UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

SECRETARÍA GENERAL

COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

COPADI

PROBLEMARIO COPADI DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

COORDINADORES

ING. FRANCISCO BARRERA GARCÍA
ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ
LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA

ESTUDIANTES AUTORES

JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL
ALEJANDRO FÉLIX REYES
ISABEL MIRANDA ALVARADO
LEÓN FELIPE PALAFOX NOVACK
ZEUS HIRAM ZAMORA GUEVARA
PATRICIA MARÍA SÁNCHEZ GÓMEZ
MIGUEL ÁNGEL VICTORIA RÍOS
LUIS EFRÉN FLORES ROMERO
CINTHYA ENETZY OLMOS ROA
M. DE LOS REMEDIOS VILLAFRANCO RAMÍREZ

ABRIL DE 2003

PRÓLOGO

La Coordinación de Programas de Atención Diferenciada para Alumnos (COPADI) de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, con algunos de los estudiantes del Programa de Alto Rendimiento Académico (PARA), y dentro de su Programa de Solidaridad Académica (PROSOLAC), se dio a la tarea de realizar sus ***PROBLEMARIOS COPADI***. Cada uno, en una serie de ejercicios resueltos de algunas de las asignaturas que tienen mayor grado de dificultad para los estudiantes cuando cursan sus asignaturas en la División de Ciencias Básicas de la Facultad.

Estos ejercicios son planteados y resueltos por estudiantes del PARA, y revisados por nosotros. Los objetivos de estos ***PROBLEMARIOS COPADI*** son, entre otros los siguientes:

Apoyar el desempeño académico de los estudiantes con ejercicios resueltos que les pueden ayudar a comprender y aprender los conceptos de que consta el programa de la asignatura, en este caso, **Geometría Analítica**, y poder así acreditarla y seguir adelante en sus estudios de ingeniería.

Reafirmar los conocimientos de los autores en asignaturas que ya acreditaron.

Producir material didáctico para la Facultad, como un compromiso en su calidad de estudiantes del PARA.

Es importante comentar que este Problemario consta de 50 ejercicios, diez por capítulo, de la Asignatura Geometría Analítica, y que además de que se ha revisado el material, se han tratado de dejar los ejercicios y sus enunciados tal como los hicieron y plantearon los estudiantes, ya que básicamente se trata de una publicación realizada por estudiantes y dirigida a estudiantes. Y esto es lo que le da carácter a la publicación. Sólo en algunos casos, tuvimos que sugerir ejercicios cuando se consideró que hacían falta para cubrir un determinado tema.

Los 50 ejercicios están distribuidos de la siguiente forma: Diez para cada uno de los temas: Sistemas de Referencia, Álgebra Vectorial, La Recta y el Plano, Curvas y Superficies.

Es nuestro mejor deseo que este trabajo sea de utilidad para los estudiantes que cursan Geometría Analítica y que también sea motivo de genuino orgullo para los estudiantes que participaron en su realización, así como lo es para nosotros.

Ing. Francisco Barrera García
Ing. Pablo García y Colomé

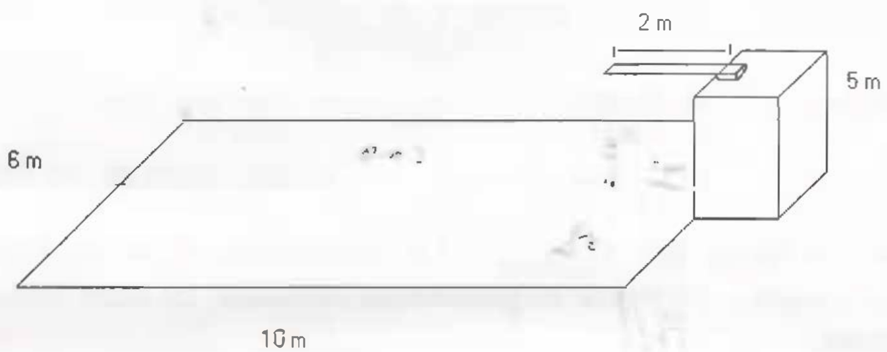
ÍNDICE

CAPITULO 1

SISTEMAS DE REFERENCIA

1.1 - Una alberca mide 10 metros de largo , 6 metros de ancho y $3\sqrt{3}$ metros de profundidad. Tiene un trampolín de 5 metros, cuya tabla mide 2 metros, que se encuentra justo a la mitad de uno de los lados más cortos. Un clavadista se avienta del trampolín y suponiendo que tiene trayectoria recta vertical, determinar:

a) A cuántos metros de cada orilla de la alberca cae en el agua.
b) Si al momento de caer toca el fondo de la alberca y se impulsa hacia la superficie con una inclinación de $30°$, suponiendo que no se ladea, calcular a qué distancia de donde cayó va a salir.

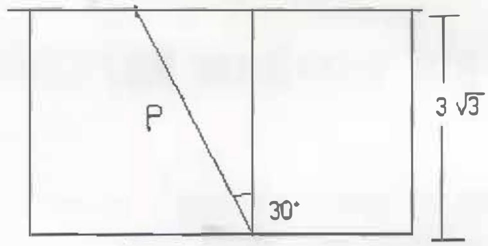


RESOLUCIÓN.

a) La trayectoria está descrita por una línea recta, así que sólo se considerará un cambio en el eje de las cotas. Si el trampolín está a 5 m de altura, el cambio sólo será de -5 en z, conservando las demás coordenadas:

2 metros de la orilla en la que está el trampolín, 3 metros de los lados más largos, y 8 metros de la orilla opuesta a la del trampolín.
Las coordenadas pedidas tomando como el origen de coordenadas a la esquina superior izquierda de la alberca son: $P(3, 8, 0)$.

b) Si la profundidad es de $3\sqrt{3}$ m, se traslada el origen al punto en el que toca el fondo, y si se utilizan coordenadas esféricas, $Q(\rho, \theta, \phi)$, entonces se requiere calcular el valor de ρ, que de acuerdo con la figura corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo que se muestra:



De donde:

$$\cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6$$

Por el teorema de Pitágoras, la distancia pedida es el cateto faltante del triángulo rectángulo:

$$\text{Distancia} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{3})^2} = 3$$

En consecuencia las coordenadas esféricas del punto de salida son : $Q(6,\ 270^\circ,\ 30^\circ)$.

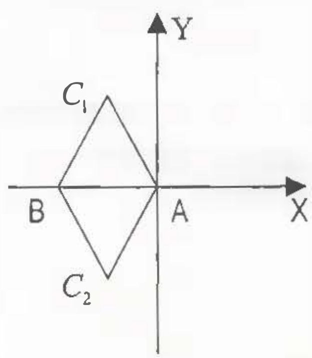
ALUMNO: LEÓN FELIPE PALAFOX NOVACK

1.2 - Sean los puntos $A(0,\ 70^\circ)$ y $B(1,\ \pi)$ en coordenadas polares, dos de los vértices de un triángulo equilátero. Determinar las coordenadas cartesianas del tercer vértice (se tienen dos soluciones).

RESOLUCIÓN.

En este caso lo más conveniente es localizar los vértice A y B del triángulo en el plano XY para identificar el tercer vértice en base al diagrama.

El punto A, por tener su componente radial igual a cero, no importa el valor de la segunda coordenada, ésta puede tomar cualquier valor y el punto siempre estará ubicado en el origen; el vértice B se encuentra en el semiplano izquierdo sobre el eje X.



En la figura se observa que existen dos puntos que cumplen con las condiciones señaladas para formar un triángulo equilátero, éstas se encuentran en el segundo y tercer cuadrante respectivamente. Se sabe que un triángulo equilátero tiene tres lados iguales y sus ángulos internos son de 60° cada uno, por lo tanto, el vértice C_1 está localizado en el punto $C_1(1, 120^o)$ y C_2 debe ser el simétrico de este punto con respecto al eje X, es decir $C_2(1, 240^o)$. Sin embargo, los puntos C_1 y C_2 obtenidos se tienen en coordenadas polares, por lo que debe realizarse una transformación a coordenadas cartesianas.

Se sabe que un punto en coordenadas cartesianas está determinado por las siguientes expresiones:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\theta$$
$$X_{C1} = (1)\cos 120^o = -\frac{1}{2}$$
$$Y_{C1} = (1)\text{sen}\,120^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$X_{C2} = (1)\cos 240^o = -\frac{1}{2}$$
$$Y_{C2} = (1)\text{sen}\,240^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ALUMNO: ZEUS HIRAM ZAMORA GUEVARA

1.3 - Sean los puntos A, B y M que están contenidos en el plano de ecuación $z = 3$ y además:

- **El punto A pertenece al plano XZ y su distancia al origen de coordenadas es igual a 6 unidades.**
- **El punto B pertenece al plano YZ y su distancia al origen de coordenadas es igual a $3\sqrt{2}$ unidades.**
- **El punto M está en el primer octante y es el punto medio del segmento de recta $\overline{AB}$.**

Determinar:

a) **Las coordenadas esféricas del punto A.**
b) **Las coordenadas cilíndricas del punto B.**
c) **Las coordenadas cartesianas del punto M.**

RESOLUCIÓN.

a) Sea el punto A de coordenadas $A(X_A,\ Y_A,\ Z_A)$. Se sabe que el punto está contenido en el plano $z = 3$ por lo que el valor de $Z_A = 3$; otra característica del punto es que pertenece al plano XZ, por lo que la ordenada $Y_A = 0$. También se conoce su distancia al origen de coordenadas, por lo que utilizaremos la siguiente expresión:

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Sustituyendo los valores previamente obtenidos:

$$6 = \sqrt{X_A{}^2 + 0 + 3^2}$$

entonces: $$36 = X_A{}^2 + 9$$

Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$X_A = \pm 3\sqrt{3}$$

Nota:
Al resolver la ecuación de segundo grado, se obtienen dos raices: $\pm 3\sqrt{3}$ generando dos posibles soluciones; sin embargo, el inciso c) nos restringe esta solución y nos obliga a considerar únicamente la raíz positiva, debido a que el punto M se encuentra en el primer octante.

Por último se tiene que el punto buscado en coordenadas cartesianas es:

$$A(3\sqrt{3},\ 0,\ 3)$$

transformando a coordenadas esféricas:

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 0 + 3^2} = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} \quad \Rightarrow \quad \rho = 6$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{3\sqrt{3}}\right) \quad \Rightarrow \quad \theta = 0°$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{Z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad \varphi = 60°$$

Finalmente:

$$A_{(\rho,\theta,\varphi)}(6,\ 0^\circ,\ 60^\circ)$$

b) Utilizando un procedimiento similar, sea el punto B de coordenadas $B(X_B, Y_B, Z_B)$. Se sabe que el punto está contenido en el plano $z = 3$, por lo que el valor de $Z_B = 3$; otra característica del punto es que pertenece al plano de ecuación YZ, por lo que la abscisa $X_A = 0$. También se conoce su distancia al origen de coordenadas, por lo que utilizaremos la siguiente expresión:

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Sustituyendo los valores previamente obtenidos:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{0 + Y_B^{\,2} + 3^2}$$

entonces: $$9(2) = Y_B^{\,2} + 9.$$

Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$Y_B = 3$$

Dado que la ordenada del punto A es nula, obliga a que el valor de Y_B sea el valor positivo, de lo contrario el punto M no se localizaría en el primer octante.

Por último se tiene que el punto buscado en coordenadas cartesianas es:

$$B(0,\ 3,\ 3)$$

transformando a coordenadas cilíndricas:

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{3^2} \quad \Rightarrow \quad r = 3$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{0}\right) \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$Z = 3$$

Finalmente:

$$B_{(r,\,\theta,\,z)}\left(3,\ \frac{\pi}{2},\ 3\right)$$

c) Dado que el punto M es el punto medio del segmento de recta, entonces el punto M estará dado por la expresión en coordenadas cartesianas:

$$PM_{\overline{AB}}\left(\frac{X_A+X_B}{2},\ \frac{Y_A+Y_B}{2},\ \frac{Z_A+Z_B}{2}\right)$$

sustituyendo valores se tiene:

$$PM_{\overline{AB}}\left(\frac{3\sqrt{3}+0}{2},\ \frac{0+3}{2},\ \frac{3+3}{2}\right)$$

Por lo que:

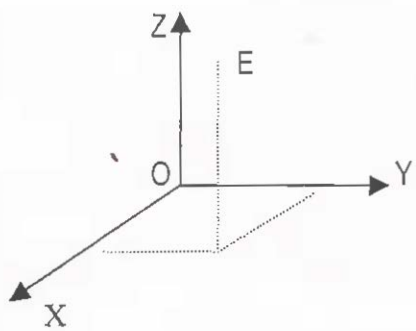
$$PM_{\overline{AB}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2},\ 3\right)$$

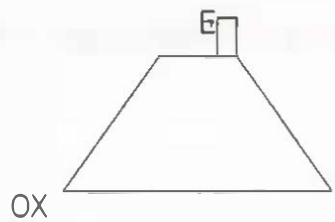
ALUMNO: LUIS EFRÉN FLORES ROMERO

1.4 - Un explorador oyó una leyenda maya para encontrar un tesoro perdido. Se decía que el punto de referencia era una esquina de un prisma rectangular, que parecía ser una estela, encima de una pequeña pirámide. El explorador tomó las medidas de dicho punto, desde una esquina de la base de la pirámide y obtuvo las siguientes coordenadas en metros.

$$E\left(\sqrt{3},\ 3,\ 2\right)$$

La leyenda contaba que el tesoro se encontraba en el punto simétrico del punto de referencia, con respecto al lado de la base de la pirámide. Encontrar la localización del tesoro y expresar el resultado en coordenadas cilíndricas.





RESOLUCIÓN.

La simetría respecto al eje X se obtiene cambiando los signos de las coordenadas Y, Z, ya que va a seguir teniendo la misma abscisa.
Por lo tanto el tesoro se encuentra en:

$$T\left(\sqrt{3},\ -3,\ -2\right)$$

Pero se piden las coordenadas cilíndricas por lo que se tiene:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sustituyendo:

$$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Sustituyendo:

$$\theta = \arctan\left(\frac{-3}{\sqrt{3}}\right) = -60°$$

Poniendo el signo positivo:

$$T(2\sqrt{3}, 300°, -2)$$

ALUMNA: CINTHYA ENETZY OLMOS ROA

1.5 - Sea el punto $P\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$ **en coordenadas esféricas. Determinar las coordenadas cartesianas y esféricas del punto** P' **que es el simétrico del punto** P **con respecto al origen de coordenadas.**

RESOLUCIÓN.

Para determinar las coordenadas cartesianas del punto P se tiene que:

$x = \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\phi$	$y = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$	$z = \rho\cos\phi$
$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$y = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$z = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$x = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$	$y = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$	$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$y = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$z = \sqrt{3}$

Entonces el punto P en coordenadas cartesianas es; $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{3}\right)$, por tanto, el simétrico respecto al origen de este punto se obtiene cambiando las coordenadas $x \to -x$, $y \to -y$ y $z \to -z$, por lo que el punto P' es: $P'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\sqrt{3}\right)$.

Para determinar las coordenadas esféricas del punto P', empleamos las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas, entonces se tiene que:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{4}$$

$$\therefore \quad \rho = 2$$

$$\theta = ang\,tan\frac{y}{x}$$

$$\theta = ang\tan\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = ang\tan(1) \quad \Rightarrow \quad \theta = 45^\circ$$

Ahora bien , como el punto se encuentra en el séptimo octante, tenemos que sumarle al ángulo encontrado 180°; por lo tanto el ángulo θ es;

$$\theta = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$$

$$\phi = ang\cos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{\rho}$$

$$\phi = ang\cos\frac{-\sqrt{3}}{2} = -30^\circ$$

Al ángulo encontrado hay que sumarle 180°, ya que el punto se encuentra en el séptimo octante y los -30° se están midiendo a partir del eje z negativo, por lo tanto:

$$\phi = -30^\circ + 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \phi = 150^\circ$$

Las coordenadas esféricas del punto P' son; $P'(2,\ 225°,\ 150°)$.

ALUMNO: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

1.6 - Dos vértices opuestos de un cuadrado, expresados en coordenadas polares son: $P\left(6,\ -\frac{7\pi}{12}\right)$ y $Q\left(4,\ \frac{\pi}{6}\right)$. Calcular el área del cuadrado.

RESOLUCIÓN.

Tenemos los puntos P y Q en coordenadas polares. Se procederá a transformar dichos puntos a coordenadas cartesianas, con la ayuda de las ecuaciones de transformación:

$$x = r\cos\theta \quad \text{K} \quad (1)$$
$$y = r sen\theta \quad \text{K} \quad (2)$$

Primero, transformamos la coordenada θ de cada punto a grados, recordando que π radianes equivale a $180°$, entonces para el punto P tenemos:

$$\theta = -\frac{7\pi}{12}\left(\frac{180°}{\pi}\right) = -105°$$

El signo negativo nos indica que el ángulo es medido en sentido inverso al convencional (es decir en el sentido de las manecillas del reloj), entonces el ángulo medido en sentido convencional (sentido contrario a las manecillas del reloj) es; $\theta = 255°$.
Para el punto Q:

$$\theta = \frac{\pi}{6}\left(\frac{180°}{\pi}\right) = 30°$$

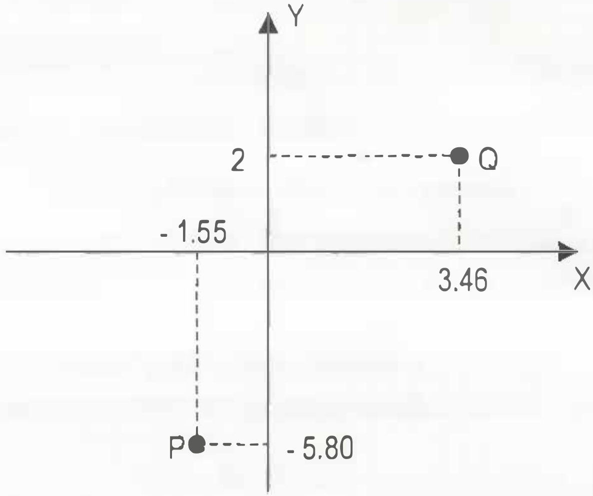
Ahora obtenemos x y y para cada punto, para el punto P:

$$x = 6\cos 255° = -1.55$$
$$y = 6sen\,255° = -5.80$$

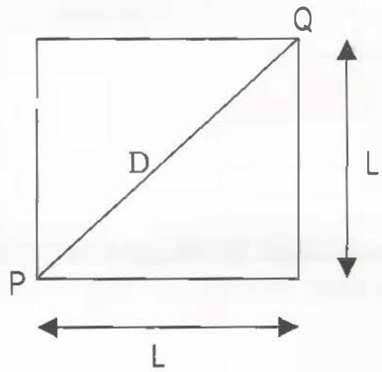
Para Q:

$$x = 4\cos 30° = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3} = 3.46$$
$$y = 4sen\,30° = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

De donde $P(-1.55,\ -5.80)$ y $Q(3.46,\ 2)$ que aparecen en la gráfica.



Recordando la geometría de un cuadrado y adecuándolo al problema:



del teorema de Pitágoras: $D^2 = L^2 + L^2 \quad \Rightarrow \quad D^2 = 2L^2$.

Donde $D = \left|\overline{PQ}\right|$ y despejando L:

$$L = \frac{D}{\sqrt{2}}$$

El valor de D es:

$$D = \sqrt{\,[3.46-(-1.55)]^2 + [2-(-5.80)]^2} \quad \Rightarrow \quad D = 9.27\ u$$

Por tanto el valor de L es:

$$L = \frac{9.27}{\sqrt{2}} = 6.55\ u$$

Empleando la fórmula del área de un cuadrado tenemos:

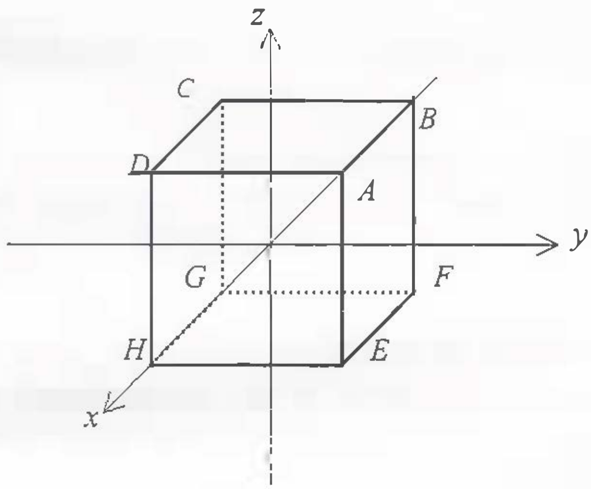
$$A = L^2$$
$$A = (6.55)^2$$

Por tanto, el área del cuadrado es :

$$A = 42.9\, u^2$$

ALUMNO: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

1.7 - Se tiene un cubo en el espacio de tres dimensiones, uno de sus vértices es el punto A. Si el centro del cubo es el origen de coordenadas, obtener los vértices del cubo mediante las simetrías del punto $A(2, 2, 2)$.



RESOLUCIÓN.

Simetría con respecto al origen se obtiene cambiando de signo todas las coordenadas del punto. Simetría con respecto a un eje se obtiene cambiando de signo las coordenadas que no pertenecen al eje.

Simetría con respecto a un plano se obtiene cambiando de signo la coordenada que no pertenece al plano.

B es el simétrico de A respecto al plano YZ $(-2,\ 2,\ 2)$
C es el simétrico de A respecto al eje Z $(-2, -2, 2)$
D es el simétrico de A respecto al plano XZ $(2, -2,\ 2)$
E es el simétrico de A respecto al plano XY $(2,\ 2, -2)$
F es el simétrico de A respecto al eje Y $(-2,\ 2, -2)$
G es el simétrico de A respecto al origen $(-2, -2, -2)$

H es el simétrico de A respecto al eje X $(2, -2, -2)$

ALUMNA: MA. DE LOS REMEDIOS VILLAFRANCO RAMÍREZ

1.8 - Sea el punto P cuya distancia al origen es 2, y sea el punto Q que tiene por coordenadas cilíndricas $\left(r,\ \frac{4\pi}{3},\ 1\right)$. Si los puntos P y Q son simétricos con respecto al plano XZ, determinar:

a) **Las coordenadas esféricas de P.**
b) **El valor de r en coordenadas cilíndricas de Q.**

RESOLUCIÓN.

a) De las ecuaciones de transformación tenemos que las coordenadas cartesianas de Q vienen dadas por:

$$x_Q = r\cos\theta = r\cos\frac{4\pi}{3}$$

$$x_Q = r\cos 240^{\circ} = -\frac{r}{2}$$

$$y_Q = rsen\theta = rsen240^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}r}{2}$$

$$z_Q = 1$$

por lo que el punto Q es:

$$Q(-\frac{r}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}r,\ 1)$$

considerando que P es simétrico de Q con respecto al plano XZ, se tiene que:

$$P(-\frac{r}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}r,\ 1)$$

Como nos piden en coordenadas esféricas $P(\rho,\ \theta,\ \varphi)$, de los datos sabemos que:

$$\rho = 2$$

$$\theta = ang\tan\frac{y}{x} = ang\tan\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}r}{\frac{-r}{2}} = ang\tan -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = 120^{\circ}$$

$$\varphi = ang\cos\frac{z}{\rho} = ang\cos\frac{1}{2} = 60^{o}$$

$$\therefore \quad P(2, 120^{o}, 60^{o})$$

b) El valor de $r_P = r_Q$ puesto que son simétricos con respecto a XZ. Para obtener el valor de r_Q nos apoyaremos en las coordenadas de P, puesto que conocemos $\rho = 2$ y $z = 1$, podemos formar un triángulo, de donde el valor de r_P queda determinado por:

$$r_P = \sqrt{(2)^2 - (1)^2} = \sqrt{3} = r_Q$$

ALUMNA: ISABEL MIRANDA ALVARADO

1.9 - Sea el punto $P(0, 4, 3)$ en coordenadas cartesianas y el punto $Q(6, 135^{o}, 0)$ en coordenadas cilíndricas:

a) **Calcular el punto $\tilde{N}$ simétrico de P respecto al origen, en coordenadas esféricas.**
b) **Calcular el punto CH simétrico de Q respecto al eje Z, en coordenadas esféricas.**

RESOLUCIÓN.

a) Primero tomemos el punto $P(0, 4, 3)$ y encontremos su simétrico respecto al origen en coordenadas cartesianas. Como sabemos, esto es sencillo, pues sólo se deben de cambiar los signos de todas las coordenadas del punto P. Por lo que:

$$\tilde{N}(0, -4, -3).$$

Ahora lo que haremos es calcular sus coordenadas esféricas:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{-4}{0} = 270^{\circ}$$

$$\varphi = \arccos\frac{z}{\rho} = \arccos\frac{-3}{5} = 126.87^{\circ}$$

Por lo que:

$$\tilde{N}(5, 270^{o}, 126.87^{o})$$

b) Lo ideal sería sacar ρ directo; sin embargo, se recomienda que en estos casos se convierta primero a coordenadas cartesianas, obtener el simétrico y posteriormente transformar a esféricas.

$$x = r\cos\theta = 6\cos 135° = -6\frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 6\operatorname{sen}135° = 6\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Tenemos ahora el punto $Q\left(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 0\right)$ y como en el caso anterior se cambian los signos de x y y, para calcular el simétrico de Q respecto al eje z. Por lo que el punto es:

$$CH\left(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, 0\right)$$

Empleando las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a esféricas encontramos:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(-3\sqrt{2}\right)^2 + (0)^2} = \sqrt{18+18} = \sqrt{36} = 6$$

$$\theta = arctan\frac{y}{x} = arctan -\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = arctan -1 = 135°$$

$$\varphi = \arccos\frac{z}{\rho} = \arccos\frac{0}{6} = \arccos 0 = 90°$$

Por lo que el punto CH simétrico de Q respecto al eje z en coordenadas esféricas es:

$$CH\left(6, 135°, 90°\right).$$

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

1.10 - Sea el punto $P\left(\sqrt{6}, 300°, 135°\right)$ en coordenadas esféricas.

Determinar:

a) Las coordenadas cilíndricas del punto Q, que es el simétrico de P respecto al eje Y.
b) La distancia del punto P al eje X.

RESOLUCIÓN.

a) Para el punto dado debemos obtener su simétrico en coordenadas cilíndricas, por lo tanto transformando P a cilíndricas:

$$r = \rho \; sen\phi$$
$$\theta = \theta$$
$$z = \rho \cos\phi$$

Sustituyendo valores:

$$r = \sqrt{6} \; sen \, 135° = \sqrt{3}$$
$$\theta = 300°$$
$$z = \sqrt{6} \cos 135° = -\sqrt{3}$$

por lo tanto el punto P en cilíndricas es:

$$P\left(\sqrt{3}, 300°, -\sqrt{3}\right).$$

Ahora de la figura 1 podemos obtener el simétrico del punto respecto al eje y.

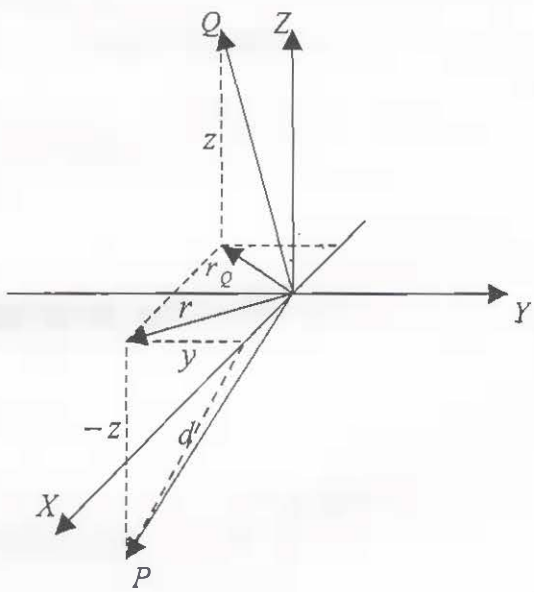


Figura1.

Del simétrico buscado $r_Q = \sqrt{3}$ ya que por ser una magnitud, permanece constante la variación está dada por su ángulo.

De acuerdo con la figura el simétrico de $-z$ es z por lo cual, $z_Q = \sqrt{3}$.

En cuanto a el simétrico de $\theta = 300°$ respecto al eje y es $\theta_Q = 240°$. Observar la figura 2.

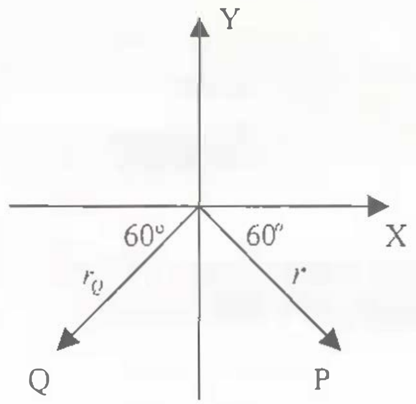


Figura 2.

Las coordenadas del punto Q son $Q(\sqrt{3},\ 240°,\ \sqrt{3})$.

b) La distancia del punto P al eje X está dada por $d^2 = y^2 + z^2$, como se puede apreciar en la figura 1.

De las ecuaciones de transformación, de esféricas a cartesianas, tenemos:

$$y = \rho\, sen\phi\, sen\theta$$

$$y = \sqrt{6}\ sen\ 135°\ sen\ 300° = -3/2$$

Por lo tanto:

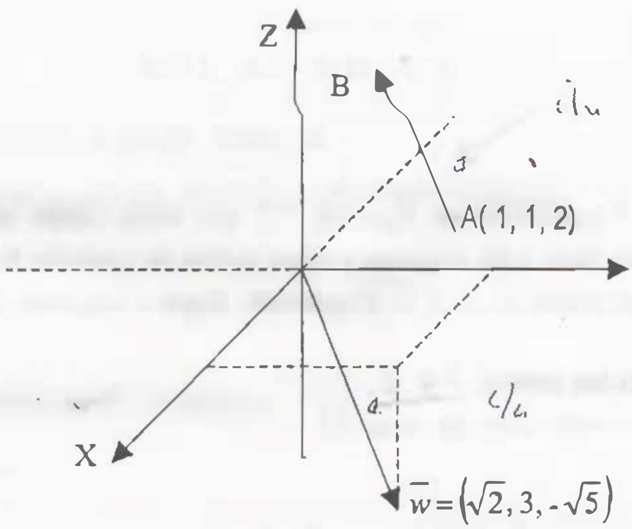
$$d^2 = (-\frac{3}{2})^2 + (-\sqrt{3})^2 = \frac{9}{4} + 3 = 21/4 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

ALUMNO: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

CAPITULO 2

ÁLGEBRA VECTORIAL

2.1 - Sea el segmento $\overline{AB}$, paralelo al vector $\overline{w} = \left(\sqrt{2}, 3, -\sqrt{5}\right)$ y de sentido contrario a éste, como se muestra en la figura.



Determinar las coordenadas del punto B, si se sabe que la magnitud del segmento $\overline{AB}$ es de $4u$.

RESOLUCIÓN.

El vector de posición del punto B se obtiene del vector de posición del punto A más el vector $\overline{AB}$. El vector $\overline{w}$. tiene la misma dirección que el vector $\overline{AB}$ pero en sentido contrario, por lo que se cumple que $\overline{AB_u} = -\overline{w_u}$

$$\left|\overline{w}\right| = \sqrt{2+9+5} = \sqrt{16} = 4$$

$$\overline{AB_u} = -\frac{1}{\left|\overline{w}\right|}\overline{w} = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}, 3, -\sqrt{5}\right)$$

$$\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \overline{AB_u}$$

$$\overline{AB} = 4\left(-\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\,,3\,,-\sqrt{5}\right)\right) = \left(-\sqrt{2}\,,-3\,,\sqrt{5}\right)$$

$\bar{b} = \bar{a} + \overline{AB}$; *donde* $\bar{a}$ *es el vector de posición del punto A*

$$\bar{b} = (1\,,1\,,2) + \left(-\sqrt{2},-3\,,\sqrt{5}\right)$$

$$\bar{b} = \left(1-\sqrt{2}\,,-2\,,\;2+\sqrt{5}\right)$$

$$\bar{b} = (-0.414\,,-2\,,\;4.236)$$

por lo tanto:

$$B\;(-0.414\,,\;-2\,,\;4.236)$$

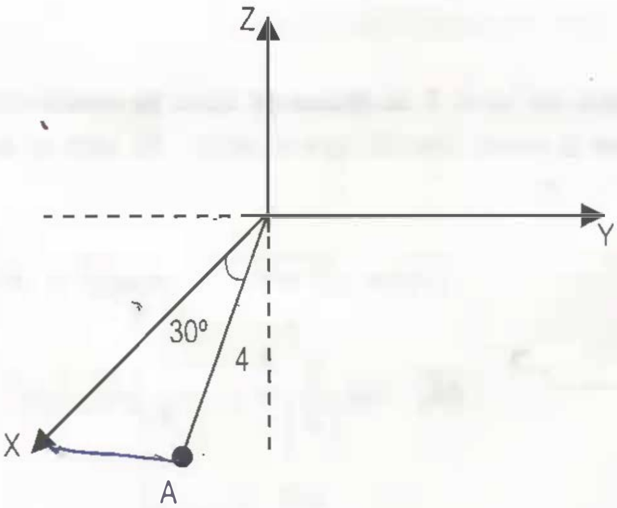
ALUMNO: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

2.2 - Sea el punto A **contenido en el plano** XZ **que dista cuatro unidades del origen de coordenadas, además tiene cota negativa y cuyo vector de posición forma un ángulo de** $30°$ **con el eje** X **; y sea el punto** $B\left(\sqrt{3},2,1\right)$**. Empleando álgebra vectorial, calcular:**

a) **La distancia entre los puntos** A **y** B.
b) **El punto medio del segmento de recta** $\overline{AB}$.

RESOLUCIÓN.

a) Para determinar la distancia entes ambos puntos habrá que especificar las componentes del punto A; para ello utilizaremos identidades trigonométricas como lo indica la siguiente figura:



$$x = 4\cos 30^{\circ} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

$$y = 0$$

$$z = -4\,sen\,30^{\circ} = -2$$

por lo tanto:

$$A\left(2\sqrt{3},\ 0,\ -2\right)$$

Por lo que la distancia entre los puntos A y B viene dada por:

$$d = \left|\overline{AB}\right| = \left|\left(-\sqrt{3},\ 2,\ 3\right)\right| = 4u$$

b) Por otro lado el vector de posición del punto medio estará dado por:

$$\bar{m} = \bar{a} + \frac{\overline{AB}}{2}$$

Donde $\bar{a}$ es el vector de posición del punto A.

$$\bar{m} = (2\sqrt{3},\ 0,\ -2) + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ 1,\ \frac{-1}{2}\right)$$

ALUMNO: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

2.3 - Sea el vector $\bar{v} = 5i + 3j + \sqrt{15}k$. Determinar:

a) Los cosenos directores de $\bar{v}$.
b) El vector $\bar{u}$ que forme un ángulo de π radianes con $\bar{v}$.
c) Las componentes escalar y vectorial de $\bar{v}$ en las direcciones de los vectores unitarios i, j y k.

RESOLUCIÓN.

a) Las fórmulas para obtener los cosenos directores son:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{|\bar{v}|} \qquad \cos\beta = \frac{v_y}{|\bar{v}|} \qquad \cos\gamma = \frac{v_z}{|\bar{v}|}$$

y la fórmula para obtener el módulo es: $\left|\bar{v}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

De ahí que:

$$\left|\bar{v}\right| = \sqrt{5^2 + 3^2 + \sqrt{15}^2} = \sqrt{25 + 9 + 15} = \sqrt{49} = 7$$

Entonces:

$$\cos\alpha = \frac{5}{7} \qquad \cos\beta = \frac{3}{7} \qquad \cos\gamma = \frac{\sqrt{15}}{7}$$

Y debido a que sólo se pedían los cosenos directores no se hacen más cálculos.

b) Los únicos vectores que formarían ese ángulo de π radianes con el vector $\bar{v}$, serian aquellos que estuvieran en la dirección opuesta del vector dado, y por sencillez, simplemente le cambiamos los signos.

Por lo tanto un vector que forme ese ángulo sería $\bar{w} = \left(-5, -3, -\sqrt{15}\right)$.

Para comprobar, se sabe que:

$$\cos\theta = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\left|\bar{v}\right|\left|\bar{w}\right|}$$

entonces:

$$\cos\theta = \frac{\left(5, 3, \sqrt{15}\right)\cdot\left(-5, -3, -\sqrt{15}\right)}{(7)\cdot(7)} = \frac{-25-9-15}{49} = \frac{-49}{49} = -1$$

$$\theta = ang\cos(-1) \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi$$

c) Para obtener las componentes las componentes escalares de $\bar{v}$ sobre los vectores i, j y k, se tendrían las expresiones:

$$Comp.Esc._i\,\bar{v} = \bar{v}\cdot i \qquad Comp.Esc._j\,\bar{v} = \bar{v}\cdot j \qquad Comp.Esc._k\,\bar{v} = \bar{v}\cdot k$$

De ahí que:

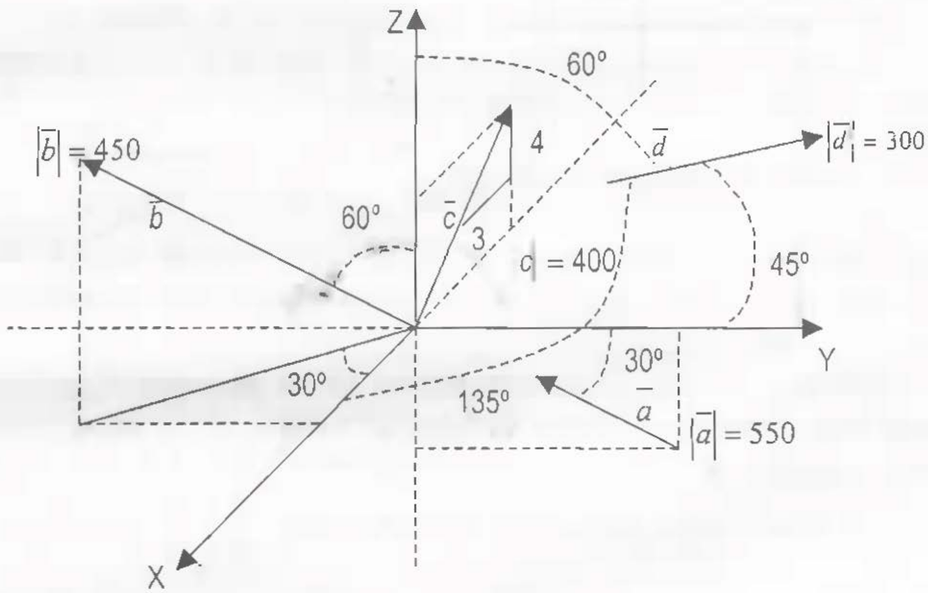
$$Comp.Esc._i\,\bar{v} = \left(5, 3, \sqrt{15}\right)\cdot(1, 0, 0) = 5$$
$$Comp.Esc._j\,\bar{v} = \left(5, 3, \sqrt{15}\right)\cdot(0, 1, 0) = 3$$
$$Comp.Esc._k\,\bar{v} = \left(5, 3, \sqrt{15}\right)\cdot(0, 0, 1) = \sqrt{15}$$

Como se puede observar las componentes pedidas son precisamente las componentes escalares del vector $\bar{v}$.
Para obtener la componente vectorial sólo bastaría con multiplicar la componente escalar por el vector unitario del vector sobre el que se proyectó. De esta forma se tiene:

$$Comp.Vect._{\hat{i}}\,\bar{v} = 5\cdot(1,0,0) = (5,0,0)$$
$$Comp.Vect._{\hat{j}}\,\bar{v} = 3\cdot(0,1,0) = (0,3,0)$$
$$Comp.Vect._{\hat{k}}\,\bar{v} = \sqrt{15}\cdot(0,0,1) = \left(0,0,\sqrt{15}\right)$$

ALUMNO: LEÓN FELIPE PALAFOX NOVACK

2.4 - Sean los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ y $\bar{d}$ mostrados en la figura:

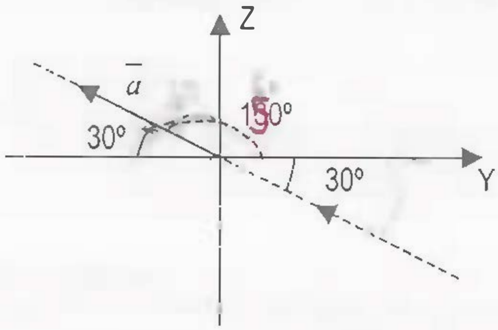


Calcular la magnitud de la proyección del vector $\bar{e}$ sobre el vector $\bar{d}$; donde $\bar{e}$ es la suma de las proyecciones de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en dirección de $\bar{c}$.

RESOLUCIÓN.

En estos casos en que hay un diagrama, se recomienda ver con detenimiento el dibujo. Después de haber hecho esto, uno se puede dar cuenta de los datos proporcionados para cada uno de los vectores.

En el caso del vector $\bar{a}$, podemos ver que se han proporcionado un ángulo y aparte de ello, este vector se encuentra contenido en el plano yz. Para calcular sus componentes, debemos tomar en cuenta que al vector lo podemos "trasladar" sobre su misma línea de acción, sin afectar su dirección ni su sentido. Por lo que para mayor sencillez, calculemos sus componentes usando ángulos internos y externos además de la "traslación".



Para calcular las componentes de este vector, utilizaremos el ángulo complementario de 30°:

$$\bar{a} = 550(0, \cos 150°, sen150°) = \left(0, -550\frac{\sqrt{3}}{2}, 550\frac{1}{2}\right) = \left(0, -275\sqrt{3}, 275\right)$$

Ya calculado el vector $\bar{a}$, calculemos el vector $\bar{b}$.

Si prestamos atención a la figura podremos ver, que las coordenadas del vector $\bar{b}$, se encuentran en coordenadas polares Donde $\phi = 60°$ (ángulo que se mide desde la parte positiva del eje z), $\theta = 330°$ θ y $\rho = 450$:

$$x = \rho \cos\theta \, sen\varphi = 450(\cos 330°)(sen60°) = 450\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{675}{2}$$

$$y = \rho \, sen\theta \, sen\varphi = 450(sen330°)(sen60°) = 450\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{225\sqrt{3}}{2}$$

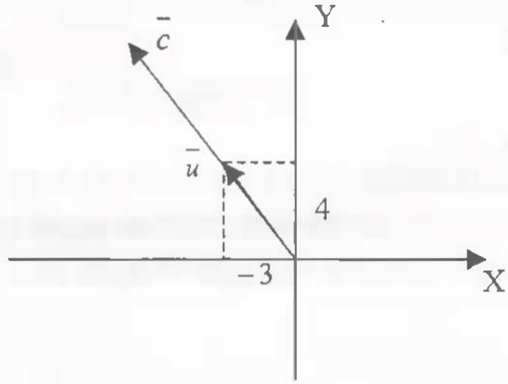
$$z = \rho \cos\varphi = 450(\cos 60°) = 450\left(\frac{1}{2}\right) = 225$$

por lo que;

$$\bar{b} = \left(\frac{675}{2}, -\frac{225\sqrt{3}}{2}, 225\right)$$

Ahora, calculemos el vector $\bar{c}$ que se encuentra alojado en el plano xz. El triángulo rectángulo que aparece debajo de él, nos ayudará a determinar su dirección.

Si recordamos, cuando determinamos la dirección de un vector en el plano, no hacemos más que utilizar los catetos de un triángulo rectángulo. Veamos la figura:



De acuerdo con la figura tenemos que: $\bar{u} = (-3, 4, 0)$, y por consecuencia, se encuentra en la misma dirección que el vector $\bar{c}$; sin embargo, éste no es el vector $\bar{c}$ pues su magnitud es 5. Aquí debemos prestar atención; al leer la pregunta del problema podemos ver que no necesitamos las componentes de $\bar{c}$, sólo su dirección, pues se calculará la proyección de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en dirección de $\bar{c}$ y como sabemos, lo únicc que necesitamos es el vector unitario en dirección de $\bar{c}$.

$$\bar{c}_u = \frac{1}{5}(-3, 0, 4) = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

Donde $\bar{c}_u$ es el vector unitario de $\bar{c}$.

Para finalizar la determinación de las componentes de los vectores mostrados en la figura, calculemos el vector $\bar{d}$. Al observar la figura se determina que los ángulos directores son $\alpha = \cancel{120^\circ}$, $\beta = 45^\circ$ y $\gamma = 60^\circ$. Como sabemos, el coseno director de un ángulo está dado por:
13

$$\cos\theta = \frac{Vi}{|\bar{V}|}$$

y despejando la componente Vi, tenemos que:

$$V_i = |\bar{V}|\cos\theta$$

De donde podemos calcular la componente en cada eje, tan solo con sustituir el valor del ángulo y multiplicar su coseno por el módulo del vector.

$$|\bar{d}|\cos\alpha = 300\cos 135^\circ = 300\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -150\sqrt{2}$$

$$|\bar{d}|\cos\beta = 300\cos 45^\circ = 300\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 150\sqrt{2}$$

$$|\bar{d}|\cos\gamma = 300\cos 60° = 300\left(\frac{1}{2}\right) = 150$$

por lo que:

$$\bar{d} = \left(-150\sqrt{2}, 150\sqrt{2}, 150\right)$$

A continuación procederemos a dar respuesta a lo solicitado en el ejercicio.
Se solicita calcular la magnitud de la proyección del vector $\bar{e}$ sobre el vector $\bar{d}$; donde $\bar{e}$ es la suma de las proyecciones de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en dirección de $\bar{c}$. El primer paso es calcular ei vector $\bar{e}$.

Cuando se habla de proyección se refiere a una componente vectorial. Por lo que aplicaremos la fórmula: $\dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{v}|}\dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$ que es lo mismo que $(\bar{u}\cdot\bar{v}_u)\bar{v}_u$ donde $\bar{u}$ es el vector que queremos proyectar en dirección de $\bar{v}$.

Así que calculemos:

$$comp.vect_{\bar{c}}\,\bar{a} = \left[\left(0, -275\sqrt{3}, 275\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)\right]\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) = (220)\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

$$comp.vect_{\bar{c}}\,\bar{a} = (-132, 0, 176)$$

$$comp.vect_{\bar{c}}\,\bar{b} = \left[\left(\frac{675}{2}, \frac{225\sqrt{3}}{2}, 225\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)\right]\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) = (-22.5)\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

$$comp.vect_{\bar{c}}\,\bar{b} = \left(\frac{27}{2}, 0, -18\right)$$

Ahora calculemos el vector $\bar{e}$:

$$\bar{e} = (-132, 0, 176) + \left(\frac{27}{2}, 0, -18\right) = \left(-\frac{237}{2}, 0, 158\right)$$

Con el vector $\bar{e}$ calculado, veamos de nuevo lo que se pide: calcular la magnitud de la proyección del vector $\bar{e}$ sobre $\bar{d}$. Lo que se pide es "magnitud" de la proyección, esto es, la componente escalar de $\bar{e}$ sobre $\bar{d}$.

$$comp.esc._{\bar{d}}\,\bar{e} = \frac{\bar{e}\cdot\bar{d}}{|\bar{d}|} = \frac{\left(-\frac{237}{2}, 0, 158\right)\cdot\left(-150\sqrt{2}, 150\sqrt{2}, 150\right)}{\left|\left(-150\sqrt{2}, 150\sqrt{2}, 150\right)\right|} = \frac{17775\sqrt{2} + 23700}{\sqrt{45000 + 45000 + 22500}}$$

$$\text{comp.esc.}_{\bar{d}}\,\bar{e} = \frac{48837.65}{335.41} = 145.6$$

que es la respuesta deseada.

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

2.5 - Un vector $\overline{p}$ forma un ángulo de $45°$ con el eje X y de $60°$ con el eje Z. Otro vector $\overline{q}$ forma un ángulo de $50°$ con el eje X y de $60°$ con el eje Y. Determinar el ángulo θ 'que forman los vectores $\overline{p}$ y $\overline{q}$.

RESOLUCIÓN.

Para el vector $\overline{q}$ tenemos: $\alpha = 50°$, $\beta = 60°$ y γ es desconocido.
Para determinar γ nos apoyamos en la ecuación:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Despejando $\cos\gamma$ tenemos:

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2 50° - \cos^2 60°} \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = 0.58 \quad \text{K} \quad (1)$$

Además tenemos:

$$\cos\alpha = \cos 50° = 0.643$$
$$\cos\beta = \cos 60° = 0.5$$

Por lo que los cosenos directores del vector unitario de $\overline{q}$ son:

$$\overline{q_u} = (0.643,\ 0.5,\ 0.58)$$

De igual forma para el vector $\overline{p}$ tenemos:

$\alpha = 45°$, $\gamma = 60°$ y β es desconocido.

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \cos^2 45° - \cos^2 60°} \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = 0.5 \quad .$$

$$\cos\alpha = \cos 45° = 0.707$$

$$\cos\gamma = \cos 60° = 0.5$$

entonces tenemos:

$$\overline{p_u} = (0.707,\ 0.5,\ 0.5)$$

Sólo resta obtener el ángulo entre $\overline{q_u}$ y $\overline{p_u}$. Se tiene que:

$\cos\theta = \dfrac{\overline{p_u}\cdot\overline{q_u}}{\left|\overline{p_u}\right|\left|\overline{q_u}\right|}$, siendo $\overline{p_u}$ y $\overline{q_u}$ vectores unitarios, tenemos: $\left|\overline{p_u}\right| = 1$ y $\left|\overline{q_u}\right| = 1$.

Realizando el producto punto $\overline{p_u}\cdot\overline{q_u}$:

$$\overline{p_u}\cdot\overline{q_u} = (0.707,\ 0.5,\ 0.5)\cdot(0.643,\ 0.5,\ 0.58) \Rightarrow \overline{p_u}\cdot\overline{q_u} = 0.994601$$

por tanto;

$$\cos\theta = 0.994601 \Rightarrow \theta = 5.96°$$

ALUMNA: PATRICIA MARÍA SÁNCHEZ GÓMEZ

2.6 - Determinar un vector $\overline{q}$ con la misma magnitud del vector $\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b} + \overline{c}$ y en dirección opuesta a la suma resultante de los vectores $\overline{d}$ y $\overline{e}$. Las componentes de los vectores son: $\overline{a} = (2,\ 1,\ -3)$; $\overline{b} = (-1,\ -1,\ -1)$; $\overline{c} = (3,\ -2,\ 4)$; $\overline{d} = (1,\ -2,\ 8)$ y $\overline{e} = (2,\ -1,\ 3)$.

RESOLUCIÓN.

Primero debemos obtener las componentes del vector $\overline{p}$;

$$\overline{p} = 3(2,\ 1,\ -3) - 2(-1,\ -1,\ -1) + (3,\ -2,\ 4)$$
$$\overline{p} = (6,\ 3,\ -9) + (2,\ 2,\ 2) + (3,\ -2,\ 4)$$
$$\overline{p} = (11,\ 3,\ -3)$$

Por lo que el módulo del vector $\overline{p}$ es:

$$\left|\overline{p}\right| = \sqrt{(11)^2 + (3)^2 + (-3)^2} \Rightarrow \left|\overline{p}\right| = \sqrt{139}$$

Obteniendo $\overline{d} + \overline{e}$ y $\left|\overline{d} + \overline{e}\right|$ tenemos:

$$\bar{d}+\bar{e}=(1,\ -2,\ 8)+(2,\ -1,\ 3)\ \Rightarrow\ \bar{d}+\bar{e}=(3,\ -3,\ 11)$$

$$\left|\bar{d}+\bar{e}\right|=\sqrt{(3)^2+(-3)^2+(11)^2}\ \Rightarrow\ \left|\bar{d}+\bar{e}\right|=\sqrt{139}$$

$$\left(\bar{d}+\bar{e}\right)_u=\left(\frac{3}{\sqrt{139}},\ \frac{-3}{\sqrt{139}},\ \frac{11}{\sqrt{139}}\right)$$

Dado que el vector $\bar{q}$ es en dirección opuesta al vector $\bar{p}$, entonces;

$$-\left(\bar{d}+\bar{e}\right)_u=-\left(\frac{3}{\sqrt{139}},\ \frac{-3}{\sqrt{139}},\ \frac{11}{\sqrt{139}}\right)$$

por tanto el vector $\bar{q}$ será;

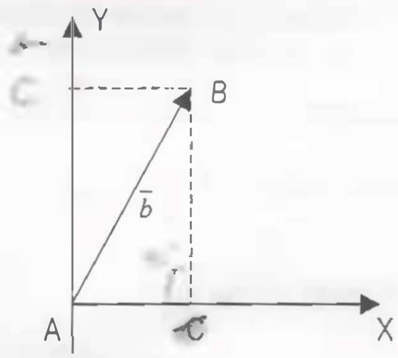
$$\bar{q}=-\left|\bar{p}\right|\left(\bar{d}+\bar{e}\right)_u$$

$$\bar{q}=-\sqrt{139}\left(\frac{3}{\sqrt{139}},\ \frac{-3}{\sqrt{139}},\ \frac{11}{\sqrt{139}}\right)\ \Rightarrow\ \bar{q}=(-3,\ 3,\ -11)$$

ALUMNO: MIGUEL ÁNGEL VICTORIA RÍOS

2.7 - Los vértices de un triángulo rectángulo son los puntos A, B, C. Si se sabe que el punto C está en el eje de las ordenadas, que el punto B está dado por el vector de coordenadas $\bar{b}=(2,3,0)$ y que el punto A es el origen, usando álgebra vectorial calcular:

a) Las coordenadas del punto C.
b) El área del triángulo rectángulo.
c) Un vector unitario perpendicular a los vectores de posición de los puntos B y C.



RESOLUCIÓN.

a) Dado que el punto A es el origen, y el punto B está dado por el vector de posición $\bar{b}=(2,3,0)$, se tiene perfectamente definido a uno de los lados del triángulo dado. Faltaría determinar los otros dos. Como se sabe que uno de los puntos es el origen, que el vector de posición de B está en el plano xy y que el otro punto está en el eje y, basta obtener la proyección vectorial del vector $\bar{b}$ (vector de posición del punto B) sobre el eje y. El vector unitario en el eje y es el vector $j=(0,1,0)$.

$$Comp.Vect._j\,\bar{b}=\left(\frac{(2,3,0)\cdot(0,1,0)}{1}\right)\frac{(0,1,0)}{1} \quad\Rightarrow\quad Comp.Vect._j\,\bar{b}=(0,3,0)$$

Por lo que el vector de posición del punto C buscado es $\bar{c}=(0,\ 3,\ 0)$; por lo tanto el punto es

$$C(0,3,0).$$

b) Para determinar el área del triángulo, es suficiente con efectuar un producto cruz de los vectores $\bar{b}$ y $\bar{c}$; después de esto, dividir el módulo del resultado del producto cruz entre dos.

$$\text{Área del triángulo}=\frac{\left|\bar{b}\times\bar{c}\right|}{2}=\frac{\left|(2,3,0)\times(0,3,0)\right|}{2}$$

$$\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}=(0,0,6) \quad\Rightarrow\quad \left|\bar{b}\times\bar{c}\right|=6$$

$$\text{Área del triángulo}=\frac{6}{2}=3u^2$$

c) Para obtener un vector perpendicular a ambos, sólo se necesitaría hacer el producto cruz, entre éstos, y como ya obtuvimos que el vector resultado del producto cruz es $(0,0,6)$, entonces el vector unitario pedido, sería:

$$\text{Vector unitario}=\frac{(0,0,6)}{6}=(0,0,1)$$

Por lo tanto, el vector buscado es el vector unitario k.

ALUMNO: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

2.8 - Los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son perpendiculares entre sí. El vector $\bar{c}$ forma con ellos ángulos iguales a $\frac{\pi}{3}$; si el módulo de $\bar{a}$ es 3, el de $\bar{b}$ es 5 y el de $\bar{c}$ es 8, calcular:

$$(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot(\bar{b}+3\bar{c})$$

RESOLUCIÓN.

Desarrollando el producto punto obtenemos:

$$(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot(\bar{b}+3\bar{c})=3\bar{a}\cdot\bar{b}+9\bar{a}\cdot\bar{c}-2\bar{b}\cdot\bar{b}-6\bar{b}\cdot\bar{c}$$

pero como $\bar{a}$ es perpendicular a $\bar{b}$ tenemos que $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$.

De la definición de ángulo entre vectores tenemos que:

$$\cos\alpha=\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$$

entonces podemos conocer $\bar{a}\cdot\bar{c}$ y $\bar{b}\cdot\bar{c}$.

$$\bar{a}\cdot\bar{c}=|\bar{a}||\bar{c}|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=(3)(8)\left(\frac{1}{2}\right)=12$$

$$\bar{b}\cdot\bar{c}=|\bar{b}||\bar{c}|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=(5)(8)\left(\frac{1}{2}\right)=20$$

$$\bar{b}\cdot\bar{b}=|\bar{b}|^2=(5)^2=25$$

de donde:

$$(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot(\bar{b}+3\bar{c})=3\bar{a}\cdot\bar{b}+9\bar{a}\cdot\bar{c}-2\bar{b}\cdot\bar{b}-6\bar{b}\cdot\bar{c}$$

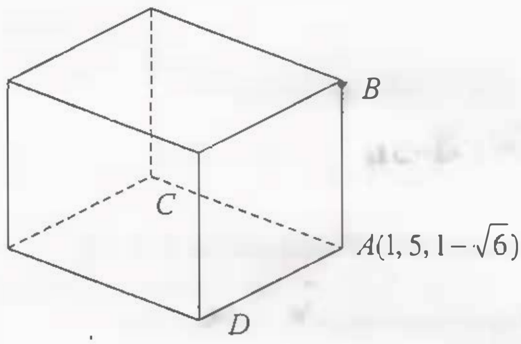
$$(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot(\bar{b}+3\bar{c})=9(12)-2(25)-6(20)=-62$$

por lo tanto:

$$(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot(\bar{b}+3\bar{c})=-62.$$

ALUMNA: ISABEL MIRANDA ALVARADO

2.9 - El volumen del cubo que se muestra en la figura es 64 u³. Si la arista $\overline{AC}$ tiene la dirección del vector $u = (-\sqrt{6}, -\sqrt{6}, -2)$ y la arista $\overline{AD}$ tiene la dirección del vector $v = (3, -1, -\sqrt{6})$. Determinar las coordenadas del punto B.



RESOLUCIÓN.

De los datos proporcionados sabemos que:

$\overline{AC} // \bar{u}$ y $\overline{AD} // \bar{v}$ y el volumen $V = 64\, u^3$

Las coordenadas del punto A son $A(1, 5, 1-\sqrt{6})$; por lo cual su vector de posición es:

$$\vec{a} = (1, 5, 1-\sqrt{6}).$$

Los lados del cubo referidos son perpendiculares entre sí; entonces, como $\overline{AC} // \bar{u}$ y $\overline{AD} // \bar{v}$ $\Rightarrow$ $\bar{u} \times \bar{v} // \overline{AB}$ ya que del producto cruz se obtiene un vector perpendicular a los dos vectores. Entonces haciendo el producto cruz:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \\ 3 & -1 & -\sqrt{6} \end{vmatrix} = (6-2)i - (6+6)j + (\sqrt{6} + 3\sqrt{6})k = (4, -12, 4\sqrt{6})$$

El volumen del cubo es $V = (arista)^3 = \left|\overline{AB}\right|^3$ y $\overline{AB} = \alpha\,(4, -12, 4\sqrt{6})$ ya que $\overline{AB} // (4, -12, 4\sqrt{6})$, entonces:

$$64 = \left|\alpha\,(4, -12, 4\sqrt{6})\right|^3 = |\alpha|^3 (\sqrt{4^2 + 12^2 + (4\sqrt{6})^2}\,)^3 = |\alpha|^3 (\sqrt{256})^3 = |\alpha|^3 (16)^3$$

$$|\alpha|^3 = 64/16^3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{4}.$$

$$\overline{AB} = \frac{1}{4}(4, -12, 4\sqrt{6}) = (1, -3, \sqrt{6})$$

Como:

$$\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = (1, -3, \sqrt{6}) + \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = (1, -3, \sqrt{6}) + (1, 5, 1 - \sqrt{6}) \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = (2, 2, 1).$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto B son:

$$B(2, 2, 1).$$

ALUMNO: LUIS EFRÉN FLORES ROMERO

2.10 - Sean los vectores $\bar{u} = (1, 2, 3)$ y $\bar{v} = 8i + 4j$. Obtener el conjunto de valores de:

a) $x \in \Re$ para que el vector $\bar{w} = (x^2, x, -1)$ sea perpendicular a $\bar{u}$.

b) $y \in \Re$ para que el vector $\bar{s} = (2y, y, 0)$ sea paralelo al vector $\bar{v}$.

RESOLUCIÓN.

La condición para que dos vectores sean perpendiculares es que su producto punto sea igual a cero y la condición para que sean paralelos es que su producto cruz sea igual al vector cero.

a) $\bar{u} \cdot \bar{w} = 0$

$$(1,2,3) \cdot (x^2, x, -1) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 1) = 0$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$
$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Entonces el conjunto pedido es $\{-3, 1\}$

b) $\bar{v} \times \bar{s} = \bar{0}$

$$\bar{v} \times \bar{s} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 8 & 4 & 0 \\ 2y & y & 0 \end{bmatrix} = (8y - 8y)k = \bar{0} \Rightarrow \bar{v} \times \bar{s} = (0y)k = \bar{0}$$

"y" puede tomar todos los valores reales por lo tanto $y \in \Re$.

ALUMNO: ZEUS HIRAM ZAMORA GUEVARA

CAPITULO 3

LA RECTA Y EL PLANO

3.1 - Determinar unas ecuaciones paramétricas de la recta R que contiene al punto $A(0,\ 2,\ -3)$ y es simultáneamente perpendicular a los vectores $\bar{v}=(2,\ -2,\ 3)$ y $\bar{w}=i+4j-2k$.

RESOLUCIÓN.

El vector director de la recta se obtiene del producto cruz de los vectores $\bar{v}$ y $\bar{w}$. Con apoyo en el punto dado se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$\bar{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=-8i+7j+10k$$

$$R:\bar{p}=(0,\ 2,\ -3)+t\,(-8,\ 7,\ 10)\quad\Rightarrow\quad R:\begin{cases} x=-8t \\ y=2+7t \\ z=-3+10t \end{cases}$$

ALUMNO: ZEUS HIRAM ZAMORA GUEVARA

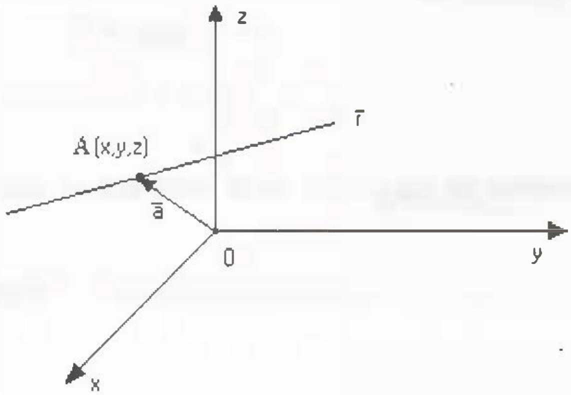
3.2 - Se tiene una recta definida por la ecuación $\bar{r}=(4,\ -1,\ 2)+t\,(1,\ -1,\ 0)$. Determinar los puntos que están en dicha recta y distan 3 unidades del origen.

RESOLUCIÓN.

De la ecuación vectorial de la recta $\bar{r}=(4,\ -1,\ 2)+t\,(1,\ -1,\ 0)$ podemos obtener sus ecuaciones paramétricas:

$$L:\begin{cases} x=4+t \\ y=-1-t \\ z=2 \end{cases}$$

Considerando al vector de posición del punto buscado de componentes desconocidas $(x,\ y,\ z)$, tenemos:



Donde $|\bar{a}| = 3$

Entonces:

$$\bar{a} = (x, y, z)$$
$$Sustituyendo:$$
$$\bar{a} = (4+t, -1-t, 2)$$

como $|\bar{a}| = 3$, tenemos que $|\overline{OA}|$ viene dado por:

$$\overline{OA} = (4+t, -1-t, 2) - (0,0,0) = (4+t, -1-t, 2)$$
$$|\overline{OA}| = \sqrt{(4+t)^2 + (-1-t)^2 + 4} = 3$$

$$16 + 8t + t^2 + 1 + 2t + t^2 + 4 = 9 \quad \Rightarrow \quad 2t^2 + 10t + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 + 5t + 6 = 0$$

$$(t+3)(t+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -3, \quad t_2 = -2$$

Por lo tanto, sustituyendo t_1 y t_2 en las ecuaciones paramétricas de la recta, tenemos:

$$\begin{cases} x = 4-3 \\ y = -1+3 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4-2 \\ y = -1+2 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$Punto\ 1 = (1,\ 2,\ 2) \qquad Punto\ 2 = (2,\ 1,\ 2)$$

ALUMNO: LEÓN FELIPE PALAFOX NOVACK

3.3 - Sea la recta L de ecuaciones:

$$L: \frac{x-6}{3} = \frac{4-y}{-4} = z-5$$

Determinar las coordenadas de los puntos de la recta que se encuentran a 5 unidades del origen.

RESOLUCIÓN.

Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$x = 3t + 6$$
$$y = 4t + 4$$
$$z = t + 5$$

Considerando un punto A de la recta cuya distancia al origen de coordenadas sea 5 unidades, tenemos:

$$A(3t+6,\ 4t+4,\ t+5) \quad \text{K} \quad (1)$$

Como:

$$|\overline{OA}| = 5; \quad \textit{siendo "O" el origen del sistema de referencia.}$$

$$|\overline{OA}| = \sqrt{(3t+6)^2 + (4t+4)^2 + (t+5)^2} = 5$$

$$|\overline{OA}| = \sqrt{9t^2 + 36t + 36 + 16t^2 + 32t + 16 + t^2 + 10t + 25} = 5$$

$$\sqrt{26t^2 + 78t + 77} = 5 \quad \Rightarrow \quad 26t^2 + 78t + 77 = 25 \quad \Rightarrow \quad t^2 + 3t + 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación se tiene:

$$(t+1)(t+2) = 0$$
$$t_1 = -1$$
$$t_2 = -2$$

Sustituyendo en (1) los t obtenidos, tenemos:

$$A(3,\ 0,\ 4)$$
$$B(0,\ -4,\ 3)$$

ALUMNO: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

3.4 - Sea la recta L que contiene al punto $A(-6,\ -6,\ -6)$ que interseca a la recta R y forma con ella un ángulo de $45°$. Si la recta R es:

$$R\begin{cases} x=-2+3t \\ y=-6+t \\ z=-5-3t \end{cases}$$

Determinar las coordenadas de los puntos de intersección entre L y R. (Dos soluciones).

RESOLUCIÓN.

Para poder aplicar la fórmula del ángulo entre dos rectas, necesitamos dos vectores directores. El vector director de la recta R es sencillo de determinar, pues simplemente se obtiene de los coeficientes de t; por lo que $\bar{u}=(3,\ 1,\ -3)$. Para determinar un vector director de L es necesario conocer al menos dos puntos. Un punto es dato: $A(-6,\ -6,\ -6)$, el otro punto lo deduciremos.

Como se especifica que las dos rectas se intersecan, podemos deducir que un punto de R forma parte de L (que a la vez sería la respuesta del problema pues es donde se intersecan las rectas). Así, con la expresión vectorial podemos definir todos los puntos de la recta:

$$\bar{R}=(-2,\ -6,\ -5)+t(3,\ 1,\ -3)=(-2+3t,\ -6+t,\ -5-3t)$$

Por lo que el punto B (que pertenecerá a L y R) será: $B(-2+3t,\ -6+t,\ -5-3t)$. Con los dos puntos podremos definir el vector director de L:

$$\overline{AB}=(-2+3t,\ -6+t,\ -5-3t)-(-6,\ -6,\ -6)=(4+3t,\ t,\ 1-3t)$$

Ahora estamos preparados para aplicar la fórmula de ángulo entre rectas.

$$\cos\theta=\frac{\bar{u}\cdot\overline{AB}}{|\bar{u}||\overline{AB}|}$$

$$\cos 45°=\frac{(3,\ 1,\ -3)\cdot(4+3t,\ t,\ 1-3t)}{\sqrt{(3)^2+(1)^2+(-3)^2}\sqrt{(4+3t)^2+(t)^2+(1-3t)^2}}$$

Como vemos es una ecuación cuadrática de una incógnita que podremos resolver con facilidad:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{12+9t+t-3+9t}{\sqrt{19}\sqrt{(16+24t+9t^2)+t^2+(1-6t+9t^2)}}\quad\Rightarrow\quad\frac{\sqrt{38}}{2}=\frac{9+19t}{\sqrt{17+18t+19t^2}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{38}}{2}=\frac{9+19t}{\sqrt{17+18t+19t^2}}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{19}{2}=\frac{(9+19t)^2}{17+18t+19t^2}$$

$$19\left(17+18t+19t^2\right)=2\left(81+342t+361t^2\right) \quad\Rightarrow\quad 323+342t+361t^2=162+684t+722t^2$$

$$161+-342t-361t^2=0 \quad\Rightarrow\quad t_1=\frac{69}{200}^{**}, \quad t_2=-\frac{129}{100}^{**}$$

Ahora, para obtener el punto donde se intersecan las rectas, sustituiremos los valores obtenidos en el punto B, que usamos para definir el vector director de L:

Para t_1:

$$P_1=(-2+3t,-6+t,-5-3t)=\left(-2+3\left[\frac{69}{200}\right],-6+\left[\frac{69}{200}\right],-5-3\left[\frac{69}{200}\right]\right)$$

$$P_1=\left(-\frac{193}{200},-\frac{1131}{200},-\frac{1207}{200}\right)$$

Para t_2:

$$P_2=(-2+3t,\ -6+t,\ -5-3t)=\left(-2+3\left[-\frac{129}{100}\right],-6+\left[-\frac{129}{100}\right],-5-3\left[-\frac{129}{100}\right]\right)$$

$$P_2=\left(-\frac{587}{100},-\frac{729}{100},-\frac{113}{100}\right)$$

Que son los puntos buscados para las dos soluciones.

** Se han redondeado los resultados para facilitar su manejo.

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

3.5 - Sean las rectas L y R que tienen por ecuaciones:

$$L:\left\{\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{2z+6}{4}\right.$$

$$R:\left\{\frac{2-x}{3}=\frac{y}{3}=\frac{6-z}{9}\right.$$

a) Si L y R se intersecan, determinar el punto de intersección.
b) Determinar el punto de intersección de la recta R con el plano XY.

RESOLUCIÓN.

a) Lo primero que haremos será separar las ecuaciones de las rectas de la siguiente manera

$$\text{De } L: \begin{cases} \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-3}{4} & \Lambda \quad (1) \\[2ex] \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{2z+6}{4} & \Lambda \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{De } R: \begin{cases} \dfrac{2-x}{3} = \dfrac{y}{3} & \Lambda \quad (3) \\[2ex] \dfrac{y}{3} = \dfrac{6-z}{9} & \Lambda \quad (4) \end{cases}$$

Trabajando con las ecuaciones (1) y (3)

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{4} \Rightarrow 4x+4 = 3y-9 \quad \text{K} \quad (A)$$
$$\frac{2-x}{3} = \frac{y}{3} \Rightarrow 2-x = y \quad \text{K} \quad (B)$$

Multiplicando B por (-3) y sumándole (A) obtenemos;

$$7+7x=0 \text{, de donde } x=-1$$

Ahora sustituyendo $x=-1$ en (1) ;

$$y-3=0 \text{, de donde } y=3$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4) , obtenemos que:

$$6-z=9 \text{, de donde } z=-3$$

por lo tanto el punto de intersección es:

$$P_{\text{int}}(-1,3,-3)$$

b) Nos piden la intersección de la recta R con el plano XY y sabemos que el plano tiene por ecuación $z=0$. Si sustituimos la ecuación del plano en (4),

$$\frac{y}{3}=\frac{6}{9} \quad \Rightarrow \quad y=2$$

sustituyendo $y=2$ *en (3), tenemos:*

$$\frac{2-x}{3}=\frac{y}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2-x}{3}=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad 2-x=2 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

Por lo que el punto de intersección buscado es:

$$P_{int}(0,2,0).$$

ALUMNA: ISABEL MIRANDA ALVARADO

3.6 - Sea la recta L que contiene al punto $A(0,\ 2,\ -1)$ y cuyos ángulos directores son $\alpha=45°$; $\beta<90°$; $\gamma=60°$. Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de L con cada plano coordenado.

RESOLUCIÓN.

Para determinar el valor del ángulo β, sabemos que:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\beta=1-\cos^2\alpha-\cos^2\gamma$$

$$\cos^2\beta=1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos\beta=\pm\frac{1}{2}$$

Como $\beta<90°$, $\cos\beta=½$ porque con el valor negativo $\beta>90°$. Por lo que

$$\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\beta=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos 60°=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto la dirección de la recta L estará dada por:

$$\overline{u_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \quad \text{o también por} \quad \overline{u_2}=\left(\sqrt{2},\ 1,\ 1\right)$$

La ecuación de una recta en forma simétrica está dada por:

$$L: \frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

donde $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto cualquiera contenido en la recta y $\bar{u} = (a, b, c)$ es el vector que indica la dirección de la misma, para nuestro caso

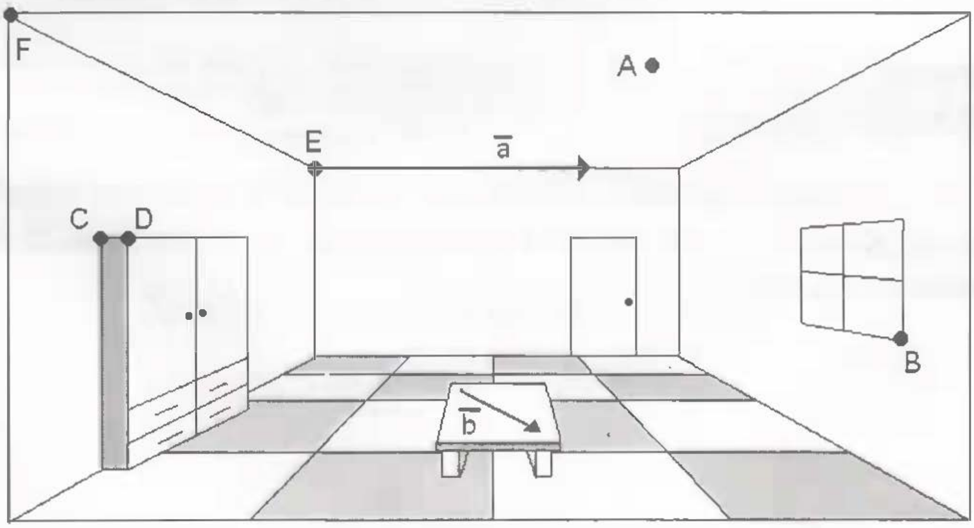
$$L: \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 1}{1}$$

Finalmente para encontrar las intersecciones de L con los planos coordenados, únicamente habrá que sustituir las ecuaciones de cada plano en las ecuaciones simétricas de la recta que acabamos de obtener, esto es:

Plano "YZ"	*Plano "XZ"*	*Plano "XY"*
$X = 0$	$Y = 0$	$Z = 0$
$\frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1} = 0$	$\frac{x}{\sqrt{2}} = -2 = \frac{z+1}{1}$	$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{y-2}{1} = 1$
$y - 2 = 0$	$\frac{x}{\sqrt{2}} = -2$	$\frac{x}{\sqrt{2}} = 1$
$y = 2$	$x = -2\sqrt{2}$	$x = \sqrt{2}$
$z + 1 = 0$	$z + 1 = -2$	$y - 2 = 1$
$z = -1$	$z = -3$	$y = 3$
$A(0, 2, -1)$	$B(-2\sqrt{2}, 0, -3)$	$C(\sqrt{2}, 3, 0)$

ALUMNO: MIGUEL ÁNGEL VICTORIA RÍOS

3.7 - En una habitación se ubicó la siguiente información:



Donde:

$$\bar{a} = (0, 4, 3) \qquad A\left(1, 1, \frac{3}{2}\right) \qquad L_1 : \bar{e} = (1, 2, 3) + t\, j$$

$$\bar{b} = (2, 4, 3) \qquad B(3, 5, 0)$$

Con los datos proporcionados:

a) Determinar la expresión vectorial del plano que contiene al techo.

b) Si el punto W es simétrico de A con respecto a la recta L_1 y a la vez es un punto del suelo, obtener la ecuación de una recta L_2 contenida en el plano del suelo.

c) Si el punto C es simétrico a B respecto al eje X, determinar la ecuación cartesiana del plano detrás del armario.

d) Determinar las ecuaciones de la recta L_3 en su forma simétrica que contiene al segmento $\overline{CD}$.

e) Si el segmento $\overline{EF}$ mide 5 metros, calcular el volumen del cuarto.

RESOLUCIÓN.

a) Determinar la expresión vectorial del plano que contiene al techo.

Antes que nada debemos darnos cuenta que tanto el techo como el suelo y la mesa son planos paralelos. De aquí sacamos en conclusión que el vector sobre la mesa y en la arista entre el techo y la pared del fondo, son vectores directores que se encuentran contenidos en el plano del techo. Con dos vectores y el punto A se puede obtener la ecuación vectorial del plano pedido.

$$P_T : \bar{s} = (1,\ 1,\ 3/2) + r\ (0, 4, 3) + s\,(2,\ 4,\ 3)$$

b) Si el punto W es simétrico de A con respecto a la recta L_1 y a la vez es un punto del suelo, obtener la ecuación de una recta L_2 contenida en el plano del suelo.

Aunque el punto puede ser encontrado con una buena graficación, el método más corto es aplicar la fórmula para determinar un punto simétrico a una recta (aunque hay muchas formas de encontrarlo, pero resultados sólo uno):

$$W = 2\left(P_0 + comp.vect\ P_0G_U\right) - G$$

Donde P_0 es un punto contenido en la recta; G es el punto a quién le determinaremos su simétrico; y $\bar{u}$ el vector director de la recta (la demostración de esta fórmula se deja al lector). Ahora resolveremos (se omitirán algunos pasos por razones de espacio).

$$W = 2\left[(1,\ 2,\ 3) + \frac{([1,\ 1,\ \tfrac{3}{2}] - [1,\ 2,\ 3]) \cdot (0,\ 1,\ 0)}{|(0,\ 1,\ 0)|} \frac{(0,\ 1,\ 0)}{|(0,\ 1,\ 0)|}\right] - (1,\ 1,\ \tfrac{3}{2})$$

$$W = 2\{(1,\ 2,\ 3) + [(0,\ -1,\ -\tfrac{3}{2}) \cdot (0,\ 1,\ 0)][0,\ 1,\ 0]\} - (1,\ 1,\ \tfrac{3}{2})$$

$$W = 2[(1,\ 2,\ 3) + -1(0,\ 1,\ 0)] - (1,\ 1,\ \tfrac{3}{2}) \Rightarrow W = 2[(1,\ 2,\ 3) + (0,\ -1,\ 0)] - (1,\ 1,\ \tfrac{3}{2})$$

$$W = 2(1,\ 1,\ 3) - (1,\ 1,\ \tfrac{3}{2}) \Rightarrow W = (2,\ 2,\ 6) - (1,\ 1,\ \tfrac{3}{2}) \Rightarrow W = (1,\ 1,\ \tfrac{9}{2})$$

Cualquier vector ($\bar{a}$ o $\bar{b}$) puede ser utilizado para obtener el vector director de la recta. Así, con un vector director y el punto que encontramos, la ecuación de la recta sería la siguiente:

$$L_2 : \bar{z} = (1,\ 1,\ \tfrac{9}{2}) + t\,(0,\ 4,\ 3)$$

o bien

$$L_2 : \bar{z} = (1,\ 1,\ \tfrac{9}{2}) + t\,(2,\ 4,\ 3)$$

c) Si el punto C es simétrico a B respecto al eje X, determinar la ecuación cartesiana del plano detrás del armario.

El punto simétrico de B respecto al eje X es muy fácil de obtener; basta con cambiar los signos a las coordenadas de XY del punto B, por lo tanto $C(3,\ -5,\ 0)$.

Ahora, el plano del armario es perpendicular al plano del techo; en el techo, el vector $\bar{a}$ forma un ángulo de 90° con el plano del armario. Debido a la perpendicularidad de este vector respecto al plano del armario, $\bar{a}$ es su vector normal. De esta manera con un punto y la normal es más que suficiente para determinar la ecuación del plano.

$$\begin{aligned} &0x + 4y + 3z + D = 0 \\ &0(3) + 4(-5) + 3(0) + D = 0 \\ &-20 + D = 0 \\ &D = 20 \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación del plano es:

$$4y + 3z + 20 = 0$$

d) Determinar las ecuaciones de la recta L_3 en su forma simétrica que contiene al segmento $\overline{CD}$.

De nueva cuenta, el vector $\bar{a}$ nos es de utilidad para este inciso pues $\overline{CD}$ es paralelo al vector $\bar{a}$. Como vemos, el segmento $\overline{CD}$ es perpendicular al plano del armario. Con el vector $\bar{a}$ y el punto C se obtienen la ecuación pedida

$$L_3 = (3,\ -5,\ 0) + t\,(0,\ 4,\ 3)$$

Ya con la ecuación de la recta, el paso a forma simétrica es sencillo.

$$L_3 = \begin{cases} \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z}{3} \\ x = 3 \end{cases}$$

e) Si el segmento $\overline{EF}$ mide 5 metros, calcular el volumen del cuarto.

Debido a que tanto las paredes como el techo, con el suelo, son paralelos, la separación entre ellos la obtendremos calculando la distancia entre un punto y una recta.
Para determinar un vector normal del techo y del piso efectuaremos el producto cruz de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ que como hemos dicho antes, pertenecen a ambos planos.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (0,\ 6,\ -8)$$

En la siguiente tabla se resumen todos los datos que utilizaremos y que como vemos son datos o los hemos calculado:

Plano	Normal	Módulo N.	Punto
Techo	$(0,\ 6,\ -8)$	10	$(1,\ 1,\ 3/2)$
Suelo	$(0,\ 6,\ -8)$	10	$(1,\ 1,\ 9/2)$

Armario	$(0,\ 4,\ 3)$	5	$(3,\ -5,\ 0)$
Ventana	$(0,\ 4,\ 3)$	5	$(3,\ 5,\ 0)$

Ahora calcularemos las distancias:
Distancia entre techo y suelo:

$$Dts = \frac{\left[\left(1,\ 1,\ {}^{9}\!/_{2}\right)-\left(1,\ 1,\ {}^{3}\!/_{2}\right)\right]\cdot(0,\ 6,\ -8)}{10}$$

$$Dts = \frac{(0,\ 0,\ 3)\cdot(0,\ 6,\ -8)}{10} \Rightarrow Dts = \frac{|-24|}{10} = \frac{12}{5}$$

Distancia entre pared y pared:

$$Dpp = \frac{[(3,\ 5,\ 0)-(3,\ -5,\ 0)]\cdot(0,\ 4,\ 3)}{5}$$

$$Dpp = \frac{(0,\ 10,\ 0)\cdot(0,\ 4,\ 3)}{5} \Rightarrow Dpp = \frac{|40|}{5} = 8$$

Ahora, ya con las tres distancias sólo falta multiplicarlas para obtener su volumen:

$$V = \left(\frac{12}{5}\right)(8)(5) = (12)(8) = 96 \Rightarrow V = 96\ m^3$$

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

3.8 - Sea el plano π que contiene a los puntos $A(-4,\ 7,\ 2)$ y $B(2,\ 2,\ 2)$ y contiene a la recta L. Obtener la ecuación cartesiana del plano π.

$$L: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

RESOLUCIÓN.

Para obtener la ecuación cartesiana de un plano se necesita un punto del plano y su vector normal, que se obtiene del producto cruz de dos vectores paralelos al plano; uno de esos vectores es el que forman los puntos A y B, y el otro es el vector director de la recta L.

Después se utiliza la ecuación normal del plano.

$$\bar{u}_1 = (1,\ 1,\ 1)$$

$$\bar{u}_2 = \overline{AB} = (2,\ 2,\ 2) - (-4,\ 7,\ 2) = (6,\ -5,\ 0)$$

$$\bar{N} = \bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 5i + 6j - 11k$$

Considerando al punto B, tenemos:

$$(\bar{p} - \bar{p}_0) \cdot \bar{N} = 0 \quad \text{(Ecuación normal del plano)}$$

$$[(x,\ y,\ z) - (2,\ 2,\ 2)] \cdot \bar{N} = 0 \Rightarrow (x, y, z) \cdot \bar{N} - (2, 2, 2) \cdot \bar{N} = 0$$

$$(x,\ y,\ z) \cdot (5,\ 6,\ -11) - (2,\ 2,\ 2) \cdot (5,\ 6,\ -11) = 0 \Rightarrow 5x + 6y - 11z - (10 + 12 - 22) = 0$$

La ecuación cartesiana pedida es:

$$\pi : 5x + 6y - 11z = 0 .$$

ALUMNO: ZEUS HIRAM ZAMORA GUEVARA

3.9 - Un plano es paralelo a las rectas que tienen por vectores directores: $\bar{a} = (1,\ -3,\ 2)$ y $\bar{b} = (3,\ 7,\ -1)$. Calcular la ecuación del plano si además pasa por el punto $A(5,\ 1,\ -1)$.

RESOLUCIÓN.

La única forma en que dos rectas sean paralelas a un plano, es que pertenezcan a un plano paralelo. Debido a que sólo se nos dan los vectores directores, los podemos considerar libres y trasladarnos a nuestro plano. En otras palabras, dos vectores directores paralelos a un plano, se pueden considerar contenidos en otro plano cualquiera paralelo.

Con este concepto, el ejercicio está prácticamente resuelto. Primero definiremos la normal del plano:

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \bar{N} = (-11,\ 7,\ 16)$$

Y ahora determinaremos la componente D apoyándonos en el punto A:

$$-11(5)+7(1)+16(-1)+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=55-7+16=64$$

Por lo que la ecuación del plano buscado es :

$$-11x+7y+16z+64=0 \quad ó \quad 11x-7y-16z-64=0$$

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

3.10 - Sea la recta R definida por la intersección de los planos π_1 y π_2 de ecuaciones:

$$\pi_1 : x-z+1=0$$
$$\pi_2 : x+2y-6=0$$

y sea el plano π_3 que contiene a los puntos:

$$A(1,\ 1,\ 6),\ B(-1,\ 1,\ 0)\ y\ C(0,\ 3,\ 1)$$

Calcular el ángulo que forma la recta R con el plano π_3.

RESOLUCIÓN.

De los planos π_1 y π_2 conocemos sus normales: $\overline{N_1}=(1,\ 0,\ -1)$ y $\overline{N_2}=(1,\ 2,\ 0)$; entonces si efectuamos el producto $\overline{N_1}\times\overline{N_2}$ obtendremos un vector director de la recta R, por lo que:

$$\overline{N_1}\times\overline{N_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{u}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}=(2,\ -1,\ 2)$$

La magnitud de este vector es la siguiente:

$$\left|\bar{u}\right|=\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2}$$
$$\left|\bar{u}\right|=\sqrt{9}=3$$

Por otro lado, conocemos tres puntos que pertenecen al plano π_3, así que podemos determinar un vector normal a dicho plano, de la siguiente manera:

$$\overline{AB}=\bar{B}-\bar{A}=(-1,\ 1,\ 0)-(1,\ 1,\ 6)$$
$$\overline{AB}=(-2,\ 0,\ -6)$$

o bien;

$$\bar{a} = (1,\ 0,\ 3)$$

$$\overline{AC} = \bar{C} - \bar{A} = (0,\ 3,\ 1) - (1,\ 1,\ 6)$$
$$\overline{AC} = (-1,\ 2,\ -5)$$

Obteniendo el producto $\bar{a} \times \overline{AC}$:

$$\left|\bar{a} \times \overline{AC}\right| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-6,\ 2,\ 2)$$

Tomando un vector paralelo al vector anterior tenemos:

$$\overline{N_3} = (3,\ -1,\ -1)$$
$$\left|\overline{N_3}\right| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \quad \Rightarrow \quad \left|\overline{N_3}\right| = \sqrt{11}$$

El ángulo formado entre una recta y un plano es el ángulo que forman el vector normal del plano, con un vector director de la recta; en este caso conocemos ambas vectores, por lo tanto:

$$\theta = ang\ sen \frac{\overline{N_3} \cdot \bar{u}}{\left|\overline{N_3}\right|\left|\bar{u}\right|}$$

$$\theta = ang sen \frac{(3,\ -1,\ -1) \cdot (2,\ -1,\ 2)}{3\sqrt{11}} = ang\ sen \frac{5}{3\sqrt{11}} \quad \Rightarrow \quad \theta = 30.16°$$

ALUMNA: PATRICIA MARÍA SÁNCHEZ GÓMEZ

CAPITULO 4

CURVAS

4.1 - Para la curva C, una de cuyas ecuaciones vectoriales es:

$$C : \bar{r} = (sen\,t)\,i + (3\cos t)\,k$$

Determinar:

a) Unas ecuaciones paramétricas.
b) El intervalo paramétrico.
c) Los intervalos de variación de X, Y y Z.
d) Unas ecuaciones cartesianas.

RESOLUCIÓN.

a) Para determinar unas ecuaciones paramétricas de la curva únicamente se expresa la ecuación vectorial de la forma:

$$x = sen\,t$$
$$y = 0$$
$$z = 3\cos t$$

b) Como no existe ningún valor de t para el cual se indeterminen las ecuaciones anteriores,
$t \in R$

c) La variable x está definida en términos del seno del parámetro t, por lo tanto, únicamente tomará valores entre

$$x \in [-1,\ 1]$$
$$y = 0$$

de manera similar que para x, $z \in [-3,\ 3]$.

d) Para determinar unas ecuaciones cartesianas debemos buscar una función que solamente dependa de x y y.

$$\begin{matrix} x^2 = sen^2 t & & x^2 = sen^2 t \\ y = 0 & \Rightarrow & \\ z^2 = 9\cos^2 t & & \dfrac{z^2}{9} = \cos^2 t \end{matrix}$$

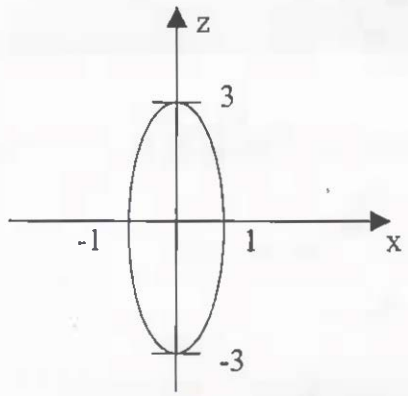
Sumando:

$$x^2 + \frac{z^2}{9} = 1$$

Por lo que las ecuaciones pedidas son:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Se trata de las ecuaciones de una elipse con centro en el origen y eje mayor coincidente con el eje z. La gráfica de la curva se presenta a continuación:



ALUMNO: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

4.2.- Obtener la ecuación cartesiana de las siguientes curvas e identificarlas.

$a)\quad C_1\!: \bar{p} = t\,i + \left(\sqrt{14t - t^2 - 40} + 2\right)j\ ; \quad z = 2$

$b)\quad C_2\!: \begin{cases} x = 3\sec t - 4 \\ y = \tan t + 1 \\ z = 0 \end{cases}$

$c)\quad C_3\!: r^2 = \dfrac{8r\,sen\,\theta - 18r\cos\theta + 23}{9\cos^2\theta + 4sen^2\theta}\ ; \ y = 3$

RESOLUCIÓN.

C_1 : Su ecuación está dada en forma vectorial. Se despeja el parámetro t en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra.

C_2 : Su ecuación está dada en forma paramétrica, en este caso el parámetro es el argumento de funciones trigonométricas, se despeja la función que contiene a t en cada una de las ecuaciones para después relacionarlas por medio de identidades trigonométricas.

C_3 : Se trata de una ecuación polar, en este caso la ecuación se encuentra en un plano paralelo al plano xz por lo tanto $x = r\cos\theta$, $z = rsen\theta$ y $r = \sqrt{x^2 + z^2}$

a) C_1: $\bar{p} = t\,i + \left(\sqrt{14t - t^2 - 40} + 2\right)j$; $z = 2$

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{14t - t^2 - 40} + 2 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{14x - x^2 - 40} + 2 \quad \Rightarrow \quad y - 2 = \sqrt{14x - x^2 - 40}$$
$$(y-2)^2 = 14x - x^2 - 40 \quad \Rightarrow \quad -(y-2)^2 = x^2 - 14x + 40$$
$$-(y-2)^2 = x^2 - 14x + 40 + 9 - 9 \quad \Rightarrow \quad -(y-2)^2 = x^2 - 14x + 49 - 9$$
$$-(y-2)^2 = (x-7)^2 - 9 \quad \Rightarrow \quad -(x-7)^2 - (y-2)^2 = -9$$

$$\begin{cases} (x-7)^2 + (y-2)^2 = 9 \\ z = 2 \end{cases}$$

Es una circunferencia con centro en el punto $P(7,\ 2)$ y radio $r = 3$, contenida en un plano paralelo al plano xy.

b) C_2: $\begin{cases} x = 3\sec t - 4 \\ y = \tan t + 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sec t = \dfrac{x+4}{3} \\ \tan t = y - 1 \\ z = 0 \end{cases}$

Usaremos la identidad $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

Sustituyendo

$$\left(\frac{x+4}{3}\right)^2 - (y-1)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x+4)^2}{9} - (y-1)^2 = 1$$

Se trata de una hipérbola con centro en el punto $P(-4,\ 1)$ con un eje paralelo al eje x.

c) C_3: $r^2 = \dfrac{8rsen\,\theta - 18r\cos\,\theta + 23}{9\cos^2\theta + 4sen^2\theta}$; $y = 3$

$$r^2\left(9\cos^2\theta + 4sen^2\theta\right) = 8rsen\,\theta - 18r\cos\,\theta + 23$$

$$9r^2\cos^2\theta + 4r^2sen^2\theta + 18r\cos\theta - 8rsen\,\theta = 23$$

$$9x^2 + 4z^2 + 18x - 8z = 23 \;\Rightarrow\; 9x^2 + 18x + 4z^2 - 8z = 23$$

$$\frac{x^2+2x}{4} + \frac{z^2-2z}{9} = \frac{23}{36} \;\Rightarrow\; \frac{x^2+2x+1-1}{4} + \frac{z^2-2z+1-1}{9} = \frac{23}{36}$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{9} - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{23}{36} \;\Rightarrow\; \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{9} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{23}{36}$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{9} = 1 \;;\; y = 3$$

Se trata de una elipse con centro en el punto $P(-1,\ 1)$ y con eje mayor paralelo al eje z.

ALUMNO: ZEUS HIRAM ZAMORA GUEVARA

4.3.- Convertir las siguientes expresiones de su forma cartesiana a polar o viceversa según sea el caso.

a) $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 9\left(x^2 - y^2\right) = 0$

b) $x^2 - 4ay - 4a = 0$

c) $r^2 = 4sen\theta$

d) $r = \dfrac{6}{2 - 3sen\theta}$

RESOLUCIÓN.

a) $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 9\left(x^2 - y^2\right) = 0$

$$\left(r^2\right)^2 - 9\left(r^2\cos^2\theta - r^2sen^2\theta\right) = 0 \;\Rightarrow\; r^2r^2 - 9r^2\left(\cos^2\theta - sen^2\theta\right) = 0$$

$$r^2\left(r^2 - 9\left(\cos^2\theta - sen^2\theta\right)\right) = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - 9\left(\cos^2\theta - sen^2\theta\right) = 0$$

$$r^2 - 9\left(\left(1 - sen^2\theta\right) - sen^2\theta\right) = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - 9\left(1 - 2sen^2\theta\right) = 0$$

$$r^2 = 9\left(1 - 2sen^2\theta\right)$$

b) $x^2 - 4ay - 4a = 0$

$$x^2 = 4ay + 4a \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = y^2 + 4ay + 4a$$

$$x^2 + y^2 = (y + 2a)^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = y + 2a$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - y = 2a \quad \Rightarrow \quad r - rsen\theta = 2a$$

$$r(1 - sen\theta) = 2a \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2a}{1 - sen\theta}$$

c) $r^2 = 4\,sen\theta$

$$r^2 = \frac{4r\,sen\theta}{r} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{4y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\left(x^2 + y^2 = \frac{4y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(x^2 + y^2\right)^2 = \frac{16y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + y^2\right)^2 = 16y^2 \quad \Rightarrow \quad \left(x^2 + y^2\right)^3 = 16y^2$$

d) $r = \dfrac{6}{2 - 3sen\theta}$

$$r(2 - 3sen\theta) = 6 \quad \Rightarrow \quad 2r - 3rsen\theta = 6$$

$$2\sqrt{x^2 + y^2} - 3y = 6 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{6 + 3y}{2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{6 + 3y}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{(6 + 3y)^2}{4}$$

$$4x^2 + 4y^2 = 36 + 36y + 9y^2 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 5y^2 - 36y - 36 = 0$$

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

4.4.- Determinar si la ecuación vectorial $\bar{r} = sen\theta\left(\left(\sqrt{3}\cot\theta\right)i + 2j + \left(4\csc\theta\right)k\right)$ representa el mismo lugar geométrico que la ecuación $r^2\left(3+\cos^2\theta\right)=12$.

RESOLUCIÓN.

Primero desarrollemos la ecuación vectorial:

$$\bar{r} = \left(\sqrt{3}sen\theta\cot\theta\right)i + 2sen\theta\ j + \left(4sen\theta\csc\theta\right)k$$

$$\bar{r} = \left(\sqrt{3}sen\theta\frac{\cos\theta}{sen\theta}\right)i + \left(2sen\theta\right)j + \left(4sen\theta\frac{1}{sen\theta}\right)k$$

$$\bar{r} = \left(\sqrt{3}\cos\theta\right)i + \left(2sen\theta\right)j + 4k$$

$$\bar{r} = \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\theta & \wedge \quad (1) \\ y = 2sen\theta & \wedge \quad (2) \\ z = 4 & \wedge \quad (3) \end{cases}$$

Para poder transformar la ecuación vectorial dada en una cartesiana, se obtienen primero las ecuaciones paramétricas de la curva y posteriormente al eliminar el parámetro de éstas, se llega a la ecuación cartesiana.

De esta forma, de (1) y (2) se tiene:

$$x = \sqrt{3}\cos\theta \qquad\qquad y = 2sen\theta$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \cos\theta \qquad\qquad \frac{y}{2} = sen\theta$$

$$\frac{x^2}{3} = \cos^2\theta \qquad\qquad \frac{y^2}{4} = sen^2\theta$$

por lo que reemplazando en la identidad trigonométrica $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$ se llega a:

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \wedge \quad (4)$$

Correspondiente a la ecuación de una elipse que se encuentra alojada en el plano $z = 4$.
Ahora veamos si la otra ecuación también corresponde a la misma elipse (es decir representa el mismo lugar geométrico).

$$r^2\left(3+\cos^2\theta\right)=12$$

Transformémosla a su ecuación cartesiana:

$$3r^2+r^2\cos^2\theta=12 \quad\Rightarrow\quad 3\left(x^2+y^2\right)+x^2=12$$

$$3x^2+3y^2+x^2=12 \quad\Rightarrow\quad 4x^2+3y^2=12$$

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \Lambda \quad (5)$$

Dado que (4) y (5) son iguales entonces ambas ecuaciones representan el mismo lugar geométrico.

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

4.5 - Para las ecuaciones paramétricas:

$$x=-4sen(\omega t) \qquad\qquad K \quad (1)$$
$$y=3\left[\cos(\omega t)sen\phi-sen(\omega t)\cos\phi\right] \qquad K \quad (2)$$

Donde ϖ y ϕ son constantes. Determinar qué tipo de curva es.

RESOLUCIÓN.

De las ecuaciones paramétricas vamos a eliminar el parámetro t; para eso en la ecuación (2) sustituimos $\cos(\omega t)=\sqrt{1-sen^2(\omega t)}$, entonces:

$$y=3\left(\sqrt{1-sen^2(\omega t)}sen\phi-sen(\omega t)\cos\phi\right) \text{ o bien:}$$
$$\frac{y}{3}=\sqrt{1-sen^2(\omega t)}sen\phi-sen(\omega t)\cos\phi \qquad K \quad (3)$$

Despejando $sen(\omega t)$ de la ec. (1) obtenemos:

$$-\frac{x}{4}=sen(\omega t)$$

sustituyendo en la ecuación (3):

$$\frac{y}{3}=\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}sen\phi+\frac{x}{4}\cos\phi$$

Reacomodando términos y elevando ambos miembros al cuadrado:

$$\left(\frac{y}{3}-\frac{x}{4}\cos\phi\right)^2=\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}\right)^2 sen^2\phi$$

Desarrollando el binomio del lado izquierdo:

$$\frac{y^2}{9}-2\frac{xy}{12}\cos\phi+\frac{x^2}{16}\cos^2\phi=sen^2\phi-\frac{x^2}{16}sen^2\phi$$

Simplificando:

$$\frac{x^2}{16}\left(\cos^2\phi+sen^2\phi\right)-\frac{xy}{6}\cos\phi+\frac{y^2}{9}=sen^2\phi$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{xy}{6}\cos\phi+\frac{y^2}{9}=sen^2\phi$$

Por lo que la ecuación cartesiana de la curva es:

$\frac{x^2}{16}-\frac{xy}{6}\cos\phi+\frac{y^2}{9}-sen^2\phi=0$ ya que el parámetro ϕ es constante.

Dado que la forma general de una cónica es:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

con:

$$A=\frac{1}{16};\ B=-\frac{\cos\phi}{6};\ C=\frac{1}{9};\ D=E=0 \text{ y } F=-sen^2\phi$$

obteniendo el indicador:

$$I=B^2-4AC=\frac{\cos^2\phi}{36}-4\left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{\cos^2\phi}{36}-\frac{1}{36}=\frac{1}{36}\left(\cos^2\phi-1\right)$$

Puesto que $0<\cos^2\phi<1$ lo cual implica que $\cos^2\phi-1$ es negativo para todo $\phi\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\text{K}\ ,\ 2n\pi$

Por tanto $I < 0$, en consecuencia la curva es una elipse, cuyo eje focal es oblicuo al eje x.

ALUMNA: ISABEL MIRANDA ALVARADO

4.6 - Obtener las ecuaciones cartesianas de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = 2\,sen\,t + \cos 2t \qquad \text{K} \qquad (1)$$
$$y = 1 - \cos t \qquad \text{K} \qquad (2)$$
$$z = 3 + sen\,t \qquad \text{K} \qquad (3)$$

RESOLUCIÓN.

Hay que recordar que una curva en el espacio está representada por un par de ecuaciones cartesianas. De la identidad trigonométrica $\cos 2t = \cos^2 t - sen^2 t$ podemos escribir la ecuación (1) como :

$$x = 2\,sen\,t + \cos^2 t - sen^2 t \quad \text{K} \quad (4)$$

de las ecuaciones (2) y (3);

$$y = 1 - \cos t \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t = (1-y)^2 \quad \text{K} \quad (5)$$
$$z = 3 + sen\,t \quad \Rightarrow \quad sen^2 t = (z-3)^2 \quad \text{K} \quad (6)$$

Como $\cos^2 t + sen^2 t = 1$ al sumar las ecuaciones (5) y (6)obtenemos:

$$(1-y)^2 + (z-3)^2 = 1$$

Sustituyendo (5) y (6) en (4), y sabiendo que $sen\,t = z - 3$ tenemos:

$$x = 2(z-3) + (1-y)^2 - (z-3)^2$$

por lo tanto las ecuaciones cartesianas de la curva son:

$$\begin{cases} x = 2(z-3) + (1-y)^2 - (z-3)^2 \\ (1-y)^2 + (z-3)^2 = 1 \end{cases}$$

ALUMNO: MIGUEL ÁNGEL VICTORIA RÍOS

4.7 - Obtener una ecuación vectorial de la curva descrita por un punto cuya abscisa sea 3 y su cota el doble del coseno de su ordenada. Además, localizar en una gráfica cuando menos cuatro puntos de dicha curva.

RESOLUCIÓN.

Se nos proporcionan los siguientes datos:

$x = 3$ ya que su abscisa vale 3
$y = t$
$z = 2\cos t$ ya que la cota vale el doble del coseno de su ordenada.

