GUIA de estudio para presentar examen extraordinario de

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

ALFONSO A. ALVARADO C.
JORGE N. BELLO M.

Facultad de Ing

UN

PROPOSITO DE LA GUIA

Este material tiene por objeto orientar a los estudiantes que desean prepararse para presentar examen extraordinario de la asignatura Electricidad y Magnetismo.

La guía está destinada a los alumnos que ya han cursado la asignatura y que poseen ciertos conocimientos sobre la materia. LA GUIA NO PRETENDE SUSTITUIR A LOS CURSOS REGULARES, sino mejorar la preparación que el estudiante haya adquirido en ellos.

ESTRUCTURA DE LA GUIA

De cada tema del programa vigente de la asignatura se seleccionaron los conceptos fundamentales agrupándolos en bloques.

Cada uno de estos bloques contiene una *lista de conceptos* con sus respectivas referencias para localizarlos en los textos base, que son:

- Alvarado Alfonso y Jaramillo Gabriel
  APUNTES DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO
  Facultad de Ingeniería, UNAM.
  México, 1983.
- McKelvey John y Grotch Howard
  FISICA PARA CIENCIAS E INGENIERIA (TOMO II)
  Editorial Harla
  México, 1981.
- Gartenhaus Solomon
  FISICA TOMO II
  Nueva Editorial Interamericana
  México, 1979.

Estos textos deberán tenerse a la mano al utilizar la guía.

En cada uno de los bloques se presentan, además, algunos *ejemplos* que ilustran la aplicación de los conceptos.

Al término de cada tema se plantea un conjunto de *problemas propuestos*, para que el estudiante los resuelva y adquiera con ello la práctica necesaria en el manejo de los conceptos del tema.

Al final de la guía aparecen los resultados de los problemas propuestos, a fin de que el estudiante pueda compararlos con las respuestas que obtuvo.

INSTRUCCIONES PARA EL USO DE LA GUIA

1. Lea cuidadosamente la lista de conceptos que integran el primer bloque de cada tema y estudie secuencialmente cada uno de ellos en los textos base, poniendo especial cuidado en aquellos conceptos que no haya comprendido o adquirido en su preparación anterior.

2. Analice detenidamente los procedimientos que se siguieron para obtener la solución en los ejemplos, cerciorándose que ha comprendido claramente los razonamientos expuestos; esto puede lograrse reproduciendo el proceso de solución sin recurrir al texto.

3. Estudie los conceptos y los ejemplos del siguiente bloque, con las mismas indicaciones de los dos pasos anteriores.

4. Resuelva los problemas propuestos que se plantean al final de cada tema; en caso de que tenga dificultad, deberá estudiar nuevamente los conceptos del bloque e intentar una vez más resolver dichos problemas.

La guía está diseñada para servir como material de autoinstrucción; no obstante, si el estudiante no logra comprender algún concepto o no consigue resolver un problema, se le sugiere CONSULTAR A LOS ASESORES DE LA ASIGNATURA, quienes podrán orientarle al respecto.

SE REQUIEREN SETENTA Y DOS HORAS DE TRABAJO, aproximadamente, para realizar las actividades que se proponen en esta guía, recomendándose distribuirlas en un periodo de cuatro a ocho semanas. Es de suma importancia que el estudiante programe su trabajo con la debida anticipación y que inicie el estudio de la guía CUANDO MENOS CUATRO SEMANAS ANTES DE LA REALIZACION DEL EXAMEN.

La elaboración de este trabajo estuvo a cargo de los señores profesores:

ING. ALFONSO A. ALVARADO CASTELLANOS

ING. JORGE N. BELLO MENDOZA

quienes contaron con la asesoría pedagógica de la licenciada IRMA HINOJOSA FELIX, de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad.

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
MARZO DE 1984

I CAMPO Y POTENCIAL ELECTRICOS

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

I.1 CARGA ELECTRICA. CONDUCTORES Y DIELECTRICOS. INDUCCION DE CARGA. EXPERIMENTO Y LEY DE COULOMB

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 1 a la 6
Física. Tomo II, McKelvey-Grotch, páginas 592 a la 601

I.2 CAMPO ELECTRICO. PRINCIPIO DE SUPERPOSICION. CAMPO ELECTRICO ORIGINADO POR DIVERSAS DISTRIBUCIONES DE CARGA. ESQUEMAS DE CAMPO ELECTRICO

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 6 a la 17
Física. Tomo II, S. Gartenhaus, páginas 515 a la 526

I.3 FLUJO ELECTRICO. LEY DE GAUSS EN FORMA INTEGRAL Y SUS APLICACIONES

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 17 a la 24
Física. Tomo II, S. Gartenhaus, páginas 526 a la 532

Ejemplo 1

En la figura se muestran, un anillo en forma de circunferencia de ecuaciones $x^2 + y^2 = 16 \text{ cm}^2$; $z = 0$, una línea larga de ecuaciones $z = 6$ cm; $x = 0$ y una esfera con centro en el origen y 2 mm. de radio.

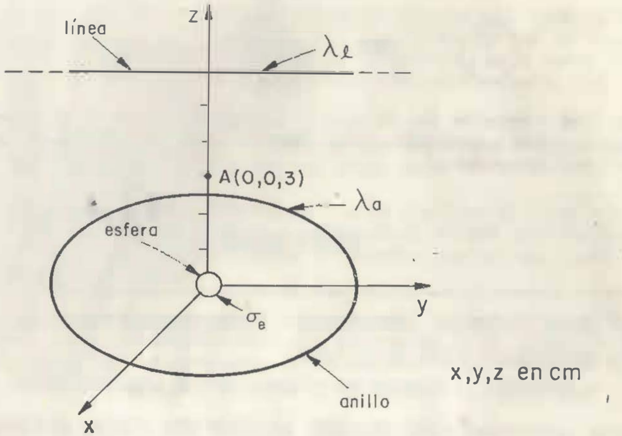
Despreciando el efecto de inducción de carga y con base en el sistema de referencia mostrado, obtener:

a) El vector intensidad de campo eléctrico en el punto A, si $\lambda_a = -7.368 \frac{\mu C}{m}$, $\sigma_e = 0$ y $\lambda_\ell = 0$.

b) El vector intensidad de campo eléctrico en el punto A, si $\sigma_e = 795.77 \frac{\mu C}{m^2}$ y $\lambda_a = \lambda_\ell = 0$.

c) El vector intensidad de campo eléctrico en el punto A, si $\lambda_a = -7.368 \frac{\mu C}{m}$, $\sigma_e = 795.77 \frac{\mu C}{m^2}$ y $\lambda_\ell = 5 \frac{\mu C}{m}$.

d) La fuerza eléctrica que actúa sobre la esfera para las condiciones del inciso anterior.



Solución:

a) La línea larga y la esfera no poseen exceso de carga, por lo tanto, sólo produce campo eléctrico en el punto A el anillo.
El campo eléctrico del anillo puede obtenerse a partir de la expresión:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r^2}\,\hat{r} \quad \text{(ver apuntes páginas 13 y 14)}$$

y el resultado es:

$$E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q_a\,b}{(a^2+b^2)^{3/2}} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

donde:

a = radio del anillo = 4 cm = 0.04 m

Q_a = carga del anillo $= 2\pi a \lambda_a = -1.852\ \mu C = -1.852 \times 10^{-6} C$

$$\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \approx 9 \times 10^9\ \frac{N.m^2}{C^2}$$

b = distancia del centro del anillo al punto A = 3 cm = 0.03 m

sustituyendo se obtiene:

$$E_{Aa} = -4 \times 10^6\ \frac{N}{C} = -4\ \frac{MV}{m}$$

Como su dirección es perpendicular al plano del anillo, entonces:

$$\vec{E}_{Aa} = -4\ \hat{z}\ \frac{MV}{m}$$

b) En este caso sólo produce campo eléctrico en el punto A la esfera. El campo eléctrico generado por una esfera con distribución uniforme de carga, se puede obtener a partir de la Ley de Gauss:

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \frac{Q_N}{\varepsilon_0} \quad \text{(ver apuntes páginas 20 y 21)}$$

y el resultado es:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{Q_e}{r^2}$$

donde:

r_e = radio de la esfera = 2 mm = 2×10^{-3} m

Q_e = carga de la esfera = $4\pi r_e^2\ \sigma_e$ = 40 nC = 40×10^{-9}C

r = distancia del centro de la esfera al punto =
= 3 cm = 0.03 m

al sustituir valores se obtiene:

$$E_{Ae} = 0.4 \times 10^6\ \frac{V}{m}$$

Como su dirección es radial, entonces:

$$\vec{E}_{Ae} = 0.4\ \hat{z}\ \frac{MV}{m}$$

c) Se aplicará el principio de superposición para determinar las contribuciones de cada elemento al campo total.
Como ya se obtuvieron las contribuciones del anillo y la esfera, para las distribuciones de carga deseadas, sólo resta calcular la contribución de la línea.
Para obtener el campo de la línea se utiliza la expresión:

$$E_{A\ell} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{2\lambda_\ell}{r} \quad \text{(ver apuntes páginas 12 ó 23)}$$

donde:

r = distancia de la línea al punto = 3 cm = 0.03 m

sustituyendo se obtiene:

$$E_{A\ell} = 3 \times 10^6\ \frac{V}{m} = 3\ \frac{MV}{m}$$

Como su dirección es radial a la línea:

$$\vec{E}_{A\ell} = -3\ \hat{z}\ \frac{MV}{m}$$

finalmente:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{Aa} + \vec{E}_{Ae} + \vec{E}_{A\ell} = -\ 6.6\ \hat{z}\ \frac{MV}{m}$$

d) De la definición de campo eléctrico:

$$\vec{F}_e = Q_e\ \vec{E}_0$$

donde $\vec{E}_0$ representa el campo eléctrico total en la posición de la esfera, es decir:

$$E_0 = E_{0\ell} + E_{0a}$$

pero:

$$E_{0a} = 0 \qquad y \qquad E_{0\ell} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{2\lambda_\ell}{r_0}$$

donde:

r_0 = distancia de la línea a la esfera = 6 cm = 0.06 m

por lo que:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{2\lambda_\ell\ Q_e}{r_0} = 60\ \text{mN}$$

Vectorialmente:

$$\vec{F}_e = -\ 60\ \hat{z}\ \ \text{mN}$$

SEGUNDO BLOQUE

I.4 POTENCIAL ELECTRICO Y DIFERENCIA DE POTENCIAL ORIGINADOS POR DIVERSAS DISTRIBUCIONES DE CARGA
Referencias: Apuntes de la materia, páginas 33 a la 44
Física. Tomo II, S. Gartenhaus, páginas 547 a la 558 y 564 a la 566
Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 632 a la 645

I.5 GRADIENTE DE POTENCIAL
Referencias: Apuntes de la materia, páginas 45 y 46
Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 645 a la 647

I.6 CAMPO Y POTENCIAL ELECTRICOS EN PRESENCIA DE CONDUCTORES
Referencias: Apuntes de la materia, páginas 49 a la 53
Física. Tomo II, S. Gartenhaus, páginas 532 a la 534 y 559 a la 562

Ejemplo 2

En la figura se muestran, una superficie grande de ecuación y = 0, una línea de longitud infinita de ecuaciones x = 0; y = 6 cm y una pequeña esfera conductora con centro en el punto C(0, 4, 2) cm. Despreciando el efecto de inducción de carga en cada elemento; calcular:

a) La diferencia de potencial V_{AB}, si

$$\lambda_\ell = 68.127\ \frac{nC}{m} \qquad y \qquad \sigma_e = q_e = 0$$

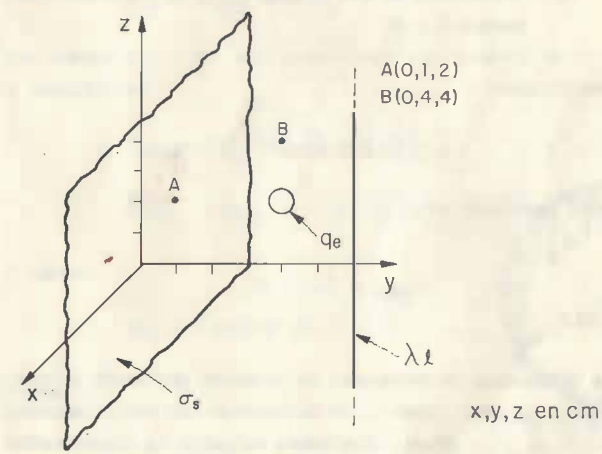
b) La diferencia de potencial V_{BA}, si

$$\sigma_s = -\ 442.5\ \frac{nC}{m^2} \qquad y \qquad \lambda_\ell = q_e = 0$$

c) La diferencia de potencial V_{AB}, si

$$\lambda_\ell = 68.127\ \frac{nC}{m}\ , \qquad \sigma_s = -\ 442.5\ \frac{nC}{m^2} \qquad y \qquad q_e = 400\ nC$$

d) El trabajo necesario para colocar la esfera con su centro en el punto A, considerando los valores del inciso anterior.



Solución:

a) En este caso sólo existe diferencia de potencial entre los puntos A y B debido a la línea. Una forma de obtenerla es evaluando la siguiente integral:

$$V_{AB} = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \qquad [V]$$

y el resultado es:

$$V_{AB\ell} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, 2\lambda_\ell \ln \frac{r_B}{r_A} \qquad \text{(ver apuntes página 42)}$$

(ver apuntes página 42)

donde:

r_B = distancia de la línea al punto B = 2 cm = 0.02 m
r_A = distancia de la línea al punto A = 5 cm = 0.05 m

Al sustituir valores obtenemos que:

$$V_{AB\ell} = -\ 1.1236 \text{ kV}$$

b) La diferencia de potencial entre los puntos A y B es debida únicamente a la superficie y su modelo matemático es:

$$V_{BAs} = \pm \frac{\sigma_s}{2\varepsilon_0}\, d \qquad \text{(ver apuntes página 43)}$$

donde:

d = diferencia de las distancias a la superficie de los puntos A y B.

por lo que:

$$d = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}$$

y el resultado es:

$$V_{BAs} = 0.75 \text{ kV}$$

c) La diferencia de potencial se obtendrá aplicando el principio de superposición. Como ya se obtuvieron las contribuciones de la superficie y la línea, sólo resta calcular la contribución de la esfera.
Para una esfera con una carga q_e distribuida uniformemente se tiene:

$$V_{ABe} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q_e \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \qquad \text{(ver apuntes páginas 38 y 39)}$$

donde:

r_A = distancia del centro de la esfera al punto A = 0.03 m
r_B = distancia del centro de la esfera al punto B = 0.02 m

sustituyendo valores se obtiene:

$$V_{ABe} = -\ 60 \text{ kV}$$

por lo tanto, la diferencia de potencial total entre A y B es:

$$V_{AB} = V_{AB\ell} + V_{ABs} + V_{ABe} = -\ 61.874 \text{ kV}$$

Obsérvese que:

$$V_{ABs} = -\ V_{BAs} = -\ 0.75 \text{ kV}$$

d) Para obtener el trabajo se tomará en cuenta que la esfera se mueve en contra de las fuerzas eléctricas producidas por la superficie y la línea, por lo cual:

$$_C W_A = q_e\, V_{AC}$$

donde:

$$V_{AC} = V_{AC\ell} + V_{ACs}$$

Como los puntos B y C son equipotenciales con respecto a la línea y a la superficie:

$$V_{AC\ell} = V_{AB\ell} = -\ 1.1236 \text{ kV}$$

$$V_{ACs} = V_{ABs} = -\ 0.75 \text{ kV}$$

por lo tanto:

$$V_{AC} = -\ 1.8736 \text{ kV}$$

Finalmente:

$$_C W_A = -\ 0.749 \text{ mJ}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

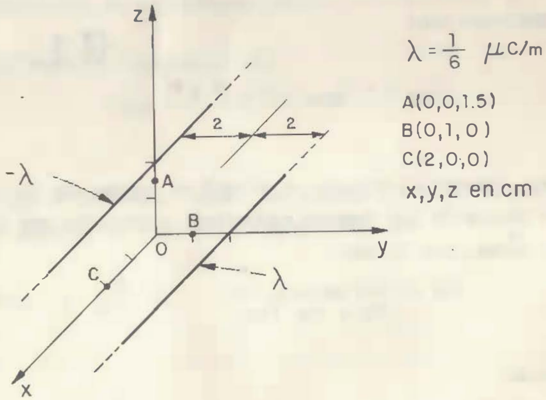
1. Los alambres largos y paralelos mostrados en la figura poseen densidades uniformes iguales en magnitud y signo contrario.
Si la separación entre los alambres es de 4 cm. y el origen del sistema de referencia se localiza a la mitad de la distancia entre los alambres, determinar:

a) El vector intensidad de campo eléctrico en los puntos A y O.

b) La diferencia de potencial V_{AB}

c) La fuerza de atracción por metro de longitud entre los alambres.

d) El trabajo necesario para trasladar 20 electrones del punto A al punto B.



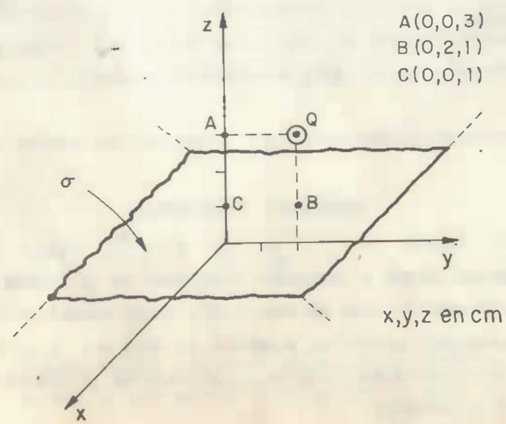
2. Una superficie grande de ecuación z = 0 que posee densidad superficial de carga σ y una esfera con carga Q y centro en el punto P(0, 2, 3) cm, producen en el punto A(0, 0, 3) cm. el campo eléctrico $\vec{E}_A = 300\ \hat{y} + 400\ \hat{z}\ \frac{kN}{C}$ determinar:

a) La magnitud y signo, de la densidad superficial de carga de la placa y de la carga de la esfera.

b) La diferencia de potencial V_{BC}

c) La diferencia de potencial V_{AB}

d) El trabajo necesario para colocar la carga Q en el punto C.



II CAPACITANCIA Y DIELECTRICOS

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

II.1 CONCEPTO DE CAPACITANCIA. CAPACITANCIA DEBIDA A DIFERENTES DISPOSICIONES GEOMETRICAS DE DOS CONDUCTORES. CAPACITORES Y TIPOS DE CAPACITORES

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 56 a la 61
Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 675 a la 679

II.2 DENSIDAD DE ENERGIA ELECTRICA Y ENERGIA ALMACENADA EN UN CAPACITOR

Referencia: Apuntes de la materia, páginas 61 a la 64

II.3 CONEXION DE CAPACITORES EN SERIE Y EN PARALELO

Referencia: Apuntes de la materia, páginas 64 a la 67

Ejemplo 1

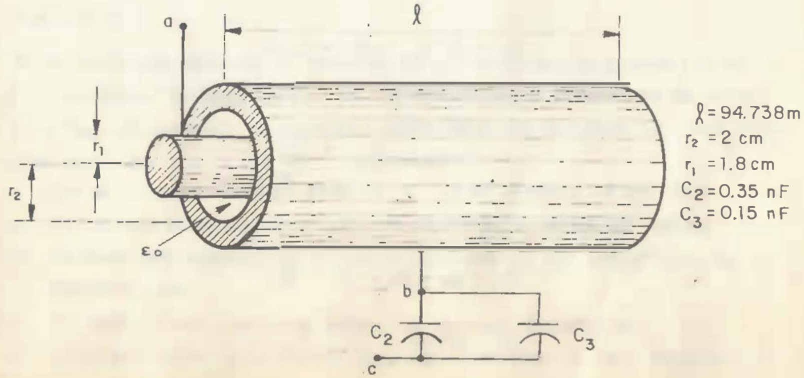
En la figura se muestra la conexión en serie entre los puntos "a" y "c", del capacitor cilíndrico C_1 con el arreglo formado por C_2 y C_3. Considerando que la energía almacenada por C_2 es $U_2 = 1.75\ \mu J$ cuando el arreglo se conecta a una diferencia de potencial V_{ac} positiva, determinar:

a) La capacitancia de C_1

b) La diferencia de potencial V_{cb}

c) La carga de cada capacitor.

d) La diferencia de potencial V_{ac}



Solución:

a) La capacitancia de los cilindros coaxiales se obtiene aplicando la definición, es decir:

$$C_1 = \frac{Q}{V_{21}} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, 2\lambda \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\varepsilon_0\,\ell}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad [F]$$ (ver apuntes página 59)

dado que:

$$\lambda = Q/\ell$$

al sustituir valores se obtiene:

$$C_1 = 0.5 \text{ nF}$$

b) De la expresión de energía almacenada por un capacitor se tiene:

$$U_2 = \frac{1}{2}\, C_2\, V_{cb}^2 \quad [J]$$ (ver apuntes página 63)

por lo tanto:

$$V_{cb} = \pm\sqrt{\frac{2U_2}{C_2}}$$

$$V_{cb} = -\ 100 \text{ V}$$

donde el signo es negativo debido a que $V_{ac} > 0$ y $V_b > V_c$.

c) Como $C_2 = \frac{Q_2}{V_{bc}}$ y además $V_{bc} = -V_{cb} = 100$ V:

$$Q_2 = C_2\, V_{bc} = (0.35)\ (100)$$

$$Q_2 = 35 \text{ nC}$$

De manera semejante:

$$Q_3 = C_3\, V_{bc} = 0.15\ (100)$$

$$Q_3 = 15 \text{ nC}$$

Dado que el arreglo de C_2 y C_3 está en serie con C_1, la carga del capacitor cilíndrico es:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 = 35 + 15$$

$$Q_1 = 50 \text{ nC}$$

d) Del circuito se observa que:

$$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$$

y de la expresión $C_1 = \frac{Q_1}{V_{ab}}$ se obtiene:

$$V_{ab} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{50}{0.5} = 100 \text{ V}$$

por lo tanto:

$$V_{ac} = 100 + 100$$

$$V_{ac} = 200 \text{ V}$$

SEGUNDO BLOQUE

II.4 POLARIZACION DE LA MATERIA. TIPOS DE POLARIZACION. VECTOR POLARIZACION. RIGIDEZ DIELECTRICA
Referencias: Apuntes de la materia, páginas 70 a la 73, 75 y 76
Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 689 a la 693

II.5 CONSTANTES DIELECTRICAS. SUSCEPTIBILIDAD ELECTRICA, PERMITIVIDAD Y PERMITIVIDAD RELATIVA
Referencia: Apuntes de la materia, páginas 73 a la 75

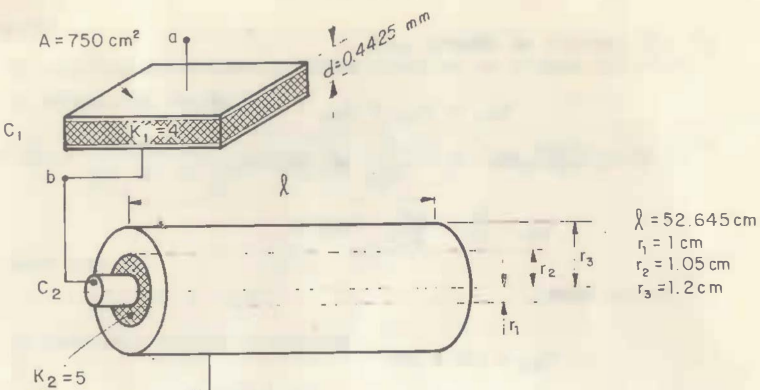
II.6 VECTOR DESPLAZAMIENTO ELECTRICO
Referencia: Apuntes de la materia, páginas 76 a la 81

II.7 EFECTO DE LOS DIELECTRICOS EN LOS CAPACITORES
Referencia: Apuntes de la materia, páginas 81 y 82

Ejemplo 2

En la figura se muestra la conexión de un capacitor de placas planas C_1 y un capacitor cilíndrico C_2. Si al conectar una diferencia de potencial V_{ac} al arreglo, la densidad superficial de carga en la placa superior de C_1 es $\sigma = -\ 2.4\ \frac{\mu C}{m^2}$, determinar:

a) El capacitor equivalente entre los puntos a y c.
b) La densidad superficial de carga inducida en las superficies de los dieléctricos.
c) El vector desplazamiento eléctrico en cada dieléctrico.
d) La permitividad y la susceptibilidad eléctrica de cada material.



Solución:

a) Por ser C_1 un capacitor de placas planas:

$$C_1 = \frac{K_1 \, \varepsilon_0 \, A}{d} = 6 \text{ nF} \qquad \text{(ver apuntes página 82)}$$

y como C_2 es cilíndrico:

$$C_2 = \frac{2\pi \, K_2 \, \varepsilon_0 \, \ell}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 3 \text{ nF}$$

el capacitor equivalente será entonces:

$$C_e = \frac{C_1 \, C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_e = 2 \text{ nF}$$

b) En cada dieléctrico no habrá densidad superficial de carga inducida en las superficies que están colocadas paralelas a la dirección del campo y además:

$$\sigma_i = \varepsilon_0 \, \chi E = \varepsilon_0 (K - 1) E \qquad \text{(ver apuntes página 75)}$$

para el capacitor C_1:

$$E_1 = \frac{\sigma}{K_1 \varepsilon_0} = 67.8 \ \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

y en la superficie superior del dieléctrico:

$$\sigma_{i1} = + \, \varepsilon_0 \, (K_1 - 1) \, E_1$$

$$\sigma_{i1} = + \, 1.8 \ \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

donde el signo es positivo, debido a que está en contacto con la placa negativa.

De manera semejante para la superficie inferior:

$$\sigma_{i1} = - \, 1.8 \ \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

Para las otras cuatro superficies:

$$\sigma_{i1} = 0$$

Para el capacitor C_2:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi \, K_2 \, \varepsilon_0} \ \frac{2\lambda}{r} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right] \qquad \text{(ver apuntes página 24)}$$

donde $\lambda = \frac{Q_2}{\ell}$ y como $Q_2 = Q_1$ por estar en serie:

$\lambda = \frac{Q_1}{\ell}$ y $Q_1 = \sigma \, A_1 = 0.18 \ \mu\text{C}$; entonces $\lambda = 0.3419 \ \frac{\mu\text{C}}{\text{m}}$

Para la superficie interior $r = r_1 = 1$ cm:

$$E_2 = 123.08 \ \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

por lo tanto:

$$\sigma_{i2} = + \, \varepsilon_0 \, (K_2 - 1) \, E_2$$

$$\sigma_{i2} = + \, 4.359 \ \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

Para la superficie exterior $r = r_2 = 1.05$ cm:

$$E_2 = 117.22 \ \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

por lo tanto:

$$\sigma_{i2} = - \, \varepsilon_0 \, (K_2 - 1) E_2$$

$$\sigma_{i2} = - \, 4.15 \ \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

c) La obtención del vector desplazamiento eléctrico se puede realizar por medio de la expresión:

$$\vec{D} = \varepsilon \, \vec{E} = K \, \varepsilon_0 \, \vec{E} \quad \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2}\right] \qquad \text{(ver apuntes página 76)}$$

Para C_1:

$$D_1 = K_1 \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma_1}{K_1 \varepsilon_0} \right)$$

$$D_1 = - 2.4 \ \frac{\mu C}{m^2}$$

perpendicular a las placas y hacia arriba.

Para C_2:

$$D_2 = K_2 \varepsilon_0 \left(\frac{2\lambda}{4\pi K_2 \varepsilon_0 r} \right) = \frac{2\lambda}{4\pi r}$$

$$D_2 = \frac{5.44 \times 10^{-8}}{r}$$

es una función de r, radial y hacia adentro.

d) La permitividad se obtiene con la expresión:

$$\boxed{\varepsilon = K \varepsilon_0 \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \right]}$$ (ver apuntes página 75)

Para el capacitor C_1 :

$$\varepsilon_1 = 35.4 \times 10^{-12} \ \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Para el capacitor C_2 :

$$\varepsilon_2 = 44.2 \times 10^{-12} \ \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

La susceptibilidad se obtiene con la expresión:

$$\chi = K - 1$$

Para el capacitor C_1 :

$$\chi_1 = 3$$

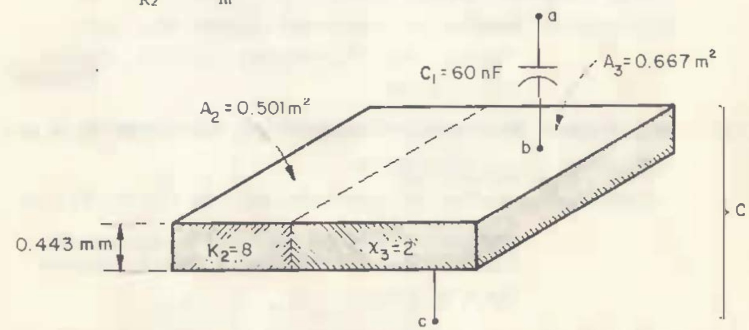
Para el capacitor C_2 :

$$\chi_2 = 4$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

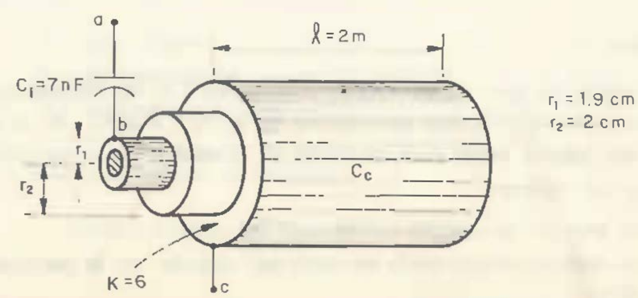
1. Se tienen dos capacitores C_1 y C_e conectados en serie a una diferencia de potencial V_{ac} = 120 V. El capacitor C_e está formado por un par de placas y dos dieléctricos como se muestra en la figura. Determinar:

   a) La capacitancia de C_e
   b) La carga almacenada por C_e , si C_e = 120 nF.
   c) La densidad superficial de carga inducida en las superficies superiores de los dieléctricos de C_e
   d) El campo eléctrico en cada dieléctrico.
   e) El voltaje máximo que se puede aplicar a C_e , si $E_{R1} = 3 \ \frac{MV}{m}$ y $E_{R2} = 5 \ \frac{MV}{m}$



2. La figura muestra un capacitor cilíndrico C_c conectado en serie con C_1 a una diferencia de potencial V_{ac} . Si la diferencia de potencial V_{ab} es 14 V, determinar:

   a) La capacitancia del capacitor cilíndrico C_c
   b) La diferencia de potencial V_{ac} , si C_c = 7 nF.
   c) El campo eléctrico en la superficie cilíndrica de radio r_1 , si V_{bc} = 20 V.
   d) La densidad superficial de carga inducida máxima si V_{bc} = 20 V.
   e) La energía almacenada por C_c



(III) CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA

Este tema comprende tres bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

III.1 VELOCIDAD MEDIA DE LAS PARTICULAS CARGADAS EN CONDUCTORES METALICOS. DENSIDAD DE CORRIENTE. CORRIENTE ELECTRICA. PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA CARGA

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 89 a la 92
Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 711 a la 718

III.2 LEY DE OHM. RESISTIVIDAD. RESISTENCIA. VARIACION DE LA RESISTIVIDAD CON LA TEMPERATURA

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 93, 94, 97 y 98 a la 100
Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 724 a la 735

III.3 LEY DE JOULE

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 100 y 101
Física. Tomo II, S. Gartenhaus, páginas 615 y 616

III.4 RESISTORES. CONEXIÓN DE RESISTORES EN SERIE Y EN PARALELO

Referencia: Apuntes de la materia, páginas 102 a la 107

III.5 FUENTES DE FUERZA ELECTROMOTRIZ Y SU RESISTENCIA INTERNA

Referencias: Apuntes de la materia, páginas 108 a la 110
Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 735 a la 739

Ejemplo 1

Una fuente de 120 V y resistencia interna de 2 Ω, se utiliza para alimentar una parrilla cuya resistencia es de 10 Ω a 20°C. Si la longitud del alambre usado para construir el filamento de la parrilla es ℓ = 16 m, obtener:

a) El área de la sección transversal del alambre a 20°C.

b) La energía transformada en calor por segundo en la parrilla a 20°C.

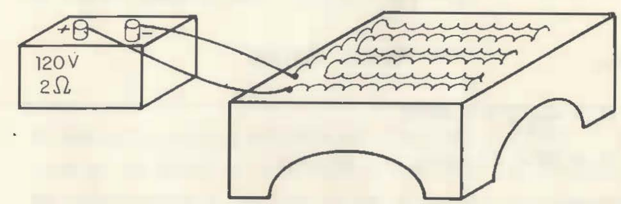
c) La resistencia de la parrilla a 80°C.

d) La temperatura de la resistencia de la parrilla, a la cual la potencia en la resistencia interna de la fuente es 110.6 W.

Características del alambre

$\rho_{20°C} = 2 \times 10^{-6}\ \Omega\cdot m$

$\alpha_{20°C} = 0.008\ °C^{-1}$



Solución:

a) La expresión que determina la resistencia de un alambre es:

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \qquad \text{(ver apuntes página 94)}$$

Al despejar y sustituir valores se obtiene:

$$A = \rho \frac{\ell}{R} = 2 \times 10^{-6} \left(\frac{16}{10}\right)$$

$$A = 3.2\ mm^2$$

b) La energía transformada en calor por segundo en la parrilla es la potencia en la resistencia de la misma, por lo que:

$$P = R I^2 \qquad \text{(ver apuntes página 101)}$$

pero:

$$I = \frac{E}{R + r}$$

donde:

E = fem = 120 V
R = resistencia de la parrilla = 10 Ω
r = resistencia interna = 2 Ω

Al sustituir valores se obtiene:

$$I = \frac{120}{10 + 2} = 10\ A$$

Como:

$$P = RI^2 = 10(10)^2$$

$$P = 1000 \text{ W}$$

c) Un procedimiento posible es calcular primero α_0:

$$\alpha_0 = \frac{1}{1/\alpha_1 - T_1} \quad \text{(ver apuntes página 98)}$$

donde:

$$\alpha_1 = \alpha_{20°C} = 0.008°C^{-1}$$

$$T_1 = 20°C$$

por lo que:

$$\alpha_0 = 0.0095$$

La resistencia a 80°C se obtiene como:

$$R_{80} = R_{20}\,\frac{1 + \alpha_0\, T_{80}}{1 + \alpha_C\, T_{20}} \quad \text{(ver apuntes página 98)}$$

$$R_{80} = 14.8\ \Omega$$

un procedimiento alternativo es:

$$R_{80} = R_{20}\ (1 + \alpha_{20}\Delta T) = 14.8\ \Omega$$

donde ΔT es la diferencia de temperaturas.

d) Si la potencia en $r = 2\ \Omega$ es de 110.6 w y $P = r\,I^2$ entonces:

$$I = \sqrt{\frac{P}{r}} = \sqrt{\frac{110.6}{2}} = 7.436 \text{ A}$$

además:

$$I = \frac{E}{r + R_x}$$

de donde:

$$R_x = \frac{E}{I} - r = 14.137\ \Omega$$

y:

$$R_x = R_{20}\left[1 + \alpha_{20}\ (T_x - 20)\right]$$

al sustituir valores y despejar T_x se obtiene:

$$T_x = \frac{R_x - R_{20}}{R_{20}\ \alpha_{20}} + 20$$

$$T_x = 71.7°C$$

SEGUNDO BLOQUE

III.8 NOMENCLATURA BASICA EMPLEADA EN CIRCUITOS ELECTRICOS. OBTENCION DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF A PARTIR DE LOS PRINCIPIOS DE CONSERVACION DE LA CARGA Y DE LA ENERGIA Y SU APLICACION EN CIRCUITOS RESISTIVOS

Referencia: Apuntes de la materia, páginas 115 a la 123

Ejemplo 2

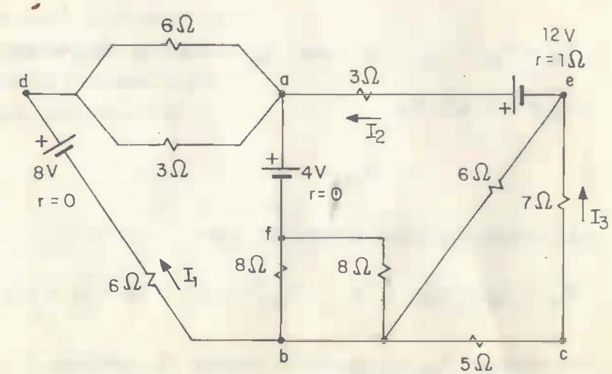
Para el circuito eléctrico de la figura, determinar:

a) Las corrientes I_1 e I_2

b) La diferencia de potencial V_{ab}

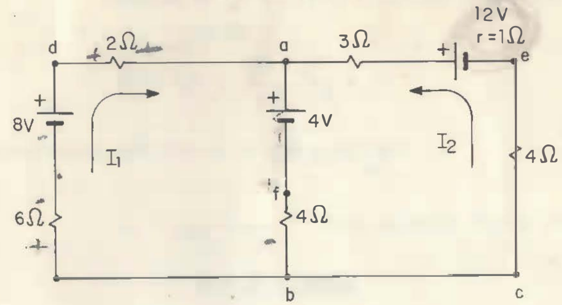
c) La diferencia de potencial V_{ac}

d) La energía suministrada al circuito en dos minutos, por la fuente de 12 V.



Solución:

a) Con objeto de reducir el número de ecuaciones, se simplifica primero el circuito a un equivalente más sencillo.



Aplicando el método de mallas, $\Sigma V = 0$, se obtiene:

$$-2I_1 + 4 + 4(I_1 + I_2) + 6I_1 - 8 = 0$$

$$3I_2 + 4 + 4(I_1 + I_2) + 4I_2 + I_2 - 12 = 0$$

simplificando:

$$12I_1 + 4I_2 = 4$$

$$4I_1 + 12I_2 = 8$$

de donde:

$$I_1 = 0.125 \text{ A} \qquad ; \qquad I_2 = 0.625 \text{ A}$$

b) Para obtener V_{ab} el camino más simple es a través de la rama central, por lo que:

$$V_{ab} = V_{af} + V_{fb} \quad \text{y como} \quad V_{af} = 4 \text{ V} \quad \text{y} \quad V_{fb} = 4(I_1 + I_2)$$

$$V_{ab} = 4 + 4(0.75)$$

$$V_{ab} = 7 \text{ V}$$

c) Del circuito original se observa que:

$$V_{ac} = V_{ae} + V_{ec} \qquad \text{y} \qquad V_{ae} = -3I_2 + 12 - I_2 = 9.5 \text{ V}$$

Para obtener V_{ec} es necesario conocer la corriente I_3 y ésta se conoce con la diferencia de potencial V_{eb}:

$$V_{eb} = 4I_2 = 2.5 \text{ V} \quad \text{e} \quad I_3 = \frac{V_{eb}}{7 + 5} = 0.2083 \text{ A}$$

por lo que:

$$V_{ec} = -7I_3 = -1.4583 \text{ V}$$

y:

$$V_{ac} = 8.042 \text{ V}$$

d) La energía suministrada por la fuente cada segundo es:

$$P_S = 12I_2 - rI_2^2 = 7.11 \text{ W} = 7.11 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

y en t = 2 minutos = 120 segundos será:

$$U_S = P_S t = 853.2 \text{ J}$$

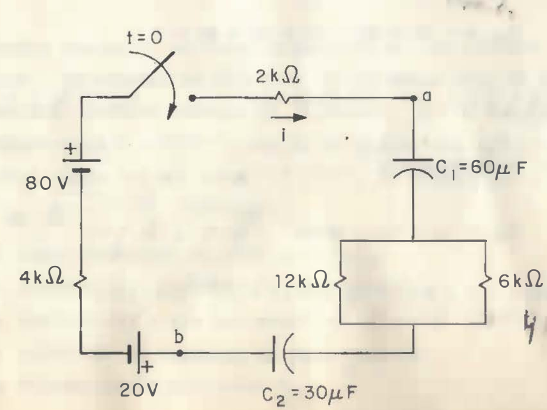
TERCER BLOQUE

III.9	CIRCUITO RC SERIE CON FUENTE DE VOLTAJE CONTINUO
	Referencias: Apuntes de la materia, páginas 131 a la 138. Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 753 a la 758

Ejemplo 3

Para el circuito mostrado en la figura y considerando que el interruptor se cerró en t = 0 s y que han transcurrido 100 ms, calcular:

a) La corriente i en el circuito
b) La diferencia de potencial V_{ab}
c) La energía almacenada por C_1
d) La carga del capacitor C_2

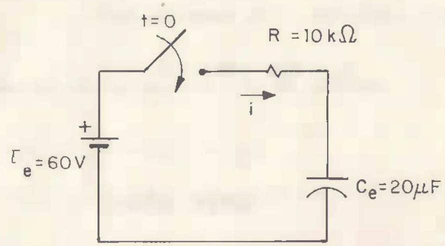


Solución:

a) La ecuación que determina la corriente en un circuito RC serie es:

$$i(t) = \frac{E}{R}\, e^{-t/RC} \quad [A] \quad \text{(ver apuntes página 132)}$$

Dado que la ecuación anterior, sólo es válida para un circuito de una fuente, un resistor y un capacitor, reduciremos primero el circuito a su equivalnte, el resultado es:



por lo que:

$$i = \frac{60}{10 \times 10^3}\; e^{-t/0.2} = 6\, e^{-5t} \text{ mA}$$

si t = 0.1 s :

$$i = 6\, e^{-0.5}$$

V=RI

$$i = 3.64 \text{ mA}$$

b) La diferencia de potencial V_{ab} se puede calcular a través de las fuentes o de los capacitores; en el primer caso se tiene:

$$V_{ab} = -\,2i + 80 - 4i - 20 = 60 - 6\,i$$

para $t = 0.1\,s \implies i = 3.64$ mA y $V_{ab} = 38.2$ V

Por el segundo caso:

$$V_{ab} = v_C + v_R \quad \text{pero} \quad v_C = E_e\,(1 - e^{-t/RC})$$

y para t = 0.1 s ; $v_C = 60\,(1 - e^{-0.5}) = 23.6$ V

$$v_R = 4\,i = 14.56 \text{ V}$$

por lo que:

$$V_{ab} = 38.2 \text{ V}$$

c) Para obtener la energía almacenada por C_1 es necesario obtener primero la carga o la diferencia de potencial en ese capacitor. Como C_1 y C_2 están conectados en serie, la carga de cada uno de ellos es igual a la del capacitor equivalente, por lo tanto:

$$Q_1 = Q_e = E_e\, C_e \left(1 - e^{-5t}\right)$$

para t = 0.1 s:

$$Q_1 = 60\ (20 \times 10^{-6})\ (1 - e^{-0.5}) = 472.16\ \mu C$$

y la energía es:

$$U_1 = \frac{1}{2}\,\frac{Q_1^2}{C_1} \quad [J] \quad \text{(ver apuntes página 62)}$$

$$U_1 = 5.558 \text{ mJ}$$

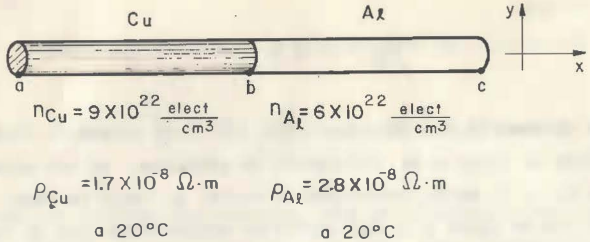
d) La carga del capacitor C_2, fue obtenida en el inciso anterior, ya que:

$$Q_1 = Q_2 = Q_e$$

$$Q_2 = 472.16\ \ \mu C$$

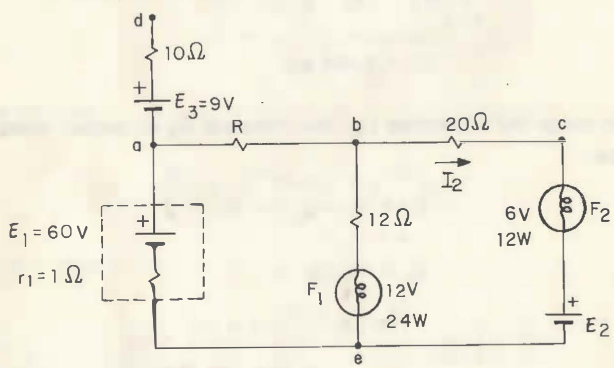
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un alambre conductor se forma uniendo 40 m. de alambre de cobre con 34 m. de alambre de aluminio, de la misma área de sección transversal, como se muestra en la figura. Si la temperatura de los alambres es T = 20°C y cuando se aplica una diferencia de potencial entre los extremos "a" y "c", la diferencia de potencial V_{ab} es - 20 V, calcular:
   a) El campo eléctrico en cada material.
   b) La densidad de corriente en cada material.
   c) La resistencia entre los extremos "a" y "c" a 20°C.
   d) La velocidad de arrastre en cada material.
   e) La diferencia de potencial V_{ac}



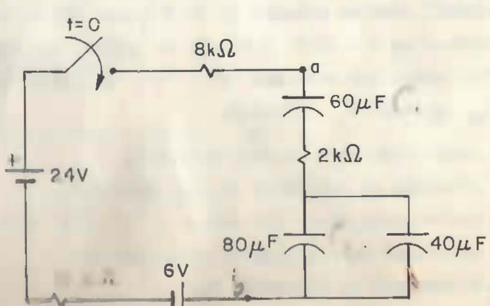
2. Considerando que los focos del circuito de la figura, funcionan al voltaje y potencial indicados, determinar:

   a) Los valores de I_1 e I_2
   b) La diferencia de potencial V_{be}
   c) Los valores de R y ε_2
   d) La diferencia de potencial V_{de}
   e) La potencia total suministrada al circuito.



3. Considerando que han transcurrido 0.5 segundos después de cerrar el interruptor del circuito de la figura, obtener:

   a) La corriente a través de la fuente de 24 V.
   b) La carga total almacenada.
   c) La diferencia de potencial V_{ab}
   d) La energía almacenada en el capacitor de 80 μF.



IV CAMPO MAGNETICO

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

IV.1 EXPERIMENTO DE OERSTED
Referencia: Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 767 y 768

IV.2 FUERZA MAGNETICA ENTRE CARGAS EN MOVIMIENTO. EXPRESION DE LORENTZ
Referencia: Apuntes de la materia, páginas 140 a la 142

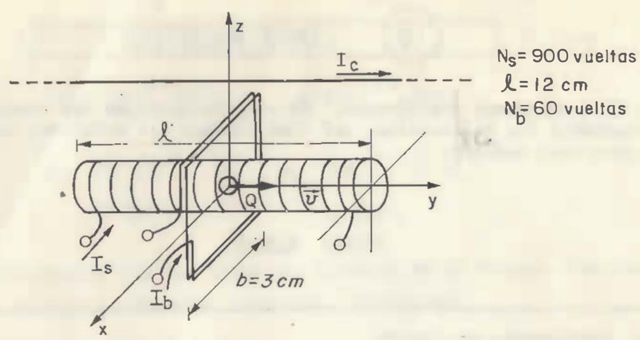
IV.3 EFECTO MAGNETICO PRODUCIDO POR UNA CARGA EN MOVIMIENTO. DEFINICION DE CAMPO MAGNETICO
Referencia: Apuntes de la materia, páginas 142 a la 145

IV.4 LEY DE BIOT - SAVART Y SUS APLICACIONES. PRINCIPIO DE SUPERPOSICION APLICADO AL CAMPO MAGNETICO
Referencias: Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 786 a la 794
Apuntes de la materia, páginas 146 a la 159

Ejemplo 1

Se tiene un solenoide de enrollado uniforme, cuyo eje coincide con el eje "y", una bobina cuadrada contenida en el plano xz, con centro en el origen y un conductor recto largo paralelo al eje "y" y de ecuaciones $x = 0$; $z = 2$ cm, como se muestra en la figura, determinar:

a) El vector campo magnético $\vec{B}$ en el origen, si
   $I_c = I_s = 0$, $I_b = 0.2$ A
b) El vector campo magnético $\vec{B}$ en el origen, si
   $I_c = 100$ A , $I_b = 0.2$ A , $I_s = 0$
c) El vector campo magnético $\vec{B}$ en el origen, si
   $I_c = 100$ A , $I_b = 0.2$ A , $I_s = 0.1$ A
d) La fuerza sobre una carga $Q = -1$ nC que se mueve con una velocidad $\vec{v} = 100\ \hat{y}\ \frac{m}{s}$ y se encuentra en la posición mostrada en la figura. Usar las condiciones del inciso "c".



Solución:

a) Como las corrientes en el solenoide y en el conductor son cero, sólo se produce campo magnético debido a la bobina cuadrada y su magnitud se obtiene como:

$$B_{ob} = \frac{\mu_o \; N_b \; I_b}{\pi a} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right) \; [T] \qquad \text{(ver apuntes página 151)}$$

donde $a = b/2 = 1.5$ cm. —→ $\frac{1}{2}$ r

Al sustituir valores resulta:

$$B_{ob} = 452.5 \quad \mu T$$

El vector es perpendicular al plano de la bobina y su sentido puede ser obtenido con la regla de la mano derecha, el resultado es:

$$\vec{B}_{ob} = 452.5 \;\; \hat{y} \;\; \mu T$$

b) En este caso existen dos contribuciones al campo magnético en el origen, por lo cual es necesario aplicar el principio de superposición; es decir:

$$\vec{B}_o = \vec{B}_{ob} + \vec{B}_{oc}$$

El campo magnético en el origen debido a la bobina se obtuvo en el inciso anterior y el campo producido por el conductor recto es en magnitud:

$$B_{oc} = \frac{\mu_o \; I_c}{2\pi r} \quad [T] \qquad \text{(ver apuntes página 148)}$$

donde r es la distancia del eje conductor al punto, en este caso r = 2 cm; al sustituir valores se obtiene:

$$B_{oc} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}) \;\; (100)}{2\pi (0.02)} = 1 \text{ mT}$$

Su dirección la determinaremos con el producto vectorial $\hat{B} = \hat{\ell} \times \hat{r}$, donde todos son vectores unitarios; de la figura:

$\hat{\ell} = \hat{y}$ es decir, la dirección de la corriente.

$\hat{r} = - \hat{z}$ vector unitario dirigido del conductor al punto.

por lo que:

$$\hat{B}_{oc} = - \hat{x}$$

entonces:

$$\vec{B}_{oc} = - \hat{x} \;\; \text{mT}$$

y el campo magnético total es:

$$\vec{B}_o = \vec{B}_{ob} + \vec{B}_{oc} = - \hat{x} + 0.453 \; \hat{y} \quad \text{mT}$$

c) En este caso cada elemento contribuye al campo magnético en el origen, por lo que:

$$\vec{B}_o = \vec{B}_{ob} + \vec{B}_{oc} + \vec{B}_{os}$$

Para determinar la magnitud del campo producido por el solenoide se aplica:

$$B_{os} = \frac{\mu_o \; N_s \; I_s}{\ell} \quad [T] \qquad \text{(ver apuntes página 158)}$$

Al sustituir valores:

$$B_{os} = 942.5 \quad \mu T$$

Su dirección se obtiene con la regla de la mano derecha, el resultado es:

$$\vec{B}_{os} = - 0.942 \; \hat{y} \quad \text{mT}$$

Finalmente el campo magnético total en el origen es:

$$\vec{B}_o = - \hat{x} - 0.489 \; \hat{y} \quad \text{mT}$$

d) La fuerza se obtiene con la expresión:

$$\vec{F} = q \; \vec{v} \times \vec{B} \quad [N] \qquad \text{(ver apuntes página 141)}$$

la cual puede ser aplicada directamente, debido a que se conocen los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ y el valor de la carga:

$$\vec{F} = (-1 \times 10^{-9}) \; (100 \; \hat{y}) \times \left[(- \hat{x} - 0.489 \; \hat{y}) \times 10^{-3} \right]$$

el resultado es:

$$\vec{F} = (- 100 \; \hat{z}) \times 10^{-12} \text{ N} = - 100 \; \hat{z} \;\; \text{pN}$$

SEGUNDO BLOQUE

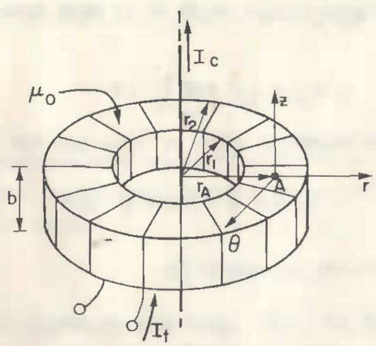
IV.5	ESQUEMAS DE CAMPO MAGNETICO. FLUJO DEL CAMPO MAGNETICO. LEY DE GAUSS PARA EL MAGNETISMO EN FORMA INTEGRAL Referencia: Apuntes de la materia, páginas 161 a la 163 y 167 a la 170
IV.6	LEY DE AMPERE Y SUS APLICACIONES Referencias: Apuntes de la materia, páginas 159 a la 161 y 164 a la 167 Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 794 a la 806
IV.7	FUERZA MAGNETICA SOBRE CONDUCTORES. PAR MAGNETICO Referencia: Apuntes de la materia, páginas 171 a la 181

Ejemplo 2

Se tiene un arreglo de conductor recto largo y toroide de enrollado uniforme, en el cual el eje de simetría del toroide coincide con el conductor recto, con base en los valores indicados en la figura, determinar:

a) El vector campo magnético $\vec{B}$ en el punto A dentro del toroide cuando $I_t = 0.1$ A, $I_c = 10$ A.

b) El flujo magnético a través de cada vuelta del toroide, si $I_t = 0$, $I_c = 10$ A.



Solución:

a) El vector campo magnético total en A, se obtiene mediante la superposición de los campos producidos por el toroide y el conductor recto.

$$\vec{B}_A = \vec{B}_{At} + \vec{B}_{Ac}$$

La magnitud del campo que produce el toroide es:

$$B_{At} = \frac{\mu_0 N_t I_t}{2\pi r_A} \quad [T] \quad \text{(ver apuntes página 167)}$$

al sustituir valores:

$$B_{At} = 114.3 \ \mu T$$

su dirección puede obtenerse con la regla de la mano derecha y al referirla al sistema mostrado en la figura resulta:

$$\vec{B}_{At} = +\ 114.3 \ \hat{\theta} \ \mu T$$

Para el conductor recto:

$$B_{Ac} = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r_A} = 28.6 \ \mu T$$

el resultado vectorial es:

$$\vec{B}_{Ac} = -\ 28.6 \ \hat{\theta} \ \mu T$$

y el campo total resulta:

$$\vec{B}_A = 85.7 \ \hat{\theta} \ \mu T$$

b) La expresión general de flujo magnético es:

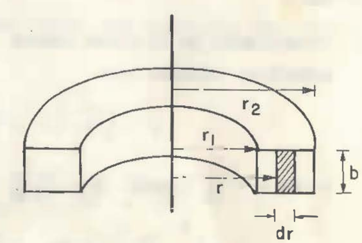
$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint B \, dA \cos \alpha \quad [Wb] \quad \text{(ver apuntes página 167)}$$

y el flujo a través de cada vuelta es el mismo por estar a la misma distancia y orientación con respecto al conductor. También el ángulo α que forma el vector campo en cada punto con el vector área es cero, por lo que:

$$\phi = \int B \, dA$$

como el campo no es constante se debe integrar, para ello se selecciona el diferencial de área siguiente:

$$dA = b\,dr$$



y al sustituir la expresión del campo y del diferencial de área:

$$\phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r} \, b\,dr$$

al integrar resulta:

$$\phi = \frac{\mu_o\, I_c\, b}{2\pi}\ \ln\ \frac{r_2}{r_1}$$

sustituyendo valores:

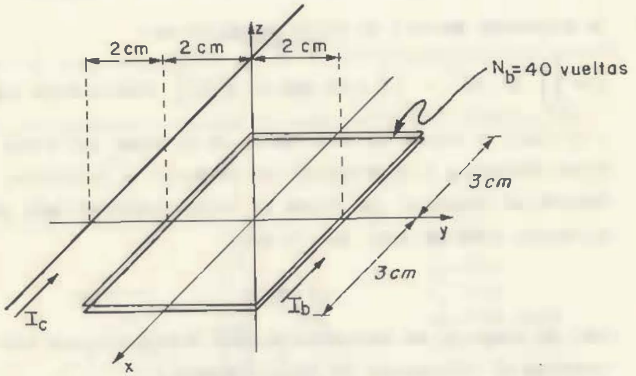
$$\phi = 5.75\ \text{nWb}$$

Ejemplo 3

El conductor recto largo y la bobina rectangular están contenidos en el plano $z = 0$. Si las dimensiones son las indicadas en la figura, determinar:

a) El flujo magnético a través de la bobina cuando $I_c = 40$ A, $I_b = 0$.

b) La fuerza magnética entre bobina y conductor cuando $I_c = 40$ A, $I_b = 500$ mA.



Solución:

a) Procediendo de la misma manera que en el inciso (b) del ejemplo anterior, tenemos que:

$$\phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int B\,dA\ \cos\alpha$$

y $\cos\alpha = 1$, además $B = \dfrac{\mu_o\, I_c}{2\pi\, r}$; $dA = b\,dr$, por lo que:

$$\phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_o\, I_c}{2\pi\, r}\, b\,dr = \frac{\mu_o\, I_c\, b}{2\pi}\ \ln\ \frac{r_2}{r_1}$$

al sustituir valores resulta:

$$\phi = \frac{(4\pi \times 10^{-7})\,(40)\,(0.06)}{2\pi}\ \ln\frac{6}{2} = 0.527\ \mu\text{Wb}$$

b) Para determinar la fuerza total entre bobina y conductor se utiliza la expresión:

$$\vec{F} = I\ \vec{\ell} \times \vec{B} \qquad \text{(ver apuntes página 172)}$$

y el principio de superposición.

Las fuerzas sobre los lados perpendiculares al conductor se cancelan entre sí, debido a que son colineales y de sentido contrario.

La fuerza sobre cada conductor del lado más cercano es:

$$\vec{F}_1 = I_b\ \vec{\ell}_1 \times \vec{B}_1$$

donde $\vec{B}_1$ es el campo creado por el conductor en la zona donde se localiza el lado más cercano, es decir a $r_1 = 2$ cm del conductor:

$$B_1 = \frac{\mu_o\ I_c}{2\pi\ r_1} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})\,(40)}{2\pi\ (0.02)} = 400\ \mu T$$

su dirección es $-\hat{z}$, por lo que:

$$\vec{B}_1 = -\ 400\ \hat{z}\ \mu T$$

la magnitud de ℓ_1 es 6 cm y su dirección es la dirección de la corriente, entonces:

$$\vec{\ell}_1 = 0.06\ \hat{x}\ \ m$$

y la fuerza $\vec{F}_1$ es:

$$\vec{F}_1 = (0.5)\,(0.06\ \hat{x}) \times (-400\ \hat{z}) \times 10^{-6}$$

$$\vec{F}_1 = 12\ \hat{y}\ \ \mu N$$

la fuerza es de rechazo.

De manera semejante, la fuerza sobre cada conductor del lado paralelo más alejado es:

$$\vec{F}_2 = I_b\ \vec{\ell}_2 \times \vec{B}_2$$

donde:

$$B_2 = \frac{\mu_o\ I_c}{2\pi\ r_2} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})\,(40)}{2\pi\ (0.06)} = 133.33\ \mu T$$

su dirección es $-\hat{z}$, es decir:

$$\vec{B}_2 = -\ 133.33\ \hat{z}\ \ \mu T$$

$\ell_2 = 6$ cm con la dirección de la corriente:

$$\vec{\ell}_2 = -\ 0.06\ \hat{x}\ m$$

entonces:

$$\vec{F}_2 = (0.5)(-0.06\ \hat{x}) \times (-133.33\ \hat{z}) \times 10^{-6} \quad N$$

$$\vec{F}_2 = -4\ \hat{y} \quad \mu N$$

La fuerza es de atracción, por lo que la fuerza neta que actúa sobre cada espira es:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 8\ \hat{y} \quad \mu N$$

como la bobina está formada por N_b espiras la fuerza total se obtiene:

$$\vec{F}_T = N_b \vec{F} = 320\ \hat{y} \quad \mu N$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

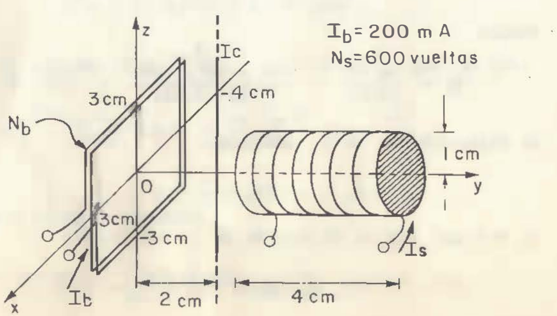
1. El eje del solenoide corto mostrado en la figura coincide con el eje "y" y también con el eje de la bobina cuadrada, paralelo al eje "z" se localiza un conductor recto largo, el cual pasa por el punto (-4, 0 , 0), determinar:

   a) El número de vueltas en la bobina para que el campo que ésta produce en el origen sea $\vec{B}_{ob} = 0.4\ \hat{y}$ mT.

   b) La corriente i_s en el solenoide para que el campo magnético que éste produce en el origen sea $\vec{B}_{os} = 0.4\ \hat{y}$ mT.

   c) La magnitud y sentido de la corriente en el conductor recto para que el campo magnético que éste produce en el origen sea $\vec{B}_{oc} = 0.2\ \hat{y}$ mT.

   d) La fuerza magnética que actúa sobre una carga Q = 2 μC que al pasar por el origen posee una velocidad $\vec{v} = 400\ \hat{z}\ \frac{m}{s}$ y cada elemento contribuye con el campo mencionado en cada inciso anterior



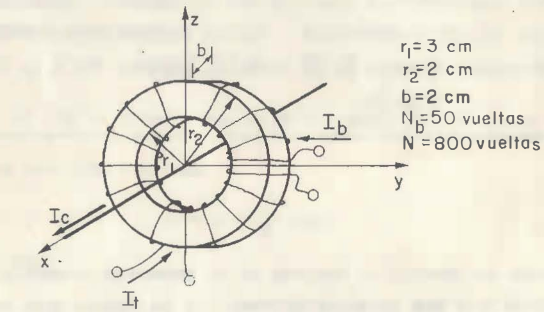
2. En la figura se muestra un toroide de enrollado uniforme cuyo eje coincide con la posición de un conductor recto largo. Sobre el toroide se devana una bobina, la cual posee esencialmente la misma área de sección transversal que el toroide, determinar:

   a) El vector campo magnético $\vec{B}$ en el centro de la bobina (punto C), si $I_c = I_t = 0$, $I_b = 0.2$ A.

   b) El vector campo magnético $\vec{B}$ en el centro de la bobina, si $I_t = 0$, $I_c = 100$ A, $I_b = 0.2$ A.

   c) El vector campo magnético $\vec{B}$ en el centro de la bobina, cuando $I_t = 0.1$ A, $I_c = 100$ A, $I_b = 0.2$ A.

   d) El flujo magnético a través de la bobina, cuando $I_t = 0.1$ A, $I_c = 100$ A, $I_b = 0$.

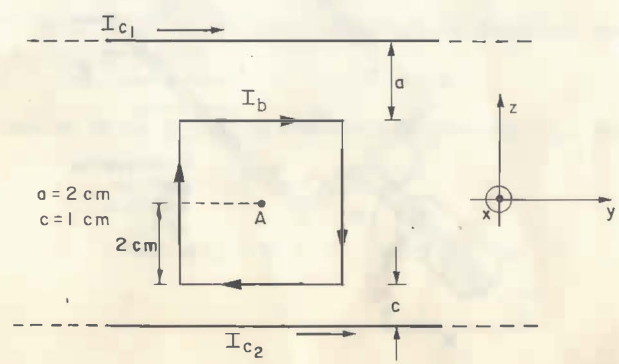


3. Una bobina cuadrada de 4 cm de lado y 20 vueltas, se encuentra en el plano formado por dos conductores rectos, largos y paralelos, como se indica en la figura. Determinar:

   a) El campo magnético en el centro de la bobina (punto A) cuando $I_b = 0.1$ A, $I_{c1} = 20$ A, $I_{c2} = 40$ A.

   b) El flujo magnético a través de cada vuelta de la bobina, cuando $I_{c1} = 20$ A, $I_{c2} = 40$ A, $I_b = 0$.

   c) La fuerza que actúa sobre la bobina si $I_b = 0.1$ A, $I_{c2} = 40$ A, $I_{c1} = 0$.



(V) INDUCCION ELECTROMAGNETICA

Este tema comprende tres bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

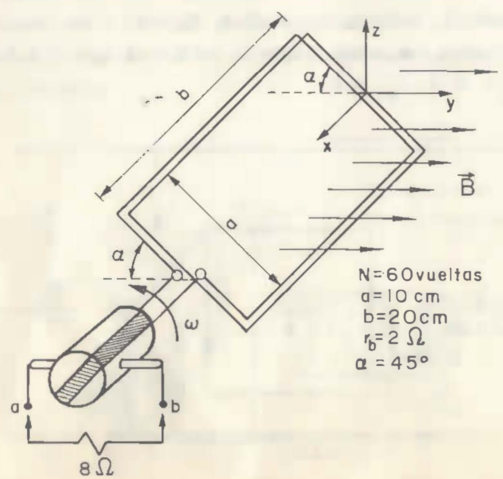
PRIMER BLOQUE

V.1	EXPERIMENTO Y LEY DE FARADAY. PRINCIPIO DE LENZ Referencia: Apuntes de la materia, páginas 182 a la 185
V.2	FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA POR MOVIMIENTO. PRINCIPIO DE OPERACION DEL MOTOR-GENERADOR. FUERZA CONTRAELECTROMOTRIZ Referencia: Apuntes de la materia, páginas 186 a la 190 y 198 a la 202

Ejemplo 1

En la figura se muestra un esquema de un generador elemental de corriente directa y sus características. Si la bobina gira con una velocidad angular constante $\omega = 400 \ \frac{rad}{s}$ en una zona de campo magnético uniforme $\vec{B} = 0.2\ \hat{y}$ T, determinar para la posición mostrada:

a) El flujo magnético a través de la bobina.
b) La fuerza electromotriz inducida en la bobina.
c) La corriente i que circula por el resistor de 8 Ω.
d) La diferencia de potencial V_{ab}



Solución:

a) De la expresión general de flujo se tiene:

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad \text{(ver apuntes página 167)}$$

Como B = cte en toda el área:

$$\phi = B A \cos \theta = (0.2)(0.2 \times 0.1) \cos 45°$$

$$\phi = 2.83 \text{ mWb}$$

b) De la Ley de Faraday:

$$\mathcal{E}_{ind} = N \frac{d\phi}{dt} \quad \text{y} \quad \phi = B A \cos \omega t \qquad \text{(ver apuntes página 185)}$$

entonces:

$$\mathcal{E}_{ind} = N B A \ \omega \text{ sen } \omega t$$

donde ωt es el ángulo que forma el campo con el vector área.

Para la posición mostrada:

$$\omega t = \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

por lo que:

$$\mathcal{E}_{ind} = 60(0.2)(0.2 \times 0.1)\ 400 \text{ sen } \frac{\pi}{4}$$

$$\mathcal{E}_{ind} = 67.88 \text{ V}$$

c) Aplicando la ley de Ohm, se obtiene la corriente en estado estable.

$$i = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R + r_b} = \frac{67.88}{8 + 2}$$

$$i = 6.79 \text{ A}$$

de "a" hacia "b" en el resistor y su sentido se determinó con el principio de Lenz.

d) Con base en la ley de Ohm, la diferencia de potencial V_{ab} es:

$$V_{ab} = R\, i = + 8\ (6.79)$$

$$V_{ab} = 54.32 \text{ V}$$

SEGUNDO BLOQUE

V.3 INDUCTANCIA. INDUCTANCIA PROPIA Y MUTUA DEBIDA A DIVERSOS ARREGLOS DE CONDUCTORES. PRINCIPIO DE OPERACION DEL TRANSFORMADOR CON NUCLEO DE AIRE
Referencia: Apuntes de la materia, páginas 203 a la 212 y 191 a la 194

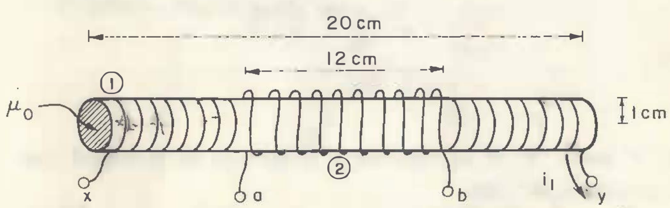
V.4 DENSIDAD DE ENERGIA MAGNETICA Y ENERGIA ALMACENADA EN UN INDUCTOR
Referencias: Apuntes de la materia, páginas 212 y 213
Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 848 y 849

V.5 CONEXION DE INDUCTORES EN SERIE Y EN PARALELO CONSIDERANDO EL EFECTO DE INDUCCION MUTUA. MARCAS DE POLARIDAD
Referencia: Apuntes de la materia, páginas 215 a la 218

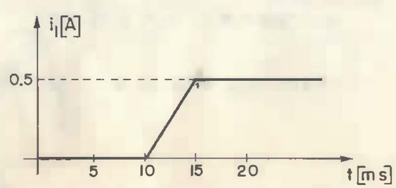
Ejemplo 2

En el arreglo de solenoides largos de la figura, el solenoide 2 está sobrepuesto con el solenoide 1, de tal forma que es posible considerar que ambos poseen la misma área de sección transversal. Determinar:

a) La inductancia propia de cada solenoide.
b) La inductancia mutua y el coeficiente de acoplamiento.
c) Los voltajes inducidos v_{xy} y v_{ab}, si la corriente i_1 va ía como se indica en la g áfica.
d) La energía almacenada en el a reglo para t = 20 ms.



N_1 = 2000 vueltas
N_2 = 1200 vueltas



Solución:

a) Al considerar que:

ℓ_1 = longitud del solenoide 1 = 20 cm.
ℓ_2 = longitud del solenoide 2 = 12 cm.
a = radio = 1 cm.

Dado que los solenoides son "la gos" ($\ell_1, \ell_2 >> a$), se puede aplicar la expresión:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \quad [H]$$ (ver apuntes página 208)

Para el solenoide 1 resulta:

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{\ell_1} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})\ (2000)^2\ \pi(0.01)^2}{0.2} = 7.90\ \text{mH}$$

y para el 2:

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 A}{\ell_2} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})\ (1200)^2\ \pi(0.01)^2}{0.12} = 4.74\ \text{mH}$$

b) Por estar sobrepuestos los solenoides y por ser largo 1, es válido aplicar la expresión:

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell_1} \quad [H]$$ (ver apuntes página 210)

Al sustituir resulta:

$$M = \frac{(4\pi \times 10^{-7})\ (2000)\ (1200)\ \pi\ (0.01)^2}{0.2} = 4.74\ \text{mH}$$

y además:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$ (ver apuntes página 208)

por lo que:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{4.74}{\sqrt{(7.90)(4.74)}} = 0.775$$

c) Sólo se induce voltaje en los solenoides cuando varía i, es decir, para 10 < t < 15 ms.

En el solenoide 1 se tiene que:

$$v_{i1} = L_1 \frac{di_1}{dt}$$ (ver apuntes página 207)

para 0 < t < 15 ms., de la gráfica de i_1 - t:

$$\frac{di_1}{dt} = 100 \, \frac{A}{s}$$

por lo tanto:

$$v_{i1} = 7.9 \times 10^{-3} \times 100 = 0.79\,V$$

La diferencia de potencial v_{xy} es en valor absoluto igual a v_{i1} y para obtener su signo se aplica la ley de Lenz, el resultado es:

$$v_{xy} = +\,0.79\ V \qquad 10 < t < 15\ ms$$

Para el solenoide 2:

$$v_{i2} = M\,\frac{di_1}{dt} = 4.74 \times 10^{-3} \times 100 = 0.474\ V$$

De manera semejante al caso anterior, la diferencia de potencial v_{ab} es en valor absoluto igual a v_{i2} y para obtener su signo se aplica la ley de Lenz, por lo que:

$$v_{ab} = -0.474\ V$$

d) Para $t = 20$ ms, $i_1 = 0.5\,A$, por lo tanto:

$$U = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \quad \left[\,J\,\right] \qquad \text{(ver apuntes página 215)}$$

$$U = 0.987\ mJ$$

TERCER BLOQUE

V.6 CIRCUITO RL SERIE CON FUENTE DE VOLTAJE CONTINUO Referencias: Apuntes de la materia, páginas 218 a la 223 Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 839 a la 845

Ejemplo 3

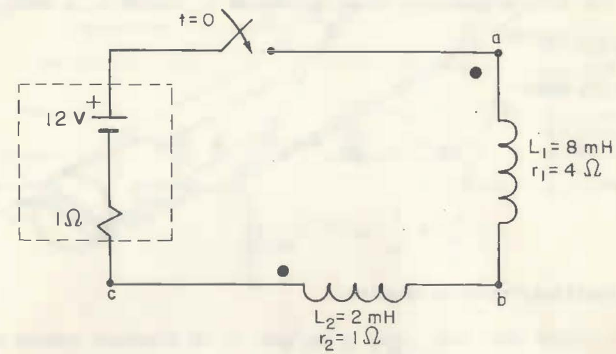
Dos solenoides se conectan en serie a una fuente de 12 V y 1 Ω, de resistencia interna, como se muestra en el diagrama de la figura. Si el coeficiente de acoplamiento entre los solenoides es $k = 0.5$, determinar para $t = 2\tau_L$ s:

a) La inductancia mutua entre los solenoides.

b) La corriente a través de la fuente.

c) La diferencia de potencial v_{ab}

d) La energía almacenada por el inductor equivalente.



Solución:

a) Se sabe que $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ y al sustituir valores:

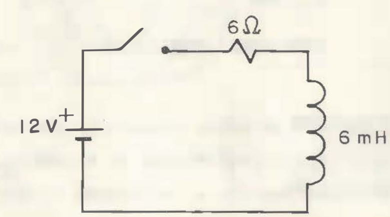
$$M = 0.5\sqrt{8 \times 2} = 2\ mH$$

b) Para obtener la corriente es necesario obtener primero el circuito RL equivalente, por lo que:

$$L_e = L_1 + L_2 - 2M = 6\ mH$$

$$R_e = r_i + r_1 + r_2 = 6\ \Omega$$

$$\tau_L = \frac{L_e}{R_e}$$



La corriente es entonces:

$$i = \frac{E}{R_e}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) \qquad \text{(ver apuntes página 219)}$$

Para $t = 2\tau_L$:

$$i = \frac{12}{6}\left(1 - e^{-2}\right) = 1.729\ A$$

c) La diferencia de potencial entre a y b es la suma de:

1. El voltaje inducido en el solenoide 1, debido a la inductancia propia.
2. El voltaje a través de su resistor.
3. El voltaje inducido en el solenoide 1, debido a la inductancia mutua.

Por lo tanto:

$$v_{ab} = L_1 \frac{di}{dt} + r_1 i - M \frac{di}{dt}$$

donde:

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L_e} e^{-t/\tau_L}$$

Al sustituir valores resulta:

$$v_{ab} = 8.541 \text{ V}$$

d) La expresión de energía almacenada es:

$$U = \frac{1}{2} L i^2$$

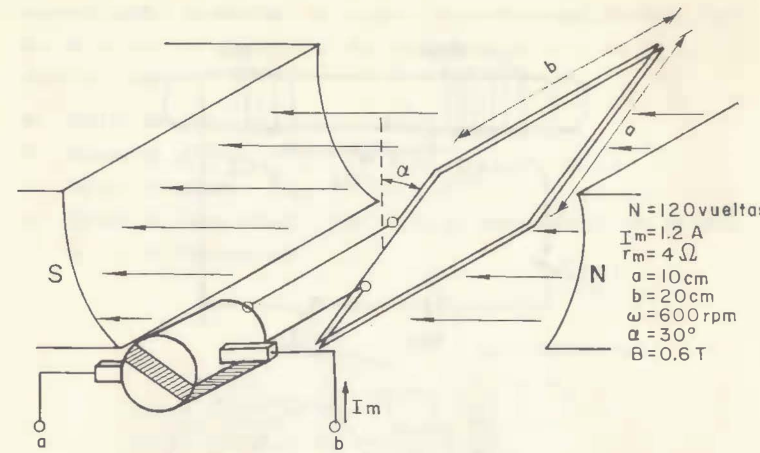
Como $L_e = 6$ mH y además para $t = 2\tau_L$, $i = 1.729$ A:

$$U = \frac{1}{2} (6 \times 10^{-3})(1.729)^2 = 8.968 \text{ mJ}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

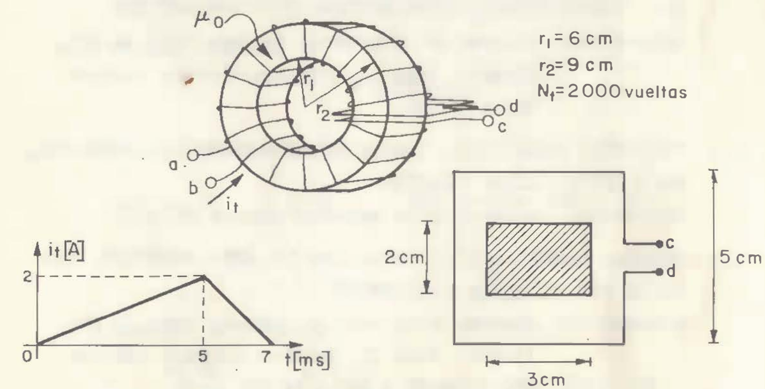
1. En la figura se muestra un motor elemental cuyo rotor está constituído por una sola bobina rectangular de N vueltas. Si la bobina gira con una velocidad angular ω constante en una zona de campo magnético uniforme, determinar:

   a) El vector fuerza magnética que actúa en el lado 1 de la bobina e indicar el sentido de giro del motor.
   b) La magnitud del par en la posición mostrada e indicar en qué posiciones ocurren el par máximo y mínimo.
   c) La fuerza contraelectromotriz que aparece en el motor para la posición indicada.
   d) La diferencia de potencial aplicada V_{ab} si la resistencia que presenta el motor (bobina y escobillas) es de 4 Ω.



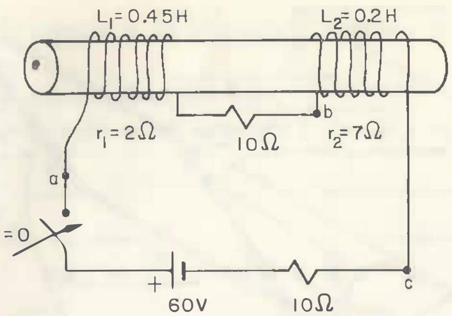
2. Una bobina cuadrada de 40 vueltas y 5 cm. por lado enlaza a un toroide de sección rectangular como se indica en la figura. Si la corriente del toroide i_t varía como se muestra en la gráfica, obtener:

   a) La inductancia propia del toroide.
   b) La inductancia mutua entre la bobina y el toroide.
   c) La gráfica del voltaje autoinducido en el toroide, $V_{ab} - t$.
   d) La gráfica del voltaje inducido en la bobina, $V_{cd} - t$.
   e) La corriente inducida en la bobina si se conecta entre "c" y "d" un resistor de 20 Ω y la resistencia de la bobina es despreciable.



3. Si el coeficiente de acoplamiento entre los inductores L_1 y L_2 es $k = 0.6$, calcular:

   a) El inductor equivalente.
   b) La corriente en el circuito para t = 5 ms.
   c) El voltaje v_{ab} para t = 20 ms.
   d) La energía magnética almacenada para t = 5 ms.



VI PROPIEDADES MAGNETICAS DE LA MATERIA

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

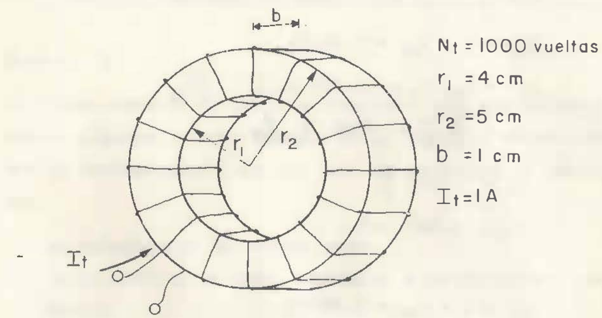
VI.1	TEORIA MICROSCOPICA DE LAS PROPIEDADES MAGNETICAS DE LA MATERIA. DIAMAGNETISMO, PARAMAGNETISMO Y FERROMAGNETISMO Referencias: Apuntes de la materia, páginas 229 a la 237 Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 886 a la 895
VI.2	CONSTANTES MAGNETICAS. SUSCEPTIBILIDAD MAGNETICA, PERMEABILIDAD Y PERMEABILIDAD RELATIVA Referencia: Apuntes de la materia, páginas 243 y 244
VI.3	VECTORES MAGNETIZACION E INTENSIDAD DE CAMPO MAGNETICO. CURVAS DE MAGNETIZACION E HISTERESIS Referencias: Apuntes de la materia, páginas 238 a la 249 Física. Tomo II, McKelvey - Grotch, páginas 834 a la 886 y 895 a la 903

Ejemplo 1

Un toroide de sección cuadrangular y enrollamiento uniforme posee las dimensiones y características mostradas en la figura. Determinar: la permeabilidad, la permeabilidad relativa y los vectores

magnetización, intensidad de campo e inducción magnética en el centro de la sección transversal del toroide, para cada uno de los siguientes casos:

a) Núcleo de aire $(\chi_{m1} = 0.4 \times 10^{-6})$
b) Núcleo de platino $(\chi_{m2} = 290 \times 10^{-6})$
c) Núcleo de bismuto $(\chi_{m3} = -170 \times 10^{-6})$
d) Núcleo de acero colado (ver curva de magnetización en la página 252 de los apuntes)



Solución:

a) La permeabilidad relativa se obtiene como:

$$K_{m1} = 1 + \chi_{m1} \qquad \text{(ver apuntes página 244)}$$

al sustituir valores:

$$K_{m1} = 1.0000004$$

la permeabilidad del núcleo es:

$$\mu_1 = K_{m1}\,\mu_0 \quad \left[\frac{Wb}{A \cdot m}\right] \qquad \text{(ver apuntes página 244)}$$

por lo que:

$$\mu_1 = 12.566 \times 10^{-7} \ \frac{Wb}{A \cdot m}$$

La intensidad de campo es:

$$H_1 = \frac{N_t\, I_t}{2\pi r} \quad \left[\frac{A}{m}\right] \qquad \text{(ver apuntes página 244)}$$

Para el centro de la sección $r = 4.5$ cm, por lo tanto:

$$H_1 = \frac{1000\ (1)}{2\pi\ (0.045)} = 3536.78 \ \frac{A}{m}$$

El vector magnetización se obtiene con la expresión:

$$\vec{M} = \chi_m\ \vec{H} \qquad \text{(ver apuntes página 243)}$$

al sustituir:

$$M_1 = \chi_{m1} H_1 = 0.00141 \quad \frac{A}{m}$$

y la inducción magnética es:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad [T] \qquad \text{(ver apuntes página 244)}$$

para este caso:

$$B_1 = \mu_1 H_1 = 4.444 \quad mT$$

b) De manera semejante:

$$K_{m2} = 1 + \chi_{m2} = 1.00029$$

$$\mu_2 = K_{m2} \mu_0 = 12.570 \times 10^{-7} \quad \frac{Wb}{A \cdot m}$$

$$H_2 = \frac{N_t I_t}{2\pi r} = 3536.78 \quad \frac{A}{m}$$

$$M_2 = 1.026 \frac{A}{m}$$

$$B_2 = 4.446 \quad mT$$

c)

$$K_{m3} = 1 + \chi_{m3} = 0.99983$$

$$\mu_3 = K_{m3} \mu_0 = 12.564 \times 10^{-7} \quad \frac{Wb}{A \cdot m}$$

$$H_3 = \frac{N_t I_t}{2\pi r} = 3536.78 \quad \frac{A}{m}$$

$$M_3 = 0.601 \quad \frac{A}{m}$$

$$B_3 = 4.443 \quad mT$$

d) Para este caso como la permeabilidad μ no es constante se obtiene primero H:

$$H_4 = \frac{N_t I_t}{2\pi r} = 3536.78 \quad \frac{A}{m}$$

con el valor de H obtenido y la información de la curva de magnetización resulta:

$$B_4 = 1.57 \quad T$$

$$\mu_4 = \frac{B_4}{H_4} = 4.439 \times 10^{-4} \quad \frac{Wb}{A \cdot m}$$

$$K_{m4} = \frac{\mu_4}{\mu_0} = 353.25$$

$$\chi_{m4} = K_{m4} - 1 = 352.25$$

$$M_4 = 1.246 \times 10^6 \quad \frac{A}{m}$$

SEGUNDO BLOQUE

VI.4 CIRCUITO MAGNETICO. FUERZA MAGNETOMOTRIZ, RELUCTANCIA Y PERMEANCIA. RELUCTANCIAS EN SERIE Y EN PARALELO
Referencia: Apuntes de la materia, páginas 249 a la 256

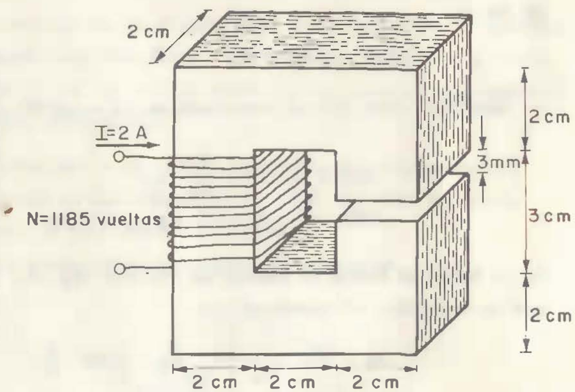
VI.5 PRINCIPIO DE OPERACION DEL TRANSFORMADOR CON NUCLEO DE MATERIAL FERROMAGNETICO
Referencia: Apuntes de la materia, páginas 259 a la 263

Ejemplo 2

La figura muestra un circuito magnético con entrehierro y la tabla indica algunos valores tomados de la curva de magnetización del material ferromagnético con el cual se construye el núcleo, determinar:

a) La reluctancia del entrehierro.
b) La intensidad de campo magnético H en el núcleo y en el entrehierro.
c) El flujo magnético en el núcleo.
d) La densidad de flujo magnético B en el entrehierro.

B[T]	H[A/m]
1.0	3000
0.8	2600
0.6	2000
0.4	1200
0.2	300
0.1	150



Solución:

a) La reluctancia del espacio de aire es constante y se calcula con la expresión:

$$R_a = \frac{\ell_a}{\mu_0 A} \quad [H^{-1}] \qquad \text{(ver apuntes página 249)}$$

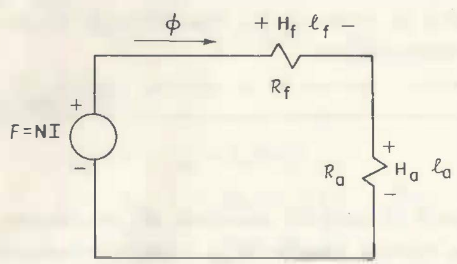
al sustituir valores resulta:

$$R_a = \frac{3 \times 10^{-3}}{(4\pi \times 10^{-7})(4 \times 10^{-4})} = 5.97 \times 10^6 \quad H^{-1}$$

b) Para obtener la intensidad de campo magnético es necesario plantear la ecuación del circuito magnético:

$$F = NI = \int \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \quad [A \cdot \text{vuelta}]$$ (ver apuntes página 252)

El circuito magnético equivalente es:



y su ecuación de malla:

$$NI = H_f \ell_f + H_a \ell_a$$

además, si despreciamos el flujo disperso en el entrehierro:

$$\phi_f = \phi_a = B_f A = B_a A$$

de donde:

$$B_f = B_a = \mu_0 H_a$$

al sustituir este último resultado en la ecuación de la malla:

$$NI = H_f \ell_f + \frac{B_f}{\mu_0} \ell_a$$

$$2370 = H_f(0.177) + B_f(2387.32)$$

En la tabla se busca la pareja de valores (B_f, H_f) que satisfagan la ecuación, el resultado es:

$$B_f = 0.8 \text{ T} \quad \text{y} \quad H_f = 2600 \ \frac{A}{m}$$

Para obtener la intensidad de campo en el aire H_a se aplica la expresión:

$$H_a = \frac{B_f}{\mu_0} = \frac{0.8}{4\pi \times 10^{-7}} = 636.62 \times 10^3 \ \frac{A}{m}$$

c) El flujo magnético del núcleo es:

$$\phi = B_f A = 320 \ \mu Wb$$

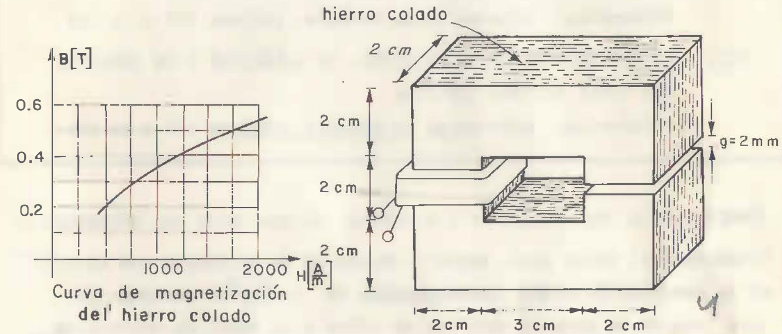
d) Del inciso (b), la densidad de flujo en el entrehierro es:

$$B_a = B_f = 0.8 \text{ T}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

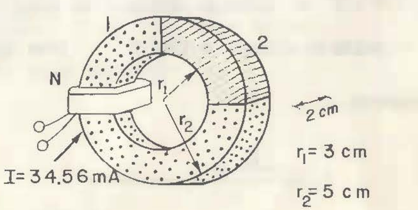
1. En el entrehierro del circuito magnético de la figura se requiere obtener un flujo magnético $\phi_0 = 0.2$ mWb. Despreciando la dispersión de flujo y con base en la curva de magnetización mostrada en la misma figura, determinar:

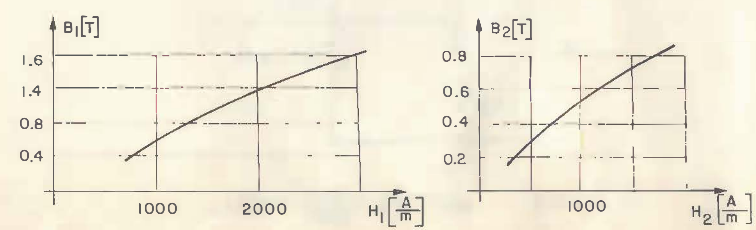
   a) La reluctancia del entrehierro.
   b) Las intensidades de campo magnético en el núcleo y en el entrehierro.
   c) La fuerza magnetomotriz requerida.
   d) La corriente necesaria para obtener dicho flujo.



2. El núcleo toroidal de la figura está construido con dos materiales ferromagnéticos distintos. Si el flujo magnético a través del material 2 es $\phi_2 = 0.32$ mWb y con base en las curvas de magnetización, determinar:

   a) La magnitud de la inducción magnética en cada material.
   b) La magnitud de la intensidad de campo en cada material.
   c) El número de vueltas de la bobina.
   d) La reluctancia total del circuito magnético.





(VII) INTRODUCCION A LOS CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

Este tema comprende un solo bloque. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

VII.1	FUENTES DE FUERZA ELECTROMOTRIZ ALTERNA SENOIDAL. VALORES PICO, MEDIO Y EFICAZ DE UNA SEÑAL SENOIDAL Referencia: Apuntes de la materia, páginas 123 a la 128
VII.2	COMPORTAMIENTO DE UN RESISTOR, UN CAPACITOR Y UN INDUCTOR CON SEÑAL ALTERNA SENOIDAL Referencia: Apuntes de la materia, páginas 123 a la 128

Ejemplo 1

Determinar el valor pico, medio y eficaz de la corriente que circula en un resistor de $1\,k\,\Omega$, un capacitor de $1\,\mu F$ y un inductor de $1\,mH$ cuando se conecta cada uno de ellos a la señal de voltaje de la línea doméstica.

Solución:

La señal de la línea doméstica es del tipo:

$v(t) = V_m \text{ sen } \omega t$ (ver apuntes página 124)

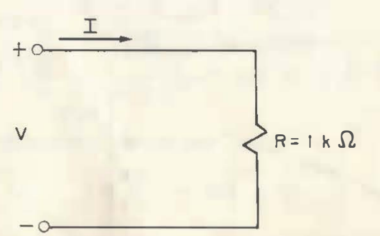
donde:

$\omega = 2\pi f$ y la frecuencia f vale 60 cps.

$V_m = V\sqrt{2}$ = voltaje máximo o de pico

V = voltaje eficaz = 120 V (ver apuntes página 127)

Para el resistor:



$$V = RI \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{120}{1000} = 0.12\,A$$

entonces:

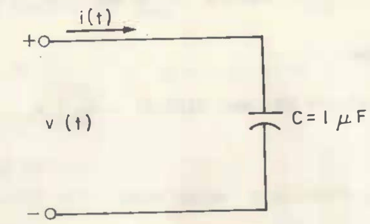
$I_m = 0.12\sqrt{2} = 0.17$ A = valor pico

$I = 0.12$ A = valor eficaz

$i(t) = I_m \text{ sen } \omega t = 0.17 \text{ sen } 120\pi t$ = señal de corriente resultante

Por ser una señal senoidal su valor promedio es cero.

Para el capacitor:



La expresión que relaciona la corriente y el voltaje en un capacitor es:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \qquad \text{(ver apuntes página 131)}$$

como:

$$v(t) = V_m \text{ sen } \omega t$$

$$i(t) = V_m \omega C \cos \omega t = V_m \omega C \text{ sen } (\omega t + \frac{\pi}{2})$$

al sustituir valores:

$$i(t) = 0.064 \text{ sen } (120\pi t + \frac{\pi}{2})$$

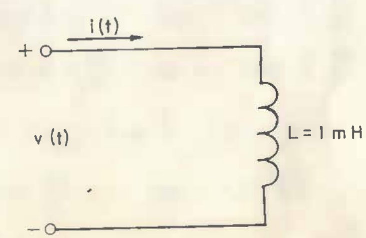
entonces:

$I_m = 0.064$ A = valor pico

$I = \frac{0.064}{\sqrt{2}} = 0.045$ A = valor eficaz

$I_p = 0$ = valor promedio

Para el inductor



La expresión que relaciona la corriente y el voltaje en un inductor es:

$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \qquad \text{(ver apuntes página 218)}$$

al despejar i:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)\,dt$$

después de integrar resulta:

$$i(t) = -\frac{V_m}{\omega L}\cos \omega t = \frac{V_m}{\omega L}\,\text{sen}\,(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Al sustituir valores:

$$i(t) = 451\ \text{sen}\ (120\,\pi t - \frac{\pi}{2})\ \text{A}$$

entonces:

I_m = 451 A = valor pico

$I = \frac{451}{\sqrt{2}}$ = 319 A = valor eficaz

$I_p = 0$

PROBLEMA PROPUESTO

1. Determinar el valor de un resistor, un capacitor y un inductor que al ser conectados cada uno a la señal de voltaje de la línea doméstica (voltaje eficaz = 120 V) la corriente eficaz a través de ellos es 10 mA.

RESULTADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

TEMA I

1. a) $\vec{E}_O = -\,300\ \hat{y}\ \frac{kN}{C}$, $\vec{E}_A = -\,192\ \hat{y}\ \frac{kN}{C}$
   b) $V_{AB} = -\,3295.83$ V
   c) $\frac{F}{\ell} = 12.5\ \frac{mN}{m}$
   d) $_A W_B = -\,1.055 \times 10^{-14}$ J

2. a) $\sigma = +\,7.08\ \frac{\mu C}{m^2}$ $Q = -\,13.33$ nC
   b) $V_{BC} = 1757.31$ V
   c) $V_{AB} = -16$ kV
   d) $_P W_B = 0.213$ mJ

TEMA II

1. a) $C_e = 120$ nF
   b) $Q_e = -\,4.8\ \mu C$
   c) $\tau_{i2} = -\,5.594\ \frac{\mu C}{m^2}$; $\tau_{i3} = -\,1.598\ \frac{\mu C}{m^2}$
   d) $E_2 = E_3 = 90.29\ \frac{kV}{m}$ hacia abajo
   e) $V_{max} = 1\,329$ V

2. a) $C_c = 2.168$ nF
   b) $V_{ac} = 28$ V
   c) $E_{max} = 20.52\ \frac{kN}{C}$
   d) $\sigma_{imax} = 908.09\ \frac{nC}{m^2}$
   e) $U = 1.4\ \mu J$

TEMA III

1. a) $\vec{E}_{Cu} = -\,0.5\ \hat{x}\ \frac{V}{m}$, $\vec{E}_{A\ell} = -\,0.824\ \hat{x}\ \frac{V}{m}$
   b) $\vec{J}_{Cu} = -\,29.41\ \hat{x}\ \frac{MA}{m^2}$, $\vec{J}_{A\ell} = -\,29.41\ \hat{x}\ \frac{MA}{m^2}$
   c) $R_{Cu} = 4\ \Omega$, $R_{A\ell} = 5.6\ \Omega$ y $R_T = 9.6\ \Omega$
   d) $v_{pCu} = 2.04\ \frac{mm}{s}$, $v_{pA\ell} = 3.06\ \frac{mm}{s}$
   e) $V_{ac} = 48$ V

2. a) $I_1 = 2A$, $I_2 = 2A$
   b) $V_{be} = 36$ V
   c) $R = 5\ \Omega$ $E_2 = -10$ V
   d) $V_{de} = 65$ V
   e) $P_s = 224$ W

3. a) $i = 0.418$ mA
   b) $q = 334.6\ \mu C$
   c) $V_{ab} = 9.2$ V
   d) $U_{80} = 0.311$ mJ

TEMA IV

1. a) $N_b \approx 106$ vueltas
   b) $I_s = 46.15$ mA
   c) $\vec{I}_c = 40$ A hacia arriba
   d) $F = -0.8\ \hat{x}\ \mu N$

2. a) $\vec{B}_{cb} = -282.8\ \hat{z}\ \mu T$
   b) $\vec{B}_c = \vec{B}_{cb} + \vec{B}_{cc} = 217.2\ \hat{z}\ \mu T$
   c) $\vec{B}_c = \vec{B}_{cb} + \vec{B}_{cc} + \vec{B}_{ct} = 617.2\ \hat{z}\ \mu T$
   d) $\Phi = 36.78\ \mu Wb$

3. a) $\vec{B}_A = 110.1\ \hat{x}\ \mu T$
   b) $\phi = 0.339\ \mu Wb$
   c) $\vec{F}_T = 51.2\ \hat{z}\ \mu N$

TEMA V

1. a) $F = 17.28$ N : antihorario ↺
   b) $\tau = 0.864$ N·m antihorario ↺
      $\tau = 0$ para $\alpha = 0°$
   c) $\mathcal{E}_{ind} = 45.239$ V
   d) $V_{ab} = -\mathcal{E}_{ind} - rIm = -50.04$ V

2. a) $L_t = 6.49$ mH
   b) $M = 0.13$ mH
   c) $v_{ab} = -2.59$ V ; $0 < t < 5$ ms.
      $v_{ab} = 6.49$ V $5 < t < 7$ ms.
   d) $v_{cd} = 51.9$ mV $0 < t < 5$ ms.
      $v_{cd} = -130$ mV $5 < t < 7$ ms.

   e) $i = 2.6$ mA ; de c hacia d en el resistor; $0 < t < 5$ ms.
      $i = 6.5$ mA ; de d hacia c en el resistor; $5 < t < 7$ ms.

3. a) $L_e = 290$ mH
   b) $i = 0.8141$ A
   c) $v_{ab} = 36.25$ V
   d) $U = 96.1$ mJ

TEMA VI

1. a) $\mathcal{R}_0 = 3.98 \times 10^6\ \frac{A}{Wb}$
   b) $B_0 = B_h = 0.5$ T
      $H_0 = 3.978 \times 10^5\ \frac{A}{m}$, $H_h = 1750\ \frac{A}{m}$
   c) $\mathcal{F} = 1107.1$ A·vuelta
   d) $I = 553.55$ mA

2. a) $B_1 = B_2 = 0.8$ T
   b) $H_1 = 1250\ \frac{A}{m}$, $H_2 = 1750\ \frac{A}{m}$
   c) $N \approx 10\,000$ vueltas
   d) $\mathcal{R}_e = 1.08 \times 10^{-6}\ H^{-1}$

TEMA VII

1. a) $R = 12\ k\Omega$
   b) $C = 0.22\ \mu F$
   c) $L = 31.83$ H