FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

15

# GUIA DE ESTUDIO PARA PRESENTAR EXAMEN EXTRAORDINARIO DE

# CALCULO VECTORIAL

ING. ENRIQUE GONZALEZ GUTIERREZ
ING. JESUS PATIÑO RAMIREZ
DR. AGUSTIN TRISTAN LOPEZ

21-A

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS BASICAS
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS

LA SUPERVISIÓN PEDAGÓGICA DE ESTA GUÍA ESTUVO A CARGO DE LA ~~LICENCIADA~~ MARÍA HANO ROA DEL CENTRO DE SERVICIOS EDUCATIVOS DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA.

CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F., ENERO DE 1986.

# CONTENIDO

# PROPOSITO DE LA GUIA

Esta guía tiene como objetivo proporcionar al alumno una orientación que le permita abordar por cuenta propia los contenidos y objetivos de aquellas materias que por alguna circunstancia tiene que acreditar por medio de un examen extraordinario, de acuerdo con el Reglamento General de Exámenes de la UNAM.*

La misma no contiene el desarrollo total de los contenidos de la materia; sino que propone actividades que contribuyan para que el alumno los asimile en forma organizada, crítica y autónoma y desarrolle las habilidades necesarias para el logro de los objetivos de aprendizaje propuestos. Por ello, es deseable que el alumno haya cursado previamente la asignatura.

Como parte de su estructura incluye el temario y los objetivos, tanto generales como específicos de la materia y contiene actividades de aprendizaje gradual y ejercicios cuya realización reforzará la organización de los conceptos adquiridos. Por último, propone actividades de autoevaluación que le permitan al alumno verificar su aprendizaje previo a la presentación del examen.

------

* Se establece que un alumno podrá presentarse a examen extraordinario cuando: habiéndose inscrito en la asignatura, no haya llenado los requisitos para acreditarla en examen ordinario; siendo alumno de la Universidad no haya estado inscrito en la asignatura correspondiente, o no la haya cursado; habiendo estado inscrito dos veces en una asignatura, no pueda inscribirse nuevamente; cuando haya llegado al límite de tiempo para estar inscrito en la Universidad.

# 1. INTRODUCCION

El curso de Cálculo Vectorial sintetiza los contenidos de Algebra y Geometría Analítica, Cálculo Diferencial e Integral y Algebra Lineal, proporcionando las bases necesarias para poder realizar un estudio completo de materias subsecuentes, como por ejemplo: Electricidad y Magnetismo, Mecánica de Fluidos o Hidráulica, Teoría Electromagnética, Introducción al Comportamiento de los Materiales, Mecánica del Medio Continuo, Mecánica de Materiales, de Suelos y de Rocas, Teoría del Potencial, etc. Como puede verse, esta materia resulta de gran importancia en diversas ramas de la Ingeniería y no es aventurado decir que, junto con la solución de ecuaciones diferenciales, forma parte del núcleo de conocimientos más relevantes que debe poseer todo ingeniero.

El curso se centra en el cálculo de varias variables: derivadas parciales, diferenciales totales e incrementos para campos escalares; derivadas ordinarias y su aplicación física o geométrica para campos vectoriales. Ambos casos permiten conocer las variaciones que puede experimentar un fenómeno físico o un modelo geométrico cuando una de las variables independientes modifica su valor.

Las variaciones por sí mismas no permiten conocer todo el comportamiento de un modelo hasta que no se hace una integral a lo largo de una curva o extendida a todo un volumen o un área. Estos aspectos se estudian con la integral curvilínea y con las integrales múltiples, ligadas en forma importante por el teorema de Green, que permite transformar una integral doble en curvilínea y viceversa.

Así mismo son tratados dos aspectos importantes: optimización de funciones de varias variables, con una breve introducción a la programación lineal y no lineal y el tema de superficies. La optimización de funciones comprende la labor de todo ingeniero, que consiste en realizar una obra al mínimo costo y utilizando el mejor procedimiento. El método de los Multiplicadores de Lagrange es la técnica más poderosa que se estudia en este curso, y sus aplicaciones se encuentran tanto en casos cotidianos del quehacer del ingeniero práctico como en los temas que aborda un investigador. El tema de superficies brinda herramientas para analizar una superficie dada y poderla representar gráficamente o para generar la ecuación de una superficie conocidas algunas propiedades geométricas. Con estas bases puede representarse correctamente un campo escalar que represente un fenómeno físico cualquiera, como por ejemplo temperaturas, presiones, etc.

## 2. SUGERENCIAS PARA EL USO DE LA GUIA

Se han seleccionado del programa vigente de la asignatura los conceptos y temas fundamentales, y se ha tomado también en cuenta la frecuencia con que han aparecido en los exámenes extraordinarios. En el anexo 1 se muestra una tabla que indica las actividades consideradas y el tiempo de estudio que sugerimos para prepararlas en función de esos criterios. La tabla servirá para organizar el tiempo de trabajo del estudiante.

1. Consultar la tabla del ANEXO 1 y seleccionar el tema de mayor importancia y/o en el que se presenten más deficiencias en los conocimientos. Procurar dedicar el tiempo de estudio que se sugiere como necesario en dicha tabla para la actividad elegida.
2. Leer cuidadosamente la lista de objetivos que encabezan el tema seleccionado y estudiar los conceptos en los textos base, verificando que se poseen los conocimientos antecedentes sugeridos. (ver ANEXO 2)



3. Analizar detenidamente los procedimientos que se utilizaron para resolver los ejemplos o ejecutar las instrucciones de solución expuestas en los ejemplos guiados.
4. Resolver los problemas propuestos y verificar sus soluciones. En algunos casos las soluciones contienen, además, orientaciones para llegar al resultado.
5. Una vez terminado el estudio de un tema, seleccionar otro usando el criterio propuesto en el punto 1.

El tiempo estimado para estudiar la totalidad de la guía es de 47 horas. Es de suma importancia que el estudiante programe su trabajo con la debida anticipación y que inicie el estudio de la guía CUANDO MENOS TRES SEMANAS ANTES DE LA REALIZACION DEL EXAMEN.

La guía está diseñada para servir como material de autoinstrucción; no obstante, si en algún momento el estudiante no comprende algún concepto o tiene problemas para resolver un ejercicio, se le sugiere consultar a los asesores de la asignatura, quienes podrán orientarle al respecto, o proporcionarle más ejercicios o bibliografía.

## 3. OBJETIVO GENERAL DE LA ASIGNATURA

Proporcionar al estudiante los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral para funciones escalares y vectoriales de varias variables, habilitándolo en el manejo y aplicación de los mismos.

## 4. TEMAS QUE COMPRENDE EL PROGRAMA

I. Superficies y campos escalares.
II. Derivación y diferenciación de funciones

escalares de varias variables.

III. Campos vectoriales.

IV. Integrales curvilíneas.

V. Integrales múltiples.

VI. Máximos y mínimos para funciones de dos o mas variables.

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

THOMAS, George B. CALCULO INFINITESIMAL Y GEOMETRIA ANALITICA. Aguilar S.A. de Ediciones. Madrid, 6a. edición, 1980.

SPIEGEL, Murray R. CALCULO SUPERIOR Mc Graw-Hill, serie Schaum's México, 1970.

Departamento de Matemáticas Básicas. Facultad de Ingeniería, UNAM. APUNTES DE CALCULO VECTORIAL. 1981.

Estos textos, que deberán tenerse a la mano al utilizar la guía, fueron seleccionados por su disponibilidad en la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería; sin embargo, en caso de no tener acceso a ellos, se sugiere al estudiante acudir al asesor de la materia, quien tiene una bibliografía complementaria.

## 6. DESARROLLO

A continuación se indican: el objetivo, el contenido y las actividades de cada uno de los temas que comprende el programa de esta materia.

En las actividades se presentan ejemplos que ilustran la aplicación de los conceptos y problemas propuestos con sus respuestas (agrupadas hacia el final de la guía), con el objeto de que el estudiante pueda compararlas con los resultados que obtenga. Todos los ejercicios han sido tomados de exámenes extraordinarios aplicados en semestres anteriores.



## TEMA I. SUPERFICIES Y CAMPOS ESCALARES

OBJETIVO

Proporcionar al estudiante el concepto de función escalar de varias variables y su representación geométrica en el caso de dos variables independientes, a través del estudio de algunas superficies.

CONTENIDO

I.1. Campos escalares. Regiones y entornos.

I.2. Definición de superficie. Representación cartesiana.

I.3. Definición de suma y producto de campos escalares.

I.4. Método de las generatrices para determinar la ecuación de una superficie.

I.5. Discusión de la ecuación de una superficie.

I.6. Superficies regladas.

I.7. Paraboloide hiperbólico.

I.8. Superficies cilíndricas.

I.9. Superficies cónicas.

I.10. Superficies de revolución.

ACTIVIDADES que comprenden los incisos:

a. Generación de superficies por el método de las generatrices.

b. Discusión de la ecuación de una superficie.

a. Generación de superficies por el método de las generatrices.

Dadas las características de una superficie, determinar su ecuación, justificando cada paso.

a.1: Revisar los antecedentes consultando los números 1 y 24 de la lista del Anexo 2.

a.2. Estudiar los Apuntes de Cálculo Vectorial desde la página 5, segunda columna, segundo párrafo hasta la página 7 y del punto 1.4 al 1.9 (pp. 16 a 23).

a.3. Analizar los ejemplos de la guía.

a.4. Resolver los ejercicios del grupo 1.

EJEMPLOS

1. Una superficie cónica corta al plano xy formando una elipse cuyo centro se encuentra en el punto P(1,2), pasa por los puntos Q(1,0) y R(0,2) y su vértice se encuentra en el punto (0,0,-1). Determinar la ecuación del cono.

Solución:

La ecuación de la elipse es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1;$$

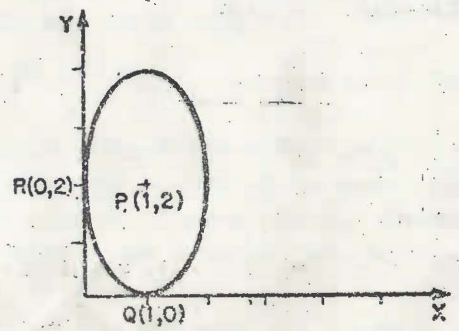



Figura 1



en este caso h = 1, k = 2, a = 1, b = 2 (figura 1). Por lo que la ecuación de la directriz será:

$$D \left| \begin{array}{ll} \dfrac{(x - 1)^2}{1} + \dfrac{(y - 2)^2}{4} = 1 & \quad (1) \\[2ex] z = 0 & \quad (2) \end{array} \right.$$

Las generatrices son rectas que se apoyan en el vértice y en la elipse, por lo que serán de la forma:

$$\frac{x - x_o}{A} = \frac{y - y_o}{B} = \frac{z - z_o}{C}$$

que para las coordenadas del vértice dado quedan, después de despejar y, x en función de z:

$$G \begin{cases} x = \dfrac{A}{C}(z + 1) \\[2ex] y = \dfrac{B}{C}(z + 1) \end{cases}$$

en donde $\frac{A}{C} = \alpha$, $\frac{B}{C} = \beta$ son los parámetros

Por lo tanto la ecuación de la generatriz queda:

$$G \begin{cases} x = \alpha(z + 1) & \quad (3) \\ y = \beta(z + 1) & \quad (4) \end{cases}$$

Resolviendo como simultáneas las ecuaciones de la directriz y de la generatriz se obtendrá la ecuación de condición, así que:

Substituyendo (2) en (3): $x = \alpha$ (5);

Substituyendo (2) en (4): $y = \beta$ (6) y

al substituir (5) y (6) en (1) se obtiene la ecuación de condición

$$\frac{(\alpha - 1)^2}{1} + \frac{(\beta - 2)^2}{4} = 1 \qquad (7)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de la generatriz y la de condición se obtiene una ecuación en la que no aparecen los parámetros:

de (3) $\alpha = \dfrac{x}{z + 1}$ (8)

y de (4) $\beta = \dfrac{y}{z + 1}$ (9)

substituyendo (8) y (9) en (7)

$$\left(\frac{x}{z+1} - 1\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{y}{z+1} - 2\right)^2 = 1$$

o bien, tomando común denominador y eliminando los denominadores en el primer miembro de la ecuación se obtiene:

$$(x - z - 1)^2 + \frac{1}{4}(y - 2z - 2)^2 = (z + 1)^2$$

que es la ecuación de la superficie cónica.

2. Obtener la ecuación de la superficie que se genera al hacer girar alrededor de la recta de ecuaciones $x = 2$, $z = 3$; la parábola paralela al plano yz cuyo vértice es (2,1,3) que contiene al punto (2,2,4) y que abre en dirección paralela al eje y.