Otra expresión podría ser:

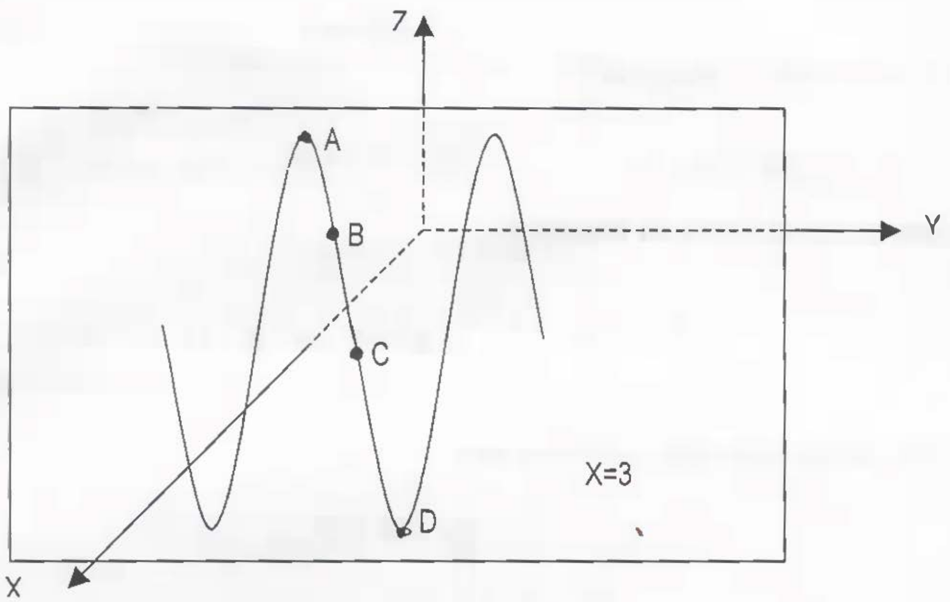
$$x = 3$$
$$y = \alpha^2 \quad ; \text{ donde } \alpha \text{ es un parámetro, } \alpha \in R$$
$$z = 2\cos\alpha^2$$

Entonces una ecuación vectorial es:

$$\overline{p} = 3\bar{i} + t\,\overline{j} + 2\cos t\,\overline{k} \quad \text{o bien;}$$
$$\overline{p} = 3\bar{i} + \alpha^2\,\overline{j} + 2\cos\alpha^2\,\overline{k}$$

Tabulación:

Parámetro	Abscisa	Ordenada	Cota	Punto
t	$x = 3$	$y = t$	$z = 2\cos t$	$(x,\ y,\ z)$
0	3	0	$2\cos 0 = 2$	$(3,\ 0,\ 2)$
$\frac{\pi}{4}$	3	$\frac{\pi}{4}$	$2\cos\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$	$\left(3,\ \frac{\pi}{4},\ \sqrt{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	3	$\frac{\pi}{2}$	$2\cos\frac{\pi}{2} = 2(0) = 0$	$\left(3,\ \frac{\pi}{2},\ 0\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	3	$\frac{3\pi}{4}$	$2\cos\frac{3\pi}{4} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$	$\left(3,\ \frac{3\pi}{4},\ -\sqrt{2}\right)$



ALUMNO: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

4.8 - Sea la curva de ecuación polar $r = 2sen\theta$ en el plano $x = 0$. Determinar:

a) **Sus intersecciones con el eje copolar.**
b) **Sus ecuaciones cartesianas.**
c) **Las coordenadas cilíndricas de su centro.**

RESOLUCIÓN.

a) Intersecciones con el eje copolar:

Sustituyendo $\theta = 90°$ y $\theta = 270°$ tenemos:

$$r = 2sen(90°) = 2$$
$$r = 2sen(270°) = -2$$

Con lo cual se puede observar que los dos puntos son $(2,\ 90°)$ y $(-2, 270°)$.
Y como ambos puntos son iguales, sólo se tiene un corte en el eje copolar, en el punto $(2,\ 90°)$.

b) Ecuaciones cartesianas

$$r = 2sen\theta$$

Si multiplicamos ambos lados por r:

$$r^2 = 2rsen\theta$$

Y transformando a cartesianas:

$$(z^2 + y^2) = 2z$$

Completando el trinomio en términos de **z**:

$$\left(z^2 - 2z + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (z-1)^2 + y^2 = 1$$

Por lo que las ecuaciones cartesianas son:

$$\begin{cases} (z-1)^2 + y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

c) Coordenadas cilíndricas de su centro:

De las ecuaciones cartesianas, las coordenadas del centro de la circunferencia son:

Centro= $C(0,\ 0,\ 1)$.

Al transformarla a cilíndricas:

El ángulo θ puede tomar cualquier valor dado que el radio es igual a cero, pues $x = 0$, por lo que las coordenadas son:

Centro= $C(0,\ \theta,\ 1)$.

ALUMNO: LEÓN FELIPE PALAFOX NOVACK

4.9 - Dada la recta de ecuación:

$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2\,;$$

Calcular la distancia de dicha recta al punto $\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

RESOLUCIÓN.

Calculando la distancia en coordenadas polares.
Basándonos en la fórmula para la distancia entre un punto y una recta:

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \mathrm{K} \quad (1)$$

Transformando (1) a coordenadas polares; $x = r\cos\theta$ y $y = r\,sen\theta$, tenemos:

$$d = \frac{|A\,r\cos\theta + B\,r\,sen\theta + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Para obtener los coeficientes A, B y C, desarrollamos la ecuación de la recta:

$$r\left(\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + sen\theta\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}r\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}r\,sen\theta = 2$$

$$r\cos\theta + \sqrt{3}r\,sen\theta = 4 \quad \mathrm{K} \quad (2)$$

De la ecuación (2) observamos que:

$$A = 1 \quad , \; B = \sqrt{3} \text{ y } C = -4 .$$

Ahora se obtendrá la distancia:

$$d = \frac{\left|r\cos\theta + \sqrt{3}\,r\,sen\theta - 4\right|}{\sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}}$$

y como tenemos al punto $\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$d = \frac{\left|2\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}\,(2)sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\right|}{\sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|2\sqrt{3} - 4\right|}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$d = 2 - \sqrt{3}$$

ALUMNO: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

4.10 - Sea el segmento de curva C, una de cuyas ecuaciones vectoriales es:

$$\bar{p} = (t)\bar{i} + \left(\frac{1}{2}t^2\right)\bar{j}; \qquad 0 \le t \le 2$$

Representar por medio de una ecuación polar al segmento de curva C.

RESOLUCIÓN.

De la ecuación vectorial proporcionada sabemos que:

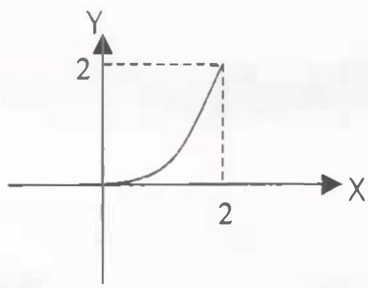
$$\begin{aligned} x &= t && \text{K} \quad (1) \\ y &= \frac{1}{2}t^2 && \text{K} \quad (2) \\ z &= 0 \end{aligned}$$

para $0 \le t \le 2$.

Ahora bien si eliminamos el parámetro t de la ecuación anterior, es decir, sustituimos la ecuación (1) en (2);

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2y \quad \text{K} \quad (3)$$

La curva que representa la ecuación anterior es la siguiente:



Que, como se observa, corresponde a una parábola con vértice $V(0,\ 0,\ 0)$.
Sustituyendo $x = r\cos\theta$ y $y = r\,sen\theta$, en la ecuación (3), obtenemos:

$$r^2\cos^2\theta = 2r\,sen\theta \quad \Rightarrow \quad r\cos^2\theta = 2\,sen\theta$$

$$r = 2\frac{sen\theta}{\cos^2\theta} = 2\frac{sen\theta}{\cos\theta\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad r = 2\tan\theta\sec\theta$$

Para finalizar el ejercicio hay que determinar el intervalo de valores permitidos para el parámetro θ, para $t=0 \Rightarrow x=0$ y $y=0$. Entonces:

$$r\cos\theta = 0$$
$$r\,sen\theta = 0$$

Para que las dos ecuaciones se satisfagan, el único valor permitido es $r=0$, que sustituido en la ecuación polar nos da:

$$0 = 2\tan\theta\sec\theta \quad \Rightarrow \quad sen\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0.$$

Para $t=2 \Rightarrow x=2$ y $y=2$:

$$r\cos\theta = 2 \quad \text{K} \quad (4)$$
$$r\,sen\theta = 2 \quad \text{K} \quad (5)$$

Despejando el valor de r de la ecuación (4) y sustituyendo en (5):

$$\left(\frac{2}{\cos\theta}\right)sen\theta = 2 \quad \Rightarrow \quad 2\tan\theta = 2 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = 1$$

$$\theta = ang\tan 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

La ecuación pedida es:

$$r = 2\tan\theta\sec\theta; \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

ALUMNO: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

CAPITULO 5

SUPERFICIES

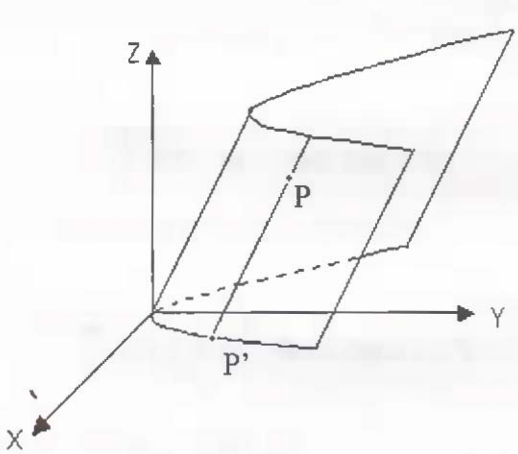
5.1 - Obtener la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es la parábola

$$x^2 = 4y\,,\quad z = 0 \quad \mathrm{K} \quad (1)$$

contenida en el plano XY **y cuyas generatrices tienen por números directores** $(1,\ 1,\ 3)$.

RESOLUCIÓN.

Supongamos que la generatriz que pasa por un punto cualquiera $P(x,\ y,\ z)$ de la superficie corta a la directriz en el punto $P'(x',\ y',\ 0)$.



Entonces las ecuaciones de esta generatriz son:

$$\frac{x-x'}{1} = \frac{y-y'}{1} = \frac{z}{3} \quad \mathrm{K} \quad (2).$$

También como P' es un punto que pertenece a la parábola (1), tenemos:

$$x'^2 = 4y',\ z' = 0 \quad \mathrm{K} \quad (3).$$

Despejando de la ecuación (2) los valores de x', y' obtenemos:

$$x' = x - \frac{z}{3}$$

$$y' = y - \frac{z}{3}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3):

$$\left(x - \frac{z}{3}\right)^2 = 4\left(y - \frac{z}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{2xz}{3} + \frac{z^2}{9} = 4y - \frac{4z}{3}$$

Agrupando términos y simplificando los denominadores, obtenemos:

$$9x^2 + z^2 - 6xz - 36y + 12z = 0 \quad \text{K} \quad (4)$$

que es la ecuación de la superficie.

ALUMNO: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

5.2 - Obtener una ecuación vectorial del hiperboloide generado por la recta L, definida por los puntos $A(3,\ 2,\ 1)$ y $B(5,\ 1,\ 2)$ y que gira alrededor de la recta $x = -2$; $z = 1$.

RESOLUCIÓN.

Se obtiene un vector director de la recta L:

$$\overline{AB} = \overline{B} - \overline{A} = (2,\ -1,\ 1).$$

Por lo que unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos dados son:

$$x = 3 + 2t$$
$$y = 2 - t$$
$$z = 1 + t$$

Cualquier punto de la recta describe una circunferencia al girar alrededor de la recta $x = -2$; $z = 1$. Esta circunferencia tiene su centro en $C(-2,\ 2-t,\ 1)$ y por tanto la siguiente ecuación cartesiana:

$$(x+2)^2 + (z-1)^2 = r^2 \quad \text{K} \quad (1); \qquad y = 2 - t$$

sustituyendo las ecuaciones paramétricas de L en la ecuación (1):

$$(3 + 2t + 2)^2 + (1 + t - 1)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad (5 + 2t)^2 + t^2 = r^2$$

$$25+20t+5t^2=r^2 \quad \mathrm{K} \quad (2)$$

La ecuación (2) corresponde a un punto cualquiera de la superficie.
Al parametrizar la ecuación (1), si hacemos:

$$sen^2\alpha=\frac{(x+2)^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2=r^2 sen^2\alpha$$

$$x=-2\pm r\, sen\alpha$$

De la ecuación (2):

$$r=\sqrt{25+20t+5t^2} \text{ por lo tanto:}$$

$$x=-2\pm\sqrt{25+20t+5t^2}\; sen\alpha$$

Análogamente, si hacemos:

$$\cos^2\alpha=\frac{(z-1)^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad (z-1)^2=r^2\cos^2\alpha$$

$$z=1\pm r\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad z=1\pm\sqrt{25+20t+5t^2}\,\cos\alpha$$

Además tenemos que $y=2-t$, por lo que una ecuación vectorial es:

$$\overline{p}=\left(-2+\sqrt{25+20t+5t^2}\,sen\alpha,\ 2-t,\ 1+\sqrt{25+20t+5t^2}\,\cos\alpha\right).$$

ALUMNA: MA. DE LOS REMEDIOS VILLAFRANCO RAMÍREZ

5.3 - Determinar la ecuación cartesiana de la superficie generada por el conjunto de circunferencias con centro en $x=2$, $y=5$ y cuyo eje de rotación es paralelo al eje z. La meridiana está dada por:

$$D:\begin{cases} x+2y-1=0 & \mathrm{K} \quad (1) \\ -y+z-3=0 & \mathrm{K} \quad (2) \end{cases}$$

Indicar de qué superficie se trata.

RESOLUCIÓN.

Determinando la generatriz G:

$$G:\begin{cases}(x-2)^2+(y-5)^2=\beta & \text{K} \quad (3)\\ z=\alpha & \text{K} \quad (4)\end{cases}$$

donde:

$r^2=\beta$ Circunferencias de radio variable.
$C(2,\ 5,\ \alpha)$ Centro de las circunferencias.

Aplicando el método de las generatrices y sustituyendo (4) en (2):

$$-y+\alpha-3=0 \quad\Rightarrow\quad y=\alpha-3 \quad \text{K} \quad (5)$$

De la ecuación (1) despejamos a x y sustituyendo la ecuación (5):

$$x=-2y+1 \quad\Rightarrow\quad x=-2(\alpha-3)+1$$
$$x=-2\alpha+6+1 \quad\Rightarrow\quad x=-2\alpha+7 \quad \text{K} \quad (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (3):

$$(-2\alpha+7-2)^2+(\alpha-3-5)^2=\beta$$

$$(-2\alpha+5)^2+(\alpha-8)^2=\beta \quad \text{K} \quad (C)\text{, ecuación de condición.}$$

Sustituyendo (3) y (4) en la ecuación de condición:

$$(-2z+5)^2+(z-8)^2=(x-2)^2+(y-5)^2$$

$$4z^2-20z+25+z^2-16z+64=(x-2)^2+(y-5)^2$$

$$5z^2-36z+89=(x-2)^2+(y-5)^2 \quad\Rightarrow\quad 5\left(z^2-\frac{36z}{5}\right)+89=(x-2)^2+(y-5)^2$$

$$5\left(z^2-\frac{36z}{5}+\frac{18^2}{25}\right)+89-\frac{18^2}{5}=(x-2)^2+(y-5)^2$$

$$5\left(z-\frac{18}{5}\right)^2+89-\frac{324}{5}=(x-2)^2+(y-5)^2 \quad\Rightarrow\quad (x-2)^2+(y-5)^2-5\left(z-\frac{18}{5}\right)^2=\frac{121}{5}$$

$$\frac{5(x-2)^2}{121}+\frac{5(y-5)^2}{121}-\frac{25\left(z-\frac{18}{5}\right)^2}{121}=1$$

Si $x=2$:

$$\frac{5(y-5)^2}{121}-\frac{25\left(z-\frac{18}{5}\right)^2}{121}=1$$ (Corta al plano YZ en hipérbola).

Si $y=5$:

$$\frac{5(x-2)^2}{121}-\frac{25\left(z-\frac{18}{5}\right)^2}{121}=1$$ (Corta al plano XZ en hipérbola).

Si $z=\frac{18}{5}$:

$$\frac{5(x-2)^2}{121}+\frac{5(y-5)^2}{121}=1$$

$$(x-2)^2+(y-5)^2=\frac{121}{5}$$ (Corta al plano XY en circunferencia).

Por lo tanto, se trata de un hiperboloide circular de un manto.

ALUMNA: PATRICIA MARÍA SÁNCHEZ GÓMEZ

5.4 - Obtener la ecuación de la superficie que se obtiene al girar la parábola $y=3x^2$, $z=0$, **alrededor del eje** y.

RESOLUCIÓN.

Las ecuaciones de la parábola son:

$$\begin{cases} y=3x^2 & \text{K} \quad (1) \\ z=0 & \Lambda \quad (2) \end{cases}$$

La generatriz, serían circunferencias de la forma $x^2+z^2=\alpha$ en planos paralelos al plano $y=0$, por lo tanto nuestra generatriz es:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = \alpha & \mathrm{K} \quad (3) \\ y = \beta & \mathrm{K} \quad (4) \end{cases}$$

Obteniendo la ecuación pedida, tenemos:

Se sustituye (2) en (3):

$$x^2 = \alpha \quad \mathrm{K} \quad (5)$$

Sustituyendo (4) en (1):

$$\beta = 3x^2 \quad \mathrm{K} \quad (6)$$

Sustituyendo (5) en (6):

$$\beta = 3\alpha \quad \mathrm{K} \qquad \text{(Ecuación de condición).}$$

Sustituyendo la generatriz (ecuaciones (3) y (4)), en la ecuación de condición, se obtiene:

$$y = 3(x^2 + z^2)$$

Que es la ecuación buscada, o dispuesta de otra forma:

$$3x^2 + 3z^2 - y = 0 \,.$$

ALUMNO: LEÓN FELIPE PALAFOX NOVACK

5.5 - Dada la superficie

$$4x^2 - 4y^2 + z^2 + 8x - 4y - 1 = 0$$

a) Determinar si es simétrica respecto a los planos coordenados.
b) Obtener la(s) intersección(es) de la recta L con la superficie dada.

$$L: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN.

