"UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO"

notas de geometria analitica

19-B

[illegible] de Ingeniería)

Elijamos como origen de nuestro sistema de referencia - al punto de partida del proyectil.

Nuestro problema está esquematizado en la figura 3.1 - donde se observa que la velocidad $\bar{v}_o$ está formada por una - proyección horizontal $\bar{v}_{ox}$ y una vertical $\bar{v}_{oy}$, cuyas componentes son:

$$|\bar{v}_{ox}| = v_o\cos\alpha = \frac{200}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} = 100 \text{ m/seg} \quad (1)$$

$$|\bar{v}_{oy}| = v_o\operatorname{sen}\alpha = \frac{200}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} = 100 \text{ m/seg} \quad (2)$$

Considerando un punto P(x,y) sobre la trayectoria, observamos que el desplazamiento horizontal "x" corresponde al de un movimiento rectilíneo uniforme cuyo modelo matemático es:

$$s = vt + s_o \quad (3)$$

para nuestro caso:

$$s = x \; ; \; s_o = x_o = 0 \quad (4)$$

$$v = |\bar{v}_{ox}| = 100 \text{ m/seg} \quad (\text{de } (1)) \quad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (3):

$$x = 100\ t \quad (6)$$

Obsérvese que la coordenada x de cualquier punto de la trayectoria es una función de t (tiempo transcurrido desde - que se disparó el proyectil). Esto es: $x = f(t)$.

Por otro lado, el desplazamiento vertical "y" del proyectil, se vé afectado por la aceleración de la gravedad ($g = 9.81$ m/seg^2), por lo cual se tiene un movimiento uniformemente acelerado cuyo modelo matemático es:

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (7)$$

para nuestro caso:

$$s = y \quad : \quad s_o = y_o = 0 \qquad (8)$$

$$v_o = v_{oy} = 100 \text{ m/seg} \quad (\text{de } (2)) \qquad (9)$$

$$a = -g = -9.81 \text{ m/seg}^2 \qquad (10)$$

Sustituyendo de (8) a (10) en (7):

$$y = 100\,t - \frac{9.81}{2}\,t^2 \qquad (11)$$

Nuevamente, puede verse que la coordenada "y" de cualquier punto de la trayectoria es una función de t; esto es: $y = g(t)$.

Las expresiones (6) y (11) nos dan las reglas de correspondencia mediante las cuales se puede determinar cualquier punto de la trayectoria con solo dar valores a "t", o sea que un punto cualquiera vendrá dado por:

$$P\,(100t,\ 100t - \frac{1}{2}\,9.81\ t^2)$$

Las expresiones (6) y (11) definen las coordenadas del proyectil como funciones del tiempo t, esto es, en términos generales se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} x &= f(t) = 100t \\ y &= g(t) = 100t - \frac{1}{2}\,9.81\ t^2 \end{aligned} \qquad (6)$$

A esta pareja de ecuaciones que definen para cada valor de "t" a todos los puntos de la trayectoria, se les llama ecuaciones paramétricas de la trayectoria en E^2 y a "t" se le llama variable intermedia ó parámetro.

Analicemos ahora la trayectoria de otra partícula, cuya proyección sobre el plano XY describe una circunferencia y cuya cota es proporcional al tiempo.

Considerando, como se muestra en la figura 3.2, nuestro origen del sistema, coincidiendo con el centro de la circunferencia, tenemos que para un punto $P(x,y,z)$ sobre la trayectoria propuesta en el párrafo anterior, su proyección P' sobre el plano XY corresponde a un movimiento circular uniforme por lo que los desplazamientos en las direcciones de los ejes "X" y "Y" son:

$$x = r' \cos wt \qquad (12)$$

$$y = r' \operatorname{sen} wt \qquad (13)$$

donde w es la rapidez angular y r' el radio de la circunferencia.

En cuanto al movimiento perpendicular al plano XY, se tienen desplazamientos iguales en tiempos iguales, por lo que corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme dado por:

$$z = ct \qquad (14)$$

donde c es una constante de proporcionalidad.

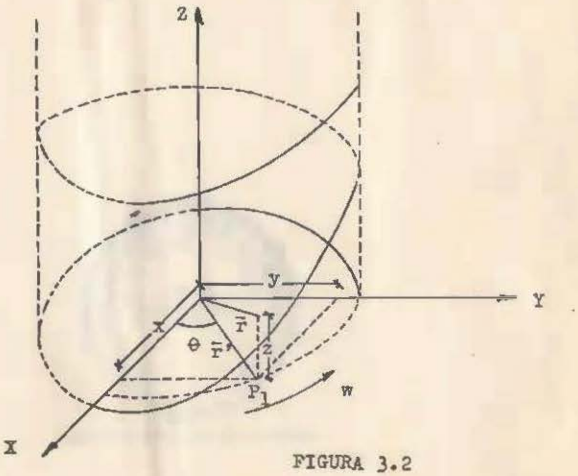


FIGURA 3.2

Puede observarse que lae expresiones (12), (13) y - (14) definen las coordenadas de un punto P cualquiera de la trayectoria en E^3, que en este caso es una espiral. - Así: P (r'cos wt, r'sen wt, ct).

De los ejemplos anteriores, se tienen las siguien-- tes definiciones:

DEFINICION 3.1. Al conjunto de reglas de correspondencia que relacionan las coordenadas de un punto - - P (x,y,z) que describe una curva en E^3, dadas por:

$$x = f(t) \ , \quad y = g(t) \ , \quad z = h(t)$$

con una variable intermedia "t" llamada parámetro, se le denominan ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA CURVA.

Obsérvese que para E^2 solamente necesitamos dos e-- cuaciones paramétricas.

Si recordamos del capítulo 1 que a cada punto del - Espacio Cartesiano le corresponde un vector de posición, entonces el vector de posición de cada punto de la tra-- yectoria de nuestro ejemplo anterior vendrá dado por el- vector $\bar{r}$:

$$\bar{r} = r'\cos wt \ i + r'\operatorname{sen} wt \ j + ct \ k$$

DEFINICION 3.2. A una ecuación vectorial de la variable escalar "t" (parámetro), dada por:

$$\bar{r} = f(t)\ i + g(t)\ j + h(t)\ k$$

donde f(t), g(t) y h(t) son las ecuaciones paramétricas de una curva, se le llama la ecuación vectorial de dicha curva.

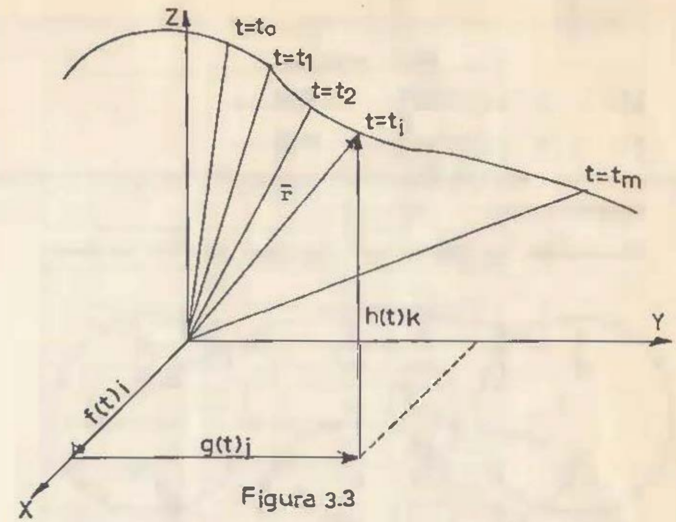


Figura 3.3

Como se muestra en la figura 3.3, a cada valor de t corresponde un vector de posición de un punto de la cur- va por lo cual ésta se irá definiendo conforme le demos- valores a t.

En el siguiente tema de este capítulo veremos algunos ejemplos de esta definición.

Estudiemos ahora las condiciones que deben cumplir- se para que una trayectoria dada por una ecuación paramé trica también se pueda representar por su ecuación cartesiana, ambas, modelos matemáticos de la misma trayecto-- ria.

TEOREMA 3.1. Si x = f(t), y = g(t) y tienen por - funciones inversas (ver capítulo 1 de Matemáticas I), a $f^{-1}(x)$ o $g^{-1}(x)$ entonces existe:

	$y = F(x)$ dada por:
a)	$y = g\left[f^{-1}(x)\right] = F(x)$ ó
b)	$x = f\left[g^{-1}(x)\right] = G(y)$

DEMOSTRACION:

Observemos la figura 3.4, la cual ilustra el caso

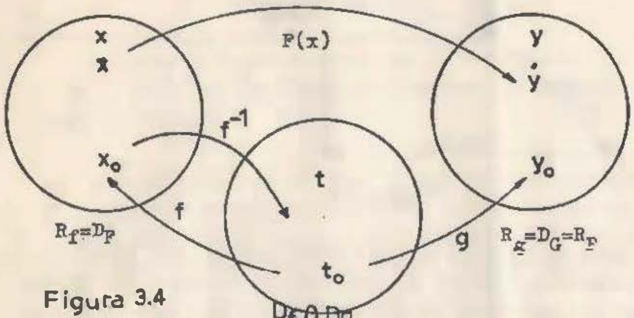


Figura 3.4

Si $t_o \in D_f \cap D_g$, entonces existen x_o y y_o, tal que:

$$x_o = f(t_o) \quad , \quad y_o = g(t_o)$$

quedando así definida una pareja P_o, donde

$$P_o = (x_o, y_o)$$

Si f tiene inversa, entonces

$$t_o = f^{-1}(x_o)$$

y sustituyendo en y_o, nos dá:

$$y_o = g\left[f^{-1}(x_o)\right] = F(x_o)$$

todo el conjunto de valores así obtenidos, nos definen - la función:

$$y = g\left[f^{-1}(x)\right] = F(x)$$

Esto prueba la parte (a) del Teorema la segunda - parte se deja como ejercicio al lector.

Además, se puede demostrar que dos parejas de ecuaciones paramétricas diferentes representan la misma curva, si y sólo si, la ecuación cartesiana obtenida con - cualquier pareja es la misma y además, si el dominio y - rango correspondientes son iguales.

Aplicando el Teorema visto anteriormente, podemos, - a partir de nuestras ecuaciones paramétricas (6) y (11), calcular la ecuación cartesiana equivalente: por lo visto en Matemáticas I, la función $x = 100\ t$ tiene como - función inversa $t = x/100$, entonces al sustituir en - - (11) se obtiene:

$$y = 100\left(\frac{x}{100}\right) - \frac{9.81}{2}\left(\frac{x}{100}\right)^2$$

simplificando:

$$y = x - \frac{9.81}{20000}x^2 = F(x) \qquad (15)$$

que es la ecuación cartesiana de la trayectoria. La figura 3.5 muestra la representación esquemática mediente diagramas de Venn de este problema.

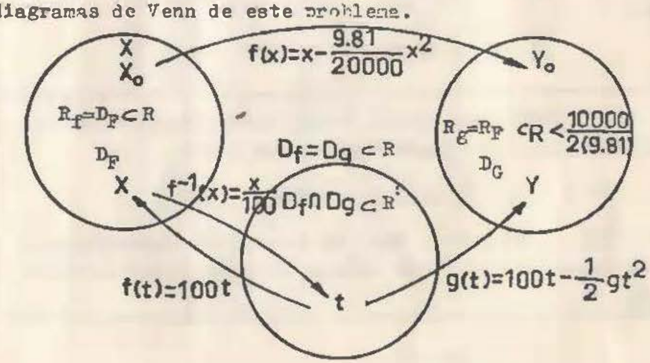


Figura 3.5

La forma de la ecuación (15) indica que la representación gráfica de la trayectoria es una parábola. Encontremos la forma canónica de esta ecuación: factoricemos el coeficiente de x^2

$$y = -\frac{9.81}{20000}\left[x^2 - \frac{20000}{9.81}x + \left(\frac{10000}{9.81}\right)^2\right] + \frac{10000}{2(9.81)}$$

reagrupando términos:

$$\left(y - \frac{10000}{2(9.81)}\right) = -\frac{9.81}{20000}\left(x - \frac{10000}{9.81}\right)^2$$

que és la ecuación canónica cartesiana de una parábola - con vértice en

$$V\left(\frac{10000}{9.81}, \frac{10000}{2(9.81)}\right),$$

eje focal paralelo al eje y, y se abre hacia la parte negativa del mismo, como indica la figura 3.6:

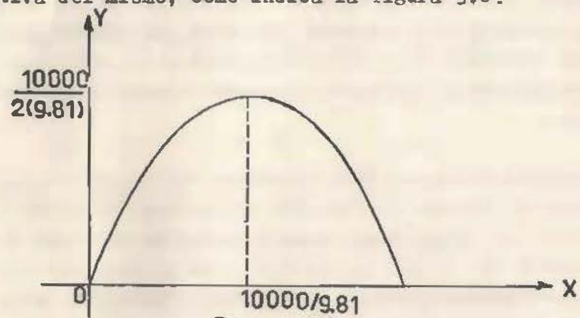


Figura 3.6

Otra forma de obtener la representación gráfica de la trayectoria del móvil, es aplicando directamente las ecuaciones paramétricas

$$x = 100\,t$$
$$y = 100\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

En este caso, sustituyendo un mismo valor del parámetro "t" en ambas ecuaciones se encuentran las coordenadas de un punto de la curva, repitiendo este proceso para distintos valores de t, podemos construir la siguiente tabla:

t	x	y
0	0	0
1	100	100 - 1/2 g
2	200	200 - 2g
3	300	300 - 9/2 g
4	400	400 - 8g
5	500	500 - 25/2 g
6	600	600 - 18g
7	700	700 - 49/2 g
8	800	800 - 32g
9	900	900 - 81/2 g
10	1000	1000 - 50g
11	1100	1100 - 121/2 g
12	1200	1200 - 72g
13	1300	1300 - 169/2 g
14	1400	1400 - 98g
15	1500	1500 - 225/2 g
16	1600	1600 - 128g
17	1700	1700 - 289/2 g
18	1800	1800 - 162g
19	1900	1900 - 361/2 g
20	2000	2000 - 200g
$\frac{200}{9.81}$	$\frac{20000}{9.81}$	0

TABLA 3.1

Graficando las coordenadas (x,y) obtenidas para cada valor de t, se observa que la gráfica corresponde a la de la figura 3.6.

EJEMPLO

Para el diseño del peralte de una curva en una carretera es necesario conocer su geometría, la cual generalmente depende de la topografía del terreno. Si se sabe que una curva se asemeja a la trayectoria dada por:

$$\bar{r} = \cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j \qquad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \ ; \quad \text{en radianes}$$

Calcular la ecuación cartesiana de dicha curva.

SOLUCION:

Si $x = \cos\theta \quad \theta \in D_f \subset R \qquad R_f = D_F = [1,0]$

$y = \operatorname{sen}\theta \quad \theta \in D_g \subset R \qquad R_g = R_F = [0,1]$

despejando de $x = \cos\theta$

$$\theta = \text{ang}\cos x$$

sustituyendo en y:

$$y = \operatorname{sen}(\text{ang}\cos x)$$

Otra forma de encontrar la ecuación cartesiana correspondiente es como sigue:

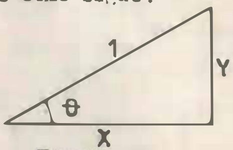


Figura 3.6

De la figura 3.6 obtenemos:

$$x = \cos\theta$$

$$y = \operatorname{sen}\theta$$

que son las componentes de la ecuación vectorial de la trayectoria.

Aplicando el Teorema de Pitágoras se encuentra una relación mas sencilla que $y = \operatorname{sen}(\text{ang}\cos x)$:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Obsérvese que el resultado es el mismo ya que en la ecuación vectorial $\cos\theta = x$ y $\operatorname{sen}\theta = y$, por lo cual sustituyendo en la identidad:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{obtenemos}$$

$$y^2 + x^2 = 1$$

Este problema nos hace ver que cuando en las ecuaciones paramétricas aparecen funciones trigonométricas resulta conveniente utilizar identidades de este tipo, a fin de obtener la ecuación cartesiana de una manera más práctica.

Algunas veces es fácil despejar "t" de una de las funciones y obtener la ecuación cartesiana de la curva a partir de las ecuaciones paramétricas, sin embargo, esta eliminación de "t" no es esencial y no siempre es posible o conveniente, por lo cual a veces convendrá trabajar con las ecuaciones paramétricas.

EJEMPLO

a). Determinar la ecuación cartesiana de una curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = t$$

$$y = 1/t \ ; \quad t \neq 0$$

b). Determinar la ecuación cartesiana de la curva cuya ecuación vectorial es:

$$r = \cos t \; i + \sec t \; j$$

c). Comparar las soluciones obtenidas en los incisos- a) y b). ¿Se trata de la misma curva?

SOLUCION:

a). Si $x = t$ $\quad t \in D_f \subset R \quad R_f = D_F \subset R$

$y = 1/t$; $t \neq 0$ $\quad t \in D_g \subset R \quad R_g = R_F \subset R$

Sustituyendo $t = x$ en $y = 1/t$

$$y = 1/x \quad \text{ó} \quad xy = 1 \quad \therefore \quad y = F(x)$$

que es la ecuación cartesiana, donde $x \in R$, $x \neq 0$

b). Si $\bar{r} = \cos t \; i + \sec t \; j$, entonces:

$x = \cos t \quad t \in D_f \subset R \quad R_f = D_F = [-1,1]$

$y = \sec t = 1/\cos t, \quad t \in D_g \subset R, \quad t \neq \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi \quad (n=1,2,...)$

$$R_g = R_F = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$$

sustituyendo $\cos t = x$ en $y = 1/\cos t$:

$y = 1/x$ ó $xy = 1$, pero $x \in [-1,1]$

c). Las dos ecuaciones cartesianas son iguales, pero la primera está definida para toda x con $x \neq 0$, mientras que - la segunda queda restringida al intervalo $x \in [-1,1]$ y $x \neq 0$ por lo tanto, es la misma curva, pero definida en diferentes- dominios.

Las gráficas correspondientes se presentan en la figura 3.7.

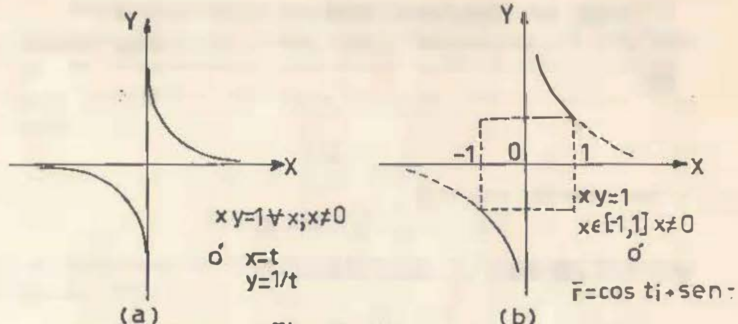


Figura 3.7

EJEMPLO

Un proyectil describe la trayectoria dada por las ecuaciones paramétricas:

$$x = \theta - \operatorname{sen}\theta$$

$$y = 1 - \cos\theta$$

el lector puede comprobar que la ecuación cartesiana co- rrespondiente es

$$x = \text{ang cos}\,(1-y) - \sqrt{2y - y^2}$$

Obsérvese que éste es uno de los casos en que las ecua- ciones paramétricas son mas sencillas, por lo que su re- presentación gráfica se obtiene a partir de éstas.

En los ejemplos anteriores hemos visto la transfor- mación de ecuaciones vectoriales o paramétricas a carte- sianas. Estudiemos ahora el problema inverso, esto es,- la determinación de la ecuación vectorial o de ecua- ciones paramétricas de alguna curva plana a partir de su ecuación cartesiana.

Podemos plantear el problema en estos términos:

"Dada una curva cuya ecuación cartesiana es: $f(x,y) = 0$, encontremos algún par de ecuaciones paramétricas.

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

o una ecuación vectorial

$$\bar{r} = x(t)i + y(t)j$$

que representen a la misma curva".

Resolvamos el problema planteado basados en el siguiente:

EJEMPLO 3.4

Encontrar un par de ecuaciones paramétricas y la ecuación vectorial correspondiente de la curva cuya ecuación cartesiana es:

1) $x^2 + y^2 = 25 \qquad \forall x,y \geq 0$

SOLUCION:

Demos a x el valor de t:

2) $x = t$

despejando y de 1) y sustituyendo en 2):

3). $y = \sqrt{25 - t^2}$

de aqui:

$$\bar{r} = ti + \sqrt{25-t^2}\,j$$

Si ahora damos a y el valor de t:

4). $y = t$

despejando x de 1) y sust. en 4):

5). $x = \sqrt{25 - t^2}$

de aqui:

$$\bar{r} = \sqrt{25-t^2}\,i + tj$$

si ahora damos a x el valor:

6). $x = 5\cos t$

despejando "y" de 1) y sustituyendo 6).

$$y^2 = 25 - 25\cos^2 t$$
$$y^2 = 25(1 - \cos^2 t)$$
$$y^2 = 25\,\mathrm{sen}^2 t$$

7). $y = 5\,\mathrm{sen}\,t$

De aqui:

$$\bar{r} = (5\cos t)i + (5\,\mathrm{sen}\,t)j$$

Mas aún, si $x = t^3$ se tendrá $y = \sqrt{25-t^3}$, de donde:

$$\bar{r} = t^3 i + \sqrt{25 - t^3}\,j$$

De este ejemplo, puede concluirse que para una ecuación cartesiana dada que representa a una curva, se pueden obtener una infinidad de ecuaciones vectoriales, así como las parejas de ecuaciones paramétricas correspondientes.

En las tres soluciones particulares anotadas, podemos verificar nuestras respuestas a partir de las ecuaciones paramétricas, mediante la eliminación del parámetro t con lo que debe obtenerse la ecuación cartesiana de partida. Esta comprobación se deja a cargo al lector. (Para el tercer caso se sugiere utilizar la identidad trigonométrica $\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$).

3.2 OBTENCION DE LA GRAFICA DE LA ECUACION CARTESIANA A PARTIR DE LAS GRAFICAS DE LAS ECUACIONES PARAMETRICAS.

Otro tipo de problemas que se presentan, son aquellos en los que disponiendo solamente de dos gráficas cuyas ecuaciones no se conocen, se desea determinar una nueva gráfica que nos represente la relación entre dos varia bles que aparecen en cada una de las gráficas originales, relacionadas por una variable común (parámetro), como se muestra en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.5

En una fábrica de motores se está estudiando un nuevo tipo de máquina y se han llevado a cabo mediciones sobre sus características, con lo que se han podido elaborar las gráficas mostradas en la figura 3.8.

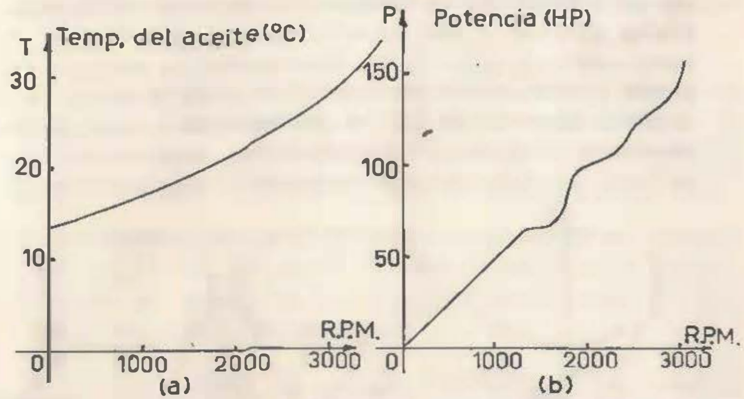


Figura 3.8

Se desea conocer la relación que hay entre las variables "potencia" y "temperatura del aceite".

SOLUCION:

Si no dispusiéramos de las gráficas R.P.M. vs Temperatura y R.P.M. vs Potencia, el único camino para resolver el problema sería efectuar una serie de mediciones de las variables Temperatura y Potencia, al estar funcionando el motor, y graficar los valores obtenidos; pero pueden existir dificultades para llevar a cabo estas pruebas (costo, tiempo, etc).

Observamos que en ambas gráficas aparecen las R.P.M. Podríamos tratar de llegar a la relación buscada (Potencia vs Temperatura), utilizando como variable intermedia a las R.P.M.. En otras palabras, conocemos las relaciones:

$$T = f_1 \text{ (R.P.M.)}$$
$$P = f_2 \text{ (R.P.M.)}$$

y en este caso el problema consiste en encontrar una relación del tipo:

$$T = F \text{ (P)}$$

entre las variables T y P, a través del parámetro R.P.M.; en donde P es la variable independiente y T la dependiente.

De las gráficas se pueden obtener valores de temperatura y Potencia para las correspondientes de R.P.M., como se indica en la tabla siguiente:

R.P.M.	T	P	Q (P,T)
500	T_1	P_1	$Q_1(P_1,T_1)$
1000	T_2	P_2	$Q_2(P_2,T_2)$
1500	T_3	P_3	$Q_3(P_3,T_3)$
2000	T_4	P_4	$Q_4(P_4,T_4)$
2500	T_5	P_5	$Q_5(P_5,T_5)$
o	o	o	
o	o	o	

TABLA 3.2

Graficando las dos últimas columnas de la tabla anterior se resuelve el problema. (figura 3.9)

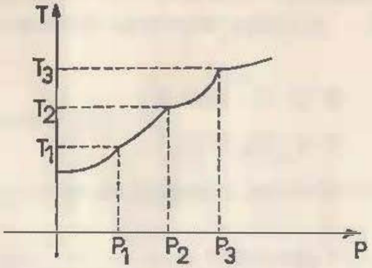


Figura 3.9

Lo que se hizo, fué eliminar el parámetro R.P.M. para llegar a la relación entre las variables P y T. En forma semejante se podría tratar otros problemas que reúnen características análogas a las de éste ejemplo.

3.3 ECUACIONES VECTORIAL Y PARAMETRICAS DE LAS CONICAS Y ALGUNAS CURVAS CICLOIDALES.

Para el caso del proyectil, planteado al principio de éste capítulo, se obtuvieron las ecuaciones paramétricas, cartesiana y vectorial de su trayectoria, donde se nota que ésta es una parábola; sin embargo existen otras características de esta curva que aún no se han estudiado Además debe hacerse notar que existen otras curvas que también requieren de un tratamiento como el hecho hasta ahora para la parábola.

A continuación estudiaremos las ecuaciones vectorial y paramétricas de las cónicas y algunas curvas cicloidales, por lo que se dan las siguientes definiciones:

CONO CIRCULAR RECTO. Una recta móvil G, que corta a una recta fija A en un punto P, formando con ella un ángulo constante θ, siendo $0<\theta<\pi/2$, genera una superficie en el espacio E_3, llamada: Cono circular recto, figura 3.10(a). La recta G es la generatriz del cono, A es el eje y P el vértice.

CONICAS:

Se tienen dos porciones del cono unidas en el vértice. Ambas porciones se llaman hojas del cono. Las curvas que se obtienen por la intersección del cono con un plano que no pase por el vértice se llaman <u>secciones cónicas</u> ó simplemente <u>cónicas</u>. Si el plano secante es paralelo a alguna posición de la generatriz del cono, la cónica es parábola (figura 3.10 b). En cualquier otro caso, la intersección se llama elipse ó hipérbola, según que el plano corte una hoja del cono o las dos (figura 3.10 b y c).

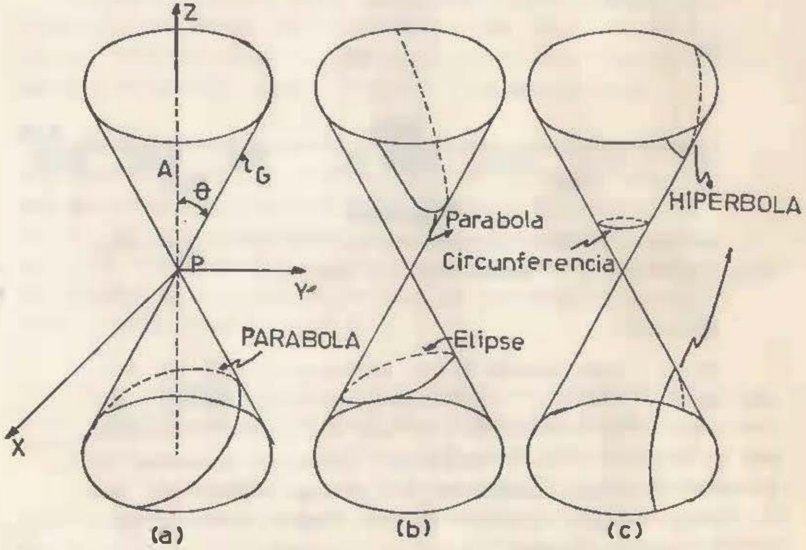


Figura 3.10

La hipérbola consta de dos ramas, una en cada hoja -del cono. Cuando el plano es perpendicular al eje del cono se tiene el caso particular de una circunferencia.

Otra forma de definir geométricamente a las cónicas es como sigue:

LA CIRCUNFERENCIA. Es el lugar geométrico de los -puntos de un plano que equidistan de un punto fijo llamado foco o centro, a la distancia se le llama radio de la circunferencia.

LA ELIPSE. Es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias d_1 y d_2 a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es constante. Si los focos coinciden, la elipse se reduce a una circunferencia.

LA HIPERBOLA. Es el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales el valor absoluto de la diferencia de las distancias d_1 y d_2 a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es constante.

LA PARABOLA. Es el lugar geométrico de los puntos -del plano que equidistan de un punto fijo F (foco) y de -una recta L (directriz).

La figura 3.11 ilustra las definiciones de las cónicas.

Otra característica de las cónicas es la Excentricidad, la cual se define como el cociente entre la distancia entre un punto de la cónica a su foco y la del mismo punto a una recta fija (directriz). Para una cónica dada este cociente es una constante para cualquier punto de la curva.

Esta será elipse, parábola o hipérbola, según la excentricidad esté comprendida entre cero y uno, igual a uno o sea mayor que la unidad, respectivamente.

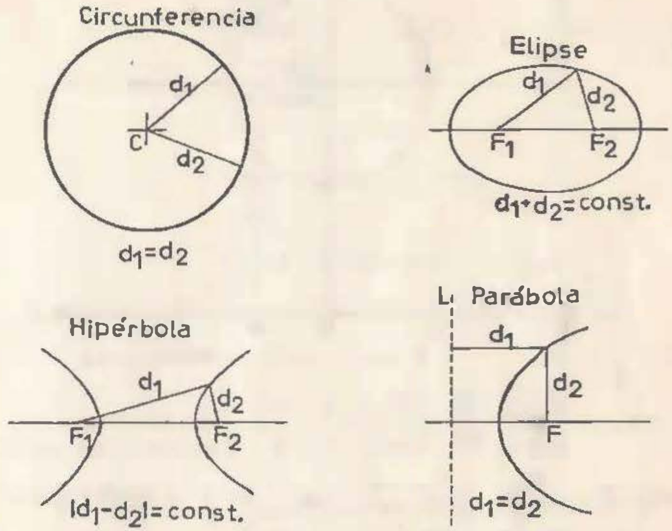


Figura 3.11

3.3.1 ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA CIRCUNFERENCIA.

Dada una circunferencia con centro en el punto -c (h,k) y radio a (figura 3.11), podemos determinar sus ecuaciones paramétricas de la siguiente manera:

Tracémos la recta L que pasa por el centro de la circunferencia y forma un ángulo θ con el eje x, la cual -corta a la circunferencia en el punto P=(x,y) y forma el triángulo rectángulo CPA como se muestra en la fig. 3.12 en donde observamos que:

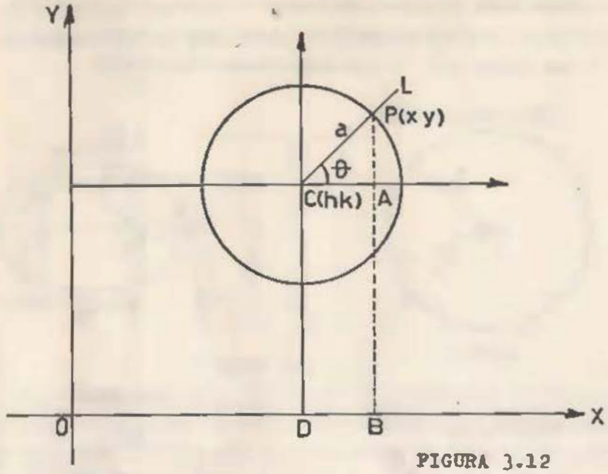


FIGURA 3.12

$$|\overline{CA}| = |\overline{OB}| - |\overline{OD}| = x - h$$

$$|\overline{AP}| = |\overline{BP}| - |\overline{BA}| = y - k$$

$$\cos\theta = \frac{|\overline{CA}|}{a} = \frac{x-h}{a} \Rightarrow x = a\cos\theta + h \quad .(1)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\overline{AP}|}{a} = \frac{y-k}{a} \Rightarrow y = a\operatorname{sen}\theta + k \quad .(2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) indican que x e y son funciones de la variable intermedia θ y por tanto determinan un par de ecuaciones paramétricas para una circunferencia de radio a y centro c(h,k).

Calculemos la ecuación cartesiana de la circunferencia sustituyendo (1) y (2) en la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, resultando:

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{a}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 \qquad ...(3)$$

Se deja como ejercicio al lector, determinar las e-- cuaciones paramétricas de la circunferencia con centro en c(0,0), así como la transformación correspondiente a ecuación cartesiana.

Cualquier punto P(x,y) de la circunferencia puede expresarse en función de las ecuaciones paramétricas de la-misma como:

$$P\,(a\cos\theta + h,\ a\operatorname{sen}\theta + k)$$

cuyo vector de posición es:

$$\bar{p} = (a\cos\theta + h,\ a\operatorname{sen}\theta + k)$$

el cual, expresado en forma trinómica nos dá la ecuación-vectorial de la circunferencia, esto es:

$$\bar{r} = (a\cos\theta + h)\,i + (a\operatorname{sen}\theta + k)\,j$$

EJEMPLO

Un carrete cilíndrico de radio $r = \sqrt{2}$ se corta por un plano perpendicular a su eje, definiendo una circunferencia cuyo centro se localiza en c(1,1). Determinar su-ecuación vectorial.

SOLUCION:

Si c(1,1), entonces h=1, k=1 y $a=\sqrt{2}$, de donde las ecuaciones paramétricas són:

$$x = \sqrt{2}\cos\theta + 1$$

$$y = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta + 1$$

Por lo cual la ecuación vectorial es:

$$\bar{r} = (\sqrt{2}\cos\theta + 1)\,i + (\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta + 1)\,j$$

3. 3.2. ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA ELIPSE.

Hipótesis: Un punto $P(x,y)$ de la elipse con centro en $O'(h,k)$ queda definido de la siguiente manera:

Considérese dos circunferencias concéntricas de radios a y b centro en $O'(h,k)$, siendo $a>b$. Trácese una recta -- cualquiera L que pase por $O'(h,k)$ formando un ángulo θ con- una recta $y=k$ paralela al eje de las x, que pase por O'.

La recta L corta a las dos circunferencias en los puntos A y B. Bájese desde A una perpendicular al eje X, definiendo los puntos C y C', trácese por B una paralela al eje X, que corta a la recta de A a C en el punto - $P(x,y)$ buscado.

Demostración: A continuación se demostrará que el punto P es un punto de la elipse con centro en (h,k), semieje horizontal a y semieje vertical b

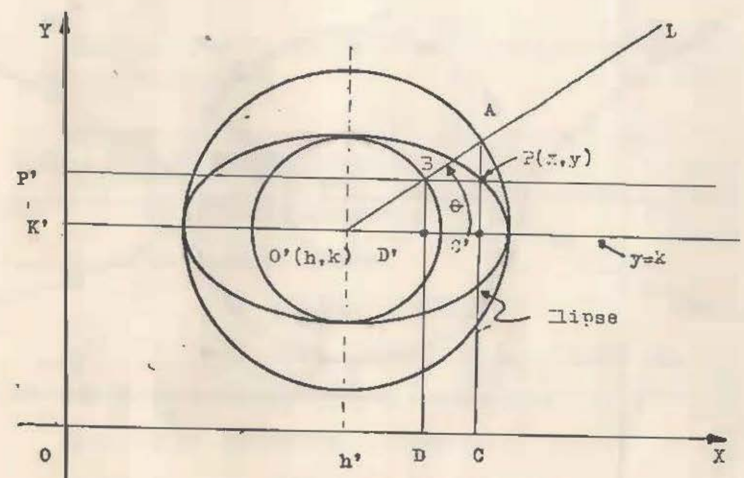


FIGURA 3.13

De la figura se deduce que:

$$x = |\overline{OC}| = |\overline{Oh'}| + |\overline{h'C}| \qquad (1)$$

$$|\overline{Oh'}| = h \qquad (2)$$

$$|\overline{h'C}| = |\overline{O'A}| \cos\theta = a\cos\theta \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$x = h + a\cos\theta \qquad \ldots .I$$

$$y = |\overline{OP'}| = |\overline{OK'}| + |\overline{K'P'}| \qquad (4)$$

$$|\overline{OK'}| = k \qquad (5)$$

$$|\overline{K'P'}| = |\overline{O'B}| \,\mathrm{sen}\,\theta = b\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (4):

$$y = k + b\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \ldots .II$$

Las ecuaciones I y II son un par de ecuaciones paramé-- tricas de la elipse.

Por otra parte, todo punto de la elipse $P(x,y)$ se puede expresar en función de sus ecuaciones paramétricas como:

$$P\,(a\cos\theta+h, b\,\mathrm{sen}\,\theta+k)$$

cuyo vector de posición es:

$$\bar{p} = (a\cos\theta+h, b\,\mathrm{sen}\,\theta+k)$$

el cual al ser expresado en su forma trinómica dá la ecua- - ción vectorial de la elipse:

$$\bar{r} = (a\cos\theta+h)i + (b\,\mathrm{sen}\,\theta+k)j$$

Eliminando el parámetro de las ecuaciones I y II se llega a la ecuación :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Que es precisamente la ecuación cartesiana de la elipse con centro en $O'(h,k)$, semi-eje mayor horizontal "a" y semi eje menor vertical "b".

EJEMPLO

Obtener las ecuaciones paramétricas y vectorial de la elipse cuyo centro está en (1,1), radio mayor es $\sqrt{2}$ y radio menor es 1. Su eje focal es paralelo al eje x.

SOLUCION:

Si $c(1,1)$ entonces: $h = 1$, $k = 1$

Semi-eje mayor $= \sqrt{2}$

Semi-eje menor $= 1$

Sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = \sqrt{2}\cos\theta + 1$$

$$y = \operatorname{sen}\theta + 1$$

Y su ecuación vectorial:

$$\bar{p} = xi + yj$$

$$\bar{p} = (\sqrt{2}\cos\theta+1)i + (\operatorname{sen}\theta+1)j$$

3. 3.3. ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA HIPERBOLA.

Consideremos dos circunferencias concéntricas, con centro $O'(h,k)$ de radios a y b, siendo $a > b$, tracémos una recta cualquiera M que pase por el punto O' y que forme un ángulo θ con una recta $y=k$ paralela al eje X. Sea C el punto de intersección de dicha recta con la circunferencia de radio mayor y pasemos por C la tangente al circulo que corte a la recta $y=k$ en el punto D. Por el punto B tracemos una paralela al eje Y, que corta a la recta M en el punto E. Pasemos por D una paralela al eje Y y por E una paralela al eje X, rectas que se cortan en el punto P, que pertenece a la hipérbola.

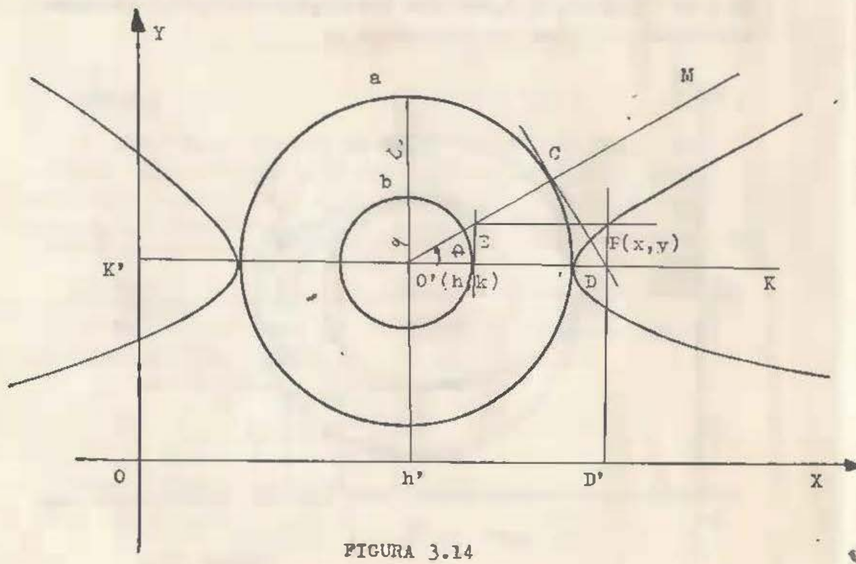


FIGURA 3.14

De la figura podemos observar que:

$$x = |\overline{OD'}| = |\overline{Oh'}| + |\overline{h'D'}| \qquad (1)$$

$$|\overline{Oh'}| = h \qquad (a)$$

Y del triángulo rectángulo O'CD:

$$|\overline{h'D'}| = |\overline{O'D}| = |\overline{O'C}| \sec\theta = a \sec\theta \qquad (b)$$

sustituyendo (a) y (b) en (1):

$$x = h + a \sec\theta \qquad \ldots\ldots \text{I}$$

$$y = |\overline{D'P}| = |\overline{D'D}| + |\overline{DP}| \qquad (2)$$

$$|\overline{D'D}| = k \qquad (c)$$

Y del triángulo rectángulo O'BE:

$$|\overline{DP}| = |\overline{EB}| = |\overline{O'B}| \tan\theta = b \tan\theta \qquad (d)$$

sustituyendo (c) y (d) en (2):

$$y = k + b \tan\theta \qquad \ldots\ldots \text{II}$$

Las ecuaciones I y II son un par de ecuaciones paramétricas de la hipérbola.

Todo punto de la hipérbola P(x,y) se puede expresar en función de sus ecuaciones paramétricas como:

$$P\,(a\sec\theta+h,\ b\tan\theta+k)$$

cuyo vector de posición es:

$$\bar{p} = (a\sec\theta+h,\ b\tan\theta+k)$$

el cual al ser expresado en su forma trinómica dá la ecuación vectorial de la hipérbola:

$$\bar{r} = (a\sec\theta+h)i + (b\tan\theta+k)j$$

Eliminando el parámetro de las ecuaciones I y II, llegamos a la ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Que es la ecuación cartesiana de la hipérbola con centro en O'(h,k), semi-eje mayor horizontal "a" y semi-eje menor vertical "b".

Se deja como ejercicio para el alumno determinar las ecuaciones paramétricas, vectorial y cartesiana para la hipérbola con centro en C(0,0).

EJEMPLO

Obtener la ecuación cartesiana de la hipérbola cuyo centro está en (2,-3) con semi-eje mayor horizontal = 4 y semi-eje menor vertical = 2.

SOLUCION:

c (2,-3) $\qquad h = 2 \ ; \qquad k = -3$

$\qquad a = 4 \ ; \qquad b = 2$

sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = 2 + 4\sec\theta$$
$$y = -3 + 2\tan\theta$$

Mediante la identidad trigonométrica

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

podemos eliminar fácilmente el parámetro θ, para obtener la ecuación rectangular:

$$\text{Si:} \quad \sec\theta = \frac{x-2}{4} \ ; \qquad \tan\theta = \frac{y+3}{2}$$

finalmente:

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

3.3.4 ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA PARABOLA.

Consideremos una parábola con vértice en V(h,k), eje focal paralelo al eje de las abscisas, como se muestra en la figura 3. cuya ecuación es de la forma:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Pasemos una recta L que corte a la parábola en el punto P(x,y) y que forme un ángulo θ con el eje focal; podemos observar que:

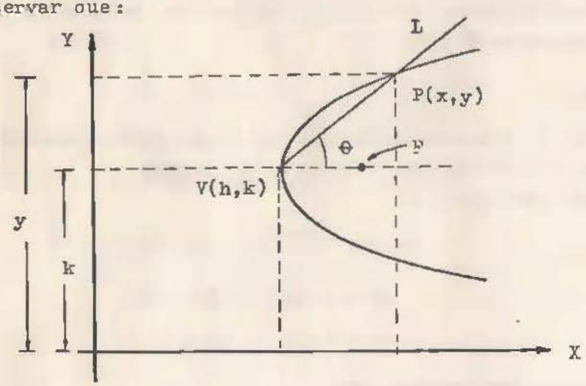


FIGURA 3.15

$$\tan\theta = \frac{y-k}{x-h} \qquad \text{despejemos a "x"}$$

$$x = \frac{y-k}{\tan\theta} + h \; ; \quad x = \cot\theta\,(y-k) + h \qquad \ldots(1)$$

Sustituyendo la ecuación (1) en la de la parábola

$$(y-k)^2 = 4p\left[(y-k)\cot\theta + h - h\right]$$

Simplificando y despejando a "y"

$$y = 4p\cot\theta + k \qquad \ldots \mathrm{I}$$

Si volvemos a sustituir la ecuación I en la ecuación de la parábola:

$$(4p\cot\theta + k - k)^2 = 4p\,(x-h)$$

Simplificando y despejando a "x"

$$x = 4p\cot^2\theta + h \qquad \ldots \mathrm{II}$$

Las ecuaciones I y II nos representan un par de ecuaciones paramétricas de la parábola.

Todo punto de la parábola P(x,y) se puede expresar en función de sus ecuaciones paramétricas como:

$$P\,(4p\cot^2\theta + h,\; 4p\cot\theta + k)$$

el cual al ser expresado en su forma trinómica dá la ecuación vectorial de la parábola:

$$\bar{r} = (4p\cot^2\theta + h)i + (4p\cot\theta + k)j$$

Si eliminamos el parámetro de las ecuaciones I y II, llegamos a la ecuación de la parábola, lo cual comprueba nuestro desarrollo.

Se deja como ejercicio para el alumno determinar las ecuaciones paramétricas, vectorial y cartesiana de una parábola con vértice en el origen y eje focal sobre el eje de las abscisas.

3.3.5 CURVAS CICLOIDALES

En un mecanismo de máquina herramienta se necesita que un engrane que rueda sobre una cremallera lleve unido un vástago y que además sea colocado entre dos placas como se muestra en la figura 3.16

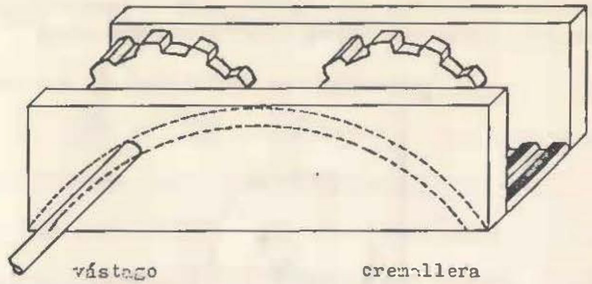


FIGURA 3.16

Como el vástago va a traversar la placa lateral, es necesario hacerle a ésta un corte sobre la linea punteada, además se requiere que el ancho de ese corte sea solo justo para que quepa el vástago. Como se van a construir muchas piezas, entonces se requiere rapidez y presición para hacer los cortes.

El fabricante dispone de una cortadora especial que consiste en un soplete controlado electrónicamente, el cual puede efectuar el corte en la forma indicada si recibe la trayectoria en forma de ecuación paramétrica.

Ahora bien, si disponemos de esta máquina, todo el problema consiste en determinar las ecuaciones paramétricas de la trayectoria.

Por conveniencia, determinaremos las ecuaciones de la trayectoria considerando a ésta como una linea (el ancho lo dará el grueso de la flama del soplete). Consideraremos que el vástago va colocado justo en el borde del engrane, tomando como origen el inicio de la trayectoria y un radio "a" del engrane como indica la figura 3.17.

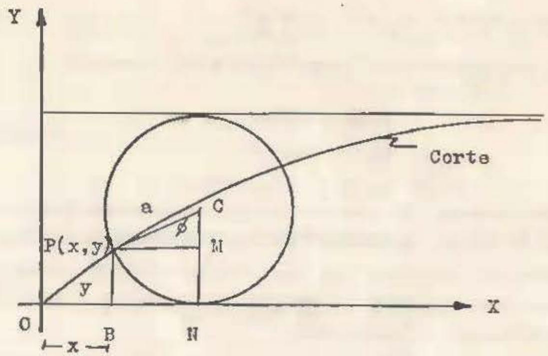


FIGURA 3.17

Se observa que:

$$x = |\overline{OB}| = |\overline{ON}| - |\overline{BN}| \quad \ldots . (1)$$

Pero

$$|\overline{ON}| = |\overset{\frown}{PN}| = a\phi \quad \text{(longitud del arco } \overset{\frown}{PN}) \quad \ldots (2)$$

y además del triángulo PCM

$$|\overline{BN}| = |\overline{PM}| = a \operatorname{sen}\phi \quad \ldots . (3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos que:

$$x = a\phi - a \operatorname{sen}\phi = a(\phi - \operatorname{sen}\phi) \quad \ldots . (4)$$

por otra parte

$$y = |\overline{PB}| = |\overline{MN}| = |\overline{CN}| - |\overline{CM}| \quad \ldots . (5)$$

Pero

$$|\overline{CN}| = a \quad \text{es el radio de la circunferencia} \quad \ldots (6)$$

$$y \quad |\overline{CM}| = a \cos\phi \quad \text{(Ver triángulo PCM)} \quad \ldots . (7)$$

Sustituyendo (6) y (7) en (5)

$$y = a - a\cos\phi = a(1-\cos\phi) \qquad \ldots . (8)$$

finalmente las ecuaciones paramétricas nos quedan:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\phi - \operatorname{sen}\phi) \\ y &= a(1-\cos\phi) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots . (9)$$

Las ecuaciones (9) son un par de ecuaciones paramétricas (donde ϕ es el parámetro) de la trayectoria que recibe el nombre de cicloide, con las cuales quedaría resuelto el problema para proceder a recortar las placas y además podemos establecer la siguiente:

> DEFINICION 3.3
>
> La cicloide es el lugar geométrico descrito por un punto fijo de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre una recta fija.

Por otra parte, cuando el mecanismo a construir requiere que en lugar de cremallera se tuviese otro engrane circular fijo, entonces el lugar geométrico descrito por un punto fijo del engrane móvil describiría una curva que se llama epicicloide y que se establece en la siguiente:

> DEFINICION 3.4
>
> Epicicloide es el lugar geométrico descrito por un punto fijo de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre el exterior de una circunferencia fija.

Si tomamos a la circunferencia fija con radio "a" y con centro en el origen y la circunferencia móvil con radio "b" y tomando como parámetro a ϕ (que es el ángulo formado por la recta OC que une los centros de las dos circunferencias con la parte positiva del eje X), y siendo θ el ángulo entre las rectas OC y CP, se tiene que:

La ecuación de la Epicicloide se puede desarrollar a partir de la siguiente figura donde se observa que:

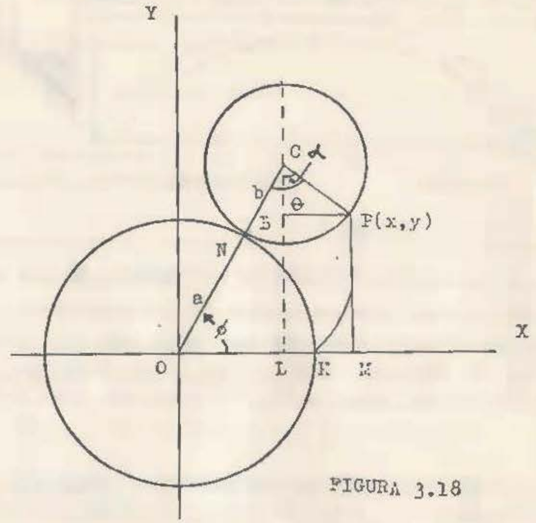


FIGURA 3.18

$$\text{Arco } KN = \text{Arco } NP \quad ó \quad \overset{\frown}{KN} = \overset{\frown}{NP} \qquad \ldots (1)$$

donde la longitud de los arcos viene dada por el producto del radio por el ángulo en radianes, esto es:

$$\overset{\frown}{KN} = a\phi \qquad \ldots (2)$$

$$\overset{\frown}{NP} = b\theta \qquad \ldots (3)$$

Por lo tanto:

$$a\phi = b\theta$$

$$\text{y} \qquad \theta = (a/b)\,\phi \qquad \ldots . (4)$$

o sea que θ es función de ϕ, además obsérvese que:

$$x = |\overline{OM}| = |\overline{OL}| + |\overline{LM}| \qquad \ldots (5)$$

Pero del triángulo CBP, se tiene que:

$$|\overline{LM}| = |\overline{BP}| = |\overline{CP}| \operatorname{sen} \alpha \qquad \ldots . (6)$$

Por lo tanto $x = |\overline{OL}| + |\overline{CP}| \operatorname{sen} \alpha$

$$\alpha = \theta - (\pi/2 - \phi) = \theta + \phi - \pi/2 \qquad \ldots (7)$$

Sustituyendo (4) en (7) y calculando el senα, se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\tfrac{a}{b}\phi + \phi - \tfrac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(\tfrac{a+b}{b}\phi - \tfrac{\pi}{2})$$

y por identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}\alpha = -\cos(\tfrac{a+b}{b}\phi) \qquad \ldots . (8)$$

sustituyendo (8) en (6) y (6) en (5), se obtiene finalmente - que:

$$x = |\overline{OL}| - |\overline{CP}|\cos(\tfrac{a+b}{b}\phi)$$

además

$$|\overline{OL}| = (a+b)\cos\phi$$

$$|\overline{CP}| = b$$

por lo tanto

$$x = (a+b)\cos\phi - b\cos(\tfrac{a+b}{b}\phi)$$

por otro lado

$$y = |\overline{MP}| = |\overline{LB}| = |\overline{LC}| - |\overline{CB}|$$

pero del triángulo OLC

$$|\overline{LC}| = (a+b)\operatorname{sen}\phi$$

$$|\overline{CB}| = |\overline{CP}|\cos\alpha = b\cos(\theta + \phi - \tfrac{\pi}{2})$$

de (7) y utilizando la identidad $\cos(A - \pi/2) = \operatorname{sen}(A)$

$$|\overline{CB}| = b\operatorname{sen}(\theta + \phi) = b\operatorname{sen}(\tfrac{a}{b}\phi + \phi)$$

$$= b\operatorname{sen}(\tfrac{a+b}{b})\phi$$

finalmente

$$y = (a+b)\operatorname{sen}\phi - b\operatorname{sen}(\tfrac{a+b}{b}\phi)$$

Así, las ecuaciones paramétricas de la epicicloide resultan ser:

$$x = (a+b)\cos\phi - b\cos(\tfrac{a+b}{b}\phi)$$

$$y = (a+b)\operatorname{sen}\phi - b\operatorname{sen}(\tfrac{a+b}{b}\phi)$$

De una manera análoga a lo que se ha visto se puede definir la hipocicloide como:

> DEFINICION 3.5
>
> Hipocicloide es el lugar geométrico descrito por un punto fijo de una circunferencia que rueda sin resbalar dentro de otra circunferencia fija.

