La creatividad en la solución de Problemas
con aplicaciones a la Física y Matemáticas

La creatividad en la solución de Problemas

con aplicaciones a la Física y Matemáticas

Eduardo López Sandoval

EDUARDO LÓPEZ SANDOVAL

La Creatividad en la Solución de Problemas

CON APLICACIONES A LA FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Eduardo López Sandoval
Av. Acueducto 419 Depto 7
Col. Zacatenco
Del. Gustavo A. Madero
07360 México D.F.
03-2002-071713101300-01

Edición de 1000 ejemplares **Septiembre 2004**

A todos los Utopistas,
que aún sueñan con hacer de este,
un mundo mejor para todos.

Este trabajo es parte de un proyecto Científico y Educativo del grupo Científico y Cultural llamado Perpetum Mobile, y es sin fines de lucros; el dinero que se recaude servirá para otros proyectos educativos como este, o de investigación. Para cualquier crítica, comentario o sugerencia respecto a este libro favor de hacerlo llegar a la siguiente dirección electrónica: mobileperpetum@yahoo.com.

Prefacio

El propósito del presente trabajo es aprender a resolver problemas de cualquier tipo, tanto académico como de la vida diaria, ya que creemos que todos los problemas en lo fundamental son lo mismo. La solución de problemas es una parte fundamental de todo ser humano, ya que es una actividad con la que a creado una cultura y que le ha permitido librarse hasta cierto punto de los determinismos naturales. Los problemas cada vez son mas complejos y diversos conforme la civilización humana se desarrolla y se tecnologiza. A pesar de esto, el tiempo que se le dedica en la educación es casi nulo. Esto se debe a que a existido la creencia de que las capacidades mentales son cualidades innatas, y que por lo tanto no se pueden desarrollar. Pero como explicaremos más adelante, esta es una cualidad que se puede aprender, y perfeccionar con la práctica. Es a causa de esto que no se le ha prestado la atención que merece. Los que han tenido que pagar por este malentendido han sido los eternos "mártires" de la educación: los estudiantes, ya que han debido enfrentarse a los problemas de Física y/o Matemáticas sin haberles proporcionado las herramientas. Los mejor dotados las descubren por si mismo, pero los demás terminan creyéndose incompetentes para resolver problemas "tan complicados" de materias tan "complejas", y lastimados en su autoestima. Lo que aprenden es a detestar este tipo de materias; y es razonable que sientan rechazo, ya que a nadie le gusta fracasar. Con esto hemos perdido la oportunidad de que desarrollen estas capacidades del pensamiento tan fundamentales para todo ser humano; además de no absorber un conocimiento necesario para entender el universo en que viven y el cual es necesario que conozcan para saberse desenvolver en el de manera cotidiana y profesional.

En contraste con el fracaso de la enseñanza de la Física y Matemáticas, nos damos cuenta de la gran aceptación de los videojuegos, especialmente entre la población mas joven. No podemos recriminarlos por aceptar uno y rechazar otro; realmente no es su culpa. En todo caso podemos aprender de ambos hechos. La gran popularidad de este juego se debe, en parte, a que no ofrecen gran dificultad el aprender a manejarlos, y por lo tanto no es un riesgo para el ego; el reto es sólo lograr mayor velocidad de reacción contra un contrincante (puede ser la máquina u otra persona) a un estimulo visual, respondiendo con la acción adecuada. La emoción de la victoria se ve magnificado por los efectos luminosos y el sentimiento de logro por la creencia de manejar una tecnología muy "poderosa". Lamentablemente el valor educativo que obtenemos es casi nulo. Lo que sí nos enseña es que, a diferencia de los videojuegos, la educación se ha convertido para los estudiantes en una labor muy complicada, dura, fatigosa, aburrida, frustrante y muchas veces sin relación con sus verdaderos intereses.

No hemos sabido transmitir el conocimiento como lo que es: el resultado de una aventura intelectual tan grande como el descubrimiento de América, el viaje a la luna o la invención de la vacuna de la polio. Como un juego en el que interrogamos a la naturaleza y lanzamos conjeturas tratando de entender su comportamiento; cómo la excitante búsqueda de lo desconocido, y de lo sorprendente de su hallazgo. La satisfacción por el logro de un descubrimiento o invención es mucho mayor y de mas largo alcance que el obtenido por cualquier otra actividad humana. Tal como lo expresaba Engelhardt: "Estoy convencido de que la fuerza y la hondura del goce emocional que depara al científico el éxito de su labor creadora, son exactamente del mismo género y magnitud que la emoción sentida por el artista al realizar sus propósitos creadores. Se trata del más potente y elevado sentimiento de satisfacción que puede experimentar el hombre". Estos sentimientos tan profundos lo puede experimentar hasta cierto grado un estudiante al comprender una teoría, resolver un problema o demostrar un teorema.

Aquí tratamos de demostrar que el pensamiento es una habilidad que se puede aprender y que se desarrolla con la práctica. Estas habilidades se aplican a problemas de física y matemáticas a nivel bachiller y universitario, pero la idea básica es desarrollar la capacidad de resolver cualquier tipo de problema. Las ciencias exactas al ser tan abstractas sirven como modelo para la solución de problemas de otras áreas, o de la vida diaria, que no lo son tanto y son más complejas de manejar. Si se logra el objetivo de educar la mente de los alumnos, se logrará un salto cualitativo en el desarrollo de sus capacidades humanas.

Este trabajo no es un sustituto de un libro de texto de física o matemáticas, si no algo que lo complementa, tratando de enseñar a manejar el conocimientos que ya está en los textos. En este sentido es innovador, porque en la educación se trasmiten conocimientos, pero no enseñan como aplicarlo a la solución de problemas.

Finalmente solo quiero agracecer la amable, profesional ayuda en el diseño de las imágenes y esquemas de este libro a Norma Cimes Verduzco, ya que sin su ayuda no hubiéra sido posible la cristalización de este proyecto.

ÍNDICE

Capítulo Página

1. Introducción

La solución de problemas es una actividad fundamental para todos los animales superiores, ya que es una forma especializada de adaptación que permite su sobrevivencia; en especial para los seres humanos, donde ha logrado trascender su condicionamiento natural y ha creado la cultura, una forma de vida que hace mas probable su permanencia, al modificar el propio medio a su conveniencia.

La resolución de problemas es una actividad que se nos presenta comúnmente a los seres humanos en nuestras actividades cotidianas y profesionales. Y van desde como vestimos, trasladarnos a otro lugar, hasta problemas muy complejos como los científicos y tecnológicos. El desarrollo de un país depende en gran medida en la capacidad de su sociedad para resolver problemas.

El pensamiento del ser humano no es un reflejo pasivo de la realidad que existe fuera y dentro de el[1], sino que crea una representación propia análoga a esta. La mente humana la crea transformando las señales del exterior e interior, y que nos aproximan a la realidad que existe fuera de nosotros. Pero esta transformación no es una copia fiel, sino una representación, una recreación del mundo exterior. Esto sucede desde que nacemos hasta que morimos, y lo crean tanto un campesino como un científico. Este último crea modelos mas refinados y exactos de la naturaleza. Esta representación, cuando no se adecua a la realidad, no podemos actuar de manera eficaz, y por tanto se nos presenta como problema.

En la vida diaria actual, a diferencia de hace 100 años, los problemas que tienen que resolver un profesionista y cualquier otra persona cotidianamente son cada vez en mayor número y mas complejos. La cantidad de información que debemos asimilar nos desborda, y la toma de decisiones son cada vez mas difíciles de realizar.

En la educación actual se ha descuidado el desarrollo de las capacidades del pensamiento en la solución de problemas, por que se ha creído que esta era una cualidad innata, la cual unos pocos poseen, y nada se podría hacer para desarrollarla. Pero esto es un error, como mostraremos posteriormente. En la actualidad existen muy pocos libros que se dediquen a la explicación de formas de resolver problemas. Los que hay, y que aquí usamos algunos de bibliografía, son muy vagos y complicados de aplicar porque se concretan a problemas muy particulares, ya que de un tema tan sencillo como la cinemática pueden existir miles diferentes tipos de problemas, y es difícil tener en cuenta cada uno de ellos. O tratan de ser tan amplios o generales, que es difícil aplicarlo a un caso particular. Por tratar de ver los árboles no ven el bosque, o a la inversa, por ver el bosque no ven los árboles. Aquí tratamos de ir de un extremo a otro, de mostrar como pasar de una ley general a un caso particular, es decir utilizar el método deductivo, para la solución de problemas. Luego mostraremos que la enseñanza es más ventajosa de esta manera que utilizar el método inductivo, es decir, tratar de enseñar a partir de casos particulares para llegar a las leyes generales.

Nosotros trataremos de hacer ver que cualquier tipo de problema, en lo fundamental son lo mismo, y por tanto si comprendemos su esencia podremos plantear cualquier pro-

---

[1] según Sartre (que hace propia la posición de Husserl), la conciencia no es un simple contenedor de "hechos psiquicos", ni una suerte de espejo que pasivamente refleja, o deforma, la realidad externa; la conciencia es fundamental *intencional*, activa, posee su propio modo de estructurar los datos sensibles y de construir "realidades" que aún dependiendo de estos presentan características que le son propias. Puledda, S. Interpretaciones del Humanismo. Pag. 80.

blema correctamente y resolverlo, o cuando menos aproximarnos a una respuesta. Aunque en lo particular lo aplicaremos a la solución de problemas de Física y Matemáticas de nivel bachillerato y universitario.

Para la aplicación del método deductivo empleamos las ideas de algoritmo y heurística, y lo llevamos a través de las leyes generales de dichas ciencias a ejemplos particulares, en problemas de libro de texto de Física y Matemáticas. Trataremos de puntualizar lo que es posible hacer con una serie de pasos en un algoritmo, pero también hace notar cuales son sus limitaciones, que es muy importante, ya que nos permite no encasillarnos y seguir buscando nuevos métodos que nos conduzcan a la solución de un problema nuevo, a encontrar su algoritmo de solución.

Este trabajo trata de asumir una perspectiva científica, pero también humanista por dos razones: partimos de conocer el funcionamiento de nuestra conciencia espacio-temporal, la capacidad de toda persona, que posibilita su libertad y creatividad y que define su esencia humana; además, no se podría tratar de otra manera una cualidad netamente humana como es la creatividad sin partir de lo que es nuestra propia subjetividad. A través de esta, de reconocerla y conocerla, podemos alcanzar la objetividad científica, necesaria para resolver problemas. En segundo lugar, por la gran capacida humana no explorada, y que cada quien puede desarrollar de manera ilimitada, a su propio máximo potencial.

Nos fundamentamos en los conocimientos alcanzados hasta la actualidad en cuanto al funcionamiento de nuestra mente humana y la pedagogía cibernética (Algoritmos y Heurística). Es importante, porque el autoconocimiento nos permite superar nuestras propias limitaciones y manejar de forma eficaz nuestras capacidades mentales. Este conocimiento le da sustento a nuestra experiencia y conocimiento fenomenológico y psicológico de nuestra subjetividad, para poder manejar nuestros pensamientos de mejor manera y encausarlos en la solución de problemas.

Este trabajo va dirigido en general a toda persona que quiera desarrollar su capacidad de pensamiento en la solución de cualquier tipo de problema, así como en particular a los estudiantes de nivel medio superior y superior que desee aplicarlo a problemas de Física y Matemática de tal manera que no sea un martirio, sino que por el contrario, puedan disfrutar el reto de resolverlos.

2. Una definición para Problema es otro problema

Se dice que si podemos definir bien un problema, ya tenemos resuelto la mitad. Esta creencia tiene mucho de cierto, ya que lo primero en la solución de cualquier problema es saberlo plantear correctamente. Esto parece un paso trivial, pero no lo es, como se verá con mas detalle más adelante. Es el objetivo de este capítulo, saber que es un problema, y a partir de aquí, crear una metodología que nos conduzca en la dirección adecuada a su solución.

Una situación de problema es, por ejemplo, cuando nuestro auto se detiene, y queremos saber que falló para hacerlo que vuelva andar. Contamos con ciertas pistas como puede ser el medidor de la gasolina, algún sonido que hizo antes de detenerse, alguna vibración, etc. Para otros tipos de problemas, como pueden ser los científicos o ingenieriles, es mas difícil llegar a una respuesta cierta, porque en él intervienen muchísimos mas factores y con una relación causal más compleja. En estos casos, la cuestión no resulta tan fácil, pero siempre se puede decir algo, y debemos empezar ya que el camino recorrido comienza con el primer paso.

Una definición general de problema puede ser: "una situación donde no todo es conocido, donde existe algo oculto, indefinido, que provoca preguntas"[2]. Una situación o evento se presenta como problema sólo porque nuestro conocimiento es incompleto, inexacto. Si tuviéramos la información o el conocimiento completo, no surgiría ninguna duda y por tanto ningún problema. Pero por oposición, si desconociéramos todo de una situación, tampoco existiría ninguna duda, ningún problema, porque desconoceríamos su mera existencia. De aquí que sólo el pensamiento surja ante un problema, ya que este es una actividad encaminada a conocer, y no hay necesidad de conocer si no existe ninguna duda. En general, un problema es constituido fundamentalmente por 3 elementos: los datos, incógnitas y condiciones. Es decir, lo que conocemos, la parte que desconocemos, y las características particulares de una situación también conocida como restricciones o condiciones, y que delimitan nuestra atención a un objeto o suceso del resto del universo. Es decir, un problema puede ser cómo cocinar un platillo o cómo llegar a otra ciudad a cierta hora; cumplir con cierta tarea de la mejor manera con el menor esfuerzo posible o escalar una montaña; resolver un problema de nuestro trabajo o alguna tarea escolar; llegar a la luna y regresar, o como organizarnos para realizar nuestras actividades cotidianas. Un problema atrae nuestra atención sobre una parte del mundo y nos distrae del resto; y puede ser de cualquier tipo, pero debe estar constituidos por los tres elementos básicos que ya mencionamos.

Por ejemplo, si queremos construir una casa, la incógnita es saber como lograrlo. Los datos podrían ser: el material con que contamos, el tipo de suelo del terreno, las características del ladrillo y del cemento. Las incógnitas podrían ser el tipo de casa que queremos construir, sus características particulares. Las condiciones o restricciones podrían ser: el presupuesto con que contamos, la capacidad de la mano de obra que podremos pagar; el estilo y tamaño de casa que deseemos construir; el material con que contemos y de las características y dimensiones del terreno. Entonces, las condiciones determinarán o mediarán entre el tipo de casa que deseamos construir de la que es posible. Las condiciones relacionan nuestros datos con las incógnitas determinando el tipo de solución que podemos encontrar.

---

[2] Sapárina, E. 1968. pag. 105.

En física y matemáticas, las condiciones o restricciones son las leyes o teoremas, que relacionan los datos con las incógnitas y que determinan el tipo de solución que es posible obtener. Las leyes científicas lo que nos dicen en si es: lo que es posible que ocurra, y lo que no, en la naturaleza.

Los problemas se pueden clasificar en diversos tipos o categorías de acuerdo a las particularidades que queramos ver en ellos. Se pueden clasificar en teóricos o aplicados, académicos o de la vida diaria, científicos o cotidianos; aunque todos deben estar constituidos por los 3 elementos básicos, como ya dijimos.

Hasta las actividades de creación se pueden plantear como problema; por ejemplo, si queremos escribir una historia, definiendo la clase, podemos determinar los tres elementos fundamentales: policiaca o futurista; que tipo de personajes aparecerán; los giros que tendrá la trama, la ambientación, como iniciar y finalizarla, etc., serían los datos; las restricciones: la temática que estemos tocando y el género de la novela; las incógnitas serian, con estos elementos como construir una novela que sea novedosa, entretenida y/o interesante.

3. La Estructura del Pensamiento

Del caudal de señales que impresionan nuestros sentidos, los órganos sensoriales filtran parte de estas y sólo una pequeña cantidad llega a nuestro cerebro. Esto sucede en parte por las limitaciones naturales de nuestros sentidos, y porque nuestro cerebro es un sistema que ordena estas señales en pautas cerebrales que protegen y hacen posible, el pensamiento. Puesto que si esto no ocurriese, la mente se vería desbordada por un mar de señales. El ordenamiento de las señales se integra en el cerebro en algo significativo que excita o inhibe una acción, dependiendo de la intención o necesidades del individuo y de la situación exterior percibida.

Nuestro cerebro, por tanto, no reúne de manera pasiva la información que le llega, sino que la autoorganiza en pautas: busca en forma activa lo necesario, "capta" las señales importantes, las demás la desecha. La importancia de las señales depende de las necesidades del momento, del estado de ánimo (señales internas) o de evitar algún peligro (señales externas). Las señales externas e internas captadas activan ciertas pautas mentales establecidas en nuestra mente de antemano por la experiencia y el aprendizaje, o por los hábitos que, como dijimos antes, producen o inhiben una acción que sería por ejemplo, acercarse al alimento, huir de una amenaza, o emocionarse con la música o molestarse con un ruido estruendoso.

Esta capacidad de adaptación al medio es muy distinta a la de las plantas o los animales inferiores, donde estos reaccionan de manera refleja a los estímulos en una conducta que se llaman tropismo y taxias respectivamente. En el primer caso, para las plantas, consiste en una orientación o giro ante una fuente externa de energía, como el sol; en el segundo caso, por ejemplo los paramecios se orientan ante una fuente de calor, o las mariposa ante la luz. En el caso de los insectos o parcialmente en las aves aparecen otros tipos de reacciones que se conoce como instintivas, donde estos tienen patrones complejos de conducta no adquirida sino heredadas genéticamente. Por ejemplos las abejas en la construcción de panales, y las aves, con sus nidos y migraciones, etc. En los animales superiores llamados mamíferos han desarrollado durante su evolución un sistema nervioso central que les permite mejorar con la experiencia los patrones hereditarios por medio del aprendizaje de nuevas reacciones y que Pavlov, su descubridor, llamó reflejos condicionados, para diferenciarlos de los actos reflejos hereditarios o instintos[3].

En el caso de nosotros los seres humanos, a pesar de ser del orden de los mamíferos y reaccionar con reflejos condicionados, nuestro cerebro ha evolucionado de tal manera que nos ha permitido experimentar una vivencia de uno mismo o del "yo" y que ni aun la anatomía comparada, ni la anatomía patológica y ni los estudios clínicos han podido ubicarlo fisiológicamente. Lo que si se sabe, según José Luis Pinillos, es que: "la ablación de materia gris de los lóbulos frontales o las leucotomías -operaciones en que quirúrgicamente se seccionan los nervios que conectan los lóbulos frontales con otras zonas del cerebro- afectan a las funciones superiores de la mente, disminuyen los sentimientos de responsabilidad y el vigor de la voluntad, reducen el alcance y claridad de los procesos anticipatorios o proyectos vitales, rebajan el nivel mental"[4]. La vivencia de nuestro yo y que experimentamos diariamente se da por medio de la interacción de las señales físicas del medio externo con nuestro cuerpo, y que el cerebro transforma en sensaciones cenestésicas (calor, frío, dolor) y kinestésicas (movimiento), además de las imáge-

---

[3] Pinillos, J. L. 1971. pag. 84
[4] Ibid,. 1971. Pag. 76.

nes, los sonidos y olores, que percibimos de manera simultánea en una experiencia total e íntegra.

La Subjetividad

Esta experiencia que tenemos de las cosas no es la realidad tal cual, si no tal como la experimentamos nosotros. Por ejemplo, para un caso particular de nuestra experiencia, la sensación que experimentamos con los colores, no es porque las ondas electromagnéticas que inciden en nuestros ojos reflejados de los objetos tengan color, sino que es debido a la transformación bioeléctrica que realiza el ojo con dichas ondas, causa que tengamos la experiencia de los colores. Las frecuencias electromagnéticas por si mismas no tienen color, es necesario que un sujeto las transforme en este tipo de experiencia. Y asi con las demás experiencias como el sonido, el olor, los sabores, las sensaciones, etcétera, no existirian si no hubiera un sujeto que las experimentara de esta manera.

A esta experiencia vivencial del yo con la realidad externa e interna se le conoce como subjetividad, y se cree que se presenta también en cierto grado en los otros animales superiores. La diferencia entre estos y nosotros los seres humanos quizá sea sólo de grado, pero es abismal. En nosotros, el nivel de subjetivación ha sido tan fuerte que ha permitido apropiarnos de nuestro yo, de las cosas, y a veces de los demás, de tal manera que contamos con una historia personal y social. Pero esta no sólo se refiere a lo que hemos vivido, al pasado, sino que ha ampliado su horizonte temporal de tal manera que proyectamos lo que quisiera que le pasara, futurizamos. A este nivel de subjetivación se le llama conciencia temporal o histórica[5].

Esta conciencia siempre está referida a algo o a alguien. Surge como una relación entre un sujeto y un objeto o dos sujeto, y no podría ser sin esta relación. Pero esta no es pasiva, sino intencional, ya que la conciencia tiene una estructura que configura las percepciones del presente con los recuerdos o experiencia del pasado y con los deseos o proyectos a futuro[6]. Esta estructura es lo que ha permitido al ser humano diferir respuestas que pudieran ser por reflejos condicionados, condicionamiento cultural o simple hábito. En nuestra vida diaria cotidianamente actuamos automáticamente ante diversas situaciones y sin pensar o preguntarnos porqué. Reaccionamos de manera condicionada en parte por nuestra evolución biológica pero también por la cultura en que nos hemos desarrollado. Por ejemplo, en la actualidad muchas veces nuestra forma de resolver nuestras diferencias es por medio de la violencia, y la forma de relacionarnos es desconociendo el derecho del otro a satisfacer sus propias necesidades. Esto se explica en parte por nuestro natural etnocentrismo, xenofobia e instinto de conservación producto de nuestra evolución. Por la parte cultural, que es una modificación de nuestra condición natural, estos comportamientos se han establecido por tradición, el aprendizaje en la familia, la escuela o los medios de comunicación, es decir por el medio sociocultural. Son hábitos que se han fortalecido por su práctica diaria pero que muchas veces no tienen ningún fundamento racional.

Es posible escapar de ellos cuando de acuerdo a nuestra biografía tenemos conciencia de algún condicionamiento que nos causa malestar o que aunque nos gusta queremos cambiarlo; entonces si intencionalmente proyectamos a futuro un comportamiento distinto y que en el presente auto-observándonos, debido a lo automático del hábito, vigilamos la repetición del comportamiento, lo reprimimos, hasta que, con la práctica, lo eli-

[5] Rodríguez Cobos, M. (Silo). 1990. pags. 29-30.
[6] Ibid., pag. 115.

minamos; y nos habituamos al nuevo, de manera mas consciente. Esta es la manera como podemos diferir respuestas, y es nuestro grado de libertad. Está en nuestras posibilidades liberarnos de cualquier condicionamiento, por medio de nuestra conciencia temporal.

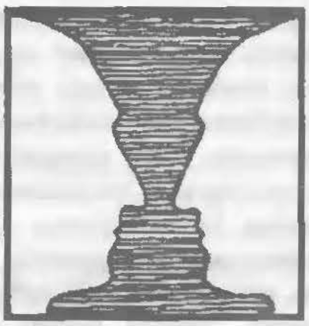
Esta conciencia temporal, a su vez, se ha visto potencializada por las prótesis mentales. Sabemos que las prótesis (etimológicamente: pro=delante y thesis=posición) físicas son objetos o máquinas que nos permiten aumentar nuestras capacidades físicas, como un carro nos permite aumentar nuestra velocidad y un martillo nuestra fuerza. Por contraste, las prótesis mentales son reglas lógicas y símbolos abstraídos de la realidad por el pensamiento y que nos permiten incrementar nuestras capacidades mentales, tal como el lenguaje, cuyo sustrato son inflexiones de ondas sonoras emitidas guturalmente; y a un nivel mas alto, la escritura y las matemáticas, que han sido trasladadas del lenguaje a señales visuales plasmadas sobre el papel o una pantalla de computadora. Así, por ejemplo, con la escritura que permitió guardar el registro de conocimiento y de hechos históricos ampliando la capacidad de nuestra memoria. O actualmente con la ciencia y la técnica que ha hecho posible que con la computadora podamos almacenar grandes cantidades de datos o realizar cálculos complejos a altas velocidades, planificar nuestras acciones con mucho tiempo de antelación y mediante cálculos muy complejos poder hacer predicciones científicas como el clima o eclipses.

En realidad no sólo no percibimos las cosas tal como son, como ya habíamos comentado antes con respecto a la subjetividad, sino que además la percepción se ve influenciada por la estructura de nuestra conciencia histórica. En sí, lo que percibimos es mas una recreación, que una percepción fidedigna del mundo. Pero esto no significa que lo que veamos sea una ilusión, sino que es una transformación bioeléctrica de nuestro organismo de lo que está afuera, pero se ve influenciado por la experiencia pasada y las expectativas futuras. La cantidad de señales que recibimos es tan pequeña que si nuestra percepción funcionara como un objetivo fotográfico, lo que veríamos sería una imagen borrosa y deformada que nos costaría trabajo reconocer. Por ejemplo, si iluminamos mal una hoja blanca y bien un pedazo de carbón, este último puede reflejar más luz que el papel y sin embargo vemos mas blanco el papel. También, nuestro ojo funciona de acuerdo a las leyes de la óptica de una cámara fotográfica, entonces cuando vemos a una persona al doble de distancia de otra, al mas cercano lo deberíamos percibir el doble de grande que el más lejano, y sin embargo no es así; también cuando vemos a personas desde un quinto piso no la vemos como hormigas, y sin embargo un niño si las ve de esa manera. Esto se debe a que el conocimiento que tenemos sobre las cosas influye en la forma como percibimos. Por experiencia conocemos el tamaño de las personas, y esto influye en nuestra percepción final. Lo mismo pasa con el papel, ya que sabemos que este en iguales condiciones de iluminación con respecto al carbón, refleja mas luz y de todo el espectro visible. Un ciego que logra recuperar la vista y que por tacto podía reconocer la diferencia entre un triangulo y un circulo, no es capaz de distinguir uno de otro con la vista recién recuperada. Y es que la percepción se desarrolla con la experiencia[7]. También nuestros deseos y expectativas de lo que puede pasar modifican nuestra percepción y falsean o modifican lo que vemos. Por ejemplo, cuando queremos encontrar a una persona, podemos confundirla con otra con un leve parecido; o cuando tenemos miedo de que nos pase algo y cualquier sombra imaginamos que es un posible agresor. En verdad requerimos de poca información para reconocer las cosas, la mayor parte es agregado nuestro.

[7] Pinillos, J. L. 1971. pags. 95-97.

La Atención

También nuestra percepción es selectiva por las expectativas o deseos que tengamos sobre algo. Esto es en parte fisiológico, ya que si tuviéramos que atender a todas las señales que nos llegan del medio, nuestra percepcion seria un caos de impresiones. Afortunadamente la visión selecciona el objeto de su interés filtrando las señales mas importantes, y organiza una pluralidad de sensaciones en un objeto con estructura. Los canales sensoriales, unos se abren y otros se cierran de acuerdo a las señales externas y a las expectativas, necesidades o deseos de ese momento del sujeto. Por ejemplo, un perro hambriento al olfatear un pedazo de bistec puede ser capaz de bloquear su vía auditiva y concentrar la olfativa. Entonces nuestra atención se orienta hacia un objeto, y nuestra percepción convierte a este objeto en figura y lo demás en fondo. Esto se puede demostrar con las dos figuras siguientes. En la primera podemos ver una copa o dos perfiles, dependiendo que abstraigamos como figura y que como fondo. En la otra figura podemos ver una joven de cabello negro o una anciana con nariz prominente, de acuerdo a donde se dirija nuestra atención. Pero ambos, la figura y el fondo, se nos presenta como una unidad significativa[8].



¿Qué hay dibujado aquí?

¿Es joven o vieja esta mujer?

Son muy pocos los elementos de una figura en los que podemos prestar atención. Como ejemplo demostrativo trate de recordar todas las características del reloj de pared de su casa, le sorprenderá darse cuenta de los pocos elementos o partes que se acuerda. Por lo general sólo recordamos lo mas fundamental que las manecillas y los números. Esto pasa porque solo prestamos atención a lo mas importante que es saber la hora, lo demás es mero fondo.

La atención sobre un objeto no es constante, depende del interés que despierte en el momento y se debilita en el tiempo por la "atracción" que ejercen otros objetos. La atención oscila de un objeto a otro y esto pasa en todas las personas sin excepción. La constancia o intensidad varía de una persona a otra; en algunas se presenta mas la atención llamada "volante" y en otros la "pegajosa". Para el primer caso esto es muy común en la escuela donde la atención de los alumnos se ve orientada por todo lo que pasa a su alre-

[8] Pinillos, J. L. 1971. pags. 85-97.

dedor, menos por lo que explica el profesor. El otro tipo, la atención "pegajosa", es cuando algo llama nuestra atención y ya no podemos dejar de pensar en ello. Se dice que alguna vez Isaac Newton quiso cocer un huevo. Tomó un reloj y empezó a medir el tiempo. Después de un momento se dio cuenta que tenía el huevo en la mano y estaba cociendo el...reloj. Al mismo Newton se le preguntó que como había hecho para descubrir la ley de la gravitación y respondió: "pensando incesantemente en ello"[9].

La atención se puede dividir en dos tipos según hacia donde la orientemos: la interior y la exterior. En la interior, también conocida como introspección, es dirigir la atención hacia los pensamientos, ideas o símbolos que estemos manejando; es vigilar o auto-observar los propios pensamientos; en este caso es mas común la atención "pegajosa" y de ahí los chistes del científico distraído. La exterior es cuando nuestra atención se dirige a los objetos externos a nosotros y se le conoce como observación; cuando no se acompaña de la reflexión, se realiza de manera mecánica y reaccionando a los estímulos. En este caso la atención es "volante".

Llevar a cabo una o mas cosas por vez y que requiera prestar atención a varias partes, se ve posibilitado por la capacidad de traslado de nuestra atención de un objeto a otro y a nuestro interior (pensamiento y/o sensaciones) con un cambio en la finalidad de su actividad. Por ejemplo, cuando manejamos un auto debemos distribuir nuestra atención entre el clutch, acelerador y el freno y saber cuando y como aplicarlo, calcular a que distancia se encuentran los carros vecinos para acelerar o frenar, cuando rebasar o dar una vuelta, etc.; además, saber a donde vamos y por donde podemos llegar mas rápidamente, etc. Un chofer de autobús aparte de todo lo anterior debe atender las bajadas y subidas de pasajeros, entregar boleto, cobrar y calcular para dar cambio correctamente. Algunas acciones se van automatizando con la práctica y requieren poca atención, pero para las nuevas es necesario que traslademos nuestra atención, con un cierto orden y sabiendo que hacer en cada etapa. La dificultad siempre es al inicio, cuando queremos aprender una actividad nueva, ya que debemos vencer las inercias de las rutinas del pasado e insertar las nuevas como en este caso sería cuando aprendemos a manejar un auto. Con la práctica esta se automatiza y luego ya no es necesario prestarles mucha atención, y podemos realizar otra actividad simultáneamente, como ir platicando o escuchando la radio.

Un itinerario para saber dirigir la atención y que nos ayuda a ser dueños de nuestras acciones es como sigue[10]:

1. Cambio rápido de la atención de un objeto a otro.
2. Destreza para destacar los objetos más importantes a expensas de lo secundario.
3. Orden del cambio, en lo que figuradamente se llama elaboración del "itinerario de la percepción".

Operaciones Mentales

Lo que perciben nuestros sentidos no es la realidad misma, sino sólo como es para nosotros, para nuestra subjetividad. Pero siempre es posible decir algo más. Podemos, por ejemplo, si vemos a lo lejos humo, suponer automáticamente que algo se está quemando, e incluso por lo denso de este suponer que es lo que arde, y todo esto sin siquiera verlo. Pero para ello fue necesario saber que en el proceso de ignición su efecto es precisamente el humo, el reconocimiento o diferenciación de éste con respecto a los otros

[9] Platonov, K. 1989. Pags. 128-130.
[10] Ibid. pags. 154-156.

elementos de la naturaleza y su interpretación causalista. Es decir, necesitamos reproducir un conocimiento ya existente de nuestra experiencia, actualizarlo.

Sin embargo, cuando observamos que una máquina en movimiento de improviso detiene su actividad, es imposible saber de manera automática que fue lo que ocurrió. La reproducción del conocimiento no seria tan sencilla como en el caso anterior. Aquí tendríamos que recordar todas las posibles causas que conocemos, o estudiar el funcionamiento del motor y atendiendo a los efectos (un sonido o movimiento extraño), podríamos suponer que pasó. Si repasando todas las posibles causas, no conseguimos explicarlo, tendríamos que generar algunas explicaciones alternativas, transformar nuestro conocimiento y generar a partir del que tenemos uno nuevo y más amplio. En muchos casos como éste, será necesario plantear una hipótesis que nos permita deducir que pasó realmente. Entonces, el pensamiento no solo es actualización del conocimiento, sino también su transformación y generación a uno más completo y exacto. A esta actividad que conoce y/o encaminada a conocer se le llama pensamiento, y es un acto mental que intermedia entre lo que ya conocemos y lo que queremos conocer. El pensamiento involucra, por lo tanto, conocimientos y operaciones mentales. Cuando hablamos de operaciones mentales, ¿a que tipo de operaciones nos referimos? Las operaciones físicas siempre se refieren a transformaciones de objetos, su modificación, o su traslado de un estado a otro; o mediante ciertos vínculos se combinan ciertos objetos ya conocidos creando uno nuevo. En el caso de las operaciones mentales no se modifica nada en el mundo real; nos referimos a las modificaciones que realizamos con el pensamiento, la imaginación. Por ejemplo, modificamos físicamente una mesa cuando la desarmamos en partes con un martillo; sin embargo esta acción, nos la podemos imaginar sin llevarla a cabo, y estas son las operaciones mentales. Los cálculos científicos también son operaciones mentales porque se realizan modificaciones en los modelos mentales y teorías, que relacionan causalmente los distintos elementos o símbolos abstraídos de la realidad[11]. Por ejemplo, al calcular la resistencia y tamaño de una presa en función de la cantidad de agua, no lo llevamos a cabo y lo vamos verificando en la práctica, si no primero estudiamos un modelo teórico creado mediante las leyes de la mecánica, y representado por medio de maquetas y planos, donde hacemos las modificaciones pertinentes de tal manera que hipotéticamente pueda contener la fuerza del agua. Realmente no modificamos nada, ni siquiera construimos una presa, sino que tan solo proyectamos un modelo imaginario, mental.

Los modelos o imágenes del mundo que podemos llegar a descubrir pueden modificar nuestra percepción y por tanto, nuestra forma de ver: la forma como están relaciodos y conectados los objetos y fenómenos de la naturaleza. Estas imágenes y modelos se pueden traducir a formulas matemáticas con lo se puede manipular sus elementos de manera cuantitativa. Con este conocimiento podemos llegar a ver mas cosas de las que aparentemente existen, y a darnos cuenta de mas eventos que una persona que desconozca.

En síntesis, el pensamiento es un acto que intermedia entre nuestras percepciones, sensaciones e imágenes y la realidad, con modelos que se construyen con palabras y/o ecuaciones matemáticas, y que intentan explicar la realidad que está afuera y/o dentro de nosotros. Los pensamientos son actos concretos interiorizados[12] realizados sobre un modelo o imagen de la realidad. Tratan de explicar los fenómenos que causan las percepciones y sensaciones en nuestros sentidos, o mediciones en nuestros aparatos de la-

[11] Landa, L. N. 1971. pags. 113-116.
[12] Piaget, Jean. 1993. pags. 172-187.

boratorio. Entender la realidad de lo que trata es de objetivar lo mas posible nuestra percepción subjetiva de los eventos de la naturaleza y para eso se construyen teorías o modelos matemáticos (prótesis mentales) y aparatos de medición (prótesis físicas). Estos aparatos nos permiten registrar eventos que están mas allá de nuestros sentidos con dispositivos de medición sofisticados, y las teorías nos permiten comprender fenómenos incomprensibles para nuestra percepción sensorial directa. El conocimiento obtenido y validado nos permite ampliar nuestras posibilidades de acción en la realidad.

Aunque hasta la actualidad ha habido un gran avance en cuanto a la acumulación de conocimiento del universo, muy poco se ha hecho para comprender las operaciones mentales que se llevan a cabo sobre los modelos teóricos, para su manejo, mejoramiento, e incluso su ampliación. No se han estudiado con el interés que merecen. Esto pasó porque se consideraba que la capacidad de reflexión, la ingeniosidad, la formulación de hipótesis eran cualidades innatas, privilegio de sólo algunas personas. Se creía que estas capacidades eran actos inconscientes integrales e indivisibles en otras operaciones más simples[13]. Actualmente sabemos que esto es totalmente erróneo. Realmente estas cualidades de la mente se pueden dividir en actos mas elementales porque son actos concretos realizados sobre modelos que también son elementos materializados en imágenes, símbolos que representan la realidad y que se pueden manipular con reglas lógicas y/o matemáticas. Extrayendo estas operaciones más simples se pueden ordenar de manera consecuente y secuencial con el fin de realizar la operación mental, o enseñarla al estudiante. En la educación actualmente se han trasmitido conocimientos, pero no la operaciones mentales para manejarlo, ampliarlo o incluso mejorarlos. El descuido de la enseñanza se ha debido a que nosotros mismos como profesores las desconocíamos.

Existen dos fuentes de conocimientos de los actos que son necesarios llevar a cabo para realizar una tarea. Una fuente externa de conocimiento tal como indicaciones, instrucciones de otras personas de acuerdo a su experiencia o a través de libros, y/o la investigación u observación directa de cómo actúan otras personas. La otra fuente es la interna, la auto-observación o conciencia de las acciones propias[14]. Las acciones que se pueden vigilar son las físicas o mentales. En el primer caso, debido a que las acciones se dan en el espacio y concatenadas en el tiempo, son mas fáciles de observar y de describir. Por ejemplo, hacer una llamada por teléfono es sencillo de describir para cualquiera, pero si nos preguntan cuales son los músculos que debemos mover para hacer la llamada y en que orden, estamos en problemas. O si nos piden que describamos que músculos debemos utilizar y de que manera al correr o saltar, es difícil por que estos movimientos los realizamos de manera automática e inconsciente. Entonces, si nos piden que expliquemos como propusimos una hipótesis, siendo que las operaciones mentales son invisibles para los demás y apenas perceptibles para uno mismo, esto es mucho más complicado. A esta dificultad se ha tenido que enfrentar la psicología y la heurística, y a ello se debe el poco conocimiento que tenemos sobre los actos mentales. Muchos de ellos que utilizamos al resolver un problema se han formado a prueba y error, y quedan instalados como un cierto "olfato" mental o intuición que nos indica que es lo que debemos hacer ante un cierto tipo de problema, pero de cuya resolución somos poco conscientes. Por esto es importante desarrollar la capacidad de auto-observarse, para así detectar las operaciones mentales correctas en la solución de un problema, para corregir los malos hábitos y los errores de pensamiento que nos causan un accionar ineficaz. Conforme se van descubriendo las operaciones adecuadas, estas se pueden ordenar en

---

[13] Landa, L. N. 1997. pag. 120.
[14] Ibid., pag. 122.

una secuencia para la obtención mas eficaz de nuestros fines, para manejarnos mejor, e incluso transmitir a otros nuestra experiencia. A esta secuencia de operaciones conscientes e intencionales se le llama algoritmo, y es el tema de nuestro siguiente sección.

El Algoritmo del Pensamiento

El algoritmo es un concepto tomado de las matemáticas y que consiste en una serie de pasos elementales (actos físicos y/o mentales) precisos y secuenciales que realizados de manera correcta nos conducen a resolver un problema de cierto tipo. Un ejemplo de algoritmo es la división de dos números de cualquier cifra, como podría ser 14,389 y 342, y que nos enseñaron en la primaria. Las sucesivas operaciones que realizábamos, como podemos recordar, de tal manera con ellas obteníamos un número, que era la división de ambas cifras, con otro número llamado residuo si no era exacta la operación.

Este algoritmo resolvía la división de dos números enteros cualesquiera, pero no su producto. Para esto último se necesitaba saber el algoritmo de la multiplicación, y esto es lo que significa que sólo resuelve un problema de cierto tipo. Aunque la cantidad de problema que se pueden resolver es tan grande como el conjunto de números enteros, nunca podrá obtenerse el producto o la diferencia de 2 números; para ello se requerirán sus algoritmos respectivos.

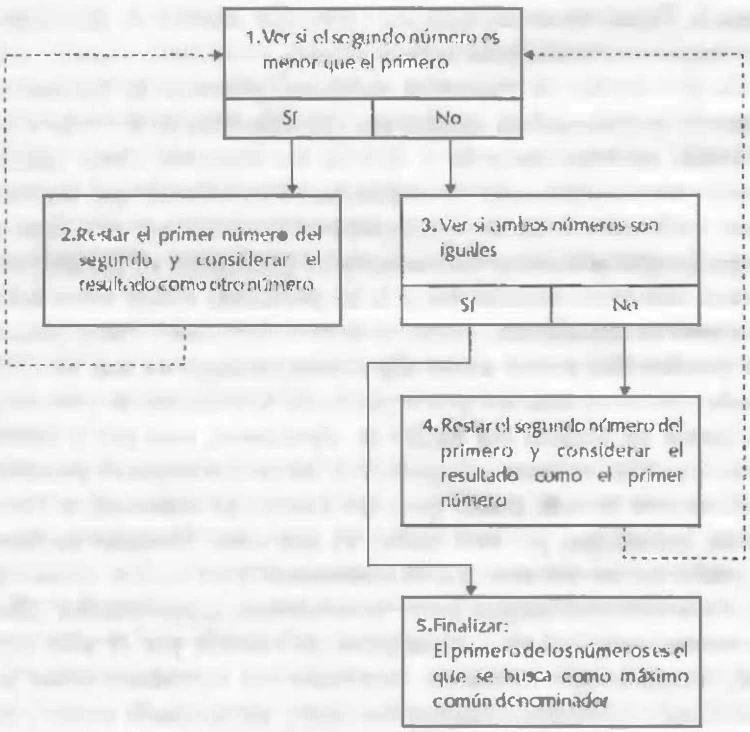
Los algoritmos mencionados son los mas simples, pero las matemáticas tienen infinidad de ellos. La finalidad de las matemática en particular y la ciencia en general es encontrar nuevos, ya que el descubrimiento de uno de ellos abre nuevas posibilidades a la mente humana, porque adquiere la capacidad de actuar con eficacia en una situación dada.

Una definición más amplia de lo que es un algoritmo es: un programa de acción mental o de conducta con el fin de ayudarnos a actuar de manera eficaz en una situación compleja. Esta sucesión de operaciones de un algoritmo son ordenes de acción física o mental (aquí nos enfocaremos a esta última); en el primer caso consiste en la manipulación de objetos o acciones coordinadas del cuerpo como en las tareas cotidianas o el deporte. Un ejemplo sería cómo cuando queremos llamar por teléfono: primero lo descolgamos, nos lo colocamos al oído y marcamos; al escuchar el tono debemos reconocer si está marcando ocupado o desocupado; si suena ocupado, esperamos a que se desocupe, y si está sonando desocupado, esperamos que contesten; si contestan ya logramos el objetivo de establecer comunicación; si no, luego podremos repetir el algoritmo. O en los deportes, las tácticas y estrategias que se establecen para lograr, por ejemplo el objetivo de un enceste en el básquetbol o un gol en el fútbol se pueden considerar como algoritmos porque son acciones coordinadas pensadas de antemano para lograr la meta que es encestar mas que el rival o meter mas goles. Las situaciones cotidianas como vestirse también se pueden pensar como algoritmos: tienen cierto orden lógico porque no pueden ponerse los calcetines antes que los zapatos, ni el saco antes que la camisa. Nos hemos acostumbrados a realizarlos de manera casi automática, apenas dándonos cuenta, pero lleva una secuencia que se puede pensar como algoritmo. Hasta las funciones biológicas se podrían describir como algoritmos aunque quizá de forma simplificada, porque en este caso son situaciones muy complejas que requieren el concurso coordinado de múltiples partes del organismo, tal como el proceso de digestión, o simplemente el correr que requiere la participación de músculos de casi todo el organismo.

En el caso de las operaciones mentales trata de las acciones que llevamos a cabo a través de el pensamiento y la imaginación, recordando, futurizando, extrapolando posibles sucesos, manipulando símbolos o ideas, planificando o imaginando una acción. Estas operaciones alcanzan un nivel de refinamiento en la ciencia mediante la manipulación de símbolos matemáticos con ciertas reglas matemáticas y lógicas. Por ejemplo, un ingeniero en electrónica cuando quiere construir un sensor de gas no va directamente a la construcción del dispositivo, sino que primero hace cálculos teóricos necesarios (manejo de leyes físicas y ecuaciones) que le indican como debe construirlo. Cada paso nos lleva a la transformación de los datos de tal manera que cada uno de ellos lo lleva a cierto estado que, si lo reconocemos como correcto, podemos pasar al siguiente, hasta completar el algoritmo y llegar a un resultado presumiblemente correcto, y de aquí a la construcción del sensor.

En realidad no hay una separación tan tajante entre operaciones físicas y mentales, porque casi siempre participan ambas, ya que cuando realizamos una actividad física requerimos pensar que paso sigue después de cada acto físico llevado a cabo; y para una mental necesitamos manipular nuestras ideas mediante símbolos, lenguaje escrito o matemático. La diferencia sólo sería de grado y en algunos casos se necesitará mas actividad física y en otras más actividad mental.

Los algoritmos pueden ser también no lineales, es decir su secuencia tener dos o mas opciones por cual seguir, de tal manera que se requiera reconocimiento del paso dado, para decidir entre 2 o mas acciones de pasos ulteriores, y/o regresar a pasos anteriores. Por ejemplo, el algoritmo para encontrar el máximo común denominador de dos números natural es no lineal, y se muestra a continuación:



Es importante ser conscientes de lo qué es un algoritmo porque como lo definimos antes, el conocerlo y manejarlos bien nos puede dar eficacia en cualquier acción que emprendamos, tanto física como mental.

Las propiedades fundamentales de los algoritmos son su carácter determinado, masividad y capacidad para producir resultados. La primera significa que las indicaciones son comprensibles para quienquiera y pueden ser reproducibles por cualquier persona o incluso una computadora. La masividad se refiere a la cantidad de problemas del mismo tipo que se pueden resolver. La tercera propiedad indica la posibilidad de poder llegar a un resultado, correcto o no. El algoritmo de la división que presentamos era altamente determinado porque es comprensible para cualquiera, y hasta una computadora programada con dicho algoritmo es capaz de reproducir las órdenes. Tiene, además, gran capacidad para producir resultados correctos, ya que diversas personas (o una maquina) si realizan los pasos bajo las mismas condiciones y de manera correcta, pueden llegar al mismo resultado. También tiene una gran masividad ya que es posible dividir cualquier número entero, y estos son infinitos. Existen otros métodos o clases de algoritmo donde su grado de determinación no es tan alto, ni tampoco su capacidad para dar resultados correctos y su masividad puede variar. El caso totalmente opuesto a un algoritmo es cuando las indicaciones de un método son poco determinados y su capacidad de llegar a un resultado correcto es muy bajo, aunque su masividad es muy grande. A este método se le conoce como heurístico, y lo trataremos en un capítulo posterior. Un caso que media entre algoritmo y heurística, son los semi-algoritmos, cuya determinación, capacidad de solución y masividad es intermedia entre ambos[15]. Posteriormente presentaremos el semi-algoritmo de la solución de problemas.

La Controversia de Thuring

Recordando. nuestro cerebro funciona por medio de reconocimiento e interpretación de las señales que le llegan tanto del exterior como del interior de su cuerpo lo que le ha permitido dar respuestas inmediatas ante el peligro, o reconocer su alimento. Esta interpretación se da por medio de esquemas mentales, patrones de reconocimiento que le permiten tomar de la infinidad de señales las que importan de acuerdo a la situación del momento y actuar en consecuencia, y que se les conocen como instinto, o reflejos condicionados en un nivel más alto de respuesta. Si tuviéramos que analizar cada una de las señales que recibimos, a nuestros antepasados los hubieran devorado un tigre o tragado la ciénaga. Lo que son actos inconscientes e instintivos en los animales superiores, en el ser humano son actos conscientes y le ha permitido actuar sobre estos, mejorarlos y adecuarlos a nuevas situaciones, como ya hemos explicado. Estos esquemas mentales o patrones se pueden interpretar como algoritmos, aunque es una simplificación, pero que es adecuado para el estudio del pensamiento en la solución de problemas.

Si nuestra mente no actuara por medio de algoritmos, sino por el método de revisar cada una de las posibles variantes de solución, hasta con algunos problemas muy simples no nos alcanzaría la vida entera para resolverlo. El matemático Thuring tuvo una controversia con sus colegas por este hecho, ya que estos insistían en decir que la solución de todo problema no era más que la combinación de hechos casuales, una selección estadística de la solución elegida entre innumerables posibilidades. Ellos insistían en decir que un mono sentado ante una máquina de escribir por el sólo hecho apretar al azar las teclas, con el tiempo suficiente terminaría por reproducir todos los libros de la Biblioteca del Museo Británico. Thuring les refutó presentando como contra-argumento el problema de un rompecabezas compuesto de 15 cuadros numerados del 1 al 15, y el cual es tan solo una variante del juego del "quince"; juego que consiste en colocar en una forma determinada los escaques en una caja, en la cual caben 16 cuadros de este tipo y por lo tanto queda tan solo uno vacío. La única forma en que se pueden mover estos cuadros es a través de este espacio vacío, trasladando los cuadros vecinos a el, y a

[15] Landa, L. N. 1977. pags. 143-154.

su vez, los restantes por el espacio que va quedando desocupado. El cálculo de todas las posibles combinaciones o variantes de solución de las posiciones de los 15 escaques fue la cifra astronómica de 20,922,789,888,000. Durando tan solo un minuto en lograr una combinación y trabajando las 24 horas del día sin descanso, una persona tardaría ¡ 4 mil millones de años en explorar todas las posibles variantes de solución! Y este es un problema que resolvimos durante un recreo en nuestros años escolares. Lo cual hace ver la imposibilidad de llegar a la solución en un tiempo razonable con el método de búsqueda al azar ya que de todas estas variantes, una sola es la correcta, como podría ser, por ejemplo, ordenarla en forma creciente del 1 al 15 de izquierda a derecha y de arriba abajo[16].

1	3	4	8
14	6	15	13
2	5	7	10
11	9	12	

Desafortunadamente, cuando queremos resolver un problema lo intentamos cómo los colegas de Thuring: al azar, sin un plan de acción y sin una idea clara de donde partimos y de lo que queremos alcanzar. Ante los distintos elementos del problema sólo reaccionamos emocionalmente, y nuestra atención vaga de manera "volante" entre una y otra parte de este, sin ninguna finalidad y sin saber que hacer. Entonces, lo más probable es que nos perdamos en un mar de detalles por la infinidad de variantes de solución y nuestra manera errática de búsqueda. También pasa que nuestra atención se concentre en alguna parte del problema y no pueda salir de él, es decir que nuestra atención se vuelve "pegajosa", y cuando la solución no se encuentra dentro de las variantes que hemos encontrado, esta puede ser un impedimento para seguir buscando. Por todo esto es importante diseñar una estrategia, método o plan de acción mental (algoritmo) que actúe como un "itinerario de la atención" y que, cómo hilo conductor traslade nuestra atención a los elementos mas importantes del problema, operando sobre ellos en la búsqueda de solución. Esto nos permitirá reducir su espacio de búsqueda a un número de variantes manejable en un tiempo humanamente posible, y nos evitará empantanarnos o dar vueltas sin fin alrededor de una idea.

Es por eso que cuando nuestra búsqueda de solución es sin ningún plan de acción los errores mentales que se cometen son múltiples debido a la cantidad de variantes que pueden existir, aún para problemas muy sencillos como el que hemos mostrado. Esto pasa muy comúnmente a los alumnos que no están acostumbrados a seguir un método cuando resuelven un problema. Y es una situación muy común en todas las personas.

Como otro ejemplo de la futilidad de actuar sin un método, y la ventaja de contar con un plan de acción presentamos el caso del juego de ajedrez. Este juego se ha usado como base para el estudio de la heurística. En una partida común se ha establecido que cada adversario tiene por termino medio 20 posibilidades en el primer movimiento; 22 en el segundo, 25 en el tercero, 28 en el cuarto, alcanzando hasta 10^{29} en los primeros 10 movimientos[17]. Una partida de ajedrez dura en promedio 40 jugadas, por lo que ¡la cantidad de posibles jugadas puede sobrepasar la cantidad de átomos del universo¡ Es esta complejidad, además de sus reglas sencillas de juego, la que ha servido para esta-

[16] Sapárina, E. 1968. pags. 136-143.
[17] Bondsdorff, E. , K. Fabel y O. Riihimaa, 1974.

blecer al ajedrez como piedra de toque para el estudio de la Heurística. ¿Cómo puede manejar el cerebro tal complejidad? Lo hace por medio de unos algoritmos heurísticos que le permiten reducir el numero de posibles variantes a sólo aquellas que le producen una ventaja contra su contrincante: "Conviene controlar las cuatro casillas centrales", "Antes de atacar asegure la invulnerabilidad del rey", "No ataque antes de fortificar su posición", etc. Y se pueden encontrar en cualquier manual para principiantes. Esta serie de reglas nos permite elegir las jugadas mas adecuadas para poder ganar y discriminar todas las que no, que son la mayoría.

En el estudio de este juego se han tratado de descubrir estas reglas para llevarlas a una computadora y "enseñarle" a jugar. Después de muchos años de investigación la computadora ya juega al nivel de los grandes maestros del ajedrez. Esto se debe a que se ha podido dividir en seis grupos las tácticas del ajedrez, cada una con su propia finalidad: la seguridad del rey, el equilibrio material, el control de las casillas centrales, el desarrollo de las piezas, el asedio del rey contrario y el avance de los peones. La sucesión de estas reglas determina el orden en que las aplica la máquina, de acuerdo a Elena Sapárina: "Primero procura asegurar la posición del rey por todos los medios que está a su alcance. Si no lo consigue, lo defiende en la medida de lo posible. Y sólo cuando el rey está seguro, la maquina pasa a la segunda finalidad, o sea, calcula los posibles cambios de piezas, tendiendo siempre a garantizar una eficaz defensa de las propias. Luego el ajedrecista electrónico pasa a luchar por las casillas centrales, etc. Cada uno de estos objetivos está vinculado a un conjunto de reglas, que orientan la concepción de las jugadas necesarias. Digamos que la máquina busca conquistar las casillas centrales. Entonces moverá el peón de dama y luego el de rey. Después procurará impedir que el adversario haga lo mismo, y sólo entonces realizará aquellas movidas que preparan las movidas de la finalidad siguiente, por ejemplo, consolidar la defensa de la dama o el rey. La maquina "considera" todas las movidas desde el punto de vista de las seis finalidades para no perjudicar su partida. Mas aún pueden existir muchas variantes de cada movida, y tiene que elegir la mejor. El tiempo para elegirla es limitado, y cuando éste está por finalizar, la máquina escoge la mas aceptable entre todas las que analizó hasta ese instante"[18].

Las máquinas que funcionan de esta forma y con su capacidad de analizar casi 300,000,000 posiciones por segundo, son capaces de enfrentarse a los grandes maestros del ajedrez y darles pelea. A diferencia de hace años, los ajedrecistas humanos sufren para ganarles y esto es debido a que las computadoras ya no pasan revistas a todas las posibles jugadas, como las primeras máquinas, si no que siguen un plan que les permita discriminar mejor las jugadas que no producen ventaja.

En conclusión, si conocemos el algoritmo o semialgoritmo de solución de un tipo de problema, podremos resolverlo más fácilmente o relativamente fácil, si realizamos correctamente cada paso de su secuencia porque estos nos permiten reducir la cantidad del número de variantes o elementos del problema, y por tanto concentramos sólo en los mas importantes, sabiendo que hacer con cada uno de ellos, e ignorando los que no son trascendentes para la solución. Esto nos permite centramos en el manejo de un número de elementos finitos, y por tanto, manejables en cada paso del algoritmo. Si para un problema dado, no conocemos su método de solución, debemos crearlo, en principio un algoritmo y si no se puede, cuando menos un semi-algoritmo. Para lograrlo utilizamos el método Heurístico. Lo que logremos construir, se creará paso por paso y estos nos permitirán manejar las múltiples variables del problema hasta llegar a la solución.

---

[18] Sapárina. E. 1968. pags. 144-146.

4. La Heurística: el Algoritmo de la Creatividad

En esta sección, presentamos la definición de heurística, y sus reglas la cual consisten en una serie de sugerencias, consejos, actitudes mentales, además de un semi-algoritmo para la solución de problemas y un algoritmo heurístico de creatividad, que nos permiten encontrar o buscar de manera más eficaz los algoritmos o semi-algoritmos de los problemas de las ciencias, pero también para cualquier otro tipo de problema.

Cuando no sabemos cómo resolver un problema, es necesario crear un plan de acción mental (algoritmo) por medio de la Heurística, que nos permita manejarnos a través de la complejidad de este y que nos conduzca a su solución de la forma más fácil y rápida posible. Si lo logramos, no solo habremos solucionado dicho problema en particular, sino en general todos los problemas del mismo tipo. Como ya dijimos, la Heurística tiene el menor rango de determinación y confiabilidad de llegar a un resultado. Pero a cambio su masividad es de mayor rango, lo que le permite una aplicación de mas amplio espectro, una mayor universalidad en la solución de problemas; su finalidad es obtener en principio un semialgoritmo, o idealmente un algoritmo, que nos permita manejar todas las posibles variantes o elementos de solución en un tiempo lo mas corto posible. Las reglas Heurística son tal que nos permiten pasar de sus reglas generales a lo particular de cualquier problema. Por esto a la Heurística la llamo el método de los métodos.

La Heurística, según la definición de George Polya, es: "La ciencia que trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas complejos no típicos para los cuales no existe un método de solución (algoritmo o semialgoritmo, el paréntesis es nuestro), en particular las operaciones mentales útiles para este proceso. Tiene por objeto el estudio de las reglas y los métodos del descubrimiento y la invención: la Heurística tiene en cuenta tanto el trasfondo lógico como psicológico"[19].

La Heurística proporciona las operaciones mentales necesarias que tienen en cuenta las situaciones psicológicas que se pueden presentar en un problema no tipo, y trata de encauzar nuestra búsqueda de solución en la dirección mas probable. No garantiza la solución, pero la lleva a una situación más próxima. La importancia de usar el método Heurístico es que preparan a la mente en la búsqueda de solución, ya que nos sensibiliza para detectar los posibles elementos importantes, o crearlos si no existen, y a encontrar sus relaciones o restricciones. De los múltiples elementos que aparecen en un problema, debemos determinar cuales son los que verdaderamente importan para la solución. O como en el ajedrez, debemos deshacernos de las jugadas que no contribuyen a ganar el juego, y sólo usar las que si representan ventaja, en un problema nos deshacemos de las variantes o elementos erróneos, que no nos conducen a la solución. En el caso de los problemas donde no se pida encontrar un tipo de combinación sino que se necesite descubrir el valor de una incógnita o explicar un evento, los elementos que la componen puede ser grande también, pero debemos saber cuales discriminar y cuales otros analizar.

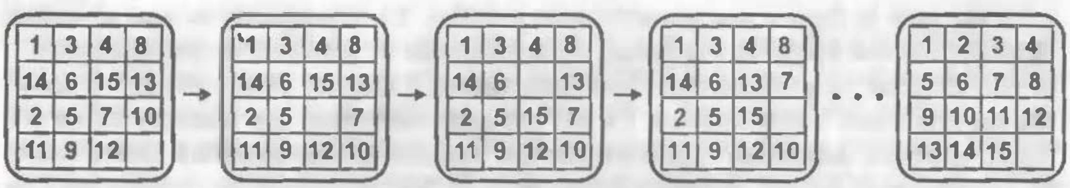
Para la solución de todo problema es necesario primero, entenderlo. Se empieza por definir de manera clara y precisa sus elementos: se busca cuales son los datos mas relevantes dados de manera explicita y cuales se pueden deducir de manera implícita del problema; se determina cuales son las incógnitas a resolver y las condiciones impuestas.

[19] Polya, G. 1992. pags. 101-102.

Luego, se relacionan los datos con las incógnitas por medio de las restricciones o condiciones. Con todo esto, debemos tratar de resolver la incógnita

Se aspira en principio, a conocer restricciones o condiciones, ya que hacen la búsqueda posible porque delimitan el espacio de solución. Si no nos son dadas o se desconocen, entonces es necesario crearlas, y aquí es donde interviene el algoritmo heurístico de la creatividad. Si podemos llegar a una solución, entonces es necesario, en retrospectiva darse cuenta cuales fueron las operaciones correctas que permitieron obtener el resultado. Ordenando las operaciones en una secuencia lógica, podemos formar un semi-algoritmo o algoritmo, y entonces ya podremos solucionar todos los problemas del mismo tipo. No en todos los casos va a ser posible encontrar un algoritmo de solución, como lo ha demostrado la ciencia contemporánea; pero para que un problema tenga solución, debe existir un algoritmo o cuando menos un semialgoritmo.

Por ejemplo, en el caso que mencionamos anteriormente sobre el juego del 15, probando todas las combinaciones posibles, nos podíamos tardar con este método mas años que la edad de la tierra en intentar resolverlo. Entonces es muy poco recomendable tratar de resolverlo de esta manera. ¿Que podemos hacer? Nuestro problema es que los escaques inicialmente están distribuidos de cierta forma (datos) y queremos ordenarlos de una manera determinada (incógnita); entonces, el problema es como moverlos para ordenarlos de la manera correcta en un tiempo razonablemente corto. La estrategia a seguir, según la Heurística, es encontrar una regla o restricción que me permita reducir el número de variantes de solución y que me conduzcan al resultado correcto de la manera mas directa. En este caso no es mover los cuadros individualmente como comúnmente se hace, sino realizar su movimiento en bloques de varios escaque y, de esta manera, el espacio de solución se reduce a un número de elementos más manejable, con lo que es mucho mas fácil resolverlo. La forma como se pueden agrupar es, primero ordenar los que corresponden a las columnas y filas mas externas de la caja; después, se intentan ordenar las columnas y filas vecinas internas, pero sin modificar a los escaques externos aunque sí desplazándolos alrededor de su fila y columna. Se continúa así, hasta ordenar los del centro, y quedan colocados todos en su posición correcta.



Como ya mencionamos, una ley o teoría científica funcionan como restricciones que me indican que tipo de eventos es posible que ocurra en la naturaleza y cuales no. De todos los posibles que podrían ocurrir, o que uno se imagina podrían suceder, sólo son posibles aquellos expresados por la teoría causal, y bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, los cuerpos pesados como una piedra, una pluma o un bloque de madera caen de igual manera de acuerdo a la ley de la gravedad, con aceleración constante g y desplazamiento $y = gt^2/2$, en el vacío. Pero dependiendo bajo que otras condiciones se encuentre el cuerpo, en el aire o el agua, pueden caer de manera distinta. En el aire, la piedra y la madera caen mas rápido que la pluma. Pero en el agua la piedra cae a menor velocidad que en el aire, y la madera y la pluma flotan. Lo que nunca podría pasar es que estas salieran disparadas al espacio porque están atrapadas por la gravedad. Entonces una ley nos indican como se va a comportar un objeto o sistema en la naturaleza, pero de acuerdo a las condiciones esto se puede modificar porque pueden intervenir otras leyes y entran dentro de sus límites explicativos.

Toda teoría es tan sólo una aproximación a la realidad, y por lo tanto limitada, tiene su rango de validez y fuera de este ya no se aplica. Estos limites en un principio no se conocen y de ahí que a las teorías se les consideren universales; hasta que un hecho experimental no puede explicarse y es entonces que se reconocen sus alcances. Es cuando nos damos cuenta su limitación y que necesita ampliarse. Un ejemplo de lo antes dicho, es en los problemas que resolvía una teoría científica como la mecánica clásica. En los tiempos posteriores a Newton y anteriores a Einstein, se creía que dicha teoría explicaba todos los fenómenos mecánicos tanto en el micro como en el macrouniverso. Hasta que a principios del siglo XX algunos experimentos contradijeron sus postulados, al no poder explicar hechos tales como el efecto fotoeléctrico y el experimento de Michelson-Morley. Estos dos hechos llevaron a reformularla a dos teorías mas amplias como la Mecánica Cuántica (nivel microscópico) y la Relatividad (nivel macroscópico), respectivamente. Aunque esto no implicó desechar la Mecánica Clásica ya que esta se sigue cumpliendo dentro de sus limites como son a bajas velocidades comparadas con la de la luz y a un nivel macroscópico como el de nosotros. Lo que se puede explicar y resolver con dicha teoria, están restringidas al alcance y limitaciones de sus leyes. Esto es análogo a lo que decíamos con respecto a los algoritmos, y en estos como en cualquier teoria, es conveniente conocer su rango de aplicabilidad, para poder usarlas de manera correcta. El descubrir una limitación a una teoría, además de una hipótesis correcta, puede ser el inicio de una revolución científica.

Entonces, para resolver un problema de la ciencia y la técnica, pero en este trabajo en particular, las restricciones del comportamiento de los cuerpos está dada por sus leyes y sus condiciones. Para los problemas matemáticos sus restricciones serán los teoremas y postulados de cada área matemática en la que estemos trabajando. Para el caso físico, el espacio de solución se reduce de las leyes generales de la mecánica a un sistema particular de ecuaciones. Para resolver un problema, debemos relacionar los datos que tenemos con la o las incógnitas que deseamos resolver; aplicamos sus leyes y principios expresados con ecuaciones matemáticas, introduciendo los datos, condiciones y las incógnitas del problema. Del sistema de ecuaciones que se genere, podremos encontrar el posible comportamiento del sistema mecánico o la solución del problema matemático, que se encuentra delimitado teóricamente por la solución de las ecuaciónes. Si el numero de posibles soluciones de este sistema de ecuaciones es grande, es decir que los valores encontrados para las incógnitas sean dos o mas, y que matemáticamente significa que el número de incógnitas es mayor al de ecuaciones, entonces es necesario buscar más restricciones que nos conduzcan a una solución única porque, un evento cualquiera de la naturaleza bajo las mismas condiciones no puede tener dos o más comportamientos diferentes; para lograrlo es necesario encontrar el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Entonces, si el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas diremos que las condiciones o restricciones fueron insuficiente y no es posible encontrar una solución y, por tanto, habrá que buscar mas restricciones. Cuando el número sea igual al de incógnitas la condición fue suficiente y entonces ya es posible resolverlas matemáticamente por diversas técnicas. Cuando el número sea mayor que el de incógnitas, se dice que la condición es redundante y también podemos resolverlas.

En síntesis el plan o método semialgoritmico para resolver problemas es el siguiente:

1. Comprender el problema.
2. Determinar cuales son los datos, incógnitas y condiciones.

3. Relacionar los datos con las incógnitas mediante las restricciones y/o condiciones.
4. Resolver el sistema de relaciones establecidos en el paso anterior.

A este semi-algoritmo lo transformaremos en un algoritmo para los temas de Física y Matemáticas que presentaremos como ejemplo.

Cuando en un problema dado creemos conocer todos sus elementos y aún así no lo podemos resolver, cuando ya no basta el análisis de sus partes, entonces es necesario una hipótesis creativa, ya que posiblemente falta redefinir o incorporar al problema un nuevo elemento.

Uno de los objetivo primordiales del algoritmo de la creatividad será generar elementos nuevos o redefinirlos de los que ya existen: crear reglas, leyes o en general las restricciones adecuadas, que hagan falta para solucionar un problema o entender un fenómeno cuya comprensión se nos escapa. Para lograr esto utilizaremos el algoritmo de la creatividad (pensamiento productivo), tema de la siguiente sección.

El Algoritmo de la Creación

Cuando en un problema conocemos su algoritmo de solución, el usarlo de la manera correcta hasta llegar a un resultado se le llama pensamiento reproductivo, porque, como su nombre lo indica, reproducimos paso a paso cierta actividad mental establecida de antemano por medio de un algoritmo.

Por el contrario, cuando no conocemos el algoritmo de solución de un problema, se hace necesario crearlo. Descubrir el elemento esencial, crear o redefinir un concepto nuevo, pueden ser los pasos esenciales para solucionar un problema. Aquí es cuando surge la necesidad del pensamiento creativo. Es decir, ya no basta con manejar los elementos del problema, sino que es necesario proponer uno nuevo. A este tipo de pensamiento se le llama productivo, porque se trata de generar una nueva idea o elemento que antes no existía en el problema.

El principal inconveniente que se pone al uso de algoritmos, semialgoritmos o aún al método heurístico, es la idea de que el uso de todo plan o receta vuelve rígido al pensamiento, porque existe la creencia de que la creatividad para que se manifieste necesita de la libertad. Pero no es la ejecución de un plan o método lo que impide crear una idea nueva, o la falta de libertad, sino no reconocer los límites de su aplicabilidad. Estos algoritmos son necesarios para desenvolvernos en situaciones complicadas de la naturaleza misma o propias de nuestra cultura. Si no conocemos sus límites si corremos el peligro de quedar esquematizados por ellos. Puede pasar cómo con el paradigmadel universo mecánico de Newton, que conformaron el pensamiento de la humanidad por casi dos siglos, hasta que el choque de ellos con la experiencia se reconocieron sus limitaciones, y se pudo avanzar por medio de hipótesis creativas a una idea mas amplia de la naturaleza. La libertad de creación nos puede llevar al vacío, a las ideas sin sentido, sin ninguna relación con el problema que queremos resolver. Precisamente es la libertad con que actuamos cotidianamente, la que nos lleva a perdernos en un mar de detalles sin saber que hacer, cómo ya mencionamos.

La creatividad aquí consiste en reconocer nuestros alcances y limitaciones naturales propias y de las ideas que generamos, y trabajar en su ampliación y mejoramiento por medio de conjeturas. Es autoconociendonos, nuestros condicionamientos naturales y culturales, y el grado de libertad que nos otorga nuestra conciencia temporal que podemos diferir respuestas y entonces generar ideas nuevas. Lo viejo está en el pasado, lo nuevo es lo que se proyecta a futuro. Podrán ser útiles o no a nuestros fines, pero se habrá salvado el primer obstáculo que impide la solución de un problema nuevo, que son las ideas habituales y/o erróneas y que nos limitan en la búsqueda de nuevas ideas. Entonces nos lanzaremos en una búsqueda sin saber si encontraremos respuestas, pero que es mas probable que si nos hubiéramos estancado en las ideas rutinarias. Pero para ello es necesario con este conocimiento encontrar estas leyes o reglas que nos permitan escapar de dichas ideas y poder generar nuevas. Por lo tanto, para nosotros la libertad creativa la dan el conocimiento de "nuestra propias cadenas" y las reglas que de ella se derivan. Con la sola idea de libertad y sin conocimientos de nosotros mismos y de cómo se generan ideas nuevas, es muy probable que nos quedemos estancados en las viejas ideas.

La naturaleza es inmensamente creativa, eso es innegable. Pero es una creatividad sin una finalidad, sin un sentido. La creatividad a la que nos referimos aquí, es la creatividad humana, con un sentido, con significado, con un para qué: para resolver un problema, tomar una mejor decisión, superar una limitación o comprender un fenómeno fisico o social, etcétera. La naturaleza crea entes que son posibles por las reglas de relación dadas por las propias leyes de la naturaleza, entre sus partes o elementos; en contraste el ser humano crea cosas que solo son posibles porque antes existieron en su cabeza y que muchas veces van en contra de lo que se conoce en la naturaleza; puede imaginar eventos que nunca han sucedido y que ni siquiera son posibles que ocurran, y aunque con los artefactos que crea no puede violar las leyes de la naturaleza, si puede manipularla y usarla en su beneficio. Su pensamiento y creatividad siempre tiene una finalidad: superar sus limitaciones fisicas para abatir el dolor, búsqueda del placer fisico o mental, trascender la muerte, o simplemente satisfacer su curiosidad.

Al ser el cerebro un sistema que autoorganiza la información que le llega en pautas o patrones cerebrales creadas en el pasado por el aprendizaje, respondemos en el presente con reflejos condicionados o con los hábitos que hemos adquiridos en la cultura. Entonces la dificultad de crear una idea novedosa radica en primer lugar, en la dificultad que representa escaparse de las antiguas ideas y formas de percepciones rutinarias de considerar las cosas. Así, cuando hacemos planes para el futuro o queremos resolver un problema, reaccionamos automáticamente dando respuestas habituales, tratando de recordar como lo hemos hecho en el pasado; no buscamos mejores alternativas. Entonces, para escapar de las formas antiguas o rutinarias de hacer las cosas, debemos primero identificarlas, y luego tratar de generar el mayor número posible de alternativas novedosas que no se hayan visto nunca: tratando de relacionar los elementos del problema de nuevas maneras; ver desde otro punto de vista cada una de sus partes, o de generar nuevos conceptos o variables. Luego pasamos a probar la utilidad de cada una de ellas. La finalidad de esto es poder generar ideas nuevas y útiles, fundamentales para resolver un problema; pero para ello, subrayamos, es necesario escapar de nuestra forma rutinaria de hacer y de ver las cosas; al producir varias formas alternativas de percibir ùn problema, es mas fácil deshacerse de la "atracción" que ejerce nuestra antiguas ideas y esto, a su vez, facilita generar más ideas. En la ciencia, como en cualquier otra actividad humana de creación, es conveniente romper esquemas y cometer herejía.

A Einstein alguna vez se le preguntó que cual creía que era la diferencia al resolver un problema entre el y una persona común, y el contestó: "Si le pides a alguien que busque una aguja en un pajar, la persona se detendrá una vez que encuentre la aguja. Yo, en cambio, arrancaría el pajar entero buscando todas las posibles agujas".

El Físico Norteamericano Richard Feynman, ganador del premio Nóbel, sentía que el secreto de su genio era que cuando se enfrentaba a algún problema no hacia caso de cómo otros lo habían resuelto en el pasado. El ignoraba todas las formas e inventaba su propia estrategia. Buscaba distintas alternativas, hasta que encontraba una que movía su imaginación.

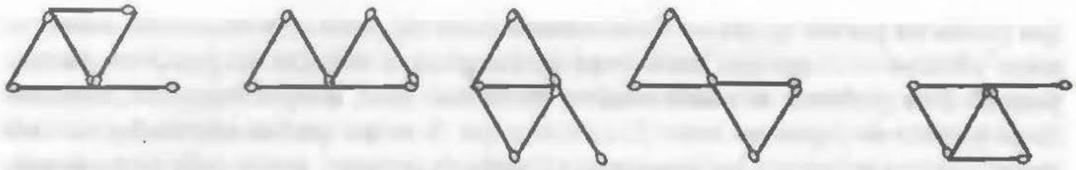
A continuación presentamos y ampliamos las ideas ya expuestas en la forma de un algoritmo heurístico de la creatividad:

0. Superar el temor inicial. Casi siempre, al enfrentarnos a un problema nuevo, reaccionamos con el temor y la creencia de que no vamos a poder resolverlo, que no tendremos la suficiente inteligencia o fuerza para lograrlo. Esta es una reacción natural en virtud de que necesitamos recorrer procesos mentales que nunca antes hemos transitado; de pensar "pensamientos" que nunca antes hemos pensado. Entonces, surge la duda de que si tendremos la suficiente capacidad y fortaleza para encontrar el método que nos conduzca a la solución. Es necesario para poder resolver cualquier problema, superar este temor inicial y confiar en las propias fuerzas. Si no lo lográsemos, corremos el peligro de permanecer inmovilizados, y ni siquiera intentar resolverlo, rendirnos antes las primeras dificultades. Una vez superada esta etapa, se empiezan a entrever pensamientos nunca antes conocidos.

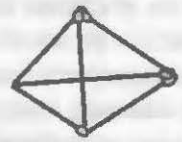
I. Localización de las ideas habituales. El siguiente paso es detectar las ideas rutinarias o habituales de como percibimos una situación dada. Este paso es fundamental porque permite localizar ideas que por condicionamiento natural o cultural influyen nuestra percepción. Estas funcionan como un sustrato pre-lógico que determina todo lo que vemos sin apenas darnos cuenta. Cuando necesitamos crear una idea nueva, una hipótesis creativa, las ideas rutinarias son el principal impedimento. Es muy difícil darse cuenta de nuestra forma de ver las cosas, por que no conocemos otra, es la forma como percibimos de manera natural. Pero la misma estructura de nuestra conciencia temporal que nos ata, también permite la liberación de los condicionamientos, porque su estructura histórica configura el presente de acuerdo a su historia pasada, pero también de acuerdo a lo que proyecta o planea a futuro. La manera de revertir nuestros condicionamientos es, por lo tanto, ser consciente de su existencia, dirigiendo la atención sobre ellos y modificarlos de acuerdo a un plan: un primer paso sería tratar de localizar todas las formas de cómo entendemos una situación; el siguiente sería modificar estas respuestas o ideas con otras totalmente opuestas, variaciones de la misma, o alterando un elemento cualquiera del problema. Por ejemplo, la idea rutinaria que tenemos de una veladora es que la usamos para alumbrar, pero bien podría servir para pegar objetos con la cera derretida. Una escalera portátil cotidianamente se le emplea para subir una pared, pero también se le podría usar de puente entre dos extremos de edificios que están separados por una distancia acorde a su tamaño.

El principal obstáculo para resolver un problema o crear una idea nueva, puede ser una idea habitual dominante que no nos permite salir de los esquemas preestablecidos y que conforma nuestra percepción[20]. Un ejemplo que clarifica esto, es un problema que se les propuso a un grupo de alumnos de bachillerato. Se les planteó que formaran con 6 cerillos de igual longitud, 4 triángulos equiláteros con sus aristas de igual tamaño. A continuación se muestran todas las posibles variantes de solución, sin que lograran lo que se les pidió:

[20] de Bono, E. 1975. pags 67-68.



La idea que les impidió resolverlo era que estos triángulos tenían que estar sobre su mesa banco, es decir sobre un plano. Esto no les permitió darse cuenta que se necesitaba aprovechar al máximo el número de cerillo de un triangulo, pasando a la tercera dimensión y formar un tetraedro que tiene cuatro triángulos equiláteros y solo necesita para formarse seis aristas, que son los cerillos con que contamos. De aquí nos podemos dar cuenta la importancia de escapar de una idea errónea dominante y buscar distintas alternativas que hagan mas probable encontrar la solución correcta. Si no lo hacemos, corremos el peligro de quedar atados en una idea, que nos impide buscar la solución correcta.



Otra forma de escapar de las ideas dominantes es por medio de la duda metódica de René Descartes. Este método consiste en preguntar por los elementos de un problema o teoría sin dar nada por supuesto, impidiendo que nuestro pensamiento se conforme o adecúe. El lo resume en la frase "dudar es pensar". Así, podemos ir nalizando todas las partes hasta llegar a su mera raíz. Impide que se conviertan en "naturales", las ideas que en un principio fueron supuestos o aproximaciones, permitiendonos manejar alternativas que nos pueden llevar a una mejor aproximación, o a la solución.

II. Búsqueda de las distintas alternativas de solución. Una vez localizada el mayor número posible de ideas habituales, y demostrado que no nos conduce a la solución, es importante generar el mayor número posible de alternativas novedosas. Primero, es importante poder escapar de ellas. Una manera es debilitar el núcleo central presentando una variación del mismo, modificando un principio o algún elemento del problema. Un pequeño cambio en la forma de percibir algo, puede producir efectos profundos, ya que nos permite salir de la atracción de las ideas rutinarias y llegar a otras totalmente diferentes[21]. Aunque no se lleguen a ideas que conduzcan a una solución, el hecho de ver las cosas de manera distinta nos permite darnos cuenta de que el problema se puede plantear de muchas maneras y no de una sola como creíamos en un principio, lo que nos permite escapar de la rigidez de nuestra postura inicial. Y esto, a su vez, permite generar mas ideas nuevas. Otra forma es proponer algo totalmente opuesto a lo que se cree que es. Por ejemplo, en vez de pensar que los objetos caen con aceleración dentro de un elevador, suponer que es el elevador el que se mueve hacia los objetos con esa misma aceleración. O en vez de que nosotros nos movamos por el piso, sea el piso el que se mueve bajo nuestros pies como podría ser una escalera eléctrica.

Un problema, algunas veces sólo puede serlo, por cómo lo estamos enfocando, un pequeño cambio de percepción, lo que parecía serlo, ya no lo es. Por ejemplo, tenemos el siguiente problema: "Se va a organizar un torneo de tenis por eliminación directa -el

[21] Ibid., pag. 69.

que pierda un partido queda automáticamente fuera del torneo-, y se necesita saber cuantos partidos se disputarán hasta tener un campeón si son 256 los jugadores participantes". Este problema se puede resolver de manera fácil, aunque engorrosa, dividiendo el número de jugadores entre 2, sabiendo que la mitad quedan eliminados en cada etapa, y la otra mitad son los ganadores y continuan jugando, donde cada juego ganado representa un partido; sumando el numero de juegos en cada fase hasta llegar al campeón obtendríamos el total de juegos disputados. Entonces el número estaría dado por la siguiente suma: 128+64+32+16+8+4+2+1=255. Una manera mucho más fácil de resolver este problema y sin necesidad de hacer ningún tipo de cálculo es que, en vez de considerar a los jugadores ganadores, tomar en cuenta a los perdedores, y sólo hasta la etapa final. Sabemos que cada partido perdido representó un juego, así como consideramos antes de que cada partido ganado lo fue de igual forma. También sabemos que el único jugador que no perdió fue el campeón. Entonces, los otros jugadores que sí perdieron un partido son los restantes 255 participantes, y por lo tanto este es el número de juegos disputados, que coincide con el cálculo hecho con el método anterior.

En el siguiente problema, su solución ya no es tan evidente como el anterior, y se podrán ver de manera más clara las ventajas de un cambio adecuado de enfoque. "Se tienen dos vasos de igual volumen, uno con vino y otro con agua al mismo nivel. Se toma una cucharada del vaso con vino y se deposita en el vaso con agua. Ahora, se toma una cucharada del vaso con agua y vino y se regresa al vaso de vino. Se repite el proceso anterior nuevamente. El problema consiste en saber si hay mas vino en el vaso de agua que agua en el vaso de vino o a la inversa, si sabemos que el volumen total en cada vaso no varió". La primera idea que se nos ocurre para resolver este problema es calcular etapa por etapa la cantidad de vino en el vaso de agua y la cantidad de agua en el vaso de vino, y esto suponiendo que en cada paso el agua y el vino se mezclaron perfectamente, que no lo da por supuesto el enunciado del problema. Esta es una manera tediosa y complicada de resolverlo. Una manera más fácil y divertida es partir de suponer cuál podría ser el resultado final del mezclado, en vez de seguir su desarrollo del proceso del inicio, paso a paso. Este pequeño cambio de perspectiva produce una gran diferencia. En principio sabemos que el volumen de los 2 vasos no varió, porque la misma cantidad que se le quitó a cada vaso en cada etapa, luego se le regresó, ya que se utilizó siempre la misma cuchara. En su estado final, el vaso de vino contiene cierto volumen de agua total que definiremos como v_{va}, y que no sabemos cual es su valor, porque durante el proceso hubo muchos intercambios. También sabemos que en el vaso de agua hay un cierto volumen de vino que tampoco sabemos su cantidad y definiremos como v_{av}. Entonces, ¿cómo determinar cual volumen es mayor de v_{va} y v_{av}? Sabemos que el origen del volumen de v_{va} fue el vaso con agua, entonces este volumen debió ser desplazado totalmente de aquí y debe estar dado por dicha cantidad. Pero sabemos que el volumen total del vaso con vino no varió, entonces se debió desplazar una misma cantidad de vino que ha sido sustituida por el agua. ¡ Y por lo tanto sus volúmenes son iguales: $v_{va} = v_{av}$!

El problema parecía muy dificil de resolver a primera vista, cuando se intenta solucionar etapa por etapa; pero un cambio de enfoque al considerar su etapa final como punto de partida y el volumen total de vino y agua mezclado en cada vaso , y no la densidad en cada fase, crea una profunda diferencia y nos hace entrever una solución mucho mas fácil y elegante.

Otra forma de generar ideas nuevas, es proponer ideas totalmente disparatadas y ver que efectos produce en nuestra percepción del problema[22]. Entre mas fuera de lo común se nos haga dicha idea, puede ser mejor, ya que indica que se sale totalmente de lo habitual y esto puede ser muy valioso, porque rompe con nuestros esquemas de percepción, liberándonos de las ideas dominantes, y permitiéndonos ver las cosas de otra manera. Estas ideas pueden funcionar como provocación, que inicialmente pueden verse como algo sin sentido para el problema, pero que al debilitar la idea central, permite a la percepción "acomodarse" a otra forma de ver de acuerdo a estas ideas provocativas, lo que puede derivar en una idea valiosa para su solución. Aún si no se alcanza esto, sirve para darnos cuenta que las cosas se pueden ver de manera distinta y nos impulsa a seguir buscando. Por ejemplo, si se requiriera lavar un piso de una gran extensión de una manera rápida, fácil y divertida se podría proponer usar patines; esta idea aparentemente disparatada podría llevar a la idea de colocar los cepillos en la suela de los zapatos y deslizándose por el piso tallarlo como si se estuviera patinando. Otras formas de provocación es introducir elementos nuevos y arbitrarios al problema y ver que efecto producen. O con palabras buscadas al azar de un diccionario[22].

Algunas veces puede pasar que agregamos más elementos de los que realmente existen en un problema, o ignoramos algunos. Suponemos más restricciones de las que hay, o no definimos elementos o conceptos necesarios para la solución del problema (como detallaremos en el siguiente paso). La historia apócrifa del huevo de Colón ilustra claramente esto. En una disputa con otros marinos, que le decían que descubrir Las Indias (América) había sido realmente fácil, porque sólo hubo que apuntar hacia el oeste y navegar. Colón como respuesta les propuso que trataran de parar un huevo de punta. Los marinos, como es obvio, por más que lo intentaron, no pudieron lograrlo. Entonces Colón agarró el huevo, lo aplastó de la punta y paró el huevo. Obviamente los marineros se quejaron diciendo que no se les había advertido de que el huevo pudiera dañarse; Colón les contestó que el tampoco sabía que el océano pudiera cruzarse.

III. La hipótesis y la conjetura: los elementos creadores del pensamiento. Cuando en un problema creemos conocer todos sus elementos -datos, incógnitas, condiciones- y realizando un análisis exhaustivo de todos ellos, redefiniendo o ampliándolos, y aún así no podemos resolverlo, entonces es necesario proponer una conjetura o hipótesis. Una conjetura es proponer un nuevo elemento al problema o manera de relacionarlos, que antes no existía y que es como la pieza del rompecabezas que faltaba para poder armarse. Este paso es esencial para la ampliación de una teoría, o un algoritmo, porque se trata de proponer un nuevo elemento, concepto o ley, necesario para poder explicar algo que las viejas ideas o teorías no logran resolver, en vista de que ya rebasan sus límites explicativos. En síntesis, un buen análisis no basta si el problema que buscamos solucionar rebasa lo que conocemos, o con ver de distinta manera los elementos del problema si lo que hace falta es un nuevo elemento. Es necesario poder definir una nueva variable, concepto, o proponer una hipótesis para una nueva ley que permita relacionar los elementos de manera distinta.

La historia de la ciencia muestra como fueron evolucionando los conceptos y leyes de las teorías que explican los fenómenos naturales. Por ejemplo, antes de Newton, Galileo no pudo explicar el movimiento de los cuerpos porque no contaba con todos los elementos necesarios para hacerlo. Newton si pudo explicar el movimiento de los cuerpos en la tierra, las mareas y el movimiento de los planetas sólo porque contó con que

[22]Ibid., pags.70-71.

antes, Galileo había descubierto la ley de la inercia, Kepler había descrito con sus leyes el movimiento de los planetas, además de que el mismo tuvo que proponer el concepto de masa y la ley de la fuerza Gravitacional, además de inventar el cálculo. De aquí la frase de que su creación sólo fue posible porque se paró en hombros de gigantes.

La ley de la inercia no fue un hecho descubierto totalmente de la observación, si no también creado por la imaginación de Galileo. Experimentando con el movimiento sobre un plano inclinado, se dio cuenta de que conforme la superficie se volvía mas tersa, los cuerpos lanzados a la misma altura sobre el plano inclinado, se deslizaban sobre el, y al llegar al piso horizontal avanzaban mayor distancia antes de detenerse. Entonces propuso como hipótesis que qué pasaría con el movimiento de los cuerpos si la fricción se volviera nula, lo cual de acuerdo a su observación experimental, lo llevó a extrapolar que los cuerpos se moverían a velocidad constante con la que fueron lanzados del plano inclinado de manera indefinida.

Un ejemplo sencillo de la necesidad de proponer hipótesis creativas sería el problema de los cerillos, mencionado antes, donde se consideró la tercera dimensión para poder resolverlo, en vez de la bidimensionalidad supuesta en un principio.

5. Los Algoritmos y la Educación

Todo el siglo XX transcurrió con la acumulación de una gran cantidad de conocimiento, tanto que actualmente amenaza con desbordarnos. Vivimos en la era de los especialistas. Ahora es imposible poder absorber ya no digamos todo el conocimiento contemporáneo creado, sino tan solo la de nuestra propia área de estudio. La ciencia se ramifica en sub-areas y a la vez esta en sub-sub-áreas, hasta el punto de que un científico de cierta sub-área de la física como la astronomía, por ejemplo, no entienda lo que hace un colega que estudia las partículas elementales. Y así en todas las demás ciencias. La acumulación de conocimiento es cada vez mayor y a mas velocidad. En la educación es cada vez más la cantidad de conocimiento que se debe absorber en menor tiempo. Los programas de estudio se saturan, quedando a la mitad sin poderlos cumplir. A los alumnos se les atiborra de conocimiento, y los temas apenas visto en semestres pasados ya no se acuerdan ni de lo básico. Los objetivos primordiales no se cumplen y mucho menos les es posible asimilar los últimos avances de la ciencia.

Para evitar que este conocimiento nos rebase debemos mejorar nuestra forma de aprender, y lo que también es muy importante, de enseñar. Para esto, es fundamental no solo ser buenos absorbedores de conocimiento, sino además aprender a manejarlo y a desenvolvernos con el: saber distinguir que es lo importante de lo superfluo; aprender a usar las leyes generales, conceptos teóricos, aplicándolos a casos particulares (pensamiento deductivo), o de casos particulares alcanzar conclusiones generales (pensamiento inductivo); saber dirigir nuestra percepción a las distintas partes de una situación y a enfocar las cosas de distintas formas; ampliar y mejorar nuestro conocimiento; a generar ideas creativas y resolver problemas. En una frase, desde la primaria debemos no sólo acumular conocimiento, sino también aprender a pensar.

Lamentablemente en la educación actual sólo se han abocado a la transmisión del conocimiento y no a desarrollar las habilidades del pensamiento. En principio esto se explica por el hecho de que hasta no hace mucho se creía que la inteligencia era una cualidad innata, casi mágica, un acto inconsciente integral de pensamiento y que si no la poseías, nada podías hacer por mejorarla. Como ya explicamos, el pensamiento tiene que ver con reproducir conocimiento, pero también con operaciones mentales, es decir con actos concretos interiorizados con los que transformamos modelos abstractos de la realidad y ampliamos nuestro conocimiento. Con el pensamiento modificamos una representación de la realidad y no a la realidad misma, aunque estos modelos también tienen una representación física por medio de imágenes y símbolos, y son los que manipulamos con el pensamiento mediante la escritura y/o las matemáticas. Por lo tanto, es un acto que puede ser divisible en partes mas elementales y comprensibles para cualquier persona, y en consecuencia una habilidad que se puede aprender y desarrollar. Entonces, el proceso del pensamiento se puede organizar en una serie de operaciones mentales, es decir actos que realizamos con la imaginación: la manipulación o transformación mental de objetos o de modelos abstraídos de la realidad. Estos actos se pueden ordenar en un algoritmo, donde cada uno de estos pueden ser perfectamente reproducibles con la práctica por cualquier persona normal (por ser actos concretos y no mágicos). Entonces, si aprendemos a reproducir estos pasos, es obvio que aprenderemos pensar.

El saber pensar por medio de un plan mental (algorítmico o heurístico) causa que nuestra psique pueda desenvolverse a través de una gran cantidad de información del medio natural o cultural, de manera eficaz. Esto porque los algoritmos están basados en reglas suficientemente generales que se cumplen para un determinado tipo de problemas de un cierto universo. En síntesis, saber pensar tiene que ver con conocer un plan de acción mental para una situación determinada, aplicándolo de manera adecuada, cuando corresponde a la acción que queramos efectuar o al problema que buscamos resolver; o creandolo cuando la situación o el problema es desconocido.

Por tanto, mas que una cualidad, es una habilidad, y que puede aprenderse y mejorarse con la práctica. Como siempre en toda actividad humana, hay personas con mas cualidades para una actividad y otros para otra; para el pensamiento han existido personas mas hábiles que han descubierto por su cuenta estos actos y lo han desarrollado mejor. Pero siempre se puede aprender de ellos y por nuestra propia cuenta, para mejorar nuestra habilidad en el manejo de nuestro pensamiento. Al fin y al cabo, todo es como aprender a andar en bicicleta, entre más se practique, mas rápido aprenderemos y mejor conductor de nuestro pensamiento llegaremos a ser.

Otra grave error en la educación ha sido el considerar que la enseñanza se debe transmitir a través de casos particulares, de situaciones concretas, y así, de manera inductiva, el estudiante llegará a comprender las leyes generales; porque es el camino que han seguido los científicos para el descubrimiento de sus leyes. Pero este es un esfuerzo innecesario que se hace pasar a los alumnos, ya que se les hace recorrer por los mismos obstáculos que el científico tuvo que pasar para llegar a sus descubrimientos. Para llegar a esta leyes el científico requirió de intuición dada por la experiencia a través de muchos años, y de su conocimiento como investigador, para poder proponer una hipótesis que va mas allá de dichos casos particulares. Se somete al alumno a esfuerzos que están fuera de su capacidad, y de cualquier otra persona. Se enseña en principio de manera inductiva por que se piensa que es la mejor manera, si no la única, de que la mente de un ser humano puede aprehender generalidades o abstracciones. Sin embargo, Jean Piaget en sus estudios sobre la inteligencia humana menciona que es a partir de la adolescencia el pensamiento de un ser humano ya a alcanzado su plena madurez y es capaz de comprender y manejar abstracciones. Tal como lo expresa textualmente: "Pero, después de los once o doce años, el pensamiento formal se hace justamente posible, es decir, que las operaciones lógicas comienzan a ser transpuestas del plano de la manipulación concreta al plano de las meras ideas, expresadas en un lenguaje cualquiera (el lenguaje de las palabras o el de los símbolos matemáticos, etc.), pero sin el apoyo de la percepción, ni la experiencia, ni siquiera la creencia. Cuando decimos en el ejemplo que acabamos de citar: "Edith tiene los cabellos mas obscuros que Lili. Edith es mas rubia que Suzanne. ¿Cuál de las tres tiene el cabello mas oscuro?", presentamos en abstracto, efectivamente, a tres personajes ficticios, que no son mas que simples hipótesis para el pensamiento, y sobre estas hipótesis pedimos al niño que razone. El pensamiento formal es, por tanto, "hipotético-deductivo", es decir, que es capaz de deducir las conclusiones que hay que sacar de puras hipótesis, y no sólo de una observación real. Sus conclusiones son válidas aún independientemente de su verdad de hecho, y es por ello por lo que esa forma de pensamiento representa una dificultad y un trabajo mental mucho más grande que el pensamiento concreto".[23]

Enseñar de manera inductiva vuelve muy complicada la enseñanza, y demasiado complejo el manejo de las teorías tanto físicas como matemáticas, o de cualquier otra área. Por ejemplo, en la actualidad en una materia como Física a nivel universitario, cuando se enseña un tema particular como la dinámica, de la ecuaciones generales se le presenta al alumno una fórmula particular o método de solución para cada tipo de pro-

[23] Piaget, Jean. 1964. pags. 94-99.

blema, en una serie de ejemplos, como es el caso que involucran un plano inclinado, un resorte o la cuerda, etc.; el estudiante observando como se resuelven estos casos, debe aprender a solucionar cualquier otro problema del tema. Entonces, cuando se le presenta uno distinto en algún examen o tarea no sabe que hacer o intenta resolverlo como uno de los ejemplos ya vistos, lo cual por supuesto conduce al error, porque la mayoría de las veces los problemas sólo se parecen superficialmente. Esto provoca que el estudiante busque una fórmula o método particular conocido para resolver cualquier problema. Esto impide que pueda desenvolverse libremente por que su pensamiento se encuentra supeditado a algún problema análogo que haya visto en el pasado; pero como casos particulares existen una infinidad, es imposible que los conozca o se acuerde de todos. La situación todavía se complica mas porque el tema se divide en capítulos, cada uno de manera independiente y sin aparente relación uno con otro y con sus respectivas y particulares ecuaciones. Además que es necesario conocer las leyes del álgebra y el cálculo, y entonces el número de elementos que hay que manejar se multiplica a tal grado, que se vuelve casi imposible para cualquier persona manejar esta teoría.

El método deductivo, en oposición con el método inductivo, va de lo abstracto a lo concreto, de las leyes generales a los casos particulares. Para la mente humana es mucho más fácil pasar de lo general a lo concreto, que de lo concreto a lo general, porque lo inductivo requiere dar un salto intuitivo muy complicado en el entendimiento de las características semejantes de objetos distintos, que con lo deductivo es reducir esta generalidad, es discriminar si un objeto cabe dentro del conjunto al cual se puede aplicar una ley o teorema. Además que con el método deductivo partimos de un número pequeño de conceptos generales y lo aplicamos a una diversidad de casos particulares. Esto simplifica mucho su manejo y aplicación.

Con todo esto no queremos decir que sea mejor el método deductivo que el inductivo, porque es precisamente con este último como se han logrado los grandes avances en la ciencia. Pero para la educación es mucho más conveniente el primero, ya que con este podemos empezar a enseñar precisamente desde donde ha alcanzado a llegar la ciencia: de las leyes teóricas y los principios generales. Sólo de esta manera podría ser posible ir a la vanguardia con el conocimiento y manejar las teorías cientificas modernas.

El pensamiento algorítmico es de tipo deductivo ya que trata de dirigir la psique en la operación de leyes generales aplicado para cada problema que quede englobado dentro de estas. Asi, lo complejo del manejo de una teoría se organiza y se simplifica en una secuencia de operaciones que involucran a las leyes, cuyo número es pequeño, y por tanto las teorías se vuelven mas fáciles de manejar. Así, una serie limitada de operaciones puede resolver un número ilimitado de problemas, siempre y cuando se encuentren dentro de los alcances explicativos de la teoría.

La enseñanza de los métodos de pensamiento suficientemente generales como los algoritmos, semialgoritmos y la heurística, son secuencias de reglas con indicaciones suficientemente genéricas y que implican operaciones suficientemente universales –unas mas que otras-, pueden educar la mente para el pensamiento deductivo e inductivo, ya que forma la actitud para utilizar las teorías en sus rasgos particulares y generales. Al resolver un grupo homogéneo de problemas mediante estos métodos aprendemos a hacer generalizaciones, pero también a particularizar cuando el algoritmo no resuelve este tipo de problemas y es necesario buscar otro método, o crearlo. El uso de estos métodos educa a la mente de los estudiantes y del que los usa ya que para su aplicación se requiere exactitud, rigor, consecuencia y disciplina. A la vez el dominio de este tipo de pensamiento le otorga una confianza en si mismo a los estudiantes lo que le despierta el interés por el tema de estudio, nace en ellos el deseo de aprender si no existía y empiezan a amar el trabajo mental.

Con estos métodos no se corre el peligro de limitar al pensamiento, simplificarlo o trivializarlo. El peligro existe si se les enseña mal, si se les da como un método final y completo, si no se les advierte de sus limitaciones. Con los algoritmos se dirige la enseñanza en la formación de hábitos y aptitudes para el pensamiento de los estudiantes. El fin último es que ellos pasen lo mas rápidamente posible a la auto-conducción de su pensamiento y esto se logra cuando ellos diseñan de manera autónoma sus propios algoritmos.

El uso de estos métodos eleva considerablemente la rapidez y seguridad en la asimilación de los conocimientos, aptitudes y hábitos, disminuyendo considerablemente el número de errores al resolver una tarea. Todo esto se sabe por que ya se han aplicado a la educación en Rusia, y según una experiencia con alumnos de octavo grado (segundo de secundaria según nuestro plan de estudio), los resultados obtenidos fueron excelentes; según sus propias palabras: "Los resultados fueron óptimos. Escolares que habían estudiado geometría durante dos años y medio sin haber aprendido a resolver problemas, luego de un breve aprendizaje de algoritmos especiales, revelaron de pronto aptitudes para las matemáticas. A partir de ese momento, resolvían sin dificultades la mayor parte de los problemas que antes constituían un escollo para ellos. En cuanto a los que ya lo resolvían bien, ni bien aplicaron las nuevas reglas, mejoraron aún más su comprensión"[24]. El uso de algoritmos no es exclusivo de las ciencias exactas, en Rusia además se la han usado para la enseñanza de ortografía, sintaxis y hasta la estilística de su idioma, y los resultados también han sido muy alentadores. Aquí se aplica a la Física y Matemática, pero su uso se podría ampliar aún mas. Creemos aquí que los algoritmos se podrían aplicar a toda actividad académica o profesionales donde sea necesario realizar una tarea y que involucre aplicar reglas para lograr un objetivo y/o resolver un problema. Y no solo a éstas, sino hasta de la vida diaria.

El siglo XXI necesitará de seres humanos que piensen de manera autónoma, creativa, amplia, abierta y certera. En un mundo cada vez más complejo por la cantidad de información que recibimos del medio, por los problemas socio-culturales y ecológicos, será la única manera de desenvolverse en el, de entender la realidad para actuar y vivir mejor en el mundo; no solo ser mero paisaje de este, sino parte activa que lo transforma hacia una mejor evolución: un mundo cada vez más Humano.

Para lograr esto, será necesario que los centros educativos empiece a conocer la naturaleza humana y sus verdaderas motivaciones. La forma de motivación de la educación actual ha sido por medio del amedrantamiento mediante exámenes, notas bajas, expulsiones y castigos; es decir, por medio del sufrimiento físico y mental. Todo esto es lo que, por su naturaleza, el ser humano trata de evadir. De aquí que los peores recuerdos de una persona muchas veces están relacionados con su paso por la escuela. Así, lo que se logra es, lo que podría parecer imposible, matar la natural curiosidad humana y enseñar a aborrecer todo lo que parezca o "huela" a educativo. La naturaleza humana lo que busca siempre es el placer, el juego, o lo que llama su interés por curiosidad. Las únicas personas que aún conservan intactas estas cualidades son los niños, los científicos y los artistas. Un científico puede trabajar en un proyecto de investigación de manera obsesiva por meses o años, abstraido, olvidándose del mundo exterior, no por lo que le pagan, que muchas veces no representa su esfuerzo, sino por lo emocionante y excitante aventura que representa la búsqueda de un descubrimiento, una invención o una nueva ma-

[24] Sapárina, E. 1971. pags. 166-167.

nera de ver el mundo. Un artista puede permanecer absorto en su creación olvidándose del hambre, la sed y hasta el sueño, por lo excitante de encontrar nuevas visiones y sensaciones del mundo. Un niño puede pasar horas observando el salto de un grillo, o como gira un trompo, por la capacidad de sorprenderse ante hechos aparentemente tan triviales para las demás personas.

Por lo tanto, la forma de incentivar a una persona a aprender, es estimular las cualidades humanas mas positivas. La educación debe ser un proceso de búsqueda y descubrimiento, como la investigación y el arte, y no una saturación de datos inconexos y sin aparente relación con la realidad como es actualmente. La escuela debe ser un lugar donde se llega a ser fundamentalmente feliz, y donde se estimula sus cualidades que lo vuelven mejor ser humano. Y esto es lo primero que debemos aprender, para luego poderlo enseñar. Se debe educar para la libertad de pensamiento y acción, pero también a respetar la libertad de los demás; no para el dogma de las ideologías sino para que aprendan a llegar mas allá de lo que le dicen y leen: a conclusiones e ideas propias. El pensamiento constructivo mas que el de confrontación y destrucción del "oponente", como es el pensamiento dialéctico, y que estructura nuestra cultura actualmente. Este tipo de pensamiento es el enfrentamiento de dos posturas ideológicas por medio de la crítica y la argumentación, y una lucha "encarnizada" para ver cual vence, y es la que se acepta y permanece vigente, la otra se descarta a pesar de que tenga mucho de valioso y pueda complementarla. En estos enfrentamientos se ataca lo negativo de la otra idea y se oculta lo valioso. De acuerdo a este tipo de culturas, argumentar es defender tu postura, tu posición, tu forma de pensar, tu subjetividad como si fuera la verdad objetiva. Pero sabemos que aún las teorías más avanzadas son solamente una aproximación a la realidad, una realidad tan compleja, que escapa a nuestras capacidades humanas comprender en su totalidad. Entonces, es imposible que alguien pueda tener la razón totalmente o que pueda comprenderla totalmente. Por lo tanto, es necesario partir de que no lo sabemos todo y el otro no sabe nada, sino que nuestro conocimiento se complementan y que son ambos puntos de vista para construir un conocimiento de la realidad que vaya mas allá de lo que conocemos en la actualidad y que nos trasciende. Esto se aplica no solamente en la ciencia, sino también en los problemas de relación con otras personas que cotidianamente llevamos a cabo. Sólo así se podrá construir una sociedad verdaderamente humana, donde las diferencias ideológicas o de cualquier otra índole sirvan más para la unión que para el enfrentamiento. Donde este mundo puede ser de muchos tipos, de acuerdo a la diversidad humana y creatividad de cada persona, pero siempre respetando la libertad de pensamiento y acción de cada ser humano, y cuidando nuestra unico hogar y nave cósmica: la Tierra.

En el siguiente capítulo presentaremos finalmente los algoritmos para solución de problemas de fisica y matemáticas.

6. Algoritmo para la Solución de Problemas

Por lo general, cuando buscamos resolver un problema de Física o Matemáticas queremos encontrar el valor de las incógnitas de manera inmediata; pero este sólo es una parte de su solución, la final. La solución de un problema es un proceso que involucra pasar por una serie de etapas: "(1) construir una representación cualitativa del proceso físico y el problema, (2) razonar alrededor del proceso usando estas representaciones cualitativas (interpretación física, química, económica, biológica, etc.), (3) Construir una representación matemática con la ayuda de una representación cualitativa, y (4) Resolver el problema cuantitativamente"[25]. De acuerdo a la situación que queramos comprender o al problema que necesitemos resolver, debemos pasar de un nivel de comprensión cotidiano a uno mas cientifico o formal para poder manipular de mejor manera sus variables y cuantificarlas. Según este esquema y de acuerdo al semi-algoritmo presentado antes, construimos los algoritmos generales que se aplicarán a temas de Física y Matemáticas a nivel bachiller y universitario; es decir para fuerza constantes y por lo tanto aceleración constante en el tiempo. Cuando la fuerza varía en el tiempo, son necesarias las ecuaciones diferenciales y estos algoritmos ya no se aplican

I. Comprender el Problema

A) Hacer un esquema pictórico del problema eligiendo el sistema de referencia más adecuado, siendo este el que necesite menos variables para su descripción. El hacer una descripción pictórica es de mucha utilidad, ya que nos facilita entender que está pasando, y comprenderlo de un solo vistazo. En esta se incluirán las variables físicas y/o matemáticas, según corresponda al problema. Colocaremos aquí todos los datos, incógnitas y condiciones, tanto los que nos proporcionen en el enunciado, como los que necesitemos definir para solucionar el problema.

B) Ordenar los datos, incógnitas y condiciones en sus columnas respectivamente. Etiquetar las incógnitas en principales (I. P.) y auxiliares (I. A.), siendo las primeras las que nos piden resolver; y las segundas, otras variables que también intervienen en el problema, y que aunque no nos piden encontrar su valor, son básicas para resolver las primeras.

II. Planteo y desarrollo de la Solución

A) Encontrar la relación entre los datos y las incógnitas, ya sea por las ecuaciones físicas o los teoremas matemáticos según corresponda, y las condiciones propias del problema. De aquí, obtendremos una serie de ecuaciones donde estarán relacionados nuestros datos con las incógnitas principales y auxiliares. Este ya es el paso de la descripción pictórica y física, a la matemática.

B) Del sistema de ecuaciones lineales que resulta del paso anterior, si el número de estas es mayor que el número de incógnitas, decimos que la condición es redundante. Por el contrario, si el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, se dice que

[25] Alan Van Heuvelen, 1991.

la condición es insuficiente, y debemos seguir buscando otras condiciones hasta encontrar un número de ecuaciones que iguale al de incógnitas. Si lo logramos, podremos determinar éstas utilizando alguna de las técnicas de solución para sistema de ecuaciones lineales; Si no, no podremos determinarlas y se dice que las condiciones fueron insuficientes.

III. Revisar el planteo y desarrollo de la Solución:

A) Revisar el resultado. Una vez resuelto el problema es importante verificar si el resultado que obtuvimos es correcto. Debemos revisar primero, si las unidades de los valores calculados corresponden a la cantidad física, química, o de cualquier otra especie que estamos buscando. También, ver si el valor calculado cae dentro de un rango esperado o de lo que es posible esperar; o al menos, revisar que el resultado no sea algo disparatado. Por ejemplo, si estamos calculando la distancia entre dos estrellas, su unidad tiene que corresponder a la de distancia, ya sea en metros, kilómetros o años-luz y no al de velocidad. Y la dimensión de su magnitud debe corresponder a años-luz. En caso de que nuestra solución no cumpla con alguno de estos requerimientos, debemos revisar cada uno de los pasos hasta encontrar el error en el razonamiento o en los cálculos.

B) Revisar el razonamiento desarrollado. Aún si el resultado que obtuvimos es correcto, es de suma importancia también, revisar el razonamiento llevado a cabo hasta llegar a la solución. Hacer esto no es tan fácil como pareciera, ya que la tendencia natural de la mente, o su misma inercia por mal hábito es, que una vez resuelto un problema, tiende a dejarlo atrás y pasar a otra cosa. Pero esta es una costumbre que hay que revertir en virtud de que se pierde el aprendizaje otorgado por la experiencia de resolver un problema: el auto-observarse para ver que operaciones mentales fueron erróneas y no volver a repetirlas, o cuales las acertadas, y necesarias recordar; donde dimos vueltas sin llegar a ningún lado, cuales operaciones mentales si dieron resultado y cuales no, determinar los descubrimientos de nuevas ideas o formas de solucionar el problema. Estas auto-correcciones servirán para que no cometamos los mismos errores y optimicemos la solución de problemas de manera rápida y eficiente; anotamos mentalmente los éxitos, y a la próxima que nos encontremos un problema parecido, lo resolvamos de forma algorítmica como problema tipo.

C) Buscar otras posibles alternativas de solución. Tratar de encontrar otras formas de solucionar el mismo problema nos puede enseñar muchas cosas. Nos hace ver que hay mas de una manera de resolverlo, y que algunas de estas son más fáciles de llevar a cabo que la forma que en un principio lo efectuamos. Este paso, nos proporciona una visión retrospectiva del problema, que a diferencia de cuando lo empezamos a solucionar, ahora sí sabemos cuales eran los datos y las condiciones importantes para llegar a la solución, y de esta manera, podemos saber que era lo que nos impedía darnos cuenta de ello, y de que otras maneras podríamos resolverlo. Esta experiencia nos servirá para darnos cuenta de nuestros malos hábitos, de nuestros esquemas erróneos y rigideces y poder romper estos malos condicionamientos, para la generación de nuevas ideas en futuros problemas.

7. Algoritmos para la solución de problemas de la Mecánica Clásica

Algoritmo para la Cinemática

I. Comprender el Problema:

A) Hacer una descripción pictórica que represente todo lo que acontece en el problema. En esta, colocar todos los datos e incógnitas: las cantidades físicas vectoriales como la velocidad y la aceleración con su signo adecuado de acuerdo a como esté orientado con respecto a los ejes coordenados, siendo estos positivos cuando van en la dirección positiva de el eje x o y, y negativa cuando van en la dirección opuesta

B) Colocar en sus respectivas columnas los datos, incógnitas y condiciones, dividiéndo las incógnitas en principales (I. P.) y auxiliares (I. A.).

II. Planteo y Desarrollo de la Solución:

A) Debemos relacionar los datos con las incógnitas utilizando para ello las ecuaciones de la cinemática, que son las que me describen el movimiento de una partícula con aceleración constante. Estas son las condiciones o restricciones que me describen el movimiento de un cuerpo en el plano o en una dimensión sobre cualquiera de los ejes.

B) Encontrar un número de ecuaciones igual al de incógnitas que me relacionen las incógnitas principales y auxiliares, con los datos. En caso de que el sistema de ecuaciones su número sea menor que el de incógnitas, se deberá seguir buscando de las restantes ecuaciones de la cinemática o de alguna condición extra, hasta que sean iguales.

III. Revisar el Planteo y Desarrollo de la Solución.

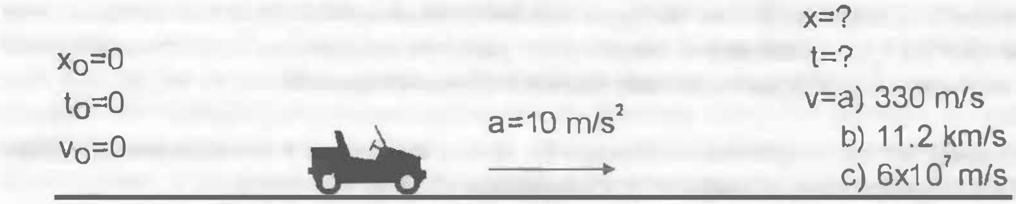
A) Revisar el Resultado.
B) Revisar el razonamiento llevado a cabo.
C) Buscar otras alternativas de solución.

Ejemplos

1. Si un carro en reposo pudiera acelerar de manera continua a *10 m/s²*, ¿qué distancia viajaría y cuanto tiempo tomaría para alcanzar:

a) la velocidad del sonido, *330 m/s*?
b) La velocidad de escape de un cohete desde la tierra, *11.2 km/s*?
c) *6x10⁷ m/s* que es el 20% de la velocidad de la luz?

I. A)



I. B)

Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
$t_0 = 0$	$x, t \Rightarrow$ I. P.	1) $v=v_0 + at$
$v=330$ m/s, 11.2 km/s, 6x107 m/s		2) $x=x_0 + ½(v_0 +v)$
$v_0= 0$		3) $x=x_0 + v_0t + ½at^2$
$a = 10\ m/s^2$		4) $v^2= v_0^2 + 2a(x - x_0)$

II. A)

De las 4 ecuaciones tomadas de la cinemática debemos buscar al menos una que nos relacione el mayor número de los datos con las incógnitas que deseamos resolver:

a) para este inciso, la velocidad final deberá ser 330 m/s y la distancia viajada se puede calcular con la ecuación 2) y el tiempo con la ecuación 1). La distancia no se puede calcular directamente de 2) ya que involucra 2 incógnitas (x y t) y para ello necesitamos resolver primero 1). Pero tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas y sí las podemos resolver. El tiempo t se puede encontrar directamente. Sustituyendo los datos en 1) $v=v_0 + at$:

$$330 = 0 + 10t \quad \Rightarrow \quad t = 330/10 \quad \Rightarrow \quad t = 33 \text{ seg.}$$

Ahora sí, sustituyendo el tiempo junto con los otros datos en 2):

$$x=x_0 + ½(v_0 +v) \quad \Rightarrow \quad x = 0 + ½(0 + 330)33 \quad \Rightarrow \quad x = 5{,}445 \text{ m.}$$

b) Ahora, cuando la velocidad final es 11.2 km/s:

$$v=v_0 + at \Rightarrow 11{,}200 = 0 + 10t \quad \Rightarrow \quad t = 11{,}200/10 \quad \Rightarrow \quad t = 1{,}120 \text{ seg.}$$

Y ahora:

$$x=x_0 + ½(v_0 +v)t \quad \Rightarrow \quad x = 0 + ½(0 + 11{,}200)1{,}120 \quad \Rightarrow \quad x = 6.272 \times 10^6 \text{ m.}$$

c) Para $v=6\times10^7$ m/s:

$$v=v_0 + at \Rightarrow 6\times 10^7 = 0 + 10t \quad \Rightarrow \quad t = 6\times 10^7/10 \quad \Rightarrow \quad t = 6\times 10^6 \text{ seg.}$$

Y ahora:

$$x=x_0 + ½(v_0 +v)t \quad \Rightarrow \quad x = 0 + ½(0 +3\times 10^7)\, 6\times 10^6 \quad \Rightarrow \quad x = 9\times10^{13} \text{ m.}$$

III.

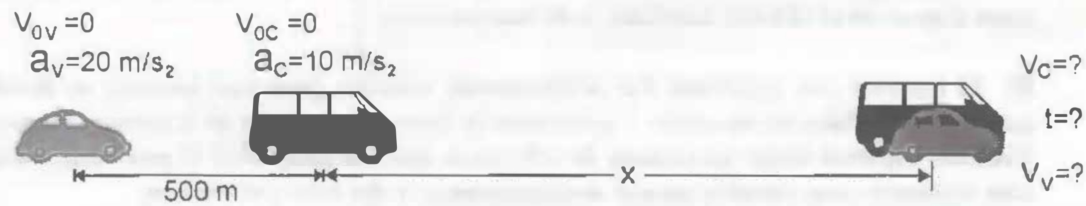
A) Este es un problema que es relativamente sencillo de resolver y es muy difícil equivocarse. El tiempo y la distancia obtenidos en su cálculos no son tan irreales, cabe dentro de lo que podría esperarse.

B) Resolver este problema fue sencillo, pero tuvimos que recurrir a una segunda ecuación para lograrlo. Si hubiéramos querido resolver para la distancia, sin darnos cuenta que podríamos resolver primero para el tiempo, no hubiéramos podido.

C) Podríamos haber calculado x con la ecuación 3), teniendo el tiempo, aunque el cálculo hubiera sido un poco más largo. La velocidad la pudimos haber calculado con la ecuación 4) sin necesidad del tiempo. De aquí nos damos cuenta de cuantas maneras pudimos llegar al resultado.

2. Un auto y un camión parten del reposo al mismo tiempo, pero separados una distancia de *500 metros* sobre una carretera rectilínea. El camión, que va por delante se mueve con una aceleración de *10 m/s²*, y el auto con *20 m/s²*. a)¿A que distancia y en que tiempo, contando de su punto de partida, el auto alcanza el camión?; b)¿Qué velocidades llevan al encontrarse?

I. A)



I. B)

Datos:

$t_0=0$

$v_{a0}=0$

$v_{c0}=0$

$a_a=20\ m/s^2$

$a_c=10\ m/s^2$

$x_{0c}=500\ m$

$x_{0a}=0$

Incógnitas:

$x, t, v_c, v_a \Rightarrow I.\ P.$

Condiciones:

1) $v=v_0+at$

2) $x=x_0+\frac{1}{2}(v_0+v)t$

3) $x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$

4) $v^2=v_0^2+2a(x-x_0)$

II. A)

a) Colocaremos nuestro sistema de referencia desde donde parte el camión, porque es desde aquí donde necesitamos calcular la distancia donde alcanza el auto al camión, ya que la distancia que están separados inicialmente ya la conocemos, y con esto tendremos una sola variable x, en vez de dos, con lo que se simplifica nuestra solución. También como el auto y el camión parten simultáneamente y necesitamos conocer su tiempo cuando se encuentran, su tiempo es la misma t para ambos. Entonces, la ecuación que mejor relaciona los datos con la incógnita t es la (3):

B)

Para el auto:

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow x = -500 + 0*t + \frac{1}{2}*20*t^2 \Rightarrow x = -500 + 10t^2$ (1).

Aquí tenemos una ecuación con dos incógnitas que queremos resolver: x y t. Por lo tanto, necesitamos otra ecuación.

Ahora, para el camión:

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow \quad x = 0 + +0*t + \frac{1}{2}*10*t^2 \quad \Rightarrow \quad x = 5t^2$ (2).

Ahora si, ya tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas. Igualando x de (1) con (2):

$-500 + 10t^2 = 5t^2 \Rightarrow 5t^2 = 500 \Rightarrow t^2 = 100 \Rightarrow t = \pm 10\,s$. Pero tomamos nada más el valor positivo del tiempo, porque el negativo no tiene sentido físico $\Rightarrow t = 10\ s$.

Sustituyendo en (2):

$x = 5t^2 \Rightarrow x = 5*10^2 \Rightarrow x = 500\ m$.

b) Para calcular las velocidades finales nos conviene más usar la formula (1) porque ya tenemos el tiempo:

$v = v_0 + at \quad \Rightarrow v_a = 0 + 20*10 \quad \Rightarrow v_a = 200\ m/s$.

y $\Rightarrow v_c = 0 + 10*10 \Rightarrow v_c = 100\ m/s$.

III.

A) Los resultados obtenidos son razonables dentro de lo que cabria esperar. De todos modos es importante revisar cada uno de los pasos dados en la solución para no cometer error alguno en el cálculo numérico o de razonamiento.

B) El resolver este problema fue relativamente sencillo, pero esto también se debió a que definimos bien las variables y aplicamos la fórmula adecuada de la manera correcta. También supimos elegir un sistema de referencia que nos simplificó el problema porque solo definimos una variable para el desplazamiento x del auto y el camión.

C) El problema también se pudo haber resuelto con otras formulas aunque de manera mas complicada. Si en vez de la formula 3) hubiéramos utilizado la 1) tendriamos, para el mismo sistema de referencia:

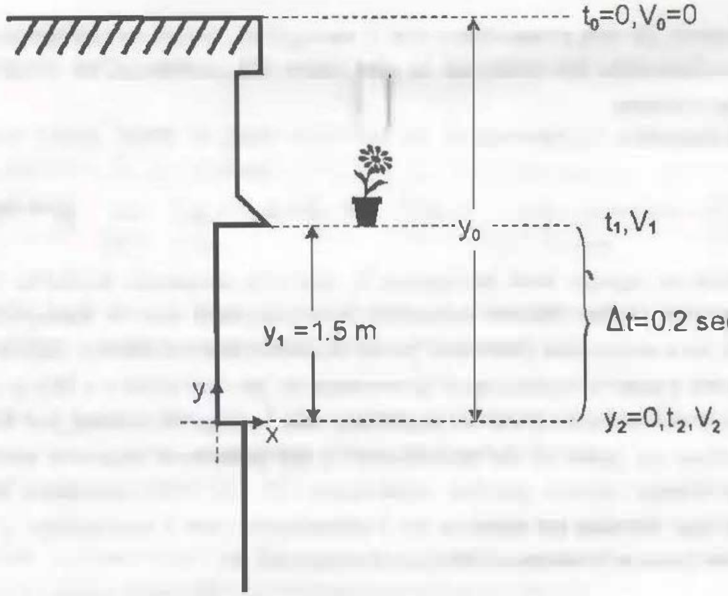
$v_a = 20t$ (1) y $v_c = 10t$ (2). Aquí tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas. Debemos buscar otra ecuación. Ahora aplicando la formula 2):

$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t \Rightarrow x = -500 + \frac{1}{2}(0 + v_a)t \Rightarrow x = -500 + \frac{1}{2} v_a t$ (3) y $x = \frac{1}{2} v_c t$ (4).

Ahora tenemos 4 ecuaciones con 4 incógnitas: v_a, v_c, t y x; ya podemos resolverlas. Estas son las cuatro incógnitas que nos piden encontrar y se deja como ejercicio al lector. Este fue un camino alternativo mas dificil que el anterior, y de aqui nos damos cuenta de la importancia de saber elegir la formula adecuada, aunque también se llega al resultado correcto.

3. Un objeto cae desde una azotea y pasa por una ventana que mide *1.5 m* en un tiempo de *0.2 seg*. Calcular la altura desde la que cayó el objeto si medimos desde la base de la ventana.

I.
A)



B)

Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
$\Delta t=t_2-t_1=0.1\ s$	$y_o \Rightarrow I.\ P.$	1) $v=v_0-gt$
$y_1=1.25\ m$	$t_1,\ v_1 \Rightarrow I.\ A.$	2) $y=y_0+\frac{1}{2}(v_o+v)$
$y_2=0\ m$	$t_2,\ v_2 \Rightarrow I.\ A.$	3) $y=y_0+v_0t-gt^2/2$
$a=-g\,j\ m/s^2$		4) $v^2=v_0^2-2g(y-y_0)$
donde $g=9.8$		
$v_0=0\ m/s,\ t_o=0$		

En este problema suponemos que el objeto cae partiendo del reposo ($v_0= 0\ m/s$), ya que no se dice de manera explicita. La altura de la azotea es medida desde la base de la ventana (y_0), porque así lo pide el problema, ya que es el sistema de referencia mas conveniente, ya que si lo situamos en otra parte nos obliga a introducir otra variable, y nos ahorra definir una nueva, lo cual complicaría mas el problema.

II.A) Dividiremos la solución del problema en 2 etapas: la primera cuando la maceta cae de la azotea y pasa por la parte superior de la ventana; la segunda, cuando va de la parte superior de la ventana a la base. Esto para poder relacionar todos los datos con las incógnitas.

1ª etapa. Utilizando la ecuación 2) que me relaciona la IP con los datos y la IA:

$y = y_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v_1)t \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(0 + v_1)t_1 \quad \Rightarrow \quad 1.5 = y_0 + \frac{1}{2}v_1 t_1$ (1).

Esta ecuación que encontramos incluye la incógnita principal y_0, pero también dos incógnitas auxiliares, v_1 y t_1. Entonces es necesario encontrar mas ecuaciones que nos ayuden a resolver y_0. Usando la ecuación 3):

$y_1 = y_0 + v_0 t_1 - gt^2/2 \quad \Rightarrow \quad 1.5 = y_0 + 0 * t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \Rightarrow \quad 1.5 = y_0 - \frac{1}{2} g t_1^2$ (2).

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con 3 incógnitas, ahora necesitamos encontrar la tercera pero involucrando los datos de la otra parte del problema, es decir cuando pasa por la base de la ventana.

2ª etapa. De la ecuación 3) tenemos:

$y_2 = y_0 + v_0 t_2 - gt^2/2 \Rightarrow 0 = y_0 + 0 * t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = y_0 - \frac{1}{2} g t_2^2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{1}{2} g t_2^2$ (3).

Con esta ecuación se agrega otra incógnita, t_2, que era necesaria incluirla ya que forma parte de la segunda etapa. Ahora tenemos 3 ecuaciones con 4 incógnitas, entonces debemos buscar otra ecuación, pero que ya no incluya mas variables. Sabemos que el tiempo que tarda en pasar la maceta por la ventana es $\Delta t = t_2 - t_1 = 0.2\ s$ (4), y esta es la cuarta ecuación que nos faltaba, y ya no introduce una incógnita nueva, por lo tanto el número de incógnitas es igual al de ecuaciones y ya podemos resolver para y_0. Pero si observamos nos damos cuenta que las ecuaciones (2), (3) y (4) contienen las incógnitas y_0, t_1 y t_2, por lo que forman un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, y con estas ya podemos resolver para y_0 y no necesitamos la ecuación 1).

B)

Resolvemos este sistema de ecuaciones por sustitución. Sustituyendo (3) en (2):

$1.5 = \frac{1}{2} g t_2^2 - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \Rightarrow \quad 1.5 = \frac{1}{2} g (t_2^2 - t_1^2)$ (5).

De la ecuación (4) tenemos $t_2 - t_1 = 0.2\ s \Rightarrow t_2 = t_1 + 0.2\ s$, y sustituyendo en (5):

$1.5 = \frac{1}{2} g \{(0.2 + t_1)^2 - t_1^2\} \Rightarrow 1.5 = \frac{1}{2} g \{(0.04 + t_1^2 + 0.4t_1 + t_1^2 - t_1^2\}$

$\Rightarrow 1.5 = 4.9\ (0.04 + 0.4\ t_1) \Rightarrow 1.5 = 0.196 + 1.96t_1$

$\Rightarrow 1.304 = 1.96t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0.66s$

De (4), $t_2 = t_1 + 0.2 \Rightarrow t_2 = 0.66 + 0.2 \Rightarrow t_2 = 0.86\ s$

Este es el tiempo que tarda en caer desde la azotea a la base de la ventana. Con este dato ya podemos calcular la altura de la que cae el objeto. Sustituyendo este dato en la ecuación (3):

$y_0 = \frac{1}{2} 9.8 (0.86)^2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 3.62\ m$, que es el valor que deseábamos calcular, la altura desde la que cae el objeto.

III.

A) La solución encontrada si cae dentro del rango que razonablemente cabría esperar, ya que no es una distancia excesivamente grande y va de acuerdo al tamaño de la ventana y al tiempo de caída.

B) Este problema se resolvió aparentemente de manera sencilla, pero fue por que se utilizó el algoritmo de manera adecuada. El problema se dividió en 2 etapas y también se definieron nuevas variables. La dificultad casi siempre, para este tipo de problema es saber definir las variables necesarias aunque no sea la incógnita que nos piden resolver, y es por eso que se les llama auxiliares. También hubo que salvar dificultad de dividir el problema en 2 etapas, y utilizar de manera correcta los datos y las incógnitas en cada una de ellas.

C) Otra forma de solucionar este problema sería utilizando la ecuación de la cinemática 4):

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$$

En la primera etapa, hasta la parte superior de la ventana la velocidad final es v_1, la altura es el tamaño de la ventana $y_1=1.5$ y la velocidad inicial es $v_o=0$. Entonces la ecuación quedaría:

$$v_1^2 = 0^2 - 2g(y_1 - y_0) \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = -2g(1.5 - y_0) \quad (1).$$

Ahora, cuando pasa por la base de la ventana su velocidad final será v_2, su velocidad inicial 0, su altura inicial y_0 y su altura final $y_2=0$. Entonces,

$$v_2^2 = 0^2 - 2g(y_2 - y_0) \Rightarrow v_2^2 = 0^2 - 2g(0 - y_0) \Rightarrow v_2^2 = 2gy_o \quad (2).$$

Ahora tenemos 2 ecuaciones con 3 incógnitas, y necesitamos igualar este número. Utilizando la ecuación 3) para las mismas etapas respectivamente:

$$v_1 = 0 - gt_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = -gt_1 \ (3) \quad \text{y} \quad v_2 = -gt_2 \quad (4).$$

Ahora tenemos 4 ecuaciones con 5 incógnitas, y por lo tanto aún nos hace falta otra ecuación. Ahora la quinta ecuación sería como en el caso anterior:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0.1 \ s \ (5).$$

Ahora si, ya podemos resolver este sistema de ecuaciones como en el caso anterior. Se le queda como ejercicio al lector.

Las ecuaciones que se utilizaron no son las únicas que nos podían llevar a la solución, aunque ambas debieron de involucrar al tiempo de paso el tamaño de la ventana, y por supuesto la altura de la que cae (y_o, la IP) condiciones importante en este problema, básico para determinar la altura de la que cae el objeto. Este es un error que se comete comúnmente al no considerar todas las condiciones del problema. Con este ejemplo nos damos cuenta que hay problemas que podemos resolver de distintas maneras.

Algoritmo para el Movimiento Parabólico

I. Comprender el Problema:

A) Dibujar un esquema que represente toda la situación que acontece en el problema, colocando todos los datos y las incógnitas. Dibujar el vector velocidad inicial v_o representada por una flecha en la dirección en que es lanzada, colocando el ángulo dado o supuesto y con un tamaño proporcional a la magnitud de éste.

B) Proyectar el vector velocidad inicial v_o en sus componentes sobre los ejes x y y : v_{ox} y v_{oy}, respectivamente.

C) Distribuir los datos, las incógnitas y las ecuaciones en sus distintas columnas, definiendo los segundos en IA e IP.

II. Planteo y Desarrollo de la Solución:

A) Dividir el movimiento parabólico en dos tipos de movimientos simultáneos más simples y perpendiculares entre si: un movimiento vertical con una aceleración $\boldsymbol{a}_y = -g\,\boldsymbol{j}$ y v_{oy}; y un movimiento horizontal con $a_x=0$ y en consecuencia a una velocidad v_{oy} constante, sólo vinculados entre sí por el tiempo t.

B) Al hacer cualquier cálculo para cualquier variable a través de cualquier punto de su trayectoria, debemos relacionar estos dos movimientos por medio de su parámetro t. Debemos buscar relacionar las incógnitas que queremos determinar con los datos y el tiempo t para ambos movimientos. De aquí, tratar de encontrar un sistema de ecuaciones cuyo número sea igual al de incógnitas para poder resolverlas.

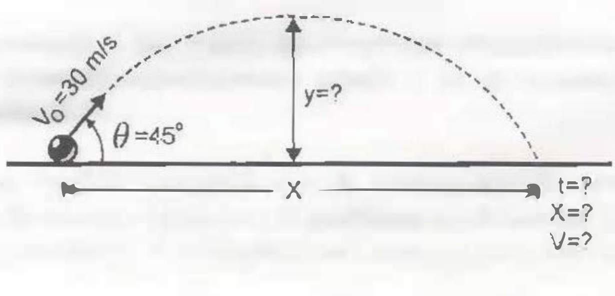
III. Revisar el Planteo y Desarrollo de la Solución.

A) Revisar el resultado.
B) Revisar el razonamiento desarrollado.
C) Buscar otras posibles alternativas de solución.

Ejemplos

1. Se dispara una bala de cañón con una velocidad inicial de $30\ m/s$ a 45^0 con respecto a una superficie horizontal. Calcular: a) el tiempo de vuelo; b) el alcance horizontal; c) la altura máxima; d) la velocidad con la que choca con la tierra.

I. A)



B) $v_{0x} = 30Cos45^0 = 21.21\ m/s$, y $v_{0y} = 30Sen45^0 = 21.21\ m/s$.

C) Datos:
$v_0 = 30\ m/s$.
$\theta = 45^0$
$y_0 = 0$
$y = 0$

Incógnitas:
$t, y, x, v_x, v_y \Rightarrow I.\ P.$

Condiciones:
Su movimiento se describe por las ecuaciones de la cinemática con $a_x = 0$ y $v_x = cte.$:
1) $x = v_{0x}t$
y con $g = -\ 9.8\ j$:
2) $v_y = v_{0y} - gt$
3) $y = y_0 + v_{0y}t - gt^2/2$
4) $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$

II. A)
a)
Para el eje x:
$x = v_{0x}t$ 1) $\Rightarrow$ del inciso I. b) lo expresamos como $x = 21.21t$ (1).

Ahora para el eje y:
Utilizaremos la ecuación 3) ya que me relaciona mejor las IP y, t, con los datos $\Rightarrow$
$y = 0 + 21.21t - gt^2/2 \quad \Rightarrow \quad Y = 21.21t - gt^2/2$ (2)

B)
Tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas: x, y y t.

a) Como queremos calcular el tiempo de vuelo, la altura final es $y=0$ porque la bala cae al final de su viaje. Entonces (2) se transforma a: $0 = 21.21t - gt^2/2$ (3), y ya podemos resolver para t de $\Rightarrow$ $t(21.21t - gt/2) = 0$, como t no es cero $\Rightarrow$ $21.21 - gt/2 = 0 \Rightarrow$ $2\ 5t = 21.21 \Rightarrow t = 4.24\ s$.
Sustituyendo este valor en (1):
x= 21.21t $\Rightarrow$ x=21.21*4.24= 89.97 m.

c) La altura máxima se obtendrá precisamente a la mitad del vuelo, es decir a la mitad del tiempo en que aterriza, ya que su desplazamiento es simétrico. Por tanto el tiempo que tarda en alcanzar su altura máxima es: $2.12\ s$. Entonces la formula que me conviene usar es la 3), ya que esta contiene la incógnita y los datos con que contamos:

$$\Rightarrow y = y_0 + v_{0y}t - gt^2/2 \Rightarrow y = 0 + 21.21 * 2.12 - 10*(2.12)^2/2 \Rightarrow y = 22.48\ m.$$

d) La velocidad en el eje x es constante y no varia en el tiempo. Entonces $v_x = 21.21\ m/s$.
Para la velocidad v_y, podemos usar la formula 4):
$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$ $\Rightarrow$ como la velocidad que buscamos es para cuando la bala choca con la tierra, entonces $y = y_0 = 0$, y sustituyendo en la formula:
$v_y^2 = v_{0y}^2 \Rightarrow v_y = v_{0y} = 21.21\ m/s$. Por lo tanto, la velocidad con la que aterriza la bala es la misma que con la que sale disparada. Esto era de esperarse, ya que durante el movimiento de la bala no hay fricción y la energia se conserva.

III.

A) Los resultados obtenidos no son discordantes de acuerdo a los datos que nos dan. El problema no fue muy difícil de resolver pero es conveniente tener cuidado, para evitar errores de cálculo o de apreciación.

B) Para resolver este problema fue conveniente relacionar los dos movimientos perpendiculares en el que está dividido, para encontrar el sistema de ecuaciones que me relacionan las incógnitas con los datos. También conocer su simetría para saber que la mitad del vuelo hace la mitad del tiempo de toda su trayectoria.

C) De acuerdo a este problema, las incógnitas solo se podían resolver de esta manera, ya que solo así pudimos relacionar las incógnitas t y X, mediante las formulas con los datos y condiciones. Para calcular, por ejemplo, V_y, solo se podía usar la fórmula 4) y no la 2) porque la primera contiene la Y, que es la condición para determinar que la bala aterriza.

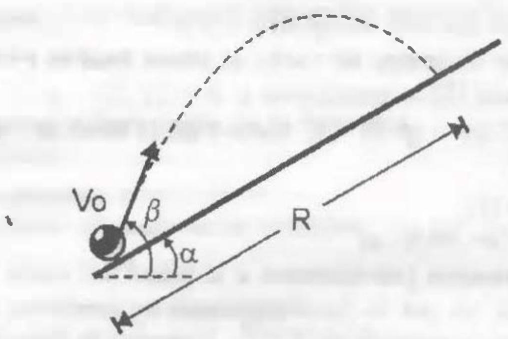
2. Si se lanza un objeto desde un plano con inclinación α a una velocidad inicial V_0 a un ángulo β respecto a la horizontal, demuestre que el alcance sobre el plano es:

a) $R = (V_0^2 / gCos^2\alpha)\{Sen(2\beta - \alpha) - Sen\alpha\}$.

b) El alcance máximo de R para un cierto β es: $R = V_0^2/g(1 + Sen\alpha)$.

I.

A)



B) $V_{0x} = V_0 Cos\beta$ y $V_{0y} = V_0 Sen\beta$

C)

Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
V_0	$R \Rightarrow I.\ P.$	Su movimiento se describe
β	$t,\ V_y \Rightarrow I.\ A.$	por las ecuaciones de la cinemática con $a_x = 0$ y $V_x = cte.$:
α	$X = RCos\alpha,\ Y = RSen\alpha \Rightarrow I.\ A$	1) $X = V_{0x} t$
$Y_0 = 0$	donde X y Y son las coordenadas de la particula en su alcance sobre el plano.	y con $g = -9.8\,j$:
		2) $V_y = V_{0y} - gt$
		3) $Y = Y_0 + V_{0y} t - gt^2/2$
		4) $V_y^2 = V_{0y}^2 - 2g(Y - Y_0)$.

II. A)

a)

Para el eje X:

$X=V_{ox}t$ 1) $\Rightarrow$ del inciso I. b) lo podemos escribir como $X= V_0 Cos\beta\, t$, y sustituyendo X por su alcance de acuerdo al ángulo de disparo β, para relacionar la IP R, con los datos, y la IA t:

$\Rightarrow RCos\alpha = V_0 Cos\beta t \Rightarrow t = RCos\alpha / V_0 Cos\beta$ (1).

Ahora para el eje Y:

Utilizaremos la ecuación 3) en vista de que relaciona mejor la IP R, con los datos, y la IA $t \Rightarrow Y = 0 + V_0 Sen\beta t - gt^2/2$, sustituyendo $Y \Rightarrow RSen\alpha = V_0 Sen\beta t - gt^2/2$ (2).

B)

Ya tenemos dos ecuaciones con 2 incógnitas: R la incógnita que buscamos resolver, y el parámetro t; por lo tanto sustituyendo el valor de t de (1) en (2):

$RSen\alpha = V_0 Sen\beta\,(RCos\alpha / V_0 Cos\beta) - g(RCos\alpha / V_0 Cos\beta)^2/2$

Desarrollando los productos y potencias de esta igualdad:

$\Rightarrow RSen\alpha = RSen\beta Cos\alpha / Cos\beta - gR^2 Cos^2\alpha / 2V_0^2 Cos^2\beta$,

dividiendo por la R a ambos miembros de la igualdad:

$Sen\alpha = Sen\beta Cos\alpha / Cos\beta - gRCos^2\alpha / 2V_0^2 Cos^2\beta$

Despejando el miembro con la R:

$(gR/2)Cos^2\alpha / V_0^2 Cos^2\beta = Sen\alpha - Sen\beta Cos\alpha / Cos\beta$

Despejando la $R \Rightarrow R = 2V_0^2 Cos^2\beta / gCos^2\alpha\{(Sen\alpha\, Cos\beta - Sen\beta Cos\alpha) / Cos\beta\}$

$\Rightarrow R = (2V_0^2 Cos^2\beta / gCos^2\alpha Cos\beta)\{(Sen\alpha\, Cos\beta - Sen\beta Cos\alpha)\}$

dividiendo el $Cos\beta$ del numerador con el del denominador:

$\Rightarrow R = (2V_0^2 Cos\beta / gCos^2\alpha)\{Sen\alpha Cos\beta - Sen\beta Cos\alpha\}$

Por identidad sabemos que $Sen\alpha Cos\beta - Sen\beta Cos\alpha = Sen(\beta - \alpha)$, sustituyendo tenemos que:

$R = (2V_0^2 / gCos^2\alpha) Sen(\beta - \alpha) Cos\beta$ (3).

Ahora rescribiremos esta expresión usando la identidad:

$SenACosB = ½\{Sen(A-B) + Sen(A+B)\}$

Tomando $A = \beta - \alpha$ y $B = \beta$

$\Rightarrow Sen(\beta - \alpha)Cos\beta = ½\{Sen(-\alpha) + Sen(2\beta - \alpha)\}$, sustituyendo en (3):

$R = (V_0^2 / gCos^2\alpha)\{Sen(2\theta - \alpha) - Sen\alpha\}$ (4)

que es lo que queríamos encontrar.

b) Para encontrar el máximo valor de R, derivemos (4) con respecto al ángulo de disparo β, e igualemos a cero:

$$dR/d\beta = (V_0^2 / gCos^2\alpha)\{Cos(2\beta - \alpha)d(2\beta - \alpha)/d\theta - d\,Sen\alpha / d\beta\}$$
$$dR/d\beta = (V_0^2 / gCos^2\alpha)\{2Cos(2\beta - \alpha) - 0\} = 0$$

para que esta ecuación sea cero se debe cumplir que

$$2\beta-\alpha=90 \Rightarrow \beta=(\alpha+90)/2$$

Sustituyendo el valor de β en (4):

$R=(V_0^2/gCos^2\alpha)\{Sen(\alpha+90-\alpha)-Sen\alpha\}$

$R=(V_0^2/gCos^2\alpha)\{1-Sen\alpha\}$

Por identidad trigonométrica sabemos que:

$Cos^2\alpha=1-Sen^2\alpha$, y sustituyendo

$R=(V_0^2/g)(1-Sen\alpha)/\{1-Sen^2\alpha\}$

$R=(V_0^2/g)(1-Sen\alpha)/(1+Sen\alpha)(1-Sen\alpha)$

$R=(V_0^2/g)(1+Sen\alpha)$, que es lo que queríamos encontrar.

III.

A) Los resultados son correctos ya que coinciden con lo que nos piden demostrar. En caso de que no se nos diera el resultado, se puede probar su coherencia llevándolo a un caso límite, como si el plano inclinado fuera el piso, entonces $\alpha=0^o$:
$R=(V_0^2/g)(1+Sen0) \Rightarrow R=(V_0^2/g)(1+0) \Rightarrow R=V_0^2/g$, y corresponde al alcance máximo para un piso horizontal, como debe de ser. Tambien podemos probar que sus unidades sean correctas: $m=(m/s)^2/m/s^2 \Rightarrow m=(m^2/s^2)*(s^2/m) \Rightarrow m=m$, entonces su unidad corresponde al valor calculado.

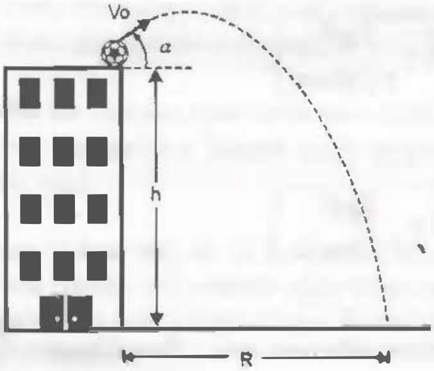
B) En este problema hubo que diferenciar muy bien cuales eran los datos y las incógnitas, ya que los primeros no se presentaron numéricamente si no con símbolos, y es muy fácil confundirse. Utilizamos la formula 1) como es obvio para el movimiento en X, y la 3) para el movimiento en Y por es la que me relaciona los datos con la incógnita y no me introduce otras, salvo la que busco R, y el parámetro t necesario para relacionar ambos movimientos.

C) Si en vez de la formula 3) hubiésemos utilizado la 2), se hubiera agregado una nueva variable, V_y, haciendo necesario buscar otra formula como la 4) y se complicaría en demasía la solución. No hubiera sido tan directa como lo fue en nuestro caso. Aquí se nota la importancia de saber elegir la ecuación que nos relaciona datos con incógnitas. Se deja como ejercicio al lector tratar de llegar a la solución de esta manera.

2. Un niño lanza una pelota desde un edificio de altura h a una velocidad inicial V_0, con un ángulo α respecto a la horizontal. Demuestre que el alcance horizontal está dado por:

$$R = \frac{V_0^2 Sen2\alpha}{2g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gh}{V_0^2 Sen^2\alpha}}\right).$$

I. A)



B) $V_{0x} = Cos\alpha$ y $V_{0y} = V_0 Sen\alpha$

C) Datos:

V_0

α

$Y_0 = H$

$Y = 0$

Incógnitas:

$R \Rightarrow I.\ P.$

$t,\ V_y \Rightarrow I.\ A.$

Condiciones:

Su movimiento se describe por las ecuaciones de la cinemática con $a_x = 0$ el eje X, y $V_x = cte.$:

1) $X = V_{0x}t.$

y con $a_y = g = -9.8\,j$:

2) $V_y = V_{0y} - gt$

3) $Y = Y_0 + V_{0y}t - gt^2/2$

4) $V_y^2 = V_{0y}^2 - 2g(Y - Y_0).$

II.

A) El movimiento en el eje X:

$X = V_{0x}t \quad \Rightarrow \quad R = V_0 Cos\alpha t \quad \Rightarrow \quad t = R/\,V_0 Cos\alpha \quad (1)$

En el eje Y utilizaremos la ecuación 3) por las razones ya mencionadas en el problema anterior:

$Y = Y_0 + V_{0y}t - gt^2/2 \quad \Rightarrow \quad 0 = H + V_0 Sen\alpha t - gt^2/2 \ (2)$

B) Aquí ya tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas y ya podemos resolverlas. El único problema es que la ecuación (2) es cuadrática en t; podemos de todos modos resolver por sustitución, pero por simplicidad, primero la resolveremos por la formula de las cuadráticas para t, y luego igualaremos la t de ambas ecuaciones:

$$t = \frac{V_0 Sen\alpha \pm \sqrt{V_0^2 Sen^2\alpha + 2gH}}{g} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{V_0 Sen\alpha}{g}\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{2gH}{V_0^2 Sen\alpha}}\right)$$

Esta ecuación me da dos resultados, uno negativo y otro positivo, como físicamente no tiene sentido hablar de tiempo negativo, sólo tomamos el positivo:

$$t=\frac{V_0 Sen\alpha}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gH}{V_0^2 Sen\alpha}}\right) \quad (3)$$

Ahora ya podemos resolver las ecuaciones (1) y (3) para encontrar R. Por sustitución de t de (1) en (3):

$$\frac{R}{V_0 Cos\alpha}=\frac{V_0 Sen\alpha}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gH}{V_0^2 Sen\alpha}}\right),$$

despejando R:

$$R=\frac{V_0^2 Sen\alpha Cos\alpha}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gH}{V_0^2 Sen^2\alpha}}\right)$$

Por identidad trigonométrica sabemos que $Sen\alpha Cos\alpha=\frac{Sen2\alpha}{2}$; sustituyendo en la expresión anterior:

$$R=\frac{V_0^2 Sen2\alpha}{2g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gH}{V_0^2 Sen^2\alpha}}\right)$$

y es lo que queríamos probar.

III.

A) Si no se nos hubiese dado el resultado a demostrar, la forma de probar lo correcto del cálculo es someterlo a casos particulares ya conocidos. Como ejemplo, a que se reduce este a $\alpha=0^0$ o $\alpha=90^0$. Para $\alpha=90^0$, R=0 como cabria esperar físicamente. Las unidades físicas las calcularemos primero para la raíz cuadrada, $gH/V_0^2=(m/s^2)(m)/(m/s)^2$, y estas unidades se anulan, y no da unidad, sólo es un factor numérico. Ahora para $V_0^2/g=(m/s)^2/(m/s^2)=(m^2/s^2)(s^2/m)=m$, y que corresponde a la unidad de la cantidad calculada.

B) Este problema se resolvió de manera similar que el anterior, y como en ese caso se utilizó la ecuación 3). Se podrían utilizar la ecuación 2) y 4), pero estos sólo serán viable de usar cuando se nos pida calcular V_y.

C) Como en el caso anterior, se podrían haber usado las ecuaciones 2) y 4), pero esto hace excesivamente complicada la solución.

Algoritmo para la Dinámica de las Partículas con y sin Fuerzas Conservativas

I. Comprender el Problema:

A) Dibuje un esquema claro y ordenado para representar la situación física. Identifique del sistema, encerrándolo en un círculo, el o los cuerpos cuya dinámica piensa estudiar. Las fuerzas interactuantes entre los cuerpos dentro del círculo se les llama internas, y las que son debidas a cuerpos fuera del círculo, externas.

B) Identifique y dibuje **todas** las fuerzas, tanto **internas** como **externas,** que actúan **sobre** cada cuerpo del sistema. No incluya fuerzas cuyo origen no pueda identificar (la tierra, una mesa, una cuerda, etc.)

C) Elija un **marco** de referencia **inercial,** de tal forma que el estudio de su dinámica sea lo mas sencilla posible. Cada cuerpo del sistema debe tener sus propios ejes coordenados. Por lo general, su dinámica es más simple si uno de sus ejes coincide con la dirección de su aceleración, real o supuesta.

D) Es necesario dibujar para cada masa del sistema un diagrama de cuerpo libre, colocando a cada uno en el origen, y descomponiendo todas las fuerzas que actúan sobre el, en sus componentes sobre cada eje. No se debe incurrir en el error de incluir ma como una fuerza, ya que es una cantidad que es la consecuencia de la fuerza resultante que actúan sobre la partícula y se debe igualar a esta resultante.

E) Distribuya en su respectiva columna los diversos elementos del problema: datos, incógnitas y condiciones; no olvidando definir las incógnitas como IA e IP.

II. Planteo y Desarrollo de la Solución:

A) Aplique la segunda ley de Newton a las componentes de las fuerzas del diagrama de cuerpo libre:

$$\sum F_x = ma_x; \qquad \sum F_y = ma_y; \qquad \sum F_z = ma_z.$$

B) De aquí surge un sistema de ecuaciones, que si su número es igual al de incógnitas, éstas se pueden determinar. Si no, debemos buscar otras ecuaciones o condiciones que las hagan suficiente para determinar las incógnitas, como puede ser, una restricción propia del problema, o para el caso de fuerzas conservativas, el principio de conservación de la energía. Para algunos casos bastará saber el estado de energía inicial y final de un sistema, o la de dos puntos cualesquiera de su trayectoria, sin necesidad de estudiar su dinámica. Pero estos serán casos excepcionales. Para los demás casos será necesario estudiar su dinámica, así como energía.

III. Revisar el Planteo y Desarrollo de la Solución.

A) Revisar el resultado.

B) Revisar el razonamiento desarrollado.

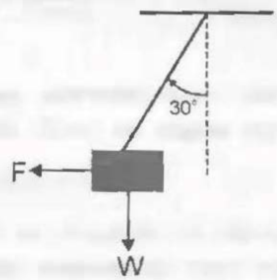
C) Buscar otras posibles alternativas de solución.

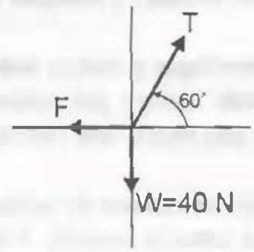
Ejemplos de Dinámica de las Partículas

1. Sobre un bloque de $4\ kg$ actúan dos fuerzas. Una debido a una cuerda y que lo mantiene suspendido de la pared. La otra es una fuerza horizontal y que mantiene a la cuerda a 30^0 respecto a la vertical. Encuentre: a) la fuerza y b) la tensión en la cuerda.

I.

A) y B) C) y D)





El sistema que queremos estudiar consta de una sola partícula, el bloque de 2 kg. Las fuerzas que actúan sobre este son fáciles de identificar y son: la tensión de la cuerda que lo suspende al techo, la fuerza horizontal que lo hala a un ángulo de 30^0 con respecto a la vertical, y el peso de la partícula por la fuerza de gravedad.

E)	Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
	$m = 4\ kg$	$F, T \Rightarrow I.\ P.$	$\Sigma F = ma$
	$\theta = 30^0$		Como $a = 0 \Rightarrow$
	$W = mg = 40\ N$		$\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$.

II.

A) $\Sigma F_x = T\cos 60^0 - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F = T\cos 60^0$ (1)

$\Sigma F_y = T\mathrm{sen} 60^0 - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 40 / \mathrm{Sen} 60^0$ (2)

B) Sustituyendb T de la ecuación (2) en (1):

a) $F = (40/\mathrm{Sen}60^0)\ \mathrm{Cos}60^0 \Rightarrow F = 40\mathrm{Ctg}60^0 \Rightarrow F = 23\ N.$

b) De 1) $T = F/\mathrm{Cos}60^0 \Rightarrow T = 23/\mathrm{Cos}60^0 \Rightarrow T = 46\ N.$

Son los dos valores que buscábamos.

III.

A) Los valores calculados caen dentro un rango de lo que cabria esperar, o que es razonable se encontraran.

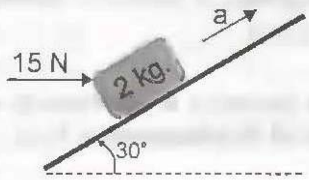
B) El problema es realmente sencillo, no presenta una dificultad muy seria. De todos modos es conveniente resolverlo de manera ordenada y metódica, y cuando resolvamos problemas complicados notaremos las ventajas de este método. El sistema de ecuaciones se obtuvo de manera inmediata, e incluso la T se resolvió directamente de (2). En este tipo de problemas cuando no se avanza mas allá de esta dificultad, el alumno luego quiere resolver todo de manera directa y mediante formulas, donde nada más tenga que sustituir los datos. Se quedan con la idea que esto es resolver problemas. Como veremos en los ejemplos siguientes, los problemas ya no son tan sencillos y requiere del manejo de mas ecuaciones.

C) Por la misma sencillez del problema la solución es directa y no hay otras alternativas.

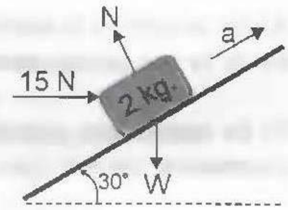
2. Un bloque con $2\ kg$ de masa se desplaza en un plano inclinado a 30^0 sin fricción, y se jala con una fuerza horizontal de $15\ N$. ¿Cuál es su aceleración? Si se movía inicialmente hacia arriba a $3\ m/s$, ¿qué distancia recorrió a lo largo del plano al cabo de $4\ s$?

I.

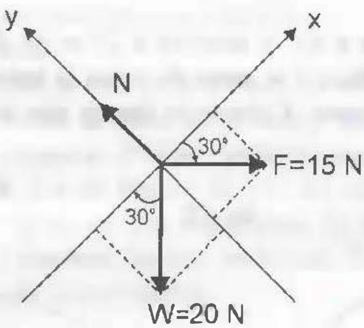
A)



B), C)



D)



E) Datos:
$F= 15\ N\ a\ 0^0$
W=mg=20 N
$v_0 = 3\ m/s$
$t=4\ s$

Incógnitas:
$a, x \Rightarrow I.\ P.$

Condiciones:
2ª ley de newton:
$\sum F=ma$
$\sum F_x=ma_x$ y $\sum F_y=ma_y$.

Como puede verse del diagrama de cuerpo libre, la orientación del eje x lo escogimos de acuerdo a la dirección de la aceleración del cuerpo. Se escogió de esta manera para evitar tener 2 componentes en la aceleración, lo que complicaría mas la solución, al agregar una variable extra.

II.

A) $\sum F_x=15Cos30^0 - 20Sen30^0=2*a \qquad \Rightarrow \qquad 15Cos30^0 - 20Sen30^0= 2a \quad (1)$

$\sum F_y=N - 15Sen30^0 - 20Cos30^0=3*0=0 \qquad \Rightarrow \qquad N = 15Sen30^0+20Cos30^0 \ (2)$

B)

De la ecuación (1) podemos calcular directamente

$a= (15Cos30^0 - 20Sen30^0)/3 \qquad a= (13 - 10)/3 \qquad \Rightarrow \qquad a= 1m/s^2$

Con este dato, ya podemos calcular el desplazamiento total. La ecuación de la cinemática más factible es,

$x = x_0 + v_{ox}t + \frac{1}{2}at^2$

Sustituyendo los datos que tenemos,

$x = 0 + 3 * 4 + \frac{1}{2}(1)2^2 \Rightarrow x = 14\ m$, es el desplazamiento total sobre el plano al cabo de 4 segundos.

III.

A) De acuerdo a la aceleración y al tiempo que se desplaza, el resultado queda dentro de lo que cabria esperar.

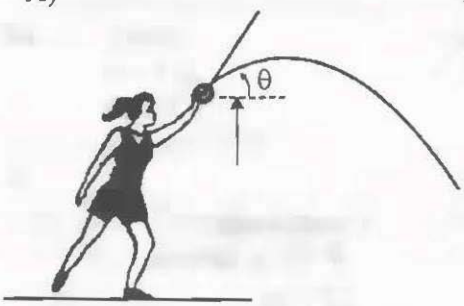
B) Es importante, primero calcular de las leyes de la dinámica la aceleración. De la cinemática, sin este dato no se podría haber calculado el desplazamiento final.

C) La forma como se calcularon las incógnitas fue la adecuada, ya que se necesitaba calcular primero la aceleración, para que con esta, poder encontrar el desplazamiento. De otra manera no hubiera sido posible.

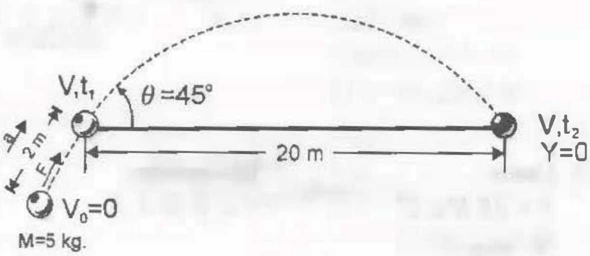
3. Una bala de $5\ kg$ se lanza a 45^0 y aterriza a $20\ m$ de distancia horizontalmente. Si sabemos que la mano se desplazó $2\ m$ antes de soltar la bala y que esta aterriza al mismo nivel a la que abandonó la mano. Calcule la fuerza que se le imprimió a la bala para lograrlo.

I.

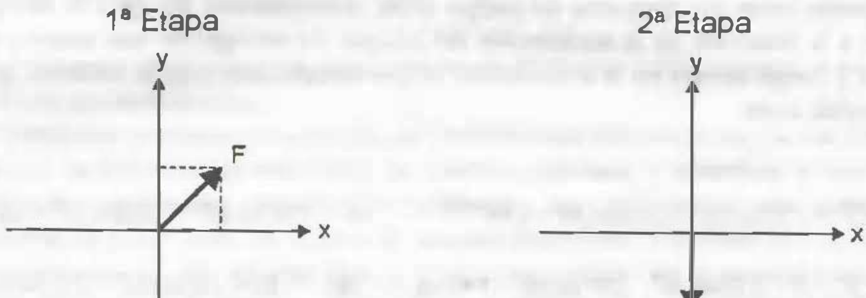
A)



B) ,C)



D)



Nuestro sistema aquí es la bala y sobre ella actúan 2 fuerzas distintas en 2 etapas. En la primera etapa, la fuerza es la impulsión de la bala por la mano y que vence a la de la gravedad, lo que le otorga una fuerza resultante, y es la que la lanza una vez que el brazo termina su recorrido. Cuando la bala sale despedida con una velocidad inicial que es la velocidad final del brazo y a un ángulo de 45^0, la única fuerza que actúa es la gravedad por lo que la partícula describe una trayectoria parabólica, y es la segunda etapa.

E) Datos:

$m = 5\ kg$

$X = 20\ m$

$d = 2\ m$

$\theta = 45^0$

$Y_0 = 0$

$Y = 0$

$V_0 = 0$

Incógnitas:

$F \Rightarrow I.\ P.$

$V, a, t_1, t_2 \Rightarrow I.\ A.$

Condiciones:

2ª ley de newton:

$\sum F = ma.$

Ecuaciones de tiro parabólico:

1) $X = V_{0x}t$

y con $\mathbf{g} = -9.8\,\mathbf{j}$:

2) $V_y = V_{0y} - gt$

3) $Y = Y_0 + V_{0y}t - gt^2/2$

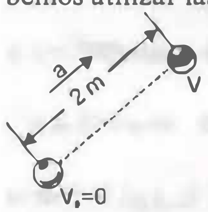
4) $V_y^2 = V_{0y}^2 - 2g(Y - Y_0)$.

II. A)

Dividiremos la solución de este problema en 2 etapas:

1ª etapa: impulsión de la bala.

La fuerza con la que se impulsa la bala estaría dada de acuerdo a $F = ma$; en este caso es la fuerza del brazo ejerce sobre la masa de la bala y que le produce una aceleración. Esta fuerza la desplaza una distancia $d = 2\ m$, desde el reposo hasta alcanzar la velocidad V, con una aceleración **a**, y a un ángulo de 45^0. El cálculo lo haremos en la dirección de la aceleración, y por tanto, en una dimensión. Si logramos calcular $\boldsymbol{a}$, entonces podremos conocer la fuerza y resolver nuestro problema. En esta parte del problema debemos utilizar las ecuaciones de la cinemática.



Datos:

$V_0 = 0$

$d = 2\ m$

Incógnitas:

$a \Rightarrow I.\ P.$

$V,\ t_1 \Rightarrow I.\ A.$

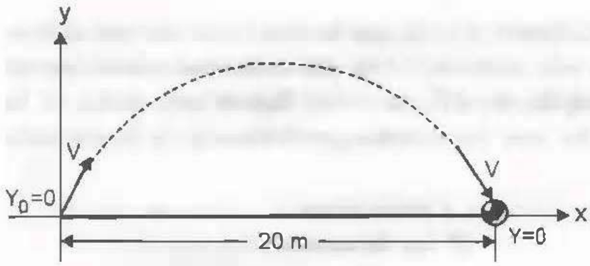
Entonces

$$V^2 = V_0^2 + 2\boldsymbol{a}(Z - Z_0) \;\Rightarrow\; V^2 = 0^2 + 2a(d-0) \;\Rightarrow\; V^2 = 2a*2 \Rightarrow V^2 = 4a \quad (1)$$

Tenemos una ecuación con dos incógnitas, necesitamos otra para poder encontrar el valor de $\boldsymbol{a}$.

2ª etapa: la bala se suelta con una velocidad inicial que es la velocidad final V de la etapa anterior y a un ángulo de 45^0.

II. a)



Incógnitas	Datos:
$X=20\ m$	$V \Rightarrow I.\ P.$
$Y_0=Y=0$	$t_2 \Rightarrow I.\ A.$
$\theta=45^0$	

Las componentes de su velocidad son:
$V_{0x}= VCos45^0$ y $V_{0y}= VSen45^0$

De la formula 1) para el movimiento parabólico
$X=V_{0x}t \Rightarrow 20 = Vcos45^0t_2 \Rightarrow t_2=20/Vcos45^0$ (2).
Para el eje Y, de la formula 3):
$Y = Y_0 + V_{0y}t-gt^2/2 \Rightarrow 0 = 0+ VSen45^0t_2 - gt_2^2/2 \Rightarrow VSen45^0t_2 - gt_2^2/2=0$
Factorizando t_2
$\Rightarrow t_2(VSen45^0 - gt_2/2) = 0 \Rightarrow VSen45^0 - gt_2/2 = 0 \Rightarrow t_2= (2V/g)Sen45^0$ (3)

Ahora ya tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas y podemos resolver para F. Igualando (2) con (3):
$\Rightarrow 20/Vcos45^0 = (2V/g)Sen45^0 \Rightarrow 20 = (V^2/g)2Sen45^0Cos45^0$
por identidad trigonométrica sabemos que $2Sen45^0Cos45^0= Sen(2*45^0) = Sen(90^0)=1$ y aproximando $g=10$, y sustituyendo en la expresión anterior:
$\Rightarrow 20 = V^2/10 \Rightarrow 200 = V^2 \Rightarrow V^2=200$, e igualando con (1) $\Rightarrow 4a=200 \Rightarrow a=50\ m/s^2$.

Finalmente, si substituimos este dato en $F=ma \Rightarrow F =5*50 \Rightarrow F =250\ N$, y es la fuerza necesaria para impulsar la bala a $20\ m$ de distancia.

III.
A) Es complicado decir si el resultado es correcto, salvo de verificar cada paso realizado. El valor encontrado para la fuerza no es tan disparatado y cabria esperar que sea correcto.

B) Por lo complicado del problema, fue necesario dividirlo en dos partes para su resolución. Así, obtuvimos un sistema de ecuaciones, que me relacionaron ambos movimientos, con lo que se encontró primero la aceleración y luego la fuerza. En este problema no hubo necesidad de hacer consideraciones de fuerzas, salvo que al final utilizamos la formula de la 2ª ley de Newton. Se utilizaron las leyes de la cinemática y del movimiento parabólico. Se mostró que si se divide un problema difícil en partes mas simples, es posible resolverlo mas fácilmente.

C) La forma como se resolvió, resulta la mas lógica de acuerdo a lo que conocemos de este tema, y es difícil ver de que otra manera se podría resolver.

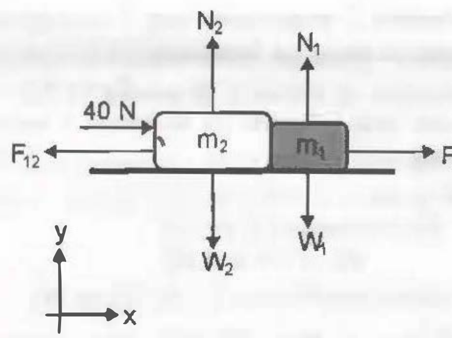
4. Dos bloques de masas $m_1=4\ kg$ y $m_2=6\ kg$ se encuentran en contacto y se deslizan por una superficie horizontal sin fricción debido a una fuerza de $40\ N$ que actúa sobre el bloque 2. Halle:

a) la aceleración;
b) la fuerza del bloque 1 sobre el 2;
c) la fuerza neta sobre el bloque 2;
d) la fuerza sobre el bloque 2 debida al 1 si los bloques se intercambian.

I.

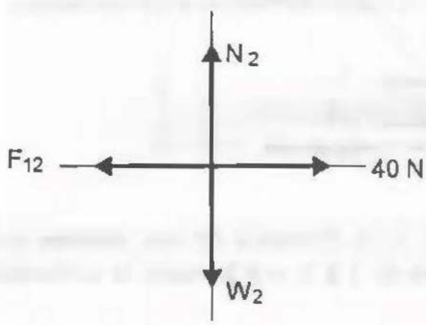
A)

B), C)

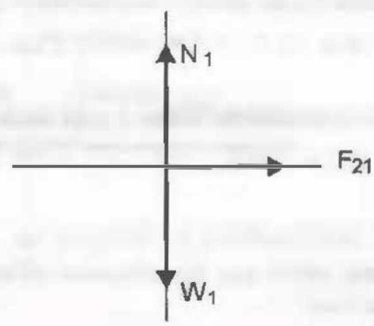


D)

Masa 2



Masa 1



E) Datos:

$m_1 = 4\ kg$
$W_1 = m_1 g = 40\ N$
$m_2 = 6\ kg$
$W_2 = m_2 g = 60\ N$
$F = 20\ N$

Incógnitas:

$a,\ F_{BA},\ F_{AB},\ F_{RB} \Rightarrow I.\ P.$

Condiciones:

Las leyes de Newton:
2ª ley: $\sum F = ma$.
$\sum F_x = ma_x$ y $\sum F_y = ma_y$.
3ª ley: $F_{BA} = -F_{AB}$.

En este problema, por primera vez, se consideran como sistema dos partículas, e interactúan por contacto. Se considera la interacción entre ellos por la tercera ley de Newton. También se utilizan dos ejes coordenados, uno para cada partícula, tal como se describe en el algoritmo.

II. A)

Partícula 2

$\sum F_x = 40+F_{12} = m_2 a$

$\Rightarrow 40+F_{12} = m_2 a$ (1)

Partícula I

$\sum F_x = F_{21} = m_1 a$

$\Rightarrow F_{21} = m_1 a$ (2)

Como en el eje y no hay desplazamiento, $a = 0$:

$\sum F_y = N - W_2 = m_2 * 0 = 0$

$\Rightarrow N = W_2 = 60$

$\sum F_y = N - W_1 = m_1 * 0 = 0$

$N = W_1 = 40$

Como no hay fricción entre los bloques y el piso, su peso no influye en su movimiento.

Tenemos 2 ecuaciones con 3 incógnitas, pero por la 3ª ley sabemos que la fuerza de contacto entre los bloque es,

$$F_{21} = -F_{12} \quad (3),$$

y con esta relación ya tenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas y ya podemos resolverlas.

B)

a) Sustituyendo (3) en (1):

$$40 - F_{21} = m_2 a \ (4).$$

Si ahora sustituimos F_{21} de (1) en (4)

$$40 - m_1 a = m_2 a \Rightarrow 40 = m_1 a + m_2 a \Rightarrow 40 = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = 40/(m_1 + m_2),$$

sustituyendo los valores de las masas de los bloques

$$a = 40/(4+6) \Rightarrow a = 4\ m/s^2.$$

b) La fuerza F_{12} se puede calcular directamente de (I) sustituyendo la *a* ya calculada:

$$40 + F_{12} = m_2 a \Rightarrow F_{12} = 6*4-40 \Rightarrow F_{12} = -16\ N.$$

c) La fuerza resultante sobre 2 está dada por

$$F_{R2} = \sum F_x = 40 + F_{12} \Rightarrow F_{R2} = 40-16 \Rightarrow F_{RB} = 24\ N.$$

d) Si se intercambian los bloques las ecuaciones de la dinámica de este sistema serán las mismas, salvo que las etiquetas se intercambian de 1 a 2; por lo tanto la aceleración se calcula con:

$$a = 40/(m_1 + m_2) \Rightarrow a = 20/(m_2 + m_1) \Rightarrow a = 40/(6+4) \Rightarrow a = 4\ m/s^2.$$

Y de (1) intercambiando sus etiquetas:

$20 + F_{12} = m_2 a \Rightarrow 20 + F_{21} = m_1 a$

sustituyendo los datos

$$\Rightarrow 40 + F_{21} = 4*4 = 16 \Rightarrow F_{21} = 16-40 \Rightarrow F_{21} = -24\ N \Rightarrow \text{por 3a ley } F_{12} = 24\ N.$$

III.

A) Los valores calculados para las diversas fuerzas queda dentro de lo se podría esperar, o por lo menos no dentro de lo irreal como seria que, por ejemplo, las fuerzas de contacto fueran mayor que la fuerza de empuje, lo cual no seria creible. También la fuerza que ejerce el bloque 1 sobre 2 es menor que la que ejerce 2 sobre 1 como se podria esperar, ya que en el segundo caso el bloque pequeño necesita ejercer o transmitir mayor fuerza a el grande en virtud de que este último tiene mayor masa inercial que el primero.

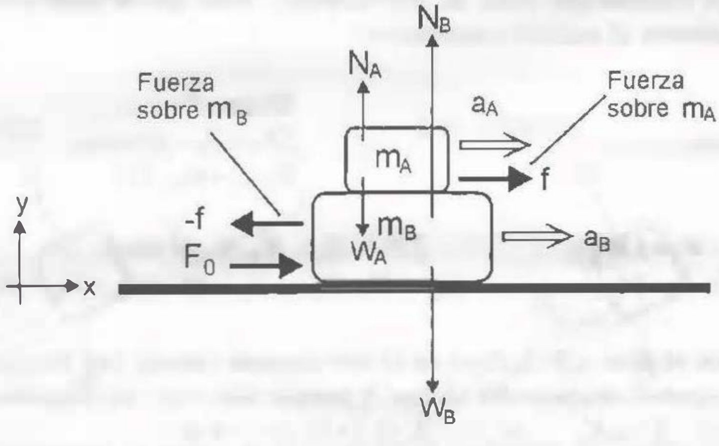
B) En este problema, a diferencia de los anteriores requirió un análisis mas exhaustivo porque el sistema eran ya dos particulas y hubo necesidad de usar 2 sistemas coordenados, y además la 3ª ley de Newton. La complicación resulta en los signos, pero este se logra definir la fuerza negativa en función del positivo, que va en la dirección del eje x positivo, multiplicado por el signo negativo.

C) En los problemas de dinámica existen pocas alternativas de solución, y sólo es cuestión de llevar bien a cabo el análisis de fuerzas. La alternativa surge cuando actúan fuerzas conservativas y es posible entonces resolverlo por consideraciones mecánica o energéticas, o caso donde se necesita los dos análisis; pero eso lo veremos posteriormente.

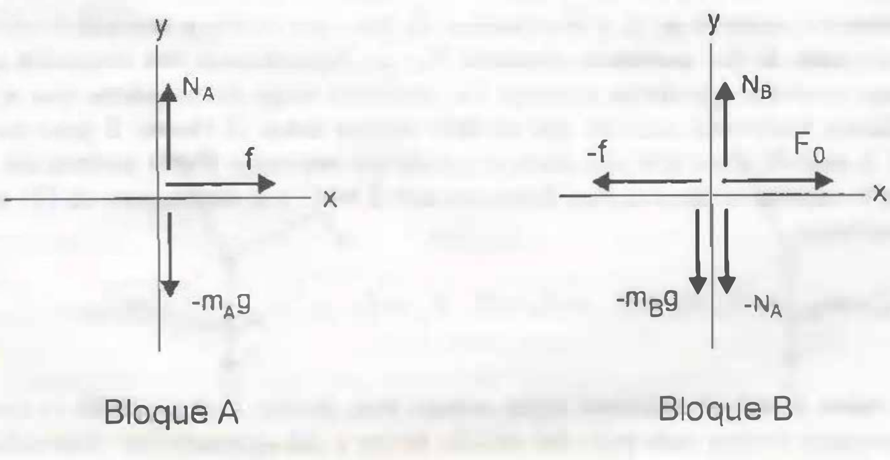
5. El bloque A de masa $m_A=3$ *kg* se encuentra sobre el bloque B de masa $m_B= 6$ *kg*, y entre ellos hay un coeficiente de fricción de $\mu_s=0.3$. El bloque B, a su vez se encuentra sobre una superficie horizontal sin fricción.

a) Calcular la fuerza de fricción entre A y B si se mueven a velocidad constante.
b) ¿Cuál es la fuerza horizontal máxima que se puede ejercer sobre B antes que A resbale?

I. A), B), C)



D)



E) Datos:

$m_A = 3\ kg$

$W_A = 30\ N$

$m_B = 6\ kg$

$W_B = 60\ N$

$\mu_s = 0.3$

Incógnitas:

$f,\ F_0 \Rightarrow$ I. P.

$a_A,\ a_B \Rightarrow$ I. A.

Solución:

Leyes de Newton:

1ª ley: inercia.

2ª ley: $\sum F = ma$:

$\sum F_x = ma_x$ y $\sum F_y = ma_y$.

3ª ley: $f = -f$.

II. A)

a) Si ambos bloques se mueven a velocidad constante no existe movimiento relativo de uno con respecto al otro. La fuerza de fricción sólo aparece cuando un cuerpo se desliza sobre otro, y como ambos se desplazan a igual velocidad, no hay deslizamiento entre ellos y por lo tanto no hay fuerza de fricción.

b) Si se aplica una fuerza horizontal sobre el bloque inferior este se mueve inmediatamente debido a que se encuentra sobre una superficie sin fricción. El bloque superior por 1ª ley de Newton, tiende a permanecer estático, pero como está en contacto con el bloque inferior, y entre ellos hay fricción, surge una fuerza de fricción $-f$ que se opone al movimiento del bloque inferior, y a la vez por 3ª ley, surge una fuerza sobre el bloque superior de misma magnitud pero en dirección opuesta, f, que causa que este se mueva con aceleración a_1; a la vez, el bloque inferior como resultante de la fuerza horizontal y de la fuerza de fricción que frena su movimiento, causa que se mueva con aceleración a_2. Ahora pasaremos al análisis cuantitativo:

A)

Bloque 1

$\sum F_x = f_s = m_A a_A$

$\Rightarrow f_s = 3a_A$ (1)

$\sum F_y = N_A - W_A = 3*0 = 0$

$N_A = W_A \Rightarrow N_A = 30\ N$

Bloque 2

$\sum F_x = F_0 - f_s = m_B a_B$

$F_0 - f_s = 6a_B$ (2)

$\sum F_y = N_B - W_B - N_A = 6*0 = 0$

$N_B = W_B + N_A \Rightarrow N_B = 60+30 \Rightarrow N_B = 90\ N$

Como sabemos, el peso sólo influye en el movimiento cuando hay fricción, la fuerza de fricción sólo depende del peso del bloque A porque sólo entre los bloques hay fricción:

$f = \mu N \quad \Rightarrow \quad f_s = \mu_s N_A \quad \Rightarrow \quad f_s = 0.3*30 \Rightarrow f_s = 9\ N.$

Sustituyendo en (1):

$f_s = 2a_A \Rightarrow 9 = 3a_A \Rightarrow a_A = 3\ m/s^2$.

Ya tenemos el valor de a_A, f_s, y la ecuación (2), pero aún tenemos una sola ecuación con dos incógnitas: la que queremos encontrar F_0 y a_B. Necesitamos otra condición para obtener otra ecuación y poderlas resolver. La condición surge de considerar que se nos pide la fuerza horizontal máxima que se debe ejercer sobre el bloque B pero sin que el bloque A resbale. Para que esto pase, es condición necesaria que la aceleración de ambos sea la misma, es decir $a_A = a_B$. Entonces $a_B = 3\ m/s^2$, y si sustituimos en (2) ya podemos resolverla.

B)

$F_0 - f_s = 6a_B \Rightarrow F_0 - 9 = 6*3 \Rightarrow F_0 = 18 + 9 \Rightarrow F_0 = 27\ N.$

III.

A) A veces es difícil encontrar algún criterio para decidir si el resultado es correcto y será necesario revisar cada paso del cálculo hecho y del razonamiento desarrollado. La fuerza calculada supera por tres veces la fuerza de fricción, y el resultado queda dentro del rango de lo pudiera ser creíble.

B) Aquí fue necesario utilizar las 3 leyes de Newton. No hubiera bastado con saber el algoritmo, ya que para poder interpretar lo que pasaba y traducirla a ecuaciones era necesario entender y manejar dichas leyes. También fue importante darse cuenta que una condición fundamental era considerar que para que el bloque A no resbale sobre el B, ambos deben llevar la misma aceleración, y se propuso como una condición implícita del problema. En estos tipos de problemas es necesario ser muy observadores y no dejar un detalle sin analizar. El algoritmo lo que nos da es un orden en este análisis.

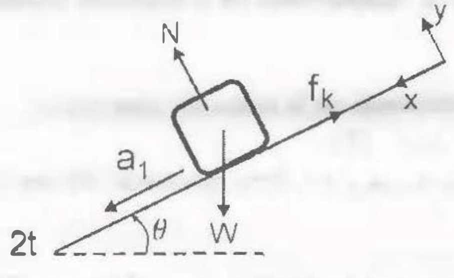
C) Como mencionamos en el problema anterior, este tipo de problemas requiere un análisis adecuado de todas las fuerzas que actúan. Para buscar más alternativas de solución requerimos conocer otros conceptos de física como el de trabajo y las leyes de conservación de la energía, aunque resultaría mas complicado de resolverlo así.

6. Halle el coeficiente de fricción cinética de un trozo de hielo que se desliza partiendo del reposo por un plano inclinado rugoso y de un ángulo de inclinación θ. Sabemos que a este hielo le toma el doble de tiempo deslizarse por el plano rugoso que por otro plano de igual inclinación y longitud, pero sin fricción.

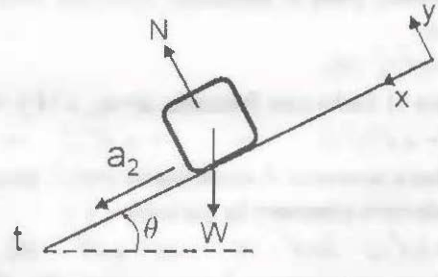
I.

A), B) y C)

Con fricción

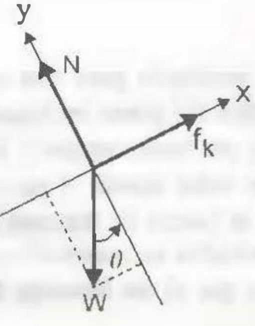


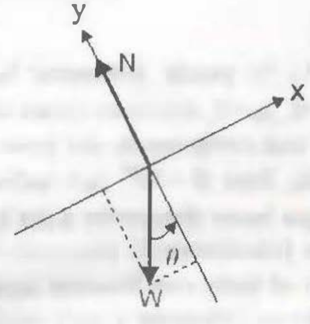
Sin fricción



El marco de referencia es como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, con el eje positivo a la izquierda, en la parte superior del plano inclinado y en la dirección de descenso del hielo.

D)





E) Datos:

θ

l

t, $2t$

Incógnitas:

$\mu_k \Rightarrow I.\ P.$

m, a_1, $a_2 \Rightarrow I.\ A.$

Condiciones:

2ª ley de Newton:

$\sum F = ma$:

$\sum F_x = ma_x$ y $\sum F_y = ma_y$.

II. A)

Con fricción

$\sum F_x = W sen\theta - \mu_k N = ma_1$

$mg\, sen\theta - \mu_k N = ma_1$ (1)

$\sum F_y = N - W cos\theta = 0$

$\Rightarrow N = mgcos\theta$

Sin fricción

$\sum F_x = W sen\theta = ma_2$

$mg\, sen\theta = ma_2 \Rightarrow g\, sen\theta = a_2$ (2)

$\sum F_y = N - W cos\theta = 0$

$\Rightarrow N = mgcos\theta$

B) Sustituyendo el valor de N en (1), ya que aquí sí influye al movimiento la fricción:

$mg\, sen\theta - \mu_k mgcos\theta = ma_1 \Rightarrow mg\,(sen\theta - \mu_k cos\theta) = ma_1 \Rightarrow a_1 = g\,(sen\theta - \mu_k cos\theta)$ (3)

De (2) y (3) tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, a_1, a_2 (IA) y la que queremos encontrar, μ_k (IP). Para obtener otra ecuación debemos introducir otra condición. Una fundamental es la de que el hielo le toma el doble de tiempo deslizarse la misma distancia l en el plano con fricción en comparación con el de sin fricción. De la cinemática tenemos la siguiente ecuación,

$x = x_0 + v_0\tau + a\tau^2/2$

Para ambos hielos son las mismas condiciones iniciales, $x_0=0$, $v_0=0$, y por tanto:

$x = a\tau^2/2$,

además, para el hielo sin fricción, $a=a_2$, $x=l$ y $\tau=t$, sustituyendo en la ecuación cinemática:

$l = a_2 t^2/2$ (4).

Para el hielo con fricción, $a=a_1$, $x=l$ y $\tau=2t$, sustituyendo en la ecuación cinemática:

$l = a_1(2t)^2/2 \quad \Rightarrow \quad l = a_1 4t^2/2 \quad \Rightarrow \quad l = 2a_1 t^2$ (5).

Ahora tenemos 4 ecuaciones con 5 incógnitas: a_1, a_2, μ_k, l y t. Pero igualando (4) con (5) podemos eliminar la variable l y t:

$\Rightarrow a_2 t^2/2 = 2a_1 t^2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2/4$ (6).

Ahora ya tenemos 3 ecuaciones, (2), (3) y (6), con tres incógnitas, a_1, a_2 (IA) y μ_k (IP). Por lo tanto ya podemos resolverlas:

Sustituyendo a_2 de (2) en (6) $\Rightarrow a_1 = g\, sen\theta/4$, y sustituyendo este valor de a_1 en (3) $\Rightarrow$

$g\, sen\theta/4 = g\,(sen\theta - \mu_k cos\theta) \quad \Rightarrow \quad sen\theta/4 = sen\theta - \mu_k cos\theta \quad \Rightarrow$ despejando μ_k

$\Rightarrow \quad \mu_k cos\theta = sen\theta - sen\theta/4 \quad \Rightarrow \quad \mu_k cos\theta = ¾\, sen\theta \quad \Rightarrow \quad \mu_k = ¾\, tan\theta$.

III.

A) Se puede demostrar la coherencia de este resultado para dos casos límite. Para $\theta=0$, $\mu_k=0$, entonces como no existe una inclinación del plano inclinado, no hay tampoco una componente del peso que mueva el hielo y por tanto tampoco hay fuerza de fricción. Para $\theta = 90^0$, $\mu_k=$ infinito, corresponde a un valor donde el peso gravitacional no logra hacer descender a los hielos y significa que la fuerza de fricción es muy grande tal que prácticamente permanecen pegado. Estos resultados no contradicen la suposición de que el hielo con fricción tarda el doble del tiempo que el sin fricción. Entonces el resultado es coherente y muy posiblemente correcto.

B) Para resolver este problema se requirió utilizar únicamente la segunda ley de Newton, ya que el sistema era sólo una partícula aunque en dos condiciones distintas. Se necesitó definir también nuevas variables que no se daban en forma explicita en el problema como las a_1, a_2 y m. También hubo de usarse la condición de los tiempos de descenso con un tratamiento cinemático. Para los estudiantes es muy complicado mezclar dos temas distintos cómo la cinemática y la dinámica porque se le presentan como dos temas sin relación, lo cuál por supuesto es un grave error, ya que la cinemática es un caso particular de la dinámica, donde se estudia sólo el movimiento sin atender a los agentes causantes.

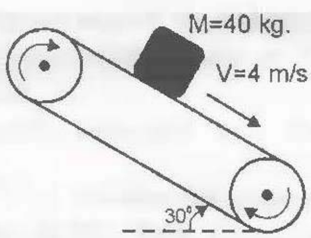
C) Este problema se podria resolver también por el principio de trabajo-energía, que es un tema que veremos más adelante.

Ejemplos de Trabajo y Energía

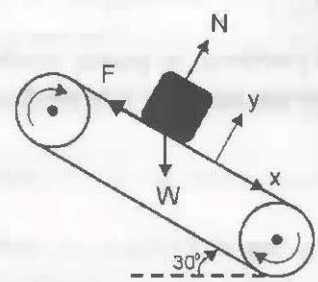
1. Un motor mueve una banda inclinada 30^0 con respecto a la horizontal, que hace descender un bloque de masa $M=40\ kg$ a una velocidad constante de $V=4\ m/s$.
   a) Calcular el trabajo hecho sobre el bloque por el motor cuando lo desplaza $5\ m$.
   b) ¿Cuánto trabajo tendria que hacer el motor para elevar el bloque a la misma distancia a velocidad constante?

I.

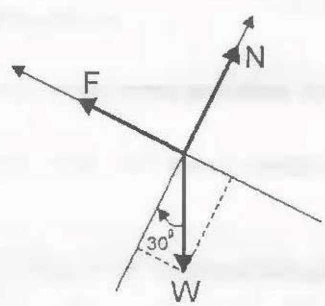
A)



B) y C)



D)



E) Datos:
$M= 40\ kg$
$V= 4\ m/s$
$\theta = 30^0$
$\Delta x= 5\ m.$

Incógnitas:
$W \Rightarrow I.\ P.$
$F \Rightarrow I.\ A.$

Condiciones:
$W=F_{neta} \cdot \Delta x$
2^a ley: $\sum \mathbf{F}=m\mathbf{a}$:
$\sum F_x=ma_x$ y $\sum F_y=ma_y$.

II.A)

La fuerza F es la ejercida por el motor por intermediación de la banda transportadora y que equilibra la componente del peso del bloque lo que permite su descenso a velocidad constante, y por tanto con una aceleración nula.

$$a=0 \quad \Rightarrow \quad \sum F_x=0 \text{ y } \sum F_y=0.$$
$$\Rightarrow \sum F_x= Mgsen\theta - F=0 \quad \Rightarrow \quad F= Mgsen\theta.$$
$$\Rightarrow \sum F_y= N-Wcos\theta=0 \quad \Rightarrow \quad N=Wcos\theta.$$

a)

El trabajo hecho por el motor es el realizado por la fuerza F de la banda al trasladar el bloque Δx. De la definición:

$$W=F_{neta} \cdot \Delta x \Rightarrow W= Mgsen\theta * \Delta x * cos180^0 \Rightarrow W=400*sen30^0*5*cos180^0$$
$$\Rightarrow W= -1{,}000 J.$$

b)
La fuerza necesaria para equilibrar el peso y hacerlo ascender es equivalente a la de su descenso. Por lo tanto el trabajo realizado estará dado por:

$$W=400*sen30^0*5*cos0^0 \quad \Rightarrow \quad W= 1.000\,J.$$

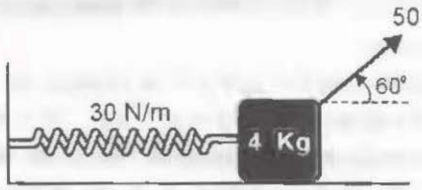
III.
A) El problema fue muy sencillo y no es muy difícil verificar su resultado, solo hay que aplicar correctamente la fórmula del trabajo. El trabajo de descenso como de ascenso sólo varia en el signo, como sería de esperar por el distinto sentido del desplazamiento del bloque con respecto al de la fuerza.

B) La fuerza del motor sólo se usó para mover el bloque a velocidad constante y no hubo aceleración. Una confusión de los estudiantes es considerar que la aplicación de una fuerza siempre es para acelerar objetos, pero este no es el caso cuando hay fuerzas en equilibrio y que el objeto puede estar en reposo o moviéndose con velocidad constante. Aquí no se toma en cuenta la fricción necesaria para que el objeto no se deslice, si no nada mas se considera la fuerza del motor.

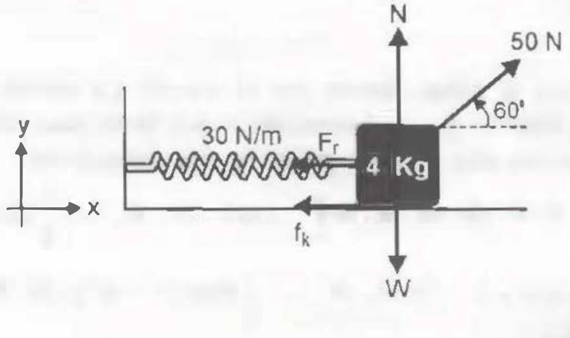
C) Se podría utilizar como alternativa de solución el principio de trabajo-energía.

2. Sobre un bloque con masa de *4 kg* actúa una fuerza $F=50\ N$ a 60^0 por encima de la horizontal. El bloque se haya sujeto a un resorte con una constante de rigidez $k=30\ N/m$. Supongamos que el sistema parte del reposo, con el resorte no extendido, y que $\mu_k=0.2$. Cuando el bloque se ha movido *60 cms*, cuál es el trabajo hecho por: a) *F*; b) la fricción; c) el resorte; d) ¿Cuál es la velocidad final del bloque?

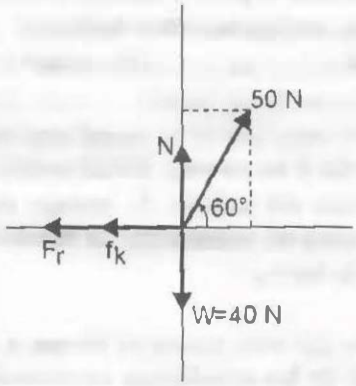
I. A)



B) y C)



D)



E) Datos:

$F=40\,N$ a 60^0
$M=4\ kg$
$k=30\ N$
$\mu_k=0.2$
$v_o=0$
$x_o=0$
$\Delta x=0.6\ m$

Incógnitas:

W_F, W_f, W_r, $v \Rightarrow$ I. P.

Condiciones:

2ª ley de Newton:
$\sum F=ma$:
$\sum F_x=ma_x$ y $\sum F_y=ma_y$.
$W=F_{neta}\cdot\Delta x$

II. A)

Como no se nos pide calcular el trabajo de la fuerza neta, el trabajo de la fuerza F se puede calcular directamente de la definición:

a) $W_F=F\cdot\Delta x \Rightarrow W_F=40*0.6*\cos 60^0 \Rightarrow W_F=12\ J.$

b) El trabajo de la fricción:
$W_f=f\cdot\Delta x$, donde f se calcula con $f=\mu_k N$ y N se obtiene de
$\sum F_y=ma_y \Rightarrow \sum F_y=N+40*sen60^0-40=0 \Rightarrow N=40-40*sen60^0$
$\Rightarrow N=5.36\ N$, y sustituyendo en la fórmula de fuerza de fricción:
$f=\mu_k N \Rightarrow f=0.2*5.36 \Rightarrow f=1.072\ N$ y su dirección es opuesta a la del movimiento, por tanto $\theta=180^0$. Con estos datos podemos ya calcular el trabajo:
$W_f=f\cdot\Delta x \Rightarrow W_f=f*\Delta x*\cos\theta \Rightarrow W_f=1.072*0.6*\cos 180^0$
$\Rightarrow W_f=-0.6432\ J.$

c) Ahora calcularemos el trabajo hecho por el resorte. La fuerza de este varia de manera continua en función de su elongación, y por tanto para calcular su trabajo necesitamos su definición más general, que incluye la integración:

$$W_r=\int F_x dx\text{, donde } F_x=-kx \Rightarrow W_r=\int_{x_0}^{x}-kx\,dx \Rightarrow W_r=-\frac{1}{2}k(x^2-x_0^2)$$

y como $x_0=0$, $x=0.6$ y $k=30 \Rightarrow W_r=-\frac{1}{2}30(0.6^2-0^2) \Rightarrow W=-5.4\ J.$

d) La velocidad del bloque al alcanzar su elongación máxima de $x=0.6\ m$ se puede calcular el teorema de trabajo-energía ya que este me involucra el trabajo, que ya cal-

culamos, con el cambio de energía cinética que incluye su velocidad final y que queremos calcular:
$W_{neto}=F_{neto}\cdot S=\Delta K$ (1), donde $K=\frac{1}{2}mv^2$.

De la fórmula, debemos obtener en primer lugar el trabajo total realizado sobre el bloque por la fuerza resultante y multiplicada por su desplazamiento. Otra manera es calcular el trabajo realizado por cada una de las fuerzas de manera independiente y luego sumarlas todas, como le haremos aqui. Las dos formas son equivalentes, pero aquí ya tenemos los trabajos calculados para cada una de estas fuerzas:
$W_{neto}= W_F+W_f+W_r \Rightarrow W_{neto}= 12-0.6432-5.4 \Rightarrow W_{neto}=5.956\ J$ (2).
Y el incremento en energía cinética
$\Delta K=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow \Delta K=\frac{1}{2}m(v_f^2-v_i^2)$,
sustituyendo los datos,
$\Rightarrow \Delta K=\frac{1}{2}*4(v_f^2-0^2) \Rightarrow \Delta K=2v_f^2$ (3)
Sustituyendo (2) y (3) en (1):
$5.956=2v_f^2 \Rightarrow v_f^2=5.956/2 \Rightarrow v_f=1.72\ m/s.$

III.
A) El resultado de la velocidad final del bloque no es tan disparatado de acuerdo a la fuerza que se aplica y a la constante elástica del resorte; es un resultado aceptable.

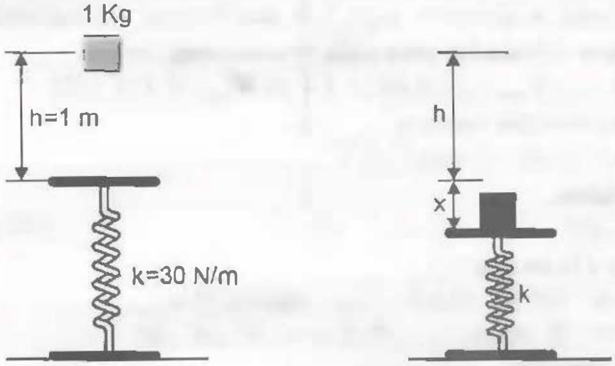
B) Para la solución del problema se necesitaba conocer el principio trabajo-energía. Si lo hubiéramos querido resolver con puras consideraciones de las fuerzas hubiera sido algo mas complicado. La dificultad entonces radicó en conocer dicho principio y aplicarlo de manera correcta.

C) Este problema también se podía resolver calculando primero, con la segunda ley de Newton, la aceleración; con este dato y con los que nos da el problema, la velocidad se podría calcular con las ecuaciones de la cinemática.

Ejemplos de Conservación de la Energía

1. Hallar la compresión máxima que alcanza un resorte colocado de manera vertical y de constante de rigidez $k=30\ N/m$, cuando se deja caer un bloque de $1\ kg$ sobre su parte superior desde una altura de $1\ m$.

A)



B) En este problema actúan puras fuerzas conservativas, y por lo tanto se puede resolver por pura consideración energética, y no será necesario realizar un análisis de las fuerzas.

C) El marco de referencia se colocará en el nivel supuesto donde el resorte alcanza su máxima compresión por el bloque que le cae. La conveniencia se notará cuando realicemos los cálculos, y se deberá a que al ser el nivel cero aquí, nos ahorramos involucrar una nueva variable que implicaría el colocarlo en la base del resorte.

D) No es necesario dibujar el diagrama de cuerpo libre ya que no se considerarán las fuerzas.

E) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
$m = 1\ kg$	$X \Rightarrow I.\ P.$	Conservación de la energía:
$h = 1\ m$		$K_i + U_i = K_f + U_f$, donde
$k = 30\ N/m$		$K=\frac{1}{2}mv^2$ y $U=mgh+\frac{1}{2}kX^2$.

II.

B) La energía del bloque, poco antes de que se suelte, es puramente potencial gravitacional. Cuando este se deja caer, su energía, conforme cae se transforma gradualmente en energía cinética; choca con el resorte y ésta energía se convierte en cinética y potencial elástica, hasta que finalmente se transforma toda en energía potencial elástica cuando alcanza su máxima compresión. Para la solución del problema sólo tomaremos en cuenta su etapa inicial y final, ya que estas dos involucran lo que conocemos, H, y lo que queremos saber, X. Su evolución intermedia no es necesario considerar y esto simplifica su solución. Entonces por conservación de la energía:

$$mg(h+X)=\frac{1}{2}kX^2,$$

sustituyendo los datos

$\Rightarrow\ 10(1+X)=\frac{1}{2}*30*X^2 \quad \Rightarrow\ 10+10X=15X^2 \quad \Rightarrow\ 15X^2-10X-10=0$

Resolviendo por la fórmula de las cuadráticas:

$$X=\frac{10\pm\sqrt{10^2+600}}{30} \Rightarrow X=\frac{10\pm 26.45}{30} \Rightarrow X_1=1.215 \text{ y } X_2=-0.548$$

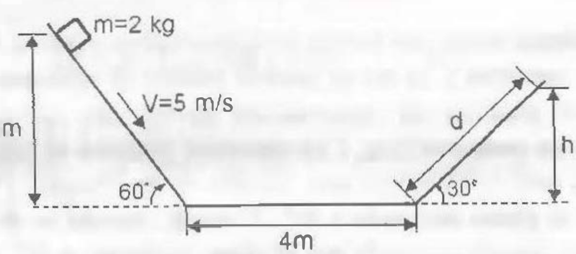
De estos dos resultados, sólo el incremento negativo es el correcto por que la compresión del resorte fue en esta dirección según nuestro sistema de referencia:
$\Rightarrow$ $X = -0.548\ m$ es la compresión máxima del resorte.

III.
A) De los dos resultados anteriores obtenidos, por su magnitud es mas aceptable que sea correcto el que tomamos, ya que el que discriminamos es mas de un metro y correspondería a un valor mas alto de la altura que se dejó caer.

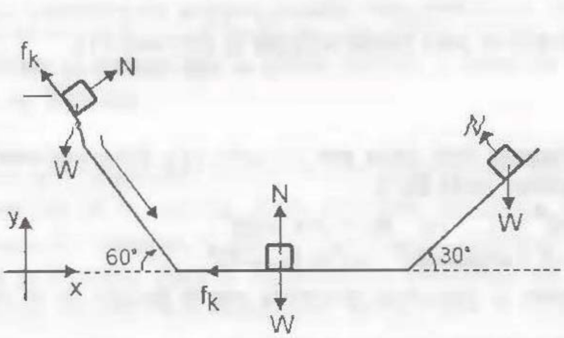
B) Al realizar consideraciones energéticas para resolver el problema, sólo tomamos los dos estados de interés y se pudo resolver de manera sencilla. Si lo hubiéramos intentado resolver por consideraciones mecánicas su solución habria sido muy complicada.

C) Por el principio trabajo-energía seria posible resolverlo también.

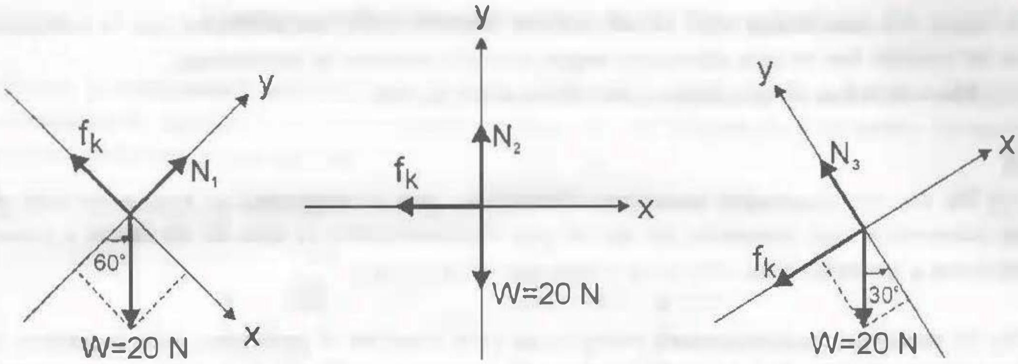
2. Un cuerpo de $2\ kg$ que desciende sobre un plano inclinado a 60^0, a una altura de $5\ m$ tiene una velocidad de $3\ m/s$. Llega a una sección horizontal de $4\ m$ de longitud y se desplaza al nivel del suelo y entonces se eleva por un plano inclinado a 30^0. ¿Que altura sobre este plano alcanza alcanza el cuerpo el reposo?
Suponga que todas las superficies tienen $\mu_k = 0.3$.
I.
A)



B), C)



D)



E) Datos:
$m = 2\ kg$
$V_o = 3\ m/s$
$h_o = 4\ m$
$\mu_k = 0.3$
$\theta_1 = 60^0$
$\theta_2 = 30^0$
$V = 0$
$l = 4\ m$

Incógnitas:
$h \Rightarrow I.\ P.$
$d \Rightarrow I.\ A.$

Condiciones:
Principio de Conservación Modificado: $\Delta E = E_f - E_i = W_{nc}$.
2ª ley de Newton:
$\sum F = ma$:
$\sum F_x = ma_x$ y $\sum F_y = ma_y$.

II.
Como en este problema actúa una fuerza no conservativa como la fricción, la energía de este sistema no se conserva y ya no es posible utilizar el principio de conservación. En su lugar se utiliza el principio de conservación modificado, $\Delta E = E_f - E_i = W_{nc}$ (1), que incluye a las fuerzas no conservativas. Calcularemos primero el trabajo de las fuerzas no conservativas, para esto dividiremos este cálculo en tres etapas: 1ª etapa: cuando desciende el bloque por el plano inclinado a 60^0; 2ª etapa: cuando se desliza sobre la sección horizontal; 3ª etapa: cuando asciende por el plano inclinado a 30^0 y finalmente se detiene. El trabajo total será la suma del trabajo de cada etapa que la fuerza de fricción realiza sobre el bloque. Hacemos este cálculo porque es necesario conocer el trabajo de las fuerzas no conservativas para poder utilizar la fórmula (1).

A)
1ª etapa:
La fuerza de fricción está dada por $f_1 = \mu_k N_1$ (2). Para calcular N_1 necesitamos realizar un análisis de fuerzas en el eje y:
$\sum F_y = N_1 - 20\cos 60^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = 20\cos 60^0$
$\Rightarrow f_1 = \mu_k N_1 \Rightarrow f_1 = 0.3 * 20\cos 60^0 \Rightarrow f_1 = 6\cos 60^0$
Ahora calcularemos la distancia recorrida por el bloque en su descenso. Por relación trigonométrica:
$\Rightarrow sen 60^0 = 5/\Delta x_1 \Rightarrow \Delta x_1 = 5/sen 60^0$.
Con estos datos ya podemos calcular W_1:
$W = f * \Delta x \quad \Rightarrow \quad W_1 = f_1 * \Delta x_1 * \cos 180^0 \quad \Rightarrow \quad W_1 = 6\cos 60^0 * (5/sen 60^0) * (-1)$
$\Rightarrow W_1 = -30 ctg 60^0 \Rightarrow W_1 = -17.32\ j$.
2ª etapa:
De la misma manera que en el caso anterior:

$f_2 = \mu_k N_2$ (3)

$\sum F_y = N_2 - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = 20$ y $\mu_k = 0.3$,

sustituyendo en (3):

$f_2 = 0.3 * 20 \Rightarrow f_2 = 6\ N$,

y sabemos que $\Delta x_2 = 3\ m$, ahora ya podemos calcular el trabajo:

$W_2 = f_2 * \Delta x_2 * \cos 180^0 \Rightarrow W_2 = 6 * 4 * (-1) \Rightarrow W_2 = -24\ j$.

3ª etapa:

análogamente como en los casos anteriores:

$f_3 = \mu_k N_3$ (4)

$\sum F_y = N_3 - 20\cos 30^0 = 0 \Rightarrow N_3 = 20\cos 30^0 \Rightarrow f_3 = 0.3 * 20\cos 30^0 \Rightarrow f_3 = 6\cos 30^0$.

Y por relación trigonométrica:

$sen 30^0 = h/d \Rightarrow d = h/ sen 30^0$ (5), con estos datos ya podemos calcular el trabajo en esta etapa:

$W_3 = f_3 * d * \cos 180^0 \Rightarrow W_3 = 6\cos 30^0 * (h/ sen 30^0) * (-1)$

$\Rightarrow W_3 = -6h ctg 30^0 \Rightarrow W_3 = -10.39h$

Finalmente podemos calcular W_{nc}:

$W_{nc} = W_1 + W_2 + W_3 \quad \Rightarrow \quad W_{nc} = -17.32 - 24 - 10.39h \quad \Rightarrow \quad W_{nc} = -41.32 - 10.39h$ (6).

B)

Ahora calculemos el decremento de energía, $\Delta E = E_f - E_i$, del bloque, para ello consideramos su estado inicial, cuando recién comienza a descender el bloque, y su estado final, cuando se detiene:

$E_i = mgh_o + \frac{1}{2} m V_o^2 \quad \Rightarrow \quad E_i = 2 * 10 * 5 + \frac{1}{2} * 2 * 3^2 = 100 + 9 \quad \Rightarrow \quad E_i = 109\ J.$

$E_f = mgh + \frac{1}{2} m V^2 \quad \Rightarrow \quad E_f = 2 * 10 * h + \frac{1}{2} * 2 * 0^2 \quad \Rightarrow \quad E_f = 20h.\ J.$

Por lo tanto,

$$\Delta E = E_f - E_i = 20h - 109 \qquad (7).$$

Finalmente sustituyendo (6) y (7) en (1):

$20h - 109 = -41.32 - 10.39h \quad \Rightarrow \quad 20h + 10.39h = -41.32 + 109 \quad \Rightarrow$

$30.39h = 67.68 \quad \Rightarrow \quad h = 2.22\ m.$

III.

A) El resultado obtenido es razonable dentro de lo que cabría esperar, ya que la altura a la que se detiene la partícula es menor que la altura inicial, a causa de la energía que se disipó debido a la fuerza de fricción.

B) La forma como tuvimos que relacionar los datos con la incógnita fue con el principio modificado de la conservación de la energía. Este principio relaciona la cantidad de energía disminuida o disipada del sistema, y que es equivalente al trabajo realizado por la fuerza no conservativa de la fricción. Para la solución del problema era necesario conocer este principio. Siendo así, resultó fácil resolverlo, ya que solo se necesitaba aplicarlo bien. Obtuvimos una sola ecuación con la incógnita h, y resolverla fue directo.

C) Otra forma de resolverlo sería por consideraciones de fuerza con la segunda ley de Newton, calculando en cada etapa su aceleración o desaceleración, y con las ecuaciones de la cinemática determinar su desplazamiento. Aunque de esta manera hubiera sido mucho más complicado.

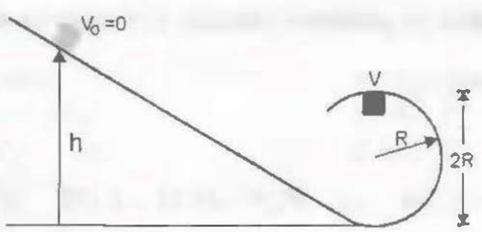
3. En una pista de circo, se considera a una partícula de masa m que es soltada desde una altura h y luego se desliza sobre una superficie inclinada sin fricción hasta llegar a una pista en forma de un circulo de radio R.

a) Para que la partícula no pierda el contacto en la altura máxima del circulo ¿cuál es el valor mínimo de h?

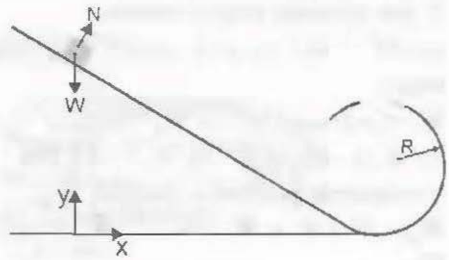
b) ¿Cual sería la fuerza ejercida por la pista en el punto más alto si esta misma partícula es soltada al triple de esta altura mínima?

I.

A)

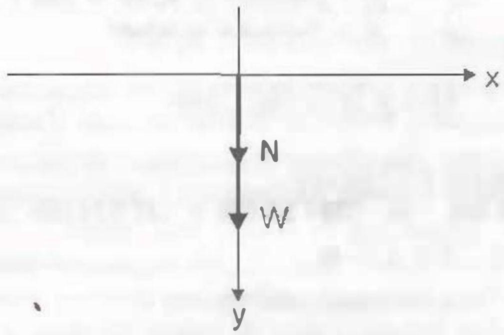


B), C)



D)

Partícula en h=2R



E) Datos:

m

R

$V_o = 0$

$h=2R$

Incógnitas:

H, $N \Rightarrow$ I. P.

$V \Rightarrow$ I. A.

Condiciones:

2^a ley de Newton:

$\sum F = ma$:

$\sum F_x = ma_x$ y $\sum F_y = ma_y$.

Conservación de la Energía:

$K_i + U_i = K_f + U_f$ .donde

$K = \frac{1}{2} mv^2$ y $U = mgh$.

II. A)

Primero haremos un análisis de su dinámica en su máxima altura que alcanza en el circulo:

$\sum F_y = -N - mg = ma$,

como el movimiento de esta partícula es circular. su aceleración es centripeta y se escribe como

$$a = -V^2/R \quad \Rightarrow \quad -N - mg = m(-V^2/R) \quad \Rightarrow \quad N + mg = mV^2/R \qquad (1).$$

la aceleración es negativa porque apunta hacia el eje y negativo (1).

B)

a) Obtuvimos una ecuación con 2 incógnitas, N y V, pero no incluye H. Con esta variable la podemos obtener de consideraciones energética:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \Rightarrow 0 + mgH = \tfrac{1}{2}mV^2 + mgh \Rightarrow h=2R \Rightarrow$$
$$mgH=m(\tfrac{1}{2}V^2+2gR) \Rightarrow gH=\tfrac{1}{2}V^2+2gR \quad (2).$$

En esta ecuación tenemos dos incógnitas, H y V, que con la N y V de la anterior suman 3 incógnitas para solo 2 ecuaciones, y no podemos resolverlas. Sin embargo haciendo la consideración de que, como en el inciso a) nos piden encontrar el valor mínimo de H para el que la partícula no pierda contacto, esto significa el que N es muy pequeño pero no cero, lo mínimo antes de que la partícula se despegue. Podemos Suponer que N es tan pequeño que podemos hacer la aproximación N=0, entonces el valor de H que obtengamos de esta consideración será el mínimo para el que la partícula pierde contacto. Entonces (1) se transforma en

$$mg = mV^2/R \Rightarrow g = V^2/R \Rightarrow V^2 = gR,$$ y sustituyendo en (2):

$$gH=\tfrac{1}{2}V^2 + 2gR \Rightarrow gH=\tfrac{1}{2}gR+2gR \Rightarrow gH= 5gR/2 \Rightarrow$$
$$H = 5R/2.$$

908501

b) Si la partícula es lanzada al triple de la altura mínima, entonces esta será de $H=15R/2$ y sustituyendo este valor en (2), ya que es el mismo problema del inciso anterior, pero a la inversa, ya que ahora nos dan la H y hay que encontrar la N (fuerza de contacto) en el punto mas alto del circulo de la pista:

$$gH=\tfrac{1}{2}V^2+2gR \Rightarrow 15gR/2 = \tfrac{1}{2}V^2+2gR \Rightarrow 15gR-4gR = V^2$$
$$\Rightarrow 11gR=V^2 \Rightarrow V^2 = 11gR,$$

y sustituyendo en (1):

$$\Rightarrow N + mg = mV^2/R \Rightarrow N + mg = (m/R)11gR \Rightarrow N + mg = 11mg \Rightarrow N = 10mg.$$

III.

A) El resultado para el inciso a) de $H = 5R/2$ es razonable dentro de lo que se pudiera esperar, ya que la energia en este sistema se conserva porque no hay fricción. Entonces para que la particula no pierda contacto con el piso requiere de $0.5R$ más que la altura máxima de la pista circular. Si fuera la misma altura, es decir $2R$, de la que se lanza la partícula, no llevaría el suficiente energía (su velocidad a esta altura sería cero) para vencer la fuerza de gravedad y perdería contacto poco antes de llegar a su altura máxima.

B) El problema requirió de consideraciones mecánicas y energéticas para poderse resolver. Sin una de estas consideraciones hubiera sido imposible llegar a un resultado. La dificultad en la resolución de muchos problemas se debe precisamente a un análisis parcial de estos. En los problemas complicados se requiere un análisis detallado y completo.

C) Como dijimos antes, para poderse solucionar requirió un análisis completo, y por tanto no parece existir otra alternativa de solución.

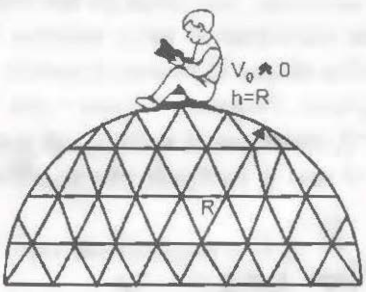
4. Un niño que se encuentra sobre un domo hemisférico de radio R sin fricción, se comienza a deslizar de la parte mas alta a una velocidad despreciable.

a) ¿Cuál es el ángulo con respecto a la vertical en el que la persona pierde contacto con la superficie?

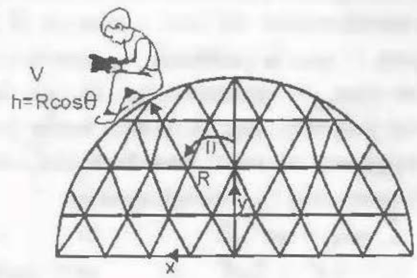
b) En el caso de que hubiera fricción en el domo, donde perdería el contacto la persona, ¿en un punto mas alto o mas bajo que en el caso sin fricción?

I.

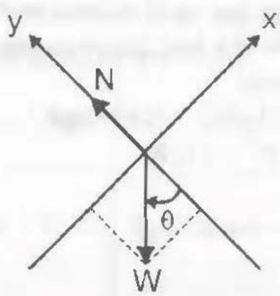
A)



B), C)



D)



E) Datos:
$V_0 \approx 0$
$H=R$

Incógnitas:
θ, o $h=R\cos\theta \Rightarrow I.\ P.$
$V, m \Rightarrow I.\ A.$

Condiciones:
$\Sigma F=ma$:
$\Sigma F_x=ma_x$ y $\Sigma F_y=ma_y$.
Conservación de la Energía:
$K_i + U_i = K_f + U_f$, donde
$K=\frac{1}{2}mv^2$ y $U=mgh$.

II.

A) Analizando la dinámica cuando el niño se ha desplazado un ángulo θ.

$\Sigma F_x= mg\,sen\,\theta=ma_t \Rightarrow a_t = g\,sen\,\theta$ (1), donde a_t es la aceleración tangencial con respecto a la superficie del domo.

$\Sigma F_y= N-mg\cos\theta=ma_c$, donde $a_c= -V^2/R \quad \Rightarrow \quad N-mg\cos\theta = -mV^2/R$ (2).

B)

Ahora haciendo consideraciones energéticas. La velocidad inicial es muy pequeña, casi cero, solo la necesaria para que el niño comience a deslizarse; entonces, simplificando el problema podemos considerarla cero:

$mgR=mgh+\frac{1}{2}mV^2$, $\quad$ y como $h=R\cos\theta \quad \Rightarrow \quad mgR=mgR\cos\theta +\frac{1}{2}mV^2$

$\Rightarrow mgR=m(gR\cos\theta +\frac{1}{2}V^2) \Rightarrow gR=gR\cos\theta + \frac{1}{2}V \quad \Rightarrow gR(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}V^2$

$\Rightarrow \quad V^2= 2gR(1-\cos\theta)$ (3).

La ecuación que me condiciona el movimiento a la superficie del iglú es la (2), que tiene 3 incógnitas, N, θ y V. La otra ecuación que podría ayudarnos a resolver esta es la (3), y que me relaciona V con θ. Así, tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, pero como en el problema anterior, la condición para que la persona se despegue, es que la fuerza de contacto con el domo sea cero: $N=0$. Entonces la ecuación (2) se transforma en:

$-mg\cos\theta = -mV^2/R \quad \Rightarrow \quad V^2 = Rg\cos\theta$ (4).

a) con la ecuación (3) y (4), tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas y ya podemos resolver para el ángulo θ a la que se despega la persona. Igualando V^2 de (3) en (4):

$Rg\cos\theta = 2gR(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 2(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad 3\cos\theta = 2 \quad \Rightarrow \cos\theta = 2/3. \quad \Rightarrow$
$\theta = 48^0$.

b) si existiera fricción, el deslizamiento sería a menor velocidad que sin fricción debido a que esta fuerza se opone al movimiento. Por tanto, de la ecuación (4):

$V^2 = Rg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos(V^2/Rg)$

Por lo tanto a menor velocidad, mayor ángulo de despegue θ.

III.

A) El ángulo obtenido es poco mayor de 45^0 como sería de esperar dado que la superficie no tiene fricción, y la velocidad tangencial aumenta lentamente hasta alcanzar un buen impulso, despegarse y salir disparado por la inercia del movimiento.

B) En este problema, cómo en el anterior, fue necesario realizar un análisis exhaustivo de la dinámica y su energía. Para el primer análisis se planteó de manera general para un desplazamiento θ cualquiera por que no se conocía y se quería determinar. La energía se calculó en 2 puntos, en su altura máxima y en el punto a un ángulo θ donde supuestamente se despega el niño. Así, pudimos relacionar el ángulo buscado con los datos, y otras incógnitas, hasta llegar a su solución.

C) Es difícil saber como obtener otra alternativa de solución ya que para llegar a esta se requirió un análisis completo, que deja poca cabida para otra opción.

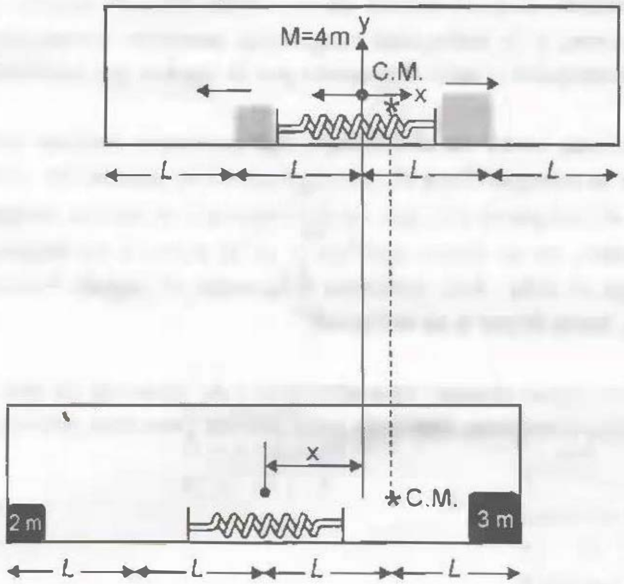
Ejemplos de Sistemas de Partículas

La dinámica de un sistema de partículas se estudia describiendo el movimiento de su centro de masa (CM) como el de una sola particula concentrado en este punto. Este sistema se estudia con las leyes de Newton y que me describen el comportamiento de una partícula imaginaria ubicada en esa posición. Para los problemas que se presentan (dos o mas partículas), utilizaremos los algoritmos que se utilizaron para el estudio de una partícula más la formula del CM.

1. En una caja de masa $4m$ y longitud $4L$ que se encuentra sobre una superficie sin fricción, dos bloques de masa $2m$ y $3m$ están unidos contra un resorte comprimido sin masa, en el centro de la caja sin fricción. Antes de soltar los bloques estos se encuentran a una distancia L de su centro. Cuando se sueltan, se despegan del resorte y se desplazan hacia el extremo de la caja a una distancia $2L$. Calcule el desplazamiento de la caja después de que ambos bloques alcanzaron el extremo de la caja.

I.

A)



B) Como no existen fuerzas externas actuando sobre el sistema bloques-caja, al menos en el eje X, el CM del sistema no varia su posición en esta dirección aunque si lo hagan las partículas y la caja. La evolución del sistema es tal como se muestra en la figura.

C) El sistema de referencia lo colocaremos en el centro de la caja cuando aún no se mueve, pero sobre el piso por el cual se desliza la caja. Nos conviene aquí, por la simetría de la situación y porque es con respecto al centro que se desplaza la caja.

D) No es necesario dibujar un diagrama de cuerpo libre puesto que no actúan fuerzas externas al sistema.

E) Datos:
Masa de los bloques:
$2m$ y $3m$
Caja:
Masa $4m$ y longitud $4L$

Incógnitas:
$X \Rightarrow I.\ P.$
$X_{cm} \Rightarrow I.\ A.$

Condiciones:
Leyes de Newton:
Sin fuerzas externas en $X \Rightarrow$
$F_x = 0 \Rightarrow CM = Cte.$

II.
Utilizaremos la fórmula del CM ya que esta me relaciona los datos con las incógnitas. Primero calcularemos el CM de los bloques antes de que se suelten:

$$X_{cm} = \Sigma m_i X_i / \Sigma m_i \quad \Rightarrow \quad X_{cm} = (4m*0 + 3m*L - 2m*L)/(4m+3m+2m)$$

$$\Rightarrow \quad X_{cm} = mL/9m \quad \Rightarrow \quad X_{cm} = L/9 \qquad (1)$$

Ahora calcularemos el CM cuando los bloques ya se soltaron, chocaron y permanecieron pegados a las paredes de las cajas:

$\Rightarrow \quad X_{cm} = \{3m(2L-X) - 4m*X - 2m(X+2L)\}/(4m+3m+2m)$

$\Rightarrow \quad X_{cm} = (6mL - 3mX - 4mX - 2mX - 4mL)/9m$

$\Rightarrow \quad X_{cm} = (2mL - 9mX)/9m \quad \Rightarrow \quad X_{cm} = (2mL/9m - 9mX/9m \quad \Rightarrow \quad X_{cm} = 2L/9 - X \ (2).$

B)
Ahora ya tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas y ya podemos resolver. Sustituyendo X_{cm} de (1) en (2):
$L/9 = 2L/9 - X \Rightarrow X = 2L/9 - L/9 \Rightarrow X = L/9$, que es lo que se desplazó con respecto a la referencia del piso.

III.
A) Este resultado se puede probar calculando el CM con la posición de la caja desplazada y compararla con la inicial sin desplazar. Si el resultado calculado es correcto, los CM deben ser equivalentes. Para calcular este CM debemos sustituir el desplazamiento $X = L/9$ en la ecuación (2): $X_{cm} = 2L/9 - L/9 \Rightarrow X_{cm} = L/9$. Y este es el CM del sistema en un inicio, y por lo tanto el resultado es correcto.

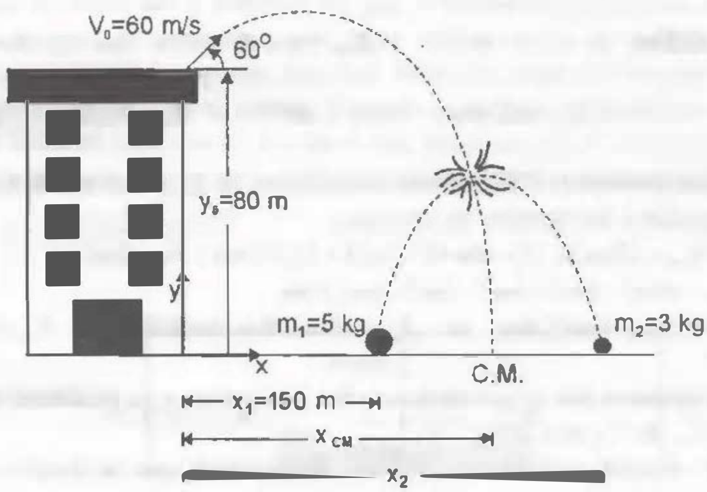
B) Para resolver este problema se aprovechó la conservación del CM por la inexistencia de fuerzas externas. Sólo se requirió definir el estado inicial y final del sistema, y no fue necesario describir su evolución.

C) Probablemente se podría resolver por conservación del momento y la energía, pero resultaría mucho más complicado.

2. Una bomba de $8\ kg$ es lanzada desde la azotea de un edificio de $80\ m$ de altura a una velocidad inicial de $60\ m/s$ a 60^0 sobre la horizontal. Describe una trayectoria parabólica en su caída al piso, y antes de chocar explota dividiéndose en dos partes. Una de las partes de $5\ kg$ pega en el suelo a $150\ m$ de la base del edificio. Si suponemos que ambas piezas llegan al suelo en el mismo instante y quedan fijas en el, ¿dónde toca al piso la otra parte? Tome $g = 10\ m/s^2$.

I.

A)



B) Como se muestra en la figura, la explosión afecta la trayectoria parabólica de la bomba, dividiéndose en dos trayectorias distintas para cada parte de la bomba en que se fragmentó. Sin embargo, el CM prosigue describiendo una trayectoria parabólica.Esto se debe a que la fuerza que produce la explosión son internas y no afectan al sistema como un todo. Entonces, la posición del CM es influenciada solamente por la fuerza de gravedad, de acuerdo a la 2ª ley de Newton ($F_{ext}=Ma_{cm}$); entonces su trayectoria sigue como si no hubiera pasado nada. Al final, cuando ambos trozos caen al suelo, el CM quda en el sitio donde hubiera caido la bomba si no hubiera explotado.

C) Nuestro sistema de referencia lo ubicaremos en la base del acantilado. Es el lugar mas conveniente, ya que es a partir de aquí de donde se nos pide medir la distancia a la que caen las dos partículas producto de la explosión. La velocidad se proyectará en sus dos componentes, x y y, para describir su trayectoria parabólica.

D) No es necesario un diagrama de cuerpo libre ya que solo necesitamos describir la trayectoria del cuerpo.

E) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
$M= 8\ kg$	$X_2 \Rightarrow I.\ P.$	Ecuaciones del movimiento
$m_1= 5\ kg$	$X_{cm},\ V_y,\ t \Rightarrow I.\ A.$	parabólico.
$m_2= 3\ kg$		2ª ley de Newton para un
$V_o=60\ m/s$ a 60^0		un sistema de partículas:
$V_{ox}=60Cos60^0$		$F_{ext}=Ma_{cm}$.

$V_{oy}=60Sen60^0$
$Y_o=80\ m$
$Y=0$
$X_1=150\ m$

II.A)

Ahora trataremos de determinar la posición de uno de los fragmentos de la bomba (X_2). Para ello utilizaremos la formula que determina CM y las ecuaciones del movimiento parabólico, así podremos relacionar la incógnita que buscamos resolver, X_2, con los datos e incógnitas auxiliares, X_{cm} y t. En primer lugar, de las ecuaciones de tiro parabólico, podemos calcular la posición final del CM. De la formula de la cinemática. En el eje y:

$Y=Y_o+V_{oy}t-gt^2/2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 80 + 60Sen60^0t-10t^2/2$

$\Rightarrow \quad 80+60Sen60^0t-5t^2=0$, dividiendo entre $5 \Rightarrow -t^2 + 12\,Sen60^0t + 16$ (1)

Para el eje x:

$X=V_{ox}t \quad \Rightarrow \quad X_{cm}=60Cos60^0t$ (2)

Aunque estas 2 ecuaciones ya se pueden resolver, no involucra la incógnita que nos piden encontrar. Para lograrlo debemos utilizar la formula del CM:

$X_{cm}=(m_1X_1+m_2X_2)/(m_1+m_2) \Rightarrow X_{cm}=(5*150+3*X_2)/(5+3) \Rightarrow X_{cm}=(750+3X_2)/8$ (3)

B)

Con esta ecuación ya involucramos la IP, aunque está en función de otra incógnita, pero con las otras 2 ecuaciones anteriores ya formamos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Calculando t de la ecuación (1),

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(-1)(16)}}{2(-1)} \Rightarrow t = \frac{-12 \pm \sqrt{208}}{-2} \Rightarrow t = \frac{-12 \pm 14.42}{-2} \Rightarrow$$

$t_1 = -1.21\,s$ y $t_2 = 13.21\,s$.

De los dos resultados el único que tiene sentido físico es el positivo, porque no existen los tiempos negativos. Entonces sustituyendo $t = 13.21\,s$ en (2):

$X_{cm}= 60Cos60^0t \Rightarrow X_{cm}= 60Cos60^0*13.21 \Rightarrow X_{cm}= 60*0.5*13.21$

$\Rightarrow X_{cm}= 396.3\ m.$

Finalmente sustituyendo este valor en (3):

$396.3 = (750+3X_2)/8 \quad \Rightarrow \quad 3170.4 = 750 + 3X_2 \quad \Rightarrow$

$2420 = 3X_2 \quad \Rightarrow \quad X_2= 806.8\ m,$

y es donde cae el otro fragmento.

III.

A) El resultado es adecuado de acuerdo a lo que se podria esperar cayera la otra partícula, que seria en el extremo derecho del CM, para que este no variara su trayectoria y posición final. La distancia también es coherente, de acuerdo a la masa de la bomba. Para comprobar cuantitativamente se podría calcular el CM con los datos completos con que ya contamos de la cinemática, y compararlo con el calculado mediante la formula.

B) El CM siguió una trayectoria parabólica por que la fuerza exterior al sistema, es la fuerza de gravedad. Por lo tanto, se utilizó las leyes de la cinemática para describir el movimiento del CM del sistema de dos partículas después de su fragmentación Además, se utilizó la formula del CM para relacionar datos e incógnitas. Todas estas condiciones se utilizaron para encontrar las ecuaciones necesarias para resolver el problema.

C) Otra manera de resolverlo, es considerando las fuerzas internas en la explosión y las velocidades como salen despedidas las partículas. Aunque seria muy complicado, si no que imposible de resolver.

Algoritmo para la Conservación del Ímpetu Lineal

I. Comprender el Problema:

A) Haga una descripción pictórica que esclarezca la situación enunciada en el problema, desde que inicia hasta que termina su proceso. Las variables usadas para describir el evento son colocadas en los lugares apropiados del esquema. Es necesario definir un sistema de referencia para la descripción del evento. Para problemas más complejos, su proceso necesita ser dividido en más de una parte.

B) Dibuje un sistema de ejes coordenados que contenga todos los vectores de los momentos antes y después del suceso. Los signos de las componentes de los momentos vectoriales en las ecuaciones deben coincidir con la dirección de sus respectivos componentes del vector velocidad en el esquema. Si algún vector velocidad es una incógnita, entonces debemos escribirla $V= V_x i + V_y j$, y los signos como la magnitud de V_x y V_y saldrán de la solución.

C) Ordene los datos, incógnitas y condiciones del problema en sus respectivas columnas, no olvidándose de etiquetar las incógnitas en auxiliares (IA) y principales (IP).

II. Planteo y Desarrollo de la Solución:

A) Del sistema de ejes coordenados escribimos la conservación del ímpetu para cada **componente**.

B) La conservación de la energía cinética sólo se debe aplicar para las colisiones elásticas. Por ser un **escalar** sus valores son absolutos.

C) De las consideraciones anteriores debemos obtener un sistema de ecuaciones donde su número debe ser igual al de incógnitas para que las podamos resolver. Si no es así, entonces debemos buscar alguna restricción o condición extra que me relacione los datos con las incógnitas en una ecuación. Una vez que sean iguales, entonces ya podremos resolver por cualquier técnica de solución para un sistema de ecuaciones.

III. Revisar el Planteo y Desarrollo de la Solución.

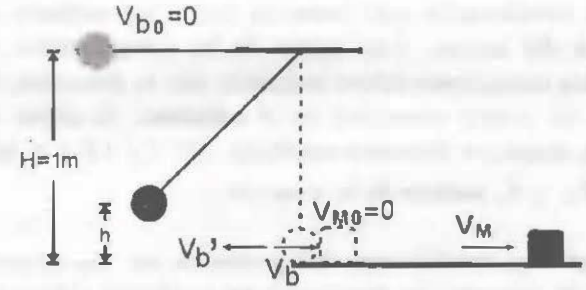
A) Revisar el resultado.
B) Revisar el razonamiento desarrollado.
C) Buscar otras posibles alternativas de solución.

Ejemplos

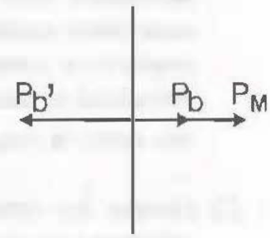
1. Una partícula de masa *1 kg* está suspendida de una cuerda de *2 m* de longitud a una pared y sujeta de manera horizontal. Se suelta y choca elásticamente con un bloque de masa *M* que está sobre una mesa sin fricción. El bloque *M* sale despedido y la partícula retrocede y se vuelve a elevar. ¿ A que altura se eleva dado que:
a) *M=5 kg*; b) *M=800 gr*.

I.

A)



B)



C) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
$m = 1\ kg$	$h \Rightarrow I.\ P.$	choque elástico $\Rightarrow$
$M= 5\ kg$ (o $0.8\ kg$)	$v_b,\ v_b',\ V_M \Rightarrow I.\ A.$	Conservación de la energía.
$l = 2\ m$		Conservación del ímpetu.

II.

La solución de este problema lo dividiremos en dos etapas: la 1ª cuando la partícula se suelta de su posición horizontal y cae hasta su posición mas baja con velocidad v_b, pero poco antes de chocar; la 2ª etapa cuando la partícula choca elásticamente con velocidad v_b contra el bloque y lo impulsa en esta misma dirección con velocidad V_M, mientras que la partícula retrocede con velocidad v_b', hasta alcanzar el reposo momentáneo a una altura *h*, como se ve en la descripción pictórica.

A) y B)

1ª etapa:

Por conservación de la energía sabemos que,

$$mgH=\tfrac{1}{2}mv_b^2 \Rightarrow gH=\tfrac{1}{2}v_b^2 \Rightarrow v_b=\sqrt{2gh} \Rightarrow v_b=\sqrt{2(10)(2)} \Rightarrow v_b=\sqrt{40}\ m/s.$$

2ª etapa:

Por conservación de la energía:

$$\tfrac{1}{2}\,mv_b^2=\tfrac{1}{2}Mv_M^2+mgh \qquad (1)$$

Para la conservación del ímpetu:

$$Mv_b=Mv_M+mv_b' \qquad (2)$$

De los 2 principios de conservación obtuvimos 2 ecuaciones con 3 incógnitas: v_M, v_b' y *h*. Necesitamos otra ecuación que relacione a alguna de estas variables. Para obtenerla, debemos darnos cuenta de que la energía cinética de la partícula después de la colisión es igual a su energía potencial que alcanza cuando retrocede y alcanza su máxima altura *h*:

$$\tfrac{1}{2}mv_b'^2 = mgh \qquad \Rightarrow \qquad h=v_b'^2/2g \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (1):

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_b^2 = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_b'^2 \qquad \Rightarrow \qquad mv_b^2 = Mv_M^2 + m\,v_b'^2$ (4)

D)

Con la ecuación (2) y la (4) ya tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: v_M y v_b'. Vamos a tratar de resolver para una de estas, para luego tratar de usar estos valores para encontrar h de la ecuación (3). Se hace así, porque parece ser el camino mas fácil, ya que de otra manera, tratar de encontrar la solución sustituyendo en (3) directamente, nos llevaría a una ecuación cuadrática en h. Entonces, mejor buscamos un camino alternativo. De la ecuación (2):

$Mv_b = Mv_M + mv_b' \quad \Rightarrow \quad mv_b - mv_b' = Mv_M \quad \Rightarrow \quad m(v_b - v_b') = Mv_M$ (5).

De la ecuación (4):

$mv_b^2 - mv_b'^2 = Mv_M^2 \quad \Rightarrow m(v_b^2 - v_b'^2) = Mv_M^2 \quad \Rightarrow \quad m(v_b + v_b')(v_b - v_b') = Mv_M^2$ (6).

Sustituyendo (5) en (6):

$m(v_b - v_b')(v_b + v_b') = Mv_M^2 \quad \Rightarrow \quad Mv_M(v_b + v_b') = Mv_M^2 \quad \Rightarrow \quad (v_b + v_b') = v_M$ (7).

Sustituyendo (7) en (2):

$mv_b = M(v_m + v_m') + mv_m' \Rightarrow mv_b = Mv_b + Mv_b' + mv_b' \Rightarrow \quad mv_b - Mv_b = mv_b' + Mv_b' \Rightarrow$

$v_b'(m - M) = v_b(m + M) \quad \Rightarrow \quad v_b' = \dfrac{m - M}{m + M} v_b$ (8).

y finalmente v_b' está en función de datos ya conocidos o calculados. Sustituyendo este valor en (3) para obtener h:

$$h = v_b'^2/2g \quad \Rightarrow \quad h = \left(\frac{m - M}{m + M}\right)^2 \frac{v_b^2}{2g}.$$

Ya tenemos a h en función de cantidades conocidas. Entonces resolviendo para el inciso:

a) $M = 5\ kg,\ m = 1\ kg,\ v_b = \sqrt{40}\ m/s$ y $g = 10\ m/s^2$:

$$h = \left(\frac{1-5}{1+5}\right)^2 \frac{\left(\sqrt{40}\right)^2}{2 \times 10} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{8}{9}\ m.$$

Para el inciso b) el único dato que cambia es $M = 0.8\ kg$, por lo tanto:

$$h = \left(\frac{1-0.8}{1+0.8}\right)^2 \frac{\left(\sqrt{40}\right)^2}{2 \times 10} \quad \Rightarrow \quad h = 0.024\ \text{m}.$$

III.

A) La solución que obtuvimos inicialmente para h fue en forma literal. Resulta mas ventajoso resolver un problema, primero de esta manera, hasta encontrar la incógnita en función de las variables cuyos datos conocemos, pero que manejamos con literales por las ventajas que mencionaremos, y solo hasta el final sustituir sus valores. Es mucho mas conveniente resolverlo así, porque el razonamiento se desarrolla de manera mas clara, además nos evita manejar números con fracciones decimales que conlleva mas dificultad de manipular y que nos induce a cometer errores de cálculo. También, con la solución literal podemos verificar nuestro resultado general llevándolo a casos particulares conocidos. De la solución general:

$$h=\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2\frac{v_b^2}{2g}\ .$$

cuando la masa de la lenteja sea igual a la del bloque,

$$m{=}M \Rightarrow\ h=\left(\frac{M-M}{M+M}\right)^2\frac{v_b^2}{2g}\quad\Rightarrow\ h=0,$$

y por tanto, como cabría esperar, por tener masas iguales, todo el ímpetu de la partícula se transmite al bloque, y aquella no retrocede sino que permanece estática y por lo tanto no se eleva. Se puede demostrar que la velocidad de retroceso se anula. De la ecuación (8):

$$v_b'=\frac{m-M}{m+M}v_b\ \Rightarrow\ m{=}M\Rightarrow v_b'=\frac{M-M}{M+M}v_b\quad\Rightarrow v_b'=0.$$

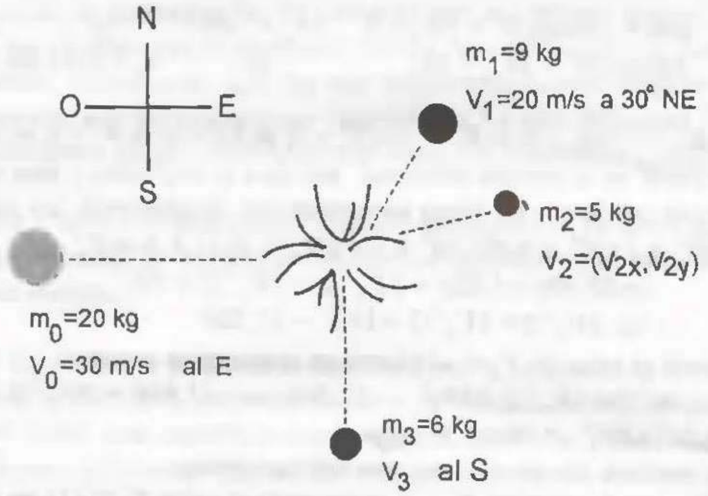
En consecuencia, el resultado cumple con este caso particular y esto hace creíble que el resultado sea correcto.

B) Por ser un problema con colisión elástica, se pudo utilizar además del principio de conservación del ímpetu, la conservación de la energía. Este último fue necesario aplicarlo bien, porque además de la conservación de la energía para el sistema total, fue necesario aplicarlo en el caso particular de la bola, después de la colisión. Sólo así se pudo completar un sistema de ecuaciones igual al de incógnitas. Para la solución de estas ecuaciones fue necesario recurrir a un artilugio válido para evitar llegar a una ecuación cuadrática de h, que se hubiera obtenido si seguimos el camino directo. Se sugiere al lector solucionarlo de esta manera para que se de cuenta de la complejidad de seguir este camino.

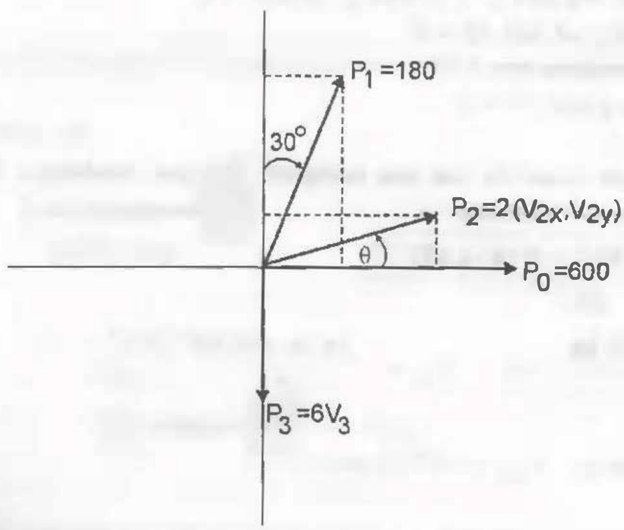
C) Por la dificultad del problema y del fenómeno de colisión en si mismo, si hubiéramos utilizado las leyes de la dinámica en vez de los principios de conservación, sería muy complicado, sino que imposible, de resolver. En principio determinar la fuerza de contacto del choque y con esto calcular las aceleraciones de los cuerpos, para obtener con esto el desplazamiento de la bola. Cómo lo resolvimos fue relativamente fácil hacerlo, y relacionamos de manera directa los datos con las incógnitas. Esta es la gran ventaja que proporciona los principios de conservación. El alumno aprendería mucho si lo intentara resolver de esta otra manera, para efectos de comparación, y aprender a reconocer cuando se debe utilizar uno u otro método.

2. Se lanza una bomba de *20 kg* en dirección hacia el este a *30 m/s* y explota dividiéndose en tres partes: un fragmento de *9 kg* que se mueve a *20 m/s* a 30^0 *NE*, un fragmento de *5 kg* que se mueven una dirección desconocida, y un tercer fragmento de *6 kg* que se mueve hacia el sur pero no se conoce su velocidad. En la explosión además se genera 5×10^4 *J* de energía en forrna de radiación y vibración. ¿Cuál es la velocidad del tercer fragmento? Debemos suponer que todos los movimientos se realizan sobre un plano horizontal.

I. A)



B)



Nos podemos dar cuenta a simple vista de que la posición del vector momentun incógnita no corresponde al eje en que lo colocamos, pero esto no importa ya que la solución del problema nos dará el signo de sus ejes.

D) Datos: Incógnitas: Soluciones:

$m_o=20\ kg$ — $V_{3x}, V_{3y} \Rightarrow I.\ P.$ — Conservación de la energía.

$V_o= 30\ m/s$ — $V_3 \Rightarrow I.\ A.$ — $E_i = E_f$

$m_1=9\ kg$ — Conservación del ímpetu

$V_1=20\ m/s$ a $30^0\ NE$ — $m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_1v_1$

$m_2= 5\ kg$ — o $\Sigma P_i=cte.$

$m_3= 6\ kg$ hacia el sur.

$E = 5x10^4\ J.$

II.

A) ΣP_x: $600 + 180sen30^0 + 5V_{2x}= 0 \quad 5V_{2x}= -690 \quad \Rightarrow \quad V_{2x}= -138\ m/s.$

ΣP_y: $180cos30^0 + 5V_{2y} = 6V_3 \quad \Rightarrow \quad V_3 = (155.88 + 5V_{2y})/6$ (1)

B) $E_i = E_f \quad \Rightarrow \quad ½\ m_oV_o^2 + 5\times10^4 = ½\ m_1V_1^2 + ½\ m_2V_2^2 + ½\ m_3V_3^2$

Donde 5×10^4 es la energía adicional debida a la explosión y esta se libera por fuerzas internas, por lo que no altera su momentum. Sustituyendo los datos:

$½*20(30)^2 + 5\times10^4 = ½*9(20)^2 + ½*5(V_{2x}^2+ V_{2y}^2) + ½*6V_3^2$

$\Rightarrow 59{,}000 = 1{,}800 + 5V_{2x}^2/2 + 5V_{2y}^2/2 + 3V_3^2$

$\Rightarrow 5V_{2x}^2/2+ 5V_{2y}^2/2 +3V_3^2 = 57{,}200$

sustituyendo el valor de $V_{2x}= -138$ m/s en la ecuación anterior:

$\Rightarrow 5(-138)^2/2+ 5V_{2y}^2/2 +3V_3^2 = 57{,}200 \Rightarrow 47{,}610 + 5V_{2y}^2/2 +3V_3^2 = 57{,}200$

$\Rightarrow \quad 5V_{2y}^2/2 +3V_3^2 -9{,}590 = 0$ (2).

D) Y ya tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ahora debemos determinar V_{2y} . Sustituyendo el valor V_3 de (1) en (2):

$5V_{2y}^2/2 + 3\{(155.88 + 5V_{2y})/6\}^2 -9{,}590 = 0$

$\Rightarrow 5V_{2y}^2/2 + (1/12)(155.88^2+25V_{2y}^2+1{,}558.8V_{2y}) -9{,}590 = 0$

$\Rightarrow 2.5V_{2y}^2 + 2{,}024.88 + 2.08V_{2y}^2 + 129.9V_{2y} -9{,}590 = 0$

$\Rightarrow 4.58V_{2y}^2 + 129.9V_{2y} -7{,}565.12 = 0$

dividiendo ambos miembros por 4.58:

$\Rightarrow V_{2y}^2 + 28.36V_{2y} - 1{,}651.77 = 0.$

Finalmente tenemos una ecuación con una incógnita, aunque cuadrática. Utilizando la formula para encontrar sus raices:

$$V_{2y} = \frac{-28.36 \pm \sqrt{(28.36)^2 - 4(1)(-1{,}651.77)}}{2(1)}$$

$$V_{2y} = \frac{-28.36 \pm \sqrt{7{,}411.36}}{2} \quad \Rightarrow \quad V_{2y} = \frac{-28.36 \pm 86.08}{2}$$

$$\Rightarrow \quad V_{2y_1} = 28.86\ m/s \ \text{ y } \ V_{2y_2} = -57.22\ m/s.$$

Ahora el problema es saber cual de los dos resultados es la velocidad que nos da la solución correcta. Del diagrama de los momentos podemos darnos cuenta que la dirección del vector momento para que exista su conservación, debe estar sobre el cuadrante negativo. Por lo tanto, la velocidad del tercer fragmento debe ser:

$$V_2 = (-138,-57.22).$$

III.

A) Para comprobar esta solución podríamos verificar la conservación del momentum y la energía con los datos ya obtenidos. Otra forma hubiera sido calcular nuestra solución de forma literal y llevarla a casos particulares para ver si corresponden.

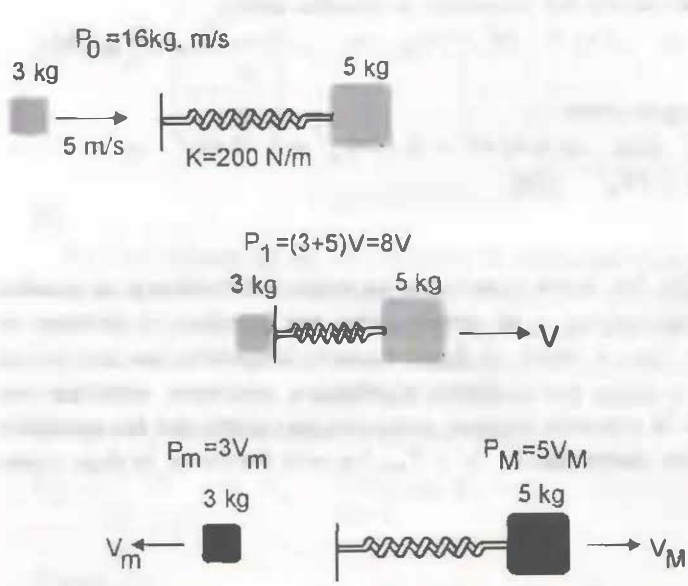
B) Aplicando bien los principios de conservación no hubo dificultad en obtener el sistema de ecuaciones. Las principal dificultad fue no confundir la energía liberada por la explosión como un producto final de la energía cinética inicial, sino mas bien considerar la energía inicial como la suma de la cinética de su velocidad inicial mas la potencial liberada de la explosión. Es como si hubiera habido pequeños resortes comprimidos y que después del movimiento inicial liberan su energía potencial, como energía cinética, permitiendo que los tres fragmentos salgan despedidos en tres direcciones diferentes con sus respectivas velocidades. La otra dificultad fue resolver el sistema de ecuaciones ya que obtuvimos una ecuación cuadrática.

C) Este problema también se pudo haber resuelto utilizando la formula del centro de masa, ya que la explosión de la bomba son fuerzas internas y por tanto no afecta su trayectoria como sistema.

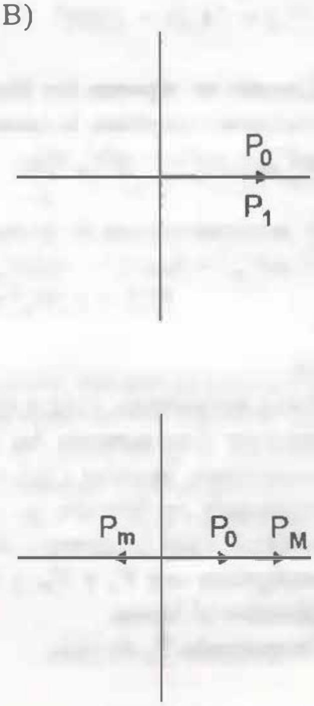
3. Un bloque de *3 kg* se mueve a una velocidad de *5 m/s* y se aproxima a un resorte de constante de rigidez *k=200 N/m* que está unido a un bloque en reposo de *5 kg*. Los bloques se deslizan sobre una superficie sin fricción. Calcule: a) ¿Cuál es la máxima compresión que alcanza el resorte? b) ¿cuáles son las velocidades finales para ambos bloques?

I.

A)



B)



Como se muestra en la descripción pictórica, un bloque en movimiento se aproxima a otro bloque que se encuentra estático y en cuyo extremo tiene sujeto un resorte. Entonces cuando el primer bloque colisiona con el segundo, comienza a comprimir el resorte, y éste a su vez mueve al bloque al que se halla sujeto y que incrementa su velocidad hasta que el resorte alcanza su compresión máxima. En este momento ambos bloques llevan la misma velocidad y es por esto que ya no se comprime mas. El estado inicial y final, son los estados que queremos analizar porque buscamos la compresión máxima. A partir de aquí la energía acumulada en el resorte se distribuye entre los dos bloques conforme se empieza a descomprimir, modificando sus velocidades, en el de $3\ kg$ frenándolo y cambiando la dirección de su movimiento, y en el de $5\ kg$ acelerándolo, separándolos de tal manera que finalizan viajando a velocidades diferentes y en direcciones opuestas.

C) Datos:

$M=5\ kg$
$V_{M0}=0$
$m = 3\ kg$
$V_{m0}= 5\ m/s$
$k = 200\ N/m$

Incógnitas:

$X,\ V_m,\ V_M \Rightarrow I.\ P.$
$V \Rightarrow I.\ A.$

Condiciones:

Conservación del momento:
$\sum P_x = cte.$
Conservación de la energía:
$K_i + U_i = K_f + U_f$

II.

A) y B) Para el instante que alcanza su máxima compresión y viajan a la misma velocidad, la conservación del momento se escribe como:

$m V_{m0}=(m+M)V \quad \Rightarrow \quad 3*5 = (3+5)V \quad \Rightarrow \quad 15 = 8V \quad \Rightarrow \quad V = 15/8\ m/s.$

Y para la conservación de la energía:

$\frac{1}{2}\, mV_{m0}^2 = \frac{1}{2}\,(m+M)V^2 + \frac{1}{2}kX^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}*3*5^2 = \frac{1}{2}\,(3+5)*(15/8)^2 + \frac{1}{2}*200*X^2 \quad \Rightarrow$
$37.5 = 14.06 + 200X^2 \quad \Rightarrow \quad X^2 = 23.43/200 \quad \Rightarrow \quad X = 0.11\ m.$

Cuando se separan los bloques y avanzan a diferentes velocidades constante en direcciones opuestas, la conservación del momento se escribe como:

$m V_{m0} = m Vm + MV_M$ (1a) $\quad \Rightarrow \quad 3*5 = -3V_m + 5V_M \quad \Rightarrow \quad 15= -3V_m+5V_M$ (1b)

Y la conservación de la energía como:

$\frac{1}{2}\, m V_{m0}^2 = \frac{1}{2}m V_m^2 + \frac{1}{2}MV_M^2$ (2a) $\Rightarrow \frac{1}{2}*3*5^2 = \frac{1}{2}*3*V_m^2 + \frac{1}{2}*5*V_M^2 \quad \Rightarrow$
$37.5 = 1.5V_m^2 + 2.5V_M^2$ (2b)

D)

Estas ecuaciones, (1b) y (2b), los datos numéricos ya están sustituidos y se pueden resolver directamente las incógnitas; o se puede optar por resolver el sistema de ecuaciones literales (1a) y (2a), y hasta al final, cuando tengamos las incógnitas expresada en función de los datos en su forma algebraica, entonces sustituir sus valores. Aquí lo haremos de la segunda manera, tomando en cuenta que las variables incógnitas son V_m y V_M, y los datos son m, M y V_{m0}. La otra forma se le deja como ejercicio al lector.

Despejando V_m de (1a),

$m V_{m0} = m V_m + M V_M \quad \Rightarrow \quad V_m = V_{m0} - (M/m) V_M$ (3)

Sustituyendo (3) en la ecuación (2a):

$\frac{1}{2} mV_{m0}^2 = \frac{1}{2}m\{ V_{m0} - (M/m)V_M \}^2 + \frac{1}{2}MV_M^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} mV_{m0}^2 = \frac{1}{2}m\{ V_{m0}^2 + (M/m)^2 V_M^2 - 2(M/m)V_M V_{m0} \} + \frac{1}{2}MV_M^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} mV_{m0}^2 = \frac{1}{2}mV_{m0}^2 + (M^2/2m)V_M^2 - MV_M V_{m0} + \frac{1}{2}MV_M^2$

Eliminando términos semejantes y factorizando:

$$0 = (M^2/2m)V_M^2 - MV_M V_{m0} + \tfrac{1}{2}MV_M^2 \quad \Rightarrow \quad MV_M\{(M/2m)V_M - V_{m0} + \tfrac{1}{2}V_M\} = 0$$

Como sabemos, M ni V_M son cero, entonces la expresión entre corchetes es cero:

$\{(M/2m)V_M - V_{m0} + \frac{1}{2}V_M\} = 0$, despejando $V_M \Rightarrow \quad \frac{1}{2}V_M\{(M/m)+1\} = V_{m0}$

$$\Rightarrow \quad V_M = \frac{2V_{m0}}{\frac{M}{m}+1} \quad (4),$$

y ya tenemos la velocidad del bloque grande en función de datos conocidos Sustitu-. yendo V_M de (4) en (3) para encontrar la velocidad del otro bloque:

$$V_m = V_{m0} - (M/m)V_M \Rightarrow V_m = V_{m0} - \frac{M}{m}\left(\frac{2V_{m0}}{\frac{M}{m}+1}\right) \Rightarrow V_m = V_{m0} - \left(\frac{2V_{m0}}{1+\frac{m}{M}}\right) \quad (5)$$

Y también esta velocidad la tenemos expresada en función de los datos conocidos. Sustituyendo los datos para V_M:

$$V_M = \frac{2V_{m0}}{\frac{M}{m}+1} \Rightarrow V_M = \frac{3\times 5}{\frac{5}{3}+1} \Rightarrow V_M = 5.62 \ m/s.$$

Y para V_m en (5):

$$V_m = V_{m0} - \left(\frac{2V_{m0}}{1+\frac{m}{M}}\right) \Rightarrow V_m = 5 - \left(\frac{3\times 5}{1+\frac{3}{5}}\right) \Rightarrow V_m = 5 - \frac{75}{8} \Rightarrow V_m = -4.375 \ m/s.$$

III.

A) Los valores de las velocidades de retroceso calculadas son por lo menos coherentes, caen dentro de lo razonable, ya que por ejemplo, estas no son mayores que la velocidad inicial V_{m0} como cabria esperar de acuerdo al principio de conservación del momento. También, como hicimos en un problema anterior, podemos reducir los resultados analíticos a casos particulares. Por ejemplo, para V_M, si M es mucho mayor que m, o que la masa m es casi nula:

$$V_M = \frac{2V_{m0}}{\frac{M}{m}+1} \Rightarrow V_M = \frac{2V_{m0}}{\infty+1} \Rightarrow V_M = 0.$$

Y para V_m:

$$V_m = V_{m0} - \left(\frac{2V_{m0}}{1+\frac{m}{M}} \right) \Rightarrow V_m = V_{m0} - \left(\frac{2V_{m0}}{1+0} \right) \Rightarrow V_m = V_{m0} - 2V_{m0} \Rightarrow V_m = -V_{m0}.$$

Ambos resultados para los casos particulares son correctos, ya que para una gran masa de M en comparación de m, el choque de esta última con la primera no le causa ningún movimiento a M, y la masa m sale despedida con la velocidad con que llegó en la dirección opuesta. Por lo tanto esto es indicativo de que la solución del problema es correcta.

B) Requirió un análisis completo de la conservación del momentun del sistema de las 2 partículas y también de su energía, porque actúan fuerzas conservativas. Para obtener el sistema de ecuaciones fue resultado directo de aplicar estos principios. El problema se resolvió de manera analítica por que, como ya habíamos dicho, sirve como forma de comprobación al someter las soluciones a casos particulares ya conocidos u obvios de suponer. También por la elegancia de la obtención del resultado y por que se pueden evitar cometer errores en el manejo numérico.

C) Para este tipo de problemas resultaría muy complicado tratar de resolverlo de otra manera, como podría ser el análisis de fuerzas y las leyes de Newton. Resolverlo de esta manera sería muy complejo y no habría garantía de obtener una respuesta correcta. Por ejemplo, como saber con que fuerza impacta el bloque en el resorte es difícil, ya que esto involucra a una variación de su momento que es muy complicado determinar. Nuestro sistema de referencia lo tendríamos que colocar sobre el bloque que lleva el resorte lo que complicaría mas todo. Por eso es muy ventajoso utilizar los principios de conservación.

Algoritmo de Dinámica Rotacional, Ímpetu Angular y Estática

I. Comprender el Problema

A) Haga un esquema, que describa la situación enunciada de manera verbal o escrita del problema, considerando todo el proceso. Las variables y datos son colocadas en los lugares apropiados del esquema. Para problemas más complejos, su proceso necesita ser dividido en más de una parte.

B) Identifique el cuerpo del que va a considerar su dinámica, y todas las fuerzas externas que actúan sobre el. Para determinar la dirección de la fuerza de fricción basta con suponer que pasaria si no hubiera fricción, ya que sabemos que esta fuerza surge como oposición al movimiento de dos cuerpos en contacto.

C) Dibuje un sistema de ejes coordenado donde su centro esté en el cuerpo, e incluya en el todas las fuerzas y la dirección en la que actúan.

D) Para la evaluación de las torcas es importante saber elegir un eje que me simplifique el problema. El sentido positivo de la torca se define en el sentido anti-horario y se representa con una flecha circular: + ↺. Muchas veces, pero no siempre, es conveniente colocar el eje en el centro o eje de simetría del cuerpo. También, una forma de reducir el número de incógnitas es colocando el eje en el punto de aplicación de alguna de las fuerzas, ya que entonces su torca es cero, y esto puede simplificar el problema.

E) Ordene en sus respectivas columnas los datos, incógnitas y condiciones del problema.

II. Planteo y Desarrollo de la Solución

A) Si el sistema se encuentra en equilibrio (con fuerza externa y torca resultante nula), escribir las condiciones para el equilibrio:

$\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma F_z = 0$; $\Sigma\tau = 0$.

Se puede aplicar la condición $\Sigma\tau=0$ más de una vez alrededor de diferentes ejes. Si el sistema no se encuentra en equilibrio, entonces aplique las ecuaciones de la dinámica traslacional y rotacional:

$\Sigma F = ma$; $\Sigma\tau = I\alpha$.

B) Cuando $\Sigma\tau_{ext}=0$, y el sistema se mueve con velocidad angular ω, entonces podremos usar la conservación del momento angular $L=I\omega$, para formular nuestro sistema de ecuaciones.

C) Si las fuerzas que actúan en el sistema son conservativas, entonces podremos usar los principios de conservación de la energía cinética y rotacional.

D) En cualquiera de los casos, para poder resolver el problema el número de incógnitas deberá ser igual al número de ecuaciones independientes.

III. Revisar el Planteo y Desarrollo de la Solución.

A) Revisar el resultado.

B) Revisar el razonamiento desarrollado.

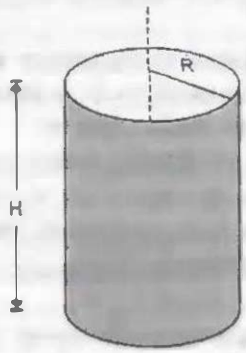
C) Buscar otra alternativa de solución.

Ejemplos de Dinámica Rotacional

1. Calcular el momento de inercia (MI) de una lata hecha de hoja metálica de una densidad de masa superficial ρ kg/m, respecto al eje central de simetría. La forma de la lata es de un cilindro hueco de radio R y altura H, con sus extremos cerrados.

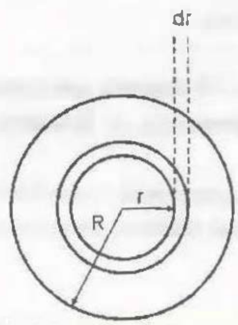
I. Para resolver este problema solo se necesita calculár su MI, por lo que no es necesario utilizar todos los pasos del algoritmo, sólo debemos aplicar bien la formula del MI.

A)



E) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
Cilindro:	$I \Rightarrow I.\ P.$	$I = \int r^2 dm$
$r=R$ y H		
ρ *kg/m*		

II. En este paso solo tenemos que aplicar la formula para el momento de inercia. Para hacerlo, dividiremos en partes su cálculo: primero el MI de las tapas y luego la de las superficies de la lata. La inercia total se obtendrá sumando ambas cantidades. Como se muestra en la figura, el elemento de masa apropiado para calcular la MI de las tapas, es un anillo circular de radio r y ancho dr. Su área es $dA=2\pi r dr$ y su masa es $dm=\rho dA$ donde $\sigma=m/A$ es la densidad de masa superficial, m su masa y A su area.

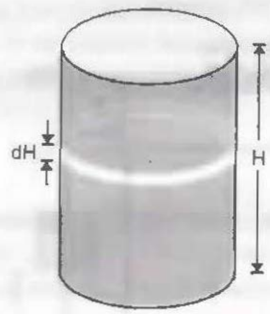


Entonces, el momento de inercia de este elemento es:

$dI= r^2dm$, sustituyendo el elemento de masa dm e integrando $\Rightarrow I_t = \int r^2(\rho 2\pi r dr)$

$$\Rightarrow I_t = 2\pi\rho\int r^3 dr \quad \Rightarrow I_t = 2\pi\rho\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^R \quad \Rightarrow I_t = \frac{2\pi\rho R^4}{4} \quad \Rightarrow I_t = \frac{\pi\rho R^4}{2}.$$

Ahora calcularemos el MI de la cara de la lata:



El elemento de masa es un anillo circular de radio R y altura dH. Su área superficial es $dA=2\pi RdH$ y su masa es $dm = \rho dA$ donde $\rho = m/A$ es la densidad superficial. Por lo tanto, el momento superficial es:

$$I_s = \int r^2 dm \quad \Rightarrow \quad I_s = \int R^2(\rho 2\pi RdH) \Rightarrow \quad I_s = 2\pi\rho R^3\int_0^H dH \Rightarrow I_s = 2\pi\rho R^3[H]_0^H$$

$$\Rightarrow I_s = 2\pi\rho R^3 H.$$

Entonces el MI de todo la lata estará dado por $I= 2I_t + I_s$, donde el momento de las tapas se multiplica por 2 por las 2 tapas. Por tanto, sustituyendo los valores de sus MI calculados:

$$I = 2\left(\frac{\pi\rho R^4}{2}\right) + 2\pi\rho R^3 H \quad \Rightarrow \quad I = \pi\rho R^3(R+2H).$$

III.

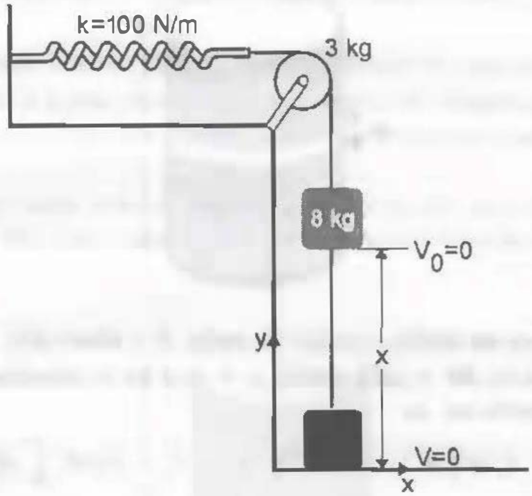
A) El resultado se puede verificar llevando sus variables a casos particulares. Por ejemplo, si suponemos que h es cero, el momento de inercia se transforma en $I=\pi\sigma R^4$, que es el momento de inercia del disco con 2 tapas, como debía de ser. O si el radio $R=0$ entonces $I=0$ como sería de esperar, ya que toda la masa se concentra en el eje y por tanto no existe MI.

B) La solución aquí, mas que problema es un ejercicio básico para calcular el MI que son necesarios en la resolución de problemas. No representa ninguna dificultad cuando se aplica bien la fórmula.

C) Cuando se conocen los momentos de inercia de las partes del cilindro, solo es cuestión de sumar las partes. O cuando no existe la simetría de este caso, es necesario realizar una traslación en los ejes, y que se explica en cualquier libro de física universitaria.

2. En un sistema físico un resorte con rigidez constante de *100 N/m*. en posición horizontal está unido a una cuerda que pasa por una polea, de *3 kg* de masa y *10 cm* de radio, y en cuyo extremo vertical inferior sostiene un bloque de *8 kg*. Suponga a la polea como un disco. Calcular: a) El alargamiento máximo del resorte si el bloque se deja caer a partir del reposo, b)¿cuál será la velocidad del bloque cuando cae *60 cm*?

A)



B) Como en el sistema las fuerzas que actúan son conservativas y no se nos piden calcular fuerzas sino el alargamiento del resorte, no será necesario hacer un análisis de fuerza, y por lo tanto sólo se utilizará las leyes de conservación de la energía cinética y rotacional.

C) El sistema de coordenadas y eje de referencia se colocará al nivel donde el resorte alcanza su máxima elongación y el bloque se detiene. Esto nos ahorrará incluir mas variables.

D) No será necesario considerar la dirección de las torcas ya que usaremos sólo consideraciones energéticas.

E) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
$k = 100\ N/m$	$X,\ V \Rightarrow I.\ P.$	Conservación de la energía
$m_p = 3\ kg$		Cinética y Rotacional.
$R = 0.1\ m$		
$m_b = 8\ kg$		
$V_0 = 0$		
$X = 0.6\ m$		

II.

Para empezar, calcularemos el MI de la polea la cual se considera como un disco. Entonces, $I = \dfrac{\pi\sigma R^4}{2}$, donde $\sigma = \dfrac{m_p}{A} = \dfrac{m_p}{\pi R^2}$, sustituyendo $\Rightarrow$ $I = \dfrac{\pi m_p R^4}{2(\pi R^2)}$ $\Rightarrow$

$I = \dfrac{m_p R^2}{2}$, ahora sustituyendo los datos $\Rightarrow$ $I = \dfrac{3(0.1)^2}{2}$ $\Rightarrow$ $I = 0.015\ kg{\cdot}m^2$

C)

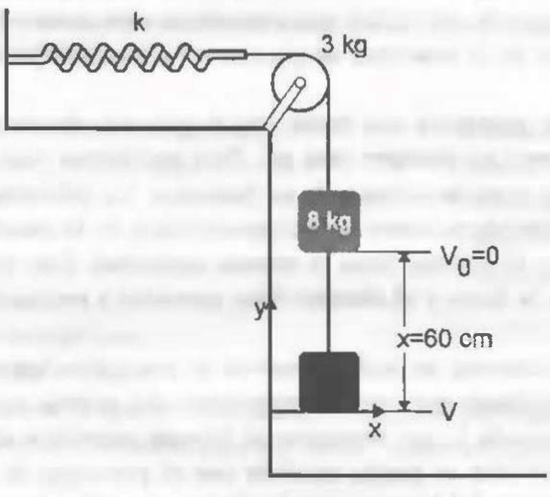
a) Antes de comenzar a descender el bloque, la energía de este es totalmente potencial, de acuerdo al sistema de referencia que elegimos. Cuando el bloque comienza a descender, su energía inicial se transforma en elástica del resorte, cinética del bloque y rotacional de la polea. Hasta que el resorte alcanza su máxima elongación, el bloque se detiene y alcanza su máximo descenso posible. En este momento toda su energía potencial gravitacional inicial se transformó en potencial elástica del resorte. Por tanto, por conservación de la energía, igualamos la de su estado inicial a la de su estado final, por que así nos conviene ya que en estos dos estados tenemos nuestra incógnita y los datos:

$$m_b g X_m = \tfrac{1}{2}kX_m^{\,2} \quad \Rightarrow \quad m_b g = \tfrac{1}{2}kX_m \quad \Rightarrow \quad X_m = 2m_b g/k$$

donde X_m es la longitud que desciende el bloque pero también la elongación máxima del resorte debido a que la cuerda que sostiene al bloque es inextensible, es decir no se alarga con el esfuerzo y se transmite al resorte. Sustituyendo los datos:

$X_m = 2*8*10/100 \Rightarrow X_m = 1.6\ m.$

b)



Como el bloque en su descenso se detiene hasta que cae *1.6 m*, al llegar al nivel *0.6 m*, el bloque se encuentra en movimiento y la polea girando por lo que la energía involucra mas términos, a diferencia del primer caso. El sistema de referencia lo colocaremos a este nivel, porque como en el caso anterior, aquí conviene mas ya que nos evita definir una nueva variable, lo que complicaría mas su solución. Por lo tanto:

$$m_b g X = \tfrac{1}{2}kX^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}m_b V^2 \quad (1),$$

donde ω es la velocidad angular de la polea y V la velocidad lineal del bloque. Como comentamos antes, la cuerda no se alarga y por tanto la velocidad de la cuerda es la misma que la del bloque y esta transmite su velocidad a la polea porque consideramos que no hay corrimiento, por lo tanto podemos relacionar V con ω con:

$$V = R\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = V/R \quad (2).$$

Entonces ya tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, V y ω, y podemos resolver. Sustituyendo (2) en (1):

$$m_b g X = \tfrac{1}{2}kX^2 + \tfrac{1}{2}I(V/R)^2 + \tfrac{1}{2}m_b V^2 \quad \Rightarrow \quad m_b g X = \tfrac{1}{2}kX^2 + \tfrac{1}{2}IV^2/R^2 + \tfrac{1}{2}m_b V^2 \quad (3)$$

Finalmente sustituyendo los datos:

$8*10*0.6 = \frac{1}{2}*100*(0.6)^2 + \frac{1}{2}*(0.015)\,V^2/(0.1)^2 + \frac{1}{2}*8V^2$

$48 = 18 + 0.75V^2 + 4V^2 \Rightarrow 30 = 4.75V^2 \Rightarrow V^2 = 6.31 \Rightarrow V = 2.5\ m/s.$

III.

A) Ahora debemos verificar lo correcto de este resultado. Para esto expresaremos la velocidad del bloque V en función de las otras variables. Despejando V^2 de (3), entonces tenemos que:

$$m_b gX - \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}V^2(I/R^2 + m_b) \Rightarrow V^2 = 2(m_b gX - \frac{1}{2}kX^2)/(I/R^2 + m_b) \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{\frac{2(m_b gX - \frac{kX^2}{2})}{\frac{I}{R^2} + m_b}},$$

por lo tanto, si la masa del bloque es 0, el valor obtenemos bajo la raíz cuadrada es un número negativo, y la raíz de un número negativo es una cantidad imaginaria que para nuestro caso no tiene ningún significado físico. Entonces físicamente no puede existir ninguna velocidad en el sistema porque no existe un bloque que ejerza una fuerza sobre el sistema y que pueda originar movimiento en la cuerda, la polea y el resorte. Este caso límite y el hecho de que la velocidad que obtuvimos esté dentro de lo que se podría esperar, es un indicativo de la exactitud de nuestra solución, aunque no una prueba.

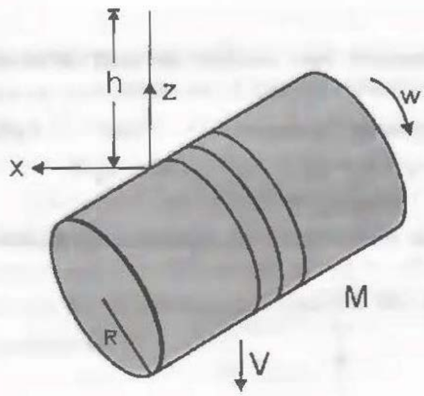
B) Para resolver este problema nos bastó con hacer consideraciones energéticas y fue relativamente fácil, pero no siempre será así. Para problemas mas complicados será necesario hacer también consideraciones de su dinámica. La dificultad de resolverlo radicó básicamente en las consideraciones de inextensibilidad de la cuerda y el no corrimiento en la polea con lo que el sistema tiene la misma velocidad. Este tipo de aproximaciones son muy comunes en la física y el alumno debe aprender a realizarlas.

C) Este problema igualmente se podría resolver de consideraciones dinámicas de la mecánica rotacional calculando para cual alargamiento del resorte se cumple que la fuerza que ejerce sobre la cuerda y que transmite al bloque, equilibra al peso de este último. En cuanto al inciso b) sólo se puede resolver con el principio de conservación, ya que este incluye la velocidad del bloque; con la dinámica seria mas complicado ya que las fuerzas que actúan son variables con la posición y aquí sólo se estudian las fuerzas constantes.

3. Tenemos un cilindro sólido de masa M y radio R, y se encuentra enrollado alrededor de el, en su centro por una cuerda vertical atada a la pared y que lo mantienen horizontal. Si se le deja caer desde el reposo, de manera que caiga desenrollándose, calcule:
a) La velocidad del cilindro cuando cae una altura H, aplicando el enfoque energético.
b) Utilizando el resultado del inciso anterior, calcular la aceleración lineal del centro de masa (CM). c) La aceleración lineal del cilindro, pero aplicando la dinámica. d) La tensión de la cuerda. e) La fuerza con que debe jalarse la cuerda para que el cilindro sólo gire y no caiga, y cuál es su aceleración lineal para este caso.

I.

A)



B) El cuerpo que se estudiará es el cilindro. Las fuerzas que actúan sobre el son su peso y la tensión de la cuerda, tal como se muestra en el diagrama pictórico.

C) El sistema de coordenadas (referencia), su origen, se coloca a la distancia h a la que cae desde la pared. Las fuerzas están sobre el eje vertical, y por tanto no tienen componentes sobre el eje horizontal.

D) El eje para considerar las torcas se situará en el eje de simetría del cilindro y por tanto se moverá junto con el.

E) Datos:

Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
M	$V, a, \alpha, T, F \Rightarrow I.\ P.$	Fuerzas conservativas:
V		Conservación de su energía
$I = \frac{1}{2}MR^2$		cinética y rotacional.
H		Dinámica Rotacional.

II. a)

C) Por consideraciones energéticas:

a) $Mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ (1),

donde V es la velocidad con la que se desenrolla el cilindro, pero también de su CM. Y suponiendo que el hilo es inextensible y no se "barre" sobre el cilindro, entonces podemos escribir, $\omega = V/R$ (2).

Sustituyendo (2) en (1) y el valor del MI:

$$MgH = \tfrac{1}{2}MV^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}MR^2)(V/R)^2 \quad \Rightarrow \quad MgH = \tfrac{1}{2}MV^2 + \tfrac{1}{4}MV^2$$

$$MgH = \tfrac{3}{4}MV^2 \quad \Rightarrow \quad V^2 = 4gh/3 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{4gh}{3}}.$$

b) La aceleración lineal a es la aceleración del CM del cilindro. Para hacer este cálculo debemos usar la velocidad V del inciso anterior, además de los datos dados y las ecuaciones de la cinemática:

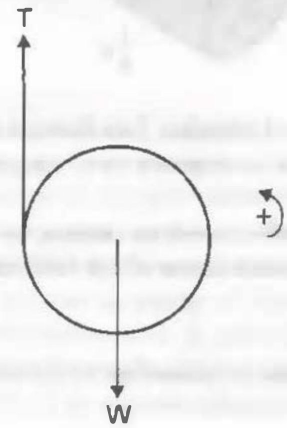
I.

A)

Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
$Y_0 = H$	$a \Rightarrow I.\ P.$	Las ecuaciones de la cinemática
$Y = 0$		traslacional.
$V_0 = 0$		
$V = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$		

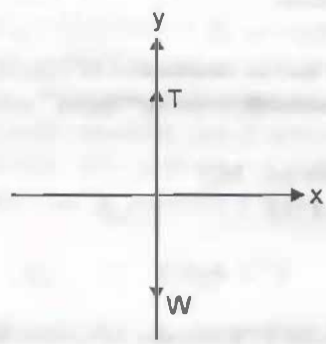
II.
A) La ecuación de la cinemática más factible de usar de acuerdo a nuestros datos e incógnita es:
$V^2 = V_0^2+2a(Y-Y_0)$, sustituyendo los datos $\Rightarrow$ $4gH/3 = 0^2+2a(0-H)$
$\Rightarrow$ $4gH/3 = 2aH$ $\Rightarrow 4g/3 = 2a$ $\Rightarrow$ $a = 4g/6$ $\Rightarrow$ $a = 2g/3\ m/s^2$

c) En este inciso se nos pide encontrar esta misma aceleración lineal pero ahora aplicando la dinámica:
I. A)



B) El cuerpo que se analizará será el cilindro con las fuerzas tal como se mostró en un inicio.

C) El sistema de coordenadas lo ubicaremos en el centro de simetría del cilindro y con el eje y paralelo a la cuerda. A continuación se muestra el diagrama de cuerpo libre:



D) El eje para las torcas será como habíamos dicho, el eje de simetría del cilindro, y el sentido positivo será el antihorario como habíamos convenido. El peso del cilindro no produce torca porque pasa por el eje.

E) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
R	$a \Rightarrow I.\ P.$	Usar las leyes de la Dinámica
$W=mg$	$\alpha,\ T \Rightarrow I.\ A.$	lineal y rotacional.

II.
A) De la 2ª ley de Newton para el movimiento angular:

$\tau = I\alpha$ (1).

La τ la calcularemos de la dinámica: como la cuerda pasa tangencialmente por la polea, y como el peso de la polea se concentra en el centro, entonces la torca que se produce en el cilindro es debido sólo a la cuerda: $\tau = -TR$. Sustituyendo este y el valor de I de la polea en (1):

$-TR = ½MR^2\alpha \quad \Rightarrow \quad T = -½MR\alpha$ (2).

La aceleración lineal se relaciona con la angular por $a = -R\alpha$, aquí a es negativa porque según el diagrama, se dirige en la dirección negativa del eje y, por lo tanto podemos despejar α, $\alpha = -a/R$, y sustituir en (2):

$T = -½MR(-a/R) \quad \Rightarrow \quad T = ½Ma$ (3).

En esta ecuación tenemos 2 incógnitas, a y T, y por tanto no podemos resolver para a. Necesitamos otra ecuación, y la obtendremos de la 2ª ley de Newton para el movimiento lineal. Del diagrama de cuerpo libre:

$F = ma \quad \Rightarrow \quad T - Mg = M(-a) \quad \Rightarrow \quad T - Mg = -Ma$ (4);

ahora sí, tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas y ya podemos resolver para a. Sustituyendo T de (3) en (4):

$\Rightarrow ½Ma - Mg = -Ma \quad \Rightarrow \quad Mg = Ma + ½\,Ma \quad \Rightarrow \quad Mg = 3/2\,Ma \quad \Rightarrow \quad a = 2g/3$,

que concuerda con el resultado que obtuvimos utilizando el método energético.

d) La tensión se puede calcular sustituyendo el valor de a en (3):

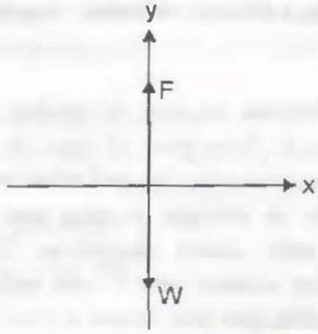
$T = ½M(2g/3) \quad \Rightarrow \quad T = Mg/3$.

e) Finalmente debemos calcular la fuerza F necesaria para que el cilindro sólo gire y no caiga, y su aceleración lineal para este caso.

I.

B) como en el caso de el inciso c), tenemos la misma situación, salvo que ahora se le aplica una fuerza F para hacer que el cilindro gire a la suficiente velocidad para impedir que caiga.

C) El sistema de coordenadas es análogo al del inciso c), en el centro de simetría, y se indican todas las fuerzas:



D) El eje para evaluación de las torcas, de igual manera, será el eje que pasa en el centro de simetria del cilindro y tendrá valor positivo para el sentido antihorario. El peso del cilindro pasa por el eje y no produce torca.

E) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
M	$\alpha, F \Rightarrow I.\ P.$	Las leyes de la dinámica
R		El cilindro gire sin caer.
$I = \frac{1}{2}MR^2$		

II.

A) Sabemos que $\tau = I\alpha \quad \Rightarrow \quad -FR = \frac{1}{2}MR^2\alpha \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{1}{2}MR\alpha$ (1).
Tenemos entonces una ecuación con dos incógnitas, F y α, por lo tanto necesitamos otra ecuación. De la dinámica traslacional:

$F = Ma \quad \Rightarrow \quad F - Mg = Ma,$

pero como tenemos la condición de que el cilindro no caiga sino que tan solo gire, entonces se debe cumplir que:

$a = 0 \quad \Rightarrow \quad F - Mg = M*0 \quad \Rightarrow \quad F - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F = Mg$ (2).

Y sustituyendo (2) en (1):

$Mg = -\frac{1}{2}MR\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2g/R$, esta es la aceleración de giro que produce una fuerza $F = Mg$ y que impide que el cilindro caiga.

III.

A) Por ser expresiones literales lo que obtuvimos como resultado, podemos comprobar fácilmente estos resultados llevándolos a casos particulares. Por ejemplo la velocidad después de caer H es $V = \sqrt{\frac{4gH}{3}}$. Si H es igual a cero, lo que significa que no cayó, entonces $V = 0$ como debe de ser. Otro ejemplo, la tensión de la cuerda es $T = \frac{Mg}{3}$, pero si el peso del cilindro se desvanece, o sea $M=0$, entonces la tensión también es cero como cabría esperar. Por lo tanto los resultados son confiables.

B) Aplicando de manera correcta los algoritmos, llegar a las soluciones fue relativamente fácil. Aunque por el enfoque energético fue mas simple y sin ninguna complicación. Cuando se realizan de manera correcta cada paso del algoritmo, como hacer una descripción pictórica correcta, identificar las fuerzas que actúan en mi sistema, definir un sistema de referencia adecuado, etcétera, entonces nos aproximamos cada vez a la solución correcta del problema.

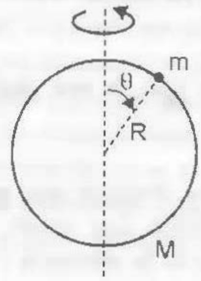
C) Aquí se mostró las dos formas en que se podria solucionar este problema para cuando se nos pidió encontrar V. Pero para el caso de encontrar T y F, estas sólo se podrían calcular por el enfoque dinámico, ya que estas variables no están incluidas en el principio de conservación de la energía, porque son conceptos de la dinámica. Es importante tener en cuente esto, saber identificar las fuerzas conservativas y las variables dinámicas, para poder utilizar uno u otro enfoque cuando sea indicado y no incurrir en errores de apreciación que nos lleven a resolver el problema de una manera equivocada.

Ejemplos de Ímpetu Angular y Estática

1. Una cuenta de masa $m = 0.5\ kg$ se desplaza libremente y sin fricción a lo largo de un anillo delgado de masa $M = 6\ kg$ y radio $R = 0.8\ m$ y que gira respecto a un eje que pasa por su diámetro vertical ($I = \frac{1}{2}MR^2$). Sabemos que cuando la cuenta está en la parte superior del anillo, la velocidad angular es de $10\ rad/s$. a) Determinar cuál es la velocidad angular cuando la cuenta se desliza hasta a un ángulo con respecto a la vertical $\theta = 60^0$.

I.

A)



B) En este problema no hay torca externa y por tanto el momentum angular se conserva constante.

C) Aquí no es necesario trazar un diagrama de cuerpo libre porque no hay fuerzas externas en la dirección de giro del anillo. La única fuerza que actúa es la gravedad, y su dirección es paralela al eje del anillo, y por lo tanto no afecta su movimiento. Su único efecto es sobre la cuenta en su posición en el anillo.

D) El eje se ubica en el eje de simetria del diámetro vertical del anillo. El sentido positivo será en sentido antihorario.

E) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
$m = 0.5\ kg$	$\omega_{60}{}^0 \Rightarrow I.\ P.$	$\tau = 0 \Rightarrow L = I\omega = cte.$
$M = 6\ kg$	$I_{60}{}^0 \Rightarrow I.\ A.$	
$R = 0.4\ m$		
$I_o = \frac{1}{2}MR^2$		
$\theta = 0^0$ y $\omega_o = 5\ rad/s$		
$\theta = 60^0$		

II. En este sistema no actúa ninguna torca externa. El cambio en la velocidad angular se debe al cambio del MI por el desplazamiento de la cuenta en el anillo.

B)

El MI del sistema cuando la cuenta se encuentra a $\theta = 60^0$:

$I_{60}{}^0 = \frac{1}{2}MR^2 + m(Rsen\theta)^2 \quad \Rightarrow \quad I_{60}{}^0 = \frac{1}{2}*6*(0.8)^2 + 0.5(0.8sen60^0)^2$

$I_{60}{}^0 = 1.92 + 0.23 \quad \Rightarrow \quad I_{60}{}^0 = 2.16\ kg{\cdot}m^2.$

Como el momento se conserva, entonces

$L_0{}^0 = L_{60}{}^0 \quad \Rightarrow \quad I_0\omega_0 = I_{60}{}^0\ \omega_{60}{}^0$

Despejando $\omega_{60}{}^0$:

$\omega_{60}{}^0 = I_0\omega_0/I_{60}{}^0$

Sustituyendo los datos:

$\omega_{60^o} = 1.92.*10/2.16 \quad \Rightarrow \quad \omega_{60^o} = 8.8\ rad/s.$

III.

A) El resultado no tiene ninguna dificultad para observar que es el correcto ya que para llegar a el sólo se requirió igualar las dos cantidades angulares de los dos estados. En-. tonces para verificar que sea correcto solo se necesita verificar que los cálculos anteriores fueron correctos

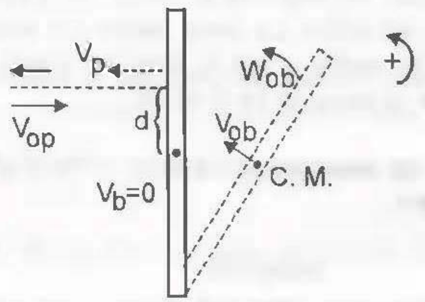
B) Se requirió sólo darse cuenta que no existían torcas externas y por tanto aplicar la conservación del momento angular. La ecuación que obtuvimos fue con una sola incógnita y se pudo resolver directamente.

C) De acuerdo a los datos y a lo que se nos pedía, solo se podía resolver de esta manera.

2. Un beisbolista, para minimizar el impacto que sienten las manos y para lograr un buen "batazo", debe golpear la pelota con cierta zona del bate llamado centro de percusión. Demuestre que esta zona es la distancia l del centro, y está dado por $l = L/6$. Para resolver este problema suponga que el movimiento de la pelota es perpendicular al bate y también considere al bate como una barra uniforme de longitud L, y que el beisbolista lo toma por un extremo.

I.

A)



B) Nuestro sistema es el bate y la pelota, y se van a considerar la colisión entre ellos. No se consideraran las fuerzas en este caso, ya que son instantáneas y muy difíciles de determinar. En mi sistema bate-pelota no existen fuerzas externas, la de la gravedad se desprecia porque son muy pequeñas en comparación con la colisión; solo las internas de la colisión se consideran, y por lo tanto el momento lineal y angular se conservan. El movimiento inicial del bate es a velocidad constante.

C) Nuestro sistema de coordenada se ubicará sobre la base del bate y el origen es el punto donde gira éste. No es necesario un diagrama de cuerpo libre puesto que no existen fuerzas constantes que se puedan analizar.

D) El eje para la evaluación de las torcas será la base por donde se gira el bate y perpendicular a su plano. El sentido positivo será el antihorario.

E) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
L	$l \Rightarrow I.\ P.$	Conservación del momento
$V_b = 0$	$M,\ m,\ V_{0p},\ V_p,\ V_{0b} \Rightarrow I.\ A.$	Lineal y Angular.
		El extremo del bate, después impacto, debe permanecer en reposo.

II.
Como se muestra en la descripción pictórica, al bate se le imprime una velocidad angular ω_{ob} inicial, de tal forma que al conectar a la pelota aquel permanezca en reposo, y la pelota salga impulsada con velocidad V_p. Es decir que el momento lineal y angular del bate se le transmita a la pelota íntegramente de tal manera que se anule y el bate no retroceda; esto como parte de la condición del problema.

B) Con los datos e incógnitas que hemos definido, podemos escribir las velocidades angulares, el MI y por tanto las ecuaciones de conservación. El bate se puede considerar como una barra uniforme de longitud L y cuyo eje pasa sobre su base, y entonces su MI *se puede escribir como* $I_b = ML^2/3$ *y su velocidad angular como* $\omega_{ob} = V_{ob}/(L/2)$ $\Rightarrow$ $\omega_{ob}=2V_{ob}/L$, donde V_{ob} es la velocidad del CM del bate y $L/2$ su posición respecto al origen del sistema de coordenadas. Se toma la velocidad en este punto porque la dinámica de los cuerpos con una distribución de masa se estudian considerando como si toda la masa del cuerpo estuviera concentrado en su CM. La velocidad del bate después de la colisión es cero. La velocidad angular de la pelota antes y después de la colisión se escriben respectivamente como:

$$\omega_{op} = V_{op}/(L/2 + l) \qquad \text{y} \qquad \omega_p = V_p/(L/2 + l),$$

la velocidad angular de ambas es con respecto a la longitud (L/2 + l), que es la distancia con respecto al origen por donde se mueve la pelota y pega al bate.

El MI de la pelota con respecto a este origen se puede escribir como $I_p = m(L/2 + l)^2$.

Ahora si ya podemos escribir la conservación de los momentos:
por conservación del momento lineal

$$mV_{op} - MV_{ob} = -m\,V_p \qquad (1).$$

y por conservación del momento angular

$$I_b\omega_{ob} - I_p\omega_{op} = I_p\omega_p$$

Sustituyendo sus expresiones equivalentes

$$(ML^2/3)(2V_{ob}/L) - m(L/2 + l)^2\{V_{op}/(L/2 + l)\} = m(L/2 + l)^2\{V_p/(L/2 + l)\}.$$

Desarrollando y reduciendo esta expresión:

$$2MLV_{ob}/3 - m(L/2 + l)V_{op} = m(L/2 + l)V_p \quad \Rightarrow \quad 2MLV_{ob}/3 = m(L/2 + l)\{V_{op}+V_p\}\ (2).$$

Ahora, despejando MV_{ob} de (1)

$\Rightarrow M\,V_{ob} = m(V_{op} + V_p)$,

y sustituyendo en (2):

$2L\{m(V_{op} + V_p)\}/3 = m(L/2 + l)(V_{op} + V)$,

eliminando términos semejantes:

$2L/3 = L/2 - l \quad \Rightarrow \quad l = 2L/3 - L/2 \quad \Rightarrow l = L/6$, que es lo que queriamos demostrar.

III.

A) El resultado es el correcto porque es el que nos pedían demostrar. Aquí no podemos reducir el resultado a casos particulares por la simpleza de la expresión resultante.

B) Para la solución de este problema fue necesario definir variables que no se nos presentaba en el enunciado de manera explícita ni implícita. Esta es una parte difícil, porque estamos acostumbrados a que todo se nos de en el enunciado, pero aquí hubo necesidad de definir casi todo, y suponer datos tomados de manera implícita del enunciado, como en el caso del bate y su velocidad inicial, o su velocidad final igual a cero luego de la colisión. También obtuvimos un sistema de dos ecuaciones con cantidades mayor de incógnitas, pero que se pudieron eliminar cuando se sustituyó una en otra gracias a su gran parecido, dejando una ecuación con la sola incógnita que queríamos resolver.

C) Difícilmente se podría resolver de una manera alternativa, ya que en este caso se utilizaron todas las condiciones que implicaban la anulación de su momento lineal y angular. Para poder satisfacer estas condiciones y llegar a un resultado correcto, era necesario utilizar sus principios de conservación, como se hizo aquí.

8. Algoritmos para la solución de problemas Matemáticos

Ahora pasaremos a los algoritmos matemáticos. Básicamente son lo mismo, salvo que ahora en vez de aplicar las leyes físicas, usamos leyes matemáticas a problemas de tipo algebraico, de máximo y mínimo y variacional. De acuerdo a las particularidades de cada tema, nos basaremos en el algoritmo para la solución de problemas presentado antes y lo trataremos de adecuar a los de tipo matemático. Por ejemplo, aquí muchas veces no será necesario hacer una descripción pictórica porque el problema no se desarrolla en el espacio y el tiempo, como podría ser algún asunto comercial o de cualquier otro tipo, y las expresiones algebraicas son suficientes para representarlos. Entonces quizá sólo definamos las variables y tratemos de relacionarlas por medio de las leyes algebraicas o reglas propias del tema, así hasta lograr resolver la incógnita. Por lo tanto, cuando sea posible, trataremos de pasar de una descripción verbal o escrita a una pictórica, o si no se puede, directamente a una conceptual, hasta llegar a su expresión matemática en un sistema de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas, y así poder encontrar los valores de estas.

Algoritmo para problemas Algebraicos

I. Comprender el Problema:

A) Lea cuidadosamente el enunciado, de tal manera que entienda que es lo que en realidad queremos encontrar, con qué datos contamos y que condiciones se nos presentan en el problema. Las incógnitas se deben definir con alguna letra del alfabeto, por lo general se utilizan las últimas, pero también se pueden utilizar la letra inicial del nombre del objeto que nos referimos. Además, porque de esta manera podemos recordar mas fácilmente a que se refiere cada una de ellas y también para realizar operaciones algebraicas. El definir correctamente a cada uno de ellos nos sirve para entender cada uno de los elementos del problema y consecuentemente poder escribir las ecuaciones que los relacionan.

B) Para saber que es lo que en realidad ocurre es conveniente imaginar todo el proceso en el cual se desarrolla el problema que vamos a resolver. Para esto, de ser necesario y cuando sea posible, ayuda dibujar un esquema completo del problema, claro y preciso. En este esquema se deben agregar los datos y las incógnitas de las variables con que contamos.

C) Distribuir en sus respectivas columnas las tres partes del problema: los datos, las incógnitas y las condiciones, definiendo claramente cada uno de ellos. Debemos categorizar las incógnitas en principales (IP) y auxiliares (IA).

II. Planteo y Desarrollo de la Solución:

A) Tratar de relacionar por medio de una ecuación la o las incógnitas que intentamos resolver (IP), con las restantes incógnitas (IA), y los datos que intervienen en el problema. Las ecuaciones se construirán de acuerdo a las condiciones o restricciones que impone el problema, en cada caso particular.

B) Si el número de ecuaciones obtenidas es menor que el de incógnitas, entonces no podemos resolverlas y debemos seguir buscando mas restricciones o condiciones, de manera de encontrar mas ecuaciones. Cuando el número iguale al de incógnitas, entonces ya podremos resolverlas.

III. Revisar el Planteo y Desarrollo de la Solución.

A) Revisar el resultado.
B) Revisar el razonamiento desarrollado.
C) Buscar otras posibles alternativas de solución.

Ejemplos

1. *8* amigos querían comprar un terreno contribuyendo de manera equitativa, pero *3* de ellos desistieron del negocio y entonces cada una de las restantes tuvo que poner *$3,000* más. Determinar el valor del terreno.

I. A)

$P \Rightarrow$ Precio del terreno.

$X \Rightarrow$ Lo que iban a contribuir equitativamente cada una de los *8* amigos.

$Y \Rightarrow$ Lo que tuvieron que contribuir equitativamente cada una de las *5* personas restantes.

B) En este problema no es necesario dibujar un esquema porque es totalmente algebraico, y no tiene que ver con una descripción en el espacio y/o tiempo. A continuación definiremos las variables que intervienen en el problema.

C) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
8 personas querían comprar una casa. *3* desistieron.	$P \Rightarrow I.\ P.$ $X,\ Y \Rightarrow I.\ A.$	Los *5* restantes tuvieron que aportar *3,000* mas: $Y=X+3000.$

II.

A) El precio de la casa antes de que desistieran se puede escribir como:

$P = 8X$ (1).

Y cuando desistieron:

$P = 5Y$ (2).

Aquí ya tenemos un sistema de 2 ecuaciones con tres incógnitas, la P que buscamos resolver y X, Y, las dos auxiliares. De la condición, de acuerdo al dinero extra que tuvieron que aportar los amigos restantes, tenemos la tercera ecuación:

$Y = X + 3{,}000$ (3).

B) Ahora ya podemos resolver P. Sustituyendo (3) en (2):

$P = 5(X + 3000)$ (4),

ahora igualando P de (4) con (1):

$5(X + 3{,}000) = 8X \Rightarrow 5X + 15{,}000 = 8X \Rightarrow 15{,}000 = 3X \Rightarrow X = 5{,}000.$

Y sustituyendo este valor en (3),

$Y = X + 3{,}000 \Rightarrow Y = 5{,}000 + 3{,}000 \Rightarrow Y = 8{,}000.$

Sustituyendo el valor de X en (1) ya podemos encontrar el valor de P:

$P = 8 * 5{,}000 \Rightarrow P = 40{,}000$, y este es el valor de la casa.

III.
A) El resultado se puede comprobar si cumple con todas las condiciones: haciendo las sustituciones de los resultados, se puede comprobar que cumplen con el preco calculado antes y después de que los 3 amigos desisticran.

B) En este tipo de problemas no es necesario dibujar un esquema, sino mas bien, definir adecuadamente cada una de las variables y poderlas relacionar entre si. Para poder hacer esto fue necesario entender el enunciado y poderlo traducir al lenguaje algebraico, y finalmente trasladarlo a ecuaciones.

C) No vemos otra posible solución, ya que cubrimos todas las condiciones del problema.

2. Hallar los dos números enteros consecutivos, cuya diferencia de sus cuadrados es 37.
I.
A)
$X \Rightarrow$ Número entero.
$Y \Rightarrow$ Número entero consecutivo de X.

C) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
37	$X, Y \Rightarrow I. P.$	$Y^2-X^2=37$

II.
A) Cómo Y es un número entero y consecutivo de X, podemos escribir

$$Y = X + 1 \quad (1)$$

Y de la condición

$$Y^2-X^2 = 37 \quad (2)$$

B) Tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas y ya podemos resolver. Sustituyendo Y de (1) en (2):

$$(X+1)^2 - X^2 = 37 \Rightarrow X^2 + 2X + 1 - X^2 = 37 \Rightarrow 2X + 1 = 37$$
$$\Rightarrow 2X = 36 \Rightarrow X=18.$$

Ahora sustituyendo este valor en (1)

$$Y=X+1 \Rightarrow Y=18+1 \Rightarrow Y=19.$$

Entonces 18 y 19 son los dos números enteros consecutivos que buscábamos.
III.
A) La manera de comprobar este resultado es ver si cumple las condiciones. En primer lugar si cumple que son dos enteros consecutivos. Ahora debemos probar que cumpla con $Y^2-X^2=37$. Sustituyendo los enteros encontrados, $19^2-18^2 = 361-324 = 37$, y por tanto si es la solución correcta.

B) El definir las variables de manera clara y sin ambigüedades nos permite comprender más en profundidad el problema y nos facilita poder trasladar sus condiciones a ecuaciones, y finalmente resolver el problema.

C) Este tipo de problema también se podría resolver por medios aritméticos, pero el lenguaje algebraico permite hacerlo de manera más clara y fácil.

3. Una barcaza le toma *6* horas desplazarse *20 km* río abajo y regresar. Sabiendo que desplazarse *1 km* río arriba emplea el mismo tiempo que *5 km* rio abajo, calcular la velocidad del bote en agua quieta y la velocidad del río.

I.

A)

$V_r \Rightarrow$ Velocidad del río.

$V_b \Rightarrow$ Velocidad del bote en agua tranquila.

$V_r - V_b \Rightarrow$Velocidad del bote río arriba.

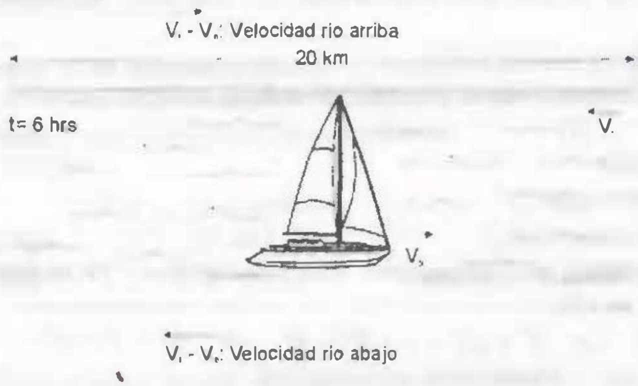
$V_r + V_b \Rightarrow$Velocidad del bote río abajo.

$t_1 \Rightarrow$ tiempo en remar río arriba.

$t_2 \Rightarrow$ tiempo en remar río abajo.

Decimos que el bote va río arriba cuando se mueve en contra de la corriente, tomando como referencia la orilla del río, por tanto sus velocidades se restan. Y que va río abajo cuando se mueve en la misma dirección de la corriente y sus velocidades se suman. Aquí todas las velocidades son constantes.

B)



C) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
$d = 20$ *km*, $t = 6$ *hrs*.	$V_r, V_b \Rightarrow$ *I. P.*	Las velocidades son
$t_1 = t_2$, *1 km* y *5 km*	$t_1, t_2 \Rightarrow$ *I. A.*	constantes $\Rightarrow V = d/t$ y:
		1) 5 horas en remar *20 kms*: ir y regresar.
		2) Mismo *t* remar *1 km* río arriba que *5 km* río abajo.

II.

A) El movimiento en el río es a velocidad constante y por tanto $V=d/t$; de la primera condición podemos escribir:

$$\frac{20}{V_r + V_b} + \frac{20}{V_r - V_b} = 6 \quad (1)$$

Y de la segunda condición, cuando el bote rio arriba *2 km* en un tiempo t_1, podemos escribir:

$$t_1 = \frac{1}{V_r - V_b},$$

y cuando avanza río abajo *5 km* en un tiempo t_2:

$$t_2 = \frac{5}{V_r + V_b},$$

y como sabemos, hacen su respectivo recorrido al mimo tiempo, y por tanto:

$$t_1 = t_2 \Rightarrow \frac{1}{V_r - V_b} = \frac{5}{V_r + V_b} \Rightarrow V_r + V_b = 5(V_r - V_b) \Rightarrow V_r = \frac{3}{2} V_b \text{ (2).}$$

B) Completamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y las podemos resolver. Sustituyendo (2) en (1):

$$\frac{20}{\frac{3}{2}V_b + V_b} + \frac{20}{\frac{3}{2}V_b - V_b} = 6 \Rightarrow \frac{20}{\frac{5}{2}V_b} + \frac{20}{\frac{1}{2}V_b} = 6 \Rightarrow \frac{40}{5V_b} + \frac{40}{V_b} = 6 \Rightarrow$$

$$\frac{40 + 5 \times 40}{5V_b} = 6 \Rightarrow \frac{240}{5V_b} = 6 \Rightarrow 240 = 30V_b \Rightarrow V_b = 8\,km/h.$$

Sustituyendo este valor en (2) para obtener la otra velocidad:

$$V_r = \frac{3}{2} V_b \Rightarrow V_r = \frac{3}{2} \times 8 \Rightarrow V_r = 12\,km/h,$$

con esta, ya obtuvimos la velocidad del bote y del río.

III.

A) El resultado se puede verificar como en los casos anteriores, probando los resultados en las condiciones del problema.

B) Aquí si fue necesario hacer un esquema que describiera la situación, ya que verdaderamente es un problema de cinemática que se resuelve de manera algebraica. También debía uno conocer sobre movimiento relativo y tomar como sistema de referencia a la orilla del rio. Sin estas consideraciones hubiera sido muy difícil de resolver.

C) Este problema muy específico solo se puede resolver de esta manera y muchas veces la dificultad de su solución se debe a la mala aplicación de un concepto físico o algebraico.

4. Un granjero compró gallinas y puercos por *$10,000*. Por cada gallina pagó *$100* y por cada puerco *$200*. Si sabemos que compró *10* puercos menos que gallinas, calcular cuántos puercos y cuántas gallinas compró.

I.

A)

$G \Rightarrow$ Número de gallinas.

$P \Rightarrow$ Número de puercos.

B) No es necesario hacer una descripción pictórica ya que el problema no se desarrolla en el espacio.

C) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
Compró:	$G, P \Rightarrow I.\ P.$	1) Compró gallinas y
Gallinas por *$100.00*		puercos por *$10,000.00*
Caballos por *$200.00*		2) Compró *10* puercos menos que gallinas.

II.

A) De la condición 1) podemos multiplicar el costo de vacas y caballos por su respectiva variable, y esto es equivalente a su costo total:

$$100G + 200P = 10{,}000 \quad (1).$$

De la segunda condición podemos relacionar las variables: $P = G - 10$ (2).

B) Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas y ya podemos resolver. Sustituyendo (2) en (1):

$$100G + 200(G - 10) = 10{,}000 \quad \Rightarrow \quad 100G + 200G - 2{,}000 = 10{,}000$$

$$\Rightarrow \quad 300G = 12{,}000 \quad \Rightarrow \quad G = 40 \text{ gallinas.}$$

Sustituyendo el valor de G en (2)

$$P = 40 - 10 \quad \Rightarrow \quad P = 30 \text{ puercos.}$$

III.

A) Multiplicando el costo de gallinas y puercos por su respectivo numero calculado y sumando, podemos darnos cuenta del costo corresponde al del enunciado del problema, y comprobamos que el resultado es correcto.

B) El razonamiento en este problema es similar a los anteriores en cuanto definimos las variables de manera clara y las relacionamos por medio de sus condiciones. En este caso la solución fue mas sencilla, porque el problema fue totalmente algebraico.

C) En los problemas algebraicos se puede recurrir a la aritmética, como ya habíamos dicho, pero es mas difícil y tardado calcularlo así.

5. Dividir *320* en tres números enteros de tal forma que el segundo número sea el doble del primero y la suma de los dos primeros sea mayor que el tercero en *40*.

I.

A)

$X \Rightarrow$ Primer número.
$Y \Rightarrow$ Segundo número.
$Z \Rightarrow$ Tercer número.

B) No es necesaria una descripción pictórica.

C) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
320	$X, Y, Z \Rightarrow I.P.$	1) La 2ª es el duplo de la 1ª. 2) La suma de las dos primeras exceda a la 3ª parte en *40*.

II.

A) La primera condición la podemos escribir como

$$Y=2X \quad (1),$$

y la segunda condición como

$$X+Y=Z+40 \quad (2).$$

B) Tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas y por tanto no podemos resolverlas. La otra ecuación la proponemos de saber que si estamos dividiendo *320* en tres partes, entonces la condición extra que deben cumplir estas es que su suma sea igual a dicha cantidad:

$$X+Y+Z = 320 (3).$$

Ahora si, sustituyendo (1) en (2):

$$X+Y = Z+40 \quad \Rightarrow \quad X+2X = Z+40 \quad \Rightarrow \quad 3X=Z+40 \quad \Rightarrow \quad Z=3X-40 \quad (4).$$

Sustituyendo (1) y (4) en (3):

$$X+2X+3X-40 = 320 \quad \Rightarrow \quad 6X = 360 \quad \Rightarrow \quad X=60.$$

Sustituyendo este dato en (1):

$$Y=2X \quad \Rightarrow \quad Y=2*60 \quad \Rightarrow \quad Y=120.$$

Sustituyendo el valor de X en (4):

$$Z=3X-40 \Rightarrow Z=3*60-40 \quad \Rightarrow \quad Z=140.$$

Y con esto ya tenemos los tres números que buscábamos.

III.

A) Para probar este resultado podemos corroborar todas las condiciones; por ejemplo, $X+Y+Z=196 \Rightarrow 60+120+140 = 320$ y $X+Y=Z+40 \Rightarrow 60+120 = 140+40 \Rightarrow 180 = 180.$

B) Se definió de manera correcta cada una de las variables y se relacionaron entre si con todas las condiciones, incluso la que no estaba dada de manera explicita. Algunas veces esta puede ser un obstáculo para resolver un problema en vista de que distrae nuestra atención las que si se dan explicitamente.

C) Este problema también se podría resolver por aritmética.

Algoritmo para problemas de Rapidez de Variación

I. Comprender el Problema

A) Lea cuidadosamente el problema, tratando de entender que es lo que se nos pide encontrar, y determinar cuales son los datos y condiciones. Haga un esquema de la situación que plantea el problema lo más claro posible, colocando en este todos los datos y las incógnitas que intervienen en él.

B) Trate de definir lo más claramente posible cada una de las variables que intervienen en el problema, dato o incógnita, con su respectiva velocidad de variación.

C) Distribuir en sus respectivas columnas los datos, incógnitas y condiciones. Divida las incógnitas en principales (IP) y auxiliares (IA).

II. Planteo y desarrollo de la Solución

A) Tratar de relacionar la o las variables principales, es decir la incógnita principal (IP) con los datos y demás incógnitas auxiliares (IA) en una sola ecuación algebraica, utilizando las condiciones del problema. En esta ecuación deben aparecer exclusivamente las variables cuya rapidez de variación tenemos como dato (IA), así como la que deseamos encontrar (IP). En caso de que aparezcan IA cuyo valor y rapidez de variación desconozcamos, es conveniente sustituirla por otras variables cuyos datos si se sean conocidos; debemos buscar ecuaciones que relacionen esta IA desconocida con las que si conocemos, e inclusive con la misma IP, si se da el caso.

B) Una vez que tengamos la ecuación algebraica deseada, una que me relacione la IP cuya rapidez de variación deseamos calcular con las IA que tenemos como dato, debemos derivar con respecto al tiempo a ambos lados del signo de igualdad, de manera que esta ecuación se transforme de una algebraica a una que relacione las rapideces de variación y variables algebraicas que tenemos como datos e incógnitas.

C) Sustituir en la ecuación obtenida los valores de la rapidez de variación y las variables algebraicas, para obtener las rapideces de las IP buscadas.

III. Revisar el Planteo y Desarrollo de la Solución

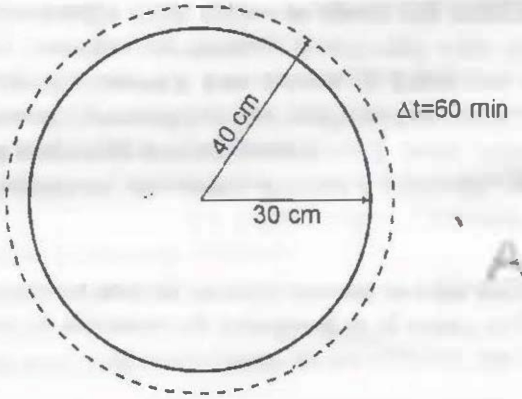
A) Revisar el resultado.
B) Revisar el razonamiento desarrollado.
C) Buscar otras posibles alternativas de solución.

Ejemplos

1. Un bloque de hielo esférico se derrite de tal forma que su radio disminuye con rapidez constante de *40* a *30 cm* en *60 min*. Calcular la rapidez de cambio del volumen en el instante en que el radio media *35 cms*.

I.

A)



B)

$r \Rightarrow$ Radio de la bloque de hielo esférico.

$dr/dt \Rightarrow$ Velocidad de variación del radio.

$V \Rightarrow$ Volumen de la bloque de hielo esférico.

$dV/dt \Rightarrow$ Velocidad de variación del volumen.

C) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
$r_i = 40\ cm$	$dV/dt \Rightarrow I.\ P.$	Volumen esférico:
$r_f = 30\ cm$	$V,\ r,\ dr/dt \Rightarrow I.\ A.$	$V = 4/3\pi r^3$
$\Delta t = t_i - t_f = 60\ min.$		
$r = 35\ cm$		

II.

A) La formula del volumen de la esfera nos relaciona la variable conocida con la que deseamos encontrar:

$$V = 4/3\pi r^3 \qquad (1)$$

B) La ecuación (1) únicamente nos involucra la variable dato con la incógnita, y por tanto no hay que buscar más ecuaciones. Por lo tanto, ya la podemos derivar con respecto al tiempo:

$$dV/dt = d(4/3\ \pi r^3)/dt \quad \Rightarrow \quad dV/dt = 4/3\ \pi d(r^3)/dt$$

$$\Rightarrow \quad dV/dt = 4/3\ \pi 3r^2 dr/dt \quad \Rightarrow \quad dV/dt = 4\pi r^2 dr/dt \qquad (2).$$

dr/dt no lo conocemos pero lo podemos calcular con la siguiente aproximación:

$$dr/dt \cong \Delta r/\Delta t = (r_f - r_i)/(t_f - t_i) \quad \Rightarrow \quad dr/dt \cong (30-40)/60 \quad \Rightarrow \quad dr/dt \cong -1/6\ cm/min.$$

C) Ahora si, ya podemos sustituir los datos en (2):

$dV/dt = 4\pi 35^2(-1/6)$ $\Rightarrow$ $dV/dt = -2,565.63\ cm^3/min.$

III.
A) No hay una manera directa de comprobar el resultado. Solo podemos probar cada paso hecho hasta llegar a la solución. Aunque el resultado no resulta ten disparatado, de acuerdo al volumen que tiene el bloque de hielo cuando su radio mide *35 cm*, que es de $V = 179,594.8\ cm^3$.

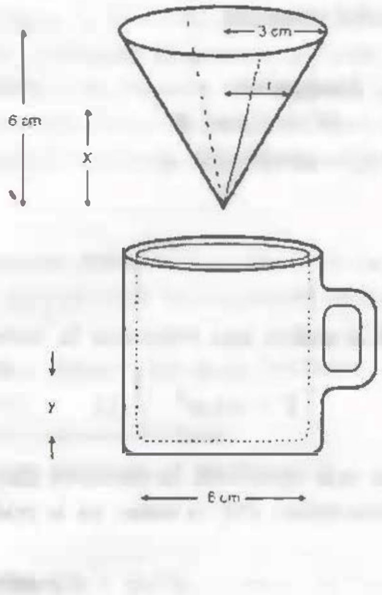
B) Definimos cada variable (tal como se indica en el algoritmo) y de acuerdo a estas encontramos la relación entre ellas con la fórmula del volumen de la esfera. La relación fue directa y no hubo necesidad de buscar otra relación. La dificultad fue calcular la rapidez *dr/dt*, y esta se hizo con una aproximación promedio porque no se nos dio directamente, si no con ciertos datos. Esto representa una dificultad para los alumnos, pero esto es algo que se debe aprender a realizar cuando no se nos den los datos de manera explicita.

C) Este tipo de problemas solo se pueden realizar de esta manera, ya que es un tipo de problema muy específico, como lo es la rapidez de variación de cualquier otra cantidad.

2. Se hace pasar agua a través de un embudo cónico a una taza de forma cilíndrica. Definamos la altura del agua en el filtro como x y la altura del agua en la taza como y. Encuentre la relación entre dy/dt y dx/dt, cuando el filtro contiene $30\ cm^3$ de agua.

I.

A)



B)

$x \Rightarrow$ La altura del agua en el filtro.

$dx/dt \Rightarrow$ Velocidad de disminución del nivel del agua en el filtro.

$r \Rightarrow$ Radio del filtro sobre el nivel de agua.

$y \Rightarrow$ La altura del agua en la taza.

$dy/dt \Rightarrow$ Velocidad del aumento del nivel del agua en la taza.

C) Datos: Incógnitas: Condiciones:

Datos	Incógnitas	Condiciones
Cuando el filtro	dx/dt, $dy/dt \Rightarrow$ I. P.	El volumen de agua que
$V = 30\ cm^3$:	$r, x, y \Rightarrow$ I. A.	sale del filtro ($V_c = 1/3\pi r^2 x$),
$r_f = 3\ cm.$		y pasa a la taza ($V_t = 4\pi y$).
la tasa:		
$r_t = 3\ cm.$		

II.

A) La forma del filtro es cónica y por tanto su volumen es la formula del cono:

$$V_f = 1/3\pi r^2 x$$

En esta relación está involucrada r y x como variables independientes, pero como la única que nos interesa es x, buscaremos una relación que nos elimine a r y que esté en función de x y/o y, las dos variables de interés.

Por triángulos semejantes en el cono podemos escribir la relación

$$r/x = 3/6 \quad \Rightarrow \quad r = x/2,$$

y la podemos sustituir en la formula del cono

$$V_f = (1/3)\ \pi(x/2)^2 x \quad \Rightarrow \quad V_f = (1/12)\ \pi x^3 \quad (1).$$

Para el volumen de la taza, este tiene forma de un cilindro, por tanto el volumen del agua es

$$V_t = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad V_t = \pi * 3^2 * y \quad \Rightarrow \quad V_t = 9\pi y \quad (2).$$

B) De la condición sabemos que el volumen del agua que sale del filtro es el que entra en la taza, por tanto podemos escribir la siguiente igualdad

$$V_f = -V_t$$

o lo que es equivalente

$$dV_f/dt = -dV_t/dt \quad (3).$$

Entonces sustituyendo (1) y (2) en (3):

$$9\pi dy/dt = -(1/12)\pi d(x^3)/dt \quad \Rightarrow \quad 9\pi dy/dt = -(1/12)\pi 3x^2 dx/dt$$

$$\Rightarrow \quad dy/dt = -(1/36)x^2 dx/dt \quad (4).$$

C) Pero nosotros queremos conocer esta relación cuando el filtro contiene sólo $30\ cm^3$, pero para ello debemos conocer el nivel del agua cuando tiene este volumen. Entonces por formula del volumen del cono de la ecuación (1):

$$V_f = (1/12)\pi x^3 \quad \Rightarrow \quad 30 = 1/12\ \pi x^3 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 360/\pi \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{360}{\pi}},$$

y sustituyéndolo en (4):

$$dy/dt = -(x/6)^2 dx/dt \quad \Rightarrow \quad dy/dt = -(360/216\pi)^{2/3} dx/dt,$$

y es la relación que buscábamos.

III.

A) El resultado se puede comprobar verificando el cambio en la rapidez de variación longitudinal del filtro con respecto a la taza de acuerdo a la expresión encontrada. Calculando el valor del factor numérico de la expresión resultante podemos comprobar que es menor que uno. Lo que esto significa, de acuerdo a la expresión, es que dy/dt varia mas lento que dx/dt, y esto está de acuerdo a lo que se esperaria, por que por la forma del cono y de la taza, el primero tiene menor volumen que el segundo y por tanto su nivel disminuye mas rápidamente que lo que aumenta el de la taza.

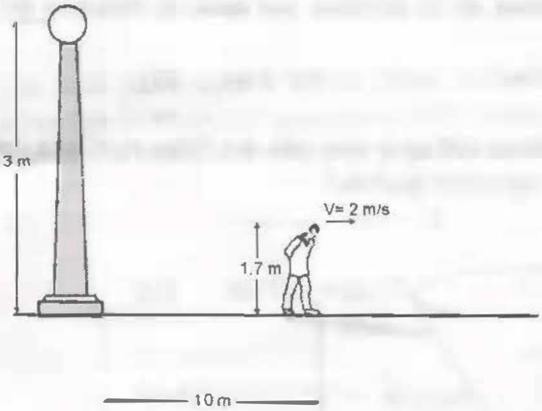
B) La dificultad en este problema estaba en darse cuenta que el volumen que salía del filtro era el mismo que el que entraba en la taza; y así solo era cuestión de igualar los volúmenes salvo por una diferencia de signos que establece que en la tasa disminuye su volumen y la taza lo aumenta. Antes fue necesario establecer la rapidez de variación en función de las variables conocidas.

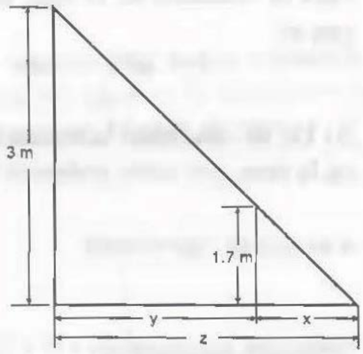
C) En problemas como este tan específico es difícil que exista alternativas de solución. En este tipo de problemas sólo existe una forma de solución analítica, salvo que lo queramos resolver experimentalmente.

3. Una lámpara nocturna cuelga de un poste de *3 m* de altura. Una persona de *1.7 m* de estatura que se aleja del poste a una velocidad de *2 m/s* proyecta una sombra que se mueve junto con él. Determinar la rapidez con que se mueve el extremo de su sombra cuando él se encuentra a *10 m* de la base poste.

I.

A)





B)

$x \Rightarrow$ Longitud de la sombra.

$dx/dt \Rightarrow$ rapidez de crecimiento de la sombra.

$y \Rightarrow$ Longitud del poste a la persona.

$dy/dt \Rightarrow$ Velocidad con la que se aleja la persona del poste.

$z = x + y \Rightarrow$ Extremidad de la sombra de la persona con respecto al poste.

$dz/dt = dx/dt + dy/dt \Rightarrow$ Rapidez de la extremidad de la sombra.

C) Datos:	Incógnita:	Condiciones:
$h_p = 1.7\ m$	$dz/dt \Rightarrow I.\ P.$	Triángulos semejantes.
$dy/dt = 2\ m/s$	$x, y, z, dx/dt \Rightarrow I.\ A.$	
$y = 10\ m.$		
$h_l = 3\ m$		

II.

A) Queremos calcular dz/dt, que es la rapidez con que se mueve la sombra, y conocemos la relación

$$z = x + y \text{ o } dz/dt = dx/dt + dy/dt \quad (1).$$

De aquí conocemos dy/dt, y entonces debemos encontrar una relación x con y y/o z, para luego derivar con respecto a t. Por semejanzas de triángulos, de acuerdo al esquema: $z/3 = x/1.7$ ó $(x+y)/3 = x/1.7 \Rightarrow 1.7(x+y) = 3x \Rightarrow 1.7x+1.7y = 3x \Rightarrow 1.7y=1.3x \Rightarrow x=1.3y$.

B) Derivando con respecto a t:

$$dx/dt = 1.3dy/dt \quad (2).$$

C) Sustituyendo (2) en (1),

$$dz/dt = 1.3dy/dt+dy/dt \Rightarrow dz/dt = dy/dt(1.3+1) \Rightarrow dz/dt = 2.3dy/dt.$$

Sustituyendo $dy/dt= 2$ m/s,

$$dz/dt=2.3*2 \Rightarrow dz/dt = 4.6 \text{ m/s}.$$

III.

A) El resultado es creíble ya que la velocidad de la extremidad de la sombra es mayor por 2.3 de la velocidad de la persona, como cabria esperar, ya que dz/dt es la suma de 2 velocidades, dx/dt y dy/dt, es decir de la velocidad de la persona mas la velocidad de su sombra.

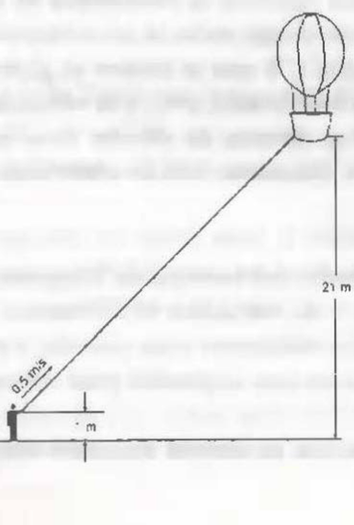
B) Calculamos el valor de dx/dt en función del que tenemos como dato, dy/dt. Este algoritmo es parecido al algebraico, pero ahora nuestras incógnitas son velocidades de variación, además de las algebraicas.

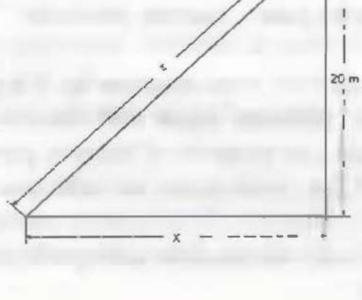
C) No existe otra alternativa de solución en vista de que es un problema muy especifico.

4. Una persona sostiene el cordel de un globo aerostático a *1 m* del suelo y lo va soltando a razón de *0.5 m/s*, con lo que el globo se desplaza horizontalmente a un altu ra de *21 m*. Suponiendo que el hilo se mantiene recto, calcule la rapidez con la que se desplaza el globo cuando se ha soltado *25 m* de la cuerda.

I.

A)





B)
$x \Rightarrow$ Distancia horizontal del globo.
$dx/dt \Rightarrow$ Rapidez horizontal con la que se mueve el globo.
$z \Rightarrow$ Longitud del cordel que se suelta.
$dz/dt \Rightarrow$ La rapidez con la que se va soltando el cordel.

C) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
$y = 20\ m.$	$dx/dt \Rightarrow$ I. P.	Triangulo rectángulo $\Rightarrow$
$dz/dt = 0.5\ m/s$	$x, z \Rightarrow$ I. A.	teorema de Pitágoras.
$z = 25\ m.$		

La altura del cometa se toma con valor igual a $y=20\ m$, porque nuestro sistema de referencia lo colocamos a la altura a la que el niño sostiene el cometa, a $1\ m$ sobre el suelo. Así lo colocamos porque de esta manera podemos formar un triangulo rectángulo, y con él podemos relacionar nuestros datos e incógnitas.

II.
A) Como el eje y no sufre variación en el movimiento del cometa, $y = 20$ permanece constante en su movimiento sobre el eje x, y en la dirección del cordel z si hay variación, entonces por teorema de Pitágoras escribimos,

$$x^2 + 20^2 = z^2 \qquad (1).$$

B) Esta ecuación ya relaciona directamente la variable dato con la incógnita. Ahora derivando con respecto a t de ambos miembros de (1):

$$2x dx/dt + 0 = 2z dz/dt \quad \Rightarrow \quad x dx/dt = z dz/dt \quad \Rightarrow \quad dx/dt = (z/x)\, dz/dt \qquad (2).$$

C) Cómo lo que queremos conocer es dx/dt para cuando $z = 25\ m$ y tenemos dos ecuaciones (1) y (2), con dos incógnitas x y dx/dt, podemos resolver primero para (1) sustituyendo este valor de z para determinar x, que nos servirá para calcular dx/dt:

$$x^2+20^2=25^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 25^2 - 20^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 225 \quad \Rightarrow \quad x = 15\ m.$$

Sustituyendo este valor de $x=15$, $z=25$ y $dz/dt= 0.5$ en (2):

$$dx/dt = (25/15)0.5 \quad \Rightarrow \quad dx/dt = 0.83\ m/s.$$

III.
A) De la ecuación (2) $dx/dt = (z/x)\, dz/dt$, podemos verificar la coherencia de este resultado sometiéndolo a casos particulares. Para el caso donde todavía no soltamos el cordel su velocidad es cero, $dz/dt=0$, entonces la velocidad a la que se mueve el globo también es cero, $dx/dt=0$. También, cuando el globo no se ha elevado, $z=0$, y la velocidad es nula: $dx/dt =0$. Esto está de concordancia a lo que se debería de esperar de acuerdo a las condiciones dadas, por lo tanto este resultado es coherente con lo observado y valida, hasta cierto punto, nuestro resultado.

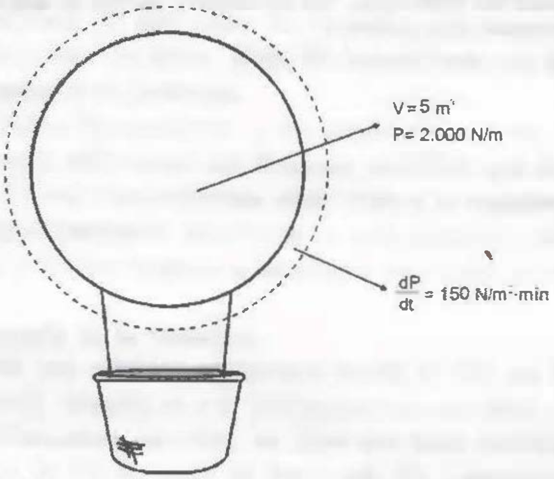
B) En este caso relacionamos las VA y VP por medio del teorema de Pitágoras, y no fue necesario eliminar algún otra variable. Su rapidez de variación la obtenemos de aquí, derivando con respecto al tiempo, pero a la vez lo utilizamos para calcular x para cuando $z=25$, las condiciones iniciales que sustituimos en esta expresión para obtener dx/dt.

C) La forma de resolver este problema es única, por la misma situación del problema anterior.

5) En un globo aerostático en cierto instante el volumen es de $5\ m^3$ y la presión $2,000\ N/m^2$; la presion disminuye en ese momento a razón de $150\ N/m^2 min$. Calcular la rapidez de cambio del volumen en ese instante. Suponga que este sistema cumple la ley de Boyle: $PV=C$, donde P es la presión, V el volumen y C una constante.

I.

A)



B)

$P \Rightarrow$ Presión.

$dP/dt \Rightarrow$ Rapidez de cambio de la presión.

$V \Rightarrow$ Volumen.

$dV/dt \Rightarrow$ Rapidez de cambio del volumen.

C) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
En cierto momento:	$dV/dt \Rightarrow$ I. P.	Ley de Boyle:
$V=5\ m^3$	$P, V, dP/dt \Rightarrow$ I. A.	$PV=C$.
$P= 2,000\ N/m^2$		
$dP/dt= 150\ N/m^2 min.$		

II.

A) De la ley de Boyle, podemos encontrar la relación de la variación de P y V:

B) $d(PV)/dt=dC/dt \quad \Rightarrow \quad PdV/dt+ VdP/dt=0$

$\Rightarrow PdV/dt= -VdP/dt \quad \Rightarrow \quad dV/dt= -(V/P)dP/dt \quad (1)$

C) Sustituyendo los datos para el instante en que queremos calcular la rapidez de cambio del volumen dV/dt, para ese momento:

$$dV/dt= -(5/2,000)150 \quad \Rightarrow \quad dV/dt= -0.375\ m^3/min.$$

III.

A) De la relación (1) vemos que conforme el volumen es mayor (V) o cuando la velocidad de incremento de la presión es menor (dP/dt), la rapidez del incremento del volumen es mayor (dV/dt), como se podría esperar fisicamente. Por lo tanto nuestro resultado es confiable.

B) En este problema, la relación entre nuestras variables ya no las daban por la ley de Boyle. El cálculo de la variación del volumen surgió directamente de su derivación, ya que contábamos con todos los datos.

C) Por la especificidad del problema, no existe otra forma de resolverlo.

Algoritmo para problemas de Máximos y Mínimos

I. Comprender el Problema:

A) Lea cuidadosamente el enunciado del problema, tratando de entender lo que pasa, y lo que se pide encontrar. Trate de identificar las diferentes partes: los datos, incógnitas y condiciones.

B) De ser necesario, dibujar un esquema que haga mas claro lo que se quiere resolver, introduciendo en este todas las variables que intervienen, tanto las que sean incógnitas como los datos. Trate de definir cada una de las variables que están involucradas en el problema.

C) Distribuir los datos, las incógnitas y las condiciones en sus respectivas columnas. Es importante diferenciar las diversas variables que describen el proceso del problema. En este caso debemos saber cual es la variable dependiente (VD) de la función que deseamos maximizar (o minimizar) y cuál la o las variables independientes (VI) con respecto a las cuales buscamos su extremo.

II. Planteo y Desarrollo de la Solución:

A) Trate de construir una relación algebraica donde la VD sea función de la o las VI, donde la primer variable es a la que buscamos encontrar su extremo, y la VI sea aquella que buscamos encontrar su valor que hace extremo a la VD. La mayoría de las veces, la VD depende de dos o más VI. Cuando este sea el caso, debemos buscar condiciones (restricciones) que me reduzcan el número de VI a sólo una: aquella VI que buscamos que haga extremo a VD. En algunos casos en el problema se nos dará de manera explicita la restricción que puede ser una ecuación que relaciona las VI, con o sin la VD. En otros casos estará dada de manera implícita y será necesario buscarla de los datos, condiciones, y relaciones que se den en el problema. Si se nos pide encontrar dos o más de los valores de las VI que vuelven extremo a VD, se puede reducir la función a cualquiera de las VI, encontrar su valor, y con este encontrar sustituyendo en las restricciones, los otros valores, como explicaremos en el siguiente paso.

B) Una vez construida la función VD dependiente de una sola VI, se deriva la primera con respecto a esta última y se iguala a cero. La ecuación algebraica con respecto a la VI que obtengamos, al resolverla, el valor que encontremos será el que me hace extremo a la función. De esta forma, podemos encontrar los otros valores de las otras VI que también hacen extremo a la VD, sustituyendo en las respectivas restricciones que usamos en la reducción a una sola VI.

C) Para determinar que tipo de extremo es el que obtuvimos podemos calcular la segunda derivada de la función VD y sustituir el o los valores extremos: si esta es negativa, entonces tenemos un máximo; si es positiva, es un mínimo; y si es cero, un punto de inflexión.

III. Revisar el planteo y desarrollo de la solución:

A) Revisar el resultado.

B) Revisar el razonamiento desarrollado.

C) Buscar todas las posibles alternativas de solución.

Ejemplos

1. Un agricultor de naranjas calcula que si siembra *50* árboles por hectárea, entonces cada árbol adulto dará *1,000* naranjas al año. El quiere incrementar esta productividad por hectárea, pero aumentando el número de árboles. Pero sabe que por cada 5 árboles más que se planten por hectárea, el número de naranjas que produce cada árbol disminuye en *20* al año. Entonces ¿cuántos árboles deberá sembrar por hectárea para obtener el mayor número posible de naranjas al año?

I.

B) No es necesario hacer un esquema, por que el evento no ocurre en el espacio.

$a \Rightarrow$ Número de árboles.
$n \Rightarrow$ Número de naranjas
$N \Rightarrow$ Producción total de naranjas.

C) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
50 árboles por hectárea. Cada árbol dará *1,000* naranjas al año.	$N \Rightarrow$ V. D. $n, a \Rightarrow$ V. I.	Por cada *5* árboles de más, cada árbol disminuye *20* naranjas al año.

II.

A) Ahora vamos a tratar de construir la función. La VI N es la cantidad total de naranjas que se producen cada año. Esta depende del número de árboles por hectárea, como de lo que produce cada árbol. En un principio cada árbol produce 1,000 naranjas, y cada hectárea contiene 50 árboles, entonces la producción total es
$N = 1{,}000*50 \quad \Rightarrow \quad N = 50{,}000$ naranjas.
Pero por cada 6 árboles de mas que se siembren el número de naranjas que produce cada árbol disminuye en *20*, y esto lo podemos escribir como $a=6z$ y $n=20z$ respectivamente, donde z es un parámetro que puede tener los siguientes valores de números enteros, $z = 1, 2, 3, \ldots, m$. Entonces para $z=2$, tendremos que para *12* árboles de más que se siembren, el número de naranjas disminuirá en *40*, etcétera. Por lo tanto, la función del nú-l mero total de naranjas pol año la podemos escribir cómo:

$$N = (1{,}000 - 20z)*(50 + 6z) \qquad (1)$$

Esta función me dice que conforme mas árboles tenga mi producción es mayor, pero a la vez esto causa que las manzanas que produce cada arbol disminuya. Por lo tanto, debemos buscar su valor optimo.

B) Derivando con respecto al parámetro z la función (1):

$$dN/dz = d\{(1{,}000 - 20z)*(50 + 5z)\}/dz$$
$$\Rightarrow dN/dz = (1{,}000 - 20z)*d(50 + 5z)/dz + (50 + 5z)*d(1{,}000 - 20z)/dz$$
$$\Rightarrow dN/dz = (1{,}000 - 20z)*(5) + (50 + 6z)*(-20)$$
$$\Rightarrow dN/dz = 5{,}000 - 100z - 1{,}000 - 100z \qquad \Rightarrow \qquad dN/dz = 4{,}000 - 200\,z \qquad (2).$$

Igualando a 0 :

$$dN/dz = 4{,}000 - 200z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 200z = 4{,}000 \qquad \Rightarrow \qquad z = 20.$$

Pero este es sólo el valor del parámetro. Para saber el número de árboles debemo sustituir en $a = 5z \Rightarrow a = 5*20 \Rightarrow a = 100$ árboles que debemos plantar de más para obtener el mayor número de naranjas al año, con un decremento del número de naranjas por árbol dado por $n = 20z \Rightarrow n = 20*20 \Rightarrow \quad n = 400.$

C) Para determinar que tipo de extremo es, derivemos a (2):
$d^2N/dz^2 = d(4,000-200\,z)/dz \Rightarrow d^2N/dz^2 = -200$, y por tanto si es un máximo.

III.
A) Para comprobar este resultado, podemos sustituir en la función (1):
$N = (1,000 - 20z)*(50 + 5z)$,
el valor que me maximiza lo podemos calcular de esta función sustituyendo valores al parámetro z:
Para $z = 21 \Rightarrow N = (1,000 - 420)*(50 + 105), \Rightarrow N = (580)*(155) \Rightarrow$ $N = 89,900$ naranjas.

Para $z = 20 \Rightarrow N = (1,000 - 400)*(50 + 100) \Rightarrow N = (600)*(150) \Rightarrow$ $N = 90,000$ naranjas.

Para $z = 22 \Rightarrow N = (1,000 - 440)*(50 + 110), \Rightarrow N = (560)*(160) \Rightarrow$ $N = 89,600$ naranjas.

Podemos ver que N es mayor para $z = 20$, y es un máximo, e incluso se podría graficar esta función para mas valores de z y comprobar que es un máximo para todo z del problema. También es mayor que la producción inicial, $N=50,000$, cuando aún no se sembraban los árboles extra.

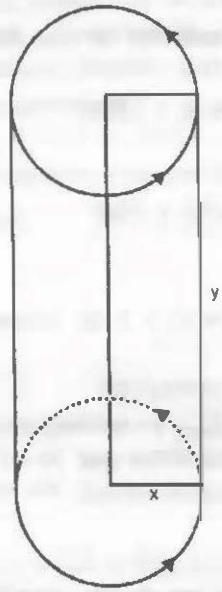
B) Definiendo de manera adecuada cada una de las variables que están involucradas en el problema e interpretando lo que se nos pide encontrar y conociendo con lo que contamos, podemos construir una función que me involucre la VD con las VI. La mayor dificultad radica aquí, y lo demás es cálculo diferencial y algebraico. En este caso tuvimos que definir nuestras VI en función de un parámetro z que variaba de manera consecutiva en los números enteros positivos, ya que su evolución era en múltiplos de 5 y 20, y así no se puede derivar.

C) Otra forma de encontrar el máximo, sería haciendo un cálculo aritmético multiplicando los factores del número de árboles por hectárea por número de manzanas que produce cada árbol. Pero este método es muy trabajoso, tardado y complicado, casi a prueba y error y por tanto poco eficaz. Afortunadamente el cálculo diferencial nos evita hacer estas pruebas y nos conduce directamente a los valores buscados.

2. Se puede generar un cilindro circular recto girando un rectángulo de perímetro s alrededor de uno de sus lados. Calcule cuales son las dimensiones de los lados del rectángulo que genera el cilindro de mayor volumen.

I.

B)



$x, y \Rightarrow$ Longitudes del rectángulo.
$s \Rightarrow$ Perímetro del rectángulo.
$V \Rightarrow$ Volumen del cilindro que se genera al girar de uno de su lados el rectángulo.

C) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
s	$V \Rightarrow$ V. D.	Volumen del cilindro:
	$x, y \Rightarrow$ V. I.	1) $V = \pi r^2 h$.
		Perímetro dado:
		2) $x + y = s = cte$.

II.

A) Si giramos el rectángulo tal como se ve en la figura, se generará un cilindro cuya base será circular con un radio equivalente a la base del rectángulo, $r = x$, y la altura será la de este mismo, $h = y$; entonces de la condición 1) el volumen de este cilindro será:

$$V = \pi r^2 h \qquad \Rightarrow \qquad V = \pi x^2 y \qquad (1).$$

Esta ecuación del volumen está en función de 2 VI, x y y, por lo tanto necesitamos encontrar una relación entre ellas que me ayude a sustituir esta en la ec. (1), de tal manera que la función quede dependiendo de una sola de las variables. De la condición 2):

$$x + y = s \qquad \Rightarrow \qquad y = s - x \qquad (2).$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$V = \pi x^2 (s - x) \qquad (3),$$

y ya tenemos la función dependiente solamente de la variable independiente x.

B) Derivando (3):

$dV/dx = \pi d\{x^2(s-x)\}/dt \quad \Rightarrow \quad dV/dx = \pi\{x^2 d(s-x)/dx + (s-x)d(x^2)/dx\}$

$\Rightarrow \quad dV/dx = \pi\{x^2(-1) + (s-x)2x\} \quad \Rightarrow \quad dV/dx = \pi\{-x^2 + 2sx - 2x^2\} \qquad (4).$

Igualando (4) a cero:

$dV/dx = \pi\{-x^2 + 2sx - 2x^2\} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 2sx - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2sx - 3x^2 = 0$

$\Rightarrow \quad 2sx = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad 3x = 2s \quad \Rightarrow \quad x = 2s/3.$

Sustituyendo este valor en (2) para obtener la otra longitud:

$y = s - 2s/3 \quad \Rightarrow \quad y = s/3.$

C) Ahora queremos comprobar si estos valores me dan un máximo del volumen, derivando nuevamente en (4):

$d^2V/dx^2 = \pi d\{-x^2 + 2sx - 2x^2\}/dx \quad \Rightarrow \quad d^2V/dx^2 = \pi\{-2x + 2s - 4x\}$

$\Rightarrow \quad d^2V/dx^2 = \pi\{2s - 6x\} \quad (5)$

Sustituyendo el valor que me maximiza V: $x = 2p/3$, en (5):

$d^2V/dx^2 = \pi\{2s - 6(2s/3)\} \Rightarrow d^2V/dx^2 = \pi\{2s - 4s\} \Rightarrow d^2V/dx^2 = -2\pi s$, el valor es negativo y por lo tanto el volumen del cilindro es un máximo.

III.

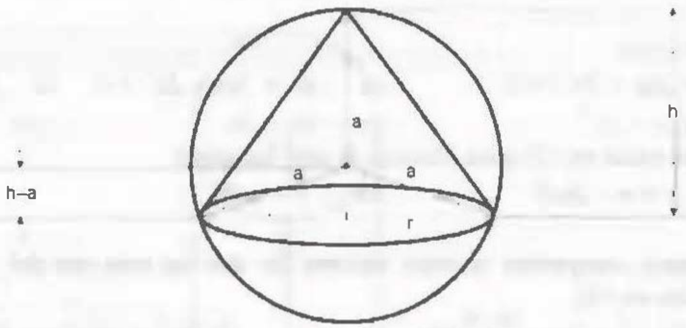
A) Como en el caso anterior, se pueden calcular el Volumen variando alrededor del valor que me maximiza la función, y graficar para comprobar que el resultado que obtuvimos nos dan el volumen máximo. Para que esta comprobación sea adecuada es importante que la función que construimos sea correcta, es decir que verdaderamente represente la función a la que deseamos conocer su máximo. De hecho la segunda derivada es una comprobación teórica de que los valores calculados son un máximo o un mínimo.

B) Como ya conocíamos la formula del volumen del cilindro, fue sólo cuestión de identificar las longitudes del rectángulo inscripto en el cilindro. También hubo que utilizar la relación del perímetro que era dado como dato en relación con las VI: x e y. La dificultad de resolver este tipo de problemas es no saber utilizar este tipo de condiciones. En cambio cuando este paso se describe en un algoritmo, como aquí es el caso, esta relación no se puede pasar por alto.

C) Este tipo de problemas son muy específicos y no se pueden resolver de otra manera.

3. Si tenemos una esfera de radio a, ¿cuál es el volumen del cono circular recto máximo que se puede inscribir?

I. B



$V \Rightarrow$ Volumen del cono inscripto en la esfera.
$h \Rightarrow$ Altura del cono.
$r \Rightarrow$ Radio de la base circular del cono.

C) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
Esfera de radio R.	$V \Rightarrow$ V. D.	1) El cono se debe inscribir en una esfera de radio R.
	$h, r \Rightarrow$ V. I.	2) Volumen del cono: $V=\pi r^2 h/3$.

II.

A) De la condición 2):

$$V = \pi r^2 h/3 \quad (1)$$

Esta función es dependiente de 2 VI, r y h, por lo tanto debemos buscar una relación que nos elimine una de ellas. La condición 1) es una restricción para los valores de r y h, y están en función del radio de la esfera R en el que se inscribe el cono. Del esquema buscaremos una relación entre ellas. Podemos formar un triangulo rectángulo tomando como cateto adyacente el radio de la base circular r, el cateto opuesto como h-R, y la hipotenusa el radio R; entonces por teorema de Pitágoras:

$$(h-R)^2 + r^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 - 2hR + R^2 + r^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 - 2hR + r^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad r^2 = 2hR - h^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = h(2R - h) \quad (2).$$

Ya tenemos la relación, sustituyendo (2) en (1):

$$V = \pi h * h(2R - h)/3 \quad \Rightarrow \quad V = \pi h^2(2a - h)/3,$$

y obtuvimos la función dependiente solo de h.

B) Derivando con respecto a h:

$$dV/dh = d\{\pi h^2(2R - h)/3\}/dh \quad \Rightarrow \quad dV/dh = \pi/3\{h^2 d(2R - h)/dh + (2R - h)\, d(h^2)/dh\}$$
$$\Rightarrow \quad dV/dh = (\pi/3)\{h^2(-1) + (2R - h)2h\} \quad \Rightarrow \quad dV/dh = (\pi h/3)\{-h + 4R - 2h\}$$
$$\Rightarrow \quad dV/dh = (\pi h/3)\{4R - 3h\} \quad (3).$$

Igualando a cero:

$$dV/dh = (\pi h/3)\{4R - 3h\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{4R - 3h\} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3h = 4R \quad \Rightarrow \quad h = 4R/3,$$

y sustituyendo este dato en (2):

$r^2 = h(2R - h)$ $\Rightarrow$ $r^2 = 4R/3\ (2R - 4R/3)$ $\Rightarrow$ $r^2 = 4R/3(6R/3 - 4R/3)$ $\Rightarrow$
$r^2 = 4R/3\ (2R/3)$ $\Rightarrow$ $r^2 = 8R^2/9$.

Con esto datos calculados, ya tenemos los dos valores que me hacen extremo el volumen. Sustituyendo en (1):
$V = \pi r^2 h/3$ $\Rightarrow$ $V = \pi(8R^2/9)\ (4R/3)/3$ $\Rightarrow$ $V=(32/81)R^3$

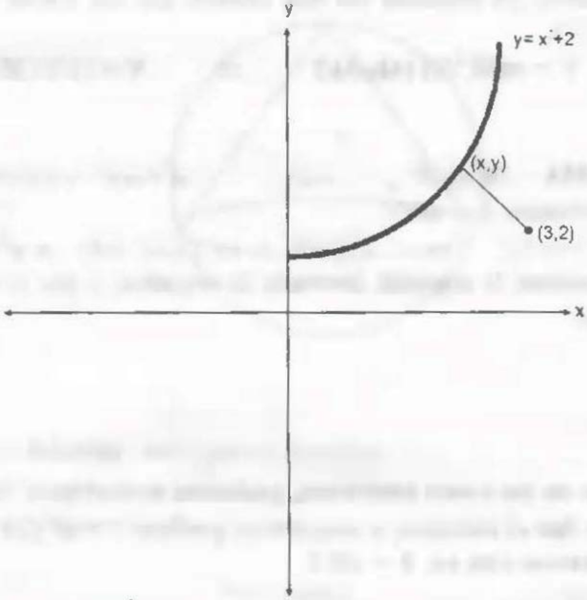
C) Derivando (3):
$d^2V/dh^2 = d\{(\pi/3)(4Rh - 3h^2)\}/dh$ $\Rightarrow$ $d^2V/dh^2=(\pi/3)(4R-6h)$,
sustituyendo el valor extremo $h = 4R/3$:
$d^2V/dh^2 = (\pi/3)(4R-6\{4R/3\})$ $\Rightarrow$ $d^2V/dh^2 = (\pi/3)(4R-8R)$ $\Rightarrow$ $d^2V/dh^2 = -4\pi R/3$,
como R es un valor positivo, la segunda derivada es negativa, y por lo tanto el volumen obtenido es un máximo.

III.
A) Como hemos hecho en los casos anteriores, podemos probar para valores mayores o menores de los que me dan el máximo; o mejor aún, graficar $V=\pi h^2(2R - h)/3$ y comprobar que su volumen máximo está en $h = 4R/3$.

B) La relación entre la VD V, y las VI, r y h, la encontramos directamente de la formula del volumen del cono. La r la eliminamos encontrando una relación cuadrática por medio del teorema de Pitágoras con la variable h y el valor del radio R dado de la esfera en que está inscripto el cono. Esta relación es la restricción que le permite al cono tener sólo ciertas dimensiones y que al sustituirla en formula para V y derivar, podemos obtener su máximo de acuerdo a estas condiciones.

C) Quizá la otra variante en la obtención del máximo en este problema, sería haber eliminado h en vez de r, aunque de esta forma hubiera sido más complicado dejar a h en función de r y hubiera quedado como una raíz cuadrada. Entonces fue mejor como lo hicimos ya que evitamos manejar raíces cuadradas que hubieran complicado más el cálculo.

4. Calcular de la gráfica $y = x^2 + 2$, el punto mas cercano al punto $(3,2)$.
I.
B)



$(x, y) \Rightarrow$ Coordenadas de los puntos que pasan por la curva $y = x^2 + 2$.
$D \Rightarrow$ Distancia del punto $(3,2)$ a cualquier punto de la curva $y = x^2 + 2$.

C) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
$(3, 2)$	$D \Rightarrow$ VD	La formula de dist ncia entre
	$(x, y) \Rightarrow$ VI	2 puntos cualesquiera:
		1) $D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
		La gráfica de la curva:
		2) $y = x^2 + 2$.

La formula que presentamos en la condición es para la distancia entre dos puntos unidos por una recta. En principio consideramos esta formula porque la distancia mas cercana entre dos puntos es la recta, y lo que nosotros buscamos es, precisamente, la distancia mas cort entre el punto $(3, 2)$ y un punto dado de la curva $y = x^2 + 2$.
II.
A) De la condición 1) podemos relacionar nuestra VD con las VI y los datos. Sustituyendo el punto $(3, 2)$:

$$D = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \quad (1)$$

La ecuación (1) depende de 2 VI, x e y, por tanto debemos eliminar una de ellas. Sustituyendo la condición 2) que me restringe los valores de y a solamente los que pasan por la curva:

$$D = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2 + 2 - 2)^2} \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{(x-3)^2 + x^4} \quad (2).$$

B) Ahora derivemos (2) con respecto a x:

$$dD/dx = d(\sqrt{(x-3)^2 + x^4})/dx \quad \Rightarrow \quad dD/dx = \left[(x-3)^2 + x^4\right]^{-\frac{1}{2}} d\{(x-3)^2 + x^4\}/dx$$

$$\Rightarrow \quad dD/dx = \left[(x-3)^2 + x^4\right]^{-\frac{1}{2}} \{2(x-3) + 4x^3\} \quad (3)$$

Igualando a cero:

$$dD/dx = \frac{2(x-3)+4x^3}{\left[(x-3)^2+x^4\right]^{1/2}} = 0$$

Entonces el único término que me puede volver cero esta expresión es el numerador, y precisamente cuando este valga cero:

$$2(x-3)+4x^3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4x^3 = -2(x-3)$$

Este tipo de ecuación se puede resolver por técnicas de solución para ecuaciones cúbicas, pero por ser una ecuación muy sencilla la podemos resolver por tanteo. Si sustituimos el valor 1:

$$4\times 1^3 = -2(1-3) \quad \Rightarrow \quad 4 = -2(-2) \quad \Rightarrow \quad 4 = 4\,.$$

Las otras dos raíces de la ecuación cúbica muy probablemente son complejas.
Entonces, $x = 1$ es una raíz y sustituyendo en la ecuación de la gráfica:
$y = x^2 + 2 \Rightarrow y = 1^2 + 2 \Rightarrow y = 3.$
Así, $(1,3)$ es el punto en la curva que me vuelve extremo la función D. Ahora avergüemos si es un máximo o mínimo.

C) Derivando con respecto a x a (3):

$$d^2D/dx^2 = d\{\left[(x-3)^2+x^4\right]^{-\frac{1}{2}}\{2(x-3)+4x^3\}\}/dx \Rightarrow$$

$$d^2D/dx^2 = \left[(x-3)^2+x^4\right]^{-\frac{1}{2}} d\{2(x-3)+4x^3\}\}/dx + \{2(x-3)+4x\}d\{\left[(x-3)^2+x^4\right]^{-\frac{1}{2}}\}/dx$$

$$d^2D/dx^2 = \left[(x-3)^2+x^4\right]^{-\frac{1}{2}}\{2+12x^2\} + \{2(x-3)+4x^3\}\left[(x-3)^2+x^4\right]^{-\frac{3}{2}} d\{(x-3)^2+x^4\}/dx$$

$$d^2D/dx^2 = \left[(x-3)^2+x^4\right]^{-\frac{1}{2}}\{2+12x^2\} + \{2(x-3)+4x^3\}\left[(x-3)^2+x^4\right]^{-\frac{3}{2}}\{2(x-3)+4x^3\}$$

factorizando, sumando y restando términos semejantes:

$$d^2D/dx^2 = \left[(x-3)^2+x^4\right]^{-\frac{1}{2}}\{(2+12x^2)+\left[(x-3)^2+x^4\right]^{-1}\left[2(x-3)+4x^3\right]^2\}$$

Ahora sustituyendo $x = 1$:

$$d^2D/dx^2 = \left[(1-3)^2+1^4\right]^{-\frac{1}{2}}\{(2+12\times 1^2)+\left[(1-3)^2+1^4\right]^{-1}\left[2(1-3)+4\times 1^3\right]^2\}$$

$$d^2D/dx^2 = [5]^{-\frac{1}{2}}\{14+[5]^{-1}[-4+4]^2\} \quad \Rightarrow \quad d^2S/dx^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\{14+[5]^{-1}[0]^2\}$$

$$d^2D/dx^2 = \frac{14}{\sqrt{5}}\,.$$

Obtuvimos un valor positivo, por lo tanto el extremo que calculamos es un mínimo.

III.
A) Podemos graficar la función D y probar que $x = 1$ es el mínimo, o confiar en la comprobación por el cálculo de la segunda derivada.

B) La dificultad de resolver este problema fue sólo considerar que la distancia mas corta entre dos puntos es una recta y, por tanto, saber la formula de la geometria con la que se calcula la distancia entre estos. Esta formula no es mas que el teorema de Pitágoras aplicado a la coordenadas de dos puntos cualesquieras. Luego, nada mas se restringió la formula a todos los puntos que se ubican sobre la gráfica de la curva.

C) Este problema se podría resolver por métodos geométricos, pero no es tan elegante y exacto como el método que seguimos.

5. Un distribuidor vende libretas a $5 si el pedido es menor de 100. Si le piden más de 100, y hasta 400, el precio disminuye en $0.01 multiplicado por la cantidad del pedido. ¿Cuál es el pedido que le produce el mayor ganancia?

I.

B) Este problema no requiere esquema ya que no se desarrolla en el espacio físico.

$Z \Rightarrow$ Número de libretas.

$I \Rightarrow$ Ingreso total.

C) Datos:	Incógnitas:	Condiciones:
$5 las libretas cuando	$I \Rightarrow$ V. D.	Para $100 < Z \leq 400$
$1 \leq Z \leq 100$.	$Z \Rightarrow$ V. I.	el precio se reduce a
		$\$(5 - 0.01Z)$.

II.

A)

Z es el volumen del pedido total y el precio se reduce de acuerdo a como está escrito en la condición. Por lo tanto, el ingreso total estará dado por el producto entre ambos:

$$I = Z*5 \quad (1) \quad \text{para } 1 \leq Z \leq 100.$$
$$I = Z(5 - 0.01Z) \quad (2) \quad \text{para } 100 < Z \leq 400.$$

El mayor ingreso para Z = 100 es:

$I = 100*5 \Rightarrow I = \$500.00$

Para $100 < Z \leq 400$ se buscará cual es su valor óptimo.

B) Derivando la función recién encontrada:

$$dI/dZ = d\{Z(5 - 0.01Z)\}/dZ \quad \Rightarrow \quad dI/dZ = Z\,d(5 - 0.01Z)/dZ + (5 - 0.01Z)dZ/dZ$$
$$\Rightarrow dI/dZ = Z(-0.01) + (5 - 0.01Z) \quad \Rightarrow \quad dI/dZ = 5 - 0.02Z \quad (3).$$

Igualando a cero:

$dI/dZ = 5 - 0.02Z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = 5/0.02 \quad \Rightarrow \quad Z = 250$ libretas.

C) Ahora comprobaremos que tipo de extremo es. Derivando (3):

$d^2I/dZ^2 = d(5 - 0.02Z)/dZ \Rightarrow d^2I/dZ^2 = -0.02$, y por consecuencia es un máximo.

III.

A) Se puede probar el resultado del valor máximo directamente, graficando la función ingreso y corroborando que para esta cantidad de libretas vendidas el ingreso es el mayor. O como ya lo hicimos, por su segunda derivada. La validez del resultado en cuanto que la función que se maximiza es la correcta, se tendría que verificar cada paso del razonamiento.

B) La función se construyó de acuerdo al número de libretas vendidas y al descuento en el precio. No hubo mayor dificultad salvo definir de manera correcta el descuento del precio por volumen de pares de zapatos.

C) Como en los otros casos, se podria emplear un método gráfico para calcular el máximo, pero un método mas directo y eficaz fue como lo hicimos.

Bibliografía:

1. Puledda, S. *Interpretaciones del Humanismo.* Ed. Plaza y Valdez. México, 1996.
2. Sapárina, E. *La Creación y sus Misterios.* Editorial Cartago. Buenos Aires, 1968.
3. Pinillos, J. L. *La Mente Humana.* Editorial Salvat, Madrid, 1971.
4. Rodríguez Cobos M. (Silo). *Contribuciones al Pensamiento.* Plaza y Valdez. México, 1990.
5. Platonov, K. *Psicología Recreativa.* Ediciones de Cultura Popular. México, 1989.
6. Landa, L. N. *Cibernética y Aprendizaje, Pedagogía Cibernética.* Editorial Paidos. Buenos Aires, 1977.
7. Piaget, Jean. *Seis Estudios de Psicología.* Editorial Planeta-Agostini. Barcelona, 1993.
8. Bondsdorff, E. , K. Fabel y O. Riihimaa. *Ajedrez y Matemáticas.* Editorial Martínez Roca. Barcelona, 1974.
9. Polya, George. *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* Editorial Trillas. México, 1992.
10. de Bono, Edward. *El Pensamiento Lateral.* Paidós, 1996.
11. Alan Van Heuvelen. *Learning to think like a physicist: A review of research–based instructional strategies.* Am. J. Phys. **59** (10), October 1991.

Este libro va dirigido a todas las personas que quieran desarrollar sus capacidades del pensamiento en la solución de problemas, tanto académicos como de la vida diaria. En particular para los estudiantes de Educación Media Superior y Superior en las materias de Física y Matemáticas. Este no es un libro de texto, pero sí un complemento y apoyo en la solución de los problemas que plantean. Se busca que estos no sean un martirio para los estudiantes, sino un reto divertido y posible.