La simetría con respecto a un plano coordenado se determina cambiando de signo la coordenada que no pertenece al plano y si al sustituirla en la ecuación de la superficie, ésta no cambia, entonces es simétrica respecto a dicho plano.
La intersección con la recta L se obtiene sustituyendo las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación de la superficie.

a)
1- Simetría respecto al plano xy; $z \to -z$

$$4x^2 - 4y^2 + (-z)^2 + 8x - 4y - 1 = 0$$
$$4x^2 - 4y^2 + z^2 + 8x - 4y - 1 = 0$$

es simétrica respecto al plano xy.

2- Simetría respecto al plano xz; $y \to -y$

$$4x^2 - 4(-y)^2 + z^2 + 8x - 4(-y) - 1 = 0$$
$$4x^2 - 4y^2 + z^2 + 8x + 4y - 1 = 0$$

no es simétrica respecto al plano xz.

3- Simetría respecto al plano yz; $x \to -x$

$$4(-x)^2 - 4y^2 + z^2 + 8(-x) - 4y - 1 = 0$$
$$4x^2 - 4y^2 + z^2 - 8x - 4y - 1 = 0$$

no es simétrica respecto al plano yz.

b) Se tiene que:

$$4x^2 - 4y^2 + z^2 + 8x - 4y - 1 = 0 \qquad \text{(Ecuación de la superficie).}$$
$$x = t;\ y = 2t;\ z = 5 \qquad \text{(Ecuaciones paramétricas de la recta } L\text{).}$$

$$4(t)^2 - 4(2t)^2 + (5)^2 + 8(t) - 4(2t) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4t^2 - 16t^2 + 25 + 8t - 8t - 1 = 0$$

$$-12t^2 + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad 12t^2 = 24$$

$$t^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{2}$$
$$t_1 = \sqrt{2}$$
$$t_2 = -\sqrt{2}$$

Intersección 1 con t_1:

$$\begin{cases} x = t_1 \\ y = 2t_1 \\ z = 5 \end{cases} \qquad P_1\left(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 5\right)$$

Intersección 2 con t_2:

$$\begin{cases} x = t_2 \\ y = 2t_2 \\ z = 5 \end{cases} \qquad P_2\left(-\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ 5\right)$$

ALUMNO: ZEUS HIRAM ZAMORA GUEVARA

5.6 - Dada la ecuación cartesiana de la superficie:

$$x^2 + y^2 - 2x - 9z = 0$$

Determinar:

a) Su traza en el plano XY.
b) Si es simétrica con respecto a los ejes Y y Z, y
c) Su extensión en la dirección del eje Z.

RESOLUCIÓN.

a) Su traza en el plano XY.

Si $z = 0$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

La traza es una circunferencia de radio $r = 1$ y centro en $C(1,\ 0,\ 0)$.

b) Su simetría con respecto al eje Y.

$$(-x)^2 + y^2 - 2(-x) - 9(-z) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x + 9z = 0$$

Por lo que no hay simetría respecto al eje Y.

Su simetría con respecto al eje Z.

$$(-x)^2 + (-y)^2 - 2(-x) - 9z = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x - 9z = 0$$

Por lo que no hay simetría respecto al eje Z.

c) Su extensión en la dirección del eje Z.

Si $z = k$

$$x^2 + y^2 - 2x - 9k = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x = 9k$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9k + 1 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = 9k + 1$$

Para que la ecuación represente un lugar geométrico $9k+1$ debe de ser siempre mayor o igual a cero, por lo que:

$$9k + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 9k \geq -1$$
$$k \geq -\frac{1}{9}$$

Por lo que la extensión en la dirección del eje Z será: $z \geq -\frac{1}{9}$.

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

5.7 - Sea la superficie cuya ecuación cartesiana es:

$$16y^2 + 4z^2 - x^2 = 16$$

Determinar:

a) Las trazas con respecto a los planos coordenados.
b) Su simetría respecto al origen.
c) Identificar la superficie.

RESOLUCIÓN.

a) Para determinar la traza con xy igualamos $z = 0$

$$16y^2 - x^2 = 16$$

normalizando:

$$y^2 - \frac{x^2}{16} = 1$$

identificando la curva, tenemos que es una hipérbola con centro en el origen.

Obteniendo la traza con xz, igualamos $y = 0$

$$4z^2 - x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad \frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$$

la ecuación nos representa una hipérbola con centro en el origen.

Para determinar la traza con yz, igualamos $x = 0$

$$16y^2 + 4z^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

la cual nos representa una elipse con centro en el origen y eje focal en z.
b) La prueba para determinar la simetría de una superficie con respecto al origen se puede obtener si al reemplazar las variables x, y, z por $-x$, $-y$, $-z$ la ecuación de la superficie no se altera.

$$16(-y)^2 + 4(-z)^2 - (-x)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad 16y^2 + 4z^2 - x^2 = 16$$

Como la ecuación no cambia, es simétrica con respecto al origen.

c) La ecuación cartesiana de la superficie tiene la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-1)^2}{c^2} = 1$$

Al dividir entre 16 ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$-\frac{x^2}{16} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

que nos representa a un hiperboloide de un manto.

ALUMNA: ISABEL MIRANDA ALVARADO

5.8 - Obtener una ecuación vectorial y la ecuación cartesiana del cilindro con eje paralelo al vector $\bar{u} = (-2,\ 2,\ 3)$ y cuya intersección con el plano $z = 5$ es una circunferencia de radio 3 y centro en el eje z.

RESOLUCIÓN.

Para estos casos se recomienda usar la simplificación para superficies cilíndricas **.
Primero definiremos la directriz. Se menciona que la curva directriz se encuentra alojada en el plano $z = 5$ y que es una circunferencia con centro en el eje z; esto quiere decir que las coordenadas de este punto son $(0,\ 0,\ 5)$. Por lo que la directriz queda de la siguiente forma:

$$D = \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 5 \end{cases}$$

Para definir la generatriz, necesitamos la ecuación de una recta. El vector director es constante, lo que cambia es el punto en que se apoya la recta, por lo que una de sus ecuaciones vectoriales quedaría de la siguiente manera:

$$\bar{L} = (a,b,c) + t(-2,2,3)$$

Donde a, b, c son variables. Ahora obtendremos de esta ecuación su representación simétrica:

$$\begin{cases} x = a - 2t \\ y = b + 2t \\ z = c + 3t \end{cases} \quad donde \quad \begin{cases} \dfrac{x-a}{-2} = t \\ \dfrac{y-b}{2} = t \\ \dfrac{z-c}{3} = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-a}{-2} = \frac{y-b}{2} = \frac{z-c}{3}$$

Siguiendo el método, despejaremos en términos de z (ya que en el plano xy se encuentra alojada la curva directriz). Por lo que quedarían de la siguiente forma:

$$\frac{x-a}{-2} = \frac{z-c}{3} \qquad\qquad \frac{y-b}{2} = \frac{z-c}{3}$$

$$x - a = -\frac{2}{3}(z-c) \qquad\qquad y - b = \frac{2}{3}(z-c)$$

$$x=-\frac{2}{3}z+\frac{2}{3}c+a \qquad\qquad y=\frac{2}{3}z-\frac{2}{3}c+b$$

Como a, b y c son variables, podemos sustituirlas por α y β; según se muestra a continuación:

$$x=-\frac{2}{3}z+\frac{2}{3}c+a \qquad\qquad y=\frac{2}{3}z-\frac{2}{3}c+b$$

$$\alpha=\frac{2}{3}c+a \qquad\qquad \beta=-\frac{2}{3}c+b$$

$$x=-\frac{2}{3}z+\alpha \qquad\qquad y=\frac{2}{3}z+\beta$$

Así, la generatriz y la directriz quedan de la siguiente manera:

$$G=\begin{cases} x=-\frac{2}{3}z+\alpha \quad \text{K} \quad (I) \\ y=\frac{2}{3}z+\beta \quad \text{K} \quad (II) \end{cases} \qquad D=\begin{cases} x^2+y^2=9 \quad \text{K} \quad (III) \\ z=5 \quad \text{K} \quad (IV) \end{cases}$$

Aplicando el método de las generatrices.

Sustituyendo: (IV) en (I) y (II):

$$x=-\frac{10}{3}+\alpha \quad \text{K} \quad (V)$$

$$y=\frac{10}{3}+\beta \quad \text{K} \quad (VI)$$

Obteniendo la ecuación de condición:

Sustituyendo: (V) y (VI) en (III):

$$\left(-\frac{10}{3}+\alpha\right)^2+\left(\frac{10}{3}+\beta\right)^2=9 \quad \text{K} \qquad \text{(Ecuación de condición).}$$

Despejando de (I) y (II) a alfa y beta respectivamente:

$$x=-\frac{2}{3}z+\alpha \qquad\qquad y=\frac{2}{3}z+\beta$$

$$\alpha=\frac{2}{3}z+x \qquad\qquad \beta=y-\frac{2}{3}z$$

Sustituyendo alfa y beta en la ecuación de condición:

$$\left(-\frac{10}{3}+\frac{2}{3}z+x\right)^2+\left(\frac{10}{3}+y-\frac{2}{3}z\right)^2=9$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2(-10+2z+3x)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2(10+3y-2z)^2=9$$

$$(3x+2z-10)^2+(3y-2z+10)^2=81$$

Que es la ecuación deseada.
** Castañeda, Erick; "Geometría Analítica", Superficies, pag 150. Facultad de Ingeniería, UNAM.

ALUMNO: ALEJANDRO FÉLIX REYES

5.9 - Para el cono hiperbólico oblicuo con vértice en el punto $V(-2,\ 2,\ 5)$ y cuya intersección con el plano $x=8$ es la hipérbola de ecuación: $\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(z-2)^2}{9}=1$, obtener

a) Una ecuación vectorial.
b) Las correspondientes ecuaciones paramétricas.
c) La ecuación cartesiana.

RESOLUCIÓN.

a) Unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola dada se determinan como sigue:

$$\frac{(y+1)^2}{4}=\sec^2\theta \quad K \quad (1)$$

$$\frac{(z-2)^2}{9}=\tan^2\theta \quad K \quad (2)$$

Recuérdese la identidad trigonométrica $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$.
Entonces tenemos de (1) y de (2) que:

$$(y+1)^2=4\sec^2\theta \quad \Rightarrow \quad y+1=2\sec\theta$$

$$(z-2)^2=9\tan^2\theta \quad \Rightarrow \quad z-2=3\tan\theta$$

Por lo tanto:

$$y=-1+2\sec\theta \quad K \quad (3)$$

$$z=2+3\tan\theta \quad K \quad (4)$$

Entonces, la ecuaciones paramétricas de la hipérbola son:

$$\begin{aligned} x &= 8 \\ y &= -1 + 2\sec\theta \\ z &= \ 2 + 3\tan\theta \end{aligned}$$

Recordando que la ecuación de un cono en forma vectorial está dada por:

$$\vec{p} = \vec{v} + \lambda\,\overrightarrow{VA}$$

donde:

$\vec{v}$ es el vector de posición del vértice.

$\overrightarrow{VA}$ es el vector de dirección de la familia de rectas que parten del punto fijo (*vértice*).

entonces:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (-2,\ 2,\ 5) \\ \overrightarrow{VA} &= \vec{A} - \vec{V} = (8,\ -1 + 2\sec\theta,\ 2 + 3\tan\theta) \\ \overrightarrow{VA} &= (10,\ -3 + 2\sec\theta,\ -3 + 3\tan\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto una ecuación vectorial es la siguiente:

$$\vec{p} = (-2,\ 2,\ 5) + \lambda\,(10,\ -3 + 2\sec\theta,\ -3 + 3\tan\theta)$$

b) De la ecuación vectorial se deduce que unas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} x &= -2 + 10\lambda && \text{K} \quad (5) \\ y &= 2 + \lambda(-3 + 2\sec\theta) && \text{K} \quad (6) \\ z &= 5 + \lambda(-3 + 3\tan\theta) && \text{K} \quad (7) \end{aligned}$$

c) Para encontrar las ecuación cartesiana, de (5) se obtiene:

$$\lambda = \frac{x+2}{10}$$

Sustituyendo en (6) y (7):

$$y = 2 + 2\left(\frac{x+2}{10}\right)\sec\theta - 3\left(\frac{x+2}{10}\right)$$

$$z = 5 + 3\left(\frac{x+2}{10}\right)\tan\theta - 3\left(\frac{x+2}{10}\right)$$

Despejando $\sec\theta \ y \ \tan\theta$:

$$\sec\theta = \frac{y + 3\left(\frac{x+2}{10}\right) - 2}{2\left(\frac{x+2}{10}\right)} \quad \text{K} \quad (8)$$

$$\tan\theta = \frac{z + 3\left(\frac{x+2}{10}\right) - 5}{3\left(\frac{x+2}{10}\right)} \quad \text{K} \quad (9)$$

Elevando al cuadrado (8) y (9) y restando ambas tenemos por la identidad trigonométrica $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$:

$$\left(\frac{y + 3\left(\frac{x+2}{10}\right) - 2}{2\left(\frac{x+2}{10}\right)}\right)^2 - \left(\frac{z + 3\left(\frac{x+2}{10}\right) - 5}{3\left(\frac{x+2}{10}\right)}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\left(y + \frac{3x}{10} + \frac{6}{10} - 2\right)^2}{4} - \frac{\left(z + \frac{3x}{10} + \frac{6}{10} - 5\right)^2}{9} = \frac{(x+2)^2}{100}$$

$$\frac{(10y + 3x - 14)^2}{400} - \frac{(10z + 3x - 44)^2}{900} = \frac{(x+2)^2}{100}$$

Al simplificar términos de la ecuación anterior, la ecuación cartesiana queda como:

$$\frac{(3x + 10y - 14)^2}{4} - \frac{(3x + 10z - 44)^2}{9} = (x+2)^2$$

ALUMNO: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

5.10 - Obtener una ecuación vectorial y la ecuación cartesiana del cono elíptico oblicuo, con vértice en el punto $V(3,\ 2,\ 1)$ y cuya intersección con el plano $z=5$ es:

$$C:\begin{cases}\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1\\ z=5\end{cases}$$

RESOLUCIÓN.

Primero determinamos unas ecuaciones paramétricas para la curva C, si hacemos que:

$$sen^2\theta=\frac{(x+2)^2}{9}\quad\Rightarrow\quad(x+2)^2=9sen^2\theta$$
$$x=3\,sen\,\theta-2$$

Análogamente, si hacemos que:

$$\cos^2\theta=\frac{(y-1)^2}{4}\quad\Rightarrow\quad(y-1)^2=4\cos^2\theta$$
$$y=2\cos\theta+1$$

Por tanto, unas ecuaciones paramétricas e la curva C son:

$$C:\begin{cases}x=3\,sen\theta-2\\ y=2\cos\theta+1\\ z=5\end{cases}$$

Una ecuación vectorial del cono oblicuo, está dada por:

$$\overline{p}=\overline{V}+s\,\overline{VA}$$

donde:

$\overline{V}$ es el vértice del cono.
$\overline{A}$ es un punto que pertenece a la superficie, en este caso también a la curva C.
s es un parámetro.

Entonces:

$$\overline{VA}=\overline{V}-\overline{A}=(3,\ 2,\ 1)-(3\,sen\theta-2,\ 2\cos\theta+1,\ 5)$$

$$\overline{VA} = (5 - 3\,sen\theta,\ 1 - 2\cos\theta,\ -4)$$

$$\overline{p} = (3,\ 2,\ 1) + s(5 - 3\,sen\theta,\ 1 - 2\cos\theta,\ -4)$$

Por lo que una ecuación vectorial es:

$$\overline{p} = (3 + 5s - 3s\,sen\theta,\ 2 + s - 2s\cos\theta,\ 1 - 4s)$$

Para determinar la ecuación cartesiana, se procede a determinar las ecuaciones paramétricas para obtener el valor de los parámetros en términos de x, y, z.

De la ecuación vectorial, tenemos:

$$S: \begin{cases} x = 3 + 5s - 3s\,sen\theta & \text{K} \quad (1) \\ y = 2 + s - 2s\cos\theta & \text{K} \quad (2) \\ z = 1 - 4s & \text{K} \quad (3) \end{cases}$$

De la ecuación (3):

$$s = \frac{z-1}{4}$$

De las ecuaciones (1) y (2):

$$sen\theta = \frac{x + 5s - 3}{3s}$$

$$\cos\theta = \frac{y + s - 2}{2s}$$

sustituyendo el valor de $s = \dfrac{z-1}{4}$, obtenemos:

$$sen\theta = \frac{x + 5\left(\frac{z-1}{4}\right) - 3}{3\left(\frac{z-1}{4}\right)}$$

$$\cos\theta = \frac{y + \left(\frac{z-1}{4}\right) - 2}{2\left(\frac{z-1}{4}\right)}$$

como $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$, finalmente obtenemos que la ecuación cartesiana de la superficie es:

$$\left(\frac{x + 5\left(\frac{z-1}{4}\right) - 3}{3\left(\frac{z-1}{4}\right)}\right)^2 + \left(\frac{y + \left(\frac{z-1}{4}\right) - 2}{2\left(\frac{z-1}{4}\right)}\right)^2 = 1$$

ALUMNO: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL