



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERIA
INGENIERÍA PETROLERA Y GAS NATURAL – YACIMIENTOS

**“CÁLCULOS DE TIEMPO Y EL GASTO CRÍTICO DE UN POZO QUE
PRODUCE EN LA VECINDAD DE UNA FALLA CONDUCTIVA”**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN INGENIERÍA

PRESENTA:

RICARDO NOEL PACHECO VENEGAS

TUTOR:

DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO
FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO. MAYO 2016.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Domínguez Vargas Guillermo Cruz

Secretario: Dr. Cinco Ley Héber

Vocal: Dr. Samaniego Verduzco Fernando

1^{er}. Suplente: Dr. Rangel Germán Edgar (†)

2^{do}. Suplente: Dr. Suarez Arriaga Mario César

Lugar donde se realizó la tesis: Cd. Universitaria, Ciudad de México, México

TUTOR DE TESIS:

DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO

FIRMA

DEDICATORIA

*A mi esposa **Claudia**, mis padres **Noel** y **Rosa**, mis hermanas **Danielita** y **Elenita** y a mi hermano **Lalo**, por todo su apoyo, su compañía, su comprensión y su cariño. A mis tutores el **Dr. Samaniego** y el **Dr. Suarez**, a mis amigas **Elsa** y **Lidia**, por su apoyo, sus consejos y su amistad.*

AGRADECIMIENTOS

A mi esposa, la **M. en I. Claudia León Villeda**, por sus consejos, su apoyo y su comprensión.

Deseo expresar mi sincera gratitud al **Dr. Fernando Samaniego**, por sus innumerables consejos, por su constante apoyo, comprensión y aliento. Sin su ayuda no me hubiera sido posible cumplir esta meta.

A la **Ing. Lidia Meneses Páez** quien me orientó al llegar a la maestría, me brindó su apoyo y su amistad.

A la **Ing. Elsa Hilario Ramírez** por su amistad, por su apoyo y sus consejos.

Agradezco al **Lic. Franco Antonio Vázquez** sus atenciones y su apoyo.

Al **Dr. Mario Cesar Suarez Arriaga**, que fue quien me introdujo al mundo de la ingeniería petrolera.

A mis profesores (en orden alfabético por el apellido), el **Dr. Víctor Hugo Arana Ortíz**, el **Ing. Héctor Ricardo Castrejón Pineda**, el **Dr. Héber Cinco Ley**, el **Dr. Guillermo Cruz Domínguez Vargas**, la **Dra. Jetzabeth Ramírez Sabag**, el **Dr. Edgar Rangel Germán** (†), el **Dr. Jesús Rivera Rodríguez** y el **Dr. Fernando Samaniego Verduzco**, por ser parte de mi formación profesional, que durante mi estancia en la maestría me brindaron su tiempo, sabiduría y consejos.

Este trabajo no hubiera sido posible sin una beca de la **Coordinación de Estudios de Posgrados de la UNAM** durante los dos años que duro mi maestría, es por ello que agradezco por el apoyo que me brindo.

CONTENIDO

	Pág.
Resumen.....	6
Tabla de Figuras.....	8
1 Introducción.....	12
2 Desarrollo del modelo analítico.....	14
2.1 Introducción.....	14
2.2 Desarrollo del modelo radial y sensibilidad de parámetros.....	16
2.3 Desarrollo del modelo esférico y sensibilidad de parámetros.....	26
2.4 Desarrollo del modelo de flujo en la falla.....	37
2.5 Aplicación de campo.....	48
3 DESARROLLO DEL MODELO NUMÉRICO.....	53
3.1 Introducción.....	53
3.2 Método de Diferencias Finitas.....	53
3.3 Desarrollo del modelo.....	54
3.4 Definiciones preliminares para el modelo.....	55
3.5 Flujo en un Yacimiento Homogéneo.....	56
3.6 Flujo en un Yacimiento de Doble Porosidad – Doble Permeabilidad.....	56
3.7 Flujo en un Yacimiento de Triple Porosidad – Una Permeabilidad.....	56
3.8 Modelo Numérico.....	57
3.9 Validación del modelo numérico.....	63
3.9.1 CASO I. Yacimiento homogéneo y su comparación con un simulador comercial.....	65
3.9.2 CASO II. Yacimiento naturalmente fracturado.....	67
3.9.3 CASO III. Yacimiento homogéneo con una falla conductiva.....	69
3.9.4 CASO IV. Yacimiento naturalmente fracturado con una falla conductiva.....	71
3.10 Caso de campo.....	73
CONCLUSIONES.....	75
Referencias.....	77
Apéndice A.....	79
Apéndice B.....	87
Apéndice C.....	95

RESUMEN

La conificación de agua es un fenómeno ocasionado por la diferencia de presiones entre la vecindad de la zona disparada de un pozo productor y el yacimiento. La diferencia de presiones genera una deformación en el contacto agua-aceite formando un cono. A través de este cono el agua irrumpe en el pozo, provocando generalmente un cierre prematuro de la producción del pozo. Este problema afecta tanto a yacimientos homogéneos como a los yacimientos naturalmente fracturados, siendo más severo el problema en estos últimos.

El trabajo de tesis se enfoca en los yacimientos carbonatados naturalmente fracturados, los cuales contienen más del 60% de las reservas de hidrocarburos a nivel mundial. El problema analizado es un tema de interés que actualmente se sigue investigando, los costos por manejo de agua a nivel mundial son cuantiosos, es por ello la relevancia de este estudio.

El objetivo de este trabajo es analizar el fenómeno complejo de conificación de agua de pozos en yacimientos naturalmente fracturados, situados en la vecindad de una falla conductiva. Para lograr tal objetivo se desarrollan dos modelos.

- a) El primer modelo es una extensión del modelo desarrollado por la M. en I. Erika Rodríguez Guzmán en su tesis de maestría: Método para la Estimación del Tiempo de Invasión de Agua en Pozos Cercanos a Fallas Conductivas (2008) [1]. Es un modelo semi-analítico, el cual extiende el trabajo anterior, al considerar un yacimiento naturalmente fracturado. Las geometrías de flujo estudiadas son radial y esférica alrededor del pozo, un flujo bilineal a través de la falla y el acuífero. La solución obtenida se encuentra en el espacio de Laplace. La transformada inversa fue obtenida de manera numérica por el método de Stehfest [2]. Con la distribución de presiones se obtiene el campo de velocidades que permite estimar el tiempo de irrupción.
- b) Un modelo numérico que resuelve el modelo para el flujo monofásico de aceite, cuando se encuentra presente una falla conductiva en un yacimiento naturalmente

fracturado. El cálculo del tiempo de irrupción se obtiene a partir de la distribución de presiones y de la ley de Darcy con lo cual se aproxima el campo de velocidades.

Es importante mencionar que no existe en la literatura un modelo semi-analítico que estime el tiempo de irrupción del agua proveniente de un acuífero en un yacimiento naturalmente fracturado a un pozo productor en la cercanía de una falla conductiva. En los estudios que se han realizado para analizar el problema de irrupción de agua a pozos, los esfuerzos se han enfocado en generar curvas de interpolación o ajuste por mínimos cuadrados de los modelos de simulación para casos específicos de campo.

El modelo semi-analítico se aplicó a un caso de campo con un muy buen ajuste del tiempo de irrupción de agua proveniente de un acuífero de fondo al pozo productor, considerando el efecto de una falla cercana.

TABLA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Conificación hacia un pozo cercano a una falla; las líneas de flujo son irregulares.....	15
Figura 2. Modelo conceptual considerado, líneas de flujo regulares.....	15
Figura 3. Gráfica típica del tiempo adimensional que ocupa en viajar el agua a partir de una posición entre la falla ($x_D = 0$) y el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo.	17
Figura 4. Gráfica típica del tiempo adimensional que ocupa en viajar el agua a partir de una posición entre la falla ($x_D = 0$) y el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, en escala semi-logarítmica.	17
Figura 5. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores del gasto adimensional q_D , flujo radial.....	19
Figura 6. Gráfica del tiempo adimensional que ocupa en viajar el agua desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), en función del gasto adimensional q_D , flujo radial.....	19
Figura 7. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo radial.	20
Figura 8. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo radial.....	20
Figura 9. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo radial.	21
Figura 10. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo radial.	22
Figura 11. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo radial.....	23
Figura 12. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo radial.....	23
Figura 13. Gráfica del tiempo adimensional para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo radial.	24
Figura 14. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo radial.....	24
Figura 15. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de d_D , flujo radial.....	26

Figura 16. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de d_D , flujo radial.....	26
Figura 17. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde una posición entre la falla ($x_D = 0$) y el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, flujo esférico.....	28
Figura 18. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, flujo esférico.....	29
Figura 19. Gráfica del tiempo adimensional que ocupa en viajar el agua a partir de una posición entre la falla ($x_D = 0$) y el pozo ($x_D = 1$), a una altura iguala la del pozo, para diferentes valores del gasto adimensional q_D , flujo esférico.	30
Figura 20. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, en función del gasto adimensional q_D , flujo esférico.....	30
Figura 21. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo esférico.....	31
Figura 22. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo esférico.....	31
Figura 23. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo esférico.....	32
Figura 24. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo esférico.....	33
Figura 25. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo esférico.....	33
Figura 26. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo esférico.....	34
Figura 27. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo esférico.....	35
Figura 28. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo esférico.....	35
Figura 29. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de d_D , flujo esférico.....	36

Figura 30. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de d_D , flujo esférico.	36
Figura 31. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla a partir del contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$).	38
Figura 32. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla a partir de una posición entre el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) y la altura media de los disparos ($x_D = 1$), en escala semi-logarítmica.	39
Figura 33. Gráfica semi-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores del gasto adimensional q_D	40
Figura 34. Gráfica doble-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores del gasto adimensional q_D	40
Figura 35. Gráfica semi-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores del parámetro b_{jD}	41
Figura 36. Gráfica doble-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) a la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores de b_{jD}	42
Figura 37. Gráfica semi-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores del parámetro F_{CD}	43
Figura 38. Gráfica doble-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) a la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores de F_{CD}	43
Figura 39. Gráfica semi-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores del parámetro G_{CD}	45
Figura 40. Gráfica doble-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) a la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores de G_{CD}	45
Figura 41. Gráfica semi-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores del parámetro λ	46
Figura 42. Gráfica doble-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) a la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores de λ	46

Figura 43. Gráfica semi-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores del parámetro ω .	47
Figura 44. Gráfica doble-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) a la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores de ω .	48
Figura 45. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a partir de una posición entre la falla ($x_D = 0$) y el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, flujo radial.	50
Figura 46. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a partir de una posición entre la falla ($x_D = 0$) y el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, flujo radial.	51
Figura 47. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) a la posición media de los disparos ($x_D = 1$), flujo en la falla.	52
Figura 48. Malla cartesiana de 31*31*1 celdas.	64
Figura 49. Gráfica semi-logarítmica de la presión de fondo fluyendo en función del tiempo, en un yacimiento homogéneo.	66
Figura 50. Gráfica de la presión de fondo fluyendo en función del tiempo, en un yacimiento homogéneo.	67
Figura 51. Gráfica doble-logarítmica de la función derivada en función del tiempo, en un yacimiento homogéneo.	67
Figura 52. Gráfica semi-logarítmica de la presión de fondo fluyendo en función del tiempo, en un yacimiento naturalmente fracturado.	68
Figura 53. Gráfica doble-logarítmica de la función derivada en función del tiempo, en un yacimiento naturalmente fracturado.	69
Figura 54. Malla cartesiana de 55*31*1 celdas.	70
Figura 55. Gráfica semi-logarítmica de la presión de fondo fluyendo en función del tiempo, en un yacimiento homogéneo con la presencia de una falla conductiva.	70
Figura 56. Gráfica de la presión de fondo fluyendo en función del tiempo, en un yacimiento homogéneo con la presencia de una falla conductiva.	70
Figura 57. Gráfica doble-logarítmica de la función derivada en función del tiempo, en un yacimiento homogéneo con la presencia de una falla conductiva.	71
Figura 58. Gráfica semi-logarítmica de la presión de fondo fluyendo en función del tiempo, en un yacimiento naturalmente fracturado con la presencia de una falla conductiva.	72
Figura 59. Gráfica de la presión de fondo fluyendo en función del tiempo, en un yacimiento homogéneo con la presencia de una falla conductiva.	72
Figura 60. Gráfica doble-logarítmica de la función derivada en función del tiempo, en un yacimiento naturalmente fracturado con la presencia de una falla conductiva.	73
Figura 61. Malla cartesiana generada para evaluar el caso de campo (55x31x5 celdas).	74
Figura 62. Trayectorias de flujo generadas para el caso de campo.	74

CÁLCULO DEL TIEMPO DE INVASIÓN A POZOS PRODUCIENDO EN LA VECINDAD DE UNA FALLA CONDUCTIVA

1 INTRODUCCIÓN

Conificación es un término usado para describir el mecanismo subyacente al movimiento ascendente del agua y/o el movimiento descendente del gas hacia un pozo productor [3]. En muchos campos petroleros de aceite o gas alrededor del mundo, la producción de agua debido a la conificación se presenta en el yacimiento incluso a poco tiempo de iniciar la producción, como cuando existen acuíferos y/o esquemas de recuperación secundaria con inyección de agua.

En espesores delgados de aceite o gas, la presencia del contacto agua-aceite cerca del pozo obstaculiza la producción y a menudo causa abandono temprano del pozo afectado. Incluso cuando se encuentran espesores relativamente grandes, la invasión de agua, cuando el agua es móvil, se presentará eventualmente provocando serios problemas de conificación. En la mayoría de los campos, los planes para la irrupción del agua a un pozo productor es una optimización de su posición y una manipulación de su gasto.

La conificación de agua es un fenómeno causado por un desbalance entre las fuerzas gravitacionales y las fuerzas viscosas alrededor de la zona de disparos [4]. Es por ello, que a partir de un balance de fuerzas, se puede realizar una estimación del gasto máximo por encima del cual puede desarrollarse conificación para una configuración específica de yacimiento y pozo, a este gasto se le llama gasto crítico. El trabajo pionero del análisis del gasto crítico para evitar la conificación fue publicado por Muskat y Wychoff [5], enfocándose en el balance de fuerzas. Su trabajo queda en función de las características del pozo, el espesor del yacimiento, h y el espesor disparado, b (distancia desde la cima de la formación hasta el disparo más profundo). La gráfica del gasto máximo vs. %penetración (b/h) llamada "*Muskat Coning Diagram*" es una forma de evaluar el modelo para diferentes configuraciones de yacimiento y pozo. Esta aproximación fue refinada por otros autores y a partir de ello se han desarrollado correlaciones para estimar el tiempo de irrupción de agua al pozo produciendo a gasto constante por encima del

gasto crítico. Las correlaciones publicadas para yacimientos homogéneos incorporan los efectos de la permeabilidad vertical en términos de una relación de anisotropía, $\frac{k_v}{k_h}$. Para yacimientos homogéneos esta relación es menor que la unidad [6].

Sin embargo existen casos donde la relación $\frac{k_v}{k_h}$ es mayor que la unidad como en los yacimientos naturalmente fracturados. La alta permeabilidad vertical en fracturas acelera el proceso de conificación disminuyendo el valor del gasto crítico y provocando tiempos de irrupción más cortos.

Existen yacimientos naturalmente fracturados que pueden ser representados por un modelo de doble porosidad del tipo descrito por Warren y Root [7]. El modelo de Warren y Root tiene dos parámetros característicos que representan el almacenamiento adimensional de fractura, ω y el coeficiente de flujo interporoso λ . Intuitivamente, el gasto crítico, en este tipo de sistemas, debe ser influenciado por estos parámetros. Los perfiles de saturación desarrollados en la matriz y en la red de fracturas se espera sean diferentes.

Un estudio [4] que evalúa el problema de conificación en yacimientos naturalmente fracturados utilizando simulación encontró que las correlaciones para yacimientos homogéneos no son aplicables a yacimientos naturalmente fracturados produciendo resultados optimistas del tiempo de irrupción y del gasto crítico.

Por otro lado, en algunos estudios se consideran las fracturas como una posible causa de irrupción temprana de agua [8] en yacimientos homogéneos con disoluciones. En el trabajo de Van Der Beukel y Leinster basado en datos sísmicos y de producción junto con datos de fracturas provenientes de 6 registros de pozos, se concluyó que la rápida irrupción de agua en pozos horizontales se debía a la intersección con una o más fracturas abiertas, lo suficientemente grandes para conectar al pozo con el acuífero.

En este trabajo de tesis se estudia el problema de conificación en un yacimiento naturalmente fracturado en un pozo el cual se encuentra cercano a una falla conductiva que toca al acuífero. Este estudio se realiza por medio de dos vertientes:

- a) Un modelo semi-analítico que modela el problema por medio de un flujo lineal en la zona del acuífero que rodea a la falla y un flujo lineal dentro de la falla a la profundidad del acuífero, uniendo ambos flujos se considera un flujo bilineal a profundidad del acuífero. Además se tiene un flujo lineal dentro de la falla desde el contacto agua-aceite hasta la profundidad de los disparos, y finalmente un flujo cilíndrico o esférico desde la falla a la profundidad de los disparos hasta el pozo.
- b) Un modelo numérico, en diferencias finitas.

2 DESARROLLO DEL MODELO ANALÍTICO

2.1 INTRODUCCIÓN

En la **Figura 1** se muestra un esquema de la conificación de agua hacia un pozo cercano a una falla conductiva representándose la variabilidad de las direcciones de flujo del agua una vez que se encuentra en la falla y en la cercanía de los disparos del pozo. En la **Figura 2** se muestra el modelo conceptual considerado en este trabajo de tesis, con líneas de flujo regulares, en el cual el agua sólo se mueve hacia el pozo de forma horizontal una vez que ha llegado a la altura de los disparos.

El modelo semi-analítico propuesto en la presente tesis surge como una extensión del modelo desarrollado por Rodríguez (2008) [1]. El tipo de yacimiento considerado para esta extensión es de doble porosidad. La solución del modelo se basa en la suposición de que en ambos lados de la falla el comportamiento de la presión obedece el modelo para yacimientos naturalmente fracturados de Warren & Root [7].

El problema se separa en dos partes; el tiempo que tarda en subir el agua desde el contacto agua-aceite hasta la altura de los disparos, y el tiempo que tarda el agua para fluir desde la falla, a la altura de los disparos, hasta el pozo.

Para modelar una falla conductiva se considera el yacimiento con una frontera a presión constante; el modelo se puede resolver utilizando el *método de imágenes* (desarrollado en el Apéndice A); el sistema original tiene solamente un pozo activo con gasto constante, en las coordenadas $(x = 0, y = 0)$, y la frontera externa se encuentra a la distancia $x = d_f$. El modelo se resuelve para las geometrías radial y esférica.

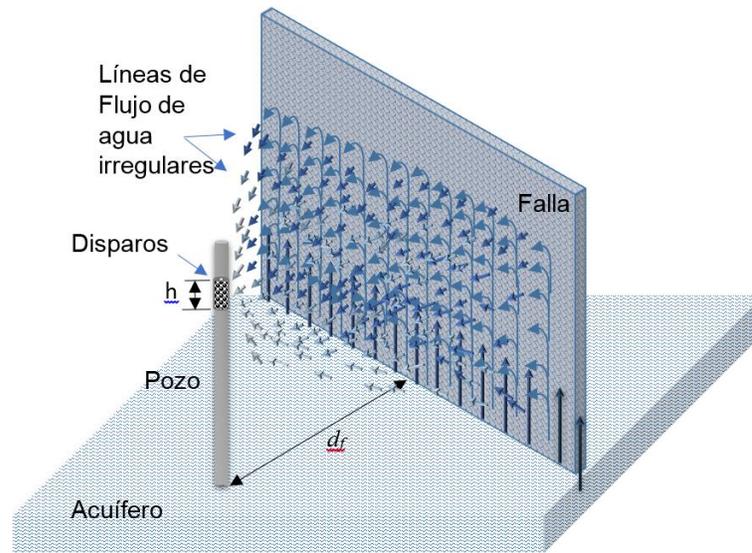


Figura 1. Conificación hacia un pozo cercano a una falla; las líneas de flujo son irregulares.

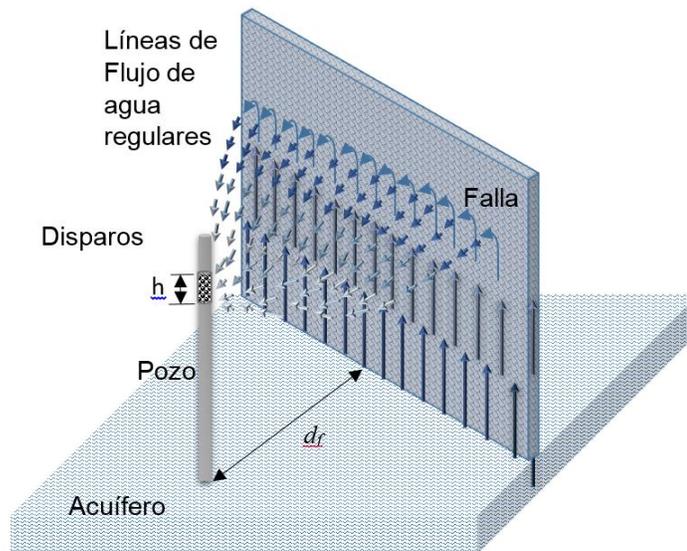


Figura 2. Modelo conceptual considerado, líneas de flujo regulares.

2.2 DESARROLLO DEL MODELO RADIAL Y SENSIBILIDAD DE PARÁMETROS

La ecuación que representa la variación del tiempo adimensional en función de la distancia de una posición intermedia entre la falla, a la altura de los disparos, y el pozo se deduce en el Apéndice A, y se expresa por medio de la ecuación (2.1):

$$\frac{dx_D}{dt_D} = -\frac{1}{\pi d_D} \left(\mathfrak{I}^{-1} \left\{ \frac{K_1 \left(d_D x_D \sqrt{sm(s)} \right)}{sK_1 \left(\sqrt{sm(s)} \right)} \right\} + \mathfrak{I}^{-1} \left\{ \frac{K_1 \left(d_D (2-x_D) \sqrt{sm(s)} \right)}{sK_1 \left(\sqrt{sm(s)} \right)} \right\} \right), \dots\dots\dots (2.1)$$

donde los parámetros adimensionales se definen a continuación.

Gasto adimensional,

$$q_D = \frac{qB\mu \left((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m \right)}{2k_f h \phi_e}, \dots\dots\dots (2.2)$$

distancias adimensionales del pozo a la falla (Figura 2),

$$d_D = \frac{d_f}{r_w}, \dots\dots\dots (2.3)$$

$$x_D = \frac{x}{d_f}, \dots\dots\dots (2.4)$$

$$m(s) = \frac{\omega(1-\omega)s + \lambda}{(1-\omega)s + \lambda}. \dots\dots\dots (2.5)$$

Tiempo adimensional,

$$t_D = \frac{k_f}{\left((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m \right) \mu r_w^2} t; \dots\dots\dots (2.6)$$

\mathfrak{S}^{-1} es el operador de la Transformada Inversa de Laplace.

En la **Figura 3** se observa el comportamiento de una gráfica típica del tiempo adimensional t_{fD} que ocupa el agua en viajar desde la falla, a una altura igual a la del pozo que corresponde a un valor de $x_D = 0$, hasta el pozo, correspondiendo a un valor de $x_D = 1$. Para un problema específico el valor de interés es el tiempo para $x_D = 0$, es decir, el tiempo de recorrido desde la falla hasta el pozo. En la **Figura 4** se observa un comportamiento análogo al de la Figura 3 pero en escala semi-logarítmica.

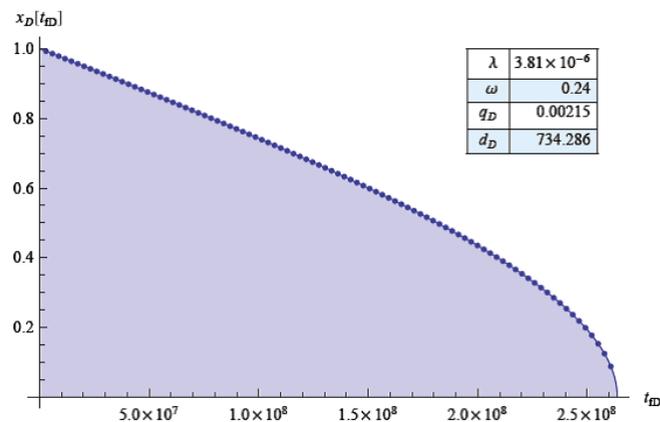


Figura 3. Gráfica típica del tiempo adimensional que ocupa en viajar el agua a partir de una posición entre la falla ($x_D = 0$) y el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo.

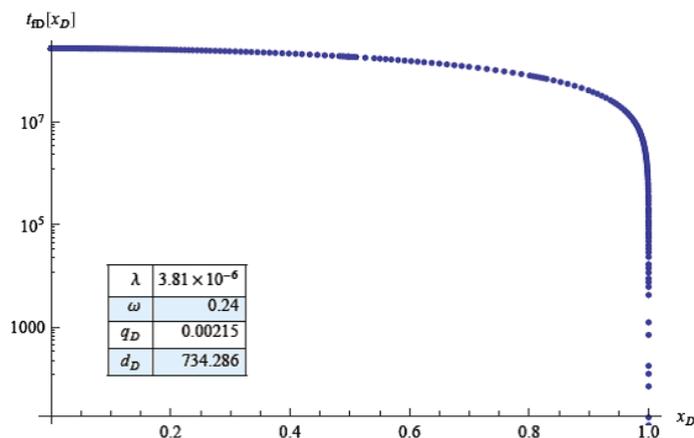


Figura 4. Gráfica típica del tiempo adimensional que ocupa en viajar el agua a partir de una posición entre la falla ($x_D = 0$) y el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, en escala semi-logarítmica.

En el resto de la sección se realiza un análisis del efecto que tienen cada uno de los parámetros λ , ω , d_D y q_D en el tiempo adimensional t_{fD} . Primero se obtiene la gráfica correspondiente a la Figura 4. Gráfica típica del tiempo adimensional que ocupa en viajar el agua a partir de una posición entre la falla ($x_D=0$) y el pozo ($x_D=1$), a una altura igual a la del pozo' en escala semi-logarítmica., fijando el valor de tres de los cuatro parámetros y considerando diferentes valores del parámetro restante y en seguida se gráfica el tiempo adimensional en función del último parámetro; ambas gráficas se presentan en escala semilogarítmica. Los valores fijos se eligen a partir de los valores obtenidos en la sección 2.5 de la aplicación de campo y por tanto, las gráficas que se generan a continuación tienen como segundo objetivo mostrar la variación del tiempo de invasión del agua al pozo productor, para este caso particular, cuando uno de los parámetros tienen alguna variación.

El primer análisis corresponde al efecto que tiene el gasto adimensional q_D en el tiempo adimensional t_{fD} . El valor de los parámetros fijos es de $\omega=0.24$, $d_D=756$, y $\lambda=3.81 \times 10^{-6}$. Los valores del gasto adimensional son $q_D=10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$ y 10^{-1} .

En la **Figura 5** y **Figura 6** se observan los resultados del análisis. En ambas figuras se puede apreciar el hecho de que el tiempo adimensional disminuye a medida que aumenta el gasto, coincidiendo con lo observado en el campo. A partir de los datos obtenidos al generar la Figura 6 se observó una tendencia lineal en escala doble logarítmica, por lo cual se realizó un ajuste por el método de mínimos cuadrados obteniendo la ecuación (2.7). La aproximación generada es bastante precisa, en la Figura 6 se observa que la curva generada por la ecuación (2.7) queda justo debajo de los puntos obtenidos.

$$t_{fD}(q_D) = -693608.1784 + 564534.8036 \frac{1}{q_D} + 967871.0119 \frac{1}{q_D^{0.1}} \dots \dots \dots (2.7)$$

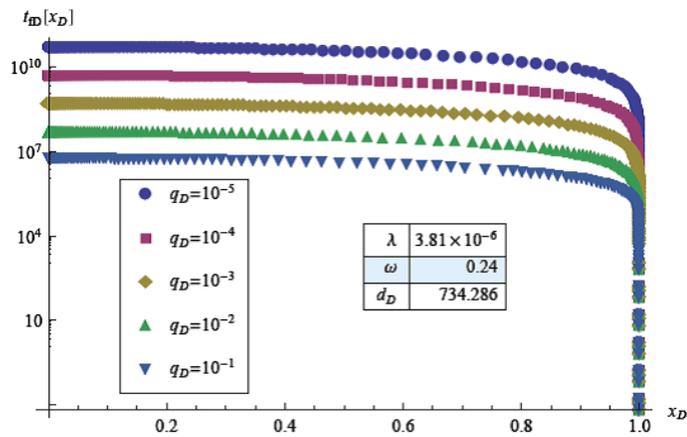


Figura 5. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores del gasto adimensional q_D , flujo radial.

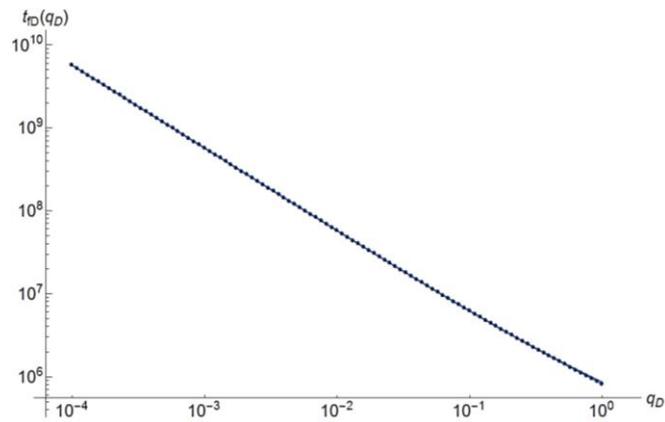


Figura 6. Gráfica del tiempo adimensional que ocupa en viajar el agua desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), en función del gasto adimensional q_D , flujo radial.

A continuación se considera el efecto que tiene el parámetro λ en el tiempo adimensional. El valor de los parámetros fijos es $\omega = 0.24$, $q_D = 0.00215$, y $d_D = 734.286$, los valores de λ considerados son $\lambda = 10^{-10}, 10^{-7}, 10^{-4}, 10^{-2}$, y 10^{-1} , los resultados se muestran en la **Figura 7** y **Figura 8**.

En la Figura 7 se aprecia una sola curva siendo que se esperaban observar cinco curvas; el motivo de esto es que no hay una variación significativa del tiempo adimensional al

variar el parámetro. Lo anterior dicho también se observa en la Figura 8 al observar que el rango de valores del eje vertical es relativamente pequeño, ecuación (2.8).

$$2.6293 \times 10^8 < t_{jD}(\lambda) < 2.63656 \times 10^8. \dots\dots\dots (2.8)$$

Para valores del parámetro λ , aproximadamente mayores que 10^{-7} el tiempo adimensional permanece prácticamente constante.

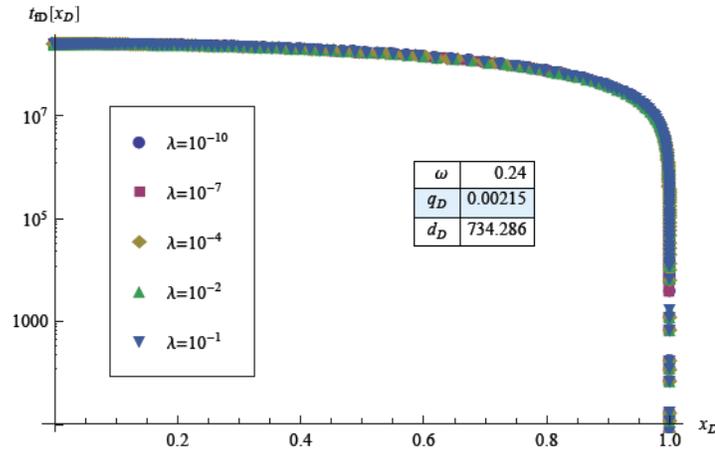


Figura 7. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo radial.

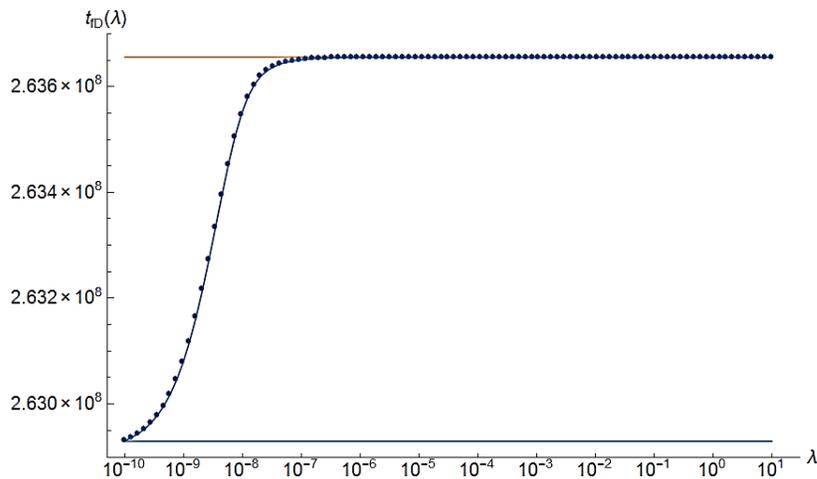


Figura 8. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo radial.

En las Figuras 7 y Figura 8 se observa que se puede despreciar el efecto del parámetro λ en el tiempo adimensional para valores de $\omega = 0.24$, $q_D = 0.00215$, y $d_D = 734.286$; sin embargo, cabe la posibilidad de que para otro rango de valores de ω , q_D , y d_D el efecto de λ en el tiempo adimensional no sea despreciable. Por este motivo se considera nuevamente la variación del tiempo adimensional con respecto al parámetro λ , pero ahora para un gasto adimensional mayor $q_D = 0.16$. En la **Figura 9** y **Figura 10** se observa que el rango en donde varía el tiempo adimensional con respecto a λ se incrementa ligeramente, aunque para fines prácticos sigue siendo despreciable.

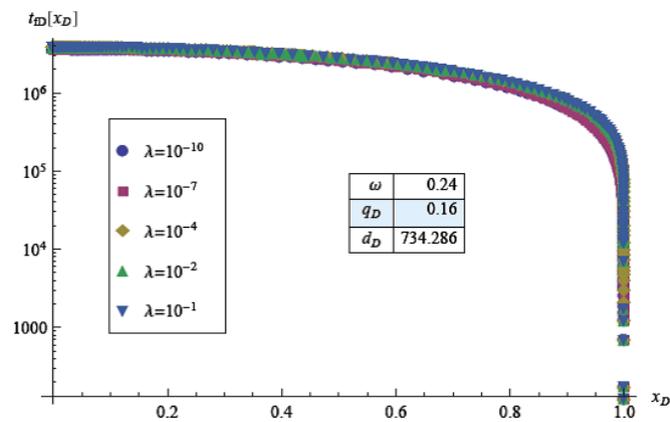


Figura 9. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo radial.

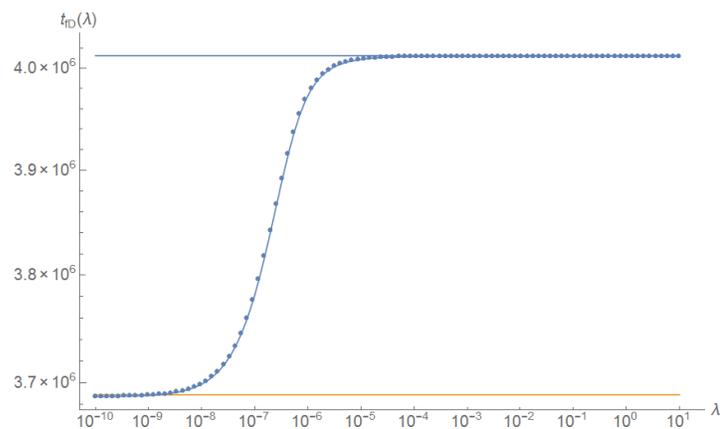


Figura 10. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo radial.

El rango de variación del tiempo adimensional queda comprendido por el intervalo de la ecuación (2.9). Para valores del parámetro λ , aproximadamente mayores que 10^{-5} el tiempo adimensional permanece prácticamente constante.

$$3.689 \times 10^6 < t_{jD}(\lambda) < 4.0125 \times 10^6. \dots\dots\dots (2.9)$$

Continuando con el análisis del efecto de los parámetros en el tiempo adimensional, ahora se estudia el efecto del parámetro ω . Se consideran los valores siguiente en los parámetros fijos, $\lambda = 3.81 \times 10^{-6}$, $d_D = 734.286$, y $q_D = 0.00215$ y los valores en ω de $\omega = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 . Los resultados pueden observarse en la **Figura 11** y **Figura 12**.

Al igual que para el parámetro λ , la variación del tiempo adimensional en función del parámetro ω es despreciable; este es el motivo por el cual se observa una curva en la Figura 11, siendo que se esperaban cinco curvas diferentes. La Figura 12 muestra que los datos generados son ajustados con relativamente buena precisión por la línea recta horizontal $t_{jD}(\omega) \approx 2.63656 \times 10^8$.

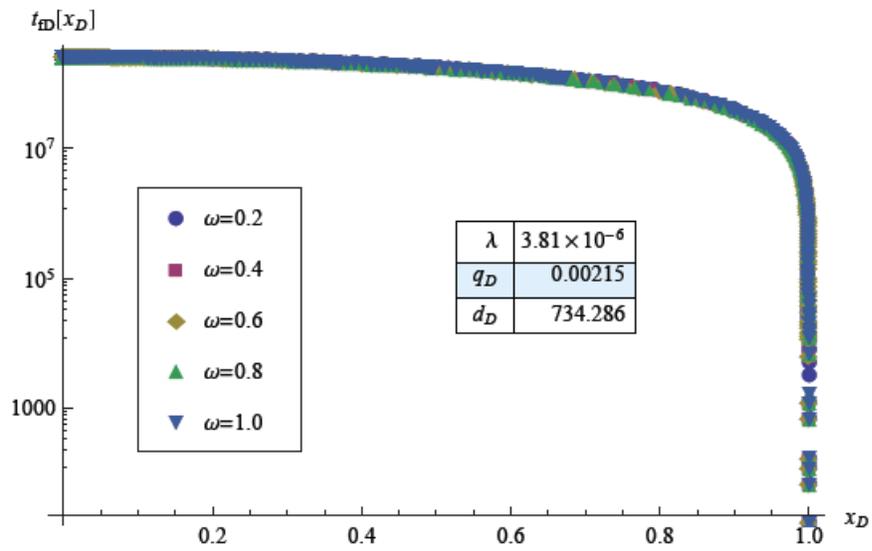


Figura 11. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo radial.

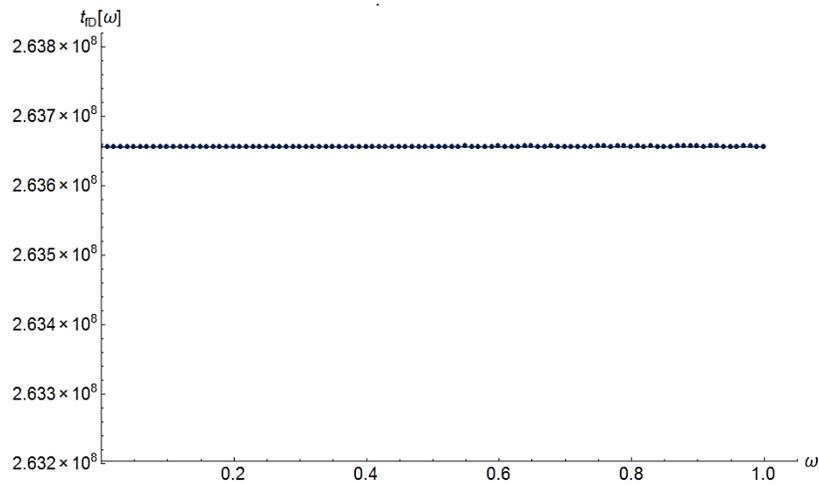


Figura 12. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo radial.

Cabe la posibilidad de que para otra combinación de valores de los parámetros fijos λ , d_D o q_D el efecto en el tiempo adimensional de la variación del parámetro ω no sea despreciable y por tal motivo se analiza la variación del parámetro ω a un gasto

adimensional mayor, $q_D = 0.16$ y valores de los parámetros restantes iguales al caso anterior. En la **Figura 13** y **Figura 14** se observan los resultados de este análisis.

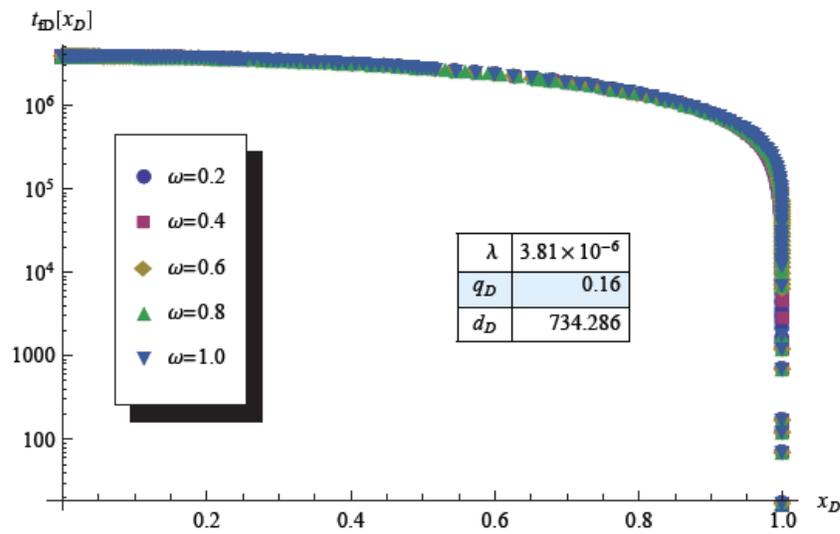


Figura 13. Gráfica del tiempo adimensional para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo radial.

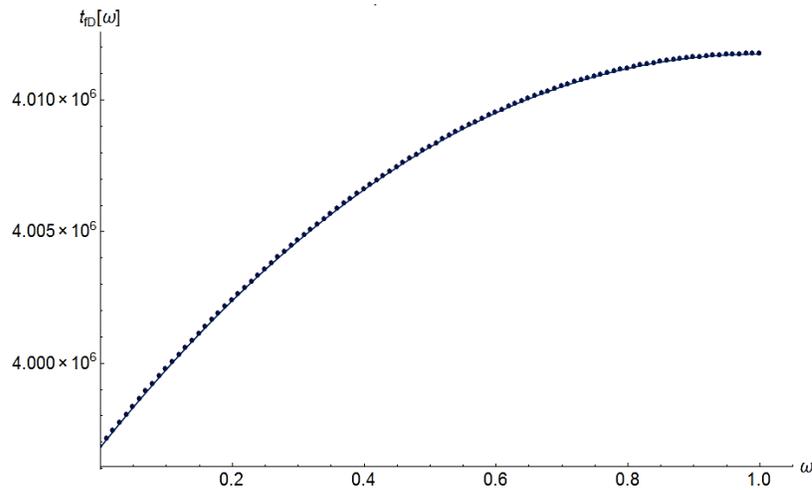


Figura 14. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo radial.

Tanto en la Figura 13 como en la Figura 14, se aprecia que para este otro caso el tiempo adimensional es prácticamente independiente del valor del parámetro ω . A los datos mostrados en la Figura 14 se les logró ajustar un polinomio de orden 3, ecuación (2.10).

$$t_{fD}(\omega) = 3996808.4694 + 31408.4003\omega - 17919.6498\omega^2 + 1446.9660\omega^3. \dots\dots\dots (2.10)$$

La variación del tiempo adimensional en función de la distancia adimensional del pozo a la falla es analizada para los valores $d_D = 500, 700, 900, 1100$ y 1300 , y el valor de los parámetros fijos de $\lambda = 3.81 \times 10^{-6}$, $\omega = 0.24$ y $q_D = 0.0215$. Los resultados se observan en la **Figura 15** y **Figura 16**. En la Figura 15 se observa, que al contrario de lo que sucede con los parámetros λ y ω , hay una variación del tiempo adimensional al considerar diferentes valores del parámetro d_D .

En la Figura 16 se observa que la dependencia del tiempo adimensional en función de la distancia adimensional d_D es directamente proporcional, es decir, a medida que aumenta la distancia de la falla al pozo aumenta el tiempo ocupado por el agua en su viaje de la falla al pozo, en una altura igual a la del pozo, lo cual concuerda con la experiencia, además en la Figura 16 se observa que la dependencia es lineal en escala doble logarítmica. Al realizar un ajuste con el método de mínimos cuadrados a los datos de la Figura 16 se obtuvo la expresión de la ecuación (2.11) que determina la relación precisa entre el tiempo adimensional y la distancia adimensional.

$$t_{fD}(d_D) = 488.9983d_D^2. \dots\dots\dots (2.11)$$

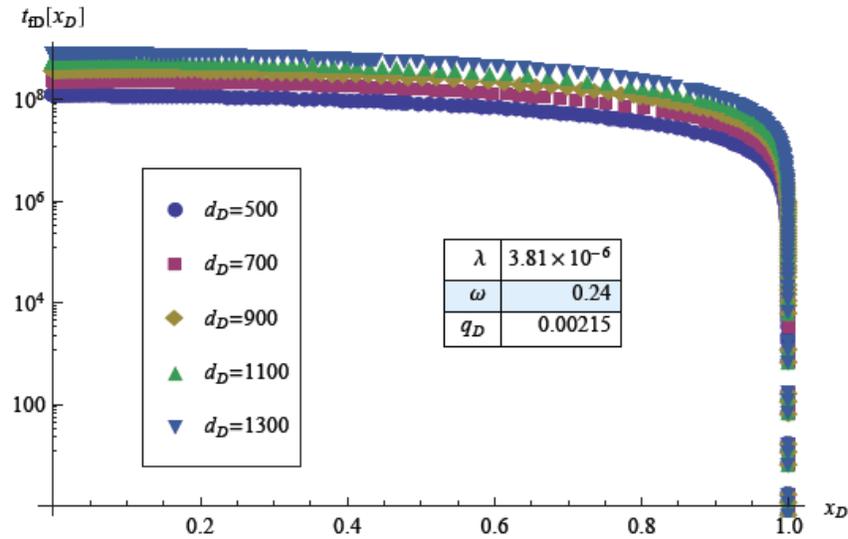


Figura 15. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de d_D , flujo radial.

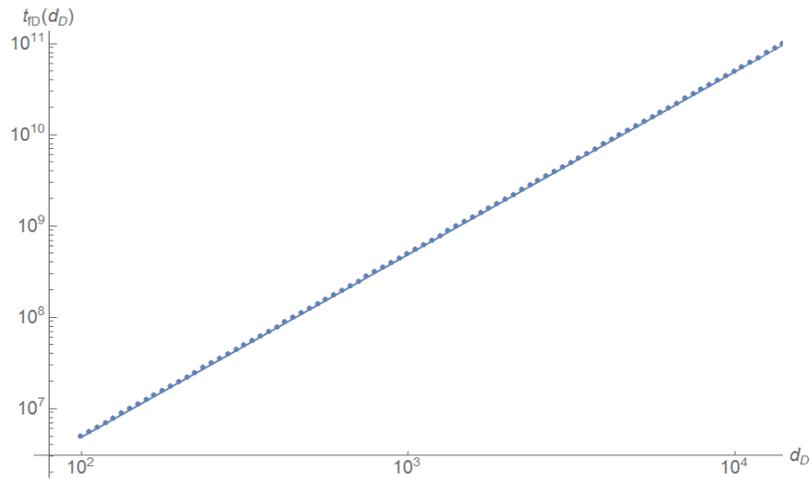


Figura 16. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de d_D , flujo radial.

2.3 DESARROLLO DEL MODELO ESFÉRICO Y SENSIBILIDAD DE PARÁMETROS

El modelo esférico para la determinación del tiempo necesario para que el agua viaje de la falla al pozo es desarrollado para aplicaciones en donde el pozo no se encuentra completamente disparado. La ecuación que representa la variación del tiempo adimensional en función de la distancia de una posición intermedia entre la falla, a la

altura de los disparos, y el pozo se deduce en el Apéndice B. y se expresa por medio de la ecuación (2.12):

$$\frac{dx_D}{dt_D} = -\frac{1}{\pi} \frac{q_{Dsph} C_1}{d_D^2} \left(\mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{1 + d_D x_D \sqrt{sm(s)}}{d_D x_D^2} \right) \text{Exp} \left(-d_D x_D \sqrt{sm(s)} \right) \right\} \right) - \frac{1}{\pi} \frac{q_{Dsph} C_1}{d_D^2} \left(\mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{1 + d_D (2 - x_D) \sqrt{sm(s)}}{d_D (2 - x_D)^2} \right) \text{Exp} \left(-d_D (2 - x_D) \sqrt{sm(s)} \right) \right\} \right) \dots\dots\dots(2.12)$$

El gasto adimensional,

$$q_D = \frac{qB\mu \left((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m \right)}{2k_f r_w \phi_e} \dots\dots\dots(2.13)$$

$$d_D = \frac{d_f}{r_w} \dots\dots\dots(2.14)$$

$$x_D = \frac{x}{d_f} \dots\dots\dots(2.15)$$

$$m(s) = \frac{\omega(1-\omega)s + \lambda}{(1-\omega)s + \lambda} \dots\dots\dots(2.16)$$

Tiempo adimensional,

$$t_D = \frac{k_f}{\left((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m \right) \mu r_w^2} t \dots\dots\dots(2.17)$$

\mathfrak{S}^{-1} es el operador de la Transformada Inversa de Laplace.

Un análisis similar al análisis al presentado en la sección anterior pero en esta ocasión para una geometría esférica, se muestra a continuación. Como se observa en la **Figura 17** y **Figura 18** la gráfica típica del tiempo adimensional t_{fd} que ocupa el agua en viajar

desde la falla, a una altura igual a la del pozo y que corresponde a un valor de $x_D = 0$, hasta el pozo correspondiendo a un valor de $x_D = 1$, tienen la misma forma que las mostradas en la Figura 3 y Figura 4.

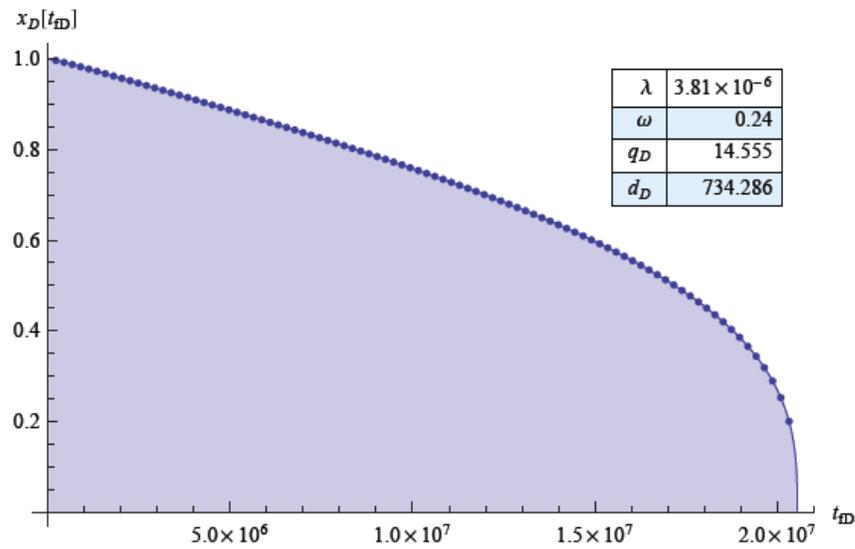


Figura 17. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde una posición entre la falla ($x_D = 0$) y el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, flujo esférico.

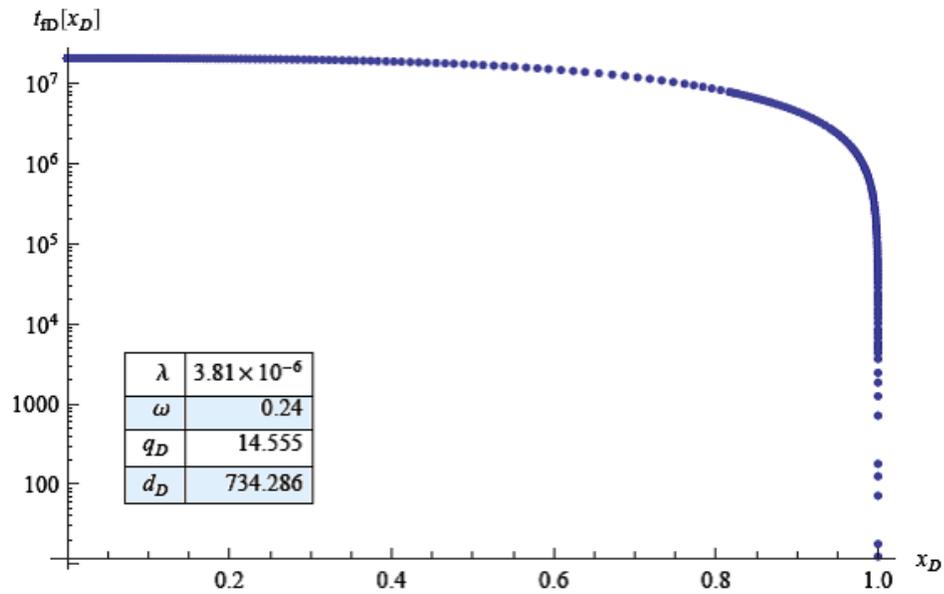


Figura 18. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, flujo esférico.

El efecto del gasto adimensional q_D en el tiempo adimensional t_{fD} para el valor de los parámetros fijos $\omega = 0.24$, $d_D = 756$ y $\lambda = 3.81 \times 10^{-6}$ y valores del gasto adimensional $q_D = 10^{-5}$, 10^{-4} , 10^{-3} , 10^{-2} y 10^{-1} , se muestra en la **Figura 19** y **Figura 20**. En el eje vertical de la gráfica de la Figura 19 se observa que el rango de valores es mayor que para el caso del modelo radial, Figura 5. De una comparación entre las Figura 5 y Figura 19 se deduce que en la geometría esférica se presenta un mayor tiempo, en el tiempo necesario para que agua viaje de la falla al pozo, que para la geometría radial. En la Figura 20 se observa que la variación del tiempo adimensional en función del gasto adimensional es inversamente proporcional y lineal en escala doble logarítmica. Se empleó el método de mínimos cuadrados para buscar una curva que aproximara los datos de la Figura 20 y se obtuvo la ecuación (2.18), la cual tiene la misma estructura funcional que la ecuación (2.7) correspondiente a la variación del tiempo adimensional en función del gasto adimensional en geometría radial.

$$t_{fD}(q_D) = 256139.4812 + 2.9501 \times 10^8 \frac{1}{q_D} + 9823.2382 \frac{1}{q_D^{0.1}}; \dots\dots\dots(2.18)$$

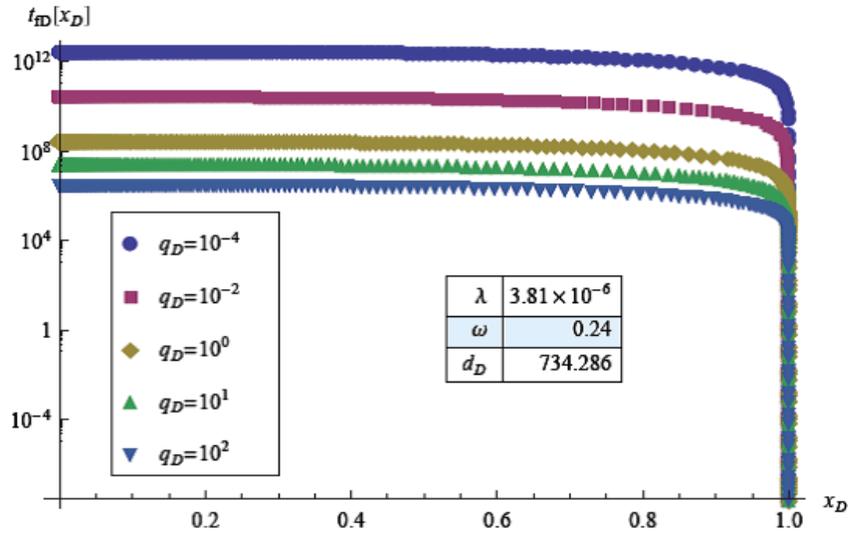


Figura 19. Gráfica del tiempo adimensional que ocupa en viajar el agua a partir de una posición entre la falla ($x_D = 0$) y el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores del gasto adimensional q_D , flujo esférico.