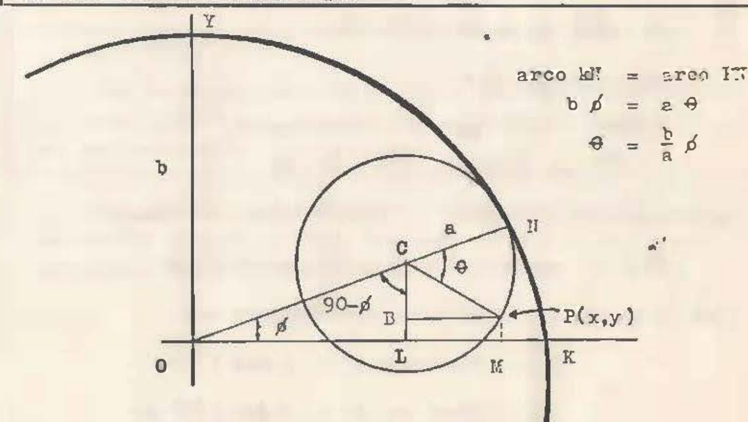


FIGURA 3.19

Si tomamos a la circunferencia fija con radio "b" y concentro en el origen y la circunferencia móvil de radio "a", utilizando como parámetro a ϕ que es el ángulo formado por la recta OC que une los centros de las dos circunferencias con la parte positiva del eje X y siendo θ el ángulo que se va generando entre las rectas OC y CP, según se muestra en la figura 3.19 donde puede observarse que:

$$x = |\overline{OM}| = |\overline{OL}| + |\overline{LM}|$$

$$y = |\overline{PM}| = |\overline{CL}| - |\overline{CB}|$$

donde se tiene, de los triángulos OLC y CBP que:

$$|\overline{OL}| = |\overline{OC}| \cos \phi = (|\overline{ON}| - |\overline{NC}|) \cos \phi = (b-a) \cos \phi$$

$$|\overline{LM}| = |\overline{BP}| = |\overline{CP}| \operatorname{sen} [\pi - (\theta + \pi/2 - \phi)]$$

$$= |\overline{CP}| \operatorname{sen} (\pi/2 - \theta + \phi)$$

utilizando la identidad $\operatorname{sen}(\pi/2 + A) = \cos A$

$$= a \cos (-\theta + \phi)$$

$$= a \cos (-\frac{b}{a}\phi + \phi)$$

$$\therefore \quad |\overline{LM}| = a \cos (\frac{a-b}{a}\phi)$$

Del triángulo OLC:

$$|\overline{CL}| = |\overline{OC}| \operatorname{sen} \phi = (b-a) \operatorname{sen} \phi$$

$$|\overline{CB}| = |\overline{CP}| \cos (\pi/2 - \theta + \phi)$$

utilizando la identidad $\cos (\pi/2 + A) = -\operatorname{sen} A$

$$|\overline{CB}| = -a \operatorname{sen} (-\theta + \phi) = -a \operatorname{sen} (\frac{a-b}{a}\phi)$$

por lo tanto, las ecuaciones paramétricas son:

$$x = (b-a) \cos \phi + a \cos (\frac{a-b}{a}\phi)$$

$$y = (b-a) \operatorname{sen} \phi + a \operatorname{sen} (\frac{a-b}{a}\phi)$$

Como dato curioso, obsérvese que si:

$b = 2a$ Las ecuaciones de la hipocicloide se transforman en:

$$x = (2a-a) \cos \phi + a \cos (\frac{a-2a}{a}\phi)$$

$$= a \cos \phi + a \cos(-\phi) = a \cos \phi + a \cos \phi$$

$$= 2a \cos \phi$$

$$y = (2a-a) \operatorname{sen} \phi + a \operatorname{sen} (\frac{a-2a}{a}\phi)$$

$$= a \operatorname{sen} \phi + a \operatorname{sen} (-\phi) = a \operatorname{sen} \phi - a \operatorname{sen}(+\phi)$$

$$= 0$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas que se obtienen son:

$$x = 2a \cos \phi$$

$$y = 0$$

donde se concluye que "x" puede tomar cualquier valor y $y=0$, ésta es la ecuación de una recta que coincide con el eje X, la cual se puede representar por la ecuación

$$y = 0$$

EJEMPLO

Cuales son las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide donde la circunferencia fija tiene como radio $b=4a$ y el radio de la circunferencia móvil es $a=4$.

SOLUCION:

Con esta condición, las ecuaciones paramétricas se reducen a:

$$x = (4a-a)\cos\phi + a\cos\left(\frac{a-4a}{a}\phi\right)$$
$$= 3a\cos\phi + a\cos(-3\phi)$$
$$= 3a\cos\phi + a\cos 3\phi$$

$$y = 3a\,\text{sen}\,\phi + a\,\text{sen}(-3\phi)$$
$$= 3a\,\text{sen}\,\phi - a\,\text{sen}\,3\phi$$

O sea si $4a = 16$ ó $a = 4$

$$x = 12\cos\phi + 4\cos 3\phi$$
$$y = 12\,\text{sen}\phi - 4\,\text{sen}3\phi$$

Que son las ecuaciones paramétricas de una hipocicloide de 4 picos, también llamada Astroide.

En general se puede establecer que la hipocicloide puede tener o no un número entero de ramas, según que la relación entre los radios sea o no un número entero; en el caso de que estas curvas tengan un número entero de ramas reciben el nombre de Astroides.

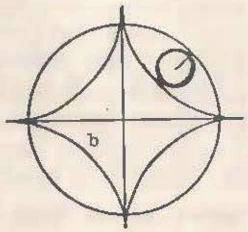


FIGURA 3.20

Como ejemplo, obsérvese que el perímetro de la circunferencia de radio b es recorrido por cuatro vueltas de la circunferencia de radio a, como se ve en la figura 3.20, por lo tanto:

$$2\pi b = 4(2\pi a) \quad ó \quad \frac{b}{a} = 4$$

(Obsérvese que el cociente es un número entero)

En terminos generales si a b/a le llamamos n, tendremos para radios a y b cualquiera, que se debe verificar:

$$2\pi b = n(2\pi a), \quad \text{esto es} \quad b/a = n$$

Lo mismo ocurriría para la epicicloide, o sea, que la curva generada al recorrer una sola vez la circunferencia fija puede quedar cerrada si y sólo si n es entero, en caso contrario quedaría abierta y no habría un número entero de ramas.

En términos generales cuando en lugar de la circunferencia fija se tiene una curva C cualquiera, puede establecerse lo que es curva cicloidal en la siguiente:

DEFINICION 3.6

Una curva cicloidal es el lugar geométrico descrito por un punto fijo de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre una curva fija C cualquiera.

Sin embargo, sus ecuaciones pueden resultar muy complicadas cuando la curva fija C, sea cualquiera, lo que origina que queden fuera de los intereses del curso.

3.4 ECUACIONES DE CURVAS EN COORDENADAS POLARES.

3.4.1 INTRODUCCION. El objetivo de este tema es estudiar las curvas planas en el sistema de coordenadas polares, como una generalización del estudio de la locolización de puntos, que se llevó a cabo en el Tema 1.

Supóngase que desde un observatorio se está siguiendo la trayectoria de un cuerpo. El registro que se lleva, consiste de un ángulo de elevación y una distancia, como se muestra en la figura 3.21

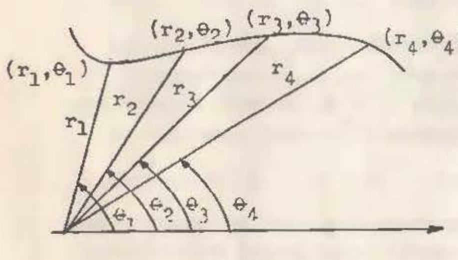


FIGURA 3.21

Registro de Observaciones	
ángulo de elevación	distancia
θ_1	r_1
θ_2	r_2
θ_3	r_3
θ_4	r_4

Se puede apreciar que existe cierta relación entre el ángulo y la longitud, es decir: para un ángulo de elevación dado se tiene una distancia. Puede decirse entonces que hay una relación binaria entre θ y r.

3.4.2 ECUACION POLAR DE UNA CURVA.

En el caso en que la relación es de uno a uno, se establece una función entre θ y r, la que se representa como:

$$r = f(\theta) ,$$

expresión que define a r como función de θ.

La representación gráfica de ella es una curva, lo cual lleva a la siguiente:

> DEFINICION 3.7
>
> Se llama forma general de la ecuación polar de una curva, a la función $r = f(\theta)$, continua en un intervalo cerrado $[\theta_1, \theta_2]$.

Existen diversos métodos para determinar la regla de correspondencia entre las variables r y θ, tales métodos son objeto de estudio en cursos como: Métodos Numéricos y Ecuaciones Diferenciales.

Lo que se hará enseguida, será que en los ejemplos se presenten algunos tipos de curvas y se analicen sus características desde el punto de vista geométrico; en los casos en que sea factible encontrar la ecuación, se procederá a su obtención.

Análisis de varios ejemplos.

EJEMPLO

Sea la curva $r = a$ (función constante), donde r no depende de θ. Al tabular esta función se tiene:

TABLA 3.3

θ (grados)	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
θ(radianes)	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
r	a	a	a	a	a	a	a	a	[illegible]

La Tabla 3.3 indica que se trata de una función constante, la representación gráfica se muestra en la figura 3.22, que corresponde a una circunferencia con centro en el origen y radio a.

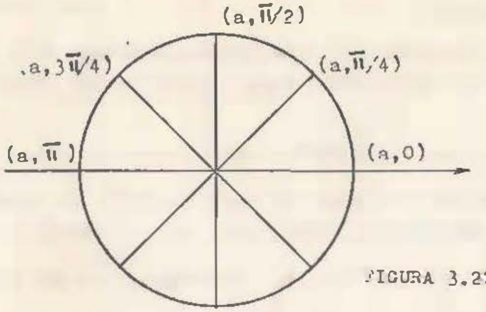


FIGURA 3.22

En efecto, transformando esta curva a coordenadas cartesianas, se obtiene:

$r = a$, sustituyendo r por su equivalente:

$\sqrt{x^2+y^2} = a$ al elevar al cuadrado queda:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

que es la ecuación cartesiana de una circunferencia con centro en el origen.

¿Cómo puede justificarse este paso de coordenadas polares a cartesianas?

Véase que la función dada $r = a$ es el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia al polo vale a; así que puede transformarse a coordenadas cartesianas, usando las ecuaciones de transformación dadas para los puntos del plano, vistas en el Tema 1, o bien, puede obtenerse la ecuación en coordenadas cartesianas directamente, ya que el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al origen vale a es:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a$$

pues se recordará que $\sqrt{x^2+y^2}$ es la distancia de un punto (x,y), al origen: en este caso (x,y) es un punto de la curva, y elevando al cuadrado queda:

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2}$$

que es la ecuación obtenida antes, utilizando las ecuaciones de transformación.

La justificación del paso a coordenadas cartesianas ó polares será visto posteriormente.

La curva $r = a$ tiene simetría respecto al polo, ya que para todo punto (θ,r) de la curva, se cumple que:

$$r(\theta) = a \ , \quad r(\theta+\pi) = a$$

y se tienen los dos puntos $P_1(a,\theta)$, $P_2(a,\theta+\pi)$ que, de acuerdo con lo visto en el Tema 1, son simétricos respecto al polo.

Puede concluirse que una función $r(\theta)$ es simétrica respecto al polo si $r(\theta) = r(\theta+\pi)$ para todo valor de θ. Este concepto será formalizado más adelante.

También existe simetría respecto al eje polar, ya que $r(\theta) = a$ y $r(2\pi-\theta) = a$, es decir, los puntos $P_1(a,\theta)$ y $P_2(a,2\pi-\theta)$ pertenecen a la curva y son simétricos respecto al eje polar para todo valor de θ.

Puede afirmarse que una curva es simétrica respecto al eje polar si $r(\theta) = r(2\pi-\theta)$ para todo valor de θ, lo cual será justificado también más adelante.

Por último se tiene la simetría respecto al eje copolar, dado que:

$$r(\theta) = r(\pi-\theta)$$

o sea, los puntos $P_1(a,\theta)$ y $P_2(a,\pi-\theta)$ pertenecientes a la curva son simétricos respecto al eje copolar, según se vió en el Tema 1.

La fundamentación de la siguiente conclusión se hace - más adelante: Una curva $r(\theta)$ es simétrica respecto al eje copolar si:

$$r(\theta) = r(\pi - \theta), \text{ para todo valor de } \theta.$$

Por otro lado, en la figura se puede observar que la curva es cerrada, y por lo tanto:

Una curva es cerrada si la función tiene un valor finito para todo valor de θ.

El análisis consiste en conocer los puntos en que r tome valores máximos ó mínimos. Para este análisis puede usarse - el Cálculo Diferencial. En este caso se ve que:

$$\lim_{\theta \to \theta_0} r = a \quad \forall \theta_0$$

por ello se concluye que la curva es cerrada, ya que r es finito.

El análisis que acaba de hacerse recibe el nombre de - "discución de una curva", que será formalizado adelante.

EJEMPLO

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(4,60^o)$ - y que es perpendicular al eje polar, como se ve en la figura 3.23.

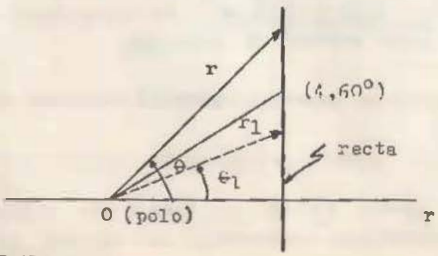


FIGURA 3.23

SOLUCION:

La componente de la distancia entre el polo y cualquier punto de la recta sobre el eje polar es una constante, y vale "a".

$$\therefore \quad r \cos\theta = a$$

A partir del dato del punto $(4,60^o)$, se llega a obtener el valor de "a":

$$4 \cos 60^o = a, \quad \text{entonces} \quad a = 2$$

Con todo ello, se concluye que esta recta es el lugar - geométrico de los puntos cuya componente sobre el eje polar es 2, lo cual equivale a la ecuación:

$$\boxed{r \cos\theta = 2} \quad \text{(ecuación polar de la recta)}$$

Puede verificarse esta ecuación, si se transforma a - coordenadas cartesianas del siguiente modo:

$r \cos\theta = 2$, sustituyendo $r\cos\theta$ por su transformación, queda:

$$x = 2 \quad \text{(ecuación cartesiana de la recta)}$$

En cuanto a su simetría, pueden utilizarse las reglas - dadas en el caso anterior, lo que conduce a lo siguiente:

Simetria respecto al polo: Se debe cumplir que:

$$r(\theta) = r(\theta + \pi)$$

En nuestro caso:

$$r \cos(\theta + \pi) = r(-\cos\theta) = -r \cos\theta$$

Como: $\quad r(\theta) = -r(\theta + \pi)$

no existe simetría respecto al polo.

Recuérdese que:

$$\cos\theta = -\cos(\theta + \pi)$$

y $$\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(\theta + \pi)$$

Para la simetría respecto al eje polar se debe verificar que:

$r(\theta) = r(2\pi - \theta)$ y en esta recta se tiene que:

$r\cos(2\pi - \theta) = r\ (\cos\theta)$

lo cual permite concluir, que sí existe simetría respecto al eje polar (como puede verse en la figura 3.2).

Sabiendo que:

$$\cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$$
$$\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(2\pi - \theta)$$

Para la simetría respecto al eje copolar, debe cumplirse que:

$r(\theta) = r(\pi - \theta)$, y en este caso

$r\cos(\pi - \theta) = r(-\cos\theta) = -r\cos\theta$, es decir:

$r(\theta) = -r\ (\pi - \theta)$

que indica que no hay simetría respecto a dicho eje.

Debe considerarse que:

$$\cos\theta = -\cos(\pi - \theta)$$
$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\pi - \theta)$$

Para conocer su extensión y decidir si es abierta (lo cual en este caso es evidente), podrá hacerse uso del Cálculo Diferencial, en lo referente al estudio de los máximos y mínimos.

Para la recta de este caso, se tiene:

$r\cos\theta = a$, o sea $r = \dfrac{a}{\cos\theta} = a\sec\theta$

la cual tiene la forma $r = r(\theta)$, para obtener sus máximos y sus mínimos, se debe derivar respecto a la variable independiente:

$$r = a\sec\theta$$

$$\frac{dr}{d\theta} = a\sec\theta\tan\theta$$

y por la condición necesaria de punto extremo: $\frac{dr}{d\theta} = 0$, que da:

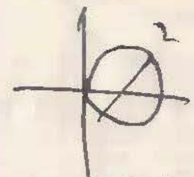
$$a\sec\theta\tan\theta = 0$$

ecuación que se verifica para $\theta = 0^\circ$, valor en que $r = a$ y corresponde al valor de la curva más cercano al polo. Debido a que se obtuvo el mínimo y no hay máximo, se desprende que la curva es abierta. Se deja al lector la verificación.

Por otro lado, puede verse que $\lim\limits_{\theta \to \pi/2} \dfrac{a}{\cos\theta} \to \infty$, por lo que se vuelve a concluir que la curva es abierta.

EJEMPLO

Discutir la curva $r = 2\cos\theta$.



SOLUCION:

Según se vió en un caso anterior, es conveniente dibujar esta curva, para lo cual se hace la siguiente tabulación:

θ	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°
r	2	1.74	1.42	1	0	-1	-1.42	-1.74	-2	-1.74	-1.42

θ	240°	270°	300°	315°	330°	360°
r	-1	0	1	1.42	1.74	2

En esta tabulación se observa que los valores se repiten en un cierto orden. Por otro lado, se tienen valores negativos de r para los ángulos que corresponden a los cuadrantes segundo y tercero. En general, es preferible trabajar con valores positivos de r, aunque pueden tomarse en cuenta sin ningún problema los valores negativos, ya que fué estudiada su transformación a forma positiva.

La gráfica de los puntos obtenidos en la tabulación es:

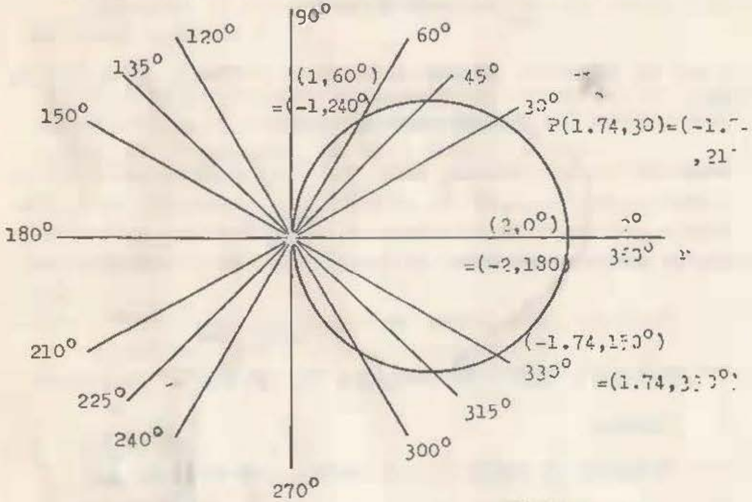


FIGURA 3.26

En la gráfica se han representado algunos puntos, para mostrar cómo la imagen negativa, que se obtiene en los ángulos de los cuadrantes segundo y tercero, corresponde a imágenes positivas de los ángulos en los cuadrantes primero y cuarto.

Bajo esta situación, puede afirmarse que:

En general, las funciones en coordenadas polares $r=r(\theta)$ no son biunívocas, si existen en su regla de correspondencia funciones trigonométricas del ángulo θ, ya que tales funciones son periódicas y habrá, por lo menos, un valor $k\pi$, tal que $r(\theta) = r(\theta+k\pi)$ y $P_1(r_1,\theta)$ coincide con $P_2(r_2,\theta+k\pi)$.

En cuanto a las simetrías, se tiene:

Simetría respecto al polo:

$$r(\theta) = 2\cos\theta$$

$$r(\theta+\pi) = 2\cos(\theta+\pi) = -2\cos\theta$$

es decir, $r(\theta) = -r(\theta+\pi)$, por lo tanto no hay simetría

Simetría respecto al eje polar:

$$r(\theta) = 2\cos\theta$$

$$r(2\pi-\theta) = 2\cos(2\pi-\theta) = 2\cos\theta$$

así, que $r(\theta) = r(2\pi-\theta)$, que indica que sí hay simetría.

Simetría respecto al eje copolar:

$$r(\theta) = 2\cos\theta$$

$$r(\pi-\theta) = 2\cos(\pi-\theta) = -2\cos\theta$$

Por lo anterior: $r(\theta) = -r(\pi-\theta)$, entonces no hay simetría.

Para analizar su extensión, se utilizará el estudio de máximos y mínimos:

La función es $r = 2\cos\theta$, derivando e igualando a cero, se obtienen los puntos críticos:

$$\frac{dr}{d\theta} = -2\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

ecuación válida para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$

Para definir su naturaleza, puede emplearse el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = -2\cos\theta$$

Recuerdese que:

El criterio de la segunda derivada permite analizar la concavidad de una curva, llegándose a:

máximo, si $y'' < 0$

mínimo, si $y'' > 0$

Si $y'' = 0$, el criterio falla.

Para $\theta = 0$, se tiene que $\left.\frac{d^2r}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = -2 < 0$ es un máximo.

Para $\theta = \pi$, se tiene que $\left.\frac{d^2r}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi} = 2 > 0$ es un mínimo.

Dado que el intervalo de valores de r es:

$$r_{mín} = r(\pi) = 0$$

$$r_{máx} = r(0) = 2$$

$$\therefore \quad r \in [0,2]$$

se concluye que la curva es cerrada.

Solo falta encontrar su ecuación cartesiana, inicialmente se tiene:

$r = 2\cos\theta$, cuya transformación es:

$\sqrt{x^2+y^2} = 2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, multiplicando ambos miembros por $\sqrt{x^2+y^2}$, queda:

$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2} = 2x$, es decir: $\boxed{x^2+y^2 = 2x}$

Para simplificar la expresión, se escriben todos los términos en el primer miembro:

$$x^2-2x+y^2 = 0$$

El término en x^2 hace pensar en un binomio, así que completando cuadrados:

$x^2-2x+1+y^2 = 1$, es decir, $\boxed{(x-1)^2+y^2 = 1}$

Se trata de una circunferencia de radio 1 y centro en (1,0). Es importante recalcar que la figura puede servir para verificar los aspectos que se van obteniendo en el análisis, pero de ningún modo la figura es concluyente para un estudio de la naturaleza de la curva.

EJEMPLO

Discutir la curva $r = 5\cos 3\theta$.

SOLUCION:

Tabulando la curva se tiene:

θ	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	[illegible]
r	5	3.54	0	-3.54	-5	-3.54	0	3.54	[illegible]	3.54	0	-3.54	-5

θ	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360
r	-3.54	0	3.54	5	3.54	0	-3.54	-5	-3.54	0	3.54	5

Graficando únicamente los valores positivos de r, puesto que ya se vió en el caso anterior que los negativos corresponden a otros valores angulares cuya imágen es positiva, se tendrá la figura 3.25.

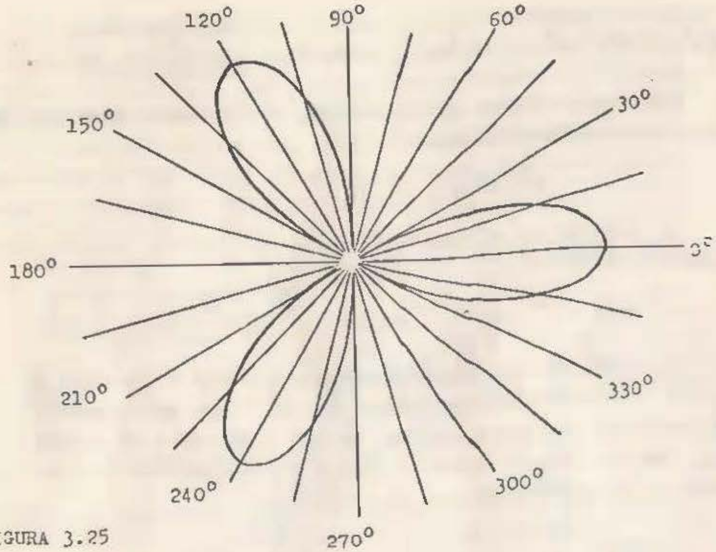


FIGURA 3.25

A esta curva se le conoce como rosa de tres petalos.

A continuación se estudiarán sus características geométricas.

Simetría respecto al polo:

$$r(\theta) = 5\cos 3\theta$$

$$r(\theta+\pi) = 5\cos 3(\theta+\pi) = 5\cos(3\theta+3\pi)$$

pero 3π es equivalente a π, para efectos de las funciones trigonométricas, por lo que

$$r(\theta+\pi) = 5\cos(3\theta+\pi) = -5\cos 3\theta$$

Concluyendo:

$r(\theta) = -r(\theta+\pi)$ no hay simetría respecto al polo.

Simetría respecto al eje polar:

$$r(\theta) = 5\cos 3\theta$$

$$r(-\theta) = 5\cos 3(-\theta) = 5\cos(-3\theta) = 5\cos 3\theta$$

como $r(\theta) = r(-\theta)$, por lo tanto si hay simetría.

Simetría respecto al eje copolar:

$$r(\theta) = 5\cos 3\theta$$

$$r(\pi-\theta) = 5\cos 3(\pi-\theta) = 5\cos(3\pi-3\theta)$$

y por lo dicho en la simetría respecto al polo:

$$r(\pi-\theta) = 5\cos(\pi-3\theta) = -5\cos 3\theta$$

$r(\theta) = -r(\pi-\theta)$, así que no es simétrica respecto al eje copolar.

Ahora se verá su extensión:

$$r = 5\cos 3\theta$$

$\dfrac{dr}{d\theta} = -5\,\text{sen}\,3\theta\,(3) = -15\,\text{sen}\,3\theta = 0$, ecuación válida para $\text{sen}\,3\theta = 0$, entonces $3\theta = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$, etc.

Para $3\theta = 0$ se tiene que $\theta = 0$

en $3\theta = 180^\circ$ se tiene $\theta = 60^\circ$

en $3\theta = 360^\circ$ se tiene $\theta = 120^\circ$

en $3\theta = 540^\circ$ se tiene $\theta = 180^\circ$

puede observarse que corresponden a los valores de θ para los cuales r vale 5 ó -5 en la tabulación. Para conocer su naturaleza, se usará el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{dr}{d\theta} = -15 \operatorname{sen} 3\theta \quad ; \qquad \frac{d^2r}{d\theta^2} = -45 \cos 3\theta$$

en $\theta=0$; $\frac{d^2r}{d\theta^2} = -45 \cos 3(0) = -45 \cos(0) = -45 < 0$

$\therefore$ se trata de un máximo.

en $\theta=60^\circ$; $\frac{d^2r}{d\theta^2} = -45 \cos 3(60) = -45 \cos 180^\circ = 45 > 0$

$\therefore$ se trata de un mínimo.

En forma similar puede concluirse que:

Hay máximo en $\theta=0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ y 360°, igual a 5

Hay mínimo en $\theta=60^\circ, 180^\circ$ y 300°, cuyo valor es -5.

Dado que tanto el máximo como el mínimo son finitos, se concluye que la curva es cerrada.

Su transformación a coordenadas cartesianas requiere el uso de una identidad trigonométrica para eliminar el ángulo triple (3θ). La identidad trigonométrica puede obtenerse de un manual de fórmulas y es:

$$\cos 3\theta = \cos\theta - 4 \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta$$

Entonces la función es: $r = 5(\cos\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta)$, al transformar se tiene:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 5\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 4\frac{y^2}{(x^2+y^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Al eliminar los denominadores se tiene:

$$(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \left[5\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{4y^2}{(x^2+y^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right](x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$(x^2+y^2)^2 = 5\left[x(x^2+y^2) - 4xy^2\right], \quad \text{simplificando:}$$

$$(x^2+y^2)^2 = 5(x^3+xy^2-4xy^2) \quad \text{y finalmente, queda:}$$

$$\boxed{(x^2+y^2)^2 = 5x^3 - 15xy^2}$$

Ecuación cartesiana de la rosa de tres pétalos.

En este caso es notorio que la expresión cartesiana es más complicada que la polar. En muchas ocaciones se tienen casos como éste, con ello se quiere mostrar que las coordenadas polares pueden servir para facilitar un problema, que en coordenadas cartesianas se puede presentar complicado.

3.4.3 DISCUSION DE UNA CURVA EN COORDENADAS POLARES

En todos los casos presentados hasta ahora, se han analizado las características geométricas de una curva en coordenadas polares, a traves de la ecuación de la curva $r = r(\theta)$, a dicho estudio ordenado se le conoce como "Discusión de una curva" y como ya los autores indicaron anteriormente, comprende:

1.- Determinación de las intersecciones de la curva con los ejes polar y copolar.

2.- Estudio de las simetrías de la curva, respecto al eje polar, al eje copolar y al polo.

3.- Estudio de la extensión de la curva.

4.- Cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos, para poder trazar la gráfica de la curva.

5.- Trazado de la curva ó representación gráfica.

6.- Transformación de la ecuación polar de la curva $r=r(\theta)$, a una en coordenadas cartesianas del tipo $y = y(x)$.

Se recomienda al lector el reconocimiento y la revisión de cada uno de estos pasos, en los ejemplos que se han realizado hasta ahora.

A continuación se generalizará el proceso de discusión de una curva.

1.- Determinación de las intersecciones con el eje polar y el eje copolar.

Las intersecciones con el eje polar se obtienen cuando θ toma valores de 0 y π ; y con el eje copolar se tienen cuando θ toma valores de $\pi/2$ y $3\pi/2$, lo que podemos expresar:

Intersecciones con eje polar, para $r(0)$ y $r(\pi)$.

Intersecciones con eje copolar, para $r(\pi/2)$ y $r(3\pi/2)$.

2.- Simetría.

DEFINICION 3.8

Una curva $r = r(\theta)$ es simétrica respecto al polo, si $r(\theta) = r(\theta + \pi)$, para todo valor de θ.

En efecto, dado un valor θ_1, en que $r_1 = r(\theta_1)$ que define al punto, $P_1(r_1,\theta_1)$; el punto $P_s(r_1,\theta_1+\pi)$ es simétrico co respecto al polo según expusieron los autores en el capítulo 1. Si el punto P_s pertenece a la curva, entonces satisface la ecuación de la curva, es decir:

$$r_s = r(\theta+\pi), \quad \text{por tanto} \quad r_s = r_1 ;$$

entonces la curva tiene un punto de simetría denominado P_s respecto a P_1. Si esta igualdad se verifica para todo valor θ_1, entonces la curva es simétrica respecto al polo, o sea:

$$r(\theta) = r(\theta+\pi), \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \theta \text{ en radianes}$$

(Condición de simetría respecto al polo).

DEFINICION 3.9

Una curva $r = r(\theta)$ es simétrica respecto al eje polar, si $r(\theta) = r(2\pi - \theta)$, para todo valor de θ.

Tomando en cuenta al punto $P_1(r_1,\theta_1)$, su simétrico respecto al eje polar es $P_s(r_1, 2\pi-\theta_1)$. Si tanto P_1 como P_s pertenecen a la curva $r = r(\theta)$, entonces la curva tiene un punto de simetría respecto al eje polar. Si esta simetría ocurre para todo valor de θ_1, entonces la curva es simétrica respecto al eje polar, es decir:

$$r(\theta) = r(2\pi-\theta), \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}$$

(Condición de simetría respecto al eje polar).

DEFINICION 3.10

Una curva $r = r(\theta)$ es simétrica respecto al eje copolar si $r(\theta) = r(\pi - \theta)$, para todo valor de θ.

Un razonamiento similar a los anteriores permite explicar esta definición, se invita al lector a realizar dicho razonamiento.

3.- Extensión de la curva.

Este concepto permite determinar si una curva es abierta o cerrada, además de obtener los máximos y mínimos, y la distancia al polo.

La definición de curva abierta o cerrada, se dá en coordenadas paramétricas en forma natural, ya que dadas las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, la curva es cerrada si x, y toman siempre valores finitos para todo valor real de t, como ya se vió en la parte de ecuaciones paramétricas, también de este tema.

De igual manera en coordenadas cartesianas, la curva es cerrada si la distancia al polo de cualquier punto de ella, es finita; dicho de otra manera, en coordenadas polares si el radio ó módulo es finito para todo valor de θ, la curva es cerrada, ya que r es la distancia del polo a cualquier punto de la curva.

DEFINICION 3.11

Una curva en coordenadas polares es cerrada, si sus máximas distancias al polo son finitas, para cualquier valor del dominio de la función, dado por:

$$D = \left\{ \theta \mid 0 \leq \theta < \infty, \quad \theta \in R \right\}$$

Para la determinación de los valores máximos y mínimos, puede seguirse el proceso estudiado en el curso de Matemáticas I, utilizando el criterio de la segunda derivada, o bien puede usarse la definición, buscando los valores de θ para los cuales $r = r(\theta)$ se hace máxima.

En general, no hay proceso establecido, pero es más sencillo el análisis usando el Cálculo Diferencial, como ya se ha visto en los ejemplos resueltos anteriormente.

4.- Tabulación de algunos puntos de la curva.

En este caso se trata de calcular un número suficiente de puntos para trazar posteriormente la curva. No hay reglas generales para realizar esta tabulación, pero puede decirse que consiste en dar diversos valores a θ y obtener su imágen.

Si la curva es cerrada, bastarán los valores del intervalo $[0, 2\pi]$ para poderla dibujar, en caso contrario será imposible dibujarla completa.

Pueden usarse valores de θ espaciados 15 grados uno de otro, dependiendo de la claridad que se desea en el trazo, o del conocimiento previo que se tenga de la curva. El paso 1. de la discusión de la curva, que conduce a determinar las intersecciones con los ejes polar y copolar, proporciona valores que pueden incluirse en esta tabulación.

5.- Trazado de la curva.

En este paso, se llevan los valores obtenidos en la tabulación a una gráfica, localizando la posición de cada punto de acuerdo con lo estudiado en el capítulo 1, respecto a representación de puntos en coordenadas polares. Una vez hecho esto, se procede a unir con una curva continua de forma suave todos los puntos encontrados.

6.- Transformación de la ecuación polar a cartesiana.

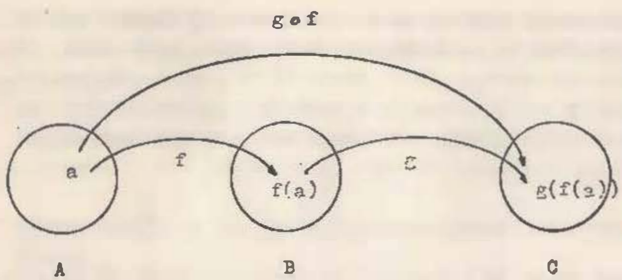
Haciendo uso de las ecuaciones de transformación entre las coordenadas polares y las cartesianas en E^2, se determina la ecuación en forma cartesiana en E^2. En algunos casos la simplificación es difícil y no permite identificar el tipo de curva de que se trata. En otros casos, la transformación conduce a una ecuación cartesiana sencilla y fácilmente identificable.

La transformación de coordenadas para una curva se basa en la definición de la función compuesta, la cual se define de la siguiente manera:

DEFINICION 3.12

Sean las funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$. Sea $f(a) \in B$ la imágen de $a \in A$ y $g[f(a)] \in C$ la imágen de $f(a) \in B$. La función de A en C que asigna a todo $a \in A$ el elemento $g(f(a)) \in C$ se llama función compuesta de f y g, y se representa $g \circ f$, es decir:

$$(g \circ f)a = g(f(a))$$



En el caso de la transformación de la ecuación de la curva en coordenadas polares a coordenadas cartesianas, se tiene que:

$r = g(\theta)$, puede escribirse del siguiente modo:

$g(r,\theta) = 0$ y entonces:

DEFINICION 4.13

Dada $f(r,\theta) = 0$ y $r = r(x,y)$, $\theta = \theta(x,y)$, la composición:

$$g(r,\theta) = f(r(x,y),\theta(x,y)) = 0$$

dá por resultado la función: $f(x,y) = 0$

Y análogamente, dada $f(x,y)$ y $x = x(r,\theta)$, $y = y(r,\theta)$ la función compuesta:

$$f(x,y) = g\ x(r,\theta),y(r,\theta)$$

es $g(r,\theta) = 0$

Para este caso:

$x = x(r,\theta) = r\cos\theta$ $\qquad r = r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = y(r,\theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ $\qquad \theta = \theta(x,y) = \text{ang tan}\ \frac{y}{x}$

Se recomienda al lector el reconocimiento y la revisión de cada uno de estos puntos en los ejemplos que se han realizado hasta ahora.

Por otro lado, se hará un ejemplo más, para verificar cada uno de los pasos de la discusión de una curva.

EJEMPLO

Discutir la ecuación polar de la curva $r = 2\sec^2\frac{\theta}{2}$

SOLUCION:

1.- Intersecciones.

Con el eje polar, para $\theta = 0°$ $\quad\theta = 180°$

Si $\theta = 0°$: $r = 2\sec^2 0° = 2(1)^2 = 2 \quad \therefore \quad I_1(2,0)$

Si $\theta = 180°$: $r = 2\sec^2(180°/2) = 2(1/\cos^2 90°) = 2(1/0) \longrightarrow \infty$

Es decir, solo corta al eje polar el $(2,0)$.

Con el eje copolar, para $\theta = 90°$ y $\theta = 270°$

Si $\theta = 90°$: $r = 2\sec^2(90°/2) = 2(1/\cos^2 45°) = 2(2) = 4$

Si $\theta = 270°$: $r = 2\sec^2(270°/2) = 2(2) = 4$

o sea, la curva corta al eje copolar en $(4,\pi/2)$ y $(4,3\pi/2)$

2.- Simetría.

Respecto al eje polar, se debe cumplir que $r(\theta) = r(2\pi-\theta)$

$$r(2\pi-\theta) = 2\sec^2\left(\frac{2\pi-\theta}{2}\right) = 2\left[\sec\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)\right]^2 = 2\left(-\sec\frac{\theta}{2}\right)^2 = 2\sec^2\frac{\theta}{2}$$

Ya que $\sec(\pi-\alpha) = -\sec\alpha$

Concluyéndose que tiene simetría respecto al eje polar.

Respecto al eje copolar, se debe cumplir que:

$$r(\pi-\theta) = r(\theta).$$

$$r(\pi-\theta) = 2\sec^2\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = 2\left(1/\cos^2\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)\right)$$

En este caso $\cos^2\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right) \neq \cos^2\frac{\theta}{2}$

en este caso la diferencia ya no es de signo, sino también de valor numérico. Se deja al lector analizarla.

Así que: $r(\pi-\theta) \neq r(\theta)$

Simetría respecto al polo.

Se investigará si: $r(\theta) = r(\pi+\theta)$

$r = 2\sec^2\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right) \neq 2\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ semejante al caso anterior.

En conclusión, la curva solo tiene simetría respecto al eje polar.

3.- Extensión.

Derivando la función dada: $r = 2\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, se tiene:

$$\frac{dr}{d\theta} = 2\left(2\sec\frac{\theta}{2}\right)\left(\sec\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

Al igualar a cero: $\frac{dr}{d\theta} = 2\sec^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2} = 0$

o sea:

$$2\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = 0$$

para lo cual $\theta = 0^\circ,\ 360^\circ$

para determinar la naturaleza de los puntos críticos, se procede ahora con el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos^3\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} + 3\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}{\cos^4\frac{\theta}{2}};$$

si $\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2r}{d\theta^2} = \dfrac{\cos^2\frac{0}{2} + 3\operatorname{sen}^2\frac{0}{2}}{\cos^4\frac{0}{2}}$

y es mayor que cero.

$\therefore$ se tiene un mínimo.

En $\theta = 360^\circ$ se presenta el mismo caso.

Por lo tanto, al no haber valor máximo finito, se concluye que la curva es abierta. En efecto, puede verse que:

$r = 2\sec^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{2}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$ es indeterminada para los valores de θ en que el denominador se anule, esto es:

$\cos^2\frac{\theta}{2} = 0$, entonces $\frac{\theta}{2} = 90^\circ$ ó 270°

es decir: $\theta_1 = 180^\circ$ y $\theta_2 = 540^\circ$, conducen a los siguientes límites:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\theta\to 180} 2\sec^2\frac{\theta}{2} \longrightarrow \infty \\ \lim\limits_{\theta\to 540} 2\sec^2\frac{\theta}{2} \longrightarrow \infty \end{array}\right\}$$

Dando por conclusión que la curva es abierta, como ya se demostró por máximos y mínimos.

4.- Cálculo de las coordenadas de algunos puntos.

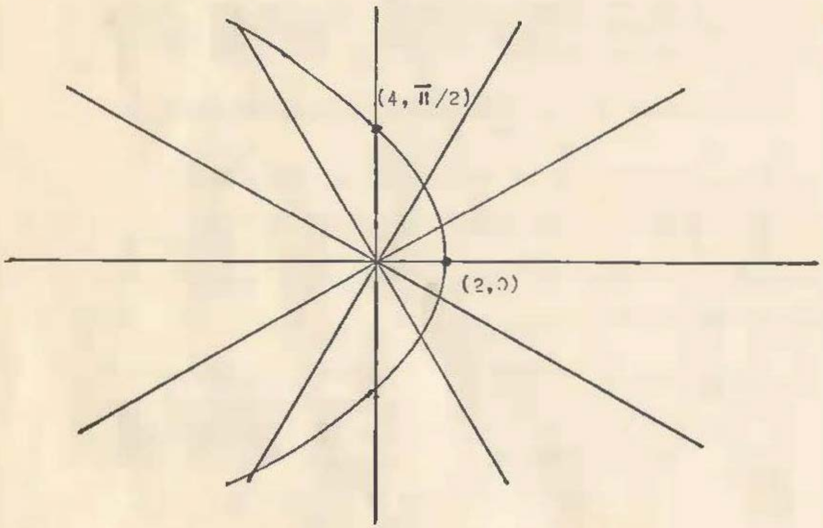
La tabla que a continuación se presenta muestra como se obtienen las parejas ordenadas (r,θ):

θ	$\theta/2$	$1/\cos^2\frac{\theta}{2}$	$r = 2\sec^2\frac{\theta}{2}$	(r,θ)
0°	0	1.000	2.000	$(2,0)$
30°	15	1.072	2.144	$(2.14, \pi/6)$
60°	30	1.333	2.667	$(2.67, \pi/3)$

90°	45	2.000	4.000	$(4, \pi/2)$
120°	60	4.000	8.000	$(8, 2\pi/3)$
150°	75	14.928	29.856	$(29.36, 5\pi/6)$
180°	90	∞	∞	
270°	135	2.000	4.000	$(4, 3\pi/2)$
360°	180	1.000	2.000	$(2, 2\pi)$

5.- Representación gráfica de la curva $r = 2\sec^2 \frac{\theta}{2}$

Dicha representación se obtendrá a partir de la tabulación anterior.



6.- Transformación de la ecuación a coordenadas rectangulares.

$$r = 2\sec^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

al utilizar la identidad $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta$, se llega a:

$$r = \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta} = \frac{4}{1 + \cos\theta}$$

simplificando:

$$r + r\cos\theta = 4$$

que se transforma en:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x = 4 \text{ , o también } \sqrt{x^2 + y^2} = 4 - x$$

elevando al cuadrado ambos miembros, conduce a:

$$x^2 + y^2 = 16 - 8x + x^2$$

finalmente:

$$y^2 = 16 - 8x \qquad ó \qquad y^2 = -8(x - 2)$$

Que es la ecuación de una parábola con vértice en (2,0) y concavidad hacia la izquierda.

3.5 ECUACION POLAR DE LA RECTA Y DE LAS CONICAS

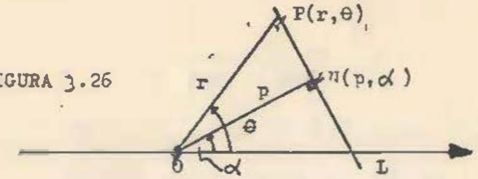
Las ecuaciones de la recta y de las cónicas también se pueden referir a un sistema de coordenadas polares, a continuación se obtendrán sus expresiones matemáticas en forma general.

3.5.1 ECUACION POLAR DE LA RECTA.

Sea una recta L que no pasa por el polo y un punto cualquiera de ella $P(r,\theta)$. Para encontrar su ecuación se buscará alguna particularidad que la identifique plenamente.

Por ejemplo, una característica es su distancia al polo. El punto $N(p,\alpha)$ está definido por la intersección de la perpendicular a la recta que pasa por el polo y ésta, según se observa en la figura 3.26.

FIGURA 3.26



Para determinar el lugar geométrico de la recta es necesario encontrar alguna relación entre el punto N y el punto P, por ejemplo, del triángulo OPN se deduce la siguiente relación:

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{P}{r}$$

O sea:

$$r = \frac{P}{\cos(\theta - \alpha)}$$

La anterior expresión es la ecuación general de la recta en coordenadas polares.

Esta expresión que relaciona a θ y a r, conocidos P y α, se conoce como ecuación polar de la recta.

En efecto, si se transforma a coordenadas cartesianas, se tiene:

$$r = \frac{P}{\cos(\theta - \alpha)} \quad ; \qquad r\cos(\theta - \alpha) = P,$$

pero $\cos(\theta - \alpha) = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha + \cos\theta \cos\alpha$, o sea:

$r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha + r\cos\theta\cos\alpha = P$, y a su vez, pasando a cartesianas:

$$y \operatorname{sen}\alpha + x\cos\alpha = P$$

$$y \operatorname{sen}\alpha = -x\cos\alpha + P$$

$$y = -\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}x + \frac{P}{\operatorname{sen}\alpha}$$

que corresponde a la forma $y = mx + b$

Si la recta pasa por el polo, entonces $P = 0$ y queda la ecuación:

$$\cos(\theta - \alpha) = 0$$

O bien: $\theta - \alpha = \pi/2 \implies \theta = \alpha + \pi/2$

si se da a $\alpha + \pi/2$ el nombre K, queda:

$$\theta = K$$

Ecuación polar de la recta que pasa por el polo.

EJEMPLO

Determinar la ecuación de la recta paralela al eje polar, que pasa por el punto $B(-3, -\pi/6)$

SOLUCION:

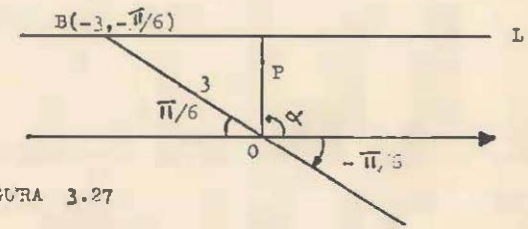


FIGURA 3.27

De la figura se deduce que $P = 3 \operatorname{sen}\pi/6 = 3(1/2) = \frac{3}{2}$

además $\alpha = \pi/2$

Sustituyendo en la ecuación general de la recta:

$$r = \frac{3/2}{\cos(\theta - \pi/2)} = \frac{3/2}{\cos\theta\cos\pi/2 + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\pi/2} = \frac{3/2}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$r = \frac{3}{2\operatorname{sen}\theta}$$

EJEMPLO

Determinar la ecuación de la recta L que pasa por el punto $C(8,3\pi/4)$, si $\overline{OC}$ es perpendicular a L

SOLUCION:

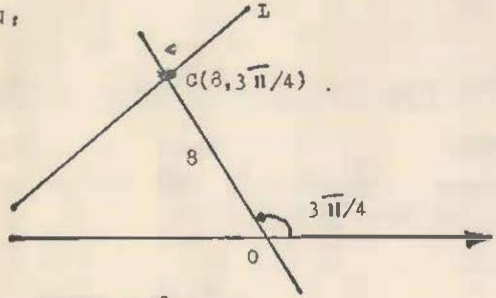


FIGURA 3.28

Como se observa en la figura, se tiene que:

$p = 8,\quad \alpha = 3\pi/4$, al sustituir en la ecuación general de la recta, queda:

$$r = \frac{8}{\cos(\theta - 3\pi/4)} = \frac{8}{\cos\theta\cos 3\pi/4 + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}3\pi/4} =$$

$$= \frac{8}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{16}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta - \sqrt{2}\cos\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\;\frac{16}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta - \sqrt{2}\cos\theta}$$

$$r = \frac{8\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$$

$$\therefore\quad r = \frac{11.3}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$$

Se presentan algunos casos particulares de rectas, en primer lugar:

a).- La recta paralela al eje polar, que pasa por (r_1,θ_1)

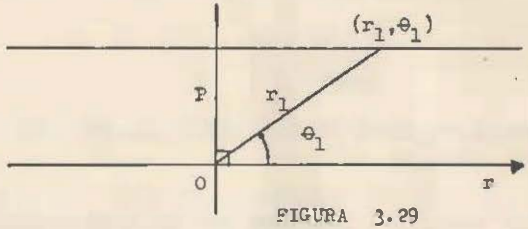


FIGURA 3.29

En la figura se observa que:

$$p = r_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

$$\alpha = \pi/2$$

por ser perpendicular al eje polar; así que sustituyendo valores en la ecuación general de la recta, se tiene:

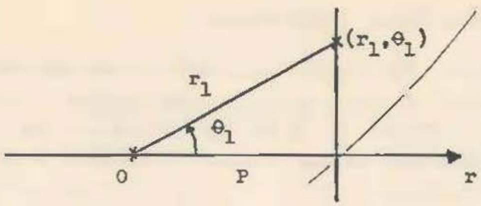
$$r = \frac{p}{\cos(\theta-\alpha)} = \frac{r_1\operatorname{sen}\theta_1}{\cos(\theta-\pi/2)}$$

pero $\cos(\theta-\pi/2) = \operatorname{sen}\theta$

$$\therefore\quad r = \frac{r_1\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta},\quad \text{es decir:}\quad r\operatorname{sen}\theta = r_1\operatorname{sen}\theta_1$$

b).- La ecuación de la recta paralela al eje copolar y que pasa por el punto (r_1,θ_1).

En este caso: $p = r_1\cos\theta_1$ y $\alpha = 0$



Así que sustituyendo valores en la ecuación general de la recta:

$$r = \frac{p}{\cos(\theta - 0)} = \frac{r_1 \cos\theta_1}{\cos(\theta - 0)} = \frac{r_1\cos\theta_1}{\cos\theta}$$

O sea: $\qquad r\cos\theta = r_1\cos\theta_1$

3.5.2 ECUACION POLAR DE LA CIRCUNFERENCIA.

Sea una circunferencia de radio a, con centro en el punto $C(c,\alpha)$ y $P(r,\theta)$ un punto cualquiera de dicha circunferencia, tal como se muestra en la figura 3.30

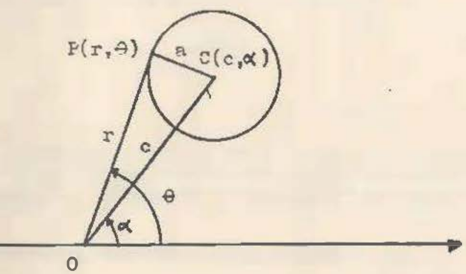


FIGURA 3.30

Se determinará alguna relación entre el punto P, el centro de la circunferencia y el polo. Por ejemplo, al aplicar la ley de los cosenos al triángulo POC, se tiene:

$$a^2 = r^2 + c^2 - 2cr\cos(\theta - \alpha)$$

Expresión que relaciona todos los datos y permite obtener r en función de θ. A esta expresión se le conoce como ecuación polar de la circunferencia.

EJEMPLO

Determinar la ecuación polar de la circunferencia con centro en $(5, \pi/4)$ y radio igual a 2.

SOLUCION:

Al sustituir los datos en la ecuación general se tiene:

$$2^2 = r^2 + 5^2 - 2(5)\, r\cos(\theta - \pi/4)$$
$$4 = r^2 + 25 - 10r(\cos\theta\cos\pi/4 + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\pi/4)$$
$$4 = r^2 + 25 - 10r(\cos\theta(\sqrt{2}/2) + \operatorname{sen}\theta(\sqrt{2}/2))$$
$$4 = r^2 + 25 - 10(\sqrt{2}/2)\, r\,(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$$

Finalmente se llega a:

$$r^2 - 5\sqrt{2}\, r\,(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) + 21 = 0$$

Algunos casos particulares ocurren si la circunferencia pasa por el polo o tiene su centro en él.

- Ecuación de la circunferencia con centro en el polo y de radio a.

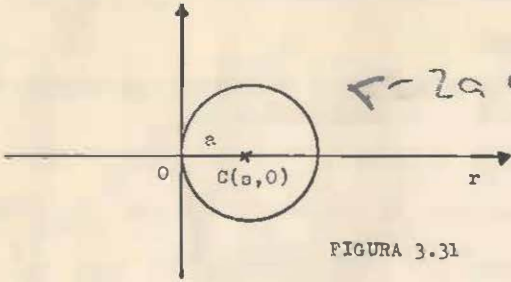
En este caso $C(0,0)$ y al sustituir los valores en la ecuación general de la circunferencia, queda:

$$a^2 = r^2 + 0^2 - 2(0)\, r\cos(\theta - 0)$$
$$a^2 = r^2$$
$$\therefore \quad r = a$$

Ecuación polar de la circunferencia con centro en el polo.

- Circunferencia que pasa por el polo y su centro está en el eje polar.

En este caso, dado que pasa por el polo, si su radio es a y el centro está en C(a,0) como se ve en la figura 3.31



r = 2a cos θ

FIGURA 3.31

Al sustituir en la ecuación general se tiene:

$$a^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - 0)$$

$$0 = r^2 - 2ar\cos\theta\,, \qquad \text{o sea:}$$

$$r^2 = 2ar\cos\theta$$

dividiendo entre r, queda:

$$r = 2a\cos\theta$$

Ecuación polar de la circunferencia de radio a, que pasa por el polo y tiene su centro sobre el eje polar.

Si el centro está en (-a,0), entonces la ecuación es:

$$r = -2a\cos\theta$$

3.5.3 ECUACION POLAR DE LAS CONICAS

En este caso, las cónicas se identificarán en función de su característica general que es la excentricidad. Recuérdese que la excentricidad "ε" es el cociente entre las distancias de un punto de la cónica a su foco y de éste a una recta fija llamada directriz.

La curva es una elipse si $0 < \varepsilon < 1$; una parábola si $e = 1$; y una hipérbola si $\varepsilon > 1$.

Se buscará dicha relación entre esos puntos en la figura 3.32

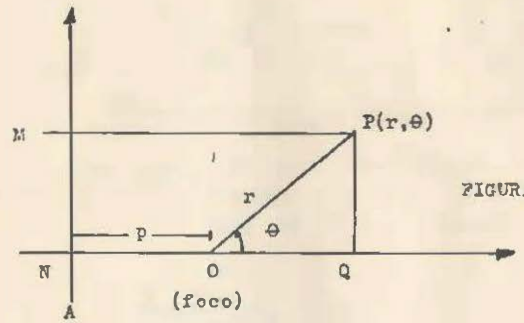


FIGURA 3.32

Se tiene que:

$$\frac{\text{Distancia del foco a un punto de la cónica}}{\text{Distancia de un punto de la cónica a la directriz}} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{PM}|} \qquad (1)$$

A tal relación se le denomina excentricidad "ε", y se puede escribir:

$$|\overline{OP}| = \varepsilon\,|\overline{PM}|$$

Por otra parte, de la misma figura se obtiene:

$$|\overline{OP}| = r \qquad \text{y} \qquad |\overline{PM}| = p + r\cos\theta$$

sustituyendo en la ecuación (1), se tiene:

$$r - \quad (p + r\cos\theta)$$

que el simplificar, queda:

$$r = \varepsilon p + \varepsilon r\cos\theta \ ;$$

$$r - \varepsilon r\cos\theta = \varepsilon p$$

$$r(1 - \varepsilon\cos\theta) = \varepsilon p$$

$$\therefore \quad r = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

con directriz $\qquad r = - \dfrac{p}{\cos\theta}$

Para verificar que se trata de la ecuación de una sección cónica, se hará su transformación a la forma cartesiana:

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon\cos\theta}\ , \quad \text{o bien:}$$

$$r - r\varepsilon\cos\theta = \varepsilon p\ , \quad \text{y transformando:}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \varepsilon x = \varepsilon p$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \varepsilon(x + p)$$

y el elevar al cuadrado:

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2(x^2 + 2px + p^2)$$

que puede simplificarse:

$$x^2 - \varepsilon^2 x^2 + y^2 - 2\varepsilon px - \varepsilon^2 p^2 = 0\ ,$$

quedando:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + D = 0$$

correspondiendo con la ecuación de una cónica, que será hipérbola, parábola o elipse, de acuerdo con los valores que tengan A, B, C y D, los cuáles a su vez dependen del valor de ε.

Si la recta fija está a la derecha del polo, la expresión cambia, pues:

$$|\overline{PM}| = r\cos\theta - p\ , \quad \text{quedando:}$$

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon\cos\theta}\ , \quad \text{con directriz} \quad r = \frac{p}{\cos\theta}$$

Cuando la directriz es paralela al eje polar, la cónica queda:

$$r = \frac{p}{1 \pm \operatorname{sen}\theta}\ , \quad \text{con directri} \quad r = \pm \frac{p}{\operatorname{sen}\theta}$$

(siendo el $\pm$ dependiente de la posición de la recta fija, arriba ó abajo del eje polar).

Cuando la directriz tiene una posición cualquiera, la ecuación se complica un poco. La figura 3.33 ilustra un caso:

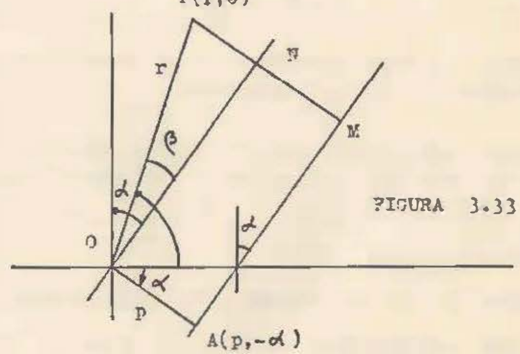


FIGURA 3.33

De la figura $|\overline{OP}| = r\ , \quad |\overline{PM}| = |\overline{PN}| + |\overline{NM}|$

siendo $|\overline{NM}| = |\overline{OA}| = p$ por tratarse de rectas paralelas y:

$$|\overline{PN}| = r\operatorname{sen}\beta = r\operatorname{sen}(\theta + \alpha - \pi/2)$$

$$|\overline{PM}| = r\left[-\cos(\theta+\alpha)\right]$$

La cónica queda definida por

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{PM}} = \frac{r}{p + r\cos(\theta+\alpha)} = \varepsilon$$

$$r = \varepsilon p - \varepsilon r\cos(\theta+\alpha)$$

simplificando:

$$r + \varepsilon r\cos(\theta+\alpha) = \varepsilon p$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\theta+\alpha)},$$

con directriz: $$r = \frac{p}{\cos(\theta+\alpha)}$$

De igual modo pueden obtenerse otras ecuaciones de cónicas con directriz en cualquier posición.

Los casos particulares como ya se había comentado, se tienen para los posibles valores de las excentricidades siguientes:

La parábola cuando: $\varepsilon = 1$

La elipse (y la circunferencia como caso particular), cuando:

$$0 < \varepsilon < 1$$

La hipérbola ocurres cuando: $\varepsilon > 1$

EJEMPLO

Encontrar la ecuación de la elipse con foco en el origen, excentricidad $\varepsilon = 1/2$ y cuya directriz es la recta: $r\cos\theta = -3$

SOLUCION:

La directriz $r = -\dfrac{3}{\cos\theta}$ es una recta perpendicular al eje polar, a tres unidades a la izquierda del polo, por lo que puede decirse que $p = 3$; por lo que sustituyendo en la ecuación general:

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

se obtiene:

$$r = \frac{\frac{1}{2}(3)}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta} = \frac{3}{1 - \cos\theta}$$

Así que la ecuación pedida es:

$$r = \frac{3}{2 - \cos\theta}$$

pudiendo verificarse que es una elipse si se transforma a coordenadas cartesianas.

EJEMPLO

Dada la cónica: $$r = \frac{7}{4 - 5\cos\theta}$$

a).- Encontrar la excentricidad.

b).- Encontrar la ecuación de la directriz.

c).- Identificar la curva.

SOLUCION:

a).- Debe transformarse la ecuación en la siguiente forma:

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 \pm \varepsilon\cos\theta}$$

por lo que se dividirá numerador y denominador por 4

$$r = \frac{7/4}{1 - \frac{5}{4}\cos\theta}$$

con esto, se tiene en la forma general y se observa que:

$$\varepsilon = 5/4 \qquad \text{(excentricidad)}$$

b).- Por otra parte, $\varepsilon p = 7/4$ (numerador)

entonces:

$$p = \frac{7/4}{5/4} = \frac{7}{5}$$

De acuerdo con el signo que aparece en el denominador, la directriz se encuentra a la izquierda del polo y como no hay ningún ángulo en el argumento de $\cos\theta$, la directriz es perpendicular al eje polar. Entonces la recta es del tipo:

$$r = \frac{p}{\cos\theta}$$

sustituyendo valores en esta ecuación, queda:

$$r = -\frac{7/5}{\cos\theta}$$

o sea:

$$r = -\frac{7}{5\cos\theta}$$

que es la ecuación de la directriz.

c).- Por último, como $\varepsilon = \frac{5}{4} > 1$, se trata de una hipérbola.

EJEMPLO

Dada la cónica: $r = \dfrac{3}{6 - 4\,\text{sen}(\theta - \pi/4)}$

a).- Encontrar la excentricidad.

b).- Encontrar la ecuación de la directriz.

c).- Identificar la curva.

SOLUCION:

a).- Para transformarla en forma general a una ecuación del tipo:

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 \pm \varepsilon\cos(\theta + \alpha)}$$

se puede hacer dividiendo numerador y denominador entre 6:

$$r = \frac{1/2}{1 - \frac{2}{3}\,\text{sen}(\theta - \pi/4)}$$

entonces $= 2/3$ (excentricidad).

b).- El término $\theta - \pi/4$ como argumento de seno, indica que la directriz no es paralela a ningún eje, además:

$$\varepsilon p = \frac{1}{2} \qquad p = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

la directriz tiene por ecuación: $r = \dfrac{p}{\cos(\theta + \alpha)}$

sustituyendo valores, queda:

$$r = \frac{3/4}{\cos(\theta - \pi/4)}$$

c).- Como $\varepsilon = \frac{2}{3}$, entonces se trata de una elipse.

3.6 APLICACION DE LA TRASLACION Y ROTACION DE EJES PARA SIMPLIFICAR CURVAS.

3.6.1 TRASLACION DE EJES.

En el Tema 1, se vió como encontrar las coordenadas de un punto cuando se trasladaban los ejes paralelamente a sí mismos al nuevo centro (h,k), encontrando que las nuevas coordenadas (u,v) se pueden relacionar con (x,y) del sistema inicial por medio de las siguientes ecuaciones:

$$u = x - h \qquad (1)$$

$$v = y - k \qquad (2)$$

Por lo tanto:

$$F(u,v) = (x-h,\ y-k)$$

las ecuaciones (1) y (2) se llaman de traslación.

En efecto, el punto $P_1(x_1,y_1)$ tiene por coordenadas con respecto al nuevo sistema:

$$P_1'(x_1-h,\ y_1-k)$$

De la misma manera, el punto $P_2(x_2,y_2)$ tendrá:

$$P_2'(x_2-h,\ y_2-k)$$

Si ahora consideramos la curva $y = f(x)$, entonces si $P_s(x_s,\ y_s=f(x_s))$ pertenece a la curva y se quiere referir al nuevo sistema u,v con centro en (h,k), sus coordenadas serán:

$$P_s(u,v) = (x_s-h,\ y_s-k)$$

y de esta manera todo punto de la curva quedará trasladado.

> **DEFINICION 3.14**
>
> Una curva puede ser trasladada o referirse a un nuevo sistema u,v si en cualquier punto (x,y) se utiliza las ecuaciones de traslación:
>
> $$(u,v) = (x-h,\ y-k)$$

EJEMPLO

Trasladar la curva $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$ a un nuevo sistema de ejes paralelo al original con origen en $O'(3,4)$.

SOLUCION:

Las ecuaciones de transformación son:

$$\begin{array}{l} x-3 = u \\ y-4 = v \end{array} \quad \text{donde:} \quad \begin{array}{l} h = 3 \\ k = 4 \end{array} \quad \therefore \quad \begin{array}{l} x = u+3 \\ y = v+4 \end{array}$$

sustituyendo estas ecuaciones en la de la circunferencia, se tiene:

$$u^2 + v^2 = 4$$

que es la ecuación con respecto al nuevo sistema cuyo origen está en $(3,4)$ con respecto al sistema x,y.

3.6.2 ROTACION DE EJES.

Como se vió en el Tema I, las coordenadas de un punto con respecto a un sistema x,y y las coordenadas del mismo con respecto a un sistema u,v girado, están relacionadas por las siguientes ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned} x &= u\cos\alpha - v\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y &= u\,\mathrm{sen}\,\alpha + v\cos\alpha \end{aligned} \qquad (1)$$

que se representa matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\bar{x} = T\,\bar{u} \qquad \text{donde} \qquad T^{-1} = T^t$$

si ahora estas ecuaciones de transformación se las aplicamos a un punto cualquiera $P(x,y)$ de una curva $y = f(x)$, entonces se tendrá:

$$(u\,\mathrm{sen}\,\alpha + v\cos\alpha) = f(u\cos\alpha - v\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

que equivale a sustituir las ecuaciones de transformación en-

en la curva, con lo cual se encontrarán sus ecuaciones con respecto a un sistema girado. Otra manera de hacerlo es representar la ecuación en forma matricial y aplicar las ecuaciones de transformación también en forma matricial.

Pasemos ahora a una de las principales aplicaciones de la rotación de ejes, que es la de simplificar ecuaciones eliminando los términos rectangulares.

Sea la siguiente ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

la cual representa a una curva en E^2; este tipo de ecuaciones es difícil de identificar y estudiar cuando contiene términos en "xy", por lo que a continuación estableceremos un método para que mediante una transformación lineal dada por una rotación de ejes, refiramos la misma ecuación a un sistema de referencia u,v en el que eliminémos el término "xy" y podamos identificar más fácilmente la curva en estudio.

Analicemos de la ecuación de la curva (1), el trinomio:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

el cual se puede arreglar en forma matricial como el producto de las siguientes matrices:

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left[Ax^2+Bxy+Cy^2\right] \quad \ldots\ldots (2)$$

lo que se demuestra a continuación:

$$\left[\left(Ax + \frac{By}{2}\right)\left(\frac{Bx}{2} + Cy\right)\right]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left[Ax^2 + \frac{B}{2}yx + \frac{B}{2}xy + Cy^2\right]$$

$$= \left[Ax^2 + Bxy + Cy^2\right]$$

L.Q.Q.D.

Pero además, según se vió anteriormente, las coordenadas de un punto con respecto a dos sistemas de referencia están relacionados por las siguientes ecuaciones de transformación:

$$x = u\cos\alpha - v\,\text{sen}\,\alpha$$

$$y = u\,\text{sen}\,\alpha + v\cos\alpha$$

o sea:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\bar{x} = T\,\bar{u} \qquad \text{ó}$$

$$[x \,,\, y] = [u \quad v]\begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (3)$$

sustituyendo (3) en (2), queda:

$$[u \quad v]\begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \qquad (3')$$

el problema consiste en seleccionar una transformación lineal tal que el término en "xy" ó el término rectangular desaparezca, lo cual se puede interpretar como que el producto:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (4)$$

resulte igual a una matriz diagonal de la forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ya que:

$$[u \quad v]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$$

Es decir:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

haciendo operaciones llegaremos a la condición necesaria para eliminar el término en "xy".

$$\begin{bmatrix} (A\cos\alpha + \frac{B}{2}\operatorname{sen}\alpha) & (\frac{B}{2}\cos\alpha + C\operatorname{sen}\alpha) \\ (-A\operatorname{sen}\alpha + \frac{B}{2}\cos\alpha) & (-\frac{B}{2}\operatorname{sen}\alpha + C\cos\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

efectuando el producto anterior e igualando los términos de las matrices se obtiene que:

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \left[C - A\right] + \frac{B}{2} \cos 2\alpha = 0$$

$$\tan 2\alpha = -\frac{B}{C-A}$$

O sea:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}$$

es decir: si se tiene la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

y se desea eliminar el término rectangular en "xy", se deben girar los ejes un ángulo α dado por la formula.

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}$$

O sea:

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ang tan } \frac{B}{A-C}$$

quedando la ecuación (1) referida a un sistema (u,v) de la siguiente manera:

$$A'u^2 + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0$$

analizandolo en forma general

Sea

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

entonces la matriz inversa es:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$ y llamando a $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \lambda$

entonces la expresión (4) queda de la siguiente manera:

$$T^{-1} A T = \lambda$$

premultipliquemos la expresión anterior por T, queda:

$$T\left[T^{-1} A T\right] = T\lambda \qquad (6)$$

Pero $T T^{-1} = I$ matriz identidad o unitaria, y:

$$T T^{-1}(A T) = I (A T) = A T$$

$$y \qquad A T - T\lambda = 0$$

$$\text{O sea} \qquad T (A - \lambda) = 0 \qquad (7)$$

la ecuación matricial (7) representa un sistema de ecuaciones que tiene solución distinte de la trivial, si y solo si: el valor del determinante obtenido de la matriz $|A-\lambda|$ es igual a cero, es decir:

$$|A - \lambda| = 0$$

pero

$$|A - \lambda| = \begin{vmatrix} A-\lambda & B/2 \\ B/2 & C-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

al resolver la ecuación queda:

$$(A-\lambda)(C-\lambda) - \frac{B^2}{4} = 0$$

$$AC - (A + C)\lambda + \lambda^2 - \frac{B^2}{4} = 0$$

es decir:

$$\lambda^2 - (A+C)\lambda + (AC - \frac{B^2}{4}) = 0 \qquad (8)$$

La solución de esta ecuación, dá los valores de λ que requiere la matriz diagonal y que representan la ecuación característica, según se estudia en el curso de Algebra Avanzada.

A continuación se dan algunos ejemplos.

Transformar la ecuación $2x^2 + 3\,xy + y^2 = 0$..(1) girando los ejes coordenados un ángulo $\alpha = 30^\circ$

SOLUCION:

Las ecuaciones de transformación son:

$$x = u\cos\alpha - v\,\mathrm{sen}\,\alpha = u(\frac{3}{2}) - v\,(\frac{1}{2})$$

$$y = u\,\mathrm{sen}\,\alpha + v\cos\alpha = u\,(\frac{1}{2}) + v\,(\frac{3}{2})$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v$$

$$y = \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v$$

y sustituyendolas en la ecuación (1), queda:

$$2(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v)^2 + 3(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v)(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v) + (\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v)^2 = 1$$

desarrollando y simplificando, queda:

$$2(\frac{3}{4}u^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}uv + \frac{1}{4}v^2) + 3(\frac{\sqrt{3}}{4}u^2 + \frac{3}{4}uv - \frac{1}{4}uv - \frac{\sqrt{3}}{4}v^2) + (\frac{1}{4}u^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}uv + \frac{3}{4}v^2) = 1$$

$$\frac{3}{2}u^2 - \sqrt{3}uv + \frac{1}{2}v^2 + \frac{3}{4}u^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}uv - \frac{3}{4}v^2 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}uv + \frac{3}{4}v^2 = 1$$

donde se ve que se eliminan los términos uv, quedando:

$$\frac{5}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 = 1$$

$$5\,u^2 + v^2 = 2 \qquad (2)$$

$$ó \qquad \frac{u^2}{2/5} + \frac{v^2}{2} = 1$$

que es la ecuación de una elipse con centro en $c(0,0)$ y semiejes:

$$a = \sqrt{2/5}\,, \qquad b = 2$$

Otra forma de resolver el problema es:

Se tendría que expresar la función en forma matricial, es decir:

$$2x^2 + \sqrt{3}\,xy + y^2 = 1$$

en forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \qquad (3)$$

Las ecuaciones matriciales de transformación son:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\mathrm{sen}\,30^\circ \\ \mathrm{sen}\,30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} T^t$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Por lo tanto sustituyendo (4) y (5) en la ecuación matricial (5) de la curva, queda:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{3}{2}+1 \\ -2+\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{3} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{15}{2}+\frac{5}{2} & -\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}+\frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 1$$

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(10u^2 + 2v^2) = 1$$

$$5u^2 + v^2 = 2$$

Que es la misma ecuación obtenida anteriormente.

C A P I T U L O 2

L A R E C T A Y E L P L A N O

2.1 INTRODUCCION. Dado un problema, se desarrollan una serie de temas relativos a la recta y al plano cuyos conceptos se generalizan haciendo uso de lemas, teoremas, demostraciones, etc.; con el objeto de que sean aplicables a cualquier caso en el que se utilicen estos conocimientos.

Anteriormente, ya se habían encontrado algunas características de la pirámide rectangular mostrada en la figura-2.1, se desea determinar otras características geométricas partiendo de los siguientes datos:

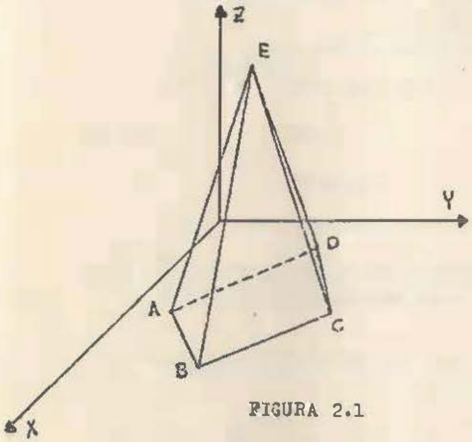


FIGURA 2.1

Las coordenadas de los vértices son:

A	(3,1,0)
B	(5,3,0)
C	(3,5,0)
D	(1,3,0)
E	(3,3,6)

2.2 ECUACIONES DE LA RECTA. Otra característica geométrica de la pirámide puede ser la función que determina la posición de todos los puntos que formen alguna de las aristas; por ejemplo la que va de A a B, ó de C a D.

Si se observan las aristas, puede notarse que se trata de lineas rectas, y que éstas son una sucesion de puntos con una dirección definida, pero, :

¿ COMO SE DEFINE ESTA DIRECCION ?

Una forma de hacerlo es por medio de un vector paralelo a dicha sucesion de puntos, ver figura 2.2 , tambien se puede observar, que las rectas pasan por los puntos A, B, C, ó D.

Los puntos de la recta AB, se pueden obtener a partir del vector de posición $\bar{P}$, conocidos un punto por donde pasa $\bar{P}o$ y un vector $\bar{u}$ paralelo a la recta L como se muestra en la figura 2.1'

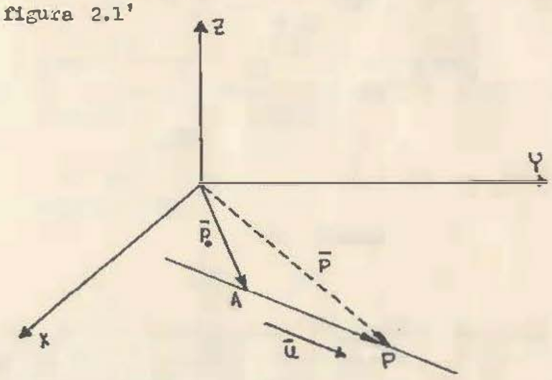


FIGURA 2.1'

De la figura se puede observar que

$$\overline{AP} = t\bar{u}$$

y que $\quad \bar{P} = \bar{P}o + \overline{AP}$

es decir $\quad \bar{P} = \bar{P}o + t\bar{u}$

Con lo cual se llega a la siguiente definición:

DEFINICION 2.1 RECTA: es un conjunto L de puntos en E^3, donde hay un punto $P_0 \in E^3$ y un vector no nulo $\bar{u} \in V_3$, tal que:

$$L = \left\{ \bar{P}_0 + t\bar{u} \mid t \in R \right\}$$

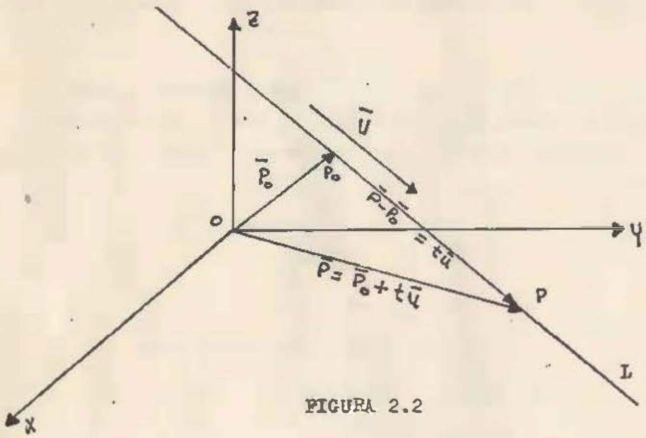


FIGURA 2.2

Ahora, se puede analizar con mayor detalle el caso mostrado en la figura 2.2. Sea P_0 un punto cualquiera de la recta, de coordenadas (x_0, y_0, z_0), y sean (a,b,c) las componentes del vector paralelo a la recta; un punto cualquiera P de coordenadas (x,y,z) que se encuentra en la recta se obtiene de la siguiente manera: Considérese los vectores de posición $\bar{P}$ y $\bar{P}_0$ de los puntos P y P_0, como los mostrados en la figura 2.2.

El vector $\bar{P}-\bar{P}_0$ está alojado en la recta, y se puede afirmar que es paralelo a $\bar{u}$ por lo que:

$$(\bar{P}-\bar{P}_0) = t\bar{u} \quad \forall\, t \in R \qquad (2.1)$$

es decir $$\bar{P} = \bar{P}_0 + t\bar{u} \qquad (2.2)$$

Como $\bar{P}$ es el vector de posición de un punto cualquiera $P(x,y,z)$ alojado sobre la recta L, entonces la ecuación (2.2) es la ecuación vectorial de la recta que pasa por P_0 y es paralela a $\bar{u}$. Para cada valor del parámetro t, existirá un punto P, cuyo vector de posición $\bar{P}$, satisfaga la ecuación (2.2).

Si se sustituyen ahora las componentes de los vectores $\bar{P}$, $\bar{P}_0$ y $\bar{u}$ en la ecuación (2.1) se tiene:

$$\left[(x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)\right] = t(a,b,c)$$

es decir, $$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = (ta, tb, tc)$$

que por la condición de igualdad de vectores, queda como:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} x-x_0 = ta & ; & x = x_0 + ta \\ y-y_0 = tb & ; & y = y_0 + tb \\ z-z_0 = tc & ; & z = z_0 + tc \end{array}} \qquad (2.3)$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta L. Obsérvese que para cada variable se tiene una ecuación paramétrica.

Si en las ecuaciones (2.3) se despeja el parámetro, y se igualan, obtenemos:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}} \qquad (2.4)$$

que son las llamadas ecuaciones escalares de la recta en forma simétrica.

Otra forma de definir a la recta conociendo dos puntos por donde pasa, es la siguiente:

DEFINICION 2.2.

Recta.- Es un conjunto L de puntos en E^3, que pasa por los puntos P_0 y P_1, no coincidentes en E^3, tal que:

$$L = \left\{ \bar{P}_0 + t(\bar{P}_1 - \bar{P}_0) \mid t \in R \right\}$$

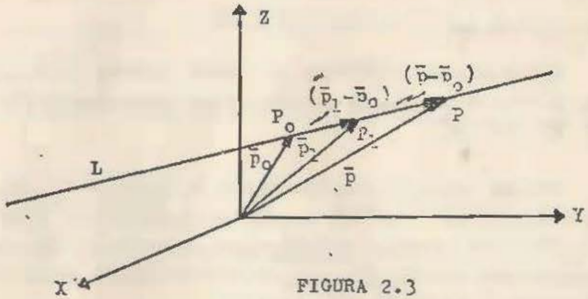


FIGURA 2.3

Como en el caso anterior, se puede hacer un análisis cuidadoso, a partir de la figura 2.3, en la cual se tiene una recta L determinada por dos puntos conocidos P_0 y P_1 y un punto P cualquiera sobre L.

Los vectores de posición de estos tres puntos son: $\bar{P}_0$, $\bar{P}_1$ y $\bar{P}$. Los vectores diferencia: $\bar{P}-\bar{P}_0$ y $\bar{P}_1-\bar{P}_0$ son paralelos, por lo cual deben cumplir lo siguiente:

$$\bar{P} - \bar{P}_0 = t(\bar{P}_1 - \bar{P}_0) \quad \forall\, t \in R \qquad (2.5)$$

que es la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos P_0 y P_1. Si se sustituyen en la ecuación (2.5) las componentes de los vectores $\bar{P}$, $\bar{P}_0$ y $\bar{P}_1$, se obtiene:

$$\left[(x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)\right] = t\left[(x_1,y_1,z_1) - (x_0,y_0,z_0)\right]$$

que al desarrollarse queda como:

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = t\,(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$$

que por la condición de igualdad de vectores, se puede escribir como:

$$\begin{aligned} x-x_0 &= t\,(x_1-x_0) \\ y-y_0 &= t\,(y_1-y_0) \\ z-z_0 &= t\,(z_1-z_0) \end{aligned} \qquad (2.6)$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por dos puntos.

Si de las ecuaciones (2.6) se despeja el parámetro t, y se igualan queda:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \qquad (2.7)$$

éstas son las ecuaciones escalares de la recta que pasa por dos puntos, en forma simétrica.

Ahora se puede obtener la función que determina la posición de todos los puntos que forman la arista $\overline{DC}$, dicho en otra forma, la ecuación de la recta que contiene al segmento $\overline{DC}$.

Puesto que se conocen las coordenadas de los puntos C (3,5,0) y D (1,3,0), ver figura 2.1, se tiene que:

$$\overline{DC} = \bar{c} - \bar{d} = (2,2,0)$$

donde $\bar{c}$ y $\bar{d}$ son vectores de posición de los puntos C y D, respectivamente.

Si se supone un punto $P(x,y,z)$ de la recta se tendrá entonces:

$$\overline{CP} = \bar{p}-\bar{c} = (x-3,y-5,z-0)$$

puesto que $\overline{DC}$ y $\overline{CP}$ están sobre la recta se puede escribir:

$$\overline{CP} = t(\overline{DC})$$

$$(x-3,y-5,z) = t(2,2,0)$$

$$(x-3,y-5,z) = (2t,2t,0) \qquad \ldots (1)$$

(1) es la ecuación vectorial de la recta L_1, que contiene a $\overline{DC}$. También se pueden obtener las ecuaciones paramétricas:

$$x-3 = 2t \quad ; \quad x = 2t+3$$
$$y-5 = 2t \quad ; \quad y = 2t+5$$
$$z = 0 \quad ; \quad z = 0$$

y despejando el parámetro t, obtenemos las ecuaciones escalares en forma simétrica:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{2}, \qquad z=0$$

De aquí se sabe que el vector paralelo a L_1 es $\bar{u}_1 = (2,2,0)$.

Procediendo de la misma forma para la recta L_2 que contiene a $\overline{BE}$.

Ecuación vectorial:

$$(x-3,y-3,z-6) = (2t,0,-6t)$$

Ecuaciones Paramétricas:

$$x-3 = 2t \quad ; \quad x = 2t+3$$
$$y-3 = 0 \quad ; \quad y = 3$$
$$z-6 = -6t \quad ; \quad z = -6t+6$$

Ecuaciones escalares en forma simétrica:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{z-6}{-6}, \qquad y=3$$

Vector $\bar{u}_2$ paralelo a L_2:

$$\bar{u}_2 = (2,0,-6).$$

Se deja como ejercicio al alumno, obtener las ecuaciones de las rectas que contienen a los segmentos: $\overline{AE}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CE}$ y $\overline{DE}$.

Se han resuelto dos problemas particulares: Obtener las ecuaciones de las rectas que contienen a los segmentos $\overline{BE}$ y $\overline{CD}$. Sin embargo, nada garantiza que las ecuaciones empleadas sean generales, para demostrar que si tienen este caracter, se hará uso del siguiente:

> TEOREMA 2.1.
>
> Para cada par de puntos distintos en E^3, hay una y sólo una recta que pasa por ellos.

DEMOSTRACION.- Sean P_1 y P_2 un par de puntos distintos en E^3 y $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ los vectores de posición correspondientes, entonces:

$$L = \left\{ \bar{P}_1 + t(\bar{P}_2-\bar{P}_1) \mid t \in R \right\}$$

es el conjunto de puntos P de una recta que pasa por P_1 y P_2. Suponiendo que:

$$L' = \left\{ \bar{p}_0 + s\bar{u} \mid s \in R \right\}, \quad \text{donde } \bar{u} = \bar{P}_2-\bar{P}_1$$

también es una recta que pasa por P_1 y P_2. Se demostrará que $L'=L$. Como P_1 y P_2 son puntos contenidos en L', existen números reales distintos s_1 y $s_2 \in R$, tales que:

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_0 + s_1\bar{u} \quad \text{y} \quad \bar{p}_2 = \bar{p}_0 + s_2\bar{u}$$

si $P \in L$, entonces, para algún $t \in R$:

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + t(\bar{p}_2-\bar{p}_1) = \bar{p}_0 + s_1\bar{u} + t(s_2-s_1)\bar{u}$$

$$= \bar{p}_0 + \left[s_1 + t(s_2-s_1)\right] \bar{u} = \bar{p}_0 + s\bar{u}$$

por lo tanto, $P \in L'$, y: $L \subset L'$.

Recíprocamente, si se supone que $P \in L'$, entonces, para algún $s \in R$.

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + s\bar{u} = \bar{p}_1 - s_1\bar{u} + s\bar{u} = \bar{p}_1 + (s-s_1)\bar{u}$$

como:

$$\bar{p}_1 - s_1\bar{u} = \bar{p}_2 - s_2\bar{u} \quad \text{y} \quad \bar{p}_2-\bar{p}_1 = (s_2-s_1)\bar{u}$$

$$\therefore \quad \bar{u} = \frac{\bar{p}_2-\bar{p}_1}{s_2-s_1}$$

entonces:

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \frac{s-s_1}{s_2-s_1}(\bar{p}_2-\bar{p}_1) = \bar{p}_1 + t(\bar{p}_2-\bar{p}_1)$$

Luego $p \in L$ y $L' \subset L$.

Como $L' \subset L$ y $L \subset L'$, se debe cumplir que:

$$L' = L$$

L.Q.Q.D.

Resumiendo, existen distintas maneras de definir a una recta:

A).- Conociendo un punto de ella y un vector paralelo a la misma.

B).- Conociendo dos puntos no coincidentes de la recta.

C).- Por dos planos que se cortan. (Este caso se analizará en el Tema: Intersección de planos).

EJEMPLO

Un cuerpo con movimiento rectilíneo pasa por el punto P_0 $(4,3,-1)$, con dirección paralela al vector $\bar{u} = (2,-1,0)$. Determinar las ecuaciones vectorial, paramétricas, y simétrica de su trayectoria.

SOLUCION.- De la figura 2.4 integrada con los datos del problema, se tiene que:

$$\bar{p}-\bar{p}_0 = (x,y,z) - (4,3,-1) \qquad \text{es decir,}$$

$$\bar{p}-\bar{p}_0 = (x-4,y-3,z+1) \qquad \text{y como } L \text{ y } \bar{u} \text{ son paralelos}$$

$$(x-4,y-3,z+1) = t(2,-1,0)$$

que es la ecuación vectorial de la recta L que representa la trayectoria del cuerpo móvil.

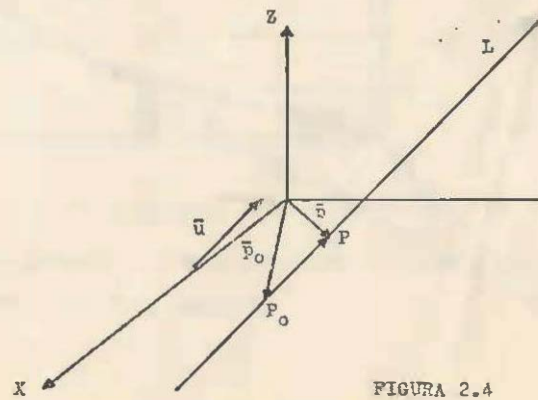


FIGURA 2.4

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x-4 = 2t \qquad\qquad x = 4+2t$$
$$y-3 = -t \qquad \text{es decir,} \qquad y = 3-t$$
$$z+1 = 0 \qquad\qquad z = -1$$

Finalmente, las ecuaciones escalares en forma simétrica-- son:

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-1}\,, \qquad z+1 = 0$$

EJEMPLO

Para el trazo de una línea de conducción de agua, se re-- quiere conocer la ecuación de su trayectoria que coincide con- una recta que pasa por los puntos A (3,0,-4) y B (2,1,-1) obtener las ecuaciones escalares en forma simétrica.

SOLUCION.- De la figura 2.5 se tiene que:

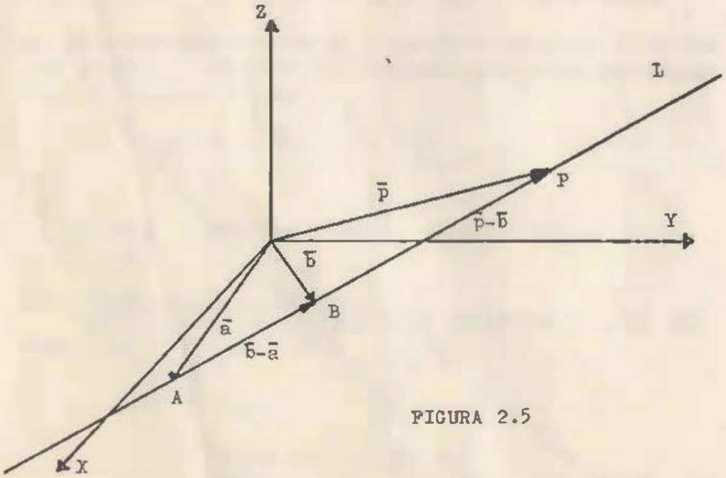


FIGURA 2.5

$$\overline{AB} = \bar{b}-\bar{a} = \left[2-3, 1-0, -1-(-4)\right] = (-1,1,3)$$
$$\overline{BP} = \bar{p}-\bar{b} = (x-2, y-1, z+1)$$

Dado que $\overline{AB}$ y $\overline{BP}$ están sobre L y son coincidentes, se cumple que: $\overline{BP} = t(\overline{AB})$ o bien,

$$(x-2, y-1, z+1) = t\,(-1,1,3)$$
$$(x-2, y-1, z+1) = (-t, t, 3t)$$

Aprovechando la identidad entre vectores y despejando el parámetro t, se obtienen las ecuaciones escalares de la recta L en forma simétrica, quedando:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$$

EJEMPLO

Una recta es perpendicular a los vectores $\bar{a}=(0,-2,3)$ y $\bar{b}=(-5,1,0)$ y pasa por el punto $P_0(2,2,2)$. Encontrar- sus ecuaciones escalares en forma simétrica.

SOLUCION:

Si la recta es perpendicular a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, - entonces será paralela al vector $\bar{a}\times\bar{b}$, como este vector es fácil de calcular aplicando el producto vectorial y se conoce además un punto de la recta, se pueden obtener las ecuaciones en forma simétrica como se muestra a continua--- ción:

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3i - 15j + 10k$$

entonces, $\bar{u} = (-3,-15,10)$, sustituyendo $\bar{u}$ y P_0 en las ecuaciones escalares de la recta queda:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-2}{-15} = \frac{z-2}{-10}$$

2.3 ANGULO ENTRE DOS RECTAS.

Sígase obteniendo otras características geométricas de la pirámide, por ejemplo, el ángulo que forman las aristas $\overline{DC}$ y $\overline{BE}$ de la pirámide mostrada en la figura 2.1. Para ello se harán las siguientes consideraciones que lleven a obtener una expresión que permita dicho cálculo:

Ya conocidas las ecuaciones de la recta, se estudiarán las relaciones que existen entre ellas. Como se verá mas adelante, las relaciones entre rectas, se obtienen a partir de las relaciones entre los vectores que las definen, por ejemplo, el ángulo θ que formen las rectas L_1 y L_2 es igual al ángulo entre sus respectivos vectores paralelos $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$, como se muestra en la figura 2.6. La demostración puede verse en el capítulo 1 de éstos apuntes.

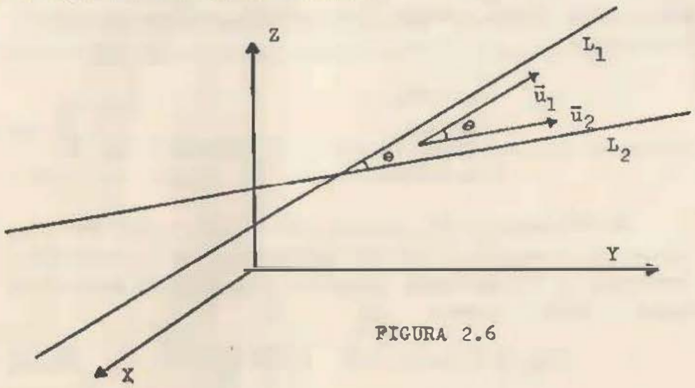


FIGURA 2.6

Para calcular el valor del ángulo θ, entre las rectas L_1 y L_2 es necesario aplicar las ecuaciones desarrolladas en el capítulo 1 para determinar el ángulo entre dos vectores y la expresión para hacerlo estaba dada por:

$$\theta = \text{ang cos } \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{|\bar{u}_1|\,|\bar{u}_2|} \tag{2.8}$$

o bien:

$$\theta = \text{ang sen } \frac{|\bar{u}_1 x \bar{u}_2|}{|\bar{u}_1|\,|\bar{u}_2|} \tag{2.9}$$

donde:

$\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ son vectores paralelos a L_1 y L_2 respectivamente.

Cabe hacer notar, que se hablará de ángulo entre dos rectas aún cuando no se intersecten.

A continuación se calculará el ángulo entre las rectas L_1 y L_2 que contienen a los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{BE}$ respectivamente, de la pirámide de la figura 2.1 como ya se vió, el vector paralelo a L_1 está dado por el segmento $\overline{DC}$ y en este caso se representa por $\bar{u}_1$ es decir:

$$\bar{u}_1 = (2,2,0) \quad ; \quad |\bar{u}_1| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}$$

análogamente, el vector paralelo a L_2 está dado por $\overline{BE}$ y es:

$$\bar{u}_2 = (2,0,-6) \quad ; \quad |\bar{u}_2| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-6)^2} = \sqrt{40}$$

sustituyendo los valores en la ecuación (2.8), queda:

$$\theta = \text{ang cos } \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{|\bar{u}_1|\,|\bar{u}_2|} = \frac{(2,2,0)\cdot(2,0,-6)}{\sqrt{8}\,\sqrt{40}}$$

$$\theta = \text{ang cos } \frac{4}{\sqrt{8}\,\sqrt{40}} \quad ; \quad \theta = 77° \; 4' \; 44''$$

- Se sugiere al alumno encuentre los ángulos BAD, BAE, ABE, EBC, BCE, ECD, CDA y CDE.

EJEMPLO

Se han obtenido las ecuaciones de las líneas rectas que contienen a los ejes de dos túneles, y se desea conocer el ángulo entre ellos.

Ecuaciones del eje del túnel 1:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z+5$$

Ecuaciones del eje del túnel 2

$$x+5 = 2t$$
$$y = 4t$$
$$z+1 = 0$$

SOLUCION:

De las ecuaciones del túnel 1:

$$\bar{u}_1 = (2,3,1)$$

De las ecuaciones del túnel 2:

$$\bar{u}_2 = (2,4,0)$$

y aplicando la ecuación (2.8):

$$\theta = \text{ang cos } \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{|\bar{u}_1|\,|\bar{u}_2|}$$

$$\theta = \text{ang cos } \frac{(2,3,1)\cdot(2,4,0)}{|(2,3,1)||(2,4,0)|} = \text{ang cos } \frac{16}{\sqrt{280}}$$

$$\therefore \quad \theta = 17^\circ\ 1'\ 25''$$

2.4 PARALELISMO Y COINCIDENCIA. Otra relación importante entre las aristas de la pirámide del problema propuesto, es el paralelismo ó coincidencia entre las mismas, por ejemplo, puede cuestionarse: ¿ son paralelas las aristas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$?. Para contestar a la pregunta anterior es necesario conocer las siguientes características de la ecuación de una recta.

Las rectas L_1 y L_2 son paralelas si las componentes de los vectores que determinan su dirección $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ respectivamente, son iguales o proporcionales.

La condición anterior se puede expresar como sigue:

Si para L_1 su vector paralelo es $\bar{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$ y para L_2 es $\bar{u}_2=(a_2,b_2,c_2)$, entonces para que L_1 sea paralela a L_2 debe existir algún escalar k que verifique las siguientes ecuaciones:

$$a_1 = ka_2$$
$$b_1 = kb_2 \qquad (2.10)$$
$$c_1 = kc_2$$

De otra manera, es condición necesaria y suficiente para que dos rectas L_1 y L_2 sean paralelas, que el producto vectorial de los vectores paralelos a L_1 y L_2 no nulos, sea igual a cero, es decir:

$$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = 0 \qquad L_1 \,//\, L_2 \qquad (2.11)$$

Por otra parte, si además de cumplir las condiciones anteriores, existe un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfagan simultáneamente las ecuaciones de ambas rectas, entonces dichas rectas son coincidentes.

Ahora podemos investigar si los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son paralelos.

Un vector $\bar{u}_1$ paralelo a la recta que contiene a $\overline{AD}$ es:

$\bar{u}_1 = \overline{AD} = \bar{d}-\bar{a} = (-2,2,0)$

y un vector $\bar{u}_2$ paralelo a la recta que contiene a $\overline{BC}$ es:

$\bar{u}_2 = \overline{BC} = \bar{c}-\bar{b} = (-2,2,0)$

Aplicando la ecuación (2.11)

$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = 0 \implies L_1 // L_2$, se tiene:

$$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0-0)i + (0-0)j + (-4+4)k$$

$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = 0$, entonces $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son paralelos.

Se deja al alumno demostrar como ejercicio, que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son paralelos y que $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ no lo son.

EJEMPLO

Si las trayectorias de dos partículas en movimiento rectilíneo son paralelas y sus ecuaciones son:

$$L_1: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}$$

$$L_2: \quad \frac{x-3}{14.6} = \frac{y-1}{21.9} = \frac{z-5}{c}$$

Cuánto debe valer c para cumplir la condición de paralelismo

SOLUCION. Para que sean paralelas las trayectorias debe cumplirse que: $\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = 0$, siendo $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ vectores paralelos a las rectas L_1 y L_2, entonces.

$$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 14.6 & 21.9 & c \end{vmatrix} = \bar{0}$$

$3ci - 87.6i - 2cj + 58.4j = \bar{0}$

$(3c - 87.6)i + (58.4 - 2c)j = 0i + 0j$

Resolviendo la ecuación, se tiene que:

$c = 29.2$

Ahora se establecerán formalmente dichas relaciones.

DEFINICION 2.3.

Dos rectas $L_1 = \{\bar{p}_1 + s\bar{u} \mid s \in R\}$ y $L_2 = \{\bar{p}_2 + t\bar{v} \mid t \in R\}$ son paralelas si los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son paralelos.

Las rectas pueden ser paralelas y coincidentes, lo que se distinguirá con los siguientes lemas.

LEMA 2.1.

Para todo punto $P_1 \in E^3$ y toda recta $L = \{\bar{p}_0 + s\bar{u} \mid s \in R\}$, hay una y sólo una recta que pasa por P_1 paralela a L.

DEMOSTRACION. $L_1 = \{\bar{p}_1 + t\bar{u} \mid t \in R\}$ es una recta que pasa por P_1 y es paralela a L. Sea $L_2 = \{\bar{p}_2 + q\bar{v} \mid q \in R\}$ otra recta que pasa por P_1 y es paralela a L.

Como $P_1 \in L_2$, existe un número real q_1 tal que:

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 + q_1\bar{v}$$

Además, L_2 paralela a L implica que $\bar{u} = r\bar{v}$ para algún $r \in R$. De donde:

$$\bar{p}_1 + \bar{u} = \bar{p}_2 + q_1\bar{v} + \bar{u} = \bar{p}_2 + q_1\bar{v} + r\bar{v}$$

$$\bar{p}_1 + \bar{u} = \bar{p}_2 + (q_1 + r)\,\bar{v}$$

Y $\bar{p}_1 + \bar{u} \in L_1 \cap L_2$. Como $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_1 + \bar{u}$ son puntos distintos de $L_1 \cap L_2$, de acuerdo con el teorema 2.1 $L_1 = L_2$.

LEMA 2.2.

Si $L_1 = \left\{ \bar{p}_1 + s\bar{u} \mid s \in R \right\}$ y $L_2 = \left\{ \bar{p}_2 + t\bar{v} \mid t \in R \right\}$ son rectas paralelas, entonces $L_1 \neq L_2$ ó $L_1 \cap L_2 = \emptyset$

DEMOSTRACION.- Suponiendo que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ y que P_o es un punto de $L_1 \cap L_2$; existen números reales s_o y t_o tales que

$$\bar{p}_o = \bar{p}_1 + s_o\bar{u} = \bar{p}_2 + t_o\bar{v}$$

Además, como L_1 y L_2 son paralelas $\bar{u} = r\bar{v}$ para algún $r \in R$, de donde:

$$\bar{p}_o + \bar{u} = \bar{p}_1 + (s_o + 1)\,\bar{u} = \bar{p}_2 + (t_o + r)\,\bar{v}$$

y $\bar{p}_o + \bar{u} \in L_1 \cap L_2$. Como $\bar{p}_o$ y $\bar{p}_o + \bar{u}$ son puntos distintos en L_1 y en L_2 según el Teorema 2.1: $L_1 = L_2$.

Por lo que la única posibilidad que queda es que:

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset$$

2.5 PERPENDICULARIDAD.

Se puede analizar ahora, si on la pirámide del problema planteado que se muestra en la figura 2.1 los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{CE}$, son perpendiculares,

Es condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares, que sus vectores paralelos también lo sean, esto es:

Si para L_1 su vector paralelo es $\bar{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y para L_2, $\bar{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, entonces, para que L_1 sea perpendicular a L_2, se debe cumplir que el producto escalar de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ sea igual a cero, es decir:

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0 \Rightarrow L_1 \perp L_2 \qquad (2.12)$$

Véase la demostración de perpendicularidad entre vectores en el Capitulo 1.

Volviendo al caso de los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{CE}$, se tiene que los vectores $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ son paralelos a L_1 y L_2, rectas que contienen a $\overline{DC}$ y $\overline{CE}$ respectivamente, y son:

$$\bar{u}_1 = \overline{DC} = \bar{c} - \bar{d} = (2,2,0)$$
$$\bar{u}_2 = \overline{CE} = \bar{e} - \bar{c} = (0,-2,6)$$

sustituyendo en la ecuación 2.12 queda:

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = (2,2,0)\cdot(0,-2,6) = 0-4+0 = -4 \neq 0$$

por los tanto, los lados $\overline{DC}$ y $\overline{CE}$ no son perpendiculares.

El alumno debe demostrar que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son perpendiculares y que $\overline{BE}$ y $\overline{AE}$ no lo son.

EJEMPLO

Por condición geométrica el diámetro de una circunferencia y la tangente en un punto en común son perpendiculares. Para las condiciones dadas en la figura 2.7 encuentre las ecuaciones de las rectas que contienen al radio r y a la tangente t.

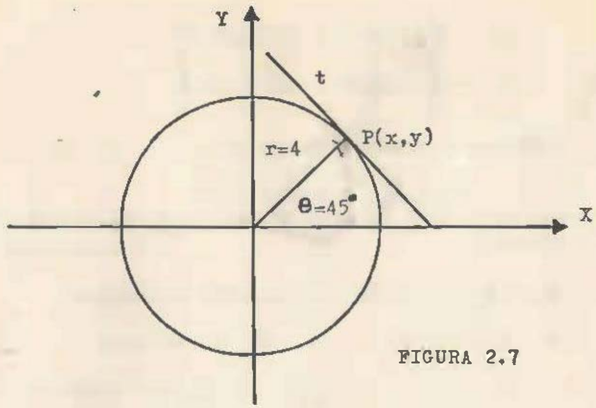


FIGURA 2.7

SOLUCION.

La ecuación de r puede obtenerse de la siguiente manera:

Las coordenadas (x,y) del punto P serán:

$$x = 4\cos 45^\circ = 4\sqrt{2}/2 = 2\sqrt{2}$$

$$y = 4\cos 45^\circ = 2\sqrt{2}$$

por lo tanto, $P = (2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ y un vector paralelo a r, es el vector de posición:

$$\bar{p} = (2\sqrt{2} - 0,\ 2\sqrt{2} - 0) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = \bar{u}_1$$

entonces la ecuación de la recta L_1 que contiene a r es:

$$L_1: \quad \frac{x - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{y - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

Un punto de la recta que contiene a la tangente es también: $P = (2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$, y el vector paralelo $\bar{u}_2$ a la misma manera se obtiene haciendo $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0$

$$(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \cdot (a,b) = 0 \quad ; \quad 2\sqrt{2}\,a + 2\sqrt{2}\,b = 0,$$

como $a = -b$, entonces un vector $\bar{u}_2$ puede ser

$$\bar{u}_2 = (1,-1)$$

finalmente:

$$L_2: \quad \frac{x - 2\sqrt{2}}{1} = \frac{y - 2\sqrt{2}}{-1}$$

2.6. INTERSECCION DE DOS RECTAS.

Aunque en la pirámide mostrada en la figura 2.1, puede notarse fácilmente qué aristas se intersectan, ésto no es tan obvio en todos los casos, por lo tanto y a manera de ejemplo se tratará de demostrar analíticamente que las rectas que contienen a los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{EC}$ se intersectan.

De la definición 2.3 y los lemas 2.1 y 2.2 se tiene el siguiente:

COROLARIO 2.1.

Si las rectas $L_1 = \left\{ \bar{p}_1 + t\bar{u}_1 \mid t \in R \right\}$ y $L_2 = \left\{ \bar{p}_2 + r\bar{u}_2 \mid r \in R \right\}$ no son paralelas, $L_1 \cap L_2$ es vacio o consiste de un solo punto. Esto último implica la intersección de las rectas.

Analizando con más detalle, se tiene que si $\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 \neq 0$, $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ son linealmente independientes, y entonces pueden darse dos casos: que las rectas se crucen y no se intersecten ($L_1 \cap L_2 = \emptyset$), o que exista un punto P_0 de intersección. Para determinar si hay intersección en el punto P_1, considérense las ecuaciones de las dos rectas en forma vectorial e iguálense:

$$\bar{p}_1 + t\bar{u}_1 = \bar{p}_2 + r\bar{u}_2$$

es decir, $$\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = t\bar{u}_1 - r\bar{u}_2$$

Si las rectas se intersectan, el segmento $\bar{p}_2-\bar{p}_1$ depende linealmente de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$, como se vió en la ecuación anterior y se debe cumplir que:

$$(\bar{p}_2-\bar{p}_1) \cdot \bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = t\left[\bar{u}_1\cdot(\bar{u}_1 x\bar{u}_2)\right] - r\left[\bar{u}_2\cdot(\bar{u}_1 x\bar{u}_2)\right]$$

como $\bar{u}_1 x\bar{u}_2$ es un vector perpendicular a $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$, entonces:

$$\bar{u}_1 \cdot (\bar{u}_1 x\bar{u}_2) = \bar{u}_2 \cdot (\bar{u}_1 x\bar{u}_2) = 0$$

por lo que:

$$(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \cdot \bar{u}_1 x\bar{u}_2 = 0 \qquad (2.13)$$

Para la pirámide de la figura 2.1 se demuestra ahora que las rectas que contienen a los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{EC}$ se intersectan.

Las ecuaciones de la recta que contiene al segmento $\overline{DC}$ son:

$$L_1: \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{2}, \quad z = 0$$

Las ecuaciones de la recta que contiene a $\overline{EC}$ son:

$$L_2: \quad \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{6}, \quad x = 3$$

Estas ecuaciones expresadas en forma vectorial tienen la forma:

$$L_1 = \left\{(3,5,0) + t(2,2,0)\right\}$$
$$L_2 = \left\{(3,5,0) + r(0,-2,6)\right\}$$

Aplicando la ecuación (2.13):

$$(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \cdot \bar{u}_1 x\bar{u}_2 = 0$$

Donde:

$$\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = (3,5,0) - (3,5,0) = (0,0,0)$$

$$\bar{u}_1 = (2,2,0) \quad ; \quad \bar{u}_2 = (0,-2,6)$$

$$(\bar{p}_2-\bar{p}_1) \cdot \bar{u}_1 x\bar{u}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto se cortan.

Para encontrar el punto de intersección, considérese las ecuaciones:

$$L_1: \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{2}, \quad z = 0$$

$$L_2: \quad \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{6}, \quad x = 3$$

Las ecuaciones escalares serán:

$$2x - 6 = 2y - 10$$

$$2x - 2y = -4 \qquad \ldots.(1)$$

$$z = 0 \qquad \ldots.(2)$$

$$6y - 30 = -2z$$

$$6y + 2z = 30 \qquad \ldots.(3)$$

$$x = 3 \qquad \ldots.(4)$$

y el sistema de ecuaciones quedará:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 2y &= -4 \\ 6y + 2z &= 30 \\ z &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}\right\} \text{I}$$

Si existe un punto común, debe ea efacer el sistema de ecuaciones I.

$$6 - 2y = -4$$
$$\therefore\ y = 5$$

Y el punto será $P=(3,5,0)$

Teniendo finalmente el punto de intersección - $P_0=(3,5,0)$, que coincide con el punto c, como puede verse en la figura 2.1.

Se deja como ejercicio al lector demostrar oue las rectas que contienen a los segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$ y $\overline{DE}$ se intersectan en el punto E.

EJEMPLO

Dos líneas de conducción eléctrica tienen como ecuaciones respectivamente:

$$\frac{x+20}{10} = \frac{y+30}{-20} = \frac{z+3}{1} \qquad (1)$$

$$\frac{x+20}{-40} = \frac{y+30}{10} = \frac{z+3}{-1} \qquad (2)$$

Se asegura que se cortan, revise si dicha aseveración es cierta y determine dicho punto de intersección:

SOLUCION. A continuación se determinarán las características de cada recta.

De L_1: $P_1(-20,-30,-3)$; $\bar{u}_1=(10,-20,1)$

De L_2: $P_2(-20,-30,-3)$; $\bar{u}_2=(-40,10,-1)$

Entonces, $\bar{P}_2 - \bar{P}_1 = (0,0,0)$

Aplicando la ecuación 2.13, en la que se sustituyen valores queda:

$$(\bar{P}_2-\bar{P}_1)\cdot\bar{u}_1 x\bar{u}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & -20 & 1 \\ -40 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, se concluye que sí se cortan, ahora encontraremos el punto de intereección:

De L_1:

$$-20(x+20) = 10(y+30)$$
$$(x+20) = 10(z+3)$$

Simplificando,

$$20x+10y = -700 \qquad (1)$$
$$x-10z = 10 \qquad (2)$$

De L_2:

$$10(x+20) = -40(y+30)$$
$$-1(x+20) = -40(z+3)$$

Simplificando,

$$10x+40y = -1400 \qquad (3)$$
$$-x+40z = -100 \qquad (4)$$

Haciendo simultáneas las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) se obtiene:

$$P = (-20,-30,-3).$$

2.7 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

Se desea ahora conocer la distancia del punto E, a la recta que contiene al segmento $\overline{DC}$.

> DEFINICION 2.4. La distancia entre una recta y un punto es la longitud del segmento dirigido que va desde el punto a la recta, perpendicular a ésta última.

Así por ejemplo, en la figura 2.8, la distancia entre la recta L y el punto P_1, será la magnitud del segmento dirigido $\overline{P_1M}$, siendo M el pie de la perpendicular a la recta L trazada por P_1. Nótese que la recta L está dada por un punto P_o y un vector $\bar{u}$.

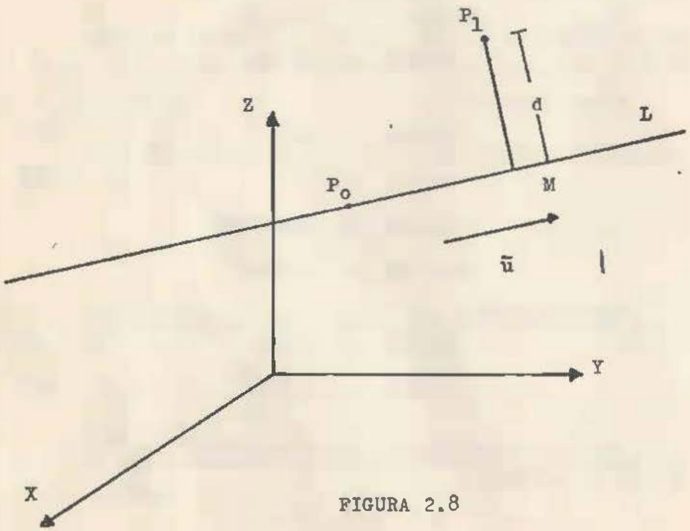


FIGURA 2.8

Para calcular el valor de esta distancia, conviene utilizar un diagrama como el de la figura 2.9 en donde se tiene la recta L, dada por el punto P_o y el vector paralelo $\bar{u}$, un punto P_1 que no pertenece a L, los vectores de posición de $\bar{p}_o$ y $\bar{p}_1$ y el vector diferencia $\bar{p}_1-\bar{p}_o$. De la figura 2.9 se tiene:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\overline{P_1M}|}{|\bar{p}_1-\bar{p}_o|} = \frac{d}{|\bar{p}_1-\bar{p}_o|}$$

es decir:

$$d = |\bar{p}_1-\bar{p}_o|\operatorname{sen}\theta$$

en donde θ es el ángulo entre L y $(\bar{p}_1-\bar{p}_o)$, que es igual al ángulo entre $\bar{u}$ y $(\bar{p}_1-\bar{p}_o)$.

