GUIA de estudio para presentar examen extraordinario de

MECANICA I

PEDRO REYES G.
CESAR P. MORA C.

División de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería UNAM

24
GUIA EXAM
MEC.I
FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.
702517
G1.- 702517

BIBLIOTECA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

PROPOSITO DE LA GUIA

Este material tiene por objeto orientar a los estudiantes que desean prepararse para presentar un examen extraordinario de la asignatura Mecánica I.

La guía está destinada a los alumnos que ya han cursado la asignatura y que poseen ciertos conocimientos sobre la materia. LA GUIA NO PRETENDE SUSTITUIR A LOS CURSOS REGULARES, sino mejorar la preparación que el estudiante haya adquirido en ellos.

ESTRUCTURA DE LA GUIA

De cada tema del programa vigente de la asignatura se seleccionaron los conceptos fundamentales agrupándolos en bloques.

Cada uno de estos bloques contiene una *lista de conceptos* con sus respectivas referencias para localizarlos en los textos base; que son los siguientes:

- Facultad de Ingeniería, UNAM
  APUNTES DE MECANICA I
  México, 1982.
- Beer F.P. y Johnston E.R.
  MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS
  McGraw Hill de México, S.A.
  3a. Edición, 1981.
- Facultad de Ingeniería, UNAM
  CUADERNO DE EJERCICIOS DE CINEMATICA
  México, 1981.

Estos textos deberán tenerse a la mano al utilizar la guía.

En cada uno de los bloques se presentan, además, algunos *ejemplos* que ilustran la aplicación de los conceptos.

Al término de cada tema se plantea un conjunto de *problemas propuestos*, para que el estudiante los resuelva y adquiera con ello la práctica necesaria en el manejo de los conceptos del tema.

Al final de la guía aparecen los resultados de algunos problemas propuestos, a fin de que el estudiante pueda compararlos con las respuestas que obtuvo.

INSTRUCCIONES PARA EL USO DE LA GUIA

1. Lea cuidadosamente la lista de conceptos que integran el primer bloque de cada tema y estudie secuencialmente cada uno de ellos en los textos base, poniendo especial cuidado en aquellos conceptos que no haya comprendido o adquirido en su preparación anterior.

2. Analice detenidamente los procedimientos que se siguieron para obtener la solución en los ejemplos, cerciorándose que ha comprendido claramente los razonamientos expuestos; esto puede lograrse reproduciendo el proceso de solución sin recurrir al texto.

3. Estudie los conceptos y los ejemplos del siguiente bloque, con las mismas indicaciones de los dos pasos anteriores.

4. Resuelva los problemas propuestos que se plantean al final de cada tema; en caso de que tenga dificultad para resolverlos, deberá estudiar nuevamente los conceptos del bloque e intentar una vez más resolver dichos problemas.

La guía está diseñada para servir como material de autoinstrucción; no obstante, si el estudiante no logra comprender algún concepto o no consigue resolver un problema, se le sugiere CONSULTAR A LOS ASESORES DE LA ASIGNATURA, quienes podrán orientarle al respecto.

SE REQUIERE 60 HORAS DE TRABAJO, aproximadamente, para realizar las actividades que se proponen en esta guía, recomendándose distribuirlas en un período de tres a seis semanas. Es de suma importancia que el estudiante programe su trabajo con la debida anticipación y que inicie el estudio de la guía CUANDO MENOS TRES SEMANAS ANTES DE LA REALIZACION DEL EXAMEN.

La elaboración de este trabajo estuvo a cargo de los señores profesores:

ING. PEDRO REYES GINORI

ING. CESAR P. MORA COVARRUBIAS

quienes contaron con la asesoría pedagógica de las licenciadas IRMA HINOJOSA FELIX y MARIA CUAIRAN RUIDIAZ, de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad.

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS

NOVIEMBRE DE 1983

(I) FUNDAMENTOS Y POSTULADOS DE LA MECANICA CLASICA

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los ejercicios en los que se ilustra la aplicación de dichos conceptos.

PRIMER BLOQUE

I.1 CONCEPTOS DE CANTIDADES ESCALAR Y VECTORIAL. MODELOS DE CUERPO

Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 14, 12 y 13

Mecánica Vectorial para Ingenieros-Estática, Beer y Johnston, páginas 17 y 3

Cuaderno de ejercicios de Estática, ejercicio 1.9

I.2 LEYES DE NEWTON DE LA MECANICA CLASICA Y LEY DE LA GRAVITACION UNIVERSAL

Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 15 a la 20

Estática, Beer y Johnston, páginas 3 y 4

Apuntes de Mecánica I, ejemplo de la página 20

I.3 EFECTOS EXTERNOS E INTERNOS QUE PRODUCEN LAS FUERZAS ACTUANDO SOBRE LOS CUERPOS

Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 30 y 31

Estática, Beer y Johnston, páginas 59 y 60

Apuntes de Mecánica I, ejemplos de las páginas 33, 34, 35 y 36

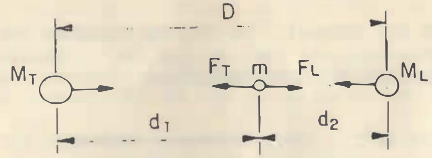
Ejemplo 1

Calcule la posición que un cuerpo de masa m debe tener entre la Tierra y la Luna, para que las fuerzas ejercidas sobre él, por ambos cuerpos celestes, se equilibren. Las masas de la Tierra y la Luna son, respectivamente, $M_T = 597.4 \times 10^{25}$ y $M_L = 7.38 \times 10^{25}$ gramos. La distancia, centro a centro, entre la Tierra y la Luna es $D = 3.84403 \times 10^{10}$ cm.

Solución:

Como no intervienen las dimensiones de los cuerpos, de I.1 deducimos que el modelo adecuado es el punto-masa, mientras que de I.2 sabemos que se aplicará la expresión matemática correspondiente a la ley de la gravitación universal y de I.3 identificamos que las fuerzas de atracción gravitatoria son fuerzas a distancia.

Conviene hacer un esquema en el que identifiquemos todos los conceptos que intervienen en el problema.



La expresión matemática que se aplicará es:

$$F = G\,\frac{Mm}{R^2}$$

la fuerza de atracción entre la Tierra y el cuerpo m es:

$$F_T = G\,\frac{M_T m}{(d_1)^2} \qquad \ldots (1)$$

la fuerza de atracción entre la Luna y el cuerpo m es:

$$F_L = G\,\frac{M_L m}{(d_2)^2} \qquad \ldots (2)$$

como la posición de m es tal que $F_T = F_L$ igualamos los segundos miembros de las ecuaciones (1) y (2):

$$G\,\frac{M_T m}{(d_1)^2} = G\,\frac{M_L m}{(d_2)^2}$$

simplificamos:

$$\frac{M_T}{(d_1)^2} = \frac{M_L}{(d_2)^2} \qquad \ldots (3)$$

teniendo en cuenta que:

$$D = d_1 + d_2 \;; \qquad d_2 = D - d_1 \qquad \ldots (4)$$

sustituyendo (4) en (3):

$$\frac{M_T}{(d_1)^2} = \frac{M_L}{(D - d_1)^2} \qquad \ldots (5)$$

reemplazando los valores de M_T, M_L y D en (5):

$$\frac{597.4 \times 10^{25}}{(d_1)^2} = \frac{7.38 \times 10^{25}}{(3.844 \times 10^{10} - d_1)^2}$$

Esta es una ecuación de segundo grado cuya solución es:

$$d_1 = 3.45952 \times 10^{10} \text{ cm}$$

sustituyendo este valor en (4):

$$d_2 = 0.38451 \times 10^{10}$$

Así, d_1 y d_2 nos definen la posición del cuerpo de masa m.

SEGUNDO BLOQUE

I.4 POSTULADO DE STEVINUS O REGLA GENERALIZADA DEL PARALELOGRAMO

Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 65 a la 67

Estática, Beer y Johnston, páginas 16 y 17

I.5 COMPOSICION Y DESCOMPOSICION DE FUERZAS

Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 73 a la 76

Estática, Beer y Johnston, páginas 18 a la 22

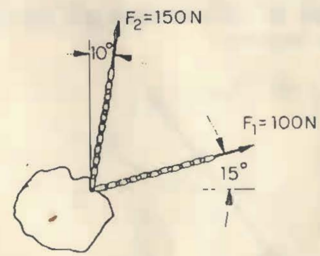
Estática, Beer y Johnston, problema modelo 2.1

Ejemplo 2

Dos personas pretenden mover una roca aplicando sus respectivas fuerzas mediante sendos cables atados a un mismo punto de ella, como se muestra en el dibujo. Si con dichas fuerzas están a punto de mover la roca:

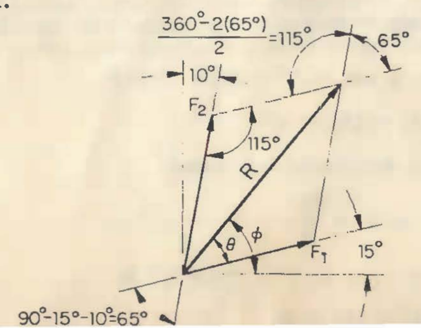
a) Determine la magnitud y la dirección de la resultante.

b) ¿Cuál será la magnitud de ambas fuerzas cuando los cables forman un ángulo de 90°, si la roca debe moverse en la dirección de la resultante obtenida en el inciso anterior?



Solución:

Inciso a) De I.4 y I.5 deducimos que es posible aplicar el principio del paralelogramo y que se trata de un problema de composición de fuerzas. Por lo tanto es conveniente hacer un esquema representativo del paralelogramo formado por las fuerzas F_1 y F_2 y sus correspondientes paralelas, obteniendo todos los ángulos interiores de dicho paralelogramo, así como el que la resultante formará con la recta horizontal de referencia.



A partir de cualquiera de los dos triángulos en que queda dividido el paralelogramo por la diagonal, puede determinarse R, aplicando la ley de los cosenos:

$$R = \sqrt{(100)^2 + (150)^2 - 2(100)(150)\cos 115°}$$

$$R = \sqrt{10\ 000 + 22\ 500 - 30\ 000\ (-0.423)}$$

la magnitud de la resultante es:

$$R = 212.6\ \text{N}$$

Con el valor de R así obtenido y aplicando la ley de los senos es posible calcular el ángulo θ:

$$\frac{150}{\text{sen}\ \theta} = \frac{212.6}{\text{sen}\ 115°}$$

$$\text{sen}\ \theta = \frac{150}{212.6}\ (0.906) = 0.639$$

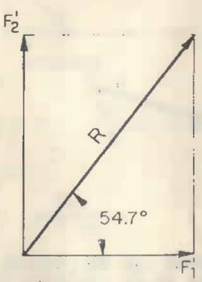
$$\therefore\ \theta = 39.7°$$

así, la dirección de la resultante es:

$$\phi = \theta + 15°\ ; \quad \phi = 54.7°$$

Inciso b). De I.5 deducimos que se trata de un caso de descomposición de una fuerza en sus dos componentes rectangulares.

Para identificar cada uno de los conceptos que intervienen en el problema conviene hacer un esquema:



Como la roca deberá moverse en la dirección de R el ángulo ϕ no variará.

Por definición de seno de un ángulo:

$$\text{sen}\ 54.7° = \frac{F_2'}{R}$$

$$F_2' = R\ \text{sen}\ 54.7° = 212.6\ (0.816)$$

$$\therefore\ F_2' = 173.51\ \text{N}$$

análogamente, por la definición del coseno:

$$\cos 54.7° = \frac{F_1'}{R}$$

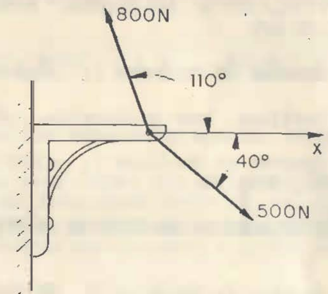
$$F_1' = R\cos 54.7° = 212.6(0.578)$$

$$\therefore\ F_1' = 122.85\ \text{N}$$

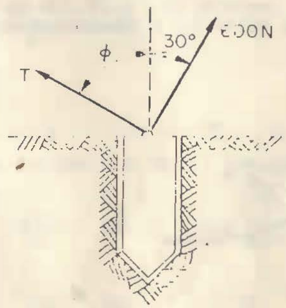
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El peso de un astronauta en la superficie terrestre es de 100 kg_f. Calcule su peso suponiendo que se encuentra en la superficie lunar y considerando que la masa de la Luna es 7.38×10^{22} kg y su radio de 1736 km.

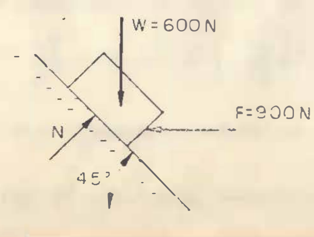
2. Determine la magnitud de la fuerza resultante actuando al extremo de la ménsula. Especifique su dirección medida a partir del eje X.



3. Para extraer una estaca del suelo se requiere aplicarle una fuerza vertical de 900 N. Esta operación se lleva a cabo mediante dos cables, en uno de los cuales se aplica una tensión de 600 N, como se muestra en la figura. Calcule la magnitud y la dirección de la tensión en el otro cable.



4. Un cuerpo, cuyo peso es de 600 N, es empujado por una fuerza horizontal de 900 N, hacia arriba sobre un plano inclinado 45°. Calcule la fuerza normal al plano (reacción del plano sobre el cuerpo), así como la resultante de las tres fuerzas mencionadas, que como es obvio, será paralela a dicho plano inclinado.



II EQUIVALENCIA Y REDUCCION DE SISTEMAS DE FUERZAS

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los ejercicios en los que se ilustra la aplicación de dichos conceptos.

PRIMER BLOQUE

II.1 COORDENADAS VECTORIALES DE UNA FUERZA. MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE

Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 88, 89, 91 y 92

Estática, Beer y Johnston, páginas 81, 82 y 83

Apuntes de Mecánica I, ejemplos de las páginas 89, 90 y 94

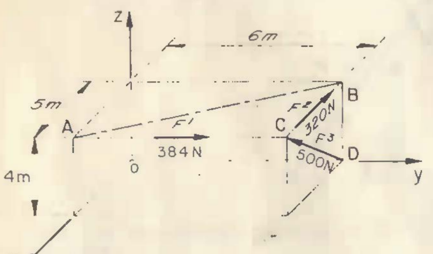
II.2 COORDENADAS VECTORIALES DE UN SISTEMA DE FUERZAS. EQUIVALENCIA DE SISTEMAS

Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 99, 100, 101, 110 y 111

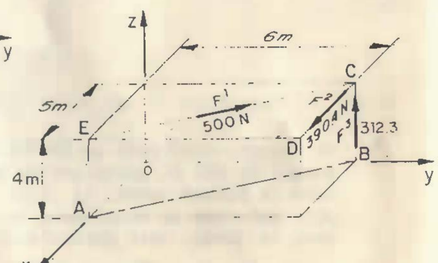
Apuntes de Mecánica I, ejemplo de la página 108

Ejemplo 1

Obtenga el momento, con respecto al eje AB, de cada una de las fuerzas mostradas en las figuras (a) y (b) e investigue si ambos sistemas son o no equivalentes.



(a)



(b)

Solución:

Para calcular el momento de una fuerza respecto a un eje aplicamos los conceptos II.1.

Primero obtenemos las coordenadas vectoriales de cada una de las fuerzas en la figura (a):

$$\vec{F}^1 = 384\,j\,[N]\ ;\ \vec{F}^2 = -320\,i\,[N]\ ;\ \vec{F}^3 = 500\,\vec{e}_3$$

$$\vec{F}^3 = 500\,\frac{\overline{DC}}{|\overline{DC}|} = 500\,\frac{(5-0)\,i + (6-6)\,j + (4-0)\,k}{\sqrt{5^2+4^2}}$$

$$\vec{F}^3 = 390.4\,i + 312.3\,k\ [N]$$

$$\vec{M}_0^1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}^1 = (5i+4k)\times 384j = 1920k - 1536i\ [N\cdot m]$$

$$\vec{M}_0^2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}^2 = (6j+4k)\times(-320i) = 1920k - 1280j\ [N\cdot m]$$

$$\vec{M}_0^3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}^3 = 6j \times (390i + 312.3k) = -2340k + 1873.8i\ [N\cdot m]$$

Cálculo de los momentos respecto al eje $\overline{AB}$ (figura a)

Puede observarse en esta figura que el momento de $\vec{F}^1$ y $\vec{F}^2$ es nulo, puesto que existe un punto común entre el soporte de cada una y el eje de momentos (revise la condición necesaria y suficiente para que el momento de una fuerza con respecto a un eje sea nulo).

Obtención del momento de $\vec{F}^3$.

$$\overrightarrow{M_{\overline{AB}}F^3} = \left(\mathrm{Proy}_{\overline{AB}}\,\vec{M}_B^3\right)\vec{e}_{\overline{AB}} = \left(\vec{M}_B^3 \cdot \vec{e}_{\overline{AB}}\right)\vec{e}_{\overline{AB}} \qquad \ldots (1)$$

$$\vec{M}_B^3 = \overline{BD}\times\vec{F}^3 = -4k\times(390.4i + 312.3k) = -1561.6j\ [N\cdot m]$$

$$\vec{e}_{\overline{AB}} = \frac{(0-5)\,i + (6-0)\,j + (4-4)\,k}{\sqrt{5^2+6^2}} = -0.64i + 0.768j$$

sustituyendo en (1):

$$\overrightarrow{M_{\overline{AB}}F^3} = [(-1561.6j)\cdot(-0.64i + 0.768j)]\ (-0.64i + 0.768j)$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{M_{\overline{AB}}F^3} = 767.6i - 921.1j\ [N\cdot m]$$

$$\overrightarrow{M_{\overline{AB}}F^1} = \overrightarrow{M_{\overline{AB}}F^2} = \vec{0}\ [N\cdot m]$$

Cálculo de los momentos respecto al eje $\overline{AB}$ (figura b)

Para calcular el momento de una fuerza respecto a un eje se aplican los conceptos II.1, como en el caso de la figura (a).

Obtención de las coordenadas vectoriales de las fuerzas:

$$\vec{F}^1 = 500\,\vec{e}_{\overline{EC}} = 500\,\frac{\overline{EC}}{|\overline{EC}|} = 500\,\frac{(0-5)\,i + (6-0)\,j + (4-4)\,k}{\sqrt{25+36}} = -320i + 384j\ [N]$$

$$\vec{F}^2 = 390.4i \qquad \vec{F}^3 = 312.3k\ [N]$$

$$\vec{M}_0^1 = (5i+4k)\times(-320i + 384j) = -1536i - 1280j + 1920k\ [N\cdot m]$$

$$\vec{M}_0^2 = (6j+4k) \times 390.4i = -2342.4k + 1561.6j \quad \boxed{N \cdot m}$$

$$\vec{M}_0^3 = (6j) \times 312.3k = 1873.8i \quad \boxed{N \cdot m}$$

Para calcular el momento de las fuerzas respecto a un eje, ahora aplicaremos una fórmula que se obtuvo a partir de la del cambio de centro de momentos: $\overrightarrow{M_{\overline{AB}}F} = (\vec{e}_{\overline{AB}} \cdot \vec{M}_0 + \vec{e}_0 \cdot \vec{F})\, \vec{e}_{\overline{AB}}$, donde $\vec{e}_0$ es el momento, respecto al origen, del vector unitario que define la dirección del eje $\overline{AB}$ ($\vec{e}_{\overline{AB}}$).

$$\vec{e}_{\overline{AB}} = \frac{(0-5)i + (6-0)j + (0-0)k}{\sqrt{25+36}} = -0.64i + 0.768j$$

$$\vec{e}_0 = 5i \times (-0.64i + 0.768j) = 3.84k$$

Aplicando la fórmula para la fuerza de 390.4N ($\vec{F}^2$), ya que el momento de las otras dos es nulo, por la condición necesaria y suficiente mencionada en el caso de la figura (a).

$$\overrightarrow{M_{\overline{AB}}F^2} = [(-0.64i + 0.768j) \cdot (-2342.4k + 1561.6j) + (3.84k) \cdot (390.4i)] \; (-0.64i + 0.768$$

$$\overrightarrow{M_{\overline{AB}}F^2} = 1199.3(-0.64i + 0.768j)$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{M_{\overline{AB}}F^2} = -767.6i + 921.1j \quad \boxed{N \cdot m}$$

$$\overrightarrow{M_{\overline{AB}}F^1} = \overrightarrow{M_{\overline{AB}}F^3} = \vec{0} \quad \boxed{N \cdot m}$$

Ahora comprobaremos la equivalencia entre los dos sistemas. Para esto, recurriremos a los conceptos II.2.

Primero obtenemos las coordenadas vectoriales de cada uno de los sistemas de fuerzas.

Para el sistema de la figura (a).

$$\vec{R}^1 = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}^i = \vec{F}^1 + \vec{F}^2 + \vec{F}^3 = (384j) + (-320i) + (390.4i + 312.3k)$$

$$\therefore \quad \vec{R}^1 = 70.4i + 384j + 312.3k \quad \boxed{N}$$

Resultante de los momentos en la figura (a)

$$\vec{R}_0^1 = \sum_{i=1}^{3} \vec{M}_0^i = \vec{M}_0^1 + \vec{M}_0^2 + \vec{M}_0^3 = (1920k - 1536i) + (1920k - 1280j) + (-2340k + 1873.8i)$$

$$\vec{R}_0^1 = 337.8i - 1280j + 1500k \quad \boxed{N \cdot m}$$

Las coordenadas vectoriales del sistema de fuerzas de la figura (a) son:

(70.4i + 384j + 312.3k, 337.8i - 1280j + 1500k)

INGENIERIA
ANEXO
BIBLIOTECA

Para el sistema de la figura (b)

$$\vec{R}^2 = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}^i = (-320i + 384j) + (390.4i) + (312.3k)$$

$$\therefore \quad \vec{R}^2 = 70.4i + 384j + 312.3k \quad \boxed{N}$$

$$\vec{R}_0^2 = \sum_{i=1}^{3} \vec{M}_0^i = (-1536i - 1280j + 1920k) + (-2342.4k + 1561.6j) + (1873.8i)$$

$$\vec{R}_0^2 = 337.8i + 281.6j - 422.4k$$

Las coordenadas vectoriales del sistema de fuerzas de la figura (b) son:

(70.4i + 384j + 312.3k, 337.8i + 281.6j - 422.4k)

CONCLUSIONES

Al comparar las coordenadas vectoriales de ambos sistemas deducimos que dichos sistemas no son equivalentes, pues si bien la resultante de las fuerzas es igual en los dos, no así la resultante de los momentos.

SEGUNDO BLOQUE

II.3.A LOS SISTEMAS IRREDUCTIBLES

Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 113, 114, 115, 116, 119, 120 y 121

Estática, Beer y Johnston, ejemplo de la página 110

II.3.B CASOS DE REDUCCION Y SUS CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES. EJE CENTRAL

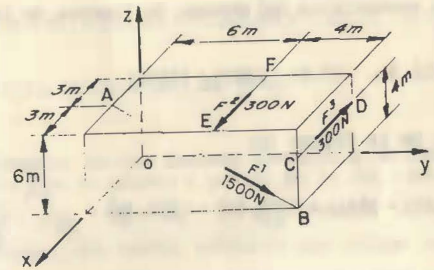
Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 125, 126, 129 y 137 a la 140

Estática, Beer y Johnston, páginas 104 a la 108

Apuntes de Mecánica I, ejemplo de la página 141

Ejemplo 2

Investigue si el sistema de fuerzas mostrado en la figura puede reducirse a otro más simple que le sea equivalente. De no ser así, efectúe la reducción canónica y encuentre un punto del eje central.



Solución:

Primeramente deben obtenerse las coordenadas vectoriales del sistema, para lo cual se aplican los conceptos II.1 y II.2.

Cálculo de la resultante de las fuerzas:

$$\vec{F}^1 = 1500\ \frac{(6-3)\,i + (10-0)\,j + (0-6)\,k}{\sqrt{9+100+36}} = 373.7i + 1245.7j - 747.4k\ \boxed{N}$$

como $\vec{F}^2$ y $\vec{F}^3$ forman un par, su suma es igual a cero, por lo tanto:

$$\vec{R} = \vec{F}^1 \ ; \qquad \vec{R} = 373.7i + 1245.7j - 747.4k\ \boxed{N}$$

Cálculo de la resultante de los momentos:

$$\vec{M}_0^1 = (3i + 6k) \times (373.7i + 1245.7j - 747.4k) = -7474.2i + 4484.4j + 3737.1k$$

$$\vec{M}_0^2 = (6j + 6k) \times (300i) = 1800j - 1800k$$

$$\vec{M}_0^3 = (10j + 4k) \times (-300i) = -1200j + 3000k$$

$$\vec{R}_0 = \vec{M}_0^1 + \vec{M}_0^2 + \vec{M}_0^3 = (-7474.2i + 4484.4j + 3737.1k) + (1800j - 1800k) + (-1200j + 3000k)$$

$$\vec{R}_0 = -7474.2i + 5084.4j + 4937.1k\ \boxed{N\cdot m}$$

aplicando los conceptos II.3.A investigamos si es o no irreductible el sistema:

$$\vec{R}\cdot\vec{R}_0 = (373.7i + 1245.7j - 747.4k)\cdot(-7474.2i + 5084.4j + 4937.1k) =$$

$$= -2\,793\,108.54 + 6\,333\,637.08 - 3\,689\,988.54 = -149\,460\ N\cdot m$$

como $\vec{R}\cdot\vec{R}_0 \neq 0$ el sistema es irreductible y estamos ante el caso de un sistema par y fuerza no coplanos, como puede observarse en la figura.

De los conceptos II.3.B sabemos que es un motor o wrench, por lo que procedemos a efectuar la reducción canónica y a obtener un punto del eje central.

La ecuación vectorial del eje central es:

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{R}_0 - \lambda\,\vec{e} \qquad \dots (1)$$

INGENIERIA
A N E X O
BIBLIOTECA

donde:

$\vec{R}$ y $\vec{R}_0$ ya son conocidos

$\vec{r} = xi + yj + zk$ es el vector de posición de un punto del eje central

$\vec{e} =$ es el vector unitario que define la dirección de $\vec{R}$

$\lambda =$ módulo del par mínimo: $\lambda = \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{R}_0}{|\vec{R}|}$

$$|\vec{R}| = \sqrt{373.7^2 + 1245.7^2 + 747.4^2} = 1500\ N$$

$$\vec{e} = \frac{373.7i + 1245.7j - 747.4k}{1500}\ ; \quad \vec{e} = 0.249i + 0.830j - 0.498k$$

$$\lambda\,\vec{e} = \frac{-149\,460}{1500}(0.249i + 0.830j - 0.498k) = -24.8i - 82.7j + 49.6k$$

el segundo miembro de (1) quedará:

$$\vec{R}_0 - \lambda\,\vec{e} = (-7474.2i + 5084.4j + 4937.1k) - (-24.8i - 82.7j + 49.6k)$$

$$\vec{R}_0 - \lambda\,\vec{e} = -7449.4i + 5167.1j + 4887.5k \qquad \dots (2)$$

el primer miembro de (1) es:

$$\vec{r} \times \vec{R} = (xi + yj + zk) \times (373.7i + 1245.7j - 747.4k) =$$

$$= -(747.4y + 1245.7z)\,i + (747.4x + 373.7z)\,j + (1245.7x - 373.7y)\,k \qquad \dots (3)$$

puesto que las expresiones (2) y (3) son iguales, los coeficientes de los vectores unitarios correspondientes deben serlo también:

$$\begin{aligned} 747.4y + 1245.7z &= 7449.4 \\ 747.4x + 373.7z &= 5167.1 \\ 1245.7x - 373.7y &= 4887.5 \end{aligned}$$

La solución de este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas nos proporciona un punto del eje central.

de la primera: $z = \dfrac{-747.4y + 7449.4}{1245.7}$

de la segunda: $z = \dfrac{-747.4x + 5167.1}{373.7}$

$$\frac{747.4y - 7449.4}{-1245.7} = \frac{747.4x - 5167.1}{-373.7} = \frac{z-0}{1}$$

simplificando: $\dfrac{y - 9.97}{-1.6667} = \dfrac{x - 6.91}{-0.5} = \dfrac{z-0}{1}$ $\quad\therefore\ P(6.91,\ 9.97,\ 0)\ \boxed{m}$

CONCLUSIONES

El sistema equivalente, una vez efectuada la reducción canónica, está formado por:

- Una fuerza de coordenadas vectoriales:

$$(373.7i + 1245.7j - 747.4k,\ -7474.2i + 5084.4j + 4937.1k)$$

cuya posición es:

- P(6.91, 9.97, 0) $\boxed{m}$

- El par mínimo de coordenadas vectoriales:

  $(\vec{0}, -24.8i - 82.7j + 49.6k)$

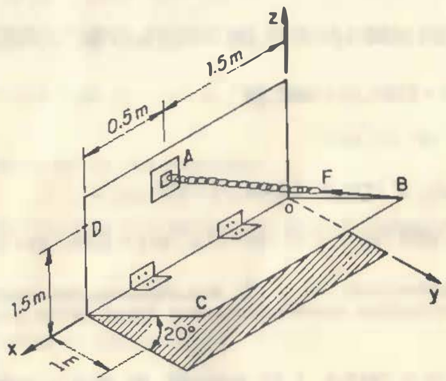
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La cadena AB ejerce una fuerza F = 500 N sobre la puerta en B.

   Determine el momento de esa fuerza con respecto al:

   a) eje X

   b) eje que pase desde C hasta D.



2. Determine la resultante del sistema formado por las fuerzas y los pares siguientes:

   $\vec{F}^1 = 3i + 4j$ $\boxed{N}$ pasa por el punto (3, 0, 2) $\boxed{m}$

   $\vec{F}^2 = -7k$ $\boxed{N}$ pasa por el punto (5, -2, 2) $\boxed{m}$

   $\vec{F}^3 = 2i - 4j + k$ $\boxed{N}$ pasa por el punto (0, 0, 0) $\boxed{m}$

   $\vec{F}^4 = -5i + 6k$ $\boxed{N}$ pasa por el punto (-3, -4, 1) $\boxed{m}$

   $\vec{m}_1 = 10i - 30j + 10k$ $\boxed{N \cdot m}$

   $\vec{m}_2 = 8i - 24j - 2k$ $\boxed{N \cdot m}$

3. Obtenga la resultante del siguiente sistema de fuerzas:

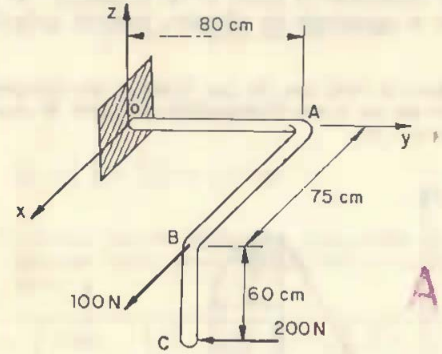
   $\vec{F}^1 = 7i + 5j + 3k$ $\boxed{N}$ pasa por el punto (0, 0, 0) $\boxed{m}$

   $\vec{F}^2 = -8i - 2j$ $\boxed{N}$ pasa por el punto (0, 2, 1) $\boxed{m}$

   $\vec{F}^3 = i - 3j - 3k$ $\boxed{N}$ pasa por el punto (3, 0, 1) $\boxed{m}$

   $\vec{m} = 2i + 5j + k$ $\boxed{N \cdot m}$

4. Reemplace las dos fuerzas mostradas en la figura por un motor o wrench.



INGENIERIA
ANEXO
BIBLIOTECA

(III) PRIMEROS MOMENTOS

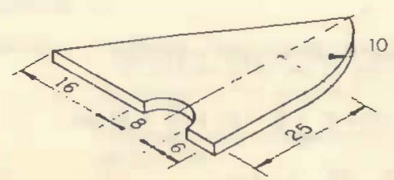
Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los ejercicios en los que se ilustra la aplicación de dichos conceptos.

PRIMER BLOQUE

III.2.A CENTRO DE GRAVEDAD	
Referencias:	Estática, Beer y Johnston, páginas 166, 167, 173, 174, 199 y 200, figura 5.8A de la página 171, figura 5.8B de la página 172 y figura 5.21 de la página 202
	Estática, Beer y Johnston, problema modelo 5.11, página 204

Ejemplo 1

Determine el centro de gravedad de la placa homogénea y de espesor mínimo que se muestra en la figura.

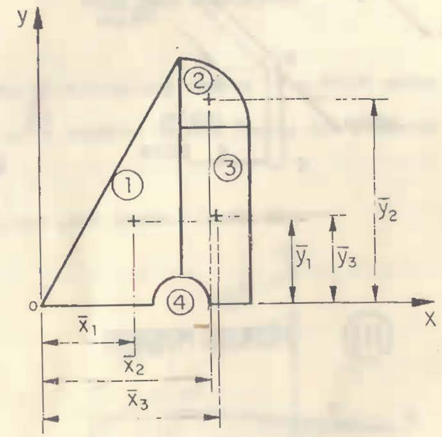


Acotaciones, en cm

Solución:

Aplicando los conceptos de III.2.A, y estableciendo el sistema de referencia adecuado, dividimos la placa en un triángulo, un rectángulo, un semicírculo y en un cuadrante de círculo, como se indica en la figura siguiente:

Asignamos un número a cada una de las áreas y determinamos su valor y el de sus centroides en forma independiente, para lo cual nos apoyamos en III.2.A, figura 5.8A.



Area 1

Triángulo $A_1 = \frac{bh}{2} = \frac{(20)\ 35}{2} = 350\ cm^2$

$$\bar{x}_1 = \frac{2}{3}b = \frac{2}{3}\ (16+4) = 13.33\ cm$$

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{3}h = \frac{35}{3} = 11.67\ cm$$

Area 2

Sector circular $A_2 = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi (10)^2}{4} = 78.54\ cm^2$

$$\bar{x}_2 = (16+4) + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} = 20 + \frac{4\ (10)}{3\pi} = 24.24\ cm$$

$$\bar{y}_2 = 25 + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} = 25 + \frac{4\ (10)}{3\pi} = 29.24\ cm$$

Area 3

Rectángulo $A_3 = b\,h = (6+4)\ (25) = 250\ cm^2$

$$\bar{x}_3 = (16+4) + \frac{b}{2} = 20 + \frac{10}{2} = 25\ cm$$

$$\bar{y}_3 = \frac{h}{2} = \frac{25}{2} = 12.5\ cm$$

Area 4

Semicírculo Esta es una área que no existe, por lo tanto es negativa

$$A_4 = -\frac{\pi r^2}{2} = -\frac{\pi (4)^2}{2} = -25.13\ cm^2$$

$$\bar{x}_4 = 16 + \frac{d}{2} = 16 + \frac{8}{2} = 20\ cm$$

$$\bar{y}_4 = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} = \frac{4\ (4)}{3\pi} = 1.7\ cm$$

Con los valores obtenidos elaboramos la siguiente tabla que nos facilita el cálculo del centroide de toda la figura.

Figura Nº	Area (cm^2)	$\bar{x}$ (cm)	$\bar{y}$ (cm)	$\bar{x}\,A$ (cm^3)	$\bar{y}\,A$ (cm^3)
1	350	13.33	11.67	4665.50	4084.5
2	78.54	24.24	29.24	1903.8	2296.5
3	250	25.00	12.50	6250.0	3125.0
4	-25.13	20.00	1.70	-502.6	-42.7
$\sum$	653.41	——	——	12316.7	9463.3

Como el momento estático de toda el área es igual a la suma de los momentos estáticos de cada una de las áreas parciales, tenemos:

$\bar{X} \sum A = \sum \bar{x}\,A$ $\qquad$ $\bar{Y} \sum A = \sum \bar{y}\,A$

$\bar{X}\ (653.41\ cm^2) = 12316.7\ cm^3$; $\bar{Y}(653.41\ cm^2) = 9463.3\ cm^3$

$\bar{X} = 18.84\ cm$ $\qquad$ $\bar{Y} = 14.48\ cm$

por lo que los valores de $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ definen el centroide del área y también el centro de gravedad de la placa. Es obvio que el centro de gravedad está localizado en el punto medio entre las caras superior e inferior de la placa.

SEGUNDO BLOQUE

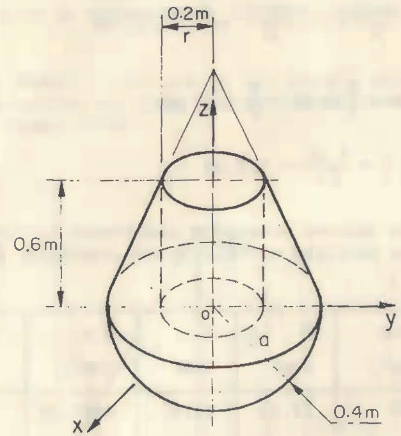
III.2.B CENTROIDES

Referencias: Estática, Beer y Johnston, páginas 168, 169, 170, 172, figura 5.8A de la página 171, figura 5.8B de la página 172 y figura 5.21 de la página 202

Estática, Beer y Johnston, problema modelo 5.13, página 206

Ejemplo 2

Localice el centroide de la siguiente figura. El cono truncado tiene un agujero cilíndrico practicado a lo largo de su eje.



Solución:

Aplicando los conceptos de III.2.B, dividimos el volumen en las cuatro partes mostradas en la figura 1, que son:

una semiesfera, dos conos y un cilindro. Asignemos un número a cada uno de los volúmenes.

De III.2.B debido a la simetría se tiene que:

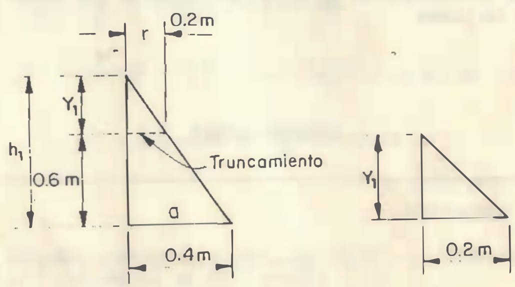
$$\bar{X} = \bar{Y} = 0$$

esto es, el centroide se encuentra ubicado en el eje Z. Por lo que los cálculos se harán para definir dicha posición.

Determinemos, en forma individual, el valor de cada uno de los volúmenes y su centroide, para lo cual utilizamos la figura 5.21 de la referencia III.2.B. Los volúmenes de los cuerpos que no existen se consideran negativos.

Volumen 1

Esta figura es el cono completo (sin truncamiento) cuya altura se obtiene de los triángulos rectángulos siguientes (observados en el plano O Y Z).



Por semejanza de triángulos obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{h_1}{0.4} = \frac{0.6}{0.2} \qquad \therefore \; h_1 = 1.2 \text{ m}$$

$$y_1 = 0.6 \text{ m}$$

Volumen 1

$$v_1 = \frac{1}{3}\pi a^2 h = \frac{\pi}{3}(0.4)^2(1.2) = 0.20106 \text{ m}^3$$

$$\bar{z}_1 = \frac{h}{4} = \frac{1.2}{4} = 0.3 \text{ m}$$

INGENIERIA
A N E X O
BIBLIOTECA

Volumen 2

Esta figura corresponde a la semiesfera

$$v_2 = \frac{2}{3}\pi a^3 = \frac{2}{3}\pi(0.4)^3 = 0.13404 \text{ m}^3$$

$$\bar{z}_2 = -\frac{3}{8}a = -\frac{3}{8}(0.4) = -0.15 \text{ m}$$

Volumen 3

Esta figura corresponde al cono superior y por no existir este volumen su valor es negativo

$$v_3 = -\frac{1}{3}\pi r^2 y_1 = -\frac{1}{3}\pi(0.2)^2(0.6) = -0.02513 \text{ m}^3$$

$$\bar{z}_3 = 0.6 + \frac{y_1}{4} = 0.6 + \frac{0.6}{4} = 0.75 \text{ m}$$

Volumen 4

Esta figura corresponde al hueco cilíndrico y el valor de su volumen es negativo

$$v_4 = -\pi r^2 h = -\pi(0.2)^2(0.6) = -0.07540 \text{ m}^3$$

$$\bar{z}_4 = \frac{h}{2} = \frac{0.6}{2} = 0.3 \text{ m}$$

Resumiendo lo anterior:

G.1 70251?

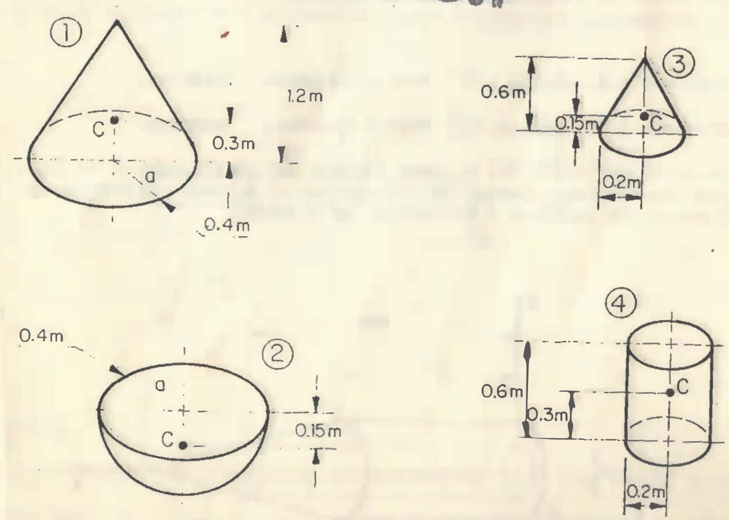


Figura 1

Con los valores obtenidos, elaboramos la siguiente tabla que nos facilita el cálculo del centroide de toda la figura.

Figura Nº	Volumen (m^3)	$\bar{z}$ (m)	$\bar{z}$ v (m^4)
1	0.20106	0.30	0.06032
2	0.13404	-0.15	-0.02011
3	-0.02513	0.75	-0.01885
4	-0.0754	0.30	-0.02262
$\sum$	0.23457	—	-0.00126

Como el primer momento de todo el volumen es igual a la suma de los primeros momentos de sus partes, tenemos:

$$\bar{Z} \sum v = \sum \bar{z}\, v$$

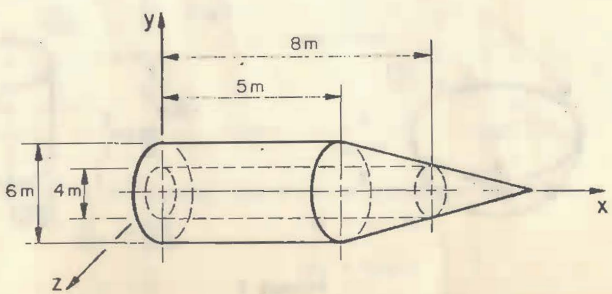
$$\bar{Z}(0.23457\ m^3) = -\ 0.00126\ m^4 \implies \bar{Z} = -\ 0.00537\ m$$

por lo que el centroide se localiza en el punto de coordenadas

(0, 0, - 0.00537) $\boxed{m}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Problema 5.8, página 178, Beer y Johnston. Estática.
2. Problema 5.98, página 207, Beer y Johnston. Estática.
3. Halle el centroide del volumen formado por un cilindro y un cono, como se ilustra. Dentro del cuerpo hay un agujero cilíndrico de 8 metros de longitud y 4.0 metros de diámetro.



IV EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los ejercicios en los que se ilustra la aplicación de dichos conceptos.

PRIMER BLOQUE

IV.1 CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 143 a la 147

Estática, Beer y Johnston, páginas 143 y 144

Estática, Beer y Johnston, Problema modelo 4.6, página 145

IV.5 ISOSTATICIDAD E HIPERESTATICIDAD

Referencia: Apuntes de Mecánica I, páginas 159 y 160

IV.4 TIPOS DE APOYO

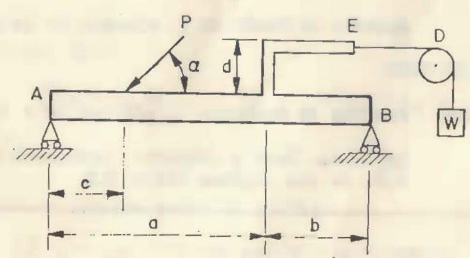
Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 54 y 55

Estática, Beer y Johnston, páginas 125 y 151

Estática, Beer y Johnston, Problema modelo 4.4, página 134

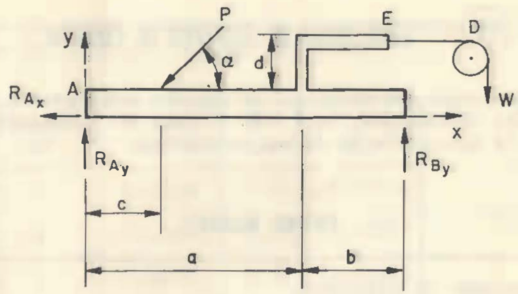
Ejemplo 1

La viga que se ilustra en la figura se encuentra sometida a una carga concentrada P y a la acción del peso W de un cuerpo conectado a ella mediante un cable en E. Suponiendo que la polea es lisa, determine si el problema es o no estáticamente determinado (isostático).



Solución:

De los conceptos IV.4 determinamos las fuerzas reactivas en los apoyos. Estas son: R_{Ax}, R_{Ay} y R_{By}, a las que les atribuimos arbitrariamente el sentido.



Teniendo en cuenta los conceptos IV.1 concluimos que se pueden plantear tres ecuaciones escalares independientes, ya que se tiene un sistema general de fuerzas en el plano:

$$\sum_{i=1}^{n} F_x^i = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_y^i = 0 \quad \ldots (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M^i = 0 \quad \ldots (3)$$

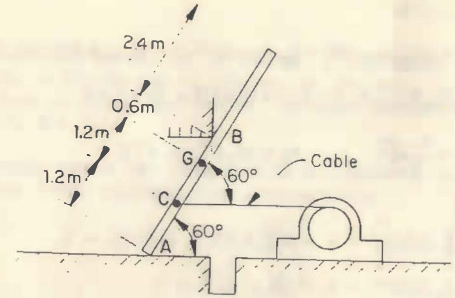
tomando en cuenta los conceptos IV.5 y como sólo desconocemos las magnitudes de tres de las fuerzas del sistema (las reacciones en los apoyos), se concluye que el problema es *isostático*.

SEGUNDO BLOQUE

IV.2	DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE
	Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 45 y 46
	Apuntes de Mecánica I, ejemplo de la página 47
IV.3	FRICCION EN SECO
	Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 38 a la 44
	Estática. Beer y Johnston, problemas modelo 8.2 y 8.3, de las páginas 312 y 313

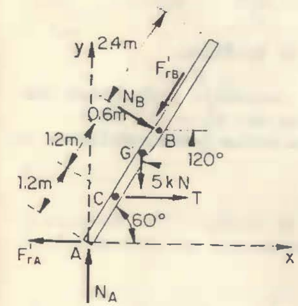
Ejemplo 2

Para el levantamiento de un poste, cuyo peso es de 5 kN y su centro de gravedad en G, se aplica en el punto C una fuerza a través de un cable conectado a un malacate. Suponiendo que el poste está en equilibrio en el instante mostrado, determine el mínimo valor de la fuerza que debe aplicarse al cable para iniciar el levantamiento del poste. Considere un coeficiente de fricción estático de 0.5 para las superficies en contacto A y B.



Solución:

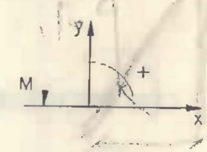
Aplicamos los conceptos de IV.2 y IV.3 y dibujamos el diagrama de cuerpo libre del poste, así como el marco de referencia adecuado.



Observaciones del diagrama:

- La fuerza normal N_B actúa perpendicularmente al poste, en el punto de contacto $\overline{B}$.
- Las fuerzas de fricción se oponen al movimiento inminente del poste, el cual ocurriría en la siguiente forma:

Convención de signos:



De la referencia IV.3:

$$F'r_A = \mu_A N_A \quad \ldots (1) \; ; \quad F'r_B = \mu_B N_B \quad \ldots (2)$$

donde $\mu_A = \mu_B$

del equilibrio del cuerpo y de (1) y (2):

$$\sum F_x = 0 \; ; \quad T + N_B \text{ sen } 60° - \mu_B N_B \cos 60° - \mu_A N_A = 0 \quad \ldots (3)$$

$$\sum F_y = 0 \; ; \quad N_A - 5 - N_B \cos 60° - \mu_B N_B \text{ sen } 60° = 0 \quad \ldots (4)$$

$$\sum M_A = 0 \; ; \quad -T\,(1.2 \text{ sen } 60°) - 5\,(2.4 \cos 60°) - 3N_B = 0 \quad \ldots (5)$$

de (3):

$$N_A = \frac{T + N_B \text{ sen } 60° - \mu_B N_B \cos 60°}{\mu_B} \quad \ldots (3')$$

(3') en (4) y $\mu = 0.5$:

$$2T + 2N_B \text{ sen } 60° - N_B \cos 60° - 5 - N_B \cos 60° - 0.5\, N_B \text{ sen } 60° = 0$$

$$N_B(1.732 - 0.5 - 0.5 - 0.433) + 2T - 5 = 0$$

$$N_B = \frac{5 - 2T}{0.3} \quad \therefore \quad N_B = 16.67 - 6.67\,T \qquad \ldots (4')$$

(4') en (5):

$$-\ 1.0392\,T - 6 - 3\,(16.67 - 6.67\,T) = 0$$

$$-\ 1.0392\,T - 6 - 50 + 20\,T = 0$$

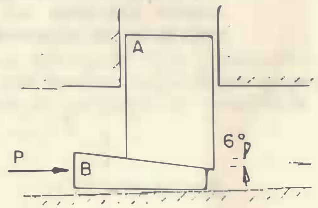
$$T = 2.95 \text{ kN}$$

Por lo que para iniciar el levantamiento se requiere una fuerza mayor de 2.95 kN.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Problema 8.18 de la serie de ejercicios de Estática.

2. Obtenga el valor mínimo de la fuerza P necesaria para hacer que suba el bloque A. El peso de los bloques es $W_A = 100$ kN y $W_B = 10$ kN. Considere que $\mu = 0.3$ para todas las superficies en contacto.



(V) CASOS PARTICULARES DE PROBLEMAS ISOSTATICOS

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los ejercicios en los que se ilustra la aplicación de dichos conceptos.

PRIMER BLOQUE

V.1.A CALCULO DE REACCIONES EN VIGAS, MARCOS Y ARCOS

Referencias: Estática, Beer y Johnston, páginas 126, 127, 270 271, 238 y 239

Estática, Beer y Johnston, problema modelo 6.6 de la página 244

V.3 CALCULO DE REACCIONES EN ELEMENTOS DE MAQUINAS

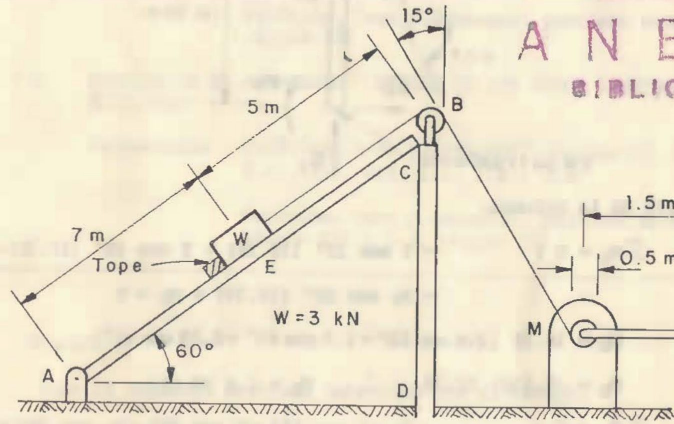
Referencias: Beer y Johnston, Estática, páginas 253 a la 255, problema modelo 6.7

Ejemplo 1

Determine la magnitud mínima de la fuerza P aplicada en la manivela del malacate M, a fin de que el bloque W de peso 3 kN esté a punto de ascender sobre el plano inclinado. Obtenga también las reacciones en los apoyos A, C y D.

No existe fricción entre las superficies en contacto ni en la polea B y el peso de los demás elementos es despreciable.

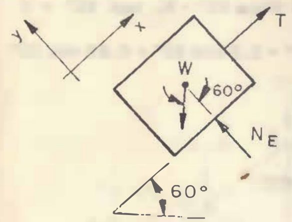
INGENIERIA
ANEXO
BIBLIOTECA



Solución:

Elaborando el diagrama de cuerpo libre del bloque W y estableciendo la convención de signos para este diagrama.

Del equilibrio del bloque:



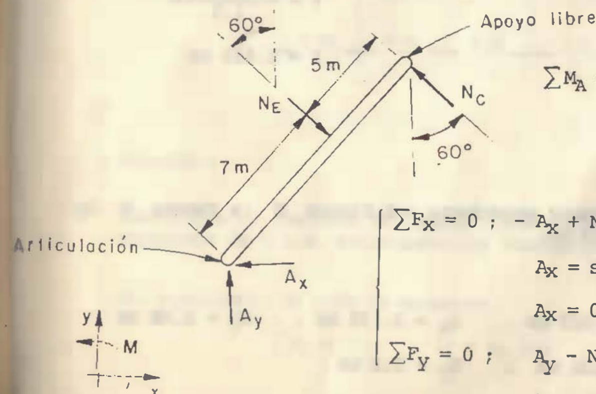
$$\sum F_x = 0\ ; \qquad T - W \text{ sen } 60° = 0$$

$$T = 2.6 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0\ ; \qquad N_E - W \cos 60° = 0$$

$$N_E = 1.5 \text{ kN}$$

del equilibrio del plano inclinado:



$$\sum M_A = 0\ ; \quad - N_E(7) + N_C(12) = 0$$

$$- 1.5(7) + N_C(12) = 0$$

$$N_C = 0.88 \text{ kN}$$

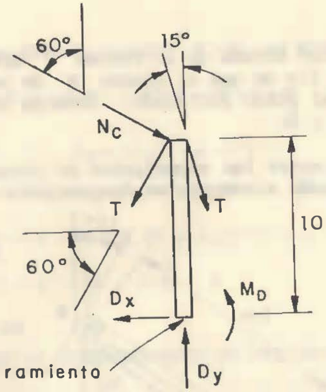
$$\sum F_x = 0\ ; \quad - A_x + N_E \text{ sen } 60° - N_C \text{ sen } 60° = 0$$

$$A_x = \text{sen } 60°\ (1.5 - 0.88)$$

$$A_x = 0.537 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0\ ; \quad A_y - N_E \cos 60° + N_C \cos 60° = 0$$

$$A_y = \cos 60°\ (1.5 - 0.88)$$



del equilibrio de la columna:

$$\sum M_D = 0\ ; \qquad -T \text{ sen } 15° \ (10.39) + T \cos 60° \ (10.39) -$$

$$- N_C \text{ sen } 60° \ (10.39) + M_D = 0$$

$$M_D = 10.39 \ (2.6 \text{ sen } 15° - 2.6 \cos 60° + 0.88 \text{ sen } 60°)$$

$$M_D = (0.135) \ 10.39 \qquad \therefore \qquad M_D = 1.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sum F_y = 0\ ; \qquad D_y - T \cos 15° - T \text{ sen } 60° - N_C \cos 60° = 0$$

$$D_y = 2.6 \cos 15° + 2.6 \text{ sen } 60° + 0.88 \cos 60°$$

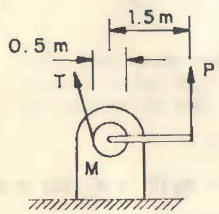
$$D_y = 5.2 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0\ ; \qquad -D_x + T \text{ sen } 15° - T \cos 60° + N_C \text{ sen } 60° = 0$$

$$D_x = 2.6 \text{ sen } 15° - 2.6 \cos 60° + 0.88 \text{ sen } 60°$$

$$D_x = 0.135 \text{ kN}$$

del equilibrio del cuerpo:



$$\sum M_M = 0\ ; \qquad P(1.5) = T \ \frac{0.5}{2}$$

$$P = \frac{2.6 \ (0.25)}{1.5}$$

$$P = 0.433 \text{ kN}$$

Resumen:

Para iniciar el movimiento ascendente del bloque W la fuerza P debe ser mayor que 0.433 kN.

Apoyos:

$A_x = 0.537$ kN , $D_x = 0.135$ kN , $N_C = 0.88$ kN

$A_y = 0.31$ kN ; $D_y = 5.2$ kN

$M_D = 1.4$ kN $\cdot$ m

SEGUNDO BLOQUE

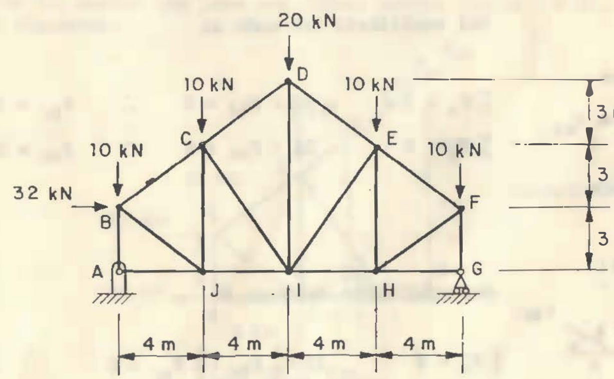
V.1.B	CALCULO DE REACCIONES EN ARMADURAS	
	Referencias:	Del primer bloque de este tema, referencia V.1.A páginas 126 y 127 solamente
		Estática, Beer y Johnston, problema modelo 4.1, página 131
V.2	RESOLUCION DE ARMADURAS: METODO DE LOS NUDOS Y METODO DE LAS SECCIONES	
	Referencias:	Estática, Beer y Johnston, páginas 216 (Artículo 6.4), 217, 218, 219, 228 y 229
		Estática, Beer y Johnston, problema modelo 6.1, página 224 y 6.3, página 233

Ejemplo 2

Para la armadura mostrada determine por el método:

a) de los nudos, las fuerzas en las barras BC, BJ y JI.

b) de las secciones, las fuerzas en las barras IC, DC e IJ

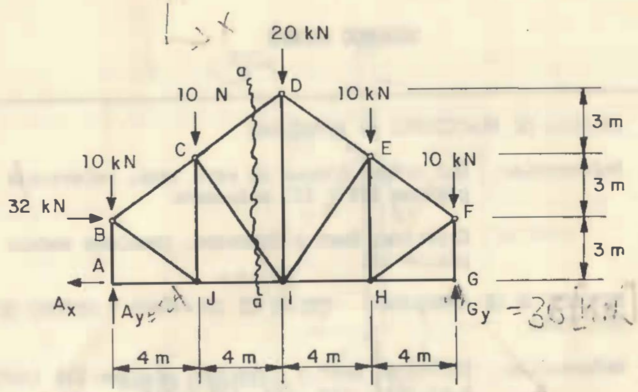


Solución:

Elaborando el diagrama de cuerpo libre de la armadura y aplicando los conceptos de V.1.B, calculemos las reacciones en los apoyos.

Del equilibrio de toda la armadura:

$$\sum F_x = 0\ ; \qquad 32 - A_x = 0 \qquad \therefore \qquad A_x = 32 \text{ kN}$$



$\sum M_A = 0$; $\quad -32(3) - 10(4) - 20(8) - 10(12) - 10(16) + G_y(16) = 0$

$G_y = 36$ kN

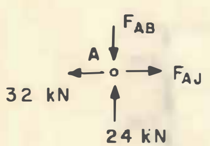
$\sum F_y = 0$; $\quad A_y - 10 - 10 - 20 - 10 - 10 + G_y = 0$

$A_y = 60 - 36 \quad \therefore \quad A_y = 24$ kN

Con los valores de las reacciones calculados y en base a la referencia V.2, procedemos al siguiente análisis.

a) Método de los nudos

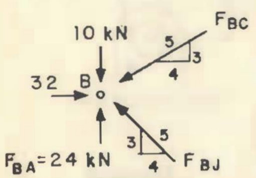
Del equilibrio del nudo A:



$\sum F_x = 0$; $\quad -32 + F_{AJ} = 0 \quad \therefore \quad F_{AJ} = 32$ kN

$\sum F_y = 0$; $\quad 24 - F_{AB} = 0 \quad \therefore \quad F_{AB} = 24$ kN

del equilibrio del nudo B:



$\sum F_x = 0 \quad 32 - \frac{4}{5} F_{BC} - \frac{4}{5} F_{BJ} = 0 \quad \ldots (1)$

$\sum F_y = 0 \quad 24 - 10 - \frac{3}{5} F_{BC} + \frac{3}{5} F_{BJ} = 0 \quad \ldots (2)$

despejando de (1) F_{BC}:

$F_{BC} = 40 - F_{BJ} \quad \ldots (1')$

sustituyendo (1') en (2):

$14 - \frac{3}{5}(40 - F_{BJ}) + \frac{3}{5} F_{BJ} = 0 \quad \ldots (2')$

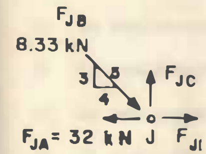
resolviendo:

$1.2\, F_{BJ} = 10 \quad \therefore \quad F_{BJ} = 8.33$ kN

sustituyendo valores en (1'):

$F_{BC} = 40 - 8.33 \quad F_{BC} = 31.67$ kN

del equilibrio del nudo J:



$\sum F_y = 0$; $\quad F_{JC} - \frac{3}{5}(8.33) = 0 \quad \therefore \quad F_{JC} = 5$ kN

$\sum F_x = 0$; $\quad -32 + F_{JI} + \frac{4}{5}(8.33) = 0 \quad \therefore \quad F_{JI} = 25.33$ kN

Resumiendo:

Las fuerzas en las barras BC, BJ y JI son:

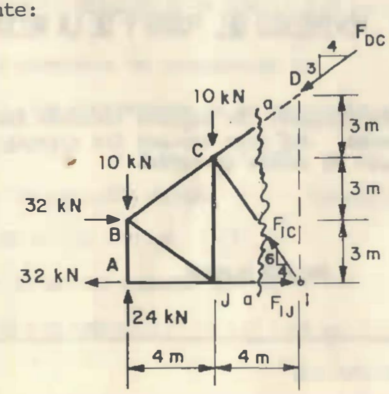
$F_{BC} = 31.67$ kN (a compresión)

$F_{BJ} = 8.33$ kN (a compresión)

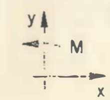
$F_{JI} = 25.33$ kN (a tensión)

b) Método de las secciones.

Para encontrar las fuerzas en las barras pedidas, hacemos un seccionamiento de tal manera que pase por dichas barras (corte a - a), teniéndose lo siguiente:



Convención de signos:



Del equilibrio de la parte izquierda de la armadura.

$\sum M_I = 0$; $\quad$ (F_{DC} actuando en el punto D)

$-24(8) - 32(3) + 10(8) + 10(4) + \frac{4}{5}(F_{DC})(9) = 0$

$\therefore \quad F_{DC} = 23.33$ kN

$\sum M_C = 0$; $\quad 10(4) + 32(3) - 32(6) - 24(4) + F_{IJ}(6) = 0 \quad \therefore \quad F_{IJ} = 25.33$ kN

$\sum F_y = 0$; $\quad 24 - 10 - 10 - \frac{3}{5} F_{DC} + \frac{3}{\sqrt{13}} F_{IC} = 0$; $\quad F_{IC} = 12.00$ kN

Resumiendo:

Las fuerzas en las barras DC, IJ e IC son:

$F_{DC} = 23.33$ kN (a compresión)

$F_{IJ} = 25.33$ kN (a compresión)

$F_{IC} = 12.00$ kN (a compresión)

PROBLEMAS PROPUESTOS

Estática, Beer y Johnston, problemas:

6.54 inciso a), página 246

6.74 inciso b), página 250

6.93 página 256

6.10 página 227

6.29 página 235

(VI) MOVIMIENTO DEL PUNTO Y DE LA RECTA

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los ejercicios en los que se ilustra la aplicación de dichos conceptos.

PRIMER BLOQUE

VI.1 VELOCIDAD Y ACELERACION

Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 176 y 177

Apuntes de Mecánica I, ejemplo de la página 190

VI.2 MOVIMIENTO DEL PUNTO EN FUNCION DE LAS VARIABLES DE LA TRAYECTORIA

Referencias: Dinámica, Beer y Johnston, páginas 46 a la 48

Apuntes de Mecánica I, páginas 173 a la 175

Apuntes de Mecánica I, ejemplo de la página 188

Ejemplo 1

La velocidad de una partícula, en cualquier instante, está definida por el vector $\vec{v} = 12ti + 5e^t j - 16\,\text{sen}\,2tk$ $\boxed{m/s}$. Si cuando $t = 0$ s se encuentra en un punto de coordenadas $x = -2$ m, $y = 5$ m y $z = 8$ m, determine para $t = \pi/2$ segundos:

a) El vector de posición

b) El vector velocidad

c) La aceleración total

d) La aceleración tangencial

e) La aceleración normal

f) El radio de curvatura

Solución:

a) De los conceptos VI.1 y VI.2, aplicamos la relación:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

de donde:

$$\vec{r} = \int \vec{v}\, dt$$

sustituyendo el valor de $\vec{v}$:

$$\vec{r} = \int (12ti + 5e^t j - 16\,\text{sen}\,2tk)\, dt = 6t^2 i + 5e^t j + 8\cos 2tk + \vec{c} \quad \dots (1)$$

cálculo de la constante de integración $\vec{c}$.

Cuando $t = 0$, las coordenadas de la partícula son:

$x = -2$, $y = 5$, $z = 8$

por lo tanto, la posición cuando $t = 0$ estará dada por:

$$\vec{r}(0) = -2i + 5j + 8k \ \boxed{m} \quad \dots (2)$$

sustituyendo (2) en (1) cuando $t = 0$:

$$-2i + 5j + 8k = 6(0)^2 i + 5e^0 j + 8\cos 2(0)\, k + \vec{c}$$

de donde:

$$\vec{c} = -2i \quad \dots (3)$$

sustituyendo (3) en (1):

$$\vec{r} = (6t^2 - 2)i + 5e^t j + 8\cos 2tk \ \boxed{m}$$

la ecuación anterior nos proporciona el vector de posición de la partícula para $t \geq 0$.

Cuando $t = \pi/2$ se tendrá:

$$\vec{r} = 12.8i + 24.05j - 8k \ \boxed{m} \quad \dots (4)$$

b) Debido a que en el enunciado del problema se especifica la velocidad de la partícula para cualquier instante, se tiene que para $t = \pi/2$ s:

$$\vec{v} = 12(\pi/2)i + 5e^{\pi/2}j - 16\,\text{sen}\,2(\pi/2)k$$

$$\therefore \quad \vec{v} = 18.85i + 24.05j \left[\frac{m}{s}\right] \qquad \ldots (5)$$

c) De los conceptos VI.2 sabemos que la aceleración total de una partícula se expresa de la siguiente manera:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

como:

$$\vec{v} = 12\,ti + 5e^{t}j - 16\,\text{sen}\,2\,tk$$

se tiene:

$$\vec{a} = 12i + 5e^{t}j - 32\cos 2\,tk \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

de modo que para $t = \pi/2$ s se tendrá:

$$\vec{a} = 12i + 24.05j + 32k\ [m/s^2] \qquad \ldots (6)$$

d) De los conceptos VI.2 aplicamos la fórmula:

$$\vec{a}_t = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\vec{e}_t \qquad \ldots (7)$$

como $\vec{e}_t = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ es el vector unitario tangente:

$$\vec{a}_t = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\,\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad \ldots (8)$$

sustituyendo (5) y (6) en (8):

$$\vec{a}_t = \left[\frac{(12i + 24.05j + 32k)\cdot(18.85i + 24.05j)}{[(18.85)^2 + (24.05)^2]^{1/2}}\right]\frac{(18.85i + 24.05j)}{[(18.85)^2 + (24.05)^2]^{1/2}}$$

$$\therefore \quad \vec{a}_t = 16.24i + 20.72j\ [m/s^2] \qquad \ldots (9)$$

e) De los conceptos VI.2 se sabe que:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\therefore \quad \vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t \qquad \ldots (10)$$

sustituyendo (6) y (9) en (10):

$$\vec{a}_n = (12i + 24.05j + 32k) - (16.24i + 20.72j)$$

$$\therefore \quad \vec{a}_n = -4.24i + 3.33j + 32k\ [m/s^2] \qquad \ldots (11)$$

f) De los conceptos VI.2 se tiene:

$$R = \frac{v^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|} \qquad \ldots (12)$$

como ya calculamos la rapidez:

$$v = [(18.85)^2 + (24.05)^2]^{1/2} = 30.55\ m/s$$

sustituyendo este valor, junto con (5) y (6) en (12):

$$R = \frac{(30.55)^3}{|(12i + 24.05j + 32k) \times (18.85i + 24.05j)|}$$

$$\therefore \quad R = 28.75\ \text{m}$$

SEGUNDO BLOQUE

Las referencias para los dos subtemas que abarca este bloque son las mismas, por lo que se indican después de anotar los conceptos.

VI.4 MOVIMIENTO DE LA RECTA. POSICION, DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACION ANGULARES

VI.5 RELACIONES ENTRE LOS CONCEPTOS CINEMATICOS LINEALES Y ANGULARES

Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 180 y 182 a la 186

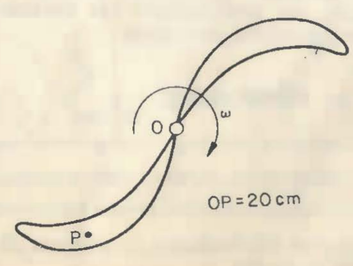
Dinámica, Beer y Johnston, páginas 226 y 227

Ejemplo 2

La hélice que se muestra en la figura gira en torno de un eje perpendicular al plano de la hoja, fijo en el punto 0. En un determinado instante un punto P de la hélice tiene una aceleración normal de magnitud 500 m/s^2, en tanto que su rapidez se incrementa uniformemente a razón de 2 m/s. Determine para el instante considerado:

a) La rapidez y la magnitud de la aceleración angulares de la hélice.

b) La rapidez lineal del punto P.



Solución:

a) De los conceptos VI.4 y VI.5, sabemos que:

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

que en su forma escalar es:

$$a_n = \omega^2 r ; \qquad \omega^2 = \frac{a_n}{r}$$

$$\therefore \quad \omega^2 = \frac{500}{0.20} = 2500 \; ; \qquad \omega = 50 \; \frac{rad}{s}$$

también de VI.5 se tiene:

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

y escalarmente:

$$a_t = \alpha r$$

de donde:

$$\alpha = \frac{a_t}{r} = \frac{2}{0.20} \qquad \therefore \qquad \alpha = 10 \; \frac{rad}{s^2}$$

b) De los conceptos VI.5 sabemos que:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

que escalarmente equivale a:

$$v = \omega r$$

$$\therefore \quad v = (50)(0.20) \; ; \qquad v = 10 \; m/s$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Cuaderno de ejercicios de Cinemática, ejercicios 3.5, 4.3 y 4.5

VII CASOS PARTICULARES DEL MOVIMIENTO DEL PUNTO Y DE LA RECTA

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los ejercicios en los que se ilustra la aplicación de dichos conceptos.

PRIMER BLOQUE

VII.1 MOVIMIENTOS DE TRAYECTORIA PLANA: TIRO PARABOLICO Y MOVIMIENTOS CIRCULARES

Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 192 a la 195 y 198 a la 200

Dinámica, Beer y Johnston, problema modelo 1.7 de la página 39

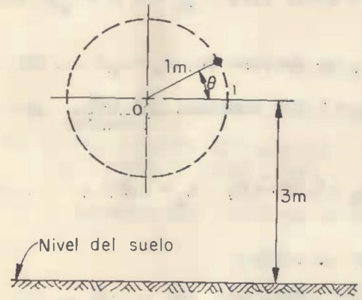
Apuntes de Mecánica I, ejemplo de la página 200

Ejemplo 1

Un proyectil, sujeto al extremo de un hilo delgado, se mueve en un plano vertical a lo largo de una trayectoria circular con centro en "O", cuyo diámetro es 2 m, como se muestra en la figura. La posición angular del proyectil está dada por:

$\theta = 3t^2 + 4t$, donde θ en radianes

t en segundos



INGENIERIA
ANEXO
BIBLIOTECA

Si cuando el proyectil ha dado 2.875 vueltas se rompe el hilo, calcule:

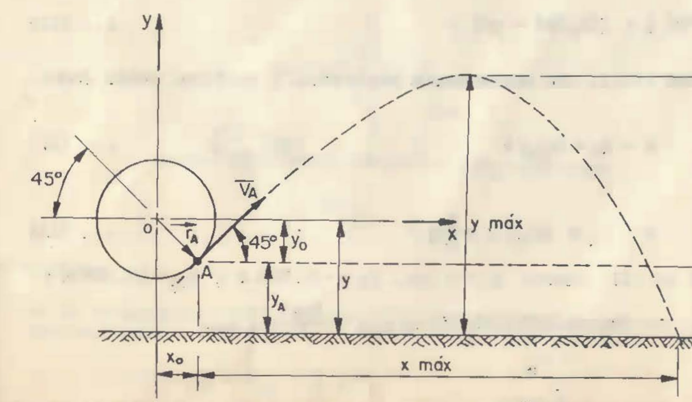
a) La magnitud total de la aceleración en el instante antes de que se rompa el hilo.

b) La distancia horizontal desde el punto en el cual el proyectil deja la trayectoria circular, hasta el punto de caída.

c) La altura máxima que alcanza el proyectil con respecto al suelo.

Solución:

Dibujando el movimiento del proyectil después de que se rompe el hilo y eligiendo un marco de referencia adecuado:



Observaciones:

- Cuando $\theta = 2.875$ vueltas, el proyectil tiene una velocidad v_A con una inclinación de $45°$ respecto a la horizontal.
- El análisis de todo el movimiento se hará considerando primero un movimiento circular y después un movimiento de tiro parabólico.

a) Cálculo de la aceleración total.

De la referencia VII.1:

$$a_{TOTAL} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \left[(\alpha t)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2\right]^{0.5} \quad \ldots (1)$$

como $\theta = 3t^2 + 4t \ldots (2)$; $\frac{d\theta}{dt} = \omega = 6t + 4 \ldots (3)$; $\frac{d\omega}{dt} = \alpha = 6\ \frac{rad}{s^2} \ldots (4)$

La velocidad v_A, cuando $\theta = 2.875$ vueltas, se obtiene de; $v_A = \omega_A r \ldots (5)$

$r = 1m$; de (3) $\omega_A = 6t_A + 4 \ldots (6)$; y como $\theta_A = 2.875$ vueltas. $\frac{2\pi\ rad}{1\ vuelta} =$

$= 3t_A^2 + 4t_A \ldots (7)$; de (7) $3t_A^2 + 4t_A - 5.75\pi = 0$; $t_A = 1.876\ s \quad \ldots (8)$

(8) en (6) $\omega_A = 6(1.876) + 4 = 15.257\ rad/s \quad \ldots (9)$

(9) en (5) $v_A = 15.257\ (1) = 15.257\ m/s \quad \ldots (10)$; (4), (8) y (10) en (1)

$$a_{TOTAL} = \left[(6 \times \overset{1[m]}{\cancel{1.876}})^2 + \left(\frac{15.257^2}{1\,m}\right)^2\right]^{0.5}$$

$$a_{TOTAL} = 233.048\ m/s^2$$

b) Ubiquemos el punto A respecto al sistema de referencia.

$\bar{r}_A = x_A i + y_A j = 0.7071\ i - 0.7071\ j\ \boxed{m}$; debido a que cuando se rompe el hilo la aceleración del proyectil es $\bar{a} = -g\,j = cte$, tenemos $\bar{v} = -g t j + \bar{c}$; y como en $t = 0$:

$\bar{v}_A = 15.257\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ i + \frac{1}{\sqrt{2}}\ j\right) = 10.788\ i + 10.788\ j = \bar{c}$;

$$\bar{v} = 10.788\ i + (10.788 - gt)\ j \quad \ldots (11)$$

De acuerdo con VII.1, los movimientos horizontal y vertical están dados por:

$$x = x_0 + (v_{0x})\,t \quad \ldots (12)$$

y:

$$y = y_0 + (v_{0y})\,t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \ldots (13)$$

sustituyendo en (13) cuando $y = -3\,m$, $y_0 = -0.7071\,m$ y $v_{0y} = 10.788\ m/s$

$$-3 = -0.7071 + 10.788\, t_{x\ max} - \frac{9.81}{2}\, t_{x\ max}^2$$

resolviendo:

$$t_{x\ max} = 2.395\ s \quad \ldots (14)$$

como $x_{TOT} = x_0 + x_{max}$ $\therefore$ $x_{max} = (v_{0x})\, t_{x\,max} = 10.788(2.395)$

$$x_{max} = 25.833\ m$$

c) De la referencia VII.1 ; y_{max} ocurre cuando $v_y = 0$

de (11) : $v_y = 10.788 - g\,t_{y\ max}$; $0 = 10.788 - 9.81\,(t_{y\ max}) = 0$; $t_{y\ max} = 1.099\ s$

por lo que de (13) $y_h = -0.7071 + 10.788\,(1.099) - \frac{9.81}{2}(1.099)^2$; $y_h = 5.225\ m$

por lo que $y_{max} = y_A + y_h = 2.2929 + 5.225 = 7.518\ m$

$$y_{max} = 7.518\ m$$

INGENIERIA
ANEXO
BIBLIOTECA

SEGUNDO BLOQUE

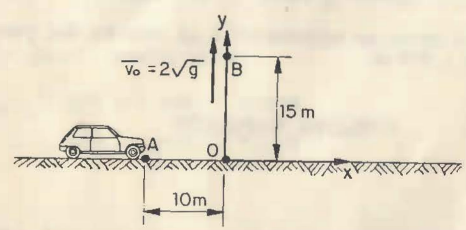
VII.2 MOVIMIENTOS RECTILINEOS: GENERAL, UNIFORMEMENTE VARIADO, TIRO VERTICAL Y CAIDA LIBRE Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 201 a la 206 Apuntes de Mecánica I, ejemplo de la página 207 Dinámica. Beer y Johnston, problema modelo 1.2 de la página 9

Ejemplo 2

En el instante en que un automóvil parte del reposo, desde el punto A, es lanzado un proyectil verticalmente hacia arriba a partir del punto B con una rapidez de $2\sqrt{g}$ m/s, como se muestra en la figura. Si el automóvil inicia su movimiento en línea recta, y dirigido hacia "0" con una aceleración cuya magnitud está dada por la ecuación $a = t + 3$ (en donde t en segundos y a en m/s^2), determine:

a) La rapidez del proyectil cuando llega al suelo

b) La posición del automóvil respecto al punto "0" en el instante en que el proyectil choca contra el suelo



Solución:

a) De la referencia VII.2, la ecuación del desplazamiento para tiro vertical es:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \ldots (1)$$

para el instante en que llega al piso el proyectil $y = 0$, $y_0 = 15\,m$ y $v_0 = 2\sqrt{g}$; sustituyendo en (1):

$$0 = 15 + 2\sqrt{g}\, t - g\frac{t^2}{2} \qquad ó \qquad t^2 - 1.277t - 3.06 = 0$$

resolviendo:

$$t = 2.5\ s$$

y la velocidad del proyectil al chocar contra el piso está dada por:

$$v = v_0 - gt \qquad \text{en donde} \qquad v_0 = 2\sqrt{g} \qquad y \qquad t = 2.5\,s$$

$$v = 2\sqrt{g} - 9.81(2.5) = -18.26\ m/s \qquad v = 18.26\ m/s \text{ (hacia abajo)}$$

b) La aceleración del coche es:

$$a = t + 3\ [m/s^2] \qquad \ldots (2)$$

y:

$$v = \int a\,dt = \frac{t^2}{2} + 3t + c_1 \qquad \ldots (3)$$

y para:

$$t = 0\,, \quad v_0 = 0 \quad \therefore \quad c_1 = 0$$

por lo que:

$$v = \frac{t^2}{2} + 3t \qquad \ldots (4)$$

y de (4):

$$x = \frac{t^3}{6} + \frac{3}{2}t^2 + c_2 \qquad \ldots (5)$$

y para:

$$t = 0\,, \quad x_0 = -10\ m \quad \therefore \quad c_2 = -10\ m$$

sustituyendo en (5):

$$x = \frac{t^3}{6} + \frac{3}{2}t^2 - 10 \qquad \ldots (6)$$

por tanto, cuanto $t = 2.55$, o sea el tiempo en que tarda el proyectil en chocar contra el piso, el auto ha recorrido:

$$x = \frac{(2.5)^3}{6} + \frac{3}{2}(2.5)^2 - 10 = 1.979\ m \qquad x = 1.979\ m$$

Por lo que el coche se encontrará a la derecha del punto "0" a una distancia de 1.979 m.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Series de Ejercicios de Cinemática, problema 4.16 página 24

Series de Ejercicios de Cinemática, problema 3.16 página 16

Series de Ejercicios de Cinemática, problema 5.6 página 29

Series de Ejercicios de Cinemática, problema 5.17 página 32

RESULTADOS DE ALGUNOS PROBLEMAS PROPUESTOS

INGENIERIA
A N E X O
BIBLIOTECA

TEMA I

Problema 2) $R = 444.05\ N$, $\theta = 75.73°$

Problema 4) $N = 1060.66\ N$, $R = 212.132\ N$

TEMA II

Problema 1) $\vec{M}_{x'x} = -181.28i\ [N\cdot m]$, $\vec{M}_{CD} = 211.27i - 260.36k\ [N\cdot m]$

Problema 3) Es un par: $\vec{m} = 7i + 7j + 8k\ [N\cdot m]$

TEMA III

Problema 1) C.A. (0, 9.26) mm (Problema 5.8 Beer)

Problema 2) C.G. (0.610, - 2.34, 0) pulgadas (Problema 5.98 Beer)

TEMA IV

Problema 1) $P = 6.34\ kg_f$ (Problema 8.18 series de ejercicios de Estática)

TEMA V

Problema 6.54, inciso a) $B_x = 500\ N$; $B_y = 200\ N$

Problema 6.93) $D_x = 1200\ N$; $R_B = 1230\ N$, $12.68°$

Problema 6.29) FH = 16.97 kips (T) ; GI = 18.0 kips (C) ; GH = 12.0 kips (C)

TEMA VI

Problema 3.5) $\theta = 165.6$ revoluciones

Problema 4.3) $\vec{v}_A = 1.347i + 0.898j - 2.694k$

$\vec{a}_A = 1.592i + 1.061j - 3.184k$

TEMA VII

Problema 5.6) $d = 315.357\ m$