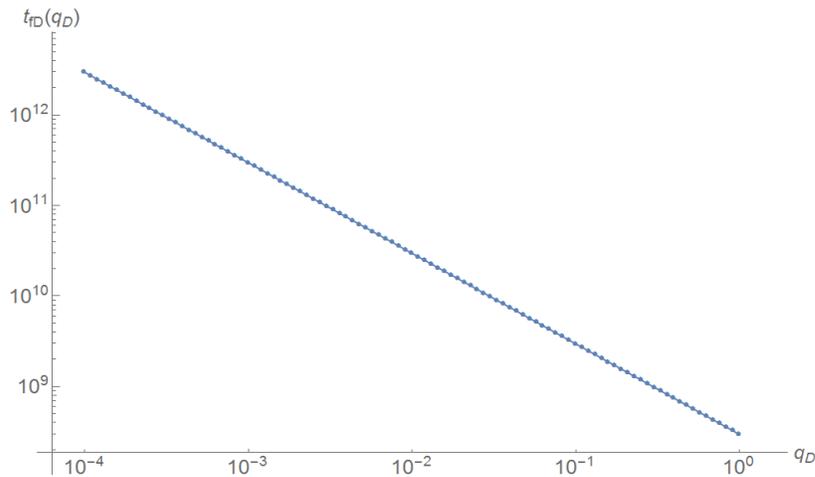


Figura 20. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, en función del gasto adimensional q_D , flujo esférico.

A continuación se considera el efecto que tiene el parámetro λ en el tiempo adimensional. El valor de los parámetros fijos es $\omega = 0.24$ y $d_D = 734.286$. Los valores de λ a considerar son $\lambda = 10^{-10}, 10^{-7}, 10^{-4}, 10^{-2}, 10^{-1}$. Los resultados se muestran en la

Figura 21 y **Figura 22** para un gasto adimensional de $q_D = 14.555$. En ambas figuras se observa que el valor del tiempo adimensional no cambia significativamente para diferentes valores del parámetro λ .

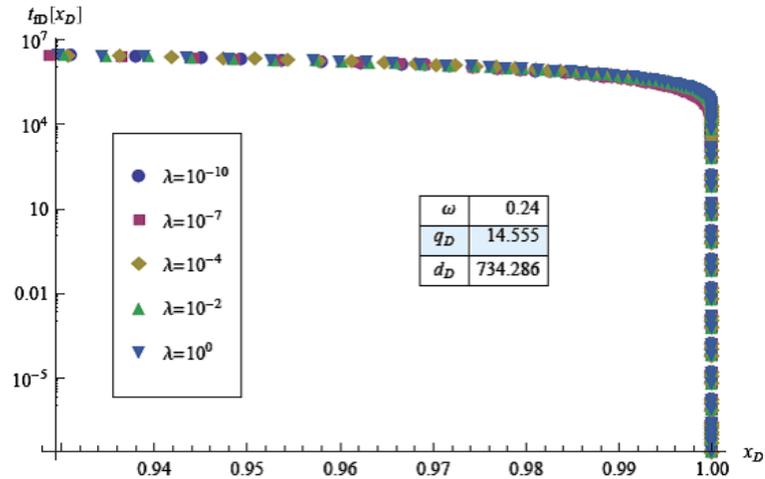


Figura 21. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo esférico.

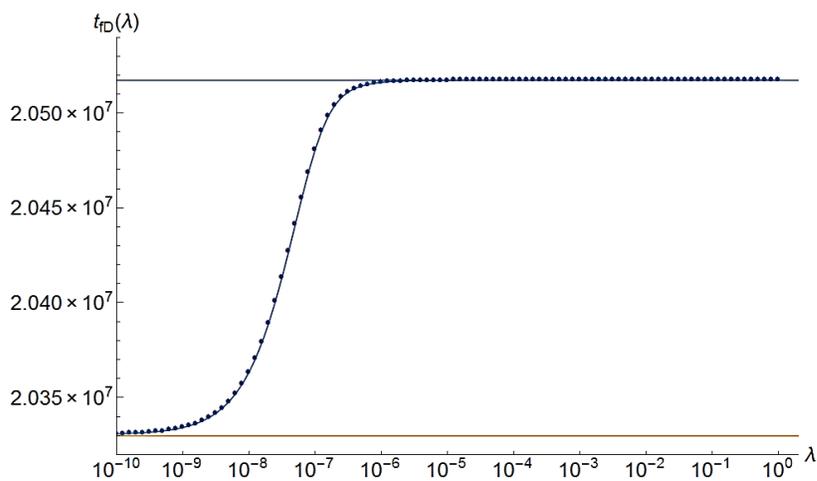


Figura 22. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo esférico.

El intervalo de variación del tiempo adimensional en la Figura 22 es especificado por la ecuación (2.19).

$$2.05174 \times 10^7 < t_{JD}(\lambda) < 2.033 \times 10^7; \dots\dots\dots(2.19)$$

Sin embargo, existe la posibilidad de que el efecto del parámetro λ en el tiempo adimensional se presente a partir de otro rango de valores de q_D , d_D y ω , por tal motivo se considera el efecto de λ en el tiempo adimensional para un gasto mayor, $q_D = 140$. Los resultados de este análisis se muestran en la **Figura 23** y **Figura 24**, en ambas se observa que la variación del tiempo adimensional con respecto a λ es despreciable al igual que en el caso anterior. El intervalo de variación del tiempo adimensional en la Figura 24 es determinado por la ecuación (2.20). Para valores del parámetro λ aproximadamente mayores que 10^{-4} o menores que 10^{-8} el tiempo adimensional permanece constante.

$$2.165 \times 10^6 < t_{JD}(\lambda) < 2.319 \times 10^6; \dots\dots\dots (2.20)$$

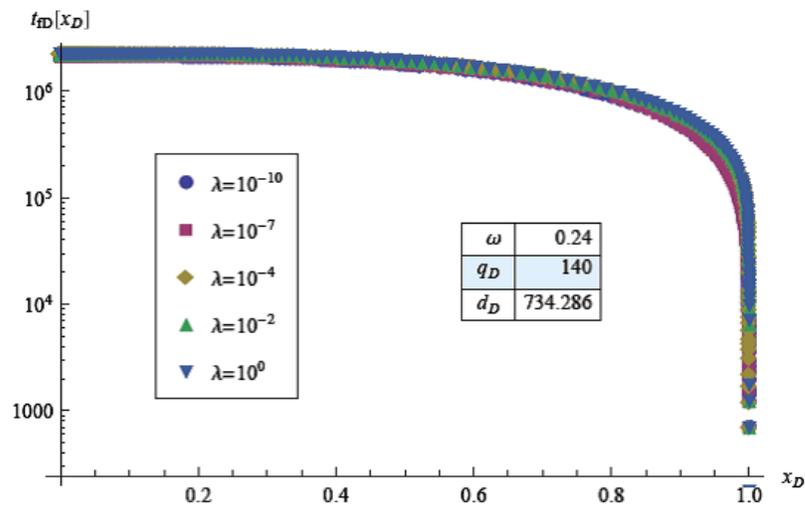


Figura 23. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo esférico.

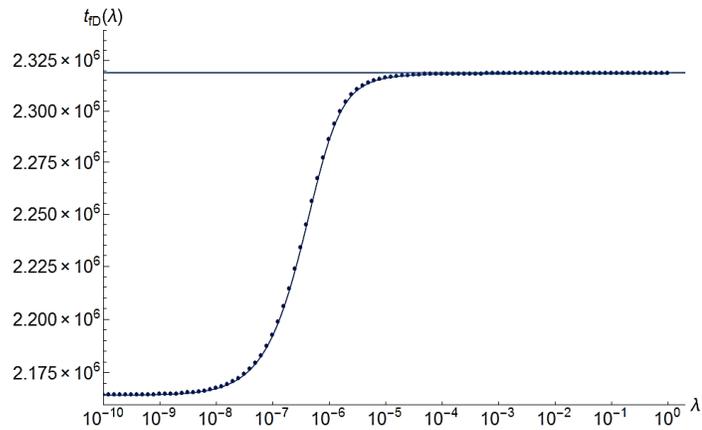


Figura 24. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de λ , flujo esférico.

A continuación se analiza el efecto en el tiempo adimensional del parámetro ω . Se consideran los valores siguientes para los parámetros fijos, $\lambda = 3.81 \times 10^{-6}$ y $d_D = 734.286$. Los valores de ω son $\omega = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 . Los resultados se observan en la **Figura 25** y **Figura 26** para el caso en que el gasto adimensional adquiere un valor de $q_D = 14.555$; en ambas gráficas se observa que el efecto del parámetro ω en el tiempo adimensional se desprecia, para los valores de $q_D = 14.555$, $d_D = 734.286$ y $\lambda = 3.81 \times 10^{-6}$.

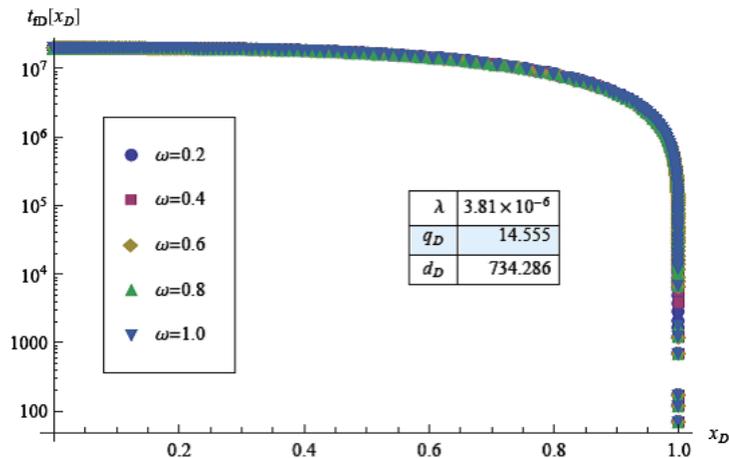


Figura 25. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo esférico.

Se realizó un ajuste por el método de mínimos cuadrados a los datos de la Figura 26, ecuación (2.21) la expresión que se obtuvo se presenta en la ecuación (2.21).

$$t_{fD}(\omega) = 2.0517 \times 10^7 + 968.7220\omega - 479.5274\omega^2 - 20.4576\omega^3; \dots\dots\dots (2.21)$$

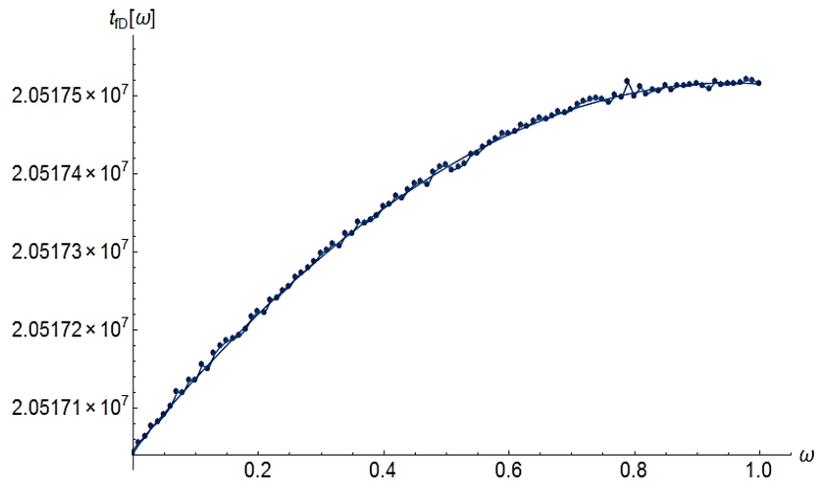


Figura 26. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo esférico.

En la **Figura 27** y **Figura 28** se muestra que a pesar de haber aumentado el valor del gasto adimensional a $q_D = 140$, la variación del tiempo adimensional en función del parámetro ω puede despreciarse para cuestiones prácticas. Cabe notar que la Figura 28 no muestra las oscilaciones que se presentan en los datos de la Figura 26, generados por cuestiones de convergencia del método de solución.

Se empleó el método de mínimos cuadrados para ajustar el polinomio cúbico de la ecuación (2.22) a los datos de la Figura 28.

$$t_{fD}(\omega) = 2.3070 \times 10^6 + 25640.5092\omega - 16299.7613\omega^2 + 2237.7721\omega^3; \dots\dots\dots(2.22)$$

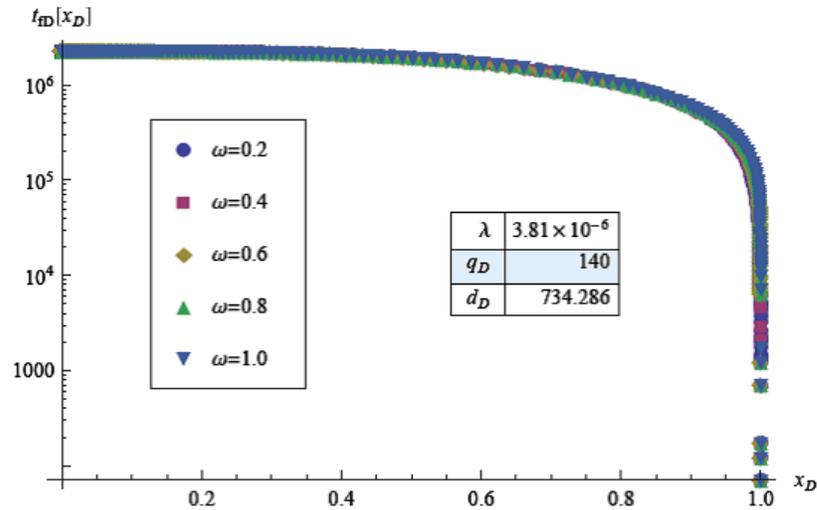


Figura 27. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo esférico.

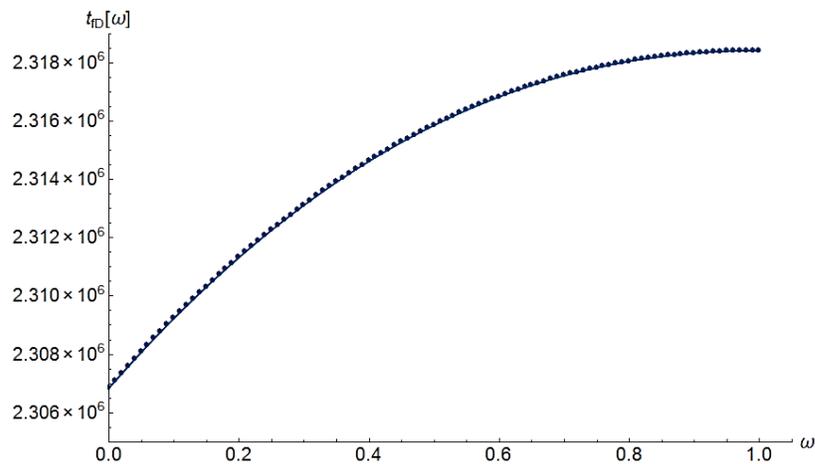


Figura 28. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de ω , flujo esférico.

La variación del tiempo adimensional para que el agua viaje desde la falla hacia el pozo, en función de la distancia adimensional del pozo a la falla se analiza para los valores $d_D = 500, 700, 900, 1100$ y 1300 , y el valor de los parámetros fijos de $q_D = 14.555$, $\omega = 0.24$ y $\lambda = 3.81 \times 10^{-6}$. Los resultados se observan en la **Figura 29** y **Figura 30**. En la Figura 30 se observa que la dependencia del tiempo adimensional en función

de la distancia adimensional d_D es directamente proporcional y es lineal en escala doble logarítmica. Se empleó el método de mínimos cuadrados para ajustar una curva a los datos de la Figura 30. El polinomio que se obtuvo se expresa en la ecuación (2.23).

$$t_{fD}(d_D) = 0.0518d_D^3; \dots\dots\dots (2.23)$$

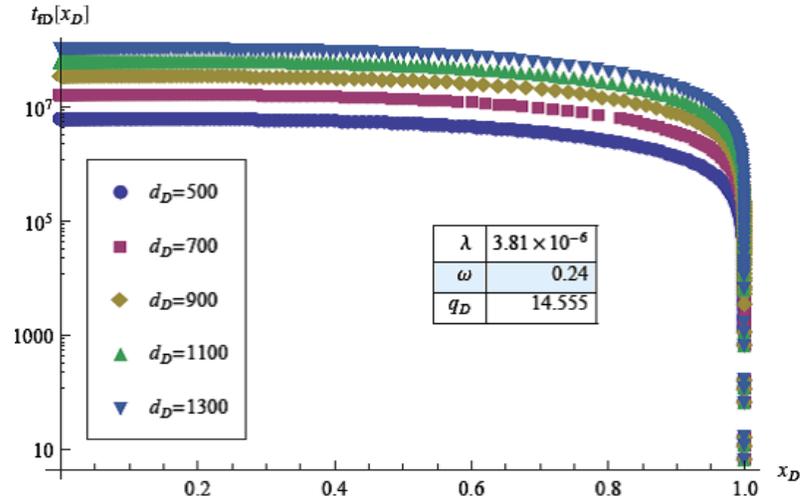


Figura 29. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de d_D , flujo esférico.

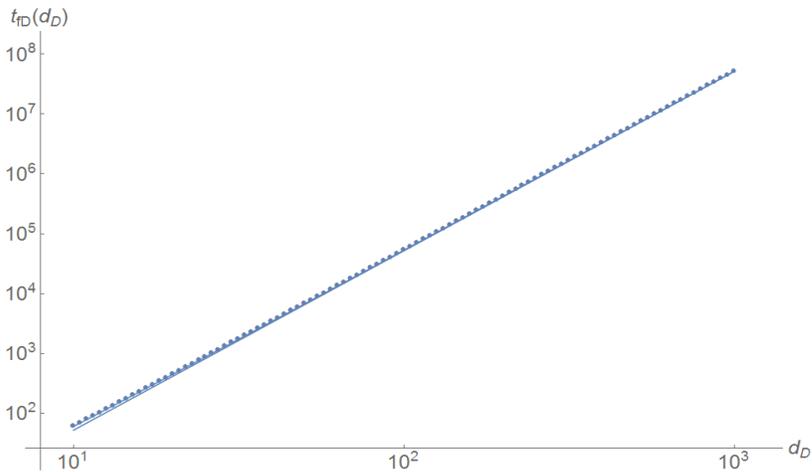


Figura 30. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje desde la falla ($x_D = 0$) hasta el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, para diferentes valores de d_D , flujo esférico.

2.4 DESARROLLO DEL MODELO DE FLUJO EN LA FALLA

La ecuación que representa la variación del tiempo adimensional en función de la distancia de una posición intermedia entre la falla, a la altura de los disparos, y el pozo se deduce en el Apéndice C. y es determinada por:

$$\frac{dy_D}{dt_D} = -\frac{q_D}{b_{fD}} \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \exp \left(-y_D \sqrt{\frac{2}{F_{CD}} \sqrt{m(s)s + G_{CD}s}} \right) \right\}, \dots\dots\dots(2.24)$$

donde, los parámetros adimensionales se definen a continuación.

El gasto adimensional,

$$q_D = \frac{qB\mu \left((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m \right)}{2k_f h \phi_{fc}}, \dots\dots\dots(2.25)$$

ancho adimensional de la falla,

$$b_{fD} = \frac{b_f}{d_c}; \dots\dots\dots(2.26)$$

conductividad de la falla,

$$F_{CD} = \frac{b_f k_{fc}}{k_f d_c}, \dots\dots\dots(2.27)$$

$$G_{CD} = \frac{k_f \phi_{fc} c_{tf}}{k_{fc} \left((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m \right)}, \dots\dots\dots(2.28)$$

$$m(s) = \frac{\omega(1-\omega)s + \lambda}{(1-\omega)s + \lambda}, \dots\dots\dots(2.29)$$

$$y_D = \frac{y}{d_c}. \dots\dots\dots(2.30)$$

Tiempo adimensional,

$$t_D = \frac{k_f}{((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m) \mu r_w^2} t; \dots\dots\dots(2.31)$$

\mathfrak{S}^{-1} es el operador de la Transformada Inversa de Laplace.

Prosiguiendo con el análisis realizado en las dos secciones anteriores, se efectúa un análisis del efecto en el tiempo adimensional t_{fD} para el flujo a través de la falla conductiva, que tienen cada uno de los parámetros λ , ω , q_D , d_D , b_{fD} , F_{CD} y G_{CD} que intervienen en el modelo.

En la **Figura 31** se observa el comportamiento de una gráfica típica del tiempo adimensional t_{fD} necesario para que el agua viaje en la falla, desde el contacto agua-aceite, para un valor de $x_D = 0$, hasta la altura de los disparos y que corresponde a un valor de $x_D = 1$.

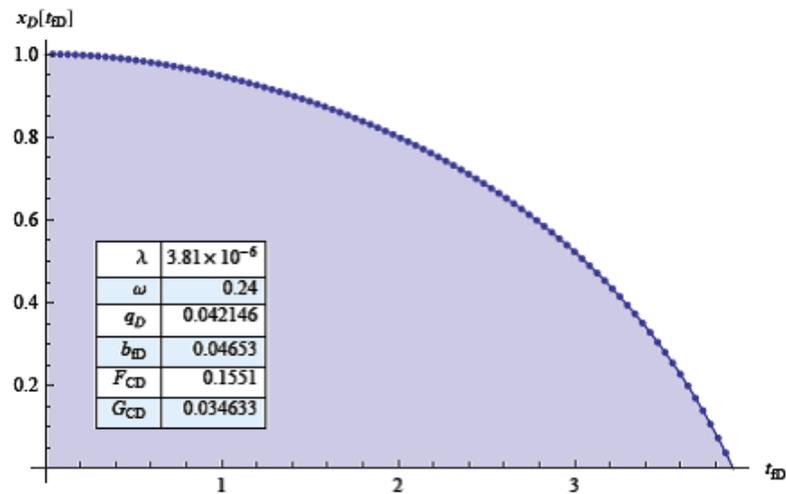


Figura 31. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla a partir del contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$).

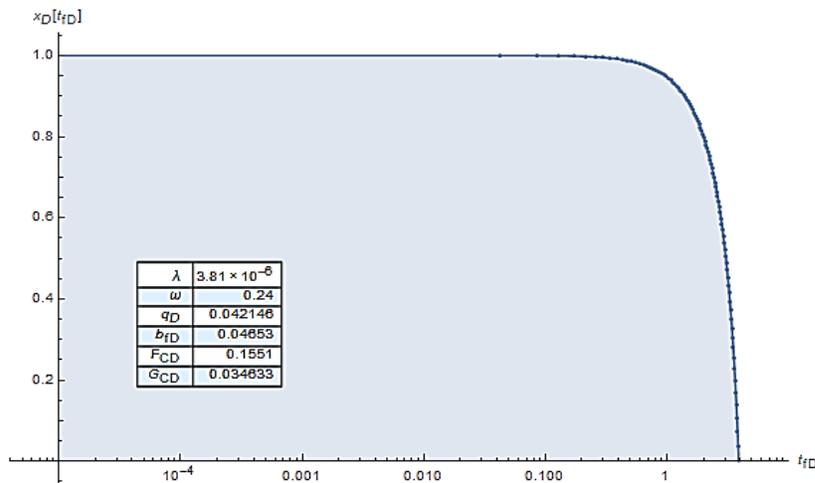


Figura 32. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla a partir de una posición entre el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) y la altura media de los disparos ($x_D = 1$), en escala semi-logarítmica.

El primer análisis corresponde al efecto que tiene el gasto adimensional q_D en el tiempo adimensional t_{fD} . Los valores de los parámetros fijos son $\omega = 0.24$, $\lambda = 3.81 \times 10^{-6}$, $b_{fD} = 0.04653$, $F_{CD} = 0.155$ y $G_{CD} = 0.034633$; para el gasto adimensional son $q_D = 10^{-4}$, 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} y 10^0 . En la **Figura 33** y **Figura 34** se muestran los resultados del análisis. En ambas figuras se muestra el hecho esperado de que el tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla, disminuye a medida que el gasto aumenta. En la Figura 34 se observa una variación lineal en escala doble logarítmica. Se aplicó el método de mínimos cuadrados para ajustar una curva a los datos, ecuación (2.32). Al comparar la estructura funcional de ecuación (2.32) con la correspondiente a la ecuación (2.7) se observa que la ecuación (2.32) no tiene término independiente (constante) y que la segunda potencia tiene exponente 0.6 a diferencia del exponente 0.1 que aparece en la ecuación (2.7).

$$t_{fD}(q_D) = 0.0533 \frac{1}{q_D} + 0.4390 \frac{1}{q_D^{0.6}}; \dots\dots\dots (2.32)$$

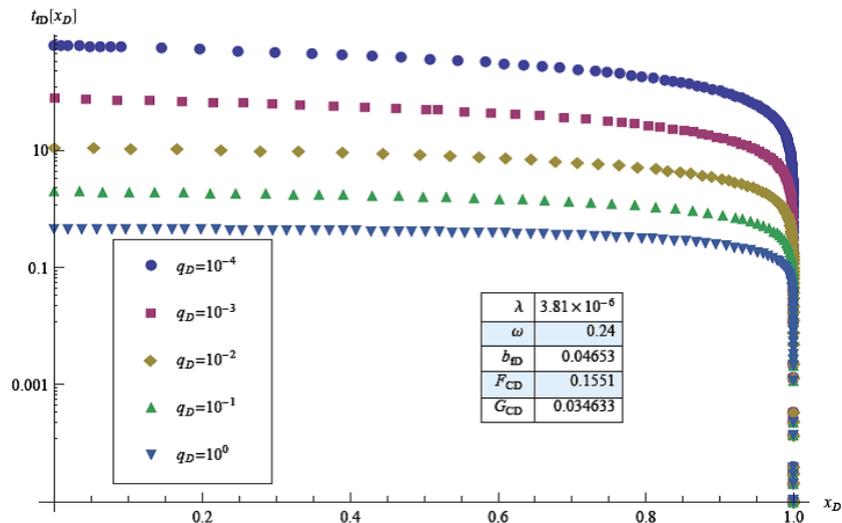


Figura 33. Gráfica semi-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores del gasto adimensional q_D .

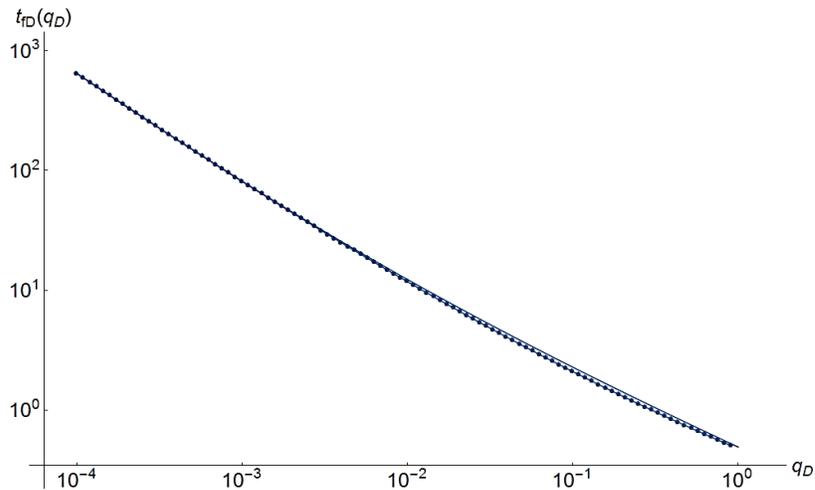


Figura 34. Gráfica doble-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores del gasto adimensional q_D .

A continuación se considera el efecto que tiene el parámetro b_{fD} en el tiempo adimensional para el flujo vertical a través de la falla. Los valores para los parámetros fijos son $\omega = 0.24$, $\lambda = 3.81 \times 10^{-6}$, $q_D = 0.042146$, $F_{CD} = 0.1551$ y $G_{CD} = 0.034633$. Los valores

de b_{fD} a considerar son $b_{fD}=10^{-3}$, 5×10^{-3} , 10^{-2} , 5×10^{-2} y 10^{-1} . Los resultados son mostrados en la **Figura 35** y **Figura 36**. En la Figura 36 se observa que la dependencia del tiempo adimensional t_{fD} para el flujo vertical a través de la falla, para diferentes valores de b_{fD} es inversamente proporcional, es decir, a medida que aumenta el parámetro b_{fD} disminuye el tiempo necesario para que el agua viaje desde el contacto agua-aceite hasta la posición media de los disparos. Se puede observar que la dependencia es aproximadamente lineal en escala doble logarítmica. Se aplicó el método de mínimos cuadrados a los datos de la Figura 36. A diferencia de los casos anteriores en los cuales se obtuvo una expresión que se ajustó con gran precisión a los datos correspondientes, en este caso no se logró obtener tal precisión. El mejor ajuste obtenido es representado por la ecuación (2.33). En la Figura 36 se compara la curva de ajuste con los datos obtenidos. Para valores del parámetro b_{fD} mayores que 5×10^{-2} la aproximación obtenida es relativamente precisa. Para valores menores que dicho valor, la precisión de la aproximación disminuye.

$$t_{fD}(b_{fD}) = 0.0871 + 44.2037b_{fD}^{0.8}; \dots\dots\dots(2.33)$$

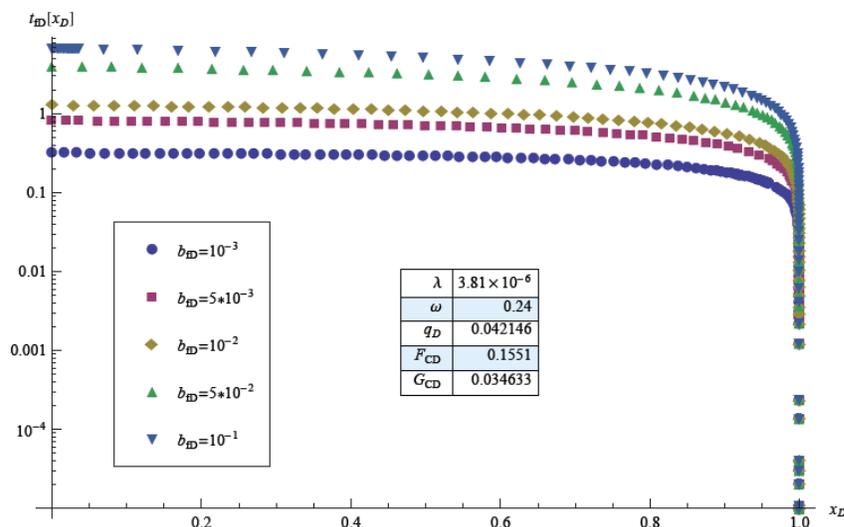


Figura 35. Gráfica semi-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores del parámetro b_{fD} .

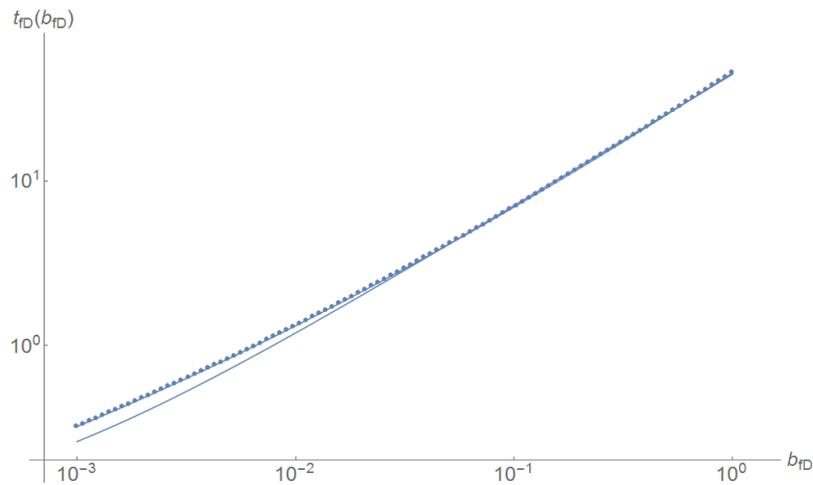


Figura 36. Gráfica doble-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) a la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores de b_{fD} .

El efecto que tiene el parámetro F_{CD} sobre el tiempo adimensional para el valor de los parámetros fijos de $\omega = 0.24$, $\lambda = 3.81 \times 10^{-6}$, $q_D = 0.042146$, $b_{fD} = 0.04653$ y $G_{CD} = 0.034633$, y los diferentes valores de $F_{CD} = 3 \times 10^{-3}$, 10^{-2} , 5×10^{-2} , 10^{-1} y 5×10^{-1} se muestra en la **Figura 37** y **Figura 38**.

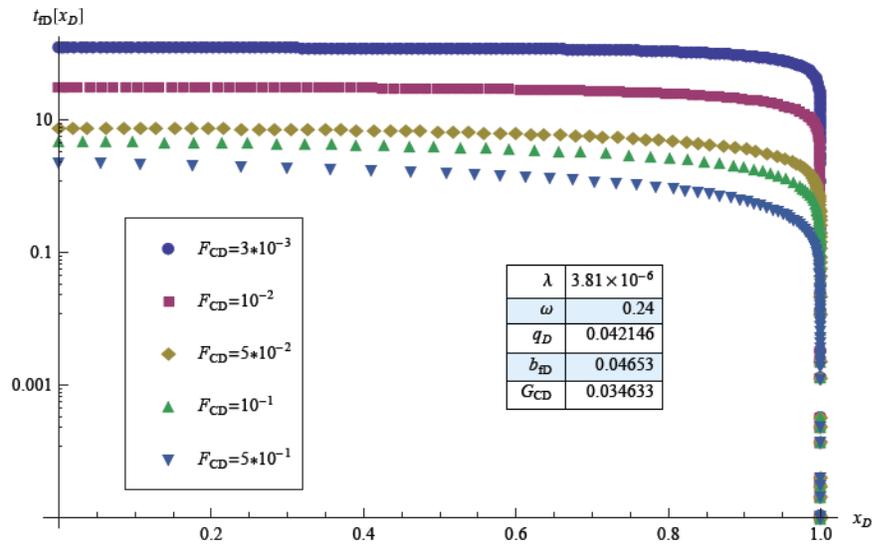


Figura 37. Gráfica semi-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores del parámetro F_{CD} .

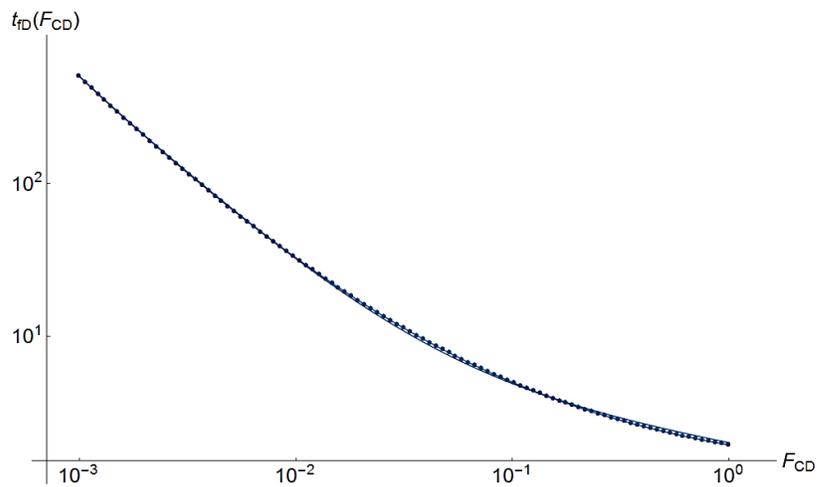


Figura 38. Gráfica doble-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) a la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores de F_{CD} .

La Figura 38 muestra que la dependencia del tiempo adimensional t_{fD} para el flujo a través de la falla con respecto al parámetro F_{CD} es inversamente proporcional y que la dependencia es aproximadamente lineal en escala doble logarítmica. La curva de ajuste que se obtiene al emplear el método de mínimos cuadrados sobre los datos de la Figura

38 se expresa por la ecuación (2.34). La curva generada aproxima con buena precisión los datos.

$$t_{fd}(F_{CD}) = 5.5062 \times 10^{-12} \frac{1}{F_{CD}^{4.25}} + 0.0828 \frac{1}{F_{CD}^{1.25}} + 1.9229 \frac{1}{F_{CD}^{0.25}}; \dots\dots\dots (2.34)$$

En la **Figura 39** y **Figura 40** se observa la dependencia del tiempo adimensional t_{fd} para el flujo a través de la falla en función del parámetro G_{CD} para el valor de los parámetros fijos de $\omega = 0.24$, $\lambda = 3.81 \times 10^{-6}$, $q_D = 0.042146$, $b_{fd} = 0.04653$ y $F_{CD} = 0.1551$ y los valores del parámetro G_{CD} de $G_{CD} = 5 \times 10^{-3}$, 10^{-2} , 5×10^{-2} , 10^{-1} y 5×10^{-1} . En la Figura 40 se observa que la dependencia del tiempo adimensional t_{fd} para el flujo a través de la falla en función del parámetro G_{CD} es prácticamente constante para valores menores que 10^{-5} y a partir de este valor el tiempo adimensional t_{fd} empieza a aumentar al incrementar el valor de G_{CD} . Se empleó el método de mínimos cuadrados a los datos de la Figura 40. La curva de ajuste para este caso se representa por la ecuación (2.35).

$$t_{fd}(G_{CD}) = 3.8904 + 0.2217 G_{CD}; \dots\dots\dots (2.35)$$

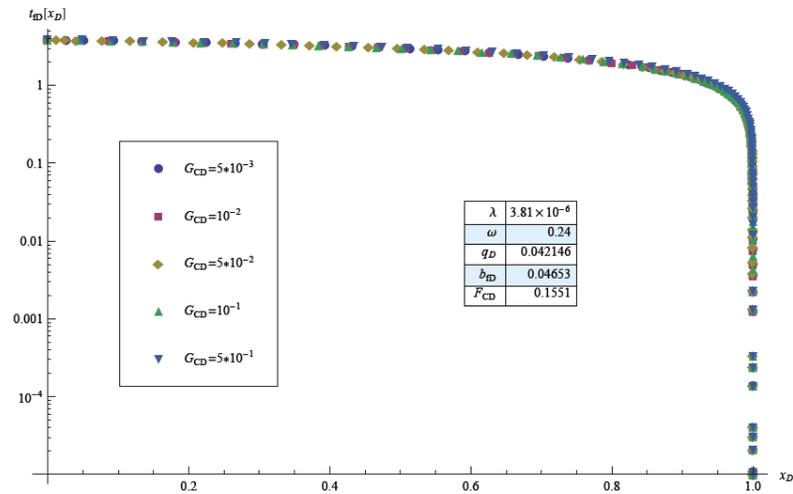


Figura 39. Gráfica semi-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores del parámetro G_{CD} .

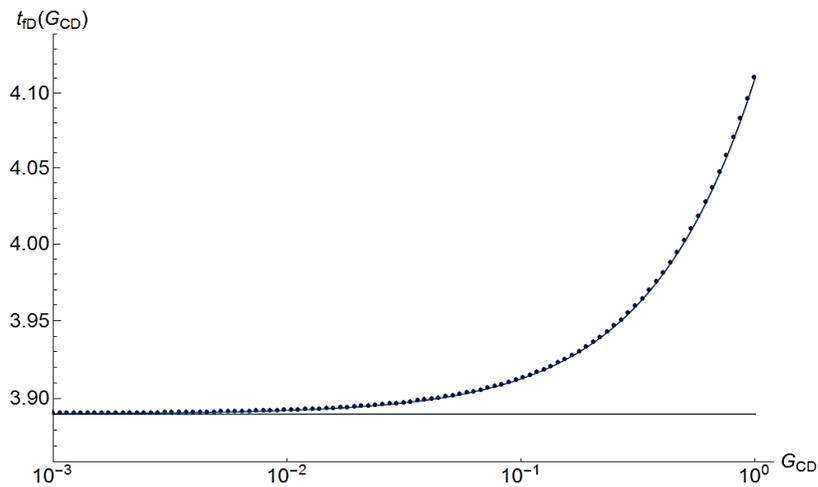


Figura 40. Gráfica doble-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) a la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores de G_{CD} .

El efecto que tiene el parámetro λ sobre el tiempo adimensional para el flujo a través de la falla para el valor de los parámetros fijos de $\omega = 0.24$, $q_D = 0.042146$, $b_{jD} = 0.04653$, $G_{CD} = 0.034633$ y $F_{CD} = 0.1551$ y los diferentes valores de $\lambda = 10^{-10}$, 10^{-5} , 10^{-3} , 10^{-2} y 10^{-1} es mostrado en la **Figura 41** y **Figura 42**.

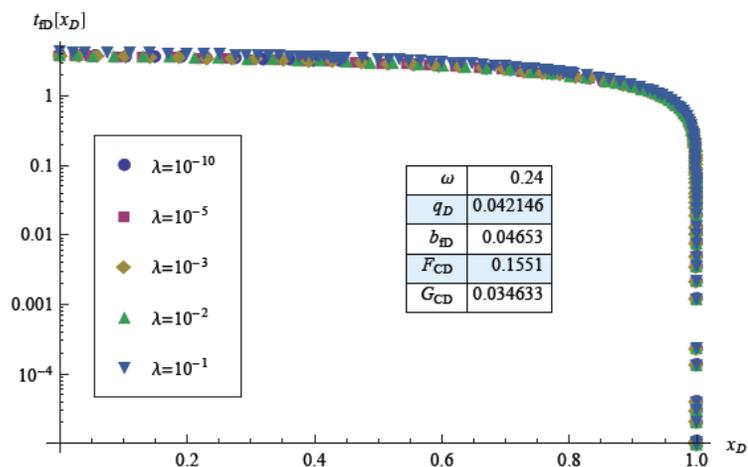


Figura 41. Gráfica semi-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores del parámetro λ .

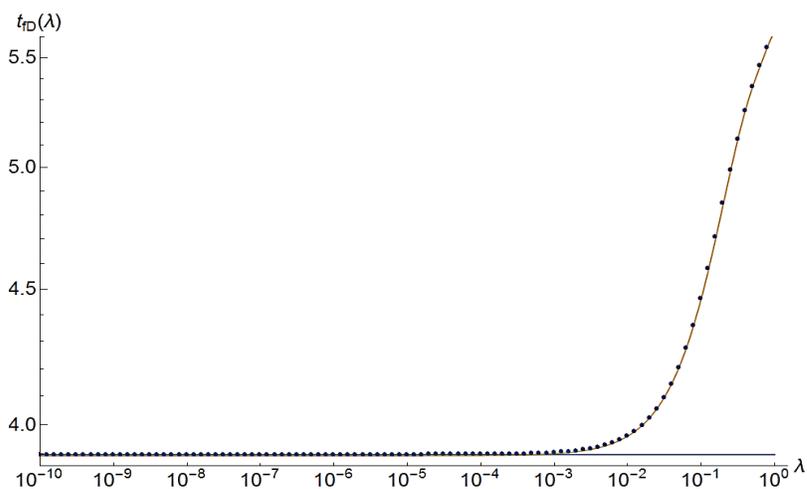


Figura 42. Gráfica doble-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) a la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores de λ .

En la Figura 42 se muestra que la variación del tiempo adimensional t_{fD} para el flujo a través de la falla para diferentes valores del parámetro λ es prácticamente constante para valores menores que 10^{-3} y a partir de este valor el tiempo aumenta al aumentar el valor de λ . Como puede observarse hay una diferencia en comportamiento con respecto al observado en las Figura 21 a Figura 24 en donde no se muestra, prácticamente, variación alguna. Al aplicar el método de mínimos cuadrados a los datos de la Figura 42 se obtiene un polinomio de orden 4 representado por la ecuación (2.36).

$$t_{fD}(\lambda) = 3.8943 + 6.8135\lambda - 12.3463\lambda^2 + 11.1101\lambda^3 - 3.8560\lambda^4; \dots\dots\dots (2.36)$$

En la **Figura 43** y **Figura 44** se observa la dependencia del tiempo adimensional t_{fD} para el flujo a través de la falla en función del parámetro ω para el valor de los parámetros fijos de $\lambda = 3.81 \times 10^{-6}$, $q_D = 0.042146$, $b_{fD} = 0.04653$, $F_{CD} = 0.1551$ y $G_{CD} = 0.034633$ y los valores del parámetro ω de $\omega = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 0.9 . La Figura 44 muestra una variación lineal de tiempo adimensional t_{fD} para el flujo a través de la falla en función del parámetro ω . Se empleó el método de mínimos cuadrados para ajustar una curva a los datos de la Figura 44. La expresión obtenida se representa por la ecuación (2.37).

$$t_{fD}(\omega) = 1.4632 + 4.4522\omega^{0.425}; \dots\dots\dots (2.37)$$

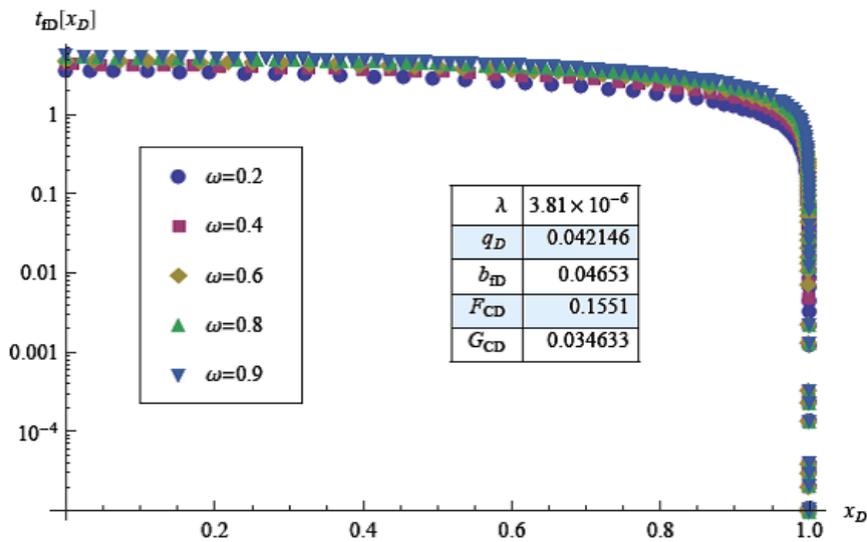


Figura 43. Gráfica semi-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) hasta la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores del parámetro ω .

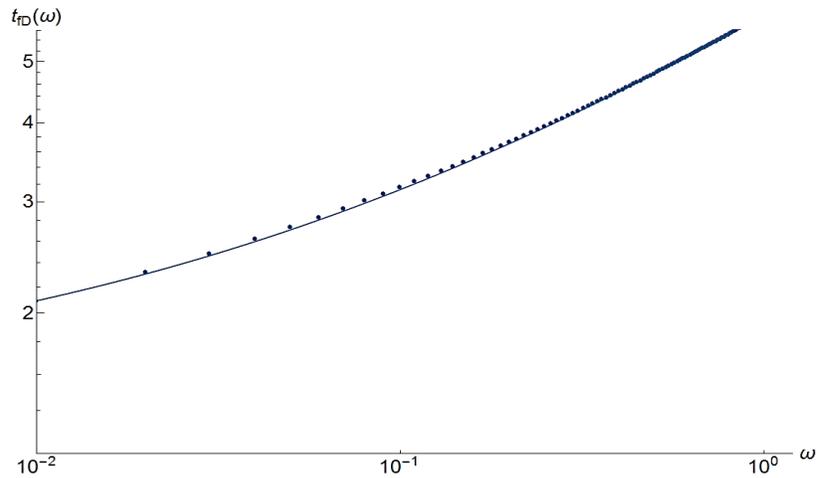


Figura 44. Gráfica doble-logarítmica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) a la posición media de los disparos ($x_D = 1$), para diferentes valores de ω .

2.5 APLICACIÓN DE CAMPO

Para aplicar el modelo desarrollado para la estimación del tiempo de invasión de agua a un pozo cercano a una falla conductiva se seleccionó un pozo A-1 del Campo A, el cual tiene las siguientes características,

Radio de pozo,	$r_w = 0.21$ pies.
Factor de volumen de aceite,	$B_o = 1.75$.
Compresibilidad del aceite,	$c_o = 2.6373 \times 10^{-5}$ psi.
Distancia entre el pozo y la falla,	$d_f = 154.2$ pies.
Distancia del pozo al contacto a agua-aceite,	$d_c = 331.4$ pies.
Espesor,	$h = 1422$ pies.
Permeabilidad en fracturas,	$k_f = 3$ md.
Permeabilidad en la falla,	$k_{fc} = 10$ md.
Viscosidad del aceite,	$\mu = 0.335$ cp.
Porosidad de la matriz,	$\phi_m = 0.06$.
Porosidad secundaria,	$\phi_f = 0.025$.
Porosidad de la falla,	$\phi_{fc} = 0.015$.
Ancho equivalente de falla,	$b_{feq} = 15.42$ pies.

Gasto,	$q = 2217 \text{ bpd.}$
Almacenamiento adimensional de fractura,	$\omega = 0.24.$
Coefficiente de flujo interporoso,	$\lambda = 3.81 \times 10^{-6}.$

De la historia de producción se tiene que el tiempo que tarda en invadir el agua al pozo es de 33 meses.

Para el cálculo de las variables adimensionales ha sido utilizado el siguiente valor, obtenido de estudios petrofísicos,

Compresibilidad de formación naturalmente fracturada,	$c_{ff} = 36 \times 10^{-6} \text{psi}^{-1}.$
---	---

El tiempo adimensional es definido por,

$$t_D = \frac{k_f}{((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m) \mu r_w^2} t. \dots\dots\dots(2.38)$$

El denominador se calcula por medio de las expresiones siguientes, de correlaciones en la siguiente manera,

$$(\phi c_t)_f = \phi_f (c_o S_{of} + c_{ff}), \dots\dots\dots(2.39)$$

$$(\phi c_t)_m = \phi_m (c_o S_{om} + c_w S_{wi} + c_{fm}); \dots\dots\dots(2.40)$$

Para este caso particular,

$$(\phi c_t)_f = 3.1186 \times 10^{-6} \text{psi}^{-1}; \dots\dots\dots(2.41)$$

$$(\phi c_t)_m = 1.559 \times 10^{-6} \text{psi}^{-1}; \dots\dots\dots(2.42)$$

$$(\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m = 4.676 \times 10^{-6} \text{psi}^{-1}; \dots\dots\dots(2.43)$$

Además tenemos las variables adimensionales,

$$q_D = 0.00215, \dots\dots\dots (2.44)$$

$$d_D = 734.286 \dots\dots\dots (2.45)$$

En la **Figura 45** y **Figura 46**, se observa que el tiempo que tarda el agua en viajar de la falla al pozo es de:

$$t_D = 2.634506 \times 10^8; \dots\dots\dots (2.46)$$

o en términos de variables reales,

$$t \approx 31.965 \text{ meses.} \dots\dots\dots (2.47)$$

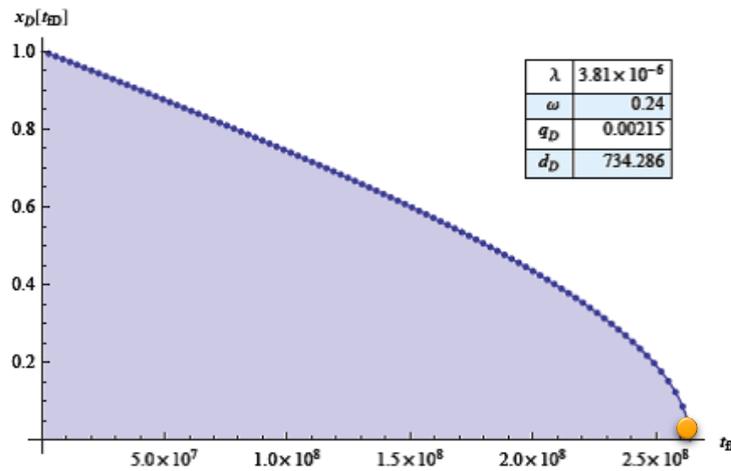


Figura 45. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a partir de una posición entre la falla ($x_D = 0$) y el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, flujo radial.

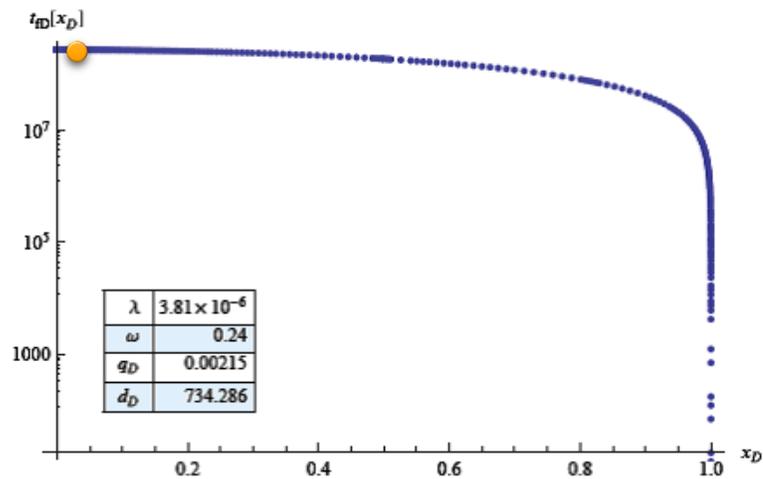


Figura 46. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a partir de una posición entre la falla ($x_D = 0$) y el pozo ($x_D = 1$), a una altura igual a la del pozo, flujo radial.

Para el cálculo del tiempo que tarda el agua en viajar a través de la falla desde el contacto agua-aceite hasta la altura del pozo, se requiere las siguientes variables adimensionales,

$$F_{CD} = \frac{b_f k_{fc}}{k_f d_c} = 0.1551, \dots\dots\dots (2.48)$$

$$G_{CD} = \frac{k_f \phi_f c_{if}}{k_{fc} ((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m)} = 0.03463, \dots\dots\dots (2.49)$$

$$q_D = \frac{qB\mu((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m)}{2k_f h \phi_{fc}} = 0.04215, \dots\dots\dots (2.50)$$

$$b_{fD} = \frac{b_f}{d_c} = 0.0465. \dots\dots\dots (2.51)$$

En la **Figura 47** se muestran los resultados para la variación de la distancia adimensional en función del tiempo adimensional en la falla. El punto sobre el eje horizontal representa el tiempo adimensional buscado, el cual tiene un valor de

$$t_D = \frac{k_f}{\left((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m \right) \mu d_c^2} t \approx 3.902. \dots\dots\dots(2.52)$$

O en variables reales,

$$t \approx 1.18 \text{ meses.} \dots\dots\dots(2.53)$$

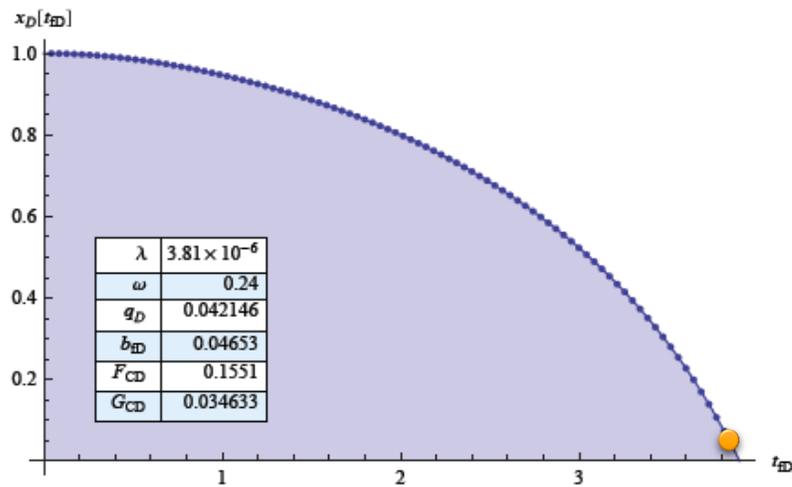


Figura 47. Gráfica del tiempo adimensional necesario para que el agua viaje a través de la falla desde el contacto agua-aceite ($x_D = 0$) a la posición media de los disparo ($x_D = 1$), flujo en la falla.

Por consiguiente, el tiempo de llegada del agua al pozo es el resultado de sumar los tiempos en la expresión (2.30) y en la expresión (2.36), obteniéndose:

$$t \approx 33.145 \text{ meses} \dots\dots\dots(2.54)$$

La diferencia entre el tiempo encontrado y el tiempo reportado es de 0.145 meses, un poco más de 4 días.

3 DESARROLLO DEL MODELO NUMÉRICO

3.1 INTRODUCCIÓN

Para desarrollar un modelo matemático de un yacimiento, un factor importante a considerar es el número de sistemas que lo componen; así, si se requiere modelar un yacimiento naturalmente fracturado, debe estar compuesto de dos medios (matriz y fracturas). Si el yacimiento es un medio poroso naturalmente fracturado vugular, el modelo constará de matriz, fracturas y vugulos, considerando un yacimiento compuesto por tres sistemas. Una gran parte de los yacimientos petroleros en explotación en México se clasifican como naturalmente fracturados, de aquí la importancia de contar con simuladores que consideren este tipo de yacimientos.

Debido a que el modelo semi-analítico mostrado en el capítulo anterior considera una fase y proporciona una buena aproximación al caso de campo mostrado en la sección 2.5, por ello el modelo de matemático de flujo en un yacimiento desarrollado en este capítulo será para una sola fase, considerando un sistema naturalmente fracturado compuesto por dos medios.

3.2 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

En este trabajo se emplea el Método de Diferencias Finitas para llevar a cabo la discretización del modelo numérico. Para ser más precisos, se aplica el Método de Diferencias Finitas Centradas por obtener esta una convergencia de segundo orden.

La principal expresión que aparece en los modelos tiene la estructura siguiente:

$$\nabla \cdot (A \nabla B) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(A \frac{\partial B}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(A \frac{\partial B}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(A \frac{\partial B}{\partial x_3} \right), \dots\dots\dots (3.1)$$

donde A y B son funciones escalares en el espacio real. La expresión (3.1) es discretizada en el espacio tridimensional por:

$$\begin{aligned}
[\nabla \cdot (A \nabla B)]_{i,j,k}^{n+1} &= \Delta [A(\Delta B)]_{m,i,j,k}^{n+1} = \\
&\left[A_{i+\frac{1}{2},j,k} \left(B_{i+1,j,k} - B_{i,j,k} \right) \right]_m^{n+1} - \left[A_{i-\frac{1}{2},j,k} \left(B_{i,j,k} - B_{i-1,j,k} \right) \right]_m^{n+1} + \\
&\left[A_{i,j+\frac{1}{2},k} \left(B_{i,j+1,k} - B_{i,j,k} \right) \right]_m^{n+1} - \left[A_{i,j-\frac{1}{2},k} \left(B_{i,j,k} - B_{i,j-1,k} \right) \right]_m^{n+1} + \\
&\left[A_{i,j,k+\frac{1}{2}} \left(B_{i,j,k+1} - B_{i,j,k} \right) \right]_m^{n+1} - \left[A_{i,j,k-\frac{1}{2}} \left(B_{i,j,k} - B_{i,j,k-1} \right) \right]_m^{n+1} \cdot \dots \dots \dots \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Para la parte temporal, la expresión

$$\frac{\partial}{\partial t}(C), \dots \dots \dots (3.3)$$

se discretiza por,

$$[C]_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t [C]_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta t^{n+1}} [(C)^{n+1} - (C)^n]_{i,j,k} \cdot \dots \dots \dots (3.4)$$

3.3 DESARROLLO DEL MODELO

Para este modelo se considera que el yacimiento está compuesto por un número arbitrario de sistemas. El Modelo Monofásico considera una fase hidrocarburo. El subíndice s indica condiciones estándar.

El objetivo de la siguiente sección es mostrar cómo construir el modelo numérico del Modelo Monofásico para un yacimiento compuesto de m sistemas.

Suposiciones.

- El yacimiento contiene un fluido monofásico.
- Flujo Laminar.
- Condiciones isotérmicas.

3.4 DEFINICIONES PRELIMINARES PARA EL MODELO

Se definen los términos siguientes para el m -ésimo sistema,

El término de flujo:

$$A_o^m = \nabla \cdot [\mathbf{T}_o (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D)]_m \cdot \dots \dots \dots (3.5)$$

El término de gasto:

$$B_o^m = [b_o \hat{q}_o]_m \cdot \dots \dots \dots (3.6)$$

El término de acumulación:

$$C_o^m = -\frac{\partial}{\partial t} [\phi b_o S_o]_m \cdot \dots \dots \dots (3.7)$$

El término de transferencia de masa entre sistemas:

Si $m = 1$,

$$D_o^1 = [\hat{\tau}_o]_{2,1} \cdot \dots \dots \dots (3.8)$$

Si $1 < m < N$ con N el número total de sistemas:

$$D_o^m = -[\hat{\tau}_o]_{m,m-1} + [\hat{\tau}_o]_{m+1,m} \cdot \dots \dots \dots (3.9)$$

Si $m = N$:

$$D_o^N = -[\hat{\tau}_o]_{N,N-1} \cdot \dots \dots \dots (3.10)$$

Para establecer un modelo es necesario determinar el número de sistemas N , que lo constituyen, así como el número de sistemas que permiten flujo y el número de ellos que sólo permiten almacenamiento de los fluidos.

Para establecer las ecuaciones en cada uno de los sistemas se aplica el principio de conservación de masa. Para ejemplificar lo anterior se consideran tres modelos, flujo en un yacimiento homogéneo, flujo en un yacimiento de doble porosidad – doble permeabilidad y flujo en un yacimiento de triple porosidad – una permeabilidad.

3.5 FLUJO EN UN YACIMIENTO HOMOGÉNEO

Para este caso, $N=1$ puesto que solo existe un medio. Se aplica el principio de conservación de masa,

$$A_o^1 + B_o^1 + C_o^1 = 0. \dots\dots\dots (3.11)$$

3.6 FLUJO EN UN YACIMIENTO DE DOBLE POROSIDAD – DOBLE PERMEABILIDAD

Para este caso $N=2$ puesto que existen dos medios. Se aplica el principio de conservación de masa.

En el medio uno:

$$A_o^1 + B_o^1 + C_o^1 + D_o^1 = 0. \dots\dots\dots (3.12)$$

Para el medio dos, como el yacimiento consta de doble permeabilidad:

$$A_o^2 + C_o^2 + D_o^2 = 0. \dots\dots\dots (3.13)$$

3.7 FLUJO EN UN YACIMIENTO DE TRIPLE POROSIDAD – UNA PERMEABILIDAD

Puesto que existen tres medios, $N = 3$, se aplica el principio de conservación de masa.

Para el medio uno:

$$A_o^1 + B_o^1 + C_o^1 + D_o^1 = 0. \dots\dots\dots(3.14)$$

Para el medio dos, como el yacimiento consta de una permeabilidad:

$$C_o^2 + D_o^2 = 0. \dots\dots\dots (3.15)$$

Y para el medio tres:

$$C_o^3 + D_o^3 = 0. \dots\dots\dots(3.16)$$

3.8 MODELO NUMÉRICO

Para obtener el modelo numérico de flujo se discretiza cada uno de los términos del sistema de ecuaciones descrito en la sección 3.2, considerando las restricciones siguientes,

- El tensor de permeabilidad \mathbf{k} es diagonal, $\mathbf{k} = \text{diag}(k_{11}, k_{22}, k_{33})$.
- Se emplea la notación de transmisibilidad, las transmisibilidades numéricas, T_m , en el contorno de un bloque son determinadas por $\frac{A_m T_m}{\Delta x_m}$, donde A_m es el área de sección transversal normal a la dirección x_m .
- Sea $\lambda_m \equiv \frac{V_{r,m}}{\Delta t}$, el volumen poroso del m -ésimo sistema por unidad de tiempo.

Se discretiza el término de flujo (3.5),

$$\begin{aligned}
[\Delta A_o^m]_{i,j,k}^{n+1} &= \Delta [\mathbf{T}_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_{m,i,j,k}^{n+1} = \\
&\left[\mathbf{T}_{o,i+\frac{1}{2},j,k} \left(p_{o,i+1,j,k} - p_{o,i,j,k} - (\gamma_o \Delta D)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right) \right]_m^{n+1} - \left[\mathbf{T}_{o,i-\frac{1}{2},j,k} \left(p_{o,i,j,k} - p_{o,i-1,j,k} - (\gamma_o \Delta D)_{i-\frac{1}{2},j,k} \right) \right]_m^{n+1} + \\
&\left[\mathbf{T}_{o,i,j+\frac{1}{2},k} \left(p_{o,i,j+1,k} - p_{o,i,j,k} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j+\frac{1}{2},k} \right) \right]_m^{n+1} - \left[\mathbf{T}_{o,i,j-\frac{1}{2},k} \left(p_{o,i,j,k} - p_{o,i,j-1,k} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right) \right]_m^{n+1} + \\
&\left[\mathbf{T}_{o,i,j,k+\frac{1}{2}} \left(p_{o,i,j,k+1} - p_{o,i,j,k} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right) \right]_m^{n+1} - \left[\mathbf{T}_{o,i,j,k-\frac{1}{2}} \left(p_{o,i,j,k} - p_{o,i,j,k-1} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right) \right]_m^{n+1} \cdot \dots \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Se analizan los términos de gasto, ecuación (3.6),

$$[\Delta B_o^m]_{i,j,k}^{n+1} = [b_o q_o]_{m,i,j,k}^{n+1} \cdot \dots \quad (3.18)$$

Cabe destacar que $q_o = V_r \hat{q}_o$.

Se discretiza el término de acumulación, ecuación (3.7),

$$[\Delta C_o^m]_{i,j,k} = -\frac{V_{r,m,i,j,k}}{\Delta t^{n+1}} \Delta_t [\phi b_o S_o]_{m,i,j,k} = -\frac{V_{r,m,i,j,k}}{\Delta t^{n+1}} [(\phi b_o S_o)^{n+1} - (\phi b_o S_o)^n]_{m,i,j,k} \cdot \dots \quad (3.19)$$

Cabe notar que en la ecuación (3.19) $S_o = 1$.

Ahora, se analizan los términos de transferencia de masa entre sistemas. Para evaluar las transmisibilidades de los fluidos se utiliza el concepto de corriente arriba; es decir, las propiedades dentro de los paréntesis se evalúan a las condiciones de presión y saturación de la celda de mayor presión.

Si $m = 1$,

$$[\Delta D_o^1]_{i,j,k}^{n+1} = [\tau_o]_{2,1,i,j,k}^{n+1} = [V_{r,i,j,k} \hat{\tau}_o]_{2,1} = [\mathbf{T}_{o,2,1} (p_{2,o} - p_{1,o})]_{i,j,k}^{n+1} \cdot \dots \quad (3.20)$$

Si $1 < m < N$ con N el número total de sistemas,

$$\begin{aligned}
 [\Delta D_o^m]_{i,j,k}^{n+1} &= -[\tau_o]_{m,m-1} + [\tau_o]_{m+1,m} = -[V_{r,i,j,k} \hat{\tau}_o]_{m,m-1} + [V_{r,i,j,k} \hat{\tau}_o]_{m+1,m} = \\
 &-[\mathbf{T}_{\alpha,m,m-1}(p_{m,o} - p_{m-1,o})]_{i,j,k}^{n+1} + [\mathbf{T}_{\alpha,m+1,m}(p_{m+1,o} - p_{m,o})]_{i,j,k}^{n+1} \cdot \dots \dots \dots \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Si $m = N$,

$$[\Delta D_o^N]_{i,j,k}^{n+1} = -[\tau_o]_{N,N-1} = -[V_{r,i,j,k} \hat{\tau}_o]_{N,N-1} = -[\mathbf{T}_{\alpha,N,N-1}(p_{N,o} - p_{N-1,o})]_{i,j,k}^{n+1} \cdot \dots \dots \dots \quad (3.22)$$

Las transmisibilidades entre un medio y otro se evalúan corriente arriba; esto es, se calcula el potencial entre los medios y las propiedades se evalúan a las condiciones del medio de mayor presión.

$$\mathbf{T}_{\alpha,m,m+1} = \begin{cases} \sigma V_r k_m \left(\frac{b_\alpha k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \right) & \text{si } (p_{m,\alpha} > p_{m+1,\alpha})_{i,j,k}^{n+1} \\ \sigma V_r k_{m+1} \left(\frac{b_\alpha k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \right) & \text{si } (p_{m,\alpha} < p_{m+1,\alpha})_{i,j,k}^{n+1} \end{cases}, \dots \dots \dots (3.23)$$

$$\mathbf{T}_{\alpha,m+1,m} = \begin{cases} \sigma V_r k_{m+1} \left(\frac{b_\alpha k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \right) & \text{si } (p_{m+1,\alpha} > p_{m,\alpha})_{i,j,k}^{n+1} \\ \sigma V_r k_m \left(\frac{b_\alpha k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \right) & \text{si } (p_{m+1,\alpha} < p_{m,\alpha})_{i,j,k}^{n+1} \end{cases}, \dots \dots \dots (3.24)$$

donde $a=0$ y $k_{r\alpha} = 1$.

Resta por elegir las variables independientes y describir cada uno de los términos de las ecuaciones (3.17)-(3.24) en términos de ellas. Las variables a elegir para el m -ésimo sistema es el vector $U_{m,i,j,k} = (p_o)_{m,i,j,k}^T$.

Los términos de flujo,

$$\begin{aligned}
[\Delta A_o^m]_{i,j,k}^{n+1} &= \Delta [\mathbf{T}_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_{m,i,j,k}^{n+1} = \\
& \left[\mathbf{T}_{o,i+\frac{1}{2},j,k} \left(p_{o,i+1,j,k} - p_{o,i,j,k} - (\gamma_o \Delta D)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right) \right]_m^{n+1} - \left[\mathbf{T}_{o,i-\frac{1}{2},j,k} \left(p_{o,i,j,k} - p_{o,i-1,j,k} - (\gamma_o \Delta D)_{i-\frac{1}{2},j,k} \right) \right]_m^{n+1} + \\
& \left[\mathbf{T}_{o,i,j+\frac{1}{2},k} \left(p_{o,i,j+1,k} - p_{o,i,j,k} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j+\frac{1}{2},k} \right) \right]_m^{n+1} - \left[\mathbf{T}_{o,i,j-\frac{1}{2},k} \left(p_{o,i,j,k} - p_{o,i,j-1,k} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right) \right]_m^{n+1} + \\
& \left[\mathbf{T}_{o,i,j,k+\frac{1}{2}} \left(p_{o,i,j,k+1} - p_{o,i,j,k} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right) \right]_m^{n+1} - \left[\mathbf{T}_{o,i,j,k-\frac{1}{2}} \left(p_{o,i,j,k} - p_{o,i,j,k-1} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right) \right]_m^{n+1}, \dots \dots \dots (3.25)
\end{aligned}$$

$$[\Delta B_o^m]_{i,j,k}^{n+1} = [b_o q_o]_{m,i,j,k}^{n+1}, \dots \dots \dots (3.26)$$

$$[\Delta C_o^m]_{i,j,k} = -\frac{V_{r,m,i,j,k}}{\Delta t^{n+1}} [(\phi b_o)^{n+1} - (\phi b_o)^n]_{m,i,j,k} \cdot \dots \dots \dots (3.27)$$

Si $m=1$,

$$[\Delta D_o^1]_{i,j,k}^{n+1} = [\mathbf{T}_{o,2,1} (p_{2,o} - p_{1,o})]_{i,j,k}^{n+1} \cdot \dots \dots \dots (3.28)$$

Si $1 < m < N$ con N el número total de sistemas,

$$[\Delta D_o^m]_{i,j,k}^{n+1} = [\mathbf{T}_{o,m,m-1} (p_{m,o} - p_{m-1,o})]_{i,j,k}^{n+1} + [\mathbf{T}_{o,m+1,m} (p_{m+1,o} - p_{m,o})]_{i,j,k}^{n+1} \cdot \dots \dots \dots (3.29)$$

Si $m=N$,

$$[\Delta D_o^N]_{i,j,k}^{n+1} = -[\mathbf{T}_{o,N,N-1} (p_{N,o} - p_{N-1,o})]_{i,j,k}^{n+1} \cdot \dots \dots \dots (3.30)$$

A continuación se establecen las funciones de residuos, su construcción varía muy poco de la forma en la cual se construye el modelo. La dependencia de las variables (3.25)-(3.30) en términos de los vectores $U_{m,i,j,k}$:

$$[\Delta A_o^m]_{i,j,k}^{n+1} = [\Delta A_o^m]_{i,j,k}^{n+1} (U_{m,i+1,j,k}, U_{m,i,j+1,k}, U_{m,i,j,k+1}, U_{m,i,j,k}, U_{m,i-1,j,k}, U_{m,i,j-1,k}, U_{m,i,j,k-1}), \dots \dots \dots (3.31)$$

$$\left[\Delta B_o^m \right]_{i,j,k}^{n+1} = \left[\Delta B_o^m \right]_{i,j,k}^{n+1} \left(U_{m,i,j,k} \right), \dots\dots\dots(3.32)$$

$$\left[\Delta C_o^m \right]_{i,j,k} = \left[\Delta C_o^m \right]_{i,j,k} \left(U_{m,i,j,k} \right). \dots\dots\dots(3.33)$$

Si $m = 1$,

$$\left[\Delta D_o^1 \right]_{i,j,k}^{n+1} = \left[\Delta D_o^1 \right]_{i,j,k}^{n+1} \left(U_{1,i,j,k}, U_{2,i,j,k} \right). \dots\dots\dots (3.34)$$

Si $1 < m < N$ con N el número total de sistemas,

$$\left[\Delta D_o^m \right]_{i,j,k}^{n+1} = \left[\Delta D_o^m \right]_{i,j,k}^{n+1} \left(U_{m-1,i,j,k}, U_{m,i,j,k}, U_{m+1,i,j,k} \right). \dots\dots\dots(3.35)$$

Si $m = N$,

$$\left[\Delta D_o^N \right]_{i,j,k}^{n+1} = \left[\Delta D_o^N \right]_{i,j,k}^{n+1} \left(U_{N-1,i,j,k}, U_{N,i,j,k} \right). \dots\dots\dots (3.36)$$

Para ejemplificar el proceso de construcción de las funciones de residuo se calculan dichas funciones para el modelo de la sección 3.4.

Para el medio uno,

$$R_{o,1,i,j,k}^{n+1} = \left[\Delta A_o^1 \right]_{i,j,k}^{n+1} + \left[\Delta B_o^1 \right]_{i,j,k}^{n+1} + \left[\Delta C_o^1 \right]_{i,j,k}^{n+1} + \left[\Delta D_o^1 \right]_{i,j,k}^{n+1}. \dots\dots\dots(3.37)$$

Para el medio dos,

$$R_{o,2,i,j,k}^{n+1} = \left[\Delta C_o^2 \right]_{i,j,k}^{n+1} + \left[\Delta D_o^2 \right]_{i,j,k}^{n+1}. \dots\dots\dots(3.38)$$

Y para el medio tres,

$$R_{o,3,i,j,k}^{n+1} = \left[\Delta C_o^3 \right]_{i,j,k}^{n+1} + \left[\Delta D_o^3 \right]_{i,j,k}^{n+1}. \dots\dots\dots(3.39)$$

Una vez expresadas las funciones de residuos, se establece la dependencia de las mismas en función de los vectores de incógnitas observando a su vez la dependencia de cada uno de los sumandos de las funciones de residuo con respecto a los vectores incógnitas:

Para el medio uno,

$$R_{o,1,i,j,k} = R_{o,1,i,j,k} \left(\mathbf{U}_{1,i-1,j,k}, \mathbf{U}_{1,i+1,j,k}, \mathbf{U}_{1,i,j-1,k}, \mathbf{U}_{1,i,j+1,k}, \mathbf{U}_{1,i,j,k-1}, \mathbf{U}_{1,i,j,k+1}, \mathbf{U}_{1,i,j,k}, \mathbf{U}_{2,i,j,k} \right). \quad \dots \quad (3.40)$$

Para el medio dos,

$$R_{o,2,i,j,k} = R_{o,2,i,j,k} \left(\mathbf{U}_{1,i,j,k}, \mathbf{U}_{2,i,j,k}, \mathbf{U}_{3,i,j,k} \right). \quad \dots \quad (3.41)$$

Y para el medio tres,

$$R_{o,3,i,j,k} = R_{o,3,i,j,k} \left(\mathbf{U}_{2,i,j,k}, \mathbf{U}_{3,i,j,k} \right). \quad \dots \quad (3.42)$$

El proceso iterativo se establece al expandir las funciones de residuo mediante una serie de Taylor truncada, alrededor del nivel de iteración ν , de la que sólo se conservan los términos de menor orden, esto es:

$$\sum_{\ell \in I} \left\{ \frac{\partial R_{o,1,i,j,k}^{\nu}}{\partial p_{o,1,\ell}} \delta p_{o,1,\ell}^{\nu+1} \right\} + \frac{\partial R_{o,1,i,j,k}^{\nu}}{\partial p_{o,2,i,j,k}} \delta p_{o,2,i,j,k}^{\nu+1} = -R_{o,1,i,j,k}^{\nu}, \quad \dots \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial R_{o,2,i,j,k}^{\nu}}{\partial p_{o,1,i,j,k}} \delta p_{o,1,i,j,k}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{o,2,i,j,k}^{\nu}}{\partial p_{o,2,i,j,k}} \delta p_{o,2,i,j,k}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{o,2,i,j,k}^{\nu}}{\partial p_{o,3,i,j,k}} \delta p_{o,3,i,j,k}^{\nu+1} = -R_{o,2,i,j,k}^{\nu}, \quad \dots \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial R_{o,3,i,j,k}^{\nu}}{\partial p_{o,2,i,j,k}} \delta p_{o,2,i,j,k}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{o,3,i,j,k}^{\nu}}{\partial p_{o,3,i,j,k}} \delta p_{o,3,i,j,k}^{\nu+1} = -R_{o,3,i,j,k}^{\nu}, \quad \dots \quad (3.45)$$

donde $I = \{(i-1, j, k), (i+1, j, k), (i, j-1, k), (i, j+1, k), (i, j, k-1), (i, j, k+1), (i, j, k)\}$.

Las ecuaciones (3.43)-(3.45) tienen por incógnitas los cambios iterativos de las presiones en cada una de las celdas y en cada uno de los medios; esto es: $(\delta p_o)_{1,i,j,k}^{\nu+1}$, $(\delta p_o)_{2,i,j,k}^{\nu+1}$ y $(\delta p_o)_{3,i,j,k}^{\nu+1}$ donde $i = 1,2,\dots,I$, $j = 1,2,\dots,J$, $k = 1,2,\dots,K$. Las definiciones de δp_o , son:

$$\delta p_{o,\beta,i,j,k}^{\nu+1} = p_{o,\beta,i,j,k}^{\nu+1} - p_{o,\beta,i,j,k}^{\nu}, \dots\dots\dots(3.46)$$

donde $\beta = 1, 2, 3$.

El sistema lineal de ecuaciones obtenido mediante la aplicación del método iterativo de Newton-Raphson en la iteración $\nu+1$, expresiones (3.43)-(3.45), se escribe en la forma compacta como sigue:

$$[\mathbf{J}]^{\nu+1} \delta \mathbf{U}^{\nu+1} = -\mathbf{R}^{\nu}. \dots\dots\dots(3.47)$$

3.9 VALIDACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

Para la validación del modelo numérico se diseñaron cuatro casos y en cada uno de ellos se presentan tres gráficas. Se enumeran los casos y sus gráficas.

Casos:

1. Yacimiento homogéneo y comparación con el simulador ECLIPSE.
2. Yacimiento naturalmente fracturado.
3. Yacimiento homogéneo con una falla conductiva.
4. Yacimiento naturalmente fracturado, con una falla conductiva.

Gráficas:

1. Gráfica semilogarítmica de la presión vs tiempo.
2. Gráfica de la presión vs tiempo.
3. Gráfica doble logarítmica de la función derivada vs tiempo.

Las propiedades del aceite que se suponen estos casos son las siguientes:

Tabla 1. Propiedades de la fase aceite

Presión (psi)	Factor de Volumen (RB/bbl)	Viscosidad (cp)	Densidad (lbm/ft ³)
14.65	1.062	1.040	46.244
264.69	1.150	0.975	43.544
514.59	1.207	0.910	42.287
1014.68	1.295	0.830	41.004
2014.72	2.000	0.695	38.995
2514.66	2.000	0.695	38.304
3014.75	2.000	0.695	37.777
4014.64	2.000	0.695	37.046

Para cada caso se supone un yacimiento con las características siguientes:

Tabla 2. Dimensiones del yacimiento.

Longitud	Valor (pies)
Dirección X	60000.0
Dirección Y	60000.0
Dirección Z	164

La compresibilidad de la formación es de $4 \times 10^{-5} \text{psi}^{-1}$ a una presión de referencia de 4351.1 psi.

Se emplea una malla uniforme ortogonal para cada caso. En los casos I y II la malla tiene 31x31x1 celdas, **Figura 48**.

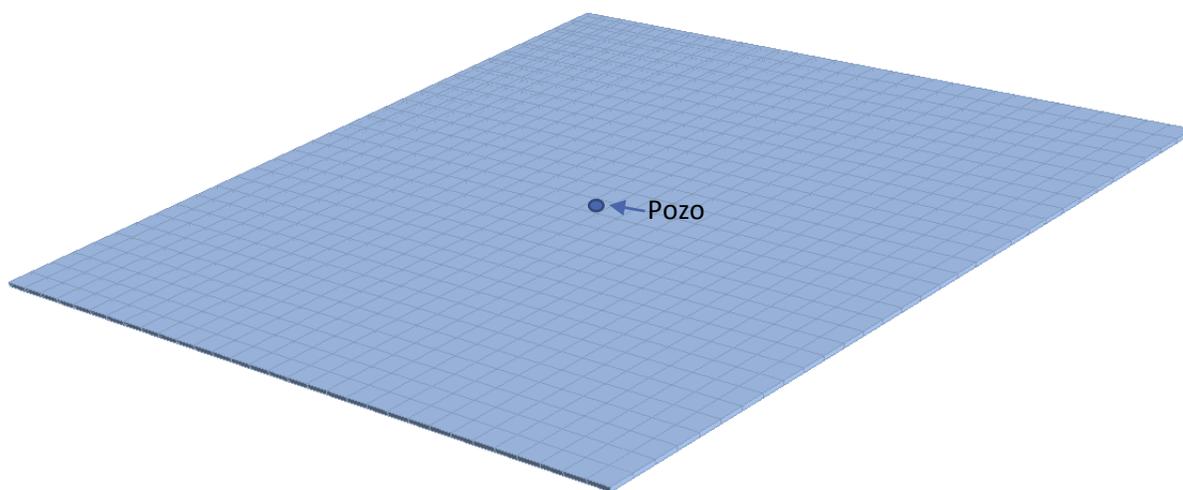


Figura 48. Malla cartesiana de 31*31*1 celdas.

El yacimiento contiene un pozo situado en el centro de la malla, con un gasto de 3000.8 BPD.

3.9.1 CASO I. Yacimiento homogéneo y su comparación con un simulador comercial.

En este caso se considera un yacimiento homogéneo isotrópico y ligeramente compresible (Tabla 1). La permeabilidad es de 1.0 Darcy. Se realizó una corrida de simulación con un modelo idéntico en el simulador ECLIPSE 100. En la **Figura 49 y Figura 50** se muestran los resultados de presión vs tiempo en la celda del pozo, obtenidos con el simulador desarrollado en este trabajo y los obtenidos con el simulador ECLIPSE 100. Para el cálculo de p_{wf} se utilizó el modelo de Peaceman. En ambas figuras las curvas se superponen, validando los resultados del simulador desarrollado en esta tesis. En la **Figura 51** se identifican los diferentes periodos de flujo presentes durante la simulación. Durante los primeros minutos de la simulación se presenta un flujo pseudoestacionario causado por el espesor pequeño del yacimiento. A continuación se presenta un periodo de transición antes de alcanzar un periodo de flujo radial, que dura aproximadamente 90 horas. Posteriormente, después de un periodo de transición breve se alcanza el flujo pseudoestacionario. Cada uno de los periodos de flujo coincide con lo esperado para este caso.

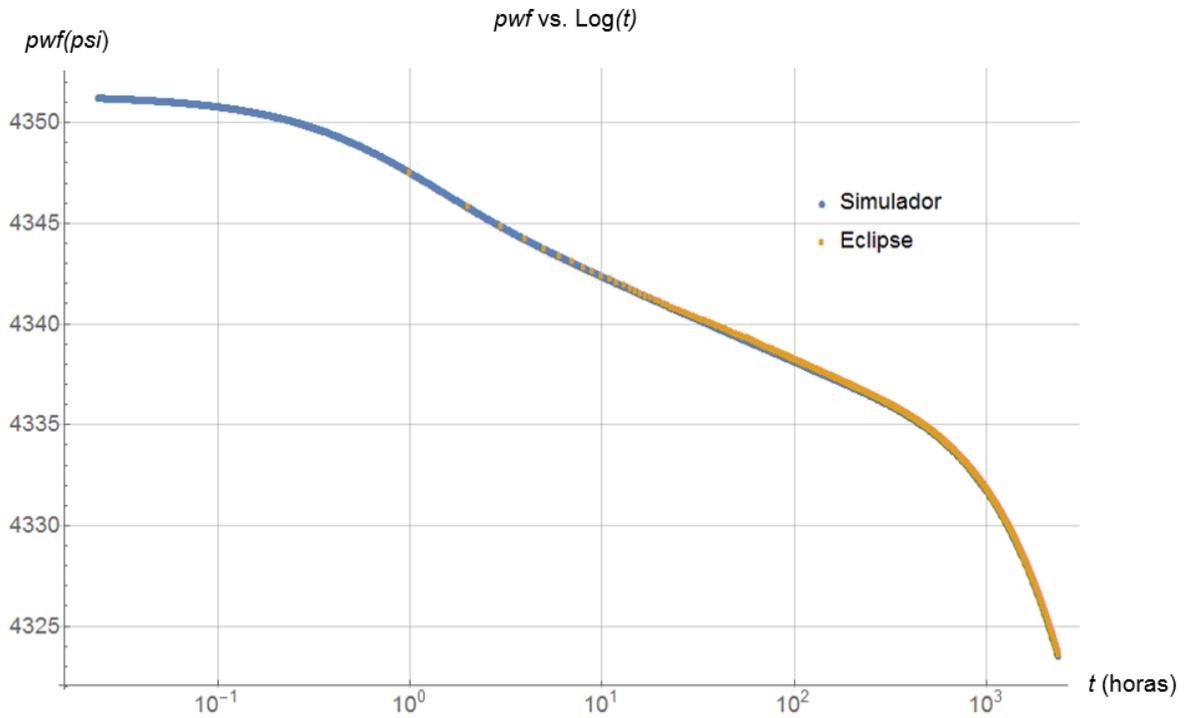


Figura 49. Gráfica semi-logarítmica de la presión de fondo fluyendo en función del tiempo, en un yacimiento homogéneo.

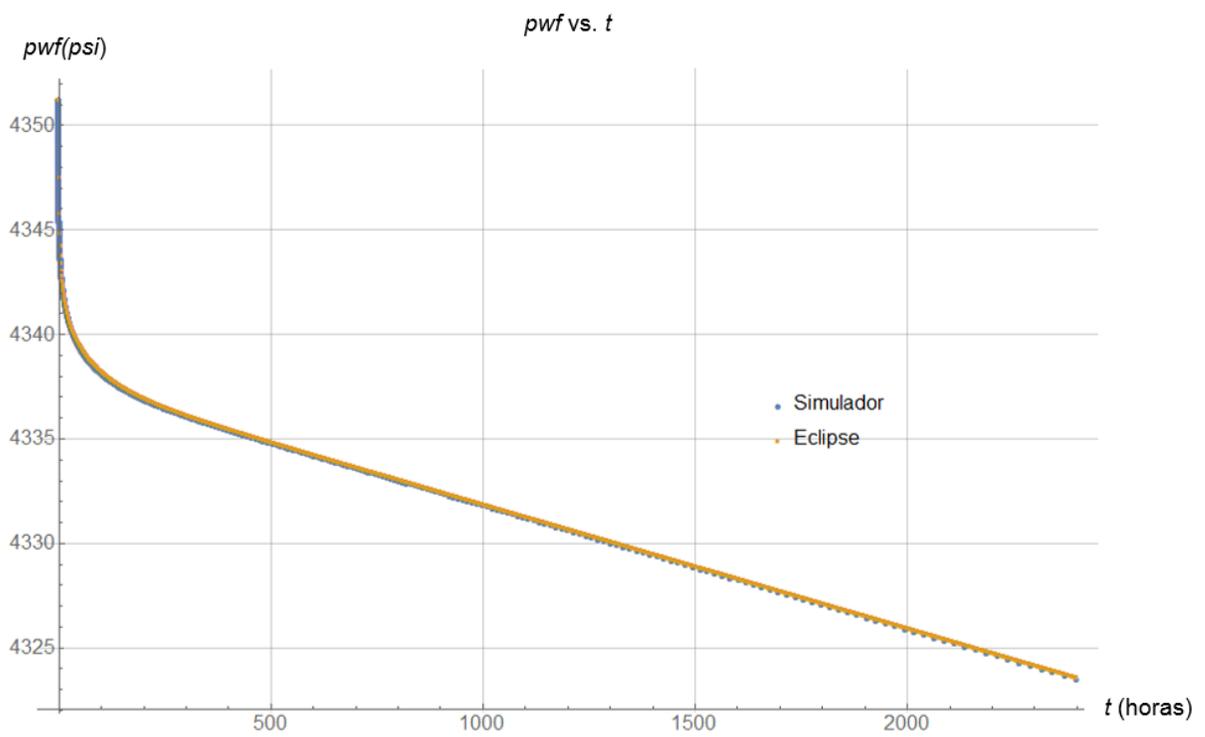


Figura 50. Gráfica de la presión de fondo fluyendo en función del tiempo, en un yacimiento homogéneo.

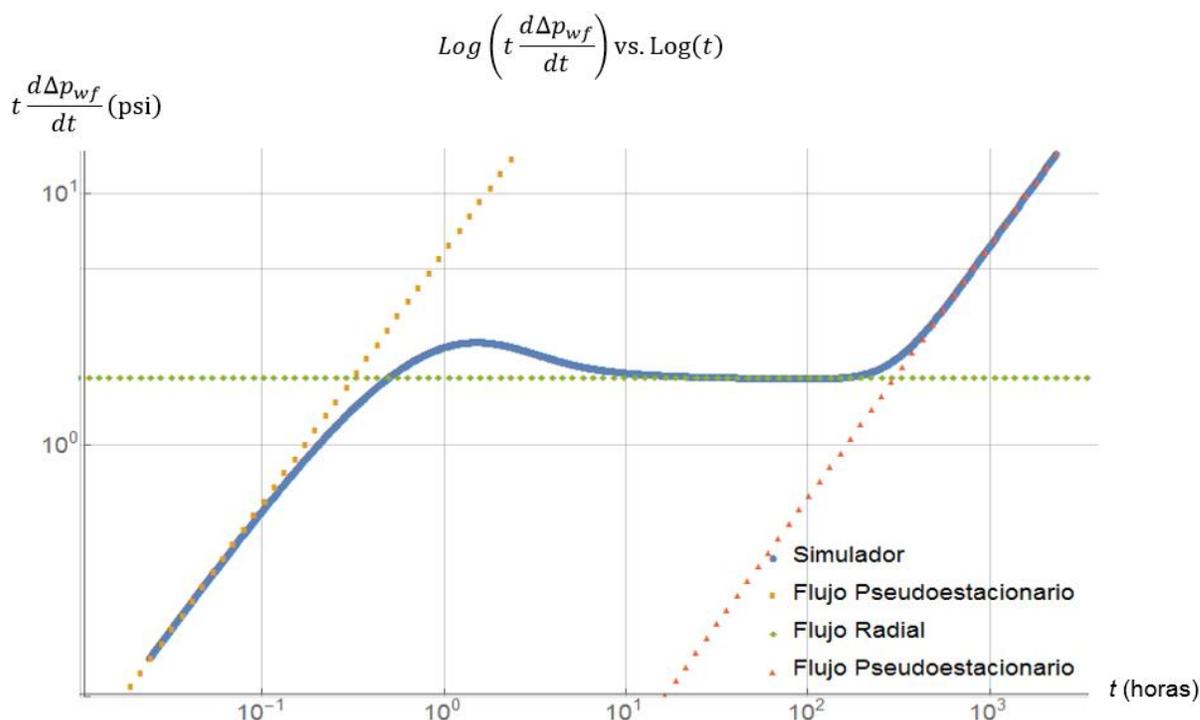


Figura 51. Gráfica doble-logarítmica de la función derivada en función del tiempo, en un yacimiento homogéneo.

3.9.2 CASO II. Yacimiento naturalmente fracturado.

En este caso se considera un yacimiento naturalmente fracturado, isotrópico y un fluido ligeramente compresible (Tabla1). La permeabilidad del medio fracturado es de 1.0 *Darcy*. La porosidad en matriz es de 0.1 y para la red de fracturas es de 0.01. En la **Figura 52** se muestran los resultados para el comportamiento de la presión vs tiempo en la celda del pozo, para diferentes valores de la permeabilidad de la matriz comparando con el caso homogéneo. En esta figura las curvas para los casos naturalmente fracturado, presentan el comportamiento esperado de doble pendiente, de acuerdo al modelo de Warren & Root [7]. En la **Figura 53** se identifican los diferentes periodos de flujo, durante los primeros minutos de la simulación se exhibe un flujo pseudoestacionario causado por el espesor pequeño del yacimiento. A continuación aparece un periodo de transición antes de alcanzar un periodo de flujo radial. Posteriormente, después de un breve periodo de transición se alcanza el flujo pseudoestacionario. Cada uno de los periodos de flujo coincide con lo esperado para este caso.

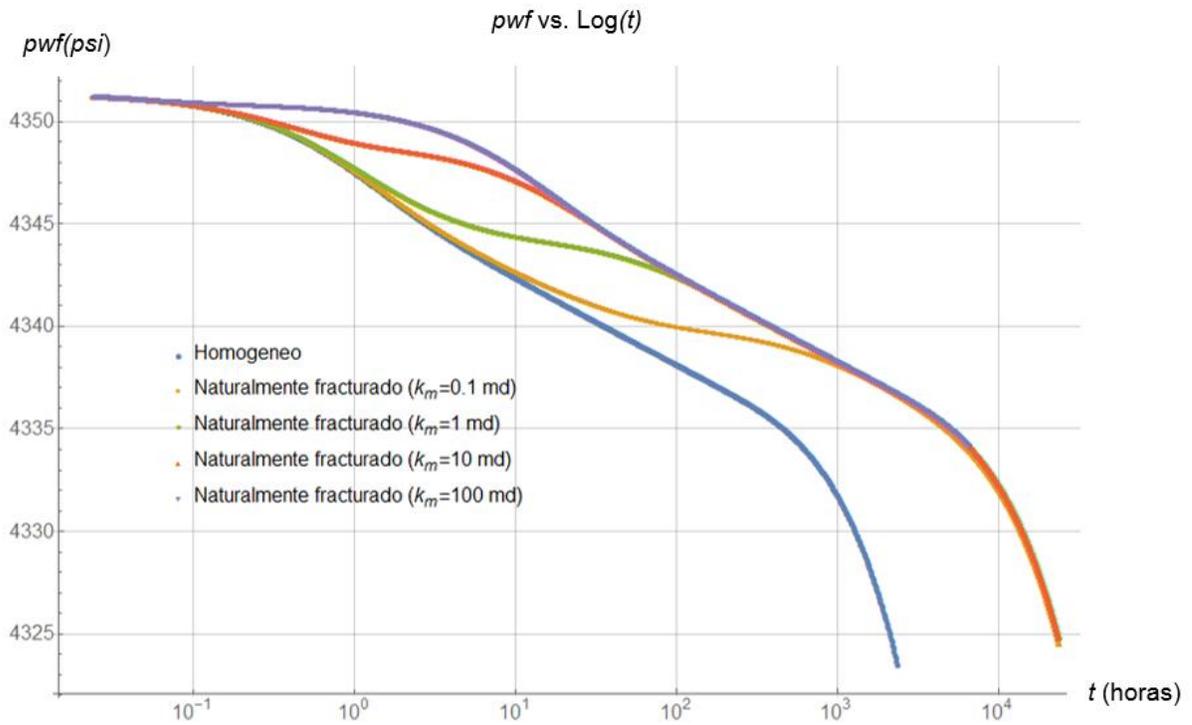


Figura 52. Gráfica semi-logarítmica de la presión de fondo flujeando en función del tiempo, en un yacimiento naturalmente fracturado.

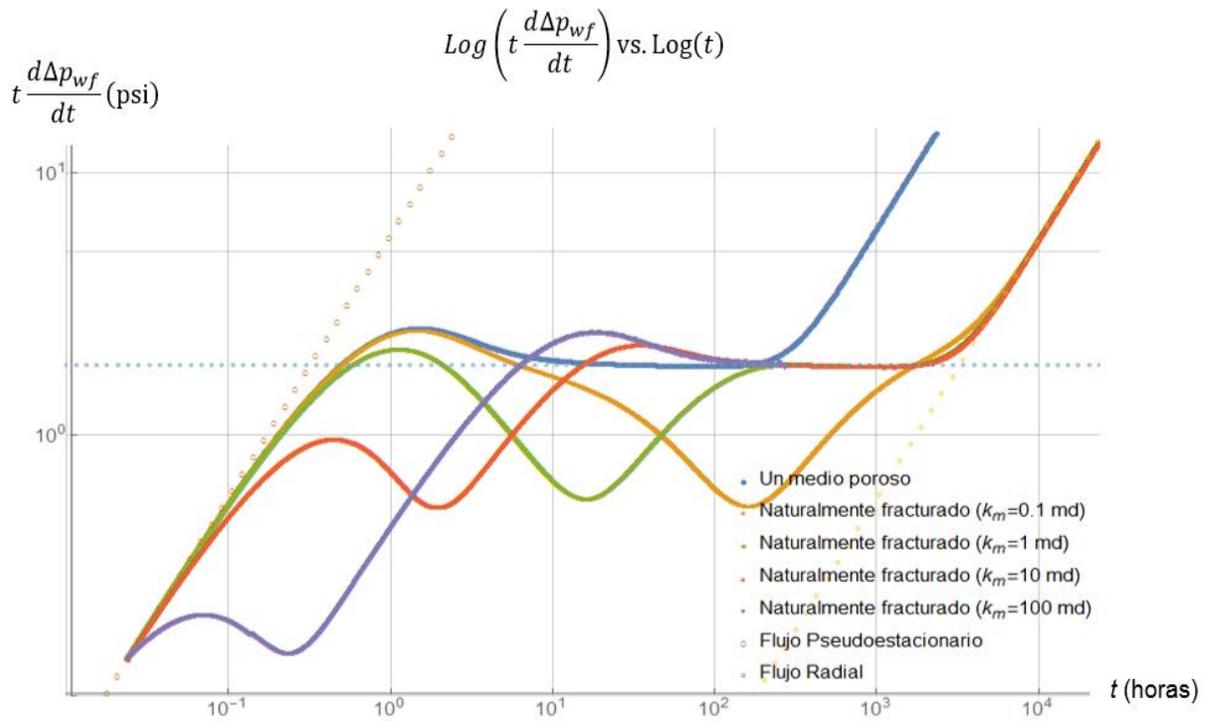


Figura 53. Gráfica doble-logarítmica de la función derivada en función del tiempo, en un yacimiento naturalmente fracturado.

3.9.3 CASO III. Yacimiento homogéneo con una falla conductiva.

En este caso se considera un yacimiento homogéneo isotrópico y un fluido ligeramente compresible (Tabla1) con la presencia de una falla conductiva. La permeabilidad es de 10 *milidarcys* en el yacimiento y de 1.0 *Darcy* en la falla. Se emplea una malla inicial de 31x31x1 *celdas*, a partir de la cual la línea de celdas central se subdivide en 25 *celdas* para representar una falla en las cercanías del pozo, **Figura 54**. En las **Figuras 55 y 56** se muestran los resultados para el comportamiento de la presión vs tiempo en la celda del pozo, obtenidos con el simulador desarrollado en esta tesis. En ambas figuras las curvas que se muestran varían en el valor de la conductividad de la falla. En la **Figura 57** se identifican los diferentes periodos de flujo, durante los primeros minutos de la simulación se exhibe un flujo pseudoestacionario causado por el espesor pequeño del yacimiento. A continuación aparece un periodo de transición, las curvas tienden a converger a una cuya pendiente es -1 en escala doble logarítmica. Durante el siguiente ciclo logarítmico (1000 y 10000 *hrs.*) se observa un periodo de transición seguido de un periodo corto con tendencia a un flujo bilineal. Posteriormente, después de un periodo de transición, se alcanza el flujo pseudoestacionario. Cada uno de los periodos de flujo coincide con lo esperado para este caso.

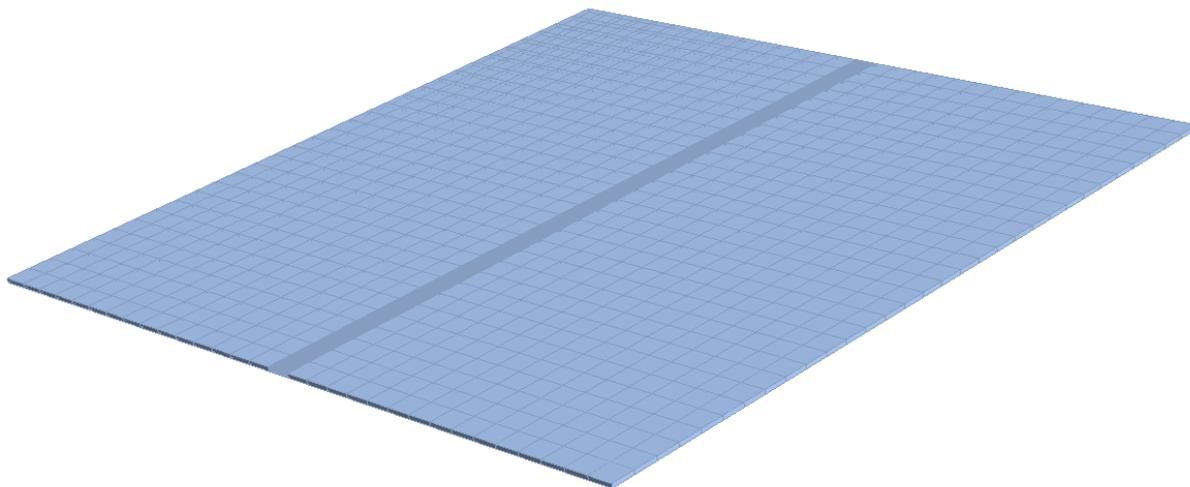


Figura 54. Malla cartesiana de 55*31*1 celdas.

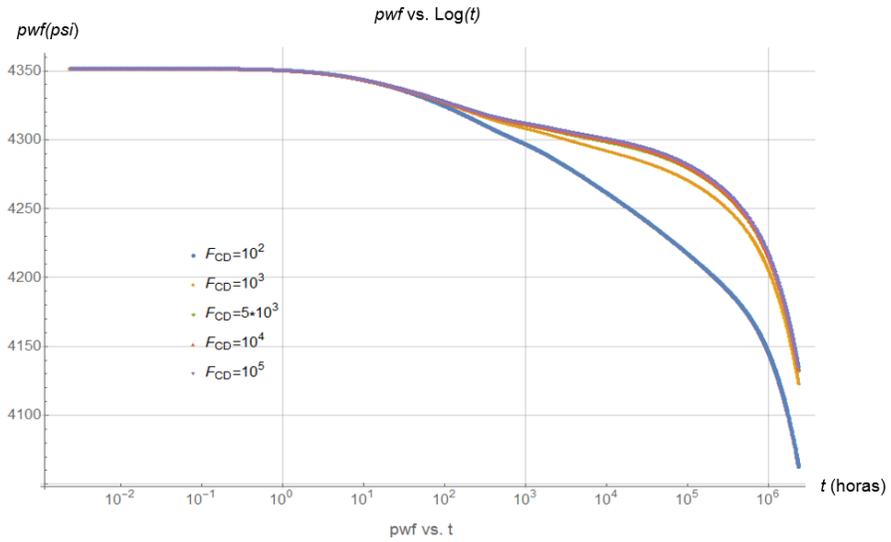


Figura 55. Gráfica semi-logarítmica de la presión de fondo fluendo en función del tiempo, en un yacimiento homogéneo con la presencia de una falla conductiva.

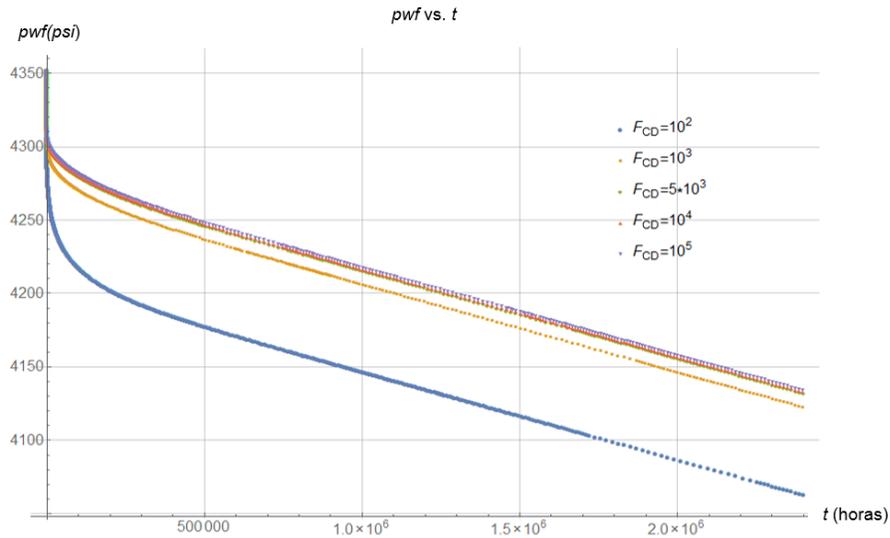


Figura 56. Gráfica de la presión de fondo fluendo en función del tiempo, en un yacimiento homogéneo con la presencia de una falla conductiva.

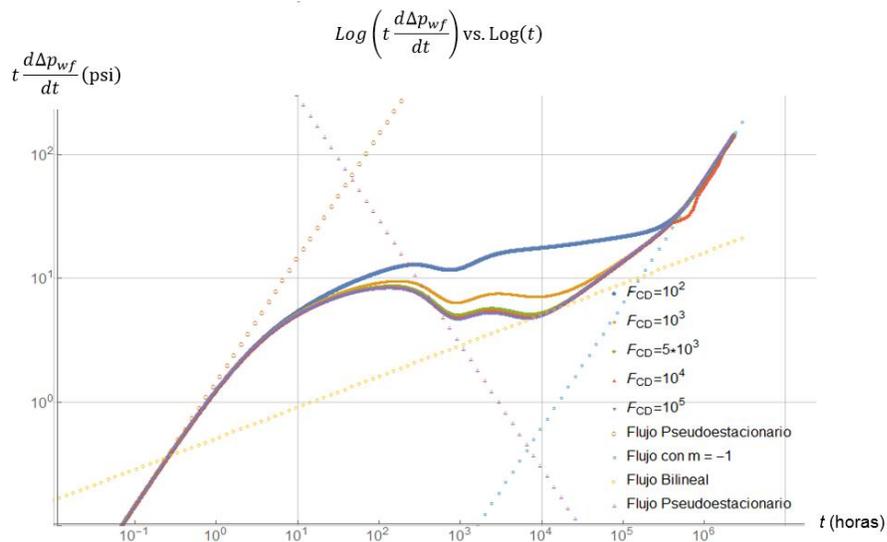


Figura 57. Gráfica doble-logarítmica de la función derivada en función del tiempo, en un yacimiento homogéneo con la presencia de una falla conductiva.

3.9.4 CASO IV. Yacimiento naturalmente fracturado con una falla conductiva.

En este caso se considera un yacimiento naturalmente fracturado isotrópico y un fluido ligeramente compresible (Tabla1) con la presencia de una falla conductiva. La permeabilidad es de 1 *Darcy* en el sistema de fracturas, y de 10 *Darcy* en la falla. Se emplea una malla inicial de 31x31x1 *celdas*, a partir de la cual la línea de celdas central se subdivide en 25 *celdas* para representar una falla en las cercanías del pozo, Figura 54. En la **Figura 58 y Figura 59** se muestran los resultados para el comportamiento de la presión vs tiempo en la celda del pozo, obtenidos con el simulador desarrollado en esta tesis. En ambas figuras las curvas que se muestran varían en el valor de la permeabilidad de la matriz. En la **Figura 60** se identifican los diferentes periodos de flujo, durante los primeros minutos de la simulación y hacia el final del tiempo de simulación se presenta un flujo pseudoestacionario. Debido a la interacción entre los diferentes sistemas no es posible identificar un patrón de flujo definido en periodo intermedio.

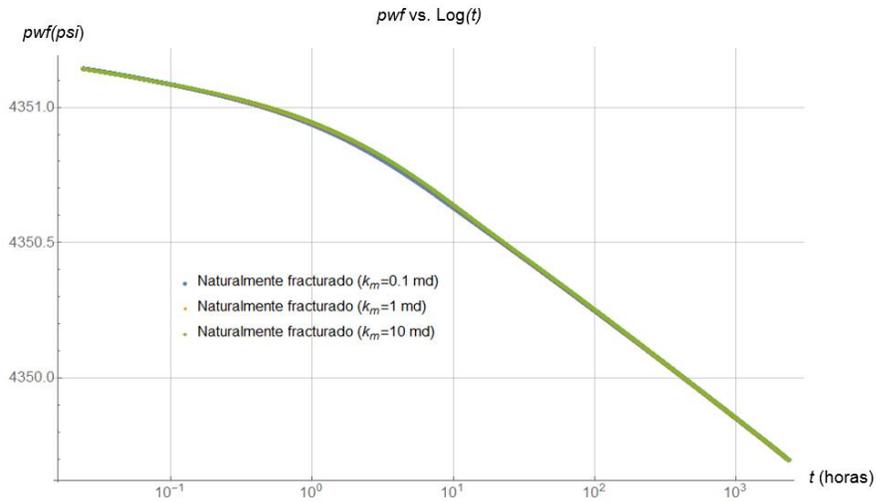


Figura 58. Gráfica semi-logarítmica de la presión de fondo fluyendo en función del tiempo, en un yacimiento naturalmente fracturado con la presencia de una falla conductiva.

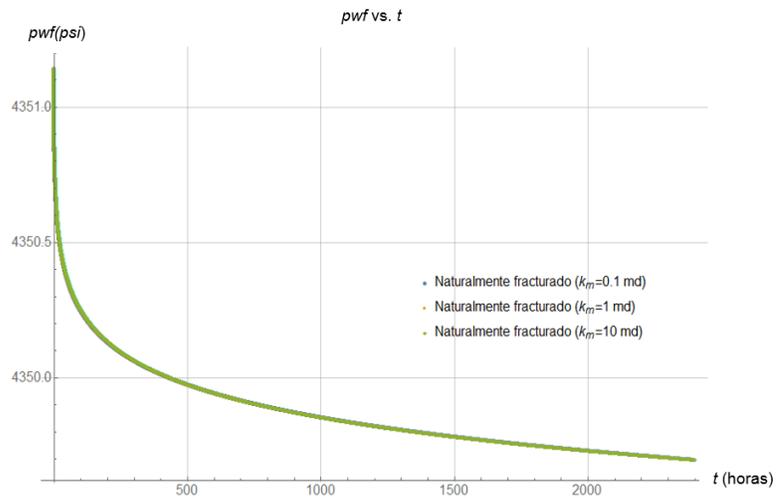


Figura 59. Gráfica de la presión de fondo fluyendo en función del tiempo, en un yacimiento homogéneo con la presencia de una falla conductiva.

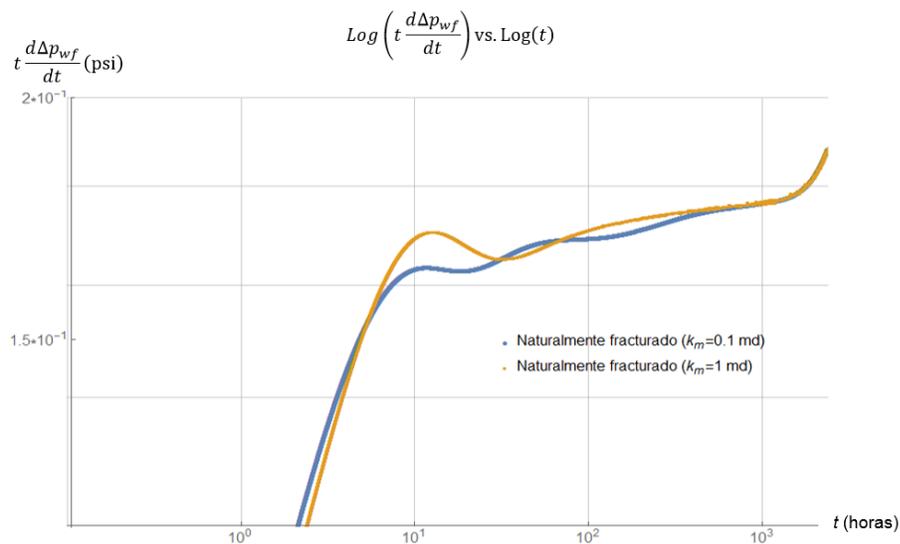


Figura 60. Gráfica doble-logarítmica de la función derivada en función del tiempo, en un yacimiento naturalmente fracturado con la presencia de una falla conductiva.

3.10 CASO DE CAMPO.

Se aplicó el modelo numérico desarrollado al caso de campo presentado en la sección 2.5. Para tal fin se generó una malla ortogonal de $31 \times 31 \times 5$ celdas. La línea 16 en la dirección de la coordenada x se subdivide en 25 celdas uniformes. El pozo se localiza en el centro de la malla y la falla conductiva en la línea 27 de la dirección de la coordenada x , **Figura 61**.

Para evaluar el tiempo de irrupción se realizó una simulación con una duración de 1000 días. Con las presiones calculadas en cada celda en cada paso de tiempo. Con la ley de Darcy se generó el campo de velocidades en cada celda en cada paso de tiempo. A partir de estos datos se calcularon diferentes trayectorias de flujo con una posición inicial en el contacto agua-aceite **Figura 62**.

La trayectoria de una partícula que tiene una ubicación inicial en la intersección entre el contacto agua –aceite y la falla hasta al pozo tarda un tiempo aproximado de 1000 días. Este tiempo de irrupción es ligeramente mayor al obtenido con el modelo analítico.

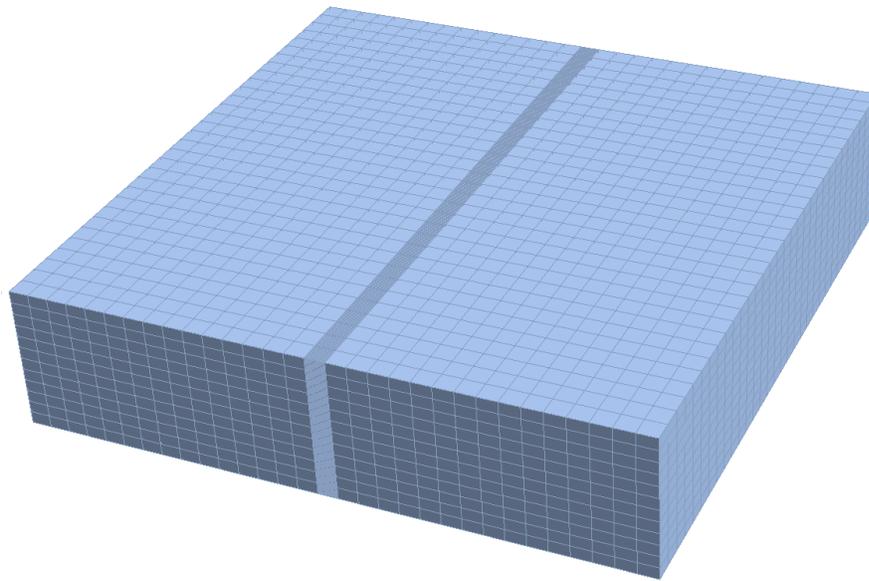


Figura 61. Malla cartesiana generada para evaluar el caso de campo (55x31x5 celdas).

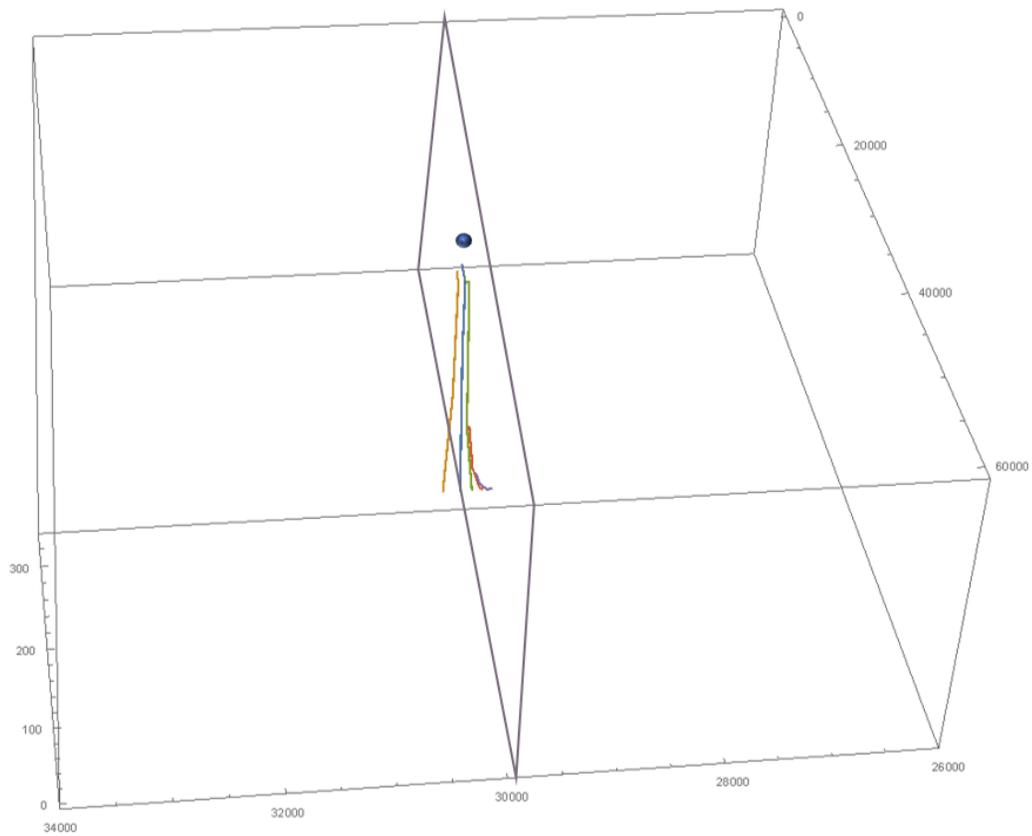


Figura 62. Trayectorias de flujo generadas para el caso de campo.

CONCLUSIONES

El objetivo de la tesis es la estimación del tiempo de irrupción del flujo de agua, proveniente de un acuífero profundo, hacia un pozo productor que produce en un yacimiento naturalmente fracturado, primero verticalmente a través de una falla conductiva hasta la altura media del intervalo disparado, y a continuación horizontalmente hasta el pozo. Para tal fin se desarrollaron dos modelos. El primer modelo es semi-analítico. El segundo, un modelo numérico que resuelve el modelo para el flujo monofásico, cuando se encuentra presente una falla conductiva en un yacimiento naturalmente fracturado.

Las conclusiones que se obtienen del análisis desarrollado son:

- Se desarrolló un modelo semi-analítico para la estimación del tiempo de irrupción del flujo de agua, proveniente de un acuífero profundo, hacia un pozo productor localizado en la vecindad de una falla conductiva, en un yacimiento naturalmente fracturado.
- La solución para la estimación del tiempo de irrupción se desarrolló en función de dos componentes de velocidad de flujo, la primera verticalmente a través de la falla conductiva y la segunda horizontalmente hasta el pozo productor.
- Se realizó un estudio de sensibilidad sobre los principales parámetros de la falla conductiva involucrados en este problema de flujo.
- De manera análoga, se realizó un estudio de sensibilidad sobre los principales parámetros que afectan el flujo horizontal desde la falla hasta el pozo.
- El tiempo adimensional que ocupa el agua en viajar desde la falla hasta el pozo, a una altura igual a la del pozo, es inversamente proporcional al gasto adimensional y directamente proporcional a la distancia adimensional del pozo a la falla.
- El efecto en el tiempo adimensional que ocupa el agua en viajar de la falla al pozo, en una altura igual a la del pozo, con respecto a los parámetros λ y ω pueden ser

despreciados. Sin embargo, el hecho de que la dependencia de estos parámetros puede ser despreciada no significa que las propiedades de un yacimiento naturalmente fracturado no afectan en el fenómeno, las propiedades del yacimiento naturalmente fracturado se ponen de manifiesto en el cálculo de las variables adimensionales.

- Para cada uno de los casos de sensibilidad se buscó ajustar una curva de aproximación empleando el método de mínimos cuadrados. En la mayoría de los casos que logró obtener una ajuste con un muy buen grado de aproximación.
- Se desarrolló un modelo numérico para flujo monofásico en un sistema cartesiano.
- Se validó el modelo numérico por medio de la comparación de los resultados en presión con una herramienta comercial.
- Se verificó el comportamiento de los patrones de flujo para diferentes casos (homogéneo, naturalmente fracturado). Con lo cual se validó el modelo numérico para los diferentes casos.
- Se calculó el tiempo de irrupción para el caso de campo. El cual se aproximó al tiempo obtenido con el modelo semi-analítico. Con lo cual se muestra la robustez de este último.
- El modelo semi-analítico es sencillo de aplicar y genera una muy buena estimación del tiempo de irrupción del agua para un pozo productor en la vecindad de una falla conductiva.

REFERENCIAS

- [1] Rodríguez Guzmán, A. 2008. Método para estimar el tiempo de invasión de agua en pozos cercanos a fallas conductivas, Tesis UNAM, Ciudad de México.
- [2] Stehfest, H. 1970. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms. *Commun, ACM*, pp. 13(1):47-49.
- [3] Ibelegu, C. 2010. Analysis of Cune Formation and Water Movement in Horizontal Wells, *European Journal of Scientific Research*, Vols. 39, nº 4, pp. 477-488.
- [4] Al-Afaleg, N. y Ershaghi, I. 1993. Coning Phenomena in Naturally Fractured Reservoirs, *Society of Petroleum Engineers, SPE Western Regional Meeting, 26-28 May, Anchorage, Alaska*. SPE 26083, 1993.
- [5] Muskat, M. y Wycoff, R. 1935. An Approximate Theory of Water Coning In Oil Production, *Trans. AIME*, vol. 114, pp. 144-161.
- [6] Van Golf-Racht, T. y Sonier, F. 1994. Water-Coning in a Fractured Reservoir. *Society of Petroleum Engineers, Annual Technical Conference and Exhibition, SPE 28572*, pp. 53-65, 25-28, New Orleans, Louisiana.
- [7] Warren, J. y Root, P. J. 1963. The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. *SPE*, pp. 245-255.
- [8] Ozkaya, S. y Minton, K. 2005. Flow Potential of Fracture Corridors and Large Conductive-Fractures in a Clastic Field, Southern Basin-Oman. *Society of Petroleum Engineers*, p. SPE 93030, 14th SPE Middle East Oil & Gas Show, 12-15 March.
- [9] Cinco-Ley H. y Samaniego-V, F. 1981. Transient Pressure Analysis for Fractured Wells. *Journal of Petroleum Technology, SPE 7490*, vol. 33, nº 09, pp. 1749-1766.
- [10] Chung, C. A. 2004. *Simulation Modeling Handbook, A Practical Approach*.
- [11] Fanchi, J. R. 2006. *Applied Reservoir Simulation*.
- [12] Cortes Rubio, E. F. 2008. Simulación de Yacimientos Naturalmente Fracturados con Triple Porosidad. Tesis UNAM, México.
- [13] Aziz, K. y Settari, A. 1979. *Petroleum Reservoir Simulation*, Essex, England: Applied science publishers Ltd.
- [14] Koederitz, L. F. 2004. *Lecture Notes on Applied Reservoir Simulation*.

[15] Chen, Z. 2007. Reservoir Simulation, Mathematical Technique in Oil Recovery.

[16] Chen, Z. , Huan, G. y Ma, Y. 2006. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media.

APÉNDICE A.

Evaluación del Tiempo en que Viaja el Agua de la Falla al Pozo (Yacimiento Naturalmente Fracturado con Geometría Radial).

La ecuación que gobierna el flujo en un yacimiento infinito de doble porosidad y una permeabilidad considerando un modelo de flujo matriz-fractura pseudoestacionario (Warren & Root [7]) y una geometría radial está dado por las ecuaciones (A.1) y (A.2).

Flujo en las fracturas:

$$\frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} - \lambda (p_{Dm} - p_{Df}). \quad \text{..... (A.1)}$$

Flujo de la matriz hacia las fracturas:

$$(1 - \omega) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} + \lambda (p_{Dm} - p_{Df}) = 0. \quad \text{..... (A.2)}$$

Las condiciones iniciales y de frontera son las siguientes:

Condición inicial:

$$p_{Dm}(r_D, 0) = p_{Df}(r_D, 0) = 0. \quad \text{..... (A.3)}$$

Condiciones de frontera.

Interna,

$$\left(\frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1; \quad \text{..... (A.4)}$$

Externa,

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Df}(r_D, t_D) = 0, \dots\dots\dots (A.5)$$

donde

$$\omega = \frac{(\phi c_t)_f}{(\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m}; \dots\dots\dots (A.6)$$

$$\lambda = \alpha \frac{k_m}{k_f} r_w^2; \dots\dots\dots (A.7)$$

Presión adimensional en las fracturas,

$$p_{Df} = \frac{2\pi k_f h}{q\mu B} (p_i - p_f); \dots\dots\dots (A.8)$$

Presión adimensional en la matriz,

$$p_{Dm} = \frac{2\pi k_f h}{q\mu B} (p_i - p_m); \dots\dots\dots (A.9)$$

Radio adimensional,

$$r_D = \frac{r}{r_w}; \dots\dots\dots (A.10)$$

Tiempo adimensional,

$$t_D = \frac{k_f}{((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m) \mu r_w^2} t; \dots\dots\dots (A.11)$$

Se transforman las ecuaciones (A.1)-(A.5) al espacio de Laplace,

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} = \omega s \bar{p}_{Df} - \lambda (\bar{p}_{Dm} - \bar{p}_{Df}); \quad \dots\dots\dots (A.12)$$

$$(1 - \omega) s \bar{p}_{Dm} + \lambda (\bar{p}_{Dm} - \bar{p}_{Df}) = 0; \quad \dots\dots\dots (A.13)$$

$$\left(\frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} \right)_{r_D=1} = -\frac{1}{s}; \quad \dots\dots\dots (A.14)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{Df}(r_D, s) = 0. \quad \dots\dots\dots (A.15)$$

Se reordenan los términos en las ecuaciones (A.12) y (A.13),

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} = (\omega s + \lambda) \bar{p}_{Df} - \lambda \bar{p}_{Dm}; \quad \dots\dots\dots (A.16)$$

$$-\lambda \bar{p}_{Df} + ((1 - \omega) s + \lambda) \bar{p}_{Dm} = 0. \quad \dots\dots\dots (A.17)$$

Se despeja el término \bar{p}_{Dm} de la ecuación (A.17),

$$\bar{p}_{Dm} = \frac{\lambda}{(1 - \omega) s + \lambda} \bar{p}_{Df}. \quad \dots\dots\dots (A.18)$$

Se sustituye la ecuación (A.18) en la ecuación (A.16),

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} = (\omega s + \lambda) \bar{p}_{Df} - \left(\frac{\lambda^2}{(1 - \omega) s + \lambda} \right) \bar{p}_{Df}. \quad \dots\dots\dots (A.19)$$

Se agrupan los términos en la ecuación (A.19),

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} = \left(\omega s + \lambda - \frac{\lambda^2}{(1 - \omega) s + \lambda} \right) \bar{p}_{Df}. \quad \dots\dots\dots (A.20)$$

Se simplifica la ecuación (A.20),

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \bar{p}_{Df}}{dr_D} = sm(s) \bar{p}_{Df}, \dots\dots\dots (A.21)$$

donde

$$m(s) = \frac{\omega(1-\omega)s + \lambda}{(1-\omega)s + \lambda}. \dots\dots\dots (A.22)$$

La ecuación (A.21) tiene por solución general,

$$\bar{p}_{Df} = C_0 I_0(\sqrt{sm(s)} r_D) + C_1 K_0(\sqrt{sm(s)} r_D). \dots\dots\dots (A.23)$$

Se aplica la condición de frontera especificada en la ecuación (A.15) en la ecuación (A.23),

$$\bar{p}_{Df} = C_1 K_0(\sqrt{sm(s)} r_D). \dots\dots\dots (A.24)$$

Se sustituye la ecuación (A.14) en la ecuación (A.24),

$$C_1 = \frac{1}{s^{3/2} \sqrt{m(s)} K_1(\sqrt{sm(s)})}. \dots\dots\dots (A.25)$$

Se sustituye la ecuación (A.25) en la ecuación (A.24),

$$\bar{p}_{Df} = \frac{K_0(\sqrt{sm(s)} r_D)}{s^{3/2} \sqrt{m(s)} K_1(\sqrt{sm(s)})}. \dots\dots\dots (A.26)$$

La distribución de presión en el espacio real se expresa por:

$$p_{Df}(r_D, t_D) = L^{-1} \{ \bar{p}_{Df}(r_D, s) \}. \dots\dots\dots (A.27)$$

Para modelar la falla conductiva se considera un yacimiento con una frontera a presión constante, el esquema se muestra en la **Figura A- 1**. Esquema del método de imágenes para la solución del flujo de la falla al pozo. La frontera se encuentra en la posición de la falla en una posición equidistante tanto del pozo productor como del pozo imagen inyector.

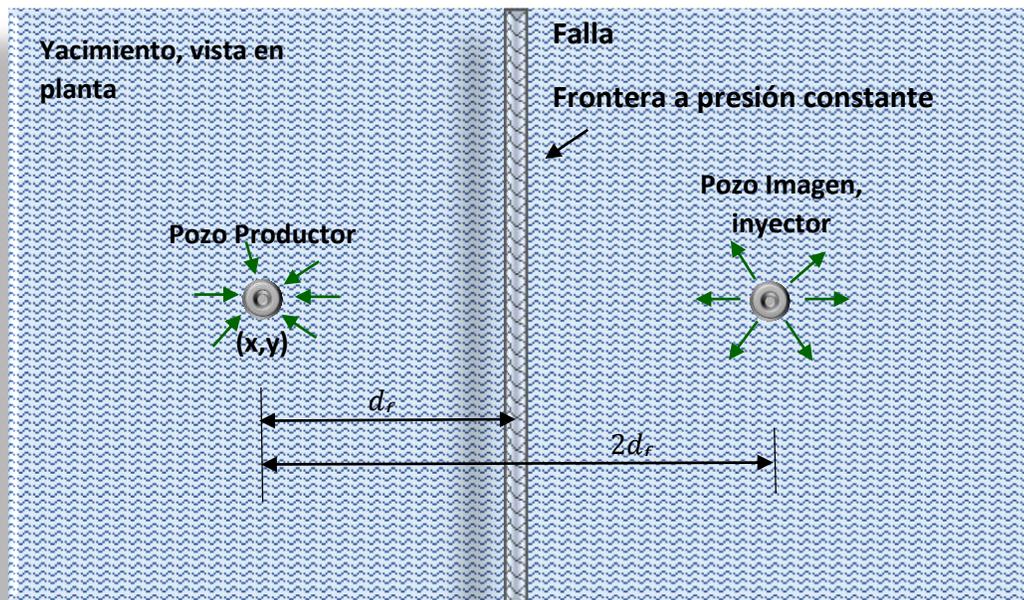


Figura A- 1. Esquema del método de imágenes para la solución del flujo de la falla al pozo.

La ecuación de la caída de presión en una posición adimensional r_D a un tiempo adimensional t_D es la suma de la caída de presión generada por el pozo productor en r_{D1} y del pozo inyector en r_{D2} ,

$$p_{Df}(r_D, t_D) = p_{Df}(r_{D1}, t_D) - p_{Df}(r_{D2}, t_D). \dots\dots\dots (A.28)$$

Se considera la distribución de presiones en el sistema de coordenadas rectangulares y sean las variables adimensionales siguientes,

$$x_D = \frac{x}{d_f}; \dots\dots\dots (A.29)$$

$$y_D = \frac{y}{d_f}; \dots\dots\dots (A.30)$$

$$d_D = \frac{d_f}{r_w}. \dots\dots\dots (A.31)$$

Se coloca el sistema de coordenadas rectangulares en el centro del pozo,

$$r_1^2 = x^2 + y^2. \dots\dots\dots (A.32)$$

Se reescribe la ecuación (A.32) empleando variables adimensionales,

$$r_{D1}^2 = (d_D x_D)^2 + (d_D y_D)^2. \dots\dots\dots (A.33)$$

Similarmente, para el pozo imagen,

$$r_2^2 = (2d_f - x)^2 + y^2; \dots\dots\dots (A.34)$$

$$r_{D2}^2 = d_D^2 (2 - x_D)^2 + d_D^2 y_D^2. \dots\dots\dots (A.35)$$

Se sustituyen las ecuaciones (A.33) y (A.35) en la ecuación (A.28)

$$p_{Df}(x_D, y_D, t_D) = p_{Df}(\sqrt{d_D^2(x_D^2 + y_D^2)}, t_D) - p_{Df}(\sqrt{d_D^2((2 - x_D)^2 + y_D^2)}, t_D); \dots\dots\dots (A.36)$$

o bien, en el espacio de Laplace,

$$\bar{p}_{Df}(x_D, y_D, s) = \bar{p}_{Df}(\sqrt{d_D^2(x_D^2 + y_D^2)}, s) - \bar{p}_{Df}(\sqrt{d_D^2((2 - x_D)^2 + y_D^2)}, s). \dots\dots\dots (A.37)$$

Se sustituye la ecuación (A.26) en la ecuación (A.37),

$$\bar{p}_D(x_D, y_D, s) = \frac{K_0 \left(\sqrt{d_D^2 (x_D^2 + y_D^2)} \sqrt{sm(s)} \right)}{s^{3/2} \sqrt{m(s)} K_1 \left(\sqrt{sm(s)} \right)} - \frac{K_0 \left(\sqrt{d_D^2 \left((2-x_D)^2 + y_D^2 \right)} \sqrt{sm(s)} \right)}{s^{3/2} \sqrt{m(s)} K_1 \left(\sqrt{sm(s)} \right)}. \quad \text{..... (A.38)}$$

Se obtiene la derivada de la presión $\bar{p}_D(x_D, y_D, s)$ con respecto a la distancia y_D y se evalúa en $y_D = 0$, en el espacio de Laplace

$$\left. \frac{\partial \bar{p}_D(x_D, y_D, s)}{\partial x_D} \right|_{y_D=0} = \left. \frac{\partial}{\partial x_D} \left(\bar{p}_{Df}(d_D^2(x_D^2 + y_D^2), s) - \bar{p}_{Df}(d_D^2((2-x_D)^2 + y_D^2), s) \right) \right|_{y_D=0}. \quad \text{..... (A.39)}$$

Se substituye la ecuación (A.39) en la ecuación (A.38),

$$\left. \frac{\partial \bar{p}_{Df}(x_D, y_D, s)}{\partial x_D} \right|_{y_D=0} = -d_D \frac{K_1(d_D x_D \sqrt{sm(s)}) + K_1(d_D (2-x_D) \sqrt{sm(s)})}{s K_1(\sqrt{sm(s)})}. \quad \text{..... (A.40)}$$

La Ley de Darcy se expresa en forma adimensional en la manera siguiente:

$$v_D = \frac{dx_D}{dt_D} = \frac{1}{\pi} \frac{q_D}{d_D^2} \left. \frac{\partial p_{Df}(x_D, y_D, t_D)}{\partial x_D} \right|_{y_D=0}, \quad \text{..... (A.41)}$$

donde,

$$q_D = \frac{qB\mu \left((\phi_{c_i})_f + (\phi_{c_i})_m \right)}{2k_f h \phi_e}, \quad \text{..... (A.42)}$$

$$\phi_e = \frac{\phi_f}{\phi_f + \phi_m}. \quad \text{..... (A.43)}$$

Se substituye la ecuación (A.40) en la ecuación (A.42),

$$\frac{dx_D}{dt_D} = -\frac{1}{\pi} \frac{q_D}{d_D} \left(\mathfrak{S}^{-1} \left\{ \frac{K_1(d_D x_D \sqrt{sm(s)})}{sK_1(\sqrt{sm(s)})} \right\} + \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \frac{K_1(d_D (2-x_D) \sqrt{sm(s)})}{sK_1(\sqrt{sm(s)})} \right\} \right) \dots\dots\dots (A.44)$$

donde \mathfrak{S}^{-1} es el operador de la Transformada Inversa de Laplace.

APÉNDICE B.

Evaluación del Tiempo en que Viaja el Agua de la Falla al Pozo (Yacimiento Naturalmente Fracturado con Geometría Esférica).

De manera análoga al desarrollo del Apéndice A se deduce la ecuación para una geometría esférica. El modelo que describe el flujo en un yacimiento infinito de doble porosidad y una permeabilidad considerando un flujo matriz-fractura pseudoestacionario (Warren y Root) [7], para una geometría esférica, está dado por las ecuaciones (B.1) y (B.2).

Flujo en las fracturas:

$$\frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{2}{r_D} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} - \lambda (p_{Dm} - p_{Df}). \quad \dots\dots\dots (B.1)$$

Flujo de la matriz hacia las fracturas:

$$(1 - \omega) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} + \lambda (p_{Dm} - p_{Df}) = 0. \quad \dots\dots\dots (B.2)$$

Las condiciones iniciales y de frontera son las siguientes:

Condición inicial:

$$p_{Dm}(r_D, 0) = p_{Df}(r_D, 0) = 0. \quad \dots\dots\dots (B.3)$$

Condiciones de frontera.

Interna,

$$\left(\frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1; \dots\dots\dots (B.4)$$

Externa,

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Df}(r_D, t_D) = 0, \dots\dots\dots (B.5)$$

donde

$$\omega = \frac{(\phi c_t)_f}{(\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m}; \dots\dots\dots (B.6)$$

$$\lambda = \alpha \frac{k_m}{k_f} r_w^2. \dots\dots\dots (B.7)$$

Presión adimensional en las fracturas,

$$p_{Df} = \frac{2\pi k_f r_w}{q\mu B} (p_i - p_f). \dots\dots\dots (B.8)$$

Presión adimensional en la matriz,

$$p_{Dm} = \frac{2\pi k_f r_w}{q\mu B} (p_i - p_m). \dots\dots\dots (B.9)$$

Radio adimensional,

$$r_D = \frac{r}{r_w}. \dots\dots\dots (B.10)$$

Tiempo adimensional,

$$t_D = \frac{k_f}{\left((\phi c_i)_f + (\phi c_i)_m \right) \mu r_w^2} t. \quad \dots\dots\dots (B.11)$$

Transformando las ecuaciones (B.1)-(B.5) al espacio de Laplace,

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dr_D^2} + \frac{2}{r_D} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} = \omega s \bar{p}_{Df} - \lambda (\bar{p}_{Dm} - \bar{p}_{Df}); \quad \dots\dots\dots (B.12)$$

$$(1 - \omega) s \bar{p}_{Dm} + \lambda (\bar{p}_{Dm} - \bar{p}_{Df}) = 0; \quad \dots\dots\dots (B.13)$$

$$\left(\frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} \right)_{r_D=1} = -\frac{1}{s}; \quad \dots\dots\dots (B.14)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{Df}(r_D, s) = 0. \quad \dots\dots\dots (B.15)$$

Se reordenan los términos en las ecuaciones (B.12) y (B.13),

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dr_D^2} + \frac{2}{r_D} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} = (\omega s + \lambda) \bar{p}_{Df} - \lambda \bar{p}_{Dm}; \quad \dots\dots\dots (B.16)$$

$$-\lambda \bar{p}_{Df} + ((1 - \omega) s + \lambda) \bar{p}_{Dm} = 0. \quad \dots\dots\dots (B.17)$$

Despejando \bar{p}_{Dm} de la ecuación (B.17),

$$\bar{p}_{Dm} = \frac{\lambda}{(1 - \omega) s + \lambda} \bar{p}_{Df}. \quad \dots\dots\dots (B.18)$$

Se sustituye la ecuación (B.18) en la ecuación (B.16),

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dr_D^2} + \frac{2}{r_D} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} = (\omega s + \lambda) \bar{p}_{Df} - \left(\frac{\lambda^2}{(1 - \omega) s + \lambda} \right) \bar{p}_{Df}. \quad \dots\dots\dots (B.19)$$

Se agrupan los términos en la ecuación (B.19),

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dr_D^2} + \frac{2}{r_D} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} = \left(\omega s + \lambda - \frac{\lambda^2}{(1-\omega)s + \lambda} \right) \bar{p}_{Df}. \quad \dots\dots\dots (B.20)$$

Se simplifica la ecuación anterior

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dr_D^2} + \frac{2}{r_D} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} = sm(s) \bar{p}_{Df}, \quad \dots\dots\dots (B.21)$$

donde

$$m(s) = \frac{\omega(1-\omega)s + \lambda}{(1-\omega)s + \lambda}. \quad \dots\dots\dots (B.22)$$

La ecuación (B.21) tiene por solución general,

$$\bar{p}_{Df} = C_0 \frac{Exp(\sqrt{sm(s)r_D})}{r_D} + C_1 \frac{Exp(-\sqrt{sm(s)r_D})}{r_D}. \quad \dots\dots\dots (B.23)$$

Sustituyendo la ecuación (B.15) en la ecuación (B.23),

$$\bar{p}_{Df} = C_1 \frac{Exp(-\sqrt{sm(s)r_D})}{r_D}. \quad \dots\dots\dots (B.24)$$

Considerando la ecuación (B.14) en la ecuación (B.24),

$$C_1 = \frac{Exp(\sqrt{sm(s)})}{s(\sqrt{sm(s)} + 1)}. \quad \dots\dots\dots (B.25)$$

Substituyendo la ecuación (B.25) en (B.24),

$$\bar{p}_{Df} = \frac{\text{Exp}\left(\sqrt{sm(s)}\right) \text{Exp}\left(-\sqrt{sm(s)}r_D\right)}{s\left(\sqrt{sm(s)}+1\right) r_D} \dots\dots\dots (B.26)$$

La distribución de presión en el espacio real puede expresarse:

$$p_{Df}(r_D, t_D) = L^{-1}\left\{\bar{p}_{Df}(r_D, s)\right\} \dots\dots\dots (B.27)$$

Para modelar la falla conductiva se considera un yacimiento con una frontera a presión constante, el esquema se muestra en la **Figura A- 1**. Esquema del método de imágenes para la solución del flujo de la falla al pozo. La frontera se encuentra en la posición de la falla en una posición equidistante tanto del pozo productor como del pozo imagen inyector.

Así la ecuación de la caída de presión en una posición adimensional r_D a un tiempo adimensional t_D es la suma de la caída de presión generada por el pozo productor en r_{D1} y del pozo inyector en r_{D2} ,

$$p_{Df} = p_{Df}(r_{D1}, t_D) - p_{Df}(r_{D2}, t_D) \dots\dots\dots (B.28)$$

Se considera la distribución de presiones en el sistema de coordenadas rectangulares y sean las variables adimensionales siguientes,

$$x_D = \frac{x}{d_f}; \dots\dots\dots (B.29)$$

$$y_D = \frac{y}{d_f}; \dots\dots\dots (B.30)$$

$$d_D = \frac{d_f}{r_w} \dots\dots\dots (B.31)$$

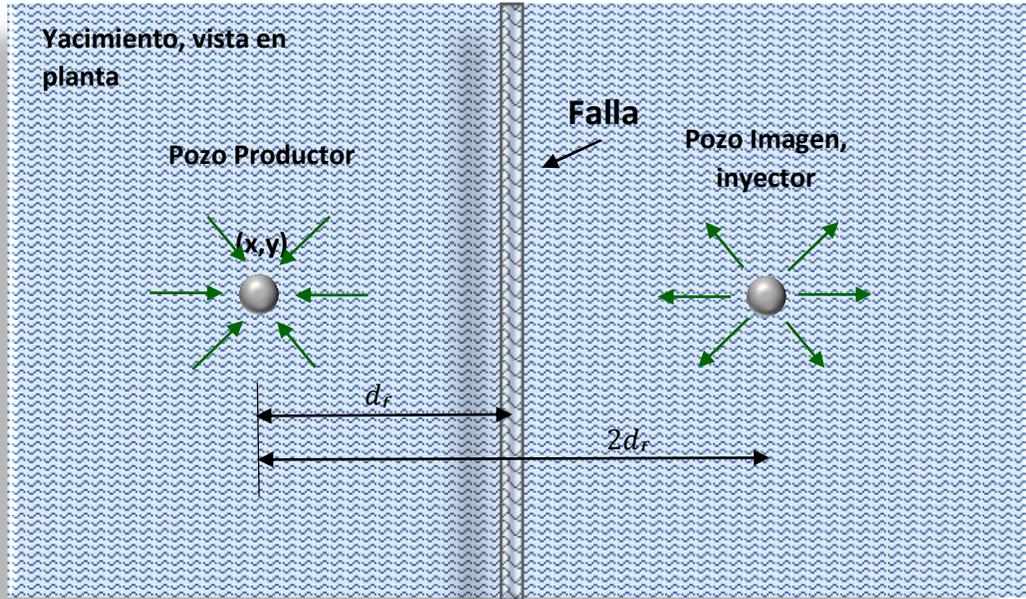


Figura B-1. Flujo esférico en un yacimiento de doble porosidad.

Colocando nuestro sistema de coordenadas rectangulares en el centro del pozo,

$$r_1^2 = x^2 + y^2. \dots\dots\dots (B.32)$$

Expresando la ecuación (B.32) por medio de variables adimensionales,

$$r_{D1}^2 = (d_D x_D)^2 + (d_D y_D)^2. \dots\dots\dots (B.33)$$

Similarmente, para el pozo imagen,

$$r_2^2 = (2d_f - x)^2 + y^2; \dots\dots\dots (B.34)$$

$$r_{D2}^2 = d_D^2 (2 - x_D)^2 + d_D^2 y_D^2; \dots\dots\dots (B.35)$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.33) y (B.35) en la ecuación (B.28),

$$p_{Df}(x_D, y_D, t_D) = p_{Df}\left(\sqrt{d_D^2(x_D^2 + y_D^2)}, t_D\right) - p_{Df}\left(\sqrt{d_D^2((2-x_D)^2 + y_D^2)}, t_D\right); \dots\dots\dots (B.36)$$

o bien, en el espacio de Laplace,

$$\bar{p}_{Df}(x_D, y_D, s) = \bar{p}_{Df}\left(\sqrt{d_D^2(x_D^2 + y_D^2)}, s\right) - \bar{p}_{Df}\left(\sqrt{d_D^2((2-x_D)^2 + y_D^2)}, s\right). \dots\dots\dots (B.37)$$

Sustituyendo la ecuación (B.26) en la ecuación (B.37),

$$\begin{aligned} \bar{p}_{Df}(x_D, y_D, s) = & \frac{\text{Exp}\left(\sqrt{sm(s)}\right) \text{Exp}\left(-\sqrt{sm(s)}\sqrt{d_D^2(x_D^2 + y_D^2)}\right)}{s\left(\sqrt{sm(s)} + 1\right) \sqrt{d_D^2(x_D^2 + y_D^2)}} - \\ & \frac{\text{Exp}\left(\sqrt{sm(s)}\right) \text{Exp}\left(-\sqrt{sm(s)}\sqrt{d_D^2((2-x_D)^2 + y_D^2)}\right)}{s\left(\sqrt{sm(s)} + 1\right) \sqrt{d_D^2((2-x_D)^2 + y_D^2)}}. \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (B.38)$$

Obteniendo la derivada de la presión $\bar{p}_{Df}(x_D, y_D, s)$ con respecto a la distancia y_D y evaluando en $y_D = 0$, en el espacio de Laplace,

$$\left. \frac{\partial \bar{p}_{Df}(x_D, y_D, s)}{\partial x_D} \right|_{y_D=0} = \frac{\partial}{\partial x_D} \left(\bar{p}_{Df}\left(\sqrt{d_D^2(x_D^2 + y_D^2)}, s\right) - \bar{p}_{Df}\left(\sqrt{d_D^2((2-x_D)^2 + y_D^2)}, s\right) \right) \Big|_{y_D=0} \quad (B.39)$$

Substituyendo en la ecuación anterior la ecuación (B.38):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{p}_{Df}(x_D, y_D, s)}{\partial x_D} \right|_{y_D=0} = & -C_1 \left(\frac{1 + d_D x_D \sqrt{sm(s)}}{d_D x_D^2} \right) \text{Exp}\left(-d_D x_D \sqrt{sm(s)}\right) - \\ & C_1 \left(\frac{1 + d_D (2-x_D) \sqrt{sm(s)}}{d_D (2-x_D)^2} \right) \text{Exp}\left(-d_D (2-x_D) \sqrt{sm(s)}\right), \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (B.40)$$

donde C_1 está expresado por la ecuación (B.25):

$$C_1 = \frac{\text{Exp}\left(\sqrt{sm(s)}\right)}{s\left(\sqrt{sm(s)}+1\right)} \dots\dots\dots (B.41)$$

Por otro lado, la Ley de Darcy puede expresarse en forma adimensional en la forma siguiente:

$$v_D = \frac{dx_D}{dt_D} = \frac{1}{\pi} \frac{q_{DspH}}{d_D^2} \frac{\partial p_{Df}(x_D, y_D, t_D)}{\partial x_D} \Big|_{y_D=0} \dots\dots\dots (B.42)$$

donde,

$$q_{DspH} = \frac{qB\mu\left((\phi c_i)_f + (\phi c_i)_m\right)}{2k_f r_w \phi_e} \dots\dots\dots (B.43)$$

$$\phi_e = \frac{\phi_f}{\phi_f + \phi_m} \dots\dots\dots (B.44)$$

Se substituye la ecuación (B.40) en la ecuación (B.41),

$$\frac{dx_D}{dt_D} = -\frac{1}{\pi} \frac{q_{DspH} C_1}{d_D^2} \left(\mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{1+d_D x_D \sqrt{sm(s)}}{d_D x_D^2} \right) \text{Exp}\left(-d_D x_D \sqrt{sm(s)}\right) \right\} \right) - \frac{1}{\pi} \frac{q_{DspH} C_1}{d_D^2} \left(\mathfrak{S}^{-1} \left\{ \left(\frac{1+d_D (2-x_D) \sqrt{sm(s)}}{d_D (2-x_D)^2} \right) \text{Exp}\left(-d_D (2-x_D) \sqrt{sm(s)}\right) \right\} \right) \dots\dots\dots (B.45)$$

donde \mathfrak{S}^{-1} es el operador de la Transformada Inversa de Laplace.

APÉNDICE C.

Flujo Bilineal en un Yacimiento Naturalmente Fracturado.

Cinco-Ley & Samaniego-V. [9] desarrollaron el modelo de flujo hacia un pozo productor interceptado por una fractura vertical. El modelo desarrollado en esta tesis está basado en la teoría de flujo bilineal, que considera un flujo lineal en la formación alrededor del pozo que va hacia la fractura y posteriormente un flujo lineal dentro de la fractura hacia el pozo, **Figura C1 (a)**. Este mismo modelo se utiliza en esta tesis para modelar, en un yacimiento naturalmente fracturado, el flujo lineal de agua que va desde el acuífero circundante hasta la falla a la profundidad del acuífero, y un flujo lineal dentro de la falla hasta una posición “frente” al pozo pero a la profundidad del acuífero, **Figura C1 (b)**.

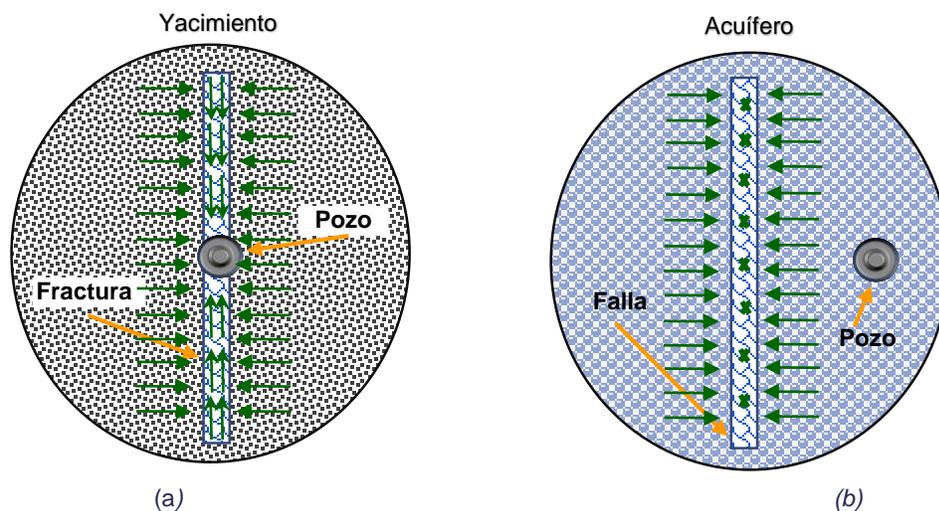


Figura C 1. Esquema de flujo bilineal; (a) hacia un pozo desde el yacimiento atravesando una fractura, (b) desde el acuífero hacia un punto específico dentro de una falla.

El modelo que describe el comportamiento de presión en una falla en un yacimiento naturalmente fracturado con flujo bilineal, es dado por las ecuaciones (C.1) a (C.9):

Flujo en la falla,

$$\frac{\partial^2 p_{Dfc}}{\partial y_D^2} + 2 \left(\frac{d_c k_f}{b_f k_{fc}} \right) \frac{\partial p_{Df}}{\partial x_D} \Big|_{x_D=0} = \frac{k_f \phi_{fc} c_{fc}}{k_{fc} ((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m)} \frac{\partial p_{Dfc}}{\partial t_D}, \dots\dots\dots (C.1)$$

las condiciones iniciales y de frontera son las siguientes:

Condición inicial:

$$p_{Dfc} = 0 \quad t_D = 0, \quad \forall y_D \geq 0. \dots\dots\dots (C.2)$$

Condiciones de frontera,

$$\left(\frac{\partial p_{Dfc}}{\partial y_D} \right)_{y_D=0} = -\pi \frac{k_f d_c}{b_f k_{fc}} \quad \forall t_D > 0. \dots\dots\dots (C.3)$$

$$\lim_{y_D \rightarrow \infty} p_{Dfc} = 0 \quad \forall t_D > 0. \dots\dots\dots (C.4)$$

El flujo transiente en la formación es descrito por,

$$\frac{\partial^2 p_{Df}}{\partial x_D^2} = \omega \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} - \lambda (p_{Dm} - p_{Df}), \dots\dots\dots (C.5)$$

$$(1 - \omega) \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} + \lambda (p_{Dm} - p_{Df}) = 0, \dots\dots\dots (C.6)$$

y las condiciones iniciales y frontera siguientes:

Condición inicial:

$$p_{Dm}(r_D, 0) = p_{Df}(r_D, 0) = 0, \dots\dots\dots (C.7)$$

Condiciones de Frontera:

$$p_{Df} \Big|_{x_D=0} = p_{Dfc}, \dots\dots\dots (C.8)$$

$$\lim_{x_D \rightarrow \infty} p_{Df}(x_D, t_D) = 0, \dots\dots\dots (C.9)$$

donde las variables adimensionales están definidas por:

para la presión en la falla,

$$p_{Dfc} = \frac{2\pi k_f h}{q\mu B} (p_i - p_{fc}), \dots\dots\dots (C.10)$$

para la presión en las fracturas,

$$p_{Df} = \frac{2\pi k_f h}{q\mu B} (p_i - p_f), \dots\dots\dots (C.11)$$

para la presión en la matriz,

$$p_{Dm} = \frac{2\pi k_f h}{q\mu B} (p_i - p_m), \dots\dots\dots (C.12)$$

el tiempo adimensional,

$$t_D = \frac{k_f}{((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m) \mu d_c^2} t; \dots\dots\dots (C.13)$$

además,

$$x_D = \frac{x}{d_c}, \dots\dots\dots (C.14)$$

$$y_D = \frac{y}{d_c}, \dots\dots\dots (C.15)$$

$$\omega = \frac{(\phi c_t)_f}{(\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m}, \dots\dots\dots (C.16)$$

$$\lambda = \alpha \frac{k_m}{k_f} r_w^2. \dots\dots\dots (C.17)$$

Se transforma el anterior modelo, ecuaciones de (C.1) a (C.4), al Espacio de Laplace con respecto a t_D ,

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Dfc}}{dy_D^2} + 2 \left(\frac{d_c k_f}{b_f k_{fc}} \right) \frac{d\bar{p}_{Df}}{dx_D} \Big|_{x_D=0} = \frac{k_f \phi_{fc} c_{if}}{k_{fc} ((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m)} s \bar{p}_{Dfc}, \dots\dots\dots (C.18)$$

$$\left(\frac{d\bar{p}_{Df}}{dy_D} \right)_{y_D=0} = -\frac{\pi k_f d_c}{s b_f k_{fc}}, \dots\dots\dots (C.19)$$

$$\lim_{y_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{Dfc} = 0. \dots\dots\dots (C.20)$$

Se transforma al espacio de Laplace las ecuaciones (C.5) a (C.9),

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dx_D^2} = \omega s \bar{p}_{Df} - \lambda (\bar{p}_{Dm} - \bar{p}_{Df}), \dots\dots\dots (C.21)$$

$$(1 - \omega) s \bar{p}_{Dm} + \lambda (\bar{p}_{Dm} - \bar{p}_{Df}) = 0, \dots\dots\dots (C.22)$$

$$\bar{p}_{Df} \Big|_{x_D=0} = \bar{p}_{Dfc}, \dots\dots\dots (C.23)$$

$$\lim_{x_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{Df}(x_D, s) = 0. \dots\dots\dots (C.24)$$

Se despeja \bar{p}_{Dm} de la ecuación (C.22),

$$\bar{p}_{Dm} = \frac{\lambda}{(1-\omega)s + \lambda} \bar{p}_{Df}. \quad \dots\dots\dots (C.25)$$

Se sustituye la ecuación (C.25) en la ecuación (C.21),

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dx_D^2} = \left(\frac{\omega(1-\omega)s + \lambda}{(1-\omega)s + \lambda} \right) s \bar{p}_{Df}, \quad \dots\dots\dots (C.26)$$

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Df}}{dx_D^2} = m(s) s \bar{p}_{Df}, \quad \dots\dots\dots (C.27)$$

donde

$$m(s) = \frac{\omega(1-\omega)s + \lambda}{(1-\omega)s + \lambda}. \quad \dots\dots\dots (C.28)$$

La Transformada Laplace de la ecuación (C.27) con respecto a x_D ,

$$r^2 \bar{\bar{p}}_{Df} - r \bar{p}_{Df} \Big|_{x_D=0} - \frac{d\bar{p}_{Df}}{dx_D} \Big|_{x_D=0} = m(s) s \bar{\bar{p}}_{Df}. \quad \dots\dots\dots (C.29)$$

Se despeja $\bar{\bar{p}}_{Df}$ de la ecuación (C.29) y se sustituye la ecuación (C.23),

$$\bar{\bar{p}}_{Df} = \frac{r \bar{p}_{Df} + \frac{d\bar{p}_{Df}}{dx_D} \Big|_{x_D=0}}{r^2 - m(s)s}, \quad \dots\dots\dots (C.30)$$

Se obtiene la Transformada Inversa de Laplace de

$$\bar{\bar{p}}_{Df} = \frac{r}{r^2 - m(s)s} \bar{p}_{Dfc} + \frac{1}{r^2 - m(s)s} \left. \frac{d\bar{p}_{Df}}{dx_D} \right|_{x_D=0} \cdot \dots\dots\dots (C.31)$$

Se obtiene,

$$\bar{p}_{Df} = \bar{p}_{Dfc} \text{Cosh}\left(\sqrt{m(s)s}x_D\right) + \left. \frac{d\bar{p}_{Df}}{dx_D} \right|_{x_D=0} \frac{1}{\sqrt{m(s)s}} \text{Sinh}\left(\sqrt{m(s)s}x_D\right). \dots\dots\dots (C.32)$$

Se factoriza la ecuación (C.32),

$$\bar{p}_{Df} = \left(\bar{p}_{Dfc} + \left. \frac{d\bar{p}_{Df}}{dx_D} \right|_{x_D=0} \frac{1}{\sqrt{m(s)s}} \text{Tanh}\left(\sqrt{m(s)s}x_D\right) \right) \text{Cosh}\left(\sqrt{m(s)s}x_D\right). \dots\dots\dots (C.33)$$

Se sustituye la ecuación (C.33) en la ecuación (C.24) y las identidades siguientes:

$$\begin{aligned} \lim_{x_D \rightarrow \infty} \text{Tanh}(x_D) &= 1, \\ \lim_{x_D \rightarrow \infty} \text{Cosh}(x_D) &= \infty, \dots\dots\dots (C.34) \end{aligned}$$

Se tiene

$$0 = \left(\bar{p}_{Dfc} + \left. \frac{d\bar{p}_{Df}}{dx_D} \right|_{x_D=0} \frac{1}{\sqrt{m(s)s}} \right) \left(\lim_{x_D \rightarrow \infty} \text{Cosh}\left(\sqrt{m(s)s}x_D\right) \right). \dots\dots\dots (C.35)$$

La única manera en que la ecuación (C.35) se puede cumplir es que

$$\bar{p}_{Dfc} + \left. \frac{d\bar{p}_{Df}}{dx_D} \right|_{x_D=0} \frac{1}{\sqrt{m(s)s}} = 0. \dots\dots\dots (C.36)$$

De la ecuación (C.36) se tiene:

$$\left. \frac{d\bar{p}_{Df}}{dx_D} \right|_{x_D=0} = -\bar{p}_{Dfc} \sqrt{m(s)} s. \dots\dots\dots (C.37)$$

Se sustituye la ecuación (C.37) en la ecuación (C.18) y se reordenan términos,

$$\frac{d^2 \bar{p}_{Dfc}}{dy_D^2} - \left(2 \left(\frac{d_c k_f}{b_f k_{fc}} \right) \sqrt{m(s)} s + \frac{k_f \phi_{fc} c_{tf}}{k_{fc} ((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m)} s \right) \bar{p}_{Df} = 0. \dots\dots\dots (C.38)$$

Sea

$$\beta = \left(2 \left(\frac{d_c k_f}{b_f k_{fc}} \right) \sqrt{m(s)} s + \frac{k_f \phi_{fc} c_{tf}}{k_{fc} ((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m)} s \right). \dots\dots\dots (C.39)$$

Como β es una constante la solución general a la ecuación (C.38) es

$$\bar{p}_{Dfc} = C_1 \exp(\sqrt{\beta} y_D) + C_2 \exp(-\sqrt{\beta} y_D). \dots\dots\dots (C.40)$$

Se sustituyen las ecuaciones (C.19) y (C.20) a la ecuación (C.40)

$$\bar{p}_{Dfc} = \left(\frac{\pi}{s\sqrt{\beta}} \frac{k_f d_c}{b_f k_{fc}} \right) \exp(-\sqrt{\beta} y_D). \dots\dots\dots (C.41)$$

Se definen las variables adimensionales siguientes,

$$F_{CD} = \frac{b_f k_{fc}}{k_f d_c}, \dots\dots\dots (C.42)$$

$$G_{CD} = \frac{k_f \phi_{fc} c_{tf}}{k_{fc} ((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m)}. \dots\dots\dots (C.43)$$

Se sustituyen las variables (C.42) a (C.43) en la ecuación (C.41),

$$\bar{p}_{Dfc} = \left(\frac{\pi}{sF_{CD} \sqrt{\frac{2}{F_{CD}} \sqrt{m(s)s + G_{CD}s}}} \right) \exp\left(-y_D \sqrt{\frac{2}{F_{CD}} \sqrt{m(s)s + G_{CD}s}}\right). \dots\dots\dots (C.44)$$

El cálculo del tiempo en que tarda en subir el agua desde el contacto agua-aceite a una altura igual a la del pozo se describe a continuación,

Derivando la ecuación (C.44) con respecto a y_D ,

$$\frac{d\bar{p}_{Dfc}}{dy_D} = - \left(\frac{\pi}{sF_{CD}} \right) \exp\left(-y_D \sqrt{\frac{2}{F_{CD}} \sqrt{m(s)s + G_{CD}s}}\right). \dots\dots\dots (C.45)$$

La ley de Darcy es descrita por,

$$v = \frac{dy}{dt} = - \frac{k_{fc}}{\mu\phi_{fc}} \frac{\partial p_{fc}}{\partial y}. \dots\dots\dots (C.46)$$

Se reescribe la ecuación (C.46) en términos de las variables adimensionales,

$$\frac{dy_D}{dt_D} = \frac{k_{fc}}{k_f} \frac{qB\mu \left((\phi c)_f + (\phi c)_m \right)}{2\pi k_f h\phi_{fc}} \frac{\partial p_{Dfc}}{\partial y_D}. \dots\dots\dots (C.47)$$

A partir de la ecuación (C.47) se tiene,

$$\frac{dp_{Dfc}}{dy_D} = - \frac{\pi}{F_{CD}} \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \exp\left(-y_D \sqrt{\frac{2}{F_{CD}} \sqrt{m(s)s + G_{CD}s}}\right) \right\}. \dots\dots\dots (C.48)$$

Se sustituye la ecuación (C.48) y la condición inicial en la ecuación (C.47),

$$\frac{dy_D}{dt_D} = -\frac{q_D}{b_{fD}} \mathfrak{S}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \exp \left(-y_D \sqrt{\frac{2}{F_{CD}} \sqrt{m(s)s + G_{CD}s}} \right) \right\}, \dots\dots\dots (C.49)$$

$$y_D(0) = 1, \dots\dots\dots (C.50)$$

donde,

$$q_D = \frac{qB\mu \left((\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m \right)}{2k_f h \phi_{fc}}, \dots\dots\dots (C.51)$$

$$b_{fD} = \frac{b_f}{d_c}. \dots\dots\dots (C.52)$$