



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

TRANSMISIÓN A BASE DE LEVAS PARA  
ROBOT DE CUARTOS LIMPIOS

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERIA**

CAMPO DE CONOCIMIENTO – INGENIERÍA MECÁNICA

P R E S E N T A :

**JUAN CARLOS BARBOSA TORRES**

TUTOR:

**M. I. LEOPOLDO ADRIÁN GONZÁLEZ GONZÁLEZ**



CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO D. F.

**2006**

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Ferrer Argote Luis Alejandro  
Secretario: Dr. Borja Ramírez Vicente  
Vocal: M.I. González González Leopoldo Adrián  
1<sup>er.</sup> Suplente: M.I. Cuenca Jiménez Francisco  
2<sup>do.</sup> Suplente: M.I. Flores Díaz Ociel

Facultad de Ingeniería, UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

M.I. González González Leopoldo Adrián

---

**FIRMA**

# AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a todas las personas de la Universidad que me ayudaron no sólo a dar forma a este trabajo, sino por todo el conocimiento que pude absorber de ellos. A mi director de tesis M.I. Leopoldo González por todo su apoyo y su gran amistad. A M.I. Francisco Cuenca quien me acompañó en este intrincado mundo de los mecanismos.

Mi agradecimiento y reconocimiento de mi esposa Elsbeth que estuvo siempre a mi lado alentándome a seguir adelante dispuesta a seguirme. A mis padres Ramiro y Alma Rosa por apoyarme en cada paso que daba, aún sabiendo que aunque podría tener tropiezos en el camino, el conocimiento se profundiza cada vez que nos levantamos. A mis hermanos Ramiro y Neny quienes han sido grandes ejemplos y de los cuales me siento orgulloso cada mañana. A mi abuelo Daniel, del cual espero heredar, aunque sea sólo un poco, ese gran talento profesional y calidad humana que siempre derrochó.

A mis compañeros del Posgrado de Ingeniería por la gran comunidad que formamos y de los cuales voy a tener buenos recuerdos siempre.

Finalmente, agradecer también al programa Papiit el apoyo proporcionado a este trabajo por medio del proyecto IN116105 "Diseño y Manufactura de Mecanismos Indexados para Aplicaciones de Cuarto Limpio" y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca que me proporcionó de septiembre de 2003 a julio de 2004 (registro 182075).

## ***Índice***

Introducción	1
Antecedentes	7
Hipótesis	9
Objetivo	10
Alcances	10
Resumen	11
Capítulo 1 "Desgaste"	13
Introducción	13
Tipos de Desgaste	13
Medición del Desgaste	18
Desgaste en Transmisiones de Bandas y Levas	20
Modelos de Desgaste	21
Capítulo 2 "Herramientas Matemáticas"	29
Números Duales	29
Escalares Duales	30
Vectores Duales	33
Tensores Duales	34
Representaciones Duales Geométricas	35
Transformaciones Lineales Duales	38
Superficies Regladas	44
Capítulo 3 "Cinemática de Levas"	49
Cinemática de Mecanismos de Tres Elementos	49
Cinemática de Mecanismos de Cuatro Elementos	54
Ángulos de Presión	60
Mecanismos de Levas Indexadas	61
Variación Gráfica de Parámetros	62
Diseño Cinemática Preliminar de Prototipo	67
Capítulo 4 "Dinámica de Levas"	71

Análisis Utilizando Elementos Finitos	73
Condiciones de Frontera	76
Resolución Dinámica como Sistema Estáticamente Determinado	83
Conclusiones	89
Anexo 1 "Rodamiento Limpio"	91
Referencias	100

# INTRODUCCIÓN

Vivimos en un mundo industrializado, actualmente casi cualquier objeto que utilizamos proviene de líneas de producción en las que muchas veces intervienen tecnologías muy desarrolladas. Se puede decir que desde la revolución industrial, la industria ha abarcado muy diversas áreas para proporcionar soluciones a las necesidades de crecimiento y hasta confort del ser humano.

Sin embargo, el desarrollo de las tecnologías para el crecimiento de cualquier industria está en dependencia directa con sus necesidades. Existen industrias que se desempeñan en la casi total ausencia de contaminación en sus procesos. Como contaminación se puede definir todo aquello que degrada la calidad o desempeño de cualquier producto<sup>1</sup>; a su vez se puede considerar contaminación un ruido electromagnético, vibración excesiva, campos eléctricos no previstos, gases indeseables, partículas suspendidas en el ambiente, partículas adheridas, etc.

Analizando el caso de la contaminación por partículas, se pueden mencionar las industrias de la salud y farmacéutica, alimenticia, automotriz y de los semiconductores, en las cuales ésta es nociva en sus procesos. Por ejemplo, en la industria de la salud y

---

<sup>1</sup> The innovative Marriage Between Cleanroom and assisted reproductive technologies (ART)- The design, construction and national environmental balancing bureau (NEBB) certification of a prototype class 100/class 10 IVF Laboratory Cleanroom; K.C. WorriLOW, H.T. Huynh and A. J. Peters; Fertility and Sterility, Vol 74, Issue 3, Supplement 1, September 2000, Page S103

farmacéutica, se tienen documentados procesos de preimplantación de embriogénesis y esterilización en el cual las necesidades de limpieza son de 100 partículas menores a  $.5\mu\text{m}$  en un pié cúbico<sup>2</sup>. En la industria alimenticia se tienen documentados procesos de pasteurización de leche en los cuales es necesario un nivel de control de bacterias.

La otra gran rama de las industrias limpias es la de los semiconductores. Esta ha tenido uno de los auges más impresionantes, actualmente los semiconductores están casi en cualquier parte, en forma de circuitos se encuentran desde en los automóviles, hasta en las tarjetas telefónicas, desde en las computadoras hasta en las tarjetas de cumpleaños sonorizadas. Estos circuitos son impresos en gran escala en discos de silicio, material más utilizado de los semiconductores.

El desarrollo de los semiconductores siempre fue orientado hacia la miniaturización ya que los costos de la maquinaria de los discos son muy altos por lo que se buscan procesos que fabriquen la mayor cantidad de circuitos en el menor espacio del disco posible. Un ejemplo del desarrollo de esta miniaturización es el desarrollo de los microprocesadores utilizados en las computadoras personales. En 1982 se lanzó al mercado el procesador 286 el cual consistía en 134,000 transistores a una velocidad de 12MHz, en 1985 siguió el 386 con

---

<sup>2</sup> Contamination Control and Clean Rooms, Problems, engineering solutions and applications, Alvin Lieberman, Van Nostrand Reinhold, New York, P.1

275,000 transistores a 33MHz; en 1989 el procesador 486 con 1.2 millones de transistores a 50MHz, en 1995 la Pentium pro con 5.5 millones de transistores a 200MHz, en 1999 la Pentium III con 28 millones de transistores a 733MHz, en 2001 la Pentium IV con 55 millones de transistores a 2.8GHz Todos los procesadores del mismo tamaño<sup>3</sup>. Según la ley de Moore, conocida en el área de semiconductores, el número de transistores que puede caber en un microchip se duplica cada 18-24 meses, y esta ley ha estado vigente desde el inicio de la era de los microchips.

Sin embargo, para lograr esta miniaturización se necesitan transistores de dimensiones de unas cuantas micras, por lo que las partículas suspendidas pueden depositarse en los canales de aluminio de la superficie del semiconductor e inutilizar el chip. Esta contaminación por partículas se debe principalmente a tres motivos, fuga de contaminación del exterior al recinto de trabajo, desgaste del equipo para el proceso y generación de partículas por movimientos del personal.

La solución a este problema fueron los cuartos limpios. Estos son espacios controlados en los cuales se mide constantemente la cantidad de partículas suspendidas en el aire además de estar diseñados de tal forma que impidan la entrada de aire contaminado y pueden contar con sistemas que proporcionen limpieza al área de

---

<sup>3</sup> Semiconductor Manufacturing, a short chip history, [www.nist.gov/public\\_affairs/licweb/chiphist.htm](http://www.nist.gov/public_affairs/licweb/chiphist.htm), Octubre, 2003



trabajo. Uno de estos sistemas consiste en un flujo de aire el cual obliga que las partículas suspendidas se decanten y no interfieran en el proceso en donde se realiza la manufactura con los discos de silicio.

Los cuartos limpios también se utilizan en las otras industrias que necesitan niveles de contaminación por partículas bajos. Un ejemplo de la utilización de estos cuartos en la industria lo dan las cifras de ventas de los cuartos limpios en el mercado. De 6.5 billones de dólares en el 2000 crecerá para el 2006 a 9.1 billones<sup>4</sup>. Un ejemplo de distribución de las industrias que utilizan cuartos limpios lo da el estado de California, en donde un 58% pertenece a los semiconductores, los hospitales un 4%, alimenticia un 3%, automotriz un 3%, aeroespacial un 6%, proveedores de los semiconductores un 3%, electrónica un 9%, dispositivos médicos un 7% y farmacéutica un 7%<sup>5</sup>, lo que indica que los cuartos limpios es una industria floreciente y con aplicaciones diversas.

La medición de limpieza de partículas suspendidas las proporciona la Federal Standard 209E. Esta se representa por medio de clases. Una clase (N) dentro de un cuarto limpio es un cuarto en donde el aire contiene no más de (N) partículas por pié cúbico de un diámetro igual o menor a  $0.5\mu\text{m}$ , en donde (N) se representa en múltiplos exponenciales de 10. Por ejemplo, una clase 100

---

<sup>4</sup> Semiconductor International, Cleanroom market expected to grow to \$9.6B by 2006, Maria A. Lester, [www.reed-electronics.com/semiconductor/index.asp...](http://www.reed-electronics.com/semiconductor/index.asp...) Octubre 2003

<sup>5</sup> Cleanroom energy benchmarking in high-tech and biotech industries, William Tshudi, 2001 ACEEE Summer study on energy efficiency in industry, Jul 24-27 2001, Tarrytown NY

representa un máximo de 100 partículas menores de  $0.5\mu\text{m}$  por pié cúbicas.

Para tener una idea del diámetro de estas partículas cabe mencionar que el cabello humano tiene de diámetro  $100\mu\text{m}$ , el tamaño más pequeño que puede distinguir el ojo humano tiene  $50\mu\text{m}$ , el humo del tabaco tiene aproximadamente  $.8\mu\text{m}$ . Así pues, por ejemplo, un laboratorio clase 100 está capacitado para trabajar sobre productos lácteos. Un laboratorio clase 10 se usa, por ejemplo, para limpiar y catalogar muestras rocosas de misiones planetarias. Un laboratorio clase 1 puede hacer estudios en microbiología de alto riesgo de contagio.

Los movimientos necesarios dentro de estos espacios pueden ser logrados por medio de seres humanos que hagan las tareas o robots. Puesto que los niveles de generación de contaminación de naturaleza humana oscilan en los cientos de miles por minuto gracias a movimientos de ropa, pelo, piel incluso la propia respiración<sup>6</sup>, cada clase tiene necesidades para mantener estos niveles. Mientras que en ciertos recintos es posible la entrada de seres humanos con aditamentos especiales como ropa, botas, tapabocas, en otros sólo se permiten el uso de robots.

En el caso de los semiconductores, se combinan varios factores que determinan la utilización de robots

---

<sup>6</sup> Berger J, "Sources of contamination in VLSI Processing: A User's Point of view", *Microcontamination*, 3(2):16-18,1985

en sus procesos: las dimensiones de los transistores es cada día más pequeña, por lo que la precisión alcanzada con la mecatrónica es superior a los alcanzados por humanos, los niveles necesarios de limpieza oscilan entre la clase 1 y la clase 10, ambos inalcanzables para personal humano, los costos de fabricación en la industria de los semiconductores son elevados, por lo que es necesario una gran producción para abaratar los productos, lo que conlleva a velocidades de producción inalcanzables para el ser humano.

Para el trabajo en estos espacios se diseñaron robots para cuartos limpios, cuya particularidad consiste en generar un número de partículas permitido para la clase a la que pertenece. Básicamente la aplicación de los robots para cuartos limpios en la industria de los semiconductores es en la manipulación de discos de silicio y caseteras.

Sin embargo, a pesar de que la utilización de robots en los procesos de los semiconductores permite un número de partículas menores a los movimientos humanos, el desgaste, corrosión, contacto mecánico, etc., hace que con el tiempo se degrade la calidad del robot y pierda la clase inicial. Por lo que los puntos más importantes a analizar son las articulaciones y los sistemas motrices.

Dentro de la literatura, se han consultados líneas de investigación sobre los sellos que deben poseer las

articulaciones, rodamientos magnéticos, fluidos magnéticos en las articulaciones, rodamientos de aire, sin embargo, ninguna línea de investigación se refiere a posibles cambios en el sistema de transmisión de movimiento, el cual es tradicionalmente con bandas dentadas.

Por lo anterior, esta investigación se enfocará en realizar un diseño paramétrico de transmisión a base de levas que sea pueda ser una opción viable al problema de generación de partículas para un robot de cuarto limpio.

Este trabajo experimental constará en la recopilación bibliográfica de métodos analíticos para medición de generación de partículas, el diseño cinemático paramétrico de un sistema de transmisión de partículas, la resolución dinámica de la transmisión basada en levas y la posible aplicación de los resultados dinámicos a las teorías de desgaste presentadas.

## **ANTECEDENTES**

Gracias a los distintos sistemas de investigación y vinculación científica como PAPIIT (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica), PAPIME (Programa de Apoyo a Proyectos Institucionales para el Mejoramiento de la Enseñanza) y CONACYT (Consejo Nacional para la Ciencia y la Tecnología), la facultad de ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México

ha impulsado 4 líneas de investigación en su Centro de Diseño y Manufactura (CDM) definidas en el campo del diseño mecánico. Entre éstas está la línea de investigación en robótica y en específico la investigación en el diseño y fabricación de robots manipuladores para la industria de la microelectrónica y de los semiconductores.

Siguiendo esta línea de investigación, en 1994 se concluyó el diseño y fabricación de un prototipo de robot para cuartos limpios. En 1995 se presentó al CONACYT y PAPIIT una propuesta <sup>7</sup> para diseñar y fabricar un segundo prototipo con un mejor diseño que equivaliera a un mejor desempeño. Así, en 1998 quedó terminado el diseño y la fabricación del segundo prototipo.

Continuando la línea de robots para cuartos limpios, el siguiente proyecto fue en el área del diseño de mecanismos especialmente en pares cinemáticas con bajos niveles de emisión de partículas. En 1998 se acepta la investigación en articulaciones rotacionales las cuales se consideran una de las fuentes más importantes de contaminantes.

Con los recursos obtenidos se obtuvieron diseños de articulaciones rotacionales, así como la construcción de una cámara de pruebas con control de partículas con un

---

<sup>7</sup> Proyecto IN116105 "Diseño y Manufactura de Mecanismos Indexados para Aplicaciones de Cuarto Limpio"

nivel de limpieza clase 1 y se adquirió un contador láser para partículas de  $0.3\mu\text{m}$  y  $0.5\mu\text{m}$  de diámetro con dos sondas captadoras.

Por otra parte, en 1999 aparece el artículo "The design of a novel mechanical transmission for speed reduction"<sup>8</sup> realizado por investigadores del centro de máquinas inteligentes de la Universidad McGill. Este artículo plantea un sistema de transmisión con mecanismos de levas indexadas, lo cual genera un movimiento periódico y con movimientos exclusivamente rotatorios.

La investigación que se plantea es la aplicación de la teoría desarrollada en la universidad de McGill en los robots para cuartos limpios.

## **HIPÓTESIS**

- Una parte sustancial de la contaminación que genera el robot de cuarto limpio clase 1 realizado por el Centro de Desarrollo y Manufactura de la Universidad Nacional Autónoma de México está en su sistema de transmisión por bandas dentadas por su constante flexión y deflexión.

---

<sup>8</sup> González-Palacios M., Angeles J., "The design of a novel mechanical transmission for speed reduction", Journal of Mechanical Design, Vol 125 Issue 1, March 2003, pp 205-207

- Las transmisiones por levas con un recubrimiento adecuado, al tener movimiento rotacional y carecer de movimiento deslizante, proporciona un nivel de generación de partículas menor al de las bandas dentadas.

## **OBJETIVO**

- Demostrar la viabilidad del uso de mecanismos indexados basados en levas como una opción de transmisión de movimiento para robot de cuartos limpios.

## **ALCANCES**

- Análisis de generación de partículas con base en rodamiento y deslizamiento entre dos superficies metálicas.
- Generar las ecuaciones cinemáticas paramétricas para un mecanismo indexado de levas que pueda proveer una solución al problema de generación de partículas en la transmisión de movimiento de un robot para cuartos limpios.

- Generar las ecuaciones dinámicas paramétricas para un mecanismo indexado de levas.
- Modelar matemáticamente la cantidad de partículas esperadas por las fuerzas de contacto que se generen de las ecuaciones dinámicas
- Concluir con base en los análisis practicados.

## **RESUMEN**

Este trabajo esta integrado por los capítulos de desgaste, herramientas matemáticas, cinemática de levas y dinámicas de levas.

En el capítulo primero se discuten los distintos modelos de desgaste, sus métodos de medición así como algunos modelos matemáticos que simulan el comportamiento de generación de partículas bajo contacto deslizante entre dos materiales metálicos.

El capítulo segundo provee la formulación de números duales realizada por el matemático W. Clifford. Esta formulación incluye operaciones básicas para numeros, vectores y tensores duales las cuales fueron utilizadas dentro del capítulo de cinemática de levas.



Las ecuaciones cinemáticas para levas indexadas de tres y cuatro elementos para mecanismos planos, esféricos y espaciales son desarrolladas en el capítulo tercero utilizando números duales. Dentro de este mismo capítulo se propone un diseño preliminar de un prototipo de mecanismo de levas indexadas plano el cual provee movimientos relativos puramente rotativos entre la leva y el seguidor.

Finalmente en el cuarto capítulo se desarrolla la dinámica del mecanismo indexado tomando en cuenta análisis por elementos finitos para calcular fuerzas redundantes. Una simplificación a este procedimiento se presenta al desarrollar las ecuaciones dinámicas modelándose como un sistema estáticamente determinado.

Basándose en los resultados provistos por este trabajo de tesis, se recomienda el desarrollo de prototipos utilizando las ecuaciones cinemáticas desarrolladas así como su evaluación en condiciones de cuarto limpio para monitorear su generación de partículas ya que, aunque se determinó que el contacto rotativo entre la leva, rodamiento y seguidor genera es menos contaminante que un contacto deslizante, los modelos matemáticos encontrados no satisfacen las condiciones de trabajo a las que se encuentran este tipo de mecanismos.

## DESGASTE

### 1.1. INTRODUCCIÓN

El fin último al que se tiene que llegar en la presente investigación, es proponer el diseño de un sistema de transmisión que genere menor cantidad de partículas debidas al desgaste propio del movimiento de los componentes, para ser utilizado en un robot para cuartos limpios. Se sabe que *el desgaste puede ser definido como la substracción de material de superficies sólidas como resultado de una acción mecánica*<sup>1</sup>. Como se puede apreciar, el desgaste está ligado a la generación de partículas de un cuerpo dado. A continuación se presentan los diferentes tipos de desgaste.

### 1.2. TIPOS DE DESGASTE

El desgaste se presenta en distintos sistemas como: rodamientos de bolas, sistemas de frenos, movimiento de equipo, sistemas de embrague, movimientos óseos, etc. Ante tanta variedad de desgastes, la solución a estos problemas consiste en la localización exacta de la naturaleza del problema.

Existen distintas categorías de desgaste, mientras para Burwell y Strang<sup>2</sup> se dividen en: abrasivo, adhesivo, corrosivo, fatiga superficial, erosión, cavitación y

---

<sup>1</sup> Rabinowicz, E., "Friction and wear of materials", 2a Edición, Ed. Wiley Intersciencie, 1995, pp 124

<sup>2</sup> Burwell, J.T. y Strang, C. D. "On the empirical law of adhesive wear", J. Appl. Phys., 23 (1952) 18-28

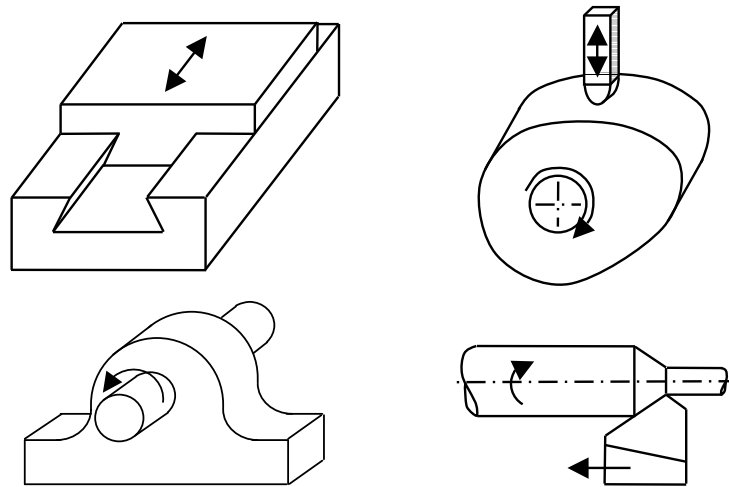
pulido; para Godfrey <sup>3</sup> existen: adhesivo ligero, adhesivo severo, abrasivo, erosivo, fatiga, delaminación, corrosivo, electrocorrosivo, pulido corrosivo, daño de cavitación, descarga eléctrica y pulido. Para esta investigación se tendrá en cuenta la clasificación que desarrollan Heinz y Gahr <sup>4</sup> la cual se describe a continuación.

**Desgaste Adhesivo:** Éste ocurre cuando hay una interacción de una superficie sobre otra. A causa de una presión de contacto, se presenta en una deformación plástica, en donde, frecuentemente, existe una adhesión entre las superficies. De esta forma, los fragmentos son desprendidos del material más blando y son adheridos a un material más duro. En el caso de dos materiales igual de blandos, el proceso puede ser repetitivo entre una y otra superficie, sin embargo, al cabo de cierto tiempo, este desgaste siempre genera partículas al exterior. La figura 1.1 muestra componentes de maquinaria envueltos en desgaste adhesivo. Algunos componentes que pueden estar en desgaste adhesivo lo constituyen, por ejemplo, los deslizamientos en la maquinaria de herramienta de la industria, extracción de alambre, engranajes, cojinetes con o sin lubricación, y herramientas de corte.

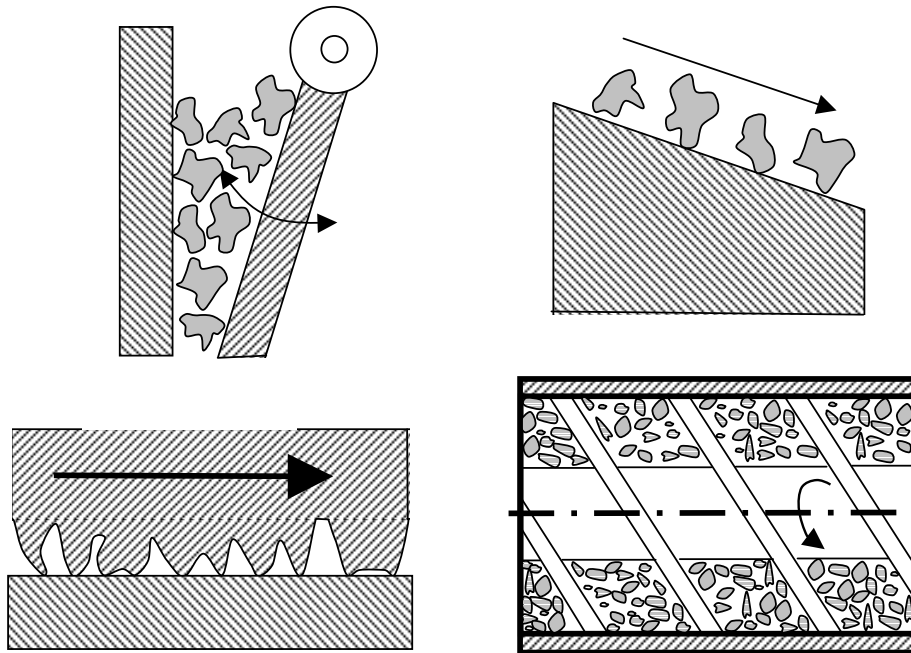
---

<sup>3</sup> Godfrey, D., "Diagnosis of wear mechanisms, in wear control handbook", Peterson, M.B. y Winer, W. O., Ed. ASME, New York 1980, pp 283-311

<sup>4</sup> Heinz, K. y Gahr Z., "Microstructure and wear of materials", Ed. Elsevier, 1987, pp 86-124

Fig. 1.1 Ejemplos de Desgaste Adhesivo <sup>4</sup>

**Desgaste Abrasivo:** Este desgaste ocurre cuando existe una superficie con una rugosidad con dureza considerable, o una superficie que aunque suavizada en su forma, presenta partículas duras en su superficie. Cuando esta superficie entra en contacto con una superficie más blanda se presentan una serie de surcos generados por el deslizamiento en la última superficie. El material de pérdida de los surcos es desalojado en forma de partículas perdidas. Un ejemplo de este tipo de desgaste es el que se presenta en juntas de acero con pobre lubricación. Estas partículas duras comúnmente son producto de un proceso, por ejemplo minerales como sílice, alúmina, partículas de acero, etc. Cuando un terminado contiene protuberancias, éstas actúan como partículas duras lo que lleva a un desgaste abrasivo. En la figura 1.2 se presentan ejemplos de este tipo de desgaste.

Fig. 1.2. Ejemplos de Desgaste Abrasivo <sup>4</sup>

**Reacción Triboquímica:** Este desgaste puede ser caracterizado por un frotamiento entre dos superficies sólidas que reaccionan con el ambiente. Esta corrosión puede ser en ambientes gaseosos o líquidos. Este proceso de corrosión procede de una continua sustracción y una nueva formación de películas producto de la corrosión del material. Generalmente, en la atmósfera, el oxígeno forma películas de óxidos del material base, que continuamente se van deteriorando por la fricción y la generación de otra capa. En la figura 1.3 se presentan ejemplos del desgaste por reacción triboquímica.

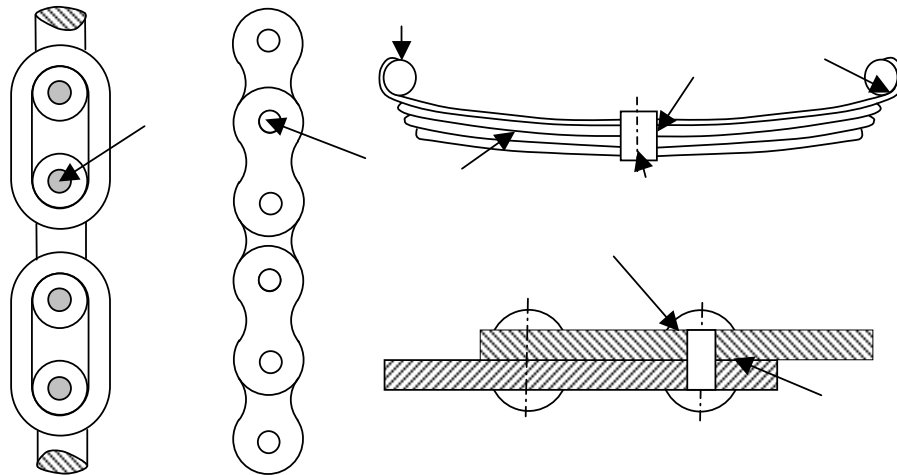


Fig. 1.3. Ejemplos de Desgaste Triboquímico <sup>4</sup>

**Desgaste de Fatiga Superficial:** Este desgaste se produce cuando, después de repetidas cargas y descargas producidas por deslizamientos, impactos, rodamientos o deformaciones, se forman pequeñas grietas superficiales y subsuperficiales que pueden resultar en la fractura del material. A cada fractura se presentan partículas que son difundidas al exterior. Un ejemplo de este desgaste lo constituyen los rodamientos, los cuales dentro de su ciclo de trabajo, presenta altibajos en sus cargas aplicadas. En la figura 1.4 se muestran ejemplos de situaciones en donde se presenta este tipo de desgaste.

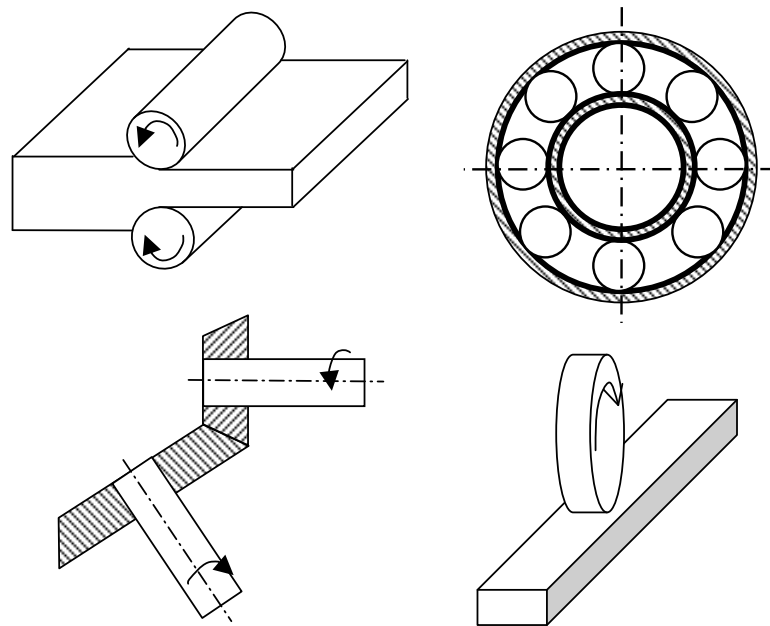


Fig. 1.4. Ejemplos de Desgaste de Fatiga Superficial <sup>4</sup>

### 1.3. MEDICIÓN DEL DESGASTE <sup>4</sup>

El método más común de medir el desgaste lo constituye una medición de las piezas anterior y posterior al proceso causante del desgaste. Dado que la definición está esencialmente ligada a la pérdida de material, el método más común de medición es el pesado del material.

Este método presenta la ventaja de representar el desgaste con un simple número, sin embargo la desventaja es que si se está interesado en constatar la distribución del desgaste en una superficie, este método es inadecuado. El proceso consiste en retirar la pieza desgastada de su entorno de trabajo, limpiarla con solventes y medir la masa final en balanzas granatarias. La resolución máxima de este método es de aproximadamente  $10^{-4}$ g. Para tener una idea de la cantidad de partículas que a esta resolución corresponde, se puede decir que ésta representa una pérdida

de  $192.9 \times 10^6$  partículas de aluminio ( $7920 \text{ kg/m}^3$ ) de  $0.5 \mu\text{m}$  de diámetro.

Otro método para medir el desgaste lo constituye el método de calibrado mecánico. Normalmente en este método se utiliza un micrómetro cuya resolución alcanza  $10^{-3} \text{ mm}$ , con esta resolución se permite una medición de  $10^{-4} \text{ g}$ , que es la misma resolución del anterior método. Este método consiste en calcular por medio de distancias el volumen de la pieza y a su vez, calcular la masa inicial y final, sin embargo, para superficies complejas, este método presenta deficiencias.

El método de conteo de partículas, concepto íntimamente ligado al desgaste, más ampliamente utilizado en la industria de los cuartos limpios se realiza por medio del conteo de partículas utilizando contadores láser. Estos contadores se basan en el principio de que en un haz divergente, cualquier interferencia será magnificada dependiendo de la distancia de la interferencia al receptor, como se indica en la figura 1.5.

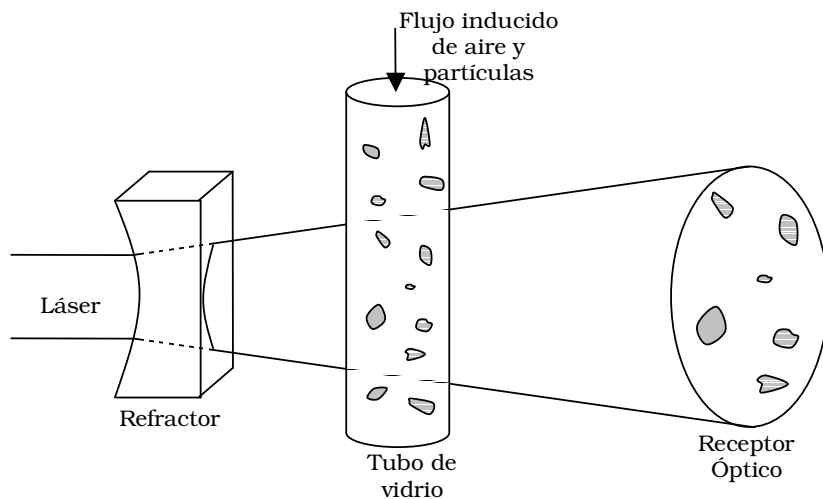




Fig. 1.5. Principio de Contador de Partículas Láser<sup>5</sup>

#### **1.4. DESGASTE EN TRANSMISIONES DE BANDAS Y LEVAS**

Las transmisiones por bandas dentadas son básicamente bandas lisas con una serie de dientes en su circunferencia interior, gracias a esto, estas bandas no presentan escapes de los dientes o deslizamientos, como sucede con las bandas planas, por lo tanto, la tensión requerida es baja lo que repercute en una carga baja en los rodamientos. Las fuerzas presentadas son principalmente longitudinales a la banda dentada en el lado de la tracción, sin embargo, al pasar sobre el engrane se presenta un cambio de tensión a compresión en la parte interior de la banda. Esto lleva a que el desgaste, es primordialmente del tipo de fatiga superficial y en menor medida desgaste adhesivo que se lleva a cabo en los dientes por el pequeño deslizamiento que siempre ocurre en un engrane<sup>6</sup>.

En las transmisiones basadas en levas se producen desplazamientos relativos entre la leva y los seguidores. Estos desplazamientos se pueden dividir en deslizamiento y rodamiento. Sin embargo, el deslizamiento puramente rotatorio es ideal ya que en la realidad, la región del contacto es deformada elástica e inclusive plásticamente, así, el lugar de rodamiento no es puntual sino una superficie, lo que lleva a que en la mayoría de los puntos en la superficie exista una combinación de rodamiento puro y en menor grado un deslizamiento. Estos pequeños

---

<sup>5</sup> [www.particlemeasuringsystems.com](http://www.particlemeasuringsystems.com), Dic 2005

<sup>6</sup> Hamrock, B. J., Jacobson, B., Shmid, S. T., "Fundamentals of Machine Elements", 1a Edición, Ed. McGraw-Hill, 1999, pp 832

deslizamientos son causantes, en parte, del desgaste en las levas y los seguidores.

El otro desgaste que existe en las levas es el causado por el impacto entre el seguidor y la leva en sus movimientos intermitentes.

### **1.5. MODELOS DE DESGASTE**

Como se pudo observar en los diferentes tipos de desgastes, los realmente importantes para el desarrollo de esta investigación son los de tipo adhesivo y por fatiga superficial, sin embargo, los modelos existentes plantean condiciones generales de trabajo para distintos materiales. La dificultad que se presenta para estos modelos, primero, es que el volumen de pérdida de material no es constante, sin embargo varían según la presión aplicada, la rugosidad del material y la presencia de películas en el área de desgaste; segunda, el contacto real de las partes es discreto por lo que existen microvolúmenes que son deformados plástica o elásticamente por lo que el modelo de un volumen homogéneo e isotrópico no es aplicable; tercero, contrario a la teoría elástica de esfuerzos, donde los cuerpos no son fracturados, en la teoría de desgaste la fractura es uno de los fines últimos de las investigaciones; cuarto, las propiedades de los materiales tomando parte en el desgaste frecuentemente difieren a las del cuerpo en general y como éstas cambian conforme se presentan los distintos tipos de desgaste, las condiciones de trabajo varían.

El primer modelo de desgaste que se presentó fue de Tonn en 1937<sup>7</sup> en el cual se propone una fórmula empírica para el desgaste abrasivo, después, en 1954, Holm presenta su ecuación basada en teoría atómica en donde relaciona el volumen de sustancia perdida por unidad de longitud de deslizamiento:

$$W = z \frac{N}{HB} \quad (1.1)$$

Donde  $z$  es la probabilidad de sustracción de un átomo de la superficie si se encuentra un átomo en el cuerpo contrario. Sin embargo, las teorías de desgaste en que se basan las actuales investigaciones comienzan con las investigaciones por parte de Brwell y Strang en 1952, Archard en 1953 y Archard y Hirst<sup>8</sup> en 1956. Esta última presenta una teoría de desgaste adhesivo. Esta teoría presenta una ecuación de la misma forma que la ecuación de Holm, sin embargo se enfoca a microvolúmenes en lugar de átomos. Archard, tomando en consideración que las partículas desprendidas son hemisferios de radio igual al radio del punto de contacto presenta la ecuación 1.2:

$$W = \left(\frac{k}{3}\right) \left(\frac{N}{HB}\right) \quad (1.2)$$

Donde  $k$  es la probabilidad de que exista sustracción de material la cual varía en la gama de  $10^{-2}$  y  $10^{-7}$ ,  $N$  es la carga y  $HB$  es la dureza Brinell del material. Para adecuarla a deslizamientos en donde exista lubricación se añade un factor  $\alpha < 1$ . Como se puede ver, el desgaste es

---

<sup>7</sup> Nagaraj, H. S., Owens, B. L., y Miller, R. J., "Submicrometer to several micrometer sized wear particles generated during sliding", IBM Research Report, RC 13209 (#59082), Oct. 1987

<sup>8</sup> Archard, J. F., y Hirst, W., "The wear of metals under unlubricated conditions", Proc. Roy. Soc., Series A, Vol. 236 1956, pp 397

proporcional a la carga aplicada pero independiente del área de contacto aparente, esto en un estado de equilibrio.

Otro análisis de Archard <sup>9</sup> indica que mientras las asperezas son deformadas plásticamente o elásticamente, el área real de contacto y el número de contactos individuales será proporcional a la carga aplicada, proponiendo que las asperezas individuales son un perfil de multicontacto. Esta aseveración, continúa el análisis, conlleva a que, cuando dos materiales con dureza comparable son friccionados, la aspereza será deformada plásticamente al primer encuentro con la superficie contraria, pero en los siguientes contactos sostendrá la misma carga bajo deformación elástica. Así, la partícula podría ser generada inmediatamente después de la primera fricción o después de varias dependiendo si la deformación fue plástica o elástica, y el desgaste podría ser estimado por el número de encuentros locales entre las superficies en su área real de contacto.

Sin embargo, este modelo, con la ayuda del análisis plástico de Greenwood y Williamson, cuando fue desarrollado, respondía a las mediciones que se podían realizar en ese tiempo, que era de unos cuantos micrómetros hasta cientos de micrómetros. Además de no proporcionar información antes de lograr el equilibrio y mucho menos, proporciona parámetros para considerar que el equilibrio se ha logrado. Esto indica que no es posible extrapolar la teoría de multicontacto de Archard a la gama submicrométrica.

---

<sup>9</sup> Archard J. F. "Elastic Deformation and the laws of friction", Proc. Roy. Soc., Series A, Vol. 243, 1957, pp. 190

En 1990 se lleva a cabo la investigación de Xuan, Cheng y Miller<sup>10</sup>, tomando los antecedentes mostrados en el párrafo superior. Este análisis se realiza con la misma máquina que utilizan Nagaraj, Owens y Miller<sup>11</sup> para la medición de la distribución del tamaño de partículas submicrométricas, la máquina Falex 3-pin-on-disk asociada con un espectrómetro láser y un sistema de aire ultralimpio. El arreglo consiste en un disco de acero 304 S.S. el cual gira a revoluciones determinadas sobre tres pivotes los cuales están colocados a la misma distancia sobre un plato. A su vez hay entradas de aire al lado de los pivotes para asegurar que todas las partículas pasen por el receptáculo en donde serán contadas por el espectrómetro. Los pivotes, hechos de acero 440 C S.S., tienen una carga controlada para hacerlos incidir sobre el disco de acero.

Esta investigación presenta una ecuación para la medición del número de partículas que las clasifica desde 0.2  $\mu\text{m}$  hasta 12  $\mu\text{m}$  en intervalos de 0.1  $\mu\text{m}$  a 0.2  $\mu\text{m}$ , con un error de menos del 1%.

En la ecuación 1.3 obtenida por medio de regresión con parámetros no lineales,  $N_i$  representa el número de partículas en el intervalo  $i$ -ésimo,  $D_i$  el tamaño puntual de la partícula en el intervalo  $i$ -ésimo y  $k_1$  y  $k_2$  son constantes de desgaste submicrométrico dependientes del tiempo.

---

<sup>10</sup> Xuan, J. L., Cheng, H. S., y Miller, R. J., "Generation of Submicrometer Particles in Dry Sliding Contact ", Transaction of ASME, Vol. 112, 1990, pp 684

<sup>11</sup> Nagaraj, H. S., Owens, B. L., y Miller, R. J., "Submicrometer to several micrometer sized wear particles generated during sliding", IBM Research Report, RC 13209 (#59082), Oct. 1987

$$N_i(t) = k_1(t) * D_i^{-k_2(t)} \quad (1.3)$$

$$i = 0.2, 0.3, 0.4, \dots, 1.0 \mu m$$

En las dos gráficas mostradas en la figura 1.6, las cuales fueron generadas en la investigación Xuan, Cheng y Miller, se observa que la constante  $k_1$  se incrementa rápidamente con la distancia de deslizamiento en forma casi lineal después de aproximadamente las 250 rpm (1rpm=.145m) y la constante  $k_2$  desarrolla su máximo valor en aproximadamente las mismas 250 rpm y se mantiene constante después de aproximadamente 1000 rpm. El valor  $-k_2$ , cabe mencionar, representa la pendiente de la distribución de partículas en una gráfica log-log.

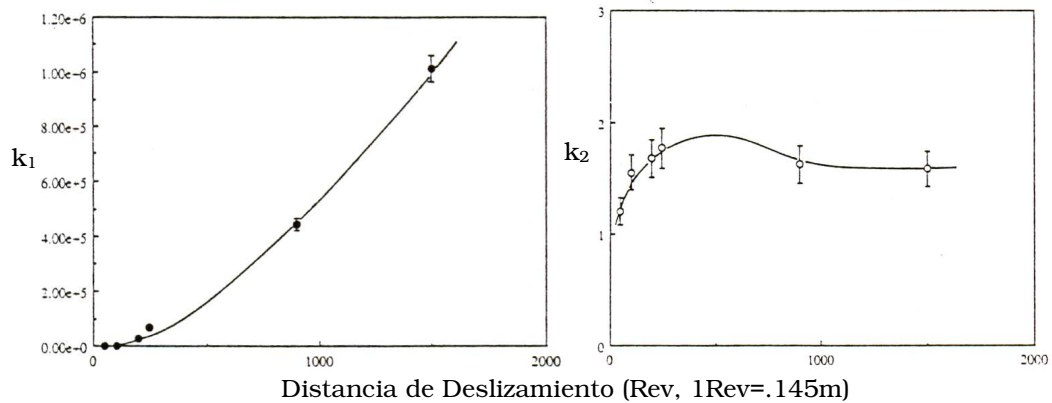


Fig. 1.6. Comportamiento en de las constantes  $k_1$  y  $k_2$  de la ecuación 1.3

Como información adicional ser presentan en la figura 1.7 otras gráficas generadas en la misma investigación de Xuan, Cheng y Miller las cuales representan el número de partículas separadas según su dimensión, generadas a velocidad constante.

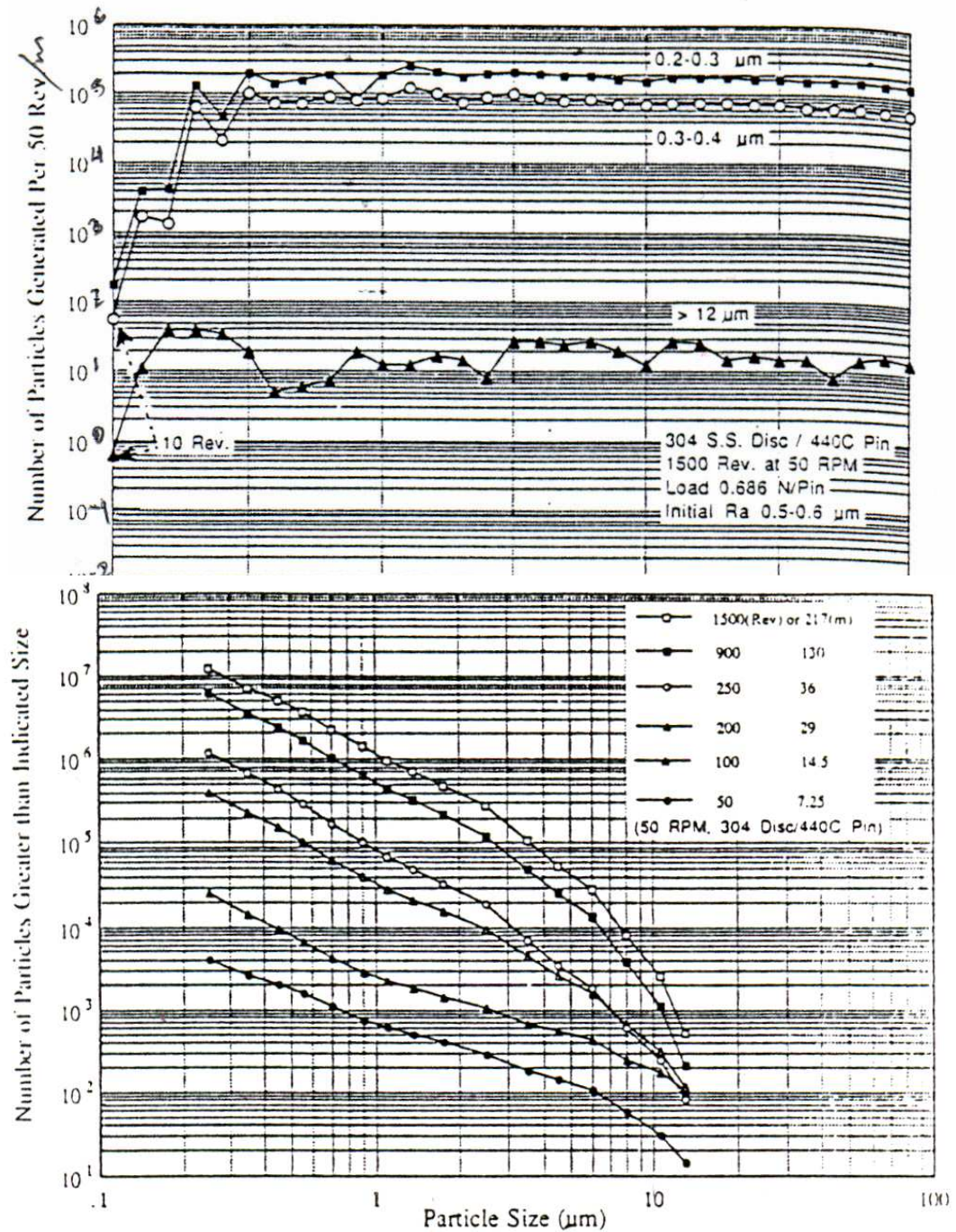


Fig. 1.7. Generación de partículas en función de la distancia de deslizamiento así como su distribución de tamaño

Con base en la ecuación 1.3 se puede concluir que el número de partículas puede ser estimado como una función exponencial (Eq1.3) del tamaño de la partícula por medio de dos constantes dependientes del tiempo, una de ellas

presenta un comportamiento lineal después del equilibrio y la otra está relacionada con la pendiente de la función exponencial de la gráfica log-log. Esta función proviene de una regresión la cual presenta un porcentaje de error menor al 1%.

Por las gráficas mostradas en 1.7 se observa que para un estado de contacto, la generación de partículas aumenta conforme la distancia de deslizamiento, sin embargo, cuando las microdurezas de superficies de contacto llegan a su estabilidad, el número de partículas se mantiene constante. Este comportamiento sería el esperado en la interfaz entre leva-seguidor donde el contacto es puntual, aunque con distinta magnitud de generación de partículas, puesto que la investigación de Xuan, Cheng y Miller se desarrolló sólo para contacto deslizante.

Por el análisis llevado a cabo por Archar<sup>9</sup> se concluye que el desgaste inicial puede ser reducido si las superficies poseen un acabado superficial liso, sin embargo, esta práctica es efectiva hasta ciertos límites. Si se llega a este límite, un mejor terminado de la superficie no reducirá el desgaste submicrométrico.

El desgaste adhesivo y de fractura superficial podrían ser los más significativos, asimismo, la mayor parte de los contactos se realizan de forma plástica y en menor parte de forma elástica. En caso de un terminado superficial suave, las deformaciones de las asperezas son en mayor parte elásticas con el incremento de la distancia a deslizarse, a causa del incremento de la microdureza de las asperezas.



Sin embargo, el análisis de Xuan, Cheng y Miller es para movimientos puramente deslizantes, y aunque se sabe que el movimiento rotatorio tiene en parte deslizamientos, y que estos son en mayor parte responsables del desgaste, existen modelos desarrollados, con base en la misma teoría de desgaste, específicos en rodamiento-deslizamiento.

## HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

En este capítulo se presentan los instrumentos matemáticos con los que se realizará el análisis y la síntesis de los mecanismos basados en levas que se verán en el siguiente capítulo, estas herramientas son: números duales y superficies regladas, las cuales se detallan a continuación.

### 2.1. NÚMEROS DUALES

Por definición, los números duales pertenecen a un álgebra bidimensional conmutativa y asociativa sobre los números reales particular del álgebra abstracta añadiendo un nuevo elemento  $\varepsilon$ , similar al elemento  $i$  de los números complejos, pero con las propiedades siguientes:

$$\varepsilon \neq 0, 0\varepsilon = \varepsilon 0 = 0, 1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon, \varepsilon^2 = 0 \quad (2.1)$$

La formulación de números duales fue presentada en 1873 por W. Clifford. Durante años no tuvo una aplicación concreta hasta el estudio de los cuerpos rígidos cuando fue generalizada por Kotelnikov y Study, que formularon el principio de transferencia. Este principio establece que si un número dual reemplaza un número real, entonces todas las relaciones del álgebra vectorial para líneas que se intersecan también son válidas para líneas oblicuas. Esto significa que todas las reglas del álgebra vectorial para la cinemática de un cuerpo rígido con un punto relativo fijo (cinemática esférica) también aplican para el álgebra de movimiento de un cuerpo rígido libre (cinemática espacial).

De esta forma el movimiento de un cuerpo rígido puede ser descrito con tres ecuaciones duales en lugar de 6 ecuaciones reales.

Un elemento (escalar, vectorial o tensorial) dual se compone de la suma de su parte primal y su parte dual, esta última multiplicada por el operador dual  $\varepsilon$  con las propiedades presentadas en la ecuación 2.2. En la ecuación 2.2 se define este conjunto.

$$\hat{D} = \{d + \varepsilon d^* \mid d, d^* \in \mathfrak{R}^n, \varepsilon^2 = 0, \varepsilon 1 = 1\varepsilon = \varepsilon, \varepsilon 0 = 0\varepsilon = 0\} \quad (2.2)$$

La nomenclatura que se seguirá para definir las características de cada elemento dual así como sus partes primal y dual será la siguiente:

$\hat{a}$	denota un escalar dual
$a$	denota un escalar y/o parte primal de un escalar dual
$a^*$	denota la parte dual de un escalar dual
$\hat{\underline{a}}$	denota un vector dual
$\underline{a}$	denota un vector y/o parte primal de un vector dual
$\underline{a}^*$	denota la parte dual de un escalar dual
$\hat{\underline{\underline{a}}}$	denota un tensor dual
$\underline{\underline{a}}$	denota un tensor y/o parte primal de un tensor dual
$\underline{\underline{a}}^*$	denota la parte dual de un tensor dual

A continuación se detallará el álgebra de los escalares, funciones, vectores y tensores duales.

### 2.1.1. ESCALARES DUALES

Sean  $\hat{a} = (a + a^*)$  y  $\hat{b} = (b + b^*)$ ,  $\hat{a}, \hat{b} \in \hat{D}$  dos elementos duales con sus elementos  $a, a^*, b, b^*$  en  $\mathfrak{R}^1$ .

Las relaciones de igualdad, adición, multiplicación y división de los escalares duales son mostradas en las ecuaciones 2.3.

$$\begin{aligned}
 \hat{a} = \hat{b} &\Leftrightarrow a = b, a^* = b^* \\
 \hat{a} + \hat{b} &= (a + b) + \varepsilon(a^* + b^*) \\
 \hat{a}\hat{b} &= (ab) + \varepsilon(a^*b + ab^*) \\
 \frac{\hat{a}}{\hat{b}} &= \frac{a}{b} + \varepsilon\left(\frac{a^*b - ab^*}{b^2}\right), \forall b \neq 0
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

En orden de definir funciones de números duales, como las funciones trigonométricas, se utilizará la definición de la serie de Taylor de una función evaluada en un punto. Sea  $f(x)$  una función de  $x$ , la función de  $x$  evaluada en el punto  $a$ , es definida por la serie de Taylor como lo muestra la ecuación 2.4.

$$f(x) = f(a) + f'(x)|_{x=a}(x-a) + \frac{f''(x)|_{x=a}}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(x)|_{x=a}}{n!}(x-a)^n + \dots \tag{2.4}$$

Si ahora se desarrolla la serie de Taylor para la función  $f(\hat{x})$  evaluando en  $(x + \varepsilon 0)$ , los términos  $(x-a)^n$  desde  $n=2$  hasta  $\infty$  son iguales a 0, por lo que la función se escribe como en la ecuación 2.5

$$f(\hat{x}) = f(x) + \varepsilon x^* f'(\hat{x})|_{\hat{x}=x} \tag{2.5}$$

Utilizando la ecuación 2.5 para las funciones trigonométricas se llega a las ecuaciones 2.6.

$$\begin{aligned}
\text{Sen}(\hat{a}) &= \text{Sen}(a) + \varepsilon a^* \text{Cos}(a) \\
\text{Cos}(\hat{a}) &= \text{Cos}(a) - \varepsilon a^* \text{Sen}(a) \\
\text{Tan}(\hat{a}) &= \text{Tan}(a) + \varepsilon a^* (1 + (\text{Tan}(a))^2) \\
\text{ArcSen}(\hat{a}) &= \text{ArcSen}(a) + \varepsilon \frac{a^*}{\text{Cos}(\text{ArcSen}(a))} \\
\text{ArcCos}(\hat{a}) &= \text{ArcCos}(a) - \varepsilon \frac{a^*}{\text{Sen}(\text{ArcCos}(a))} \\
\text{ArcTan}(\hat{a}) &= \text{ArcTan}(a) + \varepsilon \frac{a^*}{1+a^2}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Además, con la ecuación 2.5 se puede encontrar la raíz cuadrada de un número dual, como lo muestra la ecuación 2.7

$$\sqrt{\hat{a}} = \sqrt{a} + \varepsilon \frac{a^*}{2\sqrt{a}}, \quad \forall a > 0 \tag{2.7}$$

Como se puede ver por las ecuaciones 2.3, los números duales presentan una estructura de grupo conmutativo bajo las operaciones binarias de adición y multiplicación ya que presenta asociación, poseen un inverso aditivo y multiplicativo,  $(-d - \varepsilon d^*)$  y  $(\frac{1}{d} - \varepsilon \frac{d^*}{d^2})$  respectivamente, y poseen un elemento neutro para ambas operaciones,  $(0 + \varepsilon 0)$  y  $(1 + \varepsilon 0)$ .

Asimismo, los números duales presentan una estructura de anillo para las operaciones binarias de adición y multiplicación, ya que los números duales son un grupo conmutativo, la multiplicación es asociativa y ambas operaciones satisfacen los axiomas de distribución.

Sin embargo, los números duales, contrario a los números reales o complejos, no forman campos, ya que es necesaria una estructura de grupo con un inverso respecto a la multiplicación, el cual no existe para los números duales. Esto nos lleva principalmente a que los números

duales NO forman espacios vectoriales. Por lo tanto, los "vectores" que se detallarán a continuación, no son en esencia miembros de un espacio vectorial como su definición lo indica, sin embargo sí presentan algunas de sus características.

### 2.1.2. VECTORES DUALES

Sean  $\underline{\hat{a}} = [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3]^T$  y  $\underline{\hat{b}} = [\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3]^T \quad \forall \hat{a}_i, \hat{b}_i \in \hat{D}$  dos elementos duales con sus elementos  $a_i$  y  $b_i$  en  $\mathfrak{R}^1$ .

Las relaciones de igualdad, multiplicación por escalar, producto punto y producto cruz de los vectores duales son mostradas en las ecuaciones 2.8.

$$\begin{aligned} \underline{\hat{a}} = \underline{\hat{b}} &\Leftrightarrow a_i = b_i \\ \hat{c}\underline{\hat{a}} &= [\hat{c}\hat{a}_1, \hat{c}\hat{a}_2, \hat{c}\hat{a}_3]^T \\ \underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{b}} &= \hat{a}_1\hat{b}_1 + \hat{a}_2\hat{b}_2 + \hat{a}_3\hat{b}_3 \\ \underline{\hat{a}} \times \underline{\hat{b}} &= [\hat{a}_2\hat{b}_3 - \hat{a}_3\hat{b}_2, \hat{a}_3\hat{b}_1 - \hat{a}_1\hat{b}_2, \hat{a}_1\hat{b}_2 - \hat{a}_2\hat{b}_1]^T \end{aligned} \tag{2.8}$$

A pesar de no pertenecer a un espacio vectorial, algunas de las reglas del álgebra de vectores aplican a los "vectores" duales, como lo es la combinación lineal de vectores bases, como lo indica la ecuación 2.9

$$\begin{aligned} \underline{\hat{a}} &= \hat{a}_1 i + \hat{a}_2 j + \hat{a}_3 k \\ &\therefore \\ \underline{\hat{a}} &= (\underline{a} + \underline{a}^*) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Utilizando la ecuación 2.9, se definen en las ecuaciones 2.10 algunas relaciones de forma detallada. Sean  $\underline{\hat{a}} = (\underline{a} + \underline{a}^*)$  y  $\underline{\hat{b}} = (\underline{b} + \underline{b}^*)$ ,  $\forall \hat{a}_i, \hat{b}_i \in \hat{D}$ , las mismas relaciones mostradas en las ecuaciones 2.8 se desarrollan en las ecuaciones 2.10

$$\begin{aligned}
 \underline{\hat{a}} = \underline{\hat{b}} &\Leftrightarrow \underline{a} = \underline{b}, \underline{a}^* = \underline{b}^* \\
 \underline{\hat{c}} &= \underline{c} + \varepsilon(\underline{c}^* \underline{a} + \underline{c} \underline{a}^*) \\
 \underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{b}} &= \underline{a} \cdot \underline{b} + \varepsilon(\underline{a}^* \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{b}^*) \\
 \underline{\hat{a}} \times \underline{\hat{b}} &= \underline{a} \times \underline{b} + \varepsilon(\underline{a}^* \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{b}^*)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Aplicando la ecuación 2.7 se puede conocer la norma euclidiana como lo muestra la ecuación 2.11.

$$\begin{aligned}
 \|\underline{\hat{a}}\| &= \sqrt{\underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{a}}} = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{b} + \varepsilon 2(\underline{a} \cdot \underline{a}^*)} \\
 &\therefore \\
 \|\underline{\hat{a}}\| &= \|\underline{a}\| + \varepsilon \frac{\underline{a} \cdot \underline{a}^*}{\|\underline{a}\|}, \quad \forall \underline{a} \neq \underline{0}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Finalmente se define una nueva operación llamada Vector Dual Unitario VDU en la ecuación 2.12, la cual proporciona el vector paralelo al vector original cuyas componentes son sus cosenos duales directores.

$$\text{VDU}(\underline{\hat{a}}) = \frac{\underline{\hat{a}}}{\|\underline{\hat{a}}\|} = \frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|} + \varepsilon \frac{(\underline{a} \times \underline{a}^*) \times \underline{a}}{\|\underline{a}\|^3} \tag{2.12}$$

### 2.1.3. TENSORES DUALES

Sean  $\underline{\hat{a}} = [\hat{a}_{ij}]$  y  $\underline{\hat{b}} = [\hat{b}_{kl}] \quad \forall \hat{a}_{ij}, \hat{b}_{kl} \in \hat{D}$  dos elementos duales. Las relaciones de igualdad, transpuesta, suma y multiplicación se presentan en las ecuaciones 2.13.

$$\begin{aligned}
 \underline{\hat{a}} = \underline{\hat{b}} &\Leftrightarrow a_{ij} = b_{kl} \quad \forall i = k, j = l \\
 &\underline{\hat{a}}^T = [\hat{a}_{ji}] \\
 \underline{\hat{a}} + \underline{\hat{b}} &= [\hat{a}_{ij} + \hat{b}_{kl}] \quad \forall i = k, j = l \\
 \underline{\hat{a}} \underline{\hat{b}} = \underline{\hat{c}} &= [\hat{c}_{il}] \quad \hat{c}_{il} = \hat{a}_{ij} \hat{b}_{kl} \quad \forall j = k
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

## 2.1.4. REPRESENTACIONES DUALES GEOMÉTRICAS

### 2.1.4.1 Coordenadas de línea y puntuales de una línea

Sea  $\hat{e} = \underline{e} + \varepsilon \underline{m}$ . La línea  $\ell$  puede ser representada a través de  $\hat{e}$ , cuyas componentes  $\underline{e}$  y  $\underline{m}$  definen la dirección de  $\ell$  y el momento de  $\ell$  con respecto a un punto definido  $\underline{O}$ , respectivamente. La componente  $\underline{m}$  a su vez puede ser desarrollada como el producto cruz de un punto  $\underline{p}$  arbitrario en  $\ell$  y la dirección de  $\ell$ . Las componentes de  $\hat{e}$  definen las coordenadas de línea de  $\ell$ . Estas relaciones se plasman en las ecuaciones 2.14.

$$\begin{aligned}\hat{e} &= \underline{e} + \varepsilon \underline{m} \\ \underline{m} &= \underline{p} \times \underline{e}\end{aligned}\tag{2.14}$$

Existe otra representación alternativa de la línea  $\ell$ , la cual se define como coordenadas puntuales. Esta representación la constituye el vector que se muestra en la ecuación 2.15

$$\underline{r} = \underline{p} + \lambda \underline{e}, \lambda \in \mathfrak{R}\tag{2.15}$$

Para lograr unificar las coordenadas de línea y las coordenadas puntuales, se aplica un producto cruz a ambos lados de la segunda ecuación de 2.13 como se muestra en la ecuación 2.16.

$$\underline{e} \times \underline{m} = \underline{e} \times (\underline{p} \times \underline{e})\tag{2.16}$$

Expandiendo el lado derecho de 2.16 se obtiene 2.17

$$\underline{e} \times \underline{m} = \underline{p} - \underline{e}^T \underline{p} \underline{e}\tag{2.17}$$



Se asigna al punto  $\underline{p}$  arbitrario de  $\ell$ , el punto más cercano al origen, denominado  $\underline{p}_0$ , entonces la ecuación 2.17 queda como la ecuación 2.18

$$\underline{e} \times \underline{m} = \underline{p}_0 \tag{2.18}$$

Sustituyendo 2.18 en 2.15 se obtienen las coordenadas puntuales con los parámetros de las coordenadas de línea. Esto en la ecuación 2.19.

$$\underline{r} = \underline{e} \times \underline{m} + \lambda \underline{e} \tag{2.19}$$

En la figura 2.1 se muestran las diferencias entre ambas coordenadas.

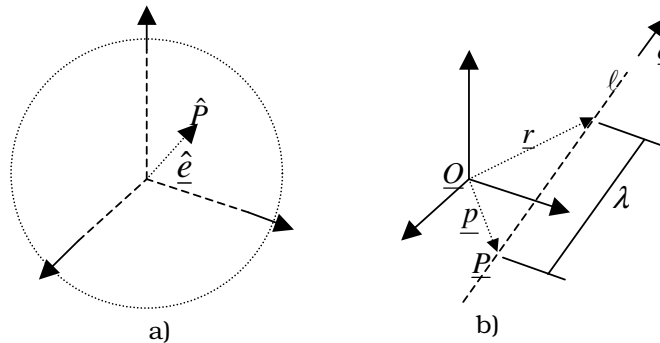


Fig. 2.1. Línea representada en a) coordenadas de línea, b) coordenadas puntuales

#### 2.1.4.2. Representación Angular Dual

Sean  $\ell_1$  y  $\ell_2$  dos líneas en el espacio como se muestra la figura 2.2. El ángulo dual  $\hat{\tau}$  de ambas líneas será como lo muestra la ecuación 2.19.

$$\hat{\tau} = \tau + \epsilon h \tag{2.19}$$

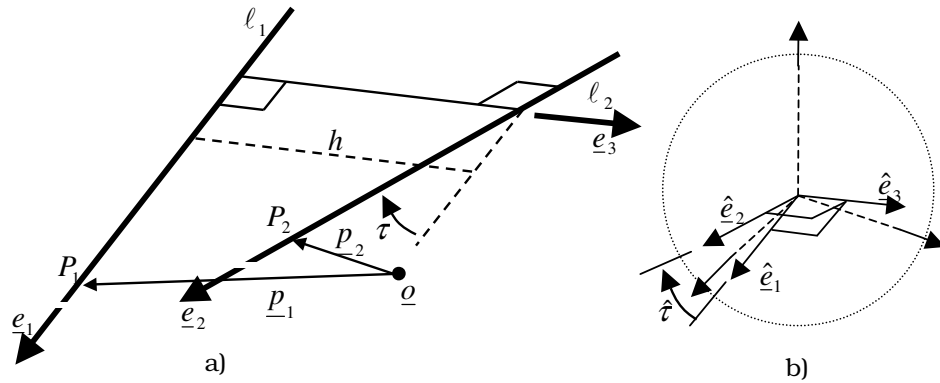


Fig. 2.2. Definición del ángulo dual  $\hat{\tau}$

Las coordenadas de línea pueden trazarse en la esfera dual por medio de los vectores duales  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  como se mostró en la ecuación 2.14. Asimismo se traza el vector  $\hat{e}_3$  el cual es mutuamente perpendicular a  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$ . Entonces, otra representación de las funciones trigonométricas duales del seno y coseno se presentan en la ecuación (2.20)

$$\begin{aligned} \hat{e}_3 &= \frac{\hat{e}_1 \times \hat{e}_2}{\|\hat{e}_1 \times \hat{e}_2\|} \\ \text{Cos}(\hat{\tau}) &= \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \\ \text{Sen}(\hat{\tau}) &= \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Como se puede observar en la primera de las ecuaciones 2.20, se parte de la premisa de que  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  no son paralelas, ya que de serlo, el producto cruz de estos vectores resultaría en el vector  $\underline{0}$ , el cual violaría la condición de norma euclidiana. Para efecto de describir el vector  $\hat{e}_3$  para casos de paralelismo de  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$ , se transcribe el teorema realizado por (González-Palacios, Ángeles & Ranjbaran, 1993) y se presenta la figura 2.3 que explica gráficamente el teorema.

*Teorema 2.1. Sean dos líneas  $l_1$  y  $l_2$ , pasando a través de los puntos  $Q_1$  y  $Q_2$ , paralelas al vector unitario  $e$ .*

Además, sean  $P_1$  y  $P_2$  los puntos más cercanos al punto  $O$  de  $l_1$  y  $l_2$ . Entonces, la línea que pasa a través de  $P_1$  y  $P_2$  es perpendicular a  $e$ , y además, de  $l_1$  y  $l_2$ .

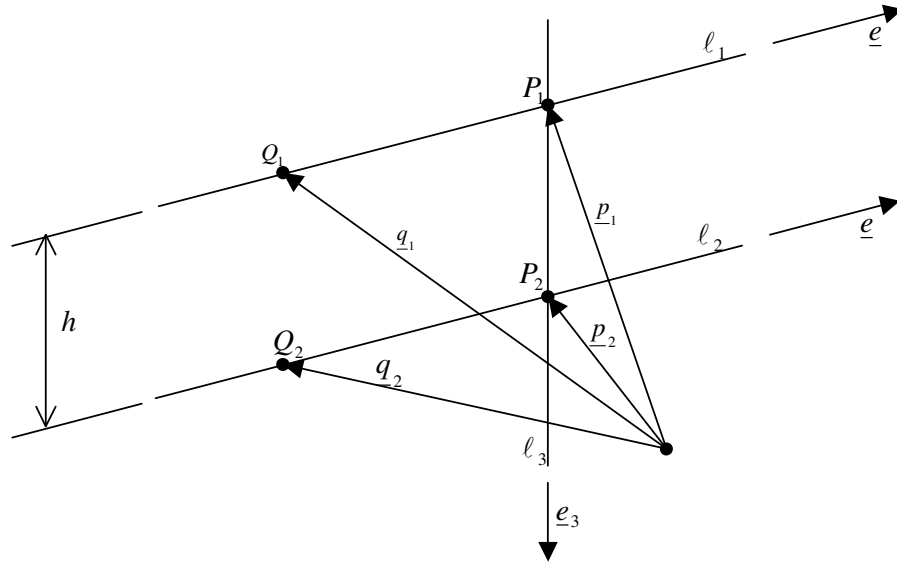


Fig. 2.3. La perpendicular común a dos líneas paralelas

### 2.1.5 TRANSFORMACIONES LINEALES DUALES

Sean  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  dos sistemas coordenados. Si se asume que  $\mathcal{S}_2$  rota un ángulo  $\tau$  en el eje  $X$ , y se desplaza una longitud  $h$  en el mismo eje. Entonces, la transformación de los ejes coordenados de  $\mathcal{S}_2$  respecto a  $\mathcal{S}_1$  esta dada por la matriz dual de movimiento de tornillo, el cual se representa en la ecuación (2.22) junto con las rotaciones en los ejes  $Y$  y  $Z$ .

$$\begin{aligned}
\underline{\hat{Q}}(\hat{\tau}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}(\hat{\tau}) & -\text{Sen}(\hat{\tau}) \\ 0 & \text{Sen}(\hat{\tau}) & \text{Cos}(\hat{\tau}) \end{bmatrix} \quad \angle \hat{\tau} \rightarrow \hat{X} \\
\underline{\hat{R}}(\hat{\tau}) &= \begin{bmatrix} \text{Cos}(\hat{\tau}) & 0 & \text{Sen}(\hat{\tau}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen}(\hat{\tau}) & 0 & \text{Cos}(\hat{\tau}) \end{bmatrix} \quad \angle \hat{\tau} \rightarrow \hat{Y} \\
\underline{\hat{S}}(\hat{\tau}) &= \begin{bmatrix} \text{Cos}(\hat{\tau}) & -\text{Sen}(\hat{\tau}) & 0 \\ \text{Sen}(\hat{\tau}) & \text{Cos}(\hat{\tau}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \angle \hat{\tau} \rightarrow \hat{Z}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

A continuación se enuncia el teorema de Aronhold-Kennedy para espacios tridimensionales. Además se renombrará el eje instantáneo de movimiento de tornillo por (Instantaneous Screw Axis) ISA por sus siglas en inglés.

*Teorema 2.2. Cuando dos cuerpos A y B están en movimiento relativo, un número de puntos de estos cuerpos existen a lo largo de una línea donde la velocidad relativa tiene un mínimo en su magnitud, llamada ISA de B con respecto a A o A respecto a B.*

Sean tres cuerpos, A, B y C que estén en movimiento relativo con tres ISA's referentes a los mismos. Lo que refiere Aronhold-Kennedy es que estos ejes ISA's no están localizados arbitrariamente sino que los tres mantienen una perpendicular común como se muestra la figura 2.4.

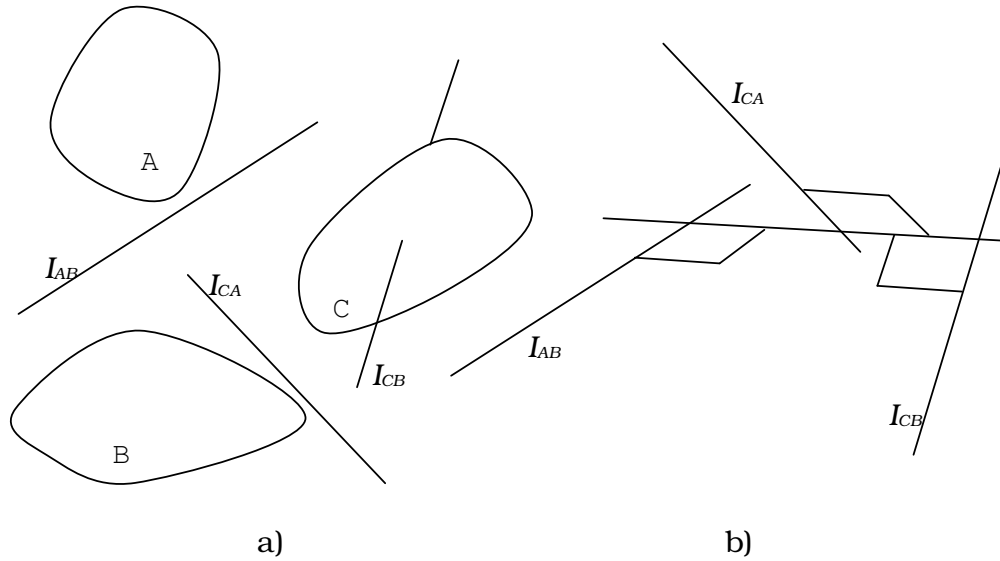


Fig 2.4. a) Ejes relativos de movimiento de tres cuerpos  
 b) Representación Geométrica del Teorema de Aronhold-Kennedy

Ahora se presenta el concepto de esfera dual unitaria la cual consiste en el foco de los puntos de un espacio dual equidistantes referentes al origen de este espacio. Además, la esfera dual unitaria, o esfera dual es el espacio de puntos cuyos vectores de posición son vectores duales. De esta forma, todos los vectores de posición en la esfera dual son vectores duales unitarios y por lo tanto, representan líneas en el espacio euclidiano.

Por virtud de la definición de esfera dual, el movimiento relativo de varios cuerpos se puede representar como movimiento relativo de esferas duales concéntricas.

Suponiendo dos esferas duales  $S_1$  y  $S_2$  que representan a dos cuerpos en movimiento relativo. Entonces, la velocidad angular dual de  $S_2$  respecto a  $S_1$  está dado por la ecuación 2.24

$$\underline{\hat{\omega}}_{21} = \hat{\omega}_{21} \hat{e}_{21} = (\omega_{21} + \varepsilon v_{21}) \hat{e}_{21} \quad (2.24)$$

Donde  $\hat{e}_{21}$  es el vector dual que define el punto  $\hat{P}_{21}$ . Las componentes de  $\hat{\omega}_{21}$ ,  $\omega_{21}$  y  $v_{21}$  representan respectivamente la velocidad angular y la velocidad a lo largo del eje que forman los cosenos directores de  $e_{21}$ .

Añadiendo a las relaciones de movimiento que existen entre elementos en movimiento relativo se enuncia lo siguiente: Sean  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  tres esferas duales que representan a tres elementos en movimiento relativo. Entonces las velocidades respecto a su movimiento relativo estarán dadas según la ecuación 2.25.

$$\hat{\omega}_{31} = \hat{\omega}_{32} + \hat{\omega}_{21} \tag{2.25}$$

Como resultado de la ecuación 2.25 y del teorema de Aronhold-Kennedy, se nombra el siguiente teorema:

*Teorema 2.3. Los puntos duales  $\hat{P}_{21}$ ,  $\hat{P}_{31}$  y  $\hat{P}_{32}$  de tres esferas duales unitarias en movimiento relativo yacen en el mismo círculo dentro de la esfera dual. Como lo muestra la figura 2.5.*

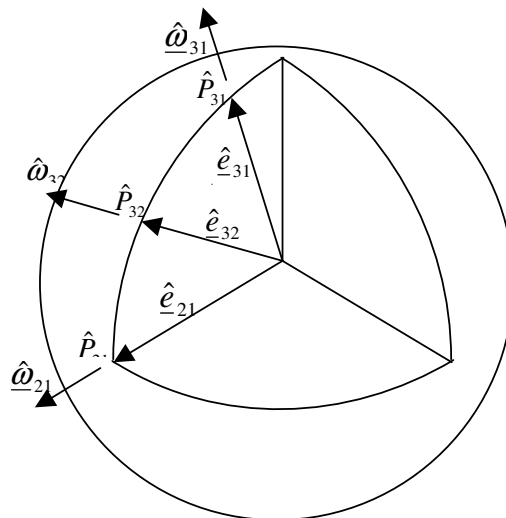


Fig. 2.5. Representación dual del teorema de Aronhold-Kennedy

Además, los círculos antes referidos son la representación dual de los ejes perpendiculares a las ISA's en las cuales existe la traslación dual y la rotación dual.

Basándose en el teorema 2.3, se presentan las matrices de transformación entre vector y vector dual así como su nomenclatura.

Sean cuatro vectores duales representados por  $\hat{e}_{21}$ ,  $\hat{e}_{31}$ ,  $\hat{e}_{32}$  y  $\hat{e}_{43}$ . Por el teorema 2.3 se desarrollan los círculos  $C_{123}$ ,  $C_{234}$  y  $C_{134}$ , donde viven los vectores duales ( $\hat{e}_{21}$ ,  $\hat{e}_{32}$ ,  $\hat{e}_{31}$ ), ( $\hat{e}_{31}$ ,  $\hat{e}_{43}$ ,  $\hat{e}_{41}$ -no mostrado-) y ( $\hat{e}_{32}$ ,  $\hat{e}_{43}$ ,  $\hat{e}_{24}$ -no mostrado-) respectivamente.

Para trasladar el vector  $\hat{k} = [\hat{0} \ \hat{0} \ (1+\epsilon 0)]^T$  alineado al vector  $\hat{e}_{21}$  del círculo  $C_{123}$  hacia el vector  $\hat{e}_{43}$  del círculo  $C_{234}$ , es necesario, de acuerdo a la figura 2.6, una rotación dual en el eje x, lo que equivale a una translación angular a lo largo del círculo  $C_{123}$ ; Después es necesario alinear el eje x' para lograr la perpendicularidad al nuevo círculo  $C_{134}$  lo que se logra con una rotación dual en el eje z', lo que equivale a una rotación dual del vector; Lo siguiente es una repetición de los pasos anteriores, es necesaria una nueva translación angular a lo largo del círculo  $C_{134}$  y una rotación para alinear sus ejes al círculo  $C_{234}$ .

Las transformaciones anteriores, basándose en las ecuaciones 2.22, se reflejan matemáticamente como en las ecuaciones 2.26.

$$\hat{e}_{43} = \underline{\underline{\hat{S}}}[\hat{\tau}_4] \underline{\underline{\hat{Q}}}[\hat{\tau}_3] \underline{\underline{\hat{S}}}[\hat{\tau}_2] \underline{\underline{\hat{Q}}}[\hat{\tau}_1] (\hat{0} \ \hat{0} \ (1+\epsilon 0))^T \quad (2.26)$$

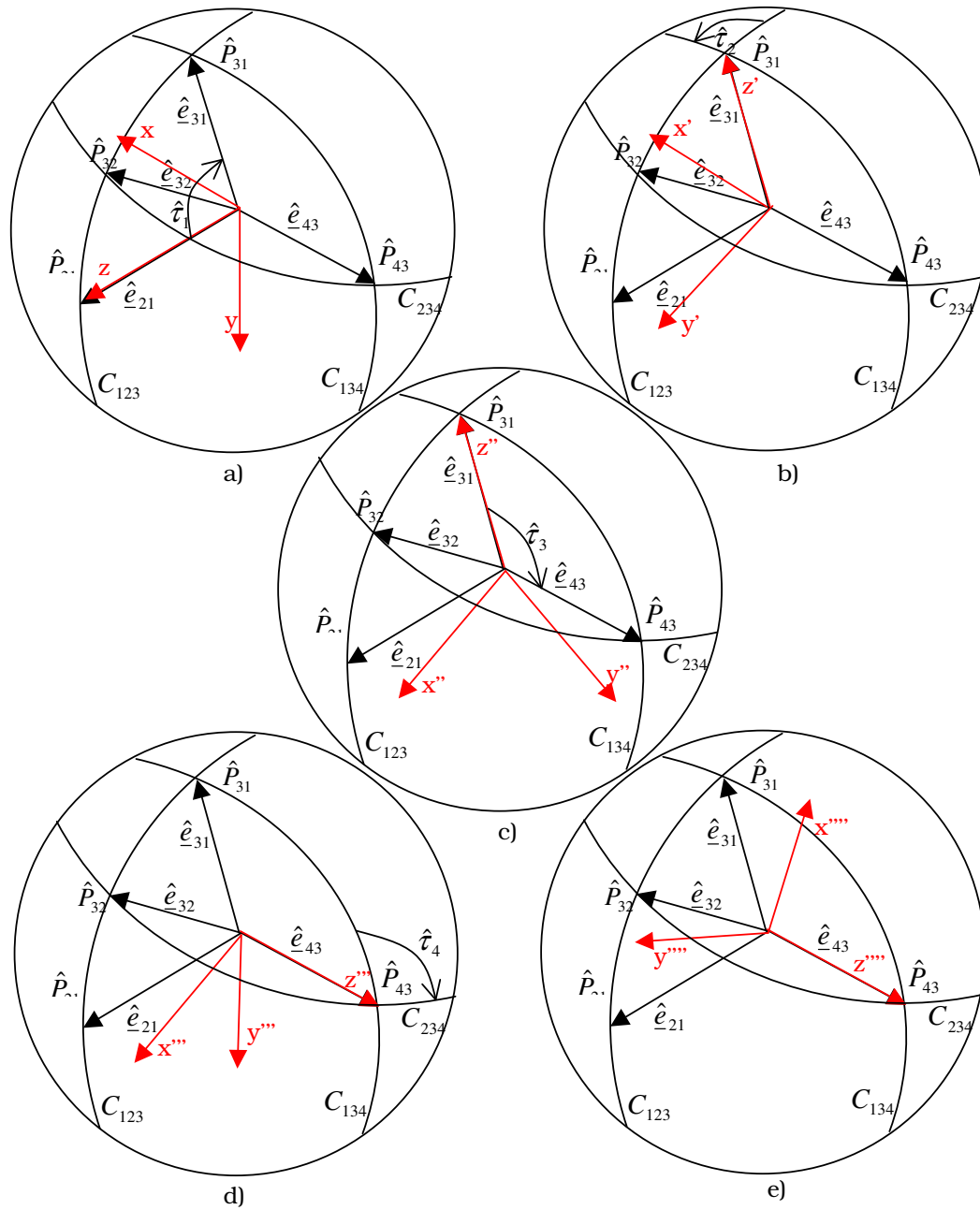


Fig. 2.6. Concepto de matriz de transformación de Denavit-Hartenberg aplicada al espacio dual.

Como ya se comentó, la combinación de las transformaciones duales de translación y rotación angular sirven para referir un vector dual en relación a otro. Ahora se llamará la matriz de transformación de Denavit-



Hartenberg a esta combinación como se muestra en la ecuación 2.27.

$$\begin{aligned}
 {}_{S_f} \underline{\underline{DH}}_{S_i}^{\hat{e}_{xy}, \hat{e}_{yz}} [\hat{\tau}_a \quad \hat{\tau}_b] &= \underline{\underline{\hat{S}}}[\hat{\tau}_a] \underline{\underline{\hat{Q}}}[\hat{\tau}_b] \\
 {}_{S_f} \underline{\underline{DH}}_{S_i}^{\hat{e}_{xy}, \hat{e}_{yz}} [\hat{\tau}_a \quad \hat{\tau}_b] &= \begin{bmatrix} \text{Cos}(\hat{\tau}_a) & -\text{Sen}(\hat{\tau}_a)\text{Cos}(\hat{\tau}_b) & \text{Sen}(\hat{\tau}_a)\text{Sen}(\hat{\tau}_b) \\ \text{Sen}(\hat{\tau}_a) & \text{Cos}(\hat{\tau}_a)\text{Cos}(\hat{\tau}_b) & -\text{Cos}(\hat{\tau}_a)\text{Sen}(\hat{\tau}_b) \\ \hat{0} & \text{Sen}(\hat{\tau}_b) & \text{Cos}(\hat{\tau}_b) \end{bmatrix} \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Donde  $DH$  representa la combinación de una traslación angular,  $\hat{\tau}_a$  desde el vector dual  $\hat{e}_{xy}$  hasta el vector  $\hat{e}_{yz}$  donde  $\hat{\tau}_a$  es el ángulo que existe entre  $\hat{e}_{xy}$  y  $\hat{e}_{yz}$ ; además de una rotación  $\hat{\tau}_b$  de la esfera  $S_f$  respecto a la esfera  $S_i$ .

De ahora en adelante, se añadirá a la nomenclatura de los transformaciones duales un superíndice el cual corresponderá a la esfera en el cual está referido su sistema coordenado, además de un subíndice que indicará el vector dual sobre el cual el vector a transformar está alineado.

## 2.2. SUPERFICIES REGLADAS

Una superficie reglada  $R$  está generada por el movimiento de la línea  $\ell$  definida en la ecuación 2.15, siendo esta última su generatriz. Así, el vector posición de cualquier punto en  $R$  está dado por la ecuación 2.28.

$$\underline{r}(\phi, \psi) = \underline{p}(\phi) + \lambda \underline{e}(\psi) \quad (2.28)$$

Donde  $\underline{p}(\phi)$  representa una curva en el espacio y  $\underline{e}(\psi)$  representa una curva en la esfera unitaria. Tanto  $\phi$  como  $\psi$  son parámetros de estas curvas. En la figura 2.7 se presenta una superficie reglada.

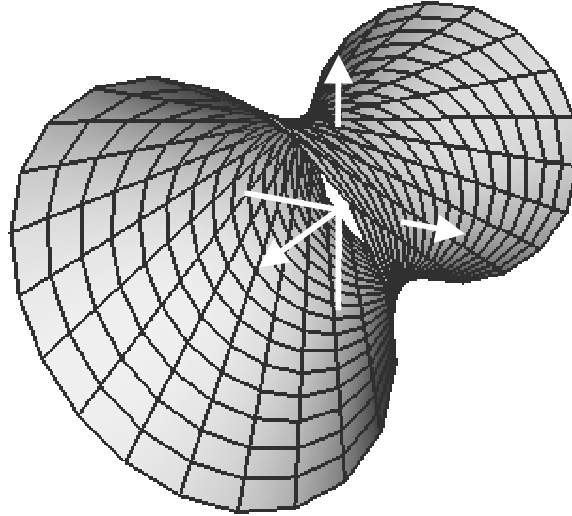


Fig. 2.7. Superficie reglada de

$$\underline{r}(\psi, \phi) = [\text{Cos}(\psi) \quad \text{Sen}(\psi) \quad 0]^T + \lambda \left[ -\text{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{Sen}(\psi) \quad \text{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{Cos}(\psi) \quad \text{Cos}\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]^T$$

Donde  $0 \leq \psi \leq 2\pi, -3 \leq \lambda \leq 3$

Dada una superficie reglada  $R$  se consideran dos generadores separados dados por  $e$  y  $f=e+de$ , y su común perpendicular  $PQ$  como lo muestra la figura 2.8. Entonces el punto  $P$  es el punto central del generador  $e$  y a su vez, el foco de los puntos centrales de la curva definida como curva de estricción.

Así, la superficie de estricción, está definida por la ecuación 2.30

$$\underline{g}(\psi) = \underline{p} - \frac{\underline{e}' \cdot \underline{p}'}{\underline{e}' \cdot \underline{e}'} \underline{e} \tag{2.30}$$

Donde el superíndice prima significa diferenciación respecto a  $\psi$ .

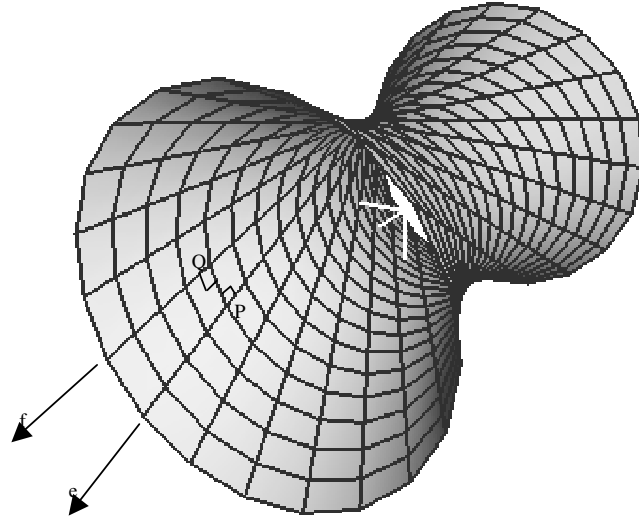


Fig.2.8. Interpretación Gráfica de Superficie de Estricción

Según la ecuación 2.30, el círculo central de un hiperboloide axialmente simétrico es a la vez su curva de estricción. Además se puede notar que la curva de estricción no está definida para superficies cilíndricas y se reduce a un punto en superficies cónicas.

Ahora se definirá la unidad normal de una superficie  $R$ , la cual está dada por las ecuaciones 2.31.

$$\underline{n}(\psi, \lambda) = \frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|}$$

donde

$$\underline{u} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \psi} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \lambda} \tag{2.31}$$

$$\underline{n}(\psi, \lambda) = \frac{(\underline{p}' + \lambda \underline{e}') \times \underline{e}}{\|\underline{u}\|}$$

Finalmente, el radio de curvatura esférico, como menciona (McCarthy, 1987) está dado por la ecuación 2.32.

La normal unitaria toma su valor límite cuando  $\lambda \rightarrow -\infty$ , este valor es llamado la normal asintótica, como se define en la ecuación 2.33.

$$\underline{a} = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \underline{n}(\psi, \lambda) = \frac{-\underline{e}' \times \underline{e}}{\|\underline{e}'\|} \quad (2.33)$$

Un tercer vector es llamado vector central normal, definido por  $\underline{a}$  y  $\underline{e}$  como lo indica la ecuación 2.34.

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{e} = \frac{\underline{e}'}{\|\underline{e}'\|} \quad (2.34)$$

A la triada  $[\underline{a}, \underline{e}, \underline{c}]$  se le llama el triedro natural de  $R$  y está definida en la curva de estricción de  $R$ .

Ahora, si tanto  $g(\psi)$  como  $\underline{e}(\psi)$  son reparametrizados por la longitud  $s$  de su indicatriz esférica, tenemos la ecuación del vector posición de  $R$  en la forma de la ecuación 2.35.

$$\underline{r}(s, \lambda) = \underline{p}(s) + \lambda \underline{e}(s) \quad (2.35)$$

Donde  $s$  está definida como:

$$s = \int_0^\psi \|\underline{e}'\| d\psi \quad (2.36)$$

Las ecuaciones geodésicas de Frenet de la triada  $[\underline{a}, \underline{e}, \underline{c}]$  están dadas según las ecuaciones 2.37

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{e}}{ds} &= \underline{c} \\ \frac{d\underline{c}}{ds} &= \gamma \underline{a} - \underline{e} \\ \frac{d\underline{a}}{ds} &= -\gamma \underline{c} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Donde  $\gamma$  representa la curvatura geodésica de  $R$  y está definida según 2.38

$$\gamma = \frac{\underline{e} \times \underline{e}' \cdot \underline{e}''}{\|\underline{e}'\|^3} \quad (2.38)$$

La posición variacional del triedro definido por  $a$ ,  $c$  y  $e$  está dado entonces por la ecuación 2.39

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= \Delta \underline{a} + \Gamma \underline{e} \\ \text{donde} \\ \Delta &= \frac{\underline{p} \cdot \underline{e} \times \underline{e}'}{\|\underline{e}'\|^2} \\ \Gamma &= \frac{\underline{p} \cdot \underline{e}}{\|\underline{e}'\|} - \frac{1}{\|\underline{e}'\|} \frac{d}{dt} \left( \frac{\underline{p} \cdot \underline{e}}{\|\underline{e}'\|^2} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Finalmente, el radio de curvatura de  $R$ ,  $\hat{\rho} = \rho + \varepsilon r$  está dado por la ecuación 2.40

$$\text{Tan}(\hat{\rho}) = \frac{1/\hat{\zeta}}{\hat{\gamma}/\hat{\zeta}} \quad (2.40)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \hat{\zeta} &= \zeta + \varepsilon(K - \zeta \Delta) \\ \hat{\gamma} &= \gamma + \varepsilon(\Gamma - \gamma \Delta) \\ \zeta &= \sqrt{1 + \gamma^2} \\ K &= \frac{\gamma \Gamma + \Delta}{\zeta} \end{aligned} \quad (2.41)$$

## CINEMÁTICA DE LEVAS

En este capítulo se presenta la cinemática de mecanismos específicamente aquellos que posean levas en su funcionamiento. El análisis partirá de la cinemática de mecanismos de tres elementos para continuar con los de cuatro elementos. Finalmente se analizan los mecanismos de levas indexadas los cuales son el principio de las transmisiones basadas en levas.

### **3.1. CINEMÁTICA DE MECANISMOS DE TRES ELEMENTOS**

En esta sección se analizarán los mecanismos compuestos por tres elementos rígidos: la base, el elemento conductor o leva y el elemento conducido o seguidor. Las funciones principales a desarrollar serán las síntesis de las superficies de contacto de los dos elementos rígidos que serán a su vez el contorno de la leva y del seguidor respectivamente. Estas superficies serán modeladas como superficies regladas. Gracias a que las entradas y salidas serán duales, se podrán modelar entradas y salidas rotacionales, traslacionales y de tornillo.

Estos mecanismos, de acuerdo al teorema 2.2 tienen tres ISA's donde los ejes  $I_{21}$  e  $I_{31}$ , con los subíndices  $1, 2$  y  $3$  significando la base, la leva y el seguidor respectivamente, representan los ejes de giro dual de la leva y del seguidor respectivamente.

También, de acuerdo al teorema 2.3, estos cuerpos pueden representarse por medio de esferas duales

concéntricas en donde sus ejes de movimiento relativo yacen sobre un solo círculo  $C_{123}$ , como lo muestra la figura 3.1.

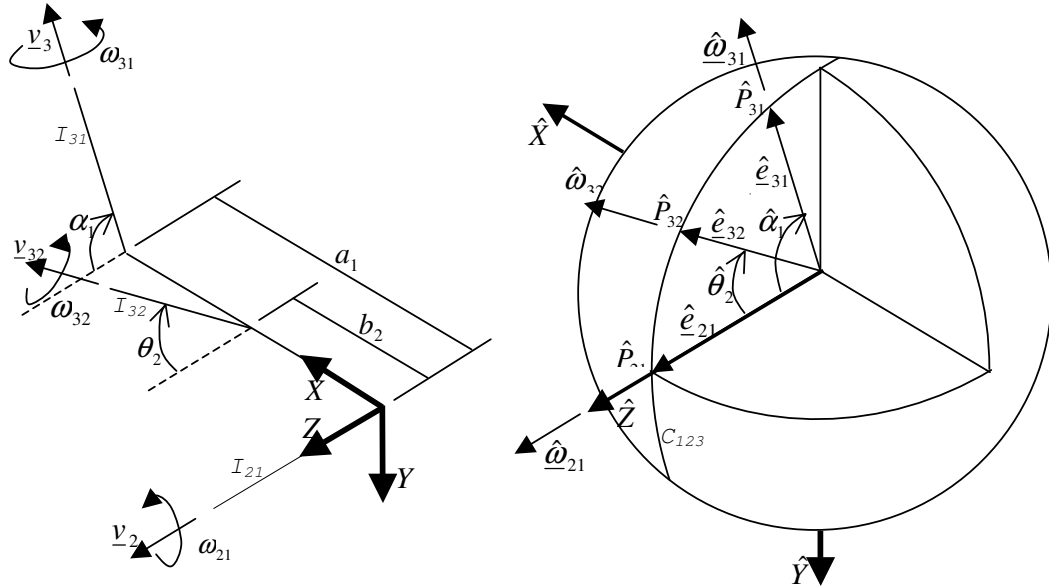


Fig. 3.1. Traslado de Mecanismo de tres elementos rígidos a la esfera dual

Sean ahora tres esferas,  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  que representen a la base, la leva y el seguidor respectivamente. De acuerdo a la ecuación 2.25, las velocidades relativas de las esferas duales estarán dadas por la ecuación 3.1.

$$\hat{\omega}_{31} = \hat{\omega}_{32} + \hat{\omega}_{21} \tag{3.1}$$

Localizando las esferas de tal forma que sus ejes  $\hat{X}$  sean colineales y sus ejes  $\hat{Z}$  estén orientados hacia sus puntos referidos a sus ISA's., entonces estos puntos estarán localizados, en el sistema de referencia particular de cada esfera según la ecuación 3.2

$$\hat{k} = (\hat{o} \quad \hat{o} \quad (1 + \epsilon 0)) \tag{3.2}$$

De acuerdo a la ecuación 2.19 y a la figura 3.1, los ángulos referidos se definen como en las ecuaciones 3.3.

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 &= \alpha_1 + \varepsilon a_1 \\ \hat{\theta}_2 &= \theta_2 + \varepsilon b_2\end{aligned}\quad (3.3)$$

Valiéndose de la información gráfica de la figura 3.1, y las ecuaciones 2.22 se llega a la ecuación 3.4, la cual representa los vectores de posición de las ISA's en la esfera dual. Como información adicional se menciona que esta ecuación se pudo lograr con la ecuación 2.27, sin embargo, al no existir cambio de círculo, se realizan las transformaciones de forma separada.

$$\begin{aligned}\hat{e}_{31} &= \underline{\underline{\hat{Q}}}[\hat{\alpha}_1] \hat{k} \\ \hat{e}_{32} &= \underline{\underline{\hat{Q}}}[\hat{\theta}_2] \hat{k} \\ \hat{e}_{21} &= \underline{\underline{\hat{k}}}\end{aligned}\quad (3.3)$$

Sustituyendo la ecuación 3.3 en la ecuación 3.1 con la representación mostrada en la ecuación 2.24 se obtienen las ecuaciones 3.4

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{32} \text{Sen}(\hat{\theta}_2) &= \hat{\omega}_{31} \text{Sen}(\hat{\alpha}_1) \\ \hat{\omega}_{32} \text{Cos}(\hat{\theta}_2) &= \hat{\omega}_{31} \text{Cos}(\hat{\alpha}_1) - \hat{\omega}_{21} \\ &\quad \therefore \\ \hat{\omega}_{32}^2 &= \hat{\omega}_{31}^2 - 2 \hat{\omega}_{31} \hat{\omega}_{21} + \hat{\omega}_{21}^2 \\ \text{Tan}(\hat{\theta}_2) &= \frac{\hat{\omega}_{31} \text{Sen}(\hat{\alpha}_1)}{\hat{\omega}_{31} \text{Cos}(\hat{\alpha}_1) - \hat{\omega}_{21}}\end{aligned}\quad (3.4)$$

Trasladando del espacio dual al espacio euclidiano las últimas dos ecuaciones 3.4 se llega a las ecuaciones 3.5.



$$\begin{aligned}
 \omega_{32} &= \pm \sqrt{\omega_{31}^2 - 2 \omega_{31} \omega_{21} \cos(\alpha_1) + \omega_{21}^2} \\
 v_{32} &= \frac{\omega_{31} v_{31} + \omega_{31} \omega_{21} a_1 \sin(\alpha_1) - (\omega_{31} v_{21} + \omega_{21} v_{31}) \cos(\alpha_1) + \omega_{21} v_{21}}{\omega_{32}} \\
 \tan(\theta_2) &= \frac{\omega_{31} \sin(\alpha_1)}{\omega_{31} \cos(\alpha_1) - \omega_{21}} \\
 b_2 &= \frac{(\omega_{31}^2 - \omega_{31} \omega_{21} \cos(\alpha_1)) a_1 + (\omega_{31} v_{21} - \omega_{21} v_{31}) \sin(\alpha_1)}{\omega_{32}^2}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Tomando la primera ecuación de 3.5, se puede concluir que la velocidad  $\omega_{32}$  que es la velocidad de la leva respecto al seguidor logra ser eliminada cuando  $\alpha_1$  es cero. Esto significa que el deslizamiento será nulo y se tendrá un movimiento puramente rotatorio cuando los ejes de movimiento tanto de la leva como del seguidor son paralelos.

Sea el caso ahora de una rotación de  $S_2$  respecto a  $S_1$  en función del ángulo  $\hat{\psi} = \psi + \varepsilon z_2$  donde tanto  $\psi$  como  $z_2$  son funciones del tiempo, entonces el punto  $\hat{P}_{32}$  trazará su trayectoria sobre  $S_2$  a través del vector dual  $\hat{s}_{32}^{S_2}(\hat{\psi})$  el cual se presenta en la ecuación 3.6.

$$\hat{s}_{32}^{S_2}(\hat{\psi}) =_{S_1}^{S_2} \underline{DH}_{\hat{\varepsilon}_{21}^{\hat{\varepsilon}_{32}}} \left[ -\hat{\psi} \quad \hat{\theta}_2 \right] \hat{k} \tag{3.6}$$

Análogamente, si  $S_3$  rota con respecto a  $S_1$  en función del ángulo  $\hat{\phi} = \phi + \varepsilon z_3$ , donde tanto  $\phi$  como  $z_3$  son funciones del tiempo, entonces el punto  $\hat{P}_{32}$  trazará su trayectoria sobre  $S_3$  a través del vector dual  $\hat{s}_{32}^{S_3}(\hat{\phi})$  el cual se representa en la ecuación 3.7.

$$\hat{s}_{32}^{S_3}(\hat{\phi}) =_{S_1}^{S_3} \underline{DH}_{\hat{e}_{21}}^{\hat{e}_{32}} \left[ -\hat{\phi} \quad (\hat{\theta}_2 - \hat{\alpha}_1) \right] \hat{k} \quad (3.7)$$

Como se puede apreciar en la figura 3.1, el punto  $\hat{P}_{32}$  representado por  $\hat{s}_{32}^{S_2}(\hat{\psi})$  será la trayectoria que siga el punto de contacto entre la leva y el seguidor desde el punto de referencia de la leva de tal forma que esta trayectoria será a su vez la periferia de la leva. Análogamente, el punto  $\hat{P}_{32}$  representado por  $\hat{s}_{32}^{S_3}(\hat{\phi})$  será la trayectoria que siga el punto de contacto entre la leva y el seguidor desde el sistema de referencia del seguidor siendo esta trayectoria el contorno del seguidor. Expandiendo la ecuación 3.7 y aplicando la transformación de coordenadas de línea a coordenadas puntuales por medio de la ecuación 2.15 y representando en forma de superficie reglada como lo indica la ecuación 2.28 se forman las ecuaciones 3.8. Estas funciones proporcionan los contornos de la leva y el seguidor desde un sistema de referencia local.

$$\begin{aligned} r_2(t, \lambda) &= \begin{bmatrix} b_2 \text{Cos}(\psi(t)) - z_2 \text{Sen}(\psi(t)) \text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) \\ -b_2 \text{Sen}(\psi(t)) - z_2 \text{Cos}(\psi(t)) \text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) \\ -z_2 \text{Sen}(\theta_2)^2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -S(\psi(t))S(\theta_2) \\ -\text{Cos}(\psi(t))S(\theta_2) \\ \text{Cos}(\theta_2) \end{bmatrix} \\ r_3(t, \lambda) &= \begin{bmatrix} d \text{Cos}(\phi(t)) - z_3 \text{Sen}(\phi(t)) \text{Sen}(\beta) \text{Cos}(\beta) \\ -d \text{Sen}(\phi(t)) - z_3 \text{Cos}(\phi(t)) \text{Sen}(\beta) \text{Cos}(\beta) \\ -z_3 \text{Sen}(\beta)^2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\text{Sen}(\phi(t)) \text{Sen}(\beta) \\ -\text{Cos}(\phi(t)) \text{Sen}(\beta) \\ \text{Cos}(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Donde  $d = b_2 - a_1$  y  $\beta = \theta_2 - \alpha_1$ .

En la tabla que se encuentra en la figura 3.2 se muestran las características de mecanismos Rotacional-Contacto-Rotacional (RHR), Revolución-Contacto-Prismático (RHP) y Prismático-Contacto-Revolución (PHR), así como

ejemplos de cada uno de ellos generados con las ecuaciones 3.8.

	RHR	RHP	PHR
Relación Entrada-Salida	$\phi = \phi(\psi)$	$z_3 = z_3(\psi)$	$\phi = \phi(z_2)$
Tipo de Par Entrada-Salida	$z_2 = v_2 = 0$ $z_3 = v_3 = 0$	$z_2 = v_2 = 0$ $\phi = \omega_3 = 0$	$\psi = \omega_2 = 0$ $z_3 = v_3 = 0$
Derivada Entrada-Salida	$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} = \phi' \omega_2$	$v_3 = \frac{dz_3}{dt} = \frac{dz_3}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} = z_3' \omega_2$	$\omega_3 = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dz_2} \frac{dz_2}{dt} = \phi' v_2$

Figura 3.2 Entradas para Mecanismos RHR, RHP y PHR

### 3.2. CINEMÁTICA DE MECANISMOS DE CUATRO ELEMENTOS

La cinemática de mecanismos de cuatro elementos se realiza análogamente a la cinemática de tres elementos, sin embargo se agrega al espacio dual una nueva esfera  $S_4$  la cual representa al rodamiento. De esta forma existen seis ISA's y de acuerdo al teorema 2.3, existirán cuatro círculos llamados  $C_{123}(\hat{P}_{21}, \hat{P}_{32}, \hat{P}_{31})$ ,  $C_{234}(\hat{P}_{32}, \hat{P}_{43}, \hat{P}_{42})$ ,  $C_{134}(\hat{P}_{31}, \hat{P}_{43}, \hat{P}_{41})$  y  $C_{124}(\hat{P}_{21}, \hat{P}_{42}, \hat{P}_{41})$ .

Para definir un círculo dentro de la esfera dual es necesario solamente dos puntos, de esta forma, los círculos  $C_{123}$  y  $C_{134}$  son automáticamente proporcionados con los puntos dados  $\hat{P}_{21}$ ,  $\hat{P}_{31}$  y  $\hat{P}_{43}$  que representan respectivamente el eje de giro de la leva, del seguidor y del rodamiento.

Para definir el círculo  $C_{234}$  son necesarios los puntos  $\hat{P}_{43}$  y  $\hat{P}_{32}$ , este último de acuerdo a la ecuación 3.3.

Finalmente el círculo  $C_{124}$  es definido por el punto

dado  $\hat{P}_{21}$  y el punto  $\hat{P}_{42}$ , el cual está dado por el radio dual del rodamiento, representado por  $\hat{\alpha}_4$ . Estos círculos así como sus parámetros están mostrados en la figura 3.3.

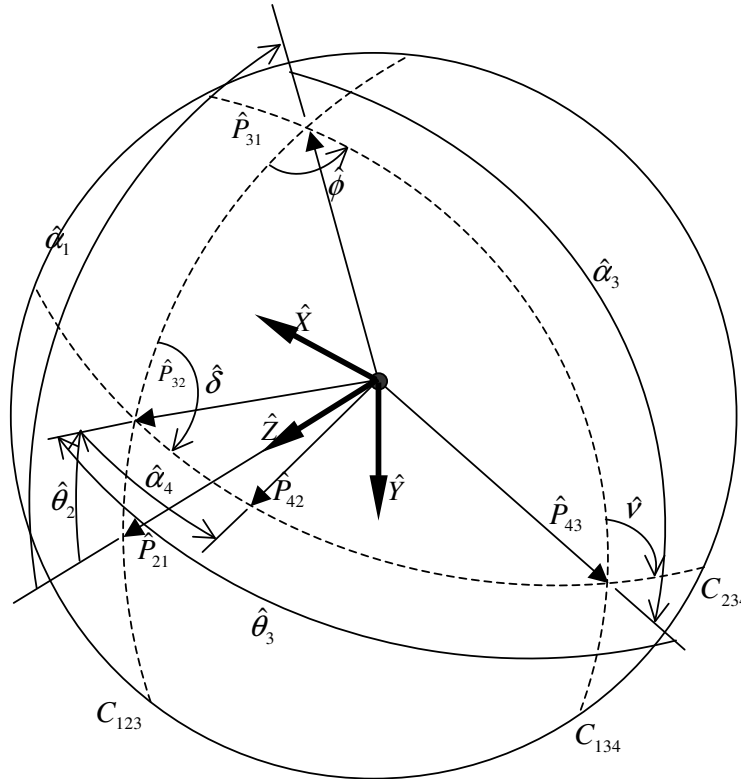


Figura 3.3. Esfera dual de un mecanismo de cuatro elementos

Los puntos importantes para el diseño de este tipo de mecanismos lo constituyen  $\hat{P}_{42}$  y  $\hat{P}_{43}$  que definen respectivamente la superficie de contacto y la superficie de paso de la leva, ésta última necesaria para obtener el ángulo de presión. Análogamente al desarrollo mostrado en los mecanismos de tres eslabones, el punto de contacto  $\hat{P}_{42}^{S_2}(t)$  referido a la esfera  $S_2$  de la leva proporcionará la trayectoria del contorno de la leva, mientras que el punto

$\hat{P}_{43}^{S_2}(t)$  referido a la esfera  $S_2$  de la leva proporcionará la trayectoria de la superficie de paso, los vectores que representan a estos puntos en el espacio dual se presentan en las ecuaciones 3.9 y 3.10.

$$\hat{s}_{43}^{S_2}(t) = {}_{S_1}^{S_2} \underline{\underline{DH}}_{\hat{e}_{21}}^{\hat{e}_{31}} [-\hat{\psi} \quad \hat{\alpha}_1] {}_{S_3}^{S_1} \underline{\underline{DH}}_{\hat{e}_{31}}^{\hat{e}_{43}} [\hat{\phi} \quad \hat{\alpha}_3] \hat{k}_{\hat{e}_{43}}^{S_3} \quad (3.9)$$

$$\hat{s}_{42}^{S_2}(t) = {}_{S_1}^{S_2} \underline{\underline{DH}}_{\hat{e}_{21}}^{\hat{e}_{32}} [-\hat{\psi} \quad \hat{\theta}_2] {}_{S_4}^{S_1} \underline{\underline{DH}}_{\hat{e}_{32}}^{\hat{e}_{42}} [\hat{\delta} \quad (\hat{\theta}_3 - \hat{\alpha}_3)] \hat{k}_{\hat{e}_{42}}^{S_4} \quad (3.10)$$

Además, aplicando las ecuaciones 2.20,  $\hat{\theta}_3$  está dado por la ecuación (3.11)

$$\text{Tan}(\hat{\theta}_3) = \frac{\hat{e}_{32} \times \hat{e}_{43} \cdot \hat{e}_{234}}{\hat{e}_{32} \cdot \hat{e}_{43}} \quad (3.11)$$

Donde los vectores mostrados a la derecha de la igualdad pueden ser representados en cualquier base, siempre que sea la misma ya que los productos punto y cruz son invariantes siempre que sean en el mismo sistema coordenado. Así, si referimos los vectores utilizados 3.11 en la base de  $S_1$ , tenemos las ecuaciones 3.12.

$$\begin{aligned} \hat{e}_{32}^{S_1} &= {}_{S_1}^{S_1} \underline{\underline{DH}}_{\hat{e}_{21}}^{\hat{e}_{32}} [\hat{0} \quad \hat{\theta}_2] \hat{k}_{\hat{e}_{32}}^{S_1} \\ \hat{e}_{43}^{S_1} &= {}_{S_1}^{S_1} \underline{\underline{DH}}_{\hat{e}_{21}}^{\hat{e}_{31}} [\hat{0} \quad \hat{\alpha}_1] {}_{S_3}^{S_1} \underline{\underline{DH}}_{\hat{e}_{31}}^{\hat{e}_{43}} [\hat{\phi} \quad \hat{\alpha}_3] \hat{k}_{\hat{e}_{43}}^{S_3} \\ \hat{e}_{234}^{S_1} &= \frac{\hat{e}_{32}^{S_1} \times \hat{e}_{43}^{S_1}}{\|\hat{e}_{32}^{S_1} \times \hat{e}_{43}^{S_1}\|} \end{aligned} \quad (3.12)$$

El ángulo  $\hat{\delta} = \delta + \varepsilon z_{32}$  que representa la rotación de  $S_4$  respecto a  $S_1$  se define de acuerdo a la ecuación 3.13

$$\text{Tan}(\hat{\delta}) = \frac{\hat{e}_{123}^{S_1} \times \hat{e}_{234}^{S_1} \cdot \hat{e}_{32}^{S_1}}{\hat{e}_{123}^{S_1} \cdot \hat{e}_{234}^{S_1}} \quad (3.13)$$

Donde

$$\hat{e}_{123}^{S_1} = \left[ (1 + \varepsilon 0) \quad \hat{0} \quad \hat{0} \right]^T \quad (3.14)$$

Para no permitir superficies que se corten entre sí es necesario que el ángulo dual  $\hat{\alpha}_4$  esté restringido como se indica en la ecuación 3.15.

$$\hat{\alpha}_3 < \hat{\rho}_{\min} \quad (3.15)$$

Donde  $\hat{\rho}_{\min}$  está definido de acuerdo a la ecuación 2.40.

Análogamente al ángulo dual  $\hat{\theta}_3$ , el ángulo  $\hat{\nu}$  que representa el giro de la esfera dual  $S_4$  respecto a  $S_3$  está dado por la ecuación 3.16.

$$\text{Tan}(\hat{\nu}) = \frac{\hat{e}_{341}^{S_1} \times \hat{e}_{234}^{S_1} \cdot \hat{e}_{43}^{S_1}}{\hat{e}_{341}^{S_1} \cdot \hat{e}_{234}^{S_1}} \quad (3.16)$$

Donde  $\hat{e}_{234}^{S_1}$  y  $\hat{e}_{43}^{S_1}$  son definidos en 3.12 y  $\hat{e}_{341}^{S_1}$  se define según la ecuación 3.17

$$\hat{e}_{341}^{S_1} = \frac{\hat{e}_{31}^{S_1} \times \hat{e}_{43}^{S_1}}{\text{Sen}(\hat{\alpha}_3)} \quad (3.17)$$

Para encontrar las velocidades relativas que conciernen a la leva  $\hat{\omega}_{42}$  y  $\hat{\omega}_{43}$  se desarrollan de acuerdo al teorema de Aronhold-Kennedy como en la ecuación 3.18

$$\hat{\omega}_{32} \hat{e}_{32}^{S_1} = \hat{\omega}_{42} \hat{e}_{42}^{S_1} + \hat{\omega}_{43} \hat{e}_{43}^{S_1} \quad (3.18)$$

Donde

$$\hat{e}_{42}^{S_1} = {}_{S_1}^{S_1} \underline{DH} \begin{matrix} \hat{\theta} \\ \hat{\alpha}_1 \end{matrix} \begin{matrix} S_1 \\ S_3 \end{matrix} \underline{DH} \begin{matrix} \hat{e}_{43} \\ \hat{e}_{31} \end{matrix} \begin{matrix} \hat{\phi} \\ \hat{\alpha}_3 \end{matrix} \begin{matrix} S_3 \\ S_4 \end{matrix} \underline{DH} \begin{matrix} \hat{e}_{42} \\ \hat{e}_{43} \end{matrix} [\hat{v} \ \hat{\alpha}_4] \hat{k}_{\hat{e}_{42}}^{S_4} \quad (3.19)$$

Sustituyendo 3.19 y 3.12 en 3.18 después de desarrollar y simplificar se obtiene la ecuación 3.20.

$$\begin{bmatrix} \hat{\omega}_{42} \text{Sen}(\hat{\alpha}_4) \text{Sen}(\hat{v}) \\ \hat{\omega}_{42} \text{Sen}(\hat{\alpha}_4) \text{Cos}(\hat{v}) \\ \hat{\omega}_{42} \text{Cos}(\hat{\alpha}_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\omega}_{32} \text{Sen}(\hat{\alpha}_1 - \hat{\theta}_2) \text{Sen}(\hat{\phi}) \\ -\hat{\omega}_{32} (\text{Cos}(\hat{\alpha}_1 - \hat{\theta}_2) \text{Sen}(\hat{\alpha}_3) + \text{Sen}(\hat{\alpha}_1 - \hat{\theta}_2) \text{Cos}(\hat{\phi}) \text{Cos}(\hat{\alpha}_3)) \\ \hat{\omega}_{43} - \hat{\omega}_{32} (\text{Cos}(\hat{\alpha}_1 - \hat{\theta}_2) \text{Cos}(\hat{\alpha}_3) - \text{Sen}(\hat{\alpha}_1 - \hat{\theta}_2) \text{Cos}(\hat{\phi}) \text{Sen}(\hat{\alpha}_3)) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Desarrollando la ecuación 3.20, se obtienen las ecuaciones 3.21.

$$\hat{\omega}_{42} = \frac{-\text{Sen}(\hat{\alpha}_1 - \hat{\theta}_2) \text{Sen}(\hat{\phi})}{\text{Sen}(\hat{\alpha}_4) \text{Sen}(\hat{v})} \quad (3.21)$$

$$\hat{\omega}_{43} = \hat{\omega}_{42} \text{Cos}(\hat{\alpha}_4) + \hat{\omega}_{32} (\text{Cos}(\hat{\alpha}_1 - \hat{\theta}_2) \text{Cos}(\hat{\alpha}_3) - \text{Sen}(\hat{\alpha}_1 - \hat{\theta}_2) \text{Cos}(\hat{\phi}) \text{Sen}(\hat{\alpha}_3))$$

Cabe destacar por las ecuaciones 3.21 que el movimiento puramente rotativo, es decir, que la componente primal de  $\hat{\omega}_{42}$  sea 0, se da únicamente cuando  $\alpha_1 = 0$  que es el caso de mecanismo plano o cuando  $a_1 = 0$  que es el caso esférico.

En la tabla que se encuentra en la figura 3.4 se muestran las características así como ejemplos de mecanismos Rotacional-Contacto-Cilíndrico-Rotacional (RHCR)

y Revolución-Contacto-Rotacional-Rotacional (RHRR) en su forma esférica y plana. Las configuraciones con uniones prismáticas no se muestran por estar fuera de este trabajo.

	RHCR	RHRR (Esférico)	RHRR (Plano)
Relación Entrada-Salida	$\phi = \phi(\psi)$	$z_3 = z_3(\psi)$	$\phi = \phi(z_2)$
Tipo de Par Entrada-Salida	$z_2 = v_2 = 0$ $z_3 = v_3 = 0$	$z_2 = v_2 = 0$ $z_3 = v_3 = 0$ $z_{32} = v_{32} = 0$ $z_{43} = v_{43} = 0$ $\phi = \omega_3 = 0$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ $\theta_2 = \theta_3 = 0$	$z_2 = v_2 = 0$ $z_3 = v_3 = 0$ $z_{32} = v_{32} = 0$ $z_{43} = v_{43} = 0$ $\phi = \omega_3 = 0$ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ $b_2 = b_3 = 0$

Figura 3.4 Entradas para Mcanismos RHRR y RHCR

Aplicando los valores de entrada para RHRR plano mostrados en la figura 3.4 en las ecuación 3.9 y 3.10, además de aplicar la transformación de coordenadas puntuales por medio de la ecuación 2.15 y representando en forma de superficie reglada como lo indica la ecuación 2.28, se presenta la ecuación de contorno de la leva  $r_c(\psi, \lambda)$  así como superficie de paso  $r_p(\psi, \lambda)$  mostradas en coordenadas locales en las ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 r_p(\psi, \lambda) &= \begin{bmatrix} \text{Cos}(\psi)a_1 + \text{Cos}(\psi - \phi)a_3 \\ -\text{Sen}(\psi)a_1 - \text{Sen}(\psi - \phi)a_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 r_c(\psi, \lambda) &= \begin{bmatrix} \text{Cos}(\psi)b_2 + \text{Cos}(\psi - \delta)(b_3 - a_4) \\ -\text{Sen}(\psi)b_2 - \text{Sen}(\psi - \delta)(b_3 - a_4) \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Donde:

$$b_2 = \frac{a1}{1+n} \quad n \rightarrow \text{numero de seguidores}$$



$$b_3 = \sqrt{(a_3 \cos[\phi] + a_1 - b_2)^2 + (a_3 \sin[\phi])^2} \quad (3.23)$$

$$\tan[\delta] = \frac{a_3 \sin[\phi]}{a_3 \cos[\phi] + a_1 - b_2}$$

Las entradas características de un mecanismo RHRR plano se muestran en la figura 3.5

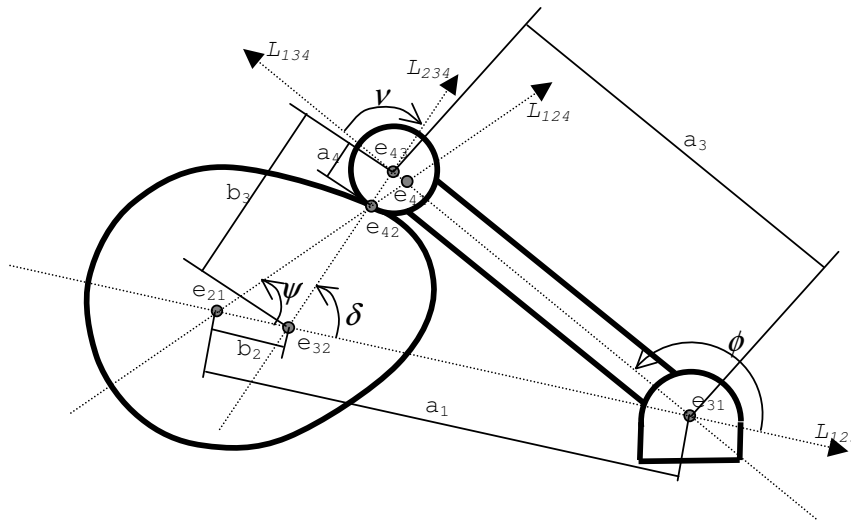


Figura 3.5 Mecanismo RHRR plano

### 3.3. **ÁNGULOS DE PRESIÓN**

El ángulo de presión es definido como el compuesto entre la dirección del vector unitario normal a la superficie de paso y la dirección de la velocidad del seguidor en el punto de contacto. De esta forma, la normal unitaria definida en las ecuaciones 2.31 queda de la forma:

$$\underline{n} = \frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|} \quad (3.24)$$

$$\underline{u} = \frac{\partial r_p}{\partial \psi} \times \frac{\partial r_p}{\partial \lambda}$$

Por otra parte, el vector unitario  $w$  paralelo a la velocidad del seguidor para puntos en el eje  $I_{43}$  es obtenido de la forma:

$$\underline{w} = \frac{\underline{\xi}}{\|\underline{\xi}\|} \quad (3.25)$$

$$\underline{\xi} = \omega \times r_p$$

De esta forma, el ángulo de presión queda definido como:

$$\tan[\mu] = \frac{\|\underline{n} \times \underline{w}\|}{\underline{n} \cdot \underline{w}} \quad (3.26)$$

Aplicando ecuaciones 2.31 en 3.22, el ángulo de presión para un mecanismo plano se puede escribir como:

$$\tan[\mu] = \frac{a_3(\partial_\psi(\phi) - 1) - a_1 \cos[\phi]}{a_1 \sin[\phi]} \quad (3.27)$$

### **3.4. MECANISMOS DE LEVAS INDEXADAS**

Este tipo de mecanismos es utilizado para proporcionar movimientos intermitentes con aplicaciones ampliamente utilizadas en la industria como el llamado Mecanismo de Ginebra.

La teoría conocida para el estudio de mecanismos indexados está casi totalmente basada en la suposición de que el movimiento requerido es un movimiento intermitente. La teoría presentada a continuación aplica las herramientas

matemáticas mostradas en el capítulo 2 para desarrollar los puntos de la periferia de un mecanismo indexado para movimiento continuo entre el seguidor y la leva.

Como se mostró en la figura 3.4, la restricción para que el movimiento relativo entre el elemento conductor o leva y el seguidor sea rotativo, es que los ejes de conducción sean paralelos o coincidentes. Esto lleva a la posibilidad de mecanismos planos o esféricos.

Por la geometría de la mayoría de los robots de cuartos limpios y costos de maquinados, se presentan únicamente los mecanismos planos indexados como opción viable.

### **3.5. VARIACIÓN GRÁFICA DE PARÁMETROS**

Con la ayuda del software Mathematica se modelaron las ecuaciones 3.22 y 3.27 para obtener tanto el contorno de la leva, como su ángulo de presión para distintos parámetros. Como se muestra en las figuras 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9.

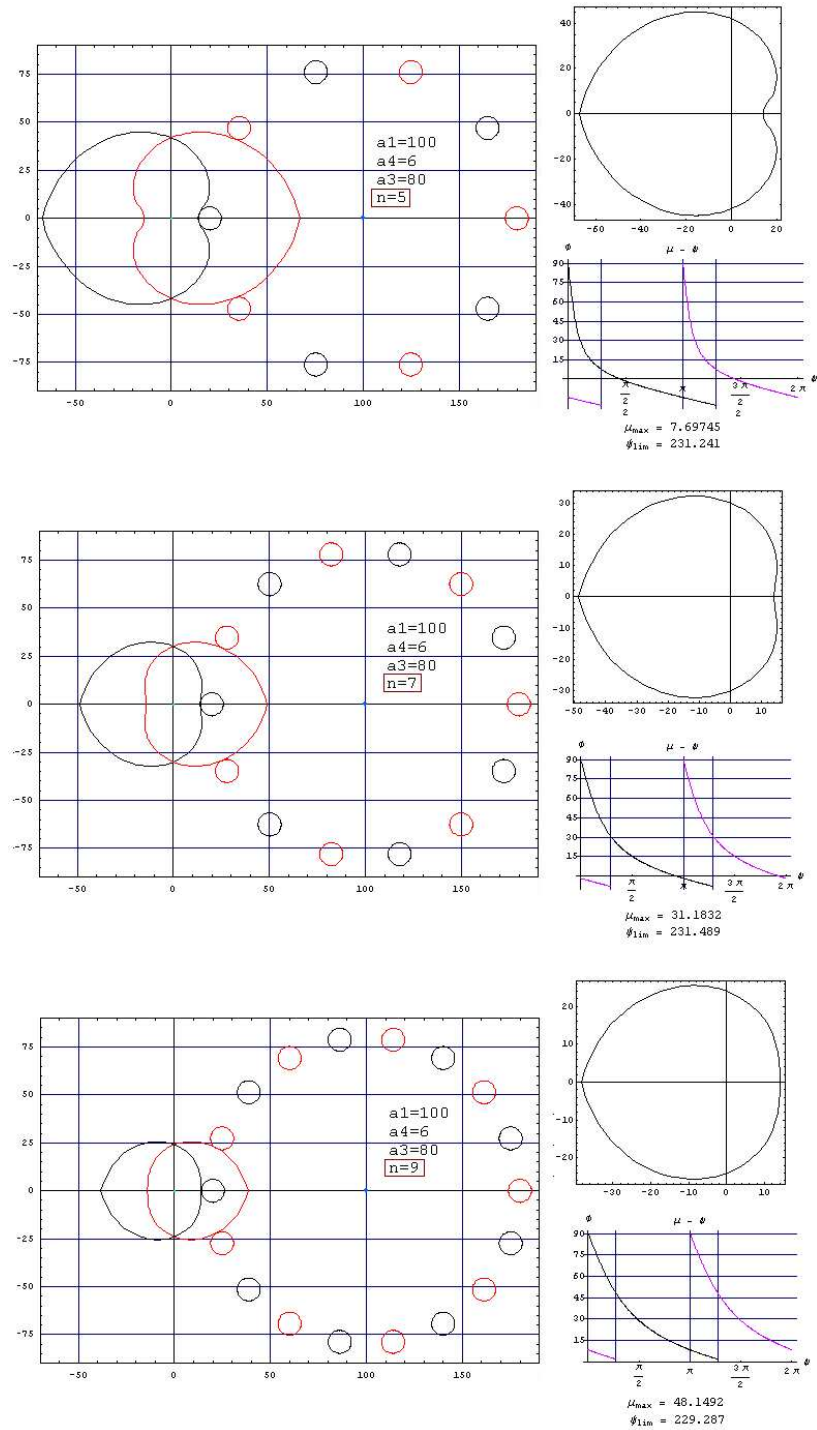


Figura 3.6 Variación por número de seguidores  $n=5, 7, 9$

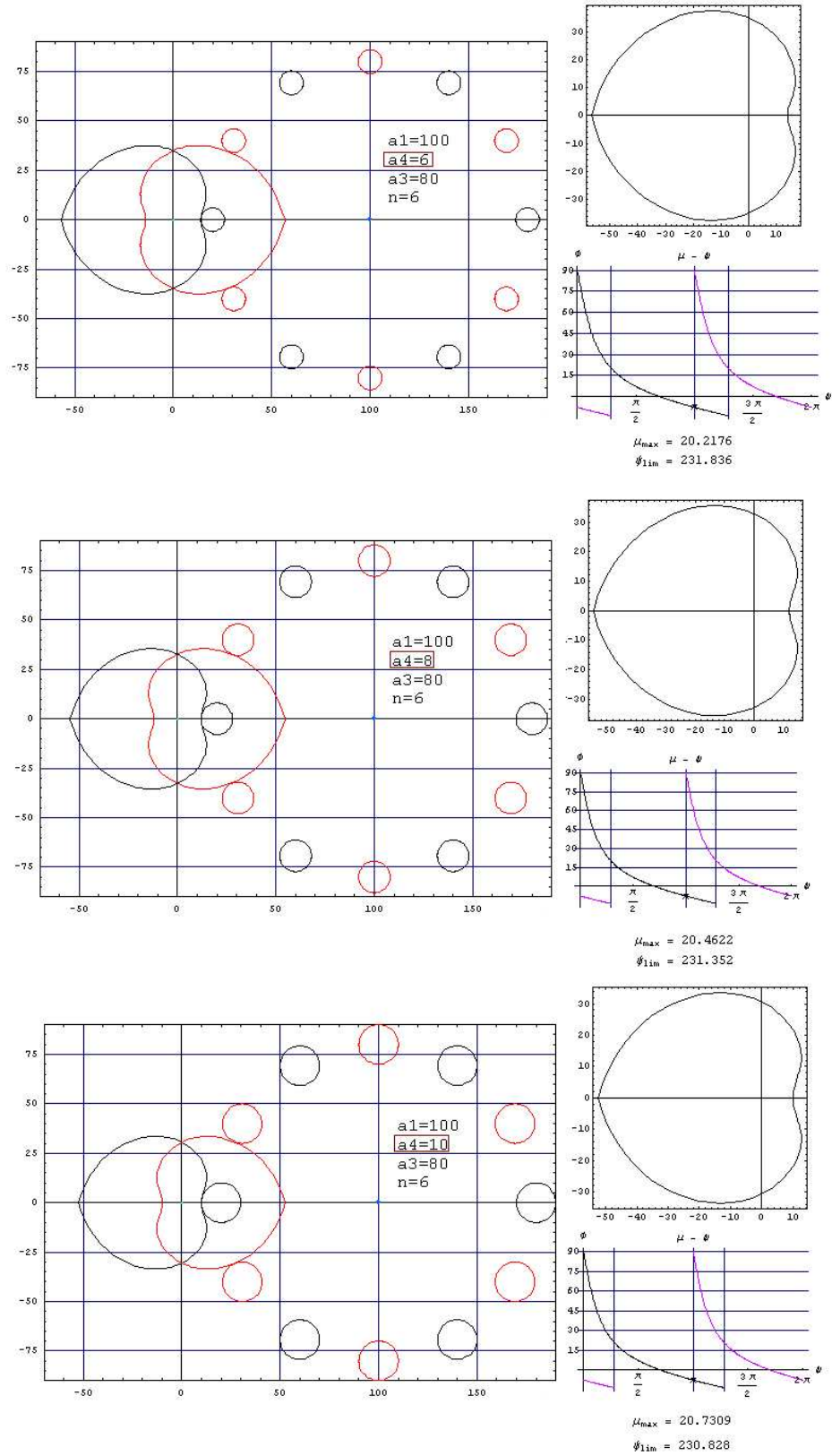


Figura 3.7 Variación por radio de rodamiento  $a_4=6, 8, 10$

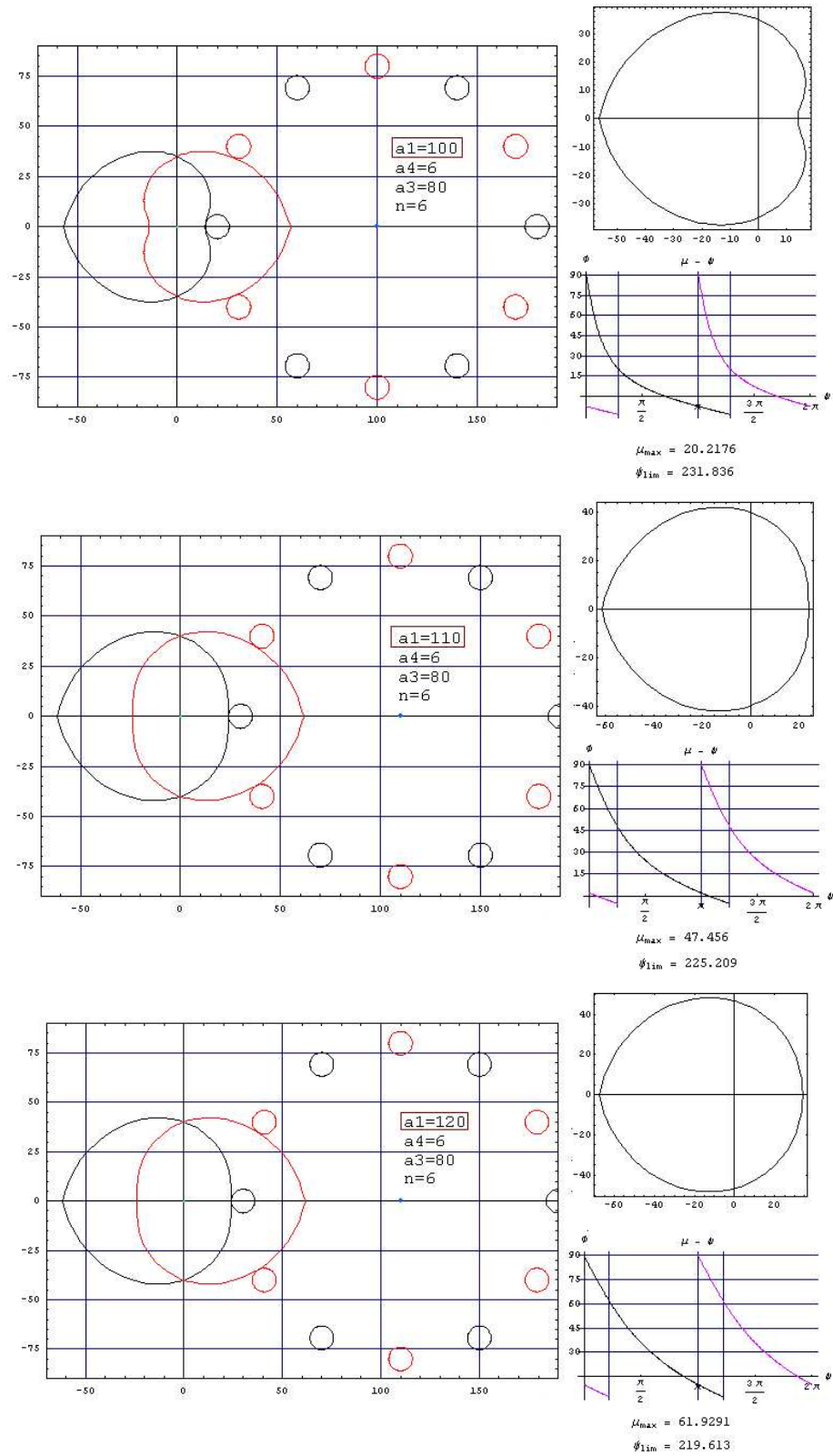


Figura 3.8 Variación por distancia entre ejes  $a_1=100, 110,$

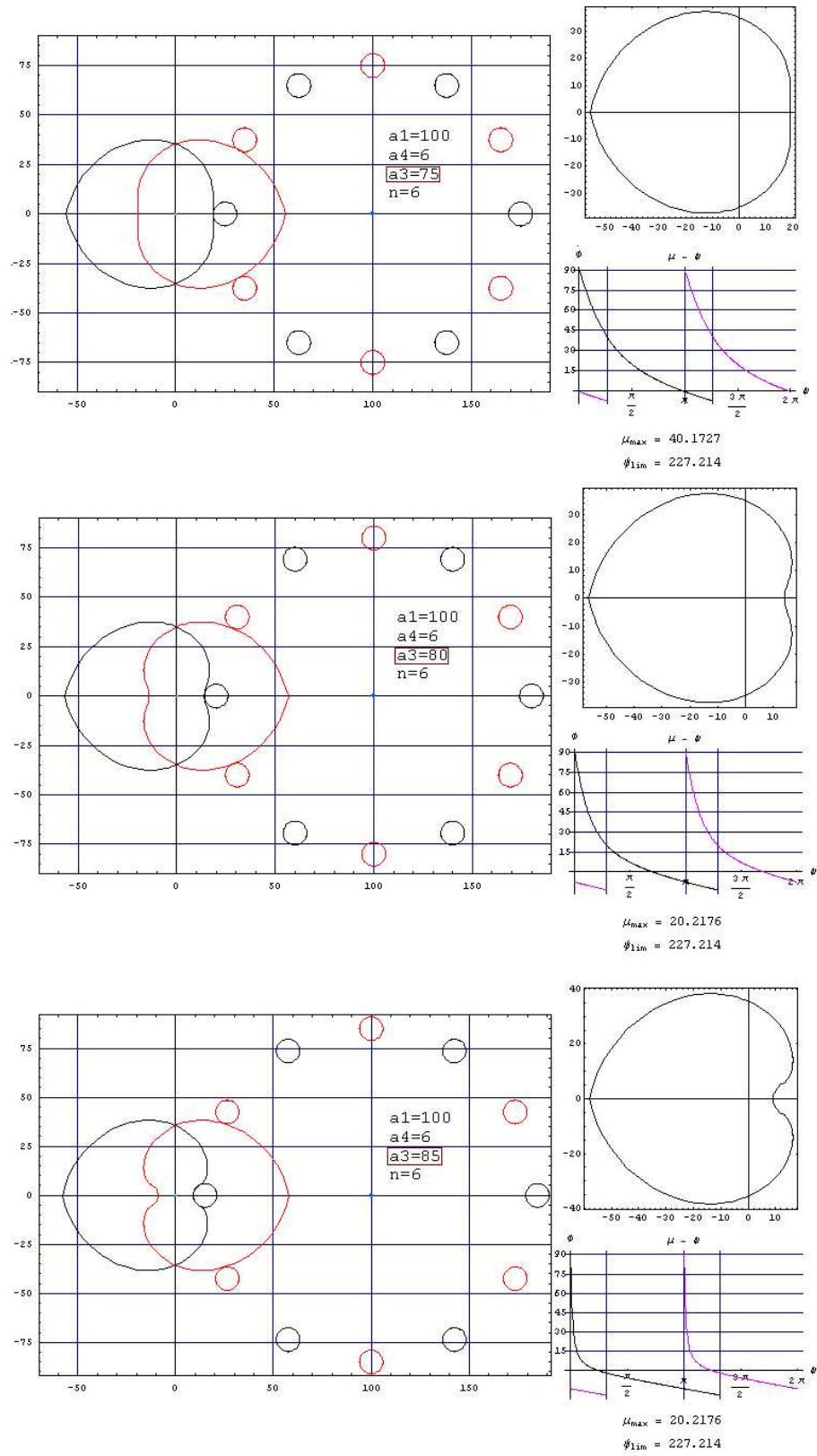


Figura 3.9 Variación por radio de seguidor  $a_3=75, 80, 85$

El contacto que existe entre las levas y los rodamientos puede ser convexo o cóncavo como lo muestra la figura 3.10 de acuerdo a la ecuación 3.30

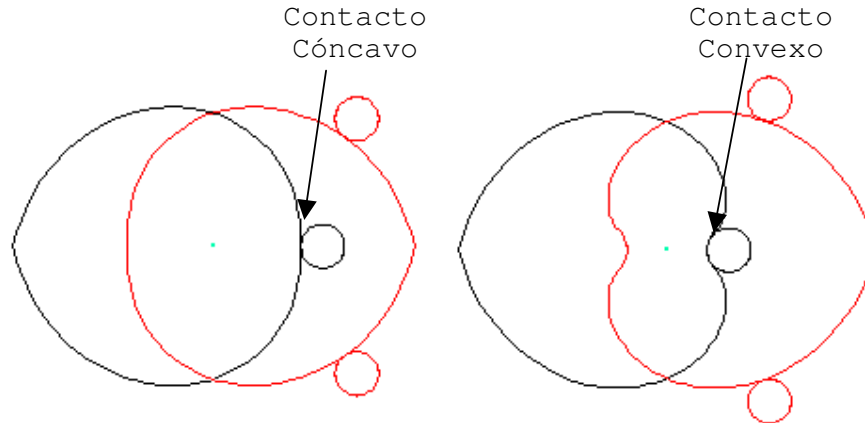


Figura 3.10 Contacto Cóncavo y Convexo

$$\begin{aligned}
 a_3 &\leq \frac{a_1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \rightarrow \text{Concavo} \\
 a_3 &> \frac{a_1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \rightarrow \text{Convexo}
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

Al combinarse los contactos convexos con problemas de manufactura puede originar atascamientos en el movimiento del mecanismo, por lo que se tiene que buscar ya sea concavidad en el contacto o convexidad mínima.

Adicionalmente, como restricción de diseño, la literatura indica que el ángulo de presión recomendado tiene que ser menor a los 30°.

### 3.6. DISEÑO CINEMÁTICO PRELIMINAR DE PROTOTIPO

Una vez planteadas las ecuaciones que rigen el contorno de la leva, se buscó información de seguidores



encapsulados que se pudieran utilizar en cuartos limpios. La compañía IKO dentro de su línea Minicam cuenta con los modelos CF-CFS. Las características de estos seguidores se reproducen en la figura 3.11. Información detallada puede ser consultada en el anexo 1.

## IKO MINICAM Series CF-CFS

IKO MINICAM series are compactly designed cam followers with the stud diameter 2 to 6 mm and the outer ring outside diameter 4.5 to 13mm. They are suitable for use as follower bearings in lightly loaded high precision cam mechanisms and linear motion mechanisms, and used widely in applications such as electric parts manufacturing and inspection equipment, precision measuring instruments, and OA equipment. Stainless steel made cam followers are highly resistant to corrosion, and best suited for use at places where oil can not be used, in environments exposed to water splashes or in clean rooms.



Figura 3.11 Características de la línea CF-CFS MINICAM de IKO

Para el diseño preliminar se eligió el rodamiento CFS 6 FV por ser de acero inoxidable y poseer el diámetro mayor.

Se eligió una combinación de parámetros para el mecanismo el cual proveyera un ángulo máximo de presión menor a  $30^\circ$  y tratando de minimizar la convexidad del contacto. Estos parámetros son:

$$a_1=100\text{mm}$$

$$a_3=80\text{mm}$$

$$a_4=6\text{mm}$$

$$n=6$$

Estos parámetros proporcionan una leva con el contorno que se muestra en la figura 3.12.

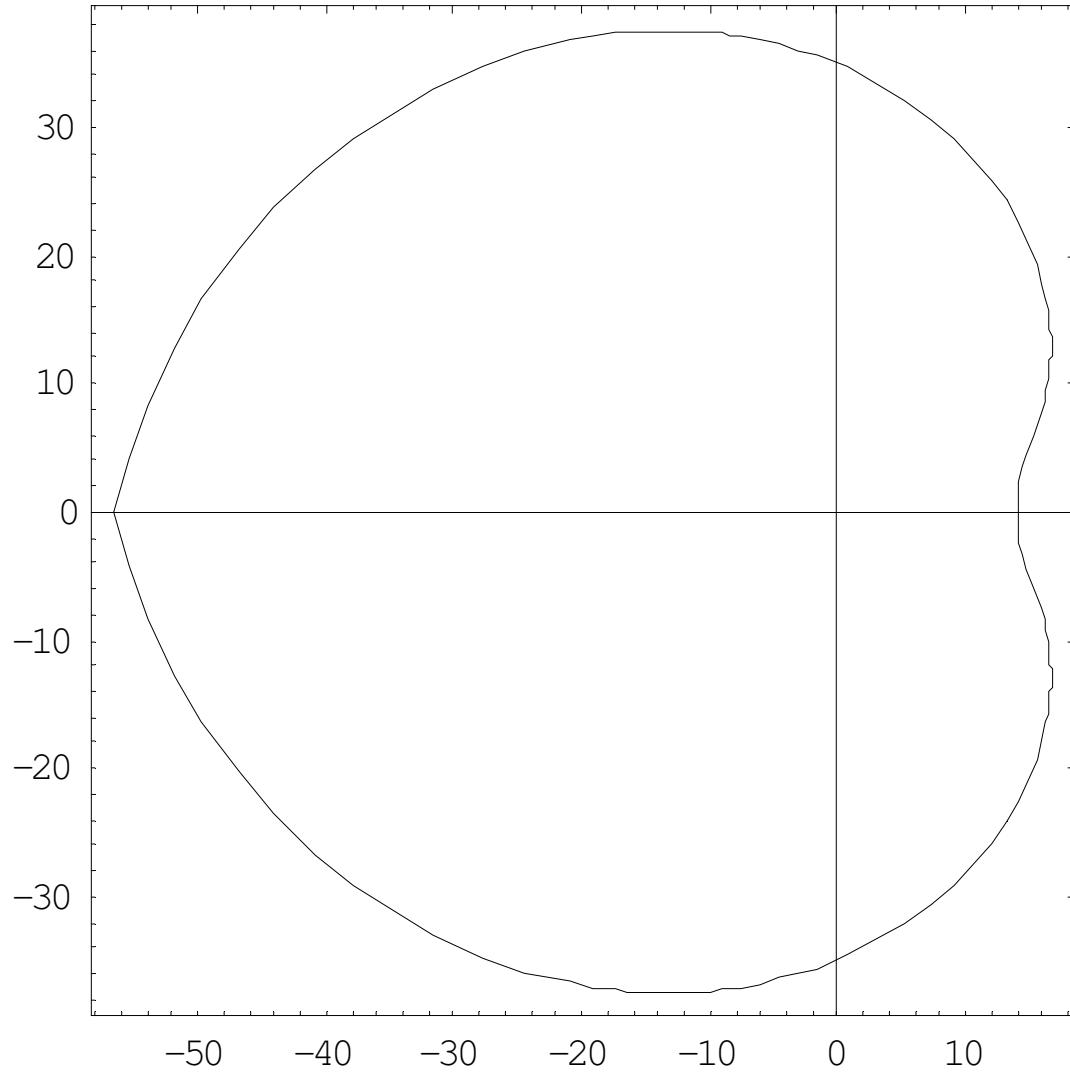


Figura 3.12 Contorno de Leva Propuesta

Los ángulos de presión de las levas se muestran en la figura 3.13.

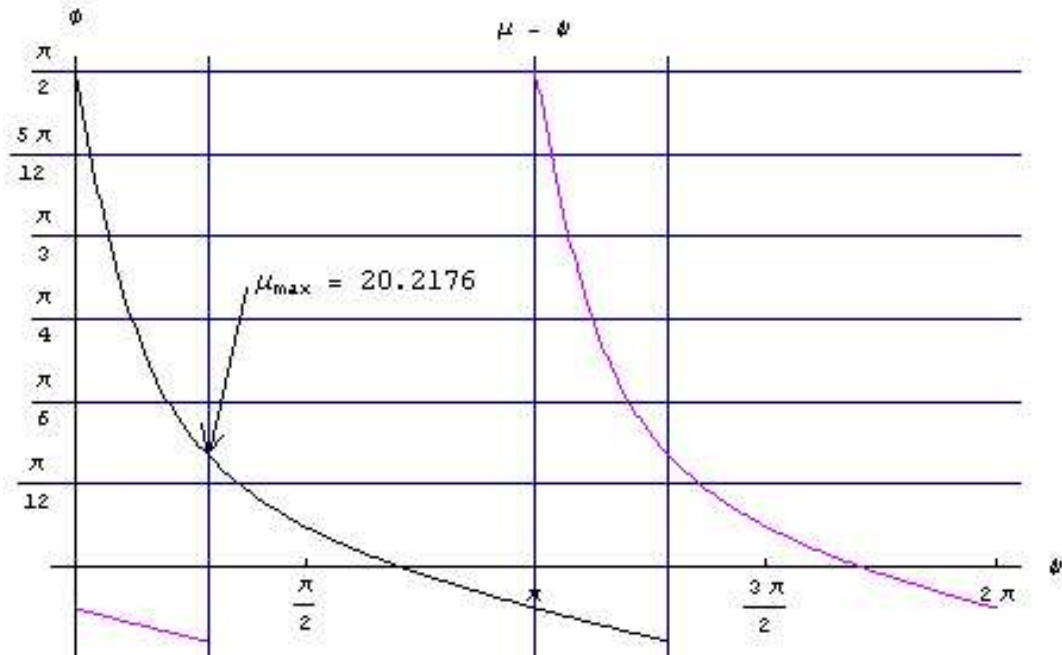


Figura 3.13 Ángulo de Presión de Leva Propuesta

## DINÁMICA DE LEVAS

El principal problema que se enfrenta en la resolución dinámica de los mecanismos indexados es la cantidad de contactos que existen en el sistema y que lo vuelven un problema dinámico estáticamente indeterminado en los distintos intervalos del movimiento del eje con las levas, en las figuras 4.1 y 4.2 se muestran el número de contactos en estos intervalos.

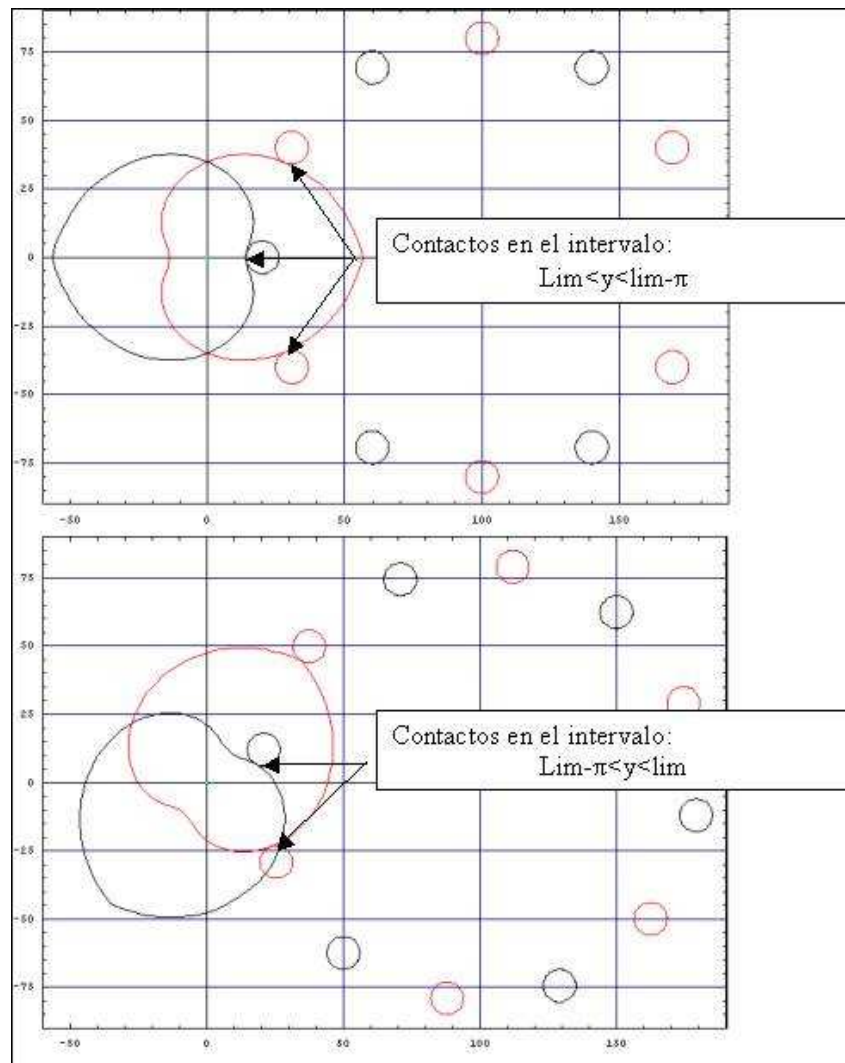


Figura 4.1 Contactos que Indeterminan la Dinámica de los Mecanismos Indexados

El límite para estos intervalos se encuentra al resolver la ecuación no lineal 4.1

$$-b_2 \sin[\psi_{lim}] - (b_3 - a_4) \sin[\psi_{lim} - \delta] = 0 \quad (4.1)$$

Para determinar la influencia que tienen las distintas cargas se modeló en CAD un mecanismo tridimensional para visualización y bidimensional para análisis de elemento finito con los parámetros que se determinaron en el capítulo 3 como se muestra en las figuras 4.3 y 4.4.

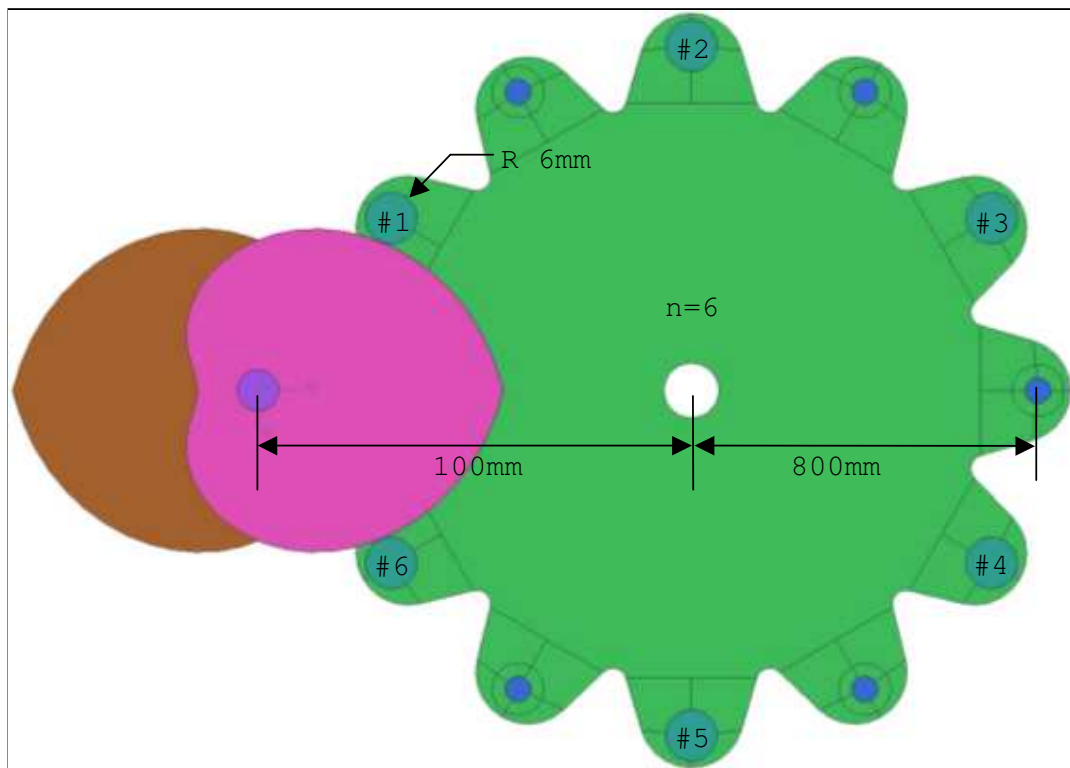


Figura 4.3 Modelo CAD de Mecanismo a Analizar

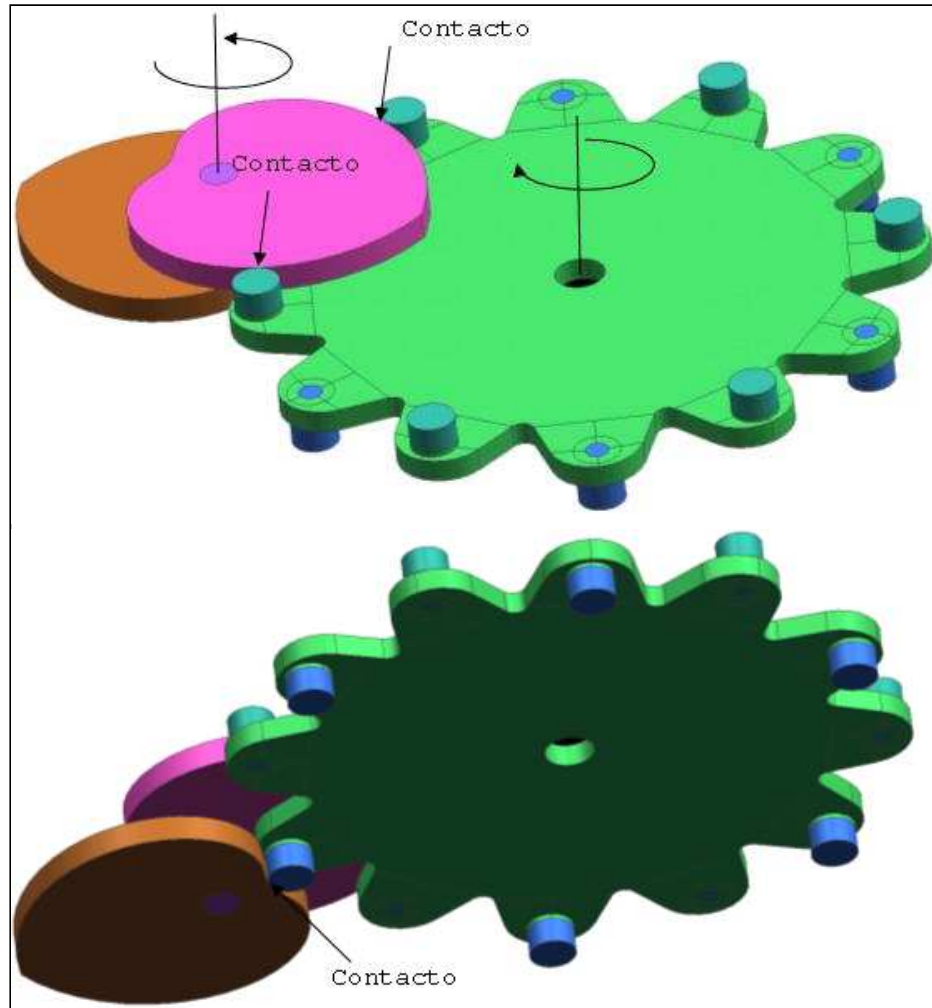


Figura 4.4 Modelo Tridimensional

#### **4.1. ANÁLISIS UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS**

Para analizar el mecanismo propuesto se utilizó el software ANSYS. Los elementos utilizados para modelar los sólidos (levas, seguidor, rodamientos y eje de rodamientos) fue el elemento Plane42 el cual es un elemento de 4 nodos al que se le puede ajustar la profundidad del elemento por medio de una constante real. Las profundidades de los cuerpos se definieron de acuerdo a tamaños comerciales y a las dimensiones de los rodamientos utilizados -Anexo 1-. Las figuras 4.5, 4.6 y 4.7 muestran la densidad de malla

así como la constante real que determina la profundidad del elemento para las levas, los rodamientos y el seguidor respectivamente.

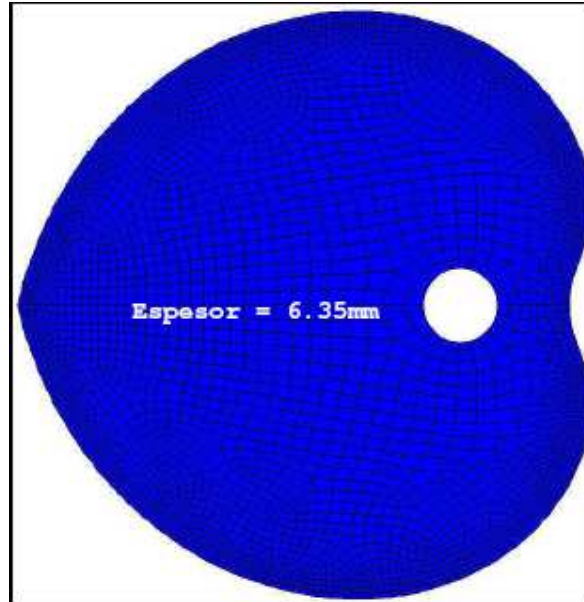


Figura 4.5 Densidad de malla para Levas

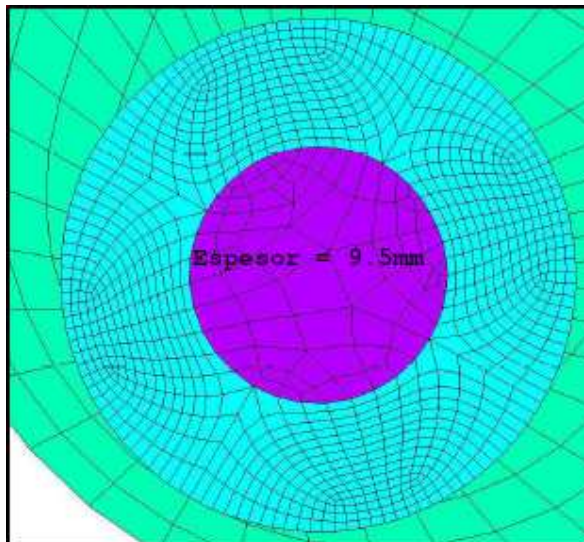


Figura 4.6 Densidad de malla para Rodamientos

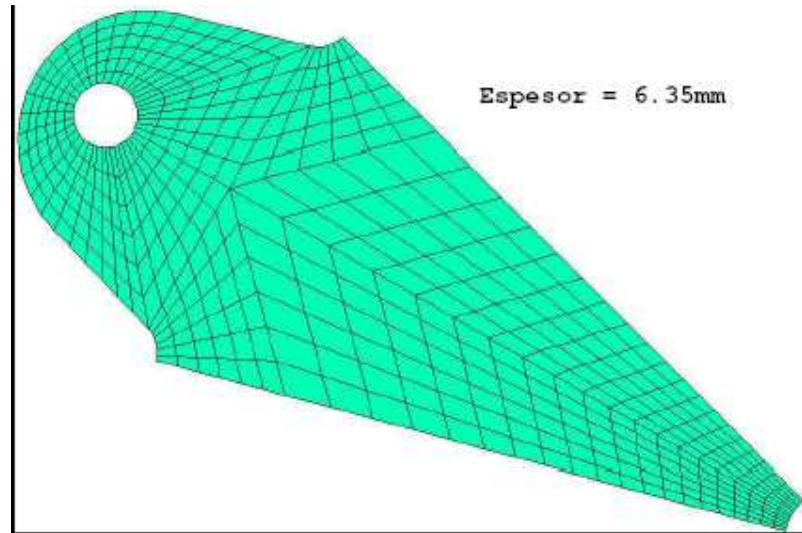


Figura 4.6 Densidad de malla para Seguidores

Para definir las propiedades mecánicas de los elementos se eligió aluminio estándar como material de las levas como del seguidor, esto por su facilidad de maquinado. Como trabajo futuro se puede desarrollar este mismo mecanismo con distintos materiales y tratamientos térmicos superficiales que disminuyan el desgaste por el movimiento rotativo. El material de los rodamientos está definido como acero inoxidable como lo indica el Anexo 1. La figura 4.7 muestra la definición de los materiales, constantes elásticas del material y constante real del elemento.



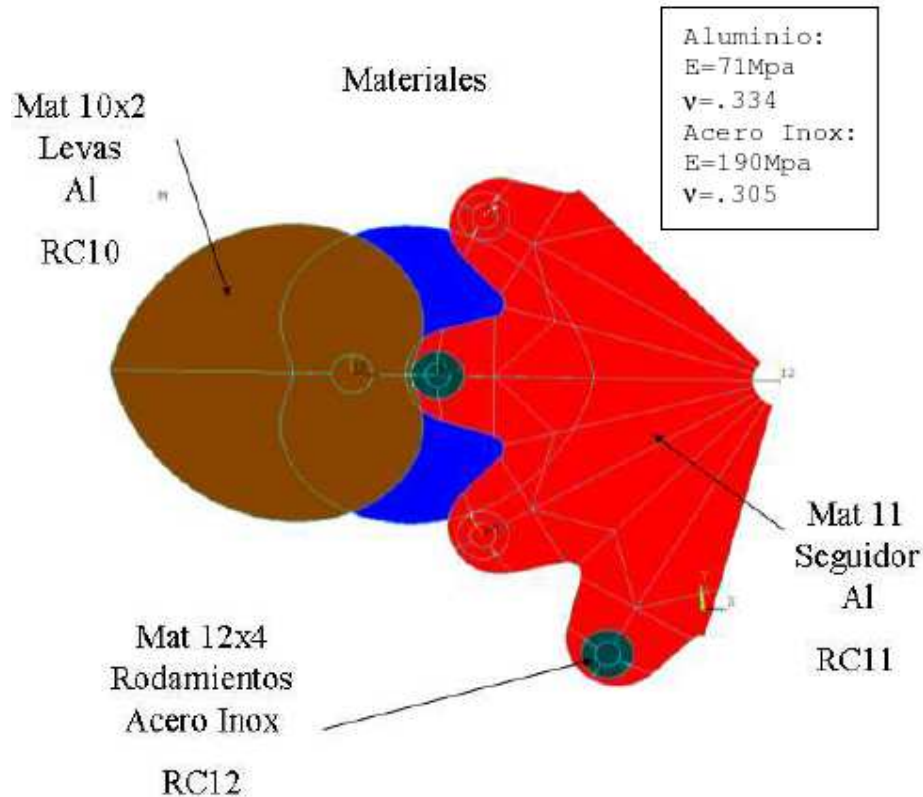


Figura 4.7 Materiales Utilizados

## 4.2. CONDICIONES DE FRONTERA

Para realizar el análisis se tomó la consideración de que tanto el cuerpo que forman las dos levas y el eje como el cuerpo que forman los rodamientos y el seguidor están totalmente balanceados y el giro de ellas no provoca fuerzas inerciales. Bajo esta consideración, se desprecian cargas debido a vibraciones. El par de entrada será pues el necesario para realizar un movimiento del mecanismo.

Una de las restricciones que se aplicaron al modelo para simular que no existe desplazamiento angular relativo entre las dos levas debido a torsión del eje es que los nodos internos que comunican al eje son compartidos para ambas levas, de esta forma el par de entrada es común a

ambas levas. Puesto que el elemento Plane42 sólo tiene 2 grados de libertad para desplazamientos en el plano, el momento no puede ser aplicado como una magnitud en algún grado de libertad. De esta forma, el par aplicado se simuló como una serie de fuerzas tangenciales a los radios que definen los nodos del eje. Cabe resaltar que para lograr esta condición, el eje coordenado de estos nodos fue rotado a un sistema cilíndrico y restringiendo los movimientos en la dirección radial. El resultado final de esta serie de condiciones es que el par de levas pueden girar libremente en la dirección Z simulada por el eje a causa del par de inicio, por lo que es necesario que exista un contacto que restrinja el sistema. Estas consideraciones se muestran en la figura 4.8.

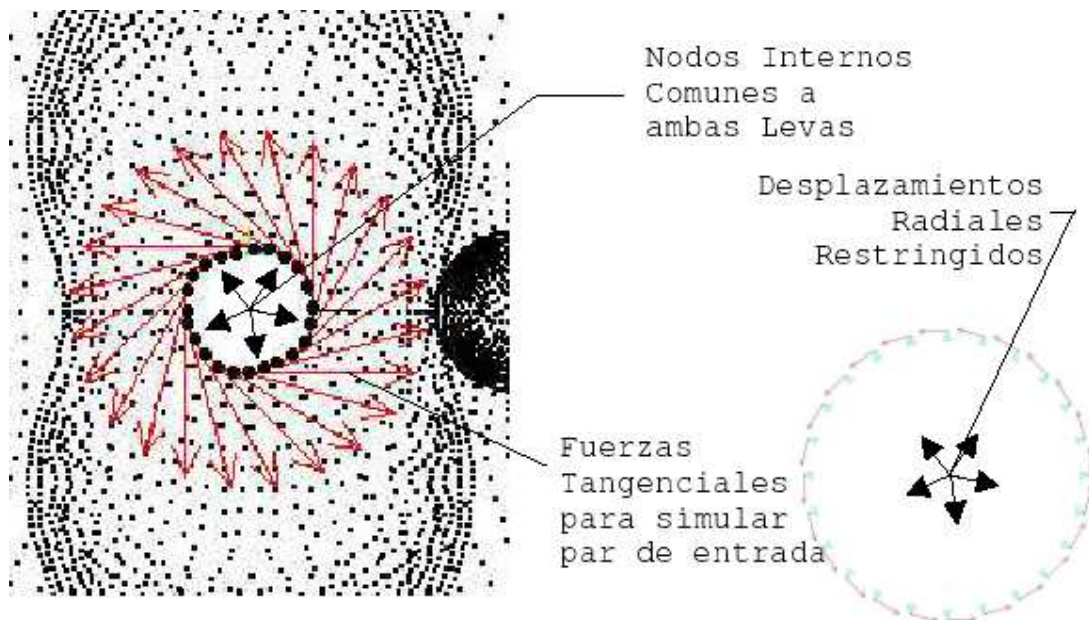


Figura 4.9 Par aplicado y Restricciones de Movimiento para el Cuerpo formado por las Levas

Con el objeto de minimizar el tiempo máquina en la resolución del sistema, se utilizaron coples que simulan

simetría cíclica en las fronteras del seguidor. Para realizar esto, los nodos de la superficie que conectan el componente cíclico fueron rotados a un sistema cilíndrico coincidente al eje de movimiento del cuerpo que forman el seguidor y los rodamientos. De esta forma los nodos de la superficie son coincidentes en las coordenadas radial y axial. Para prevenir el movimiento del seguidor se aplicaron restricciones de movimiento en todas las direcciones de los nodos internos al eje simulando un perfecto agarre entre el seguidor y su eje. La figura 4.10 muestra las condiciones de frontera del seguidor.

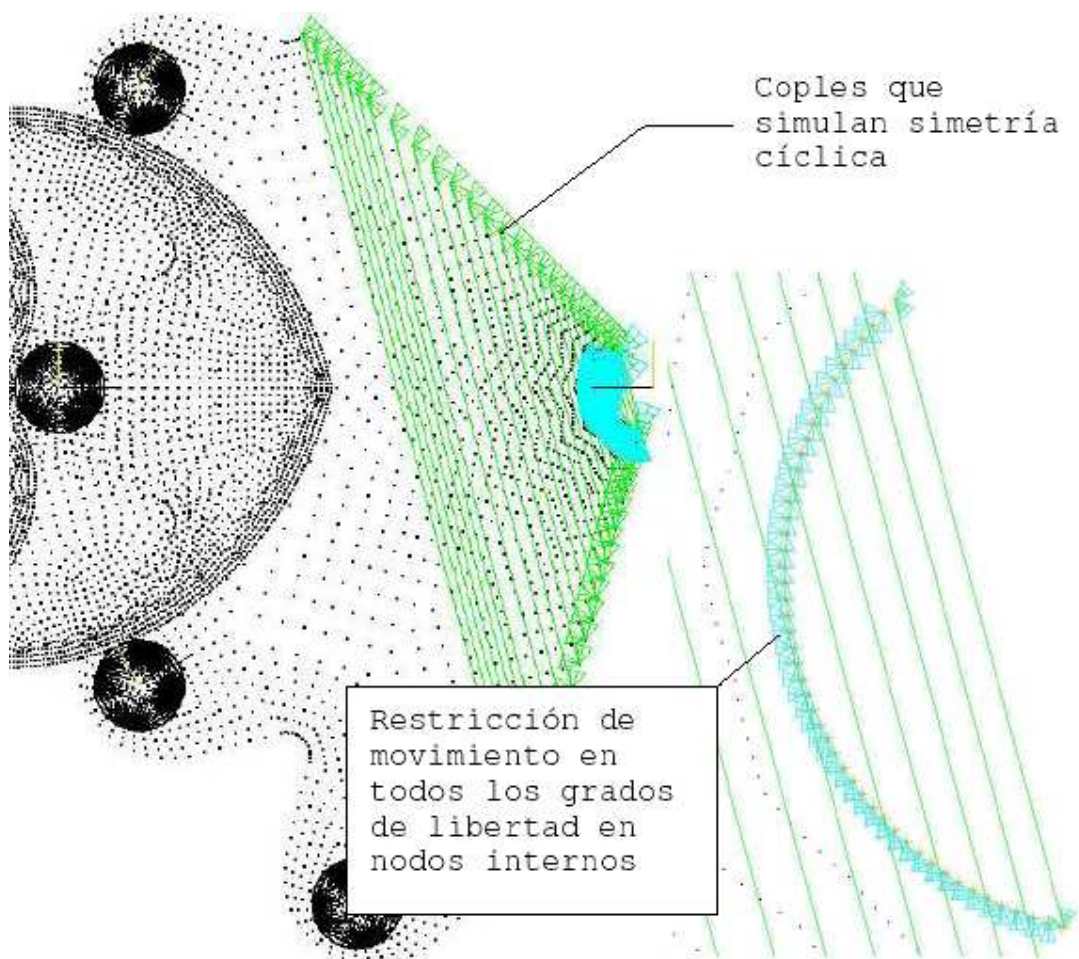


Figura 4.10 Restricciones de Movimiento y Geometría Cíclica del Seguidor

Para simular un movimiento libre rotativo de los rodamientos se rotaron tanto los nodos internos de los rodamientos como con los nodos externos del eje que conecta los rodamientos con el seguidor a un sistema cilíndrico coincidente al eje de giro. Asimismo se acoplaron los pares de nodos coincidentes del eje como del rodamiento en la dirección radial dejando libre la dirección angular. La unión del eje con el seguidor se realizó dejando comunes los nodos externos del eje con los nodos internos del seguidor. Estas condiciones de frontera se muestran en la figura 4.11.

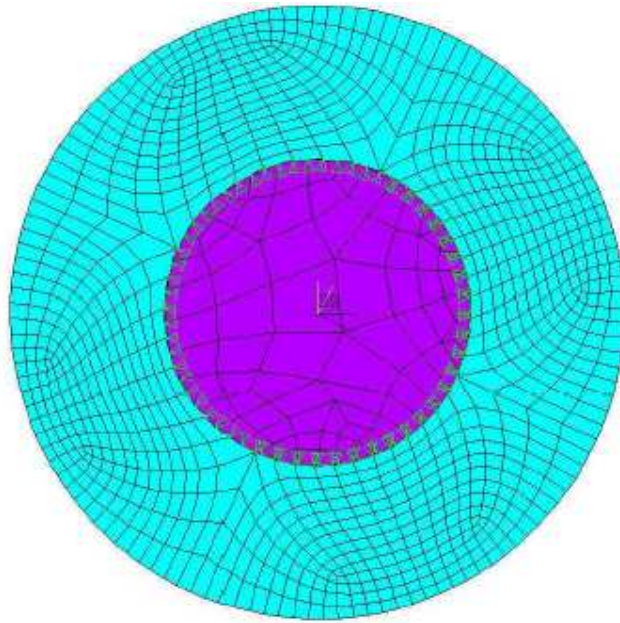


Figura 4.11 Coples entre los Rodamientos y su Eje

Para simular los contactos entre las levas y los rodamientos se utilizaron los elementos `Contact172` y `Target169` para un contacto superficie a superficie rotando los sistemas coordenados de los nodos de tal forma que en el punto de contacto las componentes en su dirección X sean coincidentes y en sentido opuesto como lo muestran las figuras 4.12.

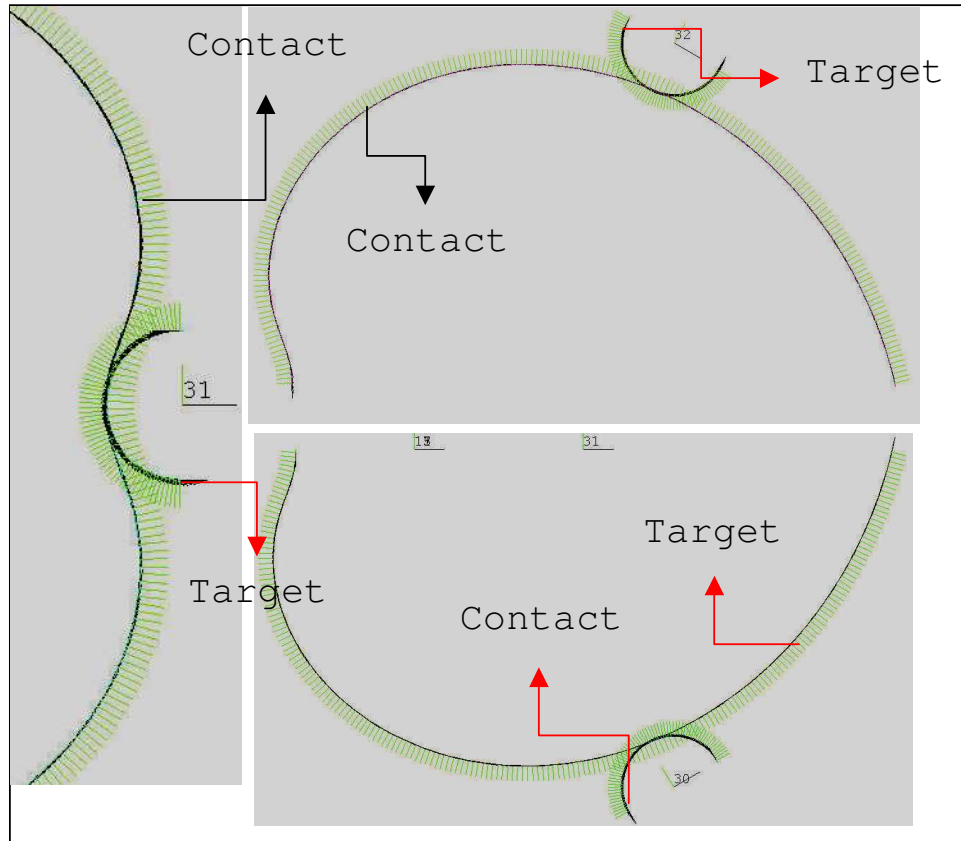


Figura 4.12 Determinación de Contactos

El análisis se corrió para varios grados como entrada del cuerpo formado por las levas. Los resultados mostraron que el momento de las levas es transmitido al cuerpo del seguidor primordialmente por el contacto de la leva con menor ángulo de presión. La posición crítica para este criterio es el giro inmediato anterior a alcanzar el límite dado por la ecuación 4.1.

Para la condición crítica que es cuando se alcanza el ángulo límite dado por la ecuación 4.1 cuyo valor para el modelo estudiado es  $51^\circ$  la leva que recién comienza a actuar provee 24% de la carga mientras que la leva que esta por dejar de hacer contacto provee el 76% de la carga restante. El mismo caso fue analizado para un giro de  $10^\circ$

de la leva, en este caso, la leva con menor ángulo de presión soporta el 95% de la carga mientras que la leva con mayor ángulo de presión soporta el 5% restante. En ambos casos, los contactos teóricos restantes no proveen cargas de reacción al existir un pequeño espacio entre rodamiento y leva debido a la elongación elástica tanto de las levas como del seguidor.

Una solución estáticamente determinada llevada a cabo despreciando los contactos redundantes indicaría que en el ángulo límite, una leva deja de hacer contacto e instantáneamente toda la carga la realiza la leva restante. Esto significaría un impacto en la leva a cada revolución, aumentando considerablemente el daño a las piezas y su consecuente desgaste tanto por el contacto rotativo como por impacto. Sin embargo, los resultados de elemento finito demuestran que este cambio en la carga es gradual y que la componente de fuerza que crea el par de salida en el seguidor es una combinación del contacto que existe por ambas levas en el intervalo  $\lim_{\alpha} < \lim_{\alpha} - \pi$  por lo que la hipótesis de que los mecanismos indexados pueden ser utilizados en aplicaciones de cuartos limpios se refuerza.

Se comprobó también que no existe doble contacto entre una misma leva y el seguidor al estar actuando el mecanismo, sin embargo, el mecanismo es bi-direccional, por lo que a un cambio del sentido del giro, la componente de carga disminuiría gradualmente hasta llegar a cero de la leva hacia un seguidor para aumentar en el seguidor adyacente.

En las figuras 4.13 se muestran esfuerzos principales debidos al contacto como referencia.

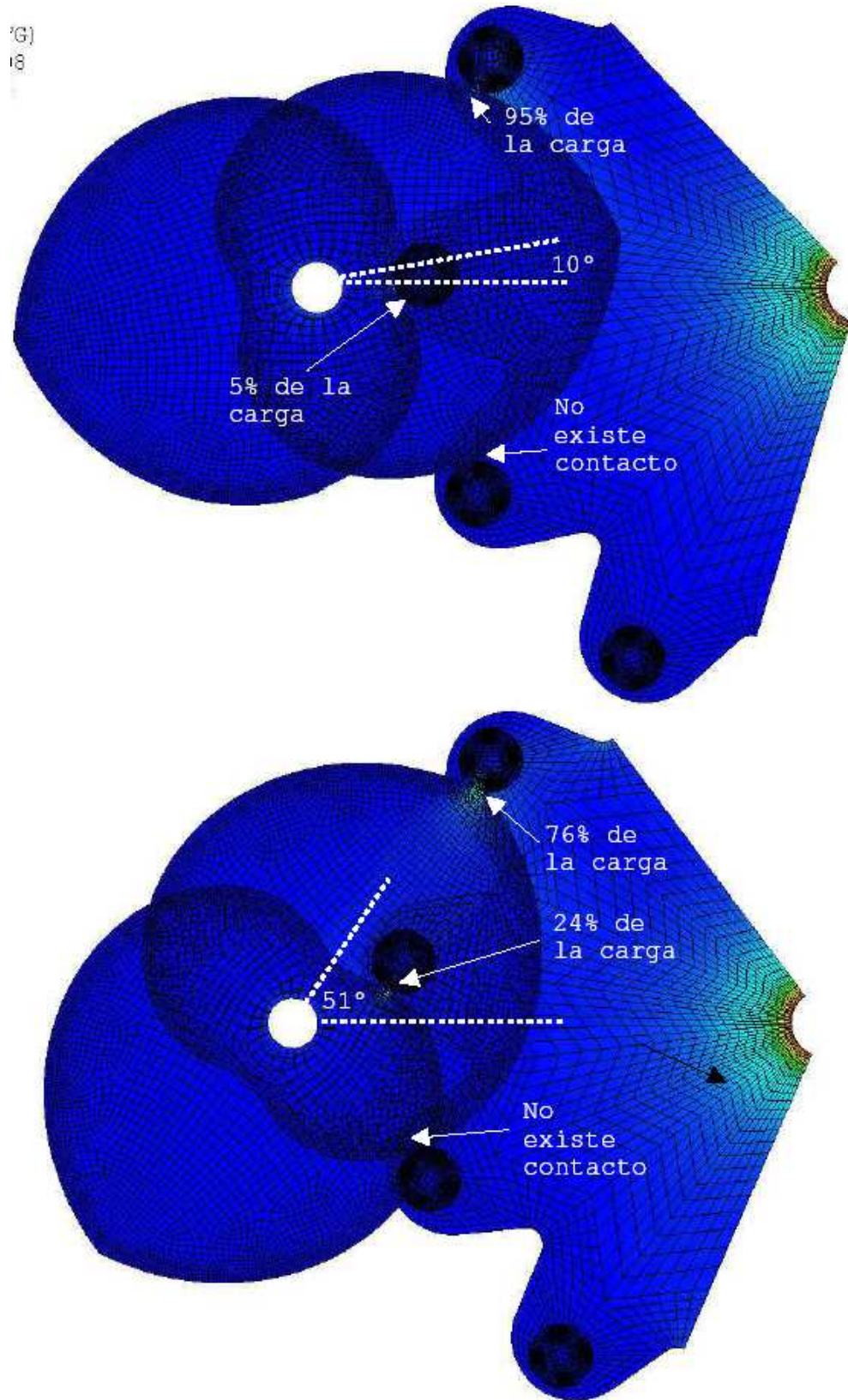
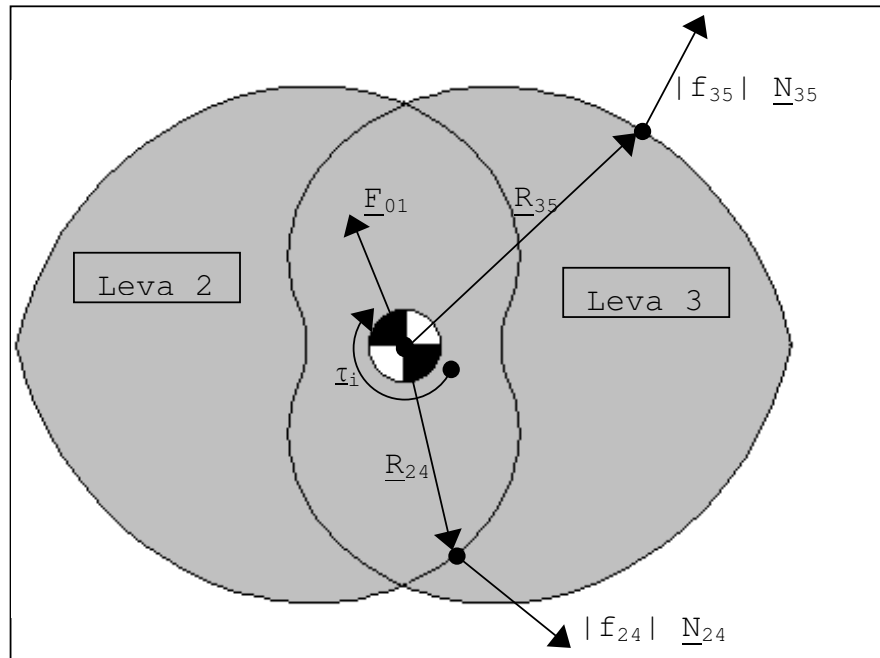


Figura 4.13 Esfuerzos Debidos al Contacto para 10° y 50°

Para su comparación se presentan también los resultados dinámicos de forma analítica despreciando los contactos de las levas con menor ángulo de presión.

### 4.3. RESOLUCIÓN DINÁMICA COMO SISTEMA ESTÁTICAMENTE DETERMINADO

Para conocer las ecuaciones que rigen el sistema se presenta el diagrama de cuerpos libres en las figuras 4.14 y 4.15:



4.14 Diagrama de Cuerpo Libre de las Levas

Donde:

$\underline{F}_{01}$ = Fuerza aplicada por el sistema de referencia al eje de las levas

$|f_{35}|$ = Magnitud de la fuerza aplicada por el rodamiento 5 a la leva 3

$\underline{N}_{35}$ = Vector Normal al contacto entre el rodamiento 5 y la leva 3



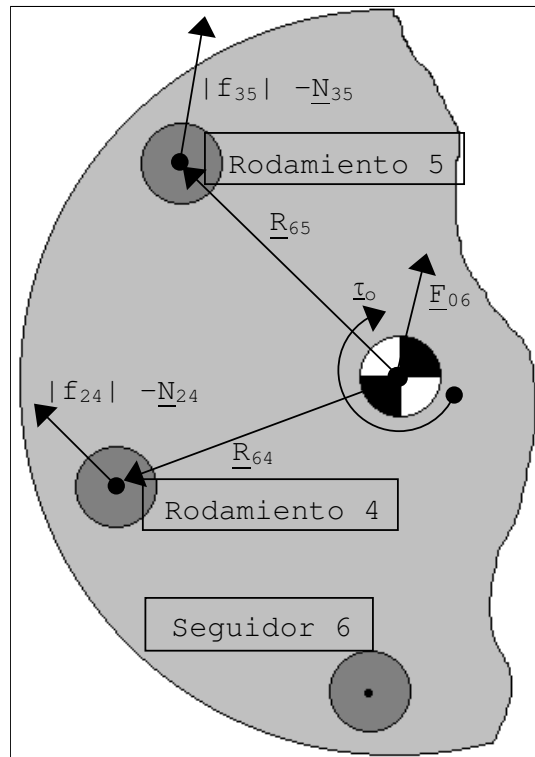
$\underline{R}_{35}$ = Vector desde el centro de masa de la leva 3 al contacto con el rodamiento 5

$|f_{24}|$ = Magnitud de la fuerza aplicada por el rodamiento 4 a la leva 2

$\underline{N}_{24}$ = Vector Normal al contacto entre el rodamiento 45 y la leva 2

$\underline{R}_{24}$ = Vector desde el centro de masa de la leva 2 al contacto con el rodamiento 3

$\tau_i$ = Par de entrada de las levas



4.15 Diagrama de Cuerpo Libre del Seguidor

Donde:

$\underline{F}_{06}$ = Fuerza aplicada por el sistema de referencia al seguidor

$\underline{R}_{65}$ = Vector desde el centro de masa del seguidor hasta el rodamiento 5

$\underline{R}_{64}$ = Vector desde el centro de masa del seguidor hasta el rodamiento 4

$\tau_o$ = Par de salida del seguidor

Cabe notar que las componentes tangenciales a los puntos de contacto fueron despreciadas puesto que el rodamiento puede girar libremente.

Sumando momentos y fuerzas iguales a cero, las ecuaciones 4.2 son encontradas:

$$\begin{aligned}
 f_{24} * N_{24_x} + f_{35} * N_{35_x} + F_{01_x} &= 0 \quad \left( \sum F_x = 0 \text{ - levas -} \right) \\
 f_{24} * N_{24_y} + f_{35} * N_{35_y} + F_{01_y} &= 0 \quad \left( \sum F_y = 0 \text{ - levas -} \right) \\
 F_{06_x} - f_{24} * N_{24_x} - f_{35} * N_{35_x} &= 0 \quad \left( \sum F_x = 0 \text{ - seguidor -} \right) \\
 F_{06_y} - f_{24} * N_{24_y} - f_{35} * N_{35_y} &= 0 \quad \left( \sum F_y = 0 \text{ - seguidor -} \right) \\
 R_{35_x} * f_{35} * N_{35_y} - R_{35_y} * f_{35} * N_{35_x} + \\
 R_{24_x} * f_{24} * N_{24_y} - R_{24_y} * f_{24} * N_{24_x} + \tau_i &= 0 \quad \left( \sum M = 0 \text{ - levas -} \right) \\
 R_{65_x} * (-f_{35} * N_{35_y}) - R_{65_y} * (-f_{35} * N_{35_x}) + \\
 R_{64_x} * (-f_{24} * N_{24_y}) - R_{64_y} * (-f_{24} * N_{24_x}) + \tau_o &= 0 \quad \left( \sum M = 0 \text{ - seguidor -} \right)
 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Los vectores normales y los radios a los puntos de contacto pueden obtenerse de la solución cinemática por medio de las ecuaciones 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6.

$$N_{24}[\psi] = \{\text{Cos}[\delta], \text{Sin}[\delta]\} \quad (4.3)$$

$$N_{35}[\psi] = \{\text{Cos}[\delta], \text{Sin}[\delta]\} /. \psi \rightarrow \psi + \pi \quad (4.4)$$

$$R_{24}[\psi] = \{a_1 + a_3 \text{Cos}[\phi] - a_4 \text{Cos}[\delta], (b_3 - a_4) \text{Sin}[\delta]\} \quad (4.5)$$

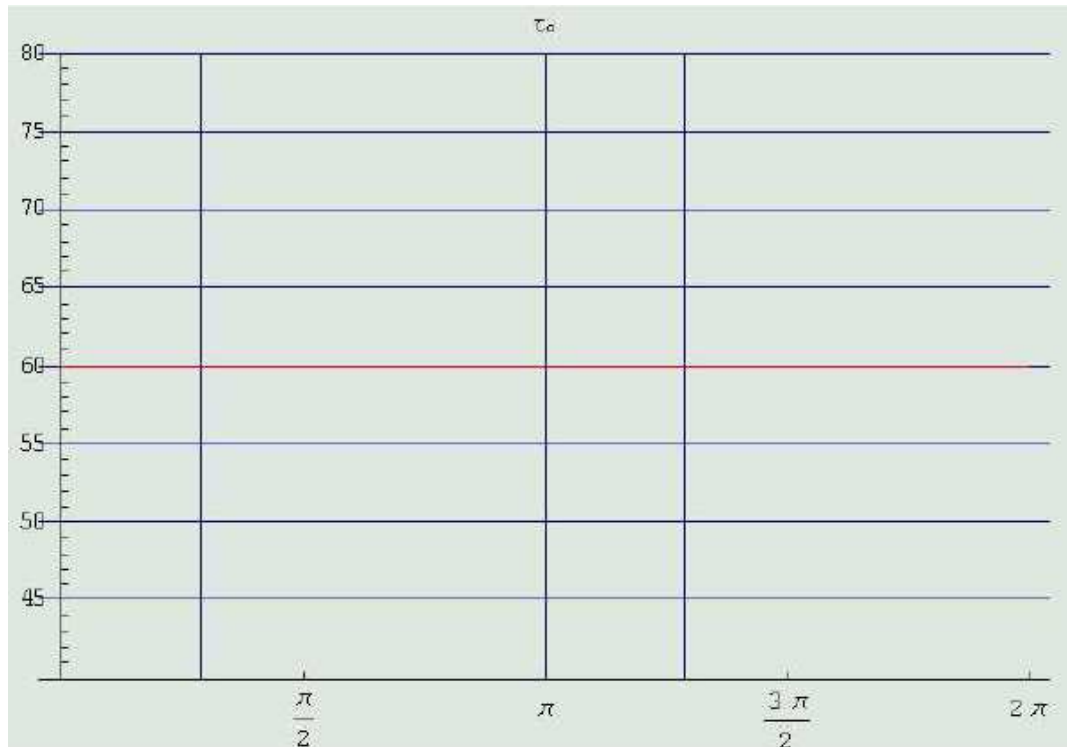
$$R_{35}[\psi] = \{a_1 + a_3 \text{Cos}[\phi] - a_4 \text{Cos}[\delta], (b_3 - a_4) \text{Sin}[\delta]\} /. \psi \rightarrow \psi + \pi \quad (4.6)$$

Para resolver el sistema se consideró una par de entrada de valor comercial. En el mercado se encontró un

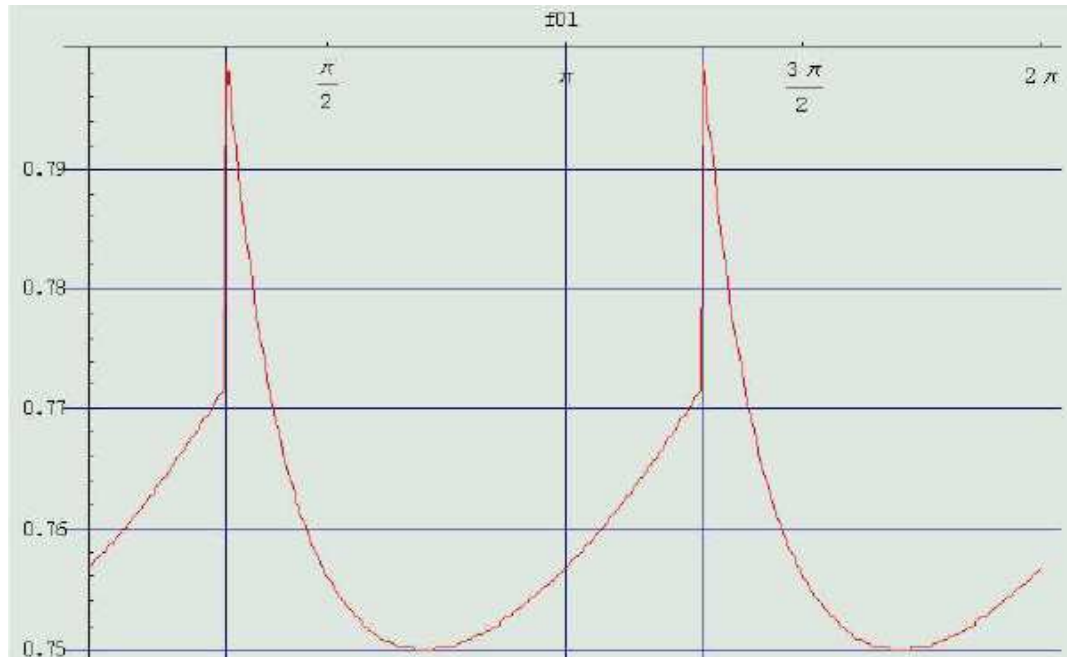
motor que proporciona un par como lo indica la ecuación 4.8.

$$t_i = 10 \frac{\text{gmm}^2}{\text{s}^2} \quad (4.8)$$

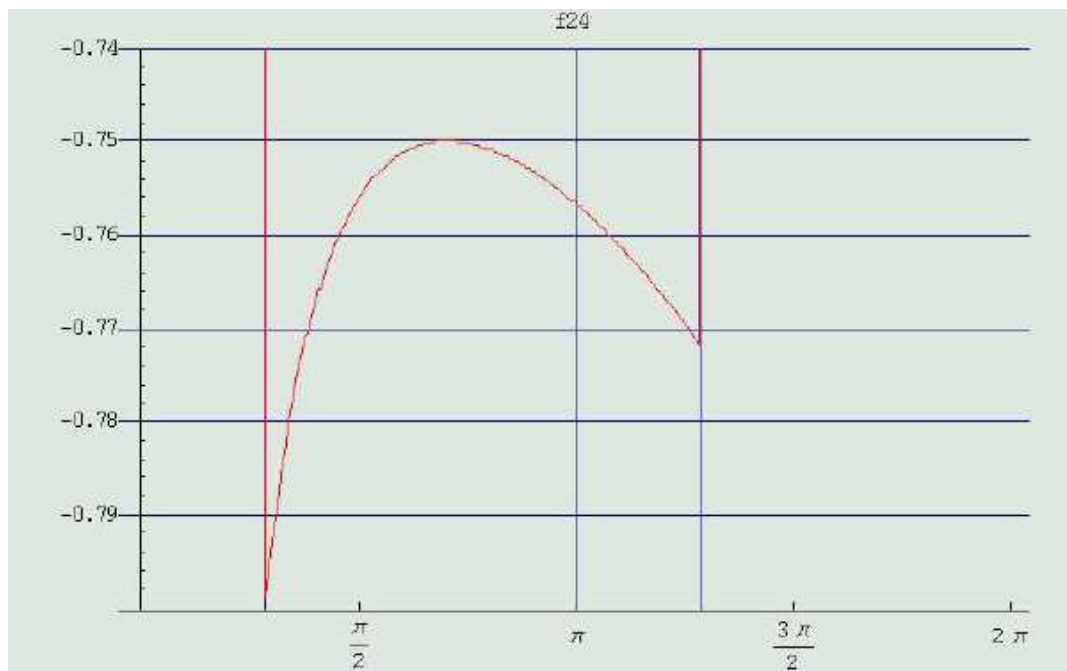
Resolviendo las ecuaciones 4.2 se obtienen los siguientes resultados dinámicos:



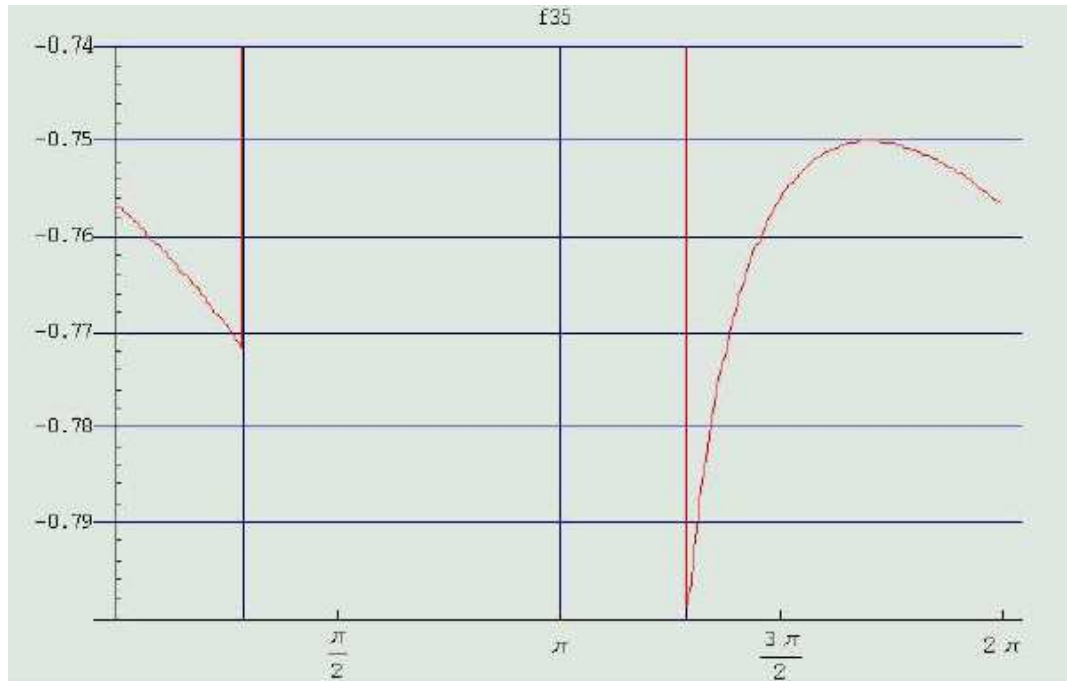
4.16 Diagrama de Par de Salida en el Seguidor



4.17 Fuerza de Reacción de Las Levas al Sistema de Referencia



4.18 Fuerza de Contacto entre Leva 2 a Rodamiento 4



4.19 Fuerza de Contacto entre Leva 3 a Rodamiento 5

Como se ve tanto en las gráficas 4.17 a 4.19, las componentes de fuerza cambian instantáneamente cuando una leva deja de hacer o comienza a hacer contacto con los seguidores, de los resultados por elemento finito se demostró que estos cambios en las componentes de fuerza son graduales y permiten un menor desgaste de las levas y los rodamientos, logrando menor cantidad de generación de partículas.

## CONCLUSIONES

El desarrollar matemáticamente un modelo que permita predecir la cantidad de contaminación que generará este mecanismo no se considera viable dentro del objetivo de esta tesis por las siguientes causas:

- Las teorías de generación de partículas presentadas en el capítulo 1 son mayoritariamente para una máquina de desgaste por deslizamiento. En el capítulo 2 se demostró que el contacto de un mecanismo indexado plano con el seguidor por medio de rodamientos es puramente rotativo, sin embargo no se encontraron teorías que ligaran la generación de partículas para desgaste por contacto rotativo.
- El modelo de elemento finito muestra que las fuerzas aplicadas a los rodamientos con ángulos de presión altos se pueden eliminar, sin embargo, cuando el ángulo de entrada de las levas está próximo al valor límite en el cual dejan de hacer contacto, las fuerzas que se despreciaron comienza a elevarse gradualmente. En la resolución de la dinámica por un sistema estáticamente determinado muestra que la fuerza de contacto varía desde 0 hasta un valor máximo, lo que equivale a un desgaste por impacto y no por rodamiento. Asimismo, los resultados proporcionados por el elemento finito no pueden considerarse del todo válidos, ya que el modelado de un contacto es no lineal e inestable por lo que siempre se recomienda la validación por métodos experimentales.

La validación de este proyecto de tesis puede realizarse por medios experimentales por lo que se propone lo siguiente:

La construcción de prototipos para distintos ángulos de presión máximos y evaluarlos en un cuarto limpio. Esto ayudaría a comprobar el efecto que tiene la relación de un contacto convexo entre las levas y los rodamientos con la cantidad de partículas generadas.

- Una investigación de tratamientos térmicos superficiales en distintos metales que ayuden a disminuir el desgaste y por consiguiente en la generación de partículas.
- La construcción de un prototipo de leva en material fotoelástico y evaluarlo en condiciones estáticas y dinámicas. Este procedimiento validaría los resultados que se obtuvieron tanto por el método de elemento finito para un estado estáticamente indeterminado, como el analítico para un estado estáticamente indeterminado.

Las ecuaciones paramétricas para la generación de levas indexadas fueron propuestas en este trabajo de investigación, por lo que la construcción de los prototipos se puede realizar fácilmente exportando la cantidad de puntos necesarios utilizando el programa que se realizó en Mathematica alimentando a una máquina de control numérico. Se recomienda realizar el programa de CNC de una forma paramétrica, esto ayudaría a minimizar los tiempos de generación de modelos y maquinado.

# Anexo 1



products are available from: **MARYLAND METRICS**  
phones: (410)358-3130 (800)638-1830 faxes: (410)358-3142 (800)872-9329  
P.O.Box 261 Owings Mills, MD 21117 USA URL: <http://mdmetric.com> E-mail: [sales@mdmetric.com](mailto:sales@mdmetric.com)

## MINICAM Series

# CF·CFS

CAT-57115B

*The world-smallest MINICAM  
with a stud diameter of 2 mm is newly introduced !*



copyright 2000 maryland metrics/iko international



**Evolution in MINICAM world**

Wide range of variations including the world-smallest cam follower!

**MINICAM**

**CF32**

*The smallest size is newly introduced!*

Shaft diameter 1 mm  
Outer ring outside diam. is 4.5mm!

Smallest size cam follower  
**IXCO MINICAM Series**  
**CF·CFS**

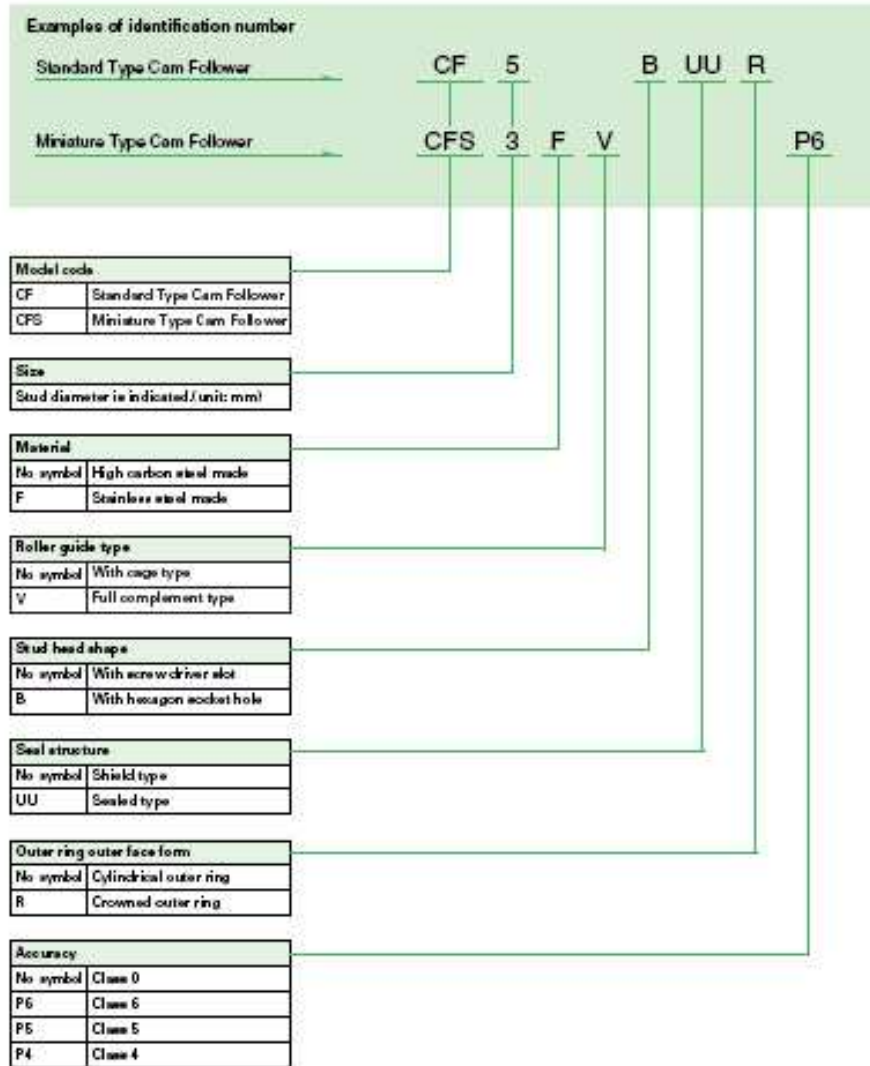
1

2



## Identification Number

Examples of identification number of **IKB** MINICAM series are shown below.



## Accuracy

Accuracy of **U300** MINICAM series are shown in Tables 1, 2.1 and 2.2.

Table 1 Tolerance unit:  $\mu\text{m}$

Series	Item	Standard Type Cam Follower		Miniature Type Cam Follower
		Crowned outer ring	Cylindrical outer ring	
Outside dia. of outer ring $D$		0 -50	See Table 2.1.	See Table 2.2.
	Stud dia. $d_1$	h7		h8
Width of outer ring $C$		0 -120		0 -120

Table 2.1 Accuracy of outer ring (Standard Type Cam Follower) unit:  $\mu\text{m}$

$\Delta D_{mp}$ Single plane mean outside dia. deviation		$V_{Dp}$ Outside dia. variation in a single radial plane (Max.)	$V_{Dmp}$ Mean outside dia. variation (Max.)	$K_{ra}$ Radial runout of assembled bearing outer ring (Max.)
High	Low			
0	-8	10	6	15

Table 2.2 Accuracy of outer ring (Miniature Type Cam Follower) unit:  $\mu\text{m}$

$\Delta D_{mp}$ Single plane mean outside dia. deviation								$K_{ra}$ Radial runout of assembled bearing outer ring (Max.)			
Class 0		Class 6		Class 5		Class 4		Class 0	Class 6	Class 5	Class 4
High	Low	High	Low	High	Low	High	Low				
0	-8	0	-7	0	-5	0	-4	15	8	5	4

## Radial internal clearance

Radial internal clearance of **U300** MINICAM series is shown in Table 3.

Table 3 Radial internal clearance unit:  $\mu\text{m}$

Indetification number (1)		Radial internal clearance	
Standard Type Cam Follower	Miniature Type Cam Follower	Min.	Max.
CF 3 ~ CF 5	CFS 2 ~ CFS 5	3	17
—	CFS 6	5	20

Note (1): Only representative types are shown, but applicable to all types.

## Fit

Mounting hole tolerance for stud is recommended to be H7 for Standard Type Cam Followers, and H8 for Miniature Type Cam Followers. Since Cam Followers are supported in a cantilever position, the mounting hole diameter should be prepared without play between the stud and the mounting hole especially when heavy shock loads are applied.

Table 4 Tolerance of mounting hole unit:  $\mu\text{m}$

Nominal outside dia. of stud mm		H6		H7	
over	incl.	High	Low	High	Low
—	3	+6	0	+10	0
3	6	+8	0	+12	0

## Maximum Allowable Load

The applicable load on Cam Follower is, in some cases, limited by the bending strength, shear strength of stud, and strength of outer ring instead of the load rating of needle roller bearing, because the Cam Follower is mounted in a cantilever position. Maximum allowable loads shown in dimension tables are the allowable loads limited by the bending strength and shear strength.

## Track capacity

Track capacity is defined as the load which can be continuously applied on a Cam Follower placed on a steel track surface without causing deformation and indentation (dent) on the track surface. The track capacities shown in Table 5 are applicable when the hardness of the mating track surface is HRC40 (Tensile strength 1250N/mm<sup>2</sup>). When the hardness of the mating track surface differs from HRC40, the track capacity is obtained by multiplying the value with a track capacity factor shown in Table 6.

If lubrication between the outer ring and the mating track surface is insufficient, seizure and/or wear may occur depending on the application. Therefore, it is needed to pay attention to lubrication and surface roughness of mating track especially in case of high speed rotation such as cam mechanisms.

Table 5 Track capacity

Type (*)	Identification Number Crowned outer ring	Track capacity N	Identification Number Cylindrical outer ring	Track capacity N
Standard Type Cam Follower	CF 3 R	542	CF 3	1 360
	CF 4 R	712	CF 4	1 700
	CF 5 R	794	CF 5	2 210
Miniature Type Cam Follower	—	—	CFS 2	220
	—	—	CFS 2.5	298
	—	—	CFS 3	485
	—	—	CFS 4	790
	—	—	CFS 5	1 210
	—	—	CFS 6	1 680

Note (\*): Only representative types are shown, but applicable to all types.

Table 6 Track capacity factor

Hardness HRC	Tensile strength N / mm <sup>2</sup>	Track capacity factor	
		Crowned outer ring	Cylindrical outer ring
20	760	0.22	0.37
25	840	0.31	0.46
30	950	0.45	0.58
35	1 080	0.65	0.75
38	1 180	0.85	0.90
40	1 250	1.00	1.00
42	1 340	1.23	1.15
44	1 435	1.52	1.32
46	1 530	1.85	1.51
48	1 635	2.27	1.73
50	1 750	2.80	1.99
52	1 880	3.46	2.20
54	2 015	4.21	2.61
56	2 150	5.13	2.97
58	2 200	6.26	3.30

## Allowable rotational speed

Allowable rotational speeds of **1960** MINICAM series are affected by mounting and operating conditions. The  $d_1 n$  values in general operation under pure radial load are shown in Table 7 for reference. It is recommended to use 1/10 of the table values in actual applications taking account of axial loads that may be applied.

Table 7  $d_1 n$ (\*) values of **1960** MINICAM series

Type	Lubricant
	Grease
With cage type	84 000
Full complement type	42 000

Note(\*):  $d_1 \times n$

where,  $d_1$ : Stud diameter, mm

$n$ : Number of rotations per minute, rpm

## Lubricant and temperature

A quality lithium-soap base grease is prepacked in **1960** MINICAM series. Allowable temperature ranges are shown in Table 8. Relubrication can not be made in these series, because of their structure.

Table 8 Allowable temperature range

Stud dia. $d_1$ , mm	Type	With cage type		Full complement type
		Shield type	Sealed type	
Standard Type Cam Follower	3, 4	- 20°C ~ + 110°C (*)	- 20°C ~ + 80°C	—
	5	- 20°C ~ + 120°C	- 20°C ~ + 80°C	—
Miniature Type Cam Follower	2	- 20°C ~ + 120°C (*)	—	- 20°C ~ + 120°C
	2.5 ~ 6	- 20°C ~ + 120°C	—	- 20°C ~ + 120°C

Note(\*): For continuous operation, the maximum operating temperature is 100°C.

## Oil hole

The position of oil hole on the "Standard Type Cam Followers with screwdriver slot", CF5R, CF5, CFSUUR, and CF5UU is shown in Fig. 1. Grease should be supplied gently with a straight type grease gun as specified by JIS B 9808:1991, which is to be applied carefully to the nipple head from the front. "Standard Type Cam Followers with screwdriver slot" of other sizes, "Standard Type Cam Followers with hexagon hole", and "Miniature Type Cam Followers" cannot be re-lubricated.

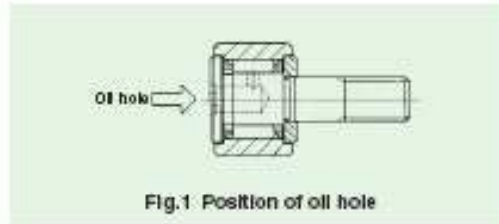


Fig.1 Position of oil hole

## Accessories

A nut is appended to the Miniature Type Cam Followers. And a grease nipple (Refer to Fig.2.) and a plug (Refer to Fig.3.) are appended to the Standard Type Cam Followers with screwdriver slot, CF5R, CF5, CFSUUR, and CF5UU.

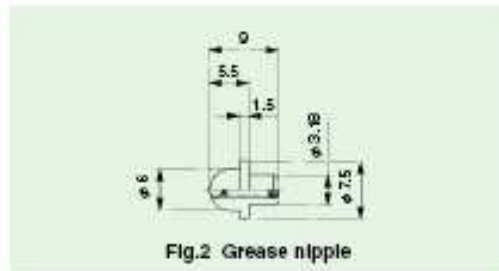


Fig.2 Grease nipple

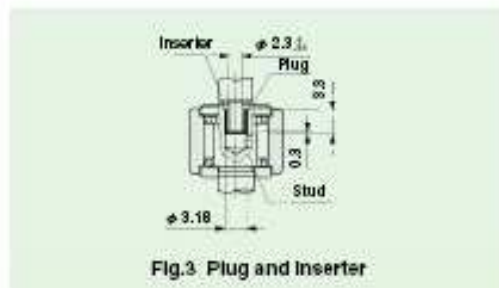


Fig.3 Plug and Inserter

## Mounting

① Make the center axis of mounting hole perpendicular to the moving direction of the Cam Follower and match the side shoulder accurately with the seating surface indicated by dimension "f" in the dimension tables (Refer to Fig.4.). Then fix the Cam Follower with the nut. DO NOT hit the flange head of Cam Follower directly with a hammer, etc. It may lead to bearing failures such as irregular rotation and crack.

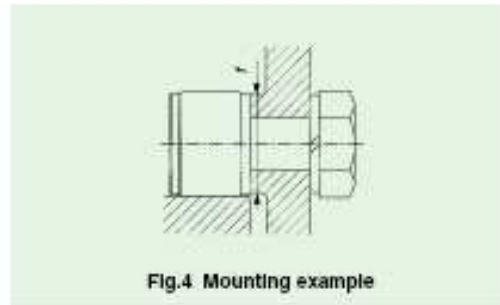


Fig.4 Mounting example

② The **DO NOT** mark on the stud flange head of the Cam Followers with oil hole indicates the position of oil hole on the raceway. Avoid locating the oil hole within the loading zone. It may lead to short bearing life. (Refer to Fig.5.)

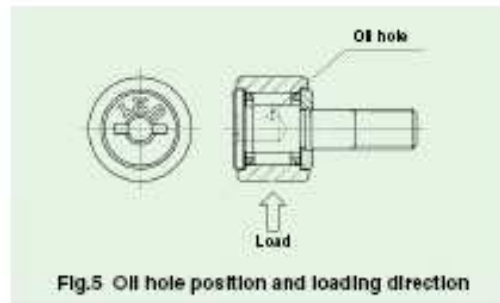
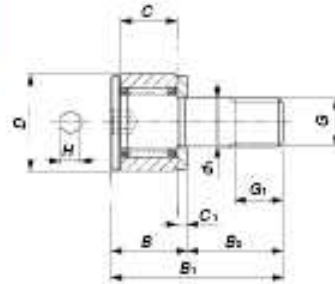


Fig.5 Oil hole position and loading direction

③ When tightening the nut, the tightening torque should not exceed the values shown in the dimension tables. If the tightening torque is too large, it is possible that the threaded portion of stud will be broken. When there are possibilities of loosening, a special nut such as a lock nut, a spring washer or a self-locking nut should be used.

**NIPPON THOMPSON Miniature Type Cam Followers**

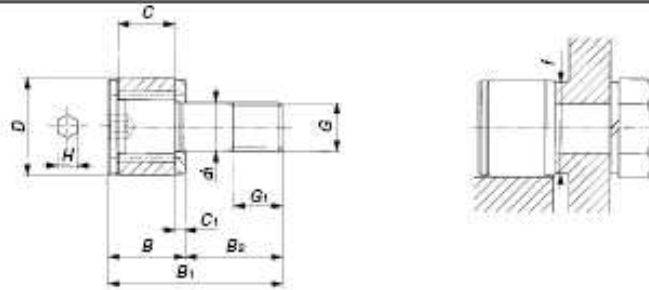
**CFS** With cage type  
**CFS...V** Full complement type  
**CFS...F** With cage type Stainless steel made  
**CFS...FV** Full complement type Stainless steel made



CFS  
 CFS...F

Stud dia. mm	Identification number		Mass (Ref.) g	Boundary dimensions mm					
	With cage type	Full complement		D	C	d <sub>1</sub>	G	G <sub>1</sub>	B
2	CFS 2 —	—	0.6	4.5	2.5	2	M2 × 0.4	2	4
	CFS 2 F —	CFS 2 V — CFS 2 FV							
2.5	CFS 2.5 —	—	1	5	3	2.5	M2.5 × 0.45	2.5	4.5
	CFS 2.5 F —	CFS 2.5 V — CFS 2.5 FV							
3	CFS 3 —	—	2	6	4	3	M3 × 0.5	3	5.5
	CFS 3 F —	CFS 3 V — CFS 3 FV							
4	CFS 4 —	—	4	8	5	4	M4 × 0.7	4	7
	CFS 4 F —	CFS 4 V — CFS 4 FV							
5	CFS 5 —	—	7	10	6	5	M5 × 0.8	5	8
	CFS 5 F —	CFS 5 V — CFS 5 FV							
6	CFS 6 —	—	13	12	7	6	M6 × 1	6	9.5
	CFS 6 F —	CFS 6 V — CFS 6 FV							

Although all data in this catalog has been carefully compiled to make the information as complete as possible, NIPPON THOMPSON CO., LTD. shall not be liable for any damages whatsoever, direct or indirect, based upon any information in this catalog. NIPPON THOMPSON CO., LTD. makes no warranty, either express or implied, including the implied warranty of merchantability or fitness for a particular purpose.



CFS...V  
CFS...FV

				Mounting dimension	Maximum tightening torque	Basic dynamic load rating	Basic static load rating	Maximum allowable load
$B_1$	$B_2$	$C_1$	$H$	$f$ Min. mm	N-cm	$C$ N	$C_0$ N	N
8	4	0.7	0.9	4.3	9.1	298	202	202
						768	794	229
						230	161	161
						614	587	229
9.5	5	0.7	0.9	4.8	18.7	428	351	351
						1 000	1 090	980
						342	281	281
						900	862	980
11.5	6	0.7	1.3	5.8	33.5	629	611	484
						1 420	1 790	484
						504	488	484
						1 140	1 430	484
15	8	1.0	1.5	7.7	77.7	1 120	1 120	919
						2 370	3 000	919
						897	894	894
						1 900	2 400	919
18	10	1.0	2	9.6	158	1 570	1 850	1 570
						3 190	4 700	1 570
						1 250	1 480	1 480
						2 540	3 760	1 570
21.5	12	1.2	2.5	11.6	268	2 090	2 200	2 150
						4 610	6 250	2 150
						1 670	1 760	1 760
						3 690	5 000	2 150



## Referencias

- (1) Rabinowicz, E., "Friction and wear of materials", 2a Edición, Ed. Wiley Intersciencie, 1995, pp 124
- (2) Burwell, J.T. y Strang, C. D. "On the empirical law of adhesive wear", J. Appl. Phys., 23 (1952) 18-28
- (3) Godfrey, D., "Diagnosis of wear mechanisms, in wear control handbook", Peterson, M.B. y Winer, W. O., Ed. ASME, New York 1980, pp 283-311
- (4) Heinz, K. y Gahr Z., "Microstructure and wear of materials", Ed. Elsevier, 1987, pp 86-124
- (5) Hamrock, B. J., Jacobson, B., Shmid, S. T., "Fundamentals of Machine Elements", 1a Edición, Ed. McGraw-Hill, 1999, pp 832
- (6) Archard, J. F., y Hirst, W., "The wear of metals under unlubricated conditions", Proc. Roy. Soc., Series A, Vol. 236 1956, pp 397
- (7) Archard J. F. "Elastic Deformation and the laws of friction", Proc. Roy. Soc., Series A, Vol. 243, 1957, pp. 190
- (8) Xuan, J. L., Cheng, H. S., y Miller, R. J., "Generation of Submicrometer Particles in Dry Sliding Contact ", Transaction of ASME, Vol. 112, 1990, pp 684
- (9) Nagaraj, H. S., Owens, B. L., y Miller, R. J., "Submicrometer to several micrometer sized wear particles generated during sliding", IBM Research Report, RC 13209 (#59082), Oct. 1987
- (10) Hugnell, A. B., Björklund, S. y Andersson, S., "Simulation of the mild wear in a cam-follower contact with follower rotation", Wear, 199, 1996, pp 202-210
- (11) Tallian, T. E, "Failure atlas for hertz contact machine elements", ASME, New York, 1992, p 95
- (12) Flodin, A., "Wear of spur and helical gears", Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm 2000, pp
- (13) Gonzalez-Palacios M., Ángeles J., "Cam Synthesis", Kluwer Academic Publishers Group, 1993
- (14) Gonzalez-Palacios M., Ángeles J., "The novel design of a pure-rolling transmission to convert rotational into translational motion", ASME Design Engineering Technical Conferences, Baltimore USA 2000
- (15) Ángeles J. López-Cajún C., "Optimization of Cam

Mechanisms", Kluwer Academic Publishers Group, 1991

(16) Gonzalez-Palacios M., Ángeles J., "The design of a novel mechanical transmission for speed reduction", ASME J. of Mechanical Design, Vol. 121 No. 4, 1999 pp 538-543.

(17) McCarthy J. M., "Introduction to Theoretical Kinematics", MIT Press, Massachusetts USA 1990