



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
MECÁNICA – TERMOFLUIDOS

ANÁLISIS DEL FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO EN UN MICROCANAL  
CONSIDERANDO LOS EFECTOS INDUCIDOS DE LA PRESIÓN Y LA  
TEMPERATURA

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ING. EDGAR ALI RAMOS GÓMEZ

TUTOR  
FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE

MÉXICO, D. F. JUNIO 2016

---

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. Qué es la microfluídica? . . . . .	4
<b>2. Formulación del problema</b>	<b>11</b>
2.1. Formulación matemática . . . . .	11
2.1.1. Condiciones de frontera . . . . .	15
2.2. Análisis de orden de magnitud . . . . .	16
2.3. Modelo matemático adimensional . . . . .	20
2.3.1. Condiciones de frontera adimensionales . . . . .	22
<b>3. Solución analítica</b>	<b>23</b>
3.1. Análisis teórico . . . . .	23
3.1.1. Ecuación de la energía . . . . .	26
3.1.2. Ecuación de Poisson y de la conservación de la carga . . . . .	26
3.1.3. Solución en el límite de $\alpha \rightarrow 0$ . . . . .	27
3.1.4. Solución en $\alpha$ del orden cero . . . . .	29
3.1.5. Solución en $\alpha$ del orden uno . . . . .	30
3.1.6. Flujo volumétrico adimensional . . . . .	33
3.2. Método numérico . . . . .	33
<b>4. Resultados y discusión</b>	<b>37</b>
4.1. Solución analítica . . . . .	37
4.2. Solución numérica . . . . .	46
<b>5. Conclusiones</b>	<b>53</b>



---

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se abordará la importancia de la microfluídica, así como un análisis integral del estado del arte, mostrando una revisión de las investigaciones reportadas por la comunidad científica sobre el estudio del efecto del calentamiento Joule en flujos electro-osmóticos. Al final de este capítulo se habla del aporte o contribución que se planea desarrollar en esta tesis.

Los avances en el área de la microtecnología durante la última década han permitido el desarrollo de laboratorios en un microdispositivo “*lab-on-a-chip*” (laboratorios en un chip), que están siendo utilizados en la manipulación de análisis químicos, biológicos y biomédicos [16]. Además de “*lab-on-a-chip*”, estos microdispositivos reciben el nombre de sistemas bio-micro-eléctrico-mecánicos “*bioMEMS*”. Otro nombre común es microsistemas analíticos totales “*micro-TAS*”. Todos estos términos son sinónimos de dispositivos microfluídicos.

### 1.1. Qué es la microfluídica?

La microfluídica es la ciencia que estudia los sistemas que son capaces de manipular cantidades muy pequeñas de fluido, empleando dispositivos con dimensiones muy pequeñas que van del orden de unas cuantas micras hasta cientos de micras. Dentro de las ventajas que presentan estos dispositivos son que se reducen las cantidades de muestras requeridas y permiten realizar ensayos de una manera más rápida a un menor costo. Otra ventaja es, que se puede obtener un flujo laminar (generalmente

con un número de Reynolds menor a 100, y en ocasiones menores a uno), lo que permite un mejor control de los procesos debido a que se evita la turbulencia [15]. A parte de la importancia de no tener un flujo turbulento, trabajar con flujos laminares permite predecir el comportamiento del flujo del fluido [11].

Durante la última década, los dispositivos microfluídicos están siendo utilizados para el estudio de la biología celular y molecular, la clonación de ADN, administración de fármacos, sensores de detección de agentes biológicos/químicos en microchips [11], etc., por lo que se puede asegurar que tales dispositivos juegan un papel muy importante hoy en día en el mundo moderno. Razón por la cual la comunidad científica ha puesto la mira en todos los fenómenos físicos que pueden ser apreciados en la microfluídica, con la finalidad de entenderlos y hacer uso de los beneficios y ventajas que puedan ser aportados a cualquier rama de la ciencia. Actualmente, existen fuerzas motrices utilizadas para poder aprovechar todos los beneficios que nos pueden dar los dispositivos microfluídicos debido a que en el estudio y diagnóstico en alguna de las ramas de la ciencia de interés, se hace uso del flujo de fluidos, llámense newtonianos o no newtonianos. Dichos fluidos, son generalmente bombeados, controlados o manipulados, utilizando volúmenes que van desde cientos de picolitros (cantidades muy bajas) a cientos de microlitros (cantidades relativamente altas para dichos sistemas). Microbombas, microválvulas, y micromezcladores se integran en los chips. En estos dispositivos se hace uso de partes móviles, haciendo delicada su operación y fabricación [22]. Otra vertiente de estos dispositivos son las microbombas integradas sin partes móviles, siendo el transporte electrocinético su mejor medio de control. Los efectos electrocinéticos son utilizados satisfactoriamente para el control de flujo y la manipulación de solutos e incluye la inyección, separación, mezcla, concentración y reacción de muestras [6].

El estudio de los flujos electrocinéticos se remontan a las primeras observaciones realizadas por Reuss en 1809, quien demostró que el agua puede percolar a través de un medio poroso mediante la aplicación de un campo eléctrico. Los efectos electrocinéticos, están fuertemente relacionados con los sistemas coloidales, es decir, sistemas heterogéneos en donde las partículas coloidales mantienen su identidad en una suspensión. Dentro de los diferentes mecanismos de los efectos electrocinéticos [23], tenemos:

- Electro-ósmosis: es el movimiento de un líquido ionizado relativo a una superficie cargada y estacionaria, mediante la aplicación de un campo eléctrico.
- Electroforesis: es el movimiento de superficies y macromoléculas cargadas relativo a un líquido en reposo mediante la aplicación de un campo eléctrico.
- Potencial de corriente: es el campo eléctrico que se genera por el movimiento de un fluido ionizado a lo largo de una superficie cargada y estacionaria.
- Potencial de sedimentación: es el campo eléctrico que se crea por el movimiento de partículas cargadas relativo a un líquido estacionario.

En el presente trabajo se hará referencia a los flujos electro-omóticos. El principio es muy sencillo. Se tiene un microcanal que contiene una dispersión coloidal, formada por un electrolito y partículas coloidales. Cuando el electrolito entra en contacto con la pared del microcanal, provoca una transferencia de cargas entre el electrolito y la pared, formando una doble capa eléctrica (Electric Double Layer, EDL, por sus siglas en inglés) [23] como se muestra en la figura 1.1. La variación de la densidad de iones dentro de esta doble capa eléctrica obedece a la distribución de Boltzmann [3]. Al aplicar un campo eléctrico a lo largo de la superficie cargada, provocará una fuerza de Coulomb en los iones de la región de la doble capa eléctrica. El movimiento de los iones ocasionará el transporte del flujo por efecto viscoso, lo que resultará en un flujo electro-osmótico [15]. La electro-ósmosis es un medio de transporte que ofrece diversas ventajas en la manipulación de líquidos al ser comparado con los métodos mecánicos convencionales de bombeo, por ejemplo la facilidad de fabricación y control, ausencia de partes mecánicas y alta confiabilidad. Debido a eso, actualmente, el flujo electro-osmótico se aplica ampliamente aplicado en campos de la biología, medicina, química e ingeniería [6]. Adicionalmente una ventaja significativa de los fenómenos electrocinéticos es que los voltajes aplicados a los dispositivos se pueden utilizar no sólo para controlar el transporte de fluidos, sino también para realizar la separación de los diferentes componentes de una muestra mediante electroforesis, que consiste en emplear la corriente eléctrica para separar moléculas según su tamaño y carga eléctrica [23].

Hoy en día, el análisis teórico y numérico de flujos electro-osmóticos ha permitido el desarrollo de importantes aplicaciones en diferentes áreas de la ciencia. En general,

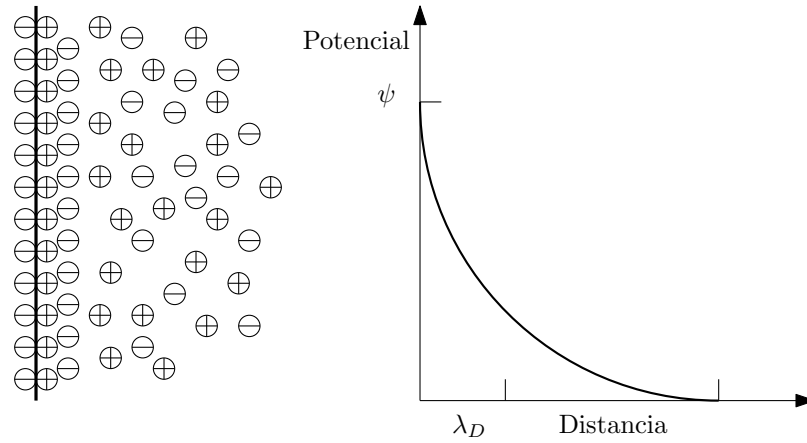


Figura 1.1: Esquema de la doble capa eléctrica.

los flujos electro-osmóticos son capaces de bombear fluido y controlar el flujo utilizando campos eléctricos, eliminando la necesidad de bombas mecánicas o válvulas con componentes móviles. Estos dispositivos microfluídicos están siendo fabricados mediante el uso de materiales hidrófobos, tales como polidimetilsiloxano (PDMS), el metacrilato de metilo (PMMA) [34], etc. y el papel de las fuerzas electro-osmóticas es por lo tanto fundamental para promover el transporte de microvolúmenes de fluido en diferentes aplicaciones. De esta manera, los aspectos físicos y químicos que pueden modificar o contribuir a evaluar los caudales volumétricos, merecen una atención especial. Desde este punto de vista, el análisis de los flujos electro-osmóticos en microcanales se puede alterar drásticamente mediante la aplicación de condiciones de frontera no isotérmicas y este aspecto ha recibido una atención especial en la literatura especializada. En esta dirección, Maynes y Webb [21] consideraron un flujo totalmente desarrollado térmicamente con diferentes configuraciones geométricas; en un microcanal de placas paralelas y en un tubo circular, bajo flujos de calor en las paredes de los microcanales constantes y condiciones de frontera en la entrada y salida de los microcanales constantes, mostrando al final del análisis algunas de las posibles soluciones analíticas. Se obtuvieron resultados similares por Su et al. [27] para un microcanal rectangular y Horiuchi y Dutta [13] para un microcanal recto bidimensional. Sin embargo, en este último caso, los resultados del número de Nusselt incluyen la consideración de una región desarrollada térmicamente. En paralelo,

Tang et al. [30] y Tang et al. [29] desarrollaron estudios numéricos bajo condiciones estables y transitorias del efecto de calentamiento Joule en un flujo electro-osmótico, incluyendo el análisis del transporte de especies (concentración). Las simulaciones numéricas muestran que la influencia del efecto del calentamiento Joule es fundamental para comprender simultáneamente el flujo electro-osmótico y el transporte de especies, situación que tiene aplicación directa en la electroforesis capilar basada en la tecnología Bio-Chip. Haciendo uso de microcanales rectangulares, Liao et al. [17] desarrollaron una investigación numérica basada en el método de Galerkin para flujos mixtos inducidos por fuerzas electro-osmóticas y gradientes de presión considerando a la temperatura constante en la pared, al igual que la existencia de gradientes de presión favorables y desfavorables tomando en cuenta que las propiedades físicas del electrólito varían con la temperatura. Las principales evidencias muestran que el efecto del calentamiento Joule induce un mayor incremento en el flujo de masa con un gradiente de presión favorable en comparación con el caso de un gradiente de presión desfavorable.

En adición, las propiedades térmicas uniformes o variables de la solución electrolítica han jugado un papel importante para caracterizar los casos de flujos electro-osmóticos más complejos, en donde los efectos conjugados pueden ser muy importantes: Sánchez et al. [25] desarrollaron un análisis asintótico basado en métodos de perturbación regular para estudiar el proceso de transferencia de calor conjugado entre un flujo electro-osmótico de un fluido newtoniano y las paredes de los capilares, demostrando que el efecto del calentamiento Joule puede inducir gradientes de presión favorables o desfavorables a lo largo del capilar. El análisis anterior se extendió por Escandón et al. [10] para un fluido Phan-Thien-Tanner que circula en microcanales de placas planas paralelas. Adicional a lo ya realizado por Escandón et al. [10], Bautista et al. [4] consideraron a las propiedades térmicas, como variables dependientes de la temperatura. Otro caso importante de análisis teórico que incluye a la transferencia de calor en un flujo electro-osmótico en un microcanal caracterizado por una sección transversal elíptica, fue estudiado por Vocale et al. [31], donde la influencia simultánea de la relación de aspecto de la sección transversal elíptica y el diámetro electrocinético, es utilizada para mostrar que los microcanales elípticos son más eficientes para valores mayores de la relación de aspecto. Además, el movimien-



to de los diferentes flujos electro-osmóticos ha sido promovido por el uso de fuerzas magnetohidrodinámicas combinadas, como se muestra en los trabajos realizados por Chakraborty et al. [7] y Escandón et al. [9]. En el primer caso, los autores analizan las características de la transferencia de calor para un flujo electro-osmótico completamente desarrollado térmicamente en un microcanal estrecho, que es accionado por la combinación de un gradiente de presión impuesto, efectos electrocinéticos y electromagnéticos. Mientras que en el segundo caso, la diferencia principal es basada en que el análisis térmico es llevado a cabo por un flujo mixto impulsado por fuerzas magnetohidrodinámicas y gradientes de presión externos para un fluido Phan-Thien-Tanner que circula en un microcanal rectangular.

Estudios adicionales, incluyendo condiciones no isotérmicas para flujos electro-osmóticos que circulan en microcanales y geometrías similares han sido consideradas para observar la influencia de otros efectos: Matías et al. [20] llevaron a cabo un estudio analítico para predecir la influencia del efecto del calentamiento Joule en la velocidad de deslizamiento de un fluido viscoelástico. Debemos recordar que las simulaciones de dinámica molecular sugieren que la condición de no deslizamiento convencional deja de ser válida debido a la hidrofobicidad de la superficie sólida [2, 5]. Por lo tanto, la condición convencional de no deslizamiento hidrodinámica debe ser sustituida por una condición de deslizamiento equivalente, incluso para casos simples, donde fue discutido por Tandon y Kirby [28], quienes estudiaron el comportamiento del agua en las interfases hidrófobas, desde el punto de vista de su impacto en fenómenos electrocinéticos en dispositivos microfluídicos. Por otro lado, Ge et al. [12] identificaron las mejores formas para describir la concentración en microfluidos mezclando diferentes muestras de solutos bajo la influencia simultánea de corriente alterna y directa por medio de los efectos del calentamiento Joule. Recientemente, Dey y Joo [8] demostraron que la influencia del efecto del calentamiento Joule puede inducir inestabilidades interfaciales en flujos electro-osmóticos con superficie libre.

Por lo tanto, la literatura especializada orientada a analizar flujos electro-osmóticos con condiciones de frontera no isotérmicas ha alcanzado un importante lugar dentro de la comunidad científica debido a la creciente importancia de este tipo de estudios en diversas ramas de la teoría electrocinética. Sin embargo, todas las contribuciones anteriores toman en cuenta que el parámetro de la energía iónica [14],

dada por la relación  $\alpha_{ionic} = ez\zeta/k_B T$  es constante si y sólo si la temperatura es uniforme. Aquí, los símbolos  $e$ ,  $z$ ,  $\zeta$ ,  $k_B$  y  $T$  indican la carga del electrón, la valencia, el potencial zeta, la constante de Boltzmann y la temperatura de la solución del electrolito, respectivamente. Sin embargo, en el presente caso de estudio y también las referencias citadas en este trabajo, el campo de temperatura de un flujo electro-osmótico no es uniforme debido a la presencia de importantes gradientes de temperatura longitudinales a lo largo del microcanal. Estos gradientes de temperatura no son originados solamente por la presencia del efecto del calentamiento Joule, sino también son causados por la presión como se mostrará más adelante. En consecuencia, el parámetro adimensional  $\alpha_{ionic}$  varía con la temperatura, así como también la conocida longitud de Debye dada por la relación  $\lambda_D = (2n_\infty z^2 e^2 / \epsilon k_B T)^{-1/2}$ , donde  $n_\infty$  y  $\epsilon$  denotan la concentración del número iónico en la solución del fluido y la permitividad dieléctrica, respectivamente.