Por otro lado, del capítulo 1, recordamos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|(\bar{p}_1-\bar{p}_o)\times\bar{u}|}{|\bar{p}_1-\bar{p}_o||\bar{u}|}$$

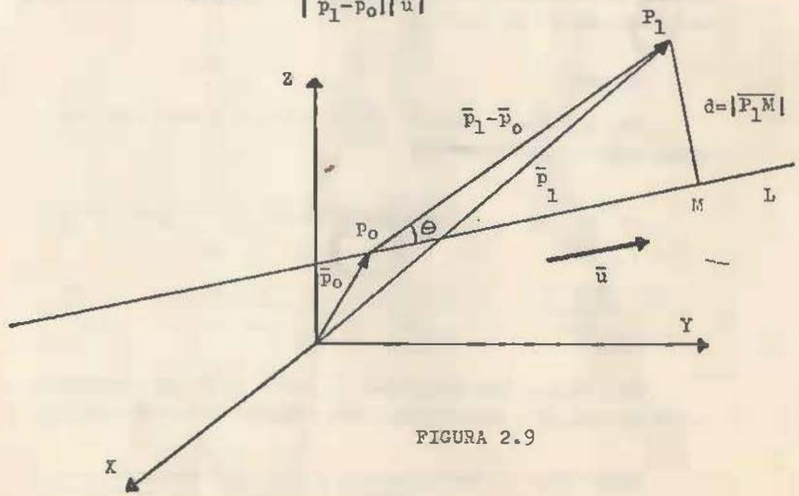


FIGURA 2.9

Sustituyendo esta ecuación en la expresión

$$d = |\bar{p}_1 - \bar{p}_o| \text{ sen } \theta$$

se tendrá:

$$d = |\bar{p}_1-\bar{p}_o| \left[\frac{|(\bar{p}_1-\bar{p}_o) \times \bar{u}|}{|\bar{p}_1-\bar{p}_o||\bar{u}|}\right]$$

Simplificando queda:

$$d = \frac{|(\bar{p}_1-\bar{p}_o) \times \bar{u}|}{|\bar{u}|} \qquad (2.14)$$

Esta ecuación permite calcular la distancia de un punto a una recta.

La distancia entre un punto y una recta también puede calcularse conociendo la componente del vector $\bar{p}_1-\bar{p}_o$ sobre el vector $\bar{u}$, y el vector $\bar{p}_1-\bar{p}_o$, y aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo P_oP_1M. ¿Existirá otra forma de calcular la distancia entre un punto y una recta?.

Volviendo al problema de la pirámide, se puede calcular la distancia del punto E a la recta que contiene al segmento $\overline{DC}$. Partiendo de la ecuación (2.14):

$$d = \frac{|(\bar{p}_1-\bar{p}_o) \times \bar{u}|}{|\bar{u}|}$$

se tiene:

$$\bar{p}_1 = (3,3,6) \quad ; \quad \bar{p}_o = (3,5,0)$$

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_o = (0,-2,6)$$

$$\bar{u} = (2,2,0) \quad ; \quad |\bar{u}| = \sqrt{8}$$

$$d = \frac{|(0,-2,6) \times (2,2,0)|}{\sqrt{8}}$$

$$(\bar{p}_1-\bar{p}_o) \times \bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0-12)i+(12+0)j+(0+4)k$$

$$(\bar{p}_1-\bar{p}_o) \times \bar{u} = -12i + 12j + 4k$$

y $|(\bar{p}_1-\bar{p}_o) \times \bar{u}| = \sqrt{304}$, de donde,

$$d = \frac{\sqrt{304}}{\sqrt{8}} = 6.16 \text{ u.}$$

El lector deberá calcular la distancia del punto A a las rectas que contienen a los segmentos $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$, $\overline{DC}$ y $\overline{BC}$.

EJEMPLO

Calcule la distancia más corta entre una mojonera situada en un punto P_1 (0,3,5), (las unidades son kilómetros), y un tramo recto de carretera, cuyo eje tiene por ecuación:

$$\frac{x-3}{2} = y = \frac{z}{-3}$$

SOLUCION. Para aplicar la ecuación 2.14, son necesarios los siguientes datos:

Un punto de la recta: P_o (3,0,0)

Un vector paralelo a la recta: $\bar{u} = (2,1,-3)$

Las coordenadas del punto P_1 (0,3,5).

Entonces:

$$d = \frac{|(\bar{p}_1-\bar{p}_o) \times \bar{u}|}{|\bar{u}|} = \frac{|(0-3,3-0,5-0) \times (2,1,-3)|}{\left[2^2+1^2+(-3)^2\right]^{1/2}}$$

$$d = \frac{|-14i + j - 9k|}{\sqrt{14}}$$

$$d = \frac{\sqrt{278}}{\sqrt{14}} = 4.456 \text{ Km.}$$

2.8 DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS. Para el problema de la pirámide, calcúlese la distancia más corta entre las rectas que contienen a los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{BE}$.

> DEFINICION 2.5. Se llama distancia entre dos rectas a la mínima longitud entre ambas, medida sobre su perpendicularidad común.

En el espacio de tres dimensiones dos rectas cualesquiera se cortan, se cruzan, o son paralelas. Si se cortan, la distancia entre ambas será igual a cero, si las dos rectas son paralelas, la distancia entre ellas puede obtenerse fácilmente tomando un punto de una de las rectas y calculando su distancia a la otra como se estudió en el inciso 2.7. Si las rectas se cruzan, la distancia entre ambas puede determinarse como se explica a continuación:

Sean L_1 y L_2 dos rectas que se cruzan, como se muestra en la figura 2.10.

La mínima distancia entre L_1 y L_2 estará determinada en la dirección de un vector $\bar{u}$ perpendicular a $\bar{u}_1$ y a $\bar{u}_2$, que a su vez definen las direcciones de L_1 y L_2, respectivamente.

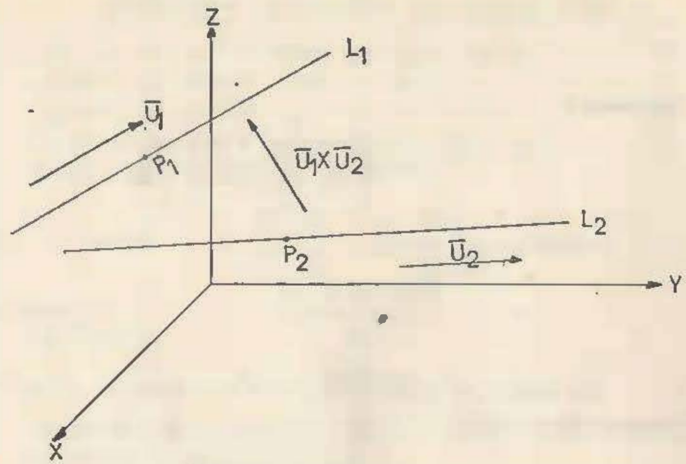


FIGURA 2.10

El vector perpendicular a $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ estará dado por $\bar{u}_1 x \bar{u}_2$, si conocemos además los puntos P_1 y P_2 pertenecientes a L_1 y L_2 respectivamente, la mínima distancia entre las rectas estará determinada por la componente del segmento dirigido $\overline{P_1P_2}$ sobre el vector $\bar{u}_1 x \bar{u}_2$.

Es decir,

$$\boxed{d = \text{Comp}_{\bar{u}_1 x \bar{u}_2} \overline{P_1P_2} = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot (\bar{u}_1 x \bar{u}_2)}{|\bar{u}_1 x \bar{u}_2|}} \qquad (2.15)$$

Ahora se puede conocer otra característica geométrica de la pirámide que es la distancia entre las rectas que contienen a los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{BE}$ cuyas ecuaciones L_1 y L_2, respectivamente son:

$$L_1: \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{2}, \quad z = 0$$

$$L_2: \quad \frac{x-3}{2} = \frac{z-6}{-6}, \quad y = 3$$

(3, 5, 0)

Utilizando la ecuación (2.15), se tiene:

$$d = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot (\bar{u}_1 x \bar{u}_2)}{|\bar{u}_1 x \bar{u}_2|}$$

$$\overline{P_1P_2} = (3-3, 3-5, 6-0) = (0,-2,6)$$

$$\bar{u}_1 = (2,2,0) \quad ; \quad \bar{u}_2 = (2,0,-6)$$

$$\bar{u}_1 x \bar{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (-12+0)i - (-12+0)j + (0-4)k$$

$$\bar{u}_1 x \bar{u}_2 = -12i + 12j - 4k$$

$$\bar{u}_1 x \bar{u}_2 = \sqrt{304}$$

$$\overline{P_1P_2} \cdot (\bar{u}_1 x \bar{u}_2) = (0,-2,6)\cdot(-12,12,-4) = -24 -24 = -48$$

$$\therefore \quad d = \left| \frac{-48}{\sqrt{304}} \right| = 2.752 \text{ u.}$$

EJEMPLO

Los aviones siguen rutas de vuelo llamadas aerovías Las normas de seguridad indican que la distancia mínima entre aerovías para un determinado tipo de avión es de 0.6 Km, si las ecuaciones de un tramo de dos rutas aéreas son:

$$R_1: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z+5$$

$$R_2: \begin{cases} x+5 = 2t \\ y = 4t \\ z+1 = 0 \end{cases} \quad \text{(unidades en km.)}$$

Revise si la distancia entre aerovías es aceptable.

SOLUCION:

Para obtener la distancia mínima se usará la ecuación 2.15:

$$d = \frac{\overline{P_1P_2} \cdot (\bar{u}_1 x \bar{u}_2)}{|\bar{u}_1 x \bar{u}_2|}$$

En este caso:

$P_1 (1,0,-5)$ $\qquad \bar{u}_1 = (2,3,1)$

$P_2 (-5,0,-1)$ $\qquad \bar{u}_2 = (2,4,0)$

Haciendo operaciones:

$$\bar{u}_1 x \bar{u}_2 = (-4,2,2) \quad ; \quad |\bar{u}_1 x \bar{u}_2| = \sqrt{24}$$

$$\overline{P_1P_2} = (-5,0,-1) - (1,0,-5) = (-6,0,4)$$

$$\overline{P_1P_2} \cdot (\bar{u}_1 x \bar{u}_2) = (-6,0,4)\cdot(-4,2,2) = 24 + 8 = 32$$

Sustituyendo en la ecuación 2.15:

$$d = \frac{32}{\sqrt{24}} = 6.532 \text{ Km.}$$

Por lo tanto, son aceptables las rutas de las aerovías.

2.9 FAMILIAS DE RECTAS. Por último, se dará otra característica de las rectas que es la siguiente:

DEFINICION 2.6.

Se llama familia de rectas al conjunto de rectas $\{L\}$, que satisfacen alguna condición geométrica; como puede ser, por ejemplo, que sean paralelas a una dirección dada, que pasen por un punto dado, etc.

A continuación se ilustran algunos casos particulares. Las ecuaciones de la familia de rectas paralelas al eje "Y" son:

$$x = x_0$$
$$y - y_0 = t$$
$$z = z_0$$

Las ecuaciones de la familia de rectas que forman ángulos iguales con los tres ejes coordenados, son:

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0$$

Las ecuaciones de la familia de rectas que pasan por el orígen son:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Las ecuaciones de la familia de rectas que pasan por el punto (3,1,0) son:

$$\frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z}{c}$$

¿Cuales serán las ecuaciones de la familia de rectas de la pirámide que pasan por el punto E(3,3,6) ?.

2.10 ECUACIONES DEL PLANO. Ya se estudió el problema de encontrar una función que determinara la posición de los puntos de una arista de la pirámide y se obtuvo la ecuación de la recta que contiene a dichos puntos, además, se estudiaron algunas propiedades geométricas de la misma.

Ahora interesa encontrar una función que determine la posición de todos los puntos que forman algunas de la caras de la pirámide, por ejemplo: la BEC.

Como datos se conocen las coordenadas de los puntos B, E y C, y a partir de ellos se conocerán las coordenadas de los demas puntos que forman al plano. ¿Como plantear el problema para que eso suceda ?

Se sabe que por dos puntos solo pasa una recta, según se vió en el Teorema 2.1.

Se puede concluir, que la orientación de un plano está determinada por la dirección de un vector perpendicular a él, llamado Vector Normal del Plano, ver figura 2.11.

Pero como puede observarse en la figura 2.12 existe un número finito de planos perpendiculares a una dirección dada, por lo que para definir un plano en particular, se requiere una condición más, y es que se conozca algún punto del plano, como se hizo anteriormente con la recta.

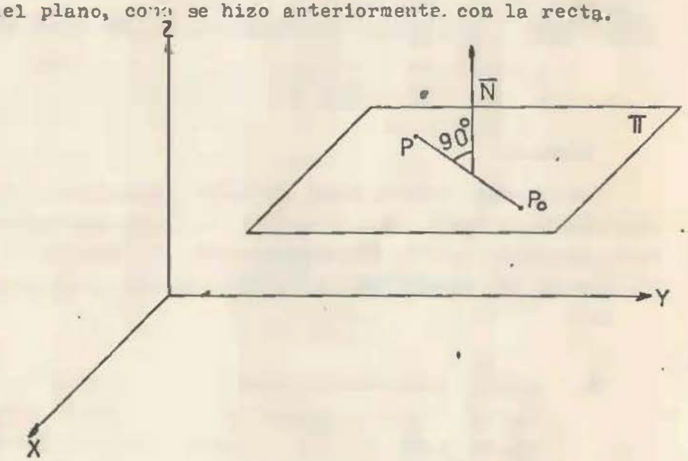


FIGURA 2.11

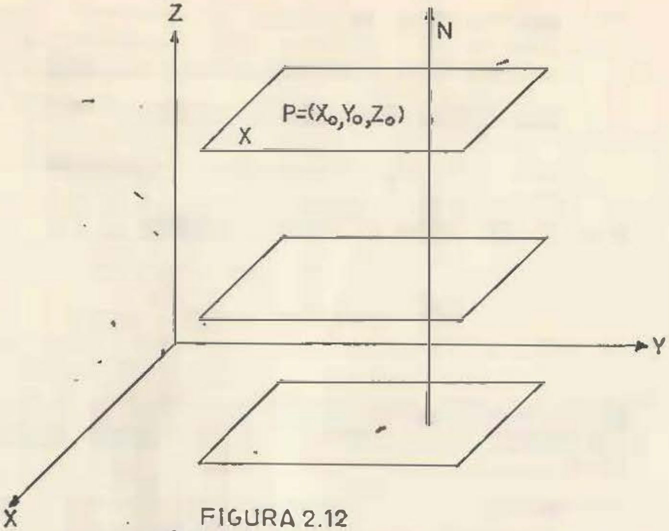


FIGURA 2.12

Por los puntos E y C pasa la recta L_1 y por B y C la recta L_2; por otro lado, se sabe que las rectas quedan definidas por un punto y un vector paralelo a la misma, en este caso por los segmentos dirigidos $\overline{BC}$ y $\overline{BE}$ respectivamente.

Cualquier punto P (x,y,z) del plano formará con uno conocido, un segmento dirigido, por ejemplo: $\overline{BP}$, $\overline{EP}$ ó $\overline{CP}$, dicho segmento siempre será perpendicular al vector $\overline{BC}\times\overline{EC}$ que llamaremos $\overline{N}$, por lo que se puede decir que:

$$\overline{N}\cdot\overline{BP} = 0, \qquad \overline{N}\cdot\overline{EP} = 0 \qquad ó \qquad \overline{N}\cdot\overline{CP} = 0$$

En general, $$\overline{N}\cdot\overline{P_0P} = 0 \qquad (1)$$

La ecuación vectorial (1) representa la condición que deben reunir todos los puntos P contenidos en el plano, más adelante se formalizará tal proposición.

La forma de representar gráficamente la condición (1) se ilustra en la figura 2.11.

Como se comentó anteriormente, el plano BEC está formado por dos rectas que se cortan en el punto B y que son las de las aristas $\overline{BE}$ y $\overline{BC}$, según se vé en la figura 2.13.

En el caso del plano BEC, la ecuación de la recta de la arista $\overline{BE}$ está definida por un vector que se llamará $\bar{u}_1$ paralelo a ella; y para la recta de la arista $\overline{BC}$, por un vector denominado $\bar{u}_2$ paralelo a ésta, y un punto P_0 común a ambas aristas.

El plano BEC, denominado Π queda definido por el conjunto de todos los puntos $\{(P)\}$ cuyos vectores de posición están dados por la siguiente ecuación:

$$\overline{OP} = \overline{OP_0} + \overline{P_0P} \qquad (2)$$

Pero $\quad \overline{OP} = \overline{P} \quad$ y $\quad \overline{OP_0} = \overline{P_0}$

Además $\quad \overline{P_0P} = r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2 \quad \forall \quad s,r \in R$

Sustituyendo en (2) queda:

$$\boxed{\overline{P} = \overline{P}_0 + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2 \quad \forall \quad s,r \in R} \qquad (2.16)$$

Que es la ecuación vectorial paramétrica del plano.

Si $\bar{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$ y $\bar{u}_2=(a_2,b_2,c_2)$ y utilizando la igualdad de vectores, la ecuación (2.16) queda:

$$\left.\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + ra_1 + sa_2 \\ y &= y_0 + rb_1 + sb_2 \\ z &= z_0 + rc_1 + sc_2 \end{aligned}}\right\} \qquad (2.17)$$

Conocidas como las ecuaciones paramétricas del plano.

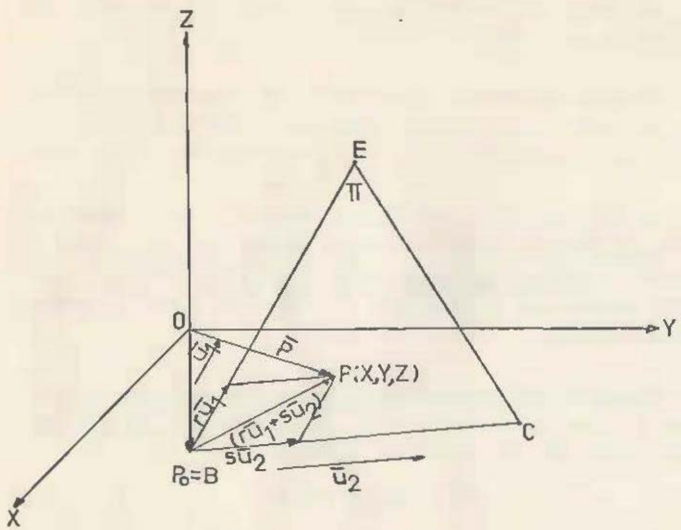


FIGURA 2.13

Como ya se indicó, el vector $\bar{u}_1 x \bar{u}_2$ es un vector normal al plano π y cualquier otro vector normal a π, es paralelo a $\bar{u}_1 x \bar{u}_2$.

Ahora se pueden obtener las ecuaciones paramétricas del plano BEC, de acuerdo a la ecuación 2.16:

$$\bar{P} = \bar{P}_o + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2$$

Siendo:

$\bar{P}_o = \overline{OB} = (5,3,0)$, ver figura 2.13

$\bar{u}_1 = E - B = (3,3,6) - (5,3,0) = (-2,0,6)$

$\bar{u}_2 = C - B = (3,5,0) - (5,3,0) = (-2,2,0)$

Entonces:

$$\bar{P} = (5,3,0) + r(-2,0,6) + s(-2,2,0) \quad \forall \quad r,s \in R$$

Como $\bar{P} = \overline{OP}$

$$\bar{P} = (x-0, y-0, z-0) = (x,y,z)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$(x,y,z) = (5,3,0) + r(-2,0,6) + s(-2,2,0)$$

Por igualdad de vectores, se tiene:

$$x = 5 - 2r - 2s \quad (1)$$

$$y = 3 + 2s \quad (2)$$

$$z = 6r \quad (3)$$

éstas son las ecuaciones paramétricas, aún más, se eliminarán los parámetros r y s para obtener la ecuación escalar del plano.

De (3) $\quad r = z/6 \quad (4)$

sustituyendo (4) en (1) queda

$$x = 5 - \frac{z}{3} - 2s \quad (5)$$

De (2) se tiene:

$$s = \frac{y-3}{2} \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (5):

$$x = 5 - \frac{z}{3} - (y - 3)$$

$$3x + 3y + z - 6 = 0$$

Esta última es la ecuación escalar en forma general del plano.

Aunque el problema de encontrar la ecuación del plano BEC se ha resuelto, no se ha demostrado que las expresiones empleadas son generales, por lo que a continuación se formalizarán los conceptos vistos anteriormente.

TEOREMA 2.2.

Si $\overline{N}$ (A,B,C) es un vector normal al plano π y P_0 (x_0,y_0,z_0) es un punto del plano, entonces una ecuación del plano π es:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

DEMOSTRACION.

$(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$ son las componentes del segmento dirigido $\overline{P_0P}$ donde $P\ (x,y,z)$ es un punto cualquiera del plano, si $P \neq P_0$ todo segmento $\overline{P_0P}$ perteneciente al plano π es perpendicular al vector $\overline{N}$, y por la condición de perpendicularidad de dos vectores, se cumple que:

$$\overline{P_0P} \cdot \overline{N} = 0$$

es decir:

$$\left[(x-x_0),\ (y-y_0),\ (z-z_0)\right] \cdot \left[A,B,C\right] = 0$$

haciendo operaciones, queda:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

L.Q.Q.D.

Recíprocamente, si:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

y $\overline{N}$ es perpendicular al plano π y P_0 está contenido en π entonces $\overline{P_0P}$ es perpendicular a $\overline{N}$ (A,B,C). y por tanto, P pertenece al plano π

Por inspección $P_0(x_0,y_0,z_0)$ satisface la ecuación, de modo que:

$$\left\{(x,y,z)\ \middle|\ A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0\right\} = \pi$$

Nótese que la ecuación:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

puede escribirse también:

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$$

O sea:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

denominada Ecuación escalar en forma general del plano .

Y a la ecuación vectorial: $\overline{P_0P} \cdot \overline{N} = 0$ se le llama ecuación vectorial del plano π .

TEOREMA 2.3

La ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ (Donde A, B, C son no todos cero), representa un plano con vector normal $\overline{N}$ = (A,B,C).

DEMOSTRACION:

Suponiendo que $A \neq 0$, entonces:

$$Ax + By + Cz + D = A(x-(-\frac{D}{A})) + B(y-0) + C(z-0) = 0$$

que por el Teorema 2.2 es la ecuación de un plano que pasa por el punto $(-D/A,0,0)$ y con vector normal $\overline{N}=(A,B,C)$.

Los teoremas 2.2 y 2.3 muestran que una ecuación lineal general de tres variables, es un plano y que un plano tiene la ecuación de esa forma.

LEMA 2.3

Si $\bar{N}$ es un vector normal al plano Π, de ecuación:

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2$$

y P_1 y P_2 son puntos de Π, entonces $\bar{N}$ es perpendicular a $\bar{p}_2 - \bar{p}_1$, donde $\bar{p}_1$ y $\bar{p}_2$ son los vectores de posición de los puntos P_1 y P_2.

DEMOSTRACION:

Si $P_1, P_2 \in \Pi$, entonces debe cumplirse que:

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_0 + r_1\bar{u}_1 + s_1\bar{u}_2 \qquad y$$

$$\bar{p}_2 = \bar{p}_0 + r_2\bar{u}_1 + s_2\bar{u}_2$$

donde $r_1, s_1, r_2, s_2 \in R$

Por lo tanto:

$$\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = (r_2 - r_1)\bar{u}_1 + (s_2 - s_1)\bar{u}_2$$

Efectúese con la ecuación anterior, el producto escalar con $\bar{N}$, queda:

$$\bar{N} \cdot (\bar{p}_2 - \bar{p}_1) = (r_2 - r_1)\, \bar{N}\cdot\bar{u}_1 + (s_2 - s_1)\, \bar{N}\cdot\bar{u}_2$$

puesto que $\bar{N}$ es un vector normal al plano Π y por lo tanto normal a $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ que están contenidos en Π, se cumple que:

$$\bar{N} \cdot \bar{u}_1 = \bar{N} \cdot \bar{u}_2 = 0$$

$$\therefore \qquad \bar{N} \cdot (\bar{p}_2 - \bar{p}_1) = 0$$

y en consecuencia, $\bar{N}$ resulta perpendicular a $\bar{p}_2 - \bar{p}_1$.

LEMA 2.4. Si $\bar{N}$ es un vector perpendicular al plano Π, de ecuación: $\bar{p} = \bar{p}_0 + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2$ r y $s \in R$; y $\bar{p} - \bar{p}_0$ es perpendicular a $\bar{N}$, entonces el punto P, cuyo vector de posición es $\bar{p}$, pertenece al plano Π.

DEMOSTRACION

Dado que $\bar{N}$ es proporcional a $\bar{u}_1 x \bar{u}_2$, si $\bar{P} - \bar{P}_0$ es perpendicular a $\bar{N}$, se tendrá que:

$$(\bar{P} - \bar{P}_0) \cdot (\bar{u}_1 x \bar{u}_2) = 0$$

o bien, ya que esta expresión es un triple producto escalar, se puede anotar como un determinante cuyos elementos son las componentes de los vectores, o sea:

$$(\bar{P} - \bar{P}_0) \cdot (\bar{u}_1 x \bar{u}_2) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante es igual a cero, esto significa que cuando menos dos de sus renglones son iguales o proporcionales y, consecuentemente, que los vectores son linealmente dependientes. Esto permite que se pueda expresar uno de ellos en función de los otros dos, como sigue:

$$(\bar{P} - \bar{P}_0) = r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2$$

donde r y s son escalares cualquiera, siendo cuando menos uno de ellos no nulo.

Si en la ecuación anterior se despeja el vector $\bar{P}$, se tiene:

$$\bar{P} = \bar{P}_0 + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2$$

que es la ecuación del plano Π y por lo tanto, el punto P pertenece a dicho plano, pues P satisface la ecuación.

TEOREMA 2.4

Si $\bar{N}$ es un vector normal al plano Π, cuya ecuación vectorial paramétrica es: $\bar{P} = \bar{P}_0 + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2$, entonces la ecuación vectorial de Π es:

$$\bar{N} \cdot (\bar{P} - \bar{P}_1) = 0$$

y Π es el único plano que pasando por el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ tiene como vector normal a $\bar{N}$.

DEMOSTRACION

Sea un plano Π' distinto de Π cuya ecuación vectorial es:

$$\bar{N}\cdot(\bar{P}-\bar{P}_0) = 0$$

Se desea demostrar, primeramente que $\Pi = \Pi'$ según el lema 2.3 si $P\in\Pi$ entonces $\bar{P}-\bar{P}_0$ es perpendicular a $\bar{N}$ y $\bar{N}\cdot(\bar{P}-\bar{P}_0) = 0$, por lo que si $P\in\Pi$ implica que $P\in\Pi'$ y, por lo tanto, $\Pi\in\Pi'$.

Recíprocamente, si $P\in\Pi'$ implica que $\bar{P}-\bar{P}_0$ es perpendicular a $\bar{N}$ y según el lema 2.4 $P\in\Pi$ y, consecuentemente $\Pi'\in\Pi$, de donde: $\Pi = \Pi'$

Se debe demostrar, además, que Π es el único plano que pasa por P_0 con vector normal $\bar{N}$, para lo cual supóngase que Π', de ecuación $\bar{P} = \bar{P}_0' + r'\bar{u}_1' + s'\bar{u}_2'$, es otro plano que pasa por P_0 y tiene a $\bar{N}$ como normal, entonces Π' tendrá como ecuación vectorial $\bar{N}\cdot(\bar{P}-\bar{P}_0') = 0$

Como $P_0\in\Pi'$, se sigue que $\bar{N}\cdot(\bar{P}_0-\bar{P}_0') = 0$, lo que es igual, $\bar{N}\cdot\bar{P}_0 = \bar{N}\cdot\bar{P}_0'$, de donde: $\bar{N}\cdot(\bar{P}-\bar{P}_0) = \bar{N}\cdot(\bar{P}-\bar{P}_0')$ y por lo tanto, la ecuación $\bar{N}\cdot(\bar{P}-\bar{P}_0) = 0$ representa un plano único, de esta manera queda formalmente demostrado el Teorema.

La ecuación vectorial del plano, $\bar{N}\cdot(\bar{P}-\bar{P}_0) = 0$ puede también anotarse como:

$$\bar{N}\cdot\bar{P} - \bar{N}\cdot\bar{P}_0 = 0$$

y ya que el término $\bar{N}\cdot\bar{P}_0$ de la ecuación es una constante escalar formada por términos dados, se puede escribir esta ecuación como: $\bar{N}\cdot\bar{P} + D = 0$ de donde:

$$D = -\bar{N}\cdot\bar{P}_0 \quad , \text{ como}$$

$$\bar{N} = (A,B,C) \; ; \quad P \ (x,y,z) \quad y \quad P_0 \ (x_0,y_0,z_0)$$

entonces, si: $\bar{P}=(x,y,z)$ y $\bar{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$, sustituyendo las componentes de $\bar{N}$, $\bar{P}$, $\bar{P}_0$ en la ecuación $\bar{N}\cdot\bar{P} - \bar{N}\cdot\bar{P}_0 = 0$ se tiene:

$$(A,B,C)\cdot(x,y,z) - (A,B,C)\cdot(x_0,y_0,z_0) = 0$$

efectuando las operaciones

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

Pero

$$-(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = -\bar{N}\cdot\bar{P}_0 = D$$

si sustituímos esta igualdad en la ecuación anterior se tendrá:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Esta ecuación es la ecuación escalar en forma general del plano Π.

Si se tiene ahora un plano Π determinado por tres puntos no colineales P_0, P_1 y P_2, la normal a dicho plano quedará determinada por

$$\bar{N} = (\bar{P}_1-\bar{P}_0) \times (\bar{P}_2-\bar{P}_0)$$

donde $\bar{P}_0$, $\bar{P}_1$ y $\bar{P}_2$ son los vectores de posición de los puntos P_0, P_1 y P_2 respectivamente, por otra parte, si P es un punto cualquiera perteneciente al plano, se deberá tener que:

$$(\bar{P}-\bar{P}_0)\cdot\bar{N} = 0$$

Sustituyendo el valor de $\bar{N}$ de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\boxed{(\bar{P}-\bar{P}_0) \cdot \left[(\bar{P}_1-\bar{P}_0) \times (\bar{P}_2-\bar{P}_0)\right] = 0} \qquad (2.18)$$

que es la ecuación vectorial del plano que pasa por tres - puntos.

Ahora, si : $\bar{P} = (x,y,z)$, $\bar{P}_0 = (x_0,y_0,z_0)$,
$\bar{P}_1 = (x_1,y_1,z_1)$ y $\bar{P}_2 = (x_2,y_2,z_2)$

y dado que la ecuación es un producto mixto, se puede re-- presentar a dicha ecuación por medio de un determinante, - cuyos elementos son las componentes de los vectores $(\bar{p}-\bar{p}_0)$ $(\bar{p}_1-\bar{p}_0)$, $(\bar{p}_2-\bar{p}_0)$, es decir:

$$(\bar{p}-\bar{p}_0)\cdot\left[(\bar{p}_1-\bar{p}_0)\times(\bar{p}_2-\bar{p}_0)\right] = \begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{bmatrix} = 0$$

Desarrolando este determinante, se obtiene la ecuación escalar del plano en forma general, que como se vió, es del tipo:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Se puede también ahora obtener la ecuación general - del plano BEC por otro procedimiento.

$\overline{BP} = (x-5,y-3,z-0) = \bar{a}$

$\overline{BE} = (3-5,3-3,6-0) = (-2,0,6) = \bar{b}$

$\overline{BC} = (3-5,5-3,0-0) = (-2,2,0) = \bar{c}$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\times\bar{c} = \begin{vmatrix} x-5 & y-3 & z-0 \\ -2 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12(x-5)-12(y-3)-4(z-0) = 0$$

$$-12x -12y -4z +60 +36 = 0$$
$$-12x -12y -4z +96 = 0$$
$$12x +12y +4z -96 = 0$$

Dividiendo entre 4:

$$\boxed{3x + 3y + z - 24 = 0}$$

ecuación del plano BEC obtenida anteriormente.

EJEMPLO

Encontrar la ecuación de la cara AEB de la pirámide.

SOLUCION:

Las coordenadas de los puntos son A (3,1,0), B (5,3,0) y E (3,3,6), de donde:

$\overline{AE} = \bar{a} = (0,2,6)$

$\overline{AB} = \bar{b} = (2,2,0)$

$\overline{AP} = \bar{c} = (x-3,y-1,z)$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\times\bar{c} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ x-3 & y-1 & z \end{vmatrix} = -2z(2) + (2y-2-2x+6)6 = 0$$

$$= -4z + (2y - 2x + 4)6 = 0$$

La ecuación del plano que contiene a la cara AEB de - la pirámide es:

$$12x - 12y + 4z - 24 = 0$$

que dividiendo entre cuatro, queda:

$$\boxed{3x - 3y + z - 6 = 0}$$

EJEMPLO

Un plano Π (ver figura 2.14)se encuentra sometido a- la presión del agua, que actúa perpendicularmente al plano y es representada por el vector $\bar{N} = -2i + 3j - k$. Si el- punto P de aplicación es P (2,-3,-5). Encuentre la ecuación del plano.

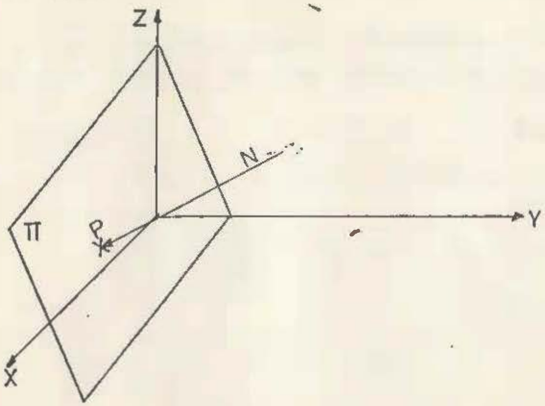


FIGURA 2.14

SOLUCION :

La ecuación vectorial del plano es :

$$\bar{N} \cdot (\bar{p} - \bar{p}_0) = 0$$

sustituyendo valores, queda :

$$(-2,3,-1) \cdot \left[(x,y,z) - (2,-3,-5)\right] = 0$$

$$(-2,3,-1) \cdot (x - 2,\ y + 3,\ z + 5) = 0$$

$$-2(x - 2) + 3(y + 3) - (z + 5) = 0$$

$$-2x + 3y - z + 4 + 9 - 5 = 0$$

$$2x - 3y + z - 8 = 0$$

EJEMPLO

Es fácil encontrar en un campo eléctrico gran número- de puntos con el mismo potencial. A una superficie tal - que todos sus puntos tienen igual potencial se le llama Superficie Equipotencial. Se ha localizada una superficie - plana de este tipo, que contiene a los puntos P_0 (2,1,3), P_1 (-1,0,2) y P_2 (4,-2,1). Encuentre su ecuación.

SOLUCION :

$$\bar{p}-\bar{p}_0 = (x-2,y-1,z-3)$$

$$\bar{p}_1-\bar{p}_0 = (-1-2,0-1,2-3) = (-3,-1,-1)$$

$$\bar{p}_2-\bar{p}_0 = (4-2,-2-1,1-3) = (2,-3,-2)$$

$$(\bar{p}-\bar{p}_0) \cdot \left[(\bar{p}_1-\bar{p}_0) \times (\bar{p}_2-\bar{p}_0)\right] = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x + 8y - 11z + 23 = 0$$

2.12 DISTANCIA DIRIGIDA DE UN PLANO A UN PUNTO.

Una pregunta interesante en el problema de la pirámide, es conocer la distancia mínima que hay del orígen al - plano que contiene a los puntos BEC(ver figura 2.15.)

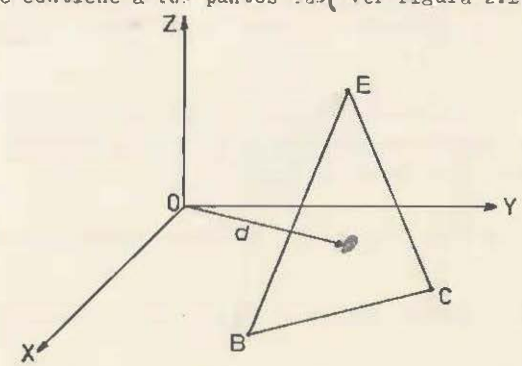


FIGURA 2.15

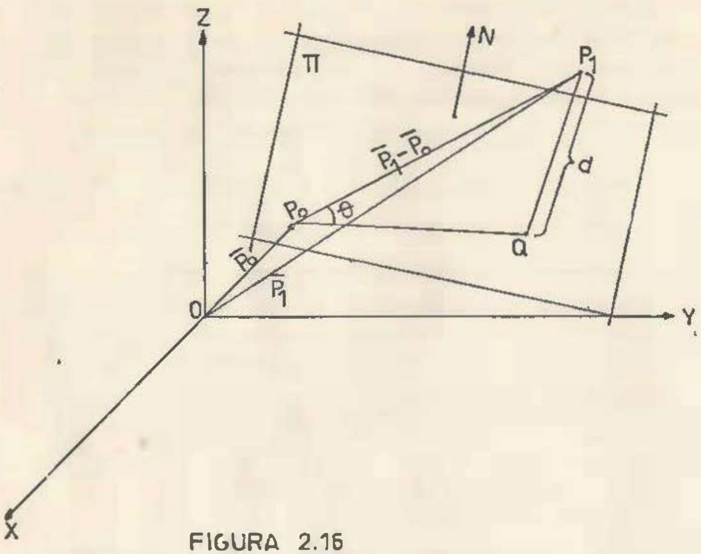


FIGURA 2.16

Se pueden hacer las siguientes consideraciones a partir de la figura 2.16, sea el plano Π, cuya normal es $\bar{N}$ - que pasa por el punto P_o, y sea P_1 (x_1, y_1, z_1) el punto - desde el cual se quiere calcular la distancia mínima al - plano.

Si Q es el punto de intersección con el plano Π del segmento dirigido perpendicular al mismo y que pasa por P_1 la distancia del punto al plano es "d"

Para el cálculo de "d", se tienen varias alternati- - vas:

a).- Calcular la componente de $\bar{p}_1-\bar{p}_o$ sobre $\bar{N}$, es decir:

En el capítulo 1 se vió que:

$$\boxed{\text{Comp}_{\bar{N}}\,(\bar{p}_1-\bar{p}_o) = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_o)\cdot\bar{N}}{|\bar{N}|} = d} \qquad (2.10)$$

Esta ecuación permite calcular la distancia de un plano a un punto.

b).- Utilizando relaciones trigonométricas, con el triángulo P_oQP_1 que es rectángulo en Q, por lo que se tiene:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{d}{|\bar{p}_1-\bar{p}_o|} \quad ; \quad d = |\bar{p}_1-\bar{p}_o|\,\text{sen}\,\theta$$

Pero:

$$\cos(90-\theta) = \text{sen}\,\theta = \frac{(\bar{p}_1-\bar{p}_o)\cdot\bar{N}}{|p_1-p_o|\,|\bar{N}|}$$

Luego

$$d = \frac{|\bar{p}_1-\bar{p}_o|\,(\bar{p}_1-\bar{p}_o)\cdot\bar{N}}{|\bar{p}_1-\bar{p}_o|\,|\bar{N}|} = \frac{(p_1-p_o)\cdot\bar{N}}{|\bar{N}|}$$

c).- Conociendo las coordenadas del punto P_1 y el vector $\bar{N}$ se determina la ecuación de la recta que pasa por P_1 y es- perpendicular a Π. Calculando las coordenadas de Q, el - punto de intersección de la recta y el plano, se determina $|\overline{P_1Q}| = d$.

Empleando cualquiera de las tres alternativas ahora - se calculará la distancia del origen al plano BEC de la pirámide:

DATOS:

$P_1 = (0,0,0)$: $B = P_o = (5,3,0)$

El vector $\bar{N}$ será: $\bar{N} = \overline{BE} \times \overline{BC}$, así

$\bar{N} = (-12,-12,-4)$

$$|\bar{N}| = \sqrt{(12)^2 + (12)^2 + (4)^2} = \sqrt{304} = 24.66$$

Sustituyendo en la ecuación (2.19):

$$d = \frac{(\bar{P}_1 - \bar{P}_0)\cdot \bar{N}}{|\bar{N}|} = \frac{(-5,-3,0)\cdot(-12,-12,-4)}{\sqrt{304}}$$

$$d = \frac{60 + 36}{\sqrt{304}} = \frac{96}{\sqrt{304}} = 3.9$$

EJEMPLO

La posición de un letrero publicitario está representado por la ecuación del plano

$$2x - 3y + 4z - 6 = 0$$

Para estudiar los efectos de luminocidad se necesita conocer la distancia mínima a la que se encuentra un reflector ubicado en el punto (2,3,5).

SOLUCION:

Utilizando la ecuación (2.19), queda:

$$d = \frac{(\bar{P}_1 - \bar{P}_0)\cdot \bar{N}}{|\bar{N}|} = \frac{\bar{P}_1\cdot\bar{N} - \bar{P}_0\cdot\bar{N}}{|\bar{N}|}$$

sustituyendo valores y desarrollando, queda:

$$\bar{P}_1 = (2,3,5) \quad ; \quad \bar{N} = (2,-3,4)$$

$$\bar{P}_1\cdot\bar{N} = 2(2) + 3(-3) + 5(4) = 15$$

$$-\bar{P}_0\cdot\bar{N} = D = -6$$

$$|\bar{N}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$$

$$\therefore \quad d = \frac{15 - 6}{\sqrt{29}} = \frac{9}{\sqrt{29}} = 1.67$$

EJEMPLO

Encontrar la distancia del plano cuya ecuación es:

$$4x - 3y + 2z - 16 = 0$$

al punto A (2,-1,-3).

SOLUCION:

$$\bar{N} = (4,-3,2)$$

$$D = -16$$

Entonces:

$$\bar{N}\cdot\bar{a} = (4,-3,2)\cdot(2,-1,-3)$$
$$= 8 + 3 - 6$$
$$= 5$$

$$y \quad |\bar{N}| = \sqrt{16 + 9 + 4}$$
$$= \sqrt{29}$$

$$\therefore \quad d = \frac{5 - 16}{\sqrt{29}}$$

$$d = -\frac{11}{\sqrt{29}}$$

2.13 RELACIONES ENTRE PLANOS.

2.13.1.- ANGULO ENTRE DOS PLANOS.- Siguiendo con la obtención de las características geométricas de la pirámide, una característica más, es el cálculo del ángulo que forman entre sí dos caras, por ejemplo la AEB con la BEC.

Como se vió anteriormente, se puede calcular un vector normal a cada una de las caras $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$, el ángulo entre los planos es el ángulo entre los vectores normales, como se muestra gráficamente en la figura 2.17.

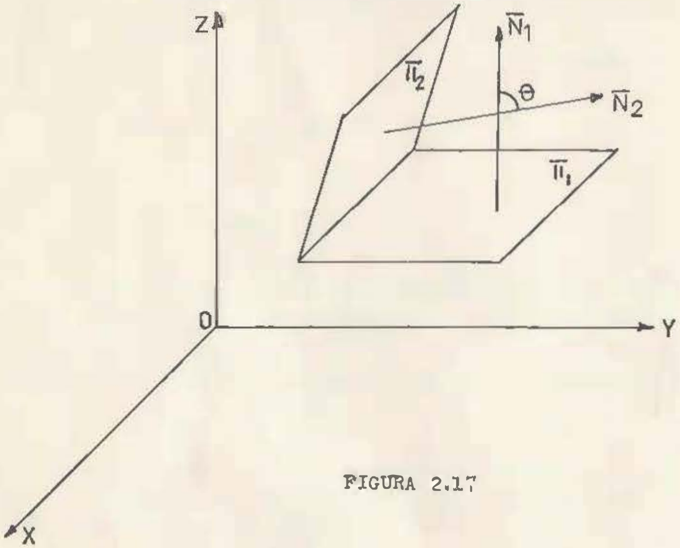


FIGURA 2.17

Y recordando del capítulo 1, que el ángulo entre dos vectores está dado por:

$$\cos \theta = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1|\,|\overline{N}_2|} \qquad (2.20)$$

Se puede calcular el ángulo entre AEB y BEC, empleando la ecuación (2.20).

La normal al plano AEB puede calcularse como sigue:

$$\overline{AE} = (3-3,3-1,6-0) = (0,2,6)$$

$$\overline{AB} = (5-3,3-1,0-0) = (2,2,0)$$

$$\overline{AE} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0-12)i - (0-12)j + (0-4)k$$

$$= -12i + 12j - 4k$$

$$\therefore \quad \overline{N}_1 = (-12,12,-4)$$

Procediendo de la misma manera, se obtiene la normal a la cara BEC:

$$\overline{N}_2 = (-12,-12,-4)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.20):

$$\cos \theta = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1|\,|\overline{N}_2|} = \frac{(-12)(-12)+(12)(-12)+(-4)(-4)}{\sqrt{304}\quad\sqrt{304}}$$

$$= \frac{144 - 144 + 16}{304} = \frac{16}{304}$$

$$\theta = \text{Ang cos}\,(16/304) = 86.98^{\circ}$$

EJEMPLO:

Calcular el ángulo entre los planos:

$\overline{\Pi}_1$: $2x - 2y - 2z + 8 = 0$

$\overline{\Pi}_2$: $-x + 3y - z - 1 = 0$

SOLUCION:

Los vectores normales a $\overline{\Pi}_1$ y $\overline{\Pi}_2$ respectivamente, son:

$\bar{N}_1 = (2,-2,-2)$, $\bar{N}_2 = (-1,3,-1)$

Aplicando la ecuación (2.20):

$$\cos\theta = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1||\bar{N}_2|} = \frac{(2)(-1) + (-2)(3) + (-2)(-1)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2}\ \sqrt{(-1)^2+3^2+(-1)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{-6}{\sqrt{12}\sqrt{11}} = \frac{-6}{\sqrt{132}}$$

$$\therefore \quad \theta = \text{Ang cos} \frac{-6}{\sqrt{132}} = 121^\circ 30'$$

2.13.2. PARALELISMO Y COINCIDENCIA.

Si dos planos son paralelos, sus vectores normales también lo son y por lo tanto:

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = 0$$

$$y \quad \bar{N}_1 = k\,\bar{N}_2$$

Dos planos $\overline{\Pi}_1$ y $\overline{\Pi}_2$ son coincidentes, si además de ser paralelos tienen un punto en común, se puede demostrar que la condición anterior se cumple cuando:

$$\bar{N}_1 = k\,\bar{N}_2 \qquad D_1 = k\,D_2$$

2.14 FAMILIAS DE PLANOS.

A continuación se verán otro tipo de relaciones entre planos:

Si dos planos se cortan definen una recta en su intersección, si son paralelos, la distancia entre ellos puede calcularse tomando un punto de ellos y calculando la distancia dirigida de un plano a un punto, vista anteriormente.

Se ha visto que un mínimo de dos condiciones definen a un plano, por ejemplo, un vector normal $\bar{N}$ y un punto P_0 conocido del plano, si se cumple con una sola de ellas, se origina lo que se llama Familia de Planos.

Planos Perpendiculares a una dirección $\bar{N}$

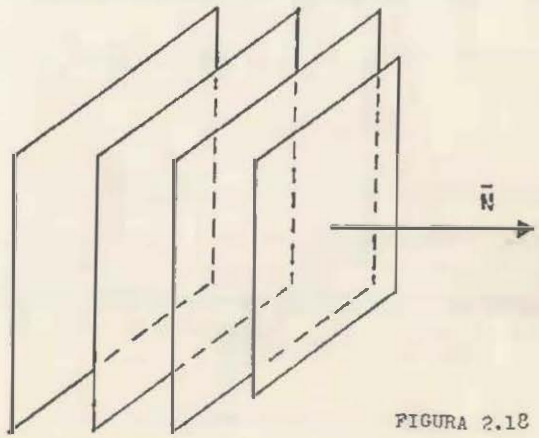


FIGURA 2.18

Planos que pasan por un punto P_0.

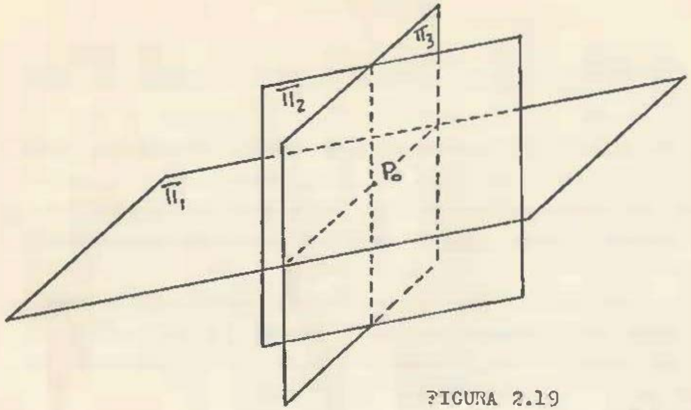


FIGURA 2.19

Las familias de planos también pueden expresarse analíticamente. A continuación se dan algunos ejemplos:

Ecuacion de la familia de planos que pasan por el origen:

$$Ax + By + Cz = 0$$

Ecuación de los planos que contienen al eje Z:

$$Ax + By = 0$$

Ecuación de la familia de planos perpendiculares a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{-3}$:

$$2x + 4y - 3z + d = 0$$

EJEMPLO

Si los planos cuyas ecuaciones son: $2x+3y+z-1 = 0$ y $4x+By+Cz-8 = 0$ son paralelos ¿Cuales son los valores de B y C ?.

SOLUCION:

$\overline{N}_1 = k\,\overline{N}_2$

$(2,3,1) = k\,(4,B,C)$ de donde:

$2 = 4k$; $k = 1/2$

Entonces:

$3 = (1/2)\,B$; $B = 6$

$1 = (1/2)\,C$; $C = 2$

EJEMPLO

Si los planos cuyas ecuaciones son: $2x+3y+z-1 = 0$ y $x-4y+Cz-20 = 0$, son perpendiculares, encontrar el valos de C..

SOLUCION:

$\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0$

$(2,3,1) \cdot (1,-4,C) = 0$; $2 - 12 + C = 0$

$$C = 10$$

EJEMPLO

Hallar la ecuación del plano que pasa por el orígen y es perpendicular a la intersección de los planos cuyas ecuaciones son:

$$\overline{\Pi}_1 : \quad 2x + 4y - 6z + 7 = 0$$

$$\overline{\Pi}_2 : \quad x - 2y + 5z - 3 = 0$$

SOLUCION:

La recta de intersección de los planos $\overline{\Pi}_1$ y $\overline{\Pi}_2$, será perpendicular a $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$ ya que dicha recta pertenece a ambos planos; en consecuencia, para encontrar la dirección de la recta se debe efectuar el producto $\overline{N}_1 x \overline{N}_2$:

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 8i - 16j - 8k = (8,-16,-8)$$

como el plano pasa por el orígen, se tiene que:

$$D = 0 \,, \quad \therefore \quad 8x - 16y - 8z = 0$$

es la ecuación del plano perpendicular a Π_1 y Π_2.

EJEMPLO

Encontrar las ecuaciones de la recta de intersección entre los planos Π_1 y Π_2 del ejemplo anterior.

SOLUCION:

Resolviendo el sistema de ecuaciones de Π_1 y Π_2 dado en el ejemplo anterior, se obtiene $r_A = r_B = 2$, es compatible indeterminado. Escogiendo dos ecuaciones y haciendo $z=0$ en las dos ecuaciones, se llega al siguiente sistema compatible determinado:

$$2x + 4y = -7$$
$$x - 2y = 3$$

Resolviendo el sistema:

$$y = -\frac{13}{8} \,, \qquad x = -\frac{1}{4}$$

Un punto de la recta será:

$$P_o\ (-1/4, -13/8, 0)$$

Con las coordenadas de un punto y la dirección obtenida en el ejemplo anterior, la ecuación de la recta es:

$$t = \frac{x + 1/4}{8} = \frac{y + 13/8}{16} = \frac{z}{-8}$$

2.14.1 RECTA, INTERSECCION DE DOS PLANOS.

Como se vió en el ejemplo anterior, si dos planos se cortan, el lugar geométrico de la intersección es una recta.

A continuación se obtendrá la expresión general. Sean dos planos:

$$\Pi_1 : \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\Pi_2 : \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

sus normales son respectivamente:

$$\bar{N}_1 = (A_1, B_1, C_1) \quad \text{y} \quad \bar{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

La recta intersección L está contenida en Π_1 y Π_2 por lo que es perpendicular a $\bar{N}_1$ y $\bar{N}_2$, entonces el vector $\bar{u}$ que define la dirección de L está dado por:

$$\bar{u} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \bar{u} = (B_1C_2 - C_1B_2)i + (A_2C_1 - A_1C_2)j + (A_1B_2 - A_2B_1)k$$

Para determinar a la recta L, se requiere además del vector $\bar{u}$, un punto P_o, dicho punto debe estar contenido en Π_1 y Π_2 por lo que se hacen simultáneas las ecuaciones como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= -D_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

para determinar si el sistema tiene solución se obtienen los rangos de las matrices A y B:

$$A, B = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{bmatrix}$$

como los planos se cortan y no son paralelos $\bar{N}_1 \neq k\bar{N}_2$ y los rangos de las matrices A y B son iguales a dos; lo que indica que el sistema de ecuaciones (1) es compatible indeterminado de dos ecuaciones con tres incógnitas. Para resolver el sistema (1) se le dará a una de las incógnitas un valor arbitrario, por ejemplo: $z=0$ y se obtendrá el siguiente sistema:

$$A_1x + B_1y = -D_1$$
$$A_2x + B_2y = -D_2$$

resolviendo el sistema queda:

$$x_o = \frac{-D_1B_2 + D_2B_1}{A_1B_2 - B_1A_2}$$

$$y_o = \frac{-A_1D_2 + A_2D_1}{A_1B_2 - B_1A_2}$$

$$z_o = 0$$

Conocidos $P_o(x_o, y_o, z_o)$ y $\bar{u}$ se obtiene la ecuación de la recta como sigue:

$$\frac{x - \dfrac{-D_1B_2 + D_2B_1}{A_1B_2 - B_1A_2}}{B_1C_2 - C_1B_2} = \frac{y - \dfrac{-A_1D_2 + A_2D_1}{A_1B_2 - B_1A_2}}{A_2C_1 - A_1C_2} = \frac{z}{A_1B_2 - B_1A_2}$$

EJEMPLO

Encontrar la distancia entre los planos paralelos cuyas ecuaciones son:

$$\Pi_1 : \quad x + 2y - z + 8 = 0$$
$$\Pi_2 : \quad 2x + 4y - 2z + 4 = 0$$

SOLUCION:

La distancia entre los planos, puede calcularse de un punto de Π_2 a Π_1, para obtener un punto de Π_2 se pueden igualar x e y a cero; como se muestra a continuación:

$$x = y = 0$$
$$\therefore \quad z = 2$$

$P_1 = (0,0,2) \in \Pi_2$, Entonces:

$$d = \frac{\bar{N} \cdot \bar{P}_1 + D}{|\bar{N}|} = \frac{(1,2,-1) \cdot (0,0,2) + 8}{\sqrt{6}}$$

$$d = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

2.15 RELACIONES ENTRE PLANOS Y RECTAS.

Siguiendo con el problema de encontrar características geométricas de la pirámide de la figura 2.1, a continuación se plantean otras preguntas interesantes como son:

¿Que ángulo forman la arista que une B y E y el plano que forma su base ?.

¿La recta que contiene a los puntos A y E es paralela al plano que contiene a los puntos B, E y C ?.

¿ La recta que pasa por A y B es perpendicular al plano formado por los puntos B, E y C ?.

¿ Cual es el punto de intersección entre la recta que pasa por los puntos A y B y el plano que contiene a los puntos B, E y C ?.

Para poder responder, se plantearán los siguientes modelos matemáticos que dan lugar a los conceptos que a continuación se plantean.

2.14.1 ANGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO.-

DEFINICION.- Se llama ángulo entre una recta y un plano el formado por un vector alojado en la recta, con su proyección sobre el plano.

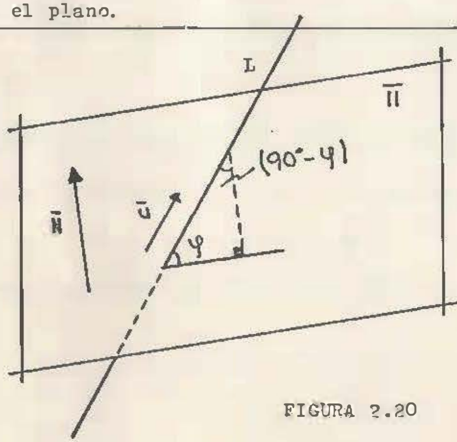


FIGURA 2.20

En la figura 2.20 se tiene: En el plano Π y la recta L, $\bar{N}$ es la normal al plano Π y $\bar{u}$ el vector paralelo a la recta; en la misma figura se observa que el ángulo φ formado por el plano Π y la recta L, es el ángulo complementario del que existe entre los vectores $\bar{N}$ y $\bar{u}$, así se tiene que:

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \frac{\bar{N}\cdot\bar{u}}{|\bar{N}||\bar{u}|} \qquad \text{pero} \quad \cos(90^\circ - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\bar{N}\cdot\bar{u}}{|\bar{N}||\bar{u}|}$$

Por lo tanto:

$$\varphi = \operatorname{ang\,sen} \frac{\bar{N}\cdot\bar{u}}{|\bar{N}||\bar{u}|} \qquad (2.21)$$

Ahora se puede responder a la primera pregunta:

Qué ángulo forma la arista que une B y E con el plano que contiene a los puntos ABCD ?

$$\overline{AB} = (5-3, 3-1, 0-0) = (2,2,0)$$

$$\overline{AD} = (1-3, 3-1, 0-0) = (-2,2,0)$$

$$\overline{AB} \times \overline{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0-0)i - (0-0)j + (4+4)k$$

$$= 8\,k$$

$$\bar{N} = (0,0,8)$$

La ecuación del plano que contiene a los puntos A, B, C y D es:

$$8(z-0) = 0 \quad \therefore \quad z = 0$$

$$\bar{u} = \overline{BE} = (3-5, 3-3, 6-0) = (-2,0,6)$$

por lo que la ecuación de la recta en forma simétrica es:

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{z}{6}, \qquad y = 3$$

Se puede decir entonces que:

$\bar{N} = (0,0,1)$ (Vector normal al plano)

$\bar{u} = (-2,0,6)$ (Vector alojado en la recta L)

Sustituyendo en la ecuación 2.21, queda:

$$\varphi = \text{ang sen } \frac{\bar{N}\cdot\bar{u}}{|\bar{N}||\bar{u}|} = \frac{(0)(-2)+(0)(0)+(1)(6)}{\sqrt{0+0+1}\sqrt{2^2+0+6^2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{40}}$$

$$\varphi = \text{ang sen } \frac{6}{\sqrt{40}}$$

2.14.2 PARALELISMO ENTRE UN PLANO Y UNA RECTA.- La recta L es paralela al plano Π, si y solo si, el vector $\bar{u} = (a,b,c) \in L$ es perpendicular al vector normal, $\bar{N} = (A,B,C) \in \Pi$, es decir:

$$\bar{N}\cdot\bar{u} = 0 \qquad \text{o bién,}$$

$$Aa + Bb + Cc = 0$$

La segunda pregunta puede resolverse ahora:

La ecuación del plano BEC se dedujo anteriormente, y fué:

$$3x + 3y + z - 24 = 0$$

La ecuación de la recta que contiene a $\overline{AE}$ es:

$$\frac{y-1}{2} = \frac{z}{6} \quad ; \quad x = 3$$

Para que la recta y el plano sean paralelos debe cumplirse que $\bar{N}\cdot\bar{u} = 0$, entonces:

$$\bar{N} = (3,3,1) \quad , \quad \bar{u} = (0,2,6)$$

$$\bar{N}\cdot\bar{u} = (3,3,1)\cdot(0,2,6) = 6 + 6 = 12 \neq 0$$

Por lo tanto, no son paralelos.

2.14.3 PERPENDICULARIDAD ENTRE UN PLANO Y UNA RECTA.- Una recta es perpendicular a un plano, sí y solo sí es paralela al vector normal al plano, esto es, si se tiene un plano Π de ecuación:

$$: \; Ax + By + Cz + D = 0$$

y una recta L de ecuaciones:

$$L : \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

L es perpendicular a Π, sí y solo sí:

$$A = ka \qquad B = kb \qquad C = kc$$

La tercera pregunta también puede resolverse:

La ecuación del plano es la misma del caso anterior:

$$3x + 3y + z - 24 = 0$$

Y la ecuación de la recta que contiene a los puntos A y B es:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{2} \quad ; \quad z = 0$$

Entonces debe cumplirse que:

$$A = ka \qquad B = kb \qquad C = kc$$

Si:

$$\bar{N} = (3,3,1) \qquad \bar{u} = (2,2,0)$$

Se puede ver que no existe proporcionalidad entre $\overline{N}$ y $\overline{u}$, por lo tanto, no son perpendiculares.

2.14.4 INTERSECCION ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO.-

Una recta y un plano no paralelos se intersectan en un punto.

Sea P^* el punto de intersección de la recta L con el plano Π, este punto debe satisfacer tanto a la ecuación del plano

$$(P^* - P_0) \cdot \overline{N} = 0 \qquad .....(1)$$

como a la ecuación de la recta L

$$P^* - P_0 = t\,\overline{u} \qquad .....(2)$$

haciendo simultáneas estas ecuaciones obtendrémos el parámetro t que al sustituirlo en (2), nos dá las coordenadas de P^*.

Finalmente, la solución a la cuarta pregunta es:

Ecuación del plano BEC:

$$3x + 3y + z - 24 = 0$$

Ecuación de la recta que contiene a $\overline{AB}$:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{2} \quad ; \quad z = 0$$

En forma vectorial la ecuación de la recta es:

$$L : \quad \overline{p} = (3,1,0) + t(2,2,0)$$

Y la del plano:

$$\overline{p} \cdot (3,3,1) = 24$$

Para que un punto de la recta esté en el plano debe cumplirse:

$$\left[(3,1,0) + (2,2,0)\,t\right] \cdot (3,3,1) = 24$$

Haciendo operaciones:

$$(3 + 2t, 1 + 2t, 0) \cdot (3,3,1) = 24$$

$$9 + 6t + 3 + 6t = 24 \quad ; \quad 12\,t = 12$$

$$t = 1$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta:

$$\overline{p} = (3,1,0) + (1)(2,2,0)$$

$$\overline{p} = (5,3,0)$$

Por lo tanto, $\overline{p} = (5,3,0)$ es el punto de intersección o sea:

$$P \equiv B$$

EJEMPLO

Un proyectil tiene una trayectoria definida por la ecuación:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+1}{2}$$

choca contra un plano de ecuación:

$$6x + 2y - 3z + 11 = 0$$

Calcule el ángulo que forman la trayectoria y el plano.

SOLUCION:

De las ecuaciones se tiene:

$$\overline{N} = (6,2,-3) \quad , \quad \overline{u} = (2,4,2)$$

Aplicando la ecuación 2.21 :

$$\theta = \text{ang sen} \frac{\bar{N}\cdot\bar{u}}{|\bar{N}||\bar{u}|} = \text{ang sen} \frac{(6,2,-3)\cdot(2,4,2)}{\sqrt{36+4+9}\;\sqrt{4+16+4}}$$

$$\theta = \text{ang sen} \frac{12+8-6}{7\sqrt{24}} = 0.408$$

$$= 24.09^{o}$$

EJEMPLO

En un tramo recto del tren metropolitano la ecuación del plano es :

$$y = 0$$

La vía del tren debe ser paralela al mismo, y conservarse a una distancia de 3 m. ¿Cual es la ecuación del eje de la vía si ésta mide 2 m. de ancho ?

SOLUCION :

De las condiciones del problema y con el auxilio de la figura 2.21 se tiene que :

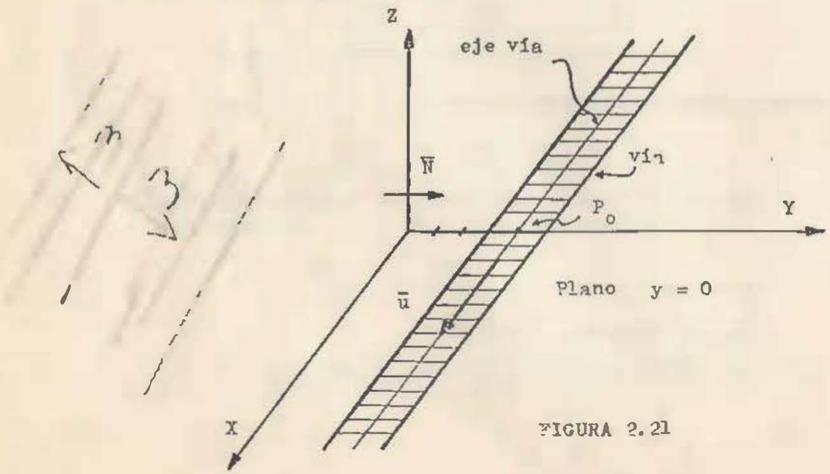


FIGURA 2.21

$\bar{N} = (0,1,0)$

$\bar{u} = (1,0,0)$

$P_o = (0,4,0)$

La ecuación de la recta será entonces :

$$y = 4$$

Comprobación :

$$\bar{N}\cdot\bar{u} = (0,1,0)\cdot(1,0,0) = 0$$

L.Q.Q.D.

EJEMPLO

Un punto material tiene una trayectoria rectilínea que debe ser perpendicular al campo magnético dado por el plano :

$$2x + y + 3z + 2 = 0$$

Si el punto material pasa por el orígen y una de las coordenadas de otro punto A por donde pasa es $x = 4$, Cuál será su ecuación ?

SOLUCION :

Para que el punto material y el campo magnético sean perpendiculares debe cumplirse que :

$\bar{N} = k\,\bar{a}$ pero :

$\bar{N} = (2,1,3)$

Y ūeL es el segmento $\overline{OA}$, por lo tanto :

$\bar{u} = (4,b,c)$

Entonces : $\bar{N} = k\,\bar{a}$

$2 = k\,4$ $\quad 1 = k\,b$ $\quad 3 = k\,c$

De la primera ecuación: $k = \frac{1}{2}$, de donde:

$$b = 2 \qquad y \qquad c = 6$$

$$\therefore \quad \bar{u} = (4,2,6)$$

La ecuación de la recta L que describe la trayectoria es:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$$

EJEMPLO

Un conducto de gas sigue una dirección rectilínea cuya ecuación es:

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$$

se introduce en un muro plano cuya ecuación es:

$$3x + 2y + z + 1 = 0$$

¿Cuál es el punto de intersección ?

SOLUCION:

La ecuación de la recta en forma vectorial es:

$\bar{p} = (-2,-3,-1) + t\,(1,2,3)$ y la del plano:

$$\bar{p} \cdot \bar{N} = -1$$

sustituyendo la ecuación de la recta en la del plano:

$$[(-2,-3,-1) + t\,(1,2,3)] \cdot (3,2,1) = -1$$

$$(-2+t,\ -3+2t,\ -1+3t) \cdot (3,2,1) = -1$$

$$-6 + 3t - 6 + 4t - 1 + 3t = -1$$

$$10\,t = 12$$

$$t = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta:

$$\bar{p} = (-2,-3,-1) + \frac{6}{5}(1,2,3)$$

$$\bar{p} = \left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{13}{5}\right)$$

$\therefore$ P = (-4/5,-3/5,13/5) es el punto de intersección.

V = (1, 2, 3)

N (3, 2, 1)

C A P I T U L O 3

ECUACIONES PARAMETRICAS Y POLARES

3.1 ECUACIONES PARAMETRICAS Y VECTORIAL DE UNA CURVA. Como vimos en el Capítulo 1, la posición de un punto en un Espacio Cartesiano queda definido si conocemos sus coordenadas o las proyecciones de su vector de posición; sin embargo, comúnmente nos interesa determinar la posición de una curva, pero dar una lista de las proyecciones de los vectores de posición ó de las coordenadas de los puntos de ella es una tarea interminable que se puede simplificar si obtenemos una o varias reglas de correspondencia mediante las cuales se logre determinar cualquier punto.

Iniciemos nuestro estudio determinando la curva ó trayectoria que describe un proyectil lanzado hacia arriba con una rapidez inicial de $v_0 = \frac{200}{\sqrt{2}}$ m/seg y que forma un ángulo de 45° con la horizontal (despreciemos el efecto del aire).

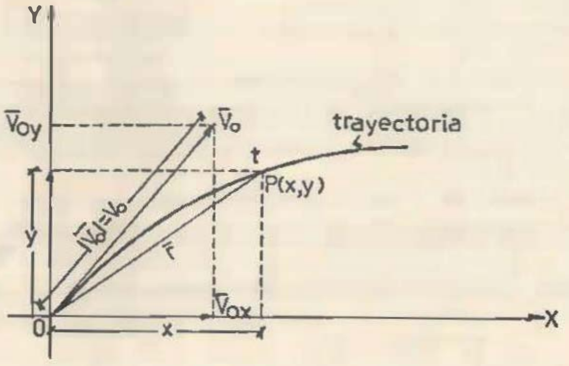


Figura 3.1

1.1 SISTEMAS DE REFERENCIA Y REPRESENTACION GEOMETRICA DE UN PUNTO.

El estudio que se hace en el curso de Matemáticas II, tanto en lo que respecta a Geometría Analítica como a Cálculo Integral, tiene como marco de referencia al Espacio Euclidiano. Este concepto se irá formando a lo largo del presente capítulo. Para llegar a él se estudiarán los conceptos de Punto, Vector, sus operaciones y propiedades que tienen. Con objeto de ejemplificar los sistemas de referencia, consideremos el problema de ubicar los aeropuertos de Torreón y Chihuahua con respecto al Aeropuerto de la Ciudad de México D.F.

La figura 1.1, representa los canales ó rutas de vuelo:

FIGURA 1.1

Como puede observarse, los Aeropuertos se han idealizado como puntos, además se designará al aeropuerto de la Ciudad de México con la letra O (origen de los vuelos), al de Torreón con la letra T y al de Chihuahua con la letra CH.

La primera forma de localizar los puntos T y Cb, a partir de O, es auxiliándonos de una recta que une a los puntos y midiendo la distancia entre O y T y entre T y Cb, llamadas d_1 y d_2, respectivamente, como se muestra en la figura 1.2

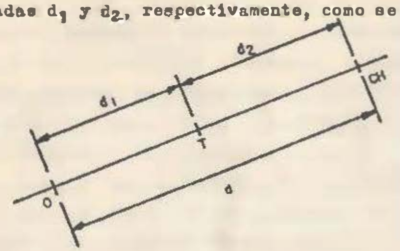


FIGURA 1.2

Con los elementos de esta figura, se define una línea ó eje sobre el que se miden las distancias entre los puntos elegidos, usando una unidad de longitud — determinada.

Como se había establecido, debido a que el Aeropuerto Internacional de la Cd. de México se toma como origen de los vuelos, en el caso idealizado de la figura 2, también se le llamará origen O, a este punto, desde el cual se medirá la distancia d_1, a Torreón (T), y d a Chihuahua (Cb), siendo d_1 y d, dos números reales.

DEFINICION 1.1
Se llama Eje numérico real ó eje real a la línea recta con la propiedad de que a un punto de ella corresponde uno y sólo un número real y recíprocamente, para cada número real existe uno y sólo un punto de ella.

Para trazar un eje real, se dibuja una recta (en general horizontal), y se define arbitrariamente en ella un punto, llamado origen, a partir del cual han de ubicarse los demás puntos. En general el origen es el O, por facilidad como se muestra en la figura 1.3

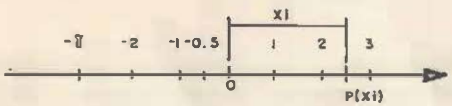


FIGURA 1.3

Asimismo, se toma arbitrariamente un sentido de medición sobre el eje para localizar los valores positivos y el contrario para los valores negativos. En general se toma el positivo a la derecha del origen indicando esto con la punta de la flecha.

Un punto P, queda definido por su distancia (x_1), al origen y el signo, llamada coordenada P (x_1).

Entonces una manera de resolver el problema es determinando las coordenadas de los Aeropuertos de Torreón y Chihuahua, como se muestra en la figura 1.4

FIGURA 1.4

En el eje real se cumplen las siguientes propiedades:

DEFINICION 1.2
Los puntos P (x_1) y Q (x_2), representan el mismo punto en la recta numérica sí y sólo si $x_1 = x_2$, es decir: dos puntos son iguales sí y sólo si sus coordenadas lo son.

DEFINICION 1.3
Las coordenadas de dos puntos pueden sumarse y dan por resultado la de otro punto. Simbólicamente: P (a_1) + Q (a_2) = R $(a_1 + a_2)$.

DEFINICION 1.4
La coordenada de un punto puede multiplicarse por un escalar y el resultado es la coordenada de otro punto. Es decir: k P (a) = P'(k a).

Ejemplo 1.- Sea el punto P (3), si su coordenada se multiplica por el escalar 4 se tiene el punto P' (12), como se muestra en la figura 1.5

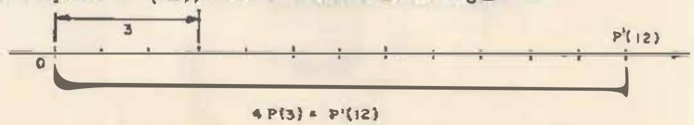


FIGURA 1.5

DEFINICION 1.5

Dos puntos $P(x_1)$ y $Q(x_2)$, son simétricos respecto al orígen si: $x_1 = -x_2$. Es decir, si sus coordenadas son de signo contrario, pero de igual valor absoluto.

En la figura 1.6 se puede ver que el punto $P(x_1)$ es simétrico de $Q(x_2)$ ya que, $|x_1| = |x_2|$, así también $Q(x_2)$ lo es de $P(x_1)$.

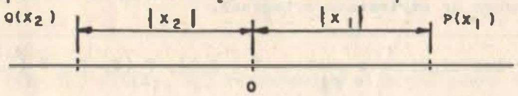


FIGURA 1.6

En este caso la distancia entre $P(x_1)$ y $Q(x_2)$, vale la suma de las distancias al orígen:

Distancia entre $P(x_1)$ y $Q(x_2) = |P(x_1)\,Q(x_2)| = |x_1| + |x_2| = 2|x_1|$, lo cual puede hacerse equivalente a: $P(x_1)\,Q(x_2) = x_2 - x_1 = |(-x_1) - x_1| = |2x_1| = 2x_1$

ó bién: $|P(x_1)\,Q(x_2)| = |x_1 - x_2| = x_1 - (-x_1) = |2x_1| = 2x_1$ que lleva al siguiente Teorema:

TEOREMA 1.1

Sean $P(x_1)$ y $Q(x_2)$ dos puntos con coordenadas x_1 y x_2, la distancia entre ambos puntos $|P(x_1)\,Q(x_2)|$ está dada por:

$$P(x_1)\,Q(x_2) = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

En resumen, un punto queda unívocamente definido por su coordenada en el eje real. Pero ¿queda unívocamente definido el Aeropuerto de Torreón ó el de Chihuahua?

Supóngase que se elige otro origen de vuelos, por ejemplo Monterrey, no necesariamente habrá la misma distancia entre Monterrey y Torreón que entre la Cd. de México y la de Torreón, ya que, Monterrey y Torreón definen un eje real distinto al de la Cd. de México y Torreón.

Entonces, la forma que se empleó hasta ahora para localizar los Aeropuertos no es del todo satisfactoria, es decir que no basta un eje real para definir los puntos de un plano en forma unívoca, como es el caso del plano de rutas de la figura 1.

De esta situación se plantea la siguiente conclusión a partir de la definición de eje real:

DEFINICION 1.6

Los puntos que pertenecen a un eje real forman un conjunto de dimensión igual a 1.

1.2 SISTEMA COORDENADO CARTESIANO EN EL PLANO (E^2)

Con referencia a nuestro problema puede decirse que, el Aeropuerto de Torreón se encuentra a 790 Km. de la Cd. de México, D.F. y el de Chihuahua a 1,180 Km. de distancia del mismo, y que las coordenadas de los Aeropuertos de Torreón y Chihuahua con respecto a un eje real que contenga a los tres y que su origen sea el del Aeropuerto Internacional de la Cd. de México son: O (0), T (790), Ch (1,180).

Además puede calcularse la distancia entre los Aeropuertos de Torreón y Chihuahua como sigue:

$|Ch\,(1{,}180)\;T\,(790)| = |(1{,}180) - (790)| = 390$ Kms.

Sin embargo, como se ha visto, no es suficiente y podría precisarse un poco más si los Aeropuertos se ubican empleando como referencia los ejes cardinales como se muestra en la figura 1.7

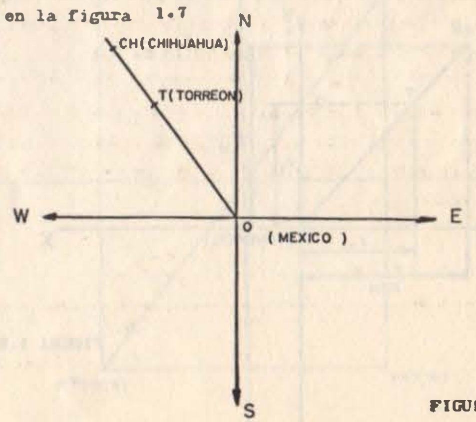


FIGURA 1.7

Este caso lleva a las coordenadas cartesianas estudiadas previamente, que permiten localizar un punto del plano por medio de dos coordenadas: la abscisa, - que por convención se representa sobre el eje horizontal X y la ordenada sobre el eje vertical Y.

Así, para que un punto quede definido en el plano, basta con establecer una pareja de números reales: uno para la abecisa X y otro para la ordenada Y; el punto se denota entonces como P (X,Y).

> DEFINICION 1.7
> La pareja ordenada de números reales (Xo, Yo), corresponde a uno y sólo un punto del plano, que se localiza en la intersección de la recta que pasa por Xo, - paralela al eje Y, con la recta que pasa por Yo, paralela al eje X. en figura 1.8

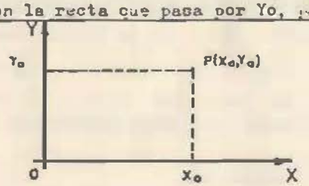


FIGURA 1.8

Con el auxilio de los conceptos anteriores, la ubicación de los Aeropuertos de la Cd. de México, Torreón y Chihuahua, quedan de la siguiente manera. (Fig. 1.9)

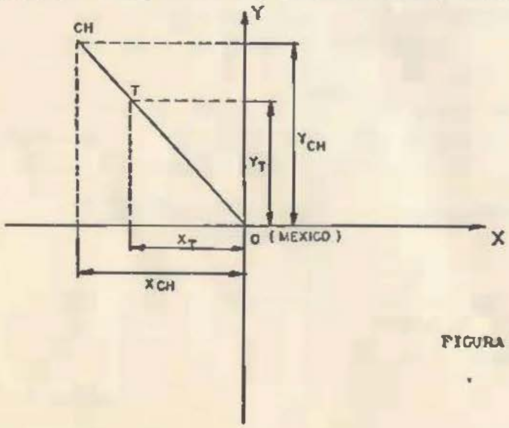


FIGURA 1.9

Entonces las coordenadas de los Aeropuertos serán:

México, D.F. O (0,0)
Torreón T (X_T, Y_T) = T(-449,650)
Chihuahua Ch (X_{Ch}, Y_{Ch}) = Ch (-679,965)

Debido a que en este sistema de referencia los ejes se intersectan a 90°, el sistema recibe el nombre de cartesiano ortogonal.

Ejemplo.- Localizar los siguientes puntos: P (-5,3), P (4,-7), P (1,4), P (1,0)

Solución:

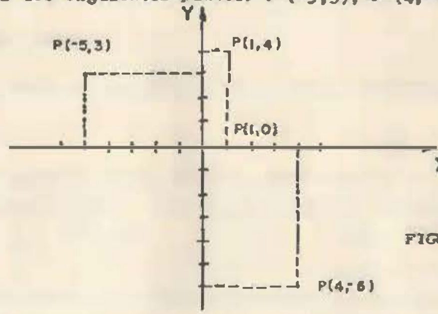


FIGURA 1.10

Es claro entonces, que los puntos sobre el eje X tienen ordenada Cero y son de la forma P (Xo,0) y los del eje Y serán de la forma P (0,Yo).

> DEFINICION 1.8
> Los puntos del plano forman un conjunto de dimensión dos. La explicación es - sencilla, recordando que en la recta real se tiene una dimensión ya que, cada punto P (X), quedaba definido con una sola coordenada, en el caso del plano se tienen dos ejes reales y por lo tanto dos coordenadas para definir un punto y se requiere definir las unidades en el eje de las abscisas y en el eje de las ordenadas, por lo cual son dos coordenadas independientes.

DEFINICION 1.9
Se llama plano real, al plano definido por la intersección de dos ejes reales, de tal modo que a cada pareja ordenada de números reales (Xo,Yo), corresponde uno y sólo un punto del plano, y a cada punto del plano corresponde una y sólo una pareja de números reales.

Las definiciones dadas para el eje real se generalizan fácilmente:

DEFINICION 1.10
Las parejas $P(X_1,Y_1)$ y $Q(X_2,Y_2)$ representan el mismo punto del plano si y — sólo si: $X_1 = X_2$; $Y_1 = Y_2$ o sea : $P(X_1,Y_1)=Q(X_2,Y_2)$ $X_1=X_2$; $Y_1=Y_2$

DEFINICION 1.11
Las coordenadas de dos puntos de un plano pueden sumarse y dan por resultado las de otro punto del plano. Es decir: $P(X_1,Y_1)+Q(X_2,Y_2)=R(X_1+X_2, Y_1+Y_2)$

DEFINICION 1.12
Las coordenadas de un punto del plano pueden multiplicarse por un número real dando como resultado las coordenadas de otro punto del plano:
$K\,P(X_1,Y_1)=T(KX_1,KY_1)$

Ejemplos:

$P(3,4)+P(5,-3)=P(3+5,4-3)=P(8,1)$

$5P(-2,-6)=P(5(-2),5(-6))=P(-10,-30)$

Al definir las unidades de los dos ejes reales (no necesariamente las mismas), que pueden llamarse e_a y e_o (unidad de las abscisas y unidad de las ordenadas respectivamente), entonces puede definirse cualquier punto del plano en función de ellas.

Supongase que tanto e_a como e_o valen 1

Entonces el punto (Xo,Yo), se encuentra midiendo Xo veces la unidad de abscisas y Yo veces la unidad de las ordenadas. Fig. 1.11

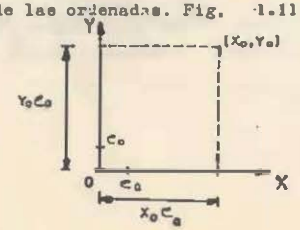


FIGURA 1.11

TEOREMA 1.2
Dados Pa(1,0), Po(0,1), el punto P(Xo,Yo), se encuentra con la expresión:
P (Xo,Yo) = Xo Pa + Yo Po.

Demostración 1.2
Partiendo de la expresión P(Xo,Yo)=Xo Pa+Yo Po y sustituyendo Pa y Po con sus coordenadas: P(Xo,Yo) =XoPa(1,0)+Yo Po (0,1)

Y por la Definición de multiplicación por real y suma de coordenadas se tiene:

P(Xo,Yo) = Pa (1·Xo, 0·Xo) + Pa(0·Yo, 1·Yo)

P(Xo,Yo) = Pa (Xo, 0) + Po (0,Yo)

P(Xo,Yo) = Q(Xo + 0 , 0 + Yo) y finalmente por igualdad de puntos: P (Xo,Yo) = P(Xo,Yo) L.q.q.d.

Un teorema más general se verá en el inciso 1.9, pero, hasta ahora debe quedar claro que definiendo las unidades de abscisa y ordenada se define unívocamente un punto del plano.

Existen algunas propiedades geométricas entre puntos del plano que se verán a continuación :

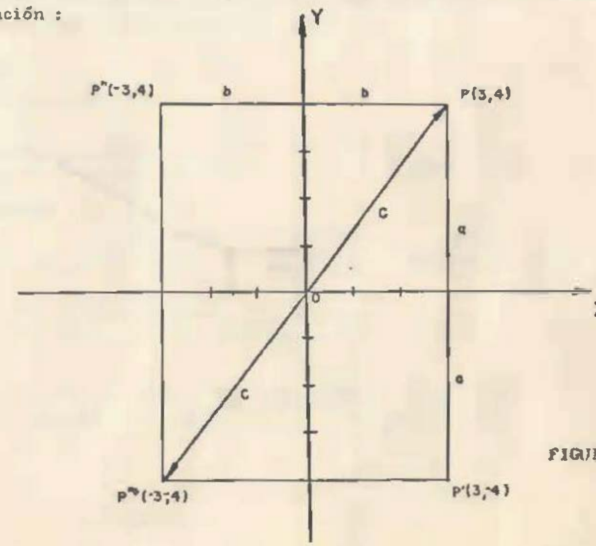


FIGURA 1.12

En la Fig. 1.12 se muestran los puntos P', P'', P''' y P.
Se ve que P' y P tienen las características de estar equidistantes del eje X y que la recta que los une es perpendicular al eje X.

A su vez P'' y P tienen características similares respecto al eje Y.

Finalmente, el segmento de recta entre P''' y P tiene como punto medio al origen del sistema de referencia.

De estas consideraciones salen las siguientes definiciones:

DEFINICION 1.13

a) El punto P (X_o, Y_o) es simétrico de Q (X_1, Y_1), respecto al eje X sí y sólo si $X_o = X_1$, $Y_o = -Y_1$.

b) El punto $P(X_o, Y_o)$ es simétrico de Q (X_1, Y_1), respecto al eje Y sí y sólo si $X_o = -X_1$, $Y_o = Y_1$

c) El punto $P(X_o, Y_o)$ es simétrico de Q (X_1, Y_1), respecto al origen sí y sólo si $X_o = -X_1$, $Y_o = -Y_1$

En la figura 13 se presentan estos tres casos:

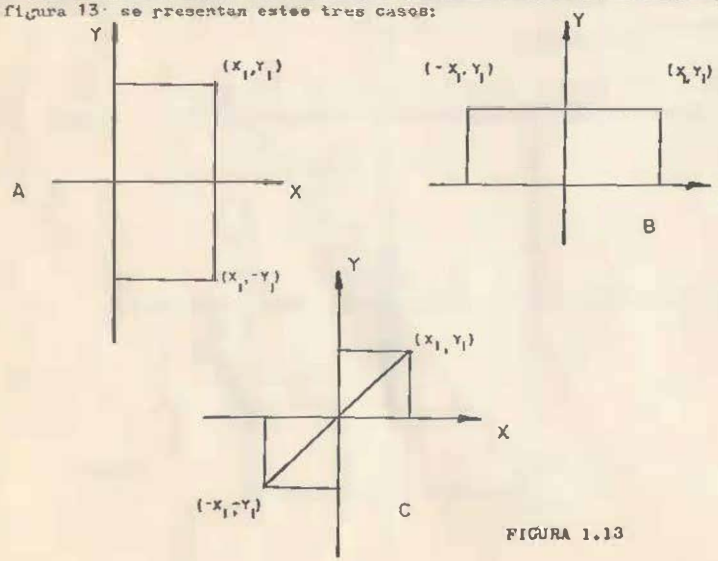


FIGURA 1.13

Por último, la distancia entre dos puntos puede obtenerse fácilmente considerando el problema de obtener la distancia entre P_1 y P_2 ("d"), de la fig. 1.14

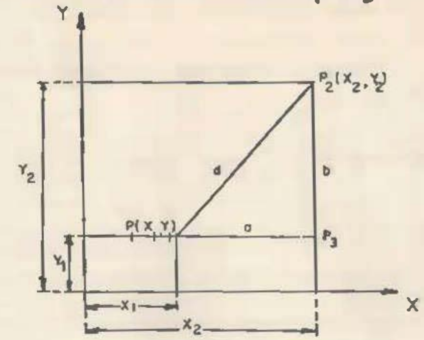


FIGURA 1.14

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo P_1 P_2 P_3:

$$(1)... \quad d = a^2+b^2$$

Obsérvese que "a" es la distancia entre las abscisas de ambos puntos, mientras que "b" es la distancia entre sus ordenadas. Estas distancias a y b se obtienen como se vió en el caso del eje real:

$$a = |X_2 - X_1|$$
$$b = |Y_2 - Y_1|$$

Sustituyendo estos valores en (1):

$$d = \sqrt{(|X_2 - X_1|)^2 + (|Y_2 - Y_1|)^2}$$

en la que pueden eliminarse los signos de valor absoluto pues están elevados al cuadrado, quedando:

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

que es la distancia entre dos puntos del plano.

$$P_1(X_1, Y_1) \text{ y } P_2(X_2, Y_2)$$

Ejemplo Se puede calcular ahora, la distancia entre los Aeropuertos de México a Torreón, a los Mochis y de Torreón a Chihuahua cuyas coordenadas son:

México, D.F.: O (0,0)
Torreón: T (-449,650)
Chihuahua: Ch (-679,965)
Los Mochis: M (-971,670.4)

Por tanto:

La distancia entre los Aeropuertos Internacional de la Ciudad de México y el de Torreón es:

$$d_{M-T} = \sqrt{(650)^2 + (449)^2} = 790 \text{ Km.}$$

La distancia entre los Aeropuertos Internacional de la Ciudad de México y el de Chihuahua es:

$$d_{M-Ch} = \sqrt{(965)^2 + (679)^2} = 1180 \text{ Km.}$$

La distancia entre los Aeropuertos Internacional de la Ciudad de México y Los Mochis es:

$$d_{M-LM} = \sqrt{(-971)^2 + (670.4)^2} = 1180 \text{ Km.}$$

Y la distancia entre los Aeropuertos de Torreón y Chihuahua es:

$$d_{T-Ch} = \sqrt{(965-650)^2 + (679.1 - 449)^2}$$

$$= \sqrt{99225 + 52964.01}$$

$$= 390 \text{ Km.}$$

¿Existe alguna forma de verificar los resultados? ¿Cuál?

EJEMPLO

Encontrar la abscisa del punto $P(x_0,3)$ que se encuentra a 12 unidades de distancia del punto $P(8,-2)$.

SOLUCION:

La distancia es:

$$12 = \sqrt{(x_0-8)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{(x_0-8)^2 + (5)^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$144 = (x_0-8)^2 + 25$$

$$(x_0-8)^2 = 119$$

$$x_0-8 = \pm\sqrt{119}$$

O sea:

$$x_0 = 8 \pm\sqrt{119}$$

Si uno de los puntos es el origen, la expresión (1) se reduce, quedando:

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Distancia del punto $P(x_1,y_1)$ al origen.

Se deja al lector la demostración de esta expresión.

Es fácil comprobar que dos puntos localizados a la misma distancia del origen no son necesariamente coincidentes:

EJEMPLO

Encontrar la distancia de $P(3,4)$ y de $Q(4,3)$ al origen.

SOLUCION:

$$d_1 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = \underline{5}$$

$$d_2 = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = \underline{5}$$

Esto explica como una coordenada cartesiana ortogonal no definió al Aeropuerto de Chihuahua según se presenta en la figura 1.15.

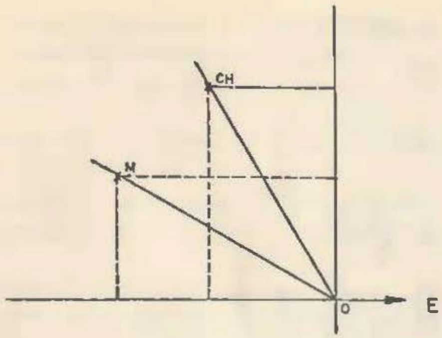


FIGURA 1.15

En cambio las dos coordenadas permiten localizarlo.

En nuestro problema las coordenadas de los Aeropuertos de Chihuahua y Los Mochis son:

Ch (-679,965) y M (-971,670) respectivamente, medidas en un mapa turístico.

1.3 SISTEMA POLAR EN EL PLANO (E^2)

Dos coordenadas ortogonales no son la única forma de definir un punto del Plano. Obsérvese la fig.1.15 donde se trazaron las coordenadas ortogonales y las distancias del origen a los Aeropuertos de Chihuahua y Los Mochis. Aunque ambas distancias son las mismas, se aprecia que los ángulos que forman las rectas que unen al origen con los puntos M y Ch, y el eje E no son los mismos. Es decir, como se ve en la fig. 1.16

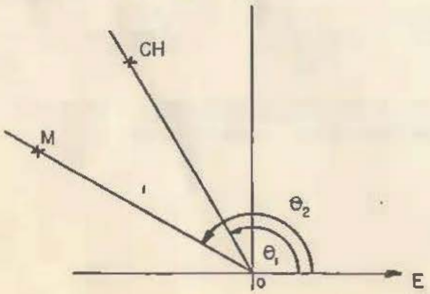


FIGURA 1.16

El Aeropuerto Ch está localizado a 1180 Kms. del origen y con un ángulo θ_1, respecto al eje E ; con ambos datos tampoco hay duda respecto al punto en cuestión.

En la fig.1.16 se vé que la tangente de θ_1 y θ_2 son distintas.

Obtengamos los valores de θ_1 y θ_2 para los Aeropuertos Ch y M.

$$\text{Tan. } \theta_1 = \text{Tan. } (180^\circ - \phi_1) = -\text{Tan. } \phi_1 = \frac{965}{679} = -1.42$$

$$\phi_1 = \text{ang. Tan. } 1.42 \qquad \phi_1 = 54.87^\circ$$

$$\theta_1 = 180^\circ - \phi_1 = 180^\circ - 54.87^\circ \qquad \theta_1 = 125.13^\circ$$

mientras que:

$$\text{Tan. } \theta_2 = \text{Tan. } (180^\circ - \phi_2) = -\text{Tan. } \phi_2 = \frac{670.4}{-971} = -0.69$$

$$\phi_2 = \text{ang. tan. } 0.69 \qquad \phi_2 = 34.62^\circ$$

entonces: $\theta_2 = 180^\circ - \phi_2 = 180^\circ - 34.62^\circ \qquad \theta_2 = 145.38^\circ$

En resumen, el Aeropuerto de Chihuahua queda localizado sin duda alguna a 1180 Kms. del origen (México) y 125.13° respecto al este. Estos valores se conocen como Coordenadas Polares.

DEFINICION 1.14

El Sistema de Coordenadas Polares consiste de una distancia llamada radio ó módulo, medida a partir de un punto fijo llamado polo, y un ángulo ó argumento, medido en sentido contrario a las manecillas del reloj cuando se considera positivo, a partir de un semi-eje real que parte del polo llamado eje polar

DEFINICION 1.15
A la semi-recta perpendicular al eje polar que pasa por el Polo se llama eje Copolar.

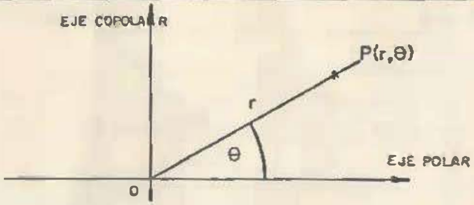


FIGURA 1.17

Asi, a cada pareja de reales (r , θ), con θ en grados o radianes, corresponde uno y sólo un punto del plano, pero el recíproco no se cumple, ya que para un punto, corresponde una infinidad de parejas ordenadas. Esta hecho se debe a que los ángulos θ y θ+ 2π , para toda n ∈ Q(enteros), tienen la misma representación. Es decir:

$$P(r, \theta) = P(r, \theta + 2n\pi), \ n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

De aquí llegamos a lo siguiente:

DEFINICION 1.16
Dos parejas ordenadas $P(r_1, \theta_1)$ y $P(r_2, \theta_2)$ representan el mismo punto del plano polar, si y sólo si $r_I = r_2$ y $\theta_I = \theta_2 + 2n\pi$, donde n es un entero.

Ejemplo: Representar los puntos $P_I(5,30^\circ)$, $P_2(10,\frac{\pi}{2})$, $P_3(3,\pi)$, $P_4(2,225^\circ)$ y $P_5(4, 300^\circ)$.

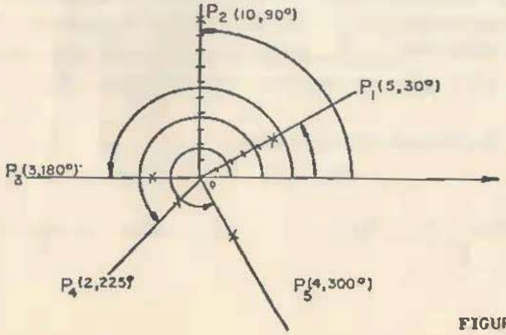


FIGURA 1.18

Por comodidad se usan dos valores del radio y del ángulo con signo positivo sin embargo puede darse el caso en que uno u otro tengan signos negativos, en el caso de ángulos negativos estos serán medidos en sentido horario (el de las manecillas del reloj).

En el caso de radios negativos, consideremos que P (r, θ) y Q (-r, θ) son simétricos con respecto al Polo, por lo tanto una forma de localizar un punto con radio negativo es hallando primero el correspondiente punto con r positivo y luego prolongar la linea que une este punto con el polo una distancia igual, quedando en el extremo de esta ultima el punto buscado.

Puede verse con esto que los puntos dados en la figura 1.19 pueden tener valores diferentes y a pesar de ello representan el mismo punto.

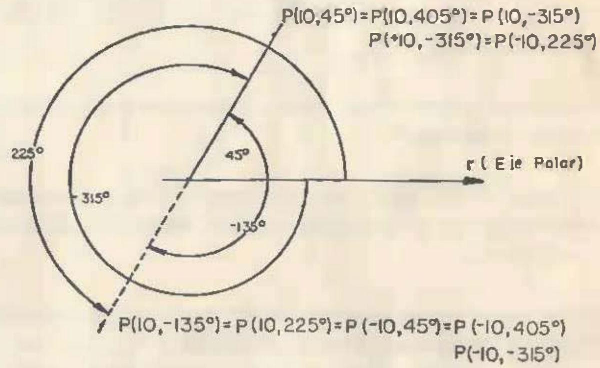


FIGURA 1.19

Si se tienen ángulos negativos, se pueden transformar a positivos con la operación mostrada en la figura siguiente:

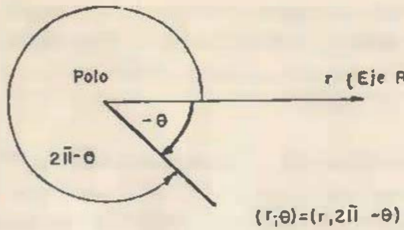


FIGURA 1.20

Ejemplo: Transformar los puntos $P(5,-315^{o})$ y $P(-2, -\frac{\pi}{3})$ a forma positiva:

Solución:

$$P(5,-315^{o}) = P(5,360^{o}-315^{o}) = P(5,45^{o}) = P(5,\frac{\pi}{4})$$

$$P(-2, -\frac{\pi}{3}) = P(-2,2\pi-\frac{\pi}{3}) = P(-2,\frac{5}{3}\pi) = P(2,\frac{5\pi}{3}-\pi) =$$

$$P(2, \frac{2}{3}\pi)$$

El plano polar también cumple algunas propiedades semejantes a las del Plano Cartesiano ortogonal.

Desde luego, también es un plano de dimensión 2, ya que tiene dos coordenadas independientes: un radio y un ángulo, ambas necesarias para definir un punto del plano.

Definidas las unidades, por ejemplo $e_r = (1,0)$ y $e_\theta = (0,1)$, cualquier punto puede escribirse en función de ellas:

$$P(r,\theta) = r\,e_r + \theta\,e_\theta$$, como puede verificarse fácilmente.

Naturalmente la suma de coordenadas y la multiplicación por un real son igualmente válidas y se realizan del mismo modo que con las coordenadas cartesianas.

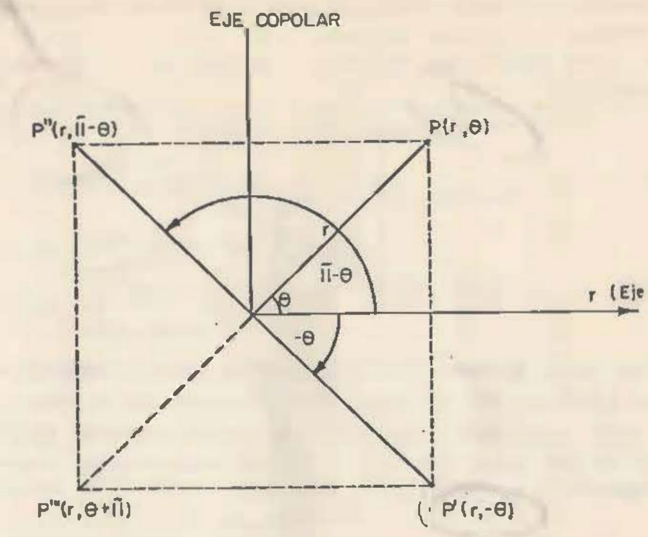


FIGURA 1.21

En la fig. 1.21 se dibujaron los puntos $P(r,\theta)$ y tres puntos simétricos a él en diferentes condiciones. Véase cómo la simetría con el eje polar se logra si el argumento vale menos θ; así $P(r,\theta)$ es simétrico con $P'(r,-\theta)$.

Además se tiene la condición de simetría con el eje copolar, el módulo es el mismo, pero el argumento vale $\pi - \theta$, así $P(r,\theta)$ es simétrico con $P''(r,\pi-\theta)$ y por último se tiene el caso de simetría respecto al polo, donde el argumento vale $\theta+\pi$, así $P(r,\theta)$ es simétrico con $P'''(r,\theta+\pi)$.

De lo anterior se concluye lo siguiente:

DEFINICION 1.17

a) Los puntos $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ son simétricos respecto al eje polar, si $r_1=r_2$ y $\theta_1=-\theta_2$.

b) Los puntos $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ son simétricos respecto al eje copolar si $r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \pi - \theta_2$

c) Los puntos $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ son simétricos respecto al polo, si $r_1 = r_2$ y $\theta_1 = \theta_2 + \pi$

Obsérvese que las condiciones de simetría son suficientes más no necesarias (es decir, no se usó " si y sólo si "), ya que debe recordarse que, a un punto del plano polar corresponden infinitas parejas de reales.

Si se considera que los argumentos están definidos entre 0 y 2π (0° y 360°), entonces las condiciones dadas en la definición además de ser suficientes se vuelven necesarias.

Ejemplo: Encontrar los puntos simétricos de $P\ (4, \frac{3}{4}\pi)$

a) Simetría respecto al eje polar: $P' = P'(4, 2\pi - \frac{3}{4}\pi)$ $P' = P'(4, \frac{5}{4}\pi)$

b) Simetría respecto al eje copolar: $P'' = P''(4, \pi - \frac{3}{4}\pi) = P''(4, \frac{1}{4}\pi)$

c) Simetría respecto al polo: $P''' = P'''(4, \frac{3}{4}\pi + \pi) = P'''(4, \frac{7}{4}\pi)$.

Los resultados están graficados en la fig. 1.22

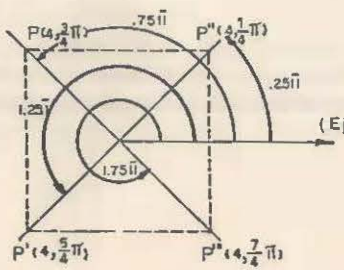


FIGURA 1.22

Ejemplo. Encontrar la simetría de los puntos $P_1(-2, 225^\circ)$ y $P_2(2, -45^\circ)$

Si se transforman a sus coordenadas positivas se tiene:

$$P_1\ (-2, 225^\circ) = P_1(2, 225^\circ - 180^\circ) = P_1(2, 45^\circ) = (2, \pi/4)$$

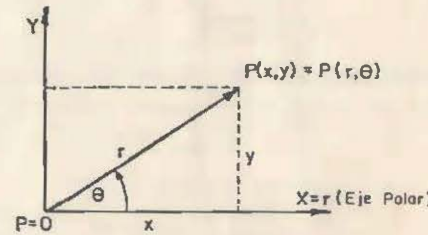
$$P_2\ (2, -45^\circ) = P_2(2, 360^\circ - 45^\circ) = P_2(2, 315^\circ) = (2, 7\pi/4)$$

Ahora, partiendo de la definición de simetría se vé que $r_1 = r_2 = 2$ y que: $\theta_1 = 45^\circ = 360^\circ - 315^\circ = 2\pi - \theta_2$

Por lo que se concluye que ambos puntos son simétricos respecto al eje polar.

Para finalizar esta parte, se verá la relación entre el sistema coordenado cartesiano y el sistema polar.

FIGURA 1.23



En la fig. 1.23 se hicieron coincidir el origen del plano cartesiano (O) con el polo (p) del plano polar y la parte positiva del eje (x) con el eje polar, se dibujó un punto P (x,y) correspondiente con P (r,θ)

Aplicando el Teorema de Pitágoras: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ Además θ se obtiene de la relación entre catetos x,y usando la tangente del ángulo: $\tan \theta = \frac{y}{x}$ y despejando $\theta = \text{ang. tan.} \frac{y}{x}$, obteniendo entonces las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a polares.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \text{ang. tang.} \frac{y}{x}$$

Si se relacionan los catetos con la hipotenusa, usando el seno y el coseno del ángulo θ, se tiene que: $\cos. \theta = \frac{x}{r}$, de donde $x = r \cos.\theta$ y $\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r}$, de donde $y = r\ \text{sen}.\theta$. Obteniéndose las ecuaciones de transformación de coordenadas polares a cartesianas.

$$x = r \cos. \theta$$

$$y = r\ \text{sen}. \theta$$

Esto quiere decir que hay una relación entre las coordenadas cartesianas y polares, como se muestra en el diagrama siguiente:

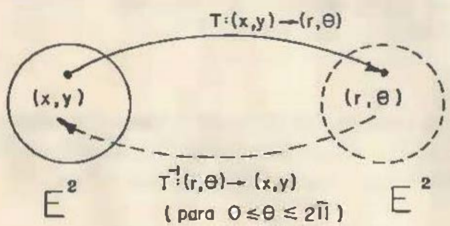


FIGURA 1.24

1.4 SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL EN EL ESPACIO E^3.

Con lo estudiado hasta ahora se han podido ubicar los Aeropuertos de Torreón Chihuahua y Los Mochis con respecto al de México D.F., sin embargo, todo se ha hecho bajo el supuesto de que se encuentran ubicados en un mismo plano.

Esto no es correcto pues, los Aeropuertos de Torreón, Chihuahua y Los Mochis se encuentran a menos elevación sobre el nivel del mar que el Aeropuerto de México D.F.

En adelante consideraremos como plano de referencia o de cota cero al nivel del mar.

A continuación se dan las elevaciones sobre el nivel del mar de cada uno de los Aeropuertos:

México D.F.	2237 m. sobre el nivel del mar
Torreón	1130 m. sobre el nivel del mar
Chihuahua	1360 m. sobre el nivel del mar
Los Mochis	m. sobre el nivel del mar

Bajo esta nueva consideración, se hace necesario introducir una tercera coordenada que relacione las alturas ó cotas, esto es, transportar el problema al espacio de tres dimensiones.

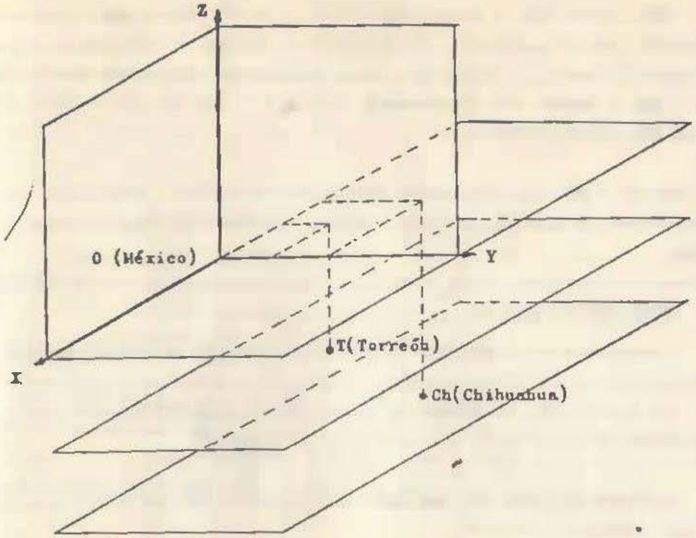


FIGURA 1.25

Como puede observarse en la figura 1.25 Torreón y Chihuahua se ubican en planos distintos.

Se puede simplificar el problema para plantear algunos conceptos básicos, más tarde se abordará nuevamente este problema, para ello se hará uso de la figura 1.26, donde se ha ubicado un punto P.

Un sistema cartesiano ortogonal en el espacio de tres dimensiones requiere la existencia de tres ejes reales perpendiculares entre sí de tal modo, que un punto de este espacio se localiza por medio de tres coordenadas, dos para definir el plano de referencia y una tercera para la cota ó elevación.

Las coordenadas reciben el nombre de abscisas (x), ordenadas (y) y cotas (z). Las abscisas y ordenadas se encuentran en el plano horizontal llamado plano xy, y se cuenta con dos planos verticales, el plano donde se encuentran las abscisas y las cotas (plano xz) y el plano donde se encuentran las ordenadas y las cotas (plano yz). Los planos que acaban de mencionarse reciben nombre de planos cartesianos.

Un punto queda definido por una terna ordenada: P (X_0, Y_0, Z_0), que corresponde geométricamente a la intersección de tres planos paralelos a los planos cartesianos como se tiene en la fig. 1.26

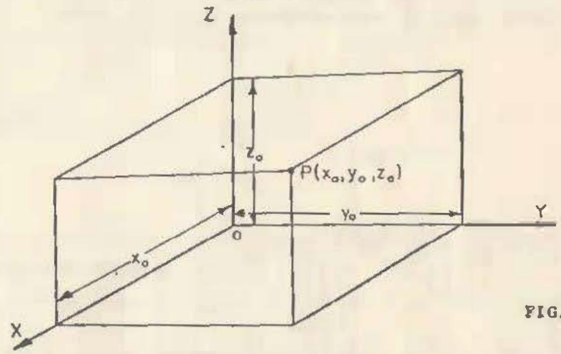


FIG. 1.26

Véase la analogía con la localización de unpunto en el plano (E^2), que se obtenía intersectando dos rectas paralelas a los ejes cartesianos.

DEFINICION 1.18

La terna ordenada de números reales (X_o,Y_o,Z_o) corresponde a uno y sólo un punto del espacio, que se localiza en la intersección del plano que pasa por X_o, paralelo al plano cartesiano YZ, el plano que pasa por Y_o, paralelo al plano cartesiano XZ y el plano que pasa por Z_o, paralelo al plano cartesiano XY.

El sistema recibe el nombre de ortogonal cartesiano, porque los planos cartesianos se intersectan a 90^o y la intersección de dos de ellos definen los ejes mencionados anteriormente.

En las figuras hechas hasta ahora, solo se presenta una parte del espacio, correspondiente a las coordenadas positivas.

En realidad, los tres planos cartesianos dividen al espacio en ocho partes, llamados octantes numerados como se muestra en la fig. 1.27

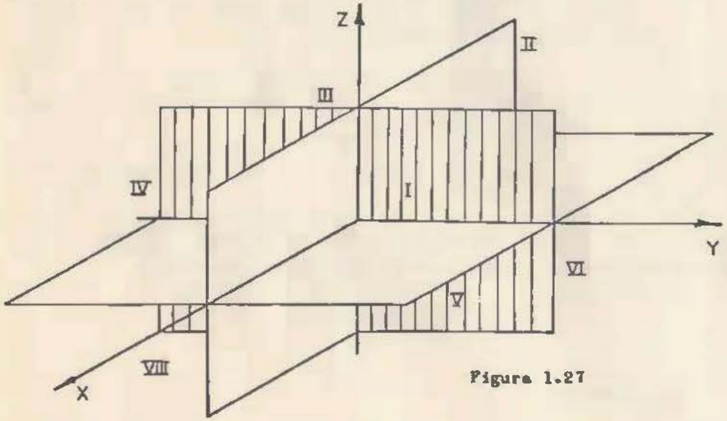


Figura 1.27

Los puntos que se encuentran en el plano XY tienen por coordenadas P(X,Y,0), los del plano XZ, P (X,0,Z), y finalmente los puntos alojados en el plano YZ, P (0,Y,Z). Por otra parte, los puntos que están en el eje X tienen por coordenadas P (X,0,0), los del eje Y, P (0,Y,0) y los del eje Z P (0,0,Z).

