibniz, relativos a la formalización de los conceptos de límite y derivada, cuando se dispuso de las herramientas necesarias para precisar la solución del problema de la recta tangente a una curva en un punto.

Consideremos una curva continua y en ella un punto fijo P. La recta que pasa por el punto P y corta a la curva en otro punto Q se llama secante de la curva (ver fig. 1).

Si se mueve el punto Q sobre la curva acercándose al punto P, la secante gira alrededor de P, y tiende a una posición límite que es la de la recta PT.

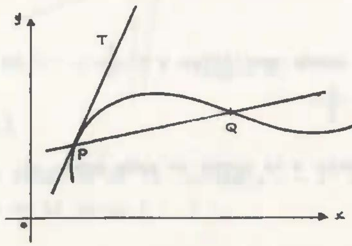


Figura 1

Se considera que la recta PT es el límite de la secante PQ y se define como la tangente a la curva en el punto P.

Interpretación Geométrica de la derivada.

A continuacion se analizará el significado geométrico de la derivada de una función en un punto cualquiera x_o, teniendo presente que:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to X_o} \frac{f(x) - f(X_o)}{x - X_o}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(X_o + \Delta x) - f(X_o)}{\Delta x}$$

Para ello, considérese una curva C que sea la gráfica de una función continua f cuya ecuación sea $y = f(x)$

Considérese además sobre la curva c :

- un punto P (Xo, Yo)
- un punto Q (x, y)
- la recta tangente PT a la curva C en Xo.
- la recta secante PQ a la curva C,

tal y como se muestra en la siguiente figura:

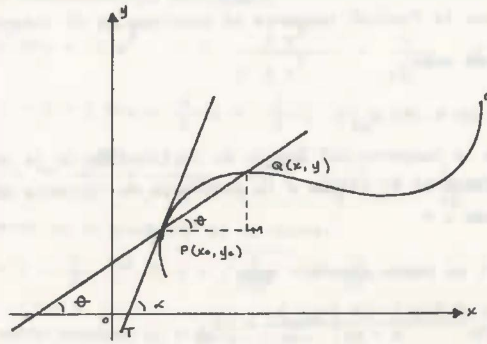


Figura 2.

De la figura anterior se puede observar que:

- Si el punto Q se mueve sobre la curva C, el ángulo de inclinación θ de la secante PQ es variable. Si Q se acerca a P, entonces el ángulo θ se aproxima al ángulo de inclinación α de la recta tangente PT. Lo anterior se puede escribir simbólicamente como:

$$\lim_{Q \to P} \theta = \alpha$$

que se lee: " el angulo θ tiende al valor del ángulo α cuando el punto Q -- tiende a la posición de P "

- El hecho de que Q tienda a P implica que x tienda a Xo, es decir:

$$Q \to P \Longleftrightarrow x \to X_o$$

- Considerando el triángulo rectángulo PQM se tiene que:

$$\frac{f(x) - f(X_o)}{x - X_o} = \frac{y - Y_o}{x - X_o} = \tan\theta$$

- Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene que:

$$\lim_{x \to X_o} \frac{f(x) - f(X_o)}{x - X_o} = \lim_{x \to X_o} \tan\theta$$

- Considerando que la función tangente es continua en el intervalo --- $\left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ se tiene que:

$$\lim_{x \to X_o} \tan\theta = \tan\alpha = m_{pt}$$

lo cual significa que la tangente del ángulo de inclinación de la recta secante, o sea la pendiente de PQ tiende a la pendiente de la recta tangente - PT si el punto Q tiende a P.

- De lo anterior, se puede concluir que:

$$f'(X_o) = \lim_{x \to X_o} \frac{f(x) - f(X_o)}{x - X_o} = m_{pt} \qquad (1)$$

lo que significa que la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto, es - igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

Ejemplo. 1

Hallar la pendiente de la tangente a la curva de ecuación $y = x^2 - 3$ en el - punto P (1, - 2). ver figura 3.

Solución:

$$m = \frac{dy}{dx} \; ; \; m = 2x \; ; \; \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 2(1) = 2$$

y por tanto: $m = 2$

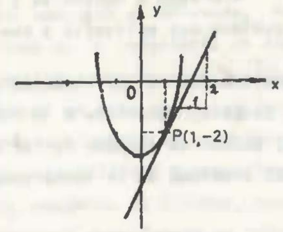


figura 3.

Ejemplo. 2

Determinar los puntos de la curva de ecuación $y = \frac{5}{1 - 2x}$ donde la tangente es paralela a la recta de ecuación $2x - 5y + 5 = 0$

Solución:

La ecuación de la recta puede escribirse $y = \frac{2}{5} x - 1$ de donde se deduce que su pendiente es: $m_1 = \frac{2}{5}$

La pendiente de la tangente a la curva en cada punto es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{10}{(1 - 2x)^2}$$

Como la condición de paralelismo entre dos rectas de pendientes m_1 y -- m_2 es $m_1 = m_2$, se tiene:

$$\frac{2}{5} = \frac{10}{(1 - 2x)^2}$$

Resolviendo esta ecuación:

$(1 - 2x)^2 = 25 \Rightarrow 1 - 4x + 4x^2 = 25 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$, de donde: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

Para $x_1 = 3$: $y_1 = \frac{5}{1 - 2(3)} = \frac{5}{-5} = -1$

Para $x_2 = -2$: $y_2 = \frac{5}{1 - 2(-2)} = \frac{5}{5} = 1$

Los puntos buscados son:

$P_1(3, -1)$ y $P_2(-2, 1)$

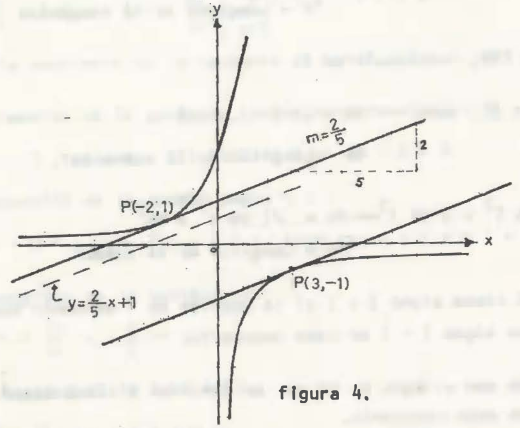


figura 4.

Ejemplo. 3

Hallar la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto (1, 1).

Solución:

Como la parábola debe pasar por el punto P (1, 1) las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación de la misma:

$1 = (1)^2 + b(1) + c \Rightarrow b + c = 0$ . . . . (A)

Puesto que la parábola y la recta deben ser tangentes en P, debe tenerse en dicho punto $m_1 = m_2$.

$y = x \Rightarrow m_1 = y' = 1$ . . . . (B)

De la ecuación de la parábola: $D_x y = 2x + b$

Para el punto (1, 1):

$D_x y\big]_{(1,1)} = m_2 = 2(1) + b = 2 + b$ . . . . (C)

de las ecuaciones (B) y (C).

$m_1 = m_2 \Rightarrow 1 = 2 + b$ por lo tanto $\underline{b = -1}$

y con la ecuación (A) $\underline{c = 1}$

de donde la ecuación de la parábola es:

$y = x^2 - x + 1$

Ejemplo. 4

Encontrar el punto de la curva $y^2 = 2x^3$ para el cual su tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$

Solución:

Por la condición de perpendicularidad $m_1 = \frac{-1}{m_2}$, por lo que es necesario hallar primeramente las derivadas.

$y^2 = 2x^3 \Rightarrow y = \sqrt{2x^3}$; $y' = \frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{x} \Rightarrow m_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{x}$

$4x - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$; $y' = 4/3 \Rightarrow m_2 = \frac{4}{3}$

$m_1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{2}} = \frac{-3}{4}$; $\sqrt{x} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$, $x = \frac{2}{16} \Rightarrow x = \frac{1}{8}$

sustituyendo en la ecuacion de la curva:

$y^2 = 2\left(\frac{1}{8}\right)^3 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{256}} = \frac{1}{16}$

El punto buscado es $P\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right)$.

IV.2. ECUACIONES DE LA TANGENTE Y DE LA NORMAL. LONGITUDES DE LA TANGENTE, NORMAL, SUBTANGENTE Y SUBNORMAL.

Sea una curva C de ecuación $y = f(x)$ donde $y = f(x)$ una función continua en x.

Se sabe que la pendiente m de la tangente PT a C en $P(x_0, y_0)$ es: $m = f'(x_0)$

luego la ecuación de dicha tangente puede escribirse usando la forma punto - pendiente de la ecuación de una recta, así:

$$y - yo = f'(xo)(x - xo) \qquad \ldots . (2)$$

Se define como normal a una curva en un punto, a la recta que pasa por el punto y es perpendicular a la tangente a la curva en el mismo.

Así, la normal a la curva C en el punto P es la recta PN, fig. 5.

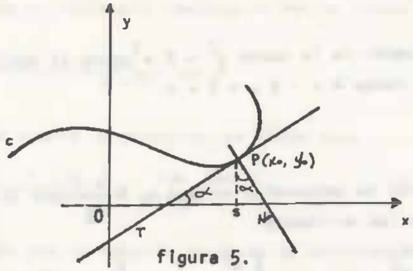


figura 5.

Sabiendo que la condición de perpendicularidad de dos rectas es que sus pendientes sean recíprocas y de signo contrario, se puede escribir la pendiente m_N de la normal:

$m_N = -\frac{1}{f'(xo)}$, por lo cual la ecuación de dicha normal es:

$$y - yo = -\frac{1}{f'(xo)}(x - xo) \qquad \ldots . (3)$$

Longitudes de la tangente, la normal, la subtangente y la subnormal.

La longitud de la tangente se define como la longitud del segmento de la recta tangente comprendido entre el punto de tangencia P y el punto T donde la tangente corta al eje x. La longitud de la proyección de este segmento sobre el eje x se llama longitud de la subtangente. (Ver figura 5).

La longitud de la normal se define como la longitud del segmento de la normal comprendido entre el punto de tangencia P y el punto N donde la normal corta al eje x. La longitud de la proyección de este segmento sobre el eje x se llama longitud de la subnormal.

En el triángulo PTS, rectángulo en S, de la fig. 5 se tiene:

$$f'(xo) = \tan\alpha = \frac{SP}{TS} \Longrightarrow TS = \frac{SP}{\tan\alpha}$$

Pero SP = Yo; $TS = \frac{Yo}{f'(Xo)}$; TS = Longitud de la subtangente.

también : $(TP)^2 = (TS)^2 + (SP)^2$ $\quad TP = \sqrt{(TS)^2 + Yo^2}$

TP = Longitud de la tangente.

En el triángulo PSN, rectángulo en S:

$\tan\alpha = \frac{SN}{SP}$; $SN = SP \tan\alpha \Longrightarrow SN = yo\, f'(xo)$

SN = Longitud de la subnormal.

además:

$$(PN)^2 = (SN)^2 + (SP)^2 \Longrightarrow PN = \sqrt{(SN)^2 + Yo^2}$$

PN = Longitud de la normal.

Obsérvese que TS tiene signo (+) si la abscisa de T es menor que la abscisa de S, y, tiene signo (-) en caso contrario.

Otro tanto sucede con el signo de SN que es (+) si N tiene mayor abscisa que S, y es (-) en caso contrario.

Relación entre la longitud de la tangente, de la normal y de la ordenada del punto de tangencia.

Si en un triángulo rectángulo, a y b son los catetos y h la altura tomando como base la hipotenusa, se tiene por geometría que:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

De ahí se deduce fácilmente que:

$$\frac{1}{Yo^2} = \frac{1}{(TP)^2} + \frac{1}{(PN)^2} \qquad \ldots . (4)$$

Ejemplo 5.-

Obtener las ecuaciones de la recta tangente v de la recta normal, las longitudes de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la subnormal a la curva $y = (x - 2)^2 + 1$, en el punto P (3, 2). Verificar la relación (4).

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(x - 2)\;;\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = 2\,(3 - 2) = 2$$

luego la pendiente de la tangente es m = 2.

Ecuación de la tangente, según la expresión (2):

$y - 2 = 2\,(x - 3)$, o bien $2x - y - 4 = 0$

Ecuación de la normal según (3):

$y - 2 = -\frac{1}{2}\,(x - 3)$; Esto es: $x + 2y - 7 = 0$

Longitud de la subtangente:

$$TS = \frac{Yo}{m} = \frac{2}{2} = 1$$

Longitud de la subnormal:

$SN = Yo\,m = 2\,(2) = 4$

Longitud de la tangente:

$$TP = \sqrt{(TS)^2 + (Y_o)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\;;\quad TP = \sqrt{5}$$

Longitud de la normal:

$$PN = \sqrt{(SN)^2 + (Yo)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\;;\quad PN = 2\sqrt{5}$$

Estos resultados pueden observarse en la figura 6.

Verificación de la relación (4).

$$\frac{1}{Yo^2} = \frac{1}{(TP)^2} + \frac{1}{(PN)^2}\;;\quad \frac{1}{2^2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{4+1}{20}$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

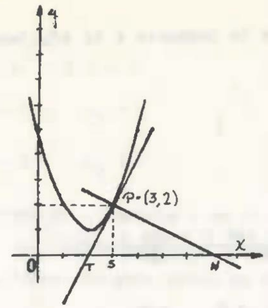


Figura 6

Ejemplo. 6

Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y = \text{ang sen}\,\frac{x - 1}{2}$ en su punto de intersección con el eje x.

Solución:

Para obtener el punto de intersección:

$$y = 0 = \text{ang sen}\,\frac{x-1}{2} \Longrightarrow \text{sen}\,0 = \frac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow x = 1$$

P (1, 0)

Cálculo de la derivada y' = m.

$$y' = \frac{1/2}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}\quad \text{para P (1, 0).}\quad y' = \frac{1}{2} = m$$

Ecuación de la tangente: $y - Yo = m\,(x - Xo)$

$y = \frac{1}{2}\,(x - 1)$ ...tangente

Ecuación de la normal: $y - Yo = \frac{-1}{m}\,(x - 1)$

$y = -2\,(x - 1)$ ...normal.

Ejemplo 7.

Hallar la ecuación de la tangente a la siguiente curva dada en forma paramétrica; para $t = \frac{\pi}{2}$

$$y = t \cos t$$
$$x = t \operatorname{sen} t$$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-t \operatorname{sen} t + \cos t}{\operatorname{sen} t + t \cos t}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-\frac{\pi}{2} + 0}{1 + 0} = \frac{-\pi}{2} \qquad m = \frac{-\pi}{2}$$

las coordenadas del punto de tangencia son:

$$Xo = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \Rightarrow Xo = \frac{\pi}{2}$$

$$Yo = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow Yo = 0$$

La ecuación es:

$$y - 0 = -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\frac{\pi}{2} x + y - \frac{\pi^2}{4} = 0$$

Que es la ecuación buscada.

Ejemplo 8.

Hallar la longitud del segmento subtangente a la curva $y = 2^x$ para cualquier punto.

Solución:

$$\overline{TS} = \frac{Yo}{Yo'}$$

$$y' = D_x 2^x = 2^x L 2$$

$$\overline{TS} = \frac{2^x}{2^x L 2} = \frac{1}{L 2} \qquad \overline{TS} = \frac{1}{L 2}$$

Ejemplo. 9

Demostrar que la longitud de la subnormal de la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$, en un punto cualquiera, es igual a la abcisa del punto.

Solución:

$$SN = Yo\ Yo'$$

$$x^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$SN = y\,y' = \sqrt{x^2 - a^2}\ \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} = x$$

Q.D.

IV.3 ANGULO DE INTERSECCION ENTRE DOS CURVAS.

La dirección de una curva en un punto se define como la dirección de su recta tangente en ese punto.

Así, la dirección de la curva C de ecuación $y = f(x)$ en el punto $P(xo, yo)$ está dada por el ángulo de inclinación de la recta tangente PT o bien por la pendiente de ésta:

$$m = \tan \alpha = f'(xo)$$

Ahora es fácil definir el ángulo que dos curvas C_1 y C_2 forman al cortarse en el punto $P(xo, yo)$ como el ángulo ϕ que determinan las tangentes a las curvas en P . (ver figura 7).

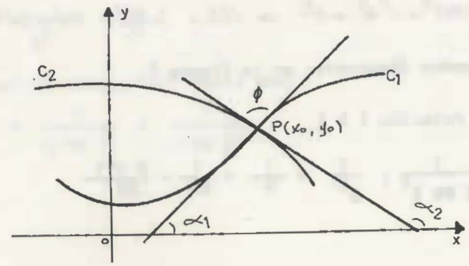


Figura 7.

Sean $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ las ecuaciones de C_1 y C_2 respectivamente, se tendrá:

$$m_1 = \tan \alpha_1 = f_1'(Xo) \; ; \; m_2 = \tan \alpha_2 = f_2'(Xo)$$

En la figura 7, es evidente que: $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$

Con lo que el ángulo ϕ puede determinarse por medio de las derivadas de $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ teniéndose:

$$\phi = \text{ang tan } f_2'(Xo) - \text{ang tan } f_1'(Xo)$$

Otra forma de obtener ϕ es mediante la fórmula:

$$\tan \phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{f_2'(Xo) - f_1'(Xo)}{1 + f_1'(Xo)\, f_2'(Xo)}$$

de donde; $\phi = \text{ang tan } \dfrac{f_2'(Xo) - f_1'(Xo)}{1 + f_1'(Xo)\, f_2'(Xo)}$

Ejemplo. 10

Determinar el ángulo que forman al cortarse las parabolas:

$$y^2 = \frac{x}{2} \quad \ldots\ldots (A)$$

$$y = \frac{x^2}{4} \quad \ldots\ldots (B)$$

Solución:

Resolviendo como simultáneas las ecuaciones (A) y (B) para determinar los puntos de intersección:

De (B) : $y^2 = \dfrac{x^4}{16}$ . . . . (B')

Igualando (A) y (B'):

$$\frac{x}{2} = \frac{x^4}{16}$$

$$x^4 - 8x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 8) = 0$$

de aquí: $x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 2$

$y_1 = 0 \; ; \; y_2 = 1$

Las parábolas se cortan en el origen y en el punto P (2, 1). Ahora dado que las tangentes a las parábolas en el origen son los propios ejes coordenados, el ángulo que forman en este punto es de 90°.

Se determinará ahora el ángulo en P:

De (A), derivando implícitamente:

$$2y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=1} = \frac{1}{4} = f_1'(Xo) \Rightarrow m_1 = \frac{1}{4}$$

De (B), se tiene: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{2} \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \dfrac{2}{2} = 1 = f_2'(Xo)$; $m_2 = 1$

$$\phi = \text{ang tan } 1 - \text{ang tan } \frac{1}{4}$$

$$= 45° - 14.03°$$

$$= 30.97°$$

$$= 30° \; 58'$$

o bien:
$$\tan \phi = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + (1)(\frac{1}{4})} = \frac{3}{5}$$

$$\phi = \text{ang tan } \frac{3}{5} = 30°58'$$

$$\phi = 30° \; 58'$$

Ejemplo. 11

Calcular el ángulo de intersección de las curvas $y = x^2$; $y = x^3$

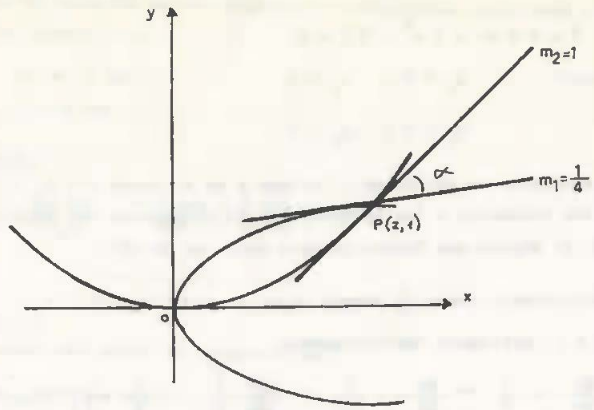


Figura 8.

Solución:

- Puntos de intersección. Resolviendo las ecuaciones como simultáneas por igualación: $x^2 = x^3 \Rightarrow x^2 (x - 1) = 0 \quad x_1 = 0;\ x_2 = 1 \Rightarrow y_1 = 0;\ y_2 = 1$

Los puntos de intersección son:

$P_1 (0, 0),\ P_2 (1, 1)$

- Cálculo de las pendientes.

$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x ; \quad m_1 = 2x$

$y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2 ; \quad m_2 = 3x^2$

- Cálculo de los ángulos de intersección.

Para P (0, 0):

$m_1 = 0,\ m_2 = 0$ por lo tanto $\alpha = \text{ang tan } 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Para P (1, 1):

$m_1 = 2,\ m_2 = 3;\ \tan\alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \dfrac{3-2}{1+6} = \dfrac{1}{7}$

$\alpha = \text{ang tan } \dfrac{1}{7} \equiv 8° \ 8'$

IV.4. RAZONES DE VARIACION DE VARIABLES RELACIONADAS.

La derivada como razón de cambio.

Sea una funcion $y = f(x)$. Si para un valor de la variable independiente x, se da a ésta un incremento Δx y se calcula el correspondiente incremento Δy de la variable dependiente, al dividir Δy entre Δx se tiene la razón de cambio promedio de y con respecto a x, cuando la variable independiente cambia de x a $x + \Delta x$.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ es la razón da cambio promedio de y con respecto a x, para un valor de x determinado y un Δx dado.

Por ejemplo para la función $y = \dfrac{x^2}{2}$. Se tiene:

$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} \ ; \ \Delta y = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} \ ; \ \Delta y = x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2$$

Si se divide entre Δx:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = x + \dfrac{1}{2}\Delta x$, si y cambia de 2 a 3, $\Delta x = 1$

$\therefore \quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + \dfrac{1}{2}(1) = 2.5$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2.5$ indica que la razón de cambio promedio de y con respecto a x es igual a 2.5 cuando x aumenta de 2 a 3.

Si el intervalo de x a $x + \Delta x$ disminuye es decir, si Δx tiende a cero al calcular el límite cuando $\Delta x \to 0$ la razón de cambio promedio de y con respecto a x se convierte en razón de cambio en un punto.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

La derivada de y con respecto a x es la razón de cambio de y con respecto a x para un valor definido de x.

En el ejemplo anterior la razón de cambio de y con respecto a x es :

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2}{2} \right) = x$ en cada punto y para $x = 2$ vale $\dfrac{dy}{dx} = 2$.

Cuando la variable independiente en el tiempo t como en una función $y = f (t)$ se tiene que $\dfrac{dy}{dt}$ es la rapidez de variación de y para un valor definido de t.

Si en un problema intervienen variables que son funciones del tiempo - y dichas variables se pueden relacionar, entonces derivando respecto al tiempo es posible hallar una relación entre la rapidez de variación de las variables consideradas.

Por ejemplo si $x = g(t)$; $y = h(t)$, $y = f(x)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dx} f(x) \frac{dx}{dt}$$

Una sugestión para proceder a resolver problemas de esta índole, es seguir los siguientes pasos:

1.- Enlistar los datos y las magnitudes que se buscan.

2.- Trazar una figura que represente el enunciado del problema y donde se establezca la convención que indique con que letra se está representando cada variable involucrada.

3.- Escribir la relación que ligue a las variables que intervienen.

4.- Derivar con respecto al tiempo.

5.- Sustituír en el resultado del paso 4 las magnitudes incluídas en los datos y despejar las que se buscan.

Desde luego que, según el caso, pueden combinarse entre sí estos pasos sugeridos.

Ejemplo. 12

Una escalera de 3.00 mts. de longitud está apoyada sobre un piso horizontal y contra un muro vertical; si el extremo inferior de la escalera se aleja del muro a una velocidad de 1.20m/seg. ¿ a qué velocidad desciende el extremo superior en el instante en que su altura sobre el suelo es de 2.40m?

Solución:

1.- Datos $\ell = 3.00$ m; $\frac{dx}{dt} = 1.20$ m/seg ; $y_1 = 2.40$ m.

Incógnita: $\frac{dy}{dt}$

2.- Figura: cuando $y_1 = 2.40$

$x_1 = \sqrt{9 - (2.40)^2} = 1.80$ m.

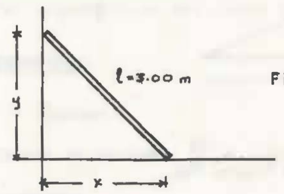


Figura 9.

3.- $x^2 + y^2 = 9$

4.- Derivando con respecto al tiempo:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

5.- Sustituyendo valores:

$$1.80(1.20) + 2.40\frac{dy}{dt} = 0 \longrightarrow 2.40\frac{dy}{dt} = -2.16 \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2.16}{2.40} = -0.90 \text{ m/seg.}$$

Que es la velocidad con que desciende el extremo superior, en ese instante.

Ejemplo. 13

El foco de un arbotante está a 4.5 metros de altura sobre una banqueta horizontal. Un hombre de 1.75 m de estatura camina alejándose del arbotante a una velocidad de 44 metros por minuto.¿ A razón de cuantos metros por minuto crece su sombra?.

Solución:

1.- Datos: $H = 4.5$ m, $h = 1.75$, $\frac{dx}{dt} = 44$ m/min, Incógnita: $\frac{dy}{dt}$

2.- Figura.

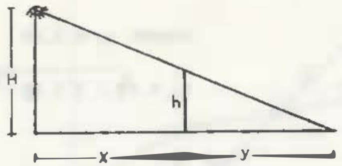


Figura 10.

3.- Por semejanza de triángulos en la figura 10.

$$\frac{y}{h} = \frac{x + y}{H}\text{, esto es: } \frac{y}{1.75} = \frac{x + y}{4.5};$$

$$4.5\,y = 1.75\,x + 1.75\,y;\ 2.75\,y = 1.75\,x;\ y = \frac{1.75}{2.75}x$$

$$y = \frac{7}{11}x$$

4.- Derivando respecto a t

$$\frac{dy}{dt} = \frac{7}{11}\frac{dx}{dt}$$

5.- Para $\frac{dx}{dt} = 44$ m/min $\frac{dy}{dt} = \frac{7}{11}\ 44 = 28$ m/min.

La sombra se alarga a razón de 28 m/min.

Ejemplo. 14

Un papalote esta a 30 metros de altura sobre el nivel del suelo y se aleja horizontalmente a una velocidad de 10 metros por segundo del niño que lo sostiene ¿ A razón de cuantos metros por segundo está soltando la cuerda el niño, cuando la distancia entre éste y el papalote es de 50 metros?.

Solución:

1.- Datos: Incógnita:

Altura $h = 30$ m Velocidad inclinada : $\frac{dz}{dt}$

Velocidad horizontal $\frac{dx}{dt} = 10$ m/seg

Distancia inclinada $Z_1 = 50$ m.

2.- Figura.

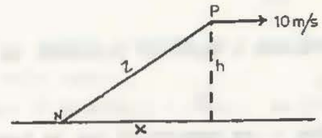


Figura 11

3.- De la figura 11 y por el Teorema de Pitágoras

$$z^2 = x^2 + h^2 \Longrightarrow z^2 = x^2 + 900 \qquad (A)$$

4.- Derivando respecto al tiempo t:

$$2z\,\frac{dz}{dt} = 2x\,\frac{dx}{dt};\ \frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\,\frac{dx}{dt} \qquad (B)$$

5.- De (A) : $x = \sqrt{z^2 - 900}$

Para $z_1 = 50$ m, $x_1 = \sqrt{(50)^2 - 900} = \sqrt{1600} = 40$ m.

Luego sustituyendo valores en (B)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{40\text{ m}}{50\text{ m}}\ (10\text{ m/seg}) = 8\text{ m/seg}$$

El niño está soltando la cuerda a razón de 8 m/seg.

Ejemplo. 15

En una fábrica de cemento se deposita arena de tal modo que se forma una pila cónica, cuya altura es siempre igual a los $\frac{4}{3}$ del radio de la base.

Sabiendo que el radio de la base aumenta a razón de $\frac{1}{8}$ cm/seg ¿ Con qué rapidez aumenta el volumen de la pila cuando el radio de la base es de 90 cm?

Solución:

1.- Datos:

$h = \frac{4}{3} r$; $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8}$ cm/seg.

Se busca $\frac{dv}{dt}$ cuando $r = 90$ cm.

2.- Figura.

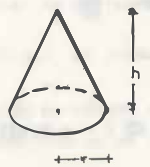


Figura 12.

3.- En la fórmula que da el volumen del cono:

$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Se sustituye $h = \frac{4}{3} r$ para tener una función de una variable:

$v = \frac{1}{3} \pi r^2 \frac{4}{3} r$; $v = \frac{4}{9} \pi r^3$

4.- Derivando con respecto a t:

$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3} \pi r^2 \frac{dr}{dt}$

5.- Para $r = 90$ cm y $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8}$ cm/seg :

$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3} \pi (90)^2 \frac{1}{8} = 1350 \pi$ cm^3/seg $= 4241.16$ cm^3/seg

Se concluye que la rapidez con que aumenta el volumen de arena cuando - r = 90 cm es:

$\frac{dv}{dt} = 4{,}241.16$ cm^3/seg.

Ejemplo. 16

El aire de un globo esférico escapa haciendo que el volúmen del globo- disminuya a razón de 400 cm^3 por segundo. ¿ Con qué rapidez disminuye el - área de la superficie del globo cuando su radio mide 20 cm?.

Solución:

1.- Datos:

Cambio de volumen: $\frac{dv}{dt} = -400$ cm^3/seg

Incógnita:

Disminución del área $\frac{dA}{dt}$ cuando $r_1 = 20$ cm.

2.- La figura es obvia.

3.- y 4.- $A = 4 \pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8 \pi r \frac{dr}{dt}$ (A)

$v = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4 \pi r^2 \frac{dr}{dt}$ (B)

Despejando $\frac{dr}{dt}$ de la ecuación (B)

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4 \pi r^2} \cdot \frac{dv}{dt}$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (A)

$\frac{dA}{dt} = \frac{8 \pi r}{4 \pi r^2} \frac{dv}{dt} \Longrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{2}{r} \frac{dv}{dt}$

5.- Para $r_1 = 20$ cm y $\frac{dv}{dt} = -400$ cm^3/seg:

$\frac{dA}{dt} = \frac{2}{20 \text{ cm}} (-400 \text{ cm}^3/\text{seg}) = -40$ cm^2 /seg

$\frac{dA}{dt} = -40$ cm^2 / seg.

El área disminuye a razón de 40 cm^2 / seg.

Ejemplo 17.

Una gota esférica se evapora en razón proporcional al área de su superficie. Demostrar que el radio se reduce con una razón constante.

Solución:

$$\frac{dv}{dt} = 4k\ \pi r^2 \qquad (A)$$

K = constante de proporcionalidad, la fórmula del volumen es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

derivando:

$$\frac{dv}{dt} = 4\ \pi r^2\ \frac{dr}{dt} \qquad (B)$$

igualando (A) y (B):

$$4\ k\ \pi\ r^2 = 4\ \pi\ r^2\ \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = K \qquad \text{Q.D.}$$

Ejemplo. 18

En el extremo de una cuerda de 12.6 m que pasa por una polea situada a 6.9 m sobre el suelo, se coloca una pesa. Si un hombre sostiene el otro extremo de la cuerda a 1.5 mt sobre el suelo, y se aparta a razón de 1.2 m/seg. ¿ A qué velocidad se eleva la pesa cuando el hombre está a 2.10 m. de el punto directamente abajo de la pesa?.

Solución:

Datos: $\ell = 12.60$ m; $H = 6.90$ m; $h = 1.50$ m; $\frac{dx}{dt} = 1.20$ m/seg; $x_1 = 2.10$m.

Incógnita: $\frac{dy}{dt}$

$$y = 12.60 - z$$
$$z^2 = x^2 + (\ 5.40\ )^2$$

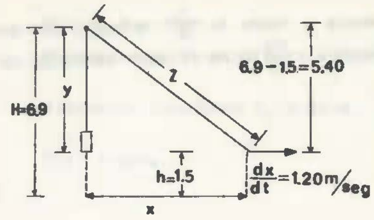


Figura 13

$$z = \sqrt{x^2 + 29.16}$$
$$y = 12.60 - \sqrt{x^2 + 29.16}$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2\ x}{2\ \sqrt{x^2 + 29.16}}\ \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 29.16}}\ \frac{dx}{dt}$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-\ 2.10}{\sqrt{(\ 2.10\ )^2 + 29.16}}(\ 1.20\ ) = -\ 0.435 \text{ m/seg.}$$

La pesa se eleva a una velocidad de 0.435 m/seg.

Nótese que el signo (-) del valor obtenido de $\frac{dy}{dt}$ se debe a que al subir la pesa el valor de y disminuye.

CAPITULO 5

OBJETIVO GENERAL DEL CAPITULO:

Al terminar el estudio de este capítulo, el alumno podrá: aplicar la regla de L'Hôpital para el cálculo de límites de funciones que presentan formas indeterminadas. Encontrar los valores máximos y/o mínimos de una función. Analizar la variación de una función.

Al finalizar este capítulo, el alumno podrá:

V.1. Escribir la definición de máximo absoluto y la de mínimo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado.

V.2. Enunciar el teorema de Weierstrass.

V.3. Enunciar el teorema de Bolzano.

V.4. Enunciar el teorema de Rolle.

V.5. Ilustrar gráficamente el teorema de Rolle.

V.6. Dada una función y un intervalo de su dominio, determinar, cuando existan, el o los puntos que verifican el teorema de Rolle.

V.7. Enunciar el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

V.8. Ilustrar gráficamente el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

V.9. Dada una función y un intervalo de su dominio, determinar, cuando existan, el o los puntos que verifiquen el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

V.10. Para una función y un valor de su dominio, calcular aproximadamente el correspondiente valor de la variable dependiente, aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

V.11. Enunciar el teorema del valor medio del cálculo diferencial para dos funciones.

V.12. Escribir todas las formas indeterminadas que se pueden presentar en el cálculo del límite de una función.

V.13. Escribir las dos únicas formas indeterminadas para las cuales es aplicable la regla de L'Hôpital.

V.14. Utilizar la regla de L'Hôpital para el cálculo del límite de una función dada, que presenta una forma indeterminada.

V.15. Escribir la definición de función creciente y la de función decreciente en un intervalo.

V.16. Demostrar que la derivada de una función creciente en un intervalo, es positiva para cualquier punto del intervalo.

V.17. Demostrar que la derivada de una función decreciente en un intervalo, es negativa para cualquier punto del intervalo.

V.18. Dada una función, determinar los intervalos en los cuales es creciente o decreciente.

V.19. Escribir la definición de Máximo relativo y la de mínimo relativo de una función.

V.20. Escribir los pasos para determinar los valores críticos de una función.

V.21. Describir el criterio de la 1a. derivada para determinar los valores Máximos y mínimos relativos de una función.

V.22. Describir el criterio de la 2a. derivada para determinar los valores Máximos y mínimos relativos de una función.

V.23. Dada una función definida en un intervalo cerrado, determinar los valores Máximos y mínimos absolutos, Máximos y mínimos relativos de dicha función.

V.24. A partir de datos conocidos de un problema físico o geométrico simple, determinar los valores Máximos o mínimos que representen la solución del problema.

V.25. Escribir la definición de concavidad hacia arriba y la de concavidad hacia abajo de una curva en un intervalo.

V.26. Escribir la relación que existe entre el signo de la 2a. deriva da de una función en un punto y su sentido de concavidad en ese punto.

V.27. Dada una función, determinar los intervalos en los cuales la curva que la representa, es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

V.28. Describir los pasos para determinar los puntos de inflexión de una función.

V.29. Dada una función, determinar sus puntos de inflexión.

V.30. Dada la representación gráfica de una función, trazar aproximadamente la gráfica de su función derivada.

V.31. Dada la representación gráfica de una función y las de sus derivadas sucesivas hasta de 3er. orden, explicar las relaciones que existen entre las características de éstas y las de la función original.

V.32. Indicar los aspectos que se consideran para el análisis de variación de una función.

V.33. Dada una función, hacer el análisis de su variación.

VARIACION DE FUNCIONES.

VARIACION DE FUNCIONES.

Un estudio básico del comportamiento de una función es de importancia vital para el conocimiento y empleo de la función.

Tal estudio es el contenido de este capítulo, donde se hace uso de conceptos estudiados en capítulos anteriores como el de límite, derivada, derivadas laterales, derivadas sucesivas, representaciones geométricas, etc., para estudiar la variación de una función a lo largo de su dominio.

V.1 TEOREMA DE WEIERSTRASS, TEOREMA DE BOLZANO.

Estos teoremas son necesarios para el mejor entendimiento de los conceptos que se estudian en el desarrollo de este capítulo y principalmente sirven de fundamento en la comprensión del Teorema de Rolle, el cual es a su vez la base para el estudio del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial.

La demostración de los teoremas de Weierstrass y de Bolzano, cae fuera de los propósitos de estos apuntes, por lo cual se dá solamente su enunciado e ilustración geométrica.

Teorema V.1.- De Weierstrass.

Hipótesis: La función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$

Tésis: Entre todos los valores de $f(x)$, en el intervalo $[a, b]$ hay un valor $M = f(x_1)$, llamado máximo absoluto, que no es superado por ningún otro valor de $f(x)$ en $[a, b]$ y un valor $m = f(x_2)$, llamado mínimo absoluto, que no supera a ninguno de los valores de $f(x)$ en $[a, b]$. Esto es $m = f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1) = M$.

En la figura 1 se ven dos ilustraciones geométricas de este teorema, en ellos la curva C es la gráfica de la función $y = f(x)$, continua en el intervalo $[a, b]$

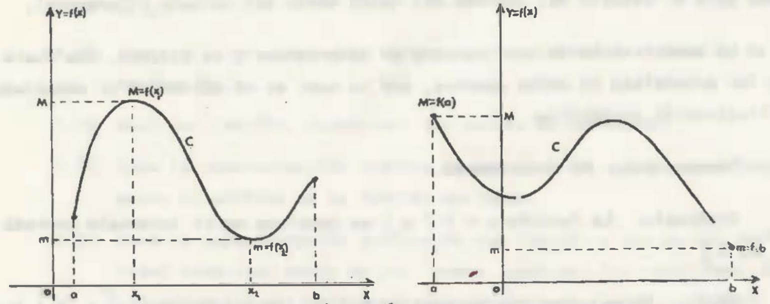
Debe observarse que tanto el máximo absoluto M, como el mínimo absoluto m pueden presentarse para los valores de x extremos del intervalo $[a, b]$ (como se nuestra en la parte (B) de la figura 1 donde $M = f(a)$ y $m = f(b)$ y que M o m pueden presentarse para más de un valor de x en $[a, b]$

Para el caso particular de la función constante $y = k$, se tiene que $M = m = k$.

Teorema V.2 De Bolzano.

Hipótesis: Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea y_o un valor de $f(x)$ tal que $m \leq y_o \leq M$.

Tesis: Cuando menos para un valor x_o de x en $[a, b]$, se tiene que $y_o = f(x_o)$



(A) Figura 1 (B)

Una ilustración de este teorema se presenta en la figura 2 en la cual -- dicho teorema se cumple para dos valores de x: $x_o \in [a, b]$ y $x_1 \in [a, b]$ $y_o = f(x_o) = f(x_1)$.

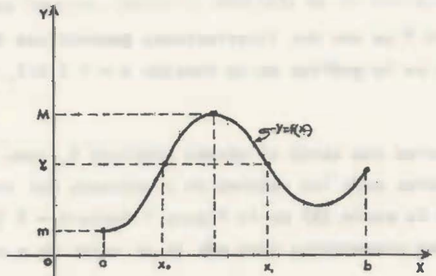


FIG 2

V.2. TEOREMA DE ROLLE. INTERPRETACION GEOMETRICA.

Teorema V.3. DE Rolle.

Hipótesis: Sea $y = f(x)$ una funcion que cumple con las condiciones -

1.- $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$

2.- $y = f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a, b)

3.- $f(a) = f(b)$

Tesis: Existe por lo menos un valor $x_1 \in (a, b)$ para el cual - - -

$$f'(x_1) = 0. \qquad (1)$$

Demostración: Como $y = f(x)$, es continua en $[a, b]$, según la condición 1 de la Hipótesis, por el teorema de Weierstrass se garantiza la existencia de un mínimo absoluto m y un máximo absoluto M en $[a, b]$.

Considérese primero el caso particular en que los valores m y M, se presentan en los extremos a y b del intervalo $[a, b]$, es decir que $m = f(a)$ y $M = f(b)$, figura 3. Entonces por la condicion 3, de la Hipótesis se tendrá:

$$m = f(a) = f(b) = M = K \text{ (k es una constante).}$$

Esto le corresponde al caso de una función constante $f(x) = k$ para - la cual a todo valor $x_1 \in (a, b)$ corresponde $f'(x_1) = 0$ ya que la derivada de una constante vale cero.

Obsérvese que en este caso particular, el teorema se cumple para todo - valor de x en el intervalo (a, b).

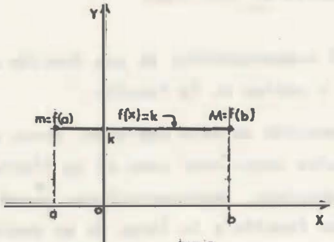


FIG.3

Considérese ahora que al menos uno de los valores m ó M corresponde a - un punto interior del intervalo $[a, b]$ Para fijar ideas, supóngase que $M = f(x_1)$ donde $a \leq x_1 \leq b$

Según el teorema de Weierstrass el valor máximo absoluto $M = f(x_1)$ - no es superado por ningún valor de $f(x)$ en $[a, b]$, por consiguiente se - tendrá:

$$f(x_1 + \Delta x) \leq f(x_1);\ a < x_1 < b,\ (x_1 + \Delta_x) \in (a, b)$$

por lo cual:

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \leq 0$$

Dividiendo ambos miembros de esta desigualdad entre $\Delta x \neq 0$ resulta:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{si } \Delta x < 0 \qquad (A)$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{si } \Delta x > 0 \qquad (B)$$

Si $x \to 0^-$, por (A), según el teorema II.5, y por la definición de derivada lateral por la izquierda:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \geq 0 \Rightarrow f'_-(x_1) \geq 0 \qquad (C)$$

Si $\Delta x \to 0^+$, por (B), teniendo en cuenta el teorema II.4, y por la definición de derivada lateral por la derecha:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \leq 0 \Rightarrow f'_+(x_1) \leq 0 \qquad (D)$$

Según (C), la derivada lateral por la izquierda para $x = x_1$ es positiva o nula y según (D) la derivada lateral por la derecha para $x = x_1$ es negativa o nula, pero por la condición (2), de la hipótesis, la función es derivable en (a; b) por lo que es derivable para $x = x_1$. Esto implica que -- las derivadas laterales para este valor de x deben ser iguales, así que la -- única posibilidad es que:

$$f'(x_1) = f'_+(x_1) = 0 \Rightarrow f'(x_1) = 0 \quad a < x_1 < b$$

Q.D.

Interpretación geométrica del Teorema de Rolle.

Sea la función $y = f(x)$ que cumple con las condiciones de la hipótesis del Teorema. Esto implica lo siguiente:

Por la condición (1), la gráfica de $y = f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$

Por la condición (2), dicha grafica es una curva que tiene tangente - en cada uno de sus puntos en (a, b). Tal vez no admita tangente en los -- puntos extremos de abscisas $x = a$ y $x = b$ y por la condición (3), los puntos extremos A y B de abscisas $x = a$, $x = b$, tienen la misma ordenada A (a, c); B (b, c); Figura 4.

El teorema demuestra que existe por lo menos un punto de la gráfica de $y = f(x)$, en (a, b) en donde la tangente a ella es paralela al eje de las abscisas, es decir de pendiente cero.

En la figura 4 se ilustra el caso en que el teorema se cumple para dos- puntos, (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

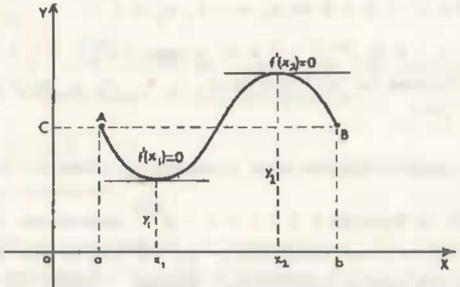


FIG 4

Ejemplo 1.- Investigar si la función $f(x) = x^3 - 3x + 3$ cumple - con las condiciones del teorema de Rolle, en el intervalo $[-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$, Si cum ple, determinar los valores de $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ para los cuales se verifica el teorema.

Solución:

Primero se investiga si la función cumple con las condiciones de la hipótesis del Teorema:

1).- La función dada es continua en el intervalo $[-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$ ya que se trata de una función polinómica, la cual es continua para todo valor de x.

2).- La función dada es derivable en el intervalo $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$ porque siendo polinómica, es derivable para todo valor de x.

3).- $f(a) = f(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3 = 3$

$f(b) = f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3 = 3$

Luego $f(a) = f(b)$

La función $f(x) = x^3 - 3x + 3$ si cumple con las condiciones de la hipótesis en el intervalo propuesto.

La derivada de la función es: $f'(x) = 3x^2 - 3$, así que:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$

por lo cual: $f'(-1) = 0$, $f'(1) = 0$, y como $-\sqrt{3} < 1 < +\sqrt{3}$, $-\sqrt{3} < -1 < +\sqrt{3}$ se concluye que el Teorema se verifica para $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$ en el intervalo $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$.

Para ilustrar geométricamente este ejemplo, se presenta la figura 5.

Ejemplo 2.- Si la función $f(x) = 4 - x^{2/3}$ cumple con las condiciones del Teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$ hallar los valores de $x \in (-3, 3)$ para los que se verifica el Teorema. Trazar la gráfica correspondiente.

Solución:

Si se aplican las condiciones de la Hipótesis del Teorema se ve que:

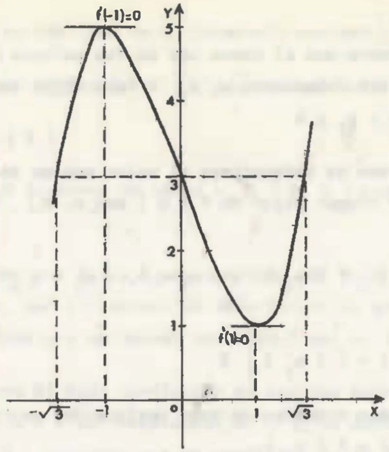


FIG5

1). La función es continua en el intervalo $[-3, 3]$ dado que siempre se cumple que $\lim_{x \to x_0} (4 - x^{2/3}) = 4 - x_0^{2/3}$ es decir, $\forall x_0 \in [-3, 3]$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2).- La derivada de la función es: $f'(x) = -\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

Se observa que $f'(x)$ no esta definida para $x_1 = 0$ y $0 \in (-3, 3)$, luego la función no es derivable en el intervalo $(-3, 3)$, y por lo tanto no cumple con la segunda condición de la Hipótesis del Teorema.

Esto implica que el Teorema de Rolle no es aplicable a la función $f(x) = 4 - x^{2/3}$ en $[-3, 3]$.

En la figura 6 se observa que aun cuando la gráfica de la función es una curva continua y los puntos extremos A y B en el intervalo dado tienen la misma ordenada, no existe ningún punto de la gráfica entre A y B donde la recta tangente a ella sea paralela al eje de las abscisas.

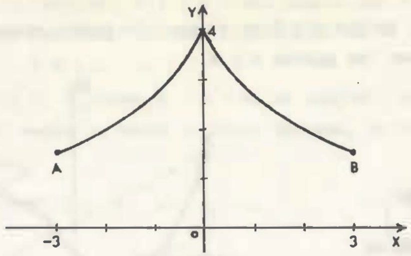


FIG 6

Ejemplo. 3.- Dada la función $f(x) = |x - 2|$, y el intervalo $[-2, 6]$ si es aplicable el Teorema de Rolle, determinar el o los puntos donde se verifica.

Solución:

Para ver si se cumplen las condiciones de la Hipótesis del Teorema de Rolle, se pueden emplear ahora las conclusiones del ejemplo 14 del Capítulo III donde se trata esta función,

De dichas conclusiones se tiene:

1). La función es continua en $[-2, 6]$

2). La función no es derivable para $x_1 = 2 \in (-2, 6)$ luego no es derivable en el intervalo abierto $(-2, 6)$.

Esto hace ver que el Teorema de Rolle no es aplicable en este caso.

La figura 7 muestra la gráfica de la función dada. Allí se ve que entre los puntos $A(-2, 4)$ y $B(6, 4)$, no hay ni un punto de dicha gráfica donde la recta tangente sea paralela al eje de las abscisas.

V.3.- TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL (O DE INCREMENTOS FINITOS.) INTERPRETACION GEOMETRICA. APLICACIONES. TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL PARA DOS FUNCIONES.

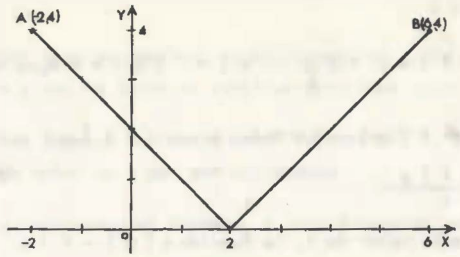


FIG 7

Teorema V.4 Del Valor Medio del Cálculo Diferencial.

Hipótesis: Sea la función $y = f(x)$ que cumple con las condiciones.

1). $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$

2). $y = f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a, b)

Tésis: Existe por lo menos un valor x_1 en el intervalo abierto $(a; b)$ para el cual.

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \; ; \; a < x_1 < b \qquad \ldots . \quad (2)$$

Demostración:

Sea $y = f(x)$ una función que cumple con las condiciones de la hipótesis del Teorema y considérese la función auxiliar.

$$\phi(x) = f(x) - Ax \qquad \ldots . \quad (A)$$

en la cual A es constante.

Esta función es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), dado que es la suma algebraica de dos funciones que lo son.

Por lo mismo, la función (A) cumple con las dos primeras condiciones de la Hipótesis del Teorema de Rolle y para que también cumpla con la tercera condición de dicha Hipótesis, basta determinar el valor adecuado de A, estableciendo la condición:

$$\phi (a) = \phi(b) \qquad (B)$$

Como $\phi (a) = f (a) - A a$ y $\phi(b) = f (b) - A b$, se tendrá según (B) :

$$f (a) - A a = f (b) - A b \rightarrow A (b - a) = f (b) - f (a)$$

$$A = \frac{f (b) - f (a)}{b - a} \qquad (C)$$

Así que para este valor de A, la función $\phi (x) = f (x) - Ax$ satisface las tres condiciones de la Hipótesis del Teorema de Rolle.

Según la tésis del mismo Teorema, existirá por lo menos un valor $x_1 \varepsilon (a, b)$ para el cual:

$$\phi' (x_1) = 0; \quad a < x_1 < b \qquad (D)$$

Pero de (1) $\phi'(x) = f' (x) - A$ y para $x = x_1$ queda:

$$\phi' (x_1) = f' (x_1) - A$$

Lo cual por (3) y (4) da:

$$f' (x_1) - \frac{f (b) - f (a)}{b - a} = 0 \rightarrow f'(x_1) = \frac{f (b) - f (a)}{b - a};$$

$$x_1 \varepsilon (a; b)$$

Q.D.

Interpretación Geométrica.

Sea el arco $\widehat{AB}$ de la figura 8, la gráfica de la función $y = f (x)$ que cumple con las condiciones del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial en el intervalo $[a, b]$.

Entonces por las condiciones de la Hipótesis del Teorema dicha gráfica será una curva continua y admitirá tangente en cada uno de sus puntos entre A y B (excepto tal vez en los puntos A y B).

El Teorema establece que existe cuando menos un punto $P_1 (x_1, y_1)$ de la curva entre los puntos A y B en el cual la recta tangente es paralela a la secante que pasa por los puntos A y B.

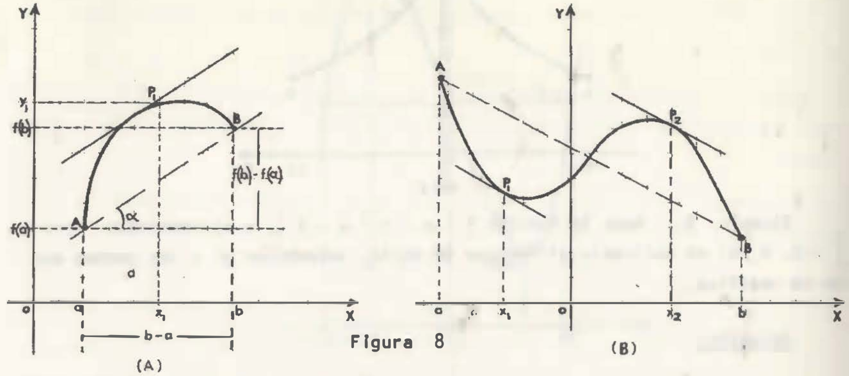


Figura 8

En efecto, la pendiente de dicha secante es

$$m_{AB} = \tan \alpha = \frac{f (b) - f (a)}{b - a}$$

como se puede ver en la figura 8 (A), la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P_1 es:

$$m = f' (x)$$

y por la Tésis del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial se tiene:

$$f' (x_1) = \frac{f (b) - f (a)}{b - a}$$

que equivale a la condición de paralelismo: $m_{AB} = m$.

Desde luego que este Teorema puede verificarse en más de un punto del arco $\widehat{AB}$ como es el caso de la figura 8 (B), en donde las rectas tangentes a la curva en los puntos P_1 y P_2 son paralelas a la secante que pasa por los puntos A y B.

Corolario 1.- Una función $y = f (x)$ cuya derivada es nula en un intervalo, es necesariamente una función constante en este intervalo.

En efecto sea la función $y = f(x)$ que cumple con las condiciones del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial en el intervalo $[a, b]$ además sea $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$

En el intervalo $[a, x]$ donde $a < x < b$, se cumplen las condiciones anteriores por lo cual según la tesis de dicho teorema, aplicado en el intervalo $[a, x]$ se tiene:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x_1) \qquad a < x_1 < x$$

Pero como $f'(x) = 0$, se tendrá $f'(x_1) = 0$, por lo cual:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \Rightarrow f(x) - f(a) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = f(a)$$

Como $f(a) = k$ es constante, $f(x) = k$ Q.D.

Corolario 2.- Si dos funciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ tienen sus derivadas iguales en un intervalo, difieren en una constante en dicho intervalo.

Efectivamente sean las funciones $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ continuas en $[a; b]$ y tales que $f_1'(x) = f_2'(x)$ en (a, b). Considérese la función $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$. La función $g(x)$ cumple con las condiciones del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial.

Además: $g'(x) = f_1'(x) - f_2'(x)$

pero como $f_1'(x) = f_2'(x)$, se tendrá $g'(x) = 0$

Entonces, por el corolario 1, $g(x) = k \Rightarrow f_1(x) - f_2(x) = k$

Q.D.

Ejemplo 4. Investigar si es aplicable el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ en el intervalo $[1, 3]$. Si lo es, hallar el o los valores de x para los cuales se cumple dicho Teorema en $(1, 3)$.

Solución:

Al aplicar las condiciones de la Hipótesis del Teorema se concluye lo siguiente:

1). La función dada es continua en el intervalo $[1, 3]$ ya que es una función polinómica y por lo tanto es continua para todo valor de x.

2). La función dada es derivable en el intervalo $(1, 3)$ por que es derivable para todo valor de x por ser polinómica.

Entonces si es aplicable el Teorema, y deberá tenerse según la tésis del mismo:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(x_1); \quad 1 < x_1 < 3$$

ya que $a = 1$ y $b = 3$.

$f(3) = 3^3 - 5(3)^2 - 3(3) = -27 \quad f(1) = 1 - 5(1) - 3(1) = -7$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-27 - 7(-7)}{2} = -10$$

Por otro lado $f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$, luego:

$3x^2 - 10x - 3 = -10 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 0$

Resolviendo esta ecuación se obtienen: $x_1 = \frac{7}{3}$; $x_2 = 1$

Como $\frac{7}{3} \in (1, 3)$ y $1 \notin (1, 3)$, el único valor para el cual se cumple el Teorema en $(1; 3)$ es $x_1 = \frac{7}{3}$.

Ejemplo 5.- ¿Es aplicable el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial a la función $f(x) = \frac{2}{x}$ en el intervalo $[-1, 2]$? En caso afirmativo, determinar el o los valores de x donde se cumple el Teorema.

Solución:

Aplicando las condiciones de la Hipótesis del Teorema se ve que:

1). La función $f(x) = \frac{2}{x}$ es discontinua para $x = 0$ y $x = 0 \in [-1, 2]$ luego la función no es continua en el intervalo cerrado $[-1, 2]$. No cumpliéndose la primera condición de la Hipótesis, se concluye que el Teorema no es aplicable en el intervalo mencionado.

Gráficamente se puede constatar con mucha facilidad esta conclusión observando en la figura 9 que no existe ningún punto de la gráfica de $y = \frac{2}{x}$ entre los puntos A (-1, -2) y B (2,1) en donde la recta tangente sea paralela a la cuerda que pasa por A y B.

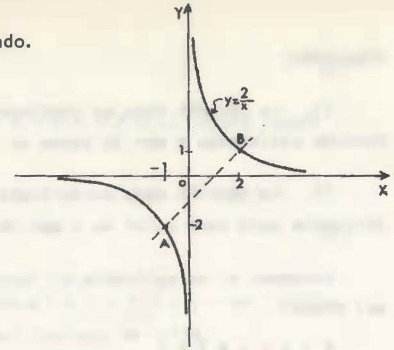


Figura 9.

Ejemplo 6.- Hacer ver que el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial no es aplicable a la función $f(x) = (x-2)^{2/3}$ en el intervalo $[0, 3]$ indicando por qué y trazando la gráfica correspondiente.

Solución:

La función $f(x) = (x-2)^{2/3}$ es continua para todo valor de x ya que siempre se tiene: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ luego la primera condición de la Hipótesis del Teorema sí se cumple:

1) $f(x) = (x-2)^{2/3}$ es continua en $[0, 3]$

La derivada de la función es: $f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{1/3}}$

se observa que esta derivada no existe para $x = 2$ y $2 \varepsilon (0, 3)$ luego no se cumple la segunda condición de la Hipótesis del Teorema.

2). $f(x) = (x-2)^{2/3}$ no es derivable en $(0, 3)$.

Por esto no es aplicable el Teorema

En la figura 10 se ilustra este ejemplo. Puede observarse que es imposible que la recta tangente a la curva en algún punto entre A y B, sea paralela a la secante que pasa por A y B.

Otra forma en que suele presentarse la Tésis del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial es la siguiente.

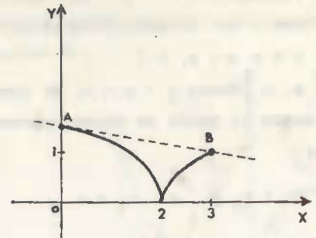


FIG 10

Si de $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1)$; $a < x_1 < b$

se despeja $f(b)$, queda:

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(x_1); \; a < x_1 < b \qquad (3)$$

$a < x_1 < b \Rightarrow x_1 - a > 0, \quad b - a > 0 \Rightarrow 0 < \frac{x_1 - a}{b - a} < 1$

Sea $\frac{x_1 - a}{b - a} = \theta$, se tendrá $0 < \theta < 1$

Luego: $x_1 = a + (b - a)\theta$

Y si $b - a = h$: $b = a + h$ y $x = a + h\theta$: $0 < \theta < 1$

Considerando esto en la expresión (3):

$$f(a + h) = f(a) + h f'(a + h\theta); \; 0 < \theta < 1 \qquad (4)$$

Obsérvese que las expresiones (3) y (4) son equivalentes

El Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial puede ser muy útil para estimar la magnitud de la variable dependiente y hacer aproximaciones numéricas.

Ejemplo. 7.- Empleando el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial, estimar $\sqrt[3]{28}$

Solución:

Tomando $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $f'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$ $a = 27$, $b = 28$ y aplicando (3) queda:

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27} + \left[(28 - 27)\right]\left[\frac{1}{3x_1^{2/3}}\right]; \quad 27 < x_1 < 28$$

Esto es:

$$\sqrt[3]{28} = 3 + \frac{1}{3x_1^{2/3}} \qquad (a)$$

Pero como $27 < x_1 \Longrightarrow \dfrac{1}{3x_1^{2/3}} < \dfrac{1}{3(27)^{2/3}} = \dfrac{1}{3(9)} = \dfrac{1}{27}$

$3 + \dfrac{1}{3x_1^{2/3}} < 3 + \dfrac{1}{27}$, luego por (a)

$$3 < \sqrt[3]{28} < 3 + \frac{1}{27}$$

Para ejemplificar una aplicación del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial expresado en la ecuación (4) se da el siguiente:

Ejemplo 8.-

Demostrar que $\sqrt{101} - \sqrt{100} < \dfrac{1}{20}$

Solución:

Sea $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 100$, $h = 1$, entonces $a + h = 101$

$f(a+h) = \sqrt{101}$, $f(a) = \sqrt{100}$

Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(a + h\theta) = f'(100 + \theta) = \dfrac{1}{2\sqrt{100+\theta}}$; $0<\theta<1$

Aplicando (4) : $\sqrt{101} = \sqrt{100} + \dfrac{1}{2\sqrt{100+\theta}}$; $0 < \theta < 1$

Esto es: $\sqrt{101} - \sqrt{100} = \dfrac{1}{2\sqrt{100+\theta}}$

Pero: $\dfrac{1}{2\sqrt{100+\theta}} < \dfrac{1}{2\sqrt{100}} = \dfrac{1}{20}$, luego:

$\sqrt{101} - \sqrt{100} < \dfrac{1}{20}$ Q.D.

Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial para dos funciones:

Este teorema conocido también como Teorema de Cauchy, es fundamental para estudiar la Regla de L'Hôpital que se ve en el siguiente tema.

Teorema V.5 De Cauchy

Hipótesis. Sean $y = f(x)$, $y = g(x)$ dos funciones que cumplen con las condiciones:

1). $y = f(x)$, $y = g(x)$ son continuas en el intervalo $[a, b]$

2). $y = f(x)$, $y = g(x)$ son derivables en el intervalo (a, b)

3). $g'(x) \neq 0$ para todo valor de x en (a, b).

Tésis: Existe un valor x_1 en el intervalo abierto (a, b) para el cual

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}; \quad a < x_1 < b \qquad (5)$$

Demostración: Conviene primeramente hacer ver que $g(b) \neq g(a)$ para que la expresión (5), tenga sentido.

En efecto evidentemente la función $y = g(x)$ cumple con las condiciones de la Hipótesis del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial en el intervalo $[a; b]$, luego se tiene:

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(x_1); \quad a < x_1 < b$$

Pero $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b) \Rightarrow g'(x_1) \neq 0$

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \neq 0 \Rightarrow g(b) - g(a) \neq 0 \Rightarrow g(b) \neq g(a)$$

Ahora bien, considérese la función auxiliar:

$$\phi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\left[g(x) - g(a)\right] - \left[f(x) - f(a)\right]. \quad (A)$$

Como puede observarse, $\phi(a) = \phi(b) = 0$, entonces la función (A) -

cumple con las tres condiciones del Teorema de Rolle.

Como $\phi'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) - f'(x)$ (B)

Según la Tesis del Teorema de Rolle: $\phi'(x_1) = 0$; $a < x_1 < b$

Lo cual implica por (B):

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_1) - f'(x_1) = 0 \qquad (C)$$

Como $g'(x_1) \neq 0$, al dividir en (C) entre $g'(x_1)$ queda :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} - \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)};$$

$$a < x_1 < b$$

Q.D.

V.4 REGLA DE L'HÔPITAL. FORMAS INDETERMINADAS.

Cuando una función $y = f(x)$, toma una de las siguientes formas para un determinado valor de x;

$$f(x) = \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, (0)(\infty), \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

se dice que la función $y = f(x)$ toma una forma indeterminada.

Hasta el momento, en el Capítulo II en el cálculo de algunos límites -- cuando resultaba $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, se vieron varios casos en los cuales se mostró - la forma de como eliminar dicha indeterminación. Es decir, dada una función $y = f(x)$, si para algún valor de la variable independiente, el límite de- la función toma una de las dos formas anteriores de indeterminación, ya sea $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, se ha visto como conocer el valor de dicho límite, mediante una -- transformación o procedimiento algebraico.

Sin embargo, una de las aplicaciones de la derivada, es precisamente - poder eliminar dicha indeterminación en una forma más sencilla, a través - de la regla de L' Hôpital, la cual se describe a continuación:

Regla de L'Hôpital:

Dada la fracción : $\frac{f(x)}{g(x)}$, si $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$, se presenta en el cociente una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, para $x = a$.

El problema que se plantea consiste en encontrar;

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Para ello, se hará uso del siguiente teorema:

Teorema V. 6 Regla de L'Hôpital

Hipótesis: 1).- Sean $y = f(x)$ y $y = g(x)$, dos funciones derivables en el intervalo abierto I, excepto posiblemente en el número $a \in I$.

2).- Para toda $x \neq a$ en I, $g'(x) \neq 0$.

3). $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

4). $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Tésis: Se cumple que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El Teorema anterior es válido si los límites a los que se hace mención - son todos límites derechos, límites izquierdos ó límites totales.

Demostración:

Para la demostración del Teorema anterior, se distinguen tres casos:

1). $x \to a^+$

2). $x \to a^-$

3). $x \to a$

Analizando la demostración del primer caso, se observa que en las condiciones del Teorema no se supone que $y = f(x)$, $y = g(x)$ están definidos en " a ", por tal motivo, considerando que:

$$\text{para } x \neq a \quad y = f(x) \quad y \quad y = g(x)$$
$$y \quad \text{para } x = a \quad y = f(a) = 0 \; y \; y = g(a) = 0 \qquad (A)$$

Sea " b " el punto extremo derecho del intervalo abierto I dado en las condiciones del Teorema. Puesto que $y = f(x)$ y $y = g(x)$, son ambas derivables en I, excepto posiblemente en " a ", se concluye que $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son ambas derivables en el intervalo $(a, x]$, donde $a < x \leq b$.

Así que, $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son ambas continuas en el intervalo $(a, x]$. Las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son también continuas a la derecha de " a " ya que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 = f(a)$$

$$y \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = 0 = g(a) \qquad (B)$$

Por lo tanto, $y = f(x)$, y $y = g(x)$, son continuas en el intervalo cerrado $[a, x]$. Así, $y = f(x)$, y $y = g(x)$ satisfacen las tres condiciones del Teorema de Cauchy para dos funciones en el intervalo $[a, x]$. Luego, se cumple que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \qquad (C)$$

donde x_1 es un número tal que $a < x_1 < x$.

Teniendo en cuenta las expresiones (A) y (B), se tiene que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \qquad (D)$$

Ya que $a < x_1 < x$, se sigue que cuando $x \to a^+$, $x_1 \to a^+$, por lo tanto:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \lim_{x_1 \to a^+} \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \qquad (E)$$

Pero por las condiciones del teorema, el límite en el lado derecho de la expresión (E), es L. Por consiguiente:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad \text{Q.D.}$$

lo cual prueba el caso (1).

La demostración del caso (2), es similar a la anterior, y la demostración del caso (3) está basada en los resultados de los casos (1) y (2) y se dejan al estudiante como ejercicio.

El Teorema V. 6, se conoce con el nombre de Regla de L'Hôpital.

De esta manera, queda visto que la regla es aplicable para la forma $\frac{0}{0}$, asimismo, también resulta aplicable para la forma $\frac{\infty}{\infty}$, sin embargo su demostración, no se presenta en este capítulo, dado que cae fuera del alcance del curso.

En conclusión, cabe mencionar que la regla de L'Hôpital, sólo es aplicable cuando se presentan las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

<u>Ejemplo 9.</u>

Encontrar $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x}$

<u>Solución:</u>

Sustituyendo en la expresión $x = 0$, se obtiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = \frac{0}{0}$$

la cual es una indeterminación que puede eliminarse mediante el empleo de la regla de L'Hôpital, de esta manera considerando la expresión anterior, como un cociente de dos funciones se tiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

por lo tanto, aplicando la regla de L'Hôpital resulta;

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sec^2 x}$$

finalmente, tomando el límite se obtiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1$$

por lo que,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

Ejemplo 10 Calcular:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 1}$$

Solución:

Al buscar el límite de $F(x)$ cuando $x \to \infty$, se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

La indeterminación anterior, puede eliminarse empleando para ello la regla de L'Hôpital y considerando a $F(x)$, como un cociente de dos funciones, de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

por lo tanto:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Finalmente:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

En algunas ocasiones, puede suceder que después de haber aplicado la regla de L'Hôpital, a una indeterminación, ésta persista es decir, que se tenga:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0} \text{ ó } \frac{\infty}{\infty}$$

En este caso, la regla de L'Hôpital puede aplicarse tantas veces como sea necesario hasta que se haya eliminado la indeterminación, o sea:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(a)}{g''(a)}$$

donde:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(a)}{g''(a)}$$

el procedimiento anterior se conoce con el nombre de generalización de la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 11

Dada la función:

$$F(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{1 - \cos x}$$

encontrar $\lim_{x \to 0} F(x)$

Solución:

Considerando a $F(x)$ como el cociente de dos funciones, es decir,

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{1 - \cos x}$$

tomando el límite de $F(x)$ cuando $x \to 0$, se tiene:

$$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

la cual es una indeterminación en la que resulta aplicable la regla de L'Hôpital, con la que se obtiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$

como puede observarse, la indeterminación persiste una vez que se ha aplicado la regla, de esta manera, volviendo a aplicar la regla por segunda vez, resulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos x}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1-0}{1} = \frac{1}{2}$$

Finalmente, se obtiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{1-\cos x} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 12.

Dada la función: $F(x) = \frac{L\,x}{\csc x}$

Hallar: $\lim_{x\to 0} F(x)$

Solución:

Considerando a la función $F(x) = \frac{L\,x}{\csc x}$ como un cociente de dos funciones, es decir:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L\,x}{\csc x}$$

Y tomando límites cuando $x\to 0$, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{L\,x}{\csc x} = \frac{-\infty}{\infty}$$

dado que: $L\,x \to -\infty$ si $x \to 0^+$

$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \to \infty$ si $x \to 0$

Entonces para eliminar la indeterminación, se hace uso de la regla de L'Hôpital, teniendo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{L\,x}{\csc x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x}$$

como: $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ y $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

se tiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{L\,x}{\csc x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x} = \frac{0}{0}$$

Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen} x\cos x}{(-x\operatorname{sen} x + \cos x)} = \frac{0}{1} = 0$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{L\,x}{\csc x} = 0$$

Tal como puede apreciarse, los ejemplos anteriores muestran la aplicación de la regla de L'Hôpital, en los casos en que únicamente se presentan indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

DETERMINACION DEL VALOR DE LA FORMA $(0)(\infty)$

Si una función $F(x)$, considerada como el producto de dos funciones, $F(x) = f(x)\cdot g(x)$, toma la forma indeterminada $(0)(\infty)$, para un valor de x, la función dada puede escribirse en la forma:

$$F(x) = f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Esto se hace con el objeto de llegar a obtener una de las formas vistas anteriormente y de esta manera poder aplicar la regla de L'Hôpital.

Ejemplo. 13

Calcular: $\lim_{x\to 0^+} x\,L\,x$

Solución:

Considerando, a $\lim_{x\to 0^+} x\,Lx$ como:

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to 0^+} x\,L\,x$$

donde: $f(x) = x$, $g(x) = L\,x$

se obtiene que: $\lim\limits_{x \to 0^+} x \, L\, x = 0 \cdot \infty$

Por lo tanto, haciendo:

$$\lim_{x \to 0^+} x \, L \, x = \lim_{x \to 0^+} \frac{L\, x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

La forma de la indeterminación anterior, permite el empleo de la regla de L'Hôpital, es decir:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{L\, x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

Por lo cual $\lim\limits_{x \to 0^+} x \, L \, x = 0$

DETERMINACION DEL VALOR DE LA FORMA $\infty - \infty$

Si una función F (x), considerada como la diferencia de dos funciones F (x) = f (x) - g (x), toma la forma indeterminada $\infty - \infty$, para un valor de "x", algunas veces es posible transformarla en una fracción que tomará la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, mediante algún procedimiento algebraico - y de esta manera, es posible aplicar la regla de L'Hôpital, y encontrar un valor determinado.

Ejemplo. 14

Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\, x} \right)$

Solución:

Considerando a $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\, x} \right)$ como:

$$\lim_{x \to 1} F(x) = \lim_{x \to 1} \left[f(x) - g(x) \right] = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\, x} \right)$$

y tomando límite cuando $x \to 1$, resulta;

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\, x} \right) = \infty - \infty$$

Para eliminar la indeterminación anterior, se requiere de una transformación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, las cuales, mediante el empleo de la regla de L'Hôpital, pueden eliminarse.

De esta manera, tomando como factor común a $\frac{1}{(x-1)\, L\, x}$, resulta que:

$$\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\, x} \right) = \frac{1}{(x-1)\, L\, x} \left(x\, L\, x - [x-1] \right)$$

por lo que,

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\, x} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{x\, L\, x - (x-1)}{(x-1)\, L\, x} = \frac{0}{0}$$

La indeterminación anterior permite que se aplique la regla de L'Hôpital, con lo que se obtiene:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x\, L\, x - (x-1)}{(x-1)\, L\, x} = \lim_{x \to 1} \frac{x \left(\frac{1}{x} \right) + L\, x - 1}{(x-1)\left(\frac{1}{x} \right) + L\, x}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{L\, x}{1 - \frac{1}{x} + L\, x} = \frac{0}{0}$$

Como se observa después de aplicar la regla de L'Hôpital, la indeterminación persiste, por lo que aplicándola nuevamente resulta:

$$\lim_{x \to 1} \frac{L\, x}{1 - \frac{1}{x} + L\, x} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1+x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x(1+x)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$$

por lo tanto:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{L\, x} \right) = \frac{1}{2}$$

Ejemplo. 15

Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$

Solución:

Considerando a $\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$ como:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\left[f(x) - g(x)\right] = \lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$$

tomando límites cuando $x\to 0$, resulta:

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \infty - \infty$$

Puesto que para la indeterminación anterior no existe un procedimiento que permita eliminarla directamente, se debe buscar alguna transformación algebraica mediante la cual sea posible obtener una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, y de esta forma, poder aplicar la regla de L'Hôpital.

Así pues, si se toma como factor común de la expresión anterior a $\frac{\cot x}{x}$ se obtiene:

$$\cot x - \frac{1}{x} = \frac{\cot x}{x}\left(x - \frac{1}{\cot x}\right), \text{ pero como:}$$

$\tan x = \frac{1}{\cot x}$, se tiene que:

$$\cot x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x\tan x}\left(x - \tan x\right) = \frac{x - \tan x}{x\tan x}$$

Ahora bien, obteniendo el límite de la última expresión:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x - \tan x}{x\tan x} = \frac{0}{0}$$

Por lo tanto, la indeterminación anterior permite el empleo de la regla de L'Hôpital, así pues:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \tan x}{x\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \sec^2 x}{\tan x + x\sec^2 x}$$

Pero como: $\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ y $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Se tiene que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 - \sec^2 x}{\tan x + x\sec^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{x}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x\cos x + x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x\cos x + x}$$

Simplificando la última expresión y utilizando las sustituciones trigonométricas siguientes,

$$\cos^2 x - 1 = -\operatorname{sen}^2 x$$

$$2\operatorname{sen} x\cos x = \operatorname{sen} 2x$$

se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x\cos x + x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} 2x + 2x} = \frac{0}{0}$$

Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital, y tomando el límite se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} 2x + 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-4\operatorname{sen} x\cos x}{2\cos 2x + 2} = \frac{-0}{4} = 0$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-4\operatorname{sen} x\cos x}{2\cos 2x + 2} = 0$$

DETERMINACION DEL VALOR DE LAS FORMAS 0°, ∞°, 1^∞.

Si una función $\phi(x)$ puede expresarse en la forma $f(x)^{g(x)}$, puede suceder que para algún valor x_o de x, se obtenga que:

$f(x_o) = 0$, $g(x_o) = 0$ quedando la forma 0°

o bien:

$f(x_o) = 1$, $g(x_o) = \infty$ quedando la forma 1^∞

o también:

$f(x_o) = \infty$, $g(x_o) = 0$ quedando la forma ∞°

Entonces, para poder determinar un valor que permita eliminar la indeterminación para cualquiera de las tres formas anteriores, se emplea el procedimiento que a continuación se explica:

Sea la función $\phi(x) = f(x)^{g(x)}$

Tomando logaritmos naturales en ambos miembros de la expresión anterior y aplicando las propiedades de los logaritmos, se obtiene que:

$$L\ \phi(x) = g(x)\ L\ f(x)$$

Por lo que en cada uno de los casos anteriores, al logaritmo natural de la función, $\phi(x)$, tomará la forma indeterminada $0 \cdot \infty$. De esta manera determinando el valor de esta forma por el procedimiento correspondiente visto anteriormente, se obtiene el límite del logaritmo de la función $\phi(x)$

De tal forma que, si el límite toma el valor " a ", es decir si:

$$\lim_{x \to x_0} L\,\phi(x) = a$$

entonces: $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \phi(x) = e^a$

Ejemplo. 16.

Calcular: $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Solución:

Considerando la expresión anterior como:

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = \lim_{x \to \infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

buscando el límite, se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = 1^\infty$$

Esta indeterminación conduce al empleo del proceso descrito anteriormente para eliminarla, así pues, tomando logaritmos naturales y aplicando las propiedades de los logaritmos se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} L\,\phi(x) = \lim_{x \to \infty} x\,L\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

de donde:

$$\lim_{x \to \infty} x\,L\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty \cdot 0$$

El método para resolver dicha indeterminación, indica que hay que considerar el límite anterior como el producto de dos funciones tratando de llegar a obtener una indeterminación $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, para poder aplicar la regla de L'Hôpital.

Así pues, siguiendo dicho proceso resulta:

$$\lim_{x \to \infty} x\,L\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{L\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Calculando el límite de la última expresión se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

Aplicando ahora la Regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

buscando el límite resulta:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

De esta manera,

$$\lim_{x \to \infty} L\,\phi(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Como el límite que se busca es $\lim \phi(x)$, finalmente queda:

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = \lim_{x \to \infty} f(x)^{g(x)} = e^1 = e$$

Ejemplo. 17

Calcular: $\lim\limits_{x \to \infty} x^{e^{-x}}$

Solución:

Considerando a $\lim\limits_{x \to \infty} x^{e^{-x}}$ como:

$$\lim_{x \to \infty} \phi (x) = \lim_{x \to \infty} f (x)^{g (x)} = \lim_{x \to \infty} x^{e^{-x}} = \infty^{\circ}$$

tomando logaritmos,

$$\lim_{x \to \infty} L \phi (x) = \lim_{x \to \infty} e^{-x} L x = (0)(\infty)$$

Aplicando el método para eliminar dicha indeterminación, se tiene que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L x}{\left(\frac{1}{e^{-x}}\right)} \lim_{x \to \infty} \frac{L x}{e^{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Utilizando la regla de L'Hôpital y calculando el límite se obtiene,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L x}{e^{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x e^{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Así, pues, se tiene que:

$$\lim_{x \to \infty} L \phi (x) = \lim_{x \to \infty} \frac{L x}{e^{x}} = 0$$

Finalmente,

$$\lim_{x \to \infty} \phi (x) = \lim_{x \to \infty} f (x)^{g(x)} = \lim_{x \to \infty} x^{e^{-x}} = e^{0} = 1$$

Ejemplo. 18

Hallar $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

Solución:

Si $\lim\limits_{x \to 0^+} \phi (x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f (x)^{g (x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 0^{\circ}$

Tomando logaritmos: $L x^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x \, L x \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} L x^{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \, L x$

$$\lim_{x \to 0^+} L \phi (x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{L x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = - \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0^+} L \phi (x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{- \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = - \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} = \frac{0}{0}$$

Aplicando nuevamente la regla:

$$\lim_{x \to 0^+} L\phi (x) = - \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x - x \operatorname{sen} x} = - \frac{2 (0)}{1 - 0} = 0$$

Luego $\lim\limits_{x \to 0^+} \phi (x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^{0} = 1$

V.5. FUNCIONES CRECIENTES Y FUNCIONES DECRECIENTES.

Al estudiar la variación de una función, es de principal importancia saber si es creciente o si es decreciente. A continuación, se estudian estas características de las funciones.

La idea de función creciente y de función decreciente, puede introducirse diciendo que una función es creciente cuando al aumentar el valor de la variable independiente, también aumenta el valor de la variable dependiente y que una función es decreciente cuando al aumentar el valor de la variable independiente, disminuye el valor de la variable dependiente. Esto se concreta en las siguientes definiciones:

Definición.- Una función $y = f (x)$, es creciente en un intervalo -

$[a, b]$ si el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es positivo en el intervalo. Es decir si:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(Xo + \Delta x) - f(Xo)}{\Delta x} > 0$$

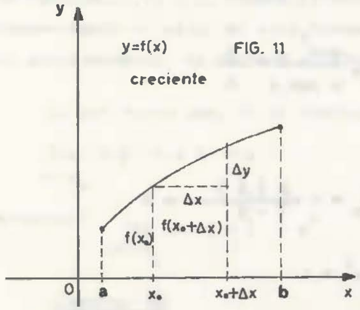
siendo Xo y $Xo + \Delta x$, dos valores cualesquiera de x en $[a, b]$

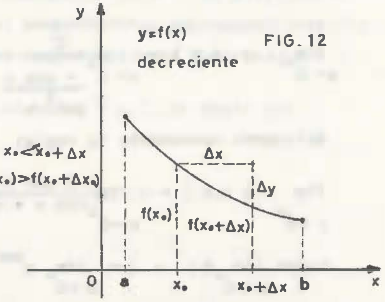
Nótese que: $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \iff \Delta x > 0,\ \Delta y > 0$

o bien que: $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \iff \Delta x < 0,\ \Delta y < 0$

lo que evidentemente concuerda con la idea expresada anteriormente.

En la figura 11 se ilustra el caso de una función creciente.





Definición: Una función $y = f(x)$, es decreciente en un intervalo $[a, b]$, si el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es negativo en el intervalo. Esto es, si:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(Xo + \Delta x) - f(Xo)}{\Delta x} < 0$$

siendo Xo y $Xo + \Delta x$, dos valores cualesquiera de x en $[a, b]$.

Se puede observar que:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \iff \Delta x > 0,\ \Delta y < 0$

o bien que: $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \iff \Delta x < 0,\ \Delta y > 0$

La figura 12 muestra la gráfica de una función decreciente.

Para condicionar analíticamente la existencia de una función creciente o de una decreciente, se presentan los siguientes teoremas.

Teorema V.7

Hipótesis: Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), y tal que $f'(x) > 0$ en (a, b).

Tésis: La función es creciente en $[a, b]$

Demostración: La función $y = f(x)$ satisface las condiciones del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial en $[a, b]$, por lo que si Xo y $Xo + \Delta x$, son dos valores de x en $[a; b]$, dicha función satisface las mismas condiciones en el intervalo $[Xo ; Xo + \Delta x]$.

De acuerdo a la Tésis del Teorema mencionado se tendrá :

$$\frac{f(Xo + \Delta x) - f(Xo)}{\Delta x} = f'(x_1);\ Xo < x_1 < Xo + \Delta x$$

Pero según la Hipótesis del Teorema en demostración: $f'(x) > 0\ \forall\ x \in (a,b)$ entonces:

$$f'(x_1) > 0,\ Xo < x_1 < Xo + \Delta x$$

por lo cual:

$$\frac{f(Xo + \Delta x) - f(Xo)}{\Delta x} > 0$$

y esto implica que la función $y = f(x)$ es creciente en $[a, b]$.

En la figura 13. se tiene la gráfica de una función creciente en un intervalo $[a, b]$ y se ve que la pendiente $m = f'(x_1)$ de la recta tangente en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ del arco $\widehat{AB}$ es positiva.

Teorema V.8

Hipótesis: Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f'(x) < 0$ en (a, b).

Tésis: La función es decreciente en $[a, b]$.

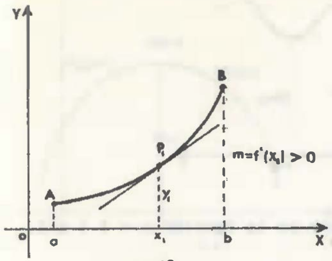


FIG 13

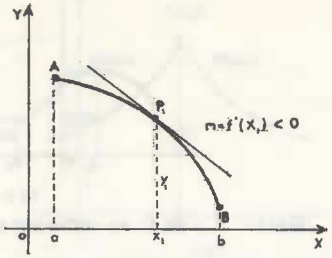


FIG 14

Demostración. La demostración de este teorema es totalmente similar a la del Teorema V.7 por lo cual se deja desarrollar al estudiante.

Un criterio general, basado en lo anterior, para determinar la naturaleza creciente o decreciente de una función, consiste en determinar el signo de su derivada a lo largo de su dominio, sabiendo que si en un intervalo la derivada es positiva, la función es creciente y si la derivada es negativa la función es decreciente.

Ejemplo 19.

Investigar para que intervalos de valores de x la siguiente función es creciente y para cuales es decreciente: $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

Solución:

La derivada de la función es: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$ **(A)**

Esta función derivada es continua para todo valor de x, por lo cual, el valor de $f'(x)$, solamente cambiará de signo pasando por el valor cero, por lo que es necesario determinar los valores de x que hacen $f'(x) = 0$.

Factorizando en (A): $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$ **(B)**

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2$

A continuación se obtiene el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de x_1 y x_2 (esto se facilita si se emplea (B), para determinar la naturaleza de la función dada.

Si $x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow y = f(x)$ es creciente

Si $1 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow y = f(x)$ es decreciente

Si $x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow y = f(x)$ es creciente

Como un complemento a la solución de este ejemplo se da la gráfica en la figura 15.

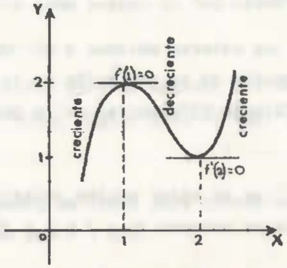


Figura 15.

Ejemplo. 20

Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, determinar en que intervalos es creciente y en cuales es decreciente.

Solución:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3.$

Desde luego que si $f'(x)$ no se puede factorizar los valores que la anulan pueden obtenerse resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$ como convenga.

La obtención del signo de la derivada y las conclusiones pueden obtenerse haciendo el siguiente cuadro:

x	x - 1	x - 3	f' (x)	f (x)
$-\infty < x < 1$	$-$	$-$	+	creciente
$1 < x < 3$	+	$-$	$-$	decreciente
$3 < x < +\infty$	+	+	+	creciente

V.6 MAXIMOS Y MINIMOS.

La determinación de los valores máximos y mínimos de una función es de- suma importancia en el estudio de la variación de la misma y conduce a una a- plicación inmediata del Cálculo Diferencial en la solución de muchos proble- mas prácticos.

Definición. f (Xo) es un valor máximo relativo de la función conti-- nua y = f (x), si existe un entorno $Xo - \delta < x < Xo + \delta$ de Xo para el cual:

$$f (Xo + \Delta x) < f (Xo) \text{ cuando } | \Delta x | < \delta$$

Definición: f (Xo) es un valor mínimo relativo de la función conti-- nua y = f (x), si existe un entorno $Xo - \delta < x < Xo + \delta$ de Xo para el cual

$$f (Xo + \Delta x) > f (Xo) \text{ si } | \Delta x | < \delta$$

Como en estas definiciones sólo se consideran valores de x en un entor- no de Xo, se puede notar que una misma función puede tener más de un máximo- relativo y más de un mínimo relativo y aún puede suceder que un máximo rela- tivo sea menor o igual que un mínimo relativo.

En la figura 16 se ve la gráfica de una función y = f (x) la cual tiene máximos relativos para x_1 y x_3, presenta mínimos relativos para x_2 y x_4 y - se observa que $f (x_1) < f (x_4)$

Teorema V 9.

Hipótesis. Sea la función continua y = f (x) y un entorno $Xo - \delta < x < Xo + \delta$ del valor Xo de su dominio en el cual se tiene:

$$f' (Xo + \Delta x) > 0 \text{ si } \Delta x < 0, | \Delta x | < \delta \qquad \text{(A)}$$

$$f' (Xo + \Delta x) < 0 \text{ si } \Delta x > 0; \Delta x < \delta \qquad \text{(B)}$$

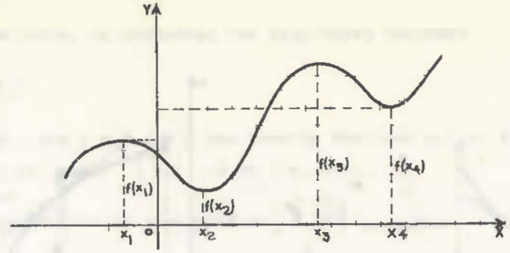


FIG 16

Tésis: f (Xo) es un valor máximo relativo de la función y = f (x).

Demostración: Por el Teorema V. 7, y por (A) de la Hipótesis se dedu- ce que la función y = f (x) es creciente en el intervalo $Xo - \delta < x \leq Xo$ por lo cual en este mismo intervalo:

$$f (Xo + \Delta x) < f (Xo) \qquad \text{(C)}$$

Ahora, por el Teorema V. 8 y por (B) de la Hipótesis se deduce que - y = f (x) es decreciente en el intervalo $Xo \leq x < Xo + \delta$, luego en este o- tro intervalo se tiene:

$$f (Xo + \Delta x) < f (Xo) \qquad \text{(D)}$$

Teniendo en cuenta (C) y (D) simultáneamente se concluye que:

$$f (Xo + \Delta x) < f (Xo), \text{ si } | \Delta x | < \delta.$$

Luego f (Xo) es un máximo relativo de la función y = f (x) que se - presenta para x = Xo

Este teorema se ilustra en la figura 17.

<u>Teorema V.10</u>

Hipótesis: Sea la función continua y = f (x), y un entorno $Xo - \delta < x < Xo + \delta$ del valor Xo de su dominio en el cual se tiene:

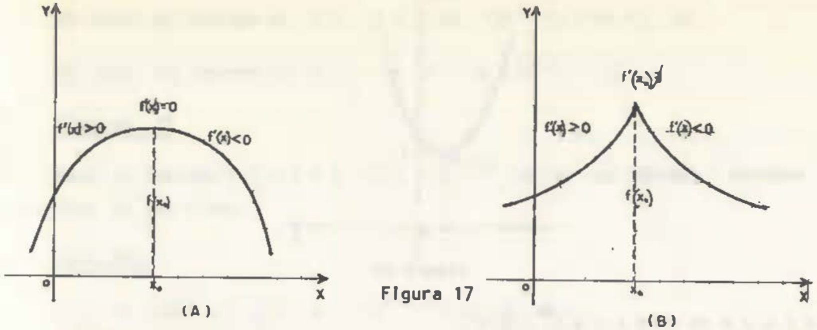


Figura 17

$f'(x_0 + \Delta x) < 0$ si $\Delta x < 0$, $|\Delta x| < \delta$ (E)

$f'(x_0 + \Delta x) > 0$ si $\Delta x > 0$; $\Delta x < \delta$ (F)

Tésis: $f(x_0)$ es un valor mínimo relativo de la función $y = f(x)$

Demostración: La demostración de este teorema es totalmente similar a la del Teorema V. 9 y se basa alternativamente en los Teoremas V. 8 y V. 7 por lo cual se deja como ejercicio al estudiante.

Geométricamente el Teorema V. 9, se ilustra en la figura 18.

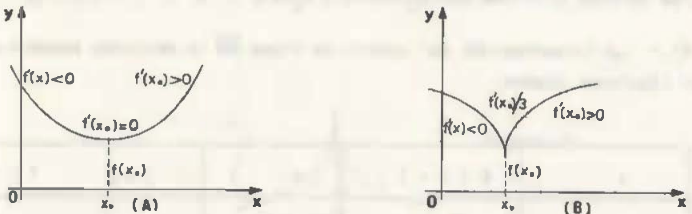


Figura 18

Por lo anterior se observa que lo que garantiza la existencia de un máximo relativo o un mínimo relativo de una función $y = f(x)$ para un valor x_0, es el cambio de signo de su derivada $y' = f'(x)$ al pasar x creciendo por el valor x_0.

Si dicho cambio de signo es de (+) a (-) se trata de un máximo relativo, si es de (-) a (+) se tiene un mínimo relativo.

Ahora bien, la derivada puede cambiar de signo pasando por el valor cero ó cambiando bruscamente de un valor positivo a otro negativo o viceversa.

Si la función derivada $y' = f'(x)$ es continua en un entorno del valor x_0, al cambiar de signo lo hace pasando por el valor cero. Este es el caso que se ilustra en las figuras 17 (A) y 18 (A).

Si la función derivada $y' = f'(x)$ es discontinua en x_0, puede cambiar de signo bruscamente como sucede en los casos ilustrados en las figuras 17 (B) y 18 (B).

Al estudiar una función para determinar sus máximos y mínimos relativos conviene proceder en un orden lógico para lo cual se presenta el siguiente criterio.

Criterio de la primera derivada para determinar los máximos y mínimos relativos de una función $y = f(x)$.

1).- Hallar la derivada $y' = f'(x)$

2).- Obtener los valores de x que anulan o hacen discontinua a la derivada. Estos valores se conocen comúnmente como valores críticos de x.

3).- Investigar el cambio de signo de la derivada al pasar x creciendo por cada valor crítico x_0, x_1, x_2, etc., deduciendo de ello si se trata de un máximo relativo o de un mínimo relativo según dicho cambio sea de (+) a (-) o de (-) a (+) respectivamente.

Si al realizar esto último en un punto, la derivada no cambia de signo, la función $y = f(x)$ no tiene máximo ni mínimo relativo. Una ilustración de este caso se presenta en la figura 19 (A) y (B).

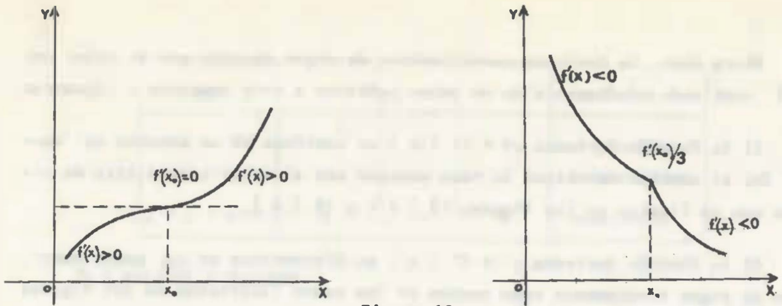


Figura 19

Ejemplo 21.

Estudiar la función $f(x) = x^2 + 2x + 4$ determinando sus máximos y mínimos relativos. Trazar su gráfica.

Solución:

1).- $f'(x) = 2x + 2$

2).- $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow X_o = -1$.

El único valor crítico que se presenta es $X_o = -1$

3).- Si $x < -1$ $f'(x) < 0$, (tiene signo (-)).

Si $x > -1$ $f'(x) > 0$, (tiene signo (+)).

Como el cambio de signo es de (-) a (+) se deduce que la función $f(x) = x^2 + 2x + 4$, tiene un valor mínimo relativo para el valor crítico $X_o = -1$.

El valor del mínimo es: $f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 4 = 3$

La gráfica se ve en la figura 20.

Ejemplo. 22

Determinar los valores máximos y mínimos relativos de la función

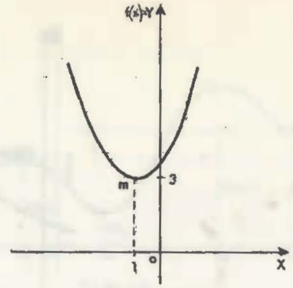


Figura 20

$f(x) = 10 + 12x - 3x^2 - 2x^3$.

Solución:

1).- $f'(x) = 12 - 6x - 6x^2$

Factorizando: $f'(x) = -6(x^2 + x - 2) = -6(x+2)(x-1)$

2).- Como la función derivada es continua, se buscan los valores que la anulan únicamente.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -6(x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1$

Los valores críticos son $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$

3).- La investigación del cambio de signo de la derivada puede hacerse con el siguiente cuadro.

x	$-6(x+2)$	$(x-1)$	$f'(x)$	$f(x)$
$-\infty < x < -2$	+	-	-	Hay un mínimo para $x_1 = -2$
$-2 < x < 1$	-	-	+	
$1 < x < +\infty$	-	+	-	Hay un máximo para $x_2 = 1$

El valor del mínimo es: $f(-2) = 10 - 24 - 12 + 16 = -10$

El valor del máximo es: $f(1) = 10 + 12 - 3 - 2 = 17$

Ejemplo. 23

Dada la función $f(x) = 3 - (x - 2)^{2/3}$ hallar sus máximos y mínimos relativos si los tiene:

Solución:

1). $f'(x) = -\frac{2}{3}(x - 2)^{-1/3} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x - 2}}$

2).- No existen valores de x que anulen a la derivada pero $x_1 = 2$ la hace discontinua luego el único valor crítico es éste.

3).- $x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x - 2} < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \quad (+)$

$x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x - 2} > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \quad (-)$

Evidentemente se tiene un máximo relativo para $x_1 = 2$ cuyo valor es $f(2) = 3$.

En la figura 21 se ve la gráfica correspondiente.

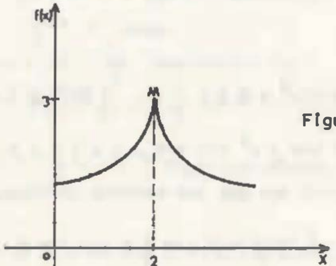


Figura 21

Ejemplo 24.

Hallar los máximos y mínimos relativos de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \frac{x}{2} & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

trazar la gráfica correspondiente:

Solución:

Si $x < 2$; $f'(x) = -2x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ que es un valor crítico.

Si $x > 2$; $f'(x) = \frac{1}{2}$, no hay valor de x que anule o haga discontinua a la derivada.

Para $x_2 = 2$: $f(2) = 1$ y $f'_-(2) = -2x \Big]_{x=2} = -4 < 0$

$f'_+(2) = \frac{1}{2} > 0$

Esto implica que $f'(2) \nexists$ así que $x_2 = 2$ es otro valor crítico. Además por lo anterior se ve que al pasar x creciendo por el valor $x_2 = 2$ la derivada cambia de signo de $(-)$ a $(+)$, luego $f(2) = 1$ es un valor mínimo relativo.

Para el valor crítico $x_1 = 0$ se tiene

$x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \ (+)$

$x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \ (-)$

Así que $f(0) = 5$ es un valor máximo relativo.

La gráfica de esta función se ve en la figura 22

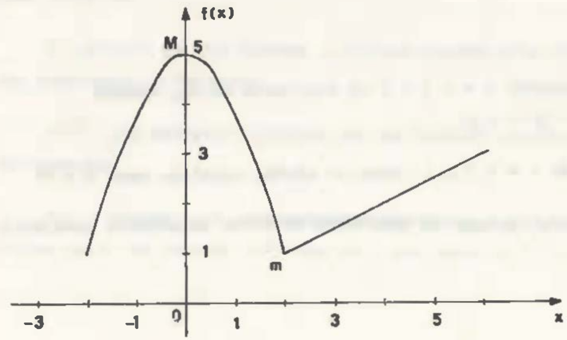


Figura 22.

Otra forma de analizar una función para máximos y mínimos relativos incluye el empleo de la segunda derivada de la función como se ve a continuación.

Teorema V. 11

Hipótesis: La función $y = f(x)$ es derivable en X_o, además, $f'(X_o) = 0$ y $f''(X_o) < 0$.

Tésis: La función $y = f(x)$ presenta un máximo relativo para $x = X_o$

Demostración: Como $f''(X_o) < 0$, existe un entorno $X_o - \delta < x < X_o + \delta$ de X_o en el cual la función derivada $y' = f'(x)$ es decreciente, luego:

$$\left.\begin{array}{l} f'(X_o + \Delta x) > f'(X_o) \quad \text{sí } \Delta x < 0 \\ f'(X_o + \Delta x) < f'(X_o) \quad \text{sí } \Delta x > 0 \end{array}\right\} |\Delta x| < \delta$$

Pero como $f'(X_o) = 0$, lo anterior implica:

$$\left.\begin{array}{l} f'(X_o + \Delta x) > 0 \ (+) \quad \text{sí } \Delta x < 0 \\ f'(X_o + \Delta x) < 0 \ (-) \quad \text{sí } \Delta x > 0 \end{array}\right\} |\Delta x| < \delta$$

Esto se hace ver que la derivada cambia de signo de (+) a (-), al pasar x creciendo por X_o, luego hay un máximo relativo para $x = X_o$, cuyo valor es $f(X_o)$. Q.D.

Teorema V.12

Hipótesis: La función $y = f(x)$ es derivable en X_o, además $f'(X_o) = 0$ y $f''(X_o) > 0$.

Tésis: La función $y = f(x)$ tiene un mínimo relativo para $X = X_o$

Demostración: Este teorema se demuestra en forma totalmente semejante al anterior.

Con base en los teoremas V. 11 y V. 12 se da ahora el siguiente:

Criterio de la segunda derivada para determinar los máximos y mínimos relativos de una función $y = f(x)$.

1).- Obtener la primera y la segunda derivadas de la función.

2).- Hallar los valores críticos que anulan a la primera derivada.

3).- Calcular el valor de la segunda derivada para cada uno de los valores críticos obtenidos antes, deduciendo que sí para un valor crítico $x = X_o$, se tiene $f'(X_o) = 0$, se tiene que $f(X_o)$ es máximo relativo sí $f''(X_o) < 0$, y es mínimo relativo si $f''(X_o) > 0$.

En el caso en que $f'(X_o) = 0$ ó $f''(X_o)$ no exista, este criterio no es aplicable, teniéndose el recurso de aplicar el criterio de la primera derivada.

Ejemplo. 25

Aplicando el criterio de la segunda derivada, determinar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

Solución:

1).- $f'(x) = 3x^2 + 6x$; $\quad f''(x) = 6x + 6$

2).- $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 0$ que son los valores críticos.

3).- Para $x_1 = -2$ $f''(-2) = 6(-2) + 6 = -6 < 0$ luego:

$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 2 = 2$ es máximo relativo.

Para $x_2 = 0$, $f''(0) = 6 > 0$ por lo cual $f(0) = -2$ es mínimo relativo.

Ejemplo. 26

Estudiar la función $f(x) = \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$ encontrando sus máximos y mínimos relativos, aplicando el criterio de la segunda derivada.

Solución:

1).- $f'(x) = 6x^3 - x^2 - 2x$; $f''(x) = 18x^2 - 2x - 2$

2).- $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(6x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 0$; $6x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(6)(-2)}}{2(6)} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12} \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{1+7}{12} = \frac{2}{3} \text{ ; } x_3 = \frac{1-7}{12} = -\frac{1}{2}$$

Los valores críticos son: $x_3 = \frac{-1}{2}$; $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{3}{2}$

3).- Para $x_3 = -\frac{1}{2}$: $f''(-\frac{1}{2}) = 18(\frac{1}{4}) - 2(-\frac{1}{2}) - 2$

$\Rightarrow f''(-\frac{1}{2}) = +\frac{7}{2} > 0$ luego:

hay mínimo relativo para $x_3 = -\frac{1}{2}$ cuyo valor es:

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2}(-\tfrac{1}{2})^4 - \tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{2})^3 - (-\tfrac{1}{2})^2; \quad f(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{-11}{96}$$

Para $x_1 = 0$: $f''(0) = -2 < 0$ luego hay máximo relativo para $x_1 = 0$ cuyo valor es $f(0) = 0$.

Para $x_2 = \frac{3}{2}$: $f''(\frac{3}{2}) = 18(\frac{3}{2})^2 - 2(\frac{3}{2}) - 2 = \frac{71}{2} > 0$ luego hay mínimo relativo para $x_2 = \frac{3}{2}$ cuyo valor es:

$$f(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2}(\tfrac{3}{2})^4 - \tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{2})^3 - (\tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{135}{32}$$

PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS.

Comúnmente lo primero que hay que hacer al resolver un problema de máximos y mínimos es establecer el modelo matemático que representa la función -- cuyos valores máximos o mínimos se desean determinar.

Aquí tiene una amplia aplicación de lo tratado en el tema I.7.

No hay una regla aplicable a la solución de todos los problemas de máximos y mínimos pero en la mayoría de ellos puede seguirse el siguiente orden.

1º Determinar la función cuyo máximo o mínimo se desea obtener, trazando un croquis cuando convenga.

2º Si la expresión resultante contiene más de una variable, las condiciones del problema proporcionarán suficientes relaciones entre las variables para que la función pueda expresarse en términos de una sola variable.

3º A la función resultante se le aplican los criterios tratados anteriormente para el cálculo de máximos y mínimos.

4º En los problemas prácticos, muchas veces se ve con facilidad cuales de los valores críticos darán un máximo o un mínimo, en consecuencia no siempre es necesario aplicar completo el paso anterior.

5º Conviene construir la gráfica de la función para comprobar el resultado obtenido.

El cálculo de los máximos y mínimos pueden simplificarse con ayuda de - los siguientes principios.

1).- Los máximos y mínimos de una función continua se presentan alternativamente.

2).- Cuando C es una constante positiva, c f (x) es un máximo o un - mínimo para los valores críticos de x que hacen a f (x) máximo o mínimo -

y no para otros.

Cuando C es negativa, c f (x), es un máximo cuando f (x) es mínimo y recíprocamente.

3).- Si C es constante, f (x) y c + f (x) tienen valores máximos y mínimos para los mismos valores críticos de x.

Ejemplo. 27

Se quiere construir una caja rectangular de base cuadrada sin tapa. Calcular el volumen de la caja que se puede obtener de 1,200 cm^2 de material, con la mayor capacidad posible.

Solución:

Un croquis del desarrollo de la caja se ve en la figura 23.

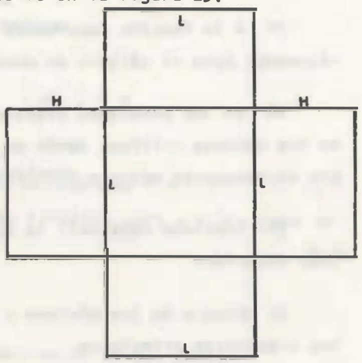


Figura 23

Se ve que: $= 4 L h + L^2 = 1,200\ cm^2$

despejando h queda: $h = \frac{1,200 - L^2}{4 L}$

sustituyendo en $V = L^2 h$.

$$V = L^2 \left[\frac{1,200 - L^2}{4 L} \right] = \frac{1,200 L}{4} - \frac{L^3}{4} = 300 L - \frac{L^3}{4}$$

Derivando:

$$\frac{d V}{d L} = 300 - \frac{3}{4} L^2$$

$$\frac{d V}{d L} = 0 \Rightarrow - \frac{3}{4} L^2 + 300 = 0 \Rightarrow L^2 = \frac{(300)\, 4}{3} = 400 \Rightarrow L = \sqrt{400}$$

L = 20 cm (que es el único valor crítico).

Calculando la segunda derivada:

$$\frac{d^2 V}{d L^2} = - \frac{6}{4} L = - \frac{3}{2} L$$

sustituyendo L = 20 quedará:

$$\frac{d^2 V}{d L^2} = - 30 < 0 \Rightarrow V \text{ será máximo cuando } L = 20$$

sustituyendo en V el valor crítico

$$V = \frac{(1,200)\, 20}{4} - \frac{(20)^3}{4} = 6,000 - 2,000 = 4,000$$

$V = 4,000\ cm^3$ es la capacidad máxima de la caja.

Ejemplo. 28

Un hombre tiene un muro de piedra en un costado de un terreno. Dispone de 1,200 metros de material para cercar, y desea hacer un corral rectangular utilizando el muro como uno de sus lados. ¿ Qué dimensiones debe tener el corral para encerrar la mayor área posible?.

Solución:

La figura 24 muestra un croquis del terreno.

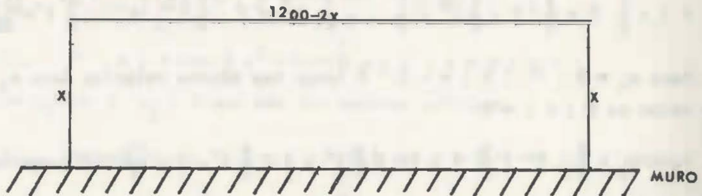


Figura 24

El área es: $A = A (x) = x (1,200 - 2 x) = 1,200 x - 2 x^2$

Derivando: $A' (x) = 1,200 - 4 x$

$A' (x) = 0 \Rightarrow 1,200 - 4 x = \Rightarrow x_1 = 300$ m (valor crítico).

La segunda derivada es constante y negativa:

$A''(x) = -4 < 0$

luego se trata de un máximo.

El ancho del corral debe ser $x_1 = 300$ m y el largo:

$1,200 - 2(300) = 600$ m.

Ejemplo. 29

La suma de un número y el triple de un segundo número es 60. Encontrar entre todos los pares de números que satisfacen esta condición aquel cuyo producto sea el máximo posible.

Solución:

El producto P se puede representar así:

$$P = x\,y$$

por la primera proposición del problema se tiene que: $x + 3y = 60 \Longrightarrow$

$y = \frac{1}{3}(60 - x)$

sustituyendo y en $P = x\,y$:

$$P = x\frac{1}{3}(60 - x) = 20x - \frac{1}{3}x^2 = P(x)$$

como P es función de x_1, derivando con respecto a x:

$$P'(x) = 20 - \frac{2}{3}x$$

igualando esta expresión a cero:

$$20 - \frac{2}{3}x = 0 \Rightarrow x_1 = 30$$

sustituyendo en $y = \frac{1}{3}(60 - x)$ queda: $y_1 = 10$

Los números pedidos son $x_1 = 30$, $y_1 = 10$

Ejemplo. 30

Al proyectar un estacionamiento se estima que si se disponen de 40 a 80 casilleros para automóviles la utilidad diaria será de \$ 8.00 por casillero. Sin embargo si en el proyecto se aumenta el número de casilleros a más de 80 la utilidad se reducirá en \$ 0.04 por cada casillero de los que excedan a 80 ¿ Cuál debe ser el número de casilleros proyectados para obtener la máxima utilidad ?.

Solución:

Sea x el número de casilleros y F la utilidad diaria en pesos.

Evidentemente F depende de x. Cuando $40 \leqslant x \leqslant 80$, F se obtiene multiplicando x por 8.00, es decir:

Si $40 \leqslant x \leqslant 80$, $F(x) = 8x$

Cuando $x > 80$ la utilidad por cada casillero es $8 - 0.04(x - 80)$ por lo que la utilidad por x casilleros es:

Si $x > 80$ $F(x) = x\left[8 - 0.04(x - 80)\right] = 11.20x - 0.04x^2$.

Obsérvese que la utilidad disminuirá hasta anularse cuando $11.20x - 0.04x^2 = 0$. Resolviendo esta ecuación resulta $x_1 = 280$. Esto quiere decir que si se dispusieran más de 280 casilleros habría pérdida en lugar de utilidad.

De lo anterior, se deduce que la función que hay que estudiar para máximos y mínimos es:

$$F(x) = \begin{cases} 8x & \text{si } 40 \leq x \leq 80 \\ 11.20x - 0.04x^2 & \text{si } 80 < x \leq 280 \end{cases}$$

Aunque por la naturaleza del problema x es un número entero positivo para tener una función continua se considera que x es un número real, teniéndose como dominio de la función el intervalo $[40; 280]$.

Ahora bien, si $40 \leqslant x \leqslant 80$, $F'(x) = 8$

si $80 < x \leqslant 280$, $F'(x) = 11.20 - 0.08x$

Para $x = 80$, $F'_-(80) = 8$ y $F'_+(80) = 11.20 - 0.08(80) = 4.80$

Como $F'_-(80) \neq F'_+(80) \Rightarrow F'(80) \nexists$, así que $x_1 = 80$ es un valor crítico de x, pero se observa que $F'_-(80) > 0$ y $F'_+(80) > 0$, no hay cambio de signo de la derivada, luego para $x_1 = 80$ no hay máximo ni mínimo.

Para $F'(x) = 11.20 - 0.08x$ si $80 < x \leq 280$:

$F'(x) = 0 \Rightarrow 11.20 - 0.08x = 0 \Rightarrow x_2 = 140$ que es otro valor crítico al cual debe corresponder el máximo.

Aplicando el criterio de la segunda derivada, se ve que:

$F''(x) = -0.08$ si $80 < x \leq 280$

$F''(140) = -0.08 < 0$, así que esto confirma que para $x_2 = 140$, $F(140)$ es máximo.

Conclusión: Se tendrá la utilidad máxima si el estacionamiento se proyecta con 140 casilleros.

V. 7 CONCAVIDAD DE UNA CURVA, PUNTOS DE INFLEXION.

Sea una recta L como la indicada en la figura 25, no perpendicular al eje x, entonces se tienen las siguientes definiciones:

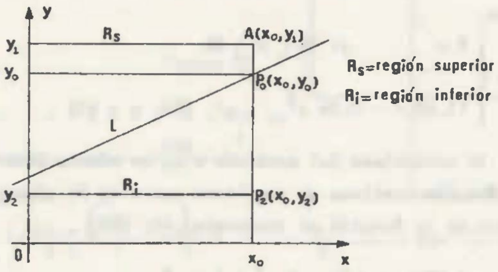


Figura 25

Definición:

Se dice que los puntos $P_1(x, y)$ se encuentran en la región superior R_s de la recta L si sus ordenadas son mayores que las ordenadas correspondientes del punto P_o de la recta L que tiene la misma abscisa que P_1 (en la figura 25 $P_1 \in R_s$).

Definición:

Se dice que los puntos $P_2(x, y)$ pertenecen a la región inferior R_i de la recta L si sus ordenadas son menores que las ordenadas del punto de la recta para la misma abscisa (en la figura 25 se tiene que $P_2 \in R_i$).

Con esta base se puede definir las concavidades de una curva como sigue:

Definición:

La curva de ecuación $y = f(x)$ que es continua en el punto P (xo, yo) tiene su concavidad hacia arriba en P si existe un entorno de P en el cual todos los puntos de la curva, excepto el punto P se encuentran en la región superior de la tangente a la misma en el punto P (xo, yo).

La figura 26 muestra la interpretación geométrica de esta definición:

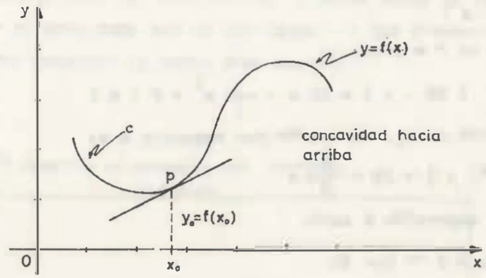


Figura 26

Definición:

La curva C cuya ecuación es: $y = f(x)$ que es continua en P, tiene su concavidad hacia abajo en este punto si existe un entorno del punto P, tal que todos los puntos de la curva, con excepción del punto P, se encuentran en la región inferior de la tangente a la curva en dicho punto.

Esta definición se muestra gráficamente en la figura 27.

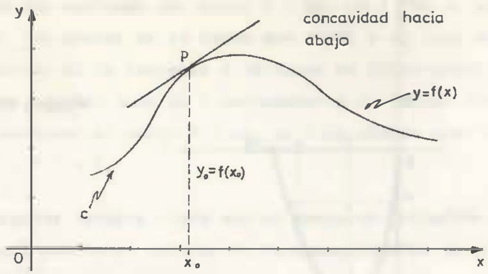


Figura 27

Teorema V. 13

Hipótesis: La ecuación de la curva C es y = f (x), esta función tiene segunda derivada y se cumple que f'' (Xo) > 0

Tésis: La curva C tiene su concavidad hacia arriba en el punto P (Xo, Yo)

Demostración: La ecuación de la recta tangente a la curva C en el punto P es:

$$y - yo = f' (xo) (x - xo) \Rightarrow y = f' (xo) (x - xo) + yo$$

y es la ordenada de un punto de la tangente con abscisa x, f (x), es la ordenada del punto de la curva con la misma abscisa x.

Considérese la función f (x) - y :

$$f (x) - y = f (x) - f' (xo) (x - xo) - yo$$

Como esta función es dependiente de x, entonces es válido calcular con respecto a x la primera derivada.

$$\frac{d}{dx} \left[f (x) - y \right] = f' (x) - f' (xo)$$

Si x = xo:

$$\frac{d}{dx} \left[f (x) - y \right] = 0$$

Calculando la segunda derivada,

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[f (x) - y \right] = f'' (x)$$

Según la hipótesis: f'' (xo) > 0 , entonces por el Teorema V. 12 la función $\left[f (x) - y \right]$ tiene un mínimo para x = xo.

El valor de este mínimo es:

$$\left[f (x) - y \right]_{x=Xo} = f (xo) = 0$$

luego existe una vecindad del punto P, en la que a excepción de este punto se tiene que:

$$f (x) - y > 0$$

lo que implica que f (x) > y; luego en dicha vecindad todos los puntos de la curva excepto el punto P se encuentran en la región superior de la tangente a la curva en el punto P, de donde se concluye que la curva C de ecuación y = f (x) tiene su concavidad hacia arriba en ese punto.

Teorema V. 14

Hipótesis: La ecuación de la curva C es y = f (x), esta función tiene segunda derivada y se cumple que f'' (xo) < 0.

Tésis: La curva C tiene su concavidad hacia abajo en el punto P (Xo, Yo).

Demostración:

La tangente a la curva en el punto P es:

$$y - yo = f' (xo) (x - xo) \Rightarrow y = f' (xo) (x - xo) + yo$$

considérese la función:

$$(f (x) - y) = f (x) - f' (xo) (x - xo) - yo$$

su primera derivada será:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) - y \right] = f'(x) - f'(xo)$$

que se anula para x = xo.

La segunda derivada es:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[f(x) - y \right] = f''(x)$$

Según la hipótesis:

$f''(xo) < 0$

por lo cual, según el Teorema V. 11, $[f(x) - y]$ tiene un máximo relativo para x = xo entonces existe un entorno del punto P en que solo exceptuando este, se tiene que:

$$f(x) - y < 0 \Rightarrow f(x) < y$$

Se concluye que en dicho entorno, todos los puntos de la curva C de ecuación: $y = f(x)$ con excepción de P, pertenecen a la región inferior de la tangente a la curva en dicho punto, luego la curva C de ecuación $y = f(x)$ tiene su concavidad hacia abajo en dicho punto.

Ejemplo. 31

Examinar la concavidad de la curva de ecuación $y = f(x) = x^2 - 4x^{1/2}$

Solución:

$$y' = 2x - 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = 2 + x^{-\frac{3}{2}} \Longrightarrow y'' = 2 + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

El dominio de $y = f(x)$ es $x \geq 0$ y el dominio de $y' = f'(x)$ y $y'' = f''(x)$ es para ambas: $x > 0$

Es claro que si $x > 0$ se tiene que $f''(x) > 0$, por lo cual la curva es cóncava hacia arriba.

Puede verse que si $x \to 0^+$, esta curva se aproxima tangencialmente al eje de las y. Dado que $f(0) = 0$, el origen está sobre la curva, pero la curva no se extiende a la izquierda de este punto como se ve en la figura 28.

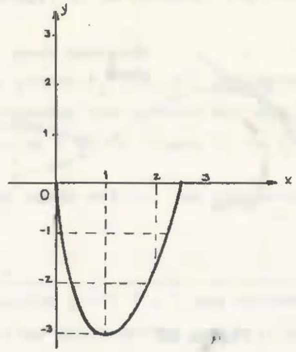


Figura 28

Ejemplo. 32

Encontrar los puntos donde la curva de ecuación: $24y = x^3 - 6x^2 - 36x + 16$ es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo.

Solución:

Derivando:

$$24y' = 3x^2 - 12x - 36$$

$$= 3(x + 2)(x - 6)$$

derivando nuevamente:

$$24y'' = 6x - 12 = 6(x - 2)$$

se ve que: $y'' > 0$ si $x > 2$

$y'' < 0$ si $x < 2$

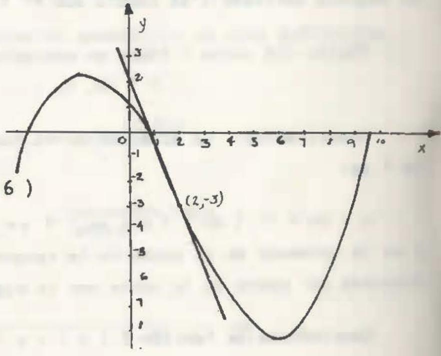


FIG. 29

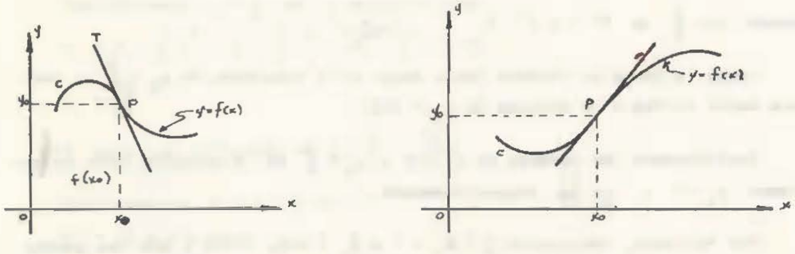
Por este motivo la curva es cóncava hacia abajo para $x < 2$, y cóncava hacia arriba para $x > 2$ como se ve en la figura 29.

Se observa que $y'' = 0$ para $x = 2$ y el punto $(2, -3)$ sobre la curva separa la porción de la curva que es cóncava hacia arriba de la que es cóncava hacia abajo.

PUNTOS DE INFLEXION.

Si existe una vecindad del punto P (xo, yo) en la curva C y en esta vecindad todos los puntos de la curva que están a un lado de P pertenecen a la región superior de la tangente a la curva en dicho punto P y todos los puntos de la curva al otro lado de P pertenecen a la región inferior de la misma tangente, entonces el punto P (xo, yo) se conoce como punto de inflexión de la curva Y = f (x).

De lo anterior resulta claro que un punto de inflexión de una curva es aquel en el cual cambia el sentido de la concavidad de la misma, como se ve en la figura 30 (A) y (B).



(A) (B)

Figura 30

De esta definición y del estudio sobre concavidad se sigue que en el punto de inflexión la segunda derivada debe cambiar de signo.

Por el procedimiento visto en el estudio de los valores extremos de una función (máximos y mínimos), se ve que para analizar el cambio de signo de f'' (x) se requiere calcular los valores de x que anulen esta derivada segunda, dado que esta condición es esencial para que exista el cambio de signo. Mas aún, la función y'' = f'' (x) puede anularse sin que ocurra el cambio de signo.

Así pues, para encontrar los puntos de inflexión, de una curva dada y = f (x) se procede como sigue:

1). Calcular la segunda derivada f'' (x)

2). Calcular los valores de x que anulen o hagan discontinua a f'' (x)

3). Si al pasar x por dichos valores hay un cambio de signo de f'' (x) entonces la curva tendrá un punto de inflexión para el valor de x considerado.

4). Si el cambio de signo es de (+) a (-), la curva cambia su concavidad de hacia arriba a hacia abajo.

5). Si el cambio de signo es de (-) a (+), la concavidad cambia de hacia abajo a hacia arriba.

Otra forma más rápida de calcular un punto de inflexión se infiere fácilmente del siguiente teorema:

Teorema V. 15

Hipótesis: y = f (x) es la ecuación de la curva C, para x = xo se tiene $f''(X_o) = 0$ y $f'''(X_o) \neq 0$.

Tésis: El punto P (xo, yo) de la curva C es un punto de inflexión.

Demostración: Se consideran dos casos:

1er caso: $f'''(X_o) > 0$, esto implica que en un entorno $X_o - \delta < x < X_o + \delta$ la función $y'' = f''(x)$ es creciente luego:

$$\left.\begin{array}{ll} f''(X_o + \Delta x) < f''(X_o) = 0 & \text{si } \Delta x < 0 \\ f''(X_o + \Delta x) > f''(X_o) = 0 & \text{si } \Delta x > 0 \end{array}\right\} \quad |\Delta x| < \delta$$

luego la segunda derivada f'' (x) cambia de (-) a (+) y la curva y = f (x) tiene un punto de inflexión en P (Xo, Yo) como se ve en la figura 31.

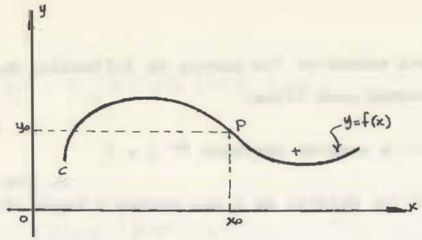


Figura 31

2o Caso: $f'''(x_0) < 0$, esto implica que en un entorno $X_0 - \delta < x < X_0 + \delta$, la función $y'' = f''(x)$ es decreciente luego:

$$\left.\begin{array}{ll} f''(X_0 + \Delta x) > f''(X_0) = 0 & \text{si } \Delta x < 0 \\ f''(X_0 + \Delta x) < f''(X_0) = 0 & \text{si } \Delta x > 0 \end{array}\right\} |\Delta x| < \delta$$

luego: $f''(x)$ cambia de signo de $(+)$ a $(-)$ y la curva $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en $P(X_0, Y_0)$, ver la figura 32.

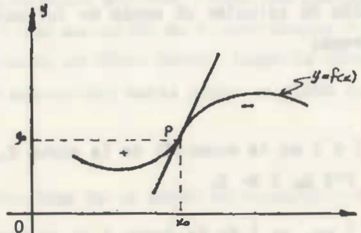


Figura 32

Ejemplo 33.

Hallar los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad de la curva de ecuación:

$$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$$

Solución:

$y' = 12x^3 - 12x^2$

$y'' = 36x^2 - 24x \Rightarrow y'' = f''(x) = 36x\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 36x\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0$$

resolviendo la ecuación anterior se obtienen:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{2}{3}$$

Como: $f''(x) = 36x\left(x - \frac{2}{3}\right)$

cuando $x < 0 \Rightarrow f''(x) > 0$; $\smile^{+}$

cuando $0 < x < \frac{2}{3} \Rightarrow f''(x) < 0$; $\frown^{-}$

Luego la curva es cóncava hacia arriba a la izquierda de $x_1 = 0$ y cóncava hacia abajo a la derecha de ese punto.

cuando $0 < x < \frac{2}{3} \Rightarrow f''(x) < 0$; $\frown^{-}$

cuando $x > \frac{2}{3} \Rightarrow f''(x) > 0$ $\smile^{+}$

Luego la curva es cóncava hacia abajo a la izquierda de $x_2 = \frac{2}{3}$ y cóncava hacia arriba a la derecha de $x_2 = 2/3$.

Sustituyendo los valores de $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{2}{3}$ en la ecuación dada se obtienen: $y_1 = 1$ y $y_2 = \frac{11}{27}$ respectivamente.

Por lo tanto, los puntos $I_1(0, 1)$ e $I_2(2/3, 11/27)$ son los puntos de inflexión, figura 33.

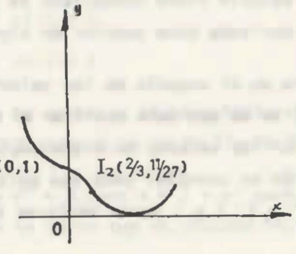


Figura 33.

Ejemplo 34.

Hallar los puntos de inflexión y concavidad de la curva de ecuación :

$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25.$

SOLUCION:

$y' = 6x^2 - 6x - 36$

$y'' = 12x - 6$

$y'' = 0 \Rightarrow \quad 12x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$

$y''' = f'''(x) = 12 > 0 \Rightarrow f'''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

luego si hay punto de inflexión.

Sustituyendo $x_1 = \frac{1}{2}$ en la ecuación dada.

$y_1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 36\left(\frac{1}{2}\right) + 25$

$y_1 = \frac{13}{2}$

El punto de inflexión es $I\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$

Sustituyendo: $x = 0 < \frac{1}{2}$ en y''.

$y'' = 12(0) - 6$

$y'' = -6 < 0$

luego la curva es cóncava hacia abajo a la izquierda de $x_1 = \frac{1}{2}$

Sustituyendo: $x = 1 > \frac{1}{2}$ en y''

$y'' = 12(1) - 6$

$y'' = 6 > 0$

luego la curva es cóncava hacia arriba a la derecha de $x_1 = \frac{1}{2}$

V.8 REPRESENTACION DE LA FUNCION ORIGINAL Y SUS DERIVADAS.

El siguiente ejemplo, ilustra gráficamente la transformación que toma una función dada, al aplicarse sobre ella el operador derivada por tres ocasiones, es decir, hasta obtener su derivada de tercer orden. Asimismo, es posible observar como se cumplen los conceptos estudiados anteriormente, sobre la representación y significado de la primera, segunda y tercera derivadas respectivamente, relacionándolos con el comportamiento que tiene la función original, identificando los elementos y puntos críticos de la misma.

Ejemplo. 35

Representación gráfica de una función original y sus derivadas hasta de tercer orden.

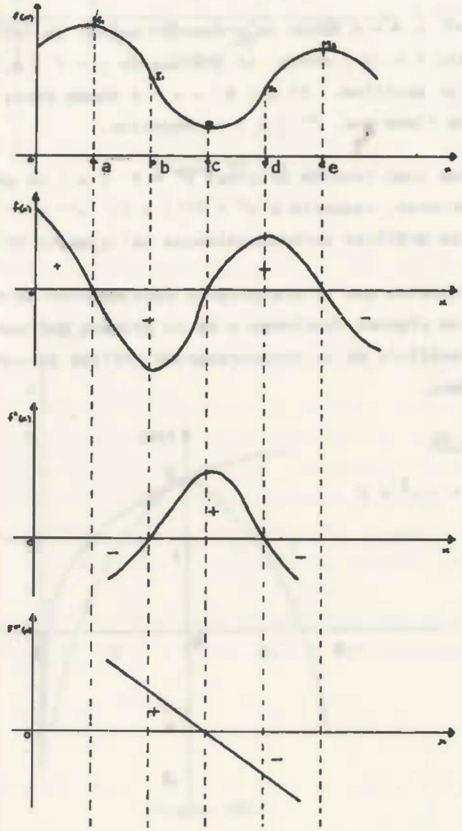


Figura 34

En las gráficas anteriores se puede observar lo siguiente:

En los intervalos $(-\infty; a)$ y $(c; e)$ donde $y = f(x)$ es creciente - $y' = f'(x)$ es positiva y en los intervalos $(a; c)$ y $(e; +\infty)$ donde -- $y = f(x)$ es decreciente, se tiene que $y' = f'(x)$ es negativa.

Para los valores críticos $x = a$ $x = e$ en los que hay máximo relativo, y - $x = c$ que corresponde a un mínimo relativo, se tiene que $f'(x) = 0$.

Para $x = b$ y $x = d$ donde se presentan puntos de inflexión, $f''(x) = 0$ en el intervalo $(b; d)$ donde la gráfica de $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba, $f''(x)$ es positiva. Si $x < b$ y $x > d$ donde dicha gráfica es cóncava -- hacia abajo se tiene que $f''(x)$ es negativa.

Si se toma como función original $y' = f'(x)$ se cumplen las mismas propiedades anteriores, respecto a $y'' = f''(x)$ y $y''' = f'''(x)$ como se puede - observar en las gráficas correspondientes del ejemplo 35.

En los ejemplos que se presentan a continuación se muestra la representación gráfica de algunas funciones y de su primera derivada, con objeto de complementar el análisis de la interpretación gráfica de una función original y - de sus derivadas.

Ejemplo. 36

$f(x) = -x^2 + 2$

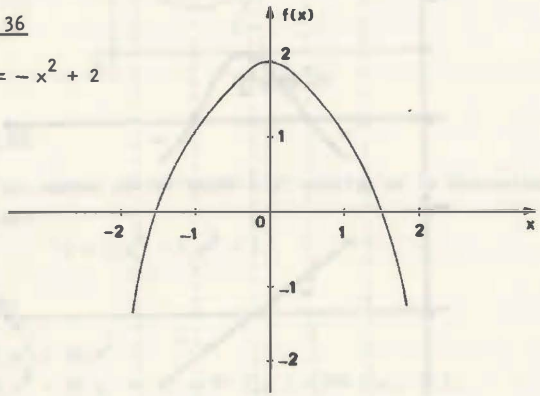


Figura 35 (a)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-x^2 + 2 \right) = -2x$$

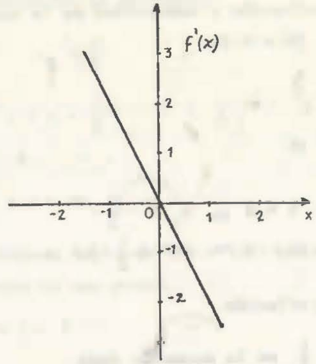


Figura 35 (b)

Ejemplo. 37

$f(x) = x^3 + 3x.$

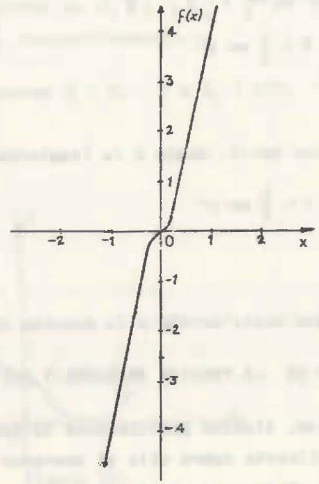


Figura 36 (a)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + 3x) = 3x^2 + 3$$

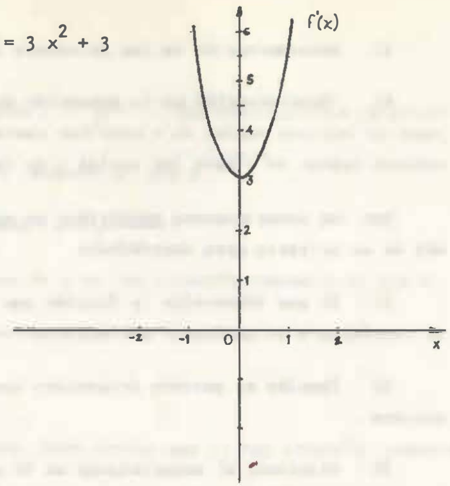


Figura 36 (b)

Ejemplo. 38

f (x) = sen x

Si $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

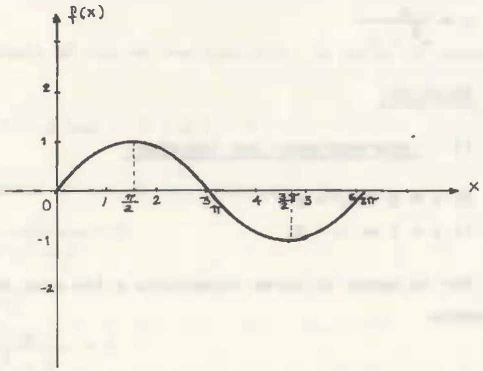


Figura 37 (a)

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\text{sen } x\right] = \cos x$$

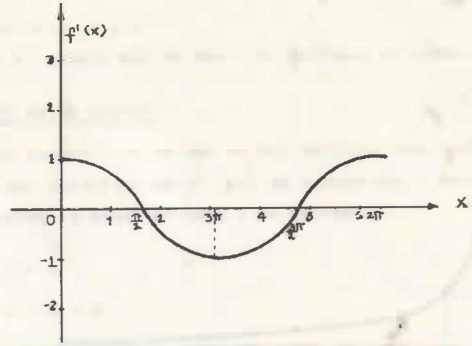


Figura 37 (b)

Ejemplo. 39

f (x) = L x

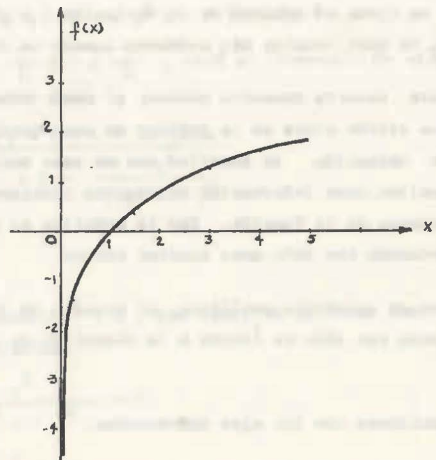


Figura 38(a)

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

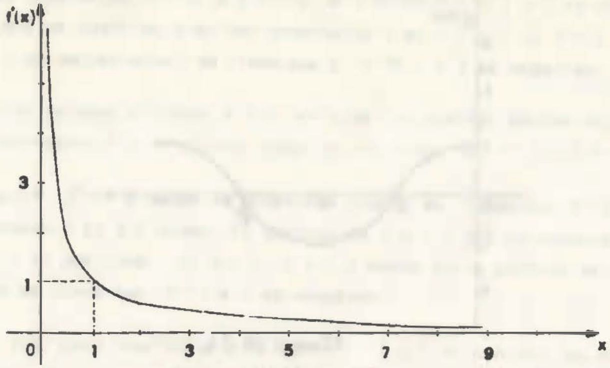


Figura 38(b)

V. 9 ESTUDIO DE LA VARIACION DE UNA FUNCION. PROBLEMAS DE APLICACION.

Como una de las aplicaciones mas importantes de los conceptos analizados en este capítulo se tiene el estudio de la variación (o comportamiento) de una función dada, la cual resulta más evidente cuando se discute gráficamente.

De esta manera, resulta deseable obtener el menor número de puntos que permitan tener una visión clara de la gráfica de una función en estudio, procurando evitar la obtención de aquellos que no sean necesarios o importantes; es decir, aquellos cuya información no resulta trascendente, en el estudio del comportamiento de la función. Con la práctica es posible efectuar croquis correctos marcando tan sólo unos cuantos puntos.

En los cursos de geométria analítica, el estudio de la discusión de la ecuación de una curva tan sólo se limita a la obtención de los siguientes aspectos:

1). Intersecciones con los ejes coordenados.

2). Determinación de la simetría con respecto a los ejes coordenados y al origen.

3). Determinación de las asíntotas verticales y horizontales.

4). Determinación de la extensión de la curva, esto es, definir el conjunto de valores reales de x para los cuales "y" es real y el conjunto de los valores reales de "y" para los cuales x es real.

Con los conocimientos adquiridos en este capítulo, ahora se dispone además de un criterio para determinar:

5). En que intervalos la función que se va a representar gráficamente es creciente y en cuales es decreciente.

6). También es posible determinar los máximos y mínimos relativos y absolutos.

7). Asimismo, el conocimiento de la concavidad y los puntos de inflexión concretan características esenciales de la gráfica en estudio.

El siguiente ejemplo muestra como desarrollar el procedimiento descrito anteriormente en el análisis de la variación de una función .

Ejemplo. 40

Discutir y trazar la gráfica de la función:

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

SOLUCION:

1). Intersecciones con los ejes:

Si $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Si $y = 0 \Rightarrow x = 0$

Por lo tanto la curva intersecta a los ejes en el punto 0 (0, 0) exclusivamente.

2). Simetría:

Al substituir a x por - x queda $y = \frac{-x}{x^2+1}$, por consiguiente se altera la ecuación, luego no hay simetría respecto al eje y.

Al substituir a y por - y queda $-y = \frac{x}{x^2+1}$, por consiguiente se altera la ecuación y no hay simetría respecto al eje x.

Al substituirse simultáneamente a x por - x y a y por - y queda:

$$-y = -\frac{x}{x^2+1}$$

por lo que la ecuación no se altera. Esto indica que si hay simetría respecto al origen.

3). Asíntotas.

Cabe hacer notar que para la determinación de las asíntotas de una curva la teoría de límites resulta de gran ayuda

Si se cumple que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

se tiene una asíntota paralela al eje de las abscisas: la recta de ecuación -- $y = a$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ o sea : $f(x) \to \infty$ ($x \to a$)

se tiene una asíntota paralela al eje de las ordenadas: la recta $x = a$.

Si $x \to +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

esto es: $x \to +\infty \implies y \to 0^+$

Si $x \to -\infty$: $\implies \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

por lo cual: $x \to -\infty \implies y \to 0^-$

Por lo tanto el propio eje de las x es asíntota en ambos sentidos.

4). Extensión de la curva:

Observando la ecuación se ve que no hay restricciones para los valores de x, es decir, que cualquier valor real de x hace que y sea real. Sin embargo si se resuelve la ecuación para x se define:

$$y x^2 + y = x$$

$$y x^2 - x + y = 0$$

por lo tanto:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}$$

La ecuación anterior muestra que para que " x " sea real debe cumplirse que:

$$1 - 4y^2 \geq 0 \implies 4y^2 \leq 1 \implies |2y| \leq 1$$

o sea que: $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$, será el intervalo de valores reales de y que hacen que x sea real.

5). Derivando y = f (x) se tiene:

$$y' = f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$$

Al igualar f' (x) con cero, se obtienen como valores críti-- cos de x los siguientes;

$$\frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$1 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Por lo tanto , $\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}\right\}$ son los valores críticos de x.

En esta forma, obteniendo sus correspontiendes ordenadas se tiene:

Si $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = f(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

y si $x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = f(-1) = \dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$

Por lo que, los puntos P_1 (1, 1/2) y P_2 (- 1,-1/2) son característicos, ya que las tangentes a la curva en P_1 y P_2 son paralelas al eje x.

En conclusión, analizando la función para valores de:

$x < -1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ que $f(x)$ es decreciente

$-1 < x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ que $f(x)$ es creciente

$x > 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ que $f(x)$ es decreciente.

6). Máximos y mínimos;

Una vez determinados los puntos característicos, en los cuales la tangente a la curva es paralela al eje " x ", aplicando el criterio de la segunda derivada se obtiene:

$$y'' = f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

Por lo tanto, para $x_1 = 1$,

$f''(1) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ que para $x_1 = 1$, la función $y = f(x)$ tiene un valor máximo, en P_1 (1, 1/2)

y para $x_2 = -1$,

$f''(-1) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ que para $x_2 = -1$, la función :

$y = f(x)$ tiene un valor mínimo, en P_2 (- 1, - 1/2).

7). Puntos de inflexión y sentido de concavidad.

A partir de la segunda derivada de $y = f(x)$, obtenida anteriormente, e igualándola a cero, resulta:

$$y'' = f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0$$

$$\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0$$

$$2x(x^2-3) = 0$$

$$2x = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_4 = +\sqrt{3}, \; x_5 = -\sqrt{3}$$

En esta forma, obteniendo las correspondientes ordenadas para $x_3 = 0$ $x_4 = \sqrt{3}$ y $x_5 = -\sqrt{3}$, se obtiene:

Si $x_3 = 0 \Rightarrow y_3 = f(0) = 0$

Si $x_4 = +\sqrt{3} \Rightarrow y_4 = f(+\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Si $x_5 = -\sqrt{3} \Rightarrow y_5 = f(-3) = -\dfrac{-\sqrt{3}}{3+1} = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Por lo tanto, los puntos P_3 (0, 0), P_4 ($\sqrt{3}$, $\sqrt{3}/4$) y P_5 ($-\sqrt{3}$, - $\sqrt{3}/4$) son los puntos de inflexión de la gráfica de la función.

Analizando, el cambio de signo de $f''(x)$ para los valores $x_3 = 0$, $x_4 = +\sqrt{3}$ y $x_5 = -\sqrt{3}$, se tiene:

$-\infty < x < -\sqrt{3} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ la concavidad es hacia abajo

$-\sqrt{3} < x < 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ la concavidad es hacia arriba

$0 < x < \sqrt{3} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ la concavidad es hacia abajo.

$\sqrt{3} < x < +\infty \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ la concavidad es hacia arriba.

De este modo, resumiendo la información obtenida en los pasos 5, 6 y 7 se tiene:

valores de x	y = f(x)	y'=f'(x)	y''=f''(x)	
$-\infty < x < -\sqrt{3}$	decrece	-	-	concavidad hacia abajo.
$x = -\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	Punto de inflexión.
$-\sqrt{3} < x < -1$	decrece	-	+	Concavidad hacia arriba
$x = -1$	$-\frac{1}{2}$	0	+	Mínimo.
$-1 < x < 0$	crece	+	+	Concavidad hacia arriba
$x = 0$	0	1	0	Punto de inflexión
$0 < x < 1$	crece	+	-	Concavidad hacia abajo.
$x = 1$	$\frac{1}{2}$	0	-	Máximo
$1 < x < +\sqrt{3}$	decrece	-	-	Concavidad hacia abajo.
$x = +\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	Punto de inflexión.
$+\sqrt{3} < x < +\infty$	decrece	-	+	Concavidad hacia arriba.

Con la información de la tabla anterior, y los datos complementarios obtenidos en los pasos 1 hasta el 4, es posible construir la gráfica $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, como se muestra en la figura 39

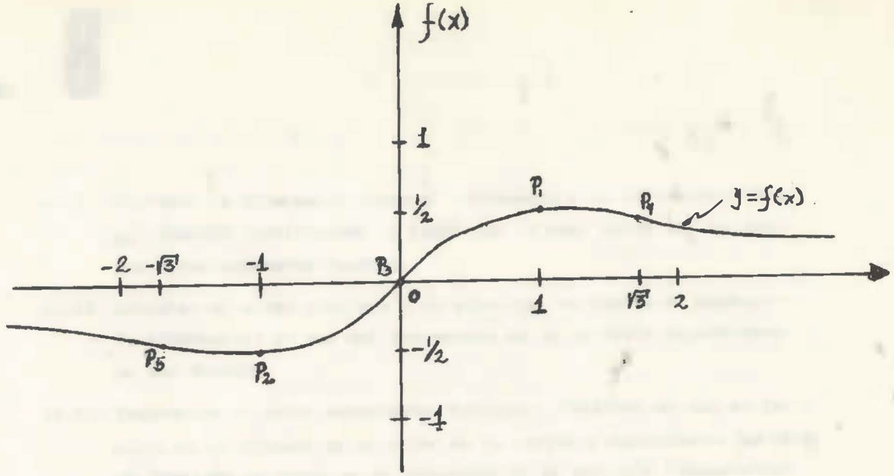


Figura 39.

CAPITULO 6

OBJETIVO GENERAL DEL CAPITULO:

Al finalizar este capítulo el alumno podrá definir e interpretar geométricamente el concepto de diferencial de una función, calcular las diferenciales primera y de orden superior para cualquier tipo de función, calcular en forma aproximada el valor del incremento de la variable dependiente utilizando la diferencial de la variable dependiente para una función cualquiera, y resolver problemas donde se involucre el concepto de diferencial.

Al finalizar este capítulo, el alumno podrá:

VI.1. Enunciar la definición y notación de la diferencial de una función.

VI.2. Calcular la diferencial y su valor para un valor de la variable independiente y un incremento de ésta.

VI.3. Demostrar que el incremento de la variable independiente es igual a su diferencial.

VI.4. Demostrar que la derivada de una función es igual al cociente de la diferencial de la función entre la diferencial de la variable independiente.

VI.5. Demostrar que la expresión para calcular la diferencial de una función es válida también para el caso de una función de función.

VI.6. Ilustrar gráficamente el concepto de diferencial de una función.

VI.7. Escribir la diferencia entre el incremento y la diferencial de una función.

VI.8. A partir de una función, un valor de la variable independiente y un incremento de ésta, calcular aproximadamente el correspondiente valor del incremento de la variable dependiente utilizando la diferencial.

VI.9. Escribir la diferencia entre el incremento y la diferencial de una función justificando la razón por la cual estos dos valores son aproximadamente iguales.

VI.10. Calcular el error absoluto y relativo que se comete al emplear la diferencial en vez del incremento de la variable dependiente de una función.

VI.11. Determinar el error aproximado absoluto y relativo en que se incurre en el cálculo de un valor de la variable dependiente habiéndose cometido un error en la valuación de la variable independiente.

VI.12. Escribir la expresión de la diferencial de orden enésimo de una función (justificando la notación de Leibniz para derivadas de orden superior).

VI.13. Dada una función cualquiera, calcular sus diferenciales sucesivas hasta la de orden 3.

VI.14. Escribir en términos de diferencial de x y de diferencial de y la fórmula para calcular la diferencial de arco de una curva.

VI.15. Calcular la diferencial de arco de una curva dada.

VI.16. Escribir las fórmulas para calcular la curvatura y el radio de curvatura de una curva.

VI.17. Calcular la curvatura y el radio de curvatura de una curva en un punto dado.

LA DIFERENCIAL.

LA DIFERENCIAL.

INTRODUCCION:

Hasta ahora se ha representado la derivada de la función $y = f(x)$ -- como:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

A través de lo estudiado, el símbolo $\frac{dy}{dx}$ no se ha considerado como - una fracción ordinaria, con dy como numerador y dx como denominador, sino - - por el contrario, se ha tomado como un símbolo que representa el límite del -- cociente

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Hay muchos problemas, sin embargo, en los que es importante dar presentaciones a dx y dy separadamente, es por eso que se introducirá un nuevo concepto que se denominará con el nombre de diferencial, y se extenderá el estudio, para obtener la diferencial de orden n de una función, estudiándose también la diferencial de arco en coordenadas rectangulares, para finalizar en - base a estos conceptos con la introducción de curvatura y radio de curvatura.

VI. LA DIFERENCIAL Y APLICACIONES.

VI.1. FUNCION DIFERENCIABLE. DIFERENCIAL DE UNA FUNCION REAL DE VARIABLE REAL.

Hasta ahora se ha representado la derivada de una función $y = f(x)$ - como:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

El símbolo $\frac{dy}{dx}$ no se ha considerado como una fracción ordinaria con dy en el numerador y dx en el denominador, sino por el contrario, se ha tomado - como un símbolo para representar el límite del cociente:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Hay muchos problemas, sin embargo, en los que es importante dar presentaciones a dx y dy separadamente, es por eso que en el presente capítulo se - introducirá un nuevo concepto que se denominará con el nombre de diferencial. Se hará resaltar la estrecha relación que posee dicho concepto con el de derivada y se expondrán algunos ejemplos de aplicación.

Sea $y = f(x)$ una función derivable en x, donde $f'(x) \neq 0$ luego, --

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Por la definición de límite:

$$\left| \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |\Delta x| < \delta$$

Sea $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \eta$, donde $|\eta| < \varepsilon$

luego $\Delta f(x) = f'(x)\,\Delta x + \eta\,\Delta x$ donde $\eta \to 0$ . . . . (1)

cuando $\Delta x \to 0$

-El término $f'(x)\,\Delta x$ de la expresión anterior se llama la parte principal del incremento $\Delta f(x)$ porque $f'(x)\,\Delta x$ es una buena aproximación del - valor de $\Delta f(x)$ para valores pequeños de Δx.

- Por otra parte $\eta \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta = 0$$

Basado en lo anterior, se concluye que una función $y = f(x)$ es diferenciable para un valor de x si para un incremento Δx, el incremento $\Delta f(x)$ puede escribirse en la forma indicada por la expresión (1).

Se puede observar que para que se cumpla la condición establecida en (1) es necesario que cada uno de los términos del 2° miembro existan. Luego se concluye que la existencia de la derivada es condición necesaria y suficiente para que la función sea diferenciable.

Se llama diferencial de una función en un punto x a la parte principal del incremento de la función diferenciable y se representa con:

$$dy = df(x) = f'(x)\,\Delta x \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

donde $\underline{df(x)}$ representa un solo ente.

Ejemplo 1.- Demostrar que la función $y = x^2 - 4x$ definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es diferenciable y obtener su diferencial.

SOLUCION:

Para que la función sea diferenciable debe cumplirse con las características establecidas en la definición, es decir:

Se debe verificar que:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \eta(\Delta x)\,\Delta x \qquad \ldots\ldots \quad (A)$$

En efecto:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) - (x^2 - 4x)$$

$$\Delta y = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 4x - 4\Delta x - x^2 + 4x$$

$$\Delta y = (2x - 4)\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Delta y = (2x - 4)\,\Delta x + \Delta x \cdot \Delta x \qquad \ldots\ldots \quad (B)$$

La ecuación (B) tiene la forma dada en (A) así que:

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$\eta(\Delta x) = \Delta x$$

Donde:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

Por lo tanto la función es diferenciable.

La diferencial de la función es:

$$dy = f'(x)\ \Delta x \Longrightarrow dy = (2x - 4)\ \Delta x$$

Ejemplo 2.- Demostrar que la función $y = x^3$ definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es diferenciable y obtener su diferencial.

SOLUCION: Siguiendo el mismo procedimiento que en el ejercicio anterior se tendrá que:

El incremento de la función es:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3$$

$$\Delta y = x^3 + 3x^2\ \Delta x + 3x\ (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3$$

$$\Delta y = 3x^2\ \Delta x + \left[3x\ \Delta x + (\Delta x)^2\right] \Delta x$$

donde:

$$f'(x) = 3x^2$$

$$\eta(\Delta x) = 3x\ \Delta x + (\Delta x)^2$$

por lo tanto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[3x\ \Delta x + (\Delta x)^2\right]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} 3x\ \left[\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x\right] + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta x) = 0$$

luego la función $y = x^3$ es diferenciable y su diferencial es:

$$dy = f'(x)\ \Delta x \Longrightarrow dy = 3x^2\ \Delta x$$

DIFERENCIAL DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE.

Sea la función identidad $y = f(x) = x$, cuya diferencial es, $dy = f'(x)\ \Delta x$, la derivada de esta función es:

$$f'(x) = 1$$

Si se sustituye este valor en la diferencial de la función:

$$dy = 1\ \Delta x \qquad \ldots (3)$$

como:

$$y = x \Longrightarrow dy = dx$$

Sustituyendo este resultado en el primer miembro de (3), queda:

$$dx = \Delta x$$

De aquí se concluye que la diferencial de la variable independiente es igual a su incremento.

Si se tiene en cuenta este resultado en la ecuación (2), que define la diferencial de una función, se tiene:

$$dy = f'(x)\ dx \qquad \ldots (4)$$

Este resultado permite establecer la siguiente definición.

Definición:

"La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente."

Ejemplo 3.- Hallar las diferenciales de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 + 5x^2 + 10x - 18$

b) $y = e^{2x} + L\ x$

c) $y = \text{sen}\ x + \cos^3 x$

d) $y = \text{ang}\cos \dfrac{x}{a}$

SOLUCION:

La diferencial de las funciones, se obtiene aplicando la ecuación (4) - $dy = f'(x)\ dx$ a cada una de ellas.

a) $f'(x) = 3x^2 + 10\ x + 10$

$$dy = (3x^2 + 10\ x + 10)\ dx$$

$$dy = 3x^2\ dx + 10\ x\ dx + 10\ dx$$

b) $f'(x) = 2e^{2x} + \frac{1}{x}$

$$dy = \left(2e^{2x} + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$dy = 2e^{2x}\, dx + \frac{dx}{x}$$

c) $f'(x) = \cos x - 3\cos^2 x \operatorname{sen} x$

$$dy = (\cos x - 3\cos^2 x \operatorname{sen} x)\, dx$$

$$dy = \cos x\, dx - 3\cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx$$

d) $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$dy = \frac{-\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Ejemplo 4.- Usando diferenciales calcular $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación

$$y^3 = x^2 + x\,y + y^2$$

NOTA: No obstante que en el presente ejemplo se tiene una función implícita, se debe recordar que la diferencial de una función diferenciable es igual a la derivada por la diferencial de la variable independiente; todas las fórmulas para derivar pueden trasformarse en fórmulas para diferenciar.

Tomando diferenciales en cada uno de los términos de la expresión dada se tiene:

$$3y^2\, dy = 2x\, dx + (x\, dy + y\, dx) + 2y\, dy$$

Agrupando los términos que contienen dy y dx como factores.

$$(3y^2 - x - 2y)\, dy = (2x + y)\, dx$$

Finalmente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{3y^2 - x - 2y}$$

VI.2. DERIVADA COMO COCIENTE DE DIFERENCIALES. PERMANENCIA DE LA FORMA DE LA DIFERENCIAL PARA UNA FUNCION DE FUNCION. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL.

Según se estudió en la sección VI.1. la diferencial de una función $y = f(x)$ está dada por la ecuación:

$$dy = f'(x)\, \Delta x$$

Además como el incremento de la variable independiente Δx es igual a su diferencial, se determinó que:

$$dy = f'(x)\, dx$$

Si se dividen ambos miembros de esta expresión entre dx, queda:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \cdots (5)$$

Con la ecuación (5) se concluye que la derivada de una función es igual al cociente de la diferencial de la variable dependiente entre la diferencial de la variable independiente.

PERMANENCIA DE LA FORMA DE LA DIFERENCIAL PARA UNA FUNCION DE FUNCION.

Todo lo estudiado hasta el momento parte de la suposición que x es la variable independiente, sin embargo puede suceder que x sea independiente pero exista una variable intermedia, como cuando se tiene una función de función.

Sean:

$$y = f(u) \quad y \quad u = g(x)$$

En este caso la diferencial de y también se calcula por medio de la ecuación (4), esto es:

$$dy = f'(x)\, dx$$

o bien:

$$dy = D_x\, y\, dx$$

Esta aseveración se establece en el siguiente teorema.

Teorema VI.1.

Hipótesis: Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$,

Tesis:

$$dy = \frac{dy}{dx}\, dx \quad \text{ó bien} \quad dy = D_x\, y\, dx$$

Demostración: Sea una función de función dada por.

$$y = f(u)$$
$$u = g(x)$$

Las diferenciales de cada una de estas funciones de acuerdo a la definición de diferencial son:

$$dy = f'(u)\, du$$
$$du = g'(x)\, dx$$

Según la ecuación (5):

$$f'(u) = \frac{dy}{du}$$

y

$$g'(x) = \frac{du}{dx}$$

Por lo que la diferencial de cada una de las funciones queda:

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot du \qquad \ldots.(6)$$

$$du = \frac{du}{dx} \cdot dx \qquad \ldots.(7)$$

Sustituyendo (7) en (6):

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx \qquad \ldots.(8)$$

Pero:

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo en este resultado en (8)

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx \qquad \ldots.(9)$$

La ecuación (9) completa la demostración de este teorema.

El resultado de este teorema se puede generalizar para el caso de n variables intermedias y una sola variable independiente, es decir:

$$y = g(u) \quad , u = f(v) , \quad v = h(m) \quad \ldots.\ w = n(x)$$

La diferencial de y se calcula por medio de la ecuación (9).

$$dy = \frac{dy}{dx}\, dx \quad \text{ó} \quad dy = D_x\, y \quad dx$$

Ejemplo 5.- Calcular la diferencial dy de la siguiente función de - función.

$$y = u^{3/2} - e^{u}$$
$$u = \sqrt{x^2 - 1}$$

SOLUCION: Según la ecuación (9)

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx$$

Donde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{3}{2}\, u^{1/2} - e^{u}\right]\left[\frac{x}{(x^2 - 1)^{1/2}}\right] \ldots.(A)$$

Sustituyendo el valor de u en la ecuación (A):

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{3}{2}(x^2 - 1)^{1/4} - e^{(x^2 - 1)^{1/2}}\right)\left(\frac{x}{(x^2 - 1)^{1/2}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{2(x^2 - 1)^{1/4}} - \frac{x\, e^{(x^2 - 1)^{1/2}}}{(x^2 - 1)^{1/2}} \qquad \ldots.(B)$$

La diferencial de y es entonces:

$$dy = \left(\frac{3x}{2(x^2 - 1)^{1/4}} - \frac{x\, e^{(x^2 - 1)^{1/2}}}{(x^2 - 1)^{1/2}}\right) dx$$

$$dy = \frac{3\,x\,dx}{2\,(\,x^2 - 1\,)^{1/4}} - \frac{x\,e^{(\,x^2 - 1\,)^{1/2}}}{(\,x^2 - 1\,)^{1/2}}\,dx$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL.

Sea una función $y = f\,(\,x\,)$, cuya gráfica es la curva c, ver figura 1.

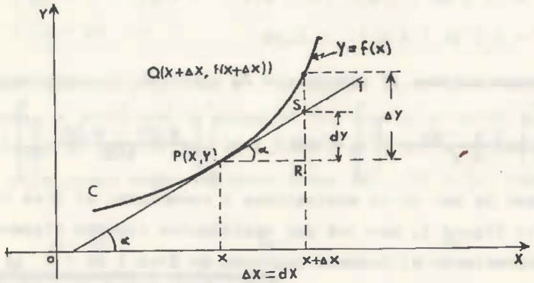


Figura 1.

Para un incremento $\Delta\,x \neq 0$ existe un valor $x + \Delta x$ del dominio de la función al cual le corresponde un valor $f\,(\,x + \Delta\,x\,)$ del rango, siendo el punto $Q\,(\,x + \Delta\,x,\ f\,(\,x + \Delta\,x\,))$ un punto de c. Trácese la tangente T a C en el punto P, siendo α el ángulo de inclinación de T, $\tan\alpha = f'\,(\,x\,)$. Si se considera el triángulo PRS formado por T, la línea que pasa por P y es paralela al eje x y la línea que pasa por Q y es paralela al eje y, se tiene:

$$\tan\alpha = \frac{|RS|}{|PR|}$$

Teniendo en cuenta que $\tan\alpha = f'\,(\,x\,)$ y $|P\,R| = \Delta\,x$, la expresión anterior queda:

$$|\,R\,S\,| = f'\,(\,x\,)\,\Delta\,x$$

Pero $dy = f'\,(\,x\,)\,\Delta\,x$ por definición, por lo que:

$$dy = |R\,S|$$

Por otro lado, es claro que el incremento $\Delta\,y$ es:

$$\Delta\,y = |\,R\,Q\,|$$

En otras palabras, dy es el incremento de la ordenada de la tangente T a la curva c, y $\Delta\,y$ es el incremento de la ordenada de la curva c.

En la figura 1, se tiene que $dy < \Delta y$, sin embargo puede suceder lo contrario: $dy > \Delta\,y$, como en la figura 2, o que dy y Δy sean negativas (puede suceder que $\Delta\,y$ y dy tengan signos opuestos), para cualquier caso se pueden dibujar figuras apropiadas y verificar que tanto la interpretación de dy como la del incremento Δy permanece válida.

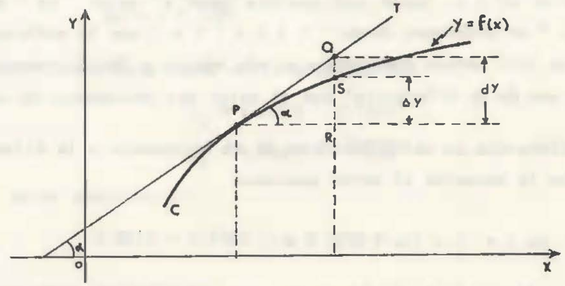


Figura 2.

En cualquiera de los casos se observa que el incremento $\Delta\,y$ es diferente a lo diferencial dy. La magnitud de la diferencia depende de cuanto se separe la curva de su tangente, asímismo dy se aproxima más a Δy a medida que $\Delta\,x$ se hace más pequeño.

VI.3. RELACION ENTRE LA DIFERENCIAL Y EL INCREMENTO. APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL (VALORES APROXIMADOS Y ERRORES).

Como se vio anteriormente, una función es diferenciable cuando su incremento puede escribirse en la forma:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f'(x)\,\Delta x + \eta(\Delta x)\,\Delta x \qquad \ldots (10)$$

La diferencial de la función es:

$$dy = f'(x)\,\Delta x \qquad \ldots (11)$$

De las dos ecuaciones anteriores es posible deducir la relación existente entre el incremento de una función: Δy, y su diferencial: dy. Esta diferencia se encuentra sustituyendo la ecuación (11) en (10).

$$\Delta y = dy + \eta(\Delta x)\,\Delta x$$

La diferencia entre el incremento y la diferencial de la función es:

$$\Delta y - dy = \eta(\Delta x)\,\Delta x$$

La diferencia $\eta(\Delta x)\,\Delta x$ entre Δy y dy será menor mientras más pequeño sea el valor de Δx, luego será posible tomar el valor " dy " en lugar del valor " Δy " en problemas donde " $\eta(\Delta x)\,\Delta x$ " sea lo suficientemente pequeño. Esto es útil porque comunmente es más rápido y fácil obtener el valor aproximado que da la diferencial que el valor del incremento de una función.

A la diferencia, en valor absoluto, de el incremento y la diferencial de la función se le denomina el error absoluto

$$|\Delta y - dy| = |\eta(x)\,\Delta x| = \varepsilon \qquad \ldots (12)$$

A la relación $\varepsilon/\Delta y$ se le llama el error relativo, cuya expresión es:

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \left|\frac{\eta(x)}{f'(x) + \eta(x)}\right| \qquad \ldots (13)$$

$y\ 100\ \dfrac{\varepsilon}{\Delta y}$ (%) se le llama el porcentaje de error.

Si al calcular $y = f(x)$, se tiene un error dx en la medida de x, esto llevará un error aproximado dy en la cantidad de y; el error es relativo.

$$\frac{dy}{y} \qquad \ldots (14)$$

$y\ 100\ \dfrac{dy}{y}$ es el porcentaje de error $\qquad \ldots (15)$

Ejemplo 6.- Encontrar el incremento Δy y la diferencial dy de la función $y = x^2$ para $x = 20$, $\Delta x = 0.1$ ¿Cuál es el porcentaje de error de la aproximación $\Delta y \doteq dy$?

Claramente:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$dy = 2x\,\Delta x$$

Sustituyendo valores:

$$\Delta y = 2(20)(0.1) + (0.1)^2 = 4.01$$

$$dy = 2(20)(0.1) = 4.00$$

Para estos valores el porcentaje de error de la aproximación $\Delta y \doteq dy$ es:

$$\left(\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|\right)(100\ \%) = \left(\left|\frac{4.01 - 4.00}{4.01}\right|\right)(100\ \%) = 0.25\%$$

Reemplazar Δy por dy es equivalente a reemplazar el área rayada verticalmente de la figura 3, por los dos rectángulos rayados diagonalmente de área $x\Delta x$ despreciando el pequeño cuadrado de área $(\Delta x)^2$

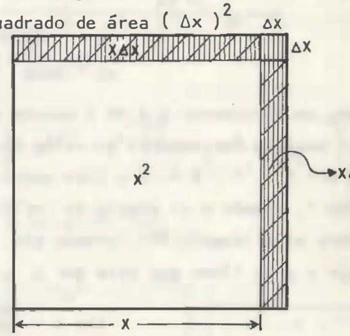


Figura 3

Ejemplo 7.- Sea la función $y = 3x^2 - x$, hallar Δy y dy y el error absoluto:

a) Para cualquier valor de x.

b) Para $x = 1$ y $\Delta x = -0.1$

c) Para $x = 1$ y $\Delta x = 0.1$

d) Para $x = 1$ y $\Delta x = 0.01$

e) para $x = 1$ y $\Delta x = 0.001$

SOLUCION:

a) Como $y = 3x^2 - x$

Entonces:

$$\Delta y = 3(x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2) - x - \Delta x - 3x^2 + x$$

$$\Delta y = (6x - 1)\Delta x + 3\Delta x\,\Delta x \quad \ldots .(A)$$

Tomando la diferencial de la ecuación original.

$$dy = (6x - 1)\,dx$$

$$dy = (6x - 1)\Delta x \quad \ldots .(B)$$

$$|\eta(x)\ \Delta x| = |\Delta y - dy| = \varepsilon \quad \ldots .(C)$$

Las ecuaciones (A) y (B) dan el incremento Δy y la diferencial dy de y respectivamente, y junto con la ecuación (C) dan la solución del inciso a.

El resultado de los incisos b, c, d y e está en la siguente tabla, donde Δ y, dy y ε se toman según las ecuaciones (A), (B) y (C) respectivamente.

x	Δx	Δy	dy	ε
1	- 0.1	- 0.47	- 0.50	0.03
1	0.1	0.53	0.50	0.03
1	0.01	0.0503	0.0500	0.0003
1	0.001	0.005003	0.00500	0.000003

Ejemplo 8.- Calcular aproximadamente la raíz cúbica de 200, usando diferenciales. Considerando que el valor exacto de $\sqrt[3]{200}$ es 5.8480, compararla con el valor aproximado obtenido, calcular el error absoluto y el error relativo que se cometería al tomar el valor obtenido con diferenciales en lugar del exacto.

SOLUCION:

Sea $y = \sqrt[3]{x}$

si $x_1 = 216$ $\quad y_1 = \sqrt[3]{x_1} = \sqrt[3]{216} = 6.0000$

y $x_2 = 200$ $\quad y_2 = \sqrt[3]{x_2} = \sqrt[3]{200} = ?$

En este caso $\quad \Delta x = dx = -16$

Y $\quad y_2 = y_1 + \Delta y \quad \ldots .(A)$

Pero si: $\quad \Delta y \doteq dy \quad$ la ecuación (A) queda:

$$y_2 \doteq y_1 + dy$$

$$y_2 \doteq 6.0000 + dy \quad \ldots .(B)$$

La diferencial de la función es:

$$dy = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \ldots .(C)$$

Sustituyendo los valores de dx y x_1 en la ecuación (C)

$$dy = \frac{-16}{3\sqrt[3]{216^2}} = \frac{-16}{(3)(36)}$$

$$dy = -0.1481$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (B)

$$y_2 \doteq 6.0000 - 0.1481$$

$$y_2 \doteq 5.8519 \doteq \sqrt[3]{200}$$

El error absoluto es:

$$|5.8519 - 5.8480| = 0.0039 = \varepsilon$$

Y el error relativo es:

$$\frac{0.0039}{5.8480} = 0.00066$$

Y el error porcentual:

$$(100)(0.00066) = 0.066\ \%$$

Ejemplo 9.- Usando diferenciales, encontrar un algoritmo que permita calcular en forma aproximada la raíz cuadrada de un número N.

SOLUCION:

Sea N el número cuya raíz cuadrada se desea obtener. Si r_1 es una raíz aproximada para lo cual $r_1 = \sqrt{N_1}$ y r_2 es la raíz más aproximada de N. $r_2 = \sqrt{N}$

Para la función $r = \sqrt{N}$

Con $\Delta N = dN = N - N_1$

$$\Delta r = r_2 - r_1$$

$$r_2 = r_1 + \Delta r \doteq r_1 + dr \qquad \ldots .(A)$$

Diferenciando la función:

$$dr = \frac{dN}{2\sqrt{N_1}} = \frac{\Delta N}{2\sqrt{N_1}} = \frac{N - N_1}{2\sqrt{N_1}}$$

$$= \frac{N}{2\sqrt{N_1}} - \frac{N_1}{2\sqrt{N_1}}$$

$$= \frac{N}{2\sqrt{N_1}} - \frac{1}{2}\sqrt{N_1}$$

Como $\sqrt{N_1} = r_1$

Queda: $$dr = \frac{N}{2r_1} - \frac{r_1}{2} \qquad \ldots .(B)$$

Sustituyendo (B) en (A)

$$r_2 = r_1 + \frac{N}{2r_1} - \frac{r_1}{2}$$

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(r_1 + \frac{N}{r_1} \right) \qquad \ldots . (16)$$

La ecuación 16 es el algoritmo que permite calcular la raíz cuadrada de un número N en forma aproximada

Ejemplo 10.- Empleando el algoritmo de la ecuación 16, calcular aproximadamente $\sqrt{72}$.

SOLUCION:

Para aplicar la fórmula (16) considérese $r_1 = 8$.

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(8 + \frac{72}{8} \right)$$

$$r_2 = \frac{1}{2}(17)$$

$$r_2 = 8.5$$

Nótese que $(8.5)^2 = 72.25$

En una segunda aplicación de la fórmula (16) considérese $r_1 = 8.5$, ahora:

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(8.5 + \frac{72}{8.5} \right)$$

$$r_2 = \frac{1}{2}(16.97)$$

$$r_2 = 8.49$$

Observese que $(8.49)^2 = 72.08$

Si se aplica la fórmula (16) más de una vez, se verá que cada raíz que se obtenga será mucho más aproximada que la anterior.

Ejemplo 11.- Calcular cos 61° aproximadamente usando diferenciales.

SOLUCION:

Sea la función: $y = \cos x$

Por tanto:

$$\Delta y = \cos (x + \Delta x) - \cos x$$

$$dy = - \operatorname{sen} x \; dx$$

Como: $\Delta y \doteq dy$

$$\cos (x + \Delta x) - \cos \doteq - \operatorname{sen} x \; dx$$

Simplificando:

$$\cos (x + \Delta x) \doteq \cos x - \operatorname{sen} x \; dx \qquad \ldots .(A)$$

Si se toma $x = 60° = \frac{\pi}{3}$

$$\Delta y = 1° = \frac{\pi}{180°} = 0.01745$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (A):

$$\cos(60°+1°) \doteq \cos 60° - (0.01745)(\operatorname{sen} 60°)$$
$$\cos 61° \doteq 0.50 - (0.01745)(0.8660)$$
$$\cos 61° \doteq 0.4849$$

Ejemplo 12.- ¿ En cuánto aumentará aproximadamente el lado de un cuadrado, si su área aumenta de 9 m^2 a 9.1 m^2 ?

SOLUCION:

Si x es el área del cuadrado y el lado del mismo es y se tiene:

$$y = +\sqrt{x} \qquad \ldots . (A)$$

Por las condiciones del problema:

$$x_1 = 9 \;;\; \Delta x = 0.1$$

Se sabe que:

$$\Delta y \doteq dy = f'(x)\,dx \qquad \ldots . (B)$$

Teniendo en cuenta (A) en (B):

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\Delta x$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{9}}\,(0.1)$$
$$dy = 0.0166 \text{ m.}$$

El lado del cuadrado aumenta aproximadamente 1.66 cm.

Ejemplo 13.- Las fórmulas para el área y el volúmen de una esfera son respectivamente:

$$S = 4\pi\, r^2 \quad y \quad V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

Si al medir el radio se obtiene 3m.

a) ¿Cuales son los errores máximos aproximados de S y V si las medidas son seguras hasta 0.01 m.

b) ¿Cuál es en cada caso el error relativo máximo expresado en tanto por ciento?

SOLUCION:

Tomando las diferenciales del área y del volumen se encuentra el error aproximado que se comete al calcular el área y el volúmen, respectivamente.

Para el área: $S = 4\pi r^2$

Diferenciando: $ds = 8\pi r\, dr$ . . . . (A)

Sustituyendo en (A) $r = 3$ y $dr = 0.01$:

$$ds = (8\pi)(3)(0.01)$$
$$ds = 0.75398 \text{ m}^2$$

Siendo este resultado el error aproximado que se comete al calcular el área.

Para el volúmen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Diferenciando: $dV = 4\pi r^2\, dr$ . . . . (B)

Sustituyendo en (B) $r = 3$ y $dr = 0.01$

$$dV = (4\pi)(3)^2(0.01)$$
$$dV = 1.13097 \text{ m}^3$$

Siendo este el resultado del error aproximado que se comete al calcular el volúmen.

El error relativo para el área y el volumen, se encuentra según la ecuación (14).

Tomando logaritmos de la ecuación del área *

$$L\,S = L\,4\pi + 2\,L\,r$$

Diferenciando:

$$\frac{ds}{S} = \frac{2\,dr}{r}$$

Por tanto:

$$\frac{ds}{S} = \frac{(2)(0.01)}{3}$$

* El artificio de tomar logaritmos es sólo para obtener directamente el cociente $\frac{ds}{S}$. Otra forma seria hallar ds y S y efectuar la división.

$$\frac{ds}{S} = 0.00667$$

El error máximo en % es:

$$100\frac{ds}{S} = 0.667\ \%$$

Para el volúmen se procede en forma similar. Tomando logaritmos para la función del volúmen:

$$L\ V = L\ \frac{4}{3}\pi + 3\ L\ r$$

Diferenciando:

$$\frac{dV}{V} = \frac{3\ dr}{r}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{(3)\ (0.01)}{3}$$

$$\frac{dV}{V} = 0.01$$

El error máximo en % es:

$$100\ \frac{dV}{V} = 1\%$$

VI.4. DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR (SUCESIVAS). NOTACION DE LEIBNIZ .

La notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$, permite considerar a la derivada como un operador $\frac{d}{dx}$ ( ) aplicado a la función $y = f(x)$ es decir:

$\frac{d}{dx}(y)$. Así las derivadas sucesivas de una función se escriben como:

$$\text{Primera derivada} \quad \frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\text{Segunda derivada} \quad \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

$$\text{Tercera derivada} \quad \frac{d}{dx}(f''(x)) = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$$

Del mismo modo la notación empleada para la diferencial permite considerar a ésta como un operador o sea:

$$d(\quad) = \frac{d}{dx}(\quad)\ dx$$

Aplicando el operador diferencial d ( ), a la función $y = f(x)$ se obtiene la diferencial primera de la función:

$$d(y) = \frac{d}{dx}(y)\ dx \qquad \ldots(17)$$

El valor de la diferencial dy depende tanto del valor que tome la variable independiente x, como del valor de la diferencial de la variable independiente $dx = \Delta x$.

Si se desea aplicar nuevamente el operador diferencial d ( ) al resultado obtenido en (17), se debe considerar a dx como una constante, según se considera en el inciso VI.1.

$$d(dy) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\ dx\right) dx$$

El primer miembro de esta ecuación se denotará con d^2y.

$$d^2y = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\ dx\right) dx \qquad \ldots(18)$$

En el segundo miembro de esta ecuación se tiene la derivada de un producto de funciones que son: $\frac{dy}{dx}$ y dx.

Derivando queda:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\cdot dx\right) = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] dx + \frac{dy}{dx}\left[\frac{d}{dx}(dx)\right]$$

Como dx es una constante, $\frac{d}{dx}(dx) = 0$, por lo cual:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\cdot dx\right) = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx + \frac{dy}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\cdot dx\right) = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx$$

Si esta última expresión se sustituye en la ecuación (18) queda:

$$d^2y = \frac{d^2y}{dx^2}(dx)^2 \qquad \ldots(19)$$

Este resultado es la diferencial segunda de la función.

Del mismo modo, la diferencial tercera se obtiene aplicando el operador d ( ), a la diferencial segunda.

$$d(d^2y) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}(dx)^2\right] dx$$

Simplificando:

$$d^3y = \frac{d^3y}{dx^3}\ (\ dx\ )^3 \qquad . \ . \ . \ . (20)$$

Los resultados de las ecuaciones (19) y (20) se pueden generalizar para obtener la diferencial de orden n de cualquier función. Se conviene escribir dx^2, dx^3, etc., en lugar de $(\ dx\ )^2$, $(\ dx\ )^3$, ... respectivamente.

$$d^ny = \frac{d^ny}{dx^n}\ dx^n \qquad . \ . \ . \ . (21)$$

ó

$$d^ny = f^{(n)}\ (\ x\ )\ dx^n$$

Ejemplo 14.- Calcular d^3y para la función $y = x^6 + 10\ x^3 + 1$

SOLUCION:
Aplicando el operador de d ( ).

$$dy = (\ 6x^5 + 30x^2\ )\ dx$$
$$d^2y = (\ 30x^4 + 60x\ )\ dx^2$$
$$d^3y = (\ 120\ x^3 + 60\ )\ dx^3$$

Ejemplo 15.- Calcular d^2y para la función $y = \text{sen } x\ L\ x$.

SOLUCION:

Aplicando el operador d ( ).

$$dy = (\ \cos\ x\ L\ x + \frac{\text{sen } x}{x}\ )\ dx$$

$$d^2y = (\ -\ \text{sen } x\ L\ x + \frac{\cos\ x}{x} + \frac{x\ \cos\ x\ -\ \text{sen } x}{x^2}\ )\ dx^2$$

$$d^2y = (\ -\ \text{sen } x\ L\ x + \frac{2\ \cos\ x}{x} - \frac{\text{sen } x}{x^2}\ )\ dx^2$$

Ejemplo 16.- Calcular d^5y de la función $y = e^x - e^{-x}$

Aplicando el operador d ( )

$$dy = (\ e^x + e^{-x}\ )\ dx$$
$$d^2y = (\ e^x - e^{-x}\ )\ dx^2$$
$$d^3y = (\ e^x + e^{-x}\ )\ dx^3$$
$$d^4y = (\ e^x - e^{-x}\ )\ dx^4$$
$$d^5y = (\ e^x + e^{-x}\ )\ dx^5$$

VI.5. DIFERENCIAL DE ARCO EN COORDENADAS RECTANGULARES.

Una forma de hallar la longitud de una circunferencia puede hacer-se por medio del cálculo del límite del perímetro de un polígono regular cuyo número de lados crece indefinidamente.

En forma semejante la longitud del arco $\overset{\frown}{PQ}$ de una curva abierta, figura 4, se define como el límite S de la suma de las longitudes de los lados de una poligonal PP_1, $P_1\ P_2$, . . . , P_nQ cuando el número de lados de ella aumenta indefinidamente.

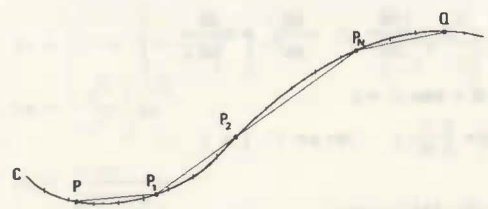


Figura 4.

El límite de la relación de la longitud de un arco $\overset{\frown}{PM}$ a la cuerda subtenida $\overline{PM}$, cuando el punto móvil M tiende al punto fijo P a lo largo de la curva, es la unidad:

$$\lim_{M \to P} \left(\frac{\overset{\frown}{PM}}{\overline{PM}} \right) = 1 \qquad . \ . \ . \ . (22)$$

Demostración: Para demostrar la anterior afirmación se usará la figura No. 5.

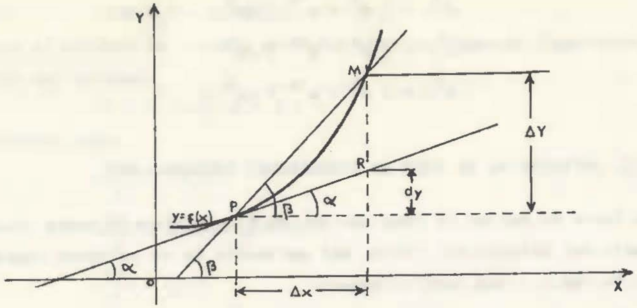


Figura 5.

De esta figura se tiene:

$$\overline{PM} < \widehat{PM} < \overline{PR} + \overline{RM}$$

Dividiendo entre $\overline{PM}$

$$1 < \frac{\widehat{PM}}{\overline{PM}} < \frac{\overline{PR}}{\overline{PM}} + \frac{\overline{RM}}{\overline{PM}} \quad \ldots .(23)$$

Sea $\tan\beta - \tan\alpha = \delta$ $\quad \ldots .(24)$

Como $\tan\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; $\quad \tan\alpha = f'(x)$

La expresión (24) queda:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \delta$$

$$\Delta y - f'(x)\,\Delta x = \delta\,\Delta x$$

$$\Delta y - dy = \delta\,\Delta x = \overline{RM}$$

$$\overline{PR} = \Delta x \sec\alpha$$

$$\overline{PM} = \Delta x \sec\beta$$

Sustituyendo estas expresiones en (23)

$$1 < \frac{\widehat{PM}}{\overline{PM}} < \frac{\Delta x \sec\alpha}{\Delta x \sec\beta} + \frac{\delta\,\Delta x}{\Delta x \sec\beta}$$

$$1 < \frac{\widehat{PM}}{PM} < \frac{\sec\alpha}{\sec\beta} + \frac{\delta}{\sec\beta} \quad \ldots .(25)$$

Si $\Delta x \to 0 \Longrightarrow \beta \to \alpha \Longrightarrow \sec\beta \to \sec\alpha$

$$\therefore \frac{\sec\alpha}{\sec\beta} \to 1$$

$$\Rightarrow \tan\beta \to \tan\alpha \Longrightarrow \delta \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\sec\beta} \to 0$$

Luego en (25) tomando límites cuando $\Delta x \to 0$ o sea $M \to P$

$$1 < \lim_{M \to P} \frac{\widehat{PM}}{\overline{PM}} < 1$$

Por lo cual:

$$\lim_{M \to P} \frac{\widehat{PM}}{\overline{PM}} = 1 \qquad \text{Q.D.}$$

Esta propiedad servirá para obtener una fórmula fundamental para la diferencial de arco.

Sea $y = f(x)$, una función continua y derivable y sea S la longitud del arco AP de su gráfica, medido desde un punto A de la curva, si se considera un punto cercano M $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ (Ver figura 6) y se representa con ΔS la longitud del arco desde P a M.

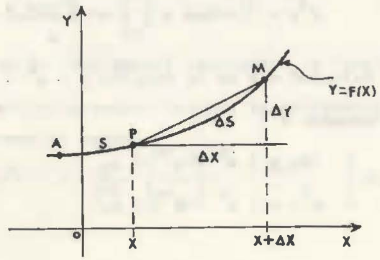


Figura 6.

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x}$$

$$\text{Ahora: } \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\Delta S}{\overline{PM}} \cdot \frac{\overline{PM}}{\Delta x} \qquad \ldots .(26)$$

$$\text{y} \qquad \left(\frac{\Delta S}{\overline{PM}}\right)^2 = \left(\frac{\widehat{PM}}{\overline{PM}}\right)^2 \to 1 \text{ cuando } \Delta x \to 0$$

Esta última afirmación es consecuencia de la ecuación (22). Se puede ver de la ecuación (23) que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta S}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{dS}{dx}\right)^2 = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\overline{PM}}{\Delta x}\right)^2 \qquad \ldots .(27)$$

De la figura(6)es claro que:

$$\overline{PM}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

Si se divide esta expresión entre $(\Delta x)^2$

$$\left(\frac{PM}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \to 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{cuando } \Delta x \to 0$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (27)

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Este resultado se puede escribir en términos de diferenciales como:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 \qquad \ldots .(28)$$

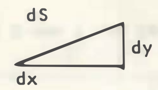
Esta última ecuación determina la diferencial de arco en coordenadas rectangulares y es válido si x y y dependen de una tercera variable.

De la ecuación (28) se pueden obtener las siguientes expresiones que son de utilidad.

$$dS = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx \qquad \ldots .(29)$$

$$dS = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2} dy \qquad \ldots .(30)$$

La ecuación (28) significa que geométricamente la diferencial de arco queda representada por la hipotenusa del triángulo cuyos catetos son dx y dy.



Ejemplo 17.- Hallar la diferencial de arco del círculo $x^2 + y^2 = r^2$

SOLUCION:

Derivando $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

Para hallar " ds " se sustituye en la siguente fórmula.

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx$$

$$ds = \left[1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2\right]^{1/2} dx = \left(\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right)^{1/2} dx$$

$$ds = \left[\frac{r^2}{y^2}\right]^{1/2} dx$$

$$ds = \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Para hallar ds en función de " y " se sustituye en la ecuación:

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2} dy$$

$$ds = \left[1 + \left(-\frac{y}{x}\right)^2\right]^{1/2} dy = \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)^{1/2} dy$$

$$ds = \left(\frac{r^2}{x^2}\right)^{1/2} dy$$

$$ds = \frac{r\,dy}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

Ejemplo 18.- Hallar la diferencial de arco de la cicloide

$$x = a\ (\ \theta - \operatorname{sen} \theta\ )\ ,\ y = a\ (\ 1 - \cos \theta\ )$$

SOLUCION:

$dx = a\ (\ 1 - \cos \theta\ )\ d\ \theta\ , \quad dy = a\ (\ \operatorname{sen} \theta\ )\ d\theta$

Sustituyendo en la fórmula

$$dS^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dS^2 = a^2\ (\ 1 - \cos \theta\ )^2\ \ d\ \theta^2 + a^2\ \operatorname{sen}^2\ \theta\ d\theta^2$$

$$= a^2\ \ d\theta^2\ \ (\ (\ 1 - \cos \theta\ )^2 + \operatorname{sen}^2 \theta\ )$$

$$= a^2\ \ d\theta^2\ \ (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta\ )$$

$$= 2a^2\ (\ 1 - \cos \theta\ )\ d\theta^2 \qquad .\ .\ .\ .\ (A)$$

Como $1 - \cos \theta = 2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{\theta}{2}$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (A)

$$dS^2 = 4a^2\ \operatorname{sen}^2\ \frac{\theta}{2}\ \ d\ \theta^2$$

$$dS = 2a\ \operatorname{sen}\ \frac{\theta}{2}\ \ d\ \theta$$

VI.6. CURVATURA Y RADIO DE CURVATURA.

La razón de cambio de y con respecto a x mide la inclinación de una curva. En una circunferencia de radio a, recorrida en sentido contrario del movimiento de las agujas de un reloj, la "curvatura" que se define como la razón de cambio de ϕ con respecto a S, esto es $\dfrac{d\phi}{ds}$, es constante e igual a 1/a, el inverso del radio. Figura 7.

Por geometría elemental, el ángulo ϕ es igual al ángulo $P_oC\ P$

La medida del ángulo $P_o\ C\ P$, en radianes, es S/a. Así

$$\phi = \frac{S}{a}$$

Diferenciando:

$$d\phi = \frac{dS}{a}$$

y $$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{a}$$

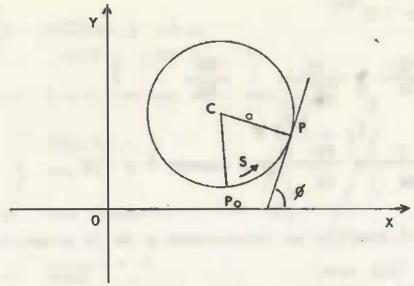


Figura 7.

Puesto que $d\phi/ds$, nos ofrece una medida razonable de la curvatura de una circunferencia (cuanto mayor es la circunferencia, menor es la curvatura) es común usarla también como medida de la curvatura de otras curvas.

Sea una curva dada por la ecuación y = f (x), teniendo y'' = f'' (x) - derivada segunda continua. En un determinado punto $P_o\ (\ x_o,\ y_o\ )$ la tangente a la curva forma un ángulo con el sentido positivo del eje x, que se designa por ϕ (ver figura 8). De la definición de derivada se sabe que tan $\phi = f'\ (x_o)$ ó que en un punto P (x, y).

$$\phi\ = \text{arc tan } f'\ (\ x\ ) \qquad .\ .\ .\ .\ (31)$$

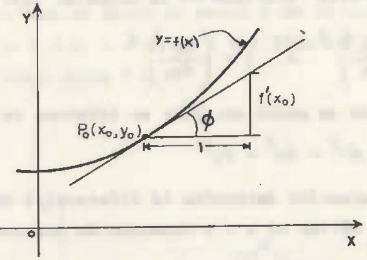


Figura 8.

La forma en que varía ϕ a medida que se recorre la curva es una medida de lo pronunciada que está. Obsérvese que para una línea recta no cambia en absoluto y que para una curva "gradual" cambia muy poco aún después de haber recorrido una larga sección de ella.

Definición.- La curvatura K de una curva dada por y = f (x) es la ra--

zón de variación del ángulo ϕ con respecto a la longitud de arco S, esto es:

$$K = \frac{d\phi}{dS} \qquad \text{. . . .(32)}$$

Teorema VI.2.

Hipótesis: Sea una curva de ecuación $y = f(x)$ para la cual $f''(x)$ es continua.

Tesis: La curvatura está dada por:

$$k(x) = \frac{f''(x)}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}}$$

Demostración: De la regla de la cadena:

$$k = \frac{d\phi}{dS} = \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{dx}{dS} \qquad \text{. . . .(33)}$$

De la ecuación (31)

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d}{dx}(\arc\tan f'(x)) = \frac{1}{1 + [f'(x)]^2} \cdot f''(x) \qquad \text{.....(34)}$$

De la ecuación (29)

$$dS = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx = \left[1 + (f'(x))^2\right]^{1/2} dx$$

Se tiene:

$$\frac{dx}{dS} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \qquad \text{. . . .(35)}$$

Sustituyendo (34) y (35) en (36).

$$k = \frac{f''(x)}{1 + (f'(x))^2} \cdot \frac{1}{\left[(1 + (f'(x))^2\right]^{1/2}}$$

$$k = \frac{f''(x)}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}} \qquad \text{. . . .(36)}$$

Q.D.

Si la ecuación de la curva está dada en la forma $x = g(y)$ ó en la forma paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, el ángulo ϕ que la tangente forma con el sentido positivo del eje x puede siempre definirse. Se puede demostrar que para un arco de ecuación $x = g(y)$ la curvatura está dada por la fórmula:

$$k(y) = -\frac{g''(y)}{\left[1 + (g'(y))^2\right]^{3/2}} \qquad \text{. . . . (37)}$$

Si la curva se da en la forma paramétrica $x = x(t)$, $y = g(t)$, la curvatura está dada por la fórmula:

$$k(t) = \frac{x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \qquad \text{. . . .(38)}$$

La curvatura puede ser positiva, negativa o nula, para ecuaciones de la forma $y = f(x)$ la curvatura tiene el mismo signo que $f''(x)$. Si crece en forma que la curva va girando hacia la izquierda cuando el parámetro crece, entonces k es positivo; y k es negativa si ϕ es decreciente. Esto es equivalente a decir que el lado cóncavo de la curva está hacia arriba si $k > 0$ y hacia abajo si $k < 0$. (Ver figura 9).

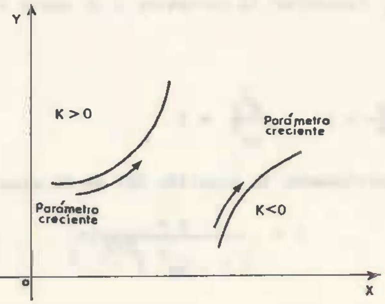


Figura 9.

Definición.- El radio de curvatura de un arco en un punto se define -- como el recíproco del valor absoluto de la curvatura en ese punto, esto es:

$$R = \frac{1}{|k|} \quad \ldots . (39)$$

Ejemplo 19.- Encontrar la curvatura de la circunferencia $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$

SOLUCION:

Derivando:

$$x' = -a \operatorname{sen} t$$
$$x'' = -a \cos t$$
$$y' = a \cos t$$
$$y'' = -a \operatorname{sen} t$$

Sustituyendo en la ecuación (38)

$$k = \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{a^2}{a^3}$$

$$k = \frac{1}{a}$$

Que coincide con el resultado obtenido anteriormente.

Ejemplo 20.- Encontrar la curvatura y el radio de curvatura para la - parábola $y = x^2$.

SOLUCION:

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \quad \ldots . (A)$$

Por tanto sustituyendo la ecuación (A) en la ecuación (36)

$$k = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

El radio de la curvatura es:

$$R = \frac{1}{2} (1 + 4x^2)^{3/2}$$

Ejemplo 20.- Encontrar la curvatura y el radio de curvatura de la cicloide.

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi$$

SOLUCION:

Derivando:

$$x'(\theta) = a(1 - \cos\theta)$$
$$x''(\theta) = a \operatorname{sen}\theta$$
$$y'(\theta) = a \operatorname{sen}\theta$$
$$y''(\theta) = a \cos\theta$$

Sustituyendo en la ecuación (38).

$$k = \frac{a(1 - \cos\theta)\, a\cos\theta - a\operatorname{sen}\theta\ a\operatorname{sen}\theta}{\left[a^2 (1 - \cos\theta)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{a} \frac{\cos\theta - 1}{\left[2(1 - \cos\theta)\right]^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{2a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\theta}}$$

$$k = -\frac{1}{4a \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$R = 4a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

B I B L I C G R A F I A .

1.- EL CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA.
L. Leithold.
Editorial Harper and Row Latinoamericana.

2.- MATEMATICAS UNIVERSITARIAS. Tomo I
S. R. Britton, R.B. Kriegh, L. W. Rutland.
Editorial CECSA.

3.- MODERN CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY.
R. A. Silverman.
Editorial Mac Millan, Co.

4.- CALCULUS, Vol. I.
Tom. M. Apostol.
Editorial Ginn and Blaisdell.

5.- ANALISIS MATEMATICO. Vol. I.,
Haaser, La Salle, Sullivan.
Editorial F. Trillas, S. A.

6.- CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.
Lipman Bers.
Editorial Interamericana, S. A.

7.- CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.
Taylor y Wade.
Editorial Limusa Wiley.

8.- CALCULO Y GEOMETRIA ANALITICA, Primer Curso.
Protter y Morrey.
Editorial Addison Wesley.

9.- CALCULUS.
G.E.F. Sherwood and Angus E. Taylor.
Editorial Prentice Hall Inc.

10.- CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.
Granville, Smith y Longley.
Editorial UTEHA.

CAPITULO I.
1, 2, 5, 10

CAPITULO 2.
1, 2, 3, 10

CAPITULO 3.
1, 3, 6, 8.

CAPITULO 4.
2, 7, 9.

CAPITULO 5.
1, 2, 7, 8

CAPITULO 6.
1, 2, 4, 10.