Después de los comentarios anteriores, el objetivo de este trabajo es el desarrollo de un nuevo análisis térmico para un flujo electro-osmótico de un fluido newtoniano, tomando en cuenta la presencia del efecto del calentamiento Joule y los gradientes de presión longitudinales, observando que estos pueden alterar drásticamente, entre otros, el cambio del flujo volumétrico y el campo de presión inducido. Para este propósito, se introduce un nuevo parámetro adimensional  $\alpha$ , que define las desviaciones de la temperatura con respecto al caso isotérmico. Para los valores finitos de este parámetro, se muestra que las ecuaciones de conservación de momentum tienen nuevos términos que dependen de los gradientes de temperatura y estos términos son causados a su vez por los nuevos gradientes de presión que dependen de la variable  $\lambda_D$ , que es la longitud de Debye. Sin embargo en casos prácticos  $\alpha$ , asume valores muy pequeños. Por lo tanto, las ecuaciones gobernantes que describirá la física del flujo electro-osmótico son resueltas aplicando un método de perturbación regular para pequeños valores de este parámetro. Las predicciones de los métodos de perturbación revelan que, incluso para valores muy pequeños del parámetro  $\alpha$ , el flujo volumétrico junto con la velocidad, la presión, la temperatura y los campos eléctricos son modificados en consecuencia.

---

## Capítulo 2

# Formulación del problema

En el presente capítulo se hace el planteamiento físico y matemático del efecto del calentamiento Joule en un microcanal debido a un flujo electro-osmótico de un fluido newtoniano. Primero se hará la descripción del modelo físico, con la finalidad de simplificarlo y hacerlo mas sencillo. Una vez que se han planteado las ecuaciones que describen la física de lo que queremos estudiar con ayuda de las hipótesis ya comentadas en la descripción, se hará un análisis de orden de magnitud, para poder encontrar las escalas correspondientes para cada una de las propiedades hidrodinámicas involucradas con el fin de adimensionalizar las ecuaciones. El objetivo de adimensionalizar las ecuaciones es obtener información adicional a lo ya planteado, para poder predecir el comportamiento de las mismas y hacer más sencillo su solución. Una vez que se hayan adimensionalizado cada una de las ecuaciones gobernantes, se hará lo mismo para las condiciones de frontera con la finalidad de tener las herramientas necesarias y poder hacer la solución analítica y numérica en el capítulo 3.

### 2.1. Formulación matemática

En la figura 2.1 se muestra el esquema del modelo físico en estudio. Se considera el transporte de una mezcla heterogénea de un electrolito y un soluto, considerando al fluido de trabajo, como newtoniano. Este fluye a través de un microcanal que está formado por dos placas planas paralelas, separadas entre sí por una distancia

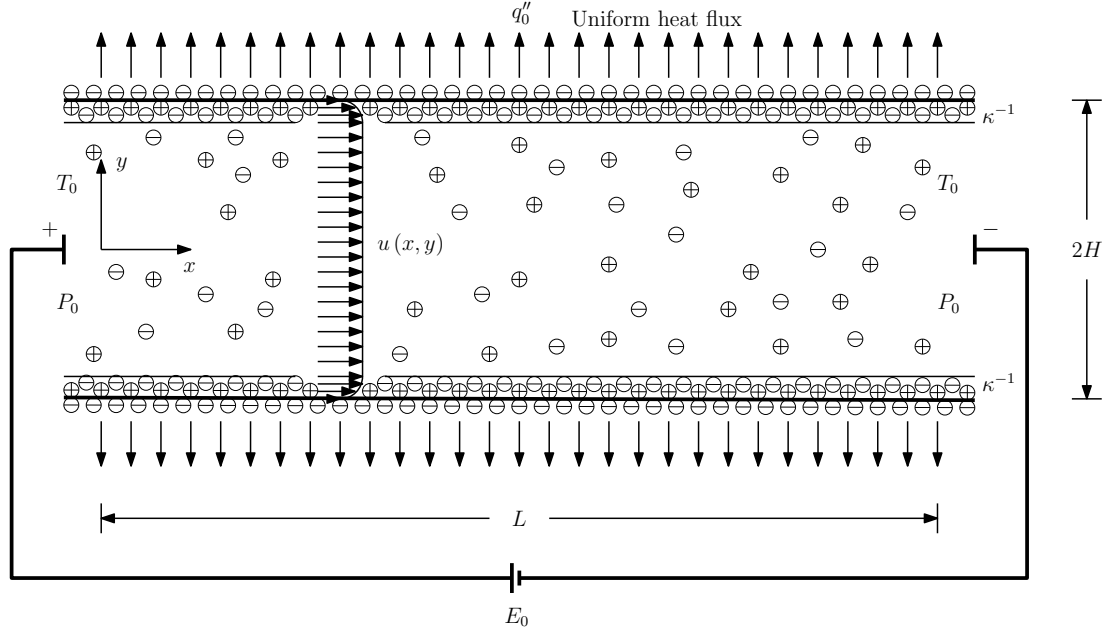


Figura 2.1: Esquema del flujo electro-osmótico en un microcanal de placas paralelas.

$2H$ . La longitud y el ancho son  $L$  y  $w$ , respectivamente. El movimiento del fluido es causado únicamente por fuerzas electro-osmóticas, inducidas por un campo eléctrico  $E_0 = \phi_0/L$ , en donde  $\phi_0$  es el valor del potencial eléctrico impuesto en la entrada del microcanal. El microcanal es soportado en los extremos por dos depósitos de líquido, los cuales se encuentran controlados a una temperatura  $T_0$  y presión  $P_0$  constantes en todo momento [3, 32, 33]. En adición, se impone una pérdida de calor uniforme  $q_0''$  en la pared externa del microcanal hacia los alrededores del sistema entre  $0 \leq x \leq L$  y por consecuencia la temperatura del fluido varía tanto en la dirección longitudinal, como transversal. Esto se debe al efecto del calentamiento Joule, provocado por el campo eléctrico. De acuerdo a la geometría del modelo físico, se hace uso de un sistema de coordenadas cartesianas bidimensional  $(x, y)$ , que se encuentra colocado en el centro del microcanal, tal y como se muestra en la figura 2.1. En adición a las consideraciones ya mencionadas, se harán más suposiciones al modelo físico con la finalidad de hacer el análisis más sencillo:

- a) Análisis bidimensional, flujo incompresible, flujo laminar y números de Reynolds

muy bajos comparados con la unidad, ( $Re \ll 1$ ).

- b) La carga en la EDL sigue la distribución de Boltzman y el voltaje externo aplicado es significativamente más grande que el inducido por el flujo.
- c) El potencial eléctrico en la pared es considerado muy pequeño ( $\zeta < 25\text{mV}$ ), por lo que se hace uso de la linearización de Debye-Hückel en la ecuación de Poisson-Boltzman.
- d) El campo eléctrico aplicado es débil, i.e.,  $\phi_0/L \ll \zeta/\lambda_D$  [26].
- e) El fluido es asumido como un electrolito simétrico,  $z_+ : z_-$ .
- f) Las propiedades del fluido son constantes.
- g) Las paredes del microcanal no son conductoras de corriente eléctrica.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores y considerando que  $H \ll L$ , las ecuaciones en coordenadas cartesianas que describen el flujo electro-osmótico son; conservación de la masa,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

conservación de la cantidad de movimiento en la dirección  $x$  y  $y$ ,

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho_e E_x, \quad (2.2)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho_e E_y \quad (2.3)$$

y la ecuación de la energía,

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \sigma (E_x^2 + E_y^2). \quad (2.4)$$

En las ecuaciones (2.1)-(2.4),  $u$  y  $v$  representan las componentes de la velocidad en la dirección axial,  $x$  y transversal  $y$  del fluido, respectivamente;  $T$  y  $p$ , representan la

temperatura del fluido y la presión hidrodinámica inducida. También  $C_p$ ,  $k$ ,  $\eta$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$  y  $\rho_e$ , son el calor específico, la conductividad térmica, la viscosidad dinámica, la conductividad eléctrica, la densidad y la densidad neta de carga eléctrica de la solución electrolítica, respectivamente. Para el presente trabajo, las propiedades anteriores son asumidas uniformes, con excepción de la densidad neta de carga eléctrica,  $\rho_e$ , debido a que depende de la temperatura, como se verá en las líneas de abajo. Por otro lado,  $E_x$  y  $E_y$  representan la intensidad de campo eléctrico en la dirección  $x$  y  $y$ , los cuales pueden ser evaluados de las siguientes relaciones,

$$E_x = -\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x} \quad (2.5)$$

y

$$E_y = -\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y}, \quad (2.6)$$

donde la variable  $\Phi(x, y)$  representa el potencial eléctrico. De acuerdo a la teoría electrostática (referencia), el potencial eléctrico es gobernado por la ecuación de Poisson-Boltzmann, dada por:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (2.7)$$

donde  $\epsilon$  es la permitividad dieléctrica del fluido. Dado que el campo eléctrico que se aplica es débil, es decir, que  $\Delta\phi/L \ll \zeta/\lambda_D$ , donde  $\Delta\phi$  es la diferencia de potencial del campo eléctrico aplicado. La distribución de carga es esencialmente independiente del campo eléctrico externo y se determina del potencial en la pared,  $\zeta$ . Es razonable asumir que el potencial eléctrico,  $\Phi$ , se da por la suposición lineal del potencial de la doble capa eléctrica y el potencial externo aplicado, lo cual es válido para microcanales largos y despreciando algunos efectos de borde, se puede escribir  $\Phi(x, y) \equiv \psi(x, y) + \phi(x)$ . En las ecuaciones anteriores (2.2), (2.3) y 2.7, la densidad de carga eléctrica está dada por  $\rho_e = -2z^2e^2n_\infty\psi/k_B T(x, y)$ , siendo  $\psi$ ,  $n_\infty$ ,  $z$ ,  $e$  y  $k_B$  el potencial eléctrico generado en la doble capa eléctrica, la concentración iónica de la solución, la valencia de la solución electrolítica, la carga elemental y la constante de Boltzmann, respectivamente. Aquí, hay que insistir en el siguiente punto: la

relación anterior de la densidad de carga eléctrica es una función que depende de la temperatura y por esta simple razón se originan nuevos gradientes de temperatura en las ecuaciones que describen la física del problema a tratar como se demostrará en las próximas líneas. Por otra parte, la conservación de la densidad de carga demanda el supuesto ya bien conocido como electroneutralidad (la densidad de carga, en algunos casos, puede ser inducida por diferencias molares muy pequeñas) y este supuesto debe ser considerado por la ley de Ohm, para la conservación de campo eléctrico, reportado por Lin et al. [18] y esta dado por la siguiente ecuación,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.8)$$

De esta manera, el conjunto de ecuaciones (2.1)-(2.8) que describe a un flujo electroosmótico esta completo. Sin embargo, necesitamos completar estas ecuaciones con sus respectivas condiciones de frontera.

### 2.1.1. Condiciones de frontera

Para el presente trabajo, las condiciones de frontera son consideradas como;

$$u(x, y = H) = v(x, y = \pm H) = 0, \quad (2.9)$$

$$p(x = 0, y) = p(x = L, y) = p_0, \quad (2.10)$$

$$T(x = 0, y) = T(x = L, y) = T_0, \quad (2.11)$$

$$\Phi(x = 0) = \phi_0, \quad \Phi(x = L) = 0, \quad (2.12)$$

junto con

$$y = 0 : \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad (2.13)$$

$$y = H : \quad \Phi = \zeta \quad \text{y} \quad -k \frac{\partial T}{\partial y} = h(T - T_\infty). \quad (2.14)$$

Las condiciones de frontera (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) y (2.14) representan la condición de no deslizamiento y de impermeabilidad en la pared, condiciones constantes de presión en la entrada y a la salida para apreciar que no hay gradientes

de presión externos correspondientes a un flujo puramente electro-osmótico, condiciones isotérmicas en la entrada y a la salida del microcanal, la caída del potencial externo aplicado debido a que a la entrada del microcanal toma un valor constante y a la salida de este ha perdido totalmente su intensidad, las condiciones de simetría de la velocidad, la temperatura y el potencial eléctrico en  $y = 0$ , mientras que en  $y = H$  tenemos las condiciones de contorno para el potencial y el flujo de calor, respectivamente.

## 2.2. Análisis de orden de magnitud

El análisis de escalas o de orden de magnitud, se utiliza como el primer paso para nuestro trabajo con la finalidad de obtener información necesaria para la descripción de la física del problema a tratar. En esta breve sección se realiza un análisis de orden de magnitud haciendo uso de las ecuaciones que describen a nuestro fenómeno con el objetivo de obtener las escalas características adecuadas que se emplearán para definir las variables adimensionales. Este análisis es muy importante, debido a que gracias a esto se puede predecir de manera inicial el comportamiento de cada una de las variables involucradas que describen a un flujo electro-osmótico. Debido a la geometría del microcanal, se establecen las siguientes escalas características para la longitud y la altura,

$$x \sim L; \quad y \sim H. \quad (2.15)$$

Considerando que en la dirección longitudinal, el máximo campo eléctrico aplicado es el que induce el movimiento del fluido y que en la dirección transversal, el potencial inducido se genera en las paredes debido a la distribución de Boltzmann, se consideran las siguientes escalas para los potenciales,

$$\phi \sim \phi_0; \quad \psi \sim \zeta. \quad (2.16)$$

Para poder determinar a la velocidad máxima o característica que va a haber en nuestro microcanal debemos de hacer uso de la ecuación (2.2), siendo esta la ecuación que involucra a la fuerza motriz que induce el movimiento del fluido, la fuerza eléctrica [23]. En esta ecuación se puede apreciar que los efectos viscosos en la dirección



transversal son los únicos que pueden frenar el efecto de la fuerza eléctrica, quedando la competencia de la siguiente forma,

$$\rho_e E_x \sim \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.17)$$

quedando el orden de magnitud de la siguiente manera

$$\rho_e E_0 \sim \eta \frac{u_{HS}}{\lambda_D^2}, \quad (2.18)$$

donde  $\lambda_D = \kappa^{-1}$  representa la longitud de Debye, que viene siendo el espesor de la doble capa eléctrica. Despejando a la velocidad y considerando al inverso de la doble capa eléctrica, tenemos;

$$u_{HS} \sim \frac{\rho_e E_0}{\kappa^2 \eta}. \quad (2.19)$$

En la teoría electromagnética, encontramos que la densidad de la corriente eléctrica esta dada por la siguiente expresión,

$$\rho_e = -2ze n_\infty \sinh \frac{ze\psi}{k_B T} \quad (2.20)$$

Linearizando el término que se encuentra dentro del seno hiperbólico con la siguiente consideración  $\frac{ze\psi}{k_B T} \ll 1$ , podemos observar al parámetro de la temperatura, la cual debe ser considerada como una variable para nuestro análisis. Situación por la que se debe proponer la siguiente adimensionalización para la temperatura,

$$\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T_c}. \quad (2.21)$$

Sustituyendo (2.16) y (2.21) en la linearización, quedando el término que se encuentra dentro del seno hiperbólico de la siguiente manera,

$$\frac{ze\zeta\bar{\psi}}{k_B T_0 (1 + \alpha\theta)} \ll 1, \quad (2.22)$$

dejando a la densidad de corriente eléctrica de la siguiente manera,

$$\rho_e \sim 2ze n_\infty \sinh \frac{ze\zeta\bar{\psi}}{k_B T_0 (1 + \alpha\theta)} \simeq \frac{2z^2 e^2 n_\infty \zeta}{k_B T_0} \left( \frac{\bar{\psi}}{1 + \alpha\theta} \right). \quad (2.23)$$

Tomando en cuenta lo anterior, el orden de magnitud para la densidad de corriente eléctrica queda de la siguiente forma,

$$\rho_e \sim \epsilon \kappa^2 \zeta \quad (2.24)$$

donde  $\kappa^2 = \frac{2z^2 e^2 n_\infty}{\epsilon k_B T_0}$ . Sustituyendo en la velocidad (2.19) tenemos,

$$u_{HS} \sim \frac{\epsilon \zeta}{\eta} E_0, \quad (2.25)$$

quedando la velocidad característica de la siguiente manera, siendo esta la velocidad generalizada de Smoluchowski, ya reportada en trabajos anteriores,

$$u_{HS} = -\frac{\epsilon \zeta}{\eta} E_0. \quad (2.26)$$

Así como se hizo un orden de magnitud para la velocidad, se hará lo mismo para la temperatura haciendo un análisis de la primera ley de la termodinámica aplicado para la figura 2.1,

$$\dot{m} C_p T_0 + 2\sigma E_0^2 L H w - (2q'' L w + \dot{m} C_p T_{dis}) = 0, \quad (2.27)$$

donde  $T_{dis} < T_0$ , siendo  $T_{dis}$  la temperatura de la formación de burbujas  $= \rho V A = \rho U_{HS} 2 H w$ . Por lo que sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos;

$$\dot{m} C_p (T_{dis} - T_0) = 2\sigma E_0^2 L H w - 2q''_{per} L w \quad (2.28)$$

y en consecuencia el cambio de la temperatura a lo largo del microcanal se puede escribir como,

$$\Delta T_L = \frac{2\sigma E_0^2 L H p - 2q'' L p}{2\rho C_p H p U_{HS}}, \quad (2.29)$$

$$\Delta T_L = \frac{\sigma E_0^2 L}{\rho C_p U_{HS}} - \frac{q''}{\rho C_p U_{HS}} \frac{L}{H}. \quad (2.30)$$

Haciendo además uso la ley de Fourier,

$$q'' = -k \nabla T, \quad (2.31)$$

por lo que el orden de magnitud

$$q'' \sim k \frac{\Delta T_T}{H}. \quad (2.32)$$

Sustituyendo (2.32) en (2.30) tenemos,

$$\Delta T_L = \frac{\sigma E_0^2 L}{\rho C_p U_{HS}} - \frac{k \Delta T_T}{H \rho C_p U_{HS}} \frac{L}{H}, \quad (2.33)$$

$$\Delta T_L + \frac{1}{H} \left( \frac{\alpha L}{U_{HS} H} \right) \Delta T_T \sim \frac{\sigma E_0^2 L}{\rho C_p U_{HS}}, \quad (2.34)$$

$$\Delta T_L + \frac{1}{\varepsilon Pe} \Delta T_T \sim \frac{\sigma E_0^2 L}{\rho C_p U_{HS}}, \quad (2.35)$$

$$\varepsilon Pe \Delta T_L + \Delta T_T \sim \left( \frac{\sigma E_0^2 L}{\rho C_p U_{HS}} \right) \frac{H}{L} Pe, \quad (2.36)$$

$$\varepsilon Pe \Delta T_L + \Delta T_T \sim \frac{\sigma E_0^2 H^2}{k}. \quad (2.37)$$

Haciendo un poco de álgebra como se aprecia en las líneas anteriores y considerando que  $\Delta T_L \sim \Delta T_T$  y que  $\varepsilon Pe \ll 1$ , finalmente se obtiene que el cambio transversal de la temperatura se puede escribir en orden de magnitud mediante la expresión siguiente;

$$\Delta T_T \sim \frac{\sigma E_0^2 H^2}{k}, \quad (2.38)$$

por lo que el máximo incremento de temperatura que puede haber dentro del microcanal es,

$$\Delta T_c = \Delta T_T = \frac{\sigma E_0^2 H^2}{k}. \quad (2.39)$$

Terminando el análisis de orden de magnitud, consideramos nuevamente a la ecuación de momentum (2.2), haciendo ahora la competencia del gradiente de presión con la

fuerza eléctrica, como se muestra a continuación,

$$\frac{\Delta P}{L} \sim \rho_e E_0 \quad (2.40)$$

y considerando que los efectos transversales son los únicos que pueden frenar o balancear al flujo, entonces se tiene que  $\eta \frac{U_{HS}}{H^2} \sim \rho_e E_0$  y el orden de magnitud correspondiente para la presión queda de la siguiente manera,

$$\Delta P_c \sim \frac{\eta U_{HS} L}{H^2}; \quad \Delta P_c = \frac{\eta U_{HS} L}{H^2}. \quad (2.41)$$

Por otro lado, si se define  $p' = p - \epsilon \kappa^2 \psi^2 / 2$  [1], el cual es un cambio de variable que tiene la finalidad de relacionar directamente el campo de velocidades, el campo eléctrico externo y el inducido que se aplicará en las ecuaciones (2.2) y (2.3) de cantidad de movimiento, con el motivo de simplificar el análisis. Debido a que la longitud de Debye depende de la temperatura, se inducen nuevos gradientes de temperatura, tal como se muestra a continuación,

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2z^2 e^2 n_\infty}{k_B T} \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{z^2 e^2 n_\infty}{k_B T^2} \psi^2 \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.42)$$

y

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2z^2 e^2 n_\infty}{k_B T} \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{z^2 e^2 n_\infty}{k_B T^2} \psi^2 \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (2.43)$$

## 2.3. Modelo matemático adimensional

Con base en el análisis de orden de magnitud, se propone las siguientes variables adimensionales

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U_{HS}}, \quad \bar{v} = \frac{vL}{U_{HS}H}, \\ \theta &= \frac{T - T_0}{\Delta T_c}, \quad \Pi = \frac{(p' - p'_0) H^2}{\eta U_{HS} L}, \quad \bar{\phi} = \frac{\phi}{\phi_0}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\zeta}; \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde  $U_{HS}$  es la velocidad electro-osmótica de Helmholtz-Smoluchowski, definida por el orden de magnitud y por trabajos ya realizados con anterioridad. En términos de

las variables adimensionales establecidas, las ecuaciones que describen la física de lo que queremos analizar se transforman en:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} = 0, \quad (2.45)$$

sustituyendo las ecuaciones (2.42) y (2.43) en las ecuaciones (2.2) y (2.3), respectivamente y aplicando las variables adimensionales correspondientes, las ecuaciones de cantidad de movimiento se pueden escribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \varepsilon Re \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \right) &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \chi^2} + \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} - \bar{\kappa}^2 \frac{\alpha}{2\varsigma} \frac{\bar{\psi}^2}{(1 + \alpha\theta)^2} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} - \bar{\kappa}^2 \frac{\bar{\psi}}{(1 + \alpha\theta)} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

y

$$\varepsilon^3 Re \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial Y} + \varepsilon^2 \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Y^2} \right) - \bar{\kappa}^2 \frac{\alpha}{2\varsigma} \frac{\bar{\psi}^2}{(1 + \alpha\theta)^2} \frac{\partial \theta}{\partial Y}. \quad (2.47)$$

Las otras tres restantes vienen siendo las ecuaciones adimensionales de la energía, Poisson y conservación de la carga, respectivamente. Esto es,

$$\begin{aligned} \varepsilon Pe \left( \bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + \bar{v} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) &= \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{1}{\varsigma^2} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \chi} \right)^2 \\ &+ \frac{2}{\varsigma} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \chi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} + \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \chi} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon^2 \varsigma^2} \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \chi} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\varsigma \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \chi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial Y^2} = \frac{\bar{\kappa}^2}{(1 + \alpha\theta)} \bar{\psi}, \quad (2.49)$$

$$\varsigma \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \chi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial Y^2} = 0. \quad (2.50)$$

En las ecuaciones (2.45)-(2.50), los parámetros adimensionales quedan definidos como:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{H}{L}, Re = \frac{\rho U_{HS} H}{\eta}, Pe = \frac{\rho C_p U_{HS} H}{k}, \bar{\kappa} = \kappa H, \\ \kappa^2 &= \frac{2z^2 e^2 n_\infty}{\epsilon k_B T_0}, \alpha = \frac{\Delta T_c}{T_0} = \frac{\sigma E_0^2 H^2}{k T_0} \quad \text{y} \quad \varsigma = \frac{\phi_o}{\zeta}.\end{aligned}$$

### 2.3.1. Condiciones de frontera adimensionales

Haciendo uso de las mismas variables adimensionales, las condiciones de frontera (2.9)-(2.14) son transformadas en su forma adimensional de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\bar{u}(\chi, Y = \pm 1) &= \bar{v}(\chi, Y = \pm 1) = \Pi(\chi = 0, Y) = \Pi(\chi = 1, Y) \\ &= \theta(\chi = 0, Y) = \theta(\chi = 1, Y) = 0,\end{aligned}\tag{2.51}$$

$$\bar{\phi}(\chi = 0) = 1, \quad \bar{\phi}(\chi = 1) = 0,\tag{2.52}$$

$$Y = 0: \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y} = 0,\tag{2.53}$$

$$Y = 1: \quad \bar{\psi} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = -\Lambda(1 + \beta\theta).\tag{2.54}$$

Aquí,  $\beta = \sigma E_0^2 H^2 / k (T_0 - T_\infty)$  y  $\Lambda = h (T_0 - T_\infty) / \sigma E_0^2 H$ . En la condición de frontera convectiva dada por la ecuación (2.54),  $\Lambda$  es el parámetro adimensional que mide la competencia entre la pérdida de calor en las paredes del microcanal y el calor generado por el efecto del calentamiento Joule en el fluido. El sistema de ecuaciones adimensional (2.45)-(2.54) define ahora, el flujo electro-osmótico no-isotérmico. En la siguiente sección, usaremos la teoría de lubricación para reducir nuestro sistema de ecuaciones de manera más simple con la ayuda de un análisis asintótico para valores muy pequeños de los parámetros adimensionales que aparecen en las ecuaciones anteriores.

---

# Capítulo 3

## Solución analítica

El presente capítulo tiene como finalidad, establecer la solución analítica que se compone de un método asintótico y uno de perturbación regular. La solución se basa en el uso de la teoría de la lubricación. Posteriormente se hace una validación numérica con ayuda de un software de uso libre, llamado FreeFem++, utilizado para modelar la dinámica de fluidos computacionales.

### 3.1. Análisis teórico

Como se mencionó anteriormente, en el presente trabajo se propone un análisis asintótico para las ecuaciones gobernantes adimensionales. De los parámetros físicos y adimensionales dados por las tablas 3.1 y 3.2, podemos deducir que los términos de orden  $\varepsilon Re$ ,  $\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon^3 Re$ ,  $1/\zeta$ ,  $1/\zeta^2$  y  $1/(\zeta\varepsilon)^2$  son mucho más pequeños comparados con  $\alpha$ , y, a su vez, este parámetro térmico también es muy pequeño comparado con la unidad. Por lo tanto, primero se va a proponer la deducción de las ecuaciones gobernantes tomando en cuenta el límite de Lubricación, en donde los términos de orden  $\varepsilon Re$ ,  $\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon^3 Re$ ,  $1/\zeta$ ,  $1/\zeta^2$  y  $1/(\zeta\varepsilon)^2$  pueden ser despreciados. Después de eso, se va aplicar un método de perturbación regular para valores muy pequeños del parámetro adimensional  $\alpha$ . Las formas adimensionales de las ecuaciones de cantidad de movimiento enfatizan el hecho de que hay dos parámetros adimensionales  $\varepsilon$  y  $\varepsilon^3 Re$ , los cuales deben ser muy pequeños para que un análisis de lubricación clásica pueda ser aplicado. Esto es conveniente ya que asumimos al número de Reynolds

Cuadro 3.1: Propiedades del medio y parámetros geométricos

Parámetro	Valor	Unidades
$c_p$	3760	J/kg K
$E_0$	$\sim 10^3$	V/m
$h$	20-100	W/m <sup>2</sup> K
$H$	50-200	$\mu$ m
$k$	0.61-0.7	W/m K
$L$	$\sim 10^{-2}$	m
$\epsilon$	0.01-0.10	-
$\bar{\epsilon}$	$\sim 10^{-10}$	C/V m
$\zeta$	$\sim 10^{-2}$	V
$\eta$	$\sim 10^{-3}$ - $10^{-1}$	kg/m s
$\lambda_D$	1-10	nm
$\rho$	$\sim 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
$\sigma$	$\sim 10^{-1}$	S/m

$Re$  fijo, independientemente de  $\epsilon$  y por lo tanto,  $\epsilon Re \rightarrow 0$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . El límite de lubricación hace que despreciemos contribuciones de orden  $O(\epsilon^2)$  en los términos viscosos, y  $O(\epsilon Re)$  y  $O(\epsilon^3 Re)$  de los términos inerciales en las ecuaciones (2.46) y (2.47). Por lo tanto, nuestra expansión asintótica para las variables de la velocidad en ambas direcciones y la presión son:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + O(\epsilon, \epsilon Re) + \dots, \quad (3.1)$$

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + O(\epsilon, \epsilon Re) + \dots, \quad (3.2)$$

$$\Pi = \Pi_0 + O(\epsilon, \epsilon Re) + \dots \quad (3.3)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (2.45)-(2.47) en términos del orden cero en el límite ya mencionado pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \chi} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial Y} = 0, \quad (3.4)$$



Cuadro 3.2: Parámetros adimensionales para el presente análisis

Parámetro	Valor
$\bar{\kappa}$	40
$\varsigma$	1000
$\varepsilon$	0.01
$Re$	0.1
$Pe$	0.05
$\Lambda$	0.4
$\alpha$	0.004
$\beta$	0.008

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \chi} = \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial Y^2} - \bar{\kappa}^2 \frac{\alpha}{2\varsigma} \frac{\bar{\psi}_0^2}{(1 + \alpha\theta_0)^2} \frac{\partial \theta_0}{\partial \chi} - \bar{\kappa}^2 \frac{\bar{\psi}_0}{(1 + \alpha\theta_0)} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \chi}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial Y} = -\bar{\kappa}^2 \frac{\alpha}{2\varsigma} \frac{\bar{\psi}_0^2}{(1 + \alpha\theta_0)^2} \frac{\partial \theta_0}{\partial Y}. \quad (3.6)$$

Las ecuaciones (3.4)-(3.6) representan el movimiento de un fluido newtoniano que es gobernado por la presión, la viscosidad y las fuerzas eléctricas externas, situación que representa el límite de la teoría de lubricación. Sin embargo en el presente caso, el segundo término del lado derecho en la ecuación (3.5) muestra la fuerte correspondencia entre los campos de velocidad y de temperatura: con el fin de predecir el campo de velocidad es necesario conocer el campo eléctrico externo, junto con el campo de la temperatura. En esto nos basamos para explicar la razón fundamental del porque incluir a la ecuación de la energía para el presente problema. Aunque, la ecuación de la energía dada por la ecuación (2.48) requiere un análisis diferente, que se discutirá en la siguiente sección. Por otro lado, tomando  $\alpha = 0$  en las ecuaciones (3.5) y (3.6), lo cual corresponde a un flujo electro-osmótico isotérmico, recuperamos el caso bien conocido del movimiento de un fluido newtoniano gobernado solamente por un flujo puramente electro-osmótico, el cual es independiente de la temperatura y cuya solución puede ser encontrada en los siguientes trabajos, [4, 24]. Este último caso, el cual estamos estudiando revela ahora la importancia del parámetro térmico  $\alpha$ : para valores muy pequeños de este, induce fuertes cambios en los campos de presión y de velocidad. No obstante, primero tenemos que entender la estructura del análisis asintótico para las ecuaciones de la temperatura y de los potenciales eléctricos.

### 3.1.1. Ecuación de la energía

Para la ecuación de la energía (2.48), ambos términos difusivos deben ser retenidos, mientras que del lado de los términos convectivos, el segundo término puede ser despreciado en comparación con el primero. Es importante resaltar la importancia de este término convectivo debido a que este, es el responsable del transporte convectivo. Por otra parte, la transferencia de calor podría ser sólo dominada por los términos difusivos y el efecto del calentamiento Joule, situación que suena imposible para nuestro análisis debido a que existe movimiento por parte del fluido. Los detalles de estas consideraciones pueden ser encontrados en [4] y obviamente adoptaremos para este trabajo el mismo procedimiento. Además, la ecuación (2.48) admite una integral en la dirección transversal y adicionalmente aplicando las condiciones de frontera (2.53) y (2.54), obtenemos:

$$\varepsilon Pe \frac{\partial \theta_0}{\partial \chi} \int_0^1 \bar{u}_0 dY = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \chi^2} - \Lambda \{1 + \beta \theta_0\} + \left( \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \chi} \right)^2 \quad (3.7)$$

La ecuación anterior, junto con las ecuaciones (3.4)-(3.6) pueden ser fácilmente resueltas. Sin embargo, todas estas ecuaciones dependen de  $\phi_0$ . Por esta razón, en la siguiente sección se hará un análisis para simplificar las ecuaciones de los potenciales eléctricos  $\phi_0$  y  $\psi_0$ .

### 3.1.2. Ecuación de Poisson y de la conservación de la carga

Basandonos en la teoría de lubricación, las ecuaciones (2.49) y (2.50) pueden ser reescritas de la siguiente manera,

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial Y^2} = \frac{\bar{\kappa}^2}{(1 + \alpha \theta_0)} \bar{\psi}_0 \quad (3.8)$$

y

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \bar{\phi}_0}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial Y^2} = 0. \quad (3.9)$$

Para esta última ecuación, tenemos que retener los términos de orden  $\varepsilon^2$ . La razón de este supuesto es la siguiente: si sólo retenemos términos de orden  $\varepsilon^0$  con la ayuda de la expansión asintótica usada en (3.1)-(3.3), la ecuación (2.50) queda

transformada de la siguiente manera,

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}_0}{\partial Y^2} = 0; \quad (3.10)$$

sin embargo, esta ecuación no es suficiente para poder conocer  $\phi_0$ . Por lo tanto, la estructura asintótica de la ecuación anterior requiere de al menos retener términos de orden superior en  $\varepsilon^2$ . Un caso similar fue desarrollado por Lin et al. [19], quien estudió un flujo electrocinético con la ayuda de un modelo tridimensional de microcanales. Para este trabajo adoptaremos el mismo procedimiento ya comentado y por lo tanto, omitimos los detalles del método de perturbación utilizado.

### 3.1.3. Solución en el límite de $\alpha \rightarrow 0$

Como fue anticipado, las ecuaciones (3.4)-(3.9) pueden ser resueltas añadiendo al análisis que llevamos hasta ahora, un esquema o método de perturbación regular. Para este propósito, se sugiere la siguiente expansión para las variables adimensionales dependientes  $\bar{u}_0$ ,  $\bar{v}_0$ ,  $\Pi_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\bar{\psi}_0$  y  $\bar{\phi}_0$ , tomando en cuenta que la solución en el orden cero corresponde a un flujo puramente electro-osmótico sin la consideración de los efectos inducidos de los gradientes de presión y temperatura. Por lo tanto, las expansiones asintóticas quedan de la siguiente forma,

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_{0,0} + \alpha \bar{u}_{0,1} + \dots, \quad (3.11)$$

$$\bar{v}_0 = \alpha \bar{v}_{0,1} + \dots, \quad (3.12)$$

$$\Pi_0 = \alpha \Pi_{0,1} + \dots, \quad (3.13)$$

$$\theta_0 = \theta_{0,0} + \alpha \theta_{0,1} + \dots, \quad (3.14)$$

$$\bar{\psi}_0 = \bar{\psi}_{0,0} + \alpha \bar{\psi}_{0,1} + \dots \quad (3.15)$$

y

$$\bar{\phi}_0 = \bar{\phi}_{0,0} + \alpha\bar{\phi}_{0,1} + \dots; \quad (3.16)$$

Las ecuaciones (3.4)-(3.9) pueden ser transformadas en el siguiente sistema. Hasta términos del orden  $\alpha^0$ , tenemos:

$$\frac{d\bar{u}_{0,0}}{d\chi} = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{d^2\bar{u}_{0,0}}{dY^2} = \bar{\kappa}^2\bar{\psi}_{0,0} \frac{d\bar{\phi}_{0,0}}{d\chi}, \quad (3.18)$$

$$\varepsilon Pe \frac{d\theta_{0,0}}{d\chi} \int_0^1 \bar{u}_{0,0} dY = \varepsilon^2 \frac{d^2\theta_{0,0}}{d\chi^2} - \Lambda (1 + \beta\theta_{0,0}) + \left( \frac{d\bar{\phi}_{0,0}}{d\chi} \right)^2, \quad (3.19)$$

$$\frac{d^2\bar{\psi}_{0,0}}{dY^2} = \bar{\kappa}^2\bar{\psi}_{0,0} \quad (3.20)$$

y

$$\varsigma \frac{d^2\bar{\phi}_{0,0}}{d\chi^2} + \frac{\partial^2\bar{\psi}_{1,0}}{\partial Y^2} = 0. \quad (3.21)$$

El sistema de ecuaciones (3.17)-(3.21), representa el caso isotérmico de un flujo puramente electro-osmótico, en donde a excepción de la componente de la velocidad  $u_{0,0}$ , la cual depende de la coordenada transversal  $Y$ , las otras variables dependientes son sólo funciones de la coordenada longitudinal  $\chi$ . En adición a lo ya mencionado, la ecuación (3.21) puede ser simplificada, incluso aún más, integrando la ecuación en la dirección transversal, de  $Y = 0$  a  $Y = 1$  y aplicando las condiciones de frontera en  $Y = 0$  y  $Y = 1$ ,  $\partial\bar{\psi}_{1,0}/\partial Y = 0$ , la ecuación (3.21) se puede reescribir como, [19];

$$\frac{d^2\bar{\phi}_{0,0}}{d\chi^2} = 0, \quad (3.22)$$

de forma similar, los términos de orden  $\alpha^1$ , se pueden escribir como:

$$\frac{\partial\bar{u}_{0,1}}{\partial\chi} + \frac{\partial\bar{v}_{0,1}}{\partial Y} = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial^2\bar{u}_{0,1}}{\partial Y^2} = \frac{\bar{\kappa}^2}{2\varsigma} \bar{\psi}_{0,0}^2 \frac{d\theta_{0,0}}{d\chi} + \bar{\kappa}^2\bar{\psi}_{0,0} \frac{d\bar{\phi}_{0,1}}{d\chi} - \bar{\kappa}^2 (\bar{\psi}_{0,0}\theta_{0,0} - \bar{\psi}_{0,1}) \frac{d\bar{\phi}_{0,0}}{d\chi} + \frac{d\Pi_{0,1}}{d\chi}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}_{0,1}}{\partial Y^2} = \bar{\kappa}^2 (\bar{\psi}_{0,1} - \bar{\psi}_{0,0} \theta_{0,0}), \quad (3.25)$$

y para la ecuación de la conservación de carga eléctrica, se procede de manera similar como se hizo en el orden cero, escribiendo a la ecuación para el orden uno de la siguiente manera,

$$\varsigma \frac{d^2 \bar{\phi}_{0,1}}{d\chi^2} + \int_0^1 \frac{\partial^2 \bar{\psi}_{0,1}}{\partial \chi^2} dY = 0. \quad (3.26)$$

Cabe sealar que la ecuación de la energía hasta términos de orden  $\alpha$  no se ha incluido debido a que no es necesaria para determinar la presión inducida  $\Pi_{0,1}$ , tal como se muestra en las siguientes líneas. Las ecuaciones que describen la física de lo que estamos estudiando (3.17)-(3.26) deben ser resueltas con las siguientes condiciones de frontera:

$$\bar{u}_{0,i}(\chi, Y = 1) = 0 \quad , \quad \bar{v}_{0,i}(Y = \pm 1) = 0, \quad \text{for } i = 0, 1, \dots$$

$$\Pi_{0,i}(\chi = 0, 1) = \theta_{0,i}(\chi = 0, 1) = 0 \quad \text{for } i = 0, 1, \dots$$

$$\bar{\phi}_{0,0}(\chi = 0) = 1, \quad \bar{\phi}_{0,0}(\chi = 1) = 0,$$

$$\bar{\phi}_{0,1}(\chi = 0) = 0, \quad \bar{\phi}_{0,1}(\chi = 1) = 0. \quad (3.27)$$

### 3.1.4. Solución en $\alpha$ del orden cero

El sistema de ecuaciones (3.17)-(3.21) puede ser resuelto fácilmente y con ayuda de algunas manipulaciones algebraicas, tenemos que,

$$\bar{u}_{0,0} = 1 - \frac{\cosh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})}, \quad \bar{\psi}_{0,0} = \frac{\cosh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})} \quad \text{and} \quad \bar{\phi}_{0,0} = 1 - \chi. \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \theta_{0,0} = & a_1 \exp \left( \left[ \frac{Pek_1}{2\varepsilon} + \sqrt{\left( \frac{Pek_1}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{\Lambda\beta}{\varepsilon^2}} \right] \chi \right) + \\ & b_1 \exp \left( \left[ \frac{Pek_1}{2\varepsilon} - \sqrt{\left( \frac{Pek_1}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{\Lambda\beta}{\varepsilon^2}} \right] \chi \right) + \frac{1}{\beta} \left( \frac{1}{\Lambda} - 1 \right); \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde las constantes  $a_1$  y  $b_1$  son definidas de la siguiente manera,

$$a_1 = -\frac{1}{\beta} \left( \frac{1}{\Lambda} - 1 \right) \frac{1 - \exp \left[ \frac{Pek_1}{2\varepsilon} - \sqrt{\left( \frac{Pek_1}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{\Lambda\beta}{\varepsilon^2}} \right]}{\exp \left[ \frac{Pek_1}{2\varepsilon} + \sqrt{\left( \frac{Pek_1}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{\Lambda\beta}{\varepsilon^2}} \right] - \exp \left[ \frac{Pek_1}{2\varepsilon} - \sqrt{\left( \frac{Pek_1}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{\Lambda\beta}{\varepsilon^2}} \right]}$$

y

$$b_1 = \frac{1}{\beta} \left( \frac{1}{\Lambda} - 1 \right) \left\{ \frac{1 - \exp \left[ \frac{Pek_1}{2\varepsilon} - \sqrt{\left( \frac{Pek_1}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{\Lambda\beta}{\varepsilon^2}} \right]}{\exp \left[ \frac{Pek_1}{2\varepsilon} + \sqrt{\left( \frac{Pek_1}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{\Lambda\beta}{\varepsilon^2}} \right] - \exp \left[ \frac{Pek_1}{2\varepsilon} - \sqrt{\left( \frac{Pek_1}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{\Lambda\beta}{\varepsilon^2}} \right]} - 1 \right\}$$

respectivamente. En las ecuaciones anteriores, el factor  $k_1$  dado por la integral  $k_1 = \int_0^1 \bar{u}_{0,0} dY$ , puede ser evaluado con la ayuda de la ecuación (3.28) y el resultado es,

$$k_1 = 1 - \frac{\tanh(\bar{\kappa})}{\bar{\kappa}}.$$

### 3.1.5. Solución en $\alpha$ del orden uno

En este caso, necesitamos resolver el sistema de ecuaciones de (3.23)-(3.26). Por lo tanto, se procederá de la siguiente manera: reemplazaremos la solución del orden cero dada por la ecuación (3.28) y (3.30) dentro de la ecuación (3.25). El resultado puede ser integrado dos veces con respecto a la coordenada transversal  $Y$  y después de algunos pasos algebraicos, obtenemos que;

$$\bar{\psi}_{0,1} = \frac{\bar{\kappa}}{2} \frac{\theta_{0,0}}{\cosh(\bar{\kappa})} (\tanh(\bar{\kappa}) \cosh(\bar{\kappa}Y) - Y \sinh(\bar{\kappa}Y)). \quad (3.30)$$

Después de esto, ahora podemos sustituir la ecuación (3.30) dentro de la ecuación (3.26). Por lo tanto, el término de la integral de la ecuación resultante puede ser integrada y evaluada en ambos límites. Finalmente, el resultado de la ecuación diferencial puede ser integrado nuevamente y el resultado es (omitiendo todo el desarrollo

algebraico),

$$\bar{\phi}_{0,1} = -\frac{1}{2\zeta} \left\{ \frac{\tanh(\bar{\kappa})}{\bar{\kappa}} + \tanh^2(\bar{\kappa}) - 1 \right\} \theta_{0,0}; \quad (3.31)$$

mientras tanto la solución hasta términos de orden  $\alpha$  para la componente de la velocidad  $\bar{u}_{0,1}$  puede ser determinada fácilmente reemplazando los perfiles de temperatura y de campo eléctrico correspondientes dentro de la ecuación (3.24). El resultado de la ecuación puede ser integrado dos veces, obteniendo;

$$\bar{u}_{0,1} = \Omega_1(Y) \frac{d\theta_{0,0}}{d\chi} - \Omega_2(Y) \theta_{0,0} + \frac{1}{2} (Y^2 - 1) \frac{d\Pi_{0,1}}{d\chi}, \quad (3.32)$$

donde las funciones  $\Omega_0$  y  $\Omega_1$  son definidas como,

$$\begin{aligned} \Omega_1(Y) = & \frac{1}{2\zeta} \frac{1}{\cosh(\bar{\kappa})} \left\{ \frac{\bar{\kappa}^2}{4\cosh(\bar{\kappa})} [Y^2 - 1] + \frac{1}{8} \frac{\cosh(2\bar{\kappa})}{\cosh(\bar{\kappa})} \left[ \frac{\cosh(2\bar{\kappa}Y)}{\cosh(2\bar{\kappa})} - 1 \right] \right. \\ & \left. - \left[ \frac{1}{\bar{\kappa}} \sinh(\bar{\kappa}) + \tanh(\bar{\kappa}) \sinh(\bar{\kappa}) - \cosh(\bar{\kappa}) \right] \left[ \frac{\cosh(\bar{\kappa}Y)}{\cosh(\bar{\kappa})} - 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

y

$$\Omega_2(Y) = \frac{\bar{\kappa} \cosh(\bar{\kappa}Y)}{2 \cosh(\bar{\kappa})} \{ \tanh(\bar{\kappa}) - Y \tanh(\bar{\kappa}Y) \}.$$

A esta altura, hacemos énfasis en que la presión inducida  $\Pi_{0,1}$  permanece desconocida. Sustituyendo la componente de la velocidad  $\bar{u}_{0,1}$  en la ecuación de continuidad (3.23) y del resultado obtenido integramos en la dirección transversal de  $Y = -1$  a  $Y = 1$  y aplicando las condiciones de frontera adecuadas, obtenemos la siguiente ecuación,

$$\frac{d^2\Pi_{0,1}}{d\chi^2} = c_1 \frac{d^2\theta_{0,0}}{d\chi^2} + d_1 \frac{d\theta_{0,0}}{d\chi} \quad (3.33)$$

donde las constantes  $c_1$  y  $d_1$  están dadas por,

$$c_1 = \frac{3}{4\zeta} \frac{1}{\cosh(\bar{\kappa})} \left\{ \frac{1}{16\bar{\kappa}} \frac{1}{\cosh(\bar{\kappa})} [\sinh(2\bar{\kappa}) - \sinh(-2\bar{\kappa}) - 4\bar{\kappa}\cosh(2\bar{\kappa})] \right. \\ \left. - \left[ \frac{1}{\bar{\kappa}^2} \tanh(\bar{\kappa}) + \frac{\tanh^2(\bar{\kappa})}{\bar{\kappa}} - \frac{1}{\bar{\kappa}} \right] [\sinh(\bar{\kappa}) - \sinh(-\bar{\kappa}) - 2\bar{\kappa}\cosh(\bar{\kappa})] \right. \\ \left. - \frac{\bar{\kappa}^2}{3} \frac{1}{\cosh(\bar{\kappa})} \right\}$$

y

$$d_1 = \frac{3}{4} \frac{1}{\cosh(\bar{\kappa})} \left\{ \left[ \tanh(\bar{\kappa}) + \frac{1}{\bar{\kappa}} \right] [\sinh(\bar{\kappa}) - \sinh(-\bar{\kappa})] - 2\cosh(\bar{\kappa}) \right\}$$

respectivamente. La ecuación (3.33) puede ser integrado directamente y el resultado esta dado por,

$$\Pi_{0,1} = c_1\theta_{0,0} - d_1\Gamma + d_1 \{ \Gamma(1) - \Gamma(0) \} \chi + d_1\Gamma(0), \quad (3.34)$$

donde

$$\Gamma(\chi) = f_1 \exp \left( \left[ \frac{Pek_1}{2\varepsilon} + \sqrt{\left( \frac{Pek_1}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{\Lambda\beta}{\varepsilon^2}} \right] \chi \right) + \quad (3.35) \\ f_2 \exp \left( \left[ \frac{Pek_1}{2\varepsilon} - \sqrt{\left( \frac{Pek_1}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{\Lambda\beta}{\varepsilon^2}} \right] \chi \right) + \frac{1}{\beta} \left( \frac{1}{\Lambda} - 1 \right) \chi;$$

y las constantes  $f_1$  y  $f_2$  están dadas por,

$$f_1 = \frac{a_1}{\frac{Pek_1}{2\varepsilon} + \sqrt{\left( \frac{Pek_1}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{\Lambda\beta}{\varepsilon^2}}}$$

y

$$f_2 = \frac{b_1}{\frac{Pek_1}{2\varepsilon} - \sqrt{\left( \frac{Pek_1}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{\Lambda\beta}{\varepsilon^2}}}.$$



### 3.1.6. Flujo volumétrico adimensional

Finalmente, la tasa de flujo volumétrico adimensional dentro del microcanal puede ser encontrada con ayuda de la expansión de la velocidad  $\bar{u}_0 = \bar{u}_{0,0} + \alpha \bar{u}_{0,1} + \dots$ , reconociendo que  $\bar{u}_{0,0}$  y  $\bar{u}_{0,1}$  son dadas por las ecuaciones (3.28) y (3.32) y la siguiente relación  $\bar{Q} = \int_0^1 \bar{u}_0 dY$ . De esta manera, la tasa de flujo volumétrico adimensional es dada por,

$$\bar{Q}_t = 1 - \frac{\tanh(\bar{\kappa})}{\bar{\kappa}} + \frac{2}{3}\alpha \left( c_1 \frac{d\theta_{0,0}}{dx} - d_1 \theta_{0,0} - \frac{d\Pi_{0,1}}{dx} \right); \quad (3.36)$$

en la ecuación anterior, tenemos que tomar en cuenta que la tasa de flujo volumétrico adimensional es definida como  $\bar{Q} = Q/Q_c$ , donde  $Q_c = 2HU_{HS}$  y representa la tasa de flujo volumétrico por unidad de ancho del microcanal.

Es importante hacer notar que la presión inducida  $\Pi_0 = \alpha \Pi_{0,1} + \dots$ , depende solamente de la coordenada longitudinal  $\chi$ . Sin embargo, esto no significa que la solución se asemeje a un flujo unidireccional porque en el sentido de la corriente, la velocidad  $\bar{u}_0$ , es una función tanto de la coordenada longitudinal como transversal y  $\bar{v}_0$  no es cero, en general. Debemos tener en cuenta que el parámetro  $\alpha$  define las desviaciones de la temperatura de el caso isotérmico generando nuevos gradientes longitudinales de presión y de temperatura, siendo esto el principal aporte a la comunidad científica.

Antes de seguir avanzando con los resultados obtenidos de la solución analítica, incluiremos un apartado para la validación numérica de este trabajo, dejando muy claro que la parte fundamental descansa en el desarrollo teórico y analítico.

## 3.2. Método numérico

El sistema descrito por las ecuaciones (2.48)-(2.50) y (3.4)-(3.6), deben de resolverse con sus respectivas condiciones de frontera (2.51)-(2.54). Por lo tanto, para este sistema de seis ecuaciones diferenciales tiene que ser resuelto simultáneamente usando un método iterativo debido a su alta dependencia que hay entre cada una de las variables. El sistema de ecuaciones es resuelto en una forma implícita, usando el método de elemento finito con ayuda de un software libre, de nombre FreeFem++.

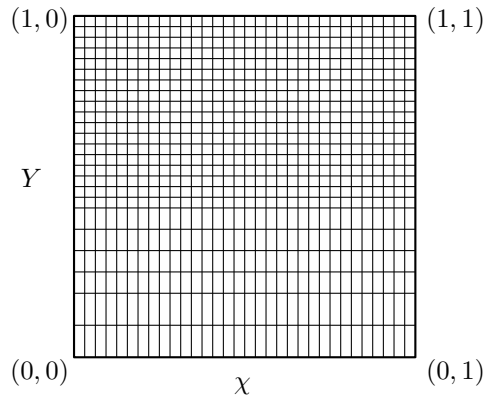


Figura 3.1: Esquema de la región en el fluido del microcanal.

FreeFem++ es un lenguaje de programación que está escrito en C++. El criterio de convergencia absoluto de  $1 \times 10^{-8}$  se requiere entre cada una de las iteraciones consecutivas que deben de hacerse en el análisis numérico para cada variable dependiente, las cuales son  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\Pi$ ,  $\theta$ ,  $\bar{\psi}$  y  $\bar{\phi}$ .

El método de elemento finito (FEM) es uno de tantos métodos numéricos que uno puede encontrar para la resolución de ecuaciones diferenciales, que para nuestro caso es aplicado para dinámica de fluidos computacionales.

El método se basa en dividir la región de interés, en este caso nuestro microcanal 3.1, en una serie de dominios denominados no intersectantes entre sí denominados elementos finitos. Este conjunto de elementos finitos forma una partición de los diferentes dominios que podemos obtener, también llamada discretización. Dentro de todo el elemento se pueden apreciar una serie de puntos representativos llamados nodos. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito, además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se conoce como malla. Los cálculos se realizan sobre una malla o discretización creada a partir del dominio con programas generadores de mallas, en una etapa previa a los cálculos que se denomina pre-proceso. De acuerdo con estas relaciones de adyacencia o conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y denominadas grados de libertad. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales (o linealizadas), la matriz de dicho sistema de ecuaciones se

llama matriz de rigidez del sistema. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos.

Ahora bien, dentro de los aprendizajes obtenidos por el uso de software libre o comercial que tiene la finalidad de predecir como funcionará y reaccionará determinado factor bajo un entorno real, se observó que las herramientas aplicadas a la dinámica de fluidos computacionales resuelven todo tipo de problemas físicos, sin embargo hay que tener mucho cuidado a la hora de usarlas debido a que si no entendemos la física de lo que queremos analizar, por obvias razones a la hora de programarlo, los resultados arrojados serán incorrectos. Esto viene a relucir debido a que como se puede apreciar en las ecuaciones (3.5) y (3.6), tenemos al gradiente de la presión en la dirección  $\chi$  y  $Y$ , respectivamente. Podemos visualizar que la derivada de la presión es de primer orden, por lo tanto el código numérico solo puede aceptar una condición de frontera para la presión. Esta situación complica la solución del mismo debido a que tenemos para la presión las condiciones de frontera (2.51).

Haciendo uso de las ecuaciones (3.5) y (3.6), deducimos una ecuación de Poisson para la presión [Ref] con la finalidad de subirle el orden a esta variable y poderle aplicar las condiciones de frontera correspondientes, quedando la ecuación de la siguiente forma;

$$\nabla^2 \Pi_0 = \frac{\partial^3 u_0}{\partial \chi \partial Y^2} - \frac{\alpha \bar{\kappa}^2}{2\zeta} \left[ \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \frac{\bar{\psi}_0^2}{(1 + \alpha \theta_0)^2} \frac{\partial \theta_0}{\partial \chi} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\bar{\psi}_0^2}{(1 + \alpha \theta_0)^2} \frac{\partial \theta_0}{\partial Y} \right) \right] - \bar{\kappa}^2 \frac{\partial}{\partial \chi} \left[ \frac{\bar{\psi}_0}{(1 + \alpha \theta_0)} \frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \chi} \right]. \quad (3.37)$$

Ahora bien, nuestro sistema de ecuaciones diferenciales esta completo para poderlo resolver numéricamente. El método de discretización temporal y espacial en elemento finito plantea reescribir el mismo sistema bajo la formulación variacional débil, dejando a nuestro sistema de la siguiente manera:

Ecuación de continuidad

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot u^{n+1} q d(x, y) + \epsilon \int_{\Omega} p^{n+1} q d(x, y) = 0, \quad (3.38)$$

ecuación de momentum en la dirección longitudinal, haciendo la consideración que

para la coordenada transversal,  $v = 0$ .

$$O(\varepsilon Re) \int_{\Omega} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \cdot u_{aux} d(x, y) + O(\varepsilon^2) \int_{\Omega} \nabla u^{n+1} \cdot \nabla u_{aux} d(x, y) - \quad (3.39)$$

$$\int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot u_{aux} d(x, y) = \int_{\Omega} f_u \cdot u_{aux} d(x, y),$$

ecuación modificada de Poisson para la presión

$$\int_{\Omega} \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} \cdot p_{aux} d(x, y) + \int_{\Omega} \nabla p^{n+1} \cdot \nabla p_{aux} d(x, y) = \int_{\Omega} f_p \cdot p_{aux} d(x, y), \quad (3.40)$$

ecuación de la energía

$$\int_{\Omega} \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} \cdot \theta_{aux} d(x, y) + \frac{\varepsilon}{Pe} \int_{\Omega} \nabla \theta^{n+1} \cdot \nabla \theta_{aux} d(x, y) = \quad (3.41)$$

$$\frac{1}{\varepsilon Pe} \int_{\Omega} f_{\theta} \cdot \theta_{aux} d(x, y),$$

ecuación de Poisson para el potencial  $\phi$

$$\int_{\Omega} \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} \cdot \psi_{aux} d(x, y) + O(\varepsilon^2) \int_{\Omega} \nabla \psi^{n+1} \cdot \nabla \psi_{aux} d(x, y) = \quad (3.42)$$

$$\int_{\Omega} f_{\psi} \cdot \psi_{aux} d(x, y)$$

y la ecuación de conservación de carga.

$$\int_{\Omega} \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} \cdot \phi_{aux} d(x, y) + O(\zeta \varepsilon^2) \int_{\Omega} \nabla \phi^{n+1} \cdot \nabla \phi_{aux} d(x, y) = \quad (3.43)$$

$$\int_{\Omega} f_{\phi} \cdot \phi_{aux} d(x, y).$$

Cabe resaltar que estas ecuaciones en campaña de las condiciones de frontera adimensionales ya comentadas representan nuestro modelo numérico. Los resultados obtenidos por estas ecuaciones serán brevemente presentados al final del siguiente capítulo.

---

# Capítulo 4

## Resultados y discusión

### 4.1. Solución analítica

En este trabajo algunas propiedades de transporte típicas y valores característicos de los parámetros geométricos de los microcanales se dan en la tabla 3.1, la cual fue mostrada previamente en el capítulo anterior. En adición a esto, la tabla 3.2 muestra los parámetros adimensionales correspondientes.

La figura 4.1 muestra la componente adimensional de la velocidad  $\bar{u}_0$  como una función de la coordenada transversal adimensional  $Y$  evaluada en  $\chi = 0.7$  para cinco valores diferentes del parámetro  $\alpha$  y los valores seleccionados de los parámetros adimensionales que intervienen en el presente trabajo. Aquí, podemos apreciar distribuciones clásicas para los perfiles de velocidad: cerca de la pared, la componente de la velocidad va repentinamente a cero y lejos de la pared, la velocidad alcanza la conocida velocidad electro-osmótica de Helmholtz-Smoluchowski, que es la velocidad máxima que puede obtener un flujo electrocinético. Sin embargo, para cada valor de la coordenada  $Y$  justo en regiones alejadas de la pared, la velocidad aumenta ligeramente en comparación con el caso isotérmico, por su parte la velocidad disminuye ligeramente para las zonas próximas a la pared, lo que revela entonces la influencia del parámetro térmico  $\alpha$ . Lo anterior se puede ver en los dos cuadros incluidos en esta figura. De esta manera, la concavidad de estas curvas se conecta directamente con los valores del parámetro  $\alpha$ . Este punto será discutido en la sección de conclusiones, donde se han incluido las observaciones pertinentes relacionadas con la presencia de

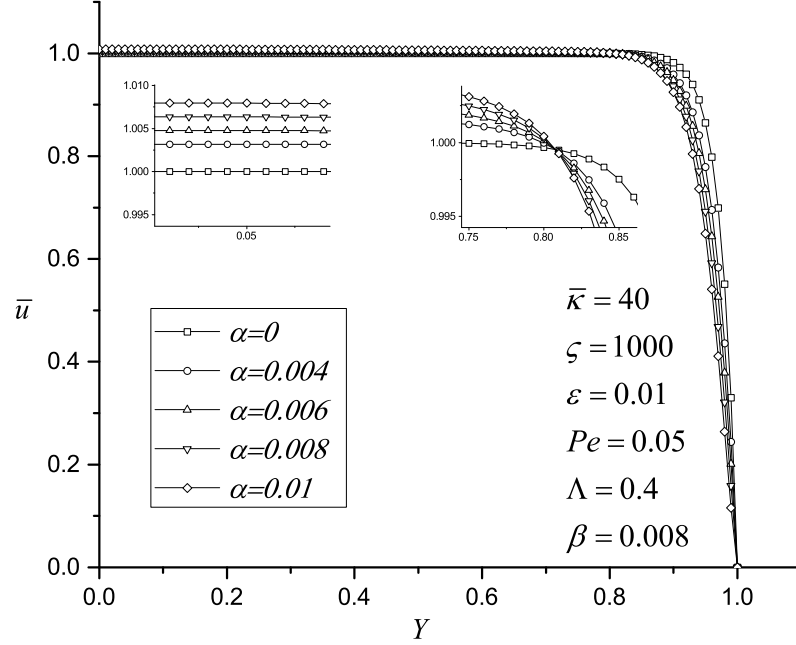


Figura 4.1: Solución asintótica de la componente de la velocidad adimensional  $\bar{u}_0$  evaluada en  $\chi = 0.7$  para  $\alpha = 0, 0.004, 0.006, 0.008$  y  $0.01$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\bar{\kappa} = 40$ ,  $\zeta = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $Pe = 0.05$ ,  $\Lambda = 0.4$  y  $\beta = 0.008$ .

los gradientes de presión y temperatura inducidos.

En la figura 4.2, los perfiles de la velocidad adimensional se representan, de nuevo, en función de la coordenada transversal adimensional  $Y$ , para cuatro valores diferentes de la coordenada longitudinal  $\chi = 0.1, 0.5, 0.7$  y  $0.9$  y mismos valores de los parámetros adimensionales de la figura anterior. Ahora, podemos ver que la forma parabólica del perfil de velocidad se mantuvo prácticamente de la misma manera en todo el recorrido longitudinal del microcanal; Sin embargo, incluimos unos acercamientos adicionales en la figura principal, donde la concavidad de las curvas puede cambiar ligeramente dependiendo de los valores asumidos de la coordenada longitudinal. Por ejemplo, para  $\chi = 0.1$ , tenemos en este caso los valores más pequeños para la distribución de velocidad y la curva es convexa; después de  $\chi = 0.5$  y

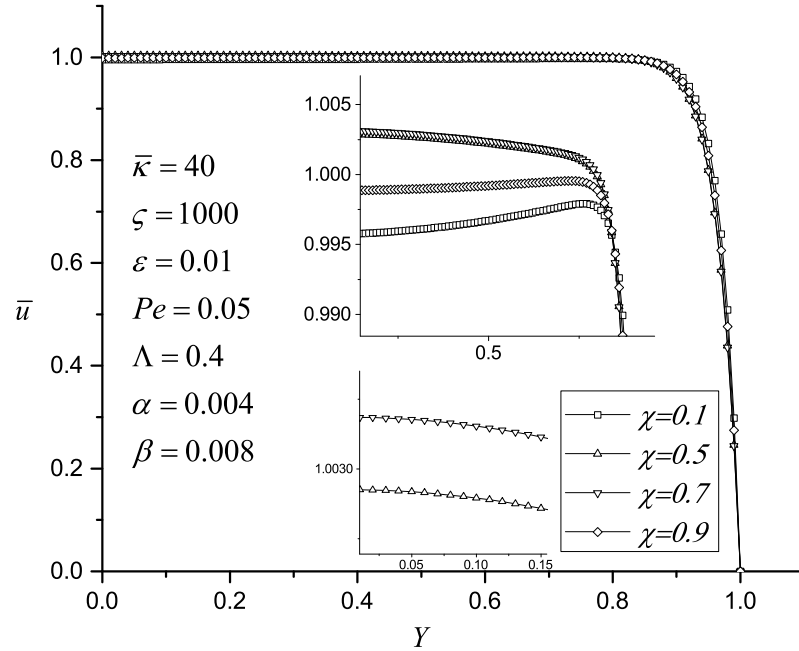


Figura 4.2: Perfiles de la velocidad adimensional como función de la coordenada transversal  $Y$  y valores diferentes de la coordenada longitudinal  $\chi = 0.1, 0.5, 0.7$  y  $0.9$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\bar{\kappa} = 40$ ,  $\zeta = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $Pe = 0.05$ ,  $\Lambda = 0.4$ ,  $\alpha = 0.004$  y  $\beta = 0.008$ .

0.7, los perfiles de velocidad alcanzan valores máximos con prácticamente el mismo perfil, pero los incrementos de las velocidades transforman la distribución hacia una curva cóncava y para  $\chi = 0.9$ , el perfil de velocidad de nuevo vuelve a ser una curva convexa lisa. Creemos que este cambio de concavidad es debido a los gradientes de presión generadas a lo largo de la coordenada longitudinal, como se muestra en las siguientes dos figuras.

En la figura 4.3 el perfil de presión se muestra como función de la coordenada longitudinal  $\chi$  para cinco valores diferentes del parámetro térmico  $\alpha = 0, 0.004, 0.006, 0.008$  y  $0.01$ , que definen el caso no isotérmico. Claramente, el caso de  $\alpha = 0$  representa el caso isotérmico, donde los gradientes de presión están ausentes. Esto corresponde un flujo puramente electro-osmótico, Bautista et al. [4]. Sin embargo,

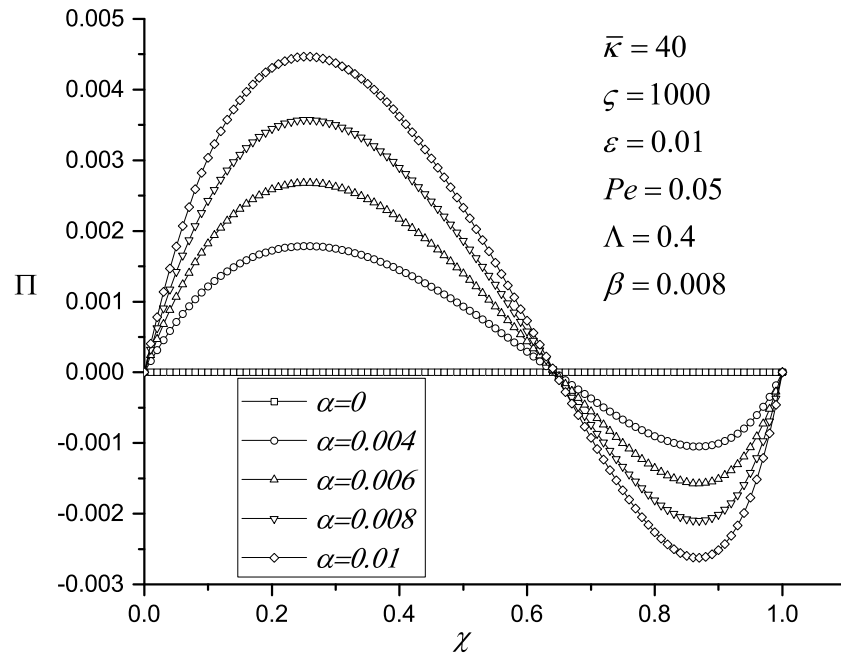


Figura 4.3: Perfiles de la presión adimensional inducida  $\Pi_0$  como función de la coordenada adimensional  $\chi$ , para cinco valores diferentes del parámetro  $\alpha = 0, 0.004, 0.006, 0.008$  y  $0.01$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\bar{\kappa} = 40$ ,  $\zeta = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $Pe = 0.05$ ,  $\Lambda = 0.4$  y  $\beta = 0.008$ .

para valores de  $\alpha$  diferentes de cero, las distribuciones de presión cambian drásticamente: la presión primero aumenta hasta un valor de  $\chi = 0.25$ , donde la presión alcanza un valor máximo, diferente para cada valor de  $\alpha$ . Después de este punto, la presión comienza a disminuir hasta que el valor cero se alcanza prácticamente en  $\chi = 0.65$ . Después de este punto, los cambios de presión a continuación, modifican su comportamiento de la concavidad en los perfiles. El comportamiento anterior se repite si cambia el valor de  $\alpha$ ; sin embargo, las distribuciones de presión se amplifican al aumentar los valores del parámetro térmico. Debido a estas distribuciones de presión favorables y desfavorables a lo largo de la coordenada longitudinal, es que los perfiles de velocidad pueden cambiar su forma.

En la figura 4.4 se muestra de nuevo los perfiles de presión en función de la



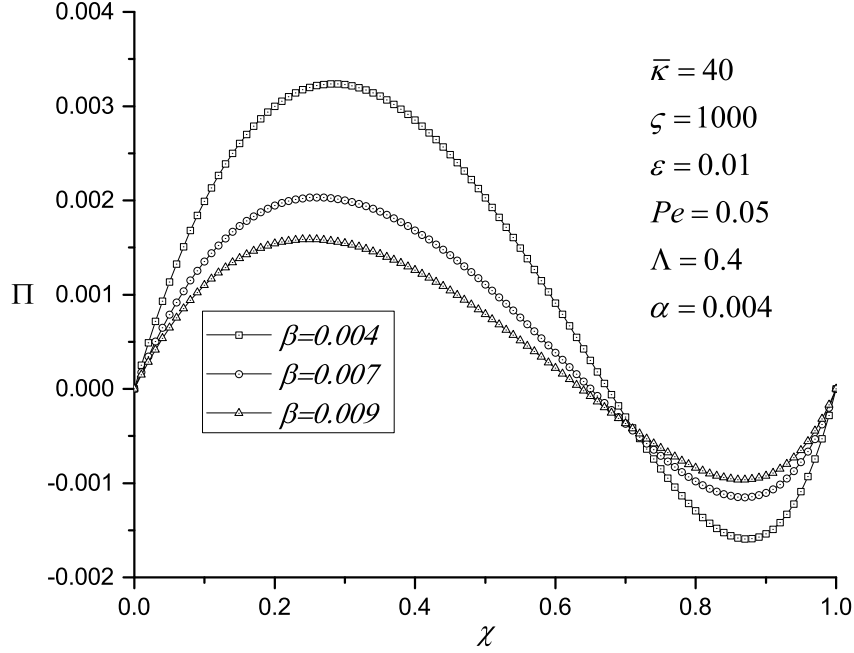


Figura 4.4: Perfiles de la presión adimensional inducida  $\Pi_0$  como función de la coordenada adimensional  $\chi$ , para tres valores del parámetro  $\beta = 0.004, 0.007$  and  $0.009$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\bar{\kappa} = 40$ ,  $\zeta = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $Pe = 0.05$ ,  $\Lambda = 0.4$  y  $\alpha = 0.004$ .

coordenada longitudinal  $\chi$ . Sin embargo, en el presente caso, suponemos que para un valor fijo del parámetro  $\alpha = 0.004$ , diferentes valores del parámetro adimensional  $\beta$ . Este parámetro adimensional mide la importancia o la competencia entre las causas del aumento de la temperatura característica debido al efecto del calentamiento Joule y la caída de la temperatura característica con el entorno exterior del microcanal. Al aumentar los valores de este parámetro, los perfiles de presión disminuyen siguiendo un comportamiento similar al de la figura anterior.

Los perfiles de la temperatura adimensional,  $\theta$ , como función de la coordenada longitudinal  $\chi$  son representados en la figura 4.5. En este caso, se muestra la influencia del número de Péclet,  $Pe$ . Para el aumento de los valores de este parámetro, las distribuciones de la temperatura adimensional asumen valores más pequeños ya que

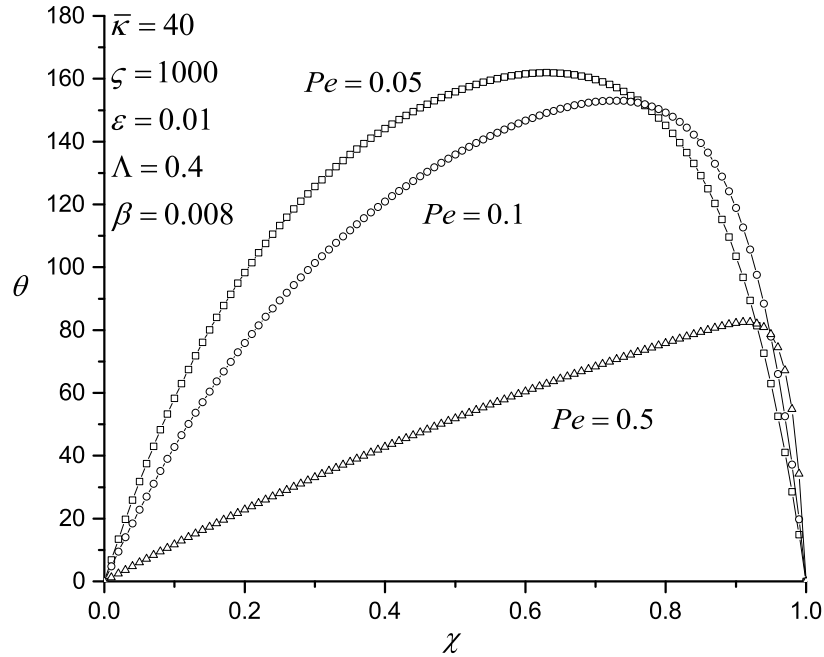


Figura 4.5: Perfiles de la temperatura adimensional como función de la coordenada longitudinal  $\chi$ , para tres valores diferentes del número de Péclet,  $Pe$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\bar{\kappa} = 40$ ,  $\zeta = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\Lambda = 0.4$  y  $\beta = 0.008$ .

el fluido llegará a un mejor transporte convectivo y por lo tanto el fluido tiende a permanecer más frío. De esta manera, la región central del microcanal es donde se alcanzan los incrementos más relevantes de la temperatura debido a que los extremos del microcanal se mantienen a temperatura uniforme. Por lo tanto, podemos ver que la combinación de los parámetros  $Pe$  y  $\beta$  determinan claramente la influencia del efecto del calentamiento Joule en el aumento de la temperatura. En la siguiente figura, se puede apreciar con más detalle el aspecto anterior.

La figura 4.6 se muestra una vez más la variación de la temperatura adimensional como función de la coordenada longitudinal  $\chi$ , para tres valores diferentes del parámetro  $\beta$ . Esta figura muestra la influencia del parámetro  $\beta$  sobre los perfiles de temperatura. Para el aumento de los valores de este parámetro, la temperatura disminuye y de nuevo el fluido vuelve a ser más frío. Por lo tanto, podemos comentar

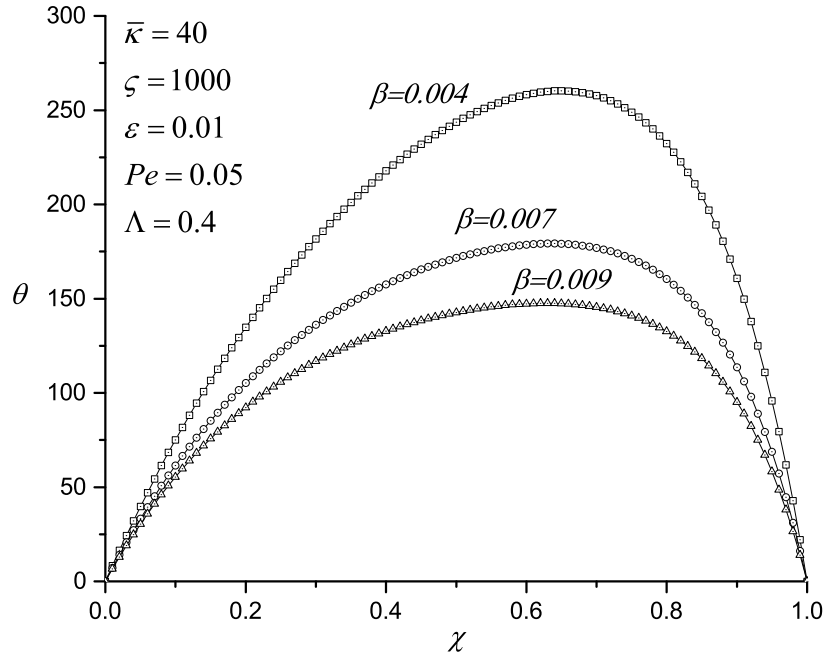


Figura 4.6: Perfiles de la temperatura adimensional como función de la coordenada longitudinal  $\chi$ , para tres valores diferentes del parámetro adimensional,  $\beta = 0.004$ ,  $0.007$  y  $0.009$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\bar{\kappa} = 40$ ,  $\zeta = 1000$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $Pe = 0,05$  and  $\Lambda = 0,4$ .

que la influencia de ambos parámetros ayuda al control de la importancia del efecto del calentamiento Joule. Sin embargo, hay que señalar que el comentario anterior puede complementarse teniendo en cuenta la influencia del parámetro  $\Lambda$ . Para este propósito, se muestra la siguiente figura.

La figura 4.7 representa la temperatura adimensional como función de la coordenada longitudinal  $\chi$  para diferentes valores del parámetro adimensional  $\Lambda = 0,2, 0,5$  y  $0,8$ . Cuando el parámetro  $\Lambda$  aumenta, los perfiles de temperatura adimensional decrecen, lo que significa que se logra una mayor disipación de calor a través de las paredes del microcanal, y los valores por lo tanto, más bajos de la temperatura adimensional son cuando la condición de flujo de calor en la superficie externa del microcanal domina sobre el efecto del calentamiento Joule. Estos resultados están

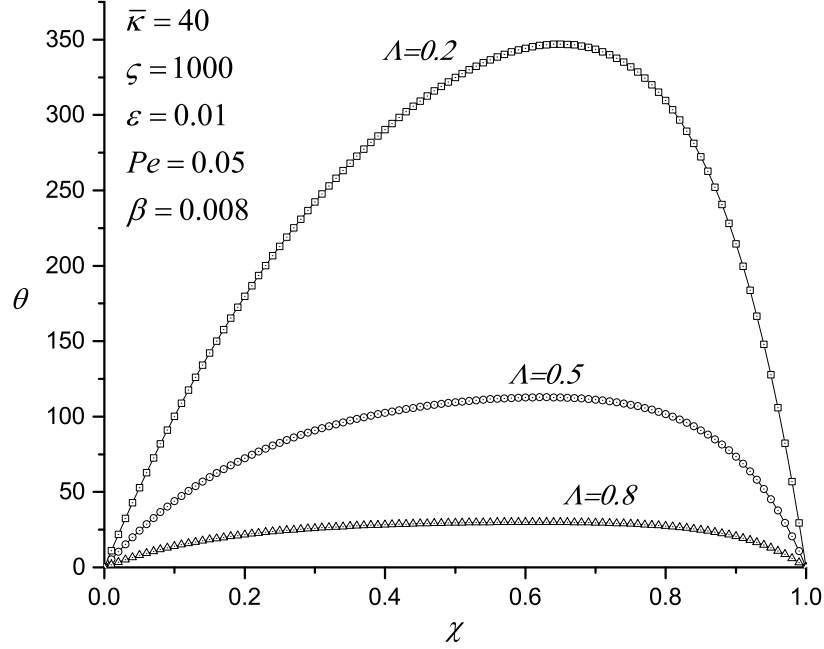


Figura 4.7: Perfiles de la temperatura adimensional como función de la coordenada longitudinal  $\chi$ , para tres valores diferentes del parámetro adimensional  $\Lambda = 0,2, 0,5$  and  $0,8$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\bar{\kappa} = 40$ ,  $\zeta = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $Pe = 0.05$  y  $\beta = 0.004$ .

de acuerdo con los obtenidos por [4], quien llevó a cabo un análisis numérico y asintótico del efecto del calentamiento Joule con propiedades variables en un flujo electro-osmótico de un fluido no newtoniano.

Se discuten ahora la predicción asintótica del campo eléctrico adimensional como función de la coordenada longitudinal  $\chi$  para cinco valores del parámetro térmico  $\alpha = 0, 0,004, 0,006, 0,008$  y  $0,01$ . Por definición, el campo eléctrico adimensional se puede definir como,

$$\bar{E}_\chi = \frac{E_x}{\phi_o/L} = - \left[ \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \chi} + \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \right]$$

y haciendo uso de la tabla 3.2, se obtiene en una primera aproximación, que el

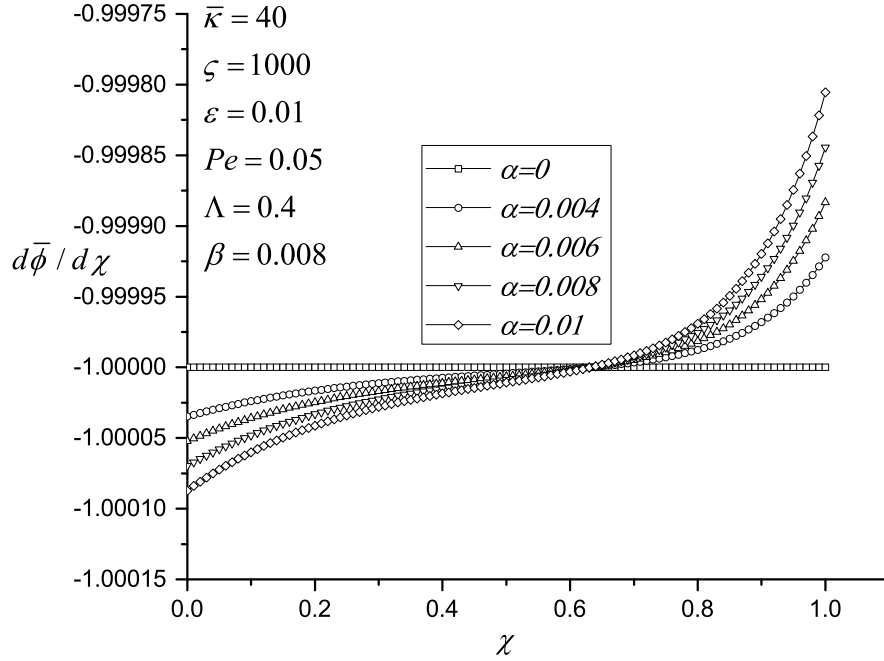


Figura 4.8: Perfiles del campo eléctrico adimensional  $\bar{E}_\chi$  como función de la coordenada longitudinal  $\chi$ , para cinco valores diferentes del parámetro térmico  $\alpha = 0, 0.004, 0.006, 0.008$  and  $0.01$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\bar{\kappa} = 40$ ,  $\zeta = 1000$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $Pe = 0,05$ ,  $\Lambda = 0,4$  and  $\beta = 0,008$ .

campo eléctrico adimensional se puede aproximar como:

$$\bar{E}_\chi \sim -\frac{d\phi_0}{d\chi}$$

Por lo tanto, en la figura 4.8, se muestra el campo eléctrico contra la coordenada longitudinal  $\chi$ . Mediante el análisis de esta figura, podemos ver también que el campo eléctrico se modifica sustancialmente variando los valores del parámetro térmico  $\alpha$ . En particular, al aumentar los valores de este parámetro, las soluciones se separan ligeramente, siendo aún más notorio el caso isotérmico, para los cuales el campo eléctrico aplicado sea siempre el mismo.

Por último, en la figura 4.9, la tasa de flujo volumétrico adimensional como función del parámetro  $\Lambda$  se muestra como función de cinco valores del parámetro térmico

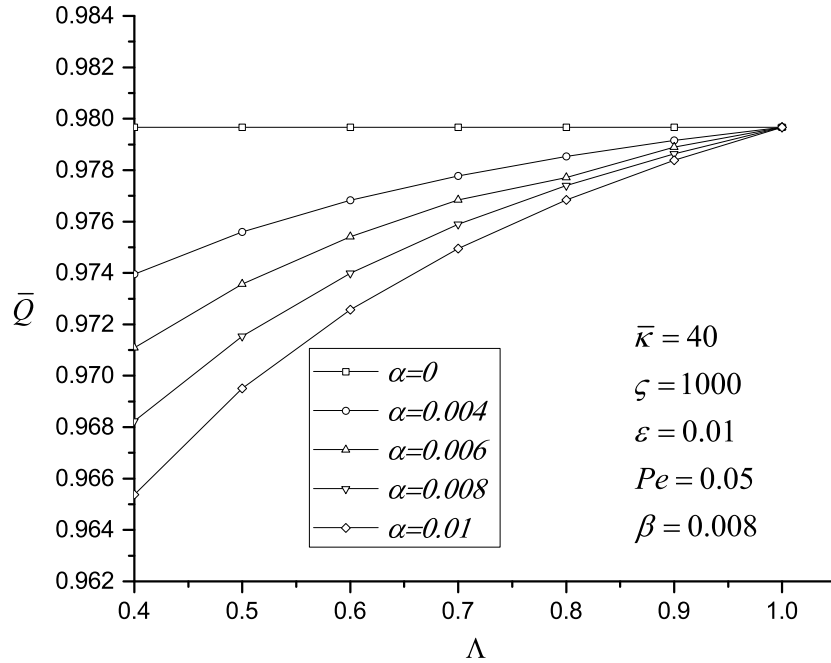


Figura 4.9: Perfiles del flujo volumétrico como una función del parámetro adimensional  $\Lambda$ , para cinco valores diferentes del parámetro térmico  $\alpha = 0, 0.004, 0.006, 0.008$  y  $0.01$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\bar{\kappa} = 40$ ,  $\zeta = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $Pe = 0.05$  y  $\beta = 0.008$ .

$\alpha$ . En todos los casos, la influencia del parámetro  $\alpha$  es la misma: para valores crecientes de dicho parámetro, los caudales volumétricos correspondientes disminuyen para valores fijos de  $\Lambda$  y por lo tanto, la influencia de ambos parámetros  $\alpha$  y  $\Lambda$  regulan simultáneamente la reducción o disminución de los caudales volumétricos.

## 4.2. Solución numérica

En esta sección se tiene como propósito validar numéricamente la solución analítica presentada en las líneas anteriores. Se podría llenar esta tesis de gráficas con la ayuda de la solución numérica debido a la gran recopilación de datos generados, pero ese no es el objetivo. El objetivo es de que la solución analítica y numérica coincidan

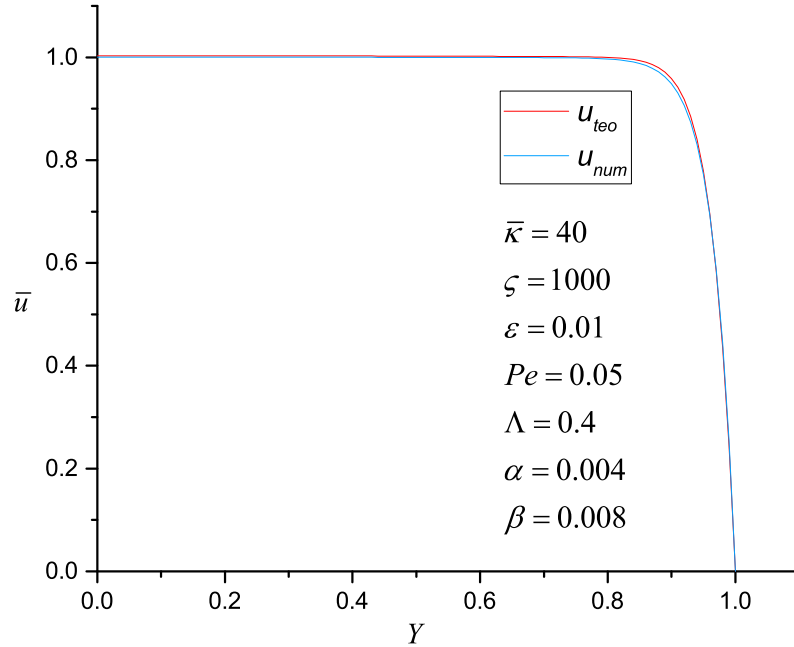


Figura 4.10: Solución asintótica y numérica de la componente de la velocidad adimensional  $\bar{u}_0$  evaluada en  $\chi = 0.7$  para  $\alpha = 0.004$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\bar{\kappa} = 40$ ,  $\zeta = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $Pe = 0.05$ ,  $\Lambda = 0.4$  y  $\beta = 0.008$ .

y no sólo eso, sino que ambas soluciones cumplan con la física de lo que se está analizando.

La figura 4.10 muestra los perfiles de velocidad del flujo en el microcanal como función de la coordenada transversal adimensional evaluada en  $\chi = 0.7$  y representa la comparación entre la solución teórica y la solución numérica, apreciándose que las curvas tienen la misma tendencia con la única diferencia que la solución teórica se encuentra ligeramente en todo momento por arriba de la numérica.

La figura 4.11 presenta la variación de la temperatura adimensional como función de la coordenada longitudinal adimensional en el fluido. En esta figura se puede apreciar al igual que a la velocidad, la comparación entre la solución teórica y la solución numérica, apreciándose nuevamente que ambas curvas tienen la misma tendencia.

La figura 4.12 muestra la comparación entre el análisis teórico y el numérico de la

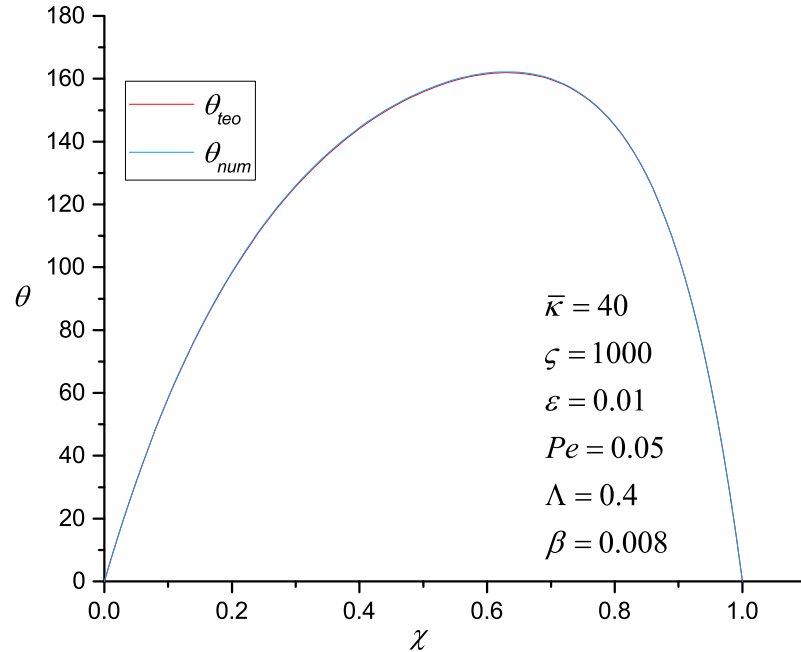


Figura 4.11: Solución asintótica y numérica de la temperatura adimensional como función de la coordenada longitudinal  $\chi$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\bar{\kappa} = 40$ ,  $\zeta = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $Pe = 0.05$ ,  $\Lambda = 0.4$  y  $\beta = 0.008$ .

tasa de flujo volumétrico, observando claramente que existe una tendencia favorable para el caso numérico, en donde las curvas están ligeramente por arriba de las curvas teóricas cuando  $\Lambda = 1$  para cualquier valor de  $\alpha$ . Quitando el caso isotérmico, para valores de  $\Lambda < 1$  la tendencia del caudal es favorable para el caso teórico. Se aprecia claramente que tanto el caso teórico como el numérico tienen la misma tendencia, observada en las dos figuras anteriores.

Dejamos a la presión hasta este punto, debido a que como se puede apreciar en la figura 4.13 existe una tendencia muy similar a la analítica, pero con valores mucho más altos, situación que nos hace pensar que existe un error de escalas. Para el caso analítico partimos de la situación en que  $\bar{\kappa}$  es de orden unidad y en función de eso proponemos un análisis asintótico, que posteriormente le aplicamos un método de perturbación, en donde para todo momento los parámetros adimensionales involu-



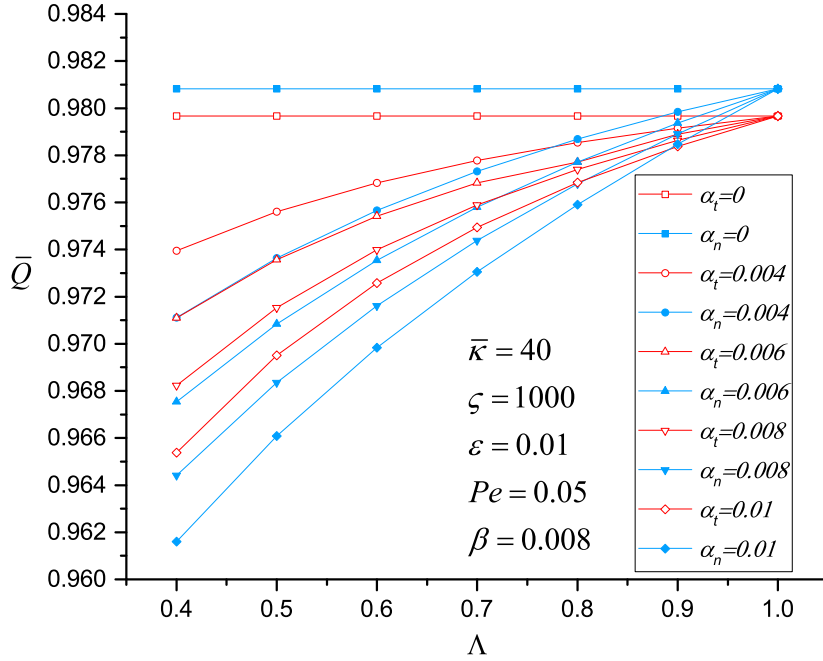


Figura 4.12: Solución asintótica y numérica de los perfiles del flujo volumétrico como una función del parámetro adimensional  $\Lambda$ , para cinco valores diferentes del parámetro térmico  $\alpha = 0, 0.004, 0.006, 0.008$  y  $0.01$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\bar{k} = 40, \zeta = 1000, \varepsilon = 0.01, Pe = 0.05$  y  $\beta = 0.008$ .

crados en las ecuaciones son considerados de orden muy pequeño. Esta suposición no es del toda cierta debido a que  $\bar{k} = 40$  y si observamos la ecuación de Poisson para la presión, uno de los términos en donde se involucra al gradiente del potencial externo viene acompañado de  $\bar{k}^2$ , siendo este un valor muy grande, reflejándose esta situación en las curvas obtenidas por la solución numérica. No significa que la solución numérica este bien o mal, sino que no le podemos explicar al software cada uno de los pasos analíticos que se debe hacer para llegar a una solución parecida a la analítica, razón por la cual se propone un trabajo a futuro para el uso de escalas diferentes para la adimensionalización de las ecuaciones considerando esos ordenes de  $\bar{k}$  altos.

Para concluir con la validación numérica, incluimos las gráficas 4.14 y 4.15. Estás

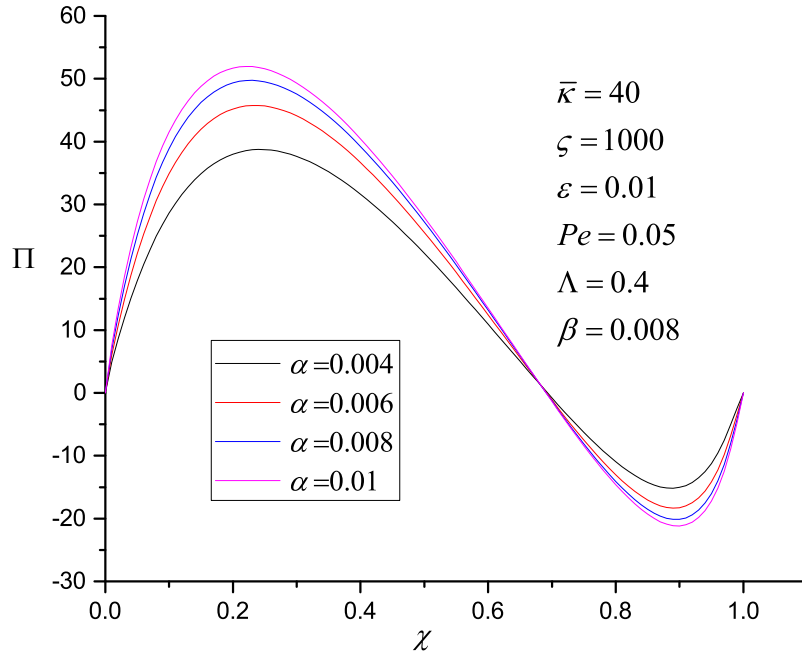


Figura 4.13: Perfiles de la presión numérica adimensional inducida  $\Pi_0$  como función de la coordenada adimensional  $\chi$ , para cinco valores diferentes del parámetro  $\alpha = 0.004, 0.006, 0.008$  y  $0.01$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\bar{\kappa} = 40$ ,  $\zeta = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $Pe = 0.05$ ,  $\Lambda = 0.4$  y  $\beta = 0.008$ .

gráficas muestran la solución numérica para la velocidad adimensional evaluada en  $\chi = 0.7$  y la temperatura adimensional para diferentes valores de  $\bar{\kappa}$ .

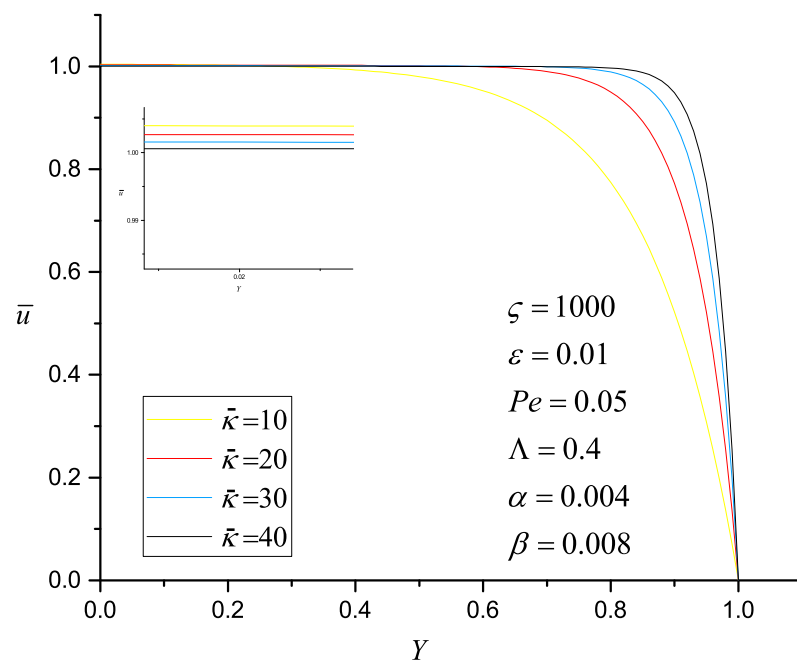


Figura 4.14: Solución numérica de la componente de la velocidad adimensional  $\bar{u}_0$  para  $\bar{\kappa} = 10, 20, 30$  y  $40$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\alpha = 0.004$ ,  $\zeta = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $Pe = 0.05$ ,  $\Lambda = 0.4$  y  $\beta = 0.008$ .

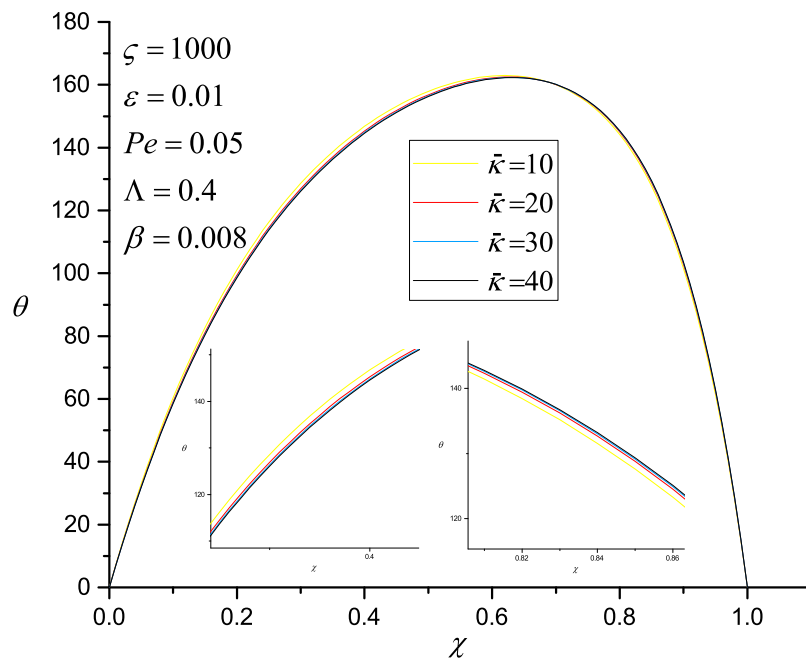


Figura 4.15: Solución numérica de la componente de la temperatura adimensional para diferentes valores de  $\bar{\kappa} = 10, 20, 30$  y  $40$ . Los valores de los parámetros adimensionales son:  $\zeta = 1000$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $Pe = 0,05$ ,  $\Lambda = 0,4$  y  $\beta = 0,008$ .

---

# Capítulo 5

## Conclusiones

En el presente trabajo, hemos desarrollado un análisis de perturbación regular para describir el flujo electro-osmótico no isotérmico que circula en un microcanal. Del proceso de adimensionalización se reconoce el uso del parámetro térmico adimensional  $\alpha$ , el cual mide las desviaciones de la temperatura con respecto al caso isotérmico. En casos prácticos, este parámetro normalmente asume valores más pequeños que la unidad. Sin embargo, e incluso para valores pequeños de este parámetro, las desviaciones para los campos de presión y temperatura son lo suficientemente importantes por lo que debe ser tomados en cuenta. Por lo tanto, los nuevos gradientes de temperatura longitudinales aparecen en las ecuaciones de conservación del momentum que modifican drásticamente la velocidad, la presión y el campo eléctrico. De esta manera, la influencia explícita del parámetro  $\alpha$  determina que la tasa de flujo volumétrico también puede ser modificada. Sin embargo, estos nuevos gradientes de temperatura no son suficientes para regular los caudales volumétricos debido a que dos parámetros adicionales también pueden modular la intensidad de estos gradientes:  $\Lambda$  y  $\beta$  nos ayudan a tener cuidado con los factores que afectan a la determinación de la tasa de flujo volumétrico. De hecho, estos últimos parámetros controlan la competencia entre efecto de calentamiento Joule y las pérdidas de calor en las paredes del microcanal, de modo que los dos gradientes de temperatura longitudinales como transversales compiten simultáneamente para la estimación de la predicción de las principales variables de interés.

---

# Bibliografía

- [1] Armand Adjari. Electro-osmosis on inhomogenously charged surfaces. *Physical Review Letters*, 4:755–759, 1995.
- [2] Jean-Louis Barrat y Lydéric Bocquet. Influence of wetting properties on hydrodynamic boundary conditions at a fluid/solid interface. *Faraday Discuss*, 112:119–127, 1999.
- [3] O. Bautista, S. Sánchez, J. C. Arcos, y F. Méndez. Lubrication theory for electro-osmotic flow in a slit microchannel with the phan-thien and tanner model. *Journal of Fluid Mechanics*, 722:496–532, 2013. ISSN 1469-7645.
- [4] O. Bautista, S. Sánchez, J. C. Arcos, y F. Méndez. Lubrication theory for electro-osmotic flow in a slit microchannel with the phan-thien and tanner model. *Journal of Fluid Mechanics*, 722:496 – 532, 2013.
- [5] Lyderic Bocquet y Jean-Louis Barrat. Hydrodynamics within the electric double layer on slipping surfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 93:257805, 2004.
- [6] Escandón Colín J. Pabo Casas Morán Laura y Don's Sánchez Fredly. Flujo electro-osmótico de un fluido no newtoniano con propiedades dependientes de la temperatura. *Congreso Internacional anual de la SOMIM*, págs. 1340–1349, 2008.
- [7] Rajib Chakraborty, Ranabir Dey, y Suman Chakraborty. Thermal characteristics of electromagnetohydrodynamic flows in narrow channels with viscous dissipation and joule heating under constant wall heat flux. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 67:1151 – 1162, 2013.

- 
- [8] Mohar Dey y Sang Woo Joo. Joule heating induced interfacial instabilities in free-surface electro-osmotic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 87:295 – 302, 2015.
- [9] J. Escandón, F. Santiago, O. Bautista, y F. Méndez. Hydrodynamics and thermal analysis of a mixed electromagnetohydrodynamic-pressure driven flow for phanthientanner fluids in microchannel. *International Journal of Thermal Sciences*, 86:246 – 257, 2014.
- [10] J.P. Escandón, O. Bautista, F. Méndez, y E. Bautista. Theoretical conjugate heat transfer analysis in a parallel flat plate microchannel under electro-osmotic and pressure forces with a phan-thien-tanner fluid. *International Journal of Thermal Sciences*, 50:1022 – 1030, 2011.
- [11] A. Beskok G. Karniadakis y N. Aluru. *Microflows and Nanoflows: Fundamentals and Simulation*. Springer, 2005.
- [12] Zhengwei Ge, Liwen Jin, y Chun Yang. Microfluidic concentration of sample solutes using joule heating effects under a combined ac and dc electric field. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 85:158165, 2015.
- [13] Keisuke Horiuchi y Prashanta Dutta. Joule heating effects in electroosmotically driven microchannel flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:3085 – 3095, 2004.
- [14] G. Karniadakis, A. Beskok, y N. Aluru. *Microflows and Nanoflows*. Springer, 2005.
- [15] B. H. Lapizco-Encinas. Microfluidics applications in bioseparations. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 7:205–214, 2013.
- [16] D. J. Laser y J. G. Santiago. A review of micropumps. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 14:R35–R64, 2004.
- [17] Q. Liao, X. Zhu, y T.Y. Wen. Thermal effects on mixed electro-osmotic and pressure-driven flows in triangle microchannels. *Applied Thermal Engineering*, 29:807 – 814, 2009.

- 
- [18] Hao Lin, Brian D. Storey, Michael H. Oddy, Chuan-Hua Chen, y Juan G. Santiago. Instability of electrokinetic microchannel flows with conductivity gradients. *Physics of Fluids*, 16:1922–1935, 2004.
- [19] Hao Lin, Brian D. Storey, y Juan G. Santiago. A depth-average electrokinetic flow model for shallow microchannels. *J. Fluid Mech.*, 608:43–70, 2008.
- [20] A. Matías, S. Sánchez, F. Méndez, y O. Bautista. Influence of slip wall effect on a non-isothermal electro-osmotic flow of a viscoelastic fluid. *International Journal of Thermal Sciences*, 98:352 – 363, 2015.
- [21] D. Maynes y B.W. Webb. Fully developed electro-osmotic heat transfer in microchannels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46:1359 – 1369, 2003.
- [22] Nam-Trung Nguyen y Steven T. Wereley. *Fundamentals and Applications of Microfluidics*. ARTECH HOUSE, 2006.
- [23] Ronald F. Probst. *Physicochemical Hydrodynamics: An Introduction*. A Wiley-Interscience Publication, 1994.
- [24] C. L. Rice y R. Whitehead. Electrokinetic flow in a narrow cylindrical capillary. *The Journal of Physical Chemistry*, 69:1922–1935, 1965.
- [25] S. Sánchez, F. Méndez, L. Martínez-Suástegui, y O. Bautista. Asymptotic analysis for the conjugate heat transfer problem in an electro-osmotic flow with temperature-dependent properties in a capillary. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55:8163 – 8171, 2012.
- [26] D. A. Saville. Electrokinetic effects with small particles. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 9:321–337, 1977.
- [27] Jie Su, Yongjun Jian, y Long Chang. Thermally fully developed electroosmotic flow through a rectangular microchannel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55:6285 – 6290, 2012.



- 
- [28] Vishal Tandon y Brian J. Kirby. Zeta potential and electroosmotic mobility in microfluidic devices fabricated from hydrophobic polymers: 2. slip and interfacial water structure. *Electrophoresis*, 29:1102–114, 2008.
- [29] G.Y Tang, C Yang, C.K Chai, y H.Q Gong. Numerical analysis of the thermal effect on electroosmotic flow and electrokinetic mass transport in microchannels. *Analytica Chimica Acta*, 507:27 – 37, 2004.
- [30] G.Y. Tang, C. Yang, J.C. Chai, y H.Q. Gong. Joule heating effect on electroosmotic flow and mass species transport in a microcapillary. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:215 – 227, 2004.
- [31] P. Vocale, M. Geri, L. Cattani, G.L. Morini, y M. Spiga. Electro-osmotic heat transfer in elliptical microchannels under {H1} boundary condition. *International Journal of Thermal Sciences*, 72:92 – 101, 2013.
- [32] X. Xuan y D. Li. Analytical study of joule heating effects on electrokinetic transportation in capillary electrophoresis. *J. Chromatogr. A.*, 1064:227–237, 2005.
- [33] X. Xuan, D. Sinton, y D. Li. Thermal end effects on electroosmotic flow in a capillary. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 47:3145–3157, 2004.
- [34] Cunlu Zhao y Chun Yang. Advances in electrokinetics and their applications in micro/nano fluidics. *Microfluid Nanofluid*, 13:179–203, 2012.