Debido a que un punto queda determinado por tres coordenadas distintas, definidas por los tres ejes reales, se tiene la siguiente definición:

DEFINICION 1.19

Los puntos del espacio E^3 definen un conjunto de dimensión tres.

Se recomienda al lector la discusión de esta definición tomando en cuenta lo visto en el eje real y en el plano E^2.

Asimismo se tiene una analogía con las definiciones dadas para el eje real y para el plano E^2.

DEFINICION 1.20

Se llama espacio real de tres dimensiones, al espacio definido por la intersección de tres planos reales, de tal modo que a cada terna ordenada de números reales (x_o,y_o,z_o), corresponde uno y sólo un punto del espacio y a cada punto del espacio corresponde una y sólo una terna ordenada de números reales.

DEFINICION 1.21

Las ternas $P(x_1,y_1,z_1)$ y $P(x_2,y_2,z_2)$, representan el mismo punto del espacio si y sólo si: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ y $z_1 = z_2$; es decir, si y sólo si sus coordenadas respectivas son iguales

$$P(x_1,y_1,z_1) = P(x_2,y_2,z_2)$$

$$x_1 = x_2 \qquad y_1 = y_2 \qquad z_1 = z_2$$

DEFINICION 1.22

Las coordenadas de dos puntos pueden sumarse y dan por resultado las de otro punto del espacio.

Simbólicamente: $P(X_1,Y_1,Z_1) + P(X_2,Y_2,Z_2) = P(X_1+X_2, Y_1+Y_2, Z_1+Z_2)$

DEFINICION 1.23

Las coordenadas de un punto pueden multiplicarse por un número real dando como resultado las coordenadas de otro punto del espacio.

Simbólicamente: $kP(X_1,Y_1,Z_1) = P(kX_1,kY_1,kZ_1)$

La localización de un punto, como ya fué dicho, se obtiene a partir de las unidades de abscisas y ordenadas y cotas como se indica en la fig. 1.28

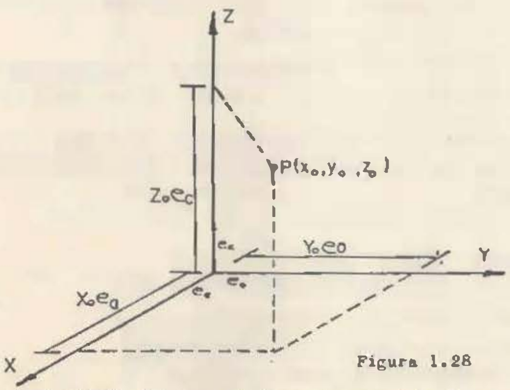


Figura 1.28

Conduciendo al siguiente Teorema similar al caso del plano:

TEOREMA 1.3

Dadas $P_a(1,0,0)$, $P_o(0,1,0)$, $P_c(0,0,1)$, el punto $P(X_o,Y_o,Z_o)$, se encuentra con la expresión: $P(X_o,Y_o,Z_o) = X_oP_a + Y_oP_o + Z_oP_c$

Su demostración semejante al caso del plano se deja al lector.

Las condiciones de simetría de los puntos se pueden ver en la fig. 1.29

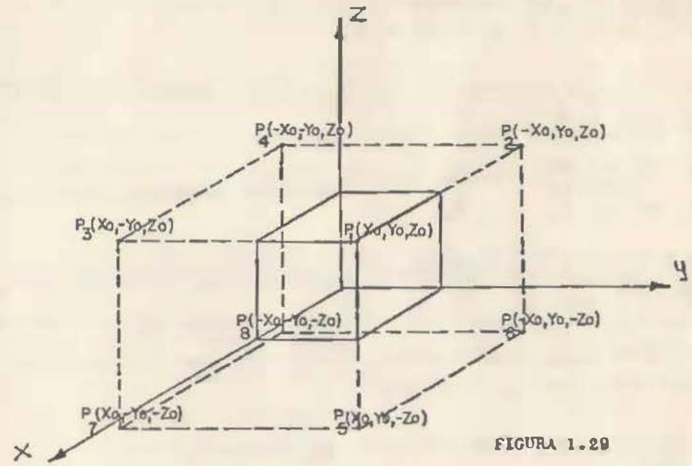


FIGURA 1.29

Se observan claramente las condiciones de simetría de puntos en dicha figura dando las siguientes definiciones:

DEFINICION 1.24

a) El punto $P(X_o,Y_o,Z_o)$ es simétrico a $P(X_1,Y_1,Z_1)$, respecto al plano XY, si y sólo si $X_1 = X_o$, $Y_1 = Y_o$, $Z_1 = -Z_o$.

b) El punto $P(X_o,Y_o,Z_o)$ es simétrico a $P(X_1,Y_1,Z_1)$, respecto al plano XZ, si y sólo si $X_1 = X_o$, $Y_1 = -Y_o$, $Z_1 = Z_o$.

c) El punto $P(X_o,Y_o,Z_o)$ es simétrico a $P(X_1,Y_1,Z_1)$, respecto al plano YZ, si y sólo si $X_1 = -X_o$, $Y_1 = Y_o$, $Z_1 = Z_o$.

d) El punto P (X_o, Y_o, Z_o) es simétrico a P (X_1, Y_1, Z_1), respecto al eje X, si y sólo si $X_1 = X_o$, $Y_1 = -Y_o$, $Z_1 = -Z_o$.

e) El punto P (X_o, Y_o, Z_o) es simétrico a P (X_1, Y_1, Z_1), respecto al eje Y, si y sólo si $X_1 = -X_o$, $Y_1 = Y_o$, $Z_1 = -Z_o$

f) El punto P (X_o, Y_o, Z_o) es simétrico a P (X_1, Y_1, Z_1), respecto al eje Z, si y sólo si $X_1 = -X_o$, $Y_1 = -Y_o$, $Z_1 = Z_o$

g) El punto P (X_o, Y_o, Z_o) es simétrico a P (X_1, Y_1, Z_1), respecto al origen. si y sólo si $X_1 = -X_o$, $Y_1 = -Y_o$, $Z_1 = -Z_o$.

Por lo tanto, para un punto cualquiera en E^3 hay siete posibilidades de simetría con respecto a l sistema de referencia.

Ejemplo. Obtener las coordenadas del punto simétrico a P (3,7,1)

a) Respecto al eje X

B) Respecto al plano YZ

c) Respecto al origen

Solución:

a) Por la condición de simetría respecto al eje X; $X_1 = X_o$, $Y_1 = -Y_o$, $Z_1 = -Z_o$, se concluya que el punto simétrico es $P_{sx}(3,-7,-1)$

b) La condición de simetría respecto al plano YZ es:

$X_1 = -X_o$, $Y_1 = Y_o$, $Z_1 = Z_o$ Por lo que el plano simétrico es:

$P_{s_{yz}}(-3,7,1)$

c) Para tener simetría respecto al origen, se tiene que:

$X_1 = -X_o$, $Y_1 = -Y_o$, $Z_1 = -Z_o$, entonces: $P_s\ (-3,-7,-1)$

Calculemos la distancia entre dos puntos P_1 y P_2 de E^3 a partir de la fig. 1.30

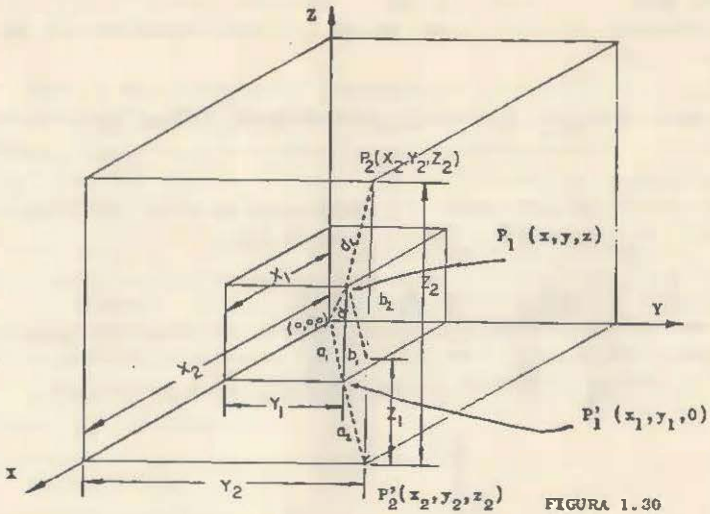


FIGURA 1.30

Primeramente definamos la distancia entre un punto y un plano a la distancia mínima entre los dos, esto es, la distancia medida perpendicularmente del plano al punto.

En base a lo anterior obsérvese que:

a) La distancia de P_1 (X_1, Y_1, Z_1) al plano XY vale $|Z_1|$

b) La distancia de P_1 (X_1, Y_1, Z_1) al plano YZ vale $|X_1|$

c) La distancia de P_1 (X_1, Y_1, Z_1) al plano XZ vale $|Y_1|$

Casos análogos se tienen para el punto $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$

A continuación calculemos la distancia del origen a P_1.

Puede observarse en la figura que, por el teorema de Pitágoras:

$$d_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{\_\_\_\_} \quad (1)$$

Además a_1 es la distancia del origen a la proyección P_1' de P_1 en el plano XY, entonces:

$$a_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \quad \text{\_\_\_\_} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) y observando que: $b_1 = |Z_1|$, se tiene:

$$d_1 = \sqrt{(\sqrt{X_1^2 + Y_1^2})^2 + Z_1^2}$$

Y finalmente:

$$d_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \quad \text{distancia del origen al punto } P_1$$

Nótese la analogía para el caso de la distancia al origen de un punto en E^2

Finalmente calculemos la distancia entre P_1 y P_2 indicada como d_2 en la fig. 1.30.

Aplicando nuevamente el Teorema de Pitágoras:

$$d_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \quad \text{\_\_\_\_} \quad (3)$$

Pero a_2 es la distancia entre los puntos P_1' y P_2' del plano que, como ya se vió vale:

$$a_2 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad \text{\_\_\_\_} \quad (4)$$

Por su parte, $b_2 = |Z_2 - Z_1|$ ____ (5)

Sustituyendo (4) y (5) en (3), tenemos:

$$d_2 = \sqrt{(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2})^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Es decir:

$$d_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

que es la distancia entre P_1 y P_2.

Obsérvese que el nuevo origen del sistema de referencia se encuentra localizado al nivel del mar sobre una vertical que pasa por el Aeropuerto de la Ciudad de México D.F.

Dado que las coordenadas que definen la posición de los Aeropuertos de México D.F., Torreón, Chihuahua y Los Mochis y son como sigue:

O (0,0,2.237)

T (-449,650,1.130)

CH (-679,965,1.36)

M (-971,670.4,

Obsérvese que el nuevo orígen del sistema de referencia se encuentra localizado al nivel del mar sobre una vertical que pasa por el aeropuerto de la ciudad de México D.F.

Con los datos anteriores calculemos lo siguiente:

a).- Distancia entre los Aeropuertos de México D.F. y Torreón:

$$d\,(M\text{-}T) = \sqrt{[0-(-449)]^2 + (0-650)^2 + (2.237-1.13)^2} = 790.0013 \text{ Km.}$$

b).- Distancia entre los aeropuertos de México y Chihuahua:

$$d\,(M\text{-}CH) = \sqrt{[0-(-679)]^2 + (0-965)^2 + (2.237-1.36)^2} = 1179.94 \text{ Km.}$$

c).- Distancia entre los Aeropuertos de Torreón y Chihuahua:

$$d\ (T\text{-}CH) = \sqrt{\left[(-449-(-679)\right]^2 + (650-965)^2 + (1.13-1.36)^2} = 390.032\ \text{Km.}$$

¿Cuáles serán las distancias entre los aeropuertos de Los Mochis y Chihuahua. Los Mochis y Torreón, México y Los Mochis ?

Si además efectúan las operaciones:

$$d\ (M\text{-}CH) = d\ (M\text{-}T) + d\ (T\text{-}CH)$$

¿Qué puedes concluir en forma aproximada respecto a la ubicación de estos Aeropuertos ?

1.5 SISTEMA DE COORDENADAS CILINDRICAS.

Ya se ha visto la forma de localizar un punto en el espacio de tres dimensiones, usando coordenadas cartesianas ortogonales; conviene detenerse a considerar la posibilidad de emplear lo estudiado en coordenadas polares, para localizar puntos en E^3. En la figura 1. 31 se ilustra este caso, para la ubicación de los Aeropuertos.

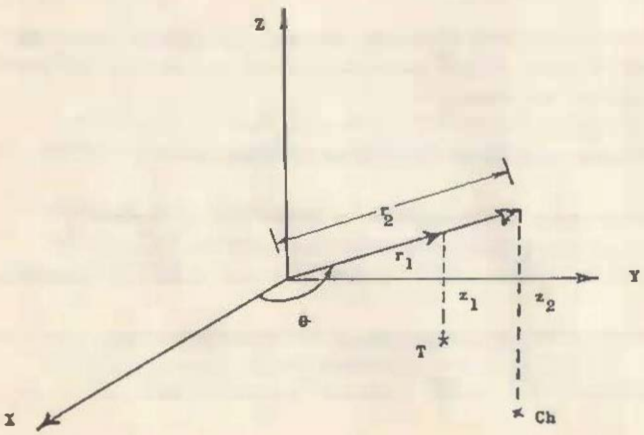


FIGURA 1. 31

Con el objeto de plantear algunos conceptos elementales, puede simplificarse la gráfica como se muestra en la figura 1.32, donde se ha ubicado un punto.

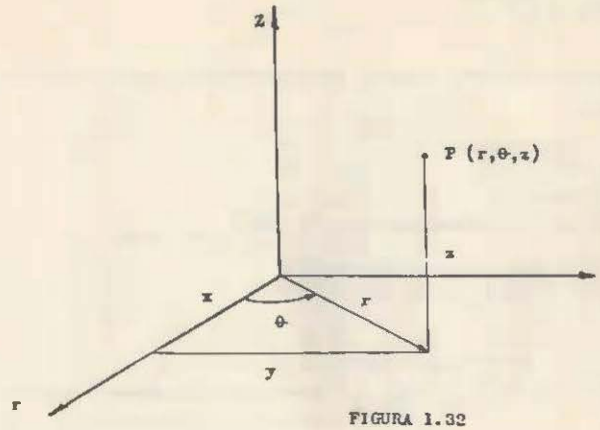


FIGURA 1.32

En la figura 1.40 se han dibujado tres ejes: el eje polar, el eje polar y el eje Z, ó eje de cotas. Como podrá apreciarse, el uso de estas coordenadas es muy simple si se conocen las coordenadas polares y el sistema de referencia cartesiano ortogonal, ya que la coordenada Z no se altera y sólo se transforman las coordenadas del plano XY, cuyas ecuaciones de transformación ya fueron dadas en el inciso de coordenadas polares. Así se tiene el diagrama de la figura 1.33 que representa a esta transformación:

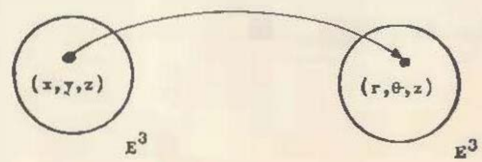


FIGURA 1.33

Este sistema recibe el nombre de cilíndrico, porque el punto P (r,θ,z) se encuentra localizado en la intersección de un cilindro circular recto de radio r, un plano vertical que pasa por el orígen que se ha girado un ángulo θ, respecto al eje X y un plano horizontal Z, como se muestra en la figura 1.34

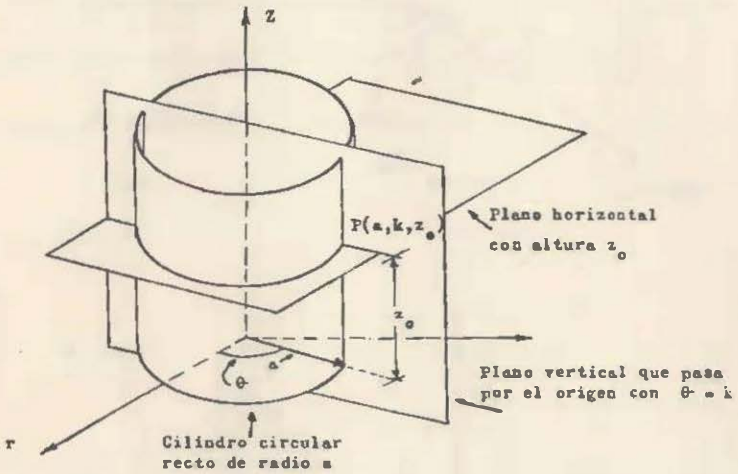


FIGURA 1.34

Ahora se dará la definición del sistema de coordenadas cilíndricas.

> DEFINICION 1.25.- Se llama sistema de coordenadas cilíndricas al sistema de referencia que define a un conjunto de puntos del espacio de tres dimensiones, dado por las ternas P (r_0,θ_0,z_0) que se localizan sobre un cilindro de radio r.

Al igual que con las coordenadas polares, el recíproco no es válido, es decir, a cada punto del espacio no corresponde una y sólo una terna ordenada; recuerdese como un mismo punto tiene infinitas parejas en el sistema polar y éste hecho se traslada íntegramente al espacio E^3.

Es clara la analogía de la forma de definir un punto en el sistema cartesiano ortogonal, respecto al sistema de coordenadas cilíndricas; la diferencia estriba en que para el sistema cartesiano ortogonal se define el punto al intersectarse tres planos paralelos a los cartesianos y ahora se tienen dos planos y un cilindro.

EJEMPLO

Localícense los puntos:

$P_1(3,\pi/4,2)$;

$P_2(5,\pi/2,-1)$;

$P_3(2,\pi,4)$.

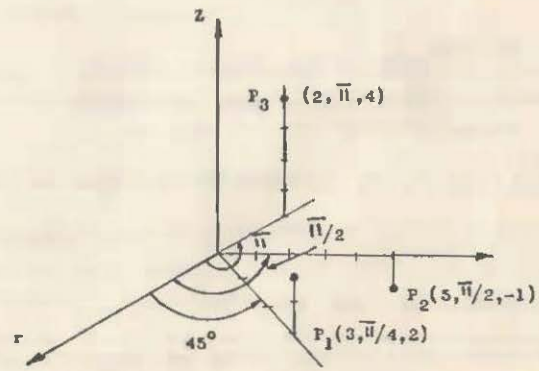


FIGURA 1.35

Apoyándonos en las propiedades del Sistema de Coordenadas Polares se definen las propiedades para el sistema de coordenadas cilíndricas.

IGUALDAD DE PUNTOS.

DEFINICION 1.26 Las ternas ordenadas $P_1\ (r_1, \theta_1, z_1)$ y $P_2\ (r_2, \theta_2, z_2)$, corresponden al mismo punto, si y sólo si:

$$r_1 = r_2 \qquad r_1, r_2 \in R$$

$$\theta_1 = \theta_2 + 2K\pi, \qquad K \in Z$$

$$z_1 = z_2$$

Obsérvese que la definición anterior solo se cumple para valores positivos de r. En el caso de que en la terna ordenada $P\ (r, \theta, z)$ se tenga que $r < 0$, mediante la siguiente transformación se puede convertir a una terna con $r > 0$, como se muestra a continuación:

$$(-|r|,\ \theta\ ,\ z)\ =\ (\ |r|, \theta \pm \pi,\ z)$$

Y ahora si se puede aplicar la definición anterior de igualdad de puntos.

SIMETRIA DE PUNTOS.

DEFINICION 1.27 A. El punto $P_1(r_1, \theta_1, z_1)$ es simétrico al punto $P_2(r_2, \theta_2, z_2)$ respecto al plano $r-\theta$, si y sólo si:

$$r_1 = r_2\ ; \quad \theta_1 = \theta_2 + 2K\pi,\ K \in Z; \quad z_1 = z_2$$

B. El punto $P_1(r_1, \theta_1, z_1)$ es simétrico al punto $P_3(r_3, \theta_3, z_3)$, respecto al eje polar, si y sólo si:

$$r_1 = r_3; \quad \theta_1 = 2k\pi - \theta_3 \forall k \in Z; \quad z_1 = -z_3$$

Las definiciones anteriores se ilustran gráficamente en la figura 1.36

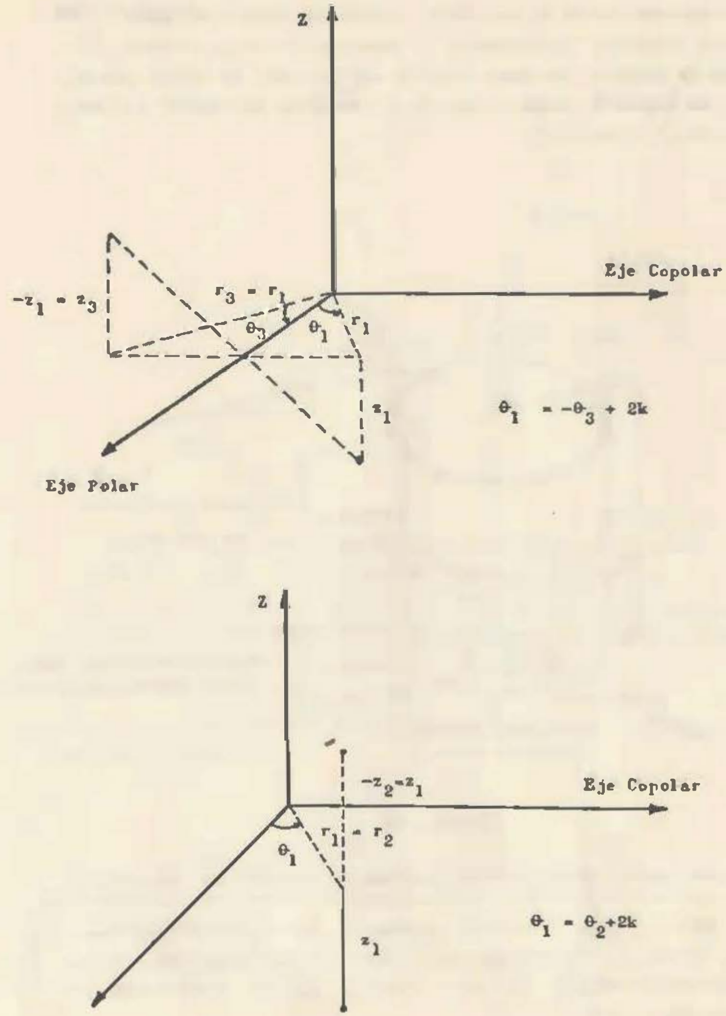


FIGURA 1.36

Si hacemos una analogía entre los sistemas de coordenadas cartesianas y cilíndricas, entonces el espacio comprendido en los octantes, está definido por los siguientes conjuntos:

$A_1 = \{ (r,\theta,z) / \; 0 \leq r < \infty, \; 0 \leq \theta \leq \pi/2, \; 0 \leq z < \infty \}$ Primer Octante

$A_2 = \{ (r,\theta,z) \mid \; 0 \leq r < \infty, \; \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \; 0 \leq z < \infty \}$ Segundo Octante

$A_3 = \{ (r,\theta,z) \mid \; 0 \leq r < \infty, \; \pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi, \; 0 \leq z < \infty \}$ Tercer Octante

Etc.

¿Cuál será la representación de los demás octantes ?

Resumiendo las ecuaciones de transformación:

DATOS	INCOGNITAS
$P(x,y,z)$	$\theta = \text{ang tan}(y/x)$
	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
	$z \equiv z$
$P(\rho,\theta,z)$	$x = \rho \cos \theta$
	$y = \rho \,\text{sen}\, \theta$
	$z \equiv z$

Hagamos algunos ejercicios de aplicación.

Determinar las coordenadas cilíndricas de $A(1,1,1)$ dado en coordenadas cartesianas

$$\theta = \text{ang tan } 1/1 = 45° = \pi/4$$

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \quad P(\sqrt{2}, \pi/4, 1)$$

Determinar las coordenadas cartesianas de $B(4, \frac{5}{6}\pi, 3)$ dadas las - coordenadas cilíndricas.

$$x = 4 \cos(5/6\pi) = -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$y = 4 \,\text{sen}\,(5/6\pi) = 4(1/2) = 2 \; ; \qquad z \equiv z$$

$$\therefore \quad B(-2\sqrt{3}, 2, 3)$$

Pueden ahora obtenerse las coordenadas cilíndricas de los Aeropuertos de México, Torreón, Los Mochis y Chihuahua, tomando como origen del sistema de referencia el que se usó para la Ciudad de México en coordenadas cartesianas en E^3.

Si las coordenadas polares de los aeropuertos son:

Torreón	(790, 125.13°)
Chihuahua	(1180, 125.13°)

Y las elevaciones sobre el nivel del mar son:

1130 y 1360 respectivamente, entonces las coordenadas cilíndricas - de dichos Aeropuertos serán:

Torreón	(790, 125.13°, 1130)
Chihuahua	(1180, 125.13°, 1360)

1.6 SISTEMA DE COORDENADAS ESFERICAS

El sistema de coordenadas cilíndricas no es el único, distinto del cartesiano, que puede proponerse. Existe entre otros, un sistema que utiliza dos ángulos y una distancia para localizar un punto en E^3.

Se llama Sistema de Coordenadas Esféricas y se ilustra gráficamente a continuación.

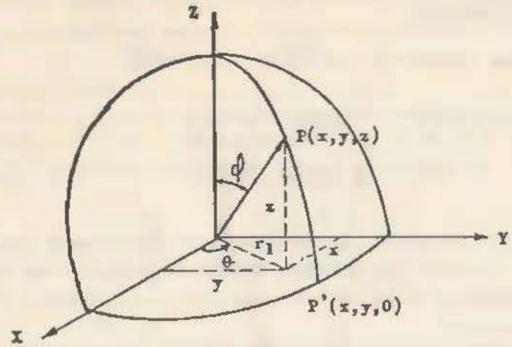


FIGURA 1.37

Donde:

φ = Angulo entre la parte positiva del eje Z y $\overline{OP}$.

r = Distancia entre los puntos O y P.

θ = Angulo entre la parte positiva del eje X y $\overline{OP'}$.

Obsérvese que la linea P'P es perpendicular al plano XY

Todos los puntos P se encuentran sobre una esfera de radio r.

> DEFINICION 1.28 Se llama Sistema de Coordenadas Esféricas al sistema de referencia que define a un conjunto de puntos del espacio de tres dimensiones dado por las ternas P (r,θ,φ) que se localizan sobre una esfera de radio r.

A continuación se establecen las ecuaciones de transformación entre los sistemas de coordenadas cartesianas y esféricas.

Para transformar las coordenadas cartesianas a esféricas

$$r = \text{distancia entre O y P} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \ldots (1)$$

φ = ang. entre la parte positiva del eje Z y $\overline{OP}$

$$\therefore \quad \varphi = \text{ang cos } z/r = \text{ang cos } z/\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \ldots (2)$$

θ = ang entre la parte positiva del eje X y $\overline{OP'}$

$$\theta = \text{ang tan } y/x \qquad \ldots (3)$$

Es decir:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \text{ang tan } y/x$$

$$\varphi = \text{ang cos } z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Si ahora conocemos (r,θ,φ) y deseamos obtener (x,y,z) entonces usaremos las siguientes ecuaciones:

$$x = r_1 \cos\theta \quad \text{pero} \quad r_1 = r\,\text{sen}\,\varphi \quad \therefore \quad x = r\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta$$

$$y = r_1\,\text{sen}\,\theta \qquad \therefore \quad y = r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta$$

$$z = r\cos\varphi$$

Planteandose la siguiente definición:

> DEFINICION 1.29 El sistema coordenado esférico tiene por ecuaciones de transformación:
>
> $$\left.\begin{aligned} x &= r\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y &= r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ z &= r\cos\varphi \end{aligned}\right\} \ (a)$$
>
> Ecuaciones de transformación de coordenadas esféricas a cartesianas.
>
> $$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
>
> $$\theta = \text{ang tan } y/x$$
>
> $$\varphi = \text{ang cos } z/\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (b)$$
>
> Ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a esféricas.

Es importante observar que las coordenadas esféricas requieren de tres ejes ortogonales como referencia, ya que un punto queda determinado midiendo una distancia desde el orígen; un ángulo en el plano XY, respec to al eje X y un ángulo respecto al eje Z.

EJEMPLO Represéntese gráficamente los puntos:

$P(3, \pi/3, \pi/2)$; $P(2, \pi, \pi/4)$; $P(4, \pi/4, 2\pi/3)$

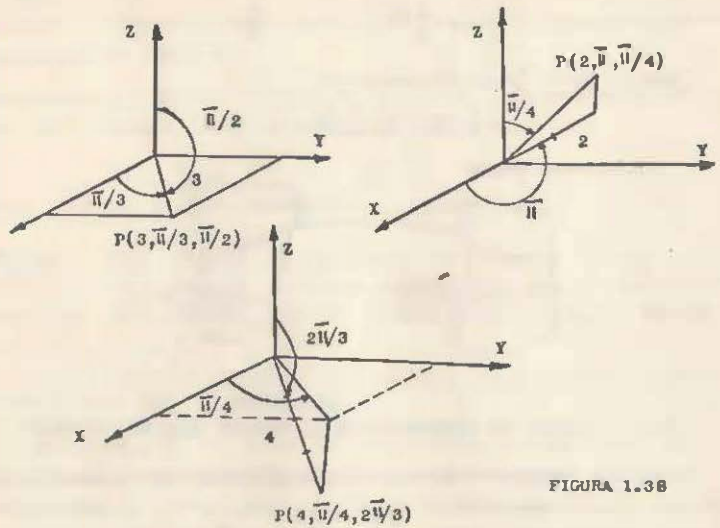


FIGURA 1.38

El sistema de coordenadas esféricas al igual que el cilíndrico, no permite afirmar que a cada punto corresponde una y sólo una terna ordenada, debido a que el punto $P(r, \theta, \varphi)$ es idéntico al $P(r, \theta + 2k\pi, \varphi)$ $k \in Z$

En general se acostumbra utilizar únicamente valores positivos del radio r, y valores de θ entre 0 y 2π y de φ entre 0 y π.

Obsérvese que el conjunto:

$$A = \left\{ (r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r < \infty, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ 0 \leq \varphi \leq \pi \right\}$$

define todo el espacio cartesiano.

También podemos calcular las coordenadas esféricas de los Aeropuertos de Torreón y Chihuahua, si conocemos sus coordenadas cartesianas en E^3.

Torreón $P(-449, 650, 1.13)$

Chihuahua $P(-679, 965, 1.36)$

Aplicando las ecuaciones de transformación, queda:

$$r = \sqrt{(-449)^2 + (650)^2 + (1.13)^2} = 790.12 \text{ Km.}$$

$$\theta = \text{ang tan } y/x = \text{ang tan } (965)/(-679) = 125.13°$$

$$\varphi = \text{ang cos } z/r = \text{ang cos } 1.13/790 = 89.9°$$

$$\therefore \text{ Torreón } (790, 125.13°, 89.9°)$$

Para Chihuahua, queda:

$$r = \sqrt{(-679)^2 + (965)^2 + (1.36)^2} = 1180 \text{ Km.}$$

$$\theta = \text{ang tan } y/x = \text{ang tan } (965)/(-679) = 125.13°$$

$$\varphi = \text{ang cos } (1.13)/(1180) = 89.9°$$

$$\therefore \text{ Chihuahua } (1180, 125.13°, 89.9°)$$

Si se observan las coordenadas esféricas de Torreón y Chihuahua - ¿Qué se podría concluir ?

Como se hizo en los demás sistemas de coordenadas, a continuación - se darán las definiciones de igualdad y simetría de puntos:

1.30 DEFINICION DE IGUALDAD. Las ternas $P_1(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ representan el mismo punto del espacio en coordenadas esféricas si y sólo si:

$$r_1 = r_2, \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \ \forall \ k \in Z$$

1.31 DEFINICION DE SIMETRIA:

a).- Un punto $P_1(r_1,\theta_1,\varphi_1)$ es simétrico de $P_2(r_2,\theta_2,\varphi)$ respecto al plano YZ, si y sólo si:

$$r_1 = r_2, \qquad \theta_1 = \pi - \theta_2, \qquad \varphi_1 = \varphi_2$$

b).- Un punto $P_1(r_1,\theta_1,\varphi_1)$ es simétrico de $P_2(r_2,\theta_2,\varphi_2)$ respecto al plano XY, si y sólo si:

$$r_1 = r_2, \qquad \theta_1 = \theta_2, \qquad \varphi_1 = \pi - \varphi_2$$

c).- Un punto $P_1(r_1,\theta_1,\varphi_1)$ es simétrico de $P_2(r_2,\theta_2,\varphi_2)$ respecto al plano XZ, si y sólo si:

$$r_1 = r_2, \qquad \theta_1 = 2\pi - \theta_2, \qquad \varphi_1 = \varphi_2$$

d).- Un punto $P_1(r_1,\theta_1,\varphi_1)$ es simétrico de $P_2(r_2,0_2,\varphi_2)$ respecto al orígen si y sólo si:

$$r_1 = r_2, \qquad \theta_1 = \theta_2 + \pi, \qquad \varphi_1 = \pi - \varphi_2$$

Nótese que en las últimas definiciones se consideró que:

$$\theta_1 \text{ y } \theta_2 \in [0,2\pi] \qquad \text{y} \qquad \varphi_1,\varphi_2 \in [0,\pi]$$

¿Serán las únicas definiciones sobre simetría ?

Si no es así, se deja al lector que estudie las restantes.

EJEMPLO: Calcular las coordenadas esféricas del punto (1,1,1).

SOLUCION:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\theta = \text{ang tan } y/x = \text{ang tan } 1/1 = 45°$$

$$\varphi = \text{ang cos } z/r = \text{ang cos } 1/\sqrt{3} = 54.7° = 0.96 \text{ rad.}$$

Por lo tanto el punto es $(\sqrt{3}, \pi/4, 0.96)$

Calcular las coordenadas cartesianas del punto $A(4,\pi/3,3\pi/4)$.

$$x = r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta = 4 \operatorname{sen} \tfrac{3}{4}\pi \cos \tfrac{1}{3}\pi = 4\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$$

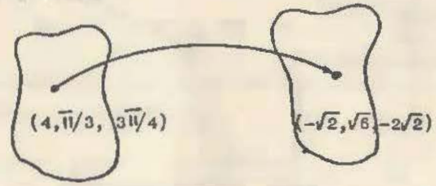
$$y = r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta = 4 \operatorname{sen} \tfrac{3}{4}\pi \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}\pi = 4\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{6}$$

$$z = r \cos\varphi = r \cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) = 4\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$$

Por lo tanto, el punto buscado es:

$$(-\sqrt{2}, \sqrt{6}, -2\sqrt{2})$$

Gráficamente queda:



1.7 SISTEMA DE COORDENADAS EN EL ESPACIO REAL DE DIMENSION N.

Hasta el momento se ha desarrollado una teoría de sistemas coordenados que tienen representación geométrica hasta en E^3. A continuación estudiaremos el espacio de dimensión n, llamado E^n.

La idea de representar un punto por un par de números reales en E^2, y por una terna de números reales en E^3 correspondió a René Descartes, - posteriormente A. Cayley y H. G. Grosman extendieron dicha idea a la localización de puntos en el espacio de n dimensiones de la siguiente manera:

DEFINICION 1.32 Un punto en el espacio n dimensional es un conjunto ordenado de n números reales, siendo los números reales las coordenadas del punto.

De esta manera, se dice que el espacio n dimensional es aquel que - está formado por el conjunto de todos los puntos definidos en el párrafo anterior.

Conviene aclarar que a cada punto le corresponde un conjunto ordenado de n números reales.

Ahora se plantean algunas propiedades de los puntos del espacio de dimensión n.

1.33 DEFINICION DE IGUALDAD

Los puntos $P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $P_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ representan el mismo punto en el espacio real de dimensión n, si y sólo si:

$$x_1 = y_1, \ldots\ldots, x_n = y_n$$

es decir, si y sólo si, sus coordenadas son iguales.

$$P_1(x_1, \ldots, x_n) = P_2(y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow x_1 = y_1, \ldots\ldots x_n = y_n$$

En lo que viene a continuación, el conjunto $(x_1, \ldots, x_n)$ es equivalente a, $P(x_1, \ldots, x_n)$.

1.34 DEFINICION DE SUMA DE COORDENADAS

Las coordenadas de dos puntos del espacio real de dimensión n, al sumarse dan como resultado las coordenadas de otro punto del mismo espacio. Es decir:

Dados: $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in E^n$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) \in E^n$$

1.35 DEFINICION DE MULTIPLICACION POR UN ESCALAR

Las coordenadas de un punto del espacio real de dimensión n, al multiplicarse por un número real, dan las coordenadas de otro punto del mismo espacio. En símbolos:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in E^n \quad \text{y} \quad k \in R$$

$$k\,(x_1, \ldots, x_n) = (kx_1, \ldots, kx_n) \in E^n$$

Estas definiciones generan a su vez, las propiedades que se enuncian en seguida:

a).- Para la suma entre las coordenadas de los puntos dados $P_1(x_1, \ldots, x_n)$, $P_2(y_1, \ldots, y_n)$, $P_3(z_1, \ldots, z_n) \in E^n$.

a.1).- $P_1(x_1, \ldots, x_n) + \left[P_2(y_1, \ldots, y_n) + P_3(z_1, \ldots, z_n)\right] =$

$= \left[P_1(x_1, \ldots, x_n) + P_2(y_1, \ldots, y_n)\right] + P_3(z_1, \ldots, z_n)$

(Propiedad Asociativa)

a.2).- $P_1(x_1, \ldots, x_n) + P_2(y_1, \ldots, y_n) = P_2(y_1, \ldots, y_n) + P_1(x_1, \ldots, x_n)$

(Propiedad Conmutativa)

a.3).- $P_1(x_1, \ldots, x_n) + P_0(0, \ldots 0) = P_0(0, \ldots, 0) + P_1(x_1, \ldots, x_n)$

$= P_1(x_1, \ldots, x_n) \qquad P_0 \in E^n$

(En que P_0 es el elemento idéntico para la suma).

a.4).- $P_1(x_1, \ldots, x_n) + P_1^*(-x_1, \ldots, -x_n) = P_1^*(-x_1, \ldots, -x_n) + P_1(x_1, \ldots, x_n)$

$= P_0(0, \ldots, 0)$

(En que P_1^* es el elemento inverso de P_1 para la suma)

b).- Para el producto por un número real, dados además k_1 y $k_2 \in R$ se cumple que:

b.1).- $k_1 \left[P_1(x_1, \ldots, x_n) + P_2(y_1, \ldots, y_n)\right] = k_1P_1(x_1, \ldots, x_n) + k_1P_2(y_1, \ldots, y_n)$

(Propiedad Distributiva del producto por un escalar sobre la suma de las coordenadas de dos puntos).

b.2).- $(k_1+k_2)\,P_1(x_1, \ldots, x_n) = k_1P_1(x_1, \ldots, x_n) + k_2P_1(x_1, \ldots, x_n)$

(Propiedad Distributiva del producto de las coordenadas de un punto sobre la suma de dos escalares).

b.3).- $(k_1k_2)\,P_1(x_1, \ldots, x_n) = k_1 \left[k_2\,P_1(x_1, \ldots, x_n)\right]$

(Propiedad Asociativa).

b.4).- $1\,(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$ (donde $1 \in R$ elemento idéntico del producto de los números reales).

Estas ocho propiedades pueden demostrarse fácilmente, enseguida se demostrará alguna y se deja al lector la demostración de las restantes.

Demostración de la propiedad a.1.

Dados: $P_1(x_1,..,x_n)$, $P_2(y_1,..,y_n)$, $P_3(z_1,..,z_n) \in E^n$

Sea:

$$P_1(x_1,..,x_n) + \left[P_2(y_1,..,y_n) + P_3(z_1,..,z_n)\right] \quad . . . .(1)$$

primer miembro de la igualdad. Haciendo las sumas se tiene:

$$(x_1,..,x_n) + (y_1+z_1,...,y_n+z_n) = P_1 + (P_2+P_3)$$

$$\left[x_1 + (y_1+z_1),.....,x_n + (y_n+z_n)\right] = \left[P_1 + (P_2 + P_3)\right] \quad . . .)$$

pero dado que $x_1,..,x_n,y_1,..,y_n,z_1,..,z_n$ son números reales, se tiene que:

$$x_1 + (y_1 + z_1) = (x_1 + y_1) + z_1$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$x_n + (y_n + z_n) = (x_n + y_n) + z_n$$

Llevando estas expresiones a (2):

$$(x_1+y_1)+z_1,....,(x_n+y_n)+z_n = \left[(x_1+y_1,..,x_n+y_n) + (z_1,..,z_n)\right]$$
$$= \left[(P_1 + P_2) + P_3\right] \text{, es decir:}$$

$$P_1 + (P_2 + P_3) = (P_1 + P_2) + P_3$$

L.Q.Q.D.

Pudiendo apreciarse que $(1) \equiv (3)$ quedando demostrada la propiedad.

Usando las propiedades anteriores puede demostrarse el siguiente Teorema:

TEOREMA 1.4

Dados los puntos $(1,0,0,..,0)$, $(0,1,0,..,0)$, $(0,0,1,0,..,0)$,....... $(0,0,...,1)$; el punto $P(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ puede representarse como:

$$(x_1,x_2,x_3,..,x_n) = x_1(1,0,...0) + x_2(0,1,..0) + x_3(0,0,1,..,0) + ...+ x_n(0,0,...,1)$$

DEMOSTRACION:

Sean los puntos: $(1,0,0,..,0)$, $(0,1,0,..,0)$,......,$(0,0,0,..,1)$ y los escalares: $x_1,x_2,x_3,...,x_n \in R$, entonces:

$$x_1(1,0,0,..,0) = (x_1,0,0,..,0)$$
$$x_2(0,1,0,..,0) = (0,x_2,0,..,0)$$
$$x_3(0,0,1,..,0) = (0,0,x_3,..,0)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$x_n(0,0,0,..,1) = (0,0,0,..,x_n)$$

Si hacemos la suma, queda:

$$x_1(1,0,0,..,0) + x_2(0,1,0,..0) + x_3(0,0,1,..,0) + ... + x_n(0,0,0,..,1)$$
$$= (x_1,x_2,x_3,...,x_n)$$

L.Q.Q.D.

Este Teorema establece que en un espacio real de dimensión n, es suficiente conocer las coordenadas de n puntos independientes para poder escribir cualquier otro en función de ellos.

Debido a que geométricamente no tiene representación el espacio de dimensión mayor que tres, no se tratan las simetrías de puntos.

La distancia entre dos puntos se generaliza de acuerdo a la siguiente definición:

DEFINICION 1.36 La distancia entre los puntos $P_1(x_1,x_2,..,x_n)$ y $P_2(y_1,y_2,..,y_n)$ del espacio real de dimensión n está dada por la expresión:

$$d = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + ... + (y_n-x_n)^2}$$

Cuando se trata de calcular la distancia de un punto al orígen, la expresión se reduce a:

$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

EJEMPLO

Calcular la distancia del orígen al punto $P_1(5,2,1,8)$, y de éste - a $P_2(3,-1,7,{-}4)$.

SOLUCION:

Distancia de $P_1(5,2,1,8)$ al orígen:

$$d_1 = \sqrt{(5)^2 + (2)^2 + (1)^2 + (8)^2}$$

$$= \sqrt{94} = 9.69$$

Distancia de $P_1(5,2,1,8)$ a $P_2(3,-1,7,-4)$

$$d = \sqrt{(3-5)^2 + (-1-2)^2 + (7-1)^2 + (4-8)^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (6)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{65} = 8.06$$

EJEMPLO

Calcular la distancia entre los puntos:

$P_1(1,2,-7,6,4)$ y $P_2(0,1,3,-8,6)$

SOLUCION:

$$d = \sqrt{(0-1)^2 + (1-2)^2 + (3+7)^2 + (-8-6)^2 + (6-4)^2}$$

$$d = \sqrt{1 + 1 + 100 + 196 + 4}$$

$$d = \sqrt{302}$$

$$d = 17.38$$

En este curso nos limitaremos al caso particular del estudio de vectores definidos como cantidades que poseen magnitud y dirección y que en ingeniería es muy usual de encontrarse, como ejemplo se citan la fuerza, velocidad, aceleraciones, desplazamientos, etc.

El tratamiento de estas cantidades vectoriales se hará geometrica y analíticamente.

1.8. VECTOR EN UN ESPACIO DE TRES DIMENSIONES. CARACTERISTICAS. SEGMENTOS DIRIGIDOS.

Existen tres formas de introducir el concepto de vector que son: Geométrica, Analítica y Axiomáticamente.

Geométricamente los vectores se representan mediante- segmentos dirigidos con los que pueden efectuarse operaciones de suma, resta y multiplicación por un escalar; dadas- las restricciones geométricas serán tratados en una, dos y tres dimensiones.

Analíticamente, se estudian las operaciones menciona - das con anterioridad introduciendo además nuevos conceptos como son los productos entre vectores que serán expresados en función de operaciones entre escalares, para que aprovechando las propiedades de estos últimos se deduzcan las de las operaciones vectoriales, algunas de estas operaciones- se generalizarán al espacio de n dimensiones aunque en términos generales sólo se trabajarán hasta el espacio E_3.

Axiomáticamente, como se vé en el curso de Algebra existen entes matemáticos que se definen como vectores, ejem-- plo de estos son los polinomios, las matrices, las funciones, las ternas ordenadas, etc. y se define una estructura algebráica.

DEFINICION 1.37 SEGMENTO DIRIGIDO.- La representación geométrica de un vector se define mediante un segmento de recta entre dos puntos A y B, considerando a un punto A como punto inicial y al punto B como punto final.

Al segmento dirigido de A a B se le representa con el símbolo $\overline{AB}$ dibujándolo con una flecha que empieza en A y termina en B como se muestra en la figura 1.39

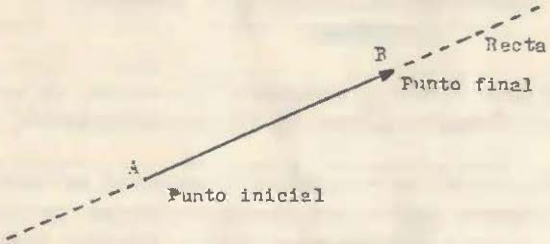


FIGURA 1.39

Es fácil ver que los segmentos dirigidos poseen las características de un vector, a saber:

Dirección.- Dada por la recta y por el sentido del recorrido indicado con la flecha de A a B.

Magnitud.- Dada por la distancia entre los dos puntos.

Si se introduce un sistema coordenado de dimensión uno, sobre la recta L como origen O y consideramos las coordenadas de los puntos A(2) y B(7) se obtendrá el segmento dirigido ó vector $\overline{AB}$ en el espacio de dimensión uno, como se muestra en la figura 1.40.

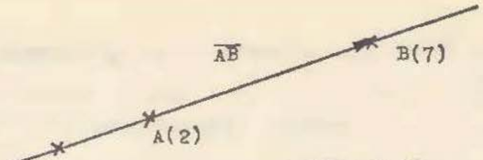


FIGURA 1.40

El segmento dirigido $\overline{AB}$ tiene una dirección de A hacia B y su magnitud que es la distancia entre los puntos A y B dada por:

$$\text{Magnitud de } \overline{AB} = |7 - 2| = |5|$$

Analíticamente el vector de $\overline{AB}$ se representa como: $\overline{AB} = (+5)$, donde la magnitud es 5 y la dirección viene indicada por el signo de tal modo que $\overline{AB} = (+5)$ es un vector en el espacio de dimensión uno cuyas características son: Dirección positiva y magnitud 5.

Considérese ahora que el vector $\overline{AB}$ queda referido al sistema coordenado de dimensión dos mostrado en la fig. 1.41 donde el punto inicial es A (1,1) y el punto final es B (4,5).

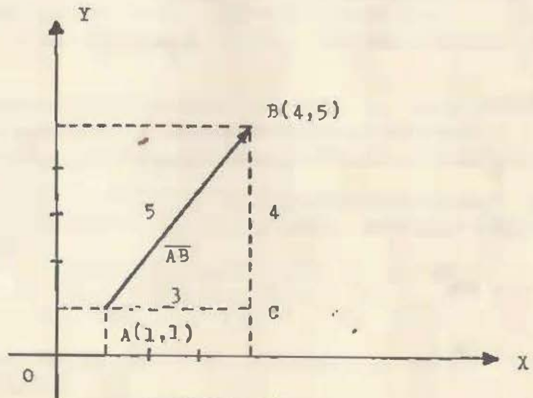


FIGURA 1.41

El segmento dirigido sigue teniendo magnitud igual a 5 y dirección de A a B. Si ahora trazamos rectas paralelas a los ejes coordenados que pasen por los puntos A y B, se formará el triángulo rectángulo ABC mostrado en la figura 1.41, donde el cateto AC mide tres unidades y el BC mide cuatro unidades.

Obsérvese que si las coordenadas del punto final B (4,5) le restamos las del punto inicial A (1,1), obtenemos la pareja ordenada (3,4), esto es:

$$\overline{AB} = B - A = (4-1, 5-1) = (3,4)$$

que son los valores de los catetos del triángulo de la figura 1.41.

Obsérvese que la diferencia entre las abscisas dá la longitud del cateto paralelo al eje X y la diferencia entre las ordenadas dá la longitud del cateto paralelo al eje Y.

Si ahora el segmento dirigido va de B a A, quedará:

$$\overline{BA} = A - B = (1-4, 1-5) = (-3,-4)$$

Siempre que en la pareja ordenada se tengan números negativos se cumplirá que:

$$x_2 - x_1 < 0 \quad \therefore \quad x_2 < x_1$$

$$y_2 - y_1 < 0 \quad \therefore \quad y_2 < y_1$$

Es decir, la abscisa del punto final está a $|x_2 - x_1|$ unidades a la izquierda de la abscisa del punto inicial, y la ordenada del punto final está a $|y_2 - y_1|$ unidades abajo de la ordenada del punto inicial.

Si la pareja ordenada (a,b) fuera positiva, entonces:

$$x_2 - x_1 > 0 \quad \therefore \quad x_2 > x_1$$

$$y_2 - y_1 > 0 \quad \therefore \quad y_2 > y_1$$

se sugiere analizar otras alternativas.

Llamarémos componentes del segmento dirigido $\overline{AB}$ a los elementos de la pareja ordenada (3,4).

Siempre la primera componente será la paralela al eje X y la segunda paralela al eje Y.

A la pareja ordenada (a,b) también se le llama vector en E_2.

Considérese ahora el vector $\overline{AB}$ referido a un sistema E_3 donde el punto inicial es A $(1,1,\sqrt{12})$ y el punto final es B $(3,4,2\sqrt{12})$

$$\overline{AB} = B - A = (3,4,2\sqrt{12}) - (1,1,\sqrt{12})$$

$$\therefore \quad \overline{AB} = (2,3,\sqrt{12})$$

En este caso la representación geométrica ó el segmento dirigido $\overline{AB}$ queda representado en la figura 1.42

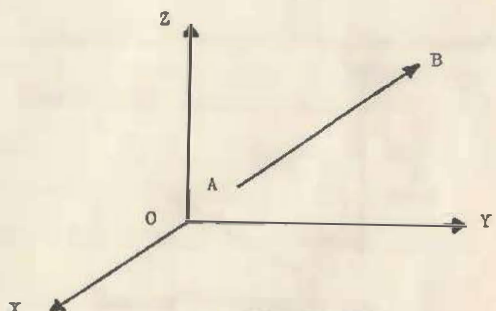


FIGURA 1.42

Donde las componentes del vector $\overline{AB}$ son los elementos de la terna ordenada $(2,3,\sqrt{12})$.

DEFINICION 1.38

Un vector $\overline{AB}$ cuyo punto inicial es $A\ (a_1,a_2,a_3)$ y el punto final es $B\ (b_1,b_2,b_3)$, es aquél cuyas componentes son los elementos de la terna ordenada (c_1,c_2,c_3), donde:

$$c_1 = b_1 - a_1$$
$$c_2 = b_2 - a_2$$
$$c_3 = b_3 - a_3$$

es decir,

$$\left[c_1,c_2,c_3\right] = \left[(b_1-a_1),(b_2-a_2),(b_3-a_3)\right]$$

Por convención, las componentes de un vector se indicarán con letras minúsculas y el vector con la correspondiente minúscula testada, así se tendrá:

$$\bar{c} = (c_1,c_2,c_3) \quad \text{donde} \quad \bar{c} = \overline{AB}$$

aunque existen otras notaciones que se usarán más adelante.

Las componentes del vector $\bar{c}$ se ilustran en la figura 1.43:

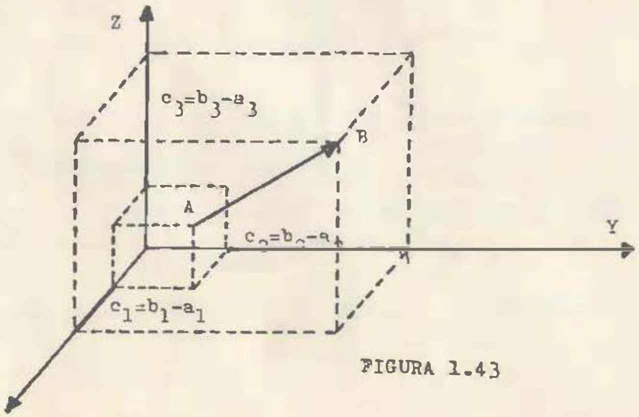


FIGURA 1.43

En un espacio de n dimensiones se define un vector, aunque no tiene representación geométrica, se tiene:

DEFINICION 1.39

Un vector $\bar{c}$ en el espacio n dimensional es el conjunto ordenado $\bar{c} = (c_1,c_2,\ldots,c_n)$ donde cada uno de los elementos $c_i\ (i=1,\ldots n)$ se llama componente del vector $\bar{c}$.

Aunque se ha definido vector en n dimensiones, en este curso sólo se trabajará hasta la dimensión 3, y al conjunto de todos estos vectores se le llamará V_3.

EJEMPLO

Apliquémos los conceptos anteriores al siguiente problema:

Considérese la pirámide cuyos vértices son: A(3,1,0), B(5,3,0), C(3,5,0), D(1,3,0) y E(3,3,6).

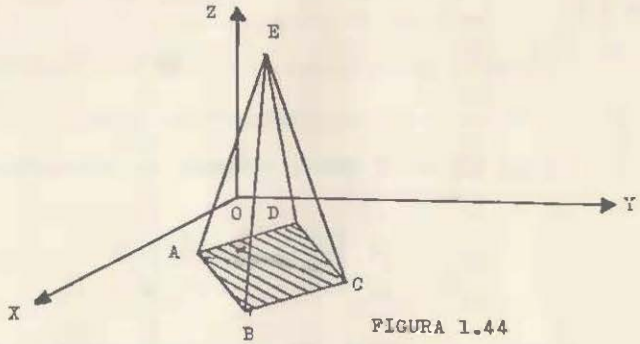


FIGURA 1.44

Se desean obtener las componentes de los vectores que unen los vértices A y E, A y B, B y C y por último D y C.

SOLUCION:

Para determinar las componentes se obtendrán los vectores que unen a los vértices. Los vectores buscados se denominarán $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$, y según la definición 1. se tendrá:

$\bar{a} = \overline{AB} = B - A = (5-3, 3-1, 0-0) = (2,2,0)$

$\bar{b} = \overline{AD} = D - A = (1-3, 3-1, 0-0) = (-2,2,0)$.

$\bar{c} = \overline{BC} = C - B = (3-5, 5-3, 0-0) = (-2,2,0)$

$\bar{d} = \overline{DC} = C - D = (3-1, 5-3, 0-0) = (2,2,0)$

¿ Será la única solución ?

1.9 IGUALDAD, SUMA, DIFERENCIA DE VECTORES. MULTIPLICACION POR UN ESCALAR. INTERPRETACION GEOMETRICA.

IGUALDAD DE VECTORES.- En el ejemplo anterior se puede observar que existen vectores en lugares diferentes de la pirámide y con iguales componentes, esto es:

$\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ tienen componentes $(2,2,0)$ y también $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ tienen componentes $(-2,2,0)$.

En estas circunstancias se tiene que $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son iguales.

A continuación se establecerá la definición de igualdad de vectores en n dimensiones, aunque solo será usada en este curso hasta la dimensión tres.

DEFINICION 1.40

Dados los vectores $\bar{r} = (r_1, r_2, \ldots r_n)$ y $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots p_n)$ se dice que $\bar{r}$ y $\bar{p}$ son iguales si y sólo si, sus componentes correspondientes son iguales, es decir:

$$r_i = p_i \quad (\text{donde } i = 1,2,3,\ldots,n)$$

Por lo tanto en la pirámide, los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son iguales, así como $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, teniendo por consiguiente igual dirección y magnitud como se muestra en la figura 1.45

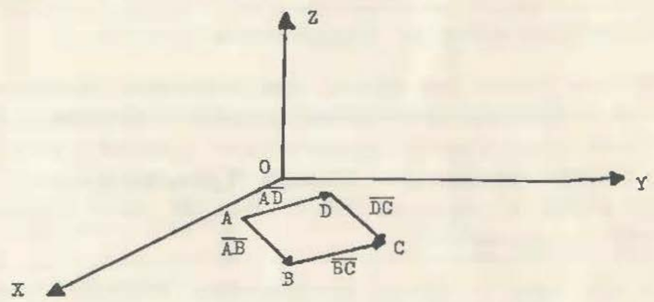


FIGURA 1.45

EJEMPLO

Para la pirámide del ejercicio anterior, determinar que otros vectores son iguales si solo se toman aquellos vectores que unen los vértices.

SOLUCION:

Se tiene que:

$\overline{AB} = (2,2,0)$, $\overline{AD} = (-2,2,0)$, $\overline{BC} = (-2,2,0)$ y $\overline{DC} = (2,2,0)$.

Calculando otros tenemos:

$\overline{AC} = C - A = (3-3, 5-1, 0-0) = (0,4,0)$

$\overline{BD} = D - B = (1-5, 3-3, 0-0) = (-4,0,0)$

$\overline{EA} = A - E = (3-3, 1-3, 0-6) = (0,-2,-6)$

$\overline{EB} = B - E = (5-3,3-3,0-6) = (2,0,-6)$

$\overline{EC} = C - E = (3-3,5-3,0-6) = (0,2,-6)$

$\overline{ED} = D - E = (1-3,3-3,0-6) = (-2,0,-6)$

Como se vé, no existen otras parejas de vectores idénticos a los del ejemplo anterior, se concluye que un vector no cambia si se traslada paralelamente a sí mismo; por esta razón a estos vectores se les llamará libres.

Conviene aclarar que existen también vectores deslizantes o sea aquellos que solo tienen libertad de deslizar a lo largo de su línea de acción conservando su magnitud y dirección. También existen otros llamados fijos, que son aquellos que además de tener magnitud y dirección, están ligados a un punto de aplicación

En este curso se tratará únicamente con vectores libres.

SUMA DE VECTORES.- Si se considera la base de la pirámide del ejemplo anterior se puede ver que los puntos A, B y C forman un triángulo donde:

$\overline{AC} = (0,4,0) \qquad \overline{AB} = (2,2,0) \qquad \overline{BC} = (-2,2,0)$

Si ahora se suman las componentes correspondientes de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, se tendrá:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = (2,2,0) + (-2,2,0) = (2-2,2+2,0+0) = (0,4,0)$$

que son las componentes de $\overline{AC}$.

Si ahora se verifica para $\overline{AD} + \overline{DC}$ donde

$\overline{AD} = (-2,2,0) \quad ; \quad \overline{DC} = (2,2,0)$ tenemos que:

$\overline{AD} + \overline{DC} = (0,4,0) = \overline{AC}$ se puede con esto establecer la siguiente:

DEFINICION DE SUMA DE VECTORES.1.41.- Para sumar los vectores $\bar{r} = (r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n)$ y $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ súmense sus componentes correspondientes, es decir:

$\bar{q} = \bar{r} + \bar{p} = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$ entonces:

$$\begin{aligned} q_1 &= r_1 + p_1 \\ q_2 &= r_2 + p_2 \\ q_3 &= r_3 + p_3 \\ &\vdots \\ q_n &= r_n + p_n \end{aligned}$$

Obsérvese que al definir de esta manera la operación de suma, se obtiene otro elemento del conjunto de los vectores.

Geométricamente, con el uso de segmentos dirigidos para sumar $\bar{r}$ y $\bar{p}$, uno de los vectores elegido arbitrariamente se escoje como inicial y el otro se traslada paralelamente de tal modo que su punto inicial coincida con el punto final del primero, el vector resultante es el segmento dirigido que vá del punto inicial del primero, al punto final del segundo, este se ilustra para E_2 y E_3 en las figuras 1. y 1.

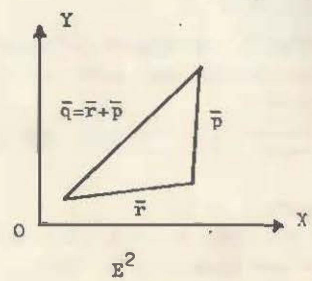


FIGURA 1.46

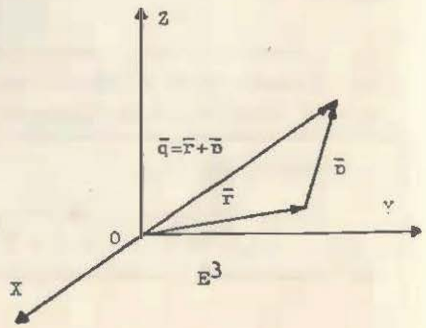


FIGURA 1.47

MULTIPLICACION POR UN ESCALAR

DEFINICION 1.42 El producto de un vector $\bar{r} = (r_1, r_2, r_3, \ldots r_n)$ por un escalar $\lambda \in R$, se representa por $\lambda\bar{r}$, y es aquel cuyas componentes son: $\lambda r_1, \lambda r_2, \ldots, \lambda r_n$; es decir:

$$\lambda\bar{r} = (\lambda r_1, \lambda r_2, \lambda r_3, \ldots, \lambda r_n)$$

Se dice que si $\bar{p} = \lambda\bar{r}$ el vector $\bar{p}$ tiene una longitud que es λ veces la longitud de $\bar{r}$ y cuya interpretación geométrica en E_3 aparece en la figura 1.

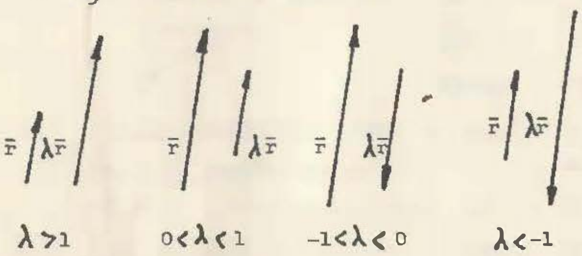


FIGURA 1.48

Dos vectores que son paralelos cumplen con lo siguiente:

DEFINICION 1.43 Los vectores $\bar{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ y $\bar{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ tienen la misma dirección si $\bar{p} = \lambda\bar{r}$ para $\lambda > 0$ y dirección opuesta para $\lambda < 0$, o sea, son paralelos si $\bar{p} = \lambda\bar{r}$, para toda $\lambda \neq 0$.

EJEMPLO

Para la pirámide del ejemplo anterior determinar si los vectores de la base son paralelos.

SOLUCION:

Los vectores de la base son:

$\overline{AB} = (2,2,0)$, $\overline{BC} = (-2,2,0)$, $\overline{DC} = (2,2,0)$ y $\overline{DA} = (-2,2,0)$

Se debe cumplir que $\bar{p} = \lambda\bar{r}$, pero ya vimos que $\overline{AB} = \overline{DC}$ y $\overline{BC} = \overline{AD}$, es decir, $\lambda = 1$.

Por lo tanto, los vectores además de ser paralelos tienen la misma dirección, puesto que $\lambda = 1 > 0$.

Obsérvese que éstas son las únicas parejas de vectores que cumplen la condición de paralelismo.

A continuación se definirá el inverso aditivo como:

$$(-1)\,\bar{p} = -\bar{p}$$

es decir, todo vector tiene su inverso aditivo.

DIFERENCIA DE VECTORES.- Sea el vector $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3)$ y su inverso aditivo $-\bar{p} = (-p_1, -p_2, -p_3)$.

DEFINICION 1.44

La diferencia entre los vectores $\bar{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ y $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ denotada como $\bar{r} - \bar{p}$ es el vector que se obtiene al sumar a $\bar{r}$ el inverso aditivo de $\bar{p}$, es decir:

$$\bar{r} - \bar{p} = [(r_1 - p_1), (r_2 - p_2), (r_3 - p_3), \ldots (r_n - p_n)]$$

En E_3:

$$\bar{s} = \bar{r} - \bar{p} = \bar{r} + (-\bar{p})$$
$$= (r_1, r_2, r_3) + (-p_1, -p_2, -p_3)$$
$$\bar{s} = (r_1 - p_1, r_2 - p_2, r_3 - p_3)$$

La interpretación geométrica de la diferencia de vectores se ilustra para E_2 y E_3 en las figuras 1.49 y 1.50.

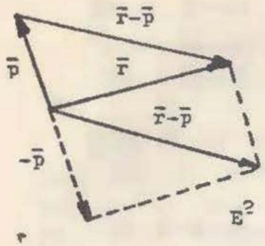


FIGURA 1.49

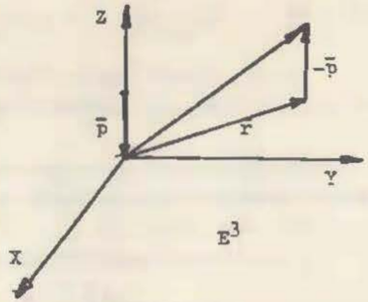


FIGURA 1.50

EJEMPLO

Para la pirámide del ejemplo anterior calcular $\overline{EB}-\overline{EA}$.

SOLUCION:

$\overline{EB} = B - E = (2,0,-6)$; $\overline{EA} = A - E = (0,-2,-6)$

El inverso aditivo de $\overline{EA}$ es $(0,2,6)$ y por lo tanto:

$\overline{EB}-\overline{EA} = \overline{EB} + (-\overline{EA}) = (2,0,-6) + (0,2,6) = (2,2,0)$

Otra manera de interpretar la diferencia de vectores se muestra en la figura 151, en donde, como se vé, los vectores $\bar{r}$ y $\bar{p}$ se dibujan con orígen común y la diferencia $\bar{r}-\bar{p}$ es el vector que va del extremo de $\bar{p}$ al extremo de $\bar{r}$.

Se observa que el vector $\bar{r}-\bar{p}$ queda transladado con respecto al de la figura 1.49 de E_2 y esto se explica por tratarse de vectores libres

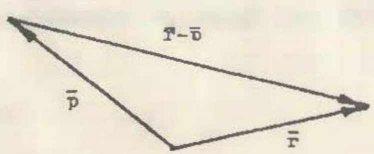


FIGURA 1.51

1.10 VECTOR DE POSICION DE UN PUNTO. A continuación ubicaremos la posición de los vértices de la pirámide, usando vectores.

Para lo cual, definiremos al vector como aquel segmento dirigido que parte siempre del orígen del sistema coordenado y llega a cada uno de los vértices, es decir, lo que se pide son los vectores: $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ y $\overline{OE}$: donde:

O	=	(0,0,0)	C	=	(3,5,0)
A	=	(3,1,0)	D	=	(1,3,0)
B	=	(5,3,0)	E	=	(3,3,6)

Según lo visto:

$$\overline{OA} = A-O = (3-0,1-0,0-0) = (3,1,0)$$
$$\overline{OB} = B-O = (5-0,3-0,0-0) = (5,3,0)$$
$$\overline{OC} = C-O = (3-0,5-0,0-0) = (3,5,0)$$
$$\overline{OD} = D-O = (1-0,3-0,0-0) = (1,3,0)$$
$$\overline{OE} = E-O = (3-0,3-0,6-0) = (3,3,6)$$

Obsérvese que los vectores que van del orígen a cada uno de los vértices, tienen sus componentes iguales a las coordenadas de los puntos finales. Para un punto cualquiera P (x,y,z), se tiene que:

$$\overline{OP} = P-O = (x-0,y-0,z-0) = (x,y,z)$$

Y por lo tanto, se cumple para todo punto hasta de E^3 el hecho de que sus coordenadas son iguales a las componentes del vector que va del orígen al punto en cuestión, al cual se le define como vector de posición, y se representa con una letra igual al punto final, pero minúscula, con una raya encima.

Lo anterior se puede representar geométricamente de la siguiente manera:

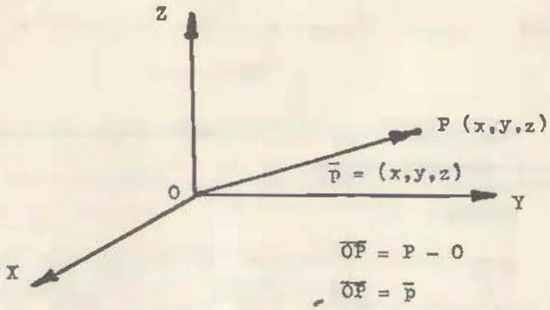


FIGURA 1.52

Se establece una relación uno a uno entre los puntos del espacio ortogonal cartesiano hasta de E^3 y el conjunto de vectores de posición, con la misma dimensión. Esto es, a cada punto P en E^3, le corresponde uno y sólo un vector de posición $\bar{p}$ en el mismo espacio y viceversa, como se observa en la figura 1.53

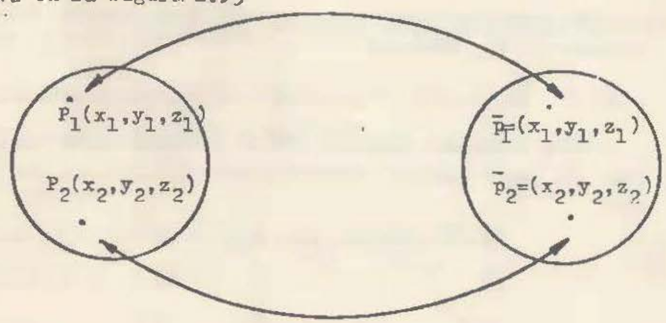
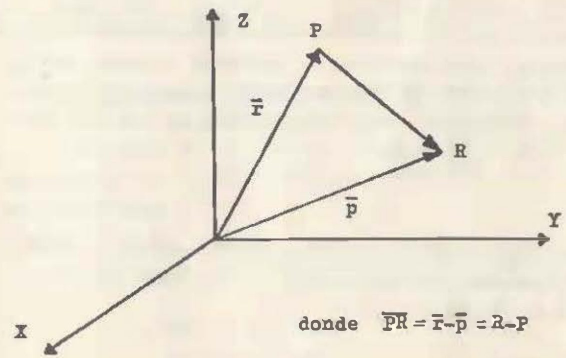


FIGURA 1.53

Procediendo del mismo modo se cumple que en el espacio E^n hay una relación uno a uno entre los puntos del espacio cartesiano ortogonal E^n, y los vectores de posición de estos puntos en el mismo espacio.

Por medio de dos vectores de posición se determina el vector que une dos puntos cualesquiera, como se indica en la figura 1.54



donde $\overline{PR} = \bar{r} - \bar{p} = R - P$

FIGURA 1.54

En este caso P es el punto inicial y R el punto final

1.11 PRODUCTO ESCALAR DE LOS VECTORES. MODULO DE UN VECTOR. Hasta el momento se ha considerado el aspecto geométrico de los vectores, a continuación se definirán otras operaciones entre vectores y sus propiedades correspondientes, es decir, se hará el tratamiento analítico de los vectores; el principal interés es aplicar las operaciones entre vectores a la Geometría Analítica.

1.11.1 PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

DEFINICION 1.45

Sean $\bar{p}=(p_1,p_2,p_3,\dots,p_n)$ y $\bar{r}=(r_1,r_2,r_3,\dots,r_n)$ - dos vectores de E^n.

Entonces el producto punto ó producto escalar de $\bar{p}$ y - $\bar{r}$, denotado $\bar{p}.\bar{r}$ (léase $\bar{p}$ punto $\bar{r}$), se define como:

$$\bar{p}.\bar{r} = p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3 + \dots + p_nr_n = \sum_{k=1}^{n} p_kr_k$$

Obsérvese que para calcular el producto escalar, multiplicamos las componentes correspondientes y luego se suman- los productos, obteniendo como consecuencia un escalar (número real), y nunca un vector.

EJEMPLO:

Efectuar los productos $\overline{AB}\cdot\overline{AD}$, $\overline{AB}\cdot\overline{BD}$, $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$, $\overline{AB}\cdot\overline{BC}$, - y $\overline{AB}\cdot\overline{BE}$. Para los puntos A, B, C y D; que son los- - - vértices de la pirámide:

$\overline{AB} = (2,2,0)$, $\overline{BC} = (-2,2,0)$,

$\overline{AC} = (0,4,0)$, $\overline{BD} = (-4,0,0)$,

$\overline{AD} = (-2,2,0)$, $\overline{BE} = (-2,0,6)$.

Entonces,

$$\overline{AB}\cdot\overline{AD} = (2,2,0)\cdot(-2,2,0) = 2(-2)+2(2)+0(0) = -4+4 = 0$$

$$\therefore\ \overline{AB}\cdot\overline{AD} = 0$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{BE} = (2,2,0)\cdot(-2,0,6) = 2(-2)+2(0)+0(6) = -4+0=-4$$

$$\therefore\ \overline{AB}\cdot\overline{BE} = -4$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{BC} = (2,2,0)\cdot(-2,2,0) = 2(-2)+2(2)+0(0) = -4+4 = 0$$

$$\therefore\ \overline{AB}\cdot\overline{BC} = 0$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{BD} = (2,2,0)\cdot(-4,0,0) = 2(-4)+2(0)+0(0) = -8+0=-8$$

$$\therefore\ \overline{AB}\cdot\overline{BD} = -8$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = (2,2,0)\cdot(0,4,0) = 2(0)+2(4)+0(0) = 2+6 = 8$$

$$\therefore\ \overline{AB}\cdot\overline{AC} = 8$$

Las propiedades del producto escalar se establecen - en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.5

Para todos los vectores $\bar{p}=(p_1,p_2,p_3,\dots p_n)$, $\bar{q}=(q_1,q_2,q_3,\dots q_n)$, $\bar{r}=(r_1,r_2,r_3,\dots r_n)$ en E^n y los escalares $\lambda\in\mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1.- $\bar{p}\cdot\bar{r}=\bar{r}\cdot\bar{p}$	PROPIEDAD CONMUTATIVA
2.- $(\bar{p}+\bar{r})\cdot\bar{q}=\bar{p}\cdot\bar{q}+\bar{r}\cdot\bar{q}$	" DISTRIBUTIVA
3.- $(\lambda\bar{p})\cdot\bar{r}=\lambda(\bar{p}\cdot\bar{r})$	" ASOCIATIVA
4.- $\bar{r}\cdot\bar{r}>0$ para todo $\bar{r}\neq0$	POSITIVIDAD
5.- $\bar{r}\cdot\bar{r}=0$ si y solo si $\bar{r}=\bar{0}$	

A continuación se demostrarán algunas de las propiedades en E^3

En términos de las componentes y considerando los — vectores en E^3, tenemos:

$$\bar{p}\cdot\bar{r}\quad (p_1,p_2,p_3)\cdot(r_1,r_2,r_3) = p_1r_1+p_2r_2+p_3r_3$$

Como todos los sumandos son el producto entre escalares. Se puede aplicar conmutatividad entre ellos, es decir:

$$\bar{p}\cdot\bar{r} = r_1p_1+r_2p_2+r_3p_3$$

Por la definición de producto escalar, tenemos:

$$\bar{p}\cdot\bar{r} = (r_1,r_2,r_3)\cdot(p_1,p_2,p_3)$$

Es decir,

$$\bar{p}\cdot\bar{r} = \bar{r}\cdot\bar{p}$$

Ahora para probar la distributividad, consideremos:

$$(\bar{p}+\bar{r})\cdot\bar{q} = \left[(p_1,p_2,p_3)+(r_1,r_2,r_3)\right]\cdot(q_1,q_2,q_3)$$

Efectuando la suma entre $\bar{p}$ y $\bar{r}$, se tiene:

$$(\bar{p}+\bar{r})\cdot\bar{q} = (p_1+r_1, p_2+r_2, p_3+r_3)\cdot(q_1,q_2,q_3)$$

Y por la definición de producto escalar:

$$(\bar{p}+\bar{r})\cdot\bar{q} = (p_1+r_1)q_1 + (p_2+r_2)q_2 + (p_3+r_3)q_3$$

Por la propiedad distributiva para escalares

$$(\bar{p}+\bar{r})\cdot\bar{q} = p_1q_1+r_1q_1+p_2q_2+r_2q_2+p_3q_3+r_3q_3$$

Reagrupando obtenemos:

$$= (p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3) + (r_1q_1+r_2q_2+r_3q_3)$$

Y por la definición de producto escalar, tenemos:

$$(\bar{p}+\bar{r})\cdot\bar{q} = \bar{p}\cdot\bar{q} + \bar{r}\cdot\bar{q}$$

Las otras propiedades se dejan al alumno como ejercicio.

EJEMPLO

Calcular, $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})$

SOLUCION:

Por la distributividad del producto punto,

$$(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b}) = \bar{a}\cdot(\bar{a}-\bar{b}) + \bar{b}\cdot(\bar{a}-\bar{b}) = \bar{a}\cdot\bar{a} - \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}\cdot\bar{a} - \bar{b}\cdot\bar{b}$$

Pero: $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$, por lo tanto

$$(a+b)\cdot(a-b) = \bar{a}\cdot\bar{a} - \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{b} - \bar{b}\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot\bar{a} - \bar{b}\cdot\bar{b}$$

EJEMPLO

Calcular: $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b})$

SOLUCION:

Aplicando la distributividad obtenemos:

$$(a+b)\cdot(a+b) = \bar{a}\cdot(\bar{a}+\bar{b}) + \bar{b}\cdot(\bar{a}+\bar{b}) = \bar{a}\cdot\bar{a} + \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}\cdot\bar{a} + \bar{b}\cdot\bar{b}$$

Por conmutatividad $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$ y así

$$(a+b)\cdot(a+b) = \bar{a}\cdot\bar{a} + \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot\bar{a} + 2(\bar{a}\cdot\bar{b}) + \bar{b}\cdot\bar{b}$$

1.11.2 MODULO, NORMA O LONGITUD DE UN VECTOR.

Supongase ahora, que se desea calcular la longitud de las aristas de la pirámide, por ejemplo, la de la arista que une los puntos A y E.

Se sabe que la distancia entre dos puntos viene dada por:

$$d_{AE} = \sqrt{(x_E-x_A)^2 + (y_E-y_A)^2 + (z_E-z_A)^2}$$

por lo que la longitud de la arista será:

$$d_{AE} = \sqrt{(3-3)^2 + (3-1)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} \quad \ldots 1$$

Analícese si en el caso de dos vectores, se puede llegar a determinar la longitud de la arista en estudio.

El vector $\overline{AE}$ está definido por:

$$\overline{AE} = \overline{OE} - \overline{OA} = \left[(x_E-x_A), (y_E-y_A), (z_E-z_A)\right]$$

es decir, $\overline{AE} = \left[(3-3), (3-1), (6-0)\right] = (0,2,6)$

hágase el producto escalar $\overline{AE}\cdot\overline{AE}$, y queda:

$$\overline{AE}\cdot\overline{AE} = (0 + 2^2 + 6^2) = 40$$

como se puede observar, comparando 1 y 2 vemos que:

$$\overline{AE}\cdot\overline{AE} = d^2_{AE}$$

es decir,
$$d_{AE} = \sqrt{\overline{AE}\cdot\overline{AE}}$$

con lo que se llega a la siguiente:

DEFINICION 1.46

El módulo, norma o longitud de un vector $\bar{r}=(r_1,r_2,r_3)$ denotado por $|\bar{r}|$ se define como:

$$|\bar{r}| = \sqrt{\bar{r}\cdot\bar{r}}$$

Dicha definición, se puede generalizar al espacio E^n.

En función de sus componentes se expresa como:

$$|\bar{r}| = \sqrt{r_1r_1+r_2r_2+r_3r_3}$$

es decir,

$$|\bar{r}| = \sqrt{r_1^2+r_2^2+r_3^2} = \left[\sum_{k=1}^{3} r_k^2\right]^{1/2}.$$

obsérvese que: $|\bar{r}|^2 = |\bar{r}||\bar{r}| = \bar{r}\cdot\bar{r}$ (vease la figura 1.55)

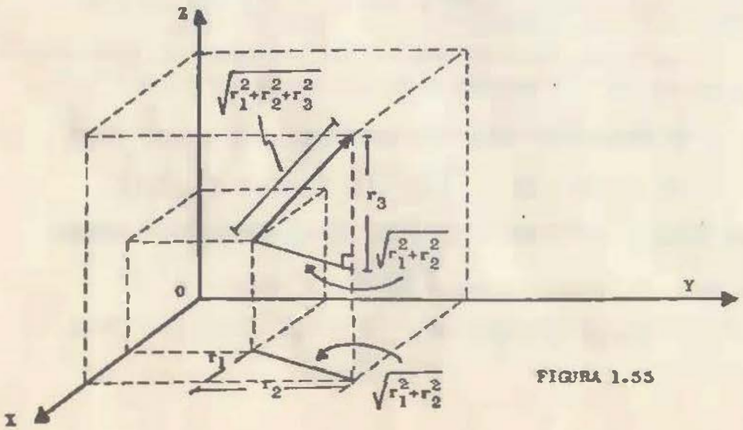


FIGURA 1.55

Las propiedades del módulo de un vector, se establecen en el siguiente:

TEOREMA 1.6

Sea $\bar{r}=(r_1,r_2,r_3)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces,

1.- $|\bar{r}|>0$ si $\bar{r}\neq 0$

2.- $|\bar{r}|=0$ si $\bar{r}=0$

3.- $|\lambda\bar{r}|=\lambda|\bar{r}|$

A continuación se demostrará una parte del Teorema.

Sea el vector $\bar{r}=(r_1,r_2,r_3)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces:

$\lambda\bar{r}=\lambda(r_1,r_2,r_3)$

Aplicando el producto de un escalar por un vector, se obtiene:

$$\lambda\bar{r} = (\lambda r_1,\lambda r_2,\lambda r_3)$$

Calculando el módulo del vector anterior, se tiene

$$|\lambda\bar{r}| = \sqrt{(\lambda r_1)^2+(\lambda r_2)^2+(\lambda r_3)^2} \quad \ldots (1)$$

efectuando operaciones entre los escalares λ, r_1, r_2 y r_3, se obtiene:

$$|\lambda\bar{r}| = \sqrt{\lambda^2r_1^2+\lambda^2r_2^2+\lambda^2r_3^2}$$

factorizando λ se obtiene:

$$|\lambda\bar{r}| = \lambda\sqrt{r_1^2+r_2^2+r_3^2} \quad \ldots (2)$$

pero

$$\sqrt{r_1^2+r_2^2+r_3^2} = |\bar{r}| \quad \ldots (3)$$

sustituyendo (3) en (2) queda:

$$|\lambda\bar{r}| = \lambda|\bar{r}| \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

Obsérvese que si $|\bar{r}|=1$, entonces $|\lambda\bar{r}| = \lambda$.

Otro teorema importante, es el siguiente:

TEOREMA 1.7

Sea $\bar r = (r_1, r_2, r_3)$, entonces, si definimos:

$\frac{\bar r}{|\bar r|} = \frac{1}{|\bar r|} \cdot \bar r$, tenemos que $\left|\frac{\bar r}{|\bar r|}\right|$ es igual a la unidad.

DEMOSTRACION.- Como $\bar r = (r_1, r_2, r_3)$, entonces:

$|\bar r| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ es decir,

$\frac{\bar r}{|\bar r|} = \frac{1}{|\bar r|}\bar r$ y aplicando el producto de un escalar por-un vector, queda:

$\frac{\bar r}{|\bar r|} = \left(\frac{r_1}{|\bar r|}, \frac{r_2}{|\bar r|}, \frac{r_3}{|\bar r|}\right)$ aplicando la definición de módulo

$$\left|\frac{\bar r}{|\bar r|}\right| = \sqrt{\left(\frac{r_1}{|\bar r|}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{|\bar r|}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{|\bar r|}\right)^2} = \sqrt{\frac{r_1^2}{(|\bar r|)^2} + \frac{r_2^2}{(|\bar r|)^2} + \frac{r_3^2}{(|\bar r|)^2}}$$

$$\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{(|\bar r|)^2}}$$

y como $|\bar r|^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$, por lo tanto

$$\left|\frac{\bar r}{|\bar r|}\right| = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} = \sqrt{1} = 1$$

L.Q.Q.D.

Considerando el vector hasta E^3, obsérvese que $1/\bar r$ es -un escalar, y por lo tanto $\bar r/|\bar r|$ que es igual a $(1/|\bar r|)\,\bar r$, es -el producto de un escalar por un vector y por lo consiguiente-$\bar r$ es paralelo a $\bar r/|\bar r|$, con la misma dirección y de módulo uno-como ya se demostró, lo que se ilustra en la figura 1.56, a dicho vector se le acostumbra llamar el unitario de $\bar r$

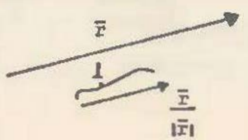


FIG. I. 56

EJEMPLO

Sean los vectores $\bar a = (3,0,5)$ y $\bar b = (2,-1,-3)$. Calculese:

a).- $|\bar a|$

b).- $|3\bar a|$

c).- $\left|\bar a + \frac{1}{2}\bar b\right|$

d).- $\left|\bar b/|\bar b|\right|$

e).- $\left|\frac{\bar a + \bar b}{|\bar a + \bar b|}\right|$

SOLUCION:

a).- $|\bar a| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (5)^2} = \sqrt{9+0+25} = \sqrt{34}$

b).- Calculando el vector $3\bar a$ queda:

$3\bar a = 3(3,0,5) = (9,0,15)$

Y su módulo será:

$|3\bar a| = \sqrt{(9)^2 + (0)^2 + (15)^5} = \sqrt{81+0+225} = \sqrt{306}$

$|3\bar a| = 3\sqrt{34}$

c).- Calculando primero $\bar a + \frac{1}{2}\bar b$ se tiene:

$\bar a + \frac{1}{2}\bar b = (3,0,5) + \frac{1}{2}(2,-1,-3) = (3,0,5) + (1,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$

$= (4,-1/2,7/2)$

$\left|\bar a + \frac{1}{2}\bar b\right| = \sqrt{(4)^2 + (-1/2)^2 + (7/2)^2}$

$= \sqrt{16 + 1/4 + 49/4} = \sqrt{114/4} = (1/2)\sqrt{114}$

d).- Calculando primero $\bar{b}/|\bar{b}|$, se tiene:

$$\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{(2,-1,-3)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}} = \frac{(2,-1,-3)}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2,-1,-3)$$

$$= (2/\sqrt{14},-1/\sqrt{14},-3/\sqrt{14})$$

Y su módulo será:

$$\left|\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)^2} = \sqrt{4/14 + 1/14 + 9/14}$$

$$= \sqrt{14/14} = 1$$

Obsérvese que se cumple lo siguiente: $\left|\bar{b}/|\bar{b}|\right| = 1$

e).- Efectuando operaciones entre vectores queda:

$$\frac{\bar{a}+\bar{b}}{|\bar{a}+\bar{b}|} = \frac{(3,0,5)+(2,-1,-3)}{|\bar{a}+\bar{b}|} = \frac{(5,-1,2)}{\sqrt{5^2+(-1)^2+(2)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{25+1+4}}(5,-1,2) = (5/\sqrt{30},-1/\sqrt{30},2/\sqrt{30})$$

$$\left|\frac{\bar{a}+\bar{b}}{|\bar{a}+\bar{b}|}\right| = \sqrt{(5/\sqrt{30})^2 + (-1/\sqrt{30})^2 + (2/\sqrt{30})^2}$$

$$= \sqrt{25/30 + 1/30 + 4/30}$$

$$= \sqrt{30/30} = 1$$

Obsérvese que los vectores divididos entre su módulo, siempre resultan de módulo unitario.

1.11.3 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN E^3

Como ya se vió, para calcular la distancia entre los puntos $P(p_1,p_2,p_3)$ y $R(r_1,r_2,r_3)$, se establece el vector $\overline{PR}$ ó $\overline{RP}$, y el módulo del mismo será la distancia entre los puntos como se ve en la figura 1.57

Sean $\bar{p}$ y $\bar{r}$, los vectores de posición de P y R respectivamente, entonces:

$$\overline{PR} = \bar{r}-\bar{p}$$

Y por lo tanto,

$$d_{\overline{PR}} = |\bar{r}-\bar{p}| = \sqrt{(\bar{r}-\bar{p})\cdot(\bar{r}-\bar{p})}$$

Y en función de sus componentes:

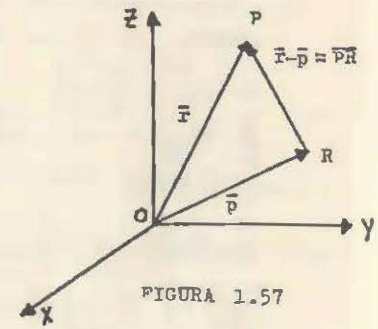


FIGURA 1.57

$$d_{\overline{PR}} = \sqrt{(r_1-p_1)^2+(r_2-p_2)^2+(r_3-p_3)^2}$$

EJEMPLO 27

Determinar la longitud de las diagonales de la base de la pirámide de la figura 1.44.

SOLUCION.- Estas van de A(3,1,0) a C(3,5,0), y de B(5,3,0) a D(1,3,0) ó viceversa. Entonces,

$$d_{\overline{AC}} = |\overline{AC}| = |\bar{c}-\bar{a}| = |(3,5,0)-(3,1,0)| = |(0,4,0)| = \sqrt{0^2+4^2+0^2}$$

$$\therefore \quad |\overline{AC}| = 4$$

y $|\overline{BD}| = |\bar{d}-\bar{b}| = |(1,3,0)-(5,3,0)| = |(-4,0,0)| = \sqrt{(-4)^2+0^2+0^2}$

$$\therefore \quad |\overline{BD}| = 4$$

1.12 PERPENDICULARIDAD.

Hasta ahora conocemos que la pirámide con la que se está trabajando tiene algunas características muy particulares, como son que los puntos A,B,C y D de la base se encuentran en el plano XY por tener todos su tercera coordenada igual a cero, después se vió que sus lados opuestos son paralelos y ahora se ha determinado que sus diagonales miden lo mismo. Todas éstas condiciones, geométricamente indican que se trata de un paralelogramo, mas exactamente, un rectángulo, como se muestra a continuación:

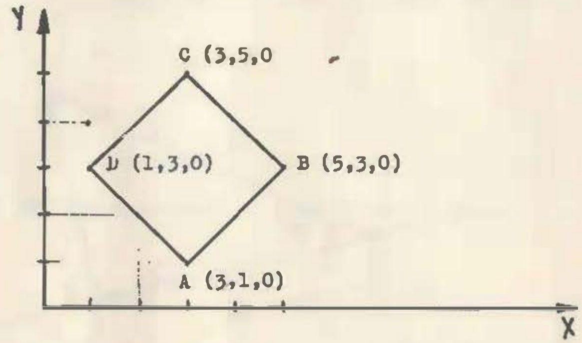


FIGURA 1.58

Obsérvese que:

$\overline{AB} = (2,2,0)$	$\overline{BC} = (-2,2,0)$
$\overline{DC} = (2,2,0)$	$\overline{BD} = (-4,4,0)$
$\overline{AC} = (0,4,0)$	$\overline{AD} = (-2,2,0)$

Efectúese el producto escalar entre los vectores anteriores, se obtendrá:

$\overline{AB}\cdot\overline{BD} = -8$, $\overline{AB}\cdot\overline{AD} = 0$, $\overline{AB}\cdot\overline{BC} = 0$, $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 8$

Obsérvese que el producto punto dá cero, solo en el caso de que los vectores son perpendiculares, pues los lados AB y AD son perpendiculares, así como también AB y AC, lo que se puede verificar mediante el siguiente:

LEMA 1.1

Sea $\bar{r} = (r_1, r_2, r_3)$ y $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3)$, si $\bar{r}$ y $\bar{p}$ son perpendiculares, entonces se debe cumplir:

$$|\bar{r} + \bar{p}| = |\bar{r} - \bar{p}|$$

DEMOSTRACION.- Si $\bar{r}$ es perpendicular a $\bar{p}$, entonces se les puede considerar ubicados en los lados del rectángulo de la figura 1.59. Aprovechando las propiedades de éste se tiene que las diagonales deben ser iguales, y como los vectores $\bar{r}+\bar{p}$ y $\bar{r}-\bar{p}$ coinciden con cada diagonal, por lo tanto sus módulos deberán ser iguales, o sea:

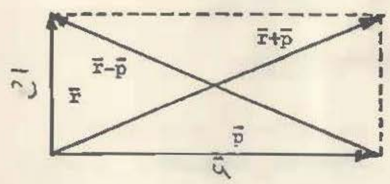


FIG. 1.59.

$$|\bar{r} + \bar{p}| = |\bar{r} - \bar{p}|$$

L.Q.Q.D.

> **TEOREMA 1.8**
>
> Sean los vectores $\bar{r}\ (r_1, r_2, r_3)$ y $\bar{p}\ (p_1, p_2, p_3)$ - $\bar{r}$ y $\bar{p}$ son perpendiculares si y solo si,
>
> $$\bar{r} \cdot \bar{p} = 0$$

DEMOSTRACION.- Por el Lema anterior, si $\bar{r}$ y $\bar{p}$ son perpendiculares, entonces

$$|\bar{r} + \bar{p}| = |\bar{r} - \bar{p}|$$

Elevando al cuadrado, se tiene:

$$|\bar{r}+\bar{p}|^2=|\bar{r}-\bar{p}|^2$$

Pasando todo al primer miembro, se tiene:

$$|\bar{r}+\bar{p}|^2 - |\bar{r}-\bar{p}|^2 = 0$$

y como

$$|r+p|^2 = \sum_{k=1}^{3}(r_k+p_k)^2 \quad y$$

$$|r-p|^2 = \sum_{k=1}^{3}(r_k-p_k)^2$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{3}(r_k+p_k)^2 - \sum_{k=1}^{3}(r_k-p_k)^2 = 0$$

desarrollando

$$\sum_{k=1}^{3}(r_k^2+2r_kp_k+p_k^2-r_k^2+2r_kp_k-p_k^2)=0$$

$$\sum_{k=1}^{3}4r_kp_k=0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{3}r_kp_k=0$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{3}r_kp_k=0$$

Qué es la condición de ortogonalidad.

Pero, por definición:

$$\sum_{k=1}^{3}r_kp_k=\bar{r}\cdot\bar{p} \qquad \text{(PRODUCTO ESCALAR)}$$

$$\therefore \quad \bar{r}\cdot\bar{p}=0$$ CONDICION DE PERPENDICULARIDAD ENTRE VECTORES.

Es decir, para que los vectores no nulos $\bar{r}$ y $\bar{p}$ sean perpendiculares, se requiere que su producto escalar sea igual a cero.

1.13 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO ESCALAR. PROYECCION ORTOGONAL. COMPONENTES. ANGULO ENTRE DOS VECTORES.

1.13.1 PROYECCION ORTOGONAL. COMPONENTES.-

Verémos ahora el concepto de componente de un modo mas general, refiriéndola no solo a los ejes coordenados, sino a otro vector cualquiera.

Sean dos vectores cualesquiera $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en E^3. Pásese por el punto inicial de $\bar{a}$, una recta paralela a $\bar{b}$, y trácese una perpendicular a dicha recta desde el extremo final de $\bar{a}$, tal como se muestra en la figura 1.60

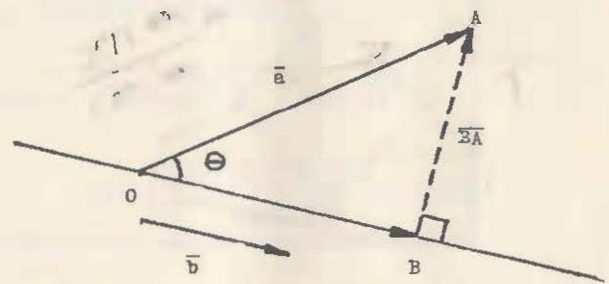


FIGURA 1.60

El vector $\bar{a}$ forma la hipotenusa del triángulo rectángulo OAB. El segmento dirigido $\overline{OB}$, puede expresarse como:

$$\overline{OB} = k\,\bar{b} \quad ; \quad k\in R$$

Ahora bien, $\bar{b}$ y $\overline{BA}$ son perpendiculares, por lo tanto:

$$\bar{b}\cdot\overline{BA} = 0 \qquad (1)$$

De la figura se observa que:

$$\overline{BA} = \bar{a} - \overline{OB} = \bar{a} - k\bar{b}$$

Así que sustituyendo este resultado en (1), se llega a:

$$\bar{b}\cdot(\bar{a} - k\bar{b}) = 0$$

Y aplicando la ley distributiva:

$$\bar{b}\cdot\bar{a} - \bar{b}\cdot k\bar{b} = 0$$

Al aplicar asociatividad:

$$\bar{b}\cdot\bar{a} - k\bar{b}\cdot\bar{b} = 0$$

Por lo tanto:

$$\bar{b}\cdot\bar{a} = k\bar{b}\cdot\bar{b}$$

Como $\bar{b}\cdot\bar{b}$ y $\bar{a}\cdot\bar{a}$ son escalares, se obtiene el valor de k, es decir:

$$k = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\bar{b}\cdot\bar{b}} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2} \qquad (2)$$

El vector $k\bar{b}$, alojado en el cateto OB del triángulo-rectángulo de la figura 1.72 se llama "Proyección ortogonal de $\bar{a}$ sobre $\bar{b}$", y se denota por $\text{Proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}$; con el valor de k, dado, en (2), se puede escribir:

$$\text{Proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = k\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2}\,\bar{b}$$

Que también se puede expresar como:

$$\text{Proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}\,\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

Pero por lo visto en el Teorema 1.7 $\dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$ es un vector unitario en la dirección de $\bar{b}$ y $\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$; un escalar que multiplica a dicho vector unitario, por lo tanto $\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$ nos representa la longitud dirigida del vector proyección $_{\bar{b}}\,\bar{a}$, se llama "Componente de $\bar{a}$ sobre $\bar{b}$" y se denota $\text{Comp}_{\bar{b}}\,\bar{a}$, es decir:

$$\text{Comp}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

De manera análoga:

$$\text{Comp}_{\bar{a}}\,\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}$$

Se denomina longitud dirigida, pues si la $\text{Comp}_{\bar{b}}\,\bar{a}$ es positiva, se medirá en la dirección del vector $\bar{b}$, en cambio, si es negativa, será de sentido contrario.

De aquí se tiene que si:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{b}|\ \text{Comp}_{\bar{b}}\,\bar{a}$$

Entonces el producto punto entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ se puede expresar como el módulo de uno de ellos, multiplicado por la componente del otro, sobre el primero.

1.13.2 ANGULO ENTRE DOS VECTORES. En la figura 1.61 se verifica que:

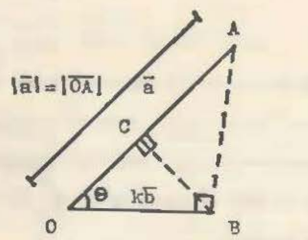
$$\text{Cos}\theta = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OA}|} = \frac{|k\bar{b}|}{|\overline{OA}|}$$

Pero:

$$|k\bar{b}| = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} \quad \text{y} \quad |\overline{OA}| = |\bar{a}|$$

Por lo tanto:

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$



$|\overline{OB}| = |k\bar{b}| = \text{Com}_{\bar{b}}\,\bar{a}$

FIGURA 1.61

Esta expresion permite calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$. De acuerdo con esta ecuación, otra manera de indicar el producto escalar, es:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$$

Se deja al lector como ejercicio, verificar que se obtienen los mismos resultados para:

$$\theta > 90°$$

EJEMPLO

Para la pirámide de la fig. 1.44, calcular:

a).- Los ángulos que forman los lados del triángulo ABE.

b).- La $\text{Comp}_{\overline{BC}}\overline{BE}$ y la $\text{Proy}_{\overline{BC}}\overline{BE}$. Ver figura 1.62

SOLUCION:

El ángulo formado por el triángulo ABE en el vértice A, es el que forman los vectores $\overline{AE}$ y $\overline{AB}$.

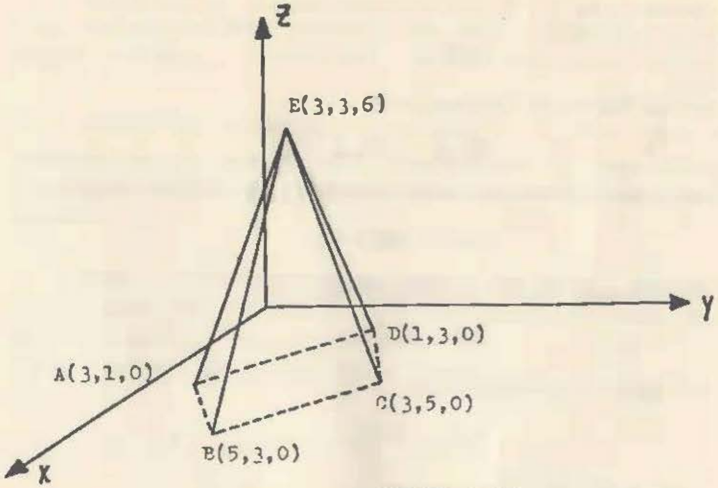


FIGURA 1.62

Por lo tanto:

a) $\overline{AB} = (2,2,0)$; $\overline{AE} = (0,2,6)$

$$\text{Cos}\measuredangle A = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AE}}{|\overline{AB}||\overline{AE}|}$$

$$\text{Cos}\measuredangle A = \frac{(2,2,0)\cdot(0,2,6)}{\sqrt{(2)^2+(2)^2+(0)^2}\ \sqrt{(0)^2+(2)^2+(6)^2}}$$

$$\text{Cos}\measuredangle A = \frac{(2)(0)+(2)(2)+(0)(6)}{\sqrt{4+4+0}\ \sqrt{0+4+36}}$$

$$\text{Cos}\measuredangle A = \frac{4}{\sqrt{8}\ \sqrt{40}} = \frac{4}{\sqrt{320}}$$

$$\measuredangle A = \text{Cos}^{-1}\ \frac{4}{\sqrt{320}} = 77.079°$$

$$\text{Cos} \sphericalangle B = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BE}}{|\overline{BA}||\overline{BE}|}$$

$$\text{Cos} \sphericalangle B = \frac{(-2,-2,0)\cdot(-2,0,6)}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(0)^2}\ \sqrt{(-2)^2+(0)^2+(6)^2}}$$

$$\text{Cos} \sphericalangle B = \frac{(-2)(-2)+(-2)(0)+(0)(6)}{\sqrt{4+4+0}\ \sqrt{4+0+36}}$$

$$\text{Cos} \sphericalangle B = \frac{4}{\sqrt{8}\ \sqrt{40}} = \frac{4}{\sqrt{320}}$$

$$\therefore \quad \sphericalangle A = \sphericalangle B = 77.079^{o}$$

$$\text{Cos} \sphericalangle E = \frac{\overline{EA}\cdot\overline{EB}}{|\overline{EA}|\ |\overline{EB}|}$$

$$\text{Cos} \sphericalangle E = \frac{(0,-2,-6)\cdot(2,0,-6)}{\sqrt{(0)^2+(-2)^2+(-6)^2}\ \sqrt{(2)^2+(0)^2+(-6)^2}}$$

$$\text{Cos} \sphericalangle E = \frac{(0)(2)+(-2)(0)+(-6)(-6)}{\sqrt{0+4+36}\ \sqrt{4+36}}$$

$$\text{Cos} \sphericalangle E = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}$$

$$\therefore \quad \sphericalangle E = \text{Cos}^{-1} \frac{9}{10} = 25.842^{o}$$

b) $\overline{BE} = (-2,0,6)$; $\overline{BC} = (-2,2,0)$

$$\text{Comp}_{\overline{BC}} \overline{BE} = \frac{\overline{BE}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BC}|} = \frac{(-2,0,6)\cdot(-2,2,0)}{\sqrt{(-2)^2+(2)^2+(0)^2}} = \frac{-2(-2)+0(2)+6(0)}{\sqrt{4+4+0}} = \frac{4}{\sqrt{8}}$$

$$\therefore \quad \text{Proy}_{\overline{BC}} \overline{BE} = \text{Comp}_{\overline{BC}} \overline{BE} \times \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} = \sqrt{2}\ \frac{(-2,2,0)}{2\sqrt{2}} = (-1,1,0)$$

1.14 VECTORES UNITARIOS i,j,k. FORMA TRINOMICA DE UN VECTOR.

Se ha visto, que al dividir un vector $\bar{r}$ entre su módulo, se obtiene un vector en la misma dirección de $\bar{r}$ y de módulo unitario, representado por $\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$; de entre todos los vectores de módulo unitario, son de primordial interés, aquellos que llevan la misma dirección que las partes positivas de los ejes coordenados, y a los cuales, se denotará como vectores unitarios i,j,k; y se observan en la figura 1.63.

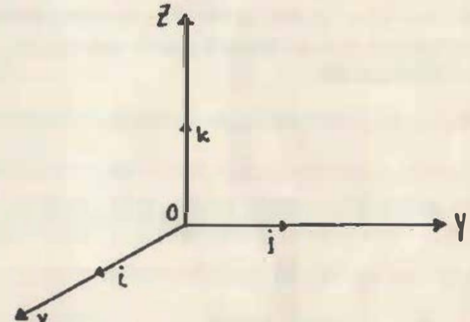


FIGURA 1.63

A continuación, se obtendrá uno de los vectores unitarios.

Sea $p = (p_1,0,0)$, un vector en la dirección positiva del eje x. Si ahora se hace unitario, se tendrá:

$$\frac{\bar{p}}{|\bar{p}|} = \frac{1}{\sqrt{(p_1)^2+(0)^2+(0)^2}}\ (p_1,0,0) = \frac{1}{\sqrt{p_1^2}}\ (p_1,0,0)$$

Simplificando:

$$\frac{\bar{p}}{|\bar{p}|} = \frac{1}{|p_1|}(p_1,0,0) = \left(\frac{p_1}{p_1},0,0\right) = (1,0,0)$$

A este vector se le llama $i=(1,0,0)$.

Los vectores $j=(0,1,0)$, $k=(0,0,1)$, se encuentran de manera semejante.

Además se debe verificar que por llevar las direcciones de los ejes ortogonales, son perpendiculares entre sí, por lo tanto, sus productos punto dan cero, como se indica a continuación:

$$i\cdot j = (1,0,0)\cdot(0,1,0) = 1(0)+0(1)+0(0) = 0$$

$$i\cdot k = (1,0,0)\cdot(0,0,1) = 1(0)+0(0)+0(1) = 0$$

$$j\cdot k = (0,1,0)\cdot(0,0,1) = 0(0)+1(0)+0(1) = 0$$

Por lo tanto, se verifica que:

$$i \perp j \perp k$$

Una de las primeras utilidades de los vectores - - - i, j, k; es la de poder expresar cualquier vector en términos de ellos; según se verifica en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.9

Cada vector $\bar{r}=(r_1,r_2,r_3)$, puede ser expresado en - la forma:

$$\bar{r} = r_1 i + r_2 j + r_3 k$$

Llamada forma trinómica del vector $\bar{r}$.

DEMOSTRACION:

Por las propiedades vistas, el vector $\bar{r}$ puede ser expresado como:

$\bar{r}=(r_1,0,0)+(0,r_2,0)+(0,0,r_3)$	SUMA DE VECTORES.
$\bar{r}=r_1(1,0,0)+r_2(0,1,0)+r_3(0,0,1)$	DEFINICION DE PRODUCTO POR UN ESCALAR.
$\bar{r}=r_1 i + r_2 j + r_3 k$	POR DEFINICION DE VECTOR UNITARIO.

L.Q.Q.D.

TEOREMA 1.10

Los vectores unitarios i,j,k; son linealmente independientes. su demostración se deja como ejercicio.

Además, se concluye que, como i,j,k; son linealmente independientes y pueden generar cualquier vector de E^3, entonces forman una base en E^3, que es la que más comunmente se usará.

1.15 ANGULOS Y COSENOS DIRECTORES.

DEFINICION 1.47

Sea un vector cualquiera $\bar{r}=(r_1,r_2,r_3)$. A los ángulos que forma el vector $\bar{r}$ con la parte positiva de cada uno de los ejes coordenados x,y,z; se lee llama, ángulos directores del vector, y se les denota por α , β y γ — respectivamente y a los cosenos de dichos ángulos, se — les llama, cosenos directores del vector, donde α , β y γ están contenidos en el intervalo $[0,\pi]$.

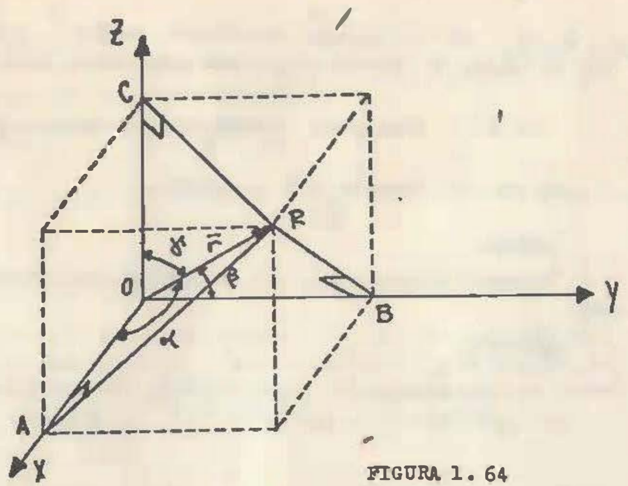
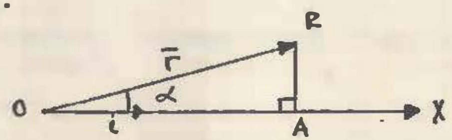
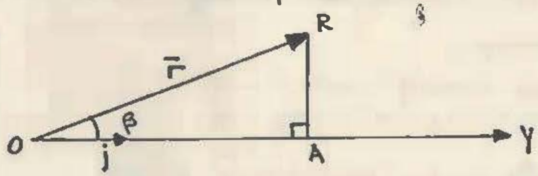


FIGURA 1. 64

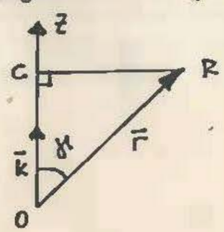
Obsérvese de la figura 1.64, que en el triángulo OAR está α.



En el triángulo OBR está β.



En el triángulo OCR está γ.



Como se observa, el ángulo que forma el vector $\bar{r}$, con la parte positiva de los ejes x,y,z; es el mismo que el formado entre $\bar{r}$ y los vectores unitarios i,j,k. Para calcularlos, se emplea:

$$\cos\alpha = \frac{\bar{r}\cdot i}{|\bar{r}||i|} \qquad \frac{(r_1,r_2,r_3)(1,0,0)}{|\bar{r}|} = \frac{r_1}{|\bar{r}|} \qquad (1)$$

Análogamente:

$$\cos\beta = \frac{r_2}{|\bar{r}|} \qquad (2)$$

$$\cos\gamma = \frac{r_3}{|\bar{r}|} \qquad (3)$$

TEOREMA 1.11

Si $\bar{r} = (r_1,r_2,r_3)$ y α,β,γ; son sus ángulos directores, entonces $\bar{u} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, es el vector unitario de $\bar{r}$.

Demostración:

Como el vector unitario de $\bar{r}$ es:

$$\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} = \left(\frac{r_1}{|\bar{r}|}, \frac{r_2}{|\bar{r}|}, \frac{r_3}{|\bar{r}|}\right)$$

Y aprovechando las expresiones (1), (2) y (3), se tiene:

$$\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

Que representa un vector de módulo 1 con la misma dirección que $\bar{r}$.

TEOREMA 1.12

Si α, β, γ son los ángulos directores de $\bar{r}$, entonces:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

DEMOSTRACION:

Elevando al cuadrado las expresiones (1), (2) y (3), se tiene:

$$\cos^2\alpha = \frac{r_1^2}{|\bar{r}|^2}, \quad \cos^2\beta = \frac{r_2^2}{|\bar{r}|^2}, \quad \cos^2\gamma = \frac{r_3^2}{|\bar{r}|^2}$$

Sumando se obtiene:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r_1^2}{|\bar{r}|^2} + \frac{r_2^2}{|\bar{r}|^2} + \frac{r_3^2}{|\bar{r}|^2}$$

Agrupando términos:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{|\bar{r}|^2}$$

Pero:

$$|\bar{r}|^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$$

Por lo que:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

TEOREMA 1.13

Si $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ son los ángulos directores de $\bar{r} = (r_1, r_2, r_3)$ y $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ son los ángulos directores de $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3)$, entonces, el ángulo θ entre $\bar{r}$ y $\bar{p}$, está dado por la expresión:

$$\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$$

Se deja la demostración al alumno.

EJEMPLO

Dado el vector $\bar{r} = (6, -2, 1)$, encontrar sus cosenos directores.

SOLUCION:

$$\cos\alpha = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{36+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{41}}$$

$$\cos\beta = \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} = \frac{-2}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{36+4+1}} = -\frac{2}{\sqrt{41}}$$

$$\cos\gamma = \frac{r_3}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{36+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{41}}$$

EJEMPLO

Dos de los cosenos directores de un vector son: $\cos\alpha = 2/3$ $\cos\beta = -1/3$. Hallar el valor de $\cos\gamma$.

SOLUCION:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$(2/3)^2 + (-1/3)^2 + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos^2\gamma = 1 - (4/9 + 1/9) = 1 - 5/9$$

$$= 4/9$$

$$\therefore \quad \cos\gamma = \pm\frac{2}{3}$$

EJEMPLO

Hallar los cosenos directores de un vector que forma ángulos iguales con los ejes coordenados.

SOLUCION: $\alpha = \beta = \gamma$

$$3\cos^2\alpha = 1\ ; \quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} = \cos\beta = \cos\gamma$$

1.16 PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES. APLICACIONES.

Hasta ahora, se vió el producto de los vectores que dá como resultado un escalar, a continuación, se definirá el producto entre vectores que dá como resultado otro vector, y que es de mucha aplicación en el tratamiento de momentos, velocidades angulares, etc..

DEFINICION 1.48

Sean $\bar{p}=(p_1,p_2,p_3)$ y $\bar{r}=(r_1,r_2,r_3)$, entonces el producto vectorial ó cruz de $\bar{p}$ y $\bar{r}$, que se denota: $\bar{p}\times\bar{r}$, se define como:

$$\bar{p}\times\bar{r} = (p_2r_3-p_3r_2,\ p_3r_1-p_1r_3,\ p_1r_2-p_2r_1)$$

Una representación más fácil de recordar del producto vectorial $\bar{p}\times\bar{r}$ es por medio de un determinante de tercer orden, en la forma siguiente:

$$\bar{p}\times\bar{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

Obsérvese que en el primer renglón están siempre los vectores unitarios, las componentes de $\bar{p}$ en el segundo renglón y las de $\bar{r}$ en el renglón final.

Las propiedades del producto vectorial se establecen en el siguiente:

TEOREMA 1.14

Sean $\bar{p}=(p_1,p_2,p_3)$, $\bar{q}=(q_1,q_2,q_3)$ y $\bar{r}\ (r_1,r_2,r_3)$ vectores de V_3 y sea $\lambda\in R$, entonces:

1.- $\bar{p}\times\bar{r} = -(\bar{r}\times\bar{p})$	$\therefore$ EL PRODUCTO VECT. ES NO CONMUTATIVO.
2.- $\lambda(\bar{p}\times\bar{r}) = (\lambda\bar{p})\times\bar{r} = \bar{p}\times(\lambda\bar{r})$	PROP. ASOCIATIVA.
3.- $\bar{p}\times(\bar{q}+\bar{r}) = \bar{p}\times\bar{q}+\bar{p}\times\bar{r}$	PROP. DIST. DEL PRODUCTO SOBRE LA SUMA.

DEMOSTRACION. (1.-) Aprovechando que el producto cruz se puede representar por medio de un determinante, se tiene que:

$$\bar{p}\times\bar{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

al intercambiar el segundo con el tercer renglón se obtiene:

$$\bar{p}\times\bar{r} = -\begin{vmatrix} i & j & k \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}$$

este determinante representa el producto $\bar{r}\times\bar{p}$

$$\therefore\quad \bar{p}\times\bar{r} = -(\bar{r}\times\bar{p})$$

Las demás propiedades se dejan como ejercicio al lector.

TEOREMA 1.15

Si $\bar{p}=(p_1,p_2,p_3)$ y $\bar{r}=(r_1,r_2,r_3)$, entonces:

$$|\bar{p}\times\bar{r}|^2 = |\bar{p}|^2|\bar{r}|^2 - (\bar{p}\cdot\bar{r})^2$$

Llamada "Identidad de Lagrange".

DEMOSTRACION.

Si $|\bar{p}\times\bar{r}|^2 = (p_2r_3-p_3r_2)^2+(p_3r_1-p_1r_3)^2+(p_1r_2-p_2r_1)^2$

y $|\bar{p}|^2|\bar{r}|^2 - (\bar{p}\cdot\bar{r})^2 = (p_1^2+p_2^2+p_3^2)\ (r_1^2+r_2^2+r_3^2) - (p_1r_1+p_2r_2+p_3r_3)^2$

desarrollando e igualando se obtiene una identidad, con lo que se demuestra el teorema.

A partir de la identidad de Lagrange, se calcula el módulo del producto vectorial, de la siguiente manera:

$$|\bar{p}\times\bar{r}|^2 = |\bar{p}|^2|\bar{r}|^2 - (\bar{p}\cdot\bar{r})^2 \qquad (1)$$

como $\bar{p}\cdot\bar{r} = |\bar{p}||\bar{r}|\cos\theta$ (2)

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene:

$$|\bar{p}\times\bar{r}|^2 = |\bar{p}|^2|\bar{r}|^2 - |\bar{p}|^2|\bar{r}|^2\cos^2\theta$$

factorizando:

$$|\bar{p}\times\bar{r}|^2 = |\bar{p}|^2|\bar{r}|^2\ (1-\cos^2\theta)$$

utilizando la identidad $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$|\bar{p}\times\bar{r}|^2 = |\bar{p}|^2|\bar{r}|^2\ \operatorname{sen}^2\theta$$

finalmente, sacando raíz cuadrada

$$\therefore\quad |\bar{p}\times\bar{r}| = |\bar{p}||\bar{r}|\ \operatorname{sen}\theta$$

L.Q.Q.D.

Como el producto $\bar{p}\times\bar{r}$ dá por resultado un vector, nos interesa saber hacia donde va dirigido y para esto consideramos el siguiente:

TEOREMA 1.16

Si $\bar{p}=(p_1,p_2,p_3)$ y $\bar{r}=(r_1,r_2,r_3)$, entonces:

$\bar{p}\times\bar{r}$ es perpendicular a $\bar{p}$ y a $\bar{r}$.

DEMOSTRACION

(i) Si $\bar{p}\times\bar{r}$ es perpendicular a $\bar{p}$, se tendrá que:

$$(\bar{p}\times\bar{r})\cdot\bar{p} = 0$$

Sustituyendo sus componentes correspondientes queda:

$$(\bar{p}\times\bar{r})\cdot\bar{p} = (p_2r_3-p_3r_2,\ p_3r_1-p_1r_3,\ p_1r_2-p_2r_1)\ (p_1,p_2,p_3)$$

$$(\bar{p}\times\bar{r})\cdot\bar{p} = p_1(p_2r_3-p_3r_2) + p_2(p_3r_1-p_1r_3) + p_3(p_1r_2-p_2r_1)$$

Desarrollando y simplificando:

$$(\bar{p}\times\bar{r})\cdot\bar{p} = p_1p_2r_3-p_1p_3r_2+p_2p_3r_1-p_2p_1r_3+p_3p_1r_2-p_3p_2r_1 = 0$$

(ii) La demostración de que $(\bar{p}\times\bar{r})$ es perpendicular a $\bar{r}$ se deja como ejercicio.

Para tener totalmente definido el producto vectorial solo falta mencionar que su sentido es tal que si se lleva el vector $\bar{p}$ hacia el vector $\bar{r}$, girando el menor ángulo posible, este giro se vé desde $\bar{p}\times\bar{r}$ en sentido contrario del giro de las manecillas del reloj, como se ilustra en la figura 1.65

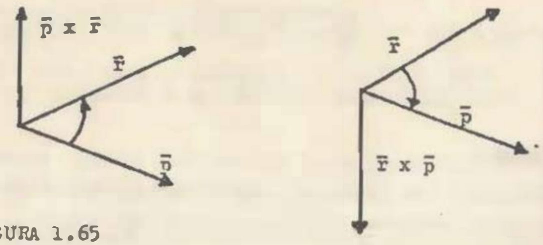


FIGURA 1.65

Una aplicación del producto cruz es la del cálculo de a reas. Considérese a continuación un paralelogramo que aloja en dos de sus lados concurrentes a los vectores $\bar{p}$ y $\bar{r}$, tal como se vé en la figura 1.65.

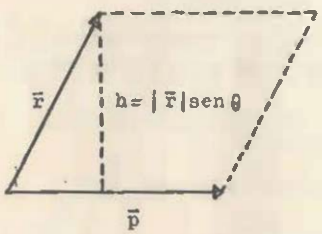


FIGURA 1.66

La altura del paralelogramo está dada por:

$$|\bar{r}| \text{ sen } \theta$$

en tanto que su base es igual a $|\bar{p}|$ por lo tanto, el area A es:

$$A = |\bar{p}|\,|\bar{r}| \text{ sen } \theta$$

como:

$$|\bar{p} \times \bar{r}| = |\bar{p}|\,|\bar{r}| \text{ sen } \theta$$

$$\therefore \quad A = |\bar{p} \times \bar{r}|$$

Es decir, el area del paralelogramo cuyos lados están definidos por los vectores $\bar{r}$ y $\bar{p}$ está dada por la magnitud del producto vectorial.

TEOREMA 1.17

Si $\bar{p}=(p_1, p_2, p_3)$ y $\bar{r}=(r_1, r_2, r_3)$ son paralelos, entonces:

$$\bar{p} \times \bar{r} = 0$$

DEMOSTRACION

$$\bar{p} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

Este determinante solo puede ser cero si dos líneas son iguales o proporcionales.

Para que se cumpla el paralelismo se vió que:

$$p_1 = \lambda r_1$$
$$p_2 = \lambda r_2$$
$$p_3 = \lambda r_3$$

Sustituyendo estos valores en el determinante anterior, queda:

$$\bar{p} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda r_1 & \lambda r_2 & \lambda r_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \bar{p} \times \bar{r} = 0$$

L.Q.Q.D.

EJEMPLO

En la pirámide del inciso 1.10 calcúlese el area de la base ABCD y de la cara AEB.

SOLUCION.

Si la base es un paralelogramo, entonces su área se puede calcular por medio de la magnitud del producto cruz de los vectores que lo forman, esto es:

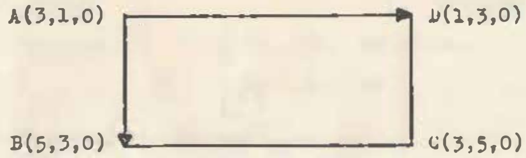


FIGURA 1.67

$A = |\overline{AB} \times \overline{AD}|$

$\overline{AB} = (2,2,0)$

$\overline{AD} = (-2,2,0)$

$$\therefore \ \overline{AB} \times \overline{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = i(0-0)-j(0-0)+k(4+4)$$

$$= 8k.$$

$$\therefore \ A = |8k| = 8 \ u^2.$$

La cara AEB es un triángulo

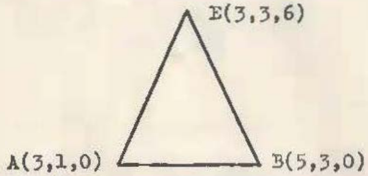


FIGURA 1. 68

Y por lo tanto, $A_{\Delta AEB} = \frac{1}{2}|\overline{AE} \times \overline{EB}|$

$$\overline{AE} = (0,2,6) \quad ; \quad \overline{EB} = (2,0,-6)$$

$$\overline{AE} \times \overline{EB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = i(-12)-j(-12)+k(-4) = -12i+12j-4k$$

$$A = \frac{1}{2}|\overline{AE} \times \overline{EB}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+(12)^2+(-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{144+144+16}$$

$$\therefore \ A = \frac{1}{2}\sqrt{304} = 2\sqrt{19} \ u^2.$$

EJEMPLO

Por medio del producto cruz encontrar un vector perpendicular a los vectores: i y j, j y k y k e i.

SOLUCION:

Por definición de producto cruz, se tiene:

$$i \times j = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = i(0-0)-j(0-0)+k(1-0) = k$$

$i \times j = k$. Por lo tanto, $i \times j = k$ es perpendicular a i y a j. (Esto es evidente debido a que i, j y k están alojados en ejes ortogonales).

$$j \times k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i(1-0)-j(0-0)+k(0-0) = i$$

$\therefore$ $j \times k = i$ y $j \times k = i$ es perpendicular a j y a k.

$$k \times i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = i(0-0)-j(0-1)+k(0-0) = j$$

$\therefore$ $k \times i = j$ y $k \times i = j$ es perpendicular a k y a i.

1.17 PRODUCTO MIXTO. APLICACIONES.

A continuación combinaremos las operaciones entre vectores vistas anteriormente, como se ilustra a continuación.

Se pretende calcular el volúmen de un paralepípedo usando las operaciones entre vectores.

Considérese un paralepipedo cualquiera como el mostrado en la figura 1.69.

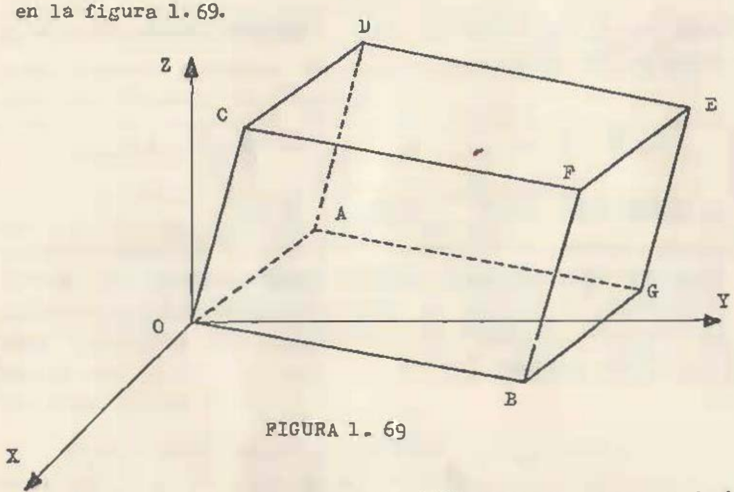


FIGURA 1. 69

Si se tienen definidos todos sus vértices, entonces llámese $\bar{a}$ al vector $\overline{OA}$ y $\bar{b}$ al vector $\overline{OB}$, el volúmen viene dado por la expresión:

$$V = (\text{Area base}) \times (\text{altura})$$

donde el área de la base OAGB está dada por:

$$\text{AREA DE LA BASE} = |\overline{OA} \times \overline{OB}| = |\bar{a} \times \bar{b}|$$

Ahora bien, que se le llamará h, se debe medir perpendicularmente a la base de tal modo que el volúmen es:

$$V = |\bar{a} \times \bar{b}|\,(h)$$

La figura anterior se transforma en:

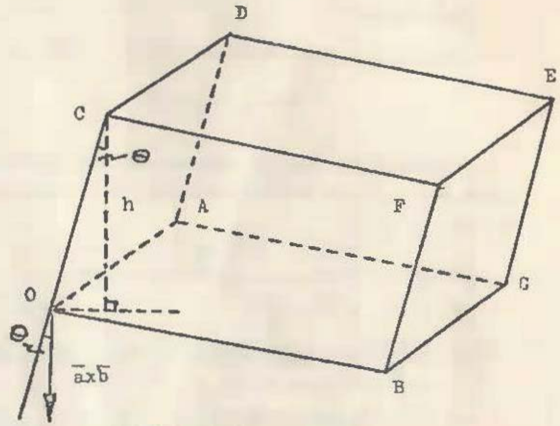


FIGURA 1.70

Obsérvese en la figura 1.70, que por ser h perpendicular á la cara OAGB, debe ser paralela a $\bar{a} \times \bar{b}$ y por lo - tanto:

$$h = |\overline{OC}| \cos\theta = |\bar{c}| \cos\theta$$

así, $$V = |\bar{a} \times \bar{b}|\,|\bar{c}| \cos\theta$$

que por definición, es el producto punto entre $\bar{a} \times \bar{b}$ y el vector $\bar{c}$, esto es:

$$V = \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c}$$

el cual tiene como resultado un escalar, obsérvese que el producto $\bar{a} \times \bar{b}$ es el que se debe efectuar primero, con lo que se llega a la siguiente definición:

DEFINICION 1.49 Al producto $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$ se le llama producto Mixto, y dá por resultado un escalar.

EJEMPLO

Calcular el volúmen de la pirámide de la fig. 1.44

SOLUCION:

Escogiendo los vectores $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$, se tiene que

$$V = \frac{1}{3}\, \overline{AB} \times \overline{AD} \cdot \overline{AE}$$

Recuérdese, que el volúmen de una pirámide es la tercera parte del volúmen de un paralepípedo, anteriormente se ha calculado $\overline{AB} \times \overline{AD}$:

$\overline{AB} \times \overline{AD} = 8k$, por lo tanto:

$\overline{AB} \times \overline{AD} = (0,0,8)$.

$$V = \frac{1}{3}(\overline{AB} \times \overline{AD}) \cdot \overline{AE} = \frac{1}{3}\ (0,0,8) \cdot (0,2,6)$$

$$V = \frac{1}{3}(0\cdot 0 + 0\cdot 2 + 8\cdot 6) = \frac{48}{3}\ u^3. = 16\ u^3.$$

Ahora bien, el producto $\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c}$ se puede expresar en función de sus componentes como

$$(\bar{a} \times \bar{b})\cdot\bar{c} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (c_1, c_2, c_3)$$

agrupando términos y conociendo el arreglo de un determinante de segundo orden se tiene:

$$(\bar{a} \times \bar{b})\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

lo anterior, es el desarrollo por menores y cofactores del siguiente determinante de tercer orden:

$$\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{c} \cdot \bar{a} \times \bar{b}$$

Por la conmutatividad del producto punto.

Las propiedades del producto mixto se pueden desarrollar aprovechando las propiedades de los determinantes, como son: Que un determinante no se altera, si el número de intercambios en lineas paralelas es par, así tenemos que:

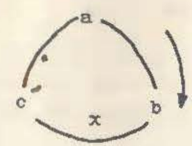
$$\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

según se vió, el segundo y tercer renglones corresponden al producto cruz, así.

$$\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \bar{b} \cdot \bar{c} \times \bar{a}$$

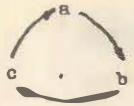
se cumple que $\bar{a}\times\bar{b}\cdot\bar{c} = \bar{b}\cdot\bar{c}\times\bar{a} = \bar{a}\cdot\bar{b}\times\bar{c}$

lo cual también se interpreta, como que en el producto mixto se pueden intercambiar el punto y la cruz sin que se altere el resultado o como que se pueden intercambiar ciclicamente los vectores, siguiendo el orden dado por la operación, como lo ilustra la figura 1.83



De esta manera, es común usar para el producto mixto la notación:

[a b c] para indicar el producto en ese orden con el punto primero, o sea:



$[a\ b\ c] \qquad \bar{a}\cdot\bar{b}\times\bar{c} = \bar{b}\cdot\bar{c}\times\bar{a} = \bar{c}\cdot\bar{a}\times\bar{b}$

1.18 DOBLE PRODUCTO VECTORIAL.

Se ha visto que el producto $\bar{a}\times\bar{b}$ es un vector, por lo tanto, si al vector resultante del producto $\bar{a}\times\bar{b}$ se multiplica vectorialmente por otro vector $\bar{c}$, se tendrá un nuevo producto vectorial cuyo resultado es a su vez, un vector y se establece la siguiente:

> **DEFINICION 1.50**
>
> Al producto $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ se le llama "Doble producto vectorial", y dá como resultado un vector.

Obsérvese que el doble producto vectorial $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ indica que primero debe efectuarse el producto $\bar{a}\times\bar{b}$ y después el producto con $\bar{c}$, además se tiene otra posibilidad con los mismos vectores que es: $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ y están en el mismo orden los vectores.

En este punto surge la pregunta, serán iguales $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ y $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$?, la respuesta se fundamenta con el siguiente:

> **TEOREMA 1.18**
>
> Dados los vectores $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ y $\bar{c}=(c_1,c_2,c_3)$ de V_3, se tiene que:
>
> $$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) \neq (\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$$

DEMOSTRACION Una manera particular de justificarlo, es tomando: $a=i$, $b=j$, $c=j$, así:

$$\bar{a}\times\bar{b} = (i\times j) = k \ ; \quad \bar{b}\times\bar{c} = (j\times j) = \bar{0}$$

$$y\ (a\times b)\times c = k\times j = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(i) = -i$$

$$a\times(b\times c) = i\times\bar{0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{0}$$

$$\therefore\ (\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} \neq \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$$

> **TEOREMA 1.19**
>
> Dados $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$ y $\bar{c}=(c_1,c_2,c_3)$, el producto doble $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ se puede expresar como:
>
> $$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\cdot\bar{c})\,\bar{b} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\,\bar{c}$$

Se deja como ejercicio al lector la demostración.

EJEMPLO.

Si $\bar{a}=(2,1,3)$, $\bar{b}=(1,0,-2)$ y $\bar{c}=(3,2,1)$. Calcular:

$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ y $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$.

SOLUCION:

$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\cdot\bar{c})\,\bar{b} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\,\bar{c}$

$\bar{a}\cdot\bar{c} = (2,1,3)\cdot(3,2,1) = 2(3)+1(2)+3(1) = 11$

$(\bar{a}\cdot\bar{c})\,\bar{b} = 11(1,0,-2) = (11,0,-22)$

$\bar{a}\cdot\bar{b} = (2,1,3)\cdot(1,0,-2) = 2(1)+1(0)+3(-2) = -4$

$(\bar{a}\cdot\bar{b})\,\bar{c} = -4(3,2,1) = (-12,-8,-4)$

$\therefore\ \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (11,0,-22) - (-12,-8,-4)$

$= (11+12,0+8,-22+4) = (23,8,-18).$

$(\bar{a} \times \bar{b})\ \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{c})\ \bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{c})\ \bar{a}$

$(\bar{a} \cdot \bar{c})\ \bar{b} = (11,0,-22)$

$(\bar{b} \cdot \bar{c}) = (1,0,-2) \cdot (3,2,1) = 1(3)+0(2)-2(1) = 1$

$(\bar{a} \times \bar{b})\ \bar{c} = (11,0,-22) - 1(2,1,3) = (11-2,0-1,-22-3)$

$\therefore\ (\bar{a} \times \bar{b})\ \bar{c} = (9,-1,2')$

Se justifica también que:

$$(\bar{a} \times \bar{b})\ \bar{c} \neq \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$$

1.19 ESPACIO EUCLIDIANO.

INTRODUCCION.- Con los conocimientos del tratamiento analítico de vectores, así como los del curso de Algebra, a continuación se puede tratar el Espacio Euclidiano de una manera más formal, como se ve a continuación.

> DEFINICION 1.51
>
> Se llama Espacio Euclidiano de dimensión n, al espacio-vectorial en el que estan definidas las operaciones de suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar, y en donde se define el producto escalar entre vectores.

Es decir, el conjunto E_n es un Espacio Euclidiano de dimensión n, si y sólo si, para $\bar{v}_1,\ \bar{v}_2,\ \bar{v}_3 \in E_n$ y $k_1, k_2 \in R$, se tiene que:

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in E_n$$

$$k_1\bar{v}_1 \in E_n$$

debe aclararse, que $\bar{v}_1,\ \bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ son los vectores de posición, que como ya se vió, representan a los puntos de E^n.

Al definir de esta manera el Espacio Euclidiano se presentan les siguientes propiedades:

1.- $\bar{v}_1+(\bar{v}_2+\bar{v}_3) = (\bar{v}_1+\bar{v}_2)+\bar{v}_3$
(PROPIEDAD ASOCIATIVA)

2.- $\bar{v}_1+\bar{v}_2 = \bar{v}_2+\bar{v}_1$
(PROPIEDAD CONMUTATIVA)

3.- $\bar{v}_1+\bar{0} = \bar{0}+\bar{v}_1 = \bar{v}_1$, con $\bar{0} \in E^n$
(EXISTENCIA DEL ELEMENTO NEUTRO ADITIVO)

4.- $\bar{v}_1+(-\bar{v}_1) = (-\bar{v}_1)+\bar{v}_1 = \bar{0}$, con $-\bar{v}_1 \in E^n$
(EXISTENCIA DEL INVERSO ADITIVO)

5.- $k_1(\bar{v}_1+\bar{v}_2) = k_1\bar{v}_1+k_1\bar{v}_2$
(PROP. DIST. DE UN ESCALAR SOBRE LA SUMA DE VECTORES)

6.- $\bar{v}_1(k_1+k_2) = k_1\bar{v}_1+k_2\bar{v}_1$
(PROP. DIST. DE UN VECTOR SOBRE LA SUMA DE ESCALARES)

7.- $(k_1k_2)\ \bar{v}_1 = k_1\ (k_2\bar{v}_1)$
(PROPIEDAD ASOCIATIVA)

8.- $1\ \bar{v}_1 = \bar{v}_1\ \forall\ 1 \in R$

También se define el producto escalar de vectores:

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 \in R$$

y las propiedades correspondientes se definieron anteriormente.

La definición de Espacio Euclidiano, algunos autores la hacen en función de la distancia entre dos puntos, lo cual es equivalente a la definición dada aquí, si se recuerda que dados dos puntos:

$$P_1\ (x_1,x_2,x_3,\ldots\ \ldots,x_n)\ \text{y}\ P_2\ (y_1,y_2,y_3,\ldots\ \ldots,y_n)$$

La distencia: $d = |\overline{P_1P_2}|$

Está dada por: $d = (\overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_1P_2})^{1/2}$

Es importante subrayar, que no todos los conjuntos que cumplen la definición de espacio vectorial cumplen necesariamente con la de espacio Euclidiano.

En el curso de Algebra se estudian los espacios vectoriales, y se vé que no en todos está definido el producto escalar entre dos vectores. Es necesario saber que el espacio en que se trabaja es Euclidiano, porque los principios de geometría analítica que serán desarrollados en este curso, parten de la premisa de que los puntos se encuentran en un espacio Euclidiano. La geometría para espacios no Euclidianos es tema de estudio de otros cursos de matemáticas.

1.20 SISTEMAS DE COORDENADAS GENERALES.

Cuando se trabaja en un sistema Cartesiano Ortogonal, deben plantearse ecuaciones de transformación entre el sistema citado y otro creado como se hizo en el caso de los sistemas de coordenadas Polares, Cilíndricas y Esféricas.

A continuación se definirá un sistema de coordenadas $u, v, \ldots, w$ de E^n de una manera más formal. En primer lugar se definirá la base al cual estará referido el sistema de coordenadas como:

DEFINICION 1.52 Se llama Base de un espacio Euclidiano E^n, al conjunto: $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ con - - - - - - - $\bar{v}_1\ (x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\bar{v}_2\ (y_1, y_2, \ldots y_n)$, ..., $\bar{v}_n\ (z_1, z_2, \ldots z_n)$; tal que:

$$\lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{v}_n = \bar{0}$$

Si y sólo si, $\lambda_i = 0$

Entonces cualquier otro vector $\bar{v} \in E^n$ puede expresarse como:

$$\bar{v} = \alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{v}_n$$

si algún $\alpha_i \neq 0$.

EJEMPLO

Demostrar que los vectores: i, j, k representan una base.

SOLUCION:

Se sabe que: $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$, entonces:

$$\lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k = \bar{0}$$

Si y sólo si, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Por otro lado, se vió anteriormente que cualquier vector de posición se puede poner en la forma trinómica siguiente:

$$\bar{p} = xi + yj + zk$$

L.Q.D.D.

DEFINICION 1.53 Se llama Base Canónica del espacio vectorial de puntos del E^n, al conjunto de n vectores:

$$B_n = \{(1,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0), \ldots\ldots, (0,0,\ldots,1)\}$$

Este conjunto genera a todo el espacio de dimensión n, es decir, cualquier punto de dicho espacio puede escribirse como una combinación de ellos y, por otra parte, puede demostrarse fácilmente que son independientes, siguiendo el proceso realizado en el caso de E^2.

DEFINICION 1.54 Se llama base ortogonal del espacio vectorial de puntos del espacio Euclidiano de dimensión n, al conjunto de n vectores $v = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ tal que:

$$\bar{v}_i \cdot \bar{v}_j = 0 \qquad i, j \in N \;\forall\; i \neq j$$

Como conclusión, se tiene que n vectores ortogonales definen una base del espacio de dimensión n.

DEFINICION 1.55 Se llama Base Ortonormal del espacio vectorial de puntos del espacio Euclidiano de dimensión n, a la base ortogonal $v = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$, tal que:

$$v_i \cdot v_i = 1 \;\forall i \in N \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Como puede observarse, toda base canónica es ortonormal aunque, evidentemente, existen bases ortonormales que no són canónicas, como la siguiente de E^2:

$$B' = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$$

El estudio formal de los cambios de base se lleva a cabo en los cursos de Algebra, en el tema de Transformaciones Lineales. El paso a coordenadas polares, cilíndricas o esféricas se vió anteriormente.

EJEMPLO:

Proponer la base canónica del espacio de puntos de dimensión cuatro.

SOLUCION:

Los puntos son del tipo (x_1, x_2, x_3, x_4). De acuerdo con la definición, la base canónica debe tener los cuatro vectores ortonormales.

$$B = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

EJEMPLO:

Demostrar que la base del ejemplo anterior es ortonormal.

SOLUCION:

Se debe verificar primero que los vectores dados son ortogonales. Como:

$\bar{v}_1 = (1,0,0,0)$; $\bar{v}_2 = (0,1,0,0)$; $\bar{v}_3 = (0,0,1,0)$; $\bar{v}_4 = (0,0,0,1)$

entonces, se debe verificar que: $\bar{v}_i \cdot \bar{v}_j = 0 \quad i, j \in N \quad \forall \quad i \neq j$

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = (1 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + 0 + 0 = 0$$
$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3 = (1 \cdot 0) + 0 + (0 \cdot 1) + 0 = 0$$
$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_4 = (1 \cdot 0) + 0 + 0 + (0 \cdot 1) = 0$$

y también:

$$\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3 = 0$$
$$\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_4 = 0$$
$$\bar{v}_3 \cdot \bar{v}_4 = 0$$

verificando la primera propiedad. Por otro lado, se debe verificar que $\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i = 1 \quad i = 1, 2, 3, 4.$

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1 = (1 \cdot 1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$

Y el lector puede comprobar que:

$$\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2 = 1, \qquad \bar{v}_3 \cdot \bar{v}_3 = 1, \qquad \bar{v}_4 \cdot \bar{v}_4 = 1,$$

dando por verdadera la segunda propiedad, con lo que queda demostrado que es una base ortonormal.

EJEMPLO

Sea $\bar{v}_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, proponer otro vector de posición de tal forma que quede definida una base ortonormal en E^2.

SOLUCION:

Sea $\bar{v}_2\ (x,y)$ el vector pedido. En primer lugar $\bar{v}_2$ debe ser ortogonal a $\bar{v}_1$, por lo tanto:

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0 \quad \text{y entonces,} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot (x,y) = 0,$$

realizando el producto:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{3}\,x \qquad \ldots(1)$$

Además se debe tener que $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1 = 1$ y $\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2 = 1$, verificándolos:

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{y} \quad \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2 = (x,y) \cdot (x,y) = x^2 + y^2 = 1 \qquad \ldots(2)$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$x^2 + (-\sqrt{3}\,x)^2 = 1 \quad ; \quad x^2 + 3x^2 = 1$$

$$\therefore \quad 4x^2 = 1 \quad ; \quad x = \pm \frac{1}{2}$$

y finalmente, para $x = \frac{1}{2}$, $y = -\sqrt{3}\,(\frac{1}{2})$; $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

y para $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\sqrt{3}\,(-\frac{1}{2})$; $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

existiendo por lo tanto dos soluciones:

$$\bar{v}_2'\left(\frac{1}{2}\ \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{y} \quad \bar{v}_2''\left(-\frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Así es posible dar dos bases ortonormales:

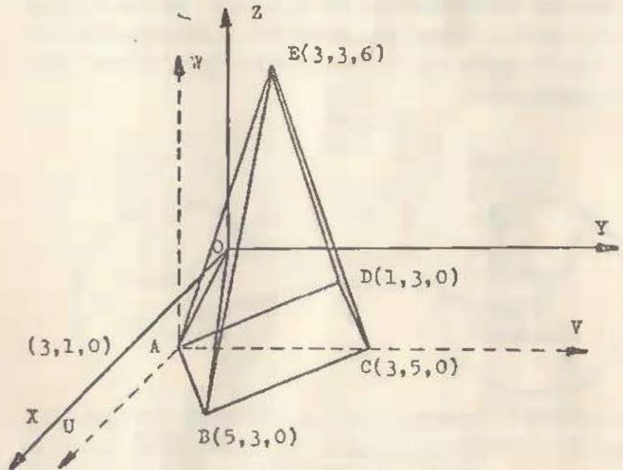
$$B_1 = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \qquad \text{y}$$

$$B_2 = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

1.21 TRASLACION Y ROTACION DE EJES

En muchas ocaciones es conveniente simplificar mas el modelo matemático, para lo cual se usan entre otros los conceptos de traslación y rotación de los ejes coordenados, como se verá a continuación.

Supóngase que en la pirámide del inciso 1.10 se desea obtener las nuevas coordenadas de los vértices cuando el orígen se trasladó al punto A y los ejes se movieron paralelamente a los iniciales como se ilustra en la figura 1.71 con los nuevos ejes: U, V y W.



Sistema Trasladado

FIGURA 1.71

El punto A será el nuevo orígen, por lo tanto, sus coordenadas con respecto al nuevo sistema serán (0,0,0) La posición del punto B, se puede determinar con respecto al sistema UVW por medio del vector $\overline{AB}$, donde:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \bar{b} - \bar{a} = (5,3,0) - (3,1,0) = (2,2,0)$$

Por lo tanto, las coordenadas de B respecto al sistema de coordenadas U,V,W son: (2,2,0).

Las coordenadas del punto E con respecto al sistema U,V,W vienen dadas por el vector de posición $\overline{AE}$, donde:

$$\overline{AE} = \overline{OE} - \overline{OA} = \bar{e} - \bar{a} = (3,3,6) - (3,1,0) = (0,2,6)$$

Las coordenadas de los demás puntos respecto al sistema U,V,W se dejan obtener como ejercicio.

En términos generales, un punto P en el espacio E^3 tiene por coordenadas (x,y,z) con respecto al sistema inicial, y (u,v,w) con respecto al sistema trasladado, como se ilustra en la figura 1.72

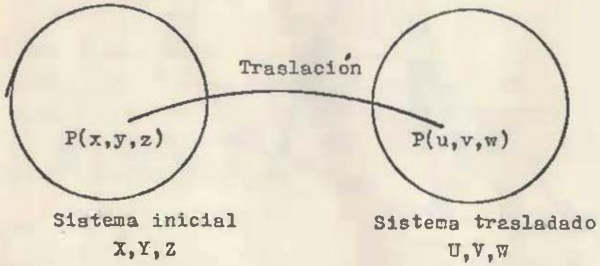


FIGURA 1.72

En general, si en un nuevo sistema de referencia se sabe que los ejes son paralelos a los iniciales y además se conocen las coordenadas del nuevo origen O' (h,k,l), ver figura 1.73

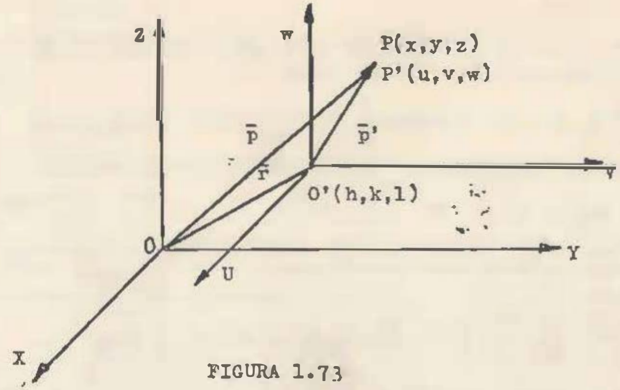


FIGURA 1.73

El vector de posición del nuevo origen con respecto al sistema inicial es $\bar{r} = (h,k,l)$.

Como se observa en la figura 1.73 , $\bar{p}'$ representa el vector de posición del punto P, referido al sistema U,V,W y éste puede ser calculado en función de $\bar{p}$ y $\bar{r}$ como se indica en la siguiente expresión.

$$\bar{p}' = \bar{p} - \bar{r} \qquad \ldots (1)$$

y en función de sus componentes queda:

$$(u,v,w) = (x,y,z) - (h,k,l)$$

$$(u,v,w) = (x-h, y-k, z-l)$$

y por igualdad de vectores

$$\left.\begin{aligned} u &= x - h \\ v &= y - k \\ w &= z - l \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (2)$$

Las ecuaciones (2) se llaman "Ecuaciones de Traslación de coordenadas y describen un corrimiento del sistema de coordenadas de referencia de O a O' conservando los nuevos-ejes paralelos a los originales.

EJEMPLO

Determinar las coordenadas de los vértices de la pirámide de la figura 1.74 cuando se traslada el orígen al vértice E.

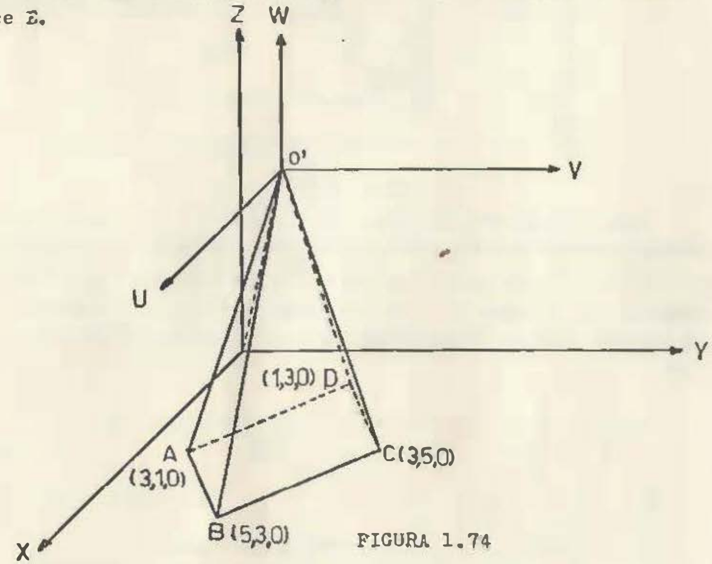


FIGURA 1.74

SOLUCION.

El vector $\bar{r}=\overline{OE}$ vale (3,3,6), por lo tanto, aplicando la ecuación vectorial de traslación (1), se tiene que las coordenadas de A respecto al nuevo sistema, vienen dadas por:

$$\overline{O'A} = \bar{p}-\bar{r} = \overline{OA}-\bar{r} = (3,1,0) - (3,3,6) = (0,-2,-6)$$

Por lo tanto, el vértice A respecto al nuevo sistema tiene de coordenadas A=(0,-2,-6).

En forma análoga:

$$\overline{O'B} = \overline{OB} - \bar{r} = (5,3,0) - (3,3,6) = (2,0,-6)$$

Entonces, las coordenadas de B son (2,0,-6).

$$\overline{O'C} = \overline{OC} - \bar{r} = (3,5,0) - (3,3,6) = (0,2,-6)$$

Entonces, las coordenadas de C son (0,2,-6).

$$\overline{O'D} = \overline{OD} - \bar{r} = (1,3,0) - (3,3,6) = (-2,0,-6)$$

Y las coordenadas de D son (-2,0,-6).

Como se vé, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de puntos en el sistema XYZ y el conjunto de los mismos puntos en el sistema UVW.

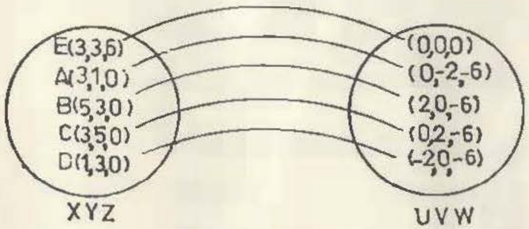


FIG. 1.75

Ahora bien, quizá las coordenadas de los vértices de la pirámide resulten más simples si además de traslacar el orígen, se giran los ejes coordenados.

Por ejemplo, trasládese el orígen al punto A y gírense los ejes de tal forma que el eje X coincida con el lado AB y el eje Y coincida con el lado AD, a este proceso de girar los ejes se le llama Rotación de ejes y al ángulo girado se le conoce como ángulo de rotación.

Obsérvese que el eje W por el momento se ha mantenido paralelo al eje Z, por lo que con un solo ángulo se puede determinar el giro del eje X y del eje Y, determinaremos ahora las nuevas coordenadas de todos los puntos contenidos en la base de la pirámide. De momento se trabajará en E^2.

A continuación se traslacarán los ejes al punto A:

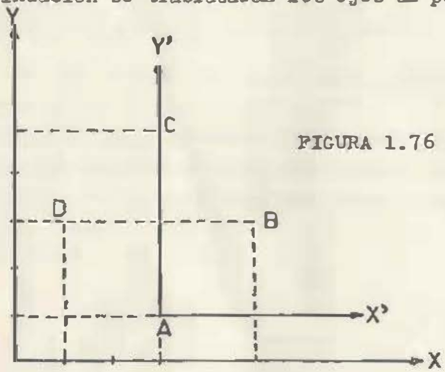


FIGURA 1.76

En el sistema XY las coordenadas son:

A (3,1)	;	B (5,3)
C (3,5)	;	D (1,3)

En el sistema X'Y' son:

A (0,0)	;	B (2,2)
C (0,4)	;	D (-2,2)

Y ahora, se girarán los ejes de tal forma que coincidan con las aristas AD y AB como se observa en la figura 1.77

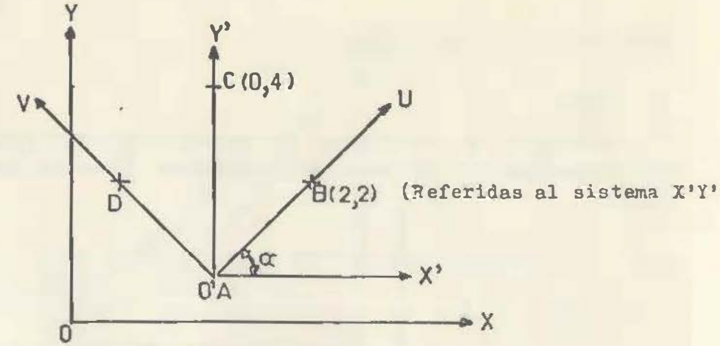


FIGURA 1.77

Como los puntos considerados A, B, C y D son casos particulares para establecer el modelo matemático, consideraremos el caso de un punto cualquiera de coordenadas (x,y) con respecto al sistema XY y de coordenadas (u,v) con respecto al sistema girado un ángulo α como se muestra en la figura 1.78.

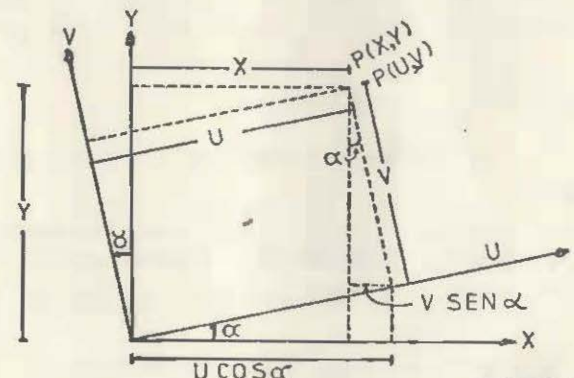


FIGURA 1.78

Obsérvese que las coordenadas x e y se pueden relacionar con las u-v por medio del ángulo α según muestran las siguientes ecuaciones:

$$x = u \cos\alpha - v \operatorname{sen}\alpha$$
$$y = u \operatorname{sen}\alpha + v \cos\alpha$$

Con los avances y ventajas del álgebra es conveniente poder expresar las ecuaciones anteriores en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Y en forma simplificada:

$$\bar{x} = T\,\bar{u}$$

donde T es la matriz de transformación que relaciona los dos sistemas de coordenadas.

Es conveniente en este punto analizar algunas propiedades de la matriz T.

I.- El determinante de la matriz T, siempre es igual a la unidad.

Demostración.-

$$|T| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

Se concluye que la matriz T es Ortonormal

II.- La inversa de T es idéntica a su matriz adjunta.

Demostración.-

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|} T^{*} = T^{*}$$

Como $|T| = 1$ la matriz inversa y la adjunta son iguales, pero:

$$T^{*} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = T^{t}$$

Por lo tanto,

$T^{-1} = T^{t}$ y así: $\quad T\,T^{t} = T^{t}\,T = I$

Es decir, que la matriz T por su transpuesta nos dá la identidad.

Esto simplifica la rotación, pues se usará la transpuesta que es mucho más fácil de calcular.

Ahora, volviendo al ejemplo, se tiene que calcular el ángulo α que viene dado por la siguiente expresión en E^2.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{O'B}\cdot i}{|\overline{O'B}||i|} = \frac{(2,2)\cdot(1,0)}{\sqrt{2^2 + 2^2}\,(1)} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \quad \alpha = \text{ang cos}\,(\sqrt{2}/2) = 45^\circ$$

La matriz de transformación será:

$$T = \begin{vmatrix} \cos 45^\circ & -\operatorname{sen}45^\circ \\ \operatorname{sen} 45^\circ & \cos 45^\circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Si B(2,2) referido al sistema X'Y' entonces las coordenadas del mismo punto referido al sistema UV se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Al premultiplicar por $T^{-1} = T^{t}$, se despeja $\bar{u}$:

$$\bar{u} = T^{t}\,\bar{x} \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}2+2\\ -2+2\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\sqrt{2}/2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}$$

O sea: $\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}$ $\therefore$ $u = 2\sqrt{2}$, $v = 0$

$\therefore$ Y $B' = (2\sqrt{2}, 0)$ (Referido al sistema UV)

Procediendo en forma semejante para los puntos $A(0,0)$, $C(0,4)$ y $D(-2,2)$ y aprovechando (1), se tiene:

$$\begin{bmatrix}u_A\\ v_A\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0+0\\ 0+0\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $A'=(0,0)$

Para el punto $C(0,4)$

$$\begin{bmatrix}u_C\\ v_C\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $C'=(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

Para el punto $D(-2,2)$

$$\begin{bmatrix}u_D\\ v_D\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 2\end{bmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-2+2\\ 2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 2\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $D'=(0, 2\sqrt{2})$

La correspondencia biunívoca con la transformación realizada se representa de la siguiente manera:

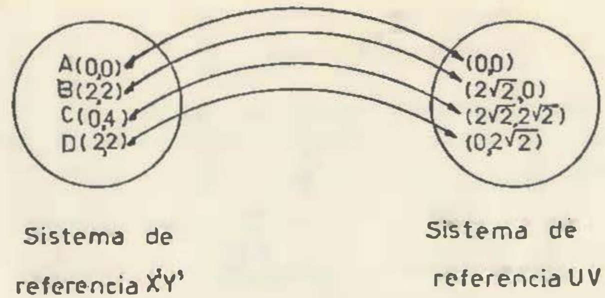


FIGURA 1. 79

Como puede observarse, se anulan algunas de las coordenadas de los puntos y para este caso resultan más simplificados.

ROTACION DE EJES EN E^3

Hemos visto ya la manera en que se transforman las coordenadas de un punto de un sistema a otro que ha sido girado y/o trasladado en el espacio E^2. Un caso mas general se tendría cuando un punto de coordenadas $P(x,y,z)$ se quiere referir a un sistema girado con respecto al original en E^3, en cuyo caso, las nuevas coordenadas serán (u,v,w).

Para obtener el modelo matemático, considérese la siguiente figura donde se observan al punto P y a los dos sistemas de referencia.

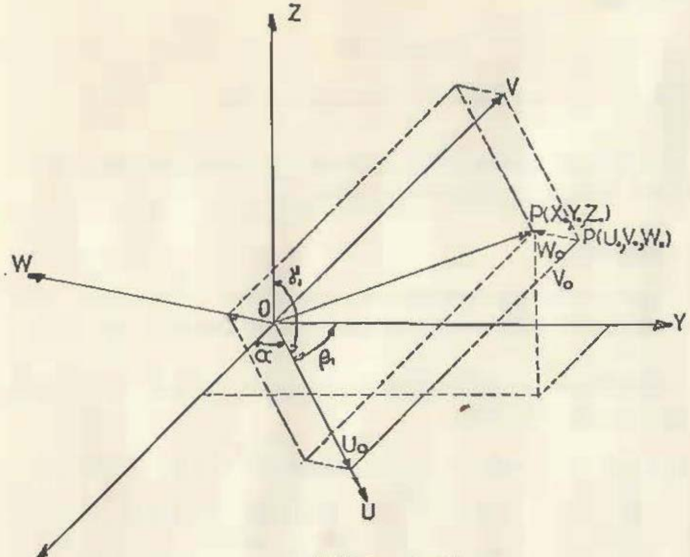


FIGURA 1. 80

El eje U forma con los ejes X, Y y Z los ángulos directores α_1, β_1, γ_1, los ángulos directores de V són α_2, β_2, γ_2, y los de W son α_3, β_3 y γ_3, estos seis últimos no aparecen dibujados por simplificar la figura 1.90.

Sea cual fuere el sistema de referencia, el vector $\overline{OP}$ es un invariante y lo oue cambiará, serán sus componentes, dependiendo del sistema de referencia establecido.

Con respecto al sistema X, Y, Z se tiene:

$$OP = (x_0, y_0, z_0) = ix_0 + jy_0 + kz_0 \qquad (1)$$

y con respecto al sistema U, V, W:

$$\overline{OP} = (u_0, v_0, w_0) = \bar{u}_0 + \bar{v}_0 + \bar{w}_0 \qquad (2)$$

donde $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$ y $\bar{w}_0$ son los vectores de posición que llevan la dirección positiva de los ejes U, V, W y sus magnitudes son u_0, v_0, w_0, respectivamente, es decir:

$$\bar{u}_0 = [(u_0, 0, 0)], \quad \bar{v}_0 = [(0, v_0, 0)] \quad y \quad \bar{w}_0 = [(0, 0, w_0)]$$

Para relacionar las coordenadas de uno y otro sistema refiérase cada uno de los vectores $\bar{u}_0, \bar{v}_0$ y $\bar{w}_0$ al sistema X, Y, Z. Obsérvese que los ángulos directores del vector $\bar{u}_0$ con respecto a los ejes X,Y,Z son α_1, β_1, γ_1, por lo que el vector $\bar{u}_0$ se puede expresar como:

$$\bar{u}_0 = (u_0 \cos\alpha_1,\ u_0 \cos\beta_1,\ u_0 \cos\gamma_1) \qquad (3)$$

como se vé en la siguiente figura:

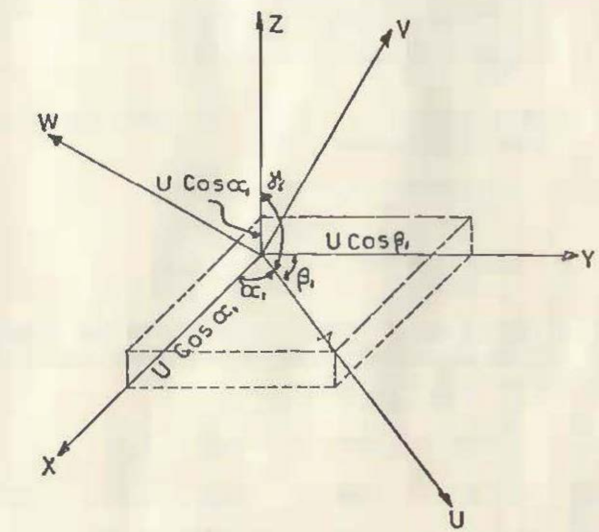


FIGURA 1.81

Análogamente,

$$\bar{v}_o = (v_o\cos\alpha_2,\ v_o\cos\beta_2,\ v_o\cos\gamma_2) \qquad (4)$$

$$\bar{w}_o = (w_o\cos\alpha_3,\ w_o\cos\beta_3,\ w_o\cos\gamma_3) \qquad (5)$$

Sustituyendo (3), (4) y (5) en (2), queda:

$$\begin{aligned}\overline{OP} = (u_o, v_o, w_o) &= \bar{u}_o + \bar{v}_o + \bar{w}_o \\ &= (u_o\cos\alpha_1,\ u_o\cos\beta_1,\ u_o\cos\gamma_1) + \\ &= (v_o\cos\alpha_2,\ v_o\cos\beta_2,\ v_o\cos\gamma_2) + \\ &= (w_o\cos\alpha_3,\ w_o\cos\beta_3,\ w_o\cos\gamma_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{OP} = (&u_o\cos\alpha_1 + v_o\cos\alpha_2 + w_o\cos\alpha_3, \\ &u_o\cos\beta_1 + v_o\cos\beta_2 + w_o\cos\beta_3, \\ &u_o\cos\gamma_1 + v_o\cos\gamma_2 + w_o\cos\gamma_3)\end{aligned} \qquad (6)$$

Si ahora igualamos (1) y (6) se tiene por la definición de igualdad de vectores que:

$$\begin{aligned} x_o &= u_o\cos\alpha_1 + v_o\cos\alpha_2 + w_o\cos\alpha_3 \\ y_o &= u_o\cos\beta_1 + v_o\cos\beta_2 + w_o\cos\beta_3 \\ z_o &= u_o\cos\gamma_1 + v_o\cos\gamma_2 + w_o\cos\gamma_3 \end{aligned} \qquad (7)$$

que son las ecuaciones de transformación para girar un punto en E^3, además estas ecuaciones de transformación se pueden escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o \\ v_o \\ w_o \end{bmatrix}$$

O sea:

$$\bar{x} = T\,\bar{u}$$

donde T es la matriz de transformación.

Las propiedades de la matriz de transformación T, son las mismas que las dadas para E^2.

EJEMPLO

Encontrar las coordenadas del punto $P(2,-1,1)$ con relación a un nuevo sistema girado con respecto al XYZ.

Los ángulos directores de los ejes U, V, W con respecto al sistema XYZ son:

Para U, $\alpha_1 = 70°32'$ $\beta_1 = 48°11'$ $\gamma_1 = 48°11'$

Para V, $\alpha_2 = 48°11'$ $\beta_2 = 131°49'$ $\gamma_2 = 70°32'$

Para W, $\alpha_3 = 48°11'$ $\beta_3 = 70°32'$ $\gamma_3 = 131°49'$

De donde los cosenos directores son:

$\cos\alpha_1 = 1/3$ $\quad\cos\alpha_2 = 2/3$ $\quad\cos\alpha_3 = 2/3$

$\cos\beta_1 = 2/3$ $\quad\cos\beta_2 = -2/3$ $\quad\cos\beta_3 = 1/3$

$\cos\gamma_1 = 2/3$ $\quad\cos\gamma_2 = +1/3$ $\quad\cos\gamma_3 = -2/3$

La matriz de transformación es:

$$T = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

La relación entre los dos sistemas viene dada por la expresión: $\bar{x} = T\,\bar{u}$, esto es:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Despejando $\bar{u}$, se tiene:

$\bar{u} = T^{-1}\,\bar{x} = T^{t}\,\bar{x}$, donde:

$$T^{t} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 - 2/3 + 2/3 \\ 4/3 + 2/3 + 1/3 \\ 4/3 - 1/3 - 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 7/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Concluyendo:

$u = 2/3$; $v = 7/3$; $w = 1/3$

$p\,(2,-1,1) \longrightarrow p\,(2/3, 7/3, 1/3)$

EJEMPLO

Después de girar los ejes los mismos ángulos que en el ejercicio anterior se encontró otro punto cuyas coordenadas nuevas son: $(1,3,-2)$. Hallar las coordenadas que tenía con respecto a los ejes iniciales.

SOLUCION:

La matríz T es la misma, por lo tanto, se buscan x, y, z, que vienen dados por la expresión: