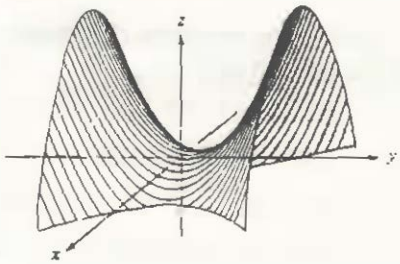

S U P E R F I C I E S

Erik Castañeda De Isla Puga

Facultad de Ingeniería

U. N. A. M.

CASTAÑEDA DE ISLA PUGA, Erik. *Geometría analítica. Fascículo II. Superficies.* México, UNAM, Facultad de Ingeniería, 1994, 52 p.

Geometría analítica. Fascículo II. Superficies.

Primera edición, junio de 1994.

Impreso en México.

PRESENTACION

El tema *Superficies* tal como se establece en el programa de *Geometría Analítica* de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, resulta indispensable para los estudios posteriores del cálculo intermedio y del cálculo avanzado; sin embargo, la carencia de material escrito sobre dicho tema me indujo a escribir las presentes notas en su primera versión, de diciembre de 1990. Esta nueva versión ha sido corregida con la ayuda de los amables lectores y se pone a la disposición de la comunidad de la Facultad con la idea de que apoye el aprendizaje del tema.

Una vez más solicito la amabilidad de los lectores para que me hagan saber, por escrito, los errores que seguramente aún existen, con el objetivo de que en la deseada versión definitiva, como parte de un libro que contenga la integridad del programa de *Geometría Analítica*, carezca completamente de errores.

Erik Castañeda De Isla Puga

abril 1994

S U P E R F I C I E S .

Definición.- Se llama superficie al lugar geométrico de todos los puntos que tienen representación gráfica en el espacio de tres dimensiones y cuya relación matemática representativa cuenta con una sola ecuación del tipo:

$$F(x,y,z) = 0$$

Es conveniente hacer notar que no todas las ecuaciones de ese tipo representan a una superficie, por ejemplo:

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = -8 \qquad \ldots \quad (2)$$

$$x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 25 \qquad \ldots \quad (3)$$

La ecuación (1) representa sólo un punto, que en este caso es el origen, ya que únicamente es satisfecha para los valores $x = y = z = 0$.

La ecuación (2) no representa nada, ya que la suma de tres cantidades positivas no puede ser negativa.

La ecuación (3) representa una superficie llamada elipsoide.

Por otra parte, también es necesario aclarar que en la parte correspondiente a la geometría analítica de dos dimensiones se representaba a una curva con una sola ecuación, pero ello se debía a que se estaba trabajando siempre en el plano xy, cuya ecuación es $z = 0$. Entonces, cualquier curva, en ese caso, tenía la ecuación con la que se trabajaba y la anteriormente citada. Esto además quiere decir que una curva en el espacio tridimensional requiere para su representación de dos ecuaciones cartesianas, lo que significa, en realidad, que una curva puede obtenerse como la intersección de dos superficies. Como un ejemplo de este caso se tiene la representación de una recta por medio de dos ecuaciones cartesianas, como se ve en el tema correspondiente. De la misma manera, por ejemplo, una circunferencia en el espacio de tres dimensiones puede representarse como la intersección de una esfera y un plano, como se verá más adelante.

CLASIFICACION DE ALGUNOS TIPOS DE SUPERFICIES.

A continuación se presentan los nombres de algunos tipos de superficies, de acuerdo con sus características geométricas o con las de sus ecuaciones.

. SUPERFICIES ALABEADAS:

Son aquellas que no pueden estar contenidas en un plano.

. SUPERFICIES CUADRICAS O CUADRATICAS:

Para empezar, en la geometría analítica plana se habló de las curvas cónicas, las cuales se caracterizaban por estar representadas por una ecuación de segundo grado. Ahora, en tres dimensiones, a las superficies que tienen su representación analítica del tipo:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Ez^2 + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

se les llama superficies cuádricas o cuadráticas.

Las cuádricas se subclasifican a su vez en :

.. Esferas.

.. Elipsoides.

.. Hiperboloides de un manto y de dos.

.. Paraboloides circulares o de revolución.

.. Paraboloides elípticos.

.. Paraboloides hiperbólicos.

.. Degeneraciones de las anteriores.

. SUPERFICIES CILINDRICAS:

Se llama superficie cilíndrica a aquella que se forma con el movimiento de una recta que se conserva siempre paralela a un vector dado y que se apoya en una curva fija.

De acuerdo con esta definición, el cilindro circular recto, llamado simplemente cilindro desde la escuela primaria, es sólo un caso particular de estas superficies, pues hay cilindros parabólicos, elípticos, etc.

. SUPERFICIES CONICAS:

Se llama superficie cónica a aquella que se genera con el movimiento de una recta que pasa siempre por un punto fijo llamado vértice y que se apoya en una curva fija.

Para este caso vale también una aclaración similar a la de los cilindros, pues el llamado cono es sólo la mitad de un cono circular recto, ya que la superficie se extiende hacia ambos lados del vértice, y existen también conos diferentes al circular recto.

SUPERFICIES REGLADAS:

Se llama superficie reglada aquella que puede generarse por medio de rectas. Esto significa que tanto los cilindros como los conos son superficies regladas. Además, lo anterior permite precisar que de acuerdo con la presente clasificación, una superficie puede quedar incluída en varias categorías. Un ejemplo de esto, que además resulta curioso, es que el plano es una superficie cilindrica, cónica y, por supuesto, reglada.

SUPERFICIES DE REVOLUCION:

Son aquellas que se generan con el giro de una curva plana llamada meridiana, alrededor de un eje contenido en el mismo plano. Algunos ejemplos de estas superficies, son las esferas, los cilindros circulares rectos, los conos circulares rectos y, los actualmente muy frecuentemente utilizados, paraboloides circulares.

METODO DE LAS GENERATRICES.

El estudio de la geometría analítica tiene dos objetivos principales, a saber: la obtención de la expresión matemática del lugar geométrico en estudio y la identificación de éste cuando su expresión es conocida. A continuación se presenta un método que conduce a alcanzar el primero de esos objetivos en lo que se refiere a las superficies.

Antes de establecer este método, conviene enunciar algunas definiciones:

Curva generatriz: Es aquella que cambia de posición y, en ocasiones de forma, apoyándose en una o varias curvas fijas llamadas directrices y que con su movimiento genera una superficie. Las ecuaciones de una generatriz son identificables pues contienen parámetros, ya que son curvas que cambian y los parámetros, al tomar diferentes valores, provocan ese cambio. Para representar parámetros se utilizarán letras griegas minúsculas, como α, β, γ, etc.

Curva directriz: Se llama directriz a aquella curva que se mantiene fija y que señala la dirección que debe seguir la generatriz al moverse para formar una superficie. Las ecuaciones de una directriz no tienen parámetros pues son curvas fijas.

DATOS PARA LA APLICACION DEL METODO: Las ecuaciones de la o las directrices y de la generatriz. Estas ecuaciones son datos propiamente dichos o pueden ser obtenidas tomando en cuenta las características geométricas de la superficie en estudio.

OBJETIVO DEL METODO: Determinar la ecuación de la superficie trabajando de manera sistemática con las ecuaciones indicadas.

DESCRIPCION DEL METODO: a) Con las ecuaciones de la generatriz y con las de una de las directrices, se eliminan las variable x, y, z; quedando así una ecuación con solo parámetros y constantes. Esta ecuación se llama ecuación de condición. Esto mismo se repite con las ecuaciones de la generatriz y con las de cada una de las directrices, de manera que al término de esta etapa se tendrán tantas ecuaciones de condición como directrices existan.

b) Con todas las ecuaciones de condición y las de la generatriz, se eliminan los parámetros, con lo que queda una sola ecuación donde intervienen constantes y variables, y ésa es la ecuación de la superficie.

OBSERVACION: Para la correcta aplicación del método, el número de parámetros debe ser igual al número de directrices más uno. En ocasiones resulta más sencillo verificar que el número de directrices debe ser igual al número de parámetros menos uno, esto cuando se establecen primero las ecuaciones de la generatriz y, por lo tanto, se conoce previamente el número de parámetros.

A continuación se presentan unos ejercicios ilustrativos del método, y después de ellos se hace una justificación de él.

Ejercicio 1: Determinar la ecuación de la superficie que se genera con el desplazamiento de la curva:

$$G: \begin{cases} z - \alpha = \beta y^2 & \ldots (1) \\ x = \gamma & \ldots (2) \end{cases}$$

al apoyarse simultáneamente en las curvas:

$$D_1: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \ldots (3) \\ z = 1 & \ldots (4) \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} z = x^2 & \ldots (5) \\ y = 0 & \ldots (6) \end{cases}$$

Solución:

En este ejercicio se puede fácilmente identificar la generatriz, que es la curva G, ya que en sus ecuaciones tiene los parámetros α, β y γ. Por otra parte, al tener tres parámetros en sus ecuaciones, se deben tener dos directrices, que son las curvas D_1 y D_2.

a) Con G y D_1, eliminación de las variables x, y, z:

Como $x = \gamma$

$$y^2 = 1 - \gamma^2$$

llevando este valor a (1), y tomando en cuenta (4):

$$1 - \alpha = \beta(1 - \gamma^2) \quad \ldots \ (C_1)$$

que es la primera ecuación de condición.

Ahora con G y D_2:

Dado que $x = \gamma$

$$z = \gamma^2$$

llevando este valor a (1) y tomando en cuenta (6):

$$\gamma^2 - \alpha = 0 \quad \ldots \ (C_2)$$

b) Eliminación de los parámetros trabajando simultáneamente con G, (C_1) y (C_2):

tomando en cuenta (2) en (C_2):

$$x^2 = \alpha \quad \ldots \ (7)$$

despejando β de (1):

$$\beta = \frac{z - \alpha}{y^2}$$

llevando este valor a (C_1):

$$1 - \alpha = \frac{z - \alpha}{y^2}(1 - \gamma^2)$$

de (7) y (2):

$$1 - x^2 = \frac{z - x^2}{y^2}(1 - x^2)$$

que es la ecuación de la superficie, pero simplificando un poco esta expresión, finalmente queda:

$$x^2 + y^2 = z \quad \ldots (S)$$

La superficie representada por esa ecuación es un paraboloide de revolución, como se muestra en la figura 1, y es la que se forma con el movimiento de una parábola, como G, al apoyarse en una circunferencia y en una parábola, D_1 y D_2, respectivamente.

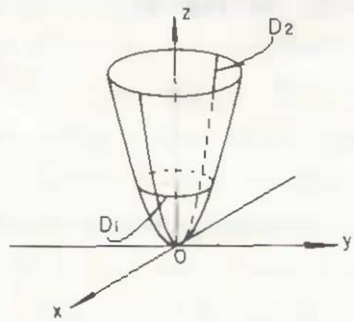

figura 1

Ejercicio 2: Determinar la ecuación de la esfera de radio R y centro C(h,k,l).

Solución: Sea la esfera representada en la figura 2:

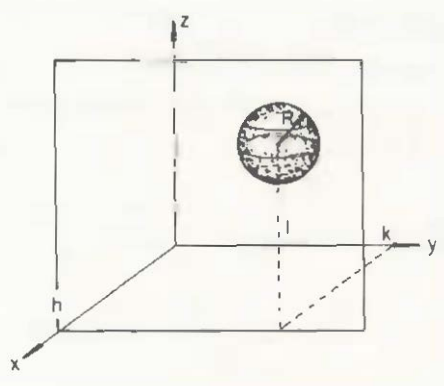

figura 2

En este caso, no se dan como datos las ecuaciones de la generatriz ni de las directrices, pero si se considera que esta esfera puede formarse al tomar como directriz a una circunferencia de radio R y centro C(h,k,l), contenida en un plano paralelo al yz, como se muestra en la figura 2; y como generatriz, a una circunferencia horizontal que tiene su centro siempre en la recta vertical que pasa por el centro de la esfera, y que esa circunferencia en su desplazamiento debe tocar constantemente a la directriz:

las ecuaciones de la directriz son:

$$D: \begin{cases} (y - k)^2 + (z - 1)^2 = R^2 & \dots(1) \\ x = h & \dots(2) \end{cases}$$

y las de la generatriz:

$$G: \begin{cases} (x - h)^2 + (y - k)^2 = \alpha^2 & \dots(3) \\ z = \beta & \dots(4) \end{cases}$$

Obsérvese que los parámetros representan los cambios que se producen en la generatriz para formar la superficie; así, α corresponde al radio variable de la circunferencia horizontal y β es la distancia que separa esa circunferencia del plano xy.

Aplicación del método:

a) sustituyendo (4) en (1):

$$(y - k)^2 + (\beta - 1)^2 = R^2 \qquad \dots(5)$$

ahora (2) en (3):

$$(y - k)^2 = \alpha^2 \qquad \dots(6)$$

llevando este valor a (5):

$$\alpha^2 + (\beta - 1)^2 = R^2 \qquad \dots(C)$$

b) Con la ecuación de condición y las de la generatriz:

sustituyendo (3) en (C):

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (\beta - 1)^2 = R^2$$

finalmente, tomando en cuenta (4):

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - 1)^2 = R^2 \quad \dots(S)$$

Ejercicio 3: Sea la tuberia que se muestra en la figura 3, constituida por un cilindro circular recto, de 4 metros de diámetro, con eje oblicuo a los ejes coordenados. Determinar su ecuación.

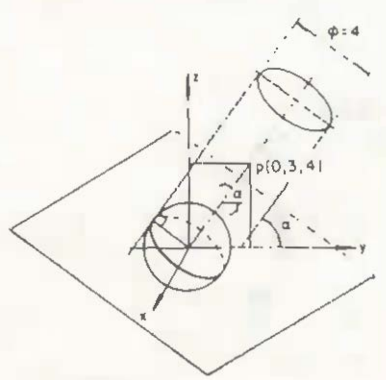

figura 3

Solución: Para resolver este problema, se considerará como directriz una circunferencia, con centro en el origen y contenida en un plano perpendicular al eje del cilindro. Para obtener sus ecuaciones, dicha circunferencia se puede considerar como la intersección de una esfera y un plano:

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 & \ldots(1) \\ z = -\dfrac{3}{4}y & \ldots(2) \end{cases}$$

Por otra parte, la generatriz será una recta paralela al eje que se apoyará continuamente en la directriz. Para expresar esta generatriz, primero se determina un vector que defina la dirección:

$$\bar{v} = 0i + 3j + 4k$$

Las ecuaciones de la generatriz se plantearán en forma simétrica:

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

Dado que se trata de un vector paralelo al plano yz, se tendrá un parámetro que indique la distancia de la recta generatriz con dicho plano. Por otro lado:

$$\frac{y - y_o}{3} = \frac{z - z_o}{4}$$

$$z = \frac{4}{3}y - \frac{4}{3}y_o + z_o$$

si se hace $\alpha = \dfrac{4}{3}y_o + z_o$

entonces:

$$G: \begin{cases} z = \dfrac{4}{3}y + \alpha & \ldots(3) \\ x = \beta & \ldots(4) \end{cases}$$

Aplicación del método:

a) sustituyendo (2) en (1):

$$x^2 + y^2 + \frac{9}{16}y^2 = 4$$

$$x^2 + \frac{25}{16}y^2 = 4 \qquad \ldots(5)$$

igualando (2) y (3):

$$-\frac{3}{4}y = \frac{4}{3}y + \alpha$$

$$y = -\frac{12}{25}\alpha \qquad \ldots(6)$$

(4) y (6) en (5):

$$\beta^2 + \frac{25}{12}\,\frac{144}{625}\,\alpha^2 = 4$$

$$\beta^2 + \frac{9}{25}\alpha^2 = 4 \qquad \ldots(C)$$

b) (3) y (4) en (C):

$$x^2 + \frac{9}{25}\left(z - \frac{4}{3}y\right)^2 = 4$$

finalmente:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(3z - 4y)^2}{100} = 1 \qquad \ldots(S)$$

Ejercicio 4: Determinar la ecuación de la superficie del ejercicio anterior utilizando la misma recta como generatriz, pero como directriz la elipse que es traza de la superficie con el plano xy, ver figura 4.

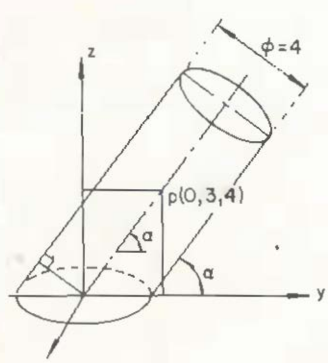

figura 4

Solución: Las ecuaciones de la generatriz son las mismas que las obtenidas en el ejercicio anterior, es decir:

$$G: \begin{cases} z = \dfrac{4}{3} y + \alpha & \text{...(1)} \\ \\ x = \beta & \text{...(2)} \end{cases}$$

Ahora, para la determinación de las ecuaciones de la directriz, considérese la figura 5:

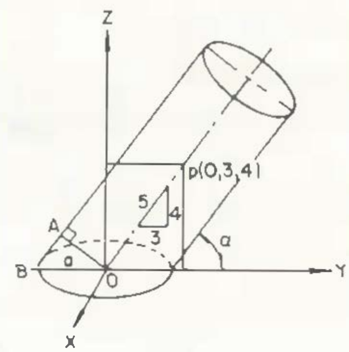

figura 5

Del triángulo que señala la inclinación del eje del cilindro:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{4}{5}$$

del triángulo OAB:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{2}{a}$$

igualando y despejando:

$$a = 2.5$$

entonces, las ecuaciones de la directriz quedan:

$$D: \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{6.25} = 1 & \text{...(3)} \\ \\ z = 0 & \text{...(4)} \end{cases}$$

a) (4) en (1):

$$\frac{4}{3} y + \alpha = 0$$

$$y = - \frac{3\alpha}{4} \qquad \text{...(5)}$$

(2) y (5) en (3):

$$\frac{\beta^2}{4} + \frac{(-\,^3/_4\,\alpha\,)^2}{6.25} = 1$$

$$\frac{\beta^2}{4} + \frac{9\alpha^2}{100} = 1 \qquad \ldots (C)$$

b) De (1):

$$\alpha = z - \frac{4}{3}\,y \qquad \ldots (6)$$

(6) y (2) en (C):

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(3z - 4y)^2}{100} = 1 \qquad \ldots (S)$$

Ejercicio 5: Determinar la ecuación de la misma superficie cilindrica del ejercicio 3, considerando a la recta L, de la figura 6, como directriz, y a la elipse E, de la misma figura, como generatriz.

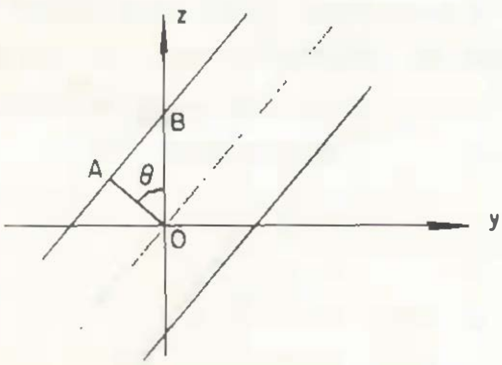

figura 6

Solucion: Para determinar las ecuaciones de la directriz se tomará en cuenta el triángulo OAB de la figura 7:

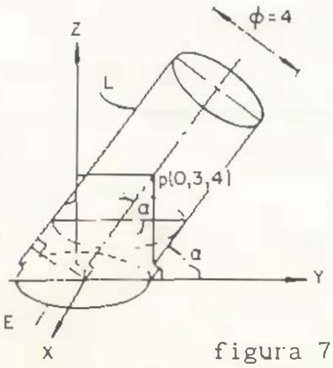

figura 7

$$\cos\theta = \frac{OA}{OB}$$

pero $OA = 2$ y $\cos\theta = \frac{3}{5}$

entonces:

$$OB = \frac{10}{3}$$

que es el valor absoluto de la cota al origen de la recta L. Por lo tanto, las ecuaciones de la directriz quedan:

$$D: \begin{cases} z = \frac{4}{3}\,y - \frac{10}{3} & \ldots(1) \\ x = 0 & \ldots(2) \end{cases}$$

Para las ecuaciones de la generatriz, la elipse en su movimiento no cambia de forma y lo que se modifica de ella es su altura y la ordenada de su centro, entonces:

$$G: \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{(y-\alpha)^2}{6.25} = 1 & \ldots(3) \\ z = \beta & \ldots(4) \end{cases}$$

a) (2) en (3):

$$\frac{(y-\alpha)^2}{6.25} = 1$$

$$(y-\alpha)^2 = 6.25$$

$$y - \alpha = \pm\, 2.5$$

tomando el valor positivo:

$$y = \alpha + 2.5 \qquad \ldots(5)$$

(4) y (5) en (1):

$$\beta = \frac{4}{3}(\alpha + 2.5) - \frac{10}{3}$$

$$\beta = \frac{4}{3}\alpha \qquad \ldots (C)$$

b) (4) en (C):

$$\alpha = \frac{3z}{4}$$

llevando este valor a (3):

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y - 3/4\ z)^2}{6.25} = 1$$

finalmente:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(4y - 3z)^2}{100} = 1 \qquad \ldots (S)$$

Obsérvese que es la misma ecuación que las obtenidas en los dos ejercicios anteriores, pues:

$(4y - 3z)^2 = (3z - 4y)^2$, para todo valor de y, z.

Ejercicio 6: Determinar la ecuación de la misma superficie cilíndrica de los casos anteriores, pero ahora tomando como directriz la recta L de la figura 8, y como generatriz la circunferencia J de la misma figura.

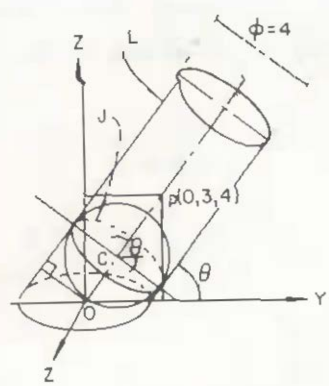

figura 8

Solución: Como puede observarse, la directriz es la misma que la que se empleó en el ejercicio 5. Así que sus ecuaciones son:

$$D: \begin{cases} z = \dfrac{4}{3}y - \dfrac{10}{3} & \ldots (1) \\ x = 0 & \ldots (2) \end{cases}$$

Para las ecuaciones de la generatriz, la circunferencia móvil puede formarse por medio de la intersección de una esfera de radio 2 y centro en el eje del cilindro, con un plano perpendicular a dicho eje y y que pasa por el centro de la esfera (ver figura 9).

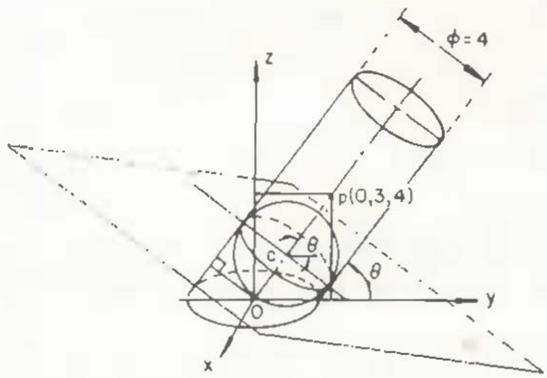

figura 9

Las ecuaciones de la generatriz quedan:

$$G: \begin{cases} x^2 + (y - \alpha)^2 + (z - \beta)^2 = 4 \\ z = - \dfrac{3}{4} y + \gamma \end{cases}$$

Como puede verse, los tres parámetros que aparecen se deben a que el centro de la esfera sufre modificaciones en su ordenada y en su cota, y el plano en su cota al origen, ver figura 10.

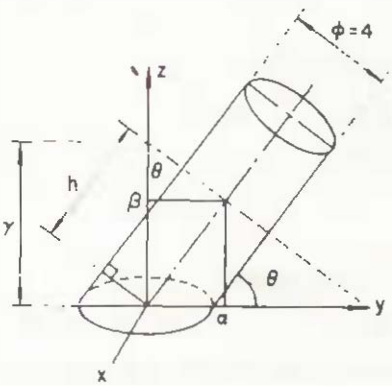

figura 10

Aparentemente el método no puede aplicarse, pues se tiene una sola directriz y tres parámetros; sin embargo, pueden relacionarse dos de los parámetros. De la misma figura 10:

$$h = \frac{\alpha}{\cos \theta}$$

$$h = \frac{\alpha}{\cos\theta}$$

$$\gamma = \frac{h}{\operatorname{sen}\theta}$$

entonces:

$$\gamma = \frac{\alpha}{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}$$

pero $\cos\theta = 3/5$, $\operatorname{sen}\theta = 4/5$, por lo tanto:

$$\gamma = \frac{25}{12}\alpha$$

sustituyendo en las ecuaciones de la generatriz:

$$G: \begin{cases} x^2 + (y-\alpha)^2 + (z-\beta)^2 = 4 & \dots(3) \\ z = -\frac{3}{4}y + \frac{25}{12}\alpha & \dots(4) \end{cases}$$

a) Igualando (1) y (4):

$$\frac{4}{3}y - \frac{10}{3} = -\frac{3}{4}y + \frac{25}{12}\alpha$$

$$\frac{25}{12}y = \frac{25}{12}\alpha + \frac{10}{3}$$

$$y = \alpha + \frac{8}{5} \qquad \dots(5)$$

(2) y (5) en (3):

$$(\alpha + \frac{8}{5} - \alpha)^2 + (z-\beta)^2 = 4$$

$$(z-\beta)^2 = \frac{36}{25} \qquad \dots(6)$$

por otra parte, (5) en (4):

$$z = -\frac{3}{4}(\alpha + \frac{8}{5}) + \frac{25}{12}\alpha$$

$$z = \frac{4}{3}\alpha - \frac{6}{5} \qquad \ldots(7)$$

(7) en (6):

$$\left(\frac{4}{3}\alpha - \frac{6}{5} - \beta\right)^2 = \frac{36}{25}$$

$$\frac{4}{3}\alpha - \frac{6}{5} - \beta = \pm\frac{6}{5}$$

tomando el valor negativo del miembro derecho, en virtud de que se eligió como directriz la recta colocada inferiormente:

$$\frac{4}{3}\alpha - \frac{6}{5} - \beta = -\frac{6}{5}$$

$$\beta = \frac{4}{3}\alpha \qquad \ldots(C)$$

b) de (4):

$$\alpha = \frac{12}{25}\left(z + \frac{3}{4}y\right) \qquad \ldots(8)$$

llevando este valor a (C):

$$\beta = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{12}{25}\right)\left(z + \frac{3}{4}\right)$$

$$\beta = \frac{16}{25}\left(z + \frac{3}{4}y\right) \qquad \ldots(9)$$

(8) y (9) en (3):

$$x^2 + \left[y - \frac{12}{25}\left(z + \frac{3}{4}y\right)\right]^2 + \left[z - \frac{16}{25}\left(z + \frac{3}{4}y\right)\right]^2 = 4$$

desarrollando y simplificando:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(4y - 3z)^2}{100} = 1 \qquad \ldots(S)$$

JUSTIFICACION DEL METODO: (OPCIONAL)

El fundamento del método se basa en la definición de superficie previamente establecida; es decir, el conjunto de puntos del espacio de tres dimensiones. cuya representación matemática es una sola ecuación del tipo $F(x,y,z) = 0$.

De acuerdo con esta definición, dos ecuaciones del tipo $F(x,y,z) = 0$, tomadas simultáneamente, representarán aquellos puntos que pertenecen a la vez a dos superficies; es decir, dos ecuaciones cartesianas representan una curva, que es la de intersección entre las dos superficies, cuando esto suceda.

Si se considera a una superficie como el conjunto de todas las posiciones de una curva generatriz, se tiene que las ecuaciones de esa curva cuentan con uno o varios parámetros, ya que esto significa que se trata de una familia de curvas, o de una curva que cambia de posición y/o de forma.

Considérese primero la generatriz:

$$G: \begin{cases} f_1(x,y,z,\alpha) = 0 \\ \\ f_2(x,y,z,\alpha) = 0 \end{cases}$$

Como consecuencia de la variación del parámetro α, las ecuaciones G representan una curva variable que se mueve en el espacio y el conjunto de todas sus posiciones constituye la superficie, que es el lugar geométrico de todas esas posiciones.

Para encontrar la ecuación de la superficie engendrada por la curva G, basta eliminar al parámetro α trabajando simultáneamente con las ecuaciones de la generatriz. Por supuesto al eliminar el parámetro α quedará una ecuación $F(x,y,z) = 0$, que es la de la superficie, en la que evidentemente ya no figura el parámetro α. Esta ecuación es satisfecha por todos los sistemas de valores (x,y,z) que verifican a las ecuaciones G, para todos los valores del parámetro α. Esto es cierto porque se sabe que eliminar a una variable consiste en obtener una ecuación que se verifique para los mismos sistemas de valores que verifican a las ecuaciones de donde se partió. Por lo tanto, la ecuación obtenida es la ecuación de la superficie engendrada por la generatriz G.

No siempre se presenta el problema de manera tan simple, pues el número de parámetros en la generatriz puede ser mayor que uno. Así, supóngase que se tienen dos parámetros:

$$G: \begin{cases} f_1(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \\ f_2(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \end{cases}$$

Si el problema no tiene otros datos es un problema indeterminado porque las ecuaciones G pueden representar a todos los puntos del espacio de tres dimensiones. Supóngase que

$M(x_1, y_1, z_1)$ es un punto cualquiera del espacio de tres dimensiones, al reemplazar sus coordenadas en G:

$$f_1(x_1, y_1, z_1, \alpha, \beta) = 0$$
$$f_2(x_1, y_1, z_1, \alpha, \beta) = 0$$

Este es un sistema de dos ecuaciones en que las incógnitas son los parámetros α y β. Es claro que se trata de un sistema compatible y puede calcularse una pareja de valores α y β que lo satisfagan. Para estos valores, las coordenadas de M verifican el sistema G y como M es un punto cualquiera del espacio de tres dimensiones, se ha demostrado que las ecuaciones G representan todos los puntos del espacio de tres dimensiones. Entonces, para que el problema quede determinado, es necesario que exista una relación independiente entre los parámetros; a esta relación se le llama ecuación de condición entre los parámetros:

$$\phi(\alpha, \beta) = 0 \qquad \ldots (C)$$

Entonces el problema está determinado porque si entre las ecuaciones G y (C) se elimina un parámetro, se obtienen las ecuaciones de la generatriz con un solo parámetro y se llega así al primer caso, bastará eliminar a este parámetro para obtener la ecuación:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad \ldots (S)$$

que es la de la superficie.

Esta teoría puede generalizarse para un número cualquiera de parámetros.

Por ejemplo, si en la generatriz figuran n parámetros, para que el problema esté determinado deben existir $n - 1$ ecuaciones de condición entre los parámetros. La ecuación de la superficie engendrada se obtiene eliminando a los n parámetros entre las dos ecuaciones de la generatriz y las $n - 1$ ecuaciones de condición.

La ley según la cual la generatriz se desplaza y se deforma en el espacio se tendrá obligando a la generatriz a tocar constantemente a ciertas curvas fijas llamadas directrices.

Considérese el problema cuando en las ecuaciones de la generatriz figuran tres parámetros.

$$G: \begin{cases} f_1(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma) = 0 \\ f_2(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma) = 0 \end{cases}$$

considérese ahora la curva fija:

$$D_1: \begin{cases} h_1(x,y,z) = 0 \\ h_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

que es una directriz.

Para que la curva G toque a la directriz D_1 se requiere que existan valores de x, y, z que verifiquen a las ecuaciones G y D_1. Para esto basta que se despejen a las variables x, y, z en el sistema formado por tres de las ecuaciones y se lleven los valores obtenidos a la cuarta ecuación. Si ésta se verifica, la curva G toca a la curva D_1; la ecuación así obtenida ya no contendrá a las variables x, y, z y sólo tendrá parámetros y constantes:

$$\phi_1(\alpha,\beta,\gamma) = 0 \qquad \ldots (C_1)$$

Se ha encontrado una de las ecuaciones de condición necesaria para resolver el problema. Pero, como en la generatriz figuran tres parámetros, hace falta otra ecuación de condición entre dichos parámetros, y para ello, será necesario tener otra directriz:

$$D_2: \begin{cases} h_1(x,y,z) = 0 \\ h_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Si se procede de manera semejante eliminando a x, y, z, entre las ecuaciones G y D_2, se obtiene otra ecuación de condición:

$$\phi_2(\alpha,\beta,\gamma) = 0 \qquad \ldots(C_2)$$

Si está ecuación se verifica, la generatriz G se apoya en la directriz D_2. Ahora el problema está determinado, basta eliminar los parámetros entre las ecuaciones G, (C_1) y (C_2). La ecuación encontrada es la ecuación de la superficie engendrada por G al moverse en el espacio de tres dimensiones apoyándose en las curvas directrices D_1 y D_2:

$$F(x,y,z) = 0 \qquad \ldots(S)$$

Obsérvese que cada directriz suministra una ecuación de condición. Puede entonces generalizarse el siguiente método:

Si en las ecuaciones de la generatriz figuran n parámetros, el problema estará determinado si se tienen $n - 1$ directrices. Primero se eliminan a las variables x, y, z entre las ecuaciones de la generatriz y cada par de ecuaciones de cada directriz. Como resultado de cada eliminación se obtiene una ecuación de condición entre los parámetros. A continuación se eliminan los parámetros entre las ecuaciones de la generatriz y las $n - 1$ ecuaciones de condición. Se obtiene entonces una ecuación $F(x,y,z)=0$ que es la ecuación buscada de la superficie, engendrada por la generatriz al moverse apoyándose en las $n - 1$ directrices.

SIMPLIFICACION DEL METODO PARA ALGUNOS TIPOS DE SUPERFICIES.

El método que se acaba de presentar es de aplicación general, pero para ciertos tipos de superficies, es posible simplificar algo su empleo. A continuación se presentan algunos de estos casos:

SUPERFICIES CILINDRICAS CON DIRECTRIZ CONTENIDA EN UN PLANO COORDENADO O UNO PARALELO A UNO DE ELLOS Y GENERATRIZ CON UNA DIRECCION CUALQUIERA.

Para presentar este caso, supóngase que se tiene una curva directriz contenida en un plano paralelo, al plano xz, y que dista de éste d unidades. Entonces:

$$D: \begin{cases} f(x,z)=0 & \dots (1) \\ y = d & \dots (2) \end{cases}$$

Ahora, supóngase que la generatriz es una recta paralela al vector:

$$\bar{v} = a\ i + b\ j + c\ k$$

Para aplicar el método, será necesario determinar las ecuaciones de la generatriz:

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

Como la directriz está contenida en un plano paralelo al xz, conviene despejar a x, y también a z para tenerlas como función de y:

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b}$$

$$x = \frac{a}{b}\ y - \frac{a}{b}\ y_o + x_o$$

Dado que a, b y c son constantes, pero x_o y y_o son diferentes para cada posición de la generatriz, si se hace:

$$\alpha = - \frac{a}{b}\ y_o + x_o$$

entonces:

$$x = \frac{a}{b}\ y + \alpha \qquad \dots (3)$$

que es la primera ecuación de la generatriz.

Análogamente, para el caso de z:

$$z = \frac{c}{b}\ y + \beta \qquad \dots (4)$$

que constituye la segunda ecuación de la generatriz.

A continuación se aplicaría el método como en los demás casos.

De la misma manera, si ahora se tuviera la directriz contenida en un plano paralelo al xy:

$$D: \begin{cases} f(x,y) = 0 & \ldots (1) \\ z = d & \ldots (2) \end{cases}$$

Si la dirección que debe seguir la generatriz está dada por el vector:

$$\bar{v} = a\ i + b\ j + c\ k$$

Las ecuaciones de la generatriz quedan:

$$G: \begin{cases} x = \dfrac{a}{c} z + \alpha & \ldots (3) \\ y = \dfrac{b}{c} z + \beta & \ldots (4) \end{cases}$$

Por último, si la directriz está contenida en un plano paralelo al yz, las ecuaciones de la directriz y de la generatriz son:

$$D: \begin{cases} f(y,z) = 0 & \ldots (1) \\ x = d & \ldots (2) \end{cases}$$

$$G: \begin{cases} y = \dfrac{b}{a} x + \alpha & \ldots (3) \\ z = \dfrac{c}{a} x + \beta & \ldots (4) \end{cases}$$

Para fijar ideas se presenta el siguiente:

Ejercicio 7: Encontrar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya generatriz es paralela al vector $\bar{v} = i - j + k$, y cuya directriz es la parábola:

$$D: \begin{cases} y^2 = 4x & \ldots (1) \\ z = 3 & \ldots (2) \end{cases}$$

Solución: De acuerdo con lo expuesto anteriormente, las ecuaciones de la generatriz son:

$$G: \begin{cases} x = \dfrac{1}{1} z + \alpha \\ y = \dfrac{-1}{1} z + \beta \end{cases}$$

es decir:

$$G: \begin{cases} x = z + \alpha & \dots (3) \\ y = -z + \beta & \dots (4) \end{cases}$$

Ahora, aplicando normalmente el método:

a) Tomando en cuenta (2) en (3) y en (4):

$$x = 3 + \alpha$$
$$y = -3 + \beta$$

sustituyendo en (1):

$$(\beta - 3)^2 = 4(3 + \alpha) \qquad \dots (C)$$

b) Despejando α y β de (3) y (4):

$$\alpha = x - z$$
$$\beta = y + z$$

sustituyendo en (C):

$$(y + z - 3)^2 = 4(x - z + 3) \qquad \dots (S)$$

. SUPERFICIES CONICAS CON DIRECTRIZ CONTENIDA EN UN PLANO COORDENADO O EN UNO PARALELO A UNO DE ELLOS Y VERTICE FUERA DE ESE PLANO.

Nuevamente, para la presentación de este caso se explicará suponiendo un caso:

Supóngase que la directriz está contenida en un plano paralelo al yz:

$$D: \begin{cases} f(y,z) = 0 & \dots (1) \\ x = d & \dots (2) \end{cases}$$

y que el vértice es el punto $V(x_o, y_o, z_o)$. Entonces, las ecuaciones de la generatriz se obtienen de la siguiente manera:

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

En este caso, x_o, y_o y z_o son constantes, y a, b y c son variables. De manera que también conviene establecer a las variables y, z en términos de x:

$$y - y_o = \frac{b}{a}(x - x_o)$$

Si se hace:

$$\alpha = \frac{b}{a}$$

$$y - y_o = \alpha(x - x_o)$$

Análogamente:

$$z - z_o = \beta(x - x_o)$$

Entonces, las ecuaciones de la generatriz quedan:

$$G: \begin{cases} y - y_o = \alpha(x - x_o) \\ z - z_o = \beta(x - x_o) \end{cases}$$

A continuación se aplicaría el método normalmente.

De manera similar, si ahora la directriz estuviera contenida en un plano paralelo al xy:

$$D: \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ z = d \end{cases}$$

y el vértice es $V(x_o, y_o, z_o)$, las ecuaciones de la generatriz serian:

$$\begin{cases} x - x_o = \alpha(z - z_o) \\ y - y_o = \beta(z - z_o) \end{cases}$$

Finalmente, si la directriz está contenida en un plano paralelo al xz, con vértice $V(x_o, y_o, z_o)$:

$$D: \begin{cases} f(x,z) = 0 \\ y = d \end{cases}$$

entonces las ecuaciones de la generatriz quedarían:

$$G: \begin{cases} x - x_0 = \alpha(y - y_0) \\ z - z_0 = \beta(y - y_0) \end{cases}$$

Para fijar ideas se resolverá el siguiente:

Ejercicio 8: Determinar la ecuación de la superficie cónica con vértice V(3,-1,2) y directriz:

$$D: \begin{cases} y = 4 \text{ sen } 2x & \dots (1) \\ z = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

Solución: Las ecuaciones de la generatriz son:

$$G: \begin{cases} x - 3 = \alpha(z - 2) & \dots (3) \\ y + 1 = \beta(z - 2) & \dots (4) \end{cases}$$

ahora, aplicando el método:

a) de (2) en (3) y (4):

$$x = -2\alpha + 3$$
$$y = -2\beta - 1$$

tomando en cuenta estos valores en (1):

$$-2\beta - 1 = 4 \text{ sen } [2(3 - 2\alpha)]$$

entonces:

$$2\beta + 1 + 4 \text{ sen } (6 - 4\alpha) = 0 \quad \dots (C)$$

b) despejando α y β de (3) y (4):

$$\alpha = \frac{x - 3}{z - 2}$$

$$\beta = \frac{y + 1}{z - 2}$$

sustituyendo en (C):

$$\frac{2y + 2}{z - 2} + 1 + 4 \text{ sen } [6 - \frac{4x - 12}{z - 2}]$$

multiplicando por z - 2, y haciendo operaciones dentro del argumento de la función seno:

$$2y + 2 + z - 2 + 4(z - 2) \text{ sen } \frac{6z - 12 - 4x + 12}{z - 2} = 0$$

finalmente:

$$2y + z + (4z - 8) \text{ sen } \frac{6z - 4x}{z - 2} = 0 \quad \ldots \text{ (S)}$$

SUPERFICIES DE REVOLUCION CUANDO EL EJE DE REVOLUCION ES UN EJE COORDENADO Y SE CONOCE LA ECUACION DE UNA DE SUS MERIDIANAS CONTENIDA EN UN PLANO COORDENADO CONTINENTE DEL EJE DE GIRO.

Ahora para este caso, supóngase que se desea determinar la ecuación de una superficie de revolución que se formará con el giro de la curva:

$$M: \begin{cases} f(x,y) = 0 & \ldots (1) \\ z = 0 & \ldots (2) \end{cases}$$

alrededor del eje x. Ver figura 11.

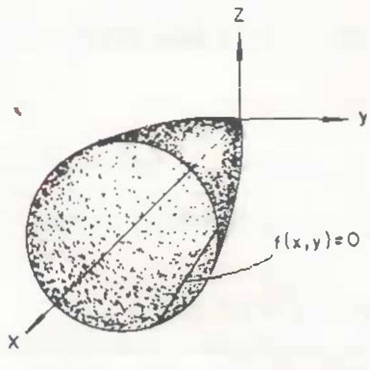

figura 11

Para resolver el problema, puede suponerse que la directriz de esta superficie es la curva M y que la generatriz es una circunferencia que se desplaza paralela al plano yz, con centro siempre sobre el eje x, radio variable y que siempre toca a M Ver figura 11. Por lo tanto, las ecuaciones de la generatriz son:

$$G: \begin{cases} y^2 + z^2 = \alpha^2 & \ldots (3) \\ x = \beta & \ldots (4) \end{cases}$$

Aplicando el método, de (2) en (3):

$$y^2 = \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\,\alpha$$

llevando este valor a (1) y tomando en cuenta (4):

$$f(\beta,\ \pm\alpha) = 0 \qquad \ldots (C)$$

ahora, (3) y (4) en (C):

$$f(x,\ \pm\sqrt{y^2 + z^2}\,) = 0 \qquad \ldots (S)$$

que es la ecuación de la superficie.

Obsérvese que la ecuación obtenida resultó igual a la primera de la meridiana, sólo que en lugar de y, resultó más o menos la raiz cuadrada de la suma del cuadrado de la misma y más el cuadrado de z. Este resultado puede generalizarse a la simplificación:

Si se desea determinar la ecuación de una superficie de revolución cuando se conocen las ecuaciones de una meridiana contenida en un plano coordenado y el eje de giro es un eje coordenado, basta con sustituir la variable diferente a la correspondiente al eje de rotación por más o menos la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de la misma variable más el cuadrado de la variable que está igualada a cero en la otra ecuación.

Ejercicio 9: Determinar la ecuación del toro (toroide) que se genera con la rotación, alrededor del eje z, de la circunferencia:

$$M: \begin{cases} (y - R)^2 + z^2 = r^2 & \ldots (1) \\ x = 0 & \ldots (2) \end{cases}$$

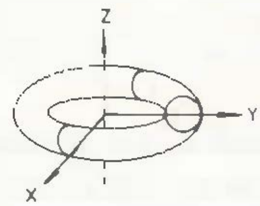

figura 12

Solución: De acuerdo con lo obtenido líneas arriba, para la obtención de la ecuación de la superficie, debe identificarse en la primera ecuación de la curva meridiana a la variable diferente a la correspondiente al eje de giro. Como en este caso el eje alrededor del cual gira la curva es el eje z, la otra variable es y. Ahora debe hacerse la sustitución:

$$\left(\pm \sqrt{y^2 + x^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \qquad \ldots \text{(S)}$$

que es la ecuación buscada.

IDENTIFICACION DE UNA SUPERFICIE.

Como se dijo anteriormente, son dos los problemas más importantes en el estudio de la Geometría Analítica, el primero de ellos ya ha sido tratado. A continuación, se hablará del otro; es decir, de la identificación de una superficie, teniendo como dato su representación analítica. Para el efecto, el método más comúnmente empleado es el llamado *Discusión de la Ecuación de una Superficie*. Ahora se explicará este método, pero es muy conveniente señalar que no siempre es necesario completar la total aplicación del método ya que el objetivo es siempre la identificación de la superficie, y si ésta se logra con sólo algunos pasos del método, o por medio de algún otro recurso, sería ocioso completar la aplicación del método tan sólo por completarlo, cuando en ocasiones resulta muy engorroso.

DISCUSION DE LA ECUACION DE UNA SUPERFICIE.

Para la identificación una superficie por medio del análisis de su ecuación, es conveniente investigar en dónde se localizan los puntos de intersección de la superficie con los ejes coordenados, si hay; o cómo son las trazas de dicha superficie con los planos coordenados, o con planos paralelos a éstos; o bien si la superficie presenta simetría con respecto a algún o algunos elementos del sistema de referencia, etc. De manera que con el objetivo de sistematizar esta investigación, se sugiere seguir la siguiente metodología, la cual, para hacerla más comprensible se presenta simultáneamente con un ejemplo:

Ejercicio 10: Identificar la superficie que tiene por ecuación:

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 6xy = 8$$

Solución:

I. INTERSECCION DE LA SUPERFICIE CON LOS EJES COORDENADOS.

I.1. Con el eje X:

Para la determinación de los puntos donde la superficie corta al eje de las x, se hacen $y = z = 0$:

$$5x^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

entonces, los puntos de intersección son:

$$(2\sqrt{2/5},\ 0,\ 0) \quad y \quad (-2\sqrt{2/5},\ 0,\ 0)$$

I.2. Con el eje y:

Se hacen $x = z = 0$:

$5y^2 = 8$, que conduce a un caso similar al anterior:

los puntos de intersección son:

$$(0,\ 2\sqrt{2/5},\ 0) \quad y \quad (0,\ -2\sqrt{2/5},\ 0)$$

I.3. Con el eje z:

Se hacen $x = y = 0$:

$$8z^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad z^2 = 1$$

$$\therefore \quad z = \pm 1$$

los puntos de intersección son:

$(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$

II. Trazas con los planos coordenados.

II. 1: Con el plano xy:

Se hace $z = 0$:

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy = 0$$

Al contener la ecuación el término $-6xy$, implica que se trata de una curva con ejes oblicuos a los coordenados. Para averiguar de qué tipo de ecuación se trata se emplea el llamado discriminante $B^2 - 4AC$:

$$(-6)^2 - 4(5)(5) =$$

$$= 36 - 100 =$$

$$= -64$$

que resultó menor que cero; por lo tanto, se trata de una ecuación tipo elipse. Ahora, para determinar si efectivamente se trata de una elipse, se llevará al cabo una rotación de ejes. Como los coeficientes de x y de y son iguales, el ángulo de rotación es $\theta = 45°$.

De las ecuaciones de transformación correspondientes, se sabe que:

$$x = \mathfrak{x} \cos \theta - \mathfrak{y} \operatorname{sen} \theta$$

$$y = \mathfrak{x} \operatorname{sen} \theta + \mathfrak{y} \cos \theta$$

dado que $\theta = 45°$, se tiene:

$$\text{sen}\ \theta = \cos\ \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

sustituyendo y desarrollando:

$$\mathcal{x}^2 + 4\mathcal{y}^2 = 4$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\mathcal{x}^2}{4} + \mathcal{y}^2 = 1$$

esto significa que sí se trata de una elipse con semiejes dos y uno sobre los nuevos ejes $\mathcal{x}$ y $\mathcal{y}$, respectivamente.

II.2. Con el plano xz:

Se hace y = 0:

$$5x^2 + 8z^2 = 8$$

que es una elipse con semiejes:

$2\sqrt{\frac{2}{5}}$ sobre el eje x,

1 sobre el eje z.

II.3. Con el plano yz:

Se hace x = 0:

$$5y^2 + 8z^2 = 8$$

también se trata de una elipse con semiejes que tienen los mismos valores numéricos que para el inciso anterior.

III. Simetrías.

III.1 Con respecto al eje x:

Se cambian y por -y

z por -z:

$$5x^2 + 5(-y)^2 + 8(-z)^2 - 6x(-y) = 8$$
$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 6xy = 8$$

como la ecuación se modifica, no existe simetría con respecto a ese eje.

III.2 Con respecto al eje y:

Se cambian x por -x

z por -z:

$$5(-x)^2 + 5y^2 + 8(-z)^2 - 6(-x)y = 8$$
$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 6xy = 8$$

No hay simetría con respecto a y.

III.3 Con respecto al eje z:

Se cambian x por -x

y por -y:

$$5(-x)^2 + 5(-y)^2 + 8z^2 - 6(-x)(-y) = 8$$
$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 6xy = 8$$

la ecuación no se altera, lo que significa que sí hay simetría con respecto al eje z.

III.4 Con respecto al plano xy:

se cambia z por -z

$$5x^2 + 5y^2 + 8(-z)^2 - 6xy = 8$$
$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 6xy = 8$$

sí hay simetría con respecto al plano xy.

III.5 Con respecto al plano xz:

se cambia y por -y

$$5x^2 + 5(-y)^2 + 8z^2 - 6x(-y) = 8$$
$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 6xy = 8$$

Por tanto, no hay simetría con respecto a ese plano.

III.6 Con respecto al plano yz:

Se cambian x por -x:

$$5(-x)^2 + 5y^2 + 8z^2 - 6(-x)y = 8$$
$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 6xy = 8$$

No hay simetria con respecto a YZ.

III.7 Con respecto al origen:

Se cambian x por -x

y por -y

z por -z

$$5(-x)^2 + 5(-y)^2 + 8(-z)^2 - 6(-x)(-y) = 8$$
$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 6xy = 8$$

entonces, sí hay simetría con respecto al origen.

IV. Secciones Planas Paralelas a los Planos Coordenados.

IV.1 Paralelas a xy:

Si $z = k$:

$$5x^2 + 5y^2 + 8k^2 - 6xy = 8$$
$$5x^2 + 5y^2 - 6xy = 8 - 8k^2 \qquad .....(A)$$

Se trata de una ecuación tipo elipse, ya que el discriminante es el mismo que aquel obtenido en el inciso I.1. Entonces, las trazas de los planos paralelos al XY con la superficie, son elipses o una degeneración de esa cónica, dependiendo de k.

IV.2 Paralelas a xz:

Si $y = k$:

$$5x^2 + 5k^2 + 8z^2 - 6xk = 8$$

$$5x^2 + 8z^2 - 6xk = 8 - 5k^2 \qquad \text{.....(B)}$$

es también una ecuación tipo elipse.

IV.3 Paralelas a yz:

Si $x = k$:

$$5k^2 + 5y^2 + 8z^2 - 6ky = 8$$

$$5y^2 + 8z^2 - 6ky = 8 - 5k^2 \qquad \text{.....(C)}$$

de nuevo se trata de una ecuación tipo elipse.

V. Extensión.

V.1 En z:

Para investigar los valores de z para los cuales existe la superficie, es conveniente aprovechar la ecuación (A) del inciso IV.1 con la que se puede averiguar para qué valores de k se tiene una elipse, un punto o ningún lugar geométrico. Recuérdese la ecuación (A):

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy = 8 - 8k^2 \qquad \text{.....(A)}$$

si se transforma la ecuación, girando los ejes coordenados empleando las mismas ecuaciones de transformación para rotación de ejes, y dado que se tiene el mismo valor del discriminante y el mismo ángulo de giro, la ecuación transformada queda:

$$\mathcal{x}^2 + 4\mathcal{y}^2 = 4 - 4k^2$$

en virtud de que se tiene en el miembro izquierdo una suma de dos números positivos para cualquier valor de $\mathcal{x}$ y $\mathcal{y}$, para que exista lugar geométrico, el miembro derecho no puede ser negativo, así que para determinar los valores de z para los cuales existe superficie, habrá que resolver la inecuación:

$$4 - 4k^2 \geq 0$$

para resolverla, considérese el producto notable llamado el de los conjugados:

$$(2 + 2k)(2 - 2k) \geq 0$$

para que este producto sea positivo, ambos factores deben tener el mismo signo, entonces, si los dos son positivos:

$$2 + 2k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad k \geq -1$$
$$2 - 2k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad k \leq 1$$

por lo tanto, el conjunto solución de este primer caso es:

$$-1 \leq k \leq 1$$

ahora, para el caso en que ambos factores sean negativos:

$$2 + 2k \leq 0 \quad \Rightarrow \quad k \leq -1$$
$$2 - 2k \leq 0 \quad \Rightarrow \quad k \geq 1$$

la intersección de estas dos posibilidades es el conjunto vacío, así que, finalmente, la extensión en z es:

$$-1 \leq z \leq 1$$

es decir, si se hace pasar un plano paralelo al xy, cuya altura esté comprendida en ese intervalo, la superficie y el plano tendrán intersección, si dicha altura sale de ese intervalo, no habrá intersección.

V.2 En y:

Ahora es conveniente analizar la extensión en este eje utilizando la ecuación (B) del inciso IV.2, y para ello se transcribe a continuación:

$$5x^2 + 8z^2 - 6xk = 8 - 5k^2 \quad \ldots \text{(B)}$$

Como se dijo anteriormente, la ecuación es tipo elipse, pero para representer un lugar geométrico el parámetro k debe tomar ciertos valores. Para averiguarlos, primero se completarán cuadrados:

$$5(x^2 - 6/5\ k + \frac{9k^2}{25}) + 8z^2 = 8 - 5k^2 + 9/5\ k^2$$

$$5(x - 3/5\ k)^2 + 8z^2 = 8 - \frac{16k^2}{5}$$

De nuevo, para que exista lugar geométrico, el miembro derecho no debe ser negativo, así que resulta la inecuación:

$$8 - \frac{16k^2}{5} \geq 0$$

El conjunto solución de esta inecuación proporciona los valores de y para los cuales existe la superficie:

$$-\sqrt{\frac{5}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{5}{2}}$$

V.3 En x:

Ahora se ve la conveniencia de utilizar la ecuación (C) obtenida en el inciso IV.3:

$$5y^2 + 8z^2 - 6ky = 8 - 5k^2 \quad \ldots \text{(C)}$$

Como puede observarse, esta ecuación es análoga a la ecuación (B) y genera una solución equivalente para la extensión en x; es decir:

$$-\sqrt{\frac{5}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Con todos los elementos determinados por esta discusión, ya es posible identificar la superficie. Es claro que se trata de un elipsoide. Para concluir, se elabora su representación gráfica:

VI. REPRESENTACION GRAFICA.

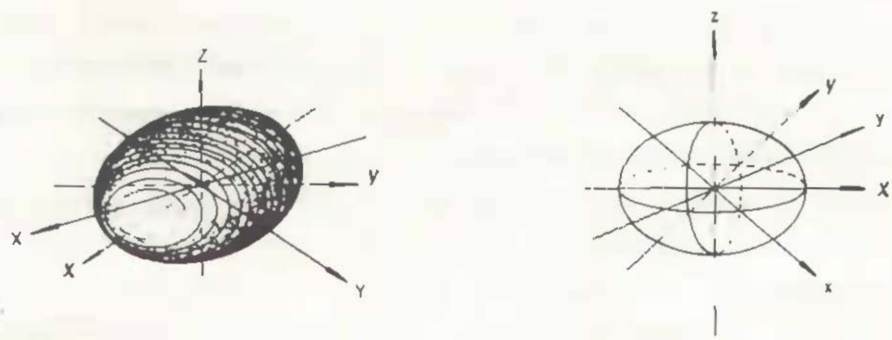

figura 13

Como se dijo previamente, el objetivo de la discusión de la ecuación de una superficie, es identificarla y/o dibujarla. De manera que si puede identificarse la superficie antes de concluir la discusión, no debe uno aferrarse a terminarla, pues con la identificación se cumple el objetivo. Como un ejemplo de esto, considérese el siguiente:

Ejercicio 11: Identificar la superficie cuya ecuación se escribe a continuación, y representarla gráficamente:

$$(4x - 3z)^2 + 16y^2 = 4z^2 \qquad \ldots(S)$$

Solución:

Antes de efectuar toda la discusión de esta ecuación, puede observarse cual de los pasos de dicha discusión podria arrojar luz sobre el problema. Parece que lo más prudente sería comenzar con el análisis de las secciones paralelas al plano xy. De manera que se hace z = k:

$$(4x - 3k)^2 + 16y^2 = 4k^2$$

tomando como factor común a 4 en el primer término:

$$[4(x - \frac{3}{4}k)]^2 + 16y^2 = 4k^2$$

$$16(x - \frac{3}{4}k)^2 + 16y^2 = 4k^2$$

$$(x - \frac{3}{4}k)^2 + y^2 = \frac{k^2}{4}$$

Como puede observarse, se trata de una familia de circunferencias horizontales, con centro sobre el plano xz y radio variable. Cuando k es nula, se reduce a un punto (el origen), y conforme crece k, positiva o negativamente, el radio crece y la abscisa del centro también aumenta en valor absoluto, por lo que puede deducirse que se trata de un cono circular oblicuo. Para dibujarlo, bastará con seleccionar adecuadamente una de estas circunferencias; por ejemplo, si $k = z = 4$:

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + y^2 = 4 \\ z = 4 \end{cases}$$

además como ya se sabe, el origen es el vértice:

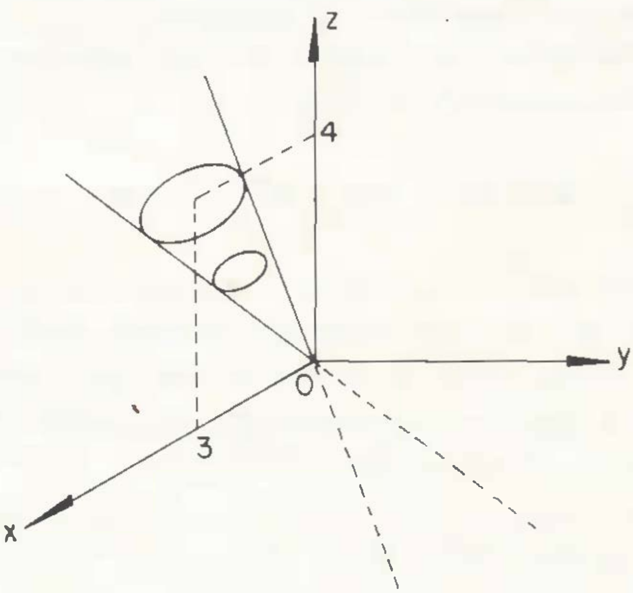

figura 14

Es evidente que para lograr la identificación de una superficie, antes de concluir con la discusión de su ecuación, se necesita de cierta habilidad que sólo la práctica puede proporcionar. Sin embargo, cuando se trata de una superficie cuádrica que no tenga sus ejes oblicuos, es posible lograr su identificación por medio del análisis de sus coeficientes. Para ello, se incluye la siguiente tabla:

CLASIFICACION DE LAS SUPERFICIES CUADRICAS

CUADRICAS CON CENTRO ($AX^2 + BY^2 + CZ^2 = R$)

R	A, B, C	LUGAR GEOMETRICO
P	Todos positivos	Elipsoide
O	Todos negativos	Ningún lugar geómetrico
S	Dos positivos y uno negativo	Hiperboloide de una rama
I	Uno positivo y dos negativos	Hiperboloide de dos ramas
T	Uno nulo y dos positivos	Cilindro elíptico recto, si los
I		dos son iguales es circular
V	Uno nulo y dos negativos	Ningún lugar geómetrico
O	Uno nulo y los otros de signos	
	diferentes	Cilindro hiperbólico recto
	Dos nulos y uno positivo	Dos planos paralelos
	Dos nulos y uno negativo	Ningún lugar geométrico

N	Todos del mismo signo	Un solo punto que es el origen
	Dos positivos y uno negativo	Cono recto
U	Uno nulo y los otros dos del	
	mismo signo	Un eje coordenado
L	Uno nulo y los otros de signos	
	diferentes	Dos planos que se cortan
O	Dos nulos	Un plano coordenado

NOTA. Si R es negativo, se multiplica por menos uno toda la ecuación.

CUADRICAS SIN CENTRO ($Ax^2 + By^2 = Rz$)

R	A, B	LUGAR GEOMETRICO
POSITIVO	Del mismo signo Diferentes signos Uno nulo	Paraboloide elíptico Paraboloide hiperbólico Cilindro parabólico recto
NULO	Del mismo signo Signos diferentes Uno nulo	Un eje coordenado Dos planos que se cortan Un plano coordenado

NOTA. Si R es negativo, se multiplica por menos uno toda la ecuación.

Ejercicio 12: Identificar la superficie cuya ecuación es

$$3y^2 + 5z^2 = 4x^2 \qquad \ldots(S)$$

Solución: En este caso, no es necesario efectuar toda la discusión ya que puede identificarse esta superficie con notar que se trata de un cono elíptico, puesto que se tiene una cuádrica con centro y el término independiente es nulo, con los coeficientes de las variables de x^2, y^2, z^2 que son dos positivos y uno negativo:

$$3y^2 + 5z^2 - 4x^2 = 0$$

ECUACIONES VECTORIALES Y PARAMETRICAS DE SUPERFICIES.

Objetivo.- Expresar matemáticamente una superficie por medio de una ley que describe el desplazamiento de un vector de posición, el cual toca continuamente con su extremo a dicho lugar geométrico.
Recuérdese que un plano puede expresarse por medio de la ecuación vectorial:

$$\bar{p} = \bar{p}_o + r\bar{u} + s\bar{v}$$

en donde:

$\bar{p}$ es el vector móvil

$\bar{p}_o$ es el vector de posición de un punto conocido del plano.

$\bar{u}$ y $\bar{v}$ son dos vectores conocidos, no paralelos.

r y s son parámetros.

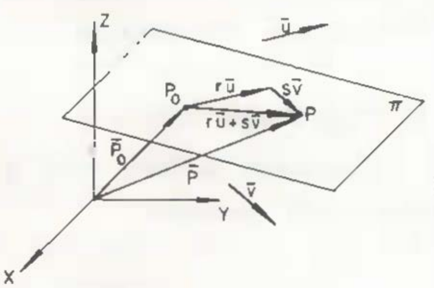

figura 15

En la figura 15 se puede observar que para lograr que el vector $\bar{p}$ tenga su extremo en el plano, dicho vector debe poder obtenerse como la suma del vector $\bar{p}_o$ más dos vectores paralelos a los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$. Para ello, con los parámetros r y s se puede modificar la magnitud de $\bar{u}$ y $\bar{v}$, respectivamente, y aún su sentido pero no su dirección. O sea, que si un punto no pertenece al plano, al no poder alterar la dirección de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, no podrá alcanzarse con un vector $\bar{p}$ obtenido con esas características.
La ecuación anterior puede escribirse también:

$$\bar{p} = (x_o + ru_x + sv_x)i + (y_o + ru_y + sv_y)j + (z_o + ru_z + sv_z)k$$

si se sabe que:

$$\bar{p}_o = x_o i + y_o j + z_o k$$
$$\bar{u} = u_x i + u_y j + u_z k$$
$$\bar{v} = v_x i + v_y j + v_z k$$

Además, si $\bar{p}$ tiene como componentes (x, y, z), con la sola condición de que pertenezca al plano, por igualdad de vectores se pueden establecer las ecuaciones paramétricas del plano:

$$\begin{cases} x = x_o + ru_x + sv_x \\ y = y_o + ru_y + sv_y \\ z = z_o + ru_z + sv_z \end{cases}$$

Pero, recuérdese también que, tanto la ecuación vectorial anterior, como las ecuaciones paramétricas, no son las únicas expresiones matemáticas de ese tipo que representan al plano. Por ejemplo, si se recuerda la expresión cartesiana del plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

para determinar otras ecuaciones paramétricas y de allí una ecuación vectorial, se puede parametrizar haciendo:

$$x = t_1$$
$$y = t_2$$

por lo tanto, sustituyendo en la ecuación cartesiana y despejando z:

$$z = -\frac{1}{C}(At_1 + Bt_2 + D)$$

que es la tercera de las ecuaciones paramétricas. Ahora, se tiene:

$$\bar{p} = t_1 i + t_2 j - \frac{1}{C}(At_1 + Bt_2 + D)k$$

que es otra ecuación vectorial del plano.

Nótese que para representar paramétrica o vectorialmente a una superficie, es necesario utilizar dos parámetros, mientras que para la representación de una curva se necesita únicamente de uno.

Por supuesto, las parametrizaciones posibles son muchas y deberá buscarse la más conveniente para cada caso. En ocasiones una adecuada parametrización conduce a la solución más accesible de un problema.

Ejercicio 13: Expresar paramétrica y vectorialmente, de dos maneras diferentes a la esfera cuya ecuación cartesiana es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Solución: PRIMERA FORMA:

Si se hace:

$$x = s$$
$$y = t$$

se tiene:

$$z = \pm \sqrt{r^2 - (s^2 + t^2)}$$

esta parametrización no es muy conveniente puesto que con ella se tiene que separar en dos la superficie, ya que con el signo positivo de z se tendría la cota del hemisferio superior y con el negativo, el inferior. Es decir, no puede tenerse una sola expresión para toda la esfera. Entonces:

Hemisferio superior:

$$\text{ecuaciones paramétricas} \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = \sqrt{r^2 - (s^2 + t^2)} \end{cases}$$

ecuación vectorial:

$$\bar{p} = s\,i + t\,j + \sqrt{r^2 - (s^2 + t^2)}\;k$$

Hemisferio inferior:

ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = -\sqrt{r^2 - (s^2 + t^2)} \end{cases}$

ecuación vectorial:

$$\bar{p} = s\,i + t\,j - \sqrt{r^2 - (s^2 + t^2)}\;k$$

SEGUNDA FORMA:

Para lograr describir el movimiento de un vector de posición $\bar{p}$ que toque constantemente a la esfera, se puede considerar la proyección del vector $\bar{p}$ sobre el plano xy, ver figura 16, la que a su vez se proyecta sobre el eje x, y también sobre el eje y.

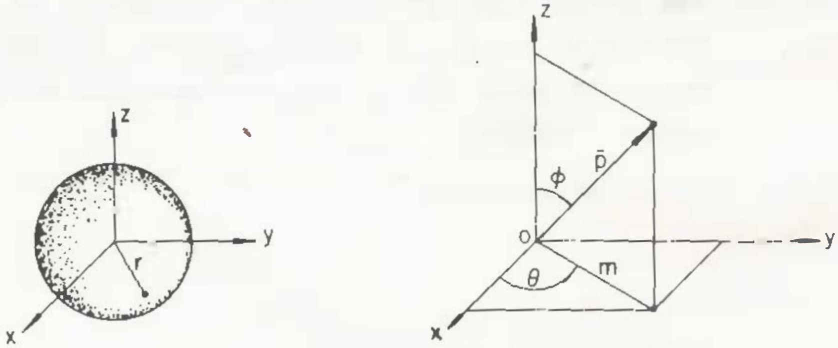

figura 16

De la misma manera, puede proyectarse el vector $\bar{p}$ sobre el eje z. De esta manera, se pueden considerar como parámetros el ángulo ϕ que forma el vector $\bar{p}$ con el eje z, y el ángulo θ formado por la proyección de $\bar{p}$ sobre xy y el eje x. Además, para abarcar la totalidad de la esfera, conviene hacer variar a θ desde cero hasta 2π, para dar la vuelta completa alrededor de z, y a ϕ desde cero hasta π, pues con ello se cubren los ocho octantes. De esta forma, la magnitud de la proyección de $\bar{p}$ sobre el plano xy es:

$$m = r \operatorname{sen} \phi$$

dado que $|\bar{p}| = r$

a su vez, la proyección de m sobre x y sobre y es:

$$x = m \cos \theta$$
$$y = m \operatorname{sen} \theta$$

entonces:

$$x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$
$$y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$$

por último, la magnitud de la proyección de $\bar{p}$ sobre z es:

$$z = r \cos \phi$$

finalmente:

ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$

ecuación vectorial:

$$\bar{p} = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta \, i + r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \, j + r \cos \phi \, k$$

Ejercicio 14: Determinar una ecuación vectorial para la superficie reglada formada por las rectas paralelas al plano xz que se apoyan simultáneamente en la circunferencia C y la recta R, si:

$$C: \begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$R: \begin{cases} x = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

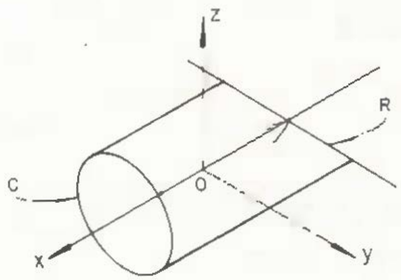

figura 17

Solución: Para representar el lugar geométrico que es tocado por un vector de posición, conviene expresarlo como la suma de un vector $\bar{v}$ que toca primero a la circunferencia más otro que parte del extremo de $\bar{v}$ y continúa paralelamente al plano xz hasta alcanzar el punto en estudio.

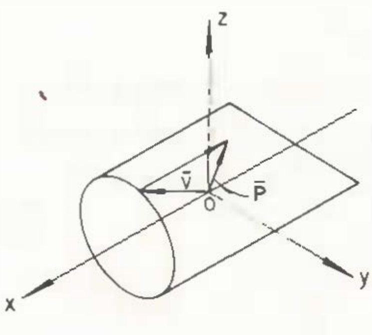

figura 18

para lograr lo anterior, puede expresarse la circunferencia C en términos paramétricos:

$$C: \begin{cases} x = 1 \\ y = \cos t \\ z = \text{sen } t \end{cases}$$

entonces, el vector $\bar{v}$ de la figura quedará representado por:

$$\bar{v} = i + \cos t\ j + \operatorname{sen} t\ k$$

ahora, para obtener una expresión del vector $\bar{s}$, obsérvese que $\bar{s}$ puede determinarse como un vector que sigue la dirección del vector $\bar{u} - \bar{v}$, ver figura 19, pero de magnitud tal que alcance al punto que se desea:

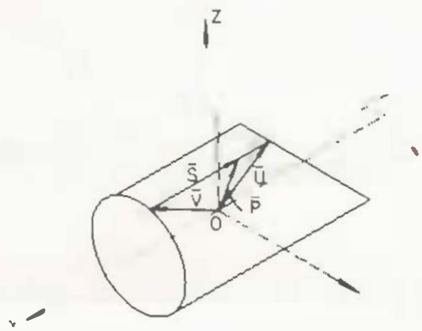

figura 19

entonces, para representar al vector $\bar{u}$, conviene escribirlo:

$$\bar{u} = -i + \cos t\ j + 0\ k$$

puesto que todas las abscisas de los puntos que pertenecen a la recta R deben valer menos uno, todas las cotas son nulas y todas las ordenadas deben ser las mismas que las elegidas para la circunferencia para así asegurar que el vector diferencia $\bar{u} - \bar{v}$ sea paralelo al plano xz. Por lo tanto, la ecuación vectorial obtenida por este razonamiento resulta:

$$\bar{p} = \bar{v} + \bar{s}$$

pero $\bar{s}$ puede calcularse de:

$$\bar{s} = r(\bar{u} - \bar{v})$$

donde r es un parámetro que permite acortar o alargar la magnitud de $\bar{s}$ hasta alcanzar el punto. Entonces:

$$\bar{p} = \bar{v} + r(\bar{u} - \bar{v})$$

pero:

$$\bar{u} - \bar{v} = -i + \cos t\, j - (\, i + \cos t\, j + \operatorname{sen} t\, k\,) =$$
$$= -\,2i - \operatorname{sen} t\, k$$

$$\bar{p} = i + \cos t\, j + \operatorname{sen} t\, k + r\,(\,-\,2i - \operatorname{sen} t\, k\,)$$

finalmente:

$$\bar{p} = (\,1 - 2r)i + \cos t\, j + (1 - r)\operatorname{sen} t\, k$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Determinar la ecuación de la superficie que se genera al desplazarse la curva E_1 apoyándose constantemente en las curvas E_2 y E_3 si:

$$E_1: \begin{cases} \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \\ z = \gamma \end{cases} \qquad E_2: \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{z^2}{6} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$E_3: \begin{cases} \dfrac{y^2}{3} - \dfrac{z^2}{6} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

2. En el centro de un lago se produjo una perturbación que generó oleaje. Con objeto de proteger las riberas se requiere conocer la ecuación de la superficie de dicho oleaje; para ello, los ingenieros responsables de un anteproyecto, estimaron de una manera simplista que esta superficie se forma con la rotación, alrededor del eje z, de la curva E. Determinar la ecuación del oleaje.

$$E: \begin{cases} z = 8\, e^{-2x} \operatorname{sen} 3x \\ y = 0 \end{cases}$$

3. Obtener la ecuación cartesiana de la superficie presentada en el ejercicio 14 de la página 45:

   a) Empleando rectas paralelas al plano xz como generatriz.

   a) Utilizando elipses paralelas al plano yz como generatriz.

4. Determinar la ecuación de la superficie de una estructura "salto de ski" de una obra complementaria de una cortina en una presa, formada con la curva directriz parabólica de ecuaciones:

$$D: \begin{cases} z = \frac{1}{2}\, y^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

y generatriz también parabólica que se desplaza paralelamente al plano xz, sin cambiar de forma, con vértice tocando continuamente a la directriz D, si se conoce que la sección de la superficie en el plano xz pasa por el punto $P(\frac{1}{2},0,3)$ mostrado en la figura 20.

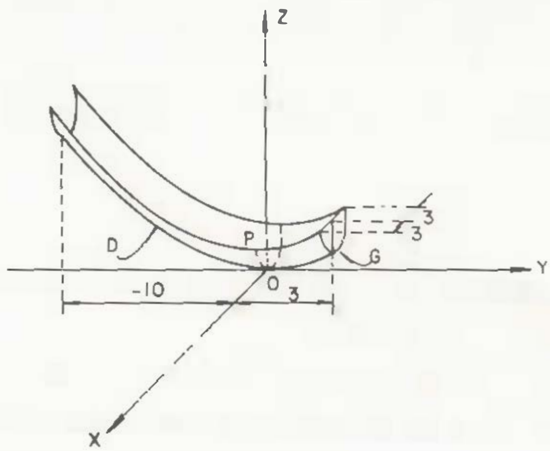

figura 20

5. Determinar la ecuación de la superficie cónica con vértice $V(-1,-1,-4)$ si se sabe que tiene una directriz elíptica.

$$D: \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

6. Determinar si las siguientes ecuaciones representan algún lugar geométrico, en caso afirmativo, indicar de cuál se trata y dibujar aproximadamente su gráfica:

a) $5x^2 + 4y^2 + z^2 - 10x + 16y - 6z + 36 = 0$
b) $5x^2 + 4y^2 + z^2 - 10x + 16y - 6z + 6 = 0$
c) $5x^2 + 4y^2 + z^2 - 10x + 16y - 6z + 30 = 0$
d) $x^2 - 2x - 3y^2 - 18y + 6z^2 - 12z - 20 = 0$
e) $x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 2x - 18y - 12z + 20 = 0$
f) $x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 2x - 18y - 12z - 40 = 0$
g) $3x^2 - 2y - 5z^2 + 6x + 20z - 7 = 0$
h) $3x^2 - 5z^2 + 6x + 20z - 17 = 0$

7. Identificar la superficie cuya ecuación es:

$$x^2 + z^2 = 4\,[\,(y-4)^2 + 1\,]^2$$

8. Identificar el lugar geométrico que representa la siguiente ecuación y

hacer un dibujo aproximado de su gráfica:

$$xy - \frac{1}{2}(xz + yz) + \frac{1}{4} z^2 = 14$$

9. Determinar una ecuación vectorial del cilindro circular recto de ecuación cartesiana:

$$x^2 + y^2 = 9$$

10. Determinar una ecuación vectorial del cono elíptico recto con vértice en el origen y con directriz:

$$D: \begin{cases} x^2 + 4z^2 = 16 \\ y = 5 \end{cases}$$

11. Determinar una ecuación vectorial del cono elíptico con vértice V(1,4,5) si su traza con el plano xy es:

$$T: \begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

SOLUCION DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. $3x^2 + 2y^2 - z^2 = 6$

2. $z = 8\, e^{-2\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{sen}\left(3\sqrt{x^2 + y^2} \right)$

3. $4z^2 = (1 + x)^2(1 - y^2)$

4. $z = 12x^2 + \frac{1}{12} y^2$; $-3 \le x \le 3$, $-10 \le y \le 3$

5. $2(9x - z + 5)^2 + 3(9y - z + 5)^2 = (z + 4)^2$

6. a) Ningún lugar geométrico
   b) Un elipsoide

c) El punto (1, -2, 3)

d) Cono elíptico

e) Hiperboloide de dos ramas

f) Hiperboloide de una rama

g) Paraboloide hiperbólico

h) Dos planos que se cortan

7. Superficie de revolución generada con el giro de una parábola alrededor del eje y.

8. Cilindro hiperbólico

9. $\bar{p} = 3 \cos \theta \, i + 3 \,\text{sen}\, \theta \, j + z \, k$

10. $\bar{p} = 4t \cos \theta \, i + 5t \, j + 2t \,\text{sen}\, \theta \, k$

11. $\bar{p} = [1 - r(1 - 5 \cos \theta)]i + 4\,[1 - r(1 - \text{sen}\, \theta)]j + 5(1 - r)k$

Nota. En los ejercicios 9, 10 y 11 la solución no es única, pero se recomienda al lector intentar llegar a la solución proporcionada.