Solución:

Para resolverlo seguir los pasos que se detallan a continuación:

a) Elaborar la gráfica de la parábola en el plano paralelo al yz que pasa por los puntos que definen la parábola.

b) Como la parábola está en un plano paralelo al yz, su ecuación será de la forma que aparece a continuación, ya que abre en dirección paralela al eje y.

$$\begin{cases} (z - k)^2 = 4p\,(y - h) \\ x = cte \end{cases}$$

en donde h, k son la ordenada y la cota del vértice respectivamente y para determinar la constante 4p tenemos la condición de que debe pasar por el punto (2,2,4). Obtener la ecuación de la parábola, que es en este caso la direcriz.

c) Al hacer girar la parábola en torno a la recta (eje) $x = 2$, $z = 3$, cada punto de ella genera una circunferencia con centro en $x = 2$, $z = 3$ en un plano paralelo al xz y de radio variable, dependiendo de la ordenada "y" correspondiente. Obtener la ecuación de la "familia" de circunferencias que tienen las características mencionadas, que son en este caso las generatrices.



d) Resolver simultáneamente las ecuaciones de la directriz y de la generatriz de manera que se encuentre una ecuación en la que no intervengan las variables, que es la ecuación de condición (si se realizó acertadamente debe haberse obtenido $\alpha^2 = \beta - 1$).

e) Por último, trabajar simultáneamente con las ecuaciones de condición y de la generatriz para eliminar los parámetros y obtener la ecuación de la superficie, que es en este caso:
$(x - 2)^2 + (z - 3)^2 = y - 1$

EJERCICIOS. GRUPO 1

1. Determinar la ecuación del paraboloide elíptico que se muestra en la figura 2. Los puntos P y Q se encuentran sobre los semiejes de la elipse que los contiene. P(0,2,4); Q(4,0,4).

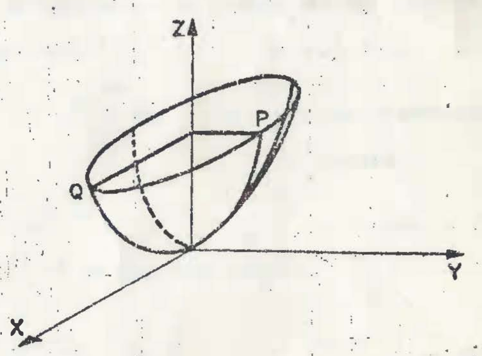



Figura 2

2. Para pulir una cierta pieza de maquinaria, se coloca en un torno una terraja hiperbólica, como se muestra en la figura 3. Se desea conocer la ecuación de la superficie exterior de la pieza de maquinaria.

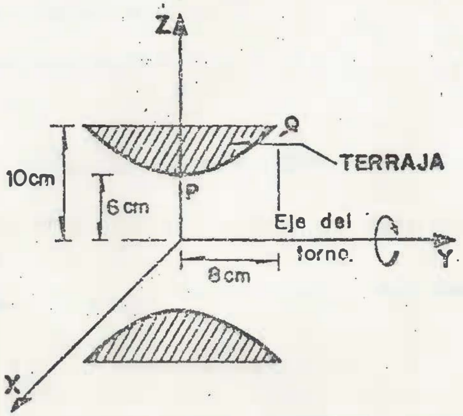



Figura 3

3. Encontrar por el método de las generatrices la ecuación de la superficie cilíndrica que tiene por directriz una circunferencia en el plano xy, con centro en (1,3) y radio igual a 2, siendo la generatriz del cilindro paralela a la recta que une los puntos $P_0$ (5,3,2) y $P_1$(7,4,5).

b. Discusión de la ecuación de una superficie.

Dada la ecuación de una superficie, representarla gráficamente en isométrico, valiéndose para ello de los recursos analíticos que se considere necesarios.



b.1. Revisar los antecedentes, consultando los números 1, 2, 3, 5, 6 y 24 de la lista del anexo 2.

b.2. Estudiar en Thomas, George Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica (pp. 609 a 617)y en los Apuntes de Cálculo Vectorial estudiar los subtemas 1.9 a 1.9.2. y 1.3 a 1.3.7 y revisar las tablas de las pp. 15 y 28.

b.3. Analizar el ejemplo de la guía.

b.4. Resolver los ejercicios del grupo 2.

EJEMPLOS

1. Discutir la superficie que tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 1$$

Solución:

Investigar primeramente las trazas con los ejes coordenados:

Eje x; $y = z = 0$;

$\frac{x^2}{16} = 1 \Rightarrow x^2 = 16$; $x = \pm 4$ hay intersección en dos puntos

Eje y; $x = z = 0$;

$\frac{-y^2}{25} = 1 \Rightarrow$ no hay intersección

Eje z; $x = y = 0$;

$\frac{-z^2}{9} = 1 \Rightarrow$ no hay intersección

Investigar ahora las trazas con los planos coordenados.

Plano xy; $z = 0$;

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ Es una hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre el eje x.

Plano xz; y = 0;

$$\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$$

Es una hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre el eje x.

Plano yz; x = 0;

$$-\frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 1$$

no es alguna curva, no existe la intersección.

Ver ahora si hay simetría con:

Planos coordenados:

Plano xy; z por -z;

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} - \frac{(-z)^2}{9} = 1;$$ no se altera ∴ hay simetría

Plano xz; y por -y;

$$\frac{x^2}{16} - \frac{(-y)^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 1;$$ no se altera ∴ hay simetría

Plano yz; x por -x;

$$\frac{(-x)^2}{16} - \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 1;$$ no se altera ∴ hay simetría

Ejes coordenados:

Eje x; y por -y; z por -z;

$$\frac{x^2}{16} - \frac{(-y)^2}{25} - \frac{(-z)^2}{9} = 1;$$ no se altera ∴ hay simetría

Eje y; x por -x; z por -z;

$$\frac{(-x)^2}{16} - \frac{y^2}{25} - \frac{(-z)^2}{9} = 1;$$ no se altera ∴ hay simetría

Eje z; x por -x; y por -y;

$$\frac{(-x)^2}{16} - \frac{(-y)^2}{25} - \frac{z^2}{9} = 1;$$ no se altera ∴ hay simetría



ORIGEN:

x por -x; y por -y; z por -z;

$$\frac{(-x)^2}{16} - \frac{(-y)^2}{25} - \frac{(-z)^2}{9} = 1;$$ no se altera ∴ hay simetría

Secciones con planos paralelos a los planos coordenados

Paralelos al xy; z = k;

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1 + \frac{k^2}{9}$$

Es una familia de hipérbolas con centro sobre el eje "z" y eje focal el "x".

Paralelos al yz; x = k; para cuando $\frac{k^2}{16} - 1 > 0$

$$\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = \frac{k^2}{16} - 1$$

Familia de elipses con centro sobre el eje "x" y semieje mayor en "y".

Paralelos al xz; y = k;

$$\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1 + \frac{k^2}{25}$$

Familia de hipérbolas con centro en el eje "y", eje focal sobre el eje "x".

Investigar ahora la extensión:

Sobre el eje "x":

$$\frac{x^2}{16} = 1 + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9}; \qquad x = \pm 4\sqrt{1 + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9}}$$

para todo y, z, x es real, pero siempre mayor que 4 y menor que -4, por lo tanto $-\infty < x \leq -4$; $4 \leq x < +\infty$ es la extensión.

Sobre el eje "y":

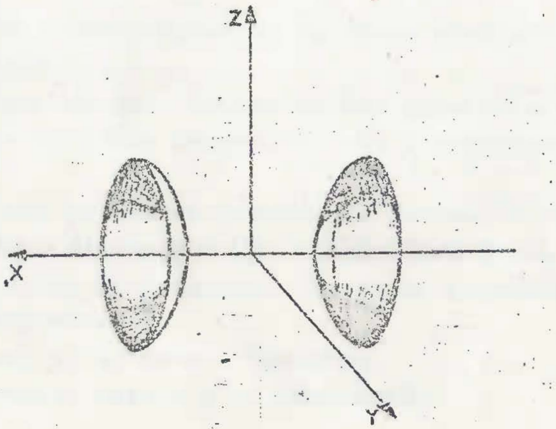
$$\frac{y^2}{25} = \frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{9} - 1; \qquad y = \pm 5\sqrt{\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{9} - 1};$$

El radicando es una hipérbola, en la que si "x" se mantiene en los intervalos del punto anterior, la "z" puede tomar todos los valores y por lo tanto "y" también, o sea $-\infty < y < +\infty$ es la extensión en "y".

Sobre el eje "z";

$$\frac{z^2}{9} = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} - 1; \qquad z = \pm 3\sqrt{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} - 1};$$

como en el paso anterior, si "x" se mantiene menor que -4 y mayor que 4, "y" puede tomar cualquier valor real y $-\infty < z < +\infty$ es la extensión sobre el eje "z".




HIPERBOLOIDE ELIPTICO DE DOS MANTOS

Figura 4

EJERCICIOS. GRUPO 2

1. Escribir en la línea de la derecha el nombre de la superficie que corresponde a la expresión analítica de la izquierda.

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ ____________________



b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} + 1 = 0$ ____________________

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ ____________________

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2cz = 0$ ____________________

e) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ____________________

2. Sea la función $F(x,y,z) = 4x^2 - 25y^2 + 16z^2 - 100 = 0$. Utilizando los pasos que se consideren necesarios de la discusión de una superficie, establecer sus características y realizar una gráfica aproximada de ella.

TEMA II. DERIVACION Y DIFERENCIACION DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIAS VARIABLES

OBJETIVO

Proporcionar al estudiante los elementos para el estudio y análisis de variación de funciones escalares de varias variables.

CONTENIDO

II.1. Límites y continuidad de funciones escalares de variable vectorial.
II.2. Derivada parcial. Interpretación geométrica para el caso de dos variables independientes. Interpretaciones físicas.
II.3. Derivadas parciales sucesivas. Teorema de Schwarz.
II.4. Funciones diferenciables. Diferencial total.
II.5. Composición de funciones. Derivadas parciales de funciones compuestas.
II.6. Derivada direccional. Gradiente.
II.7. Diferencial exacta y su integración.

ACTIVIDADES que comprenden los incisos:

a. Interpretación física y geométrica de la derivada parcial y de la diferencial total.
b. Derivadas parciales de funciones compuestas, derivada direccional y gradiente.

a. Interpretación física y geométrica de la derivada parcial y de la diferencial total.

Dado un fenómeno físico o geométrico, modelado explícitamente por una función real de variable vectorial:

- Obtener las rapideces de crecimiento de la función



relativas a cada una de las variables reales que intervengan.
- Calcular aproximadamente un incremento de la función aplicando la diferencial, en caso de que dicha función sea diferenciable.

a.1. Revisar los antecedentes consultando los números: 4, 7 a 13, 25 a 27 de la lista del ANEXO 2.
a.2. Estudiar los subtemas 15.2 a 15.4 (pp. 738 a 754) y subtema 15.8 (pp. 770 a 776) del libro Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica de Thomas G.B.; en el cap. 6 estudiar la p. 104 y analizar los problemas resueltos del 8 al 15, en el cap. 6 estudiar la p. 174 y analizar el problema resuelto No. 28 del libro Cálculo Superior de Spiegel M.R.
a.3. Analizar los ejemplos de la guía.
a.4. Resolver los ejercicios del grupo 3.

EJEMPLO

1. Usando diferenciales calcular el valor aproximado de

$$\sqrt{(2,1)^3 \text{ sen } 31°}$$

Solución:

Se propone la función $f(x,y) = \sqrt{x^3 \text{ sen } y}$

y los valores $x = 2$, $\Delta x = 0.1$, $y = 30°$, $\Delta y = 1°$

pero es necesario que tanto "y" como su incremento estén en radianes, así que, sabiendo que $\pi \text{rad} = 180°$ hacer las conversiones:

$$y = \frac{\pi}{6} = 0.5236 \text{ rad}; \quad \Delta y = \frac{\pi}{180} = 0.01745 \text{ rad}.$$

El valor aproximado de la función será $f(x_0, y_0) + \Delta f$, en donde $x_0$, $y_0$ son los valores "cerrados" $x = 2$, $y = 30°$.

Para calcular $\Delta f$ se usará la diferencial como aproximación.

La diferencial total de $f(x,y)$ será:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{3x^2 \text{ sen } y}{2\sqrt{x^3 \text{ sen } y}}dx + \frac{x^3 \cos y}{2\sqrt{x^3 \text{ sen } y}}dy$$

y substituyendo los valores:

$$df = \frac{3(2)^2\,(1/2)}{2(2)}(0.1) + \frac{(2)^3\,\sqrt{3}/2}{2(2)}(0.01745) = \frac{3}{2}(0.1) + \sqrt{3}\,(0.01745)$$

el valor de df es: $df = 0.18$

por otro lado, $f(2,30°) = \sqrt{(2)^3 \text{ sen } 30°} = \sqrt{8(1/2)} = \sqrt{4} = 2$

finalmente, el valor aproximado de la función será:

$$f(2,30°) + df = 2 + 0.18 = 2.18$$

EJERCICIOS. GRUPO 3

1. Mostrar que las superficies $S_1$: $x + 2y - \text{Ln } z + 4 = 0$ y $S_2$: $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ son tangentes, esto es, tienen un punto tangente común en $(2, -3, 1)$.

2. Se desea calcular el volumen de concreto necesario para construir un monumento en forma de cono elíptico. Si el error aceptado al fabricar el molde es de $\pm$ 0.005 m en los semiejes y $\pm$ 0.01 m en la altura. ¿Cuál es el máximo error que se comete en el cálculo del volumen, si las dimensiones son 80 y 40 cm para los semiejes y 3.50 m para la altura?

b. Derivadas parciales de funciones compuestas, derivada direccional y gradiente.

Dado un fenómeno físico o geométrico, modelado explícitamente por una función real de variable vectorial:

- Obtener las rapideces de crecimiento de la función



compuesta relativas a cada una de las variables que intervengan.
- Calcular la rapidez de crecimiento unitario de la función, en cualquier dirección.
- Conocida la rapidez de crecimiento unitario de la función, definir las direcciones en que esto ocurre.

b.1. Revisar los antecedentes consultando los números: 4, 7 a 11, 14, 26 a 29, 34 de la lista del ANEXO 2. Revisar el tema II de esta guía.

b.2. Estudiar los subtemas 15.5 a 15.7 (pp. 754 a 769) del libro Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica de Thomas G. B.; y estudiar en el cap. 8 la p. 163 y los problemas resueltos 1 a 3 y 12 a 14, en el cap. 6 estudiar la p. 106 y los problemas resueltos 18, 21 a 28 del libro Cálculo superior de Spiegel M. R.

b.3. Analizar los ejemplos de la guía.

b.4. Resolver los ejercicios del grupo 4.

EJEMPLOS.

1. La temperatura en cualquier punto de una placa rectangular en el plano xy está dada por la expresión $T = 50\,(x^2 - y^2)$ (T en grados centígrados, x, y, en metros). Determinar en el punto $P(4,-2)$:

   a) La expresión que permita conocer la variación de la temperatura en cualquier dirección.

   b) ¿En qué dirección a partir del punto no hay variación de la temperatura?

   c) ¿En qué dirección la variación será de 250°C/m?

   Justificar las respuestas.

   Nota: Las direcciones deben ser referidas con el ángulo agudo que forman con la dirección positiva del eje x.

Solución:

a) La expresión que da la variación de la temperatura en cual--- quier dirección es la derivada direccional, que es en este caso:

$\frac{dT}{ds} = D_u T = \overline{\nabla}T \cdot \overline{u}$ en donde $\overline{u}$ es el vector unitario en la dirección deseada.

$$\overline{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial x}\, i + \frac{\partial T}{\partial y}\, j = 100\, x\, i - 100\, y\, j; \quad \overline{\nabla}T\,\Big|_P = 400i + 200j$$

b) La dirección de variación nula es $\perp$ a $\overline{\nabla}T$, en el punto P, ya que se requiere $\overline{\nabla}T \cdot \overline{u} = 0$, por lo que, sabiendo que:

la dirección de $\overline{\nabla}T|P$ es $\left.\frac{\overline{\nabla}T}{|\overline{\nabla}T|}\right|_P = \frac{400\, i + 200\, j}{200\sqrt{5}} = \frac{2i + j}{\sqrt{5}}$

una dirección perpendicular $\overline{v} = ai + bj$

es tal que $\overline{v} \cdot \left.\frac{\overline{\nabla}T}{|\overline{\nabla}T|}\right|_P = \frac{2a + b}{\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow b = -2a$

por lo que $\overline{v} = \frac{i - 2j}{\sqrt{5}}$ es un vector unitario perpendicular al gradiente.

c) La dirección en que $\frac{dT}{ds} = 250$ será tal que:

$\frac{dT}{ds} = \overline{\nabla}T \cdot \overline{u} = |\overline{\nabla}T| \cos\Theta$; en donde $\Theta$ es el ángulo entre $\overline{\nabla}T|_P$ y la dirección $\overline{u}$

$$|\overline{\nabla}T| = \sqrt{(400)^2 + (200)^2} = \sqrt{(160000 + 40000)} = \sqrt{200000} = 200\sqrt{5}$$

así que: $250 = 200\sqrt{5}\cos\Theta \Rightarrow \cos\Theta = 0.559$ ;

$\Theta = 56.01°$ ó $56°0'36''$

El ángulo que forma el gradiente con el eje x

$$\alpha = \text{ang tan}\ \frac{1}{2} = 26.565°$$



El ángulo que forma la dirección perpendicular al gradiente - con el eje x será:

$\beta = \text{ang tan} -2 = -63.435°$

El ángulo que forma la dirección en que $\frac{dT}{ds} = 250$ con el eje x es:

$\gamma = 26.565° - 56.01° = -29.445°$

2. Si $z = xe^y + ye^x$; $x = rs$, $y = r/s$, calcular $\frac{\partial z}{\partial s}$

$(e^y + ye^x)\, i + (xe^y + e^x)\, j$

Solución:

Para resolverlo seguir los pasos que se detallan a continuación:

a) Se puede usar la regla de la cadena, ya que se trata de una -- función compuesta con las variables intermedias xy y las independientes rs.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

b) Finalmente, luego de calcular las derivadas y expresar todos - los resultados en función de r, s obtener:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = e^{r/s}\,(r - rs) + e^{rs}\left(\frac{r^2}{s} - \frac{r}{s^2}\right)$$

EJERCICIOS. GRUPO 4

1. Hallar la pendiente más pronunciada de la superficie $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + 3y - 1$ en el punto P(1,2) y la razón de cambio de la función a partir de P y en la dirección de Q(5,4)

2. Sean $w = f(x + at,\ y + bt)$ siendo a y b constantes, demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}$$

TEMA III. CAMPOS VECTORIALES

OBJETIVO

Proporcionar al estudiante el concepto de función vectorial, sus principales aplicaciones y los elementos para el análisis de la variación de una funcion vectorial.

CONTENIDO

III.1. Definición de campos vectoriales.
III.2. Límites y continuidad de campos vectoriales.
III.3. Arco de curva y su ecuación vectorial. Curva regular.
III.4. Derivada ordinaria y diferencial ordinaria. Aplicaciones.
III.5. Derivadas parciales de funciones vectoriales.
III.6. Diferenciales de funciones vectoriales.
III.7. Generalización del concepto de gradiente.
III.8. Coordenadas curvilíneas.
III.9. Ecuación vectorial de una superficie.
III.10. Divergencia. Propiedades. Campo solenoidal.
III.11. Rotacional. Propiedades. Campo irrotacional.
III.12. Laplaciano. Aplicaciones.

ACTIVIDADES que comprenden los incisos:

a. Aplicaciones de la derivada ordinaria de campos vectoriales. Interpretaciones física y geométrica.
b. Ecuación vectorial de una superficie y derivadas parciales de funciones vectoriales. Interpretación geométrica.
c. Gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano. El gradiente en coordenadas curvilíneas.



a. Aplicaciones de la derivada ordinaria de campos vectoriales. Interpretaciones física y geométrica.

Dado un fenómeno físico o geométrico, modelado por una función vectorial de variable escalar:

- Analizar la curva en él implicada, obteniendo al mismo tiempo los elementos físicos correlativos.

a.1. Revisar los antecedentes consultando los números 7, 15 a 17, 27, 28, 30 y 31 de la lista del ANEXO 2.
a.2. Estudiar los subtemas 14.1 a 14.5 (pp. 689 a 717) del libro Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica de Thomas G. B.; y estudiar en el cap. 7 las pp. 139 y 140, y los problemas resueltos del 30 al 33 y 45, y los problemas propuestos 95 y 96 del libro Cálculo Superior de Spiegel M. R.
a.3. Analizar los ejemplos de la guía.
a.4. Resolver los ejercicios del grupo 5.

EJEMPLO

1. Una partícula se mueve según la ley $\overline{r} = 2 \text{ sen } 2\pi t \ i + 2\sqrt{3} \text{ sen } 2\pi t \ j + 4 \cos 2\pi t \ k$ donde $|\overline{r}|$ está en metros y "t" está en segundos.
Cuando t = 2.5 seg se desea conocer la velocidad de la partícula, su rapidez y sus aceleraciones tangencial y normal. Además se desea saber si la partícula se mueve sobre una trayectoria plana o alabeada.

Solución:

Se conoce $\overline{r} = \overline{r}(t)$ y se sabe que $\overline{v} = \dot{\overline{r}}$

$$\overline{v} = 4\pi \cos 2\pi t \ i + 4\pi \sqrt{3} \cos 2\pi t \ j - 8\pi \text{ sen} 2\pi t \ k \qquad \ldots (1)$$

evaluando para t = 2.5 seg

$\bar{v} = 4\pi \cos 5\pi\ i + 4\pi\sqrt{3} \cos 5\pi\ j - 8\pi \text{ sen } 5\pi\ k =$

$= -4\pi\ i - 4\pi\sqrt{3}\ j$ ... (2)

La rapidez es $|\bar{v}|$

así $|\bar{v}| = \sqrt{16\pi^2 + 16\pi^2 3} = 4\pi\sqrt{4} = 8\pi$ ... (3)

Ahora calcular la aceleración a partir de $\bar{v}$ (Ec.1)

$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = -8\pi^2 \text{sen} 2\pi t\ i - 8\pi^2\sqrt{3}\text{sen} 2\pi t\ j - 16\pi^2 \cos 2\pi t\ k$ ... (4)

Evaluando también para t = 2.5 seg.

$\bar{a} = -8\pi^2 \text{sen} 5\pi\ i - 8\pi^2\sqrt{3}\text{sen} 5\pi\ j - 16\pi^2 \cos 5\pi\ k$

$\bar{a} = 16\pi^2\ k$ ... (5)

Por otro lado se tiene que $\bar{a} = \bar{a}_T + \bar{a}_N$ ... (6)

y además $\bar{a}_T = (\bar{a} \cdot T) T$ ... (7)

$T = \bar{v}/|\bar{v}|$ ... (8)

Substituyendo (2) y (3) en (8)

$T = (-4\pi\ i - 4\pi\sqrt{3}\ j)/8\pi;\quad T = -\frac{1}{2}\ i - \frac{\sqrt{3}}{2}\ j$ ... (9)

Sustituyendo (9) y (5) en (6)

$\bar{a}_T = \left[16\pi^2\ k \cdot \left(-\frac{1}{2}\ i - \frac{\sqrt{3}}{2}\ j\right)\right] 16\pi^2\ k$

$\bar{a}_T = \bar{0}$

Ahora este valor se sustituye en (6) para obtener $\bar{a}_N$

$\bar{a} = \bar{a}_N;\quad \bar{a}_N = 16\pi^2\ k$

Observar que solo existe la componente normal.

Determinar si la trayectoria es plana o alabeada, para lo cual se necesita conocer el valor de la torsión, la cual se puede calcular de la siguiente manera:

$$\tau = \frac{\bar{v} \times \bar{a}}{|\bar{v} \times \bar{a}|} \cdot \frac{d\bar{a}}{dt} \frac{1}{|\bar{v}|\ |\bar{a}_N|} \quad \text{... (10)}$$

En dicha expresión se encuentra $\frac{d\bar{a}}{dt}$ la cual aún no se ha calculado.

Entonces derivar (4) y evaluar en t = 2.5 seg.



$\dot{\bar{a}} = -16\pi^3 \cos 2\pi t\ i - 16\pi^3\sqrt{3}\cos 2\pi t\ j + 32\pi^3 \text{sen} 2\pi t\ k$

$\dot{\bar{a}} = 16\pi^3\ i + 16\pi^3\sqrt{3}\ j$ ... (11)

Así sustituyendo (2), (3), (5) y (10) en (11)

$$\tau = \frac{(-4\pi\ i - 4\pi\sqrt{3}\ j) \times 16\pi^2\ k}{|(-4\pi\ i - 4\pi\sqrt{3}\ j) \times 16\pi^2\ k|} \cdot \frac{(16\pi^3\ i + 16\pi^3\sqrt{3}\ j)}{8\pi\ \ |16\pi^2\ k|}$$

$$\tau = \frac{(+64\pi^3\ j - 64\pi^3\sqrt{3}\ i)\quad (16\pi^3\ i + 16\pi^3\sqrt{3}\ j)}{(128\pi^3)\ (8\pi)(16\pi^2)}$$

$$\tau = \frac{-1024\pi^6\sqrt{3} + 1024\pi^6\sqrt{3}}{1024\pi^6(8)} \Rightarrow \quad \tau = 0$$

como la torsión es nula, se trata de una curva plana.

EJERCICIO. GRUPO 5

1. Una partícula se mueve a lo largo de la curva dada por las ecuaciones $x = b \text{ sen} 3t$, $y = b \cos 3t$ y $z = 4bt$ donde x, y, z están en metros, "t" en segundos y "b" es constante. Si la rapidez es igual a 10 metros por segundo determinar:

a) Cuánto vale "b".
b) Ley de aceleraciones
c) Aceleración tangencial
d) Módulo de aceleración normal

b. Ecuación vectorial de una superficie y derivadas parciales de funciones vectoriales. Interpretación geométrica.

Aplicar los conceptos de derivada, diferencial y gradiente de función vectorial de variable vectorial, para el caso de 2 variables independientes al análisis de superficies.

b.1. Revisar los antecedentes consultando los números

7, 16, 27, 31 y 32 de la lista del ANEXO 2.
Revisar los temas I y II de esta guía.

b.2. Estudiar el subtema 3.8 (pp. 106 a 112) de los Apuntes de Cálculo Vectorial que edita la Facultad.

b.3. Analizar los ejemplos de la guía.

b.4. Resolver los ejercicios del grupo 6.

EJEMPLO

1. Sean las superficies $S_1$: $\overline{r}(s,t) = 4st\,i + (s+t)\,j + (s-t)\,k$ y $S_2$: $\overline{r}(u,v) = ui + vj + 2k$.

a) Indicar de qué superficies se tratan.

b) Determinar la ecuación del plano normal y recta tangente a la curva de intersección entre $S_1$ y $S_2$ en el punto $P(-4,0,2)$

Solución:

a) Para ver de qué tipo de superficies se tratan, obtener primero sus expresiones cartesianas, para lo cual se necesita establecer las ecuaciones paramétricas correspondientes.

Se sabe que $\overline{r}(t) = x(t)\,i + y(t)\,j + z(t)\,k$

entonces para $S_1$ se tendrá:

$x = 4st, \quad y = s + t, \quad z = s - t$

se determina primero $s = s(x,y), \quad t = t(x,y)$

$$y + z = 2s, \quad s = \frac{y+z}{2} \qquad \dots (1)$$

$$y - z = 2t, \quad t = \frac{y-z}{2} \qquad \dots (2)$$

así sustituyendo s y t en x

$$x = 4\,\frac{(y+z)}{2}\,\frac{(y-z)}{2}, \quad x = y^2 - z^2 \qquad \dots (3)$$



la cual se conoce como un paraboloide hiperbólico.

Analizando ahora el caso de $S_2$:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = 2 \qquad \dots (4)$$

se observa que para $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ siempre $z = 2$, además u y v son parámetros libres. Por lo tanto $z = 2$ representa un plano paralelo al plano xy.

$z = 2$ Plano paralelo al plano xy

b) El vector que define al plano normal y recta tangente a la curva de intersección entre $S_1$ y $S_2$ es:

$\overline{N} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2$ donde $\overline{N}_1$ es el vector normal a $S_1$

$\overline{N}_2$ es el vector normal a $S_2$

entonces se necesita determinar $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$

Dada una ecuación vectorial que representa una superficie,

$$\overline{N} = \frac{\partial\overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\overline{r}}{\partial v} \quad \text{donde } \overline{r} = \overline{r}(u,v)$$

entonces $\overline{N}_1 = \dfrac{\partial\overline{r}}{\partial s} \times \dfrac{\partial\overline{r}}{\partial t} = (4t\,i + j + k) \times (4s\,i + j - k)$

$$\overline{N}_1 = -2\,i + j\,(4t + 4s) + k\,(4t - 4s) \qquad \dots (5)$$

Se necesita obtener los valores de s y t correspondientes al punto de intersección $P(-4,0,2)$ y esto se hace sustituyendo dicho punto en las ecuaciones (1) y (2).

$$s = \frac{0+2}{2} = 1 \quad , \quad t = \frac{0-2}{2} = -1$$

entonces en (5) se tiene $\overline{N}_1 = -2\,i - j(4-4) + k\,(-4-4)$

$$\overline{N}_1 = -2\,i - 8\,k \qquad \dots (6)$$

ahora se determinará $\overline{N}_2$

como $S_2$ es el plano $z = 2$ entonces $\overline{N}_2 = k$

el cual podemos verificar, si $\overline{r} = (u,v) = u\,i + v\,j + 2\,k$

$$\overline{N}_2 = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = i \times j \; ; \quad \overline{N}_2 = k \qquad \ldots (7)$$

con lo que ya se puede saber quién es $\overline{N}$, se sustituye (6) y (7) en $\overline{N} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2$

entonces $\overline{N} = (-2\, i - 8k) \times (k)$

$$\overline{N} = 2j \qquad \ldots (8)$$

conocido $\overline{N}$, se procede a determinar el plano normal y la recta tangente a la intersección de $S_1$ y $S_2$:

Ec. plano: $\overline{N} \cdot (\overline{P} - \overline{P}_o) = 0$

sustituyendo (8) y $P_o(-4,0,2)$

$$2j \cdot (x + 4,\ y,\ z - 2) = 0; \quad 2y = 0; \quad y = 0$$

$y = 0$ es el plano xz

Ec. recta normal: $\dfrac{x - x_o}{N_x} = \dfrac{y - y_o}{N_y} = \dfrac{z - z_o}{N_z}$

sustituyendo nuevamente (8) y $P_o(-4,0,2)$ nos damos cuenta que $N_x = N_z = 0$, por lo que también se puede representar como la intersección de los planos $x = -4$, $z = 2$

EJERCICIO. GRUPO 6

1. Sea la superficie definida por:

$$r(s,t) = (2s + 3\,t)i + (-s + 2t)j + (2t^2 - 3s)k$$

obtener la ecuación del plano tangente y recta normal a la superficie en el punto $x = 1$, $y = -4$.



c. Gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano. El gradiente en coordenadas curvilíneas.

Interpretar el concepto gradiente de una función vectorial de variable vectorial en cualquier sistema de referencia.

Dado un fenómeno físico representado por una función vectorial:

- Analizar sus variaciones utilizando los conceptos de divergencia, rotacional y laplaciano, según proceda, y en el sistema de coordenadas más conveniente.

c.1. Revisar los antecedentes consultando los números 7, 16, 17, 27, 31 y 32 de la lista del ANEXO 2.
Revisar el tema II de esta guía.

c.2. Estudiar en el cap. 7 las pp. 140 a 143 y analizar los problemas resueltos del 34 al 39 y del 42 al 44 del libro Cálculo Superior de Spiegel M. R.; estudiar el subtema 3.10, (pp. 114 a 121) de los Apuntes de Cálculo Vectorial que edita la Facultad.

c.3. Analizar los ejemplos de la guía.

c.4. Resolver los ejercicios del grupo 7.

EJEMPLO

1. Sean las ecuaciones de transformación $x = 2u + 6v$; $y = -4u + 3v$. Obtener la expresión que determina el gradiente de la función $f = 2u + v^2$ referida al sistema x, y en el punto $u = 1$, $v = 2$.

Solución:

$$\nabla f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u} \nabla u + \frac{\partial f}{\partial v} \nabla v \quad \text{y} \quad f(u,v) = 2u + v^2 \qquad \ldots (1)$$

Derivar (1) respecto a u y v respectivamente

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2 \quad \ldots (2) \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = 2v \quad \ldots (3)$$

ahora se procede a obtener $\nabla u$ y $\nabla v$

sabiendo que: $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\, i + \frac{\partial u}{\partial y}\, j$ ... (4)

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x}\, i + \frac{\partial v}{\partial y}\, j \quad \ldots (5)$$

En este sistema de ecuaciones no se encuentran de manera explícita $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Se necesita hacer una derivación implícita del sistema $x = 2u + 6v$ ... (6)

$y = -4u + 3v$ ... (7)

Derivando respecto a x a(6), (7)

$$1 = 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0 = -4\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x}$$

aplicar la regla de Cramer para despejar $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{30} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{10} \quad \ldots (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{4}{30} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2}{15} \quad \ldots (9)$$



ahora derivar a (6) y (7) respecto a y

$$0 = 2\frac{\partial u}{\partial y} + 6\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$1 = -4\frac{\partial u}{\partial y} + 3\frac{\partial v}{\partial y}$$

aplicar nuevamente la regla de Cramer y obtener $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{30} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{5} \quad \ldots (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{2}{30} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{15} \quad \ldots (12)$$

sustituyendo (8) y (11) en (4) así como (9) y (12) en (5)

$$\nabla u = \frac{1}{10}\, i - \frac{1}{5}\, j \quad \ldots (13)$$

$$\nabla v = \frac{2}{15}\, i + \frac{1}{15}\, j \quad \ldots (14)$$

Los valores aquí obtenidos así como (2) y (3) se sustituyen -- finalmente en $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u}\nabla u + \frac{\partial f}{\partial v}\nabla v$

entonces $\nabla f = 2\left(\frac{1}{10}\, i - \frac{1}{5}\, j\right) + 2v\left(\frac{2}{15}\, i + \frac{1}{15}\, j\right)$

agrupando $\nabla f = \left(\frac{2}{10} + \frac{4v}{15}\right) i + \left(\frac{-2}{5} + \frac{2v}{15}\right) j$

solo resta obtener $\nabla f$ para el punto $u = 1$ . $v = 2$

así $\nabla f(1,2) = \left(\frac{2}{10} + \frac{8}{15}\right) i + \left(\frac{-2}{5} + \frac{4}{15}\right) j$

$$\nabla f = \frac{11}{15} i - \frac{2}{15} j$$

EJERCICIOS. GRUPO 7

1. La llamada ley de Darcy $\overline{v} = -k\nabla h$ se escribe en forma matricial en $R^2$ como sigue:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_x & 0 \\ 0 & -k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix}$$ con $h = h(x,y)$, $k_x$, $k_y$ son ctes

Calcular a) rot $\overline{v}$ b) div $\overline{v}$ y verificar que si $k_x = k_y = k$

div $\overline{v} = -k\,\nabla^2 h$ y rot $\overline{v} = \overline{0}$

2. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, $x^2 + y^2 = 13$, en el punto P(3,2,-6).



# TEMA IV. INTEGRALES CURVILINEAS

## OBJETIVO

Proporcionar al estudiante el concepto de integral de un vector y la metodología para calcular integrales vectoriales reductibles a una variable; haciendo énfasis en sus aplicaciones a modelos matemáticos de problemas físicos.

## CONTENIDO

IV.1. Integral curvilínea; sus expresiones vectorial y física.

IV.2. Integral curvilínea a lo largo de una curva regular cerrada.

IV.3. Integral curvilínea como integral ordinaria.

IV.4. Relación entre la independencia de la trayectoria y la diferencial exacta.

IV.5. Potencial y campo conservativo.

ACTIVIDADES que comprenden los incisos:

a. Interpretación física de la integral curvilínea.

b. Integral curvilínea en campo conservativo. Diferencial exacta y su integración.

a. Interpretación física de la integral curvilínea.

Dado un campo vectorial, o una combinación entre varios de ellos, así como una trayectoria, efectuar la integración del campo resultante sobre dicha trayectoria para la resolución de problemas físicos o geométricos.

a.1. Revisar los antecedentes consultando los números 1, 12, 18, 19, 20, 27, 28, 30 y 31 de la lista del ANEXO 2.

Revisar el tema III actividad a de esta guía.

a.2. Estudiar el subtema 17.3 pp. 866 a 870) del libro Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica de Thomas G.B.; en el cap. 10 las pp. 195 a 197 y analizar los problemas resueltos 1 a 4 del mismo capítulo en el libro Cálculo Superior de Spiegel G. R.

a.3. Analizar los ejemplos de la guía.

a.4. Resolver los ejercicios del grupo 8.

EJEMPLO

1. Hallar el trabajo para mover una partícula material cuando actúa el campo de fuerzas $\overline{F} = (2xy - y)\, i + (x^2 - y^2)\, j$ a lo largo de la curva compuesta por las trayectorias siguientes:

a) La parábola $y^2 = x$ de $P(1,-1)$ a $Q(1,1)$

b) De $Q(1,1)$ a $R(2,4)$ sobre la parábola $x^2 = y$

(Nota: el trabajo pedido es de P a R)

Solución:

El trabajo pedido se puede obtener a partir de:

$$T = \int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_P^Q \overline{F} \cdot d\overline{r} + \int_Q^R \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

a) Tomando la trayectoria $y^2 = x$ de $P(1,-1)$ a $Q(1,1)$ la cual se tiene graficada en la Fig. 5.

Como se trata de una integral ordinaria, debe ser expresada en términos de una sola variable.

Se conoce la relación $y^2 = x$ y su diferencial será $2y\, dy = dx$



Entonces $\int_P^Q \overline{F} \cdot d\overline{r}$ será $\int_P^Q (2xy - y)dx + (x^2 - y^2)\, dy$ que expresándola en términos de una sola variable da

$$T_1 = \int_{y=-1}^{y=+1} (2y^2 y - y)2y\,dy + (y^4 - y^2)dy$$

$$T_1 = \int_{-1}^{1} (5y^4 - 3y^2)dy$$

la cual se integra $T_1 = y^5 - y^3 \Big|_{-1}^{1} = 1 - 1 - (-1 + 1) = 0$

$$T_1 = 0 \qquad \ldots (1)$$

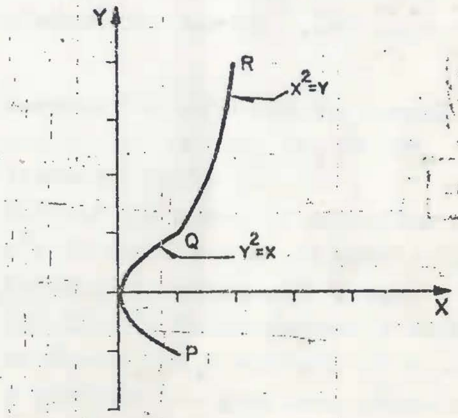



Figura 5

b) Se procede de igual manera al inciso anterior

$y = x^2, \quad dy = 2x\,dx \qquad \ldots (2)$

entonces $T_2 = \int_Q^R \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_Q^R (2y\,-y)dx + (x^2 - y^2)dy \quad \ldots (3)$

sustituyendo las ecuaciones (2) en (3)

$$T_2 \int_{x=1}^{x=2} (2\,x\,x^2 - x^2)dx + (x^2 - x^4)\,(2x\,dx)$$

$$T_2 \int_1^2 (-2x^5 + 4x^3 - x^2)dx = -\frac{2}{6}x^6 + x^4 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2$$

$$T_2 = \frac{-64}{3} + 16 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}$$

$$T_2 = \frac{-25}{3} \quad \ldots (4)$$

Finalmente el trabajo total será:

$T = T_1 + T_2$

$T = 0 - \dfrac{25}{3} \qquad T = -\dfrac{25}{3}$ unidades de trabajo

EJERCICIOS. GRUPO 8

1. Determinar el trabajo que se realiza al llevar una partícula de $P_1\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ al punto $P_2$ 0,0) a lo largo de la curva $y = \dfrac{4x^2}{\pi^2}$ a través del campo de fuerzas $\overline{F} = (y \text{ sen } x\ i + x \text{ sen } x\ j)$ si $\overline{F}$ está en Newtons; x, y en metros.



2. Calcular el trabajo realizado al desplazar una partícula en el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y) = (x - 2y)i + (y + 2x)j$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a lo largo de la curva

$$C: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \text{ sen } t \end{cases} \qquad \forall \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

b. Integral curvilínea en campo conservativo. Diferencial exacta y su integración.

Dado un modelo que implique la integración de una combinación de campos vectoriales sobre una trayectoria,

- Determinar si la integral es independiente o no de la trayectoria y resolver el problema seleccionando el método más conveniente.
- Utilizar los conceptos de campo vectorial conservativo y diferencial exacta, para simplificar el problema.

b.1. Revisar los antecedentes consultando los números 1, 12, 18, 19, 20, 27, 28, 30 y 31 de la lista del ANEXO 2.
Revisar los temas II actividad a, III actividad c y IV actividad a. de esta guía.

b.2. Estudiar el subtema 17.3 (pp. 870 a 880) del libro Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica de Thomas G.B.; del cap. 10 estudiar la p. 197 y analizar los problemas resueltos del 11 al 15 en el mismo capítulo en el libro Cálculo Superior de Spiegel M.R.

b.3. Analizar los ejemplos de la guía.

b.4. Resolver los ejercicios del grupo 9.

EJEMPLO

1. Un cuerpo es impulsado por una máquina que consume 1 lt de combustible por cada $2 \times 10^6$ kg . m de trabajo desarrollado. ¿Qué cantidad de combustible se necesita para llevar el cuerpo del punto $P_1(1,0,0)$ al punto $P_2(1,0,4)$km a través de la trayectoria C:

   C: $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t/\pi$

   ($x$, $y$, $z$ en km si $t$ está en min)

   y en contra del campo de fuerzas:

$$\overline{F} = \left(1 + \frac{3}{2} z\right) i - yj + \frac{3}{2} x\, k \qquad (|\overline{F}| \text{ en Ton si } x, y, z \text{ en km})$$

Solución:

Para calcular la cantidad de combustible "Q" que va a consumir el cuerpo basta con determinar el trabajo "T" realizado y, a partir del resultado, obtener la proporción de combustible requerido. En símbolos:

$$Q = \frac{T}{2 \times 10^6 \text{ kg . m}} \times 1 \text{ lt} \qquad \ldots (1)$$

El trabajo se calcula con la integral curvilínea:

$$T = \int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} \qquad \ldots (2)$$

Esta integral se simplifica si $\overline{F}$ tiene potencial, al que se le llamará $\phi$, puesto que T se reduce a la diferencia de potencial:

$$T = \phi(P_2) - \phi(P_1) \qquad \ldots (3)$$

y la integral no depende de la trayectoria, es decir, que $\overline{F} = \text{grad}\ \phi$, lo cual se verifica si $\overline{F}$ es irrotacional, o sea: rot $\overline{F} \equiv \overline{0}$.



Desarrollando:

$$\text{rot } \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 + \frac{3}{2} z & -y & \frac{3}{2} x \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{2} x\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-y\right)\right) - j\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{2} x\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(1 + \frac{3}{2} z\right)\right) + k\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(1 + \frac{3}{2} z\right)\right)$$

$$\text{rot } \overline{F} = i\ (0) - j\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) + k(0) \equiv \overline{0}$$

Se concluye, por lo dicho anteriormente, que $\overline{F}$ tiene potencial, el cual se obtiene por integración. Se sabe ya que $\overline{F} = \text{grad}\ \phi$, entonces se tiene la diferencial exacta:

$$\overline{F} \cdot d\overline{r} = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz = d\phi$$

que se integrará como sigue:

$$\phi = \int \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + g(y,z) = \int\left(1 + \frac{3}{2}z\right) dx + g(y,z)$$

donde se nota que al integrar respecto a x, las variables restantes: y, z permanecen constantes. Quedando:

$$\phi = \left(1 + \frac{3}{2}z\right)\int dx + g(y,z) = \left(1 + \frac{3}{2}z\right) x + g(y,z)$$

Ahora se verifica el segundo sumando de $\overline{F} \cdot d\overline{r}$, diferenciando la función que se acaba de obtener respecto a y:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} dy = \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} dy = -y\ dy \quad \therefore \quad \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = -y$$

y se integra:

$$g = -\frac{1}{2} y^2 + c(z)$$

recordando que z es constante para este término.

Por el momento se tiene que $\phi = \left(1 + \frac{3}{2}z\right)x - \frac{1}{2}y^2 + C(z)$, y se verifica el tercer sumando de $\bar{F} \cdot d\bar{r}$, diferenciando respecto a z:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}\, dz = \left[\frac{3}{2}x + C'(z)\right] dz = \frac{3}{2}x\, dz \;\therefore\; C'(z) = 0$$

de aquí se concluye que $C'(z)$ = cte. = c

Finalmente se escribe:

$$\phi = \left(1 + \frac{3}{2}z\right) x - \frac{1}{2}y^2 + c$$

pudiendo verificar fácilmente que grad $\phi = \bar{F}$ (se invita a hacerlo)

La solución está expresada en (3) quedando que el trabajo vale:

$$T = \phi(1,0,4) - \phi(1,0,0) = \left[\left(1 + \frac{3}{2}(4)\right) \cdot (1) - \frac{0^2}{2} + c\right] - \left[\left(1 + \frac{3}{2}(0)\right) 1 - \frac{0^2}{2} + c\right]$$

$$T = [1 + 6] - [1] = 6 \text{ Ton . km} = 6 \times 10^6 \text{ kg . m}$$

y la cantidad de combustible dada en (1) es:

$$Q = \frac{6 \times 10^6}{2 \times 10^6} \text{ lts} = 3 \text{ lts}$$

Se observa que la integral es independiente de la trayectoria, y que depende exclusivamente de los puntos final e inicial.

En caso de que no hubiera existido $\phi$, no se hubiera tenido más opción que integrar (2) a lo largo de la trayectoria dada. En este problema este procedimiento conduce desde luego al mismo valor de T = 6 Ton · km. Se sugiere realizarla (aquí se deja indicada):



$$T = \int_{P_1}^{P_2} \underbrace{\left(1 + \frac{3}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right)\right)}_{z} \underbrace{(-\text{sen } t\, dt)}_{dx} - \underbrace{(\text{sen } t)}_{y} \underbrace{(\cos t\, dt)}_{dy} + \frac{3}{2} \underbrace{\cos t}_{x} \underbrace{\left(\frac{dt}{\pi}\right)}_{dz}$$

donde $P_1$ se reduce a t = 0 y $P_2$ es $t = 4\pi$.

EJERCICIOS. GRUPO 9

1. Si se sabe que $d\phi = (3x^2 + 6y)\, dx + (3y^2 + 6x)\, dy$ es una diferencial exacta, obtener:

   a) el gradiente de la función $\phi$

   b) $\int_C \nabla\phi \cdot d\bar{r}$ a lo largo de la elipse : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

2. Sea $\mu$ una función $\mu = \mu(x,y)$ tal que $d\mu = 4xydx + 2(x^2 + y)dy$; si se sabe que $\mu(3,2) = 30$, calcular $\mu(2,1)$.

TEMA V. INTEGRALES MULTIPLES

OBJETIVO

Proporcionar al estudiante la generalización del concepto de integral a funciones de más de una variable y los métodos para el cálculo de integrales múltiples.

CONTENIDO

V.1. Integral doble en coordenadas cartesianas.
V.2. Interpretación geométrica y propiedades de la integral doble.
V.3. Cálculo de la integral doble por medio de la reiterada. Definición adecuada de regiones.
V.4. Teorema de Green.
V.5. Integral doble en coordenadas curvilíneas. Aplicación a coordenadas polares.
V.6. Cálculo de áreas planas, volúmenes bajo una superficie y otras aplicaciones de la integral doble.
V.7. Aplicaciones del teorema de Green.
V.8. Area de una superficie alabeada.
V.9. Integral triple en coordenadas cartesianas.
V.10. Interpretación física y propiedades de la integral triple.

ACTIVIDADES que comprenden los incisos:

a. Aplicaciones de la integral doble al cálculo de áreas planas y volúmenes.
b. Area de una superficie alabeada.
c. Aplicaciones del teorema de Green.

a. Aplicaciones de la integral doble al cálculo de areas planas y volúmenes:

- Dada una región en $E^2$, especificarla de manera que la expresión pueda simplificar, adecuadamente, el cálculo de una integral doble de una función dada sobre dicha región.



- Aplicar el concepto de integral doble para calcular áreas de regiones cualesquiera en el plano y volúmenes de cilindros con generatriz paralela a un eje.

a.1. Revisar los antecedentes consultando los números 6, 18, 19, 20, 21 y 22 de la lista del ANEXO 2.
Revisar los temas I actividad b y III actividad c .

a.2. Estudiar los subtemas 16.1 y 16.2 (pp. 811 a 818) y 16.4 (pp. 823 a 826) del libro Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica de Thomas G. B; en el cap. 9 estudiar las pp. 180 a 182 y los problemas resueltos del 1 al 4 y del 6 al 8 en este capítulo en el libro Cálculo Superior de Spiegel M.R.

a.3. Analizar los ejemplos de la guía.

a.4. Resolver los ejercicios del grupo 10.

EJEMPLOS

1. Calcular el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones siguientes:

$$x^2 + z^2 = 9; \qquad y = 2x; \qquad y = 0; \qquad z = 0$$

Solución:

La ecuación $x^2 + z^2 = 9$ representa un cilindro circular recto de radio 3 y eje de simetría sobre el eje y. La ecuación y = 2x corresponde a un plano vertical que pasa por el origen y cuya traza en el plano xy es una recta de pendiente 2. La combinación conduce al vo lumen buscado:

Se tienen dos opciones sencillas para calcular el volumen: definiendo una región en xy en forma triangular o en xz en forma de cuadrante circular.

Sigue cualquiera de ellas, recordando que el elemento diferencial de volumen es un prisma cuya base contiene dos diferenciales (con las variables independientes) y cuya altura corresponde, en este caso, a la variable dependiente.

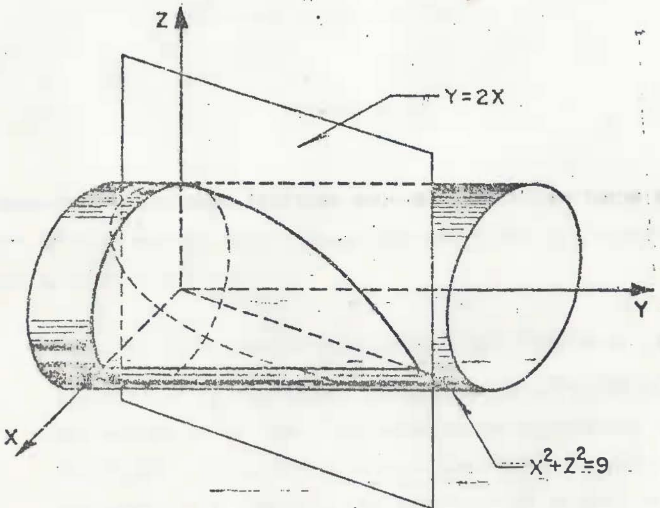



Figura 6

OPCION 1. Se usará la región en xy: $V=\iint_{R_{xy}} Z\,dx\,dy$, con los límites: $\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{2x}\sqrt{9-x^2}\,dy\,dx$

$$V=\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,\left[y\right]_0^{2x} dx$$



$$V=\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,2x\,dx$$

Esta integral es inmediata, del tipo:

$$\int (a-u)^{1/2}\,du = -\frac{(a-u)^{3/2}}{3/2}+c$$

entonces se obtiene:

$$V=-\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big|_0^3 = 18\ u^3$$

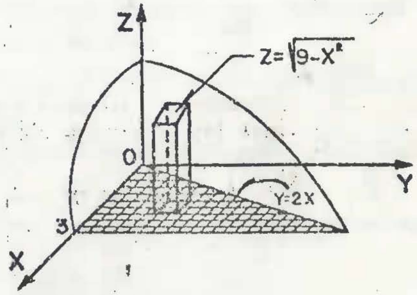



Figura 7

OPCION 2: Se usará la región en xz:

$$V=\iint_{R_{xz}} y\,dx\,dz=\iint_{R_{xz}} 2x\,dx\,dz$$

pero V conviene ser calculada en coordenadas polares, dado que Rxz es un cuadrante circular, quedando:

$$V=\iint_{R_{r\theta}} \underbrace{2r\cos\theta}_{x}\ \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dArea}=\int_{r=0}^{3}\int_{\theta=0}^{\pi/2} 2r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$V = 2\left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^3 \left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi/2} = 18\ u^3$$

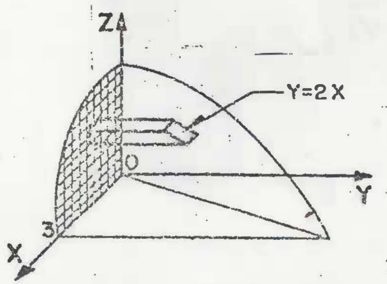



Figura 8

2. Encontrar el volumen limitado por las superficies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z = x^2 + y^2$ que se encuentra arriba del plano xy, usando coordenadas polares ó cilíndricas.

Para resolver este ejemplo se sugieren los siguientes pasos:

a) Identificar la región de integración en el plano xy, como la proyección de la curva que resulta de intersectar las dos superficies. Basta con hacerlas simultáneas, quedando una circunferencia de radio 1, con centro en el origen, en un plano paralelo al xy a una cota z = 1.

b) Plantear la diferencial de volumen: dv = ( z cono - z parab) dA donde la diferencial de área conviene en coordenadas polares, por ser circular la región de integración:

$$R = \left\{(\rho,\theta) \mid 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta < 2\pi\right\}$$

Las ecuaciones del cono y del paraboloide son escritas en coordenadas polares, respectivamente:

$Z_{cono} = \rho$ ; $Z_{parab} = \rho^2$



dv es entonces: $dv = (\rho - \rho^2)\ \rho\ d\rho\ d\theta$

c) El resultado de la integral, antes de substituir los límites debe ser:

$$V = \left[\frac{1}{3}\rho^3 - \frac{1}{4}\rho^4\right]\Bigg|_0^1 \left[\theta\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

d) El volumen buscado vale $\pi/6$

3. Calcular $\int\int_R (x^2 + y^2)\ dy$, donde R es la región que en un plano uv tiene la forma que muestra la figura 9, obtenida de acuerdo a la transformación $x + y = u$; $x - y = v$.

Para resolver este caso observar que falta transformar el integrando y la diferencial de área.

a) Determinar x,y a partir de la transformación en términos de u,v.

b) Calcular $x^2 + y^2$, se debe obtener: $\dfrac{u^2 + v^2}{2}$

c) Verificar que el jacobiano de la transformación es:

$$J\left(\frac{x,\ y}{u,\ v}\right) = \frac{-1}{2}$$

d) Demostrar que la integral a resolver es:

$$\int\int_R (x^2 + y^2)dx\ dy = \int_0^2 \int_0^2 \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right)\left|-\frac{1}{2}\right| du\ dv$$

e) La integral tiene como valor $\dfrac{8}{3}$

Esta integral representa el momento polar de inercia de un paralelogramo. Dibujar la región en xy y calcular su valor sin usar la transformación propuesta aquí. El resultado deberá ser 8/3.

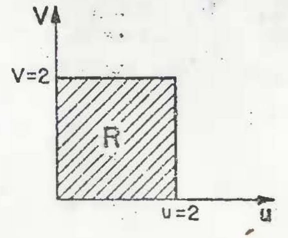



Figura 9

EJERCICIOS. GRUPO 10

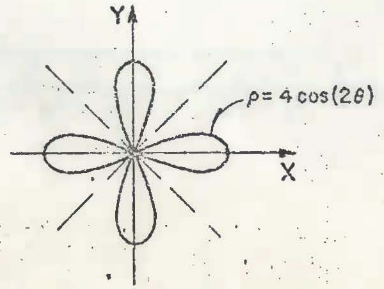
1. Evaluar usando coordenadas polares, la integral doble

$$\iint_R e^{(x^2 + y^2)}\, dx\, dy$$

donde R es la región en el primer cuadrante dentro del círculo $x^2 + y^2 = a^2$

2. Encontrar el volumen del sólido limitado por las superficies $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = x^2 + 2y^2$, $x + y = 1$.

3. Calcular el área limitada por la curva polar de ecuación $\rho = 4 \cos (2\theta)$ donde su gráfica es la mostrada en la figura 10.






b. Area de una superficie alabeada.

Aplicar el concepto de integral doble para calcular áreas de superficies alabeadas, por el método más conveniente.

b.1. Revisar los antecedentes consultando los números 6 y 18 a 22 de la lista del ANEXO 2.
Revisar los temas II actividad c, II actividad b, III actividad b y V actividad a de esta guía.

b.2. Estudiar el subtema 16.9 (pp. 838 a 847) del libro Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica de Thomas G.B.; estudiar en el cap. 10 las pp. 198 y 199 y analizar los problemas resueltos del 16 al 21 del libro Cálculo Superior de Spiegel M.R.

b.3. Analizar los ejemplos de la guía.

b.4. Resolver los ejercicios del grupo 11.

EJEMPLO

1. Determinar el área de la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ que queda dentro del cono $x^2 + z^2 = y^2$ para $y \geq 0$ Fig. 11

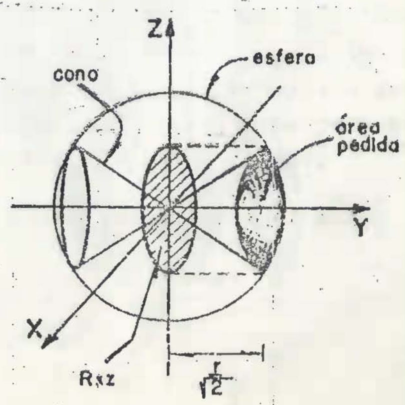



Figura 11

El área definida por la intersección del cono y la esfera es un casquete esférico cuya proyección en el plano xz es una circunferencia de radio $\frac{r}{\sqrt{2}}$. Esto puede comprobarse haciendo simultáneas ambas ecuaciones.

Substituir la igualdad incluida en el cono, dentro de la ecuación de la esfera, para ello se arreglan los términos:

$$\underbrace{(x^2 + z^2)} + y^2 = r^2; \text{ pero por el cono}$$

$$y^2 + y^2 = r^2 \text{ , o sea}$$

$$y^2 = \frac{r^2}{2} \quad ; \quad y = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

que es la ordenada de la intersección, el radio de la circunferencia se obtiene al substituir en el cono:

$$x^2 + z^2 = y^2 \; ; \quad x^2 + z^2 = \frac{r^2}{2} \quad \text{(circunferencia de radio } \frac{r}{\sqrt{2}} \text{)}$$

Como la intersección y su proyección son circulares, conviene transformar el problema a coordenadas polares. La diferencial de área de la superficie pedida (la esfera), es fácilmente calculable con la fórmula:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} \; dx\, dz, \text{ para la región } R_{xz}, \text{ donde:}$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2 - z^2} \; ; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{r^2 - x^2 - z^2}} \; ;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2z}{2\sqrt{r^2 - x^2 - z^2}}$$

Substituyendo:

$$ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2 - z^2} + \frac{z^2}{r^2 - x^2 - z^2}} \; dx\, dz$$

simplificando:



$$ds = \sqrt{\frac{(r^2 - x^2 - z^2) + x^2 + z^2}{r^2 - x^2 - z^2}} \; dx\, dz = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - z^2}} \; dx\, dz$$

Ahora se transformará a coordenadas polares $(\rho, \theta)$, recordando que $\rho = x^2 + z^2$, así como $dx\, dz = \rho \; d\rho \; d\theta$:

$$ds = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \; \rho \;\; d\rho \;\; d\theta$$

La región por su parte es simplemente $0 \leq \rho \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$ ; $o \leq \theta \leq 2\pi$. Con esto se tiene:

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{r/\sqrt{2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \, \rho d\rho \; d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{2\pi} r \int_0^{r/\sqrt{2}} \frac{\rho \; d\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$$

la última integral es directa, del tipo:

$$\int (a - u)^{-1/2} \; du = - \frac{(a - u)^{1/2}}{1/2} + c$$

faltando sólo completar $du = 2 \; \rho \; d\rho$; queda:

$$S = 2\pi r \left[ -2(r^2 - \rho^2)^{1/2} \cdot (1/2) \right]_0^{r/\sqrt{2}} = -2\pi r \left[ \left(r^2 - \frac{r^2}{2}\right)^{1/2} - (r^2 - 0^2)^{1/2} \right]$$

$$S = -2\pi r \left[ r/\sqrt{2} - r \right] = 2\pi r^2 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \text{ unidades de área.}$$

EJERCICIOS. GRUPO 11

1. Calcular el área de la parte del plano $6x + 3y + 2z = 12$ que está situada en el primer octante.

2. Hallar el área de la porción de cono $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ que se encuentra entre los planos $y = 2$ ; $y = 5$.

c. Aplicaciones del teorema de Green.

Aplicar el Teorema de Green para transformar integrales curvilíneas a integrales dobles y viceversa, calculando sus valores respectivos.

c.1. Revisar los antecedentes consultando los números 6 y 18 a 22 de la lista del ANEXO 2.
Revisar los temas IV y V actividad a de esta guía.

c.2. Estudiar el subtema 17.5 (pp. 888 a 898) del texto Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica de Thomas G.B.; en el cap. 10 estudiar la p. 197 y analizar los problemas resueltos del 5 al 10 en este capítulo en el libro Cálculo Superior de Spiegel - M. R.

c.3. Analizar los ejemplos de la guía.

c.4. Resolver los ejercicios del grupo 12.

EJEMPLO

1. El momento estático de un área respecto al eje y se calcula con la expresión: $M_y = \iint_R x\,dA$, donde R es la región plana que define el área.

Utilizando el teorema de Green, proponer una integral curvilínea que permita calcular $M_y$ y utilizar dicho teorema para verificar el resultado con el área de la figura 12.

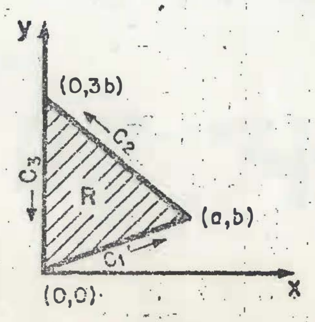



Figura 12



Solución:

El teorema de Green establece que:

$$\oint_c P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

En este problema se quiere calcular $M_y = \iint_R x\,dA$, entonces se -- identifica:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x \qquad \dots (1)$$

Se tienen que proponer dos funciones P y Q que satisfagan (1), pueden ser las siguientes:

$$P = 0 \; ; \; \frac{\partial Q}{\partial x} = x \; \Rightarrow \; Q = \frac{x^2}{2} \qquad \text{(hay infinitas soluciones)}$$

Entonces:

$$M_y = \oint_c 0\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy = \oint_c x^2\,dy,$$ que es la integral curvilínea a utilizar.

Ahora se definirá a la curva c: $c = c_1 \cup c_2 \cup c_3$, donde:

$$c_1 = \left\{ y = \frac{b}{a} x \; ; \; 0 \leq x \leq a \right\} \qquad c_2: \left\{ y = -\frac{2b}{a} x + 3b; \; a \leq x \leq 0 \right\}$$

$$c_3 = \left\{ x = 0 \; ; \; 0 \leq y \leq 3b \right\}$$

Sustituyendo en la integral curvilínea de My:

$$My = \oint_c \frac{x^2}{2}\,dy = \underbrace{\int_{c_1} \frac{x^2}{2}\,dy}_{I_1} + \underbrace{\int_{c_2} \frac{x^2}{2}\,dy}_{I_2} + \underbrace{\int_{c_3} \frac{x^2}{2}\,dy}_{I_3}$$

Realizar cada integral por separado:

$$I_1 = \int_{c_1} \frac{x^2}{2}\,dy\ , \quad \text{en } c_1 \text{ se tiene: } \quad dy = \frac{b}{a}\,x\,dx$$

$$I_1 = \int_0^a \frac{x^2}{2}\left(\frac{b}{a}\,x\,dx\right) = \frac{b}{2a}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^a = \frac{a^3b}{6a} = \frac{a^2b}{6}$$

$$I_2 = \int_{c_2} \frac{x^2}{2}\,dy\ , \quad \text{donde } dy = -\frac{2b}{a}\,dx$$

$$I_2 = \int_a^0 \frac{x^2}{2}\left(-\frac{2b}{a}\,dx\right) = -\frac{b}{a}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^0 = \frac{ba^3}{3a} = \frac{a^2b}{3}$$

$$I_3 = \int_{c_3} \frac{x^2}{2}\,dy\ ; \text{ pero } x = 0 \ \therefore\ I_3 = \int_{c_3} 0\,dy = 0$$

$M_y$ es la suma de las tres integrales: $M_y = \dfrac{a^2b}{6} + \dfrac{a^2b}{3} + 0 = \dfrac{3a^2b}{6}$

$$M_y = \frac{a^2b}{2}$$

Para hacer la verificación del teorema se tiene que calcular la integral doble propuesta. Se necesita definir la región R:

$$R = \left\{ (x,y) \mid 0 \le x \le a\ ,\ \frac{b}{a}\,x \le y \le -\frac{2b}{a}\,x + 3b \right\}$$

y se tiene la integral:

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^a \left( \int_{\frac{b}{a}x}^{-\frac{2b}{a}x + 3b} x\,dy \right) dx =$$



$$= \int_0^a xy \Bigg|_{\frac{b}{a}x}^{-\frac{2b}{a}x + 3b} dx$$

$$M_y = \int_0^a x\left(-\frac{2b}{a}\,x + 3b - \frac{b}{a}\,x\right) dx = \int_0^a \left(3bx - \frac{3bx^2}{a}\right) dx =$$

$$= 3b \int_0^a \left(x - \frac{x^2}{a}\right) dx$$

y realizar la última integral en términos de x:

$$M_y = 3b\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}\right]_0^a = 3b\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3a}\right] = \frac{a^2b}{2}$$

que es el mismo valor obtenido al usar la integral curvilínea y el teorema queda verificado.

EJERCICIO: GRUPO 12

1. Demostrar que la magnitud de la integral $\int_C (2xy - y)dx + x^2dy$, -- donde "c" es una trayectoria cerrada, es igual al área del dominio limitado por dicha trayectoria.

# TEMA VI. MAXIMOS Y MINIMOS PARA FUNCIONES DE DOS O MAS VARIABLES

## OBJETIVO

Proporcionar al estudiante los conceptos relativos a máximos y mínimos para funciones de varias variables, haciendo énfasis en la importancia de la optimización de la Ingeniería.

## CONTENIDO

VI.1. Definición de máximos y mínimos. Conceptos correlativos.

VI.2. Criterio de la segunda derivada.

VI.3. Método de los multiplicadores de Lagrange. Introducción a la programación no lineal.

ACTIVIDADES que comprenden los incisos:

a. Máximos y mínimos de funciones de varias variables. Criterio ~~de la segunda~~ derivada.

b. Métodos de los multiplicadores de Lagrange para máximos y mínimos restringidos.

a. Máximos y mínimos de funciones de varias variables. -- Criterio de la segunda derivada.

Dado un problema de optimación modelable por una -- función explícita de variable vectorial:

- Determinar todos sus puntos críticos.
- Discriminar por el criterio de la segunda derivada.

a.1. Revisar los antecedentes consultando los números 23, 33, 35 y 36 de la lista del ANEXO 2. Revisar el tema II actividad a. de esta guía.



a.2. Estudiar el subtema 18.5 (pp. 954 a 958) -- del libro Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica de Thomas G. B.; y estudiar en el cap. 8 la p. 164 y los problemas resueltos del 20 al 23 en el libro Cálculo Superior de Spiegel M. R.

a.3. Analizar los ejemplos de la guía.

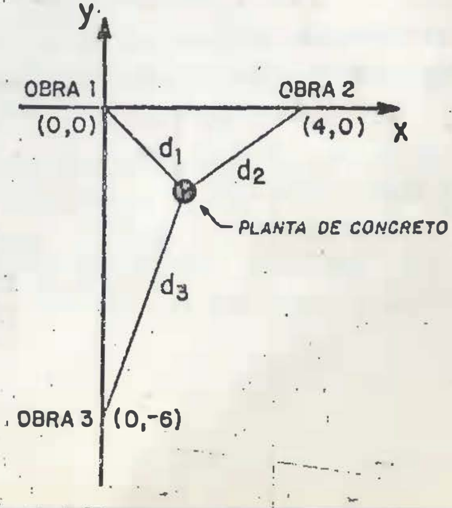
a.4. Resolver los ejercicios del grupo 13.

EJEMPLO

i. Una compañía concretera tiene tres contratos para surtir concreto premezclado en el estado de Tamaulipas. Si las obras están localizadas: La segunda a 4 km al Oriente de la primera y la tercera a 6 km al Sur de la primera, la compañía desea saber cuál es el punto óptimo para instalar la planta. El criterio a seguir es localizar el punto en el que la suma de los cuadrados de las distancias de la obra a la planta sea mínima.(ver fig.13).

Solución

Si se localizan las obras en un sistema de referencia, se obtiene:



Primero se planteará la función a minimizar, que es la suma de los cuadrados de las distancias de las obras a la planta. Calcular primero $d_1$, $d_2$ y $d_3$.

$$d_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

$$d_3 = \sqrt{x^2 + (y+6)^2}$$

Por lo que la función a minimizar será:

$$f(x,y) = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = x^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y+6)^2$$

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + (x-4)^2 + (y+6)^2$$

Ahora hay que encontrar los puntos críticos, para lo cual hay que calcular el gradiente de "f" e igualarlo a cero, con lo que se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2(x-4) = 0 \quad ; \qquad 6x - 8 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 2(y+6) = 0 \quad ; \qquad 6y + 12 = 0 \qquad (2)$$

que son dos ecuaciones lineales de una sola variable cada una. De (1) se obtiene $x = 4/3$ y de (2) $y = -2$, por lo que el punto crítico es $P(4/3, -2)$.

Al analizar su naturaleza por el criterio del Hessiano, haciendo el determinante y analizando su signo obtenemos:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$$



con lo cual

$$H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 36 > 0 \quad \text{con } A + C = 12 > 0$$

y se concluye que la función solamente tiene un mínimo, que es el punto $(4/3, -2)$

EJERCICIOS. GRUPO 13

1. Establecer los puntos donde la función $z = -x^2 + y^3 - 3y + 1$ tiene máximos, mínimos o puntos silla, indicando en cada caso qué tipo de punto es cada uno de los obtenidos.

2. Hallar el máximo relativo de la función $z = x^2y(4 - x - y)$. Calcular el valor de "z" en el punto $(6,-1)$. Explicar y comentar este resultado en relación con el anterior.

b. Método de los multiplicadores de Lagrange para máximos y mínimos restringidos.

Dado un problema de optimización modelable por una función explícita de variable vectorial, sujeta a restricciones en su dominio:

- Determinar todos los valores extremos de la función utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

  b.1. Revisar los antecedentes, consultando los números 23 y 26 de la lista del ANEXO 2.
  Revisar el tema II de esta guía.

  b.2. Estudiar el subtema 15.11 (pp. 782 a 790) del libro Cálculo Infinitesimal y Geometría Analíti ca de Thomas G.B.; y estudiar en el cap 8 la p. 164 y los problemas resueltos 24 a 27 del libro Cálculo Superior de Spiegel M. R.

b.3. Analizar los ejemplos de la guía.

b.4. Resolver los ejercicios del grupo 14.

EJEMPLOS

1. Se desea construir un canal trapecial de 10 m² de área libre y recubierto de concreto como se ve en la figura 14. Determinar sus dimensiones para que el recubrimiento sea mínimo.

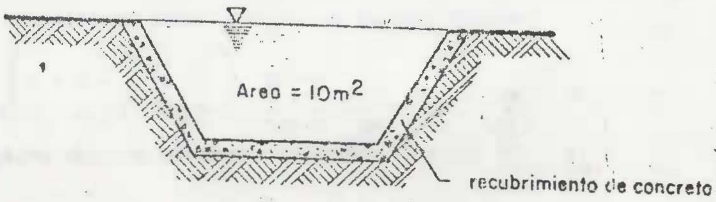



Figura 14

Solución:

Sean las dimensiones a buscar como se ve en la figura 15.

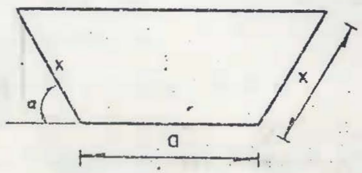



Figura 15

Así teniendo que el área se define fácilmente por:



$$A = \frac{\text{base mayor} + \text{base menor}}{2} \times \text{altura}$$

En este caso:

$$A = \left[\frac{(a + 2x\cos\alpha) + a}{2}\right](x \operatorname{sen}\alpha), \text{ o sea:}$$

$A = (a + x\cos\alpha)(x \operatorname{sen}\alpha)$; se sabe que A debe valer 10 m². Esta es la restricción que se escribe facilmente:

$$A = (a + x\cos\alpha)(x \operatorname{sen}\alpha) - 10 = 0$$

Por otra parte se está obligado a reducir la longitud de recubrimiento, esto es:

$$\ell = 2x + a \ (\text{mínima})$$

que recibe el nombre de función objetivo.

La solución de este problema se hará por medio del método de los multiplicadores de Lagrange, que en forma escalar se escribe:

$$L = \ell + \lambda A$$

donde $\lambda$ es el multiplicador de Lagrange, no nulo. Las variables independientes son $x$, $a$, $\alpha$ ; derivar la expresión de Lagrange respecto a ellas e igualar a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 + \lambda\{(a + x\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha + x\operatorname{sen}\alpha(\cos\alpha)\} = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 1 + \lambda\{x\operatorname{sen}\alpha\} = 0 \quad \ldots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 + \lambda\{(a + x\cos\alpha)x\cos\alpha + x\operatorname{sen}\alpha(-x\operatorname{sen}\alpha)\} = 0 \quad \ldots (3)$$

y resolver el sistema. De (3), como $\lambda \neq 0$, se tiene que:

$$a\cos\alpha + x(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0 \quad \ldots (4)$$

por otro lado, de (1) y (2) se puede igualar $\lambda$:

$$\lambda = \frac{-2}{a\operatorname{sen}\alpha + 2x\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{-1}{x\operatorname{sen}\alpha}$$

con lo que resulta: $2x\operatorname{sen}\alpha = a\operatorname{sen}\alpha + 2x\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

$$a + x(2\cos\alpha - 2) = 0 \quad \ldots (5)$$

de (5) en (4), se substituye a:

$$(2 - 2\cos\alpha)(x\cos\alpha) + x(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha) = 0$$

que se reduce a:

$$2\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha = 0 \ ; \quad 2\cos\alpha - 1 = 0$$

de donde:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \alpha = \pi/3 \qquad \ldots (6)$$

llevando este valor a (4):

$$\frac{a}{2} + x\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = 0 \ ; \quad \frac{a}{2} - \frac{x}{2} = 0 \qquad \therefore a = x$$

(observar que llevando $\alpha = \pi/3$ a (5) se obtiene desde luego el mismo resultado).

Ahora falta utilizar estos valores en la restricción:

$$A = \left(a + a\frac{1}{2}\right)\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 10 = 0$$

con lo que se obtiene el valor de "a": $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = 10$

Concluyendo :

$$a = \frac{40}{3\sqrt{3}} \doteq 2.77 \ ; \quad x \doteq 2.77 \ ; \quad \alpha = \pi/3$$

La longitud de recubrimiento de concreto es: $\ell = 3a \doteq 8.32$ m

Verificar que efectivamente es la longitud mínima. Para ello definir otras dimensiones que permitan obtener un área libre de 10 $m^2$ . Por ejemplo $\alpha = \pi/2$, $a = 3$ m, $x = 10/3$ m (canal rectangular). La longitud de recubrimiento es:

$$\ell = 3 + 2\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{29}{3} = 9.67 \text{ m} > 8.32 \text{ m}$$

Se concluye que las dimensiones obtenidas son las que conducen al mínimo de recubrimiento.

2. Encontrar el punto de menor cota de la curva de intersección de la superficie $z = (37/6) + x^2 + y^2 + 4xy$ y el plano $x + y + z = 6$.



Para resolver este problema se sugiere este procedimiento:

a) definir la función objetivo, en este caso se trata de z

b) definir la restricción como el plano dado

c) utilizar la expresión $\nabla F = \lambda \nabla G$, para obtener el sistema

$$2x + 4y = \lambda \ ; \quad 2y + 4x = \lambda \ ; \quad -1 = \lambda$$

d) resolver el sistema anterior, obteniendo

$$y = x = -1/6; \quad z = \frac{34}{6}$$

e) demostrar que el valor obtenido es mínimo comparando con otros puntos que verifiquen la restricción.

## EJERCICIOS. GRUPO 14

1. Una caja en forma de prisma rectangular debe tener un volumen de 12 $m^3$. El material para construir la base cuesta \$450.00 /$m^2$ , mientras que el material para los lados cuesta \$150.00/$m^2$ . ¿Qué dimensiones debe tener para que el costo sea mínimo? ¿Cuál es dicho costo? (utilizar multiplicadores de Lagrange).

2. Determinar las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo que tiene tres de sus caras en los planos coordenados, un vértice en el origen y otro vértice en el primer octante sobre el plano $4x + 3y + z = 12$.

## PRUEBA DE AUTOEVALUACION

Determinar la ecuación de la superficie que tiene como directriz la curva $x = z + 1$, $y = z^2 + 2z + 1$ y cuya generatriz es paralela a una recta fija de números directores (2,1,1 )

Hallar la derivada de la función $u = x^2 - 3yz + 5$ en el punto m (1,2,-1) en la dirección que forma ángulos iguales con todos los ejes coordenados.

Determinar el gradiente de $\mu = r^2 \cos\theta$ en coordenadas esféricas.

Un campo está engendrado por una fuerza de magnitud constante F, -- que tiene la dirección del semieje positivo OX. Hallar el trabajo de dicho campo, cuando un punto material describe, en el sentido de las agujas del reloj, el cuarto del círculo $x^2 + y^2 = r^2$ que se encuentra en el primer cuadrante.

Hallar el volumen limitado por las superficies $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$.

Entre todos los triángulos de perímetro igual a 2p hallar el que -- tiene mayor área.



## 8. SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

GRUPO 1.

1. En este caso se tienen dos directrices, que son las parábolas con vértice en el origen que pasan por P y Q. Para la directriz que pasa por P se tiene la ecuación de condición $\alpha^2 = 48$ y para la que pasa por Q la ecuacion de condición es $\beta^2 = 8$. La ecuación de la superficie es $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = z$.

2. La ecuación de la terraja es una hipérbola en el plano yz. Conociendo la ecuación general de una de estas curvas y sabiendo que pasa por los puntos P y Q se pueden determinar las --- constantes que faltan. La ecuación de la superficie que se - genera es: $x^2 + z^2 - y^2 = 36$ que es un hiperboloide de revo-- lución de un manto.

3. La ecuación de la circunferencia es de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ en donde h, k son las coordenadas del centro. La ecuación de condición es $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 3)^2 = 4$. Finalmente, la ecuación del cilindro es

$$\left(\frac{x}{(2/3)z} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{(1/3)z} - 3\right)^2 = 4$$

GRUPO 2.

1.a. Elipsoide con centro en el origen, semiejes a,b,c, en x,y,z respectivamente.

b. Hiperboloide elíptico de un manto, centro en el origen.

c. Cono elíptico, vértice en el origen, eje de simetría el z.

d. Paraboloide elíptico, vértice en el origen, abre hacia las z positivas si $c > 0$ y hacia las z negativas si $c < 0$.

e. Par de rectas que pasan por el origen de pendientes simétricas respecto a los ejes x, y.

b.2. Se trata de una cuádrica con centro. Determinando sus trazas con los planos coordenados y secciones con planos paralelos al plano xz se puede dibujar la superficie que es un hiperboloide elíptico de un manto.

GRUPO 3.

1. Primero verificar que ambos tienen como común el punto (2,-3,1) y después probar que los gradientes de ambas superficies son paralelos. Las superficies sí son tangentes.

2. El área de la elipse es $A = \pi ab$ en donde a, b son sus semiejes. Usando diferenciales se obtiene el error $= 0.137\ m^3$.

GRUPO 4.

1. La máxima pendiente es $\sqrt{5}$ en la dirección del vector $(2i - j) / \sqrt{5}$. La variación en la dirección de P a Q es $-3\sqrt{5}/5$.

2. Considerar que $\omega = f(r,s)$ en donde $r = x + at$, $s = y + bt$ y calcular las derivadas que intervienen usando la regla de la cadena. La expresión se verifica.

GRUPO 5.

1. a) Expresar $\overline{r} = xi + yj + zk$ y obtener $|\overline{v}| = |\dot{\overline{r}}|$ ; b = 2

b) Recordar que $\overline{a} = \dfrac{d\overline{v}}{dt} = \dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}$ ; $\overline{a} = -18\ \text{sen}3ti - 18\cos 3tj$



c) $\overline{a}_T = (\overline{a} \cdot T)T$ donde T es el vector tangente a $\overline{r}$ ; $\overline{a}_T = $

d) $\overline{a} = \overline{a}_N + \overline{a}_T$ ; $|\overline{a}| = 18$

GRUPO 6.

1. $\overline{r}(s,t) = x(s,t)i + y(s,t)j + z(s,t)k$ ; t = 1, s = 2; $N = -2i + 17j + 7k$ plano tangente $2x - 17y - 7z + 98 = 0$. Recta normal

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+4}{17} = \frac{z+4}{7}$$

Recordar que $\overline{N} = \dfrac{\partial\overline{r}}{\partial s} \times \dfrac{\partial\overline{r}}{\partial t}$

GRUPO 7.

1. Expresar $\overline{v} = v_x i + v_y j$ ; $v_x$, $v_y$ obtenerlos del producto matricial indicado.

a) $\text{rot}\ \overline{v} = \left(-k_y \dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} + k_x \dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}\right) k$,

b) $\text{div}\ \overline{v} = \left(-k_x \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} - k_y \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)$

2. Ecuación de la recta buscada: $\dfrac{x - x_0}{N_x} = \dfrac{y - y_0}{N_y} = \dfrac{z - z_0}{N_z}$

donde $\overline{N} = N_x i + N_y j + N_z k = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2$ ; $\overline{N}_1$ vector normal a la superficie 1. $\overline{N}_2$ vector normal a la superficie 2.

$\overline{N}_1 = 6i + 4j - 12k$ , $\overline{N}_2 = 6i + 4j$ $\overline{N} = -4i + 12j$.

Recta $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y-2}{12}$

$z = -6$

GRUPO 8

1. Expresar $\int \overline{F} \cdot d\overline{r}$ en términos de x ; $T = \frac{12}{\pi^2}\int^{0} x^2 \text{sen } x\, dx$;

$$T = \frac{24}{\pi^2} \left[1 - \frac{\pi}{2}\right]$$

2. $T = \overline{F} \cdot d\overline{r}$ . Expresarlo en términos de t;

$$T = \int_0^{2\pi} 8\, dt \; ; \; T = 16\pi$$

GRUPO 9

1. a) $\nabla\Phi = (3x^2 + 6y)i + (3y^2 + 6x)j$. Observe que $d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\overline{r}$, por lo que basta con factorizar.

   b) La integral vale cero: el campo es conservativo y la trayectoria cerrada.

2. Verificar que $\mu = 2x^2y + y^2 + c$; además $c = -10 \therefore \mu(2,1) = 1$

GRUPO 10

1. Al transformar a coordenadas polares se tiene la integral directa

   $\int e^{r^2} r dr$, del tipo $\int e^{u} du$. La integral vale $\pi e^{a^2}$

2. Conviene una región en x, y,

   $\{ 0 \leq x \leq 1 \;,\; 0 \leq y \leq 1 - x \}$ . $V = \frac{1}{4}$

3. Usese de preferencia una sola integral para

   $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . $A = 8\pi$



GRUPO 11

1. Verificar que la diferencial de superficie es

   $ds = \frac{7}{2} dxdy$ . $A = 14\ u^2$

2. La diferencial es $ds = \sqrt{2}\, dxdz$, conviniendo la transformación de coordenadas polares. $S = 21\sqrt{2}\ \pi\ u^2$

GRUPO 12

1. Aplicar el teorema de Green; se obtiene la integral doble

$$\iint_R dA$$

GRUPO 13

1. $P_1(0,1,-1)$, punto silla. $P_2(0,-1,3)$, máximo.

2. Las coordenadas del máximo relativo son $x = 2$, $y = 1$ y el valor de la función en ese punto es $z_M = 4$.

   El valor de la función en el punto $(6,-1)$ es $z(6,-1) = 36 > z_M$

   El máximo encontrado es relativo; puede haber otros puntos de mayor cota; pero en este caso no hay otro punto alrededor del cual, todos los puntos tengan cota inferior. Nótese además que, en $x = 0$ (eje y) ambas derivadas parciales se anulan, así como el hessiano; todos los puntos del eje "y" tienen la misma cota (z = 0) y por lo mismo, no es posible hablar de máximo o mínimo relativo.

GRUPO 14

1. Función objetivo: $F = xyz - 12 = 0$; Restricción
costo = (costo base) xy + 2(costo lados) yz + 2(costo lados xz
$x = 2m$; $y = 2m$; $z = 3m$. Costo mínimo = $5,4000.00

2. $x = 1, \quad y = \frac{4}{3}, \quad z = 4$

# SOLUCIONES DE LA PRUEBA DE AUTOEVALUACION

1. $x^2 - 4xz + 4z^2 - 3x + 7z - y + 3 = 0$

2. $-\sqrt{3}/3$

3. $\nabla\mu = (2r\cos\theta)\,\hat{e}_r - (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\hat{e}_\theta$

4. $T = F\,r$

5. $V = \dfrac{\pi a^3}{3}$

6. Triángulo equilátero

| TEMA No. | TEMA | ACTIVIDADES | EJERCICIOS | RICION EN EXAMEN (*) | ESTUD SUGERI |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | GRUPO No. | PORCENTAJE | No. HO |
| I | SUPERFICIES Y CAMPOS ESCALARES | a) Generación de superficies por el método de las genaratrices | 1 | 10.8 | 5 |
| | | b) Discusión de la ecuación de una superficie | 2 | 6.3 | 3 |
| II | DERIVACION Y DIFERENCIACION DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIAS VARIABLES | a) Interpretaciones geométrica y física: derivada parcial y diferencial total | 3 | 6.3 | 3 |
| | | b) Derivadas parciales de función compuesta, derivada direccional y gradiente. | 4 | 10.8 | 5 |
| III | CAMPOS VECTORIALES | a) Aplicaciones de la derivada ordinaria de campos vectoriales. Interpretaciones física y geométrica | 5 | 4.7 | 2 |
| | | b) Ecuación vectorial de superficie. Interpretación geométrica | 6 | 4.7 | 2 |
| | | c) Gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano. Gradiente en coordenadas curvilíneas | 7 | 6.3 | 3 |
| IV | INTEGRALES CURVILINEAS | a) Integral curvilínea, interpretación física | 8 | 6.3 | 3 |
| | | b) Integral curvilínea en campo conservativo. Diferencial exacta y su integración | 9 | 6.3 | 3 |
| V | INTEGRALES MULTIPLES | a) Aplicaciones de la integral doble al cálculo de áreas planas y volúmenes | 10 | 14.1 | 6 |
| | | b) Area de una superficie alabeada | 11 | 6.3 | 3 |
| | | c) Aplicaciones del teorema de Green | 12 | 3.0 | 2 |
| VI | MAXIMOS Y MINIMOS PARA FUNCIONES DE DOS O MAS VARIABLES | a) Máximos y mínimos: Criterio de la 2a. derivada | 13 | 6.3 | 3 |
| | | b) Método de los multiplicadores de Lagrange. Máximos y mínimos restringidos | 14 | 7.8 | 4 |
| | | | Total | 100 | 47 |

(*) Esta columna indica el porcentaje de probabilidad de que los temas aparezcan en el examen extraordinario, probabilidad que fué obtenida por los autores de la guía mediante el análisis de las preguntas que han aparecido en los exámenes extraordinarios de Cálculo Vectorial en la Facultad de Ingeniería en los últimos años.

# ANEXO 2

## LISTA GENERAL DE ANTECEDENTES

### PREPARATORIA

1. Geómetría analítica plana: punto, recta, circunferencia, elipse, parábola, hipérbola, el plano cartesiano.
2. Discusión de una curva-plana.
3. Factorización de polinomios con productos notables.
4. Trigonometría plana.

### CURSO DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

5. Dominio y recorrido de una función escalar de variable escalar.
6. Conjuntos, intervalos y desigualdades.
7. Derivada ordinaria de función escalar de variable escalar.
8. Interpretación geométrica de la derivada ordinaria.
9. Interpretación física de la derivada ordinaria.
10. Recta tangente y recta normal a una curva.
11. Angulo entre curvas.
12. Incremento y diferencial de funciones escalares de variable real.
13. Valores absoluto y relativo de los errores en el cálculo aproximado de funciones.
14. Función compuesta.
15. Longitud de arco de curva.
16. Derivada, diferencial e incremento de funciones compuestas.
17. Derivación sucesiva de funciones escalares de variable escalar.
18. Integral ordinaria de funciones escalares de variable real.
19. Límites de integración e intervalos.
20. Propiedades de las integrales.
21. Aplicaciones de la integral ordinaria.
22. Métodos de integración.
23. Máximos y mínimos de funciones escalares de variable real.

## CURSO DE ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA

Números directores de un vector.
Ecuación cartesiana y vectorial del plano.
Vectores tangente y normal a una curva.
Algebra de vectores: suma, producto escalar, módulo, producto vectorial, doble producto, vectores unitarios.
Ecuaciones paramétricas de las curvas planas.
Proyección de un vector sobre otro.
Vector de posición.
Interpretación geométrica de las operaciones con vectores.
Coordenadas [illegible]res y cilíndricas.
Serie de Taylor.

## CURSO DE ALGEBRA LINEAL

Expresiones matriciales, factorizaciones y operaciones con matrices: suma, producto.
Determinantes.
Solución de ecuaciones lineales.

Para el estudio de estos antecedentes se sugiere utilizar los apuntes de las materias correspondientes o consultar a los asesores de las asignaturas.




La impresión se realizó en la
Unidad de Difusión de la Facultad de Ingeniería